Differentialgeometrie I

Sommersemester 2004

Andreas Čap

Institut für Mathematik, Universität Wien, Nordbergstrasse 15, A–1090 Wien

E-mail address: `Andreas.Cap@esi.ac.at`

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Nach dem neuen Studienplan gibt es nun eine dreistündige Vorlesung "Differentialgeometrie I" als Pflichtvorlesung am Anfang des zweiten Studienabschnittes. Angesichts der sehr beschränkten Zeit ist es klar, dass diese Vorlesung nur exemplarisch kleine Teile der Differentialgeometrie beleuchten kann. Weiters ergibt sich die Schwierigkeit, dass die Vorlesung einerseits für die Mehrzahl der Studenten die einzige Vorlesung über Differentialgeometrie (beziehungsweise Analysis auf Mannigfaltigkeiten) während des gesamten Studiums ist, während sie andererseits für Studenten, die den Wahlfachtopf "Geometrie und Topologie" wählen, eine Grundlage für alle weiteren Vorlesungen dieses Wahlfachtopfes liefern sollte.

Klarerweise sind diese beiden Anforderungen nicht kompatibel, und man muss einen Mittelweg finden. Mein Ziel bei der Auswahl des Stoffes war, einen ersten Ausblick auf die Inhalte des Wahlfachtopfes "Geometrie und Topologie", vor allem in Richtung Differentialgeometrie und ein wenig algebraische Topologie zu bieten, dabei aber die abstrakten Konzepte auf das notwendige Minimum zu beschränken und Verallgemeinerungen nur kurz zu erwähnen. Insbesondere werde ich abstrakte Mannigfaltigkeiten nur kurz erwähnen, und mich im wesentlichen auf Teilmannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$ beschränken, bei denen man sich intuitiv etwas wohler fühlt und auch einige topologische Schwierigkeiten wegfallen.

Grundsätzlich ist der wesentlichste Inhalt der Vorlesung die Wechselwirkung zwischen Analysis, Geometrie und Topologie. Dies bedeutet, dass wir einerseits sehen werden, wie man Methoden der Analysis (insbesondere Differential– und Integralrechnung) zum Studium gewisser Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ (und auch allgemeinerer Objekte) verwenden kann. Dies führt zu geometrischen Begriffen, insbesondere verschiedene Formen von Krümmungen. In manchen Fällen kann man allerdings aus solchen geometrischen Begriffen Größen erhalten, die nur von einer wesentlich roheren Struktur der betrachteten Menge abhängen, nämlich ihrer Topologie. Eine Analogie hierfür bietet etwa der Euler'sche Polyedersatz, der besagt, dass für einen konvexen Polyeder (alle solche sind topologisch äquivalent) die Anzahl der Ecken plus die Anzahl der Flächen minus die Anzahl der Kanten immer gleich zwei ist.

Andererseits haben aber diese Anwendungen auch Rückwirkungen auf die Analysis. Um Differentialgeometrie betreiben zu können, muss man die analytischen Methoden von offenen Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ auf allgemeinere Teilmengen, sogenannte Teilmannigfaltigkeiten von $\mathbb{R}^n$, übertragen. Dies erlaubt es dann etwa, Analysis auf einer Kugeloberfläche oder einem Torus zu betreiben. Dazu muss man die in der Analysis auftauchenden Konzepte präzisieren was wiederum zu einer klareren Formulierung der Analysis auf offenen Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ führt, etwa zu einer einfachen Formulierung des Satzes von Stokes.

Zum Inhalt im Einzelnen: Im ersten Kapitel werden wir uns als Vorgeschmack mit Kurven in der Ebene beschäftigen. In diesem Fall treten viele der späteren Schwierigkeiten noch nicht auf, obwohl eine gute Definition einer glatten Kurve schon einige ganz nützliche Überlegungen benötigt. Für Kurven gibt es einen einfachen, geometrisch völlig einsichtigen Krümmungsbegriff, der eine Kurve auch vollkommen bestimmt, was die lokale Theorie der Kurven sehr einfach macht. Anschließend werden wir uns ein wenig mit der globalen Theorie geschlossener Kurven beschäftigen, was einen ersten Einblick in die Zusammenhänge zwischen Geometrie und Topologie liefern wird.

Das zweite Kapitel ist der Theorie von Teilmannigfaltigkeiten von $\mathbb{R}^n$ gewidmet. Das sind Teilmengen von $\mathbb{R}^n$, auf die man die aus den Grundvorlesungen bekannte Analysis verallgemeinern kann. Zunächst besprechen wir mehrere äquivalente Beschreibungen für diese Teilmengen. Dann wenden wir uns dem Studium glatter Funktionen auf Teilmannigfaltigkeiten und beweisen den technisch wichtigen Satz über die Existenz von Partitionen der Eins, der zeigt, dass es auf jeder Teilmannigfaltigkeit viele glatte Funktionen gibt. Um glatte Funktionen tatsächlich differenzieren zu können, muss zunächst der Begriff des Tangentialraumes eingeführt werden, der eine lineare Approximation der Teilmannigfaltigkeit in einem Punkt darstellt. Dies führt zum Begriff des Tangentialbündels, mit dessen Hilfe auch höhere Ableitungen betrachtet werden können. Schließlich studieren wir Vektorfelder, die die einfachsten geometrischen Objekte auf Mannigfaltigkeiten darstellen. Wir besprechen in diesem Kapitel auch den Begriff der (abstrakten) Mannigfaltigkeit, der grundlegend für die Differentialgeometrie ist, und skizzieren wie die einzelnen Begriffe abgewandelt werden müssen, damit sie auch für abstrakte Mannigfaltigkeiten Sinn machen.

Kapitel 3 behandelt die Theorie der Hyperflächen, also der n–dimensionalen Teilmannigfaltigkeiten von $\mathbb{R}^{n+1}$. Wir besprechen den Unterschied zwischen intrinsischen und extrinsischen Größen und entwickeln die wichtigsten Krümmungsbegriffe für solche Hyperflächen (Hauptkrümmungen, Gaußkrümmung und mittlere Krümmung). Hier ergeben sich schöne Verbindungen zur Krümmung von Kurven. Mit dem Satz über Flächen, die nur aus Nabelpunkten bestehen, beweisen wir ein einfaches Beispiel eines Klassifikationssatzes. Am Ende des Kapitels besprechen wir kovariante Ableitung, Riemannkrümmung und Geodäten, was einen Ausblick auf die Riemann'sche Geometrie bietet.

Das letzte Kapitel kehrt wieder zur Analysis auf Mannigfaltigkeiten zurück. Wir besprechen Tensorfelder und Differentialformen, sowie die Integration auf (Teil–) Mannigfaltigkeiten und die allgemeine Version des Satzes von Stokes. In kurzen Abschnitten am Ende des Kapitels werden der allgemeine Kalkül für Differentialformen und die de–Rham Kohomologie skizziert, und wir zeigen, wie die aus den Grundvorlesungen bekannten Integralsätze aus dem Satz von Stokes hergeleitet werden können.

Das Skriptum ist eine überarbeitete Version meinesm Skriptums aus dem Wintersemester 2001/2002, nach dem ich die Vorlesung zum ersten Mal dreistündig gehalten habe. Dieses Skriptum hat Prof. P. Michor als Grundlage für seine Vorlesung im Sommersemester 2003 verwendet. Ich verdanke ihm eine Vielzahl von Verbesserungsvorschlägen, die in die neue Version des Skriptums eingeflossen sind. Ich danke auch mehreren Höhrern der beiden Vorlesungen für Hinweise auf Druckfehler und Unklarheiten, besonders Herrn Markus Wunsch, der mir eine vollständige Version des alten Skriptums mit Korrekturen zur Verfügung gestellt hat.

KAPITEL 1

Kurven in der Ebene

In diesem einleitenden Kapitel werden wir Teile der Theorie der ebenen Kurven behandeln. Während für eine gute Definition einer glatten (beliebig oft differenzierbaren) Kurve in der Ebene und einer geometrischen Eigenschaft einer solchen Kurve schon einige Überlegungen nötig sind, treten doch viele Problem nur in sehr einfacher Form oder gar nicht auf. Zunächst werden wir die lokale Theorie der glatten Kurven behandeln, die sich ziemlich einfach darstellt. Einerseits liefert die Bogenlänge einer glatten Kurve eine ausgezeichnete Parametrisierung, und andererseits gibt es einen einfachen Krümmungsbegriff, der ebene Kurven auch noch vollständig charakterisiert. Im zweiten Teil des Kapitels wenden wir uns dann geschlossenen Kurven zu, wo die Begriffe der Windungs– und Umlaufzahl eine erste Beziehung zur algebraischen Topologie liefert. Der Zusammenhang zwischen Krümmung und Umlaufzahl liefert uns ein erstes Beispiel für den Zusammenhang zwischen Geometrie und Topologie.

Glatte Kurven

1.1. Euklidischer Raum und Bewegungen. Der $\mathbb{R}^n$ taucht schon in den Grundvorlesungen in vielen verschiedenen Rollen auf, etwa als Punktmenge, als metrischer und topologischer Raum, als Vektorraum mit oder ohne innerem Produkt. Für geometrische Anwendungen ist das wesentliche Bild der sogenannte *euklidische Raum*, der eine leichte Abschwächung des Vektorraumes mit innerem Produkt darstellt. Betrachten wir also den Vektorraum $\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}\}$ mit komponentenweiser Addition und Skalarmultiplikation sowie dem inneren Produkt $\langle (x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$. Den euklidischen Raum erhält man daraus im wesentlichen, indem man vergißt, wo der Nullpunkt liegt. (Ein ausgezeichneter Punkt macht natürlich geometrisch keinen Sinn.)

Das wesentliche Element wird dadurch der *Verbindungsvektor* $\overrightarrow{xy} = y - x$ zwischen zwei Punkten $x, y \in \mathbb{R}^n$, den man als Element des Vektorraumes $\mathbb{R}^n$ betrachten sollte. Offensichtlich gilt für die Verbindungsvektoren $x + \overrightarrow{xy} = y$ und $\overrightarrow{xz} = \overrightarrow{xy} + \overrightarrow{yz}$. Hat man die Verbindungsvektoren, dann erhält man den Begriff der *Distanz* zweier Punkte, $d(x, y) := \|\overrightarrow{xy}\| = \sqrt{\langle y - x, y - x \rangle}$, d.h. die Distanz ist gerade die Länge des Verbindungsvektors.

Zur Sichtweise des $\mathbb{R}^n$ als euklidischer Raum gehört eine Klasse von Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, die sogenannten Bewegungen. Die Funktionen $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, die die Struktur als Vektorraum erhalten, sind natürlich genau die linearen Abbildungen, und lineare Abbildungen, die zusätzlich mit dem inneren Produkt verträglich sind, sind genau die *orthogonalen linearen Abbildungen* $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Nach Definition ist eine lineare Abbildung A genau dann orthogonal, wenn $\langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt. Wie aus der linearen Algebra bekannt, ist dies äquivalent zu $\|Ax\| = \|x\|$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$, zu $A^t = A^{-1}$, sowie zu der Tatsache, dass A eine (oder äquivalent jede) Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^n$ wieder auf eine Orthonormalbasis abbildet.

Will man nun noch den Nullpunkt vergessen, so liegt es nahe, außer den orthogonalen linearen Abbildungen auch noch beliebige Translationen zuzulassen. Das motiviert folgende

Definition. Eine *Bewegung* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ist eine Abbildung der Form $f(x) = Ax + b$, wobei $b \in \mathbb{R}^n$ ein beliebiger fester Punkt und $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine orthogonale lineare Abbildung ist.

Das folgende Resultat zeigt, dass Bewegungen mit allen bisher betrachteten Dingen gut verträglich sind:

Proposition. *Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine Bewegung, $f(x) = Ax+b$ und seien $x, y \in \mathbb{R}^n$ beliebige Punkte. Dann gilt:*
(1) $\overrightarrow{f(x)f(y)} = A(\overrightarrow{xy})$ und damit $f(y) = f(x) + A(\overrightarrow{xy})$ sowie $d(f(x), f(y)) = d(x, y)$.
(2) Die Funktion f ist C^∞, also beliebig oft differenzierbar, und die Ableitung ist gegeben durch $Df(v) = A$ für alle $v \in \mathbb{R}^n$.

Beweis. (1) Nach Definition ist $\overrightarrow{f(x)f(y)} = f(y) - f(x) = Ay - Ax = A(y - x) = A(\overrightarrow{xy})$. Damit ist aber $f(y) = f(x) + \overrightarrow{f(x)f(y)} = f(x) + A(\overrightarrow{xy})$. Da A orthogonal ist, ist $\|A(\overrightarrow{xy})\| = \|\overrightarrow{xy}\|$, also $d(f(x), f(y)) = d(x, y)$.
(2) Für $v, w \in \mathbb{R}^n$ und $t \in \mathbb{R}$ haben wir nach Punkt (1) $f(v + tw) = f(v) + A(tw) = f(v) + tA(w)$, weil A linear ist. Differenziert man das in t und setzt $t = 0$, so sieht man, dass die Richtungsableitung von f im Punkt v in Richtung w existiert und durch $A(w)$ gegeben ist. Damit folgt aber $Df(v) = A$, und da die Ableitung konstant ist, sind alle höheren Ableitungen Null und f ist beliebig oft differenzierbar. □

Nach Teil (1) dieser Proposition lässt eine Bewegung Distanzen invariant. Interessanterweise charakterisiert diese Eigenschaft Bewegungen, was auch nachträglich die Definition (die oben nur eher schwammig motiviert war) rechtfertigt. Obwohl dieses Resultat im weiteren (außer als Motivation) keine Rolle spielen wird, geben wir hier einen Beweis:

Satz. *Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine Funktion, sodass $d(f(x), f(y)) = d(x, y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt. Dann ist f eine Bewegung.*

Beweis. Die Idee zum Beweis ist einfach. Ist f tatsächlich eine Bewegung, also von der Form $x \mapsto Ax + b$, dann muss $b = f(0)$ und $Ax = f(x) - f(0)$ gelten. Man muss also nur verifizieren, dass durch $A(v) := f(v) - f(0)$ eine orthogonale lineare Abbildung $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definiert wird, denn falls dies bewiesen ist, gilt nach Konstruktion $f(v) = A(v) + f(0)$. Diese Verifikation ist allerdings etwas mühsam: Zunächst ist

$$\|A(v) - A(w)\| = \|f(v) - f(0) - f(w) + f(0)\| = d(f(v), f(w)),$$

und nach Voraussetzung an f ist das gleich $d(v, w)$, also erhalten wir $\|A(v) - A(w)\| = \|v - w\|$. Nach Definition ist $A(0) = 0$, also gilt insbesondere $\|A(v)\| = \|v\|$. Die aus der linearen Algebra bekannte Polarisierungsformel, die es erlaubt innere Produkte durch Normen zu berechnen, lautet in einer Version $\langle v, w\rangle = \frac{1}{2}(\|v\|^2 + \|w\|^2 - \|v - w\|^2)$. Somit muss $\langle A(v), A(w)\rangle = \langle v, w\rangle$ gelten. Daher ist aber für jede Orthonormalbasis $\{e_1, \dots, e_n\}$ von $\mathbb{R}^n$ auch $\{A(e_1), \dots, A(e_n)\}$ eine Orthonormalbasis. Entwickeln wir nun v in der Basis $\{e_i\}$, dann erhalten wir $v = \sum_{i=1}^n \langle v, e_i\rangle e_i$. Anderseits können wir $A(v)$ in der Basis $A(e_i)$ entwickeln und erhalten

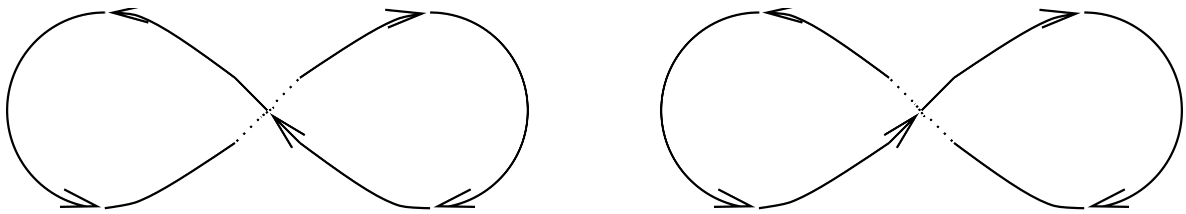
$$A(v) = \sum_{i=1}^n \langle A(v), A(e_i)\rangle A(e_i) = \sum_{i=1}^n \langle v, e_i\rangle A(e_i).$$

Daher ist aber $A(\sum x_i e_i) = \sum x_i A(e_i)$, also ist A offensichtlich linear und somit eine orthogonale lineare Abbildung. □

1.2. Glatte Kurven. Das Wort “glatt” soll im weiteren immer beliebig oft differenzierbar, also C^∞ bedeuten. Man könnte es auch immer durch endliche Differenzierbarkeitsvoraussetzungen ersetzen, was aber nichts wesentlich Neues bringt und die Sache eher verkompliziert. Wir wollen also glatte Kurven als bestimmte (schöne) Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ und insbesondere des $\mathbb{R}^2$ (oder, genauer gesagt, der entsprechenden euklidischen Räume) definieren.

Zunächst bemerken wir, dass für ein Intervall $I \subset \mathbb{R}$ und eine Funktion $c : I \to \mathbb{R}^n$ die Ableitung in einem Punkt $t \in I$ definiert ist als $c'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(c(t+h) - c(t))$, also als Limes der $\frac{1}{h}$–fachen der Verbindungsvektoren von $c(t)$ nach $c(t + h)$. Damit kann man die Ableitung c' als Kurve im Vektorraum $\mathbb{R}^n$ (und nicht im euklidischen Raum) betrachten. Analog geht das natürlich für alle höheren Ableitungen $c^{(k)} : I \to \mathbb{R}^n$.

Die offensichtlichste Idee wäre natürlich, glatte Kurven einfach als Bilder von Intervallen unter glatten Funktionen zu definieren. Wie wir in Kürze sehen werden, liefert das auch Kurven mit Ecken, und ist damit zu allgemein. Andererseits hat diese Sichtweise aber noch weitere Schwächen, weil nur das Bild einer Funktion zu kennen doch etwas zu wenig ist. So werden wir etwa bei Kreisen unterscheiden, ob sie nur einmal oder mehrmals durchlaufen werden (ohne uns darum zu kümmern, wie sie durchlaufen werden). Zum anderen können wir etwa die folgenden beiden Kurven betrachten, die bei geeigneter Wahl der (offenen) Intervalle als Bild beide genau die volle Achterschleife haben:



Natürlich muss man diese beiden Kurven unterscheiden, um z.B. sinnvoll von einer Tangente im Zentrum sprechen zu können. Man muss also doch wissen, wie eine Kurve durchlaufen wird, die Geschwindigkeit des Durchlaufens sollte aber keine Rolle spielen. Diese intuitive Idee fasst man exakt im Begriff der Reparametrisierung.

Definition. (1) Eine *glatt parametrisierte Kurve* in $\mathbb{R}^n$ ist eine glatte Funktion $c : I \to \mathbb{R}^n$, wobei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall ist.
(2) Sind $c_1 : I \to \mathbb{R}^n$ und $c_2 : J \to \mathbb{R}^n$ parametrisierte glatte Kurven, dann heißt c_2 eine *Reparametrisierung* von c_1, falls es einen glatten *Diffeomorphismus* $\phi : J \to I$ gibt, sodass $c_2 = c_1 \circ \phi$ gilt. Dabei ist ein glatter Diffeomorphismus eine bijektive glatte Funktion $\phi : J \to I$, sodass auch die inverse Funktion ϕ^{-1} glatt ist. (Nach dem inversen Funktionensatz genügt es zu fordern, dass $\phi'(t) \neq 0$ für alle $t \in J$ gilt.)

Die Eigenschaft, Reparametrisierung zu sein, definiert klarerweise eine Äquivalenzrelation auf der Menge der parametrisierten glatten Kurven. Damit können wir nun eine geometrische Kurve als eine Äquivalenzklasse von parametrisierten Kurven definieren.

Die weitere Strategie wird nun die sein, dass wir Begriffe für parametrisierte Kurven entwickeln, die aber invariant unter Reparametrisierungen sind. Andererseits sollen diese Eigenschaften aber auch nicht von der Lage der Kurve im Raum abhängen, was bedeutet, dass sie mit Bewegungen verträglich sein müssen. Für Zahlen oder Funktionen, die man der Kurve zuordnet, bedeutet diese Verträglichkeit einfach, dass sie sich nicht ändern sollen, wenn man auf die Kurve eine Bewegung anwendet. Es gibt aber auch andere sinnvolle Verträglichkeitsbedingungen, wie wir etwa im Beispiel der Tangente in

1.3 sehen werden. Eigenschaften, die nicht von der Parametrisierung abhängen und mit Bewegungen verträglich sind, nennt man *geometrische Eigenschaften* der Kurve.

Schließlich bemerken wir noch, dass für einen glatten Diffeomorphismus $\phi : J \to I$ die Ableitung $\phi'(t)$ immer ungleich Null sein muss, weil ihr Reziprokwert ja die Ableitung von ϕ^{-1} im Punkt $\phi(t)$ ist. Damit ist die Ableitung entweder immer positiv oder immer negativ. Im ersten Fall heißt ϕ *orientierungserhaltend*, im zweiten Fall *orientierungsvertauschend*. Natürlich definiert auch orientierungserhaltende Reparametrisierung eine Äquivalenzrelation, und man kommt zum Begriff der *orientierten geometrischen Kurve*.

1.3. Reguläre Kurven in $\mathbb{R}^2$. Es gibt noch ein weiteres Problem mit glatten Kurven, wie wir sie bisher definiert haben: Sogar C^∞–Kurven können nämlich durchaus noch Ecken haben. Um dies an einem Beispiel zu sehen, betrachten wir die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(t) = e^{-\frac{1}{t^2}}$. Wie aus der Vorlesung über Analysis bekannt, ist diese Funktion glatt und im Nullpunkt verschwinden alle Ableitungen. Daher ist auch die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die definiert ist durch $g(t) = 0$, falls $t \leq 0$, und $g(t) = f(t)$, falls $t \geq 0$, eine C^∞–Funktion. Somit ist $t \mapsto (g(-t), g(t))$ eine parametrisierte C^∞–Kurve in $\mathbb{R}^2$, deren Bild gerade die Vereinigung der positiven y–Achse und der positiven x–Achse ist, also im Nullpunkt eine Ecke hat.

Um solche Phänomene zu vermeiden dient der Begriff von regulären Kurven. Dieser Begriff ist aber im Fall von Kurven in $\mathbb{R}^2$ einfacher zu formulieren als im allgemeinen Fall. Daher werden wir uns ab nun auf Kurven in $\mathbb{R}^2$ spezialisieren.

Definition. Eine parametrisierte glatte Kurve $c : I \to \mathbb{R}^2$ heißt *regulär*, falls $c'(t) \neq 0$ für alle $t \in I$ gilt. Ist c regulär und $c_1 : J \to \mathbb{R}^2$ eine Reparametrisierung von c mit zugehörigem Diffeomorphismus $\phi : J \to I$, dann ist nach der Kettenregel $c_1'(t) = c'(\phi(t))\phi'(t) \neq 0$ für alle $t \in J$, also ist c_1 ebenfalls regulär. Damit ist Regularität eine Bedingung an geometrische Kurven.

Einer regulär parametrisierten Kurve $c : I \to \mathbb{R}^2$ kann man nun in offensichtlicher Weise in jedem Punkt eine Tangente zuordnen. Ist nämlich $t_0 \in I$, dann haben wir den Punkt $c(t_0)$ und die Ableitung $c'(t_0)$, und wir definieren die Tangente $T_{c(t_0)}c$ an c im Punkt $c(t_0)$ als die Teilmenge $\{c(t_0) + \lambda c'(t_0) : \lambda \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$. Weil $c'(t_0) \neq 0$ gilt, ist das eine *affine Gerade* in $\mathbb{R}^2$ (ein Konzept, das auch im euklidischen Raum Sinn macht).

Proposition. *Die Tangente ist ein geometrisches Konzept: Ist $\phi : J \to I$ ein Diffeomorphismus und $c_1 = c \circ \phi$ die entsprechende Reparametrisierung von c, dann ist $T_{c_1(t)}c_1 = T_{c(\phi(t))}c$, und ist $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine Bewegung, dann ist $T_{f(c(t))}(f \circ c) = f(T_{c(t)}c)$.*

Beweis. Nach der Kettenregel ist $c_1'(t) = c'(\phi(t))\phi'(t)$ und nach Voraussetzung ist $\phi'(t) \neq 0$, also folgt die Invarianz unter Reparametrisierungen sofort.

Ist $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine Bewegung und A die entsprechende orthogonale lineare Abbildung, dann ist wiederum nach der Kettenregel $(f \circ c)'(t) = Df(c(t)) \cdot c'(t)$. Nach Proposition 1.1(2) folgt $(f \circ c)'(t) = A(c'(t))$. Nach Teil (1) von Proposition 1.1 ist andererseits $f(c(t) + \lambda c'(t)) = f(c(t)) + A(\lambda c'(t))$. Da A linear ist, liefert die obige Formel für $(f \circ c)'$ die Gleichung $f(c(t) + \lambda c'(t)) = f(c(t)) + \lambda(f \circ c)'(t)$, und die Behauptung folgt. □

Bogenlänge und Bogenlängenparametrisierung

In 1.2 haben wir gesehen, dass geometrische Konzepte zwei wesentliche Eigenschaften haben müssen, nämlich einerseits Unabhängigkeit von der Parametrisierung und andererseits Verträglichkeit mit Bewegungen. Im Fall regulärer Kurven lassen sich die Probleme mit Parametrisierungen einfach lösen, weil es hier eine ausgezeichnete Klasse von Parametrisierungen gibt. Der Schlüssel zu diesen Parametrisierungen ist der Begriff der Bogenlänge.

1.4. Die Bogenlänge. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $c : I \to \mathbb{R}^2$ eine stetig parametrisierte Kurve und $a < b \in I$ zwei Punkte. Dann definiert man die *Bogenlänge* $L_a^b(c)$ von c zwischen a und b durch $L_a^b(c) := \sup\{\sum_{i=0}^{n-1} d(c(t_i), c(t_{i+1})) : n \in \mathbb{N}, a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b\}$. Man unterteilt also das Bild von c in kleine Stücke, ersetzt das Bild auf jedem dieser Stücke durch eine Strecke, betrachtet die Länge des entstehenden Streckenzugs und nimmt das Supremum über alle diese Längen. Für allgemeine stetige Kurven kann diese Länge durchaus unendlich sein (zum Beispiel für die bekannte Schneeflockenkurve), für C^1–Kurven ist sie, wie wir gleich sehen werden, immer endlich. Der Vollständigkeit halber definiert man für $a, b \in I$ mit $a > b$ die Bogenlänge durch $L_a^b(c) := -L_b^a(c)$. Aus der Definition der Bogenlänge folgt leicht, dass für $a_1, a_2, a_3 \in I$ die Gleichung $L_{a_1}^{a_3}(c) = L_{a_1}^{a_2}(c) + L_{a_2}^{a_3}(c)$ gilt (siehe Übungen).

Proposition. *Sei $c : I \to \mathbb{R}^2$ eine regulär parametrisierte glatte Kurve. Dann gilt $L_a^b(c) = \int_a^b \|c'(s)\|ds$. Insbesondere ist $L_a^b(c)$ immer endlich, die Funktion $t \mapsto L_a^t(c)$ ist glatt, und ihre Ableitung ist gegeben durch $\frac{d}{dt}L_a^t(c) = \|c'(t)\|$.*

Beweis. Offensichtlich dürfen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $a < b$ annehmen. Sei zunächst $a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b$ eine Unterteilung des Intervalls $[a, b]$. Dann gilt nach dem Hauptsatz der Differential– und Integralrechnung

$$d(c(t_i), c(t_{i+1})) = \|c(t_{i+1}) - c(t_i)\| = \left\| \int_{t_i}^{t_{i+1}} c'(s)ds \right\|$$

für jedes $i = 0, \dots, n-1$. Nun gilt aber $|\int_{t_i}^{t_{i+1}} c'(s)ds| \leq \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|c'(s)\|ds$, und summieren von 0 bis $n-1$ liefert

$$\sum_{i=0}^{n-1} d(c(t_i), c(t_{i+1})) \leq \int_a^b \|c'(s)\|ds.$$

Weil das für jede Zerlegung gilt, muss auch $L_a^b(c) \leq \int_a^b \|c'(s)\|ds$ gelten. Da die rechte Seite dieser Gleichung als Integral einer stetigen Funktion über ein kompaktes Intervall endlich ist, ist auch die Bogenlänge endlich.

Sei nun $t \in (a, b)$ und $h \in \mathbb{R}$ so klein, dass $t \pm h \in (a, b)$. Nach Definition der Bogenlänge ist $|L_t^{t+h}(c)| \geq \|c(t+h) - c(t)\|$. Andererseits gilt nach den obigen Überlegungen $|L_t^{t+h}(c)| \leq |\int_t^{t+h} \|c'(s)\|ds|$. Damit erhalten wir aber

$$\|\tfrac{1}{h}(c(t+h) - c(t))\| \leq |\tfrac{1}{h}L_t^{t+h}(c)| = |\tfrac{1}{h}(L_a^{t+h}(c) - L_a^t(c))| \leq \left| \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \|c'(s)\|ds \right|.$$

Für $h \to 0$ geht der Term ganz links nach Definition und der Term ganz rechts nach dem Hauptsatz der Differential– und Integralrechnung gegen $\|c'(t)\|$. Damit muss das auch für den mittleren Term gelten, also ist $t \mapsto L_a^t(c)$ differenzierbar mit Ableitung $\|c'(t)\|$. Damit folgt aber die Formel für die Bogenlänge aus dem Hauptsatz der Differential– und Integralrechnung und die Aussage über die Differenzierbarkeit der Bogenlängenfunktion aus bekannten Resultaten der Analysis. □

Ist $c : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ eine glatte Kurve, die auf einem abgeschlossenen Intervall definiert ist, dann sieht man leicht (siehe Übungen), dass die *totale Bogenlänge* $L_a^b(c)$ invariant unter Reparametrisierungen und Bewegungen ist, also eine geometrische Größe darstellt.

1.5. Bogenlängenparametrisierungen. Mit Hilfe der Bogenlänge erhalten wir nun eine ausgezeichnete Klasse von Parametrisierungen einer glatten Kurve:

Definition. Eine parametrisierte Kurve $c : I \to \mathbb{R}^2$ heißt *nach der Bogenlänge parametrisiert*, falls $\|c'(t)\| = 1$ für alle $t \in I$ gilt. In diesem Fall gilt nach Proposition 1.4 offensichtlich $L_a^b(c) = b - a$ für alle $a, b \in I$.

Satz. *Sei $c : I \to \mathbb{R}^2$ eine regulär parametrisierte glatte Kurve und sei $a \in I$ ein Punkt. Dann gibt es ein eindeutiges Intervall $J \subset \mathbb{R}$, das 0 enthält, und einen eindeutigen orientierungserhaltenden Diffeomorphismus $\phi : J \to I$ mit $\phi(0) = a$, sodass $c \circ \phi$ nach der Bogenlänge parametrisiert ist. Insbesondere besitzt jede reguläre glatte Kurve eine Bogenlängenparametrisierung. Je zwei Bogenlängenparametrisierungen unterscheiden sich nur noch um einen Parameterwechsel der Form $t \mapsto \pm t + t_0$.*

Beweis. Betrachte die Bogenlängenfunktion $s : I \to \mathbb{R}$, $s(t) = L_a^t(c)$. Nach Proposition 1.4 ist s glatt und $s'(t) = \|c'(t)\| > 0$. Damit ist s streng monoton wachsend, nach dem Zwischenwertsatz ist $J = s(I) \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und nach dem Inversen Funktionensatz ist $s : I \to J$ ein orientierungserhaltender glatter Diffeomorphismus. Also ist auch $\phi = s^{-1} : J \to I$ ein orientierungserhaltender glatter Diffeomorphismus, $\phi(0) = a$ und $\phi'(t) = \frac{1}{s'(\phi(t))} = \frac{1}{\|c'(\phi(t))\|}$. Setzt man nun $c_1 = c \circ \phi$, dann ist nach der Kettenregel $c_1'(t) = c'(\phi(t))\phi'(t)$, also $\|c_1'(t)\| = 1$.

Nehmen wir nun an, dass $c : I \to \mathbb{R}^2$ eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve und $\phi : J \to I$ ein Diffeomorphismus ist, sodass auch $c \circ \phi$ nach der Bogenlänge parametrisiert ist. Aus der Kettenregel folgt dann $|\phi'(t)| = 1$ für alle $t \in J$, also $\phi'(t) = \pm 1$ für alle t. Daher gilt aber $\phi(t) = \phi(t_0) + \int_{t_0}^t \phi'(r)dr = (\phi(t_0) \mp t_0) \pm t$. Damit folgt die letzte Aussage der Proposition und die Eindeutigkeit im ersten Teil. □

Bemerkung. (1) Der Begriff der Bogenlängenparametrisierung ist auch von einem physikalischen Standpunkt aus sehr einsichtig: Betrachten wir $c : I \to \mathbb{R}^2$ als eine Bahnkurve in der Ebene (d.h. $c(t)$ gibt die Position zum Zeitpunkt t an), dann entspricht die Eigenschaft, dass c nach der Bogenlänge parametrisiert ist, genau der Tatsache, dass die Bahnkurve mit konstanter Geschwindigkeit durchlaufen wird. (Natürlich kann nur der Betrag der Geschwindigkeit konstant sein, die Richtung muss sich ändern, damit man in der richtigen Bahn bleibt.)
(2) Die Bogenlängenfunktion kann schon für ziemlich einfache Kurven (z.B. für Ellipsen) nicht mehr in geschlossener Form angegeben werden. Trotzdem ist die Existenz von Bogenlängenparametrisierungen (wie wir sehr bald sehen werden) für theoretische Zwecke äußerst nützlich.

Die physikalische Interpretation aus Teil (1) der Bemerkung führt uns direkt zur nächsten Eigenschaft von Bogenlängenparametrisierungen. Die Tatsache, dass der Betrag der Geschwindigkeit konstant ist, sollte bedeuten, dass alle auftretenden Beschleunigungen quer zur Bewegungsrichtung liegen. Um das zeigen zu können, müssen wir das innere Produkt auf $\mathbb{R}^2$ differenzieren. Wir machen das gleich etwas allgemeiner: Sei $b : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^\ell \to \mathbb{R}^n$ bilinear, also $b(x, \_) : \mathbb{R}^\ell \to \mathbb{R}^n$ und $b : (\_, y) : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ linear für alle $x \in \mathbb{R}^k$ und $y \in \mathbb{R}^\ell$, und sei $(v, w) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^\ell$. Wir wollen die Richtungsableitung $Db(x, y)(v, w)$ von b im Punkt (x, y) in Richtung (v, w) ausrechnen. Wie aus der Grundvorlesung über Analysis bekannt, kann man diese Richtungsableitung als $\frac{d}{dt}|_{t=0} b((x, y) + t(v, w))$ berechnen. Wegen der Bilinearität von b erhalten wir

$$b(x + tv, y + tw) = b(x, y) + t(b(x, w) + b(v, y)) + t^2 b(v, w),$$

und damit $Db(x, y)(v, w) = b(x, w) + b(v, y)$.

Lemma. *Sei $c : I \to \mathbb{R}^2$ eine nach der Bogenlänge parametrisierte glatte Kurve. Dann gilt $\langle c'(t), c''(t)\rangle = 0$ für alle $t \in I$. Also steht für so eine Kurve die zweite Ableitung immer orthogonal auf die erste Ableitung.*

Beweis. Da c nach der Bogenlänge parametrisiert ist, ist $\|c'(t)\|^2 = \langle c'(t), c'(t)\rangle$ konstant gleich 1. Differenzieren dieser Gleichung liefert

$$0 = D(\langle\ ,\ \rangle)(c'(t), c'(t))(c''(t), c''(t)) = \langle c'(t), c''(t)\rangle + \langle c''(t), c'(t)\rangle = 2\langle c'(t), c''(t)\rangle.$$

□

Beispiel. Betrachten wir einen im positiven Sinn durchlaufenen Kreis vom Radius $r > 0$ um den Ursprung in $\mathbb{R}^2$. Eine offensichtliche Parametrisierung für so einen Kreis ist die Funktion $\tilde{c} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\tilde{c}(t) = (r\cos(t), r\sin(t))$. Damit ist die Ableitung $\tilde{c}'(t) = (-r\sin(t), r\cos(t))$, also $\|\tilde{c}'(t)\| = r$ für alle t. Daher ist die Bogenlängenfunktion für diese Parametrisierung gegeben durch $t \mapsto \int_0^t r ds = rt$. Somit erhalten wir eine Bogenlängenparametrisierung des Kreises durch $c : [0, 2r\pi] \to \mathbb{R}^2$, $c(t) = (r\cos(t/r), r\sin(t/r))$. Für die Ableitungen dieser Parametrisierung erhalten wir dann $c'(t) = (-\sin(t/r), \cos(t/r))$ und $c''(t) = 1/r(-\cos(t/r), -\sin(t/r))$, also wie erwartet $\|c'(t)\| = 1$, $c''(t) \perp c'(t)$, sowie $\|c''(t)\| = 1/r$. Man kann also den Radius des Kreises aus dem Betrag der zweiten Ableitung einer Bogenlängenparametrisierung zurückgewinnen.

Betrachten wir einen negativ durchlaufenen Kreis vom Radius r um den Ursprung, dann erhalten wir die bogenlängenparametrisierte Kurve $c : [0, 2r\pi] \to \mathbb{R}^2$, $c(t) = (r\cos(t/r), -r\sin(t/r))$, und die Ableitungen $c'(t) = (-\sin(t/r), -\cos(t/r))$ und $c''(t) = 1/r(-\cos(t/r), \sin(t/r))$.

Krümmung ebener Kurven

Die Krümmung ist die entscheidende Größe für die lokale Theorie der ebenen Kurven. Einerseits liefert sie eine Vielzahl von geometrischen Größen, andererseits werden wir sehen, dass sie eine Kurve sogar vollständig bestimmt.

1.6. Krümmungskreis und Krümmung. Die wesentliche Idee zur Definition der Krümmung kommt aus Beispiel 1.5, das im Wesentlichen zeigt, dass jeder Einheitsvektor zusammen mit einem beliebigen orthogonalen Vektor ungleich Null als erste und zweite Ableitung eines geeigneten bogenlängenparametrisierten Kreises auftritt. Damit kann man eine glatte Kurve in jedem Punkt zu zweiter Ordnung durch einen Kreis approximieren, dessen Radius die Krümmung liefert. Dazu wollen wir die Resultate aus Beispiel 1.5 noch etwas verfeinern: Sei $a \in \mathbb{R}^2$ ein beliebiger Punkt, $v \in \mathbb{R}^2$ ein Einheitsvektor und $0 \neq w \in \mathbb{R}^2$ ein Vektor mit $\langle v, w\rangle = 0$. Setze $M = a + \frac{1}{\langle w,w\rangle}w$ und betrachte den Kreis vom Radius $\frac{1}{\|w\|}$ mit Mittelpunkt M. Dieser Kreis geht offensichtlich durch a, und für eine Bogenlängenparametrisierung ist die Ableitung in a ein Einheitsvektor, der normal auf w steht. Damit können wir den Kreis so durchlaufen (positiv oder negativ), dass die Ableitung in a genau v ist. Aus Beispiel 1.5 sehen wir dann, dass die zweite Ableitung dieser Parametrisierung im Punkt a gerade w sein muss. Natürlich ist der Kreis durch a, v und w eindeutig bestimmt.

Sei nun $c : I \to \mathbb{R}^2$ eine nach der Bogenlänge parametrisierte glatte Kurve und $t_0 \in I$ ein Punkt. Aus 1.5 wissen wir, dass $\|c'(t_0)\| = 1$ und $c''(t_0) \perp c'(t_0)$ gilt. Ist $c''(t_0) \neq 0$, dann gibt es nach der obigen Überlegung einen eindeutigen bogenlängenparametrisierten Kreis durch $c(t_0)$, dessen erste und zweite Ableitungen in diesem Punkt mit den entsprechenden Ableitungen von c übereinstimmen. Dieser Kreis heißt der *Krümmungskreis* von c im Punkt $c(t_0)$.

Definition. Die Krümmung $\kappa = \kappa_c : I \to \mathbb{R}$ von c ist wie folgt gegeben: Falls $c''(t) = 0$ gilt, dann ist $\kappa(t) = 0$. Andernfalls sei r der Radius des Krümmungskreises von c im Punkt $c(t)$. Dann ist $\kappa(t) = 1/r$, falls der Krümmungskreis positiv durchlaufen ist, und $\kappa(t) = -1/r$, falls der Krümmungskreis negativ durchlaufen ist.

Aus dieser Definition sind die Eigenschaften der Krümmungsfunktion nicht gut zu erkennen. Wir können aber leicht eine explizite Formel für die Krümmung finden, aus der einige Eigenschaften offensichtlich sind: Nach den obigen Überlegungen ist $|\kappa(t)| = \|c''(t)\|$, und falls $\kappa(t) \neq 0$ gilt, dann ist $\kappa(t) > 0$, falls $\{c'(t), c''(t)\}$ eine positiv orientierte Basis von $\mathbb{R}^2$ ist, und $\kappa(t) < 0$, falls es eine negativ orientierte Basis ist. (Dabei bedenke man, dass wegen $c'(t) \perp c''(t)$ und $c'(t) \neq 0$ die Vektoren $c'(t)$ und $c''(t)$ eine Basis von $\mathbb{R}^2$ bilden, falls $c''(t) \neq 0$ gilt.) Betrachten wir nun die 2×2–Matrix $(c'(t), c''(t))$ mit $c'(t)$ und $c''(t)$ als Spaltenvektoren. Die Determinante einer 2×2–Matrix hat als Betrag die Fläche des von den Spaltenvektoren aufgespannten Parallelogramms, und das Vorzeichen der Determinante ist gerade durch die Orientierung der Spaltenvektoren gegeben. Da $\|c'(t)\| = 1$ gilt erhalten wir

Proposition. *Ist $c : I \to \mathbb{R}^2$ eine nach der Bogenlänge parametrisierte glatte Kurve, dann ist die Krümmung von c gegeben durch $\kappa(t) = det(c'(t), c''(t))$. Insbesondere ist $\kappa : I \to \mathbb{R}$ glatt.*

Ist $c : I \to \mathbb{R}^2$ eine nach der Bogenlänge parametrisierte glatte Kurve, sodass $c''(t) \neq 0$ für alle $t \in I$ gilt, dann gibt es für jedes $t \in I$ den Mittelpunkt $M(t)$ des Krümmungskreises bei $c(t)$. Nach unseren Überlegungen von oben ist $M(t) = c(t) + \frac{1}{\|c''(t)\|^2}c''(t)$. Damit ist aber offensichtlich $M : I \to \mathbb{R}^2$ eine glatt parametrisierte Kurve. Diese Kurve heißt die *Evolute* von c.

Es ist relativ einfach, die Krümmung physikalisch zu interpretieren. Betrachten wir dazu wieder eine nach der Bogenlänge parametrisierte glatte Kurve $c : I \to \mathbb{R}^2$ als Bahnkurve. Aus 1.5 wissen wir, dass die Form der Parametrisierung bedeutet, dass die Kurve mit konstanter Geschwindigkeit durchlaufen wird, und dass alle Beschleunigungen quer zur Bahn auftreten. Diese Beschleunigungen sind aber genau proportional zu den Kräften, die auf eine Masse wirken, die die Bahn durchläuft. Nehmen wir an, dass die Masse gleich eins ist, dann ist der Betrag von $\kappa(t)$ gerade die zum Zeitpunkt t auf den Punkt wirkende Kraft, und das Vorzeichen ergibt sich so, dass (in Fahrtrichtung gesehen) nach links wirkende Kräfte positiv und nach rechts wirkende Kräfte negativ sind. Auch die Tatsache, dass dies eine geometrische Eigenschaft der Kurve liefert, ist physikalisch ganz einsichtig: Die konstante Geschwindigkeit (d.h. die Tatsache, dass c nach der Bogenlänge parametrisiert ist) bedeutet ja gerade, dass alle auftretenden Beschleunigungskräfte nur dazu dienen, den Körper in der Bahn zu halten.

Schließlich sei noch bemerkt, dass man den Krümmungskreis (und damit die Krümmung) auch durch einen Limesprozeß wie folgt erhalten kann: Sei $c : I \to \mathbb{R}^2$ nach der Bogenlänge parametrisiert und $t \in I$ ein Punkt mit $c''(t) \neq 0$. Dann kann man zeigen, dass es eine offene Umgebung U von t in I gibt, sodass für drei verschiedene Punkte $t_1, t_2, t_3 \in U$ die Punkte $c(t_1)$, $c(t_2)$ und $c(t_3)$ nicht auf einer Geraden liegen. Damit gibt es aber einen eindeutigen Kreis, auf dem diese drei Punkte liegen. Sei $M(t_1, t_2, t_3)$ der Mittelpunkt und $r(t_1, t_2, t_3)$ der Radius dieses Kreises. Dann kann man zeigen, dass die Grenzwerte $\lim_{t_1,t_2,t_3\to t}$ von $M(t_1, t_2, t_3)$ und $r(t_1, t_2, t_3)$ existieren und gerade den Mittelpunkt und den Radius des Krümmungskreises von c bei t ergeben. Ein Beweis dieser Tatsache findet sich zum Beispiel im Skriptum “Differentialgeometrie” von A. Kriegl.

1.7. Krümmung bei allgemeiner Parametrisierung. Es ist nun nahe liegend, die Krümmung für beliebig parametrisierte Kurven durch Umparametrisieren zu definieren. Damit erhalten wir leicht eine allgemeine Formel: Sei $c : I \to \mathbb{R}^2$ eine regulär parametrisierte glatte Kurve. Dann gibt es nach 1.5 einen orientierungserhaltenden Diffeomorphismus $\phi : J \to I$, sodass $\tilde{c} = c \circ \phi$ nach der Bogenlänge parametrisiert ist. Dann ist nach der Kettenregel $\tilde{c}'(t) = c'(\phi(t))\phi'(t)$ und somit $\tilde{c}''(t) = c''(\phi(t))(\phi'(t))^2 + c'(\phi(t))\phi''(t)$. Die offensichtliche Definition für die Krümmung ist natürlich $\kappa_c(t) := \kappa_{\tilde{c}}(\phi^{-1}(t))$, und dafür erhalten wir

$$\det(\tilde{c}'(\phi^{-1}(t)), \tilde{c}''(\phi^{-1}(t))) = \\ (\phi'(\phi^{-1}(t)))^3 \det(c'(t), c''(t)) + \phi'(\phi^{-1}(t))\phi''(\phi^{-1}(t)) \det(c'(t), c'(t)),$$

wobei wir die Bilinearität der Determinante benutzt haben. Da die Determinante auch alternierend ist, verschwindet der zweite Term in der Summe. Schließlich folgt aus $\|\tilde{c}'(\phi^{-1}(t))\| = 1$ und der Tatsache, dass ϕ' positiv ist, noch $\phi'(\phi^{-1}(t)) = 1/\|c'(t)\|$, und wir erhalten $\kappa_c(t) = \frac{1}{\|c'(t)\|^3}\det(c'(t), c''(t))$.

Proposition. *Sei $c : I \to \mathbb{R}^2$ eine glatt parametrisierte reguläre Kurve, $\phi : J \to I$ ein Diffeomorphismus und $\tilde{c} = c \circ \phi$ die entsprechende Reparametrisierung von c. Dann ist $\kappa_{\tilde{c}} = \kappa_c \circ \phi$, falls ϕ orientierungserhaltend, und gleich $-\kappa_c \circ \phi$, falls ϕ orientierungsvertauschend ist. Ist weiters $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine Bewegung, dann ist $\kappa_{f \circ c} = \kappa_c$, falls f orientierungserhaltend, und gleich $-\kappa_c$, falls f orientierungsvertauschend ist.*

Beweis. Wie oben berechnen wir die Ableitungen von $\tilde{c}$ nach der Kettenregel, und erhalten weiters $\det(\tilde{c}'(t), \tilde{c}''(t)) = (\phi'(t))^3 \det(c'(\phi(t)), c''(\phi(t)))$. Andererseits ist offensichtlich $\|\tilde{c}'(t)\|^3 = \|c'(t)\|^3 |\phi'(t)|^3$ und damit folgt die Behauptung über Reparametrisierungen.

Für die Verträglichkeit mit Bewegungen können wir nun annehmen, dass $c : I \to \mathbb{R}^2$ nach der Bogenlänge parametrisiert ist. Ist A die orthogonale lineare Abbildung zu f, dann wissen wir aus dem Beweis von Proposition 1.3, dass $(f \circ c)'(t) = A(c'(t))$ gilt. Damit erhalten wir aber sofort $(f \circ c)''(t) = A(c''(t))$. Nun sind aber $A(c'(t))$ und $A(c''(t))$ genau die Spaltenvektoren der Matrix, die man erhält, wenn man die Matrix A mit der Matrix $(c'(t), c''(t))$ multipliziert. Da mit c auch die Kurve $f \circ c$ nach der Bogenlänge parametrisiert ist, erhalten wir

$$\kappa_{f \circ c}(t) = \det(A(c'(t)), A(c''(t))) = \det(A \cdot (c'(t), c''(t))) = \det(A)\kappa_c(t).$$

□

Bemerkung. Die Krümmungsfunktion ändert sich somit bei Reparametrisierung durch Komposition mit dem Diffeomorphismus. Natürlich ist es äußerst schwierig zu entscheiden, ob für zwei glatte Funktionen $\kappa : I \to \mathbb{R}$ und $\tilde{\kappa} : J \to \mathbb{R}$ ein Diffeomorphismus $\phi : J \to I$ existiert, sodass $\tilde{\kappa} = \kappa \circ \phi$ gilt. Man kann aber aus der Krümmung auf verschiedene Weise einfachere geometrische Größen einer Kurve erhalten, die sich bei Reparametrisierungen gar nicht ändern. Die Anzahl der Nullstellen der Krümmung ist ein Beispiel für so eine geometrische Größe. (Punkte $c(t)$, für die $\kappa_c(t) = 0$ gilt, heißen *Flachpunkte* der Kurve). Flachpunkte der Kurve, in denen die Krümmung das Vorzeichen wechselt, heißen *Wendepunkte*, und auch ihre Anzahl ist offensichtlich eine geometrische Größe, die bei Reparametrisierungen unverändert bleibt. Analog können wir auch die Anzahl der lokalen Minima und die Anzahl der lokalen Maxima der Krümmung betrachten. Punkte, in denen die Krümmung ein lokales Extremum annimmt, heißen *Scheitel* der Kurve. Auch die Werte der Krümmung in Scheitelpunkten sind unabhängig von der Parametrisierung.

