Differentialgeometrie

Andreas Gastel

Sommersemester 2005

Dieses Skript ist hauptsächlich zu meiner eigenen Vorbereitung auf die Vorlesung geschrieben. Es enthält keine Bilder und ist überhaupt weniger bunt und weniger kommunikativ als die Vorlesung, außerdem nicht besonders gut korrektur-gelesen. Quellen sind Bücher von Oprea, do Carmo, Bär und Jost, außerdem eine Vorlesung von Steffen.

1 Kurven

1.1 Definition und Beispiele von Kurven

Die intuitive Vorstellung von einer Kurve (1-dim. Punktmenge oder besser Bahn eines bewegten Punktes im Raum) lässt sich auf verschiedene Weise in mathematische Konzepte fassen. Dabei kümmern wir uns zunächst noch nicht um Regularität (d.h. Glattheit oder Differenzierbarkeit) der Kurve. Die folgenden Definitionen sind auch zunächst sehr allgemein gehalten, in der Absicht, möglichst wenig "Kurven" auszuschließen. Später werden wir zusätzliche Forderungen stellen, um "schöne" Kurven zu erhalten.

Definition (Kurven im $\mathbb{R}^n$) *(i) Die* implizite Darstellung einer Kurve *in $\mathbb{R}^n$ ist ein Gleichungssystem*

$$g(x) = 0 \qquad \textit{mit } g : \mathbb{R}^n \supseteq D \to \mathbb{R}^{n-1} \textit{ (mindestens stetig),}$$

d.h. $n-1$ Gleichungen $g_k(x_1, \dots, x_n) = 0$, $1 \le k \le n-1$ für n Unbekannte. Die Lösungsmenge $\{x \in D : g(x) = 0\}$ heißt die hierdurch implizit definierte Kurve.

(ii) Die parametrische Darstellung *einer Kurve in $\mathbb{R}^n$ ist eine stetige Abbildung*

$$\alpha : I \to \mathbb{R}^n, \qquad t \mapsto \alpha(t) := (\alpha^1(t), \dots, \alpha^n(t))$$

eines Intervalls (Parameterbereichs) $I \subseteq \mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}^n$, Die Abbildung α heißt parametrisierte Kurve*, ihr Bild heißt* Spur der parametrisierten Kurve.

(iii) Die Graphendarstellung einer Kurve *in $\mathbb{R}^n$ (auch* nicht-parametrische Darstellung *genannt) ist gegeben durch eine stetige Funktion $f : I \to \mathbb{R}^{n-1}$ auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$. Die zugehörige Kurve ist*

$$\mathrm{Graph}(f) := \{x \in \mathbb{R}^n : x^1 \in I, x^{k+1} = f^k(x^1) \textit{ für } k = 1, \dots, n-1\}$$

als implizite bzw.

$$I \ni t \mapsto (t, f^1(t), \ldots, f^{n-1}(t)) \in \mathbb{R}^n$$

als parametrische Kurve. Als explizite Kurvendarstellung *bezeichnen wir das Bild einer Graphendarstellung unter einer Bewegung T (Drehung plus Translation) der $\mathbb{R}^n$, d.h. $T(Graph(f))$ bzw. $t \mapsto T(t, f(t))$.*

Bemerkung: Wie unter Geometern üblich schreiben wir die Indizes für Komponenten von Vektoren oben. Man gewöhnt sich dran. □

Grundlegende Beispiele (von ebenen Kurven, $n = 2$):
(1) *Geraden* werden implizit beschrieben durch

$$a \cdot x + b = 0 \qquad \text{mit } a \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\},\ b \in \mathbb{R}.$$

Parametrische Darstellungen sind z.B. von der Form

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto tu + v \qquad \text{mit } u, v \in \mathbb{R}^2,\ u \neq 0.$$

Nicht-vertikale Geraden sind natürlich auch Graphen von $f(x_1) = cx_1 + d$, $c, d \in \mathbb{R}$, während vertikale Gerdagen nur nach einer Drehung als Graph geschrieben werden können (explizite Darstellung).

(2) Die *Kreislinie* um den Punkt $z \in \mathbb{R}^2$ mit Radius $R > 0$ wird implizit beschrieben durch die Gleichung

$$(x^1 - z^1)^2 + (x^2 - z^2)^2 = R^2.$$

Eine parametrische Darstellung ist

$$t \mapsto (z^1 + R\cos\omega t, z^2 + R\sin\omega t)$$

mit Winkelgeschwindigkeit $\omega \neq 0$. Nimmt man ganz $\mathbb{R}$ als Definitionsbereich, so wird die Kreislinie unendlich oft durchlaufen. Einmal durchlaufen wird sie z.B., wenn man $I = [0, \frac{2\pi}{\omega}[$ wählt. Beide Parametrisierungen haben aber dasselbe Bild, d.h. dieselbe Spur. Eine explizite Darstellung als Graph ist natürlich nicht für die gesamte Kreislinie möglich. Hierzu muss man sich auf einen Halbkreis beschränken.

Der Kreis ohne einen Punkt kann auch durch rationale Funktionen parametrisiert werden:

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto \left(z^1 + R\,\frac{2t}{t^2+1},\ z^2 + R\,\frac{t^2-1}{t^2+1}\right),$$

Dies ist die sogenannte *stereographische Parametrisierung*. (Bild!)

(3) Allgemeiner versteht man unter *Quadriken* in $\mathbb{R}^2$ alle Kurven, die durch eine allgemeine quadratische Gleichung der Form

$$ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2 + dx_1 + ex_2 + f = 0$$

mit $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ und $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ implizit beschrieben werden. (Hier ausnahmsweise Indizes unten wegen der vielen Quadrate!) Wir wollen uns einen Überblick über diese Kurven verschaffen. Dabei wollen wir durch Drehungen und Verschiebungen (die ja beide nicht viel an den geometrischen Eigenschaften der Kurve ändern) die Kurve in eine günstige Lage bringen, in der wir sie bequem analysieren können. Zunächst beobachten wir, dass wir mit $A := \binom{a\,b}{b\,c}$ und $v := \binom{d}{e}$ die Gleichung als

$$x \cdot Ax + v \cdot x + f = 0$$

schreiben können. Da A symmetrisch ist, ist A diagonalisierbar, d.h. es gibt eine orthogonale 2×2-Matrix B, so dass $BAB^{-1} = \binom{\lambda_1\,0}{0\,\lambda_2}$, wobei

$$\lambda_1 = \frac{a+c}{2} - \sqrt{\frac{(a-c)^2}{4} + b^2}, \qquad \lambda_2 = \frac{a+c}{2} + \sqrt{\frac{(a-c)^2}{4} + b^2}$$

die Eigenwerte von A sind. Schreibe jetzt $y := Bx$; d.h. der Übergang von x- zu y-Koordinaten entspricht der Drehung mittels der orthogonalen Matrix B^{-1}. Mit $u := B^{-1}v$ transformiert sich unsere Gleichung zu

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + u_1 y_1 + u_2 y_2 + f = 0.$$

Falls $\lambda_1 \neq 0$ und $\lambda_2 \neq 0$, so können wir dies noch weiter vereinfachen. Wir setzen $z_1 := y_1 + \frac{u_1}{2\lambda_1}$ und $z_2 := y_2 + \frac{u_2}{2\lambda_2}$. Diese Transformation entspricht einer Verschiebung in $\mathbb{R}^2$. Mit $g := f - \frac{u_1^2}{4\lambda_1} - \frac{u_2^2}{4\lambda_2}$ vereinfacht sich unsere Gleichung weiter zu

$$\lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 + g = 0.$$

Jetzt können wir mehrere geometrisch relevante Fälle unterscheiden:

1. Fall: λ_1, λ_2 und $-g$ haben dasselbe Vorzeichen.

In diesem Fall schreiben wir $r_1^2 := -g/\lambda_1$, $r_2^2 := -g/\lambda_2$ und finden damit

$$\left(\frac{z_1}{r_1}\right)^2 + \left(\frac{z_2}{r_2}\right)^2 = 1.$$

Dies ist die Gleichung einer *Ellipse* mit Halbachsen r_1 und r_2. Sie kann auch parametrisch dargestellt werden durch

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto (r_1 \cos t, r_2 \sin t).$$

Elementargeometrisch ist diese Ellipse dadurch charakterisiert, dass die Abstandssumme zu den beiden Brennpunkten $(\pm\sqrt{r_1^2 - r_2^2}, 0)$ konstant gleich $2r_1$ ist (falls $r_1 \geq r_2$, sonst muss man die Rollen der beiden Komponenten vertauschen). Im Spezialfall $r_1 = r_2$ ist die Ellipse ein Kreis.

2. Fall: λ_1 und λ_2 haben unterschiedliche Vorzeichen und $g \neq 0$.

Hat g dasselbe Vorzeichen wie x_2, dann setzen wir $r_1^2 := -g/\lambda_1$ und $r_2^2 = g/\lambda_2$ und finden

$$\left(\frac{z_1}{r_1}\right)^2 - \left(\frac{z_2}{r_2}\right)^2 = 1.$$

Es handelt sich um eine *Hyperbel*, die aus zwei Ästen besteht. Jeder einzelne Ast kann parametrisch durch

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto (\pm r_1 \cosh t, r_2 \sinh t)$$

dargestellt werden; aber die Hyperbel als ganze hat keine parametrische Darstellung! Auf der Hyperbel ist übrigens die *Differenz* der Abstände zu zwei "Brennpunkten" konstant.

Für g mit dem anderen Vorzeichen geht nach Vertauschung der Komponenten alles genauso.

3. Fall: λ_1, λ_2 haben gleiche Vorzeichen, $g = 0$.

In diesem (degenerierten) Fall besteht die "Kurve" aus dem einzelnen Punkt $z = (0, 0)$.

4. Fall: λ_1, λ_2, g haben gleiche Vorzeichen.

Dieser Fall ist ebenfalls degeneriert, denn die Kurve ist die leere Menge.

5. Fall: λ_1 und λ_2 haben unterschiedliche Vorzeichen und $g = 0$.

Dann haben wir $\lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 = 0$, also $z_1/z_2 = \pm\sqrt{-\lambda_2/\lambda_1}$. Folglich besteht die Lösungsmenge aus zwei Geraden, die sich im Ursprung schneiden. Auch dieser Fall wird als degeneriert betrachtet.

In den restlichen drei Fällen ist entweder λ_1 oder λ_2 gleich 0 (beides zuglkeich ist wegen $A \neq 0$ ausgeschlossen). Wir nehmen o.B.d.A. an, dass $\lambda_2 = 0$. Die Gleichung für y_1, y_2 transformieren wir nun mit $z_1 := y_1 + \frac{u_1}{2\lambda_1}$, $z_2 := y_2$, $g := f - \frac{u_1^2}{4\lambda_1}$ und erhalten

$$\lambda_1 z_1^2 + u_2 z_2 + g = 0.$$

6. Fall: $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 = 0$, $u_2 \neq 0$.

Dann können wir nach z_2 auflösen und finden

$$z_2 = -\frac{1}{u_2}\,(\lambda_1 z_1^2 + g).$$

Das beschreibt den Graphen einer quadratischen Funktion und deshalb eine *Parabel*. Übrigens sind Parabeln dadurch charakterisiert, dass es eine Gerade und eine nicht auf dieser Geraden liegenden Punkt gibt, so dass die Abstände zu diesen beiden Objekten für jeden Punkt der Parabel gleich ist.

7. Fall: $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 = 0$, $u_2 = 0$, $g = 0$.

Die Lösungsmenge der Gleichung $\lambda_1 z_1^2 = 0$ ist die Gerade $x_1 = 0$.

8. Fall: $\lambda_2 = 0$, $u_2 = 0$, λ_1 und g haben unterschiedliche Vorzeichen.

Die Lösungsmenge der Gleichung $\lambda_1 z_1^2 + g = 0$ besteht aus zwei parallelen Geraden.

9. Fall: $\lambda_2 = 0$, $u_2 = 0$, λ_1 und g haben gleich Vorzeichen.

Wie im 4. Fall ist hier die Lösungsmenge leer.

Wir haben damit die Quadriken klassifiziert. Es handelt sich um Ellipsen, Parabeln und Hyperbeln (nichtdegenerierte Quadriken), oder (im degenerierten Fall) um Paare von Geraden, Geraden, Ein-Punkt-Mengen oder die leere Menge.

(4) Allgemeiner werden *ebene algebraische Kurven* implizit durch

$$p(x_1, x_2) = 0, \qquad p \text{ ein Polynom in } x_1, x_2,$$

beschrieben. Die Quadriken entsprechen hier dem Fall quadratischer Polynome. Mit zunehmendem Grad wird die Klassifikation schnell unübersichtlich. Tatsächlich spielen solche impliziten Beschreibungen von Kurven in der Differentialgeometrie nur eine untergeordnete Rolle, Das Studium algebraischer Kurven überlassen wir der algebraischen Geometrie. □

Bemerkungen: (1) Die Stetigkeitsvoraussetzungen in der Definition reichen in keinem der Fälle aus, um degeneriertes Verhalten auszuschließen. Wie wir in Beispiel (3) gesehen haben, sind in (i) die leere Menge oder auch ein einzelner Punkt als Kurven erlaubt, und mit $g(x) \equiv 0$ sogar der ganze Raum! Auch bei (ii) sind ein Punkt oder eine den ganzen Raum füllende Kurve erlaubt (Peano-Kurven bilden sogar ein Intervall surjektiv und stetig auf z.B. $[0,1]^2$ ab). Bei (iii) ist es nicht ganz so extrem, aber immerhin sind noch ziemlich zerknitterte Graphen unendlicher Länge erlaubt.

(2) Unter geeigneten zusätzlichen Regularitätsvoraussetzungen sind aber die Konzepte implizit, parametrisch oder explizit beschriebener Kurven lokal äquivalent (in dem Sinne, dass zumindest die Kurven stückweise durch diese Konzepte beschrieben werden). Ist z.B. in (i) die Funktion g mindestens C^1 und $\operatorname{Rang} Dg = n-1$, so liefert der Satz über die implizite Funktion (bis auf Drehung) eine lokale Graphendarstellung der Lösungsfunktion. Für den Übergang von (ii) zu (iii) braucht man z.B. die zusätzliche Voraussetzung $\alpha'(t) \neq 0$ auf einer Umgebung von $t_0 \in I$, um α lokal mit dem Umkehrsatz als Graph darzustellen. Die Übergänge von (iii) nach (i) oder (ii) stehen schon in der Definition.

(3) Natürlich enthält eine parametrisierte Kurve mehr Information als ihre Spur, nämlich einen zeitlichen "Fahrplan", nach dem die Kurve durchlaufen wird, und damit auch z.B. eine Durchlaufrichtung. In der Differentialgeometrie sind Kurven meistens in parametrisierter Form gegeben Ist von einer Kurve die Rede, so meint man damit meist eine parametrisierte. □

Definition (differenzierbare und reguläre Kurven, Länge)

(i) Eine (parametriserte) Kurve $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ heißt (k-mal) differenzierbar*, falls jeder der Komponentenfunktionen α^i, $i = 1, \ldots, n$, (k-mal) differenzierbar ist. Wir nennen α* glatt*, falls sie unendlich oft differenzierbar ist. Ist α stetig auf I und differenzierbar auf I bis auf höchstens abzählbar viele diskret (d.h. ohne Häufungspunkt) liegende Punkte, so heißt α* stückweise differenzierbar*. Eine C^k-Kurve ist eine k-mal stetig differenzierbare Kurve.*

(ii) Eine differenzierbare Kurve $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ heißt regulär*, falls $\alpha'(t) \neq 0$ für alle $t \in I$ gilt.*

(iii) Die Ableitung $\alpha'(t)$ einer (stückweise) differenzierbaren Kurve α bei $t \in I$ heißt auch Tangentenvektor *oder* Geschwindigkeitsvektor *von α in t.*

(iv) Ist $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ eine stückweise differenzierbare Kurve, so heißt

$$L(\alpha) := \int_I |\alpha'(t)|\, dt$$

die Länge *von α. Ist J ein Teilintervall von I, so schreiben wir auch $L_J(\alpha)$ für die Länge von $\alpha_{|J}$.*

Bemerkung: Differenzierbare Kurven können durchaus Ecken und Spitzen haben. Das zeigt das Beispiel $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\alpha(t) := (0, t^2)$ für $t \leq 0$ und $\alpha(t) := (t^2, 0)$ für $t \geq 0$. Es gilt $\alpha'(t) = (0, 2t)$ für $t \leq 0$, was bei $t = 0$ mit $\alpha'(t) = (2t, 0)$ stetig zusammenpasst, also ist α stetig differenzierbar. Analog verschafft man sich beliebig oft differenzierbare Beispiele von Kurven mit Knick. Die Bedingung $\alpha'(t) \neq 0$ für reguläre Kurven schließt solche Knicke aus. Deshalb ist "regulär" für Kurven die natürlichere Voraussetzung als "differenzierbar". $\square$

Beispiele: (Kurven im Raum)

(1) Zwei Punkte $p \neq q \in \mathbb{R}^3$ definieren eindeutig eine Gerade durch diese beiden Punkte. Sie wird parametrisiert z.B. durch $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$,

$$\alpha(t) := p + t(q - p).$$

Es gilt

$$\alpha'(t) \equiv q - p$$

und deshalb $L_{[a,b]}(\alpha) = |b - a||q - p|$ für $a < b$ in I.

(2) Die *Helix* ist $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$,

$$\alpha(t) := (R \cos t, R \sin t, ht)$$

mit Radius $R > 0$ und Ganghöhe $2\pi h$, $h \geq 0$. α ist reguläre Kurve mit

$$\alpha'(t) = (-R \sin t, R \cos t, h)$$

und

$$L_{[a,b]}(\alpha) = \int_a^b \sqrt{R^2 + h^2}\, dt = (b - a)\sqrt{R^2 + h^2}.$$

$\square$

Bisher haben wir die Länge einer Kurve als Zeitintegral ihrer Geschwindigkeit $|\alpha'(t)|$ definiert, was aus physikaliscehr und anschaulicher Erfahrung der richtige Begriff sein sollte. Stimmt das mit unserem anschaulichen Längenbegriff überein, so sollte die Länge im Wesentlichen nur von der Spur der Kurve abhängen, nicht aber von der Wahl der Parametrisierung (zumindest solange wir jeden Punkt der Kurve genau einmal durchlaufen). Das wollen wir im Folgenden formalisieren. Hierzu müssen wir zunächst sagen, was wir unter einer Umparametrisierung verstehen.

Definition (Umparametrisierung) *Sei $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ eine parametrisierte Kurve. Sei $J \subseteq \mathbb{R}$ ein weiteres Intervall. Eine* Parametertransformation *ist eine bijektive Abbildung $\varphi : J \to I$, so dass sowohl φ als auch φ^{-1} differenzierbar sind (also ein Diffeomorphismus). Die parametrisierte Kurve $\tilde{\alpha} := \alpha \circ \varphi : J \to \mathbb{R}^n$ heißt eine* Umparametrisierung *von α.*

Bemerkungen: (1) Für k-mal differenzierbare Kurven α hat man analog den Begriff der C^k-Umparametrisierung (als C^k-Diffeomorphismus definiert); analog C^∞-Umparametrisierungen für glatte Kurven.

(2) Genau dann ist $\tilde{\alpha}$ reguläre Kurve, wenn α reguläre Kurve ist.

(3) Für unsere Zwecke ist eine Kurve immer eine parametrisierte Kurve. Wer es ganz genau nimmt kann den Begriff einer Kurve aber auch wie folgt definieren, was der umgangssprachlichen Bedeutung des Wortes etwas näher kommt: Eine Kurve ist eine Äquivalenzklasse parametrisierter Kurven unter der Äquivalenzrelation, die eine parametrisierte Kurve mit jeder ihrer Umparametrisierungen identifiziert.

(4) Wie oben gefordert, ist die Länge tatsächlich parametrisierungsinvariant. Ist $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ eine (stückweise) differenzierbare Kurve und $\varphi : J \to I$ eine Parametertransformation, dann ist

$$L(\alpha \circ \varphi) = \int_J |(\alpha \circ \varphi)'(s)| \, ds = \int_J |\alpha'(\varphi(s))||\varphi'(s)| \, ds = \int_I |\alpha'(t)| \, dt = L(\alpha).$$

(5) Man betrachtet die Parametrisierung als ein Hilfsmittel zum Studium der (eigentlich ehrer als Spur vorzustellenden) Kurven. Deshalb tendiert man oft dazu, nur (mit Ausnahmen allerdings) solche Größen als "geometrisch" zu betrachten, die unabhängig von der Wahl der Parametrisierung sind. Möglicherweise dürfen sie auch noch von der Orientierung abhängen; siehe (6).

(6) Eine Parametertransformation $J \to I$ ist entweder eine monoton steigende oder eine monoton fallende Funktion. Im ersten Fall erhält er den Durchlaufsinn der Kurve, im zweiten Fall kehrt er ihn um. Eine Äquivalenzklasse von Kurven, die durch monoton steigende Parametertransformationen (diese nennt man auch "orientierungserhaltend") auseinander hervorgehen, nennt man auch eine *orientierte Kurve*. □

Es gibt praktischere und wenige praktische Parametrisierungen einer Kurve. Eine häufig sehr nützliche wird jetzt definiert.

Definition (Parametrisierung nach der Bogenlänge) *Eine stückweise differenzierbare Kurve $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ heißt* proportional zu Bogenlänge parametrisiert, *falls $|\alpha'|$ (dort wo es definiert ist) konstant ist. Ist $|\alpha'| \equiv 1$, so heißt α* nach der Bogenlänge parametrisiert.

Satz (Umparametrisierung nach der Bogenlänge) *Zu jeder regulären Kurve $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ gibt es eine orientierungserhaltende Parametertransformation φ, so dass $\alpha \circ \varphi$ nach der Bogenlänge parametrisiert ist.*

Beweis: Wir wählen ein $t_0 \in I$ und setzen

$$\begin{aligned} \psi(s) &:= L_{[t_0,s]}(\alpha) \ \text{ oder } \ -L_{[s,t_0]}(\alpha) \\ &= \int_{t_0}^{s} |\alpha'(t)|\, dt. \end{aligned}$$

Da $\psi'(s) = |\alpha'(s)| \neq 0$ für alle $s \in I$, ist ψ streng monoton wachsend, also Diffeomorphismus auf sein Bild $J := \psi(I)$ (Umkehrsatz!). Schreiben wir $\varphi := \psi^{-1}$, dann ist φ eine orientierungserhaltende Parametertransformation. Nach der Umkehrformel gilt

$$\varphi'(t) = \frac{1}{\psi'(\varphi(t))} = \frac{1}{|c'(\varphi(t))|}$$

für alle $t \in J$, also

$$|(\alpha \circ \varphi)'(t)| = |\alpha'(\varphi(t))\varphi'(t)| = \left| \frac{\alpha'(\varphi(t))}{|\alpha'(\varphi(t))|} \right|.$$

Folglich ist $\alpha \circ \varphi$ nach der Bogenlänge parametrisiert. □

Bemerkungen: (1) Diese Umparametrisierung nach der Bogenlänge ist nicht ganz eindeutig, weil wir in obiger Konstruktion $t_0 \in I$ frei wählen können. Zwei solche (orientierungserhaltende) Parametrisierungen unterscheiden sich aber nur durch eine Verschiebung $t \mapsto t + c$ des Definitionsbereichs der Kurve.

(2) Ohne die Voraussetzung “regulär” kann bei der Umparametrisierung nach der Bogenlänge Glattheit von α verloren gehen. In einem eventuellen “Knick” der Kurve muss nämlich dann α' unstetig sein.

(3) Für Beweise und abstrakte Rechnungen ist die Möglichkeit der Parametrisierung nach der Bogenlänge praktisch, wie wir noch sehen werden. Beim konkreten Rechnen tritt aber schon für sehr einfache Kurven, z.B. Ellipsen, das Problem auf, dass diese Parametrisierung nicht explizit angegeben werden kann, z.B. weil das Längenintegral nicht durch eine elementare Stammfunktion ausgedrückt werden kann.

(4) Die Länge einer stückweise differenzierbaren Kurve ist gleich ihrem eindimensionalen Hausdorff-Maß und auch gleich dem Limes der Längen eingeschriebener Streckenzüge bei immer feineren Unterteilungen. □

1.2 Ebene Kurven

Hier soll es um Kurven in $\mathbb{R}^2$ gehen. Wir hatten schon einige Beispiele. Außer der Ableitung einer Kurve, die die Richtung angibt, gibt es auch aus der zweiten Ableitung gewonnene Information: die Krümmung.

Motivation (Krümmung von ebenen Kurven):
Die Krümmung einer Kreislinie sollte um so größer sein, je kleiner der Rasdius ist; also liegt es nahe, die Krümmung als das Reziproke des Radius zu definieren. Ist eine

beliebige reguläre zweimal differenzierbare Kurve gegeben, so findet man zu jedem Punkt auf der Kurve einen eindeutig bestimmten Kreis, der die Kurve bestmöglich, d.h. von mindestens zweiter Ordnung, approximiert. (Der Kreis kann zu einer Geraden, d.h. Radius ∞, degenerieren.) Eine Kreislinie mit Mittelpunkt $a \in \mathbb{R}^2$ und Radius $r > 0$ wird (nach der Bogenlänge parametrisiert) bezüglich einer noch zu wählenden ONB $\{u, v\}$ von $\mathbb{R}^2$ beschrieben durch

$$\gamma(t) := a + r\cos\left(\frac{t-t_0}{r}\right)u + r\sin\left(\frac{t-t_0}{r}\right)v.$$

Ist $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ zweimal differenzierbar und ebenfalls nach der Bogenlänge parametrisiert, so berühren sich α und γ in $\alpha(t_0)$ von zweiter Ordnung, falls gilt:

$$\begin{aligned} \gamma(t_0) = \alpha(t_0) \qquad &\Rightarrow \qquad a + ru = \alpha(t_0), \\ \gamma'(t_0) = \alpha'(t_0) \qquad &\Rightarrow \qquad v = \alpha'(t_0), \\ \gamma''(t_0) = \alpha''(t_0) \qquad &\Rightarrow \qquad -\tfrac{1}{r}u = \alpha''(t_0). \end{aligned}$$

Dieses System lösen wir nach u, v, r und a auf und finden

$$\begin{aligned} u &= -\frac{\alpha''(t_0)}{|\alpha''(t_0)|}, \\ v &= \alpha'(t_0), \\ r &= \frac{1}{|\alpha''(t_0)|}, \\ a &= \alpha(t_0) + \frac{\alpha''(t_0)}{|\alpha''(t_0)|}. \end{aligned}$$

Dabei hat r eine geometrische Interpretation als "Krümmungsradius" und a als "Krümmungsmittelpunkt"; diese Größen beschreiben den berührenden Kreis, und die Krümmung ist das Reziproke des Krümmungsradius. Die Vektoren u und v bilden eine ausgezeichnete "mitbewegte Orthonormalbasis entlang der Kurve". Diese Überlegungen motivieren die folgenden Definitionen:

Definition (Krümmung von ebenen Kurven) *Sei $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ eine nach der Bogenlänge parametrisierte C^2-Kurve. Für $t_0 \in I$ definieren wir*

$$\begin{aligned} \textit{Einheitstangentenvektor:} \quad & T(t_0) := \alpha'(t_0), \\ \textit{Krümmungsvektor:} \quad & K(t_0) := \alpha''(t_0), \\ \textit{Krümmung:} \quad & \kappa(t_0) := |\alpha''(t_0)| = |K(t_0)|, \\ \textit{Einheitsnormalenvektor:} \quad & N(t_0) := \frac{K(t_0)}{|K(t_0)|}. \end{aligned}$$

Der Einheitsnormalenvektor ist undefiniert wo $\alpha''(t_0) = 0$, und sein Vorzeichen springt bei Wendepunkten der Kurve. Trotzdem ist die Definition gebräuchlich, weil sie sofort für Kurven in $\mathbb{R}^n$ übernommen werden kann. Im Fall ebener Kurven gibt es aber *einen geschickter gewählten Einheitsnormalenvektor, bei dem die beschriebenen Probleme nicht auftauchen:*

$$\textit{Einheitsnormalenvektor:} \qquad F(t_0) := \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) T(t_0);$$

dann ist $F(t_0) = \pm N(t_0)$. Für jedes $t_0 \in I$ ist $\{T(t_0), F(t_0)\}$ positiv orientierte ONB von $\mathbb{R}^2$ Sie heißt begleitendes orientiertes 2-Bein *der Kurve α. Wir definieren ferner die*

$$\textit{orientierte Krümmung} \qquad \kappa_{or}(t_0) \textit{ durch } \alpha''(t_0) = \kappa_{or}(t_0)F(t_0);$$

dann ist $\kappa_{or} = \pm\kappa$ in jedem Punkt. $\kappa_{or} > 0$ gilt in "Linkskurven", $\kappa_{or} < 0$ in "Rechtskurven" beim Durchlaufen von α mit Fahrplan $\alpha(t)$.

Beispiel: Die *Cornu-Spirale* $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$,

$$\alpha(t) := \Big(\int_0^t \cos(s^2)\, ds, \int_0^t \sin(s^2)\, ds \Big),$$

erfüllt

$$\alpha'(t) = (\cos(t^2), \sin(t^2)),$$

also auch $|\alpha'(t)| \equiv 1$, ist daher nach der Bogenlänge parametrisiert. Die Krümmung berechnet sich zu

$$\kappa(t) = |\alpha''(t)| = |2t(-\sin(t^2), \cos(t^2))| = |2t|$$

und die orientierte Krümmung zu

$$\kappa_{or}(t) = 2t.$$

Die orientierte Krümmung ist eine lineare Funktion der Bogenlänge. Das hat angeblich Anwendungen beim Eisenbahnbau: Beim Einfahren in eine Kurve spürt der Fahrgast die seitliche Beschleunigung nicht abrupt, sondern sie wird linear aufgebaut. □

Satz (Frenet'sche Ableitungsformeln) *Für eine nach der Bogenlänge parametrisierte zweimal differenzierbare Kurve $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ gelten*

$$\begin{aligned} T' &= \kappa_{or} F, \\ F' &= -\kappa_{or} T. \end{aligned}$$

Beweis: Die erste Formel ist die Definition von κ_{or}. Für die zweite Formel beobachten wir, dass wegen $|F|^2 \equiv 1$ immer $F' \cdot F = 0$ gilt und folglich

$$\begin{aligned} F' &= (F' \cdot F)F + (F' \cdot T)T \\ &= (F' \cdot T)T \\ &= -(F \cdot T')T \qquad (\text{wegen } F \cdot T \equiv 0) \\ &= -\kappa_{or} T, \end{aligned}$$

wobei wir zum Schluss die erste Formel benutzt haben. □

Satz (Hauptsatz über ebene Kurven) *Eine nach der Bogenlänge parametrisierte C^2-Kurve $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ ist bis auf eine orientierungserhaltende Bewegung des $\mathbb{R}^2$ eindeutig durch ihre orientierte Krümmung bestimmt. Zu jeder stetigen Funktion $\kappa_{or} : I \to R$ und zu jedem Anfangsdatum $t_0 \in I$, $p_0 \in \mathbb{R}^2$, $v_0 \in S^1$ gibt es genau eine anch der Bogenlänge parametrisierte C^2-Kurve $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ mit orientierter Krümmung κ_{or} und $\alpha(t_0) = p_0$, $\alpha'(t_0) = v_0$, nämlich*

$$\alpha(t) = p_0 + \Big(\int_{t_0}^{t} \cos\theta(s)\, ds, \int_{t_0}^{t} \sin\theta(s)\, ds \Big);$$

hier sei θ eine Stammfunktion von κ_{or} mit

$$(\cos\theta(t_0), \sin\theta(t_0)) = v_0.$$

Beweis: Komplex geschrieben (d.h. unter der Identifikation $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$, unter der $F = iT$) wird $T' = \kappa_{or}F$ zu $T' = \kappa_{or}iT$. Das ist eine komplexwertige gewöhnliche Differentialgleichung mit der allgemeinen Lösung

$$T(t) = \exp\Big(i\Big(\int_{t_0}^{t} \kappa_{or}(s)\, ds + \theta_0\Big)\Big).$$

Die Anfangswerte verlangen $v_0 = \alpha'(t_0) = T(t_0) = e^{i\theta_0}$, was θ_0 bis auf Vielfache von 2π festlegt. Folglich ist der Exponent gleich $i\theta(t)$ mit der im Satz definierten Funktion θ. Jetzt ist $\alpha' = T$ explizit bekannt, und die zu beweisende Formel folgt durch Integration und $\alpha(t_0) = p_0$. α ist eindeutig bestimmt durch die Anfangsdaten, weil die Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung das ist. $\square$

Korollar *Für eine nach der Bogenlänge parametrisierte C^2-Kurve $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ gilt $\kappa \equiv 0$ genau dann, wenn α eine Gerade parametrisiert. κ_{or} ist konstant $\neq 0$, genau wenn α eine Kreislinie vom Radius $1/\kappa$ parametrisiert.*

Motivation (Krümmungsgrößen in allgemeiner Parametrisierung) Wir haben Krümmung bisher nur für nach der Bogenlänge parametrisierte Kurven definiert; da eine solche Parametrisierung aber für jede reguläre Kurve existiert, ist das keine große Einschränkung. Will man die Krümmung und das zugehörige 2-Bein als "geometrische" Größen definieren, so muss man diese als Eigenschaft der orientierten Kurve (als Äquivalenzklasse) und nicht irgendeiner Parametrisierung betrachten. Die Definition muss daher *parametrisierungsinvariant* gemacht werden; genauer: invariant unter orientierungserhaltenden Parameterwechseln. Um zu sehen, was das bedeutet, nehmen wir an, dass $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ reguläre C^2-Kurve ist und $\tilde{\alpha} = \alpha \circ \varphi : J \to \mathbb{R}^2$ "die" Umparametrisierung nach der Bogenlänge. Alle Krümmungsgrößen von α zur Zeit $\varphi(t)$ sollen den entsprechenden Größen von $\tilde{\alpha}$ zur Zeit t entsprechen. Beim Umrechnen mit der Kettenregel brauchen wir noch die Beziehung

$$\varphi'(t) = \frac{1}{|\alpha'(t)|},$$

die wir aus dem Existenzbeweis für die Parametrisierung nach der Bogenlänge übernehemen. Alle Größen mit Schlange beziehen sich im Folgenden auf $\tilde{\alpha}$, die ohne Schlange auf α. Wir berechnen

$$\begin{aligned}
\tilde{T}(t) &= (\alpha \circ \varphi)'(t) \\
&= \alpha'(\varphi(t))\varphi'(t) \\
&= \frac{\alpha'(\varphi(t))}{|\alpha'(\varphi(t))|}, \\
\tilde{T}'(t) &= \frac{d}{dt}\frac{\alpha'(\varphi(t))}{|\alpha'(\varphi(t))|} \\
&= \frac{\alpha''(\varphi(t))\varphi'(t)}{|\alpha'(\varphi(t))|} - \frac{(\alpha'(\varphi(t)) \cdot \alpha''(\varphi(t)))\alpha'(\varphi(t))\varphi'(t)}{|\alpha'(\varphi(t))|^3} \\
&= \frac{1}{|\alpha''(\varphi(t))|^2}\Big[\alpha''(\varphi(t)) - \frac{\alpha'(\varphi(t)) \cdot \alpha''(\varphi(t))}{|\alpha'(\varphi(t))|^2}\,\alpha'(\varphi(t))\Big], \\
\tilde{\kappa}(t) &= |\tilde{T}'(t)| \\
&= \frac{1}{|\alpha''(\varphi(t))|^2}\Big|\alpha''(\varphi(t)) - \frac{\alpha'(\varphi(t)) \cdot \alpha''(\varphi(t))}{|\alpha'(\varphi(t))|^2}\,\alpha'(\varphi(t))\Big| \\
&= \frac{|\alpha^{1\prime}(\varphi(t))\alpha^{2\prime\prime}(\varphi(t)) - \alpha^{2\prime}(\varphi(t))\alpha^{1\prime\prime}(\varphi(t))|}{|\alpha'(\varphi(t))|^3}, \\
\tilde{\kappa}_{or}(t) &= \frac{|\alpha^{1\prime}(\varphi(t))\alpha^{2\prime\prime}(\varphi(t)) - \alpha^{2\prime}(\varphi(t))\alpha^{1\prime\prime}(\varphi(t))|}{|\alpha'(\varphi(t))|^3} \\
&= \frac{\det(\alpha'(\varphi(t)), \alpha''(\varphi(t)))}{|\alpha'(\varphi(t))|^3}.
\end{aligned}$$

Das gewünschte Transformationsverhalten ist $\tilde{\kappa}(t) = \kappa(\varphi(t))$ und analog für die anderen Größen. Deshalb müssen wir wie folgt definieren:

Definition (Krümmung ebener Kurven in allgemeiner Parametrisierung) *Sei $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ regulär parametrisierte C^2-Kurve. Zu dieser Kurve definieren wir die Funktionen*

$$\begin{aligned}
T &:= \frac{\alpha'}{|\alpha'|} && \text{(Einheitstangentenvektor)}, \\
K &:= \frac{1}{|\alpha'|}\Big(\frac{\alpha'}{|\alpha'|}\Big)' && \text{(Krümmungsvektor)}, \\
\kappa &:= \frac{|\det(\alpha', \alpha'')|}{|\alpha'|^3} && \text{(Krümmung)}, \\
N &:= \frac{K}{|K|}, \quad F := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} T && \text{(Einheitsnormalenvektor)}, \\
\kappa_{or} &:= \frac{\det(\alpha', \alpha'')}{|\alpha'|^3} && \text{(orientierte Krümmung)}.
\end{aligned}$$

Als nächstes interessieren wir uns für geschlossene Kurven und die von ihnen eingeschlossene Fläche.

