

Differentialgeometrie

Inhaltsverzeichnis

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Kurven und Flächen im Euklidischen Raum | 1 |
| 1.1 | Kurven | 1 |
| 1.2 | Teilmannigfaltigkeiten — n -Flächen im \mathbb{R}^m | 5 |
| 1.3 | Der Tangentialvektorraum | 7 |
| 1.4 | Differenzierbare Abbildungen von Teilmannigfaltigkeiten | 8 |
| 1.5 | Die innere Metrik einer Teilmannigfaltigkeit | 11 |
| 2 | Elementare Krümmungstheorie der $(n-1)$-dim. Flächen im \mathbb{R}^n | 15 |
| 2.1 | Die Krümmungsform | 15 |
| 2.2 | Die Krümmungen von Kurven in Teilmannigfaltigkeiten | 16 |
| 2.3 | Die Verteilung der Normalkrümmungen | 17 |
| 2.4 | Parallelfächen und die abtragende Abbildung | 19 |
| 2.5 | Minimalflächen | 21 |
| 3 | Differenzierbare Mannigfaltigkeiten | 25 |
| 3.1 | Differenzierbare Mannigfaltigkeiten | 25 |
| 3.2 | Tangentialvektoren und Abbildungen | 26 |
| 3.3 | Vektorfelder und Integralkurven | 28 |
| 3.4 | Tensorfelder | 31 |
| 4 | Riemannsche Geometrie | 33 |
| 4.1 | Mannigfaltigkeiten mit Riemannscher Metrik | 33 |
| 4.2 | Zusammenhänge und die kovariante Ableitung | 34 |
| 4.3 | Geodätische Parallelverschiebung | 36 |
| 4.4 | Riemannsche Zusammenhänge | 38 |
| 4.5 | Geodätische Linien | 40 |
| 4.6 | Die erste Variation der Energie $E_0^l(c)$ einer Kurve | 43 |
| 4.7 | Vollständigkeit | 45 |
| 4.8 | Zerlegung der Eins und Integration | 47 |
| 5 | Krümmung in Riemannschen Räumen | 49 |
| 5.1 | Der Riemannsche Krümmungstensor | 49 |
| 5.2 | Wegabhängigkeit der Parallelverschiebung | 50 |
| 5.3 | Jacobi-Felder | 53 |
| 5.4 | Konjugierte Punkte und minimale geodätische Linien | 55 |
| 5.5 | Riemannsche Teilmannigfaltigkeiten | 57 |
| 5.6 | Der Integralsatz von Gauß-Bonnet | 60 |
| 6 | Beispiele für Anwendungen der Differentialgeometrie in der Physik | 67 |
| 6.1 | Mechanik | 67 |
| 6.2 | Relativitätstheorie | 68 |

| | |
|--|-----------|
| Anhang | 73 |
| A.1 Geometrie | 73 |
| A.2 Analysis | 73 |
| A.3 Topologie | 75 |
| A.4 Algebra | 78 |
| Übungsbeispiele | 79 |
| B.1 Kurventheorie | 79 |
| B.2 Teilmannigfaltigkeiten | 80 |
| B.3 Flächen im euklidischen \mathbb{R}^3 | 80 |
| B.4 Differenzierbare Mannigfaltigkeiten | 82 |
| B.5 Riemannsche Räume | 83 |
| B.6 Riemannschen Räume — Krümmung | 84 |
| B.7 Anwendungen in der Physik | 85 |
| Literatur | 87 |

Bemerkung: Die Lehrveranstaltung 111.058 (Differentialgeometrie f. TM) im Wintersemester 2003/04 umfaßt die Kapitel 1-5; 111.066 (Differentialgeometrie 1 f. LA) Kap. 1-4.4, und 111.068 (Differentialgeometrie 2 f. LA) Kap. 4.5-5.6; jeweils die nicht kleingedruckten Teile.

1. Kapitel

Kurven und Flächen im Euklidischen Raum

1.1 Kurven

Definition 1.01 (*Kurve, Schmiegraum, Tangente*) Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall. Eine Abbildung $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt C^r -Kurve, wenn $c \in C^r$ ist. Der affine Unterraum $c(t) + [\dot{c}(t), \ddot{c}(t), \dots, c^{(k)}(t)]$ ist der k -Schmiegraum der Kurve c an der Stelle t . Der 1-Schmiegraum heißt Tangente. \triangleright

Bemerkung: Der k -Schmiegraum ist nur dann definiert, wenn die ersten k Ableitungen existieren. Wir werden später noch oft Begriffe definieren, eine gewisse offensichtliche Differenzierbarkeit voraussetzen und dies nicht explizit erwähnen. \diamond

Definition 1.02 (*Parameterwechsel*) Ist $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Kurve und $\gamma : I' \rightarrow I$ ein Diffeomorphismus, dann sagt man, daß $c' = c \circ \gamma$ aus c durch Parameterwechsel entsteht. \triangleright

Definition 1.03 (*Transformationsgruppe*) Eine Gruppe G wirkt auf einer Menge M als Transformationsgruppe, wenn es einen Homomorphismus \sim von G in die Gruppe der Bijektionen von M gibt. \triangleright

Wir verwenden die folgende Schreibweise: für $g \in G, x \in M$ ist $\tilde{g} : M \rightarrow M$ und $\tilde{g}(x) \in M$. Für $g_1, g_2 \in G$ muß $\tilde{g_1 g_2} = \tilde{g_1} \circ \tilde{g_2}$ gelten.

Beispiel: Die Gruppe G der euklidischen Kongruenztransformationen der Form $x \mapsto A \cdot x + b$ mit $b \in \mathbb{R}^n$ und $A \in O_n$ wirkt auf dem affinen Raum \mathbb{R}^n bzw. auf dem linearen Raum \mathbb{R}^n bzw. auf der reellen Zahlengeraden \mathbb{R} in der Form

$$\tilde{g}(x) = A \cdot x + b, \quad \text{bzw.} \quad \tilde{\tilde{g}}(x) = A \cdot x, \quad \text{bzw.} \quad \tilde{\tilde{\tilde{g}}}(x) = \det(A) \cdot x.$$

G wirkt auf jeder Menge in trivialer Weise durch $\tilde{g}(x) = x$. \diamond

Definition 1.04 (*geometrische Eigenschaft, Invariante*) Wir nehmen an, daß ein Objekt $\mathfrak{B}(c, t) \in M$ einer Kurve $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ und einem Wert $t \in I$ zugeordnet wird. Die Gruppe G der euklidischen Kongruenztransformationen operiere auf M als Transformationsgruppe. \mathfrak{B} ist eine geometrische Eigenschaft bzw. Invariante der Kurve, wenn folgendes gilt:

1. Ist $c' = c \circ \gamma$ ein Parameterwechsel, sodaß $\mathfrak{B}(c', u)$ definiert ist, so ist $\mathfrak{B}(c, \gamma(u)) = \mathfrak{B}(c', u)$, d.h. \mathfrak{B} ist invariant gegenüber einem Parameterwechsel.
2. Ist $g \in G$, so ist $\mathfrak{B}(g \circ c, t) = \tilde{g}(\mathfrak{B}(c, t))$. \triangleright

Bemerkung: Der Nebensatz “sodaß $\mathfrak{B}(c', u)$ definiert ist” bezieht sich z.B. auf die genügend hohe Differenzierbarkeit von γ . Für andere Transformationsgruppen oder für mehrere Parameterwerte ist der Begriff der ‘geometrischen Eigenschaft’ entsprechend zu modifizieren. \diamond

Beispiel: Wir betrachten die euklidische Kongruenztransformation $g : x \mapsto A \cdot x + b$. Sei \mathfrak{B} eine einer Kurve c zugeordnete geometrische Eigenschaft. Für bestimmte Typen von \mathfrak{B} versteht sich die Wirkung von G von selbst:

Ist \mathfrak{B} ein Punkt p des euklidischen Raumes, so ist $\mathfrak{B}(g \circ c) = A \cdot p + b$. Ist \mathfrak{B} ein Vektor v des linearen Raumes \mathbb{R}^n , so ist $\mathfrak{B}(g \circ c) = A \cdot v$. Ist \mathfrak{B} ein Skalar $\lambda \in \mathbb{R}$, so ist $\mathfrak{B}(g \circ c) = \det(A) \cdot \lambda$, oder $\mathfrak{B}(g \circ c) = \lambda$. \diamond

Satz 1.05 *Der Schmiegraum einer Kurve zu einem Parameterwert t ist eine geometrische Eigenschaft.*

Beweis: Sei $c' = c \circ \gamma$. Aus der Kettenregel $\dot{c}' = \dot{c} \circ \gamma \cdot \dot{\gamma}$, $\ddot{c}' = \dots$ folgt, daß jeder der Vektoren $\dot{c}'(t), \ddot{c}'(t), \dots, c'^{(k)}(t)$, eine Linearkombination von $\dot{c}(\gamma(t)), \ddot{c}(\gamma(t)), \dots, c^{(k)}(\gamma(t))$ ist. Bezeichnen wir den Schmiegraum von c an der Stelle t mit $S(c, t)$, so folgt daraus $S(c', t) \subseteq S(c, \gamma(t))$. Wegen $c = c' \circ \gamma^{-1}$ gilt auch die umgekehrte Inklusion. Damit ist $S(c, t)$ invariant gegenüber Parametertransformationen.

Die Invarianz gegenüber Kongruenzabbildungen folgt aus der Vertauschbarkeit von linearen Abbildungen und Differentiation. \square

Definition 1.06 (*Bogenlänge, Bogenlängenparameter*) Die *Bogenlänge* der Kurve $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ im Intervall $[a, b]$ ist definiert durch

$$L_a^b(c) = \left| \int_a^b \|\dot{c}(t)\| dt \right|.$$

Die Kurve c ist nach der Bogenlänge bzw. proportional zur Bogenlänge parametrisiert, wenn $\|\dot{c}\| = 1$ bzw. $\|\dot{c}\| = \text{const.}$ in I ist. \triangleright

Eine Kurve, die proportional zur Bogenlänge parametrisiert ist, kann man sich als mit konstanter Geschwindigkeit durchlaufen vorstellen.

Satz 1.07 *Die Bogenlänge $L_a^b(c)$ einer Kurve c ist eine geometrische Eigenschaft.*

Beweis: Sei $c' = c \circ \gamma$. Wir benützen $\text{sgn}(\dot{\gamma}) = \text{const.}$

$$\begin{aligned} L_a^b(c') &= \left| \int_a^b \|\dot{c}'\| dt \right| = \left| \int_a^b \|\dot{\gamma}(t) \dot{c}(\gamma(t))\| dt \right| = \left| \int_a^b \|\dot{c}(\gamma(t))\| \dot{\gamma}(t) dt \right| \\ &= \left| \int_{\gamma(a)}^{\gamma(b)} \|\dot{c}\| dt \right| = L_{\gamma(a)}^{\gamma(b)}(c). \end{aligned}$$

Um für $g(x) = A \cdot x + b$ die Gleichheit $L(g \circ c) = L(c)$ zu zeigen, verwenden wir $\|(g \circ c)\| = \|A \cdot \dot{c}\| = \|\dot{c}\|$. \square

Satz 1.08 *Für alle Kurven gibt es eine Parametertransformation γ , sodaß $c \circ \gamma$ nach der Bogenlänge parametrisiert ist.*

Beweis: Wir verwenden als Parametertransformation γ mit $\gamma^{-1}(t) = \tilde{\gamma}(t) = \int_{\tau=t_0}^t \|\dot{c}(\tau)\| d\tau$. Dann ist $\tilde{\gamma}(t) = \|\dot{c}(t)\|$, d.h. $\tilde{\gamma}$ ist Diffeomorphismus und $\dot{\gamma} = \frac{d}{dt} \tilde{\gamma}^{-1} = (\dot{\tilde{\gamma}} \circ \gamma)^{-1} = \|\dot{c} \circ \gamma\|^{-1}$. Zu zeigen ist nun $\left\| \frac{d}{dt} (c \circ \gamma) \right\| = \|(\dot{c} \circ \gamma) \cdot \dot{\gamma}\| = 1$. \square

Satz 1.09 *Unter allen stückweise differenzierbaren Kurven, die zwei Punkte $p, q \in \mathbb{R}^n$ verbinden, sind genau die monoton parametrisierten Geraden die kürzesten.*

Beweis: Die Bogenlänge ist eine geometrische Eigenschaft, d.h. o.b.d.A. ist $p = 0$ und $q = (d, 0, \dots, 0)$. Sei $c(0) = p$, $c(1) = q$. Dann ist $L_0^1(c) = \int_0^1 ((\dot{c}^1)^2 + \dots + (\dot{c}^n)^2)^{1/2} dt \geq \int_0^1 |\dot{c}^1| dt \geq |\int_0^1 \dot{c}^1| = |c^1(1) - c^1(0)| = d$ mit Gleichheit genau für $\dot{c}^1 \geq 0$ und $\dot{c}^2 = \dots = \dot{c}^n = 0$, d.h. c^1 monoton, und $c^2 = \dots = c^n = \text{const} = 0$. \square

Satz 1.10 Die Bogenlänge einer Kurve ist gleich dem Supremum der Längen der eingeschriebenen Streckenzüge $L_a^b(c) = \sup \sum \|c(t_{i+1}) - c(t_i)\|$, wobei das Supremum über alle Unterteilungen $a = t_0 < t_1 < \dots < t_r = b$ genommen wird (d.h. $L_a^b(c)$ ist die totale Variation von c im Intervall $[a, b]$, vgl. Def. A.23).

Beweis: Wir bezeichnen die rechte Seite der Gleichung mit $\tilde{L}_a^b(c)$. Wegen Satz 1.09 ist $L_a^b \geq \tilde{L}_a^b$. Um sogar '=' zu zeigen, beachten wir $\tilde{L}_a^t + \tilde{L}_t^b = \tilde{L}_a^b$ für $a \leq t \leq b$:

$$\begin{aligned} \|c(t+h) - c(t)\| &\leq \tilde{L}_t^{t+h} \leq L_t^{t+h} \\ \Rightarrow \left\| \frac{c(t+h) - c(t)}{h} \right\| &\leq \frac{\tilde{L}_a^{t+h} - \tilde{L}_a^t}{h} \leq \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \|\dot{c}(t)\| dt \end{aligned}$$

Der Grenzübergang $\lim_{h \rightarrow 0}$ zeigt $\|\dot{c}(t)\| \leq \frac{d}{dt} \tilde{L}_a^t \leq \|\dot{c}(t)\|$, d.h. \tilde{L}_a^t ist differenzierbar und seine Ableitung stimmt überein mit der von L_a^t . \square

Definition 1.11 (Regularität, Haupttypkurve, Wendepunkt) Eine Kurve c ist regulär, wenn $\dot{c} \neq 0$ und eine Haupttypkurve, wenn $\dot{c}, \ddot{c}, \dots, c^{(n-1)}$ linear unabhängig sind. c hat einen Wendepunkt bei $t = t_0$, wenn $\dot{c}(t_0), \ddot{c}(t_0)$ linear abhängig sind, und $\dot{c}(t_0) \neq 0$ ist. \triangleright

Definition 1.12 (Begleitbasis) Ist c eine Haupttypkurve, so entsteht durch das Gram-Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren aus den Vektoren $\dot{c}, \dots, c^{(n-1)}$ eine Orthonormalbasis (c_1, \dots, c_{n-1}) des $(n-1)$ -Schmiegraums. Dann ist der Vektor c_n eindeutig bestimmt durch $\langle c_i, c_n \rangle = 0$ für $1 \leq i \leq n-1$ und $\det(c_1 \dots c_n) = 1$. Die Vektoren $c_1(t), \dots, c_n(t)$ heißen dann die Begleitbasis der Kurve c zum Parameterwert t . \triangleright

Unser Ziel ist es, aus den Ableitungen der Vektoren der Begleitbasis geometrische Größen, die die Kurve bestimmen, herzuleiten. Zuerst sehen wir, daß

$$\begin{aligned} c_j \in [\dot{c}, \dots, c^{(j)}] &\implies \dot{c}_j \in [\dot{c}, \dots, c^{(j+1)}] \subseteq [c_1, \dots, c_{j+1}], \text{ d.h.} \\ \dot{c}_j &= \sum_{i=1}^n \omega_{ij} c_i \quad \text{mit } \omega_{ij} = 0 \text{ für } i > j+1. \end{aligned}$$

Lemma 1.13 Die Matrix (ω_{jk}) ist schiefsymmetrisch und besitzt nur Nebendiagonaleinträge. Es ist $\omega_{j+1,j} > 0$ für $j \leq n-2$.

$$(\omega_{jk}) = \begin{bmatrix} 0 & \omega_{12} & 0 & \dots & 0 \\ -\omega_{12} & 0 & \omega_{23} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & -\omega_{n-1,n} & 0 \end{bmatrix}$$

Beweis: Die Begleitbasis ist eine ONB, also ist $\langle \dot{c}_j, c_k \rangle = \langle \sum \omega_{ij} c_i, c_k \rangle = \omega_{kj}$. Durch Ableiten von $\langle c_k, c_j \rangle = \text{const.}$ folgt $\langle \dot{c}_k, c_j \rangle + \langle c_k, \dot{c}_j \rangle = 0$, d.h. die schiefe Symmetrie der Matrix (ω_{ij}) . Wegen $\omega_{i,j} = 0$ bei $j > i+1$ folgt nun die Gestalt der Matrix. Wir zeigen $\omega_{j,j+1} > 0$ für $j < n-1$:

Die Matrix der Koordinatentransformation zwischen den Basen $(\dot{c}, \dots, c^{(j)})$ und (c_1, \dots, c_j) ($j < n$) ist eine obere Dreiecksmatrix mit positiven Einträgen in der Hauptdiagonale (nach Gram-Schmidt), ihre Inverse daher ebenfalls.

Es folgt $c_j = \mu_j c^{(j)} + \dots + \mu_1 \dot{c}$ mit $\mu_j > 0$. Durch Differenzieren erhält man $\dot{c}_j = \mu_j c^{(j+1)} + r$ mit $r \in [\dot{c}, \dots, c^{(j)}]$. Wegen der Gestalt der Trafo-Matrix ist nun $\dot{c}_j = \omega_{j+1,j} c_{j+1} + \dots + \omega_{1,j} c_1$ mit $\omega_{j+1,j} > 0$. \square

Definition 1.14 (*Krümmung, Ableitungsgleichungen*) Die Größen $\kappa_i = \omega_{i+1,i} \cdot \|\dot{c}\|^{-1}$ heißen die *Krümmungen* der Kurve c . Die Form

$$\begin{aligned} \|\dot{c}\|^{-1} \cdot \dot{c}_1 &= \kappa_1 c_2 \\ \|\dot{c}\|^{-1} \cdot \dot{c}_2 &= -\kappa_1 c_1 + \kappa_2 c_3 \\ &\vdots \\ \|\dot{c}\|^{-1} \cdot \dot{c}_{n-1} &= -\kappa_{n-2} c_{n-2} + \kappa_{n-1} c_n \\ \|\dot{c}\|^{-1} \cdot \dot{c}_n &= -\kappa_{n-1} c_{n-1} \end{aligned}$$

der Ableitungsgleichungen ist benannt nach J. F. Frenet und J. A. Serret. \triangleright

Lemma 1.15 $\kappa_1, \dots, \kappa_{n-2}, |\kappa_{n-1}|$ sind geometrische Eigenschaften. Das Vorzeichen von κ_{n-1} ändert sich bei orientierungsumkehrenden euklidischen Kongruenztransformationen, und bei $n \equiv 1, 2 \pmod{4}$ auch bei Parametertransformation, bei denen die Durchlauf-richtung geändert wird.

Beweis: Sei $\bar{c}(t) = A \cdot c(t) + a$ mit $A \in O_n$. Gram-Schmidt ist euklidisch invariant, also ist $\bar{c}_i = A c_i$ für $i = 1, \dots, n-1$. Wegen $\det(c_1, \dots, c_n) > 0$ ist $\bar{c}_n = \det(A) A c_n$. Es folgt, daß $\bar{\kappa}_i = \kappa_i$ für $i = 1, \dots, n-2$, $\kappa_n = \det A \cdot \kappa_n$.

Nun sei $\bar{c}(t) = c(\gamma(t))$. Die Schmieggräume $S_i(t)$ sind invariant bei Parametertransformationen und bestimmen wegen $S_i = [c_1, \dots, c_i]$ die Vektoren c_i bis auf ihr Vorzeichen eindeutig. Daraus folgt $\bar{c}_i(t) = \pm c_i(\gamma(t))$ und durch Koeffizientenvergleich in den Frenetschen Ableitungsgleichungen für c an der Stelle $\gamma(t)$ und für \bar{c} an der Stelle c dann $\bar{\kappa}_i = \pm \kappa_i \circ \gamma$. Der Beweis der genaueren, letzten, Aussage wird hier übergangen. \square

Satz 1.16 (*Hauptsatz der lokalen Kurventheorie*) Sind $\kappa_1, \dots, \kappa_{n-1} : I \rightarrow \mathbb{R}$ reelle Funktionen mit $\kappa_1, \dots, \kappa_{n-2} > 0$, $\kappa_j \in C^{n-1-j}$, $p \in \mathbb{R}^n$, $t_0 \in I$ und $c_{1,0}, \dots, c_{n,0}$ eine ONB des \mathbb{R}^n mit $\det(c_{1,0}, \dots, c_{n,0}) = 1$, dann existiert genau eine Kurve $c : \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit:

- c ist nach der Bogenlänge parametrisiert.
- $c(t_0) = p$, und die Begleitbasis von c bei $t = t_0$ stimmt mit der gegebenen Basis überein.
- $\kappa_1, \dots, \kappa_{n-1}$ sind die Krümmungen von c .

Ändert man die Angabe so, daß die κ_i unverändert bleiben, erhält man eine euklidisch kongruente Kurve.

Beweis: Setzen wir in den Frenetschen Ableitungsgleichungen $\|\dot{c}\| = 1$, so ergibt dies das lineare Differentialgleichungssystem $\dot{c}_j = \sum \omega_{ij} c_i \implies \exists^1$ Lösung $c_1(t), \dots, c_n(t)$ mit $c_i(t_0) = c_{i,0}$. Wir wollen zeigen, daß diese Lösung die Begleitbasis der gesuchte Kurve c ist.

– $\forall t \langle c_j, c_k \rangle = \delta_{jk}$: Dies gilt bei $t = t_0$, und sowohl die konstanten Funktionen δ_{jk} als auch die Funktionen $\langle c_j, c_k \rangle$ erfüllen die Differentialgleichung $f'_{jk} = \sum_i (\omega_{ij} f_{ik} + \omega_{ik} f_{ij})$ (das sieht man durch Einsetzen in die Frenet-Gleichungen bzw. aus der schiefen Symmetrie der Matrix (ω_{ij})). Deshalb gilt dies für alle t .

– Sei $c(t) = c_0 + \int_{t_0}^t c_1(\tau) d\tau$. Dann ist c normiert (wegen $\langle \dot{c}, \dot{c} \rangle = \langle c_1, c_1 \rangle = \delta_{11} = 1$).

– Die Frenetschen Ableitungsgleichungen von c sind das gegebene Differentialgleichungssystem: Das ist klar nach Konstruktion.

– Die so beschriebene Lösung ist eindeutig, weil die Konstruktion zwangsläufig ist und wegen des Eindeutigkeitssatzes für Lösungen von Differentialgleichungen.

– Für je zwei Angaben gibt es eine euklidische Kongruenztransformation β , die die eine in die andere überführt. Sind c, \bar{c} die Lösungen zu den zwei Angaben, so sind sowohl $\beta(c(t))$ als auch $\bar{c}(t)$ Lösungen für die 2. Angabe. Daher ist $\bar{c}(t) = \beta(c(t))$. \square

Bemerkung: Die Krümmungen einer Kurve (als Funktionen der Bogenlänge) bilden ein *vollständiges Invariantensystem* für Kurven im Euklidischen Raum. \diamond

Beispiel: (Formeln für Krümmungen) Ist $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Kurve, so ist

$$\begin{aligned} \dot{c} &= \|\dot{c}\|c_1, \quad \ddot{c} = \|\dot{c}\|\dot{c}_1 + \|\dot{c}\|^2\kappa_1c_2 \\ \implies \text{Area}(\dot{c}, \ddot{c}) &= \text{Area}(\|\dot{c}\|c_1, \|\dot{c}\|\dot{c}_1 + \|\dot{c}\|^2\kappa_1c_2) = \|\dot{c}\|^3\kappa_1. \end{aligned}$$

Dabei bedeutet ‘Area(v, w)’ die Fläche des Parallelogramms, das von v und w aufgespannt wird, und bei $n = 2$ sogar genauer die Determinante $\det(v, w)$. Wir haben die Beziehung $\text{Area}(v, w + \lambda v) = \text{Area}(v, w)$ verwendet. Explizite Formeln für κ_1 sind daher:

$$\mathbb{R}^2 : \kappa_1 = \frac{\det(\dot{c}, \ddot{c})}{\|\dot{c}\|^3}, \quad \mathbb{R}^3 : \kappa_1 = \frac{\|\dot{c} \times \ddot{c}\|}{\|\dot{c}\|^3}, \quad \mathbb{R}^n : \kappa_1 = \frac{\text{Area}(\dot{c}, \ddot{c})}{\|\dot{c}\|^3} \quad (n > 1).$$

Für $n > 2$ liefern die Frenetschen Ableitungsgleichungen weiter

$$\ddot{c} = (\star)c_1 + (\star)c_2 + \|\dot{c}\|^3\kappa_1(-\kappa_1c_1 + \kappa_2c_3).$$

Wir verwenden die Bezeichnung ‘Vol(u, v, w)’ für das (orientierte) Volumen des von den drei Vektoren u, v, w aufgespannten Parallelepipeds. Dann ist

$$\begin{aligned} \text{Vol}(\dot{c}, \ddot{c}, \ddot{\ddot{c}}) &= \text{Vol}(\|\dot{c}\|c_1, \|\dot{c}\|^2\kappa_1c_2, \|\dot{c}\|^3\kappa_1\kappa_2c_3) = \|\dot{c}\|^6 \left(\frac{\text{Area}(\dot{c}, \ddot{c})}{\|\dot{c}\|^3} \right)^2 \kappa_2, \\ \implies \kappa_2 &= \frac{\text{Vol}(\dot{c}, \ddot{c}, \ddot{\ddot{c}})}{\text{Area}(\dot{c}, \ddot{c})^2}; \quad \text{im } \mathbb{R}^3 : \kappa_2 = \frac{\det(\dot{c}, \ddot{c}, \ddot{\ddot{c}})}{\|\dot{c} \times \ddot{c}\|^2}. \end{aligned}$$

Mit der Bezeichnung G_r für das (orientierte) Volumen des von den Vektoren $\dot{c}, \dots, c^{(r)}$ aufgespannten Parallelepipeds ist $\|\dot{c}\|\kappa_j = G_{j-1}G_{j+1}/G_j^2$ für $2 < j < n$ (Beweis durch Induktion). \diamond

1.2 Teilmannigfaltigkeiten — n -Flächen im \mathbb{R}^m

Für eine C^r -Abbildung $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ verwenden wir die Bezeichnungen

$$\frac{\partial^k f^j(u^1, \dots, u^m)}{\partial u^{r_1} \dots \partial u^{r_k}} = f_{,u^{r_1} \dots u^{r_k}} = f_{,r_1 \dots r_k}.$$

Ist $c : I \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine Kurve mit $c(0) = p$ und $\dot{c} = v = (\dot{c}^1, \dots, \dot{c}^m)$, dann gilt

$$\begin{aligned} &\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(c^1(t), \dots, c^m(t)) \\ &= \frac{\partial f}{\partial u^1}(p) \dot{c}^1(0) + \dots + \frac{\partial f}{\partial u^m}(p) \dot{c}^m(0) = \frac{\partial f}{\partial u^1}(p) v^1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial u^m}(p) v^m = df_p(v) \end{aligned}$$

Es hängt also der Ableitungsvektor von $f \circ c$ nur vom Ableitungsvektor von c ab. Daraus folgt direkt

Satz 1.17 (Kettenregel) $d(f \circ g) = df \circ dg$, genauer: $d(f \circ g)_p(v) = df_{g(p)}(dg_p(v))$.

Beweis: Sei c eine Kurve mit $c(0) = p$ und $\dot{c}(0) = v$. Dann ist $d(f \circ g)_p(v) = \frac{d}{dt}(f \circ g) \circ c(0) = \frac{d}{dt} f \circ (g \circ c)(0) = df_{g(p)}\left(\frac{d}{dt}(g \circ c)(0)\right) = df_{g(p)}(dg_p(v))$. \square

Definition 1.18 (Rang) Der Rang von f bei p ist definiert als der Rang von df bei p : $\text{rg}(df_p) = \dim(df_p(\mathbb{R}^n))$. \triangleright

Definition 1.19 (Teilmannigfaltigkeit) $M \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt Teilmannigfaltigkeit (kurz TMF, synonym: Fläche) der Dimension $m \leq n$, wenn sie sich in einer Umgebung jedes ihrer Punkte in einen m -dimensionalen Unterraum diffeomorph verformen lässt. \triangleright

Bemerkung: Als diesen Unterraum können wir o.B.d.A. den von den ersten m Koordinatenachsen aufgespannten wählen. Das heißt: Für jedes $p \in M$ gibt es eine offene Umgebung $U_p \subseteq \mathbb{R}^n$ und ein Diffeomorphismus $\varphi_p : U_p \rightarrow \mathbb{R}^n$, sodaß $\varphi_p(M \cap U_p) = (\mathbb{R}^m \times 0) \cap \varphi_p(U_p)$. Die φ_p heißen Teilmannigfaltigkeits-Karten von M . \diamond

Beispiel:

- Der \mathbb{R}^n ist eine n -dimensionale Teilmannigfaltigkeit des \mathbb{R}^n , weil wir die identische Funktion als Karte verwenden können.
- Jede offene Teilmenge U einer n -dim. TMF ist wieder eine n -dim. TMF — wir müssen nur die Kartenabbildungen auf U einschränken.
- Ein m -dimensionaler affiner Unterraum M des \mathbb{R}^n ist eine m -dim. TMF — wir können euklidische Kongruenztransformationen als Kartenabbildungen verwenden. \diamond

Lemma 1.20 Die Eigenschaft, eine Teilmannigfaltigkeit zu sein, bleibt bei Diffeomorphismen erhalten.

Beweis: Die Definition ist diffeomorph invariant formuliert. \square

Als sehr nützliches Werkzeug zum Arbeiten mit TMF stellt sich der folgende *Rang-satz* heraus:

Satz 1.21 (Rangsatz) Hat eine Abbildung lokal konstanten Rang, so läßt sie sich lokal diffeomorph in eine Projektion deformieren.

Genauer: Ist $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \in C^s$ und hat f in einer Umgebung von $p \in \mathbb{R}^n$ konstanten Rang r , so gibt es Umgebungen V von p und W von $f(p)$, sowie Diffeomorphismen $\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ und $\psi : W \rightarrow \mathbb{R}^m$, sodaß $\tilde{f} = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ die folgende Gestalt besitzt:

$$\begin{array}{ccc} y \in U & \xrightarrow{f} & f(y) \in V \\ \downarrow \varphi & & \downarrow \psi \\ (x^1, \dots, x^n) \in \varphi(U) & \xrightarrow{\tilde{f}} & (x^1, \dots, x^r, 0, \dots, 0) \in \psi(V) \end{array}$$

Beweis: O.B.d.A. sei $p = 0$, $f(p) =$ bei 0 hat die Form

0. Wegen $\text{rg}(df) = r$ hat eine $r \times r$ -Teilmatrix der Matrix $(f_{,k}^j)$ den Rang r . O.B.d.A. sei dies die Teilmatrix $A := (f_{,k}^j)_{j,k=1}^r$. Wir definieren $h(x^1, \dots, x^n) := (f^1(x), \dots, f^r(x), x^{r+1}, \dots, x^n)$. Die Matrix von dh bei 0 ist gegeben durch

$$dh_0 = \begin{bmatrix} A & \star \\ 0 & E \end{bmatrix}.$$

Wir sehen, daß $\text{rg}(dh_0) = n$. Also ist h lokal diffeomorph. Die lokal definierte Abbildung $k = f \circ h^{-1}$ hat die Gestalt

$$\begin{array}{ccc} (f^1(x), \dots, f^r(x), x^{r+1}, \dots) & \xleftarrow{h} & (x^1, \dots) \\ \downarrow k & \swarrow f & \\ (f^1(x), \dots, f^m(x)) & & \end{array}$$

D.h. es ist $k(x^1, \dots, x^n) = (x^1, \dots, x^r, k^{r+1}(x), \dots, k^m(x))$. Die Matrix von dk

$$dk_0 = \begin{bmatrix} E_r & B \\ 0 & C \end{bmatrix}.$$

Wegen $\text{rg}(dk) = \text{rg}(df \circ dh^{-1}) = r$ folgt $\text{rg}(C) = 0$, also $C = 0$. Das heißt $\partial k^j / \partial x^i = 0$, also $k^j(x^1, \dots, x^n) = k^j(x^1, \dots, x^r, 0, \dots, 0)$ für $i > r$.

Sei $\psi(y^1, \dots, y^m) := (y^1, \dots, y^r, y^{r+1} - k^{r+1}(y^1, \dots, y^r, 0, \dots, 0), \dots, y^m - k^m(y^1, \dots, y^r, 0, \dots, 0))$. Nach Konstruktion ist $d\psi_0 =$

$$\begin{bmatrix} E_r & \star \\ 0 & E - 0 \end{bmatrix} \implies \psi \text{ ist lokal diffeomorph.}$$

Schließlich setzen wir $\varphi = h$ und berechnen $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(x) = \psi \circ k(x) = \psi(k^1(x), \dots, k^m(x)) = (x^1, \dots, x^r, k^{r+1}(x), \dots, k^m(x)) = (x^1, \dots, x^r, k^{r+1}(x) - k^{r+1}(x^1, \dots, x^r, 0, \dots, 0), \dots, k^m(x) - k^m(x^1, \dots, x^r, 0, \dots, 0)) = (x^1, \dots, x^r, 0, \dots, 0)$. \square

Bemerkung: Wir können durch Verkleinern von V und W stets erreichen, daß φ und ψ surjektiv sind (z.B. dadurch, daß wir eine kleinere Umgebung von p wählen, die diffeomorph zum \mathbb{R}^n sind, wie etwa offene Vollkugeln). \diamond

Satz 1.22 *Hat $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ konstanten Rang r , dann ist $f(U)$ lokal eine r -dimensionale Teilmannigfaltigkeit des \mathbb{R}^n , d.h. für alle $p \in U$ existiert eine Umgebung $V_p \subseteq U_p$, sodaß $f(V_p)$ eine Teilmannigfaltigkeit ist.*

Beweis: Nach dem Rangsatz läßt sich f in eine Projektion deformieren, dabei wird $f(V)$ zu einem Unterraum. \square

Damit ist insbesondere eine reguläre Kurve lokal eine Teilmannigfaltigkeit. Die Urbilder von Punkten unter differenzierbaren Abbildungen können Teilmannigfaltigkeiten sein:

Satz 1.23 *Ist $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ von konstantem Rang r , so ist $f^{-1}(a)$ eine $(n-r)$ -dim. Teilmannigfaltigkeit des \mathbb{R}^n für alle $a \in \mathbb{R}^m$.*

Beweis: In jedem Punkt von $f^{-1}(a)$ läßt sich f nach dem Rangsatz lokal in eine Projektion deformieren, dabei geht $f^{-1}(a)$ in einen $(n-r)$ -dimensionalen Unterraum über. \square

Beispiel: (Sphäre) Die 2-Sphäre hat die Form $S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| = 1\}$. Die Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \setminus 0 \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \|x\|$ ist vom Rang 1. Damit ist $S^2 = f^{-1}(1)$ eine 2-dim. TMF des \mathbb{R}^3 . Analog ist $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$ eine $(n-1)$ -dim. TMF des \mathbb{R}^n . \diamond

Satz 1.24 *Ist $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, und $a \in \mathbb{R}^m$, df_x surjektiv für alle $x \in f^{-1}(a)$, dann ist $f^{-1}(a)$ eine $(n-m)$ -dim. TMF.*

Beweis: Die Menge U' der x mit $\text{rg}(df_x) = m$ ist offen, weil $\text{rg}(df_x) = m$ durch das Nichtverschwinden einer $m \times m$ -Unterdeterminante von df_x charakterisiert ist. Nun können wir $f|_{U'}$ anstelle von f betrachten und Satz 1.23 anwenden. \square

1.3 Der Tangentialvektorraum

Um auf Teilmannigfaltigkeiten über Ableitungen sprechen zu können, benötigt man den Begriff des Tangentialvektors an eine TMF, der differenzierbaren Abbildung, und des Differentials. Wir definieren Tangentialvektoren an TMF als Ableitungsvektoren von Kurven in der TMF:

Definition 1.25 (Tangentialvektor, Tangentialvektorraum) Ein Tangentialvektor an eine Teilmannigfaltigkeit M ist ein Ableitungsvektor (im \mathbb{R}^m) einer Kurve $c : I \rightarrow M$. Ist $c(t_0) = p$ und $\dot{c}(t_0) = v$, dann ist (p, v) ein Tangentialvektor an M im Punkt p .

Die Menge der Tangentialvektoren im Punkt p heißt Tangentialvektorraum $T_p M$ in p . Die Vereinigung aller $T_p M$ heißt das Tangentialbündel TM von M . Sind durch φ lokale Koordinaten in M festgelegt, so auch durch $d\varphi$ in TM . \triangleright

Lemma 1.26 *Ist φ eine Karte, die eine n -Teilmannigfaltigkeit $M \subseteq \mathbb{R}^m$ lokal in einen Unterraum deformiert, so werden mit Hilfe von $d\varphi$ Tangentialvektoren M in Tangentialvektoren an diesen Unterraum abgebildet, und umgekehrt. $T_p M$ ist ein n -dim. Unterraum von $T_p \mathbb{R}^m \cong \mathbb{R}^m$.*

Genauer: Ist $\varphi : W \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Karte mit $\varphi(W \cap M) = \varphi(W) \cap (\mathbb{R}^n \times 0) \subset \mathbb{R}^m$, dann ist $T_p M = d\varphi_{\varphi(p)}^{-1}(T_{\varphi(p)}(\mathbb{R}^n \times 0)) = d\varphi^{-1}(\{(x^1, \dots, x^n, 0, \dots, 0)\})$.

Beweis: $c(I) \subseteq M$ ist gleichbedeutend mit $\varphi \circ c(I) \subseteq \mathbb{R}^m \times 0$. Tangentialvektoren werden mittels $d\varphi$ abgebildet. \square

Folgerung: Eine m -dim. TMF des \mathbb{R}^n kann keine \bar{m} -dim. TMF des \mathbb{R}^n mit $m \neq \bar{m}$ sein, d.h. die Dimension einer TMF ist ein wohldefinierter Begriff.

Lemma 1.27 Bei einer differenzierbaren Abbildung f , deren Bilder und Urbilder TMF sind, gehen die entsprechenden Tangentialvektorräume durch df ineinander über:

(a) Ist $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ und $f(U) = M$ eine r -dim. TMF (d.h. $\text{rg}(df) = r$), dann ist $T_{f(p)}M = df_p(T_p\mathbb{R}^n)$.

(b) Ist $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ und $M = f^{-1}(a)$ eine r -dim. TMF (d.h. $\text{rg}(df) = n - r$), so ist $T_p(M) = \ker(df_p)$.

Beweis: Wir verwenden die Bezeichnungen des Rangsatzes. (a) ψ ist Karte für $f(V)$ und $\psi(f(V)) = \mathbb{R}^m \times 0$ (lokal).

(b) φ ist Karte für $f^{-1}(a)$ und $\varphi(f^{-1}(a)) = \{(0, \dots, 0, x^{r+1}, \dots, x^n)\}$ (lokal). Es folgt, daß $d\varphi(T_p f^{-1}(a)) = \{(0, \dots, 0, x^{r+1}, \dots, x^n)\} = d\tilde{f}^{-1}(0) = d\varphi \circ d\tilde{f}^{-1} \circ d\varphi^{-1}$, d.h. $T_p f^{-1}(a) = d\tilde{f}^{-1}(0)$. \square

Folgerung: Hat $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ den Rang 1 für alle x mit $f(x) = a$, so ist $f^{-1}(a)$ eine $(n-1)$ -dim. TMF, deren Tangentialvektorraum die Gleichung $\text{grad}_p(f) \cdot x = 0$ besitzt.

Beweis: $df(v) = \frac{\partial f}{\partial x^1} v^1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x^n} v^n = \text{grad}_p f \cdot v$. \square

Das folgende Beispiel zeigt, daß einige bekannte Mengen von Matrizen Teilmannigfaltigkeiten sind:

Beispiel: (Matrizengruppen) Die Gruppen $O_n, SO_n, GL_n \subseteq \mathbb{R}^{n \times n}$ sind wie folgt definiert:

- $GL_n = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid \det(A) \neq 0\}$;
- $O_n = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid A \cdot A^T = E\}$, wobei E die $(n \times n)$ -Einheitsmatrix ist.
- $SO_n = \{A \in O_n \mid \det(A) = 1\} = \{A \in O_n \mid \det(A) > 0\}$.

GL_n ist eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^{n \times n}$ und somit eine n^2 -dim. TMF. Sei $f : GL_n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$, $A \mapsto AA^T$. Dann ist

$$\begin{aligned} df_A(V) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(A + tV) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (AA^T + tV^T A + tA^T V + t^2 V^T V) \\ &= V^T A + A^T V = (A^T V)^T + (A^T V). \end{aligned}$$

Offenbar ist df_A eine surjektive lineare Abbildung von $\mathbb{R}^{n \times n}$ in den $n(n+1)/2$ -dim. Unterraum der symmetrischen Matrizen. Damit ist

$$\text{rg}(df_A) = \frac{1}{2}n(n+1) \implies \dim O_n = n^2 - \text{rg}(df_A) = \frac{1}{2}n(n-1),$$

und O_n ist eine Teilmannigfaltigkeit. SO_n ist eine offene Teilmenge von O_n (bestimmt durch die Ungleichung $\det(A) > 0$), also ist sie eine $\dim(O_n)$ -dim. TMF von O_n und somit eine TMF von $\mathbb{R}^{n \times n}$. Die Tangentialvektorräume $T_A O_n$ und $T_A SO_n$ haben die Gleichung $df_A(V) = 0$, also $V^T A + A^T V = 0$. Insbesondere ist $T_E O_n = T_E SO_n = \{V \mid V^T + V = 0\}$. \diamond

1.4 Differenzierbare Abbildungen von Teilmannigfaltigkeiten

Um Abbildungen zwischen TMF betrachten zu können, definieren wir die Koordinatendarstellung von Abbildungen $f : M_1 \rightarrow M_2$. Wir werden im folgenden oft der ‘Differenzierbarkeit’ von Abbildungen sprechen. Wir meinen damit aber auch stetige Differenzierbarkeit oder C^k — die Resultate und Beweis sind vollkommen analog. In diesem Sinne ist der Text dieses Abschnittes unvollständig.

Definition 1.28 (*lokale Parametrisierung, Karte*) Ist $M \subseteq \mathbb{R}^m$ eine n -dimensionale TMF und $g : V \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow M$ regulär und injektiv — z.B. für eine Karte $\varphi : U \subseteq M \rightarrow \mathbb{R}^m$ sei $g = \varphi^{-1}|_{\mathbb{R}^n \times 0}$. Dann heißt g lokale Parametrisierung von M . Die Umkehrung einer lokalen Parametrisierung heißt Karte. \triangleright

Definition 1.29 (*Koordinatendarstellung*) Seien $g_i : U_i \subseteq \mathbb{R}^{m_i} \rightarrow M_i$ ($i = 1, 2$) lokale Parametrisierungen der TMF M_1 und M_2 .

Dann heißt $\tilde{f} : U_1 \rightarrow U_2$, $\tilde{f} = g_2^{-1} \circ f \circ g_1$ die *Koordinatendarstellung* von f bzgl. g_1, g_2 . \triangleright

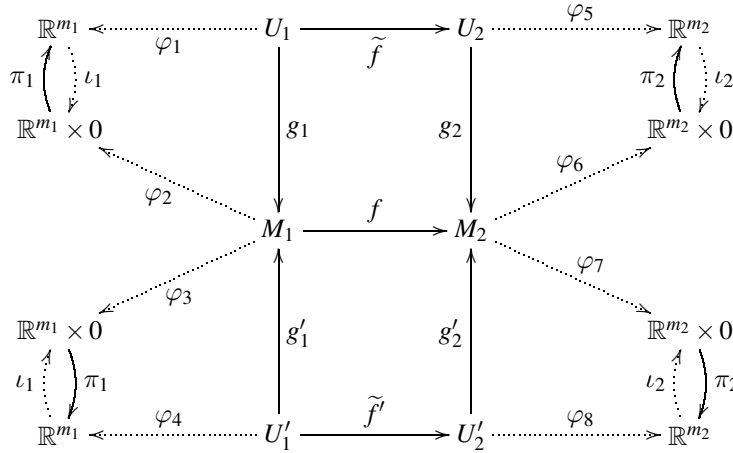
Definition 1.30 (*differenzierbar, Differential*) Seien M_1, M_2 wie oben. Eine Abbildung $f : M_1 \rightarrow M_2$ heißt differenzierbar, wenn alle Koordinatendarstellungen differenzierbar sind. Das *Differential* df_p von f bei p ist definiert durch

$$df_p(v) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(c(t)), \quad \text{wobei } c : I \rightarrow M, \quad c(0) = p, \quad \dot{c}(0) = v. \quad \triangleright$$

Satz 1.31 *Die Differenzierbarkeit einer Abbildung von Teilmannigfaltigkeiten ist ein wohldefinierter Begriff, d.h. er hängt nicht von einer speziellen Wahl der g_i ab. $df_p : T_p M \rightarrow T_{f(p)} M$ ist wohldefiniert, und ist eine lineare Abbildung. Es ist*

$$df_p = dg_2 \circ d\tilde{f} \circ (dg_1)^{-1}.$$

Beweis: Problem: g_i^{-1} haben als Definitionsmengen keine offenen Teilmengen eines \mathbb{R}^d . Lösung: Nach dem Rangsatz existieren lokale Diffeomorphismen $\varphi_1, \dots, \varphi_8$ und Projektionen π_1, π_2 , sodaß das folgende Diagramm kommutativ ist:



Es ist $\pi_1(x^1, \dots, x^{m_1}) = (x^1, \dots, x^{m_1})$ und $\iota_1(x^1, \dots, x^{m_1}) = (x^1, \dots, x^{m_1}, 0, \dots, 0)$; sowie analog für π_2 und ι_2 . Nun können wir den Abbildungen g_i^{-1} über eine Kette von Diffeomorphismen ausweichen. Z.B. ist $\tilde{f}' = \varphi_8^{-1} \circ \iota_{m_2} \circ \varphi_7 \circ g_2 \circ \tilde{f} \circ \varphi_1^{-1} \circ \iota_{m_1} \circ \varphi_2 \circ g'_1$, d.h. aus \tilde{f} differenzierbar folgt \tilde{f}' differenzierbar. Die Aussage über die Differentiale folgt durch Hinzufügen des Buchstabens d in der obigen Kette: Wir verfolgen eine Kurve $c : (f \circ c)' = (g_2 \circ \tilde{f} \circ \varphi_1^{-1} \circ \iota_{m_1}^{-1} \circ \varphi_2 \circ c)' = dg_2 \circ d\tilde{f} \circ (\star)(\dot{c})$ mit $\star = d\varphi_1^{-1} \circ \text{id} \circ d\varphi_2$. Wegen $dg_1 = d\varphi_1 \circ \pi_1 \circ d\varphi_2^{-1}$ ist $dg_1^{-1} = \star$, denn das Bild von $d\varphi_2(\dot{c})$ ist in $\mathbb{R}^{m_1} \times 0 \subset \mathbb{R}^{m_1}$ enthalten. \square

Lemma 1.32 *Die Koordinatendarstellung des Differentials ist gleich dem Differential der Koordinatendarstellung: Sind φ_1 und φ_2 Karten für M_1, M_2 um p und $f(p)$, und $\tilde{f} = \varphi_2^{-1} \circ f \circ \varphi_1$, so ist*

$$df_p = (d\varphi_{2,f(p)})^{-1} \circ d\tilde{f}|_{\mathbb{R}^{m_1} \times 0} \circ d\varphi_{1,p}|_{T_p M}.$$

Beweis: Das folgt sofort aus dem vorigen. \square

Satz 1.33 Seien L, M, N Teilmannigfaltigkeiten mit $M \subseteq N$. Dann gilt:

- (a) Die Einbettung differenzierbar.
- (b) Ist $f : L \rightarrow M$ differenzierbar, so auch $f : L \rightarrow N$.
- (c) Ist $f : L \rightarrow N$ differenzierbar und $f(L) \subseteq M$, so ist auch $f : L \rightarrow M$ differenzierbar.