Beispiel. Betrachten wir eine Ellipse in $\mathbb{R}^2$ in Hauptlage mit Hauptachsenlängen a und b. Wie aus der Grundvorlesung über lineare Algebra bekannt, kann diese Ellipse durch die Gleichung $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ beschrieben werden. Um eine Parametrisierung der Ellipse zu erhalten, versuchen wir, diese Gleichung nach y aufzulösen, und erhalten $y^2 = b^2(1 - \frac{x^2}{a^2})$. Um die Ellipse einmal zu durchlaufen, muss die x–Koordinate zunächst monoton von a nach $-a$ und dann monoton von $-a$ zurück nach a laufen. Daher bietet sich der Ansatz $x = a\cos(t)$ an. Setzt man diesen Ansatz in die obige Gleichung ein, dann erhält man $y^2 = b^2(1-\cos^2(t))$, und $y = b\sin(t)$ löst diese Gleichung. Betrachten wir die parametrisierte Kurve $c : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $c(t) = (a\cos(t), b\sin(t))$, dann liegt $c(t)$ für jedes t auf der Ellipse, und aus den Monotonieeigenschaften von Sinus und Cosinus schließt man leicht, dass c für die angegebenen Parameterwerte die Ellipse genau ein Mal in positivem Sinn durchläuft.

Wir wollen nun die Krümmung ausrechnen. Dazu berechnen wir die ersten beiden Ableitungen von c als $c'(t) = (-a\sin(t), b\cos(t))$ und $c''(t) = (-a\cos(t), -b\sin(t))$. Damit erhalten wir

$$\det(c'(t), c''(t)) = \det\begin{pmatrix} -a\sin(t) & -a\cos(t) \\ b\cos(t) & -b\sin(t)\end{pmatrix} = ab(\sin^2(t) + \cos^2(t)) = ab$$

und somit nach Definition

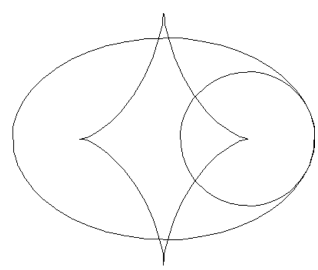
$$\kappa(t) = \tfrac{ab}{(a^2\sin^2(t)+b^2\cos^2(t))^{3/2}}.$$

Insbesondere sieht man sofort, dass die Ellipse keine Flachpunkte hat, was geometrisch ganz einsichtig ist. Um die Extremwerte der Krümmung zu finden, differenzieren wir die Krümmungsfunktion und erhalten

$$\kappa'(t) = \tfrac{-3ab(a^2-b^2)\sin(2t)}{2(a^2\sin^2(t)+b^2\cos^2(t))^{5/2}}.$$

Im Fall $a \neq b$, also im Fall einer "echten" Ellipse, sind die Nullstellen der Ableitung der Krümmung genau die Nullstellen von $\sin(2t)$, also $t = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2, 2\pi$, wobei wir die letzte Nullstelle vergessen können, da $c(0) = c(2\pi)$ gilt. Aus der Formel für die Krümmung kann man sofort ablesen, dass die Krümmung für $a > b$ bei $t = 0$ und $t = \pi$ lokale Maxima und bei $t = \pi/2$ und $t = 3\pi/2$ lokale Minima hat. Daher hat die Ellipse genau vier Scheitel, und die Werte der Krümmung in diesen Scheiteln ist gegeben durch $\kappa(0) = \kappa(\pi) = a/b^2$ und $\kappa(\pi/2) = \kappa(3\pi/2) = b/a^2$.

Wir können auch noch die Evolute unserer Ellipse berechnen: Ein Vektor, der zusammen mit $c'(t)$ eine positiv orientierte Orthogonalbasis bildet, ist einfach gegeben durch $v(t) := (-b\cos(t), -a\sin(t))$. Aus der Definition der Krümmung schließt man leicht, dass wir die Evolute als $e(t) = c(t) + \frac{1}{\kappa(t)}\frac{v(t)}{\|v(t)\|}$ berechnen können. Eine kurze Rechnung liefert dann $e(t) = (\frac{a^2-b^2}{a}\cos^3(t), \frac{b^2-a^2}{b}\sin^3(t))$. Das Bild zeigt eine Ellipse mit $a = 3$ und $b = 2$, den Krümmungskreis in einem der Scheitel sowie die Evolute der Ellipse.



1.8. Polarkoordinaten. Wir wollen noch eine weitere Interpretation der Krümmung besprechen, für die wir die Darstellung von Kurven in Polarkoordinaten benötigen. Da wir Resultate in dieser Richtung auch später noch verwenden werden, studieren wir die Probleme gleich etwas ausführlicher, als es an dieser Stelle nötig wäre.

Für ein Intervall I und glatte Funktionen $r, \theta : I \to \mathbb{R}$ ist klarerweise $c : I \to \mathbb{R}^2$, $c(t) = (r(t)\cos(\theta(t)), r(t)\sin(\theta(t)))$ eine glatt parametrisierte Kurve in $\mathbb{R}^2$. Falls $r(t) \geq 0$

für alle $t \in I$ gilt, dann kann man $(r(t), \theta(t))$ als Polarkoordinaten interpretieren. Wir wollen nun umgekehrt untersuchen, ob man eine beliebige glatt parametrisierte Kurve in $\mathbb{R}^2$ auch (eindeutig?) in Polarkoordinaten schreiben kann.

Offensichtlich tauchen bei Polarkoordinaten Probleme im Nullpunkt auf, also werden wir uns von Anfang an auf Kurven in $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ beschränken. Dann macht die r–Koordinate offensichtlich keine Probleme: Ist $c(t) = (x(t), y(t))$, dann muss $r(t) = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}$ gelten, und das ist glatt, falls c eine glatte Kurve ist. Die Abbildung $p : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, die gegeben ist durch $p(r, \theta) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$, ist offensichtlich beliebig oft differenzierbar und surjektiv. Für die Ableitung im Punkt (r, θ) erhält man $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -r\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r\cos(\theta) \end{pmatrix}$. Diese Matrix hat Determinante $r > 0$, also ist die Ableitung immer invertierbar und damit nach dem inversen Funktionensatz auch p lokal um jeden Punkt invertierbar. Offensichtlich ist aber p global nicht injektiv, da $p(r, \theta) = p(r, \theta + 2k\pi)$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ gilt.

Man könnte nun versuchen, die Abbildung p auf eine Teilmenge einzuschränken, auf der sie injektiv ist. Betrachten wir etwa die Einschränkung von p auf $\mathbb{R}^+ \times (-\pi, \pi)$, dann liefert das einen Diffeomorphismus von dieser Teilmenge auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) : x \leq 0\}$. Die inverse Abbildung ist gegeben durch $(x, y) \mapsto (\sqrt{x^2 + y^2}, \arctan(y/x))$. Analog sieht man leicht (siehe Übungen), dass für jedes $t_0 \in \mathbb{R}$ die Einschränkung von p einen Diffeomorphismus von $\mathbb{R}^+ \times (t_0 - \pi, t_0 + \pi)$ auf die Menge $\mathbb{R}^2 \setminus \{\lambda(\cos(t_0), \sin(t_0)) : \lambda \leq 0\}$ liefert. So kann man aber nie den ganzen Raum $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ treffen. Betrachtet man andererseits etwa $\mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi)$, dann induziert p zwar eine Bijektion zwischen dieser Teilmenge und $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, aber man kann Kurven wie etwa einen Kreis, der mehrmals um den Nullpunkt läuft, sicher nicht durch glatte Polarkoordinaten beschreiben, für die $0 \leq \theta(t) < 2\pi$ für alle t gilt.

Die Abbildung p hat aber auf ihrem vollen Definitionsbereich eine sehr schöne Eigenschaft: Betrachte einen Punkt $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ und eine Umgebung U dieses Punktes, die kein negatives Vielfaches des Punktes enthält. Dann sieht man aus unseren obigen Überlegungen sofort, dass das Urbild dieser Umgebung unter p aus einer disjunkten Vereinigung von abzählbar vielen Mengen besteht (die aus einander jeweils durch Translation um 2π in der zweiten Koordinate hervorgehen), sodass die Einschränkung von p auf jede dieser Mengen einen Diffeomorphismus, (also insbesondere einen Homöomorphismus — eine stetige Bijektion mit stetiger Inverser) auf U definiert. So eine Funktion nennt man in der Topologie eine *Überlagerung*, und diese Funktionen haben allgemein die Eigenschaft, die wir im folgenden für p beweisen:

Proposition. *Sei $c : [a, b] \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, $c(t) = (x(t), y(t))$ eine stetige Kurve, $r(t) := \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}$, und $\theta_0 \in \mathbb{R}$ so, dass $c(a) = (r(a)\cos(\theta_0), r(a)\sin(\theta_0))$ gilt. Dann gibt es eine eindeutige stetige Funktion $\theta : I \to \mathbb{R}$, sodass $\theta(a) = \theta_0$ und $c(t) = (r(t)\cos(\theta(t)), r(t)\sin(\theta(t)))$ für alle $t \in I$*

Beweis. Indem wir c durch $t \mapsto c(t)/r(t)$ ersetzen, dürfen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $\|c(t)\| = 1$ für alle t gilt, und wir müssen zeigen, dass man so eine Kurve in der Form $(\cos(\theta(t)), \sin(\theta(t)))$ für eine stetige Funktion θ schreiben kann. Als stetige Funktion auf einem kompakten Intervall ist c gleichmäßig stetig, also finden wir eine Unterteilung $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b$ sodass für $s, s' \in [t_i, t_{i+1}]$ immer $\|c(s) - c(s')\| < \sqrt{2}$ gilt. Da c im Einheitskreis liegt, bedeutet das gerade, dass für jedes i das Bild $c([t_i, t_{i+1}])$ in einer Halbebene H_i liegt. Betrachten wir nun H_0. Von oben wissen wir, dass $p^{-1}(H_0)$ eine abzählbare Vereinigung disjunkter Teilmengen ist, und wir bezeichnen mit A_0 jene Teilmenge, die $(1, \theta_0)$ enthält. Wir wissen auch, dass

$p|_{A_0} : A_0 \to H_0$ ein Homöomorphismus ist, und wir definieren θ auf $[t_0, t_1]$ als die zweite Komponente von $(p|_{A_0})^{-1} \circ c$. Dann gilt natürlich die geforderte Gleichung für $t \in [t_0, t_1]$. Nun betrachten wir $p^{-1}(H_1)$, bezeichnen mit A_1 jene Komponente, die $(1, \theta(t_1))$ enthält, und definieren θ auf $[t_1, t_2]$ durch $(p|_{A_1})^{-1} \circ c$. Klarerweise ist θ stetig auf $[t_0, t_2]$ und erfüllt die geforderte Gleichung. So erhalten wir in endlich vielen Schritten eine stetige Funktion θ mit den gewünschten Eigenschaften.

Zur Eindeutigkeit: Sind θ und $\tilde{\theta}$ zwei Kurven mit den gewünschten Eigenschaften, dann betrachten wir die stetige Funktion $\tilde{\theta} - \theta : [a, b] \to \mathbb{R}$. Nach Konstruktion ist $\cos(\tilde{\theta}(t)) = \cos(\theta(t))$ und $\sin(\tilde{\theta}(t)) = \sin(\theta(t))$, also müssen sich $\tilde{\theta}(t)$ und $\theta(t)$ immer um ein ganzzahliges Vielfaches von 2π unterscheiden. Da aber nach Voraussetzung $\tilde{\theta}(a) = \theta_0 = \theta(a)$ gilt, folgt $\tilde{\theta} = \theta$ aus der Stetigkeit. □

Die eindeutige Kurve $(r(t), \theta(t))$ bezeichnet man als den *Lift* von c zum Anfangswert $(r(a), \theta_0)$.

Im Spezialfall von C^1–Kurven kann man diesen Lift auch analytisch mit Hilfe eines Kurvenintegrals konstruieren. Da die dabei auftretenden 1–Formen der einfachste Spezialfall von Differentialformen sind, die später noch eine wichtige Rolle spielen werden, wollen wir diese analytische Konstruktion genauer studieren.

1.9. 1–Formen und Kurvenintegrale. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge. Dann ist eine glatte *1–Form* auf U eine glatte Funktion $\omega : U \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, die linear in der zweiten Variable ist, also $\omega(z, \lambda v + \mu w) = \lambda\omega(z, v) + \mu\omega(z, w)$ erfüllt.

Ist ω eine glatte 1–Form auf U und $f : U \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion, dann erhalten wir eine glatte 1–Form $f\omega$ auf U, die durch $f\omega(z, v) = f(z)\omega(z, v)$ definiert ist. Man kann also 1–Formen punktweise mit reellwertigen Funktionen multiplizieren.

Andererseits liefert eine glatte Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ eine glatte 1–Form df auf U, die sogenannte *äußere Ableitung* oder das *totale Differential* von f, indem man $df(z, v)$ als die Richtungsableitung von f im Punkt z in Richtung v definiert. Im Wesentlichen ist also df gerade die Ableitung von f.

Weiters gibt es auf jeder offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$ wie oben n kanonische glatte 1–Formen, die man üblicherweise mit $dx^1, \dots, dx^n$ bezeichnet. Man definiert $dx^i(z, v)$ als die i–te Koordinate von v. In der Differentialgeometrie folgt man meist der Konvention, dass man die Koordinatenindizes oben schreibt, also Punkte $z \in \mathbb{R}^n$ als $(z^1, \dots, z^n)$ darstellt. (Man darf diese Indizes natürlich nicht mit Potenzen verwechseln.) Durch diese Konvention hat sich die Bezeichnung x^i für die i–te Projektion $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eingebürgert, weil diese Projektion ja dem Punkt x die Koordinate x^i zuordnet. Die 1–Form dx^i ist genau die äußere Ableitung dieser Funktion.

Sei nun ω eine 1–Form auf U und sei $\{e_1, \dots, e_n\}$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^n$. Für $i = 1, \dots, n$ ist dann $\omega_i(z) := \omega(z, e_i)$ eine glatte Funktionen $U \to \mathbb{R}$. Ist nun $v = (v^1, \dots, v^n) \in \mathbb{R}^n$, dann gilt natürlich $\omega(z, v) = v^1\omega_1(z) + \dots + v^n\omega_n(z)$. Nach Definition ist $v^i = dx^i(z, v)$ und wir erhalten $\omega(z, v) = \omega_1(z)dx^1(z, v) + \dots + \omega_n(z)dx^n(z, v)$, also $\omega = \sum_{i=1}^n \omega_i dx^i$. Für das totale Differential df ergibt sich $df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$.

Die wesentliche Eigenschaft von 1–Formen an dieser Stelle ist, dass man sie (unabhängig von Parametrisierungen) über orientierte Kurven integrieren kann. Sei also $c : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ eine glatt parametrisierte Kurve, $U \subset \mathbb{R}^2$ eine offene Teilmenge mit $c([a, b]) \subset U$ und ω eine 1–Form auf U. Dann definieren wir das *Kurvenintegral* $\int_c \omega$ von ω längs c durch $\int_c \omega = \int_a^b \omega(c(t), c'(t))dt$. Ist $\phi : [a', b'] \to [a, b]$ ein orientierungserhaltender Diffeomorphismus, also $\phi(a') = a$ und $\phi(b') = b$, und ist $\tilde{c} = c \circ \phi$ die entsprechende Reparametrisierung von c, dann gilt nach der Kettenregel $\tilde{c}'(s) = \phi'(s)c'(\phi(s))$. Damit erhalten wir aber $\int_{\tilde{c}} \omega = \int_{a'}^{b'} \omega(\tilde{c}(s), \tilde{c}'(s))ds = \int_{a'}^{b'} \omega\big(c(\phi(s)), c'(\phi(s))\big)\phi'(s)ds$, und nach der Substitutionsregel stimmt dieses Integral mit $\int_c \omega$ überein. Man bemerke schließlich noch, dass die Funktion $[a, b] \to \mathbb{R}$, die gegeben ist durch $t \mapsto \int_a^t \omega(c(t), c'(t))dt$, als erste Ableitung gerade $t \mapsto \omega(c(t), c'(t))$ hat und damit glatt ist.

Betrachten wir noch den Spezialfall eines Kurvenintegrals über die äußere Ableitung einer glatten Funktion $f : U \to \mathbb{R}$. Für eine glatte Kurve $c : [a, b] \to U$ ist nach der Kettenregel $(f \circ c)'(t) = Df(c(t)) \cdot c'(t) = df(c(t), c'(t))$. Damit folgt aber aus der Definition des Kurvenintegrals sofort, dass $\int_c df = f(c(b)) - f(c(a))$ gelten muss.

1.10. Polarkoordinaten als Kurvenintegral. Wir können nun Kurvenintegrale benutzen, um eine explizite Formel für den Lift $(r(t), \theta(t))$ einer glatten Kurve c zu einem gegebenen Anfangswert θ_0 zu konstruieren. Die Idee dazu ist einfach: Wie wir in 1.8 gesehen haben, ist für geeignete Teilmengen $U \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ das Urbild $p^{-1}(U)$ eine disjunkte Vereinigung von abzählbar vielen Teilmengen V_i und für jedes i ist $p : V_i \to U$ ein Diffeomorphismus. Die inversen Abbildungen (für verschiedene i) unterscheiden sich nur um die Addition eines konstanten Vielfachen von 2π in der zweiten Koordinate, also haben alle diese Inversen die gleiche Ableitung. Wir können nun diese Ableitung explizit berechnen, wobei wir in $\mathbb{R}^2$ die Koordinaten mit x und y (statt mit x^1 und x^2) bezeichnen.

Dazu muss man nur bedenken, dass die Ableitung einer inversen Funktion gerade durch die inverse Matrix gegeben ist. Nun kann man die inverse Matrix einer 2×2–Matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ allgemein als $\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ berechnen. Wenden wir das auf die Matrix $Dp(r, \theta)$ aus 1.8 an, dann erhalten wir die inverse Matrix

$$\frac{1}{r}\begin{pmatrix} r\cos(\theta) & r\sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} = (x^2 + y^2)^{-1/2}\begin{pmatrix} x & y \\ -y/(x^2 + y^2)^{-1/2} & x/(x^2 + y^2)^{-1/2} \end{pmatrix}.$$

Die partiellen Ableitungen der zweiten Komponente der Inversen bilden die untere Zeile dieser Matrix. Damit sehen wir, dass für jede der Inversen das totale Differential der zweiten Komponente gegeben ist durch $\eta := \frac{xdy - ydx}{x^2+y^2}$. Offensichtlich ist das eine glatte 1–Form, die auf ganz $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ definiert ist.

Proposition. *Sei η wie oben definiert und sei $c : [a, b] \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, $c(t) = (x(t), y(t))$ eine glatt parametrisierte Kurve. Dann ist der eindeutige Lift $(r(t), \theta(t))$ von c mit Anfangswert θ_0 aus Proposition 1.8 gegeben durch $r(t) = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}$ und $\theta(t) = \theta_0 + \int_a^t \eta(c(s), c'(s))ds$. Insbesondere ist dieser Lift ebenfalls glatt.*

Beweis. Wie im Beweis von Proposition 1.8 können wir uns auf den Fall $\|c(t)\| = 1$ für alle t einschränken und eine Unterteilung $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b$ finden. Nach Konstruktion ist die Einschränkung von θ auf $[t_i, t_{i+1}]$ gegeben durch die Komposition einer geeigneten lokalen Inversen von p mit c. Damit ist aber $\theta(t) - \theta(t_i) = \int_{t_i}^t \eta(c(t), c'(t))$ für alle $t \in [t_i, t_{i+1}]$. Ist nun $t \in [a, b]$ beliebig, dann sei i so gewählt, dass $t \in [t_i, t_{i+1}]$. Dann ist aber

$$\begin{aligned} \theta(t) =& (\theta(t) - \theta(t_i)) + (\theta(t_i) - \theta(t_{i-1}) + \cdots + (\theta(t_1) - \theta(t_0)) + \theta(t_0) = \\ & \int_{t_i}^t \eta(c(t), c'(t)) + \int_{t_{i-1}}^{t_i} \eta(c(t), c'(t)) + \cdots + \int_{t_0}^{t_1} \eta(c(t), c'(t)) + \theta_0 = \\ & \int_a^t \eta(c(t), c'(t)) + \theta_0. \end{aligned}$$

Damit ist die Glattheit offensichtlich. □

1.11. Damit können wir nun die angekündigte weitere Interpretation der Krümmung von ebenen Kurven angeben: Sei $c : I \to \mathbb{R}^2$ eine nach der Bogenlänge parametrisierte glatte Kurve. Dann ist $c' : I \to \mathbb{R}^2$ glatt und nach Definition gilt $\|c'(t)\| = 1$ für alle $t \in I$. Nach Proposition 1.9 und 1.10 gibt es eine glatte Funktion $\theta : I \to \mathbb{R}$, sodass $c'(t) = \big(\cos(\theta(t)), \sin(\theta(t))\big)$ gilt. Je zwei solche Funktionen unterscheiden sich um Addition eines konstanten Vielfachen von 2π, also ist insbesondere die Ableitung $\theta'(t)$ unabhängig von der Wahl von θ.

Proposition. *Sei $c : I \to \mathbb{R}^2$ eine nach der Bogenlänge parametrisierte glatte Kurve und sei $\theta : I \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion, sodass $c'(t) = \big(\cos(\theta(t)), \sin(\theta(t))\big)$ gilt. Dann ist $\kappa(t) = \theta'(t)$ für alle $t \in I$.*

Beweis. Nach Voraussetzung gilt $c''(t) = \big(-\sin(\theta(t))\theta'(t), \cos(\theta(t))\theta'(t)\big)$. Da c nach der Bogenlänge parametrisiert ist, gilt nach 1.6

$$\kappa(t) = \det(c'(t), c''(t)) = \det \begin{pmatrix} \cos(\theta(t)) & -\sin(\theta(t))\theta'(t) \\ \sin(\theta(t)) & \cos(\theta(t))\theta'(t) \end{pmatrix} = \theta'(t).$$

□

Mit Hilfe dieses Resultates können wir nun auch elegant zeigen, dass einerseits zu jeder vorgegebenen Krümmung eine Kurve mit dieser Krümmung existiert und andererseits die Krümmung eine Kurve bis auf Bewegungen eindeutig bestimmt.

Satz. *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $\kappa : I \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion. Dann gibt es eine nach der Bogenlänge parametrisierte glatte Kurve $c : I \to \mathbb{R}^2$ mit Krümmung κ. Ist $\tilde{c}$ noch so eine Kurve, dann gibt es eine orientierungserhaltende Bewegung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, sodass $\tilde{c} = f \circ c$ gilt.*

Beweis. Das wesentliche Argument für diesen Beweis ist, dass die Vorgabe der Krümmung für eine Kurve eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung darstellt, und so eine Differentialgleichung für gegebenen Wert und gegebene Ableitung in einem Punkt eindeutig lösbar ist. Durch die letzte Interpretation der Krümmung wird aber diese Differentialgleichung so einfach, dass wir die Lösung explizit als Integral angeben können.

Fixieren wir zunächst einen Punkt $t_0 \in I$. Wir behaupten, dass es eine eindeutige Kurve $c : I \to \mathbb{R}^2$ mit $c(t_0) = 0$, $c'(t_0) = e_1 = (1, 0)$ und Krümmung $\kappa_c(t) = \kappa(t)$ gibt. Dazu definieren wir eine glatte Funktion $\theta : I \to \mathbb{R}$ durch $\theta(t) = \int_{t_0}^t \kappa(s)ds$. Dann setzen wir $x(t) := \int_{t_0}^t \cos(\theta(s))ds$ und $y(t) := \int_{t_0}^t \sin(\theta(s))ds$ und definieren $c : I \to \mathbb{R}^2$ durch $c(t) := (x(t), y(t))$. Offensichtlich ist c eine glatte Kurve. Nach Konstruktion gilt $x(t_0) = y(t_0) = 0$, also $c(t_0) = 0$. Weiters ist $c'(t) = (\cos(\theta(t)), \sin(\theta(t)))$, also insbesondere $\|c'(t)\| = 1$ für alle $t \in I$. Damit ist c nach der Bogenlänge parametrisiert, wegen $\theta(t_0) = 0$ ist $c'(t_0) = e_1$ und nach der obigen Proposition ist die Krümmung von c gleich κ. Ist $\tilde{c} : I \to \mathbb{R}^2$ eine weitere Kurve mit $\tilde{c}(t_0) = 0$, $\tilde{c}'(t_0) = e_1$ und Krümmung κ, dann finden wir eine glatte Funktion $\tilde{\theta}$, sodass $\tilde{c}'(t) = (\cos(\tilde{\theta}(t)), \sin(\tilde{\theta}(t)))$ gilt, und nach Voraussetzung können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\tilde{\theta}(t_0) = 0$ annehmen. Da sowohl c als auch $\tilde{c}$ Krümmung κ haben, ist $(\tilde{\theta} - \theta)'(t) = \kappa_{\tilde{c}}(t) - \kappa_c(t) = 0$, also ist $\tilde{\theta} - \theta$ konstant. Wegen $\tilde{\theta}(t_0) = 0 = \theta(t_0)$ erhalten wir $\tilde{\theta} = \theta$ und damit $c' = \tilde{c}'$. Damit ist aber $\tilde{c} - c$ konstant, also folgt $\tilde{c} = c$ aus $\tilde{c}(t_0) = 0 = \tilde{c}(t_0)$.

Ist nun $\tilde{c} : I \to \mathbb{R}^2$ eine beliebige nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve mit Krümmung κ, dann betrachten wir $\tilde{c}'(t_0) \in \mathbb{R}^2$. Dies ist ein Einheitsvektor, also gibt es eine orthogonale Matrix A mit Determinante 1, die $\tilde{c}'(t_0)$ als erste Spalte hat. Betrachten wir nun die Bewegung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, die gegeben ist durch $f(x) = A(x) + \tilde{c}(t_0)$, und die glatte Kurve $f^{-1} \circ \tilde{c}$. Wegen $f(0) = \tilde{c}(t_0)$ ist $(f^{-1} \circ \tilde{c})(t_0) = 0$ und $D(f^{-1})(v) = A^{-1}$ für alle $v \in \mathbb{R}^2$. Nach Konstruktion gilt $A(e_1) = \tilde{c}'(t_0)$, also ist $(f^{-1} \circ \tilde{c})'(t_0) = A^{-1}(\tilde{c}'(t_0)) = e_1$. Damit wissen wir aber von oben, dass $f^{-1} \circ \tilde{c} = c$, also $\tilde{c} = f \circ c$ gilt. □

Durch diesen Satz ist in einem gewissen Sinn das Studium ebener Kurven auf das Studium reellwertiger Funktionen zurückgeführt. Die Krümmung ist ja einerseits eine geometrische Größe, andererseits bestimmt sie die Kurve eindeutig bis auf Bewegungen, die bei geometrischen Dingen ohnehin keine Rolle spielen sollen. Damit folgt aber, dass die gesamte geometrische Information über eine ebene Kurve in ihrer Krümmung enthalten ist.

Man bemerke, dass die Krümmung einer ebenen Kurve eine *lokale Größe* ist, d.h. um die Krümmung einer Kurve in einem Punkt zu bestimmen genügt es, die Kurve auf einer beliebig kleinen Umgebung dieses Punktes zu kennen.

Geschlossene Kurven, Windungszahl und Umlaufzahl

Wir kommen nun zu globalen Aspekten der Theorie der Kurven in der Ebene, also Eigenschaften, die von der ganzen Kurve abhängen. Diese Aspekte liefern Größen, die sich bei Deformationen der Kurve nicht ändern, also eher in den Bereich der algebraischen Topologie gehören. Solche Größen gibt es nur für *geschlossene* Kurven, weil man ohne die Voraussetzung der Geschlossenheit beliebige Kurven ineinander deformieren kann.

1.12. Windungszahl und Homotopie. Eine stetige geschlossene Kurve in $\mathbb{R}^2$ ist einfach eine stetige Funktion $c : [a, b] \to \mathbb{R}^2$, sodass $c(a) = c(b)$ gilt. So eine Kurve heißt *einfach geschlossen*, wenn $c(a) = c(b)$ der einzige Punkt im Bild von c ist, der öfter als ein Mal getroffen wird. Für glatte geschlossene Kurven nimmt man oft (neben der Glattheit der Funktion c) an, dass alle Ableitungen von c in den Punkten a und b übereinstimmen, also $c^{(k)}(a) = c^{(k)}(b)$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt. Dies bedeutet, dass man c periodisch zu einer auf ganz $\mathbb{R}$ definierten glatten Funktion fortsetzen kann, indem man $c(t + k(b - a)) = c(t)$ für all $t \in [a, b]$ und $k \in \mathbb{Z}$ setzt.

Selbst für geschlossene Kurven findet man noch keine interessanten Größen, die invariant unter stetigen Deformationen sind, weil man jede stetige Kurve stetig auf einen Punkt zusammen ziehen kann. Betrachten wir etwa für eine geschlossene stetige Kurve $c : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ die Funktion $H : [a, b] \times [0, 1] \to \mathbb{R}^2$, die gegeben ist durch $H(t, s) := (1 - s)c(t)$, dann ist das klarerweise stetig, $H(t, 0) = c(t)$ für alle t und $H(t, 1) = 0$ für alle t. Man kann also H als eine stetige Deformation der Kurve c in die konstante Kurve 0 betrachten. Die Situation ändert sich aber völlig, wenn wir Kurven in $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ betrachten:

Sei $c : [a, b] \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ eine stetige geschlossene Kurve. Nach Proposition 1.8 finden wir stetige Funktionen $r : [a, b] \to \mathbb{R}_+$ und $\theta : [a, b] \to \mathbb{R}$, sodass $c(t) = (r(t)\cos(\theta(t)), r(t)\sin(\theta(t)))$ gilt, und je zwei mögliche Wahlen für θ unterscheiden sich um ein ganzzahliges Vielfaches von 2π. Insbesondere ist $\theta(b) - \theta(a)$ unabhängig von der Wahl der Funktion θ. Wegen $c(a) = c(b)$ ist auch $r(a) = r(b)$, und damit folgt $\cos(\theta(a)) = \cos(\theta(b))$ und $\sin(\theta(a)) = \sin(\theta(b))$. Damit muss es aber eine ganze Zahl k geben, sodass $\theta(b) = \theta(a) + 2k\pi$ gilt. Diese (eindeutig bestimmte) Zahl $k \in \mathbb{Z}$ heißt die *Windungszahl* (um 0) der Kurve c und wird mit $w_0(c)$ bezeichnet. Ist die Kurve c glatt (es genügt C^1), dann kann man die Windungszahl explizit als Kurvenintegral $w_0(c) = \frac{1}{2\pi}\int_c \eta$ über die glatte 1–Form $\eta = \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$ aus 1.10 berechnen.

Die Windungszahl ist offensichtlich invariant unter Reparametrisierungen: Sei $c : [a,b] \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ eine stetige geschlossene Kurve und $\phi : [a',b'] \to [a,b]$ eine stetige Bijektion, sodass $\phi(a') = a$ und $\phi(b') = b$ gilt (das ist das Analogon von Orientierungstreue). Ist $\theta : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Winkelkoordinate für c, dann ist $\theta \circ \phi$ eine Winkelkoordinate für $c \circ \phi$, also folgt $w_0(c) = w_0(c \circ \phi)$ sofort. Weiters sehen wir leicht, dass die Windungszahl jede beliebige ganze Zahl sein kann. Betrachten wir nämlich die glatte Kurve $c : [0, 2k\pi] \to \mathbb{R}^2$, die gegeben ist durch $c(t) = (\cos(t), \sin(t))$, dann ist offensichtlich $w_0(c) = k$. Andererseits hat $\tilde{c} : [0, 2k\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\tilde{c}(t) = (\cos(t), -\sin(t))$ Windungszahl $-k$, während jede konstante Kurve natürlich Windungszahl Null hat. Aus diesen Beispielen sieht man auch, dass die Windungszahl gerade angibt, wie oft die Kurve c den Nullpunkt umkreist.

Ist $z \in \mathbb{R}^2$ ein beliebiger Punkt und $c : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ eine stetige geschlossene Kurve mit $z \notin c([a,b])$, dann definiert man die Windungszahl von c um z durch $w_z(c) := w_0(c - z)$, wobei $c - z$ die stetige Kurve $t \mapsto c(t) - z$ bezeichnet.

Der interessante Punkt an der Windungszahl ist nun, dass man mit ihrer Hilfe entscheiden kann, ob zwei geschlossene Kurven stetig ineinander deformiert werden können. Den intuitiven Begriff der stetigen Deformation fasst man exakt im Begriff der Homotopie:

Definition. Seien $c, \tilde{c} : [a,b] \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ stetige geschlossene Kurven. Eine *Homotopie* von c nach $\tilde{c}$ ist eine stetige Funktion $H : [a,b] \times [0,1] \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, sodass $H(t,0) = c(t)$, $H(t,1) = \tilde{c}(t)$ für alle $t \in [a,b]$, sowie $H(a,s) = H(b,s)$ für alle $s \in [0,1]$ gilt. Die Kurven c und $\tilde{c}$ heißen *homotop*, falls es eine Homotopie von c nach $\tilde{c}$ gibt.

Nach Definition einer Homotopie ist für jedes $s \in [0,1]$ die Kurve $c_s(t) := H(t,s)$ eine stetige geschlossene Kurve in $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, $c_0 = c$ und $c_1 = \tilde{c}$, also kann man eine Homotopie H wirklich als Deformation von geschlossenen Kurven betrachten.

Satz. *Seien $c, \tilde{c} : [a,b] \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ geschlossene stetige Kurven. Dann sind c und $\tilde{c}$ genau dann homotop, wenn $w_0(c) = w_0(\tilde{c})$ gilt.*

Beweisskizze. Ist $H : [a,b] \times [0,1] \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, $H(t,s) = (x(t,s), y(t,s))$ eine Homotopie von c nach $\tilde{c}$, dann setzt man $r(t,s) := \sqrt{x(t,s)^2 + y(t,s)^2}$ und $\tilde{H}(t,s) = \frac{H(t,s)}{r(t,s)}$. Die gleichmäßige Stetigkeit von $\tilde{H}$ liefert Unterteilungen $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ und $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_m = 1$ der Intervalle, sodass $\tilde{H}([t_i, t_{i+1}], [s_j, s_{j+1}])$ ganz in einer Halbebene liegt. Damit konstruiert man wie im Beweis von Proposition 1.8 eine stetige Funktion $\theta : [a,b] \times [0,1] \to \mathbb{R}$, sodass $\tilde{H}(t,s) = (\cos(\theta(t,s)), \sin(\theta(t,s)))$ gilt, und erhält damit eine Darstellung von H in Polarkoordinaten. Nun ist aber $s \mapsto \theta(b,s) - \theta(a,s)$ eine stetige Funktion, die wegen $H(a,s) = H(b,s)$ als Werte immer ganzzahlige Vielfache von 2π haben müssen. Damit muss diese Funktion aber konstant sein, und es folgt insbesondere $2\pi w_0(c) = \theta(b,0) - \theta(a,0) = \theta(b,1) - \theta(a,1) = 2\pi w_0(\tilde{c})$.

Nehmen wir umgekehrt an, dass $w_0(c) = w_0(\tilde{c}) = k$ gilt, und schreiben wir $c(t) = (r(t)\cos(\theta(t)), r(t)\sin(\theta(t)))$ und $\tilde{c}(t) = (\tilde{r}(t)\cos(\tilde{\theta}(t)), \tilde{r}(t)\sin(\tilde{\theta}(t)))$. Für $s \in [0,1]$ ist $\rho(t,s) := (1-s)r(t) + s\tilde{r}(t) > 0$, und wir setzen $\tau(t,s) = (1-s)\theta(t) + s\tilde{\theta}(t)$. Wegen $\theta(b) = \theta(a) + 2k\pi$ und $\tilde{\theta}(b) = \tilde{\theta}(a) + 2k\pi$ folgt nun $\tau(b,s) = \tau(a,s) + 2k\pi$ für alle $s \in [0,1]$. Definieren wir nun $H(t,s) := (\rho(t,s)\cos(\tau(t,s)), \rho(t,s)\sin(\tau(t,s)))$, dann ist offensichtlich $H(t,0) = c(t)$, $H(t,1) = \tilde{c}(t)$ und wegen $\tau(b,s) = \tau(a,s) + 2k\pi$ erhalten wir $H(a,s) = H(b,s)$ für alle $s \in [0,1]$, also ist H eine Homotopie von c nach $\tilde{c}$. □

Bemerkung. (1) Sind $c, \tilde{c} : [a,b] \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ glatte geschlossene Kurven, sodass $w_0(c) = w_0(\tilde{c})$ gilt, dann ist die im Beweis des Satzes konstruierte Homotopie H :

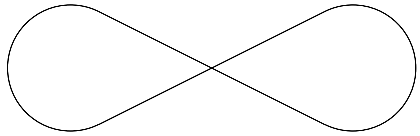
$[a, b] \times [0, 1] \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ von c nach $\tilde{c}$ offensichtlich eine glatte Funktion. Insbesondere folgt aus dem Satz, dass zwei glatte Kurven genau dann stetig homotop sind, wenn sie glatt homotop sind.
(2) Zusammen mit unseren Beispielen von vorher folgt aus dem Satz sofort, dass jede stetige geschlossene Kurve $c : [a, b] \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ homotop zu genau einer der Kurven $c_k(t) := (\cos(2k\pi\frac{t-a}{b-a}), \sin(2k\pi\frac{t-a}{b-a}))$ $(k \in \mathbb{Z})$ ist.
(3) Aus dem Satz können wir auch leicht eine weitere wichtige Eigenschaft der Windungszahl ablesen: Sei $c : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ eine geschlossene Kurve und sei $z \in \mathbb{R}^2 \setminus c([a, b])$. Da $c([a, b]) \subset \mathbb{R}^2$ kompakt ist, gibt es eine Zahl $\epsilon > 0$, sodass die Kugel $B_\epsilon(z)$ leeren Schnitt mit $c([a, b])$ hat. Für $z' \in B_\epsilon(z)$ betrachten wir nun die Funktion $H : [a, b] \times [0, 1] \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ die gegeben ist durch $H(t, s) = c(t) - z + s(z - z')$. Klarerweise ist das eine Homotopie von $c - z$ nach $c - z'$, also folgt $w_z(c) = w_{z'}(c)$. Damit ist die Windungszahl konstant auf $B_\epsilon(z)$. Das impliziert aber, dass die Windungszahl konstant auf jeder Zusammenhangskomponente von $\mathbb{R}^2 \setminus c([a, b])$ ist.
(4) Der Vollständigkeit halber notieren wir den folgenden (relativ schwierigen) Satz der algebraischen Topologie:

Satz (Jordan'scher Kurvensatz). *Sei $c : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ eine einfach geschlossene Kurve. Dann besteht $\mathbb{R}^2 \setminus c([a, b])$ aus genau zwei Zusammenhangskomponenten und $c([a, b])$ ist der Rand jeder der beiden Komponenten. Auf der inneren (beschränkten) Zusammenhangskomponente ist $w_z(c) = \pm 1$, auf der äußeren (unbeschränkten) Komponente ist $w_z(c) = 0$.*

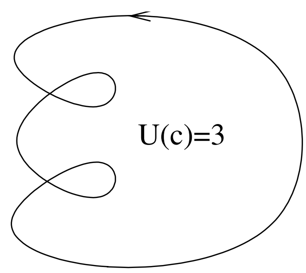
1.13. Umlaufzahl und Isotopie. Während die Windungszahl eher mit stetigen Kurven zu tun hat, kommen wir nun zu differenzierbaren Kurven zurück. Ist nämlich $c : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ eine regulär parametrisierte glatte Kurve (wobei wir annehmen, dass $c^{(k)}(a) = c^{(k)}(b)$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt), dann ist insbesondere $c' : [a, b] \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ eine geschlossene Kurve. Damit können wir die *Umlaufzahl* $U(c)$ von c durch $U(c) = w_0(c') \in \mathbb{Z}$ definieren.

Sei $c : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ eine regulär parametrisierte geschlossene glatte Kurve und $\phi : [a', b'] \to [a, b]$ ein orientierungstreuer Diffeomorphismus. Dann ist $(c \circ \phi)'(t) = c'(\phi(t))\phi'(t)$, wobei $\phi'(t) > 0$ für alle $t \in [a', b']$ gilt. Damit ist aber $H(t, s) = c'(\phi(t))(1 + s(\phi'(t) - 1))$ eine Homotopie von $c' \circ \phi$ nach $(c \circ \phi)'$, und wir erhalten $U(c \circ \phi) = w_0((c \circ \phi)') = w_0(c' \circ \phi) = w_0(c') = U(c)$. Somit ist die Umlaufzahl invariant unter orientierungstreuen Reparametrisierungen. Analog zeigt man, dass bei einer orientierungsvertauschenden Reparametrisierung die Umlaufzahl das Vorzeichen wechselt.

Für den k mal durchlaufenen Kreis $c : [0, 2k\pi] \to \mathbb{R}^2$, $c(t) = (\cos(t), \sin(t))$ erhalten wir $c'(t) = (-\sin(t), \cos(t))$, also einfach die um $\pi/2$ verschobene Kurve, und damit $U(c) = k$. Analog erhält man Kurven mit $U(c) = -k$ für $k \in \mathbb{N}$. Auch in den folgenden Beispielen kann man die Umlaufzahl leicht direkt ablesen:



U(c)=0



Definition. Seien $c, \tilde{c} : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ regulär parametrisierte geschlossene glatte Kurven. Eine *Isotopie* von c nach $\tilde{c}$ ist eine glatte Funktion $H : [a, b] \times [0, 1] \to \mathbb{R}^2$, sodass $H(t,0) = c(t)$, $H(t,1) = \tilde{c}(t)$, $H(a,s) = H(b,s)$, sowie $\frac{\partial H}{\partial t}(t,s) \neq 0$ für alle $t \in [a,b]$ und $s \in [0,1]$ gilt. Die Kurven c und $\tilde{c}$ heißen *isotop*, falls es eine Isotopie von c nach $\tilde{c}$ gibt.

Nach Definition ist eine Isotopie zwischen zwei Kurven eine spezielle Homotopie. Betrachtet man eine Homotopie H als stetige Deformation geschlossener Kurven (indem man $c_s(t) = H(t,s)$ setzt), dann ist die zusätzliche Bedingung an eine Isotopie einfach, dass jede der Zwischenkurven $c_s : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ regulär ist.

Seien $c, \tilde{c} : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ regulär parametrisierte glatte Kurven und sei H eine Isotopie von c nach $\tilde{c}$. Dann ist $\frac{\partial H}{\partial t} : [a,b] \times [0,1] \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ eine Homotopie zwischen c' und $\tilde{c}'$, also gilt $U(c) = w_0(c') = w_0(\tilde{c}') = U(\tilde{c})$. Somit haben isotope Kurven die selbe Umlaufzahl.

Aus diesem Resultat können wir sofort ablesen, dass die (sehr ähnlich aussehenden) Konzepte "Homotopie" und "Isotopie" wesentlich voneinander verschieden sind. Betrachten wir etwa die Achterschleife aus der letzten Abbildung, die wir so platzieren, dass der Nullpunkt in der rechten Schlaufe liegt. Durchläuft man die Kurve einmal (ganz rechts nach oben beginnend), dann ist die Windungszahl um Null offensichtlich gleich 1, also ist die Kurve homotop zu einem Kreis, der einmal gegen den Uhrzeigersinn um Null läuft. Dieser Kreis hat aber Umlaufzahl Eins, während die Achterschleife Umlaufzahl Null hat, also können die beiden Kurven nicht isotop sein. (Das ist auch geometrisch ganz einsichtig, weil man für eine Homotopie die zweite Schleife zusammenziehen muss, was nicht regulär geht.)

Der sogenannte Satz von Whitney–Graustein liefert die Umkehrung der obigen Behauptung, also dass Kurven mit gleicher Umlaufzahl isotop sind. Der Beweis dieses Resultats ist schwieriger und wir skizzieren ihn hier nur:

Satz. *Zwei regulär parametrisierte geschlossene glatte Kurven $c, \tilde{c} : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ sind genau dann isotop, wenn $U(c) = U(\tilde{c})$ gilt.*

Beweisskizze. Sei zunächst $c : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ eine regulär parametrisierte geschlossene glatte Kurve, $L = L_b^a(c)$ die Bogenlänge von c und $\phi : [0,L] \to [a,b]$ der orientierungstreue Diffeomorphismus, sodass $c \circ \phi$ nach der Bogenlänge parametrisiert ist (siehe 1.5). Definiere $c_1 : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ durch $c_1(t) := \frac{b-a}{L} c(\phi(L\frac{t-a}{b-a}))$. Offensichtlich ist c_1 eine glatte Kurve und man verifiziert leicht, dass c_1 geschlossen ist und $\|c_1'(t)\| = 1$ für alle t gilt, also c_1 nach der Bogenlänge parametrisiert ist. Weiters zeigt man leicht, dass $H(t,s) := ((1-s) + s\frac{b-a}{L})c((1-s)t + s\phi(L\frac{t-a}{b-a}))$ eine Isotopie von c nach c_1 definiert. Außerdem zeigt man (siehe Übungen), dass Isotopie eine Äquivalenzrelation ist. Damit genügt es zu zeigen, dass zwei nach der Bogenlänge parametrisierte geschlossene glatte Kurven $c, \tilde{c} : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ isotop sind, falls $U(c) = U(\tilde{c})$ ist.

Nun ist aber $w_0(c') = U(c) = U(\tilde{c}) = w_0(\tilde{c}')$, also wissen wir aus 1.12, dass es eine glatte Homotopie $H : [a,b] \times [0,1] \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ von c' nach $\tilde{c}'$ gibt. Aus dem Beweis von Satz 1.12 folgt weiters, dass $\|H(t,s)\| = 1$ für alle t und s gilt. Nun wählen wir eine glatte Kurve $\phi : [0,1] \to \mathbb{R}^2$, sodass $\phi(0) = c(a)$ und $\phi(1) = \tilde{c}(a)$ gilt, und definieren $H_1 : [a,b] \times [0,1] \to \mathbb{R}^2$ durch

$$H_1(t,s) := \phi(s) + \int_a^t H(r,s)dr - \frac{t-a}{b-a}\int_a^b H(r,s)dr.$$

Dann ist $\int_a^t H(r,0)dr = \int_a^t c'(r)dr = c(t) - c(a)$, was insbesondere für $t = b$ verschwindet, und daraus folgt sofort $H_1(t,0) = c(t)$. Analog verifiziert man $H(t,1) = \tilde{c}(t)$. Weiters ist leicht zu sehen, dass $H_1(a,s) = H_1(b,s)$ für alle $s \in [0,1]$ gilt. Schließlich ist $\frac{\partial H_1}{\partial t}(t,s) =$

$H(t,s) - \frac{1}{b-a}\int_a^b H(r,s)dr$, und wir müssen nur noch zeigen, dass dieser Ausdruck nie verschwindet. Ist $\frac{\partial H_1}{\partial t}(t_0,s_0) = 0$, dann ist $H(t_0,s_0) = \frac{1}{b-a}\int_a^b H(r,s_0)dr$. Wegen $\|H(t,s)\| = 1$ für alle t und s impliziert das $1 = \frac{1}{b-a}\|\int_a^b H(r,s_0)dr\| = \frac{1}{b-a}\int_a^b \|H(r,s_0)\|dr$. Daraus schließt man dann, dass $H(t,s_0)$ konstant in t sein muss, und leitet daraus einen Widerspruch her. □

Bemerkung. (1) Mit diesem Satz sehen wir, dass jede reguläre parametrisierte geschlossene Kurve isotop zu einem k Mal positiv oder negativ durchlaufenen Kreis oder zu einer Achterschleife ist.
(2) Der sogenannte Umlaufsatz (H. Hopf, 1935) besagt, dass für eine einfach geschlossene regulär parametrisierte glatte Kurve c entweder $U(c) = 1$ oder $U(c) = -1$ gelten muss. Nach dem Satz von Whitney–Graustein ist also jede solche Kurve isotop zu einem Kreis.

1.14. Die totale Krümmung. Wir wollen nun einen Zusammenhang zwischen der Krümmung und der Umlaufzahl herstellen. Nach den geleisteten Vorarbeiten ist der Beweis dieser Tatsache ziemlich trivial, das sollte aber nicht davon ablenken, dass die Aussage an sich ziemlich überraschend ist. Die Krümmung ist ja ein lokales Konzept, und bei isotopen Deformationen einer glatten Kurve ändert sich die Krümmung lokal in völlig beliebiger Weise. Intuitiv ist aber einsichtig, dass bei einer geschlossenen Kurve eine Änderung der Krümmung an einer Stelle an einer anderen Stelle wieder "gut gemacht" werden muss. Genau diese Aussage können wir nun präzisieren.

Definition. Sei $c : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ eine nach der Bogenlänge parametrisierte geschlossene glatte Kurve mit Krümmung $\kappa : [a,b] \to \mathbb{R}$. Dann definieren wir die *totale Krümmung* von c als $\int_a^b \kappa(t)dt \in \mathbb{R}$.

Proposition. *Sei $c : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ eine nach der Bogenlänge parametrisierte, geschlossene glatte Kurve mit Krümmung $\kappa : [a,b] \to \mathbb{R}$. Dann ist $\int_a^b \kappa(t)dt = 2\pi U(c)$.*

Beweis. Nach Voraussetzung ist $\|c'(t)\| = 1$ für alle t. Sei θ_0 so gewählt, dass $c'(a) = (\cos(\theta_0), \sin(\theta_0))$ gilt, und definiere $\theta : [a,b] \to \mathbb{R}$ durch $\theta(t) := \theta_0 + \int_a^t \eta(c(t), c'(t))$, wobei η die glatte 1–Form aus 1.10 bezeichnet. Nach Proposition 1.10 ist $c'(t) = (\cos(\theta(t)), \sin(\theta(t)))$ also erhalten wir $2\pi U(c) = 2\pi w_0(c') = \theta(b) - \theta(a) = \int_a^b \theta'(t)dt$. Andererseits wissen wir aber aus 1.11, dass $\theta'(t) = \kappa_c(t)$ für alle $t \in [a,b]$ gilt. □

Mit diesem Resultat beenden wir das Studium ebener Kurven. die globale Theorie dieser Kurven ist aber natürlich viel reichhaltiger, und wir wollen hier noch kurz einige Aspekte dieser Theorie erwähnen:

Eine einfach geschlossene Kurve c begrenzt nach dem Jordan'schen Kurvensatz eine beschränkte offene Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^2$, und man kann Eigenschaften von c mit Eigenschaften von U in Verbindung bringen. Ein interessantes Resultat ist die sogenannte *isoperimetrische Ungleichung*, die besagt, dass $L_b^a(c)^2$ immer größer gleich 4π mal der Fläche von U ist, wobei Gleichheit genau dann gilt, wenn c ein Kreis ist. Insbesondere folgt daraus, dass unter allen geschlossenen glatten Kurven mit fixer Bogenlänge genau die Kreise die maximal möglich Fläche begrenzen. Ein anderes interessantes Resultat charakterisiert *konvexe* Kurven c, d.h. Kurven für die U mit je zwei Punkten auch die Verbindungsstrecke zwischen den beiden Punkten enthält. Dies ist nämlich genau dann der Fall, wenn die Krümmung von c das Vorzeichen nicht wechselt. Für solche Kurven sagt dann der sogenannte *Vierscheitelsatz*, dass sie mindestens vier Scheitel (also Punkte mit lokal extremaler Krümmung, siehe 1.7) besitzen.

