

# Differentialgeometrie

Vorlesung von Prof. Dr. C. Bär  
Universität Potsdam  
Wintersemester 2003/2004

Stand vom 30. Januar 2004



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Mannigfaltigkeiten</b>	<b>1</b>
1.1	Topologische Mannigfaltigkeiten . . . . .	1
1.2	Differenzierbare Mannigfaltigkeiten . . . . .	8
1.3	Tangentialvektoren . . . . .	12
1.4	Richtungsableitungen und Derivationen . . . . .	16
1.5	Vektorfelder . . . . .	21
<b>2</b>	<b>Semi-riemannsche Geometrie</b>	<b>25</b>
2.1	Bilinearformen . . . . .	25
2.2	Semi-riemannsche Metriken . . . . .	27
2.3	Differentiation von Vektorfeldern . . . . .	32
2.4	Vektorfelder längs Abbildungen . . . . .	38
2.5	Parallelverschiebung . . . . .	40
2.6	Geodätische . . . . .	45
<b>3</b>	<b>Krümmung</b>	<b>55</b>
3.1	Riemannscher Krümmungstensor . . . . .	55
3.2	Schnittkrümmung . . . . .	61
3.3	Ricci- und Skalarkrümmung . . . . .	64
<b>4</b>	<b>Untermannigfaltigkeiten</b>	<b>69</b>
4.1	Untermannigfaltigkeiten differenzierbarer Mannigfaltigkeiten . . . . .	69
4.2	Semi-riemannsche Untermannigfaltigkeiten . . . . .	73
4.3	Totalgeodätische Untermannigfaltigkeiten . . . . .	77
4.4	Hyperflächen . . . . .	80
4.5	Trigonometrie in Räumen konstanter Krümmung . . . . .	85

<b>5</b>	<b>Riemannsche Geometrie</b>	<b>93</b>
5.1	Die riemannsche Abstandsfunktion . . . . .	93
5.2	Vollständigkeit . . . . .	98
5.3	Die zweite Variation der Energie . . . . .	102
5.4	Verallgemeinerte Abstandsfunktionen . . . . .	106
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>109</b>

# Kapitel 1

## Mannigfaltigkeiten

### 1.1 Topologische Mannigfaltigkeiten

**Erinnerung.** Sei  $M$  eine Menge. Ein Mengensystem  $\mathcal{O} \subset \mathcal{P}(M)$  heißt *Topologie auf  $M$* , falls

1.  $\emptyset, M \in \mathcal{O}$ .

2. Sind  $U_i \in \mathcal{O}$ ,  $i \in I$ , dann ist auch

$$\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{O}.$$

3. Sind  $U_1, U_2 \in \mathcal{O}$ , so ist auch  $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{O}$ .

Das Paar  $(M, \mathcal{O})$  heißt *topologischer Raum*. Meist spricht man aber etwas unpräzise vom topologischen Raum  $M$ . Eine Teilmenge  $U \subset M$  heißt *offen in  $M$* , falls  $U \in \mathcal{O}$ . Eine Teilmenge  $A \subset M$  heißt *abgeschlossen*, falls  $M - A \in \mathcal{O}$ .

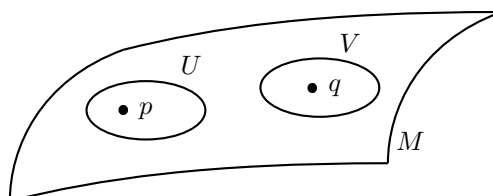
Sind  $(M, \mathcal{O}_M)$  und  $(N, \mathcal{O}_N)$  topologische Räume, so heißt eine Abbildung  $f : M \rightarrow N$  *stetig*, falls

$$f^{-1}(V) \in \mathcal{O}_M \text{ für alle } V \in \mathcal{O}_N.$$

Eine bijektive stetige Abbildung  $f : M \rightarrow N$ , für die auch  $f^{-1}$  stetig ist, heißt *Homöomorphismus*. Zwei topologische Räume  $M$  und  $N$  heißen *homöomorph*, falls es einen Homöomorphismus zwischen ihnen gibt.

**Definition.** Sei  $M$  topologischer Raum mit der Topologie  $\mathcal{O}$ . Dann heißt  $M$   *$n$ -dimensionale topologische Mannigfaltigkeit*, wenn Folgendes gilt:

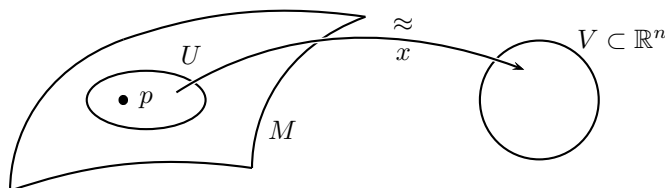
1.  $M$  ist *hausdorffsch*, das heißt, für alle  $p, q \in M$  mit  $p \neq q$  existieren offene Mengen  $U, V \subset M$  mit  $p \in U$ ,  $q \in V$  und  $U \cap V = \emptyset$ .



2. Die Topologie von  $M$  besitzt eine abzählbare Basis, das heißt, es existiert eine abzählbare Teilmenge  $\mathcal{B} \subset \mathcal{O}$ , so dass für jedes  $U \in \mathcal{O}$  es  $B_i \in \mathcal{B}, i \in I$ , gibt mit

$$U = \bigcup_{i \in I} B_i.$$

3.  $M$  ist lokal homöomorph zu  $\mathbb{R}^n$ , das heißt, für alle  $p \in M$  existieren eine offene Teilmenge  $U \subset M$  mit  $p \in U$ , eine offene Teilmenge  $V \subset \mathbb{R}^n$  und ein Homöomorphismus  $x : U \rightarrow V$ .



**Bemerkung.** Die ersten beiden Bedingungen in der Definition sind eher technischer Natur und werden manchmal auch weggelassen. Entscheidend ist die Tatsache, dass eine topologische Mannigfaltigkeit lokal homöomorph zu  $\mathbb{R}^n$  ist, d. h. Mannigfaltigkeiten sehen im Kleinen so aus wie der euklidische Raum. Wird die Topologie von  $M$  durch eine Metrik induziert, so ist Bedingung 1 automatisch erfüllt. Ist  $M$  sogar gegeben als eine Teilmenge von  $\mathbb{R}^N$  mit der Teilraumtopologie, so sind Bedingungen 1 und 2 automatisch erfüllt.

**Beispiel.**

- (1)  $M = \mathbb{R}^n$  ist eine  $n$ -dimensionale topologische Mannigfaltigkeit, denn

(i), (ii) Sind klar.

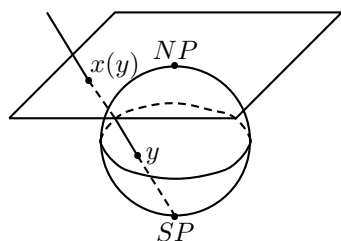
(iii) Gilt mit  $U = M, V = \mathbb{R}^n$  und  $x = \text{id}$ .

- (2) Sei  $M \subset \mathbb{R}^n$  offene Teilmenge.  $M$  ist  $n$ -dimensionale topologische Mannigfaltigkeit.

(i), (ii) Sind klar.

(iii) Gilt mit  $U = M, V = M$  und  $x = \text{id}$ .

- (3)  $M = S^n = \{y \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|y\| = 1\}$  ist  $n$ -dimensionale topologische Mannigfaltigkeit.



(i), (ii) Sind klar, da  $S^n$  Teilmenge eines  $\mathbb{R}^N$ .

(iii) Es werden zwei Homöomorphismen benötigt, die mit Hilfe der *stereografischen Projektion* konstruiert werden. Definiere dazu  $U_1 := S^n - \{SP\}$  mit  $SP := (-1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{n+1}$ . Setze  $V_1 := \mathbb{R}^n$ . Definiere ferner

$$x : U_1 \rightarrow V_1, \quad x(y) = x(y^0, \underbrace{y^1, \dots, y^n}_{=: \hat{y}}) = x(y^0, \hat{y}) = \frac{2}{1 + y^0} \cdot \hat{y}.$$

$x$  ist stetig und bijektiv. Die Umkehrabbildung  $y$  lautet

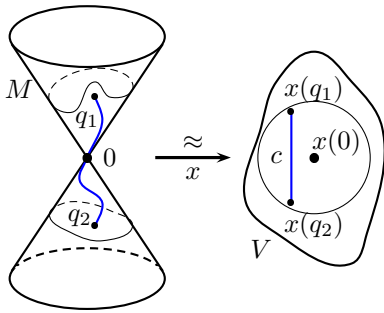
$$y : V_1 \rightarrow U_1, \quad y(x) = \frac{1}{4 + \|x\|^2} (4 - \|x\|^2, 2x),$$

und ist ebenfalls stetig. Also ist  $x$  ein Homöomorphismus. Ganz analog dazu wird der Homöomorphismus definiert, der den Nordpol auslässt. Sei nun  $U_2 := S^n - \{NP\}$  mit  $NP := (1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{n+1}$  und  $V_2 := \mathbb{R}^n$ . Dann ist

$$\tilde{x} : U_2 \rightarrow V_2, \tilde{x}(y) = \tilde{x}(y^0, \underbrace{y^1, \dots, y^n}_{=: \hat{y}}) = \tilde{x}(y^0, \hat{y}) = \frac{2}{1 - y^0} \cdot \hat{y}.$$

Also ist die Sphäre  $S^n$  eine  $n$ -dimensionale topologische Mannigfaltigkeit.

- (4) Alle  $n$ -dimensionalen Untermannigfaltigkeiten des  $\mathbb{R}^N$  im Sinne der Analysis 3 sind  $n$ -dimensionale topologische Mannigfaltigkeiten.
- (5) **Nichtbeispiel.** Wir betrachten  $M := \{ (y^1, y^2, y^3) \in \mathbb{R}^3 \mid (y^1)^2 = (y^2)^2 + (y^3)^2 \}$ , den Doppelkegel.



Da  $M \subset \mathbb{R}^3$ , sind (i) und (ii) erfüllt. Aber  $M$  ist *keine* 2-dimensionale Mannigfaltigkeit. Denn falls doch, dann würden eine offene Teilmenge  $U \subset M$  mit  $0 \in U$ , eine offene Teilmenge  $V \subset \mathbb{R}^2$  und ein Homöomorphismus  $x : U \rightarrow V$  existieren mit  $x(0) = 0$ .

O. B. d. A. sei  $V = B_r(x(0))$  mit einem  $r > 0$ . Wähle  $q_1, q_2 \in U$  mit  $q_1^1 > 0$  und  $q_2^1 < 0$ .

Wähle weiterhin einen stetigen Weg  $c : [0, 1] \rightarrow V$  mit

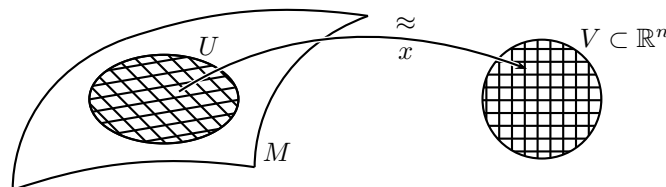
$$c(0) = x(q_1), c(1) = x(q_2) \text{ und } c(t) \neq x(0) \text{ für alle } t \in [0, 1].$$

Definiere den stetigen Weg  $\tilde{c} := x^{-1} \circ c : [0, 1] \rightarrow U$ . Dann gilt

$$\tilde{c}(0) = q_1, \tilde{c}(1) = q_2, \text{ das heißt } \tilde{c}^1(0) > 0, \tilde{c}^1(1) < 0.$$

Daraus folgt mit dem Zwischenwertsatz, dass ein  $t \in (0, 1)$  existiert mit  $\tilde{c}^1(t) = 0$ . Dann ist  $\tilde{c}(t) = (0, 0, 0)$  und folglich  $c(t) = x(\tilde{c}(t)) = x(0)$ , was der Wahl von  $c$  widerspricht. Also ist  $M$  keine 2-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit.

**Definition.** Ist  $M$  eine  $n$ -dimensionale topologische Mannigfaltigkeit, so heißen die Homöomorphismen  $x : U \rightarrow V$  Karten (oder lokale Koordinatensysteme) von  $M$ .



Nach der Wahl eines lokalen Koordinatensystems  $x : U \rightarrow V$  wird jeder Punkt  $p \in U$  eindeutig durch die Koordinaten  $(x^1(p), \dots, x^n(p))$  festgelegt.

In einer 0-dimensionalen Mannigfaltigkeit  $M$  besitzt jeder Punkt  $p \in M$  eine offene Umgebung  $U$ , die homöomorph zu  $\mathbb{R}^0 = \{0\}$  ist. Folglich ist  $\{p\} = U$  eine offene Teilmenge von  $M$  für alle  $p \in M$ , das heißt  $M$  trägt die diskrete Topologie. Und da für die Topologie von  $M$  eine abzählbare Basis existiert und die Topologie gleichzeitig diskret ist, muss  $M$  selbst abzählbar sein.

Wir erhalten also:

**PROPOSITION 1.1.1.** *Ein topologischer Raum  $M$  ist genau dann eine 0-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit, wenn  $M$  abzählbar ist und die diskrete Topologie trägt.*

**Definition.** Wir nennen eine topologische Mannigfaltigkeit  $M$  *zusammenhängend*, falls für je zwei Punkte  $p, q \in M$  es eine stetige Abbildung  $c : [0, 1] \rightarrow M$  gibt mit  $c(0) = p$  und  $c(1) = q$ .

Es müssen also je zwei Punkte sich durch eine stetige Kurve in  $M$  verbinden lassen. In der Topologie nennt man dies normalerweise „wegzusammenhängend“, was im Fall von Mannigfaltigkeit allerdings äquivalent zum Konzept von „zusammenhängend“ ist, worauf wir an dieser Stelle allerdings nicht weiter eingehen wollen.

**Bemerkung.** Nach Proposition 1.1.1 besteht jede zusammenhängende 0-dimensionale Mannigfaltigkeit  $M$  aus nur einem Punkt:  $M = \{\text{Punkt}\}$ .

Auch in Dimension 1 gibt es nicht viele verschiedene zusammenhängende Mannigfaltigkeiten:

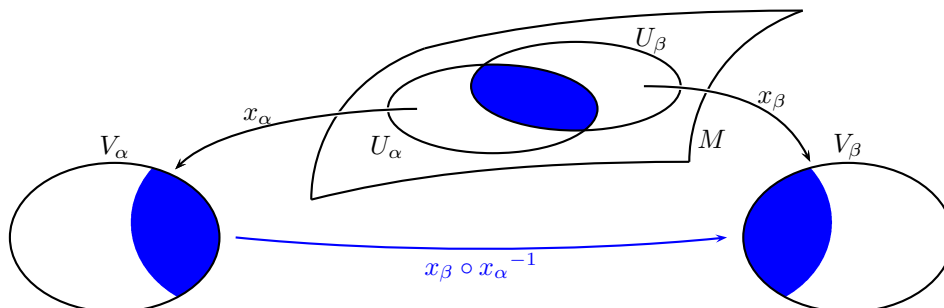
**PROPOSITION 1.1.2.** *Jede zusammenhängende 1-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit ist entweder zu  $\mathbb{R}$  oder zu  $S^1$  homöomorph.*

Einen Beweis dafür findet man zum Beispiel im Anhang von [Milnor]. Einzige kompakte zusammenhängende topologische Mannigfaltigkeit der Dimension 1 ist also  $S^1$ .

**SATZ 1.1.3.** *Seien  $M$  und  $A$  Mengen. Für alle  $\alpha \in A$  seien  $U_\alpha \subset M$  und  $V_\alpha \subset \mathbb{R}^n$  Teilmengen und  $x_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha$  bijektive Abbildungen. Für alle  $\alpha, \beta \in A$  gelte:*

- (i)  $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = M$ ,
- (ii)  $x_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \subset \mathbb{R}^n$  ist offen und
- (iii)  $x_\beta \circ x_\alpha^{-1} : x_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow x_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$  ist stetig.

Dann trägt  $M$  genau eine Topologie, bezüglich der alle  $U_\alpha$  offene Mengen und alle  $x_\alpha$  Homöomorphismen sind.





**Beweis. Eindeutigkeit:** Sei  $\mathcal{O}$  eine solche Topologie auf  $M$ . Ist  $W \in \mathcal{O}$ , so ist auch  $W \cap U_\alpha$  und damit auch  $x_\alpha(W \cap U_\alpha)$  offen für alle  $\alpha \in A$ .

Ist umgekehrt  $W \subset M$  eine Teilmenge, für die  $x_\alpha(W \cap U_\alpha) \subset \mathbb{R}^n$  offen ist für alle  $\alpha \in A$ , so ist auch  $W \cap U_\alpha$  offen in  $U_\alpha$ . Da auch  $U_\alpha \subset M$  offen ist, ist auch  $W \cap U_\alpha$  offen in  $M$ . Wegen (i) ist dann auch  $W = \bigcup_{\alpha \in A} (W \cap U_\alpha)$  offen in  $M$ , und somit ist

$$\mathcal{O} = \{W \subset M \mid x_\alpha(W \cap U_\alpha) \subset \mathbb{R}^n \text{ offen für alle } \alpha \in A\}.$$

**Existenz:** Wir nehmen die Darstellung aus dem Eindeigkeitsteil und setzen:

$$\mathcal{O} := \{W \subset M \mid x_\alpha(W \cap U_\alpha) \subset \mathbb{R}^n \text{ offen für alle } \alpha \in A\}.$$

und weisen nun nach, dass dieses  $\mathcal{O}$  die gewünschten Eigenschaften hat:

(a)  $\mathcal{O}$  ist eine Topologie, denn

(i)  $\emptyset, M \in \mathcal{O}$ .

(ii) Seien  $W_i \in \mathcal{O}, i \in I$ .

$$\begin{aligned} x_\alpha \left( \left( \bigcup_{i \in I} W_i \right) \cap U_\alpha \right) &= x_\alpha \left( \bigcup_{i \in I} (W_i \cap U_\alpha) \right) \\ &= \bigcup_{i \in I} \underbrace{x_\alpha(W_i \cap U_\alpha)}_{\text{offen in } \mathbb{R}^n} \text{ offen in } \mathbb{R}^n \text{ für alle } \alpha \in A. \end{aligned}$$

(iii)  $W_1, W_2 \in \mathcal{O} \Rightarrow W_1 \cap W_2 \in \mathcal{O}$  folgt ganz ähnlich wie in (ii).

(b) Zu zeigen ist:  $U_\beta \in \mathcal{O}$  für alle  $\beta \in A$ .

$x_\alpha(U_\beta \cap U_\alpha) \subset \mathbb{R}^n$  ist offen für alle  $\alpha \in A$  nach Voraussetzung.

(c)  $x_\beta$  ist stetig für alle  $\beta \in A$ , denn:

Sei  $Y \subset V_\beta$  offen. Dann gilt für alle  $\alpha \in A$ :

$$\begin{aligned} x_\alpha(x_\beta^{-1}(Y) \cap U_\alpha) &= x_\alpha(x_\beta^{-1}(Y \cap x_\beta(U_\alpha \cap U_\beta))) \\ &= \underbrace{(x_\alpha \circ x_\beta^{-1})}_{=(x_\beta \circ x_\alpha^{-1})^{-1} \text{ stetig}} \underbrace{(Y \cap x_\beta(U_\alpha \cap U_\beta))}_{\text{offen}} \text{ ist offen in } \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Daher ist  $x_\beta^{-1}(Y) \in \mathcal{O}$ .

(d)  $x_\beta^{-1}$  ist stetig, denn:

Sei  $W \subset U_\beta$  offen. Dann ist  $W \in \mathcal{O}$ . Dann gilt für alle  $\alpha \in A$ :

$$(x_\beta^{-1})^{-1}(W) = x_\beta(W) = x_\beta(W \cap U_\beta) \text{ ist offen.}$$

□

**Beispiel (Der reell-projektive Raum).**

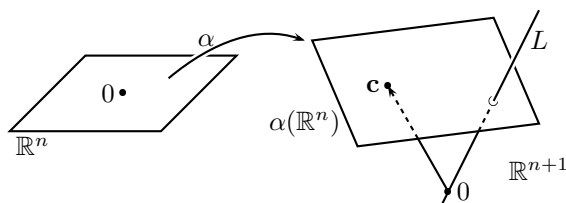
$$M = \mathbb{RP}^n := P(\mathbb{R}^{n+1}) := \{L \subset \mathbb{R}^{n+1} \mid L \text{ ist eindimensionaler Untervektorraum}\}$$

$$A := \{\text{affin-lineare Einbettungen } \alpha : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \text{ mit } 0 \notin \alpha(\mathbb{R}^n)\}$$

Dass  $\alpha$  affin-linear ist, bedeutet, dass es ein  $B \in \text{Mat}(n \times (n+1), \mathbb{R})$  und ein  $c \in \mathbb{R}^{n+1}$  gibt, so dass für alle  $x \in \mathbb{R}^n$  gilt:

$$\alpha(x) = Bx + c.$$

Da  $\alpha$  eine Einbettung ist, gilt  $\text{Rang}(B) = n$ .



Es ist also  $\alpha(\mathbb{R}^n)$  eine affin-lineare Hyperebene. Setze

$$U_\alpha := \{L \in \mathbb{RP}^n \mid L \cap \alpha(\mathbb{R}^n) \neq \emptyset\}.$$

Für  $L \in U_\alpha$  besteht  $L \cap \alpha(\mathbb{R}^n)$  aus genau einem Punkt, denn sonst würde  $0 \in L \subset \alpha(\mathbb{R}^n)$  sein, aber das ist ein Widerspruch. Es gilt also

$$\mathbb{RP}^n - U_\alpha = \{L \mid L \subset \mathbf{B}(\mathbb{R}^n) \text{ eindimensionaler Untervektorraum}\} \quad (\approx \mathbb{RP}^{n-1}),$$

wenn  $\alpha(x) = Bx + c$  mit  $B \in \text{Mat}(n \times (n+1), \mathbb{R})$ . Setze  $V_\alpha := \mathbb{R}^n$  und

$$x_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha, x_\alpha(L) := \alpha^{-1}(L \cap \alpha(\mathbb{R}^n))$$

für  $\alpha \in A$ . Dann ist  $x_\alpha$  eine bijektive Abbildung. Es gilt

$$x_\alpha^{-1}(v) = \mathbb{R} \cdot \alpha(v) \text{ für alle } \alpha \in A.$$

Im Folgenden werden die Voraussetzung von Satz 1.4 überprüft:

(i) Zu zeigen:  $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = M$ .

Sei dazu  $e_0, \dots, e_n \in \mathbb{R}^{n+1}$  die Standardbasis. Für  $j = 1, \dots, n$  definieren wir:

$$\alpha_j(v) := v^1 e_0 + \dots + v^j e_{j-1} + e_j + v^{j+1} e_{j+1} + \dots + v^n e_n.$$

Angenommen, es existiert ein

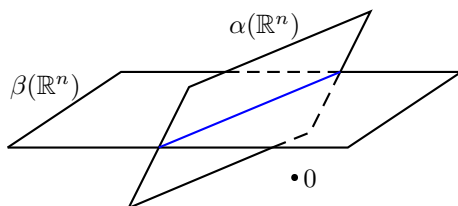
$$L \in \mathbb{RP}^n - \bigcup_{j=0}^n U_{\alpha_j} = \bigcap_{j=0}^n (\mathbb{RP}^n - U_{\alpha_j})$$

und somit

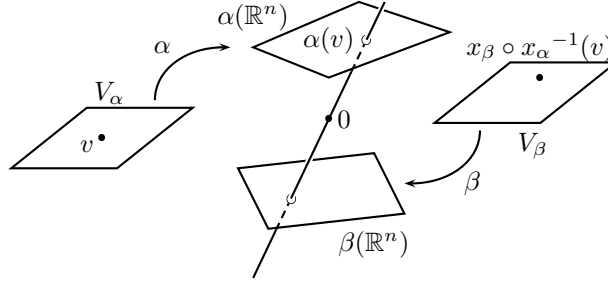
$$L \subset \bigcap_{j=0}^n e_j^\perp = \{0\}.$$

Das ist ein Widerspruch, also gilt  $\bigcup_{j=0}^n U_{\alpha_j} = \mathbb{RP}^n$ .

(ii) Es gilt:  $x_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) = \mathbb{R}^n - \underbrace{\text{affin-linearer Unterraum}}_{\text{abgeschlossen}}$  ist offen für alle  $\alpha, \beta \in A$ .



(iii) Es gilt:  $x_\beta \circ x_\alpha^{-1} : v \mapsto \beta^{-1}(\mathbb{R} \cdot \alpha(v) \cap \beta(\mathbb{R}^n))$  ist stetig für alle  $\alpha, \beta \in A$ .



Wegen Satz 1.1.3 besitzt  $\mathbb{R}P^n$  genau eine Topologie, für die die  $U_\alpha$  offen und die  $x_\alpha$  Homöomorphismen sind.

**PROPOSITION 1.1.4 (Zusatz 1 zu Satz 1.1.3).** Falls es in Satz 1.4 eine abzählbare Teilmenge  $A_1 \subset A$  gibt mit

$$\bigcup_{\alpha \in A_1} U_\alpha = M,$$

so besitzt die resultierende Topologie eine abzählbare Basis.

**Beispiel ( $\mathbb{R}P^n$ ).** Für  $\mathbb{R}P^n$  hat sogar die endliche Menge  $A_1 := \{\alpha_0, \dots, \alpha_n\}$  die in Proposition 1.1.4 verlangte Eigenschaft, die Topologie von  $\mathbb{R}P^n$  besitzt folglich eine abzählbare Basis.

*Beweis von Proposition 1.1.4.* Die aus  $A$  resultierende Topologie hat die Eigenschaften der aus  $A_1$  resultierenden Topologie. Da die Topologie eindeutig ist, müssen  $A$  und  $A_1$  also dieselbe Topologie liefern.

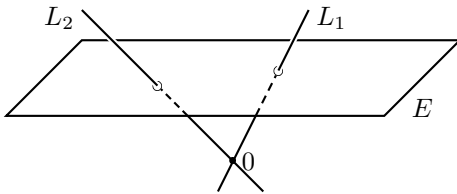
Ohne Einschränkung können wir annehmen, dass  $A_1 = A$  abzählbar ist. Dann hat  $V_\alpha \subset \mathbb{R}^n$  eine abzählbare Basis  $\mathcal{B}_\alpha$  für alle  $\alpha \in A$ .

$\Rightarrow x_\alpha^{-1}(\mathcal{B}_\alpha)$  ist eine abzählbare Basis von  $U_\alpha$ .

$\Rightarrow \bigcup_{\alpha \in A} x_\alpha^{-1}(\mathcal{B}_\alpha)$  ist abzählbare Basis von  $M$ . □

**PROPOSITION 1.1.5 (Zusatz 2 zu Satz 1.1.3).** Falls es in Satz 1.1.3 zu je zwei Punkten  $p, q \in M$  ein  $\alpha \in A$  gibt mit  $p, q \in U_\alpha$ , so ist die Topologie von  $M$  hausdorffsch.

**Beispiel ( $\mathbb{R}P^n$ ).** Zu  $L_1, L_2 \in \mathbb{R}P^n$  existiert eine affin-lineare Hyperebene  $E$  mit



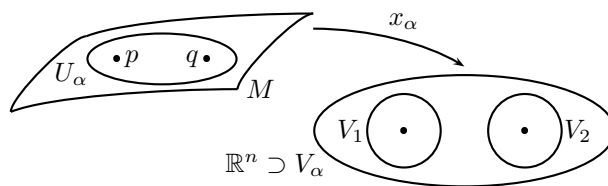
$$L_1 \cap E \neq \emptyset \neq L_2 \cap E.$$

$\Rightarrow \mathbb{R}P^n$  ist hausdorffsch.

$\Rightarrow \mathbb{R}P^n$  ist eine  $n$ -dimensionale topologische Mannigfaltigkeit.

*Beweis von Proposition 1.1.5.* Seien  $p, q \in M$  mit  $p \neq q$ . Wähle ein  $\alpha \in A$  mit  $p, q \in U_\alpha$ . Wähle weiterhin  $V_1, V_2 \subset V_\alpha$  offen mit  $p \in V_1, q \in V_2$  und  $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ .

$\Rightarrow x_\alpha^{-1}(V_1)$  und  $x_\alpha^{-1}(V_2)$  trennen  $p$  und  $q$ . □



**Bemerkung (Der komplex-projektive Raum  $\mathbb{CP}^n$ ).** Analog zum reell-projektiven Raum definieren wir

$$\mathbb{CP}^n := \{L \subset \mathbb{C}^{n+1} \mid L \text{ ist eindimensionaler komplexer Untervektorraum}\}.$$

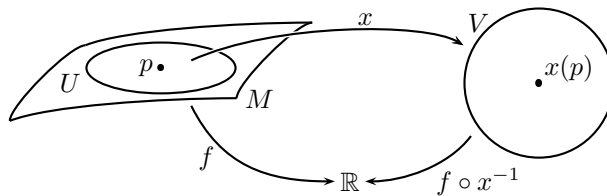
Analog zum reellen Fall ergeben sich Karten  $x_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$ . Daher ist  $\mathbb{CP}^n$   $2n$ -dimensionale topologische Mannigfaltigkeit.

## 1.2 Differenzierbare Mannigfaltigkeiten

Für eine topologische Mannigfaltigkeit  $M$  macht es Sinn von stetigen Funktionen  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  zu sprechen.

**Frage.** Was bedeutet Differenzierbarkeit von  $f$ ?

**Versuch einer Definition.** Die Funktion  $f$  soll in  $p \in M$  *differenzierbar* heißen, falls für eine Karte  $x : U \rightarrow V$  mit  $p \in U$  die Funktion  $f \circ x^{-1} : V \rightarrow \mathbb{R}$  in  $x(p)$  differenzierbar ist.



**Problem.** Ist  $y : \tilde{U} \rightarrow \tilde{V}$  eine weitere Karte mit  $p \in \tilde{U}$ , so gilt nahe  $y(p)$

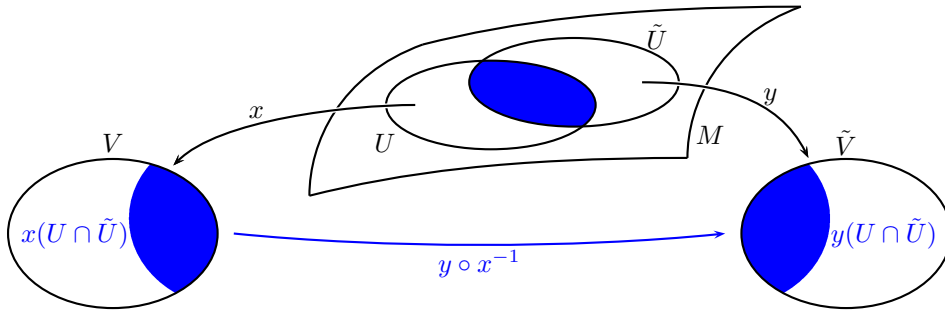
$$f \circ y^{-1} = \underbrace{(f \circ x^{-1})}_{\text{diff'bar in } x(p)} \circ \underbrace{(x \circ y^{-1})}_{\text{nur stetig}}.$$

Diese Konzept von Differenzierbarkeit hängt ab von der Wahl der Karte  $x$ . Wüssten wir, dass  $x \circ y^{-1}$  ein Diffeomorphismus ist und nicht nur ein Homöomorphismus, dann könnten wir aus der Differenzierbarkeit von  $f \circ x^{-1}$  auf die von  $f \circ y^{-1}$  schließen. Daher machen wir folgende Definition.

**Definition.** Sei  $M$   $n$ -dimensionale topologische Mannigfaltigkeit. Zwei Karten  $x : U \rightarrow V$  und  $y : \tilde{U} \rightarrow \tilde{V}$  von  $M$  heißen  *$C^\infty$ -verträglich*, falls

$$y \circ x^{-1} : x(U \cap \tilde{U}) \rightarrow y(U \cap \tilde{U})$$

ein  $C^\infty$ -Diffeomorphismus ist.



**Definition.** Eine Menge von Karten  $x_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha$ ,  $\alpha \in A$ , heißt *Atlas* von  $M$ , falls

$$\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = M.$$

Ein Atlas  $\mathcal{A}$  heißt  $C^\infty$ -Atlas, falls je zwei Karten in  $\mathcal{A}$   $C^\infty$ -verträglich sind.

**Beispiel.** (1) Sei  $M := U \subset \mathbb{R}^n$  offen. Dann ist  $\mathcal{A} := \{\text{id} : U \rightarrow U\}$  ein  $C^\infty$ -Atlas.

(2) Seien  $M := S^n$  und  $\mathcal{A} := \{(x : U_1 \rightarrow V_1), (\tilde{x} : U_2 \rightarrow V_2)\}$ , wobei  $U_1 := S^n - \{SP\}$ ,  $U_2 := S^n - \{NP\}$  und  $V_1 := V_2 := \mathbb{R}^n$ . Außerdem ist

$$\begin{aligned} x(y) &= \frac{2}{1 + y^0} \hat{y}, \text{ wobei } y = (y^0, \hat{y}) \in \mathbb{R}^{n+1}, \\ y(x) &= \frac{1}{4 + \|x\|^2} (4 - \|x\|^2, 4x) \text{ und} \\ \tilde{x}(y) &= \frac{2}{1 - y^0} \hat{y}. \end{aligned}$$

Dann gilt für  $v \in x(U_1 \cap U_2)$ :

$$\begin{aligned} \tilde{x} \circ x^{-1}(v) &= \tilde{x} \left( \frac{4 - \|v\|^2}{4 + \|v\|^2}, \frac{4v}{4 + \|v\|^2} \right) \\ &= \frac{2}{1 - \frac{4 - \|v\|^2}{4 + \|v\|^2}} \frac{4v}{4 + \|v\|^2} \\ &= \frac{8v}{4 + \|v\|^2 - 4 + \|v\|^2} = \frac{4v}{\|v\|^2} \end{aligned}$$

ist  $C^\infty$  auf  $\mathbb{R}^n - \{0\} = x(S^n - \{SP, NP\}) = x(U_1 \cap U_2)$ . Analog für  $x \circ \tilde{x}^{-1}$ .

$\Rightarrow x$  und  $\tilde{x}$  sind  $C^\infty$ -verträglich.

$\Rightarrow \mathcal{A}$  ist ein  $C^\infty$ -Atlas.

(3) Seien  $M := \mathbb{R}P^n$ ,  $\mathcal{A} := \{x_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^n \mid \alpha \text{ ist affin-lineare Einbettung } \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \text{ von maximalem Rang und } 0 \notin \alpha(\mathbb{R}^n)\}$ . Alle Kartenwechsel  $x_\beta \circ x_\alpha^{-1}$  sind  $C^\infty$  und damit ist  $\Rightarrow \mathcal{A}$  ein  $C^\infty$ -Atlas.

(4) Sei  $M := \mathbb{C}P^n$ . Der resultierende Atlas ist ebenfalls ein  $C^\infty$ -Atlas.

**Bemerkung.** Ist  $\mathcal{A}$  ein  $C^\infty$ -Atlas von  $M$ , so ist auch

$$\mathcal{A}_{\max} := \{\text{Karten } x \text{ von } M \mid x \text{ ist } C^\infty\text{-vertr\"aglich mit allen Karten in } \mathcal{A}\}$$

ein  $C^\infty$ -Atlas von  $M$ . Denn:

Sind  $x$  und  $\tilde{x}$  zwei Karten von  $M$ , die  $C^\infty$ -vertr\"aglich mit allen Karten in  $\mathcal{A}$  sind, dann sind auch  $x$  und  $\tilde{x}$  miteinander  $C^\infty$ -vertr\"aglich:

Zu  $p \in x(U \cap \tilde{U})$  existiert eine Karte  $(y : \tilde{\tilde{U}} \rightarrow \tilde{\tilde{V}}) \in \mathcal{A}$  mit  $x^{-1}(p) \in \tilde{\tilde{U}}$ . Nahe  $p$  gilt dann:

$$\tilde{x} \circ x^{-1} = \underbrace{(\tilde{x} \circ y^{-1})}_{\text{ist } C^\infty} \circ \underbrace{(y \circ x^{-1})}_{\text{ist } C^\infty} \text{ ist } C^\infty.$$

**Definition.** Ein  $C^\infty$ -Atlas  $\mathcal{A}_{\max}$  heißt *maximal* (oder auch *differenzierbare Struktur*), falls jede Karte, die mit allen Karten in  $\mathcal{A}_{\max}$   $C^\infty$ -vertr\"aglich ist, bereits in  $\mathcal{A}_{\max}$  enthalten ist.

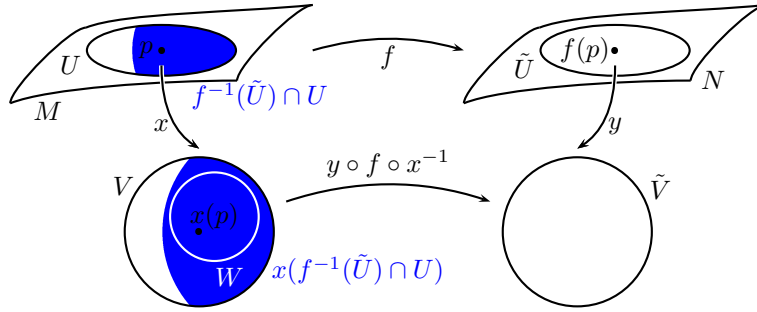
Nach der Bemerkung ist jeder  $C^\infty$ -Atlas  $\mathcal{A}$  in genau einem maximalen  $C^\infty$ -Atlas  $\mathcal{A}_{\max}$  enthalten.

**Definition.** Ein Paar  $(M, \mathcal{A}_{\max})$ , wobei  $M$  eine  $n$ -dimensionale topologische Mannigfaltigkeit und  $\mathcal{A}_{\max}$  eine differenzierbare Struktur auf  $M$  ist, heißt  *$n$ -dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit*.

**Definition.** Seien  $M$  und  $N$  differenzierbare Mannigfaltigkeiten, sei  $p \in M$ . Eine stetige Abbildung  $f : M \rightarrow N$  heißt  *$k$ -mal stetig differenzierbar* (oder  $C^k$ ) *nahe*  $p$ ,  $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ , falls es für eine (und damit jede) Karte  $(x : U \rightarrow V) \in \mathcal{A}_{\max}(M)$  mit  $p \in U$  und für eine (und damit jede) Karte  $(y : \tilde{U} \rightarrow \tilde{V}) \in \mathcal{A}_{\max}(N)$  mit  $f(p) \in \tilde{U}$  eine Umgebung  $W \subset x(f^{-1}(\tilde{U}) \cap U)$  von  $x(p)$  gibt, so dass

$$y \circ f \circ x^{-1} : x(f^{-1}(\tilde{U}) \cap U) \rightarrow \tilde{V}$$

$C^k$  ist auf  $W$ .



**Beispiel.**

- (1) Sei  $M = S^n$  mit der differenzierbaren Struktur, die von  $\mathcal{A} := \{(x : U_1 \rightarrow V_1), (\tilde{x} : U_2 \rightarrow V_2)\}$  induziert wird. Wir zeigen, dass

$$f : S^n \rightarrow S^n, f(y) := -y$$

$C^\infty$  ist nahe  $NP$ . (Tats\"achlich ist  $f$  sogar  $C^\infty$  auf ganz  $S^n$ .)

$$\begin{array}{ccc}
S^n & \xrightarrow{f} & S^n \\
\cup & & \cup \\
NP \in U_1 = S^n - \{SP\} & & S^n - \{NP\} = U_2 \\
\downarrow & \downarrow x & \downarrow \tilde{x} \\
0 \in V_1 = \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\tilde{x} \circ f \circ x^{-1}} & \mathbb{R}^n = V_2
\end{array}$$

Es gilt dann

$$\begin{aligned}
\mathbb{R}^n \ni v & \xrightarrow{x^{-1}} x^{-1}(v) = \left( \frac{4 - \|v\|^2}{4 + \|v\|^2}, \frac{4v}{4 + \|v\|^2} \right) \\
& \xrightarrow{f} \left( -\frac{4 - \|v\|^2}{4 + \|v\|^2}, \frac{-4v}{4 + \|v\|^2} \right) \\
& \xrightarrow{\tilde{x}} -\frac{2}{1 + \frac{4 - \|v\|^2}{4 + \|v\|^2}} \cdot \frac{4v}{4 + \|v\|^2} = -\frac{8v}{8} = -v
\end{aligned}$$

Daraus folgt, dass  $\tilde{x} \circ f \circ x^{-1}(v) = -v$  und somit gilt:  $\tilde{x} \circ f \circ x^{-1}$  ist  $C^\infty$  auf  $\mathbb{R}^n$ . Wir können also  $W = \mathbb{R}^n$  nehmen.

- (2) Wir betrachten auf  $M = \mathbb{R}$  die Atlanten  $\mathcal{A}_1 := \{x = \text{id} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$  mit zugehöriger differenzierbarer Struktur  $\mathcal{A}_{1,\max}$  sowie  $\mathcal{A}_2 := \{\tilde{x} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$  mit  $\tilde{x}(t) = t^3$  und zugehöriger differenzierbarer Struktur  $\mathcal{A}_{2,\max}$ .

Nun ist  $\tilde{x} \circ x^{-1}(t) = t^3$  zwar  $C^\infty$ , aber  $x \circ \tilde{x}^{-1}(t) = \sqrt[3]{t}$  ist es *nicht*.

Das heißt,  $x$  und  $\tilde{x}$  sind *nicht*  $C^\infty$ -verträglich und somit sind die differenzierbaren Strukturen verschieden:

$$\mathcal{A}_{1,\max} \neq \mathcal{A}_{2,\max}.$$

- Ist  $\text{id} : (\mathbb{R}, \mathcal{A}_{1,\max}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{A}_{2,\max})$  eine  $C^\infty$ -Abbildung?

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{R} & \xrightarrow{\text{id}} & \mathbb{R} \\
x=\text{id} \downarrow & & \downarrow \tilde{x} \\
\mathbb{R} & \xrightarrow{t \mapsto t^3} & \mathbb{R}
\end{array} \Rightarrow \tilde{x} \circ \text{id} \circ x^{-1} \text{ ist } C^\infty \text{ und damit auch id.}$$

- Ist  $\text{id} : (\mathbb{R}, \mathcal{A}_{2,\max}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{A}_{1,\max})$  eine  $C^\infty$ -Abbildung?

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{R} & \xrightarrow{\text{id}} & \mathbb{R} \\
\tilde{x} \downarrow & & \downarrow x=\text{id} \\
\mathbb{R} & \xrightarrow{t \mapsto \sqrt[3]{t}} & \mathbb{R}
\end{array} \Rightarrow x \circ \text{id} \circ \tilde{x}^{-1} \text{ ist nicht } C^\infty \text{ und damit auch id nicht.}$$

**Definition.** Seien  $M$  und  $N$  differenzierbare Mannigfaltigkeiten. Ein Homöomorphismus  $f : M \rightarrow N$  heißt  $C^k$ -Diffeomorphismus, falls  $f$  und  $f^{-1}$  beide  $C^k$  sind. Statt  $C^\infty$ -Diffeomorphismus sagen wir einfach *Diffeomorphismus*.

Falls es einen Diffeomorphismus  $f : M \rightarrow N$  gibt, so heißen  $M$  und  $N$  *diffeomorph*.

**Beispiel.** Seien  $M = (\mathbb{R}, \mathcal{A}_{1,\max})$  mit  $\mathcal{A}_{1,\max} = \{x = \text{id} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$  und  $N = (\mathbb{R}, \mathcal{A}_{2,\max})$  mit  $\mathcal{A}_{2,\max} = \{\tilde{x} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \tilde{x}(t) = t^3\}$ :

- $\text{id} : M \rightarrow N$  ist kein Diffeomorphismus (siehe vorne).

- $f : M \rightarrow N$ ,  $f(t) = \sqrt[3]{t}$  ist ein Diffeomorphismus, denn

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & N \\ x \downarrow & & \downarrow \tilde{x} \\ \mathbb{R} & \xrightarrow{\text{id}} & \mathbb{R} \end{array}$$

Somit sind  $M$  und  $N$  diffeomorph.

**Frage.** Ist jede differenzierbare Struktur auf  $\mathbb{R}^n$  diffeomorph zur Standard-Struktur  $\mathcal{A}_{\max}$ , die durch  $\mathcal{A} = \{x = \text{id} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n\}$  induziert wird?

**Antwort.** Für  $n = 0, 1, 2$  und 3: **JA**. Ebenso für  $n \geq 5$ : **JA**.

Aber für  $n = 4$ : **NEIN**. Es gibt überabzählbar viele differenzierbare Strukturen auf  $\mathbb{R}^4$ , die paarweise nicht diffeomorph sind (so genannte „exotische“ Strukturen).

**Bemerkung.** (Milnor, 1956) Es gibt exotische  $n$ -dimensionale Sphären (das heißt, sie sind homöomorph zur  $S^n$ , aber nicht diffeomorph) für  $n \geq 7$ , in jeder Dimension aber nur endlich viele.

### 1.3 Tangentialvektoren

**Frage.** Was ist die *Ableitung* in einem Punkt einer differenzierbaren Abbildung zwischen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten?

**Vage Antwort.** Das ist die lineare Approximation der Abbildung in diesem Punkt.

**Frage.** Was ist die *lineare Approximation* in einem Punkt einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit?

**Definition.** Sei  $M$  eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, sei  $p \in M$ . Ein *Tangentialvektor* an  $M$  im Punkt  $p$  ist eine Äquivalenzklasse von differenzierbaren Kurven  $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$  mit  $\varepsilon > 0$  und  $c(0) = p$ , wobei zwei solche Kurven  $c_1 : (-\varepsilon_1, \varepsilon_1) \rightarrow M$  und  $c_2 : (-\varepsilon_2, \varepsilon_2) \rightarrow M$  äquivalent heißen, falls für eine Karte  $x : U \rightarrow V$  mit  $p \in U$  gilt:

$$\frac{d}{dt}(x \circ c_1)|_{t=0} = \frac{d}{dt}(x \circ c_2)|_{t=0}.$$

**Bemerkung.** Diese Definition hängt nicht von der Wahl der Karte  $x : U \rightarrow V$  ab, denn sei  $y : \tilde{U} \rightarrow \tilde{V}$  eine weitere Karte mit  $p \in \tilde{U}$ . Dann

$$\frac{d}{dt}(y \circ c)|_{t=0} = \frac{d}{dt}((y \circ x^{-1}) \circ (x \circ c))|_{t=0} \stackrel{\text{Kettenregel}}{=} D(y \circ x^{-1})|_{x(p)} \left( \frac{d}{dt}(x \circ c)|_{t=0} \right). \quad (*)$$

Also gilt:  $\frac{d}{dt}(x \circ c_1)|_{t=0} = \frac{d}{dt}(x \circ c_2)|_{t=0} \Leftrightarrow \frac{d}{dt}(y \circ c_1)|_{t=0} = \frac{d}{dt}(y \circ c_2)|_{t=0}$ .

**Notation.** Für die Äquivalenzklasse von  $c$  schreibe  $\dot{c}(0)$ .

**Definition.** Die Menge  $T_p M := \{\dot{c}(0) \mid c : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M \text{ differenzierbar mit } c(0) = p\}$  heißt der *Tangentialraum* von  $M$  im Punkt  $p$ .



**LEMMA 1.3.1.** Sei  $M$  eine  $n$ -dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit, sei  $p \in M$  und sei  $x : U \rightarrow V$  eine Karte von  $M$  mit  $p \in U$ . Dann ist die Abbildung

$$\begin{aligned} dx|_p : T_p M &\rightarrow \mathbb{R}^n, \\ \dot{c}(0) &\mapsto \frac{d}{dt}(x \circ c)|_{t=0}, \end{aligned}$$

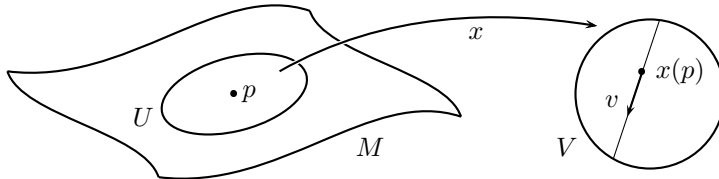
wohldefiniert und bijektiv.

*Beweis.*

- *Wohldefiniertheit.* Klar, wegen Definition der Äquivalenzrelation.
- *Injektivität.* Klar, wegen Definition der Äquivalenzrelation.
- *Surjektivität.* Sei  $v \in \mathbb{R}^n$ . Setze  $c(t) := x^{-1}(x(p) + tv)$ .

Wähle  $\varepsilon > 0$  so klein, dass  $x(p) + tv \in V$  für alle  $|t| < \varepsilon$ . Dann gilt

$$\dot{c}(0) \mapsto \frac{d}{dt}(x \circ x^{-1}(x(p) + tv))|_{t=0} = \frac{d}{dt}(x(p) + tv)|_{t=0} = v.$$



□

**Definition.** Wir versehen  $T_p M$  mit der eindeutigen Vektorraumstruktur, für die  $dx|_p$  ein linearer Isomorphismus wird, das heißt für  $a, b \in \mathbb{R}$  und  $c_1 : (-\varepsilon_1, \varepsilon_1) \rightarrow M$ ,  $c_2 : (-\varepsilon_2, \varepsilon_2) \rightarrow M$  setzen wir:

$$a \cdot \dot{c}_1(0) + b \cdot \dot{c}_2(0) := (dx|_p)^{-1}(a \cdot dx|_p(\dot{c}_1(0)) + b \cdot dx|_p(\dot{c}_2(0))).$$

**LEMMA 1.3.2.** Diese Vektorraumstruktur hängt nicht von der Wahl der Karte  $x : U \rightarrow V$  ab.

*Beweis.* Sei  $y : \tilde{U} \rightarrow \tilde{V}$  eine weitere Karte mit  $p \in \tilde{U}$ .

