Vorlesung

“p-adische Differentialgleichungen”

Münster, 2004

Inhaltsverzeichnis

Referenz:

Christol G., Robba P.: Équations différentielles p-adiques.
Hermann: Paris 1994

Kap. I   p-adische Analysis

§1 Nicht-archimedische Körper

Sei K ein Körper.

Definition: *Ein nicht-archimedischer Absolutbetrag auf K ist eine Funktion $|\ | : K \longrightarrow \mathbb{R}$ mit*

(i) $|a| \geq 0$,

(ii) $|a| = 0 \Longleftrightarrow a = 0$,

(iii) $|ab| = |a| \cdot |b|$,

(iv) $|a + b| \leq \max(|a|, |b|)$ *("strikte Dreiecksungleichung").*

Wegen (iii) ist $|\ | : K^\times \longrightarrow \mathbb{R}_+^\times$ ein Gruppenhomomorphismus; insbesondere $|\pm 1| = 1$.
Wir wollen stets voraussetzen, daß $|\ |$ nicht-trivial ist, d. h.

(v) $|a_0| \neq 0, 1$ für ein $a_0 \in K$.

Beachte: 1) $|n \cdot 1| \leq 1$ für alle $n \in \mathbb{Z}$.
2) Für $|a| \neq |b|$ gilt $|a + b| = \max(|a|, |b|)$; denn:
Etwa $|a| < |b|$, dann $|a| < |b| = |b + a - a| \leq \max(|b + a|, |a|)$, also $|a| < |b + a|$ und damit $|b| \leq |a + b| \leq \max(|a|, |b|) = |b|$.

Die Menge K ist bzgl. $d(a, b) := |b - a|$ ein metrischer Raum. Die ("abgeschlossenen") *Bälle*

$$B_\varepsilon(a) := \{b \in K : |b - a| \leq \varepsilon\} \text{ für} \varepsilon > 0$$

bilden ein fundamentales Umgebungssystem für $a \in K$, ebenso die "offenen" Bälle

$$B_\varepsilon^-(a) := \{b \in K \cdot |b - a| < \varepsilon\} \ .$$

Im Folgenden meint Bälle immer abgeschlossene Bälle!

Beachte: 1) $|\ | : K \longrightarrow \mathbb{R}$ ist stetig; denn:
Für $b \in B_\varepsilon^-(a)$ ist $|\ |b| - |a|\ |_\infty = |\ |(b + a) - a| - |a|\ |_\infty \leq |\ \max(|b - a|, |a|) - |a|\ |_\infty < \varepsilon$.
2) $+, \cdot : K \times K \longrightarrow K$ sind stetig; denn:
Für $b_i \in B_\varepsilon^-(a_i)$ ist $b_0 + b_1 \in B_\varepsilon^-(a_0 + a_1)$ und $b_0 b_1 \in B^-_{\varepsilon \cdot \max(\varepsilon|a_0|, |a_1|)}(a_0 a_1)$, da $b_0 b_1 - a_0 a_1 = (b_0 - a_0)(b_1 - a_1) + (b_0 - a_0)a_1 + a_0(b_1 - a_1)$.

Lemma 1.1: *i. $B_\varepsilon(a)$ ist offen und abgeschlossen;*
ii. $B_\varepsilon(a) \cap B_\varepsilon(a') \neq \phi \Longrightarrow B_\varepsilon(a) = B_\varepsilon(a')$ ("jeder Punkt ist Mittelpunkt");

iii. für beliebige Bälle B und B' mit $B \cap B' \neq \phi$ gilt $B \subseteq B'$ oder $B' \subseteq B$;
iv. K ist total unzusammenhängend.

Beweis: ii. Definiere eine Äquivalenzrelation auf K durch $a \sim b$, falls $|a - b| \leq \varepsilon$. Dann sind die $B_\varepsilon(a)$ die zugehörigen Äquivalenzklassen.
i. Offensichtlich ist $B_\varepsilon^-(a)$ offen und $B_\varepsilon(a)$ abgeschlossen. Für $b \in B_\varepsilon(a)$ gilt wegen ii. aber auch $B_\varepsilon^-(b) \subseteq B_\varepsilon(b) = B_\varepsilon(a)$; also ist $B_\varepsilon(a)$ offen.
iii. Sei $B = B_\varepsilon(a), B' = B_{\varepsilon'}(a')$ und $b \in B \cap B'$. Wegen ii. gilt $B = B_\varepsilon(b)$ und $B' = B_{\varepsilon'}(b)$.
iv. Sei $M \subseteq K$ zusammenhängend mit $a \in M$. Wegen i. ist $M \cap B_\varepsilon(a)$ offen und abgeschlossen in M. Folglich gilt $M \subseteq B_\varepsilon(a)$ und damit $M = \{a\}$.

Beachte: Lemma 1.1.i - iii gilt analog für offene Bälle.

Warnung: Der “Radius” ε in $B_\varepsilon(a)$ ist nicht eindeutig bestimmt.

Beachte: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist Cauchyfolge in $K \Longleftrightarrow |a_{n+1} - a_n| \longrightarrow 0$.

Definition: *Ein nicht-archimedischer Körper K ist ein Körper versehen mit einem nicht-archimedischen Absolutbetrag, so daß der zugehörige metrische Raum vollständig ist (d. h., jede Cauchyfolge konvergiert).*

Ab jetzt sei $(K, |\ |)$ ein fester nicht-archimedischer Körper.

Lemma 1.2: *i. $o := \{a \in K : |a| \leq 1\}$ ist ein Integritätsbereich mit Quotientenkörper K;*
ii. $\mathfrak{m} := \{a \in K : |a| < 1\}$ ist das einzige maximale Ideal in o;
iii. $o^\times = o \backslash \mathfrak{m}$;
iv. jedes endlich erzeugte Ideal in o ist ein Hauptideal.

Der Ring o heißt der Bewertungsring oder Ring der ganzen Zahlen von K, und $o/\mathfrak{m}$ heißt der Restklassenkörper von K.

Übungsaufgabe: Für $\varepsilon \leq 1$ ist $B_\varepsilon(a)$ die Nebenklasse eines geeigneten Ideals in o zum Nebenklassenvertreter a.

Beispiele: A) Sei p eine fixierte Primzahl. Dann ist

$$|a|_p := p^{-r}, \text{ falls } a = p^r \cdot \frac{m}{n} \text{ mit } m, n \in \mathbb{Z} \text{ und } p \nmid mn$$

ein nicht-archimedischer Absolutbetrag auf $\mathbb{Q}$. Die zugehörige Komplettierung $\mathbb{Q}_p$ ist ein nicht-archimedischer Körper – der *Körper der p-adischen Zahlen*. Der Bewertungsring von $\mathbb{Q}_p$ wird mit $\mathbb{Z}_p$ bezeichnet; sein maximales Ideal ist $p\mathbb{Z}_p$ mit $\mathbb{Z}_p/p\mathbb{Z}_p = \mathbb{F}_p$. Man beachte, daß es wegen $|\mathbb{Q}_p|_p = p^{\mathbb{Z}} \cup \{0\}$ möglich ist, daß $B_\varepsilon(a) = B_\delta(a)$ mit $\varepsilon \neq \delta$.

Faktum: (ohne Beweis) $\mathbb{Z}_p$ ist kompakt und $\mathbb{Q}_p$ damit lokalkompakt.
B) Die **Gaußnorm** eines Polynoms $Q(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i \in K[x]$ ist definiert durch

$$|Q| := \max_i(|a_i|) \ .$$

Auf dem Körper $K(x)$ der rationalen Funktionen ist dann

$$\left|\frac{P}{Q}\right| := \frac{|P|}{|Q|}$$

ein nicht-archimedischer Absolutbetrag.
C) Der Körper $\mathbb{C}((T))$ der formalen Laurentreihen über $\mathbb{C}$ ist nicht-archimedisch bzgl. des Absolutbetrages

$$|\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n T^n| := e^{-\min\{n: a_n \neq 0\}} \ .$$

Satz 1.3: *(Lemma von Hensel)*
Seien $P, q, r \in o[x]$ Polynome mit:

(a) $P \equiv qr \bmod \mathfrak{m}$,

(b) $q \bmod \mathfrak{m}$ *und* $r \bmod \mathfrak{m}$ *sind teilerfremd.*

Dann existieren Polynome $Q, R \in o[x]$ mit:

(i) $P = QR$,

(ii) $Q \equiv q \bmod \mathfrak{m}$, $R \equiv r \bmod \mathfrak{m}$,

(iii) $\deg(Q) = \deg(q \bmod \mathfrak{m})$.

Beweis: Setze $d := \deg(P)$. Wir können annehmen, daß $m := \deg(q) = \deg(q \bmod \mathfrak{m})$ und $\deg(r) = \deg(r \bmod \mathfrak{m}) \leq d - m$. Wegen (b) gibt es Polynome $u, v \in o[x]$ mit

(c) $uq + vr \equiv 1 \bmod \mathfrak{m}$.

Nach Lemma 1.2.iv erzeugen die Koeffizienten der beiden Polynome $P - qr$ und $uq + vr - 1$ ein Hauptideal πo. Für $\pi = 0$ ist insbesondere $P = qr$, und wir sind fertig. Sei also $\pi \neq 0$. Wegen (a) und (c) ist $|\pi| < 1$. Wir setzen an

$$Q := q + q_1\pi + q_2\pi^2 + \ldots,$$

$$R := r + r_1\pi + r_2\pi^2 + \ldots$$

mit Polynomen $q_i \in o[x]$ vom Grad $< m$ und $r_i \in o[x]$ vom Grad $\leq d - m$. Jedenfalls sind Q, R wohldefinierte Polynome (vgl. §3), welche (ii) und (iii) erfüllen. Iterativ bestimmen wir

$$Q_n := q + \ldots + q_n\pi^n \text{ und } R_n := r + \ldots + r_n\pi^n$$

so, daß

(d) $P \equiv Q_n R_n \bmod \pi^{n+1}$

gilt. Im Limes folgt dann $P = QR$. Gilt (d) für n, so ist diese Bedingung für $n+1$ wegen

$$\begin{aligned} P - Q_{n+1}R_{n+1} &= P - (Q_n + q_{n+1}\pi^{n+1})(R_n + r_{n+1}\pi^{n+1}) \\ &= \left[\frac{P - Q_n R_n}{\pi^{n+1}} - (Q_n r_{n+1} + R_n q_{n+1} + q_{n+1} r_{n+1} \pi^{n+1})\right] \pi^{n+1} \end{aligned}$$

äquivalent zu

$$P_n := \frac{P - Q_n R_n}{\pi^{n+1}} \equiv Q_n r_{n+1} + R_n q_{n+1} \equiv q r_{n+1} + r q_{n+1} \bmod \pi \ .$$

Aus (c) folgt, daß

$$quP_n + rvP_n \equiv P_n \bmod \pi \ .$$

Per Division mit Rest in $K[x]$ schreibe

$$vP_n = fq + q_{n+1} \text{ mit } \deg(q_{n+1}) < \deg(q) = m \ .$$

Da der höchste Koeffizient von q eine Einheit in o ist, gilt $f, q_{n+1} \in o[x]$. Wir haben nun

$$q(uP_n + rf) + rq_{n+1} \equiv \ P_n \bmod \pi \ .$$

Wegen $\deg(rq_{n+1}) < (d-m) + m = d$, $\deg(P_n) \leq d$ und $\deg(q \bmod \pi) = m$ muß

$$\deg(uP_n + rf \bmod \pi) \leq d - m$$

gelten. Wir können deswegen

$$r_{n+1} := uP_n + rf \text{ ohne Terme mit durch } \pi \text{ teilbaren Koeffizienten}$$

setzen.

Corollar 1.4: *Hat das Polynom $P(x) \in o[x]$ modulo $\mathfrak{m}$ eine einfache Nullstelle $\alpha \in o/\mathfrak{m}$, so hat es auch eine einfache Nullstelle $a \in K$ mit $a \bmod \mathfrak{m} = \alpha$.*
Beweis: Wende das Lemma von Hensel auf die Zerlegung

$$P(x) \bmod \mathfrak{m} = (x - \alpha)\rho(x)$$

an.

Sei V ein K-Vektorraum.

Definition: *Eine (nicht-archimedische) Norm auf V ist eine Funktion $\| \ \| : V \longrightarrow \mathbb{R}$ mit*

(i) $\|a \cdot v\| = |a| \cdot \|v\|$,

(ii) $\|v+w\| \leq \max(\|v\|, \|w\|)$,

(iii) $\|v\| = 0 \implies v = 0$.

Der Vektorraum V heißt normiert, wenn er mit einer Norm versehen ist.

Beachte: 1) $\|0\| = |0| \cdot \|0\| = 0$.
2) $\|v\| = \max(\|v\|, \|-v\|) \geq \|v - v\| = \|0\| = 0$.
3) $\|v+w\| = \max(\|v\|, \|w\|)$, falls $\|v\| \neq \|w\|$.
4) $d(v,w) := \|v - w\|$ ist eine Metrik auf V.

Übungsaufgabe: Addition und Skalarmultiplikation eines normierten Vektorraumes sind stetig.

Lemma 1.5: *Seien $(V_1, \| \;\|_1)$ und $(V_1, \| \;\|_2)$ normierte K-Vektorräume; eine lineare Abbildung $f : V_1 \longrightarrow V_2$ ist stetig genau dann, wenn eine Konstante $c > 0$ existiert mit*

$$\|f(v)\|_2 \leq c \cdot \|v\|_1 \quad \textit{für alle } v \in V_1 \ .$$

Beweis: Daß die obige Abschätzung die Stetigkeit von f impliziert, folgt sofort aus der Betrachtung einer konvergenten Folge in V_1. Sei also umgekehrt f als stetig angenommen. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$ mit

$$f(\{v \in V_1 : \|v\|_1 \leq \varepsilon\}) \subseteq \{w \in V_2 : \|w\|_2 \leq 1\} \ .$$

Da $| \ |$ nicht-trivial ist, finden wir ein $a \neq 0$ in K mit $|a| \leq \varepsilon$. Also folgt aus $\|v\|_1 \leq |a|$, daß $\|f(v)\|_2 \leq 1$. Zu einem beliebigen $0 \neq v \in V_1$ wählen wir nun $m \in \mathbb{Z}$ mit $|a|^{m+2} < \|v\|_1 \leq |a|^{m+1}$. Mit $c := |a|^{-2}$ erhalten wir

$$\|f(v)\|_2 = |a|^m \cdot \|f(a^{-m}v)\|_2 \leq |a|^m < c \cdot \|v\|_1 \ .$$

Definition: *Der normierte K-Vektorraum $(V, \| \ \|)$ heißt K-Banachraum, wenn V bzgl. der Metrik $d(v,w) := \|v - w\|$ vollständig ist.*

Beispiele: A) K^n mit $\|(a_1, \ldots, a_n)\| := \max\limits_i |a_i|$ ist ein K-Banachraum.
B) Sei I eine beliebige Indexmenge. Eine Familie $(a_i)_{i \in I}$ in K heißt beschränkt, wenn ein $c > 0$ existiert mit $|a_i| \leq c$ für alle $i \in I$. Die Menge

$$\ell^\infty(I) := \text{ alle beschränkten Familien } (a_i)_{i \in I} \text{ in } K$$

mit komponentenweiser Addition und Skalarmultiplikation und der Norm

$$\|(a_i)_i\|_\infty := \sup_{i \in I} |a_i|$$

ist ein K-Banachraum.
C) Die Teilmenge $c_0(I)$ aller Familien $(a_i)_{i \in I} \in \ell^\infty(I)$ mit der Eigenschaft, daß zu jedem $\varepsilon > 0$ nur endlich viele $i \in I$ mit $|a_i| \geq \varepsilon$ existieren, ist ein abgeschlossener

Untervektorraum von $\ell^\infty(I)$ und somit selbst ein K-Banachraum. Für $(a_i)_i \in c_0(I)$ gilt

$$\|(a_i)_i\|_\infty = \max_{i\in I} |a_i| \ .$$

Zum Beispiel ist $c_0(\mathbb{N})$ der Raum aller Nullfolgen in K.

Lemma 1.6: *Sei V endlich dimensional. Zu je zwei Normen $\| \ \|_1$ und $\| \ \|_2$ auf V existiert ein $c > 0$, so daß*

$$\|v\|_2 \leq c \cdot \|v\|_1 \ \textit{für alle } v \in V \ .$$

Insbesondere definieren $\| \ \|_1$ und $\| \ \|_2$ die gleiche Topologie auf V.
Beweis: Wir fixieren eine Basis $e_1, \ldots, e_d$ von V und betrachten die Norm

$$\| \sum_i a_i e_i \| := \max_i |a_i| \ .$$

Es genügt, $\| \ \|_1$ und $\| \ \|$ zu vergleichen. Ersichtlich gilt

$$(*) \qquad \|v\|_1 \leq \|v\| \cdot \max_i \|e_i\|_1 \text{ für alle } v \in V \ .$$

Unter der Annahme, daß kein $c > 0$ mit $\|v\| \leq c \cdot \|v\|_1$ für alle $v \in V$ existiert, finden wir eine Folge $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in V mit

$$\|v_n\| = 1 \text{ und } \lim_{n\longrightarrow\infty} \|v_n\|_1 = 0 \ .$$

Wir wählen $1 \leq m \leq d$ minimal, so daß eine solche Folge im Unterraum $Ke_1 + \ldots + Ke_m$ existiert, und schreiben

$$v_n = a_{n,1}e_1 + \ldots + a_{n,m}e_m \ .$$

Wegen der Minimalität von m ist $(a_{n,m})_n$ keine Nullfolge in K. Nach Übergang zu einer geeigneten Teilfolge gilt deswegen

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \|a_{n,m}^{-1} v_n\|_1 = 0 \ .$$

Die Folge $(a_{n+1,m}^{-1} v_{n+1} - a_{n,m}^{-1} v_n)_n$ liegt im Unterraum $Ke_1 + \ldots + Ke_{m-1}$. Wegen der Minimalität von m muß dann

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \|a_{n+1,m}^{-1} v_{n+1} - a_{n,m}^{-1} v_n\| = 0$$

gelten. Also konvergiert $(a_{n,m}^{-1} v_n)_n$ bzgl. $\| \ \|$ gegen ein $v \in V$. Alle $a_{n,m}^{-1} v_n$ und folglich auch v liegen in $Ke_1 + \ldots + Ke_{m-1} + e_m$. Wegen $(*)$ ist aber

$$\|v\|_1 = \lim_{n\longrightarrow\infty} \|a_{n,m}^{-1} v_n\|_1 = 0$$

und damit $v = 0$ – ein Widerspruch. Die Zusatzbehauptung ergibt sich mit Hilfe von Lemma 1.5 angewendet auf die Abbildung id_V.

Satz 1.7: *Sei $\overline{K}$ ein algebraischer Abschluß von K. Auf $\overline{K}$ existiert genau ein nicht-archimedischer Absolutbetrag, welcher den von K fortsetzt; er ist gegeben durch*

$$|\alpha| = |\mathrm{Norm}_{K(\alpha)/K}(\alpha)|^{1/[K(\alpha):K]} .$$

Beweis: Eindeutigkeit: Sei $L \subseteq \overline{K}$ eine normale endliche Erweiterung von K, welche α enthält. Für jedes $\sigma \in \mathrm{Aut}(L/K)$ sind $|.|$ und $|\sigma(.)|$ zwei Normen auf dem endlich dimensionalen K-Vektorraum L. Wegen Lemma 1.6 finden wir also $c, d > 0$ mit

$$c|\beta| \le |\sigma(\beta)| \le d|\beta| \text{ für alle } \beta \in L .$$

Angewandt auf $\beta = \alpha^n$ ergibt sich

$$c^{1/n}|\alpha| \le |\sigma(\alpha)| \le d^{1/n}|\alpha|$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ und damit

$$|\alpha| = |\sigma(\alpha)| .$$

Folglich ist

$$|\alpha|^{[L:K]} = |\mathrm{Norm}_{L/K}(\alpha)| .$$

Existenz: Nur die Dreiecksungleichung ist nicht offensichtlich. Seien $\alpha, \beta \in \overline{K}$ und setze $L := K(\alpha, \beta)$. Wir können $|\mathrm{Norm}_{L/K}(\alpha)| \le |\mathrm{Norm}_{L/K}(\beta)|$ und $\beta \ne 0$ annehmen und müssen dann

$$|\mathrm{Norm}_{L/K}(\alpha + \beta)| \le |\mathrm{Norm}_{L/K}(\beta)|$$

zeigen. Wegen $\mathrm{Norm}_{L/K}(\alpha+\beta) = \mathrm{Norm}_{L/K}(\beta)\cdot \mathrm{Norm}_{L/K}\left(1 + \frac{\alpha}{\beta}\right)$ ist also $|\mathrm{Norm}_{L/K}\left(1 + \frac{\alpha}{\beta}\right)| \le 1$ zu beweisen. Hierfür genügt es, $\frac{\alpha}{\beta}$ und damit $1 + \frac{\alpha}{\beta}$ als ganz über o zu erweisen. Sei $Q(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i$ das Minimalpolynom von $\frac{\alpha}{\beta}$ über o. Nach Annahme gilt $|\mathrm{Norm}_{L/K}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)| = |a_0^{[L:K(\frac{\alpha}{\beta})]}| \le 1$ und damit $|a_0| \le 1$. Wir haben zu zeigen, daß alle Koeffizienten in o liegen. Andernfalls sei $1 \le j \le m$ der kleinste Index mit $|a_j| = \max_i |a_i| > 1$. Dann ist $P(x) := a_j^{-1}Q(x) \in o[x]$ mit

$$P(x) \bmod \mathfrak{m} = x^j \rho(x) \text{ und } \rho(0) \ne 0 .$$

Nach Corollar 1.4 muß x also $P(x)$ teilen – ein Widerspruch zur Irreduzibilität von Q.