KAPITEL 2

Analysis auf Teilmannigfaltigkeiten

In den Grundvorlesungen über Analysis wird die Differentialrechnung auf offenen Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ entwickelt. Für viele Zwecke (nicht nur der Differentialgeometrie) ist diese Sichtweise aber zu eng, und man muss die Methoden der Analysis auf allgemeinere Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ (oder noch allgemeinere Räume) ausdehnen. Wir werden uns hauptsächlich auf geeignete Teilmengen (sogenannte Teilmannigfaltigkeiten) von $\mathbb{R}^n$ beschränken, aber auch den allgemeineren Begriff der abstrakten Mannigfaltigkeiten immer wieder erwähnen. Um die Begriffe verallgemeinern zu können, muss man sie zunächst auf der Ebene der offenen Teilmengen klarer verstehen, was auch in diesem Bild zu Vereinfachungen führt.

Man sollte sich unbedingt bewusst machen, dass wir in diesem Kapitel *keine* Geometrie, sondern "nur" Analysis studieren. Die Begriffe, die wir in diesem Kapitel entwickeln, sollen nicht von der Art abhängen, wie unsere Teilmenge im $\mathbb{R}^n$ sitzt, und auch nicht von der Dimension n. Die Annahme, dass wir es mit einer Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ zu tun haben, erleichtert nur die Vorstellung und vereinfacht manche Begriffe. Die analytischen Konzepte sind aber unabhängig davon (was natürlich im Begriff der abstrakten Mannigfaltigkeit am besten zum Ausdruck kommt).

Teilmannigfaltigkeiten von $\mathbb{R}^n$

2.1. "Schöne" Teilmengen von $\mathbb{R}^n$. Zunächst wollen wir einige Versionen von "schönen" Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ besprechen. Wir werden in Kürze sehen, dass alle diese Begriffe äquivalent sind. Ein wesentlicher Punkt an dieser Stelle ist, dass Differenzieren ein lokales Konzept ist. Um zu sehen, ob eine Funktion differenzierbar ist und um ihre Ableitungen zu berechnen, genügt es ja, sie auf einer kleinen offenen Umgebung eines Punktes zu kennen. Daher werden alle diese Begriffe lokaler Natur sein. Andererseits soll das Bild einer schönen Teilmenge unter einem Diffeomorphismus (also einer glatten bijektiven Funktion, deren inverse Funktion ebenfalls glatt ist) ebenfalls schön sein. Tatsächlich ist die Invarianz unter Diffeomorphismen einer der wesentlichsten Punkte in der Theorie der Mannigfaltigkeiten.

Das erste offensichtliche Beispiel einer schönen Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ ist natürlich $\mathbb{R}^k \subset \mathbb{R}^n$, oder etwas allgemeiner ein k–dimensionaler Teilraum $E \subset \mathbb{R}^n$. Wendet man darauf die Überlegungen über Lokalität und Diffeomorphismeninvarianz an, so erhält man den Begriff der lokalen Trivialisierung:

Definition. Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Teilmenge. Man sagt, *M besitzt lokale k–dimensionale Trivialisierungen*, wenn es zu jedem Punkt $x \in M$ eine offene Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$ mit $x \in U$, einen Diffeomorphismus $\Psi : U \to V$ auf eine offene Teilmenge $V \subset \mathbb{R}^n$ und einen k–dimensionalen Teilraum $E \subset \mathbb{R}^n$ gibt, sodass $\Psi(M \cap U) = V \cap E$ gilt.

Ein weiteres offensichtliches Beispiel einer schönen Teilmenge ist der Graph einer glatten Funktion, also die Menge aller Punkte der Form $(x, g(x))$ für eine glatte Funktion $g : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^{n-k}$. Es ist aber in diesem Bild nicht sehr natürlich, gerade die letzten $n-k$ Koordinaten als Funktionen der ersten k Koordinaten auszudrücken. Natürlicher ist es, einen k–dimensionalen Teilraum $E \subset \mathbb{R}^n$ und eine glatte Funktion $g : E \to E^\perp$ zu betrachten. Lokalisiert man diesen Begriff, so erhält man die folgende Definition:

Definition. Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Teilmenge. Man sagt, *M ist lokal ein k–dimensionaler glatter Funktionsgraph*, wenn es zu jedem Punkt $x \in M$ eine offene Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$ mit $x \in U$, einen k–dimensionalen Teilraum $E \subset \mathbb{R}^n$, eine offene Teilmenge $V \subset E$ und eine glatte Funktion $g : V \to E^\perp$ gibt, sodass $M \cap U = \{x + g(x) : x \in V\}$ gilt.

Beim Studium von glatten Kurven haben wir mit regulären Parametrisierungen gearbeitet. Dieses Konzept besitzt eine offensichtliche Verallgemeinerung auf höhere Dimensionen:

Definition. Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Teilmenge. Man sagt, *M besitzt lokale k–dimensionale Parametrisierungen*, falls es zu jedem Punkt $x \in M$ offene Teilmengen $U \subset \mathbb{R}^n$ mit $x \in U$ und $V \subset \mathbb{R}^k$ sowie eine glatte Funktion $\phi : V \to U$ gibt, sodass ϕ einen Homöomorphismus von V auf $M \cap U$ definiert, und $D\phi(y)$ für alle $y \in V$ injektiv ist.

Die Bedingung, dass ϕ einen Homöomorphismus von V auf $M \cap U$ definiert impliziert insbesondere, dass $\phi : V \to M \cap U$ bijektiv ist. Zusätzlich muss die inverse Funktion $\phi^{-1} : M \cap U \to V$ stetig sein, was nach Definition gerade bedeutet, dass es zu jeder offenen Teilmenge $W \subset V$ eine offene Teilmenge $W' \subset \mathbb{R}^n$ gibt, sodass $\phi(W) = M \cap W'$ gilt.

Der letzte Begriff von schönen Teilmengen, den wir betrachten möchten, ist die Beschreibung durch glatte Gleichungen. Wir wollen also Teilmengen der Form $f^{-1}(0)$ für eine glatte Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-k}$ betrachten. Für allgemeines f erhält man aber sofort Probleme: Betrachten wir etwa die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, die gegeben ist durch $f(x, y) = xy$, dann ist ihre Nullstellenmenge gerade die Vereinigung der x–Achse und der y–Achse, und das liefert Probleme im Nullpunkt. Andererseits ist die Ableitung von f gegeben durch $Df(x, y) = (y, x)$, also ist der Nullpunkt die einzige Stelle, in der die Ableitung von f verschwindet, also nicht surjektiv ist. Vermeidet man solche Punkte, dann erhält man:

Definition. Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Teilmenge. Man sagt, *M ist lokal eine k–dimensionale reguläre Nullstellenmenge*, wenn es zu jedem Punkt $x \in M$ eine offene Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$ mit $x \in U$ und eine glatte Funktion $f : U \to \mathbb{R}^{n-k}$ gibt, sodass $M \cap U = \{y \in U : f(y) = 0\}$ gilt und für alle $y \in M \cap U$ die Ableitung $Df(y) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-k}$ surjektiv ist.

Beispiel. Betrachten wir die Einheitssphäre $M := S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$, die gegeben ist als $\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$. Dann können wir M leicht auf jede der obigen Arten beschreiben: Zunächst ist nach Definition $M = f^{-1}(0)$, wobei $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ durch $f(x) := \langle x, x\rangle - 1$ gegeben ist. Offensichtlich ist f glatt, und nach 1.5 ist $Df(x)(y) = 2\langle x, y\rangle$, also $Df(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ surjektiv für alle $x \in M$. Somit ist M lokal eine reguläre $(n-1)$–dimensionale Nullstellenmenge.

Sei nun $x \in M$ und sei $E = x^\perp$ der Orthogonalraum zu x, der ja ein $n-1$–dimensionaler Teilraum von $\mathbb{R}^n$ ist. Außerdem ist natürlich $E^\perp = \mathbb{R}x$. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ definiert durch $U = \{y \in \mathbb{R}^n : \langle x, y\rangle > 0\}$, also der offene Halbraum, in dem x liegt. Setzt man $V = \{z \in E : \|z\| < 1\} \subset E$ und definiert $g : V \to E^\perp$ durch $g(z) := \sqrt{1 - \|z\|^2}x$, dann erhält man eine Darstellung von M als lokaler Funktionsgraph. Für eine lokale Parametrisierung von M kann man einfach $\phi : V \to M$, $\phi(z) = z + \sqrt{1 - \|z\|^2}x$ verwenden. Klarerweise ist ϕ eine Bijektion $V \to M \cap U$ und für $z, w \in V$ erhält man

$D\phi(z)(w) = w - \frac{\langle z,w\rangle}{\sqrt{1-\|z\|^2}}x$, was wegen $\langle w, x\rangle = 0$ offensichtlich injektiv ist. Die inverse Funktion $M \cap U \to V$ zu ϕ ist gerade die Einschränkung der Orthogonalprojektion, also ist $\phi : V \to M \cap U$ ein Homöomorphismus.

Um eine lokale Trivialisierung zu erhalten, gehen wir wie folgt vor: Ein Element $y \in U$ kann man eindeutig längs der Geraden durch Null auf M, und dann orthogonal auf V projizieren. Diese Abbildung ist gegeben durch $y \mapsto \frac{y}{\|y\|} - \frac{\langle y,x\rangle}{\|y\|}x$. Zwei Punkte gehen unter dieser Abbildung genau dann auf den selben Punkt von V, wenn sie auf einer Geraden durch Null liegen. Damit kann man aber solche Punkte durch ihre Norm unterscheiden. Das motiviert die Abbildung $\tilde{\Psi} : U \to V \times \{\lambda x : \lambda > -1\}$, die definiert ist durch $\tilde{\Psi}(y) := \left(\frac{y}{\|y\|} - \frac{\langle y,x\rangle}{\|y\|}x, (\langle y, y\rangle - 1)x\right)$. Aus der Beschreibung folgt leicht, dass $(z, \lambda x) \mapsto \sqrt{\lambda + 1}(z + \sqrt{1 - \langle z, z\rangle}x)$ invers zu $\tilde{\Psi}$ ist. Offensichtlich sind beide Abbildungen glatt, also ist $\tilde{\Psi} : U \to V \times \{\lambda x : \lambda > -1\}$ ein Diffeomorphismus von U auf eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$, und nach Konstruktion ist $\tilde{\Psi}(M \cap U) = V \times \{0\} = (V \times \{\lambda x : \lambda > -1\}) \cap E^\perp$.

2.2. Inverser und impliziter Funktionensatz. Um zu beweisen, dass alle Bedingungen aus 2.1 an eine “schöne” Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ äquivalent sind, benötigen wir ein zentrales Resultat aus der Analysis, den inversen Funktionensatz, und eine Folgerung daraus, den impliziten Funktionensatz. Ein Beweis des inversen Funktionensatzes würde den Rahmen dieser Vorlesung sprengen, wir geben aber einen Beweis des impliziten Funktionensatzes.

Satz (Inverser Funktionensatz). *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge, $x \in U$ ein Punkt und $f : U \to \mathbb{R}^n$ eine glatte Funktion. Falls die Ableitung $Df(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ bijektiv ist, dann gibt es eine offene Umgebungen V von x und W von $f(x)$, sodass $f(V) = W$ gilt und die Einschränkung $f|_V : V \to W$ ein Diffeomorphismus ist.*

Der implizite Funktionensatz sagt im Wesentlichen, dass *reguläre* glatte Gleichungen lokal glatte Lösungen besitzen. Betrachten wir eine glatte Funktion f von einer offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^{n-k}$. Nehmen wir an, dass $E \subset \mathbb{R}^n$ ein k–dimensionaler Teilraum mit orthogonalem Komplement $E^\perp$ ist. Für einen Punkt $x \in U$ gibt es dann eindeutige Elemente $a \in E$ und $b \in E^\perp$, sodass $x = a + b$ gilt. Die Ableitung $Df(x)$ ist eine lineare Abbildung $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-k}$, und wir definieren $D_1f(x) : E \to \mathbb{R}^{n-k}$ und $D_2f(x) : E^\perp \to \mathbb{R}^{n-k}$ als die Einschränkungen von $Df(x)$ auf E bzw. $E^\perp$.

Korollar (Impliziter Funktionensatz). *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}^{n-k}$ eine glatte Funktion und $E \subset \mathbb{R}^n$ ein k–dimensionaler Teilraum mit orthogonalem Komplement $E^\perp$. Sei $x \in U$ ein Punkt mit $f(x) = 0$, und $x = a + b$ die eindeutige Zerlegung mit $a \in E$ und $b \in E^\perp$. Dann gilt: Falls $D_2f(x) : E^\perp \to \mathbb{R}^{n-k}$ ein Isomorphismus ist, dann gibt es offene Umgebungen V von a in E und W von b in $E^\perp$, sodass $\{v + w : v \in V, w \in W\} \subset U$ und eine glatte Funktion $\phi : V \to W$, sodass für $v \in V$ das Paar $v + \phi(v)$ die eindeutige Lösung von $f(v + w) = 0$ mit $w \in W$ ist.*

Beweis. Definiere $F : \mathbb{R}^n \to E \times \mathbb{R}^{n-k}$ durch $F(x_1+x_2) := (x_1, f(x_1, x_2))$ für $x_1 \in E$ und $x_2 \in E^\perp$. Die Ableitung $DF(x)$ ist eine lineare Abbildung $E \oplus E^\perp \to E \times \mathbb{R}^{n-k}$, die für $v \in E$ und $w \in E^\perp$ offensichtlich durch $DF(x)(v+w) = (v, D_1f(x)(v)+D_2f(x)(w))$ gegeben ist. Nach Voraussetzung ist $D_2f(x) : E^\perp \to \mathbb{R}^{n-k}$ surjektiv, also ist $DF(x)$ surjektiv, also aus Dimensionsgründen ein linearer Isomorphismus. Nach dem inversen Funktionensatz finden wir offene Umgebungen $\tilde{V} \subset U$ von x und $\tilde{W}$ von $F(x) = (a, 0)$ und eine glatte Funktion $\Phi : \tilde{W} \to \tilde{V}$, die invers zu F ist. Ohne Beschränkung der

Allgemeinheit dürfen wir annehmen, dass $\tilde{V} = \tilde{V}_1 \times W$ für offene Umgebungen $\tilde{V}_1$ von a und W von b ist. Setzt man nun $V := \{v \in E : (v, 0) \in \tilde{W}\}$, dann ist V eine offene Umgebung von a und wegen $F(v+w) = (v, f(v, w))$ ist $V \subset \tilde{V}_1$. Nach Konstruktion muss $\Phi(v, w) = v + \tilde{\Phi}(v, w)$ für eine glatte Funktion $\tilde{\Phi} : \tilde{W} \to E^\perp$ gelten, und wir definieren $\phi : V \to W$ durch $\phi(v) := \tilde{\Phi}(v, 0)$. Für $v \in V$ und $w \in W$ ist $v+w \in \tilde{V}$ und $f(v+w) = 0$ ist äquivalent zu $F(v + w) = (v, 0)$ und damit zu $v + w = \Phi(v, 0) = v + \phi(v)$. □

Der implizite Funktionensatz sagt also gerade, dass unter der Bedingung, dass $D_2 f(x)$ ein Isomorphismus ist, die implizite Gleichung $f(v + w) = 0$ lokal um x äquivalent zur expliziten Gleichung $w = \phi(v)$ für eine glatte Funktion ϕ ist.

2.3. Teilmannigfaltigkeiten von $\mathbb{R}^n$. Mit Hilfe der beiden grundlegenden Resultate aus 2.2 können wir nun beweisen, dass alle Bedingungen an “schöne Teilmengen” von $\mathbb{R}^n$ aus 2.1 äquivalent sind.

Satz. *Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Teilmenge. Dann sind äquivalent:*
(1) M besitzt lokale k–dimensionale Trivialisierungen.
(2) M ist lokal ein k–dimensionaler glatter Funktionsgraph.
(3) M besitzt lokale k–dimensionale Parametrisierungen.
(4) M ist lokal eine k–dimensionale reguläre Nullstellenmenge.

Beweis. (1) $\implies$ (4): Sei $x \in M$ ein Punkt, U eine offene Umgebung von x in $\mathbb{R}^n$ und $\Psi : U \to V \subset \mathbb{R}^n$ ein Diffeomorphismus, sodass $\Psi(M \cap U) = V \cap E$ für einen k–dimensionalen Teilraum $E \subset \mathbb{R}^n$ gilt. Definiere $f : U \to \mathbb{R}^{n-k}$ durch $f = \pi \circ \Psi$, wobei $\pi : \mathbb{R}^n \to E^\perp$ die Orthogonalprojektion ist. Dann ist f offensichtlich glatt und nach Konstruktion ist $M \cap U = f^{-1}(\{0\})$. Nach der Kettenregel ist $Df(y) = D\pi(\Psi(y)) \circ D\Psi(y)$ für alle $y \in M \cap U$. Da π linear ist, ist $D\pi(\Psi(y)) = \pi$ und damit insbesondere surjektiv, und weil Ψ ein Diffeomorphismus ist, ist $D\Psi(y)$ ein linearer Isomorphismus. Damit ist $Df(y)$ surjektiv, also M lokal reguläre Nullstellenmenge.
(4) $\implies$ (2): Sei $x \in M$ ein Punkt, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen mit $x \in U$ und $f : U \to \mathbb{R}^{n-k}$ glatt, sodass $M \cap U = f^{-1}(\{0\})$ und $Df(y) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-k}$ surjektiv für alle $y \in M \cap U$. Dann ist $E := \operatorname{Ker}(Df(x))$ ein k–dimensionaler Teilraum von $\mathbb{R}^n$, also das orthogonale Komplement $E^\perp$ ein $(n - k)$–dimensionaler Teilraum von $\mathbb{R}^n$. Nach Konstruktion ist $Df(x)|_{E^\perp} : E^\perp \to \mathbb{R}^{n-k}$ injektiv, also aus Dimensionsgründen ein linearer Isomorphismus. Sind also $a \in E$ und $b \in E^\perp$ die eindeutigen Elemente, sodass $x = a + b$ gilt, dann gibt es nach dem impliziten Funktionensatz Umgebungen V von a in E und W von b in $E^\perp$ und eine glatte Funktion $g : V \to W$, sodass $M \cap (V \times W) = f^{-1}(\{0\}) \cap V \times W = \{v + g(v) : v \in V\}$ und damit erhalten wir eine Darstellung von M als lokaler glatter Funktionsgraph.
(2) $\implies$ (3): Sei $x \in M$ ein Punkt, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen mit $x \in U$, $E \subset \mathbb{R}^n$ ein k–dimensionaler Teilraum, $a \in E$ und $b \in E^\perp$ die eindeutigen Elemente, sodass $x = a + b$ gilt, V eine offene Umgebung von a in E und $g : V \to E^\perp$ glatt, sodass $M \cap U = \{v + g(v) : v \in V\}$. Dann definiere $\phi : V \to \mathbb{R}^n$ durch $\phi(v) := v + g(v)$. Offensichtlich ist ϕ eine glatte Funktion und eine Bijektion von V auf $M \cap U$. Außerdem ist die Einschränkung der Orthogonalprojektion $\mathbb{R}^n \to E$ auf $M \cap U$ eine stetige Inverse zu ϕ, also $\phi : V \to M \cap U$ ein Homöomorphismus. Schließlich ist $D\phi(v)(w) = w + Dg(v)(w)$, und wegen $w \in E$ und $Dg(v)(w) \in E^\perp$ ist $D\phi(v)$ injektiv. Somit erhalten wir eine lokale Parametrisierung von M.
(3) $\implies$ (1): Sei $x \in M$ ein Punkt, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen mit $x \in U$, $V \subset \mathbb{R}^k$ offen und $\phi : V \to U$ eine lokale Parametrisierung von M. Nehmen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, dass $0 \in V$ und $\phi(0) = x$ gilt. Dann ist das Bild $\operatorname{Im}(D\phi(0)) =: E$

ein k–dimensionaler Teilraum von $\mathbb{R}^n$, und wir bezeichnen mit $E^\perp$ das orthogonale Komplement. Definiere nun $\Phi : V \times E^\perp \to \mathbb{R}^n$ durch $\Phi(v,w) := \phi(v) + w$. Dann ist $\Phi(0,0) = x$ und $D\Phi(0,0)(v,w) = D\phi(0)(v) + w$. Nach Konstruktion ist $D\phi(0)(v) \in E$ und $w \in E^\perp$, also impliziert $D\Phi(0,0)(v,w) = 0$ automatisch $D\phi(0)(v) = 0$ und $w = 0$. Nach Voraussetzung ist aber $D\phi(0)$ injektiv, also ist auch $D\Phi(0,0)$ injektiv, also aus Dimensionsgründen ein linearer Isomorphismus.

Nach dem inversen Funktionensatz finden wir offene Nullumgebungen V_1 in V und V_2 in $E^\perp$ und eine offene Umgebung W von x, sodass $\Phi : V_1 \times V_2 \to W$ ein Diffeomorphismus ist. Da $\phi : V \to M \cap U$ ein Homöomorphismus ist, finden wir eine offene Teilmenge $\tilde{W}$ von $\mathbb{R}^n$, sodass $\phi(V_1) = M \cap \tilde{W}$ gilt. Betrachte nun die offene Teilmenge $\tilde{U} := U \cap W \cap \tilde{W}$ in $\mathbb{R}^n$. Nach Konstruktion definiert $\Psi := \Phi^{-1}|_{\tilde{U}}$ einen Diffeomorphismus auf die offene Teilmenge $\tilde{V} := \Psi(\tilde{U}) \subset V \times E^\perp \subset \mathbb{R}^n$. Für $y \in M \cap \tilde{U}$ ist $y \in \tilde{W} \cap M = \phi(V_1)$, also gibt es einen Punkt $v \in V_1$, sodass $y = \phi(v)$ ist. Außerdem ist $y \in W$, also ist $\phi(v) + 0$ die einzige Darstellung von y in der Form $\phi(v') + w$ für $v' \in V_1$ und $w \in V_2$, und damit ist $\Psi(y) = (v, 0)$. Liegt umgekehrt $(v, 0)$ in $\tilde{V}$, dann ist $\Phi(v, 0) = \phi(v)$ in $\tilde{U}$, also sogar in $\tilde{U} \cap M$. Somit ist $\Psi(M \cap \tilde{U}) = \tilde{V} \cap E$, also Ψ eine lokale Trivialisierung. □

Definition. Eine k–dimensionale *Teilmannigfaltigkeit* von $\mathbb{R}^n$ ist eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$, die die äquivalenten Bedingungen des Satzes erfüllt.

Bemerkung. (1) Um eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ als k–dimensionale Teilmannigfaltigkeit zu identifizieren genügt es natürlich, eine der im Satz angegebenen Bedingungen zu verifizieren. Man sollte auch bedenken, dass es genügt, die Bedingungen jeweils für eine Familie von Teilmengen $U_i \subset \mathbb{R}^n$ zu verifizieren, sodass $M = \cup(M \cap U_i)$ gilt.
(2) Als Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ erbt jede k–dimensionale Teilmannigfaltigkeit eine Topologie: Eine Teilmenge $U \subset M$ ist genau dann offen, wenn sie von der Form $M \cap \tilde{U}$ für eine offene Teilmenge $\tilde{U}$ von $\mathbb{R}^n$ ist.

Beispiel. (1) Ist $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge, dann ist U eine n–dimensionale Teilmannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$, weil die Identitätsabbildung $\mathrm{id} : U \to U$ eine Parametrisierung liefert. Damit enthält die Analysis auf Teilmannigfaltigkeiten die aus den Grundvorlesungen bekannte Analysis auf offenen Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ als Spezialfall. Allgemeiner ist jede offene Teilmenge U einer Teilmannigfaltigkeit M selbst eine Teilmannigfaltigkeit. Um das zu sehen, kann man etwa lokale Parametrisierungen für M zu lokalen Parametrisierungen für U einschränken.

Betrachten wir etwa den Raum $M_n(\mathbb{R})$ der reellen $n \times n$–Matrizen als $\mathbb{R}^{n^2}$, dann ist die Determinantenfunktion $\det : \mathbb{R}^{n^2} \to \mathbb{R}$ stetig, also $GL(n,\mathbb{R}) := \{A \in M_n(\mathbb{R}) : \det(A) \neq 0\}$ eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^{n^2}$, also eine Teilmannigfaltigkeit. Weil $\det(A)$ genau dann ungleich Null ist, wenn die Spaltenvektoren von A eine Basis von $\mathbb{R}^n$ bilden, haben wir damit die Menge aller Basen von $\mathbb{R}^n$ zu einer Teilmannigfaltigkeit gemacht.
(2) Aus Beispiel 2.1 wissen wir, dass die Sphäre S^{n-1} eine $(n-1)$–dimensionale Teilmannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ ist. Analog sieht man leicht, dass für beliebige positive reelle Zahlen $a_1, \dots, a_n$ die Funktion $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x^1, \dots, x^n) = \frac{(x^1)^2}{a_1^2} + \dots + \frac{(x^p)^2}{a_p^2} - \frac{(x^{p+1})^2}{a_{p+1}^2} - \dots - \frac{(x^n)^2}{a_n^2} - 1$ regulär ist. Damit sieht man, dass Ellipsoide und ein– und zweischalige Hyperboloide sowie ihre höherdimensionalen Analoga $n-1$–dimensionale Teilmannigfaltigkeiten von $\mathbb{R}^n$ sind.
(3) Das (offene) Möbiusband. Betrachte die Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^3$,

$$M := \{(2\cos(t) + s\cos(t/2), 2\sin(t) + s\cos(t/2), s\sin(t/2)) : t \in \mathbb{R}, s \in (-1, 1)\}.$$

Für $t \in (a,b)$ mit $b-a \leq 2\pi$ definiert die angegebene Formel eine injektive Abbildung $\phi : (a,b)\times(-1,1) \to M$, und man verifiziert leicht (siehe Übungen), dass dies eine lokale Parametrisierung von M liefert. Das Möbiusband hat nur eine Seite und ist damit das einfachste Beispiel einer nicht orientierbaren Mannigfaltigkeit, siehe 4.5.

(4) Produkte: Ist $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k–dimensionale und $N \subset \mathbb{R}^m$ eine ℓ–dimensionale Teilmannigfaltigkeit, dann ist $M \times N \subset \mathbb{R}^{n+m}$ eine $k+\ell$–dimensionale Teilmannigfaltigkeit. Ist nämlich $(x,y) \in M \times N$, $\Psi_1 : U_1 \to V_1$ eine lokale Trivialisierung von M um x und $\Psi_2 : U_2 \to V_2$ eine lokale Trivialisierung von N um y, dann ist $\Psi : U_1 \times U_2 \to V_1 \times V_2$, $\Psi(a,b) := (\Psi_1(a), \Psi_2(b))$ eine lokale Trivialisierung von $M \times N$ um (x,y).

(5) Betrachten wir $GL(n,\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^{n^2}$ wie in Beispiel (1) und die (offensichtlich glatte) Funktion $A \mapsto \det(A) - 1$. Die Richtungsableitung dieser Funktion im Punkt A in Richtung A ist gegeben durch $\frac{d}{dt}|_0(\det(A+tA)-1) = \frac{d}{dt}|_0((1+t)^n \det(A)-1) = n\det(A)$. Damit ist aber $SL(n,\mathbb{R}) := \{A \in M_n(\mathbb{R}) : \det(A) = 1\}$ eine Teilmannigfaltigkeit in $\mathbb{R}^{n^2}$ der Dimension n^2-1.

Analog können wir auf $GL(n,\mathbb{R})$ die Funktion $f(A) := AA^t - \mathbb{I}$ betrachten, wobei $\mathbb{I}$ die Einheitsmatrix bezeichnet. Offensichtlich ist $f(A)^t = f(A)$, also können wir f als Funktion in den Vektorraum $M_n^{\text{symm}}(\mathbb{R})$ der symmetrischen reellen $n \times n$–Matrizen betrachten. Durch Anordnen der Eintragungen über der Hauptdiagonale identifizieren wir $M_n^{\text{symm}}(\mathbb{R})$ mit $\mathbb{R}^{n(n+1)/2}$. Da die Abbildung $(A,B) \mapsto AB^t$ bilinear ist, folgt aus 1.5 sofort, dass $Df(A)(B) = AB^t + BA^t$ gilt. Ist nun S eine beliebige symmetrische Matrix, also $S^t = S$ und A orthogonal, also $A^t = A^{-1}$ und damit $f(A) = 0$, dann setze $B := \frac{1}{2}SA$. Dann ist $Df(A)(B) = \frac{1}{2}(AA^tS^t + SAA^t) = \frac{1}{2}(S^t + S) = S$, also $Df(A)$ surjektiv. Somit ist der Raum $O(n)$ aller orthogonalen $n \times n$–Matrizen eine Teilmannigfaltigkeit der Dimension $n(n-1)/2$ von $\mathbb{R}^{n^2}$. In Termen von Basen bedeutet das gerade, dass wir die Menge aller Orthonormalbasen von $\mathbb{R}^n$ zu einer Teilmannigfaltigkeit gemacht haben.

Glatte Funktionen

2.4. Wir können nun (ohne zu wissen, wie man Funktionen auf Teilmannigfaltigkeiten differenziert) definieren, was eine glatte Funktion zwischen Teilmannigfaltigkeiten ist. Eine offensichtliche Idee ist es, glatte Funktionen auf einer Teilmannigfaltigkeit einfach als Einschränkungen von glatten Funktionen auf dem umgebenden Raum zu definieren. Zieht man noch die Überlegungen zur Lokalität aus 2.1 in Betracht, dann erhält man:

Definition. Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k–dimensionale Teilmannigfaltigkeit.

(1) Eine Funktion $f : M \to \mathbb{R}^m$ heißt *glatt* oder C^∞, wenn es für jeden Punkt $x \in M$ eine offene Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$ mit $x \in U$ und eine glatte Funktion $\tilde{f} : U \to \mathbb{R}^m$ gibt, sodass $\tilde{f}(y) = f(y)$ für alle $y \in M \cap U$ gilt.

(2) Ist $N \subset \mathbb{R}^m$ eine ℓ–dimensionale Teilmannigfaltigkeit, dann heißt eine Funktion $f : M \to N$ *glatt*, wenn f glatt als Funktion $M \to \mathbb{R}^m$ ist. (Man beachte, dass dafür die Funktion $\tilde{f}$ aus (1) nicht Werte in N haben muss.) Die Menge aller glatten Funktion $f : M \to N$ wird mit $C^\infty(M,N)$ bezeichnet.

(3) Ein *Diffeomorphismus* von M nach N ist eine glatte bijektive Funktion $f : M \to N$, sodass auch die inverse Funktion $f^{-1} : N \to M$ glatt ist. M und N heißen *diffeomorph*, falls es einen Diffeomorphismus $f : M \to N$ gibt.

(4) Ein *lokaler Diffeomorphismus* ist eine glatte Funktion $f : M \to N$, sodass für jeden Punkt $x \in M$ offene Umgebungen U von x in M und V von $f(x)$ in N existieren, sodass $f|_U : U \to V$ ein Diffeomorphismus ist.

Beispiel. (1) Betrachten wir den Raum $M_n(\mathbb{R})$ der reellen $n \times n$–Matrizen wieder als $\mathbb{R}^{n^2}$, und die Matrizenmultiplikation $\mu : M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$. Für $A = (a_{ij})$ und $B = (b_{ij})$ ist die i, j–Komponente von AB gegeben durch $\sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}$, also offensichtlich eine glatte Funktion in den Koordinaten a_{ij} und b_{ij}. Schränken wir auf die offenen Teilmenge $GL(n, \mathbb{R})$ ein, so erhalten wir (weil das Produkt invertierbarer Matrizen wieder invertierbar ist) die Matrizenmultiplikation als glatte Abbildung $GL(n, \mathbb{R}) \times GL(n, \mathbb{R}) \to GL(n, \mathbb{R})$. Die Teilmannigfaltigkeiten $SL(n, \mathbb{R})$ und $O(n)$ aus Beispiel (5) von 2.3 sind ebenfalls abgeschlossen unter der Matrizenmultiplikation. Nun ist aber $GL(n, \mathbb{R}) \times GL(n, \mathbb{R})$ eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^{2n^2}$, die sowohl $SL(n, \mathbb{R}) \times SL(n, \mathbb{R})$, als auch $O(n) \times O(n)$ enthält. Damit sehen wir, dass die Matrizenmultiplikation glatte Abbildungen $\mu : SL(n, \mathbb{R}) \times SL(n, \mathbb{R}) \to SL(n, \mathbb{R})$ und $\mu : O(n) \times O(n) \to O(n)$ definiert. Dies macht $GL(n, \mathbb{R})$, $SL(n, \mathbb{R})$ und $O(n)$ zu Beispielen von *Lie Gruppen*, also glatten Mannigfaltigkeiten mit einer glatten Gruppenstruktur. Lie Gruppen spielen in weiten Teilen der Mathematik (und der theoretischen Physik) eine bedeutende Rolle als Symmetriegruppen.
(2) Die Funktion $p : \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, $p(r, \theta) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$ aus 1.8 ist ein lokaler Diffeomorphismus, aber kein Diffeomorphismus.

Um den Begriff der glatten Funktion besser zu verstehen, führen wir die Begriffe von Karten und lokalen Koordinaten auf Teilmannigfaltigkeiten ein. Das ebnet auch den Weg zur Definition von abstrakten Mannigfaltigkeiten.

Definition. Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k–dimensionale Teilmannigfaltigkeit. Eine *Karte* (U, u) für M ist ein Diffeomorphismus u von einer offenen Teilmenge $U \subset M$ auf eine offene Teilmenge $V = u(U)$ von $\mathbb{R}^k$.

Sei nun $u : U \to V$ eine Karte für die Teilmannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$. Da u Werte in $\mathbb{R}^k$ hat, können wir $u(x) = (u^1(x), \dots, u^k(x))$ schreiben, und die Koordinatenfunktionen $u^i : U \to \mathbb{R}$ sind offensichtlich glatt für $i = 1, \dots, k$. Diese Funktionen heißen die *lokalen Koordinaten* zur Karte (U, u) auf M. Das folgende Lemma zeigt, wie man Karten finden kann.

Lemma. *Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k–dimensionale Teilmannigfaltigkeit und $\tilde{U} \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\phi : V \to \tilde{U}$ eine lokale Parametrisierung für M, und setze $U := M \cap \tilde{U}$. Dann ist $(U, \phi^{-1} : U \to V)$ eine Karte für M.*

Beweis. Nach Voraussetzung ist ϕ bijektiv und glatt als Funktion $V \to \mathbb{R}^n$, also ist ϕ glatt als Funktion $V \to U$. Damit müssen wir nur noch zeigen, dass $\phi^{-1} : U \to V$ ebenfalls glatt ist. Nach Teil (3) $\implies$ (1) des Beweises von Satz 2.3 finden wir aber für $x \in U$ einen Teilraum $E^\perp$ sowie offene Umgebungen W von $(\phi^{-1}(x), 0)$ in $V \times E^\perp$ und $\tilde{W}$ von x, sodass $\Phi(y, w) := \phi(y) + w$ ein Diffeomorphismus $W \to \tilde{W}$ ist. Damit können wir aber $\phi^{-1} : \tilde{W} \cap M \to \mathbb{R}^k$ als $\mathrm{pr}_1 \circ \Phi^{-1}$ schreiben, wobei $\mathrm{pr}_1 : V \times E^\perp \to V$ die erste Projektion bezeichnet. Damit ist aber ϕ^{-1} glatt, und die Behauptung folgt. □

Ist umgekehrt $(U, u : U \to u(U))$ eine Karte für die Teilmannigfaltigkeit M, dann ist $u(U) \subset \mathbb{R}^k$ offen. Wählen wir eine offene Teilmenge $\tilde{U} \subset \mathbb{R}^n$, sodass $U = \tilde{U} \cap M$ gilt und betrachten die Funktion $u^{-1} : u(U) \to \tilde{U} \subset \mathbb{R}^n$. Da u ein Diffeomorphismus ist ist diese Abbildung ein Homöomorphismus, glatt und die Ableitung in jedem Punkt $y \in u(U)$ ist injektiv. Damit ist u^{-1} ein lokale Parametrisierung, und Karten entsprechen genau den Inversen von lokalen Parametrisierungen.

Sei nun $f : M \to N$ eine stetige Funktion zwischen zwei Teilmannigfaltigkeiten, $x \in M$ ein Punkt (U, u) eine Karte für M mit $x \in U$ und (V, v) eine Karte für N

mit $f(x)$ in V. Dann ist $f^{-1}(V)$ offen in M, also $u(f^{-1}(V)) =: W$ offen in $\mathbb{R}^k$, und wir betrachten die Funktion $v \circ f \circ u^{-1} : W \to v(V)$. Nach Konstruktion bildet diese Funktion die offene Teilmenge $W \subset \mathbb{R}^k$ in die offene Teilmenge $v(V) \subset \mathbb{R}^\ell$ ab. Sind $(f^1, \dots, f^\ell)$ die Koordinaten von f, $(u^1, \dots, u^k)$ die lokalen Koordinaten zu (U, u) auf M und $(v^1, \dots, v^\ell)$ die lokalen Koordinaten zu (V, v) auf N, dann gilt nach Definition gerade $v^j(f(x)) = f^j(u^1(x), \dots, u^k(x))$, oder kurz $v^j = f^j(u^1, \dots, u^k)$. Das Tupel $(f^1, \dots, f^\ell)$ heißt die *lokale Koordinatendarstellung* von f bezüglich der beiden Karten.

Satz. *Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k–dimensionale und $N \subset \mathbb{R}^m$ eine ℓ–dimensionale Teilmannigfaltigkeit. Für eine Funktion $f : M \to N$ sind äquivalent*
(1) f ist glatt.
(2) f ist stetig und für jeden Punkt $x \in M$ gibt es eine Karte (U, u) für M mit $x \in U$ und eine Karte (V, v) für N mit $f(x) \in V$, sodass die Funktion $v \circ f \circ u^{-1} : u(f^{-1}(V) \cap U) \to v(V)$ glatt ist.
(3) f ist stetig und für jeden Punkt $x \in M$, jede Karte (U, u) für M mit $x \in U$ und jede Karte (V, v) für N mit $f(x) \in V$, ist $v \circ f \circ u^{-1} : u(f^{-1}(V) \cap U) \to v(V)$ glatt.
(4) f ist stetig und hat für geeignete Karten glatte lokale Koordinatendarstellungen.
(5) f ist stetig und hat für beliebige Karten glatte lokale Koordinatendarstellungen.

Beweis. Offensichtlich gilt (2) $\iff$ (4) und (3) $\iff$ (5) sowie (3) $\implies$ (2). Andererseits sind glatte Funktionen offensichtlich stetig und die Komposition glatter Funktionen ist glatt, also folgt (1) $\implies$ (3). Somit bleibt nur noch (2) $\implies$ (1) zu zeigen. Nehmen wir also an, dass (2) gilt, also $v \circ f \circ u^{-1}$ glatt ist. Nach Voraussetzung ist $u : U \to u(U)$ glatt, also finden wir eine offene Umgebung $\tilde{W}$ von x in $\mathbb{R}^n$ und eine glatte Funktion $\tilde{u} : \tilde{W} \to \mathbb{R}^k$, sodass $\tilde{u}|_{\tilde{W} \cap U} = u$ gilt. Nun ist $W := \tilde{u}^{-1}(u(U))$ eine offene Umgebung von x in $\mathbb{R}^n$ und $\tilde{u} : W \to u(U)$ glatt. Andererseits ist auch $v^{-1} : v(V) \to V$ glatt, und damit ist $\tilde{f} := v^{-1} \circ (v \circ f \circ u^{-1}) \circ \tilde{u} : W \to V$ eine glatte Funktion. Für $y \in W \cap M$ ist $\tilde{u}(y) = u(y)$, also $\tilde{f}(y) = f(y)$, und damit folgt die Behauptung. □

Beispiel. Betrachte das Möbiusband M aus Beispiel (3) von 2.3 und die Einheitssphäre $S^1 \subset \mathbb{R}^2$. Definiere $f : M \to S^1$ durch

$$f(2\cos(t) + s\cos(t/2), 2\sin(t) + s\cos(t/2), s\sin(t/2)) = (\cos(t), \sin(t)),$$

also die Projektion auf den zentralen Kreis. Wählt man eine Parametrisierung $\phi : (a, b) \times (-1, 1) \to M$ wie in Beispiel (3) von 2.3, und eine Parametrisierung für S^1 durch $\psi : (a, b) \to S^1$, $\psi(t) = (\cos(t), \sin(t))$, dann ist die entsprechende Funktion $\psi^{-1} \circ f \circ \phi : (a, b) \times (-1, 1) \to (a, b)$ gerade die erste Projektion. Damit ist $f : M \to S^1$ eine glatte Funktion.

2.5. Abstrakte Mannigfaltigkeiten. Die Überlegungen über Karten aus dem letzten Abschnitt führen direkt zum Begriff der abstrakten Mannigfaltigkeit. Im Prinzip ist eine abstrakte Mannigfaltigkeit durch die Existenz von geeigneten Karten definiert. Komplikationen ergeben sich dadurch, dass man einerseits um Pathologien zu vermeiden die Topologie etwas einschränken muss. Andererseits sollen alle Karten gleichberechtigt sein, was die Definition ebenfalls etwas verkompliziert.

Definition. Sei M ein topologischer Raum.
(1) Eine *Karte* (U, u) auf M ist eine offene Teilmenge $U \subset M$ zusammen mit einem Homöomorphismus $u : U \to u(U)$ auf eine offene Teilmenge $u(U) \subset \mathbb{R}^k$.
(2) Zwei Karten (U, u) und (V, v) auf M heißen *verträglich*, falls die *Kartenwechselabbildungen* $v \circ u^{-1} : u(U \cap V) \to v(U \cap V)$ und $u \circ v^{-1} : v(U \cap V) \to u(U \cap V)$ glatt sind. (Da wir hier eine Funktion zwischen offenen Teilmengen von $\mathbb{R}^k$ vor uns haben, macht

die Glattheit keine Probleme. Außerdem sind die Karten automatisch verträglich, falls $U \cap V = \emptyset$ gilt.)
(3) Ein *Atlas* auf M ist eine Familie $\{(U_i, u_i) : i \in I\}$ von paarweise verträglichen Karten für M, sodass $M = \cup_{i\in I} U_i$ gilt.
(4) Zwei Atlanten auf M heißen *äquivalent*, falls jede Karte des einen Atlas mit jeder Karte des anderen Atlas verträglich ist.
(5) Eine (abstrakte) *glatte Mannigfaltigkeit* ist ein separabler, metrisierbarer topologischer Raum M zusammen mit einer Äquivalenzklasse von Atlanten auf M.

Beispiel. Der *reelle projektive Raum* $\mathbb{R}P^n$ ist definiert als die Menge aller Geraden durch Null in $\mathbb{R}^{n+1}$. Man kann $\mathbb{R}P^n$ als die Menge der Äquivalenzklassen der Äquivalenzrelation $x \sim y :\iff \exists \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : y = \lambda x$ auf $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ betrachten. Damit erhält man eine natürliche Abbildung $\pi : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}P^n$, die jedem Punkt seine Äquivalenzklasse zuordnet. In der Topologie lernt man, dass es eine eindeutige Topologie auf $\mathbb{R}P^n$ gibt, sodass eine Funktion f von $\mathbb{R}P^n$ in einen topologischen Raum X genau dann stetig ist, wenn $f \circ \pi : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to X$ stetig ist (die "Quotiententopologie"). Für einen Punkt $(x^1, \dots, x^{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ schreibt man $[x^1 : \dots : x^{n+1}] := \pi(x) \in \mathbb{R}P^n$ ("homogene Koordinaten").

Setzen wir nun $U_i := \{[x^1 : \dots : x^{n+1}] \in \mathbb{R}P^n : x^i \neq 0\}$, dann sieht man leicht, dass $U_i \subset \mathbb{R}P^n$ offen ist, und klarerweise ist $\mathbb{R}P^n = U_1 \cup \dots \cup U_{n+1}$. Dann definieren wir $u_i : U_i \to \mathbb{R}^n$ durch $u_i([x^1 : \dots : x^{n+1}]) := (\frac{x^1}{x^i}, \dots, \frac{x^{i-1}}{x^i}, \frac{x^{i+1}}{x^i}, \dots, \frac{x^{n+1}}{x^i})$. Offensichtlich ist u_i wohldefiniert und nach Konstruktion ist $u_i \circ \pi : \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} : x^i \neq 0\} \to \mathbb{R}^n$ stetig, also auch u_i stetig. Eine Inverse zu u_i erhält man durch $(y^1, \dots, y^n) \mapsto \pi(y^1, \dots, y^{i-1}, 1, y^i, \dots, y^n)$, und das ist die Komposition von π mit einer stetigen Funktion, also ebenfalls stetig, also ist $u_i : U_i \to \mathbb{R}^n$ ein Homöomorphismus.

Für $j \neq i$ ist $u_i(U_i \cap U_j) \subset \mathbb{R}^n$ gerade die Menge aller jener Punkte, für die eine Koordinate (und zwar die $(j-1)$–te für $i < j$ und die j–te für $i > j$) $\neq 0$ ist. Betrachten wir nun für $i < j$ die Kartenwechselabbildung $u_j \circ u_i^{-1} : u_i(U_i \cap U_j) \to \mathbb{R}^n$, so ist diese wie folgt gegeben: Wir beginnen mit $(y^1, \dots, y^n)$, wobei $y^{j-1} \neq 0$ gilt. Mit u_i^{-1} bilden wir dieses Element auf $[y^1 : \dots : y^{i-1} : 1 : y^i : \dots : y^n]$ ab. Beachte, dass nun an der j–ten Stelle y^{j-1} steht. Damit ist aber $u_j \circ u_i^{-1}(y^1, \dots, y^n)$ gegeben durch $(\frac{y^1}{y^{j-1}}, \dots, \frac{y^{i-1}}{y^{j-1}}, \frac{1}{y^{j-1}}, \frac{y^i}{y^{j-1}}, \dots, \frac{y^{j-2}}{y^{j-1}}, \frac{y^j}{y^{j-1}}, \dots, \frac{y^n}{y^{j-1}})$ für $j > i+1$ und durch $(\frac{y^1}{y^i}, \dots, \frac{y^{i-1}}{y^i}, \frac{1}{y^i}, \frac{y^{i+1}}{y^i}, \dots, \frac{y^n}{y^i})$, für $j = i+1$. In jedem Fall ist diese Abbildung offensichtlich glatt auf $\{y \in \mathbb{R}^n : y^{j-1} \neq 0\}$. Analog verifiziert man, dass die Kartenwechselabbildung $u_j \circ u_i^{-1}$ für $i > j$ glatt ist. Damit ist $\{(U_i, u_i) : i = 1, \dots, n+1\}$ ein Atlas für $\mathbb{R}P^n$ und macht somit $\mathbb{R}P^n$ zu einer glatten Mannigfaltigkeit.

Auf einer gegebenen Mannigfaltigkeit M betrachtet man dann alle Karten der Atlanten aus der Äquivalenzklasse und erhält lokale Koordinaten und lokale Koordinatendarstellungen von Funktionen wie im Fall von Teilmannigfaltigkeiten. Für zwei Mannigfaltigkeiten M und N definiert man dann eine Funktion $f : M \to N$ als glatt, wenn sie stetig ist, und es für jeden Punkt $x \in M$ eine Karte (U, u) für M mit $x \in U$ und eine Karte (V, v) für N mit $f(x) \in V$ gibt, sodass die Funktion $v \circ f \circ u^{-1} : u(U \cap f^{-1}(V)) \to v(V)$ (zwischen offenen Teilmengen von $\mathbb{R}^k$ und $\mathbb{R}^\ell$) glatt ist. Nach Satz 2.4 liefert das für Teilmannigfaltigkeiten den Glattheitsbegriff, den wir in 2.4 definiert haben. Das Analogon von Satz 2.4 gilt dann auch für abstrakte Mannigfaltigkeiten, d.h. glatte Funktionen haben in beliebigen Karten glatte lokale Koordinatendarstellungen. Aus der Definition folgt sofort, dass für glatte Funktionen $f : M \to N$ und $g : N \to P$ auch die Komposition $g \circ f : M \to P$ glatt ist, weil wir für geeignete Karten $w \circ (g \circ f) \circ u^{-1}$ als $(w \circ g \circ v^{-1}) \circ (v \circ f \circ u^{-1})$ schreiben können.

Beispiel. Betrachten wir die kanonische Abbildung $\pi : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}P^n$ aus dem Beispiel oben. Dann können wir die Identität als Karte auf $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ betrachten. Für die Karte (U_i, u_i) für $\mathbb{R}P^n$ aus dem obigen Beispiel ist $\pi^{-1}(U_i) = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : x^i \neq 0\}$, und die Komposition $u_i \circ \pi$ ist gerade die Abbildung $(x^1, \dots, x^{n+1}) \mapsto (\frac{x^1}{x^i}, \dots, \frac{x^{i-1}}{x^i}, \frac{x^{i+1}}{x^i}, \dots, \frac{x^{n+1}}{x^i})$. Da diese Funktion offensichtlich glatt ist, ist π eine glatte Funktion.

Betrachten wir nun die Einschränkung von π auf die Sphäre $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, dann ist $\pi|_{S^n} : S^n \to \mathbb{R}P^n$ ebenfalls glatt, weil wir die Einschränkung als $\pi \circ i$ schreiben können, wobei $i : S^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ die (offensichtlich glatte) Inklusionsabbildung bezeichnet. Nachdem jede Gerade durch 0 die Sphäre S^n schneidet, sehen wir, dass $\pi|_{S^n}$ surjektiv ist. Insbesondere folgt daraus, dass $\mathbb{R}P^n$ kompakt ist.