Definition (geschlossene Kurven) *Eine stetige Kurve $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ heißt* geschlossen, *falls $\alpha(a) = \alpha(b)$. Eine geschlossene Kurve $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ heißt* einfach, *falls sie keine Selbstüberschneidungen hat (also α als Abbildung $[a, b[\to \mathbb{R}^2$ injektiv ist).*

Basis für die folgenden Überlegungen ist die Greensche Formel, die einen Zusammenhang zwischen Flächen- und Wegintegarion liefert.

Satz (Greensche Formel) *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ ein einfach zusammenhängendes glatt berandetes Gebiet mit positiv orientiertem Rand $\partial\Omega$. Seien $P, Q : \Omega \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbare Funktionen. Dann gilt*

$$\int_\Omega \Big(\frac{\partial P}{\partial x^1} + \frac{\partial Q}{\partial x^2}\Big)\, dx = \int_{\partial\Omega} (P\, dx^2 - Q\, dx^1).$$

Beweis: Dies ist der Satz von Stokes, angewendet auf die 1-Form $P\, dx^2 - Q\, dx^1$. $\square$

Beispiel: Setze in der Greenschen Formel $P(x) := x^1/2$ und $Q(x) := x^2/2$. Damit erhalten wir

$$\text{Fläche}(\Omega) = \int_\Omega \Big(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\Big)\, dx = \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} (x^1\, dx^2 - x^2\, dx^1).$$

Damit können wir den Flächeninhalt von Ω als ein Integral über die Randkurve schreiben. Dies ist alles andere als eindeutig, denn aus demselben Grund gelten

$$\text{Fläche}(\Omega) = \int_{\partial\Omega} x^1\, dx^2 = -\int_{\partial\Omega} x^2\, dx^1.$$

$\square$

Satz (isoperimetrische Ungleichung) *Unter allen regulären einfachen geschlossenen ebenen Kurven vorgegebener Länge L schließt der Kreis den kleinsten Flächeninhalt A ein. Es gilt also*

$$L^2 \geq 4\pi A,$$

und Gleichheit gilt nur im Falle eines Kreises.

Bemerkung: Der Satz gilt für weit allgemeinere Kurven als nur reguläre. Dies ist aber dann eine maßtheoretische Fragestellung, um die wir uns hier nicht kümmern. $\square$

Beweis des Satzes: Die Kurve sei $\alpha : [0, L] \to \mathbb{R}^2$, von der wir o.B.d.A. annehmen dürfen, dass sie nach der Bogenlänge parametrisiert ist und die berandete Fläche positiv umläuft. Wir finden zwei vertikale Geraden, die die Kurve (o.B.d.A.) in $\alpha(0)$ und $\alpha(s_0)$ berühren, so dass α ganz im Streifen zwischen den beiden Geraden verläuft. Wir konstruieren jetzt einen parametrisierten Vergleichskreis wie folgt: Sei $2r$ der Abstand zwischen den beiden Geraden und o.B.d.A. $\alpha^1(0) = -r$, $\alpha^1(s_0) = r$. Definiere $\beta : [0,L] \to \mathbb{R}^2$ durch

$$\begin{aligned} \beta^1(t) &:= \alpha^1(t), \\ \beta^2(t) &:= \begin{cases} -\sqrt{r^2 - \alpha^1(t)^2} & \text{für } t \in [0, s_0], \\ \sqrt{r^2 - \alpha^1(t)^2} & \text{für } t \in [s_0, L]. \end{cases} \end{aligned}$$

Dann gilt $\beta(0) = \beta(L) = \alpha(0) = \alpha(L)$, und β parametrisiert einen Kreis (bei dem einzelne Intervalle möglicherweise "mehrmals hin und her" parametrisiert werden). Die von der Kurve α berandete Fläche ist nach dem vorigen Beispiel

$$A_\alpha = \int_\alpha x^1\,dx^2 = \int_0^L \alpha^1(t)(\alpha^2)'(t)\,dt,$$

und die Kreisfläche

$$\pi r^2 = -\int_\beta x^2\,dx^1 = -\int_0^L \beta^2(t)(\alpha^1)'(t)\,dt.$$

Wir addieren beide Gleichungen und erhalten

$$\begin{aligned} A_\alpha + \pi r^2 &= \int_0^L (\alpha^1(\alpha^2)' - \beta^2(\alpha^1)')\,dt \\ &\le \int_0^L |\alpha^1(\alpha^2)' - \beta^2(\alpha^1)'|\,dt \\ &= \int_0^L \sqrt{(\alpha^1)^2(\alpha^2)'^2 - 2\alpha^1(\alpha^2)'\beta^2(\alpha^1)' + (\beta^2)^2(\alpha^1)'^2}\,dt \\ &\le \int_0^L \sqrt{((\alpha^1)^2 + (\beta^2)^2)((\alpha^1)'^2 + (\alpha^2)'^2)}\,dt \\ &\qquad\qquad (\text{wegen } (\alpha^1(\alpha^1)' + \beta^2(\alpha^2)')^2 \ge 0) \\ &= \int_0^L \sqrt{(\alpha^1)^2 + (\beta^2)^2}\,dt \qquad (\text{wegen } |\alpha'| \equiv 1) \\ &= \int_0^L |\beta(t)|\,dt \\ &= \int_0^L r\,dt \\ &= rL. \end{aligned}$$

Mit der Ungleichung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel folgt daraus

$$\sqrt{\pi r^2 A_\alpha} \le \frac{rL}{2},$$

also

$$4\pi A_\alpha \le L^2$$

wie behauptet. Gilt Gleichheit in dieser Ungleichung, so muss in allen drei "$\leq$" des Beweises "$=$" gelten. Aus der ersten und zweiten Gleichheit folgt, dass $\beta = r((\alpha^2)', -(\alpha^1)')$, aus der dritten $A_\alpha = \pi r^2$ (und folglich $L = 2\pi r$). Wegen $\beta \perp \beta'$ folgt aus der ersten Gleichung, dass β' und α' zu allen Zeiten parallel sind, und wegen $\beta^1 = \alpha^1$ folgt daraus $\beta' \equiv \alpha'$ und deshalb $\alpha \equiv \beta + \text{const}$, also ist α ein Kreis. □

1.3 Raumkurven

Nicht-orientierte Krümmung können wir nicht nur für ebene Kurven, sondern auch für Kurven im Raum definieren, mit weitgehend derselben Motivation (u und v sind jetzt zwei othonormale Vektoren in $\mathbb{R}^3$).

Definition (Krümmung von Raumkurven) *Sei $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ nach der Bogenlänge parametrisierte C^2-Kurve. Wir definieren*

$$\begin{aligned} \textit{Einheitstangentenvektor:} \quad & T(t_0) := \alpha'(t_0), \\ \textit{Krümmungsvektor:} \quad & K(t_0) := \alpha''(t_0), \\ \textit{Krümmung:} \quad & \kappa(t_0) := |\alpha''(t_0)| = |K(t_0)|, \\ \textit{Einheitsnormalenvektor:} \quad & N(t_0) := \frac{K(t_0)}{|K(t_0)|}\,. \end{aligned}$$

letzteres nur wenn $\alpha'' \neq 0$. Die von $T(t_0)$ und $N(t_0)$ (falls definiert) aufgespannte Ebene ist die Ebene in $\mathbb{R}^3$, in der $\alpha - \alpha(t_0)$ nahe t_0 bis auf Störungen von höherer als zweiter Ordnung verläuft. Sie heißt Schmiegeebene *zu α in t_0. (Im Fall $\alpha''(t_0) = 0$ ist so eine Ebene nicht eindeutig bestimmt.)*

Bemerkung: Weil es für das 2-Bein (T, N) in $\mathbb{R}^3$ keinen natürlichen Orientierungsbegriff gibt, machen F und κ_{or} für Raumkurven keinen Sinn. □

Motivation und Definitionen (Torsion): Anders als ebene Kurven sind Raumkurven durch ihre Krümmung nicht eindeutig bestimmt. Zum Beispiel hat die Helix $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$,

$$\alpha(t) := (R\cos t, R\sin t, ht)$$

für $R > 0$, $h \in \mathbb{R}$ die Umparametrisierung nach der Bogenlänge

$$\tilde{\alpha}(t) = \Big(R\cos\frac{t}{\sqrt{R^2+h^2}}\,, R\sin\frac{t}{\sqrt{R^2+h^2}}\,, \frac{ht}{\sqrt{R^2+h^2}}\Big).$$

Wir berechnen Krümmungsvektor und Krümmung

$$\begin{aligned} \tilde{K}(t) &= \alpha''(t) = -\frac{R}{R^2+h^2}\Big(\cos\frac{t}{\sqrt{R^2+h^2}}\,, \sin\frac{t}{\sqrt{R^2+h^2}}\,, 0\Big), \\ \tilde{\kappa}(t) &= |\alpha''(t)| = \frac{R}{R^2+h^2}\,. \end{aligned}$$

Also hat die Helix konstante Krümmung, ist aber (anders als in obigem Korollar, dessen Analogon in $\mathbb{R}^3$ folglich nicht gilt) kein Kreis (wenn $h \neq 0$).

Um Kurven im Raum vollständig beschreiben zu können, benötigen wir neben der Krümmung eine weitere Größe, die *Torsion*. Sie soll messen, wie stark die Kurve lokal von einer Ebene abweicht, oder wie schnell sich die Schmiegeebene ändert. Da α "von zweiter Ordnung in der Schmiegeebene verläuft", muss die Torsion eine Größe (mindestens) dritter Ordnung sein, also von α''' (und evtl. α', α'') abhängen. Eine Schmiegeebene haben wir nur in Punkten nicht-verschwindender Krümmung; nur dort wird die Torsion definiert. Wie bei der orientierten Krümmung brauchen wir in jedem Punkt der Kurve (mit $\alpha' \neq 0$ und $\alpha'' \neq 0$) eine mit der Kurve mitbewegte natürliche ONB des $\mathbb{R}^3$. Da T und N schon orthonormal sind, liegt die folgende Definition nahe:

$$\text{Binormalenvektor: } B(t) := T(t) \times N(t).$$

Dann heißt die von $t \in I$ abhängige ONB $\{T(t), N(t), B(t)\}$ das *Frenetsche Dreibein* zu α. Durch die Definition von B ist es immer positiv orientiert.

Die Torsion soll ein Maß für die Änderung der Schmiegeebene werden, die bekanntlich von $T(t)$ und $N(t)$ aufgespannt wird. Da $T'(t)$ und $N(t)$ linear abhängig sind, trägt die Änderung von T (von erster Ordnung) nicht zur Änderung der Schmiegeebene bei. Für N' beobachten wir

$$\begin{aligned} &N' \perp N \text{ wegen } |N|^2 \equiv 1,\\ &N' \cdot T = (N \cdot T)' - N \cdot T' = -N \cdot T' = -\kappa|\alpha'|. \end{aligned}$$

N' hat also immer eine Komponente in Richtung von T, aber auch diese trägt nicht zur Änderung der Schmiegeebene bei. Wir definieren daher den *Torsionsvektor* $\mathfrak{T}(t)$ **für nach der Bogenlänge parametrisierte Kurven** α als die Komponente von $N'(t)$ othogonal zu $N(t)$ und $T(t)$ (also zur Schmiegeebene). Wir erhalten

$$\mathfrak{T}(t) := N' - (N' \cdot T)T = N' + \kappa T = \left(\frac{\alpha''}{|\alpha''|}\right)' + |\alpha''|\alpha'$$

und die *Torsion* $\tau(t)$ als den Betrag davon,

$$\tau(t) := |\mathfrak{T}(t)| = |N' + \kappa T|.$$

$\mathfrak{T}$ und τ hängen also tatsächlich von den ersten drei Ableitungen von α ab.

Bis hier haben wir B noch nicht benutzt, was bedeutet, dass wir Torsionsvektor und Torsion in jedem $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, genauso definieren können. Wie es aber in $\mathbb{R}^2$ die orientierte Krümmung gibt, so gibt es in R^3 die orientierte Torsion. Dazu benutzen wir, dass $\mathfrak{T}$ und B linear abhängig sind, und definieren die

$$\text{orientierte Torsion:} \qquad \tau_{or}(t) := \mathfrak{T}(t) \cdot B(t) = N'(t) \cdot B(t)$$

(beachte $|\alpha'| \equiv 1$ und immer $\alpha''(t) \neq 0$). **Warnung:** Verschiedene Lehrbücher definieren hier verschiedene Vorzeichen!

(BILDER: $\tau_{or} < 0$ "hopfen-wendig", $\tau_{or} > 0$ "wein-wendig".)

Für allgemeine Kurven müssen wir wieder alles parametrisierungsinvariant umrechnen, wie wir dies für ebene Kurven getan haben. In der folgenden Definition geben wir die jeweils einfachste Form an; für alle Größen kann man natürlich Formeln ableiten, die nur von $\alpha', \alpha'', \alpha'''$ abhängen, vgl. Aufgabe 7. Die Rechnungen sind dieselben wie im ebenen Fall, plus einige analoge, die wir nicht ausführen:

Definition (Krümmung und Torsion von Raumkurven) *Für reguläre C^2-Kurven $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ definieren wir die parametrisierungsinvarianten (bzgl. positiven Parametertransformationen) Größen*

$$\begin{aligned}
T &:= \frac{\alpha'}{|\alpha'|} && \textit{(Einheitstangentenvektor)},\\
K &:= \frac{T'}{|\alpha'|} && \textit{(Krümmungsvektor)},\\
\kappa &:= |K| && \textit{(Krümmung)},\\
N &:= \frac{K}{|K|} && \textit{(Einheitsnormalenvektor)},\\
B &:= T \times N && \textit{(Binormalenvektor)},
\end{aligned}$$

die letzten beiden nur bei $K \neq 0$. In Punkten mit $K \neq 0$, in denen die Kurve zusätzlich C^3 ist, definieren wir auch

$$\begin{aligned}
\mathfrak{T} &:= \frac{N'}{|\alpha'|} + \kappa T && \textit{(Torsionsvektor)},\\
\tau &:= |\mathfrak{T}| && \textit{(Torsion)},\\
\tau_{or} &:= \mathfrak{T} \cdot B && \textit{(orientierte Torsion)}.
\end{aligned}$$

Beispiel: Für die Helix in Parametrisierung nach der Bogenlänge ist (siehe z.T. oben) mit $\sqrt{} := \sqrt{R^2 + h^2}$

$$\begin{aligned}
\alpha(t) &= (R\cos\tfrac{t}{\sqrt{}}, R\sin\tfrac{t}{\sqrt{}}, \tfrac{ht}{\sqrt{}}),\\
T(t) &= (-\tfrac{R}{\sqrt{}}\sin\tfrac{t}{\sqrt{}}, \tfrac{R}{\sqrt{}}\cos\tfrac{t}{\sqrt{}}, \tfrac{h}{\sqrt{}}),\\
K(t) &= -\tfrac{R}{R^2+h^2}(-\cos\tfrac{t}{\sqrt{}}, -\sin\tfrac{t}{\sqrt{}}, 0),\\
\kappa(t) &= \tfrac{R}{R^2+h^2},\\
N(t) &= (-\cos\tfrac{t}{\sqrt{}}, -\sin\tfrac{t}{\sqrt{}}, 0),\\
\mathfrak{T}(t) &= \tfrac{1}{\sqrt{}}(\sin\tfrac{t}{\sqrt{}}, -\cos\tfrac{t}{\sqrt{}}, 0) + \tfrac{R}{R^2+h^2}(-\tfrac{R}{\sqrt{}}\sin\tfrac{t}{\sqrt{}}, \tfrac{R}{\sqrt{}}\cos\tfrac{t}{\sqrt{}}, \tfrac{h}{\sqrt{}})\\
&= \tfrac{h}{\sqrt{}^3}(h\sin\tfrac{t}{\sqrt{}}, -h\cos\tfrac{t}{\sqrt{}}, R),\\
\tau(t) &= \tfrac{h}{R^2+h^2},\\
B(t) &= \tfrac{1}{\sqrt{}}(h\sin\tfrac{t}{\sqrt{}}, -h\cos\tfrac{t}{\sqrt{}}, R),\\
\tau_{or}(t) &= \tfrac{h}{R^2+h^2}.
\end{aligned}$$

$\square$

Satz (Frenetsche Ableitungsformeln) *Ist $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ nach der Bogenlänge parametrisierte C^3-Kurve mit nirgends verschwindender Krümmung, so gilt für das Frenetsche Dreibein (T, N, B)*

$$\begin{aligned} T' &= \kappa N, \\ N' &= -\kappa T + \tau_{or} B, \\ B' &= -\tau_{or} N, \end{aligned}$$

oder (leichter zu merken)

$$\begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau_{or} \\ 0 & -\tau_{or} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}.$$

Beweis: $T' = \kappa N$ folgt aus der Definition von κ. Für $N' = -\kappa T + \tau_{or} B$ siehe die Motivation für die Torsion. Die Formel für B' rechnen wir komponentenweise nach. $B' \cdot B = 0$ wegen $|B|^2 \equiv 1$ ist klar. Außerdem haben wir

$$\begin{aligned} B' \cdot T &= (B \cdot T)' - B \cdot T' = -\kappa B \cdot N = 0, \\ B' \cdot N &= (B \cdot N)' - B \cdot N' = -\tau_{or} |B|^2 = -\tau_{or}. \end{aligned}$$

$\square$

Satz (Hauptsatz über Raumkurven) *Eine nach der Bogenlänge parametrisierte C^3-Kurve in $\mathbb{R}^3$ mit nirgends verschwindender Krümmung ist bis auf eine orientierungserhaltende Bewegung des $\mathbb{R}^3$ eindeutig durch ihre Krümmung $\kappa > 0$ und ihre orientierte Torsion τ_{or} bestimmt. Zu jedem Paar von Funktionen $\kappa \in C^1(I, \mathbb{R}_{>0})$ und $\tau_{or} \in C^0(I, \mathbb{R})$ und zu jedem Anfangsdatum $t_0 \in I$, $p_0 \in \mathbb{R}^3$, $v_0 \in S^2$, $w_0 \in S^2$ mit $v_0 \perp w_0$ gibt es genau eine nach der Bogenlänge parametrisierte C^3-Kurve $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ mit Krümmung κ, orientierter Torsion τ_{or} und $\alpha(t_0) = p_o$, $\alpha'(t_0) = v_0$, $\alpha''(t_0) = \kappa(t_0) w_0$.*

Beweis: (Anders als bei ebenen Kurven kenne ich hier keine brauchbare explizite Formel.)

Nach den Frenetschen Formeln (und $\alpha' = T$) müssen wir das lineare gewöhnliche Differentialgleichungssystem

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ T \\ N \\ B \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \kappa & 0 \\ 0 & -\kappa & 0 & \tau_{or} \\ 0 & 0 & -\tau_{or} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ T \\ N \\ B \end{pmatrix}$$

für die unbekannten Funktionen $\alpha, T, N, B : I \to \mathbb{R}^3$ lösen. Nach dem Existenz-und Eindeutigkeitssatz für solche Systeme gibt es genau eine Lösung mit

$$\alpha(t_0) = p_0, \quad T(t_0) = v_0, \quad N(t_0) = w_0, \quad B(t_0) = v_0 \times w_0,$$

was den im Satz gesetzten Anfangswerten entspricht. Da die Differentialgleichung linear ist, existiert diese Lösung auf dem gesamten Intervall I. Sie stellt aber nur dann die gesuchte Kurve dar, wenn (T, N, B) zu jedem Zeitpunkt (als Frenetsches Dreibein) eine positiv orientierte ONB des $\mathbb{R}^3$ ist. Um das zu sehen, folgern wir aus dem Differentialgleichungssystem mit der Produktregel die Beziehungen

$$\begin{pmatrix} T\cdot T \\ N\cdot N \\ B\cdot B \\ B\cdot T \\ B\cdot N \\ N\cdot T \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\kappa \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\tau_{or} & -2\kappa \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2\tau_{or} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \kappa & -\tau_{or} \\ 0 & -\tau_{or} & \tau_{or} & -\kappa & 0 & 0 \\ -\kappa & \kappa & 0 & \tau_{or} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T\cdot T \\ N\cdot N \\ B\cdot B \\ B\cdot T \\ B\cdot N \\ N\cdot T \end{pmatrix}$$

mit den Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned} T(t_0)\cdot T(t_0) = N(t_0)\cdot N(t_0) = B(t_0)\cdot B(t_0) &= 1, \\ B(t_0)\cdot T(t_0) = B(t_0)\cdot N(t_0) = N(t_0)\cdot T(t_0) &= 0, \end{aligned}$$

die aus den obigen Anfangsbedingungen folgen. Für dieses System gibt es wieder eine eindeutige Lösung; in diesem Fall stellt sich aber heraus, dass man die konstante Lösung

$$\begin{pmatrix} T\cdot T \\ N\cdot N \\ B\cdot B \\ B\cdot T \\ B\cdot N \\ N\cdot T \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(durch Wunschdenken raten und) verifizieren kann; diese muss es also sein. Also bilden (T, N, B) tatsächlich für alle t eine positive ONB; außerdem gilt $\alpha' = T$ wegen der ersten Gleichung des gelösten Gleichungssystems. Die Frenet-Gleichungen für α zeigen ferner, dass dann κ und τ_{or} tatsächlich Krümmung und orientierte Torsion von α sind. Da die betrachteten Anfangswertprobleme eindeutig lösbar waren, ist α die einzige Kurve $I \to \mathbb{R}^3$ mit den geforderten Eigenschaften. □

Bemerkung: Ein Analogon zu den Hauptsätzen über ebene bzw. Raumkurven gilt auch in jeder höheren Raumdimension. Im $\mathbb{R}^n$ kann man für Kurven $n-1$ absolute und eine orientierte "Krümmungsgröße" definieren (wobei jede von einer Ordnung von α mehr abhängt als die vorige). Unter geeigneten Zusatzvoraussetzungen, die sicherstellen, dass die ersten n Ableitungen der Kurve linear unabhängig sind, ist eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve durch diese Größen bestimmt. Natürlich braucht man dazu ein Frenetsches n-Bein und Ableitungsformeln dafür. □

2 Flächen im Raum

2.1 Definition und Beispiele

Im Folgenden werden Abbildungen $\mathbf{x} : \mathbb{R}^2 \supseteq D \to \mathbb{R}^3$ betrachtet. Wir schreiben x^1, x^2, x^3 für die Komponentenfunktionen von $\mathbf{x}$, u und v für die beiden Variablen in $\mathbb{R}^2$ und $\mathbf{x}_u$, $\mathbf{x}_v$ für die partiellen Ableitungen $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}$, $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}$. Analog $\mathbf{x}_{uu}$, $\mathbf{x}_{vv}$, $\mathbf{x}_{uv}$ für zweite partielle Ableitungen und so weiter.

Anders als Kurven (deren Topologie extrem übersichtlich ist) kann man Flächen im Allgemeinen nicht sinnvoll "in einem Stück" parametrisieren.

Definition (reguläre Fläche) *Ein* reguläres Flächenstück *ist eine differenzierbare Abbildung* $\mathbf{x} : D \to \mathbb{R}^3$ *eines Gebiets (d.h. offene zusammenhängende Teilmenge)* $D \subseteq \mathbb{R}^2$*, so dass gilt:*

(i) $\mathbf{x}$ *ist Homöomorphismus* $D \to \mathbf{x}(D)$*;*

(ii) Die Jacobi-Matrix $D\mathbf{x}(u,v) \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ *hat an jeder Stelle* $(u,v) \in D$ *den Rang* 2*.*

Eine Teilmenge M *von* $\mathbb{R}^3$ *heißt* reguläre C^k-Fläche*, falls*

(iii) zu jedem $p \in M$ *existieren eine Umgebung* $V \subseteq \mathbb{R}^3$ *von* p *und ein reguläres* C^k*-Flächenstück* $\mathbf{x} : D \to \mathbb{R}^3$*, so dass* $M \cap V = \mathbf{x}(D)$*;*

Die Abbildungen $\mathbf{x}$ *heißen dann* lokale Parametrisierungen *von* M*.* $M \cap V$ *heißt* Koordinatenumgebung *von* p *in* M*, und die* Koordinaten *des Punktes* $\mathbf{x}(u,v)$ *sind* $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ *(hängen also von der Wahl der Parametrisierung ab).*

Bemerkungen: (1) Man kann sehr einfach nachprüfen, wann $D\mathbf{x}(u,v)$ den vollen Rang hat. Denn das bedeutet ja nichts anderes als lineare Unabhängigkeit der Spalten $\mathbf{x}_u$ und $\mathbf{x}_v$ an jeder Stelle. Wer will, kann diese durch die Bedingung

$$\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v \neq 0 \qquad \text{an allen Stellen } (u,v) \in D$$

ausdrücken.

(2) Sehr häufig genügt eine einzige Parametrisierung, um eine Fläche außerhalb einer Nullmenge (z.B. einer Kurve oder endlich vieler Punkte) zu parametrisieren. In diesem Fall rechnen wir oft stillschweigend mit dem Flächestück, ohne für die Ausnahmepunkte zu einer anderen Parametrisierung überzugehen.

(3) Das Wort "regulär" wird oft weggelassen.

(4) Ähnlich wie Kurven kann man auch Flächen implizit oder explizit (d.h. nach Drehung stückweise als Graphen) darstellen. In der klassischen Differentialgeometrie spielt aber der parametrische Standpunkt eindeutig die Hauptrolle. Mit impliziten Darstellungen befassen wir uns im übernächsten Abschnitt.

(5) Die Definition erlaubt, dass Flächen mehrere Zusammenhangskomponenten haben können. In dieser Vorlesung werden wir aber immer stillschweigend annehmen, dass sie *wegzusammenhängend* sind, d.h. zu $p, q \in M$ existiert eine Kurve $\alpha : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ mit $\alpha(0) = p$, $\alpha(1) = q$ und $\alpha([0,1]) \subset M$.

(6) Wir versehen Flächen $M \subset \mathbb{R}^3$ mit der *Relativtopologie*, d.h. $A \subseteq M$ heißt offen/abgeschlossen, wenn $A = V \cap M$ für eine offene/abgeschlossene Teilmenge V von $\mathbb{R}^3$ gilt. $\square$

Beispiele: (1) Affine Ebenen, aufgespannt von zwei linear unabhängigen Vektoren $X, Y \in \mathbb{R}^3$ durch den Punkt $p \in \mathbb{R}^3$ werden regulär als Flächenstück (und damit auch als Fläche) parametrisiert durch

$$\mathbf{x} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \qquad \mathbf{x}(u,v) := p + uX + vY.$$

Wir haben

$$D\mathbf{x} \equiv (X \;\; Y),$$

und diese Matrix hat Rang 2, weil X, Y linear unabhängig sind.

(2) Sei $D \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Gebiet, $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann ist der *Graph* von f eine Fläche in $\mathbb{R}^3$, parametrisiert als ein einziges Flächenstück

$$\mathbf{x} : D \to \mathbb{R}^3, \qquad \mathbf{x}(u,v) := (u, v, f(u,v)).$$

Wir berechnen

$$D\mathbf{x}(u,v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ f_u(u,v) & f_v(u,v) \end{pmatrix},$$

und diese Matrix hat den Rang 2 für alle $(u,v) \in D$.

(3) Die *Einheitssphäre*

$$S^2 := \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| = 1\}$$

ist das einfachste Beispiel einer Fläche, die nicht als ein eiziges Flächenstück parametrisiert werden kann (denn sie ist nicht homöomorph zu irgendeiner Teilmenge des $\mathbb{R}^2$). Eine naheliegende Parametriesierung ist die Parametrisierung von Halbsphären als Graph. Dazu sei $B := \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 < 1\}$. Wir kommen dann mit den sechs Flächenstücken

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_\pm(u,v) &:= (u, v, \pm\sqrt{1-u^2-v^2}), \\ \mathbf{y}_\pm(u,v) &:= (u, \pm\sqrt{1-u^2-v^2}\,, v), \\ \mathbf{z}_\pm(u,v) &:= (\pm\sqrt{1-u^2-v^2}\,, u, v) \end{aligned}$$

aus, die allesamt auf B definiert sind. Jede dieser Funktionen ist ein reguläres Flächenstück nach Beispiel (2). Also ist S^2 reguläre (C^∞-)Fläche.

Ein Flächenstück, das die Sphäre bis auf eine Nullmenge parametrisiert, wird durch die bekannten *Polarkoordinaten* gegeben, wobei man üblicherweise φ und ϑ statt u und v schreibt: $\mathbf{x} :]-\pi, \pi[\times]-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}^3$,

$$\mathbf{x}(\varphi, \vartheta) := (\cos\vartheta\cos\varphi, \cos\vartheta\sin\varphi, \sin\vartheta).$$

Die Koordinate φ heißt *geographische Länge* und ϑ *geographische Breite*, $(0,0,1)$ ist der *Nordpol*, $(0,0,-1)$ der *Südpol* und $S^{\times}\{0\}$ der *Äquator*. Für die Geographie und alle praktischen Zwecke in der Mathematik reicht dieses eine Koordinatensystem, aber im Sinne unserer Definition wird der 180. Längengrad samt den Polen nicht parametrisiert. Mathematisch gesehen braucht man daher (mindestens) ein zweites Flächenstück, das z.B. den Äquator vom -90. bis zum 90. Längengrad nicht trifft (vom "Ostpol" bis zum "Westpol"???).

