Differentialgeometrie

Carsten Ebmeyer
Mathematisches Seminar der Landwirtschaftlichen Fakultät
Universität Bonn

Sommersemester 2005

Inhaltsverzeichnis

1 Kurven in der Ebene und im Raum

1.1 Parameterdarstellung von Kurven

Eine Kurve im $\mathbb{R}^2$ können wir in der Form $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$ darstellen. Die Darstellung ist in dieser Weise oft unpraktisch, da z. B. der Kreis $x^2+y^2 = r^2$ zwei Funktionen, nämlich $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ und $y = -\sqrt{r^2 - x^2}$ erfordert. Zweckmäßiger ist hier die *Parameterdarstellung*, die für einen Kreis in der x-y-Ebene lautet:

$$\begin{aligned} x(t) &= r\cos t \quad , \quad 0 \leq t \leq 2\pi \\ y(t) &= r\sin t \quad , \quad 0 \leq t \leq 2\pi \\ z(t) &= 0 \end{aligned}$$

In Vektornotation können wir schreiben:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos t \\ r\sin t \\ 0 \end{pmatrix}$$

Definition: Unter einer Kurve der Klasse C^k, $k \in \mathbb{N}$ im $\mathbb{R}^3$ verstehen wir eine k-mal stetig differenzierbare Abbildung

$$\begin{aligned} \gamma : I &\to \mathbb{R}^3 \\ \tau &\mapsto \gamma(\tau) \end{aligned}$$

von einem Intervall I in den $\mathbb{R}^3$. Wir schreiben auch

$$\tau \mapsto \mathbf{x}(\tau) = \begin{pmatrix} x_1(\tau) \\ x_2(\tau) \\ x_3(\tau) \end{pmatrix}$$

mit folgenden Eigenschaften

1. Die Komponentenfunktionen $x_i(t)$, $i = 1, 2, 3$ sind k-mal stetig differenzierbar

2. Die Ableitung
$$\mathbf{x}'(\tau) = \begin{pmatrix} x_1'(\tau) \\ x_2'(\tau) \\ x_3'(\tau) \end{pmatrix}$$
ist verschieden vom Nullvektor.

Eine Darstellung mit der Eigenschaft 2 wird auch *reguläre* Darstellung einer Kurve genannt.

Beispiel 1: Ein Kreis mit Radius r und Mittelpunkt $(0, 0, 0)$ hat die Darstellung

$$\mathbf{x}(\tau) = \begin{pmatrix} r\cos\tau \\ r\sin\tau \\ 0 \end{pmatrix} . \tag{1}$$

Beispiel 2: Durch

$$\mathbf{x}(\tau) = \begin{pmatrix} r\cos\tau \\ r\sin\tau \\ h\tau \end{pmatrix}$$

wird für feste Werte $r, h > 0$ eine *Schraubenlinie* definiert. Die Projektion auf die $(x_1, x_2)-$Ebene ist ein Kreis gemäß Gleichung (1). Mit wachsendem Parameter t steigt die x_3 Koordinate gleichmäßig an.

Beispiel 3: Durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} x_1(t) &= a\sqrt{\pi}\int_0^t \cos\frac{\pi\tau^2}{2}\,d\tau, \\ x_2(t) &= a\sqrt{\pi}\int_0^t \sin\frac{\pi\tau^2}{2}\,d\tau, \\ x_3(t) &= 0 \end{aligned}$$

wird eine *Klothoide* erklärt.

Beispiel 4: Die Verbindungsstrecke zwischen zwei Punkten $\mathbf{a},\ \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ kann in der Form

$$\mathbf{x}(\tau) = \mathbf{a} + (\mathbf{b} - \mathbf{a})\tau, \qquad 0 \le \tau \le 1$$

parametrisiert werden.

Parametertransformationen. Eine Kurve lässt sich auf verschiedene Weise in Parameterform darstellen. Es soll nun gekärt werden, wann zwei Kurven mit verschiedenen Darstellungen als gleich angesehen werden können. Zu diesem Zweck machen wir die

Definition: Sei $\mathbf{x} : I \to \mathbb{R}^3$ eine Kurve der Klasse C^k. Eine Funktion $\psi : J \to I$ auf einem Intervall J in das Intervall I heißt Parametertransformation, falls gilt:

a) ψ ist k-mal stetig differenzierbar,

b) ψ ist bijektiv und

c) $\psi'(\sigma) \neq 0$ für alle $\sigma \in J$.

Wir nennen die Transformation

i) *orientierungserhaltend*, falls $\psi'(\sigma) > 0$,

ii) *orientierungsumkehrend*, falls $\psi'(\sigma) < 0$

für alle $\sigma \in J$ gilt.

Durch die Parametertransformation $\tau = \psi(\sigma)$ wird die Kurve $\mathbf{x}(\tau)$ übergeführt in

$$\bar{\mathbf{x}}(\sigma) = \mathbf{x}(\psi(\sigma))$$

Es gilt nach der Kettenregel:

$$\bar{\mathbf{x}}'(\sigma) = \mathbf{x}'(\psi(\sigma))\psi'(\sigma)$$

Die Eigenschaft c) garantiert nun, dass $\bar{\mathbf{x}}$ ebenfalls eine reguläre Darstellung einer Kurve ist.

Definition: Zwei Kurven heißen *äquivalent*, falls sie durch eine orientierungserhaltende Parametertransformation hervorgehen.

Bogenlänge einer Kurve

Definition: Ist

$$\mathbf{x}(\tau) = \begin{pmatrix} x_1(\tau) \\ x_2(\tau) \\ x_3(\tau) \end{pmatrix}$$

eine Kurve, so wird

$$ds = \sqrt{x_1'(\tau)^2 + x_2'(\tau)^2 + x_3'(\tau)^2}\, d\tau$$

Bogenelement genannt. Das Integral

$$\int_\gamma ds := \int_I \sqrt{x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2}\, d\tau$$

heißt *Bogenlänge* der Kurve.

Beispiel 5: Wir berechnen die Bogenlänge des Kreises

$$\mathbf{x}(\tau) = \begin{pmatrix} r\cos\tau \\ r\sin\tau \\ 0 \end{pmatrix}, \quad 0 \le \tau \le 2\pi. \tag{2}$$

Es gilt:

$$\mathbf{x}'(\tau) = r\begin{pmatrix} -\sin\tau \\ \cos\tau \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \left|\frac{d\mathbf{x}(\tau)}{d\tau}\right| = r \quad \text{und} \quad s = \int\limits_0^{2\pi} r\, d\tau = 2\pi r.$$

Beispiel 6: Die Bogenlänge der Schraubenlinie

$$\mathbf{x}(\tau) = \begin{pmatrix} r\cos\tau \\ r\sin\tau \\ h\tau \end{pmatrix}, \quad 0 \le \tau \le 2\pi.$$

berechnet sich aus

$$\mathbf{x}'(\tau) = \begin{pmatrix} -r\sin\tau \\ r\cos\tau \\ h \end{pmatrix}$$

und

$$|\mathbf{x}'(\tau)| = \sqrt{r^2\sin^2\tau + r^2\cos^2\tau + h^2} = \sqrt{r^2+h^2}$$

Für eine volle Umdrehung folgt

$$s = \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{r^2+h^2} d\tau = 2\pi\sqrt{r^2+h^2}.$$

Satz 1: *Die Bogenlänge ist invariant gegenüber Parametertransformationen.*

Beweis: Ist $\mathbf{x} : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Kurve und $\psi : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ eine Parametertransformation, so folgt mit der Substitution $\tau = \psi(\sigma)$

$$\int\limits_a^b |\mathbf{x}'(\tau)| d\tau = \int\limits_\alpha^\beta |\mathbf{x}'(\psi(\sigma))\, \psi'(\sigma)| d\sigma = \int\limits_\alpha^\beta |\bar{\mathbf{x}}'(\sigma)| d\sigma.$$

□

Bogenlänge als Parameter. Ist $\mathbf{x} : I \to \mathbb{R}^3$ eine Kurve und $a \in I$ ein fester Wert, so können wir die Bogenlänge als Funktion des Parameters τ betrachten. Wir erhalten

$$s(\tau) = \int_a^\tau |\mathbf{x}'(\tau')| d\tau'.$$

Dann gilt wegen des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung und der Regularitätsbedingung:

$$s'(\tau) = |\mathbf{x}'(\tau)| > 0 \,.$$

Somit ist $s(\tau)$ eine stetig differenzierbare, streng monoton wachsende Funktion mit einer Umkehrfunktion $\tau = \tau(s)$ mit den gleichen Eigenschaften. Wir setzen

$$\bar{\mathbf{x}}(s) = \mathbf{x}(\tau(s)).$$

Es folgt

$$\bar{\mathbf{x}}'(s) = \mathbf{x}'(\tau(s))\tau'(s) = \frac{\mathbf{x}'(\tau(s))}{|s'(\tau)|} = \frac{\mathbf{x}'(\tau(s))}{|\mathbf{x}'(\tau(s))|}.$$

Somit kann die Bogenlänge als Kurvenparameter verwendet werden. Durch diese Parametertransformation geht eine reguläre Kurvendarstellung $\mathbf{x}(\tau)$ stets wieder in eine reguläre Darstellung $\bar{\mathbf{x}}(s) = \mathbf{x}(\tau(s))$ über, bei der wegen $\frac{d\tau}{ds} > 0$ die Orientierung erhalten bleibt. $\mathbf{x}(s)$ heißt nach der Bogenlänge parametrisiert.

Definition: Eine Parameterdarstellung $\mathbf{x} : I \to \mathbb{R}^3$ heißt eine *natürliche Parameterdarstellung* einer Kurve, wenn für alle $\tau \in I$ gilt:

$$|\mathbf{x}'(\tau)| = 1 \tag{3}$$

Aus unseren Betrachtungen folgt, dass die Bogenlänge s stets als natürlicher Parameter verwendet werden kann.

Bemerkung:

1. Die natürlichen Parameter einer C^1-Raumkurve unterscheiden sich (abgesehen von der Orientierung) von der Bogenlänge nur durch eine additive Konstante.

2. Wenn $s = s_1 + \text{const}$ gilt, so wird die Bogenlänge s_1 von einem anderen Punkt der Kurve aus gemessen.

1.2 Tangentenvektor und Normalebene

Definition: Es sei $\mathbf{x}(s)$ eine C^1-Kurve, die nach der Bogenlänge parametrisiert ist. Die Ableitung von $\mathbf{x}(s)$ nach der Bogenlänge

$$\mathbf{t}(s) := \frac{d\mathbf{x}(s)}{ds}$$

heißt *Tangentenvektor* an die Kurve im Punkt $\mathbf{x}(s)$.

Lemma 1: Der Tangentenvektor $\mathbf{t}$ ist ein Einheitsvektor.

Beweis: Dies ergibt sich unmittelbar aus Gleichung (3) $\square$

Definition: (*Tangentengleichung einer Raumkurve*). Es sei eine C^1-Kurve $\mathbf{x}(s)$ gegeben. Die Gleichung der Tangente im Kurvenpunkt $\mathbf{x}(s_0)$ lautet

$$\mathbf{y}(s) = \mathbf{x}(s_0) + (s - s_0)\mathbf{t}(s_0), \; s \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

Bemerkung: Wir können die Tangentengleichung auch in der Form

$$\mathbf{y}(s) = \mathbf{x}(s_0) + s\mathbf{t}(s_0), \; s \in \mathbb{R}. \tag{5}$$

Die Gleichung (4) hat jedoch den Vorteil, dass der Berührpunkt $\mathbf{x}(s_0)$ auf der Kurve und auf der Tangente den gleichen Parameterwert s_0 haben.

Aufgabe 1: Bestimmen Sie die Schnittkurve der Tangenten der Kurve

$$\mathbf{x}(\tau) = \begin{pmatrix} \tau \\ B\tau^2 \\ C\tau^n \end{pmatrix} \qquad \tau \in \mathbb{R}$$

für $B, C = \text{const} \neq 0, \; n \in \mathbb{N}$ mit der x-y-Ebene.

Lösung: Die Tangentengleichung im Punkt $\mathbf{x}(\tau_0)$ lautet

$$\mathbf{y}(\tau) = \mathbf{x}(\tau) + \tau\mathbf{t} = \begin{pmatrix} \tau \\ B\tau^2 \\ C\tau^n \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} 1 \\ 2B\tau \\ nC\tau^{n-1} \end{pmatrix} \qquad -\infty < \lambda < \infty, \; \tau \in \mathbb{R}.$$

Für den Schnittpunkt mit der x-y-Ebene muss die dritte Komponente null werden, also $C\tau^{n-1}(\tau + \lambda n) = 0$. Es folgt

$$\lambda = -\frac{\tau}{n}.$$

Die Schnittkurve in der xy-Ebene hat dann die Gleichung

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau \\ B\tau^2 \end{pmatrix} - \frac{\tau}{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 2B\tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau(1 - 1/n) \\ B\tau^2(1 - 2/n) \end{pmatrix}.$$

Damit ergibt sich als Schnittkurve für $n = 1$ die y-Achse, für $n = 2$ die x-Achse, und für $n \geq 3$ die Parabel

$$y = \frac{B(1 - 2/n)x^2}{(1 - 1/n)^2}.$$

Definition: Als *Normalebene* der Kurve $\mathbf{x}$ im Punkt $\mathbf{x}(t_0)$ wird die Ebene bezeichnet, die den Kurvenpunkt enthält und deren Flächennormale die Richtung von $\mathbf{t}$ hat. Der Ortsvektor $\mathbf{y}$ der Normalebene kann durch die folgende Gleichung beschrieben werden:

$$\langle \mathbf{y} - \mathbf{x}(\tau_0), \mathbf{t}(\tau_0) \rangle = 0.$$

In der Gleichung kann $\mathbf{t}$ durch $\mathbf{x}'(\tau)$ ersetzt werden, da $\mathbf{t}$ und $\mathbf{x}'(\tau)$ proportional sind.