Satz 1.8: *Die Komplettierung $\widehat{\overline{K}}$ von $\overline{K}$ ist wiederum algebraisch abgeschlossen.*
Beweis: Seien Ω ein algebraischer Abschluß von $\widehat{\overline{K}}$, $\alpha \in \Omega$, $P(x)$ das Minimalpolynom von α über $\widehat{\overline{K}}$ und $d := \deg(P)$. Die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} D : \widehat{\overline{K}}[x]^{\le d} := \{Q \in \widehat{\overline{K}}[x] : \deg(Q) \le d\} & \longrightarrow & \Omega \\ Q & \longmapsto & Q(\alpha) \end{array}$$

ist stetig bzgl. der Gaußnorm auf $\widehat{\overline{K}}[x]^{\leq d}$. Da $\overline{K}$ dicht in $\widehat{\overline{K}}$ ist, ist auch $\overline{K}[x]^{\leq d}$ dicht in $\widehat{\overline{K}}[x]^{\leq d}$ bzgl. der Gaußnorm. Wegen $D(P) = 0$ finden wir also zu jedem $\varepsilon > 0$ ein Polynom $Q(x) \in \overline{K}[x]^{\leq d}$ mit $\deg(Q) = d$ und $|D(Q)| \leq \varepsilon^d$. Sei $Q(x) = \prod\limits_j (x - \beta_j)$ mit $\beta_j \in \overline{K}$. Dann ist

$$\prod_j |\alpha - \beta_j| \leq \varepsilon^d \quad ,$$

und es muß mindestens ein Index j_0 mit $|\alpha - \beta_{j_0}| \leq \varepsilon$ existieren. Folglich liegt α im Abschluß von $\overline{K}$ in Ω, d. h. in $\widehat{\overline{K}}$.

Lemma 1.9: $|\overline{K}| = |\widehat{\overline{K}}|$ *ist dicht in* $\mathbb{R}_{\geq 0}$.
Beweis: Wir nehmen an, $|\overline{K}^\times|$ sei nicht dicht in $\mathbb{R}_+^\times$. Dann ist $\log|\overline{K}^\times|$ nicht dicht in $\mathbb{R}$. Setze $\rho := \sup(\log|\overline{K}^\times| \cap (-\infty, 0))$. Wir behaupten zunächst, daß ρ tatsächlich das Maximum dieser Menge ist. Andernfalls existiert eine Folge $\rho_1 < \rho_2 < \ldots$ in $\log|\overline{K}^\times|$, welche gegen ρ konvergiert. Dann ist $\rho_i - \rho_{i+1}$ eine Folge in $\log|\overline{K}^\times| \cap (-\infty, 0)$, welche gegen 0 konvergiert. Also muß $\rho = 0$ gelten, und wir finden zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\sigma \in \log|\overline{K}^\times|$ mit $-\varepsilon < \sigma < 0$. Für ein beliebiges $\tau \in \mathbb{R}$ können wir nun ein $m \in \mathbb{Z}$ wählen mit $m\sigma \leq \tau < (m-1)\sigma$ und somit $0 \leq \tau - m\sigma < -\sigma < \varepsilon$. Folglich wäre $\log|\overline{K}^\times|$ dicht in $\mathbb{R}$, was ein Widerspruch ist. Dies beweist die Maximumseigenschaft von ρ. Das bedeutet, daß das Intervall $(e^\rho, 1)$ keine Elemente von $|\overline{K}|$ enthält. Andererseits existiert aber ein $a_0 \in K$ mit $0 < |a_0| < 1$. Für großes $n \in \mathbb{N}$ ergibt sich daraus der Widerspruch $|a_0|^{\frac{1}{n}} \in (e^\rho, 1) \cap |\overline{K}|$.

§2 p-adische Körper

In diesem Abschnitt sei der nicht-archimedische Körper $(K, |\ |)$ *p-adisch*, d. h. $K \supseteq \mathbb{Q}_p$ mit $|\ |_{|\mathbb{Q}_p} = |\ |_p$.

Lemma 2.1: *Seien $a, b \in K$ mit $|a|, |b| \leq 1$. Dann gilt:*

(i) Falls $|a-b| < 1$, so ist $|a^p - b^p| \leq \max(|a-b|^p, |p|\cdot|a-b|)$ und $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty}(a^{p^n} - b^{p^n}) = 0$;

(ii) falls $|a-b| \leq |p|^{1/(p-1)}$, so ist $|a^n - b^n| \leq |n| \cdot |a-b|$ für jedes $n \in \mathbb{N}$.

Beweis: i. Die Ungleichung folgt wegen $|\binom{p}{i}| = |p|$ für $1 \leq i < p$ aus der Dreiecksungleichung angewandt auf

$$a^p - b^p = \sum_{i=1}^{p} \binom{p}{i} (a-b)^i b^{p-i} \ .$$

Setzen wir $\lambda := \max(|a-b|^{p-1}, |p|) < 1$, so folgt dann $|a^p - b^p| \leq \lambda|a-b|$ und per Induktion

$$|a^{p^n} - b^{p^n}| \leq \lambda^n |a-b| \ .$$

ii. Das beweisen wir per Induktion nach n, wobei der Induktionsanfang $n = 1$ trivial ist. Ist n nicht durch p teilbar, so ist $|n| = 1$ und somit

$$|a^n - b^n| = |a - b| \cdot |a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + b^{n-1}| \leq |a - b| = |n| \cdot |a - b| \ .$$

Andernfalls ist $n = pm$ und nach Induktionsvoraussetzung

$$|a^m - b^m| \leq |m| \cdot |a - b| \leq |p|^{1/(p-1)} < 1 \ .$$

Unter Benutzung der Aussage i. erhalten wir

$$|a^n - b^n| \leq \max(|a^m - b^m|^p, |p| \cdot |a^m - b^m|) \leq |p| \cdot |a^m - b^m| \leq |n| \cdot |a - b| \ .$$

Lemma 2.2: *Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt:*

(i) $|p|^{(n-1)/(p-1)} \leq |n!| \leq n \cdot |p|^{-1+n/(p-1)}$,

(ii) $|p|^{(n-1)/(p-1)} = |n!| \Longleftrightarrow n = p^k$ *für ein* $k \geq 0$.

Beweis: Es gilt

$$|n!| = |p|^{\sum\limits_{h=1}^{\infty} \left[\frac{n}{p^h}\right]} \ .$$

Für $n = p^k$ ist $\sum\limits_{h=1}^{\infty} \left[\frac{n}{p^h}\right] = \sum\limits_{i=0}^{k-1} p^i = \frac{n-1}{p-1}$, und es ergibt sich die in ii. behauptete Gleichheit. Für allgemeines n gilt jedenfalls

$$(p-1) \sum_{h=1}^{\infty} \left[\frac{n}{p^h}\right] < (p-1) \sum_{h=1}^{\infty} \frac{n}{p^h} = n$$

und damit

$$(p-1) \sum_{h=1}^{\infty} \left[\frac{n}{p^h}\right] \leq n - 1 \quad \text{bzw.} \quad \sum_{h=1}^{\infty} \left[\frac{n}{p^h}\right] \leq \frac{n-1}{p-1} \quad ,$$

was die linke Ungleichung in i. impliziert. Schreiben wir $n = pm + r$ mit $0 \leq r < p$ so gilt $\left[\frac{n}{p^h}\right] = \left[\frac{m}{p^{h-1}}\right]$ und somit

$$\sum_{h=1}^{\infty} \left[\frac{n}{p^h}\right] = m + \sum_{h=1}^{\infty} \left[\frac{m}{p^h}\right] \leq m + \frac{m-1}{p-1} = \frac{pm-1}{p-1} \ .$$

Für die in ii. behauptete Gleichheit ist also notwendig, daß $r = 0$ und daß die analoge Gleichheit für m gilt. Iterativ folgt dann, daß n eine p-Potenz sein muß.
Es bleibt, die rechte Ungleichung in i. zu zeigen. Dazu sei $k \geq 0$ diejenige ganze Zahl mit $p^k \leq n < p^{k+1}$. Es folgt

$$\sum_{h=1}^{\infty} \left[\frac{n}{p^h}\right] = \sum_{h=1}^{k} \left[\frac{n}{p^h}\right] > \left(\sum_{h=1}^{k} \frac{n}{p^h}\right) - k = n\,\frac{1-p^{-k}}{p-1} - k > \frac{n-p}{p-1} - k$$

und damit

$$(p-1)\sum_{h=1}^{\infty}\left[\frac{n}{p^h}\right] \geq n-p-k(p-1)+1 = n-(k+1)(p-1)$$

bzw.

$$\sum_{h=1}^{\infty}\left[\frac{n}{p^h}\right] \geq \frac{n}{p-1}-k-1 \ .$$

Es bleibt zu bemerken, daß $|p|^{-k} = p^k \leq n$.

Nach Satz 1.7 setzt sich $|\ |_p$ eindeutig von $\mathbb{Q}_p$ auf $\overline{\mathbb{Q}}_p$ und dann per Stetigkeit weiter auf

$$\mathbb{C}_p := \widehat{\overline{\mathbb{Q}}}_p$$

fort. Wir bezeichnen diese Fortsetzung ebenfalls mit $|\ |_p$. Dabei ist $|\overline{\mathbb{Q}}_p^{\times}| = |\mathbb{C}_p^{\times}| = p^{\mathbb{Q}}$. Nach Satz 1.8 ist $\mathbb{C}_p$ ebenfalls algebraisch abgeschlossen. Aus Dichtigkeitsgründen besitzt jedes Element im Restklassenkörper von $\mathbb{C}_p$ schon einen Repräsentanten in $\overline{\mathbb{Q}}_p$. Sei $a \in \overline{\mathbb{Q}}_p$ mit $|a|_p \leq 1$. Im Beweis von Satz 1.7 haben wir gesehen, daß a dann ganz über $\mathbb{Z}_p$ ist. Folglich ist die Restklasse von a algebraisch über $\mathbb{F}_p$. Hieraus ergibt sich leicht:

$$\text{Restklassenkörpervon } \mathbb{C}_p = \overline{\mathbb{F}}_p \ .$$

Bezeichne $\overline{\mathbb{Z}}_p$ den Ring der ganzen Zahlen in $\overline{\mathbb{Q}}_p$. Die Restklassenprojektion induziert einen Gruppenhomomorphismus

$$\overline{\mathbb{Z}}_p^{\times} \longrightarrow \overline{\mathbb{F}}_p^{\times} \ .$$

Lemma 2.3: *Sei $\mu' \subseteq \overline{\mathbb{Z}}_p^{\times}$ die Untergruppe aller Einheitswurzeln von zu p primer Ordnung. Die Restklassenprojektion schränkt sich ein zu einem Isomorphismus*

$$\mu' \xrightarrow{\cong} \overline{\mathbb{F}}_p^{\times} \ .$$

Beweis: Injektivität: Sei $\zeta \in \mu'$ mit $|\zeta - 1|_p < 1$. Nach Lemma 2.1.i konvergiert die Folge $(\zeta^{p^n})_n$ dann gegen 1. Für die ζ^{p^n} gibt es nur endlich viele Möglichkeiten, so daß eine konstante Teilfolge existieren muß. Folglich gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\zeta^{p^{n_0}} = 1$. Da die Ordnung von ζ aber als zu p prim vorausgesetzt war, ergibt sich $\zeta = 1$.
Surjektivität: Sei $\alpha \in \mathbb{F}_q^{\times}$ mit $q = p^m$. Dann ist α eine einfache Nullstelle des Polynoms $x^{q-1} - 1$. Nach Corollar 1.4 besitzt das Polynom dann auch eine Nullstelle $\zeta \in \overline{\mathbb{Z}}_p$, deren Restklasse gleich α ist. Ersichtlich ist $\zeta \in \mu'$.

Ist $\alpha \in \overline{\mathbb{F}}_p^{\times}$ die Restklasse von $\zeta \in \mu'$, so heißt ζ der *Teichmüller-Repräsentant* von α. Zusätzlich definieren wir $0 \in \mathbb{Z}_p$ als den Teichmüller-Repräsentanten von $0 \in \mathbb{F}_p$.

Lemma 2.4: *Ist ζ der Teichmüller-Repräsentant von $\alpha \in \mathbb{F}_q$ mit $q = p^m$, und ist $a \in \mathbb{C}_p$ ein beliebiges Element mit Restklasse gleich α, so gilt*

$$\zeta = \lim_{n \longrightarrow \infty} a^{q^n} \ .$$

Beweis: Für $\zeta = 0$ ist $|a|_p < 1$ und die Behauptung damit trivial. Sei also $\zeta \neq 0$. Wegen $|\zeta - a|_p < 1$ folgt auch Lemma 2.1.i, daß $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty}(\zeta^{p^n} - a^{p^n}) = 0$ und insbesondere $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty}(\zeta^{q^n} - a^{q^n}) = 0$. Nach Lemma 2.3 hat aber ζ dieselbe Ordnung wie α. Also ist $\zeta^{q^n} = \zeta$.

§3 Elementares über Reihen

Von nun an sei $(K, |\ |)$ ein fixierter nicht-archimedischer Körper. Weiter sei $(V, \|\ \|)$ ein K-Banachraum.

Lemma 3.1: *Für eine Folge $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in V gilt:*
i. Die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ konvergiert genau dann, wenn $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} v_n = 0$;
ii. ist $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} v_n = v \neq 0$, so gilt $\|v_n\| = \|v\|$ für großes n;
iii. sei $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ eine Bijektion; ist $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n = v$, so auch $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_{\sigma(n)} = v$.

Trivialerweise gilt (falls Konvergenz vorliegt):

- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} av_n = a \cdot \sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n \qquad$ (für $a \in K$);
- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n + \sum\limits_{n=1}^{\infty} w_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (v_n + w_n)$.

Lemma 3.2: *Seien $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ und $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ konvergente Reihen in K bzw. V; dann ist die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} w_n$ mit $w_n := \sum\limits_{\ell+m=n} a_\ell v_m$ konvergent und*

$$\sum_{n=1}^{\infty} w_n = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} v_n\right) .$$

§4 Elementares zur Differenzierbarkeit

Sei $U \subseteq K$ eine offene Teilmenge und $f : U \longrightarrow K$ eine Abbildung.

Definition: *f heißt im Punkte $a_0 \in U$ differenzierbar, falls ein $f'(a_0) \in K$ existiert mit: Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert eine offene Umgebung $U_\varepsilon \subseteq U$ von a_0, so daß*

$$|f(a) - f(a_0) - f'(a_0)(a - a_0)| \leq \varepsilon \cdot |a - a_0| \quad \textit{für alle } a \in U_\varepsilon \ .$$

Die Funktion f heißt differenzierbar, wenn sie in jedem Punkt von U differenzierbar ist.

Ersichtlich ist dann die *Ableitung* von f im Punkte a_0

$$f'(a_0) = \lim_{a \longrightarrow a_0} \frac{f(a) - f(a_0)}{a - a_0}$$

eindeutig durch f und a_0 bestimmt.

Erinnerungen: 1) Ist f differenzierbar in a_0, so ist f auch stetig in a_0.
2) (Kettenregel) Sei $V \subseteq K$ eine weiter offene Teilmenge mit $f(U) \subseteq V$ und sei $g : V \longrightarrow K$ eine weitere Abbildung. Ist f bzw. g differenzierbar in $a_0 \in U$ bzw. $f(a_0)$, so ist $g \circ f$ differenzierbar in a_0 mit $(g \circ f)'(a_0) = f'(a_0) \cdot g'(f(a_0))$.
3) (Produktregel) Seien $f : U \longrightarrow K$ und $g : U \longrightarrow K$ differenzierbar in $a_0 \in U$. Dann ist $f \cdot g$ differenzierbar in a_0 mit $(f \cdot g)'(a_0) = f(a_0) \cdot g'(a_0) + f'(a_0) \cdot g(a_0)$.

Beobachtung I: Die Funktion $f : U \longrightarrow K$ heißt lokalkonstant, falls $f^{-1}(b)$ offen (und abgeschlossen) ist in U für alle $b \in K$. Ersichtlich ist f dann differenzierbar mit $f' = 0$. Da die Topologie von U nach Lemma 1.1.iv total unzusammenhängend ist, gibt es sehr viele lokalkonstante Funktionen auf U.

Beobachtung II: Wegen $\mathbb{Z}_p/p\mathbb{Z}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ läßt sich jedes $a \in \mathbb{Z}_p$ eindeutig als konvergente Reihe

$$a = \sum_{n=0}^{\infty} a_n p^n \quad \text{mit } a_n \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$$

schreiben. Dabei gilt

$$|a|_p = p^{-\min\{n : a_n \neq 0\}} \ .$$

Betrachte nun die Funktion

$$\begin{array}{cccc} f : & \mathbb{Z}_p & \longrightarrow & \mathbb{Q}_p \\ & a = \sum_{n=0}^{\infty} a_n p^n & \longmapsto & f(a) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n p^{2n} \ . \end{array}$$

Seien $a = \sum_{n \geq 0} a_n p^n$ und $b = \sum_{n \geq 0} b_n p^n$ mit $a_n, b_n \in \{0, \ldots, p-1\}$, und sei etwa $|a-b|_p = p^{-j}$. Dann ist $a_0 = b_0, \ldots, a_{j-1} = b_{j-1}, a_j \neq b_j$ und es folgt $|f(a) - f(b)|_p = p^{-2j}$. Also gilt

$$|f(a) - f(b)|_p = |a - b|_p^2 \quad \text{für alle } a, b \in \mathbb{Z}_p \ .$$

Dies zeigt: – f ist injektiv (insbesondere nicht lokalkonstant),
– $f' = 0$.

An diesem Beispiel erkennt man auch, daß es in unserem Kontext kein Analogon zum Mittelwertsatz der reellen Analysis gibt.

§5 Konvergente Potenzreihen

Eine Potenzreihe (in einer Variablen) mit Koeffizienten in K ist eine formale Reihe

$$f(X) = \sum_{n \geq 0} a_n X^n \quad \text{mit } a_n \in K \ .$$

Ist $\varepsilon > 0$, so heißt $f(X)$ *ε-konvergent*, falls $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} |a_n|\varepsilon^n = 0$.

Beachte: $f(X)$ ε-konvergent $\Longrightarrow f(X)$ δ-konvergent für alle $0 < \delta \leq \varepsilon$.

Wir definieren

$$\mathcal{F}_\varepsilon(K) := \text{ alle } \varepsilon\text{-konvergenten Potenzreihen} \ .$$

Dies ist ein K-Vektorraum mit der Norm $\|f\|_\varepsilon := \max\limits_{n \geq 0} |a_n|\varepsilon^n$.

Lemma 5.1: $(\mathcal{F}_\varepsilon(K), \| \ \|_\varepsilon)$ *ist ein K-Banachraum.*

Beweis: Dies ist eine offensichtliche Verallgemeinerung des Argumentes für $c_0(\mathbb{N})$ (vgl. auch die Diskussion weiter unten).

Übrigens: Ist $\varepsilon = |c|$ für ein $c \in K^\times$, so ist

$$\begin{array}{rcl} c_0(\mathbb{N}_0) & \xrightarrow{\cong} & \mathcal{F}_{|c|}(K) \\ (a_n)_n & \longmapsto & \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n c^{-n} X^n \end{array}$$

eine Isometrie.

Sei $B_\varepsilon(a)$ ein Ball in K. Nach Lemma 3.1.i ist

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{F}_\varepsilon(K) & \longrightarrow & K\text{-Vektorraum aller } K\text{-wertigen Funktionen auf } B_\varepsilon(a) \\ f(x) & \longmapsto & f_{(a)}(x) := \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n \end{array}$$

eine wohldefinierte K-lineare Abbildung. Ihr Bild wird mit $\mathcal{A}_\varepsilon(a)$ bezeichnet.

Konvention: Mit einer Erweiterung L/K ist im Folgenden stets ein nicht-archimedischer Körper L gemeint, welcher K enthält und dessen Absolutbetrag denjenigen von K fortsetzt. Wir schreiben deswegen $| \ |$ auch für den Absolutbetrag von L.

Wenn erforderlich präzisieren wir unsere Notation für Bälle durch

$$B_\varepsilon(a)(L) := \{b \in L : |b - a| \leq \varepsilon\}$$

und analog durch $B_\varepsilon^-(a)(L)$. Ein $f(X) \in \mathcal{F}_\varepsilon(K)$ liefert natürlich eine Funktion

$$\begin{array}{rcl} f_{(a)} : B_\varepsilon(a)(L) & \longrightarrow & L \\ x & \longmapsto & \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n \end{array}$$

für jede Erweiterung L/K.
Wir betrachten nun eine konvergente Reihe $f = \sum\limits_{i=0}^{\infty} f_i$ in dem Banachraum $\mathcal{F}_\varepsilon(K)$, also

$$\|f - \sum_{i=0}^{m} f_i\|_\varepsilon \longrightarrow 0 \quad \text{für } m \longrightarrow \infty \ .$$

Sei

$$f(X) = \sum_{n\geq 0} a_n X^n \quad \text{und} \quad f_i(X) = \sum_{n\geq 0} a_{i,n} X^n \ .$$

Dann ist

$$\|f - \sum_{i=0}^{m} f_i\|_\varepsilon = \|\sum_{n\geq 0}(a_n - \sum_{i=0}^{m} a_{i,n})X^n\|_\varepsilon = \max_{n\geq 0} |a_n - \sum_{i=0}^{m} a_{i,n}|\varepsilon^n \ .$$

Es folgt

$$a_n = \sum_{i=0}^{\infty} a_{i,n} \quad \text{für alle } n \geq 0 \ .$$

Bemerkung 5.2: *In der obigen Situation gilt*

$$f_{(a)}(x) = \sum_{i=0}^{\infty} (f_i)_{(a)}(x) \ \textit{für alle } x \in B_\varepsilon(a)(L) \ .$$

Beweis: $|f_{(a)}(x) - \sum\limits_{i=0}^{m} (f_i)_{(a)}(x)| \leq \|f - \sum\limits_{i=0}^{m} f_i\|_\varepsilon$.

Satz 5.3: *$\mathcal{F}_\varepsilon(K)$ ist eine kommutative K-Algebra bzgl.*

$$\left(\sum_{n\geq 0} b_n X^n\right)\left(\sum_{n\geq 0} c_n X^n\right) = \sum_{n\geq 0}\left(\sum_{k+\ell=n} b_k c_\ell\right) X^n \quad ;$$

dabei gilt: i. $\|f \cdot g\|_\varepsilon = \|f\|_\varepsilon \cdot \|g\|_\varepsilon$;
ii. $(f \cdot g)_{(a)}(x) = f_{(a)}(x) \cdot g_{(a)}(x)$.