Eine fast noch nützlkiche Parametrisierung der Sphäre ist die *stereographische Parametrisierung*, die unter anderem (wie wir noch sehen werden) Winkel korrekt abbildet und deshalb auch für die Seefahrt interessant war. Wir definieren $\mathbf{x}_{\pm} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ durch

$$\mathbf{x}_{\pm}(u,v) := \frac{1}{1+u^2+v^2}\,(2u, 2v, \pm(1-u^2-v^2)).$$

Beide Abbildungen haben sogar S^2 ohne einen der Pole als Bild. Dass $D\mathbf{x}_+$ überall Rang 2 hat, können wir an

$$D\mathbf{x}_+(u,v) = \frac{2}{(1+u^2+v^2)^2}\begin{pmatrix} 1-u^2+v^2 & -2uv \\ -2uv & 1+u^2-v^2 \\ -2u & -2v \end{pmatrix}$$

ablesen (und analog geht es für $\mathbf{x}_-$). $\square$

2.2 Tangentialebenen (und Ausblick auf differenzierbare Mannigfaltigkeiten)

Wie eine Kurve in jedem Punkt einen Einheitstangentenvektor hat, hat eine C^1-Fläche in jedem Punkt eine Tangentialebene; auch diese ist durch erste Ableitungen bestimmt:

Definition (Tangentialebene an ein Flächenstück) *Ist $\mathbf{x} : \mathbb{R}^2 \supset D \to \mathbb{R}^3$ ein C^1-Flächenstück und $M := \mathbf{x}(D)$, dann ist die Tangentialebene an $\mathbf{x}(D)$ in $\mathbf{x}(u,v)$ definiert als*

$$T_{\mathbf{x}(u,v)}M := \operatorname{Bild} D\mathbf{x}(u,v).$$

Diese Definition ist eher formal; der nächste Satz zeigt, dass sie tatsächlich das anschauliche Konzept einer die Fläche berührenden Ebene wiedergibt: Die Elemente der Tangentialebene sind die Tangentialvektoren an Kurven, die in der Fläche verlaufen.

Satz (geometrische Beschreibung der Tangentialebene) *Ist $\mathbf{x} : \mathbb{R}^2 \supset D \to \mathbb{R}^3$ ein C^1-Flächenstück und $M := \mathbf{x}(D)$, dann ist $X \in T_{\mathbf{x}(u,v)}M$ genau dann, wenn es ein $\varepsilon > 0$ und eine parametrisierte C^1-Kurve $\alpha : [-\varepsilon, \varepsilon] \to \mathbb{R}^3$ mit Bild in M gibt, so dass $\alpha(0) = \mathbf{x}(u,v)$ und $\alpha'(0) = X$ gilt.*

Beweis: Sei $G \subseteq \mathbb{R}^3$ die Menge der Vektoren, die die gerade genannte Bedingung erfüllen.

Zunächst zeigen wir $T_{\mathbf{x}(u,v)}M \subseteq G$. Ist $X \in T_{\mathbf{x}(u,v)}$, dann gibt es $Y \in \mathbb{R}^2$ mit $X = D\mathbf{x}(u,v)Y$. Setze $\alpha(t) := \mathbf{x}(\binom{u}{v} + tY)$. Für hinreichend kleines t ist $\binom{u}{v} + tY \in D$, also ist α auf $[-\varepsilon, \varepsilon]$ für ein $\varepsilon > 0$ definiert. Wegen

$$\begin{aligned}
\alpha(0) &= \mathbf{x}(u,v), \\
\alpha'(0) &= \frac{d}{dt}\mathbf{x}\Big(\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + tY\Big) = D\mathbf{x}(u,v)Y = X
\end{aligned}$$

ist $X \in G$.

Jetzt zeigen wir umgekehrt $G \subseteq T_{\mathbf{x}(u,v)}M$. Wir nehmen also an, dass es zu $X \in \mathbb{R}^3$ eine glatte Kurve $\alpha : [-\varepsilon, \varepsilon] \to \mathbb{R}^3$ mit Bild in M gibt, für die $\alpha(0) = \mathbf{x}(v,u)$ und $\alpha'(0) = Y$. Wir betrachten jetzt die ebene Kurve $\gamma : [-\varepsilon, \varepsilon] \to D$ mit $\gamma(t) := \mathbf{x}^{-1}(\alpha(t))$. Da $\mathbf{x}$ Homöomorphismus ist, ist γ wohldefiniert, aber ist es auch differenzierbar? Ja (folgt aus dem Satz über die implizite Funktion, hier ein "elementarerer" Beweis): Wende den Umkehrsatz auf die Hilfsabbildung

$$H(x,y,t) := \mathbf{x}(x,y) + tZ$$

an, wobei $Z := \mathbf{x}_u(u,v) \times \mathbf{x}_v(u,v) \neq 0$. Dann ist

$$DH(u,v,0) = (\mathbf{x}_u(u,v) \;\; \mathbf{x}_v(u,v) \;\; Z)$$

vom Rang 3, folglich C^1-umkehrbar in einer Umgebung von $H(u,v,0)$; dann ist a forteriori $\mathbf{x}$ C^1-umkehrbar in einer Umgebung von $\mathbf{x}(u,v)$. Das zeigt Differenzierbarkeit von γ nahe 0. Wir setzen $Y := \gamma'(0)$ und berechnen

$$D\mathbf{x}(u,v)Y = \frac{d}{dt}_{|t=0} \mathbf{x} \circ \gamma = \alpha'(0) = X,$$

folglich gilt $X \in \operatorname{Bild} D\mathbf{x}(u,v) = T_{\mathbf{x}(u,v)}M$. □

Der Satz beschreibt die Tangentialebene unabhängig von der Wahl der Parametrisierung $\mathbf{x}$, abhängig nur von einer Umgebung von $\mathbf{x}(u,v)$ in Bild $M = \mathbf{x}(D)$. Deshalb ist die folgende Definition wohldefiniert:

Definition (Tangentialebenen an Flächen) *Ist $M \subset \mathbb{R}^3$ reguläre Fläche, $p \in M$ und $\mathbf{x} : D \to \mathbb{R}^3$ eine lokale Parametrisierung von M mit $\mathbf{x}(u,v) = p$. Dann ist die* Tangentialebene *in p an M definiert durch*

$$T_pM := \operatorname{Bild} D\mathbf{x}(u,v).$$

Das Argument am Schluss des Beweises wollen wir für spätere Zwecke in einem Lemma konservieren. Statt "Kurve in $\mathbb{R}^3$ mit Bild in M" sagen wir ab jetzt kürzer "Kurve in M". Der Umkehrsatz ist gut genug, um C^k zu liefern, wenn höhere Differenzierbarkeit gilt.

Lemma (zurückgeholte Kurve) *Ist* $\mathbf{x} : \mathbb{R}^2 \supset D \to \mathbb{R}^3$ *ein reguläres* C^k*-Flächenstück und* $\alpha : I \to \mathbf{x}(D) \subset \mathbb{R}^3$ *eine* C^k*-Kurve, dann gibt es eine* C^k*-Kurve* $\gamma : I \to D$ *mit* $\alpha = \mathbf{x} \circ \gamma$.

Ein weiteres Nebenprodukt desselben Beweises ist auch bemerkenswert:

Lemma (Differenzierbarkeit der Übergangsabbildungen) *Ist* $M \subseteq \mathbb{R}^3$ *eine reguläre* C^k*-Fläche und sind* $\mathbf{x}$ *und* $\mathbf{y}$ *zwei zugehörige lokale Parametrisierungen, dann ist* $\mathbf{y}^{-1} \circ \mathbf{x}$ C^k*-Diffeomorphismus auf seinem (möglicherweise leeren) Definitionsbereich.*

Tatsächlich stellt sich diese Beobachtung als grundlegend für die "modernere" (auch schon 90 Jahre alte) Differentialgeometrie heraus. Diese betrachtet nicht nur glatte Kurven, Flächen, Hyperflächen in irgendeinem Euklidischen Raum, sondern abstraktere Objekte, sogenannte differenzierbare Mannigfaltigkeiten. Das sind gekrümmte Räume, in denen man Begriffe wie Differenzierbarkeit mit Hilfe der Koordinaten, d.h. ohne Bezug auf einen umgebenden Raum definiert. Um dies zu einem wohldefinierten Begriff zu machen, braucht man genau die Differenzierbarkeit der Übergangsabbildungen, also ersetzt man die Rangbedingung an die Jacobi-Matrix (die einzige Referenz an den umgebenden Raum) durch diese Forderung:

Definition (Differenzierbare Mannigfaltigkeit) *Eine* differenzierbare (C^k-)Mannigfaltigkeit *der Dimension* n *ist eine Menge* M *zusammen mit einer Familie von injektiven Abbildungen* $(\mathbf{x}_i : D_i \to M)_{i \in I}$ *(zusammenhängender) offener Mengen* $U_i \subseteq \mathbb{R}^n$*, so dass die folgenden Bedingungen gelten:*

(i) $\bigcap_{i \in I} \mathbf{x}_i(D_i) = M$*;*

(ii) für jedes Paar $i, j \in I$ *mit* $\mathbf{x}_i(D_i) \cap \mathbf{x}_j(D_j) =: W \neq \emptyset$ *sind* $\mathbf{x}_i^{-1}(W)$ *und* $\mathbf{x}_j^{-1}(W)$ *offene Teilmengen von* $\mathbb{R}^n$ *und die Abbildungen* $\mathbf{x}_j^{-1} \circ \mathbf{x}_i : \mathbf{x}_i^{-1}(W) \to \mathbf{x}_j^{-1}(W)$ *sind (*C^k*-)differenzierbar.*

Die Menge der $\mathbf{x}_i$ *heißt ein* Atlas *von* M*. Die Bilder offener Teilmengen von* $\mathbb{R}^n$ *unter den* $\mathbf{x}_i$ *bilden eine Basis der Topologie von* M *(d.h. die Gesamtheit der offenen Mengen in* M *ist das kleinste unter beliebigen Vereinigungen und endlichen Schnitten abgeschlossene System von Teilmengen, das die Mengen der Basis enthält). Mit der so definierten Topologie von* M *fordern wir zusätzlich*

(iii) M *ist Hausdorff-Raum mit abzählbarer Basis der Topologie.*

Bemerkungen: (1) Ein topologischer Raum M heißt *Hausdorff-Raum*, falls es zu je zwei Punkten $p \neq$ in M offene Umgebungen U von p und V von M gibt mit $U \cap V = \emptyset$.

(2) "Abzählbare Basis der Topologie" ist hier gleichbedeutend damit, dass die Indexmenge I abzählbar gewählt werden kann. □

Da $\mathbb{R}^3$ eine abzählbare Basis der Topologie hat und hausdorffsch ist, ist der letzte Punkt für Flächen im Raum immer erfüllt, und wir können aus dem vorigen Lemma folgern:

Korollar (Flächen sind Mannigfaltigkeiten) *Jede reguläre Fläche in* $\mathbb{R}^3$ *ist eine zweidimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit.*

Nicht jede zweidimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit ist eine Fläche in $\mathbb{R}^3$. Beispiele dazu später. Wir begnügen uns für den Moment mit der Erkenntnis, dass man das Konzept einer differenzierbaren Fläche notfalls ohne Bezug auf den umgebenden Raum $\mathbb{R}^3$ zu einer sinnvollen Definition machen kann. Geometrische Größen, denen man in Mannigfaltigkeiten Sinn geben kann, werden daher als "innere Größen" der Flaäche bezeichnet, während "äußere Größen" den expliziten Bezug auf den umgebenden $\mathbb{R}^3$ verlangen. Die Unterscheidung von innerer und äußerer Krümmung wird eine wichtige Rolle spielen.

Wir sind abgeschweift. Ursprünglich wollten wir Tangentialebenen verstehen.

Beispiel: Wir hatten S^2 (bis auf einen Punkt) mit der stereograpgischen Parametrisierung beschrieben. Die Tangentialebene an den Punkt

$$\mathbf{x}_+(u,v) := \frac{1}{1+u^2+v^2}\,(2u, 2v, 1-u^2-v^2)$$

ist das Bild von

$$D\mathbf{x}_+(u,v) = \frac{2}{(1+u^2+v^2)^2}\begin{pmatrix} 1-u^2+v^2 & -2uv \\ -2uv & 1+u^2-v^2 \\ -2u & -2v \end{pmatrix}.$$

Da beide Spalten senkrecht zu $\mathbf{x}_+(u,v)$ sind, ist die Tangentialebene die Ebene senkrecht zu diesem Vektor. Wir haben also die anschaulich klare Tatsache

$$T_pS^2 = \{p\}^\perp$$

für (fast) alle $p \in S^2$ nachgerechnet. □

2.3 Urbilder regulärer Werte

In diesem Abschnitt geht es um ein Analogon zur impliziten Beschreibung von Kurven.

Definition (regulärer Wert) *Sei* $g : \mathbb{R}^n \supseteq U \to \mathbb{R}^m$ *eine differenzierbare Abbildung auf einer offenen Menge* U*. Ein Punkt* $p \in U$ *heißt* kritischer Punkt*, falls* $Dg(p) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *nicht surjektiv ist. Das Bild* $g(p) \in \mathbb{R}^m$ *eines kritischen Punktes* U *heißt ein* kritischer Wert *von* F*. Ein Element von* $\mathbb{R}^m$*, das kein kritischer Wert ist, heißt ein* regulärer Wert *von* g*.*

Bemerkungen: (1) Ist $m > n$, so ist $Dg(p)$ für kein p surjektiv aus Dimensionsgründen. Reguläre Werte (außer "Nicht-Werte") gibt es also nur im Fall $m \leq n$.

(2) Im Fall $m = 1$ ist p ein kritischer Wert von g, genau wenn $Dg(p) = 0$ ist. Das ist der einzige Fall, den wir hier brauchen werden. □

Wir wollen eine Fläche implizit durch “eine Gleichung für drei Unbekannte” in $\mathbb{R}^3$ beschreiben, d.h. als Nullstellenmenge einer Funktion $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, oder nach Addition einer Konstanten als Urbild $g^{-1}\{a\}$ eines Wertes $a \in \mathbb{R}$. Der nächste Satz sagt, wann das geht:

Satz (implizit beschriebene Flächen) *Ist $g : \mathbb{R}^3 \supseteq U \to \mathbb{R}$ (mit U offen) eine C^k-Funktion und $a \in \mathbb{R}$ ein regulärer Wert von g, dann ist $g^{-1}\{a\}$ eine reguläre C^k-Fläche in $\mathbb{R}^3$.*

Beweis: Das folgt sofort aus dem Satz über die implizite Funktion. Wer will, kann alternativ ähnlich wie im Beweis des vorigen Satzes den Umkehrsatz auf die Hilfsfunktion $G(x^1, x^2, x^3) := (x^1, x^2, g(x^1, x^2, x^3))$ anwenden. □

Von vielen Mengen können wir jetzt mit weniger Aufwand als früher sehen, dass es sich um reguläre Flächen handelt:

Beispiele: (1) Sei $z \in \mathbb{R}^3$ vorgegeben. Setzen wir $g(x) := |x - z|^2$, dann ist $Dg(x) = 2(x - z)^{tr}$ nur für $x = z$ gleich 0. Also ist z der einzige kritische Punkt von g, und $g(z) = 0$ der einzige kritische Wert. Folglich sind alle $a \neq 0$ reguläre Werte. Im Fall $a > 0$ ist

$$g^{-1}\{a\} = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x - z|^2 = a\}$$

die Sphäre um z mit Radius a; das ist sicher eine reguläre Fläche. Im Fall $a < 0$ ist $g^{-1}\{a\}$ die leere Menge, also formal gesehen auch eine reguläre Fläche (wenn auch keine besonders interessante). Nur im Fall des kritischen Werts $a = 0$ ist $g^{-1}\{0\} = \{z\}$ ein einzelner Punkt und deshalb *keine* reguläre Fläche.

(2) Hier definieren wir $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $g(x, y, z) := x^2 + y^2 - z^2$. (Gelegentlich sind x, y, z praktischer als x^1, x^2, x^3.) Die einzige kritische Stelle ist $(0, 0, 0)$ und gehört zum kritischen Wert 0. Für $a > 0$ ist daher $g^{-1}\{a\}$ eine reguläre Fläche und heißt *einschaliges Hyperboloid*. Auch für $a < 0$ ist $g^{-1}\{a\}$ regulär und heißt *zweischaliges Hyperboloid*. Aber $g^{-1}\{0\}$ ist keine reguläre Fläche, denn dieser *Doppelkegel* hat eine “Singularität” im Nullpunkt. (BILDER!)

(3) Der Satz liefert nur eine hinreichende Bedingung. Auch Urbilder *kritischer* Werte können “zufällig” reguläre Flächen sein. Z.B. ist für $g(x, y, z) := (z - 1)^2$ die 0 ein kritischer Wert, aber $g^{-1}\{0\}$ ist die Ebene $z = 1$; das ist zweifellos eine reguläre Fläche. □

Bemerkung: Ganz allgemein (und mit demselben Beweis) gilt, dass das Urbild eines regulären Wertes $a \in \mathbb{R}^m$ einer differenzierbaren Funktion $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ $(m \leq n)$ eine $(n-m)$-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit ist (und als solche eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$). Letzteres ist evtl. schon aus der Analysis-Grundvorlesung bekannt. □

2.4 Differenzierbare Funktionen auf Flächen

Wir werden sowohl Funktionen auf Flächen als auch Abbildungen zwischen Flächen differenzieren müssen. Wir nennen eine Funktion differenzierbar, wenn ihre Darstellung in Koordinaten differenzierbar ist.

Definition (differenzierbare Funktionen) *(i) Sei $M \subset \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche. Eine Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ heißt* differenzierbar *in $p \in M$, falls in für eine lokale Parametrisierung $\mathbf{x} : \mathbb{R}^2 \supseteq D \to M$ mit $\mathbf{x}(u, v) = p$ gilt: Die Funktion $f \circ \mathbf{x} : D \to \mathbb{R}$ ist differenzierbar in (u, v).*

(ii) Sei $N \subset \mathbb{R}^3$ eine weitere reguläre Fläche. Eine Abbildung $\Phi : M \to N$ heißt differenzierbar in M, falls für lokale Parametrisierungen $\mathbf{x}$ von M mit $\mathbf{x}(u, v) = p$ und $\mathbf{y}$ von N mit $\Phi(p)$ im Bild von $\mathbf{y}$ gilt: $\mathbf{y}^{-1} \circ \Phi \circ x$ ist differenzierbar in (u, v).

(iii) Die regulären Flächen M und N heißen diffeomorph*, falls es eine differenzierbare bijektive Abbildung $\Phi : M \to N$ gibt, deren Umkehrung $\Phi^{-1} : N \to M$ ebenfalls differenzierbar ist.*

Bemerkungen: (0) Analog definiert man alles für "C^k" statt "differenzierbar".

(1) Der Satz über die Differenzierbarkeit der Übergangsabbildungen sagt, dass die Differenzierbarkeit von Funktionen und Abbildungen nicht von der Auswahl der lokalen Parametrisierungen abhängt; folglich ist sie wohldefiniert.

(2) Diffeomorphie von Flächen ist eine Äquivalenzrelation.

(3) Oft unterscheidet man notationsmäßig nicht zwischen f und $f \circ \mathbf{x}$ und schreibt z.B. $f(u, v)$ statt $f(\mathbf{x}(u, v))$. Wir versuchen das in dieser Vorlesung zu vermeiden. □

Beispiel 1: Es sei $M \subset \mathbb{R}^3$ reguläre Fläche und $U \subseteq \mathbb{R}^3$ eine offene Menge mit $M \subset U$. Ist $f : M \to \mathbb{R}$ Einschränkung einer differenzierbaren Funktion $g : U \to \mathbb{R}$, dann ist f ebenfalls differenzierbar, denn für jede lokale Parametrisierung $\mathbf{x}$ von M ist $f \circ \mathbf{x} = g \circ \mathbf{x}$ differenzierbar nach der Kettenregel. Insbesondere sind folgende Funktionen differenzierbar auf M:

(i) Die *Höhenfunktion* bzgl. eines Einheitsvektors $a \in \mathbb{R}^3$. Das ist $h : M \to \mathbb{R}$ mit $h(p) := p \cdot a$ (mit dem üblichen Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^3$).

(ii) Das Quadrat des Abstands von einem festen Punkt $q \in \mathbb{R}^3$, also $f : M \to \mathbb{R}$ mit $f(p) := |p - q|^2$. □

Beispiel 2: Es seine M und N reguläre Flächen in $\mathbb{R}^3$. Ist $U \subseteq \mathbb{R}^3$ wieder offen mit $M \subset U$, und ist $\Phi : M \to N$ die Einschränkung einer differenzierbaren Funktion $U \to \mathbb{R}^3$, dann ist Φ differenzierbar. Das folgt wie im Beispiel 1 aus der Kettenregel; hier benutzt man allerdings noch zusätzlich die Differenzierbarkeit von $\mathbf{y}^{-1} \circ g$, wenn g differenzierbar ist (vgl. den Satz aus Abschnitt 2.2).

Insbesondere geben lineare Abbildungen $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ durch Einschränkung auf M Diffeomorphismen $M \to L(M)$; ebenso Translationen $M \to M + a$ für einen fest gewählten

Vektor $a \in \mathbb{R}^3$. $\square$

Wenn wir Abbildungen differenzieren können, wollen wir natürlich auch eine Art Ableitung ausrechnen können. Da wir Abbildungen zwischen zweidimensionalen Objekten differenzieren, sollte die Ableitung an einem festen Punkt durch eine 2×2-Matrix ausgedrückt werden können. Dieser Standpunkt ist hier etwas unpraktisch, aber wir können die Ableitung immerhin als lineare Abbildung zwischen zweidimensionalen Vektorräumen (nämlich Tangentialebenen) auffassen:

Definition (Differential) *Seien M, N reguläre Flächen in $\mathbb{R}^3$ und $\Phi : M \supseteq V \to N$ (V offen in M) eine in $p \in V$ differenzierbare Abbildung. Dann heißt die folgende lineare Abbildung $d\Phi(p) : T_pM \to T_{\Phi(p)}N$ das* Differential *von Φ in p:*

Zu $X \in T_pM$ gibt es eine Kurve $\alpha : [-\varepsilon, \varepsilon] \to M$ mit $\alpha(0) = p$ und $\alpha'(0) = X$. Setze $d\Phi(p)X := (\Phi \circ \alpha)'(0) \in T_{\Phi(p)}N$.

Bemerkung: Hier ist nicht sofort klar, dass $d\Phi(p)$ wohldefiniert ist, geschweige denn linear. Wir müssen das nachrechnen:

Seien $\mathbf{x} : D \to M$ und $\mathbf{y} : E \to N$ lokale Parametrisierungen von M und N mit $\mathbf{x}(u, v) = p$ und $\mathbf{y}(s, t) = \Phi(p)$. Sei $\alpha : [-\varepsilon, \varepsilon] \to M$ irgendeine Kurve mit $\alpha(0) = p$ und $\alpha'(0) = X$. Dann gibt es eine zurückgeholte Kurve $\gamma : [-\varepsilon_1, \varepsilon_1] \to D$ mit $\alpha = \mathbf{x} \circ \gamma$ und $\gamma'(0) = Y$, wobei $D\mathbf{x}(u, v)Y = X$; und $Y \in \mathbb{R}^2$ ist eindeutig bestimmt und hängt linear von X ab. Die Abbildung $\widetilde{\Phi} : \mathbf{y}^{-1} \circ \Phi \circ X$ ist Abbildung zwischen zwei Gebieten in $\mathbb{R}^2$; ihre Ableitung verstehen wir also schon seit Analysis II. Die dort gelernte Kettenregel sagt uns

$$\begin{aligned} d\Phi(p)X &= (\Phi \circ \alpha)'(0) \\ &= (\mathbf{y} \circ \widetilde{\Phi} \circ \gamma)'(0) \\ &= D\mathbf{y}(s, t) D\widetilde{\Phi}(u, v) Y, \end{aligned}$$

woraus man abliest, dass $d\Phi(p)X$ linear von Y (also auch von X) abhängt und insbesondere nicht von der speziellen Wahl von α (solange $\alpha'(0) = X$). $\square$

Natürlich kann man das Differential auch für Funktionen $M \to \mathbb{R}$ definieren (braucht man allerdings seltener); die Wohldefiniertheit ist in diesem Fall sogar einfacher als für Abbildungen, weshalb wir sie als gegben annehmen:

Definition (Differential von Funktionen) *Sei M reguläre Fläche in $\mathbb{R}^3$ und $f : M \to \mathbb{R}$ eine in $p \in M$ differenzierbare Funktion. Das Differential von f bei p ist die lineare Abbildung $df(p) : T_pM \to \mathbb{R}$, die jedem Vektor $X = \alpha'(0)$ (für eine differenzierbare Kurve mit $\alpha(0) = p$) die Zahl $(f \circ \alpha)'(0) \in \mathbb{R}$ zuordnet.*

Beispiel: Setzen wir obiges Beispiel 1 fort, so können wir das Differential gleich angeben: In diesem Fall ist nämlich $df(p)X$ nichts anderes als die Richtungsableitung der auf U definierten Funktion g mit $g_{|M} = f$ in Richtung X; folglich ist $df(p)$ einfach die Einschränkung der linearen Abbildung $Dg(p) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ auf $T_pM \subset \mathbb{R}^3$. Analog in Beispiel 2. $\square$

Bemerkung: Ohne Auszeichnung einer Basis des Tangentialraums können wir das Differential nicht als 2×2-Matrix hinschreiben. Auch wenn wir es selten konkret berechnen, wird es aber dennoch eine wichtige Rolle spielen. $\square$

2.5 Erste Fundamentalform und Flächeninhalt

Nachdem wir uns mit Differenzierbarkeit befasst haben, werden wir uns im Folgenden mit "metrischen" Eigenschaften von Flächen befassen. Die grundlegende Erkenntnis ist hier, dass das Skalarprodukt des umgebenden $\mathbb{R}^3$ dabei eine wichtige Rolle spielt. Deshalb zunächst eine trivial erscheinende Definition:

Definition (erste Fundamentalform) *Sei M eine reguläre Fläche in $\mathbb{R}^3$. Die* erste Fundamentalform *auf M ordnet jedem Punkt $p \in M$ ein Skalarprodukt I_p auf T_pM zu, nämlich die Einschränkung des Skalrprodukts von $\mathbb{R}^3$ auf T_pM, d.h.*

$$I_p(X, Y) := X \cdot Y \qquad \text{für } X, Y \in T_pM.$$

Ist $\mathbf{x} : \mathbb{R}^2 \supseteq D \to M$ eine lokale Parametrisierung, so heißen die Funktionen $E, F, G : D \to \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} E(u,v) &:= I_{\mathbf{x}(u,v)}(\mathbf{x}_u(u,v), \mathbf{x}_u(u,v)), \\ F(u,v) &:= I_{\mathbf{x}(u,v)}(\mathbf{x}_u(u,v), \mathbf{x}_v(u,v)), \\ G(u,v) &:= I_{\mathbf{x}(u,v)}(\mathbf{x}_v(u,v), \mathbf{x}_v(u,v)) \end{aligned}$$

die Koefizienten der ersten Fundamentalform.

Bemerkungen: (0) Kurzform zum Merken:

$$E = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u, \qquad F = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v, \qquad G = \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v.$$

(1) Also wird die erste Fundamentalform bezüglich der Basis $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$ durch die Matrix $\left(\begin{smallmatrix} E & F \\ F & G \end{smallmatrix}\right)$ dargestellt, in dem Sinne, dass

$$I_{\mathbf{x}(u,v)}(X, Y) = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix},$$

wobei $X, Y \in T_{\mathbf{x}(u,v)}M$ als

$$X = X_1\mathbf{x}_u + X_2\mathbf{x}_v = D\mathbf{x}\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}, \qquad Y = Y_1\mathbf{x}_u + Y_2\mathbf{x}_v = D\mathbf{x}\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix}$$

entwickelt werden. $E, F, G, \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, D\mathbf{x}$ sind bei (u, v) auszuwerten.

(2) Oft findet man auch $I_{(u,v)}$ statt $I_{\mathbf{x}(u,v)}$, gelegentlich auch E, F, G als Funktionen auf $\mathbf{x}(D)$ statt auf D. In der Riemannschen Geometrie (die eine weitreichende Verallgemeinerung der klassischen Differentialgeometrie ist) schreibt man g statt I und g_{11} statt E, $g_{12} = g_{21}$ statt F und g_{22} statt G. Hier darf man eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit mit solch einer "Riemannschen Metrik" g versehen, auch wenn dies nicht vom Skalarprodukt eines umgebenden euklidischen Raums kommt.

(3) E, F, G sind C^{k-1}-Funktionen auf D (üblicher Beweis), wenn die Fläche C^k ist, wie man aus (0) abliest. Aus (1) folgt, dass an jeder Stelle (u, v) die Matrix $\left(\begin{smallmatrix} E & F \\ F & G \end{smallmatrix}\right)$ positiv definit ist. □

Beispiele: (1) Für die Sphäre in Polarparametrisierung,

$$\mathbf{x}(\varphi, \vartheta) = (\cos\vartheta\cos\varphi, \cos\vartheta\sin\varphi, \sin\vartheta),$$

berechnen wir

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_\varphi(\varphi, \vartheta) &= (-\cos\vartheta\sin\varphi, \cos\vartheta\cos\varphi, 0), \\ \mathbf{x}_\vartheta(\varphi, \vartheta) &= (-\sin\vartheta\cos\varphi, -\sin\vartheta\sin\varphi, \cos\vartheta), \\ E &= \mathbf{x}_\varphi \cdot \mathbf{x}_\varphi = \cos^2\vartheta, \\ F &= \mathbf{x}_\varphi \cdot \mathbf{x}_\vartheta = 0, \\ G &= \mathbf{x}_\vartheta \cdot \mathbf{x}\vartheta = 1. \end{aligned}$$

(2) Für die Sphäre in stereographischer Parametrisierung,

$$\mathbf{x}(u, v) := \frac{1}{1 + u^2 + v^2}\,(2u, 2v, 1 - u^2 - v^2)$$

hatten wir

$$D\mathbf{x}(u, v) = \frac{2}{(1 + u^2 + v^2)^2} \begin{pmatrix} 1 - u^2 + v^2 & -2uv \\ -2uv & 1 + u^2 - v^2 \\ -2u & -2v \end{pmatrix},$$

also

$$\begin{aligned} E &= \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u = \frac{2}{(1 + u^2 + v^2)^2}, \\ F &= \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v = 0, \\ G &= \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v = \frac{2}{(1 + u^2 + v^2)^2}. \end{aligned}$$

Wir beobachten, dass $E = G$ und $F \equiv 0$. □

Man benutzt die erste Fundamentalform, um Längen-, Flächen- und Winkelberechnungen auf der Fläche auf (leichter zu handhabende, da im "flachen $\mathbb{R}^2$" stattfindende)

Berechnungen im Parameterbereich zurückzuführen. Im Folgenden sei immer $M \subset \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche und $\mathbf{x} : \mathbb{R}^2 \supseteq D \to M$ eine lokale Parametrisierung.

(1) Längenberechnung: Sei $\alpha : I \to M$ eine differenzierbare Kurve, die im Bild von $\mathbf{x}$ verläuft. (Ist das nicht der Fall, so muss man die Kurve in Teilkurven zerlegen und jede unter einer geeeigneten lokalen Parametrisierung von M betrachten.) Dann gibt es eine eindeutige differenzierbare Kurve $\gamma : I \to D$ mit $\alpha = \mathbf{x} \circ \gamma$. Für $[a, b] \subseteq I$ ist

$$\begin{aligned}
L_{[a,b]}(\alpha) &= \int_a^b |\alpha'(t)|\, dt \\
&= \int_a^b |(\mathbf{x} \circ \gamma)'(t)|\, dt \\
&= \int_a^b \sqrt{I_{\mathbf{x}(\gamma(t))}(D\mathbf{x}(\gamma(t))\gamma'(t), D\mathbf{x}(\gamma(t))\gamma'(t))}\, dt \\
&= \int_a^b \sqrt{\gamma'(t) \cdot \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \gamma'(t)}\, dt \\
&= \int_a^b \sqrt{E(\gamma(t))(\gamma^1)'(t)^2 + 2F(\gamma(t))(\gamma^1)'(t)(\gamma^2)'(t) + G(\gamma(t))(\gamma_2)'(t)^2}\, dt.
\end{aligned}$$

(2) Winkelberechnung: Seien $\alpha : I \to M$ und $\beta : I \to M$ differenzierbare Kurven mit $\alpha(t_0) = \beta(t_0) = p = \mathbf{x}(u, v) \in \mathbf{x}(D)$. Dann ist der (orientierte) Winkel, unter dem sich die Kurven (als Kurven in $\mathbb{R}^3$) in p schneiden, gegeben durch

$$\cos\varphi = \frac{\alpha'(t_0) \cdot \beta'(t_0)}{|\alpha'(t_0)||\beta'(t_0)|}\,.$$

Natürlich können wir auch das mit E, F, G und den zurückgeholten Kurven γ und δ mit $\gamma = \mathbf{x} \circ \alpha$ und $\delta = \mathbf{x} \circ \beta$ berechnen:

$$\begin{aligned}
\cos\varphi &= \frac{I_p(D\mathbf{x}(u, v)\gamma'(t_0), D\mathbf{x}(u, v)\delta'(t_0))}{\sqrt{I_p(D\mathbf{x}(u, v)\gamma'(t_0), D\mathbf{x}(u, v)\gamma'(t_0))I_p(D\mathbf{x}(u, v)\delta'(t_0), D\mathbf{x}(u, v)\delta'(t_0))}} \\
&= \frac{E(\gamma^1)'(\delta^1)' + F(\gamma^1)'(\delta^2)' + F(\gamma^2)'(\delta^1)' + G(\gamma^2)'(\delta^2)'}{\sqrt{E(\gamma^1)'^2 + 2F(\gamma^1)'(\gamma^2)' + G(\gamma^2)'^2}\sqrt{E(\delta^1)'^2 + 2F(\delta^1)'(\delta^2)' + G(\delta^2)'^2}}\,.
\end{aligned}$$

Eine Parametrisierung mit $F \equiv 0$ heißt *orthogonal*. Für orthogonale Parametriserungen liest man ab: Die *Koordinatenlinien* $u \mapsto \mathbf{x}(u, v)$ für festes v und $v \mapsto \mathbf{x}(u, v)$ für festes u schneiden sich alle senkrecht. Die Polarparametrisierung und die stereographische Parametrisierung der S^2 sind orthogonal.