1.3 Krümmungsvektor und Krümmung

Definition: Es sei $\mathbf{x}(s)$ eine C^2-Kurve. Der Vektor

$$\mathbf{k} := \frac{d^2\mathbf{x}}{ds^2} = \mathbf{t}'(s) = \mathbf{x}''(s)$$

heißt der *Krümmungsvektor* der Kurve im Punkt $\mathbf{x}(s)$. Die Zahl

$$\kappa := |\mathbf{k}| = |\mathbf{t}'(s)| = |\mathbf{x}''(s)|$$

heißt die *Krümmung* der Kurve und die Größe

$$\rho := \frac{1}{\kappa} \qquad \text{für } k \neq 0$$

heißt der *Krümmungsradius.*

Satz 2: *Der Krümmungsvektor* $\mathbf{k}$ *und der Tangentenvektor* $\mathbf{t}$ *sind zueinander orthogonal.*

Beweis: Aus $\langle \mathbf{x}'(s), \mathbf{x}'(s)\rangle = 1$ folgt mittels Differentiation nach s

$$2\langle \mathbf{x}'(s), \mathbf{x}''(s)\rangle = 0,$$

also gilt $\langle \mathbf{t}(s), \mathbf{k}(s)\rangle = 0$. □

Beispiel 7: Wir berechnen den Krümmungsvektor eines Kreises in der Ebene

$$\mathbf{x}(\tau) = \begin{pmatrix} r\cos\tau \\ r\sin\tau \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit Radius r. Es folgt

$$\mathbf{x}'(\tau) = \begin{pmatrix} -r\sin\tau \\ r\cos\tau \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{t} = \frac{\mathbf{x}'}{|\mathbf{x}'|} = \begin{pmatrix} -\sin\tau \\ \cos\tau \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Hieraus ergibt sich

$$\mathbf{k} = \frac{d\mathbf{t}}{ds} = \frac{d\mathbf{t}}{d\tau}\frac{d\tau}{ds} = \frac{d\mathbf{t}}{d\tau}\frac{1}{r} = \frac{1}{r}\begin{pmatrix} -\cos\tau \\ -\sin\tau \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wir erhalten die Krümmung $\kappa = |\mathbf{k}| = \frac{1}{r}$ und den Krümmungsradius $\rho = r$.

Satz 3: *Eine Kurve ist genau dann eine Gerade, wenn entlang der Kurve* $\kappa = 0$ *gilt.*

Beweis: Sei die Kurve $\mathbf{x} = \mathbf{x}(s)$ in natürlicher Darstellung.

1. Ist $\kappa = 0$, dann folgt

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{x}} &= \dot{\mathbf{t}} = \mathbf{k} = \mathbf{0}, \\ \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{t} = \mathbf{a} = \text{const} \quad \text{mit } |\mathbf{a}| = |\mathbf{t}| = 1, \\ \mathbf{x} &= s \cdot \mathbf{a} + \mathbf{b} \quad \text{mit } \mathbf{b} = \text{const}. \end{aligned}$$

2. Ist die Kurve eine Gerade, so gilt:

$$\mathbf{x}(\mathbf{s}) = s \cdot \mathbf{a} + \mathbf{b} \qquad \text{mit } |\mathbf{a}| = 1, \quad \mathbf{b} = \text{const},$$

   dann folgt daraus überall auf der Geraden

$$\begin{aligned} \mathbf{x}'(s) &= \mathbf{a} \\ \mathbf{x}''(s) &= \mathbf{k} = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

□

Der folgende Satz dient dazu, die Krümmung zu berechnen, auch wenn die Parameterdarstellung nicht die natürliche Form hat.

Satz 4: *Es sei* $\mathbf{x}(\tau)$ *die Darstellung einer zweimal stetig differenzierbaren Kurve. Dann gilt:*

$$\kappa = |\mathbf{k}| = \frac{|\mathbf{x}' \times \mathbf{x}''|}{|\mathbf{x}'|^3}. \tag{6}$$

Beweis: Durch eine Parametertransformation $\tau = \tau(s)$ können wir die Bogenlänge s als Parameter einführen. Wir setzen

$$\bar{\mathbf{x}}(s) = \mathbf{x}(\tau(s))$$

Durch Differentiation folgt:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{x}}'(s) &= \mathbf{x}'(\tau(s))\tau'(s) \\ \bar{\mathbf{x}}''(s) &= \mathbf{x}''(\tau(s))\tau'(s)^2 + \mathbf{x}'(\tau(s))\tau''(s) \end{aligned}$$

Nun wird das Vektorprodukt berechnet:

$$\bar{\mathbf{x}}'(s) \times \bar{\mathbf{x}}''(s) = \tau'^3(s)(\mathbf{x}'(\tau) \times \mathbf{x}''(\tau))$$

Wegen $|\bar{\mathbf{x}'}| = 1$ folgt

$$|\bar{\mathbf{x}}'(\tau) \times \bar{\mathbf{x}}''(\tau)| = |\mathbf{x}'(\tau)|^3 \kappa.$$

Lösen wir nach κ auf, so folgt die Behauptung unter Berücksichtigung von $|\tau'||\mathbf{x}'(\tau)| = 1$ gilt. □

Beispiel 8: Gegeben sei eine ebene Kurve

$$\mathbf{x}(\tau) = \begin{pmatrix} \tau \\ f(\tau) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Es soll die Krümmung berechnet werden. Es gilt:

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 \\ f'(\tau) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}'' = \begin{pmatrix} 0 \\ f''(\tau) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}' \times \mathbf{x}'' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f''(\tau) \end{pmatrix},$$

also

$$k = \frac{|\mathbf{x}' \times \mathbf{x}''|}{|\mathbf{x}'|^3} = \frac{|f''(\tau)|}{\sqrt{1 + (f'(\tau))^2}^3}.$$

Satz 5: *Eine Kurve* $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\tau)$ *ist eine Gerade, wenn für alle* τ *die Vektoren*

$$\mathbf{x}' \textit{ und } \mathbf{x}''.$$

linear abhängig sind.

Beweis: Sind die Vektoren linear abhängig, so folgt $\mathbf{x}' \times \mathbf{x}'' = 0$ und nach (6) folgt $\kappa = 0$ und damit ist die Kurve eine Gerade. Umgekehrt gilt für eine Gerade $\kappa = 0$, woraus mit Hilfe von (6) die lineare Abhängigkeit der beiden Vektoren folgt. □

Beispiel 9: Für das Geradenstück $\mathbf{x} = \mathbf{a} + \cos\tau\mathbf{b}$ (mit $\mathbf{b}, \mathbf{a} = \text{const}$) gilt:

$$\mathbf{x}' = -\sin\tau\mathbf{b} \quad \text{und} \quad \mathbf{x}'' = -\cos\tau\mathbf{b}.$$

Somit sind die Vektoren $\mathbf{x}'$ und $\mathbf{x}''$ linear abhängig.

1.4 Das begleitende Dreibein

Definition: Sei $\mathbf{k} \neq 0$ der Krümmungsvektor einer zweimal stetig differenzierbaren Kurve im Punkt $\mathbf{x}(s)$. Dann heißt der Einheitsvektor

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|}$$

der *Hauptnormalenvektor* der Kurve im Punkt $\mathbf{x}(s)$.

Definition: Es sei $\mathbf{x}(s)$ eine natürliche Darstellung einer zweimal stetig differenzierbaren Kurve. Es sei $\kappa(s) \neq 0$. Der Vektor

$$\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n}$$

heißt *Binormalenvektor.*

Bemerkungen:

1. Es gilt $|\mathbf{b}| = 1$, da $\mathbf{t} \perp \mathbf{n}$ und $|\mathbf{t}| = |\mathbf{n}| = 1$.
2. Die Vektoren $\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$ sind Einheitsvektoren und stehen paarweise senkrecht aufeinander, sie bilden das *begleitende Dreibein* der Kurve. Durch das *begleitende Dreibein* werden in jedem Kurvenpunkt mit $\mathbf{k} \neq \mathbf{0}$ drei Ebenen festgelegt (der Ortsvektor sei jeweils $\mathbf{y}$).

Definition: Die Ebene, welche durch $\mathbf{t}(s)$ und $\mathbf{n}(s)$ im Kurvenpunkt $\mathbf{x}(s)$ einer glatten Kurve aufgespannt wird, heißt *Schmiegebene* der Kurve im Punkt $\mathbf{x}(s)$. Die Ebene, die vom Normalenvektor $\mathbf{n}$ und dem Binormalenvektor $\mathbf{b}$ aufgespannt wird, heißt *Normalebene.* Die Ebene, die vom Tangentenvektor $\mathbf{t}$ und dem Binormalenvektor $\mathbf{b}$ aufgespannt wird, heißt *rektifizierende Ebene.*

Für die Punkte $\mathbf{y}$ der drei Ebenen gilt mit $(\lambda, \mu \in \mathbb{R})$:

Normalebene:

$$\langle \mathbf{y} - \mathbf{x}(s), \mathbf{t}(s) \rangle = 0\,,$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{x}(s) + \lambda \mathbf{n} + \mu \mathbf{b}\,,$$

$$|\mathbf{y} - \mathbf{x}(s), \mathbf{n}, \mathbf{b}| = 0\,.$$

Schmiegebene:

$$\langle \mathbf{y} - \mathbf{x}(s), \mathbf{b}(s) \rangle = 0,$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{x}(s) + \lambda \mathbf{t} + \mu \mathbf{n}\,,$$

$$|\mathbf{y} - \mathbf{x}(s), \mathbf{t}, \mathbf{n}| = 0.$$

Rektifizierende Ebene:

$$\langle \mathbf{y} - \mathbf{x}(s), \mathbf{n}(s) \rangle = 0,$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{x}(s) + \lambda \mathbf{t} + \mu \mathbf{b}\,,$$

$$|\mathbf{y} - \mathbf{x}(s), \mathbf{t}, \mathbf{b}| = 0.$$

Dabei kann eine Ebene durch jeweils eine der drei Gleichungen beschrieben werden.

Satz 6: *Eine ebene Kurve liegt stets in ihrer Schmiegebene.*

Beweis: Die Kurve liege in einer Ebene durch den Punkt $\mathbf{e}$ und werde von den Vektoren $\mathbf{c}$ und $\mathbf{d}$ aufgespannt. Die Kurve lässt sich dann in der Form

$$\mathbf{x}(s) = \alpha(s)\mathbf{c} + \beta(s)\mathbf{d} + \mathbf{e}$$

schreiben. Wir erhalten

$$\begin{aligned} t &= \mathbf{x}'(s) = \alpha'(s)\mathbf{c} + \beta'(s)\mathbf{d} \\ \kappa\mathbf{n} &= \mathbf{x}''(s) = \alpha''(s)\mathbf{c} + \beta''(s)\mathbf{d} \end{aligned}$$

Hieraus folgt für den Binormalenvektor $\mathbf{b}$:

$$\kappa\mathbf{b} = \kappa(\mathbf{t} \times \mathbf{n}) = (\alpha'\beta'' - \alpha''\beta')(\mathbf{c} \times \mathbf{d})$$

Somit ist $\mathbf{b}$ konstant und orthogonal zu der durch $\mathbf{c}$ und $\mathbf{d}$ aufgespannten Ebene. $\square$

Beispiel 10: Wir berechnen die Schmiegebene der *Schraubenlinie* mit der Darstellung

$$\mathbf{x}(\tau) = \begin{pmatrix} a\cos\tau \\ a\sin\tau \\ b\tau \end{pmatrix}$$

für $a > 0,\ b \neq 0$ und $\tau \in \mathbb{R}$. Es folgt

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -a\sin\tau \\ a\cos\tau \\ b \end{pmatrix}, \tag{7}$$

Wegen $|\mathbf{x}'| = \sqrt{a^2+b^2}$ können wir mit $\tau = s/\sqrt{a^2+b^2}$ die Bogenlänge s als Parameter einführen. Es folgt

$$\mathbf{t} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \begin{pmatrix} -a\sin\tau \\ a\cos\tau \\ b \end{pmatrix}, \tag{8}$$

$$\mathbf{k} = \frac{d\mathbf{t}}{ds} = \frac{d\mathbf{t}}{d\tau}\frac{1}{|\mathbf{x}'|} = -\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \begin{pmatrix} \cos\tau \\ \sin\tau \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{9}$$

Schließlich folgt

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|} = \begin{pmatrix} -\cos\tau \\ -\sin\tau \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Die Gleichung der Schmiegebene bei festem τ lautet $|\mathbf{y} - \mathbf{x}(s), \mathbf{t}, \mathbf{n}| = 0$. Also gilt:

$$\begin{vmatrix} y_1 - a\cos\tau & y_2 - a\sin\tau & y_3 - b\tau \\ -a\sin\tau & a\cos\tau & b \\ -\cos\tau & -\sin\tau & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Multipliziert man die letzte Zeile mit a und subtrahiert sie von der ersten, erhält man

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 - b\tau \\ -a\sin\tau & a\cos\tau & b \\ -\cos\tau & -\sin\tau & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Satz 7: *Der Binormalenvektor* $\mathbf{b}(s)$ *ist entlang einer Kurve genau dann konstant, wenn eine ebene Kurve vorliegt.*

Beweis:

1. Sei $\mathbf{x}$ eine ebene Kurve. Laut Satz 6 ist $\mathbf{b}$ der Normalenvektor der Ebene, in der die Kurve liegt.

2. Es sei $\mathbf{b} = \text{const}$. Dann liegen $\mathbf{t}$ und $\mathbf{n}$ stets in ein und derselben Ebene, in der auch die Kurve liegt. Insbesondere folgt

$$\langle \mathbf{b}, \mathbf{x}' \rangle = 0.$$

Hieraus folgt

$$\langle \mathbf{b}, \mathbf{x} \rangle = 0$$

und wir sehen, dass die Kurve in einer Ebene liegt, die orthogonal zum Binormalenvektor $\mathbf{b}$ ist.