Zu zeigen: Auch  $dy|_p : T_p M \rightarrow \mathbb{R}^n$  ist linear bezüglich der Vektorraumstruktur, die von  $x$  induziert wird. Dies gilt, denn

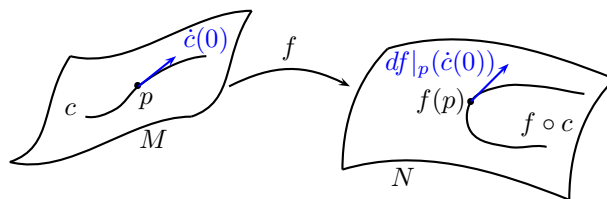
$$dy|_p \stackrel{(*)}{=} \underbrace{D(y \circ x^{-1})|_{x(p)}}_{\text{linear}} \circ \underbrace{dx|_p}_{\text{linear}}$$

ist Verkettung zweier linearer Abbildungen. □

**LEMMA 1.3.3.** Seien  $M$  und  $N$  differenzierbare Mannigfaltigkeiten, sei  $p \in M$ , sei  $f : M \rightarrow N$  differenzierbar nahe  $p$ . Dann ist die Abbildung

$$df|_p : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N \\ \dot{c}(0) \mapsto (f \circ c)'(0)$$

wohldefiniert und linear.



*Beweis.* Wähle eine Karte  $x : U \rightarrow V$  von  $M$  mit  $p \in U$  und eine Karte  $y : \tilde{U} \rightarrow \tilde{V}$  von  $N$  mit  $f(p) \in \tilde{U}$ .

$$\begin{array}{ccc}
 \dot{c}(0) \in T_p M & \xrightarrow{\quad \quad \quad} & T_{f(p)} N \ni (f \circ c)'(0) \\
 \downarrow dx|_p \cong & & \downarrow dy|_{f(p)} \cong \\
 (x \circ c)'(0) \in \mathbb{R}^m & \xrightarrow{D(y \circ f \circ x^{-1})|_{x(p)}} & \mathbb{R}^n \ni (y \circ f \circ c)'(0) = ((y \circ f \circ x^{-1}) \circ (x \circ c))'(0) \\
 & & = D(y \circ f \circ x^{-1})|_{x(p)}((x \circ c)'(0))
 \end{array}$$

Somit ist  $df|_p = (dy|_{f(p)})^{-1} \circ D(y \circ f \circ x^{-1})|_{x(p)} \circ dx|_p$ . Insbesondere ist  $df|_p$  wohldefiniert und linear.  $\square$

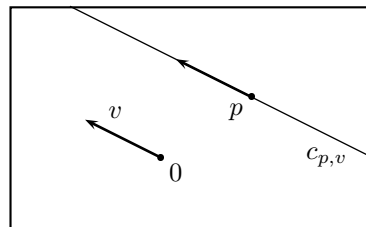
**Definition.** Die Abbildung  $df|_p$  heißt das *Differential* von  $f$  im Punkt  $p$ .

**Bemerkung.** Ist  $U \subset M$  eine offene Teilmenge, so ist das Differential der Inklusionsabbildung  $\iota : U \hookrightarrow M$  ein kanonischer Isomorphismus  $d\iota : T_p U \rightarrow T_p M$ , der gegeben ist durch  $\dot{c}(0) \mapsto (\iota \circ c)'(0) = \dot{c}(0)$ . Wir werden die Tangentialräume vermöge dieses Isomorphismus identifizieren und einfach  $T_p U = T_p M$  schreiben.

**Bemerkung.** Ist  $M$  ein  $n$ -dimensionaler  $\mathbb{R}$ -Vektorraum, so sind  $M$  und  $T_p M$  kanonisch isomorph vermöge

$$\begin{array}{ccc}
 M & \rightarrow & T_p M, \\
 v & \mapsto & \dot{c}_{p,v}(0),
 \end{array}$$

wobei  $c_{p,v}(t) := p + tv$ .



**Bemerkung.** Für eine Karte  $x : U \rightarrow V$  hat  $dx|_p$  zwei Bedeutungen:

$$\begin{array}{ccc}
 \dot{c}(0) \mapsto & \xrightarrow{\quad \quad \quad} & (x \circ c)'(0) \\
 \downarrow \subseteq & & \downarrow \cap \\
 T_p U = T_p M & \xrightarrow{dx|_p} & T_{x(p)} V = T_{x(p)} \mathbb{R}^n \\
 \downarrow dx|_p \cong & \nearrow \text{kanonischer Isomorphismus} & \\
 \frac{d}{dt}(x \circ c)|_{t=0} \in & \mathbb{R}^n &
 \end{array}$$

**SATZ 1.3.4 (Kettenregel).** Seien  $M$ ,  $N$  und  $P$  differenzierbare Mannigfaltigkeiten. Seien  $f : M \rightarrow N$  und  $g : N \rightarrow P$  differenzierbar. Sei  $p \in M$ . Dann gilt

$$d(g \circ f)|_p = dg|_{f(p)} \circ df|_p$$

*Beweis.* Für eine Kurve  $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$  mit  $c(0) = p$  gilt:

$$\begin{aligned} d(g \circ f)|_p(\dot{c}(0)) &= \frac{d}{dt}((g \circ f) \circ c)|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt}(g \circ (f \circ c))|_{t=0} \\ &= dg|_{f(p)}((f \circ c)'(0)) \\ &= dg|_{f(p)}(df|_p(\dot{c}(0))) \end{aligned}$$

□

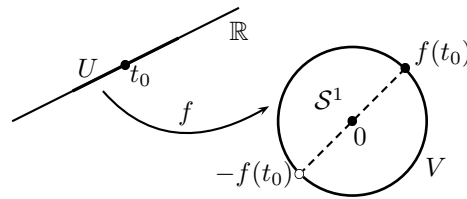
**Definition.** Seien  $M$  und  $N$  differenzierbare Mannigfaltigkeiten. Eine surjektive stetige Abbildung  $f : M \rightarrow N$  heißt *lokaler  $C^k$ -Diffeomorphismus*, falls für alle  $p \in M$  eine offene Umgebung  $U$  von  $p$  in  $M$  und eine offene Umgebung  $V$  von  $f(p)$  in  $N$  existieren, so dass

$$f|_U : U \rightarrow V$$

ein  $C^k$ -Diffeomorphismus ist.

**Beispiel.** Setze  $f : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ ,  $f(t) := e^{it}$ . Zwar ist  $f$  nicht injektiv, aber ein lokaler Diffeomorphismus, denn:

Zu  $t_0 \in \mathbb{R}$  wähle  $U := (t_0 - \pi, t_0 + \pi)$  und  $V := S^1 - \{-f(t_0)\}$ .



**Bemerkung.** Ist  $f : M \rightarrow N$  ein lokaler  $C^k$ -Diffeomorphismus, so ist

$$df|_p : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$$

ein Isomorphismus. Insbesondere gilt  $\dim(T_p M) = \dim(T_{f(p)} N)$  und daher auch  $\dim M = \dim N$ . Denn:

O. B. d. A. sei  $f$  ein  $C^k$ -Diffeomorphismus. Für eine Kurve  $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$  mit  $c(0) = p$  gilt:

$$d(\text{id}_M)|_p(\dot{c}(0)) = (\text{id}_M \circ c)'(0) = \dot{c}(0) \Rightarrow d(\text{id}_M)_p = \text{id}_{T_p M}.$$

Daraus folgt mit der Kettenregel:

$$\text{id}_{T_p M} = d(\text{id}_M)|_p = d(f^{-1} \circ f)|_p = df^{-1}|_{f(p)} \circ df|_p$$

Analog lässt sich die Gleichung  $df|_p \circ df^{-1}|_{f(p)} = \text{id}_{T_{f(p)} N}$  herleiten. Daraus folgt:

$$df^{-1}|_{f(p)} = (df|_p)^{-1}.$$

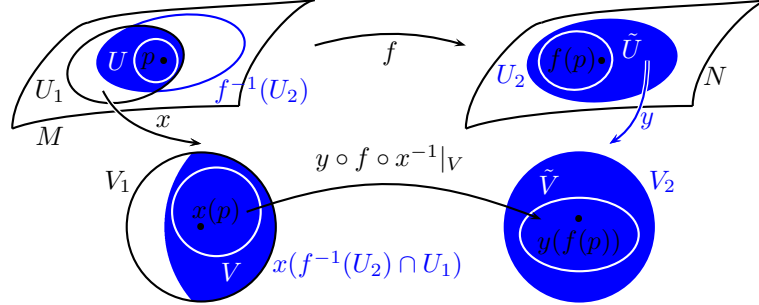
Es gilt auch die Umkehrung der Aussage:

**Satz 1.3.5 (Umkehrsatz).** Seien  $M$  und  $N$  differenzierbare Mannigfaltigkeiten, sei  $p \in M$ . Sei  $f : M \rightarrow N$  eine  $C^k$ -Abbildung. Falls  $df|_p : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$  ein Isomorphismus ist, so existieren eine offene Umgebung  $U$  von  $p$  in  $M$  und eine offene Umgebung  $\tilde{U}$  von  $f(p)$  in  $N$ , so dass

$$f|_U : U \rightarrow \tilde{U}$$

ein  $C^k$ -Diffeomorphismus ist.

*Beweis.* Wähle eine Karte  $x : U_1 \rightarrow V_1$  von  $M$  mit  $p \in U_1$  und eine Karte  $y : U_2 \rightarrow V_2$  von  $N$  mit  $f(p) \in U_2$ .



Auf  $x(U_1 \cap f^{-1}(U_2))$  ist die Abbildung  $y \circ f \circ x^{-1}$  definiert. Da  $df|_p$  invertierbar ist, ist auch  $D(y \circ f \circ x^{-1})|_{x(p)}$  invertierbar.

Der „klassische Umkehrsatz“ besagt, dass es eine offene Umgebung  $V \subset x(U_1 \cap f^{-1}(U_2))$  von  $x(p)$  und eine offene Umgebung  $\tilde{V} \subset V_2$  von  $y(f(p))$  gibt, so dass

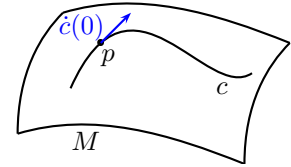
$$y \circ f \circ x^{-1}|_V : V \rightarrow \tilde{V}$$

ein  $C^k$ -Diffeomorphismus ist. Mit  $U := x^{-1}(V)$  und  $\tilde{U} := y^{-1}(\tilde{V})$  folgt, dass  $f|_U : U \rightarrow \tilde{U}$  ein  $C^k$ -Diffeomorphismus ist.  $\square$

## 1.4 Richtungsableitungen und Derivationen

**Definition.** Sei  $M$  eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, sei  $p \in M$  und sei  $\dot{c}(0) \in T_p M$ . Dann heißt für eine nahe  $p$  differenzierbare Funktion  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$

$$\partial_{\dot{c}(0)} f := df|_p(\dot{c}(0)) = \frac{d}{dt}(f \circ c)|_{t=0} \in \mathbb{R}$$



die *Richtungsableitung* von  $f$  in Richtung  $\dot{c}(0)$ .

**Notation.** Zu  $U \subset M$  offen schreibe  $C^k(U) := \{f : U \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ ist } C^k\}$ . Zu  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $f \in C^k(U)$  und  $g \in C^k(\tilde{U})$  setze

$$\begin{aligned} \alpha \cdot f &\in C^k(U), & (\alpha \cdot f)(q) &:= \alpha \cdot f(q) \\ f + g &\in C^k(U \cap \tilde{U}), & (f + g)(q) &:= f(q) + g(q) \\ f \cdot g &\in C^k(U \cap \tilde{U}), & (f \cdot g)(q) &:= f(q) \cdot g(q) \end{aligned}$$

und  $C_p^\infty := \bigcup_{\substack{U \text{ offen} \\ p \in U}} C^\infty(U)$ .

**Definition.** Eine Abbildung  $\partial : C_p^\infty \rightarrow \mathbb{R}$  heißt *Derivation* in  $p$ , falls Folgendes erfüllt ist:

(i) *Lokalität:* Sind  $\tilde{U} \subset U$  offen,  $p \in \tilde{U}$ ,  $f \in C^\infty(U)$ , dann

$$\partial f = \partial(f|_{\tilde{U}}).$$

(ii) *Linearität:* Sind  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ,  $f, g \in C_p^\infty$ , dann

$$\partial(\alpha f + \beta g) = \alpha \partial f + \beta \partial g.$$

(iii) *Produktregel:* Für  $f, g \in C_p^\infty$  gilt

$$\partial(f \cdot g) = \partial f \cdot g(p) + f(p) \cdot \partial g.$$

**Beispiel.** • Seien  $M = \mathbb{R}^n$  und  $p \in M$ . Dann ist  $\partial = \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p$  eine Derivation.

- Sei  $M$  eine beliebige differenzierbare Mannigfaltigkeit, seien  $p \in M$  und  $\dot{c}(0) \in T_p M$ . Dann ist  $\partial_{\dot{c}(0)}$  eine Derivation, denn zum Beispiel (iii) ergibt sich aus

$$\begin{aligned} \partial_{\dot{c}(0)}(f \cdot g) &= \frac{d}{dt}((f \cdot g) \circ c)|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt}((f \circ c) \cdot (g \circ c))|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt}(f \circ c)|_{t=0} \cdot g(c(0)) + f(c(0)) \cdot \frac{d}{dt}(g \circ c)|_{t=0} \\ &= \partial_{\dot{c}(0)} f \cdot g(p) + f(p) \cdot \partial_{\dot{c}(0)} g \end{aligned}$$

**Bemerkung.** Die Menge  $\text{Der}(C_p^\infty)$  aller Derivationen in  $p$  bildet einen  $\mathbb{R}$ -Vektorraum vermöge

$$(\alpha \partial_1 + \beta \partial_2)(f) = \alpha \partial_1 f + \beta \partial_2 f.$$

**LEMMA 1.4.1.** Die Abbildung  $\partial : T_p M \rightarrow \text{Der}(C_p^\infty)$ ,  $\dot{c}(0) \mapsto \partial_{\dot{c}(0)}$ , ist linear.

*Beweis.* Sei  $x : U \rightarrow V$  eine Karte von  $M$  mit  $p \in U$ .

$$\begin{array}{ccc} T_p M & \xrightarrow{\partial} & \text{Der}(C_p^\infty) \\ \downarrow dx|_p \cong & \nearrow \partial \circ (dx|_p)^{-1} & \\ \mathbb{R}^n & & \end{array}$$

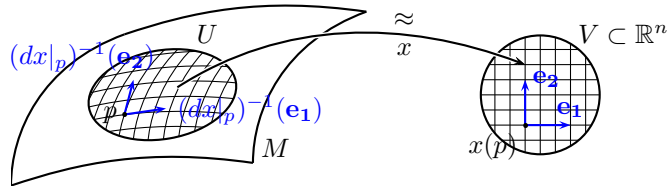
Zu zeigen:  $\partial \circ (dx|_p)^{-1}$  ist linear. Sei dazu  $v \in \mathbb{R}^n$ .

$$\begin{aligned} (\partial \circ (dx|_p)^{-1}(v))(f) &= df|_p((dx|_p)^{-1}(v)) \\ &= df|_p(\dot{c}(0)) \text{ mit } c(t) := x^{-1}(x(p) + tv) \\ &= \frac{d}{dt}(f \circ x^{-1}(x(p) + tv))|_{t=0} \\ &= \langle \text{grad}(f \circ x^{-1})|_{x(p)}, v \rangle|_{t=0}. \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck ist linear in  $v$ . □

**Bemerkung.** Sei  $e_1, \dots, e_n$  die Standardbasis des  $\mathbb{R}^n$ . Dann ist  $(dx|_p)^{-1}(e_1), \dots, (dx|_p)^{-1}(e_n)$  eine Basis von  $T_p M$ . Es gilt

$$\partial_{(dx|_p)^{-1}(e_j)}(f) = \langle \text{grad}(f \circ x^{-1})|_{x(p)}, e_j \rangle = \frac{\partial(f \circ x^{-1})}{\partial x^j} \Big|_{x(p)} =: \frac{\partial f}{\partial x^j} \Big|_{x(p)}$$



Zu jeder Karte  $x$  erhalten wir die Derivationen

$$\left. \frac{\partial}{\partial x^1} \right|_p, \dots, \left. \frac{\partial}{\partial x^n} \right|_p$$

**PROPOSITION 1.4.2.** Sei  $M$  eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, sei  $p \in M$ . Dann ist die Abbildung

$$\partial : T_p M \rightarrow \text{Der}(C_p^\infty), \dot{c}(0) \mapsto \partial_{\dot{c}(0)},$$

ein Isomorphismus. Insbesondere ist jede Derivation eine Richtungsableitung und für jede Karte  $x : U \rightarrow V$  mit  $p \in U$  ist

$$\left. \frac{\partial}{\partial x^1} \right|_p, \dots, \left. \frac{\partial}{\partial x^n} \right|_p$$

eine Basis von  $\text{Der}(C_p^\infty)$ .

*Beweis.* Es genügt zu zeigen, dass die Derivationen

$$\left. \frac{\partial}{\partial x^1} \right|_p, \dots, \left. \frac{\partial}{\partial x^n} \right|_p$$

eine Basis von  $\text{Der}(C_p^\infty)$  bilden.

(a) *Lineare Unabhängigkeit:* Sei  $\sum_{i=1}^n \alpha^i \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p = 0$ . Zu zeigen ist:  $\alpha^1 = \dots = \alpha^n = 0$ . Wähle  $f = x^j$ .

Dann

$$0 = \sum_{i=1}^n \alpha^i \underbrace{\left. \frac{\partial x^j}{\partial x^i} \right|_p}_{=\delta_i^j} = \alpha^j \text{ für } j = 1, \dots, n.$$

(b) *Erzeugendeneigenschaft:* Sei  $\delta \in \text{Der}(C_p^\infty)$ . Setze  $\alpha^j := \delta(x^j)$  für  $j = 1, \dots, n$ . Wir werden zeigen, dass

$$\delta = \sum_{j=1}^n \alpha^j \cdot \left. \frac{\partial}{\partial x^j} \right|_p$$

(b1) Es gilt

$$\delta(1) = \delta(1 \cdot 1) \stackrel{\text{(iii)}}{=} \delta(1) \cdot 1 + 1 \cdot \delta(1) = 2\delta(1) \Rightarrow \delta(1) = 0.$$

Sei nun  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Dann ist

$$\delta(\alpha) = \delta(\alpha \cdot 1) \stackrel{\text{(iii)}}{=} \alpha \cdot \delta(1) = 0.$$

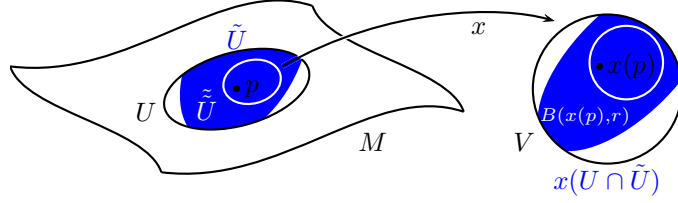
Derivationen verschwinden somit auf allen konstanten Funktionen.

(b2) Sei  $f \in C_p^\infty$ , genauer  $f \in C^\infty(\tilde{U})$  mit  $p \in \tilde{U}$  offen.

Wähle eine offene Umgebung  $\tilde{U}$  von  $p$  mit

$$\tilde{U} \subset \tilde{U} \cap U$$

und  $x(\tilde{U}) = B(x(p), r)$ .



Lemma 1.4.3 (siehe unten) mit  $h = f \circ x^{-1}$  besagt: Es existieren  $g_1, \dots, g_n \in C^\infty(B(x(p), r))$ , so dass

$$(f \circ x^{-1})(x) = (f \circ x^{-1})(x(p)) + \sum_{i=1}^n (x^i - x^i(p)) \cdot g_i(x) \text{ und}$$

$$\frac{\partial(f \circ x^{-1})}{\partial x^i}(x(p)) = g_i(x(p)).$$

Daraus folgt dann

$$\begin{aligned} \delta(f) &\stackrel{(i)}{=} \delta(f|_{\tilde{U}}) \\ &= \delta(f(p)) + \sum_{i=1}^n (x^i - x^i(p))(g_i \circ x) \\ &\stackrel{(ii)}{=} \sum_{i=1}^n \delta((x^i - x^i(p))(g_i \circ x)) \\ &\stackrel{(b1)}{=} \sum_{i=1}^n \delta(x^i - x^i(p)) \cdot g_i(x(p)) + \underbrace{(x^i - x^i(p))|_p}_{=0} \delta(g_i \circ x) \\ &\stackrel{(iii)}{=} \sum_{i=1}^n \delta(x^i) g_i(x(p)) \\ &\stackrel{(b1)}{=} \sum_{i=1}^n \delta(x^i) g_i(x(p)) \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha^i \cdot \frac{\partial f}{\partial x^i} \Big|_p \end{aligned}$$

□

**LEMMA 1.4.3.** Sei  $h \in C^\infty(B(q, r))$ . Dann existieren  $g_1, \dots, g_n \in C^\infty(B(q, r))$  mit

$$(i) \quad h(x) = h(q) + \sum_{i=1}^n (x^i - q^i) g_i(x) \text{ und}$$

$$(ii) \quad \frac{\partial h}{\partial x^i}(q) = g_i(q).$$

*Beweis.* Für  $x \in B(q, r)$  setze  $w_x : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $w_x(t) := h(tx + (1-t)q)$ . Daraus folgt

$$\begin{aligned}
 h(x) - h(q) &= w_x(1) - w_x(0) \\
 &= \int_0^1 \dot{w}_x(t) dt \\
 &= \int_0^1 \sum_{i=1}^n \frac{\partial h}{\partial x^i} \Big|_{tx+(1-t)q} \cdot (x^i - q^i) dt \\
 &= \sum_{i=1}^n (x^i - q^i) \underbrace{\int_0^1 \frac{\partial h}{\partial x^i} \Big|_{tx+(1-t)q} dt}_{=: g_i(x)}
 \end{aligned}$$

Daraus folgt (i). Und (ii) folgt aus (i) durch Differentiation an der Stelle  $q$ . □

Wir haben jetzt folgende Situation auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit:

$$\begin{array}{ccc}
 (dx|_p)^{-1}(e_j) \in T_p M & \xrightarrow[\cong]{\partial \cdot} & \text{Der}(C_p^\infty) \ni \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p \\
 & \searrow \cong & \nearrow \cong \\
 (dx|_p) & & \partial \circ (dx|_p)^{-1} \\
 & \nwarrow \text{ } \nearrow \text{ } & \\
 & \underbrace{\mathbb{R}^n}_{\ni e_j} & \\
 & \text{hängen ab von} & \\
 & \text{der Wahl von } x &
 \end{array}$$

Von jetzt an identifiziere  $T_p M$  mit  $\text{Der}(C_p^\infty)$  vermöge des Isomorphismus  $\partial \cdot$ . Schreibe zum Beispiel für  $\xi \in T_p M$

$$\xi = \sum_{i=1}^n \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p$$

statt  $\partial_\xi = \sum_{i=1}^n \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p$  bzw.  $\xi = \sum_{i=1}^n \xi^i (dx|_p)^{-1}(e_i)$ , wobei  $(\xi^1, \dots, \xi^n)^* = dx|_p(\xi)$ .

Wie ändern sich die Koeffizienten  $\xi^1, \dots, \xi^n$ , wenn man die Karte  $x$  durch die Karte  $y$  ersetzt?

Sei  $\xi \in T_p M$ , seien  $x$  und  $y$  Karten, die  $p$  enthalten. Es gelte

$$\sum_{i=1}^n \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p = \xi = \sum_{j=1}^n \eta^j \frac{\partial}{\partial y^j} \Big|_p$$

Dann gilt

$$\begin{pmatrix} \xi^1 \\ \vdots \\ \xi^n \end{pmatrix} = dx|_p(\xi) = (dx|_p) \left( (dy|_p)^{-1} \begin{pmatrix} \eta^1 \\ \vdots \\ \eta^n \end{pmatrix} \right) = D(x \circ y^{-1})|_{y(p)} \begin{pmatrix} \eta^1 \\ \vdots \\ \eta^n \end{pmatrix}.$$

Analog ergibt sich  $\begin{pmatrix} \eta^1 \\ \vdots \\ \eta^n \end{pmatrix} = D(y \circ x^{-1})|_{x(p)} \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \vdots \\ \xi^n \end{pmatrix}$ , also



$$\eta^j = \sum_{i=1}^n \xi^i \frac{\partial(y^j \circ x^{-1})}{\partial x^i} \Big|_{x(p)}$$

Etwas anders formuliert: Für den Fall  $\xi = \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p$ , das heißt  $(\xi^1, \dots, \xi^n)^* = e_i$ , erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p &= \sum_{j=1}^n \eta^j \frac{\partial}{\partial y^j} \Big|_p \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \xi^k \frac{\partial(y^j \circ x^{-1})}{\partial x^k} \Big|_{x(p)} \cdot \frac{\partial}{\partial y^j} \Big|_p \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial(y^j \circ x^{-1})}{\partial x^i} \Big|_{x(p)} \cdot \frac{\partial}{\partial y^j} \Big|_p, \text{ also} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p = \sum_{j=1}^n \frac{\partial(y^j \circ x^{-1})}{\partial x^i} \Big|_{x(p)} \cdot \frac{\partial}{\partial y^j} \Big|_p$$

Vor allem in der physikalischen Literatur notiert man Formeln aus Gründen der Übersichtlichkeit häufig gemäß der

**Einstein'schen Summenkonvention:**

*In einer Formel, in der ein Index einmal oben und einmal unten (auf einer Seite des Gleichheitszeichens) auftritt, ist über den Index zu summieren.*

Obige Transformationsformel würde dann also kurz folgendermaßen geschrieben:

$$\frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial}{\partial y^j}$$

## 1.5 Vektorfelder

**Definition.** Sei  $M$  eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Dann heißt

$$TM := \bigcup_{p \in M} T_p M$$

das *Tangentialbündel* von  $M$ .

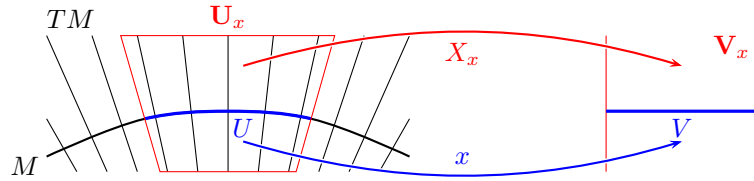
Wir verabreichen  $TM$  die Struktur einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit: Zu jeder Karte  $x : U \rightarrow V$  von  $M$  konstruieren wir eine Karte  $X_x : \mathbf{U}_x \rightarrow \mathbf{V}_x$  von  $TM$ , wobei  $\pi : TM \rightarrow M, \pi(\xi) = p$  für  $\xi \in T_p M$  die Fußpunktabbildung ist. Setze also

$$\mathbf{U}_x := \pi^{-1}(U) \subset TM, \mathbf{V}_x := V \times \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{2n} \text{ und } X_x(\xi) := (x(\pi(\xi)), dx|_{\pi(\xi)}(\xi)).$$

Dann ist  $X_x^{-1}(v, w) = (dx|_{x^{-1}(v)})^{-1}(w)$ .

**Schematisches Bild**





Offensichtlich gilt (nach Konstruktion):

$$\bigcup_{\substack{\text{Karten} \\ x \text{ von } M}} \mathbf{U}_x = TM.$$

Seien  $x$  und  $y$  Karten  $M$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} X_y \circ X_x^{-1}(v, w) &= X_y((dx|_{x^{-1}(v)})^{-1}(w)) \\ &= (y(\pi((dx|_{x^{-1}(v)})^{-1}(w))), dy|_{\pi((dx|_{x^{-1}(v)})^{-1}(w))}((dx|_{x^{-1}(v)})^{-1}(w))) \\ &= (y(x^{-1}(v)), dy|_{x^{-1}(v)}((dx|_{x^{-1}(v)})^{-1}(w))) \\ &= (\underbrace{(y \circ x^{-1})}_{C^\infty}(v), \underbrace{D(y \circ x^{-1})|_v}_{C^\infty} \cdot w) \end{aligned}$$

ist eine  $C^\infty$ -Abbildung, also insbesondere stetig.

Mit Satz 1.4 folgt dann, dass  $TM$  genau eine Topologie trägt, für die die  $X_x$  Homöomorphismen sind.

Hat die Topologie von  $TM$  eine abzählbare Basis?

Die Topologie von  $M$  hat eine abzählbare Basis.

- $\Rightarrow M$  besitzt eine abzählbaren  $C^\infty$ -Atlas.
- $\Rightarrow$  Die zugehörigen Karten von  $TM$  bilden einen abzählbaren Atlas von  $TM$ .

Mit Proposition 1.1.4 folgt dann, dass die Topologie von  $TM$  eine abzählbare Basis hat.

Ist  $TM$  hausdorffsch?

Seien  $\xi, \eta \in TM$  mit  $\xi \neq \eta$ .

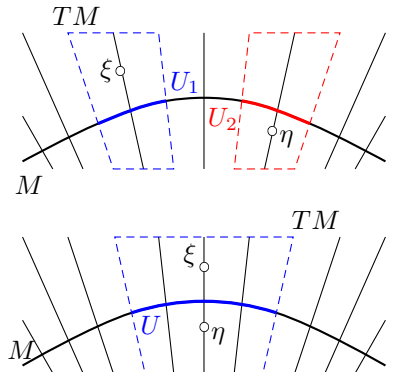
**1. Fall:**  $\pi(\xi) \neq \pi(\eta)$ .

$M$  ist hausdorffsch.

- $\Rightarrow$  Es existieren eine offene Umgebung  $U_1$  von  $\pi(\xi)$  und eine offene Umgebung  $U_2$  von  $\pi(\eta)$ , so dass  $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ .
- $\Rightarrow$  Die Mengen  $\pi^{-1}(U_1)$  bzw.  $\pi^{-1}(U_2)$  sind offene Umgebungen von  $\xi$  bzw.  $\eta$  mit  $\pi^{-1}(U_1) \cap \pi^{-1}(U_2) = \emptyset$ .

**2. Fall:**  $\pi(\xi) = \pi(\eta)$ .

Sei  $x : U \rightarrow V$  eine Karte von  $M$  mit  $\pi(\xi) = \pi(\eta) \in U$ . Dann sind  $\xi, \eta \in \pi^{-1}(U) = \mathbf{U}_x$ . Mit Proposition 1.1.5 folgt dann, dass sich  $\xi$  und  $\eta$  trennen lassen.



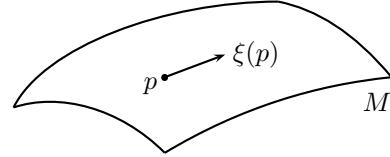
Insgesamt ergibt sich: Mit der so konstruierten Topologie wird  $TM$  eine  $2n$ -dimensionale topologische Mannigfaltigkeit mit dem Atlas

$$\mathcal{A}_{TM} = \{X_x : \mathbf{U}_x \rightarrow \mathbf{V}_x \mid (x : U \rightarrow V) \in \mathcal{A}_{M, \max}\}.$$

Da die Kartenwechsel  $X_x \circ X_y^{-1}$  nicht nur stetig, sondern sogar  $C^\infty$  sind, ist  $\mathcal{A}_{TM}$  ein  $C^\infty$ -Atlas. Dadurch wird  $(TM, \mathcal{A}_{TM, \max})$  zu einer  $2n$ -dimensionalen differenzierbaren Mannigfaltigkeit.

**Definition.** Eine Abbildung  $\xi : M \rightarrow TM$  heißt *Vektorfeld* auf  $M$ , falls für alle  $p \in M$  gilt

$$\pi(\xi(p)) = p.$$



Sei  $x : U \rightarrow V$  eine Karte von  $M$ . Ein Vektorfeld  $\xi$  wird auf  $U$  durch Funktionen

$$\xi^1, \dots, \xi^n : V \rightarrow \mathbb{R}$$

beschrieben, und zwar folgendermaßen:

$$\xi(p) = \sum_{i=1}^n \xi^i(x(p)) \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p$$

Wir überprüfen, was  $C^k$  für Vektorfelder bedeutet: Zur Karte  $x$  von  $M$  betrachte die zugehörige Karte  $X_x$  von  $TM$ .

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\xi} & TM \\ \cup & & \cup \\ x^{-1}(v) \in U & \xrightarrow{\xi|_U} & \mathbf{U}_x \quad \ni \xi(x^{-1}(v)) \\ \downarrow x & & \downarrow X_x \\ v \in V & \xrightarrow{\quad} & V \times \mathbb{R}^n \ni \overbrace{(x(\pi(\xi(x^{-1}(v))))), dx|_{\pi(\xi(x^{-1}(v)))}(\xi(x^{-1}(v)))})^{=x^{-1}(v)} \\ & & \cap \\ & & \mathbb{R}^n \quad \mathbb{R}^{2n} \\ & & = (v, \xi^1(v), \dots, \xi^n(v)) \end{array}$$

Es gilt also:  $\xi$  ist  $C^k$  auf  $U \Leftrightarrow \xi^1, \dots, \xi^n$  sind  $C^k$  auf  $V$ .

**Beispiel ( $M = \mathbb{R}^2$ ).** *Polarkoordinaten:* Für  $\varphi_0 \in \mathbb{R}$  setze  $U := \mathbb{R}^2 - \mathbb{R}_{\geq 0} \begin{pmatrix} \cos \varphi_0 \\ \sin \varphi_0 \end{pmatrix}$ ,  $V := (0, \infty) \times (\varphi_0, \varphi_0 + 2\pi)$  und  $y : U \rightarrow V$  mit  $y^{-1}(r, \varphi) := (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$ .

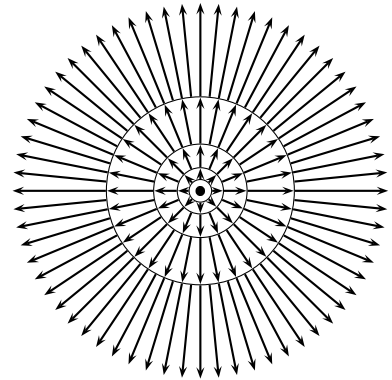
Auf  $U$  ist das Vektorfeld  $\xi := r \frac{\partial}{\partial r}$  definiert.

In kartesischen Koordinaten, das heißt bezüglich der Karte  $x = \text{id} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , drückt sich das Vektorfeld  $\xi$  folgendermaßen aus:

$$\begin{aligned} \xi &= r \frac{\partial}{\partial r} = r \left( \frac{\partial x^1}{\partial r} \frac{\partial}{\partial x^1} + \frac{\partial x^2}{\partial r} \frac{\partial}{\partial x^2} \right) \\ &= r \left( \frac{\partial(r \cos \varphi)}{\partial r} \frac{\partial}{\partial x^1} + \frac{\partial(r \sin \varphi)}{\partial r} \frac{\partial}{\partial x^2} \right) \\ &= r \left( \cos \varphi \frac{\partial}{\partial x^1} + \sin \varphi \frac{\partial}{\partial x^2} \right) \\ &= x^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + x^2 \frac{\partial}{\partial x^2} \end{aligned}$$

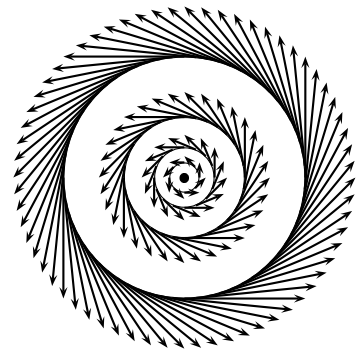
In kartesischen Koordinaten:  
 $\xi^1(x^1, x^2) = x^1, \xi^2(x^1, x^2) = x^2$ .

In Polarkoordinaten:  
 $\eta^1(r, \varphi) = r, \eta^2(r, \varphi) = 0$ .



**Beispiel.** Wir rechnen  $\frac{\partial}{\partial \varphi}$  in kartesische Koordinaten um:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \varphi} &= \frac{\partial x^1}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial x^1} + \frac{\partial x^2}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial x^2} \\ &= -r \sin \varphi \frac{\partial}{\partial x^1} + r \cos \varphi \frac{\partial}{\partial x^2} \\ &= -x^2 \frac{\partial}{\partial x^1} + x^1 \frac{\partial}{\partial x^2} \end{aligned}$$



# Kapitel 2

## Semi-riemannsche Geometrie

### 2.1 Bilinearformen

**Definition.** Sei  $V$  ein  $n$ -dimensionaler  $\mathbb{R}$ -Vektorraum. Eine *symmetrische Bilinearform* ist eine Abbildung  $g : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  mit

- (i)  $g(\alpha v + \beta w, z) = \alpha g(v, z) + \beta g(w, z)$  für alle  $v, w, z \in V$  und  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  und
- (ii)  $g(v, w) = g(w, v)$  für alle  $v, w \in V$ .

Man nennt  $g$  *nicht entartet*, falls aus  $g(v, w) = 0 \forall w \in V$  folgt, dass  $v = 0$ .

Für eine Basis  $b_1, \dots, b_n$  von  $V$  setze

$$g_{ij} := g(b_i, b_j) \in \mathbb{R} \text{ für } i, j = 1, \dots, n.$$

Dann ist  $(g_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$  eine symmetrische  $n \times n$ -Matrix. Aus  $(g_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$  kann  $g$  rekonstruiert werden: Für  $v = \sum_{i=1}^n \alpha^i b_i$  und  $w = \sum_{j=1}^n \beta^j b_j$  gilt:

$$g(v, w) = g\left(\sum_{i=1}^n \alpha^i b_i, \sum_{j=1}^n \beta^j b_j\right) = \sum_{i,j=1}^n \alpha^i \beta^j g_{ij}.$$

**Notation.** Sei  $b_1^*, \dots, b_n^*$  die duale Basis des Dualraums  $V^* = \{ \text{lineare Abbildungen } V \rightarrow \mathbb{R} \}$  zu  $b_1, \dots, b_n$ , das heißt  $b_i^*(b_j) = \delta_{ij}$ . Man schreibt dann auch

$$g = \sum_{i,j=1}^n g_{ij} b_i^* \otimes b_j^*.$$

Dann bedeutet das Einsetzen von  $v, w \in V$  Folgendes:

$$g(v, w) = \sum_{i,j=1}^n g_{ij} b_i^*(v) \cdot b_j^*(w) = \sum_{i,j=1}^n g_{ij} \alpha^i \beta^j.$$

**Hauptachsentransformation.**

Sei  $g$  eine nicht entartete symmetrische Bilinearform auf  $V$ . Dann existiert eine Basis  $e_1, \dots, e_n$  von  $V$ , so dass

$$g(e_i, e_j) = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ \varepsilon_i \in \{\pm 1\}, & i = j \end{cases}, \text{ das hei\ss t } (g_{ij})_{i,j=1,\dots,n} = \begin{pmatrix} -1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & \ddots & \\ & & & & 1 \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Eine solche Basis nennen wir *verallgemeinerte Orthonormalbasis*. Man bezeichnet  $\#\{-1\} =: \text{Index}(g)$  als den *Index* von  $g$ .

$g$  ist euklidisches Skalarprodukt  $\Leftrightarrow g$  ist positiv definit  $\Leftrightarrow \text{Index}(g) = 0$ .

Ist der Index von  $g$  gleich 1, so bezeichnet man  $g$  als *Minkowski-Skalarprodukt*.

Sind  $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$  und  $\tilde{\mathcal{B}} = (\tilde{b}_1, \dots, \tilde{b}_n)$  zwei Basen von  $V$ , dann definiere die Transformationsmatrix  $T = (t_i^j)_{i,j=1,\dots,n}$  durch

$$\tilde{b}_i = \sum_{j=1}^n t_i^j b_j.$$

Man erh\u00e4lt dann

$$\begin{aligned} g_{ij}^{(\tilde{\mathcal{B}})} &= g(\tilde{b}_i, \tilde{b}_j) \\ &= g\left(\sum_{k=1}^n t_i^k b_k, \sum_{l=1}^n t_j^l b_l\right) \\ &= \sum_{k,l=1}^n t_i^k t_j^l \cdot g(b_k, b_l) \\ &= \sum_{k,l=1}^n t_i^k t_j^l \cdot g_{kl}^{(\mathcal{B})} \end{aligned}$$

Seien  $V$  und  $W$  zwei endlich dimensionale  $\mathbb{R}$ -Vektorr\u00e4ume. Sei  $g$  eine symmetrische Bilinearform auf  $V$  und  $\Phi : W \rightarrow V$  eine lineare Abbildung. Dann kann  $g$  verm\u00f6ge  $\Phi$  nach  $W$  „zur\u00fcckgezogen“ werden, das hei\u00dft

$$(\Phi^* g)(w_1, w_2) := g(\Phi(w_1), \Phi(w_2)).$$

Dann ist  $\Phi^* g$  eine symmetrische Bilinearform auf  $W$ .

**Bemerkung.** Falls  $g$  positiv definit ist, so ist  $\Phi^* g$  positiv semidefinit. Falls ferner  $\Phi$  injektiv ist, so ist  $\Phi^* g$  ebenfalls positiv definit. Denn:

$$\begin{aligned} (\Phi^* g)(w, w) &= g(\Phi(w), \Phi(w)) \geq 0 \quad \forall w \in W \text{ und} \\ (\Phi^* g)(w, w) &= 0 \Leftrightarrow \Phi(w) = 0 \Leftrightarrow w \in \ker(\Phi). \end{aligned}$$

**Definition.** Sind  $g_V$  und  $g_W$  symmetrische Bilinearformen auf  $V$  bzw.  $W$ , so hei\u00dft eine bijektive lineare Abbildung  $\Phi : W \rightarrow V$  *Isometrie*, falls

$$g_V(\Phi(w_1), \Phi(w_2)) = g_W(w_1, w_2) \quad \forall w_1, w_2 \in W,$$

das hei\u00dft, es gilt  $\Phi^* g_V = g_W$ .

## 2.2 Semi-riemannsche Metriken

Sei  $M$  eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Betrachte Abbildungen  $g$ , die jedem Punkt  $p \in M$  eine nicht entartete symmetrische Bilinearform  $g|_p$  auf  $T_p M$  zuordnen.

Ist  $x : U \rightarrow V$  eine Karte von  $M$ , so definiere  $g_{ij}^{(x)} = g_{ij} : V \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$g_{ij}(v) := g|_{x^{-1}(v)} \left( \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_{x^{-1}(v)}, \left. \frac{\partial}{\partial x^j} \right|_{x^{-1}(v)} \right).$$

**Definition.** Ein solche Abbildung  $g$  heißt *semi-riemannsche Metrik* auf  $M$ , falls sie im folgenden Sinne glatt vom Basispunkt abhängt:

Für jede Karte  $x : U \rightarrow V$  von  $M$  sind die  $g_{ij} : V \rightarrow \mathbb{R}$   $C^\infty$ -Funktionen.

### Transformation bei Kartenwechsel

Seien  $x : U \rightarrow V$  und  $y : \tilde{U} \rightarrow \tilde{V}$  zwei Karten von  $M$ , sei  $p \in U \cap \tilde{U}$ .

$$\underbrace{\left. \frac{\partial}{\partial y^i} \right|_p}_{= \tilde{b}_i} = \sum_{j=1}^n \underbrace{\left. \frac{\partial(x^j \circ y^{-1})}{\partial y^i} \right|_{y(p)}}_{= t_i^j} \cdot \underbrace{\left. \frac{\partial}{\partial x^j} \right|_p}_{= b_j}$$

Daraus folgt, dass

$$g_{ij}^{(y)}(y(p)) = \sum_{k,l=1}^n \left. \frac{\partial(x^k \circ y^{-1})}{\partial y^i} \right|_{y(p)} \cdot \left. \frac{\partial(x^l \circ y^{-1})}{\partial y^j} \right|_{y(p)} \cdot g_{kl}^{(x)}(x(p)).$$

Das heißt

$$g_{ij}^{(y)}(v) = \sum_{k,l=1}^n \left. \frac{\partial(x^k \circ y^{-1})}{\partial y^i} \right|_v \cdot \left. \frac{\partial(x^l \circ y^{-1})}{\partial y^j} \right|_v \cdot g_{kl}^{(x)}((x \circ y^{-1})(v))$$

In Physiker-Kurzschreibweise lautet die Formel

$$g_{ij}^{(y)} = \frac{\partial x^k}{\partial y^i} \frac{\partial x^l}{\partial y^j} \cdot (g_{kl}^{(x)} \circ (x \circ y^{-1})).$$

**Folgerung.** Die Glattheitsbedingung für  $g$  muss nicht für alle Karten, sondern nur für einen Teilatlas von  $\mathcal{A}_{\max}(M)$  überprüft werden, der  $M$  überdeckt.

**Bemerkung.** Für eine Karte  $x : U \rightarrow V$  ist  $dx|_p : T_p M \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein linearer Isomorphismus, insbesondere sind  $dx^1|_p, \dots, dx^n|_p \in (T_p M)^*$ .

**Definition.** Der Dualraum  $(T_p M)^* =: T_p^* M$  heißt *Kotangentialraum* von  $M$  in  $p$ .

**LEMMA 2.2.1.** Die  $dx^1|_p, \dots, dx^n|_p$  bilden die zu  $\left. \frac{\partial}{\partial x^1} \right|_p, \dots, \left. \frac{\partial}{\partial x^n} \right|_p$  duale Basis.

*Beweis.*  $dx|_p \left( \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p \right) = e_i \Rightarrow dx^j|_p \left( \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p \right) = \delta_i^j$  für  $i = 1, \dots, n$ . □

Wir können also schreiben:

$$g|_p = \sum_{i,j=1}^n g_{ij}(x(p)) \cdot dx^i|_p \otimes dx^j|_p$$

**Bemerkung.** Bei der Basistransformation  $\tilde{b}_i = \sum_{j=1}^n t_j^i b_j$  ergibt sich

$$b_i^* = \sum_{j=1}^n t_j^i \tilde{b}_j^*.$$

Denn es gilt:

$$\begin{aligned} \left( \sum_{j=1}^n t_j^i \tilde{b}_j^* \right) (b_k) &= \left( \sum_{j=1}^n t_j^i \tilde{b}_j^* \right) \left( \sum_{l=1}^n (T^{-1})_k^l \tilde{b}_l \right) \\ &= \sum_{j,l=1}^n t_j^i (T^{-1})_k^l \underbrace{\tilde{b}_j^*(\tilde{b}_l)}_{=\delta_j^l} \\ &= \sum_{j=1}^n t_j^i (T^{-1})_k^j = \delta_k^i \\ \Rightarrow \sum_{j=1}^n t_j^i \tilde{b}_j^* &= b_i^*. \end{aligned}$$

Es gilt also für die Koordinaten-Transformation der  $dx^1|_p, \dots, dx^n|_p$ :

$$dx^i|_p = \sum_{j=1}^n \frac{\partial(x^i \circ y^{-1})}{\partial y^j} \Big|_{y(p)} \cdot dy^j|_p$$

In Physiker-Kurzschreibweise bedeutet das

$$dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial y^j} dy^j$$

Physiker-Kurzherleitung der Transformationsformel für die  $g_{ij}$ :

$$\begin{aligned} g_{kl}^{(y)} dy^k \otimes dy^l = g &= g_{ij}^{(x)} dx^i \otimes dx^j \\ &= g_{ij}^{(x)} \left( \frac{\partial x^i}{\partial y^k} dy^k \right) \otimes \left( \frac{\partial x^j}{\partial y^l} dy^l \right) \\ &= \left( \frac{\partial x^i}{\partial y^k} \cdot \frac{\partial x^j}{\partial y^l} g_{ij}^{(x)} \right) dy^k \otimes dy^l \end{aligned}$$

**Bemerkung.** In der Physikliteratur schreibt man häufig einfach

$$g = g_{ij} dx^i dx^j.$$



**Beispiel.** Sei  $M \subset \mathbb{R}^n$  offen. Sei  $\beta$  eine nicht entartete symmetrische Bilinearform auf  $\mathbb{R}^n$ . Für jedes  $p \in M$  sei  $\Phi_p : T_p M \rightarrow \mathbb{R}^n$  der kanonische Isomorphismus. Setze  $g|_p := \Phi_p^* \beta$ . Wir überprüfen die Glattheitsbedingung in der Karte  $x = \text{id} : U = M \rightarrow V = M$ .

$$\begin{aligned} g|_p \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p, \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p \right) &= \beta \left( \Phi_p \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \right), \Phi_p \left( \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p \right) \right) \\ &= \beta \left( dx|_p \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \right), dx|_p \left( \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p \right) \right) \\ &= \beta(e_i, e_j) \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass die  $g_{ij}$  konstant, also  $C^\infty$  sind. Auf diese Weise kann  $M$  mit einer semi-riemannschen Metrik von beliebigem Index versehen werden.

**Beispiel.** Sei  $M \subset \mathbb{R}^{n+k}$  eine  $n$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit. Dann existiert eine kanonische injektive Abbildung  $\Phi_p : T_p M \rightarrow \mathbb{R}^{n+k}$ , definiert durch

$$\dot{c}(0) \mapsto \frac{d}{dt} c|_{t=0}$$

Äquivalenzklasse der  
Kurve  $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ 
Ableitung von  
 $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^{n+k}$

Dann definiere  $g|_p := \Phi_p^* \langle \cdot, \cdot \rangle$ , wobei  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^{n+k} x^i y^i$  für  $\mathbf{x} = (x^1, \dots, x^{n+k})^T$ ,  $\mathbf{y} = (y^1, \dots, y^{n+k})^T$  das übliche euklidische Skalarprodukt ist. Da das euklidische Skalarprodukt positiv definit ist und  $\Phi_p$  injektiv, ist auch  $g|_p$  für alle  $p \in M$  positiv definit. Die so definierte semi-riemannsche Metrik auf  $M$  heißt 1. *Fundamentalform*.