Beweis: Setze $a_n := \sum\limits_{k+\ell=n} b_k c_\ell$. Wir können annehmen, daß $\|f\|_\varepsilon \neq 0$ und $\|g\|_\varepsilon \neq 0$.
Zu jedem $\delta > 0$ existiert dann ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$|b_i|\varepsilon^i < \frac{\delta}{\|g\|_\varepsilon} \quad \text{und} \quad |c_i|\varepsilon^i < \frac{\delta}{\|f\|_\varepsilon}$$

für $i \geq N$. Für $n \geq 2N$ ergibt sich

$$|a_n|\varepsilon^n \leq \max_{k+\ell=n} |b_k|\varepsilon^k \cdot |c_\ell|\varepsilon^\ell < \delta \ .$$

Also ist $(f \cdot g)(X) = \sum\limits_{n \geq 0} a_n X^n$ ε-konvergent. Für $|y| \leq \varepsilon$ ist

$$(f \cdot g)_{(0)}(y) = \lim_{s \longrightarrow \infty} \left(\sum_{n=0}^{s} a_n y^n \right) = \lim_{s \longrightarrow \infty} \left(\sum_{k+\ell \leq s} b_k y^k c_\ell y^\ell \right)$$

und

$$f_{(0)}(y) \cdot g_{(0)}(y) = \lim_{s \longrightarrow \infty} \left(\sum_{k=0}^{s} b_k y^k \right) \left(\sum_{\ell=0}^{s} c_\ell y^\ell \right) = \lim_{s \longrightarrow \infty} \left(\sum_{k,\ell \leq s} b_k y^k c_\ell y^\ell \right) \ .$$

Die Differenz der Folgenglieder

$$\begin{aligned} |\sum_{\substack{k,\ell \leq s \\ k+\ell > s}} b_k y^k c_\ell y^\ell| &\leq \max_{\substack{k,\ell \leq s \\ k+\ell > s}} |b_k| \varepsilon^k |c_\ell| \varepsilon^\ell \\ &\leq \max_{k > \frac{s}{2} \text{ oder } \ell > \frac{s}{2}} |b_k| \varepsilon^k |c_\ell| \varepsilon^\ell \\ &\leq \max \left(\|g\|_\varepsilon \cdot \max_{k > \frac{s}{2}} |b_k| \varepsilon^k, \|f\|_\varepsilon \cdot \max_{\ell > \frac{s}{2}} |c_\ell| \varepsilon^\ell \right) \end{aligned}$$

ist eine Nullfolge. Daraus folgt die Aussage ii. Aus der Dreiecksungleichung ergibt sich unmittelbar die Ungleichung

$$\|f \cdot g\|_\varepsilon \leq \|f\|_\varepsilon \cdot \|g\|_\varepsilon \ .$$

Für die umgekehrte Ungleichung seinen k_0 und ℓ_0 die kleinsten Indizes mit

$$|b_{k_0}| \varepsilon^{k_0} = \|f\|_\varepsilon \quad \text{und} \quad |c_{\ell_0}| \varepsilon^{\ell_0} = \|g\|_\varepsilon \ .$$

Setze $n_0 := k_0 + \ell_0$. Für $n_0 = k + \ell$ gilt $k \leq k_0$ oder $\ell \leq \ell_0$. Ist $k \neq k_0$ und $\ell \neq \ell_0$, so folgt

$$|b_k| \varepsilon^k < \|f\|_\varepsilon \quad \text{oder} \quad |c_\ell| \varepsilon^\ell < \|g\|_\varepsilon$$

und damit

$$|b_k c_\ell| \varepsilon^{n_0} < \|f\|_\varepsilon \cdot \|g\|_\varepsilon \ .$$

Also ist

$$\|f \cdot g\|_\varepsilon \geq |a_{n_0}| \varepsilon^{n_0} = |b_{k_0}| \varepsilon^{k_0} \cdot |c_{\ell_0}| \varepsilon^{\ell_0} = \|f\|_\varepsilon \cdot \|g\|_\varepsilon \ .$$

Satz 5.4: *Sei $g \in \mathcal{F}_\varepsilon(K)$ mit $\|g\|_\varepsilon \leq \delta$; dann ist*

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{F}_\delta(K) & \longrightarrow & \mathcal{F}_\varepsilon(K) \\ f(Y) = \sum\limits_{n \geq 0} a_n Y^n & \longmapsto & f \circ g(X) := \sum\limits_{n \geq 0} a_n g(X)^n \end{array}$$

eine stetige lineare Abbildung (der Operatornorm ≤ 1); dabei gilt

$$(f \circ g)_{(a)}(x) = f_{(0)}(g_{(a)}(x)) \ .$$

Beweis: Wegen Satz 5.3 ist $a_n g(X)^n$ ε-konvergent mit $\|a_n g(X)^n\|_\varepsilon \leq |a_n|\delta^n$. Da $f(X)$ δ-konvergent ist, ist also $(a_n g(X)^n)_n$ eine Nullfolge in $\mathcal{F}_\varepsilon(K)$. Somit ist die Reihe $(f \circ g)(X) = \sum\limits_{n \geq 0} a_n g(X)^n$ konvergent in $\mathcal{F}_\varepsilon(K)$ mit

$$\|f \circ g\|_\varepsilon \leq \max_\varepsilon \|a_n g(X)^n\|_\varepsilon \leq \max_n |a_n|\delta^n = \|f\|_\delta \ .$$

Der Zusatz folgt aus Bem. 5.2 und Satz 5.3.ii.

Wenn man die Diskussion vor Bem. 5.2 und den Beweis von Satz 5.3 noch einmal durchgeht, sieht man, daß sich die Potenzreihe $f \circ g$ durch "Einsetzen" von g in f berechnet.

Warnung: Für $g \in \mathcal{F}_\varepsilon(K)$ gilt stets

$$\sup_{x \in B_\varepsilon(0)} |g_{(0)}(x)| \leq \|g\|_\varepsilon \ ,$$

aber im Allgemeinen keine Gleichheit. Deswegen kann $g_{(0)}(B_\varepsilon(0)) \subseteq B_\delta(0)$ erfüllt sein, so daß $f_{(0)} \circ g_{(0)}$ existiert, ohne daß $f \circ g$ definiert ist. Ein Beispiel dafür (Übungsaufgabe) sind die Potenzreihen

$$f(Y) := \sum_{n \geq 0} Y^n \in \mathcal{F}_{\frac{1}{p}}(\mathbb{Q}_p) \quad \text{und} \quad g(X) := X^p - X \in \mathcal{F}_1(\mathbb{Q}_p) \ .$$

Corollar 5.5: *(Verschiebung des Entwicklungspunktes)*
Sei $f \in \mathcal{F}_\varepsilon(K)$ und $b \in B_\varepsilon(a)$; dann existiert ein $f_{a-b} \in \mathcal{F}_\varepsilon(K)$ mit $\|f_{a-b}\|_\varepsilon = \|f\|_\varepsilon$ und $f_{(a)} = (f_{a-b})_{(b)}$.
Beweis: Wende Satz 5.4 an auf $g(X) := X + b - a \in \mathcal{F}_\varepsilon(K)$ mit $\|g\|_\varepsilon \leq \varepsilon$. Das zeigt die Existenz von $f_{a-b}(X) := (f \circ g)(X) \in \mathcal{F}_\varepsilon(K)$ mit $\|f_{a-b}\|_\varepsilon \leq \|f\|_\varepsilon$ und $(f_{a-b})_{(b)} = f_{(0)} \circ g_{(b)} = f_{(a)}$. Aus Symmetriegründen gilt $(f_{a-b})_{b-a} = f$ und damit $\|f\|_\varepsilon \leq \|f_{a-b}\|_\varepsilon$.

Sei $f(X) = \sum\limits_{n \geq 0} a_n X^n$ ε-konvergent. Die formale Ableitung

$$\frac{df}{dX}(X) := \sum_{n \geq 1} n a_n X^{n-1} = \sum_{n \geq 0} (n+1) a_{n+1} X^n$$

ist dann ebenfalls ε-konvergent. Also ist

$$\frac{d}{dX} : \ \mathcal{F}_\varepsilon(K) \longrightarrow \mathcal{F}_\varepsilon(K)$$

eine stetige lineare Abbildung mit Operatornorm ≤ 1. Induktiv ergibt sich

$$n! \cdot a_n = \left(\left(\frac{d}{dX} \right)^n f \right)_{(0)} (0)$$

und, falls K die Charakteristik 0 hat,

$$a_n = \frac{1}{n!}\left(\left(\frac{d}{dX}\right)^n f\right)_{(0)}(0) \; .$$

Satz 5.6: *Sei $f \in \mathcal{F}_\varepsilon(K)$, dann ist $f_{(a)}$ differenzierbar auf $B_\varepsilon(a)$ mit $f_{(a)}{}' = \left(\frac{df}{dX}\right)_{(a)}$.*
Beweis: Die übliche Standardrechnung zeigt, daß $f_{(b)}$ differenzierbar ist im Punkt b mit $f_{(b)}{}'(b) = a_1$. Für einen Punkt $b \in B_\varepsilon(a)$ wenden wir das an auf die Potenzreihe f_{a-b} aus Corollar 5.5. Wegen $f_{(a)}(x) = (f_{a-b})_{(b)}(x)$ folgt, daß $f_{(a)}$ differenzierbar ist im Punkt b mit $f_{(a)}{}'(b) = c_1$, falls $f_{a-b}(X) = \sum\limits_{n\geq 0} c_n X^n$. Aber $f_{a-b}(X)$ entsteht aus $f(Y)$ durch Einsetzen von $X + b - a$, d. h.

$$\sum_{n\geq 0} c_n X^n = \sum_{n\geq 0} a_n (X + b - a)^n \; .$$

Koeffizientenvergleich ergibt

$$c_1 = \sum_{n\geq 1} n a_n (b-a)^{n-1} = \left(\frac{df}{dX}\right)_{(a)}(b) \; .$$

Corollar 5.7: *(Taylor-Formel)*
Sei $char(K) = 0$ und $f(X) \in \mathcal{F}_\varepsilon(K)$; dann gilt

$$f(X) = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!}\left(\left(\frac{d}{dx}\right)^n f_{(0)}\right)(0) X^n \; .$$

Corollar 5.8: *(Identitätssatz für Potenzreihen)*
(Sei $char(K) = 0$.) Für $f \in \mathcal{F}_\varepsilon(K)$ gilt: Ist $f_{(a)} = 0$ für ein a, so ist $f = 0$.

Das letzte Corollar gilt mit einem anderen, komplizierteren Beweis auch in positiver Charakteristik.
Zusammenfassend können wir feststellen: Die Abbildung

$$\begin{array}{ccl} \mathcal{F}_\varepsilon(K) & \stackrel{\cong}{\longrightarrow} & \mathcal{A}_\varepsilon(a) \subseteq \text{ differenzierbare Funktionen auf } B_\varepsilon(a) \\ f & \longmapsto & f_{(a)} \end{array}$$

ist eine K-lineare und multiplikative Bijektion, bezüglich welcher die formale Ableitung auf $\mathcal{F}_\varepsilon(K)$ der Differentiation auf $\mathcal{A}_\varepsilon(a)$ entspricht. Außerdem gilt $\mathcal{A}_\varepsilon(b) = \mathcal{A}_\varepsilon(a)$ für alle $b \in B_\varepsilon(a)$.
Wir werden deswegen die Notation $f_{(a)}(x)$ aufgeben und einfach $f(x-a)$ schreiben.

§6 Analytische Funktionen auf affinoiden Bällen

Ein Ball B bzw. ein offener Ball B^- heißt *affinoid*, falls ein $a \in K$ und ein $r \in |K^\times|$ existieren, so daß $B = B_r(a)$ bzw. $B^- = B_r^-(a)$.

Bemerkung 6.1: *i. Ist $B_r(a) = B_{r'}(a')$ mit $r, r' \in |K^\times|$, so gilt $r = r'$;*
ii. ist $B_r^-(a) = B_{r'}^-(a')$ mit $r, r' \in |K^\times|$, so gilt $r = r'$.
Beweis: i. Nach Lemma 1.1.ii ist $B_{r'}(a') = B_{r'}(a)$. Sei etwa $r \le r'$, und sei $c \in K$ mit $|c| = r'$. Dann ist $a + c \in B_{r'}(a) = B_r(a)$, und es folgt $r' = |c| \le r$.
ii. Wieder ist $B_{r'}^-(a') = B_{r'}^-(a)$, und wieder sei etwa $r \le r'$. Wir nehmen an, es gelte $r < r'$ und wählen ein $c \in K$ mit $|c| = r$. Dann ist $a + c \in B_{r'}^-(a) = B_r^-(a)$, was zu dem Widerspruch $|c| < r$ führt.

Für einen affinoiden Ball $B = B_r(a)$ ist der Ring

$$\mathcal{A}(B) := \mathcal{A}_r(a)$$

also unabhängig von der Wahl von a und r. Er heißt der *Ring der analytischen Funktionen* auf B.

Lemma 6.2: *Seien $B \subseteq B'$ zwei affinoide Bälle; dann ist die Einschränkungsabbildung $\mathcal{A}(B') \longrightarrow \mathcal{A}(B)$ wohldefiniert, injektiv und stetig.*
Beweis: Wir finden ein $a \in K$ und $r \le r'$ in $|K^\times|$, so daß $B = B_r(a) \subseteq B_{r'}(a) = B'$. Unter den Isomorphismen $\mathcal{A}_r(a) \cong \mathcal{F}_r(K)$ und $\mathcal{A}_{r'}(a) \cong \mathcal{F}_{r'}(K)$ entspricht die Einschränkungsabbildung der Inklusion $\mathcal{F}_{r'}(K) \subseteq \mathcal{F}_r(K)$. Diese ist stetig nach Lemma 1.5, da ihre Operatornorm ≤ 1 ist.

Der *Ring der analytischen Funktionen* auf einem affinoiden offenen Ball $B^- = B_r^-(a)$ ist definiert als

$$\mathcal{A}(B^-) := \bigcap_{\varepsilon < r} \mathcal{A}_\varepsilon(a) \ .$$

Wieder ist die Definition unabhängig von der Wahl von a und r: Sei nämlich $B_r^-(a) = B_{r'}^-(b)$. Nach Bem. 6.1.ii gilt $r = r'$. Und für $|a - b| \le \varepsilon < r$ ist $\mathcal{A}_\varepsilon(a) = \mathcal{A}_\varepsilon(b)$.

Bemerkung 6.3: *Mittels $f \longmapsto f(x-a)$ ist $\mathcal{A}(B^-)$ isomorph zum Ring aller Potenzreihen, welche ε-konvergent sind für alle $0 < \varepsilon < r$.*

Warnung: Auf $\mathcal{A}(B^-)$ gibt es keine einzelne ausgezeichnete Norm mehr, sondern nur die Familie aller Normen $\| \ \|_\varepsilon$ für $0 < \varepsilon < r$ (mittels des Isomorphismus aus Bem. 6.3). Deswegen ist $\mathcal{A}(B^-)$ kein Banachraum mehr, sondern ein Fréchetraum.

Ausblick: Seien $P, Q \in K[X]$ zwei vorgegebene Polynome und sei B ein affinoider Ball. Wir werden später Differentialgleichungen der Form

$$P \cdot \frac{df}{dx} = Q \cdot f \quad \text{mit } f \in \mathcal{A}(B)$$

studieren.

Wegen Bem. 6.1 ist für jeden affinoiden Ball $B = B_r(a)$ (bzw. jeden affinoiden offenen Ball $B^- = B_r^-(a)$) und jede Erweiterung L/K der Ball in L

$$B(L) := B_r(a)(L) \quad (\text{bzw. } B^-(L) := B_r^-(a)(L))$$

unabhängig von der Wahl von a und r definiert. Auf $\mathcal{A}(B)$ erhalten wir deswegen eine natürliche Norm

$$\|f\|_B := \sup\{|f(x)| : x \in B(\widehat{\overline{K}})\} \ .$$

Lemma 6.4: *(Maximumprinzip)*
Sei $B = B_r(a)$ ein affinoider Ball; für $f \in \mathcal{A}(B)$ und $F \in \mathcal{F}_r(K)$ mit $f(x) = F(x-a)$ gilt

$$\|f\|_B = \max_{x \in B(\widehat{\overline{K}})} |f(x)| = \max_{\substack{x \in \overline{K} \\ |x-a|=r}} |f(x)| = \|F\|_r \ .$$

Beweis: Natürlich können wir $F \neq 0$ annehmen. Sei $F(X) = \sum_{n \geq 0} a_n X^n$. Mit r liegt auch $\|F\|_r$ in $|K^\times|$, also $r = |c|$ und $\|F\|_r = |a|$ für geeignete $a, c \in K^\times$. Die Potenzreihe

$$G(X) := \sum_{n \geq 0} c_n X^n \quad \text{mit } c_n := a^{-1} a_n c^n$$

ist 1-konvergent mit $\|G\|_1 = 1$. Folglich ist $\overline{G}(X) := G(X) \bmod \mathfrak{m}$ ein Polynom $\neq 0$ über den Restklassenkörper k von K. Da der algebraische Abschluß $\overline{k}$ von k unendlich ist, existiert ein $\beta \in \overline{k}^\times$ mit $\overline{G}(\beta) \neq 0$. Wir wählen ein $b \in \overline{K}$ mit $|b| = 1$, dessen Restklasse gleich β ist. Nach Konstruktion ist dann $|G(b)| = 1$. Wir haben somit gezeigt, daß

$$\max_{\substack{x \in \overline{K} \\ |x|=1}} |G(x)| = \max_{x \in B_1(0)(\widehat{\overline{K}})} |G(x)| = \|G\|_{B_1(0)} = 1 = \|G\|_1$$

gilt. Daraus folgt aber die Behauptung wegen

$$\max_{|x-a|=r} |f(x)| = \max_{|x|=r} |F(x)| = \max_{|x|=1} |F(cx)| = \max_{|x|=1} |aG(x)| = |a| \ .$$

Corollar 6.5: *Für jeden affinoiden Ball B ist $(\mathcal{A}(B), \| \ \|_B)$ ein K-Banachraum mit multiplikativer Norm $\| \ \|_B$.*
Beweis: Lemma 6.4 und Satz 5.3.

Lemma 6.6: *Sei $B = B_r(a)$ ein affinoider Ball und sei $c \in K$ mit $|c| = r$; dann ist*

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{A}(B) & \xrightarrow{\cong} & \mathcal{A}(B_1(0)) \\ f & \longmapsto & f(cx+a) \end{array}$$

ein isometrischer Algebrenisomorphismus.
Beweis: Dies folgt aus Satz 5.4 angewendet auf $g(X) := cX$. Die Isometrie erkennt man auch direkt, da

$$\begin{array}{rcl} B_1(0)(\widehat{\overline{K}}) & \longrightarrow & B(\widehat{\overline{K}}) \\ x & \longmapsto & cx + a \end{array}$$

eine Bijektion ist.

Auf Grund dieses Tatsache gelten alle ringtheoretischen Sätze über $\mathcal{A}_1 := \mathcal{A}(B_1(0))$ automatisch für alle $\mathcal{A}(B)$ zu affinoiden Bällen B.

Weierstrass'scher Divisionssatz 6.7: *Sei* $0 \neq f(x) = \sum\limits_{n \geq 0} a_n x^n \in \mathcal{A}_1$, *und sei* $d \geq 0$ *der größte Index mit* $\|f\|_1 = |a_d|$; *für jedes* $g \in \mathcal{A}_1$ *existieren eindeutig bestimmte Elemente* $q \in \mathcal{A}_1$ *und* $R \in K[x]$ *vom Grade* $< d$ *mit*

$$g = qf + R \ ;$$

dabei gilt $\|g\|_1 = \max(\|qf\|_1, \|R\|_1)$.
Beweis: Existenz: Mittels Skalierung (der Fall $g = 0$ ist trivial) können wir $\|f\|_1 = \|g\|_1 = 1$ annehmen. Dann ist $f \bmod \mathfrak{m}$ ein Polynom vom Grade d. Genauer existiert ein $c \in K^\times$ mit $\max\limits_{n>d} |a_n| = |c| =: r < 1$. Der Ball $\mathfrak{n} := B_r(0)$ ist ein in $\mathfrak{m}$ enthaltenes Ideal von o. Ersichtlich ist $f \bmod \mathfrak{n}$ ein Polynom vom Grade d, dessen höchster Koeffizient eine Einheit in $o/\mathfrak{n}$ ist; somit ist es im Ring $o/\mathfrak{n}[x]$ zur Polynomdivision geeignet. Dies ausnutzend werden wir Folgen $(g_i)_{i \geq 0}, (q_i)_{i \geq 0}$ in $\mathcal{A}_1$ und $(R_i)_{i \geq 0}$ in $K[x]$ mit folgenden Eigenschaften konstruieren:

$$\begin{array}{l} g_0 = g, \ g_{i+1} = g_i - q_i f - R_i, \\ \deg(R_i) < d, \\ \max(\|g_i\|_1, \|q_i\|_1, \|R_i\|_1) \leq r^i \ . \end{array}$$

Dann existieren $q := \sum\limits_{i \geq 0} q_i$ in $\mathcal{A}_1$ und $R := \sum\limits_{i \geq 0} R_i$ in $K[x]$ mit $\deg(R) < d$ und

$$g = g_0 = \sum_{i \geq 0} (g_i - g_{i+1}) = \sum_{i \geq 0} (q_i f + R_i) = qf + R \ .$$

Außerdem gilt $\max(\|q\|_1, \|R\|_1) \leq 1 = \|g\|_1$ per Konstruktion. Die umgekehrte Ungleichung $\|g\|_1 \leq \max(\|qf\|_1, \|R\|_1) = \max(\|q\|_1, \|R\|_1)$ ist klar.
Wir nehmen an, q_{i-1}, R_{i-1} und g_i seien schon konstruiert. Durch Polynomdivision finden wir ein $\tilde{q}_i \in \mathcal{A}_1$ mit $\|\tilde{q}_i\|_1 \leq 1$ und ein $\tilde{R}_i \in o[x]$ vom Grade $< d$ mit

$$c^{-i} g_i \equiv \tilde{q}_i f + \tilde{R}_i \bmod \mathfrak{n} \ .$$

Dann gilt also $\|c^{-i} g_i - \tilde{q}_i f - \tilde{R}_i\|_1 \leq r$. Wir setzen $q_i := c^i \tilde{q}_i, R_i := c^i \tilde{R}_i$ und $g_{i+1} := g_i - q_i f - R_i = c^i (c^{-i} g_i - \tilde{q}_i f - \tilde{R}_i)$.
Eindeutigkeit: Sei $0 = qf + R$ mit $q \in \mathcal{A}_1$ und $R \in K[x]$ vom Grade $< d$. Wäre $R \neq 0$, so könnten wir durch Skalierung $\|R\|_1 = \|q\|_1 = 1$ annehmen. Das würde

$$qf \equiv -R \not\equiv 0 \bmod \mathfrak{m}$$

bedeuten, was aus Gradgründen unmöglich ist. Also ist $R = 0$ und $qf = 0$. Wegen $\|q\|_1 \cdot \|f\|_1 = \|qf\|_1 = 0$ und $f \neq 0$ ist dann auch $q = 0$.