$\square$

1.5 Frenetsche Formeln

Sei $\mathbf{x}$(s) Kurve in natürlicher Darstellung und $\mathbf{x}''(s) \neq 0$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \mathbf{t} &= \mathbf{x}'(s), \\ \kappa \mathbf{n} &= \mathbf{x}''(s), \\ \mathbf{b} &= \mathbf{t} \times \mathbf{n}. \end{aligned}$$

Für einen Moment setzen wir

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{t},\ \mathbf{v}_2 = \mathbf{n},\ \mathbf{v}_3 = \mathbf{b}$$

und machen den Ansatz

$$\mathbf{v}_i' = \sum_{k=1}^{3} a_{ik} \mathbf{v}_k, \quad i = 1, 2, 3$$

Durch skalare Multiplikation mit $\mathbf{v}_k$ folgt wegen der Orthogonalität der drei Vektoren

$$\langle \mathbf{v}_i', \mathbf{v}_k \rangle = a_{ik}$$

Die Orthogonalitätsbedingung $\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_k \rangle = 0$ liefert:

$$\langle \mathbf{v}_i', \mathbf{v}_k \rangle + \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_k' \rangle = 0\,.$$

Hieraus folgt:

$$a_{ik} = -a_{ki}\,.$$

Insgesamt gibt es somit drei unbekannte Koeffizienten a_{12}, a_{13}, a_{23}. Mit der Beziehung $\mathbf{t}' = \kappa \cdot \mathbf{n}$ folgt $\mathbf{v}_1' = \kappa \cdot \mathbf{v}_2$ und wir erhalten

$$\begin{aligned} a_{12} &= -a_{21} = \kappa, \\ a_{13} &= -a_{31} = 0. \end{aligned}$$

Somit sind alle Koeffizienten mit Ausnahme von $a_{23} = -a_{32}$ bestimmt.

Definition: Die Größe

$$w = \langle \mathbf{v}_2', \mathbf{v}_3 \rangle = \langle \mathbf{n}', \mathbf{b} \rangle$$

heißt *Torsion* oder *Windung* der Kurve.

Auf diese Weise erhalten wir den Zusammenhang zwischen den Größen $\mathbf{t} = \mathbf{v}_1,\ \mathbf{n} = \mathbf{v}_2,\ \mathbf{b} = \mathbf{v}_3$ und ihren Ableitungen nach der Bogenlänge s.

Formeln von Frenet

$$\begin{aligned} \mathbf{t}' &= \qquad \kappa\mathbf{n}\,, \\ \mathbf{n}' &= -\kappa\mathbf{t} \qquad + w\mathbf{b}\,, \\ \mathbf{b}' &= \qquad -w\mathbf{n}\,. \end{aligned}$$

Satz 8: *Eine Kurve ist genau dann eben, wenn für alle s gilt:*

$$w(s) = 0$$

Beweis: Mit Hilfe der dritten Frenetschen Formel folgt, dass $w(s) = 0$ genau dann gilt, wenn $\mathbf{b} = \text{const}$ gilt. Mit Hilfe von Satz 7 folgt nun die Behauptung. □

Berechnung der Torsion

1. Für eine Kurve in natürlicher Darstellung folgt

$$\begin{aligned} \mathbf{x}' &= \mathbf{t}\,, \\ \mathbf{x}'' &= \mathbf{t}' = \kappa\mathbf{n}\,, \\ \mathbf{x}''' &= \kappa'\mathbf{n} + \kappa\mathbf{n}' = \kappa'\mathbf{n} + \kappa(-\kappa\mathbf{t} + w\mathbf{b})\,, \\ \mathbf{x}' \times \mathbf{x}'' &= \kappa\mathbf{b}\,, \\ \langle(\mathbf{x}' \times \mathbf{x}''), \mathbf{x}'''\rangle &= \kappa^2 w = |\mathbf{x}''|^2 w\,. \end{aligned}$$

   Hieraus folgt für die Torsion:

$$w = \frac{|\mathbf{x}', \mathbf{x}'', \mathbf{x}'''|}{|\mathbf{x}''|^2}. \tag{11}$$

2. Für eine Kurve in allgemeiner Darstellung $\mathbf{x}(\tau)$ führen wir $\tau = \tau(s)$ als Funktion der Bogenlänge und setzen:

$$\bar{\mathbf{x}}(s) = \mathbf{x}(\tau(s))$$

   Zur Anwendung von Gleichung (11) auf $\bar{\mathbf{x}}$ bilden wir

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{x}}'(s) &= \mathbf{x}'\tau', \\ \bar{\mathbf{x}}''(s) &= \mathbf{x}''\tau'^2 + \mathbf{x}'\tau'', \\ \bar{\mathbf{x}}'''(s) &= \mathbf{x}'''\tau'^3 + 3\tau'\tau''\mathbf{x}'' + \mathbf{x}'\tau''', \\ |\bar{\mathbf{x}}', \bar{\mathbf{x}}'', \bar{\mathbf{x}}'''| &= \tau'^6 |\mathbf{x}', \mathbf{x}'', \mathbf{x}'''|. \end{aligned}$$

   Mit Hilfe von Satz 4 folgt unter Berücksichtigung von $\tau'|x'| = 1$

$$w = \frac{|\bar{\mathbf{x}}', \bar{\mathbf{x}}'', \bar{\mathbf{x}}'''|}{\kappa^2} = \frac{|\mathbf{x}', \mathbf{x}'', \mathbf{x}'''|}{\kappa^2}\tau'^6 = \frac{|\mathbf{x}', \mathbf{x}'', \mathbf{x}'''|}{|\mathbf{x}' \times \mathbf{x}''|^2}$$

Satz 9: *Es sei $\mathbf{x}(\tau)$ die Darstellung einer dreimal stetig differenzierbaren Kurve und $\mathbf{x}''(\tau) \neq 0$. Dann gilt:*

$$w = \frac{|\mathbf{x}', \mathbf{x}'', \mathbf{x}'''|}{|\mathbf{x}' \times \mathbf{x}''|^2} \tag{12}$$

1.6 Geometrische Deutung von Krümmung und Torsion

Mit Hilfe des Satzes von Taylor folgt:

$$\mathbf{x}(s) = \mathbf{x}(0) + s\mathbf{x}'(0) + \frac{s^2}{2}\mathbf{x}''(0) + \frac{s^3}{6}\mathbf{x}'''(0) + O(s^4)\,.$$

Mit den Beziehungen für die Ableitung des Ortsvektors und den Frenetschen Formeln folgt:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}' &= \mathbf{t}\,, \\
\mathbf{x}'' &= \kappa\mathbf{n}\,, \\
\mathbf{x}''' &= \kappa'\mathbf{n} + \kappa\mathbf{n}' \\
&= \kappa'\mathbf{n} + \kappa(-\kappa\mathbf{t} + w\mathbf{b})\,.
\end{aligned}$$

Hieraus erhalten wir

$$\mathbf{x}(s) = (s - \frac{\kappa^2}{6}s^3)\mathbf{t} + (\frac{s^2}{2}\kappa + \frac{\kappa' s^3}{6})\mathbf{n} + \frac{\kappa w}{6}s^3\mathbf{b} + O(s^4)\,.$$

Führen wir ein neues Koordinatensystem ein durch

$$\mathbf{x}(s) = \xi_1\mathbf{t} + \xi_2\mathbf{n} + \xi_3\mathbf{b},$$

so folgt die kanonische Darstellung der Kurve:

$$\begin{aligned}
\xi_1 &= s(1 - \frac{\kappa^2}{6}s^2)\,, \\
\xi_2 &= s^2(\frac{\kappa}{2} + \frac{\kappa' s}{6})\,, \\
\xi_3 &= s^3\frac{\kappa w}{6}\,.
\end{aligned}$$

1. *Näherung* : Kurve läuft in Richtung der Tangente
2. *Näherung* : Kurve verläuft in der Ebene von Tangente und Normale (Schmiegebene)

Wir sehen, dass die Krümmung κ die Abweichung von der Tangente bestimmt. Duch die Torsion w wird der Abstand von der Schmiegebene beschrieben.

Für den Kurvenverlauf erhalten wir als Grobdarstellung:

$$\begin{aligned}
\xi_1 &= s, \\
\xi_2 &= \frac{\kappa}{2}s^2, \\
\xi_3 &= \frac{\kappa w}{6}s^3.
\end{aligned}$$

2 Flächentheorie

2.1 Flächen im $\mathbb{R}^3$

Definition: Sei G ein Gebiet im $\mathbb{R}^2$, d. h. eine offene und zusammenhängende Menge. Eine Abbildung

$$\begin{aligned} \mathbf{X}: G &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u^1, u^2) &\mapsto \mathbf{X}(u^1, u^2) = \begin{pmatrix} x_1(u^1, u^2) \\ x_2(u^1, u^2) \\ x_3(u^1, u^2) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

heißt Parameterdarstellung einer Fläche der Klasse C^k, falls die Komponentenfunktionen $x_1(u^1, u^2),\ x_2(u^1, u^2),\ x_3(u^1, u^2)$ k-mal stetig differenzierbar sind und gilt:

$$\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial u^1} \times \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial u^2} \neq \mathbf{0}. \tag{1}$$

Definition: Die Kurven $u^1 \mapsto \mathbf{X}(u^1, u^2)$ heißen u^1-Linien, die Kurven $u^2 \mapsto \mathbf{X}(u^1, u^2)$ heißen u^2-Linien. Die Ableitungsvektoren

$$\mathbf{X}_1 := \mathbf{X}_{u^1} = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial u^1} \text{ und } \mathbf{X}_2 := \mathbf{X}_{u^2} = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial u^2}$$

heißen *Tangentialvektoren.*

Beispiel 1: Eine Kugelfläche kann durch die Parameterdarstellung

$$\begin{aligned} x_1 &= r \cos u^1 \cos u^2\,, \\ x_2 &= r \sin u^1 \cos u^2\,, \\ x_3 &= r \sin u^2\,. \end{aligned}$$

beschrieben werden. Die u^1-Linien mit $u^2 = \text{const.}$ werden hier als *Breitenkreise* bezeichnet. Die u^2-Linien mit $u^1 = \text{const.}$ heißen *Meridiane.* Es gilt

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = r^2$$

Beispiel 2: Eine Ebene in Parameterdarstellung ist gegeben durch

$$\mathbf{X} = u^1\mathbf{a} + u^2\mathbf{b} + \mathbf{c}$$

Die Bedingung (1) ist genau dann erfüllt, wenn $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ gilt.

Beispiel 3: Ein Drehkegel ist gegeben durch

$$\mathbf{X}(u^1, u^2) = (u^1 \cos u^2, u^1 \sin u^2, au^1)$$

Die u^1-Linien $u^2 = \text{const}$ sind Geraden durch den Nullpunkt, während die u^2-Linien Kreise parallel zur x^1, x^2-Ebene bilden.

Im Folgenden verwenden wir die Kuzschreibweise

$$\mathbf{X}_1 := \mathbf{X}_{u^1} = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial u^1} \text{ und } \mathbf{X}_2 := \mathbf{X}_{u^2} = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial u^2}$$

Diese Vektoren spannen die *Tangentialebene* auf:

$$\mathbf{y}(q^1, q^2) = \mathbf{X} + q^1 \mathbf{X}_{u^1} + q^2 \mathbf{X}_{u_2}$$

Eine Kurve in der Fläche können wir durch ihre Koordinaten beschreiben:

$$u^1 = u^1(t),\ u^2 = u^2(t)$$

Die Parameterdarstellung der Kurve im $\mathbb{R}^3$ lautet dann:

$$\overline{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{X}(u^1(t), u^2(t))$$

Die Tangente an die Kurve ist gegeben durch:

$$\bar{\mathbf{x}}' = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial u^1}\frac{du^1}{dt} + \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial u^2}\frac{du^2}{dt}$$

Der Tangentenvektor ist Linearkombination der Tangentialvektoren $\mathbf{X}_1$ und $\mathbf{X}_2$, d. h. er liegt in der Tangentialebene.

Definition: Der *Normalenvektor* ist definiert durch

$$\mathbf{N} = \frac{\mathbf{X}_{u^1} \times \mathbf{X}_{u^2}}{|\mathbf{X}_{u^1} \times \mathbf{X}_{u^2}|}\,.$$

Beispiel 4: Die Kugelfläche

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} r \cos u^1 \cos u^2 \\ r \sin u^1 \cos u^2 \\ r \sin u^2 \end{pmatrix}$$

hat die Tangentialvektoren

$$\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} -r \sin u^1 \cos u^2 \\ r \cos u^1 \cos u^2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und

$$\mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} -r \cos u^1 \sin u^2 \\ -r \sin u^1 \sin u^2 \\ r \cos u^2 \end{pmatrix}$$

Für die Richtung des Normalenvektors ergibt sich

$$\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2 = r^2 \begin{pmatrix} \cos u^1 \cos u^2 \\ \sin u^1 \cos u^2 \\ \sin^2 u^1 \cos u^2 \sin u^2 + \cos^2 u^1 \cos u^2 \sin u^2 \end{pmatrix} = r^2 \cos u^2 \begin{pmatrix} \cos u^1 \\ \sin u^1 \\ \sin u^2 \end{pmatrix}$$

Definition: Die Vektoren

$$\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{N}\,.$$

werden *Dreibein der Fläche* genannt.

Es gelten die Beziehungen

$$\langle \mathbf{X}_1, \mathbf{N} \rangle \quad = \quad \langle \mathbf{X}_2, \mathbf{N} \rangle = 0\,.$$

während im Allgemeinen $\langle \mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2 \rangle \neq 0$ gilt.

Definition: $u^i = u^i(\bar{u}^1, \bar{u}^2),\ i = 1, 2$ heißt eine zulässige Parametertransformation, falls die Fumktionen u^i mit ihren zugehörigen Umkehrfunktionen k-mal stetig differenzierbar sind und gilt:

$$\frac{\partial(u^i)}{\partial(\bar{u}^r)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u^1}{\partial \bar{u}^1} & \dfrac{\partial u^1}{\partial \bar{u}^2} \\ \\ \dfrac{\partial u^2}{\partial \bar{u}^1} & \dfrac{\partial u^2}{\partial \bar{u}^2} \end{vmatrix} \neq 0.$$

In den neuen Koordinaten lautet die Fläche

$$\overline{\mathbf{X}} = \mathbf{X}(u^1(\bar{u}^1, \bar{u}^2); u^2(\bar{u}^1, \bar{u}^2)).$$

Daraus folgt

$$\overline{\mathbf{X}}_r = \frac{\partial \overline{X}}{\partial \bar{u}^r} = \mathbf{X}_i \frac{\partial u^i}{\partial \bar{u}^r}$$

Summationskonvention: Tritt ein Index auf (einmal als oberer und einmal als unterer), so wird über diesen Index summiert.

$$\overline{\mathbf{X}}_1 \times \overline{\mathbf{X}}_2 = \mathbf{X}_i \frac{\partial u^i}{\partial \bar{u}^1} \times \mathbf{X}_j \frac{\partial u^j}{\partial \bar{u}^2} = \overline{\mathbf{X}}_1 \times \overline{\mathbf{X}}_2 \frac{\partial(u^i)}{\partial(\bar{u}^k)}$$

Dabei bezeichnet $\frac{\partial(u^i)}{\partial(\bar{u}^k)}$ die Funktionaldeterminante.