Beweis: (a) \implies (b) ist trivial. (a) und (c) zeigt man durch sukzessives Geradebiegen bzw. Anwenden des Rangsatzes. \square

Satz 1.34 Der Satz über die Umkehrfunktion gilt für differenzierbare TMF. D.h. wenn $\dim M = \dim N$, $f : M \rightarrow N$ und df_p regulär ist, dann existiert eine Umgebung von p , sodaß f dort bijektiv und f^{-1} differenzierbar ist.

Ist $f : U \subseteq M \rightarrow N$ differenzierbar und hat konstanten Rang r , so ist $f^{-1}(U)$ eine $(\dim(M) - r)$ -dim. TMF.

Beweis: Differenzierbarkeit, und eine TMF zu sein sind beides lokale Eigenschaften und bleiben von TMF-Karten unberührt. Aussagen für den \mathbb{R}^n gelten daher auch für TMF. \square

Beispiel: (Stereographische Projektion) Wir betrachten eine Parametrisierung der 2-Sphäre $S^2 = \{(x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^3 \mid (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = 1\}$: $g_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow S^2 \setminus \{(0, 0, 1)\}$, $g_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow S^2 \setminus \{(0, 0, -1)\}$:

$$g_1(x) = \frac{1}{1 + \|x\|^2} \begin{bmatrix} -2x^1 \\ -2x^2 \\ 1 - \|x\|^2 \end{bmatrix}, \quad g_2(u, v) = \frac{1}{1 + \|x\|^2} \begin{bmatrix} -2x^1 \\ -2x^2 \\ \|x\|^2 - 1 \end{bmatrix}.$$

Da $\frac{\partial g_i}{\partial u}, \frac{\partial g_i}{\partial v}$ für $i = 1, 2$ linear unabhängig sind, sind g_1 und g_2 lokale Parametrisierungen von S^2 . Identifizieren wir $\mathbb{R}^2 \equiv \mathbb{C}$ mittels $z = x^1 + ix^2$, dann ist g_1 die wohlbekannte Einbettung von \mathbb{C} in die Riemannsche Zahlenkugel. Die Parameterwechsel zwischen g_1 und g_2 haben dann die folgende Gestalt:

$$g_1^{-1} \circ g_2 = g_2^{-1} \circ g_1 : \mathbb{C} \setminus 0 \rightarrow \mathbb{C} \setminus 0, \quad z \mapsto \frac{1}{\bar{z}}.$$

Sei $f : S^2 \rightarrow S^2$ gegeben durch die Abbildungsvorschrift $(0, 0, 1) = N \mapsto N$, und die Koordinatendarstellung bezüglich g_1 und g_1 :

$$g_1^{-1} \circ f \circ g_1(z) = p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n,$$

d.h. $f(g_1(z)) = g_1(a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n)$. f hat die besondere Eigenschaft, daß Punkte des Zielgebietes von g_1 wieder auf solche Punkte abgebildet werden. Offenbar ist $f|_{S^2 \setminus N}$ beliebig oft differenzierbar.

Ist auch f differenzierbar? Dazu betrachten wir die Koordinatendarstellung von f bzgl. g_2 und g_2 :

$$g_2^{-1} \circ f \circ g_2 = (g_2^{-1} \circ g_1) \circ (g_1^{-1} \circ f \circ g_1) \circ (g_1^{-1} \circ g_2) : \mathbb{C} \setminus 0 \rightarrow \mathbb{C} \setminus 0,$$

$$z \mapsto \frac{1}{p(1/\bar{z})} = \frac{z^n}{\bar{a}_n z^n + \cdots + \bar{a}_1 z + \bar{a}_0}$$

für $z \neq 0$ und $0 \mapsto 0$. Demnach ist f auf ganz S^2 beliebig oft differenzierbar. \diamond

1.5 Die innere Metrik einer Teilmannigfaltigkeit

Definition 1.35 (*innere Metrik, I. Fundamentalform*) Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine m -dim. TMF und sei \mathbb{R}^n mit dem euklidischen Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ versehen. Für $v, w \in T_p M$ ist $\langle v, w \rangle$ somit wohldefiniert, weil $T_p M \subseteq T_p \mathbb{R}^n \equiv \mathbb{R}^n$. Die Bilinearform $\langle \cdot, \cdot \rangle$ in $T_p M$ heißt auch I. Fundamentalform der Teilmannigfaltigkeit M im euklidischen Raum. \triangleright

Man kann einen Tangentialvektor als Richtungsableitung interpretieren. In diesem Zusammenhang schreiben wir Tangentialvektoren in der Form $X_p \in T_p M$.

Definition 1.36 (*Richtungsableitung*) Ist $c : I \rightarrow M$ eine Kurve mit $c(0) = p$ und $\dot{c}(0) = X_p$, und ist $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar, dann ist die Richtungsableitung von f in Richtung X_p gegeben durch

$$X_p f = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f \circ c(t) \quad \triangleright$$

Definition 1.37 (*Vektorfeld*) Ein Vektorfeld auf einer TMF M ist eine Abbildung $X : M \rightarrow TM$ mit $p \mapsto X_p \in T_p M$. \triangleright

Beispiel: (*Basisfeld*) Ist g eine lokale Parametrisierung (z.B. $(\varphi|_{\mathbb{R}^m \times 0})^{-1}$ für eine Karte φ), dann heißt

$$\partial_j : p \mapsto dg_p(e_j) = \partial_j(p) = (\partial_j)_p$$

das j -te *Basisfeld* bezüglich der Parametrisierung g . \diamond

Definition 1.38 (*Koeffizienten der Metrik*) Ist $g : \mathbb{R}^n \rightarrow V \subseteq M$ eine lokale Parametrisierung und sind $\partial_1, \dots, \partial_n$ die dazugehörigen Basisfelder, dann heißen die Funktionen

$$g_{jk} : V \rightarrow \mathbb{R}, \quad g_{jk}(p) = \langle \partial_j(p), \partial_k(p) \rangle$$

die zugehörigen *Koeffizienten* der inneren Metrik bzw. der I. Fundamentalform.¹⁾ \triangleright

Haben Tangentialvektoren die Koordinaten $v = v^j \partial_j$, $w = w^k \partial_k$, so ist $\langle v, w \rangle = \sum_{j,k} v^j w^k \langle \partial_j, \partial_k \rangle = v^j w^k g_{jk}$.

Definition 1.39 (*Abstand*) Sei M eine zusammenhängende TMF. Seien $p, q \in M$, und sei $\mathcal{C}_{p,q}$ die Menge aller stückweise differenzierbaren Kurven $c : [0, 1] \rightarrow M$ mit $c(0) = p$, $c(1) = q$. Dann ist der *Abstand* von p, q definiert durch

$$d(p, q) := \inf_{c \in \mathcal{C}_{p,q}} L_0^1(c) \quad \triangleright$$

Lemma 1.40 Je zwei Punkte p, q einer zusammenhängenden TMF M sind durch eine Kurve $c \in \mathcal{C}_{p,q}$ mit $c(0) = p$ und $c(1) = q$ verbindbar. Daraus folgt auch $d(p, q) < \infty$.

Beweis: Der Beweis ist analog zum Beweis von Satz A.33: Bezeichne mit ' \sim ' die Relation 'verbindbar'. Sie ist offenbar eine Äquivalenzrelation. Jeder Punkt $p \in M$ besitzt eine Umgebung diffeomorph zu einer offenen Vollkugel (über eine TMF-Karte), d.h. alle p

besitzen eine Umgebung aus mit p verbindbaren Punkten. Alle Äquivalenzklassen $[p]_\sim$ sind daher offen. Wegen $[p]_\sim = M \setminus \bigcup_{q \notin [p]_\sim} [q]_\sim$, ist $[p]_\sim$ abgeschlossen. Wenn M zusammenhängend ist, muß $M = [p]_\sim$ sein. \square

¹⁾Historische Bezeichnungen für $g_{11}, g_{12} = g_{21}, g_{22}$ sind E, F, G .

Lemma 1.41 Bei M zusammenhängend ist (M, d) ein metrischer Raum.

Beweis: Wir müssen zeigen: (i) $d(p, q) = 0$ genau für $p = q$, (ii) $d(p, q) = d(q, p)$ und (iii) die Dreiecksungleichung. (i) folgt direkt aus Satz 1.09; (ii) und (iii) sind trivial. \square

Definition 1.42 (*Support*) Ist $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, so verwenden wir die Bezeichnung $\text{supp}(f)$ für den Abschluß von $\{x \mid f(x) \neq 0\}$. \triangleright

Die folgenden Begriffe wie Oberfläche und Volumen werden je nach Dimension anders bezeichnet: Oberfläche weist auf Dimension zwei und Volumen auf Dimension ≥ 3 hin. Wir werden in der Bezeichnung inkonsistent sein und die Begriffe vermischen.

Definition 1.43 (*Oberflächenintegral*) Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine m -dim. TMF und $g : U \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow M$ eine lokale Parametrisierung. Sei $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ und \tilde{f} die Koordinatendarstellung von f bezüglich g . Ist $\text{supp}(f)$ kompakt und in $g(U)$, dann sei

$$\int_M f dO := \int_U \tilde{f}(u_1, \dots, u_m) \sqrt{\det(g_{jk})} du_1 \cdots du_m \quad \triangleright$$

Lemma 1.44 $\int_M f dO$ ist wohldefiniert, d.h. unabhängig von der Wahl der Parametrisierung.

Beweis: Seien g, g' lokale Parametrisierungen, $\tilde{f} = f \circ g$, $\tilde{f}' = f \circ g'$, und $\varphi = g^{-1} \circ g'$. φ ist diffeomorph. Sei $\text{supp}(f)$ in den Zielgebieten von g und von g' . Dann ist

$$\frac{\partial g'}{\partial u^i} = \left(\frac{\partial g}{\partial v^j} \circ \varphi \right) \frac{\partial \varphi^j}{\partial u^i} \implies g'_{jk} = \left\langle \left(\partial_l \circ \varphi \right) \frac{\partial \varphi^l}{\partial u^j}, \left(\partial_p \circ \varphi \right) \frac{\partial \varphi^p}{\partial u^k} \right\rangle = \frac{\partial \varphi^l}{\partial u^j} \frac{\partial \varphi^p}{\partial u^k} (g_{lp} \circ \varphi).$$

Sei J die Jacobi-Matrix von φ . Dann ist $(g'_{jk}) = J^T (g_{jk} \circ \varphi) J$ und $\det(g'_{jk}) = \det(J)^2 \cdot \det(g_{jk} \circ \varphi)$. Es folgt $\int \tilde{f}'(v) \det(g'_{jk}(v))^{1/2} dv = \int \tilde{f} \circ \varphi(v) \cdot |\det J(v)| \det(g_{jk} \circ \varphi(v))^{1/2} dv = \int \tilde{f}(w) \det(g_{jk}(w))^{1/2} dw$ (Substitutionsregel). \square

In der Definition der Oberflächenintegrals tritt die Wurzel aus der Determinante der metrischen Koeffizienten g_{jk} (das Volumen des von den Vektoren ∂_1, \dots aufgespannten Parallelepipeds, vgl. Satz A.02) als Verzerrungsfaktor auf.

Definition 1.45 (*Volumen*) Sei $g : U \rightarrow M$ wie oben und $K \subseteq U$ kompakt. Dann ist

$$\text{Vol}(g(K)) := \int_K \sqrt{\det(g_{jk})} du_1 \dots du_m$$

das *Volumen* (bei $n = 2$: Oberfläche, bei $n = 1$: Länge) von $g(K) \subseteq M$. \triangleright

Beispiel: Wir überzeugen uns, daß für Kurven das hier definierte Volumen mit der Bogenlänge übereinstimmt: Sei $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine lokale Parametrisierung einer 1-dim. TMF. Es ist $\partial_1 = \dot{c}$, $g_{11} = \langle \dot{c}, \dot{c} \rangle$, und $\text{Vol}(c([a, b])) = \int_{[a, b]} \sqrt{g_{11}} = \left| \int_a^b \|\dot{c}\| dt \right|$. \diamond

Definition 1.46 (*Isometrie*) Seien M, N Teilmannigfaltigkeiten und $f : M \rightarrow N$. Dann heißt f *Isometrie*, falls $d(p, q) = d(f(p), f(q))$ für alle $p, q \in M$ gilt. \triangleright

Beispiel: Sind $g : U \rightarrow M$, $g' : U \rightarrow N$ lokale Parametrisierungen und stimmen die Koeffizienten g_{jk} und g'_{jk} überein, dann ist $f : g(U) \rightarrow g'(U)$, $p \mapsto g' \circ g^{-1}(p)$ eine Isometrie, denn für jede Kurve $c : I \rightarrow U$ sind die Bogenlängen $L_a^b(g \circ c)$ und $L_a^b(g' \circ c)$ gleich.

Sei z.B. $M = \{(x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^3 \mid (x^1)^2 + (x^2)^2 = 1\} \subseteq \mathbb{R}^3$, $M' = \mathbb{R}^2$, $U = (-\pi, \pi) \times \mathbb{R}$. Wähle $g(u, v) = (\cos(u), \sin(u), v)$ und $g'(u, v) = (u, v)$. Dann ist

$$(g_{jk}) = (g'_{jk}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Damit ist $g^{-1} = f$ eine Isometrie, und man kann den Zylinder ohne die Gerade $x = -1, y = 0$ isometrisch in die Ebene abbilden. Die entspricht auch der ‘Alltagserfahrung’ mit aufgeschnittenen Zylindern. \diamond

Definition 1.47 (*abwickelbar*) Gibt es für jeden Punkt aus M eine Umgebung, die isometrisch zum \mathbb{R}^m ist, so heißt M abwickelbar. \triangleright

Beispiel: Es ist manchmal nicht möglich, eine Teilmannigfaltigkeit des \mathbb{R}^n als Ganzes isometrisch in einem \mathbb{R}^m abzubilden — für einen geschlossenen Zylinder ist dies nicht möglich, man müßte ihn dazu aufschneiden. Auch ist es denkbar, daß eine Abbildung von ganz M in \mathbb{R}^m existiert, die zwar lokal isometrisch, aber nicht injektiv und damit nicht isometrisch ist — man denke an einen Kegel mit einer Spirale als Basiskurve, wo sich die Abwicklung öfter als nur einmal um die Spitze herumwinden würde. \diamond

2. Kapitel

Elementare Krümmungstheorie der $(n-1)$ -dim. Flächen im \mathbb{R}^n

2.1 Die Krümmungsform

Das wichtigste Hilfsmittel in der elementaren Krümmungstheorie der Flächen sind die sphärische Abbildung und die von ihr abgeleiteten Begriffe. Diese ordnet jedem Punkt einer $(n-1)$ -dim. TMF einen normierten Einheitsvektor orthogonal zu $T_p M$ zu:

Definition 2.01 (*sphärische Abbildung*) Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine $(n-1)$ -dim. TMF des \mathbb{R}^n und $g : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow M$ eine lokale Parametrisierung. Dann ist $n : M \rightarrow S^{n-1}$ definiert durch

$$\tilde{n} := \partial_1 \times \partial_2 \times \cdots \times \partial_{n-1}, \quad n(p) = \frac{\tilde{n}(p)}{\|\tilde{n}(p)\|}.$$

Dabei bilden die Vektoren $\partial_1, \dots, \partial_{n-1}, n$ ein Rechtssystem. $n(p)$ heißt der durch g bestimmte Einheits-Normalvektor von M in p . \triangleright

n ist von der Parametrisierung abhängig: Ist g' eine andere Parametrisierung und n' das damit verbundene Einheits-Normalvektorfeld, so ist

$$n = n' \iff (\partial_1, \dots, \partial_{n-1}, n) \text{ und } (\partial'_1, \dots, \partial'_{n-1}, n) \text{ sind gleich orientiert.}$$

Definition 2.02 (*Weingartenabbildung, Shape-Operator*) Sei M eine $(n-1)$ -dim. TMF. Dann ist $dn_p : T_p M \rightarrow T_{n(p)} S^{n-1}$. Die Tangentialvektorräume $T_{n(p)} S^{n-1}$ und $T_p M$ sind im \mathbb{R}^n parallel zueinander und haben die gleiche Dimension. Wir identifizieren sie und definieren die Weingartenabbildung (englisch: ‘shape operator’):

$$\sigma_p : T_p M \rightarrow T_p M, \quad v \mapsto -dn(v)$$

\triangleright

Die Weingartenabbildung gibt also die negative Änderung des Normalvektors $n(p)$ in Richtung v an. Das Vorzeichen hat historische Gründe. σ ist von der Parametrisierung in derselben Weise abhängig wie n .

Definition 2.03 (*Krümmungsform, II. Fundamentalform*) Die Abbildung

$$h_p : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}, \quad (v, w) \mapsto \langle \sigma_p(v), w \rangle$$

heißt *Krümmungsform* oder *II. Fundamentalform*. Die skalaren Funktionen

$$h_{jk} : M \rightarrow \mathbb{R}, \quad h_{jk}(p) = h_p(\partial_j, \partial_k) = \langle \sigma_p(\partial_j), \partial_{k,p} \rangle$$

heißen die Koeffizienten der II. Fundamentalform.¹⁾ \triangleright

¹⁾Historische Bezeichnungen für $h_{11}, h_{12} = h_{21}, h_{22}$ sind L, M, N .

Die Koordinatenmatrix der Weingartenabbildung σ_p bezüglich der Basis $\partial_1, \dots, \partial_{n-1}$ in $T_p M$ wird mit h_j^k bezeichnet. Es gilt

$$\sigma(\partial_k) = h_j^k \partial_j, \quad h_{jk} = \langle h_j^l \partial_l, \partial_k \rangle = h_j^l g_{lk} \implies h_j^l = g^{kl} h_{jk}.$$

Dabei ist $(g^{kl}) = (g_{jk})^{-1}$ die zur Matrix (g_{jk}) inverse Matrix.

Satz 2.04 Die Krümmungsform ist eine symmetrische Bilinearform.

Beweis: Wir leiten $\langle \partial_j, n \rangle = 0$ längs der u^k -Linie ab:

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial g}{\partial u^j}, n \right\rangle = 0 &\implies \left\langle \frac{\partial^2 g}{\partial u^j \partial u^k}, n \right\rangle + \left\langle \frac{\partial g}{\partial u^j}, \frac{\partial n}{\partial u^k} \right\rangle = 0 \\ &\implies h_{jk} = -\left\langle \frac{\partial n}{\partial j}, \frac{\partial g}{\partial k} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial^2 g}{\partial u^j \partial u^k}, n \right\rangle = h_{kj}. \quad \square \end{aligned}$$

Die II. Fundamentalform ist von der Parametrisierung in derselben Weise abhängig wie das Einheitsnormalvektorfeld n .

Folgerung: Nach dem Spektralsatz hat $T_p M$ eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von σ , und alle Eigenwerte von σ sind reell.

Definition 2.05 (*Hauptkrümmungen, mittlere Krümmung, Gaußsche Krümmung*) Die $n-1$ reellen Eigenwerte $\kappa_1, \dots, \kappa_{n-1}$ von σ heißen *Hauptkrümmungen* von M im Punkt p . Jeder Eigenvektor bestimmt eine *Hauptkrümmungsrichtung*. Die mittlere und die Gaußsche Krümmung H und K sind definiert durch

$$H = \frac{1}{n-1}(\kappa_1 + \dots + \kappa_{n-1}) = \frac{1}{n-1} \text{tr}(\sigma), \quad K = \kappa_1 \cdots \kappa_{n-1} = \det(\sigma). \quad \triangleright$$

Die Hauptkrümmungen, H , und bei $\dim(M) \equiv 1 \pmod{2}$ auch K sind von der Parametrisierung in derselben Weise abhängig wie n . Bei $\dim(M) \equiv 0 \pmod{2}$ ist K eine geometrische Eigenschaft der Teilmannigfaltigkeit.

Man berechnet H und K durch

$$K = \det(h_j^l) = \frac{\det(h_{jk})}{\det(g_{jk})}, \quad H = \frac{1}{n-1} \text{tr}(h_{jk}) = \frac{h_1^1 + \dots + h_{n-1}^{n-1}}{n-1}.$$

Bei $n = 3$ ist

$$H = \frac{1}{2} \cdot \frac{g_{22}h_{11} - 2g_{12}h_{12} + g_{11}h_{22}}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}.$$

Bemerkung: (*geometrische Eigenschaft*) ‘geometrische Eigenschaft’ bzw. ‘Invariante’ ist hier analog zu Def. 1.04 definiert — ein einer Teilmannigfaltigkeit zugeordneter Skalar bzw. affiner Unterraum ändert sich nicht bei Kongruenztransformationen bzw. wird entsprechend transformiert. An die Stelle der Invarianz bei Parametertransformationen tritt die Unabhängigkeit von einer Parametrisierung bzw. Karte. \diamond

2.2 Die Krümmungen von Kurven in Teilmannigfaltigkeiten

Definition 2.06 (*Normalkrümmung, geodätische Krümmung*) Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine $(n-1)$ -dim. Teilmannigfaltigkeit und $c: I \rightarrow M$ eine Kurve mit Begleitbasis (c_1, c_2, \dots)

und der 1. Krümmung κ . Sei (n, m) eine ONB der Ebene $[n, \dot{c}]$, sodaß in der Linearkombination

$$\kappa c_2 = \kappa_n n + \kappa_g m, \quad (\text{d.h. } \kappa_n = \langle c_2 \kappa, n \rangle, \quad m \kappa_g = \kappa c_2 - \kappa_n n)$$

der Koeffizient κ_g nichtnegativ ist. κ_n heißt *Normalerkrümmung* und κ_g heißt *geodätische Krümmung* der Kurve c in M . Aus der Definition folgt direkt, daß $\kappa_g^2 + \kappa_n^2 = \kappa^2$ gilt. \triangleright

Lemma 2.07 Für eine Kurve $c : I \rightarrow M$ ist

$$\kappa_n = h(\dot{c}, \dot{c}) / \langle \dot{c}, \dot{c} \rangle,$$

d.h. die Normalerkrümmung hängt nur von \dot{c} ab.

Beweis: Wir haben $\dot{c} = \|\dot{c}\| c_1$ und $\ddot{c} = \|\dot{c}\|' c_1 + \|\dot{c}\|^2 \kappa c_2$. Betrachte das Normalvektorfeld $n \circ c(t)$ längs der Kurve c und leite $0 = \langle \dot{c}, n \rangle$ ab: $0 = \langle \ddot{c}, n \rangle + \langle \dot{c}, dn(\dot{c}) \rangle = \langle \|\dot{c}\|' c_1 + \|\dot{c}\|^2 \kappa c_2, n \rangle - \langle \dot{c}, \sigma(\dot{c}) \rangle = \|\dot{c}\|^2 \kappa_n - h(\dot{c}, \dot{c})$. \square

Bemerkung: Bewegt sich ein Massenpunkt innerhalb einer Teilmannigfaltigkeit M , an die er aufgrund irgendwelcher Zwangsbedingungen gebunden ist, so hat er wegen $\kappa_n = h(\dot{c}, \dot{c}) / \langle \dot{c}, \dot{c} \rangle$ auf die Komponente der Beschleunigung normal zur Fläche nur über seine eigene Geschwindigkeit einen Einfluß. Innerhalb der Newtonschen Mechanik übt M eine Kraft aus, die der Normalbeschleunigung $\|\dot{c}\|^2 \kappa_n = \ddot{c}^n$ das Gleichgewicht hält. Die geodätische Krümmung kann das Teilchen unabhängig von seiner Geschwindigkeit selbst bestimmen, die dazu notwendige Kraft muß es selbst aufbringen. \diamond

Definition 2.08 (*Krümmungskreis*) Der Kreis mit dem Mittelpunkt $c(t) + \frac{1}{\kappa_1} c_2(t)$ und Radius $\frac{1}{\kappa_1}$, der in der von c_1 und c_2 aufgespannten Ebene liegt, heißt *Krümmungskreis*. \triangleright

Die Kurve c und ihr Krümmungskreis haben in ihrem Berührungspunkt die gleichen Tangenten und die gleichen Krümmungen. Sind beide nach der Bogenlänge parametrisiert, so stimmen nach Frenet ihre Ableitungen bis zur 2. Ordnung überein.

Satz 2.09 (*Satz von Meusnier*) Sei M eine zweidimensionale TMF des \mathbb{R}^3 . Ist $c : I \rightarrow M$ eine Kurve mit $c(0) = p$, so gilt $\kappa = \kappa_n \cos \varphi$ mit $\varphi = \angle(n, c_2)$. Berühren einander zwei Kurven $c, \tilde{c} : I \rightarrow M$ im Punkt p und ist $\kappa_n(\dot{c}) \neq 0$, so schneiden die Achsen ihrer Krümmungskreise einander im Punkt $M = p + \kappa_n^{-1} n$.

Beweis: Die erste Aussage folgt direkt aus der Definition der Normalerkrümmung. Zur zweiten Aussage: c und \tilde{c} haben dieselbe Normalerkrümmung. Die Achse des Krümmungskreises liegt in der Ebene $p + [n, c_2]$. Es ist zu zeigen, daß der Winkel $(p, p + c_2/\kappa, m)$ 90° beträgt. Das ist klar aus dem ersten Teil (elementargeometrische Überlegung). \square

2.3 Die Verteilung der Normalerkrümmungen

Definition 2.10 (*Dupinsche Indikatrix*) Die Teilmengen i_- und i_+ von $T_p M$, die durch die Gleichungen

$$i_{\pm} = \left\{ \frac{v}{\sqrt{\pm \kappa_n(v)}} \mid \|v\| = 1 \right\} = \left\{ \frac{v}{\sqrt{\pm h(v, v)}} \right\} = \{w \mid h(w, w) = \pm 1\}$$

definiert sind, heißen die *Dupinschen Indikatrizen* von M im Punkt p . \triangleright

Daß die drei Definitionen äquivalent sind, ist für die ersten beiden trivial, und folgt für die zweite und dritte aus

$$h\left(\frac{v}{\sqrt{h(v,v)}}, \frac{v}{\sqrt{h(v,v)}}\right) = \frac{h(v,v)}{h(v,v)} = 1, \quad h(w,w) = 1 \implies w = \frac{v}{\sqrt{h(v,v)}}.$$

Sei im Tangentialraum $T_p M$ eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren der Abbildung $\sigma_p = -dn$ (Krümmungsvektoren) gegeben. v^1, \dots, v^{n-1} seien die Koordinaten eines Tangentialvektors bezüglich dieser Basis, und $\kappa_1, \dots, \kappa_{n-1}$ seien die Hauptkrümmungen. Dann ist

$$h(v,v) = \langle v, \sigma_p(v) \rangle = \left\langle \begin{bmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^{n-1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \kappa_1 v^1 \\ \vdots \\ \kappa_{n-1} v^{n-1} \end{bmatrix} \right\rangle = \kappa_1 (v^1)^2 + \dots + \kappa_{n-1} (v^{n-1})^2.$$

Im Fall einer 2-dimensionalen Teilmannigfaltigkeit des euklidischen \mathbb{R}^3 hat die Indikatritz die Gleichung $i_{\pm} : \kappa_1 (v^1)^2 + \kappa_2 (v^2)^2 = \pm 1$. Man unterscheidet die folgenden Fälle:

1. elliptischer Punkt: $\kappa_1 \kappa_2 > 0$. Eine Indikatritz ist eine Ellipse und die andere ist leer.
2. hyperbolischer Punkt: $\kappa_1 \kappa_2 < 0$. Die beiden Indikatritzen sind ‘zueinander konjugierte’ Hyperbeln mit Haupt- und Nebenachsen $|\kappa_1|^{-1/2}, |\kappa_2|^{-1/2}$.
3. parabolischer Punkt: $\kappa_1 = 0, \kappa_2 \neq 0$ oder umgekehrt. Die Indikatritzen haben die Gleichungen $i_{\pm} : \kappa_2 (v^2)^2 = \pm 1$. Eine besteht aus 2 parallelen Geraden, die andere ist leer.
4. Flachpunkt: $\kappa_1 = \kappa_2 = 0$. $i_+ = i_- = \{\}$.

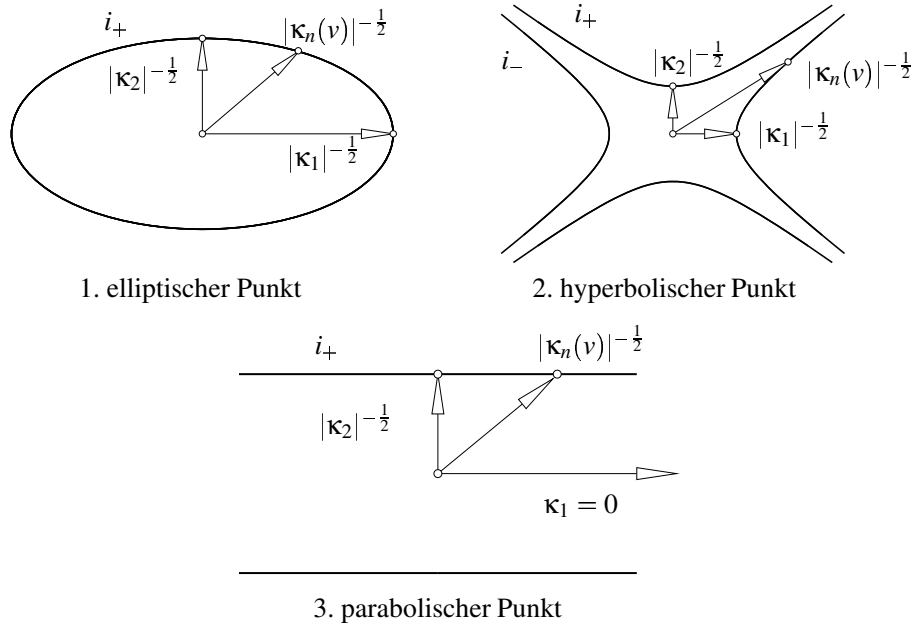


Abbildung 2.1: Beispiele für Dupinsche Indikatritzen

Lemma 2.11 Eine $(n-1)$ -dim. Teilmannigfaltigkeit M des \mathbb{R}^n ist in der Umgebung jedes Punktes $p \in M$ der Graph einer skalaren Funktion $f : \mathbb{R}^{(n-1)} \rightarrow \mathbb{R}$, d.h. in einem geeigneten Koordinatensystem wird M durch $(u_1, \dots, u_{n-1}) \mapsto (u_1, \dots, u_{n-1}, f(u_1, \dots, u_{n-1}))$ parametrisiert.

Beweis: Die Orthogonalprojektion $\pi : M \rightarrow T_p M$ hat in p den Rang $n-1$ (wegen $d\pi_p = \text{id}$). Nach Satz 1.34 ist π lokal ein Diffeomorphismus. Wir wählen ein kartesisches Koordinatensystem so, daß $p = 0$ und $T_p M$ die Ebene $x^n = 0$ ist. Dann hat π^{-1} nach Konstruktion die verlangte Gestalt. \square

Das hier konstruierte f hat die Eigenschaft $\frac{\partial f}{\partial u^i}(0) = 0$ für alle i (denn $\frac{\partial \bar{g}}{\partial u^i}$ muß tangential an $T_p M$ sein). Man nennt eine solche Parametrisierung Euler-Parametrisierung.

Definition 2.12 (*Schmiege-Paraboloid*) Sei \bar{g} die lokale Parametrisierung aus Lemma 2.11. Das Taylorpolynom 2. Ordnung von \bar{g} parametrisiert das *Schmiege-Paraboloid* von M im Punkt p :

$$u = (u^1, \dots, u^{n-1}) \mapsto [u^1, \dots, u^{n-1}, \frac{1}{2} u^T \cdot \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^i \partial u^j} \right) \cdot u]. \quad \triangleright$$

Folgerung: Sind die Basisvektoren in $T_p M$ Krümmungsvektoren, und sind κ_i die dazugehörigen Hauptkrümmungen, so ist die Gleichung des Schmiegeparaboloids gegeben durch

$$x^n = \frac{1}{2} (\kappa_1 (x^1)^2 + \dots + \kappa_{n-1} (x^{n-1})^2).$$

Beweis: Wir verwenden die Parametrisierung \bar{g} und berechnen $n(0) = (0, \dots, 0, 1)$, $g_{jk}(0) = \delta_{jk}$, und weiter $h_{jk}(0) = \frac{\partial^2 f}{\partial u^j \partial u^k}$. Damit ist $(h_j^k)(0) = (\delta_{jk})^{-1} \cdot (h_{jk}) = (h_{jk})(0)$. Sind, wie vorgegeben, die kanonischen Basisvektoren Krümmungsvektoren, so müssen sie Eigenvektoren von (h_{jk}) sein. Letztere Matrix hat daher Diagonalgestalt und es ist $(\frac{\partial^2 f}{\partial u^j \partial u^k})(0) = (h_j^k)(0) = \text{diag}(\kappa_1, \dots, \kappa_{n-1})$. \square

Die Dupinschen Indikatriz (Fig. 2.1) stellen offenbar horizontale Schnitte durch Schmiegeparaboloid dar. Die Gleichung der Dupinschen Indikatrix in einem Koordinatensystem wie in Lemma 2.11 ist

$$u^T \cdot \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^i \partial u^j} \right) \cdot u = h(u, u) = \pm 1.$$

Lemma 2.13 Jede kompakte $(n-1)$ -dim. TMF des \mathbb{R}^n besitzt einen elliptischen Punkt.

Beweis: $\|x\|$ hat ein Maximum $r = \|p\|$ für ein $p \in M$, und M liegt ganz innerhalb der Kugel $\|x\| = r$. Wir verwenden nun das Koordinatensystem und die Parametrisierung aus Def. 2.12. Die vorhin erwähnte Kugel hat nun den Mittelpunkt $(0, \dots, 0, \pm r)$ und den Radius r . O.B.d.A. sei der Mittelpunkt bei $(0, \dots, 0, r)$. Für die Kurve $c(t) = \bar{g}(t \cdot u) = (tu, f(tu))$ muß $\frac{d^2}{dt^2} f(tu) > 0$ sein, sonst verläßt die Kurve $c(t)$ sofort nach $t = 0$ die Kugel. Es folgt, daß das Schmiegeparaboloid elliptisch und p ein elliptischer Punkt ist. \square

2.4 Parallellflächen und die abtragende Abbildung

Das Konzept der Parallellfläche (bzw. der tubularen Umgebung) ist ein wichtiges technisches Hilfsmittel. Wir werden hier nur den Fall von $(n-1)$ -dimensionalen TMF eines \mathbb{R}^n betrachten.

Definition 2.14 (*abtragende Abbildung, Parallelfläche*) Sei M eine $(n-1)$ -dim. TMF des \mathbb{R}^n , $g : U \rightarrow M$ eine lokale Parametrisierung, und $n : M \rightarrow S^{n-1}$ das dazugehörige Einheits-Normalvektorfeld. Dann heißt

$$e : M \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n, (p, t) \mapsto p + tn(p)$$

die *abtragende Abbildung*. Für festes t parametrisiert $e(p, t)$ eine Parallelfläche von M im Abstand t . \triangleright

Die Koordinatendarstellung von e bezüglich der lokalen Parametrisierung $g \times \text{id}$ von $M \times \mathbb{R}$ ist

$$\tilde{e} : U \times \mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, (a, t) \mapsto g(a) + t \cdot n(g(a)).$$

Um die Definition des Produktes von Mannigfaltigkeiten zu vermeiden, werden wir, wenn von Differenzierbarkeit u. ä. die Rede ist, immer \tilde{e} und nicht e meinen.

Lemma 2.15 e ist regulär (d.h. \tilde{e} ist regulär) an der Stelle (p, λ) genau dann, wenn λ^{-1} keine Hauptkrümmung von M in p ist.

Beweis: $\tilde{e}(u, \lambda)$ ist singulär $\iff \exists (\dot{u}, \dot{\lambda}) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$ mit $0 = d\tilde{e}(\dot{u}, \dot{\lambda}) = dg(\dot{u}) + \dot{\lambda}n + \lambda \cdot dn \circ dg(\dot{u})$. Der Tangentialanteil dieser Gleichung ist, wenn wir $dg(\dot{u}) = v$ schreiben, gleich $v + \lambda \cdot dn(v) = 0 \iff v = \lambda \sigma(v)$ oder $(1/\lambda)v = \sigma(v)$, was zu zeigen war. \square

Man könnte sagen, daß in einem Hauptkrümmungsmittelpunkt ‘infinitesimal benachbarte Normalen einander schneiden’.

Lemma 2.16 Sei $B \subseteq U$ offen und \bar{B} kompakt. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$, sodaß $\tilde{e}|_{B \times (-\varepsilon, \varepsilon)}$ ein Diffeomorphismus ist.

Beweis: Wegen $\text{rg}(\partial \tilde{e}(u, 0)) = n$ gibt es für jedes $u \in U$ eine Umgebung der Form $B(u, 3\delta_u) \times (-\varepsilon_u, \varepsilon_u)$ so, daß dort \tilde{e} ein Diffeomorphismus ist (*), und wegen \bar{B} kompakt gibt es endlich viele $u_1, \dots, u_r \in \bar{B}$, sodaß $B(u_i, \delta_{u_i})$ ($i = 1, \dots, r$) die Menge \bar{B} überdecken. Die in $B(u_i, 2\delta_{u_i})$ definierten Funktionen $f_i : u \mapsto \text{dist}(g(u), g(\bar{B} \setminus B(u_i, 3\delta_{u_i})))$ sind stetig und positiv, und haben ein Minimum $\varepsilon'_i > 0$ in $\bar{B}(u_i, \delta_{u_i})$. Sei $\varepsilon \leq \varepsilon'_i$ und $\varepsilon < \varepsilon_{u_i}$ ($i = 1, \dots, r$). Dann ist $\tilde{e}|_{\bar{B} \times (-\varepsilon, \varepsilon)}$ injektiv: Bei $\tilde{e}(u', t') = \tilde{e}(u'', t'')$ kann der Fall $u', u'' \in B(u_i, 3\delta_{u_i})$ wegen (*) nicht auftreten. Der Fall $u' \in B(u_i, \delta_{u_i})$ und $u'' \in B(u_j, \delta_{u_j}) \setminus B(u_i, 3\delta_{u_i})$ ergäbe $f_i(u') = \text{dist}(g(u'), g(\bar{B} \setminus B(u_i, 3\delta_{u_i}))) \leq \|g(u') - \tilde{e}(u', t')\| + \text{dist}(\tilde{e}(u', t'), g(u'')) \leq |t'| + \text{dist}(\tilde{e}(u', t'), g(B(u_j, \delta_{u_j}) \setminus B(u_i, 3\delta_{u_i}))) \leq \varepsilon + \|\tilde{e}(u'', t'') - g(u'')\| = 2\varepsilon$. Das ist ein Widerspruch zur Definition von ε . Somit ist $\tilde{e}|_{B \times (-\varepsilon, \varepsilon)}$ ein Diffeomorphismus. \square

Definition 2.17 (*tubulare Umgebung, Parallelfläche*) Das Bild $\tilde{e}(B \times (-\varepsilon, \varepsilon))$ heißt dann eine tubulare Umgebung von $g(\bar{B})$, und das Bild von $\tilde{e}(B \times \lambda)$ heißt Parallelfläche von $g(B)$ im Abstand λ . \triangleright

Definition 2.18 (*Variation in Normalenrichtung*) Seien M, g, n, e wie oben. Sei $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar. Dann parametrisiert

$$g^\varepsilon : U \rightarrow \mathbb{R}^n, g^\varepsilon(a) = \tilde{e}(a, \varepsilon \varphi(a)) = g(a) + \varepsilon \varphi(a) n(g(a))$$

eine *Variation von $g(U)$ in Normalenrichtung*. \triangleright

Lemma 2.19 Seien M, g, n und φ wie in der obigen Definition. Ist $B \subseteq U$, \bar{B} kompakt, dann sind für hinreichend kleine ε die Variationen von $g(B)$ in Normalenrichtung Teilmannigfaltigkeiten des \mathbb{R}^n .

Beweis: Das folgt direkt aus Lemma 2.16: Die Graphenfläche parametrisiert durch $a \in \mathbb{R}^{n-1} \mapsto (a, \varepsilon \varphi(a)) \in \mathbb{R}^n$ ist eine TMF, und ihr \tilde{e} -Bild für kleine ε ebenfalls. \square

Satz 2.20 Für B, U, g wie in Lemma 2.16 gibt es ein $\varepsilon > 0$ so, daß die Parallelfläche von $g(B)$ zum Abstand λ eine TMF des \mathbb{R}^n ist, für jedes λ mit $|\lambda| < \varepsilon$.

Beweis: Das ist ein Spezialfall des vorigen Lemmas für $\varphi = 1$. \square

Bemerkung: Ohne Schwierigkeiten können wir tubulare Umgebungen und Parallelflächen von Teilmannigfaltigkeiten M definieren, die bei kompaktem M immer existieren. \diamond

2.5 Minimalflächen

Definition 2.21 (Minimalfläche) Eine $(n-1)$ -dim. TMF des \mathbb{R}^n heißt Minimalfläche, wenn ihre mittlere Krümmung verschwindet. \triangleright

Für verschiedene Zwecke ist eine erweiterte Definition notwendig (z.B. mehrere TMF mit Rand, die längs ihrer Ränder zusammenhängen), auf die wir hier nicht eingehen wollen.

Satz 2.22 (Variation der Oberfläche) Sei $g : U \subseteq \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Parametrisierung einer TMF des \mathbb{R}^n ($n > 1$), $B \subseteq \bar{B} \subseteq U$ und \bar{B} kompakt. Sei ferner $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\varphi|_{\partial B} = 0$ gegeben. Dann gilt:

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \text{Vol}(g^\varepsilon(\bar{B})) = \int_{\bar{B}} (1-n) \cdot \varphi \cdot H dO$$

Die Variation der Oberfläche verschwindet für alle Variationen in Normalenrichtung genau für $H = 0$ in \bar{B} .

Beweis: Zur Vorbereitung berechnen wir für $A \in \text{GL}_n$ und $V, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$:

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \det(E + tV) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \det \begin{bmatrix} 1 + tv_{11} & tv_{12} & \dots \\ \vdots & \ddots & \\ tv_{n1} & \dots & 1 + tv_{nn} \end{bmatrix} \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (1 + t(v_{11} + \dots + v_{nn}) + t^2(\dots)) = \text{tr}(V); \\ \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \det(A + tB) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \det(A) \det(E + tA^{-1}B) = \det(A) \text{tr}(A^{-1}B). \end{aligned}$$

Wir betrachten die Variation von g , welche durch $g^\varepsilon(u) = g(u) + \varepsilon\varphi(u) \cdot n$ parametrisiert wird, und bestimmen die Koeffizienten der 1. Grundform: $\partial_j^\varepsilon(u) = \partial_j(u) + \varepsilon(\varphi_{,j} \cdot n + \varphi \cdot \partial_j n)$, $g_{jk}^\varepsilon = \langle \partial_j + \dots, \partial_k + \dots \rangle = \langle \partial_j, \partial_k \rangle - \varepsilon\varphi \langle \partial_j, \sigma(\partial_k) \rangle - \varepsilon\varphi \langle \partial_k, \sigma(\partial_j) \rangle + \varepsilon^2(\dots) = g_{jk} - 2\varepsilon\varphi h_{jk} + \varepsilon^2(\dots)$. Dann ist

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \det(g_{jk}^\varepsilon) &= -2\varphi \cdot \det(g_{jk}) \cdot \text{tr}((g_{jk})^{-1} \cdot (h_{jk})). \\ \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \sqrt{\det(g_{jk}^\varepsilon)} &= \frac{1}{2\sqrt{\dots}} \left. \frac{d}{d\varepsilon} \det(g_{jk}^\varepsilon) \right|_{\varepsilon=0} = -\varphi \cdot \sqrt{\det(g_{jk})} \cdot \text{tr}(h_j^k). \end{aligned}$$

Nun können wir die Variation der Oberfläche durch ein Oberflächenintegral ausdrücken, in dem $H = \frac{1}{n-1} \text{tr}(h_j^k)$ vorkommt:

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} O^\varepsilon = \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \int \sqrt{\det(g_{jk}^\varepsilon)} = \int \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \sqrt{\dots} = - \int (n-1)\varphi \cdot H dO.$$

Da wir $\varphi = H$ wählen können, verschwindet die Variation der Oberfläche genau bei $H = 0$, außer es ist $n = 1$. \square

Bemerkung: Da kleine Falten die Oberfläche vergrößern, würde man annehmen, daß jede Fläche, die das Oberflächenfunktional stationär macht, zumindest ein lokales Minimum darstellt. Es muß sich aber nicht um ein globales Minimum handeln. \diamond

Satz 2.22 liefert eine Begründung für die Bezeichnung ‘Minimalfläche’. In der Natur kommen Minimalflächen als *Seifenhäute* vor: Eine solche Seifenhaut ist bestrebt,

- die innere Spannung der Fläche zu minimieren, d.h. in jedem Punkt wird, bildlich gesprochen, ‘in alle Richtungen gleich stark gezogen’ — das heißt $\kappa_1 + \kappa_2 = 0$;
- die Oberfläche zu minimieren, d.h. die Bedingungen von **Satz 2.22** zu erfüllen.

Folgerung: Ist B ein von einer kompakten $(n-1)$ -dim. TMF M berandeter Körper im \mathbb{R}^n , und ist M_d die Schar der Parallellflächen von M , die durch das nach außen zeigende Normalvektorfeld definiert ist, so berandet M_d für kleine d eine Schar von Parallelkörpern B_d . Mit $V = \text{Vol}(B)$ und $O = \text{Vol}(M)$ ist

$$\frac{d\text{Vol}(B_r)}{dr} = \text{Vol}(M_r) \implies \text{Vol}(B_r) = V + rO - \frac{r^2}{2} \int_M (n-1)HdO + o(r^2)$$

Bemerkung: Es gilt, daß $\text{Vol}(B_r)$ ein Polynom n -ten Grades in r ist (Formel von Steiner). Die ersten Koeffizienten (bei $n > 2$) sind durch die obige Gleichung gegeben. \diamond

Definition 2.23 (*Plateausches Problem*) Unter dem *Plateauschen Problem* versteht man, zu einer gegebenen geschlossenen Raumkurve eine Minimalfläche zu finden, deren Rand die gegebene Kurve ist. \triangleright

Definition 2.24 (*isotherme Parametrisierung*) $g : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ heißt *isotherme Parametrisierung* einer 2-dim. TMF, falls

$$g_{jk}(p) = \gamma(p)^2 \cdot E_2$$

ist, d.h. wenn $dg_u : T_u\mathbb{R}^2 \rightarrow T_{g(u)}M$ eine Ähnlichkeit mit dem Faktor $\gamma(g(u))$ ist. \triangleright

Beispiel: Die Umkehrung $s : \mathbb{R}^2 \rightarrow S^2$ der stereographischen Projektion von S. 10 ist ein Beispiel für eine isotherme Parametrisierung (siehe **Bsp. 3.04**).