Weierstrass'scher Vorbereitungssatz 6.8: *Seien f und d wie im letzten Satz; dann existieren genau ein normiertes Polynom $P \in o[x]$ vom Grade d und genau ein $u \in \mathcal{A}_1^\times$, so daß*

$$f = uP \ .$$

Beweis: Wir wenden den Divisionssatz auf x^d an und erhalten

$$x^d = qf + R$$

mit $R \in o[x]$ vom Grade $< d$. Mit $P := x^d - R$ ergibt sich

$$qf = P \ .$$

Eine nochmalige Anwendung des Divisionssatzes führt zu

$$f = uP + R_0$$

mit $R_0 \in K[x]$ vom Grade $< d$. Einsetzen ergibt $f = uqf + R_0$ bzw. $0 = (uq-1)f + R_0$. Aus der Eindeutigkeit der Division folgt schließlich $R_0 = 0$ und $uq = 1$.

Satz 6.9: *Sei B ein affinoider Ball; dann gilt:*
i. Jedes $0 \neq f \in \mathcal{A}(B)$ besitzt in jeder Erweiterung L/K nur endlich viele Nullstellen, und diese sind algebraisch über K;
ii. $\mathcal{A}(B)$ ist ein Hauptidealring; jedes Ideal wird von einem Polynom erzeugt;
iii. für ein $f \in \mathcal{A}(B)$ sind äquivalent:

a. $f \in \mathcal{A}(B)^\times$,

b. f besitzt keine Nullstelle in $B(\widehat{\overline{K}})$,

c. es existiert ein $r \in |K^\times|$ mit $|f(x)| = r$ für alle $x \in B(\widehat{\overline{K}})$.

Beweis: Nach Lemma 6.6 genügt es, den Ring $\mathcal{A}_1$ zu behandeln. i. Dies folgt unmittelbar aus dem Vorbereitungssatz. ii. Wegen der Multiplikativität von $\| \ \|_1$ ist $\mathcal{A}_1$ ein Integritätsbereich. Das Weitere folgt ebenfalls aus dem Vorbereitungssatz und der Tatsache, daß $K[x]$ ein Hauptidealring ist. iii. Die Implikation von a. nach b. ist trivial. Die Umkehrung folgt aus dem Vorbereitungssatz. Dazu beachte man, daß die Nullstellen eines normierten Polynoms über o alle einen Betrag ≤ 1 haben. Aus c. folgt natürlich b. und damit a. Betrachte also umgekehrt ein $f \in \mathcal{A}(B)^\times$. Wegen der Multiplikativität von $\| \ \|_B$ gilt $\|\frac{1}{f}\|_B = \|f\|_B^{-1}$ und damit

$$\sup_{|x|\leq 1} |\frac{1}{f}(x)| = (\sup_{|x|\leq 1} |f(x)|)^{-1} = \inf_{|x|\leq 1} \frac{1}{|f(x)|} \ .$$

Das bedeutet natürlich, daß $|f(x)|$ konstant ist auf $B_1(0)(\widehat{\overline{K}})$.

§7 Das Wachstum analytischer Funktionen

Sei $B^- = B_r^-(a)$ ein affinoider offener Ball. Zu jedem $0 < \varepsilon < r$ haben wir auf Grund von Satz 5.3 die multiplikative Norm

$$| \ |_a(\varepsilon) : \mathcal{A}(B^-) \xrightarrow{\subseteq} \mathcal{A}_\varepsilon(a) \xrightarrow{\cong} \mathcal{F}_\varepsilon(K) \xrightarrow{\| \ \|_\varepsilon} \mathbb{R}_{\geq 0}$$

auf $\mathcal{A}(B^-)$. Für $|b-a| \leq \varepsilon$ ist $\mathcal{A}_\varepsilon(b) = \mathcal{A}_\varepsilon(a)$ und wegen Corollar 5.5 gilt

$$| \ |_b(\varepsilon) = | \ |_a(\varepsilon) \ .$$

Die Einschränkung von $| \ |_a(\varepsilon)$ auf $\mathcal{A}(B)$ erfüllt die Ungleichung

$$| \ |_a(\varepsilon)_{|\mathcal{A}(B)} \leq \| \ \|_B \ .$$

Lemma 7.1: *Sei* $char(K) = 0$*; dann gilt*

$$| \left(\frac{d}{dx}\right)^i f|_a(\varepsilon) \leq \varepsilon^{-i} \cdot |i!| \cdot |f|_a(\varepsilon) \ .$$

Beweis: Sei $f(x) = \sum\limits_{n\geq 0} a_n(x-a)^n$ auf $B_\varepsilon(a)$. Dann ist $|f|_a(\varepsilon) = \max\limits_{n\geq 0} |a_n|\varepsilon^n$. Die behauptete Ungleichung folgt damit sofort aus

$$\left(\left(\frac{d}{dx}\right)^i f\right)(x) = i! \cdot \sum_{n\geq i} \binom{n}{i} a_n (x-a)^{n-1} \ .$$

Für ein festes $0 \neq f \in \mathcal{A}(B^-)$ ist

$$|f|_a(.) : (0, r) \longrightarrow \mathbb{R}_{>0}$$

ersichtlich eine monoton steigende Funktion in ε.

Lemma 7.2: *Sei* L/K *eine Erweiterung, und sei* $0 < \varepsilon < r$ *mit* $\varepsilon \in |L|$*; dann gilt*

$$|f|_a(\varepsilon) = \max_{\substack{x\in\widehat{L} \\ |x-a|=\varepsilon}} |f(x)| \ .$$

Beweis: Das folgt sofort aus dem Maximumprinzip 6.4 mit L als Grundkörper.

Aus diesen Gründen beschreibt die Funktion $|f|_a(.)$ das Wachstum von f. Es ist allerdings zweckmäßiger, die durch das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
(0, r) \arrow[r, "|f|_a(.)"] & \mathbb{R}_{>0} \arrow[d, "\log"] \\
(-\infty, \log r) \arrow[u, "\exp"] \arrow[r, "v(f)_a(.)"] & \mathbb{R}
\end{tikzcd}$$

definierte Funktion $v(f)_a(.)$ zu betrachten.

Satz 7.3: *Für $0 \neq f \in \mathcal{A}(B^-)$ gilt:*
i. Die Funktion $v(f)_a(.)$ ist stetig, stückweise linear und konvex;
ii. für $t_1 \leq t_2 < \log r$ ist die Anzahl der Nullstellen $x \in \widehat{\overline{K}}$ von f mit $t_1 \leq \log|x-a| \leq t_2$ (und gezählt mit Multiplizitäten) gleich

$$\textit{rechtseitige Steigung von } v(f)_a \textit{ in } t_2 - \textit{linkseitige Steigung von } v(f)_a \textit{ in } t_1 \ .$$

Beweis: (Auf Grund des Vorbereitungssatzes 6.8 ist die Multiplizität einer Nullstelle von f in naheliegender Weise definiert.) Mit einem zu Lemma 6.6 analogen Argument genügt es, den Fall $B^- = B_1^-(0)$ zu betrachten (es gilt nämlich $v(f)_a(t) = v(f(cx + a))_0(t - \log r))$. Durch Übergang von K zu $\widehat{\overline{K}}$ können wir K außerdem als algebraisch abgeschlossen annehmen. Dann gibt es eine Folge $0 < r_1 < \ldots < r_j < \ldots < 1$ in $|K|$, welche gegen 1 konvergiert. Es genügt offensichtlich, die Behauptung für alle Einschränkungen $f|B_{r_j}(0)$ zu beweisen. Wie eben reduziert sich das aber auf den Fall $f \in \mathcal{A}(B_1(0)) = \mathcal{A}_1$. Nach dem Vorbereitungssatz 6.8 ist

$$f = uP \quad \text{mit } u \in \mathcal{A}_1^\times \text{ und } P \in o[x] \text{ normiert} \ .$$

Nach Satz 6.9.iii und Lemma 7.2 ist $v(u)_0(.)$ konstant. Wegen $v(f)_0 = v(u)_0 + v(P)_0$ genügt es also, die Behauptung für P zu beweisen. Da K algebraisch abgeschlossen ist, reduziert die gleiche Additivitätseigenschaft uns weiter auf den Fall eines einzelnen Linearfaktors $x - b$ mit $b \in o$. Da rechnet man nach, daß

$$v(x-b)_0(t) = \max(t, \log|b|)$$

gilt.

Corollar 7.4: *(Schwarzsche Ungleichung)*
Sei $0 \neq f \in \mathcal{A}(B^-)$, seien $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < r$ und bezeichne λ die rechtseitige Steigung von $v(f)_a$ in $\log \varepsilon_1$ und N die Anzahl der Nullstellen (mit Multiplizitäten) $x \in \widehat{\overline{K}}$ von f mit $\varepsilon_1 < |x-a| < \varepsilon_2$; dann gilt

$$\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right)^\lambda \cdot |f|_a(\varepsilon_1) \leq |f|_a(\varepsilon_2) \leq \left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right)^{\lambda+N} \cdot |f|_a(\varepsilon_1)$$

und

$$\lambda = \textit{Anzahl der Nullstellen von } f \textit{ in } B_{\varepsilon_1}(a)(\widehat{\overline{K}}) \ .$$

§8 Fredholmoperatoren

Definition: *Sei $f : V \longrightarrow W$ eine lineare Abbildung zwischen zwei K-Vektorräumen. Sind $ker(f)$ und $coker(f)$ endlich dimensional, so sagt man, daß f endlichen Index*

$$\operatorname{ind}(f) := \dim ker(f) - \dim coker(f)$$

hat.

Lemma 8.1: *Sei*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & V_1 \arrow[r] \arrow[d, "f_1"] & V_2 \arrow[r] \arrow[d, "f_2"] & V_3 \arrow[r] \arrow[d, "f_3"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & W_1 \arrow[r] & W_2 \arrow[r] & W_3 \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

ein kommutatives Diagramm von linearen Abbildungen mit exakten Zeilen. Haben zwei der Abbildungen f_1, f_2, f_3 endlichen Index, so auch die dritte, und es gilt

$$\mathrm{ind}(f_2) = \mathrm{ind}(f_1) + \mathrm{ind}(f_3) \ .$$

Beweis: Das ist eine einfache Folgerung aus dem Schlangenlemma.

Lemma 8.2: *Seien $g : U \longrightarrow V$ und $f : V \longrightarrow W$ lineare Abbildungen. Haben zwei der Abbildungen $g, f,\ f \circ g$ endlichen Index, so auch die dritte, und es gilt*

$$\mathrm{ind}(f \circ g) = \mathrm{ind}(f) + \mathrm{ind}(g) \ .$$

Beweis: Wende Lemma 8.1 an auf das Diagramm

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & U \arrow[r, "(id_U, g)"] \arrow[d, "g"] & U \oplus V \arrow[r, "g - id_V"] \arrow[d, "f \circ g \oplus id_V"] & V \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & V \arrow[r, "(f, id_V)"'] & W \oplus V \arrow[r, "id_W - f"'] & W \arrow[r] & 0 \ . \end{tikzcd}$$

Lemma 8.3: *Für eine lineare Abbildung $f : V \longrightarrow W$ sind äquivalent:*
(a) f ist injektiv und hat endlichen Index;
(b) f besitzt ein Linksinverses $\tilde{f}$, welches endlichen Index hat.
In diesem Fall gilt $\mathrm{ind}(\tilde{f}) = -\mathrm{ind}(f)$.
Beweis: Es gelte zunächst (a). Wir wählen einen Unterraum $W_0 \subseteq W$, so daß $W = im(f) \oplus W_0$. Und wir definieren die lineare Abbildung $\tilde{f} : W \longrightarrow V$ durch $\tilde{f}|W_0 := 0$ und $\tilde{f}|im(f) := f^{-1}$. Ersichtlich ist $\tilde{f}$ linksinvers zu f. Außerdem ist $\tilde{f}$ surjektiv mit $ker(\tilde{f}) = W_0$. Also gilt

$$\mathrm{ind}(\tilde{f}) = \dim W_0 = \dim coker(f) = \mathrm{ind}(f) \ .$$

Nun gelte umgekehrt (b). Aus der Identität $\tilde{f} \circ f = id_V$ folgt sofort, daß f injektiv ist. Weiter wende Lemma 8.2 auf $f, \tilde{f}$ und $\tilde{f} \circ f = id_V$ an.

Ohne Beweis sei folgender fundamentaler Satz aus der Funktionalanalysis angegeben.

Satz vom offenen Operator: *Jede stetige lineare Surjektion $f : V \longrightarrow W$ zwischen Banachräumen (bzw. allgemeiner Frécheträumen) ist offen.*

Lemma 8.4: *Sei* $(V, \| \ \|)$ *ein* K*-Banachraum und* $V = V_0 \oplus V_1$ *eine Zerlegung in Untervektorräume, wobei* V_0 *abgeschlossen und* V_1 *endlich dimensional ist; dann existiert eine Konstante* $c > 0$*, so daß für alle* $v = v_0 + v_1$ *in* V *gilt*

$$\max(\|v_0\|, \|v_1\|) \leq c \cdot \|v\| \ .$$

Beweis: Die mit der jeweiligen Einschränkung von $\| \ \|$ normierten Vektorräume V_0 und V_1 sind wiederum Banachräume – ersterer wegen seiner Abgeschlossenheit und letzterer wegen seiner endlichen Dimension und Lemma 1.6. Also ist $V_0 \oplus V_1$ mit der Norm $\|(v_0, v_1)\|' := \max(\|v_0\|, \|v_1\|)$ ein Banachraum. Wegen der Dreiecksungleichung für $\| \ \|$ und Lemma 1.5 ist dann

$$\begin{array}{ccc} V_0 \oplus V_1 & \longrightarrow & V \\ (v_0, v_1) & \longmapsto & v_0 + v_1 \end{array}$$

eine stetige lineare Bijektion zwischen Banachräumen und damit nach dem Satz vom offenen Operator ein Homöomorphismus. Die Konstante in der Behauptung erhalten wir nun, indem wir Lemma 1.5 auf die stetige Umkehrabbildung anwenden.

Satz 8.5: *Sei* $f : V \longrightarrow W$ *eine stetige lineare Abbildung zwischen Banachräumen (bzw. allgemeiner Fréchеträumen). Ist* $coker(f)$ *endlich dimensional, so ist der Untervektorraum* $im(f)$ *in* W *abgeschlossen.*

Beweis: Wir wählen einen Untervektorraum $W_0 \subseteq W$ mit $W = im(f) \oplus W_0$. Dann ist $V \times W_0$ bezüglich der Norm $\|(v, w_0)\|' := \max(\|v\|, \|w_0\|)$ ein Banachraum. Die lineare Abbildung

$$\begin{array}{cccc} F : & V \times W_0 & \longrightarrow & W \\ & (v, w_0) & \longmapsto & f(v) + w_0 \end{array}$$

ist stetig und surjektiv; nach dem Satz vom offenen Operator also offen. Folglich ist $F(V \times W_0 \backslash \{0\})$ offen in W. Das zugehörige abgeschlossene Komplement ist gleich $F(V \times \{0\}) = im(f)$.

In der Situation des obigen Satzes ist also der endlich dimensionale Vektorraum $coker(f) = W/im(f)$ versehen mit der Quotiententopologie hausdorffsch.

Definition: *Ein stetiger linearer Endomorphismus* $f : V \longrightarrow V$ *eines Banachraumes (bzw. allgemeiner eines Fréchetraumes) heißt Fredholmoperator, wenn er endlichen Index hat.*

An dieser Stelle holen wir die Definition der Operatornorm einer stetigen linearen Abbildung $f : V \longrightarrow W$ zwischen zwei normierten Vektorräumen nach:

$$\begin{aligned} \|f\| &:= \sup\left\{ \frac{\|f(v)\|}{\|v\|} : v \in V \backslash \{0\} \right\} \\ &= \sup\left\{ \frac{\|f(v)\|}{\|v\|} : v \in V \text{ mit } 0 < \|v\| \leq 1 \right\} \ . \end{aligned}$$

Nach Lemma 1.5 existiert dieses Supremum.

Übungsaufgabe: 1) Der Vektorraum $\mathcal{L}(V,W)$ aller stetigen linearen Abbildungen von V nach W ist bezüglich der Operatornorm ein normierter Vektorraum. Ist W ein Banachraum, so ist es auch $\mathcal{L}(V,W)$.
2) Für $g \in \mathcal{L}(U,V)$ und $f \in \mathcal{L}(V,W)$ gilt $\|f \circ g\| \leq \|f\| \cdot \|g\|$.

Bemerkung 8.6: *Sei V ein Banachraum und $f \in \mathcal{L}(V,V)$; ist $\|f\| < 1$, so besitzt $id_V + f$ ein Inverses in $\mathcal{L}(V,V)$ und $\|(id_V + f)^{-1}\| = 1$.*
Beweis: Betrachte $\sum\limits_{i\geq 0}(-f)^i$.

Satz 8.7: *Seien $V \neq 0$ ein Banachraum und $f \in \mathcal{L}(V,V)$ ein injektiver Fréchetoperator; dann gilt:*
i. f besitzt ein Linksinverses $\tilde{f} \in \mathcal{L}(V,V)$;
ii. für jedes $g \in \mathcal{L}(V,V)$ mit $\|g\| < \|\tilde{f}\|^{-1}$ gilt:
- *$f+g$ ist ein injektiver Fredholmoperator mit* $\operatorname{ind}(f+g) = \operatorname{ind}(f)$
- *$f+g$ besitzt ein Linksinverses $h \in \mathcal{L}(V,V)$ mit $\|h\| \leq \|\tilde{f}\|$.*

Beweis: i. Nach Satz 8.5 ist $im(f)$ abgeschlossen in V und damit selbst ein Banachraum. Der Satz vom offenen Operator impliziert dann, daß $f : V \longrightarrow im(f)$ ein Homöomorphismus und damit $f^{-1} : im(f) \longrightarrow V$ stetig ist. Wählen wir einen Untervektorraum $V_0 \subseteq V$ mit $V = im(f) \oplus V_0$, so ist die Projektionsabbildung

$$pr : V = im(f) \oplus V_0 \longrightarrow im(f)$$

stetig wegen Lemma 8.4 und damit $\tilde{f} := f^{-1} \circ pr$ ein stetiges Linksinverses zu f.
ii. Wir schreiben

$$f + g = (id_V + g \circ \tilde{f}) \circ f\ .$$

Nach Annahme gilt $\|g \circ \tilde{f}\| \leq \|g\| \cdot \|\tilde{f}\| < 1$. Deswegen (Bem. 8.6) besitzt $id_V + g \circ \tilde{f}$ ein stetiges Inverses, und

$$h := \tilde{f} \circ (id_V + g \circ \tilde{f})^{-1}$$

ist ein stetiges Linksinverses zu $f+g$ mit $\|h\| \leq \|\tilde{f}\| \cdot \|(id_V + g \circ \tilde{f})^{-1}\| = \|\tilde{f}\|$. Insbesondere ist $f+g$ injektiv. Da eine bijektive Abbildung natürlich den Index 0 hat, folgt aus Lemma 8.2, daß h den Index $\operatorname{ind}(h) = \operatorname{ind}(\tilde{f})$ und $f+g$ nach Lemma 8.3 somit den Index

$$\operatorname{ind}(f+g) = -\operatorname{ind}(h) = -\operatorname{ind}(\tilde{f}) = \operatorname{ind}(f)$$

hat.