Rechte Winkel werden also von othogonalen Parametrisierungen erhalten, aber nicht unbedingt alle Winkel. An obiger Formel lesen wir ab: Der Winkel zwischen zwei Kurven α und β in p ist genau dann immer gleich dem Winkel zwischen den zurückgeholten Kurven γ und δ in (u, v), wenn $E(u, v) = G(u, v)$ und $F(u, v) = 0$. Um $E = G$ zu sehen ($F = 0$ wissen wir schon), vergleiche den letzten Ausdruck der Formel mit dem Winkel zwischen α und β bei (u, v), also mit

$$\cos\psi = \frac{\gamma'(t_0) \cdot \delta'(t_0)}{|\gamma'(t_0)||\delta'(t_0)|}\,.$$

Eine lokale Parametrisierung $\mathbf{x} : D \to M$ heißt *konform* (oder *winkelerhaltend*), falls $E = G$ auf D und $F \equiv 0$ gelten. Also ist die stereographische Parametrisierung winkelerhaltend. Mit ihrer Umkehrung (plus Skalierung) kann man also wie früher behauptet winkeltreue Karten von Teilen der Erdoberfläche erhalten.

(3) Flächenberechnung: Aus der Maßtheorie kennen wir (hoffentlich) die Flächenformel (oft auch als Definition des Flächenintegrals verwendet). Sie sagt aus, dass für eine differenzierbare injektive Abbildung $\mathbf{x} : \mathbb{R}^2 \supseteq D \to \mathbb{R}^3$ und eine messbare Funktion f gilt (oder definiert wird)

$$\int_{\mathbf{x}(D)} f(x)\, d\omega(x) = \int_D f(u,v) \mathrm{Jac}_{\mathbf{x}}(u,v)\, du\, dv,$$

mit $\mathrm{Jac}_{\mathbf{x}} = \sqrt{\det(D\mathbf{x}^{tr} D\mathbf{x})} = |\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v|$. Insbesondere berechnet man die Fläche von $\mathbf{x}(D)$ durch Integration von $f \equiv 1$. Wir benutzen die bekannte Formel

$$|X \times Y|^2 = |X|^2 |Y|^2 - (X \cdot Y)^2$$

für $X, Y \in \mathbb{R}^3$, um

$$|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v| = \sqrt{EG - F^2}$$

zu berechnen. Ist also S eine beschränkte messbare (z.B. relativ offene) Teilmenge von $\mathbf{x}(D) \subseteq M$, so ist sein Flächeninhalt gleich

$$A(S) = \int_{\mathbf{x}^{-1}(S)} \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv.$$

Zum Beispiel gilt für die Sphäre, die wir bis auf eine Nullmenge mit der Polarparametrisierung treffen,

$$\sqrt{EG - F^2}(\varphi, \vartheta) = \sqrt{\cos^2 \vartheta - 0} = |\cos \vartheta|.$$

Also ist

$$\begin{aligned} A(S^2) &= \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} |\cos \vartheta|\, d\vartheta \partial\varphi \\ &= 2\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \vartheta\, d\vartheta \\ &= 4\pi, \end{aligned}$$

wie es auch sein sollte. □

3 Äußere Krümmung von Flächen

3.1 Orientierbare Flächen und die Gauß-Abbildung

Bekanntlich steht für linear unabhängige Vektoren $X, Y \in \mathbb{R}^3$ der Vektor $X \times Y$ immer senkrecht auf beiden. Ist $\mathbf{x} : U \to \mathbb{R}^3$ ein reguläres Flächenstück, dann erzeugen $\mathbf{x}_u$

und $\mathbf{x}_v$ an jeder Stelle die Tangentialebene; folglich ist

$$\frac{\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v}{|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v|}$$

an jeder Stelle ein normierter Vektor, der senkrecht auf dem Flächenstück (d.h. senkrecht auf der Tangentialebene) steht und außerdem stetig (sogar differenzierbar) vom Punkt abhängt.

Für Flächenstücke geht das immer. Aber brauchen wir für eine Fläche M mehrere lokale Parametrisierungen, so ist nicht gesagt, dass wir die mehreren Einheitsnormalenvektorfelder stetig zu einem auf ganz M zusammensetzen können. Denn damit das gilt, darf es beim Übergang von einer Parametrisierung zur anderen keinen Vorzeichenwechsel geben; mit anderen Worten: der Parametrisierungswechsel muss positive Determinante haben.

Definition (orientierbare Fläche) *Eine reguläre Fläche $M \subseteq \mathbb{R}^3$ heißt* orientierbar*, falls sie so mit Koordinatenumgebungen $\mathbf{x}_i(D_i)$ überdeckt werden kann, dass die Ableitungen der Übergangsabbildungen $D(\mathbf{x}_j^{-1} \circ \mathbf{x}_i)$ überall positive Determinante haben. Ist M mit solchen $\mathbf{x}_i$ versehen ($i \in I$), so heißt M durch $(\mathbf{x}_i)_{i \in I}$* orientiert.

Definition (Gauß-Abbildung) *Sei M durch $(\mathbf{x}_i)_{i \in I}$ orientierte reguläre Fläche in $\mathbb{R}^3$. Die Abbildung $N : M \to S^2$, die jedem Punkt $p = \mathbf{x}_i(u, v)$ den Einheitsnormalenvektor*

$$N(\mathbf{x}_i(u, v)) := \frac{(\mathbf{x}_i)_u(u, v) \times (\mathbf{x}_i)_v(u, v)}{|(\mathbf{x}_i)_u(u, v) \times (\mathbf{x}_i)_v(u, v)|}$$

zuordnet, heißt die Gauß-Abbildung *von M.*

Dass das wohldefiniert ist, sieht man an der Vorüberlegung. Genauer:

Lemma (orientierbar $\Leftrightarrow$ Gauß-Abbb. existiert) *Genau dann ist eine reguläre Fläche $M \subset \mathbb{R}^3$ orientierbar, wenn eine stetige Abbildung $N : M \to S^2$ existiert, so dass $N(p) \perp T_pM$ für alle $p \in M$.*

Beweis: Ist M orientiert, so definiere die Gauß-Abbildung wie oben und rechne nach, dass sie stetig ist. (Sie ist auch differenzierbar, da elementare Funktion von $\mathbf{x}_u$ und $\mathbf{x}_v$, wenn die Fläche mindestens C^2 ist.)

Ist umgekehrt ein solches N gegeben, dann nimm irgendeine Überdeckung von M mit Parametrisierungen $\mathbf{x}_i : D_i \to M$. An jeder Stelle bildet dann $\{(\mathbf{x}_i)_u, (\mathbf{x}_i)_v, N)\}$ eine ONB von $\mathbb{R}^3$. Wegen Stetigkeit von $\det((\mathbf{x}_i)_u, (\mathbf{x}_i)_v, N)$ auf D_i nimmt diese Determinante für jedes i genau ein Vorzeichen an. Ist es positiv, dann setze $\mathbf{y}_i := \mathbf{x}_i$; ist es negativ, dann ersetze $\mathbf{y}_i := \mathbf{x}_i \circ \sigma$, wobei $\sigma : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine fest gewählte Spiegelung ist. (Der Definitionsbereich von $\mathbf{y}_i$ ist dann natürlich $\sigma(D_i)$.) Es ist eine Frage der Routine in linearer Algebra, nachzurechnen, dass M durch die $\mathbf{y}_i$ orientiert wird. $\square$

Beispiele: (0) Flächenstücke sind immer orientierbar.

(1) Die Sphäre S^2 ist orientierbar, denn $N(p) = p$ ist ein stetiges Einheitsnormalenvektorfeld (und $N(p) = -p$ ein anderes).

(2) Das *Möbiusband* ist ein Beispiel einer nicht orientierbaren Fläche. Es kann z.B. durch $\mathbf{x} :]0, 2\pi[\times]-1, 1[$,

$$\mathbf{x}(u, v) := \Big((2 - v \sin \tfrac{u}{2}) \sin u, (2 - v \sin \tfrac{u}{2}) \cos u, v \cos \tfrac{u}{2}\Big)$$

und "dieselbe" Parametrisierung auf $]-\pi, \pi[\times]-1, 1[$ überdeckt werden. (AM BILD ERKLÄREN.) $\square$

Die meisten Flächen in $\mathbb{R}^3$, denen man so begenet, sind orientierbar. Ein Grund dafür:

Lemma (Urbilder regulärer Werte sind orientierbar) *Sei $g : \mathbb{R}^3 \supseteq U \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktion, $a \in \mathbb{R}$ regulärer Wert von g. Dann ist $M := g^{-1}\{a\}$ orientierbar.*

Beweis: Für irgendeine Kurve $\alpha : I \to M$ differenziere

$$g(\alpha(t)) \equiv a$$

nach t und erhalte

$$\nabla g(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) = 0.$$

Folglich steht $\nabla g(p)$ senkrecht auf jeder Kurve in M durch p und deshalb senkrecht auf T_pM. Da a regulärer Wert von g ist, ist außerdem $\nabla g(p) \neq 0$. Folglich wird durch

$$N(p) := \frac{\nabla g(p)}{|\nabla g(p)|}$$

ein stetiges Einheitsnormalenfeld auf M definiert. $\square$

3.2 Zweite Fundamentalform und Weingarten-Abbildung

Wir betrachten eine orientierte Fläche M in $\mathbb{R}^3$, z.B. ein Flächenstück. Zur Gauß-Abbildung $N : M \to S^2$ beobachten wir

Bemerkung: Weil $N(p)$ für $p \in M$ senkrecht auf T_pM steht (Definition von N), und weil $N(p)$ senkrecht zu $T_{N(p)}S^2$ ist (wir kennen ja den Normalenvektor für S^2), folgt $T_pM = T_{N(p)}S^2$ für alle $p \in M$. Folglich kann das Differential der Gauß-Abbildung, $dN(p) : T_pM \to T_{N(p)}S^2$ als eine Abbildung

$$dN(p) : T_pM \to T_pM$$

aufgefasst werden. $\square$

Die Änderung des Normalenvektors misst natürlich die Änderung der Tangentialebene T_pM bei Änderung von p. Dies beschreibt die Krümmung der Fläche im Raum. Da man die Änderung von N mit p durch das Differential $dN(p)$ misst, muss die Krümmung von M also durch von $dN(p)$ abgeleiteten Grössen beschrieben sein. Deshalb hat $-dN(p)$ (mit historisch bedingtem Vorzeichen) einen Namen:

Definition (Weingarten-Abbildung) *Sei $M \subset \mathbb{R}^3$ reguläre orientierte Fläche (mindestens C^2) mit Gauß-Abbildung N. Für $p \in M$ wird durch $W_p := -dN(p)$ die* Weingarten-Abbildung *(oder der* Shape-Operator*)*

$$W_p : T_pM \to T_pM$$

definiert.

Beispiel: Für die Sphäre S^2 hatten wir $N(p) = \pm p$ gezeigt. Aus Gründen, die später klar werden, entscheidet man sich üblicherweise für die durch $N(p) = -p$ gegebene Orientierung. Es folgt, dass $W(p) = -dN(p) = \mathrm{id}_{T_pS^2}$ für alle $p \in S^2$ gilt. □

Eine grundlegende Beobachtung über W_p ist:

Lemma (W_p ist selbstadjungiert) *Sei $M \subset \mathbb{R}^3$ reguläre orientierte Fläche und $p \in M$. Dann ist W_p selbstadjungiert bezüglich des Skalarprodukts I_p auf T_pM.*

Beweis: Sei $p = \mathbf{x}(u, v)$ für eine lokale Parametrisierung (passend zur Orientierung); dann sind $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$ (jeweils an der Stelle (u, v)) eine Basis von T_pM. Weil $I_p(W_p(\mathbf{x}_u), \mathbf{x}_u) = I_p(\mathbf{x}_u, W_p(\mathbf{x}_u))$ und $I_p(W_p(\mathbf{x}_v), \mathbf{x}_v) = I_p(\mathbf{x}_v, W_p(\mathbf{x}_v))$ trivial sind, ist nur $I_p(W_p(\mathbf{x}_u), \mathbf{x}_v) = I_p(\mathbf{x}_u, W_p(\mathbf{x}_v))$, also

$$\mathbf{x}_v \cdot dN(p)\mathbf{x}_u = \mathbf{x}_u \cdot dN(p)\mathbf{x}_u$$

(mit dem Skalarprodukt von $\mathbb{R}^3$) nachzurechnen. Das wiederum ist dasselbe wie

$$\mathbf{x}_v \cdot (N \circ \mathbf{x})_u = \mathbf{x}_u \cdot (N \circ \mathbf{x})_v$$

an der Stelle (u, v) nach der Definition des Differentials (mit den Koordinatenlinien als Kurven). Um diese Gleichung zu beweisen, differenziern wir

$$\mathbf{x}_v \cdot (N \circ \mathbf{x}) \equiv 0, \qquad \mathbf{x}_u \cdot (N \circ \mathbf{x}) \equiv 0$$

partiell nach u bzw. v und erhalten

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{uv} \cdot (N \circ \mathbf{x}) + \mathbf{x}_v \cdot (N \circ \mathbf{x})_u = 0, \\ \mathbf{x}_{uv} \cdot (N \circ \mathbf{x}) + \mathbf{x}_u \cdot (N \circ \mathbf{x})_v = 0, \end{aligned}$$

woraus die Behauptung folgt. □

Jede selbstadjungierte lineare Abbildung stellt eine symmetrische Bilinearform dar:

Definition (zweite Fundamentalform) *Sei $M \subset \mathbb{R}^3$ reguläre orientierte Fläche (mindestens C^2) und $p \in M$. Die von der Weingarten-Abbildung dargestellte Bilinearform $I\!I_p$ auf T_pM mit*

$$I\!I_p(X,Y) := I_p(X, W_p(Y))$$

heißt die zweite Fundamentalform *von M in p. Die* Koeffizienten *von $I\!I_p$ bezüglich der Basis $\{\mathbf{x}_u(u,v), \mathbf{x}_v(u,v)\}$ (wo $\mathbf{x}(u,v) = p$) bezüglich einer lokalen Parametrisierung $\mathbf{x} : D \to M$ sind die Funktionen $l, m, n : D \to \mathbb{R}$, gegeben durch*

$$\begin{aligned} l(u,v) &:= I\!I_{\mathbf{x}(u,v)}(\mathbf{x}_u(u,v), \mathbf{x}_u(u,v)), \\ m(u,v) &:= I\!I_{\mathbf{x}(u,v)}(\mathbf{x}_u(u,v), \mathbf{x}_v(u,v)), \\ n(u,v) &:= I\!I_{\mathbf{x}(u,v)}(\mathbf{x}_v(u,v), \mathbf{x}_v(u,v)). \end{aligned}$$

Bemerkungen: (1) Da W_p bezüglich I_p selbstadjungiert ist, ist $I\!I_p$ symmetrisch.

(2) Zur Berechnung der Funktionen l, m, n gibt es geringfügig einfachere Formeln. Die letzten beiden Formeln im vorigen Beweis sind äquivalent (wenn man selbigen rückwärts liest und die Definition von $I\!I$ benutzt) zu

$$\mathbf{x}_{uv} \cdot (N \circ \mathbf{x}) - (I\!I \circ \mathbf{x})(\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v) = 0,$$

woraus wir

$$m = \mathbf{x}_{uv} \cdot (N \circ \mathbf{x})$$

folgern. Völlig analog sieht man

$$\begin{aligned} l &= \mathbf{x}_{uu} \cdot (N \circ \mathbf{x}), \\ n &= \mathbf{x}_{vv} \cdot (N \circ \mathbf{x}). \end{aligned}$$

(3) Moderner sind die Bezeichnungen $h_{11} = l$, $h_{12} = h_{21} = m$, $h_{22} = n$. □

Beispiele: (1) Die Sphäre S^2 hat $W_p = \mathrm{id}$ für alle $p \in S^2$ und deshalb $I\!I_p = I_p$. Bezüglich irgendeiner lokalen Parametrisierung ist also $l = E$, $m = F$ und $n = G$.

(2) Für den Graphen

$$\mathbf{x}(u,v) := (u, v, f(u,v))$$

einer C^2-Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ist

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_u &= (1, 0, f_u), \\ \mathbf{x}_v &= (0, 1, f_v), \\ \mathbf{x}_{uu} &= (0, 0, f_{uu}), \\ \mathbf{x}_{uv} &= (0, 0, f_{uv}), \\ \mathbf{x}_{vv} &= (0, 0, f_{vv}), \\ \mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v &= (-f_u, -f_v, 1), \\ N \circ \mathbf{x} &= \frac{1}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}} (-f_u, -f_v, 1), \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
l &= \frac{f_{uu}}{\sqrt{1+f_u^2+f_v^2}}\,, \\
m &= \frac{f_{uv}}{\sqrt{1+f_u^2+f_v^2}}\,, \\
n &= \frac{f_{vv}}{\sqrt{1+f_u^2+f_v^2}}\,.
\end{aligned}
$$

An einem kritischen Punkt von f ist $f_u = f_v = 0$, also $\left(\begin{smallmatrix} l & m \\ m & n \end{smallmatrix}\right)$ die Hesse-Matrix der Funktion f. $\square$

3.3 Äußere Krümmungsgrößen

Es gibt verschiedene Krümmungsbegriffe für Flächen. Wir beginnen mit der Normalkrümmung. Dazu sei M orientierbare reguläre C^2-Fläche, orientiert durch Auswahl eines Einheitsnormalenfeldes $N : M \to S^2$. Sei $\alpha : [-\varepsilon, \varepsilon] \to M$ eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve in M mit $\alpha(0) = p$. Krümmungsgrößen der Kurve α (aufgefasst als Raumkurve in $\mathbb{R}^3$) versehen wir mit einem Index α. Im Fall $\kappa_\alpha(0) \neq 0$ ist

$$\alpha''(0) = \kappa_\alpha(0) N_\alpha(0).$$

Dies spalten wir auf in einen Anteil der Krümmung "innerhalb von M" und einen Anteil, der "die Krümmung von M in $\mathbb{R}^3$" widerspiegelt. Also zerlegen wir zunächst $N_\alpha(0)$ in $N_\alpha(0)^\top \in T_pM$ und $N_\alpha(0)^\perp \perp T_pM$. Die Lineare Algebra sagt uns $N_\alpha(0)^\top = (N_\alpha(0)^\top \cdot N(p))N(p)$ und deshalb

$$\alpha''(0) = \kappa_\alpha(0) N_\alpha(0)^\top + \kappa_\alpha(0)(N_\alpha(0) \cdot N(p))N(p).$$

Der erste Summand hat mit der *geodätischen Krümmung* von α in M zu tun und wird uns später beschäftigen. Für den Moment betrachten wir den zweiten Summanden.

Definition (Normalkrümmung) *Sei $M \subset \mathbb{R}^3$ reguläre orientierte C^2-Fläche, $p \in M$ und $X \in T_pM$ mit $|X| = 1$. Die* Normalkrümmung $k_n(p, X)$ *von M in p in Richtung X ist wie folgt definiert: Für eine nach der Bogenlänge parametrisierte C^2-Kurve $\alpha : [-\varepsilon, \varepsilon] \to M$ mit $\alpha(0) = p$ und $\alpha'(0) = X$ setzen wir*

$$k_n(p, X) := \alpha''(0) \cdot N(p) = \begin{cases} \kappa_\alpha(0)(N_\alpha(0) \cdot N(p)) & \textit{falls } \kappa_\alpha(0) \neq 0, \\ 0 & \textit{falls } \kappa_\alpha(0) = 0. \end{cases}$$

Bemerkung: Es folgt $|k_n(p, X)| \leq \kappa_\alpha(0)$. Allerdings darf die Normalkrümmung (obwohl sie eine Komponente der zweiten Ableitungen von Kurven beschreibt) nur von $p = \alpha(0)$ und $X = \alpha'(0)$ abhängen, sonst ist die Normalkrümmung nicht wohldefiniert. Überraschenderweise ist das tatsächlich so, und das ist der Inhalt des folgenden Satzes:

Satz (Satz von Meusnier) *Sei $M \subset \mathbb{R}^3$ orientierte reguläre C^2-Fläche, $p \in M$, $X \in T_pM$ mit $|X| = 1$. Dann gilt für jede nach der Bogenlänge parametrisierte C^2-Kurve $\alpha : [-\varepsilon, \varepsilon] \to M$ mit $\alpha(0) = p$ und $\alpha'(0) = X$, dass*

$$\alpha''(0) \cdot N(p) = I\!I_p(X, X).$$

Insbesondere haben alle nach der Bogenlänge parametrisierten C^2-Kurven durch p mit demselben Tangentialvektor in p dort dieselbe Normalkrümmung (die damit von α'' überhaupt nicht abhängt!); es gilt also

$$k_n(p, X) = I\!I_p(X, X).$$

Beweis: Da α in M verläuft, ist $N(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) \equiv 0$. Folglich

$$\begin{aligned} 0 &= \tfrac{d}{dt}_{|t=0}(N(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t)) \\ &= [\tfrac{d}{dt}_{|t=0}N(\alpha(t))] \cdot \alpha'(0) + N(p) \cdot \alpha''(0) \\ &= (dN(p)\alpha'(0)) \cdot \alpha'(0) + k_n(\alpha(0), \alpha'(0)) \\ &= X \cdot dN(p)X + k_n(p, X) \\ &= -I\!I_p(X, X) + k_n(p, X), \end{aligned}$$

was zu beweisen war. □

Der Satz von Meusnier zeigt: Die zweite Fundamentalform von M beschreibt vollständig den "ußeren" Anteil der Krümmung von Kurven in M, und dabei weitgehend unabhängig von der Auswahl der Kurve, so dass wir die Normalkrümmungen $k_n(p, X) = I\!I_p(X, X)$ tatsächlich als Eigenschaften der Fläche betrachten dürfen. Für festgehaltenes $p \in M$ ist also $k_n(p, X)$ eine quadratische Form in X, die (wie wir schon gesehen haben) durch die Weingarten-Abbildung W_p dargestellt wird:

$$k_n(p, X) = I\!I_p(X, X) = X \cdot W_p(X).$$

Weil $W_p : T_pM \to T_pM$ selbstadjungiert ist, hat es eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren:

Definition (Hauptkrümmungen) *Sei $M \subset \mathbb{R}^3$ orientierte reguläre C^2-Fläche, $p \in M$. Die Eigenwerte $k_1(p) \leq k_2(p)$ von $W_p : T_pM \to T_pM$ heißen die* Hauptkrümmungen *von M in p. Zugehörige normierte Eigenvektoren heißen* Hauptkrümmungsrichtungen.

Bemerkungen: (1) Nach der geometrischen Interpretation von $X \cdot W_p(X)$ als Normalkrümmung haben die Hauptkrümmungsrichtungen eine unmittelbare Bedeutung: Es handelt sich um die Richtungen kleinster bzw. größter Normalkrümmung (unter den Einheitsvektoren). Denn sind X_1, X_2 die Hauptkrümmungsrichtungen und $X = X_1 \cos\varphi + X_2 \sin\varphi$ irgendein Einheitsvektor, dann ist

$$k(p, X) = I\!I_p(X, X) = k_1(p) \cos^2\varphi + k_2(p) \sin^2\varphi,$$

woran man die Behauptung abliest. Ist $k_1(p) = k_2(p)$, so ist jede Richtung in T_pM Hauptkrümmungsrichtung.

(2) Man kann sich die Normalkrümmung $k_n(p, X)$ nach dem Satz von Meusnier auch wie folgt veranschaulichen: Sei α die Kurve, die man durch Schnitt von M mit der affinen Ebene $p + \mathbb{R}X + \mathbb{R}N(p)$ erhält; diese ist nach dem Satz über die implizite Funktion regulär nahe p, und ihre Krümmung in p ist betragsmäßig gleich ihrer Normalkrümmung, also gleich $|k_n(p, X)|$. Das gibt eine noch etwas direktere Veranschaulichung der Hauptkrümmungen und Hauptkrümmungsrichtungen. □

Aus den Eigenwerten einer symmetrischen Matrix berechnet man ja unter anderem auch Spur und Determinante; die zugehörigen Größen für W_p sind die wichtigsten "äußeren" Krümmungsgrößen:

Definition (Gauß-Krümmung und mittlere Krümmung) *Sei $M \subset \mathbb{R}^3$ eine reguläre orientierte C^2-Fläche, $p \in M$. Dann heißt*

$$K(p) := k_1(p)k_2(p) = \det W_p$$

die Gauß-Krümmung *von M in p und*

$$H(p) := \frac{k_1(p) + k_2(p)}{2} = \frac{1}{2} \operatorname{Spur} W_p$$

die mittlere Krümmung *von M in p.*

Bemerkungen: (1) Oft wird der Faktor $\frac{1}{2}$ in der Definition der mittleren Krümmung weggelassen. Eine Uneinigkeit mehr, die zu heilloser Verwirrung führen kann!

(2) Man bemerke, dass H von der Orientierung abhängt, da es bei anderer Wahl von N sein Vorzeichen ändert. Als Produkt der beiden Eigenwerte ist aber K unabhängig von der Orientierung. □

Beispiele: (1) Für die Sphäre S^2, orientiert durch $N(p) = -p$, hatten wir $W_p = \mathrm{id}_{T_pM}$ für alle $p \in S^2$ ausgerechnet. Folglich gelten $K \equiv 1$ und $H \equiv 1$ auf S^2. Da man Sphären als *positiv* gekrümmt ansieht, ist hier der Grund für die Orientierung $N(p) = -p$ zu sehen (sonst wäre $H \equiv -1$.

(2) Für den *Zylinder*

$$M := S^1 \times \mathbb{R} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$$

haben wir offensichtlich

$$N(x, y, z) = -(x, y, 0)$$

(oder das Negative davon). Wir könnten mit Hilfe einer Parametrisierung $W = -dN(p)$ ausrechnen; aber in diesem Fall erhält man die Krümmungen weniger mühsam. Denn die oben beschriebene Interpretation der Normalkrümmungen zeigt, dass k_n in jedem Punkt zwischen 0 und 1 (oder -1) variiert (BILDER!), also gelten $k_1(p) = 0$ und

$k_2(p) = 1$ in jedem Punkt; folglich $K \equiv 0$ und $H \equiv \frac{1}{2}$. $\square$

Die Gauß-Krümmung wird auch für folgende Klassifizierung von Punkten einer Fläche benutzt:

Definition (Klassifizierung von Punkten einer Fläche) *Ein Punkt p einer C^2-Fläche $M \subset \mathbb{R}^3$ heißt*

(i) elliptisch*, falls $K(p) > 0$,*

(ii) hyperbolisch*, falls $K(p) < 0$,*

(iii) parabolisch*, falls $K(p) = 0$, aber $W_p \neq 0$,*

(iv) Flachpunkt*, falls $W_p = 0$.*

Letzteres sind Alternativen. Ein Punkt mit $k_1(p) = k_2(p)$ (das kann ein elliptischer oder ein Flachpunkt sein) heißt ein Nabelpunkt *von M.*

Die Namen erklären sich weiter unten in den Beispielen.

Die Krümmungen sind ohne Bezug auf eine Parametrisierung definiert; trotzdem sind sie nur in seltenen Beispielen ohne Benutzung einer lokalen Parametrisierung auszurechnen. Dafür benötigen wir Formeln:

Lemma (Berechnung von K und H) *Sei $\mathbf{x} : \mathbb{R}^2 \supseteq D \to \mathbb{R}^3$ ein reguläres C^2-Flächenstück. Dann ist*

$$\begin{aligned} K \circ \mathbf{x} &= \frac{\det(h_{ij})}{\det(g_{ij})} = \frac{ln - m^2}{EG - F^2}, \\ H \circ \mathbf{x} &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{2} h_{ij} g^{ij} = \frac{1}{2} \frac{En - 2Fm + Gl}{EG - F^2}, \end{aligned}$$

wobei (g^{ij}) die zu (g_{ij}) inverse Matrix bezeichne.

Beweis: Das jeweils zweite "=" ist simple Lineare Algebra; zu zeigen ist also nur jeweils das erste. Wir schreiben $u = (u^1, u^2)$ statt (u, v) und $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ statt $\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v$.

Sei $(w_i^k(u))$ die Matrix, die $W_{\mathbf{x}(u)}$ bezüglich der Basis $\{\mathbf{x}_1(u), \mathbf{x}_2(u)\}$ darstellt, also

$$W_{\mathbf{x}(u)}(\mathbf{x}_i(u)) = \sum_{k=1}^{2} w_i^k(u) \mathbf{x}_k(u).$$

Wir multiplizieren mit $\mathbf{x}_j(u)$ und erhalten

$$h_{ij}(u) = \sum_{k=1}^{2} w_i^k(u) g_{kj}(u)$$

Daraus folgern wir durch Auflösen des LGS nach $w_i^k(u)$

$$w_i^k(u) = \sum_{j=1}^{2} h_{ij}(u) g^{jk}(u).$$

Das Lemma folgt, indem wir von dieser Gleichung die Determinante und die Spur bilden. $\Box$

Bemerkung: (1) Der Beweis zeigt klar, wie die moderne Bezeichnung der Matrizen $\left(\begin{smallmatrix} E & F \\ F & G \end{smallmatrix}\right)$ und $\left(\begin{smallmatrix} l & m \\ m & n \end{smallmatrix}\right)$ besser mit Linearer Algebra zusammenpassen. Trotzdem sind die indexfreien klassischen Bezeichnungen weiterhin beliebt. $\Box$

Der Beweis zeigt, dass W_p bezüglich der Basis $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$ durch die Matrix $\left(\begin{smallmatrix} l & m \\ m & n \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} E & F \\ F & G \end{smallmatrix}\right)^{-1}$ dargestellt wird. Weil $W_p = -dN$ ist und $(N \circ \mathbf{x})_u = dN\mathbf{x}_u$, $(N \circ \mathbf{x})_v = dN\mathbf{x}_v$, folgt

Lemma (Weingarten-Gleichungen) *Die Ableitungen von $N \circ \mathbf{x}$ werden durch*

$$\begin{pmatrix} (N \circ \mathbf{x})_u \\ (N \circ \mathbf{x})_v \end{pmatrix} = -\frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} l & m \\ m & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_u \\ \mathbf{x}_v \end{pmatrix}$$

dargestellt, d.h.

$$\begin{aligned} (N \circ \mathbf{x})_u &= \frac{Fm - Gl}{EG - F^2} \mathbf{x}_u + \frac{Fl - Em}{EG - F^2} \mathbf{x}_v, \\ (N \circ \mathbf{x})_v &= \frac{Fn - Gm}{EG - F^2} \mathbf{x}_u + \frac{Fm - En}{EG - F^2} \mathbf{x}_v. \end{aligned}$$

Beipiele (Fortsetzung): **(3)** Für den Funktionsgraphen $\mathbf{x} : \mathbb{R}^2 \supseteq D \to \mathbb{R}^3$,

$$\mathbf{x}(u, v) := (u, v, f(u, v)),$$

einer C^2-Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ hatten wir

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 + f_u^2 & f_u f_v \\ f_u f_v & 1 + f_v^2 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} l & m \\ m & n \end{pmatrix} &= \frac{1}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}} \begin{pmatrix} f_{uu} & f_{uv} \\ f_{uv} & f_{vv} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} K \circ \mathbf{x} &= \frac{f_{uu} f_{vv} - f_{uv}^2}{(1 + f_u^2 + f_v^2)^2}, \\ H \circ \mathbf{x} &= \frac{(1 + f_u^2) f_{vv} - 2 f_u f_v f_{uv} + (1 + f_v^2) f_{uu}}{2(1 + f_u^2 + f_v^2)^{3/2}}. \end{aligned}$$

In kritischen Punkten (u, v) mit $Df(u, v) = 0$ haben wir insbesondere

$$\begin{aligned} K(\mathbf{x}(u,v)) &= \det D^2 f(u,v), \\ H(\mathbf{x}(u,v)) &= \frac{1}{2} \operatorname{Spur} D^2 f(u,v) \end{aligned}$$

als “einleuchtende” Formeln.

(4) Da $K \equiv 1$ auf der Sphäre gilt, ist jeder Punkt der Sphäre S^2 ein elliptischer Punkt.