Hat man den Begriff der glatten Funktion zwischen Mannigfaltigkeiten, dann hat man auch den Begriff des Diffeomorphismus, und diffeomorphe Mannigfaltigkeiten sind vom Standpunkt der Analysis ununterscheidbar. Mannigfaltigkeiten der Dimension eins und zwei kann man vollständig klassifizieren. Jede eindimensionale Mannigfaltigkeit ist entweder zu $\mathbb{R}$ oder zu S^1 diffeomorph. Für kompakte zweidimensionale Mannigfaltigkeiten gibt es eine Klassifikation durch Orientierbarkeit und das Geschlecht g. Die orientierbare Fläche vom Geschlecht $g = 0$ ist die Sphäre S^2. Für Geschlecht $g = 1$ erhält man den Torus $\mathbb{T}^2$, den man auch so betrachten kann, dass man einen "Henkel" an die Sphäre S^2 klebt. Die Fläche vom Geschlecht g erhält man dann, indem man g solche Henkel an S^2 klebt. Nicht orientierbare Flächen erhält man, indem man an die Projektive Ebene $\mathbb{R}P^2$ endlich viele Henkel klebt (was aber etwas schwerer vorzustellen ist). Diese nicht orientierbaren Flächen sind auch nicht als Teilmannigfaltigkeiten von $\mathbb{R}^3$ (sondern nur von $\mathbb{R}^4$) darstellbar.

In einem gewissen Sinn liefert der abstrakte Mannigfaltigkeitsbegriff nicht wirklich etwas Neues. Nach einem Satz von H. Whitney ist nämlich jede k–dimensionale (abstrakte) glatte Mannigfaltigkeit diffeomorph zu einer Teilmannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{2k}$. Andererseits ist für manche Beispiele, etwa für die projektiven Räume $\mathbb{R}P^k$, eine Darstellung als Teilmenge eines $\mathbb{R}^n$ schwieriger zu konstruieren als ein Atlas, also sind solche Beispiele als abstrakte Mannigfaltigkeiten leichter zu behandeln als als Teilmannigfaltigkeiten.

Andererseits gibt es auch eher seltsame Effekte. Auf manchen einfachen topologischen Räumen gibt es nämlich nicht äquivalente Atlanten, sogenannte exotische differenzierbare Strukturen, etwa auf den Sphären S^n für $n \geq 7$. Auf den Räumen $\mathbb{R}^n$ für $n \neq 4$ gibt es nur eine Äquivalenzklasse von Atlanten (nämlich die übliche), während es auf $\mathbb{R}^4$ überabzählbar viele verschiedene Äquivalenzklassen von Atlanten gibt.

2.6. Partitionen der Eins. Als Nächstes wollen wir zeigen, dass es auf einer Teilmannigfaltigkeit viele glatte reellwertige Funktionen gibt. Weil hinreichend kleine offene Teilmengen so einer Teilmannigfaltigkeit diffeomorph zu offenen Teilmengen von $\mathbb{R}^k$ sind, gibt es immer viele lokal definierte glatte Funktionen. Mit Hilfe von Partitionen der Eins kann man solche Funktionen zu globalen glatten Funktionen ausdehnen, was später auch technisch sehr wichtig sein wird.

Definition. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit.
(1) Für eine glatte Funktion $f : M \to \mathbb{R}^m$ ist der *Träger* $\operatorname{supp}(f)$ von f der Abschluss der Menge $\{x \in M : f(x) \neq 0\}$.

(2) Eine *Partition der Eins* auf M ist eine Familie $\{f_i : i \in I\}$ von glatten reellwertigen Funktionen $f_i : M \to \mathbb{R}$, die folgendes erfüllt:

(i) Die Familie $\{\text{supp}(f_i) : i \in I\}$ ist *lokal endlich*, d.h. für jeden Punkt $x \in M$ gibt es eine offene Umgebung U von x in M die nur mit endlich vielen der Mengen $\text{supp}(f_i)$ nichtleeren Schnitt hat.
(ii) Jede der Funktionen f_i hat Werte in $[0, 1]$.
(iii) Für jedes $x \in M$ ist $\sum_{i\in I} f_i(x) = 1$. Beachte, dass nach Bedingung (i) diese Summe in Wirklichkeit endlich ist.

(3) Sei $\{U_j : j \in J\}$ eine *offene Überdeckung* von M, d.h. jedes U_j ist eine offene Teilmenge von M und $M = \cup_{j\in J} U_j$, und sei $\{f_i : i \in I\}$ eine Partition der Eins auf M. Dann sagt man, $\{f_i\}$ ist der Überdeckung $\{U_j\}$ *untergeordnet*, falls es für jedes $i \in I$ ein $j \in J$ gibt, sodass $\text{supp}(f_i) \subset U_j$ gilt.

Um nicht allzu sehr mit topologischen Problemen kämpfen zu müssen, beweisen wir die Existenz von Partitionen der Eins nur für Teilmannigfaltigkeiten. Mit etwas mehr (topologischem) Aufwand kann man den Fall abstrakter Mannigfaltigkeiten analog behandeln. Ein gewisses Maß an topologischen Überlegungen ist aber auch für Teilmannigfaltigkeiten nötig.

Lemma. *Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Teilmannigfaltigkeit.*
(1) Ist $\{f_i : i \in I\}$ eine Menge glatter Funktionen $f_i : M \to \mathbb{R}$, sodass die Familie $\{\text{supp}(f_i) : i \in I\}$ lokal endlich ist, dann definiert $f(x) := \sum_{i\in I} f_i(x)$ eine glatte Funktion $f : M \to \mathbb{R}$.
(2) Sei $U \subset M$ eine offene Teilmenge und $x \in U$ ein Punkt. Dann gibt es eine glatte Funktion $f : M \to \mathbb{R}$, sodass $f(y) \geq 0$ für alle $y \in M$, $f(x) > 0$ und $\text{supp}(f) \subset U$ gilt.
(3) Sei $\mathcal{U} = \{U_i : i \in I\}$ eine offene Überdeckung von M. Dann gibt es eine abzählbare Teilüberdeckung, d.h. Mengen $U_{i_k} \in \mathcal{U}$ für $k \in \mathbb{N}$, sodass $M = \cup_{k\in\mathbb{N}} U_{i_k}$ gilt. (“M ist ein Lindelöf–Raum”)

Beweis. (1) $f(x)$ ist wohldefiniert, da für jedes $x \in M$ nur endlich viele $f_i(x)$ ungleich Null sind. Ist $x \in M$ beliebig, dann gibt es nach Definition eine offene Teilmenge $U \subset M$ mit $x \in U$, sodass U nur endlich viele der Menge $\text{supp}(f_i)$ schneidet. Sind $f_{i_1}, \dots, f_{i_n}$ die entsprechenden Funktionen, dann ist $f|_U = f_{i_1}|_U + \dots + f_{i_n}|_U$, und das ist offensichtlich glatt, da alle f_i glatt sind. Da Glattheit nach Definition ein lokales Konzept ist, ist f glatt. Gilt $x \notin \text{supp}(f_i)$ für alle $i \in I$, dann finden wir eine offene Umgebung V von x, die nur endlich viele der Menge $\text{supp}(f_i)$ schneidet. Der Durschnitt von V mit den Komplementen dieser abgeschlossenen Mengen ist dann eine offene Umgebung von x, die keine der Mengen $\text{supp}(f_i)$ schneidet. Damit ist $\cup_{i\in I} \text{supp}(f_i)$ abgeschlossen, und somit nach Konstruktion $\text{supp}(f) \subset \cup_{i\in I} \text{supp}(f_i)$.
(2) Sei $\rho : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $\rho(t) = e^{-1/t^2}$ für $t > 0$ und $\rho(t) = 0$ für $t \leq 0$. Wie wir schon in 1.3 bemerkt haben, ist ρ eine glatte Funktion. Außerdem gilt offensichtlich $\rho(t) \geq 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$ und $\rho(t) > 0$ gilt genau dann, wenn $t > 0$ gilt.

Da $U \subset M$ offen ist, gibt es nach Definition eine offene Teilmenge $\tilde{U}$ von $\mathbb{R}^n$, sodass $U = M \cap \tilde{U}$ gilt. Da $\tilde{U}$ offen ist, gibt es eine reelle Zahl $\epsilon > 0$, sodass der 2ϵ–Ball $B_{2\epsilon}(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|y - x\| < 2\epsilon\}$ in $\tilde{U}$ enthalten ist. Nun definiere $\tilde{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ durch $\tilde{f}(y) := \rho(\epsilon^2 - \langle y - x, y - x\rangle)$. Offensichtlich ist $\tilde{f}$ glatt, $\tilde{f}(y) \geq 0$ für alle $y \in \mathbb{R}^n$ und $\tilde{f}(y) > 0$ genau dann, wenn $\|y - x\| < \epsilon$ gilt. Insbesondere ist also $\tilde{f}(x) = \rho(\epsilon^2) > 0$, und $\text{supp}(\tilde{f})$ ist der abgeschlossene ϵ–Ball um x, also $\text{supp}(\tilde{f}) \subset \tilde{U}$. Damit ist auch $f := \tilde{f}|_M$ eine glatte Funktion und $f(x) = \tilde{f}(x) > 0$. Die Menge $\{y \in M : \|y - x\| > \epsilon\}$ ist offen, enthält $M \setminus U$ und f ist darauf identisch Null. Damit ist aber $\text{supp}(f) \subset U$.

(3) Nach Definition gibt es für jede der Mengen U_i eine offene Teilmenge $\tilde{U}_i$ von $\mathbb{R}^n$, sodass $U_i = \tilde{U}_i \cap M$ gilt. Für jeden Index $i \in I$ und jeden Punkt $x \in \tilde{U}_i$ finden wir eine reelle Zahl $\epsilon > 0$, sodass $B_\epsilon(x) \subset \tilde{U}_i$ gilt. Sei nun $r \in \mathbb{Q}$ mit $0 < r < \epsilon/2$, dann gibt es ein Element $z \in \mathbb{Q}^n \subset \mathbb{R}^n$, sodass $\|z - x\| < r$. Damit gilt aber $x \in B_r(z)$ und $B_r(z) \subset B_\epsilon(x) \subset \tilde{U}_i$.

Somit können wir für jedes $i \in I$ und jedes $x \in \tilde{U}_i$ einen Ball mit Zentrum in $\mathbb{Q}^n$ und rationalem Radius wählen, der x enthält und ganz in $\tilde{U}_i$ liegt. Da $\mathbb{Q}^n$ und $\mathbb{Q}$ abzählbar sind, ist die Menge aller Bälle mit Zentrum in $\mathbb{Q}^n$ und rationalem Radius abzählbar, also erhalten wir so nur abzählbar viele verschiedene Bälle. Wählen wir nun für jeden dieser Bälle eine Menge $\tilde{U}_i$ aus, in der er enthalten ist, dann erhalten wir abzählbar viele Mengen, deren Vereinigung nach Konstruktion gleich der Vereinigung aller $\tilde{U}_i$ ist. Damit bilden die Durchschnitte dieser Mengen mit M eine abzählbare Teilüberdeckung von $\mathcal{U}$. □

Satz. *Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Teilmannigfaltigkeit und $\mathcal{U} = \{U_i : i \in I\}$ eine offene Überdeckung von M. Dann gibt es eine Partition der Eins $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$, die der Überdeckung $\mathcal{U}$ untergeordnet ist.*

Beweis. Nach Teil (2) des Lemmas finden wir für jeden Index $i \in I$ und jeden Punkt $x \in U_i$ eine glatte Funktion $g_{i,x} : M \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, sodass $g_{i,x}(x) > 0$ und $\operatorname{supp}(g_{i,x}) \subset U_i$ gilt. Setzen wir nun $V_{i,x} := \{y \in M : g_{i,x}(y) > 0\}$, dann ist jedes $V_{i,x}$ offen in M. Nach Konstruktion ist $x \in V_{i,x}$, also ist $\{V_{i,x} : i \in I, x \in M\}$ eine offene Überdeckung von M. Nach Teil (3) des Lemmas hat diese Überdeckung eine abzählbare Teilüberdeckung, also finden wir glatte Funktionen $g_n : M \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ für $n \in \mathbb{N}$, sodass die Mengen $V_n := \{y \in M : g_n(y) > 0\}$ eine offene Überdeckung von M bilden, und für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es einen Index $i \in I$, sodass $\bar{V}_n = \operatorname{supp}(g_n) \subset U_i$ gilt.

Nun definiere $W_n := \{x \in M : g_n(x) > 0, g_i(x) < 1/n \quad \forall i < n\}$ und $h_n : M \to \mathbb{R}$ durch $h_n(x) := g_n(x)\rho(\frac{1}{n} - g_1(x)) \cdots \rho(\frac{1}{n} - g_{n-1}(x))$, wobei $\rho : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die glatte Funktion aus dem Beweis von Teil (2) des Lemmas ist. Als Produkt von endlich vielen glatten Funktionen ist h_n glatt, und da alle auftretenden Funktionen nichtnegative Werte haben, hat auch h_n Werte in $\mathbb{R}_{\geq 0}$. Außerdem gilt nach Konstruktion $h_n(x) > 0$ genau dann, wenn $g_n(x) > 0$ und $g_i(x) < 1/n$ für alle $i < n$, also genau dann, wenn $x \in W_n$. Insbesondere ist $\operatorname{supp}(h_n) = \bar{W}_n$.

Für einen beliebigen Punkt $x \in M$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, sodass $x \in V_n$, also $g_n(x) > 0$ gilt. Sei n_0 das minimale n mit dieser Eigenschaft, dann ist $g_{n_0}(x) > 0$ und $g_i(x) = 0$ für alle $i < n_0$, also $x \in W_{n_0}$. Somit ist $\cup_{n \in \mathbb{N}} W_n = M$. Sei andererseits $\alpha := g_{n_0}(x) > 0$ und setze $U := \{y \in M : g_{n_0}(y) > \frac{\alpha}{2}\}$. Dann ist U offensichtlich offen in M und $x \in U$, also U eine offene Umgebung von x. Ist nun $N \in \mathbb{N}$ so groß, dass $\frac{1}{N} < \frac{\alpha}{2}$, und $n > \max(n_0, N)$, dann kommt in der Formel für $h_n(y)$ der Faktor $\rho(\frac{1}{n} - g_{n_0}(y))$ vor. Für $y \in U$ ist aber $g_{n_0}(y) > \frac{\alpha}{2} > \frac{1}{n}$, also ist h_n identisch Null auf U. Weil U offen ist, impliziert das $U \cap \operatorname{supp}(h_n) = \emptyset$, also schneidet U nur endlich viele der Mengen $\operatorname{supp}(h_n)$, also ist die Familie $\{\operatorname{supp}(h_n) : n \in \mathbb{N}\}$ lokal endlich.

Nach Teil (1) des Lemmas definiert damit $h(x) := \sum_{n \in \mathbb{N}} h_n(x)$ eine glatte Funktion $h : M \to \mathbb{R}$. Da alle h_n Werte in $\mathbb{R}_{\geq 0}$ haben, gilt das auch für h, und weil für jedes $x \in M$ mindestens ein h_n positiv ist, gilt sogar $h(x) > 0$ für alle $x \in M$. Damit ist aber auch $x \mapsto \frac{1}{h(x)}$ eine glatte Funktion auf M, und wir definieren nun für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Funktion $f_n : M \to \mathbb{R}$ durch $f_n(x) := \frac{h_n(x)}{h(x)}$. Dann ist nach Konstruktion jedes f_n glatt und wegen $0 \leq h_n(x) \leq h(x)$ hat f_n Werte in $[0, 1]$. Weiters gilt $f_n(x) > 0$ genau dann, wenn $h_n(x) > 0$ gilt. Damit ist aber $\operatorname{supp}(f_n) = \operatorname{supp}(h_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also ist insbesondere die Familie $\{\operatorname{supp}(f_n) : n \in \mathbb{N}\}$ lokal endlich. Schließlich ist $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(x) = (\sum_{n\in\mathbb{N}} h_n(x))/h(x) = 1$, also ist $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ eine Partition der Eins. Schließlich ist $\operatorname{supp}(f_n) = \operatorname{supp}(h_n) \subset \operatorname{supp}(g_n)$, und das liegt nach Konstruktion ganz in einer der Mengen U_i. □

Das folgende Korollar zeigt typische Anwendungen von Partitionen der Eins:

Korollar. *Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Teilmannigfaltigkeit, $U \subset M$ offen und $A \subset M$ abgeschlossen mit $A \subset U$. Dann gilt:*
(1) Es gibt eine glatte Funktion $\phi : M \to \mathbb{R}$ mit Werten in $[0,1]$ und $\operatorname{supp}(\phi) \subset U$, sodass $\phi(x) = 1$ für alle $x \in A$ gilt.
(2) Ist $f : U \to \mathbb{R}^m$ eine lokal definierte glatte Funktion, dann gibt es eine glatte Funktion $\tilde{f} : M \to \mathbb{R}^m$, sodass $\tilde{f}(x) = f(x)$ für alle $x \in A$ gilt.
(3) Ist $f : M \to \mathbb{R}^m$ eine glatte Funktion, dann gibt es eine offene Teilmenge $\tilde{U}$ von $\mathbb{R}^n$ mit $M \subset \tilde{U}$ und eine glatte Funktion $\tilde{f} : \tilde{U} \to \mathbb{R}^m$, sodass $\tilde{f}|_M = f$ gilt.

Beweis. (1) Die Teilmenge $V := M \setminus A \subset M$ ist offen und wegen $A \subset U$ ist $\{U, V\}$ eine offene Überdeckung von M. Nach dem Satz gibt es eine Partition der Eins $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$, die dieser Überdeckung untergeordnet ist. Das bedeutet, dass für jedes n entweder $\operatorname{supp}(f_n) \subset U$ oder $\operatorname{supp}(f_n) \cap A = \emptyset$ gilt. Sei $\phi : M \to [0,1]$ die Summe jener f_n, für die $\operatorname{supp}(f_n) \subset U$ gilt. Dann ist ϕ glatt und $\operatorname{supp}(\phi) \subset U$ nach Teil (1) des Lemmas. Nach Konstruktion stimmt ϕ auf A mit der Summe aller f_n überein, also ist $\phi(x) = 1$ für alle $x \in A$.
(2) Wähle eine Funktion ϕ wie in Teil (1) und definiere $\tilde{f} : M \to \mathbb{R}^m$ durch $\tilde{f}(x) = \phi(x)f(x)$ für $x \in U$ und $\tilde{f}(x) = 0$ für $x \notin U$. Dann ist $\tilde{f}$ offensichtlich glatt auf U und glatt (weil identisch Null) auf $M \setminus \operatorname{supp}(\phi)$. Wegen $\operatorname{supp}(\phi) \subset U$ bilden diese beiden Mengen eine offene Überdeckung von M, also ist $\tilde{f}$ glatt. Für $x \in A$ ist $\phi(x) = 1$, also $\tilde{f}(x) = f(x)$.
(3) Nach Definition der Glattheit gibt es für jeden Punkt $x \in M$ eine offene Teilmenge $\tilde{U}_x$ von $\mathbb{R}^n$ und eine glatte Funktion $\tilde{f}_x : \tilde{U}_x \to \mathbb{R}^m$, sodass $\tilde{f}_x(y) = f(y)$ für alle $y \in \tilde{U}_x \cap M$ gilt. Dann ist $\tilde{U} := \cup_{x\in M} \tilde{U}_x$ eine offene Teilmenge (also eine Teilmannigfaltigkeit) von $\mathbb{R}^n$, und nach Konstruktion ist $\mathcal{U} := \{\tilde{U}_x : x \in M\}$ eine offene Überdeckung von $\tilde{U}$. Nach dem Satz (angewandt auf $\tilde{U}$) gibt es eine Partition der Eins $\{\phi_n : n \in \mathbb{N}\}$ die dieser Überdeckung untergeordnet ist. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ wähle ein Element von $\mathcal{U}$, das $\operatorname{supp}(\phi_n)$ enthält, bezeichne es mit $\tilde{U}_n$ und die entsprechende Funktion $\tilde{U}_n \to \mathbb{R}^m$ mit $\tilde{f}_n$. Nun kann man wie in (2) die Funktion $\tilde{f}_n\phi_n$ durch Null glatt auf $\tilde{U}$ fortsetzen, und nach Teil (3) des Lemmas definiert $\sum_{n\in\mathbb{N}}(\tilde{f}_n\phi_n)$ eine glatte Funktion $\tilde{f} : \tilde{U} \to \mathbb{R}^m$. Für $x \in M$ ist aber $\sum_{n\in\mathbb{N}} \tilde{f}_n(x)\phi_n(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} f(x)\phi_n(x) = f(x)\sum_{n\in\mathbb{N}} \phi_n(x) = f(x)$. □

Tangentialraum und Tangentialabbildung

Als nächsten Schritt wollen wir uns überlegen, wie man glatte Funktionen zwischen Mannigfaltigkeiten differenzieren kann. Dazu benötigen wir zunächst eine gute Interpretation der Ableitung von glatten Funktionen, die auf offenen Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ definiert sind.

2.7. Der Tangentialraum. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge und $f : U \to \mathbb{R}^m$ eine glatte Funktion. Die beste Interpretation der Ableitung für unsere Zwecke ist die folgende: Für jeden Punkt $x \in U$ betrachten wir den *Tangentialraum* T_xU an U in x. Das ist einfach eine Kopie von $\mathbb{R}^n$ mit Ursprung in x. Betrachten wir nun auch $T_{f(x)}\mathbb{R}^m$, also eine Kopie von $\mathbb{R}^m$ mit Ursprung in $f(x)$, dann können wir $Df(x)$ als lineare Abbildung $T_xU \to T_{f(x)}\mathbb{R}^m$ betrachten. Aus der Grundvorlesung ist bekannt, dass diese lineare Abbildung gerade die bestmögliche lineare Approximation an f lokal um x ist. Um dieses Konzept auf Mannigfaltigkeiten zu verallgemeinern, benötigt man zunächst ein geeignetes Konzept des Tangentialraumes, der eine lineare Approximation der Mannigfaltigkeit in einem Punkt darstellt. Das ist für Teilmannigfaltigkeiten von $\mathbb{R}^n$ leichter als für abstrakte Mannigfaltigkeiten, weil man im ersten Fall den Tangentialraum als Teilraum des Tangentialraumes an $\mathbb{R}^n$ definieren kann.

Kandidaten für den Tangentialraum sind leicht zu finden: Zunächst macht das Konzept einer glatten Kurve in einer Teilmannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$ keine Probleme. Für ein Intervall $I \subset \mathbb{R}$ ist eine glatte Kurve $c : I \to M$ ja einfach eine glatte Funktion nach $\mathbb{R}^n$, die Werte in M hat. Natürlich sollte für so eine Kurve die Ableitung in jedem Punkt tangential zu M sein.

Hat man andererseits eine lokale Parametrisierung $\phi : V \to M$, dann ist ϕ ja ebenfalls eine glatte Funktion nach $\mathbb{R}^n$, also macht es keine Probleme die Ableitung $D\phi(y) : T_yV \cong \mathbb{R}^k \to T_{\phi(y)}\mathbb{R}^n$ zu betrachten. Klarerweise sollten Elemente im Bild dieser Ableitung tangential zu M sein.

Analog sollte für eine lokale Darstellung von M als Nullstellenmenge einer regulären Funktion f der Tangentialraum an M in x im Kern von $Df(x)$ liegen, weil f ja identisch Null auf M ist.

Tatsächlich stimmen alle diese Mengen überein:

Proposition. *Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k–dimensionale Teilmannigfaltigkeit und $x \in M$ ein Punkt. Dann stimmen folgende Teilmengen von $T_x\mathbb{R}^n$ überein:*
(1) $\{c'(0) : c \in C^\infty(I, M), c(0) = x$ *wobei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall mit $0 \in I$ ist*$\}$.
(2) $\mathrm{Im}(D\phi(y))$*, wobei $\phi : V \to U_1$ eine lokale Parametrisierung für M mit $\phi(y) = x$ ist.*
(3) $\mathrm{Ker}(Df(x))$*, wobei $f : U_2 \to \mathbb{R}^{n-k}$ eine Darstellung von M als lokale reguläre Nullstellenmenge mit $x \in U_2$ ist.*

Beweis. Nach Definition einer lokalen Parametrisierung ist $V \subset \mathbb{R}^k$ offen und $D\phi(y)$ injektiv, also $\mathrm{Im}(D\phi(y)) \subset T_x\mathbb{R}^n$ ein k–dimensionaler Teilraum. Ist $v \in T_y\mathbb{R}^k$ ein Tangentialvektor, dann gibt es (weil V offen ist) eine reelle Zahl $\epsilon > 0$, sodass $y+tv \in V$ für $|t| < \epsilon$ gilt. Dann ist aber $c(t) := \phi(y + tv)$ eine glatte Kurve $c : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ mit $c(0) = x$ und nach der Kettenregel ist $c'(0) = D\phi(y)(v)$. Also liegt $\mathrm{Im}(D\phi(y))$ in der in (1) beschriebenen Teilmenge.

Ist andererseits $c : I \to M$ eine glatte Kurve mit $c(0) = x$, dann gibt es (weil $U_2 \subset \mathbb{R}^n$ offen ist) ein $\epsilon > 0$, sodass $c((-\epsilon, \epsilon)) \subset M \cap U_2$ gilt. Nach Definition ist dann aber die glatte Funktion $f \circ c : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}^{n-k}$ identisch Null, also gilt $0 = (f \circ c)'(0) = Df(x)(c'(0))$, also $c'(0) \in \mathrm{Ker}(Df(x))$. Somit sehen wir, dass (2)$\subset$(1)$\subset$(3) gilt. Nach Voraussetzung ist aber $Df(x) : \mathbb{R}^n \cong T_x\mathbb{R}^n \to T_{f(x)}\mathbb{R}^{n-k} \cong \mathbb{R}^{n-k}$ surjektiv und damit $\mathrm{Ker}(Df(x))$ ein k–dimensionaler Teilraum von $T_x\mathbb{R}^n$. Damit folgt aber (1)=(2)=(3) sofort, weil auch $\mathrm{Im}(D\phi(y))$ ein k–dimensionaler Teilraum ist. □

Definition. Für eine k–dimensionale Teilmannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$ und einen Punkt $x \in M$ definieren wir den *Tangentialraum* T_xM an M bei x als den k–dimensionalen Teilraum von $T_x\mathbb{R}^n$, den die äquivalenten Beschreibungen der obigen Proposition liefern.

Beispiel. (1) Für eine offene Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$ können wir die Identität als globale Parametrisierung verwenden und erhalten damit den üblichen Tangentialraum $T_xU = T_x\mathbb{R}^n$ für alle $x \in U$.

(2) Betrachte die Sphäre $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Aus Beispiel 2.1 wissen wir, dass wir S^n global als reguläre Nullstellenmenge $f^{-1}(\{0\})$ für $f : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \langle x, x\rangle - 1$ beschreiben können. Damit ist aber nach der Rechnung in 1.5 für jeden Punkt $x \in S^n$ der Tangentialraum T_xS^n gerade gegeben durch $T_xS^n = \{v \in T_x\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^{n+1} : \langle x, v\rangle = 0\}$, also ist der Tangentialraum genau der Orthogonalraum zu x.
(3) Betrachten wir die Matrizengruppen aus Beispiel (5) von 2.3. Für die offene Teilmenge $GL(n, \mathbb{R}) \subset M_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n^2}$ und $A \in GL(n, \mathbb{R})$ ist $T_AGL(n, \mathbb{R}) = M_n(\mathbb{R})$. Darin haben wir $O(n)$ als reguläre Nullstellenmenge der Funktion $f(A) = AA^t - \mathbb{I}$ beschrieben, und gezeigt, dass $Df(A)(B) = AB^t + BA^t$ gilt. Somit ist für $A \in O(n)$ (also $A^t = A^{-1}$) der Tangentialraum $T_AO(n)$ gegeben als $\{B \in M_n(\mathbb{R}) : B^t = -A^{-1}BA^{-1}\}$. Insbesondere ist $T_{\mathbb{I}}O(n)$ gerade der Raum $\{B \in M_n(\mathbb{R}) : B^t = -B\}$ der schiefsymmetrischen $n \times n$–Matrizen. Für $SL(n, \mathbb{R})$ ist die Beschreibung etwas komplizierter, man überlegt aber leicht direkt (siehe Übungen), dass $T_{\mathbb{I}}SL(n, \mathbb{R})$ genau der Raum $\{B \in M_n(\mathbb{R}) : \operatorname{tr}(B) = 0\}$ der spurfreien $n \times n$–Matrizen ist.

2.8. Die Tangentialabbildung in einem Punkt. Nach unseren Überlegungen über die Natur von Ableitungen sollte die Ableitung einer glatten Funktion $f : M \to N$ zwischen Teilmannigfaltigkeiten in einem Punkt $x \in M$ eine lineare Abbildung $T_xM \to T_{f(x)}N$ sein. Möchte man, dass die Kettenregel gilt, dann erlaubt die Beschreibung der Tangentialräume durch Ableitungen glatter Kurven nur noch eine sinnvolle Definition: Ist $c : I \to M$ eine glatte Kurve mit $c(0) = x$, dann ist $f \circ c$ glatt als Komposition glatter Funktionen, also eine glatte Kurve in N, die 0 auf $f(x)$ abbildet, also bestimmt $(f \circ c)'(0)$ ein Element von $T_{f(x)}N$. Soll die Kettenregel gelten, dann muss die Ableitung von f den Tangentialvektor $c'(0)$ auf dieses Element abbilden. A priori ist weder klar, ob das wohldefiniert ist (also $(f \circ c)'(0)$ nur von $c'(0)$ abhängt), noch ob man so eine lineare Abbildung erhält.

Proposition. *Seien $M \subset \mathbb{R}^n$ und $N \subset \mathbb{R}^m$ glatte Teilmannigfaltigkeiten und sei $f : M \to N$ eine glatte Funktion. Dann ist $c'(0) \mapsto (f \circ c)'(0)$ eine wohldefinierte lineare Abbildung $T_xM \to T_{f(x)}N$.*

Beweis. Nach Definition einer glatten Funktion finden wir eine offen Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$ mit $x \in U$ und eine glatte Funktion $\tilde{f} : U \to \mathbb{R}^m$, sodass $f|_{U\cap M} = \tilde{f}|_{U\cap M}$ gilt. Für eine glatte Kurve $c : I \to M$ mit $c(0) = x$ finden wir $\epsilon > 0$, sodass $c((-\epsilon, \epsilon)) \subset M \cap U$ gilt. Dann ist $\tilde{f} \circ c : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}^m$ eine glatte Funktion, und die übliche Kettenregel liefert $(\tilde{f} \circ c)'(0) = D\tilde{f}(c(0))(c'(0)) = D\tilde{f}(x)(c'(0))$. Da c Werte in M hat, ist $\tilde{f} \circ c = f \circ c$, und wir erhalten $(f \circ c)'(0) = D\tilde{f}(x)(c'(0))$. Insbesondere hängt $(f \circ c)'(0)$ nur von $c'(0)$ ab, und unsere Abbildung ist gerade die Einschränkung von $D\tilde{f}(x)$ auf den Tangentialraum T_xM und damit linear. □

Definition. Für eine glatte Funktion $f : M \to N$ zwischen Teilmannigfaltigkeiten definieren wir die *Tangentialabbildung* $T_xf : T_xM \to T_{f(x)}N$ zu f im Punkt x durch $T_xf \cdot c'(0) := (f \circ c)'(0)$.

Aus der Beschreibung in der Proposition sehen wir sofort, dass wir für offene Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ einfach die übliche Ableitung erhalten. Außerdem erhalten wir sofort die allgemeine Kettenregel:

Korollar. *Seien M, N und P Teilmannigfaltigkeiten, $f : M \to N$ und $g : N \to P$ glatte Funktionen. Dann gilt für jedes $x \in M$ die Kettenregel $T_x(g \circ f) = T_{f(x)}g \circ T_xf$. Ist insbesondere $f : M \to N$ ein Diffeomorphismus, dann ist für jeden Punkt $x \in M$ die Tangentialabbildung $T_xf : T_xM \to T_{f(x)}N$ ein linearer Isomorphismus und $(T_xf)^{-1} = T_{f(x)}(f^{-1})$.*

Beweis. Nach Definition der Glattheit können wir f und g zu glatten Funktionen $\tilde{f}$ und $\tilde{g}$ auf offenen Teilmengen der umgebenden Räume ausdehnen. Dann ist $\tilde{g} \circ \tilde{f}$ eine Ausdehnung von $g \circ f$. Aus der Proposition wissen wir, dass $T_x(g \circ f)$ die Einschränkung von $D(\tilde{g} \circ \tilde{f})(x)$ auf T_xM ist. Nach der üblichen Kettenregel ist $D(\tilde{g} \circ \tilde{f})(x) = D(\tilde{g})(\tilde{f}(x)) \circ D(\tilde{f})(x)$ und wiederum nach der Proposition ist die Einschränkung von $D(\tilde{f})(x)$ auf T_xM gerade T_xf. Damit hat diese Einschränkung Werte in $T_{f(x)}N$, und die Einschränkung von $D(\tilde{g})(\tilde{f}(x))$ auf diesen Teilraum ist gerade $T_{f(x)}g$. Damit erhalten wir $T_x(g \circ f) = T_{f(x)}g \circ T_xf$.

Ist f ein Diffeomorphismus, dann ist $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_M$ und $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_N$. Offensichtlich ist $T_x \mathrm{id}_M = \mathrm{id}_{T_xM}$ und analog für N, und die Behauptung folgt. □

Eine wichtige Folgerung daraus ist, dass der inverse Funktionensatz auch für Teilmannigfaltigkeiten gilt: Sei $f : M \to N$ eine glatte Funktion zwischen Teilmannigfaltigkeiten, und sei $x \in M$ ein Punkt, sodass $T_xf : T_xM \to T_{f(x)}N$ ein Isomorphismus ist. Sei (U, u) eine Karte für M um x und (V, v) eine Karte für N um $f(x)$, dann ist $v \circ f \circ u^{-1} : u(U \cap f^{-1}(V)) \to v(V)$ eine glatte Funktion zwischen offenen Teilmengen. Da u und v Diffeomorphismen sind, sind $T_{u(x)}u^{-1}$ und $T_{f(x)}v$ lineare Isomorphismen, also ist auch $D(v \circ f \circ u^{-1})(u(x)) = T_{f(x)}v \circ T_xf \circ T_{u(x)}u^{-1}$ ein linearer Isomorphismus. Nach dem inversen Funktionensatz für offene Teilmengen finden wir eine offene Umgebung $\tilde{W}_1$ von $u(x)$, sodass $\tilde{W}_2 = (v \circ f \circ u^{-1})(\tilde{W}_1)$ offen ist, und eine glatte Abbildung $g : \tilde{W}_2 \to \tilde{W}_1$, die invers zu $(v \circ f \circ u^{-1})|_{\tilde{W}_1}$ ist. Dann ist aber $W_1 := u^{-1}(\tilde{W}_1)$ offen in M und $W_2 = f(W_1) = v^{-1}(\tilde{W}_2)$ offen in N, und $(u^{-1} \circ g \circ v)|_{W_2} : W_2 \to W_1$ ist invers zu $f|_{W_1}$. Da g glatt und nach Konstruktion gerade die lokale Koordinatendarstellung von $u^{-1} \circ g \circ v$ ist, ist nach Satz 2.4 auch diese Funktion glatt, also $f : W_1 \to W_2$ ein Diffeomorphismus.

Insbesondere ist eine glatte Funktion $f : M \to N$ genau dann ein lokaler Diffeomorphismus, wenn T_xf für jedes $x \in M$ ein linearer Isomorphismus ist.

2.9. Tangentialbündel und Tangentialabbildung. Um mit Ableitungen effizient arbeiten zu können, sollte die Ableitung einer glatten Funktion zwischen zwei Teilmannigfaltigkeiten wieder eine Funktion zwischen Teilmannigfaltigkeiten sein. Um das zu ermöglichen, müssen wir die Tangentialräume an allen Punkten einer Teilmannigfaltigkeit zu einer Teilmannigfaltigkeit zusammenfassen.

Definition. Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine glatte Teilmannigfaltigkeit.
(1) Wir definieren das *Tangentialbündel* TM von M als $TM := \{(x, v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{2n} : x \in M, v \in T_xM\}$.
(2) Die *kanonische Projektion* $p : TM \to M$ ist definiert durch $p(x, v) = x$.
(3) Ist $N \subset \mathbb{R}^m$ eine weitere glatte Teilmannigfaltigkeit und $f : M \to N$ eine glatte Funktion, dann definieren wir die *Tangentialabbildung* $Tf : TM \to TN$ zu f durch $Tf(x, v) := (f(x), T_xf \cdot v)$.

Satz. *Seien $M \subset \mathbb{R}^n$, $N \subset \mathbb{R}^m$, und $P \subset \mathbb{R}^p$ glatte Teilmannigfaltigkeiten.*
(1) Das Tangentialbündel TM ist eine glatte Teilmannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{2n}$ und die kanonische Projektion $p : TM \to M$ ist eine glatte Funktion.
(2) Für eine glatte Funktion $f : M \to N$ ist die Tangentialabbildung $Tf : TM \to TN$ ebenfalls glatt.
(3) Ist $g : N \to P$ eine weitere glatte Funktion, dann gilt die Kettenregel $T(g \circ f) = Tg \circ Tf$. Ist insbesondere f ein Diffeomorphismus, dann ist auch Tf ein Diffeomorphismus und $(Tf)^{-1} = T(f^{-1})$.

Beweis. (1) Wir wählen eine Darstellung von M als lokale reguläre Nullstellenmenge. Sei also $x \in M$ ein Punkt und $\tilde{U} \subset \mathbb{R}^n$ offen mit $x \in \tilde{U}$ und $\psi : \tilde{U} \to \mathbb{R}^{n-k}$ eine glatte Funktion, sodass $M \cap \tilde{U} = \psi^{-1}(\{0\})$ gilt, und $D\psi(y)$ für jedes $y \in M \cap \tilde{U}$ surjektiv ist. Dann ist die Menge $\tilde{V} := \{(y, v) : y \in \tilde{U}\}$ offen in $\mathbb{R}^{2n}$, und wir definieren $\Psi : \tilde{V} \to \mathbb{R}^{n-k} \times \mathbb{R}^{n-k}$ durch $\Psi(y, v) := (\psi(y), D\psi(y)(v))$. Nun ist $\Psi(y, v) = (0, 0)$ offensichtlich äquivalent zu $y \in M$ und $D\psi(y)(v) = 0$, also $v \in T_yM$, d.h. zu $(y, v) \in TM$, also gilt $TM \cap \tilde{V} = \Psi^{-1}(\{0\})$. Ist $\Psi(y, v) = 0$, dann ist nach Voraussetzung $D\psi(y) : T_y\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-k}$ surjektiv, also ist $w \mapsto D\Psi(y, v)(w, 0)$ surjektiv auf $\mathbb{R}^{n-k} \times \{0\}$. Andererseits ist wegen der Linearität von $D\psi(y)(v)$ in der v–Komponente natürlich $D\Psi(y, v)(0, w) = (0, D\psi(y)(w))$, also ist $D\Psi(y, v)$ surjektiv für alle $(y, v) \in TM \cap \tilde{V}$. Damit ist TM lokal eine reguläre Nullstellenmenge, also eine glatte Teilmannigfaltigkeit (der Dimension $2k$) von $\mathbb{R}^{2n}$.

Die erste Projektion $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ist eine glatte Fortsetzung der kanonischen Projektion $p : TM \to M$, also ist p eine glatte Funktion.
(2) Nach Definition der Glattheit finden wir für jeden Punkt $x \in M$ eine offene Teilmenge $\tilde{U} \subset \mathbb{R}^n$ mit $x \in \tilde{U}$ und eine lokale glatte Fortsetzung $\tilde{f} : \tilde{U} \to \mathbb{R}^m$ von f. Wie in (1) setze nun $\tilde{V} := \{(y, v) : y \in \tilde{U}\}$ und definiere $F : \tilde{V} \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ durch $F(y, v) := (\tilde{f}(y), D\tilde{f}(y)(v))$. Für $(y, v) \in TM \cap \tilde{V}$ ist $\tilde{f}(y) = f(y)$, und nach dem Beweis von Proposition 2.8 gilt $D\tilde{f}(y)(v) = T_yf \cdot v$. Damit ist F eine lokale glatte Fortsetzung von Tf, also Tf glatt.
(3) Nach Definition ist $T(g \circ f)(x, v) = (g(f(x)), T_x(g \circ f) \cdot v)$. Aus Korollar 2.8 wissen wir, dass $T_x(g \circ f) = T_{f(x)}g \circ T_xf$ gilt, und daraus folgt $T(g \circ f) = Tg \circ Tf$ sofort. Die Aussagen über Diffeomorphismen folgen daraus wie im Beweis von Korollar 2.8. □

Aus den Aussagen des Satzes über Diffeomorphismen erhalten wir sofort eine Familie von ausgezeichneten Karten für das Tangentialbündel TM einer Teilmannigfaltigkeit M. Sei nämlich (U, u) eine Karte für M, also eine offene Teilmenge $U \subset M$ zusammen mit einem Diffeomorphismus $u : U \to u(U)$ auf eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^k$. Nach Definition ist $T(u(U)) = u(U) \times \mathbb{R}^k$, also eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^{2k}$. Andererseits ist $TU = p^{-1}(U) \subset TM$ eine offene Teilmenge (weil p als glatte Funktion stetig ist), und nach dem letzten Teil des Satzes ist $Tu : TU \to T(u(U))$ ein Diffeomorphismus, also können wir (TU, Tu) als Karte für TM verwenden. Sind (U_α, u_α) und (U_β, u_β) zwei Karten für M, sodass $U_{\alpha\beta} := U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ gilt, dann können wir leicht die Kartenwechselabbildungen der entsprechenden Karten für TM berechnen. Sei dazu $u_{\alpha\beta} := u_\beta \circ u_\alpha^{-1} : u_\alpha(U_{\alpha\beta}) \to u_\beta(U_{\alpha\beta})$ die Kartenwechselabbildung der beiden Karten. Dann ist $u_{\alpha\beta}$ ein Diffeomorphismus von offenen Teilmengen von $\mathbb{R}^k$. Nun ist $p^{-1}(U_\alpha) \cap p^{-1}(U_\beta) = p^{-1}(U_{\alpha\beta}) = TU_{\alpha\beta}$ offen in TM und nach dem letzten Teil des Satzes ist $Tu_\beta \circ (Tu_\alpha)^{-1} = Tu_{\alpha\beta} : T(u_\alpha(U_{\alpha\beta})) \to T(u_\beta(U_{\alpha\beta}))$. Aus 2.8 wissen wir weiters, dass für offene Teilmengen die Tangentialabbildung mit der üblichen Ableitung übereinstimmt, und damit erhalten wir $Tu_\beta \circ (Tu_\alpha)^{-1}(y, v) = (u_{\alpha\beta}(y), Du_{\alpha\beta}(y)(v))$. Die Kartenwechselabbildungen auf dem Tangentialbündel entsprechen also genau den Kartenwechselabbildungen auf der Mannigfaltigkeit und ihren Ableitungen.

Wir können auch leicht die Koordinatendarstellung einer Tangentialabbildung bezüglich solcher Karten berechnen. Sei $f : M \to N$ eine glatte Funktion zwischen Teilmannigfaltigkeiten, $x \in M$ ein Punkt, (U, u) eine Karte für M um x und (V, v) eine Karte für N um $f(x)$, und sei $(f^1, \dots, f^\ell)$ die entsprechende lokale Koordinatendarstellung von f. Dann ist nach Definition $f^j : u(U \cap f^{-1}(V)) \to \mathbb{R}$ glatt und $v^j(f(x)) = f^j(u(x))$, also die f^j genau die Koordinatenfunktionen von $v \circ f \circ u^{-1}$. Betrachten wir nun die entsprechenden Karten (TU, Tu) und (TV, Tv) für die Tangentialbündel. Um die Koordinatendarstellung von Tf zu bekommen, müssen wir einfach die Koordinatenfunktionen von $Tv \circ Tf \circ (Tu)^{-1} = T(v \circ f \circ u^{-1})$ berechnen. Da aber $v \circ f \circ u^{-1}$ wieder eine Abbildung zwischen offenen Teilmengen ist, stimmen Tangentialabbildungen mit Ableitungen überein, und wir erhalten als erste ℓ Koordinatenfunktionen einfach $f^1, \dots, f^\ell$ und die restlichen ℓ Komponenten sind gegeben durch

$$(y, v^1, \dots, v^k) \mapsto (\frac{\partial f^1}{\partial x^1}(y)v^1 + \dots + \frac{\partial f^1}{\partial x^k}(y)v^k, \dots, \frac{\partial f^\ell}{\partial x^1}(y)v^1 + \dots + \frac{\partial f^\ell}{\partial x^k}(y)v^k).$$

Vektorfelder

2.10. Nachdem wir den Begriff von Tangentialvektoren (als Elemente des Tangentialraumes) haben, können wir Vektorfelder definieren, und da wir die Tangentialräume zum Tangentialbündel zusammengefasst haben, macht auch der Glattheitsbegriff für Vektorfelder keine Probleme. Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Teilmannigfaltigkeit. Dann definieren wir ein *Vektorfeld* auf M als eine glatte Funktion $\xi : M \to TM$, sodass $p \circ \xi = \mathrm{id}_M$ gilt, wobei $p : TM \to M$ die kanonische Projektion bezeichnet. Die Bedingung bedeutet gerade, dass $\xi(x) = (x, \xi_x)$ für ein Element $\xi_x \in T_xM$ gilt. Ein Vektorfeld ordnet also in glatter Weise jedem Punkt von M einen Tangentialvektor in diesem Punkt zu. Wir werden oft auch ξ_x mit $\xi(x)$ bezeichnen, also zwischen den beiden Bildern hin– und herschalten, ohne die Notation zu verändern. Die Menge aller Vektorfelder auf M wird mit $\mathfrak{X}(M)$ bezeichnet. Für ein Vektorfeld $\xi \in \mathfrak{X}(M)$ definieren wir (analog zum Fall von Funktionen) den *Träger* $\mathrm{supp}(\xi)$ von ξ als den Abschluss der Mengen $\{x \in M : \xi(x) \neq 0\}$.

Ein *lokales Vektorfeld* auf M ist einfach eine Vektorfeld auf einer offenen Teilmenge $U \subset M$.

Offensichtlich kann man Vektorfelder punktweise addieren und mit reellen Zahlen multiplizieren, also definiert man für $\xi, \eta \in \mathfrak{X}(M)$ und $a \in \mathbb{R}$ die Vektorfelder $\xi + \eta$ durch $(\xi + \eta)(x) = \xi(x) + \eta(x)$ und $a\xi$ durch $(a\xi)(x) = a(\xi(x))$. Damit wird $\mathfrak{X}(M)$ zu einem reellen Vektorraum. Allgemeiner kann man Vektorfelder auch punktweise mit glatten Funktionen multiplizieren, d.h. für $\xi \in \mathfrak{X}(M)$ und $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ definiert man $f\xi \in \mathfrak{X}(M)$ durch $(f\xi)(x) = f(x)\xi(x)$. Damit wird $\mathfrak{X}(M)$ zu einem Modul über dem Ring $C^\infty(M, \mathbb{R})$ der glatten reellwertigen Funktionen auf M (mit den punktweisen Operationen).

Beispiel. Sei (U, u) eine Karte für M. Dann ist $Tu : TU \to u(U) \times \mathbb{R}^k$ ein Diffeomorphismus. Für $x \in U$ gibt es dann ein eindeutiges Element von T_xM, dass unter T_xu auf den i–ten Einheitsvektor in $\mathbb{R}^k$ abgebildet wird. Ordnet man jedem Punkt in x diesen Tangentialvektor zu, dann ist die Koordinatendarstellung der entsprechenden Funktion $U \to TU$ gerade durch $y \mapsto (y, e_i)$ gegeben, also definiert das ein glattes Vektorfeld auf U. Aus Gründen, die sich in Kürze klären werden, bezeichnen wir dieses Vektorfeld mit $\frac{\partial}{\partial u^i}$ oder mit ∂_i (falls die Karte aus dem Zusammenhang klar ist). Natürlich ist dann für beliebige glatte Funktionen $f^1, \dots, f^k : U \to \mathbb{R}$ auch $\sum_{i=1}^k f^i \partial_i$ ein glattes Vektorfeld auf U. Somit gibt es lokal viele glatte Vektorfelder.

Ist andererseits ξ ein Vektorfeld auf U und $x \in U$ ein Punkt, dann finden wir eine Umgebung V von x in M, sodass der Abschluss $\bar{V}$ von V in M ganz in U liegt. Nach Teil (1) von Korollar 2.6 finden wir eine glatte Funktion $f : M \to \mathbb{R}$, sodass $\mathrm{supp}(f) \subset U$ und $f(y) = 1$ für alle $y \in \bar{V}$ gilt. Damit können wir das glatte Vektorfeld $f\xi$ von U durch Null glatt zu einem Vektorfeld $\tilde{\xi}$ auf ganz M ausdehnen, und nach Konstruktion ist $\tilde{\xi}(y) = \xi(y)$ für alle $y \in V$. Somit gibt es auch viele globale glatte Vektorfelder.

Dieses Beispiel liefert uns auch die Darstellung von Vektorfeldern in lokalen Koordinaten. Ist $\xi \in \mathfrak{X}(M)$ ein Vektorfeld und (U, u) eine Karte für M, dann hat nach Definition die Funktion $Tu \circ \xi|_U : U \to T(u(U))$ die Form $x \mapsto (u^1(x), \dots, u^k(x), \xi^1(x), \dots, \xi^k(x))$ für glatte Funktionen $\xi^j : U \to \mathbb{R}$ für $j = 1, \dots, k$. Nach Konstruktion bedeutet das aber gerade, dass $\xi(x) = \xi^1(x)\frac{\partial}{\partial u^1}(x) + \dots + \xi^k(x)\frac{\partial}{\partial u^k}(x)$ für alle $x \in U$ gilt. Damit ist aber $\xi|_U = \sum_{i=1}^k \xi^i \frac{\partial}{\partial u^i}$. Das Tupel $(\xi^1, \dots, \xi^k)$ heißt dann die Koordinatendarstellung von ξ bezüglich der Karte (U, u).

Sei nun $\{(U_\alpha, u_\alpha) : \alpha \in I\}$ ein Atlas für die Teilmannigfaltigkeit M. Für zwei Karten (U_α, u_α) und (U_β, u_β), sodass $U_{\alpha\beta} := U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ gilt, haben wir dann die Kartenwechselabbildung $u_{\alpha\beta} = u_\beta \circ u_\alpha^{-1} : u_\alpha(U_{\alpha\beta}) \to u_\beta(U_{\alpha\beta})$. Aus 2.9 wissen wir, dass $Tu_\beta \circ (Tu_\alpha)^{-1}(y, v) = (u_{\alpha\beta}(y), Du_{\alpha\beta}(y)(v))$ gilt. Bezeichnen wir für $x \in U_{\alpha\beta}$ die partielle Ableitung $\frac{\partial u^i_{\alpha\beta}}{\partial y^j}(u_\alpha(x))$ mit $A^i_j(x)$, dann ist $x \mapsto (A^i_j(x))$ eine glatte Funktion $U_{\alpha\beta} \to GL(k, \mathbb{R})$. Nun ist nach Definition $\frac{\partial}{\partial u^i_\alpha}(x) = (Tu_\alpha)^{-1}(u_\alpha(x), e_i)$, und wir erhalten $T_x u_\beta(\frac{\partial}{\partial u^i_\alpha}(x)) = (u_\beta(x), Du_{\alpha\beta}(u_\alpha(x))(e_i))$. Die zweite Komponente ist gerade die i–te Spalte der Matrix der partiellen Ableitungen, also erhalten wir $\frac{\partial}{\partial u^i_\alpha} = \sum_{j=1}^k A^j_i \frac{\partial}{\partial u^j_\beta}$. Bezeichnen wir nun für ein Vektorfeld $\xi \in \mathfrak{X}(M)$ die Koordinatendarstellungen bezüglich der beiden Karten mit $(\xi^1_\alpha, \dots, \xi^k_\alpha)$ und $(\xi^1_\beta, \dots, \xi^k_\beta)$, dann erhalten wir auf $U_{\alpha\beta}$ die Gleichung

$$\sum_i \xi^i_\alpha \frac{\partial}{\partial u^i_\alpha} = \sum_{i,j} \xi^i_\alpha A^j_i \frac{\partial}{\partial u^j_\beta} = \sum_j \xi^j_\beta \frac{\partial}{\partial u^j_\beta},$$

also $\xi^j_\beta = \sum_i \xi^i_\alpha A^j_i$.