Ist M eine Minimalfläche, so ist das Differential dn der spärischen Abbildung $n : M \rightarrow S^2$ eine Ähnlichkeit (die Eigenwerte sind $\kappa_1, \kappa_2 = -\kappa_1$, und die Eigenvektoren sind orthogonal zueinander). Ist $K \neq 0$, so ist n lokal umkehrbar, und $n^{-1} \circ s$ ist lokal eine isotherme Parametrisierung der Minimalfläche \diamond

Satz 2.25 Jede zweidimensionale C^2 -TMF des \mathbb{R}^3 besitzt lokal eine isotherme Parametrisierung.²⁾

Lemma 2.26 Ist $g : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine isotherme Parametrisierung einer TMF und U einfach zusammenhängend, dann gilt:

$$H = 0 \iff g^1, g^2, g^3 \text{ sind analytisch,}$$

d.h. $g^i = \text{Re}(\omega^i)$ mit $\omega^i : U \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Für jedes analytische $g = \text{Re}(\omega)$ gilt: g ist isotherm genau dann, wenn $\sum_i \left(\frac{\partial \omega^i}{\partial z} \right)^2 = 0$.

²⁾ siehe M. Spivak, *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, Vol. IV, pp. 455–500.

Beweis: Wir verwenden die Schreibweise $g_{,u} = \partial_1$, $g_{,v} = \partial_2$. Durch Ableiten der Isothermalitätsrelation folgt (i) $\langle g_{,u}, g_{,u} \rangle = \langle g_{,v}, g_{,v} \rangle \implies 2\langle g_{,uv}, g_{,u} \rangle = \langle g_{,vv}, g_{,v} \rangle$ und $2\langle g_{,uu}, g_{,u} \rangle = \langle g_{,uv}, g_{,v} \rangle$; sowie (ii) $\langle g_{,u}, g_{,v} \rangle = 0 \implies 2\langle g_{,uv}, g_{,v} \rangle + \langle g_{,u}, g_{,vv} \rangle = 0$ und $2\langle g_{,uu}, g_{,v} \rangle + \langle g_{,u}, g_{,uv} \rangle = 0$, d.h. insgesamt

$$\langle g_{,uu} + g_{,vv}, g_{,u} \rangle = \langle g_{,uu} + g_{,vv}, g_{,v} \rangle = 0.$$

g ist analytisch genau dann, wenn $g_{,uu} + g_{,vv} = 0$, d.h. wenn zusätzlich zu den obigen beiden Relationen auch $\langle g_{,uu} + g_{,vv}, n \rangle = 0$ gilt. Wegen $g_{jk} = \gamma \delta_{jk}$ ist $H = \text{tr}(h_j^k)/2 = \frac{1}{2\gamma^2} \langle g_{,uu} + g_{,vv}, n \rangle$, was zu zeigen war.

Sei nun $\omega^j(u + iv) = g^j(u + iv) + ih^j(u + iv)$. Wir haben

$$\sum \left(\frac{d\omega^j}{dz} \right)^2 = \sum ((g_{,u}^j)^2 - (g_{,v}^j)^2 + 2ig_{,u}^j g_{,v}^j) = \|g_{,u}\|^2 - \|g_{,v}\|^2 + 2i\langle g_{,u}, g_{,v} \rangle.$$

Dieser Ausdruck verschwindet genau für isothermes g . \square

Satz 2.27 Eine Minimalfläche läßt sich in der Umgebung eines Punktes p in der Form $\text{Re}(\omega(z))$ mit $\omega = (\omega^1, \omega^2, \omega^3)$, ω^i holomorph, $\sum_i \left(\frac{d\omega^i}{dz} \right)^2 = 0$ parametrisieren. Umgekehrt erhält man für jedes solche ω eine Minimalfläche.

Beweis: Ist $K(p) \neq 0$, so ist die sphärische Abbildung lokal regulär, und die erste Aussage folgt aus dem obigen Beispiel zusammen mit Lemma 2.26. Ist $K(p) = 0$, so muß man anstelle des Beispiels Satz 2.25 benutzen. Die Umkehrung folgt direkt aus Lemma 2.26. \square

Das Plateausche Problem ist für unsere Mittel zu schwierig. Eine Minimalfläche nicht durch eine geschlossene Randkurve, sondern durch einen Flächenstreifen festzulegen, ist leichter:

Definition 2.28 (Björlingsches Problem) Seien $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ und $n : I \rightarrow S^2$ reell-analytisch. Gesucht ist eine Minimalfläche, die die Kurve $c(t)$ enthält und im Punkt $c(t)$ den Normalvektor $n(t)$ besitzt. \triangleright

Satz 2.29 (Lösung des Björlingschen Problems) Seien $c(z)$ und $n(z)$ holomorphe Funktionen, die $c(t)$ und $n(t)$ in ein einfach zusammenhängendes Gebiet $I \times iJ \subseteq \mathbb{C}$ fortsetzen, und sei $u_0 \in I$. Dann hat das Björlingsche Problem die Lösung

$$\omega(z) = c(z) - i \int_{u_0}^z n(\zeta) \times \dot{c}(\zeta) d\zeta$$

Beweis: Wir bezeichnen komplexe Ableitungen mit einem Strich: $\omega' = c' - in \times c'$. Bei $g = \text{Re}(\omega)$ ist $\omega'(u + iv) = g_{,u} + ig_{,v}$. Wir berechnen $\langle \omega', n \rangle = \langle g_{,u}, n \rangle + i\langle g_{,v}, n \rangle$, d.h. $\langle \omega', n \rangle = 0$ ist notwendig und hinreichend dafür, daß n ein Normalvektorfeld der durch g parametrisierten Fläche ist. Für reelles z folgt dies aus $\langle \omega', n \rangle = \langle c' - in \times c', n \rangle = \langle c', n \rangle - i \det(n, c', n) = 0$.

Wir zeigen $g(z) = c(z)$ für reelles z durch $g(z) = g(u + i \cdot 0) = \text{Re}(c(u) + i \int_{u_0}^u n(t) \cdot \dot{c}(t) dt) = \text{Re}(c(u)) = c(u)$.

Noch zu zeigen ist $\langle \omega', \omega' \rangle = 0$. Dies folgt aus $\langle c' - in \times c', c' - in \times c' \rangle = \langle c', c' \rangle - 2i\langle c', n \times c' \rangle - \langle n \times c', n \times c' \rangle = \langle c', c' \rangle - \langle n, n \rangle \langle c', c' \rangle = 0$. Für reelles z ist die holomorphe Funktion $\langle n, n \rangle$ gleich 1, also für alle z gleich 1. Damit verschwindet der obige Ausdruck und $\langle \omega', \omega' \rangle = 0$. \square

3. Kapitel

Differenzierbare Mannigfaltigkeiten

Dieses und die folgenden Kapitel sind so geschrieben, daß der Begriff der abstrakten ‘differenzierbaren Mannigfaltigkeit’ in [Kap. 3.1](#) definiert wird, der Text ab [Kap. 3.3](#) jedoch so gestaltet ist, daß man jederzeit für ‘Mannigfaltigkeit’ auch ‘Teilmannigfaltigkeit des \mathbb{R}^n ’ einsetzen kann.

3.1 Differenzierbare Mannigfaltigkeiten

Bisher betrachteten wir Teilmannigfaltigkeiten des \mathbb{R}^n . Der umgebende Raum stellte uns Ableitungsvektoren, den Tangentialvektorraum, ein Skalarprodukt und Normalvektoren zur Verfügung. Wir wollen nun abstrakte differenzierbare Mannigfaltigkeiten betrachten, die nicht notwendigerweise in einem \mathbb{R}^n eingebettet liegen.

Definition 3.01 (*Klebeabbildungen, Klebedaten*) Seien $\{U_i \mid i \in I\}$ offene Teilmengen des \mathbb{R}^n und $\varphi_{ij} : U_i \rightarrow U_j$ Diffeomorphismen von offenen Teilmengen von U_i auf offenen Teilmengen von U_j mit $\varphi_{ij} = \varphi_{ji}^{-1}$, $\varphi_{ik} = \varphi_{ij} \circ \varphi_{jk}$ überall dort, wo definiert, und $\varphi_{ii} = \text{id}_{U_i}$. Dann heißen die φ_{ij} *Klebeabbildungen*, und die Gesamtheit der U_i mit den Klebeabbildungen nennt man *Klebe-Daten*. \triangleright

Beispiel: Wir können uns eine offene Überdeckung einer Fläche durch Kartenumgebungen vorstellen, mit $\varphi_i : V_i \subseteq M \rightarrow U_i$. Die Abbildungen $\varphi_{ij} = \varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ erfüllen dann die Bedingungen dieser Definition. \diamond

Wir betrachten die Relation; $x \sim y$ genau dann, wenn $\exists i, j \in I$ mit $x \in U_i$, $y \in U_j$, $\varphi_{ij}(x) = y$. ‘ \sim ’ ist offenbar eine Äquivalenzrelation.

Beispiel: (Fortsetzung) In diesem Beispiel ist ‘ \sim ’ nichts anderes als die Gleichheits-Relation für Punkte in M . Die offenen Mengen V_i bzw. U_i sind durch die Abbildungen φ_{ij} aneinandergeklebt. \diamond

Hier gehen wir den umgekehrten Weg: wir starten von offenen Mengen U_i , und definieren eine abstrakte Mannigfaltigkeit durch Zusammenkleben:

Definition 3.02 (*differenzierbare Mannigfaltigkeit, Karte*) Seien (U_i) , (φ_{ij}) Klebedaten und ‘ \sim ’ die dadurch definierte Äquivalenzrelation. Sei M die Menge der Äquivalenzklassen von ‘ \sim ’.

Die natürlichen Abbildungen $\varphi_i : M \rightarrow U_i$ heißen *Karten*, alle Karten zusammen heißen *Atlas*, und ihre Umkehrungen heißen *lokale Parametrisierungen* von M . Eine Teilmenge $U \subseteq M$ heißt *offen*, wenn alle $\varphi_i(U) \subseteq U_i$ offen sind. Die Abbildungen $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$ heißen *Koordinatenwechsel* oder *Kartenwechsel*.

Die Menge M heißt *differenzierbare Mannigfaltigkeit* der Dimension n , falls die dadurch bestimmte Topologie¹⁾ Hausdorffsch und parakompakt ist. \triangleright

Bemerkung: Eine alternative Definition einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit ist die folgende: M sei ein parakompakter Hausdorffraum, $\varphi_i : M \rightarrow U_i$ seien Homöomorphismen, deren Definitionsgebiete M überdecken, und $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ seien Diffeomorphismen. \diamond

Bemerkung: Die Forderung an die Topologie, parakompakt zu sein, ist jedenfalls

¹⁾Daß durch diese Definition von ‘offenen Mengen’ tatsächlich eine Topologie bestimmt ist, ist eine leichte Übungsaufgabe.

dann erfüllt, wenn wir höchstens abzählbar viele Klebeabbildungen verwenden. Diese Eigenschaft wird in dieser Vorlesung nicht verwendet werden und ist äquivalent zur Gültigkeit von Satz 3.17 oder Satz 4.50. \diamond

Bemerkung: Die Forderung an die Topologie, Hausdorffsch zu sein, schließt das ‘verkehrte Zusammenkleben’ der Kartenumgebungen aus. \diamond

Beispiel: Verkleben wir $U_1 = (0, 2)$ und $U_2 = (4, 6)$ mittels $\varphi_{1,2} : (1, 2) \rightarrow (4, 5)$, $\varphi_{1,2}(x) = x + 3$, so erhalten wir eine differenzierbare Mannigfaltigkeit homöomorph zum Intervall $(0, 3)$.

Verkleben wir $U_1 = (0, 2)$ und $U_2 = (5, 7)$ mittels $\varphi_{1,2} : (1, 2) \mapsto (6, 7)$, $\varphi_{1,2}(x) = x + 5$,

so ist M kein Hausdorff-Raum, weil jede Umgebung von $[1]_{\sim}$ mit jeder Umgebung von $[6]_{\sim}$ einen nichtleeren Durchschnitt besitzt. \diamond

Lemma 3.03 *Ist M eine Teilmannigfaltigkeit des \mathbb{R}^n und sind $\tilde{\varphi}_j$ Kartenabbildungen (lokale Diffeomorphismen) in den \mathbb{R}^n , so setzen wir $U_j = \tilde{\varphi}_j(M \cap \tilde{V}_j)$, und $\varphi_{ij} = \tilde{\varphi}_j \circ \tilde{\varphi}_i^{-1}|_{U_i}$. Die Abbildungen φ_{ij} sind Diffeomorphismen.*

Folgerung: Offenbar entsteht durch Verkleben der U_j mit Hilfe der Abbildungen φ_{ij} ein topologischer Raum homöomorph zu M . M ist daher eine differenzierbare Mannigfaltigkeit.

3.2 Tangentialvektoren und Abbildungen

Ab jetzt wollen wir auch für k -dimensionale TMF M des \mathbb{R}^n den Begriff einer Karte (außer dort, wo es explizit erwähnt wird) so verstehen, daß durch die Kartenabbildung φ_j eine offene Teilmenge von M auf eine offene Teilmenge U_j des \mathbb{R}^k abgebildet wird. Wir finden solche Karten durch Einschränken der ‘alten’ TMF-Karten auf M .

Im Folgenden sind (falls nicht anders erwähnt) M und N differenzierbare Mannigfaltigkeiten mit den Karten $(U_j, \varphi_j)_{(j \in J)}$ und $(U'_k, \varphi'_k)_{(k \in K)}$.

Definition 3.04 (Koordinatendarstellung)

Seien $f : \mathbb{R}^k \rightarrow M$ bzw. $f : M \rightarrow \mathbb{R}^k$ bzw. $f : M \rightarrow N$ Abbildungen. Dann heißen $\varphi'_k \circ f$ bzw. $f \circ \varphi_j^{-1}$ bzw. $\varphi'_k \circ f \circ \varphi_j^{-1}$ die Koordinatendarstellungen von f bezüglich der Karten φ_j, φ'_k . \triangleright

Definition 3.05 (differenzierbar (auf einer MF)) $f : \mathbb{R}^k \rightarrow M$ bzw. $f : M \rightarrow \mathbb{R}^k$ bzw. $f : M \rightarrow N$ heißt differenzierbar (oder C^r), falls die Koordinatendarstellung von f differenzierbar (oder C^r) ist. \triangleright

Satz 3.06 Die Differenzierbarkeit auf einer MF ist ein wohldefinierter Begriff, d.h. er hängt nicht von der speziellen Wahl der Karten ab. Für TMF stimmen die hier definierten Begriffe mit den früher definierten überein.

Wollen wir Tangentialvektoren und Tangentialräume von abstrakten Mannigfaltigkeiten definieren, so stellt sich nun das Problem, daß wir keinen umgebenden Raum zur Verfügung haben, der uns in natürlicher Weise die Ableitung zur Verfügung stellt.

Definition 3.07 (Kurve, Tangentialvektor)

Eine differenzierbare Abbildung $c : I \rightarrow M$ heißt *Kurve*. Wir wählen eine Karte φ um p . Ein *Tangentialvektor* an M im Punkt p ist eine Äquivalenzklasse von Kurven bezüglich der Äquivalenzrelation $c \approx \bar{c} \iff p = c(0) = \bar{c}(0)$ und $\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(\varphi \circ c) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(\varphi \circ \bar{c})$. Die Menge der Tangentialvektoren in p wird mit $T_p M$ bezeichnet. Die Vereinigung der $T_p M$ ist das Tangentialbündel TM von M . \triangleright

Wir schreiben $X_p = v = \dot{c}(0)$ für den durch c bestimmten Tangentialvektor und $d\varphi(X_p) = d\varphi(v) := \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \varphi \circ c$ für dessen Koordinatendarstellung bzgl. einer Karte φ . Speziell bezeichnen wir mit ∂_j den Tangentialvektor, dessen Koordinatendarstellung gleich dem j -ten kanonischen Basisvektor e_j des \mathbb{R}^n ist.

Definition 3.08 (Richtungsableitung) Sei $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ und $X_p = \dot{c}(0) \in T_p M$. Die *Richtungsableitung* in Richtung X_p ist definiert als

$$X_p(f) := \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f \circ c(t)$$

\triangleright

Lemma 3.09 Für die Richtungsableitung gilt $X_p(f + g) = X_p(f) + X_p(g)$ und $X_p(fg) = (X_p f) \cdot g(p) + f(p) \cdot (X_p g)$.

Beweis: Sei c eine Kurve mit $c(0) = p$, $\dot{c}(0) = X_p$. Dann ist $X_p(f + g) = d(f + g)(\dot{c}(0)) = d\tilde{f}(\dots) + d\tilde{g}(\dots) = X_p f + X_p g$. $X_p(fg) = d(fg)(\dot{c}(0)) = \tilde{f}d\tilde{g}(\dots) + \tilde{g}d\tilde{f}(\dots) = fX_p g + gX_p f$. \square

Lemma 3.10 Sind $X_p, Y_p \in T_p M$ und ist $\lambda \in \mathbb{R}$, dann gibt es eindeutig bestimmte Tangentialvektoren $X_p + Y_p$ und $\lambda \cdot X_p$ mit

$$(X_p + Y_p)f = X_p f + Y_p f \quad (\lambda \cdot X_p)f = \lambda \cdot X_p f$$

Ist $\dim(M) = n$, so ist $(T_p M, \mathbb{R}, +, \cdot)$ ein n -dim. Vektorraum. Ist φ eine Karte, so ist $d\varphi$ ein VR-Isomorphismus. Die durch eine Karte definierten Tangentialvektoren $\partial_1, \dots, \partial_n$ sind eine Basis von $T_p M$.

Beweis: Ist φ eine Karte, und sind \tilde{f}, \tilde{c} die Koordinatendarstellungen von f und c , so ist $f \circ c = \tilde{f} \circ \tilde{c}$. Sei $\dot{c}(0) = X_p$. Dann ist $X_p f = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (f \circ c) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\tilde{f} \circ \tilde{c}) = d\tilde{f}(\tilde{c}(0))$. Damit ist $X_p f$ wohldefiniert, weil nur von X_p abhängig. Es ist $d\varphi(X_p) = \tilde{c}(0)$, d.h. $d\varphi$ ist injektiv.

Zu jedem Tangentialvektor v in $\varphi(p)$ gibt es ein $X_p \in T_p M$ mit $d\varphi(X_p) = v$: Sei \tilde{c} eine Kurve mit $\dot{\tilde{c}}(0) = v$, dann ist X_p der zu $c = \varphi^{-1} \circ \tilde{c}$ gehörige Tangentialvektor.

$d\varphi$ ist nach Konstruktion linear (Übungsbeispiel), also ein Vektorraum-Isomorphismus. \square

Definition 3.11 (Differential einer Abbildung) Das Differential df_p bzw. $df(p)$ einer Abbildung $f: M \rightarrow N$ im Punkt p ist gegeben durch $df(p): T_p M \rightarrow T_{f(p)} N, X \mapsto \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} f \circ c$. Das Differential von f ist dann eine Abbildung $df: TM \rightarrow TN$ mit der Eigenschaft $T_p M \xrightarrow{df} T_{f(p)} N$. \triangleright

Lemma 3.12 Das Differential ist wohldefiniert, d.h. es hängt nicht von der Wahl der Kurve c ab. $df(p): T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ ist eine lineare Abbildung. Ist $\tilde{f} = \varphi' \circ f \circ \varphi^{-1}$ die Koordinatendarstellung von f bezüglich zweier Karten $\varphi: M \rightarrow U, \varphi': N \rightarrow U'$, so ist das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} TM & \xrightarrow{df} & TN \\ d\varphi \downarrow & & \downarrow d\varphi' \\ TU & \xrightarrow{d\tilde{f}} & TU' \end{array}$$

kommutativ (d.h. die Koordinatendarstellung des Differentials ist gleich dem Differential der Koordinatendarstellung).

Beweis: Seien φ, φ' Karten für M, N und $\tilde{c} = \varphi \circ c, \tilde{f} = \varphi' \circ f \circ \varphi^{-1}$. Mit $v = \dot{c}(0)$ ist $df(v) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (f \circ c)$. Wir wenden φ' auf diese Gleichung an und erhalten $d\varphi'(df(v)) =$

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\varphi' \circ f \circ c) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\tilde{f} \circ \tilde{c}) = d\tilde{f}(\tilde{c}(0)).$$

Damit ist df wohldefiniert und linear. \square

Folgerung: 'Alle lokalen Aussagen' über differenzierbare Abbildungen $f: U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ gelten auch für $f: M \rightarrow N$ (z.B. der Satz über die Umkehrfunktion und der Satz über implizite Funktionen).

Die Klebeabbildungen φ_{ij} sind hier immer C^∞ . Wären sie nur C^r (und M damit eine ' C^r -Mannigfaltigkeit'), so wäre die Differenzierbarkeit von Abbildungen aus und nach M nur bis zu C^r sinnvoll definierbar. Abgesehen von der größeren Bequemlichkeit von C^∞ -Mannigfaltigkeiten kann man zeigen, daß es keinen Sinn macht, endliche Differenzierbarkeit zuzulassen — man erhält dieselben Mannigfaltigkeiten, nur mit 'ungeschickter gewählten' Karten:

Satz 3.13 Für jede differenzierbare C^r -Mannigfaltigkeit M gibt es eine differenzierbare C^∞ -Mannigfaltigkeit M' und einen C^r -Diffeomorphismus von M auf M' .²⁾

Bei Teil-Mannigfaltigkeiten ist es sinnvoll, endliche Differenzierbarkeiten zuzulassen. Eine C^r -TMF des \mathbb{R}^n ist aber immer eine C^r -Einbettung einer C^∞ -Mannigfaltigkeit in den \mathbb{R}^n :

Definition 3.14 (Immersion, Einbettung) $f: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt *Immersion*, wenn df regulär ist, d.h. wenn jedes $df(p)$ regulär ist. $f: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt *Einbettung*, falls df regulär, f injektiv, und f^{-1} stetig ist. \triangleright

Satz 3.15 Ist M kompakt und ist $f: M \rightarrow N$ injektiv und regulär, dann ist f eine Einbettung.

Beweis: z.z.: $U \in M$ offen $\implies f(U)$ offen. Sei also U offen $\implies M \setminus U$ abgeschlossen $\implies M \setminus U$ kompakt $\implies f(M \setminus U)$ kompakt $\implies f(M \setminus U)$ abgeschlossen $\implies f(U) = f(M) \setminus f(M \setminus U)$ offen. \square

Satz 3.16 Ist $f: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Einbettung, so ist $f(M)$ eine differenzierbare TMF diffeomorph zu M .

Beweis: 'Einbettung' heißt, daß f, f^{-1} injektiv und stetig sind. Für alle $p \in M \ni$ Umgebung U von p , Umgebung V von $f(p)$ und (Rangsatz) lokale Diffeomorphismen φ, ψ mit $\varphi \circ f \circ \psi^{-1}: \varphi(U) \rightarrow \psi(V), (x^1, \dots, x^m) \mapsto (x^1, \dots, x^m, 0, \dots, 0)$. f^{-1} ist stetig, also ist $f(U)$ offen in $f(M)$, d.h. $f(U) = f(M) \cap W$ mit W offen im \mathbb{R}^n . Damit ist $\psi|_{(V \cap W)}$ eine TMF-Karte für $f(M)$. \square

²⁾ Siehe J. R. Munkres: *Elementary Differential Topology* Princeton Univ. Press, 1961.

Satz 3.17 (Satz von H. Whitney) Für alle n -dim. differenzierbaren MF mit höchstens abzählbar vielen Zusammenhangskomponenten existiert eine Immersion in den \mathbb{R}^{2n-1} und eine Einbettung in den \mathbb{R}^{2n} .³⁾

3.3 Vektorfelder und Integralkurven

Definition 3.18 (Vektorfeld) Eine Abbildung $X : M \rightarrow TM$ mit $X(p) \in T_p M$ heißt C^r -Vektorfeld, wenn die Koordinatendarstellung $d\varphi \circ X \circ \varphi^{-1}$ bezüglich jeder Karte $\varphi \in C^r$ ist. \triangleright

Ist φ eine Karte, so sind durch φ die Vektorfelder $\partial_1, \dots, \partial_n$ bestimmt. Hat das Vektorfeld X bezüglich der Karte φ die Koordinatendarstellung $(x^1(u), \dots, x^n(u))$ mit $u \in U \subseteq \mathbb{R}^n$, so ist offenbar

$$X = \sum_{i=1}^n x^i \partial_i = x^i \partial_i.$$

Hier haben wir die Einsteinsche Summenkonvention verwendet.

Definition 3.19 (Lie-Klammer) Sind $X = x^j \partial_j$ und $Y = y^j \partial_j$ Vektorfelder, dann heißt das Vektorfeld

$$[X, Y] := (x^j \partial_j y^k - y^j \partial_j x^k) \partial_k$$

die Lie-Klammer (oder Poisson-Klammer) von X und Y . \triangleright

Man beachte, daß $\partial_i y^k$ die Richtungsableitung der Funktion y^k längs der i -ten Koordinate bedeutet.

Lemma 3.20 Die Lie-Klammer hat die folgenden Eigenschaften:

- (i) $[X, Y]f = XYf - YXf$, d.h. der Differentialoperator 2. Ordnung $X \circ Y - Y \circ X$ ist in Wahrheit eine Richtungsableitung längs des Vektorfeldes $[X, Y]$.
- (ii) $[\partial_i, \partial_j] = 0$, d.h. die Basisfelder kommutieren,
- (iii) $[X, Y] = -[Y, X]$ und $[X, X] = 0$ (Antisymmetrie)
- (iv) $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$ (die Jacobi-Identität).

Aus (i) folgt, daß $[X, Y]$ wohldefiniert ist und nicht von der Auswahl einer Karte abhängt.

Beweis: (i) zeigt man in lokalen Koordinaten: $[X, Y]f = (x^i \partial_i y^k - y^j \partial_j x^k) \partial_k f$. $X(Yf) = X(y^k \partial_k f) = x^i \partial_i (y^k \partial_k f) = x^i \partial_i y^k \partial_k f + x^i y^k \partial_i \partial_k f$. $Y(Xf) = y^j \partial_j (x^k \partial_k f) = y^j \partial_j x^k \partial_k f + y^j x^k \partial_j \partial_k f$.

(i) \implies (ii) ist der Satz von H. A. Schwarz: $\partial_i \partial_j f - \partial_j \partial_i f = 0$. (i) \implies (iii) ist trivial, und (i) \implies (iv) folgt durch Einsetzen und Addieren: $[X[Y, Z]]f = X[YZ]f - [YZ]Xf = XYZf - XZYf - YZXf + ZYXf$. Offenbar ist die Summe $[X[Y, Z]]f + \dots$ gleich 0. \square

Bemerkung: Der Vektorraum der C^∞ -Vektorfelder mit der Poissonklammer als Multiplikation bildet damit eine Liesche Algebra. \diamond

Definition 3.21 (Integralkurve, Fluß) Ist $X : M \rightarrow T_p M$ ein Vektorfeld und $c : I \rightarrow M$ eine Kurve mit $\dot{c}(t) = X_{c(t)}$, so heißt c Integralkurve oder Flußlinie von X . Ist c Integralkurve mit $c(0) = X_p$, dann heißt $\text{Fl}_X^t(p) = \text{Fl}_X(p, t) := c(t)$ der Fluß von X . \triangleright

³⁾H. Whitney: The self-intersections of a smooth n -manifold in $2n$ -space, *Annals of Math.* **45** (1944), 220–246. Für einen Beweis für $\mathbb{R}^{2n}/\mathbb{R}^{2n+1}$ siehe Th. Bröcker, K. Jänich: *Einführung in die Differentialtopologie*.

Satz 3.22 *Zwei Integralkurven mit gleichen Anfangsbedingungen (Punkt und Ableitungsvektor) stimmen überein. Für alle $x \in M$ existieren eine offene Umgebung $U \subseteq M$ und ein $\varepsilon > 0$, sodaß $\text{Fl}_X^t(y)$ für alle $y \in U$ und $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ definiert ist. Fl_X ist differenzierbar in beiden Variablen.*

Beweis: Das ist eine andere Formulierung von Satz A.18 über die Lösungen von Differentialgleichungen. \square

Lemma 3.23 *Ist $c(t)$ Integralkurve, so ist $\tilde{c}(t) := c(t + t_0)$ ebenfalls Integralkurve, falls definiert, und $\text{Fl}_X^s \circ \text{Fl}_X^t(p) = \text{Fl}_X^{s+t}(p)$, falls definiert.*

Beweis: $(\frac{d}{dt}c)(t + t_0) = (\frac{d}{dt}\tilde{c})(t)$, d.h. auch \tilde{c} erfüllt die Differentialgleichung $\dot{c} = X_{c(t)}$. Damit ist \tilde{c} Integralkurve. Die zweite Aussage ist eine andere Formulierung der ersten. \square

Satz 3.24 *Seien X, Y Vektorfelder in M , und $\varphi : M \rightarrow U$ eine Karte. Die Koordinatendarstellungen von Vektorfeldern (sie sind Vektorfelder in U) seien mit $\tilde{}$ bezeichnet. Dann gilt: $[\tilde{X}, \tilde{Y}] = [\tilde{X}, \tilde{Y}]$, $\text{Fl}_{\tilde{X}}^t \circ \varphi = \varphi \circ \text{Fl}_X^t$, sowie*

$$\varphi(\text{Fl}_X^t \circ \text{Fl}_Y^s(p)) - \varphi(\text{Fl}_Y^s \circ \text{Fl}_X^t(p)) = \text{Fl}_{\tilde{X}}^t \circ \text{Fl}_{\tilde{Y}}^s(p) - \text{Fl}_{\tilde{Y}}^s \circ \text{Fl}_{\tilde{X}}^t(p) = st[\tilde{X}, \tilde{Y}]_p + \dots,$$

und es kommen in der Taylorreihe nur gemischte Glieder vor.

Beweis: $X = x^j \partial_j \iff \tilde{X} = x^j \tilde{\partial}_j$, wobei $\tilde{\partial}_1, \dots, \tilde{\partial}_n$ die kanonischen Basisvektoren im \mathbb{R}^n sind. Damit ist die Definition von $[\cdot, \cdot]$ für X, Y und \tilde{X}, \tilde{Y} dieselbe, und der Fluß vertauscht mit der Karte.

Die Taylorreihe der Koordinatendarstellung von $\text{Fl}_X^t \circ \text{Fl}_Y^s$ wird nun im Koordinatengebiet berechnet, wir schreiben nur X, Y anstelle von \tilde{X}, \tilde{Y} . O.B.d.A. sei $p = 0$. Sei $\psi(s, t) = \text{Fl}_X^t \circ \text{Fl}_Y^s - \text{Fl}_Y^s \circ \text{Fl}_X^t$, und seien $c(t) = \text{Fl}_X^t(0)$ und $d(s) = \text{Fl}_Y^s(0)$ die von 0 ausgehenden Integralkurven von X und Y . Dann ist $\frac{\partial^r \psi}{\partial s^r}(0, 0) = \frac{d^r}{ds^r} \Big|_{s=0} \psi(0, s) = 0$ für alle r ,

und analog $\frac{\partial^r \psi}{\partial s^r}(0, 0) = 0$.

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial s \partial t}(0, 0) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \left(\frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=0} \text{Fl}_Y^s \circ \text{Fl}_X^t(0) \right) - \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \left(\frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} \text{Fl}_X^t \circ \text{Fl}_Y^s(0) \right)$$

$$bs \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} Y_{\text{Fl}_X^t(0)} - \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} X_{\text{Fl}_Y^s(0)}$$

$$bs \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} X \circ c - \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} Y \circ d$$

$$bs \left(\frac{\partial y^1}{\partial u^k} \dot{c}^k - \frac{\partial x^1}{\partial u^k} \dot{c}^k, \dots \right) = (\partial_k y^1 \cdot \dot{c}^k - \partial_k x^1 \cdot \dot{c}^k, \dots) = [X, Y].$$

Damit haben wir die Koeffizienten $(r, 0)$, $(0, r)$ und $(1, 1)$ der Taylorreihe von $\psi(s, t)$ gefunden. \square

Lemma 3.25 *Für Vektorfelder X, Y gilt $[X, Y] = 0 \iff \text{Fl}_X^t \circ \text{Fl}_Y^s = \text{Fl}_Y^s \circ \text{Fl}_X^t$*

Beweis: ‘ \Leftarrow ’ folgt aus Satz 3.24. Um die Umkehrung zu zeigen, tun wir folgendes: Sei $x(t) = \text{Fl}_X^t(p)$ die Flußlinie von X durch p . Wir möchten zeigen, daß die Vektorfelder $d\text{Fl}_X^t(Y_p) := \bar{Y}_{x(t)}$ und $Y_{x(t)}$ längs $x(t)$ gleich sind. Wir rechnen in einem Kartengebiet, und unter der Ableitung eines Vektorfeldes $(c(t); v(t))$ verstehen wir den Vektor dv/dt . $\frac{d\bar{Y}_{x(t)}}{dt} \Big|_{t=t_0} = \frac{d}{dt} \Big|_{t=t_0} d\text{Fl}_X^t(Y_p) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} d\text{Fl}_X^t \circ d\text{Fl}_X^{t_0}(Y_p) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} d\text{Fl}_X^t \bar{Y}_{t_0}$. d.h. $\bar{Y}_{x(t)}$ erfüllt die Differentialgleichung $\frac{d\bar{Y}}{dt} =$

$K_t(\bar{Y}_{x(t)})$, mit der von t abhängigen linearen Abbildung $K_t = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} d_{x(t_0)} \text{Fl}_X^t$. Betrachten nun das Vektorfeld $Y_{x(t)}$ längs der Flußlinie $x(t) = \text{Fl}_X^t(p)$: Seine Ableitung ist gegeben durch $\frac{dY_{x(t)}}{dt} \Big|_{t=0} = \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} \frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=0} \text{Fl}_Y^s \circ \text{Fl}_X^t(x(t_0))$. $[X, Y] = 0 \implies \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} \frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=0} \text{Fl}_X^s \circ \text{Fl}_Y^t(x(t_0)) = \frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=0} \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} \text{Fl}_X^s \circ \text{Fl}_Y^t(x(t_0))$. $bs \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} d\text{Fl}_X^t(Y_{x(t_0)}) = K_t(Y_{x(t_0)})$. Wir sehen, daß $\bar{Y}_{x(t)}$ und $Y_{x(t)}$ dieselbe Differentialgleichung erfüllen. Bei $t = 0$ stimmen beide Vektorfelder überein, also sind sie gleich.

Wir haben somit gezeigt, daß $d\text{Fl}'_X$ das Vektorfeld Y in das Vektorfeld Y überführt. Damit führt Fl'_X die Integralkurven von Y in Integralkurven von Y über: Ist $c(s)$ die Integralkurve von Y mit $c(0) = p$, so ist $\text{Fl}'_X \circ c(s)$ die Integralkurve von Y durch $\text{Fl}'_X(p)$, d.h. $\text{Fl}'_X \circ \text{Fl}^s_Y(p) = \text{Fl}^s_Y \circ \text{Fl}'_X(p)$. \square

3.4 Tensorfelder

Wir haben bisher verschiedenen Abbildungen definiert, die Tangentialvektoren als Argumente besitzen (z.B. das Skalarprodukt auf einer Fläche im \mathbb{R}^n , oder das Differential einer Abbildung). Um diese verschiedenen Abbildungen einheitlich behandeln zu können, definieren wir den Begriff des Tensorfeldes auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit.

Definition 3.26 (*Linearform, Multilinearform*) Ist $f : V^n \rightarrow \mathbb{R}$ in jedem Argument linear (d.h. es gilt $f(x_1, \dots, \lambda x_i + \mu y_i, \dots, x_n) = \lambda f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) + \mu f(x_1, \dots, y_1, \dots, x_n)$), so heißt f eine Multilinearform. Die Menge der Multilinearformen bildet einen Vektorraum, der mit $\otimes^n V^*$ oder $\mathfrak{Z}_n(V)$ bezeichnet wird. \triangleright

Beispiel: Der Dualraum von V besteht aus den Linearformen auf V , und es ist $V^* = \mathfrak{Z}_1 V$. Beispiele für Elemente von $\mathfrak{Z}_2 V$ (dem Vektorraum der Bilinearformen) sind die Skalarprodukte. \diamond

Ein Vektor $x \in V$ kann als Linearform auf dem Dualraum V^* interpretiert werden: Sein Wert $x(a^*)$ auf einer Linearform a^* ist definiert durch $a^*(x)$. Eine lineare Abbildung $L : V \rightarrow V$ kann als bilineare Abbildung auf dem Produkt $V \times V^*$ interpretiert werden: Ist $x \in V$, $a^* \in V^*$, so ist $L(x, a^*)$ definiert durch $a^*(Lx)$. Das führt zu der folgenden, allgemeineren Definition:

Definition 3.27 (*Tensor*) Eine multilineare Abbildung $V^r \times (V^*)^s \rightarrow \mathbb{R}$ heißt ein Tensor der Stufe (r, s) , oder ein r -fach kovarianter, s -fach kontravarianter Tensor. Der Vektorraum dieser Abbildungen wird mit $\otimes^r(V^*) \otimes \otimes^s V$ oder $\mathfrak{Z}_s^r V$ bezeichnet. \triangleright

Beispiel: Linearformen, Bilinearformen, Vektoren, und lineare Endomorphismen sind Tensoren der Stufen $(1, 0)$, $(2, 0)$, $(0, 1)$, und $(1, 1)$. \diamond

Definition 3.28 (*Tensorprodukt*) Sind g_1, g_2 Tensoren der Stufen (r_1, s_1) und (r_2, s_2) , so ist der Tensor $g_1 \otimes g_2$ der Stufe $(r_1 + r_2, s_1 + s_2)$ definiert durch $g_1 \otimes g_2(x_1 \dots, y_1 \dots, a_1^* \dots, b_1^* \dots) = g_1(x_1 \dots, a_1^* \dots) g_2(y_1 \dots, b_1^* \dots)$. \triangleright

Bemerkung: (*Basis, Koordinaten*) Sei e_1, \dots, e_n eine Basis in V und e^{1^*}, \dots, e^{n^*} die

dazu duale Basis (d.h. $e^{i^*}(e_j) = \delta_{ij}$). Dann bilden die n^{r+s} Multilinearformen

$$e^{i_1^*} \otimes \dots \otimes e^{i_r^*} \otimes e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_s}$$

eine Basis von $\mathfrak{Z}_s^r V$. Eine Multilinearform $g \in \mathfrak{Z}_s^r V$ kann man in der Form

$$g = \sum g_{i_1, \dots, i_r}^{j_1, \dots, j_s} e^{i_1^*} \otimes \dots \otimes e^{i_r^*} \otimes e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_s}$$

schreiben. $g_{i_1, \dots, i_r}^{j_1, \dots, j_s}$ heißen die *Koordinaten* von g . Man erhält sie durch Auswerten von g auf den Basisvektoren von V und V^* :

$$g_{i_1, \dots, i_r}^{j_1, \dots, j_s} = g(e_{i_1}, \dots, e_{i_r}, e^{j_1^*}, \dots, e^{j_s^*}).$$

Das Auswerten von g auf r Vektoren x_1, \dots, x_r mit Koordinaten $(x_1^{i_1}), \dots, (x_r^{i_r})$ (jeweils $i_k = 1, \dots, n$) und s Linearformen a^{1^*}, \dots, a^{s^*} mit Koordinaten $(a_{j_1}^{1^*}), \dots, (a_{j_s}^{s^*})$ (jeweils $j_k = 1, \dots, n$), erfolgt durch $g(x_1, \dots, a_1^*, \dots) = \sum g_{i_1, \dots, i_r}^{j_1, \dots, j_s} \cdot x_1^{i_1} \dots x_r^{i_r} \cdot a_{j_1}^{1^*} \dots a_{j_s}^{s^*}$. \diamond

Beim Rechnen mit Tensoren verwenden wir die Einsteinsche Summenkonvention: Es wird über jeden Index, der zweimal, einmal oben und einmal unten, vorkommt, von 1 bis n summiert. In der obigen Summe könnte man das Summenzeichen also auch weglassen.

Die Koordinaten eines Produkts sind offenbar gleich den Produkten der einzelnen Koordinaten: Haben $g, h, g \otimes h$ die Koordinaten $g_{\dots}^{\dots}, h_{\dots}^{\dots}, k_{\dots}^{\dots}$, so ist

$$k_{i_1, \dots, i_{r_1+r_2}}^{j_1, \dots, j_{s_1+s_2}} = g_{i_1, \dots, i_{r_1}}^{j_1, \dots, j_{s_1}} h_{i_{r_1+1}, \dots, i_{r_1+r_2}}^{j_{s_1+1}, \dots, j_{s_1+s_2}}.$$

Definition 3.29 (*symmetrische Tensoren, alternierende Tensoren*) Eine Multilinearform $g \in \mathfrak{Z}_r(V)$ ist symmetrisch, wenn ihr Wert nicht von der Reihenfolge der Argumente abhängt. Sie ist alternierend, wenn für eine Permutation $\sigma : \{1, \dots, r\} \rightarrow \{1, \dots, r\}$ gilt

$$g(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(r)}) = \text{sgn}(\sigma) \cdot g(v_1, \dots, v_r). \quad \triangleright$$

Definition 3.30 (*Alternante, Keilprodukt*) Für Multilinearformen g, g_1, \dots, g_r ist die Alternante $\mathcal{A}(g)$ und das Keilprodukt $g_1 \wedge \dots \wedge g_r$ definiert durch $\mathcal{A}(g)(v_1, \dots, v_r) = \sum_{\sigma \in S_r} \text{sgn}(\sigma) g(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(r)})$, $g_1 \wedge \dots \wedge g_r = \mathcal{A}(g_1 \otimes \dots \otimes g_r)$. \triangleright

Definition 3.31 (*Tensorfeld, Koordinaten für Tensoren*) Wir betrachten eine differenzierbare Mannigfaltigkeit M und eine Abbildung g , die jedem $p \in M$ ein Element $g_p \in \mathfrak{Z}_s^r(T_p M)$ zuweist.

Eine Karte $\varphi : M \rightarrow U$ definiert Basisfelder $\partial_1, \dots, \partial_n$. Sei (dx^1, \dots, dx^n) die zu $(\partial_1, \dots, \partial_n)$ duale Basis im zu $T_p M$ dualen Vektorraum. Durch Auswerten von g_p auf ∂_i und dx^j erhält man die Koordinatenfunktionen

$$g_{i_1, \dots, i_r}^{j_1, \dots, j_s} : M \rightarrow \mathbb{R}$$

von g . g ist differenzierbar, wenn alle Koordinatenfunktionen es sind. In diesem Fall heißt g ein (r, s) -Tensorfeld in M . g kann als Linearkombination $g = \sum g_{i_1, \dots, i_r}^{j_1, \dots, j_s} dx^{i_1} \otimes \dots \otimes dx^{i_r} \otimes \partial_{j_1} \otimes \dots \otimes \partial_{j_s}$ geschrieben werden. \triangleright

Definition 3.32 (Tensorbündel) Die Vereinigung aller $\mathfrak{Z}_s'(T_p M)$ heißt das (r, s) -Tensorbündel $\mathfrak{Z}_s^r M$ über M . \triangleright

Beispiel: Die Abbildung $p \mapsto \langle \cdot, \cdot \rangle_p$ ist ein $(2, 0)$ -Tensorfeld auf einer Fläche im \mathbb{R}^n . Die Koordinaten von $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sind $g_{ij} = \langle \partial_i, \partial_j \rangle$.

Ein Vektorfeld V ist ein $(0, 1)$ -Tensorfeld. Sind v^j die Koordinaten von V , so ist $V =$

$v^j \partial_j$. Für die Koordinatenfunktionen v^j gilt $v^j = V(dx^j)$. \diamond

Satz 3.33 (Koordinatenwechsel) Seien φ, φ' Karten und sei $\psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\psi = \varphi \circ (\varphi')^{-1}$. Sei $(x_{j'}^i(p))$ die Matrix der partiellen Ableitungen von ψ im Punkt $\varphi'(p)$, und $x_i^{j'}(p)$ die Matrix der partiellen Ableitungen von ψ^{-1} im Punkt $\varphi(p)$. Seien $g_{i_1, \dots, i_r}^{j_1, \dots, j_s}$ und $g_{i'_1, \dots, i'_r}^{j'_1, \dots, j'_s}$ Koordinaten eines Tensorfeldes g bezüglich der Karten φ, φ' . Dann ist

$$g_{i'_1, \dots, i'_r}^{j'_1, \dots, j'_s}(p) = x_{i'_1}^{j'_1} \cdots x_{i'_r}^{j'_r} \cdot x_{j_1}^{j'_1} \cdots x_{j_s}^{j'_s} g_{i_1, \dots, i_r}^{j_1, \dots, j_s}(p).$$

Beispiel: Ist $V = v^j \partial_j = v^{j'} \partial_{j'}$ ein Vektorfeld mit seinen zwei Koordinatendarstellungen bezüglich der Karten φ, φ' , so ist $v^{j'} = x_{j'}^{j'} v^j$. Ist $\langle \cdot, \cdot \rangle = g_{jk} dx^j \otimes dx^k = g_{j'k'} dx^{j'} \otimes dx^{k'}$, so ist $g_{j'k'} = g_{jk} x_{j'}^j x_{k'}^k$ (vgl. den Beweis zu Lemma 1.44). \diamond

4. Kapitel

Riemannsche Geometrie

4.1 Mannigfaltigkeiten mit Riemannscher Metrik

In diesem Kapitel ist M , falls nicht anders erwähnt, stets eine n -dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit.

Definition 4.01 (*Riemannscher Raum, Skalarprodukt*) Ein *Skalarprodukt* auf einem Vektorraum V ist eine positiv definite symmetrische Bilinearform $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$. Ist in jedem Tangentialvektorraum von M ein Skalarprodukt gegeben, sodaß die Funktionen $g_{jk} : M \rightarrow \mathbb{R}, p \mapsto \langle \partial_j, \partial_k \rangle C^r$ ($r > 0$) sind, so heißt $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ *Riemannscher Raum*, und $\langle \cdot, \cdot \rangle$ heißt *Riemannsche Metrik*. \triangleright

Die Riemannsche Metrik ist ein $(2,0)$ -Tensorfeld, und die Funktionen g_{jk} sind seine Koeffizienten. Man betrachtet mitunter (siehe Kap. 6.2) auch nicht positiv definite Bilinearformen, welche zu den *Pseudo-Riemannschen Räumen*, und schiefsymmetrische Bilinearformen, die zu *symplektischen Räumen* führen.