Der Normalenvektor ist invariant (bis auf das Vorzeichen) gegenüber Parametertransformationen.

2.2 Die erste Fundamentalform

Wir betrachten die Fläche

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}(u^1, u^2)$$

mit dem Differential

$$d\mathbf{X} := \mathbf{X}_i du^i = \mathbf{X}_1 du^1 + \mathbf{X}_2 du^2$$

und eine Flächenkurve

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) \quad &= \quad \mathbf{X}(u^1(t), u^2(t)) \\ \mathbf{x}'(t) \quad &= \quad \mathbf{X}_i u^{i\prime} \end{aligned}$$

$$\langle \mathbf{x}', \mathbf{x}' \rangle = \langle \mathbf{X}_1, \mathbf{X}_1 \rangle (u^{1\prime})^2 + 2 \langle \mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2 \rangle u^{1\prime} u^{2\prime} + \langle \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_2 \rangle (u^{2\prime})^2.$$

Somit erhalten wir für das Bogenelement

$$ds^2 = |\mathbf{x}'|^2 dt^2 = \sum_{i,k} \langle \mathbf{X}_i, \mathbf{X}_k \rangle u^{i\prime} u^{k\prime} dt^2\,.$$

und die Bogenlänge ergibt sich zu

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} |\mathbf{x}'(\tau)| d\tau \,.$$

Die Gleichung

$$du^i = u^{i\prime} dt$$

liefert

$$ds^2 = g_{ik} du^i du^k \,,$$

wobei wir die Größen

$$\boxed{g_{ik} = \langle \mathbf{X}_i, \mathbf{X}_k \rangle}$$

eingeführt haben.

Definition: Die quadratische Form

$$ds^2 = g_{ik} du^i du^k$$

heißt *erste Grundform, erste Fundamentalform* oder *metrische Grundform* der Flächentheorie.

$$ds^2 = \langle d\mathbf{X}, d\mathbf{X} \rangle \geq 0$$

Es gilt sogar das $>$-Zeichen, da $|d\mathbf{X}| \neq 0$, sonst wären $\mathbf{X}_1$ und $\mathbf{X}_2$ linear abhängig (was wir bei der Flächendefinition ausgeschlossen hatten).

Die Kenntnis der g_{ik} erlaubt nicht nur Längenmessung, sondern auch Messung von Winkeln und Flächen. Wir stellen uns vor, dass wir die Flächenkoordinaten um du^1 bzw. du^2 ändern. Der Flächenpunkt ändert sich dann um $\mathbf{X}_1 du^1$ bzw. um $\mathbf{X}_2 du^2$. Die beiden Änderungsvektoren spannen ein Parallelogramm auf. Wegen

$$\begin{aligned} g &:= \det(g_{ik}) \\ &= g_{11} g_{22} - g_{12}^2 \\ &= |\mathbf{X}_1|^2 |\mathbf{X}_2|^2 - \langle \mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2 \rangle^2 \\ &= \langle \mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2 \rangle > 0 \end{aligned}$$

können wir den Flächeninhalt auch mit Hilfe der Determinante g der ersten Fundamentalform ausdrücken.

Definition: Der Ausdruck

$$dF = |\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2| du^1 du^2 = \sqrt{g}\, du^1 du^2$$

wird *Flächenelement* genannt.

Das Flächenelement liefert den Flächeninhalt des Parallelogramms, das von den beiden Änderungsvektoren aufgespannt wird. Der Flächeninhalt einer Fläche ergibt sich zu

$$F = \int \int_G \sqrt{g}\, du^1 du^2$$

Wir betrachten nun zwei Flächenkurven

$$\begin{array}{rcl} u^i & = & f^i(t) \\ u^i & = & h^i(t) \end{array},$$

die dann als Raumkurven die Darstellung

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{x}_f(t) & = & \mathbf{X}(f^1(t), f^2(t)) \\ \mathbf{x}_h(t) & = & \mathbf{X}(h^1(t), h^2(t)) \end{array}$$

besitzen. Der Winkel γ zwischen beiden Kurven ist gleich dem Winkel zwischen den Tangentenvektoren. Auf diese Weise erhalten wir

$$\begin{array}{rcl} \cos\gamma & = & \dfrac{\langle \mathbf{x}'_f, \mathbf{x}'_h\rangle}{|\mathbf{x}'_h| \cdot |\mathbf{x}'_h|} = \dfrac{\langle \mathbf{X}_i f^{i\prime}, \mathbf{X}_k h^{k\prime}\rangle}{\sqrt{\mathbf{X}_i \mathbf{X}_k f^{i\prime} f^{k\prime} \mathbf{X}_l \mathbf{X}_m h^{l\prime} h^{m\prime}}} \\ & = & \dfrac{g_{ik} f^{i\prime} h^{k\prime}}{\sqrt{g_{ik} f^{i\prime} f^{k\prime} g_{lm} h^{l\prime} h^{m\prime}}} \end{array}$$

Invarianz bei Parametertransformationen Führen wir neue Flächenkoordinaten über die Transformation

$$u^i = u^i(\bar{u}^1, \bar{u}^2)$$

ein, so erhalten wir als Koeffizienten der ersten Grundform

$$\begin{array}{rcl} \bar{g}_{ik} & = & \langle \overline{\mathbf{X}}_i, \overline{\mathbf{X}}_k\rangle \\ & = & \langle \mathbf{X}_l \dfrac{\partial u^l}{\partial \bar{u}^i}, \mathbf{X}_m \dfrac{\partial u^m}{\partial \bar{u}^k}\rangle \\ & = & \langle \mathbf{X}_l, \mathbf{X}_m\rangle \dfrac{\partial u^l}{\partial \bar{u}^i} \dfrac{\partial u^m}{\partial \bar{u}^k} \\ & = & g_{lm} \dfrac{\partial u^l}{\partial \bar{u}^i} \dfrac{\partial u^m}{\partial \bar{u}^k} \end{array}$$

Um die erste Fundamentalform wieder mit Hilfe von du_i auszudrücken, berechnen wir

$$\begin{array}{rcl} d\bar{u}^i & = & \dfrac{\partial \bar{u}^i}{\partial u^j} du^j, \\ d\bar{u}^k & = & \dfrac{\partial \bar{u}^k}{\partial u^n} du^n \end{array}$$

und erhalten

$$\begin{array}{rcl} \bar{g}_{ik} d\bar{u}^i d\bar{u}^k & = & g_{lm} \dfrac{\partial u^l}{\partial \bar{u}^i} \dfrac{\partial u^m}{\partial \bar{u}^k} \dfrac{\partial \bar{u}^i}{\partial u^j} \dfrac{\partial \bar{u}^k}{\partial u^n} du^j du^n \\ & = & g_{lm} \delta^l_j \delta^m_n du^j du^n \\ & = & g_{jn} du^j du^n \end{array}$$

Es folgt, dass die erste Grundform invariant gegenüber Parametertransformationen ist.

2.3 Regelflächen und Torsen

2.3.1 Regelflächen

Regelflächen sind Flächen, die durch Bewegung einer Geraden entstehen.

Definition: Sind $u^1 \mapsto \mathbf{y}(u^1)$ eine Kurve und $\mathbf{z}(u^1)$ Vektoren im $\mathbb{R}^3$ mit

$$\mathbf{y}' \times \mathbf{z} \neq 0, \tag{2}$$

dann heißt die Fläche

$$X(u^1, u^2) = \mathbf{y}(u^1) + u^2\mathbf{z}(u^1)$$

Regefläche.

In jedem Punkt der Kurve $\mathbf{y}(u^1)$ ist *eine erzeugende Gerade*

$$u^2 \mapsto \mathbf{y}(u^1) + u^2\mathbf{z}(u^1)$$

angeheftet. Die Tangentenvektoren

$$\mathbf{X}_{u^1} = \mathbf{y}'(u^1) + u^2\mathbf{z}'(u^1)$$

und

$$\mathbf{X}_{u^2} = \mathbf{z}(u^1)$$

haben das Kreuzprodukt

$$\mathbf{X}_{u^1} \times \mathbf{X}_{u^2} = \mathbf{y}' \times \mathbf{z} + u^2\mathbf{z}' \times \mathbf{z},$$

das heißt für betragskleine u^2 ist wegen (2) die Regularitätsbedingung für Flächen erfüllt. erfüllt.

Beispiel 5: *(Kegel)* Alle Erzeugenden eines allgemeinen Kegels gehen durch einen Punkt

$$\mathbf{X}(u^1, u^2) = u^2\mathbf{z}(u^1) + \mathbf{y}_0,$$

wobei die Kegelspitze durch den Punkt $\mathbf{y}_0$ gebildet wird.

Beispiel 6: *(Allgemeiner Zylinder)* Alle Erzeugenden sind bei einem allgemeinen Zylinder parallel und gehen durch eine Kurve $\mathbf{y}(u^1)$. Die Gleichung lautet

$$\mathbf{X}(u^1, u^2) = \mathbf{y}(u^1) + u^2\mathbf{z}$$

Beispiel 7: *(Tangentenfläche)* Die Erzeugenden bestehen aus den Tangenten einer festen Raumkurve.

$$\mathbf{X}(u^1, u^2) = \mathbf{y}(u^1) + u^2\mathbf{y}'(u^1)$$

u^1 sei Bogenlänge, $\mathbf{b}$ der Binormalenvektor

$$\mathbf{X}_{u^1} \times \mathbf{X}_{u^2} = (\mathbf{y}' + u^2\mathbf{y}'') \times \mathbf{y}' = -u^2\kappa\mathbf{b}$$

Fläche ist längs der Kurve singulär. Man spricht daher von einer *Gratlinie.*

Normalenvektor

$$\mathbf{N}(u^1, u^2) = \pm\mathbf{b}(u^1)$$

2.3.2 Torsen

Definition: Eine Regelfläche heißt Torse, wenn alle Punkte einer Erzeugenden die gleiche Tangentialebene haben.

Beispiel 8: Tangentenflächen sind Torsen (der Normalenvektor hängt nicht von u^2 ab).

Beispiel 9: Bei einer Zylinderfläche

$$\mathbf{X}(u^1, u^2) = \mathbf{y}(u^1) + u^2\mathbf{z}$$

ist der Normalenvektor durch die Gleichung

$$\mathbf{X}_{u^1} \times \mathbf{X}_{u^2} = \mathbf{y}'(u^1) \times \mathbf{z}$$

gegeben. Auch hier hängt der Normalenvektor nicht von u^2 ab, also sind Zylinderflächen ebenfalls Torsen.

Beispiel 10: Bei Kegelflächen

$$\mathbf{X}(u^1, u^2) = \mathbf{y}_0 + u^2\mathbf{z}(u^1)$$

hängt die Richtung des Normalenvektors

$$\mathbf{X}_{u^1} \times \mathbf{X}_{u^2} = u^2\mathbf{z}' \times \mathbf{z}$$

nur von u^1 ab, also sind Kegelflächen Torsen.

Satz 1: *Eine Regelfläche*

$$\mathbf{X}(u^1, u^2) = \mathbf{y}(u^1) + u^2\mathbf{z}(u^1)$$

ist genau dann Torse, wenn

$$|\mathbf{y}', \mathbf{z}, \mathbf{z}'| = 0 \tag{3}$$

gilt, d. h.

$$\mathbf{y}', \mathbf{z}, \mathbf{z}'$$

linear abhängig sind.

Beweis: Die Tangentialebene im Punkt mit den Flächenkoordinaten u^1, u^2 wird von den Vektoren

$$\mathbf{X}_{u^1} = \mathbf{y}'(u^1) + u^2\mathbf{z}'(u^1)$$

und

$$\mathbf{X}_{u^2} = \mathbf{z}(u^1)$$

aufgespannt. Damit die Tangentialebene im Punkt $(u^1, 0)$ gleich der im Punkt (u^1, u^2) ist, muss $\mathbf{z}'$ eine Linearkombination von $\mathbf{y}'$ und $\mathbf{z}$ sein, d. h. die drei Vektoren $\mathbf{y}', \mathbf{z}$ und $\mathbf{z}'$ müssen linear abhängig sein. Umgekehrt folgt aus der linearen Abhängigkeit, dass für festes u^1 alle Tangentialebenen gleich sind. □

Bemerkung:

1. Man kann zeigen: Torsen sind entweder Kegel-, Zylinder- oder Tangentenflächen.

2. Es gibt Regelflächen, die keine Torsen sind, wie das einschalige Hyperboloid oder die Wendelfläche.

2.4 Zweite Fundamentalform

Wir möchten nun das Verhalten einer Fläche in der Umgebung eines Flächenpunktes untersuchen. Insbesondere sind wir daran interessiert, wie die Fläche von ihrer Tangentialebene abweicht. Mit der Taylorentwicklung erhalten wir unter Beachtung der Summationskonvention

$$\mathbf{X}(u^1 + du^1, u^2 + du^2) = \mathbf{X}(u^1, u^2) + \mathbf{X}_i du^i + \frac{1}{2}\mathbf{X}_{ik} du^i du^k + O(|du|^3)$$

Dabei haben wir

$$\mathbf{X}_{ik} = \frac{\partial^2 X}{\partial u^i \partial u^k}$$

gesetzt. Die beiden ersten Terme auf der rechten Seite der Taylorentwicklung spiegeln das Verhalten der Tangentialebene wieder, während der quadratische Term die Abweichung von der Tangentialebene zeigt.

Wir definieren

$$L_{ik} := \langle \mathbf{N}, \mathbf{X}_{ik} \rangle$$

Definition: Die L_{ik} heißen die *zweiten Fundamentalgrößen*, die quadratische Form

$$II := L_{ik} du^i du^k$$

heißt *zweite Fundamentalform*.

Aus den Betrachtungen folgt, dass abgesehen von Termen höherer als zweiter Ordnung und einem Faktor 1/2 durch die zweite Fundamentalform die Abweichung einer Fläche von der Tangentialebene beschrieben wird. Denn Multiplikation der Taylorentwicklung mit $\mathbf{N}$ liefert ($\mathbf{N}$ ist orthogonal zu $\mathbf{X}_i$)

$$\frac{1}{2} II = \langle \mathbf{X}(u^1 + du^1, u^2 + du^2) - \mathbf{X}(u^1, u^2), N \rangle + O(|du|^3).$$

Bemerkung: Die zweite Fundamentalform ist invariant gegenüber orientierungserhaltenden Parametertransformationen.