Für den Zylinder hatten wir gesehen, dass $k_1(p) = 0$ und $k_2(p) = 1$, folglich ist jeder Punkt parabolisch.

Das *hyperbolische Paraboloid* ist der Graph von $f(u, v) = u^2 - v^2$; es gilt

$$K(\mathbf{x}(u,v)) = \frac{-4}{(1 + 4u^2 + 4v^2)^2}$$

nach Beispiel (3), also ist jeder Punkt hyperbolisch.

Der Graph von $f(u, v) = u^4 + v^4$ hat einen Flachpunkt in $(0, 0, 0)$, alle anderen Punkte sind elliptisch. Auch das folgt aus Beispiel (3). □

In der Sphäre vom Radius r ($k_1 = k_2 \equiv \frac{1}{r}$) oder der Ebene ($k_1 = k_2 \equiv 0$) sind alle Punkte Nabelpunkte. Als ersten kleinen Satz über Krümmungen beweisen wir:

Satz (Nabelflächen) *Sind alle Punkte einer zusammenhängenden C^3-Fläche M Nabelpunkte, so ist M entweder in einer Sphäre oder einer Ebene enthalten.*

Beweis: Es sei $p \in M$ und $\mathbf{x} : D \to M$ lokale Parametrisierung von M bei p mit zusammenhängendem D. Da jedes $\mathbf{x}(u, v)$ für $(u, v) \in D$ Nabelpunkt ist, gilt für jeden Vektor $Y \in T_{\mathbf{x}(u,v)}M$

$$W_{\mathbf{x}(u,v)}(Y) = \lambda(u,v)Y$$

mit einer C^1-Funktion $\lambda : D \to \mathbb{R}$. Wegen $W_{\mathbf{x}(u,v)} = -dN(\mathbf{x}(u, v))$ folgt durch Einsetzen von $\mathbf{x}_u$ und $\mathbf{x}_v$ für Y

$$(N \circ \mathbf{x})_u = -\lambda \mathbf{x}_u, \qquad (N \circ \mathbf{x})_v = -\lambda \mathbf{x}_v.$$

Wir differenzieren die erste Gleichung nach v, die zweite nach u, und subtrahieren. So erhalten wir

$$\lambda_u \mathbf{x}_v - \lambda_v \mathbf{x}_u = 0,$$

woraus

$$\lambda_u = \lambda_v = 0$$

mit der linearen Unabhängigkeit von $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$ folgt. Es folgt

$$\lambda \equiv \text{const}$$

auf D; hier braucht man, dass D zusammenhängend ist.

Ist nun $\lambda \equiv 0$, dann ist $(N \circ \mathbf{x})_u = (N \circ \mathbf{x})_v = 0$ auf D; es folgt

$$(\mathbf{x} \cdot (N \circ \mathbf{x}))_u = \mathbf{x}_u \cdot (N \circ \mathbf{x}) = 0$$

und die entsprechende Gleichung mit v statt u; Also gilt

$$\mathbf{x} \cdot (N \circ \mathbf{x}) = \text{const},$$

und $\mathbf{x}(D)$ liegt in einer Ebene.

Ist $\lambda \equiv \text{const} \neq 0$, dann berechnen wir

$$(\mathbf{x} + \lambda^{-1}(N \circ \mathbf{x}))_u = \mathbf{x}_u - \mathbf{x}_u = 0$$

(und genauso für v), also

$$\mathbf{x} + \lambda^{-1}(N \circ \mathbf{x}) \equiv \text{const} =: y.$$

Es folgt

$$|\mathbf{x} - y|^2 \equiv \lambda^{-2},$$

also liegen alle Punkte von $\mathbf{x}(D)$ in der Sphäre vom Radius $|\lambda|^{-1}$ um y.

Damit ist der Satz lokal bewiesen. Ein Überdeckungsargument liefert die globale Aussage. (Benutze, dass je zwei Punkte durch eine Kurve in M verbunden werden können, die in der Vereinigung von endlich vielen Koordinatenumgebungen liegt.) $\square$

In jedem Punkt p einer Fläche M, der nicht Nabelpunkt ist, gibt es zwei ausgezeichnete Hauptkrümmungsrichtungen. Dazu gibt es "Integralkurven":

Definition (Krümmungslinie) *Sei $M \subset \mathbb{R}^3$ reguläre C^2-Fläche. Die Spur einer (o.B.d.A) nach der Bogenlänge parametrisierten Kurve $\alpha : I \to M$ heißt eine* Krümmungslinie *von M, falls $\alpha'(t)$ für jedes $t \in I$ eine Hauptkrümmungsrichtung von M bei $\alpha(t)$ ist.*

Das folgende Lemma gibt eine einfache Charakterisierung der Krümmungslinien:

Lemma (Rodrigues) *Sei M eine C^2-Fläche in $\mathbb{R}^3$, $\alpha : I \to M$ eine reguläre C^1-Kurve. Dann sind äquivalent:*

(i) Die Spur von α ist Krümmungslinie;

(ii) α erfüllt die Differentialgleichung $(N \circ \alpha)'(t) = \lambda(t)\alpha'(t)$ für alle $t \in I$, mit einer stetigen Funktion $\lambda : I \to \mathbb{R}$.

(iii) Jede C^1-Umparametrisierung von $\gamma : J \to M$ von α erfüllt die Differentialgleichung $(N \circ \gamma)'(t) = \lambda_\gamma(t)\gamma'(t)$ für alle $t \in J$ mit einer stetigen Funktion $\lambda_\gamma : J \to \mathbb{R}$.

Beweis: (ii)$\Rightarrow$(iii) ist trivial. Für (i)$\Rightarrow$(ii) und (iii)$\Rightarrow$(i) reicht es zu erwähnen, dass $\alpha'(t)/|\alpha'(t)|$ genau dann eine Hauptkrümmungsrichtung ist, wenn $\alpha'(t)$ ein Eigenvektor von dN ist (was $(N \circ \alpha)'(t) = dN(\alpha'(t)) = \lambda(t)$ heißt wegen der Kettenregel). $\square$

3.4 Vektorfelder

Zuletzt haben wir schon die Hauptkrümmungsrichtungen in stetiger Abhängigkeit vom Punkt betrachtet. In diesem Zusammenhang definieren wir:

Definition (Vektorfeld) *Sei $M \subset \mathbb{R}^3$ reguläre Fläche (der Klasse C^k). Ein Vektorfeld (der Klasse C^k) auf M ist eine stetige (bzw. C^k-) Abbildung $W : M \to \mathbb{R}^3$, für die*

$$W(p) \in T_pM \qquad \text{für alle } p \in M$$

gilt.

Also wird jedem Punkt ein an M tangentieller Vektor in diesem Punkt zugeordnet.

Beispiele: (1) Für festes $Y \in S^2$ wird auf S^2 durch

$$W(p) := Y - (Y \cdot p)p$$

ein glattes Vektorfeld definiert.

(2) Ist M der Graph der glatten Funktion $f : D \to \mathbb{R}$, parametrisiert durch $\mathbf{x} : D \to \mathbb{R}^3$, $\mathbf{x}(u, v) := (u, v, f(u, v))$, dann werden durch

$$\begin{aligned} W_1(\mathbf{x}(u,v)) &= (1, 0, f_u(u,v)), \\ W_2(\mathbf{x}(u,v)) &= (0, 1, f_v(u,v)) \end{aligned}$$

zwei Vektorfelder auf M definiert. □

Die Vektorfelder aus Beispiel (2) sind Spezialfälle von

Definition (Koordinatenvektorfelder) *Ist $M \subset \mathbb{R}^3$ reguläre C^1-Fläche, $\mathbf{x} : D \to M$ eine lokale Parametrisierung, so heißen $\mathbf{x}_u \circ \mathbf{x}^{-1}$ und $\mathbf{x}_v \circ \mathbf{x}^{-1}$ die* Koordinatenvektorfelder *zu $\mathbf{x}$; es sind Vektorfelder auf $\mathbf{x}(D) \subseteq M$.*

Bemerkung: Ist $\mathbf{x}$ von der Klasse C^k, dann sind die Koordinatenvektorfelder im Allgemeinen nur C^{k-1}. □

Zu jedem Vektorfeld W auf M kann man die Frage nach Kurven stellen, die die Differentialgleichung

$$\alpha'(t) = W(\alpha(t))$$

lösen. Eine solche Kurve heißt eine *Trajektorie* von W. Die Sätze über Existenz, Eindeutigkeit und stetige Abhängigkeit von den Daten für gewöhnliche Differentialgleichungen lassen sich auf diese Differentialgleichung anwenden (zumindest wenn man mit Hilfe lokaler Parametrisierungen in Koordinaten rechnet). Man erhält

Satz (Fluss eines Vektorfelds) *Es sei W ein Vektorfeld auf einer regulären Fläche $M \subset \mathbb{R}^3$. Ist $p \in M$ gegeben, so gibt es eine Trajektorie $\alpha : I \to M$ mit $\alpha(0) = p$ für ein Intervall $I \ni 0$. Sie ist eindeutig in dem Sinne, dass jede andere solche Trajektorie mit dieser auf dem Schnitt der Definitionsbereiche übereinstimmt.*

Ferner hängt die Trajektorie differenzierbar von $p \in M$ ab, in folgendem Sinne: Zu jedem $p \in M$ gibt es eine Umgebung U von p in M, ein Intervall I und eine differenzierbare Abbildung $\varphi : U \times I \to M$, so dass $\alpha_q(t) := \varphi(q,t)$ für jedes $q \in V$ die Trajektorie von W mit $\alpha_q(0) = q$ ist. Anders ausgedrückt erfüllt φ die Gleichungen

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}(q,t) = W(\varphi(q,t)), \qquad \varphi(q,0) = q$$

für alle $q \in U$, $t \in I$. Diese Abbildung φ heißt der (lokale) Fluss *von W.*

Wir benötigen die folgende Konsequenz dieses Satzes:

Lemma (erstes Integral) *Es sei W ein Vektorfeld aus einer regulären Fläche $M \subset \mathbb{R}^3$ und $p \in M$ erfülle $W(p) \neq 0$. Dann gibt es eine Umgebung U von p in M und eine Funktion $f : U \to \mathbb{R}$, so dass f konstant ist auf jeder Trajektorie von W und $df(q) \neq 0$ für alle $q \in U$. Eine solche Funktion heißt ein* erstes Integral *von W auf U.*

Beweis: Es sei $\mathbf{x} : D \to M$ eine lokale Parametrisierung, von der wir annehmen dürfen, dass $\mathbf{x}(0,0) = p$ und $D\mathbf{x}(0,0)\binom{1}{0} = W(p)$. Definiere ein Vektorfeld $Z(u,v) := D\mathbf{x}(u,v)^{-1}W(\mathbf{x}(u,v))$; nach früheren Überlegungen ist dies wohldefiniert und so glatt wie $\mathbf{x}$ und W zulassen. Sei jetzt $\varphi : U \times I \to D$ (mit Nullumgebung $V \subseteq D$ und Intervall I hinreichend klein) der lokale Fluss von Z bei $(0,0)$. Die Einschränkung von φ auf das (o.B.d.A.) Rechteck $\{(u,v,t) \in V \times I : u = 0\}$ bezeichnen wir mit $\tilde{\varphi}$. Nach Definition des Flusses ist

$$D\tilde{\varphi}(0,0)e_v = e_v, \qquad D\tilde{\varphi}(0,0)e_t = e_x$$

(mit den Einheitsvektoren e_u, e_v, e_t). Folglich ist $D\tilde{\varphi}(0,0)$ nicht singuläre Abbildung zwischen der v-t-Ebene und der u-v-Ebene. Nach dem Umkehrsatz existiert also eine Umgebung $\widetilde{V} \subseteq V$ von $(0,0)$, auf der $\tilde{\varphi}^{-1}$ definiert und differenzierbar ist. Die Projektion von $\tilde{\varphi}^{-1}$ auf die v-Komponente ist deshalb eine differenzierbare Funktion g, falls $\widetilde{V}$ klein genug, und sie ist konstant auf jeder Trajektorie durch $(0,v)$, nämlich konstant gleich v. Weil $D\tilde{\varphi}(0,0)$ nicht singulär ist, kann durch Verkleinerung von $\widetilde{V}$ auch $D\tilde{p}$ als nichtsingulär auf $\widetilde{V}$ angenommen werden; es folgt $Dg \neq 0$ auf $\widetilde{V}$. Die Behauptung des Lemmas folgt mit der Definition $f := g \circ \mathbf{x}^{-1}$. $\square$

Beispiel: Auf S^2 wird ein Vektorfeld durch

$$W(x,y,z) := (y, -x, 0)$$

gegeben. Ein erstes Integral ist

$$f(x,y,z) := x^2 + y^2 = 1 - z^2,$$

jedenfalls außerhalb der Pole. Die Flusslinien des Vektorfelds sind die Niveaulinien des ersten Integrals. $\square$

Nun zum Hauptergebnis dieses Abschnitts:

Satz (Parametrisierungen mit vorgeschriebenen Koordinatenrichtungen) *Es sei M reguläre Fläche, W_1 und W_2 zwei Vektorfelder auf M, $p \in M$. Sind $W_1(p)$ und $W_2(p)$ linear unabhängig, so gibt es eine Umgebung V von p in M und eine lokale Parametrisierung $\mathbf{x} : D \to v$, so dass für alle $(u, v) \in D$ gilt: $\mathbf{x}_u(u, v)$ hat dieselbe Richtung wie $W_1(\mathbf{x}(u, v))$ und $\mathbf{x}_v(u, v)$ hat dieselbe Richtung wie $W_2(\mathbf{x}(u, v))$.*

Bemerkung: Der Satz sagt nicht, dass es mit $\mathbf{x}_u(u, v) = W_1(\mathbf{x}(u, v))$ und $\mathbf{x}_v(u, v) = W_2(u, v)$ geht.

Beweis: Es sei U eine Umgebung von p, auf der die ersten Integrale f_1 und f_2 zu W_1 und W_2 definiert sind. Mit diesen definieren wir $f : U \to \mathbb{R}$ durch

$$f(q) := (f_1(q), f_2(q)).$$

Aus den Eigenschaften der ersten Integrale folgt

$$df(p)W_1(p) = (0, df_2(p)W_1(p)) \neq 0, \qquad df(p)W_2(p) = (df_1(p)W_2(p), 0) \neq 0.$$

Also ist $df(p)$ nicht singulär und folglich f ein lokaler Diffeomorphismus bei p. Setze nun $\mathbf{x} := f^{-1}$ auf einer hinreichend kleinen Umgebung, auf der f ein Diffeomorphismus ist. Die Koordinatenlinien $u = \text{const}$ bzw. $v = \text{const}$ von $\mathbf{x}$ entsprechen den Mengen $f_1(q) = \text{const}$ bzw. $f_2(q) = \text{const}$, also haben sie die durch W_1 bzw. W_2 bestimmten Richtungen. $\square$

Eine erste Anwendung dieses Satzes ist

Korollar (orthogonale Parametrisierung) *Sei $M \subset \mathbb{R}^3$ reguläre Fläche. Zu jedem $p \in M$ gibt es eine lokale Parametrisierung $\mathbf{x} : D \to M$ bei p, für die sich die Koordinatenlinien $u \mapsto \mathbf{x}(u, v)$ und $v \mapsto \mathbf{x}(u, v)$ überall orthogonal schneiden, für die also $F \equiv 0$ gilt. (Eine solche Parametrisierung heißt* orthogonal*).*

Beweis: Sei $\tilde{\mathbf{x}} : \widetilde{D} \to M$ irgendeine lokale Parametrisierung von m bei p, mit den Koeffizienten $\widetilde{E}, \widetilde{F}, \widetilde{G}$ der ersten Fundamentalform. Dann sind durch

$$\begin{aligned} W_1(\tilde{\mathbf{x}}(u, v)) &:= \tilde{\mathbf{x}}_u(u, v), \\ W_2(\tilde{\mathbf{x}}(u, v)) &:= \tilde{\mathbf{x}}_v(u, v) - \frac{\widetilde{F}(u, v)}{\widetilde{E}(u, v)} \tilde{\mathbf{x}}_u(u, v) \end{aligned}$$

in jedem Punkt orthogonale Vektorfelder gegeben, auf die sich der Satz anwenden lässt, um die orthogonale Parametrisierung lokal zu konstruieren. $\square$

Ein weiteres Korollar beschäftigt sich mit Parametrisierungen, die an die Krümmung besonders angepasst sind:

Korollar (Krümmungslinien als Koordinatenkurven) *Es sei $M \subset \mathbb{R}^3$ eine reguläre C^2-Fläche und $p \in M$ kein Nabelpunkt. Dann gibt es eine lokale Parametrisierung $\mathbf{x} : D \to M$ bei p, für die die Koordinatenlinien (als Mengen aufgefasst) die Krümmungslinien von M sind.*

Bemerkung: Das bedeutet $m \equiv 0$, weil dann $\binom{l\ m}{m\ n}$ in diesen Koordinaten diagonalisiert ist; wir haben also eine zum vorigen Korollar analoge Aussage für die zweite Fundamentalform. Allerdings sind die Krümmungslinien immer senkrecht zueinander, so dass zusätzlich auch $F \equiv 0$ gilt!

Beweis: Ist p kein Nabelpunkt, dann gibt es (wegen der stetigen Abhängigkeit von I_q und $I\!I_q$ von q) eine Umgebung von p in M ohne Nabelpunkte, auf der die Hauptkrümmungsrichtungen (bis aufs Vorzeichen) wohldefiniert und linear unabhängig (sogar orthogonal) sind, also zwei wohldefinierte linear unabhängige Vektorfelder bilden. Der Satz liefert dazu eine Parametrisierung, deren Koordinatenlinien tangential an diese Vektorfelder sind; das sind aber genau die Krümmungslinien. □

3.5 Die Gauß-Krümmung

Dieses Kapitel leitet schon über in das Thema der *inneren Krümmung* von Flächen. Als innere geometrische Größen betrachtet man solche, die nur von den metrischen Verhältnissen innerhal ber Fläche abhängen, ohne Bezug auf den umgebenden $\mathbb{R}^3$. Wie wir schon gesehen haben, können die metrischen Größen der Fläche vollständig mit Hilfe der *ersten* Fundamentalform ausgedrückt werden. Es wird sich herausstellen, dass das auch (trotz des "äußeren" Charakters der einzelnen Hauptkrümmungen) für die Gauß-Krümmung gilt, die damit eine innere Krümmung der Fläche ist! Das ist unser nächstes Ziel.

Dazu benötigen wir zunächst einige Vorbereitungen. An jeder Stelle $\mathbf{x}(u,v)$ eines Flächenstücks ist $\{\mathbf{x}_u(u,v), \mathbf{x}_v(u,v), N(\mathbf{x}(u,v))\}$ eine natürliche "mitbewegte" Basis des $\mathbb{R}^3$. Bezüglich dieser Basis entwickeln wir $\mathbf{x}_{uu}$, $\mathbf{x}_{uv}$ und $\mathbf{x}_{vv}$. Die Komponenten in Normalenrichtung haben wir dabei schon früher als l, m, n identifiziert:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_{uu} &= \Gamma^u_{uu}\mathbf{x}_u + \Gamma^v_{uu}\mathbf{x}_v + l(N \circ \mathbf{x}),\\
\mathbf{x}_{uv} &= \Gamma^u_{uv}\mathbf{x}_u + \Gamma^v_{uv}\mathbf{x}_v + m(N \circ \mathbf{x}),\\
\mathbf{x}_{vv} &= \Gamma^u_{vv}\mathbf{x}_u + \Gamma^v_{vv}\mathbf{x}_v + n(N \circ \mathbf{x}).
\end{aligned}$$

Dabei sind die Γ^u_{uu} noch zu berechnende Koeffizientenfunktionen, die zunächst einmal einen Namen bekommen.

Definition (Christoffel-Symbole) *Es sei $\mathbf{x} : D \to \mathbb{R}^3$ ein reguläres C^2-Flächenstück. Für $i, j, k \in \{u, v\}$ heißen die Koeffizientenfunktionen $\Gamma^k_{ij} : D \to \mathbb{R}$ von $\mathbf{x}_{ij}$ bezüglich der Basis $\{\mathbf{x}_k\}_{k\in\{u,v\}}, N \circ \mathbf{x}$ die* Christoffel-Symbole *des Flächenstücks.*

Bemerkung: Wegen der Vertauschbarkeit partieller Ableitungen folgt sofort $\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}$ für alle i, j, k. □

Oft (und moderner) schreibt man $\{1,2\}$ statt $\{u,v\}$. Natürlich wollen wir die Christoffel-Symbole berechnen können:

Lemma (Berechnung der Christoffel-Symbole) *Sei $\mathbf{x} : D \to \mathbb{R}^3$ ein C^2-Flächenstück. Für $i,j,k \in \{u,v\}$ gelten dann*

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_{s\in\{u,v\}} g^{sk}(\partial_i g_{js} + \partial_j g_{si} - \partial_s g_{ij}),$$

wobei mit (g^{ij}) wie üblich die zu (g_{ij}) inverse Matrix gemeint ist.

Bemerkung: Damit hängen die Christoffel-Symbole also ausschließlich von E, F, G, E_u, F_u, G_u, E_v, F_v, G_v ab.

Beweis: Mit der Produktregel und $N(\mathbf{x}(u,v)) \perp T_{\mathbf{x}(u,v)}\mathbf{x}(D)$ berechnen wir, wobei wir $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$ für das Skalarprodukt in $\mathbb{R}^3$ schreiben und alle Summen über $\{u,v\}$ gehen,

$$\begin{aligned}
\partial_s g_{ij} &= \partial_s\langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j\rangle \\
&= \langle \mathbf{x}_{si}, \mathbf{x}_j\rangle + \langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{sj}\rangle \\
&= \langle \sum_r \Gamma_{si}^r \mathbf{x}_r, \mathbf{x}_j\rangle + \langle \mathbf{x}_i, \sum_r \Gamma_{sj}^r \mathbf{x}_r\rangle \\
&= \sum_r (\Gamma_{si}^r g_{rj} + \Gamma_{sj}^r g_{ri}).
\end{aligned}$$

Völlig analog haben wir nach zyklischer Vertauschung von i,j,s

$$\begin{aligned}
\partial_i g_{js} &= \sum_r (\Gamma_{ij}^r g_{rs} + \Gamma_{is}^r g_{rj}), \\
\partial_j g_{si} &= \sum_r (\Gamma_{js}^r g_{ri} + \Gamma_{ji}^r g_{rs}).
\end{aligned}$$

Wir addieren die letzten beiden Gleichungen und ziehen die erste ab. Damit erhalten wir

$$\partial_i g_{js} + \partial_j g_{si} - \partial_s g_{ij} = 2\sum_r \Gamma_{ij}^r g_{rs}.$$

Multiplikation mit g^{sk} und Summation über s gibt zusammen mit $\sum_s g_{rs}g^{sk} = \delta_r^k$ die Behauptung. $\square$

Damit kennen wir die partiellen Ableitungen der Basis $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, N\circ\mathbf{x}\}$ von $\mathbb{R}^3$, die analog zur Theorie der Kurven ein "mitbewegtes Dreibein" für ein Flächenstück bilden. Wir fassen nämlich obige Überlegungen mit den Weingarten-Gleichungen zusammen zu

Lemma (Fundamentale Beschleunigungsformeln) *Für ein C^2-Flächenstück $\mathbf{x} : D \to \mathbb{R}^3$ gelten (wobei die Christoffel-Symbole wie oben berechnet werden können)*

$$\mathbf{x}_{uu} = \Gamma_{uu}^u \mathbf{x}_u + \Gamma_{uu}^v \mathbf{x}_v + l(N\circ\mathbf{x}),$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x}_{uv} &= \Gamma^u_{uv}\mathbf{x}_u + \Gamma^v_{uv}\mathbf{x}_v + m(N\circ\mathbf{x}) \;=\; \mathbf{x}_{vu},\\
\mathbf{x}_{vv} &= \Gamma^u_{vv}\mathbf{x}_u + \Gamma^v_{vv}\mathbf{x}_v + n(N\circ\mathbf{x}),\\
(N\circ\mathbf{x})_u &= \frac{Fm-Gl}{EG-F^2}\,\mathbf{x}_u + \frac{Fl-Em}{EG-F^2}\,\mathbf{x}_v,\\
(N\circ\mathbf{x})_v &= \frac{Fn-Gm}{EG-F^2}\,\mathbf{x}_u + \frac{Fm-En}{EG-F^2}\,\mathbf{x}_v.
\end{aligned}
$$

Als nächstes wollen wir systematisch Relationen zwischen den Koeffizienten der Fundamentalformen und den Christoffel-Symbolen herleiten. Dazu nehmen wir an, dass $\mathbf{x}$ mindestens C^3 ist und benutzen Vertauschbarkeit partieller Ableitungen in der Form

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{x}_{uu})_v - (\mathbf{x}_{uv})_u &= 0,\\
(\mathbf{x}_{vv})_u - (\mathbf{x}_{uv})_v &= 0.
\end{aligned}
$$

Dazu differenzieren wir einfach die Beschleunigungsformeln noch einmal durch. So ergibt sich aus der ersten Gleichung

$$
\begin{aligned}
&\Gamma^u_{uu}\mathbf{x}_{uv} + \Gamma^v_{uu}\mathbf{x}_{vv} + l(N\circ\mathbf{x})_v + (\Gamma^u_{uu})_v\mathbf{x}_u + (\Gamma^v_{uu})_v\mathbf{x}_v + l_v(N\circ\mathbf{x})\\
&\quad= \Gamma^u_{uv}\mathbf{x}_{uu} + \Gamma^v_{uv}\mathbf{x}_{uv} + m(N\circ\mathbf{x})_u + (\Gamma^u_{uv})_u\mathbf{x}_u + (\Gamma^v_{uv})_u\mathbf{x}_v + m_u(N\circ\mathbf{x}).
\end{aligned}
$$

Mit den Beschleunigungsformeln entwickeln wir das wieder in der Basis $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, N\circ\mathbf{x}\}$ und erhalten

$$
\begin{aligned}
0 \;=\; &\Big(\Gamma^u_{uu}\Gamma^u_{uv} + \Gamma^v_{uu}\Gamma^u_{vv} + l\,\frac{Fn-Gm}{EG-F^2} + (\Gamma^u_{uu})_v\\
&\qquad - \Gamma^u_{uv}\Gamma^u_{uu} - \Gamma^v_{uv}\Gamma^u_{uv} - m\,\frac{Fm-Gl}{EG-F^2} - (\Gamma^u_{uv})_u\Big)\mathbf{x}_u\\
&+\Big(\Gamma^u_{uu}\Gamma^v_{uv} + \Gamma^v_{uu}\Gamma^v_{vv} + l\,\frac{Fm-En}{EG-F^2} + (\Gamma^v_{uu})_v\\
&\qquad - \Gamma^u_{uv}\Gamma^v_{uu} - (\Gamma^v_{uv})^2 - m\,\frac{Fl-Em}{EG-F^2} - (\Gamma^v_{uv})_u\Big)\mathbf{x}_v\\
&+\Big(m\Gamma^u_{uu} + n\Gamma^v_{uu} + l_v - l\Gamma^u_{uv} - m\Gamma^v_{uv} - m_u\Big)N\circ\mathbf{x}.
\end{aligned}
$$

Alle drei Koeffizienten in den großen Klammern müssen 0 sein. Es ergeben sich mit $K\circ\mathbf{x} = \frac{ln-m^2}{EG-F^2}$ die folgenden Gleichungen:

$$
\begin{aligned}
FK\circ\mathbf{x} &= (\Gamma^u_{uv})_u - (\Gamma^u_{uu})_v + \Gamma^v_{uv}\Gamma^u_{uv} - \Gamma^v_{uu}\Gamma^u_{vv},\\
EK\circ\mathbf{x} &= (\Gamma^v_{uu})_v - (\Gamma^v_{uv})_u + \Gamma^u_{uu}\Gamma^v_{uv} + \Gamma^v_{uu}\Gamma^v_{vv} - \Gamma^u_{uv}\Gamma^v_{uu} - (\Gamma^v_{uv})^2,\\
l_v - m_u &= l\Gamma^u_{uv} + m(\Gamma^v_{uv} - \Gamma^u_{uu}) - n\Gamma^v_{uu}.
\end{aligned}
$$

Die erste Formel ist nicht nützlich für die Berechnung von K, falls $F = 0$ ist. Aber E ist nie 0, also haben wir hier die (angekündigte) Formel für die Gauß-Krümmung allein mit Termen, die aus der ersten Fundamentalform berechnet werden können. Wir halten fest

Satz (“Theorema Egregium” von Gauß) *Ist $\mathbf{x}: D \to \mathbb{R}^3$ ein reguläres C^3-Flächenstück, so hängt $K \circ \mathbf{x}$ nicht von der zweiten Fundamentalform ab und kann allein aus E, F, G und seinen Ableitungen ausgerechnet werden vermöge der Gauß-Gleichung*

$$K \circ \mathbf{x} = \frac{1}{E}\Big((\Gamma^v_{uu})_v - (\Gamma^v_{uv})_u + \Gamma^u_{uu}\Gamma^v_{uv} + \Gamma^v_{uu}\Gamma^v_{vv} - \Gamma^u_{uv}\Gamma^v_{uu} - (\Gamma^v_{uv})^2\Big).$$

Bemerkung: In der Gauß-Formel kann man natürlich mit hinreichend viel Fleiß alle Christoffel-Symbole ausrechnen. Fasst man das Ergebnis nach endloser Rechnung geschickt zusammen, so ergibt sich

$$K \circ \mathbf{x} = \frac{1}{(EG - F^2)^2}\left(\begin{vmatrix} -\frac{E_{vv}}{2} + F_{uv} - \frac{G_{uu}}{2} & \frac{E_u}{2} & F_u - \frac{E_v}{2} \\ F_v - \frac{G_u}{2} & E & F \\ \frac{G_v}{2} & F & G \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & \frac{E_v}{2} & \frac{G_u}{2} \\ \frac{E_v}{2} & E & F \\ \frac{G_u}{2} & F & G \end{vmatrix}\right).$$

□

Die dritte der drei Gleichungen aus dem Koeffizientenvergleich hat ein (völlig analog zu beweisendes) Analogon aus der zweiten Vertauschungsrelation (die außerdem noch eine weitere Gleichung für $FK \circ \mathbf{x}$ und eine ähnliche für $GK \circ \mathbf{x}$ liefert). Es handelt sich um

Satz (Mainardi-Codazzi-Gleichungen) *Ist $\mathbf{x}: D \to \mathbb{R}^3$ ein reguläres C^3-Flächenstück, dann gelten*

$$\begin{aligned} l_v - m_u &= l\Gamma^u_{uv} + m(\Gamma^v_{uv} - \Gamma^u_{uu}) - n\Gamma^v_{uu}, \\ m_v - n_u &= l\Gamma^u_{vv} + m(\Gamma^v_{vv} - \Gamma^u_{uv}) - n\Gamma^v_{uv}. \end{aligned}$$

Bemerkung: In Aufgabe 20 berechnen wir für den Fall $F \equiv 0$ (der ja, wie wir inzwischen wissen, lokal immer hergestellt werden kann durch geeignete Umparametrisierung) die Christoffel-Symbole als

$$\begin{aligned} \Gamma^u_{uu} &= \frac{E_u}{2E}, & \Gamma^u_{uv} &= \frac{E_v}{2E}, & \Gamma^u_{vv} &= -\frac{G_u}{2E}, \\ \Gamma^v_{vv} &= \frac{G_v}{2G}, & \Gamma^v_{uv} &= \frac{G_u}{2G}, & \Gamma^v_{uu} &= -\frac{E_v}{2G}. \end{aligned}$$

Damit wird die Gauß-Gleichung vereinfacht zu

$$K \circ \mathbf{x} = -\frac{1}{E}\Big(\frac{E_v}{2G}\Big)_v - \frac{1}{E}\Big(\frac{G_u}{2G}\Big)_u + \frac{E_u G_u}{4E^2 G} - \frac{E_v G_v}{4EG^2} + \frac{E_v^2}{4E^2 G} - \frac{G_u^2}{4EG^2}.$$

Wie man durch Ausdifferenzieren zeigt (siehe Aufgabe 20), lässt sich dies noch eindampfen zu folgender praktischer Formel:

Lemma (Gauß-Gleichung für orthogonale Parametrisierung) *Ist $\mathbf{x}: D \to \mathbb{R}^3$ ein reguläres C^3-Flächenstück mit $F \equiv 0$, dann vereinfacht sich die Gauß-Gleichung zu*

$$K \circ \mathbf{x} = -\frac{1}{2\sqrt{EG}}\Big(\Big(\frac{E_v}{\sqrt{EG}}\Big)_v + \Big(\frac{G_u}{\sqrt{EG}}\Big)_u\Big).$$

Die Berechnungen und Erkenntnisse aus diesem Kapitel werden uns noch im Kapitel über innere Geometrie weiter beschäftigen. Zunächst wollen wir uns aber noch zwei hübsche Eigenschaften der Gauß-Krümmung ansehen:

Satz (kompakte Flächen haben irgendwo positive Krümmung) *Ist $M \subset \mathbb{R}^3$ reguläre C^2-Fläche und kompakt (also abgeschlossen und beschränkt in $\mathbb{R}^3$), dann gibt es $p \in M$ mit $K(p) > 0$.*

Beweis: Mit dem Betrag in $\mathbb{R}^3$ definieren wir $f : M \to \mathbb{R}^3$ durch $f(q) := |q|^2$; das ist eine stetige Funktion, die als solche auf der kompakten Mange M ihr Maximum und ihr Minimum annimmt. Sei p eine Maximumstelle von f auf M. Dann liegt M innerhalb der Sphäre um 0 mit Radius $|p|$ und berührt diese in p. Wir nehmen daher an, dass $K(p) \geq |p|^{-2}$ (was die Gauß-Krümmung der Sphäre ist); das ist jetzt zu zeigen.