Die Karten von Untermannigfaltigkeiten entsprechen den lokalen Parametrisierungen, das heißt, ist  $F : U \rightarrow M$  eine lokale Parametrisierung, wobei  $V \subset \mathbb{R}^n$  offen ist, so ist

$$x := F^{-1} : U := F(V) \rightarrow V$$

eine Karte von  $M$ . Es gilt dann mit  $p = x^{-1}(v)$ :

$$\begin{aligned} g_{ij}(v) &= g|_p \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p, \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p \right) \\ &= (\Phi_p^* \langle \cdot, \cdot \rangle) \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p, \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p \right) \\ &= \left\langle \Phi_p \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \right), \Phi_p \left( \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p \right) \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{d}{dt} F(v + t \cdot e_i) \Big|_{t=0}, \frac{d}{dt} F(v + t \cdot e_j) \Big|_{t=0} \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{\partial F}{\partial x^i}(v), \frac{\partial F}{\partial x^j}(v) \right\rangle \\ \Rightarrow g_{ij} &= \left\langle \frac{\partial F}{\partial x^i}, \frac{\partial F}{\partial x^j} \right\rangle \text{ ist } C^\infty. \end{aligned}$$

**Definition.** Eine semi-riemannsche Metrik  $g$ , für die  $g|_p$  stets positiv definit ist, heißt *riemannsche Metrik*. Ein Paar  $(M, g)$ , bestehend aus einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit  $M$  und einer (semi-)riemannschen Metrik  $g$  auf  $M$  heißt (semi-)riemannsche Mannigfaltigkeit.

Eine semi-riemannsche Metrik  $g$  heißt *Lorentz-Metrik*, falls  $g|_p$  stets den Index 1 hat. Das Paar  $(M, g)$  heißt dann *Lorentz-Mannigfaltigkeit*.

**Beispiel.** Die 1. Fundamentalform einer Untermannigfaltigkeit  $M \subset \mathbb{R}^{n+k}$  ist eine riemannsche Metrik. Zum Beispiel für  $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  bezeichnen wir die 1. Fundamentalform als die *Standardmetrik*  $g_{\text{std}}$  von  $S^n$ .

**Beispiel.** Sei  $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$  offen. Das *Minkowski-Skalarprodukt*  $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$  auf  $\mathbb{R}^{n+1}$  hat den Index 1, wobei

$$\langle\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle\rangle = -x^0 y^0 + x^1 y^1 + \dots + x^n y^n$$

für  $\mathbf{x} = (x^0, x^1, \dots, x^n)$  und  $\mathbf{y} = (y^0, y^1, \dots, y^n)$ . Ist  $\Phi_p : T_p M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  der kanonische Isomorphismus, so ist durch

$$g_{\text{Mink}}|_p := \Phi_p^* \langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$$

eine Lorentz-Metrik auf  $M$  definiert. Die Lorentz-Mannigfaltigkeit  $(\mathbb{R}^{n+1}, g_{\text{Mink}})$  heißt *Minkowski-Raum*. Die Raumzeit der speziellen Relativitätstheorie ist der 4-dimensionale Minkowski-Raum.

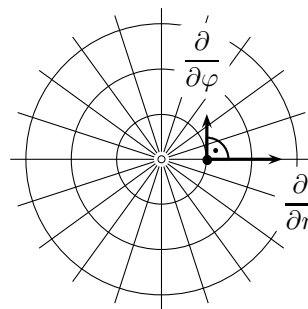
**Beispiel.** Wir drücken die euklidische Metrik  $g_{\text{eukl}} = dx^1 \otimes dx^1 + dx^2 \otimes dx^2$  des  $\mathbb{R}^2$  in Polarkoordinaten aus. (Dabei sind  $x^1$  und  $x^2$  die kartesischen Koordinaten.) Mit  $x^1 = r \cos \varphi$  und  $x^2 = r \sin \varphi$  folgt dann:

$$\begin{aligned} dx^1 &= \frac{\partial x^1}{\partial r} dr + \frac{\partial x^1}{\partial \varphi} d\varphi = \cos \varphi dr - r \sin \varphi d\varphi \\ dx^2 &= \frac{\partial x^2}{\partial r} dr + \frac{\partial x^2}{\partial \varphi} d\varphi = \sin \varphi dr + r \cos \varphi d\varphi \\ \Rightarrow g_{\text{eukl}} &= (\cos \varphi dr - r \sin \varphi d\varphi) \otimes (\cos \varphi dr - r \sin \varphi d\varphi) \\ &\quad + (\sin \varphi dr + r \cos \varphi d\varphi) \otimes (\sin \varphi dr + r \cos \varphi d\varphi) \\ &= \cos^2 \varphi dr \otimes dr - r \cos \varphi \sin \varphi dr \otimes d\varphi - r \sin \varphi \cos \varphi d\varphi \otimes dr + r^2 \sin^2 \varphi d\varphi \otimes d\varphi \\ &\quad + \sin^2 \varphi dr \otimes dr + \sin \varphi r \cos \varphi dr \otimes d\varphi + r \cos \varphi \sin \varphi d\varphi \otimes dr + r^2 \cos^2 \varphi d\varphi \otimes d\varphi \\ &= dr \otimes dr + r^2 d\varphi \otimes d\varphi \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (g_{ij}^{\text{Polar}}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}$$

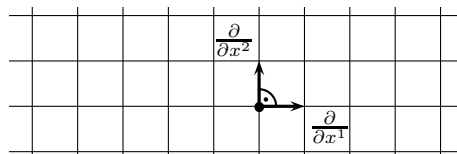
Diese Matrix besagt:

- $\frac{\partial}{\partial r}$  hat die Länge 1,
- $\frac{\partial}{\partial \varphi}$  hat die Länge  $r$ ,
- $\frac{\partial}{\partial r}$  und  $\frac{\partial}{\partial \varphi}$  stehen senkrecht aufeinander.



In kartesischen Koordinaten gilt:

$$(g_{ij}^{\text{kartes}}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$



**Definition.** Seien  $(M, g_M)$  und  $(N, g_N)$  semi-riemannsche Mannigfaltigkeiten. Dann heißt ein lokaler Diffeomorphismus  $\varphi : M \rightarrow N$  *lokale Isometrie*, falls

$$d\varphi|_p : (T_p M, g_M|_p) \rightarrow (T_{\varphi(p)} N, g_N|_{\varphi(p)})$$

für alle  $p \in M$  eine lineare Isometrie ist.

Ist eine lokale Isometrie zusätzlich injektiv, das heißt ein Diffeomorphismus, so heißt sie *Isometrie*.

**Definition.** Ist  $\varphi : M \rightarrow N$  ein lokaler Diffeomorphismus und  $g$  eine semi-riemannsche Metrik auf  $N$ , so heißt die semi-riemannsche Metrik  $\varphi^* g$  auf  $M$  *Zurückziehung* oder *Pull-Back* von  $g$ , wobei

$$(\varphi^* g)|_p := (d\varphi|_p)^*(g|_{\varphi(p)}),$$

das heißt, für  $\xi, \eta \in T_p M$  gilt:

$$(\varphi^* g)|_p(\xi, \eta) = g|_{\varphi(p)}(d\varphi|_p(\xi), d\varphi|_p(\eta)).$$

**Bemerkung.** Die Abbildung  $\varphi^* g$  ist die eindeutige semi-riemannsche Metrik auf  $M$ , für die  $\varphi$  eine lokale Isometrie ist.

**Definition.** Sei  $(M, g)$  eine semi-riemannsche Mannigfaltigkeit. Dann heißt

$$\text{Isom}(M, g) := \{\varphi : M \rightarrow M \text{ Isometrie}\}$$

die *Isometrie-Gruppe* von  $M$ .

**Bemerkung.** Die Menge  $\text{Isom}(M, g)$  ist eine Gruppe bezüglich Komposition mit neutralem Element  $\text{id}_M$ .

**Beispiel.** Wir suchen die Isometrien von  $(\mathbb{R}^n, g_{\text{eukl}})$ . Das bedeutet:

$\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  ist ein Diffeomorphismus mit  $D\varphi|_x \in \text{O}(n)$  für alle  $x \in \mathbb{R}^n$ . Zum Beispiel:

$$\varphi(x) = Ax + b, \quad A \in \text{O}(n), b \in \mathbb{R}^n.$$

Solche  $\varphi$  heißen *euklidische Bewegungen*. Also

$$\{\text{euklidische Bewegungen}\} \subset \text{Isom}(\mathbb{R}^n, g_{\text{eukl}}).$$

**Beispiel.** Für die Isometrien von  $(M, g) = (\mathbb{R}^{n+1}, g_{\text{Mink}})$  gilt:

$\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  ist ein Diffeomorphismus mit

$$\begin{aligned} D\varphi|_x \in \text{O}(n, 1) &:= \{A \in \text{Mat}((n+1) \times (n+1), \mathbb{R}) \mid \langle\langle Ay, Az \rangle\rangle = \langle\langle y, z \rangle\rangle \forall y, z \in \mathbb{R}^{n+1}\} \\ &= \{A \in \text{Mat}((n+1) \times (n+1), \mathbb{R}) \mid A^* I_{1,n} A = I_{1,n}\} \end{aligned}$$

für alle  $x \in \mathbb{R}^n$ , wobei  $I_{1,n} := \begin{pmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Zum Beispiel:

$$\varphi(x) = Ax + b, \quad A \in \text{O}(n, 1), b \in \mathbb{R}^{n+1}.$$

Solche  $\varphi$  heißen *Poincaré-Transformationen*. Es gilt also

$$\{\text{Poincaré-Transformationen}\} \subset \text{Isom}(\mathbb{R}^{n+1}, g_{\text{Mink}}).$$

**Beispiel.** Sei  $(M, g) = (S^n, g_{\text{std}})$ . Zu  $A \in O(n+1)$  setze  $\varphi := A|_{S^n} : S^n \rightarrow S^n$ . Das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} T_p S^n & \xrightarrow{d\varphi|_p} & T_{\varphi(p)} S^n \\ \Phi_p \downarrow & & \downarrow \Phi_{\varphi(p)} \\ \mathbb{R}^{n+1} & \xrightarrow{\mathbf{A}} & \mathbb{R}^{n+1} \end{array}$$

kommutiert, denn sei  $\dot{c}(0) \in T_p S^n$ . Dann:

$$\begin{array}{ccccc} \dot{c}(0) & \xrightarrow{\quad} & (\varphi \circ c)'(0) & = & (A \circ c)'(0) \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ \frac{d}{dt} c|_{t=0} & \xrightarrow{\quad} & \mathbf{A} \cdot \frac{d}{dt} c|_{t=0} & = & \frac{d}{dt} (\mathbf{A} \cdot c)|_{t=0} \end{array}$$

$\Rightarrow d\varphi|_p$  ist eine lineare Isometrie.

$\Rightarrow \varphi$  ist eine Isometrie.

$\Rightarrow O(n+1) \subset \text{Isom}(S^n, g_{\text{std}})$ .

**Bemerkung.** Tatsächlich haben wir in den letzten drei Beispielen bereits alle Isometrien identifiziert, d. h.

$$\begin{aligned} \text{Isom}(\mathbb{R}^n, g_{\text{eukl}}) &= \{\text{euklidische Bewegungen}\}, \\ \text{Isom}(\mathbb{R}^{n+1}, g_{\text{Mink}}) &= \text{Poincaré-Gruppe und} \\ \text{Isom}(S^n, g_{\text{std}}) &= O(n+1) \end{aligned}$$

Der Beweis, dass diese Räume keine weiteren Isometrien haben, erfolgt in Kapitel 4.4.

## 2.3 Differentiation von Vektorfeldern

**Frage.** Wie leitet man Vektorfelder ab?

**Naiver Versuch.** Sei  $p \in M$ ,  $M$  differenzierbare Mannigfaltigkeit. Wähle eine Karte  $x : U \rightarrow V$  auf  $M$  mit  $p \in U$ . Schreibe  $\xi \in T_p M$  als

$$\xi = \sum_{i=1}^n \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p, \quad \xi^i \in \mathbb{R}, \quad \text{und} \quad \eta = \sum_{j=1}^n \eta^j \frac{\partial}{\partial x^j},$$

wobei die  $\eta^j$  glatte Funktionen nahe  $x(p)$  sind. Erkläre die Ableitung von  $\eta$  nach  $\xi$  durch

$$\sum_{i,j=1}^n \xi^i \frac{\partial \eta^j}{\partial x^i} \Big|_{x(p)} \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p.$$

**Problem.** Diese Definition ist abhängig von der Wahl der Karte  $x$ .

**Beispiel.** Sei  $M = \mathbb{R}^2$ . In Polarkoordinaten  $(r, \varphi)$  setze

$$\xi = \eta = \frac{\partial}{\partial \varphi}.$$

Dann ist die Ableitung von  $\eta$  nach  $\xi$  gleich 0, da die Koeffizientenfunktionen  $\eta^j$  konstant sind. In kartesischen Koordinaten  $(x^1, x^2)$  ergibt sich

$$\xi = \eta = -x^2 \frac{\partial}{\partial x^1} + x^1 \frac{\partial}{\partial x^2}.$$

Für die Ableitung von  $\eta$  nach  $\xi$  gilt dann:

$$\begin{aligned} & \left( -x^2 \frac{\partial}{\partial x^1} + x^1 \frac{\partial}{\partial x^2} \right) \left( -x^2 \right) \frac{\partial}{\partial x^1} + \left( -x^2 \frac{\partial}{\partial x^1} + x^1 \frac{\partial}{\partial x^2} \right) (x^1) \frac{\partial}{\partial x^2} \\ &= -x^1 \frac{\partial}{\partial x^1} - x^2 \frac{\partial}{\partial x^2} = -r \frac{\partial}{\partial r} \neq 0. \end{aligned}$$

**Notation.** Sei  $M$  eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, sei  $U \subset M$  offen.

$$\begin{aligned} C^k(U, TM) &:= \{C^k\text{-Vektorfelder, definiert auf } U\}, \\ \Xi_p &:= \bigcup_{\substack{U \subset M \text{ offen} \\ \text{mit } p \in U}} C^\infty(U, TM). \end{aligned}$$

**Definition.** Sei  $(M, g)$  eine semi-riemannsche Mannigfaltigkeit, sei  $p \in M$ . Eine Abbildung

$$\nabla : T_p M \times \Xi_p \rightarrow T_p M$$

heißt *Levi-Civita-Zusammenhang* (in  $p$ ), falls gilt:

(i) *Lokalität*

Für alle  $\xi \in T_p M$ , für alle  $\eta \in C^\infty(U, TM)$  und für alle  $\tilde{U} \subset U$  mit  $p \in \tilde{U}$  gilt:

$$\nabla_\xi \eta = \nabla_\xi (\eta|_{\tilde{U}}).$$

(ii) *Linearität im ersten Argument*

Für alle  $\xi_1, \xi_2 \in T_p M$ , für alle  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  und für alle  $\eta \in \Xi_p$  gilt:

$$\nabla_{\alpha \xi_1 + \beta \xi_2} \eta = \alpha \nabla_{\xi_1} \eta + \beta \nabla_{\xi_2} \eta.$$

(iii) *Additivität im zweiten Argument*

Für alle  $\xi \in T_p M$  und für alle  $\eta_1, \eta_2 \in \Xi_p$  gilt:

$$\nabla_\xi (\eta_1 + \eta_2) = \nabla_\xi \eta_1 + \nabla_\xi \eta_2.$$

(iv) *Produktregel I*

Für alle  $f \in C_p^\infty$ , für alle  $\eta \in \Xi_p$  und für alle  $\xi \in T_p M$  gilt:

$$\nabla_\xi (f \cdot \eta) = \partial_\xi f \cdot \eta|_p + f(p) \cdot \nabla_\xi \eta.$$

## (v) Produktregel II

Für alle  $\xi \in T_p M$  und für alle  $\eta_1, \eta_2 \in \Xi_p$  gilt:

$$\partial_\xi g(\eta_1, \eta_2) = g|_p(\nabla_\xi \eta_1, \eta_2|_p) + g|_p(\eta_1|_p, \nabla_\xi \eta_2).$$

## (vi) Torsionsfreiheit

Für alle Karten  $x : U \rightarrow V$  von  $M$  mit  $p \in U$  gilt:

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}|_p} \frac{\partial}{\partial x^j} = \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}|_p} \frac{\partial}{\partial x^i}$$

für alle  $i$  und  $j$ .

**Bemerkung.** (1) Aus (iii) und (iv) folgt die  $\mathbb{R}$ -Linearität im zweiten Argument. Seien  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned} \nabla_\xi(\alpha\eta_1 + \beta\eta_2) &\stackrel{(iii)}{=} \nabla_\xi(\alpha\eta_1) + \nabla_\xi(\beta\eta_2) \\ &\stackrel{(iv)}{=} \underbrace{\partial_\xi \alpha \cdot \eta_1|_p}_{=0} + \alpha \nabla_\xi(\eta_1) + \underbrace{\partial_\xi \beta \cdot \eta_2|_p}_{=0} + \beta \nabla_\xi(\eta_2) \\ &= \alpha \nabla_\xi(\eta_1) + \beta \nabla_\xi(\eta_2) \end{aligned}$$

(2) Gilt (vi) in einer Karte  $x$ , so auch in jeder anderen Karte  $y$ , die  $p$  enthält.

$$\begin{aligned} \nabla_{\frac{\partial}{\partial y^i}|_p} \frac{\partial}{\partial y^j} &= \nabla_{\frac{\partial}{\partial y^i}|_p} \left( \sum_{k=1}^n \frac{\partial x^k}{\partial y^j} \Big|_p \frac{\partial}{\partial x^k} \right) \\ &\stackrel{(iii)}{=} \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial^2 x^k}{\partial y^i \partial y^j} \Big|_{y(p)} \cdot \frac{\partial}{\partial x^k} + \frac{\partial x^k}{\partial y^j} \Big|_{y(p)} \nabla_{\frac{\partial}{\partial y^i}|_p} \frac{\partial}{\partial x^k} \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 x^k}{\partial y^i \partial y^j} \Big|_{y(p)} \cdot \frac{\partial}{\partial x^k} + \sum_{k,l=1}^n \frac{\partial x^k}{\partial y^j} \Big|_{y(p)} \cdot \frac{\partial x^l}{\partial y^i} \Big|_{y(p)} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^l}|_p} \frac{\partial}{\partial x^k} \end{aligned}$$

Der erste Summand ist in  $i$  und  $j$  symmetrisch wegen des Satzes von Schwarz. Für den zweiten Summanden gilt:

$$\begin{aligned} \sum_{k,l=1}^n \frac{\partial x^k}{\partial y^j} \Big|_{y(p)} \cdot \frac{\partial x^l}{\partial y^i} \Big|_{y(p)} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^l}|_p} \frac{\partial}{\partial x^k} &\stackrel{(vi)}{=} \sum_{k,l=1}^n \frac{\partial x^k}{\partial y^j} \Big|_{y(p)} \cdot \frac{\partial x^l}{\partial y^i} \Big|_{y(p)} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}|_p} \frac{\partial}{\partial x^l} \\ &\xrightarrow{\text{Umbenennen der Indizes}} \sum_{l,k=1}^n \frac{\partial x^l}{\partial y^j} \Big|_{y(p)} \cdot \frac{\partial x^k}{\partial y^i} \Big|_{y(p)} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^l}|_p} \frac{\partial}{\partial x^k} \end{aligned}$$

Dieser ist also auch symmetrisch.

(3) Für Nicht-Koordinatenfelder  $\xi$  und  $\eta$  gilt im Allgemeinen

$$\nabla_\xi \eta \neq \nabla_\eta \xi$$

**Beispiel.**  $\xi = \frac{\partial}{\partial x^i}, \eta = f \cdot \frac{\partial}{\partial x^i}$  mit  $\partial_\xi f \neq 0$ .

**Definition.** Schreibe

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k(x(p)) \cdot \frac{\partial}{\partial x^k} \Big|_p \quad (2.1)$$

Die  $\Gamma_{ij}^k$  heißen *Christoffel-Symbole*.

**Bemerkung.** Die Christoffel-Symbole legen  $\nabla$  fest:

$$\begin{aligned} \nabla_{\sum_{i=1}^n \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}} \sum_{j=1}^n \eta^j \frac{\partial}{\partial x^j} &= \sum_{i,j=1}^n \xi^i \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \left( \eta^j \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \\ &= \sum_{i,j=1}^n \xi^i \left( \frac{\partial \eta^j}{\partial x^i} \Big|_{x(p)} \cdot \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p + \eta^j \Big|_{x(p)} \cdot \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k(x(p)) \cdot \frac{\partial}{\partial x^k} \Big|_p \right) \\ &= \sum_{i,k=1}^n \xi^i \left( \frac{\partial \eta^k}{\partial x^i} \Big|_{x(p)} + \sum_{j=1}^n \eta^j \Big|_{x(p)} \cdot \Gamma_{ij}^k(x(p)) \right) \frac{\partial}{\partial x^k} \Big|_p \end{aligned} \quad (2.2)$$

**Bemerkung.** Torsionsfreiheit bedeutet für die Christoffel-Symbole Symmetrie:

$$\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k \text{ für alle } i, j, k.$$

**SATZ 2.3.1.** Sei  $(M, g)$  eine semi-riemannsche Mannigfaltigkeit, sei  $p \in M$ . Dann gibt es genau einen Levi-Civita-Zusammenhang in  $p$ .

*Beweis.* Eindeutigkeit: Sei  $x : U \rightarrow V$  eine Karte von  $M$  mit  $p \in U$ . Verwende die einsteinsche Summenkonvention.

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} &= \frac{\partial}{\partial x^k} g \left( \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \\ &\stackrel{(v)}{=} g \left( \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}} \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right) + g \left( \frac{\partial}{\partial x^i}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}} \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \\ &\stackrel{2.2}{=} g \left( \Gamma_{ki}^l \frac{\partial}{\partial x^l}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right) + g \left( \frac{\partial}{\partial x^i}, \Gamma_{kj}^l \frac{\partial}{\partial x^l} \right) \\ &= \Gamma_{ki}^l \cdot g_{lj} + \Gamma_{kj}^l \cdot g_{il} \end{aligned}$$

Daraus folgen durch Vertauschen der Indizes die Gleichungen:

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = \Gamma_{ki}^l \cdot g_{lj} + \Gamma_{kj}^l \cdot g_{il} \quad (A)$$

$$\begin{matrix} i \rightarrow i \\ j \rightarrow k \\ k \rightarrow j \end{matrix} \quad \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} = \Gamma_{ji}^l \cdot g_{lk} + \Gamma_{jk}^l \cdot g_{il} \quad (B)$$

$$\begin{matrix} i \rightarrow k \\ j \rightarrow j \\ k \rightarrow i \end{matrix} \quad \frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i} = \Gamma_{ik}^l \cdot g_{lj} + \Gamma_{ij}^l \cdot g_{kl} \quad (C)$$

Die Gleichung (A)–(B)+(C) ergibt mit der Torsionsfreiheit:

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i} = 2\Gamma_{ki}^l \cdot g_{lj}.$$

Sei  $(g^{ij})_{i,j=1,\dots,n}$  die zu  $(g_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$  inverse Matrix. Diese kann gebildet werden, da  $g|_p$  nicht entartet ist. Es gilt also:

$$g^{ij} \cdot g_{jk} = \delta_k^i.$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \left( \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i} \right) g^{jm} = 2\Gamma_{ki}^l \cdot \underbrace{g_{lj} \cdot g^{jm}}_{=\delta_l^m} \\
&\Rightarrow \Gamma_{ki}^m = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i} \right) g^{jm}
\end{aligned}$$

Etwas schöner lässt sich das schreiben (mit  $k \rightarrow j, m \rightarrow k, j \rightarrow m$ ):

$$\boxed{\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^n g^{mk} \left( \frac{\partial g_{im}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jm}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^m} \right)} \quad (2.3)$$

Daraus folgt, dass die Christoffel-Symbole und damit auch  $\nabla$  durch die Komponenten der semi-riemannschen Metrik und ihre ersten Ableitungen festgelegt sind.

*Existenz:* Definiere die  $\Gamma_{ij}^k$  durch Gleichung (2.3) und  $\nabla$  durch Gleichung (2.2). Dann gilt:

- (i) Lokalität ist erfüllt.
- (ii) Linearität im ersten Argument ist erfüllt.
- (iii) Additivität im zweiten Argument ist erfüllt.
- (iv) Für die erste Produktregel gilt:

$$\begin{aligned}
\nabla_\xi(f\eta) &= \xi^i \left( \frac{\partial(f \cdot \eta^k)}{\partial x^i} + f \eta^j \Gamma_{ij}^k \right) \frac{\partial}{\partial x^k} \\
&= f \cdot \xi^i \left( \frac{\partial \eta^k}{\partial x^i} + \eta^j \Gamma_{ij}^k \right) \frac{\partial}{\partial x^k} + \xi^i \frac{\partial f}{\partial x^i} \eta^k \frac{\partial}{\partial x^k} \\
&= f \cdot \nabla_\xi \eta + \partial_\xi f \cdot \eta
\end{aligned}$$

Bislang wurde Gleichung 2.3 noch nicht benutzt.

- (v) Nachrechnen:

$$\begin{aligned}
&\partial_\zeta g(\xi, \eta) - g(\nabla_\zeta \xi, \eta) - g(\xi, \nabla_\zeta \eta) \\
&= \zeta^k \frac{\partial}{\partial x^k} (g_{ij} \xi^i \eta^j) - g_{ij} \zeta^k \left( \frac{\partial \xi^i}{\partial x^k} + \xi^l \Gamma_{lk}^i \right) \eta^j - g_{ij} \xi^i \zeta^k \left( \frac{\partial \eta^j}{\partial x^k} + \eta^l \Gamma_{lk}^j \right) \\
&= \xi^i \eta^j \zeta^k \left( \frac{g_{ij}}{\partial x^k} - g_{lj} \Gamma_{ik}^l - g_{il} \Gamma_{jk}^l \right) \\
&\stackrel{2.3}{=} \xi^i \eta^j \zeta^k \left( \frac{g_{ij}}{\partial x^k} - \frac{1}{2} \underbrace{g_{lj} g^{ml}}_{=\delta_j^m} \left( \frac{\partial g_{im}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{km}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^m} \right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2} \underbrace{g_{il} g^{ml}}_{=\delta_i^m} \left( \frac{\partial g_{jm}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{km}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^m} \right) \right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

- (vi) Symmetrie der Christoffel-Symbole ist klar auf Grund von Gleichung (2.3).

□



**Bemerkung.** Für eine Karte  $x : U \rightarrow V$  auf  $(M, g)$  bilden die Christoffel-Symbole

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^n g^{mk} \left( \frac{\partial g_{im}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jm}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^m} \right) : V \rightarrow \mathbb{R}$$

$C^\infty$ -Funktionen.

**Bemerkung.** Als wir am Anfang dieses Abschnittes versucht haben, naiv Vektorfelder zu differenzieren, entsprach dies dem Ansatz  $\Gamma_{ij}^k = 0$ . Die allgemeine Formel ist aber durch (2.2) gegeben.

**Beispiel.** Sei  $(M, g) = (\mathbb{R}^2, g_{\text{eukl}})$ . In kartesischen Koordinaten  $x^1, x^2$  sind die  $g_{ij} = \delta_i^j$  konstant. Daraus folgt:  $\Gamma_{ij}^k = 0$ . In diesem Fall sind einfach die Koeffizientenfunktionen zu differenzieren:

$$\begin{aligned} \nabla_{\frac{\partial}{\partial \varphi}} \frac{\partial}{\partial \varphi} &= \nabla_{-x^2 \frac{\partial}{\partial x^1} + x^1 \frac{\partial}{\partial x^2}} \left( -x^2 \frac{\partial}{\partial x^1} + x^1 \frac{\partial}{\partial x^2} \right) \\ &= \left( -x^2 \frac{\partial}{\partial x^1} + x^1 \frac{\partial}{\partial x^2} \right) (-x^2) \frac{\partial}{\partial x^1} + \left( -x^2 \frac{\partial}{\partial x^1} + x^1 \frac{\partial}{\partial x^2} \right) (x^1) \frac{\partial}{\partial x^2} \\ &= -x^1 \frac{\partial}{\partial x^1} - x^2 \frac{\partial}{\partial x^2} = -r \frac{\partial}{\partial r} \end{aligned}$$

In Polarkoordinaten  $r, \varphi$  ergibt sich:

$$(g_{ij})(r, \varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}, \quad (g^{ij})(r, \varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} \end{pmatrix}.$$

Die Christoffel-Symbole sind dann:

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2} (1 \cdot (0 + 0 - 0) + 0 \cdot \dots) = 0.$$

Analog:  $\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{11}^2 = \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = \Gamma_{22}^2 = 0$ . Außerdem:

$$\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial g_{12}}{\partial \varphi} + \frac{\partial g_{22}}{\partial r} - \frac{\partial g_{12}}{\partial \varphi} \right) + 0 \cdot \dots \right) = \frac{1}{r}, \quad \Gamma_{22}^1 = -r.$$

Daraus folgt:  $\nabla_{\frac{\partial}{\partial \varphi}} \frac{\partial}{\partial \varphi} = \Gamma_{22}^1 \frac{\partial}{\partial r} + \Gamma_{22}^2 \frac{\partial}{\partial \varphi} = -r \frac{\partial}{\partial r}$ .

**Sprechweise.**  $\nabla_\xi \eta$  heißt auch *kovariante Ableitung* von  $\eta$  nach  $\xi$ .

$\nabla$  war definiert als eine Abbildung  $T_p M \times \Xi_p \rightarrow T_p M$ .  $\nabla$  liefert aber auch eine Abbildung

$$\nabla : \Xi(M) \times \Xi(M) \rightarrow \Xi(M),$$

wobei  $\Xi(M) := C^\infty(TM, TM)$ , durch

$$(\nabla_\xi \eta)(p) := \nabla_{\xi(p)} \eta.$$

Wir wissen:  $\nabla_\xi(\alpha_1 \eta_1 + \alpha_2 \eta_2) = \alpha_1 \nabla_\xi \eta_1 + \alpha_2 \nabla_\xi \eta_2$  für  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ . Für  $\xi$  gilt sogar:

$$\nabla_{f_1 \xi_1 + f_2 \xi_2} \eta = f_1 \nabla_{\xi_1} \eta + f_2 \nabla_{\xi_2} \eta,$$

wobei  $f_1, f_2 \in C^\infty(M)$ . Also ist  $\nabla_\xi \eta$  in  $\xi$  sogar  $C^\infty(M)$ -linear, in  $\eta$  dagegen nur  $\mathbb{R}$ -linear.

**Bemerkung.** Zur Berechnung von  $\nabla_\xi \eta$  mit  $\xi = \dot{c}(0)$  muss man  $\eta$  nur längs der Kurve  $c$  kennen, denn:

$$\begin{aligned}
 \nabla_{\dot{c}(0)} \left( \sum_{j=1}^n \eta^j \frac{\partial}{\partial x^j} \right) &= \nabla_{\sum_{i=1}^n \dot{c}^i(0) \frac{\partial}{\partial x^i}} \left( \sum_{j=1}^n \eta^j \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \\
 &= \sum_{i,j=1}^n \dot{c}^i(0) \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \left( \eta^j \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \\
 &= \sum_{i,j=1}^n \dot{c}^i(0) \left( \frac{\partial \eta^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} + \sum_{k=1}^n \eta^j \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k} \right) \\
 &= \sum_{j=1}^n \frac{d}{dt} (\eta^j \circ c)|_{t=0} \frac{\partial}{\partial x^j} + \sum_{i,j,k=1}^n \dot{c}^i(0) \eta^j \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k}
 \end{aligned}$$

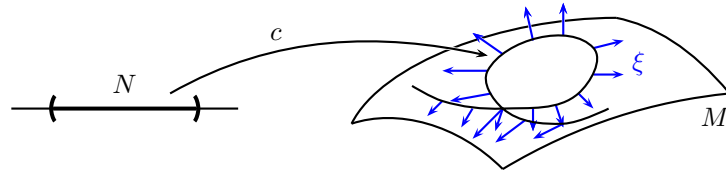
## 2.4 Vektorfelder längs Abbildungen

**Definition.** Seien  $M$  und  $N$  differenzierbare Mannigfaltigkeiten, sei  $\varphi : N \rightarrow M$ . Dann heißt eine Abbildung  $\xi : N \rightarrow TM$  *Vektorfeld längs  $\varphi$* , falls für die Fußpunkt-Abbildung  $\pi_M : TM \rightarrow M$  gilt:

$$\pi_M \circ \xi = \varphi.$$

**Beispiel.** • *Vektorfelder längs Kurven.*

Sei  $N = I \subset \mathbb{R}$  ein offenes Intervall, sei  $c = \varphi : N = I \rightarrow M$  eine Kurve.



Etwa  $\xi(t) = \dot{c}(t) := \dot{c}_t(0)$ , wobei  $c_t(s) := c(t+s)$ , das Geschwindigkeitsfeld von  $c$ .



- Seien  $N = M$ ,  $\varphi = \text{id}$ . Dann ist ein Vektorfeld längs  $\text{id}$  gleich einem Vektorfeld im bisherigen Sinne.
- Sei  $\varphi$  konstant, das heißt  $\varphi(x) = p$  für alle  $x \in N$ . Dann ist ein Vektorfeld längs  $\varphi$  eine Abbildung  $N \rightarrow T_p M$ .
- Sei  $\varphi$  differenzierbar und sei  $\xi$  ein Vektorfeld auf  $N$ . Dann ist

$$p \mapsto d\varphi|_p(\xi(p)) \in T_{\varphi(p)} M$$

ein Vektorfeld längs  $\varphi$ .

- Ist  $\xi$  ein Vektorfeld auf  $M$ , so ist

$$p \mapsto \xi(\varphi(p))$$

ein Vektorfeld längs  $\varphi$ .

**Definition.** Sei  $N$  eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, sei  $(M, g)$  eine semi-riemannsche Mannigfaltigkeit, sei  $\varphi : N \rightarrow M$  differenzierbar. Sei  $\eta : N \rightarrow TM$  ein differenzierbares Vektorfeld längs  $\varphi$ . Seien  $p \in N, \xi \in T_p N$ . Wir definieren die *kovariante Ableitung*  $\nabla_\xi \eta \in T_{\varphi(p)} M$  wie folgt:

Wähle eine Karte  $x : U \rightarrow V$  von  $M$  mit  $\varphi(p) \in U$ , schreibe

$$\eta(q) = \sum_{j=1}^n \eta^j(q) \cdot \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_{\varphi(q)}$$

mit differenzierbaren Funktionen  $\eta^1, \dots, \eta^n$ , definiert in der Umgebung  $\varphi^{-1}(U)$  von  $p$ . Wähle ferner eine Kurve  $c$  mit  $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow N$  mit  $\dot{c}(0) = \xi$  und setze

$$\begin{aligned} \nabla_\xi \eta &:= \sum_{k=1}^n \left( \frac{d}{dt} (\eta^k \circ c) \Big|_{t=0} + \sum_{i,j=1}^n \eta^j(p) \frac{d}{dt} (\varphi^i \circ c) \Big|_{t=0} \Gamma_{ij}^k(x(\varphi(p))) \right) \frac{\partial}{\partial x^k} \Big|_{\varphi(p)} \\ &= \sum_{k=1}^n \left( \partial_\xi \eta^k + \sum_{i,j=1}^n \eta^j(p) d\varphi(\xi)^i \Gamma_{ij}^k(x(\varphi(p))) \right) \frac{\partial}{\partial x^k} \Big|_{\varphi(p)}. \end{aligned}$$

**PROPOSITION 2.4.1.** Seien  $N$  eine differenzierbare Mannigfaltigkeit,  $(M, g)$  eine semi-riemannsche Mannigfaltigkeit, sei  $\varphi : N \rightarrow M$  differenzierbar. Seien  $\eta, \eta_1, \eta_2$  differenzierbare Vektorfelder längs  $\varphi$ ,  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ , sei  $f : N \rightarrow \mathbb{R}$  eine differenzierbare Funktion. Seien ferner  $p \in N$  und  $\xi, \xi_1, \xi_2 \in T_p M$ . Dann ist die kovariante Ableitung  $\nabla_\xi \eta$  unabhängig von der Wahl der Karte  $x$  und der Kurve  $c$  mit  $\dot{c}(0) = \xi$  definiert und es gilt:

- (0) Ist  $\eta$  von der Form  $\eta = \zeta \circ \varphi$ , wobei  $\zeta$  ein differenzierbares Vektorfeld auf  $M$  ist, so gilt

$$\nabla_\xi \eta = \nabla_{d\varphi|_p(\xi)} \zeta.$$

- (i) *Lokalität:* Ändert man  $\eta$  außerhalb einer Umgebung von  $p$  ab, so ändert sich  $\nabla_\xi \eta$  nicht.

- (ii) *Linearität im ersten Argument:*

$$\nabla_{\alpha_1 \xi_1 + \alpha_2 \xi_2} \eta = \alpha_1 \nabla_{\xi_1} \eta + \alpha_2 \nabla_{\xi_2} \eta.$$

- (iii) *Linearität im zweiten Argument:*

$$\nabla_\xi (\alpha_1 \eta_1 + \alpha_2 \eta_2) = \alpha_1 \nabla_\xi \eta_1 + \alpha_2 \nabla_\xi \eta_2.$$

- (iv) *Produktregel I:*

$$\nabla_\xi (f \cdot \eta) = \partial_\xi f \cdot \eta(p) + f(p) \nabla_\xi \eta.$$

- (v) *Produktregel II:*

$$\partial_\xi g(\eta_1, \eta_2) = g|_{\varphi(p)}(\nabla_\xi \eta_1, \eta_2(p)) + g|_{\varphi(p)}(\eta_1(p), \nabla_\xi \eta_2).$$

- (vi) *Torsionsfreiheit:* Für alle Karten  $y$  von  $N$  und alle  $i, j = 1, \dots, \dim(N)$  gilt:

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial y^i}} d\varphi \left( \frac{\partial}{\partial y^j} \right) = \nabla_{\frac{\partial}{\partial y^j}} d\varphi \left( \frac{\partial}{\partial y^i} \right).$$

*Beweis.* Ergibt sich aus der Definition und den entsprechenden Axiomen für den Levi-Civita-Zusammenhang  $\square$

**Notation.** Für lokale Koordinaten  $y$  auf  $N$  schreiben wir auch

$$\frac{\nabla \eta}{\partial y^l}(p) := \nabla_{\frac{\partial}{\partial y^l}|_p} \eta = \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial \eta^k}{\partial y^l} \Big|_{y(p)} + \sum_{i,j} \frac{\partial \varphi^i}{\partial y^l}(p) \cdot \eta^j(y(p)) \cdot \Gamma_{ij}^k(x(\varphi(p))) \right) \frac{\partial}{\partial x^k}.$$

Speziell falls  $N$  eindimensional ist, schreibe statt

$$\frac{\nabla \eta}{\partial t} =: \frac{\nabla \eta}{dt}.$$

**Beispiel.** Sei  $(M, g) = (\mathbb{R}^n, g_{\text{eukl}})$  oder  $(\mathbb{R}^n, g_{\text{Mink}})$ .

Dann sind in kartesischen Koordinaten die  $g_{ij}$  konstant. Deshalb verschwinden die Christoffel-Symbole:  $\Gamma_{ij}^k = 0$ .

Für  $N = I \subset \mathbb{R}$  Intervall, für eine  $\mathcal{C}^1$ -Kurve  $c : I \rightarrow M$  und für ein  $\mathcal{C}^1$ -Vektorfeld  $\xi$  längs  $c$  gilt mit  $\xi(t) = \sum_{j=1}^n \xi^j(t) \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_{c(t)}$  gilt dann:

$$\frac{\nabla}{dt} \xi(t) = \sum_{j=1}^n \dot{\xi}^j(t) \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_{c(t)}.$$

## 2.5 Parallelverschiebung

**Definition.** Sei  $(M, g)$  eine semi-riemannsche Mannigfaltigkeit, sei  $c : I \rightarrow M$  eine  $\mathcal{C}^1$ -Kurve. Ein  $\mathcal{C}^1$ -Vektorfeld  $\xi$  längs  $c$  heißt *parallel*, falls

$$\frac{\nabla}{dt} \xi \equiv 0.$$

**Beispiel.** Sei  $(M, g) = (\mathbb{R}^n, g_{\text{eukl}})$  oder  $(\mathbb{R}^n, g_{\text{Mink}})$ . In kartesischen Koordinaten gilt:

$$\begin{aligned} \xi(t) = \sum_{j=1}^n \xi^j(t) \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_{c(t)} & \text{ ist parallel} \\ \Leftrightarrow \dot{\xi}^j(t) = 0 & \text{ für alle } t \in I \\ \Leftrightarrow \text{Die } \xi^j & \text{ sind konstant.} \end{aligned}$$

**Beispiel.** Sei  $(M, g) = (\mathbb{R}^n, g_{\text{eukl}})$ . In Polarkoordinaten  $(r, \varphi)$  gilt:

$$\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{11}^2 = \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = \Gamma_{22}^2 = 0, \quad \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{r}, \quad \Gamma_{22}^1 = -r.$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned}
 \xi &= \xi^1 \frac{\partial}{\partial r} + \xi^2 \frac{\partial}{\partial \varphi} \text{ ist parallel} \\
 \Leftrightarrow 0 &= \frac{\nabla}{dt} \xi \\
 &= \dot{\xi}^1 \frac{\partial}{\partial r} + \xi^1 \nabla_{\dot{c} = \dot{c}^1 \frac{\partial}{\partial r} + \dot{c}^2 \frac{\partial}{\partial \varphi}} \frac{\partial}{\partial r} + \dot{\xi}^2 \frac{\partial}{\partial \varphi} + \xi^2 \nabla_{\dot{c}} \frac{\partial}{\partial \varphi} \\
 &= \dot{\xi}^1 \frac{\partial}{\partial r} + \xi^1 \left( \dot{c}^1 \cdot 0 + \dot{c}^2 \cdot \frac{1}{c^1} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) + \dot{\xi}^2 \frac{\partial}{\partial \varphi} + \xi^2 \left( \dot{c}^1 \frac{1}{c^1} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \dot{c}^2 (-c^1) \frac{\partial}{\partial r} \right) \\
 &= (\dot{\xi}^1 - c^1 \dot{c}^2 \xi^2) \frac{\partial}{\partial r} + \left( \dot{\xi}^2 + \frac{\dot{c}^2}{c^1} \xi^1 + \frac{\dot{c}^1}{c^1} \xi^2 \right) \frac{\partial}{\partial \varphi}
 \end{aligned}$$

Das ist gleichbedeutend mit:

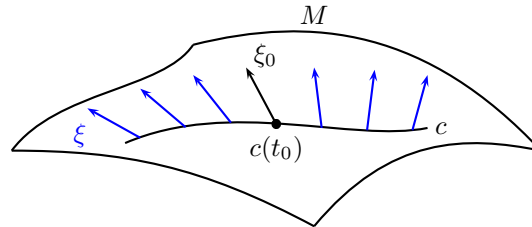
$$\dot{\xi}^1 - c^1 \dot{c}^2 \xi^2 = 0, \quad \dot{\xi}^2 + \frac{\dot{c}^2}{c^1} \xi^1 + \frac{\dot{c}^1}{c^1} \xi^2 = 0,$$

d. h.

$$\begin{pmatrix} \dot{\xi}^1 \\ \dot{\xi}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & c^1 \dot{c}^2 \\ -\frac{\dot{c}^2}{c^1} & -\frac{\dot{c}^1}{c^1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \end{pmatrix}$$

Dies ist ein lineares System gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung für  $(\xi^1, \xi^2)$ .

**PROPOSITION 2.5.1.** Sei  $(M, g)$  eine semi-riemannsche Mannigfaltigkeit, sei  $c : I \rightarrow M$  eine  $C^1$ -Kurve, sei  $t_0 \in I$ . Zu  $\xi_0 \in T_{c(t_0)} M$  gibt es genau ein paralleles Vektorfeld  $\xi$  längs  $c$  mit  $\xi(t_0) = \xi_0$ .



*Beweis.* **Fall 1:** Sei  $c(I)$  in einer Karte enthalten.

Sei  $x : U \rightarrow V$  eine solche Karte. Dann ist die Bedingung  $\frac{\nabla}{dt} \xi = 0$  äquivalent zu

$$\dot{\xi}^k = - \sum_{i,j=1}^n (\Gamma_{ij}^k \circ x \circ c) \dot{c}^i \cdot \xi^j,$$

was ein lineares gewöhnliches Differentialgleichungssystem erster Ordnung ist. Es existiert also eine eindeutige Lösung mit der Anfangsbedingung

$$(\xi^1(t_0), \dots, \xi^n(t_0)) = (\xi_0^1, \dots, \xi_0^n).$$

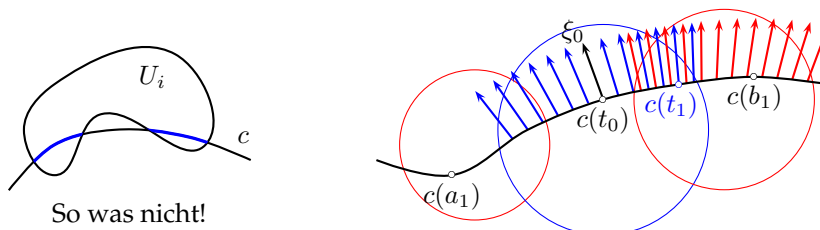
Wegen der Linearität des Systems ist die Lösung auf ganz  $I$  definiert.

**Fall 2:** Sei  $c(I)$  nicht in einer Karte enthalten.

*Existenz:* Schreibe  $I = (a, b)$ , wobei  $-\infty \leq a < b \leq \infty$ . Wähle  $a < a_i < t_0 < b_i < b$  mit  $a_i \rightarrow a$  und  $b_i \rightarrow b$ .

Dann ist  $c([a_i, b_i])$  kompakt und kann durch endlich viele Karten  $x_1 : U_1 \rightarrow V_1, \dots, x_N : U_N \rightarrow V_N$  überdeckt werden.

O. B. d. A. sei  $U_i \cap c([a_1, b_1])$  zusammenhängend.



O. B. d. A. sei  $c(t_0) \in U_1$ . Löse gemäß Fall 1 die Gleichung  $\frac{\nabla}{dt}\xi = 0$  mit  $\xi(t_0) = \xi_0$  in  $U_1$ .

Falls die Lösung noch nicht auf ganz  $[a_1, b_1]$  erklärt ist, wähle  $t_1 \in (a_1, b_1)$  mit  $c(t_1) \in U_1 \cap U_2$ . Löse dann die Gleichung in der Karte  $x_2$  mit der Anfangsbedingung  $\xi(t_1)$ , gegeben durch die vorherige Lösung.

Wegen der Eindeutigkeit gemäß Fall 1 stimmen die beiden parallelen Vektorfelder auf  $U_1 \cap U_2$  überein, usw.

Nach endlich vielen Schritten erhalten wir ein paralleles Vektorfeld, das auf  $[a_1, b_1]$  definiert ist.

Dasselbe für das nächste kompakte Teilintervall  $[a_2, b_2]$  liefert ein paralleles Vektorfeld auf  $[a_2, b_2]$ , das dasjenige auf  $[a_1, b_1]$  fortsetzt.

Induktion liefert dann ein paralleles Vektorfeld  $\xi$  auf  $[a_i, b_i]$  mit  $\xi(t_0) = \xi_0$ . Wegen  $\bigcup_{i=1}^N [a_i, b_i] = (a, b)$  erhalten wir ein paralleles Vektorfeld  $\xi$  mit  $\xi(t_0) = \xi_0$  auf  $(a, b)$ .

*Eindeutigkeit:* Seien  $\xi$  und  $\tilde{\xi}$  zwei parallele Vektorfelder längs  $c$  mit  $\xi(t_0) = \tilde{\xi}(t_0) = \xi_0$ . Schreibe  $I = I_{\text{gut}} \dot{\cup} I_{\text{schlecht}}$ , wobei

$$\begin{aligned} I_{\text{gut}} &= \{t \in I \mid \xi(t) = \tilde{\xi}(t)\} \\ I_{\text{schlecht}} &= \{t \in I \mid \xi(t) \neq \tilde{\xi}(t)\} \end{aligned}$$

Da  $\xi$  und  $\tilde{\xi}$  stetig sind, ist  $I_{\text{gut}}$  abgeschlossen in  $I$ . Für  $t_1 \in I_{\text{gut}}$  wähle eine Karte  $x : U \rightarrow V$ , die  $c(t_1)$  enthält. Nach dem ersten Fall gilt dann:

$$\xi(t) = \tilde{\xi}(t) \text{ für alle } t \in I \text{ mit } c(t) \in U.$$

$\Rightarrow$  Eine Umgebung von  $t_1$  ist in  $I_{\text{gut}}$  enthalten.

$\Rightarrow I_{\text{gut}}$  ist offen in  $I$ . Also

$$I = \underbrace{I_{\text{gut}}}_{\ni t_0} \dot{\cup} I_{\text{schlecht}}.$$

Da  $I$  zusammenhängend ist, muss gelten:  $I_{\text{schlecht}} = \emptyset$  und daher

$$\xi(t) = \tilde{\xi}(t) \text{ für alle } t \in I_{\text{gut}} = I.$$

□

**Definition.** Seien  $t_0, t_1 \in I$ . Die Abbildung

$$P_{c,t_0,t_1} : T_{c(t_0)}M \rightarrow T_{c(t_1)}M, \xi_0 \mapsto \xi(t_1)$$

heißt *Parallelverschiebung* längs  $c$ , wobei  $\xi(t)$  das parallele Vektorfeld längs  $c$  ist mit  $\xi(t_0) = \xi_0$ .

**PROPOSITION 2.5.2.** Für die Parallelverschiebung gilt:

- (a)  $P_{c,t_0,t_1} : (T_{c(t_0)}M, g|_{c(t_0)}) \rightarrow (T_{c(t_1)}M, g|_{c(t_1)})$  ist eine lineare Isometrie.
- (b)  $P_{c,t_0,t_2} = P_{c,t_1,t_2} \circ P_{c,t_0,t_1}$ .