Satz 8.8: *Sei*

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{h} & W \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ V & \xrightarrow[k]{} & W \end{array}$$

ein kommutatives Quadrat stetiger linearer Abbildungen zwischen Banachräumen (bzw. allgemeiner Frécheträumen); dabei seien f und g Fredholmoperatoren, h sei

injektiv und k habe dichtes Bild; dann gilt:
i. $\mathrm{ind}(f) \leq \mathrm{ind}(g)$;
ii. ist $\mathrm{ind}(f) = \mathrm{ind}(g)$, *so induziert h bzw. k einen Isomorphismus $ker(f) \cong ker(g)$ bzw. $coker(f) \cong coker(g)$.*
Beweis: Wir betrachten das kommutative Diagramm mit exakten Zeilen

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & ker(f) \arrow[r] \arrow[d, "h_0"'] & V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & V \arrow[r] \arrow[d, "k"'] & coker(f) \arrow[r] \arrow[d, "k_0"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & ker(g) \arrow[r] & W \arrow[r, "g"] & W \arrow[r] & coker(g) \arrow[r] & 0 .
\end{tikzcd}$$

Mit h ist auch seine Einschränkung h_0 injektiv. Damit gilt

$$\dim ker(f) \leq \dim ker(g) .$$

Mit dem Bild von k in W ist auch $im(k_0)$ dicht in $coker(g)$ bezüglich der Quotiententopologie. Nach Satz 8.5 ist die Quotiententopologie auf $coker(g)$ aber hausdorffsch. Also ist der endlich dimensionale Untervektorraum $im(k_0)$ wegen Lemma 1.6 vollständig und damit abgeschlossen in $coker(g)$. Es folgt die Surjektivität von k_0, d. h.

$$\dim coker(f) \geq \dim coker(g) .$$

Beispiele: I) Sei B ein affinoider Ball. Für jedes Polynom $0 \neq Q \in K[x]$ ist die Multiplikation mit Q

$$\mathcal{A}(B) \xrightarrow{Q\cdot} \mathcal{A}(B)$$

ein injektiver Fredholmoperator mit

$$-\mathrm{ind}(Q\cdot) = \text{ Anzahl der Nullstellen (mit Multiplizität) von } Q \text{ in } B(\widehat{\overline{K}}) .$$

Beweis: Wegen Lemma 6.6 brauchen wir nur den Fall $B = B_1(0)$ zu betrachten. Außerdem können wir Q sicherlich als normiert voraussetzen. Nach dem Vorbereitungssatz 6.8 besitzt jede Funktion $\neq 0$ in $\mathcal{A}(B)$ höchstens endlich viele Nullstellen. Also ist der betrachtete Operator injektiv. Wegen Lemma 8.2 können wir Q als irreduzibel annehmen. Besitzt Q keine Nullstellen in $B(\widehat{\overline{K}})$, so folgt aus Satz 6.9, daß $Q \in \mathcal{A}(B)^\times$; also ist $\mathrm{ind}(Q\cdot) = 0$. Betrachten wir den anderen Fall. Wegen der Irreduzibilität von Q und Satz 1.7 liegen dann sämtliche Nullstellen von Q (sie sind konjugiert über K) in $B_1(0)(\widehat{\overline{K}})$. Einerseits ist also

$$\dim coker(Q\cdot) = \deg(Q)$$

zu zeigen. Andererseits ist Q nun aber ein normiertes Polynom in $o[x]$. Die im Divisionssatz 6.7 auftretende Zahl d ist deswegen gleich dem Grad von Q. Es folgt nun aus dem Divisionssatz, daß die natürliche Abbildung

$$K[x]/QK[x] \xrightarrow{\cong} \mathcal{A}_1/Q\mathcal{A}_1 = coker(Q\cdot)$$

bijektiv ist. Bekanntermaßen ist die linke Seite eine Körpererweiterung von K vom Grade $\deg(Q)$.
II) Sei K algebraisch abgeschlossen, $0 \neq Q \in K[x]$ und B^- ein affinoider offener Ball. Dann ist $\mathcal{A}(B^-) \xrightarrow{Q\cdot} \mathcal{A}(B^-)$ ebenfalls ein injektiver Fredholmoperator mit

$$-\mathrm{ind}(Q\cdot) = \text{ Anzahl der Nullstellen von } Q \text{ in } B^- \ .$$

Beweis: Sei etwa $B^- = B_r^-(a)$. Wähle eine Folge $r_1 < \ldots < r_j < \ldots < r$ in $|K^\times|$, welche gegen r konvergiert. Die Multiplikation mit Q ist auf allen $\mathcal{A}_{r_j}(a)$ und damit auf $\mathcal{A}(B^-)$ injektiv. Wegen Lemma 8.2 können wir annehmen, daß $Q(x) = x - \beta$ ein Linearfaktor ist. Für $\beta \notin B^-$ ist Q eine Einheit in allen $\mathcal{A}_{r_j}(a)$ und damit auch in $\mathcal{A}(B^-)$. Für $\beta \in B^-$ induziert $f \longmapsto f(\beta)$ einen Isomorphismus

$$\mathcal{A}(B^-)/Q\mathcal{A}(B^-) = \mathcal{A}(B_r^-(\beta))/(x-\beta)\mathcal{A}(B_r^-(\beta)) \cong K \ .$$

Kap. II Differentialgleichungen

In diesem Kapitel ist K ein fixierter nicht-archimedischer Körper der Charakteristik 0. Wir fixieren außerdem einen affinoiden Ball $B = B_r(a)$ und Polynome $P \neq 0$ und Q in $K[x]$. Ziel dieses Kapitels ist das Studium des Differentialoperators

$$\begin{array}{rccl} D = D_{P,Q}: & \mathcal{A}(B) & \longrightarrow & \mathcal{A}(B) \\ & f & \longmapsto & P \cdot \dfrac{df}{dx} - Q \cdot f \ . \end{array}$$

§9 Generische Lösungen

Sei L/K eine Erweiterung von K.

Erinnerung: Die formalen Potenzreihen $f(X) = \sum\limits_{n\geq 0} c_n X^n$ mit Koeffizienten $c_n \in L$ bilden einen Ring $L[[X]]$. Die Reihe $f(X)$ ist eine Einheit in $L[[X]]$ genau dann, wenn $c_0 = f(0) \neq 0$.

Definition: *Der Konvergenzradius* $0 \leq \varepsilon_f \leq \infty$ *der formalen Potenzreihe* $f(X) = \sum\limits_{n\geq 0} c_n X^n \in L[[X]]$ *ist*

$$\varepsilon_f := \sup\{\varepsilon \geq 0 : \lim_{n\longrightarrow\infty} |c_n|\varepsilon^n = 0\} \ .$$

Lemma 9.1: *i.* $\varepsilon_f = \sup\{\varepsilon \geq 0 : \sup_{n\geq 0} |c_n|\varepsilon^n < \infty\}$;
ii. $\varepsilon_f = (\overline{\lim_{n\longrightarrow\infty}} |c_n|^{\frac{1}{n}})^{-1}$.
Beweis: i. Bezeichne $\tilde{\varepsilon}_f$ die rechte Seite der Behauptung. Trivialerweise gilt $\varepsilon_f \leq \tilde{\varepsilon}_f$. Sei also $\varepsilon \geq 0$ so, daß $\{|c_n|\varepsilon^n\}_{n\geq 0}$ beschränkt ist. Für jedes $0 \leq \varepsilon' < \varepsilon$ gilt dann $\lim_{n\longrightarrow\infty} |c_n|\varepsilon'^n = 0$. Damit ist $\varepsilon' \leq \varepsilon_f$, folglich $\varepsilon \leq \varepsilon_f$ und somit $\tilde{\varepsilon}_f \leq \varepsilon_f$.
ii. Bezeichne r_f die rechte Seite der Behauptung. Für $\varepsilon > r_f$ gilt

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \sup_{k\geq n}(|c_k|\varepsilon^k)^{\frac{1}{k}} = \varepsilon \cdot \lim_{n\longrightarrow\infty} \sup_{k\geq n} |c_k|^{\frac{1}{k}} = \frac{\varepsilon}{r_f} > 1 \ .$$

Folglich sind die Glieder der monoton fallenden Folge $(\sup_{k\geq n}(|c_k|\varepsilon^k)^{\frac{1}{k}})_{n\geq 0}$ sämtlich > 1 und damit $|c_k|\varepsilon^k > 1$ für unendlich viele k. Also ist $(|c_n|\varepsilon^n)_{n\geq 0}$ keine Nullfolge, was $\varepsilon \geq \varepsilon_f$ und folglich $\varepsilon_f \leq r_f$ bedeutet. Sei nun andererseits $0 \leq \varepsilon < r_f$. Dann ergibt sich umgekehrt, daß ein $N \in \mathbb{N}$ existiert mit

$$\sup_{k\geq N}(|c_k|\varepsilon^k)^{\frac{1}{k}} < 1 \ .$$

Folglich ist die Folge $(|c_n|\varepsilon^n)_{n\geq 0}$ beschränkt, was wegen i. aber $\varepsilon \leq \varepsilon_f$ und somit $\varepsilon_f \geq r_f$ bedeutet.

Wir fixieren einen Punkt $y \in L$ mit $P(y) \neq 0$. Offensichtlich macht D auch Sinn als Operator auf den formalen Potenzreihen $L[[X-y]]$. Wann genügt ein $0 \neq u \in L[[X-y]]$ der Gleichung $D(u) = 0$?
Die formale Taylorformel besagt

$$u = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} \left(\left(\frac{d}{dx} \right)^n u \right) (y) \cdot (X-y)^n \ .$$

Wegen $P(y) \neq 0$ liegt die rationale Funktion $R_1 := \frac{Q}{P}$ in $L[[X-y]]$. Die Gleichung $D(u) = 0$ ist also gleichbedeutend mit

$$\frac{du}{dX} = R_1 \cdot u \ .$$

Wir definieren rekursiv rationale Funktionen $R_n \in K(X)$ für $n \geq 0$ durch

$$R_0 := 1,\ R_{n+1} := \frac{1}{n+1} \left(\frac{dR_n}{dX} + R_n \cdot R_1 \right) \ .$$

Kein R_n besitzt einen Pol in y. Aus der Gleichung $D(u) = 0$ folgt deswegen induktiv, daß gilt

$$\frac{1}{n!} \cdot \left(\left(\frac{d}{dX} \right)^n u \right) = R_n \cdot u$$

für alle $n \geq 0$. Damit haben wir folgendes bewiesen.

Lemma 9.2: *Die Lösungen in $L[[X-y]]$ der Gleichung $D(u)=0$ sind genau die skalaren Vielfachen der Potenzreihe*

$$u_y := \sum_{n\geq 0} R_n(y)\cdot (X-y)^n \ .$$

Übungsaufgabe: $\varepsilon_{u_y} > 0$.

Demnach ist

$$\begin{array}{rcl} \varepsilon(D,.): \{y\in L:\ P(y)\neq 0\} & \longrightarrow & (0,\infty] \\ y & \longmapsto & \varepsilon_{u_y} = (\overline{\lim\limits_{n\longrightarrow\infty}} |R_n(y)|^{\frac{1}{n}})^{-1} \end{array}$$

eine wichtige dem Differentialoperator zugeordnete Funktion. Es ist allerdings zweckmäßig, eine Modifikation dieser Funktion einzuführen. Wir bemerken zunächst, daß wegen der Multiplikativität von $|.|_a(\varepsilon)$ die Zahl

$$|\frac{S}{T}|_a(\varepsilon) := \frac{|S|_a(\varepsilon)}{|T|_a(\varepsilon)}$$

für jedes $\varepsilon>0$ und jede rationale Funktion $\frac{S}{T}\in K(X)$ wohldefiniert ist. Wir definieren nun die *Konvergenzradiusfunktion* des Differentialoperators D durch

$$\begin{array}{rcl} \rho_a(D,.): \ [0,\infty) & \longrightarrow & [0,\infty) \\ \varepsilon & \longmapsto & \min(\varepsilon, (\overline{\lim\limits_{n\longrightarrow\infty}} |R_n|_a(\varepsilon)^{\frac{1}{n}})^{-1}) \ . \end{array}$$

Lemma 9.3: *Sei $I\subseteq\mathbb{R}$ ein Intervall, und sei $\{\phi_k: I\longrightarrow\mathbb{R}\}_{k\in\mathbb{N}}$ eine Familie von stetigen, stückweise linearen Funktionen, deren sämtliche Steigungen eine beschränkte Menge bilden; dann ist $\phi(t):=\inf\limits_{k\in\mathbb{N}}\phi_k(t)$ eine stetige Funktion $\phi: I\longrightarrow[-\infty,\infty)$.*

Beweis: Wir wählen eine Konstante $C>0$, so daß sämtliche Steigungen der ϕ_k zwischen $-C$ und C liegen. Für beliebige Punkte $t_1<t_2$ in I und beliebiges $k\in\mathbb{N}$ gilt dann

$$-C \leq \frac{\phi_k(t_1)-\phi_k(t_2)}{t_1-t_2} \leq C \ .$$

1. Fall: $\phi(t) > -\infty$ für alle $t\in I$. Für beliebiges $t_1<t_2$ in I haben wir dann

$$\begin{aligned} \frac{\phi(t_1)-\phi(t_2)}{t_1-t_2} &\geq \frac{\phi_k(t_1)-\phi(t_2)}{t_1-t_2} = \frac{\phi_k(t_1)-\phi_k(t_2)}{t_1-t_2} + \frac{\phi_k(t_2)-\phi(t_2)}{t_1-t_2} \\ &\geq -C + \frac{\phi_k(t_2)-\phi(t_2)}{t_1-t_2} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \frac{\phi(t_1)-\phi(t_2)}{t_1-t_2} &\leq \frac{\phi(t_1)-\phi_k(t_2)}{t_1-t_2} = \frac{\phi(t_1)-\phi_k(t_1)}{t_1-t_2} + \frac{\phi_k(t_1)-\phi_k(t_2)}{t_1-t_2} \\ &\leq \frac{\phi(t_1)-\phi_k(t_1)}{t_1-t_2} + C \ . \end{aligned}$$

Da k so gewählt werden kann, daß $\phi_k(t_2)$ bzw. $\phi_k(t_1)$ beliebig nahe bei $\phi(t_2)$ bzw. $\phi(t_1)$ liegt, folgt

$$|\phi(t_1) - \phi(t_2)| \leq C \cdot |t_1 - t_2| \ ,$$

was insbesondere die Stetigkeit von ϕ bedeutet.
2. Fall: $\phi(t_0) = -\infty$ für ein $t_0 \in I$. Zu jedem $N \in \mathbb{N}$ existiert dann ein $k \in \mathbb{N}$ mit $\phi_k(t_0) \leq -N$. Für jedes fixierte $t \neq t_0$ in I erhalten wir

$$\phi_k(t) = \phi_k(t) - \phi_k(t_0) + \phi_k(t_0) \leq C \cdot |t - t_0| - N \ .$$

Daraus folgt $\phi(t) = -\infty$.

Satz 9.4: *Die Funktion $\rho_a(D, .)$ ist stetig.*
Beweis: Wegen $0 \leq \rho_a(D, \varepsilon) \leq \varepsilon$ für $\varepsilon > 0$ ist die Funktion natürlich stetig in 0. Wir setzen

$$d := \max(\deg(P) - 1, \deg(Q)) \ .$$

Aus

$$P^{n+1}R_{n+1} = \frac{1}{n+1}\left(P \cdot \frac{d(P^n R_n)}{dX} - n\frac{dP}{dX} \cdot P^n R_n - P R_1 P^n R_n\right)$$

folgt induktiv, daß $P^n R_n$ ein Polynom vom Grade $\leq nd$ ist. Deswegen impliziert Satz 7.3, daß die Steigungen der stetigen, stückweise linearen und konvexen Funktion $v(P^n R_n)_a$ zwischen 0 und nd liegen; dabei beachte man, daß die "Anfangssteigung" von $v(P^n R_n)_a$ gleich der Multiplizität von a als Nullstelle von $P^n R_n$ ist. Analog liegen die Steigungen von $v(P^n)_a$ zwischen 0 und $n(d+1)$. Folglich ist die Funktion $\log(|R_n|_a^{-\frac{1}{n}}(\exp(.)))$ auf $\mathbb{R}$ stetig und stückweise linear mit Steigungen zwischen $-d$ und $d+1$. Aus Lemma 9.3 ergibt sich weiter, daß für jedes $n \geq 0$ die Funktion $\inf\limits_{k \geq n} \log(|R_k|_a^{-\frac{1}{k}}(\exp(.)))$ auf $\mathbb{R}$ und damit die Funktion

$$\psi_n := \inf_{k \geq n} |R_k|_a^{-\frac{1}{k}}$$

auf $(0, \infty)$ stetig sind. Die Funktionenfolge $(\psi_n)_{n \geq 0}$ ist monoton wachsend mit

$$\rho_a(D, .) = \min(id, \lim_{n \longrightarrow \infty} \psi_n) = \lim_{n \longrightarrow \infty} \min(id, \psi_n) \ .$$

Folglich ist $\rho_a(D, .)$ stetig auf $(0, \infty)$.

Im Folgenden sei $B^- := B_r^-(a)$.

Lemma 9.5: *Hat P keine Nullstelle in $B^-(\widehat{\overline{K}})$, so gilt*

$$\varepsilon(D, a) \geq \rho_a(D, r) \ .$$

Beweis: Im Beweis von Satz 9.4 haben wir gesehen, daß $R_n = \frac{Q_n}{P^n}$ mit $Q_n \in K[X]$ gilt. Also ist

$$|R_n(a)| = \frac{|Q_n(a)|}{|P(a)|^n} \ .$$

Trivialerweise gilt $|Q_n(a)| \leq |Q|_a(r)$. Da P keine Nullstelle in $B^-(\widehat{\overline{K}})$ besitzt, folgt auch Satz 6.9.iii (für den Grundkörper $\widehat{\overline{K}}$), daß die Funktion $|P(.)|$ konstant ist auf $B^-(\widehat{\overline{K}})$ mit Wert $|P(a)|$. Aus Lemma 7.2 folgt weiter, daß $|P|_a(.)$ konstant ist auf $(0,r)$ mit Wert $|P(a)|$. Da die Funktion $|P|_a(.)$ nach Satz 7.3 stetig ist auf $(0,\infty)$, ergibt sich schließlich

$$|P|_a(r) = |P(a)| \ .$$

Also erhalten wir

$$|R_n(a)| \leq \frac{|Q|_a(r)}{|P|_a(r)^n} = |R_n|_a(r) \ .$$

Lemma 9.6: *Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert eine algebraisch abgeschlossene Erweiterung L/K und ein $y \in L$ mit $|y-a| = \varepsilon$, so daß alle Punkte des offenen Balles $B_\varepsilon^-(y)(L)$ transzendent über K sind.*

Beweis: Wir verwenden ohne Beweis die Tatsache, daß eine algebraisch abgeschlossene Erweiterung L/K existiert mit $|L| = \mathbb{R}_{\geq 0}$ und so, daß der Restklassenkörper k_L von L eine echte Erweiterung des Restklassenkörpers $\overline{k}$ von $\widehat{\overline{K}}$ ist.

1. Fall: Es gilt $\varepsilon \notin |\widehat{\overline{K}}|$. Nach Wahl von L existiert ein $y \in L$ mit $|y-a| = \varepsilon$. Jedes $x \in B_\varepsilon^-(y)(L)$ erfüllt $|x-a| = \varepsilon$ und kann deswegen nicht in $\widehat{\overline{K}}$ liegen.

2. Fall: Es existiert ein $c \in \widehat{\overline{K}}$ mit $|c| = \varepsilon$. Nach Wahl von L existiert ein $b \in L$ mit $|b| = 1$ und so, daß das Bild $\overline{b}$ von b in k_L nicht in $\overline{k}$ enthalten ist. Sei $y \in L$ mit $|y-a-bc| < \varepsilon = |c| = |bc|$. Dann ist $|y-a| = |bc| = \varepsilon$. Für jedes $x \in B_\varepsilon^-(y)(L)$ ist $|x-a-bc| < \varepsilon = |c|$ und damit $|\frac{x-a}{c} - b| < 1$. Also ist das Bild von $\frac{x-a}{c}$ in k_L gleich $\overline{b}$ und somit in $\overline{k}$ enthalten. Folglich kann x nicht in $\widehat{\overline{K}}$ liegen.

Ein Paar (L,y) wie im obigen Lemma heißt ein *generischer Punkt* des Balles $B_\varepsilon(a)$. Natürlich gilt $y \in B_\varepsilon(a)(L)$. Ein Polynom $0 \neq S \in K[X]$ kann keine Nullstellen in $B_\varepsilon^-(y)(L)$ haben (da alle Nullstellen algebraisch über K sind). Wie im Beweis von Lemma 9.5 folgt daraus

$$|S|_a(\varepsilon) = |S|_y(\varepsilon) = |S(y)| \ .$$

Insbesondere gilt

$$|R_n|_a(\varepsilon) = |R_n(y)|$$

für alle $n \geq 0$, was die nachfolgende Aussage beweist.

Lemma 9.7: *Sei $\varepsilon > 0$, und sei (L,y) ein generischer Punkt von $B_\varepsilon(a)$; dann gilt*

$$\rho_a(D,\varepsilon) = \min(\varepsilon, \varepsilon(D,y)) \ .$$

Satz 9.8: *Ist $ker(D|\mathcal{A}(B^-)) \neq 0$, so gilt:*
i. $ker(D|\mathcal{A}(B^-)) = K \cdot v$ für ein $v \in \mathcal{A}(B^-)$;
ii. jede Nullstelle von v (in einer beliebigen Erweiterung von K) ist auch eine Nullstelle von P;

iii. $\rho_a(D,r) = r$.
Beweis: Wir fixieren ein $0 \neq v \in ker(D|\mathcal{A}(B^-))$. Sei (L,y) ein beliebiges Paar mit $y \in B^-(L)$ und $P(y) \neq 0$. Wir können v als eine Lösung von $D(u) = 0$ in $L[[X-y]]$ mit Konvergenzradius $\geq r$ auffassen. Nach Lemma 9.2 muß $v = v(y) \cdot u_y$ gelten. Also ist einerseits $v(y) \neq 0$, und andererseits hat u_y einen Konvergenzradius $\varepsilon(D,y) \geq r$. Im Spezialfall $L = K$ ergibt sich somit

$$ker(D|\mathcal{A}(B^-)) = K \cdot u_y = K \cdot v \ .$$

Ist hingegen (L,y) ein generischer Punkt von $B_\varepsilon(a)$ mit $\varepsilon = |y-a| < r$, so folgt dann aus Lemma 9.7, daß $\rho_a(D,\varepsilon) = \varepsilon$. Die Stetigkeitsaussage des Satzes 9.4 impliziert schließlich $\rho_a(D,r) = r$.

Satz 9.9: *Hat P keine Nullstelle in $B^-(\widehat{\overline{K}})$, so sind äquivalent:*
i. $ker(D|\mathcal{A}(B^-)) \neq 0$*;*
ii. $ker(D|\mathcal{A}(B^-)) = K \cdot v$ *für ein* $v \in \mathcal{A}(B^-)^\times$*;*
iii. $\rho_a(D,r) = r$*.*
Beweis: Die Implikation von i. nach iii. und die Äquivalenz von i. und ii. sind in Satz 9.8 enthalten. Zu Letzterer ist nur noch zu bemerken, daß jedes $v \in \mathcal{A}(B^-)$, welches keine Nullstelle in $B^-(\widehat{\overline{K}})$ besitzt, notwendigerweise invertierbar ist. Wegen Satz 6.9 gilt sicherlich $v \in \mathcal{A}(B^-(\widehat{\overline{K}}))^\times$. Wegen $v(a) \neq 0$ haben wir aber auch $v \in K[[X-a]]^\times$. Also ist $v^{-1} \in \mathcal{A}(B^-(\widehat{\overline{K}})) \cap K[[X-a]] = \mathcal{A}(B^-)$. Es bleibt die Implikation von iii. nach i. zu zeigen. Auf Grund der zusätzlichen Voraussetzung folgt mit Lemma 9.5 aus iii., daß $\varepsilon(D,a) \geq r$. Damit liegt die Reihe u_a aus Lemma 9.2 in $ker(D|\mathcal{A}(B^-))$ und ist $\neq 0$ wegen $u_a(a) = 1$.