Zu beliebigem $V \in T_pM$ mit $|V| = 1$ finden wir eine (nach der Bogenlänge parametrisierte) Kurve $\alpha : I \to M$ mit $\alpha(0) = p$ und $\alpha'(0) = V$. Weil auch $f \circ \alpha$ sein Maximum im Punkt p (also bei 0) annimmt, gelten

$$(f \circ \alpha)'(0) = 0, \qquad (f \circ \alpha)''(0) \leq 0.$$

Wegen $f \circ \alpha(t) = |\alpha(t)|^2$ sind diese Relationen gleichbedeutend mit

$$0 = 2\alpha(0) \cdot \alpha'(0) = 2p \cdot V$$

(was für alle Einheitsvektoren $V \in T_pM$ gilt, folglich $p \perp T_pM$) und

$$\begin{aligned} 0 &\geq 2|\alpha'(0)|^2 + 2\alpha(0) \cdot \alpha''(0) \\ &= 2 + 2p \cdot \alpha''(0). \end{aligned}$$

Letzteres bedeutet

$$p \cdot \alpha''(0) \leq -1$$

und deshalb für die Normalkrümmung von M in p (beachte $N(p) = \pm \frac{p}{|p|}$)

$$|k_n(p, V)| = |N(p) \cdot \alpha''(0)| = |\tfrac{p}{|p|} \cdot \alpha''(0)| \geq |p|^{-1},$$

und weil die Normalkrümmungen stetig von V abhängen, haben sie auch alle dasselbe Vorzeichen. Folglich gilt

$$K(p) = k_1(p)k_2(p) \geq |p|^{-2},$$

was die Vermutung bestätigt und den Satz beweist. □

Das folgende Korollar ist bemerkenswert, weil es das erste Beispiel eines Satzes ist, bei dem aus einer (lokalen) Annahme über die Krümmung eine (globale) Aussage über die Topologie folgt:

Korollar *Ist M eine reguläre C^2-Fläche in $\mathbb{R}^3$ mit $K \leq 0$ auf ganz M, so ist M nicht kompakt.*

Weil $H = 0$ bedeutet, dass $k_1 = -k_2$, also $K \leq 0$, folgt dasselbe für Flächen mit $H = 0$; diese heißen *Minimalflächen* (und werden uns noch beschäftigen).

Korollar *Es gibt keine kompakten Minimalfächen in* $\mathbb{R}^3$.

Wir hatten schon gesehen, dass die Nabelflächen immer Sphären oder Ebenen sind und dass beide konstante Gauß-Krümmung haben. Der nächste Satz (in den vieles von dem eingeht, was wir bis jetzt bereitgestellt haben), charakterisiert die kompakten Flächen konstanter Gauß-Krümmung:

Satz (H. Liebmann) *Ist M eine kompakte C^3-Fläche in $\mathbb{R}^3$ mit konstanter Gauß-Krümmung K, dann ist ($K > 0$ und) M eine Sphäre vom Radius $1/\sqrt{K}$.*

Beweis: Nach dem vorigen Satz kann die Voraussetzung des Satzes nur zutreffen, wenn $K > 0$ ist. Da K konstant ist und $K = k_1 k_2$, hat k_2 in jeder Minimumstelle von k_1 eine Maximumstelle; sei p eine solche Stelle (existiert, weil M kompakt und k_1, k_2 stetig).

1. Fall: $k_1(p) = k_2(p)$. Da k_1 in p sein Minimum annimmt und k_2 sein Maximum, müssen alle Normalkrümmungen auf M zwischen $k_1(p)$ und $k_2(p)$ liegen, also konstant gleich p sein. Dann ist jeder Punkt ein Nabelpunkt, und die Aussage des Satzes folgt aus dem Satz über die Nabelflächen.

2. Fall: $k_1(p) < k_2(p)$. Wir wollen zeigen, dass dies nicht vorkommt, dann sind wir fertig.

Es gibt eine Umgebung von p , auf der $k_1 < k_2$ noch gilt. Nach eventueller Verkleinerung können wir diese Umgebung nach den Krümmungslinien parametrisieren, also durch $\mathbf{x} : D \to M$ mit $p = \mathbf{x}(0,0)$, $F \equiv 0$ und $m \equiv 0$; siehe das letzte Korollar im vorigen Abschnitt. Dann ist $k_1 \circ \mathbf{x} = l/E$ und $k_2 \circ \mathbf{x} = n/G$ (o.B.d.A. nach evtl. Vertauschung der Variablen; wir schreiben jetzt k_1, k_2 statt $k_1 \circ \mathbf{x}$ und $k_2 \circ \mathbf{x}$). Die Mainardi-Codazzi-Gleichungen vereinfachen sich mit $m = 0$ und $F = 0$ zu

$$\begin{aligned} l_v &= \frac{E_v}{2}\Big(\frac{l}{E} + \frac{n}{G}\Big) = \frac{E_v}{2}(k_1 + k_2), \\ n_u &= \frac{G_u}{2}\Big(\frac{l}{E} + \frac{n}{G}\Big) = \frac{G_u}{2}(k_1 + k_2). \end{aligned}$$

Dies benutzen wir, um $k_1 = l/E$ und $k_2 = n/G$ zweimal partiell zu differenzieren:

$$\begin{aligned} (k_1)_v &= \frac{1}{E^2}(E l_v - E_v l) = \frac{E_v}{2E}(k_2 - k_1), \\ (k_2)_u &= \frac{1}{G^2}(G n_u - G_u n) = \frac{G_u}{2G}(k_1 - k_2), \\ (k_1)_{vv} &= \frac{E_{vv}}{2E}(k_2 - k_1) + E_v(\ldots), \\ (k_2)_{uu} &= \frac{G_{uu}}{2G}(k_1 - k_2) + G_u(\ldots). \end{aligned}$$

Weil k_1 minimal und k_2 maximal ist in p, gelten im Punkt p

$$(k_1)_v = 0, \qquad (k_2)_u = 0, \qquad (k_1)_{vv} \geq 0, \qquad (k_2)_{uu} \leq 0.$$

Damit folgern wir aus obigen vier Gleichungen, dass

$$E_v(0,0) = 0, \qquad G_u(0,0) = 0, \qquad E_{vv}(0,0) \geq 0, \qquad G_{uu}(0,0) \geq 0.$$

In Punkten mit $E_v = 0$ ist

$$\Big(\frac{E_v}{\sqrt{EG}}\Big)_v = \frac{E_{vv}}{\sqrt{EG}}\,,$$

und eine analoge Gleichung gilt für $G_u = 0$. Daher können wir mit der Gauß-Gleichung $K(p)$ berechnen als

$$\begin{aligned} K(p) &= -\frac{1}{2\sqrt{EG}}\Big(\Big(\frac{E_v}{\sqrt{EG}}\Big)_v + \Big(\frac{G_u}{\sqrt{EG}}\Big)_u\Big)(0,0) \\ &= -\frac{E_{vv} + G_{uu}}{2EG}(0,0) \\ &\leq 0; \end{aligned}$$

das ist der gewünschte Widerspruch. □

Ein Nebenprodukt dieses Beweises ist

Lemma (Hilbert) *Ist $M \subset \mathbb{R}^3$ reguläre C^3-Fläche und $p \in M$ ein Punkt, k_1 ein lokales Minimum und k_2 ein lokales Maximum hat sowie $k_1(p) < k_2(p)$ gilt, dann ist $K(p) \leq 0$.*

Bemerkung: Zum Schluss eine Bemerkung zu den Gleichungen von Gauß und Meinardi-Codazzi. Wie für Kurven gibt es auch einen "Hauptsatz" der lokalen Flächentheorie. Er sagt, dass man E, F, G, l, m, n in der Umgebung eines Punktes vorgeben kann und dazu (evtl. nach Verkleinerung dieser Umgebung) ein (bis auf Bewegungen eindeutiges) Flächenstück in $\mathbb{R}^3$ mit eben diesen Koeffizienten der ersten und zweiten Fundamentalform findet, unter der Voraussetzung, dass E, F, G, l, m und n schon die Gleichungen von Gauß und Mainardi-Codazzi erfüllen (und dass $EG - F^2 > 0$). Dies ist der *Satz von Bonnet*, den wir hier nicht beweisen. Es ist klar, dass Gauß und Mainardi-Codazzi *notwendige* Bedingungen für die Existenz so einer Fläche sind. Der Satz von Bonnet sagt, dass diese auch ausreichen, d.h.: Alle Relationen zwischen E, F, G, l, n, m (und ihren partiellen Ableitungen) auf einem Flächenstück folgen aus $EG - F^2 > 0$, der Gauß-Gelichung und den Mainardi-Codazzi-Gleichungen. (Und insbesondere braucht man von den verschiendenen Versionen der Gauß-Gleichung $EK = \ldots$, $FK = \ldots$, $GK = \ldots$ nur die erste oder die dritte.) □

4 Die innere Geometrie von Flächen

4.1 Isometrien und konforme Abbildungen

Zwei Flächen, die "dieselbe" erste Fundamentalform haben, sollten vom metrischen Standpunkt, und bezüglich aller Eigenschaften, die auf der Kenntnis von I beruhen (dazu gehört z.B. auch die Gauß-Krümmung), nicht zu unterscheiden sein:

Definition (Isometrie) *Seien M_1, M_2 zwei reguläre Flächen in $\mathbb{R}^3$. Ein Diffeomorphismus $\Phi : M_1 \to M_2$ heißt* Isometrie*, falls für alle $p \in M_1$, $X, Y \in T_pM_1$ gilt, dass*

$$I_p(X,Y) = I_{\Phi(p)}(d\Phi(p)X, d\Phi(p)Y).$$

(Kurz ausgedrückt: Φ ist Isometrie, wenn $d\Phi$ das innere Produkt erhält.) Existiert eine Isometrie zwischen M_1 und M_2, so heißen M_1 und M_2 isometrisch*.*

Bemerkungen: (1) Schon eine Abbildung mit

$$I_p(X,X) = I_{\Phi(p)}(d\Phi(p)X, d\Phi(p)X)$$

für alle $p \in M_1$, $X \in T_pM_1$ ist eine Isometrie, was aus der *Polarisationsformel*

$$2I_p(X,Y) = I_p(X+Y, X+Y) - I_p(X,X) - I_p(Y,Y)$$

(gültig für alle symmetrischen Bilinearformen) folgt.

(2) Zwei Flächenstücke $\mathbf{x} : D \to \mathbb{R}^3$ und $\mathbf{y} : D \to \mathbb{R}^3$, für die E, F und G auf D übereinstimmen, sind isometrisch, und $\mathbf{y} \circ \mathbf{x}^{-1}$ sowie $\mathbf{x} \circ \mathbf{y}^{-1}$ sind Isometrien.

Zum Beweis bezeichnen wir mit $E^{\mathbf{x}}$, $F^{\mathbf{x}}$, $G^{\mathbf{x}}$ bzw. $E^{\mathbf{y}}$, $F^{\mathbf{y}}$, $G^{\mathbf{y}}$ die Koeffizienten für $\mathbf{x}$ bzw. $\mathbf{y}$. Gilt jetzt $E^{\mathbf{x}} = E^{\mathbf{y}}$, $F^{\mathbf{x}} = F^{\mathbf{y}}$, $G^{\mathbf{x}} = G^{\mathbf{y}}$, dann setze $\Phi := \mathbf{y} \circ \mathbf{x}^{-1}$ und beobachte, dass für $\alpha'(0) = X \in T_{\mathbf{x}(u,v)}M$ mit einer Kurve $\alpha(t) = \mathbf{x}(U(t), V(t))$ in M und $\alpha(0) = \mathbf{x}(u,v)$ gilt:

$$\begin{aligned}
X &= \alpha'(0) = U'(0)\mathbf{x}_u(u,v) + V'(0)\mathbf{x}_v(u,v),\\
d\Phi(\mathbf{x}(u,v))X &= d\Phi(\mathbf{x}(u,v))\alpha'(0)\\
&= (\Phi \circ \alpha)'(0)\\
&= (\mathbf{y} \circ (U,V))'(0)\\
&= U'(0)\mathbf{y}_u(u,v) + V'(0)\mathbf{y}_v(u,v).
\end{aligned}$$

Es folgt

$$\begin{aligned}
&I_{\Phi(\mathbf{x}(u,v))}(d\Phi(\mathbf{x}(u,v))X, d\Phi(\mathbf{x}(u,v))X)\\
&= I_{\mathbf{y}(u,v)}(d\Phi(\mathbf{x}(u,v))X, d\Phi(\mathbf{x}(u,v))X)\\
&= U'(0)^2E^{\mathbf{y}}(u,v) + 2U'(0)V'(0)F^{\mathbf{y}}(u,v) + V'(0)^2G^{\mathbf{y}}(u,v)\\
&= U'(0)^2E^{\mathbf{x}}(u,v) + 2U'(0)V'(0)F^{\mathbf{x}}(u,v) + V'(0)^2G^{\mathbf{x}}(u,v)\\
&= I_{\mathbf{x}(u,v)}(X,X)
\end{aligned}$$

für alle $(u, v) \in D$ und alle $X \in T_{\mathbf{x}(u,v)}\mathbf{x}(D)$, also ist nach (1) die Abbildung Φ eine Isometrie zwischen $\mathbf{x}(D)$ und $\mathbf{y}(D)$.

(3) Ist umgekehrt $\Phi : M_1 \to M_2$ eine Isometrie und $\mathbf{x} : D \to M_1$ eine lokale Parametrisierung, dann hat $\Phi \circ \mathbf{x} : D \to M_2$ dieselben Koeffizienten der ersten Fundamentalform.

(4) Isometrie von Flächen ist eine Äquivalenzrelation.

(5) Isometrien sind hier C^k, wenn M_1 und M_2 C^k-Flächen sind. $\square$

Beispiel: Es sei $M_1 := \mathbb{R}^2 \times \{0\}$, $M_2 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = \cosh y\}$ sind isometrisch. Denn M_1 und M_2 lassen sich als Flächenstücke

$$\begin{aligned} \mathbf{x} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \qquad & \mathbf{x}(u, v) = (u, v, 0), \\ \mathbf{y} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \qquad & \mathbf{y}(u, v) = (u, v, \cosh v) \end{aligned}$$

schreiben. Im zweiten Flächenstück parametrisieren wir die Koordinatenlinine $v \mapsto \mathbf{y}(u, v)$ nach der Bogenlänge um und erhalten

$$\mathbf{z} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \qquad \mathbf{z}(u, v) = (u, \operatorname{Arsinh} v, \sqrt{1 + v^2})$$

als neue Parametrisierung von M_2. Für dieses Flächenstück $\mathbf{z}$ berechnen wir

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_u(u, v) &= (1, 0, 0), \\ \mathbf{z}_v(u, v) &= \Big(0, \frac{1}{\sqrt{1 + v^2}}, \frac{v}{\sqrt{1 + v^2}}\Big), \end{aligned}$$

woraus wir $E = G \equiv 1$ und $F \equiv 0$ ablesen, und dasselbe gilt offensichtlich für $\mathbf{x}$. Folglich sind M_1 und M_2 isometrisch, und eine Isometrie ist z.B. $\Phi : M_1 \to M_2$ mit

$$\Phi(u, v, 0) := (u, \operatorname{Arsinh} v, \sqrt{1 + v^2}).$$

Diese ist bei weitem nicht eindeutig, z.B. sind

$$\begin{aligned} (u, v, 0) &\mapsto (u + 3, \operatorname{Arsinh}(v - 4), \sqrt{1 + (v - 4)^2}), \\ (u, v, 0) &\mapsto (v, \operatorname{Arsinh} u, \sqrt{1 + u^2}) \end{aligned}$$

weitere Isometrien. $\square$

Bemerkung: Im letzten Beispiel kommen die vielen Isometrien dadurch zustande, dass eine feste Isometrie mit den (vielen) Isometrien der Ebene auf sich verknüpft wird. Man überlegt sich leicht, dass die Isometrien $M \to M$ einer Fläche auf sich selbst eine Gruppe bilden, die *Isometriegruppe* von M. Sie enthält immer die Identität; und enthält sie mehr Elemente, so beschreiben diese (innere) Symmetrien der Fläche. $\square$

Manchmal braucht man auch das zugehörige lokale Konzept:

Definition (lokale Isometrie) *Seien M_1, M_2 reguläre Flächen in $\mathbb{R}^3$. Eine Abbildung $\Phi : U \to M_2$ einer Umgebung U von $p \in M_1$ in M_1 heißt* lokale Isometrie bei *p,* *wenn es eine Umgebung V von $\Phi(p)$ in M_2 gibt, so dass $\Phi : U \to V$ eine Isometrie ist. Gibt es zu jedem Punkt $p \in M_1$ eine lokale Isometrie nach M_2, so heißt M_1* lokal isometrisch zu M_2. *Die Flächen M_1 und M_2 heißen* lokal isometrisch, *falls M_1 lokal isometrsich zu M_2 und M_2 lokal isometrsisch zu M_1 ist.*

Bemerkung: Auch "lokal isometrisch" ist eine Äquivalenzrelation. □

Beispiele: (1) Die Ebene $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$ und der Zylinder $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$ sind lokal isometrisch. Denn durch

$$\Phi(u, v, 0) := (\cos v, \sin v, u)$$

sind lokale Isometrien in den Zyliner bei jedem Punkt der Ebene gegeben (bei geeigneter Wahl des Definitiosbereichs), und mit

$$(x, y, z) \mapsto (z, \log(x + iy), 0)$$

lokale Isometrien in die Ebene bei jedem Punkt des Zylinders (bei geeigneter Wahl des komplexen Logarithmus). Dass es sich jeweils um lokale Isometrien handelt, rechnet man leicht nach. Wir führen es nur für die eine Richtung aus: Wegen (etwas lax formuliert)

$$d\Phi(u, v, 0) = D\Phi(u, v, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -\sin v & 0 \\ 0 & \cos v & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist für $X = (X^1, X^2, 0)$ und $Y = (Y^1, Y^2, 0)$ in $T_{(u,v,0)}(\mathbb{R}^2 \times \{0\}) = \mathbb{R}^2 \times \{0\}$ mit $p := (u, v, 0)$

$$\begin{aligned} I_{\Phi(p)}(d\Phi(p)X, d\Phi(p)Y) &= \begin{pmatrix} -X^2 \sin v \\ X^2 \cos v \\ X^1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -Y^2 \sin v \\ Y^2 \cos v \\ Y^1 \end{pmatrix} \\ &= X^1Y^1 + X^2Y^2 \\ &= X \cdot Y \\ &= I_p(X, Y). \end{aligned}$$

(2) Das Helikoid und das Katenoid sind lokal isometrsich, vgl. Aufgabe 23. □

Jetzt können wir genauer sagen, was wir unter "inneren geometrischen Größen" einer Fläche verstehen: Es sind solche geometrische Größen, die invariant unter Isometrien sind. Beispiele sind Kurvenlängen, Flächen, Winkel (denn alle werden mit I ausgerechnet, welches unter Isometrien invariant ist), aber auch die Gauß-Krümmung. Denn aus dem "Theorema Egregium" folgt sofort:

Satz (Gauß) *Die Gauß-Krümmung von C^3-Flächen ist invariant unter (lokalen) Isometrien. Das heißt $K(p) = K(\Phi(p))$, wenn Φ lokale Isometrie ist.*

Weil wir Längen von Kurven allein unter Benutzung der ersten Fundamentalform berechnen können (zumindest lokal), ist auch der folgende Abstandsbegriff invariant unter Isometrien:

Definition (innerer Abstand) *Sei $M \subset \mathbb{R}^3$ eine wegzusammenhängende reguläre Fläche. Zu $p, q \in M$ definieren wir den* (inneren) Abstand *$d(p,q)$ zwischen p und q als das Infimum der Längen aller Kurven $\alpha : [0,1] \to M$ mit $\alpha(0) = p$, $\alpha(1) = q$.*

Dieser innere Abstand macht M zu einem metrischen Raum (wie man leicht sieht). □

Außer Isometrie von Flächen gibt es noch eine schwächere Äquivalenzrelation, die eher in der komplexen Analysis von Bedeutung ist:

Definition (konform) *Ein Diffeomorphismus Φ zwischen zwei regulären Flächen M_1 und M_2 in $\mathbb{R}^3$ heißt* konform, *wenn es eine differenzierbare Funktion $\lambda^2 : M_1 \to \mathbb{R}_{>0}$ gibt, so dass*

$$I_{\Phi(p)}(d\Phi(p)X, d\Phi(p)Y) = \lambda^2(p) I_p(X,Y)$$

für alle $p \in M_1$ und alle $X, Y \in T_pM_1$ gilt. Gibt es eine konforme Abbildung $M_1 \to M_2$, so heißen M_1 und M_2 konform (äquivalent).

Den Begriff "lokal konform" erklärt man dann völlig analog zu "lokal isometrisch".

Bemerkungen: (1) In der Formel für Winkel mit E, F und G stehen so viele E, F, G im Zähler wie im Nenner. Es folgt, dass konforme Abbildungen *winkelerhaltend* sind, und das ist die geometrische Motivation für den Begriff "konform".

(2) "konform" ist eine Äquivalenzrelation, ebenso "lokal konform".

(3) Jede Isometrie ist eine konforme Abbildung, mit $\lambda^2 \equiv 1$.

(4) Wie für Isometrien beweist man: Genau dann ist $\Phi : \mathbf{x}(D) \to \mathbf{y}(D)$ konforme Abbildung zwischen zwei regulären Flächenstücken $\mathbf{x} : D \to \mathbb{R}^3$, $\mathbf{y} : D \to \mathbb{R}^3$, wenn für die wie oben indizierten Koeffizienten der ersten Fundamentalformen gilt:

$$E^{\mathbf{y}} = \lambda^2 E^{\mathbf{x}}, \qquad F^{\mathbf{y}} = \lambda^2 F^{\mathbf{x}}, \qquad G^{\mathbf{y}} = \lambda^2 G^{\mathbf{x}}.$$

Wir erwähnen den wichtigsten Satz in diesem Zusammenhang:

Satz *Je zwei reguläre Flächen sind lokal konform.*

grobe Beweisskizze: Man kann zeigen, dass man eine Umgebung jedes beliebigen Punktes auf einer regulären Fläche so parametrisieren kann, dass

$$F \equiv 0, \qquad E = G = \lambda^2(u,v) > 0,$$

sogenannte *isotherme oder konforme Koordinaten*. Der Beweis ist ein gutes Stück aufwändiger als für die speziellen Parametrisierungen, die wir schon produziert haben. Glaubt man deren Existenz, so folgt der zu beweisende Satz sofort, denn jede so parametrisierte Fläche ist lokal konform zur flachen Ebene. $\square$

Bemerkung: Wir hatten 2-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeiten als Verallgemeinerung von Flächen im Raum eingeführt. Alles, was wir über die innere Geometrie von Flächen im Raum sagen, lässt sich auf Mannigfaltigkeiten verallgemeinern. Sei M so eine 2-dimensionale Mannigfaltigkeit. Zu $p \in M$ definiert man dann die Tangentialebene T_pM abstrakt als den Vektorraum der Tangentialvektoren an Kurven in p (modulo einer Äquivalenzrelation, die Tangentialvektoren von "sich berührenden Kurven identifiziert). Versieht man eine solche Mannigfaltigkeit M mit einer *Riemannschen Metrik*, das ist ein differenzierbar vom Punkt p abhängendes Feld von symmetrischen positiv definiten Bilinearformen g_p auf T_pM, dann kann man zu gegebener lokaler Parametrisierung $\mathbf{x} : D \to M$ mit $\mathbf{x}(u, v) = p$ die Funktionen g_{ij} als

$$\begin{aligned}
g_{11}(u,v) &:= g_p(D\mathbf{x}(u,v)e_u, D\mathbf{x}(u,v)e_u), \\
g_{12}(u,v) &:= g_p(D\mathbf{x}(u,v)e_u, D\mathbf{x}(u,v)e_v) =: g_{21}(u,v), \\
g_{22}(u,v) &:= g_p(D\mathbf{x}(u,v)e_v, D\mathbf{x}(u,v)e_v)
\end{aligned}$$

definieren. Sie spielen dieselbe Rolle wie E, F und G für Flächen, und Längen, Winkel, Flächeninhalte, Abstand und die Gauß-Krümmung können nach denselben Formeln berechnet werden wie auf Flächen. g_p spielt dabei die Rolle von I_p. Eine Mannigfaltigkeit, versehen mit einer Riemannschen Metrik, heißt *Riemannsche Mannigfaltigkeit.* Generell gilt fast alles aus diesem Kapitel über innere Geometrie auch für 2-dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeiten statt Flächen. $\square$

4.2 Kovariante Ableitung und Parallelverschiebung

Ist auf einer Fläche M ein Vektor X in einem Punkt p gegeben, also $X \in T_pM$, dann können wir nicht ohne weiteres sagen, was "derselbe" Vektor nach T_qM verschoben sein soll; denn anders al in $\mathbb{R}^n$ haben wir noch kein natürliches Konzept für Parallelverschiebung. In $\mathbb{R}^n$ ist Parallelität von Vektorfeldern X zum Beispiel dadurch charakterisiert, dass die Ableitung $D(X \circ \alpha)$ für alle (diffferenzierbaren) Kurven α in $\mathbb{R}^n$ verschwindet.

Auf Flächen hängt die Parallelverschiebung im Allgemeinen von der Auswahl der Kurve ab, längs der parallel verschoben werden soll. Unser nächstes Ziel ist die Definition eines geeigneten Differentialoperators, der auf "parallelen Vektorfeldern längs einer Kurve" verschwindet.

Definition (kovariante Ableitung) *Sei W ein differenzierbares Vektorfeld auf der regulären Fläche $M \subset \mathbb{R}^3$, $p \in M$ und $y \in T_pM$. Ferner sei eine Kurve $\alpha : I \to M$ gegeben mit $\alpha(0) = p$ und $\alpha'(0) = y$. Die Projektion von $(W \circ \alpha)'(0) \in \mathbb{R}^3$ auf T_pM heißt* kovariante Ableitung *von W bei p in Richtung y und wird mit*

$$D_yW(p) \qquad \textit{oder} \qquad \frac{D(W \circ \alpha)}{dt}(0)$$

bezeichnet. Allgemeiner heißt eine (C^k- oder differenzierbare) Abbildung $V : [-\varepsilon, \varepsilon] \to \mathbb{R}^3$ mit $V(t) \in T_{\alpha(t)}M$ für alle $t \in I$ ein (C^k- oder differenzierbares) Vektorfeld längs *α, und die Projektion von $V'(t)$ auf $T_{\alpha(t)}M$ heißt die kovariante Ableitung von V in t und wird mit*

$$\frac{DV}{dt}(t)$$

bezeichnet.

Ist schließlich Y ein weiteres Vektorfeld auf M, so bezeichne $D_Y W$ das Vektorfeld mit

$$(D_Y W)(p) := D_{Y(p)} W(p)$$

für alle $p \in M$.

Bemerkungen: (1) Nicht jedes differenzierbare Vektorfeld längs einer Kurve ist die Einschränkung eines differenzierbaren Vektorfelds auf M. Denn es wird nicht verlangt, dass bei einem Selbstschnitt der Kurve $\alpha(s) = \alpha(t)$ auch $V(s) = V(t)$ sein muss.

(2) Ist $\alpha : I \to M$ differenzierbare Kurve, dann ist $\alpha'(t) \in T_{\alpha(t)}M$ für alle $t \in I$ nach der Definition von $T_{\alpha(t)}M$. Folglich ist α' ein Vektorfeld längs α, das *Tangentenvektorfeld* von α. Dieses Beispiel kann als Motivation für die Betrachtung von Vektorfeldern längs Kurven dienen.

(3) Wir müssen noch nachprüfen, dass $D_y W(p)$ wohldefiniert ist, also nicht von der Auswahl der Kurve α abhängt. Dazu sei wie üblich $\alpha(t) = \mathbf{x}(\gamma(t))$; und wir entwickeln $W(\alpha(t))$ bezüglich der mitbewegten Basis $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$:

$$W(\alpha(t)) := w^u(t)\mathbf{x}_u(\gamma(t)) + w^v(t)\mathbf{x}_v(\gamma(t)).$$

Es folgt

$$\begin{aligned} (W \circ \alpha)' &= (w^u)'\mathbf{x}_u \circ \gamma + (w^v)'\mathbf{x}_v \circ \gamma \\ &\quad + w^u((\gamma^u)'\mathbf{x}_{uu} \circ \gamma + (\gamma^v)'\mathbf{x}_{uv} \circ \gamma) + w^v((\gamma^u)'\mathbf{x}_{uv} \circ \gamma + (\gamma^v)'\mathbf{x}_{vv} \circ \gamma). \end{aligned}$$

Hier können wir $\mathbf{x}_{uu}$, $\mathbf{x}_{uv}$ und $\mathbf{x}_{vv}$ mit den Beschleunigungsformeln als Linearkombination von $\mathbf{x}_u$, $\mathbf{x}_v$ und $(N \circ \mathbf{x})$ ausdrücken. Die Projektion auf T_pM erhält man dann einfach, indem man die $(N \circ \mathbf{x})$-Komponente weglässt. Auf diese Weise haben wir bewiesen:

Lemma (Koordinatenformel für die kovariante Ableitung) *Unter den Voraussetzungen der vorigen Definition und Bemerkung (3) gilt auf C^2-Flächen M*

$$\frac{D(W \circ \alpha)}{dt} = (w^u)'\mathbf{x}_u + (w^v)'\mathbf{x}_v + \sum_{i,j,k \in \{u,v\}} \Gamma_{ij}^k w^i (\gamma^j)' \mathbf{x}_k,$$

also insbesondere für $p := \mathbf{x}(z) = \alpha(0)$, $y = y^u\mathbf{x}_u(z) + y^v\mathbf{x}_v(z) = \alpha'(0)$ und $W \circ \mathbf{x} = w^u\mathbf{x}_u + w^v\mathbf{x}_v$:

$$D_y W(p) = \partial_{(y^u, y^v)} w^u(z)\mathbf{x}_u(z) + \partial_{(y^u, y^v)} w^v(z)\mathbf{x}_v(z) + \sum_{i,j,k \in \{u,v\}} \Gamma_{ij}^k(z) w^i(z) y^j \mathbf{x}_k(z).$$

Aus letzterer Formel folgt die Wohldefiniertheit von $D_y W(p)$.

Bemerkungen: (0) Wir lesen ab, dass man die kovariante Ableitung allein durch partielles Differenzieren und Kenntnis der Christoffel-Symbole berechnen kann. Es handelt sich damit um eine *innere* geometrische Operation.

(1) Die letzte Formel bedeutet: Die Kovariante Ableitung von W in Richtung y ist die "komponentenweise partielle Ableitung" (bzgl. $\mathbf{x}_u$, $\mathbf{x}_v$) plus eine von den Christoffel-Symbolen abhängige Korrektur *nullter* Ordnung in W.