Beispiel: Die folgenden sind Beispiele von Riemannschen Räumen:

- Ist $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine TMF und $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Standard-Skalarprodukt des \mathbb{R}^n , so macht die Einschränkung von $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf TM die Teilmannigfaltigkeit M zu einem Riemannschen Raum.

Ist $g : U \rightarrow M$ eine lokale Parametrisierung, dann sind die Funktionen $g_{jk} := \langle \partial_j, \partial_k \rangle = \left\langle \frac{\partial g}{\partial u^j}, \frac{\partial g}{\partial u^k} \right\rangle$ die Koeffizientenfunktionen der Riemannschen Metrik.

- Ist M eine differenzierbare (Teil-)mannigfaltigkeit, parametrisiert durch $g : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$, und sind $\tilde{g}_{jk} : U \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen so, daß $(\tilde{g}_{jk}(p))$ für alle $p \in U$ eine positiv definite symmetrische Matrix ist, dann ist für $v, w \in T_{g(u)}M$ $\langle v^j \partial_j, w^k \partial_k \rangle := v^j w^k \tilde{g}_{jk}(p)$ ein Skalarprodukt, das $(g(U), \langle \cdot, \cdot \rangle)$ zu einem Riemannschen Raum macht.

- Ist $f : M \rightarrow M'$ eine reguläre Abbildung und $(M', \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Riemannscher Raum, so ist $\langle v, w \rangle := \langle df(v), df(w) \rangle$ eine Riemannsche Metrik auf M ('Pullback' von $\langle \cdot, \cdot \rangle$).

- Ein mechanisches System hänge von n Parametern ab, und die Menge seiner Zustände sei als eine n -dimensionale differenzierbare MF modelliert. Für eine lokale Parametrisierung mit Koordinaten u^1, \dots, u^n sei die kinetische Energie eine quadratische Form in den Ableitungen der Parameter: $T(u^1, \dots, u^n) = g_{jk} \dot{u}^j \dot{u}^k$. Dann ist $\langle v, v \rangle := T(v)$, $\langle v, w \rangle := \frac{1}{2}(T(v+w) - T(v) - T(w))$ eine Riemannsche Metrik in M (vgl. Kap. 6.1). \diamond

Definition 4.02 (*Bogenlänge, Energie*) Ist $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Riemannscher Raum und $c : I \rightarrow M$ eine Kurve, dann sind

$$L_a^b := \left| \int_a^b \sqrt{\langle \dot{c}, \dot{c} \rangle} dt \right| \quad \text{und} \quad E_a^b := \left| \int_a^b \langle \dot{c}, \dot{c} \rangle dt \right|$$

die Bogenlänge und die Energie von c im Intervall $[a, b]$. \triangleright

Bemerkung: Die Bogenlänge ist invariant unter Parametertransformationen (vgl. Satz 1.07), während es die Energie *nicht* ist. \diamond

Lemma 4.03 $L_a^b(c)^2 \leq |b-a| \cdot E_a^b(c)$ mit Gleichheit genau dann, wenn $\langle \dot{c}, \dot{c} \rangle = \text{const.}$

Beweis: Die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung in einem Vektorraum V mit positiv definitem Skalarprodukt lautet $\langle v, w \rangle^2 \leq \langle v, v \rangle \langle w, w \rangle$ mit Gleichheit genau für v, w linear abhängig. Wir setzen $V = C[a, b]$, $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)g(t) dt$, $v = 1$, $w = \langle \dot{c}, \dot{c} \rangle$. Daraus folgt direkt die Behauptung. \square

Wie in Def. 1.39 bezeichnen wir mit $\mathcal{C}_{p,q}$ die Menge aller stückweise differenzierbaren Kurven $c : [0, 1] \rightarrow M$ mit $c(0) = p$ und $c(1) = q$.

Satz 4.04 Nimmt E_0^1 bei $c \in \mathcal{C}_{p,q}$ ein Minimum an, so auch L_0^1 , und es gilt $\langle \dot{c}, \dot{c} \rangle = \text{const.}$ Umgekehrt gilt: Nimmt L_0^1 bei $c \in \mathcal{C}_{p,q}$ ein Minimum an (d.h. c ist eine kürzeste Verbindung in der Klasse $\mathcal{C}_{p,q}$), und ist $\langle \dot{c}, \dot{c} \rangle$ konstant, so hat auch E_0^1 bei c ein Minimum.

Beweis: Wir zeigen zuerst die Umkehrung: Sei $L(c) \leq L(c')$ für alle c' und sei $\langle \dot{c}, \dot{c} \rangle = \text{const.}$ Dann ist $E(c) = L(c)^2 \leq L(c')^2 \leq E(c')$, also ist c Minimum von E .

Sei nun $E(c) \leq E(c')$ für alle c' . Betrachte eine Parametertransformation $\gamma : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, sodaß $\bar{c} = c \circ \gamma$ die Eigenschaft $\langle \dot{\bar{c}}, \dot{\bar{c}} \rangle = \text{const.}$ hat (verwende Satz 1.08 und eine anschließende Skalierung des Parameterintervalls). Dann ist $L(c) = L(\bar{c})$ und $E(\bar{c}) = L(\bar{c})^2 = L(c)^2 \leq E(c)$, also $L(c)^2 = E(c)$. Daraus folgt $\langle \dot{c}, \dot{c} \rangle = \text{const.}$ Für jedes andere c' ist dann (o.B.d.A. $\langle \dot{c}', \dot{c}' \rangle = \text{const.}$) $L(c)^2 = E(c) \leq E(c') = L(c')^2$, also $L(c) \leq L(c')$. \square

Bemerkung: Es macht keinen Unterschied, ob wir Kurven $c : [0, 1] \rightarrow M$ oder Kurven $c : [a, b] \rightarrow M$ betrachten. \diamond

4.2 Zusammenhänge und die kovariante Ableitung

Wir wollen uns nun mit der Frage beschäftigen, in welcher Beziehung die Vektoren in den einzelnen Tangentialräumen einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit zueinander stehen. Wir möchten z.B. gerne die Änderung eines Vektorfeldes längs einer Kurve messen? Wir definieren den Begriff des affinen Zusammenhangs, der eine Richtungsableitung eines Vektorfeldes in Richtung eines Vektors liefert.

Definition 4.05 (*affiner Zusammenhang*) Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Eine Abbildung, die zwei (C^r) -Vektorfeldern X, Y ein neues (C^{r-1}) -Vektorfeld $\nabla_X Y$ zuordnet, heißt *affiner Zusammenhang* in M , falls:

- $\nabla_X Y$ ist additiv in X und in Y
- $\nabla_{fX} Y = f \nabla_X Y$ für $f : M \rightarrow \mathbb{R}$.
- $\nabla_X (fY) = Xf \cdot Y + f \cdot \nabla_X Y$ (Produktregel)

\triangleright

Bemerkung: (*Christoffelsymbole*) Sei $\varphi : M \rightarrow U$ eine Karte und seien $\partial_1, \dots, \partial_n$ die dazugehörigen Basisfelder. Wir schreiben $\nabla_j := \nabla_{\partial_j}$. Dann ist

$$\nabla_j \partial_k = \Gamma_{jk}^l \partial_l.$$

Die Funktionen $\Gamma_{jk}^l : M \rightarrow \mathbb{R}$ heißen die Koeffizienten oder *Christoffelsymbole* des Zusammenhangs ∇ . Sind $X = x^j \partial_j$ und $Y = y^j \partial_j$ Vektorfelder, dann ist $\nabla_X Y$ wie folgt gegeben:

$$\nabla_X Y = x^j \nabla_j (y^k \partial_k) = (x^j \partial_j y^l + x^j y^k \Gamma_{jk}^l) \partial_l$$

d.h. in den Wert von $\nabla_X Y$ in einem Punkt p geht von X nur der Wert in p ein (∇ ist kein Tensorfeld, weil von Y nicht nur Werte, sondern auch Ableitungen eingehen). \diamond

Definition 4.06 (*kovariante Ableitung*) Für ein Vektorfeld Y heißt

$$\nabla_{X_p} Y := (\nabla_X Y)_p$$

kovariante Ableitung von Y nach X_p . Ist $V(t) = v^j(t) \partial_j(c(t))$ ein Vektorfeld entlang einer Kurve $c(t)$ (d.h. $c : I \rightarrow M$ mit $V(t) \in T_{c(t)} M$ für alle $t \in I$) mit $\dot{c} = x^k \partial_k$, dann sei

$$\frac{D}{dt} V := \left(\frac{dv^l}{dt} + v^k x^j \Gamma_{jk}^l \right) \partial_l, \text{ genauer } \frac{D}{dt} V := \sum_l \left(\frac{dv^l}{dt} + \sum_{k,j} v^k x^j \cdot (\Gamma_{jk}^l \circ c) \right) (\partial_l \circ c).$$

Wir nennen $\frac{D}{dt} V$ die *kovariante Ableitung* von $V(t)$ längs c . \triangleright

Ist \tilde{V} ein Vektorfeld, das V fortsetzt (d.h. $V(t) = \tilde{V}_{c(t)}$), so gilt offenbar bei $\dot{c} \neq 0$

$$\frac{D}{dt} V = \nabla_{\dot{c}(t)} \tilde{V}.$$

Lemma 4.07 Es gilt: $\frac{D}{dt} (V + W) = \frac{D}{dt} V + \frac{D}{dt} W$ sowie $\frac{D}{dt} (fV) = \frac{df}{dt} V + f \frac{D}{dt} V$.

Beweis: Die Behauptung folgt unmittelbar aus der Definition. \square

Lemma 4.08 Sind $\Gamma_{jk}^l : M \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar, so definiert $\nabla_X Y = (x^j \partial_j y^l + x^j y^k \Gamma_{jk}^l) \partial_l$ einen affinen Zusammenhang in einer Koordinatenumgebung.

Beweis: Nachrechnen der Definition: Man sieht sofort, daß $\nabla_{\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2} Y = \lambda_1 \nabla_{X_1} Y + \lambda_2 \nabla_{X_2} Y$ und $\nabla_X (\mu_1 Y_1 + \mu_2 Y_2) = \mu_1 \nabla_X Y_1 + \mu_2 \nabla_X Y_2$ für beliebige Funktionen $\lambda_1, \lambda_2 : M \rightarrow \mathbb{R}$ und Skalare $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$. Die Produktregel rechnet man nach: $\nabla_X (fY) = (x^j \partial_j f y^l + x^j f y^k \Gamma_{jk}^l) \partial_l = (x^j \partial_j (f) y^k + x^j f \partial_j y^k + x^j f y^k \Gamma_{jk}^l) \partial_l = X f Y + f \nabla_X Y$ \square

Lemma 4.09 Ist $V(t)$ ein Vektorfeld längs einer konstanten Kurve $c(t) = \text{const} = p$, so stimmt $\frac{D}{dt} V$ überein mit der gewöhnlichen Ableitung von $V(t)$ im Vektorraum $T_p M$.

Beweis: Mit $V = v^l (\partial_l)_p$ gilt wegen $x^k = 0$ nun $\frac{D}{dt} V = \dot{v}^l \partial_l$. \square

Beispiel: (*flacher Zusammenhang*) Ist M offene Teilmenge des \mathbb{R}^n und verwenden wir die identische Funktion als lokale Parametrisierung, so wird durch $\Gamma_{jk}^l = \text{const.} = 0$, der *flache Zusammenhang* definiert. Dann ist $\frac{D}{dt} V = \frac{d}{dt} V$. \diamond

Beispiel: (*induzierter Zusammenhang*) Ist $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine TMF, $p \in M$, so ist $v \in T_p \mathbb{R}^n$ zerlegbar in einen Tangential- und einen Normalanteil: $v = v^{\text{tang}} + v^{\text{norm}}$ mit $v^{\text{tang}} \in T_p M$ und $v^{\text{norm}} \perp T_p M$. Wir möchten gerne einen Zusammenhang definieren, für den die kovariante Ableitung gleich dem Tangentialanteil der gewöhnlichen Ableitung von $V(t)$ im umgebenden \mathbb{R}^m ist:

$$\frac{D}{dt} V = \left(\frac{dV}{dt} \right)^{\text{tang}} \in T_{c(t)} M.$$

Wir berechnen die Koeffizienten Γ_{jk}^l bezüglich einer lokalen Parametrisierung $g : U \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow M$:

$$\nabla_j \partial_k = \left(\frac{\partial^2 g}{\partial u^j \partial u^k} \right)^{\text{tang}} = \Gamma_{jk}^l \partial_l,$$

d.h. die Γ_{jk}^l sind die Koeffizienten vom Tangentialanteil von $\frac{\partial^2 g}{\partial u^j \partial u^k}$ in der Basis $\partial_1, \dots, \partial_m$. Der durch diese Koeffizienten definierte Zusammenhang ∇ heißt der vom \mathbb{R}^n in der TMF induzierte Zusammenhang. Wir verifizieren, daß tatsächlich obige Gleichung gilt. Sei $c : I \rightarrow M$ mit $\dot{c} = x^k \partial_k \circ c$ und $V = v^l \partial_l \circ c$. Dann ist

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dt} V \right)^{\text{tang}} &= \left(\dot{v}^l \partial_l \circ c + v^k \frac{d}{dt} (\partial_k \circ c) \right)^{\text{tang}} = \dot{v}^l (\partial_l \circ c) + v^k \left(x^j \left(\frac{\partial}{\partial u^j} \partial_k \right) \circ c \right)^{\text{tang}} \\ &= \dot{v}^l (\partial_l \circ c) + v^k x^j (\Gamma_{jk}^l \partial_l \circ c) (\partial_l \circ c) = \frac{D}{dt} V \end{aligned} \quad \diamond$$

Definition 4.10 (*symmetrischer Zusammenhang*) Der Zusammenhang ∇ heißt *symmetrisch*, wenn $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$ \triangleright

Lemma 4.11 *Ein Zusammenhang ist genau dann symmetrisch, wenn für seine Koeffizientenfunktionen gilt $\Gamma_{jk}^l = \Gamma_{kj}^l$.*

Beweis: Sei ∇ symmetrisch. Dann gilt $[\partial_j, \partial_k] = 0$, also $\nabla_j \partial_k = \nabla_k \partial_j$. Umgekehrt berechnen wir $\nabla_X Y - \nabla_Y X = (x^j \partial_j y^l + x^j y^k \Gamma_{jk}^l) \partial_l - (y^j \partial_j x^l + y^j x^k \Gamma_{jk}^l) \partial_l = [X, Y]$ (wobei die Terme mit den Γ_{jk}^l einander aufgrund der Symmetrie wegheben). \square

Lemma 4.12 *Der induzierte Zusammenhang ist symmetrisch.*

Beweis: Ist $g : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow M$ eine lokale Parametrisierung, so ist

$$\nabla_j \partial_k = \left(\frac{\partial^2 g}{\partial u^j \partial u^k} \right)^{\text{tang}} = \left(\frac{\partial^2 g}{\partial u^k \partial u^j} \right)^{\text{tang}} = \nabla_k \partial_j \Rightarrow \Gamma_{jk}^l = \Gamma_{kj}^l \quad \square$$

Lemma 4.13 *Ist ∇ symmetrisch, dann gilt für jede C^2 -Abbildung $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow M$, $(u, v) \mapsto f(u, v)$:*

$$\frac{D}{du} \left(\frac{\partial f}{\partial v} \right) = \frac{D}{dv} \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right).$$

Beweis: Sei $\varphi : M \rightarrow U$ eine Karte, $\partial_1, \dots, \partial_n$ Basisfelder und $\tilde{f} = \varphi \circ f$ die Koordinatendarstellung von φ . Dann hat $\frac{\partial f}{\partial u}$ die Koordinaten $\left(\frac{\partial \tilde{f}^1}{\partial u}, \dots, \frac{\partial \tilde{f}^n}{\partial u} \right)$, und es gilt:

$$\frac{D}{dv} \frac{\partial f}{\partial u} = \left(\frac{\partial^2 \tilde{f}^l}{\partial u \partial v} + \frac{\partial \tilde{f}^j}{\partial u} \frac{\partial \tilde{f}^k}{\partial v} \Gamma_{jk}^l \right) \partial_l = \frac{D}{du} \frac{\partial f}{\partial v}. \quad \square$$

4.3 Geodätische Parallelverschiebung

Definition 4.14 (*Parallelverschiebung*) Ist V ein stetiges Vektorfeld längs einer stückweise stetig differenzierbaren Kurve c mit $\frac{D}{dt} V = 0$ für jedes stetig differenzierbare Segment von c , dann heißt V *Parallelfeld* längs c . \triangleright

Bemerkung: Anschaulich bedeutet $\frac{D}{dt}V = 0$, daß sich der Vektor $V(t)$ für den Beobachter an der Stelle $c(t)$ auf der Fläche ‘nicht ändert’. Ist ∇ der induzierte Zusammenhang, dann heißt $\frac{D}{dt}V = 0$, daß der Tangentialanteil von $\frac{d}{dt}V$ verschwindet, d.h. die Änderung von V senkrecht auf die Fläche steht. \diamond

Satz 4.15 Ist $p \in M$, $V_p \in T_p M$, $c : I \rightarrow M$ mit $c(0) = p$, so existiert genau ein Vektorfeld $V(t)$ längs c mit $V(0) = V_p$, das ein Parallelfeld ist.

Beweis: Es genügt, die Behauptung für alle C^1 -Segmente von c zu beweisen, die vollständig in einer Koordinatenumgebung liegen. Der allgemeine Fall folgt dann durch mehrmaliges Anwenden des Spezialfalles. In Koordinaten gilt:

$$V(t) \text{ ist Parallelfeld} \iff \frac{d}{dt}v^l + \Gamma_{jk}^l x^j v^k = 0.$$

Dies ist eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung für $V(t)$ und hat bei vorgegebenen Anfangswert $V(0)$ eine eindeutige Lösung für alle t . \square

Definition 4.16 (geodätische Parallelverschiebung) Sei $V_p \in T_p M$ und $c : I \rightarrow M$ eine Kurve mit $c(t_0) = p$. Es existiert ein eindeutiges Parallelfeld $V(t)$ längs c mit $V(t_0) = V_p$. Die Abbildung

$$\text{Pt}_{t_0}^{t_1}(c) : T_{c(t_0)}M \rightarrow T_{c(t_1)}M \quad V(t_0) \mapsto V(t_1)$$

heißt *geodätische Parallelverschiebung* oder *Paralleltransport* von t_0 nach t_1 längs c . \triangleright

Lemma 4.17 $\text{Pt}_u^b(v)$ ist ein linearer Vektorraumisomorphismus, der die folgenden Eigenschaften besitzt:

$$\begin{aligned} \text{Pt}_v^w(c) \circ \text{Pt}_u^v(c) &= \text{Pt}_u^w(c) \\ \text{Pt}_v^u \circ \text{Pt}_u^v(c) &= \text{Pt}_u^u(c) = \text{id}. \end{aligned}$$

Beweis: Die Lösung einer linearen Differentialgleichung hängt linear von den Anfangswerten ab, was die Linearität von Pt_u^v für eine Kurve zeigt, die innerhalb einer Koordinatenumgebung liegt. Durch Iteration erreicht man so beliebige Punkte $c(t)$. Die Aussage über die Verkettung ist klar. \square

Lemma 4.18 Der Paralleltransport längs einer Kurve ist unabhängig von Parametertransformationen, d.h. $\text{Pt}_{t_0}^{t_1}(c \circ \gamma) = \text{Pt}_{\gamma(t_0)}^{\gamma(t_1)}(c)$.

Beweis: Mit $\dot{c} = x^j \partial_j$ gilt $\frac{DV}{dt} = \left(\frac{dv^l}{dt} + x^j v^k \Gamma_{jk}^l \circ c \right) \partial_l$, $\frac{DV \circ \gamma}{dt} = \left(\frac{dv^l \circ \gamma}{dt} \dot{\gamma} + (x^j \circ \gamma) \cdot \dot{\gamma} \cdot v^k \cdot (\Gamma_{jk}^l \circ c \circ \gamma) \right) \partial_l$. Diese beiden Gleichungen ergeben

$$\dot{\gamma}(u) \frac{DV}{dt} \Big|_{t=\gamma(u)} = \frac{D(V \circ \gamma)}{du}.$$

Wegen $\dot{\gamma} \neq 0$ ist nun $DV/dt = 0$ äquivalent zu $D(V \circ \gamma)/du = 0$. \square

Es gibt noch einen weiteren, direkten, Zusammenhang zwischen geodätischer Parallelverschiebung und der kovarianten Ableitung:

Lemma 4.19 Ist $X(t)$ ein Vektorfeld längs der Kurve $c(t)$, so ist

$$\frac{DX}{dt}(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left(\text{Pt}_t^0(c) X(t) - X(0) \right)$$

Beweis: Sei E_1, \dots, E_n eine Basis von $T_{c(0)}M$ und $E_1(t), \dots, E_n(t)$ die durch geodätische Parallelverschiebung entstehenden Basis von $T_{c(t)}M$. Sei ferner $X(t) = x^i(t)E_i(t)$. Pt_t^0 ist eine lineare Abbildung, also ist $\text{Pt}_t^0(c)(X(t)) = x^i(t)E_i(0)$. Wir leiten ab:

$$\begin{aligned} \frac{D}{dt}X &= x^i(t)E_i + x^i(t) \underbrace{\frac{D}{dt}E_i}_{=0} \\ \implies \frac{D}{dt}X(0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{x^i(t) - x^i(0)}{t} E_i(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left(\text{Pt}_t^0(c)X(t) - X(0) \right). \quad \square \end{aligned}$$

Definition 4.20 (*Holonomiegruppe*) Sei \mathcal{C}_p^M die Menge aller stückweise glatten Kurven $c: [0, 1] \rightarrow M$ mit $c(0) = c(1) = p$. Sei \mathcal{U}_p das System der offenen Umgebungen von p . Dann heißen

$$H_p := \{\text{Pt}_0^1(c) \mid c \in \mathcal{C}_p^M\} \quad \text{und} \quad H_p^\infty := \bigcap_{U \in \mathcal{U}_p} \{\text{Pt}_0^1(c) \mid c \in \mathcal{C}_p^U\}$$

die Holonomiegruppe bzw. die lokale Holonomiegruppe von p . \triangleright

Satz 4.21 Sind $p, q \in M$ und ist $c: [0, 1] \rightarrow M$ eine stückweise glatte Kurve mit $c(0) = p$ und $c(1) = q$, so ist $H_p = \text{Pt}_0^1(c)^{-1} \circ H_q \circ \text{Pt}_0^1(c)$, d.h. die Holonomiegruppen von Punkten derselben Zusammenhangskomponente von M sind zueinander konjugiert.

Beweis: Sei $\bar{c} \in \mathcal{C}_q^M$. Dann ist $c + \bar{c} + c^{-1} \in \mathcal{C}_p^M$, wobei $c + \bar{c} + c^{-1}$ den Weg symbolisiert, der entsteht, wenn man zuerst c von p nach q durchläuft, dann den Weg \bar{c} , und anschließend auf c durch Umkehrung des Weges von q nach p zurückläuft, und abschließend noch eine Parametertransformation durchführt, so daß der entstehende Weg in $[0, 1]$ definiert ist. Ebenso folgt aus $\bar{c} \in H_p$, daß $c^{-1} + \bar{c} + c \in H_q$. \square

4.4 Riemannsche Zusammenhänge

Man möchte gerne, daß der Paralleltransport von Vektoren längs einer Kurve in einer Riemannschen Mannigfaltigkeit Längen und Winkel nicht ändert. Diejenigen Zusammenhänge, die dieser Anforderung genügen, heißen Riemannsche Zusammenhänge.

Definition 4.22 (*Riemannscher Zusammenhang*) ∇ heißt *Riemannscher Zusammenhang*, wenn der Paralleltransport längs einer Kurve eine isometrische lineare Abbildung ist, daß also für alle $c: I \rightarrow M$ und für alle $v \in T_{c(a)}M$ gilt, daß $\|\text{Pt}_a^b(c)v\| = \|v\|$. \triangleright

Riemannsche Zusammenhänge befolgen eine Produktregel bezüglich der Riemannschen Metrik. Dies wird in dem folgenden Lemma genauer beschrieben:

Lemma 4.23 Die folgenden vier Aussagen sind äquivalent:

- (i) ∇ ist ein Riemannscher Zusammenhang
- (ii) $X\langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle$ für alle Vektorfelder X, Y, Z .
- (iii) $\frac{d}{dt}\langle V, W \rangle = \langle \frac{D}{dt}V, W \rangle + \langle V, \frac{D}{dt}W \rangle$ für alle Vektorfelder $V(t), W(t)$ längs derselben Kurve.
- (iv) Für eine Parametrisierung gilt $\partial_k g_{jl} = \Gamma_{kj}^i g_{il} + \Gamma_{kl}^i g_{ji}$.

Beweis: (i) \implies (iii): Sei $E_{1,p}, \dots, E_{n,p}$ eine ONB in $T_p M$ für $c(0) = p$ und $E_i(t)$ ein Parallelfeld längs c mit $E_i(0) = E_{i,p}$. Dann ist $E_1(t), \dots, E_n(t)$ eine ONB in $T_{c(t)}M$.

Wir setzen $V = v^j E_j$, $W = w^j E_j$ und berechnen $\langle V, W \rangle = \langle v^j E_j, w^j E_j \rangle = \sum_{j=1}^n v^j w^j$. Dann ist

$$\begin{aligned} \frac{D}{dt} V &= \dot{v}^j E_j + v^j \frac{D}{dt} E_j \quad \text{analog} \quad \frac{D}{dt} W = \dot{w}^j E_j, \implies \\ \frac{d}{dt} \langle V, W \rangle &= \sum_{j=1}^n (\dot{v}^j w^j + v^j \dot{w}^j) = \left\langle \frac{D}{dt} V, W \right\rangle + \left\langle V, \frac{D}{dt} W \right\rangle \end{aligned}$$

— (iii) \implies (i) Sei V ein Parallelfeld längs einer Kurve. Zu zeigen ist, daß $\|V\|$ konstant ist — dann ist Pt_0^t eine Isometrie: $\frac{d}{dt} \langle V, V \rangle = \left\langle \frac{D}{dt} V, V \right\rangle + \left\langle V, \frac{D}{dt} V \right\rangle = \langle 0, V \rangle + \langle V, 0 \rangle = 0$.

— (iii) \iff (iv): Wir schreiben $\dot{c} = \sum_j x^j \cdot \partial_j \circ c$, $V = \sum_j v^j \cdot \partial_j \circ c$, $W = \sum_j w^j \cdot \partial_j \circ c$. und setzen in beide Seiten von (iii) ein:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle V, W \rangle &= \frac{d}{dt} (v^j w^l g_{jl} \circ c) = (\dot{v}^j w^l + v^j \dot{w}^l) g_{jl} \circ c + v^j w^l x^k (\partial_k g_{jl}) \circ c \\ \left\langle \frac{D}{dt} V, W \right\rangle + \left\langle V, \frac{D}{dt} W \right\rangle &= (\dot{v}^i + v^j x^k \Gamma_{kj}^i \circ c) w^l g_{il} \circ c + (\dot{w}^i + w^l x^k \Gamma_{kl}^i \circ c) v^j g_{ji} \circ c \end{aligned}$$

Offenbar ist (iv) notwendig und hinreichend für die allgemeine Gültigkeit von (iii).

— (iii) \implies (ii): Um (ii) für einen beliebigen Punkt p nachzuweisen, wählen eine Kurve c mit $c(0) = p$ und $\dot{c}(0) = X_p$. Dann geht (ii) in (iii) über.

— (ii) \implies (iv): Wir setzen $X = \partial_k$, $Y = \partial_j$, $Z = \partial_l$ und erhalten $\partial_k g_{jl} = \langle \Gamma_{kj}^i \partial_i, \partial_l \rangle + \langle \partial_j, \Gamma_{kl}^i \partial_i \rangle = \Gamma_{kj}^i g_{il} + \Gamma_{kl}^i g_{ji}$. \square

Lemma 4.24 *Der induzierte Zusammenhang in einer Teilmannigfaltigkeit ist ein Riemannscher Zusammenhang.*

Beweis: Sei $c : I \rightarrow M$ eine Kurve und V ein Parallelfeld längs c , d.h. $\left(\frac{d}{dt} V\right)^{\text{tang}} = 0$. Z.z. ist $\langle V, V \rangle = \text{const.}$ Wir berechnen also $\frac{d}{dt} \langle V, V \rangle = 2 \left\langle V, \frac{d}{dt} V \right\rangle = 2 \left\langle V, \left(\frac{d}{dt} V\right)^{\text{tang}} \right\rangle = 0$. \square

Der folgende Satz ist grundlegend für die Theorie der Riemannschen Zusammenhänge:

Satz 4.25 (Der Levi-Civita-Zusammenhang) *Ist $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Riemannscher Raum, dann existiert genau ein symmetrischer Riemannscher Zusammenhang.*

Beweis: Wir berechnen ähnlich zu (ii) \implies (iv) im Beweis von Lemma 4.23:

$$\begin{aligned} \partial_i g_{jk} &= \partial_i \langle \partial_j, \partial_k \rangle = \langle \nabla_i \partial_j, \partial_k \rangle + \langle \partial_j, \nabla_i \partial_k \rangle, \\ \partial_j \langle \partial_k, \partial_i \rangle &= \langle \nabla_j \partial_k, \partial_i \rangle + \langle \partial_k, \nabla_j \partial_i \rangle, \\ \partial_k \langle \partial_i, \partial_j \rangle &= \langle \nabla_k \partial_i, \partial_j \rangle + \langle \partial_i, \nabla_k \partial_j \rangle. \end{aligned}$$

Man beachte, daß die unterstrichenen Ausdrücke gleich sind. Wir erhalten

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (\partial_i \langle \partial_j, \partial_k \rangle + \partial_j \langle \partial_k, \partial_i \rangle - \partial_k \langle \partial_i, \partial_j \rangle) &= \langle \nabla_i \partial_j, \partial_k \rangle = \langle \Gamma_{ij}^l \partial_l, \partial_k \rangle = \Gamma_{ij}^l g_{lk} \\ \implies \Gamma_{ij}^l &= g^{lk} \frac{1}{2} (\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij}). \end{aligned}$$

D.h. die Koeffizienten Γ_{jk}^l von ∇ sind durch die Koeffizienten g_{jk} der Metrik bestimmt. Umgekehrt können wir die obige Formel zur Definition eines Zusammenhangs ∇ benutzen. Die Symmetrie von ∇ folgt aus $\Gamma_{jk}^l = \Gamma_{kj}^l$. Die Relation (iv) des Lemma 4.23 folgt direkt aus der Definition der Γ_{jk}^l , d.h. ∇ ist Riemannsch. \square

Bemerkung: (*geodätische Krümmung*) Für den induzierten Zusammenhang einer $(n-1)$ -dimensionale TMF $M \subseteq \mathbb{R}^n$ und eine Kurve $c : I \rightarrow M$ haben wir mit $c_1 = \frac{\dot{c}}{\|\dot{c}\|}$, $\dot{c}_1 = \|\dot{c}\| \kappa_1 c_2 = \|\dot{c}\|(\kappa_n n + \kappa_g m)$, $m \in T_p M$ mit $\|m\| = 1$:

$$\frac{D}{dt} c_1 = \|\dot{c}\| \kappa_g m, \quad \left\| \frac{D}{dt} c_1 \right\| = \|\dot{c}\| \kappa_g.$$

◇

Definition 4.26 (*geodätische Krümmung*) Für eine Riemannsche MF $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ist die *geodätische Krümmung* einer Kurve $c : I \rightarrow M$ definiert durch

$$\kappa_g := \left\| \frac{D}{dt} c_1 \right\| / \|\dot{c}\|$$

▷

Bemerkung: Der induzierte Zusammenhang $\frac{D}{dt} V = \left(\frac{d}{dt} V\right)^{\text{tang}}$ ist nach dem Satz von Levi-Civita durch die Metrik allein bestimmt. Alle Größen, die sich durch $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und ∇ darstellen lassen, sind nur von der Metrik $\langle \cdot, \cdot \rangle$ abhängig.

Insbesondere ist die geodätische Krümmung κ_g einer Kurve eine solche ‘Größe der inneren Geometrie’, was aus der früheren Definition nicht ersichtlich war. ◇

4.5 Geodätische Linien

Definition 4.27 (*geodätische Linien*) Eine Kurve $c : I \rightarrow M$ mit $\frac{D}{dt} \dot{c} = 0$ heißt *geodätische Linie*. ◇

Für eine geodätische Linie gilt $\|\dot{c}\| = \text{const.}$, denn das Tangential-Vektorfeld von c ist ein Parallelfeld längs c . Weiters ist $\kappa_g = 0$.

Bemerkung: Alternativ kann man eine geodätische Linie so definieren, daß sie eine Parametrisierung besitzt mit $\frac{D}{dt} c_1 = 0$, bzw. daß, wenn man sie nach der Bogenlänge parametrisiert, $\frac{D}{dt} \dot{c} = 0$. Dies ist äquivalent zu $\frac{D}{dt} \dot{c}(t) = \lambda(t) \dot{c}(t)$ (vgl. Bsp. 5.04). ◇

Wir leiten eine Differentialgleichung für geodätische Linien in lokalen Koordinaten her: Sei $\varphi : M \rightarrow U$ eine Karte und $c : I \rightarrow M$ eine Kurve. Sei die Koordinatendarstellung der Kurve c durch $\varphi \circ c = (x^1(t), \dots, x^n(t))$ gegeben. Dann hat das Vektorfeld \dot{c} die Koordinatendarstellung $d\varphi \circ \dot{c} = \tilde{c} = (\dot{x}^1(t), \dots, \dot{x}^n(t))$. c ist eine geodätische Linie, wenn

$$d\varphi\left(\frac{D}{dt} \dot{c}\right) = (\ddot{x}^l + \Gamma_{jk}^l \dot{x}^j \dot{x}^k) \partial_l = 0 \text{ längs } \tilde{c}.$$

D.h. die Koeffizientenfunktionen x^1, \dots, x^n einer geodätischen Linie erfüllen ein System von Differentialgleichungen 2. Ordnung. Dieses ist äquivalent zu dem folgenden System von Differentialgleichungen 1. Ordnung:

$$\begin{aligned} \dot{x}^l &= y^l \\ \dot{y}^l &= - \sum_{j,k} y^j y^k \Gamma_{jk}^l(x^1, \dots, x^n) \end{aligned}$$

Bemerkung: (*geodätischer Fluß*) Sei M eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und $\varphi : U \subseteq M \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Karte. Wir betrachten das Vektorfeld $\tilde{G}(x, y)$ im \mathbb{R}^{2n} , das durch

$$(y^1, \dots, y^n, -\Gamma_{jk}^1(x) y^j y^k, \dots, -\Gamma_{jk}^n(x) y^j y^k)$$

gegeben ist. Ist $(x(t), y(t))$ eine Integralkurve von \tilde{G} , so interpretieren wir diese als Koordinatendarstellung $d\varphi \circ \dot{c}$ des Tangentialvektorfeldes einer geodätischen Linie $c(t)$ in M . Ist $c(0) = p$ und $\dot{c}(0) = v$, so schreiben wir für den Tangentialvektor $\dot{c}(t)$ auch $\text{Fl}_G((p, v), t)$.

Wir haben damit Koordinaten im Tangentialbündel als abstrakter differenzierbarer Mannigfaltigkeit eingeführt, ein Vektorfeld G in TM definiert, und seinen Fluß Fl_G betrachtet. \diamond

Lemma 4.28 Sind c_1 und c_2 geodätische Linien mit $c_1(0) = c_2(0) = p$ und $\dot{c}_1(0) = v$, $\dot{c}_2(0) = \kappa v$, dann gilt

$$c_1(\kappa t) = c_2(t)$$

Für jedes $p \in M$ existiert ein $\varepsilon > 0$ und eine Umgebung U von p , sodaß für $q \in U$, $\|v\| < \varepsilon$ und $|t| < 2$ die geodätische Linie $c(t)$ mit $c(0) = q$ und $\dot{c}(0) = v$ definiert ist.

Beweis: Ist c_1 geodätische Linie, so auch $\bar{c}_1(t) = c_1(\kappa t)$, denn

$$\dot{\bar{c}}_1(t) = \kappa \dot{c}_1(\kappa t), \quad \frac{D}{dt} \dot{\bar{c}}_1(t) = \kappa^2 \frac{D}{dt} \dot{c}_1.$$

Damit sind \bar{c}_1 und c_2 geodätische Linien mit denselben Anfangsbedingungen bei $t = 0$, nach Satz A.18 also gleich.

Aus Satz A.18 folgt, daß es δ_1, δ_2 , und eine offene Umgebung U von q gibt, sodaß die geodätische Linie $c_1(t)$ mit Startwerten (q, v_1) mit $q \in U$, $\|v_1\| < \delta_1$ im Intervall $(-\delta_2, \delta_2)$ definiert ist.

Wählen wir nun $\varepsilon < \delta_1 \delta_2 / 2$, so ist nach dem 1. Ergebnis die geodätische Linie $c_2(t)$ mit Startwerten (q, v) mit $\|v\| < \varepsilon$ im Intervall $(-2, 2)$ definiert, denn mit $v = v' \delta_2$ gilt $c_2(t) = c_1(\delta_2 t)$. \square

Definition 4.29 (Exponentialabbildung) Die Abbildung

$$\exp_p : D \subseteq T_p M \rightarrow M$$

ordnet einem Tangentialvektor $v \in T_p M$ den Punkt $c(1)$ der geodätischen Linie c mit $c(0) = p$, $\dot{c}(0) = v$ zu. \triangleright

Folgerung: Für die geodätische Linie $c(t)$ mit $c(0) = p$ und $\dot{c}(0) = v$ gilt $c(t) = \exp_p(tv)$.

Für jedes $p \in M$ gibt es ein $\varepsilon > 0$, sodaß $\exp_p(v)$ für $\|v\| < \varepsilon$ sicher definiert ist.

Beweis: Dies sind andere Formulierungen der beiden Aussagen von Lemma 4.28. \square

Lemma 4.30 Lokal um $(p, 0)$ ist \exp_p ein Diffeomorphismus aus $T_p M$ nach M . Identifizieren wir $T_p M$ mit seinem Tangentialvektorraum bei 0, so ist das Differential der Exponentialabbildung bei 0 die Identität:

$$(d \exp_p)_0 : T_p M \rightarrow T_p M; \quad (d \exp_p)_0(v) = v.$$

Beweis: Wir greifen auf die Definition von ‘Differential’ zurück. Um $(d \exp_p)_0(v)$ zu bestimmen, wählen wir eine Kurve $d(t)$ in $T_p M$ mit $d(0) = 0$ und $\dot{d}(0) = v$ (z.B. $d(t) = tv$) und leiten die Bildkurve $\exp_p(d(t)) = \exp_p(tv)$ bei $t = 0$ ab. Jene ist genau die geodätische Linie $c(t)$ mit $c(0) = p$ und $\dot{c}(0) = v$, also ist

$$(d \exp_p)_0(v) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \exp(tv) = v.$$

Demnach ist $(d \exp_p)_0 = \text{id}_{T_p M}$, und nach dem Satz über die Umkehrfunktion ist \exp_p lokal um 0 ein Diffeomorphismus. \square

Bemerkung: (Normalkoordinaten) Wählen wir eine Basis E_1, \dots, E_n in $T_p M$, so können wir die Abbildung $(x^1, \dots, x^n) \mapsto \exp_p(x^i E_i)$ als lokale Parametrisierung einer Umgebung von p verwenden.

Nachdem die geodätischen Linien durch p in dieser Koordinatendarstellung die Gestalt $(c^1, \dots, c^n) = (t \cdot v^1, \dots, t \cdot v^n)$ besitzen, liefert die Differentialgleichung der geodätischen Linien für $t = 0$ die Gleichung $\dot{c}^j \dot{c}^k \Gamma_{jk}^l = 0$, für alle \dot{c}^i . Daher ist $\Gamma_{jk}^l(p) = 0$.

Ist E_1, \dots, E_n eine Orthonormalbasis, so ist wegen $(d \exp_p)_0 = \text{id}_{T_p M}$ auch $g_{jk}(p) = \delta_{jk}$. \diamond

Satz 4.31 Für alle $x \in M$ existiert eine Umgebung $U \subseteq M$ mit $x \in U$, so daß je zwei Punkte $p, q \in U$ durch eine geodätische Linie $c(t)$ mit $c(0) = p$, $c(1) = q$ verbunden werden können, und so, daß die Anfangswerte $c(0)$ und $\dot{c}(0)$ in differenzierbarer Weise von den Randwerten $c(0) = p$, $c(1) = q$ abhängen.

Beweis: Wir betrachten die Abbildung $F : TM \rightarrow M \times M$, $(p, v) \mapsto (p, \exp_p(v))$, d.h. die Abbildung ‘Anfangswerte \mapsto Randwerte’ einer geodätischen Linie. Zu zeigen ist, daß F^{-1} existiert und differenzierbar ist. Wir verwenden eine Karte φ :

$$\begin{array}{ccc} (p, v) & \xrightarrow{F} & (p, \exp_p(v)) \\ d\varphi \downarrow & & \downarrow \varphi \times \varphi \\ \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\tilde{F}} & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \end{array}$$

und bestimmen die Matrizen von $d\tilde{F}_{(p,0)}$:

$$d\tilde{F}_{(0,0)} = \begin{bmatrix} \text{id}_{\mathbb{R}^n} & 0 \\ \text{id}_{\mathbb{R}^n} & (d \exp_p)_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{id}_{\mathbb{R}^n} & 0 \\ \text{id}_{\mathbb{R}^n} & \text{id}_{\mathbb{R}^n} \end{bmatrix}$$

Hier ist $\exp_p = \varphi \circ \exp_p \circ d\varphi_p^{-1}$. Demnach ist \tilde{F} ein lokaler Diffeomorphismus und es existiert ein $\tilde{W} \subseteq \mathbb{R}^n$, sodaß $\tilde{W} \times \tilde{W}$ eine offene Umgebung von $\varphi \times \varphi(F(x, 0))$ und \tilde{F}^{-1} in $\tilde{W} \times \tilde{W}$ ein Diffeomorphismus ist. Setze dann $U = \varphi^{-1}(\tilde{W})$. \square

Definition 4.32 (geodätische Sphäre) Die Menge $\exp_p(r S^{n-1})$ heißt geodätische Sphäre vom Radius r um den Punkt p . \triangleright

Satz 4.33 (Lemma von Gauß) Die geodätischen Sphären sind für alle Radien orthogonal zu den vom Mittelpunkt ausgehenden geodätischen Linien.

Beweis: Sei $v(t) \in T_p M$, mit $\|v(t)\| = 1$, d.h. $v(t)$ ist eine Kurve in der Einheitssphäre $S^{n-1} \subseteq T_p M$. Sei $f(r, t) = \exp_p(r v(t))$. Die Kurven $t = \text{const}$ sind geodätische Linien, also ist $\frac{D}{dr} \frac{\partial f}{\partial r} = 0$. Zu zeigen ist $\left\langle \frac{\partial f}{\partial r}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle = 0$.

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial f}{\partial r}, \frac{\partial f}{\partial r} \right\rangle = 1 & \implies 0 = \frac{\partial}{\partial t} \left\langle \frac{\partial f}{\partial r}, \frac{\partial f}{\partial r} \right\rangle = 2 \left\langle \frac{D}{dt} \frac{\partial f}{\partial r}, \frac{\partial f}{\partial r} \right\rangle; \\ \frac{\partial}{\partial r} \left\langle \frac{\partial f}{\partial r}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle &= \left\langle \frac{D}{dr} \frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial f}{\partial r}, \frac{D}{dr} \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial f}{\partial r}, \frac{D}{dt} \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle = 0 \\ \implies \left\langle \frac{\partial f}{\partial r}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle &= \left\langle \frac{\partial f}{\partial r}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle \Big|_{r=0} = 0 \quad \text{wegen } f(0, t) = p = \text{const.} \end{aligned}$$

\square

Lemma 4.34 Sei $c(t) = \exp_p(r(t)v(t))$ mit $\|v(t)\| = 1$ und $r(t) > 0$, d.h. c ist eine Kurve mit ‘geodätischen Polarkoordinaten’ $r(t)$, $v(t)$. In einer Umgebung von p gilt

$$L_a^b(c) \geq |r(b) - r(a)|$$

mit Gleichheit genau dann, wenn $v(t) = \text{const.}$ und $r(t)$ monoton.

Beweis: Sei $f(r, t) = \exp_p(r \cdot v(t))$. Dann ist $c(t) = f(r(t), t)$, $\dot{c}(t) = \dot{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial t}$ und $\langle \frac{\partial f}{\partial r}, \frac{\partial f}{\partial r} \rangle = 1$. Es folgt, daß

$$\begin{aligned} L_a^b(c) &= \int_a^b \langle \dot{c}, \dot{c} \rangle^{\frac{1}{2}} dt = \int_a^b |\dot{r}| \left(\left\langle \frac{\partial f}{\partial r}, \frac{\partial f}{\partial r} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle \right)^{\frac{1}{2}} dt \\ &\geq \int_a^b |\dot{r}| dt \geq \left| \int_a^b \dot{r} dt \right| = |r(b) - r(a)|, \end{aligned}$$

wobei in der Ungleichungskette Gleichheit genau dann gilt, wenn $\langle \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial t} \rangle = 0$ und \dot{r} keinen Vorzeichenwechsel besitzt, d.h. genau dann, wenn $v(t) = \text{const}$ und $r(t)$ monoton wachsend ist. \square

Bemerkung: Der obige Satz gilt offenbar auch für stückweise stetig differenzierbare r, v . \diamond

Satz 4.35 *Für alle $p \in M$ existiert eine Umgebung $W \subseteq M$, so daß es für alle $q, r \in W$ eine eindeutige kürzeste Verbindung gibt. Diese ist eine von q, r in differenzierbarer Weise abhängige geodätische Linie.*

Beweis: Wir betrachten eine Umgebung \bar{W} von p , wo nach Satz 4.31 für alle $q, r \in \bar{W}$ die geodätische Linie $\exp_q(tv)$ mit $v = \exp_q^{-1}(r)$ in differenzierbarer Art und Weise von q und r abhängt. Wähle nun eine Umgebung $W \subseteq \bar{W}$ so klein, daß ein δ existiert, so daß $\exp_q(v)$ für $\|v\| < \delta$ sicher definiert ist, und daß $W \subseteq \exp_p(\{v \in T_p M \mid \|v\| < \delta/2\})$. Nach Konstruktion ist die Entfernung jedes Punktes von W bis $p \leq \delta/2$, d.h. die Entfernung von je 2 Punkten in W ist $< \delta$.

Jede von q ausgehende Kurve hat anfangs die Form $c(t) = \exp_q(\rho(t)v(t))$ (zumin-

dest solange $\rho(t) < \delta$). Dann ist nach Lemma 4.34 $L_0^t(c) \geq |\rho(t)|$ solange $\rho(t) < \delta$, ansonsten $L_0^t(c) \geq \delta$, denn jede Kurve muß anfangs die \exp_q -Bilder der konzentrischen Kugeln $\rho \cdot S^{n-1}$ in $T_q M$ überqueren.