Ordnen wir umgekehrt jedem Index $\alpha \in I$ ein k–Tupel $(\xi^1_\alpha, \dots, \xi^k_\alpha)$ glatter Funktionen zu, sodass auf $U_{\alpha\beta}$ die Gleichung $\xi^j_\beta = \sum_i A^j_i \xi^i_\alpha$ gilt, dann erhalten wir ein Vektorfeld auf M, indem wir für jeden Punkt $x \in M$ einen Index α mit $x \in U_\alpha$ wählen und $\xi(x) = \sum_i \xi^i_\alpha(x)\frac{\partial}{\partial u^i_\alpha}(x)$ setzen. Nach der obigen Rechnung ist das unabhängig von der Wahl des Index und offensichtlich ist die Einschränkung von ξ auf jedes U_α glatt, also definiert das ein glattes Vektorfeld. In der physikalischen Literatur werden Vektorfelder oft so definiert (laut W. Thirring “Ein Vektor ist ein Vektor, der sich wie ein Vektor transformiert”).

2.11. Der Fluss eines Vektorfeldes. Die Interpretation von Tangentialvektoren als Ableitungen glatter Kurven führt sofort zu einer Interpretation von Vektorfeldern als gewöhnliche Differentialgleichungen erster Ordnung auf Mannigfaltigkeiten.

Definition. Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Teilmannigfaltigkeit, $\xi \in \mathfrak{X}(M)$ ein Vektorfeld auf M und $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Eine glatte Kurve $c : I \to M$ heißt eine *Integralkurve* von ξ, falls $c'(t) = \xi(c(t))$ für alle $t \in I$ gilt.

Im Fall einer offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$ ist ein Vektorfeld ξ einfach eine $\mathbb{R}^n$–wertige glatte Funktion, und $c'(t) = \xi(c(t))$ ist genau die übliche Formulierung eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung. Durch Benutzung von Karten kann man die Fragen zur Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen solcher Differentialgleichungen vom Fall allgemeiner Teilmannigfaltigkeiten auf den Fall von offenen Teilmengen zurückführen.

In der Vorlesung über gewöhnliche Differentialgleichungen beweist man den allgemeinen Existenz– und Eindeutigkeitssatz für Lösungen gewöhnlicher Differentialgleichungen. Übersetzt in das Bild von Teilmannigfaltigkeiten besagt dieser Satz zunächst, dass es für jeden Punkt $x \in M$ ein eindeutig bestimmtes maximales Intervall $I_x \subset \mathbb{R}$, das

Null enthält, sowie eine eindeutig bestimmte maximale glatte Integralkurve $c_x : I_x \to M$ mit $c_x(0) = x$ gibt. Außerdem zeigt man, dass diese Integralkurve glatt vom Anfangspunkt x abhängt, was bedeutet, dass man alle diese Kurven zu einer glatten Abbildung, der sogenannten *Flussabbildung*, zusammenfügen kann. Dazu setzt man $\mathcal{D}(\xi) := \{(x,t) \in M \times \mathbb{R} : t \in I_x\}$ und definiert $\mathrm{Fl}^\xi : \mathcal{D}(\xi) \to M$, $(x,t) \mapsto \mathrm{Fl}^\xi_t(x)$ durch $\mathrm{Fl}^\xi_t(x) := c_x(t)$. Dann beweist man:

Satz. *(1) $\mathcal{D}(\xi) \subset M \times \mathbb{R}$ ist offen, also eine Teilmannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{n+1}$, $M \times \{0\} \subset \mathcal{D}(\xi)$, und $\mathrm{Fl}^\xi : \mathcal{D}(\xi) \to M$ ist eine glatte Funktion.*
(2) Für jeden Punkt $x \in M$ gibt es eine offene Umgebung U von $x \in M$ und eine Zahl $\epsilon > 0$, sodass die Abbildung $\mathrm{Fl}^\xi_t : U \to M$ für jedes t mit $|t| < \epsilon$ ein lokaler Diffeomorphismus ist.

Aus der Eindeutigkeit von Integralkurven schließt man leicht, dass die Gleichung $\mathrm{Fl}^\xi_t(\mathrm{Fl}^\xi_s(x)) = \mathrm{Fl}^\xi_{t+s}(x)$ gilt, soferne beide Seiten definiert sind.

2.12. Tangentialvektoren als Derivationen. Für die zweite wichtige Interpretation von Vektorfeldern müssen wir uns zunächst noch einmal mit Tangentialvektoren beschäftigen. Die Idee hier ist, dass Tangentialvektoren die möglichen Richtungen für Richtungsableitungen von glatten reellwertigen Funktionen sind.

Sei also $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Teilmannigfaltigkeit, $f \in C^\infty(M,\mathbb{R})$ und $x \in M$ ein Punkt und $\xi \in T_xM$ ein Tangentialvektor. Dann ist $T_xf \cdot \xi \in T_{f(x)}\mathbb{R} = \mathbb{R}$, also einfach eine reelle Zahl. Ist $c : I \to M$ ein glatte Kurve mit $c(0) = x$ und $c'(0) = \xi$, dann ist nach Definition $T_xf \cdot \xi = (f \circ c)'(0)$. Diese reelle Zahl ist die Richtungsableitung von f im Punkt x in Richtung ξ, und wir bezeichnen sie mit $\xi \cdot f$. Damit können wir dem Tangentialvektor ξ eine Abbildung $C^\infty(M,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ zuordnen, nämlich $f \mapsto \xi \cdot f$. Ist $c : I \to M$ wie oben, dann ist $\xi \cdot f = (f \circ c)'(0)$. Nun ist für $f, g \in C^\infty(M,\mathbb{R})$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ offensichtlich $(f+\lambda g)\circ c = (f\circ c)+\lambda(g\circ c)$ und $(fg)\circ c = (f\circ c)(g\circ c)$, also gilt $\xi\cdot(f+\lambda g) = \xi\cdot f+\lambda\xi\cdot g$ und nach der Produktregel ist $\xi \cdot (fg) = (f \circ c)'(0)(g \circ c)(0) + (f \circ c)(0)(g \circ c)'(0) = (\xi \cdot f)g(x) + f(x)\xi \cdot g$. Allgemein nennt man eine lineare Abbildung $\phi : C^\infty(M,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, die zusätzlich $\phi(fg) = \phi(f)g(x) + f(x)\phi(g)$ erfüllt, eine *Derivation bei x*. Die Menge aller solcher Derivationen wird mit $\mathrm{Der}_x(C^\infty(M,\mathbb{R}),\mathbb{R})$ bezeichnet. Offensichtlich ist für $\phi, \psi \in \mathrm{Der}_x(C^\infty(M,\mathbb{R}),\mathbb{R})$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ auch $\phi + \lambda\psi \in \mathrm{Der}_x(C^\infty(M,\mathbb{R}),\mathbb{R})$, also bilden die Derivationen bei x einen reellen Vektorraum.

Im Bild der Derivationen sieht auch die Tangentialabbildung sehr einfach aus: Sei $g : M \to N$ eine glatte Funktion, $x \in M$ ein Punkt, $\xi \in T_xM$ ein Tangentialvektor und $f : N \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion. Dann gilt nach Definition $(T_xg\cdot\xi)\cdot f = T_{g(x)}f\cdot(T_xg\cdot\xi) = T_x(f \circ g) \cdot \xi = \xi \cdot (f \circ g)$. Ist allgemein $\phi : C^\infty(M,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ eine Derivation bei x, dann betrachten wir $g_*\phi : C^\infty(N,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $g_*\phi(f) := \phi(f \circ g)$. Wegen $(f_1 + \lambda f_2) \circ g = (f_1 \circ g) + \lambda(f_2 \circ g)$ und $(f_1f_2) \circ g = (f_1 \circ g)(f_2 \circ g)$ folgt sofort, dass $g_*\phi$ eine Derivation bei $g(x)$ ist. Somit können wir der Funktion g eine (offensichtlich lineare) Abbildung $g_* : \mathrm{Der}_x(C^\infty(M,\mathbb{R}),\mathbb{R}) \to \mathrm{Der}_{g(x)}(C^\infty(N,\mathbb{R}),\mathbb{R})$ zuordnen, die genau der Tangentialabbildung im Bild der Derivationen entspricht.

Damit können wir auch leicht beschreiben, wie die Wirkung eines Tangentialvektors auf glatten Funktionen in lokalen Koordinaten aussieht. Betrachten wir für eine Teilmannigfaltigkeit M, eine glatte Funktion $f : M \to \mathbb{R}$, eine Karte (U,u) für M und einen Punkt $x \in U$ zunächst die Wirkung der Tangentialvektoren $\frac{\partial}{\partial u^i}(x)$. Nach Definition ist dieser Tangentialvektor gerade $T_{u(x)}u^{-1} \cdot e_i$, also $\frac{\partial}{\partial u^i}(x) \cdot f = T_xf \cdot T_{u(x)}u^{-1} \cdot e_i$. Nun ist aber $f \circ u^{-1} : u(U) \to \mathbb{R}$ eine glatte Abbildung zwischen offenen Teilmengen, also ist

$\frac{\partial}{\partial u^i}(x) \cdot f = \frac{\partial f}{\partial u^i}(x)$ gerade die i–te partielle Ableitung der lokalen Koordinatendarstellung $f \circ u^{-1}$ von f. Das erklärt auch die Notation für diese Tangentialvektoren. Da diese Vektoren eine Basis für T_xM bilden, liefert das auch die Wirkung von allgemeinen Tangentialvektoren. Insbesondere sehen wir, dass es für jeden Tangentialvektor $\xi \in T_xM$ mit $\xi \neq 0$ eine glatte Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ gibt, sodass $\xi \cdot f \neq 0$ gilt. Ist nämlich V eine offenen Umgebung von x mit $\bar{V} \subset U$, dann gibt es nach Teil (1) von Korollar 2.6 eine Funktion $g \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ mit $\operatorname{supp}(g) \subset U$ und $g(y) = 1$ für alle $y \in \bar{V}$. Nun kann man die Funktionen gu^j für $j = 1, \dots, k$ durch Null zu glatten Funktionen $f^j : M \to \mathbb{R}$ ausdehnen. Nach Konstruktion ist $f^j \circ u^{-1}$ lokal um $u(x)$ gleich der j–ten Projektion. Ist $\xi \in T_xM$ ein Tangentialvektor, $\xi = \sum_j \xi^j \frac{\partial}{\partial u^j}(x)$, dann impliziert das sofort $\xi \cdot f^j = \xi^j$ und damit die Behauptung.

Der entscheidende Schritt zur zweiten Interpretation von Tangentialvektoren und Vektorfeldern ist nun, dass die Zuordnung $T_xM \to \operatorname{Der}_x(C^\infty(M, \mathbb{R}), \mathbb{R})$, die ξ auf $f \mapsto \xi \cdot f$ abbildet, ein linearer Isomorphismus ist. Zunächst ist die Abbildung offensichtlich linear, weil nach Definition $\xi \cdot f = T_xf \cdot \xi$ gilt, und T_xf linear ist. Um zu sehen, dass die Abbildung auch bijektiv ist, benötigen wir einige Vorarbeiten. Betrachten wir die konstante Funktion $1 : M \to \mathbb{R}$, dann ist $1 = 1 \cdot 1$, also gilt für $\phi \in \operatorname{Der}_x(C^\infty(M, \mathbb{R}), \mathbb{R})$ die Gleichung $\phi(1) = \phi(1 \cdot 1) = \phi(1)1 + 1\phi(1) = 2\phi(1)$, also $\phi(1) = 0$. Sei nun $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ so, dass es eine offene Umgebung U von x in M gibt, sodass $f(y) = 0$ für alle $y \in U$ gilt. Nach Teil (1) von Korollar 2.6 finden wir eine glatte Funktion $g : M \to \mathbb{R}$, sodass $\operatorname{supp}(g) \subset U$ und $g(x) = 1$ gilt. Wegen $\operatorname{supp}(g) \subset U$ ist fg identisch Null, also $0 = \phi(fg) = \phi(f)g(x) + \phi(g)f(x) = \phi(f)$. Sind nun $f, g \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ so, dass es eine offene Umgebung U von x gibt für die $f|_U = g|_U$ gilt, dann ist $g - f$ auf U identisch Null, also $0 = \phi(g - f) = \phi(g) - \phi(f)$, also $\phi(f) = \phi(g)$. Damit hängt also für jede Derivation bei x der Wert auf einer Funktion nur vom lokalen Verhalten der Funktion um x ab.

Satz. *Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Teilmannigfaltigkeit. Dann ist die oben konstruierte Abbildung $T_xM \to \operatorname{Der}_x(C^\infty(M, \mathbb{R}), \mathbb{R})$ für jeden Punkt $x \in M$ ein linearer Isomorphismus.*

Beweis. Wir müssen nur noch zeigen, dass die Abbildung surjektiv ist. Sei (U, u) eine Karte für M mit $x \in U$. Durch translieren und skalieren im Bildbereich können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $u(x) = 0$ gilt und $u(U)$ den Einheitsball $B_1(0)$ enthält. Ist $y \in U$ so, dass $u(y)$ im Einheitsball liegt, dann gilt

$$f(y) = f(x) + \int_0^1 \tfrac{d}{dt}(f \circ u^{-1})(tu(y))dt = f(x) + \int_0^1 \sum_i \tfrac{\partial(f \circ u^{-1})}{\partial x^i}(tu(y))u^i(y)dt.$$

Dann kann man die Summe und die (von t unabhängigen) Faktoren $u^i(y)$ aus dem Integral herausnehmen, und auf $u^{-1}(B_1(0))$ glatte reellwertige Funktionen h_i durch

$$h_i(y) = \int_0^1 \tfrac{\partial(f \circ u^{-1})}{\partial x^i}(tu(y))dt$$

definieren. Somit kann man f lokal um x als $f(y) = f(x) + \sum_i u^i(y)h_i(y)$ schreiben. Nach Korollar 2.6 können wir die h_i glatt auf M fortsetzen, ohne sie lokal um x zu verändern, also gilt $f = f(x) + \sum_i u^i h_i$ lokal um x.

Ist nun $\phi : C^\infty(M, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ eine Derivation bei x, dann wissen wir das $\phi(f)$ nur vom lokalen Verhalten von f um x abhängt und ϕ auf der konstanten Funktion $f(a)$ verschwindet. Somit erhalten wir $\phi(f) = \sum_i(\phi(u^i)h_i(x) + u^i(x)\phi(h_i))$. Nun ist $u^i(x) = 0$ für alle i und nach Konstruktion ist $h_i(x) = \frac{\partial f}{\partial u^i}(x)$, also ist $\phi(f) = \sum_i \phi(u^i)\frac{\partial f}{\partial u^i}(x)$. Damit ist aber ϕ genau durch die Wirkung des Tangentialvektors $\sum_i \phi(u^i)\frac{\partial}{\partial u^i}(x)$ gegeben. $\square$

2.13. Tangentialräume auf abstrakten Mannigfaltigkeiten. Ohne die Interpretation von Tangentialvektoren als Derivationen hätten wir die Tangentialräume für abstrakte Mannigfaltigkeiten nur über Ableitungen glatter Kurven definieren können. In diesem Bild ist aber nicht klar, dass der Tangentialraum ein Vektorraum ist. Nun *definiert* man für eine glatte Mannigfaltigkeit M und einen Punkt $x \in M$ den Tangentialraum T_xM als $\mathrm{Der}_x(C^\infty(M,\mathbb{R}),\mathbb{R})$, und für eine glatte Funktion $f : M \to N$ zwischen glatten Mannigfaltigkeiten definiert man $T_xf : T_xM \to T_{f(x)}N$ durch $(T_xf \cdot \xi) \cdot g := \xi \cdot (g \circ f)$. Dann ist offensichtlich T_xf linear und man verifiziert leicht, dass für eine Karte (U,u) auf M mit $x \in U$ die Tangentialabbildung $T_xu : T_xM \to T_{u(x)}(u(U))$ ein linearer Isomorphismus ist. Damit hat der Vektorraum T_xM die "richtige" Dimension.

Dann definiert man das Tangentialbündel TM als die disjunkte Vereinigung aller T_xM für $x \in M$ und erhält sofort eine kanonische Projektion $p : TM \to M$, die jedes T_xM auf x abbildet. Als nächstes zeigt man, dass es eine eindeutige Topologie auf TM gibt, sodass jeder Tangentialraum die übliche Topologie eines $\mathbb{R}^n$ erbt und die Projektion $p : TM \to M$ stetig ist. Diese Topologie ist dann automatisch separabel und metrisierbar. Für einen Atlas $\{(U_\alpha, u_\alpha)\}$ konstruiert man ganz analog wie in 2.9 den Atlas $\{(p^{-1}(U_\alpha), Tu_\alpha)\}$ auf TM und macht somit TM zu einer glatten Mannigfaltigkeit. Dann definiert man Vektorfelder auf M als glatte Abbildungen $\xi : M \to TM$, die $p \circ \xi = \mathrm{id}_M$ erfüllen. Die Aussagen für lokale Koordinatendarstellungen von Tangentialabbildungen aus 2.9, sowie die lokalen Koordinatendarstellungen von Vektorfeldern aus 2.10 funktionieren auf abstrakten Mannigfaltigkeiten genau wie auf Teilmannigfaltigkeiten. Auch die Aussagen über Flüsse aus 2.11, die man alle in lokalen Karten beweist, gelten unverändert für abstrakte glatte Mannigfaltigkeiten.

2.14. Vektorfelder als Derivationen und die Lie–Klammer. Die algebraische Interpretation von Tangentialvektoren führt nun sofort zu einer algebraischen Interpretation von Vektorfeldern. Ist nämlich $\xi \in \mathfrak{X}(M)$ ein Vektorfeld und $f \in C^\infty(M,\mathbb{R})$, dann definieren wir $\xi \cdot f : M \to \mathbb{R}$ durch $(\xi \cdot f)(x) = \xi(x) \cdot f$. Nach Definition ist $\xi(x) \cdot f = T_xf \cdot \xi(x)$, also ist $\xi \cdot f$ einfach die zweite Komponente der glatten Funktion $Tf \circ \xi : M \to TM \to T\mathbb{R} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, und damit ist $\xi \cdot f \in C^\infty(M,\mathbb{R})$. Natürlich ist die Abbildung $f \mapsto \xi \cdot f$ linear. Sind $f, g : M \to \mathbb{R}$ glatte Funktionen, dann ist $\xi \cdot (fg)(x) = (\xi \cdot f)(x)g(x) + f(x)(\xi \cdot g)(x)$, also $\xi \cdot (fg) = (\xi \cdot f)g + f(\xi \cdot g)$. Eine lineare Abbildung $D : C^\infty(M,\mathbb{R}) \to C^\infty(M,\mathbb{R})$, die $D(fg) = D(f)g + fD(g)$ erfüllt, heißt eine *Derivation* der Algebra $C^\infty(M,\mathbb{R})$. Die Derivationen bilden offensichtlich einen Vektorraum, der mit $\mathrm{Der}(C^\infty(M,\mathbb{R}))$ bezeichnet wird.

Korollar (zu Satz 2.12). *Die Abbildung* $\mathfrak{X}(M) \to \mathrm{Der}(C^\infty(M,\mathbb{R}))$*, die* ξ *auf* $f \mapsto \xi \cdot f$ *abbildet, ist ein linearer Isomorphismus.*

Beweis. Die Abbildung ist offensichtlich linear. Ist $\xi \in \mathfrak{X}(M)$, $\xi \neq 0$, dann gibt es einen Punkt $x \in M$, sodass $\xi(x) \neq 0$ ist. Aus 2.12 wissen wir, dass es eine glatte Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ gibt, sodass $\xi(x) \cdot f = (\xi \cdot f)(x) \neq 0$ gilt, also ist unsere Abbildung injektiv.

Ist andererseits $D \in \mathrm{Der}(C^\infty(M,\mathbb{R}))$, dann betrachte für einen Punkt $x \in M$ die Abbildung $f \mapsto D(f)(x)$. Wegen $D(fg) = D(f)g + fD(g)$ ist das eine Derivation bei x, also finden wir ein eindeutiges Element $\xi_x \in T_xM$, sodass $D(f)(x) = \xi_x \cdot f$ gilt. Somit müssen wir nur noch zeigen, dass $x \mapsto \xi_x$ ein glattes Vektorfeld auf M definiert. Sei dazu x in M ein Punkt und (U,u) eine Karte für M mit $x \in U$. Wie in 2.12 finden wir glatte Funktionen $f^j : M \to \mathbb{R}$ für $j = 1, \dots, k$, die auf einer offenen Umgebung V von x mit u^j übereinstimmen. Nun ist $D(f^j) : M \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion, und aus 2.12

wissen wir, dass $\xi_y = \sum_j (\xi_y \cdot f^j) \frac{\partial}{\partial u^j}(y)$ für alle $y \in V$ gilt. Damit ist aber die Abbildung $y \mapsto \xi_y$ auf V gegeben durch $\sum_j D(f^j) \frac{\partial}{\partial u^j}$, also glatt lokal um x. □

Aus 2.12 kennen wir schon die Wirkung der lokalen Vektorfelder $\frac{\partial}{\partial u^i}$ für eine Karte (U,u) auf glatte Funktionen. Es ist nämlich für eine glatte Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ die Funktion $\frac{\partial}{\partial u^i} \cdot f = \frac{\partial f}{\partial u^i}$ die i–te partielle Ableitung der lokalen Koordinatendarstellung $f \circ u^{-1}$ von f. Allgemein bedeutet das natürlich, dass für ein Vektorfeld $\xi \in \mathfrak{X}(M)$ mit lokaler Koordinatendarstellung $\sum_i \xi^i \frac{\partial}{\partial u^i}$ die Wirkung auf f gegeben ist durch $\sum_i \xi^i \frac{\partial f}{\partial u^i}$.

Aus der algebraischen Interpretation von Vektorfeldern ergibt sich sofort die Idee, aus zwei Vektorfeldern ein neues Vektorfeld durch Komposition zu erzeugen, d.h. für $\xi, \eta \in \mathfrak{X}(M)$ die Abbildung $f \mapsto \xi \cdot (\eta \cdot f)$ zu betrachten. Leider ist das aber keine Derivation, denn es gilt

$$\xi \cdot (\eta \cdot (fg)) = \xi \cdot ((\eta \cdot f)g + f(\eta \cdot g)) = (\xi \cdot (\eta \cdot f))g + (\eta \cdot f)(\xi \cdot g) + (\xi \cdot f)(\eta \cdot g) + f(\xi \cdot (\eta \cdot g)).$$

Aus dieser Rechnung folgt aber sofort, dass die Abbildung $f \mapsto \xi \cdot (\eta \cdot f) - \eta \cdot (\xi \cdot f)$ eine Derivation ist, also ein eindeutiges Vektorfeld definiert.

Definition. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und seien $\xi, \eta \in \mathfrak{X}(M)$ Vektorfelder. Dann definieren wir die *Lie Klammer* $[\xi, \eta] \in \mathfrak{X}(M)$ von ξ und η als das eindeutige Vektorfeld, das $[\xi, \eta] \cdot f = \xi \cdot (\eta \cdot f) - \eta \cdot (\xi \cdot f)$ erfüllt.

Offensichtlich ist die Lie Klammer linear in beiden Variablen (also bilinear und schiefsymmetrisch, d.h. $[\eta, \xi] = -[\xi, \eta]$. Außerdem gilt:

Proposition. *Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit, $\xi, \eta, \zeta \in \mathfrak{X}(M)$ Vektorfelder und $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$. Dann gilt:*
(1) $[\xi, [\eta, \zeta]] = [[\xi, \eta], \zeta] + [\eta, [\xi, \zeta]]$ ("Jacobi–Identität")
(2) Ist $U \subset M$ offen und $\xi(x) = 0$ für alle $x \in U$, dann ist $[\xi, \eta](x) = 0$ für alle $x \in U$ ("Lokalität").
(3) $[\xi, f\eta] = f[\xi, \eta] + (\xi \cdot f)\eta$ und $[f\xi, \eta] = f[\xi, \eta] - (\eta \cdot f)\xi$.

Beweis. (1) Verifiziert man durch direktes Nachrechnen aus der Definition.
(2) Ist $\xi(x) = 0$ für alle $x \in U$, dann ist $(\xi \cdot f)(x) = 0$ für alle $x \in U$. Damit ist insbesondere $(\xi \cdot (\eta \cdot g))(x) = 0$ für alle $g \in C^\infty(M, \mathbb{R})$. Andererseits verschwindet für beliebiges g die Funktion $\xi \cdot g$ auf der offenen Menge U also ist für jedes $x \in U$ diese Funktion lokal um x identisch Null und damit $(\eta \cdot (\xi \cdot g))(x) = 0$. Somit ist aber $([\xi, \eta] \cdot g)(x) = 0$ für alle g und alle $x \in U$, also $[\xi, \eta](x) = 0$.
(3) Für $g \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ ist nach Definition $((f\eta) \cdot g)(x) = f(x)\eta(x) \cdot g$, also $(f\eta) \cdot g = f(\eta \cdot g)$. Damit ist aber $\xi \cdot ((f\eta) \cdot g) = (\xi \cdot f)(\eta \cdot g) + f(\xi \cdot (\eta \cdot g))$. Zusammen mit $(f\eta) \cdot (\xi \cdot g) = f(\eta \cdot (\xi \cdot g))$ impliziert das $[\xi, f\eta] = (\xi \cdot f)\eta + f[\xi, \eta]$. Wegen der Schiefsymmetrie ist $[f\xi, \eta] = -[\eta, f\xi]$ und damit folgt die zweite Gleichung aus der ersten. □

Diese Proposition erlaubt es uns direkt, die Lie Klammer in lokalen Koordinaten zu berechnen. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und (U, u) eine Karte auf M. Für eine glatte Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ ist dann $\frac{\partial}{\partial u^i} \cdot f$ gerade die i–te partielle Ableitung von $f \circ u^{-1}$. Damit erhält man aber durch Anwenden von zwei solchen Feldern gerade die zweiten partiellen Ableitungen $\frac{\partial^2 f}{\partial u^i \partial u^j}$ von f, und wegen der Symmetrie dieser zweiten partiellen Ableitungen gilt $\left[\frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^j}\right] = 0$ für alle i und j. Sind nun $\xi, \eta \in \mathfrak{X}(M)$ und $\xi|_U = \sum_i \xi^i \frac{\partial}{\partial u^i}$ und $\eta|_U = \sum_j \eta^j \frac{\partial}{\partial u^j}$ die entsprechenden lokalen Koordinatendarstellungen, dann erhalten wir

$$[\xi,\eta]|_U = \sum_{i,j}\left[\xi^i\tfrac{\partial}{\partial u^i},\eta^j\tfrac{\partial}{\partial u^j}\right] = \sum_{i,j}\left(\xi^i\tfrac{\partial\eta^j}{\partial u^i}\tfrac{\partial}{\partial u^j}+\eta^j\left[\xi^i\tfrac{\partial}{\partial u^i},\tfrac{\partial}{\partial u^j}\right]\right)$$
$$= \sum_{i,j}\left(\xi^i\tfrac{\partial\eta^j}{\partial u^i}\tfrac{\partial}{\partial u^j}-\eta^j\tfrac{\partial\xi^i}{\partial u^j}\tfrac{\partial}{\partial u^i}+0\right),$$

und damit $[\xi,\eta]^k = \sum_i\left(\xi^i\frac{\partial\eta^k}{\partial u^i}-\eta^i\frac{\partial\xi^k}{\partial u^i}\right)$.

2.15. Vermischtes über Vektorfelder. Ein Schwachpunkt von Vektorfeldern ist, dass man sie nicht gut mit glatten Funktionen abbilden kann. (Das ist einer der Gründe, warum wir später Differentialformen betrachten werden.) Es gibt aber einen Fall, in dem es doch funktioniert. Sei nämlich $f: M\to N$ ein lokaler Diffeomorphismus zwischen glatten Mannigfaltigkeiten. Dann ist für jedes $x\in M$ die lineare Abbildung $T_xf: T_xM\to T_{f(x)}N$ invertierbar, und damit können wir für ein Vektorfeld $\xi\in\mathfrak{X}(N)$ ein Vektorfeld $f^*\xi\in\mathfrak{X}(M)$ durch $f^*\xi(x) := (T_xf)^{-1}\cdot\xi(f(x))$ definieren. Dieses Vektorfeld ist glatt, weil man es auf einer offenen Umgebung U von x, für die $f: U\to f(U)$ ein Diffeomorphismus ist, als $T(f|_U)^{-1}\circ\xi\circ f$ schreiben kann. Man verifiziert dann leicht, dass $[f^*\xi,f^*\eta] = f^*([\xi,\eta])$ gilt, also die Lie Klammer *natürlich* ist.

Insbesondere kann man dies nun auf Flüsse anwenden. Sind $\xi,\eta\in\mathfrak{X}(M)$ Vektorfelder und ist $x\in M$ ein Punkt, dann gibt es ein $\epsilon>0$, sodass Fl^ξ_t für $|t|<\epsilon$ ein lokal um x definierter lokaler Diffeomorphismus ist. Für kleine t erhält man damit $(\mathrm{Fl}^\xi_t)^*\eta(x)\in T_xM$, und dies definiert eine glatte Kurve im Tangentialraum T_xM. Damit kann man die Ableitung bei $t=0$ dieser Kurve bilden, und man zeigt, dass diese Ableitung gerade $[\xi,\eta](x)$ ist. Damit erhält man eine geometrische Interpretation der Lie Klammer: Man zeigt nämlich, dass für $\xi,\eta\in\mathfrak{X}(M)$ die Lie Klammer $[\xi,\eta]$ genau dann verschwindet, wenn die Flüsse der Vektorfelder kommutieren, also $\mathrm{Fl}^\xi_t(\mathrm{Fl}^\eta_s(x)) = \mathrm{Fl}^\eta_s(\mathrm{Fl}^\xi_t(x))$ gilt, wann immer beide Seiten definiert sind.

KAPITEL 3

Hyperflächen in $\mathbb{R}^{n+1}$

In diesem Kapitel werden wir einige grundlegende Elemente der lokalen Theorie von Hyperflächen in $\mathbb{R}^{n+1}$ und insbesondere von Flächen in $\mathbb{R}^3$ besprechen.

3.1. Induzierte Riemann Metrik – intrinsische und extrinsische Größen. Eine *Hyperfläche* in $\mathbb{R}^{n+1}$ ist eine n–dimensionale Teilmannigfaltigkeit. Im Fall $n = 2$ spricht man einfach von Flächen in $\mathbb{R}^3$.

Ist $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ eine Teilmannigfaltigkeit, dann ist nach Definition für jeden Punkt $x \in M$ der Tangentialraum T_xM ein Teilraum von $T_x\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^{n+1}$. Damit können wir das innere Produkt auf $\mathbb{R}^{n+1}$ zu einem inneren Produkt $g_x : T_xM \times T_xM \to \mathbb{R}$ einschränken. Lassen wir den Punkt x laufen, dann erhalten wir eine Funktion g, die jedem Punkt $x \in M$ das innere Produkt g_x auf T_xM zuordnet. Ist ξ ein glattes Vektorfeld auf M, dann ist nach Definition die Funktion $x \mapsto (x, \xi(x))$ glatt als Funktion $M \to TM \subset M \times \mathbb{R}^{n+1}$. Für eine weiteres Vektorfeld $\eta \in \mathfrak{X}(M)$ ist dann $x \mapsto (\xi(x), \eta(x))$ eine glatte Funktion $M \to \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1}$, also ist auch $x \mapsto g_x(\xi(x), \eta(x)) = \langle \xi(x), \eta(x) \rangle$ glatt. Somit ist die Funktion g glatt in dem Sinne, dass für glatte Vektorfelder $\xi, \eta \in \mathfrak{X}(M)$ die Funktion $g(\xi, \eta) : M \to \mathbb{R}$ glatt ist.

Dieses Konzept macht nun auch auf abstrakten Mannigfaltigkeiten Sinn. Ist M eine abstrakte Mannigfaltigkeit, dann definiert man eine *Riemann Metrik* auf M als eine Funktion g, die jedem Punkt $x \in M$ ein inneres Produkt g_x auf T_xM zuordnet, und die glatt im obigen Sinne ist. Eine *Riemann Mannigfaltigkeit* ist dann eine Mannigfaltigkeit M zusammen mit einer Riemann Metrik g auf M. Das geometrische Studium von Riemann Mannigfaltigkeiten, die sogenannte *Riemann'sche Geometrie*, ist ein zentraler Teil der Differentialgeometrie.

Im Fall von Hyperflächen stellt sich nun heraus, dass das Studium einer Hyperfläche $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ einerseits zu Größen führt, die tatsächlich von der konkreten Einbettung in $\mathbb{R}^{n+1}$ abhängen (*extrinsische Größen*). Andererseits erhält man aber auch Größen, die nur von der induzierten Riemann Metrik g (also nur von der Riemann Mannigfaltigkeit (M, g)) abhängen (*intrinsische Größen*).

Die Unterscheidung zwischen intrinsischen und extrinsischen Größen kann man schön durch Invarianzeigenschaften verstehen. Natürlich werden wir (wie im Fall der Kurven) verlangen, dass geometrische Größen mit Bewegungen verträglich sein sollen. Für intrinsische Größen verlangt man aber Invarianz unter Isometrien.

Seien (M, g^M) und (N, g^N) Riemann Mannigfaltigkeiten. Dann definiert man eine *Isometrie* von M nach N als einen Diffeomorphismus $f : M \to N$, sodass für alle $x \in M$ und Tangentialvektoren $\xi, \eta \in T_xM$ die Gleichung $g^N_{f(x)}(T_xf \cdot \xi, T_xf \cdot \eta) = g^M_x(\xi, \eta)$ gilt. Isometrien sind also gerade jene Diffeomorphismen, die in offensichtlicher Weise mit den Riemann Metriken verträglich sind.

Sind $M, N \subset \mathbb{R}^{n+1}$ Teilmannigfaltigkeiten und ist $f(x) = Ax + b$ eine Bewegung auf $\mathbb{R}^{n+1}$ mit $f(M) = N$, dann ist die Einschränkung von f auf M natürlich ein Diffeomorphismus $f : M \to N$. Für einen Punkt $x \in M$ ist nach 2.8 die Tangentialabbildung $T_xf : T_xM \to T_{f(x)}N$ durch die Einschränkung der Ableitung $Df(x) = A$ gegeben.

Damit ist aber $Df(x)$ orthogonal, also T_xf mit den inneren Produkten auf T_xM und $T_{f(x)}N$ (die ja beide vom inneren Produkt auf $\mathbb{R}^{n+1}$ induziert sind) verträglich. Damit ist $f : M \to N$ eine Isometrie. Wie das folgende Beispiel zeigt, gibt es aber auch Isometrien, die nicht von Bewegungen von $\mathbb{R}^{n+1}$ kommen.

Beispiel. Betrachte die Teilmenge $M := \{(x, 0, z) : |x| < \pi, |z| < 1\} \subset \mathbb{R}^3$ und die glatte Funktion $f : M \to \mathbb{R}^3$, die gegeben ist durch $f(x, 0, z) := (\cos(x), \sin(x), z)$. Dann ist M ein offenes Rechteck in der x–z–Ebene und f ist eine Bijektion auf einen offenen Teil eines Zylinders, die man klarerweise als Parametrisierung für $f(M)$ verwenden kann, das so zu einer Teilmannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$ wird. Natürlich ist $T_{(x,0,z)}M = \{(v, 0, w) : v, w \in \mathbb{R}\}$ und $T_{(x,0,z)}f \cdot (v, 0, w) = (-\sin(x)v, \cos(x)v, w)$. Nun ist aber offensichtlich $\langle(-\sin(x)v_1, \cos(x)v_1, w_1), (-\sin(x)v_2, \cos(x)v_2, w_2)\rangle = v_1v_2(\sin^2(x) + \cos^2(x)) + w_1w_2$. Damit sehen wir, dass $T_{(x,0,z)}f$ mit den inneren Produkten verträglich ist, also ist f eine Isometrie. Nun ist aber zum Beispiel $d(f(\pi/2, 0, 0), f(0, 0, 0)) = \sqrt{2} \neq \pi/2$, also kann f nicht Einschränkung einer Bewegung von $\mathbb{R}^3$ sein.

3.2. Einheitsnormalenfeld, Gauß– und Weingartenabbildung. Sei M eine Hyperfläche in $\mathbb{R}^{n+1}$, also eine n–dimensionale Teilmannigfaltigkeit. Ein *lokales Einheitsnormalenfeld* für M ist eine glatte Funktion $\mathfrak{n}$ von einer offenen Teilmenge $U \subset M$ nach $\mathbb{R}^{n+1}$, sodass für jedes $x \in U$ der Vektor $\mathfrak{n}(x)$ normal auf den Teilraum $T_xM \subset \mathbb{R}^{n+1}$ steht und $\|\mathfrak{n}(x)\| = 1$ gilt. Nach Definition ist $T_xM \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ein n–dimensionaler Teilraum, also ist das orthogonale Komplement $(T_xM)^\perp$ eine Gerade in $\mathbb{R}^{n+1}$. Somit gibt es genau zwei Einheitsvektoren in $\mathbb{R}^{n+1}$, die normal auf T_xM stehen.

Um zu sehen, dass lokale Einheitsnormalenfelder existieren, benutzen wir, dass M lokale Trivialisierungen besitzt. Nach Satz 2.3 gibt es zu jedem Punkt $x \in M$ eine offene Teilmenge $\tilde{U} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ mit $x \in \tilde{U}$, einen n–dimensionalen Teilraum $E \subset \mathbb{R}^{n+1}$ und einen Diffeomorphismus $\Psi : \tilde{U} \to V$ auf eine offene Teilmenge $V \subset \mathbb{R}^{n+1}$, sodass $\Psi(M \cap \tilde{U}) = V \cap E$ gilt. Setze $U := M \cap \tilde{U}$ und wähle eine Basis $\{e_1, \dots, e_n\}$ für E und einen fixen Vektor $e_{n+1} \in E^\perp$ mit $e_{n+1} \neq 0$. Für $x \in U$ und $j = 1, \dots, n+1$ definiere dann $\xi_j(x) = T_{\Psi(x)}(\Psi^{-1}) \cdot e_j$. Dann ist offensichtlich jedes ξ_j glatt, und wegen $\Psi(U) \subset V \cap E$ ist $\{\xi_1(x), \dots, \xi_n(x)\}$ für jedes $x \in U$ eine Basis für T_xM und $\xi_{n+1}(x)$ ergänzt diese zu einer Basis von $T_x\mathbb{R}^{n+1}$. Wenden wir nun auf diese Funktionen das Gram–Schmidt Orthonormalisierungsverfahren an, dann erhalten wir $\eta_1(x) = \frac{1}{\sqrt{\langle\xi_1(x),\xi_1(x)\rangle}}\xi_1(x)$, und sind $\eta_1, \dots, \eta_{j-1}$ definiert, dann ist $\tilde{\eta}_j(x) = \xi_j(x) - \sum_{k=1}^{j-1}\langle\xi_j(x), \eta_k(x)\rangle\eta_k(x)$, und schließlich $\eta_j(x) = \frac{1}{\sqrt{\langle\tilde{\eta}_j(x),\tilde{\eta}_j(x)\rangle}}\tilde{\eta}_j(x)$. Damit folgt aber induktiv sofort, dass jede der Funktionen $\eta_j : U \to \mathbb{R}^{n+1}$ glatt ist, und nach Konstruktion ist für $x \in U$ die Menge $\{\eta_1(x), \dots, \eta_n(x)\}$ eine Orthonormalbasis für T_xM, während $\mathfrak{n} := \eta_{n+1}$ ein auf U definiertes lokales Einheitsnormalenfeld für M ist.

Im Allgemeinen gibt es auf einer Hyperfläche $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ kein global definiertes Einheitsnormalenfeld. Das ist etwa für das Möbiusband leicht einzusehen. Falls ein globales Einheitsnormalenfeld existiert, dann heißt die Hyperfläche M *orientierbar*.

Die offensichtliche geometrische Interpretation eines (lokalen) Einheitsnormalenfeldes ist natürlich als ein Vektorfeld auf $\mathbb{R}^{n+1}$, das aber nur auf (einer offenen Teilmenge von) M definiert ist. Interpretieren wir $\mathfrak{n}$ aber einfach als eine Funktion nach $\mathbb{R}^{n+1}$, dann definiert es wegen $\|\mathfrak{n}(x)\| = 1$ eine glatte Funktion $\mathfrak{n} : U \to S^n$. Diese Funktion ist bis auf ihr Vorzeichen eindeutig bestimmt und heißt die (lokale) *Gaußabbildung* der Hyperfläche M.

Sei nun $x \in M$ ein Punkt, $\mathfrak{n} : U \to S^n$ die Gaußabbildung zu einem lokal um x definierten Einheitsnormalenfeld. Nach Beispiel (2) von 2.7 ist $T_{\mathfrak{n}(x)}S^n$ gerade das orthogonale Komplement $\mathfrak{n}(x)^\perp \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Damit ist aber $T_{\mathfrak{n}(x)}S^n = T_xM$, und somit können wir die Tangentialabbildung $T_x\mathfrak{n}$ als lineare Abbildung von T_xM auf sich selbst betrachten. Diese Abbildung heißt die *Weingartenabbildung* für M bei x und wird mit $L_x : T_xM \to T_xM$ bezeichnet. Wählt man das andere mögliche Einheitsnormalenfeld, dann wechselt die Weingartenabbildung ihr Vorzeichen.

Für ein glattes Vektorfeld $\xi \in \mathfrak{X}(U)$ betrachte die Funktion $L(\xi) : U \to \mathbb{R}^{n+1}$, $L(\xi)(x) := L_x(\xi(x))$, die jedem Punkt x einen Tangentialvektor in T_xM zuordnet. Nach Definition ist $L_x(\xi(x)) = T_x\mathfrak{n} \cdot \xi(x)$, also ist $L(\xi)$ gerade die zweite Komponente der glatten Abbildung $T\mathfrak{n} \circ \xi$, also glatt. Damit ist die Weingartenabbildung L glatt in dem Sinn, dass für jedes Vektorfeld ξ auf U auch $L(\xi)$ ein glattes Vektorfeld auf U ist.

Um die entscheidende Eigenschaft der Weingartenabbildung zu beweisen, benötigen wir noch eine Beobachtung. Sei $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ eine Hyperfläche und sei $\xi \in \mathfrak{X}(M)$ ein Vektorfeld auf M. Dann können wir ξ auch als $\mathbb{R}^{n+1}$–wertige Funktion auffassen und damit Tangentialvektoren auf ξ anwenden. Insbesondere können wir für ein weiteres Vektorfeld $\eta \in \mathfrak{X}(M)$ die Funktion $\eta \cdot \xi = (\eta \cdot \xi^1, \dots, \eta \cdot \xi^{n+1})$ bilden, wobei ξ^j die Koordinatenfunktionen von ξ bezeichnen. Nach Definition ist $(\eta \cdot \xi)(x) = T_x\xi \cdot \eta(x)$. Im Allgemeinen liegt dieses Element zwar nicht im Teilraum $T_xM \subset \mathbb{R}^{n+1}$, wir behaupten aber, dass $\xi \cdot \eta - \eta \cdot \xi = [\xi, \eta]$ gilt. Betrachten wir zunächst den Fall von Koordinatenvektorfeldern. Sei also (U, u) eine Karte für M und seien $\partial_i = \frac{\partial}{\partial u^i}$ die entsprechenden Koordinatenvektorfelder. Sei $V = u(U)$ und $v := u^{-1} : V \to U \subset \mathbb{R}^{n+1}$ die lokale Parametrisierung zur Karte (U, u). Nach Definition ist dann $(\partial_j v)(y) = T_y v \cdot e_j$ und die $\mathbb{R}^{n+1}$–Komponente davon ist nach 2.9 gerade $Dv(y)(e_j) = (\frac{\partial v^1}{\partial y^j}, \dots, \frac{\partial v^{n+1}}{\partial y^j})$. Aus 2.14 wissen wir, dass $(\partial_i \cdot \partial_j) \circ v$ gerade durch die i–te partielle Ableitung dieser Funktion gegeben ist, also erhalten wir $(\partial_i \cdot \partial_j)(v(y)) = (\frac{\partial^2 v^1}{\partial y^i \partial y^j}, \dots, \frac{\partial^2 v^{n+1}}{\partial y^i \partial y^j})$. Aus der Symmetrie der zweiten partiellen Ableitungen folgt nun sofort, dass $\partial_i \cdot \partial_j = \partial_j \cdot \partial_i$ gilt. Schreiben wir nun $\xi, \eta \in \mathfrak{X}(M)$ lokal um x als $\sum_i \xi^i \partial_i$ und $\sum_j \eta^j \partial_j$ (wobei man ξ^i nicht mit den Koordinatenfunktionen von oben verwechseln darf), dann erhalten wir

$$\sum_i \xi^i \partial_i \cdot \left(\sum_j \eta^j \partial_j \right) - \sum_j \eta^j \partial_j \cdot \left(\sum_i \xi^i \partial_i \right) =$$
$$\sum_{i,j} \big(\xi^i (\partial_i \cdot \eta^j) \partial_j - \eta^j (\partial_j \cdot \xi^i) \partial_i + \xi^i \eta^j (\partial_i \cdot \partial_j - \partial_j \cdot \partial_i) \big)$$

Von oben wissen wir, dass der letzte Summand verschwindet und damit folgt $\xi \cdot \eta - \eta \cdot \xi = [\xi, \eta]$ auf U aus der Koordinatenformel für die Lie Klammer aus 2.14. Damit zeigen wir nun:

Proposition. *Sei $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ eine Hyperfläche, $\mathfrak{n}$ ein lokales Einheitsnormalenfeld auf M und L die Weingartenabbildung. Dann ist für jeden Punkt $x \in M$ die lineare Abbildung L_x symmetrisch, d.h. für $\xi_x, \eta_x \in T_xM$ gilt $g_x(L_x(\xi_x), \eta_x) = g_x(\xi_x, L_x(\eta_x))$.*

Beweis. Seien ξ und η lokal um x definierte Vektorfelder mit $\xi(x) = \xi_x$ und $\eta(x) = \eta_x$. Dann ist die Funktion $\langle \mathfrak{n}, \eta \rangle$ identisch Null, und Differenzieren dieser Gleichung liefert $0 = \xi \cdot \langle \mathfrak{n}, \eta \rangle(x) = \langle T_x\mathfrak{n} \cdot \xi(x), \eta(x) \rangle + \langle \mathfrak{n}(x), T_x\eta \cdot \xi(x) \rangle$. Der erste Term liefert nach Definition gerade $g_x(L_x(\xi_x), \eta_x)$ und damit erhalten wir

$$g_x(L_x(\xi_x), \eta_x) - g_x(\xi_x, L_x(\eta_x)) = \langle \mathfrak{n}(x), T_x\xi \cdot \eta - T_x\eta \cdot \xi \rangle.$$

Vor dieser Proposition haben wir aber gesehen, dass $T_x\xi \cdot \eta - T_x\eta \cdot \xi = [\xi, \eta](x) \in T_xM$, also ist die rechte Seite gleich Null, und die Behauptung folgt. $\square$

3.3. Fundamentalformen und Krümmungen. Das letzte Resultat erlaubt uns nun, einige der entscheidenden Größen der Hyperflächentheorie zu definieren: Zunächst ist für jedes $n > 0$ die Abbildung $(\xi_x, \eta_x) \mapsto g_x(L_x^{n-1}(\xi_x), \eta_x)$ eine symmetrische Bilinearform auf T_xM, die n–te *Fundamentalform* von M. Die erste Fundamentalform ist einfach die Metrik g_x. Besonders wichtig ist die zweite Fundamentalform $II(\xi_x, \eta_x) = g_x(L_x(\xi_x), \eta_x)$. Aus den obigen Überlegungen folgt auch sofort, dass alle Fundamentalformen glatt sind, d.h. wenn man glatte Vektorfelder in eine Fundamentalform einsetzt, erhält man eine glatte Funktion.

Als symmetrische Matrix ist L_x über $\mathbb{R}$ orthogonal diagonalisierbar, d.h. L_x hat n (nicht notwendig verschiedene) reelle Eigenwerte $\kappa_1(x), \dots, \kappa_n(x)$, die *Hauptkrümmungen* von M bei x. Zu diesen Eigenwerten gibt es (paarweise orthogonale) Eigenvektoren und diese bestimmen die *Hauptkrümmungsrichtungen* von M bei x. *Hauptkrümmungsrichtungen*

Die wichtigsten Krümmungen sind die *Gaußkrümmung* $K(x) = \det(L_x) = \prod_{i=1}^n \kappa_i(x)$ und die *mittlere Krümmung* $H(x) = \frac{1}{n}\operatorname{tr}(L_x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \kappa_i(x)$.

Ein Punkt $x \in M$ heißt ein *Nabelpunkt*, falls alle Hauptkrümmungen in x gleich sind, also L_x ein Vielfaches der Identität ist. Sind alle $\kappa_i(x) = 0$, dann heißt x ein *Flachpunkt*.

Eine Kurve $c : I \to M$ heißt eine *Krümmungslinie*, falls für jedes $t \in I$ die Ableitung $c'(t)$ ein Eigenvektor von $L_{c(t)}$ ist.