Definition: Wir definieren

$$L := L_{11} L_{22} - L_{12}^2.$$

Falls $L < 0$ im Punkt $\mathbf{X}(u^1, u^2)$, heißt die Fläche *hyperbolisch gekrümmt* in $\mathbf{X}(u^1, u^2)$. Dann heißt $\mathbf{X}(u^1, u^2)$ ein hyperbolischer Flächenpunkt.
Falls $L = 0$, heißt die Fläche *parabolisch gekrümmt* in $\mathbf{X}(u^1, u^2)$.
Falls $L > 0$, heißt die Fläche *elliptisch gekrümmt* in $\mathbf{X}(u^1, u^2)$.

Beispiel 11: Kreiszylinder:

$$\mathbf{X}(u^1, u^2) = \begin{pmatrix} \cos u^1 \\ \sin u^1 \\ u^2 \end{pmatrix}, \qquad 0 \le u^1 \le 2\pi, \quad -\infty < u^2 < \infty.$$

Es folgt

$$\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} -\sin u^1 \\ \cos u^1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{N} = \begin{pmatrix} \cos u^1 \\ \sin u^1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{X}_{11} = \begin{pmatrix} -\cos u^1 \\ -\sin u^1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{X}_{12} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{X}_{22} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$L_{11} = \mathbf{X}_{11}\mathbf{N} = -1, \qquad L_{12} = 0, \qquad L_{22} = 0.$$

Also gilt $L = 0$, die Fläche besteht nur aus parabolischen Punkten. Die zweite Fundamentalform lautet

$$II = -(du^1)^2 = 0.$$

2.5 Normalkrümmung, Hauptkrümmungen

2.5.1 Normalkrümmung

Im Folgenden geht es um die Krümmung von *Kurven* auf Flächen. Sei $\mathbf{x}(\tau) = \mathbf{X}(u^1(\tau), u^2(\tau))$ eine Flächenkurve mit Krümmungsvektor $\mathbf{k}$. Dann heißt

$$\kappa_n := \langle \mathbf{k}, \mathbf{N} \rangle$$

die *Normalkrümmung* der Kurve, wobei $\mathbf{N}$ der Normalenvektor der Fläche ist.

Bemerkung κ_n hängt nicht von der Orientierung der Kurve ab, weil $\mathbf{k}$ unabhängig davon ist. Aber κ_n hängt von der Orientierung von $\mathbf{N}$ ab.

Satz 1: *Es gilt*

$$\kappa_n = \langle \mathbf{k}, \mathbf{N} \rangle = \frac{II}{I} = \frac{L_{11}\, du^1\, du^1 + 2L_{12}\, du^1\, du^2 + L_{22}\, du^2\, du^2}{g_{11}\, du^1\, du^l + 2g_{12}\, du^1\, du^2 + g_{22}\, du^2\, du^2}.$$

Beweis: Es gilt

$$\begin{aligned} \kappa_n &= \langle \mathbf{k}, \mathbf{N} \rangle = \left\langle \frac{d^2}{ds^2}\mathbf{x}(\tau), \mathbf{N} \right\rangle = \left\langle \frac{d^2}{ds^2}\mathbf{X}(u^1(\tau), u^2(\tau)), \mathbf{N} \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{ds}{ds}\left(\mathbf{X}_i \frac{du^i}{ds}\right), \mathbf{N} \right\rangle = \left\langle \frac{\mathbf{X}_{ik} du^i du^k}{(ds)^2}, \mathbf{N} \right\rangle + \langle \mathbf{X}_i, \mathbf{N} \rangle \frac{d^2 u^i}{ds^2} \\ &= \frac{II}{I} = \frac{L_{ij}\, du^i\, du^j}{g_{kl}\, du^k\, du^l}. \end{aligned}$$

□

Bemerkung:

1. κ_n ist invariant gegenüber orientierungserhaltenden Parametertransformationen, weil I und II das sind.

2. Sei $du^1 \neq 0$, dann liefert kürzen durch $(du^1)^2$

$$\kappa_n = \frac{L_{11} + 2L_{12}\frac{du^2}{du^1} + L_{22}(\frac{du^2}{du^1})^2}{g_{11} + 2g_{12}\frac{du^2}{du^1} + g_{22}(\frac{du^2}{du^1})^2} \,.$$

   Also hängt κ_n nur von u^1, u^2 und $\frac{du^2}{du^1}$ ab. Nun ist hier $\frac{du^2}{du^1}$ die Richtung des Tangentenvektors der Kurve. Also gilt folgender Satz:

Satz 2:*(Meusnier) Alle Kurven auf einer Fläche, die in einem Punkt dieselbe Tangente haben, besitzen dort dieselbe Normalkrümmung.*

Bemerkung: Es gilt $\mathbf{k} = \kappa\mathbf{n}$, wobei κ die Krümmung der Kurve und $\mathbf{n}$ der Hauptnormalenvektor sind. Wegen $|\mathbf{n}| = |\mathbf{N}| = 1$ folgt

$$\kappa_n = \langle \kappa\mathbf{n}, \mathbf{N} \rangle = \kappa \cos\alpha \,,$$

wobei α der Winkel zwischen $\mathbf{n}$ und $\mathbf{N}$ ist. Das liefert

$$\kappa = \frac{\kappa_n}{\cos\alpha} \,.$$

Also hängt die Krümmung der Flächenkurve im betrachteten Punkt nur ab von

i) der Richtung des Tangetenvektors, also von $\frac{du^2}{du^1}$;

ii) vom Winkel α (= Winkel zwischen $\mathbf{n}$ und $\mathbf{N}$).

Deshalb folgt:

Alle Flächenkurven durch $\mathbf{X}(u_0^1, u_0^2)$ mit der gleichen Schmiegebene (aufgespannt von $\mathbf{t}$ und $\mathbf{n}$) haben in $\mathbf{X}(u_0^1, u_0^2)$ dieselbe Krümmung κ.

Beispiel 12: Auf dem Kreiszylinder

$$\mathbf{X}(u^1, u^2) = \begin{pmatrix} \cos u^1 \\ \sin u^1 \\ u^2 \end{pmatrix}, \qquad 0 \leq u^1 \leq 2\pi, \quad -\infty < u^2 < \infty$$

sei durch $u^2 = 3u^1$ eine Flächenkurve festgelegt. Wir besimmen κ_n:

$$\kappa_n = \frac{L_{11} + 2L_{12}\frac{du^2}{du^1} + L_{22}(\frac{du^2}{du^1})^2}{g_{11} + 2g_{12}\frac{du^2}{du^1} + g_{22}(\frac{du^2}{du^1})^2}.$$

Wegen $u^2 = 3u^1$ folgt $\frac{du^2}{du^1} = 3$. Ferner ist $g_{11} = g_{22} = 1$, $L_{11} = -1$ und $g_{12} = L_{12} = L_{22} = 0$. Also gilt $\kappa_n = \frac{-1}{10}$.

2.5.2 Hauptkrümmungen, Krümmungslinien

Die Normalkrümmung κ_n hängt ab von u^1, u^2 und $\frac{du^2}{du^1}$ $(du^1 \neq 0)$. Sei ein Punkt auf der Fläche gewählt. Dann hängt κ_n nur noch von der Richtung $\lambda := \frac{du^2}{du^1}$ ab:

$$\kappa_n = \kappa_n(\lambda) = \frac{L_{11} + 2L_{12}\lambda + L_{22}\lambda^2}{g_{11} + 2g_{12}\lambda + g_{22}\lambda^2} \,.$$

Entweder ist κ_n konstant, oder κ_n hat ein Maximun und ein Mininmum.

Definition: Sei in einem Flächenpunkt $\mathbf{X}(u_0^1, u_0^2)$ die Normalkrümmung richtungsunabhängig. Dann heißt $\mathbf{X}(u_0^1, u_0^2)$ *ein Nabelpunkt.*

Beispiele: Die Ebene und die Sphäre bestehen nur aus Nabelpunkten. Bei einem Rotationsparaboloid ist der Pol ein Nabelpunkt.

Satz 3: *Sei $\mathbf{X}(u^1, u^2)$ fest gewählt und kein Nabelpunkt. Dann gibt es genau eine Richtung in der Tangentialebene, so dass κ_n maximal wird, sowie genau eine Richtung, so dass κ_n minimal wird.*

Definition: Seien u^1, u^2 fest gewählt und λ eine beliebige Richtung in der Tangentialebene. Dann heißen

$$\kappa_1 := \max_\lambda \kappa_n(\lambda) \quad \text{und} \quad \kappa_2 := \min_\lambda \kappa_n(\lambda)$$

die Hauptkrümmungen der Fläche im Punkt $\mathbf{X}(u^1, u^2)$. Die zugehörigen Richtungen λ_1, λ_2 heißen *Hauptkrümmungsrichtungen* in $\mathbf{X}(u^1, u^2)$.

Bemerkung:

1. Falls $\mathbf{X}(u^1, u^2)$ kein Nabelpunkt ist, sind die Hauptkrümmungsrichtungen orthogonal (Beweis Satz 4 unten).
2. Falls $\mathbf{X}(u^1, u^2)$ ein Nabelpunkt ist, gilt $\kappa_1 = \kappa_2$. Dann ist jede Richtung eine Hauptkrümmungsrichtung.

Definition: Eine Flächenkurve, bei der in jedem ihrer Punkte die Richtung der Tangente eine Hauptkrümmungsrichtung ist, heißt *Krümmungslinie.*

Differentialgleichung der Krümmungslinien: Wir bestimmen die Extrema von $\kappa_n(\lambda) = \frac{L_{11}+2L_{12}\lambda+L_{22}\lambda^2}{g_{11}+2g_{12}\lambda+g_{22}\lambda^2}$. Es gilt

$$\begin{aligned}\kappa_n'(\lambda) &= \frac{1}{\mu^2}(g_{11} + 2g_{12}\lambda + g_{22}\lambda^2)(2L_{12} + 2\lambda L_{22}) \\ &\quad -\frac{1}{\mu^2}(L_{11} + 2L_{12}\lambda + L_{22}\lambda^2)(2g_{12} + 2\lambda g_{22})\end{aligned}$$

mit $\mu = g_{11} + 2g_{12}\lambda + g_{22}\lambda^2$. Wegen $\mu \neq 0$ ist $\kappa_n'(\lambda) = 0$, falls

$$p\lambda^2 + q\lambda + r = 0$$

mit

$$p = (g_{12}L_{22} - g_{22}L_{12}), \quad q = (g_{11}L_{22} - g_{22}L_{11}), \quad r = (g_{11}L_{12} - g_{12}L_{11}).$$

Wir setzen in der Gleichung

$$p\lambda^2 + q\lambda + r = 0$$

$\frac{du^2}{du^1}$ für λ ein und multiplizieren mit $(du^1)^2$. Es folgt

$$(g_{12}L_{22}-g_{22}L_{12})(du^2)^2+(g_{11}L_{22}-g_{22}L_{11})du^1du^2+(g_{11}L_{12}-g_{12}L_{11})(du^1)^2 = 0.$$

Dies ist die Differentialgleichung der Krümmunglinien. Sie läßt sich schreiben als

$$\begin{vmatrix} (du^2)^2 & -du^1du^2 & (du^1)^2 \\ g_{11} & g_{12} & g_{22} \\ L_{11} & L_{12} & L_{22} \end{vmatrix} = 0\,.$$

Falls keine Nabelpunkte vorliegen, gibt es genau zwei Lösungen $\frac{du^2}{du^1}$ und $\frac{d\tilde{u}^2}{d\tilde{u}^1}$. Durch jeden Punkt der Fläche gehen dann genau zwei Krümmunglinien.

Beispiel 13: Die Fläche

$$\mathbf{X}(\rho,\phi) = \begin{pmatrix} \rho\cos\phi \\ \rho\sin\phi \\ f(\rho) \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \rho > 0\,, \quad 0 \le \phi \le 2\pi$$

ist eine Rotationsfäche. Berechnung der Krümmungslinien:

$$\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \\ f' \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}_2 = \rho \begin{pmatrix} -sin\phi \\ \cos\phi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{N} = \frac{\rho}{\sqrt{g}} \begin{pmatrix} -f'\cos\phi \\ -f'\sin\phi \\ 1 \end{pmatrix},$$

$g = 1 + (f')^2$,

$$\mathbf{X}_{11} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f'' \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}_{12} = \begin{pmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}_{22} = -\rho \begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Es gilt $g_{12} = 0$ und $L_{12} = 0$. Also lautet die Differentialgleichung der Krümmunglinien

$$(g_{11}L_{22} - g_{22}L_{11})d\rho\, d\phi = 0 \tag{4}$$

Die Klammer ist nie null, falls kein Nabelpunkt vorliegt, denn die Klammer ist die Determinante von $\begin{pmatrix} L_{11} & -g_{11} \\ L_{22} & -g_{22} \end{pmatrix}$ und das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} L_{11} & -g_{11} \\ L_{22} & -g_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

hat genau dann eine nichttriviale Lösung, falls gilt:

$$L_{11} = \frac{y}{x} g_{11} \quad \text{und} \quad L_{22} = \frac{y}{x} g_{22}\,.$$

Wegen $L_{12} = 0 = g_{12}$ bedeutet dies: Im betrachteten Punkt gilt für alle Richtungen

$$II = c\,I$$

mit der Konstanten $c = \frac{y}{x}$. Dies gilt nur in Nabelpunkten. Falls kein Nabelpunkt vorliegt, folgt aus (4)

$$d\rho = 0 \quad \text{oder} \quad d\phi = 0.$$

Die Krümmunglinien sind also die Linien $\rho = const$ und die Linien $\phi = const$. Die Linien $\phi = const$ heißen *Meridiane*, die Linien $\rho = const$ heißen *Breitenkreise*. Also sind bei einer Rotationsfläche die Meridiane und Breitenkreise die Krümmunglinien.