Nachdem je 2 Punkte q, r von W durch eine Kurve der Länge $< \delta$ verbunden werden können, diese Kurven daher ganz von der obigen Form sind, kann man wieder Lemma 4.34 anwenden: Die kürzeste Verbindung von p nach q ist die oben erwähnte radiale geodätische Linie, und man hat $d(p, q) = \|\exp_q^{-1}(r)\|$. \square

Satz 4.36 *Gibt es eine kürzeste Verbindung von zwei Punkten $p, q \in M$ in der Klasse der stückweise differenzierbaren Kurven, so ist diese (i) glatt und (ii) eine geodätische Linie.*

Beweis: Eine solche kürzeste Verbindung muß zwischen je 2 ihrer Punkte die kürzeste Verbindung sein. Nach Satz 4.35 ist sie zwischen 2 genügend nahen Punkten differenzierbar und eine geodätische Linie. \square

Bemerkung: "Lange" geodätische Linien müssen keine kürzesten Verbindungen sein. Vgl. Satz 5.23. \diamond

4.6 Die erste Variation der Energie $E_0^1(c)$ einer Kurve

Definition 4.37 (Variation) Sei c_u eine differenzierbare Schar von stückweise stetig differenzierbaren Kurven $c_u : [0, 1] \rightarrow M$ mit $c_u(0) = p$, $c_u(1) = q$. Es sei $\frac{\partial c_u}{\partial t} \in C^1[0, 1]$ und $\frac{\partial c_u}{\partial u} \in C[0, 1]$. c_u heißt Variation von c_0 , und $V(t) = \frac{\partial c_u}{\partial u}|_{u=0}$ heißt das Variationsvektorfeld. \triangleright

Definition 4.38 (erste Variation der Energie, kritischer Punkt)

$$\left. \frac{d}{du} \right|_{u=0} E_0^1(c_u) = \left. \frac{d}{du} \right|_{u=0} \int_0^1 \langle \dot{c}_u(t), \dot{c}_u(t) \rangle dt$$

heißt die *erste Variation der Energie* der Schar c_u . c ist *kritischer Punkt* des Funktionals E , wenn für alle Variationen c_u mit $c_0 = c$ die erste Variation der Energie verschwindet. \triangleright

Lemma 4.39 Für eine stückweise C^2 -Kurve $c : [0, 1] \rightarrow M$ seien $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = 1$ die Stellen, wo c nicht C^2 ist. Dann bezeichnen wir mit $\dot{c}^+(t_i)$ und $\dot{c}^-(t_i)$ den links- und den rechtsseitigen Grenzwert von \dot{c} . Sei c_u eine Variation von c mit Variationsvektorfeld V . Dann gilt

$$\frac{1}{2} \left. \frac{d}{du} \right|_{u=0} E_0^1(c_u) = - \int_0^1 \left\langle V, \frac{D}{dt} \dot{c} \right\rangle dt - \sum_{i=1}^n \left\langle V, \dot{c}_0^+(t_i) - \dot{c}_0^-(t_i) \right\rangle.$$

Beweis: Differentiation von $E = \int \langle \dot{c}, \dot{c} \rangle dt$ ergibt $\frac{dE}{du} = \int \frac{\partial}{\partial u} \langle \dot{c}, \dot{c} \rangle dt$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u} \langle \dot{c}, \dot{c} \rangle &= 2 \left\langle \frac{D}{du} \frac{\partial c_u}{\partial t}, \frac{\partial c_u}{\partial t} \right\rangle = 2 \left\langle \frac{D}{dt} \frac{\partial c_u}{\partial u}, \frac{\partial c_u}{\partial t} \right\rangle \\ \frac{\partial}{\partial t} \left\langle \frac{\partial c_u}{\partial u}, \frac{\partial c_u}{\partial t} \right\rangle &= \left\langle \frac{D}{dt} \frac{\partial c_u}{\partial u}, \frac{\partial c_u}{\partial t} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial c_u}{\partial u}, \frac{D}{dt} \frac{\partial c_u}{\partial t} \right\rangle \\ \implies \frac{1}{2} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \frac{\partial}{\partial u} \langle \dot{c}, \dot{c} \rangle dt &= \left\langle \frac{\partial c_u}{\partial u}, \frac{\partial c_u}{\partial t} \right\rangle \Big|_{t_i, u=0}^{t_{i+1}} - \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left\langle \frac{\partial c_u}{\partial u}, \frac{D}{dt} \dot{c} \right\rangle \Big|_{u=0} dt. \end{aligned}$$

Summation über $i = 0, \dots, n-1$ liefert die Behauptung. \square

Satz 4.40 Die kritischen Punkte für das Funktional E_0^1 in der Klasse der stückweise C^2 -Kurven, die zwei Punkte p und q miteinander verbinden, sind genau die geodätischen Linien (d.h. erfüllen die Gleichung $\frac{D}{dt} \dot{c} = 0$ und sind bereits C^2 -Kurven).

Beweis: Sei $c : I \rightarrow M$ eine stückweise C^2 -Kurve, die p mit q verbindet. Ist c_u eine Variation, so sei $V(t) = \left. \frac{\partial c_u}{\partial u} \right|_{u=0}$ das Variationsvektorfeld. Ist $V(t)$ gegeben, so ist $c_u(t) = \exp_{c(t)}(u \cdot V(t))$ eine Variation mit Variationsvektorfeld V .

Ist c geodätische Linie, so folgt aus Lemma 4.39, daß die 1. Variation der Energie unabhängig von V verschwindet.

Sei umgekehrt c ein kritischer Punkt des Energiefunktionals und seien $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = 1$ die Stellen, wo c nicht C^2 ist. Wähle $f : I \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ mit Nullstellen genau in den t_i , und setze $V(t) = f(t) \cdot \frac{D}{dt} \dot{c}(t)$. Dann folgt

$$\left. \frac{dE}{du} \right|_{u=0} = - \int_0^1 f(t) \left\langle \frac{D}{dt} \dot{c}, \frac{D}{dt} \dot{c} \right\rangle dt = 0 \implies \frac{D}{dt} \dot{c} = 0.$$

D.h. c muß geodätische Linie sein, wo c C^2 ist. Wähle nun $V(t)$ so, daß $V(t_i) = \dot{c}^+(t_i) - \dot{c}^-(t_i)$ und ansonsten beliebig.

$$\left. \frac{dE}{du} \right|_{u=0} = - \sum_{i=1}^{n-1} \left\langle \dot{c}^+(t_i) - \dot{c}^-(t_{i+1}), \dot{c}^+(t_i) - \dot{c}^-(t_{i+1}) \right\rangle = 0$$

$\implies \dot{c}^+(t_i) = \dot{c}^-(t_{i+1})$, d.h. $c \in C^1[0, 1]$. Nachdem geodätische Linien durch Wert und Ableitungsvektor an 1 Stelle eindeutig bestimmt sind, sind C^1 -Kurven, die stückweise geodätische Linien sind, eine einzige geodätische Linie. \square

Folgerung: Kurven, die nach Umparametrisierung geodätische Linien werden, sind genau die kritischen Punkte des Funktional L_0^1 : Wähle eine Parametrisierung mit $\langle \dot{c}, \dot{c} \rangle = \text{const.} \implies (L_0^1)^2 = E_0^1$.

4.7 Vollständigkeit

Wir verwenden Def. 1.39 auch für Riemannsche Mannigfaltigkeiten, um den Abstand zweier Punkt zu definieren.

Lemma 4.41 (M, d) ist ein metrischer Raum, wenn M zusammenhängend ist.

Beweis: Symmetrie und die Dreiecksungleichung sind klar. Wir müssen noch $d(p, q) = 0 \implies p = q$ zeigen. Dies folgt direkt aus Lemma 4.34, denn alle Kurven von p nach q müssen die kleinen geodätischen Sphären um p durchqueren. \square

Lemma 4.42 Die Topologie von M stimmt der von der Metrik induzierten überein.

Beweis: Wir überdecken M durch Karten \exp_p für alle $p \in M$. Eine Basis der Topologie von M sind alle φ_i -Urbilder von $B(0, \varepsilon) \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $\varepsilon < \varepsilon_p^0$. Eine Basis der metrischen Topologie sind alle $B(p, \varepsilon) \subseteq M$ im Sinne der Metrik für $\varepsilon < \varepsilon_p^1$. Wegen Lemma 4.34 sind diese Mengen für geeignet gewählte $\varepsilon_p^0 = \varepsilon_p^1$ dieselben. \square

Definition 4.43 (geodätisch vollständig) (M, d) heißt geodätisch vollständig, falls jede geodätische Linie beliebig weit fortsetzbar ist (dann ist insbesondere \exp_p für alle $v \in T_p M$ definiert). \triangleright

Wir kommen nun zu einem grundlegenden Satz betreffend die Vollständigkeit von Riemannschen Räumen. Seine Aussage ist die Äquivalenz von drei Eigenschaften eines Riemannschen Raumes $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, von denen sich eine auf M als metrischen Raum, die zweite auf Riemannsche Geometrie, und die dritte auf die Topologie von M bezieht.

Satz 4.44 (Satz von Hopf und Rinow) Sein $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Riemannscher Raum mit der oben definierten Metrik d . Von den folgenden vier Eigenschaften

- (i) (M, d) ist ein vollständiger metrischer Raum
- (ii) $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ist geodätisch vollständig
- (iii) M hat die Heine-Borel-Eigenschaft
- (iv) Je zwei Punkte $p, q \in M$ können durch eine minimale geodätische Linie verbunden werden

sind (i)–(iii) äquivalent und implizieren (iv).

Beweis: (ii) \implies (iv): Sei $S = \exp_p(\rho S^{n-1})$ eine kleine geodätische Sphäre um p , und sei r der Punkt von S mit minimalem Abstand von $q \implies R := d(p, q) = \rho + d(S, q) = \rho + d(r, q) \implies d(r, q) = R - \rho$.

Sei $r = c(\rho)$ mit $c(t) = \exp(tv)$ (wobei $\|v\| = 1$), und $I = \{t \mid d(c(t), q) = R - t\}$. I ist abgeschlossen und $\rho \in I$. Sei $t_0 = \max I$, $p' = c(t_0)$. Wir wollen $t_0 = R$ zeigen, denn dann ist $d(c(t_0), q) = R - R = 0$ und $c(t_0) = q$, d.h. es existiert eine geodätische Linie, die p mit q verbindet, und deren Bogenlänge gleich $d(p, q)$ ist.

Jedenfalls ist $d(p', q) = R - t_0$. Im Falle $t_0 < R$ seien S', ρ', r' analog zu S, ρ, r definiert, und es ist $d(p', r') = \rho'$, $d(r', q) = (R - t_0) - \rho'$ analog zu oben, und weiters ist $d(p, r') \leq d(p, p') + \rho' \leq t_0 + \rho'$. Aus $d(p, r') < t_0 + \rho'$ würde folgen, daß $d(p, q) \leq d(p, r') + d(r', q) < t_0 + \rho' + R - t_0 - \rho' = R$, d.h. es ist sogar $d(p, r') = t_0 + \rho'$.

Eine Kurve der Länge $t_0 + \rho'$, die p mit r' verbindet, ist die gebrochene geodätische Linie von p über p' nach r' . Wegen [Satz 4.36](#) ist diese Kurve (weil kürzeste Verbindung) eine nicht gebrochene geodätische Linie, d.h. $c(t_0 + \rho') = r'$ und $t_0 + \rho' \in I$. Das ist ein Widerspruch zu $t_0 = \max(I)$. \square

Beweis: (i) \implies (ii): Sei $c(t)$ Geodätische und $t_0 = \sup\{t \mid c(t) \text{ definiert}\}$. Wir wollen aus $t_0 < \infty$ einen Widerspruch herleiten. Bei $t_0 < \infty$ ist $x_j := c(t_0 - 2^{-j})$ Cauchyfolge mit Limes x . Wähle eine Umgebung von x wo die geodätischen Linien die kürzesten Verbindungen sind, und $\exp_p(v)$ für $\|v\| < \delta$ jedenfalls definiert ist. Für ein x_j mit $d(x_j, x) < \delta/2$ stimmt die kürzeste Verbindung zwischen x_j und x_{j+1} mit $c(t_0 - 2^{-j} + t) = \exp_{x_j}(t \cdot v)$ überein, was jedoch auch für $t > \delta/2$ definiert ist, d.h. $c(t)$ ist auch für $t > t_0$ definiert.

(ii) \implies (iii): Sei $B \subseteq M$ beschränkt und abgeschlossen. Es existieren R, p mit $d(p, x) \leq R$

für alle $x \in B$. (ii) \implies (iv) wurde bereits gezeigt, also existieren geodätische Linien der Länge $< R$ von p nach x , d.h. $B \subseteq \exp_p(\{v \mid \|v\| \leq R\})$. Abg. Vollkugeln sind kompakt, deren stetige Bilder ebenfalls, desgleichen abgeschlossene Teilmengen von kompakten Mengen. D.h. B ist kompakt.

(iii) \implies (i): Sei x_j Cauchyfolge, und sei $|x_j - x_k| < \varepsilon$ für alle $j, k \geq n_0$. Dann ist $\{x_j \mid j \geq n_0\}$ in der kompakten Menge $\{x \mid d(x, x_{n_0}) \leq \varepsilon\}$ enthalten und hat dort nach Satz A.37 einen Häufungspunkt, der wegen Satz A.22 der Limes der Folge x_j ist. \square

Beispiel: Ist M kompakt, oder $M \subseteq \mathbb{R}^n$ abgeschlossen, so erfüllt M die Bedingung (iii) des Satzes von Hopf und Rinow. Dann lassen sich je zwei Punkte durch eine minimale geodätische Linie miteinander verbinden. Z.B. hat jede Fläche im \mathbb{R}^n , die durch eine Gleichung $F(x^1, \dots, x^n) = 0$ definiert ist, diese Eigenschaft. \diamond

4.8 Zerlegung der Eins und Integration

Definition 4.45 (Integral) Sei $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Riemannscher Raum und $\varphi : U \subseteq M \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Karte. Seien g_{jk} die dazugehörigen Koeffizienten der Metrik. Hat $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ die Eigenschaft $\text{supp}(f) \subseteq U$ und die Koordinatendarstellung $\tilde{f} = f \circ \varphi^{-1}$, dann ist

$$\int_M f dO := \int_{\varphi(U)} \tilde{f} \sqrt{\det(g_{jk})} du^1 \dots du^n. \quad \triangleright$$

Lemma 4.46 $\int_M f dO$ ist wohldefiniert, d.h. unabhängig von der Karte.

Der Beweis ist analog zu dem Beweis von Lemma 1.44.

Definition 4.47 (Zerlegung der Eins) Ist $(U_i)_{i \in I}$ eine Überdeckung von M und sind $(f_j)_{j \in J}$ Funktionen $f_j : M \rightarrow \mathbb{R}$, dann heißt (f_j) eine Zerlegung der Eins zu dieser Überdeckung, wenn gilt:

1. $f_j \geq 0$ in M , $\forall j \exists i : \text{supp}(f_j) \subseteq U_i$, und $\text{supp}(f_j)$ ist kompakt;
2. jedes $p \in M$ besitzt eine Umgebung W , in der nur endlich viele f_j nicht verschwinden;
3. $\sum f_j = 1$. \triangleright

Definition 4.48 (Integral) Ist $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ und ist $(f_j)_{j \in J}$ eine zu einer Überdeckung aus Kartenumgebungen gehörige Zerlegung der Eins, so ist

$$\int_M f dO := \sum_{j \in J} \int f \cdot f_j dO. \quad \triangleright$$

Lemma 4.49 Diese Definition ist von der Auswahl der f_j unabhängig.

Beweis: Seien f_j und \tilde{f}_k Zerlegungen der Eins ($j \in J, k \in K$), so ist $\sum_j \int f f_j = \sum_{j,k} \int f f_j f_k = \sum_k \int f \tilde{f}_k$. \square

Der folgende Satz gilt genau dann, wenn M parakompakt ist. Für kompaktes M ist der Beweis nicht schwierig.

Satz 4.50 Für jedes M und alle offenen Überdeckungen gibt es eine dazugehörige C^∞ -Zerlegung $(f_j)_{j \in J}$ der Eins ($r = 1, \dots, \infty$). Ist M kompakt, so ist J endlich.

Beweis: (für kompaktes M): Sei $\alpha(x) = 0$ für $x \leq 0$ und $\alpha(x) = e^{-1/x^2}$ sonst. Sei $\beta(x) = \alpha(x)/(\alpha(x) + \alpha(1-x))$, und $\gamma(x) = \beta(2-x)$. Dann ist $\gamma(x) = 1$ für $x \leq 1$, $0 < \gamma(x) < 1$ für $1 < x < 2$, und $\gamma(x) = 1$ für $x \geq 2$. α , β und γ sind C^∞ .

Wir bezeichnen mit B die offene Einheits-Vollkugel im \mathbb{R}^n . Für alle $x \in M$ gibt es Umgebungen U_x, V_x und eine Karte φ_x , so-

daß $\varphi_x(x) = 0$, $\varphi_x(V_x) = 3B$, $\varphi_x(U_x) = B$, und so, daß V_x in einer der Mengen der gegebenen Überdeckung enthalten ist. Sei $\tilde{f}_x(y) = \gamma(\|\varphi_x(y)\|)$ innerhalb von V_x und $\tilde{f}_x(y) = 0$ sonst. Dann ist \tilde{f}_x in ganz M definiert und C^∞ .

Endlich viele U_{x_j} überdecken M . Sei $\tilde{f} = \sum \tilde{f}_{x_j}$ und $f_j = \tilde{f}_{x_j}/\tilde{f}$. Dann ist $\{f_j\}$ eine zur gegebenen Überdeckung gehörige C^∞ -Zerlegung der Eins. \square

Daraus folgt ohne Mühe eine schwächere Version des Einbettungssatzes von Whitney:

Satz 4.51 *Ist M kompakt, so existiert eine Einbettung $g : M \rightarrow \mathbb{R}^m$.*

Beweis: Wir verwenden die Bezeichnungen aus dem Beweis zu Satz 4.50, nur verwenden wir die Indizes $1, \dots, r$ anstelle der Indizes x_1, \dots, x_r . $g : M \rightarrow \mathbb{R}^{nr+r}$ ist definiert durch $g(x) = (\tilde{f}_1(x)\varphi_1(x), \dots, \tilde{f}_r(x)\varphi_r(x), \tilde{f}_1(x), \dots, \tilde{f}_r(x))$.

g ist regulär, denn das j -te Koordinaten- n -tupel von g für sich genommen ist in U_j regulär. g ist injektiv, denn aus $\tilde{f}_j(x) = \tilde{f}_j(x') = 1$ folgt $x, x' \in U_j$, und dort ist φ_j injektiv. Nach Satz 3.15 ist g eine Einbettung. \square

5. Kapitel

Krümmung in Riemannschen Räumen

5.1 Der Riemannsche Krümmungstensor

Definition 5.01 (*Riemannscher Krümmungstensor*) Sei $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ eine Riemannsche MF und seien X, Y, Z Vektorfelder auf M . Dann heißt die Abbildung R , definiert durch

$$R(X, Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X, Y]} Z,$$

der *Riemannsche Krümmungstensor*. Er weist X, Y, Z das Vektorfeld $R(X, Y)Z$ zu. \triangleright

Diese Definition sieht zunächst recht unanschaulich aus. $R(X, Y)$ ist offenbar ein Differentialoperator 2. Ordnung für Vektorfelder Z . Wir werden jedoch zeigen, daß R trilinear ist und $(R(X, Y)Z)_p$ nur von X_p, Y_p, Z_p abhängt (d.h. daß R ein Tensorfeld ist).

Später werden wir einige geometrische Interpretationen von R kennenlernen. Es wird sich z.B. herausstellen, daß für eine 2-Fläche im \mathbb{R}^3 $R(X, Y)Z = K \cdot \det(X, Y) \cdot Z^\perp$ gilt.

Lemma 5.02 Für Funktionen $f, g : M \rightarrow \mathbb{R}$ gilt $R(fX_1 + gX_2, Y)Z = fR(X_1, Y)Z + gR(X_2, Y)Z$, und analog für Y und Z (d.h. R ist ein $(3, 1)$ -Tensorfeld), und $(R(X, Y)Z)_p$ hängt nur von X_p, Y_p, Z_p ab.

Lemma 5.03 Für Vektorfelder X, Y und Funktionen $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ gilt $[fX, Y] = f[X, Y] - (Yf)X$

Beweis: $[fX, Y]g = (fX)(Yg) - (Y((fX)g)) = fXYg - (Yf)(Xg) - f(YXg)$. \square

Beweis: (von Lemma 5.02) Die Additivität folgt direkt aus der Definition. Wir berechnen

$$\begin{aligned} R(fX, Y)Z &= \nabla_Y \nabla_{fX} Z - \nabla_{fX} \nabla_Y Z + \nabla_{[fX, Y]} Z \\ &= \nabla_Y (f \nabla_X Z) - f \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{f[X, Y] - (Yf)X} Z \\ &= (Yf) \nabla_X Z + f \nabla_Y \nabla_X Z - f \nabla_X \nabla_Y Z + f \nabla_{[X, Y]} Z - (Yf) \nabla_X Z \\ &= fR(X, Y)Z. \end{aligned}$$

Analog zeigt man $R(X, gY)Z = gR(X, Y)Z$.

$$\begin{aligned} R(X, Y)(hZ) &= \nabla_Y \nabla_X (hZ) - \nabla_X \nabla_Y (hZ) + \nabla_{[X, Y]} (hZ) \\ &= \nabla_Y (XhZ - h \nabla_X Z) - [\dots] + [X, Y]hZ + h \nabla_{[X, Y]} Z \\ &= YXhZ + Xh \nabla_Y Z - Yh \nabla_Y \nabla_X Z - h \nabla_Y \nabla_X Z - [\dots] + (") \\ &= hR(X, Y)Z. \end{aligned}$$

In einem lokalen Koordinatensystem mit der Karte $\varphi : M \rightarrow U$ seien $X = x^i \partial_i$, $Y = y^j \partial_j$ und $Z = z^k \partial_k$. Wir setzen $R(\partial_i, \partial_j) \partial_k = R_{ijk}^l \partial_l$ und erhalten

$$R(X, Y)Z = x^i y^j z^k R(\partial_i, \partial_j) \partial_k = x^i y^j z^k R_{ijk}^l \partial_l.$$

□

Definition 5.04 (*Koeffizienten des Krümmungstensors*) Ist φ eine Karte, so heißen die dazugehörigen Funktionen R_{ijk}^l die *Koeffizienten* des Riemannschen Krümmungstensors bezüglich φ . ▷

Bemerkung: Die Schreibweise $R(X, Y)Z$ anstelle von $R(X, Y, Z)$ kommt von der Interpretation von R als einer Vereinigung von linearen Abbildungen $R(X_p, Y_p) : T_p M \rightarrow T_p M$, $Z_p \mapsto R(X_p, Y_p)Z_p$ oder bilinearen Abbildungen $R : T_p M \times T_p M \rightarrow \text{End}(T_p M)$. ◇

Beispiel: Wir berechnen die Koeffizienten des Krümmungstensors des Levi-Civita-Zusammenhangs:

$$\begin{aligned} R_{ijk}^l \partial_l &= R(\partial_i, \partial_j) \partial_k = \nabla_j \nabla_i \partial_k - \nabla_i \nabla_j \partial_k = \nabla_j (\Gamma_{ik}^r \partial_r) - \nabla_i (\Gamma_{jk}^r \partial_r) \\ &= (\partial_j \Gamma_{ik}^l + \Gamma_{ik}^r \Gamma_{jr}^l - \partial_i \Gamma_{jk}^l - \Gamma_{ir}^l \Gamma_{ij}^r) \partial_l. \end{aligned}$$

Ist ∇ der induzierte Zusammenhang in einer Teilmannigfaltigkeit, und g eine lokale Parametrisierung, dann sind die dazugehörigen Koeffizienten R_{ijk}^l gegeben durch

$$R_{ijk}^l \partial_l = \left(\frac{\partial}{\partial_j} \left(\frac{\partial^2 g}{\partial u^i \partial u^k} \right)^{\text{tang}} - \frac{\partial}{\partial_i} \left(\frac{\partial^2 g}{\partial u^j \partial u^k} \right)^{\text{tang}} \right)^{\text{tang}}.$$

◇

5.2 Wegabhängigkeit der Parallelverschiebung

Wir kommen nun zu einer geometrischen Deutung des Krümmungstensors. Verschiebt man einen Vektor auf einer Fläche bzw. in einer Riemannschen Mannigfaltigkeit parallel, so erhält man für zwei verschiedene Wege zwei verschiedene Resultate. Diese Wegabhängigkeit der geodätischen Parallelverschiebung spiegelt gerade die Krümmung der Fläche bzw. Riemannschen Mannigfaltigkeit wieder. Wir zeigen zuerst ein technisches Lemma über die Vertauschbarkeit der Differentiationsreihenfolge bei Vektorfeldern.

Lemma 5.05 Für ein Vektorfeld $Z(u, t)$ längs $f(u, t)$ gilt

$$\frac{D}{dt} \frac{D}{du} Z - \frac{D}{du} \frac{D}{dt} Z = R \left(\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial t} \right) X.$$

Lemma 5.06 Sind $N \subseteq M$ Mannigfaltigkeiten, $p \in N$, und ist X ein in N definiertes Vektorfeld, so gibt es lokal um p ein in M definiertes Vektorfeld \tilde{X} , das X fortsetzt.

Beweis: Ist $M = \mathbb{R}^m$, N der Unterraum $x^{n+1} = \dots = x^m = 0$, und hat das Vektorfeld die Gestalt $X = X(x^1, \dots, x^n)$, so löst $\tilde{X}(x^1, \dots, x^m) = X(x^1, \dots, x^n)$ das Problem.

Der allgemeine Fall kann durch einen Diffeomorphismus auf diesen speziellen Fall zurückgeführt werden (nach Definition von "TMF"). □

Beweis: (von Lemma 5.05) Ist f regulär und sein Bild lokal eine 2-dimensionale Teilmannigfaltigkeit, so kann man $\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial t}$, und Z nach Lemma 5.06 zu Vektorfeldern X, Y, Z in M fortsetzen. Für eine skalare Funktion g mit $\tilde{g}(u, v) = g(f(u, v))$ gilt dann $Xg = \partial \tilde{g} / \partial u$ und $Yg = \partial \tilde{g} / \partial v$. Nach dem Satz von Schwarz gilt $[X, Y]g = 0$ in den Punkten $f(u, v)$, und die Definition von R liefert das Resultat. Ansonsten (wenn f nicht regulär ist) muß man eine längere Rechnung durchführen.¹⁾ □

¹⁾M. P. do Carmo, *Riemannian Geometry*, p. 98f.

Satz 5.07 Sei $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow M$ eine reguläre Abbildung mit $f(0,0) = p$, $\frac{\partial f}{\partial u}(0,0) = X_p$ und $\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = Y_p$. Wir bezeichnen mit $\text{Pt}_{u,v_0}^{u',v_0}$ die geodätische Parallelverschiebung längs der u -Linie von (u, v_0) bis (u', v_0) und mit $\text{Pt}_{u_0,v}^{u_0,v'}$ die geodätische Parallelverschiebung längs der v -Linie von (u_0, v) bis (u_0, v') . Dann ist

$$R(X_p, Y_p)Z_p = \lim_{s,t \rightarrow 0} \frac{1}{st} \left(\text{Pt}_{0,s}^{0,0} \text{Pt}_{t,s}^{0,s} \text{Pt}_{t,0}^{t,s} \text{Pt}_{0,0}^{t,0} Z_p - Z_p \right)$$

Beweis: Sei $Z(s,t)$ ein beliebiges Vektorfeld, das $Z_p = Z(0,0)$ fortsetzt. Nach Lemma 4.19 ist

$$\begin{aligned} \frac{D}{\partial v} \frac{D}{\partial u} Z &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} \left(\text{Pt}_{0,s}^{0,0} \frac{D}{\partial u} Z(0,s) - \frac{D}{\partial u} Z(0,0) \right) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} \left[\text{Pt}_{0,s}^{0,0} \left(\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (\text{Pt}_{t,s}^{0,s} Z(t,s) - Z(0,s)) \right) - \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (\text{Pt}_{t,0}^{0,0} Z(t,0) - Z(0,0)) \right] \\ &= \lim_{s,t \rightarrow 0} \frac{1}{st} (\text{Pt}_{0,s}^{0,0} \text{Pt}_{t,s}^{0,s} Z(t,s) - \text{Pt}_{0,s}^{0,0} Z(0,s) - \text{Pt}_{t,0}^{0,0} Z(t,0) + Z(0,0)); \\ &\quad \text{und analog} \\ \frac{D}{\partial u} \frac{D}{\partial v} Z &= \lim_{s,t \rightarrow 0} \frac{1}{st} (\text{Pt}_{t,0}^{0,0} \text{Pt}_{t,s}^{t,0} Z(t,s) - \text{Pt}_{t,0}^{0,0} Z(t,0) - \text{Pt}_{0,s}^{0,0} Z(0,s) + Z(0,0)). \end{aligned}$$

Nun setze man $Z(s,t) = \text{Pt}_{t,0}^{t,s} \text{Pt}_{0,0}^{t,0} Z_p$ und verwende Lemma 5.05:

$$R(X_p, Y_p)Z_p = \lim_{s,t \rightarrow 0} \frac{1}{st} \left(\text{Pt}_{0,s}^{0,0} \text{Pt}_{t,s}^{0,s} \text{Pt}_{t,0}^{t,s} \text{Pt}_{0,0}^{t,0} Z_p - Z_p \right)$$

□

Definition 5.08 (flacher Riemannscher Raum) Ein Riemannscher Raum heißt *flach*, wenn $R(X,Y)Z = 0$ für alle X, Y, Z . ▷

Satz 5.09 Die folgenden Aussagen für $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ sind äquivalent:

1. $R = 0$, d.h. M ist flach.
2. Die Parallelverschiebung ist lokal wegunabhängig.
3. $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ist lokal isometrisch zum euklidischen \mathbb{R}^n , d.h. M ist abwickelbar.

Beweis: (3) \implies (1) und (3) \implies (2) sind trivial.
— (2) \implies (1) folgt aus dem vorigen Satz.

— (1) \implies (2): Wir verwenden wir eine Karte $\varphi : U \subseteq M \rightarrow \mathbb{R}^n$. Sei o.B.d.A. $\varphi(p) = (0, \dots, 0)$. Sei Z_p ein Tangentialvektor in p . Erzeuge ein Vektorfeld $Z(u^1, \dots, u^n)$ durch Parallelverschiebung von Z_p längs der Parameterlinien $(0, \dots, 0) \rightarrow (u^1, \dots, 0) \rightarrow \dots \rightarrow (u^1, \dots, u^n)$.

Nach Konstruktion ist Z ein Parallelfeld längs der u^i -Linien durch die Punkte $(u^0, \dots, u^i, 0, \dots, 0)$. Insbesondere ist Z ein Parallelfeld längs jeder u^n -Linie.

Wir schreiben $\langle P(i, j) \rangle$ für $\langle \nabla_i Z(u^1, \dots, u^j, 0, \dots, 0) \rangle$. Nach Konstruktion gilt $\langle P(i, i) \rangle$. Wir zeigen $\langle P(i, j) \rangle \implies \langle P(i, j+1) \rangle$:

Aus $R = 0$ folgt $\nabla_{j+1} \nabla_i Z = \nabla_i \nabla_{j+1} Z$. Wegen $\langle P(j+1, j+1) \rangle$ ist $\nabla_{j+1} Z(u^1, \dots, u^{j+1}, 0, \dots, 0) = 0$, also ist $\nabla_{j+1} \nabla_i Z(u^1, \dots, u^{j+1}, 0, \dots, 0) = 0$, d.h. $\nabla_i Z$ ist ein Parallelfeld längs

der u^{j+1} -Linie in den Punkten $(u^1, \dots, u^{j+1}, 0, \dots, 0)$. Das Vektorfeld $\nabla_i Z$ verschwindet bei $(u^1, \dots, u^j, 0, \dots, 0)$ wegen $\langle P(i, j) \rangle$. Nachdem die Parallelverschiebung ein VR-Isomorphismus ist, ist $\nabla_i Z$ längs der ganzen u^{j+1} -Linie gleich 0, also gilt $\langle P(i, j+1) \rangle$.

Mit Induktion folgt nun $\langle P(i, n) \rangle$, d.h. $\nabla_i Z = 0$ überall in U . Ist $X = x^i \partial_i$, so ist $\nabla_X Z = x^i \nabla_i Z$, also $\nabla_X Z = 0$ überall in U . D.h. Z ist Parallelfeld längs jeder Kurve \implies das Ergebnis der Parallelverschiebung längs jeder Kurve c in U ist gleich dem Wert von Z im Endpunkt, unabhängig von der Kurve.

— (2) \implies (3): Wir zeigen die Existenz einer lokalen Parametrisierung so, daß die Koeffizienten g_{jk} der Metrik gleich δ_{jk} sind. Wir wählen in $T_p M$ eine Orthonormalbasis $(E_1)_p, \dots, (E_n)_p$, verschieben diese Vektoren (wegunabhängig) parallel, und erhalten so Vektorfelder E_1, \dots, E_n . Wegen (2) gilt

$\nabla_{E_i} E_j = 0$, und wegen der Symmetrie von ∇ gilt $[E_i, E_j] = \nabla_{E_i} E_j - \nabla_{E_j} E_i = 0 - 0 = 0$.

Sei $f : V \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow M$ die Abbildung $\psi : (v^1, \dots, v^n) \mapsto \text{Fl}_{E_1}^{v^1} \circ \dots \circ \text{Fl}_{E_n}^{v^n}(p)$. Nach Konstruktion sind die Ableitungsvektoren der v^i -Parameterlinien die Vektoren E_i . Nach Lemma 3.25 ist die Reihenfolge der Flüsse irrelevant, d.h. es gilt $\partial\psi/\partial v^i = E_i$ für alle i . Damit

ist $d\psi$ regulär und ψ eine lokale Parametrisierung mit Basisfeldern $\partial_i = E_i$. Die E_i sind Parallelfelder längs jeder Kurve, und daher ist $\langle E_j, E_k \rangle = \langle (E_j)_p, (E_k)_p \rangle = \delta_{jk}$. Die Koeffizienten g_{jk} von $\langle \cdot, \cdot \rangle$ bezüglich ψ sind gegeben durch $g_{jk} = \langle \partial_j, \partial_k \rangle = \langle E_j, E_k \rangle = \delta_{jk}$, was zu zeigen war. \square

Satz 5.10 Für den Riemannschen Krümmungstensor gelten die folgenden Gleichungen

- (1) $R(X, Y)Z = -R(Y, X)Z$
- (2) $R(X, Y)Z + R(Z, X)Y + R(Y, Z)X = 0$ (Bianchi-Identität)
- (3) $\langle R(X, Y)Z, W \rangle + \langle R(X, Y)W, Z \rangle = 0$
- (4) $\langle R(X, Y)Z, W \rangle = \langle R(Z, W)X, Y \rangle$

Beweis: (1) folgt direkt aus der Definition von R . Bei (2) nehmen wir o.B.d.A. an, daß X, Y, Z Basisfelder sind, d.h. $[X, Y] = [X, Z] = [Y, Z] = 0$ gilt. Wir berechnen

$$R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \dots = 0.$$

Bei (3) ist zu zeigen, daß $\langle R(X, Y)Z, W \rangle$ in Z und W schiefsymmetrisch ist, d.h. z.z. ist $\langle R(X, Y)Z, Z \rangle = 0$:

$$\begin{aligned} XY \langle Z, Z \rangle &= X(2 \langle \nabla_Y Z, Z \rangle) = 2 \langle \nabla_X \nabla_Y Z, Z \rangle + 2 \langle \nabla_Y Z, \nabla_X Z \rangle \\ YX \langle Z, Z \rangle &= Y(2 \langle \nabla_X Z, Z \rangle) = 2 \langle \nabla_Y \nabla_X Z, Z \rangle + 2 \langle \nabla_X Z, \nabla_Y Z \rangle \\ [X, Y] \langle Z, Z \rangle &= 2 \langle \nabla_{[X, Y]} Z, Z \rangle \end{aligned}$$

Durch Subtraktion der ersten beiden Gleichungen von der dritten entsteht $(XY - YX + [X, Y]) \langle Z, Z \rangle = 2 \langle R(Y, X)Z, Z \rangle$, und das verschwindet aufgrund von Lemma 3.20.

Um (4) zu zeigen, verwenden wir viermal (2) und addieren:

$$\begin{aligned} 0 &= \langle R(X, Y)Z, W \rangle + \langle R(Y, Z)X, W \rangle + \langle R(Z, X)Y, W \rangle \\ 0 &= \text{(zyklisches Vertauschen)} \\ \implies 0 &= 2 \langle R(ZX)Y, W \rangle + 2 \langle R(W, Y)Z, X \rangle. \end{aligned}$$

Es folgt $\langle R(Z, X)Y, W \rangle = \langle R(Y, W)Z, X \rangle$, was zu zeigen war. \square

Bemerkung: $R(X, Y, Z, W) := \langle R(X, Y)Z, W \rangle$ heißt ebenfalls Riemannscher Krümmungstensor. Sei $R_{ijkl} := R(\partial_i, \partial_j, \partial_k, \partial_l)$. Aus $R_{ijkl} = \langle R_{ijk}^r \partial_r, \partial_l \rangle$ folgt $R_{ijkl} = g_{lj} R_{ijk}^r$ und $R_{ijk}^r = g^{lr} R_{ijkl}$, d.h. die Koeffizienten R_{\dots} und R^{\dots} bestimmen einander wechselseitig. \diamond

Bemerkung: Bei $\dim M = 2$ gibt es 16 Koeffizienten R_{ijkl} , doch aufgrund der vielfachen Symmetrien sind diese alle durch R_{1212} bestimmt:

$R_{ijkl} = -R_{jkk}l = -R_{ijlk} = R_{klji}$, insbes. ist $R_{iikl} = R_{ijkk} = 0$. Später werden wir sehen, daß für 2-Flächen im \mathbb{R}^3 die Beziehung $R_{1212} = \det(g_{jk}) \cdot K$ gilt. \diamond

Als eine abgeleitete Größe ergibt sich aus dem Krümmungstensor durch Spurbildung der Ricci-Tensor. Für festgehaltenes X, Y ist $R(\cdot, X)Y$ eine lineare Abbildung von $T_p M$ nach $T_p M$ (oder ein $(1, 1)$ -Tensor). Von dieser linearen Abbildung kann man die Spur bestimmen (in lokalen Koordinaten als Summe der Diagonalelemente der Koeffizientenmatrix). Wir erhalten das folgende Feld von Bilinearformen (d.h. ein $(2, 0)$ -Tensorfeld):

Definition 5.11 (Ricci-Tensor) $\text{Ric}(X, Y) = \text{tr}(R(\cdot, X)Y)$. \triangleright

Es folgt direkt aus der Definition, daß der Ricci-Tensor tatsächlich eine Bilinearform ist. In lokalen Koordinaten ergeben sich seine Koeffizienten aus

$$\text{Ric}(\partial_j, \partial_k) = R_{jk} = \sum_i R_{ijk}^i.$$

Definition 5.12 (Schnittkrümmung) Seien $v, w \in T_p M$ zwei linear unabhängige Vektoren. Dann ist die *Schnittkrümmung* wie folgt definiert:

$$K(v, w) = \frac{\langle R(v, w)v, w \rangle}{\langle v, v \rangle \langle w, w \rangle - \langle v, w \rangle^2}$$

 \triangleright

Lemma 5.13 $K(v, w)$ hängt nur von der Ebene ab, die von v, w aufgespannt wird.

Beweis: Wir zeigen $K(v, w) = K(w, v) = K(v + \lambda w, w) = K(\lambda v, w)$:

- $\langle R(v, w)v, w \rangle = -\langle R(w, v)v, w \rangle = \langle R(w, v)w, v \rangle$ und $\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$.
- $\langle R(v + \lambda w, w)(v + \lambda w), w \rangle = \langle R(v, w)v + \lambda R(w, w)v + \lambda R(v, w)w + \lambda^2 R(w, w)w, w \rangle$
 $= \langle R(v, w)v, w \rangle$ und $\langle v + \lambda w, v + \lambda w \rangle \langle w, w \rangle - \langle v + \lambda w, w \rangle^2 = (\langle v, v \rangle + 2\lambda \langle v, w \rangle \langle w, w \rangle + \lambda^2 \langle w, w \rangle) \cdot \langle w, w \rangle - (\langle v, w \rangle + \lambda \langle w, w \rangle)^2 = \langle v, v \rangle \cdot \langle w, w \rangle - \langle v, w \rangle^2$.
- $\langle R(\lambda v, w)\lambda v, w \rangle = \lambda^2 \langle R(v, w)v, w \rangle$ und $\langle \lambda v, \lambda v \rangle \langle w, w \rangle - \langle \lambda v, w \rangle^2 = \lambda^2 (\langle v, v \rangle \langle w, w \rangle - \langle v, w \rangle^2)$.

 \square

Folgerung: Wegen Lemma 5.13 gibt es bei 2-dimensionalen Riemannschen Räumen nur eine einzige Schnittkrümmung.

5.3 Jacobi-Felder

Wir befassen uns nun, bildlich gesprochen, mit der Frage ‘inwieweit geodätische Linien, die von einem Punkt ausgehen, auseinanderlaufen’. Die Bestimmung dieser geodätischen Abweichung und des Zusammenhangs mit der Krümmung ist ein wesentliches technisches Hilfsmittel beim Studium lokaler und globaler geometrischer Eigenschaften von Riemannschen Mannigfaltigkeiten.

Lemma 5.14 Seien $I, I' \subseteq \mathbb{R}$ Intervalle und sei $f : I \times I' \rightarrow M$ so, daß $c_u(t) = f(u, t)$ eine geodätische Linie ist. Wir setzen $c(t) = c_0(t)$ und $J(t) = \frac{\partial f}{\partial u}(0, t)$. Dann gilt

$$\frac{D^2 J}{dt^2} + R(\dot{c}, J)\dot{c} = 0.$$

Beweis: Es gilt $\frac{D}{du} \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{D}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial u}$ (siehe Lemma 4.13). Nach Voraussetzung ist $\frac{D}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial t} = 0$. Wir wenden die obige Relation und Lemma 5.05 an und erhalten

$$0 = \frac{D}{\partial u} \frac{D}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial t} = R\left(\frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial u}\right) \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{D}{\partial t} \frac{D}{\partial u} \frac{\partial f}{\partial t} = R\left(\frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial u}\right) \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{D}{\partial t} \frac{D}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial u}.$$

 \square

Definition 5.15 (Jacobische Dgl., Jacobi-Feld) Die Differentialgleichung in Lemma 5.14 heißt *Jacobische Differentialgleichung*. Jedes Vektorfeld, welches die Jacobische Differentialgleichung erfüllt, heißt *Jacobi-Feld* längs der geodätischen Linie c . \triangleright

Lemma 5.16 Sei $v(u)$ eine Kurve in $T_p M$ mit $\|v\| = 1$, $\|\dot{v}(0)\| = 1$, und $f(u, t) = \exp_p(t \cdot v(u))$. Mit

$$J(t) = \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{u=0}, \quad \dot{v}(0) = w \quad \text{gilt}$$

$$\langle J, J \rangle = t^2 - \frac{1}{3} K(v, w) t^4 + o(t^4), \quad \|J(t)\| = t - \frac{1}{6} K(v, w) t^3 + o(t^3).$$

Beweis: $J(t)$ ist ein Jacobifeld, weil $f(u, t)$ für festes u eine geodätische Linie ist. Wir benötigen die Ableitungen von $\langle J(t), J(t) \rangle$ an der Stelle $t = 0$. Wir schreiben hier ' sowohl für die kovariante als auch für die gewöhnliche Ableitung nach t längs der Kurve $f(t, 0)$. Wir erhalten der Reihe nach:

- $\langle J, J \rangle(0) = 0$, weil $J(0) = 0$
- $\langle J, J \rangle' = 2\langle J', J \rangle = 0$ bei $t = 0$.
- $J'(0) = \left. \frac{D}{dt} \frac{\partial}{\partial u} f(0, 0) \right|_{u=0} = \left. \frac{D}{du} \frac{\partial}{\partial t} f(0, 0) \right|_{u=0} = \left. \frac{D}{du} \frac{\partial}{\partial t} \exp_p(tv(u)) \right|_{u=0} = \frac{D}{du} v(0) = \dot{v}(0) = w$ (nach Lemma 4.09).
- $\langle J, J \rangle'' = 2\langle J'', J \rangle + 2\langle J', J' \rangle$. Bei $t = 0$ ist das gleich $2\langle J', J' \rangle = 2\langle w, w \rangle = 2$.
- $J'' = -R(\dot{c}, J)\dot{c} = 0$ bei $t = 0 \implies \langle J, J \rangle''' = 2\langle J'', J \rangle + 6\langle J', J' \rangle' = 0$ bei $t = 0$.
- $\langle J, J \rangle'''' = 2\langle J'''' , J \rangle + 8\langle J''', J' \rangle + 6\langle J'', J'' \rangle = 8\langle J''', J' \rangle$ Bei $t = 0$ ergibt sich $\frac{1}{8} \cdot$
 $\langle J, J \rangle'''' = \left\langle \frac{D}{dt} R(\dot{c}, J)\dot{c}, J' \right\rangle = \langle R(\dot{c}, J)\dot{c}, J' \rangle' - \langle R(\dot{c}, J)\dot{c}, J'' \rangle = \langle R(\dot{c}, J')\dot{c}, J' \rangle' = \left\langle \frac{D}{dt} R(\dot{c}, J')\dot{c}, J' \right\rangle + \langle R(\dot{c}, J')\dot{c}, J' \rangle = \langle R(\dot{c}, w)\dot{c}, w \rangle = K(\dot{c}, w) = K(v, w).$

Damit haben wir die ersten vier Glieder der Taylorreihe von $\langle J, J \rangle$ bestimmt. Für die Wurzel aus $\langle J, J \rangle$ verwenden wir die binomische Reihe $\sqrt{1+\alpha} = 1 + \frac{1}{2}\alpha + \dots$:
 $\|J\| = \sqrt{r^2(1 - Kr^2/3 + \dots)} = |r|(1 - Kr^2/6 + \dots).$ \square

Wir werden dieses Lemma anwenden, um zu zeigen, wie sich die Krümmung einer Riemannschen Mannigfaltigkeit in Abweichungen von der bekannten Euklidischen Elementargeometrie manifestiert:

Beispiel: (*Umfang eines geodätischen Kreises*) Sei $E_1, E_2 \in T_p M$ eine Orthonormalbasis eines zweidimensionalen Unterraumes von $T_p M$. Die Kurve $v: \mathbb{R} \rightarrow T_p M$, $u \mapsto \cos(u)E_1 + \sin(u)E_2$ beschreibt einen Kreis vom Radius 1 in diesem Unterraum, und $k_r(u) = f(u, r) = \exp_p(r \cdot v(u))$ beschreibt für festes r einen *geodätischen Kreis* vom Radius r um p .