*Beweis.*

- (a) Seien  $\xi_0, \eta_0 \in T_{c(t_0)}M$ . Seien  $\xi, \eta$  die zugehörigen parallelen Vektorfelder längs  $c$ . Dann

$$\frac{d}{dt}g(\xi, \eta) = g\left(\underbrace{\frac{\nabla}{dt}\xi}_{=0}, \eta\right) + g\left(\xi, \underbrace{\frac{\nabla}{dt}\eta}_{=0}\right) = 0.$$

Daher ist  $g(\xi, \eta)$  konstant und somit

$$\begin{aligned} g(P_{c,t_0,t_1}(\xi_0), P_{c,t_0,t_1}(\eta_0)) &= g(\xi(t_1), \eta(t_1)) \\ &= g(\xi(t_0), \eta(t_0)) \\ &= g(\xi_0, \eta_0). \end{aligned}$$

- (b) Klar.

□

**Bemerkung.** Zu  $\xi_0 \in T_{c(t_0)}M$  ist das parallele Vektorfeld  $\xi$  mit  $\xi(t_0) = \xi_0$  gegeben durch

$$\xi(t) = P_{c,t_0,t_1}(\xi_0).$$

Wir haben an geometrischer Struktur:

$$\begin{array}{ccccc} \text{semi-riemann-} & & \text{kovariante} & & \text{Parallelver-} \\ \text{sche Metrik} & \rightsquigarrow & \text{Ableitung } \nabla & \rightsquigarrow & \text{schiebung } P \end{array}$$

Man kann  $\nabla$  aus  $P$  rekonstruieren:

**PROPOSITION 2.5.3.** Sei  $(M, g)$  eine semi-riemannsche Mannigfaltigkeit, sei  $c : I \rightarrow M$  eine  $C^1$ -Kurve, sei  $t_0 \in I$ . Dann gilt für jedes  $C^1$ -Vektorfeld  $\xi$  längs  $c$ :

$$\frac{\nabla}{dt}\xi|_{t_0} = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{P_{c,t,t_0}(\xi(t)) - \xi(t_0)}{t - t_0}.$$

*Beweis.* Sei  $e_1(t_0), \dots, e_n(t_0)$  eine Basis von  $T_{c(t_0)}M$ . Seien  $e_1(t), \dots, e_n(t)$  die zugehörigen parallelen Vektorfelder längs  $c$ .

Dann folgt aus der Proposition 10.2 (a), dass  $e_1(t), \dots, e_n(t)$  eine Basis von  $T_{c(t)}M$  ist für alle  $t \in I$ . Schreibe  $\xi(t) = \sum_{j=1}^n \xi^j(t) e_j(t)$ . Dann

$$\begin{aligned} \frac{P_{c,t,t_0}(\xi(t)) - \xi(t_0)}{t - t_0} &= \frac{\sum_{j=1}^n \xi^j(t) \overbrace{P_{c,t,t_0}(e_j(t))}^{=e_j(t_0)} - \sum_{j=1}^n \xi^j(t_0) e_j(t_0)}{t - t_0} \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{\xi^j(t) - \xi^j(t_0)}{t - t_0} e_j(t_0) \\ &\xrightarrow{t \rightarrow t_0} \sum_{j=1}^n \dot{\xi}^j(t_0) e_j(t_0) \end{aligned}$$

Andererseits gilt

$$\begin{aligned} \frac{\nabla}{dt} \xi|_{t_0} &= \frac{\nabla}{dt} \left( \sum_{j=1}^n \xi^j e_j \right) \Big|_{t=0} \\ &= \sum_{j=1}^n \left( \dot{\xi}^j(t_0) e_j(t_0) + \xi^j(t_0) \underbrace{\frac{\nabla}{dt} e_j|_{t_0}}_{=0} \right) \\ &= \sum_{j=1}^n \dot{\xi}^j(t_0) e_j(t_0) \end{aligned}$$

□

**Bemerkung.** Ist  $\psi : M \rightarrow \tilde{M}$  eine lokale Isometrie und ist  $c : I \rightarrow M$  eine  $\mathcal{C}^1$ -Kurve, so setze  $\tilde{c} := \psi \circ c$ . Dann gilt für jedes  $\mathcal{C}^1$ -Vektorfeld  $\xi$  längs  $c$ :

$$\xi \text{ parallel längs } c \iff \tilde{\xi} := d\psi \circ \xi \text{ parallel längs } \tilde{c}.$$

Insbesondere kommutiert das Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} T_{c(t_0)}M & \xrightarrow{P_{c,t_0,t_1}} & T_{c(t_1)}M \\ d\psi|_{c(t_0)} \downarrow & & \downarrow d\psi|_{c(t_1)} \\ T_{\tilde{c}(t_0)}\tilde{M} & \xrightarrow{P_{\tilde{c},t_0,t_1}} & T_{\tilde{c}(t_1)}\tilde{M} \end{array}$$

**Bemerkung.** Im Allgemeinen ist  $P_{c,t_0,t_1} \neq P_{\tilde{c},s_0,s_1}$ , auch wenn  $c(t_0) = \tilde{c}(s_0)$  und  $c(t_1) = \tilde{c}(s_1)$ .

**Beispiel.** Für die Parallelverschiebung auf  $(M, g) = (S^2, g_{\text{std}})$  siehe auch:

<http://www.math.uiuc.edu/~jms/java/dragosphere/>



## 2.6 Geodätische

**Definition.** Sei  $(M, g)$  eine semi-riemannsche Mannigfaltigkeit, sei  $c : [a, b] \rightarrow M$  eine glatte Kurve. Dann heißt

$$E[c] := \frac{1}{2} \int_a^b g(\dot{c}(t), \dot{c}(t)) dt$$

Energie von  $c$ .

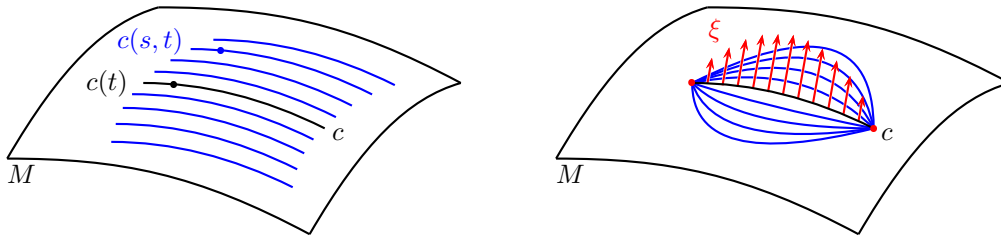
**Bemerkung.** Falls  $(M, g)$  riemannsch ist, so gilt  $g(\dot{c}, \dot{c}) \geq 0$  und somit  $E[c] \geq 0$  (und gleich 0 genau dann, wenn  $c$  konstant ist).

**Frage.** Gibt es Kurven minimaler Energie zu vorgegebenen Endpunkten (oder allgemeiner: stationärer Energie)?

**Definition.** Sei  $M$  eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, sei  $c : [a, b] \rightarrow M$  eine glatte Kurve. Eine *Variation* von  $c$  ist eine glatte Abbildung

$$c : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [a, b] \rightarrow M$$

mit  $c(0, t) = c(t)$  für alle  $t \in [a, b]$ . Falls  $c(s, a) = c(a)$  und  $c(s, b) = c(b)$  für alle  $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ , so heißt  $c(s, t)$  *Variation mit festem Endpunkt*.



Das Vektorfeld  $\xi(t) := \frac{\partial c}{\partial s}(0, t)$  heißt das *Variationsvektorfeld*.

**Bemerkung.** Das Variationsvektorfeld  $\xi$  einer Variation mit festen Endpunkten erfüllt:

$$\xi(a) = 0 \text{ und } \xi(b) = 0.$$

**SATZ 2.6.1 (Erste Variation der Energie).** Sei  $(M, g)$  eine semi-riemannsche Mannigfaltigkeit, sei  $c : [a, b] \rightarrow M$  eine glatte Kurve, sei  $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [a, b] \rightarrow M$  eine Variation dieser Kurve. Schreibe  $c_s(t) = c(s, t)$ . Sei  $\xi$  das Variationsvektorfeld. Dann gilt

$$\frac{d}{ds} E[c_s] \Big|_{s=0} = - \int_a^b g \left( \xi(t), \frac{\nabla}{dt} \dot{c}(t) \right) dt + g(\xi(b), \dot{c}(b)) - g(\xi(a), \dot{c}(a)).$$

Beweis.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds} E[c_s]|_{s=0} &= \frac{1}{2} \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \int_a^b g(\dot{c}_s(t), \dot{c}_s(t)) dt \\
&= \frac{1}{2} \int_a^b \frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=0} g \left( \frac{\partial c}{\partial t}(s, t), \frac{\partial c}{\partial t}(s, t) \right) dt \\
&= \frac{1}{2} \int_a^b 2 \cdot g \left( \frac{\nabla}{\partial s} \frac{\partial c}{\partial t}(0, t), \frac{\partial c}{\partial t}(0, t) \right) dt \\
&\stackrel{(*)}{=} \int_a^b g \left( \frac{\nabla}{\partial t} \frac{\partial c}{\partial s}(0, t), \frac{\partial c}{\partial t}(0, t) \right) dt \\
&= \int_a^b g \left( \frac{\nabla}{dt} \xi(t), \dot{c}(t) \right) dt \\
&= \int_a^b \left[ \frac{d}{dt} g(\xi(t), \dot{c}(t)) - g \left( \xi(t), \frac{\nabla}{dt} \dot{c}(t) \right) \right] dt \\
&= g(\xi(b), \dot{c}(b)) - g(\xi(a), \dot{c}(a)) - \int_a^b g \left( \xi(t), \frac{\nabla}{dt} \dot{c}(t) \right) dt.
\end{aligned}$$

Dabei folgt (\*) aus der Torsionsfreiheit des Levi-Civita-Zusammenhangs.  $\square$

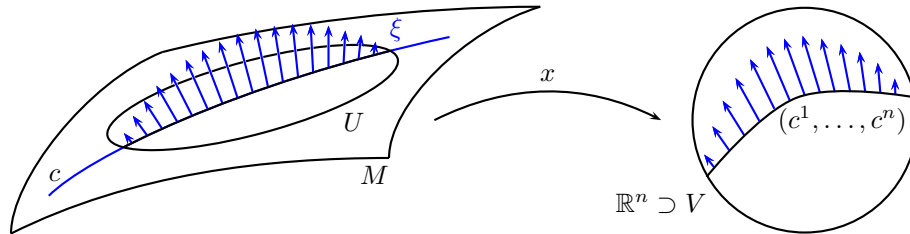
**KOROLLAR 2.6.2.** Ist  $\xi$  das Variationsvektorfeld einer Variation mit festen Endpunkten, so gilt

$$\frac{d}{ds} E[c_s]|_{s=0} = - \int_a^b g \left( \xi(t), \frac{\nabla}{dt} \dot{c}(t) \right) dt.$$

**LEMMA 2.6.3.** Sei  $c : [a, b] \rightarrow M$  eine glatte Kurve, sei  $\xi$  ein glattes Vektorfeld längs  $c$ . Dann existiert eine Variation von  $c$  mit Variationsvektorfeld  $\xi$ . Falls  $\xi(a) = 0$  und  $\xi(b) = 0$ , so kann die Variation mit festen Endpunkten gewählt werden.

Beweis.

- (a) Betrachte den Fall, dass  $\text{supp}(\xi)$  in einer Karte  $x : U \rightarrow V$  enthalten ist, das heißt  $c(t) \in U$ , falls  $\xi(t) \neq 0$ .



Schreibe  $\xi(t) = \sum_{j=1}^n \xi^j(t) \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_{c(t)}$ . Setze

$$c(s, t) := \begin{cases} x^{-1}((c^1(t), \dots, c^n(t)) + s(\xi^1(t), \dots, \xi^n(t))), & c(t) \in U \\ c(t) & , c(t) \notin U \end{cases}$$

Dann gilt für das zugehörige Variationvektorfeld:

$$\begin{aligned}
 \left( \frac{\partial c}{\partial s}(0, t) \right)^j &= dx^j \left( \frac{\partial c}{\partial s}(0, t) \right) \\
 &= \frac{\partial (x^j \circ c)}{\partial s}(0, t) \\
 &= \frac{\partial (c^j(t) + s\xi^j(t))}{\partial s} \Big|_{s=0} \\
 &= \xi^j(t).
 \end{aligned}$$

(b) Im allgemeinen Fall überdecke die kompakte Menge  $c([a, b])$  durch endlich viele Karten und konstruiere die Variation stückweise.  $\square$

**Bemerkung.** Später folgt ein noch einfacherer Beweis.

**Notation.** Sei  $M$  eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, seien  $p, q \in M$ . Dann setze

$$\Omega_{p,q}(M) := \{\text{glatte Kurven } c : [a, b] \rightarrow M \text{ mit } c(a) = p \text{ und } c(b) = q\}.$$

**KOROLLAR 2.6.4.** Ist  $c \in \Omega_{p,q}(M)$  ein „kritischer Punkt“ des Energiefunktionals, das heißt

$$\frac{d}{ds} E[c_s] \Big|_{s=0} = 0$$

für alle Variationen  $c_s$  von  $c$  mit festen Endpunkten, dann gilt

$$\frac{\nabla}{dt} \dot{c}(t) = 0$$

für alle  $t \in [a, b]$ .

*Beweis.* Angenommen, es existiert ein  $t_0 \in (a, b)$  mit

$$\frac{\nabla}{dt} \dot{c}(t_0) \neq 0.$$

Dann existiert ein  $\xi_0 \in T_{c(t_0)}M$  mit

$$g \left( \xi_0, \frac{\nabla}{dt} \dot{c}(t_0) \right) > 0.$$

Sei  $\tilde{\xi}$  das parallele Vektorfeld längs  $c$  mit  $\tilde{\xi}(t_0) = \xi_0$ . Aus Stetigkeitsgründen existiert ein  $\varepsilon > 0$ , so dass  $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \subset (a, b)$  und

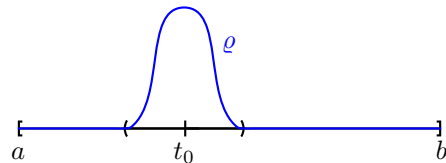
$$g \left( \tilde{\xi}(t), \frac{\nabla}{dt} \dot{c}(t) \right) > 0.$$

für alle  $t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$ .

Wähle eine glatte Funktion  $\varrho : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\varrho(t) > 0$  für alle  $t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$  und  $\varrho(t) = 0$  sonst.

Setze  $\xi(t) := \varrho(t) \cdot \tilde{\xi}(t)$ . Dann gilt:

$$g \left( \xi(t), \frac{\nabla}{dt} \dot{c}(t) \right) = \varrho(t) \cdot g \left( \tilde{\xi}(t), \frac{\nabla}{dt} \dot{c}(t) \right) \begin{cases} > 0 & \text{für } t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \\ = 0 & \text{sonst} \end{cases}$$



Wähle gemäß Lemma 11.3 eine Variation von  $c$  mit festen Endpunkten und dem Variationsvektorfeld  $\xi$ . Dann gilt:

$$\frac{d}{ds}E[c_s]|_{s=0} = - \int_a^b g\left(\xi(t), \frac{\nabla}{dt}\dot{c}(t)\right) dt < 0.$$

Das ist ein Widerspruch zur Annahme. Also gilt  $\frac{\nabla}{dt}\dot{c} = 0$  auf  $(a, b)$  und wegen der Stetigkeit auch auf ganz  $[a, b]$ .  $\square$

**Definition.** Eine glatte Kurve  $c$  mit  $\frac{\nabla}{dt}\dot{c} = 0$  heißt *Geodätische*.

**Beispiel.** Sei  $(M, g) = (\mathbb{R}^n, g_{\text{eukl}})$  oder  $(\mathbb{R}^n, g_{\text{Mink}})$ . In kartesischen Koordinaten  $x^1, \dots, x^n$  gilt:

$$\begin{aligned} \frac{\nabla}{dt}\dot{c} = 0 &\Leftrightarrow \ddot{c}^1 = 0, \dots, \ddot{c}^n = 0 \\ &\Leftrightarrow c^j(t) = p^j + tv^j \\ &\Leftrightarrow c(t) = p + tv \\ &\Leftrightarrow c \text{ ist eine Gerade, parametrisiert mit konstanter Geschwindigkeit.} \end{aligned}$$

**LEMMA 2.6.5.** Für Geodätische  $c$  ist  $g(\dot{c}, \dot{c})$  konstant.

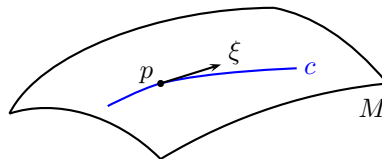
*Beweis.*  $\frac{d}{dt}g(\dot{c}, \dot{c}) = 2 \cdot g\left(\underbrace{\frac{\nabla}{dt}\dot{c}}_{=0}, \dot{c}\right) = 0.$   $\square$

**Definition.** Eine glatte Kurve  $c$  heißt

- nach Bogenlänge parametrisiert, falls  $g(\dot{c}, \dot{c}) \equiv 1$ ,
- nach Eigenzeit parametrisiert, falls  $g(\dot{c}, \dot{c}) \equiv -1$ ,
- proportional zur Bogenlänge parametrisiert, falls  $g(\dot{c}, \dot{c}) \equiv \alpha > 0$ ,
- proportional zur Eigenzeit parametrisiert, falls  $g(\dot{c}, \dot{c}) \equiv -\alpha < 0$  und
- Nullkurve, falls  $g(\dot{c}, \dot{c}) \equiv 0$ .

**SATZ 2.6.6 (Existenz und Eindeutigkeit von Geodätischen).** Sei  $(M, g)$  eine semi-riemannsche Mannigfaltigkeit. Zu  $p \in M$  und  $\xi \in T_p M$  existieren ein offenes Intervall  $I$  mit  $0 \in I$  und eine Geodätische  $c : I \rightarrow M$  mit  $c(0) = p$  und  $\dot{c}(0) = \xi$ .

Sind  $c : I \rightarrow M$  und  $\tilde{c} : \tilde{I} \rightarrow M$  zwei solche Geodätische mit  $c(0) = \tilde{c}(0)$  und  $\dot{c}(0) = \dot{\tilde{c}}(0)$ , dann stimmen  $c$  und  $\tilde{c}$  auf dem gemeinsamen Definitionsbereich  $I \cap \tilde{I}$  überein.



*Beweis.* In der Karte  $x : U \rightarrow V$  in  $p$  lautet die Geodätengleichung

$$\frac{\nabla}{dt} \dot{c} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{c}^k + \sum_{i,j=1}^n \Gamma_{ij}^k(c^1, \dots, c^n) \cdot \dot{c}^i \cdot \dot{c}^j = 0$$

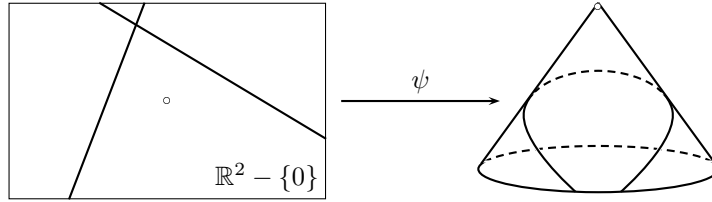
für  $k = 1, \dots, n$  und  $c^k = x^k \circ c$ . Dies ist ein gewöhnliches Differentialgleichungssystem zweiter Ordnung. Mit dem Satz von Picard-Lindelöf folgt die Behauptung.  $\square$

**Bemerkung.** Dieses Differentialgleichungssystem ist nicht linear. Daher gibt es keine A-priori-Kontrolle über die Größe des maximalen Definitionsbereiches  $I$  der Geodätischen.

**Bemerkung.** Ist  $\psi : M \rightarrow \tilde{M}$  eine lokale Isometrie, so ist

$$c : I \rightarrow M \text{ Geodätische} \quad \Leftrightarrow \quad \psi \circ c : I \rightarrow \tilde{M} \text{ Geodätische.}$$

**Beispiel.**  $M = (\mathbb{R}^2 - \{0\}, g_{\text{eukl}})$ ,  $\tilde{M} = \text{Kegel}$ .



**Definition.** Sei  $\psi : M \rightarrow M$  ein Diffeomorphismus. Dann heißt

$$\text{Fix}(\psi) := \{p \in M \mid \psi(p) = p\}$$

die *Fixpunktmenge* von  $\psi$ .

**PROPOSITION 2.6.7.** Sei  $(M, g)$  eine semi-riemannsche Mannigfaltigkeit, sei  $\psi \in \text{Isom}(M, g)$ . Dann verläuft für  $p \in \text{Fix}(\psi)$  und  $\xi \in T_p M$  mit  $d\psi|_p(\xi) = \xi$  die Geodätische  $c : I \rightarrow M$  mit  $c(0) = p$  und  $\dot{c}(0) = \xi$  ganz in  $\text{Fix}(\psi)$ , das heißt für alle  $t \in I$  ist  $c(t) \in \text{Fix}(\psi)$ .

*Beweis.* Setze  $\tilde{c}(t) := \psi \circ c(t)$ . Da  $\psi$  eine Isometrie ist, ist  $\tilde{c}$  ebenfalls eine Geodätische. Es gilt:

$$\begin{aligned} \tilde{c}(0) &= \psi(c(0)) = \psi(p) = p = c(0) \\ \dot{\tilde{c}}(0) &= d\psi|_{c(0)}(\dot{c}(0)) = d\psi|_p(\xi) = \xi = \dot{c}(0) \end{aligned}$$

Der Eindeigkeitsanteil von Satz 2.6.6 liefert:

$$\forall t \in I : c(t) = \tilde{c}(t) = \psi(c(t)).$$

Das heißt:  $c(t) \in \text{Fix}(\psi)$  für alle  $t \in I$ .  $\square$

**Beispiel.** Sei  $(M, g) = (S^n, g_{\text{std}})$ . Seien  $p \in S^n, \xi \in T_p S^n$ .

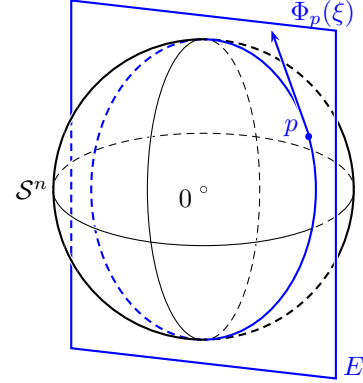
Sei  $E \subset \mathbb{R}^{n+1}$  der zweidimensionale Untervektorraum, der von  $p$  und  $\Phi_p(\xi)$  aufgespannt wird. Sei  $A : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  die Spiegelung an  $E$ . Dann ist  $A \in O(n+1)$ .

$$\Rightarrow \psi := A|_{S^n} \in \text{Isom}(S^n, g_{\text{std}}).$$

Dann gilt:

$$\text{Fix}(A) = E \quad \Rightarrow \quad \text{Fix}(\psi) = E \cap S^n \quad (\text{Großkreis}).$$

Mit der Proposition 2.6.7 folgt dann, dass  $c(t) \in E \cap S^n$  für alle  $t$ . Wir parametrisieren den Großkreis proportional zur Bogenlänge.



$$c(t) = p \cdot \cos(\alpha t) + \frac{\Phi_p(\xi)}{\|\Phi_p(\xi)\|} \cdot \sin(\alpha t).$$

Es müssen die Anfangsbedingungen erfüllt sein:

$$\begin{aligned} c(0) &= p \text{ ist erfüllt.} \\ \frac{d}{dt}c(0) &= \frac{\Phi_p(\xi)}{\|\Phi_p(\xi)\|} \cdot \alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha = \|\Phi_p(\xi)\| = \|\xi\|. \end{aligned}$$

Dann erhalten wir:  $\frac{d}{dt}c(0) = \Phi_p(\xi)$ , das heißt  $\dot{c}(0) = \xi$ . Daraus folgt:

$$c(t) = p \cdot \cos(\|\xi\| t) + \frac{\Phi_p(\xi)}{\|\xi\|} \cdot \sin(\|\xi\| t).$$

**Bemerkung.** Sei  $(M, g)$  eine semi-riemannsche Mannigfaltigkeit, sei  $p \in M$ . Zu  $\xi \in T_p M$  sei  $c_\xi$  die Geodätische mit

$$c_\xi(0) = p \text{ und } \dot{c}_\xi(0) = \xi.$$

Zu  $\alpha \in \mathbb{R}$  setze  $\tilde{c}(t) := c_\xi(\alpha t)$ . Dann ist

$$\frac{\nabla}{dt}\dot{\tilde{c}}(t) = \frac{\nabla}{dt}(\alpha \cdot \dot{c}_\xi(\alpha t)) = \alpha^2 \left( \frac{\nabla}{dt}\dot{c}_\xi \right)(\alpha t) = 0.$$

Daraus folgt:  $\tilde{c}$  ist ebenfalls eine Geodätische. Für die Anfangsbedingungen gilt:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{c}(0) &= c_\xi(0) = p \\ \dot{\tilde{c}} &= \alpha \cdot \dot{c}_\xi(0) = \alpha \xi \end{aligned} \right\} \Rightarrow \tilde{c} = c_{\alpha \xi}.$$

Deshalb gilt:  $c_\xi(\alpha) = c_{\alpha \xi}(1)$ .

**Definition.** Zu  $\xi \in T_p M$  setze  $\exp_p(\xi) := c_\xi(1)$ , falls der maximale Definitionsbereich von  $c_\xi$  die 1 enthält. Setze ferner

$$\mathcal{D}_p := \{\xi \in T_p M \mid 1 \text{ ist im maximalen Definitionsbereich von } c_\xi\}.$$

Dann heißt  $\exp_p : \mathcal{D}_p \rightarrow M$  *riemannsche Exponentialabbildung* (im Punkt  $p$ ).

**Bemerkung.** (1)  $\exp_p(t \cdot \xi) = c_{t\xi}(1) = c_\xi(t)$ . Daraus folgt, dass  $t \mapsto \exp_p(t\xi)$  die Geodätische ist mit den Anfangswerten  $p$  und  $\xi$ .

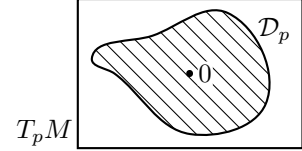
(2)  $\exp_p(0) = p$ .

(3)  $\mathcal{D}_p$  ist sternförmig bezüglich 0, denn: Sei  $\xi \in \mathcal{D}_p$ . Sei  $0 \leq \alpha \leq 1$ . Dann ist  $c_\xi$  auf  $[0, 1]$  definiert.

$$c_{\alpha\xi}(t) = c_\xi(\alpha t).$$

$\Rightarrow c_{\alpha\xi}$  ist auf  $[0, \frac{1}{\alpha}] \supset [0, 1]$  definiert, da  $\alpha \leq 1$ .

$\Rightarrow \alpha\xi \in \mathcal{D}_p$ .



(4) Setze  $\mathcal{D} := \bigcup_{p \in M} \mathcal{D}_p \subset TM$  und  $\exp : \mathcal{D} \rightarrow M$ ,  $\exp(\xi) := \exp_{\pi(\xi)}(\xi)$ .

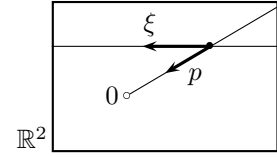
Aus der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen folgt, dass  $\mathcal{D}$  offen und  $\exp$  eine glatte Abbildung ist. Insbesondere ist  $\mathcal{D}_p = \mathcal{D} \cap T_p M$  offen in  $T_p M$ .

**Beispiel.** • Sei  $(M, g) = (\mathbb{R}^n, g_{\text{eukl}})$  oder  $(\mathbb{R}^n, g_{\text{Mink}})$ . Dann gilt:

$$\exp_p(\xi) = p + 1 \cdot \Phi_p(\xi) = p + \Phi_p(\xi) \text{ mit } \mathcal{D}_p = T_p \mathbb{R}^n.$$

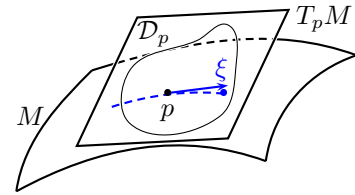
• Sei  $(M, g) = (\mathbb{R}^2 - \{0\}, g_{\text{eukl}})$ . Dann:

$$\mathcal{D}_p = T_p M - \{-t \cdot \Phi_p^{-1}(p) \mid t \geq 1\}.$$



• Sei  $(M, g) = (S^n, g_{\text{std}})$ . Dann:

$$\exp_p(\xi) = p \cdot \cos(\|\xi\|) + \frac{\Phi_p(\xi)}{\|\xi\|} \cdot \sin(\|\xi\|), \mathcal{D}_p = T_p M.$$



**LEMMA 2.6.8.** Das Differential der Abbildung  $\exp_p : \mathcal{D}_p \rightarrow M$  im Punkt 0 ist gegeben durch den kanonischen Isomorphismus

$$d\exp_p|_0 = \Phi_0 : T_0 \mathcal{D}_p = T_0 T_p M \rightarrow T_p M.$$

*Beweis.* Sei  $\xi \in T_p M$ . Dann gilt:

$$d\exp_p|_0(\Phi_0^{-1}(\xi)) = d\exp_p|_0 \left( \frac{d}{dt}(t\xi) \Big|_{t=0} \right) = \frac{d}{dt} \exp_p(t\xi) \Big|_{t=0} = \xi.$$

□

In der Literatur wird das Lemma 2.6.8 manchmal etwas salopp so formuliert:

$$\text{id}_{T_p M} = d\exp_p|_0 : T_p M \rightarrow T_p M.$$

**KOROLLAR 2.6.9.** Zu  $p \in M$  existiert eine offene Umgebung  $\mathcal{V}_p \subset \mathcal{D}_p \subset T_p M$  von 0, so dass

$$\exp_p|_{\mathcal{V}_p} : \mathcal{V}_p \rightarrow \exp_p(\mathcal{V}_p) =: U_p$$

ein Diffeomorphismus ist.

*Beweis.* Die Aussage folgt aus Lemma 2.6.8 ( $d\exp_p|_0$  ist invertierbar) und dem Umkehrsatz.  $\square$

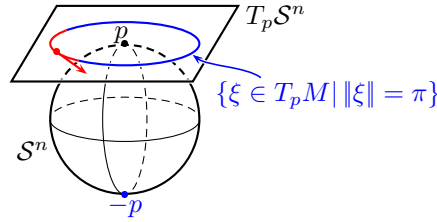
**Bemerkung.** Im Allgemeinen ist  $\exp_p : \mathcal{D}_p \rightarrow \exp_p(\mathcal{D}_p) \subset M$  kein Diffeomorphismus, denn  $d\exp_p|_\xi$  ist im Allgemeinen nicht invertierbar.

**Beispiel.** Sei  $(M, g) = (S^n, g_{\text{std}})$ . Für  $p \in S^n$  gilt:  $\mathcal{D}_p = T_p M$  und

$$\exp_p(\xi) = p \cdot \cos(\|\xi\|) + \frac{\Phi_p(\xi)}{\|\xi\|} \cdot \sin(\|\xi\|),$$

aber für  $\xi \in T_p M$  mit  $\|\xi\| = \pi$  gilt:

$$\exp_p(\xi) = p \cdot \cos(\pi) = -p.$$



Für  $\xi \in T_p M$  mit  $\|\xi\| = \pi$  hat  $d\exp_p|_\xi$  den Kern  $\{\eta \in T_\xi T_p S^n \mid \Phi_\xi(\eta) \perp \xi\}$  (ist  $(n-1)$ -dimensional).

Wir konstruieren nun gut an die Geometrie angepasste Koordinaten und wählen dazu eine verallgemeinerte Orthonormalbasis  $E_1, \dots, E_n$  von  $T_p M$  bezüglich  $g|_p$ , das heißt

$$g|_p(E_i, E_j) = \varepsilon_i \delta_{ij}, \quad \varepsilon_i \in \{\pm 1\}.$$

Wir erhalten einen linearen Isomorphismus  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow T_p M, (\alpha^1, \dots, \alpha^n) \mapsto \sum_{i=1}^n \alpha^i E_i$ .

$$\begin{array}{ccc} T_p M \supset \mathcal{V}_p & \xrightarrow[\approx]{\exp_p} & U_p \subset M \\ \uparrow \cong A & \nearrow \varphi & \\ \mathbb{R}^n \supset V_p & & \end{array}$$

wobei  $V_p := A^{-1}(\mathcal{V}_p)$ , also:  $\exp_p \circ A : V_p \rightarrow U_p$  ist ein Diffeomorphismus. Setze  $x := (\exp_p \circ A)^{-1}$ . Dann ist  $x : U_p \rightarrow V_p$  eine Karte.

**Definition.** Die so erhaltenen Koordinaten nennt man die *riemannschen Normalkoordinaten* um den Punkt  $p$ .



Inwiefern sind diese Koordinaten gut an die Geometrie angepasst?

**PROPOSITION 2.6.10.** Sei  $(M, g)$  eine semi-riemannsche Mannigfaltigkeit, sei  $p \in M$ . Seien  $g_{ij} : V_p \rightarrow \mathbb{R}$  und  $\Gamma_{ij}^k : V_p \rightarrow \mathbb{R}$  die zu den riemannschen Normalkoordinaten  $x$  um  $p$  gehörigen  $g_{ij}$  bzw. Christoffel-Symbole. Dann gilt:

$$x(p) = 0, \quad g_{ij}(0) = \varepsilon_i \delta_{ij}, \quad \Gamma_{ij}^k(0) = 0.$$

*Beweis.*

(a)  $x(p) = A^{-1}(\exp_p^{-1}(p)) = A^{-1}(0) = 0.$

(b) Seien  $e_1, \dots, e_n$  die Standardbasis des  $\mathbb{R}^n$ . Dann

$$\begin{aligned} g_{ij}(0) &= g|_p(dx^{-1}|_0(e_i), dx^{-1}|_p(e_j)) \\ &= g|_p(d(\exp_p \circ A)|_0(e_i), d(\exp_p \circ A)|_0(e_j)) \\ &= g|_p(d \exp_p|_0(E_i), d \exp_p|_0(E_j)) \\ &\stackrel{\text{L. 2.6.8}}{=} g|_p(E_i, E_j) = \varepsilon_i \delta_{ij} \end{aligned}$$

(c) Sei  $v = (v^1, \dots, v^n) \in \mathbb{R}^n$ . Dann ist  $c(t) = x^{-1}(tv) = \exp_p(tAv)$  eine Geodätische mit  $c(0) = p$  und  $\dot{c}(0) = Av$ . In riemannschen Normalkoordinaten lautet die Geodätengleichung für diese Geodätische

$$0 = \ddot{c}^k(t) + \sum_{i,j=1}^n \Gamma_{ij}^k(c^1(t), \dots, c^n(t)) \cdot \dot{c}^i(t) \cdot \dot{c}^j(t).$$

Hierbei ist  $c^k(t) = x^k(c(t)) = tv^k$ ,  $\dot{c}^k(t) = v^k$  und  $\ddot{c}^k(t) = 0$ . Für  $t = 0$  ergibt sich

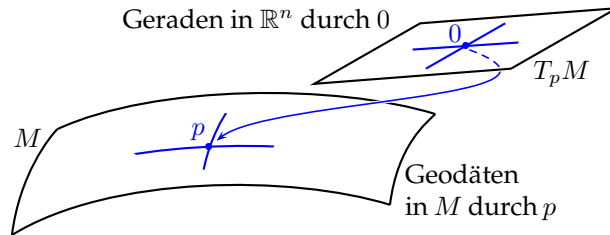
$$0 = 0 + \sum_{i,j=1}^n \Gamma_{ij}^k(0, \dots, 0) \cdot v^i \cdot v^j.$$

Dann ist  $\beta^k$ , definiert durch  $\beta^k(y, z) := \sum_{i,j=1}^n \Gamma_{ij}^k(0) y^i z^j$ , eine symmetrische Bilinearform auf  $\mathbb{R}^n$ , denn:

$$\beta^k(z, y) = \sum_{i,j=1}^n \Gamma_{ij}^k(0) z^i y^j = \sum_{j,i=1}^n \Gamma_{ji}^k(0) z^j y^i = \sum_{i,j=1}^n \Gamma_{ij}^k(0) y^i z^j = \beta^k(y, z).$$

$\uparrow$  Vertauschen der Indizes       $\uparrow$   $\nabla$  torsionsfrei

Daher gilt  $\beta^k(v, v) = 0$  für alle  $v \in \mathbb{R}^n$  und daher  $\beta^k(y, z) = 0$  für alle  $y, z \in \mathbb{R}^n$ . Daraus folgt:  $\Gamma_{ij}^k(0) = 0$  für alle  $i, j, k$ .  $\square$



**Beispiel.** Sei  $(M, g) = (\mathbb{R}^n, g_{\text{eukl}})$  oder  $(\mathbb{R}^n, g_{\text{Mink}})$ , sei  $p \in M$ . Wähle  $A = \Phi_p =$  kanonischer Isomorphismus  $\mathbb{R}^n \Rightarrow T_p \mathbb{R}^n$ . Dann gilt  $\exp_p(Av) = p + v$ , also

$$x : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, x(q) = q - p.$$

**KOROLLAR 2.6.11.** In riemannschen Normalkoordinaten gilt für die Taylorentwicklung um 0 von  $g_{i,j} : V_p \rightarrow \mathbb{R}$ :

$$g_{ij}(x) = \varepsilon_i \delta_{ij} + O(\|x\|^2).$$

*Beweis.*

$$g_{ij}(x) = g_{ij} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}(0) \cdot x^k + O(\|x\|^2)$$

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}(0) = \sum_{l=1}^n (\Gamma_{ki}^l(0) g_{lj}(0) + \Gamma_{kj}^l(0) g_{il}(0)) = 0$$

Beweis von Satz 2.3.1

□

# Kapitel 3

## Krümmung

### 3.1 Riemannscher Krümmungstensor

**Definition.** Sei  $(M, g)$  eine semi-riemannsche Mannigfaltigkeit, sei  $p \in M$ . Seien  $\xi \in T_p M$  und  $\eta, \zeta \in \Xi_p(M)$ . Dann ist  $\nabla_\eta \zeta \in \Xi_p(M)$  und

$$\nabla_{\xi, \eta}^2 \zeta := \nabla_\xi \nabla_\eta \zeta - \nabla_{\nabla_\xi \eta} \zeta \in T_p M$$

heißt *zweite kovariante Ableitung* von  $\zeta$  in Richtung  $\xi$  und  $\eta$ .

**LEMMA 3.1.1.** Die zweite kovariante Ableitung  $\nabla_{\xi, \eta}^2 \zeta$  hängt von  $\eta$  nur vermöge  $\eta|_p$  ab, das heißt, sind  $\eta, \tilde{\eta} \in \Xi_p(M)$  mit  $\eta|_p = \tilde{\eta}|_p$ , dann gilt:

$$\nabla_{\xi, \eta}^2 \zeta = \nabla_{\xi, \tilde{\eta}}^2 \zeta.$$

*Beweis.* Wir wählen um  $p$  riemannsche Normalkoordinaten  $x$  und schreiben in diesen Koordinaten (unter Verwendung der einsteinschen Summenkonvention) die Vektorfelder lokal als:

$$\xi = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \quad \eta = \eta^j \frac{\partial}{\partial x^j} \quad \zeta = \zeta^k \frac{\partial}{\partial x^k}.$$

Da die Christoffel-Symbole in 0 alle verschwinden erhalten wir:

$$\begin{aligned} \nabla_\xi \eta &= \nabla_{\xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p} \left( \eta^j \frac{\partial}{\partial x^j} \right) = \xi^i \frac{\partial \eta^j}{\partial x^i}(0) \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p + 0 \\ \Rightarrow \nabla_{\nabla_\xi \eta} \zeta &= \xi^i \frac{\partial \eta^j}{\partial x^i}(0) \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p} \left( \zeta^k \frac{\partial}{\partial x^k} \right) \\ &= \xi^i \frac{\partial \eta^j}{\partial x^i}(0) \frac{\partial \zeta^k}{\partial x^j}(0) \frac{\partial}{\partial x^k} \Big|_p \end{aligned}$$

Und ebenso:

$$\begin{aligned}
 \nabla_\eta \zeta &= \nabla_{\eta = \eta^j \frac{\partial}{\partial x^j}} \left( \zeta = \zeta^k \frac{\partial}{\partial x^k} \right) \\
 &= \eta^j \left( \frac{\partial \zeta^k}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^k} + \zeta^k \Gamma_{jk}^m \frac{\partial}{\partial x^m} \right) \\
 \Rightarrow \nabla_\xi \nabla_\eta \zeta &= \nabla_{\xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p} \left( \eta^j \frac{\partial \zeta^k}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^k} + \eta^j \zeta^k \Gamma_{jk}^m \frac{\partial}{\partial x^m} \right) \\
 &= \xi^i \frac{\partial \eta^j}{\partial x^i}(0) \frac{\partial \zeta^k}{\partial x^j}(0) \frac{\partial}{\partial x^k} \Big|_p + \xi^i \eta^j(0) \frac{\partial^2 \zeta^k}{\partial x^j \partial x^i}(0) \frac{\partial}{\partial x^k} \Big|_p \\
 &\quad + \xi^i \eta^j(0) \zeta^k \frac{\partial \Gamma_{jk}^m}{\partial x^i}(0) \frac{\partial}{\partial x^m} \Big|_p,
 \end{aligned}$$

womit dann folgt:

$$\Rightarrow \nabla_{\xi, \eta}^2 \zeta = \left[ \xi^i \eta^j(0) \frac{\partial^2 \zeta^k}{\partial x^i \partial x^j}(0) + \xi^i \eta^j(0) \zeta^m(0) \frac{\partial \Gamma_{jm}^k}{\partial x^i}(0) \right] \frac{\partial}{\partial x^k} \Big|_p$$

Die Abhängigkeit von  $\eta$  dieses Ausdruckes beschränkt sich auf die Werte  $\eta^j(0)$ , also auf  $\eta|_p$ .  $\square$

**Folgerung.** Der Ausdruck  $\nabla_{\xi, \eta}^2 \zeta$  ist wohldefiniert für  $\xi, \eta \in T_p M$  und  $\zeta \in \Xi_p$ .

**LEMMA 3.1.2.** Für  $\xi, \eta \in T_p M$  und  $\zeta \in \Xi_p(M)$  hängt

$$R(\xi, \eta)\zeta := \nabla_{\xi, \eta}^2 \zeta - \nabla_{\eta, \xi}^2 \zeta$$

nur von  $\zeta$  vermöge  $\zeta|_p$  ab. Das heißt  $R(\xi, \eta)\zeta \in T_p M$  ist für  $\xi, \eta, \zeta \in T_p$  wohldefiniert.

*Beweis.* Wieder gilt in riemannschen Normalkoordinaten um  $p$ :

$$\begin{aligned}
 \nabla_{\xi, \eta}^2 \zeta &= \xi^i(0) \eta^j(0) \left( \frac{\partial^2 \zeta^k}{\partial x^i \partial x^j} + \zeta^m(0) \frac{\partial \Gamma_{jm}^k}{\partial x^i} \right) \frac{\partial}{\partial x^k} \Big|_p \\
 \Rightarrow R(\xi, \eta)\zeta &= (\xi^i(0) \eta^j(0) - \xi^j(0) \eta^i(0)) \left( \frac{\partial^2 \zeta^k}{\partial x^i \partial x^j} + \zeta^m(0) \frac{\partial \Gamma_{jm}^k}{\partial x^i} \right) \frac{\partial}{\partial x^k} \Big|_p \\
 &= \xi^i(0) \eta^j(0) \left( \frac{\partial^2 \zeta^k}{\partial x^i \partial x^j} - \frac{\partial^2 \zeta^k}{\partial x^j \partial x^i} + \zeta^m(0) \frac{\partial \Gamma_{jm}^k}{\partial x^i} - \zeta^m(0) \frac{\partial \Gamma_{im}^k}{\partial x^j} \right) \frac{\partial}{\partial x^k} \Big|_p \\
 &= \xi^i(0) \eta^j(0) \zeta^m(0) \left( \frac{\partial \Gamma_{jm}^k}{\partial x^i} - \frac{\partial \Gamma_{im}^k}{\partial x^j} \right) \frac{\partial}{\partial x^k} \Big|_p
 \end{aligned}$$

$\square$

**Definition.** Die Abbildung

$$\begin{aligned}
 R: T_p M \times T_p M \times T_p M &\rightarrow T_p M \\
 (\xi, \eta, \zeta) &\mapsto R(\xi, \eta)\zeta
 \end{aligned}$$

heißt *riemannscher Krümmungstensor* im Punkt  $p$ .

**Darstellung in lokalen Koordinaten.**

Sei  $x : U \rightarrow V$  eine Karte von  $M$ . Dann wird  $R$  auf  $U$  festgelegt durch glatte Funktionen  $R_{k,i,j}^l : V \rightarrow \mathbb{R}$ , definiert durch

$$R\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) \frac{\partial}{\partial x^k} = \sum_{l=1}^n R_{kij}^l \frac{\partial}{\partial x^l}.$$

Wir haben bereits gesehen, dass in riemannschen Normalkoordinaten gilt:

$$R_{kij}^l(0) = \frac{\partial \Gamma_{jk}^l}{\partial x^i}(0) - \frac{\partial \Gamma_{ik}^l}{\partial x^j}(0)$$

**Bemerkung.** Man kann nachrechnen (das ist nicht schwer, dafür aber etwas mühsam), dass in beliebigen Koordinaten gilt:

$$R_{kij}^l(0) = \frac{\partial \Gamma_{jk}^l}{\partial x^i}(0) - \frac{\partial \Gamma_{ik}^l}{\partial x^j}(0) + \sum_{m=1}^n (\Gamma_{kj}^m \Gamma_{mi}^l - \Gamma_{ki}^m \Gamma_{mj}^l)$$

**PROPOSITION 3.1.3 (Symmetrien des Krümmungstensor).** Sei  $(M, g)$  eine semi-riemannsche Mannigfaltigkeit, sei  $p \in M$ , seien  $\xi, \eta, \zeta, \nu \in T_p M$ . Dann:

- (1)  $R : T_p M \times T_p M \times T_p M \rightarrow T_p M$  ist trilinear,
- (2)  $R(\xi, \eta)\zeta = -R(\eta, \xi)\zeta$ ,
- (3)  $g|_p(R(\xi, \eta)\zeta, \nu) = -g|_p(R(\xi, \eta)\nu, \zeta)$ ,
- (4) Erste Bianchi-Identität.  $R(\xi, \eta)\zeta + R(\eta, \zeta)\xi + R(\zeta, \xi)\eta = 0$  und
- (5)  $g|_p(R(\xi, \eta)\zeta, \nu) = g|_p(R(\zeta, \nu)\xi, \eta)$ .

*Beweis.*

- (1) klar, da bereits  $\nabla_{\xi, \eta}^2 \zeta$  in  $\xi, \eta$  und  $\zeta$   $\mathbb{R}$ -linear ist.
- (2) ist auch klar.
- (3) Wir berechnen dies in riemannschen Normalkoordinaten um  $p$  für

$$\xi = \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p, \quad \eta = \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p, \quad \zeta = \frac{\partial}{\partial x^k} \Big|_p, \quad \nu = \frac{\partial}{\partial x^l} \Big|_p.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} g|_p(R(\xi, \eta)\zeta, \nu) &= g|_p\left(R\left(\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p, \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p\right) \frac{\partial}{\partial x^k} \Big|_p, \frac{\partial}{\partial x^l} \Big|_p\right) \\ &= g|_p\left(\sum_{m=1}^n R_{kij}^m(0) \frac{\partial}{\partial x^m} \Big|_p, \frac{\partial}{\partial x^l} \Big|_p\right) \\ &= \sum_{m=1}^n R_{kij}^m(0) \cdot g|_p\left(\frac{\partial}{\partial x^m} \Big|_p, \frac{\partial}{\partial x^l} \Big|_p\right) \\ &= \sum_{m=1}^n g_{ml}(0) \cdot R_{kij}^m(0) \end{aligned}$$

In beliebigen Koordinaten (und damit auch in riemannschen Normalkoordinaten für  $x \neq 0$ ) gilt (nach dem Beweis von Satz 2.3.1):

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} &= \sum_{m=1}^n (g_{mj} \Gamma_{ki}^m + g_{mi} \Gamma_{kj}^m) \\
 \stackrel{\text{in riem. Normalk.}}{\implies} \quad \frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x^k \partial x^l}(0) &= \sum_{m=1}^n \left( g_{mj}(0) \frac{\partial \Gamma_{ki}^m}{\partial x^l}(0) + g_{mi}(0) \frac{\partial \Gamma_{kj}^m}{\partial x^l}(0) \right) \\
 \implies \quad 0 &= \frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x^k \partial x^l}(0) - \frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x^l \partial x^k}(0) \\
 &= \sum_{m=1}^n \left( g_{mj}(0) \frac{\partial \Gamma_{ki}^m}{\partial x^l}(0) + g_{mi}(0) \frac{\partial \Gamma_{kj}^m}{\partial x^l}(0) \right. \\
 &\quad \left. - g_{mj}(0) \frac{\partial \Gamma_{li}^m}{\partial x^k}(0) - g_{mi}(0) \frac{\partial \Gamma_{lj}^m}{\partial x^k}(0) \right) \\
 &= \sum_{m=1}^n (g_{mj}(0) R_{ilk}^m(0) + g_{mi}(0) R_{jlk}^m(0)) \\
 \implies \quad \begin{pmatrix} l \rightarrow i \\ k \rightarrow j \\ i \rightarrow k \\ j \rightarrow l \end{pmatrix} \quad 0 &= \sum_{m=1}^n (g_{ml}(0) R_{kij}^m(0) + g_{mk}(0) R_{lij}^m(0)) \\
 \implies \quad \sum_{m=1}^n g_{ml}(0) R_{kij}^m(0) &= - \sum_{m=1}^n g_{mk}(0) R_{lij}^m(0)
 \end{aligned}$$

Daraus folgt die Behauptung für diese  $\xi, \eta, \zeta, \nu$ .

Mit der Multilinearität folgt die Behauptung für alle  $\xi, \eta, \zeta$  und  $\nu$ .