Man sieht leicht, dass alle diese Größen invariant unter orientierungstreuen Bewegungen von $\mathbb{R}^{n+1}$ sind: Ist $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ eine Hyperfläche und $f(x) = Ax+b$ eine Bewegung mit $\det(A) = 1$, dann schränkt sich f zu einem Diffeomorphismus $f : M \to \tilde{M} := f(M)$ ein. Für ein lokales Einheitsnormalenfeld $\mathfrak{n}$ auf $\tilde{U} \subset \tilde{M}$ ist $\mathfrak{n} \circ Tf$ ein Einheitsnormalenfeld auf $U := f^{-1}(\tilde{U})$, weil $T_xf = A : T_x\mathbb{R}^{n+1} \to T_{f(x)}\mathbb{R}^{n+1}$ orthogonal ist und T_xM auf $T_{f(x)}\tilde{M}$ abbildet. Somit ist die Gaußabbildung auf U gerade die Komposition der Gaußabbildung auf $\tilde{U}$ mit f. Aus der Kettenregel folgt damit sofort, dass $L_x = (T_xf)^{-1} \circ \tilde{L}_{f(x)} \circ T_xf = A^{-1} \circ \tilde{L}_{f(x)} \circ A$. Daraus folgt sofort, dass L_x und $\tilde{L}_{f(x)}$ die gleichen Eigenwerte haben, also die Hauptkrümmungen geometrische Größen sind. Außerdem ist für einen Eigenvektor ξ_x von L_x der Vektor $A(\xi_x)$ ein Eigenvektor von $\tilde{L}_{f(x)}$, also sind auch die Hauptkrümmungsrichtungen mit Bewegungen verträglich. Damit sind auch Nabelpunkte, Flachpunkte und Krümmungslinien geometrischer Natur.

Beispiel. (1) Betrachten wir zunächst $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Für dieses Beispiel ist das konstante Vektorfeld $\mathfrak{n}(x) = e_{n+1}$ ein globales Einheitsnormalenfeld. Daraus folgt aber sofort, dass die Weingartenabbildungen und damit alle Krümmungen Null sind.
(2) Die Sphäre $S^n_R \subset \mathbb{R}^{n+1}$ vom Radius $R > 0$. Aus Beispiel (2) von 2.7 wissen wir, dass $T_xS^n_R = \{v : \langle x, v\rangle = 0\}$ für alle $x \in S^n_R$ gilt. Damit ist aber $x \mapsto \frac{1}{R}x$ ein globales Einheitsnormalenfeld, also ist die Gaußabbildung $S^n_R \to S^n_1$ gerade $\frac{1}{R}\operatorname{id}$. Somit ist aber für jedes $x \in S^n_R$ die Weingartenabbildung L_x ebenfalls $\frac{1}{R}\operatorname{id}$. Daher ist jedes $x \in S^n_R$ ein Nabelpunkt, jede Richtung eine Hauptkrümmungsrichtung, und alle Hauptkrümmungen sind konstant gleich $\frac{1}{R}$. Damit sind auch die Gauß– und die mittlere Krümmung konstant $K = \frac{1}{R^n}$ und $H = \frac{1}{R}$. Die zweite Fundamentalform ist gegeben durch $II(\xi, \eta) = \frac{1}{R}g(\xi, \eta)$.
(3) Ein Zylinder in $\mathbb{R}^3$ vom Radius R. Wir können so einen Zylinder (um die y–Achse) als $f^{-1}(R^2)$ schreiben, wobei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ durch $f(x, y, z) = x^2 + z^2$ gegeben ist. Man verifiziert sofort, dass f außerhalb der y–Achse regulär ist. Ein Einheitsnormalenfeld für diese Mannigfaltigkeit ist gegeben durch den normierten Gradienten von f, d.h. $\mathfrak{n}(x, y, z) = \frac{1}{R}(x, 0, z)$. Damit sieht man aber, dass die Gaußabbildung in y–Richtung

konstant ist, also erhält man in dieser Richtung einen Eigenvektor für die Weingartenabbildung zum Eigenwert 0. Eingeschränkt auf den Schnitt der $(x$–$z)$–Ebene mit dem Zylinder ist die Gaußabbildung wieder $\frac{1}{R}\,\mathrm{id}$, also erhält man in dieser Richtung einen Eigenvektor für die Weingartenabbildung zum Eigenwert $\frac{1}{R}$. Also ist eine Hauptkrümmung 0 mit Hauptkrümmungsrichtung parallel zur y–Achse und eine gleich $\frac{1}{R}$ mit Hauptkrümmungsrichtung orthogonal zur y–Achse. Damit sind die Gaußkrümmung und die mittlere Krümmung konstant, nämlich $K = 0$ und $H = \frac{1}{2R}$.

Bemerkung. Aus diesem Beispiel sehen wir, dass kaum etwas von dem, was wir bisher gemacht haben, intrinsisch sein kann. Da der Zylinder lokal isometrisch diffeomorph zur Ebene ist (siehe Beispiel 3.1), sind Hauptkrümmungen (und damit auch Hauptkrümmungsrichtungen) und Nabelpunkte sicherlich extrinsisch. Die einzige von den bisher besprochenen Größen, die intrinsisch sein könnte, ist die Gaußkrümmung. Wie wir später sehen werden, ist die Gaußkrümmung für Flächen im $\mathbb{R}^3$ tatsächlich intrinsisch, was für Gauß ein so überraschendes Resultat war, dass er es als “Theorema egregium” bezeichnet hat.

Wir können die zweite Fundamentalform und damit die Hauptkrümmungen in Beziehung mit der Krümmung von Kurven setzen. Sei dazu $c : I \to M$ eine glatte Kurve, wobei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall mit $0 \in I$ ist, und setze $x := c(0)$, $\xi_x := c'(0) \in T_xM$. Für ein lokal um x definiertes Einheitsnormalenfeld $\mathfrak{n}$ können wir dann die $\mathbb{R}^{n+1}$–wertige Funktion $\mathfrak{n} \circ c$ betrachten. Nach Definition gilt $(\mathfrak{n} \circ c)'(0) = T_x\mathfrak{n} \cdot \xi_x = L_x(\xi_x)$. Betrachten wir c als Kurve in $\mathbb{R}^{n+1}$, dann macht natürlich auch die zweite Ableitung $c'' : I \to \mathbb{R}^{n+1}$ Sinn. Da c Werte in M hat, liegt $c'(t) \in T_{c(t)}M$ für alle t, also erhalten wir $0 = \langle \mathfrak{n}(c(t)), c'(t)\rangle$. Leiten wir diese Gleichung nach t ab, dann erhalten wir $0 = \langle (\mathfrak{n} \circ c)'(t), c'(t)\rangle + \langle \mathfrak{n}(c(t)), c''(t)\rangle$. Für $t = 0$ liefert der erste Term $\langle L_x(\xi_x), \xi_x\rangle$ und damit erhalten wir die Gleichung $II(\xi_x, \xi_x) = -\langle \mathfrak{n}(x), c''(0)\rangle$.

Beginnen wir nun mit einer Hyperfläche M, einem Punkt $x \in M$ und einem Tangentialvektor $\xi_x \in T_xM$, sodass $g_x(\xi_x, \xi_x) = 1$ gilt. Für ein lokal um x definiertes Einheitsnormalenfeld $\mathfrak{n}$ betrachte die von $\mathfrak{n}(x)$ und ξ_x erzeugte affine Ebene E durch x, also $E = \{x + t\mathfrak{n}(x) + s\xi_x : (t, s) \in \mathbb{R}^2\}$. Sei $V \subset \mathbb{R}^{n+1}$ offen und $f : V \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion, die M als lokale reguläre Nullstellenmenge darstellt. Schränken wir f auf die offene Teilmenge $V \cap E \subset E$ ein und verwenden wir (t, s) als Koordinaten in E, dann ist $\frac{\partial f}{\partial t}(0) = Df(x)(\mathfrak{n}(x)) \neq 0$ (weil sonst $\mathfrak{n}(x) \in T_xM$ wäre). Damit ist aber diese partielle Ableitung lokal um 0 ungleich Null, also $f|_E$ auf einer offenen Umgebung W von x in E regulär. Daher ist $(f|_W)^{-1}(\{0\}) = M \cap W$ eine eindimensionale glatte Teilmannigfaltigkeit, also schneidet M die Ebene E lokal um x in einer glatten Kurve. Wählen wir eine Bogenlängenparametrisierung von $c : I \to \mathbb{R}^2$ dieser Kurve mit $c(0) = 0$ und $c'(0) = e_2$ (was die Richtung der Parametrisierung bestimmt), dann können wir die Krümmung in 0 als $\det(e_2, c''(0)) = -\langle c''(0), e_1\rangle$ berechnen. Fassen wir nun c als glatte Kurve in M auf, dann ist die Krümmung in x somit als $-\langle c''(0), \mathfrak{n}(x)\rangle = II(\xi_x, \xi_x)$ gegeben.

Damit beschreibt aber die Einschränkung der zweiten Fundamentalform auf die Einheitssphäre $S^{n-1} \subset T_xM$ genau die Krümmungen der Kurven, die man erhält, wenn man M mit Normalebenen (also mit Ebenen, die $\mathfrak{n}(x)$ enthalten) schneidet. Deshalb nennt man diese Einschränkung auch die *Normalkrümmung* von M bei x. Ist nun ξ_x ein (normierter) Eigenvektor zur Hauptkrümmung $\kappa_i(x)$, dann gilt nach Definition $II(\xi_x, \xi_x) = \kappa_i(x)$, also sind die Hauptkrümmungen Werte der Normalkrümmung. Wir können aber sofort beschreiben, welche Werte sie sind: Betrachten wir die zweite Fundamentalform als Funktion auf $S^{n-1} \subset T_xM$. Da dies eine symmetrische Bilinearform ist, ist nach 1.11 ihre Ableitung in $\xi_x \in S^{n-1}$ in Richtung $\eta_x \in T_{\xi_x}S^{n-1} = (\xi_x)^\perp \subset T_xM$

gegeben durch $D(II)(\xi_x)(\eta_x) = 2II(\xi_x, \eta_x) = 2g_x(L_x(\xi_x), \eta_x)$. Das bedeutet aber, dass ξ_x genau dann ein Eigenvektor von L_x ist, wenn $D(II)(\xi_x) = 0$ gilt. Damit sind aber die Hauptkrümmungen genau die kritischen Werte (also insbesondere, falls vorhanden, die lokalen Extrema) der Normalkrümmung (auf der Einheitssphäre).

3.4. Flächen mit lauter Nabelpunkten. Als einfaches Beispiel für einen Klassifikationssatz wollen wir zusammenhängende orientierbare Hyperflächen beschreiben, die nur aus Nabelpunkten bestehen, d.h. alle Weingartenabbildungen proportional zur Identität haben. Ist M so eine Hyperfläche, dann gibt es nach Definition ein globales Einheitsnormalenfeld $\mathfrak{n}$ auf M. Da M nur aus Nabelpunkten besteht, gibt es für jedes $x \in M$ ein Element $a(x) \in \mathbb{R}$, sodass $L_x(\xi_x) = a(x)\xi_x$. Wählen wir ein lokales Vektorfeld ξ um x ohne Nullstelle, dann ist $a = \frac{g(L(\xi),\xi)}{g(\xi,\xi)}$ und das ist glatt, also ist $a : M \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion. Der wesentliche Schritt zum Verständnis solcher Hyperflächen ist nun, dass a konstant sein muss. Sei dazu (U, u) eine Karte für M, und seien $\partial_i = \frac{\partial}{\partial u^i}$ für $i = 1, \dots, n$ die entsprechenden Koordinatenvektorfelder. Dann gilt $\partial_i \cdot \mathfrak{n} = T\mathfrak{n} \circ \partial_i = L(\partial_i) = a\partial_i$. Damit erhalten wir aber für $i \neq j$ die Gleichung

$$0 = [\partial_i, \partial_j] \cdot \mathfrak{n} = \partial_i \cdot (a\partial_j) - \partial_j \cdot (a\partial_i).$$

Nun müssen wir nur bemerken, dass Vektorfelder auf Funktionen als Derivationen wirken und dass wir $\partial_i \cdot \partial_j - \partial_j \cdot \partial_i = [\partial_i, \partial_j] = 0$ bereits gezeigt haben, um daraus $0 = (\partial_i \cdot a)\partial_j - (\partial_j \cdot a)\partial_i$ zu folgern. Da aber $\partial_i(x)$ und $\partial_j(x)$ für jeden Punkt linear unabhängig sind, ist das nur für $\partial_i \cdot a = \partial_j \cdot a = 0$ möglich. Da i und j beliebig waren, ist $\partial_i \cdot a = 0$ für alle $i = 1, \dots, n$. Das bedeutet aber, dass alle partiellen Ableitungen von $a \circ u^{-1}$ verschwinden, also diese Funktion konstant ist. Damit ist auch a konstant.

Falls $a = 0$ gilt, dann ist $\partial_i \cdot \mathfrak{n} = 0$ für alle i, also $\mathfrak{n}$ konstant. Sei nun $x_0 \in M$ ein fixer Punkt und $c : I \to M$ eine glatte Kurve mit $c(0) = x_0$, und betrachte die Funktion $t \mapsto \langle \mathfrak{n}, c(t) \rangle$. Da $\mathfrak{n}$ konstant ist, ist die Ableitung dieser Funktion gerade $\langle \mathfrak{n}, c'(t) \rangle$ und das verschwindet, weil $c'(t) \in T_{c(t)}M$ gilt. Damit ist aber $\langle \mathfrak{n}, c(t) \rangle = \langle \mathfrak{n}, x_0 \rangle$, und damit liegt das Bild von c ganz in der affinen Ebene durch x_0 mit Normalvektor $\mathfrak{n}$. Daraus folgt leicht, dass ganz M in dieser affinen Ebene liegt.

Falls $a \neq 0$ ist, dann betrachten wir die Funktion $f : M \to \mathbb{R}^{n+1}$, die gegeben ist durch $f(x) := x - \frac{1}{a}\mathfrak{n}(x)$. Für $\xi_x \in T_xM$ gilt dann $\xi_x \cdot f = \xi_x - \frac{1}{a}\xi_x \cdot \mathfrak{n} = 0$, also ist f konstant gleich einem Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^{n+1}$. Damit ist aber $d(x, x_0) = \frac{1}{|a|}$ für alle x und M ist in der Sphäre vom Radius $\frac{1}{|a|}$ um x_0 enthalten. Nachdem nach Beispiel (1) und (2) von 3.3 Hyperebenen und Sphären nur aus Nabelpunkten bestehen haben wir bewiesen:

Proposition. *Eine zusammenhängende Hyperfläche $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ besteht genau dann nur aus Nabelpunkten, wenn sie Teil einer Sphäre oder einer affinen Ebene ist.*

Formeln für Flächen in $\mathbb{R}^3$

3.5. Man kann leicht allgemeine Formeln für die diversen Krümmungen in lokalen Parametrisierungen angeben, die als Input die Koeffizienten der ersten und zweiten Fundamentalform haben. Sei also $M \subset \mathbb{R}^3$ eine glatte Fläche, (U, u) eine Karte für M, $v = u^{-1} : V = u(U) \to U$ die entsprechende lokale Parametrisierung, und schreiben wir wieder ∂_i für $\frac{\partial}{\partial u^i}$. Dann bezeichnen wir die Koeffizienten der Metrik (also der ersten Fundamentalform) mit

$$E = g(\partial_1, \partial_1) \circ v \quad F = g(\partial_1, \partial_2) \circ v \quad G = g(\partial_2, \partial_2) \circ v$$

und die Koeffizienten der zweiten Fundamentalform mit

$$e = II(\partial_1, \partial_1) \circ v \quad f = II(\partial_1, \partial_2) \circ v \quad g = II(\partial_2, \partial_2) \circ v.$$

Das sind glatte Funktionen auf $u(U) \subset \mathbb{R}^2$. Bezüglich der Basis $\{\frac{\partial}{\partial y_1}, \frac{\partial}{\partial y_2}\}$ haben dann die Fundamentalformen die Matrixdarstellungen

$$[g \circ v] = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \qquad [II \circ v] = \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}$$

Sei $[L] = (a_i^j)$ die Matrixdarstellung der Weingartenabbildung. Nach Definition der Matrixdarstellung ist $L(\partial_i) = \sum_j a_i^j \partial_j$. Damit ist $g(L(\partial_i), \partial_j) = \sum_k a_i^k g(\partial_k, \partial_j)$, also $[II] = [L]^t[g]$, also $[L] = [II]^t[g]^{-1}$, und nach der allgemeinen Formel für die Inverse einer 2×2–Matrix (siehe 1.8) erhalten wir

$$[L] = \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \tfrac{1}{EG-F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix} = \tfrac{1}{EG-F^2} \begin{pmatrix} eG - fF & fG - gF \\ fE - eF & gE - fF \end{pmatrix}$$

Daraus können wir direkt die Koordinatendarstellung der mittleren Krümmung H und der Gaußkrümmung K berechnen:

$$K \circ v = \det([L]) = \frac{\det([II])}{\det([g])} = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} \qquad H \circ v = \tfrac{1}{2}\operatorname{tr}([L]) = \frac{eG + gE - 2fF}{2(EG - F^2)}$$

Für die Hauptkrümmung κ_1, κ_2 wissen wir, dass $K = \kappa_1\kappa_2$ und $H = \frac{\kappa_1+\kappa_2}{2}$ gelten muss. Damit ist $(\frac{\kappa_1-\kappa_2}{2})^2 = H^2 - K$, also $\kappa_{1,2} = H \pm \sqrt{H^2 - K}$.

Schließlich können wir auch noch die Hauptkrümmungsrichtungen bestimmen: $\xi = \xi^1\partial_1 + \xi^2\partial_2$ ist genau dann eine Hauptkrümmungsrichtung, wenn (ξ^1, ξ^2) und $[L](\xi^1, \xi^2)$ linear abhängig sind, d.h. die Determinante der Matrix mit diesen Spalten 0 ist. Das liefert die Gleichung

$$\begin{aligned} 0 = \det \begin{pmatrix} \xi^1 & (eG - fF)\xi^1 + (fE - eF)\xi^2 \\ \xi^2 & (fG - gF)\xi^1 + (gE - fF)\xi^2 \end{pmatrix} = \\ = (\xi^1)^2(fG - gF) + (\xi^1\xi^2)(gE - eG) + (\xi^2)^2(eF - fE). \end{aligned}$$

Bemerkungen. (1) Aus diesen Formeln kann man nun durch direkte Rechnungen Formeln für spezielle Klassen von Flächen herleiten, zum Beispiel für Drehflächen. Das Skriptum von A. Kriegl enthält einige Resultate in dieser Richtung.
(2) Im $\mathbb{R}^3$ kann man das Einheitsnormalenfeld mittels des Kreuzprodukts als $\mathfrak{n} = \frac{1}{\|\partial_1 \times \partial_2\|}\partial_1 \times \partial_2$ schreiben. Damit kann man Formeln für e, f und g finden, in denen nur die Funktionen ∂_i und ihre partiellen Ableitungen vorkommen. Mit einigem Rechenaufwand erhält man dann eine Formel für die Gaußkrümmung K, in der nur E, F und G, sowie die ersten und zweiten partiellen Ableitungen dieser Funktionen vorkommen. Daraus kann man dann folgern, dass K intrinsisch ist, und erhält einen Beweis des Theorema Egregium, siehe das Skriptum von A. Kriegl, Abschnitt 53.6. Wir werden später einen anderen Weg sehen, wie man diesen Satz beweisen kann.

Beispiel (Der Torus T^2). Betrachten wir einen Kreis in der $(x$–$z)$–Ebene vom Radius r der um einen Kreis in der $(x$–$y)$–Ebene vom Radius $R > r$ rotiert. Für jedes offene Intervall I in $\mathbb{R}$ der Länge $< 2\pi$ erhalten wir eine lokale Parametrisierung $v : I \times I \to \mathbb{R}^3$ des Torus durch $v(\phi, \theta) = \big((R + r\cos\theta)\cos\phi, (R + r\cos\theta)\sin\phi, r\sin\theta\big)$. Die erste Koordinate parametrisiert also den Winkel am großen Kreis, die zweite Koordinate den Winkel am kleinen Kreis. Die partiellen Ableitungen von v liefern die entsprechenden Koordinatenvektorfelder:

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial}{\partial u^1}(\phi, \theta) &= \big(-(R + r\cos\theta)\sin\phi, (R + r\cos\theta)\cos\phi, 0\big) \\ \tfrac{\partial}{\partial u^2}(\phi, \theta) &= \big(-r\sin\theta\cos\phi, -r\sin\theta\sin\phi, r\cos\theta\big). \end{aligned}$$

Daraus ergeben sich die Koeffizienten der ersten Fundamentalform zu

$$E = (R + r\cos\theta)^2 \qquad F = 0 \qquad G = r^2,$$

also insbesondere $EG - F^2 = (Rr + r^2\cos\theta)^2$.

Aus einer Zeichnung sieht man leicht, dass das nach außen weisenden Einheitsnormalenfeld durch $\mathfrak{n}(\phi,\theta) = (\cos\phi\cos\theta, \sin\phi\cos\theta, \sin\theta)$ gegeben ist. Seine partiellen Ableitungen sind

$$\frac{\partial\mathfrak{n}}{\partial\phi}(\phi,\theta) = (-\sin\phi\cos\theta, \cos\phi\cos\theta, 0)$$
$$\frac{\partial\mathfrak{n}}{\partial\theta}(\phi,\theta) = (-\cos\phi\sin\theta, -\sin\phi\sin\theta, \cos\theta),$$

und daraus erhalten wir für die Koeffizienten der zweiten Fundamentalform

$$e = (R + r\cos\theta)\cos\theta \qquad f = 0 \qquad g = r.$$

Damit ergibt sich für die Gaußkrümmung $K = \frac{eg-f^2}{EG-F^2} = \frac{\cos\theta}{r(R+r\cos\theta)}$. Da $R > r$ gilt, ist der Nenner immer positiv, also hat K das selbe Vorzeichen wie $\cos\theta$, d.h. K ist auf dem "äußeren" Teil des Torus positiv und auf dem "inneren" Teil negativ. Dazwischen, also auf dem Kreis ganz oben und dem Kreis ganz unten, ist $K = 0$. Das ist auch geometrisch ganz einsichtig, weil längs dieser Kreise das Einheitsnormalenfeld konstant ist. Man sieht leicht, dass die Extrema von K genau in den Punkten mit $\theta = 0$ und $\theta = \pi$ liegen, also auf dem ganz äußeren und dem ganz inneren Kreis. Auf diesen Kreisen erhält man $K = \frac{1}{r(R+r)}$ bzw. $K = -\frac{1}{r(R-r)}$.

Für die mittlere Krümmung erhält man nach einer etwas längeren Rechnung $H = \frac{eG+gE-2fF}{2(EG-F^2)} = \frac{R+2r\cos\theta}{2r(R+r\cos\theta)}$. Wie für K ist der Nenner in dieser Formel immer positiv, das Vorzeichen von H hängt nun vom Verhältnis zwischen R und r ab. Ist $R > 2r$, dann ist H immer positiv sonst können auch Null bzw. negative Werte vorkommen.

Die Bestimmung der Hauptkrümmungsrichtungen ist in diesem Fall besonders einfach: Weil $f = F = 0$ gilt, bleibt einfach nur die Gleichung $(\xi^1\xi^2)(gE - eG) = 0$ und dafür sind $\xi^1 = 0, \xi^2 = 1$ und $\xi^1 = 1, \xi^2 = 0$ offensichtlich Lösungen. Also geben die Vektorfelder $\frac{\partial}{\partial u^i}$ in jedem Punkt die beiden Hauptkrümmungsrichtungen. Damit sind aber die Hauptkrümmungen einfach durch $\frac{e}{E} = \frac{\cos\theta}{R+r\cos\theta}$ und $\frac{g}{G} = \frac{1}{r}$ gegeben. Insbesondere sind die Kreise $\phi \mapsto v(\phi,\theta)$ und $\theta \mapsto v(\phi,\theta)$ immer Krümmungslinien auf dem Torus.

Kovariante Ableitung und Riemannkrümmung

3.6. Wir kommen nun wieder zu Hyperflächen in allgemeinen Dimensionen zurück. Wie wir in 3.2 bereits bemerkt haben, können wir ein Vektorfeld $\eta \in \mathfrak{X}(M)$ als $\mathbb{R}^{n+1}$–wertige Funktion betrachten und damit für ein weiteres Vektorfeld $\xi \in \mathfrak{X}(M)$ die Ableitung $\xi \cdot \eta$ bilden. Im Allgemeinen liegt aber $(\xi \cdot \eta)(x)$ nicht im Teilraum $T_xM \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Da wir aber auf $\mathbb{R}^{n+1}$ das innere Produkt vorgegeben haben, können wir $(\xi \cdot \eta)(x)$ orthogonal in den Tangentialraum T_xM projizieren. Das resultierende Element von T_xM wird mit $\nabla_\xi\eta(x)$ bezeichnet. Ist $\mathfrak{n}$ ein lokal um x definiertes Einheitsnormalenfeld, dann gilt offensichtlich

$$\nabla_\xi\eta(x) = (\xi \cdot \eta)(x) - \langle(\xi \cdot \eta)(x), \mathfrak{n}(x)\rangle\mathfrak{n}(x),$$

und das impliziert sofort, dass $\nabla_\xi\eta$ ein glattes Vektorfeld auf M ist. Das Vektorfeld $\nabla_\xi\eta$ heißt die *kovariante Ableitung* von η in Richtung ξ.

Eine alternative Formel für $\nabla_\xi\eta$ erhält man, indem man beachtet, dass $0 = \langle\eta, \mathfrak{n}\rangle$ gilt. Differenziert man das in Richtung ξ, dann erhält man $0 = \langle\xi \cdot \eta, \mathfrak{n}\rangle + \langle\eta, \xi \cdot \mathfrak{n}\rangle$. Nach

Definition der Weingartenabbildung L ist $\xi \cdot \mathfrak{n} = L(\xi)$, also ist der zweite Term genau $II(\eta, \xi) = II(\xi, \eta)$, die zweite Fundamentalform. Damit erhalten wir die *Gaußgleichung*

$$\nabla_\xi \eta = \xi \cdot \eta + II(\xi, \eta)\mathfrak{n}.$$

Das bedeutet, dass die zweite Fundamentalform gerade den Normalanteil der Ableitung $\xi \cdot \eta$ bestimmt.

Proposition. *Sei M eine Hyperfläche in $\mathbb{R}^{n+1}$, g die entsprechende Riemann Metrik auf M. Die kovariante Ableitung $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ hat für $\xi, \eta, \zeta \in \mathfrak{X}(M)$ und $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ folgende Eigenschaften:*
(1) ∇ ist bilinear über $\mathbb{R}$
(2) $\nabla_{f\xi}\eta = f\nabla_\xi \eta$ und $\nabla_\xi(f\eta) = (\xi \cdot f)\eta + f\nabla_\xi \eta$.
(3) $\nabla_\xi \eta - \nabla_\eta \xi = [\xi, \eta]$ ("∇ ist torsionsfrei.*")*
(4) $\xi \cdot g(\eta, \zeta) = g(\nabla_\xi \eta, \zeta) + g(\eta, \nabla_\xi \zeta)$ ("∇ ist mit der Metrik verträglich.")

Beweis. (1) Wir haben bereits bemerkt, dass die Abbildung $(\xi, \eta) \mapsto \xi \cdot \eta$ bilinear über $\mathbb{R}$ ist. Damit folgt die Bilinearität von ∇ aus der Bilinearität der zweiten Fundamentalform und der Gaußgleichung.
(2) Nach Definition erhält man $(\xi \cdot \eta)(x)$ durch Anwenden des Tangentialvektors $\xi(x)$ auf die Funktion η. Damit folgt aber sofort, dass $(f\xi) \cdot \eta = f(\xi \cdot \eta)$ gilt, und weil Vektorfelder als Derivationen auf Funktionen wirken, gilt $\xi \cdot (f\eta) = (\xi \cdot f)\eta + f(\xi \cdot \eta)$. Wegen $\langle \eta, \mathfrak{n} \rangle = 0$ und da $\langle\ ,\ \rangle$ bilinear über glatten Funktionen ist, folgen nun beide Behauptungen aus $\nabla_\xi \eta = \xi \cdot \eta - \langle \xi \cdot \eta, \mathfrak{n} \rangle \mathfrak{n}$.
(3) folgt direkt aus $\xi \cdot \eta - \eta \cdot \xi = [\xi, \eta]$ (siehe 3.2) und der Symmetrie von II.
(4) Nach Definition ist $g(\eta, \zeta) = \langle \eta, \zeta \rangle$. Differenzieren wir das in Richtung ξ, dann erhalten wir

$$\xi \cdot g(\eta, \zeta) = \langle \xi \cdot \eta, \zeta \rangle + \langle \eta, \xi \cdot \zeta \rangle.$$

Da $\zeta(x) \in T_x M$ für alle x gilt und sich $\nabla_\xi \eta(x)$ von $(\xi \cdot \eta)(x)$ nur um ein Vielfaches von $\mathfrak{n}$ unterscheidet, ist $\langle \xi \cdot \eta, \zeta \rangle = \langle \nabla_\xi \eta, \zeta \rangle = g(\nabla_\xi \eta, \zeta)$, und analog für den letzten Term. □

Der Hauptgrund, warum man aus dem Studium einer Einbettung intrinsische Größen für Hyperflächen gewinnen kann, ist, dass die kovariante Ableitung intrinsisch ist. Man kann allgemeiner zeigen, dass man auf jeder Riemann Mannigfaltigkeit eine kovariante Ableitung definieren kann, die eindeutig dadurch charakterisiert ist, dass sie die Eigenschaften (1)–(4) aus der obigen Proposition hat (die offensichtlich auf einer beliebigen Riemann–Mannigfaltigkeit Sinn machen). In 2.15 haben wir gesehen, dass es zu einem (lokalen) Diffeomorphismus $f : M \to N$ und einem Vektorfeld $\xi \in \mathfrak{X}(N)$ ein eindeutiges Vektorfeld $f^*\xi \in \mathfrak{X}(M)$ gibt, das durch $\xi(f(x)) = T_x f \cdot (f^*\xi)(x)$ charakterisiert ist. Wir haben auch bemerkt, dass für $\xi, \eta \in \mathfrak{X}(N)$ die Gleichung $f^*([\xi, \eta]) = [f^*\xi, f^*\eta]$ gilt.

Satz. *Die kovariante Ableitung ist intrinsisch. Genauer: Seien M und N Hyperflächen in $\mathbb{R}^{n+1}$ mit entsprechenden kovarianten Ableitungen ∇^M und ∇^N. Dann gilt für einen isometrischen Diffeomorphismus $f : M \to N$ und Vektorfelder $\xi, \eta \in \mathfrak{X}(N)$ die Gleichung $f^*(\nabla^N_\xi \eta) = \nabla^M_{f^*\xi}(f^*\eta)$.*

Beweis. Setze $A(\xi, \eta) = f^*(\nabla^N_\xi \eta) - \nabla^M_{f^*\xi}(f^*\eta)$. Nach Teil (3) der Proposition gilt

$$f^*(\nabla^N_\xi \eta - \nabla^N_\eta \xi) = f^*([\xi, \eta]) = [f^*\xi, f^*\eta] = \nabla^M_{f^*\xi}(f^*\eta) - \nabla^M_{f^*\eta}(f^*\xi),$$

also ist $0 = A(\xi, \eta) - A(\eta, \xi)$. Damit ist $A(\xi, \eta) = A(\eta, \xi)$, also ist A symmetrisch.

Sei nun $\zeta \in \mathfrak{X}(N)$ ein weiteres Vektorfeld. Dann gilt nach Teil (4) der Proposition

$$(f^*\xi) \cdot g^M(f^*\eta, f^*\zeta) = g^M(\nabla^M_{f^*\xi} f^*\eta, f^*\zeta) + g^M(f^*\eta, \nabla^M_{f^*\xi} f^*\zeta).$$

Da f eine Isometrie ist, ist $g^M_x(f^*\eta(x), f^*\zeta(x)) = g^N_{f(x)}(\eta(f(x)), \zeta(f(x)))$, und damit erhalten wir $g^M(f^*\eta, f^*\zeta) = g^N(\eta, \zeta) \circ f$. Daraus folgt sofort, dass man die linke Seite dieser Gleichung als $(f^*\xi) \cdot (g^N(\eta, \zeta) \circ f) = (\xi \cdot g^N(\eta, \zeta)) \circ f$ schreiben kann. Wiederum nach Teil (4) der Proposition gilt andererseits

$$(\xi \cdot g^N(\eta, \zeta)) \circ f = g^N(\nabla^N_\xi \eta, \zeta) \circ f + g^N(\eta, \nabla^N_\xi \zeta) \circ f = \\ g^M(f^*(\nabla^N_\xi \eta), f^*\zeta) + g^M(f^*\eta, f^*(\nabla^N_\xi \zeta)).$$

Subtrahieren wir diese Gleichung von der Gleichung oben, dann erhalten wir

$$0 = g^M(A(\xi, \eta), f^*\zeta) + g^M(f^*\eta, A(\xi, \zeta)).$$

Zusammen mit der Symmetrie von A impliziert das aber, dass $g^M(A(\xi, \eta), f^*\zeta) = 0$ für alle Vektorfelder ξ, η, ζ auf N gelten muss, denn wir rechnen

$$g^M(A(\xi, \eta), f^*\zeta) = g^M(A(\eta, \xi), f^*\zeta) = -g^M(f^*\xi, A(\eta, \zeta)) = -g^M(f^*\xi, A(\zeta, \eta)) = \\ = g^M(A(\zeta, \xi), f^*\eta) = g^M(A(\xi, \zeta), f^*\eta) = -g^M(f^*\zeta, A(\xi, \eta)).$$

Da man in einem beliebigen Punkt $x \in M$ jeden Tangentialvektor bei x als $f^*\zeta(x)$ für ein geeignetes Vektorfeld $\zeta \in \mathfrak{X}(N)$ schreiben kann, folgt daraus $A(\xi, \eta) = 0$ für beliebiges ξ und η. $\square$

Dieses Resultat impliziert insbesondere, dass alle Größen, die man nur mit Hilfe der Metrik und von kovarianten Ableitungen schreiben kann, intrinsisch sind.

3.7. Die Riemannkrümmung. Als nächstes betrachten wir zweifache kovariante Ableitungen. Zunächst bemerken wir, dass für Vektorfelder $\xi, \eta, \zeta \in \mathfrak{X}(M)$ nach Definition der Lie Klammer die Gleichung $\xi \cdot (\eta \cdot \zeta) - \eta \cdot (\xi \cdot \zeta) - [\xi, \eta] \cdot \zeta = 0$ gilt. Nach der Gaußgleichung ist aber für ein lokales Einheitsnormalenfeld $\mathfrak{n}$ die Ableitung $\eta \cdot \zeta$ (lokal) durch $\nabla_\eta \zeta - II(\eta, \zeta)\mathfrak{n}$ gegeben. Nach Definition der zweiten Fundamentalform ist $II(\eta, \zeta) = g(L(\eta), \zeta)$, wobei L die Weingartenabbildung bezeichnet. Wiederum nach der Gaußgleichung ist $\xi \cdot \nabla_\eta \zeta = \nabla_\xi \nabla_\eta \zeta - II(\xi, \nabla_\eta \zeta)\mathfrak{n}$, und die beiden Summanden liefern genau die Zerlegung in eine Komponente in TM und eine orthogonal zu TM. Andererseits ist $\xi \cdot (-II(L(\eta), \zeta)\mathfrak{n}) = -(\xi \cdot II(L(\eta), \zeta))\mathfrak{n} - II(\eta, \zeta)(\xi \cdot \mathfrak{n})$. In der zweiten Komponente ist $\xi \cdot \mathfrak{n} = L(\xi)$, also ist diese Komponente tangential zu M und durch $-II(\eta, \zeta)L(\xi)$ gegeben. Die erste Komponente ist ein Vielfaches von $\mathfrak{n}$, also orthogonal zu TM, und schreibt man $II(\eta, \zeta)$ als $g(L(\eta), \zeta)$, dann erhält man nach Teil (4) von Proposition 3.6 für diese Komponente den Ausdruck $-g(\nabla_\xi(L(\eta)), \zeta)\mathfrak{n} - g(L(\eta), \nabla_\xi \zeta)\mathfrak{n}$. Schließlich ist nach der Gaußgleichung $[\xi, \eta] \cdot \zeta = \nabla_{[\xi,\eta]}\zeta - g(L([\xi, \eta]), \zeta)\mathfrak{n}$.

Sammeln wir nun die Terme in $0 = \xi \cdot (\eta \cdot \zeta) - \eta \cdot (\xi \cdot \zeta) - [\xi, \eta] \cdot \zeta$, die tangential zu M sind, dann ist ihr Verschwinden äquivalent zu

$$\nabla_\xi \nabla_\eta \zeta - \nabla_\eta \nabla_\xi \zeta - \nabla_{[\xi,\eta]}\zeta = II(\eta, \zeta)L(\xi) - II(\xi, \zeta)L(\eta).$$

Dieser Ausdruck heißt die *Riemannkrümmung* von M und wird mit $R(\xi, \eta)(\zeta) \in \mathfrak{X}(M)$ bezeichnet. Man fasst also die Riemannkrümmung R als einen Operator $\mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to L(\mathfrak{X}(M), \mathfrak{X}(M))$ auf. Aus der linken Seite der Gleichung folgt sofort, dass $R(\eta, \xi) = -R(\xi, \eta)$ gilt. Aus der rechten Seite der Formel folgt sofort, dass der Wert des Vektorfeldes $R(\xi, \eta)(\zeta)$ in einem Punkt $x \in M$ nur von $\xi(x)$, $\eta(x)$ und $\zeta(x)$ abhängt. In Wirklichkeit erhalten wir also für jeden Punkt $x \in M$ die Abbildung $R_x : T_xM \times T_xM \to L(T_xM, T_xM)$. Wir werden später sagen: "R ist ein *Tensorfeld*".

Andererseits können wir auch noch das Verschwinden der zu TM orthogonalen Komponente von $\xi \cdot (\eta \cdot \zeta) - \eta \cdot (\xi \cdot \zeta) - [\xi, \eta] \cdot \zeta$ analysieren. Der auftretende Faktor von $\mathfrak{n}$

ist gerade

$$-II(\xi,\nabla_\eta\zeta)+II(\eta,\nabla_\xi\zeta)-g(\nabla_\xi(L(\eta)),\zeta)-g(L(\eta),\nabla_\xi\zeta)+$$
$$g(\nabla_\eta(L(\xi)),\zeta)+g(L(\xi),\nabla_\eta\zeta)+g(L([\xi,\eta]),\zeta).$$

Offensichtlich kürzen sich der erste und sechste, sowie der zweite und vierte Term, und das Verschwinden der restlichen Terme für beliebiges ζ ist äquivalent zur *Godazzi–Mainardi Gleichung* $L([\xi,\eta])=\nabla_\xi(L(\eta))-\nabla_\eta(L(\xi))$.

Nun können wir auch das Theorema Egregium beweisen, indem wir die Gaußkrümmung einer Fläche durch die (nach Satz 3.6 intrinsische) Riemannkrümmung ausdrücken. In diesem niedrig-dimensionalen Fall bestimmt die Gaußkrümmung die Riemannkrümmung sogar vollständig, in höheren Dimensionen ist die Riemannkrümmung wesentlich komplizierter als die Gaußkrümmung.

Proposition. *Sei $M\subset\mathbb{R}^3$ eine Fläche, $x\in M$ ein Punkt und $\{\xi,\eta\}$ ein Orthonormalbasis für T_xM. Dann gilt $K(x)=g_x(R_x(\xi,\eta)(\eta),\xi)$. Insbesondere ist die Gaußkrümmung K intrinsisch. Für allgemeine Vektoren $\sigma=a\xi+b\eta$, $\tau=c\xi+d\eta$ ist die Matrixdarstellung von $R(\sigma,\tau)$ in der Basis $\{\xi,\eta\}$ gegeben durch*

$$(ad-bc)\begin{pmatrix}0 & K(x)\\ -K(x) & 0\end{pmatrix}.$$

Beweis. Von oben wissen wir, dass $R(\xi,\eta)(\eta)=II(\eta,\eta)L(\xi)-II(\xi,\eta)L(\eta)$ gilt, also ist

$$g(R(\xi,\eta)(\eta),\xi)=g(L(\eta),\eta)g(L(\xi),\xi)-g(L(\xi),\eta)g(L(\eta),\xi),$$

und das ist genau die Determinante der Matrixdarstellung von L in der Basis $\{\xi,\eta\}$, also gleich $K(x)$. Andererseits folgt daraus auch $g(R(\xi,\eta)(\eta),\eta)=0$, also erhalten wir $R(\xi,\eta)(\eta)=K(x)\xi$. Damit ist aber $R(\xi,\eta)(\xi)=-R(\eta,\xi)(\xi)=-K(x)\eta$. Für beliebige Vektoren $\sigma=a\xi+b\eta$ und $\tau=c\xi+d\eta$ in T_xM gilt aber wegen der Bilinearität und der Schiefsymmetrie $R(\sigma,\tau)=(ad-bc)R(\xi,\eta)$. □

Man kann allgemein beweisen, dass eine zusammenhängende Hyperfläche $M\subset\mathbb{R}^{n+1}$ genau dann lokal isometrisch diffeomorph zu einer offenen Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ (mit der induzierten Metrik) ist, wenn ihre Riemannkrümmung identisch Null ist. Insbesondere ist eine Fläche in $\mathbb{R}^3$ genau dann lokal isometrisch diffeomorph zu einer offenen Teilmenge von $\mathbb{R}^2$, wenn ihre Gaußkrümmung identisch Null ist.

3.8. Geodäten. Geodäten sind die Analoga in Hyperflächen (bzw. in allgemeinen Riemann Mannigfaltigkeiten) von Geraden in $\mathbb{R}^n$. Sei $M\subset\mathbb{R}^{n+1}$ eine Hyperfläche. Eine glatte Kurve $c:I\to M$ von einem offenen Intervall $I\subset\mathbb{R}$ nach M heißt eine *Geodäte*, falls für jeden Punkt $t\in I$ die zweite Ableitung $c''(t)$ orthogonal zu $T_{c(t)}M$ ist. Physikalisch bedeutet dies (analog zum Fall von bogenlängenparametrisierten Kurven), dass alle auftretenden Beschleunigungen nur dazu dienen, die Kurve in der Hyperfläche zu halten. Man kann Geodäten als die Bahnkurven von Teilchen betrachten, die in der Hyperfläche frei fallen. Falls M affine Geraden enthält, dann kann man diese Geraden in der Form $t\mapsto x_0+tv$ parametrisieren und erhält so Kurven mit $c''=0$. Damit sind Geraden, die in M liegen, automatisch Geodäten.

Die Bedingung, dass $c''(t)\perp T_{c(t)}M$ gilt, ist natürlich äquivalent zum Verschwinden der Orthogonalprojektion $c''(t)-\langle c''(t),\mathfrak{n}(c(t))\rangle\mathfrak{n}(c(t))$ von $c''(t)$ auf $T_{c(t)}M$. Da c eine Kurve in M ist, ist $\langle c'(t),\mathfrak{n}(c(t))\rangle=0$, und differenziert man das nach t, so sieht man, dass $-\langle c''(t),\mathfrak{n}(c(t))\rangle=\langle c'(t),L(c'(t))\rangle=II(c'(t),c'(t))$. Damit sehen wir, dass jede Geodäte in M eine Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung $c''(t)+II(c'(t),c'(t))\mathfrak{n}(c(t))=0$. Umgekehrt können wir II und $\mathfrak{n}$ lokal um M ausdehnen, und die entsprechende Differentialgleichung auf einer offene Teilmenge von $\mathbb{R}^{n+1}$ betrachten, wo sie nach einem allgemeinen Satz bei Vorgabe von $c(0)$ und $c'(0)$ lokal eindeutige Lösungen besitzt. Nun zeigt man leicht, dass für $c(0) \in M$ und $c'(0) \in T_{c(0)}M$ auch $c(t) \in M$ für alle t gilt. Damit gibt es zu gegebenen $x \in M$ und $\xi_x \in T_xM$ lokal eine eindeutige Geodäte $c : I \to M$ mit $c(0) = x$ und $c'(0) = \xi_x$.

Geodäten hängen direkt mit der kovarianten Ableitung zusammen. Sei $\eta \in \mathfrak{X}(M)$ ein Vektorfeld und $c : I \to M$ eine glatte Kurve in M. Wir haben bereits bemerkt, dass $(\xi \cdot \eta)(x)$ nur von $\xi(x)$ abhängt, und damit macht für $t \in I$ der Ausdruck $\nabla_{c'(t)}\eta$ Sinn. Außerdem ist $c'(t) \cdot \eta$ gerade die Ableitung nach t von $\eta(c(t))$ und damit hängt $\nabla_{c'}\eta(c(t))$ nur von der Einschränkung von η auf das Bild von c ab. Damit können wir aber $\nabla_{c'}\eta$ in den Punkten $c(t)$ auch für Vektorfelder η definieren, die nur längs der Kurve c definiert sind, und erhalten wieder Vektorfelder, die längs c definiert sind. Insbesondere können wir also immer $\nabla_{c'}c'$ bilden. Nach Konstruktion ist $c' \cdot c' = c''$, also folgt aus der Definition, dass c genau dann eine Geodäte ist, wenn $\nabla_{c'}c' = 0$ gilt. Insbesondere sind Geodäten intrinsisch.

Wie wir oben bemerkt haben, gibt es zu $x \in M$ und einem Tangentialvektor $\xi_x \in T_xM$ eine lokal eindeutige Geodäte $c : I \to M$ mit $c(0) = x$ und $c'(0) = \xi_x$. Man findet dann eine Umgebung U von 0 in T_xM, sodass für $\xi_x \in U$ diese Geodäte bis $t = 1$ definiert ist, und betrachtet die Abbildung $\exp : U \to M$, die definiert ist durch $\exp(\xi) = c(1)$, wobei c die Geodäte mit $c(0) = x$ und $c'(0) = \xi$ ist. Dann zeigt man leicht, dass $T_0 \exp : T_0T_xM = T_xM \to T_xM$ die Identität ist, also exp einen Diffeomorphismus von einer Nullumgebung $V \subset T_xM$ auf eine Umgebung von $x \in M$ definiert. Damit kann man $(V, \exp)$ als lokale Parametrisierung bzw. $(\exp(V), \exp^{-1})$ als Karte verwenden. Die entsprechenden lokalen Koordinaten heißen *Riemann'sche Normalkoordinaten* bei x und spielen in der Riemann'schen Geometrie eine bedeutende Rolle.

Geodäten in Riemann Mannigfaltigkeiten haben viele Eigenschaften mit Geraden in $\mathbb{R}^n$ gemeinsam: Einerseits kann man zeigen, dass eine Geodäte $c : [a, b] \to M$ unter allen Kurven von $c(a)$ nach $c(b)$ lokal extremale Bogenlänge hat (definiert durch ein Integral analog wie in 1.4). Insbesondere ist die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten immer eine Geodäte. Andererseits gibt es für jeden Punkt $x \in M$ eine offene Umgebung U von x in M, sodass es für jeden Punkt $y \in U$ eine eindeutige Geodäte $c : [0, 1] \to M$ mit $c(0) = x$ und $c(1) = y$ gibt. Lokal kann man also je zwei Punkte eindeutig durch eine Geodäte verbinden.

Im Gegensatz zu $\mathbb{R}^n$ geht das im Allgemeinen nicht global: Betrachtet man zum Beispiel die Sphäre S^n (mit beliebigem Radius), dann sind die Geodäten darauf genau die (mit konstanter Geschwindigkeit durchlaufenen) Großkreisbögen. Damit gibt es zum Beispiel für den Nordpol und den Südpol unendlich viele Geodäten, die die beiden Punkte verbinden.

KAPITEL 4

Differentialformen und Integration

In diesem Kapitel kehren wir wieder zur Analysis auf Mannigfaltigkeiten zurück. Wir werden uns mit Tensorfeldern und insbesondere mit Differentialformen beschäftigen. Differentialformen spielen aus (mindestens) drei Gründen eine bedeutende Rolle in der Differentialgeometrie. Zum einen haben sie mehr und einfachere algebraische Struktur als Vektorfelder und können auch besser mit glatten Funktionen abgebildet werden. Zweitens ist die äußere Ableitung von Differentialformen der einfachste und wichtigste natürliche Differentialoperator auf glatten Mannigfaltigkeiten. Zusammen mit Insertionsoperatoren und Lie Ableitungen erhält man einen schönen Kalkül, den wir aber nur kurz anschneiden werden. Außerdem liefert die äußere Ableitung über die de-Rham Kohomologie eine Verbindung zwischen Analysis und algebraischer Topologie. Drittens sind Differentialformen genau die Objekte, die wohldefiniert über (orientierte) Mannigfaltigkeiten integriert werden können. Die Verbindung zwischen äußerer Ableitung und Integration liefert der Satz von Stokes, der den Abschluss des Kapitels bildet.

Tensorfelder

4.1. 1–Formen. In 1.9 haben wir bereits 1–Formen auf offenen Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ kennen gelernt. Der Begriff auf allgemeinen Mannigfaltigkeiten ist das offensichtliche Analogon davon.

Definition. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit. Eine *1–Form* ϕ auf M ist eine Funktion, die jedem Punkt $x \in M$ eine lineare Abbildung $\phi(x) = \phi_x : T_xM \to \mathbb{R}$ zuordnet und die glatt ist in dem Sinn, dass für jedes Vektorfeld $\xi \in \mathfrak{X}(M)$ die Funktion $\phi(\xi) : M \to \mathbb{R}$, die definiert ist durch $\phi(\xi)(x) = \phi_x(\xi(x))$, glatt ist. Der Raum aller 1–Formen auf M wird mit $\Omega^1(M)$ bezeichnet.

Offensichtlich kann man 1–Formen punktweise addieren und mit glatten Funktionen multiplizieren, also ist $\Omega^1(M)$ ein reeller Vektorraum und ein Modul über dem Ring $C^\infty(M,\mathbb{R})$.

Wir können auch sofort beschreiben, wie 1–Formen in lokalen Koordinaten aussehen: Sei (U,u) eine Karte auf M und seien $\partial_i := \frac{\partial}{\partial u^i}$ die entsprechenden Koordinatenvektorfelder auf U. Für $i = 1,\dots,n = \dim(M)$ definieren wir nun eine 1–Form $du^i \in \Omega^1(U)$ indem wir $du^i(x)(\partial_j(x)) = 0$ für $i \neq j$ und 1 für $i = j$ setzen. Ein glattes Vektorfeld $\xi \in \mathfrak{X}(U)$ kann man nun als $\sum_i \xi^i\partial_i$ für glatte Funktionen $\xi^i : U \to \mathbb{R}$ schreiben, und nach Konstruktion ist $du^i(\xi) = \xi^i$ und damit ist jedes du^i eine glatte 1–Form. Ist nun $\phi \in \Omega^1(M)$ beliebig, dann können wir die Einschränkung $\phi|_U$ betrachten. Für $i = 1,\dots,k$ ist $\phi_i := \phi(\partial_i)$ eine glatte Funktion $U \to \mathbb{R}$, und nach Konstruktion ist $\phi|_U = \sum_i \phi_i du^i$. Somit sehen wir sofort, dass es lokal viele glatte 1–Formen gibt, und mit Partitionen der Eins können wir viele globale 1–Formen konstruieren. Die Situation ist also völlig analog wie bei Vektorfeldern.