Nachdem $\|\dot{v}(0)\| = 1$ ist, können wir Lemma 5.16 direkt auf die Jacobifelder $J_u(r) = \frac{\partial}{\partial u} \exp_p(r \cdot v(u))$ längs der geodätischen Linien $c_u(t) = \exp_p(t \cdot v(u))$ anwenden, um den Umfang $U(r)$ zu bestimmen:

$$U(r) = \int_0^{2\pi} \|\dot{k}_r(u)\| du = \int_0^{2\pi} \left\| \frac{\partial}{\partial u} \exp_p(r \cdot v(u)) \right\| du = \int_0^{2\pi} \|J(u, r)\| du$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(r - \frac{1}{6} K(E_1, E_2) r^3 + o(r^3) \right) du = 2\pi \left(r - \frac{1}{6} K(E_1, E_2) r^3 \right) + \int_0^{2\pi} o(r^3)$$

$$K(E_1, E_2) = -6 \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r^3} \left(\frac{U(r)}{2\pi} - r - \int_0^{2\pi} o(r^3) \right) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{3}{\pi r^3} (2\pi r - U(r)).$$

D.h. die Schnittkrümmung steht in direkter Beziehung zur Abweichung des Umfangs eines geodätischen Kreises vom euklidischen Maß $2\pi r$. \diamond

Beweis: Hier fehlte die Begründung, warum Integration und Grenzübergang vertauscht werden dürfen. Nach Lemma 5.16 haben wir $\|J(u, r)\| = |r|g(u, r)$. Wir nehmen an, daß $\exp_p C^4$ ist, also $g \in C^3$. Wegen $g = \partial_r g = \partial_r^2 g = \text{const}$ bei $u = 0$ ist nach dem Satz von Taylor $g(u_0 + u, r) = 1 - \frac{K}{6}r^2 + \frac{1}{6}r^3(\partial_r^3 g)(u_0 + \theta u, \theta r)$ mit $0 \leq \theta(u_0, u, r) \leq$

1. Das Restglied $h = g - 1 - Kr^2/6$ ist C^3 und h/r^2 wird wegen $\lim_{(u,r) \rightarrow 0} \frac{1}{r^2}h(u_0 + u, r) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r}{6}(\partial_r^3 g)(u_0 + \theta u, \theta r) = 0$, durch $h(u, 0) = 0$ stetig fortgesetzt. Der Ausdruck $\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r^3} \int o(r^3)$ hat nun genauer die Form $\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r^3}h(u, r)$. Nachdem $|h(u, r)/r^2|$ stetig, d.h. in $[0, 2\pi] \times [0, \varepsilon]$ gleichmäßig stetig ist, ist $\lim f = f \lim = \int 0 = 0$. \square

Beispiel: (*Fläche eines geodätischen Kreises*) Wir verwenden die gleichen Bezeichnungen wie im vorigen Beispiel und bestimmen die Fläche des geodätischen Kreises k_R . Dessen Inneres ist parametrisiert durch

$$f : [0, 2\pi] \times [0, R] \rightarrow M, \quad (r, u) \mapsto k_r(u) = \exp_p(r \cdot v(u)).$$

Die Koeffizienten g_{rr}, g_{ru}, g_{uu} der Metrik sind wie folgt:

$$g_{rr} = \left\| \frac{\partial f}{\partial r} \right\|^2 = 1, \quad g_{ru} = 0 \quad \text{nach Satz 4.33,} \quad g_{uu} = \langle J(u), J(u) \rangle.$$

Nun ist die Fläche gegeben durch

$$\begin{aligned} A(R) &= \int_0^R \int_0^{2\pi} \sqrt{g_{rr}g_{uu} - g_{ur}^2} du dr = \int_0^R \int_0^{2\pi} \|J(u)\| du dr = \int_0^R U(r) dr \\ &= 2\pi \int_0^R \left(r - \frac{1}{6}K(E_1, E_2)r^3 + o(r^3) \right) dr = \pi R^2 - \frac{1}{12}\pi K(E_1, E_2)R^4 + o(R^4) \\ \implies K &= \lim_{R \rightarrow 0} \frac{12}{\pi R^4}(\pi R^2 - A(R)) \end{aligned}$$

D.h. die Schnittkrümmung ist in direkter Beziehung zur Abweichung der Fläche eines geodätischen Kreises von dem bekannten euklidischen Maß. Die Lücke im Beweis kann ähnlich zum vorigen Beispiel geschlossen werden. \diamond

Definition 5.17 (*Riemannsche Teilmannigfaltigkeit*) Ist $(\tilde{M}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Riemannscher Raum und $M \subseteq \tilde{M}$ eine TMF, so heißt M versehen mit dem Skalarprodukt von \tilde{M} *Riemannsche Teilmannigfaltigkeit* von \tilde{M} . \triangleright

Lemma 5.18 Sind $E_1, E_2 \in T_p \tilde{M}$, dann hat die Riemannsche Teilmannigfaltigkeit $M = \exp_p(\mathbb{R}E_1 + \mathbb{R}E_2)$ in $p \in M$ dieselbe Schnittkrümmung $K(E_1, E_2)$ wie in $p \in \tilde{M}$.

Beweis: Die von p ausgehenden geodätischen Linien tangential an $\mathbb{R}E_1 + \mathbb{R}E_2$ stimmen für M und \tilde{M} überein (lokal sind sie für beide Mannigfaltigkeiten die kürzesten Verbindungen zu p), und damit auch die Umfänge $U(r)$ von geodätischen Kreisen. Die Gleichheit der Schnittkrümmungen folgt aus dem vorigen Beispiel. \square

5.4 Konjugierte Punkte und minimale geodätische Linien

Definition 5.19 (*konjugierte Punkte*) Ist c geodätische Linie und existiert ein Jacobi-feld $J \neq 0$ längs c mit $J(a) = J(b) = 0$, so heißen $c(a)$ und $c(b)$ *zueinander konjugierte Punkte* längs c . \triangleright

Bildlich gesprochen, schneiden einander ‘infinitesimal benachbarte’ geodätische Linien, die von $c(a)$ ausgehen, einander im Punkt $c(b)$.

Lemma 5.20 Die Jacobi-Felder längs c bilden einen $2n$ -dimensionalen Vektorraum und sind für beliebiges a durch $J(a)$ und $\frac{D}{dt}J(a)$ eindeutig festgelegt.

Beweis: Sind E_1, \dots, E_n linear unabhängige Parallelfelder längs einer geodätischen Linie c mit $E_1 = \dot{c}$, dann setzen wir $J(t) = x^j(t)E_j(t)$. Es gilt $\frac{D}{dt}J = \dot{x}^j(t)E_j(t)$ und $\frac{D^2J}{dt^2} = \ddot{x}^j(t)E_j(t) = -R(\dot{c}, J)\dot{c}$.

$$\implies \ddot{x}^j E_j + x^j R(E_1, E_j)E_1 = 0$$

D.h. wir erhalten eine lineare Dgl. 2. Ordnung für die Koeffizientenfunktionen $x^j(t)$. Es existiert ein $2n$ -dimensionaler Vektorraum von Lösungen, und jede Lösung ist durch die Anfangsbedingungen $J(a) = x^j(a)E_j(a)$ und $\frac{D}{dt}J = \dot{x}^j(a)E_j(a)$ eindeutig bestimmt. \square

Lemma 5.21 Jedes Jacobifeld längs einer Geodätischen entsteht auf die Weise wie in Lemma 5.14 angegeben

Beweis: Durch die Konstruktion in Lemma 5.14 kann man einen $2n$ -dimensionalen Vektorraum von Vektorfeldern längs c erzeugen: Mit der dortigen Notation ist $J(0) = \frac{\partial f}{\partial u}(0,0)$. Aus dem Beweis von Lemma 5.16 sehen wir, daß im Fall $f(u,0) = \text{const}$ gilt $J'(0) = \frac{d}{du}(\frac{\partial f}{\partial t}(u,0))$. \square

Lemma 5.22 Sei $c(t) = \exp_p(tv)$ eine geodätische Linie. Es gibt einen zu $c(0)$ konjugierten Punkt $c(r)$ genau dann, wenn \exp_p bei rv singularär ist:

Beweis: $d(\exp_p)_{rv}(w) \stackrel{\text{Def.}}{=} \frac{d}{du} \Big|_{u=0} \exp(rv + uw) = \frac{\partial}{\partial u} \Big|_{u=0} \exp(t(v + \frac{u}{r}w)) = J(r)$, wenn $J(t)$ das Jacobifeld $\frac{\partial}{\partial u} \Big|_{u=0} \exp(tu)$ bezeichnet. D.h. $d(\exp_p)_{rv}$ hat genau dann einen nichttrivialen Kern, wenn das Jacobifeld J bei r eine Nullstelle hat. \square

Der folgende Satz ist wesentlich für globale Probleme in der Riemannschen Geometrie:

Satz 5.23 Ist c eine geodätische Linie und liegt zwischen $c(a)$ und $c(b)$ ein zu $c(a)$ konjugierter Punkt, so ist c nicht die kürzeste Verbindung zwischen $c(a)$ und $c(b)$ in der Klasse der stückweise differenzierbaren Kurven, die $c(a)$ und $c(b)$ verbinden.

Beweis: (Idee) Ein anschauliches Argument ist das folgende: Man betrachte exemplarisch $M = S^n$, $c(0) = N$ ist der Nordpol, $c(\pi) = S$ ist der Südpol, konjugiert zum Nordpol. $c_u(t)$ sei eine Schar von geodätischen Linien mit $c_u(\pi) = S$. Blickt man von unten auf die Schar $c_u(t)$, so sieht man, daß man den ‘geraden Weg’ von $c_0(0)$ bis $c_0(\pi + \varepsilon)$ (der längs c_0 die Länge $\pi + \varepsilon$ hat) dadurch abkürzen kann, daß man die Ecke zwischen den Punk-

ten $c_\varepsilon(\pi - \varepsilon)$ und $c_0(\pi + \varepsilon)$ abschneidet, deren Entfernung $< 2\varepsilon$ beträgt, und man so eine stückweise differenzierbare Kurve der Länge $< \pi - \varepsilon + 2\varepsilon$ erhält, die kürzer als der Weg längs c_0 ist.

Im allgemeinen Fall folgt die Ungleichung ‘ $< 2\varepsilon$ ’ aus $d(c_0(r), c_\varepsilon(r)) = o(\varepsilon)$, wenn $c_0(r)$ der zu $c_0(0)$ konjugierte Punkt ist. Der übliche Beweis verwendet jedoch einen anderen Zugang.²⁾ \square

²⁾Siehe J. Milnor: *Morse Theory*, §§ 13–15; bzw. M. P. do Carmo, *Riemannian Geometry*, pp. 243ff.

Bemerkung: Ist $K(v, w) \geq \frac{1}{r^2}$ für alle $v, w \in TM$, oder ist $\frac{1}{n-1} \text{Ric}(v, v) \geq \frac{1}{r^2}$ für alle $v \in TM$ mit $\|v\| = 1$, so ist der erste konjugierte Punkt höchstens πr entfernt. Ist die MF vollständig, so ist daher ihr Durchmesser $\text{diam}(M) \leq \pi r$ (Satz von Bonnet/Myers).³⁾ \diamond

Satz 5.24 Ist $K(v, w) \leq 0$ in M , so existieren keine konjugierten Punkte.

Beweis: Sei J ein Jacobifeld längs der geodätischen Linie $c(t)$. Wir verwenden $'$ für Ableitungen nach t längs c . Dann ist $\langle J, J \rangle'' = 2\langle J'', J \rangle + 2\langle J', J' \rangle \geq -2\langle R(\dot{c}, J)\dot{c}, J \rangle \geq 0$. D.h. $\langle J, J \rangle'$ ist streng monoton steigend. Aus der Taylorentwicklung von $\langle J, J \rangle$ um eine Nullstelle (Lemma 5.16) folgt $\langle J, J \rangle = t^2 - \dots \implies \langle J, J \rangle' = |t - \dots| \implies \langle J, J \rangle'$ ist positiv in einer Umgebung einer Nullstelle $\implies \langle J, J \rangle$ ist streng monoton außerhalb von Nullstellen $\implies J$ kann nur eine Nullstelle besitzen. \square

Folgerung: Ist $K(v, w) \leq 0$ in M , dann ist \exp_p global regulär für alle p und nicht nur lokal.

Bemerkung: Ist M vollständig, einfach zusammenhängend, und $K(v, w) \leq 0$, dann ist \exp_p ein Diffeomorphismus, d.h. M ist diffeomorph zum \mathbb{R}^n (Satz von Cartan-Hadamard).⁴⁾ \diamond

5.5 Riemannsche Teilmannigfaltigkeiten

Wir betrachten Teilmannigfaltigkeiten von Riemannschen Räumen. Für den \mathbb{R}^n haben wir das bereits getan — beim Studium von Kurven und Flächen im euklidischen Raum (siehe Kap. 1 und Kap. 2).

Die Definition von ‘Riemannscher Teilmannigfaltigkeit’ erfolgte bereits auf S. 55.

Definition 5.25 (*Isometrische Immersion*) Ist $f : M \rightarrow \tilde{M}$ regulär und ist $\langle V, W \rangle_M = \langle df(V), df(W) \rangle_{\tilde{M}}$, so heißt f *isometrische Immersion*. Ist f bijektiv, so heißt f *Isometrie*. \triangleright

Formal ist die Einbettung einer Riemannschen Teilmannigfaltigkeit in einen Riemannschen Raum eine isometrische Immersion.

Wir werden nun einige Begriffe, die wir für Flächen im euklidischen Raum bereits definiert haben, auf Riemannsche Räume übertragen.

Definition 5.26 (*Orthogonalraum*) Ist M Riemannsche Teilmf. von \tilde{M} , so heißt das orthogonale Komplement $\perp_p M$ von $T_p M$ in $T_p \tilde{M}$ der Orthogonalraum von M in p . \triangleright

Definition 5.27 (*induzierter Zusammenhang, II. Fundamentalform*) $M \subseteq \tilde{M}$ sei eine Riemannsche TMF, $\tilde{\nabla}$ sei ein Zusammenhang in \tilde{M} . Wir bezeichnen mit

$$\pi_M : T_p \tilde{M} \rightarrow T_p M, \quad \pi_M^\perp : T_p \tilde{M} \rightarrow \perp_p M$$

die Projektion von $T_p \tilde{M}$ auf $T_p M$ und die dazu orthogonale Projektion. Sei ferner für ein Vektorfeld Y auf M \tilde{Y} ein beliebiges Vektorfeld, welches Y auf \tilde{M} fortsetzt. Dann heißt $\nabla_X Y := \pi_M(\tilde{\nabla}_X \tilde{Y})$ der von $\tilde{\nabla}$ induzierte Zusammenhang. Die Normalkomponente $\pi_M^\perp(\tilde{\nabla}_X Y)$ heißt die *II. Fundamentalform*:

$$\Pi(X, Y) = \tilde{\nabla}_X \tilde{Y} - \nabla_X Y.$$

\triangleright

³⁾ Für den Fall $n = 2$ siehe die Übungsbeispiele Bsp. 6.06, Bsp. 6.07. Für den allgemeinen Fall siehe M. P. do Carmo, loc. cit., p. 202

⁴⁾ Siehe M. P. do Carmo, loc. cit. p. 149.

Bemerkung: Es ist zu noch zeigen, daß (i) $\nabla_X Y$ wohldefiniert ist und (ii) ∇ tatsächlich ein Zusammenhang ist. Wir bezeichnen die zu ∇ und $\tilde{\nabla}$ gehörigen kovarianten Ableitungen mit $\frac{D}{dt}$ bzw. $\frac{\tilde{D}}{dt}$. Sind \tilde{Y} und $\tilde{\tilde{Y}}$ zwei verschiedene Erweiterungen von Y und ist $c : I \rightarrow M$ eine Kurve mit $\dot{c}(0) = X_p$, so ist

$$\nabla_{X_p} \tilde{Y} = \frac{\tilde{D}}{dt} \tilde{Y} \circ c(0) = \frac{\tilde{\tilde{D}}}{dt} \tilde{\tilde{Y}} \circ c(0) = \nabla_{X_p} \tilde{\tilde{Y}}$$

weil auf beiden Seiten nur Werte von Y entlang c eingehen. Daß ∇ tatsächlich ein Zusammenhang ist, weist man ganz analog zu S. 35 nach. Ebenfalls ganz analog zur dortigen Diskussion überprüft man, daß für ein Vektorfeld $V(t)$ längs einer Kurve in M stets $\pi_M(\frac{\tilde{D}}{dt} V) = \frac{D}{dt} V$ gilt. \diamond

Lemma 5.28 Sind X, Y Vektorfelder in M und \tilde{X}, \tilde{Y} Fortsetzungen nach \tilde{M} , so ist

$$[\tilde{X}, \tilde{Y}]|_M = [X, Y].$$

Insbesondere ist die Lieklammer tangential zu M .

Beweis: Wir verwenden eine Karte $\varphi : \tilde{M} \rightarrow \mathbb{R}^n$, in der $\varphi(M) \subseteq \mathbb{R}^m \times 0$. Sei $\tilde{X} = x^i \partial_i$ und $\tilde{Y} = y^j \partial_j$. Wir wissen, daß $x^i(u^1, \dots, u^m, 0, \dots, 0) = 0$ für $i > m$ und $y^j(u^1, \dots, u^m, 0, \dots, 0) = 0$ für $j > m$ gilt. Die ersten m Komponenten dienen als Karte für M , bzw. als Koordinaten für X und Y . Die Aussage folgt aus

$$\begin{aligned} [\tilde{X}, \tilde{Y}](u^1, \dots, u^m, 0, \dots, 0) &= (x^i \partial_i y^j - y^j \partial_j x^i) \partial_j (u^1, \dots, u^m, 0, \dots, 0) \\ &= (\star, \dots, \star, 0, \dots, 0). \end{aligned}$$

□

Lemma 5.29 Ist $\tilde{\nabla}$ ein symmetrischer Zusammenhang, dann ist

$$\Pi(X, Y) : T_p M \times T_p M \rightarrow \perp_p M$$

eine symmetrische vektorwertige Bilinearform. $\Pi(X, Y)_p$ hängt nur von X_p, Y_p ab.

Beweis: $\Pi(X, Y) - \Pi(Y, X) = \pi_M^\perp(\tilde{\nabla}_X Y - \tilde{\nabla}_Y X) = \pi_M^\perp([X, Y]) = 0$. Nach Konstruktion geht von X in $\Pi(X, Y)$ nur der Wert X_p ein, wegen der Symmetrie von Y auch nur der Wert Y_p . \square

Satz 5.30 Ist $\tilde{\nabla}$ in \tilde{M} der Levi-Civita-Zusammenhang, dann ist es auch ∇ in M .

Beweis: $\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}$ seien Vektorfelder, die X, Y, Z nach \tilde{M} fortsetzen (nach Lemma 5.06). Die Symmetrie folgt aus

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = \pi_M(\tilde{\nabla}_{\tilde{X}} \tilde{Y} - \tilde{\nabla}_{\tilde{Y}} \tilde{X}) = \pi_M([\tilde{X}, \tilde{Y}]) = [\tilde{X}, \tilde{Y}] = [X, Y].$$

Die Verträglichkeit wird nach Lemma 4.23 überprüft durch

$$\begin{aligned} X \langle Y, Z \rangle &= \tilde{X} \langle \tilde{Y}, \tilde{Z} \rangle = \langle \tilde{\nabla}_{\tilde{X}} \tilde{Y}, \tilde{Z} \rangle + \langle \tilde{Y}, \tilde{\nabla}_{\tilde{X}} \tilde{Z} \rangle \\ &= \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle \Pi(X, Y), Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle + \langle Y, \Pi(X, Y) \rangle \\ &= \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle. \end{aligned}$$

□

Lemma 5.31 (Gleichung von Weingarten) Ist $N : M \rightarrow \perp M$ ein Normalvektorfeld, d.h. $N_p \in \perp_p M$, so gilt für $X, Y \in T_p M$

$$\langle \tilde{\nabla}_X N, Y \rangle = -\langle N, \Pi(X, Y) \rangle$$

Insbesondere hängt die linke Seite der Gleichung nur von X_p, Y_p, N_p ab.

Beweis: $\langle N, Y \rangle = 0$ in $M \implies 0 = X \langle N, Y \rangle = \langle \tilde{\nabla}_X N, Y \rangle + \langle N, \tilde{\nabla}_X Y \rangle = \langle \tilde{\nabla}_X N, Y \rangle + \langle N, \nabla_X Y + \Pi(X, Y) \rangle = \langle \tilde{\nabla}_X N, Y \rangle + \langle N, \Pi(X, Y) \rangle$. \square

Das folgende Lemma zeigt, wie die hier definierte 2. Fundamentalform ‘II’ mit der früher (siehe S. 15) definierten 2. Fundamentalform ‘h’ zusammenhängen.

Lemma 5.32 *Ist M eine $(n-1)$ -dim. Fläche im $\mathbb{R}^n = \tilde{M}$, und $v, w \in T_p M$, so gilt $\Pi_p(v, w) = h(v, w) \cdot n(p)$.*

Beweis: Wegen der Bilinearität von Π genügt es, die Aussage für die Basisfelder $v = \partial_i$ und $w = \partial_j$ bezüglich einer beliebigen Parametrisierung zu zeigen. Sei M eine $(n-1)$ -dim. Fläche im $\mathbb{R}^n = \tilde{M}$, $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow M$ eine lokale Parametrisierung und $n : M \rightarrow S^{n-1}$ die sphärische Abbildung. $\perp_p M$ ist dann eindimensional und wird von $n(p)$ aufgespannt. Damit gilt

$$\begin{aligned} h_{ij} &= \left\langle n(p), \frac{\partial^2 f}{\partial u^i \partial u^j} \right\rangle = \langle n(p), \tilde{\nabla}_i \partial_j \rangle = \langle n(p), \nabla_i \partial_j + \Pi(\partial_i, \partial_j) \rangle \\ &= \langle \Pi(\partial_i, \partial_j), n(p) \rangle \implies \Pi(\partial_i, \partial_j) = h_{ij} n(p) \end{aligned}$$

□

Lemma 5.33 (*Lemma von Gauß*) *Ist $M \subseteq \tilde{M}$ eine Riemannsche TMF und sind R und \tilde{R} die entsprechenden Riemannschen Krümmungstensoren, so gilt*

$$\langle \tilde{R}(X, Y)Z, W \rangle - \langle R(X, Y)Z, W \rangle = \langle \Pi(X, W), \Pi(Y, Z) \rangle - \langle \Pi(X, Z), \Pi(Y, W) \rangle.$$

Beweis: Um diese Gleichung für einen beliebigen Punkt p nachzuweisen, müssen wir nur die Werte X_p, Y_p, Z_p, W_p kennen. Wegen der Linearität reicht es aus, die Behauptung für die Basisfelder $\partial_1, \dots, \partial_n$ bezüglich einer Karte zu zeigen. Seien also X, Y, Z, W Basisfelder $\implies [\cdot, \cdot] = 0$ für X, Y, Z, W . Zur Rechnung mit ∇ setzen wir X, Y, Z, W zu lokal in \tilde{M} definierten Vektorfeldern fort. Nach Lemma 5.28 sind die Lieschen Klammern der fortgesetzten Vektorfelder längs M ebenfalls 0. Wir berechnen also:

$$\begin{aligned} \langle \tilde{R}(X, Y)Z, W \rangle &= \langle \tilde{\nabla}_Y \tilde{\nabla}_X Z - \tilde{\nabla}_X \tilde{\nabla}_Y Z, W \rangle \\ &= \langle \tilde{\nabla}_Y \nabla_X Z + \Pi(X, Z), W \rangle - \langle \tilde{\nabla}_X (\nabla_Y Z + \Pi(Y, Z)), W \rangle \\ &= \langle \tilde{\nabla}_Y \nabla_X Z, W \rangle + \langle \tilde{\nabla}_Y \Pi(X, Z), W \rangle - \overset{X \longleftrightarrow Y}{\langle \tilde{\nabla}_X \Pi(Y, Z), W \rangle} \\ &= \langle \nabla_Y \nabla_X Z, W \rangle + \underbrace{\langle \Pi(Y, \nabla_X Z), W \rangle}_{\in \perp_p M} - \underbrace{\langle \Pi(X, Z), \Pi(Y, W) \rangle}_{\text{Lemma 5.31}} - \overset{X \longleftrightarrow Y}{\langle \Pi(X, Z), \Pi(Y, W) \rangle} \\ &= \langle R(X, Y)Z, W \rangle - \langle \Pi(X, Z), \Pi(Y, W) \rangle + \langle \Pi(Y, Z), \Pi(X, W) \rangle. \end{aligned}$$

□

Dieses Lemma führt “sofort zu folgendem herausragenden Satz”⁵⁾

Satz 5.34 (*‘Theorema Egregium’ von Gauß*) *Die Gaußsche Krümmung einer Fläche im \mathbb{R}^3 stimmt mit ihrer Schnittkrümmung überein. Sie ist insbesondere eine Größe der inneren (Riemannschen) Geometrie der Fläche und unabhängig von der speziellen isometrischen Immersion dieser Riemannschen Mannigfaltigkeit in den \mathbb{R}^3 .*

⁵⁾ ‘... sponte perducit ad hoc egregium THEOREMA: Si superficies curva in quamcunque aliam superficiem explicatur, mensura curvaturae in singulis punctis invariata manet.’, C. F. Gauß, *disquisitiones circa superficies curvas*, p. 24. Zu deutsch: Wenn eine gekrümmte Fläche in eine beliebige andere Fläche verbogen wird, bleibt das Maß der Krümmung in den einzelnen Punkten unverändert.

Beweis: Wir verwenden Lemma 5.32. Bei $\dim M = 2$ ist $K(v, w)$ unabhängig von v, w und wir haben

$$K(v, w) = K(\partial_1, \partial_2) = \frac{\langle R(\partial_1, \partial_2) \partial_1, \partial_2 \rangle}{\langle \partial_1, \partial_1 \rangle \langle \partial_2, \partial_2 \rangle - \langle \partial_1, \partial_2 \rangle^2} = \frac{\langle R(\partial_1, \partial_2) \partial_1, \partial_2 \rangle}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}$$

Mit dem Lemma von Gauß erhält man $\langle \tilde{R}(\partial_1, \partial_2) \partial_1, \partial_2 \rangle - \langle R(\partial_1, \partial_2) \partial_1, \partial_2 \rangle = \langle \Pi(\partial_1, \partial_2), \Pi(\partial_2, \partial_1) \rangle - \langle \Pi(\partial_1, \partial_1), \Pi(\partial_2, \partial_2) \rangle = \langle h_{12}n(p), h_{12}n(p) \rangle - \langle h_{11}n(p), h_{22}n(p) \rangle = h_{12}h_{12} - h_{11}h_{22}$. Aus $\tilde{R} = 0$ folgt nun

$$K = \frac{\det(h_{jk})}{\det(g_{jk})} = \frac{\langle R(\partial_1, \partial_2) \partial_1, \partial_2 \rangle - \tilde{R}(\dots)}{\det(g_{jk})} = K(v, w). \quad \square$$

Bemerkung: Für jede zweidim. Riemannsche MF heißt ihre Schnittkrümmung Gaußsche Krümmung. Vgl. Lemma 5.18 — die Schnittkrümmung $K(v, w)$ ist die Gaußkrümmung der Fläche $\exp_p(\mathbb{R}v + \mathbb{R}w)$. \diamond

Eine Variante des Theorema Egregium gilt auch für $(n-1)$ -Flächen im \mathbb{R}^n bei $n > 3$:

Satz 5.35 (Theorema Egregium) Sei $M \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ eine n -dim. Fläche mit der induzierten Metrik, Ist $K^{(j)}$ die j -te elementarsymmetrische Funktion der Hauptkrümmungen $\kappa_1, \dots, \kappa_n$, so ist $K^{(j)}$ für j gerade und $|K^{(i)}|$ für $i \geq 3$ und i ungerade nur von der Riemannsche Metrik abhängig.⁶⁾

Wir wollen noch kurz auf das Einbettungsproblem für Riemannsche Räume eingehen: Ist $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Riemannscher Raum, gibt es dann eine Einbettung $g: M \rightarrow \tilde{M} \subseteq \mathbb{R}^d$, sodaß die TMF \tilde{M} mit der vom \mathbb{R}^d induzierten Metrik, isometrisch zu $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ist? Ist $\dim(M) = 2$ und $d = 3$, so folgt aus dem Theorema egregium, daß die Gaußschen Krümmungen von M und \tilde{M} in p und \tilde{p} übereinstimmen, falls die beteiligten Mannigfaltigkeiten und Metriken C^3 sind. Ist $K \leq 0$ für M , gibt es wegen Lemma 2.13 keine solche Einbettung g . Auskunft über die C^k ($k > 2$) und C^1 -Einbettungsmöglichkeiten gibt der folgende Satz:

Satz 5.36 (Einbettungssatz von Nash) Sei (i) $\langle \cdot, \cdot \rangle$ eine C^k Riemannsche Metrik ($3 \leq k \leq \infty$) in M ($\dim M = n$). Dann gibt es eine C^k -TMF \tilde{M} des \mathbb{R}^d , die mit der vom \mathbb{R}^d induzierten Metrik isometrisch zu $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ist; dabei ist $d \leq \frac{1}{2}n(n+1)(3n+11)$; bzw. $d \leq \frac{1}{2}n(3n+11)$ für M kompakt. (ii) Für jedes $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ gibt es eine C^1 -TMF $\tilde{M} \subset \mathbb{R}^d$ isometrisch zu M , sofern $d > n$ und es eine TMF $\tilde{\tilde{M}} \subset \mathbb{R}^d$ diffeomorph zu M gibt.⁷⁾

5.6 Der Integralsatz von Gauß-Bonnet

Definition 5.37 (Orientierung) M heißt orientierbar, wenn es eine Überdeckung durch Karten $\varphi_i: U_i \rightarrow \mathbb{R}^n$ gibt, sodaß $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ orientierungserhaltend ist (d.h. die Jacobi-Determinante des Parameterwechsels positiv ist). Eine Basis v_1, \dots, v_n von $T_p M$ heißt positiv orientiert, wenn für eine (und dann jede) Karte φ_j die Vektoren $d\varphi_j(v_1), \dots, d\varphi_j(v_n)$ im \mathbb{R}^n positiv orientiert sind. \triangleright

Bemerkung: Hat eine $(n-1)$ -dim. TMF M des \mathbb{R}^n ein wohldefiniertes Normalvektorfeld n , so kann M dadurch orientiert werden, daß man (v_1, \dots, v_{n-1}) als positiv definiert, wenn (v_1, \dots, v_{n-1}, n) im \mathbb{R}^n positiv orientiert ist.

⁶⁾Für einen Beweis siehe H. Brauner: *Differentialgeometrie*.

⁷⁾siehe J. Nash: The imbedding problem for Riemannian manifolds. *Annals of Math.* (2) **63** (1956), 20–63. Für den C^1 -Fall, siehe J. Nash: On C^1 isometric imbeddings. *Annals of Math.*, (2) **60** (1954), 383–396 und N. H. Kuiper: On C^1 -isometric imbeddings. I, II. *Indag. Math.* **17** (1955), 545–556, 683–689.

Diese Definition steht nicht im Widerspruch zur vorigen: Angenommen, M ist durch TMF-Karten überdeckt, von denen jede einzelne zusammenhängend ist. Diejenigen Kartenabbildungen φ , für die positive Basen (im Sinne der ‘neuen’ Definition) durch $d\varphi$ auf positive Basen in $\mathbb{R}^{n-1} \times 0$ abgebildet werden, verändert man nicht; die anderen ersetzt man durch $\sigma \circ \varphi$, wobei σ die Spiegelung an der Koordinatenhyperbene $x^0 = 0$ ist.

Dann stimmt die durch die modifizierten Karten definierte Orientierung mit der durch das Normalvektorfeld gegebenen überein. \diamond

Bemerkung: Sei M eine 2-dim. MF, und sei E_1, E_2 eine positive ONB in $T_p M$, sodaß für die Gaußsche Krümmung $K_p = \langle R(E_1, E_2)E_1, E_2 \rangle$ gilt. Sei $V_p = v^j E_j$ und $W_p = w^k E_k$. Dann ist

$$\langle R(V, W)E_1, E_2 \rangle = \sum v^j w^k \langle R(E_j, E_k)E_1, E_2 \rangle = (v^1 w^2 - v^2 w^1) K_p.$$

Die Koordinatenmatrix der linearen Abbildung $R(V, W)$ bezüglich der Basis (E_1, E_2) wird erhalten, indem man die Vektoren E_1, E_2 der Abbildung unterwirft und die Bildvektoren wieder in der Basis darstellt, d.h. sie ist gleich

$$\begin{bmatrix} \langle R(V, W)E_1, E_1 \rangle & \langle R(V, W)E_2, E_1 \rangle \\ \langle R(V, W)E_1, E_2 \rangle & \langle R(V, W)E_2, E_2 \rangle \end{bmatrix} = (v^1 w^2 - v^2 w^1) K_p \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\text{d.h. } R(V, W)Z = \text{Area}(V, W) \cdot K_p \cdot Z^\perp,$$

wobei Z^\perp aus Z durch eine Drehung um $+90^\circ$ (im Sinne der Orientierung) entsteht. \diamond

Lemma 5.38 (Frenetsche Ableitungsgleichungen) Sei M eine orientierbare 2-dim. Riemannsche MF, $c : I \rightarrow M$ eine C^2 -Kurve, $c_1 = \dot{c}/\|\dot{c}\|$. Wähle $m(t)$ so, daß (c_1, m) eine positive ONB in $T_{c(t)} M$ bildet. Dann gilt

$$\frac{D}{dt} c_1 = \|\dot{c}\| \tilde{\kappa}_g m.$$

$|\tilde{\kappa}_g|$ ist die geodätische Krümmung von c .

Beweis: Wegen $0 = \frac{d}{dt} \langle c_1, c_1 \rangle = 2 \langle \frac{D}{dt} c_1, c_1 \rangle$ ist $\frac{D}{dt} c_1$ ein Vielfaches von m . Daß der Betrag des Faktors $\tilde{\kappa}$ mit κ_g übereinstimmt, folgt aus $\kappa_g = \|\frac{D}{dt} c_1\|/\|\dot{c}\|$ (vgl. pp. 16, 40). \square

Definition 5.39 (geodätische Krümmung) Die Größe $\tilde{\kappa}_g$ aus Lemma 5.38 heißt die orientierte geodätische Krümmung von c . Sie werde ab jetzt mit κ_g bezeichnet. \triangleright

Definition 5.40 (zulässiges Gebiet) Sei M eine orientierte 2-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit und c eine geschlossene, stückweise C^2 -Kurve, die in einem Parametergebiet liegt und ein einfach zusammenhängendes Gebiet berandet. Seien α_i die Drehwinkel von \dot{c} an den Stellen, wo c nicht differenzierbar ist, gemessen im mathematisch positiven Sinn. Dies sei ein ‘zulässiges Gebiet G , berandet von einer Kurve c mit Eckenwinkeln α_i ’. \triangleright

Definition 5.41 (historisch gemessener Winkel) Sei c eine Kurve in einer orientierten 2-dim. MF und seien $V(t), W(t)$ Vektorfelder längs c mit $V(t), W(t) \neq 0$. Sei $E = (E_1, E_2)$ die positive ONB in $T_{c(t)} M$ mit $E_1 = V/\|V\|$, und sei φ eine stetige Funktion, sodaß die Koordinatenspalte von W in der Basis E die Form.

$$\Phi_E(W) = \|W\| \begin{bmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{bmatrix} \text{ besitzt. Dann ist } \angle_a^b(W/V) := \varphi(b) - \varphi(a)$$

der historisch gemessene Drehwinkel von W gegenüber V in $[a, b]$. Ist W nur *stückweise* stetig, und dreht sich an endlich vielen Stellen t_i um einen Winkel α_i , so sei $\varphi(t)$ so definiert, daß der Sprung von φ bei t_i gleich α_i ist. \triangleright

Lemma 5.42 *Der historisch gemessene Winkel ist wohldefiniert, und es gilt $\angle_a^b(V_3/V_1) = \angle_a^b(V_2/V_1) + \angle_a^b(V_3/V_2)$.*

Beweis: Die in der Definition geforderte Funktion φ ist lokal sicherlich definiert und bis auf Vielfaches von 2π bestimmt. Wegen der Kompaktheit des Intervalls $[a, b]$ kann man ein global definiertes φ aus solchen Teilen zusammenbauen. Seien nun $\varphi, \bar{\varphi}$ zwei Funktionen, die die Definitionsgleichung erfüllen, und sei $\Delta(t) = \varphi(t) - \bar{\varphi}(t)$. Wenn wir $\Delta(t) = \text{const}$ zeigen können, ist der Gesamtdrehwinkel wohldefiniert. Δ ist stetig, denn $\varphi, \bar{\varphi}$ haben die gleichen Sprunghöhen, wo sie nicht stetig sind. Lokal ist Δ nach dem obigen konstant, d.h. Δ ist konstant.

Die Additivität der Winkel folgt nun direkt aus der Definition. \square

Satz 5.43 (Umlaufsatz von Hopf) *Ist c der Rand eines zulässigen Gebiets in der euklidischen Ebene mit $c(0) = c(L) = p$ und Außenwinkeln α_i , und ist weiters ∂_1 ein konstantes Vektorfeld, so gilt $\angle_0^L(\dot{c}/\partial_1 \circ c) = 2\pi$.⁸⁾*

Lemma 5.44 *Der Umlaufsatz von Hopf gilt auch für zulässige Gebiete in Riemannschen Räumen.*

Beweis: Nach dem Umlaufsatz von Hopf ist $\psi := \angle_0^L(\dot{c}/\partial_1 \circ c) = 2\pi$, wenn wir im Parametergebiet das euklidische Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle_0$ verwenden. Wegen $\dot{c}(0) = \dot{c}(L)$ ist $\psi \in 2\pi\mathbb{Z}$, und ψ variiert stetig bei stetiger Variation von $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Es folgt, daß der Wert von ψ für alle Skalarprodukte $\langle \cdot, \cdot \rangle_t = (1-t)\langle \cdot, \cdot \rangle_0 + t\langle \cdot, \cdot \rangle$ gleich 2π ist \square

Lemma 5.45 *Sei G ein zulässiges Gebiet mit Randkurve c ($c(0) = c(L) = p$) und Eckenwinkeln α_i . κ_g sei die geodätische Krümmung von c . Ist $E_1(t)$ ein Parallelfeld, so ist*

$$\angle_0^L(E_1/\partial_1 \circ c) = 2\pi - \oint_c \kappa_g ds - \sum \alpha_i.$$

Beweis: Wir wählen eine positive ONB E_1, E_2 in $T_p M$ und erzeugen Vektorfelder $E_1(t), E_2(t)$ durch Parallelverschiebung. O.B.d.A. sei c nach der Bogenlänge parametrisiert. Sei φ eine Funktion mit $\dot{c} = \cos \varphi E_1 + \sin \varphi E_2$ längs der glatten Semente von c . An der i -ten Sprungstelle von \dot{c} sei der Sprung von φ gleich dem Eckenwinkel α_i . (d.h. φ ist eine Funktion mit $\varphi(L) - \varphi(0) = \angle_0^L(\dot{c}/E_1)$).

Der aus \dot{c} durch eine Drehung um $+90^\circ$ entstehende Vektor m hat die Form $m = -\cos \varphi E_1 + \sin \varphi E_2$. Weiters ist $\frac{D}{dt} \dot{c} = -\dot{\varphi} \sin \varphi E_1 + \dot{\varphi} \cos \varphi E_2$, also $\dot{\varphi} = \kappa_g$ längs der glatten Segmente von c . Es folgt $\angle_0^L(\dot{c}/E_1) = \varphi(L) - \varphi(0) = \oint_c \kappa_g ds + \sum \alpha_i$. Wir verwenden nun Lemma 5.42 und berechnen

$$\angle_0^L(\dot{c}/\partial_1) = \angle_0^L(E_1/\partial_1) + \angle_0^L(\dot{c}/E_1), \text{ d.h. } \angle_0^L(E_1/\partial_1) = 2\pi - \oint_c \kappa_g ds - \sum \alpha_i \quad \square$$

Der folgende Satz ist eine lokale, nicht-infinitesimale Variante von Satz 5.07:

Satz 5.46 (Integralformel von Gauß-Bonnet) *Betrachte ein zulässiges Gebiet G , berandet von einer Kurve c mit Eckenwinkeln α_i . Dann gilt*

$$\oint_c \kappa_g ds + \sum \alpha_i = 2\pi - \int_G K dO.$$

⁸⁾ Siehe H. Hopf: Über die Drehung der Tangenten und Sehnen ebener Kurven *Compositio Math.* 2 (1935), 50–62. Für den Fall, daß $c \in C^1$, siehe M. P. do Carmo, *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, p. 396.

Beweis: Wir bewegen uns innerhalb eines zulässigen Gebietes, d.h. o.B.d.A. rechnen wir im \mathbb{R}^2 . Wir betrachten die Vektorfelder $Y = \partial_1 / \|\partial_1\|$ und Y^* , die in jedem Punkt eine positive ONB bilden. Weiters definieren wir die skalaren Funktionen $P = \langle \nabla_1 Y, Y^* \rangle$ und $Q = \langle \nabla_2 Y, Y^* \rangle$. Wir betrachten das folgende Kurvenintegral längs c , wobei wir $\dot{c} = (\dot{u}^1, \dot{u}^2)$ und $du^i = \dot{u}^i dt$ setzen:

$$\oint P du^1 + Q du^2 = \oint \langle \dot{u}^1 \nabla_1 Y + \dot{u}^2 \nabla_2 Y, Y^* \rangle dt = \oint \langle \nabla_{\dot{u}^1 \partial_1 + \dot{u}^2 \partial_2} Y, Y^* \rangle dt = \oint \left\langle \frac{D}{dt} Y, Y^* \right\rangle dt$$

Sei $E = (E_1, E_2)$ eine positive ONB aus Parallelfeldern längs der Kurve c , sei φ stetig mit $\Phi_E(Y) = \begin{bmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{bmatrix}$, $\Phi_E(Y^*) = \begin{bmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{bmatrix}$. Dann ist $\Phi_E\left(\frac{D}{dt} Y\right) = \dot{\varphi} \begin{bmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{bmatrix}$, d.h. $\left\langle \frac{D}{dt} Y, Y^* \right\rangle = \dot{\varphi}$. Es folgt also

$$\oint \left\langle \frac{D}{dt} Y, Y^* \right\rangle dt = \angle_0^L(Y/E_1) = -\angle_0^L(E_1/\partial_1) = \oint \kappa_g ds + \sum \alpha_i - 2\pi.$$

Nun verwenden wir den Integralsatz von Green, um das obige Kurvenintegral in das Flächenintegral $\iint (\partial Q / \partial x - \partial Q / \partial y) du^1 du^2$ zu verwandeln:

$$\begin{aligned} \dots &= \iint \left(\partial_1 \langle \nabla_2 Y, Y^* \rangle - \partial_2 \langle \nabla_1 Y, Y^* \rangle \right) du^1 du^2 \\ &= \iint \left(\langle \nabla_1 \nabla_2 Y, Y^* \rangle + \langle \nabla_2 Y, \nabla_1 Y^* \rangle - \langle \nabla_2 \nabla_1 Y, Y^* \rangle - \langle \nabla_1 Y, \nabla_2 Y^* \rangle \right) du^1 du^2 \end{aligned}$$

Wegen $\langle Y, Y \rangle = \text{const}$ ist $\frac{d}{dt} \langle Y, Y \rangle = 2 \left\langle \frac{D}{dt} Y, Y \right\rangle = 0$, d.h. die kovariante Ableitung von Y längs irgendeiner Kurve ist orthogonal zu Y . Dasselbe gilt für Y^* . Deshalb verschwinden $\langle \nabla_2 Y, \nabla_1 Y^* \rangle$ und $\langle \nabla_1 Y, \nabla_2 Y^* \rangle$. Das Integral ist also weiter gleich

$$\begin{aligned} \dots &= \iint \langle -R(\partial_1, \partial_2) Y, Y^* \rangle du^1 du^2 = \iint \langle -\text{Area}(\partial_1, \partial_2) K Y^*, Y^* \rangle du^1 du^2 \\ &= - \iint K \sqrt{\det(g_{jk})} du^1 du^2 = - \int_M K dO. \end{aligned} \quad \square$$

Der Satz gilt auch dann, wenn G nicht in einem Kartengebiet liegt.

Folgerung: Ist c der Rand eines zulässigen Gebietes und V ein Parallelfeld längs c , so ist der Gesamtdrehwinkel von V gleich $\angle_0^L(V/\partial_1 \circ c) = \int K dO$. Die Drehung um diesen Winkel ist in der Holonomiegruppe H_p enthalten. Ist $K(p) \neq 0$ und U eine offene Umgebung von p , so kann man durch geodätische Parallelverschiebung längs geeigneter kleiner geschlossener Kurven in U alle Drehungen um Winkel in $[0, \varepsilon]$ erzeugen. Wegen $n \cdot [0, \varepsilon] \supseteq [0, 2\pi]$ für geeignetes n ist dann $H_p^U \geq \text{SO}_2$ für alle U und $H_p^\infty = \text{SO}_2$.

Satz 5.47 (*‘Theorema Elegantissimum’ von Gauß*) Die Summe der Innenwinkel in einem geodätischen Dreieck Δ (ein zulässiges Gebiet, das von drei geodätischen Linien berandet wird) ist gleich

$$\pi + \int_\Delta K dO.$$

Beweis: Wir wenden die Integralformel von Gauß-Bonnet an. Die Innenwinkel β_i und die Eckenwinkel α_i stehen in der Relation $\beta_i = \pi - \alpha_i$. Die geodätische Krümmung von geodätischen Linien verschwindet. Damit ist

$$(\pi - \beta_1) + (\pi - \beta_2) + (\pi - \beta_3) = 2\pi - \int K dO. \quad \square$$

Satz 5.48 (Satz von Gauß-Bonnet) Ist M eine 2-dimensionale orientierbare kompakte Mannigfaltigkeit, zerlegt durch zulässige Gebiete. Seien e , f , k die Anzahl der Ecken, Flächen, und Kanten dieser Zerlegung, und sei $\chi = e + f - k$. Dann ist

$$\int_M K = 2\pi(e + f - k) = 2\pi\chi.$$

Beweis: (i) In jedem Parametergebiet ist ein positiver Umlaufsinn für den Rand eines einfach zusammenhängenden Gebietes definiert (innen ist links). Nachdem die Orientierung vom Parametergebiet unabhängig ist (M sei orientiert), wird beim Durchlaufen des Randes aller Gebiete jedes Segment genau zweimal in 2 verschiedenen Richtungen durchlaufen.

(ii) Die Summe der Innenwinkel β_{e_i, G_j} der in einer Ecke e_i zusammenstoßenden Gebiete G_j ist gleich 2π , und jeder einzelne Innenwinkel ist gleich $\pi - \alpha_{e_i, G_j}$, wobei α_{e_i, G_j} der Eckenwinkel des Gebietes G_j an der Ecke e_i ist.

(iii) Summieren wir $\oint \kappa_g + \sum \alpha_i = 2\pi - \int K dO$ für alle Gebiete auf, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \sum_{\text{Kanten}} \underbrace{\left(\int \kappa_g - \int \kappa_g \right)}_{=0 \text{ nach (i)}} + \sum_{\text{Ecken } e_j} \sum_{\substack{\text{Gebiete } G_i \\ \text{an Ecke } e_j}} (\pi - \beta_{e_j, G_i}) &= \sum_{\text{Gebiete } G_j} (2\pi - \int_{G_j} K dO) \\ \sum_{\text{Gebiete}} \sum_{\substack{\text{Ecken} \\ \text{an Gebiet}}} \pi - \underbrace{\sum_{\text{Ecken}} 2\pi}_{\text{nach (ii)}} &= 2\pi f - \int K dO \implies 2k\pi - e \cdot 2\pi = 2\pi f - \int K dO. \end{aligned}$$

□

Der Satz gilt auch dann, wenn die einzelnen Gebiete nicht in einer Kartenumgebung enthalten sind.

Satz 5.49 Sei M wie in Satz 5.48. Dann besitzt M eine Zerlegung wie in Satz 5.48 gefordert.