(4) Die erste Bianchi-Identität ist äquivalent zu

$$R_{kij}^l + R_{ijk}^l + R_{jki}^l = 0.$$

Wir rechnen dies in riemannschen Normalkoordinaten nach:

$$\begin{aligned}
 R_{kij}^l(0) + R_{ijk}^l(0) + R_{jki}^l(0) &= \\
 \frac{\partial \Gamma_{jk}^l}{\partial x^i}(0) - \frac{\partial \Gamma_{ik}^l}{\partial x^j}(0) + \frac{\partial \Gamma_{ki}^l}{\partial x^j}(0) - \frac{\partial \Gamma_{ji}^l}{\partial x^k}(0) + \frac{\partial \Gamma_{ij}^l}{\partial x^k}(0) - \frac{\partial \Gamma_{kj}^l}{\partial x^i}(0) &= 0.
 \end{aligned}$$

(5) Beweis durch Nachrechnen:

$$\begin{aligned}
 0 &\stackrel{(4)}{=} g|_p(R(\eta, \zeta)\xi, \nu) + g|_p(R(\zeta, \xi)\eta, \nu) + g|_p(R(\xi, \eta)\zeta, \nu) \\
 &\quad + g|_p(R(\zeta, \xi)\nu, \eta) + g|_p(R(\xi, \nu)\zeta, \eta) + g|_p(R(\nu, \zeta)\xi, \eta) \\
 &\quad + g|_p(R(\xi, \nu)\eta, \zeta) + g|_p(R(\nu, \eta)\xi, \zeta) + g|_p(R(\eta, \xi)\nu, \zeta) \\
 &\quad + g|_p(R(\nu, \eta)\zeta, \xi) + g|_p(R(\eta, \zeta)\nu, \xi) + g|_p(R(\zeta, \nu)\xi, \eta) \\
 &\stackrel{(2),(3)}{=} 2g|_p(R(\xi, \eta)\zeta, \nu) + 2g|_p(R(\zeta, \nu)\eta, \xi) \\
 &= 2(g|_p(R(\xi, \eta)\zeta, \nu) - g|_p(R(\zeta, \nu)\xi, \eta))
 \end{aligned}$$

□

**Beispiel.** Sei  $(M, g) = (\mathbb{R}^n, g_{\text{eukl}})$  oder  $(\mathbb{R}^n, g_{\text{Mink}})$ . In kartesischen Koordinaten gilt  $\Gamma_{ij}^k = 0$ . Daraus folgt:

$$R_{kij}^l = 0 \quad \Rightarrow \quad R \equiv 0.$$

**Definition.** Eine semi-riemannsche Mannigfaltigkeit mit  $R \equiv 0$  heißt *flach*.

**Warnung!** In der Literatur existieren zwei verschiedene Vorzeichenkonventionen für  $R$ : Unser  $R$  ist das Negative des Krümmungstensors, wie er beispielsweise in [O'Neill] definiert wird.

**LEMMA 3.1.4.** Seien  $(M, g)$  und  $(\tilde{M}, \tilde{g})$  semi-riemannsche Mannigfaltigkeiten, sei  $\psi : M \rightarrow \tilde{M}$  eine lokale Isometrie. Sei  $p \in M$ . Dann gilt für den Krümmungstensor  $R$  von  $M$  in  $p$  und den Krümmungstensor  $\tilde{R}$  von  $\tilde{M}$  in  $\psi(p)$ :

$$d\psi|_p(R(\xi, \eta)\zeta) = \tilde{R}(d\psi|_p(\xi), d\psi|_p(\eta))d\psi|_p(\zeta)$$

für alle  $\xi, \eta, \zeta \in T_p M$ .

*Beweis.* Sei  $x : U \rightarrow V$  eine Karte von  $M$  mit  $p \in U$ . Dann ist  $\tilde{x} := x \circ \psi^{-1} : \tilde{U} \rightarrow V$  eine Karte von  $\tilde{M}$ , wobei  $\tilde{U} := \psi(U)$  und  $U$  eventuell verkleinert wurde (so dass  $\psi : U \rightarrow \tilde{U}$  ein Diffeomorphismus ist).

Da  $\psi$  eine lokale Isometrie ist, folgt, dass  $g_{ij} = \tilde{g}_{ij} : V \rightarrow \mathbb{R}$ , wobei die  $g_{ij}$  die Komponenten von  $g$  bezüglich  $x$  und  $\tilde{g}_{ij}$  die Komponenten von  $\tilde{g}$  bezüglich  $\tilde{x}$  sind. Damit sind die entsprechenden Christoffel-Symbole gleich:  $\Gamma_{ij}^k = \tilde{\Gamma}_{ij}^k$  und damit sind es auch die Komponenten der Krümmungstensoren:  $R_{kij}^l = \tilde{R}_{kij}^l$ .  $\square$

**Bemerkung.** Verschwindet der Krümmungstensor  $R : T_p M \times T_p M \times T_p M \rightarrow T_p M$  im Punkt  $p$  nicht, dann gibt es *keine* Karte um  $p$ , für die  $\Gamma_{ij}^k \equiv 0$ .

Alternativ kann man den Krümmungstensor auch definieren als eine multilineare Abbildung

$$R : T_p M \times T_p M \times T_p M \times T_p M \rightarrow T_p M, \quad R(\xi, \eta, \zeta, \nu) = g(R(\xi, \eta)\zeta, \nu).$$

In lokalen Koordinaten setze für eine Karte  $x : U \rightarrow V$  um  $p$

$$R_{ijkl} : V \rightarrow \mathbb{R}, \quad R_{ijkl}(x(p)) := R\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p, \left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_p, \left.\frac{\partial}{\partial x^k}\right|_p, \left.\frac{\partial}{\partial x^l}\right|_p\right).$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} R_{ijkl} &\stackrel{\text{Prop. 3.1.3(5)}}{=} R_{klij} = g\left(R\left(\frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^l}\right) \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) \\ &= g\left(\sum_{m=1}^n R_{ikl}^m \frac{\partial}{\partial x^m}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) \\ &= \sum_{m=1}^n R_{ikl}^m g\left(\frac{\partial}{\partial x^m}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) \end{aligned}$$

Es folgt also:

$$R_{ijkl} = \sum_{m=1}^n g_{mj} R_{ikl}^m$$

Wir haben den oberen Index „heruntergezogen“.

Umgekehrt:

$$\begin{aligned}
 R_{kij}^l &= \sum_{m=1}^n \delta_m^l R_{kij}^m \\
 &= \sum_{a,m=1}^n g_{ma} g^{al} R_{kij}^m \\
 \Rightarrow \quad &\boxed{R_{kij}^l = \sum_{a=1}^n g^{al} R_{kaij}}
 \end{aligned}$$

Der Index wurde „raufgezogen“.

**PROPOSITION 3.1.5.** Sei  $(M, g)$  eine semi-riemannsche Mannigfaltigkeit. In riemannschen Normalkoordinaten gilt dann:

$$g_{ij}(x) = \varepsilon_i \delta_{ij} + \frac{1}{3} \sum_{k,l=1}^n R_{ikjl}(0) x^k x^l + O(\|x\|^3).$$

*Beweis.* Wir wissen bereits  $g_{ij}(x) = \varepsilon_i \delta_{ij} + O(\|x\|^2)$  (Korollar 2.6.11). Im Folgenden verwenden wir die einsteinsche Summenkonvention sowie die abkürzenden Schreibweisen

$$f_{,k} := \frac{\partial f}{\partial x^k} \quad \text{und} \quad f_{,k\ell} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^k \partial x^\ell}$$

für die ersten und zweiten partiellen Ableitungen. Im Beweis von Satz 2.3.1 haben wir gesehen, dass

$$g_{ij,k} = \Gamma_{ki}^m g_{mj} + \Gamma_{kj}^m g_{mi}.$$

Diese Gleichung differenzieren wir nach  $x^\ell$ , werten in 0 aus und benutzen, dass die Christoffelsymbole in 0 verschwinden:

$$g_{ij,k\ell}(0) = \Gamma_{ki,\ell}^m(0) \cdot g_{mj}(0) + \Gamma_{kj,\ell}^m(0) g_{mi}(0). \quad (3.1)$$

*Zwischenbehauptung:*

$$\Gamma_{ij,\ell}^k(0) + \Gamma_{\ell i,j}^k(0) + \Gamma_{j\ell,i}^k(0) = 0. \quad (3.2)$$

*Beweis der Zwischenbehauptung:*

In Normalkoordinaten ergeben die Geraden  $t \mapsto t \cdot x$  durch 0 Geodätische. Die Geodätengleichung lautet dann:

$$0 = \Gamma_{ij}^k(t \cdot x) x^i x^j.$$

Wir differenzieren das nach  $t$  und werten in  $t = 0$  aus:

$$0 = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \Gamma_{ij}^k(tx) x^i x^j = \Gamma_{ij,\ell}^k(0) x^\ell x^i x^j.$$

Damit haben wir für jedes  $k$  ein Polynom 3. Grades in  $x$ , nämlich  $P^k(x) := \Gamma_{ij,\ell}^k(0) x^i x^j x^\ell$ , das identisch verschwindet. Also muss für jedes Monom  $x^\alpha x^\beta x^\gamma$  die Summe der Koeffizienten



$\Gamma_{ij,\ell}^k(0)$  mit  $x^i x^j x^\ell = x^\alpha x^\beta x^\gamma$  verschwinden. Dies und die Symmetrie der Christoffelsymbole in den beiden unteren Indizes liefern die Zwischenbehauptung.

Mit  $R_{kij}^\ell(0) = \Gamma_{jk,i}^\ell(0) - \Gamma_{ik,j}^\ell(0)$  folgt:

$$\begin{aligned} R_{k\ell ij}(0) &= (\Gamma_{jk,i}^m(0) - \Gamma_{ik,j}^m(0)) g_{m\ell}(0) \\ &\stackrel{(3.2)}{=} -(\Gamma_{ij,k}^m(0) + \Gamma_{ki,j}^m(0) + \Gamma_{ik,j}^m(0)) g_{m\ell}(0) \\ &= -(\Gamma_{ij,k}^m(0) + 2\Gamma_{ki,j}^m(0)) g_{m\ell}(0). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Also gilt

$$\begin{aligned} 2R_{ikj\ell}(0) x^k x^\ell &\stackrel{\text{Prop. 3.1.3}}{=} (-R_{kij\ell}(0) - R_{\ell jik}(0)) x^k x^\ell \\ &\stackrel{(3.3)}{=} (\Gamma_{j\ell,k}^m(0) + 2\Gamma_{kj,\ell}^m(0)) g_{mi}(0) x^k x^\ell \\ &\quad + (\Gamma_{ik,\ell}^m(0) + 2\Gamma_{\ell i,k}^m(0)) g_{mj}(0) x^k x^\ell \\ &\stackrel{(*)}{=} (\Gamma_{j\ell,k}^m(0) + 2\Gamma_{kj,\ell}^m(0)) g_{mi}(0) x^k x^\ell \\ &\quad + (\Gamma_{i\ell,k}^m(0) + 2\Gamma_{ki,\ell}^m(0)) g_{mj}(0) x^\ell x^k \\ &\stackrel{(3.1)}{=} (g_{ij,\ell k}(0) + 2g_{ij,k\ell}(0)) \cdot x^k x^\ell \\ &= 3g_{ij,k\ell}(0) \cdot x^k x^\ell. \end{aligned}$$

Dabei haben wir in der mit (\*) gekennzeichneten Umformung in der unteren Zeile den Summationsparameter  $k$  in  $\ell$  umbenannt und umgekehrt. Dies ergibt für den Term 2. Ordnung in der Taylorentwicklung

$$\frac{1}{2} g_{ij,k\ell}(0) x^k x^\ell = \frac{1}{3} R_{ikj\ell}(0) \cdot x^k x^\ell.$$

□

## 3.2 Schnittkrümmung

Sei  $V$  ein endlich-dimensionaler Vektorraum mit einer nicht entarteten symmetrischen Bilinearform  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . (Später wird  $V = T_p M$  und  $\langle \cdot, \cdot \rangle = g|_p(\cdot, \cdot)$  sein.)

**Definition.** Ein Untervektorraum  $U \subset V$  heißt *nicht entartet*, falls  $\langle \cdot, \cdot \rangle|_{U \times U} : U \times U \rightarrow \mathbb{R}$  nicht entartet ist. Man setzt dann:

$$G_k(V, \langle \cdot, \cdot \rangle) := \{k\text{-dimensionale, nicht entartete Untervektorräume von } V\}.$$

**Bemerkung.** Ist  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  definit, so ist jeder Untervektorraum nicht entartet.

Setze  $Q : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $Q(\xi, \eta) := \langle \xi, \xi \rangle \langle \eta, \eta \rangle - \langle \xi, \eta \rangle^2$ .

**LEMMA 3.2.1.** Es sind äquivalent für zweidimensionale Untervektorräume  $E \subset V$ :

- (1)  $E \in G_2(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ .
- (2) Es existiert eine Basis  $\xi, \eta$  von  $E$  mit  $Q(\xi, \eta) \neq 0$ .
- (3) Für alle Basen  $\xi, \eta$  von  $E$  gilt  $Q(\xi, \eta) \neq 0$ .

*Beweis.* Bezüglich einer Basis  $\xi, \eta$  von  $E$  wird  $\langle \cdot, \cdot \rangle|_{E \times E}$  dargestellt durch die Matrix

$$A_{\xi, \eta} := \begin{pmatrix} \langle \xi, \xi \rangle & \langle \eta, \xi \rangle \\ \langle \xi, \eta \rangle & \langle \eta, \eta \rangle \end{pmatrix}.$$

Dann gilt  $Q(\xi, \eta) = \det A_{\xi, \eta}$ . Daraus folgt die Behauptung.  $\square$

**Bemerkung.** • Ist  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  positiv definit, so ist

$$\sqrt{Q(\xi, \eta)} = \text{Flächeninhalt des von } \xi \text{ und } \eta \text{ aufgespannten Parallelogramms.}$$

- Der zweidimensionale Untervektorraum  $E \subset V$  ist genau dann entartet, wenn eine Basis  $\xi, \eta$  von  $E$  existiert mit

$$\langle \xi, \xi \rangle = \langle \xi, \eta \rangle = 0.$$

*Begründung:*

$$„\Leftarrow“: Q(\xi, \eta) = \underbrace{\langle \xi, \xi \rangle}_{=0} \langle \eta, \eta \rangle - \underbrace{\langle \xi, \eta \rangle^2}_{=0}.$$

„ $\Rightarrow$ “: Sei  $E$  entartet, das heißt,  $\langle \cdot, \cdot \rangle|_{E \times E}$  ist entartet. Daraus folgt: Es existiert ein  $\xi \in E - \{0\}$  mit  $\langle \xi, \zeta \rangle = 0$  für alle  $\zeta \in E$ . Ergänze  $\xi$  durch ein  $\eta$  zu einer Basis von  $E$ .

**Beispiel.** Sei  $V = \mathbb{R}^3$  mit dem Minkowski-Skalarprodukt

$$\langle\langle \xi, \eta \rangle\rangle = -\xi^0 \eta^0 + \xi^1 \eta^1 + \xi^2 \eta^2.$$

Betrachte den Lichtkegel  $\mathcal{C} := \{\xi \in \mathbb{R}^3 - \{0\} \mid \langle\langle \xi, \xi \rangle\rangle = 0\}$ . Dann ist eine Ebene  $E \subset \mathbb{R}^3$  genau dann entartet, wenn  $E = T_p \mathcal{C}$  für ein  $p \in \mathcal{C}$ . Sei nämlich  $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathcal{C}$  eine glatte Kurve mit  $c(0) = p$  und  $\dot{c}(0) = \xi$ . Dann gilt:

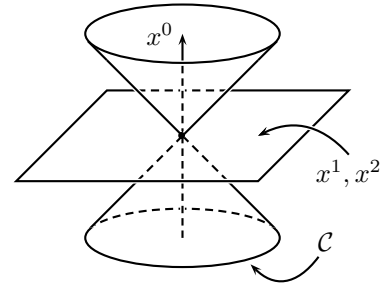
$$\langle\langle c(t), c(t) \rangle\rangle = 0 \quad \forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$$

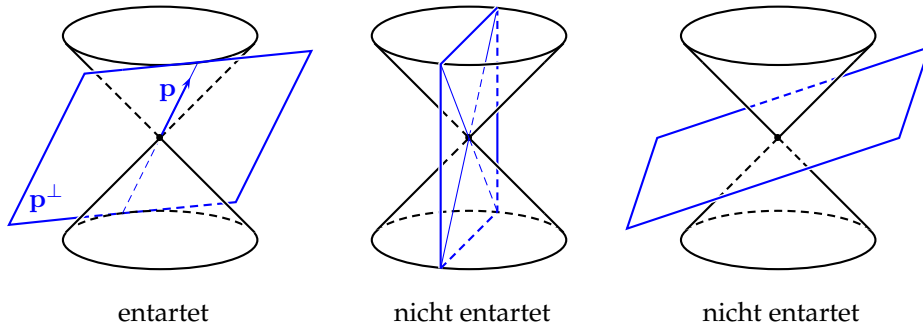
$$\Rightarrow 0 = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \langle\langle c(t), c(t) \rangle\rangle = 2 \langle\langle \dot{c}(0), c(0) \rangle\rangle = 2 \langle\langle \xi, p \rangle\rangle$$

$$\Rightarrow T_p \mathcal{C} \subset p^\perp, \text{ wobei beide zweidimensionale Untervektorräume von } \mathbb{R}^3 \text{ sind.}$$

$$\Rightarrow T_p \mathcal{C} = p^\perp.$$

$$\Rightarrow \xi = p \text{ und } \eta \in T_p \mathcal{C} \text{ linear unabhängig davon erfüllen } \langle\langle \xi, \xi \rangle\rangle = \langle\langle \xi, \eta \rangle\rangle = 0.$$





**LEMMA 3.2.2.** Sei  $V$  endlich-dimensionaler  $\mathbb{R}$ -Vektorraum mit nicht entarteter symmetrischer Bilinearform  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Sei  $R : V \times V \times V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  multilinear mit

$$R(\xi, \eta, \zeta, \nu) = -R(\eta, \xi, \zeta, \nu) = -R(\xi, \eta, \nu, \zeta)$$

für alle  $\xi, \eta, \zeta, \nu \in V$ . Dann hängt für  $E \in G_2(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  der Ausdruck

$$K(E) := \frac{R(\xi, \eta, \eta, \xi)}{Q(\xi, \eta)}$$

nicht von der Wahl der Basis  $\xi, \eta$  von  $E$  ab, sondern nur von  $E$  selbst.

*Beweis.* Sei  $\mu, \nu$  eine andere Basis von  $E$  mit  $\mu = a\xi + b\eta$  und  $\nu = c\xi + d\eta$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} R(\mu, \nu, \nu, \mu) &= R(a\xi + b\eta, c\xi + d\eta, c\xi + d\eta, a\xi + b\eta) \\ &= adcb \cdot R(\xi, \eta, \xi, \eta) + adda \cdot R(\xi, \eta, \eta, \xi) + bccb \cdot R(\eta, \xi, \xi, \eta) + bcda \cdot R(\eta, \xi, \eta, \xi) \\ &= (-abcd + a^2d^2 + b^2c^2 - abcd) \cdot R(\xi, \eta, \eta, \xi) \\ &= (ad - bc)^2 \cdot R(\xi, \eta, \eta, \xi) \end{aligned}$$

Die Abbildung  $R_1 : V \times V \times V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ , definiert durch  $R_1(\xi, \eta, \zeta, \nu) := \langle \xi, \nu \rangle \langle \eta, \zeta \rangle - \langle \xi, \zeta \rangle \langle \eta, \nu \rangle$ , hat alle Symmetrien des Krümmungstensors in Proposition 3.1.3. Daraus folgt

$$\underbrace{R_1(\mu, \nu, \nu, \mu)}_{= Q(\mu, \nu)} = (ad - bc)^2 \underbrace{R_1(\xi, \eta, \eta, \xi)}_{= Q(\xi, \eta)}.$$

Daraus folgt dann direkt die Behauptung. □

Setze  $G_2(M, g) := \bigcup_{p \in M} G_2(T_p M, g|_p)$ .

**Definition.** Die Funktion  $K : G_2(M, g) \rightarrow \mathbb{R}$ , definiert durch

$$K(E) := \frac{R(\xi, \eta, \eta, \xi)}{Q(\xi, \eta)},$$

wobei  $\xi, \eta$  eine Basis von  $E$  bildet, heißt *Schnittkrümmung* von  $(M, g)$ . Hierbei ist  $R$  der riemannsche Krümmungstensor.

**Bemerkung.** Die Schnittkrümmung ist nur für Mannigfaltigkeiten mit der Dimension größer gleich 2 erklärt.

Falls  $\dim(M) = 1$ , so ist  $R(\xi, \eta, \zeta, \nu) = 0$  für alle  $\xi, \eta, \zeta, \nu \in T_p M$  wegen der Schiefsymmetrie in  $\xi$  und  $\eta$ .

**Definition.** Ist  $(M, g)$  eine zweidimensionale semi-riemannsche Mannigfaltigkeit, so heißt

$$K : M \rightarrow \mathbb{R}, \quad K(p) := K(T_p M)$$

die *Gauß-Krümmung* von  $M$ .

**Bemerkung.** Die Schnittkrümmung bestimmt den riemannschen Krümmungstensor. Es gilt nämlich

$$\begin{aligned} 6R(\xi, \eta, \zeta, \nu) = & K(\xi + \nu, \eta + \zeta)Q(\xi + \nu, \eta + \zeta) - K(\eta + \nu, \xi + \zeta)Q(\eta + \nu, \xi + \zeta) \\ & - K(\xi, \eta + \zeta)Q(\xi, \eta + \zeta) - K(\eta, \xi + \nu)Q(\eta, \xi + \nu) \\ & - K(\zeta, \xi + \nu)Q(\zeta, \xi + \nu) - K(\nu, \eta + \zeta)Q(\nu, \eta + \zeta) \\ & + K(\xi, \eta + \nu)Q(\xi, \eta + \nu) + K(\eta, \zeta + \xi)Q(\eta, \zeta + \xi) \\ & + K(\zeta, \eta + \nu)Q(\zeta, \eta + \nu) + K(\nu, \xi + \zeta)Q(\nu, \xi + \zeta) \\ & + K(\xi, \zeta)Q(\xi, \zeta) + K(\eta, \nu)Q(\eta, \nu) - K(\xi, \nu)Q(\xi, \nu) - K(\eta, \zeta)Q(\eta, \zeta) \end{aligned}$$

für alle  $\xi, \eta, \zeta, \nu \in T_p M$ , für die die entsprechenden Schnittkrümmungen definiert sind. Die Menge der Quadrupel  $(\xi, \eta, \zeta, \nu)$ , die dies erfüllen, ist offen und dicht in  $T_p M \times T_p M \times T_p M \times T_p M$ . Wegen der Stetigkeit legt dies  $R$  auf  $T_p M \times T_p M \times T_p M \times T_p M$  fest.

*Spezialfall:* Hängt  $K(E)$ ,  $E \subset T_p M$ , nur ab von  $p$  (automatisch erfüllt, falls  $\dim(M) = 2$ , im Allgemeinen aber nicht erfüllt, falls  $\dim(M) \geq 3$ ), so gilt

$$R(\xi, \eta, \zeta, \nu) = K(p)(\langle \eta, \zeta \rangle \langle \xi, \nu \rangle - \langle \xi, \zeta \rangle \langle \eta, \nu \rangle).$$

Außerdem gilt immer:  $K = 0 \Leftrightarrow R = 0$ .

### 3.3 Ricci- und Skalkrümmung

Sei  $(M, g)$  eine semi-riemannsche Mannigfaltigkeit, sei  $p \in M$ . Der riemannsche Krümmungstensor an der Stelle  $p \in M$  ist eine multilineare Abbildung

$$R : T_p M \times T_p M \times T_p M \rightarrow T_p M.$$

Für feste  $\xi, \eta \in T_p M$  erhalten wir die lineare Abbildung

$$R(\xi, \cdot)\eta : T_p M \rightarrow T_p M, \quad \zeta \mapsto R(\xi, \zeta)\eta.$$

**Definition.** Die Abbildung

$$\text{ric} : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}, \quad \text{ric}(\xi, \eta) := -\text{Spur}(R(\xi, \cdot)\eta) = \text{Spur}(R(\cdot, \xi)\eta)$$

heißt *Ricci-Krümmung* (an der Stelle  $p$ ).

**Bemerkung.** Sei  $V$  ein  $n$ -dimensionaler  $\mathbb{R}$ -Vektorraum mit nicht entarteter symmetrischer Bilinearform  $g$ , seien  $E_1, \dots, E_n$  eine verallgemeinerte Orthonormalbasis von  $(V, g)$ , das heißt  $g(E_i, E_j) = \varepsilon_i \delta_{i,j}$  mit  $\varepsilon_i = \pm 1$ . Dann gilt für jeden Endomorphismus  $A : V \rightarrow V$ , dass

$$\text{Spur}(A) = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \cdot g(A(E_i), E_i).$$

Denn: Mit  $\omega_i : V \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\omega_i(\xi) := \varepsilon_i \cdot g(\xi, E_i)$ , ist  $\omega_1, \dots, \omega_n$  die zu  $E_1, \dots, E_n$  duale Basis.

$$\Rightarrow \text{Spur}(A) = \sum_{i=1}^n \omega_i(A(E_i)) = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \cdot g(A(E_i), E_i).$$

In lokalen Koordinaten: Für eine Karte  $x : U \rightarrow V$  von  $M$  setze

$$\text{ric}_{ij} : V \rightarrow \mathbb{R}, \quad \text{ric}_{ij}(x(p)) := \text{ric}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p, \frac{\partial}{\partial x^j}\Big|_p\right).$$

**LEMMA 3.3.1 (Eigenschaften der Ricci-Krümmung).**

- (1) Die Abbildung  $\text{ric}$  ist bilinear und symmetrisch auf  $T_p M$ .
- (2) Für eine verallgemeinerte Orthonormalbasis  $E_1, \dots, E_n$  von  $(T_p M, g|_p)$  gilt:

$$\text{ric}(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \cdot g(R(\xi, E_i)E_i, \eta).$$

- (3) Es gilt:

$$\text{ric}_{ij} = \sum_{k=1}^n R_{ikj}^k.$$

*Beweis.*

- (2) Es gilt

$$\begin{aligned} \text{ric}(\xi, \eta) &= \text{Spur}(\zeta \mapsto -R(\xi, \zeta)\eta) \\ &= \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \cdot g(-R(\xi, E_i)\eta, E_i) \\ &= \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \cdot g(R(\xi, E_i)E_i, \eta) \end{aligned}$$

- (1) Bilinearität ist klar, da  $R$  multilinear.

$$\begin{aligned} \text{ric}(\eta, \xi) &= \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \cdot g(R(\eta, E_i)E_i, \xi) \\ &\stackrel{\text{Prop. 3.1.3(5)}}{=} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \cdot g(R(E_i, \xi)\eta, E_i) \\ &\stackrel{\text{Prop. 3.1.3 (2),(3)}}{=} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \cdot g(R(\xi, E_i)E_i, \eta) \\ &= \text{ric}(\xi, \eta) \end{aligned}$$

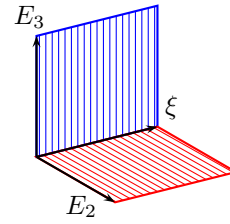
- (3) Es gilt:  $\text{ric}_{ij} = \text{ric}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \text{Spur}\left(\zeta \mapsto -R\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \zeta\right) \frac{\partial}{\partial x^j}\right)$ . Bezüglich der Basis  $\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}$  hat dieser Endomorphismus die Matrixdarstellung

$$(-R^l_{jik})_{k,l} = (R^l_{jki})_{k,l}.$$

Daraus folgt, dass  $\text{ric}_{ij} = \sum_{k=1}^n R^k_{jki}$ , und wegen (1) ist  $\text{ric}_{ij} = \text{ric}_{ji}$ , woraus dann die Behauptung folgt.  $\square$

**LEMMA 3.3.2.** Die Ricci-Krümmung lässt sich durch Mittelung aus der Schnittkrümmung berechnen. Genauer: Ist  $\xi \in T_p M$  mit  $g(\xi, \xi) \neq 0$  und ist  $E_2, \dots, E_n$  eine verallgemeinerte Orthonormalbasis von  $\xi^\perp$ , dann

$$\text{ric}(\xi, \xi) = g(\xi, \xi) \cdot \underbrace{\sum_{j=2}^n K(\text{Spann}\{\xi, E_j\})}_{\text{Das ist im Wesentlichen der Mittelwert von } K \text{ auf allen Ebenen, die } \xi \text{ enthalten.}}$$



*Beweis.* O. B. d. A. sei  $g(\xi, \xi) = \pm 1$ . Schreibe  $\xi =: E_1$ . Dann bildet  $E_1, \dots, E_n$  eine verallgemeinerte Orthonormalbasis von  $T_p M$ .

$$\begin{aligned} \text{ric}(\xi, \xi) &= \sum_{i=1}^n g(E_i, E_i) \cdot g(R(\xi, E_i)E_i, \xi) \\ &= \sum_{i=2}^n g(E_i, E_i) \cdot g(R(\xi, E_i)E_i, \xi) \\ &= \sum_{i=2}^n g(E_i, E_i) \cdot K(\text{Spann}\{\xi, E_i\}) \cdot (g(\xi, \xi)g(E_i, E_i) - \underbrace{g(\xi, E_i)^2}_{=0}) \\ &= g(\xi, \xi) \cdot \sum_{i=2}^n K(\text{Spann}\{\xi, E_i\}) \end{aligned}$$

$\square$

**Bemerkung.** Durch Polarisieren legt  $\text{ric}(\xi, \xi)$  für alle  $\xi \in T_p M$  auch  $\text{ric}(\xi, \eta)$  für alle  $\xi, \eta \in T_p M$  fest, da:  $\text{ric}(\xi, \eta) = \frac{1}{2} (\text{ric}(\xi + \eta, \xi + \eta) - \text{ric}(\xi, \xi) - \text{ric}(\eta, \eta))$ .

**Bemerkung.** Die Abbildung  $\text{ric} : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$  ist bilinear und symmetrisch,  $g|_p : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$  ist auch bilinear und symmetrisch, zusätzlich aber noch nicht entartet.

Daraus folgt: Es existiert genau ein Endomorphismus  $\text{Ric} : T_p M \rightarrow T_p M$ , so dass

$$\text{ric}(\xi, \eta) = g|_p(\text{Ric}(\xi), \eta)$$

für alle  $\xi, \eta \in T_p M$ .

In lokalen Koordinaten: Für eine Karte  $x : U \rightarrow V$  erhält man Funktionen  $\text{Ric}^j_i : V \rightarrow \mathbb{R}$  durch:

$$\text{Ric}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_p\right) = \sum_{j=1}^n \text{Ric}^j_i(x(p)) \frac{\partial}{\partial x^j}\bigg|_p$$

Dabei gilt:

$$\begin{aligned}
 \text{ric}_{ij} &= \text{ric}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) \\
 &= g\left(\text{Ric}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right), \frac{\partial}{\partial x^j}\right) \\
 &= g\left(\sum_{k=1}^n \text{Ric}_i^k \frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) \\
 &= \sum_{k=1}^n \text{Ric}_i^k \cdot g\left(\frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) \\
 \Rightarrow \quad &\boxed{\text{ric}_{ij} = \sum_{k=1}^n \text{Ric}_i^k \cdot g_{kj}}
 \end{aligned}$$

**Definition.** Die Abbildung

$$\text{scal}(p) := \text{Spur}(\text{Ric})$$

heißt *Skalar­krümmung* im Punkt  $p \in M$ .

**LEMMA 3.3.3.** (1) In lokalen Koordinaten gilt

$$\text{scal}(p) = \sum_{i=1}^n \text{Ric}_i^i(x(p)) = \sum_{i,j=1}^n \text{ric}_{ij}(x(p)) \cdot g^{ij}(x(p)).$$

(2) Für eine verallgemeinerte Orthonormalbasis  $E_1, \dots, E_n$  von  $T_p M$  gilt

$$\text{scal}(p) = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \cdot \text{ric}(E_i, E_i).$$

*Beweis klar.*

□

**Spezialfall.**  $\dim M = 2$ .

Sei  $K$  die Gauß­krümmung (das heißt  $K(p) = K(T_p M)$ ), dann ist der Krümmungstensor gegeben durch

$$R(\xi, \eta, \zeta, \nu) = K(p)(g(\eta, \zeta)g(\xi, \nu) - g(\xi, \zeta)g(\eta, \nu)).$$

Daraus folgt für die Ricci-Krümmung

$$\begin{aligned}
 \text{ric}(\xi, \eta) &= \sum_{i=1}^2 \varepsilon_i \cdot R(\xi, E_i, E_i, \eta) \\
 &= K(p) \sum_{i=1}^2 \varepsilon_i (g(E_i, E_i)g(\xi, \eta) - g(\xi, E_i)g(E_i, \eta)) \\
 &= K(p)(2g(\xi, \eta) - g(\xi, \eta)) \\
 &= K(p) \cdot g(\xi, \eta) \\
 \Rightarrow \quad \text{ric} &= K \cdot g \\
 \Rightarrow \quad \text{scal} &= 2K
 \end{aligned}$$

### Abhängigkeiten der verschiedenen Krümmungsbegriffe.

$\dim M$	2	3	$\geq 4$
$R$			
$K$	$\Updownarrow$	$\Updownarrow$	$\Updownarrow$
ric	$\Updownarrow$	$\Updownarrow$	$\Downarrow$
scal	$\Updownarrow$	$\Downarrow$	$\Downarrow$

In der Physikliteratur werden in lokalen Koordinaten häufig folgende Bezeichnungen verwendet:

- für  $R$  schreibt man:  $R^l_{ijk}$  und  $R_{ijkl}$  (wie hier),
- für Ric und ric schreibt man:  $\text{ric}_{ij} = R_{ij}$  und  $\text{Ric}^j_i = R^j_i$ ,
- für scal schreibt man:  $\text{scal} = R$ .



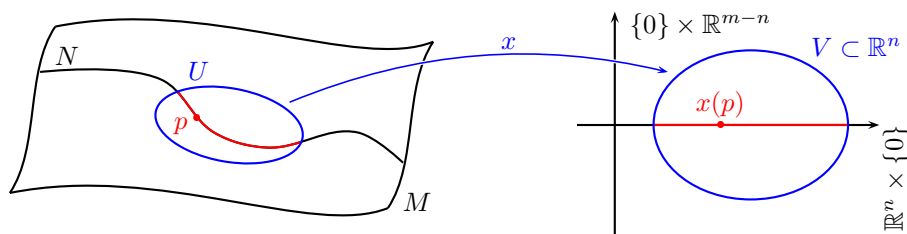
# Kapitel 4

## Untermannigfaltigkeiten

### 4.1 Untermannigfaltigkeiten differenzierbarer Mannigfaltigkeiten

**Definition.** Sei  $M$  eine  $m$ -dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit. Eine Teilmenge  $N \subset M$  heißt  $n$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit, falls für alle  $p \in N$  eine Karte  $x : U \rightarrow V$  von  $M$  mit  $p \in U$  existiert, so dass

$$x(N \cap U) = V \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\}).$$



Eine solche Karte heißt *Untermannigfaltigkeitskarte* für  $N$ . Die Zahl  $m - n$  heißt *Kodimension* von  $N$  in  $M$ .

**Beispiel.** (1) **Kodimension**  $n = 0$ .  $N \subset M$  ist genau dann eine Untermannigfaltigkeit der Kodimension 0, wenn  $N$  offen in  $M$  ist.

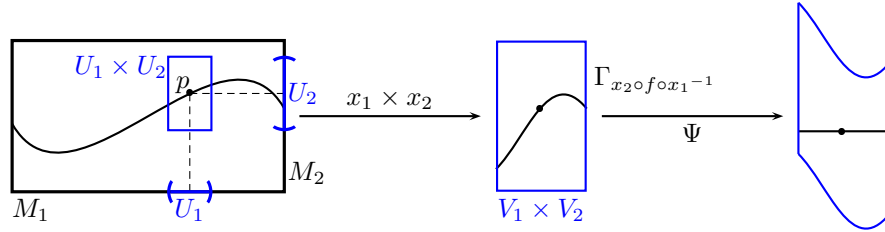
(2) **Dimension**  $n = 0$ .  $N \subset M$  ist genau dann eine Untermannigfaltigkeit der Dimension 0, wenn  $N$  eine diskrete Teilmenge von  $M$  ist.

(3) **Affine Unterräume.** Sei  $N \subset M = \mathbb{R}^m$  ein affiner Unterraum, das heißt  $N$  ist von der Form  $N = N' + p$ , wobei  $N' \subset \mathbb{R}^m$  ein  $n$ -dimensionaler Untervektorraum ist und  $p \in \mathbb{R}^m$  fest. Wähle  $A \in GL(m)$  mit  $AN' = \mathbb{R}^n \times \{0\}$ . Dann ist  $x : U = \mathbb{R}^m \rightarrow V = \mathbb{R}^m$ , gegeben durch

$$x(q) := A(q - p),$$

eine Untermannigfaltigkeitskarte.

- (4) **Graphen.** Seien  $M_1, M_2$  differenzierbare Mannigfaltigkeiten, sei  $f : M_1 \rightarrow M_2$  eine glatte Abbildung. Setze  $M = M_1 \times M_2$  und  $N = \Gamma_f = \{(\xi, \eta) \in M_1 \times M_2 \mid \eta = f(\xi)\}$ .



Wähle Karten  $x_i : U_i \rightarrow V_i$  von  $M_i$  mit  $p \in U_1 \times U_2$ . O. B. d. A. sei  $f(U_1) \subset U_2$ . Setze für  $w \in V_1$  und  $z \in V_2$

$$\psi(w, z) := (w, z - (x_2 \circ f \circ x_1^{-1})(w)).$$

Dann ist  $x := \psi \circ (x_1 \times x_2)$  eine Untermannigfaltigkeitskarte, definiert auf  $U_1 \times U_2$ .

**SATZ 4.1.1.** Sei  $M$  eine  $m$ -dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit. Sei  $N \subset M$  eine Teilmenge. Dann sind äquivalent:

- (i)  $N$  ist eine  $n$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit.
- (ii) Für alle  $p \in N$  existieren eine offene Umgebung  $U$  von  $p$  und glatte Funktionen  $f_1, \dots, f_{m-n} : U \rightarrow \mathbb{R}$ , so dass
  - (a)  $N \cap U = \{q \in U \mid f_1(q) = \dots = f_{m-n}(q) = 0\}$ .
  - (b) Die Differentiale  $df_1|_p, \dots, df_{m-n}|_p \in T_p^*M$  sind linear unabhängig.
- (iii) Für alle  $p \in N$  existieren eine offene Umgebung  $U$  von  $p$ , eine  $(m-n)$ -dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit  $R$  und eine glatte Abbildung  $f : U \rightarrow R$  mit
  - (a)  $N \cap U = f^{-1}(q)$ ,  $q = f(p)$ .
  - (b)  $df|_p : T_pM \rightarrow T_qR$  hat maximalen Rang.

*Beweis.*

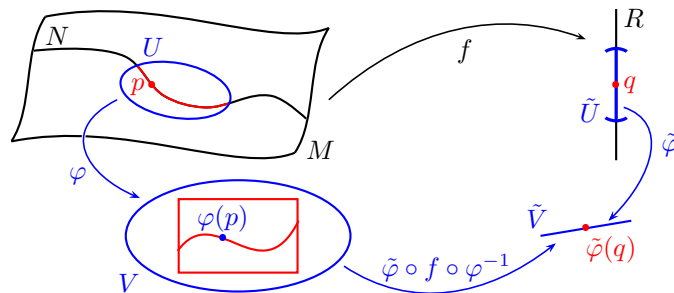
- (i)  $\Rightarrow$  (ii) Sei  $p \in N$ . Sei  $x : U \rightarrow V$  eine Untermannigfaltigkeitskarte für  $N$  mit  $p \in U$ . O. B. d. A. seien

- (1)  $x(p) = 0 \in \mathbb{R}^m$  (sonst verkette  $x$  mit einer geeigneten Translation).
- (2)  $V = V_1 \times V_2$ ,  $V_1 \subset \mathbb{R}^n$ ,  $V_2 \subset \mathbb{R}^{m-n}$  (sonst verkleinere  $U$ ).

Setze  $f_j : U \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_j := x^{n+j}$  für  $j = 1, \dots, m-n$ .

- (ii)  $\Rightarrow$  (iii) trivial (setze  $R := \mathbb{R}^{m-n}$  und  $f := (f_1, \dots, f_{m-n})$ ).

- (iii)  $\Rightarrow$  (i)



Wähle eine Karte  $\varphi : U \rightarrow V$  von  $M$  um  $p$  und eine Karte  $\tilde{\varphi} : \tilde{U} \rightarrow \tilde{V}$  von  $R$  um  $q := f(p)$ .  
O. B. d. A. sei  $f(U) \subset \tilde{U}$ . Da  $\varphi$  und  $\tilde{\varphi}$  Diffeomorphismen sind, gilt

$$\text{Rang } D(\tilde{\varphi} \circ f \circ \varphi^{-1})|_{\varphi(p)} = \text{Rang } df|_p = m - n.$$

Aus dem Satz über implizite Funktionen folgt dann: Nach eventueller Verkleinerung von  $V$  (und  $U$ ) zu  $V_1 \times V_2$  und Umsortierung der Koordinaten existiert eine glatte Abbildung  $g : V_1 \rightarrow V_2$ , so dass

$$(\tilde{\varphi} \circ f \circ \varphi^{-1})^{-1}(\tilde{\varphi}(q)) = (f \circ \varphi^{-1})^{-1}(q) = \Gamma_g.$$

Verkettet man  $\varphi$  mit einer Untermannigfaltigkeitskarte für Graphen wie im Beispiel (4), so erhält man eine Untermannigfaltigkeitskarte für  $N$  in  $M$  um  $p$ .  $\square$

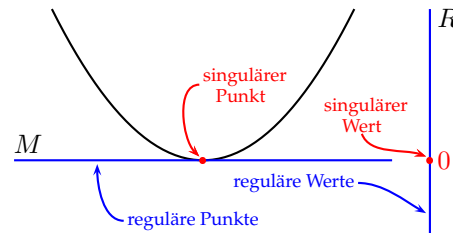
**Definition.** Seien  $M, R$  differenzierbare Mannigfaltigkeiten, sei  $f : M \rightarrow R$  glatt. Ein Punkt  $p \in M$  heißt *regulärer Punkt* von  $f$ , falls  $df|_p$  maximalen Rang hat. Ansonsten heißt  $p$  *singulärer Punkt* von  $f$ .

Ein Punkt  $q \in R$  heißt *regulärer Wert* von  $f$ , falls alle  $p \in f^{-1}(q)$  reguläre Punkte sind. Ansonsten heißt  $q$  *singulärer Wert* von  $f$ .

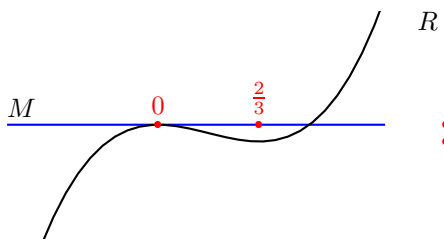
**Beispiel.** Seien  $M = R = \mathbb{R}$  und  $f(t) = t^2$ . Es gilt

$$df|_t(\xi) = f'(t) \cdot \xi.$$

Also ist  $t$  genau dann ein singulärer Punkt von  $f$ , wenn  $f'(t) = 0$ .



**Beispiel.** Seien  $M = R = \mathbb{R}$  und  $f(t) = t^2(t-1)$ . **Beispiel.** Seien  $M = R = \mathbb{R}$  und  $f(t) = 0$ .



**Bemerkung.** „Fast alle“ Punkte aus  $R$  sind reguläre Werte. Genauer:

**SATZ 4.1.2 (Sard).** Seien  $M, R$  differenzierbare Mannigfaltigkeiten, sei  $f : M \rightarrow R$  glatt. Dann ist die Menge  $\{ \text{singuläre Werte von } f \}$  eine Lebesgue-Nullmenge in  $R$ , das heißt, für alle Karten  $x : U \rightarrow V$  von  $R$  ist  $x(U \cap \{ \text{singuläre Werte von } f \}) \subset V$  eine Lebesgue-Nullmenge.

*Beweis siehe [Milnor, Kapitel 3].*

**KOROLLAR 4.1.3.** Ist  $f : M \rightarrow R$  glatt und gilt  $\dim R \leq \dim M$  und ist  $q \in R$  ein regulärer Wert von  $f$ , so ist  $N = f^{-1}(q)$  eine Untermannigfaltigkeit von  $M$  mit  $\text{codim}(N) = \dim(R)$ .

*Beweis folgt direkt aus Satz 4.1.1, Kriterium (iii).*  $\square$

**Beispiel.**  $M = \mathbb{R}^{n+1}, R = \mathbb{R}$ . Sei  $f : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \|x\|^2 = (x^0)^2 + \dots + (x^n)^2$ . Dann ist  $S^n = f^{-1}(1)$  und

$$Df|_x = (2x^0, \dots, 2x^n).$$

$$\Rightarrow \text{Rang } Df|_x = \begin{cases} 1, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$  Für alle  $x \in f^{-1}(1)$  ist  $\text{Rang } Df|_x = 1$ .

$\Rightarrow 1$  ist ein regulärer Wert von  $f$ .

$\stackrel{4.1.3}{\Rightarrow} S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  ist eine Untermannigfaltigkeit.

**Bemerkung.** In diesem Beispiel sind alle  $q \in \mathbb{R} - \{0\}$  reguläre Werte. Es ist

$$f^{-1}(q) = \begin{cases} S^n(\sqrt{q}), & q > 0 \\ \emptyset, & q < 0 \end{cases}$$

Für den singulären Wert  $q = 0$  gilt:  $f^{-1}(0) = \{0\}$  ist (zufälligerweise) auch eine Untermannigfaltigkeit, aber von der falschen Kodimension  $n + 1$ .

Im Allgemeinen ist aber  $f^{-1}(q)$  für einen singulären Wert  $q$  keine Untermannigfaltigkeit.

**Bemerkung.** Die Menge  $f^{-1}(q)$  kann aber auch eine Untermannigfaltigkeit mit der Kodimension  $\dim R$  sein, wenn  $q$  ein singulärer Wert ist.

**Beispiel.**  $S^n = g^{-1}(0)$ , wobei  $g : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = (\|x\|^2 - 1)^2$  und 0 ist singulärer Wert von  $g$ .

**Bemerkung.** Untermannigfaltigkeiten von differenzierbaren Mannigfaltigkeiten sind selbst wieder differenzierbare Mannigfaltigkeiten. Denn:

Seien  $N \subset M$  eine Untermannigfaltigkeit und  $p \in N$ , sei  $x : U \rightarrow V$  eine Untermannigfaltigkeitskarte mit  $x = (x^1, \dots, x^n, x^{n+1}, \dots, x^m)$ , dann ist  $(x^1, \dots, x^n) : U \cap N \rightarrow V \cap \mathbb{R}^n$  eine Karte von  $N$ .

**Satz 4.1.4.** Sei  $N \subset M$  eine Untermannigfaltigkeit. Sei  $\iota : N \rightarrow M$  die Inklusionsabbildung,  $\iota(p) = p$ . Dann gilt

- (i)  $\iota$  ist glatt und  $d\iota|_p : T_p N \rightarrow T_p M$  ist injektiv.
- (ii) Ist  $f : M \rightarrow P$  glatt, so ist auch  $f|_N : N \rightarrow P$  glatt.
- (iii) Ist  $g : Q \rightarrow M$  glatt mit  $g(Q) \subset N$ , so ist auch  $g : Q \rightarrow N$  glatt.

*Beweis.*

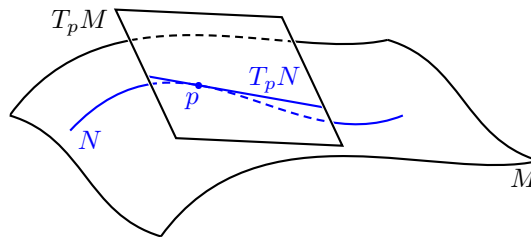
- (i) Sei  $x = (x^1, \dots, x^m)$  eine Untermannigfaltigkeitskarte von  $M$ ,  $\tilde{x} = (x^1, \dots, x^n)$  sei die zugehörige Karte von  $N$ .

$$\begin{array}{ccc} N \supset U \cap N & \xrightarrow{\iota} & U \subset M \\ \tilde{x} \downarrow & & \downarrow x \\ V \cap \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\xi \mapsto (\xi, 0)} & V \end{array}$$

Offenbar ist  $\xi \mapsto (\xi, 0)$  glatt. Da diese Abbildung linear ist, stimmt sie mit ihrem Differential überein, so dass dieses insbesondere injektiv ist.

- (ii) Die Funktion  $f|_N = f \circ \iota$  ist die Verkettung zweier glatter Abbildungen und damit selbst glatt.
- (iii) Sei  $q \in Q$  und  $x = (x^1, \dots, x^m)$  eine Untermannigfaltigkeitskarte von  $M$  um  $g(q)$ . Dann gilt für  $g^i := x^i \circ g$ , dass  $(g^1, \dots, g^m) = (g^1, \dots, g^n, 0, \dots, 0)$  glatt ist. Deshalb sind die  $g^1, \dots, g^m$  glatt und somit auch  $g : Q \rightarrow N$ .  $\square$

**Bemerkung.** Man identifiziert  $T_p N$  mit  $d\iota|_p(T_p N)$  und fasst ihn als Untervektorraum von  $T_p M$  auf.



**Bemerkung.** Für  $N \subset \mathbb{R}^m$  ist  $T_p N \subset T_p \mathbb{R}^m \xrightarrow[\text{Isom.}]{\text{kanon.}} \mathbb{R}^m$ .