Das Verhalten der Koordinatenfunktionen ϕ_i einer 1–Form ϕ bei Kartenwechseln ist ganz analog wie im Fall von Vektorfeldern. Sind (U_α,u_α) und (U_β,u_β) Karten mit $U_{\alpha\beta} = U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, dann haben wir die Kartenwechselabbildung $u_{\alpha\beta} : u_\alpha(U_{\alpha\beta}) \to u_\beta(U_{\alpha\beta})$, und wir bezeichnen wie in 2.10 die Matrix der partiellen Ableitungen von $u_{\alpha\beta}$ mit A^i_j, d.h. $A^i_j(x) = \frac{\partial u^i_{\alpha\beta}}{\partial y^j}(u_\alpha(x))$. Aus 2.10 wissen wir, dass $\frac{\partial}{\partial u^i_\alpha}(x) = \sum_{j=1}^k A^j_i(x)\frac{\partial}{\partial u^j_\beta}(x)$ gilt. Nun ist aber $\phi^\alpha_i(x) = \phi_x(\frac{\partial}{\partial u^i_\alpha}(x)) = \sum_j A^j_i(x)\phi_x(\frac{\partial}{\partial u^j_\beta})$, also erhalten wir $\phi^\alpha_i = \sum_j A^j_i\phi^\beta_j$, bzw. $\phi^\beta_i = \sum_j B^j_i\phi^\alpha_j$, wobei B^j_i die inverse Matrix zu A^i_j bezeichnet.

Schließlich bemerken wir noch, dass wir jeder glatten Funktion $f \in C^\infty(M,\mathbb{R})$ eine 1–Form $df \in \Omega^1(M)$ zuordnen können, die einfach das Analogon des totalen Differentials ist. Wir definieren nämlich $df(x)(\xi_x) := \xi_x \cdot f = T_xf \cdot \xi_x$. Das ist offensichtlich eine lineare Abbildung $T_xM \to \mathbb{R}$ und für ein glattes Vektorfeld $\xi \in \mathfrak{X}(M)$ ist nach Definition $df(\xi) = \xi \cdot f \in C^\infty(M,\mathbb{R})$. Der Operator $d : C^\infty(M,\mathbb{R}) \to \Omega^1(M)$ ist der einfachste Spezialfall der äußeren Ableitung. In lokalen Koordinaten erhalten wir die analoge Formel wie in 1.5: Von oben wissen wir, dass $df|_U = \sum_i df(\frac{\partial}{\partial u^i})du^i$ gilt, also gilt $df|_U = \sum_i \frac{\partial f}{\partial u^i}du^i$.

Zum Abschluss besprechen wir noch eine weitere Interpretation von 1–Formen: Für jedes $x \in M$ können wir den *Kotangentialraum* T^*_xM an M bei x als den Dualraum des Tangentialraumes T_xM definieren. Dann erhalten wir eine Beschreibung von 1–Formen die ganz analog zu Vektorfeldern ist, nämlich ϕ ordnet jedem Punkt $x \in M$ ein Element von T^*_xM zu, nur haben wir einen einfacheren Begriff von Glattheit. Man kann diese Analogie auch weiter treiben, indem man die Kotangentialräume zum *Kotangentialbündel* T^*M zusammenfasst, das man wieder einfach zu einer Mannigfaltigkeit machen kann. Natürlich hat man wieder eine kanonische Projektion $p : T^*M \to M$, und die 1–Formen sind genau die glatten Funktionen $\phi : M \to T^*M$, die $p \circ \phi = \mathrm{id}_M$ erfüllen.

4.2. Tensorfelder. Die konzeptuelle Betrachtungsweise von Tensorfeldern wäre mittels Methoden der multilinearen Algebra und insbesondere mittels Tensorprodukten von Vektorräumen. Man kann diese Methoden aber umgehen, indem man alles in multilineare Abbildungen umdeutet, was wir hier tun werden.

Definition. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit. Ein $\binom{\ell}{k}$–*Tensorfeld* auf M ist eine Funktion t, die jedem Punkt $x \in M$ ein $k+\ell$–lineare Abbildung $t_x : (T_xM)^k \times (T^*_xM)^\ell \to \mathbb{R}$ zuordnet und die glatt ist in dem Sinne, dass für Vektorfelder $\xi_1,\dots,\xi_k \in \mathfrak{X}(M)$ und 1–Formen $\phi^1,\dots,\phi^\ell \in \Omega^1(M)$ die Funktion $t(\xi_1,\dots,\xi_k,\phi^1,\dots,\phi^\ell)$, die gegeben ist durch $x \mapsto t_x(\xi_1(x),\dots,\phi^\ell(x))$, glatt ist.

Die Menge aller $\binom{\ell}{k}$–Tensorfelder auf M wird mit $\mathcal{T}^\ell_k(M)$ bezeichnet.

Wieder kann man $\binom{\ell}{k}$–Tensorfelder offensichtlich punktweise addieren und mit glatten Funktionen multiplizieren. Außerdem liefert nach Definition jedes $\binom{\ell}{k}$–Tensorfeld eine $k+\ell$–lineare Abbildung $\mathfrak{X}(M)^k \times \Omega^1(M)^\ell \to C^\infty(M,\mathbb{R})$. Aus der Definition folgt sofort, dass diese Funktion in jeder Variablen linear über $C^\infty(M,\mathbb{R})$ ist, weil der Wert von $t(\xi_1,\dots,\phi^\ell)$ in x nur von den Werten der ξ_i und der ϕ^j in x abhängt.

Nach Definition ist eine Riemann Metrik g auf einer Mannigfaltigkeit M (siehe 3.1) genau ein glattes $\binom{0}{2}$–Tensorfeld, sodass jeder Wert $g_x : T_xM \times T_xM \to \mathbb{R}$ ein inneres Produkt ist. Aus 3.3 wissen wir, dass die Fundamentalformen auf eine Hyperfläche glatte $\binom{0}{2}$–Tensorfelder sind.

Nach Definition ist ein $\binom{0}{1}$–Tensorfeld einfach eine 1–Form, also $\mathcal{T}^0_1(M) = \Omega^1(M)$. Betrachten wir anderseits $\binom{1}{0}$–Tensorfelder. Jede lineare Funktion $T^*_xM \to \mathbb{R}$ ist von der Form $\phi_x \mapsto \phi_x(\xi_x)$ für ein eindeutiges $\xi_x \in T_xM$. (Das ist gerade die Aussage, dass der Bidualraum T^{**}_xM isomorph zu T_xM ist). Insbesondere definiert natürlich jedes Vektorfeld $\xi \in \mathfrak{X}(M)$ ein glattes $\binom{1}{0}$–Tensorfeld via $\xi_x(\phi_x) := \phi_x(\xi_x)$. Umgekehrt kann man

$t \in \mathcal{T}_0^1(M)$ als Funktion betrachten, die jedem Punkt $x \in M$ einen Tangentialvektor in T_xM zuordnet. Damit können wir für eine Karte (U, u) mit Koordinatenvektorfeldern ∂_i die Einschränkung $t|_U$ als $\sum_i t^i \partial_i$ schreiben, und Anwenden auf die 1–Formen du^i zeigt sofort, dass die Funktionen t^i glatt sind. Damit ist $\mathcal{T}_0^1(M) = \mathfrak{X}(M)$.

Analog kann man andere Arten von Tensorfeldern uminterpretieren. Betrachten wir etwa ein $\binom{1}{1}$–Tensorfeld t. Für $\xi_x \in T_xM$ ist $\phi_x \mapsto t(\xi_x, \phi_x)$ eine lineare Abbildung $T_x^*M \to \mathbb{R}$, also durch ein eindeutiges Element $\Phi_x(\xi_x) \in T_xM$ gegeben. Nach Konstruktion ist $\Phi_x : T_xM \to T_xM$ eine lineare Abbildung, also können wir t auch so betrachten, dass es jedem Punkt x eine lineare Abbildung $\Phi_x : T_xM \to T_xM$ zuordnet. Haben wir umgekehrt eine solche Zuordnung, dann definiert $(\xi_x, \phi_x) \mapsto \phi_x(\Phi_x(\xi_x))$ eine bilineare Abbildung $T_xM \times T_x^*M \to \mathbb{R}$. Man sieht leicht, dass die Glattheit von t äquivalent dazu ist, dass für jedes Vektorfeld $\xi \in \mathfrak{X}(M)$ auch $\Phi(\xi)$ ein Vektorfeld auf M ist. Insbesondere sehen wir, dass die Weingartenabbildung auf einer Hyperfläche aus 3.2 ein $\binom{1}{1}$–Tensorfeld ist. Analog sieht man, dass die Riemannkrümmung aus 3.7 ein $\binom{1}{3}$–Tensorfeld ist.

Andererseits hat man für multilineare Abbildungen eine offensichtliche Produktoperation, nämlich das *Tensorprodukt*. Wir formulieren sofort die entsprechende Operation für Tensorfelder: Sei M eine Mannigfaltigkeit, und seien $t_1 \in \mathcal{T}_{k_1}^{\ell_1}(M)$ und $t_2 \in \mathcal{T}_{k_2}^{\ell_2}(M)$ Tensorfelder. Dann definieren wir $t_1 \otimes t_2 \in \mathcal{T}_{k_1+k_2}^{\ell_1+\ell_2}(M)$ durch

$$(t_1 \otimes t_2)_x(\xi_1, \dots, \xi_{k_1+k_2}, \phi^1, \dots, \phi^{\ell^1+\ell^2}) := (t_1)_x(\xi_1, \dots, \phi^{\ell_1})(t_2)_x(\xi_{k_1+1}, \dots, \phi^{\ell_1+\ell_2}).$$

Man sieht sofort, dass dies wieder ein glattes Tensorfeld liefert. Insbesondere erhalten wir für Vektorfelder $\xi_1, \dots, \xi_\ell \in \mathfrak{X}(M)$ und 1–Formen $\phi^1, \dots, \phi^k \in \Omega^1(M)$ das Tensorfeld $\xi_1 \otimes \dots \otimes \xi_\ell \otimes \phi^1 \otimes \dots \otimes \phi^k \in \mathcal{T}_k^\ell(M)$. Noch spezieller können wir auf einer Karte (U, u) die Koordinatenvektorfelder ∂_i und die 1–Formen du^j betrachten. Ist nun $t \in \mathcal{T}_k^\ell$ beliebig, dann betrachtet man $t|_U$ und für beliebige Tupel $(i_1, \dots, i_k)$ und $(j_1, \dots, j_\ell)$ von Indizes zwischen 1 und n definiert man eine glatte Funktion

$$t_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_\ell} := t(\partial_{i_1}, \dots, \partial_{i_k}, du^{j_1}, \dots, du^{j_\ell}) : U \to \mathbb{R}.$$

Nach Konstruktion gilt dann

$$t|_U = \sum_{i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_\ell} t_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_\ell} \partial_{j_1} \otimes \dots \otimes \partial_{j_\ell} \otimes du^{i_1} \otimes \dots \otimes du^{i_k}.$$

Beim Kartenwechsel von (U, u) nach $(\tilde{U}, \tilde{u})$ mit entsprechender Matrix A_j^i der partiellen Ableitungen und inverser Matrix B_j^i ändern sich die Koordinatenfunktionen durch

$$\tilde{t}_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_\ell} = \sum_{a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_\ell} B_{i_1}^{a_1} \dots B_{i_k}^{a_k} A_{b_1}^{j_1} \dots A_{b_\ell}^{j_\ell} t_{a_1 \dots a_k}^{b_1 \dots b_\ell}.$$

Wie im Fall von Vektorfeldern und 1–Formen sieht man sofort, dass es viele lokale und globale $\binom{\ell}{k}$–Tensorfelder gibt.

Wir können nun Tensorfelder als multilineare Abbildungen auf Vektorfeldern und 1–Formen charakterisieren:

Lemma. *Eine $(k+\ell)$–lineare Abbildung $\Phi : \mathfrak{X}(M)^k \times (\Omega^1(M))^\ell \to C^\infty(M, \mathbb{R})$ ist genau dann durch ein Tensorfeld $t \in \mathcal{T}_k^\ell(M)$ gegeben, wenn sie in jeder Variablen linear über $C^\infty(M, \mathbb{R})$ ist.*

Beweis. Wir müssen zeigen, dass für $\xi_1, \dots, \xi_k \in \mathfrak{X}(M)$ und $\phi^1, \dots, \phi^\ell \in \Omega^1(M)$ und einen Punkt $x \in M$ der Wert $\Phi(\xi_1, \dots, \xi_k, \phi^1, \dots, \phi^\ell)(x)$ nur von den Werten der

ξ_i und der ϕ^j in x abhängt, denn dann können wir t durch

$$t_x(\xi_1(x),\dots,\xi_k(x),\phi^1(x),\dots,\phi^\ell(x)) = \Phi(\xi_1,\dots,\xi_k,\phi^1,\dots,\phi^\ell)(x)$$

definieren. Dafür genügt es aber zu zeigen, dass $\Phi(\xi_1,\dots,\phi^\ell)(x) = 0$ gilt, falls eines der ξ_i oder eines der ϕ^j in x verschwindet. Zunächst zeigen wir, dass $\Phi(\xi_1,\dots,\phi^\ell)(x) = 0$ gilt, falls eine der Eintragungen auf einer offenen Umgebung U von x identisch Null ist. Sei also ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\xi_1|_U = 0$. Nach Korollar 2.6(1) finden wir eine glatte Funktion $f \in C^\infty(M,\mathbb{R})$ mit Werten in $[0,1]$, die $f(x) = 0$ erfüllt und auf $M \setminus U$ identisch 1 ist. Dann ist aber $f\xi_1 = \xi_1$, also

$$\Phi(\xi_1,\dots,\phi^\ell) = \Phi(f\xi_1,\dots,\phi^\ell) = f\Phi(\xi_1,\dots,\phi^\ell),$$

und das verschwindet in x, weil $f(x) = 0$ gilt. Damit hängt aber für eine Karte (U,u) für M um x die Einschränkung von $\Phi(\xi_1,\dots,\phi^\ell)$ auf U (und damit der Wert in x) nur von den Einschränkungen der ξ_i und der ϕ^j auf U ab. Ist nun (oBdA) $\xi_1(x) = 0$ dann ist $\xi_1|_U = \xi_1^i \frac{\partial}{\partial u^i}$ und $\xi_1^i(x) = 0$ für alle $i = 1,\dots,n$. Damit ist aber

$$\Phi(\xi_1,\dots,\phi^\ell)|_U = \sum_{i=1}^n \xi_1^i \Phi(\tfrac{\partial}{\partial u^i},\xi_2,\dots,\phi^\ell),$$

und das verschwindet in x. □

Differentialformen

4.3. Eine *Differentialform* vom Grad k oder eine k*–Form* auf einer glatten Mannigfaltigkeit M ist ein Tensorfeld $\omega \in \mathcal{T}^0_k(M)$, sodass für jeden Punkt $x \in M$ die k–lineare Abbildung $\omega_x : (T_xM)^k \to \mathbb{R}$ *alternierend* ist, also verschwindet, falls zwei ihrer Eintragungen gleich sind. Wie aus der linearen Algebra bekannt, folgt daraus, dass $\omega_x(\xi_{\sigma(1)},\dots,\xi_{\sigma(k)}) = \operatorname{sgn}(\sigma)\omega_x(\xi_1,\dots,\xi_k)$ für $\xi_1,\dots,\xi_k \in T_xM$ und jede Permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_k$ gilt. Dabei bezeichnet $\operatorname{sgn}(\sigma)$ das Vorzeichen der Permutation σ, also (-1) hoch die Anzahl der Faktoren in einer Darstellung von σ als Produkt von Transpositionen. Die Menge aller k–Formen auf M wird mit $\Omega^k(M)$ bezeichnet, und man setzt $\Omega^0(M) := C^\infty(M,\mathbb{R})$. Natürlich ist wieder jedes $\Omega^k(M)$ ein reeller Vektorraum und ein Modul über $C^\infty(M,\mathbb{R})$ unter den punktweisen Operationen. Da eine k–lineare Abbildung durch ihre Werte auf k–Tupeln von Basisvektoren bestimmt ist und eine alternierende Abbildung verschwindet, wenn zwei ihrer Eintragungen gleich sind, ist $\Omega^k(M) = 0$ für alle $k > n = \dim(M)$. Man setzt $\Omega^*(M) := \oplus_{k=0}^n \Omega^k(M)$. Nach Lemma 4.2 können wir $\Omega^k(M)$ auch als den Raum aller k–linearen, alternierenden Abbildungen $\mathfrak{X}(M)^k \to C^\infty(M,\mathbb{R})$ betrachten, die in einer (und daher in jeder) Variablen linear über $C^\infty(M,\mathbb{R})$ sind.

Ein großer Vorteil von Differentialformen (und allgemeiner von $\binom{0}{k}$–Tensorfeldern) gegenüber Vektorfeldern ist, dass man sie mit beliebigen glatten Abbildungen bewegen kann. Sei $f : M \to N$ eine glatte Funktion und $t \in \mathcal{T}^0_k(N)$. Dann definieren wir $f^*t \in \mathcal{T}^0_k(M)$ durch $(f^*t)_x(\xi_1,\dots,\xi_k) := t_{f(x)}(T_xf \cdot \xi_1,\dots,T_xf \cdot \xi_k)$. Für $\xi_1,\dots,\xi_k \in \mathfrak{X}(M)$ können wir dann $f^*t(\xi_1,\dots,\xi_k)$ als $(t \circ f)(Tf \circ \xi_1,\dots,Tf \circ \xi_k)$ schreiben, also ist f^*t tatsächlich ein glattes Tensorfeld. Das Tensorfeld f^*t heißt der *Pullback* von t längs f. Ist jedes t_y alternierend, dann ist natürlich auch jedes $(f^*t)_x$ alternierend, also ist für $\omega \in \Omega^k(N)$ der Pullback $f^*\omega$ eine k–Form auf M.

Nach Definition ist $\Omega^k(M)$ ein Teilraum von $\mathcal{T}^0_k(M)$. Es gibt eine natürliche Abbildung $\operatorname{Alt} : \mathcal{T}^0_k(M) \to \Omega^k(M)$, die Alternierung, die gegeben ist durch

$$\operatorname{Alt}(t)_x(\xi_1,\dots,\xi_k) := \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \operatorname{sgn}(\sigma) t_x(\xi_{\sigma_1},\dots,\xi_{\sigma_k}).$$

Man sieht sofort, dass $\mathrm{Alt}(t)_x$ tatsächlich alternierend ist, und falls t selbst schon alternierend war ist $\mathrm{Alt}(t) = k!t$. Damit definieren wir nun das *Hack–Produkt* oder *Wedge–Produkt* von 1–Formen wie folgt: Für $\phi^1, \dots, \phi^k \in \Omega^1(M)$ definieren wir $\phi^1 \wedge \dots \wedge \phi^k \in \Omega^k(M)$ als $\mathrm{Alt}(\phi^1 \otimes \dots \otimes \phi^k)$, d.h.

$$(\phi^1 \wedge \dots \wedge \phi^k)_x(\xi_1, \dots, \xi_k) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \mathrm{sgn}(\sigma) \phi^1_x(\xi_{\sigma_1}) \cdots \phi^k_x(\xi_{\sigma_k}) = \det\left(\phi^i_x(\xi_j)\right).$$

Offensichtlich ist das eine wohldefinierte k–Form auf M. Nun wollen wir das Produkt so auf allgemeine Differentialformen erweitern, dass $(\phi^1 \wedge \dots \wedge \phi^k) \wedge (\psi^1 \wedge \dots \wedge \psi^\ell) = \phi^1 \wedge \dots \wedge \psi^\ell$ gilt. Da aber $\phi^1 \wedge \dots \wedge \phi^k$ und $\psi^1 \wedge \dots \wedge \psi^\ell$ alternierend sind, sieht man sofort, dass für $\xi_1, \dots, \xi_{k+\ell} \in T_xM$ die Gleichung

$$(\phi^1 \wedge \dots \wedge \psi^\ell)_x(\xi_1, \dots, \xi_{k+\ell}) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{k+\ell}} \mathrm{sgn}(\sigma) \phi^1_x(\xi_{\sigma_1}) \cdots \psi^\ell_x(\xi_{\sigma_{k+\ell}}) =$$
$$= \tfrac{1}{k!\ell!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{k+\ell}} \mathrm{sgn}(\sigma)(\phi_1 \wedge \dots \wedge \phi^k)_x(\xi_{\sigma_1}, \dots, \xi_{\sigma_k})(\psi^1 \wedge \dots \wedge \psi^\ell)_x(\xi_{\sigma_{k+1}}, \dots, \xi_{\sigma_{k+\ell}})$$

gilt. Damit müssen wir $\wedge : \Omega^k(M) \times \Omega^\ell(M) \to \Omega^{k+\ell}(M)$ durch $\omega \wedge \tau = \frac{1}{k!\ell!}\mathrm{Alt}(\omega \otimes \tau)$ definieren, d.h.

$$(\omega \wedge \tau)_x(\xi_1, \dots, \xi_{k+\ell}) := \tfrac{1}{k!\ell!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{k+\ell}} \mathrm{sgn}(\sigma) \omega_x(\xi_{\sigma_1}, \dots, \xi_{\sigma_k}) \tau_x(\xi_{\sigma_{k+1}}, \dots, \xi_{\sigma_{k+\ell}}).$$

Aus der Definition sieht man einerseits direkt, dass dieses Produkt *graduiert–kommutativ* ist, d.h. für $\omega \in \Omega^k(M)$ und $\tau \in \Omega^\ell(M)$ gilt $\tau \wedge \omega = (-1)^{k\ell} \omega \wedge \tau$. Andererseits ist auch offensichtlich, dass es mit Pullbacks verträglich ist, d.h. $f^*(\omega \wedge \tau) = (f^*\omega) \wedge (f^*\tau)$ für beliebige glatte Funktionen f. Außerdem haben wir oben verifiziert, dass das Hack–Produkt assoziativ für Produkte von 1–Formen ist. Da aber für eine Karte (U, u) mit $x \in U$ (als Tensorfeld)

$$\omega(x) = \sum_{i_1, \dots, i_k} \omega(\tfrac{\partial}{\partial u^{i_1}}, \dots, \tfrac{\partial}{\partial u^{i_k}})(x) du^{i_1}(x) \otimes \dots \otimes du^{i_k}(x)$$

gilt, ist

$$\omega(x) = \tfrac{1}{k!}\mathrm{Alt}(\omega(x)) = \tfrac{1}{k!} \sum_{i_1, \dots, i_k} \omega(\tfrac{\partial}{\partial u^{i_1}}, \dots, \tfrac{\partial}{\partial u^{i_k}})(x) du^{i_1}(x) \wedge \dots \wedge du^{i_k}(x),$$

also ist das Hack–Produkt assoziativ. Für $f \in \Omega^0(M)$ und $\omega \in \Omega^*(M)$ definiert man $f \wedge \omega = f\omega$. Damit wird $(\Omega^*(M), \wedge)$ eine assoziative, graduiert–kommutative Algebra.

Die obige Koordinatendarstellung für ω hat noch den Nachteil, dass man über alle $i_1, \dots, i_k$ summiert, und dadurch viele Terme auftreten in denen sich die Elemente $du^{i_1} \wedge \dots \wedge du^{i_k}$ nur um ein Vorzeichen unterscheiden. Daher setzt man üblicherweise $\omega_{i_1 \dots i_k} := \omega(\frac{\partial}{\partial u^{i_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial u^{i_k}})$ für $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$ und schreibt $\omega|_U$ als

$$\omega|_U = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \omega_{i_1 \dots i_k} du^{i_1} \wedge \dots \wedge du^{i_k}.$$

4.4. Die äußere Ableitung. Zur Motivation betrachten wir den Fall einer offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$. Hier können wir eine Differentialform einfach als eine glatte Funktion $\omega : U \to L^k_{alt}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ betrachten, wobei $L^k_{alt}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ der Vektorraum der k–linearen, alternierenden Abbildungen $(\mathbb{R}^n)^k \to \mathbb{R}$ ist. Differenzieren wir diese Funktion, dann erhalten wir für $x \in U$ die Abbildung $D\omega(x) : \mathbb{R}^n \to L^k_{alt}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, und wir können

$D\omega(x)$ als die $(k+1)$–lineare Abbildung $(v_0,\dots,v_k)\mapsto D\omega(x)(v_0)(v_1,\dots,v_k)$ betrachten. Die offensichtlich Idee, um daraus eine $(k+1)$–Form zu machen, ist, diese Abbildung zu alternieren. Wir wollen nun diese Idee in Termen von Vektorfeldern interpretieren. Seien also $\xi_0,\dots,\xi_k\in\mathfrak{X}(U)$. Nun ist die Abbildung $L^k_{alt}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})\times(\mathbb{R}^n)^k\to\mathbb{R}$, die gegeben ist durch $(\phi,v_1,\dots,v_k)\mapsto\phi(v_1,\dots,v_k)$, klarerweise $(k+1)$–linear. Analog zum Differenzieren bilinearer Abbildungen in 1.5 erhalten wir

$$(*)\qquad \xi_0\cdot(\omega(\xi_1,\dots,\xi_k))=D\omega(\xi_0)(\xi_1,\dots,\xi_k)+\sum_{i=1}^k\omega(\xi_1,\dots,\xi_0\cdot\xi_i,\dots,\xi_k),$$

und damit erhalten wir eine Formel für $D\omega(\xi_0)(\xi_1,\dots,\xi_k)$. Da $D\omega(\xi_0)$ Werte im Raum der alternierenden k–linearen Abbildungen hat, müssen wir, um das Resultat zu alternieren, nur noch $\sum_{i=0}^k(-1)^iD\omega(\xi_i)(\xi_0,\dots,\widehat{\xi_i},\dots,\xi_k)$ bilden, wobei der Hut bedeutet, dass die entsprechende Eintragung auszulassen ist. Der Term auf der linken Seite der obigen Formel macht dabei keine Probleme, er liefert einfach

$$\sum_{i=0}^k(-1)^i\xi_i\cdot(\omega(\xi_0,\dots,\widehat{\xi_i},\dots,\xi_k)),$$

und das macht natürlich auf einer Mannigfaltigkeit Sinn. Andererseits wissen wir aus der Koordinatenformel für die Lie Klammer in 2.14, dass $\xi_i\cdot\xi_j-\xi_j\cdot\xi_i=[\xi_i,\xi_j]$ gilt. Damit können wir aber den Ausdruck

$$(**)\qquad \sum_{i<j}(-1)^{i+j}\omega([\xi_i,\xi_j],\xi_0,\dots,\widehat{\xi_i},\dots,\widehat{\xi_j},\dots,\xi_k),$$

der wieder auf jeder Mannigfaltigkeit Sinn macht, als

$$\sum_{i=0}^k(-1)^i\left(\sum_{j=i+1}^k(-1)^j\omega(\xi_i\cdot\xi_j,\xi_0,\dots,\widehat{\xi_i},\dots,\widehat{\xi_j},\dots,\xi_k)-\right.$$
$$\left.-\sum_{j=i+1}^k(-1)^j\omega(\xi_j\cdot\xi_i,\xi_0,\dots,\widehat{\xi_i},\dots,\widehat{\xi_j},\dots,\xi_k)\right)$$

schreiben. Bewegen wir in der ersten Summe den Ausdruck $\xi_i\cdot\xi_j$ hinter ξ_{j-1}, dann erhalten wir ein Vorzeichen $(-1)^{j-1}$, und damit können wir diese erste Summe als

$$-\sum_{i=0}^k(-1)^i\sum_{j>i}\omega(\xi_0,\dots,\widehat{\xi_i},\dots,\xi_i\cdot\xi_j,\dots,\xi_k)$$

schreiben. In der zweiten Summe vertauschen wir die Summationsreihenfolge und tauschen den Ausdruck $\xi_j\cdot\xi_i$ hinter ξ_{i-1} und erhalten

$$-\sum_{j=0}^k(-1)^j\sum_{i<j}\omega(\xi_0,\dots,\xi_j\cdot\xi_i,\dots,\widehat{\xi_j},\dots,\xi_k),$$

Vertauscht man nun die Namen der Indizes i und j, dann sieht man, dass diese beiden Ausdrücke zusammen genau die Alternierung des Negativen der letzten Summe in $(*)$ liefert, die somit durch $(**)$ gegeben ist. Das motiviert die folgende Definition.

Definition. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und $\omega \in \Omega^k(M)$ eine k–Form. Dann definieren wir $d\omega : (\mathfrak{X}(M))^{k+1} \to C^\infty(M,\mathbb{R})$ durch

$$\begin{aligned} d\omega(\xi_0,\dots,\xi_k) = &\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\xi_i \cdot (\omega(\xi_0,\dots,\widehat{\xi_i},\dots,\xi_k))+ \\ &\sum_{i<j}(-1)^{i+j}\omega([\xi_i,\xi_j],\xi_0,\dots,\widehat{\xi_i},\dots,\widehat{\xi_j},\dots,\xi_k). \end{aligned}$$

Wir behaupten nun, dass $d\omega \in \Omega^{k+1}(M)$ gilt, also müssen wir zeigen, dass $d\omega$ alternierend und in einer Eintragung linear über glatten Funktionen ist. Um zu sehen, dass $d\omega$ alternierend ist, genügt es zu zeigen, dass $d\omega(\xi_0,\dots,\xi_k) = 0$ gilt, falls zwei benachbarte Vektorfelder gleich sind. Sei also $\xi_j = \xi_{j+1}$. Da ω alternierend ist, bleiben von der ersten Summe nur die Terme für $i = j$ und $i = j + 1$ übrig, und diese heben sich wegen des Vorzeichens $(-1)^i$ weg. In der zweiten Summe fallen alle Summanden weg, in denen weder ξ_j noch ξ_{j+1} in die Lie Klammer kommt, der Term, in der beide in die Klammer kommen, fällt wegen der Schiefsymmetrie der Lie Klammer weg und die restlichen Terme heben sich wieder wegen des Vorzeichens weg.

Somit bleibt zu zeigen, dass für eine glatte Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ und beliebige Vektorfelder $\xi_0,\dots,\xi_k$ die Gleichung $0 = d\omega(f\xi_0,\xi_1,\dots,\xi_k) - fd\omega(\xi_0,\dots,\xi_k)$ gilt. Da ω linear über $C^\infty(M,\mathbb{R})$ ist, trägt die erste Summe zu dieser Differenz gerade

$$\sum_{i=1}^{k}(-1)^i(\xi_i \cdot f)\omega(\xi_0,\dots,\widehat{\xi_i},\dots,\xi_k)$$

bei. In der zweiten Summe tragen nur die Terme bei, in denen ξ_0 in die Lie Klammer kommt, und nach Teil 3 von Proposition 2.14 liefern diese Terme gerade

$$\sum_{j=1}^{k}(-1)^j\omega(-(\xi_j \cdot f)\xi_0,\xi_1,\dots,\widehat{\xi_j},\dots,\xi_k),$$

was sich genau mit der obigen Summe weghebt. Damit sehen wir, dass $d\omega \in \Omega^{k+1}(M)$ gilt, also haben wir einen Operator $d : \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)$, die *äußere Ableitung*, definiert. Im Spezialfall $k = 0$, d.h. für $f \in C^\infty(M,\mathbb{R})$, reduziert sich die Definition zu $df(\xi_0) = \xi_0 \cdot f$, also erhalten wir die selbe Definition wie in 4.1. Die wichtigsten Eigenschaften der äußeren Ableitung sind:

Satz. *Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit, $\omega \in \Omega^k(M)$ und $\tau \in \Omega^\ell(M)$ Differentialformen auf M und d die äußere Ableitung. Dann gilt:*
(1) d ist ein lokaler Operator, d.h. ist $U \subset M$ offen und $\omega|_U$ identisch Null, dann ist auch $d\omega|_U$ identisch Null. Somit hängt für jede offene Teilmenge $V \subset M$ die Einschränkung $d\omega|_V$ nur von $\omega|_V$ ab.
(2) $d(\omega \wedge \tau) = d(\omega) \wedge \tau + (-1)^k\omega \wedge d\tau$.
(3) $d^2 = d \circ d = 0$.
(4) Ist (U,u) eine Karte auf M und $\omega|_U = \sum_{i_1,\dots,i_k}\omega_{i_1\dots i_k}du^{i_1} \wedge \dots \wedge du^{i_k}$, dann gilt

$$d\omega|_U = \sum_{i_1,\dots,i_k} d(\omega_{i_1\dots i_k}) \wedge du^{i_1} \wedge \dots \wedge du^{i_k} = \sum_{i_0,\dots,i_k} \frac{\partial\omega_{i_1\dots i_k}}{\partial u^{i_0}}du^{i_0} \wedge \dots \wedge du^{i_k}.$$

(5) d ist natürlich, d.h. ist N eine weitere glatte Mannigfaltigkeit und $f : N \to M$ eine glatte Funktion, dann ist $f^*(d\omega) = d(f^*\omega)$.

Beweis. (1) $\omega|_U = 0$ bedeutet natürlich, dass für beliebige Vektorfelder $\xi_1, \dots, \xi_k$ die Funktion $\omega(\xi_1, \dots, \xi_k)$ auf U identisch Null ist. Wendet man darauf noch ein Vektorfeld an, so verschwindet das Resultat ebenfalls auf U. Damit ist aber jeder der Summanden in der Definition von $d\omega$ auf U identisch Null. Der zweite Teil folgt daraus sofort, weil für zwei Formen mit gleicher Einschränkung auf V die Differenz auf V identisch Null ist.
(4) Zunächst beweisen wir einen Spezialfall von (2). Betrachten wir $d(f\omega)$ für $f \in \Omega^0(M) = C^\infty(M, \mathbb{R})$. Setzen wir $f\omega$ in die Definition von d ein, dann liefert die zweite Summe genau die entsprechende Summe in $fd\omega$. Die erste Summe in der Definition von d liefert Terme der Form $\xi_i \cdot (f\omega(\xi_0, \dots, \widehat{\xi_i}, \dots, \xi_k))$. Beachten wir, dass ξ_i als Derivation auf glatten Funktionen wirkt und $\xi_i \cdot f = df(\xi_i)$ gilt, dann impliziert das sofort, dass

$$d(f\omega) - fd\omega = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i df(\xi_i)\omega(\xi_0, \dots, \widehat{\xi_i}, \dots, \xi_k)$$

gilt. Da ω alternierend ist, sieht man leicht, dass die Summe auf der rechten Seite genau $df \wedge \omega$ liefert.

Nun behaupten wir, dass für beliebige $i_1, \dots, i_k$ die Gleichung $d(du^{i_1} \wedge \dots \wedge du^{i_k}) = 0$ gilt. Dazu genügt es aber, diese Form auf Koordinatenvektorfeldern auszuwerten. Nach Konstruktion liefert aber Einsetzen beliebiger Koordinatenvektorfelder in $du^{i_1} \wedge \dots \wedge du^{i_k}$ immer eine konstante Funktion. Da für Koordinatenvektorfelder die Lie Klammer immer verschwindet, folgt $d(du^1 \wedge \dots \wedge du^{i_k}) = 0$ direkt aus der Definition von d. Da d offensichtlich linear ist, folgt nun

$$d\left(\sum_{i_1, \dots, i_k} \omega_{i_1 \dots i_k} du^{i_1} \wedge \dots \wedge du^{i_k}\right) = \sum_{i_1, \dots, i_k} d(\omega_{i_1 \dots i_k}) \wedge du^{i_1} \wedge \dots \wedge du^{i_k},$$

und die zweite Formel folgt sofort aus der Koordinatenformel für die äußere Ableitung einer Funktion aus 4.1.
(2) Nach Teil (1) können wir das im Bereich einer Karte (U, u) verifizieren, wo wir ω als $\sum_{i_1 \dots i_k} \omega_{i_1 \dots i_k} du^{i_1} \wedge \dots \wedge du^{i_k}$ und τ als $\sum_{j_\beta} \tau_{j_1 \dots j_\ell} du^{j_1} \wedge \dots \wedge du^{j_\ell}$ schreiben können. Nach Definition ist dann $(\omega \wedge \tau)|_U = \sum_{i_\alpha, j_\beta} \omega_{i_1 \dots i_k} \tau_{j_1 \dots j_\ell} du^{i_1} \wedge \dots \wedge du^{j_\ell}$. Nun ist $d(\omega_{i_1 \dots i_k} \tau_{j_1 \dots j_\ell}) = d(\omega_{i_1 \dots i_k})\tau_{j_1 \dots j_\ell} + \omega_{i_1 \dots i_k} d\tau_{j_1 \dots j_\ell}$. Schließlich ist $\sum_{i_\alpha, j_\beta} (d(\omega_{i_1 \dots i_k})\tau_{j_1 \dots j_\ell}) \wedge du^{i_1} \wedge \dots \wedge du^{j_\ell} = (d(\omega) \wedge \tau)|_U$ und

$$\omega_{i_1 \dots i_k} d\tau_{j_1 \dots j_\ell} \wedge du^{i_1} \wedge \dots \wedge du^{j_\ell} = (-1)^k \omega_{i_1 \dots i_k} du^{i_1} \wedge \dots \wedge du^{i_k} \wedge d\tau_{j_1 \dots j_\ell} \wedge du^{j_1} \wedge \dots \wedge du^{j_\ell},$$

und damit liefert Summieren über diese Terme gerade $(-1)^k(\omega \wedge d\tau)|_U$ und das Resultat folgt.
(3) Wieder können wir das im Bereich einer Karte verifizieren. Weil wir von oben schon wissen, dass $d(du^{i_1} \wedge \dots \wedge du^{i_k}) = 0$ gilt, folgt aus der ersten Formel für $d\omega|_U$ aus (4) und Teil (2), dass $d^2\omega|_U = \sum_{i_1, \dots, i_k} d^2(\omega_{i_1 \dots i_k}) \wedge du^{i_1} \wedge \dots \wedge du^{i_k}$. Somit genügt es zu zeigen, dass $d^2 f = 0$ für jede Funktion $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ gilt. Nun ist aber nach Definition

$$d(df)(\xi_0, \xi_1) = \xi_0 \cdot df(\xi_1) - \xi_1 \cdot df(\xi_0) - df([\xi_0, \xi_1]) = \xi_0 \cdot (\xi_1 \cdot f) - \xi_1 \cdot (\xi_0 \cdot f) - [\xi_0, \xi_1] \cdot f,$$

und das verschwindet nach Definition der Lie Klammer.
(5) Für $g \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ ist $f^*g = g \circ f$ und damit ist $d(f^*g)(\xi) = \xi \cdot (g \circ f) = (T_x f \cdot \xi) \cdot g = dg(T_x f \cdot \xi) = f^*(dg)(\xi)$, also stimmt die Behauptung für glatte Funktionen. Sei nun (U, u) eine Karte auf M mit $f(N) \cap U \neq \emptyset$ und schreiben wir $\omega|_U = \sum_{i_1, \dots, i_k} \omega_{i_1 \dots i_k} du^{i_1} \wedge \dots \wedge du^{i_k}$. Da wir aus 4.3 wissen, dass der Pullback mit dem Hackprodukt verträglich ist,

erhalten wir

$$(f^*\omega)|_{f^{-1}(U)} = \sum_{i_1,\dots,i_k} f^*\omega_{i_1\dots i_k} f^*(du^{i_1}) \wedge \dots \wedge f^*(du^{i_k}).$$

Von oben wissen wir, dass $d(f^*\omega_{i_1\dots i_k}) = f^*(d\omega_{i_1\dots i_k})$ und $d(f^*u^{i_j}) = f^*(du^{i_j})$ gilt, und damit erhalten wir nach Teil (4) für $d(f^*\omega)|_{f^{-1}(U)}$ den Ausdruck

$$\sum_{i_1,\dots,i_k} f^*(d\omega_{i_1\dots i_k}) \wedge f^*(du^{i_1}) \wedge \dots \wedge f^*(du^{i_k}),$$

wegen der Linearität und Verträglichkeit mit dem Hackprodukt von f^* und Teil (4) ist das $f^*(d\omega)|_U$. □

Integration

Die Motivation für den Zusammenhang zwischen Differentialformen und Integration ist der Transformationssatz für Mehrfachintegrale. Dieser besagt ja insbesondere, dass für einen Diffeomorphismus $\Phi : U \to \Phi(U)$ von offenen Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ und eine glatte Funktion $f : \Phi(U) \to \mathbb{R}$ mit kompaktem Träger die Gleichung $\int_U (f \circ \Phi)|\det(D\Phi)| = \int_{\Phi(U)} f$ gilt.

Das sieht aber sehr ähnlich aus wie die Transformation von n–Formen unter Diffeomorphismen: Sei M eine n–dimensionale Mannigfaltigkeit, $\omega \in \Omega^n(M)$ eine n–Form und sei (U, u) eine Karte für M. Nach 4.3 gibt es eine eindeutige glatte Funktion $\omega_{1\dots n} : U \to \mathbb{R}$, sodass $\omega|_U = \omega_{1\dots n} du^1 \wedge \dots \wedge du^n$. Die lokale Koordinatendarstellung $\omega_{1\dots n} \circ u^{-1} : u(U) \to \mathbb{R}$ dieser Funktion ist dann gegeben durch : $\omega_{1\dots n}(u^{-1}(y)) = \omega(u^{-1}(y))(T_y u^{-1} \cdot e_1, \dots, T_y u^{-1} \cdot e_n)$. (Vergleiche mit dem Fall von Kurvenintegralen in 1.8). Sei nun $v : U \to v(U)$ eine weitere auf U definierte Kartenabbildung. Die entsprechende Funktion $f : v(U) \to \mathbb{R}$ ist definiert durch $f(z) = \omega(v^{-1}(z))(T_z v^{-1} \cdot e_1, \dots, T_z v^{-1} \cdot e_n)$. Betrachten wir nun den Diffeomorphismus $\Phi : u(U) \to v(U)$, $\Phi := v \circ u^{-1}$, dann ist offensichtlich $v^{-1} \circ \Phi = u^{-1}$, und damit ist $T_y u^{-1} = T_{\Phi(y)} v^{-1} \circ T_y \Phi$ und wir wissen, dass $T_y\Phi = D\Phi(y)$ gilt. Schließlich ist die Funktion $(\mathbb{R}^n)^n \to \mathbb{R}$, die gegeben ist durch $(w_1, \dots, w_n) \mapsto \omega(u^{-1}(y))(T_y u^{-1} \cdot w_1, \dots, T_y u^{-1} \cdot w_n)$, nach Konstruktion n–linear und alternierend, also eine Determinantenfunktion auf $\mathbb{R}^n$. Damit erhalten wir aber

$$\begin{aligned}
&\omega(u^{-1}(y))(T_y u^{-1} \cdot e_1, \dots, T_y u^{-1} \cdot e_n) = \\
&\omega(u^{-1}(y))(T_{\Phi(y)} v^{-1} \cdot D\Phi(y)(e_1), \dots, T_{\Phi(y)} v^{-1} \cdot D\Phi(y)(e_n)) = \\
&\det(D\Phi(y))\omega(u^{-1}(y))(T_{\Phi(y)} v^{-1} \cdot e_1, \dots, T_{\Phi(y)} v^{-1} \cdot e_n) = \det(D\Phi(y)) f(\Phi(y)).
\end{aligned}$$

Da Φ ein Diffeomorphismus ist, ist $\det(D\Phi(y)) \neq 0$ für alle $y \in u(U)$. Falls wir annehmen, dass U und damit auch $u(U)$ zusammenhängend ist, dann ist $\det(D\Phi)$ entweder immer positiv oder immer negativ. Somit sehen wir, dass das Integral über die lokale Koordinatendarstellung der Funktion $\omega_{1\dots n}$ bis auf das Vorzeichen unabhängig von der Wahl der Kartenabbildung ist. Um das Problem mit dem Vorzeichen in den Griff zu bekommen, müssen wir orientierte Mannigfaltigkeiten betrachten.

4.5. Orientierungen. Sei zunächst V ein n–dimensionaler reeller Vektorraum und seien $\{a_1, \dots, a_n\}$ und $\{b_1, \dots, b_n\}$ geordnete Basen von V. Dann gibt es eine eindeutigen linearen Isomorphismus $A : V \to V$, sodass $A(a_i) = b_i$ für alle $i = 1, \dots, n$ gilt. Die beiden Basen heißen *gleich orientiert*, falls $\det(A) > 0$ ist und *entgegengesetzt orientiert*, falls $\det(A) < 0$ gilt. Klarerweise definiert die Eigenschaft, gleich orientiert zu sein, eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller geordneten Basen von V, und für diese Relation gibt es genau zwei Äquivalenzklassen. Eine *Orientierung* auf V wird durch die Wahl einer dieser beiden Äquivalenzklassen bestimmt. Die Basen in dieser

Klasse nennt man dann *positiv orientiert*, die in der anderen Klasse *negativ orientiert*. Die Standard Orientierung auf $\mathbb{R}^n$ ist durch die Äquivalenzklasse der Standard Basis gegeben. Für diese Konvention ist eine Basis $\{a_1, \dots, a_n\}$ von $\mathbb{R}^n$ genau dann positiv orientiert, wenn die Determinante der Matrix mit den Spalten $a_1, \dots, a_n$ positiv ist. Hat man Orientierungen auf zwei n–dimensionalen Vektorräumen V und W gewählt, dann zerfällt die Menge der linearen Isomorphismen $A : V \to W$ in zwei Klassen, nämlich in die *orientierungserhaltenden* und die *orientierungsvertauschenden* Isomorphismen. Dabei ist eine lineare Abbildung genau dann orientierungserhaltend, wenn das Bild einer (oder äquivalent jeder) positiv orientierten Basis von V eine positiv orientierte Basis von W ist.

Auf Mannigfaltigkeiten kann man nun Orientierungen von Tangentialräumen betrachten, wobei man eine Art von Glattheitsbegriff für Orientierungen benötigt: Sei also M eine n–dimensionale glatte Mannigfaltigkeit. Seien $\xi_1, \dots, \xi_n \in \mathfrak{X}(M)$ Vektorfelder, sodass für einen Punkt $x \in M$ die Tangentialvektoren $\xi_1(x), \dots, \xi_n(x)$ eine Basis für T_xM bilden. Ist (U, u) eine Karte für M mit $x \in U$ und sind ξ_i^j die Funktionen in der entsprechenden Koordinatendarstellung von $\xi_i|_U$, dann ist die Bedingung, dass $\xi_1(x), \dots, \xi_n(x)$ eine Basis ist, äquivalent dazu, dass die Funktion $\det(\xi_i^j)$ in x ungleich Null ist. Daraus folgt aber sofort, dass es eine offene Umgebung V von $x \in M$ gibt, sodass $\{\xi_1(y), \dots, \xi_n(y)\}$ für jedes $y \in V$ eine Basis von T_yM bildet. Haben wir eine Orientierung auf T_xM gewählt, dann ist die Basis $\{\xi_1(x), \dots, \xi_n(x)\}$ entweder positiv oder negativ orientiert, und wir erhalten eine Orientierung auf T_yM für alle $y \in V$, indem wir verlangen, dass die Basis $\{\xi_1(y), \dots, \xi_n(y)\}$ ebenfalls positiv (bzw. negativ) orientiert ist.

Nun nennt man eine n–dimensionale glatte Mannigfaltigkeit M *orientierbar*, wenn man Orientierungen für alle Tangentialräume T_xM so wählen kann, dass folgenden Eigenschaft erfüllt ist: Für jede zusammenhängende offene Teilmenge $U \subset M$ und glatte Vektorfelder $\xi_1, \dots, \xi_n \in \mathfrak{X}(U)$, sodass für jeden Punkt $x \in U$ die Tangentialvektoren $\xi_1(x), \dots, \xi_n(x)$ eine Basis von T_xM bilden, sind diese Basen entweder alle positiv oder alle negativ orientiert. So eine Wahl von Orientierungen aller Tangentialräume nennt man eine *Orientierung* von M und man nennt M dann eine *orientierte* Mannigfaltigkeit. Mit Hilfe des obigen Arguments ist leicht zu sehen, dass eine Orientierung einer zusammenhängenden Mannigfaltigkeit durch die Orientierung eines einzigen Tangentialraumes bestimmt ist. Insbesondere gibt es auf einer zusammenhängenden orientierbaren Mannigfaltigkeit genau zwei Orientierungen. Klarerweise ist jede offene Teilmenge einer orientierten Mannigfaltigkeit selbst in natürlicher Weise eine orientierte Mannigfaltigkeit.

Seien nun M und N orientierte Mannigfaltigkeiten und $f : M \to N$ ein lokaler Diffeomorphismus. Dann ist für jedes $x \in M$ die Tangentialabbildung $T_xf : T_xM \to T_{f(x)}N$ ein linearer Isomorphismus. Man nennt f *orientierungserhaltend*, falls jeder der Isomorphismen T_xf orientierungserhaltend ist.

Es gibt auch einen anderen (äquivalenten) Zugang zu Orientierungen über spezielle Atlanten. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit. Dann nennt man einen Atlas $\{(U_\alpha, u_\alpha) : \alpha \in I\}$ *orientiert*, wenn für je zwei Indizes $\alpha, \beta \in I$ sodass $U_{\alpha\beta} = U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ die Kartenwechselabbildung $u_{\alpha\beta} = u_\beta \circ u_\alpha^{-1} : u_\alpha(U_{\alpha\beta}) \to u_\beta(U_{\alpha\beta})$ die Eigenschaft hat, dass $\det(D(u_{\alpha\beta}))$ eine positive Funktion ist. Man nennt zwei orientierte Atlanten *orientiert äquivalent*, falls ihre Vereinigung ein orientierter Atlas ist.

Proposition. *Für eine n–dimensionale glatte Mannigfaltigkeit M sind äquivalent:*
(1) M ist orientierbar.
(2) M besitzt einen orientierten Atlas.

(3) Es gibt eine n–Form $\omega \in \Omega^n(M)$, sodass $\omega(x) \neq 0$ für alle $x \in M$ gilt.