Definition 5.50 (Euler-Charakteristik) Die Größe $e + f - k = \chi$ einer Zerlegung nach Satz 5.48 heißt Euler-Charakteristik $\chi(M)$ von M . ▷

Satz 5.51 $\chi(M)$ ist wohldefiniert, und unabhängig von der Zerlegung.

Beweis: Das folgt direkt aus dem Satz von Gauß-Bonnet, weil $\int K dO$ unabhängig von der Zerlegung ist. □

Beispiel: Sei $M = S^2$. Wegen $K = 1$ ist $\int K dO = 4\pi$. Es folgt, daß für jede zulässige Zerlegung $e + f - k = 2$ gilt, d.h. $\chi(S^2) = 2$. ◇

Satz 5.52 Das Oberflächenintegral der Gaußschen Krümmung ist von der Riemannschen Metrik unabhängig. Es ist immer ein ganzzahliges Vielfaches von 2π .

Beweis: Das folgt direkt aus dem Satz von Gauß-Bonnet, weil $\chi(M)$ unabhängig von der Riemannschen Metrik ist. □

Beispiel: Sei M diffeomorphes Bild einer Sphäre, mit beliebiger Riemannscher Metrik. Dann ist $\int K dO = 4\pi$. Ein Torus besitzt eine Zerlegung mit $e + f - k = 0$. Daher ist $\chi(M) = 0$ und $\int_M K dO = 0$ für jedes diffeomorphe Bild M des Torus, und für jede Riemannsche Metrik auf M . ◇

Folgerung: Ist $\chi(M) \neq 0$, so gibt es auf M keine Riemannsche Metrik mit verschwindender Krümmung. Das Nichtverschwinden von $\chi(M)$ stellt ein Hindernis dar.

Als Kuriosum (wir werden keinen Versuch machen, dies zu beweisen) sei die mehrdimensionale Variante des Satzes von Gauß-Bonnet angeführt:

Definition 5.53 (*Krümmungsformen*) Ist $\varphi : U \subseteq M \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Karte für M , und sind $\partial_1, \dots, \partial_n$ die dazugehörigen Basisfelder, so sei $\Omega_i^j(v, w)$ die Koordinatenmatrix der linearen Abbildung $R(v, w)$ bezüglich der Basis $\partial_1, \dots, \partial_n$. \triangleright

Die Bezeichnung ‘Krümmungsformen’ für Ω_i^j hat nichts mit der auf S. 15 definierten Krümmungsform zu tun. Offenbar ist Ω_i^j ein alternierendes Tensorfeld in $\mathfrak{L}_2 U$, denn $R(v, w) = -R(w, v)$.

Satz 5.54 (*Gauß-Bonnet-Chern-Allendörfer-Fenchel*) Für eine kompakte differenzierbare $2m$ -dimensionale Mannigfaltigkeit ist die skalare Funktion $k : M \rightarrow \mathbb{R}$, definiert durch $kn! \sqrt{\det(g_{jk}(p))} \cdot \det(\cdot) =$

$\sum_{\sigma=(i_1, \dots, i_n) \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \Omega_{i_2}^{i_1} \wedge \dots \wedge \Omega_{i_n}^{i_{n-1}}(\cdot)$, tatsächlich wohldefiniert (d.h. das Keilprodukt ist, als Multilinearform in $T_p M$, tatsächlich ein Vielfaches der Determinante, und k ist unabhängig von der Auswahl der Karte φ). Dann

gilt $\chi(M) = \frac{2(2m-1)!}{2^{2m} \pi^m (m-1)!} \int_M k dO$, wobei $\chi(M)$, die Euler-Charakteristik, eine ganzzahlige topologische Invariante von M ist.

6. Kapitel

Beispiele für Anwendungen der Differentialgeometrie in der Physik

6.1 Mechanik

Der Hamilton-Formalismus in der Mechanik ist ein Beispiel für die Anwendung des Konzeptes einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit mit einer symplektischen Bilinearform. Obwohl dies das prominenteste Beispiel ist, werden wir darauf nicht eingehen.

Verbindungen zwischen der Riemannschen Geometrie und der Mechanik basieren z.B. auf einer Analogie von Variationsprinzipien.

Definition 6.01 (*Konfigurationsraum, kinetische Energie, Potentielle Energie*) Sei $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Riemannscher Raum. Wir interpretieren M als Menge der Zustände eines mechanischen Systems. Kurven $c : I \rightarrow M$ sind Zustandsänderungen. $T(v) := \langle v, v \rangle$ heißt die kinematische Energie. Weiters sei $U : M \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben. Die Funktion U heißt potentielle Energie. \diamond

Bemerkung: Ein solches Modell beschreibt ein ‘holonomes System’, d.h. eines, das infinitesimal wie global dieselben Freiheitsgrade besitzt. Ein ‘nichtholonomes System’ (wie z.B. ein Fahrrad auf einer Straße), erlaubt Zustandsänderungen nicht in jede Richtung (außer bei Glatteis). Modelle für nichtholonome Systeme sind differenzierbare Mannigfaltigkeiten, wo in jedem Punkt $p \in M$ ein zulässiger Unterraum von $T_p M$ ausgezeichnet ist. \diamond

Beispiel: Der Zustand eines ebenen Doppelpendels wird durch zwei Winkel φ_1, φ_2 (jeweils moduls 2π) parametrisiert. Der Konfigurationsraum ist also ein Torus. Die skalaren Funktionen $\sin \varphi_1, \cos \varphi_2$ sind Beispiele für in M wohldefinierte differenzierbare Funktionen.

Um das Beispiel zu konkretisieren, seien die Massen der beiden Pendel m_1, m_2 , die Abstände der Schwerpunkte vom Aufhängepunkt s_1, s_2 , die ebenen Massenträgheitsmomente I_1, I_2 , und die Länge des 1. Pendels sei l_1 . Dann ist (Mechanik-Übungsbeispiel) $U(\varphi_1, \varphi_2) = g(m_1 s_1 \cos \varphi_1 + m_2(l_1 \cos \varphi_1 + s_2 \cos \varphi_2))$, $T_{\varphi_1, \varphi_2}(\dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2) = \sum_{i,j} \dot{\varphi}_i \dot{\varphi}_j g_{ij}$ mit $g_{11} = I_1 + m_1 s_1^2 + m_2 l_1^2$, $g_{12} = m_2 l_1 s_2^2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)$, $g_{22} = I_2 + m_2 s_2^2$. \diamond

Definition 6.02 (*d'Alembertsches Prinzip*) Sei M wie oben, und seien $p, q \in M$. Eine Bahn in M sei ein kritischer Punkt für das Funktional $\int (T - U)$ in der Klasse der glatten Kurven, die p mit q verbinden. \triangleright

Bemerkung: In der Physik ist diese Definition manchmal ein ‘Satz’, der einer Herleitung bedarf. \diamond

Definition 6.03 (*Gradient*) Ist $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, so ist $\text{grad } f$ das Vektorfeld mit $\langle v, \text{grad}_p f \rangle = df(v)$ für alle $v \in T_p M$. \triangleright

Bemerkung: Sei in lokalen Koordinaten $\text{grad } f = w^j \partial_j$. Wir berechnen w^j aus der Definitionsgleichung von $\text{grad } f$: $v^l \partial_l f = \langle v^k \partial_k, w^j \partial_j \rangle = v^k w^j g_{jk}$, woraus folgt, daß $w^j = g^{jk} \partial_k f$. \diamond

Lemma 6.04 Eine Bahn c löst die Differentialgleichung $\frac{D\dot{c}}{dt} = -\frac{1}{2} \text{grad } U$.

Beweis: Sei c_u eine Variation von c mit Variationsvektorfeld V . Wir berechnen $\left. \frac{\partial}{\partial u} \right|_{u=0} U(c_u(t))$: Nach der Def. von dU ist dies gleich $dU(V(t))$, und nach der Def. von $\text{grad } U$ gleich $\langle \text{grad}_{c(t)} U, V(t) \rangle$.

Wir verwenden Lemma 4.39 und berechnen $\frac{d}{du}\big|_{u=0} \int (T - U) dt = -2 \int \left\langle V, \frac{D\dot{c}}{dt} \right\rangle dt - \int \frac{\partial U}{\partial u}(c_u(t)) dt = \int \left\langle V, -2 \frac{D\dot{c}}{dt} - \text{grad} U \right\rangle dt$. c ist ein kritischer Punkt für das Funktional $\int (T - U)$, wenn $\left\langle 2 \frac{D\dot{c}}{dt} + \text{grad} U, V \right\rangle = 0$ für alle V . \square

Bemerkung: Eine allgemeinere Variante dieser Differentialgleichung ist $\frac{D\dot{c}}{dt} = \frac{1}{2}F$, wobei F ein ‘Kraft’-Vektorfeld auf M ist. \diamond

Lemma 6.05 (Lagrangesche Differentialgleichungen) Es gilt

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{c}^j} - \frac{\partial T}{\partial c^j} = \frac{\partial U}{\partial c^j} \iff \frac{D\dot{c}}{dt} = -\frac{1}{2} \text{grad} U.$$

Beweis: Anschreiben in lokalen Koordinaten und Verwenden der expliziten Formel für Γ_{jk}^l aus Satz 4.25. \square

Definition 6.06 (Gesamtenergie) Die Gesamtenergie einer Zustandsänderung c zum Zeitpunkt t ist definiert als die Funktion $T(\dot{c}) + U$ längs c . \triangleright

Lemma 6.07 (Energieerhaltungssatz) Längs einer Bahn gilt $h = T(\dot{c}) + U = \text{const.}$

Beweis: $\frac{d}{dt}(T + U) = \frac{d}{dt}(\langle \dot{c}, \dot{c} \rangle + U) = 2 \left\langle \frac{D\dot{c}}{dt}, \dot{c} \right\rangle + \frac{d}{dt}U(c(t)) = -\langle \text{grad} U, \dot{c} \rangle + \langle \text{grad} U, \dot{c} \rangle = 0$. \square

Definition 6.08 (Metrik nach Jacobi) Sei M wie oben und $h \in \mathbb{R}$. Dann sei $\langle v, w \rangle' := 2(h - U)\langle v, w \rangle$ die Metrik nach Jacobi, und $M' = \{p \in M \mid h - U(p) > 0\}$. Dann ist $(M', \langle \cdot, \cdot \rangle')$ eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. \triangleright

Der folgende Satz macht es möglich, allgemeine Sätze über geodätische Linien auf Bahnen von mechanischen Systemen zu übertragen:

Satz 6.09 c ist Bahn von $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ mit Energie h genau dann, wenn c (nach Umparametrisierung auf $\langle \cdot, \cdot \rangle'$ -Bogenlänge \tilde{s}) geodätische Linie von $(M', \langle \cdot, \cdot \rangle')$ ist.

Beweis: Man kann nachrechnen,¹⁾ daß $(\Gamma_{ij}^l)' = \Gamma_{ij}^l + \frac{1}{2(h-U)}(\delta_i^l \partial_j(h-U) + \delta_j^l \partial_i(h-U) - g^{lr} g_{ij} \partial_r(h-U))$ gilt. Die Parametertransformation $\tilde{c} = c \circ \gamma$ auf $\langle \cdot, \cdot \rangle'$ -Bogenlänge erfüllt die Relation $\frac{d\tilde{c}}{d\tilde{s}} = 2(h-U) \frac{dc}{ds} \implies \frac{d^2 \tilde{s}}{d\tilde{s}^2} = 2\partial_r(h-U)\dot{c}^r$. Einsetzen liefert die Behauptung. \square

Beispiel: (Vollständigkeit) Sei $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle, U)$ der Konfigurationsraum für ein mechanisches System, und seien p, q zwei Zustände. Ist $h > U$ in M und M kompakt, dann ist $M' = M$, M' ist kompakt, daher geodätisch vollständig, und es gibt nach dem Satz von Hopf und Rinow (Satz 4.44) eine Bahn der Energie h , die die Zustände p und q verbindet. \diamond

Beispiel: (Stabilität der Bahnen) Sind $x(s, t)$ für $s = \text{const.}$ Bahnen von Punkten $x(s)$ mit vorgegebenen Anfangswerten $\frac{\partial x}{\partial t}(s, 0)$, so folgt aus Satz 6.09, daß die ‘infinitesimale Abweichung’ $\frac{\partial x}{\partial s}(0, t)$ der ‘benachbarten’ Bahnen von einer ausgezeichneten Bahn $c(t) = x(0, t)$ ein Jacobifeld bezüglich der Metrik $\langle \cdot, \cdot \rangle'$ ist, und daher die Differentialgleichung

$$\frac{(D')^2 \partial x}{\partial t^2} = R'(\dot{c}, \frac{\partial x}{\partial s})\dot{c}$$

erfüllt. Die lineare Abbildung $R'(\dot{c}, \cdot)\dot{c}$ ist dabei verantwortlich für das exponentielle Auseinanderlaufen oder ‘Beisammenbleiben’ der Bahnen. \diamond

Bemerkung: Sei $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle, U)$ ein Konfigurationsraum wie oben. Diejenigen Zustandsänderungen konstanter Energie h (nicht notwendig Bahnen im obigen Sinne), welche zwischen Zuständen lokal kürzeste Zeit benötigen, sind Geodätische der brachistochronischen Metrik $\langle \cdot, \cdot \rangle'' = (h - U)^{-1} \langle \cdot, \cdot \rangle$. \diamond

6.2 Relativitätstheorie

Definition 6.10 (4-dim. pseudo-euklidischer Raum) Dieser ist der \mathbb{R}^4 mit Koordinaten (x^0, \dots, x^3) und dem Skalarprodukt $\langle x, y \rangle_{\text{pe}} = x^0 y^0 - x^1 y^1 - x^2 y^2 - x^3 y^3$. \triangleright

Wir interpretieren die Punkte des \mathbb{R}^4 als Ereignisse mit einer Zeit- und drei Ortskoordinaten. Ein Vektor $v \in \mathbb{R}^4$ ist *flach* oder *raumartig*, wenn $\langle v, v \rangle_{\text{pe}} < 0$, er ist *isotrop* oder *lichtartig*, wenn $\langle v, v \rangle_{\text{pe}} = 0$, und *steil* oder *zeitartig*, wenn $\langle v, v \rangle_{\text{pe}} > 0$.

¹⁾ siehe D. Laugwitz: *Differentialgeometrie*

Definition 6.11 (*Lebenslinie, Eigenzeit*) Eine Kurve $c : I \rightarrow \mathbb{R}^4$ heißt *Lebenslinie*, wenn \dot{c} zeitartig ist und $\dot{c}^0 > 0$. Die Bogenlänge $L_a^b(c)$ heißt die *Eigenzeit* längs der Lebenslinie, die zwischen den Ereignissen $c(a)$ und $c(b)$ verbraucht wird. \triangleright

Bemerkung: Diese Bezeichnungen kommen von der Interpretation des pseudo-euklidischen \mathbb{R}^4 als Modell der speziellen Relativitätstheorie. \diamond

Im pseudo-euklidischen \mathbb{R}^4 operiert die Gruppe G der pseudo-euklidischen Kongruenztransformationen $g : x \mapsto A \cdot x + b$ mit $A \in O_{1,3}$, d.h. $A^T \cdot \text{diag}(-1, 1, 1, 1) \cdot A = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$. Wir schränken wir uns im speziellen auf solche $A \in O_{1,3}$ ein, die ‘in die Zukunft’ weisende Vektoren ($v \in \mathbb{R}^4$ mit $v^0 > 0$) wieder auf solche abbilden.

Satz 6.12 (A. D. Alexandrov) Sei $d_{\text{pe}}(p, q) = \langle p - q, p - q \rangle_{\text{pe}}$. Jede Bijektion $g : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ mit $d_{\text{pe}}(p, q) = 0 \iff d_{\text{pe}}(g(p), g(q)) = 0$ ist eine pseudo-euklidische Kongruenztransformation.²⁾

Satz 6.13 (*Zwillingsparadoxon*) Die ‘längsten’ (im Sinne der Eigenzeit) Lebenslinien, die zwei Punkte $p, q \in \mathbb{R}^4$ verbinden, sind die monoton parametrisierten Geraden.

Beweis: $p - q$ ist zeitartig. Sei $d_{\text{pe}}(p, q) = T$. Dann existiert eine pseudo-euklidische Kongruenztransformation mit $p = (0, 0, 0, 0)$ und $q = (T, 0, 0, 0)$. Sei o.B.d.A. $c(0) = p$, $c(1) = q$. Für jede Lebenslinie ist $\dot{c}^0(1) > 0$. Dann ist

$$L_0^1(c) = \int_0^1 \sqrt{(\dot{c}^0)^2 - (\dot{c}^1)^2 - \dots} \leq \int_0^1 \sqrt{(\dot{c}^0)^2} = \int_0^1 \dot{c}^0 = c^0 \Big|_0^1 = T$$

mit Gleichheit genau für $\dot{c}^1 = \dot{c}^2 = \dot{c}^3 = 0$. \square

Definition 6.14 (*Pseudo-Riemannsche 4-dim. MF*) Sei $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ eine differenzierbare Mannigfaltigkeit mit einem differenzierbaren $(2, 0)$ -Tensorfeld $\langle \cdot, \cdot \rangle \in \mathfrak{T}_2 M$, sodaß $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ eine symmetrische Bilinearform in $T_p M$ der Signatur $(+, -, -, -)$ ist. Dann ist $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein pseudo-Riemannscher Raum der Dimension 4. \triangleright

Wir verwenden die in der Riemannschen Geometrie von der Metrik $\langle \cdot, \cdot \rangle$ abgeleiteten Begriffe wie kovariante Ableitung, geodätische Linie, etc., ohne darauf Rücksicht zu nehmen, daß sie eventuell nicht dieselben Eigenschaften haben wie im Riemannschen Fall. Ein Beispiel für eine solche Diskrepanz ist der Unterschied zwischen Satz 1.09 und Satz 6.13.

Analog zum pseudo-euklidischen \mathbb{R}^4 gibt es die Unterscheidung zwischen raumartigen, lichtartigen, und zeitartigen Vektoren $v \in T_p M$ durch $\langle v, v \rangle < 0$, $\langle v, v \rangle = 0$, und $\langle v, v \rangle > 0$. Wir verwenden $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ als Modell für die Raumzeit der allgemeinen Relativitätstheorie.

Definition 6.15 (*Lebenslinie, Eigenzeit*) Eine Kurve $c : I \rightarrow M$ heißt *Lebenslinie*, wenn $\langle \dot{c}, \dot{c} \rangle > 0$. Die Bogenlänge $L_a^b(c)$ heißt *Eigenzeit* längs der Lebenslinie zwischen $c(a)$ und $c(b)$. \triangleright

Definition 6.16 (*Freier Massenpunkt, Lichtteilchen*) Eine Lebenslinie gehört zu einem *freien Massenpunkt* bzw. *frei fallenden Teilchen*, wenn sie eine geodätische Linie ist, d.h. $\frac{D}{dt} \dot{c} = 0$. Eine lichtartige Geodätische (d.h. $\langle \dot{c}, \dot{c} \rangle = 0$) ist die Lebenslinie eines Lichtteilchens (“Photons”). \triangleright

²⁾ siehe A. D. Alexandrov: Über Lorentztransformationen (Russisch), *Uspehi Mat. Nauk.* 5,3 (1950), 187; A. D. Alexandrov: On the principles of relativity theory. In: *Classics of Soviet Mathematics*. Vol. 4. Gordon & Breach 1996, pp. 289–318; H. Havlicek: *Geometrische Transformationen*, Vorlesungsskriptum, Institut für Geometrie, TU Wien, Sommersemester 1995.

Um als Modell für eine Raum-Zeit im Sinne der allgemeinen Relativitätstheorie zu dienen, muß die pseudoriemannsche Metrik $\langle \cdot, \cdot \rangle$ in M bestimmten Bedingungen genügen (Sie muß die ‘Feldgleichungen’ erfüllen).

Als Motivation für die ‘Feldgleichungen im Vakuum’ betrachten wir zunächst die klassische Newtonsche Mechanik und danach ein relativistisches Analogon:

Beispiel: (*Gezeiten, Newtonsch*) Wir betrachten Punkte $x(s)$, die sich im \mathbb{R}^3 mit Koordinaten u^1, u^2, u^3 in einem Kraftfeld mit Potential φ bewegen — zum Zeitpunkt t befinden sie sich bei $x(s, t)$. Wir bezeichnen Ableitungen nach Variablen t, s, u^1, \dots mit $x_{,t}, x_{,s}, \varphi_{,1}$, u.s.w. Die Bewegungsgleichung ist gegeben durch

$$x_{,tt}(s, t) = -\nabla\varphi(x(s, t)).$$

Wir beobachten das ‘Auseinanderdriften der Bahnkurven’:

$$\begin{aligned} \Delta x(t) &= x(s, t) - x(0, t) \approx s \cdot x_{,s} \\ x_{,tts} &= -\frac{\partial}{\partial s} \begin{bmatrix} \varphi_{,1} \\ \varphi_{,2} \\ \varphi_{,3} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \varphi_{,11} & \dots & \varphi_{,13} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_{,31} & \dots & \varphi_{,33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{,s}^1 \\ x_{,s}^2 \\ x_{,s}^3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

D.h. längs der Bahnkurve $x(0, t)$ erfüllt die ‘infinitesimale Differenz zur Nachbar-Bahnkurve $x(0 + ds, t)$ ’ die Gleichung

$$\ddot{x}_{,s} = L(t) \cdot x_{,s},$$

wobei die Koordinatenmatrix der linearen Abbildung $L(t)$ durch $(\varphi_{,ij}(x(0, t)))$ gegeben ist (siehe die obige Matrixgleichung).

Setzt man beispielsweise das Potential als Gravitationspotential in der Form $\varphi(x) = -1/\|x\|$ an, so ergibt sich an der Stelle $(r, 0, 0)$ die Matrix

$$L(r, 0, 0) = \frac{1}{|r|^3} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Daß die Spur der Matrix verschwindet, ist eine Konsequenz der *Newtonschen Feldgleichungen*

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} \varphi) = 4\pi G \rho$$

mit der Gravitationskonstante G und der Dichte der Materie ρ ($\rho = 0$ im Vakuum). Als Motivation für dieses Beispiel können die Wassermassen der Erdoberfläche im Gravitationsfeld des Mondes dienen. \diamond

Beispiel: (*Gezeiten, relativistisch*) Wir betrachten die Lebenslinien $x(s, t)$ von frei fallenden Massenpunkten $x(s)$. $c_s(t) = x(s, t)$ sind geodätische Linien. Wir wählen eine Basis E_0, \dots, E_3 in $T_{x(0,0)}M$ mit $\dot{c}_0 = E_0$.

Wir erzeugen Vektorfelder $E_0(0), \dots, E_3(t)$ längs $c_0(t)$ durch geodätische Parallelverschiebung, und verwenden die lokale Parametrisierung

$$g(u^0, \dots, u^3) = \exp_{c_0(u^0)}(u^1 E_1(u^0) + u^2 E_2(u^0) + u^3 E_3(u^0)).$$

Eine solche Karte für M heißt Fermi-Koordinatensystem bezüglich des frei fallenden Beobachters $x(0, t) = c_0(t)$, wenn zusätzlich $(g_{jk}) = \operatorname{diag}(-1, 1, 1, 1)$ in $c(0)$ und damit längs c . Längs der Kurve $c_0(u^0)$ ist $\partial_0 = E_0, \dots, \partial_3 = E_3$.

Wir betrachten eine einparametrische Schar $x_s(t) = g(u(s, t))$ von Lebenslinien. Weil Lebenslinien Geodätische sind, ist das Vektorfeld

$$J(t) = \frac{\partial x(s, t)}{\partial s} \Big|_{s=0} = u_{,s}^0 \partial_0 + \dots + u_{,s}^3 \partial_3 = u_{,s}^j E_j,$$

das das ‘Auseinanderdriften der Lebenslinien’ mißt, ein Jacobi-Feld und erfüllt nach Lemma 5.14 die Differentialgleichung

$$J'' = -R(\dot{c}_0, J)\dot{c}_0.$$

Da E_0, \dots, E_3 Parallelfelder sind, gilt

$$J'' = u_{,stt}^0 E_0 + \dots + u_{,stt}^3 E_3.$$

Wir bestimmen die Koordinatenmatrix der linearen Abbildung $-R(\dot{c}_0, \cdot)\dot{c}_0$ bezüglich der Basis E_0, \dots, E_3 in einem Punkt der Geodätischen $x(0, t)$. Zuvor überlegen wir uns noch einen Zusammenhang zwischen den Koeffizienten R_{ijkl} und R_{ijk}^l : Wegen $(g_{jk}) = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ ist

$$R_{ijkl} = \langle R(E_i, E_j)E_k, E_l \rangle = \langle R_{ijk}^p E_p, E_l \rangle = \begin{cases} +R_{ijk}^l & \text{für } l = 0 \\ -R_{ijk}^l & \text{für } l \neq 0. \end{cases}$$

Es ist $R_{iik}^l = 0$, und wegen $R_{ijkk} = 0$ ist auch $R_{ijk}^k = 0$. Wegen $R_{ijkl} = R_{klij}$, also speziell $R_{0j0k} = R_{0k0j}$, gilt hier bei $k, l > 0$, daß $R_{0j0}^k = R_{0k0}^l$.

$$\begin{aligned} -R(\dot{c}_0, E_k)\dot{c}_0 &= -R(E_0, E_k)E_0 = -R_{0k0}^l E_l \implies \\ J'' &= \begin{bmatrix} x_{,stt}^0 \\ \vdots \\ x_{,stt}^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{000}^0 & \dots & R_{030}^0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{000}^3 & \dots & R_{030}^3 \end{bmatrix} \cdot J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & R_{010}^1 & \dots & R_{030}^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & R_{010}^3 & \dots & R_{030}^3 \end{bmatrix} \cdot J. \end{aligned}$$

D.h. die geodätische Abweichung wird, genauso wie im Newtonschen Fall, durch eine symmetrische (3×3) -Matrix beschrieben. Es liegt daher nahe, vom Krümmungstensor zu fordern, daß die Spur dieser linearen Abbildung verschwindet:

$$\underbrace{R_{000}^0 + R_{010}^1 + R_{020}^2 + R_{030}^3}_{=0} = 0, \text{ bzw. koordinatenfrei } \text{tr}(R(E_0, \cdot)E_0) = 0.$$

Nachdem die Auswahl der Lebenslinie (und des Vektors E_0) beliebig war, ist eine naheliegende Forderung an M , daß

$$\text{tr}(R(v, \cdot)v) = -\text{Ric}(v, v) = 0 \text{ für alle } v.$$

Der Ricci-Tensor ist symmetrisch:

Beweis: Es ist $\text{Ric}(v, w) = \text{tr}(R(\cdot, v)w) =$ betrachteten Stelle $g_{jk} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$.
 $R_{ij}v^j w^i$. Zu zeigen ist $R_{ij} = R_{ji}$. Es ist $R_{ij} =$ Dann ist (siehe oben) $R_{ljk}^l = \pm R_{ljk}^l =$
 $\text{tr}(R(\cdot, E_i)E_j) = \text{tr}(R_{kij}^k) = \sum_k R_{kij}^k$. Wir verwenden eine Parametrisierung, sodaß an der
 $\pm(-1)(-1)R_{jllk} = \pm R_{lkjl} = R_{lkj}^l$. \square

Deshalb folgt aus $\text{Ric}(v, w) = \frac{1}{2}(\text{Ric}(v + w, v + w) - \text{Ric}(v, v) - \text{Ric}(w, w))$ die Gleichung $\text{Ric}(v, w) = 0$ für alle v, w . \diamond

Definition 6.17 (Feldgleichungen im Vakuum) Ein vierdimensionaler pseudo-Riemannscher Raum $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ dient als mathematisches Modell für die Bewegung von Teilchen im Vakuum, wenn der Ricci-Tensor verschwindet. \triangleright

Beispiel: (Schwarzschild-Metrik) Sei $M = \{(u^0, \dots, u^3) \in \mathbb{R}^4 \mid (u_1)^2 + (u_2)^2 + (u_3)^2 > R^2\}$. Sei $g: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$,

$$g(t, r, \theta, \varphi) = (t, r \cos \theta \sin \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \varphi)$$

eine lokale Parametrisierung von M . Die pseudo-Riemannsche Metrik $\langle \cdot, \cdot \rangle$ in M habe bezüglich dieser Karte die Koeffizienten

$$g_{tt} = \frac{r-R}{r}, \quad g_{rr} = -\frac{r}{r-R}, \quad g_{\varphi\varphi} = -r^2, \quad g_{\theta\theta} = -r^2 \sin^2 \varphi.$$

Alle gemischten Koeffizienten sind gleich 0. Man überzeugt sich prinzipiell leicht, daß der Ricci-Tensor verschwindet. Es handelt sich um ein Modell des Gravitationsfeldes eines sphärisch-symmetrischen Körpers. \diamond

Anhang

A.1 Geometrie

Definition A.01 (Volumen) Sei V ein n -dimensionaler reeller Vektorraum, versehen mit einem Skalarprodukt so, daß eine feste Orthonormalbasis Determinante 1 besitzt. Dann ist das orientierte Volumen des von n Vektoren aufgespannten Parallelepeds gegeben durch $\overrightarrow{\text{Vol}}(u_1, \dots, u_n) = \det(u_1, \dots, u_n)$. Das Volumen ist definiert durch $\text{Vol} = |\overrightarrow{\text{Vol}}|$.

Das r -dimensionale Volumen $\text{Vol}(v_1, \dots, v_r)$ von r Vektoren wird in einem r -dimensionalen Unterraum berechnet, in dem v_1, \dots, v_r liegen. \triangleright

Satz A.02 Das r -dimensionale Volumen des von den Vektoren v_1, \dots, v_r aufgespannten Parallelepeds im \mathbb{R}^n ist gegeben durch $\text{Vol}(u_1, \dots, u_r)^2 = \det(\langle u_j, u_k \rangle_{j,k=1}^r)$.

Definition A.03 (Kreuzprodukt) e_1, \dots, e_n seien die Vektoren einer Orthonormalbasis in einem n -dimensionalen euklidischen Vektorraum V und (x_i^j) seien die Koordinaten von x_i bezüglich dieser Basis. Das Kreuzprodukt von $x_1, \dots, x_{n-1} \in V$ ist durch Entwickeln der folgenden symbolischen Determinante nach der letzten Spalte gegeben:

$$x_1 \times \dots \times x_{n-1} := \begin{vmatrix} x_1^1 & \dots & x_{n-1}^1 & e_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-1} & \dots & x_{n-1}^{n-1} & e_n \end{vmatrix} \quad \triangleright$$

Satz A.04 Das Kreuzprodukt von x_1, \dots, x_{n-1} steht orthogonal auf alle x_i , es ergänzt x_1, \dots, x_{n-1} zu einer positiv orientierten Basis (falls x_1, \dots, x_{n-1} linear unabhängig sind), und $\|x_1 \times \dots \times x_{n-1}\| = \text{Vol}(x_1, \dots, x_{n-1})$.

A.2 Analysis

Definition A.05 (C^r) Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$. f heißt r -mal stetig differenzierbar, wenn alle partiellen Ableitungen $\frac{\partial f^j}{\partial u^{i_1} \dots \partial u^{i_j}}$ existieren und in U stetig sind. Wir schreiben $f \in C^r$. \triangleright

Definition A.06 (Differential, regulär, Gradient) Ist $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ differenzierbar, so sind die lineare Abbildung $df_p : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ (das Differential von f bei p) bzw. im Falle $n = 1$ der Gradientenvektor $\text{grad}_p(f)$ von f bei p gegeben durch

$$df_p(v) = \frac{\partial f}{\partial u^1}(p)v^1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial u^m}(p)v^m, \quad \text{grad}_p(f) = \left(\frac{\partial f}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x^n} \right).$$

f heißt regulär bei p , wenn df_p regulär ist, d.h. $\nexists v$ mit $df_p(v) = 0$. \triangleright

Beispiel: Bei $n = 1$ ist $df_p(v) = \text{grad}_p(f) \cdot v$ und f regulär $\iff \text{grad}_p(f) \neq 0$. \diamond

Satz A.07 (von Taylor) Ist $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ aus der Klasse C^{k+1} , so gibt es für alle x_0, h ein $\theta \in [0, 1]$, sodaß $f(x_0 + h) =$

$$\sum_{p=0}^k \frac{1}{p!} ((h^1 \partial_1 + \dots + h^n \partial_n)^p f)(x_0) + \frac{1}{(k+1)!} ((h^1 \partial_1 + \dots + h^n \partial_n)^{k+1} f)(x_0 + \theta h).$$

Definition A.08 (Landausymbole) Ist $f, g, h : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $p : U \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f = g + h$, sodaß $\|h/p\| \rightarrow 0$ beim Grenzübergang $x \rightarrow x_0$, so schreiben wir $f(x) = g(x) + o(p(x))$ bei $x \rightarrow x_0$. Das „klein o von p “ heißt ein Landausches Symbol. \triangleright

Beispiel: Aus dem Satz von Taylor folgt für eine C^{k+1} -Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, daß

$$f(x) = \sum_{j=0}^k \frac{(x-x_0)^j}{j!} \left(\frac{d^j}{dx^j} f \right)(x_0) + o((x-x_0)^k) \quad (x \rightarrow x_0).$$

\diamond

Definition A.09 (holomorph, analytisch) $f : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ist holomorph, wenn das Differential von f (wir identifizieren \mathbb{C} mit \mathbb{R}^2) in jedem Punkt eine gleichsinnige Ähnlichkeit ist. $g : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ ist analytisch, wenn g der Realteil einer holomorphen Funktion ist. \triangleright

Satz A.10 Sei $g : U \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ einfach zusammenhängend. Wir schreiben $g(u, v) := g(u + iv)$. Dann ist g analytisch genau dann, wenn $g_{,uu} + g_{,vv} = 0$ und auch genau dann, wenn lokal $g(z - z_0) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ gilt.

Definition A.11 (reell-analytisch) $f : U \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist reell-analytisch, wenn lokal um jedes $x_0 \in U$ gilt, daß $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ ist. Funktionen $f : U \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^k$ heißen reell-analytisch, wenn jede einzelne Komponente reell-analytisch ist. \triangleright

Satz A.12 Jede reell-analytische Funktion $f : U \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ kann durch dieselben Potenzreihen, von denen in einer Umgebung V von $U \subset \mathbb{C}$ immer mindestens eine konvergiert, zu einer holomorphen Funktion $f : V \rightarrow \mathbb{C}$ fortgesetzt werden.

Beispiel: Sei $f : U \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph mit $f(z) = g(z) + ih(z)$, $g = \text{Re}(f)$ und $h = \text{Im}(f)$. Identifizieren wir \mathbb{C} mit \mathbb{R}^2 , hat das Differential $df_z : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ die reelle

Koordinatenmatrix $A = \begin{bmatrix} g_{,u} & g_{,v} \\ h_{,u} & h_{,v} \end{bmatrix}$. Da A eine Ähnlichkeit beschreibt (nach Definition von ‘holomorph’), ist die 2. Spalte, aufgefaßt als Vektor im euklidischen \mathbb{R}^2 , die um 90° gedrehte 1. Spalte, d.h. $h_{,u} = -g_{,v}$, $h_{,v} = g_{,u}$ (das sind die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen). Bei $\zeta = \xi + i\eta$ ist $df(\zeta) = A \cdot \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix}$. Diese Ähnlichkeitsabbildung kann man auch durch die Multiplikation mit einer komplexen Zahl ausdrücken: Es gilt $df(\zeta) = \frac{df}{dz} \cdot \zeta$, wobei $\frac{df}{dz} = g_{,u} + ig_{,v}$ die komplexe Ableitung von f bedeutet. \diamond

Definition A.13 (Diffeomorphismus) Sind $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen, so heißt $f : U \rightarrow V$ Diffeomorphismus, wenn f bijektiv ist, und f und f^{-1} differenzierbar sind. \triangleright

Beispiel: Ist $f : (a, b) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow (c, d) \subseteq \mathbb{R}$ bijektiv und differenzierbar mit $f' \neq 0$, so ist auch f^{-1} differenzierbar mit $(f^{-1})'(t) = f'(f^{-1}(t))$, d.h. f ist Diffeomorphismus. \diamond

Lemma A.14 Ist f ein Diffeomorphismus, so ist f notwendigerweise regulär. Ist $f \in C^r$ und diffeomorph, so ist auch $f^{-1} \in C^r$.

Satz A.15 (Satz von der Umkehrfunktion) Ist $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ bei $p \in \mathbb{R}^n$ regulär, dann existiert eine offene Umgebung V von p , sodaß $f : V \rightarrow f(V)$ ein Diffeomorphismus ist. Wir sagen, daß f ein lokaler Diffeomorphismus ist.

Satz A.16 (*Substitutionsregel*) Ist $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ (Riemann- oder Lebesgue-)integrierbar und $\varphi : U \rightarrow V$ diffeomorph, so gilt $\int_U f(x)dx = \int_V (f \circ \varphi)(y)|J(y)|dy$, wobei $J(y)$ die Determinante der $n \times n$ -Matrix $\partial\varphi/\partial y$ ist.

Definition A.17 (*Differentialgleichung*) Sei $U \subseteq \mathbb{R}^m$ offen, $(t_0, u_0) \in (a, b) \times U$ und $f : (a, b) \times U \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine C^r -Abbildung ($r \geq 0$). Eine Kurve $c : (a', b') \rightarrow \mathbb{R}^m$ heißt Lösung der Differentialgleichung $\frac{d}{dt}u = f(t, u)$ mit Anfangsbedingung (t_0, u_0) , wenn $a \leq a' < t_0 < b' \leq b$ ist und $c(t_0) = u_0$, $f(t, c(t)) = \dot{c}(t)$ gilt. Die Differentialgleichung heißt linear, wenn f die Gestalt $f(t, u) = f_0(t) + \sum_{j=1}^m u_j f_j(t)$ hat. \triangleright

Satz A.18 (wir verwenden die Bezeichnungen von Def. A.17) Bei $r \geq 1$ existiert für alle Anfangsbedingungen eine Lösung c_{u_0, t_0} der Differentialgleichung, die bis auf das Intervall (a', b') eindeutig ist. Für eine lineare Differentialgleichung existiert bei $r \geq 0$ eine eindeutige Lösung mit $(a', b') = (a, b)$. In beiden Fällen ist die Abbildung $c : (u_0, t_0, t) \mapsto c_{u_0, t_0}(t) \in \mathbb{R}^m$ aus der Klasse C^r .

Definition A.19 (*metrischer Raum*) $d : X \times X \rightarrow [0, \infty)$ ist Metrik und (X, d) metrischer Raum, wenn gilt: (i) $d(x, y) = 0 \iff x = y$, (ii) $d(x, y) = d(y, x)$ für alle $x, y \in X$, (iii) $d(x, y) + d(y, z) \leq d(x, z)$ für alle $x, y, z \in X$ (Dreiecksungleichung). \triangleright

Wir verwenden die Schreibweise $B(x, \varepsilon)$ für die Menge $\{y \in X \mid d(x, y) < \varepsilon\}$.

Definition A.20 (*Grenzwert, Cauchyfolge, Vollständigkeit*) Ist X metrischer Raum und $a : \mathbb{N} \rightarrow X$ Folge, so heißt a Cauchyfolge, wenn $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}$, sodaß aus $n, m > N$ stets $d(a_n, a_m) < \varepsilon$ folgt. α ist Grenzwert von a , wenn $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}$, sodaß aus $n > N$ stets $d(a_n, \alpha) < \varepsilon$ folgt. Wir schreiben $\alpha = \lim a_n$. Konvergiert jede Cauchyfolge, so heißt (X, d) vollständig. \triangleright

Beispiel: Grenzwerte sind immer eindeutig, falls sie existieren. Mit $d(x, y) = \|x - y\|$ ist \mathbb{R}^n vollständiger metrischer Raum. \diamond

Definition A.21 (*Häufungspunkt*) Ein Grenzwert einer Teilfolge einer Folge heißt Häufungspunkt der Folge. \triangleright

Satz A.22 Jeder Häufungspunkt einer Cauchyfolge ist Grenzwert.

Beweis: Sei $\alpha = \lim a_{n_i}$ und $\varepsilon > 0$. Dann gibt Für $N := \max(N_1, N_2)$ gilt dann $n > N \implies$ es N_1 mit $d(a_{n_i}, \alpha) < \varepsilon/2$ für $n_i > N_1$ und es $d(\alpha, a_n) < \varepsilon$, also $\alpha = \lim a_i$. \square
gibt N_2 mit $d(a_n, a_m) < \varepsilon/2$ für $n, m > N_2$.

Definition A.23 (*totale Variation*) Ist M metrischer Raum und $f : [a, b] \rightarrow M$ stetig, so ist die totale Variation von f definiert als $\sup \sum d(f(t_{i+1}), f(t_i))$, wobei das Supremum über alle Unterteilungen $a = t_0 < t_1 < \dots < t_r = b$ genommen wird. \triangleright

A.3 Topologie

Definition A.24 (*Topologie, offen, abgeschlossen, Basis*) Eine Menge X und eine Menge \mathcal{O} von Teilmengen von X heißt eine Topologie, wenn gilt: (i) $X, \emptyset \in \mathcal{O}$, (ii) $O_1, O_2 \in \mathcal{O} \implies O_1 \cap O_2 \in \mathcal{O}$, (iii) Die Vereinigung einer Familie von $O_i \in \mathcal{O}$ ist in \mathcal{O} . (X, \mathcal{O}) (oder nur X) heißt dann topologischer Raum. Die Elemente von \mathcal{O} heißen offen und ihre Komplemente abgeschlossen. $\mathcal{O}' \subset \mathcal{O}$ heißt eine Basis, wenn die Mengen von \mathcal{O} genau die Vereinigungen von Mengen von \mathcal{O}' sind. \triangleright

Beispiel: Durch Komplementbildung erhält man die Aussagen (i) \emptyset und X sind abg., (ii) A_1, A_2 abg. $\implies A_1 \cup A_2$ abg., (iii) A_i abg. $(i \in I) \implies \bigcap A_i$ ist abg.

Sind $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ Topologien für X , und sind $\mathcal{O}'_1, \mathcal{O}'_2$ deren Basen, so folgt aus $\mathcal{O}'_1 \subseteq \mathcal{O}_2$ und $\mathcal{O}'_2 \subseteq \mathcal{O}_1$, daß $\mathcal{O}_1 = \mathcal{O}_2$ gilt. \diamond

Beispiel: Ist X metrischer Raum, so definieren wir eine Topologie durch die ε -Umgebungen $B(x, \varepsilon)$ von Punkten als Basis. Diese Topologie heißt durch die Metrik induziert. Bei $X \subset \mathbb{R}^n$ und der kanonischen Metrik im \mathbb{R}^n spricht man von der Standardtopologie. $U \subseteq X$ ist offen genau dann, wenn $\forall x \in U \exists \varepsilon > 0$ mit $B(x, \varepsilon) \subseteq U$. \diamond

Definition A.25 (Abschluß) Für $Y \subseteq X$ sei \bar{Y} der (dann abgeschlossene) Durchschnitt aller abg. Teilmengen von X , die Y enthalten (= Abschluß bzw. abg. Hülle von Y). \triangleright

Definition A.26 (Umgebung) U ist Umgebung von $x \iff \exists V \in \mathcal{O} : V \subseteq U, x \in V$. \triangleright

Definition A.27 (stetig, Homöomorphismus) Sind X, Y topologische Räume, dann ist $f : X \rightarrow Y$ stetig, wenn das Urbild jeder offenen Menge offen ist. Ist f bijektiv und f^{-1} ebenfalls stetig, so heißt f Homöomorphismus. \triangleright

Beispiel: Verwenden wir eine durch eine Metrik bestimmte Topologie, so stimmt Def. A.27 mit der üblichen Definition der Stetigkeit aus der Analysis überein: f ist stetig genau dann, wenn $\lim f(a_n) = f(\lim a_n)$ gilt.

Eine Abbildung ist offenbar auch genau dann stetig, wenn die Urbilder von abgeschlossenen Mengen abgeschlossen sind. Ist $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, so definiert die Ungleichung $f(x) > 0$ eine offene Teilmenge $X' = f^{-1}((0, \infty))$ von X , und die Gleichung $f(x) = 0$ eine abgeschlossene Teilmenge $X'' = f^{-1}(\{0\})$ von X . \diamond

Definition A.28 (Teilraum) Ist $Y \subseteq X$ und (X, \mathcal{O}) topologischer Raum, so sei $\mathcal{O}' = \{U \cap Y \mid U \in \mathcal{O}\}$. Dann ist (Y, \mathcal{O}') ein topologischer Raum und heißt Teilraum von (X, \mathcal{O}) . \triangleright

Beispiel: Ist X metrischer Raum und verwenden wir als Metrik in Y die von X , so stimmt die metrische Topologie in Y offenbar mit der Teilraumtopologie in Y überein. Dies gilt insbesondere für die Standardtopologie im \mathbb{R}^n . \diamond

Definition A.29 (Hausdorff) Ein topologischer Raum (X, \mathcal{O}) ist Hausdorffsch (T_2), wenn je zwei verschiedene Punkte aus X disjunkte offene Umgebungen haben. \triangleright

Beispiel: Metrische Topologien sind Hausdorffsch: Für $x, y \in \mathbb{R}^n$ kann man offene Kugeln mit Radius $\|d(x, y)\|/3$ verwenden. Jeder Teilraum eines T_2 -Raumes ist offenbar ein T_2 -Raum. Die Mengen $\{x\}$ sind in einem T_2 -Raum abgeschlossen (Ü-Bsp.) \diamond

Definition A.30 (Zusammenhang) Haben in (X, \mathcal{O}) nur \emptyset und X die Eigenschaft, gleichzeitig offen und abgeschlossen zu sein, heißt X zusammenhängend. \triangleright

Beispiel: Die zusammenhängenden Teilmengen von \mathbb{R} (versehen mit der Standardtopologie) sind genau die Intervalle inklusive $\pm\infty$ als Intervallgrenzen (Übungsbeispiel) \diamond

Definition A.31 (Weg, Wegkomponente, Wegzusammenhang) Ein Weg in X ist eine stetige Abbildung $c : [0, 1] \rightarrow X$. $x, y \in X$ heißen verbindbar, wenn es einen Weg mit $c(0) = x$ und $c(1) = y$ gibt. Dies ist eine Äquivalenzrelation (Übungsbeispiel). Die Äquivalenzklassen der Relation "verbindbar" heißen Wegkomponenten. X heißt wegzusammenhängend, wenn je 2 Punkte in X verbindbar sind. \triangleright

Beispiel: Der \mathbb{R}^n ist wegzusammenhängend. Ist $f : X \rightarrow Y$ stetig, und ist X (weg-) zusammenhängend, so hat auch $f(X)$ diese Eigenschaft (Übungsaufgabe) \diamond

Definition A.32 (Lokaler Wegzusammenhang) X heißt lokal wegzusammenhängend, wenn jeder Punkt $x \in X$ eine wegzusammenhängende Umgebung besitzt. \triangleright

Satz A.33 Ist X wegzusammenhängend, so auch zusammenhängend. Ist X lokal wegzusammenhängend und zusammenhängend, so auch wegzusammenhängend (d.h. je zwei Punkte sind durch einen Weg verbindbar).

Beweis: Angenommen, X ist wegzusammenhängend, $A \subseteq X$ ist offen und abgeschlossen, und $c : [0, 1] \rightarrow A$ ist ein Weg $\Rightarrow X \setminus A$ ist offen und abgeschlossen $\Rightarrow c^{-1}(A)$ und $c^{-1}(X \setminus A)$ sind offen $\Rightarrow c^{-1}(A)$ ist offen und abgeschlossen, und daher gleich $[0, 1]$ oder gleich \emptyset , denn $[0, 1]$ ist zusammenhängend. Es folgt, daß das Bild einer Kurve ganz in A oder ganz in $X \setminus A$ liegt. Da je 2 Punkte

verbindbar sind, folgt $A = X$ oder $A = \emptyset$, und X ist zusammenhängend.