**Beispiel.**  $N = S^n, m = n + 1$ . Dann gilt  $T_p S^n = p^\perp$ .

## 4.2 Semi-riemannsche Untermannigfaltigkeiten

**Definition.** Sei  $(\bar{M}, \bar{g})$  eine semi-riemannsche Mannigfaltigkeit. Eine Untermannigfaltigkeit  $M \subset \bar{M}$  heißt *semi-riemannsche Untermannigfaltigkeit*, falls für alle  $p \in M$

$$(\bar{g}|_p)|_{T_p M \times T_p M} =: g|_p$$

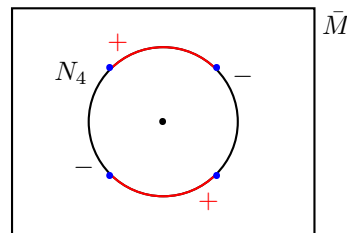
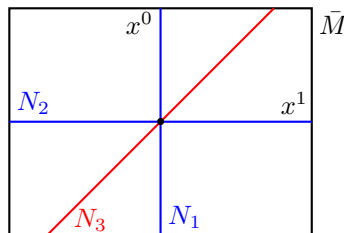
nicht entartet ist.

**Beispiel.** Ist  $(\bar{M}, \bar{g})$  riemannsch, so ist jede Untermannigfaltigkeit eine semi-riemannsche Untermannigfaltigkeit.

**Beispiel.**  $(\bar{M}, \bar{g}) = (\mathbb{R}^2, g_{\text{Mink}}), g_{\text{Mink}} = -dx^0 \otimes dx^0 + dx^1 \otimes dx^1$ .

$N_1 = \{(x^0, 0) | x^0 \in \mathbb{R}\}$  ist semi-riemannsch (mit negativ-definiter Metrik).  $N_2 = \{(0, x^1) | x^1 \in \mathbb{R}\}$  ist semi-riemannsch (mit positiv-definiter Metrik).

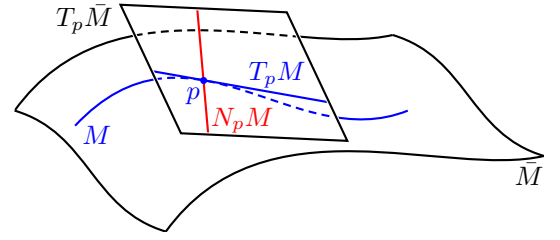
$N_3 = \{(t, t) | t \in \mathbb{R}\}$  ist nicht semi-riemannsch, da die Einschränkung von  $g_{\text{Mink}}$  auf  $T_p N_3$  verschwindet.  $N_4 = S^1$  besitzt 4 Punkte, in denen die Einschränkung von  $g_{\text{Mink}}$  entartet.



**Definition.** Sei  $M \subset \bar{M}$  eine semi-riemannsche Untermannigfaltigkeit. Dann heißt

$$N_p M := T_p M^\perp = \{\xi \in T_p \bar{M} \mid \bar{g}|_p(\xi, \eta) = 0 \forall \eta \in T_p M\}$$

Normalraum von  $M$  im Punkt  $p$ .



**Bemerkung.** Es gilt  $T_p \bar{M} = T_p M \oplus N_p M$ . Denn:

- (1)  $\dim N_p M \geq \dim T_p \bar{M} - \dim T_p M$ .
- (2) Wäre  $\xi \in T_p M \cap N_p M$  mit  $\xi \neq 0$ , dann wäre  $\xi \in T_p M$  mit  $\bar{g}|_p(\xi, \eta) = 0$  für alle  $\eta \in T_p M$  und damit wäre  $(\bar{g}|_p)|_{T_p M \times T_p M}$  entartet. Das ist ein Widerspruch!.

Sei  $M \subset \bar{M}$  eine semi-riemannsche Untermannigfaltigkeit, sei  $p \in M$ . Seien

$$\tan : T_p \bar{M} \rightarrow T_p M$$

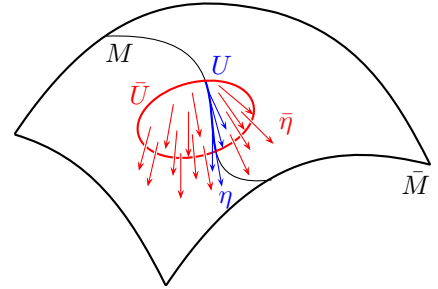
$$\text{nor} : T_p \bar{M} \rightarrow N_p M$$

die Orthogonalprojektionen. Sowohl  $M$  als auch  $\bar{M}$  tragen als semi-riemannsche Mannigfaltigkeiten je einen Levi-Civita-Zusammenhang  $\nabla$  bzw.  $\bar{\nabla}$ . Wir wollen jetzt untersuchen, inwiefern man  $\nabla$  direkt aus  $\bar{\nabla}$  bestimmen kann.

$$\begin{array}{ccc} (\bar{M}, \bar{g}) & \xrightarrow{\quad} & \bar{\nabla} \text{ Levi-Civita-Zusammenhang} \\ \downarrow & & \downarrow ? \\ (M, g) & \xrightarrow{\quad} & \nabla \text{ Levi-Civita-Zusammenhang} \end{array}$$

Dabei ist  $g|_p := (\bar{g}|_p)_{T_p M \times T_p M}$ .

Seien  $p \in M$ ,  $\xi \in T_p M$  und  $\eta \in C^\infty(U, TM)$ , wobei  $U \subset M$  eine offene Umgebung von  $p$  ist. Wähle eine glatte Fortsetzung  $\bar{\eta}$  von  $\eta$  auf eine in  $\bar{M}$  offene Umgebung  $\bar{U}$  von  $p$ . Dann hängt  $\bar{\nabla}_\xi \bar{\eta} \in T_p \bar{M}$  nicht von der Wahl der Fortsetzung  $\bar{\eta}$  ab. Denn:  $\xi \in T_p M$  und daher von der Form  $\xi = \dot{c}(0)$  mit einer Kurve  $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ . Also hängt  $\bar{\nabla}_\xi \bar{\eta}$  von  $\bar{\eta}$  nur längs  $c$  ab, das heißt nur von  $\eta$ .



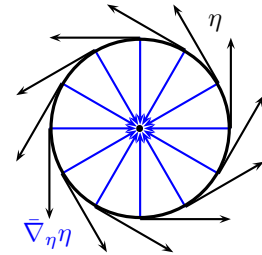
Wir können also schreiben:

$$\bar{\nabla}_\xi \eta := \bar{\nabla}_\xi \bar{\eta}.$$

**Beispiel.**  $\bar{M} = (\mathbb{R}^2, g_{\text{eukl}})$ ,  $M = S^1$ . Setze  $\eta(x^1, x^2) = (-x^2, x^1)$ . Für  $c : \mathbb{R} \rightarrow S^1$  mit  $c(t) = (\cos(t), \sin(t))$  gilt

$$\dot{c}(t) = \eta(c(t)).$$

Daraus folgt:  $\bar{\nabla}_\eta \eta = \frac{\bar{\nabla}}{dt} \dot{c} = \ddot{c} = (-\cos(t), -\sin(t))$  ist *nicht* tangential an  $S^1$ .



Wir setzen  $\nabla_\xi \eta := \tan(\bar{\nabla}_\xi \eta)$ .

**SATZ 4.2.1.** Sei  $(\bar{M}, \bar{g})$  eine semi-riemannsche Mannigfaltigkeit, sei  $M \subset \bar{M}$  eine semi-riemannsche Untermannigfaltigkeit mit induzierter semi-riemannscher Metrik  $g$ . Sei  $\bar{\nabla}$  der Levi-Civita-Zusammenhang von  $(\bar{M}, \bar{g})$ . Dann ist

$$\nabla_\xi \eta = \tan(\bar{\nabla}_\xi \eta)$$

der Levi-Civita-Zusammenhang von  $(M, g)$ .

*Beweis.* Wir überprüfen für  $\nabla$  die Axiome des Levi-Civita-Zusammenhangs für  $(M, g)$ .

(i) *Lokalität:* klar, da  $\bar{\nabla}$  lokal ist.

(ii) *Linearität in  $\xi$ :* klar.

(iii) *Linearität in  $\eta$ :* klar.

(iv) *Produktregel I:* Seien  $f \in C^\infty(U)$  und  $\eta \in C^\infty(U, TM)$ , wobei  $U \subset M$  eine offene Umgebung von  $p$  ist, sei  $\xi \in T_p M$ . Seien  $\bar{\eta}$  bzw.  $\bar{f}$  glatte Fortsetzungen von  $\eta$  bzw.  $f$  auf eine offene Umgebung  $\bar{U}$  von  $p$  in  $\bar{M}$ .

$$\begin{aligned} \nabla_\xi(f \cdot \eta) &= \tan(\bar{\nabla}_\xi(\bar{f} \cdot \bar{\eta})) \\ &= \tan(\partial_\xi \bar{f} \cdot \bar{\eta}|_p + \bar{f}(p) \cdot \bar{\nabla}_\xi \bar{\eta}) \\ &= \tan(\partial_\xi f \cdot \eta|_p + f(p) \cdot \bar{\nabla}_\xi \bar{\eta}) \\ &= \partial_\xi f \cdot \tan(\eta|_p) + f(p) \cdot \tan(\bar{\nabla}_\xi \bar{\eta}) \\ &= \partial_\xi f \cdot \eta|_p + f(p) \nabla_\xi \eta \end{aligned}$$

(v) *Produktregel II:* Seien  $\xi \in T_p M$  und  $\eta_1, \eta_2 \in C^\infty(U, TM)$ . Wähle glatte Fortsetzungen  $\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2 \in C^\infty(\bar{U}, T\bar{M})$ .

$$\begin{aligned} \partial_\xi g(\eta_1, \eta_2) &= \partial_\xi \bar{g}(\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2) \\ &= \bar{g}|_p(\bar{\nabla}_\xi \bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2|_p) + \bar{g}|_p(\bar{\eta}_1|_p, \bar{\nabla}_\xi \bar{\eta}_2) \\ &\quad \underbrace{= \eta_2|_p, \text{ insbesondere tangential an } M} \\ &= g|_p(\tan(\bar{\nabla}_\xi \bar{\eta}_1), \eta_2|_p) + g|_p(\eta_1|_p, \tan(\bar{\nabla}_\xi \bar{\eta}_2)) \\ &= g|_p(\nabla_\xi \eta_1, \eta_2|_p) + g|_p(\eta_1|_p, \nabla_\xi \eta_2) \end{aligned}$$

(vi) *Torsionsfreiheit:* Seien  $x^1, \dots, x^m, x^{m+1}, \dots, x^{\bar{m}}$  Untermannigfaltigkeitskoordinaten auf  $\bar{M}$ . Damit sind  $x^1, \dots, x^m$  Koordinaten auf  $M$ . Für  $1 \leq i, j \leq m$ :

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \tan\left(\bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \tan\left(\bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^i}\right) = \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^i}$$

□

**Beispiel.**  $M = S^1 \subset \bar{M} = \mathbb{R}^2, \bar{g} = g_{\text{eukl}}$ . Setze  $\eta(c(t)) = \dot{c}(t)$ , wobei  $c(t) = (\cos(t), \sin(t))$ . Dann

$$\nabla_\eta \eta = \tan\left(\bar{\nabla}_\eta \eta|_p\right) = \tan(-p) = 0.$$

**LEMMA 4.2.2.** Sei  $\xi \in T_p M$ , sei  $\eta \in C^\infty(U, TM)$ , wobei  $U \subset M$  eine offene Umgebung von  $p$  ist. Dann hängt  $\text{nor}(\bar{\nabla}_\xi \eta) \in N_p M$  von  $\eta$  nur vermöge  $\eta|_p$  ab.

*Beweis.* Seien  $x^1, \dots, x^m, x^{m+1}, \dots, x^{\bar{m}}$  Untermannigfaltigkeitskoordinaten auf  $\bar{M}$  um  $p$ . Seien  $\Gamma_{ij}^k : U \rightarrow \mathbb{R}$  die Christoffel-Symbole von  $\nabla$ ,  $1 \leq i, j, k \leq m$ , und  $\bar{\Gamma}_{ij}^k : U \rightarrow \mathbb{R}$  die Christoffel-Symbole von  $\bar{\nabla}$ ,  $1 \leq i, j, k \leq \bar{m}$ .

Schreibe auf  $U$ :  $\eta = \sum_{j=1}^m \eta^j \frac{\partial}{\partial x^j}$ . Definiere auf  $\bar{U}$ :  $\bar{\eta}^j(x^1, \dots, x^{\bar{m}}) := \eta^j(x^1, \dots, x^m)$  für  $j = 1, \dots, m$  und  $\bar{\eta}^j(x^1, \dots, x^{\bar{m}}) := 0$  für  $j = m+1, \dots, \bar{m}$ . Setze  $\bar{\eta} := \sum_{j=1}^{\bar{m}} \bar{\eta}^j \frac{\partial}{\partial x^j}$ . Schreibe ferner  $\xi = \sum_{i=1}^m \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} \text{nor}(\bar{\nabla}_\xi \eta) &= \text{nor}(\bar{\nabla}_\xi \bar{\eta}) \\ &= \bar{\nabla}_\xi \bar{\eta} - \nabla_\xi \eta \\ &= \sum_{i=1}^m \xi^i \sum_{k=1}^{\bar{m}} \left( \frac{\partial \bar{\eta}^k}{\partial x^i} \Big|_{x(p)} + \sum_{j=1}^{\bar{m}} \bar{\Gamma}_{ij}^k \Big|_{x(p)} \cdot \bar{\eta}^j \Big|_{x(p)} \right) \frac{\partial}{\partial x^k} \Big|_p \\ &\quad - \sum_{i=1}^m \xi^i \sum_{k=1}^m \left( \frac{\partial \eta^k}{\partial x^i} \Big|_{x(p)} + \sum_{j=1}^m \Gamma_{ij}^k \Big|_{x(p)} \cdot \eta^j \Big|_{x(p)} \right) \frac{\partial}{\partial x^k} \Big|_p \\ &= \sum_{i=1}^m \xi^i \sum_{j=1}^m \eta^j \Big|_{x(p)} \left( \sum_{k=1}^{\bar{m}} \bar{\Gamma}_{ij}^k \Big|_{x(p)} \frac{\partial}{\partial x^k} \Big|_p - \sum_{k=1}^m \Gamma_{ij}^k \Big|_{x(p)} \frac{\partial}{\partial x^k} \Big|_p \right). \end{aligned}$$

Dies hängt nur von  $\eta^j \Big|_{x(p)}$ , d. h. von  $\eta|_p$  ab.  $\square$

**Definition.** Die Abbildung  $II : T_p M \times T_p M \rightarrow N_p M$ , gegeben durch  $II(\xi, \eta) = \text{nor}(\bar{\nabla}_\xi \eta)$ , heißt zweite Fundamentalform von  $M$  in  $\bar{M}$  (im Punkt  $p \in M$ ).

**LEMMA 4.2.3.** Die zweite Fundamentalform  $II$  ist bilinear und symmetrisch.

*Beweis.* Im vorangegangenen Beweis haben wir gezeigt, dass

$$II(\xi, \eta) = \sum_{i,j=1}^m \left( \sum_{k=1}^{\bar{m}} \bar{\Gamma}_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k} \Big|_p - \sum_{k=1}^m \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k} \Big|_p \right) \xi^i \eta^j.$$

Offenbar ist  $II$  bilinear. Wegen der Symmetrie der Christoffel-Symbole in den unteren Indizes ist  $II$  auch symmetrisch.  $\square$

**Beispiel.** Sei  $M = S^1 \subset \bar{M} = \mathbb{R}^2$  und  $\eta$  wie im letzten Beispiel. Für die zweite Fundamentalform gilt  $II(\eta, \eta) = -p$ .

**Fazit.** Die Gleichung  $\bar{\nabla}_\xi \eta = \nabla_\xi \eta + II(\xi, \eta|_p)$  ist die Zerlegung in Tangential- und Normalteil.

**Notation.** Schreibe  $\langle \xi, \eta \rangle$  statt  $g(\xi, \eta)$  oder  $\bar{g}(\xi, \eta)$ .

**SATZ 4.2.4 (Gauß-Formel).** Sei  $M \subset \bar{M}$  eine semi-riemannsche Untermannigfaltigkeit, sei  $p \in M$ . Seien  $\xi, \eta, \zeta, \nu \in T_p M$ . Dann gilt

$$R(\zeta, \nu, \xi, \eta) = \bar{R}(\zeta, \nu, \xi, \eta) + \langle II(\nu, \xi), II(\zeta, \eta) \rangle - \langle II(\zeta, \xi), II(\nu, \eta) \rangle.$$



*Beweis.* Seien  $x^1, \dots, x^m$  Koordinaten von  $M$  um  $p$ , die von Untermannigfaltigkeitskoordinaten  $x^1, \dots, x^m, x^{m+1}, \dots, x^{\bar{m}}$  herrühren. Es genügt, die Behauptung für  $\xi = \frac{\partial}{\partial x^i}|_p$ ,  $\eta = \frac{\partial}{\partial x^j}|_p$ ,  $\zeta = \frac{\partial}{\partial x^k}|_p$  und  $\nu = \frac{\partial}{\partial x^l}|_p$  zu zeigen. Es gilt

$$\begin{aligned}
& \bar{R}(\zeta, \nu, \xi, \eta) = \langle \bar{R}(\zeta, \nu)\xi, \eta \rangle \\
& = \left\langle \bar{\nabla}_\zeta \bar{\nabla}_\nu \frac{\partial}{\partial x^i} - \bar{\nabla}_\nu \bar{\nabla}_\zeta \frac{\partial}{\partial x^i} - \bar{\nabla}_\nu \bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial x^k}|_p} \frac{\partial}{\partial x^i} + \bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial x^k}|_p} \bar{\nabla}_\nu \frac{\partial}{\partial x^i}, \eta \right\rangle \\
& \stackrel{\text{Torsionsfreiheit}}{=} \left\langle \bar{\nabla}_\zeta \bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial x^l}} \frac{\partial}{\partial x^i} - \bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial x^l}} \bar{\nabla}_\zeta \frac{\partial}{\partial x^i}, \eta \right\rangle \\
& = \left\langle \bar{\nabla}_\zeta \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^l}} \frac{\partial}{\partial x^i} + \bar{\nabla}_\zeta II \left( \frac{\partial}{\partial x^l}, \frac{\partial}{\partial x^i} \right) - \bar{\nabla}_\nu \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}} \frac{\partial}{\partial x^i} - \bar{\nabla}_\nu II \left( \frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^i} \right), \eta \right\rangle \\
& = \left\langle \nabla_\zeta \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^l}} \frac{\partial}{\partial x^i} - \nabla_\nu \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}} \frac{\partial}{\partial x^i}, \eta \right\rangle \\
& \quad + \overbrace{\partial_\zeta \left\langle II \left( \frac{\partial}{\partial x^l}, \frac{\partial}{\partial x^i} \right), \frac{\partial}{\partial x^j} \right\rangle}^{\equiv 0} - \left\langle II \left( \frac{\partial}{\partial x^l}, \frac{\partial}{\partial x^i} \right), \bar{\nabla}_\zeta \frac{\partial}{\partial x^j} \right\rangle \\
& \quad - \overbrace{\partial_\nu \left\langle II \left( \frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^i} \right), \frac{\partial}{\partial x^j} \right\rangle}^{\equiv 0} + \left\langle II \left( \frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^i} \right), \bar{\nabla}_\nu \frac{\partial}{\partial x^j} \right\rangle \\
& = \langle R(\zeta, \nu)\xi, \eta \rangle + \langle II(\zeta, \xi), II(\nu, \eta) \rangle - \langle II(\nu, \xi), II(\zeta, \eta) \rangle
\end{aligned}$$

□

**KOROLLAR 4.2.5.** Ist  $E \subset T_p M$  eine nicht entartete Ebene mit der Basis  $\xi, \eta$ , dann gilt

$$K(E) = \bar{K}(E) + \frac{\langle II(\xi, \xi), II(\eta, \eta) \rangle - \langle II(\xi, \eta), II(\xi, \eta) \rangle}{\langle \xi, \xi \rangle \langle \eta, \eta \rangle - \langle \xi, \eta \rangle^2}.$$

*Beweis.* Folgt direkt aus der Definition der Schnittkrümmung und der Gauß-Formel. □

**LEMMA 4.2.6.** Sei  $M \subset \bar{M}$  eine semi-riemannsche Untermannigfaltigkeit. Sei  $\varphi : \bar{M} \rightarrow \bar{N}$  eine lokale Isometrie, setze  $\varphi(M) =: N$ . Für  $\xi, \eta \in T_p M$  gilt

$$II_N(d\varphi|_p(\xi), d\varphi|_p(\eta)) = d\varphi|_p(II_M(\xi, \eta)).$$

*Beweis.* Lokale Isometrien erhalten  $\nabla$  und  $\bar{\nabla}$ . Da  $II$  die Differenz von  $\nabla$  und  $\bar{\nabla}$  ist, folgt die Behauptung. □

### 4.3 Totalgeodätische Untermannigfaltigkeiten

Sei  $M \subset \bar{M}$  eine semi-riemannsche Untermannigfaltigkeit, sei  $c : I \rightarrow M$  eine glatte Kurve. Sei  $\xi$  ein glattes Vektorfeld an  $M$  längs  $c$ . Dann lautet die Zerlegung in Tangential- und Normalteil

$$\frac{\bar{\nabla}}{dt} \xi = \frac{\nabla}{dt} \xi + II(\xi, \dot{c}).$$

Insbesondere gilt für  $\xi = \dot{c}$

$$\frac{\bar{\nabla}}{dt}\dot{c} = \frac{\nabla}{dt}\dot{c} + II(\dot{c}, \dot{c}).$$

Die Kurve  $c$  ist somit genau dann Geodätische in  $M$ , wenn

$$\frac{\bar{\nabla}}{dt}\dot{c} = II(\dot{c}, \dot{c}), \quad \text{d. h. wenn} \quad \frac{\bar{\nabla}}{dt}\dot{c}(t) \in N_{c(t)}M \text{ für alle } t \in I.$$

**Beispiel.** Sei  $M = S^n \subset \bar{M} = \mathbb{R}^{n+1}$  mit euklidischer Metrik. Die Kurve  $c : I \rightarrow S^n$  sei ein Großkreis, d. h. von der Form

$$c(t) = \cos(t) \cdot p + \sin(t) \cdot \xi.$$

mit  $p \in S^n, \xi \in T_p S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  und  $|\xi| = 1$ . Daraus folgt dann

$$\frac{\bar{\nabla}}{dt}\dot{c}(t) = \ddot{c}(t) = -\cos(t) \cdot p - \sin(t) \cdot \xi = -c(t) \in N_{c(t)}S^n.$$

Also ist  $c$  eine Geodätische in  $S^n$ .

**Definition.** Eine semi-riemannsche Untermannigfaltigkeit heißt *totalgeodätisch*, falls  $II \equiv 0$ .

**SATZ 4.3.1.** Für eine semi-riemannsche Untermannigfaltigkeit  $M \subset \bar{M}$  sind äquivalent

- (i)  $M$  ist totalgeodätisch.
- (ii) Jede Geodätische in  $M$  ist auch Geodätische in  $\bar{M}$ .
- (iii) Für alle  $p \in M$  und  $\xi \in T_p M$  existiert ein  $\varepsilon > 0$ , so dass die  $\bar{M}$ -Geodätische  $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \bar{M}$  mit  $c(0) = p$  und  $\dot{c}(0) = \xi$  in  $M$  verläuft, das heißt  $c(t) \in M$  für alle  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ .
- (iv) Sei  $c : I \rightarrow M$  eine glatte Kurve. Dann ist die Parallelverschiebung längs  $c$  bezüglich  $M$  und bezüglich  $\bar{M}$  dasselbe (für Tangentialvektoren von  $M$ ).

*Beweis.*

(ii)  $\Rightarrow$  (iii) Sei  $p \in M$ , sei  $\xi \in T_p M$ . Sei  $c$  die  $\bar{M}$ -Geodätische mit  $c(0) = p$  und  $\dot{c}(0) = \xi$ . Sei  $\tilde{c}$  die  $M$ -Geodätische mit  $\tilde{c}(0) = p$  und  $\dot{\tilde{c}}(0) = \xi$ .

(ii)  $\Rightarrow$   $\tilde{c}$  ist auch Geodätische in  $\bar{M}$  und es gilt  $\tilde{c}(0) = c(0)$  und  $\dot{\tilde{c}}(0) = \dot{c}(0)$ .

$\Rightarrow c = \tilde{c}$  auf  $(-\varepsilon, \varepsilon)$  für ein  $\varepsilon > 0$ .

$\Rightarrow c$  verläuft in  $M$

(iii)  $\Rightarrow$  (i) Seien  $p \in M$  und  $\xi \in T_p M$ . Sei  $c_\xi$  die  $\bar{M}$ -Geodätische mit  $c_\xi(0) = p$  und  $\dot{c}_\xi(0) = \xi$ .

(iii)  $\Rightarrow$   $c_\xi$  verläuft in  $M$  für  $t$  hinreichend nahe bei 0, das heißt für  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$  für ein geeignetes  $\varepsilon > 0$ .

Auf  $(-\varepsilon, \varepsilon)$  erhalten wir:

$$0 = \frac{\bar{\nabla}}{dt}\dot{c}_\xi = \underbrace{\frac{\nabla}{dt}\dot{c}_\xi}_{\text{tangential}} + \underbrace{II(\dot{c}_\xi, \dot{c}_\xi)}_{\text{normal}}$$

Insbesondere gilt somit

$$II(\dot{c}_\xi(t), \dot{c}_\xi(t)) = 0 \text{ für alle } t \in (-\varepsilon, \varepsilon).$$

Für  $t = 0$  bedeutet das  $II(\xi, \xi) = 0$ . Durch Polarisierung folgt:  $II \equiv 0$ .

(i)  $\Rightarrow$  (iv) Es gilt  $\frac{\nabla}{dt}\xi = \frac{\bar{\nabla}}{dt}\xi$ . Also ist  $\xi$  genau dann parallel in  $M$ , wenn  $\xi$  parallel in  $\bar{M}$  ist.

(iv)  $\Rightarrow$  (ii) Sei  $c$  Geodätische in  $M$ .

$\Rightarrow \dot{c}$  ist parallel in  $M$ .

$\stackrel{(iv)}{\Rightarrow} \dot{c}$  ist parallel in  $\bar{M}$ .

$\Rightarrow c$  ist Geodätische in  $\bar{M}$ . □

**Beispiel.** Sei  $A \subset \mathbb{R}^n$  affiner Unterraum,  $\mathbb{R}^n$  trage  $g_{\text{eukl}}$  oder  $g_{\text{Mink}}$ . Das Kriterium (iii) liefert:  $A \subset \mathbb{R}^n$  ist totalgeodätisch.

**Beispiel.** Sei  $\bar{M}$  eine beliebige semi-riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension  $\bar{m}$ .

- Alle 0-dimensionalen Untermannigfaltigkeiten sind totalgeodätisch.
- Jede  $\bar{m}$ -dimensionale Untermannigfaltigkeiten, also jede offenen Teilmengen von  $\bar{M}$ , ist totalgeodätisch.
- Sei  $M = \{c(t) | t \in I\}$ , wobei  $c : I \rightarrow \bar{M}$  eine Geodätische ist. Dann ist  $M$  totalgeodätisch, sofern  $M$  eine semi-riemannsche Untermannigfaltigkeit ist.

**Bemerkung.** Die meisten semi-riemannschen Mannigfaltigkeiten  $\bar{M}$  haben keine totalgeodätischen Untermannigfaltigkeiten der Dimension  $m \in \{2, \dots, \bar{m} - 1\}$ .

**Satz 4.3.2.** Sei  $M \subset \bar{M}$  eine semi-riemannsche Untermannigfaltigkeit. Es existiere eine Isometrie  $\varphi \in \text{Isom}(\bar{M})$ , so dass  $M$  eine Zusammenhangskomponente von  $\text{Fix}(\varphi) = \{p \in \bar{M} | \varphi(p) = p\}$  ist. Dann ist  $M$  totalgeodätisch.

*Beweis.* Verwende Kriterium (iii) aus Satz 4.3.1.

Seien  $p \in M$  und  $\xi \in T_p M$ . Sei  $c : I \rightarrow \bar{M}$  die  $\bar{M}$ -Geodätische mit  $c(0) = p$  und  $\dot{c}(0) = \xi$ .

*Behauptung:*  $d\varphi|_p(\xi) = \xi$ .

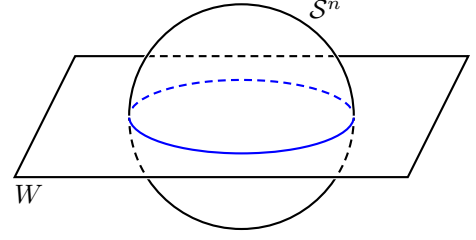
*Beweis.* Sei  $\gamma : J \rightarrow M$  eine glatte Kurve mit  $\gamma(0) = p$  und  $\dot{\gamma}(0) = \xi$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} d\varphi|_p(\xi) &= d\varphi|_p(\dot{\gamma}(0)) \\ &= \frac{d}{dt} (\underbrace{\varphi \circ \gamma}_{= \gamma, \text{ da } M \subset \text{Fix}(\varphi)})|_{t=0} \\ &= \dot{\gamma}(0) = \xi. \end{aligned}$$

Nach Proposition 2.6.7 verläuft  $c$  in  $\text{Fix}(\varphi)$ . Da  $c(I)$  zusammenhängend ist, liegt es sogar in  $M$ . □

**Beispiel.** Sei  $\bar{M} = S^n$ . Sei  $W \subset \mathbb{R}^{n+1}$  ein Untervektorraum. Sei  $A \in O(n+1)$  die Spiegelung an  $W$ .

- $\Rightarrow \varphi := A|_{S^n} \in \text{Isom}(S^n)$
- $\Rightarrow \text{Fix}(\varphi) = W \cap S^n$  ist totalgeodätisch
- $\Rightarrow S^n$  besitzt totalgeodätische Untermannigfaltigkeiten jeder Kodimension.



Aus der *Gauß-Formel* (Satz 4.2.4) folgt: Ist  $M \subset \bar{M}$  totalgeodätisch, so

$$\begin{aligned} R(\xi, \eta)\zeta &= \bar{R}(\xi, \eta)\zeta && \text{für alle } p \in M, \xi, \eta, \zeta \in T_p M \\ K(E) &= \bar{K}(E) && \text{für alle nicht entarteten Ebenen } E \subset T_p M \end{aligned}$$

## 4.4 Hyperflächen

**Definition.** Eine semi-riemannsche Untermannigfaltigkeit  $M \subset \bar{M}$  heißt *semi-riemannsche Hyperfläche*, falls  $\text{codim} M = 1$ . Das *Signum* von  $M$  ist  $\varepsilon = +1$ , falls  $(\bar{g}|_p)|_{N_p M \times N_p M}$  positiv-definit ist, und  $\varepsilon = -1$ , falls  $(\bar{g}|_p)|_{N_p M \times N_p M}$  negativ-definit ist.

**Bemerkung.** Für  $\varepsilon = +1$  gilt:  $\text{Index}(\bar{M}, \bar{g}) = \text{Index}(M, g)$ .

Für  $\varepsilon = -1$  gilt:  $\text{Index}(\bar{M}, \bar{g}) = \text{Index}(M, g) + 1$ .

**Notation.** Für  $\xi \in T_p M$  definiere

$$|\xi| := \sqrt{|\langle \xi, \xi \rangle|}.$$

**Achtung!** Es kann auch vorkommen, dass  $|\xi| = 0$ , obwohl  $\xi \neq 0$ .

### Gradient einer differenzierbaren Funktion

Sei  $(M, g)$  eine semi-riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension  $n$ . Sei  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar, sei  $p \in M$ . Dann ist  $df|_p \in T_p^* M$ . In Koordinaten haben wir

$$df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i.$$

Da  $g|_p$  nicht ausgeartet ist, existiert genau ein  $\xi \in T_p M$ , so dass

$$df|_p(\eta) = g|_p(\xi, \eta) \text{ für alle } \eta \in T_p M.$$

Schreibe  $\xi =: \text{grad} f|_p$ . In lokalen Koordinaten schreibe  $\text{grad} f = \sum_{i=1}^n \alpha^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x^j} &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i \left( \frac{\partial}{\partial x^j} \right) = df \left( \frac{\partial}{\partial x^j} \right) = g \left( \sum_{i=1}^n \alpha^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha^i g \left( \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right) = \sum_{i=1}^n \alpha^i g_{ij} \end{aligned}$$

Durch Matrixmultiplikation mit  $(g^{ij})_{ij}$  folgt daraus  $\alpha^i = \sum_{j=1}^n g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^j}$ , also

$$\text{grad} f = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^j} g^{ij} \frac{\partial}{\partial x^i}$$

**LEMMA 4.4.1.** Sei  $\bar{M}$  eine semi-riemannsche Mannigfaltigkeit, sei  $f : \bar{M} \rightarrow \mathbb{R}$  glatt, sei  $c \in \mathbb{R}$  ein regulärer Wert von  $f$ . Dann ist  $f^{-1}(c) \subset \bar{M}$  eine semi-riemannsche Hyperfläche vom Signum  $\varepsilon$ , falls

$$\langle \text{grad} f, \text{grad} f \rangle \cdot \varepsilon > 0$$

Ferner ist  $\nu := \frac{\text{grad} f|_p}{|\text{grad} f|_p} \in N_p M$  mit  $\langle \nu, \nu \rangle = \varepsilon$ .

*Beweis.* Zu zeigen ist lediglich:  $\text{grad} f|_p \perp T_p M$ .

Dazu sei  $\xi \in T_p M$ . Wir wählen  $\gamma : I \rightarrow M$  mit  $\dot{\gamma}(0) = \xi$  und erhalten:

$$0 = \frac{d}{dt} \underbrace{f(\gamma(t))}_{\equiv c} \Big|_{t=0} = df|_p(\xi) = \langle \text{grad} f|_p, \xi \rangle$$

□

**Definition.** Sei  $M \subset \bar{M}$  eine semi-riemannsche Hyperfläche, sei  $p \in M$ . Sei  $\nu \in N_p M$  mit  $|\nu| = 1$ . Die lineare Abbildung  $S_\nu : T_p M \rightarrow T_p M$ , charakterisiert durch

$$\langle S_\nu(\xi), \eta \rangle = \langle II(\xi, \eta), \nu \rangle \text{ für alle } \xi, \eta \in T_p M,$$

heißt Weingarten-Abbildung.

**LEMMA 4.4.2.**  $S_\nu$  ist selbstadjungiert.

*Beweis klar, da II symmetrisch ist.*

□

**Bemerkung.** Es gilt  $S_{-\nu} = -S_\nu$ . Ohne Festlegung von  $\nu$  ist die Weingarten-Abbildung also nur bis auf das Vorzeichen bestimmt.

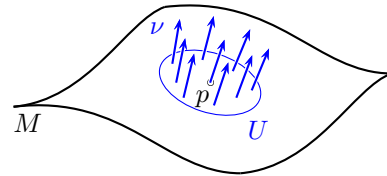
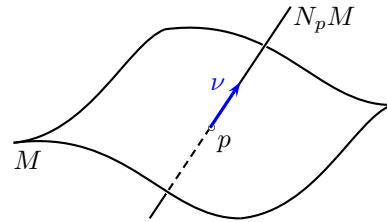
**LEMMA 4.4.3.** Sei  $M \subset \bar{M}$  eine semi-riemannsche Hyperfläche, sei  $p \in M$ . Sei  $U \subset M$  eine offene Umgebung von  $p$  und sei  $\nu \in C^\infty(U, NM)$  mit  $|\nu| = 1$ . Dann gilt

$$S_\nu(\xi) = -\bar{\nabla}_\xi \nu.$$

*Beweis.* Für alle  $\eta \in C^\infty(U, TM)$  gilt:

$$\begin{aligned} \langle S_\nu(\xi), \eta \rangle &= \langle II(\xi, \eta), \nu \rangle = \langle \text{nor}(\bar{\nabla}_\xi \eta), \nu \rangle = \langle \bar{\nabla}_\xi \eta, \nu \rangle \\ &= \partial_\xi \underbrace{\langle \eta, \nu \rangle}_{=0} - \langle \eta, \bar{\nabla}_\xi \nu \rangle = -\langle \bar{\nabla}_\xi \nu, \eta \rangle \end{aligned}$$

□



**Gauß-Gleichungen:** Sei  $M \subset \bar{M}$  eine semi-riemannsche Hyperfläche vom Signum  $\varepsilon$ . Seien  $\xi, \eta, \zeta \in T_p M$  für  $p \in M$ .

$$R(\xi, \eta)\zeta = \bar{R}(\xi, \eta)\zeta + \varepsilon\{\langle S_\nu(\eta), \zeta \rangle S_\nu(\xi) - \langle S_\nu(\xi), \zeta \rangle S_\nu(\eta)\}.$$

Für eine nicht entartete Ebene  $E \subset T_p M$  gilt

$$K(E) = \bar{K}(E) + \varepsilon \cdot \frac{\langle S_\nu(\xi), \xi \rangle \langle S_\nu(\eta), \eta \rangle - \langle S_\nu(\xi), \eta \rangle^2}{\langle \xi, \xi \rangle \langle \eta, \eta \rangle - \langle \xi, \eta \rangle^2},$$

wobei  $\xi, \eta$  eine Basis von  $E$  bilden.

### Pseudosphären und pseudo-hyperbolische Räume

Betrachte jetzt  $\bar{M} = \mathbb{R}^{n+1}$  mit  $\bar{g} = -\sum_{i=0}^{k-1} dx^i \otimes dx^i + \sum_{i=k}^n dx^i \otimes dx^i$  in kartesischen Koordinaten  $x^0, \dots, x^n$ . Dann ist  $(\bar{M}, \bar{g})$  eine semi-riemannsche Mannigfaltigkeit vom Index  $k$ . ( $k = 0 \rightarrow$  euklidische Metrik,  $k = 1 \rightarrow$  Minkowski-Metrik)

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} -1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & 1 & \ddots & \\ & & & & \ddots & 1 \end{pmatrix}$$

Das heißt, dass alle  $g_{ij}$  konstant sind.

Alle Christoffel-Symbole verschwinden also und für die Krümmung gilt:

$$\bar{R} \equiv 0, \bar{K} \equiv 0, \bar{\text{ric}} \equiv 0 \text{ und } \bar{\text{scal}} \equiv 0.$$

Für  $f : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x^0, \dots, x^n) = -\sum_{i=0}^{k-1} (x^i)^2 + \sum_{i=k}^n (x^i)^2 = \sum_{i=0}^n \varepsilon_i (x^i)^2$  gilt:

$$\begin{aligned} \text{grad} f|_x &= \sum_{i,j=0}^n \frac{\partial f}{\partial x^i}(x) \underbrace{g^{ij}}_{=\varepsilon_i \delta^{ij}} \frac{\partial}{\partial x^j} \\ &= \sum_{i=0}^n \varepsilon_i \frac{\partial f}{\partial x^i}(x) \frac{\partial}{\partial x^i} \\ &= 2 \sum_{i=0}^n \varepsilon_i \cdot \varepsilon_i x^i \frac{\partial}{\partial x^i} \\ &= \underbrace{2 \sum_{i=0}^n x^i \frac{\partial}{\partial x^i}}_{\in T_p \mathbb{R}^{n+1}} \longleftrightarrow 2x \\ &\cong \mathbb{R}^{n+1} \end{aligned}$$

Es gilt also  $\text{grad} f|_x = 0$  genau dann, wenn  $x = 0$ .

Der einzige singuläre Punkt von  $f$  ist folglich  $x = 0$  und  $0 = f(0)$  ist der einzige singuläre Wert von  $f$ .

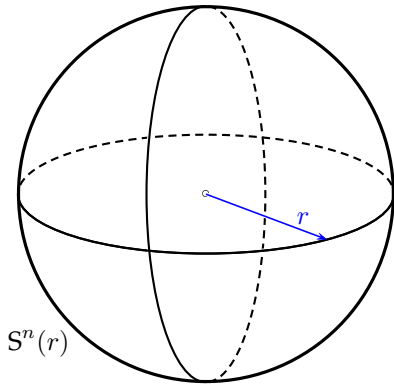
Ist  $c \neq 0$ , so definiert  $M := f^{-1}(c)$  eine differenzierbare Untermannigfaltigkeit der Kodimension 1. Wir berechnen:

$$\begin{aligned}
 \langle \text{grad} f|_x, \text{grad} f|_x \rangle &= 4 \left\langle \sum_{i=0}^n x^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \sum_{i=0}^n x^i \frac{\partial}{\partial x^i} \right\rangle \\
 &= 4 \sum_{i,j=0}^n x^i x^j g_{ij} \\
 &= 4 \sum_{j=0}^n \varepsilon_j (x^j)^2 \\
 &= 4f(x)
 \end{aligned}$$

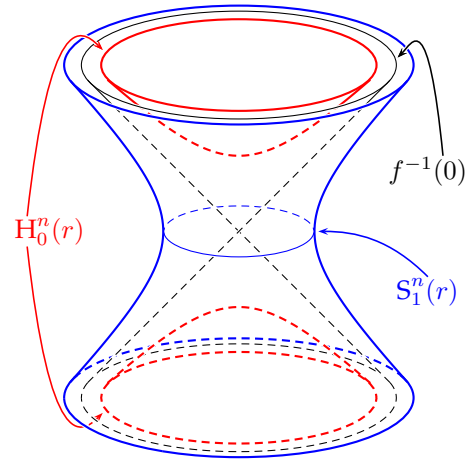
Für  $c > 0$  ist somit  $f^{-1}(c)$  eine semi-riemannsche Hyperfläche vom Signum  $\varepsilon = +1$ , für  $c < 0$  ist  $f^{-1}(c)$  eine semi-riemannsche Hyperfläche vom Signum  $\varepsilon = -1$ .

**Definition.** Die semi-riemannsche Hyperfläche  $S_k^n(r) := f^{-1}(r^2)$ , wobei  $r > 0$ , heißt *Pseudosphäre* vom Radius  $r$  und vom Index  $k$ , die semi-riemannsche Hyperfläche  $H_{k-1}^n(r) := f^{-1}(-r^2)$ , wobei  $r > 0$ , heißt *pseudo-hyperbolischer Raum* vom Index  $k - 1$ .

**Beispiel.**  $k = 0, \bar{g} = g_{\text{eukl}}, S_0^n(r) = S^n(r)$  ist die Standard-Sphäre vom Radius  $r$ .



**Beispiel.**  $k = 1, \bar{g} = g_{\text{Mink}}$ .



**Definition.**  $H^n := \{x \in H_0^n(1) | x^0 > 0\}$  zusammen mit der induzierten riemannschen Metrik  $g_{\text{hyp}}$  heißt  $n$ -dimensionaler *hyperbolischer Raum*.

**Definition.**  $S_1^4(r)$  heißt *deSitter-Raumzeit* und  $H_1^4(r)$  heißt *Anti-deSitter-Raumzeit*.

**Bemerkung.**  $S_k^n(r)$  ist diffeomorph zu  $\mathbb{R}^k \times S^{n-k}$  und  $H_k^n(r)$  ist diffeomorph zu  $S^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ .

Den Beweis dafür findet man in [O'Neill, Seite 111].

Wir wollen nun die Krümmung dieser Hyperflächen berechnen. Für  $M = f^{-1}(c)$ , wobei  $c \neq 0$ , gilt:

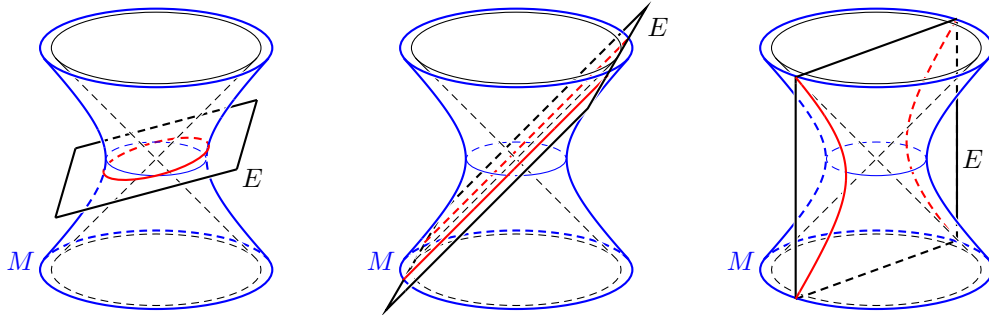
$$\begin{aligned}
& \langle \text{grad} f|_x, \text{grad} f|_x \rangle = 4f(x) = 4c. \\
\Rightarrow \quad \nu|_x &:= \frac{\text{grad} f|_x}{2\sqrt{|c|}} = \frac{\text{grad} f|_x}{2r} \longleftrightarrow \frac{1}{r} \cdot x. \\
\Rightarrow \quad & \boxed{S_\nu = -\frac{1}{r} \text{id}} \\
\Rightarrow \quad R(\xi, \eta)\zeta &= 0 + \frac{\varepsilon}{r^2} \{ \langle \eta, \zeta \rangle \xi - \langle \xi, \zeta \rangle \eta \} \text{ und } K(E) = 0 + \frac{\varepsilon}{r^2}. \\
\Rightarrow \quad & \boxed{R(\xi, \eta)\zeta = \frac{\varepsilon}{r^2} (\langle \eta, \zeta \rangle \xi - \langle \xi, \zeta \rangle \eta)} \text{ und } \boxed{K \equiv \frac{\varepsilon}{r^2}} \\
\Rightarrow \quad \text{ric}(\xi, \eta) &= \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \langle R(\xi, e_i) e_i, \eta \rangle \\
&= \frac{\varepsilon}{r^2} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \langle \underbrace{e_i, e_i}_{=\varepsilon_i} \xi - \langle \xi, e_i \rangle e_i, \eta \rangle \\
&= \frac{\varepsilon}{r^2} (n \langle \xi, \eta \rangle - \langle \xi, \eta \rangle) \\
\Rightarrow \quad & \boxed{\text{ric} = \frac{\varepsilon(n-1)}{r^2} g} \\
\Rightarrow \quad & \boxed{\text{scal} = \frac{\varepsilon(n-1)n}{r^2}}
\end{aligned}$$

**Bemerkung.** Wir haben also für  $S_1^4(r)$  bzw.  $H_1^4(r)$  den *Einstein-Tensor*

$$G = \text{ric} - \frac{1}{2} \text{scal} \cdot g = \frac{3\varepsilon}{r^2} g - \frac{1}{2} \frac{\varepsilon \cdot 3 \cdot 4}{r^2} g = -3 \frac{\varepsilon}{r^2} g.$$

Daraus folgt, dass  $S_1^4(r)$  bzw.  $H_1^4(r)$  Vakuumlösungen der Einstein'schen Feldgleichung mit kosmologischer Konstante  $\Lambda = \frac{3}{r^2}$  bzw.  $\Lambda = -\frac{3}{r^2}$  sind.

Im Folgenden wollen wir die Geodätischen bestimmen. Sei dazu  $p \in M$ , wobei  $M = S_k^n(r)$  oder  $M = H_{k-1}^n(r)$ , sei  $\xi \in T_p M \subset T_p \mathbb{R}^{n+1} \cong \mathbb{R}^{n+1}$  mit  $\xi \neq 0$ . Insbesondere gilt  $p \neq 0$ . Dann sind  $p$  und  $\xi$ , aufgefasst als Vektoren im  $\mathbb{R}^{n+1}$ , linear unabhängig, da  $\xi \in T_p M$  und  $p \in N_p M$ . Sei  $E \subset \mathbb{R}^{n+1}$  die Ebene, die von  $p$  und  $\xi$  aufgespannt wird. Parametrisiere  $M \cap E$  proportional zur Bogenlänge. Wir erhalten eine Kurve  $c : I \rightarrow M$ .



Da  $\langle \dot{c}, \dot{c} \rangle$  konstant ist, folgt  $\frac{\nabla}{dt} \dot{c}(t) \perp \dot{c}(t)$  für alle  $t \in I$ .

Andererseits verläuft  $c$  auch in  $E$ , also ist  $\dot{c}$  auch tangential an  $E$  und es gilt  $\frac{\nabla}{dt} \dot{c}(t) \in E$ , weil  $E$



eine totalgeodätische Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^{n+1}$  ist. Es folgt für alle  $t \in I$ :

$$\frac{\nabla}{dt}\dot{c} + II(\dot{c}, \dot{c}) = \frac{\nabla}{dt}\dot{c}(t) \in E$$

und damit ist  $\frac{\nabla}{dt}\dot{c}(t) = \alpha \dot{c}(t)$  für ein  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Ist  $c$  raum- oder zeitartig, so folgt aus  $\frac{\nabla}{dt}\dot{c}(t) \perp \dot{c}(t)$  schließlich  $\frac{\nabla}{dt}\dot{c} = 0$  und damit ist  $c$  eine Geodätische in  $M$ . Ist  $c$  dagegen lichtartig, so ist  $c$  eine Gerade, denn der Lichtkegel im 2-dimensionalen Minkowski-Raum  $E$  besteht aus zwei Geraden. Mit affiner Parametrisierung sind Geraden Geodätische in  $\mathbb{R}^{n+1}$  und damit auch in  $M$ .

## 4.5 Trigonometrie in Räumen konstanter Krümmung

**Ziel.** Untersuchung der Längen- und Winkelverhältnisse in Dreiecken.

**Notation.** Der Modellraum  $\mathbb{M}_\kappa^n$  ist definiert als

$$\mathbb{M}_\kappa^n := \begin{cases} S^n(\frac{1}{\sqrt{\kappa}}) & , \kappa > 0 \\ \mathbb{R}^n & , \kappa = 0 \\ H^n(\frac{1}{\sqrt{|\kappa|}}) & , \kappa < 0 \end{cases}$$

Dann ist  $\mathbb{M}_\kappa^n$  eine  $n$ -dimensionale riemannsche Mannigfaltigkeit mit der konstanter Schnittkrümmung  $\kappa$ .

**Bemerkung.** Da zu je drei Punkten eine totalgeodätische zweidimensionale Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{M}_\kappa^n$  existiert, die diese Punkte enthält, genügt es den Fall  $n = 2$  zu betrachten.