Satz 4: *Sei* $\mathbf{X}(u^1, u^2)$ *kein Nabelpunkt. Dann sind die beiden Krümmungslinien, die durch den Punkt* $\mathbf{X}(u^1, u^2)$ *gehen, orthogonal.*

BEWEIS: Die Krümmungslinien seinen die Parameterlinien der Fläche. Also ist die Linie $u^1 = c$ Krümmunglinie. Aus $u^1 = c$ folgt $du^1 = 0$. Somit lautet die Dgl der Krümmungslinien

$$(g_{12}L_{22} - g_{22}L_{12})(du^2)^2 = 0\,.$$

Wegen $du^2 \neq 0$ folgt

$$L_{22}g_{12} - g_{22}L_{12} = 0\,.$$

Analog folgt für die Linie $u^2 = c$ dann $du^2 = 0$ und

$$L_{11}g_{12} - g_{11}L_{12} = 0\,.$$

Diese beiden Gleichungen als Gleichungssystem geschrieben lauten

$$\begin{pmatrix} L_{22} & -g_{22} \\ L_{11} & -g_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{12} \\ L_{12} \end{pmatrix} = 0\,.$$

Wegen $Det \neq 0$ (kein Nabelpunkt, siehe Bsp. zuvor) muss $g_{12} = L_{12} = 0$ gelten. Aus $g_{12} = 0$ folgt, dass die Parameterlinien orthogonal sind. Weil die Parameterlinien die Krümmungslinien sind, folgt die Behauptung. □

Definition: Die Zahl

$$K := \frac{L}{g}$$

heißt *Gaußsche Krümmung*, die Zahl

$$H := \frac{1}{2g}(L_{11}g_{22} + L_{22}g_{11} - 2g_{12}L_{12})$$

heißt *mittlere Krümmung.*

Bemerkung: Man kann zeigen: $K = \kappa_1\,\kappa_2$ und $H = \frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2)$.

Bemerkung: Ein Flächenpunkt ist ein

- *elliptischer Punkt*, falls $K > 0$,
- *parabolischer Punkt*, falls $K = 0$,
- *hyperbolischer Punkt*, falls $K < 0$.

Geometrische Deutung: Führen wir neue Koordinaten in Richtung der Hauptkrümmungen ein, so lässt sich die Fläche lokal durch

$$z = \frac{1}{2}(\kappa_1(v^1)^2 + \kappa_2(v^2)^2)$$

beschreiben. Dabei bedeutet z den Abstand von der Tangentialebene. In einem elliptischen Punkt haben die Hauptkrümmungen gleiches Vorzeichen und die zweite Fundamentalform ist positiv definit. In der Umgebung eines solchen Punktes liegt die Fläche auf einer Seite der Tangentialebene. Lokal sieht die Fläche ähnlich wie ein Paraboloid aus. Für parabolische Punkte ist eine Hauptkümmumg gleich null und die Fläche sieht ähnlich wie eine Zylinderfläche aus. Für hyperbolische Punkte haben die Hauptkrümmungen unterschiedliches Vorzeichen und die Fläche hat lokal die Form eines Hyperboloids.

Satz 5: *Eine Regelfläche ist genau dann Torse, wenn in allen Flächenpunkten für die Gauß'sche Krümmung $K = 0$ gilt.*

BEWEIS: Sei $\mathbf{y}(s)$ eine reguläre Kurve, $|\mathbf{y}'| = |\mathbf{z}| = 1$ und

$$\mathbf{F}(s, \lambda) = \mathbf{y}(s) + \lambda\, \mathbf{z}(s).$$

Wir finden

$$\mathbf{X}_1 = \mathbf{t} + \lambda \mathbf{z}'\,, \quad \mathbf{X}_2 = \mathbf{z}\,, \quad \mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2 = \mathbf{t} \times \mathbf{z} + \lambda \mathbf{z}' \times \mathbf{z}\,,$$

$$\mathbf{X}_{11} = \mathbf{t}' + \lambda \mathbf{z}''\,, \quad \mathbf{X}_{12} = \mathbf{z}'\,, \quad \mathbf{X}_{22} = 0\,.$$

Daraus folgt $L_{22} = 0$, also

$$L = -L_{12}^2 \leq 0\ .$$

Ferner gilt

$$L_{12} = \mathbf{X}_{12} \frac{1}{\sqrt{g}} (\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2) = \frac{1}{\sqrt{g}} ([\mathbf{z}',\, \mathbf{t},\, \mathbf{z}] + \lambda \underbrace{[\mathbf{z}',\, \mathbf{z}',\, \mathbf{z}]}_{=0})\,.$$

Also ist

$$K = \frac{L}{g} = \frac{-L_{12}^2}{g}$$

genau dann null, wenn L_{12} null ist, also $[\mathbf{z}', \mathbf{t}, \mathbf{z}]$ null ist. Genau dann ist $\mathbf{F}$ eine Torse. □

2.6 Christoffelsymbole

Zerlegt man die zweiten Ableitungen X_{ik} der Flächenvektoren in einen tangentialen und einen normalen Anteil, erhält man die *Ableitungsgleichung von Gauß*:

$$\mathbf{X}_{ik} = \Gamma_{ik}^r \mathbf{X}_r + L_{ik} \mathbf{N}.$$

Die Koeffizienten Γ_{ik}^r $(1 \leq i, k, r \leq 2)$ heißen Christoffelsymbole zweiter Art. Um diese Größen zu berechnen, multiplizieren wir die Ableitungsgleichung mit $\mathbf{X}_l$ und erhalten

$$\langle \mathbf{X}_{ik}, \mathbf{X}_l \rangle = \Gamma_{ik}^r \langle \mathbf{X}_r, \mathbf{X}_l \rangle = \Gamma_{ik}^r g_{rl} := \Gamma_{ik|l}$$

Definition: Die Größen

$$\Gamma_{ik|l} = \Gamma_{ik}^r g_{rl}$$

heißen *Christoffelsymbole 1.Art.*

Die Christoffelsymbole (erster und zweiter Art) sind wegen $\mathbf{X}_{ik} = \mathbf{X}_{ki}$ symmetrisch in den beiden ersten unteren Indizes. Aus $g_{ik} = \langle \mathbf{X}_i, \mathbf{X}_k \rangle$ folgt durch Differenzieren:

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial u^l} = \langle \mathbf{X}_{il}, \mathbf{X}_k \rangle + \langle \mathbf{X}_i, \mathbf{X}_{kl} \rangle = \Gamma_{il|k} + \Gamma_{kl|i}.$$

Durch Vertauschen der Indizes folgen die Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{ik}}{\partial u^l} &= \Gamma_{il|k} + \Gamma_{kl|i} \\ \frac{\partial g_{lk}}{\partial u^i} &= \Gamma_{li|k} + \Gamma_{ki|l} \\ \frac{\partial g_{il}}{\partial u^k} &= \Gamma_{ik|l} + \Gamma_{lk|i} \end{aligned}$$

Wegen der Symmetrie folgt

$$\Gamma_{ik|l} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{il}}{\partial u^k} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial u^l} + \frac{\partial g_{lk}}{\partial u^i} \right)$$

Mit g^{ik} bezeichnen wir die inverse Matrix zu g_{ik}. Es gilt:

$$\begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{g} \begin{pmatrix} g_{22} & -g_{12} \\ -g_{12} & g_{11} \end{pmatrix}$$

Es folgt

$$g^{lr}\Gamma_{jk|l} = g^{lr}\Gamma^i_{jk} g_{il} = \Gamma^i_{jk}\delta_{ir} = \Gamma^r_{jk}$$

und damit ergibt sich

$$\Gamma^r_{ik} = \frac{g^{lr}}{2}\left(\frac{\partial g_{il}}{\partial u^k} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial u^l} + \frac{\partial g_{lk}}{\partial u^i} \right)$$

Die Größen auf der rechten Seite hängen nur von den metrischen Größen g_{ik} ab. Es zeigt sich, dass die Christoffelsymbole bereits bei Kenntnis der ersten Fundamentalform berechnet werden können.

Satz 1: *Die Christoffelsymbole sind Größen der inneren Geometrie, d. h. sie sind durch die g_{ik} und ihre Ableitungen bestimmt.*

2.7 Geodätische Krümmung

Sei $\mathbf{x}(s) = \mathbf{X}(u^1(s), u^2(s))$ eine nach der Bogenlänge parametrisierte Flächenkurve. Sei $\mathbf{t}$ der Tangentenvektor von $\mathbf{x}$. Dann bilden die drei Vektoren

$$\mathbf{t}, \mathbf{N}, (\mathbf{N} \times \mathbf{t})$$

eine Orthonormalbasis. Der Krümmungsvektor $\mathbf{k}$ der Kurve läßt sich bezüglich dieser Basis darstellen:

$$\mathbf{k} = a_1\mathbf{t} + a_2\mathbf{N} + a_3(\mathbf{N} \times \mathbf{t})\,.$$

Berechnung der Koeffizienten a_1, a_2, a_3:

i) Aus $\mathbf{k}\perp\mathbf{t}$ folgt $a_1 = 0$.
ii) Multiplizieren mit $\mathbf{N}$ liefert

$$a_2 = \langle \mathbf{k}, \mathbf{N} \rangle = \kappa_n \quad \text{(=Normalkrümmung).}$$

iii) Multiplizieren mit $\mathbf{N} \times \mathbf{t}$ liefert

$$a_3 = \langle \mathbf{k}, \mathbf{N} \times \mathbf{t} \rangle = [\mathbf{k}, \mathbf{N}, \mathbf{t}] = \langle \mathbf{N}, \mathbf{t} \times \mathbf{k} \rangle.$$

Definition: Sei $\mathbf{x}(\tau) = \mathbf{X}(u^1(\tau), u^2(\tau))$ eine Flächenkurve mit Tangentenvektor $\mathbf{t}$ und Krümmungsvektor $\mathbf{k}$. Die Zahl

$$\kappa_g := \langle \mathbf{N}, \mathbf{t} \times \mathbf{k} \rangle = \frac{1}{|\mathbf{x}'|^3} \langle \mathbf{N}, \mathbf{x}' \times \mathbf{x}'' \rangle$$

heißt *geodätische Krümmung.*

Folgerung: i) Es gilt

$$\mathbf{k} = \kappa_n \, \mathbf{N} + \kappa_g \, (\mathbf{N} \times \mathbf{t}).$$

ii) Sei κ die Krümmung der Flächenkurve und α der Winkel zwischen $\mathbf{N}$ und $\mathbf{k}$. Es gilt

$$\begin{aligned} \kappa_n &= \kappa \cos\alpha \,, \\ \kappa_g &= \kappa \sin\alpha \\ \kappa_g^2 + \kappa_n^2 &= \kappa^2 \,. \end{aligned}$$

iii) κ_g ist invariant gegenüber orientierungserhaltenden Parametertransformationen.

Beispiel 14: Geodätische Krümmung der Kurve $z = \phi^2$ auf der Fläche

$$\mathbf{X}(\phi, z) = \begin{pmatrix} R\cos\phi \\ R\sin\phi \\ z \end{pmatrix} .$$

Wir berechnen $\kappa_g = \frac{1}{|\mathbf{x}'|^3} \langle \mathbf{N}, \mathbf{x}' \times \mathbf{x}'' \rangle$. Es gilt

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -R\sin\phi \\ R\cos\phi \\ 2\phi \end{pmatrix}, \; \mathbf{x}'' = \begin{pmatrix} -R\cos\phi \\ -R\sin\phi \\ 2 \end{pmatrix}, \; \mathbf{x}' \times \mathbf{x}'' = \begin{pmatrix} 2R\cos\phi + 2\phi R\sin\phi \\ -2\phi R\cos\phi + 2R\sin\phi \\ R^2 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |\mathbf{x}'| = \sqrt{R^2 + 4\phi^2}\,, \quad \kappa_g = \frac{2R}{\sqrt{R^2 + 4\phi^2}^{\,3}} .$$

Lemma 1: Sei $\mathbf{x}(\tau) = \mathbf{X}(u^1(\tau), u^2(\tau))$ eine Flächenkurve. Dann gilt

$$\kappa_g = \sqrt{g}\{(\Gamma^2_{ik}\dot{u}^i\dot{u}^k + \ddot{u}^2)\dot{u}^1 - (\Gamma^1_{ik}\dot{u}^i\dot{u}^k + \ddot{u}^1)\dot{u}^2\} \tag{5}$$

wobei $\dot{u}^i = \frac{du^i}{ds}$ die Ableitung nach der Bogenlänge ist; bzw.

$$\kappa_g = \frac{\sqrt{g}}{|\mathbf{x}'|}\{(\Gamma^2_{ik}u^{i\prime}u^{k\prime} + u^{2\prime\prime})u^{1\prime} - (\Gamma^1_{ik}u^{i\prime}u^{k\prime} + u^{1\prime\prime})u^{2\prime}\} \,,$$

wobei $u^{i\prime} = \frac{du^i}{d\tau}$ die Ableitung nach τ ist.

Beweis: Berechnung von $\mathbf{k}$: Es ist

$$\mathbf{t} = \frac{d}{ds}\mathbf{X}(u^1(s), u^2(s)) = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial u^i}\frac{du^i}{ds} = \mathbf{X}_i \dot{u}^i \tag{6}$$

und

$$\begin{aligned}
\mathbf{k} &= \frac{d}{ds}\mathbf{t} = \frac{d}{ds}[\mathbf{X}_i(u^1(s), u^2(s))\, \dot{u}^i(s)]\,, \\
&= [\mathbf{X}_{ij}\, \frac{d}{ds}\, u^j(s)]\, \dot{u}^i(s) + \mathbf{X}_i\, \ddot{u}^i \\
&= \mathbf{X}_{ij}\, \dot{u}^i \dot{u}^j + \mathbf{X}_i\, \ddot{u}^i\,.
\end{aligned}$$

Mit den Ableitungsgleichungen von Gauß

$$\mathbf{X}_{ij} = \Gamma^k_{ij}\, \mathbf{X}_k + L_{ij}\mathbf{N}$$

folgt

$$\mathbf{k} = (\Gamma^k_{ij}\, \mathbf{X}_k + L_{ij}\mathbf{N})\dot{u}^i\dot{u}^j + \mathbf{X}_k\ddot{u}^k = \mathbf{X}_k(\Gamma^k_{ij}\, \dot{u}^i\dot{u}^j + \ddot{u}^k) + \mathbf{N}L_{ij}\dot{u}^i\dot{u}^j\,. \tag{7}$$

Berechnung von $\mathbf{N} \times \mathbf{t}$: Es gilt

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = -\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}\rangle + \langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \cdot \mathbf{a}\rangle$$

für beliebige Vektoren $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d} \in \mathbb{R}^3$. Wir verwenden $\mathbf{N} = \frac{1}{\sqrt{g}}(\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2)$ und (6) und erhalten

$$\mathbf{N} \times \mathbf{t} = \frac{1}{\sqrt{g}}(\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2) \times \mathbf{X}_m\dot{u}^m \tag{8}$$

$$= \frac{\dot{u}^m}{\sqrt{g}}(\mathbf{X}_2\, g_{1m} - \mathbf{X}_1\, g_{2m})\,. \tag{9}$$

Mit (7) und (9) finden wir

$$\begin{aligned}
\kappa_g &= \langle \mathbf{k}, \mathbf{N} \times \mathbf{t}\rangle \\
&= \frac{\dot{u}^m}{\sqrt{g}}(\Gamma^k_{ij}\, \dot{u}^i\dot{u}^j + \ddot{u}^k)\{g_{2k}g_{1m} - g_{1k}g_{2m}\}\,.
\end{aligned}$$

Ferner gilt

$$\{g_{2k}g_{1m} - g_{1k}g_{2m}\} = \left\{\begin{array}{rll} 0 & \text{für} & k = m \\ -g & \text{für} & k = 1,\, m = 2 \\ g & \text{für} & k = 2,\, m = 1 \end{array}\right. .$$

$\square$

Satz 1: *Die geodätische Krümmung ist eine innergeometrische Größe.*

2.8 Geodätische Linien

Definition: Eine Flächenkurve heißt *geodätische Linie*, falls $\kappa_g = 0$ gilt.