Beweis. (1) $\implies$ (2): Wählen wir einen Atlas $\{(U_\alpha, u_\alpha) : \alpha \in I\}$ für M, sodass jedes U_α zusammenhängend ist. Betrachten wir nun für jedes α den Diffeomorphismus $u_\alpha : U_\alpha \to u_\alpha(U_\alpha) \subset \mathbb{R}^n$. Da die Mengen zusammenhängend sind, sind die Tangentialabbildungen $T_x u_\alpha$ entweder alle orientierungserhaltend oder alle orientierungsvertauschend. Im ersten Fall lassen wir die Karte wie sie ist, im zweiten Fall schalten wir hinter u_α eine orientierungsvertauschende lineare Abbildung $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, etwa Vertauschen der ersten beiden Koordinaten. So erhalten wir einen Atlas, in dem alle Kartenabbildungen orientierungserhaltende Diffeomorphismen sind. Damit sind aber auch alle Kartenwechselabbildungen orientierungserhaltend, also haben wir einen orientierten Atlas konstruiert.
(2) $\implies$ (3): Sei $\{(U_\alpha, u_\alpha) : \alpha \in I\}$ ein orientierter Atlas für M und sei $\{f_i : i \in \mathbb{N}\}$ eine Partition der Eins, die der Überdeckung $\{U_\alpha\}$ von M untergeordnet ist. Für jedes $i \in \mathbb{N}$ wähle einen Index α, sodass $\operatorname{supp}(f_i) \subset U_\alpha$ gilt, und definiere $\omega^i \in \Omega^n(M)$ durch $\omega^i := f_i du^1_\alpha \wedge \dots \wedge du^n_\alpha$ (durch Null fortgesetzt). Dann setzte $\omega = \sum_{i\in\mathbb{N}} \omega^i$. Weil die Familie $\operatorname{supp}(f_i)$ lokal endlich ist, ist ω glatt und definiert damit ein Element von $\Omega^n(M)$. Sei nun $x \in M$ ein beliebiger Punkt. Da $\sum_i f_i(x) = 1$ gilt, finden wir einen Index i, sodass $f_i(x) > 0$ gilt. Dann ist nach Definition $\omega^i(x)(\frac{\partial}{\partial u^1_\alpha}, \dots, \frac{\partial}{\partial u^n_\alpha}) > 0$. Da der Atlas orientiert ist und die f_j alle nichtnegative Werte haben, folgt leicht, dass $\omega^j(x)(\frac{\partial}{\partial u^1_\alpha}, \dots, \frac{\partial}{\partial u^n_\alpha}) \geq 0$ für alle j gilt. Damit folgt aber $\omega(x) \neq 0$ sofort.
(3) $\implies$ (1): Sei $\omega \in \Omega^n(M)$ eine n–Form ohne Nullstelle. Dann definieren wir für $x \in M$ eine Basis $\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ von T_xM als positiv orientiert, falls $\omega(x)(\xi_1, \dots, \xi_n) > 0$ gilt. Offensichtlich liefert das eine Orientierung auf M. □

Bemerkung. (1) Die Proposition zeigt natürlich auch, dass jeder orientierte Atlas auf M eine Orientierung für M bestimmt, und dass zwei orientierte Atlanten genau dann die gleiche Orientierung für M liefern, wenn sie orientiert äquivalent sind. Analog bestimmt jede n–Form ω ohne Nullstelle eine Orientierung und zwei solche Formen ω und τ bestimmen genau dann die selbe Orientierung, wenn es eine positive Funktion f gibt, sodass $\tau = f\omega$ ist.
(2) Für Hyperflächen $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ist dieser Orientierbarkeitsbegriff äquivalent zum Begriff aus 3.2, also zur Existenz eines globalen Einheitsnormalenfeldes. Ist nämlich M orientiert, dann kann man unter den zwei möglichen Einheitsnormalen in einem Punkt $x \in M$ jene wählen, die eine positiv orientierte Basis von T_xM zu einer positiv orientierten Basis von $T_x\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^{n+1}$ ergänzt, und das liefert ein globales Einheitsnormalenfeld. Ist umgekehrt $\mathfrak{n}$ ein globales Einheitsnormalenfeld, dann definieren wir eine Basis $\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ von T_xM als positiv orientiert, falls $\{\mathfrak{n}(x), \xi_1, \dots, \xi_n\}$ eine positiv orientierte Basis von $T_x\mathbb{R}^{n+1}$ ist, und man sieht sofort, dass dies eine Orientierung auf M definiert.

4.6. Sei nun M eine n–dimensionale orientierte Mannigfaltigkeit. Dann wissen wir aus Proposition 4.5, dass M orientierte Atlanten besitzt, und wir betrachten nur solche orientierte Atlanten, die die gewählte Orientierung liefern, d.h. für die jede Kartenabbildung ein orientierungserhaltender Diffeomorphismus ist. Damit können wir nun Integrale über n–Formen definieren. Um sicher zu stellen, dass wir endliche Integrale erhalten, schränken wir uns auf Formen mit kompaktem Träger ein, wobei wir wie früher den Träger $\operatorname{supp}(\omega)$ einer Differentialform als den Abschluss der Menge $\{x : \omega(x) \neq 0\}$ definieren. Wir bezeichnen mit $\Omega^k_c(M)$ den Raum der k–Formen mit kompaktem Träger.

Sei also $\omega \in \Omega^n_c(M)$. Wähle einen orientierten Atlas $\{(U_\alpha, u_\alpha) : \alpha \in I\}$. Da $\operatorname{supp}(\omega)$ kompakt ist, finden wir endlich viele Karten (U_j, u_j) für $j = 1, \dots, \ell$, sodass $\operatorname{supp}(\omega) \subset U_1 \cup \dots \cup U_\ell$. Weiters finden wir glatte Funktionen $f_j : M \to [0,1]$ mit $\operatorname{supp}(f_j) \subset U_j$, sodass $\sum_{j=1}^{\ell} f_j$ auf $\operatorname{supp}(\omega)$ identisch 1 ist. (Dazu wählen wir eine Partition der Eins, die der Überdeckung $\{U_1, \dots, U_\ell, M \setminus \operatorname{supp}(\omega)\}$ untergeordnet ist, und definieren f_1 als Summe aller Funktionen, deren Träger in U_1 liegt, f_2 als Summe jener verbleibenden Funktionen, deren Träger in U_2 liegt, und so weiter.) Nun definieren wir

$$\int_M \omega := \sum_{i=1}^{\ell} \int_{u_i(U_i)} (f_i\omega)(u_i^{-1}(y))(Tu_i^{-1} \cdot e_1, \dots, Tu_i^{-1} \cdot e_n).$$

Nach Konstruktion ist $\operatorname{supp}(f_i\omega)$ eine kompakte Teilmenge von U_i, also steht auf der rechten Seite eine endliche Summe von Integralen über Funktionen mit kompaktem Träger, also ist das Integral endlich. Es ist auch leicht einzusehen, dass dies wohldefiniert, also unabhängig von allen Wahlen ist: Seien (V_j, v_j) endlich viele Karten aus einem anderen Atlas und $g_j : M \to [0,1]$ entsprechende Funktionen. Dann ist nach Konstruktion $\omega = \sum_j g_j\omega$, also $f_i\omega = \sum_j f_i g_j \omega$. Damit erhalten wir

$$\sum_i \int_{u_i(U_i)} (f_i\omega)(u_i^{-1}(y))(Tu_i^{-1} \cdot e_1, \dots, Tu_i^{-1} \cdot e_n) =$$

$$\sum_{i,j} \int_{u_i(U_i)} (f_i g_j\omega)(u_i^{-1}(y))(Tu_i^{-1} \cdot e_1, \dots, Tu_i^{-1} \cdot e_n).$$

Nach Konstruktion hat $f_i g_j \omega$ Träger in $U_i \cap V_j$, also genügt es, in jedem Summanden über $u_i(U_i \cap V_j)$ zu integrieren. Da beide Atlanten mit der gewählten Orientierung auf M verträglich sind, sind die Kartenwechselabbildungen $v_j \circ u_i^{-1} : u_i(U_i \cap V_j) \to v_j(U_i \cap V_j)$ orientierungserhaltende Diffeomorphismen, also ist die Determinante der Ableitung in jedem Punkt positiv. Damit wissen wir aber aus der Einleitung zum Abschnitt über Integration, dass der Transformationssatz für Mehrfachintegrale

$$\int_{u_i(U_i \cap V_j)} (f_i g_j\omega)(u_i^{-1}(y))(Tu_i^{-1} \cdot e_1, \dots, Tu_i^{-1} \cdot e_n) =$$

$$\int_{v_j(U_i \cap V_j)} (f_i g_j\omega)(v_j^{-1}(y))(Tv_j^{-1} \cdot e_1, \dots, Tv_j^{-1} \cdot e_n)$$

liefert. Da die Funktionen auf der rechten Seite außerhalb von $v_j(U_i \cap V_j)$ verschwinden, können wir auch über $v_j(V_j)$ integrieren, ohne das Resultat zu ändern. Damit zeigt aber die obige Rechnung (rückwärts gelesen), dass die Wahl (V_j, v_j, g_j) zum selben Wert des Integrals führt.

Offensichtlich gibt es für jede orientierte Mannigfaltigkeiten M Formen, deren Integral $\neq 0$ ist. Dazu müssen wir nur eine Karte (U, u) und eine glatte Funktion $0 \neq f : M \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ wählen, sodass $\operatorname{supp}(f)$ kompakt ist und in U liegt und die Form $\omega := f du^1 \wedge \dots \wedge du^n$ (durch 0 auf M ausgedehnt) betrachten. Nach Konstruktion ist dann $\int_M \omega = \int_{u(U)} f \circ u^{-1} > 0$. Somit ist $\int_M : \Omega_c^n(M) \to \mathbb{R}$ eine offensichtlich lineare surjektive Funktion.

Der Satz von Stokes

4.7. Mannigfaltigkeiten mit Rand. Mannigfaltigkeiten mit Rand sind ganz analog definiert wie gewöhnliche Mannigfaltigkeiten, nur erlaubt man, dass für eine Kartenabbildung $u_\alpha : U_\alpha \to u_\alpha(U_\alpha) \subset \mathbb{R}^n$ die Menge $u_\alpha(U_\alpha)$ nicht offen in $\mathbb{R}^n$ sondern offen im *Halbraum* $\{(x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n : x^1 \leq 0\}$ ist. Für die Kartenwechselabbildungen $u_{\alpha\beta} : u_\alpha(U_{\alpha\beta}) \to u_\beta(U_{\alpha\beta})$ verlangt man, dass sie sich lokal glatt über die Randpunkte (also Punkte mit $x^1 = 0$) ausdehnen lassen. Aus dem inversen Funktionensatz folgt sofort, dass jede Kartenwechselabbildung innere Punkte auf innere Punkte und damit auch Randpunkte auf Randpunkte abbildet. Die Teilmenge ∂M aller Punkte, die in einer (oder äquivalent jeder) Karte auf einen Randpunkt abgebildet werden, heißt der *Rand* von M. Nun ist der Schnitt $u_\alpha(U_\alpha) \cap (\{0\} \times \mathbb{R}^{n-1})$ eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^{n-1}$ und die Kartenwechselabbildungen schränken sich zu Diffeomorphismen zwischen diesen Durchschnitten ein. Damit sehen wir aber, dass für einen Atlas $\{(U_\alpha, u_\alpha)\}$ die Einschränkungen $(U_\alpha \cap \partial M, u_\alpha|_{U_\alpha \cap \partial M})$ einen Atlas für ∂M bilden, womit ∂M zu einer $(n-1)$–dimensionalen Mannigfaltigkeit (ohne Rand) wird.

Typische Beispiele für Mannigfaltigkeiten mit Rand sind die abgeschlossenen n–Bälle, $B^n := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$, wobei $\partial B^n = S^{n-1}$ gilt. Ein anderes Beispiel ist etwa ein Volltorus (der durch Rotation von B^2 um einen Kreis entsteht), wobei der Rand gerade der Torus ist.

Alle Konzepte, die wir bisher entwickelt haben (glatte Funktionen, Vektorfelder, Differentialformen, usw.) machen ganz analog auf berandeten Mannigfaltigkeiten Sinn. Für Randpunkte $x \in \partial M$ hat man $T_x\partial M \subset T_xM$, und bei den Tangentialvektoren, die nicht in $T_x\partial M$ liegen, kann man noch nach außen und nach innen weisende unterscheiden. Insbesondere können wir natürlich Differentialformen von M auf ∂M einschränken. Man kann diese Einschränkung auch als $\omega \mapsto i^*\omega$ betrachten, wobei $i : \partial M \to M$ die (offensichtlich glatte) Inklusionsabbildung bezeichnet.

Ein zentraler Punkt für die Integrationstheorie ist, dass eine Orientierung für M (die ganz analog definiert ist wie im Fall gewöhnlicher Mannigfaltigkeiten) kanonisch eine Orientierung für den Rand ∂M liefert: Sei (U_α, u_α) ein orientierter Atlas für M und betrachte eine Kartenwechselabbildung $u_{\alpha\beta} : u_\alpha(U_{\alpha\beta}) \to u_\beta(U_{\alpha\beta})$. Wie wir oben bemerkt haben, bildet diese Kartenwechselabbildung $u_\alpha(U_{\alpha\beta}) \cap (\{0\} \times \mathbb{R}^{n-1})$ nach $u_\beta(U_{\alpha\beta}) \cap (\{0\} \times \mathbb{R}^{n-1})$ ab. Damit folgt aber sofort, dass für einen Punkt $(0, x^2, \dots, x^n) \in u_\alpha(U_{\alpha\beta})$ die Ableitung $Du_{\alpha\beta}(x)$ die Matrixform $\begin{pmatrix} \lambda & 0\dots0 \\ v & A \end{pmatrix}$ haben muss, wobei $\lambda \in \mathbb{R}$, $v \in \mathbb{R}^{n-1}$ und A eine $(n-1) \times (n-1)$–Matrix ist. Da aber $u_{\alpha\beta}$ Punkte mit negativer x^1–Koordinate auf Punkte mit negativer x^1–Koordinate abbilden muss, gilt $\lambda > 0$. Damit hat die Determinante der Matrix A (die gerade die Ableitung der Kartenwechselabbildung für den Rand beschreibt) dasselbe Vorzeichen wie $\det(Du_{\alpha\beta}(x))$, also ist $\det(A) > 0$. Daher ist der induzierte Atlas für ∂M ebenfalls ein orientierter Atlas, und die Behauptung folgt.

4.8. Der Satz von Stokes. Für eine n–dimensionale orientierte Mannigfaltigkeit M mit Rand ist also der Rand ∂M eine orientierte Mannigfaltigkeit (ohne Rand) der Dimension $n-1$. Damit können wir für $(n-1)$–Formen $\omega \in \Omega^{n-1}_c(M)$ die Einschränkung auf den Rand betrachten und dann $\int_{\partial M} \omega$ bilden. Der Satz von Stokes berechnet dieses Integral durch ein Integral über M. Dazu bemerken wir noch, dass für $\omega \in \Omega^{n-1}_c(M)$ nach Definition ω auf der offenen Teilmenge $M \setminus \operatorname{supp}(\omega)$ identisch verschwindet. Nach Teil (1) von Satz 4.4 verschwindet dann auch $d\omega$ auf dieser offenen Teilmenge. Damit ist aber $\operatorname{supp}(d\omega) \subset \operatorname{supp}(\omega)$, also insbesondere $d\omega \in \Omega^n_c(M)$.

Satz (Stokes). *Sei M eine orientierte glatte Mannigfaltigkeit mit Rand ∂M. Dann gilt für jede $(n-1)$–Form $\omega \in \Omega^{n-1}_c(M)$ die Gleichung $\int_{\partial M} \omega = \int_M d\omega$. Ist insbesondere M eine gewöhnliche Mannigfaltigkeit (ohne Rand), dann ist $\int_M d\omega = 0$ für alle $\omega \in \Omega^{n-1}_c(M)$.*

Beweis. Wählen wir endlich viele Karten (U_i, u_i) aus einem orientierten Atlas für M, die $\operatorname{supp}(\omega)$ überdecken und glattte Funktionen $f_i : M \to [0, 1]$, sodass $\operatorname{supp}(f_i) \subset$

U_i gilt und $\sum_i f_i$ auf $\operatorname{supp}(\omega)$ identisch eins ist. Dann können wir natürlich $(U_i \cap \partial M, u_i|_{U_i\cap\partial M})$ und $f_i|_{\partial M}$ als Daten zur Berechnung von $\int_{\partial M}\omega$ benutzen. Andererseits ist $\sum_i f_i\omega = \omega$, also $d\omega = \sum_i d(f_i\omega)$. Nachdem $\operatorname{supp}(d(f_i\omega)) \subset \operatorname{supp}(f_i\omega) \subset U_i$ gilt, ist $\int_M d\omega = \sum_i \int_{u_i(U_i)} d(f_i\omega)(u_i^{-1}(y))(T_yu_i^{-1}\cdot e_1,\dots,T_yu_i^{-1}\cdot e_n)$. Damit können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $\operatorname{supp}(\omega)$ ganz in einer Karte (U,u) liegt. Dann können wir ω eindeutig in der Form $\omega = \sum_{k=1}^n \omega_k du^1\wedge\dots\wedge\widehat{du^k}\wedge\dots\wedge du^n$ für glatte Funktionen $\omega_k : M \to \mathbb{R}$ mit Träger in U schreiben. Nach Teil (4) von Satz 4.4 ist dann $d\omega = (\sum_{i=1}^n(-1)^{i-1}\frac{\partial\omega_i}{\partial u^i})du^1\wedge\dots\wedge du^n$. Andererseits werden nach Konstruktion die Tangentialräume in Randpunkten von $\frac{\partial}{\partial u^i}$ für $i \geq 2$ erzeugt, also ist $du^1|_{\partial M} = 0$, also $\omega|_{\partial M} = \omega_1 du^2\wedge\dots\wedge du^n$.

Nach Definition ist nun $\int_M d\omega = \sum_{i=1}^n(-1)^{i-1}\int_{u(U)}\frac{\partial(\omega_i\circ u^{-1})}{\partial x^i}$, und weil die Funktion im Integral kompakten Träger hat, der in $u(U)$ liegt, können wir auch über den Halbraum $(-\infty,0]\times\mathbb{R}^{n-1}$ integrieren, ohne das Resultat zu ändern. Nach dem Satz von Fubini können wir dieses Integral dann in Integrale über die einzelnen Koordinaten zerlegen, wobei Reihenfolge der Integrationen keine Rolle spielt. Wir wählen die Reihenfolge so, dass wir im i–ten Summanden zuerst über x^i integrieren. Damit erhalten wir im ersten Summanden

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\left(\int_{-\infty}^0 \tfrac{\partial\omega_1\circ u^{-1}}{\partial x^1}(x^1,\dots,x^n)dx^1\right)dx^2\dots dx^n,$$

und nach dem Hauptsatz der Differential und Integralrechnung liefert das

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\omega_1(0,x^2,\dots,x^n)dx^2\dots dx^n = \int_{\partial M}\omega.$$

In allen anderen Summanden steht innen ein Integral der Form

$$\int_{-\infty}^{\infty}\tfrac{\partial\omega_i\circ u^{-1}}{\partial x^i}(x^1,\dots,x^n)dx^i,$$

und das verschwindet, weil ω_i kompakten Träger hat. □

4.9. Exkurs: Lie Ableitung und Insertionsoperatoren. Neben der äußeren Ableitung gibt es noch zwei wichtige Operationen auf Differentialformen, nämlich die Lie Ableitung längs eines Vektorfeldes und den Insertionsoperator zu einem Vektorfeld. Gemeinsam liefern diese drei Operationen einen effizienten Kalkül für Differentialformen. Zunächst besprechen wir die Lie Ableitung, die man für beliebige Tensorfelder definieren kann.

Aus 4.3 wissen wir, dass man für eine glatte Funktion $f : M \to N$ zwischen glatten Mannigfaltigkeiten und ein Tensorfeld $t \in \mathcal{T}^0_k(N)$ den Pullback $f^*t \in \mathcal{T}^0_k(M)$ definieren kann. Andererseits wissen wir aus 2.15, dass der Pullback von Vektorfeldern (also $\binom{1}{0}$–Tensorfeldern) nur längs lokaler Diffeomorphismen definiert ist. Für einen lokalen Diffeomorphismus $f : M \to N$ kann man aber den Pullback beliebiger Tensorfelder definieren. Die Tangentialabbildung $T_xf : T_xM \to T_{f(x)}N$ liefert eine duale Abbildung $T_x^*f : T^*_{f(x)}N \to T^*_xM$, die charakterisiert ist durch $(T^*_xf\cdot\phi)(\xi) = \phi(T_xf\cdot\xi)$ (und das funktioniert für beliebige glatte Funktionen). Im Fall eines lokalen Diffeomorphismus können wir aber auch die lineare Abbildung $(T_xf^{-1})^* : T^*_xM \to T^*_{f(x)}N$ betrachten. Damit definieren wir für $t \in \mathcal{T}^\ell_k(N)$ den Pullback f^*t durch

$$(f^*t)(x)(\xi_1,\dots,\xi_k,\phi^1,\dots,\phi^\ell) := \\ t(f(x))(T_xf\xi_1,\dots,T_xf\xi_k,(T_xf^{-1})^*\cdot\phi^1,\dots,(T_xf^{-1})^*\cdot\phi^\ell).$$

Man sieht sofort, dass dies glatt ist, also ein Element $f^*t \in \mathcal{T}^\ell_k(M)$ definiert, und dass man für Vektorfelder den selben Pullback wie in 2.15 erhält.

Insbesondere kann man das nun auf Flüsse von Vektorfeldern anwenden. Für ein Tensorfeld $s \in \mathcal{T}^\ell_k(M)$ und einen Punkt $x \in M$ ist dann $t \mapsto (\mathrm{Fl}^\xi_t)^*s(x)$ eine glatte Kurve im Raum der $(k+\ell)$–linearen Abbildungen $(T_xM)^k \times (T^*_xM)^\ell \to \mathbb{R}$, und Ableiten dieser Kurve bei $t = 0$ liefert ein Element $(\mathcal{L}_\xi s)(x)$ in diesem Raum. Dann zeigt man, dass $\mathcal{L}_\xi s$ glatt ist, also ein Tensorfeld in $\mathcal{T}^\ell_k(M)$ definiert. Das Tensorfeld $\mathcal{L}_\xi s$ heißt die *Lie Ableitung* von s längs ξ. Etwas allgemeiner erhält man die Gleichung $\frac{d}{dt}(\mathrm{Fl}^\xi_t)^*s = (\mathrm{Fl}^\xi_t)^*\mathcal{L}_\xi s = \mathcal{L}_\xi((\mathrm{Fl}^\xi_t)^*s)$.

Für Funktionen erhält man $\mathcal{L}_\xi f = \xi \cdot f$, für Vektorfelder $\mathcal{L}_\xi\eta = [\xi, \eta]$ und für 1–Formen ergibt sich die Gleichung $(\mathcal{L}_\xi\phi)(\eta) = \xi \cdot (\phi(\eta)) - \phi([\xi, \eta])$. Aus der Definition der Tensorprodukte folgt sofort, dass Pullbacks längs lokaler Diffeomorphismen mit Tensorprodukten vertauschen, also $f^*(t_1 \otimes t_2) = (f^*t_1) \otimes (f^*t_2)$ für jeden lokalen Diffeomorphismus f und beliebige Tensorfelder t_1 und t_2 gilt. Daraus folgt sofort, dass $\mathcal{L}_\xi(t_1 \otimes t_2) = (\mathcal{L}_\xi t_1) \otimes (\mathcal{L}_\xi t_2)$ für jedes Vektorfeld ξ gilt.

Betrachtet man insbesondere den Fall von Differentialformen, dann folgt sofort, dass für $\omega \in \Omega^k(M)$ und $\xi \in \mathfrak{X}(M)$ auch $\mathcal{L}_\xi\omega$ in $\Omega^k(M)$ liegt. Da Lie Ableitungen mit Tensorprodukten verträglich sind, sind sie auch mit Hack–Produkten verträglich, also ist $\mathcal{L}_\xi(\omega \wedge \tau) = (\mathcal{L}_\xi\omega) \wedge \tau + \omega \wedge \mathcal{L}_\xi\tau$. Man erhält dann die explizite Formel

$$(\mathcal{L}_\xi\omega)(\eta_1, \dots, \eta_k) = \xi \cdot (\omega(\eta_1, \dots, \eta_k)) - \sum_{i=1}^{k} \omega(\eta_1, \dots, [\xi, \eta_i], \dots, \eta_k),$$

die man als alternative Definition von $\mathcal{L}_\xi$ benutzen kann.

Die andere Art von Operatoren ist noch einfacher zu verstehen. Für $\xi \in \mathfrak{X}(M)$ und $\omega \in \Omega^k(M)$ definieren wir $(i_\xi\omega)(\eta_1, \dots, \eta_{k-1}) := \omega(\xi, \eta_1, \dots, \eta_{k-1})$. Dann folgt sofort, dass $i_\xi\omega \in \Omega^{k-1}(M)$ gilt, also erhalten wir einen Operator $i_\xi : \Omega^k(M) \to \Omega^{k-1}(M)$, den *Insertionsoperator* zu ξ. Eine etwas mühsame Rechnung liefert die Verträglichkeit von Insertionsoperatoren mit dem Hack–Produkt, nämlich $i_\xi(\omega \wedge \tau) = i_\xi(\omega) \wedge \tau + (-1)^k\omega \wedge i_\xi(\tau)$ für $\omega \in \Omega^k(M)$ und $\tau \in \Omega^\ell(M)$.

Man kann die Verträglichkeiten der Operatoren d, $\mathcal{L}_\xi$ und i_ξ mit dem Hack–Produkt leicht einheitlich verstehen. Jeder der drei Operatoren $\Omega^*(M) \to \Omega^*(M)$ hat die Eigenschaft, dass er $\Omega^k(M)$ nach $\Omega^{k+r}(M)$ abbildet, wobei $r = 1$ für d, $r = 0$ für $\mathcal{L}_\xi$ und $r = -1$ für i_ξ ist. Die Verträglichkeit mit dem Hack–Produkt ist dann, dass $D(\omega \wedge \tau) = D(\omega) \wedge \tau + (-1)^{rk}\omega \wedge D(\tau)$ für $\omega \in \Omega^k(M)$ und $\tau \in \Omega^\ell(M)$ gilt, wobei D einer der drei Operatoren und r die entsprechende Zahl ist. Man nennt solche Operatoren *graduierte Derivationen* vom Grad r der graduierten Algebra $\Omega^*(M)$. So wie wir in 2.14 gezeigt haben, dass der Kommutator von zwei Derivationen eine Derivation ist, zeigt man hier, dass der *graduierte Kommutator* von zwei graduierten Derivationen eine graduierte Derivation ist. Sind also D_1 und D_2 graduierte Derivationen vom Grad r_1 und r_2, dann ist $[D_1, D_2] := D_1 \circ D_2 - (-1)^{r_1r_2}D_2 \circ D_1$ eine graduierte Derivation vom Grad $r_1 + r_2$.

Nun kann man leicht zeigen, dass jede graduierte Derivation ein lokaler Operator ist. Somit kann man solche Derivationen in lokalen Koordinaten betrachten und man sieht leicht, dass zwei graduierte Derivationen, die auf Elementen f und df für $f \in \Omega^0(M)$ übereinstimmen, schon gleich sein müssen. Damit beweist man

Proposition. *Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und seien $\xi, \eta \in \mathfrak{X}(M)$ Vektorfelder. Dann gilt: (1) $[d, \mathcal{L}_\xi] = d \circ \mathcal{L}_\xi - \mathcal{L}_\xi \circ d = 0$.*
(2) $[d, i_\xi] = d \circ i_\xi + i_\xi \circ d = \mathcal{L}_\xi$.

(3) $[d, d] = 2d^2 = 0$.
(4) $[\mathcal{L}_\xi, \mathcal{L}_\eta] = \mathcal{L}_\xi \circ \mathcal{L}_\eta - \mathcal{L}_\eta \circ \mathcal{L}_\xi = \mathcal{L}_{[\xi,\eta]}$.
(5) $[\mathcal{L}_\xi, i_\eta] = \mathcal{L}_\xi \circ i_\eta - i_\eta \circ \mathcal{L}_\xi = i_{[\xi,\eta]}$.
(6) $[i_\xi, i_\eta] = i_\xi \circ i_\eta + i_\eta \circ i_\xi = 0$.

4.10. Exkurs: de-Rham Kohomologie. Aus Satz 4.3 wissen wir, dass die äußere Ableitung $d^2 = d \circ d = 0$ auf jeder glatten Mannigfaltigkeit M erfüllt. Damit liegt für jedes $k = 1, \dots, \dim(M)$ das Bild von $d : \Omega^{k-1}(M) \to \Omega^k(M)$ im Kern von $d : \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)$. Man nennt Formen ω, die $d\omega = 0$ erfüllen, *geschlossen* und solche, die von der Form $d\tau$ sind, *exakt*. Nun können wir für jedes k den Quotienten $H^k(M) := \operatorname{Ker}(d)/\operatorname{Im}(d)$ bilden. Dieser Quotient heißt die k–te *de-Rham Kohomologie* von M. Die Summe aller Kohomologien bezeichnet man mit $H^*(M) := \oplus_k H^k(M)$. Es zeigt sich, dass für kompakte (und auch viele nicht–kompakte) Mannigfaltigkeiten die Räume $H^k(M)$ endlichdimensional sind. Für eine geschlossene k–Form ω bezeichnen wir mit $[\omega] \in H^k(M)$ die *Kohomologieklasse* von ω.

Der erste Schritt um zu sehen, dass diese Kohomologien topologische Bedeutung haben, ist das Lemma von Poincaré, das besagt, dass für einen offenen Ball in $\mathbb{R}^n$ (und damit insbesondere für $\mathbb{R}^n$ selbst) jede geschlossene k–Form mit $k \geq 1$ automatisch exakt ist. Insbesondere erhält man, dass $H^0(\mathbb{R}^n) \cong \mathbb{R}$ (die Funktionen im Kern von d sind genau die Konstanten) und $H^k(\mathbb{R}^n) = 0$ für $k > 0$ gilt.

Die Verträglichkeit von d mit dem Hack–Produkt impliziert sofort, dass für geschlossene Formen $\omega \in \Omega^k(M)$ und $\tau \in \Omega^\ell(M)$ auch $\omega \wedge \tau \in \Omega^{k+\ell}(M)$ geschlossen ist. Außerdem gilt für geschlossenes ω und τ und beliebige Formen $\phi \in \Omega^{k-1}(M)$ und $\psi \in \Omega^{\ell-1}(M)$ die Gleichung $(\omega + d\phi) \wedge (\tau + d\psi) = \omega \wedge \tau + d((-1)^k \omega \wedge \psi + \phi \wedge (\tau + d\psi))$. Damit sehen wir aber, dass das Hack–Produkt ein wohldefiniertes Produkt auf $H^*(M)$ induziert, das $H^k(M) \times H^\ell(M)$ nach $H^{k+\ell}(M)$ abbildet und wegen der entsprechenden Eigenschaften des Hack–Produktes assoziativ und graduiert kommutativ ist. Somit ist $(H^*(M), \wedge)$ eine graduiert kommutative Algebra.

Ist $f : M \to N$ eine glatte Funktion und $\omega \in \Omega^k(N)$, dann ist $d(f^*\omega) = f^*(d\omega)$. Damit folgt aber sofort, dass f^* geschlossene Formen auf geschlossene Formen und exakte Formen auf exakte Formen abbildet. Somit erhalten wir eine induzierte Abbildung $f^\# : H^*(N) \to H^*(M)$, die die Grade bewahrt und ein Algebrahomomorphismus ist. Nachdem für glattes $g : N \to P$ offensichtlich $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$ gilt, erhalten wir sofort $(g \circ f)^\# = f^\# \circ g^\#$. Insbesondere folgt daraus sofort, dass diffeomorphe Mannigfaltigkeiten isomorphe Kohomologien haben. Ein ganz wichtiger Punkt (vor allem für die topologische Interpretation der de-Rham Kohomologie) ist, dass homotope Funktionen die gleichen Abbildung in der Kohomologie induzieren: Sind $f, g : M \to N$ glatt, sodass es eine glatte Funktion $H : M \times \mathbb{R} \to N$ gibt, die $H(x,t) = f(x)$ für alle $t \leq 0$ und $H(x,t) = g(x)$ für alle $t \geq 1$ erfüllt, dann ist $g^\# = f^\# : H^*(N) \to H^*(M)$.

Der entscheidende Punkt an der de-Rham Kohomologie ist aber, dass sie mit der Kohomologie mit reellen Koeffizienten im Sinne der algebraischen Topologie übereinstimmt, was aber ein ziemlich tiefliegendes Resultat ist. Das bedeutet einerseits, dass homöomorphe (und sogar homotopieäquivalente) Mannigfaltigkeiten isomorphe Kohomologien haben. Andererseits kann man Methoden der algebraischen Topologie benutzen, um die de-Rham Kohomologie zu berechnen.

Die niedrigste und die höchste de-Rham Kohomologie sind relativ einfach zu bestimmen. Eine Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ erfüllt genau dann $df = 0$, wenn jeder Punkt $x \in M$ eine offene Umgebung U besitzt, auf der f konstant ist. Das bedeutet aber gerade, dass f konstant auf jeder Zusammenhangskomponente ist, also ist $H^0(M) = \mathbb{R}^\ell$, wobei ℓ die Anzahl der Zusammenhangskomponenten von M ist. Ist andererseits M

kompakt und orientierbar, dann haben wir (nach Wahl einer Orientierung) das Integral $\int_M : \Omega^n(M) \to \mathbb{R}$. Nachdem n–Formen automatisch geschlossen sind und nach dem Satz von Stokes das Integral exakter Formen verschwindet, sehen wir, dass $\int_M$ eine surjektive lineare Abbildung $\int_M : H^n(M) \to \mathbb{R}$ liefert. Es stellt sich heraus, dass für zusammenhängendes M diese Abbildung ein linearer Isomorphismus ist. Ist andererseits M zusammenhängend, aber entweder nicht kompakt oder nicht orientierbar, dann ist $H^n(M) = 0$.

Diese Beobachtung erlaubt es nun, für eine glatte Funktion $f : M \to N$ zwischen n–dimensionalen kompakten, orientierten Mannigfaltigkeiten den *Abbildungsgrad* $\deg(f)$ zu definieren. Die induzierte Funktion $f^\# : H^n(N) \to H^n(M)$ ist einfach eine lineare Abbildung von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$, also durch Multiplikation mit einer reellen Zahl $\deg(f)$ gegeben. Es stellt sich heraus, dass $\deg(f)$ sogar immer eine ganze Zahl ist. Nach Konstruktion haben homotope Funktionen den gleichen Abbildungsgrad, und der Abbildungsgrad ist charakterisiert durch $\int_M f^*\omega = \deg(f) \int_N \omega$.

Damit kann man nun zum Beispiel beweisen, dass es auf Sphären gerader Dimension kein Vektorfeld ohne Nullstelle geben kann (für S^2 ist das der sogenannte Igelsatz): Natürlich ist $\deg(\mathrm{id}) = 1$. Andererseits kann man die Antipodalabbildung $A : S^n \to S^n$ betrachten, die durch $A(x) = -x$ gegeben ist. Nach dem Satz von Stokes ist für die n–Form $\omega := x^1dx^2 \wedge \cdots \wedge dx^{n+1}$ auf $\mathbb{R}^{n+1}$ das Integral $\int_{S^n} \omega \neq 0$. Klarerweise ist $A^*\omega = (-1)^{n+1}\omega$, also erhalten wir $\deg(A) = (-1)^{n+1}$. Ist nun $\xi \in \mathfrak{X}(S^n)$ mit $\xi(x) \neq 0$ für alle x, dann können wir ξ als Funktion $S^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ betrachten, die $0 \neq \xi(x) \perp x$ für alle $x \in S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ erfüllt, und $f : S^n \to S^n$ durch $f(x) := \frac{x+\xi(x)}{\|x+\xi(x)\|}$ definieren. Dann hat f nach Konstruktion keinen Fixpunkt. Daraus schließt man, dass f homotop zu A ist, im Wesentlichen via $H(x,t) := \frac{-tx+(1-t)f(x)}{\|-tx+(1-t)f(x)\|}$, also $\deg(f) = (-1)^{n+1}$ gilt. Andererseits ist aber f homotop zur Identität, im Wesentlichen via $H(x,t) := \frac{x+t\xi(x)}{\|x+t\xi(x)\|}$, also muss $\deg(f) = 1$ gelten, was für gerades n einen Widerspruch liefert. (Auf Sphären ungerader Dimension gibt es tatsächlich immer Vektorfelder ohne Nullstellen.)

Neben den oben erwähnten Methoden aus der algebraischen Topologie gibt es auch direkte Methoden zur Berechnung von de-Rham Kohomologien, etwa die *Mayer–Vietoris–Sequenz*, die für offene Teilmengen $U, V \subset M$, sodass $M = U \cup V$, einen Zusammenhang zwischen den Kohomologien von M, U, V und $U \cap V$ herstellt.

4.11. Exkurs: Anwendungen des Satzes von Stokes. Wir wollen zunächst beschreiben, wie man aus dem allgemeinen Satz von Stokes aus 4.8 die aus der Grundvorlesung über Analysis bekannten Versionen herleitet. Dazu benötigen wir im Wesentlichen zwei Ideen: Einerseits gibt es auf einer n–dimensionalen orientierten Riemann Mannigfaltigkeit (M, g) immer eine kanonische n–Form $\mathrm{vol}(g) \in \Omega^n(M)$, die *Volumsform* der Metrik g: Sei (U, u) eine orientierte Karte für M mit Koordinatenvektorfeldern $\partial_i = \frac{\partial}{\partial u^i}$. Dann betrachten wir die matrixwertige glatte Funktion (g_{ij}) auf U, wobei $g_{ij} := g(\partial_i, \partial_j)$. Da g in jedem Punkt ein positiv definites inneres Produkt ist, ist die Determinante dieser Matrix immer positiv, also definiert $\sqrt{\det(g_{ij})}$ eine positive glatte Funktion auf U, und wir setzen $\mathrm{vol}(g)|_U := \sqrt{\det(g_{ij})}du^1 \wedge \cdots \wedge du^n$. Man verifiziert leicht, dass für verschiedene Karten diese Formen auf den Durchschnitten übereinstimmen. Damit definieren sie eine n–Form auf M. Insbesondere kann man auf einer Riemann Mannigfaltigkeit Funktionen mit kompaktem Träger integrieren, indem man sie mit $\mathrm{vol}(g)$ multipliziert und das Resultat integriert. Für eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ erhalten wir einfach $\mathrm{vol}(g) = dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$, und damit gewinnt man so das übliche Integral von Funktionen auf $\mathbb{R}^n$ zurück.

Auf einer Riemann Mannigfaltigkeit kann man aber auch 1–Formen mit Vektorfeldern identifizieren. Ist nämlich $\phi \in \Omega^1(M)$, dann ist für jeden Punkt $x \in M$ der Wert $\phi(x)$ eine lineare Abbildung $T_xM \to \mathbb{R}$, also gibt es einen eindeutigen Tangentialvektor $\xi_x \in T_xM$, sodass $\phi(x)(\eta) = g_x(\xi_x, \eta)$ für alle $\eta \in T_xM$ gilt. Man verifiziert leicht, dass $x \mapsto \xi_x$ ein glattes Vektorfeld auf M definiert. Insbesondere können wir für eine glatte Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ das Vektorfeld zu $df \in \Omega^1(M)$ betrachten, das als der *Gradient* von f bezeichnet wird.

Im Fall von $\mathbb{R}^n$ ist das Vektorfeld zu $\sum_i \phi_i dx^i$ offensichtlich durch $\sum_i \phi_i \frac{\partial}{\partial x^i}$ gegeben. Insbesondere hat der Gradient von f genau die Koordinaten $\frac{\partial f}{\partial x^i}$, also liefert das den üblichen Gradienten. Auf $\mathbb{R}^2$ genügen diese Beobachtungen schon, um alle Differentialformen in Termen von Funktionen oder Vektorfeldern zu interpretieren. Die äußere Ableitung $d : \Omega^1(\mathbb{R}^2) \to \Omega^2(\mathbb{R}^2)$ ist durch $d(\phi_1 dx^1 + \phi_2 dx^2) = (\frac{\partial \phi_2}{\partial x^1} - \frac{\partial \phi_1}{\partial x^2}) dx^1 \wedge dx^2$ gegeben und entspricht damit der Abbildung $(\xi^1, \xi^2) \mapsto \frac{\partial \xi^2}{\partial x^1} - \frac{\partial \xi^1}{\partial x^2}$ von Vektorfeldern nach Funktionen.

Damit können wir nun als ersten der klassischen Integralsätze den Satz von Green beweisen. Betrachte eine beschränkte offene Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^2$, deren Rand $\partial U = \bar{U} \setminus U$ eine glatte Teilmannigfaltigkeit, also eine regulär parametrisierbare geschlossene glatte Kurve c ist. Dann ist $M := \bar{U}$ eine kompakte Mannigfaltigkeit mit Rand $\partial M = c$. Für ein (lokal um M definiertes) Vektorfeld ξ auf $\mathbb{R}^2$ und eine reguläre glatte Parametrisierung $c : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ des Randes gilt dann $\int_a^b \langle c'(t), \xi(c(t))\rangle dt = \int_M \left(\frac{\partial \xi^2}{\partial x^1} - \frac{\partial \xi^1}{\partial x^2}\right) dx^1 dx^2$. Eine physikalische Interpretation dieses Satzes erhält man, indem man statt des Vektorfeldes $\xi = (\xi^1, \xi^2)$ das dazu orthogonale Feld $\tilde{\xi} = (\tilde{\xi}^1, \tilde{\xi}^2) = (\xi^2, -\xi^1)$ betrachtet. Stellen wir uns $\tilde{\xi}$ als Strömungsfeld vor, dann ist $\langle c'(t), \xi(c(t))\rangle$ gerade das innere Produkt von $\tilde{\xi}(c(t))$ mit dem Normalvektor $(-c_2'(t), c_1'(t))$ zu $c'(t)$, und das kann man als den infinitesimalen Fluß pro Zeiteinheit des Strömungsfeldes durch diesen Punkt betrachten. Andererseits ist $\frac{\partial \xi^2}{\partial x^1} - \frac{\partial \xi^1}{\partial x^2} = \frac{\partial \tilde{\xi}^1}{\partial x^1} + \frac{\partial \tilde{\xi}^2}{\partial x^2}$, also genau die Divergenz $\operatorname{div}(\tilde{\xi})$. Damit können wir den Satz von Green so interpretieren, dass man den Fluß eines Strömungsfeldes pro Zeiteinheit durch den Rand eines Gebietes als das Integral der Divergenz des Feldes über das Gebiet berechnen kann.

Betrachten wir insbesondere für eine (lokal um M definierte) glatte Funktion f das zugehörige Gradientenfeld $(\frac{\partial f}{\partial x^1}, \frac{\partial f}{\partial x^2})$. Die Divergenz dieses Feldes ist nach Definition $\frac{\partial^2 f}{\partial (x^1)^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial (x^2)^2} = \Delta(f)$, wobei Δ den *Laplace Operator* bezeichnet. Damit kann man den Fluss eines Gradientenfeldes $\operatorname{grad}(f)$ durch den Rand ∂M pro Zeiteinheit gerade als $\int_M \Delta(f) dx^1 dx^2$ berechnen.

Für den Satz von Gauß und den klassischen Satz von Stokes, die Teilmengen von $\mathbb{R}^3$ behandeln, benötigen wir noch eine zusätzliche Überlegung, die wiederum wesentlich allgemeiner Sinn macht. Sei (M, g) eine n–dimensionale Riemann Mannigfaltigkeit (oder noch allgemeiner eine Mannigfaltigkeit mit einer ausgezeichneten Volumsform, also einer n–Form ohne Nullstellen). Dann ist leicht einzusehen, dass es zu jeder $(n-1)$–Form $\omega \in \Omega^{n-1}(M)$ ein eindeutiges Vektorfeld $\xi \in \mathfrak{X}(M)$ gibt, sodass $\omega = i_\xi \operatorname{vol}(g)$ gilt. Einsetzen in die Volumsform definiert also eine Bijektion zwischen dem Raum $\mathfrak{X}(M)$ der Vektorfelder auf M und dem Raum $\Omega^{n-1}(M)$ der $(n-1)$–Formen.

Im Spezialfall einer offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^3$ entspricht dem Vektorfeld (ξ^1, ξ^2, ξ^3) genau die zwei–Form $\xi^3 dx^1 \wedge dx^2 - \xi^2 dx^1 \wedge dx^3 + \xi^1 dx^2 \wedge dx^3$. Das lässt sich auch schön geometrisch interpretieren. Sind $\eta, \zeta \in \mathfrak{X}(U)$ Vektorfelder mit Koordinatenfunktionen η^i und ζ^j, dann ist nach Definition $dx^i \wedge dx^j(\eta, \zeta) = \eta^i \zeta^j - \eta^j \zeta^i$. Damit sieht man aber aus der obigen Formel sofort, dass die 2–Form zu $\xi \in \mathfrak{X}(M)$ ausgewertet auf η und ζ gerade die Determinante der Matrix mit den Spalten ξ, η und ζ liefert. Diese Determinante ist das Volumen des von den drei Vektoren aufgespannten Parallelepipeds, also kann man sie als das Produkt der Fläche des von η und ζ aufgespannten Parallelogramms mit dem inneren Produkt von ξ mit einem Einheitsnormalvektor schreiben. Deshalb schreibt man diesen Ausdruck in der klassischen Analysis als $\langle \xi, \mathfrak{n}\rangle dO$, wobei dO das "Oberflächenelement" bezeichnet. Interpretiert man ξ als Strömungsfeld und η und ζ als lokale Basis für die Tangentialräume einer Fläche in $\mathbb{R}^3$, dann kann man das wieder als infinitesimalen Fluss durch die Fläche pro Zeiteinheit betrachten.

Weiters sehen wir, dass die äußere Ableitung $d : \Omega^2(U) \to \Omega^3(U)$ genau der Abbildung $\operatorname{div} : \mathfrak{X}(M) \to C^\infty(M, \mathbb{R})$ entspricht, die gegeben ist durch $(\xi^1, \xi^2, \xi^3) \mapsto \frac{\partial \xi^1}{\partial x^1} + \frac{\partial \xi^2}{\partial x^2} + \frac{\partial \xi^3}{\partial x^3}$, und das ist genau die klassische Divergenz.

Betrachten wir andererseits das Vektorfeld (ξ^1, ξ^2, ξ^3) als 1–Form, dann erhalten wir $\xi^1 dx^1 + \xi^2 dx^2 + \xi^3 dx^3$, und die äußere Ableitung davon ist

$$\left(\frac{\partial \xi^2}{\partial x^1} - \frac{\partial \xi^1}{\partial x^2}\right) dx^1 \wedge dx^2 + \left(\frac{\partial \xi^3}{\partial x^1} - \frac{\partial \xi^1}{\partial x^3}\right) dx^1 \wedge dx^3 + \left(\frac{\partial \xi^3}{\partial x^2} - \frac{\partial \xi^2}{\partial x^3}\right) dx^2 \wedge dx^3,$$

und von oben wissen wir, dass dies dem Vektorfeld $\left(\frac{\partial \xi^3}{\partial x^2} - \frac{\partial \xi^2}{\partial x^3}, \frac{\partial \xi^1}{\partial x^3} - \frac{\partial \xi^3}{\partial x^1}, \frac{\partial \xi^2}{\partial x^1} - \frac{\partial \xi^1}{\partial x^2}\right)$ entspricht. Damit entspricht die äußere Ableitung $d : \Omega^1(U) \to \Omega^2(U)$ genau der klassischen Rotation $\operatorname{rot} : \mathfrak{X}(U) \to \mathfrak{X}(U)$. Insbesondere sehen wir, dass die Operatoren Divergenz, Gradient und Rotation der klassischen Vektoranalysis nur Umformulierungen der äußeren Ableitung sind.

Damit können wir nun den klassischen Satz von Gauß formulieren. Sei $U \subset \mathbb{R}^3$ eine beschränkte offene Teilmenge, deren Rand eine glatte Fläche ist. Dann ist $M := \bar{U}$ eine Teilmannigfaltigkeit mit Rand $\partial M = \partial U$ von $\mathbb{R}^3$. Sei $\mathfrak{n}$ das nach außen weisende Einheitsnormalenfeld auf ∂M. Dann ist $\int_{\partial M} \langle \xi, \mathfrak{n}\rangle dO = \int_M \operatorname{div}(\xi) dx^1 dx^2 dx^3$. Die physikalische Interpretation ist wieder, dass man den Fluß eines Strömungsfeldes durch den Rand eines Gebietes als das Integral der Divergenz des Feldes über das Gebiet berechnen kann. Im Spezialfall eines Gradientenfeldes erhält man wie im zweidimensionalen Fall $\int_{\partial M} \langle \operatorname{grad}(f), \mathfrak{n}\rangle dO = \int_M \Delta(f) dx^1 dx^2 dx^3$.

Wegen dieses Satzes nennt man Vektorfelder ξ, die $\operatorname{div}(\xi) = 0$ erfüllen, *quellenfrei.* Für so ein Feld ist nämlich der Fluß durch Ränder immer Null, also kann sich im Inneren keine Quelle befinden. Natürlich haben Felder der Form $\operatorname{rot}(\eta)$ immer diese Eigenschaft, weil die Komposition $\operatorname{div} \circ \operatorname{rot}$ im Bild der Formen genau der Komposition $d \circ d = 0$ entspricht. Die (physikalisch ziemlich relevante) Frage, ob man jedes quellenfreie Feld ξ als $\xi = \operatorname{rot}(\eta)$ schreiben kann, entspricht dann genau der Frage, ob jede geschlossene 2–Form exakt ist, läuft also genau auf die Frage nach der zweiten de-Rham Kohomologie $H^2(M)$ hinaus.

Für den klassischen Satz von Stokes betrachtet man eine orientierte zweidimensionale Teilmannigfaltigkeit M mit Rand ∂M in $\mathbb{R}^3$ und ein (lokal um M definiertes) Vektorfeld ξ auf $\mathbb{R}^3$, das man als 1–Form auf M interpretiert. Der Rand von M ist eine regulär parametrisierbare geschlossene glatte Kurve und für eine Parametrisierung $c : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ dieser Kurve erhält man $\int_a^b \langle c'(t), \xi(c(t))\rangle dt = \int_M \langle \operatorname{rot}(\xi), \mathfrak{n}\rangle dO$.

Wegen dieses Satzes nennt man Vektorfelder ξ, die $\operatorname{rot}(\xi) = 0$ erfüllen, *wirbelfrei.* Betrachtet man nämlich ξ als Kraftfeld, dann kann man $\int_a^b \langle c'(t), \xi(c(t))\rangle dt$ gerade als die Arbeit interpretieren, die nötig ist, um einen Körper entlang der geschlossenen Kurve c zu bewegen. Ist $\operatorname{rot}(\xi) = 0$, dann ist dieses Integral immer trivial, also kann man durch Bewegung auf geschlossenen Bahnen keine Energie gewinnen oder verlieren. Insbesondere ist das natürlich für Gradientenfelder erfüllt, weil die Komposition $\operatorname{rot} \circ \operatorname{grad}$ wieder der Komposition $d \circ d = 0$ entspricht. Die Frage, ob ein wirbelfreies Feld ein

Gradientenfeld ist, was physikalisch bedeutet, dass das Feld durch ein *Potential* gegeben ist, ist dann wieder äquivalent zur Frage, ob jede geschlossene 1–Form exakt ist, und läuft damit auf die Bestimmung der ersten de-Rham Kohomologie $H^1(M)$ hinaus.

Index