Satz 9.10: $\rho_a(D_{P,Q},.) = \rho_a(D_{P,-Q},.)$.
Beweis: Sei $\varepsilon > 0$ und sei (L,y) ein generischer Punkt von $B_\varepsilon(a)$. Die Lösung $u_y^{(P,Q)} \in L[[X-y]]$ der Gleichung $D(u) = 0$ aus Lemma 9.2 hat den Konvergenzradius $\varepsilon(D_{P,Q},y)$. Wegen $u_y^{(P,Q)}(y) = 1$ existiert $(u_y^{(P,Q)})^{-1} \in L[[X-y]]$. Man rechnet sofort nach, daß

$$D_{P,-Q}((u_y^{(P,Q)})^{-1}) = 0$$

gilt. Aus der Eindeutigkeitsaussage in Lemma 9.2 folgt dann

$$(u_y^{(P,Q)})^{-1} = u_y^{(P,-Q)} \ .$$

Nach Lemma 9.7 ist $\rho := \rho_a(D_{P,Q},\varepsilon) = \min(\varepsilon, \varepsilon(D_{P,Q},y))$. Mit P hat auch $u_y^{(P,Q)}$ keine Nullstellen in $B_\rho^-(y)(L)$ (vgl. den Beweis von Satz 9.8). Aus Satz 6.9 (angewendet auf L als Grundkörper) ergibt sich deswegen, daß $u_y^{(P,Q)}$ in $\mathcal{A}(B_\rho^-(y)(L))$ invertierbar ist. Somit genügt der Konvergenzradius von $u_y^{(P,-Q)}$ der Ungleichung

$$\varepsilon(D_{P,-Q},y) \geq \rho = \rho_a(D_{P,Q},\varepsilon) \ .$$

Nocheinmal mit Lemma 9.7 folgern wir daraus, daß

$$\rho_a(D_{P,-Q},\varepsilon) = \min(\varepsilon, \varepsilon(D_{P,-Q},y)) \geq \rho_a(D_{P,Q},\varepsilon) \ .$$

Aus Symmetriegründen muß dann aber schon Gleichheit gelten.

Lemma 9.11: *Sei $\varepsilon > 0$, und sei (L, y) ein generischer Punkt von $B_\varepsilon(a)$; dann gilt*

$$\rho_a(D, \varepsilon) \leq |R_n(y)|^{-\frac{1}{n}} = |R_n|_a(\varepsilon)^{-\frac{1}{n}} \quad \textit{für alle } n \geq 1 \ .$$

Beweis: Wir kürzen $\rho := \rho_a(D, \varepsilon)$ ab und betrachten die Lösung

$$u_y = \sum_{n \geq 0} R_n(y)(X - y)^n$$

in $L[[X - y]]$ der Gleichung $D(u) = 0$ aus Lemma 9.2. Ganz analog wie im letzten Beweis stellen wir fest, daß u_y keine Nullstellen in $B_\rho^-(y)(L)$ besitzt, und daß deswegen aus Satz 6.9

$$|u_y(x)| = |u_y(y)| = 1 \quad \text{für alle } x \in B_\rho^-(y)(L)$$

folgt. Das Maximumprinzip 6.4 impliziert dann

$$\max_{n \geq 0} |R_n(y)| \cdot \delta^n = 1$$

für alle $0 < \delta < \rho$, also $\delta^n \leq |R_n(y)|^{-1}$ und damit $\rho \leq |R_n(y)|^{-\frac{1}{n}}$. Die Identität $|R_n(y)| = |R_n|_a(\varepsilon)$ hatten wir schon vor Lemma 9.7 diskutiert.

§10 Der Fall $\rho_a(D, r) < r$

Bemerkung 10.1: *Die rationale Funktion $0 \neq \frac{S}{T} \in K(X)$ habe keinen Pol in $B(\widehat{\overline{K}})$; dann besitzt der Multiplikationsoperator*

$$\mathcal{A}(B) \xrightarrow{\frac{S}{T}\cdot} \mathcal{A}(B)$$

ein stetiges Linksinverses der Operatornorm $\|\frac{S}{T}\|_B^{-1} = |\frac{S}{T}|_a(r)^{-1}$.

Beweis: Wir können annehmen, daß T keine Nullstellen in $B(\widehat{\overline{K}})$ besitzt. Nach Satz 6.9 ist dann $T \in \mathcal{A}(B)^\times$, also $\frac{S}{T} \in \mathcal{A}(B)$, und damit der Multiplikationsoperator $\frac{S}{T}\cdot$ wohldefiniert und injektiv auf $\mathcal{A}(B)$. Wegen des Maximumprinzips 6.4 und Corollar 6.5 gilt

$$\|\frac{S}{T} \cdot f\|_B = \|\frac{S}{T}\|_B \cdot \|f\|_B = |\frac{S}{T}|_a(r) \cdot \|f\|_B \quad \text{für alle } f \in \mathcal{A}(B)$$

und damit

$$\|\frac{S}{T} \cdot \| = \|\frac{S}{T}\|_B = |\frac{S}{T}|_a(r) \ .$$

Ist nun $\imath$ ein beliebiges stetiges Linksinverses zu $\frac{S}{T}\cdot$, so haben wir wegen $\|\imath\| \cdot \|\frac{S}{T} \cdot \| \geq \|id_{\mathcal{A}(B)}\| = 1$ jedenfalls

$$\|\imath\| \geq \|\frac{S}{T}\|_B^{-1} \ .$$

Also genügt es, ein stetiges Linksinverses $\imath$ mit $\|\imath\| \leq \|\frac{S}{T}\|_B^{-1}$ zu konstruieren. Wegen Lemma 6.6 genügt es außerdem, dieses im Spezialfall $B = B_1(0)$ zu tun. Aus dem Divisionssatz 6.7 erhalten wir dann für jedes $f \in \mathcal{A}_1$ eindeutig bestimmte $q(f) \in \mathcal{A}_1$ und $R(f) \in K[X]$ vom Grade $< d$ mit $f = q(f) \cdot S + R(f)$ und $\|f\|_B = \max(\|q(f)\|_B \cdot \|S\|_B, \ \|R(f)\|_B)$. Also ist

$$\begin{array}{rccc} \imath_0 : & \mathcal{A}_1 & \longrightarrow & \mathcal{A}_1 \\ & f & \longmapsto & q(f) \end{array}$$

linksinvers zu $S\cdot$ mit Operatornorm $\leq \|S\|_B^{-1}$. Schließlich ist $\imath := \imath_0 \circ (T\cdot)$ linksinvers zu $\frac{S}{T}\cdot$ mit Operatornorm

$$\leq \|S\|_B^{-1} \cdot \|T\|_B = \|\frac{S}{T}\|_B^{-1} .$$

In diesem Abschnitt setzen wir stets $\rho_a(D, r) < r$ voraus! Die zu dem Differentialoperator $D^* := D_{P,-Q}$ gehörigen rationalen Funktionen $R_n^* \in K(X)$ sind rekursiv gegeben durch

$$R_0^* := 1, \ R_1^* := -\frac{Q}{P}, \ R_{n+1}^* := \frac{1}{n+1} \left(\frac{dR_n^*}{dX} + R_n^* \cdot R_1^* \right) .$$

Im Beweis von Satz 9.4 haben wir gesehen, daß gilt

$$R_n^* = \frac{Q_n^*}{P^n} \quad \text{mit } Q_n^* \in K[X] .$$

Für jedes $m \in \mathbb{N}$ betrachten wir den Differentialoperator

$$D_m := \sum_{i=0}^{m} \frac{1}{i!} \ P^i Q_{m-i}^* \cdot \left(\frac{d}{dX} \right)^i$$

auf $\mathcal{A}(B)$. Ersichtlich ist $D_1 = D = D_{P,Q}$. Allgemein gilt

$$(*) \qquad D_m = \frac{P^m \cdot (P^{-1}D)^m}{m!} .$$

Dies folgt per Induktion aus der Rechnung

$$\frac{(P^{-1} \cdot D)^{m+1}}{(m+1)!} = \frac{P^{-1} \cdot D}{m+1} \left(\sum_{i=0}^{m} \frac{1}{i!} \ R_{m-i}^* \cdot \left(\frac{d}{dX} \right)^i \right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{m+1}\left[\sum_{i=0}^{m}\frac{1}{i!}\left(\frac{dR^*_{m-i}}{dX}\cdot\left(\frac{d}{dX}\right)^i + R^*_{m-i}\cdot\left(\frac{d}{dX}\right)^{i+1} + R^*_1 R^*_{m-i}\cdot\left(\frac{d}{dX}\right)^i\right)\right] \\
&= \frac{1}{m+1}\left[\sum_{i=0}^{m}\frac{1}{i!}\left((m+1-i)\,R^*_{m+1-i}\cdot\left(\frac{d}{dX}\right)^i + R^*_{m-i}\cdot\left(\frac{d}{dX}\right)^{i+1}\right)\right] \\
&= \frac{1}{m+1}\left[\sum_{i=0}^{m+1}\frac{m+1-i}{i!}\;R^*_{m+1-i}\cdot\left(\frac{d}{dX}\right)^i + \sum_{i=1}^{m+1}\frac{1}{(i-1)!}R^*_{m+1-i}\cdot\left(\frac{d}{dX}\right)^i\right] \\
&= \frac{1}{m+1}\left[\sum_{i=0}^{m+1}\frac{m+1-i}{i!}\;R^*_{m+1-i}\cdot\left(\frac{d}{dX}\right)^i + \sum_{i=0}^{m+1}\frac{i}{i!}\;R^*_{m+1-i}\cdot\left(\frac{d}{dX}\right)^i\right] \\
&= \sum_{i=0}^{m+1}\frac{1}{i!}\;R^*_{m+1-i}\cdot\left(\frac{d}{dX}\right)^i \\
&= P^{-(m+1)}\cdot\sum_{i=0}^{m+1}\frac{1}{i!}\;P^i Q^*_{m+1-i}\cdot\left(\frac{d}{dX}\right)^i \\
&= P^{-(m+1)}D_{m+1}\ .
\end{aligned}
$$

Im Beweis des nachfolgenden Lemmas werden wir sehen, daß auf Grund unserer Voraussetzung $R^*_n \neq 0$ und damit $Q^*_n \neq 0$ gilt für alle $n \geq 1$.

Lemma 10.2: *Im Falle $\rho_a(D,r) < r$ haben wir:*
i. D ist ein injektiver Fredholmoperator;
ii. es existiert ein $m \geq 1$ mit $|R^*_m|_a(r)r^m > \max\limits_{0\leq i<m} |R^*_i|_a(r)r^i$;
iii. für jedes m wie in ii. gilt

$$\operatorname{ind}(D|\mathcal{A}(B)) = -\frac{1}{m}\cdot\ (\textit{Anzahl der Nullstellen von } Q^*_m \textit{ in } B(\widehat{\overline{K}}))\ .$$

Beweis: Wegen Satz 9.10 ist $\rho_a(D^*,r) = \rho_a(D,r) < r$ und somit

$$(\overline{\lim_{n\longrightarrow\infty}}\, |R^*_n|_a(r)^{\frac{1}{n}})^{-1} < r\ .$$

Da mit $R^*_m = 0$ auch $R^*_n = 0$ für alle $n \geq m$ gelten würde, ergibt sich einerseits

$$R^*_n \neq 0 \quad \text{für alle } n \geq 0\ .$$

Andererseits folgt

$$\sup_{n\geq 0} |R^*_n|_a(r)r^n = \infty\ .$$

Also muß es ein $m \geq 1$ mit der in ii. behaupteten Eigenschaft geben, und wir halten ein solches m fest. Wie in Lemma 7.1 sieht man, daß der Differentialoperator $\frac{1}{i!}\left(\frac{d}{dX}\right)^i$ auf $\mathcal{A}(B)$ eine Operatornorm $\leq r^{-i}$ besitzt. Also ist

$$\begin{aligned}
\| \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{i!} \; P^i Q^*_{m-i} \cdot \left(\frac{d}{dX}\right)^i \| \quad &\leq \quad \max_{1\leq i\leq m} |P^m R^*_{m-i}|_a(r) \cdot r^{-i} \\
&= \quad \max_{0\leq i<m} r^{i-m} \cdot |R^*_i|_a(r) \cdot |P^m|_a(r) \\
&< \quad |R^*_m|_a(r) \cdot |P^m|_a(r) = |Q^*_m|_a(r) \ .
\end{aligned}$$

Der Operator D_m auf $\mathcal{A}(B)$ zerlegt sich folglich in

$$D_m = Q^*_m + \tilde{D}_m$$

mit $\|\tilde{D}_m\| < \|Q^*_m \cdot\|$. Wegen $Q^*_m \neq 0$ ist $Q^*_m \cdot$ nach §8 Beispiel I) ein injektiver Fredholmoperator mit

$$-\mathrm{ind}(Q^*_m \cdot) = \text{ Anzahl der Nullstellen von } Q^*_m \text{ in } B(\widehat{\overline{K}}) \ .$$

Wegen Bemerkung 10.1 können wir nun Satz 8.7 anwenden und erhalten jedenfalls, daß D_m ein injektiver Fredholmoperator ist mit

$$-\mathrm{ind}(D_m) = -\mathrm{ind}(Q^*_m \cdot) = \text{ Anzahl der Nullstellen von } Q^*_m \text{ in } B(\widehat{\overline{K}}) \ .$$

Auf Grund der Voraussetzung $\rho_a(D,r) < r$ und Satz 9.8 muß D injektiv sein. Aus $(*)$ folgt

$$m \cdot D_m = P^{m-1} D P^{-(m-1)} \circ D_{m-1} \quad \text{und} \quad P^{m-1} D P^{-(m-1)} = D_{P,(m-1)\frac{dP}{dX}+Q} \ .$$

Da D_m schon als Fredholmoperator erkannt ist, ist der Cokern von D_m und damit auch der Cokern von $P^{m-1}DP^{-(m-1)}$ endlich dimensional. Andererseits hat der Kern von $D_{P,(m-1)\frac{dP}{dX}+Q}$ wegen Lemma 9.2 höchstens die Dimension 1. Also ist $P^{m-1}DP^{-(m-1)}$ ein Fredholmoperator, wobei offensichtlich

$$\mathrm{ind}(P^{m-1}DP^{-(m-1)}) = \ \mathrm{ind}(D|P^{-(m-1)}\mathcal{A}(B))$$

gilt. Nach §8 Beispiel I) ist $\mathcal{A}(B)/P\mathcal{A}(B)$ endlich dimensional. In dem kommutativen Diagramm

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{A}(B) \arrow[r, "\subseteq"] \arrow[d, "D"'] & P^{-(m-1)}\mathcal{A}(B) \arrow[r] \arrow[d, "D"'] & P^{-(m-1)}\mathcal{A}(B)/\mathcal{A}(B) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{A}(B) \arrow[r, "\subseteq"] & P^{-(m-1)}\mathcal{A}(B) \arrow[r] & P^{-(m-1)}\mathcal{A}(B)/\mathcal{A}(B) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

hat also die rechte senkrechte Abbildung den Index 0. Also folgt aus Lemma 8.1, daß

$$\mathrm{ind}(P^{m-1}DP^{-(m-1)}) = \ \mathrm{ind}(D|P^{-(m-1)}\mathcal{A}(B)) = \ \mathrm{ind}(D)$$

gilt. Wegen Lemma 8.2 ist damit auch D_{m-1} ein Fredholmoperator mit

$$\mathrm{ind}(D) + \mathrm{ind}(D_{m-1}) = \mathrm{ind}(D_m) .$$

Daraus ergibt sich induktiv, daß D ein Fredholmoperator ist mit

$$m \cdot \mathrm{ind}(D) = \mathrm{ind}(D_m) = - \text{ Anzahl der Nullstellen von } Q_m^* \text{ in } B(\widehat{\overline{K}}) .$$

Lemma 10.3: *Für $i = 0, 1$ seien $r_i \in |K^\times|$ mit $\rho_a(D, r_i) < r_i$ und*

$$j := \mathrm{ind}(D|\mathcal{A}_{r_0}(a)) = \mathrm{ind}(D|\mathcal{A}_{r_1}(a)) ;$$

außerdem habe P keine Nullstellen in $\{x \in \widehat{\overline{K}} : \min(r_0, r_1) < |x - a| < \max(r_0, r_1)\}$; bezeichnet ℓ die Anzahl der Nullstellen von P in $B_{\min(r_0,r_1)}(a)(\widehat{\overline{K}})$, so gilt

$$\rho_a(D, r_0) r_0^{-(j+\ell)} = \rho_a(D, r_1) r_1^{-(j+\ell)} .$$

Beweis: Wegen Lemma 10.2 ist j jedenfalls definiert. Aus Symmetriegründen genügt es, die Ungleichung

$$\rho_a(D, r_0) r_0^{-(j+\ell)} \geq \rho_a(D, r_1) r_1^{-(j+\ell)}$$

zu beweisen. Dazu führen wir die Annahme

$$\rho_a(D, r_0) < \rho_a(D, r_1) \left(\frac{r_0}{r_1} \right)^{j+\ell} =: \rho$$

zum Widerspruch. Mit Satz 9.10 gilt dann

$$\rho_a(D^*, r_0) = \rho_a(D, r_0) < \min(r_0, \rho) =: s$$

und somit

$$\sup_{n \geq 0} |R_n^*|_a(r_0) s^n = \infty .$$

Also existiert ein $m \geq 1$ mit

$$|R_m^*|_a(r_0) s^m > \max_{0 \leq i < m} |R_i^*|_a(r_0) s^i .$$

Es folgt

$$|R_m^*|_a(r_0) \rho^m > \max_{0 \leq i < m} |R_i^*|_a(r_0) \rho^i \geq 1$$

und

$$|R_m^*|_a(r_0) r_0^m > \max_{0 \leq i < m} |R_i^*|_a(r_0) r_0^i .$$

Nach Lemma 10.2 impliziert letztere Ungleichung, daß

$$-mj = \text{ Anzahl der Nullstellen von } Q_m^* \text{ in } B_{r_0}(a)(\widehat{\overline{K}}) .$$

Erstere Ungleichung bedeutet

$$|R_m^*|_a(r_0)\rho_a(D,r_1)^m \left(\frac{r_1}{r_0}\right)^{-m(j+\ell)} = |R_m^*|_a(r_0)\rho^m > 1 \ .$$

Aus der Schwarzschen Ungleichung 7.4 folgt

$$|Q_m^*|_a(r_1) \geq |Q_m^*|_a(r_0) \left(\frac{r_1}{r_0}\right)^{-mj} \ .$$

Für P^m ergibt sich auf Grund unserer Voraussetzung genauer

$$|P^m|_a(r_1) = |P^m|_a(r_0) \left(\frac{r_1}{r_0}\right)^{m\ell} \ .$$

Wir erhalten

$$|R_m^*|_a(r_1) \geq |R_m^*|_a(r_0) \left(\frac{r_1}{r_0}\right)^{-m(j+\ell)}$$

und damit

$$|R_m^*|_a(r_1)\rho_a(D,r_1)^m > 1 \ .$$

Wegen Satz 9.10 ist einerseits $\rho_a(D,r_1) = \rho_a(D^*,r_1)$. Andererseits sei (L,y) ein generischer Punkt von $B_{r_1}(a)$; dann gilt $|R_m^*|_a(r_1) = |R_m^*(y)|$. Also folgt

$$|R_m^*(y)|\rho_a(D^*,r_1)^m > 1 \ ,$$

was ein Widerspruch zu Lemma 9.11 (für D^*) ist.

Es ist zweckmäßig, die logarithmische Version der Konvergenzradiusfunktion

$$v_a(D,.) := \log(\rho_a(D,\exp(.))) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

einzuführen. Sie ist natürlich stetig mit $v_a(D,t) \leq t$. Wir schreiben $d^+v_a(D,t)$ bzw. $d^-v_a(D,t)$ für die rechts- bzw. linksseitige Ableitung von $v_a(D,.)$ im Punkte t (falls sie existiert).

Satz 10.4: *Im Falle $\rho_a(D,r) < r$ existiert die rechtsseitige Ableitung der Funktion $v_a(D,.)$ im Punkte $\log r$ und ist gleich*

$$d^+v_a(D,\log r) = \ \mathrm{ind}(D|\mathcal{A}(B)) + (Anzahl\ der\ Nullstellen\ von\ P\ in\ B(\widehat{\overline{K}})) \ .$$

Beweis: Wähle ein $m \geq 1$ wie in Lemma 10.2.ii. Auf Grund der Stetigkeit der Funktionen $\rho_a(D,.)$ (Satz 9.4) und $|R_n^*|_a(.)$ (Satz 7.3) finden wir ein $\varepsilon_0 > 0$, so daß gilt:
- $\rho_a(D,\rho) < \rho$ für alle $\rho \in [r, r+\varepsilon_0]$;
- $|R_m^*|_a(\rho)\rho^m > \max\limits_{0\leq i<m} |R_i^*|_a(\rho)\rho^i$ für alle $\rho \in [r, r+\varepsilon_0]$;

- P hat keine Nullstellen in $\{x \in \widehat{\widehat{\overline{K}}} : r < |x-a| < r+\varepsilon_0\}$;
- Q_m^* hat keine Nullstellen in $\{x \in \widehat{\widehat{\overline{K}}} : r < |x-a| < r+\varepsilon_0\}$.