Satz 1: *Geodätische Linien sind durch das Differentialgleichungssystem*

$$u^{r\prime\prime} + \Gamma^r_{jk} u^{j\prime} u^{k\prime} = 0, \;\; r = 1, 2 \tag{10}$$

charakterisiert.

Beweis: Setzen wir $\kappa_g = 0$ in Gleichung (5), so folgt die Behauptung. □

Satz 2: *Von jedem Punkt einer Fläche geht in jeder Flächenrichtung genau eine geodätische Linie aus.*

Beweis: O. B. d. A. können wir $u^1 = u^2 = 0$ annehmen. Wir geben eine Flächenrichtung durch

$$\mathbf{v} = v^i \mathbf{X}_i$$

vor mit

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = g_{ik} v^i v^k = 1$$

Nach dem Existenz- und Eindeutigkeitssatz für gewöhnliche Differentialgleichungen ist das System von zwei Differentialgleichungen zweiter Ordnung bei diesen Anfangsbedingungen eindeutig lösbar. Wir behaupten, dass durch s die Bogenlänge gegeben ist. Um das zu zeigen, setzen wir

$$f(s) = g_{ik}(u^1(s), u^2(s)) u^{i\prime} u^{k\prime}$$

Es gilt $f(0) = 1$. Durch Differentiation erhalten wir

$$f'(s) \;\;=\;\; \frac{\partial g_{ik}}{\partial u^j} u^{j\prime} u^{i\prime} u^{k\prime} + g_{kr} u^{r\prime\prime} u^{k\prime} + g_{ik} u^{i\prime\prime} u^{k\prime}$$

Berücksichtigen wir nun die Beziehung

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial u^j} = \Gamma_{ij|k} + \Gamma_{kj|i} = g_{kr} \Gamma^r_{ij} + g_{ir} \Gamma^r_{kj},$$

so erhalten wir nach Einsetzen und Umnummerierung der Indizes

$$f'(s) = g_{kr} \left(\Gamma^r_{ij} u^{i\prime} u^{j\prime} + u^{r\prime\prime} \right) u^{k\prime} + g_{ir} \left(\Gamma^r_{kj} u^{j\prime} u^{k\prime} + u^{r\prime\prime} \right) u^{i\prime} = 0$$

Hieraus folgt $f(s) = 1$. □

Beispiel 15: Wir bestimmen die geodätischen Linien in der Ebene

$$\mathbf{X}(u^1, u^2) = \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Für die Tangentialvektoren erhalten wir

$$\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Da alle g_{ij} konstant sind, folgt für die Christoffelsymbole $\Gamma_{ik|l} = 0$, also $\Gamma^l_{ik} = 0$ für beliebige Indizes i, k, l. Die Differentialgleichung (10) der geodätischen Linien liefert

$$\begin{aligned} \ddot{u}^1 &= 0, \\ \ddot{u}^2 &= 0. \end{aligned}$$

Die Lösungen sind

$$u^1 = a\,s + c \quad \text{und} \quad u^2 = bs + d$$

mit Konstanten a, b, c, d, wobei $a^2 + b^2 = 1$ gelten soll, damit die Parametrisierung nach der Bogenlänge erfolgt. Dies sind Geraden in der Ebene.

Beispiel 16: Um die geodätischen Linien der Zylinderfläche

$$\mathbf{X}(\phi, z) = \begin{pmatrix} R\cos\phi \\ R\sin\phi \\ z \end{pmatrix}$$

zu berechnen, bilden wir die Tangentialvektoren

$$\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} -R\sin\phi \\ R\cos\phi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und bekommen

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Weil alle g_{ij} konstant sind, sind die Christoffelsymbole null. Die Differentialgleichung der geodätischen Linien lautet wie im Fall der Ebene

$$\begin{aligned} \ddot{u}^1 &= 0, \\ \ddot{u}^2 &= 0. \end{aligned}$$

Die Lösungen sind

$$u^1 = as + c \quad \text{und} \quad u^2 = bs + d,$$

wobei $a^2 + b^2 = 1$ gelten soll. Wir unterscheiden zwei Fälle

1. Wenn $a = 0$ gilt, folgt $\phi = u^1 = const$. In diesem Fall erhalten wir Geraden die parallel zur Zylinderachse sind als Lösungen.

2. Im Fall $a \neq 0$ folgt
$$z = u^2 = \alpha u^1 + \beta.$$
Das sind die Kurven
$$\mathbf{X}(u^1, u^2(u^1)) = \mathbf{X}(u^1, \alpha u^1 + \beta) = \begin{pmatrix} R\cos\phi \\ R\sin\phi \\ \alpha\phi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \beta \end{pmatrix},$$
also Schraubenlinien.

2.9 Geodätische Linien als kürzeste Verbindung

Gegeben seien zwei Punkte auf einer Flächenkurve $u^i(t_0)$:

$$u^i(t_0)\ ,\ \ u^i(t_1)$$

Wir stellen die Frage, wann eine Flächenkurve kürzeste Verbindung zwischen den Punkten ist. Zur Lösung des Problems betrachten wir die Variationsmethode. Sei $v^i(t)$ so gewählt, dass $v^i(t_0) = u^i(t_1) = 0$ gilt. Wir betrachten die Kurven

$$u^i(t) + \epsilon v^i(t)$$

und nehmen an, dass t die Bogenlänge bei $\epsilon = 0$ darstellt. Es gilt:

$$ds^2 = g_{ik}(u^1 + \epsilon u^1, u^2 + \epsilon u^2)(u^{i\prime} + \epsilon u^{i\prime})(u^{k\prime} + \epsilon u^{k\prime})$$

Wir setzen

$$L(\epsilon) = \int\limits_{t_0}^{t_1} ds = \int\limits_{t_0}^{t_1} w dt\,,$$

wobei nach Vorraussetzung $w = 1$ bei $\epsilon = 0$ gilt. Notwendige Bedingung für ein Minimum ist $L'(0) = 0$.

$$L'(0) = \int\limits_{t_0}^{t1} \frac{1}{2w}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial u^j} u^{i\prime} u^{k\prime} v^j + 2 g_{ik} v^{i\prime} u^{k\prime}\right) dt$$

Partielle Integration liefert

$$L'(0) = \frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial u^j} u^{i\prime} u^{k\prime} - 2\frac{d(g_{ij} u^{i\prime})}{dt}\right) v^j dt$$

Da die Funktionen v^j beliebig gewählt werden können, folgt:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial g_{ik}}{\partial u^j} u^{i\prime} u^{k\prime} - \frac{d(g_{ij} u^{i\prime})}{dt} = 0$$

oder

$$\frac{1}{2}\frac{\partial g_{ik}}{\partial u^j} u^{i\prime} u^{k\prime} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} u^{k\prime} u^i - g_{rj} u^{r\prime\prime} = 0\,.$$

Durch Symmetrisierung des zweiten Terms folgt

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} - \frac{\partial g_{kj}}{\partial u^i}\right) u^{i\prime} u^{k\prime} - g_{rj} u^{r\prime\prime} = 0$$

und somit

$$g_{rj} u^{r\prime\prime} + \Gamma_{ik|j} u^{i\prime} u^{k\prime} = 0$$

oder

$$u^{l\prime\prime} + \Gamma^l_{ik} u^{i\prime} u^{k\prime} = 0$$

2.10 Geodätische Linien auf Rotationsflächen

Wir betrachten eine Rotationsfäche

$$\mathbf{X}(z,\phi) = \begin{pmatrix} f(z)\cos\phi \\ f(z)\sin\phi \\ z \end{pmatrix}$$

Um die Christoffelsymbole zu berechnen, bilden wir die Tangentialvektoren

$$\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} f'(z)\cos\phi \\ f'(z)\sin\phi \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} -f(z)\sin\phi \\ f(z)\cos\phi \\ 0 \end{pmatrix}$$

und bekommen für die Koeffizienten der metrischen Fundamentalform

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1+f'(z)^2 & 0 \\ 0 & f(z)^2 \end{pmatrix}.$$

Zur Berechnung der Christoffelsymbole bilden wir

$$\mathbf{X}_{11}(z,\phi) = \begin{pmatrix} f''(z)\cos\phi \\ f''(z)\sin\phi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}_{12}(z,\phi) = \begin{pmatrix} -f'(z)\sin\phi \\ f'(z)\cos\phi \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{X}_{22}(z,\phi) = \begin{pmatrix} -f(z)\cos\phi \\ -f(z)\sin\phi \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Da die Tangentialvektoren zueinander orthogonal sind, erhalten wir für die zum zweiten Vektor gehörenden Christoffelsymbole

$$\begin{aligned}
\Gamma^2_{11} &= \frac{\langle \mathbf{X}_{11}, \mathbf{X}_2\rangle}{\langle \mathbf{X}_1, \mathbf{X}_1\rangle} = 0, \\
\Gamma^2_{12} &= \frac{\langle \mathbf{X}_{12}, \mathbf{X}_2\rangle}{\langle \mathbf{X}_1, \mathbf{X}_1\rangle} = f'(z)f(z), \\
\Gamma^2_{11} &= \frac{\langle \mathbf{X}_{22}, \mathbf{X}_2\rangle}{\langle \mathbf{X}_1, \mathbf{X}_1\rangle} = 0
\end{aligned}$$

Für die Differentialgleichung der geodätischen Linie folgt

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} + 2\frac{f'(z)}{f(z)}\frac{d\phi}{dt}\frac{dz}{dt} = 0$$

Multiplikation mit $f(z)^2$ liefert

$$\frac{d}{dt}\left(f(z)^2\frac{d\phi}{dt}\right) = \frac{d^2\phi}{dt^2} + 2f'(z)f(z)\frac{d\phi}{dt}\frac{dz}{dt} = 0$$

Es folgt, dass

$$f(z)^2\frac{d\phi}{dt} = \text{const.}$$

Satz 1:(Clairaut) *Der Kosinus des Winkels einer geodätischen Linie auf einer Rotationsfläche mit einem Breitenkreis ist umgekehrt propotional zum Abstand $r = f(z)$ des Punktes zur Rotationsachse.*

BEWEIS: Für den Winkel zwischen geodätischer Linie mit der Richtung

$$\begin{pmatrix} z' \\ \phi' \end{pmatrix}$$

folgt

$$\cos\gamma = \sqrt{g_{22}}\frac{d\phi}{dt} = f(z)\frac{d\phi}{dt}.$$

□

2.11 Ableitungsgleichungen von Weingarten, Theorema egregium von Gauß

Ähnlich wie wir bei den Ableitungsgleichungen von Gauß die zweiten Ableitungen der Flächenvektoren in einen tangentialen und normalen Anteil zerlegt haben, zerlegen wir nun die Ableitungen des Normalenvektors $\mathbf{N}_i$

Satz 1: *(Ableitungsgleichung von* WEINGARTEN*) Es gilt*

$$\mathbf{N}_i = -L_i{}^k\mathbf{X}_k,$$

wobei

$$L_i{}^k = L_{ij}g^{jk}$$

gesetzt wird.

BEWEIS:Wir machen den Ansatz

$$\mathbf{N}_i = b_i{}^k\mathbf{X}_k + c_i\mathbf{N}$$

Durch skalare Multiplikation mit $\mathbf{N}$ folgt wegen $\langle\mathbf{N},\mathbf{N}\rangle = 1$ und $\langle\mathbf{N},\mathbf{N}_i\rangle = 0$ die Gleichung $c_i = 0$. Skalare Muliplikation mit $\mathbf{X}_j$ liefert

$$\langle\mathbf{N}_i,\mathbf{X}_j\rangle = -L_{ij} = b_i{}^k g_{kj}$$

Hieraus folgt die Behauptung. □

Differentiation der Ableitungsgleichung von Gauß liefert

$$\begin{aligned}
\mathbf{X}_{ikj} &= \frac{\partial\Gamma^r_{ik}}{\partial u^j}\mathbf{X}_r + \Gamma^l_{ik}\mathbf{X}_{lj} + \frac{\partial L_{ik}}{\partial u^j}\mathbf{N} + L_{ik}\mathbf{N}_j \\
&= \frac{\partial\Gamma^r_{ik}}{\partial u^j}\mathbf{X}_r + \Gamma^l_{ik}\left(\Gamma^r_{lj}\mathbf{X}_r + L_{jl}\mathbf{N}\right) - L_{ik}L_j{}^r\mathbf{X}_r + \frac{\partial L_{ik}}{\partial u^j}\mathbf{N} \\
&= \left(\frac{\partial\Gamma^r_{ik}}{\partial u^j} + \Gamma^l_{ik}\Gamma^r_{lj} - L_{ik}L_j{}^r\right)\mathbf{X}_r + \left(\frac{\partial L_{ik}}{\partial u^j} + \Gamma^l_{ik}L_{jl}\right)\mathbf{N}
\end{aligned}$$

Vertauschung von k und j liefert wegen $\mathbf{X}_{ikj} = \mathbf{X}_{ijk}$:

$$\mathbf{X}_{ikj} = \left(\frac{\partial \Gamma^r_{ij}}{\partial u^k} + \Gamma^l_{ij}\Gamma^r_{lk} - L_{ij}L_k{}^r \right) \mathbf{X}_r + \left(\frac{\partial L_{ij}}{\partial u^k} + \Gamma^l_{ij}L_{kl} \right) \mathbf{N}$$

Wegen der linearen Unabhängigkeit von $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{N}$ erhalten wir die Gleichungen von Mainardi-Codazzi

$$\frac{\partial L_{ik}}{\partial u^j} - \frac{\partial L_{ij}}{\partial u^k} + \Gamma^l_{ik}L_{jl} - \Gamma^l_{ij}L_{kl} = 0$$

und die Gleichungen von Gauss

$$R^r_{ikj} - (L_{ik}L_j{}^r - L_{ij}L_k{}^r) = 0,$$

wenn wir die nachfolgende Definition beachten.