(2) Die erste Formel des Lemmas gilt auch dann, wenn W nur auf $\alpha(I)$ definiert ist, kann also auch zur Berechnung der kovarianten Ableitung von Vektorfeldern längs Kurven definiert werden. □

Gemäß obiger Analogie zu parallelen Vektorfeldern in $\mathbb{R}^n$ definieren wir:

Definition (paralleles Vektorfeld) *Sei $M \subset \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche und $\alpha : I \to M$ eine differenzierbare Kurve. Ein Vektorfeld V auf M längs α heißt* parallel*, falls $\frac{DV}{dt} \equiv 0$ auf I. Ein Vektorfeld W auf M heißt* parallel längs α*, wenn seine Einschränkung auf $\alpha(I)$ parallel als Vektorfeld längs α ist.*

Bemerkung: Ein Vektorfeld längs α ist also parallel, genau wenn seine gewöhnliche Ableitung $V'(t)$ überall senkrecht zu $T_{\alpha(t)}M$ ist. □

Im Folgenden zeigen wir, dass gewisse Eigenschaften von parallelen Vektorfeldern, die wir aus dem Euklidischen kennen, erhalten bleiben:

Lemma (Parallelität erhält Beträge und Winkel) *Es sei $M \subset \mathbb{R}^3$ reguläre Fläche, $\alpha : I \to M$ differenzierbare Kurve und V, W zwei parallele differenzierbare Vektorfelder längs α. Dann sind die Beträge von $V(t)$ bzw. $W(t)$ sowie der Winkel zwischen $V(t)$ und $W(t)$ konstante Funktionen auf I.*

Beweis: $V'(t), W'(t)$ sind überall senkrecht zu $T_{\alpha(t)}M$, also insbesondere senkrecht zu $V(t)$ und $W(t)$. Es folgt

$$\langle V, W\rangle' = \langle V', W\rangle + \langle V, W'\rangle \equiv 0,$$

und dasselbe für $\langle V, V\rangle$ und $\langle W, W\rangle$, woraus die Behauptungen folgen. □

Satz und Definition (Parallelverschiebung) *Es sei $M \subset \mathbb{R}^3$ reguläre C^2-Fläche, $\alpha : I \to M$ differenzierbare Kurve mit $\alpha(t_0) = p$. Dann gibt es zu jedem $w \in T_pM$ ein paralleles Vektorfeld W längs I mit $W(t_0) = w$. Es ist eindeutig und hängt stetig von w ab. Dieses Vektorfeld heißt die* Parallelverschiebung *von w längs α.*

Beweis: Wir müssen

$$\frac{DW}{dt} = 0$$

auf I mit den Anfangswerten $W(t_0) = w$ lösen. Dies ist nach obigen Koordinatenformeln ein System von zwei linearen Differentialgleichungen für w^u und w^v; und die eindeutige Lösbarkeit sowie stetige Abhängigkeit von w folgen aus den entsprechenden Standardsätzen über gewöhnliche Differentialgleichungen. $\square$

Bemerkungen: (1) Mit der Kettenregel weist man sofort nach, dass die Parallelverschiebung invariant ist unter Umparametrisierung der Kurve α. Von der *Spur* von α hängt die Parallelverschiebung dagegen sehr wohl ab, wie wir gleich sehen werden. $\square$

(2) Außer den Daten über Kurven, Vektorfelder und Richtungen werden in den Formeln für die kovariante Ableitung nur die Christoffel-Symbole gebraucht, von denen wir wissen, dass sie invariant unter Isometrien sind. Es folgt: *Kovariante Ableitung, Parallelität und Parallelverschiebung längs Kurven sind invariant unter Isometrien.* Das bedeutet zum Beispiel: Ist $\Phi : M_1 \to M_2$ eine Isometrie und W die Parallelverschiebung von $w \in T_pM_1$ längs α (mit $\alpha(t_0) = p$), dann ist $t \mapsto d\Phi(\alpha(t))W(t)$ die Parallelverschiebung von $d\Phi(p)w$ längs der Kurve $\Phi \circ \alpha$ in M_2. $\square$

Beispiel: Der einschalige Kegel $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < z = k\sqrt{x^2 + y^2}\}$ (ohne Spitze) ist lokal isometrisch zur Ebene.Um das zu sehen, bestimmen wir zunächst den Öffnungswinkel (zur z-Achse) des Kegels als

$$\beta := \operatorname{arccot} k.$$

Der Kegel ohne eine Gerade wird parametrisiert durch $\mathbf{x} : \mathbf{y} :]0, \infty[\times]0, 2\pi \sin \beta[\to \mathbb{R}^3$,

$$\mathbf{x}(u, v) := (u \sin \beta \cos(v/ \sin \beta + \psi), u \sin \beta \sin(v/ \sin \alpha + \psi), u \cos \beta),$$

wie man leicht sieht; wobei $\psi \in \mathbb{R}$ irgendein fest gewählter Winkel ist. Mit zwei verschiedenen Wahlen von ψ erhält man einen vollständigen Atlas für den Kegel.

Sei nun $U \subset \mathbb{R}^2 \times \{0\}$ der Sektor in der Ebene (vollständig) parametrisiert durch $\mathbf{y} :]0, \infty[\times]0, 2\pi \sin \beta[\to \mathbb{R}^3$,

$$\mathbf{y}(u, v) := (u \cos v, u \sin v, 0)$$

(also einfach durch ebene Polarkoordinaten). Dann sind für “beide” Parametrisierungen

$$E \equiv 1, \qquad F \equiv 0, \qquad , G = u^2.$$

Folglich ist das Bild von $\mathbf{x}$ für jede Wahl von ψ isometrisch zu U; der Kegel damit lokal isometrisch zu $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$.

Damit können und mit der letzten Bemerkung können wir jetzt die Parallelverschiebung z.B. längs eines “Breitenkreises” des Kegels explizit durch Zeichnen bestimmen (ausführen!). Insbesondere zeigt sich: Parallelverschiebung eines Vektors längs des geschlossenen Breitenkreises dreht den Vektor un $2\pi\beta$. Folglich ist die Parallelverschiebung eines Vektors abhängig von der Kurve, längs der parallel verschoben wird (denn für einen kleinen Kreis im Kegel ist die Parallelverschiebung desselben Vektors die

Identität). $\square$

Bemerkung: Ist $p \in M$ fixiert, so ist, weil Parallelverschiebung Beträge und Winkel erhält, die Parallelverschiebung längs irgendeinem festen geschlossenen Weg α von p nach p in M eine orthogonale Abbildung $L_\alpha : T_pM \to T_pM$ (kann aufgefasst werden als eine orthogonale Abbildung $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, also als ein Element der orthogonalen Gruppe $O(2)$). Hintereinander-Durchlaufen von Wegen entspricht Hintereinanderausführung von solchen orthogonalen Abbildungen (Differenzierbarkeit ist nach Approximation kein Problem beim Zusammensetzen), also bilden die L_α zu allen geschlossenen Wegen α von p nach p in M eine Untergruppe von $O(2)$. Man kann zeigen, dass diese, wenn M wegzusammenhängend ist, bis auf Isomorphie nicht von der Auswahl von p abhängt. Sie heißt die *Holonomiegruppe* von M. Im gerade betrachteten Fall des Kegels mit Öffnungswinkel β zeigt sich, dass die Parallelverschiebung längs geschlossener Kurven immer eine Drehung um ein Vielfaches von $2\pi \sin\beta$ bewegt. Deshalb ist die Holonomiegruppe die Gruppe $\{e^{i(2\pi k \sin\beta)} : k \in \mathbb{N}\}$ und hängt vom Winkel β ab. Ist $\beta = \pi/6$, dann ist sie $\{\pm\mathrm{id}\}$; ist $\sin\beta$ dagegen irrational, dann ist sie unendlich und dicht in $SO(2) = \{e^{i\vartheta} : \vartheta \in \mathbb{R}\} = S^1$. $\square$

4.3 Geodätische

Geodätische spielen auf Flächen weigehend die Rolle, die (affine) Geraden in $\mathbb{R}^2$ spielen. Geraden (in Parametrisierung proportional zur Bogenlänge) sind durch $(\alpha')' = 0$ charakterisiert, wobei wir α' als Vektorfeld längs α auffassen und $(\alpha')'$ als dessen gewöhnliche (also auch kovariante) Ableitung. Eine analoge Beschreibung haben Geodätische:

Definition (Geodätische) *Eine Kurve $\alpha : I \to M$ in einer regulären C^2-Fläche $M \subset \mathbb{R}^3$ heißt* Geodätische*, falls sie mindestens C^2 ist und*

$$\frac{D}{dt}\,\alpha'(t) = 0 \qquad \textit{für alle } t \in I.$$

Eine Geodätische α heißt geschlossen*, falls α periodisch ist, also $I = \mathbb{R}$ und es existiert ein $\tau \in \mathbb{R}$ mit $\alpha(t) = \alpha(t+\tau)$ für alle $t \in \mathbb{R}$.*

Häufig bezeichnen wir auch (etwas ungenau) das Bild einer Geodätischen in M als eine Geodätische, und im Fall $I = [a, b]$ sprechen wir von einer Geodätischen von $\alpha(a)$ nach $\alpha(b)$.

Bemerkungen: (1) Nach obigem Lemma ist $|\alpha'|$ für Geodätische konstant, weil α' paralleles Vektorfeld ist. *Geodätische sind also immer proportional zur Bogenlänge parametrisiert.* Die Durchlaufgeschwindigkeit darf nach der Definition auch 0 sein (also die Kurve konstant); wir nehmen aber diesen degenrierten Fall meist stillschweigend aus.

(2) Nach der Interpretation der kovarianten Ableitung ist α genau dann Geodätische in M, wenn

$$\alpha''(t) \perp M \qquad \text{für alle } t,$$

wobei α'' die zweite Ableitung von α aufgefasst als Kurve in $\mathbb{R}^3$ ist.

(3) Isometrien führen Geodätische in Geodätische über, d.h. ist $\Phi : M_1 \to M_2$ Isometrie und α Geodätische in M_1, dann ist auch $\Phi \circ \alpha$ Geodätische in M_2. Dies ist so, weil kovariante Ableitungen invariant unter Isometrien sind (was hier bedeutet, dass $d\Phi$ mit $\frac{D}{dt}$ vertauscht). $\square$

Aus der Formel für $\frac{D}{dt}$ folgern wir sofort

Lemma (Differentialgleichung für Geodätische:) *Sei M reguläre C^2-Fläche in $\mathbb{R}^3$. Dann ist $\alpha : I \to M$ genau dann eine Geodätische, wenn für jede lokale Parametrisierung $\mathbf{x} : D \to M$ die zurückgeholte Kurve $\gamma : I \supseteq J \to D$ die Differentialgleichung*

$$(\gamma^k)'' + \sum_{i,j} (\Gamma_{ij}^k \circ \gamma)(\gamma^i)'(\gamma^j)' = 0, \qquad k \in \{u, v\}$$

auf ihrem natürlichen Definitionsbereich $J := \{t \in I : \alpha(t) \in \mathbf{x}(D)\}$ löst.

Mit dem lokalen Existenz- und Eindeutigkeitssatz für Systeme von gewöhnlichen Differentialgleichungen folgt sofort:

Satz (Lokale Existenz von Geodätischen) *Sei M reguläre C^2-Fläche in $\mathbb{R}^3$. Dann existiert zu jedem $p \in M$ und jedem $Y \in T_xM$ ein $\delta > 0$ und eine Geodätische $\alpha :]-\delta, \delta[\to M$ mit $\alpha(0) = p$, $\alpha'(0) = Y$. Bis auf eventuelle Vergrößerung oder Verkleinerung des Definitionsbereichs ist α hierdurch eindeutig bestimmt.*

Beispiele: (0) Die Geodätischen auf $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$ sind genau die (proportional zur Bogenlänge parametrisierten) affinen Geraden. Denn $\frac{D}{dt} = \frac{d}{dt}$ (weil alle Christoffel-Symbole 0 sind).

(1) Die Geodätischen auf S^2 kann man mit Bemerkung (3) wesentlich bequemer bestimmen als über die Differentialgleichung. Wir möchten die Geodätische mit $\alpha(0) = p \in S^2$ und $\alpha'(0) = Y \in T_pS^2$ berechnen, dann ist $Y \perp p$. Nehmen wir an, dass $Y \neq 0$ (sonst ist die Geodätische konstant), dann spannen p und Y eine Ebene E in $\mathbb{R}^3$ auf, und die Spiegelung σ an dieser Ebene ist eine Isometrie von S^2. Mit α muss also auch $\sigma \circ \alpha$ Geodätische in S^2 sein. Und es gilt $(\sigma \circ \alpha)(0) = \sigma(p) = p$ und $(\sigma \circ \alpha)'(0) = d\sigma(\alpha(0))\alpha'(0) = d\sigma(p)Y = Y$, folglich ist $\sigma \circ \alpha = \alpha$. Das heißt, dass α in der Fixpunktmenge von σ in S^2 verlaufen muss, diese ist der *Großkreis* $S^2 \cap E$ (eindimensional!). Folglich ist α die Parametrisierung dieses Großkreises mit konstanter Geschwindigkeit $|Y|$, also

$$\alpha(t) = p \cos(|Y|t) + \frac{Y}{|Y|} \sin(|Y|t),$$

und alle Geodätischen auf S^2 sind (falls nichtkonstant) in diesem Sinne Großkreise. Umgekehrt rechnet man mit Bemerkung (2) nach, dass jeder Großkreis bei Parametrisierung proportional zur Bogenlänge Geodätische auf S^2 ist: Denn jeder solche Großkreis ist von der Form

$$\alpha(t) = V \sin \omega t + W \sin \omega t$$

mit $\omega \in \mathbb{R}$, $V, W \in S^2$ und $V \perp W$. Dann ist

$$\alpha''(t) = -\omega^2 \alpha(t) = \omega^2 N(\alpha(t)) \perp T_{\alpha(t)} S^2,$$

also α'' überall senkrecht zu S^2 wie verlangt.

(2) Für das Rotationsparaboloid

$$\mathbf{x}(u, v) = (u, v, u^2 + v^2)$$

haben wir

$$\begin{aligned}
g_{uu} = E &= 1 + 4u^2, \\
g_{uv} = g_{vu} = F &= 4uv, \\
g_{vv} = G &= 1 + 4v^2, \\
EG - F^2 &= 1 + 4u^2 + 4v^2, \\
g^{uu} &= \frac{1 + 4v^2}{1 + 4u^2 + 4v^2}, \\
g^{uv} = g^{vu} &= \frac{-4uv}{1 + 4u^2 + 4v^2}, \\
g^{vv} &= \frac{1 + 4u^2}{1 + 4u^2 + 4v^2}.
\end{aligned}$$

Für die Berechnung der Christoffel-Symbole empfiehlt sich die Abkürzung

$$\Gamma_{sij} := \frac{1}{2}(\partial_i g_{js} + \partial_j g_{si} - \partial_s g_{ij});$$

damit ist

$$\begin{aligned}
\Gamma_{uuu} &= \frac{1}{2}\,\partial_u g_{uu} = 4u, \\
\Gamma_{uvu} = \Gamma_{uuv} &= \frac{1}{2}\,\partial_v g_{uu} = 0, \\
\Gamma_{vuu} &= \partial_u g_{uv} - \frac{1}{2}\,\partial_v g_{uu} = 4v,
\end{aligned}$$

und aus Symmetriegründen dann

$$\begin{aligned}
\Gamma_{vvv} &= 4v, \\
\Gamma_{vuv} = \Gamma_{vvu} &= 0, \\
\Gamma_{uvv} &= 4u.
\end{aligned}$$

Wir folgern

$$\begin{aligned}
\Gamma^u_{uu} &= g^{uu}\Gamma_{uuu} + g^{uv}\Gamma_{vuu} = \frac{(1 + 4v^2)4u - 4uv4v}{1 + 4u^2 + 4v^2} = \frac{4u}{1 + 4u^2 + 4v^2}, \\
\Gamma^u_{vu} = \Gamma^u_{uv} &= g^{uu}\Gamma_{uuv} + g^{uv}\Gamma_{vuv} = 0,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\Gamma^u_{vv} &= g^{uu}\Gamma_{uvv} + g^{uv}\Gamma_{vvv} = \frac{(1+4v^2)4u - 4uv4v}{1+4u^2+4v^2} = \frac{4u}{1+4u^2+4v^2}\,,\\
\Gamma^v_{vv} &= \frac{4v}{1+4u^2+4v^2}\,,\\
\Gamma^v_{uv} = \Gamma^v_{vu} &= 0,\\
\Gamma^v_{uu} &= \frac{4v}{1+4u^2+4v^2}\,.
\end{aligned}
$$

Also lauten die Differentialgleichungen für Geodätische $\alpha = \mathbf{x} \circ \gamma$

$$
\begin{aligned}
(\gamma^u)'' + \frac{4\gamma^u}{1+4|\gamma|^2}|\gamma'|^2 &= 0,\\
(\gamma^v)'' + \frac{4\gamma^v}{1+4|\gamma|^2}|\gamma'|^2 &= 0.
\end{aligned}
$$

Dieses System können wir wohl nicht explizit lösen. In Aufgabe 26 schreiben wir die Gleichung in (etwas günstigeren) Polarkoordinaten hin. □

Definition (Exponentialabbildung) *Sei $M \subset \mathbb{R}^3$ reguläre C^2-Fläche. Die* Exponentialabbildung *von (M,g) in $p \in M$ ist diejenige Abbildung* $\exp_p : T_pM \supseteq \mathrm{Def}(\exp_p) \to M$*, die gegeben ist durch* $\exp_p(w) := \alpha(1)$ *für die Geodätische α mit $\alpha'(0) = w$ und $\alpha(0) = p$.*

Bemerkungen: (1) Die lokale Eindeutigkeit von Geodätischen, zusammen mit der Erkenntnis, dass mit $t \mapsto \alpha(t)$ auch $t \mapsto \alpha(\lambda t)$ Geodätische ist für alle $\lambda \in \mathbb{R}$, bedeutet, dass $\exp_p$ den Strahl von $0 \in T_pM$ nach $w \in T_pM$ auf die Geodätische von x nach $\exp_p(w)$ in M abbildet, und zwar proportional zur Bogenlänge parametrisiert (falls diese Geodätische existiert). Mit v enthält $\mathrm{Def}(\exp_p)$ dann auch immer die Strecke von 0 nach p in T_pM; man sagt, dass $\mathrm{Def}(\exp_p)$ *sternförmig*in T_pM ist.

(2) Aus dem Satz über differenzierbare Abhängigkeit der Lösung eines Differentialgleichungssystems von den Anfangsdaten und Koeffizientenfunktionen folgt, dass $\mathrm{Def}(\exp_p)$ offen in T_pM ist und dass exp differenzierbar ist.

(3) Es gilt $(d\exp_p)(0)w = \frac{d}{dt}_{|0}\exp_p(tw) = \frac{d}{dt}_{|0}\alpha(t) = \alpha'(t) = w$, wobei α die Geodätische mit $\alpha(0) = p$ und $\alpha'(0) = w$ sei. Das beweist:

$$
d\exp_p(0) = \mathrm{id}_{T_pM}.
$$

Mit dem Umkehrsatz für Abbildungen zwischen Flächen (der wie früher aus dem Satz über die implizite Funktion oder dem üblichen Umkehrsatz folgt) folgt daraus:

Proposition (exp **als lokaler Diffeomorphismus)** *Sei $M \subset \mathbb{R}^3$ reguläre C^2-Fläche. Zu jedem $p \in M$ gibt es $\varepsilon > 0$, so dass $\exp_p : T_pM \supset B_\varepsilon(0) \to M$ ein Diffeomorphismus von $B_\varepsilon(0)$ zu einer offenen Menge in M ist.* □

Definition (Normalkugel, Injektivitätsradius) *Wir nennen* $\exp_p(B_\varepsilon(0))$ *mit solch einem* $\varepsilon > 0$ *eine* Normalkugel *von* p *in* M *und die Parametrisierung dieser Umgebung durch* $\exp_p : B_\varepsilon(0) \to M$ *eine* Normalparametrisierung*, die Umkehrung als* Normalkoordinaten*. Das größtmögliche* ε*, für das* $\exp_p$ *eingeschränkt auf* $B_\varepsilon(0)$ *noch Diffeomorphismus ist, heißt* Injektivitätsradius *von* p *in* M*. Das Infimum dieser Radien über alle* $p \in M$ *heißt der* Injektivitätsradius von M*; er kann für nicht kompaktes* M *Null sein.*

Korollar (lokal eindeutige Verbindbarkeit durch Geodätische) *Jedes* $x \in M$ *hat eine Umgebung* V *in* M*, so dass jeder Punkt* $q \in V$ *mit* p *durch eine Geodätische* α *in* V *verbindbar ist und dass diese eindeutig ist in dem Sinne, dass jede Geodätische von* p *nach* q*, die nicht Umparametrisierung von* α *ist,* V *verlässt.*

Beweis: Wähle V als Normalkugel von p. Dann entsprechen die Geodätischen in V durch a genau den Strahlen in $B_\varepsilon(0)$ durch 0, und $\exp^{-1}(q)$ liegt auf genau einem solchen Strahl. $\square$

Wie das im $\mathbb{R}^2$ für Geraden der Fall ist, sind Geodätische in Flächen diejenigen Kurven, die kürzeste Verbindungen zwischen zwei Punkten realisieren. Allerdings stimmt diese Aussage im Allgemeinen nur lokal. Mit diesem Aspekt wollen wir uns im Folgenden beschäftigen.

Hier arbeiten wir mit stückweise C^1-Kurven statt glatten Kurven, weil man diese leichter "zusammensetzen" kann (und weil die Methoden diese Bequemlichkeit ohne großen Mehraufwand erlauben).

Definition (Energie von Kurven) *Sei* $\alpha : [a, b] \to M$ *stückweise* C^1*-Kurve in der regulären Fläche* $M \subset \mathbb{R}^3$*. Dann heißt die Größe*

$$E(\alpha) := \frac{1}{2} \int_a^b |\alpha'(t)|^2 \, dt$$

die Energie *von* α*.*

Bemerkungen: (1) Die Minimierer der Energie bei festgehaltenen Endpunkten $\alpha(a)$ und $\alpha(b)$ in $\mathbb{R}^n$ sind genau die *proportional zur Bogenlänge parametrisierten* Geraden, d.h. genau die Geodätischen mit den richtigen Parametrisierungen (während jede monotone Umparametrisierung davon die Kurvenlänge minimiert). In diesem Sinne ist die Eigenschaft "energieminimierend" enger mit Geodätischen verknüpft als "längenminimierend". Das wird auch in Flächen so sein.

(2) Wir schreiben $L(\alpha) := L_a^b(\alpha)$ für die Länge der Kurve aus der Definition. Die Cauchy-Schwarz-Ungleichung für Funktionen auf $[a, b]$ liefert die Ungleichung

$$L(\alpha) \leq \sqrt{2(b-a)}\sqrt{E(\alpha)},$$

mit Gleichheit genau dann, wenn $|\alpha'(t)|$ konstant ist. Also ist jeder proportional zur Bogenlänge parametrisierte Minimierer von E ein Minimierer von L, und jeder Minimierer von E ist automatisch nach der Bogenlänge parametrisiert. Wir verlieren also durch Betrachtung von E statt L keine Information über Längenminimierer Die Analysis für E ist wegen des Quadrats etwas weniger technisch als die für L. $\square$

Definition (Variation) *Sei M eine reguläre Fläche, $\alpha : [a,b] \to M$ eine stückweise C^1-Kurve. Eine* Variation *von α ist eine 1-Parameterschar von Kurven $\alpha_s : [a,b] \to M$, $s \in]-\delta, \delta[$ für ein $\delta > 0$, so dass $\alpha_0 \equiv \alpha$, $(s,t) \mapsto \alpha_s(t)$ ist C^0 und sogar C^1 für alle t außer den Knickstellen von α, und $\partial_s \partial_t \alpha_s(t)$ sowie $\partial_t \partial_s \alpha_s(t)$ sollen bei $s = 0$ und allen t außer den Knickstellen von α existieren und stetig sein.*

Das stückweise C^1-Vektorfeld $V(t) := \frac{\partial}{\partial s}_{|s=0} \alpha_s(t)$ längs α heißt das Variationsvektorfeld *zu der Variation.*

Wir sprechen von Variation mit festen Endpunkten, *falls $\alpha_s(a) = \alpha(a)$ und $\alpha_s(b) = \alpha(b)$ für alle $s \in]-\delta, \delta[$ gilt.*

Bemerkung: Man muss sich zunächst kurz davon überzeugen, dass es überhaupt (viele) Variationen gibt. Verläuft α ganz im Bild einer Parametrisierung $\mathbf{x} : D \to M$, dann kann man z.B.

$$\alpha_s(t) := \mathbf{x}(\mathbf{x}^{-1}(\alpha(t)) + sW(t))$$

für eine C^1-Funktion $W(t)$ in $\mathbb{R}^2$ ansetzen. Oder für ein vorgegebenes (stückweise) C^1-Vektorfeld V längs α definiert man

$$\alpha_s(t) := \exp_{\alpha(t)}(sV(t)),$$

dann ist V auch tatsächlich das Variationsvektorfeld zu dieser Variation. $\square$

Im folgenden Satz heißt "stückweise C^2", dass die Kurve C^2 ist bis auf eventuelle endlich viele Knickstellen, wo sie nur C^0 ist.

Satz (Minimierer von Länge oder Energie sind Geodätische) *Es sei $M \subset \mathbb{R}^3$ reguläre C^2-Fläche und $p, q \in M$ gegeben. Ist $\alpha : [a,b] \to M$ mit $\alpha(a) = p$, $\alpha(b) = q$ eine stückweise C^2-Kurve, die bei festen Endpunkten die Energie minimiert (d.h. $E(\alpha) \leq E(\beta)$ für alle stückweise C^2-Kurven $\beta : [a,b] \to M$ mit $\beta(a) = p$ und $\beta(b) = q$), dann ist α Geodätische (und insbesondere glatt ohne Knickstellen). Im Fall $\alpha' \neq 0$ überall ist jede stückweise C^2-Kurve, die bei festen Endpunkten die Länge minimiert, monotone Umparametrisierung einer Geodätischen.*

Beweis: Die Energieminimierer-Eigenschaft bedeutet, dass die differenzierbare Funktion $s \mapsto E(\alpha_s)$ bei $s = 0$ ein lokales Minimum annimmt, folglich muss die *erste Variation der Energie* $\frac{d}{ds}_{|s=0} E(c_s)$ für alle Variationen von c mit festen Endpunkten Null sein. Wir berechnen zunächst

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}_{|s=0} E(\alpha_s) &= \frac{d}{ds}_{|s=0} \Big(\frac{1}{2} \int_a^b |\alpha_s'(t)|^2 \, dt \Big) \\ &= \frac{1}{2} \int_a^b \frac{d}{ds}_{|s=0} \langle \alpha_s'(t), \alpha_s'(t) \rangle \, dt \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_a^b \Big\langle \alpha'(t), \frac{\partial}{\partial s}_{|s=0} \frac{\partial}{\partial t}\, \alpha_s(t) \Big\rangle \, dt \\
&= \int_a^b \Big\langle \alpha'(t), \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial s}_{|s=0}\, \alpha_s(t) \Big\rangle \, dt \\
&= \int_a^b \Big\langle \alpha'(t), \frac{D}{dt} \frac{\partial}{\partial s}_{|s=0}\, \alpha_s(t) \Big\rangle \, dt \\
&= \int_a^b \Big\langle \alpha'(t), \frac{D}{dt}\, V \Big\rangle.
\end{aligned}
$$

Dabei garantieren die Voraussetzungen an Variationen, dass wie benutzt

$$
\frac{\partial}{\partial s}_{|s=0} \frac{\partial}{\partial t}\, \alpha_s(t) = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial s}_{|s=0}\, \alpha_s(t).
$$

Sind $t_1 < t_2 < \ldots t_\ell$ die Knickstellen, $t_0 := a$, $t_{\ell+1} := b$, dann folgt mit partieller Integration auf den Intervallen $[t_k, t_{k+1}]$

$$
\frac{d}{ds}_{|s=0} E(\alpha_s) = -\int_a^b \Big\langle \frac{D}{dt}\, \alpha', V \Big\rangle + \sum_{k=0}^{\ell} \langle \alpha', V \rangle \Big|_{t \searrow t_k}^{t \nearrow t_{k+1}}.
$$

Nach obiger Bemerkung kann man zu jedem stückweise C^1-Feld mit $V \equiv 0$ auf $[\alpha, \beta] \setminus [t_k, t_{k+1}]$ für ein $k \in \{0, \ldots, \ell\}$ eine Variation α_s von $\alpha = \alpha_0$ konstruieren, so dass

$$
\alpha_s \equiv \alpha \text{ auf } [a, b] \setminus [t_k, t_{k+1}], \qquad \frac{d}{ds}_{|s=0} \alpha_s = V \text{ auf } [t_k, t_{k+1}].
$$

Dann folgt aus obiger Berechnung der ersten Variation (und der Tatsache, dass sie gleich 0 sein muss)

$$
0 = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Big\langle \frac{D}{dt}\, \alpha'(t), V(t) \Big\rangle \, dt
$$

für *alle* V, woraus $\frac{D}{dt}\, \alpha'(t) = 0$ auf $]t_k, t_{k+1}[$ folgt; dieser Schluss heißt auch *Fundamentallemma der Variationsrechnung*. Also haben wir schon bewiesen, dass α stückweise geodätisch ist. Wir schließen jetzt noch die Existenz von Knickstellen aus wie folgt: Diesmal sei $V \equiv 0$ auf $[a, b] \setminus [t_{k-1}, t_{k+1}]$ (aber $V(t_k) \neq 0$ wird ausdrücklich erlaubt). Mit der schon bewiesenen Tatsache, dass c stückweise geodätisch ist, folgt wieder aus der Berechnung der ersten Variation

$$
0 = \langle \alpha'(t_k+), V(t_k) \rangle - \langle \alpha'(t_k-), V(t_k) \rangle.
$$

Hier ist $V(t_k)$ beliebig, also folgt $\alpha'(t_k+) = \alpha'(t_k-)$, d.h. α' ist stetig. Dann sorgt die Differentialgleichung dafür, dass auch $\frac{D}{dt}\alpha'$ stetig ist (nämlich $\equiv 0$, und damit auch alle höheren kovarianten Ableitungen). Folglich ist α glatt und hat gar keine Knickstellen; α ist damit als Geodätische bewiesen.

Für das Längenintegral geht alles weitgehend analog. Die erste Variation ist hier

$$
\frac{d}{ds}_{|s=0} L(\alpha_s) = -\int_a^b \Big\langle \frac{D}{dt} \frac{\alpha'}{|\alpha'|}, V \Big\rangle + \sum_{k=0}^{\ell} \Big\langle \frac{\alpha'}{|\alpha'|}, V \Big\rangle \Big|_{t \searrow t_k}^{t \nearrow t_{k+1}}.
$$

Aus der Minimierereigenschaft folgert man Stetigkeit von $\frac{\alpha'}{|\alpha'|}$ und $\frac{D}{dt}\frac{\alpha'}{|\alpha'|_g} = 0$, d.h. die Umparametrisierung von α nach der Bogenlänge ist Geodätische. $\square$

Bemerkung: Die Umkehrung des Satzes gilt i.A. nicht, d.h. Geodätische müssen nicht (global) Minimierer von Länge oder Energie sein. Aus der Berechnung der ersten Variation folgt aber sofort: Jede Geodätische ist *stationär* für Länge und Energie, d.h.

$$\frac{d}{ds}_{|s=0} E(\alpha_s) = 0 \qquad \text{und} \qquad \frac{d}{ds}_{|s=0} L(\alpha_s) = 0$$

für alle Variationen α_s von α. $\square$

Wir hatten früher für nach der Bogenlänge parametrisierte Kurven α in M

$$\alpha''(t) = \kappa_\alpha(t) N_\alpha(t)^\top + k_n(\alpha(t), \alpha'(t))$$

zerlegt und den zweiten Summanden (die Normalkrümmung bereits ausgiebig diskutiert. Den ersten Summanden (der ja nichts anderes ist als der tangentielle Anteil von $\alpha''(t)$ erkennen wir jetzt wieder als $\frac{D\alpha'}{dt}$. Aus diesem machen wir eine skalarwertige orientierte Krümmungsgröße:

Definition (geodätische Krümmung) *Es sei $M \subset \mathbb{R}^3$ orientierte Fläche, $\alpha : I \to M$ differenzierbare Kurve. Für jedes Einheitsvektorfeld W längs α ist $\frac{DW}{dt}(t)$ normal zu $w(t)$ und deshalb*

$$\frac{DW}{dt}(t) = \lambda(t)(N(\alpha(t)) \times W(t)).$$

Die reelle Zahl $\lambda(t)$ wird mit $[\frac{DW}{dt}(t)]$ bezeichnet und heißt der algebraische Wert der kovarianten Ableitung *von W in t.*

Ist nun $\alpha : I \to M$ nach der Bogenlänge parametrisierte C^2-Kurve, so heißt

$$k_\alpha(t) := \left[\frac{D\alpha'}{dt}(t)\right]$$

die geodätische Krümmung *von α in t. Wie üblich definiert man die geodätische Krümmung einer allgemein parametrisierten Kurve dann durch Umparametrisierung nach der Bogenlänge.*

Bemerkungen: (1) Der Betrag der geodätischen Krümmung ist $|\frac{D\alpha'}{dt}|$. Das Vorzeichen hängt von der Durchlaufrichtung der Kurve und der Orientierung von M ab.

(2) Eine nach der Bogenlänge parametrisierte C^2-Kurve ist Geodätische genau dann, wenn ihre geodätische Krümmung 0 ist.

(3) Obige Zerlegung kann jetzt als

$$\alpha''(t) = k_\alpha(t)(N(\alpha(t)) \times \alpha'(t)) + k_n(\alpha(t), \alpha'(t))$$

geschrieben werden. $\square$

4.4 Der Satz von Gauß und Bonnet

Hierbei handelt es sich um einen der tiefsten Sätze der elementaren Differentialgeometrie. Er stellt einen Zusammenhang zwischen Krümmung und Topologie einer Fläche her. Die Topologie kommt dabei durch folgende Begriffsbildung ins Spiel:

Definition (Rotationsindex) *Auf einer zusammenhängenden offenen Teilmenge G einer regulären Fläche $M \subset \mathbb{R}^3$ sei ein stetiges orthonormales 2-Bein U, V gegeben, d.h. eine stetige Auswahl von Orthonormalbasen von T_pM für $p \in G$. Für eine geschlossene stetige Kurve $\alpha : [a, b] \to G$ und ein Vektorfeld X ohne Nullstellen längs α mit $X(a) = X(b)$ wird der* Rotationsindex $\mathrm{ind}(X; U, V)$ *definiert als die Windungszahl der durch*

$$\frac{X(t)}{|X(t)|} = (\cos \vartheta(t))U(\alpha(t)) + (\sin \vartheta(t))V(\alpha(t))$$

definierten (geschlossenen stetigen) Kurve $t \mapsto e^{i\vartheta} : [a, b] \to S^1$.

Ist $X(t)$ nur stückweise stetig, aber so, dass der links- und rechtsseitige Limes an keiner Sprungstelle entgegengesetzte Richtungen haben, so wird $\mathrm{ind}(X; U, V)$ *definiert als Windungszahl derjeniger stetiger Kurve, die aus $t \mapsto e^{i\vartheta}$ durch das Einfügen von Kreisbögen der Länge $< \pi$ in den Sprungstellen entsteht.*

Bemerkungen: (1) Wegen $\mathrm{ind}(X; U, V) = \mathrm{ind}(\frac{X}{|X|}; U, V)$ genügt die Betrachtung von Einheitsvektorfeldern.