Betrachte zunächst ein $r_1 \in [r, r+\varepsilon_0] \cap |K|$. Aus Lemma 10.2 folgt, daß $D|\mathcal{A}_{r_1}(a)$ ein Fredholmoperator ist mit

$$\begin{aligned}\operatorname{ind}(D|\mathcal{A}_1(a)) &= -\frac{1}{m}\cdot \text{ (Anzahl der Nullstellen von } Q_m^* \text{ in } B_{r_1}(a)(\widehat{\widehat{\overline{K}}}))\\ &= -\frac{1}{m}\cdot \text{ (Anzahl der Nullstellen von } Q_m^* \text{ in } B(\widehat{\widehat{\overline{K}}}))\\ &= \operatorname{ind}(D|\mathcal{A}(B))\ .\end{aligned}$$

Also können wir Lemma 10.3 anwenden und erhalten

$$\rho_a(D, r_1) = \rho_a(D, r)\left(\frac{r_1}{r}\right)^k$$

mit

$$k := \operatorname{ind}(D|\mathcal{A}(B)) + (\text{Anzahl der Nullstellen von } P \text{ in } B(\widehat{\widehat{\overline{K}}}))\ .$$

Da sich die Konvergenzradiusfunktion $\rho_a(D, .)$ beim Übergang von K zu $\widehat{\widehat{\overline{K}}}$ nicht ändert, können wir dieses Argument über $\widehat{\widehat{\overline{K}}}$, d. h. für alle $r_1 \in [r, r+\varepsilon_0] \cap |\widehat{\widehat{\overline{K}}}|$ wiederholen. Nach Lemma 1.9 liegt aber $[r, r+\varepsilon_0] \cap |\widehat{\widehat{\overline{K}}}|$ dicht in $[r, r+\varepsilon_0]$. Wegen der Stetigkeit von $\rho_a(D, .)$ haben wir deswegen

$$\rho_a(D, \varepsilon) = \frac{\rho_a(D, r)}{r^k}\varepsilon^k \quad \text{für alle } \varepsilon \in [r, r+\varepsilon_0]\ .$$

Das bedeutet

$$v_a(D, t) = v_a(D, \log r) + k(t - \log r) \quad \text{für alle } t \in [\log r, \log(r+\varepsilon_0)]\ .$$

Lemma 10.5: *i. In jedem Punkt $t \in \mathbb{R}$ mit $v_a(D,t) < t$ existiert sowohl die links- wie die rechtsseitge Ableitung von $v_a(D, .)$; ist $m \geq 1$ zu $\varepsilon := \exp t$ wie in Lemma 10.2.ii gewählt, so ist*

$$\begin{aligned}d^+v_a(D,t) &= -\frac{1}{m}\cdot \textit{ (Anzahl der Nullstellen von } Q_m^* \textit{ in } B_\varepsilon(a)(\widehat{\widehat{\overline{K}}}))\\ &\quad + \textit{(Anzahl der Nullstellen von } P \textit{ in } B_\varepsilon(a)(\widehat{\widehat{\overline{K}}}))\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}d^-v_a(D,t) &= -\frac{1}{m}\cdot \textit{ (Anzahl der Nullstellen von } Q_m^* \textit{ in } B_\varepsilon^-(a)(\widehat{\widehat{\overline{K}}}))\\ &\quad + \textit{(Anzahl der Nullstellen von } P \textit{ in } B_\varepsilon^-(a)(\widehat{\widehat{\overline{K}}}))\ ;\end{aligned}$$

außerdem sind beide Ableitungen ganze Zahlen $\leq \deg(P)$;
ii. seien $t_0 < t_1$ in $\mathbb{R}$ mit $v_a(D,t) < t$ für alle $t_0 \leq t \leq t_1$; dann ist die Funktion $v_a(D, .)$ auf dem Intervall $[t_0, t_1]$ stückweise linear;

iii. seien $t_0 < t_1$ in $\mathbb{R}$ mit $v_a(D,t) < t$ für alle $t_0 < t < t_1$ und so, daß P keine Nullstellen in $\{x \in \widehat{\overline{K}} : \exp t_0 < |x-a| < \exp t_1\}$ besitzt; dann ist die Funktion $v_a(D,.)$ auf (t_0,t_1) konkav.

Beweis: Durch Übergang zu einer Erweiterung können wir $|K| = \mathbb{R}_{\geq 0}$ annehmen. Im Beweis von Satz 10.4 wurde gezeigt, daß $v_a(D,.)$ auf einem geeigneten Intervall $[t,\tau_1]$ linear ist mit einer Steigung, welche der behaupteten Formel genügt. Außerdem ist der erste Summand in dieser Formel als Index eines injektiven Fredholmoperators (Lemma 10.2) eine ganze Zahl ≤ 0. In einem Intervall $[t_0,t_1]$ wie in ii. besitzt also jeder Punkt t eine offene Umgebung U_t, auf welcher $v_a(D,.)$ stückweise linear ist. Die U_t bilden eine offene Überdeckung von $[t_0,t_1]$. Die Existenz einer endlichen Teilüberdeckung impliziert dann, daß $v_a(D,.)$ auf $[t_0,t_1]$ stückweise linear ist. Unter der Voraussetzung an P in iii. folgt aus den expliziten Formeln in i. sofort, daß in jedem Punkt $t \in (t_0,t_1)$ gilt

$$d^- v_a(D,t) \geq d^+ v_a(D,t) \ .$$

Satz 10.6: *Es gelte $\rho_a(D,r) < r$, und P besitze keine Nullstellen in $B^-(\widehat{\overline{K}})$; dann haben wir:*

i. $d := d^- v_a(D,\log r) \leq 0$;

ii. $\rho_a(D,r) \leq \varepsilon(D,a) \leq \rho_a(D,r) \cdot \left(\frac{\rho_a(D,r)}{r}\right)^{\frac{d}{1-d}}$;

iii. $\rho_a(D,r) = \varepsilon(D,a)$ genau dann, wenn $d = 0$.

Beweis: Wieder können wir $|K| = \mathbb{R}_{\geq 0}$ annehmen. i. Wir haben $d^- v_a(D,\log r) = d^+ v_a(D,\log r_0)$ für ein geeignetes $r_0 < r$ mit $\rho_a(D,r_0) < r_0$. Auf Grund der Voraussetzung und Satz 10.4 gilt also

$$d^- v_a(D,\log r) = \operatorname{ind}(D|\mathcal{A}_{r_0}(a)) \ .$$

Nach Lemma 10.2.i ist der rechte Index ≤ 0. ii. und iii. Die linke Ungleichung in ii. wurde in Lemma 9.5 bewiesen. Nach Satz 9.9 hat $D(u) = 0$ keine Lösung in $\mathcal{A}(B^-)$. Also muß

$$\rho := \varepsilon(D,a) < r$$

gelten. Wegen unserer Voraussetzung an P und Lemma 9.2 ist aber u_a eine Lösung von $D(u) = 0$ in $\mathcal{A}(B^-_\rho(a))$. Nach Satz 9.8 gilt also

$$\rho_a(D,\rho) = \rho \ .$$

Andererseits haben wir keine Lösung in $\mathcal{A}(B^-_{r'}(a))$ für alle $\rho < r' \leq r$. Wieder nach Satz 9.9 erhalten wir folglich

$$\rho_a(D,r') < r' \quad \text{für alle } \rho < r' \leq r \ .$$

Wegen Lemma 10.5 ist die Funktion $v_a(D,.)$ auf $(\log\rho,\log r)$ stückweise linear und konkav. Außerdem können wir das Argument in i. für alle $\rho < r' \leq r$ wiederholen und erhalten, daß alle Steigungen von $v_a(D,.)$ auf $(\log\rho,\log r)$ ganze Zahlen ≤ 0

sind. Also tritt der Fall $d = 0$ genau dann ein, wenn $v_a(D, .)$ konstant auf $[\log\rho, \log r]$ ist bzw. $\rho_a(D, .)$ konstant auf $[\rho, r]$ ist bzw.

$$\varepsilon(D, a) = \rho = \rho_a(D, \rho) = \rho_a(D, r)$$

gilt. Damit ist iii. gezeigt. Die rechte Ungleichung in ii. ist äquivalent zu

$$\log\rho \leq v_a(D, \log r) + \frac{d}{1-d}\,(v_a(D, \log r) - \log r)$$

bzw.

$$d(\log r - \log\rho) \leq v_a(D, \log r) - v_a(D, \log\rho)\ .$$

Letzteres ist klar auf Grund der genannten Eigenschaften der Funktion $v_a(D, .)$.

§11 **Ein Beispiel**

Sei $K = \mathbb{C}_p$. Wir fixieren ein $\ell \in \mathbb{N}$ und ein $\pi \in \mathbb{C}_p$ mit $|\pi|^{p-1} = |p|$ und betrachten den Differentialoperator

$$D := \frac{d}{dx} - \pi\ell x^{\ell-1}\ .$$

Offensichtlich gilt $D(u_0) = 0$ für die Potenzreihe

$$u_0 := \exp(\pi X^\ell) = \sum_{n\geq 0} \frac{\pi^n}{n!} X^{\ell n}\ .$$

Also ist u_0 die Potenzreihe aus Lemma 9.2. Nach Lemma 2.2.i haben wir

$$n^{-\frac{1}{\ell n}} \cdot |p|^{\frac{1}{\ell n}} \leq |\frac{\pi^n}{n!}|^{\frac{1}{\ell n}} = |p|^{\frac{1}{\ell(p-1)}} \cdot |n!|^{-\frac{1}{\ell n}} \leq |p|^{\frac{1}{\ell n(p-1)}}\ .$$

Somit hat die Reihe u_0 den Konvergenzradius

$$\varepsilon(D, 0) = 1\ .$$

Aus Satz 9.9 folgt, daß

$$\rho_0(D, \varepsilon) \begin{cases} = \varepsilon & \text{für } \varepsilon \leq 1, \\ < \varepsilon & \text{für } \varepsilon > 1. \end{cases}$$

Sei (L, y) ein generischer Punkt für $B_\varepsilon(0)$; insbesondere ist $|y| = \varepsilon$. Es gilt

$$\begin{aligned} u_y \quad '' &= \exp(\pi y^\ell)^{-1} \exp(\pi((X-y)+y)^\ell)'' \\ '' &= \exp(\pi y^\ell)^{-1} \exp(\pi(\sum_{i=0}^{\ell} \binom{\ell}{i} y^{\ell-i}(X-y)^i))'' \\ &= \prod_{i=1}^{\ell} \exp(\pi \binom{\ell}{i} y^{\ell-i}(X-y)^i)\ . \end{aligned}$$

Da der Konvergenzradius von $\exp(\pi X)$ gleich 1 ist, haben wir

$$\begin{aligned}\varepsilon_i &:= \text{Konvergenzradius von } \exp(\pi\binom{\ell}{i}y^{\ell-i}(X-y)^i)\\ &= |\binom{\ell}{i}y^{\ell-i}|^{-\frac{1}{i}} = \varepsilon^{1-\frac{\ell}{i}}|\binom{\ell}{i}|^{-\frac{1}{i}} \ .\end{aligned}$$

Außerdem ist

$$\varepsilon(D,y) \geq \min(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_\ell)$$

mit Gleichheit, falls das Minimum genau einmal angenommen wird.

1. Fall: $1 \leq \ell \leq p-1$ und $\varepsilon > 1$.
Dann sind die $\varepsilon_i = \varepsilon^{1-\frac{\ell}{i}}$ paarweise verschieden und damit

$$\varepsilon(D,y) = \varepsilon^{1-\ell} \ .$$

Aus Lemma 9.7 folgt dann, daß

$$\rho_0(D,\varepsilon) = \varepsilon^{1-\ell} \quad \text{für } \varepsilon \geq 1 \ ,$$

und aus Satz 10.4, daß

$$\operatorname{ind}(D|\mathcal{A}_r(0)) = -(\ell-1) \quad \text{für } r \in (1,\infty) \cap p^{\mathbb{Q}} \ .$$

2. Fall: $\ell = p$ und $\varepsilon > 1$.
Dann sind $\varepsilon_p = 1$ und $\varepsilon_i = \varepsilon^{1-\frac{p}{i}} \cdot p^{\frac{1}{i}} = \varepsilon\left(\frac{p}{\varepsilon^p}\right)^{\frac{1}{i}}$ für $1 \leq i \leq p-1$ und damit

$$\varepsilon(D,y) = \begin{cases} 1 & \text{für } 1 < \varepsilon < p^{\frac{1}{p-1}}, \\ p\varepsilon^{1-p} & \text{für } \varepsilon > p^{\frac{1}{p-1}} \ . \end{cases}$$

Aus Stetigkeitsgründen folgt dann, daß

$$\rho_0(D,\varepsilon) = \begin{cases} 1 & \text{für } 1 \leq \varepsilon \leq p^{\frac{1}{p-1}}, \\ p\varepsilon^{1-p} & \text{für } \varepsilon \geq p^{\frac{1}{p-1}}, \end{cases}$$

und daß für $r \in p^{\mathbb{Q}}$ gilt

$$\operatorname{ind}(D|\mathcal{A}_r(0)) = \begin{cases} 0 & \text{für } 1 < r < p^{\frac{1}{p-1}}, \\ -(p-1) & \text{für } r \geq p^{\frac{1}{p-1}} \ . \end{cases}$$

§12 Beschränkte analytische Funktionen

Sei K ein beliebiger nicht-archimedischer Körper und $B^- = B_r^-(a)$ ein affinoider offener Ball.

Lemma 12.1: *Für* $f(x) = \sum\limits_{n\geq 0} a_n(x-a)^n \in \mathcal{A}(B^-)$ *sind äquivalent:*

i. $\sup\limits_{n\geq 0} |a_n|r^n < \infty$*;*

ii. $\sup\limits_{x\in B^-(\widehat{\overline{K}})} |f(x)| < \infty$*;*

iii. die Funktion $|f|_a(.) : (0,r) \longrightarrow \mathbb{R}_{>0}$ *ist beschränkt.*

Sind diese Bedingungen erfüllt, so gilt

$$\|f\|_r := \sup_{n\geq 0} |a_n|r^n = \sup_{x\in B^-(\widehat{\overline{K}})} |f(x)| = \sup_{0<\varepsilon<r} |f|_a(\varepsilon) \ .$$

Beweis: Wir wählen eine Folge $0 < r_1 < \ldots < r_j < \ldots < r$ in $|\widehat{\overline{K}}|$, welche gegen r konvergiert. Nach dem Maximumprinzip 6.4 gilt

$$\sup_{n\geq 0} |a_n|r_j^n = |f|_a(r_j) = \sup_{x\in B_{r_j}(a)(\widehat{\overline{K}})} |f(x)|$$

für alle $j \geq 1$. Daraus folgen die Behauptungen durch Übergang zum Limes.

Definition: *Eine Funktion* $f \in \mathcal{A}(B^-)$*, welche die äquivalenten Bedinungen aus Lemma 12.1 erfüllt, heißt beschränkt. Wir setzen*

$$\mathcal{A}^b(B^-) := \{f \in \mathcal{A}(B^-) : f \textit{ ist beschränkt}\} \ .$$

Nach §1 Beispiel B ist $(\mathcal{A}^b(B^-), \|\ \|_r)$ ein K-Banachraum. Da die Funktionen $|f|_a(.)$ monoton steigend und stetig sind, ist mit jedem $|\ |_a(\varepsilon)$ auch das Supremum $\|\ \|_r$ multiplikativ auf $\mathcal{A}^b(B^-)$.

Lemma 12.2: *Die Funktion* $f \in \mathcal{A}(B^-)$ *habe keine Nullstellen in* $B^-(\widehat{\overline{K}})$*; dann ist* f *beschränkt.*

Beweis: Dies folgt aus Satz 6.9 (mit $\widehat{\overline{K}}$ als Grundkörper).

Wegen Lemma 12.1.i ist die Ableitung $\frac{d}{dx}$ auf $\mathcal{A}^b(B^-)$ wohldefiniert mit Operatornorm ≤ 1. Insbesondere ist auch unser Differentialoperator

$$D_{P,Q} : \mathcal{A}^b(B^-) \longrightarrow \mathcal{A}^b(B^-)$$

wohldefiniert.

Satz 12.3: *Der Körper* K *habe die Charakteristik* 0*, und* P *habe keine Nullstellen in* $B^-(\widehat{\overline{K}})$*; dann sind äquivalent:*

i. $\rho_a(D,r) = r$*;*

ii. $ker(D|\mathcal{A}^b(B^-)) \neq 0$*,*

Beweis: Dies folgt aus Satz 9.9 und Lemma 12.2.

Satz 12.4: *Der Körper K sei p-adisch; ist $ker(D|\mathcal{A}^b(B^-)) \neq 0$, so ist $D|\mathcal{A}^b(B^-)$ kein Fredholmoperator.*
Beweis: Sei $c \in K^\times$ mit $|c| = r^{-1}$. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ setzen wir

$$u_k(x) := \sum_{n\geq 1} p^{-kn} c^{p^{kn}} (x-a)^{p^{kn}} \ .$$

Der Konvergenzradius dieser Reihe ist $(\overline{\lim}_{n\longrightarrow\infty} p^{kn/p^{kn}} r^{-1})^{-1} = r$. Also gilt

$$u_k \in \mathcal{A}(B^-) \ .$$

Wir behaupten, daß die $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ linear unabhängig sind modulo $\mathcal{A}^b(B^-)$. Sei also $I \subseteq \mathbb{N}$ eine endliche nichtleere Teilmenge, und seien $\lambda_k \in K^\times$ für $k \in I$. Zu zeigen ist, daß die Linearkombination

$$\sum_{k\in I} \lambda_k u_k = \sum_{i\geq 1} b_i (x-a)^i$$

nicht in $\mathcal{A}^b(B^-)$ liegt. Sei dazu k_0 die kleinste Zahl in I und setze $m := \prod_{k_0\neq k\in I} k$. Jede natürliche Zahl der Form

$$n = k_0(m^\ell + 1) \quad \text{mit } \ell \in \mathbb{N}$$

ist durch k_0, aber durch kein anderes $k \in I$ teilbar. Folglich sind die Werte

$$|b_{p^n}| r^{p^n} = |\lambda_{k_0} p^{-n} c^{p^n}| r^{p^n} = |\lambda_{k_0}| p^n$$

unbeschränkt. Hingegen liegen die Ableitungen

$$u'_k = \frac{du_k}{dx} = \sum_{n\geq 1} c^{p^{kn}} (x-a)^{p^{kn}-1}$$

offensichtlich in $\mathcal{A}^b(B^-)$. Sei nun $0 \neq u \in ker(D|\mathcal{A}^b(B^-))$. Dann gilt

$$D(u_k u) = P\left(u'_k u + u_k \frac{du}{dx}\right) - Q u_k u = P u'_k u \in \mathcal{A}^b(B^-) \ .$$

Wir zeigen schließlich, daß die $\{D(u_k u)\}_{k\in\mathbb{N}}$ linear unabhängig sind modulo $D(\mathcal{A}^b(B^-))$. Seien dazu $\lambda_k \in K$ für $k \in I$ und $f \in \mathcal{A}^b(B^-)$, so daß

$$D\left(\sum_{k\in I} \lambda_k u_k u\right) = \sum_{k\in I} \lambda_k D(u_k u) = D(f)$$

gilt. Wegen Satz 9.8 haben wir dann

$$\sum_{k\in I} \lambda_k u_k u = \mu u + f$$

für ein $\mu \in K$. Also ist

$$(-\mu + \sum_{k \in I} \lambda_k u_k) u = f \ .$$

Nun sind u und f aber beschränkt. Aus Lemma 12.1.iii folgt leicht, daß auch $-\mu + \sum\limits_{k \in I} \lambda_k u_k$ und damit $\sum\limits_{k \in I} \lambda_k u_k$ beschränkt sind. Nach dem zuvor Gezeigten impliziert das $\lambda_k = 0$ für alle $k \in I$.

§13 **Wann gilt** $\rho_a(D, r) = r$**?**

Es treten wieder unsere Standardvoraussetzungen vom Anfang dieses Kapitels in Kraft.

Lemma 13.1: *Sei* $\rho_a(D_{P,Q}, r) < r$*; dann existiert ein* $\delta > 0$*, so daß für alle* $\frac{T}{S} \in K(X)$ *mit* $|\frac{T}{S} - \frac{Q}{P}|_a(r) < \delta$ *ebenfalls* $\rho_a(D_{S,T}, r) < r$ *gilt.*
Beweis: Wir können K als algebraisch abgeschlossen annehmen. Sei $m \geq 1$ wie in Lemma 10.2.ii gewählt. Im dortigen Beweis hatten wir eine Zerlegung

$$D_m = Q_m^* + \tilde{D}_m$$

mit $\|\tilde{D}_m\| < \|Q_m^* \cdot\| = |Q_m^*|_a(r)$ als Operatoren auf $\mathcal{A}(B)$ etabliert. Man prüft nach, daß dasselbe auch im Sinne von Operatoren auf $(\mathcal{A}^b(B^-), \| \ \|_r)$ gilt. Wir wollen nun wiederum Satz 8.7 anwenden und müssen uns dazu zuerst überlegen, daß der injektive Multiplikationsoperator

$$\mathcal{A}^b(B^-) \xrightarrow{Q_m^* \cdot} \mathcal{A}^b(B^-)$$

(im Beweis von Lemma 10.2 wurde $Q_m^* \neq 0$ gezeigt) ein stetiges Linksinverses der Operatornorm $|Q_m^*|_a(r)^{-1}$ besitzt. Wie im Beweis von Bemerkung 10.1 genügt es, ein stetiges Linksinverses der Operatornorm $\leq |Q_m^*|_a(r)^{-1}$ zu konstruieren. Da K algebraisch abgeschlossen ist, können wir Q_m^* in Linearfaktoren zerlegen, und es genügt einen Multiplikationsoperator der Form

$$\mathcal{A}^b(B^-) \xrightarrow{(x-b)\cdot} \mathcal{A}^b(B^-)$$

zu betrachten. Im Falle $b \notin B^-$ liegt wegen Lemma 12.2 ein topologischer Isomorphismus vor, und die inverse Abbildung leistet das Gewünschte. Sei also $|b - a| < r$. Durch Verschiebung des Entwicklungspunktes können wir dann jede Funktion $f \in \mathcal{A}^b(B^-)$ entwickeln in

$$f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n (x-b)^n$$

mit $\sup\limits_{n \geq 0} |a_n| r^n < \infty$. Die Abbildung

$$\begin{array}{rrcl} \iota_b : & \mathcal{A}^b(B^-) & \longrightarrow & \mathcal{A}^b(B^-) \\ & f(x) = \sum\limits_{n \geq 0} a_n (x-b)^n & \longmapsto & \sum\limits_{n \geq 1} a_n (x-b)^{n-1} = \dfrac{f(x) - f(b)}{x - b} \end{array}$$

ist offensichtlich ein stetiges Linksinverses mit

$$\|\iota_b(f)\|_r = \frac{\|f - f(b)\|_r}{\|x - b\|_r} \leq |x - b|_a(r)^{-1} \cdot \|f\|_r \ .$$

Also können wir Satz 8.7 in der Tat anwenden und erhalten, daß

$$D_m = \frac{P^m \cdot (P^{-1}D)^m}{m!} = \frac{P^m \cdot (P^{-1}D)^{m-1} \cdot P^{-1}}{m!} \circ D$$

und damit auch D ein stetiges Linksinverses besitzt. Bevor wir dies ausnutzen, gehen wir aber zu einem generischen Punkt (L, y) von B über (also insbesondere $B_r(a)(L) = B_r(y)(L)$) und wenden obige Überlegungen auf D als Operator auf

$$(\mathcal{A}^b(B_r^-(y)(L)), \| \ \|_r)$$

an. Da P keine Nullstellen in $B_r^-(y)(L)$ besitzt, ist es nach Lemma 12.2 invertierbar in $\mathcal{A}^b(B_r^-(y)(L))$. Also ist der Operator $P^{-1}D$ wohldefiniert. Mit D besitzt auch $P^{-1}D$ ein stetiges Linksinverses. Bezeichne $\tilde{D}$ ein letzteres und sei $\delta := \|\tilde{D}\|^{-1}$. Unter unserer Voraussetzung folgt

$$\|P^{-1}D_{P,Q} - S^{-1}D_{S,T}\| = |\frac{Q}{P} - \frac{T}{S}|_y(r) = |\frac{Q}{P} - \frac{T}{S}|_a(r) < \delta = \|\tilde{D}\|^{-1}$$

in der Operatornorm auf $\mathcal{A}^b(B_r^-(y)(L))$. Wiederum können wir jetzt Satz 8.7 anwenden und erhalten, daß $S^{-1}D_{S,T}$ ein Linksinverses besitzt. Insbesondere ist $S^{-1}D_{S,T}$ und damit auch $D_{S,T}$ injektiv auf $\mathcal{A}^b(B_r^-(y)(L))$. Mit Satz 12.3 (für L als Grundkörper) folgt daraus $\rho_a(D_{S,T}, r) < r$.