Ist X lokal wegzusammenhängend, so besitzt jedes x eine wegzusammenhängende Umgebung, also ist die Wegkomponente W_x von x offen. W_x ist das Komplement der Vereinigung der Wegkomponenten der Punkte nicht in W_x (welche offen sind), also abgeschlossen. Damit folgt $W_x = X$. \square

Beispiel: Für eine offene Teilmenge X des \mathbb{R}^n besitzt jedes $x \in X$ eine ε -Kugel als wegzusammenhängende Umgebung, X ist also lokal wegzusammenhängend. Ist X zusammenhängend, dann auch wegzusammenhängend. \diamond

Definition A.34 (kompakt) Eine Topologie (X, \mathcal{O}) ist kompakt, wenn sie T_2 ist, und man aus jeder Familie U_i von offenen Mengen mit $\bigcup U_i = X$ endlich viele der U_i auswählen kann, die X überdecken. \triangleright

Satz A.35 (i) Sei $A \subseteq K$ abgeschlossen. Ist K kompakt, so auch A . (ii) Ist K kompakt und $f : K \rightarrow Y$ stetig, so ist $f(K)$ kompakt, falls Y T_2 ist.

Beweis: ad (i): Sei U_j eine offene Überdeckung von A . Jedes U_j hat die Form $V_j \cap A$ mit V_j offen in K . Nun wird K durch die Mengen (V_j) gemeinsam mit $K \setminus A$ überdeckt. Endlich viele davon überdecken K , also endlich viele der U_j

überdecken A .

ad (ii): Sei $(U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von $f(K)$. Die Mengen $V_i = f^{-1}(U_i)$ überdecken K , sogar endlich viele davon. Deren Bilder überdecken $f(K)$. \square

Satz A.36 (Satz von Heine-Borel) Die kompakten Teilmengen von \mathbb{R}^n sind genau die beschränkten abgeschlossenen Teilmengen (d.h. \mathbb{R}^n hat die Heine-Borel-Eigenschaft)

Beispiel: Daraus folgt unmittelbar, daß auch jede abgeschlossene Teilmenge des \mathbb{R}^n (versehen mit der Standardtopologie) die Heine-Borel-Eigenschaft besitzt. \diamond

Satz A.37 Ist (X, d) metrischer Raum und seine metrische Topologie kompakt, dann hat jede Folge $a : \mathbb{N} \rightarrow X$ einen Häufungspunkt.

Beweis: Liegen in jeder Umgebung eines Punktes x unendlich viele Folgenglieder, so ist er ein Häufungspunkt (wähle a_{n_i} aus $B(x, 1/i)$, dann ist $x = \lim a_{n_i}$). Wir nehmen an, daß a keinen Häufungspunkt besitzt, daß

also jeder Punkt x eine offene Umgebung U_x besitzt, in der nur endlich viele a_i liegen. Endlich viele der U_x überdecken X , es dürften damit in ganz X nur endlich viele Folgenglieder liegen (Widerspruch). \square

Definition A.38 (Produkttopologie) Für topologische Räume X_j ($j \in J$) betrachte das Produkt $X = \times X_j$ und für alle $k \in J$ die Projektionen $p_k : X \rightarrow X_k$. Ist U_k offen in X_k , so sei auch $p_k^{-1}(U_k)$ offen in X (d.h. p_k ist stetig). Endliche Durchschnitte solcher Mengen und deren Vereinigungen seien genau die offenen Mengen in X . \triangleright

Beispiel: Die offensichtliche Bijektion $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+m}$ ist ein Homöomorphismus, wenn alle drei mit der Standardtopologie versehen sind. \diamond

Satz A.39 (von Tychonov) Ein Produkt $X = \prod X_j$ ist genau dann kompakt, wenn alle X_j kompakt sind.

Definition A.40 (*parakompakt*) Ein topologischer Raum X ist parakompakt, wenn jede offene Überdeckung $(U_i)_{i \in I}$ eine lokal-endliche Verfeinerung besitzt: Es gibt eine offene Überdeckung $(V_j)_{j \in J}$, sodaß jedes V_j in einem U_i liegt, und jedes $x \in X$ eine offene Umgebung besitzt, die nur endlich viele der V_j schneidet. \triangleright

Beispiel: Wir zeigen die Parakompaktheit der Standardtopologie einer abgeschlossenen Teilmenge X des \mathbb{R}^n und verwenden die Bezeichnung D_r für die offene und \bar{D}_r für die abgeschlossene Vollkugel vom Radius r und Mittelpunkt 0: Für $k \in \mathbb{N}$ ist $K_k := (\bar{D}_k \setminus D_{k-1}) \cap X$ kompakt, und $X = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} K_k$. Endlich viele der U_i überdecken K_k . Als V_j verwenden wir (für jedes k) die Schnitte dieser U_i mit $(D_{k-1} \setminus \bar{D}_{k-2}) \cap X$. \diamond

A.4 Algebra

Definition A.41 (*elementarsymmetrische Funktionen*) Das ungeordnete n -Tupel $\{\kappa_1, \dots, \kappa_n\}$ ist durch das Polynom $\prod_{i=1}^n (t - \kappa_i)$ eindeutig bestimmt und umgekehrt. Die Koeffizienten dieses Polynoms $S_0 t^n - S_1 t^{n-1} + \dots + (-1)^n S_n$ sind (bis auf das Vorzeichen) die *elementarsymmetrischen Funktionen* von $\kappa_1, \dots, \kappa_n$, nämlich: $S_0(\kappa_1, \dots, \kappa_n) = 1$; $S_1(\kappa_1, \dots, \kappa_n) = \kappa_1 + \dots + \kappa_n$; $S_2(\kappa_1, \dots, \kappa_n) = \kappa_1 \kappa_2 + \kappa_1 \kappa_3 + \dots + \kappa_{n-1} \kappa_n$; und so weiter bis $S_n(\kappa_1, \dots, \kappa_n) = \kappa_1 \cdots \kappa_n$. \triangleright

Definition A.42 (*Liesche Algebra*) \mathfrak{g} heißt Liesche Algebra, wenn \mathfrak{g} ein Vektorraum ist, und eine bilineare Abbildung $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ mit den folgenden Gesetzen definiert ist: (i) $[x, x] = 0$ (ii) $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$ (Jacobi-Identität). \triangleright

Beispiel: \mathbb{R}^3 mit $[x, y] = x \times y$ ist eine Liesche Algebra. \diamond

Übungsbeispiele

B.1 Kurventheorie

Bsp. 1.01. Es sei $t = 0$ ein nicht regulärer Punkt der C^{k+1} -Kurve $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ und es existiere eine kleinste natürliche Zahl $k \geq 2$ mit $c^{(k)}(0) \neq 0$. Dann gilt: Ist k gerade, so ist $c(-\varepsilon, \varepsilon)$ in einem Kegel mit Spitze $c(0)$ enthalten, dessen ‘Öffnungswinkel’ bei $\varepsilon \rightarrow 0$ gegen 0 strebt (die Kurve hat einen Rückkehrpunkt). Ist k ungerade, so gibt es eine reguläre C^1 -Parametrisierung von $c(I)$.

Bsp. 1.02. Man diskutiere die Dimensionen der Schmiegräume der Kurve $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, $c(t) = (t + t^2, t^3, t^4)$.

Bsp. 1.03. Sind alle k -Schmiegräume einer C^{k+1} -Kurve $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ k -dimensional, ($k = 1, 2, \dots, n-1$) und enthalten alle einen festen Punkt, so liegt $c(I)$ in einem k -dimensionalen Unterraum von \mathbb{R}^n . Sonderfälle:

- Gehen alle Tangenten einer regulären C^2 -Kurve durch einen Punkt, so ist diese in einer Geraden enthalten.

- Hat eine reguläre C^3 -Kurve keinen Wendepunkt und gehen alle Schmiegeebenen durch einen Punkt, so ist diese in einer Ebene enthalten.

Bsp. 1.04. Sei $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ gegeben durch $t \mapsto c(t) := (t, \operatorname{cht})$. Gesucht ist eine Parametertransformation $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, sodaß $c \circ \varphi$ nach der Bogenlänge parametrisiert ist.

Bsp. 1.05. Sei $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ gegeben durch $t \mapsto c(t) := (\cos^3 t, \sin^3 t)$. Man berechne die Bogenlänge $L_{-\pi}^{+\pi}(c)$.

Bsp. 1.06. Ist $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ regulär, dann heißt der affine Unterraum $c(t) + [\dot{c}(t)]^\perp$ die *Normalhyperebene* von c an der Stelle t . Es enthalten genau dann alle Normalhyperebenen einen gemeinsamen Punkt, wenn $c(I)$ in einer Sphäre enthalten ist.

Bsp. 1.07. Bestimmen Sie Begleitbasis und Krümmungen für die Kurve $c(t) = (r \cos t, r \sin t, pt)$ ($t \in \mathbb{R}$, $r > 0$).

Bsp. 1.08. Bestimmen Sie die Kurven in der euklidischen Ebene mit $\kappa_1(s) = s$ (s ist die Bogenlänge).

Bsp. 1.09. Bestimmen Sie die Haupttypkurven mit konstanten Krümmungen im \mathbb{R}^2 und \mathbb{R}^3 .

Bsp. 1.10. Sei $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine normierte Haupttypkurve. Zeigen Sie: c hat konstante Krümmungen \Leftrightarrow für alle $a \in \mathbb{R}$ gibt es eine Bewegung $\beta_a : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $c(t+a) = \beta_a(c(t))$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

Die Menge $G_c = \{\beta_a \mid a \in \mathbb{R}\}$ ist eine Untergruppe der Bewegungsgruppe und $a \mapsto \beta_a$ ist ein Homomorphismus $(\mathbb{R}, +) \rightarrow (G_c, \circ)$. c ist eine Punktbahn bei der Wirkung von G_c und alle Punktbahnen haben konstante Krümmungen (‘W-Kurven’).

¹⁾Der Autor dieses Textes weist explizit darauf hin, daß die allerwenigsten der hier aufgeführten Beispiele eigenes geistiges Eigentum sind.

B.2 Teilmannigfaltigkeiten

Bsp. 2.01. Zeigen Sie: Ist $\sigma : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine Bilinearform, so ist $M := \{x \mid \sigma(x, x) = 1\}$ eine $(n-1)$ -dimensionale Teilmannigfaltigkeit von \mathbb{R}^n . Geben Sie eine Gleichung von $T_p M$ für $p \in M$ an.

Bsp. 2.02. Zeigen Sie: $\text{SL}_n = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid \det(A) = 1\}$ ist eine $(n^2 - 1)$ -dimensionale Teilmannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{n \times n}$. Geben Sie eine Gleichung des Tangentialraumes an.

Hinweis: Zeigen Sie zuerst $d_E \det(V) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\det(E + t \cdot V)) = \text{tr}(V)$ und berechnen Sie anschließend $d_A \det(V)$.

Bsp. 2.03. Zeigen Sie: $g : U \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, $g(u) = g(u^1, \dots, u^m) \rightarrow (u^1, \dots, u^m, g^{m+1}(u), \dots, g^n(u))$ parametrisiert eine m -dimensionale C^r -Teilmannigfaltigkeit des \mathbb{R}^n , wenn g^{m+1}, \dots, g^n C^r sind.

Bsp. 2.04. Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist der Schnitt des Zylinders $x^2 + z^2 = 1$ und der Kugel $x^2 + y^2 + (z-a)^2 = 4$ eine 1-dimensionale Teilmannigfaltigkeit des \mathbb{R}^3 ?

Bsp. 2.05. Gegeben sind die beiden Abbildungen $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ durch $f(u, v) = (u, v, (\alpha v)^2 - (\beta v)^2)$, $g(u, v) = (\beta(u+v), \alpha(u-v), 4\alpha^2\beta^2 uv)$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

- Zeigen Sie: $f(\mathbb{R}^2) = g(\mathbb{R}^2)$ und beide f, g sind regulär und injektiv. Die 1-Parameterkurven und die 2-Parameterkurven von f sind je schiebungsgleiche Parabeln. Die Parameterkurven von g sind geradlinig.
- Zeigen Sie: $M = f(\mathbb{R}^2) = g(\mathbb{R}^2)$ ist eine 2-dimensionale Teilmannigfaltigkeit des \mathbb{R}^3 .

Bemerkung: M ist ein *hyperbolisches Paraboloid* und f bzw. g sind Parametrisierungen von Φ von als *Schiebfläche* bzw. *Regelfläche*.

- Seien ∂_1, ∂_2 und ∂'_1, ∂'_2 die Basisfelder, die durch f und g gegeben sind. Stellen Sie die einen als Linearkombination der anderen dar.

B.3 Flächen im euklidischen \mathbb{R}^3

Bsp. 3.01. Rotiert ein Kreis k um eine Gerade g seiner Ebene (g sei kein Kreisdurchmesser), so entsteht ein *Torus* Φ . Ist die Anzahl der Schnittpunkte von g, k gleich 0, heißt Φ *Ringtorus*, ist sie 1, *Dorntorus*, ist sie 2, *Spindeltorus*.

- Man suche eine möglichst große Teilmenge von Φ , die eine 2-dimensionale Teilmannigfaltigkeit von \mathbb{R}^3 ist und suche eine reguläre Parametrisierung.
- Man bestimme die dazugehörigen Koeffizienten g_{jk} der Metrik.
- Man berechne die Oberfläche des Ringtorus.

Bsp. 3.02. Sei $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine C^r -Kurve der Gestalt $c(t) = (g(t), 0, h(t))$. Verschraubung um die z -achse liefert eine die Parametrisierung $f(u, v) = (g(u) \cos v, g(u) \sin v, h(u) + pv)$, wobei $p \neq 0$. $f(I \times \mathbb{R})$ heißt *Schraubfläche*, p heißt ihr *Schraubparameter*.

Man diskutiere Regularität und Injektivität von f . Für den Fall, daß f regulär ist, parametrisiert f lokal eine 2-dim. Teilmannigfaltigkeit des \mathbb{R}^3 . Man berechne die Koeffizienten ihrer inneren Metrik, und gebe Winkel und Bogenlänge der Parameterkurven an.

Bsp. 3.03. Zeigen Sie, daß die folgenden Flächenklassen im \mathbb{R}^3 lokal isometrisch zu \mathbb{R}^2 sind:

- *Zylindrische* Flächen mit regulärem C^1 -Normalschnitt (Parametrisierung $g(u, v) = c(u) + vl$, mit einer Kurve $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ und $l \in \mathbb{R}^3$).
- *Kegel* mit Parametrisierung $g(u, v) = vc(u)$ mit $c : I \rightarrow S^2$, $\|c\| = 1$.

- Tangentenflächen von Kurven mit Parametrisierung $g(u, v) = c(u) + v\dot{c}(u)$, mit $\|\dot{c}\| = 1$.

Finden Sie zuerst eine maximale Definitionsmenge so, daß g lokal eine Teilmannigfaltigkeit parametrisiert. Dann suchen Sie eine Parametrisierung \bar{g} einer Teilmenge der euklidischen Ebene so, daß die Koeffizienten der metrischen Grundform für g und \bar{g} übereinstimmen. Hinweis zu (c): Verwenden Sie den Hauptsatz der Kurventheorie.

Bsp. 3.04. Zeigen Sie: Die Umkehrung der stereographischen Projektion der Kugel S^n aus ihrem Nordpol N auf die Äquatorebene ist eine isotherme Parametrisierung von $S^n \setminus N$.

Bsp. 3.05. Man betrachte die Kurve $c(t) = d(\sin t, -\cos t - \ln \tan \frac{t}{2}, 0)$. Die bei Rotation von c um die y -Achse entstehende Fläche heißt *Pseudosphäre*. Man bestimme die Gaußsche und die mittlere Krümmung dieser Fläche. *Hinweis:* Die Gaußsche Krümmung ist konstant.

Bsp. 3.06. Sei $S^m = \{x \in \mathbb{R}^{m+1} \mid \|x\| = r\}$. Zeigen Sie: Die Normalkrümmung jeder Flächentangente von S^m hat den Betrag $1/r$, und die Gaußsche Krümmung von S^m hat den Betrag $1/r^m$.

Bsp. 3.07. Zeigen Sie: Alle Breitenkreise der Pseudosphäre (vgl. [Bsp. 3.05](#)) haben dieselbe geodätische Krümmung

Bsp. 3.08. Sei $F(x, y, z) = (x/a)^2 + (y/b)^2 + (z/c)^2 - 1$ mit $a, b, c > 0$. Das Ellipsoid $F^{-1}(0)$ ist eine 2-dimensionale Teilmannigfaltigkeit des \mathbb{R}^3 (vgl. [Bsp. 2.01](#)). Es sei $d(p)$ der Abstand der Tangentialebene von p zum Mittelpunkt $(0, 0, 0)$. Zeigen Sie, daß für die Gaußsche Krümmung gilt:

$$\frac{1}{K(x, y, z)} = (abc)^2 \cdot \left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4} \right)^2 = \frac{(abc)^2}{d(x, y, z)^4}.$$

Bsp. 3.09. Sei $g(u, v) = (u, v, u^2 - v^2)$ und $\bar{g}(u, v) = (u, v, 2uv)$. Beide parametrisieren Teilmannigfaltigkeiten M und \bar{M} (vgl. [Bsp. 2.03](#)).

Zeigen Sie: Die jeweiligen Gaußschen Krümmungen in $g(a)$ und $\bar{g}(a)$ sind gleich. Die Abbildung $f: M \rightarrow \bar{M}$, $g(u) \mapsto \bar{g}(u)$ ist ein Diffeomorphismus und flächentreu, aber nicht lokal isometrisch.

Bsp. 3.10. Sei $U = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$, und sei $g_t: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ ($0 \leq t \leq 1$) gegeben durch

$$g_t(u, v) = (1 - t^2)^{1/2} (\sinh u \cos v, \sinh u \sin v, v) + t(-\cosh u \sin v, \cosh u \cos v, u).$$

Man zeige: g_t parametrisiert eine Schraubfläche für $t \neq 0$ (eine Wendelfläche für $t = 1$), und ein Katenoid für $t = 0$. g_t ist isotherm für alle t , und die Abbildungen $g_t(u, v) \mapsto g_s(u, v)$ sind lokal isometrisch. Alle g_t parametrisieren Minimalflächen.

Bsp. 3.11. Man bestimme Abbildungen $g(u, v) = c_1(u) + c_2(v)$ mit ebenen Kurven c_i in zueinander orthogonalen Ebenen, die Minimalflächen parametrisieren (Es ergibt sich die Minimalfläche von H. F. Scherk, siehe [Fig. B.2](#)).

Bsp. 3.12. Bestimmen Sie die Minimalfläche, die eine Symmetrie-Ebene nach einem Kreis schneidet! (Hinweis: Lösen sie ein Björlingsches Problem und verifizieren Sie die Symmetrie der Lösung).

Bsp. 3.13. Sei F holomorph in $U \subset \mathbb{C}$. Zeigen Sie: $g(u, v) = \operatorname{Re}(w(u + iv))$ parametrisiert eine Minimalfläche außer in isolierten singulären Punkten, oder es ist $w(z)$ konstant, wenn $w(z)$ gegeben ist durch

$$w(z) = \left(\int_{z_0}^z (1 - \zeta^2) F(\zeta) d\zeta, i \int_{z_0}^z (1 + \zeta^2) F(\zeta) d\zeta, 2 \int_{z_0}^z \zeta F(\zeta) d\zeta \right).$$

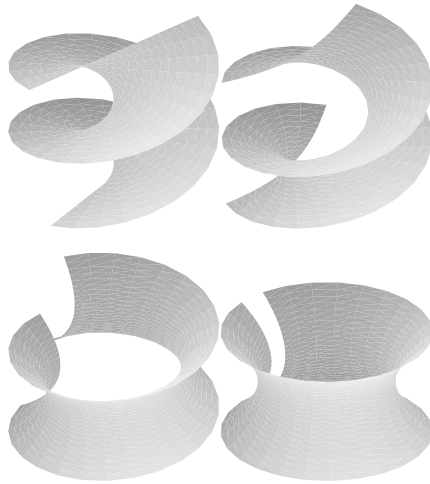


Abbildung B.1: Biegung von Minimalflächen

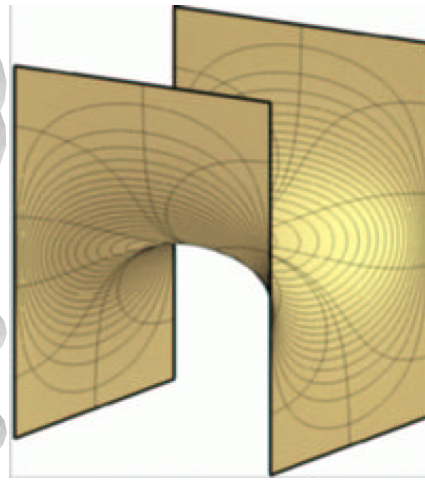


Abbildung B.2: Scherksche Minimalfläche

Setzen Sie $F(z) = 1/2z^2$ in Bsp. 3.13, und bestimmen Sie die dazugehörige Minimalfläche.

Bsp. 3.14. Sei $g : U \subset \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine reguläre Parametrisierung einer Teilmannigfaltigkeit, n das dazugehörige Einheits-Normalvektorfeld, und sei $g^\varepsilon(u) = g(u) + \varepsilon n(g(u))$ die Parametrisierung einer *Parallelfläche* im Abstand ε .

Zeigen Sie: $g^\varepsilon(U)$ ist lokal Teilmannigfaltigkeit, wenn $1/\varepsilon$ keine Hauptkrümmung von $g(U)$ ist, das Normalvektorfeld ist gegeben durch $n^\varepsilon(g^\varepsilon(u)) = n(g(u))$, und die Hauptkrümmungen erfüllen die Relation $1/\kappa_j^\varepsilon = 1/\kappa_j - \varepsilon$.

B.4 Differenzierbare Mannigfaltigkeiten

Bsp. 4.01. Die Karten $U_1 = U_2 = \mathbb{R}^n$, $\varphi_{12} : U_1 \setminus 0 \rightarrow U_2$, $\varphi_{12}(x) = x/\|x\|^2$ definieren eine differenzierbare Mannigfaltigkeit diffeomorph zur Sphäre $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

Bsp. 4.02. Seien Klebedaten wie folgt gegeben: Bezeichne die obere Halbebene $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$ mit H . Dann sei $U_i = \mathbb{R}^2$ für alle $i \in \mathbb{R}$, $U_\star = H$, und $\varphi_{i\star} : H \rightarrow U_i$, $\varphi_{i\star}(x, y) = (i + xy, y)$.

Zeigen Sie: Der entstehende topologische Raum M ist Hausdorff und zusammenhängend. Die Menge $\{\varphi_i^{-1}(0, 0) \mid i \in \mathbb{R}\}$ ist überabzählbar und besteht aus isolierten Punkten. Es gibt keine Teilmannigfaltigkeit eines \mathbb{R}^n , welche diffeomorph zu M ist (d.h. M ist nicht parakompakt).

Bsp. 4.03. Zeigen Sie: Die Klebedaten $U_1 = (0, 3) \times (0, 1)$, $U_2 = (2, 5) \times (0, 1)$ und

$$\begin{aligned} \varphi_{12} : & (0, 1) \times (0, 1) \cup (2, 3) \times (0, 1) \rightarrow U_2, \\ (x, y) & \mapsto (x, y) \text{ für } x > 2, \\ & (x + 4, 1 - y) \text{ für } x < 1 \end{aligned}$$

legen eine nicht orientierbare differenzierbare Mannigfaltigkeit M fest (*Möbiusband*). Geben Sie eine Teilmannigfaltigkeit des \mathbb{R}^3 diffeomorph zu M an.

Bsp. 4.04. Sei M das Möbiusband von Bsp. 4.03. Gibt es zwei Vektorfelder $X, Y : M \rightarrow TM$ sodaß $\{X_p, Y_p\}$ linear unabhängig ist für alle $p \in M$?

Sei $X = \partial_1$ für beide Karten φ_1, φ_2 . Zeigen Sie, daß dadurch ein Vektorfeld widerspruchsfrei festgelegt ist, und daß $\text{Fl}_X(x, t)$ für alle $x \in M, t \in \mathbb{R}$ definiert ist.

Bsp. 4.05. Sei G eine diskontinuierliche Transformationsgruppe einer diffb. Mannigfaltigkeit M , d.h. jedes $g \in G$ ist ein Diffeomorphismus $g : M \rightarrow M$, und für jedes $x \in M$ gibt es eine Umgebung U_x mit allen $g(U_x)$ disjunkt.

Zeigen Sie: Die Menge M/G der Äquivalenzklassen der Relation $x \sim y \iff \exists g : g(x) = y$ ist eine diffb. Mannigfaltigkeit, sodaß die Projektion $\pi : M \rightarrow M/G$ lokal ein Diffeomorphismus ist. Hinweis: Man verwende die Elemente von G zusammen mit den Klebeabbildungen von M , um Klebeabbildungen für M/G zu finden.

Zeigen Sie weiters, daß für $M = \mathbb{R}^n, G = \mathbb{Z}^n$ und $g(x) := x + g$ diese Bedingungen erfüllt sind (M/G heißt *Torus*) und geben Sie eine Teilmannigfaltigkeit des \mathbb{R}^3 an, die diffeomorph zu $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ ist.

B.5 Riemannsche Räume

Bsp. 5.01. Es sei $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine reguläre Kurve ohne Wendepunkte mit Begleitbasis c_1, c_2, c_3 . Dann parametrisiert $g : (u, v) \mapsto c(u) + vc_3(u)$ die *Binormalenregelfläche* von c .

Man zeige: Das Vektorfeld $c_3(t)$ längs $c(t)$ ist ein Parallelfeld und c ist geodätische Linie (Frenetsche Ableitungsgleichungen verwenden).

Bsp. 5.02. Sei M das Möbiusband aus **Bsp. 4.03**. Eine Riemannsche Metrik $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sei bezüglich beider Karten φ_1, φ_2 durch $g_{11} = g_{22} = 1, g_{12} = 0$ gegeben.

Zeigen Sie, daß diese Definition widerspruchsfrei ist, und bestimmen Sie die Holonomiegruppe von $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Erzeugen Sie ein Papiermodell einer Teilmannigfaltigkeit des \mathbb{R}^3 , die isometrisch zu M ist.

Bsp. 5.03. Sei $c(u) = (\cos u \cos \alpha, \sin u \cos \alpha, \sin \alpha)$ ein Breitenkreis der Sphäre $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ zur geographischen Breite α ($-\pi/2 < \alpha < \pi/2$). Sei $v_0 \in T_{c(0)}S^2, v = (-\sin \alpha, 0, \cos \alpha)$ und sei $v(t)$ das Parallelfeld längs $c(t)$ mit $v(0) = v_0$.

Man diskutiere den Winkel $\angle(\dot{c}(t), v(t))$, berechne die geodätische Krümmung des Breitenkreises und bestimme die Holonomiegruppe von S^2 . Weiters zeige man, daß die geodätischen Linien in S^2 genau die Großkreise (Schnitte mit zweidimensionalen Unterräumen des \mathbb{R}^3) sind.

Bsp. 5.04. Die Kurve $c : I \rightarrow M$ ist eine geodätische Linie, wenn sie regulär und $\frac{D}{dt} \dot{c}, \dot{c}$ linear abhängig sind. Für eine Koordinatendarstellung \tilde{c} von c bedeutet dies

$$\begin{vmatrix} \tilde{c}^1 & \tilde{c}^1 + \tilde{c}^j \tilde{c}^k \Gamma_{jk}^1 \circ \tilde{c} \\ \tilde{c}^2 & \tilde{c}^2 + \tilde{c}^j \tilde{c}^k \Gamma_{jk}^2 \circ \tilde{c} \end{vmatrix} = 0.$$

Bsp. 5.05. Sei M/G wie in **Bsp. 4.05** konstruiert. Ist auf M eine Riemannsche Metrik $\langle \cdot, \cdot \rangle$ gegeben und hat jedes $g \in G$ die Eigenschaft $\langle dg(v), dg(w) \rangle = \langle v, w \rangle$ (g ist Isometrie), so gibt es genau eine Riemannsche Matrix $\langle \cdot, \cdot \rangle'$ in G/M , sodaß für die Projektion $\pi : M \rightarrow G/M$ die Gleichung $\langle v, w \rangle = \langle d\pi(v), d\pi(w) \rangle'$ gilt.

Bsp. 5.06. Sei ein Torus M parametrisiert durch Längen- und Breitengrade $(\varphi, \psi) \in \mathbb{R}^2 \mapsto g(\varphi, \psi) \in M$ so, daß $g(\varphi + 2k\pi, \psi + 2l\pi) = g(\varphi, \psi)$ für alle $k, l \in \mathbb{Z}$. Die Riemannsche Metrik mit $g_{jk} = \text{diag}(1, 1)$ macht M zum sogenannten *flachen Torus*. Bestimmen Sie die Geodätischen und die Holonomiegruppe von $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Geben Sie eine Teilmannigfaltigkeit des \mathbb{R}^4 an, die isometrisch zum flachen Torus ist.

Bsp. 5.07. Sei $G = \{\text{id}, -\text{id}\} \subset \text{SO}_3, M = S^2/G$, d.h. M entsteht aus der 2-Sphäre durch Identifikation von gegenüberliegenden Punkten (M ist die *projektive Ebene*). Die Riemannsche Metrik auf M sei gemäß **Bsp. 5.05** gegeben (die *elliptische Metrik*

in M). Bestimmen Sie die Geodätischen und die Holonomiegruppe von M (vgl. Bsp. 5.03).

Bsp. 5.08. Auf einer C^2 -Drehfläche sind die Meridiane und genau jene Breitenkreise Geodätische, deren Ebenen die Meridiane orthogonal durchsetzen.

Zeigen Sie für alle anderen Geodätischen: Ist $c(t)$ eine Geodätische, $r(t)$ der Radius des Breitenkreises durch den Punkt $c(t)$ und $\alpha(t)$ der Winkel zwischen der Geodätischen und dem Breitenkreis dort, so ist $r(t) \cos \alpha(t)$ eine Konstante (A. C. Clairaut 1735).

Bsp. 5.09. Sei \mathbb{R}^{n+1} ($n \geq 2$) mit dem pseudo-euklidischen Skalarprodukt $\langle x, y \rangle = -x_0 y_0 + x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$ ausgestattet und sei $H^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle x, x \rangle = -1, x_0 > 0\}$ (H^n ist der n -dimensionale *hyperbolische Raum*).

Zeigen Sie: Das in H^n induzierte Skalarprodukt macht H^n zu einem Riemannschen Raum. Ist G die Gruppe der Isometrien von $(\mathbb{R}^{n+1}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, welche H^n in sich überführen, so ist $G \leq O_{n,1}$ mit $O_{n,1} : G = 2$. Dabei ist $O_{n,1} = \{A \in \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)} \mid A^T \cdot \text{diag}(-1, 1, \dots, 1) \cdot A = \text{diag}(-1, 1, \dots, 1)\}$.

Für $x, y \in M$ gibt es ein $g \in G$ mit $g(x) = y$, und der Stabilisator G_x für $x \in H^n$ ist isomorph zu O_n (Hinweis: Ist $\langle n, n \rangle > 0$, so ist $\sigma_n : x \mapsto x - 2(\langle x, n \rangle / \langle n, n \rangle)n$ eine Isometrie von H^n , und für $x, y \in H^n$ ist $\sigma_{y-x}(x) = y$).

Bsp. 5.10. Diskutieren Sie Injektivität, Surjektivität und Regularität der Exponentialabbildung für die Sphäre S^n . Zeigen Sie, daß die kürzeste Verbindung zweier Punkte x, y auf der Sphäre S^n ein Großkreisbogen der Länge $\leq \pi$ ist, und daß dieser im Fall $x \neq -y$ eindeutig bestimmt ist.

Bsp. 5.11. Sei H^n der hyperbolische Raum aus Bsp. 5.09. Zeigen Sie: Die Geodätischen sind die Schnitte von H^n mit zweidimensionalen Unterräumen. Die Exponentialabbildung \exp_p ist ein Diffeomorphismus für alle $p \in M$. Es ist $\cosh d(x, y) = -\langle x, y \rangle$. Die Gruppe G aus Bsp. 5.09 ist die Gruppe der Isometrien von H^n .

B.6 Riemannschen Räume — Krümmung

Bsp. 6.01. Zeigen Sie $R = 0$ für die Tangentenfläche $g(u, v) = c(u) + v c_1(u)$ einer Kurve im \mathbb{R}^3 . Hinweis: Verwenden Sie die Vektorfelder $X(u, v) = c_1(u)$ und $Y(u, v) = c_2(u)$, und bestimmen Sie $\nabla_i \nabla_j X$, $\nabla_i \nabla_j Y$.

Bsp. 6.02. Bestimmen Sie die Schnittkrümmungen für die Sphäre $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

Bsp. 6.03. Zeigen Sie: Es gibt keine C^2 -Teilmanigfaltigkeit M des \mathbb{R}^3 , die isometrisch zum flachen Torus ist (vgl. Bsp. 5.06). Bemerkung: Nach dem Einbettungssatz von Nash gibt es eine C^1 -Teilmanigfaltigkeit mit dieser Eigenschaft.

Bsp. 6.04. Sei H^n der hyperbolische Raum aus Bsp. 5.09. Zeigen Sie: Die Schnittkrümmung ist konstant und gleich -1 .

Bsp. 6.05. Sei M eine zweidimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit und c eine geodätische Linie mit $\langle \dot{c}, \dot{c} \rangle = 1$. Sei $E_1 = \dot{c}$ und E_2 ein Parallelfeld orthogonal zu E_1 längs c .

Zeigen Sie: Ist J ein Jacobifeld längs c mit $J(t) = x^1 E_1 + x^2 E_2$, dann gilt $\ddot{x}^1 = 0$, $\ddot{x}^2 + x^2 K \circ c = 0$, wobei K die Gaußkrümmung bedeutet.

Bsp. 6.06. Seien u, v Funktionen mit $u(0) = v(0) = 0$, $u'(0) = v'(0) = 1$, die die Differentialgleichungen $v''(t) + K(t)v(t) = 0$ und $u''(t) + \tilde{K}(t)u(t) = 0$ erfüllen. Seien a, b die ersten Nullstellen von u bzw. v in $(0, \infty)$.

Zeigen Sie: Ist $K \leq \tilde{K}$, so ist $b \geq a$. Hinweis: $0 = \int_0^2 (u(v'' + Kv) - v(u'' + \tilde{K}u)) dt = uv' - vu' + \int (K - \tilde{K})uv dt$.

Bsp. 6.07. Zeigen Sie den Satz von Bonnet: Eine vollständige zweidimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Gaußkrümmung $K \geq 1/r^2$ ist kompakt und hat Durchmesser $\leq \pi r$.

Hinweis: Aus [Bsp. 6.05](#) und [Bsp. 6.06](#) folgt, daß minimale Geodätische höchstens die Länge πr haben können. Verwenden Sie den Satz von Hopf und Rinow.

Bsp. 6.08. Sei $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ zweidimensional und sei die Gaußsche Krümmung $\leq -\alpha^2$. Zeigen Sie: Der Umfang des geodätischen Kreises $\exp_p(r \cos \varphi E_1 + r \sin \varphi E_2)$ ($\varphi \in [0, 2\pi]$) mit E_1, E_2 orthonormal ist $\geq 2\pi \sinh(\alpha r)$.

Hinweis: Verwenden Sie [Bsp. 6.05](#), um den Betrag eines Jacobifeldes abzuschätzen: Aus $u'' + Ku = v'' - (1/\alpha^2)v = 0$ mit $K(t) \leq -1/\alpha^2$, $u(0) = v(0) = 0$, $u'(0) = v'(0) = 1$ folgt $u \geq v$ in \mathbb{R}^+ .

Bsp. 6.09. Zeigen Sie: Das Hyperboloid $M: x^2 + y^2 = z^2 - 1$ hat keine konjugierten Punkte entlang von geodätischen Linien, es gibt aber trotzdem geodätische Linien, die nicht minimal sind.

Bsp. 6.10. Sei $M = S^2$ die euklidische Einheitskugel, und seien $q_0, q_1, \dots, q_n = q_0$ die Ecken eines n -Ecks, dessen Seiten die kürzesten Verbindungen der Punkte q_0q_1, q_1q_2 , u.s.w. sind. Zeigen Sie: der Flächeninhalt des n -Ecks hängt nur von den Winkeln in den Ecken ab.

Lösen Sie dieses Beispiel auch für den Fall $M = H^2$, d.h. für die hyperbolische Ebene.

Bsp. 6.11. Bestimmen Sie für die Sphäre, die hyperbolische Ebene, und die euklidische Ebene den Umfang und die Fläche eines geodätischen Entfernungskreises, und verwenden Sie den Satz von Gauß-Bonnet, um seine geodätische Krümmung zu bestimmen.

Für S^2 muß sich das gleiche Resultat wie in [Bsp. 5.03](#) ergeben.

Bsp. 6.12. Zeigen Sie: (i) Es gibt keine Riemannsche Metrik auf dem Torus mit $K > 0$ oder $K < 0$, und es gibt keine Riemannsche Metrik auf der Sphäre mit $K = 0$. (ii) Es gibt keine reguläre differenzierbare Abbildung vom Torus in die 2-Sphäre, und umgekehrt ebenfalls nicht.

Hinweis: Verwenden Sie den Satz von Gauß-Bonnet. Ist $M \rightarrow N$ regulär und besitzt N eine Riemannsche Metrik $\langle \cdot, \cdot \rangle'$, so ist $\langle v, w \rangle := \langle df(v), df(w) \rangle'$ eine Riemannsche Metrik in M .

Bsp. 6.13. Sei in \mathbb{R}^2 eine Riemannsche Metrik durch $g_{11} = 1$, $g_{12} = 0$, $g_{22} = g^2$ mit $g(x, y) > 0$ gegeben. Zeigen Sie, daß die Gaußsche Krümmung K die Relation $g_{,xx} + Kg = 0$ erfüllt. Zeigen Sie umgekehrt, daß jede differenzierbare Funktion $K(x, y)$ lokal die Krümmung einer gewissen Metrik ist, indem Sie die obige Differentialgleichung für $g(x_0, y) = 1$, $g_{,x}(x_0, y) = 0$ lösen und zeigen, daß lokal $g > 0$ gilt.

B.7 Anwendungen in der Physik

Bsp. 7.01. Betrachten Sie das *ebene Doppelpendel*: An einem Pendel der Länge l_1 ist ein zweites Pendel befestigt. (Schwerpunkt im Abstand s_i vom Aufhängepunkt, Masse m_i , Trägheitsmoment I_i). Die aktuelle Zustand des Systems ist durch die Winkel α_i des i -ten Pendels zur Vertikalen festgelegt. Die kinetische Energie ist gegeben durch $\sum m_i \|\dot{c}_i\|^2 + \sum I_i \dot{\alpha}_i^2$, wobei $c_i(t)$ die Bahnkurve des Schwerpunktes darstellt. Die potentielle Energie ist gegeben durch $\sum m_i c_{i,2}(t)$, wobei $c_i = (c_{i,1}, c_{i,2})$.

Zeigen Sie: Der Konfigurationsraum des Pendels ist ein Torus (vgl. [Bsp. 4.05](#)). Bestimmen Sie das kinematische Linienelement im Konfigurationsraum sowie die Metrik nach Jacobi, und stellen Sie die Bewegungsgleichungen auf.

Bsp. 7.02. Betrachten Sie das Doppelpendel aus [Bsp. 7.01](#) mit seiner Konfigurationsmannigfaltigkeit M , der potentiellen Energie U und der kinetischen Energie T . Sei

$$U_{\max} = \max_{p \in M}(U(p)).$$

Zeigen Sie: Sind $p = (\alpha_1, \alpha_2)$ und $q = (\beta_1, \beta_2)$ zwei Zustände, d.h. $p, q \in M$, und ist $h > U_{\max}$, so gibt es eine Bewegung (Bahn) des Doppelpendels der Energie h , die vom Zustand p in den Zustand q führt.

Bsp. 7.03. Wir verwenden im Euklidischen Raum \mathbb{R}^3 Kugelkoordinaten (r, φ, θ) (d.h. $x = r \cos \theta \sin \varphi, y = r \sin \theta \sin \varphi, z = r \cos \varphi$). Sei $M = \mathbb{R}^4 \setminus 0$. Die vier Koordinaten werden als r, φ, θ und t (Zeit) interpretiert. Die Riemannsche Metrik $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ist wie folgt gegeben: $v \in T_p M$ und $p = (r, \varphi, \theta, t)$, so sei

$$\langle v, v \rangle = -\frac{r}{r-R} v_1^2 - r^2 (v_2^2 + \sin^2 \varphi v_3^2) + \frac{r-R}{r} v_4^2.$$

Das ist die sogenannte *Schwarzschild*-Metrik. Die Geodätischen bezüglich dieser Metrik beschreiben die Lebenslinien von Teilchen im Gravitationsfeld eines sphärischen Körpers der Masse M . Einheiten sind so gewählt, daß die Lichtgeschwindigkeit gleich 1 ist. $R = 2GM$, G ist die Gravitationskonstante.

Zeigen Sie, daß die Koeffizienten des Riemannschen Zusammenhangs die folgenden Werte besitzen (die restlichen sind gleich Null)

$$\begin{array}{ll} \Gamma_{11}^1 = -(R/2)(r^2 - 2rR)^{-1} & \Gamma_{22}^1 = R - r \\ \Gamma_{33}^1 = (R - r) \sin^2 \varphi & \Gamma_{44}^1 = (1/2)(1 - R/r)(R/r^2) \\ \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{13}^3 = 1/r & \Gamma_{33}^2 = -\sin \varphi \cos \varphi \\ \Gamma_{23}^3 = \cot \varphi & \Gamma_{14}^4 = (R/2)(r^2 - Rr)^{-1} \end{array}$$

Bsp. 7.04. Bestimmen Sie zu [Bsp. 7.03](#) eine nach der Bogenlänge parametrisierte Lebenslinie eines Punktes der Form $p(\tau) = (r(\tau), 0, 0, t(\tau))$. Der Bogenlängenparameter τ der Lebenslinie ist die *Eigenzeit* des Teilchens. Was passiert, wenn das Teilchen sich dem Radius R nähert?

Hinweis: Setzen Sie $R = 1$ und beachten Sie $\langle \dot{p}, \dot{p} \rangle = 1$, und daß aus der vierten Komponente der Gleichung $D\dot{p}/dt = 0$ die Relation $(1 - 1/r)\dot{t} = \text{const.}$ folgt.

Bsp. 7.05. Zeigen Sie, daß es in dem Pseudo-Riemannschen Raum M aus [Bsp. 7.03](#) eine Geodätische $p(t)$ der Form $p(t) = (r_0, t, 0, k \cdot t)$ mit $\langle \dot{p}, \dot{p} \rangle = 0$ gibt. (das ist die Lebenslinie eines kreisförmig gebogenen Lichtstrahls).

Bsp. 7.06. Zeigen Sie, daß für den Riemannschen Raum M aus [Bsp. 7.03](#) eine Geodätische, die vom Punkt $(r, \pi/2, \theta, t)$ ausgeht und dort einen Geschwindigkeitsvektor $(v_1, 0, v_2, v_4)$ besitzt, in der Ebene $\varphi = \pi/2$ bleibt. Berechnen und zeichnen Sie numerisch die räumlichen Komponenten p^s von Lebenslinien von Lichtstrahlen (Geodätische $p(t)$ mit $\langle \dot{p}, \dot{p} \rangle = 0$) und dasselbe für langsame Teilchen.

Versuchen Sie, dabei folgende Beobachtungen zu machen: Ein Lichtstrahl wird beim Vorbeifliegen am Ursprung von der 'geradlinigen Bahn' abgelenkt. Langsame Teilchen scheinen sich annähernd auf Ellipsenbahnen um den Ursprung zu bewegen, deren Hauptachse sich dreht (Periheldrehung¹⁾).

¹⁾Die Erklärung eines bisher nicht erklärbaren Teils der Periheldrehung des Merkur war einer der ersten experimentellen Nachweise der allgemeinen Relativitätstheorie.

Literatur

Die folgenden Werke sind einerseits ‘Lehrbücher’, andererseits Werke, die sich ausführlich den Grundlagen der Theorie widmen, und weiters auch Bücher, die nur zum Teil etwas mit dem Inhalt dieser Vorlesung zu tun haben.

Die mit einem Stern (★) gekennzeichneten Werke sind diejenigen, an deren Notation und Inhalte sich diese Vorlesung hauptsächlich anlehnt. Das Symbol “×” bezeichnet ein Werk, das sich kaum als einführendes Lehrbuch für Studierende eignet. Das Zeichen “†” bedeutet, daß das Werk von historischem Interesse ist, und “◁” heißt, daß das Werk die Visualisierung oder konstruktive Behandlung von differentialgeometrischen Inhalten zum Thema hat.

- H. Brauner: *Differentialgeometrie* Vieweg, Braunschweig 1981.
- Th. Bröcker, K. Jänich: *Einführung in die Differentialtopologie*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York 1973.
- † — G. Darboux: *Théorie des Surfaces*, Vol. I–IV. Gauthier-Villars, Paris 1887–1896.
- ★ — M. P. do Carmo: *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey 1976;
- ★ — M. P. do Carmo: *Riemannian Geometry*. Birkhäuser Verlag, Boston Basel Berlin 1992.
- L. P. Eisenhart: *A Treatise on the Differential Geometry of Curves and Surfaces*
- † — C. F. Gauß: *Disquisitiones circa superficies curvas*. Göttingen, 1827.
- ◁ — A. Gray, *Differentialgeometrie*. Spektrum Akad. Verl. Heidelberg 1994.
- × — Sigurdur Helgason: *Differential Geometry and Symmetric Spaces*. Academic Press, New York 1963.
- ◁ — D. Hilbert, S. Cohn-Vossen: *Anschauliche Geometrie*. Springer Verlag, Berlin 1932, 1996.
- × — S. Kobayashi, K. Nomizu: *Foundations of Differential Geometry*, Vol. I, II. Wiley, New York London 1963, 1969.
- W. Kühnel: *Differentialgeometrie, Kurven — Flächen — Mannigfaltigkeiten*, Vieweg, 1999; *Differential Geometry, Curves — Surfaces — Manifolds*, AMS Student Mathematical Library Series
- ◁ — E. Kruppa : *Analytische und konstruktive Differentialgeometrie*. Springer Wien, 1957.
- S. Lang: *Fundamentals of Differential Geometry*. Graduate Texts in Mathematics 191, Springer Verlag, New York 1999.
- D. Laugwitz: *Differentialgeometrie*, 2. Auflage, Teubner, Stuttgart 1968.
- P. Michor: *Topics in Differential Geometry*. Lecture notes, 1991ff. <http://www.mat.univie.ac.at/~michor/dgbook.ps>
- ★ — J. Milnor: *Morse Theory*. Annals of Mathematics Studies Vol. 51. Princeton Univ. Press 1963.
- ◁ — J. Oprea, *The mathematics of soap films: explorations with Maple*, (Student Mathematical Library. 10). American Mathematical Society, Providence, RI, 2000.
- M. Spivak, *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, Volumes I–V. Publish or Perish, Berkeley, Calif. 1979.