(2) ϑ aus der Definition heißt "Winkelfunktion" von X längs α bezüglich U und V. Es gilt

$$\mathrm{ind}(X; U, V) = \frac{\vartheta(b-) - \vartheta(a-)}{2\pi} = \frac{\vartheta(\beta+) - \vartheta(\alpha+)}{2\pi}.$$

(3) ind verändert sich offensichtlich stetig bei stetiger Änderung von X (ohne Nullstellen), M oder U, V. Da ind immer ganzzahlig ist, folgt: ind ist invariant unter diesen Deformationen; deshalb ist ind eine *topologische* Größe. □

Im nächsten Satz wird ein erster Zusammenhang des Rotationsindex zur Gauß-Krümmung hergestellt:

Satz (Gauß-Krümmung und Rotationsindex) *Sei $M \subset \mathbb{R}^3$ reguläre Fläche, $G \subseteq M$ offen, zusammenhängend, $\overline{G}$ kompakt, und eine Umgebung $H \supset \overline{G}$ versehen mit einem glatten orthonormalen 2-Bein U, V. Der Rand von G sei nach der Bogenlänge parametrisierbar als stückweise C^1-Kurve $\alpha : [0, L] \to M$; und α sei positiv orientiert passend zu der durch U und V vorgegebenen Randorientierung (Bild!). (Anm.: Dann ist G automatisch einfach zusammenhängend.) Dann gilt für jedes stückweise C^1-Einheitsvektorfeld X längs α mit $X(t_i+) \neq -X(t_i-)$ in den Sprungstellen, dass*

$$\int_G K \, d\omega_M + \int_0^L \left[\frac{DX}{dt}\right] dt + \sum_{i=1}^{k} \vartheta_i = 2\pi \,\mathrm{ind}(X; U, V),$$

wobei ϑ_i für $i = 1 \dots k$ die orientierten Winkel von $X(t_i-)$ nach $X(t_i+)$ in $]-\pi, \pi[$ seien und $d\omega_M$ das Flächenmaß auf M (auszurechnen in Koordinaten mit $\sqrt{EG-F^2}\, du\, dv$).

Beweis: Ergänze $X(t)$ an jedem t durch $Y(t)$ zu einer bezüglich $\{U(\alpha(t)), V(\alpha(t))\}$ positiv orientierten ONB von $T_{\alpha(t)}M$; dann ist

$$\left[\frac{DX}{dt}\right] = Y \cdot \frac{DX}{dt}\,.$$

Schreiben wir wieder

$$X(t) = (\cos\vartheta(t))U(\alpha(t)) + (\sin\vartheta(t))V(\alpha(t)),$$

wobei ϑ C^1 ist außer evtl. an den Sprungstellen t_i mit $\vartheta_i = \vartheta(t_i+) - \vartheta(t_i-)$. Es folgt

$$Y(t) = (-\sin\vartheta(t))U(\alpha(t)) + (\cos\vartheta(t))V(\alpha(t)).$$

Damit berechnen wir außerhalb der Sprungstellen

$$\begin{aligned}
\left[\frac{DX}{dt}(t)\right] &= Y(t)\cdot\frac{D}{dt}\Big((\cos\vartheta(t))U(\alpha(t)) + (\sin\vartheta(t))V(\alpha(t))\Big) \\
&= Y(t)\cdot\{-(\sin\vartheta(t))U(\alpha(t)) + (\cos\vartheta(t))V(\alpha(t))\}\vartheta'(t) \\
&\quad + Y(t)\cdot\{(\cos\vartheta(t))\frac{DU}{dt}(\alpha(t)) + (\sin\vartheta(t))\frac{DV}{dt}(\alpha(t))\} \\
&= \vartheta'(t) + (\cos^2\vartheta(t))V(\alpha(t))\cdot\frac{DU}{dt}(\alpha(t)) - (\sin^2\vartheta(t))U(\alpha(t))\cdot\frac{DV}{dt}(\alpha(t)) \\
&= \vartheta'(t) + V(\alpha(t))\cdot\frac{DU}{dt}(\alpha(t)),
\end{aligned}$$

wobei wir in der vorletzten Zeile $\frac{DU}{dt} \perp U$ und $\frac{DV}{dt} \perp V$ ausgenutzt haben, und in der letzten die differenzierte Form von $U \cdot V \equiv 0$. Jetzt stellen wir

$$\alpha'(t) =: (\cos\zeta(t))U(\alpha(t)) + (\sin\zeta(t))V(\alpha(t))$$

dar und finden, dass

$$\nu(t) := (\sin\zeta(t))U(\alpha(t)) - (\cos\zeta(t))V(\alpha(t))$$

der äußere (so sind die Orientierungen gewählt) Normaleneinheitsvektor zu G ist (d.h. tangential an M nach außen zeigend). Damit berechnen wir weiter, unter erneuter Verwendung von $U \cdot V \equiv 0$,

$$\begin{aligned}
V(\alpha(t))\cdot\frac{DU}{dt}(\alpha(t)) &= V(\alpha(t))\cdot\{(\cos\zeta(t))D_U U(\alpha(t)) + (\sin\zeta(t))D_V U(\alpha(t))\} \\
&= (\cos\zeta(t))V(\alpha(t))\cdot D_U U(\alpha(t)) - (\sin\zeta(t))U(\alpha(t))\cdot D_V V(\alpha(t)) \\
&= -\nu(t)\cdot\{D_U U(\alpha(t)) + D_V V(\alpha(t))\}.
\end{aligned}$$

Damit ist bisher gezeigt:

$$\left[\frac{DX}{dt}(t)\right] = \vartheta'(t) - \nu(t)\cdot\{D_U U(\alpha(t)) + D_V V(\alpha(t))\}.$$

Der Gaußsche Satz (oder genauer eine Variante für Gebiete auf Flächen mit Ecken, die genauso wie der Gaußsche Satz aus dem Satz von Stokes folgt) sagt

$$\int_{\partial G} Q \cdot \nu \, dt = \int_G \operatorname{div} Q \, d\omega_M$$

für Vektorfelder Q auf $\overline{G}$. Dabei ist div auf M zu interpretieren als

$$(\operatorname{div} Q)(p) = U \cdot D_U Q(p) + V \cdot D_V Q(p)$$

für irgendeine (und damit alle) ONB $\{U, V\}$ von $T_p M$. Damit integrieren wir die vorige Gleichung und erhalten

$$\int_0^L \left[\frac{DX}{dt}\right] dt = \int_0^L \vartheta'(t) \, dt - \int_G \operatorname{div}(D_U U + D_V V) d\omega_M,$$

und das erste Integral auf der rechten Seite ist

$$\int_0^L \vartheta'(t) \, dt = 2\pi \operatorname{ind}(X; U, V) - \sum_{i=1}^k \vartheta_i.$$

Alles was uns noch fehlt ist, dass die Divergenz auf der rechten Seite die Gauß-Krümmung ist. Dazu stellen wir zunächst einmal fest, dass wegen $|U| = |V| \equiv 1$ Funktionen φ und ψ existieren mit

$$D_U U = \varphi V, \qquad D_V U = \psi V, \qquad D_U V = -\varphi U, \qquad D_V V = -\psi U.$$

Es folgt (wieder weil $\{U, V\}$ ONB ist)

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(D_U U + D_V V) &= \operatorname{div}(\varphi V - \psi U) \\
&= U \cdot D_U(\varphi V - \psi U) + V \cdot D_V(\varphi V - \psi U) \\
&= \varphi U \cdot D_U V - \partial_U \psi + \partial_V \phi - \psi V \cdot D_V U \\
&= U \cdot \{D_U(-\psi U) - D_V(-\varphi V) + \varphi D_U V + \psi D_V V\} \\
&= U \cdot \{D_U D_V V - D_V D_U V + D_{\varphi U + \psi V} V \\
&= U \cdot \{D_U D_V V - D_V D_U V - D_{D_U V - D_V U} V\} \\
&= K,
\end{aligned}$$

womit der Satz bis auf das letzte "=" (eine weitere bemerkenswerte Formel für K, die im nächsten Satz formuliert wird) bewiesen ist. $\square$

Bemerkung: Der Satz gilt (mit gleichem Beweis) analog für den Fall, dass G mehrere Randkomponenten hat; dann muss man auf beiden Seiten über alle Randkomponenten summieren, während das Integral über K so stehen bleibt. Insbesondere ist der Satz dann auch für nicht einfach zusammenhängende G anwendbar. $\square$

Definition (Riemannsche Krümmung) *Sei M reguläre C^3-Fläche. Die Zuordnung*

$$R(X,Y)Z := D_X D_Y Z - D_Y D_X Z - D_{[X,Y]} Z$$

mit

$$[X,Y] := D_X Y - D_Y X$$

für C^2-Vektorfelder X, Y und Z auf M heißt der Riemannsche Krümmungstensor *von M.*

Bemerkung: Dies ist ein anderer Zugang zur Krümmung, der Krümmung als die "Nichtvertauschbarkeit kovarianter Ableitungen" auffasst und deshalb $D_X D_Y - D_Y D_X$ (geeignet modifiziert, dass es ein Tensor wird) als Maß der Krümmung einer Fläche definiert. Was das mit den uns bekannten (inneren) Krümmungsgrößen zu tun hat, wird teilweise im nächsten Satz erklärt. Der Riemannsche Krümmungstensor enthält keine Information, die wir nicht auch bisher schon hätten gewiinen können, organisiert die Information über Krümmung aber in algebraisch anderer Weise. Einer seiner Vorteile ist die direkte Verallgemeinerbarkeit auf Flächen höherer Dimension (wo es kein direktes Analogon zur Gauß-Krümmung gibt). □

Satz (Eigenschaften der Riemannschen Krümmung) *(i) Die Riemannsche Krümmung ist C^∞-linear in allen Komponenten (und wird u.a. deshalb Tensor genannt), d.h.*

$$R(\varphi X + \psi W, Y)Z = \varphi R(X,Y)Z + \psi R(W,Y)Z$$

für alle Vektorfelder X, W, Y, Z und alle C^∞-Funktionen φ, ψ auf M. Analog für die anderen beiden Komponenten.

(ii) Für die Koordinatenvektorfelder *$\partial_u := \mathbf{x}_u \circ \mathbf{x}^{-1}$ und $\partial_v := \mathbf{x}_v \circ \mathbf{x}^{-1}$ gelten die Formeln*

$$R(\partial_i, \partial_j)\partial_k = \sum_{s \in \{u,v\}} R^s_{ijk} \partial_s$$

mit

$$R^s_{ijk} = \partial_i \Gamma^s_{jk} - \partial_j \Gamma^s_{ik} + \sum_r (\Gamma^r_{jk}\Gamma^s_{ir} - \Gamma^r_{ik}\Gamma^s_{jr}),$$

woraus man nach (i) mit $X = X^u\partial_u + X^v\partial_v$ usw. $R(X,y)Z$ ausrechnen kann als

$$R(X,Y)Z = \sum_{i,j,k,s} X^i Y^j Z^k R^s_{ijk} \partial_s.$$

(iii) Die Gauß-Krümmung kann als

$$K = \frac{\langle R(\partial_u, \partial_v)\partial_v, \partial_u \rangle}{EG - F^2} = \frac{E R^u_{uvv} + F R^v_{uvv}}{EG - F^2}$$

ausgerechnet werden.

Bemerkung: Aus (iii) folgt die noch offene Behauptung im vorigen Beweis, wenn man Normalkoordinaten (vgl. Aufgabe 27) um $p \in G$ mit $\mathbf{x}_u(0,0) = U(p)$ und $\mathbf{x}_v(0,0) = V(p)$ einführt, mit $E(0,0) = G(0,0) = 1$ und $F(0,0) = 0$.

Beweis: (i) Wir zeigen nur die multiplikative Linearität; der Rest ist einfach.

$$\begin{aligned} R(\varphi X, Y)Z &= D_{\varphi X} D_Y Z - D_Y D_{\varphi X} Z - D_{[\varphi X, Y]} Z \\ &= \varphi D_X D_Y Z - D_Y(\varphi D_X Z) - D_{\varphi [X,Y] - (\partial_Y \varphi) X} Z \\ &= \varphi D_X D_Y Z - (\partial_Y \varphi) D_X Z - \varphi D_Y D_X Z - \varphi D_{[X,Y]} Z + (\partial_Y \varphi) D_X Z \\ &= \varphi R(X,Y)Z \end{aligned}$$

und analog für $R(X, \varphi Y)Z$, sowie

$$\begin{aligned} R(X,Y)(\varphi Z) &= D_X D_Y(\varphi Z) - D_Y D_X(\varphi Z) - D_{[X,Y]}(\varphi Z) \\ &= D_X((\partial_Y \varphi) Z + \varphi D_Y Z) - D_Y((\partial_X \varphi) Z + \varphi D_X Z) \\ &\quad - (\partial_{[X,Y]} \varphi) Z - \varphi D_{[X,Y]} Z \\ &= \{\partial_X \partial_Y \varphi - \partial_Y \partial_X \varphi - \partial_{[X,Y]} \varphi\} Z + \varphi D_X D_Y Z \\ &\quad - \varphi D_Y D_X Z - \varphi D_{[X,Y]} Z \\ &= \varphi R(X,Y)Z, \end{aligned}$$

wobei man $\{\ldots\} = 0$ durch komponentenweises Ausrechnen verifiziert.

(ii) Aus der Definition der Christoffel-Symbole mit Ableitungen von $\mathbf{x}_u$ und $\mathbf{x}_v$ folgern wir

$$D_{\partial_i} \partial_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k \partial_k.$$

und berechnen

$$[\partial_u, \partial_v] = 0$$

mit der Koordinatenformel für kovariante Ableitung. Damit ist

$$\begin{aligned} R(\partial_i, \partial_j)\partial_k &= D_{\partial_i} D_{\partial_j} \partial_k - D_{\partial_j} D_{\partial_i} \partial_k \\ &= D_{\partial_i}\Big(\sum_s \Gamma_{jk}^s \partial_s\Big) - D_{\partial_j}\Big(\sum_s \Gamma_{ik}^s \partial_s\Big) \\ &= \sum_s \Big((\partial_i \Gamma_{jk}^s)\partial_s + \Gamma_{jk}^s D_{\partial_i} \partial_s - (\partial_j \Gamma_{ik}^s)\partial_s - \Gamma_{ik}^s D_{\partial_j} \partial_s\Big), \end{aligned}$$

woraus mit der ersten Gleichung die behauptete Formel für R_{ijk}^s folgt.

(iii) Einsetzen der Formeln aus (ii) für R_{uvv}^u und R_{uvv}^v gibt auf der rechten Seite eine Linearkombination der Christoffelsymbole aus den rechten Seiten der Gauß-Gleichungen für EK, FK und GK. $\square$

Bevor wir den Satz von Gauß/Bonnet formulieren, stellen wir noch ein weiteres topologisches Resultat zur Verfügung:

Satz (Umlaufsatz) *Sei G eine einfach zusammenhängende beschränkte offene Teilmenge von $\mathbb{R}^2$, versehen mit einem differnzierbaren Feld g von positiv definiten Bilinearformen auf $\mathbb{R}^2$, orientiert berandet durch eine stückweise C^1-Kurve $\alpha : [0, L] \to \mathbb{R}^2$ (nach der Bogenlänge parametrisiert) ohne Spitzen (d.h. $\alpha'(t_i-) \neq -\alpha'(t_i+)$ an den Knickstellen). Dann gilt für jedes positiv orientierte g-orthonormale 2-Bein $\{U, V\}$ auf einer Umgebung von $\overline{G}$, dass*

$$\operatorname{ind}(\alpha'; U, V) = 1.$$

Bemerkung: Das Feld g stellen wir uns vor als Vorgabe von E, F, G auf dem Parameterbereich G einer lokalen Parametrisierung einer Fläche,

$$g(X, Y) = X \cdot \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} Y.$$

g-orthonormal heißt $g(U, U) = g(V, V) \equiv 1$ und $g(U, V) \equiv 0$ auf G.

Beweis: Sei g_0 das Skalarprodukt von $\mathbb{R}^2$, d.h. $g_0(X, Y) = X \cdot Y$, dann ist durch

$$g_s := sg + (1 - s)g_0$$

für $s \in [0, 1]$ eine stetige Deformation von g nach g_0 gegeben, und wie früher überlegt ist ind invariant unter solchen Deformationen. Wir dürfen daher o.B.d.A. annehmen, dass g das übliche Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$ ist.

Mit modulo 2π eindeutiger Winkelfunktion φ können wir

$$U(x) = (\cos\varphi(x), \sin\varphi(x)), \qquad V(x) = (-\sin\varphi(x), \cos\varphi(x))$$

schreiben. Weil $\overline{G}$ einfach zusammenhängend ist, lässt sich φ stetig wählen (ist ja komplexer Logarithmus von U; das ist das Standardargument aus der Funktionentheorie). Dann ist

$$U_s(x) := (\cos(s\varphi(x)), \sin(s\varphi(x))), \qquad V_s(x) := (\sin(s\varphi(x)), \cos(s\varphi(x)))$$

für $s \in [0, 1]$ eine stetige Deformation zwischen $\{U, V\}$ und der (konstanten) Standardbasis von $\mathbb{R}^2$; wir dürfen daher o.B.d.A. auch $U = \binom{1}{0}$ und $V = \binom{0}{1}$ annehmen. Schließlich wird der Rotationsindex beim "Abrunden" der Ecken von α erhalten (so ist er gerade definiert), so dass wir auch annehmen dürfen, dass α differenzierbar ist mit $\alpha'(L) = \alpha'(0)$.

Nach einer Bewegung des $\mathbb{R}^2$ und geeigneter Wahl des Anfangspunktes können wir annehmen, dass $\alpha(0) = \alpha(L) = \binom{0}{0}$, $\alpha'(0) = \alpha'(1) = \binom{1}{0}$ und $\alpha^1(t) \geq 0$ für alle t. Setze jetzt

$$\Delta := \{(s, t) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq s \leq t \leq L\}$$

und definiere $h : \Delta \to S^1$ durch

$$h(s, t) := \begin{cases} \frac{\alpha(t) - \alpha(s)}{|\alpha(t) - \alpha(s)|} & \text{für } s \neq t \text{ und } (s, t) \neq (0, L), \\ \alpha'(t) & \text{für } s = t, \\ -\alpha'(0) & \text{für } (s, t) = (0, L). \end{cases}$$

Der Nenner ist $\neq 0$, weil α injektiv ist, und die Stetigkeit bei $(0, L)$ folgt aus $\alpha'(0) = \alpha'(L)$; man sieht so, dass h stetig ist auf ganz Δ. Die Windungszahl von $[0, L] \ni t \mapsto h(t, t) = \alpha'(t)$ ist dann der Index von α'. Die Funktion h liefert dann eine Homotopie (durch Kurven nach S^1) zu der Kurve, die aus h auf den beiden anderen Rändern des Dreiecks zusammengestzt ist, also zu $\beta : [0, L] \to S^1$ mit

$$\beta(t) := \begin{cases} h(0, 2t) & \text{für } t \in [0, L/2], \\ h(2t - L, L) & \text{für } t \in [L/2, L]. \end{cases}$$

Nach Konstruktion läuft die erste Hälfte von β von $\binom{1}{0}$ nach $\binom{-1}{0}$ in der oberen Hälfte von S^1, und die zweite Hälfte von β läuft von $\binom{-1}{0}$ nach $\binom{1}{0}$ in der unteren Hälfte von S^1. Daraus lesen wir sofort ab, dass der Winkelzuwachs von β gleich $\pi + \pi = 2\pi$ ist. Der Rotationsindex von β' ist daher 1, und weil der Rotationsindex invariant unter Homotopien ist, folgt die Behauptung über α'. $\square$

Jetzt können wir alles zusammensetzen zum Satz von Gauß und Bonnet. Der Spezialfall für geodätische Vielecke stammt von Gauß, die allgemeinere Version von Bonnet.

Satz (Gauß/Bonnet, lokale Version) *Sei G offene zusammenhängende beschränkte Teilmenge der C^2-Fläche M in $\mathbb{R}^3$, berandet von einer einfach geschlossenen stetigen und stückweise C^2-regulären Kurve $\alpha : [0, L] \to M$ ohne Spitzen, nach der Bogenlänge parametrisiert. Liegt $\overline{G}$ im einfach zusammenhängenden Bild einer lokalen Parametrisierung $\mathbf{x} : D \to M$, so gilt*

$$\int_G K \, d\omega_M + \int_0^L k_\alpha(t) \, dt + \sum_{i=1}^{k} \vartheta_i = 2\pi,$$

wobei ϑ_i für $i \in \{1, \dots, k\}$ die Außenwinkel des Gebiets in den Knickstellen des Randes, also die Winkel in $]-\pi, \pi[$ zwischen $\alpha'(t_i-)$ und $\alpha'(t_i+)$ sind.

Bemerkung: Um konsistent mit früheren Vereinbarungen zu sein, wird hierbei in $\alpha(t) \in \partial G$ diejenige Orientierung zugrunde gelegt, für die der äußere Normaleneinheitsvektor $\nu(t)$ von G in M und der Tangentenvektor $\alpha'(t)$ in dieser Reihenfolge eine positiv orientierte Basis von $T_{\alpha(t)}M$ bilden; dann ist $k_\alpha(t) = -\nu(t) \cdot \frac{D\alpha'}{dt}(t)$.

Beweis: Wende den Satz über Rotationsindex und Gauß-Krümmung auf das Vektorfeld $X = \alpha'$ an. Dann ist $[\frac{DX}{dt}] = k_\alpha$ nach der Definition von k_α. Um den Index auf der rechten Seite zu berechnen, hole alles mit $\mathbf{x}$ auf eine einfach zusammenhängende Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ zurück und folgere $\operatorname{ind}(\alpha'; U, V) = 1$ (für egal welche positive Basiswahl $\{U, V\}$) aus dem Umlaufsatz (hier haben wir das Skalrprodukt g im Umlaufsatz gebraucht!). Damit ist die Formel bewiesen. $\square$

Bemerkung: Die Annahme, dass G im einfach zusammenhängenden Bild eines $\mathbf{x}$ liegen muss, ist entbehrlich und nur eine technische Erleichterung für den Beweis. Des Satz gilt auch ohne diese Voraussetzung. Wie man das beweist, wird im Beweis der globalen Version des Satzes klar werden. $\square$

Als erste Anwendung betrachten wir *geodätische Dreiecke* in M, das sind Gebiete mit drei Ecken $p, q, r \in M$, die von den drei Geodätischen von p nach q, von q nach r und von r nach p berandet werden. Die Innenwinkel $\varphi_1, \varphi_2\varphi_3$ dieses Dreiecks sind gleich $\pi - \vartheta_i$. Bekanntlich hat ein ebenes Dreieck die Winkelsumme π.

Definition (Exzess) *Sei M reguläre C^2-Fläche. Der* Exzess *eines geodätischen Dreiecks ist die Differenz*

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 - \pi$$

der Winkelsumme zu π. Über die Außenwinkel wird der Exzess ausgedrückt durch

$$2\pi - \vartheta_1 - \vartheta_2 - \vartheta_3.$$

Auf dem Rand eines geodätischen Dreiecks gilt $k_\alpha \equiv 0$. Damit folgt aus dem Satz von Gauß/Bonnet unmittelbat für geodätische Dreiecke das folgende Korollar (das Gauß' Formulierung des Satzes wohl näher kommt)

Korollar (Exzess geodätischer Dreiecke) *Ist $M \subset \mathbb{R}^3$ reguläre C^2-Fläche, so ist der Exzess eines geodätischen Dreiecks Δ auf M gleich $\int_\Delta K\, d\omega_M$. Insbesondere ist auf der Sphäre S^2 (mit $K \equiv 1$) der Exzess gleich dem Flächeninhalt des Dreiecks.*

Bemerkung: Noch genauer hat Gauß formuliert, dass der Exzess gleich dem Flächeninhalt des Bildes von Δ unter der Gauß-Abbildung von M ist (was sich als dasselbe herausstellt wie das Integral über K). $\square$

Als nächstes wollen wir den Satz von Gauß/Bonnet zu einer "globalen" Version zusammensetzen. Dazu brauchen wir das Konzept der *Triangulierung* von Flächen, was grob gesagt eine Aufteilung der Fläche in (kleine) Dreiecke bedeutet:

Definition (Triangulierung) *Sei $M \subset \mathbb{R}^3$ reguläre Fläche. Eine einfach zusammenhängende abgeschlossene Teilmenge von M mit Randkurve, die bis auf (höchstens) drei Knickstellen (keine Spitzen!) glatt (mindestens C^2) ist, heißt ein* Dreieck *in M.*

Ist $G \subseteq M$ offene zusammenhängende Teilmenge von M, dann ist eine Triangulierung *von G eine endliche Familie $\{\Delta_i\}_{i=1\ldots n}$ von Dreiecken in M, für die $\overline{G} = \bigcup_{i=1}^n \Delta_i$ und für die gilt: Ist $\Delta_i \cap \Delta_j \neq \emptyset$ für gewisse $i \neq j$, dann ist $\Delta_i \cap \Delta_j$ entweder eine gemeinsame Kante oder eine gemeinsame Ecke von Δ_i und Δ_j.*

Zu einer gegebenen Triangulierung von G bezeichnen wir mit $\#(F)$ die Anzahl der Dreiecke (Flächen), mit $\#(K)$ die Zahl der Kanten (jede nur einmal gezählt) und mit $\#(E)$ die Zahl der Ecken. Die Zahl

$$\chi := \#(F) - \#(K) + \#(E)$$

heißt dann die Euler-Charakteristik der Triangulierung.

Es folgen einge Sätze über Triangulierungen, die wir als topologischen Input ohne Beweis glauben müssen:

Satz (Triangulierbarkeit von Flächen) *Es sei $M \subset \mathbb{R}^3$ eine orientierte reguläre Fläche, $G \subseteq M$ eine offene zusammenhängende beschränkte Teilmenge, berandet von höchstens endlich vielen Kurven, die C^2 sind bis auf evtl. endlich viele Knickstellen ohne Spitzen. Dann gelten:*

(i) Es gibt eine Triangulierung von G.

(ii) Ist $\{\mathbf{x}_k\}_{k\in I}$ ein Atlas von mit der Orientierung verträglichen lokalen Parametrisierungen von M, so kann die Triangulierung von G so gewählt werden, dass jedes Dreieck ganz in Bild eines der $\mathbf{x}_k$ enthalten ist. Ist darüber hinaus der Rand jedes Dreiecks positiv orientiert, so haben aneinander grenzende Dreiecke entgegengesetzte Orientierungen der gemeinsamen Kante.

(iii) Die Euler-Charakteristik ist dabei unabhängig von der Wahl der Triangulierung und wird deshalb mit $\chi(G)$ bezeichnet.

Bemerkung: In der Topologie werden die kompakten (geschlossenen) Flächen in $\mathbb{R}^3$ wie folgt klassifiziert: Jede ist diffeomorph zu einer "Sphäre mit g Henkeln", wobei $g \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ das *Geschlecht* der Fläche heißt. Für jede dieser Flächen berechnet man die Euler-Charakteristik, indem man irgendeine Triangulierung aufmalt und abzählt. Mit nicht allzuviel Mühe zeigt man, dass eine geschlossene Fläche M_g vom Geschlecht g die Euler-Charakteristik

$$\chi(M_g) = 2 - 2g$$

hat. □

Bemerkung: Für das Folgende erinnern wir daran, dass für beschränktes Q im Bild von *zwei* lokalen Parametrisierungen $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ von M und eine beschränkte Funktion f das Integral $\int_Q f\, d\omega_M$ sowohl durch

$$\int_Q f\, d\omega_M = \int_{\mathbf{x}^{-1}(Q)} f \circ \mathbf{x} \sqrt{E^{\mathbf{x}} G^{\mathbf{x}} - (F^{\mathbf{x}})^2}\, du\, dv$$

als auch durch

$$\int_Q f\, d\omega_M = \int_{\mathbf{y}^{-1}(Q)} f \circ \mathbf{y} \sqrt{E^{\mathbf{y}} G^{\mathbf{y}} - (F^{\mathbf{y}})^2}\, du\, dv$$

ausgerechnet werden kann, also nicht von der Wahl der Parametrisierung abhängt. Deshalb kann $\int_G f\, d\omega_M$ auch dann ausgerechnet werden, wenn G nicht im Bild einer einzigen Parametrisierung liegt, indem einfach $G = Q_1 \cup \ldots \cup Q_\ell$ zerlegt wird, mit jedem Q_j in einer einzigen Koordinatenumgebung; die Integrale werden dann aufsummiert. (Eine solche Zerlegung gibt es wegen Teil (ii) des Satzes über Triangulierungen.) In diesem Sinne sind im Folgenden Integrale wie $\int_M K\, d\omega_M$ wohldefiniert. □

Jetzt haben wir alles bereitgestellt für die globale Version des Satzes von Gauß/Bonnet. (Die Orientierbarkeit von M, die wir annehmen, ist entbehrlich, wir fordern sie nur aus Bequemlichkeit.)

Satz (Gauß/Bonnet, globale Version) *Es sei $M \subset \mathbb{R}^3$ eine orientierte reguläre ^{2}-Fläche, $G \subseteq M$ eine offene zusammenhängende beschränkte Teilmenge, berandet von höchstens endlich vielen Kurven, die C^2 sind bis auf evtl. endlich viele Knickstellen ohne Spitzen. Die Randkomponenten seien nach der Bogenlänge als Kurven $\alpha_i : [0, L_i] \to M$ $(i = 1 \dots n)$ parametrisiert und die Außenwinkel der α_i mit ϑ_j $(j = 1 \dots m)$. Für die Integration seien alle Randkurven als positiv orientiert zu lesen (in früherem Sinne). Dann gilt*

$$\int_G K\, d\omega_M + \sum_{i=1}^{n} \int_0^{L_i} k_{\alpha_i}(t)\, dt + \sum_{j=1}^{m} \vartheta_j = 2\pi\chi(G).$$

Vor dem Beweis das wichtigste Korollar: Wir wenden den Satz auf $G = M_g$, geschlossene Fläche vom Geschlecht g an; dann gibt es keine Randkurven. Es folgt das bemerkenswerte

Korollar (Gauß/Bonnet für geschlossene Flächen) *Sei $M_g \subset \mathbb{R}^3$ eine reguläre geschlossene Fläche vom Geschlecht g. Dann gilt*

$$\int_{M_g} K\, d\omega_M = 4\pi(1-g).$$

Bemerkung: Also ist das Integral der Gauß-Krümmung über die ganze Fläche eine *topologische Invariante!* $\square$

Beweis des Satzes: Nach dem vorigen Satz gibt es eine Triangulierung von G, für die jedes Dreieck in einer Koordinatenumgebung von M liegt. Wir addieren die Gleichungen aus dem lokalen Gauß/Bonnet für alle Dreiecke und beobachten, dass sich an den inneren Kanten die beiden Integrale wegkürzen wegen der entgegengesetzten Orientierungen bzgl. der beiden angrenzenden Dreiecke. Es folgt

$$\int_G K\, d\omega_M + \sum_{i=1}^{n} \int_0^{L_i} k_{\alpha_i}\, dt + A = 2\pi\#(F),$$

wobei A die Summe der Außenwinkel aller Dreiecke ist. An jeder inneren Ecke p ist die Summe der Dreiecksaußenwinkel gleich $2\pi - \pi \operatorname{ord}(p)$, wobei $\operatorname{ord}(p)$ die Anzahl der bei p einmündenden Kanten ist. Das folgt sofort aus der Tatsache, dass die Summe der Innenwinkel bei p gleich 2π ist und jeder Außenwinkel gleich π minus Innenwinkel. Das heißt

$$2\pi = \pi \operatorname{ord}(p) - \sum(\text{Außwi. v. Dreie. in } p).$$

In Randecken p von G muss als fehlender "Innenwinkel π plus der Außenwinkel von G in p ergänzt werden, und es gibt nur $\operatorname{ord}(p) - 1$ Innenwinkel von Dreiecken in p, also

$$\begin{aligned}
2\pi &= \sum(\text{Innwi. bei } p) + \pi - (\text{Außwi. v. } G \text{ in } p) \\
&= \sum(\pi - \text{Außwi. v. Dreie. in } p) + \pi + (\text{Außwi. v. } G \text{ in } p) \\
&= \pi(\operatorname{ord}(p) - 1) - \sum(\text{Außwi. v. Dreie. in } p) + \pi + (\text{Außwi. v. } G \text{ in } p) \\
&= \pi \operatorname{ord}(x) - \sum(\text{Außwi. v. Dreie. in } p) + (\text{Außwi. v. } G \text{ in } p).
\end{aligned}$$

Aus den letzten beiden Gleichungen folgt (wobei p alle Ecken durchläuft)

$$\begin{aligned} A &= \sum_{j=1}^{m} \vartheta_j + \pi \sum_p (\operatorname{ord}(p) - 2) \\ &= \sum_{j=1}^{m} \vartheta_j + 2\pi(\#(K) - \#(E)), \end{aligned}$$

letzteres weil jede Kante zwei Ecken hat, also $\sum_p \operatorname{ord}(p) = 2\#(K)$. Einsetzen dieses A in obige Formel ergibt die Behauptung des Satzes. $\square$