Definition: Die Größen

$$R^r_{ikj} = \frac{\partial \Gamma^r_{ik}}{\partial u^l} + \Gamma^l_{ik}\Gamma^r_{lj} - \frac{\partial \Gamma^r_{ij}}{\partial u^k} - \Gamma^l_{ij}\Gamma^r_{lk}$$

werden *Riemanscher Krümmungstensor* genannt.

Da auf der rechten Seite nur Größen vorkommen, die von der ersten Fundamentalform abhängen folgt, dass R^r_{ikj} eine Größe der inneren Geometrie ist.

Mit

$$\begin{aligned} L_j{}^r &= L_{jl}g^{rl} \\ L_k{}^r &= L_{kl}g^{rl} \end{aligned}$$

und den Gleichungen von Gauß folgt:

$$R^r_{ikj} = (L_{ik}L_{jl} - L_{ij}L_{kl})g^{rl}$$

oder

$$g_{mr}R^r_{ikj} = L_{ik}L_{jm} - L_{ij}L_{km}$$

Für $i = k = 1,\ j = m = 2$ folgt:

$$g_{2r}R^r_{112} = L_{11}L_{22} - L^2_{12} = L$$

und

$$K = \frac{L}{g} = \frac{g_{2r}}{g}R^r_{112}$$

Satz 2: *Die Gaußsche Krümmung ist eine Größe der inneren Geometrie.*

2.12 Abbildungen von Flächen

Seien $F = \mathbf{X^0}(u^1, u^2)$ und $F^* = \mathbf{X^1}(u^1_*, u^2_*)$ zwei Flächenstücke. Sei

$$\begin{array}{rcl} \phi : F & \to & F^* \\ \mathbf{X^0}(u^1, u^2) & \mapsto & \mathbf{X^1}(u^1_*, u^2_*) \end{array}$$

eine bijektive Abilldung (Bijektiv bedeutet, zu jedem Punkt $\mathbf{X^0}(u^1, u^2) \in F$ gibt es genau einen Bildpunkt $\mathbf{X^1}(u^1_*, u^2_*) \in F^*$).

Weil u^1_* und u^2_* Funktionen von u^1 und u^2 sind, gibt es eine Parametrisierung $\mathbf{X^2}(u^1, u^2)$ von F^* mit

$$\mathbf{X^2}(u^1, u^2) = \mathbf{X^1}(u^1_*(u^1, u^2), u^2_*(u^1, u^2)).$$

Also lassen sich die Fläche $F = \mathbf{X^0}(u^1, u^2)$ und die Bildfläche $F^* = \phi(\mathbf{X^0}(u^1, u^2)) = \mathbf{X^2}(u^1, u^2)$ auf die gleichen Parameter beziehen.

Beispiel 17: Seien $0 < u^1 < \pi,\ 0 < u^2 < 1$,

$$F = \mathbf{X}(u^1, u^2) = \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad F^* = \mathbf{X}^*(u^1, u^2) = \begin{pmatrix} \cos u^1 \\ \sin u^1 \\ u^2 \end{pmatrix}$$

und $\phi(\mathbf{X}(u^1, u^2)) = \mathbf{X}^*(u^1, u^2)$.

F ist ein Ebenenstück, F^* ein Stück auf einem Kreiszylinder. Die u^1-Linien von F werden auf die Breitenkreise abgebildet, die u^2-Linien auf die Meridiane. Insbesondere werden Gerden in F auf Schraubenlinien abgebildet, also geodätische Linien auf geodätische Linien!

Ferner gilt für die Metrikkoeffizienten g_{ij} von F und g^*_{ij} von F^* in allen Punkten

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (g^*_{ij}).$$

2.12.1 Isometrische Abbildungen

Definition: Eine bijektive Abbildung $\phi : F \to F^*$ heißt *isometrisch* oder *längentreu*, wenn für jede Kurve $\mathbf{x}$ auf F das zughörige Bild $\mathbf{x}^*$ auf F^* dieselbe Länge wie $\mathbf{x}$ hat.

Satz 3: *Sei F ein Flächenstück mit Metrikkoeffizienten g_{ij} und erster Fundamentalform I. Ferner sei F^* ein Flächenstück mit Metrikkoeffizienten g^*_{ij} und erster Fundamentalform I^*. Eine bijektive Abbildung $\phi : F \to F^*$ ist genau dann isometrisch, wenn in allen Punkten*

$$I = I^* \quad \textit{bzw.} \quad g_{ij} = g^*_{ij}$$

für $1 \leq i, j \leq 2$ gilt.

Beweis: Seien F und F^* durch gleiche Parameter aufeinander bezogen. Sei $\mathbf{x}(t) = \mathbf{X}(u^1(t), u^2(t))$, $t_0 \leq t \leq t_1$, eine Flächenkurve auf F und $\mathbf{x}^*(t) = \mathbf{X}^*(u^1(t), u^2(t))$ die Bildkurve auf F^*. Für die Bogenlängen

$$s = s(\mathbf{x}) = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{I} dt \quad \text{und} \quad s^* = s^*(\mathbf{x}^*) = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{I^*} dt$$

folgt

$$s = s^* \quad \Leftrightarrow \quad I = I^*.$$

□

Bemerkung: Biegungsinvariante bleiben bei isometrischen Abbildungen erhalten (weil $g_{ij} = g^*_{ij}$ gilt). Somit werden geodätische Linien auf geodätische Linien abgebildet, denn κ_g ist biegungsinvariant. Aber Krümmungslinien werden nicht auf Krümmungslinien abgebildet, denn κ_n ist nicht biegungsinvariant.

Satz 4: *Eine Fläche, die sich isometrisch in die Ebene abbilden lässt, ist eine Torse.*

Beweis: Die Flächenstücke F und F^* seien isometrisch und auf die gleichen Parameter bezogen. Ferner sei $F = \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ 0 \end{pmatrix}$ ein Ebenenstück. Dann gilt $(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (g^*_{ij})$. Also sind alle Christoffelsymbole null, also $R_{1221} = 0$. Für die Gaußsche Krümmung folgt:

$$K = \frac{R_{1221}}{g} = 0.$$

Da K eine Biegungsinvariante ist, gilt $K^* = K = 0$ auf F^*. Somit ist F^* eine Torse. □

Bemerkung: Es gilt auch die Umkehrung des Satzes: Jede Torse lässt sich isometrisch in die Ebene abbilden.

Satz 5: *Die Kugelfläche lässt sich nicht isometrisch in die Ebene abbilden.*

Beweis: Für die Ebene gilt $K = 0$, für die Kugelfläche $K = \frac{1}{R^2} > 0$. Unter einer isometrischen Abbildung muss K aber invariant bleiben. □

2.12.2 Konforme Abbildungen

Definition: Eine bijektive Abbildung $\phi : F \longrightarrow F^*$ heißt *konform* oder *winkeltreu*, wenn der Schnittwinkel zweier beliebiger Kurven auf F, die sich in einem Punkt P_0 schneiden, gleich dem Schnittwinkel der Bildkurven auf F^* im Punkt P_0^* ist.

Beispiel 18: Sei $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ 0 \end{pmatrix}$ Darstellung der Ebene. Die Abbildung $\phi : \mathbf{X}(u^1, u^2) \mapsto \mathbf{X}(5u^1, 5u^2)$ ist konform.

Bemerkung: Isometrische Abbildungen sind konform. (Dies folgt z.B. aus dem nachfolgenden Satz)

Satz 6: *Eine Abbildung $\phi : F \to F^*$ ist genau dann konform, wenn eine Funktion $\lambda(u^1, u^2) > 0$ existiert, so dass in allen Punkten*

$$I^* = \lambda I \quad \textit{bzw.} \quad g^*_{ij} = \lambda g_{ij}, \qquad 1 \leq i, j \leq 2,$$

gilt.

Beweis: Seien $\mathbf{x}_1(t) = \mathbf{X}(u^1(t), u^2(t))$ und $\mathbf{x}_2(t) = \mathbf{X}(v^1(t), v^2(t))$ zwei Flächenkurven. Die Tangentenvektoren im Schnittpunkt seien

$$T_1 = \mathbf{X_i}\frac{du^i}{dt} \quad \text{und} \quad T_2 = \mathbf{X_k}\frac{dv^k}{dt},$$

die im Bildpunkt seien

$$T_1^* = \mathbf{X_i^*}\frac{du^i}{dt} \quad \text{und} \quad T_2^* = \mathbf{X_k^*}\frac{dv^k}{dt}.$$

a) Sei $g^*_{ik} = \lambda g_{ik}$. Dann folgt

$$\begin{aligned}
\cos\gamma &= \frac{T_1 T_2}{|T_1||T_2|} = \frac{g_{ik} du^i dv^k}{\sqrt{g_{ij} du^i du^j}\sqrt{g_{kl} dv^k dv^l}} \\
&= \frac{\lambda g_{ik} du^i dv^k}{\sqrt{\lambda g_{ij} du^i du^j}\sqrt{\lambda g_{kl} dv^k dv^l}} = \frac{g^*_{ik} du^i dv^k}{\sqrt{g^*_{ij} du^i du^j}\sqrt{g^*_{kl} dv^k dv^l}} \\
&= \frac{T_1^* T_2^*}{|T_1^*||T_2^*|} = \cos\gamma^* \\
\Rightarrow \gamma &= \gamma^*.
\end{aligned}$$

b) Sei ϕ konform und $0 \leq \gamma \leq \pi$. Es gilt

$$\frac{|T_1 \times T_2|}{|T_1||T_2|} = \sqrt{\frac{|T_1|^2|T_2|^2 - (T_1 T_2)^2}{|T_1|^2|T_2|^2}} = \sqrt{1 - \cos^2\gamma} = \sin\gamma.$$

Ferner gilt

$$\begin{aligned}
|T_1 \times T_2| &= \left|\mathbf{X_i}\frac{du^i}{dt} \times \mathbf{X_k}\frac{dv^k}{dt}\right| = |\mathbf{X_1} \times \mathbf{X_2}| \left|\frac{du^1 dv^2 - du^2 dv^1}{dt\,dt}\right| \\
&= \sqrt{g}\left|\frac{du^1 dv^2 - du^2 dv^1}{dt\,dt}\right|.
\end{aligned}$$

Es folgt

$$\begin{aligned}
\sin\gamma &= \frac{\sqrt{g}}{|T_1||T_2|}|du^1 dv^2 - du^2 dv^1| \\
&= \sin\gamma^* = \frac{\sqrt{g^*}}{|T_1^*||T_2^*|}|du^1 dv^2 - du^2 dv^1|,
\end{aligned}$$

also

$$|T_1||T_2| = \sqrt{\frac{g}{g^*}}|T_1^*||T_2^*|.$$

Für $T_1 = T_2$ folgt $I = \sqrt{\frac{g}{g^*}} I^*$. $\square$

Lemma 2: Sei $\phi : F \to F^*$ konform und es gelte $I^* = \lambda I$ für konstantes λ. Dann bildet ϕ Geodäten auf Geodäten ab.

Beweis: Für eine geodätische Linie auf F gilt

$$\Gamma^k_{ij}\dot{u}^i\dot{u}^j + \ddot{u}^k = 0, \qquad k = 1, 2.$$

Sind beide Flächen auf gleiche Parameter bezogen, so gilt auf F^*

$$(\Gamma^k_{ij})^*\dot{u}^i\dot{u}^j + \ddot{u}^k = 0, \qquad k = 1, 2.$$

Die Behauptung folgt, falls $\Gamma^k_{ij} = (\Gamma^k_{ij})^*$ ist. Es gilt

$$g^*_{ij} = \lambda g_{ij}, \qquad (g^{ij})^* = \frac{1}{\lambda}g^{ij},$$

also

$$\begin{aligned}(\Gamma^k_{ij})^* &= \frac{1}{2}(g^{km})^*(g^*_{jm,i} + g^*_{mi,j} - g^*_{ij,m}) \\ &= \frac{1}{2}\frac{g^{km}}{\lambda}\lambda(g_{jm,i} + g_{mi,j} - g_{ij,m}) = \Gamma^k_{ij}.\end{aligned}$$

□

Bemerkung: Sei

$$F^* = \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

die Ebene und $\phi : F \to F^*$ eine konforme Abbildung. Dann gilt $I^* = (du^1)^2 + (du^2)^2$, also

$$I = \lambda(u^1, u^2)[(du^1)^2 + (du^2)^2] \tag{11}$$

Es ist immer möglich, eine kleine Umgebung eines Punktes einer beliebigen Fläche so zu parametrisieren, dass (11) erfüllt ist. Deshalb gilt:

Jedes hinreichend kleine Stück einer beliebigen Fläche ist konform auf ein Ebenenstück abbildbar.

Insbesondere gibt es vielfältige konforme Abbildungen der Kugelfläche in die Ebene, zum Beispiel die stereographische Projektion.

Literatur

[1] B. Klotzek. *Einführung in die Differentialgeometrie, Band I und II in einem Band.* Harri Deutsch Verlag, Frankfurt/Main, 3. Auflage, 1997.

[2] W. Schöne. *Differentialgeometrie.* Teubner Verlag, Leipzig, 5. Auflage, 1990.

[3] V. Wünsch. *Differentialgeometrie.* Teubner Verlag, Leipzig, 1997.