Definiere auf  $\mathbb{R}^3$  die Bilinearform

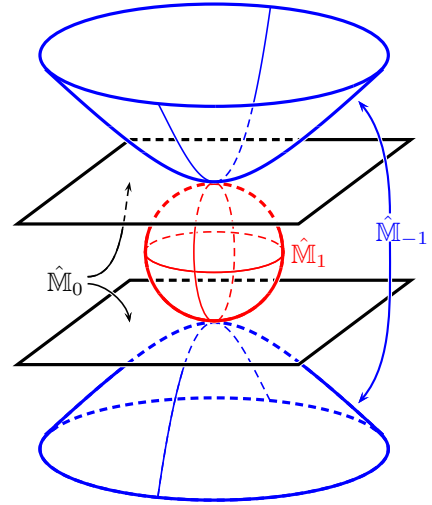
$$\langle x, y \rangle_\kappa := x^0 y^0 + \kappa(x^1 y^1 + x^2 y^2).$$

Setze dann  $\hat{\mathbb{M}}_\kappa := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \langle x, x \rangle_\kappa = 1\}$ . Setze

$$\mathbb{M}_\kappa := \begin{cases} \hat{\mathbb{M}}_\kappa & , \kappa > 0 \\ \{x \in \hat{\mathbb{M}}_\kappa \mid x^0 > 0\} & , \kappa \leq 0 \end{cases}$$

Im Fall  $\kappa \neq 0$  ist  $\mathbb{M}_\kappa$  mit der durch  $\frac{1}{\kappa} \langle \cdot, \cdot \rangle_\kappa$  induzierten Metrik gegeben durch

$$\mathbb{M}_\kappa = \begin{cases} S^2, & \kappa = 1 \\ H^2, & \kappa = -1 \end{cases}$$



Im Fall  $\kappa = 0$  induziert jede Bilinearform auf  $\mathbb{R}^3$  der Form  $\lambda \cdot x^0 y^0 + x^1 y^1 + x^2 y^2$  die euklidische Metrik auf  $\mathbb{M}_0$  mit  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Wir wählen  $\lambda = 0$  und schreiben im Fall  $\kappa = 0$  Folgendes:

$$\frac{1}{\kappa} \langle x, y \rangle_\kappa := x^1 y^1 + x^2 y^2.$$

**LEMMA 4.5.1.** Für alle  $\kappa \in \mathbb{R}$  enthält die Isometriegruppe von  $\mathbb{M}_\kappa$  die Untergruppe

$$G_\kappa := \{\varphi \mid \varphi = A|_{\mathbb{M}_\kappa}, A \in GL(3), \langle Ax, Ay \rangle_\kappa = \langle x, y \rangle_\kappa, \frac{1}{\kappa} \langle Ax, Ay \rangle_\kappa = \frac{1}{\kappa} \langle x, y \rangle_\kappa \forall x, y \in \mathbb{R}^3, A(\mathbb{M}_\kappa) = \mathbb{M}_\kappa\}.$$

**Bemerkung.** Im Fall  $\kappa \neq 0$  sind die Bedingungen  $\langle Ax, Ay \rangle_\kappa = \langle x, y \rangle_\kappa$  und  $\frac{1}{\kappa} \langle Ax, Ay \rangle_\kappa = \frac{1}{\kappa} \langle x, y \rangle_\kappa$  natürlich äquivalent und wir könnten eine weglassen. Im Fall  $\kappa = 0$  brauchen wir sie aber beide.

Aus  $\langle Ax, Ay \rangle_\kappa = \langle x, y \rangle_\kappa$  folgt bereits, dass  $A(\hat{\mathbb{M}}_\kappa) = \hat{\mathbb{M}}_\kappa$ . Im Fall  $\kappa \leq 0$  könnte  $A$  allerdings die beiden Komponenten von  $\hat{\mathbb{M}}_\kappa$  vertauschen. Dies wird durch die Bedingung  $A(\mathbb{M}_\kappa) = \mathbb{M}_\kappa$  unterbunden. Im Fall  $\kappa > 0$  könnten wir sie weglassen.

*Beweis des Lemmas.* Sei  $A \in G_\kappa$ . Da  $\varphi = A|_{\mathbb{M}_\kappa}$  Einschränkung der linearen Abbildung  $A$  ist, ist für  $p \in \mathbb{M}_\kappa$  das Differential  $d\varphi(p) : T_p\mathbb{M}_\kappa \rightarrow T_{\varphi(p)}\mathbb{M}_\kappa$  ebenfalls Einschränkung von  $A$ ,

$$d\varphi(p) = A|_{\mathbb{M}_\kappa}.$$

Hier werden die Tangentialräume von  $\mathbb{M}_\kappa$  als Untervektorräume von  $\mathbb{R}^3$  aufgefasst. Da  $A$  die Bilinearform  $\frac{1}{\kappa} \langle \cdot, \cdot \rangle_\kappa$  erhält, ist  $d\varphi(p)$  für jedes  $p \in \mathbb{M}_\kappa$  eine lineare Isometrie und  $\varphi$  damit eine Isometrie riemannscher Mannigfaltigkeiten.  $\square$

**Bemerkung.** Tatsächlich gilt  $\text{Isom}(\mathbb{M}_\kappa) = G_\kappa$ , aber das werden wir nicht benötigen.

Für  $\kappa = 1$  ist  $G_\kappa \cong \{A \in GL(3) \mid \langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle \forall x, y \in \mathbb{R}^3\} = O(3)$ , die Gruppe der orthogonalen Transformationen. Für  $\kappa = -1$  nennt man  $G_\kappa$  die Gruppe der zeitorientierungserhaltenden Lorentztransformationen.

Im Fall  $\kappa = 0$  gilt:

$$\begin{aligned} G_0 &= \{A \in GL(3) \mid \langle Ax, Ay \rangle_0 = \langle x, y \rangle_0, \frac{1}{0} \langle Ax, Ay \rangle_0 = \frac{1}{0} \langle x, y \rangle_0 \forall x, y \in \mathbb{R}^3, A\mathbb{M}_0 = \mathbb{M}_0\} \\ &= \left\{ A = \left( \begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline b^1 & & \\ b^2 & & B \end{array} \right) \mid b^1, b^2 \in \mathbb{R}, B \in O(2) \right\} \end{aligned}$$

Denn sei  $A \in G_0$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} x^0 y^0 &= (Ax)^0 (Ay)^0 = (A_0^0 x^0 + A_1^0 x^1 + A_2^0 x^2)(A_0^0 y^0 + A_1^0 y^1 + A_2^0 y^2) \\ \Rightarrow \begin{cases} \text{Für } x = y = e_0: 1 = (A_0^0)^2 & \Rightarrow A_0^0 = \pm 1 & \xrightarrow{\mathbf{A}(\mathbb{M}_0) = \mathbb{M}_0} A_0^0 = 1. \\ \text{Für } x = y = e_1: 0 = (A_1^0)^2 & \Rightarrow A_1^0 = 0. \\ \text{Für } x = y = e_2: 0 = (A_2^0)^2 & \Rightarrow A_2^0 = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Für  $\hat{x}, \hat{y} \in \mathbb{R}^2$  gilt mit  $x = (0, \hat{x})^\top$  und  $y = (0, \hat{y})^\top$ :

$$\begin{aligned} \langle \hat{x}, \hat{y} \rangle_{\mathbb{R}^2} &= \frac{1}{0} \langle x, y \rangle_0 = \frac{1}{0} \langle Ax, Ay \rangle_0 = \frac{1}{0} \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ B\hat{x} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ B\hat{y} \end{pmatrix} \right\rangle_0 = \langle B\hat{x}, B\hat{y} \rangle_{\mathbb{R}^2}. \\ \Rightarrow \text{Es gilt } B &\in O(2). \\ \Rightarrow \text{Also } G_0 &\subset \left\{ A = \left( \begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline b & B \end{array} \right) \mid b \in \mathbb{R}^2, B \in O(2) \right\}. \end{aligned}$$

Die andere Inklusion „ $\supset$ “ ergibt sich einfach durch Nachrechnen. Daraus folgt also die Gleichheit.

Betrachten wir nun, wie  $G_0$  wirkt, wenn wir  $\mathbb{M}_0$  mit  $\mathbb{R}^2$  identifizieren.

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{M}_0 & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & B \end{pmatrix}} & \mathbb{M}_0 & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \hat{x} & \mapsto & \begin{pmatrix} 1 \\ \hat{x} \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \hat{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ b + B\hat{x} \end{pmatrix} & \mapsto & b + B\hat{x} \end{array}$$

Die Gruppe  $G_0$  wirkt also wie die euklidische Bewegungsgruppe.

Wie im letzten Abschnitt sieht man, dass die Geodätischen in  $\mathbb{M}_\kappa$ , als Punktmengen, genau die Mengen von der Form

$$\mathbb{M}_\kappa \cap E$$

sind, wobei  $E \subset \mathbb{R}^3$  ein zweidimensionaler Untervektorraum ist.

**Definition.** Für  $\kappa \in \mathbb{R}$  sind die *verallgemeinerten Sinus- und Kosinusfunktionen*  $\mathfrak{s}_\kappa, \mathfrak{c}_\kappa : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch

$$\mathfrak{s}_\kappa(r) := \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\kappa}} \sin(\sqrt{\kappa} \cdot r) & , \kappa > 0 \\ r & , \kappa = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{|\kappa|}} \sinh(\sqrt{|\kappa|} \cdot r) & , \kappa < 0 \end{cases} \quad \text{bzw.} \quad \mathfrak{c}_\kappa(r) := \begin{cases} \cos(\sqrt{\kappa} \cdot r) & , \kappa > 0 \\ 1 & , \kappa = 0 \\ \cosh(\sqrt{|\kappa|} \cdot r) & , \kappa < 0 \end{cases}$$

Man rechnet leicht nach, dass  $\kappa \mathfrak{s}_\kappa^2 + \mathfrak{c}_\kappa^2 = 1$ ,  $\mathfrak{s}'_\kappa = \mathfrak{c}_\kappa$ ,  $\mathfrak{c}'_\kappa = -\kappa \mathfrak{s}_\kappa$ ,  $\mathfrak{s}_\kappa(0) = 0$  und  $\mathfrak{c}_\kappa(0) = 1$ .

**LEMMA 4.5.2.** Die nach Bogenlänge parametrisierten Geodätischen  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{M}_\kappa$  mit  $\gamma(0) = e_0$  sind gegeben durch

$$\gamma(r) = \begin{pmatrix} \mathfrak{c}_\kappa(r) \\ \mathfrak{s}_\kappa(r) \cdot \sin(\varphi) \\ \mathfrak{s}_\kappa(r) \cdot \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

wobei  $\varphi \in \mathbb{R}$  fest ist.

*Beweis.* Die Kurve  $\gamma$  verläuft in  $\hat{M}_\kappa$ , denn

$$\langle \gamma(r), \gamma(r) \rangle_\kappa = \mathfrak{c}_\kappa(r)^2 + \kappa (\mathfrak{s}_\kappa(r)^2 \sin^2(\varphi) + \mathfrak{s}_\kappa^2(r) \cos^2(\varphi)) = \mathfrak{c}_\kappa(r)^2 + \kappa \mathfrak{s}_\kappa(r)^2 = 1$$

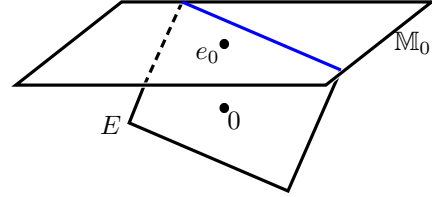
Da  $\gamma(0) = e_0 \in \mathbb{M}_\kappa$  und  $\gamma$  stetig ist, verläuft  $\gamma$  in  $\mathbb{M}_\kappa$ . Außerdem verläuft  $\gamma$  in der Ebene  $E$ , die aufgespannt wird durch  $e_0$  und  $(0, \sin(\varphi), \cos(\varphi))^\top$ .

$$\Rightarrow \gamma \text{ verläuft in } \mathbb{M}_\kappa \cap E.$$

Es gilt zusätzlich noch, dass  $\gamma$  nach Bogenlänge parametrisiert ist, denn

$$\begin{aligned} \frac{1}{\kappa} \langle \dot{\gamma}(r), \dot{\gamma}(r) \rangle_\kappa &= \frac{1}{\kappa} \left\langle \begin{pmatrix} -\kappa \mathfrak{s}_\kappa(r) \\ \mathfrak{c}_\kappa(r) \sin(\varphi) \\ \mathfrak{c}_\kappa(r) \cos(\varphi) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\kappa \mathfrak{s}_\kappa(r) \\ \mathfrak{c}_\kappa(r) \sin(\varphi) \\ \mathfrak{c}_\kappa(r) \cos(\varphi) \end{pmatrix} \right\rangle_\kappa \\ &= \frac{1}{\kappa} (\kappa^2 \mathfrak{s}_\kappa(r)^2 + \kappa (\mathfrak{c}_\kappa(r)^2 \sin^2(\varphi) + \mathfrak{c}_\kappa(r)^2 \cos^2(\varphi))) \\ &= \kappa \mathfrak{s}_\kappa(r)^2 + \mathfrak{c}_\kappa(r)^2 = 1 \end{aligned}$$

□



Die verallgemeinerten Sinus- und Kosinusfunktionen erlauben es, viele Isometrien in  $G_\kappa$  explizit hinzuschreiben.

**Beispiel.** Drehungen um die  $e_0$ -Achse sind für alle  $\kappa \in \mathbb{R}$  Isometrien,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ 0 & \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \in G_\kappa$$

für alle  $\varphi$  und alle  $\kappa \in \mathbb{R}$ . Unter Benutzung von  $\kappa \mathfrak{s}_\kappa^2 + \mathfrak{c}_\kappa^2 = 1$  rechnet man leicht nach, dass

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{c}_\kappa(r) & -\kappa \mathfrak{s}_\kappa(r) & 0 \\ \mathfrak{s}_\kappa(r) & \mathfrak{c}_\kappa(r) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in G_\kappa$$

für alle  $r \in \mathbb{R}$ . Im Fall  $\kappa = 1$  ist dies eine Drehung um die  $e_2$ -Achse, im Fall  $\kappa = 0$  ist dies die Identität (also uninteressant), und im Fall  $\kappa = -1$  nennt man solche Isometrien *Lorentz-Boost*. Ähnlich sieht man auch, dass

$$L_r := \begin{pmatrix} \mathfrak{c}_\kappa(r) & 0 & \kappa \mathfrak{s}_\kappa(r) \\ 0 & 1 & 0 \\ \mathfrak{s}_\kappa(r) & 0 & -\mathfrak{c}_\kappa(r) \end{pmatrix} \in G_\kappa.$$

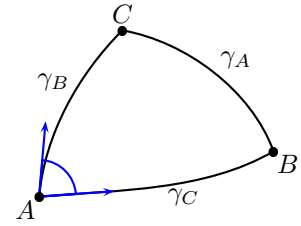
Diese Isometrie werden wir gleich benutzen und wir beobachten daher schon, dass

$$\begin{aligned} L_r e_0 &= \begin{pmatrix} \mathfrak{c}_\kappa(r) \\ 0 \\ \mathfrak{s}_\kappa(r) \end{pmatrix} \quad \text{und} \\ L_r \begin{pmatrix} \mathfrak{c}_\kappa(r) \\ 0 \\ \mathfrak{s}_\kappa(r) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \mathfrak{c}_\kappa(r) & 0 & \kappa \mathfrak{s}_\kappa(r) \\ 0 & 1 & 0 \\ \mathfrak{s}_\kappa(r) & 0 & -\mathfrak{c}_\kappa(r) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathfrak{c}_\kappa(r) \\ 0 \\ \mathfrak{s}_\kappa(r) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathfrak{c}_\kappa(r)^2 + \kappa \mathfrak{s}_\kappa(r)^2 \\ 0 \\ \mathfrak{s}_\kappa(r) \mathfrak{c}_\kappa(r) - \mathfrak{c}_\kappa(r) \mathfrak{s}_\kappa(r) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = e_0 \end{aligned}$$

Somit vertauscht  $L_r$  die Punkte  $e_0$  und  $(\mathfrak{c}_\kappa(r), 0, \mathfrak{s}_\kappa(r))^\top$ .

**Definition.** Sei  $M$  eine riemannsche Mannigfaltigkeit. Ein *geodätisches Dreieck* ist ein 6-Tupel  $(A, B, C, \gamma_A, \gamma_B, \gamma_C)$ , wobei  $A, B, C \in M$  paarweise verschiedene Punkte und  $\gamma_A, \gamma_B$  und  $\gamma_C$  geodätische Segmente mit den Endpunkten  $B$  und  $C$ ,  $C$  und  $A$  bzw.  $A$  und  $B$  sind.

$A, B$  und  $C$  sind die *Ecken*,  $\gamma_A, \gamma_B$  und  $\gamma_C$  sind die *Seiten* des geodätischen Dreiecks. Der Winkel in der Ecke  $A$  ist definiert durch den Winkel der Tangentialvektoren der Seiten im Punkt  $A$ .



Sei also  $(A, B, C, \gamma_A, \gamma_B, \gamma_C)$  ein geodätisches Dreieck in  $\mathbb{M}_\kappa$ . Die Seiten haben die Längen  $a, b$  bzw.  $c$  und die Winkel heißen  $\alpha, \beta$  bzw.  $\gamma$ . Dabei ist die Länge eines geodätischen Segments  $\gamma$  definiert als die Länge des Parameterintervalls  $\times$  die Norm von  $\dot{\gamma}$ , was ja konstant ist. Eine allgemeine Definition von Länge einer differenzierbaren Kurve in einer riemannschen Mannigfaltigkeit werden wir später kennenlernen. Da die Isometriegruppe von  $\mathbb{M}_\kappa$  transitiv wirkt, kann man o. B. d. A. annehmen, dass

$$A = e_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Durch die Wirkung einer Isometrie der Form

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ 0 & \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

(Drehung um die  $e_0$ -Achse) kann  $B$  in die  $e_0$ - $e_2$ -Ebene gedreht werden. Die Formel aus Lemma 4.5.2 für die Geodätische  $\gamma_C$  mit  $\varphi = 0$  und  $r = c$  sagt uns dann

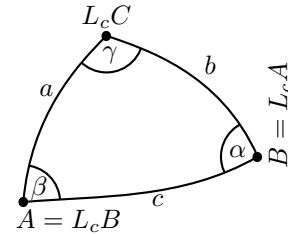
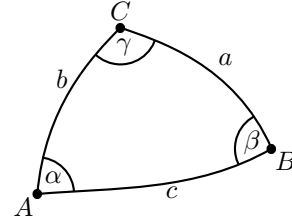
$$B = \begin{pmatrix} \mathfrak{c}_\kappa(c) \\ 0 \\ \mathfrak{s}_\kappa(c) \end{pmatrix}$$

Lemma 4.5.2 für die Geodätische  $\gamma_B$  mit  $\varphi = \alpha$  und  $r = b$  liefert

$$C = \begin{pmatrix} \mathfrak{c}_\kappa(b) \\ \mathfrak{s}_\kappa(b) \sin(\alpha) \\ \mathfrak{s}_\kappa(b) \cos(\alpha) \end{pmatrix}.$$

Die Isometrie  $L_c$  vertauscht also die Punkte  $A$  und  $B$ , wir erhalten ein neues geodätisches Dreieck.

Einerseits kann man  $L_c C$  ähnlich wie  $C$  selbst berechnen und man erhält  $L_c C = \begin{pmatrix} \mathfrak{c}_\kappa(a) \\ \mathfrak{s}_\kappa(a) \sin(\beta) \\ \mathfrak{s}_\kappa(a) \cos(\beta) \end{pmatrix}$ . Andererseits



$$\begin{aligned} L_c C &= \begin{pmatrix} \mathfrak{c}_\kappa(c) & 0 & \kappa \mathfrak{s}_\kappa(c) \\ 0 & 1 & 0 \\ \mathfrak{s}_\kappa(c) & 0 & -\mathfrak{c}_\kappa(c) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathfrak{c}_\kappa(b) \\ \mathfrak{s}_\kappa(b) \sin(\alpha) \\ \mathfrak{s}_\kappa(b) \cos(\alpha) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathfrak{c}_\kappa(c) \mathfrak{c}_\kappa(b) + \kappa \mathfrak{s}_\kappa(c) \mathfrak{s}_\kappa(b) \cos(\alpha) \\ \mathfrak{s}_\kappa(b) \sin(\alpha) \\ \mathfrak{s}_\kappa(c) \mathfrak{c}_\kappa(b) - \mathfrak{c}_\kappa(c) \mathfrak{s}_\kappa(b) \cos(\alpha) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Daraus folgen die Gleichungen

$$(Seitenkosinussatz) \quad \mathbf{c}_\kappa(a) = \mathbf{c}_\kappa(c)\mathbf{c}_\kappa(b) + \kappa \mathbf{s}_\kappa(c)\mathbf{s}_\kappa(b) \cos(\alpha) \quad (1)$$

$$\mathbf{s}_\kappa(a) \sin(\beta) = \mathbf{s}_\kappa(b) \sin(\alpha)$$

$$(Sinussatz) \quad \frac{\mathbf{s}_\kappa(a)}{\sin(\alpha)} = \frac{\mathbf{s}_\kappa(b)}{\sin(\beta)} \quad (2)$$

$$\mathbf{s}_\kappa(a) \cos(\beta) = \mathbf{s}_\kappa(c)\mathbf{c}_\kappa(b) - \mathbf{c}_\kappa(c)\mathbf{s}_\kappa(b) \cos(\alpha) \quad (3)$$

(3) mit den Rollen von  $B$  und  $C$  vertauscht liefert

$$\mathbf{s}_\kappa(a) \cos(\gamma) = \mathbf{s}_\kappa(b)\mathbf{c}_\kappa(c) - \mathbf{c}_\kappa(b)\mathbf{s}_\kappa(c) \cos(\alpha) \quad (4)$$

(3)  $\cdot \cos(\alpha) - (2) \cdot \sin(\alpha)$  liefert dann

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_\kappa(a) \cos(\beta) \cos(\alpha) - \mathbf{s}_\kappa(a) \sin(\beta) \sin(\alpha) &= \mathbf{s}_\kappa(c)\mathbf{c}_\kappa(b) \cos(\alpha) - \mathbf{c}_\kappa(c)\mathbf{s}_\kappa(b) \cos(\alpha)^2 \\ &\quad - \mathbf{s}_\kappa(b) \sin(\alpha)^2 \\ \Rightarrow \mathbf{s}_\kappa(a)(\cos(\alpha) \cos(\beta) - \sin(\alpha) \sin(\beta)) &\stackrel{(4)}{=} \mathbf{s}_\kappa(b)\mathbf{c}_\kappa(c) - \mathbf{s}_\kappa(a) \cos(\gamma) \\ &\quad - \mathbf{s}_\kappa(b)\mathbf{c}_\kappa(c) \cos(\alpha)^2 - \mathbf{s}_\kappa(b) \sin(\alpha)^2 \\ &= \mathbf{s}_\kappa(b)\mathbf{c}_\kappa(c) \sin(\alpha)^2 - \mathbf{s}_\kappa(a) \cos(\gamma) - \mathbf{s}_\kappa(b) \sin(\alpha)^2 \\ &\stackrel{(2)}{=} \mathbf{s}_\kappa(a)\mathbf{c}_\kappa(c) \sin(\alpha) \sin(\beta) - \mathbf{s}_\kappa(a) \cos(\gamma) \\ &\quad - \mathbf{s}_\kappa(a) \sin(\alpha) \sin(\beta) \\ \Rightarrow \cos(\alpha) \cos(\beta) &= \mathbf{c}_\kappa(c) \sin(\alpha) \sin(\beta) - \cos(\gamma) \\ \Rightarrow (Winkelkosinussatz) & \\ \cos(\gamma) &= \mathbf{c}_\kappa(c) \sin(\alpha) \sin(\beta) - \cos(\alpha) \cos(\beta) \end{aligned}$$

Wir haben bewiesen

**SATZ 4.5.3.** Sei  $\kappa \in \mathbb{R}$ . Für geodätische Dreiecke in  $\mathbb{M}_\kappa$  mit den Seitenlängen  $a, b, c$  und den Winkeln  $\alpha, \beta, \gamma$  gilt

$$(1) \text{ Sinussatz.} \quad \frac{\mathbf{s}_\kappa(a)}{\sin(\alpha)} = \frac{\mathbf{s}_\kappa(b)}{\sin(\beta)} = \frac{\mathbf{s}_\kappa(c)}{\sin(\gamma)}$$

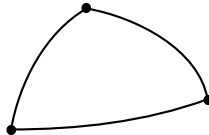
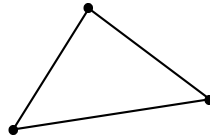
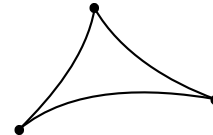
$$(2) \text{ Seitenkosinussatz.} \quad \begin{aligned} \mathbf{c}_\kappa(a) &= \mathbf{c}_\kappa(b)\mathbf{c}_\kappa(c) + \kappa \mathbf{s}_\kappa(b)\mathbf{s}_\kappa(c) \cdot \cos(\alpha), \\ \mathbf{c}_\kappa(b) &= \mathbf{c}_\kappa(a)\mathbf{c}_\kappa(c) + \kappa \mathbf{s}_\kappa(a)\mathbf{s}_\kappa(c) \cdot \cos(\beta), \\ \mathbf{c}_\kappa(c) &= \mathbf{c}_\kappa(a)\mathbf{c}_\kappa(b) + \kappa \mathbf{s}_\kappa(a)\mathbf{s}_\kappa(b) \cdot \cos(\gamma) \end{aligned}$$

$$(3) \text{ Winkelkosinussatz.} \quad \begin{aligned} \cos(\alpha) &= \mathbf{c}_\kappa(a) \sin(\beta) \sin(\gamma) - \cos(\beta) \cos(\gamma), \\ \cos(\beta) &= \mathbf{c}_\kappa(b) \sin(\alpha) \sin(\gamma) - \cos(\alpha) \cos(\gamma), \\ \cos(\gamma) &= \mathbf{c}_\kappa(c) \sin(\alpha) \sin(\beta) - \cos(\alpha) \cos(\beta) \end{aligned}$$

Nun zur Winkelsumme im Dreieck in der Modellfläche konstanter Krümmung.

**SATZ 4.5.4.** Sei  $\kappa \in \mathbb{R}$ . Für die Winkelsumme  $\alpha + \beta + \gamma$  eines geodätischen Dreiecks in  $\mathbb{M}_\kappa$  mit den Innenwinkeln  $0 < \alpha, \beta, \gamma < \pi$  und den Seitenlängen  $a, b, c$  gilt

$$\alpha + \beta + \gamma \begin{cases} > \pi, & \text{falls } \kappa > 0 \\ = \pi, & \text{falls } \kappa = 0 \\ < \pi, & \text{falls } \kappa < 0 \end{cases}$$

 $\kappa > 0$  $\kappa = 0$  $\kappa < 0$ 

*Beweis.* O. B. d. A. nehmen wir an, dass  $\alpha \geq \beta$ . In diesem Beweis verwenden wir vorübergehend die Notation " $\leq$ " für " $<$ ", falls  $\kappa > 0$ , für " $=$ ", falls  $\kappa = 0$ , und für " $>$ ", falls  $\kappa < 0$ . Wir haben also in jedem Fall  $-\kappa \leq 0$ .

Falls  $\kappa > 0$  ist, so ist  $\mathbb{M}_\kappa$  die Sphäre vom Radius  $\frac{1}{\sqrt{\kappa}}$ . Daher müssen in diesem Fall die Seitenlängen  $< \frac{2\pi}{\sqrt{\kappa}}$  sein. Im Fall  $\kappa \leq 0$  haben wir keine Einschränkung an die Seitenlängen. Verwenden wir also die Konvention  $\frac{1}{\sqrt{\kappa}} = \infty$ , falls  $\kappa \leq 0$ . Dann gilt in jedem Fall

$$c_\kappa \leq 1$$

auf dem Intervall  $(0, \frac{2\pi}{\sqrt{\kappa}})$ . Da  $\sin$  auf  $(0, \pi)$  positiv ist, erhalten wir aus dem Winkelkosinussatz

$$\begin{aligned} \cos(\alpha) &= c_\kappa(a) \sin(\beta) \sin(\gamma) - \cos(\beta) \cos(\gamma) \\ &\leq \sin(\beta) \sin(\gamma) - \cos(\beta) \cos(\gamma) \\ &= -\cos(\beta + \gamma) \\ &= \cos(\pi - (\beta + \gamma)) \\ &= \cos(\beta + \gamma - \pi). \end{aligned}$$

Wegen  $0 < \beta, \gamma < \pi$  ist  $-\pi < \pi - (\beta + \gamma) < \pi$ .

1. Fall:  $\pi - (\beta + \gamma) \geq 0$ .

Da  $\cos$  auf  $[0, \pi]$  streng monoton fällt, folgt dann aus  $\cos(\alpha) \leq \cos(\pi - (\beta + \gamma))$ , dass  $\pi - (\beta + \gamma) \leq \alpha$  und somit  $\pi \leq \alpha + \beta + \gamma$ , was zu zeigen ist.

2. Fall:  $\pi - (\beta + \gamma) < 0$ .

Falls  $\kappa > 0$  ist, erhalten wir nun direkt  $\pi < \beta + \gamma < \alpha + \beta + \gamma$ , was zu zeigen ist. Sei also  $\kappa \leq 0$ . Dann folgt aus  $\cos(\alpha) \geq \cos(\beta + \gamma - \pi)$ , dass  $\alpha \leq \beta + \gamma - \pi$ . Wegen  $\alpha \geq \beta$  und  $\gamma < \pi$  impliziert dies

$$\alpha < \alpha + \pi - \pi = \alpha,$$

Widerspruch. □

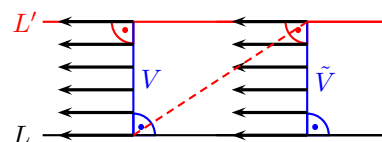
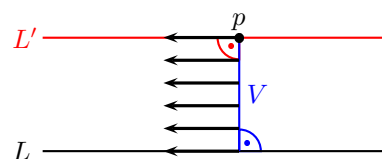
**Bemerkung.** Da die Innenwinkel  $< \pi$  sind, gilt für die Winkelsumme in einem geodätischen Dreieck natürlich immer  $\alpha + \beta + \gamma < 3\pi$ . Man kann sich nun leicht überlegen, dass für  $\mathbb{M}_\kappa$  mit  $\kappa > 0$  die Winkelsumme geodätischer Dreiecke alle Werte aus  $(\pi, 3\pi)$  annehmen kann. Für  $\mathbb{M}_\kappa$  mit  $\kappa < 0$  kommen alle Werte aus  $(0, \pi)$  vor.

### Zum Parallelenaxiom

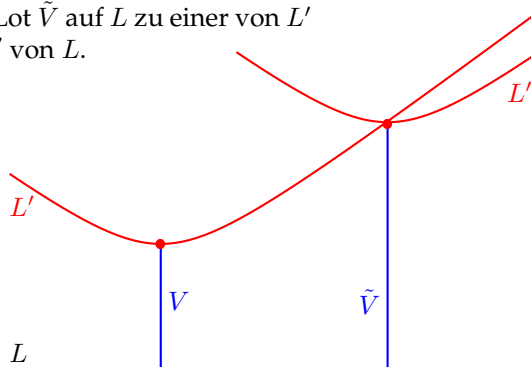
Das Parallelenaxiom besagt: Zu jeder Geraden (Geodätischen)  $L$  und jedem Punkt  $p \notin L$  existiert höchstens eine Gerade (Geodätische)  $L'$  mit  $p \in L'$  und  $L \cap L' = \emptyset$ .

Das Parallelenaxiom gilt in  $\mathbb{M}_\kappa$  für  $\kappa = 0$  (und auch für  $\kappa > 0$ , da sich auf der Sphäre zwei Großkreise immer schneiden und es daher überhaupt keine Parallele gibt), aber nicht für  $\kappa < 0$ . Andererseits erfüllt  $\mathbb{M}_{-1}$  alle anderen Axiome der euklidischen Geometrie. Daher kann das Parallelenaxiom *nicht* aus den anderen Axiomen der euklidischen Geometrie hergeleitet werden.

*Konstruktion einer Parallelen zu  $L$ :* Verbinde  $p$  mit  $L$  durch eine kürzeste Geodätische  $V$ . Diese trifft  $L$  in einem rechten Winkel. Verschiebe einen Tangentialvektor an  $L$  längs  $V$  parallel nach  $p$ . Sei  $L'$  dann die Geodätische durch  $p$  mit diesem Geschwindigkeitsvektor. Da die Winkelsumme in  $\mathbb{M}_{-1}$  stets kleiner als  $\pi$  ist, können sich  $L$  und  $L'$  nicht schneiden. Also ist  $L'$  eine Parallele zu  $L$  durch  $p$ .



Die Parallele  $L'$  kann ein anderes Lot  $\tilde{V}$  nicht ebenfalls in einem rechten Winkel schneiden, da sonst ein Viereck mit vier rechten Winkeln entstünde, das sich in zwei Dreiecke zerlegen ließe, von denen mindestens eines eine Winkelsumme  $\geq \pi$  haben müsste. Daher führt ein anderes Lot  $\tilde{V}$  auf  $L$  zu einer von  $L'$  verschiedenen Parallelen  $L''$  von  $L$ .





# Kapitel 5

## Riemannsche Geometrie

### 5.1 Die riemannsche Abstandsfunktion

**Generelle Voraussetzung.** Sei  $M$  eine zusammenhängende riemannsche Mannigfaltigkeit,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  bezeichne die riemannsche Metrik.

**Definition.** Sei  $c : [a, b] \rightarrow M$  eine stetige, stückweise  $C^1$ -Kurve. Dann heißt

$$L[c] := \int_a^b \|\dot{c}(t)\| dt$$

die *Länge* von  $c$ .

**Bemerkung.** Die Länge einer Kurve ist invariant unter Parametertransformationen.

Ist nämlich  $\varphi : [a, b] \rightarrow [\alpha, \beta]$  eine Parametertransformation, so gilt

$$\begin{aligned} L[c \circ \varphi] &= \int_a^b \left\| \frac{d}{dt}(c \circ \varphi) \right\| dt \\ &= \int_a^b \|\dot{c}(\varphi(t))\| \cdot |\dot{\varphi}(t)| dt \\ &\stackrel{\substack{\text{Substitution} \\ s = \varphi(t)}}{=} \int_{\alpha}^{\beta} \|\dot{c}(s)\| ds \\ &= L[c] \end{aligned}$$

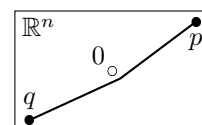
**Definition.** Seien  $p, q \in M$ . Dann heißt

$$d(p, q) = \inf \{L[c] \mid c : [a, b] \rightarrow M \text{ stückweise } C^1\text{-Kurve mit } c(a) = p, c(b) = q\}$$

der *riemannsche Abstand* von  $p$  und  $q$ .

**Bemerkung.** Das Infimum braucht nicht angenommen zu werden.

**Beispiel.**  $M = \mathbb{R}^n - \{0\}$  und  $p = -q$ . Es gilt  $d(p, q) = 2\|p\|$ , aber jede Kurve  $c$  von  $p$  nach  $q$  hat eine Länge  $L[c] > 2\|p\|$ .



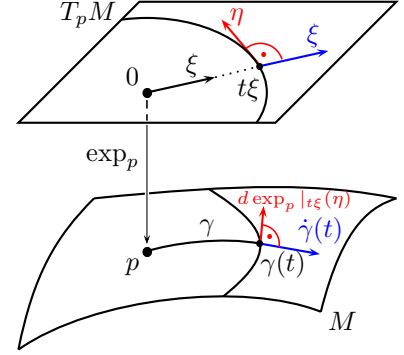
**SATZ 5.1.1 (Gauß-Lemma).** Seien  $p \in M$  und  $\xi \in T_p M$ . Die Geodätische  $\gamma(t) = \exp_p(t\xi)$  sei auf  $[0, b]$  definiert. Dann ist  $\exp_p$  auf einer offenen Umgebung von  $\{t\xi \mid 0 \leq t \leq b\} \subset T_p M$  definiert und es gilt

(1)  $d\exp_p|_{t\xi}(\xi) = \dot{\gamma}(t).$

(2) Für  $\eta \in T_{t\xi} T_p M \cong T_p M$  gilt

$$\langle d\exp_p|_{t\xi}(\eta), \dot{\gamma}(t) \rangle = \langle \xi, \eta \rangle.$$

Insbesondere gilt  $d\exp_p|_{t\xi}(\eta) \perp \dot{\gamma}(t)$ , falls  $\eta \perp \xi$ .



*Beweis.*

(1)  $d\exp_p|_{t\xi}(\xi) = \frac{d}{ds} \exp_p(t\xi + s\xi)|_{s=0} = \frac{d}{ds} \gamma(t+s)|_{s=0} = \dot{\gamma}(t).$

(2) Wegen (i) genügt es, den Fall  $\eta \perp \xi$  zu betrachten. Sei  $J$  das Jacobi-Feld längs  $\gamma$  mit  $J(0) = 0$  und  $\frac{\nabla}{dt} J(0) = \eta$ . Nach Proposition 20.3 gilt dann

$$d\exp_p|_{t\xi}(\eta) = \frac{J(t)}{t} \text{ für } t > 0.$$

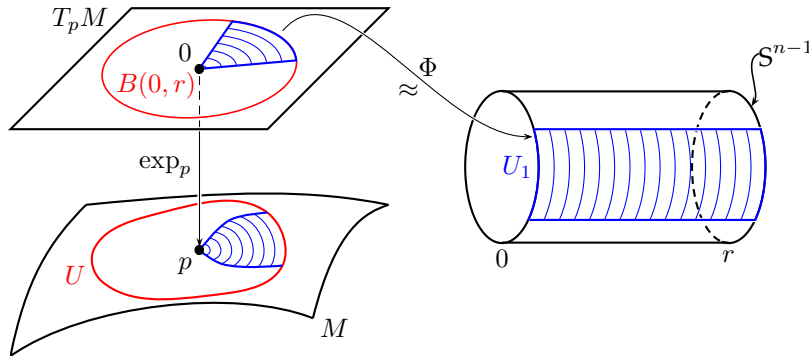
Da sowohl  $J$  als auch  $\frac{\nabla}{dt} J$  für  $t = 0$  auf  $\dot{\gamma}$  senkrecht stehen, gilt dies für alle  $t$ . Also gilt

$$\langle d\exp_p|_{t\xi}(\eta), \dot{\gamma}(t) \rangle = \left\langle \frac{J(t)}{t}, \dot{\gamma}(t) \right\rangle = 0 = \langle \eta, \xi \rangle. \quad \square$$

Wir betrachten nun den Diffeomorphismus  $\Phi : T_p M - \{0\} \rightarrow (0, \infty) \times S^{n-1}$ , wobei  $S^{n-1} \subset T_p M$ , gegeben durch  $t \cdot y \mapsto (t, y)$ . Dann existiert ein  $r > 0$ , so dass  $B(0, r) \subset T_p M$  unter  $\exp_p$  diffeomorph auf eine Umgebung  $U$  von  $p$  in  $M$  abgebildet wird.

$$\Rightarrow (0, r) \times S^{n-1} \rightarrow U - \{p\}, (t, y) \mapsto \exp_p(ty) \text{ ist ein Diffeomorphismus.}$$

Seien nun  $y^2, \dots, y^n$  lokale Koordinaten auf  $U_1 \subset S^{n-1}$ . Dann heißen die Koordinaten, die durch den Diffeomorphismus  $\exp_p(ty) \mapsto (t, y^2, \dots, y^n)$  gegeben sind, *geodätische Polarkoordinaten*.



Das Gauß-Lemma besagt, dass in solchen Koordinaten die riemannsche Metrik so aussieht:

$$(g_{ij}) = \left( \begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & * & \\ 0 & & & \end{array} \right)$$

**KOROLLAR 5.1.2.** Sei  $r > 0$ , so dass  $\exp_p|_{B(0,r)}$  ein Diffeomorphismus auf das Bild ist. Sei  $c : [a, b] \rightarrow M$  eine stückweise  $\mathcal{C}^1$ -Kurve mit  $c(a) = p$  und  $c(b) \notin \exp_p(B(0, r))$ . Dann gilt  $L[c] \geq r$ .

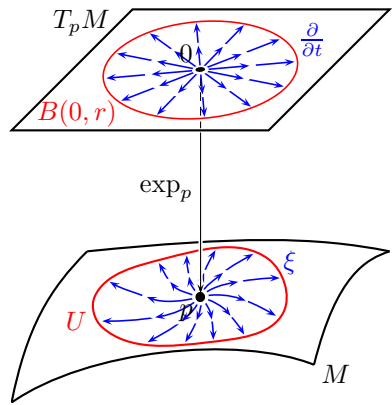
*Beweis.* Sei  $\beta \in (a, b)$  minimal, so dass  $c(\beta) \in \partial \exp_p(B(0, r)) = \exp_p(S^{n-1}(r))$ . Sei  $\alpha \in [a, \beta)$  maximal, so dass  $c(\alpha) = p$ . Für  $\tau \in (\alpha, \beta]$  schreibe

$$\exp_p^{-1}(c(\tau)) = t(\tau) \cdot y(\tau),$$

wobei  $t(\tau) \in (0, r]$  und  $y(\tau) \in S^{n-1}$ . Sei  $\xi$  das Vektorfeld auf  $\exp_p(\bar{B}(0, r)) - \{0\}$ , gegeben durch

$$\xi(q) = d\exp_p \left( \frac{\partial}{\partial t} (\exp_p^{-1}(q)) \right).$$

Aus dem Gauß-Lemma, Teil (i), folgt, dass  $\|\xi\| \equiv 1$ . Daraus folgt dann

$$\begin{aligned} L[c] &\geq L[c|_{[\alpha, \beta]}] \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \|\dot{c}(\tau)\| d\tau \\ &\stackrel{\text{Cauchy-Schwarz-Ungleichung}}{\geq} \int_{\alpha}^{\beta} \langle \xi(c(\tau)), \dot{c}(\tau) \rangle d\tau \\ &\stackrel{\text{Gauß-Lemma (ii)}}{=} \int_{\alpha}^{\beta} \left\langle \xi(c(\tau)), \frac{dt}{d\tau} \xi(c(\tau)) \right\rangle d\tau \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \frac{dt}{d\tau} d\tau \\ &= t(\beta) - t(\alpha) = r - 0 = r. \quad \square \end{aligned}$$


**SATZ 5.1.3.**  $(M, d)$  ist ein metrischer Raum.

*Beweis.*

- (1) Offensichtlich gilt stets  $d(p, q) \geq 0$ . Es gilt  $d(p, p) = 0$  für alle  $p \in M$ , denn die konstante Kurve hat Länge 0.

Sei umgekehrt  $d(p, q) = 0$ . Angenommen, es gelte  $p \neq q$ . Wähle  $r > 0$  so, dass  $\exp_p|_{B(0,r)}$  ein Diffeomorphismus ist und (nach eventueller Verkleinerung von  $r$ )  $q \notin \exp_p(\bar{B}(0, r))$ . Dann gilt nach Korollar 5.1.2, dass jede Kurve von  $p$  nach  $q$  mindestens die Länge  $r$  hat, also  $d(p, q) \geq r > 0$ . Das ist ein Widerspruch, also gilt  $p = q$ .

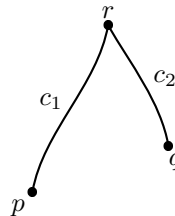
- (2) Es ist klar, dass  $d(p, q) = d(q, p)$  (durchlaufe die verbindenden Kurven in umgekehrter Richtung).

(3) Zu zeigen bleibt noch  $d(p, q) \leq d(p, r) + d(r, q)$ .

Sei dazu  $\varepsilon > 0$ . Wähle eine stetige, stückweise  $\mathcal{C}^1$ -Kurve  $c_1$  von  $p$  nach  $r$  mit  $L[c_1] \leq d(p, r) + \varepsilon$  und eine stetige, stückweise  $\mathcal{C}^1$ -Kurve  $c_2$  von  $r$  nach  $q$  mit  $L[c_2] \leq d(r, q) + \varepsilon$ . Setze  $c_1$  und  $c_2$  zu einer stetigen, stückweisen  $\mathcal{C}^1$ -Kurve  $c$  von  $p$  nach  $q$  zusammen. Dann gilt

$$d(p, q) \leq L[c] = L[c_1] + L[c_2] \leq d(p, r) + \varepsilon + d(r, q) + \varepsilon.$$

Der Grenzübergang  $\varepsilon \rightarrow 0$  liefert die Behauptung.  $\square$



**Notation.** Setze

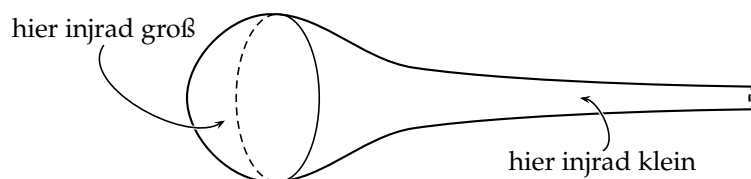
$$\begin{aligned} B(p, r) &:= \{q \in M \mid d(p, q) < r\}, \\ \bar{B}(p, r) &:= \{q \in M \mid d(p, q) \leq r\} \quad \text{und} \\ S(p, r) &:= \{q \in M \mid d(p, q) = r\}. \end{aligned}$$

**Definition.** Für  $p \in M$  heißt

$$\text{injad}(p) := \sup\{r \mid \exp_p|_{B(0, r)} : B(0, r) \rightarrow \exp_p(B(0, r)) \text{ ist Diffeomorphismus}\}$$

der *Injektivitätsradius* in  $p$ .

**Beispiel.** Der Injektivitätsradius hängt von  $p$  ab.



**Bemerkung.** Für  $0 < r < \text{injad}(p)$  gilt  $\exp_p(B(0, r)) = B(p, r)$ . Denn:

„ $\subset$ “: Sei  $q = \exp_p(\xi)$  mit  $\|\xi\| < r$ . Dann ist  $t \mapsto \exp_p(t\xi)$  eine Kurve von  $p$  nach  $q$  und hat die Länge  $\|\xi\| < r$ .

„ $\supset$ “: Korollar 5.1.2

**SATZ 5.1.4.** Die Metrik  $d$  induziert die ursprüngliche Topologie.

*Beweis.* Bezeichne für den Moment die bezüglich  $d$  offenen Teilmengen von  $M$  als „ $d$ -offen“. Es ist somit zu zeigen:  $d$ -offen = offen.

(a) *Behauptung:* Jede  $d$ -offene Menge ist offen.

Sei  $U \subset M$   $d$ -offen. Für jedes  $p \in U$  existiert ein  $r(p) > 0$ , so dass  $B(p, r(p)) \subset U$ . O. B. d. A. sei  $r(p) < \text{injad}(p)$ . Dann ist  $B(p, r(p)) = \exp_p(\underbrace{B(0, r(p))}_{\text{offen in } T_p M})$  das diffeomorphe Bild einer

offenen Teilmenge von  $T_p M$ , also selbst offen.

$$\Rightarrow U = \bigcup_{p \in M} B(p, r(p)) \text{ ist die Vereinigung offener Teilmengen von } M \text{ und somit offen.}$$

(b) *Behauptung:* Jede offene Menge ist  $d$ -offen.

Der Beweis funktioniert ähnlich.  $\square$

**KOROLLAR 5.1.5.** Die Abbildung  $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$  ist stetig.

**Bemerkung.** Ist  $\Phi \in \text{Isom}(M)$ , so gilt  $L[\Phi \circ c] = L[c]$  und somit auch  $d(\Phi(p), \Phi(q)) = d(p, q)$ .

**Erinnerung.** Wir haben  $E[c] = \frac{1}{2} \int_a^b \|\dot{c}(t)\|^2 dt$  die Energie von  $c$  genannt.

**PROPOSITION 5.1.6.** Sei  $M$  eine riemannsche Mannigfaltigkeit und sei  $c : [a, b] \rightarrow M$  eine stetige, stückweise  $C^1$ -Kurve. Dann gilt

$$L[c]^2 \leq 2(b-a) \cdot E[c].$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn  $c$  proportional zur Bogenlänge parametrisiert ist.

*Beweis.* Mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung für das  $L^2$ -Skalarprodukt ergibt sich:

$$L[c]^2 = \left( \int_a^b \|\dot{c}(t)\| \cdot 1 dt \right)^2 \leq \int_a^b \|\dot{c}(t)\|^2 dt \cdot \int_a^b 1^2 dt = 2E[c](b-a).$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn  $\|\dot{c}\|$  und 1 (als Funktion) linear abhängig sind, d. h. wenn  $\|\dot{c}\|$  konstant ist, d. h. wenn  $c$  proportional zur Bogenlänge parametrisiert ist.  $\square$

**KOROLLAR 5.1.7.** Eine Kurve  $c$  minimiert genau dann die Energie unter allen stetigen, stückweisen  $C^1$ -Kurven, die  $p$  und  $q$  verbinden, wenn  $c$  die Länge minimiert und proportional zur Bogenlänge parametrisiert ist.

**Bemerkung.** Energieminimierende Kurven sind nach Korollar 2.6.4 Geodätische.

**KOROLLAR 5.1.8.** Jede kürzeste Kurve von  $p$  nach  $q$  ist bis auf Parametrisierungen eine Geodätische (genauer: jede Umparametrisierung proportional zur Bogenlänge ist Geodätische).

**Vorsicht!** Umgekehrt ist nicht jede Geodätische Kürzeste.

**Beispiel.** Die Großkreise auf der  $S^n$ .

**Definition.** Eine Geodätische  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  mit  $L[\gamma] = d(\gamma(a), \gamma(b))$  heißt *minimal*.

## 5.2 Vollständigkeit

**Generelle Voraussetzung.** Sei  $M$  eine zusammenhängende riemannsche Mannigfaltigkeit.

**Definition.** Sei  $p \in M$ . Dann heißt  $M$  *geodätisch vollständig* in  $p$ , falls  $\exp_p$  auf ganz  $T_p M$  definiert ist, das heißt alle Geodätischen durch  $p$  sind auf ganz  $\mathbb{R}$  definiert.

**Satz 5.2.1 (Hopf-Rinow).** Sei  $M$  eine zusammenhängende riemannsche Mannigfaltigkeit, sei  $p \in M$ . Dann sind äquivalent:

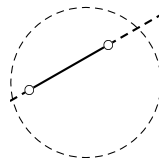
- (1)  $M$  ist geodätisch vollständig in  $p$ .
- (2)  $M$  ist geodätisch vollständig in allen  $q \in M$ .
- (3) Die  $\bar{B}(p, r)$  sind kompakt für alle  $r > 0$ .
- (4) Die  $\bar{B}(q, r)$  sind kompakt für alle  $r > 0$  und alle  $q \in M$ .
- (5)  $(M, d)$  ist ein vollständiger metrischer Raum, das heißt, alle  $d$ -Cauchy-Folgen konvergieren.

Jede dieser Bedingungen impliziert zusätzlich

- (6) Jeder Punkt  $q$  lässt sich mit  $p$  durch eine minimale Geodätische verbinden.

**Bemerkung.** Die Aussage (6) ist schwächer als (1) bis (5).

**Beispiel.**  $M = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1\}$  mit der euklidischen Metrik erfüllt zwar (6), aber nicht (1) bis (5).



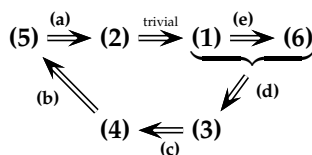
**Definition.** Falls die Bedingungen (1) bis (5) aus Satz 27.1 gelten, nennt man  $M$  eine *vollständige riemannsche Mannigfaltigkeit*.

**Korollar 5.2.2.** Jede kompakte riemannsche Mannigfaltigkeit ist vollständig.

*Beweis von Korollar 5.2.2.* Nach dem Satz von Hopf-Rinow genügt es die Bedingung (3) nachzuweisen.

Es gilt also:  $\bar{B}(p, r) \subset M$  ist eine abgeschlossene Teilmenge des kompakten Raumes  $M$  und daher selbst wieder kompakt.  $\square$

*Beweis von Satz 5.2.1.* Wir werden den Satz in fünf Schritten beweisen. Die Struktur des Beweises sieht dabei folgendermaßen aus:



- (a) Sei  $\gamma : (\alpha, \beta) \rightarrow M$  eine Geodätische mit maximalem Definitionsbereich. Ohne Einschränkung nehmen wir an, dass  $\gamma$  nach der Bogenlänge parametrisiert ist.

Wir nehmen an, es gelte  $\beta < \infty$  (der Fall  $\alpha > -\infty$  ist analog). Dann gilt für eine Folge von  $t_i \in (\alpha, \beta)$  mit  $t_i \xrightarrow{i \rightarrow \infty} \beta$ , dass

$$d(\gamma(t_i), \gamma(t_j)) \leq L[\gamma|_{[t_i, t_j]}] = |t_i - t_j|.$$

Folglich ist  $(\gamma(t_i))_{i \in \mathbb{N}}$  ist eine  $d$ -Cauchy-Folge.

Und da  $(M, d)$  vollständig ist, existiert ein  $q \in M$  mit  $\gamma(t_i) \xrightarrow{i \rightarrow \infty} q$ .

1. *Zwischenbehauptung:* Der Grenzwert  $q$  hängt nicht von der speziellen Wahl der Folge  $(t_i)_{i \in \mathbb{N}}$  mit  $t_i \xrightarrow{i \rightarrow \infty} \beta$  ab.

*Beweis.* Ist  $(t'_i)_{i \in \mathbb{N}}$  eine weitere solche Folge mit  $q' = \lim_{i \rightarrow \infty} \gamma(t'_i)$ , so ist auch  $(t''_i)_{i \in \mathbb{N}}$  eine solche Folge, wobei

$$t''_i := \begin{cases} t_j, & i = 2j \\ t'_j, & i = 2j + 1 \end{cases}$$

Die Folge  $(\gamma(t''_i))_{i \in \mathbb{N}}$  ist eine  $d$ -Cauchy-Folge mit den Häufungspunkten  $q$  und  $q'$ . Es gilt also  $q = q'$ . Das beweist die Zwischenbehauptung. ✓

Wir erhalten also eine stetige Fortsetzung  $\bar{\gamma} : (\alpha, \beta] \rightarrow M$  von  $\gamma$  durch

$$\bar{\gamma}(t) = \begin{cases} \gamma(t), & t \in (\alpha, \beta) \\ q, & t = \beta \end{cases}$$

1. *Zwischenbehauptung:* Das Geschwindigkeitsfeld  $\dot{\gamma}$  besitzt ebenfalls eine stetige Fortsetzung auf  $(\alpha, \beta]$ .

*Beweis.* Sei dazu  $x : U \rightarrow V$  eine Karte von  $M$  um  $q$  mit  $x(q) = 0$ . Wähle  $r > 0$  so, dass  $\bar{B}(0, r) \subset V$ . Da  $\bar{B}(0, r)$  kompakt ist, existieren Konstanten  $C_1, C_2, C_4 > 0$  mit

- $|\Gamma_{ij}^k(y)| \leq C_1$  für alle  $y \in \bar{B}(0, r)$ .
- $\|a\|_{\max} \leq C_2 \left\| \sum_{j=1}^n a^j \frac{\partial}{\partial x^j} (x^{-1}(y)) \right\|_g$  für alle  $a = (a^1, \dots, a^n) \in \mathbb{R}^n$  und  $y \in \bar{B}(0, r)$ .
- $\left| \frac{\partial \Gamma_{ij}^k}{\partial x^l}(y) \right| \leq C_4$  für alle  $y \in \bar{B}(0, r)$ .

Schreibe  $\gamma^k := x^k \circ \gamma$  für  $t \in (\beta - \varepsilon, \beta)$ , wobei  $\varepsilon > 0$  so klein ist, dass  $\gamma(t) \in x^{-1}(\bar{B}(0, r))$ , sowie  $a^k := \dot{\gamma}^k$ . Dann liefert die Geodäten-Gleichung:

$$\begin{aligned} \ddot{a}^k &= \ddot{\gamma}^k = - \sum_{i,j=1}^n \Gamma_{ij}^k(\gamma^1, \dots, \gamma^n) \cdot \dot{\gamma}^i \dot{\gamma}^j \\ &= - \sum_{i,j=1}^n \Gamma_{ij}^k(\gamma^1, \dots, \gamma^n) a^i a^j \\ \Rightarrow \quad |\dot{a}^k| &\leq n^2 \cdot C_1 \cdot \|a\|_{\max}^2 \\ \Rightarrow \quad \|\dot{a}\|_{\max} &\leq n^2 C_1 \cdot \|a\|_{\max}^2 \leq n^2 C_1 \cdot C_2^2 \underbrace{\|\dot{\gamma}\|_g^2}_{=1} = n^2 C_1 C_2^2 =: C_3 \\ \Rightarrow \quad \|a(t_i) - a(t_j)\|_{\max} &= \left\| \int_{t_i}^{t_j} \dot{a}(t) dt \right\|_{\max} \leq \left| \int_{t_i}^{t_j} \|\dot{a}(t)\|_{\max} dt \right| \leq C_3 |t_i - t_j| \end{aligned}$$

Die  $a(t_i)$  bilden eine Cauchy-Folge in  $\mathbb{R}^n$ , das heißt, sie konvergieren gegen ein  $A \in \mathbb{R}^n$ .

Wie eben ist  $A$  unabhängig von der speziellen Wahl der Folge  $(t_i)_{i \in \mathbb{N}}$  mit  $t_i \xrightarrow{i \rightarrow \infty} \beta$ . Also erhalten wir eine stetige Fortsetzung von  $a$  durch

$$\bar{a}(t) := \begin{cases} a(t), & t \in (\beta - \varepsilon, \beta) \\ A, & t = \beta \end{cases}$$

Das Geschwindigkeitsfeld  $\dot{\gamma}$  setzt sich also stetig in  $t = \beta$  fort. Die Fortsetzung  $\bar{\gamma}$  von  $\gamma$  ist  $C^1$ . ✓

Die Differentiation der Geodäten-Gleichung liefert

$$\ddot{a}^k = - \sum_{i,j=1}^n \left( \sum_{l=1}^n \frac{\partial \Gamma_{ij}^k}{\partial x^l} a^l a^i a^j + 2\Gamma_{ij}^k \dot{a}^i a^j \right)$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \|\ddot{a}\|_{\max} &\leq n^3 C_4 \|a\|_{\max}^3 + 2n^2 C_1 \|\dot{a}\|_{\max} \|a\|_{\max} \\ &\leq n^3 C_4 C_2^3 + 2n^2 C_1 C_3 C_2 \\ &=: C_5 \end{aligned}$$

Ebenso wie oben bildet  $(\dot{a}(t_i))_{i \in \mathbb{N}}$  eine  $d$ -Cauchy-Folge in  $\mathbb{R}^n$ . Die Fortsetzung  $\bar{\gamma}$  ist sogar eine  $C^2$ -Kurve.

Sei also  $\hat{\gamma} : (\beta - \delta, \beta + \delta) \rightarrow M$  die Lösung der Geodäten-Gleichung mit  $\hat{\gamma}(\beta) = \bar{\gamma}(\beta)$  und  $\dot{\hat{\gamma}}(\beta) = \dot{\bar{\gamma}}(\beta)$ . Aus der Eindeutigkeit von Geodätischen folgt, dass  $\hat{\gamma}$  und  $\bar{\gamma}$  auf ihrem gemeinsamen Definitionsbereich übereinstimmen.

Wir erhalten also eine Fortsetzung von  $\gamma$  als Geodäte auf  $(\alpha, \beta + \delta)$ . Dies ist ein Widerspruch zur Maximalität von  $\beta$  und zeigt somit (a).

- (b) Seien alle abgeschlossenen Bälle in  $M$  kompakt. Sei  $(p_i)_{i \in \mathbb{N}}$  eine Cauchy-Folge in  $M$ . Da alle Cauchy-Folgen beschränkt sind, existiert ein  $R > 0$ , so dass  $p_i \in \bar{B}(p, R)$  für alle  $i \in \mathbb{N}$ . Wegen der Kompaktheit von  $\bar{B}(p, R)$  hat die Cauchy-Folge  $(p_i)_{i \in \mathbb{N}}$  einen Häufungspunkt und konvergiert folglich.

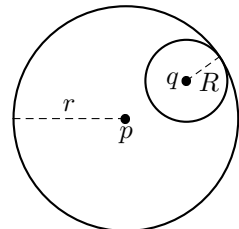
- (c) Seien alle  $\bar{B}(p, r)$  kompakt für alle  $r > 0$ . Sei  $q \in M$  und sei  $R > 0$ . Setze  $r := R + d(p, q)$ . Dann gilt

$$\bar{B}(q, R) \subset \bar{B}(p, r),$$

denn für  $x \in \bar{B}(q, R)$  gilt

$$d(x, p) \leq d(x, q) + d(q, p) \leq R + d(q, p) = r.$$

Als abgeschlossene Teilmenge der kompakten Menge  $\bar{B}(p, r)$  ist der Ball  $\bar{B}(q, R)$  selbst kompakt.





- (d) Sei  $(p_i)_{i \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $\bar{B}(p, r)$ . Es ist zu zeigen, dass  $(p_i)_{i \in \mathbb{N}}$  eine konvergente Teilfolge besitzt.

Nach (6) existieren minimale Geodätische  $\gamma_i, i \in \mathbb{N}$ , mit  $\gamma_i(0) = p$  und  $\gamma_i(t_i) = p_i$  für geeignete  $t_i, i \in \mathbb{N}$ .

O. B. d. A. seien die  $\gamma_i$  nach Bogenlänge parametrisiert. Dann ist  $t_i = L[\gamma_i] = d(p, p_i) \leq r$ .

Die  $\dot{\gamma}_i(0)$  sind Einheitsvektoren in  $T_p M$ . Da  $S^{n-1}(1) \subset T_p M$  kompakt ist, gilt nach dem Übergang zu einer geeigneten Teilfolge

$$\dot{\gamma}_i(0) \xrightarrow{i \rightarrow \infty} X \in S^{n-1}(1) \subset T_p M.$$

Es gilt  $t_i \in [0, r]$  kompakt. Nach nochmaligem Übergang zu einer Teilfolge konvergiert auch  $t_i \xrightarrow{i \rightarrow \infty} T \in [0, r]$ . Setze  $q := \exp_p(T \cdot X)$ . Diese Definition ist wegen (1) möglich. Es gilt nun

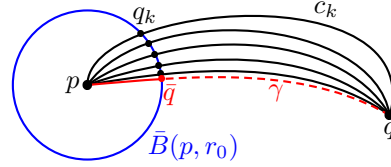
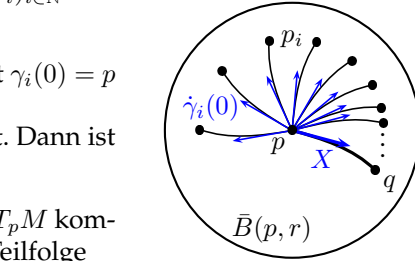
$$\lim_{i \rightarrow \infty} p_i = \lim_{i \rightarrow \infty} \exp_p(t_i \cdot \dot{\gamma}_i(0)) = \exp_p(\lim_{i \rightarrow \infty} t_i \dot{\gamma}_i(0)) = \exp_p(TX) = q.$$

Dies beweist (d).

- (e) Sei  $q \in M$ . Wir wissen bereits, dass wir minimale Geodätische von  $p$  nach  $q$  finden können, falls  $q \in B(p, \text{inrad}(p))$ .

Seien  $c_k$  stetige, stückweise  $C^1$ -Kurven von  $p$  nach  $q$  mit  $L[c_k] = d(p, q) + \varepsilon_k$  mit  $\varepsilon_k \searrow 0$ . Sei also  $q \notin B(p, \text{inrad}(p))$  (sonst sind wir schon fertig). Wähle  $0 < r_0 < \text{inrad}(p)$ . Dann ist

$$S(p, r_0) = \exp_p(S^{n-1}(r_0))$$



kompakt. Sei  $q_k$  der erste Schnittpunkt von  $c_k$  mit  $S(p, r_0)$ . Nach dem Übergang zu einer geeigneten Teilfolge besitzt  $q_k$  einen Grenzwert  $\bar{q} \in S(p, r_0)$ . Es gilt

$$\begin{aligned} d(p, q) &\leq d(p, q_k) + d(q_k, q) \leq L[c_k] \leq d(p, q) + \varepsilon_k \\ &\xrightarrow{k \rightarrow \infty} d(p, q) \leq d(p, \bar{q}) + d(\bar{q}, q) \leq d(p, q) \\ &\Rightarrow d(p, q) = d(p, \bar{q}) + d(\bar{q}, q) \end{aligned}$$

Sei also  $\gamma$  die eindeutige minimale Geodätische, die  $p$  mit  $\bar{q}$  verbindet, o. B. d. A. nach Bogenlänge parametrisiert. Mit (1) kann man  $\gamma$  auf  $[0, d(p, q)]$  fortsetzen.

Es bleibt noch zu zeigen, dass  $\gamma : [0, d(p, q)] \rightarrow M$  ist eine minimale Geodätische von  $p$  nach  $q$ . Setze dazu

$$I := \{t \in [0, d(p, q)] \mid d(p, \gamma(t)) = t \text{ und } d(p, \gamma(t)) + d(\gamma(t), q) = d(p, q)\}.$$

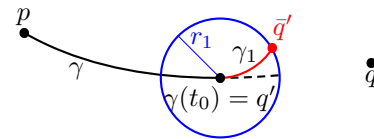
Wir haben gesehen, dass  $[0, r_0] \subset I$ . Setze also  $t_0 := \sup(I)$ . Zu zeigen ist  $t_0 = d(p, q)$ , denn dann ist

$$d(\gamma(t_0), q) = d(p, q) - d(\gamma(t_0), p) = d(p, q) - t_0 = 0,$$

und daraus folgt dann  $\gamma(t_0) = q$  und  $\gamma$  ist minimale Geodätische von  $p$  nach  $q$ .

Wir nehmen also an, dass  $t_0 < d(p, q)$ . Setze  $q' := \gamma(t_0)$ . Wähle  $0 < r_1 < d(p, q) - t_0$  so, dass  $B(q', r_1)$  eine normale Koordinatenumgebung ist. Wie oben existiert dann ein  $\bar{q}' \in \partial B(q', r_1)$  mit

$$d(q', \bar{q}') + d(\bar{q}', q) = d(q', q).$$



Sei nun  $\gamma_1$  eine minimale, nach Bogenlänge parametrisierte Geodätische mit  $\gamma_1(t_0) = q'$  und  $\gamma(t_0 + r_1) = \bar{q}'$ .

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad d(p, \bar{q}') &\leq d(p, q') + d(q', \bar{q}') \\ &= d(p, q') + d(q', q) - d(\bar{q}', q) \\ &= d(p, q) - d(q', q) + d(q', q) - d(\bar{q}', q) \\ &= d(p, q) - d(\bar{q}', q) \\ &\leq d(p, \bar{q}') \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad d(p, \bar{q}') = d(p, q') + d(q', \bar{q}')$$

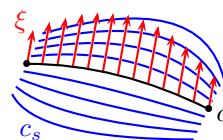
$\Rightarrow$  Die Kurve  $\gamma|_{[0, t_0]} \cup \gamma_1|_{[t_0, t_0 + r_1]}$  ist Kürzeste. Sie hat in  $q'$  keinen Knick.

$\Rightarrow$  Es gilt also  $t_0 + r_1 \in I$ . Das ist ein Widerspruch zur Definition von  $t_0$ . Somit ist auch **(e)** bewiesen.  $\square$

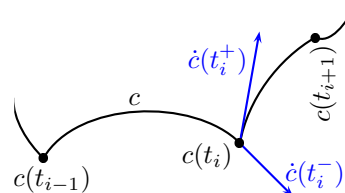
### 5.3 Die zweite Variation der Energie

**Zur Erinnerung.** Ist  $c_s$  eine  $C^2$ -Variation von  $c : [a, b] \rightarrow M$  mit Variationsfeld  $\xi$ , dann besagt die *erste Variationformel* (Satz 2.6.1) Folgendes:

$$\frac{d}{ds} E[c_s]|_{s=0} = - \int_a^b \left\langle \xi, \frac{\nabla}{dt} \dot{c} \right\rangle dt + \langle \xi, \dot{c} \rangle \Big|_a^b.$$



Ist  $c_s$  stetig und nur stückweise  $C^2$ , das heißt, es existiert eine Unterteilung  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_N = b$ , so dass  $(s, t) \mapsto c_s(t)$  stetig ist auf  $(-\varepsilon, \varepsilon) \times [a, b]$  und  $C^2$  auf  $(-\varepsilon, \varepsilon) \times [t_{i-1}, t_i]$ , dann gilt

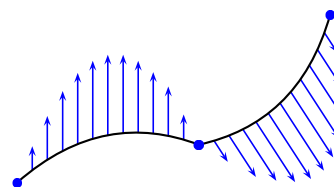


$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} E[c_s]|_{s=0} &= \frac{d}{ds} \sum_{i=1}^N E[c_s|_{[t_{i-1}, t_i]}]|_{s=0} \\ &= \sum_{i=1}^N \left( - \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left\langle \xi, \frac{\nabla}{dt} \dot{c} \right\rangle dt + \langle \xi(t_i), \dot{c}(t_i^-) \rangle - \langle \xi(t_{i-1}), \dot{c}(t_i^+) \rangle \right) \\ &= - \int_a^b \left\langle \xi, \frac{\nabla}{dt} \dot{c} \right\rangle dt + \langle \xi(b), \dot{c}(b^-) \rangle - \langle \xi(a), \dot{c}(a^+) \rangle + \sum_{i=1}^N \langle \xi(t_i), \dot{c}(t_i^-) - \dot{c}(t_i^+) \rangle \end{aligned}$$

**Frage.** Falls  $c$  eine stetige und nur stückweise  $C^2$ -Kurve ist mit  $\frac{d}{ds} E[c_s]|_{s=0} = 0$  für alle stetigen, stückweisen  $C^2$ -Variationen  $c_s$  mit festen Endpunkten, muss dann  $c$  eine Geodätische (und somit insbesondere  $C^\infty$ ) sein?

**Antwort.** Ja. Denn betrachtet man zunächst nur solche Variationen mit  $\xi(t_i) = 0$  für alle  $i \in \{0, \dots, N\}$ , so folgt wie im Beweis von Korollar 2.6.4, dass  $\frac{\nabla}{dt} \dot{c} \equiv 0$  auf jedem  $[t_{i-1}, t_i]$  für  $i = 1, \dots, N$ .

$\Rightarrow$  Die Kurve  $c$  ist stückweise eine Geodätische.



Würde nun für ein  $i \in \{1, \dots, N-1\}$  gelten, dass  $\dot{c}(t_i^-) \neq \dot{c}(t_i^+)$ , so kann man ein  $\eta \in T_{c(t_i)}M$  wählen mit

$$\langle \eta, \dot{c}(t_i^-) - \dot{c}(t_i^+) \rangle > 0.$$

Setze nun  $\eta$  vermöge der Parallelverschiebung längs  $c$  fort. Wähle eine glatte Funktion  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\varphi(t_i) = 1$  und  $\varphi \equiv 0$  auf  $\mathbb{R} - (t_{i-1}, t_{i+1})$ . Setze  $\xi(t) := \varphi(t)\eta(t)$ . Dann gilt  $\xi(a) = \xi(b) = 0$  und somit

$$0 = \langle \xi(t_i), \dot{c}(t_i^-) - \dot{c}(t_i^+) \rangle = \langle \eta, \dot{c}(t_i^-) - \dot{c}(t_i^+) \rangle > 0.$$

Das ist ein Widerspruch. Wir fassen zusammen:

**SATZ 5.3.1.** Sei  $M$  eine semi-riemannsche Mannigfaltigkeit, sei  $c : [a, b] \rightarrow M$  eine stetige, stückweise  $C^2$ -Kurve. Dann gilt für jede stetige, stückweise  $C^2$ -Variation  $c_s$  von  $c$  mit Variationsfeld  $\xi$ , dass

$$\left. \frac{d}{ds} E[c_s] \right|_{s=0} = - \int_a^b \left\langle \xi, \frac{\nabla}{dt} \dot{c} \right\rangle dt + \left\langle \xi, \dot{c} \right\rangle \Big|_a^b + \sum_{i=1}^{N-1} \langle \xi(t_i), \dot{c}(t_i^-) - \dot{c}(t_i^+) \rangle,$$

wobei  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_N = b$  eine Unterteilung ist, für die sowohl  $c$  als auch  $c_s$  auf den Intervallen  $[t_{i-1}, t_i]$ ,  $i = 1, \dots, N$ ,  $C^2$  ist.

Die Kurve  $c$  ist genau dann eine Geodätische, wenn für alle solchen Variationen mit festen Endpunkten gilt:

$$\left. \frac{d}{ds} E[c_s] \right|_{s=0} = 0.$$

Um die Minima der Energie zu untersuchen, müssen wir die zweite Ableitung der Energie betrachten.

**SATZ 5.3.2 (Zweite Variation der Energie).** Sei  $M$  eine semi-riemannsche Mannigfaltigkeit. Sei  $c : [a, b] \rightarrow M$  eine Geodätische. Sei  $c_s$  eine  $C^3$ -Variation von  $c$  mit Variationsfeld  $\xi$  und festen Endpunkten. Dann gilt

$$\left. \frac{d^2}{ds^2} E[c_s] \right|_{s=0} = \int_a^b \left( \left\langle \frac{\nabla}{dt} \xi, \frac{\nabla}{dt} \xi \right\rangle - \langle R(\xi, \dot{c}) \dot{c}, \xi \rangle \right) dt.$$

*Beweis.* Im Beweis von Satz 2.6.1 haben wir bereits gezeigt, dass

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} E[c_s] &= \int_a^b \left\langle \frac{\nabla}{\partial t} \frac{\partial c_s}{\partial s}, \frac{\partial c_s}{\partial t} \right\rangle dt \\ \Rightarrow \left. \frac{d^2}{ds^2} E[c_s] \right|_{s=0} &= \int_a^b \left( \left\langle \frac{\nabla}{\partial s} \frac{\nabla}{\partial t} \frac{\partial c_s}{\partial s} \Big|_{s=0}, \dot{c} \right\rangle + \left\langle \frac{\nabla}{dt} \xi, \frac{\nabla}{\partial s} \frac{\partial c_s}{\partial t} \Big|_{s=0} \right\rangle \right) dt \\ &= \underbrace{\int_a^b \left\langle \frac{\nabla}{\partial t} \frac{\nabla}{\partial s} \frac{\partial c_s}{\partial s} \Big|_{s=0}, \dot{c} \right\rangle dt}_{=0} + \int_a^b \langle R(\xi, \dot{c}) \xi, \dot{c} \rangle dt + \int_a^b \left\langle \frac{\nabla}{dt} \xi, \frac{\nabla}{dt} \xi \right\rangle dt \\ &= \int_a^b \left( \frac{\partial}{\partial t} \left\langle \frac{\nabla}{\partial s} \frac{\partial c_s}{\partial s} \Big|_{s=0}, \dot{c} \right\rangle - \left\langle \frac{\nabla}{\partial s} \frac{\partial c_s}{\partial s} \Big|_{s=0}, \underbrace{\frac{\nabla}{dt} \dot{c}}_{=0} \right\rangle \right) dt \\ &= \left\langle \frac{\nabla}{\partial s} \frac{\partial c_s}{\partial s} \Big|_{s=0}, \dot{c} \right\rangle \Big|_a^b = 0, \text{ da } c_s \text{ Variation mit festen Endpunkten ist.} \end{aligned}$$

□

**Definition.** Sei  $M$  eine zusammenhängende riemannsche Mannigfaltigkeit. Dann heißt

$$\text{diam}(M) := \sup\{d(p, q) \mid p, q \in M\} \in (0, \infty]$$

der Durchmesser von  $M$ .

**Beispiel.** Sei  $M = S^n$  mit  $g = g_{\text{std}}$ . Dann ist  $\text{diam}(S^n) = \pi$ .

**Bemerkung.** Ist  $M$  vollständig, so gilt

$$\text{diam}(M) < \infty \quad \Leftrightarrow \quad M \text{ ist kompakt.}$$

Denn: „ $\Leftarrow$ “:  $M$  ist kompakt  $\Rightarrow M \times M$  ist kompakt  $\Rightarrow d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$  ist beschränkt und nimmt Maximum an.

„ $\Rightarrow$ “: Ist  $\text{diam}(M) =: R < \infty$ , so gilt für beliebiges  $p \in M$ , dass  $M = \bar{B}(p, R)$ . Also ist  $M$  kompakt nach dem Satz von Hopf-Rinow.  $\square$

**SATZ 5.3.3 (Bonnet-Myers).** Sei  $M$  eine vollständige und zusammenhängende riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension  $n$ . Es gebe ein  $\kappa > 0$ , so dass  $\text{ric} \geq \kappa(n-1)g$ , d.h. für alle  $\xi \in TM$  gilt:  $\text{ric}(\xi, \xi) \geq \kappa(n-1)g(\xi, \xi)$ . Dann ist  $M$  kompakt und es ist:

$$\text{diam}(M) \leq \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}$$

**Beispiel.** (1) Sei  $M = S^n$  mit  $g = \alpha^2 \cdot g_{\text{std}}$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} \text{diam}(M) &= \alpha\pi, \quad K \equiv \frac{1}{\alpha^2}, \quad \text{ric} \equiv \frac{n-1}{\alpha^2} \\ \Rightarrow \text{diam}(M) &= \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}} \text{ mit } \kappa = \frac{1}{\alpha^2} \text{ und } \text{ric} = \kappa(n-1)g. \end{aligned}$$

(2) Sei nun  $M = \mathbb{RP}^n$  mit  $g = g_{\text{std}}$ . Da  $\mathbb{RP}^n$  lokal isometrisch zur  $S^n$  ist, gilt wie für die Sphäre  $\text{ric} = (n-1)g$ . Außerdem gilt  $\text{diam}(\mathbb{RP}^n) = \frac{\pi}{2}$ .

Hier gilt also  $\text{diam}(M) < \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}$ , wobei  $\kappa = 1$ .

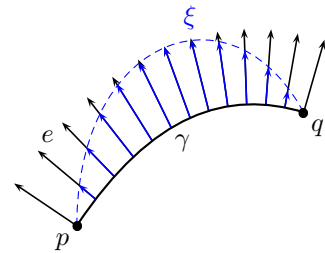
*Beweis von Satz 5.3.3.* Seien  $p, q \in M$  mit  $p \neq q$ . Setze  $\delta := d(p, q)$ . Da  $M$  vollständig ist, folgt mit dem Satz von Hopf-Rinow, dass eine minimale, nach Bogenlänge parametrisierte Geodätische  $\gamma : [0, \delta] \rightarrow M$  existiert mit  $\gamma(0) = p$  und  $\gamma(\delta) = q$ .

Sei  $e \in T_p M$  mit  $e \perp \dot{\gamma}(0)$  und  $\|e\| = 1$ . Sei  $e(t)$  das längs  $\gamma$  parallelverschobene Vektorfeld. Setze

$$\xi(t) := \sin\left(\frac{\pi}{\delta}t\right) \cdot e(t).$$

Sei  $\gamma_s(t)$  eine Variation von  $\gamma$  mit festen Endpunkten und Variationsfeld  $\xi$ , also zum Beispiel

$$\gamma_s(t) = \exp_{c(t)}(s \cdot \xi(t)).$$



Da  $\gamma$  eine minimale Geodätische ist, folgt

$$\begin{aligned}
 0 &= \frac{d}{ds} E[\gamma_s]|_{s=0} \quad \text{und} \quad 0 \leq \frac{d^2}{ds^2} E[\gamma_s]|_{s=0} \\
 &= \int_0^\delta \left( \left\| \frac{\nabla}{dt} \xi \right\|^2 - \langle R(\xi, \dot{\gamma}) \dot{\gamma}, \xi \rangle \right) dt \\
 &= \int_0^\delta \left( \left\| \frac{\pi}{\delta} \cos\left(\frac{\pi}{\delta} t\right) e(t) \right\|^2 - \sin\left(\frac{\pi}{\delta}\right)^2 \langle R(e, \dot{\gamma}) \dot{\gamma}, e \rangle \right) dt \\
 &= \int_0^\delta \left( \frac{\pi^2}{\delta^2} \cos\left(\frac{\pi}{\delta} t\right)^2 \cdot 1 - \sin\left(\frac{\pi}{\delta} t\right)^2 K(e, \dot{\gamma}) \right) dt
 \end{aligned}$$

Ist  $e_1, \dots, e_{n-1}$  eine Orthonormalbasis von  $\dot{\gamma}(0)^\perp$ , so ergibt dies mit  $e = e_i$  und Summation über  $i$ :

$$\begin{aligned}
 0 &\leq \int_0^\delta \left( (n-1) \frac{\pi^2}{\delta^2} \cos\left(\frac{\pi}{\delta} t\right)^2 - \sin\left(\frac{\pi}{\delta} t\right)^2 \underbrace{\text{ric}(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})}_{\geq (n-1)\kappa \cdot 1} \right) dt \\
 &\leq (n-1) \int_0^\delta \left( \frac{\pi^2}{\delta^2} \cos\left(\frac{\pi}{\delta} t\right)^2 - \sin\left(\frac{\pi}{\delta} t\right)^2 \cdot \kappa \right) dt \\
 &= (n-1) \cdot \frac{1}{2} \frac{\pi^2 - \kappa \delta^2}{\delta} \\
 \Rightarrow 0 &\leq \pi^2 - \kappa \delta^2 \\
 \Rightarrow \delta &\leq \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}} \\
 \Rightarrow \text{diam}(M) &\leq \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}
 \end{aligned}$$

Mit der Vollständigkeit von  $M$  folgt dann auch die Kompaktheit. □

Wir haben hier aus einer lokalen Voraussetzung eine globale Schlussfolgerung hergeleitet.

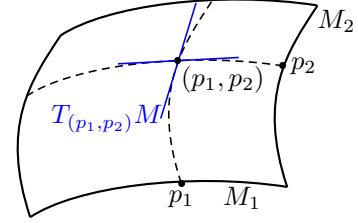
Allgemein gilt Folgendes

$$K \geq \kappa \quad \Rightarrow \quad \text{ric} \geq (n-1)\kappa \cdot g \quad \Rightarrow \quad \text{scal} \geq n(n-1)\kappa. \quad (1)$$

Daher gilt der Satz von Bonnet-Myers insbesondere auch für Mannigfaltigkeiten mit  $K \geq \kappa > 0$ .  
Genügt auch die Bedingung  $\text{scal} \geq n(n-1)\kappa$ ?

Dazu wollen wir ein Gegenbeispiel konstruieren. Seien  $M_1$  und  $M_2$  riemannsche Mannigfaltigkeiten und trage  $M := M_1 \times M_2$  die Produktmetrik

$$g_M(\underbrace{\xi_1 + \xi_2}_{\substack{\in T_{p_1} M_1 \oplus T_{p_2} M_2 \\ = T_{(p_1, p_2)} M}}, \eta_1 + \eta_2) = g_{M_1}(\xi_1, \eta_1) + g_{M_2}(\xi_2, \eta_2).$$



$$\begin{aligned} \Rightarrow R^M(\xi_1 + \xi_2, \eta_1 + \eta_2) &= \left( \begin{array}{c|c} R^{M_1}(\xi_1, \eta_1) & 0 \\ \hline 0 & R^{M_2}(\xi_2, \eta_2) \end{array} \right) \\ \Rightarrow \text{ric}^M &= \left( \begin{array}{c|c} \text{ric}^{M_1} & 0 \\ \hline 0 & \text{ric}^{M_2} \end{array} \right) \\ \Rightarrow \text{scal}^M &= \text{scal}^{M_1} + \text{scal}^{M_2} \end{aligned}$$

Für  $n \geq 3$  ergibt sich mit  $M = S^{n-1} \times \mathbb{R}$ , dass

$$\text{scal}^M = (n-1)(n-2) + 0 = (n-1)(n-2),$$

aber gleichzeitig ist  $\text{diam}(M) = \infty$ . Also gilt der Satz von Bonnet-Myers nicht unter der schwächeren Bedingung  $\text{scal} \geq n(n-1)\kappa$  für  $n \geq 3$ .

Für  $n = 2$  gilt jedoch  $\text{scal} = 2K$  und die drei Bedingungen in (1) sind äquivalent.

## 5.4 Verallgemeinerte Abstandsfunktionen

**Definition.** Sei  $M$  eine riemannsche Mannigfaltigkeit. Eine glatte Funktion  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  heißt *verallgemeinerte Abstandsfunktion*, falls  $\|\text{grad} f\| \equiv 1$ .

Dabei ist  $\text{grad}_p f$  der Tangentialvektor in  $T_p M$ , gegeben durch

$$\langle \text{grad}_p f, \xi \rangle = \partial_\xi f \text{ für alle } \xi \in T_p M.$$

Ist  $e_1, \dots, e_n$  eine Orthonormalbasis von  $T_p M$ , so gilt

$$\text{grad}_p f = \sum_{i=1}^n \partial_{e_i} f \cdot e_i,$$

denn für alle  $\xi$  gilt  $\langle \sum_{i=1}^n \partial_{e_i} f \cdot e_i, \xi \rangle = \sum_{i=1}^n \partial_{e_i} f \langle e_i, \xi \rangle = \partial_{\sum_{i=1}^n \langle e_i, \xi \rangle e_i} f = \partial_\xi f$ .

**Definition.** Ist  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  glatt, so heißt

$$\text{Hess}_p f : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}, \quad \text{Hess}_p f(\xi, \eta) := \langle \nabla_\xi \text{grad} f, \eta \rangle,$$

die *Hessesche* von  $f$  im Punkt  $p$ .

**LEMMA 5.4.1.** Die Bilinearform  $\text{Hess}_p f$  ist symmetrisch.

*Beweis.* Setze  $\xi, \eta \in T_p M$  zu glatten Vektorfeldern in einer Umgebung von  $p$  fort. Dann gilt

$$\begin{aligned}
 \text{Hess} f(\xi, \eta) &= \langle \nabla_\xi \text{grad} f, \eta \rangle \\
 &= \partial_\xi \langle \text{grad} f, \eta \rangle - \langle \text{grad} f, \nabla_\xi \eta \rangle \\
 &= \partial_\xi \partial_\eta f - \partial_{\nabla_\xi \eta} f \\
 \Rightarrow \text{Hess} f(\xi, \eta) - \text{Hess} f(\eta, \xi) &= \partial_\xi \partial_\eta f - \partial_{\nabla_\xi \eta} f - \partial_\eta \partial_\xi f + \partial_{\nabla_\eta \xi} f \\
 &= \partial_\xi \partial_\eta f - \partial_\eta \partial_\xi f - \partial_{[\xi, \eta]} f = 0
 \end{aligned}$$

**LEMMA 5.4.2.** Sei  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  eine verallgemeinerte Abstandsfunktion. Dann sind die Integralkurven von  $\text{grad} f$  nach Bogenlänge parametrisierte Geodätische.

*Beweis.* Für alle  $\xi \in T_p M$  gilt

$$\begin{aligned}
 0 &= \partial_\xi \langle \text{grad} f, \text{grad} f \rangle \\
 &= 2 \langle \nabla_\xi \text{grad} f, \text{grad} f \rangle \\
 &= 2 \text{Hess} f(\xi, \text{grad} f) \\
 &\stackrel{\text{L. 5.4.1}}{=} 2 \text{Hess} f(\text{grad} f, \xi) \\
 &= 2 \langle \nabla_{\text{grad} f} \text{grad} f, \xi \rangle
 \end{aligned}$$

Daraus folgt also  $\nabla_{\text{grad} f} \text{grad} f = 0$ . Für eine Integralkurve  $c$  heißt das  $\nabla_{\dot{c}} \dot{c} = 0$ , also ist  $c$  Geodätische. Dass  $c$  nach Bogenlänge parametrisiert ist, ist wegen  $\|\dot{c}\| = \|\text{grad} f\| = 1$  klar.  $\square$

**LEMMA 5.4.3.** Sei  $M$  eine vollständige riemannsche Mannigfaltigkeit, sei  $K \subset M$  kompakt. Dann ist die Funktion

$$f(x) := d(K, x) := \inf_{p \in K} d(p, x)$$

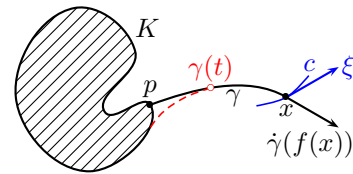
dort auf  $M - K$ , wo sie glatt ist, eine verallgemeinerte Abstandsfunktion.

*Beweis.* Da  $K$  kompakt ist, nimmt für jedes  $x \in M$  die Funktion  $K \rightarrow \mathbb{R}, p \mapsto d(p, x)$ , ihr Minimum an. Wir können also schreiben

$$f(x) = \min_{p \in K} d(p, x).$$

Sei nun  $x \in M - K$ , wobei außerdem  $f$  differenzierbar sei in  $x$ . Sei  $p \in K$  mit  $f(x) = d(p, x)$ .

Da  $M$  vollständig ist, existiert eine minimale, o. E. nach Bogenlänge parametrisierte Geodätische  $\gamma : [0, f(x)] \rightarrow M$  mit  $\gamma(0) = p$  und  $\gamma(f(x)) = x$ .



*Zwischenbehauptung:* Für alle  $t \in [0, f(x)]$  ist  $f(\gamma(t)) = t$ .

*Beweis.* Es gilt  $f(\gamma(t)) = d(K, \gamma(t)) \leq d(p, \gamma(t)) \leq L[\gamma|_{[0, t]}] = t$ .

Würde für ein  $t \in (0, f(x))$  gelten, dass  $f(\gamma(t)) < t$ , so wäre

$$\begin{aligned}
 f(x) &= d(K, x) \leq d(K, \gamma(t)) + d(\gamma(t), x) \\
 &< t + L[\gamma|_{[t, f(x)]}] \\
 &= t + f(x) - t = f(x)
 \end{aligned}$$

Das ist ein Widerspruch, also gilt  $f(\gamma(t)) = t$ . Somit ist die Zwischenbehauptung bewiesen.  $\checkmark$

Daraus folgt dann unmittelbar, dass

$$\partial_{\dot{\gamma}(f(x))} f = \frac{d}{dt} f(\gamma(t))|_{t=f(x)} = \frac{d}{dt} t|_{t=f(x)} = 1.$$

Also gilt auf jeden Fall  $\|\text{grad}_x f\| \geq 1$ .

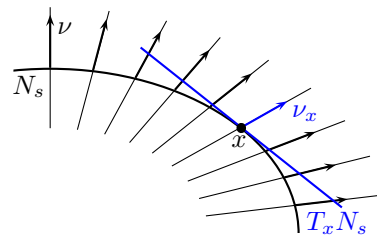
Sei nun  $\xi \in T_x M$  mit  $\|\xi\| = 1$ . Sei  $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$  eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve mit  $\dot{c}(0) = \xi$ . Es gilt

$$\begin{aligned} f(c(s)) &= d(\mathcal{K}, c(s)) \\ &\leq d(\mathcal{K}, x) + d(x, c(s)) \\ &\leq f(x) + L[c]_{[0,s]} \\ &= f(x) + s \\ \Rightarrow 1 &\geq \frac{f(c(s)) - f(x)}{s} \xrightarrow{s \rightarrow 0} \frac{d}{ds} f(c(s))|_{s=0} \\ &= \partial_{\xi} f = \langle \text{grad} f, \xi \rangle \end{aligned}$$

Daraus folgt also  $\|\text{grad} f\| \leq 1$  und insgesamt ergibt sich dann  $\|\text{grad} f\| = 1$  dort, wo  $f$  differenzierbar ist. Also ist  $f$  dort eine verallgemeinerte Abstandsfunktion.  $\square$

Die Niveaumengen  $N_s := \{x \in M \mid f(x) = s\}$ ,  $s \in \mathbb{R}$  einer verallgemeinerten Abstandsfunktion  $f$  sind glatte Hyperflächen, da wegen  $\text{grad} f \neq 0$  jeder Wert  $s \in \mathbb{R}$  regulär ist. Ferner ist  $\nu_x := \text{grad}_x f$  ein Einheitsnormalenvektor auf  $N_{f(x)}$  im Punkt  $x$ . Die Weingarten-Abbildung lautet dann

$$S_x : T_x N_s \rightarrow T_x N_s, \quad S_x(\xi) = -\nabla_{\xi} \nu = -\nabla_{\xi} \text{grad} f.$$



Die Eigenwerte  $\kappa_1, \dots, \kappa_{n-1}$  von  $S_x$  heißen die Hauptkrümmungen von  $N_s$  in  $M$  im Punkt  $x$ . Man erhält für die zweite Fundamentalform

$$\begin{aligned} II_x : T_x N_s \times T_x N_s &\rightarrow N(N_s), \quad II_x(\xi, \eta) = \langle S_x(\xi), \eta \rangle \nu_x \\ &= \langle -\nabla_{\xi} \nu, \eta \rangle \nu_x \\ &= -\langle \nabla_{\xi} \text{grad} f, \eta \rangle \nu_x \\ &= -\text{Hess}_x f(\xi, \eta) \cdot \nu_x \end{aligned}$$

Die Eigenwerte der Hesse-Matrix liefern uns also die Hauptkrümmungen.

**SATZ 5.4.4 (Riccati-Gleichung).** Sei  $M$  eine riemannsche Mannigfaltigkeit, sei  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  eine verallgemeinerte Abstandsfunktion, seien  $N_s = f^{-1}(s)$ , sei  $S$  die zugehörige Weingarten-Abbildung bezüglich  $\nu = \text{grad} f$ . Dann gilt

$$\nabla_{\nu} S = R_{\nu} + S^2,$$

wobei  $R_{\nu} : T N_s \rightarrow T N_s$  gegeben ist durch  $R_{\nu}(\xi) = R(\xi, \nu)\nu$ .

*Beweis.* Wir setzen  $\xi \in T_x N_s$  in eine Umgebung von  $x$  zu einem glatten Schnitt  $\xi$  in  $T N_s \subset T M$  fort, dann gilt:

$$\begin{aligned} (\nabla_{\nu} S)(\xi) &= \nabla_{\nu}(S(\xi)) - S(\nabla_{\nu} \xi) = -\nabla_{\nu} \nabla_{\xi} \nu + \nabla_{\nabla_{\nu} \xi} \nu \\ &= -(\underbrace{\nabla_{\xi} \nabla_{\nu} \nu}_{=0} + R(\nu, \xi)\nu + \underbrace{\nabla_{[\nu, \xi]} \nu}_{=\nabla_{\nu} \xi - \nabla_{\xi} \nu}) + \nabla_{\nabla_{\nu} \xi} \nu \\ &\quad \text{(Lemma 5.4.2)} \\ &= R(\xi, \nu)\nu + \nabla_{\nabla_{\xi} \nu} \nu = R_{\nu}(\xi) - \nabla_{S(\xi)} \nu = R_{\nu}(\xi) + S(S(\xi)) \quad \square \end{aligned}$$



# Literaturverzeichnis

- [Milnor] J. MILNOR: *Topology from the differential viewpoint*. University Press of Virginia, Charlottesville 1965.
- [O'Neill] B. O'NEILL: *Semi-Riemannian geometry*. Academic Press, New York 1983.
- [Sakai] T. SAKAI: *Riemannian geometry*. AMS, Providence 1996.
- [Warner] F. W. WARNER: *Foundations of Differential Manifolds and Lie Groups*. Springer-Verlag, New York-Berlin-Heidelberg 1983.

# Index

- $C^\infty$ -Atlas, 9
- $C^\infty$ -Verträglichkeit von Karten, 8
  - 1. Fundamentalform, 29
  - 2. Fundamentalform, 76
- Abbildung, differenzierbare, 10
- Abbildung, stetige, 1
- Anti-deSitter-Raumzeit, 83
- Atlas, 9
- Bianchi-Identität, 57
- Bonnet-Myers, Satz von, 104
- Christoffel-Symbole, 35
- Derivation, 16
- deSitter-Raumzeit, 83
- Diffeomorphismus, 11
- Differential einer Abbildung, 14
- differenzierbare Struktur, 10
- Durchmesser einer riemannschen Mannigfaltigkeit, 104
- Einstein'sche Summenkonvention, 21
- Energie einer Kurve, 45
- euklidische Bewegungen, 31
- flache Mannigfaltigkeit, 59
- Gauß-Formel, 76
- Gauß-Krümmung, 64
- Gauß-Lemma, 94
- Geodätische, 48
- geodätische Polarkoordinaten, 94
- Geodätische, minimale, 97
- geodätisches Dreieck, 88
- Gradient einer differenzierbaren Funktion, 80
- Hessesche einer Funktion, 106
- Homöomorphismus, 1
- Hopf-Rinow, Satz von, 98
- hyperbolischer Raum, 83
- Injektivitätsradius, 96
- Isometrie, 31
- Isometrie, lineare, 26
- Isometrie, lokale, 31
- Isometrie-Gruppe, 31
- Karte, 3
- komplex-projektiver Raum, 8
- Kosinussatz, 90
- Kotangentenraum, 27
- kovariante Ableitung, 39
- Länge einer Kurve, 93
- Levi-Civita-Zusammenhang, 33
- lokaler Diffeomorphismus, 15
- lokales Koordinatensystem, 3
- Lorentz-Boost, 88
- Lorentz-Mannigfaltigkeit, 30
- Lorentz-Metrik, 30
- Lorentztransformationen, zeitorientierungserhaltende, 86
- Mannigfaltigkeit, differenzierbare, 10
- Mannigfaltigkeit, geodätisch vollständige, 98
- Mannigfaltigkeit, riemannsche, 29
- Mannigfaltigkeit, topologische, 1
- Mannigfaltigkeit, vollständige, 98
- Minkowski-Skalarprodukt, 30
- Modellraum konstanter Krümmung, 85
- Normalraum, 74
- Nullkurve, 48
- Parallelenaxiom, 92
- paralleles Vektorfeld längs einer Kurve, 40
- Parallelverschiebung, 43
- Parallelverschiebung auf der Sphäre, Webseite, 44
- Parametrisierung nach Bogenlänge, 48

- Parametrisierung nach Eigenzeit, 48  
Poincaré-Transformation, 31  
pseudo-hyperbolischer Raum, 82  
Pseudosphäre, 82  
Pull-Back einer Metrik, 31
- reell-projektiver Raum, 5  
regulärer Punkt, 71  
regulärer Wert, 71  
Riccati-Gleichung, 108  
Ricci-Krümmung, 64  
Richtungsableitung, 16  
riemannsche Exponentialabbildung, 50  
riemannsche Metrik, 29  
riemannsche Normalkoordinaten, 52  
riemannscher Abstand, 93  
riemannscher Krümmungstensor, 56
- Sard, Satz von, 71  
Schnittkrümmung, 63  
semi-riemannsche Hyperfläche, 80  
semi-riemannsche Metrik, 27  
Signum einer Hyperfläche, 80  
singulärer Punkt, 71  
singulärer Wert, 71  
Sinussatz, 90  
Skalarkrümmung, 67  
stereographische Projektion, 2  
symmetrische Bilinearform, 25
- Tangentialbündel, 21  
Tangentialraum, 12  
Tangentialvektor, 12  
Topologie, 1  
topologischer Raum, 1
- Untermannigfaltigkeit, differenzierbare, 69  
Untermannigfaltigkeit, semi-riemannsche, 73  
Untermannigfaltigkeit, totalgeodätische, 78  
Untermannigfaltigkeitskarte, 69
- Variationsvektorfeld, 45  
Variation der Energie, zweite, 103  
Variation der Energie, erste, 45  
Variation von Kurven, 45  
Vektorfeld, 23  
Vektorfelder längs Abbildungen, 38  
verallgemeinerte Sinusfunktion, 87  
verallgemeinerte Abstandsfunktion, 106  
verallgemeinerte Kosinusfunktion, 87
- Weingarten-Abbildung, 81  
zusammenhängend, 4  
zweite kovariante Ableitung, 55