Bemerkung 13.2: *Zu endlich vielen gegebenen Punkten $x_1, \dots x_\ell \in B$ existiert ein $b \in B(\widehat{\overline{K}})$, so daß $x_1, \dots, x_\ell \notin B_r^-(b)(\widehat{\overline{K}})$.*
Beweis: Sei $c \in K$ mit $|c| = r$. Mittels der Transformation $x \longmapsto \frac{x-a}{c}$ reduziert sich die Behauptung auf den Spezialfall $a = 0$ und $r = 1$. Da der Restklassenkörper $\overline{k}$ von $\widehat{\overline{K}}$ unendlich ist, finden wir ein $b \in B(\widehat{\overline{K}})$, dessen Restklasse in $\overline{k}$ verschieden ist von den Restklassen der $x_1, \dots, x_\ell$.

Satz 13.3: *Ist K p-adisch, so sind äquivalent:*
i. $\rho_a(D, r) = r$;
ii. es existiert eine Folge $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in $\widehat{\overline{K}}(X)$ mit $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} |\frac{Q}{P} - \frac{u_n'}{u_n}|_a(r) = 0$.
Beweis: Wir können K als algebraisch abgeschlossen annehmen. Zunächst gelte ii. Sei $u_n = \frac{T_n}{S_n}$ und damit $\frac{u_n'}{u_n} = \frac{T_n'}{T_n} - \frac{S_n'}{S_n} = \frac{T_n'S_n - T_nS_n'}{S_nT_n}$. Weiter sei (L, y) ein generischer Punkt von B. Dann ist $u_n \in \mathcal{A}(B_r^-(y)(L))$ eine Lösung von $D^{(n)}(u) = 0$ für $D^{(n)} := D_{S_n, T_n, T_n'S_n - T_nS_n'}$. Aus Satz 9.8 (für L als Grundkörper) folgt also $\rho_a(D^{(n)}, r) = \rho_y(D^{(n)}, r) = r$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wegen Lemma 13.1 muß dann auch $\rho_a(D, r) = r$ gelten.
Nun nehmen wir umgekehrt i. an. Wegen Bemerkung 13.2 finden wir ein $b \in B$, so

daß P keine Nullstellen und damit alle R_i^* keine Pole in $B_r^-(b)$ haben. Nach Satz 9.10 und Lemma 9.11 gilt

$$|R_i^*|_b(r)r^i = |R_i^*|_a(r)r^i \leq 1 \quad \text{für alle } i \in \mathbb{N} \ .$$

Wir definieren

$$u_n := \sum_{i=0}^{n} (b - .)^i R_i^* \in K(X) \ .$$

Aus der Relation

$$(i+1)R_{i+1}^* = (R_i^*)' + R_i^* R_1^*$$

folgt

$$\begin{aligned} R_1^* u_n + u_n' &= \sum_{i=0}^{n} (b-.)^i (R_1^* R_i^* + (R_i^*)') - \sum_{i=1}^{n} i(b-.)^{i-1} R_i^* \\ &= (n+1)(b-.)^n R_{n+1}^* \end{aligned}$$

und damit

$$|u_n|_b(r) \cdot | - \frac{Q}{P} + \frac{u_n'}{u_n}|_b(r) = |n+1||R_{n+1}^*|_b(r)r^n \leq \frac{|n+1|}{r} \ .$$

Nun ist sicherlich

$$|u_n|_b(r) \leq \max_i |R_i^*|_b(r)r^i \leq 1$$

und

$$u_n(b) = R_0^*(b) = 1 \ .$$

Da u_n keinen Pol in $B_r^-(b)$ besitzt, muß also $|u_n|_b(r) = 1$ gelten (vergleiche den Beweis von Lemma 9.5). Somit erhalten wir

$$|\frac{Q}{P} - \frac{u_n'}{u_n}|_a(r) = |\frac{Q}{P} - \frac{u_n'}{u_n}|_b(r) \leq \frac{|n+1|}{r} \ .$$

Die Teilfolge $\{u_{p^j-1}\}_{j\in\mathbb{N}}$ erfüllt ii.

Bevor wir dieses Resultat ausnutzen können, müssen wir ein paar Dinge über rationale Funktionen bereit stellen. Sei K jetzt algebraisch abgeschlossen. Die rationale Funktion $0 \neq R \in K(X)$ habe die Pole $a_1, \ldots, a_\ell \in K$ mit den Multiplizitäten $m_1, \ldots, m_\ell > 0$. Nach dem Satz von der Partialbruchzerlegung existiert eine eindeutig bestimmte Darstellung der Form

$$R = \lambda + R_\infty + \sum_{j=1}^{\ell} \sum_{i=1}^{m_j} c_{ij}(X - a_j)^{-i}$$

mit $\lambda \in K$, $R_\infty \in XK[X]$ und $c_{ij} \in K$. Wir setzen

$$R_{a_j} := \sum_{i=1}^{m_j} c_{ij}(X - a_j)^{-i} \quad \text{und} \quad \mathrm{res}_{a_j}(R) := c_{1j} \ .$$

Für den affinoiden Ball $B^- = B_r^-(a)$ definieren wir ferner

$$\operatorname{res}_{B^-}(R) := \sum_{a_j \in B^-} \operatorname{res}_{a_j}(R) \ .$$

Bemerkung 13.4: $\operatorname{res}_{B^-}(\frac{R'}{R}) \in \mathbb{Z}$.
Beweis: Schreiben wir $R = b \cdot \prod_k (X - b_k)^{n_k}$ mit $b, b_k \in K$ und $n_k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, so gilt

$$\frac{R'}{R} = \sum_k n_k (X - b_k)^{-1}$$

und damit $\operatorname{res}_{B^-}(\frac{R'}{R}) = \sum\limits_{b_k \in B^-} n_k \in \mathbb{Z}$.

Wir fassen nun in obiger Partialbruchzerlegung die Terme

$$\begin{aligned} R_{B^-} &:= \sum_{a_j \in B^-} R_{a_j} \ , \\ \tilde{R}_{B^-} &:= (R_\infty - R_\infty(a)) + \sum_{a_j \notin B^-} \big(R_{a_j} - R_{a_j}(a)\big) \ , \\ \mu &:= \lambda + \sum_{a_j \notin B^-} R_{a_j}(a) \end{aligned}$$

zusammen und erhalten die Zerlegung

$$R = \mu + R_{B^-} + \tilde{R}_{B^-} \quad \text{mit } R_{B^-}(\infty) = 0 \text{ und } \tilde{R}_{B^-}(a) = 0 \ .$$

Lemma 13.5: $|R|_a(r) = \max(|\mu|, |R_{B^-}|_a(r), |\tilde{R}_{B^-}|_a(r))$.
Beweis: Die obige Zerlegung ändert sich nicht, wenn wir B^- durch $B_{r'}^-(a)$ ersetzen, so lange $r' < r$ genügend nahe bei r ist. Da beide Seiten in der Behauptung stetige Funktionen in r sind (Satz 7.3), genügt es also, die analoge Behauptung für $B_{r'}^-(a)$ zu beweisen. Auf diese Weise können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit zusätzlich annehmen, daß alle Pole $|a_j| \neq r$ erfüllen. Ist $c \in K^\times$ mit $|c| = r$, so läßt sich der Fall $B_r^-(a)$ durch die Variablensubstitution $cX + a$ auf den Fall $B_1^-(0)$ zurückführen. Im Folgenden nehmen wir also $a = 0$, $r = 1$ und $|a_j| \neq 1$ an. Trivialerweise gilt

$$|R|_0(1) \leq \max(|\mu|, |R_{B^-}|_0(1), |\tilde{R}_{B^-}|_0(1)) \ .$$

Im Falle, daß $|R_{B^-}|_0(1)$ und $|\tilde{R}_{B^-}|_0(1)$ beide $< |\mu|$ sind, ist auch die umgekehrte Ungleichung trivial.
1. Fall: Es gelte

$$|R_{B^-}|_0(1) \geq \max(|\mu|, |\tilde{R}_{B^-}|_0(1)) \ .$$

Durch Skalierung von R können wir $|R_{B^-}|_0(1) = 1$ annehmen. Zu zeigen ist dann, daß $|R|_0(1) = 1$ gilt. In dieser Situation können wir aber alle beteiligten rationalen Funktionen modulo $\mathfrak{m}$ reduzieren zu rationalen Funktionen in $k(X)$ über dem Restklassenkörper k von K. In $k(X)$ erhalten wir die Zerlegung

$$R \bmod \mathfrak{m} = (\mu \bmod \mathfrak{m}) + (R_{B^-} \bmod \mathfrak{m}) + (\tilde{R}_{B^-} \bmod \mathfrak{m}) \ .$$

Ersichtlich hat $R_{B^-} \bmod \mathfrak{m}$ nur in $0 \in k$ einen Pol, während $\tilde{R}_{B^-} \bmod \mathfrak{m}$ da gerade keinen Pol besitzt (im Hauptnenner von $\tilde{R}_{B^-}$ hat der konstante Koeffizient maximalen Betrag). Also ist $R \bmod \mathfrak{m} \neq 0$, d. h. $|R|_0(1) = 1$, falls $R_{B^-} \bmod \mathfrak{m} \neq 0$ gilt. Letzteres ist aber wegen $|R_{B^-}|_0(1) = 1$ der Fall.
2. Fall: Es gelte

$$|\tilde{R}_{B^-}|_0(1) \geq \max(|\mu|, |R_{B^-}|_0(1)) \ .$$

Wir setzen $Q := R(X^{-1})$. Wegen $Q_{B^-}(X) = \tilde{R}_{B^-}(X^{-1})$ und $\tilde{Q}_{B^-}(X) = R_{B^-}(X^{-1})$ ist dieser Fall äquivalent zum ersten Fall für die rationale Funktion Q.

Lemma 13.6: $|\mathrm{res}_{B^-}(R)| \leq r \cdot |R|_a(r)$.
Beweis: Sei $c \in K^\times$ mit $|c| = r$. Es gilt

$$|R|_a(r) = |R(cX + a)|_0(1) \text{ und } \mathrm{res}_{B^-}(R) = c \cdot \ \mathrm{res}_{B_1^-(0)}(R(cX + a)) \ .$$

Also brauchen wir nur den Fall $a = 0$ und $r = 1$ zu betrachten. Wegen Lemma 13.5 genügt es $|\mathrm{res}_{B^-}(R)| \leq |R_{B^-}|_0(1)$ zu zeigen. Mit $J := \{j : a_j \in B^-\}$ und $e := \sum\limits_{j \in J} m_j$ gilt

$$R_{B^-} = \frac{\left(\sum\limits_{j \in J} c_{1j}\right) X^{e-1} + \ldots}{\prod\limits_{j \in J} (X - a_j)^{m_j}} \ .$$

Wegen $|a_j| < 1$ für alle $j \in J$ ist $|\mathrm{Nenner}|_0(1) = 1$. Also ergibt sich

$$|\mathrm{res}_{B^-}(R)| = |\sum_{j \in J} c_{1j}| \leq |\mathrm{Zähler}|_0(1) = |R_{B-}|_0(1) \ .$$

Ist K nicht algebraisch abgeschlossen, so ist jedenfalls $\mathrm{res}_{B^-}(R) \in \hat{\overline{K}}$ definiert. Man prüft nach, daß in der Tat $\mathrm{res}_{B^-}(R) \in K$ gilt.

Corollar 13.7: *Sei K p-adisch; gilt $\rho_a(D, r) = r$, so ist* $\mathrm{res}_{B^-}(\frac{Q}{P}) \in \mathbb{Z}_p$.
Beweis: Nach Satz 13.3 finden wir eine Folge $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ in $\hat{\overline{K}}(X)$ mit $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} |\frac{Q}{P} - \frac{u_n'}{u_n}|_a(r) = 0$. Aus Lemma 13.6 folgt dann

$$\mathrm{res}_{B^-}\left(\frac{Q}{P}\right) = \lim_{n \longrightarrow \infty} \ \mathrm{res}_{B^-}\left(\frac{u_n'}{u_n}\right) \ .$$

Wegen Bemerkung 13.2 liegt die rechte Seite im Abschluß von $\mathbb{Z}$ in K, also in $\mathbb{Z}_p$.

Satz 13.8: *Sei K p-adisch, und sei $\alpha \in K$; für den Differentialoperator $D = D_{X-a,\alpha}$ sind äquivalent:*
i. $\rho_a(D, r) = r$;
ii. $\alpha \in \mathbb{Z}_p$.
Beweis: Die Implikation von i. nach ii. ist ein Spezialfall von Corollar 13.7. Umgekehrt sei $\alpha \in \mathbb{Z}_p$. Dann finden wir ein Folge $\{m_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{Z}$ mit $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} m_n = \alpha$. Für $u_n := (X-a)^{m_n}$ gilt ersichtlich $\frac{u_n'}{u_n} = \frac{m_n}{X-a}$ und damit

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \left| \frac{\alpha}{X-a} - \frac{u_n'}{u_n} \right|_a (r) = 0 \ .$$

Also folgt i. aus Satz 13.3.

Von jetzt an sei K stets p-adisch! Wann ist der Differentialoperator $D_{X-a,\alpha}$ auf $\mathcal{A}(B)$ ein Fredholmoperator? Wegen Satz 13.8 und Lemma 10.2 ist das sicherlich der Fall für $\alpha \notin \mathbb{Z}_p$. Zu jedem $\alpha \in K$ definieren wir

$$\lambda(\alpha) := \varliminf_{n\longrightarrow\infty} |\alpha - n|^{\frac{1}{n}} \ .$$

Wegen $|\alpha - n| \leq \max(|\alpha|, 1)$ gilt stets

$$\lambda(\alpha) \leq 1 \ .$$

Da $\mathbb{Z}_p$ kompakt ist, gilt für $\alpha \notin \mathbb{Z}_p$ sicherlich $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} |\alpha - n| > 0$ und damit

$$\lambda(\alpha) = 1 \ .$$

Definition: *Ein $\alpha \in \mathbb{Z}_p$ mit $\lambda(\alpha) < 1$ heißt Liouville-Zahl.*

Satz 13.9: *Sei K p-adisch, und sei $\alpha \in K$; für den Differentialoperator $D = D_{X-a,\alpha}$ sind äquivalent:*
i. $D|\mathcal{A}(B^-)$ ist ein Fredholmoperator;
ii. $\lambda(\alpha) = 1$.
Sind diese Bedingungen erfüllt, so gilt

$$\operatorname{ind}(D|\mathcal{A}(B^-)) = 0 \ .$$

Beweis: Seien $f(x) = \sum\limits_{n\geq 0} a_n(x-a)^n$ und $g(x) = \sum\limits_{n\geq 0} b_n(x-a)^n$ in $K[[x-a]]$ mit $D(f) = g$. Also ist

$$\sum_{n\geq 0} (n-\alpha) a_n (x-a)^n = \sum_{n\geq 0} b_n (x-a)^n \ ,$$

d. h.

$$a_n = \frac{b_n}{n-\alpha} \quad \text{für alle } n \neq -\alpha \ .$$

Für die Konvergenzradien ergibt sich die Ungleichung

$$\varepsilon_f \geq \lambda(\alpha)\varepsilon_g \ .$$

Es gelte nun zunächst $\lambda(\alpha) = 1$. Dann liegt also mit g auch f in $\mathcal{A}(B^-)$. Ist $\alpha \notin \mathbb{Z}_{\leq 0}$, so bedeutet dies die Bijektivität von D. ist $\alpha = -n_0 \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$, so ist

$$ker(D|\mathcal{A}(B^-)) = K \cdot (x-a)^{n_0}$$

und

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{A}(B^-)/D(\mathcal{A}(B^-)) & \xrightarrow{\cong} & K \\ \sum\limits_{n\geq 0} b_n(x-a)^n & \longmapsto & b_{n_0} \ . \end{array}$$

Jetzt nehmen wir $\lambda(\alpha) < 1$ an und müssen unendlich viele Funktionen $g_i \in \mathcal{A}(B^-)$ konstruieren, welche modulo $D(\mathcal{A}(B^-))$ linear unabhängig sind. Dazu fixieren wir ein $\varepsilon \in \mathbb{R}$ mit $\lambda(\alpha) < \varepsilon < 1$ und ein $c \in K^\times$ mit $|c| = r$. Nach Annahme ist die Menge

$$N := \{n \geq 0 : 0 < |n-\alpha|^{\frac{1}{n}} < \varepsilon\}$$

unendlich. Wir schreiben N als unendliche disjunkte Vereinigung

$$N = \dot{\bigcup_{i\in I}} N_i$$

von unendlichen Teilmengen N_i und setzen

$$g_i(x) := \sum_{n\in N_i} c^{-n}(x-a)^n \ .$$

Offensichtlich ist $g_i \in \mathcal{A}^b(B^-)$. Seien $i_1, \ldots, i_\ell \in I$ und $\lambda_1, \ldots, \lambda_\ell \in K^\times$ mit

$$\lambda_1 g_{i_1} + \ldots + \lambda_\ell g_{i_\ell} = D(f)$$

für ein $f(x) = \sum\limits_{n\geq 0} a_n(x-a)^n$ in $\mathcal{A}(B^-)$. Dann gilt insbesondere

$$(n-\alpha)a_n = \lambda_1 c^{-n}$$

und

$$|a_n|^{\frac{1}{n}} = \frac{|\lambda_1|^{\frac{1}{n}}}{r \cdot |n-\alpha|^{\frac{1}{n}}} > \frac{|\lambda_1|^{\frac{1}{n}}}{r\varepsilon}$$

für alle $n \in N_{i_1}$. Es ergibt sich der Widerspruch

$$\frac{1}{r} \geq \varepsilon_f^{-1} = \varlimsup_{n\longrightarrow\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} \geq \frac{1}{r\varepsilon} > \frac{1}{r} \ .$$

Lemma 13.10: *Sei K p-adisch, und seien $\frac{Q_1}{P_1} = (\frac{Q}{P})_{B^-}$ und $\frac{Q_2}{P_2} = \frac{Q}{P} - \frac{Q_1}{P_1}$; gilt $\rho_a(D,r) = r$, so auch $\rho_a(D_{P_1,Q_1}, r) = \rho_a(D_{P_2,Q_2}, r) = r$.*
Beweis: (Übrigens gilt in jedem Falle $(\frac{Q}{P})_{B^-} \in K(X)$.) Nach Satz 13.3 haben wir eine Folge $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in $\widehat{\overline{K}}(X)$ mit

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} |\frac{Q}{P} - \frac{u_n'}{u_n}|_a(r) = 0 \ .$$

Wir zerlegen jedes $u_n = v_n w_n$ in ein Produkt von rationalen Funktionen $v_n, w_n \in \widehat{\overline{K}}(X)$, so daß:
- Alle Nullstellen und Pole von v_n liegen in $B^-(\widehat{\overline{K}})$;
- w_n hat keine Nullstellen und Pole in $B^-(\widehat{\overline{K}})$.
Dann ist

$$\frac{v_n'}{v_n} = \left(\frac{u_n'}{u_n}\right)_{B^-} \quad \text{und} \quad \frac{w_n'}{w_n} = \frac{u_n'}{u_n} - \left(\frac{u_n'}{u_n}\right)_{B^-} \ .$$

Lemma 13.5 besagt deswegen, daß

$$\max\left(|\frac{Q_1}{P_1} - \frac{v_n'}{v_n}|_a(r), |\frac{Q_2}{P_2} - \frac{w_n'}{w_n}|_a(r)\right) = |\frac{Q}{P} - \frac{u_n'}{u_n}|_a(r) \ .$$

Also folgt die Behauptung aus Satz 13.3.

Satz 13.11: *Sei K p-adisch; für den Differentialoperator $D = D_{P,Q}$ gelte $\rho_a(D,r) = r$; außerdem besitze P genau eine Nullstelle $c \in B^-(\widehat{\overline{K}})$, und diese sei einfach; dann sind äquivalent:*
i. $D|\mathcal{A}(B^-)$ ist ein Fredholmoperator;
ii. $\mathrm{res}_c(\frac{Q}{P})$ ist keine Liouville-Zahl.
Sind diese Bedingungen erfüllt, so gilt

$$\mathrm{ind}(D|\mathcal{A}(B^-)) = 0 \ .$$

Beweis: Notwendigerweise gilt $c \in B^-$, und wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit $c = a$ annehmen. Sei $\alpha :=\ \mathrm{res}_a(\frac{Q}{P}) \in K$. Dann ist

$$\left(\frac{Q}{P}\right)_{B^-} = \frac{\alpha}{X-a} \ .$$

Nach Lemma 13.10 gilt also

$$\rho_a(D_{X-a,\alpha}, r) = \rho_a(D_{P_2,Q_2}, r) = r \ ,$$

wobei

$$\frac{Q_2}{P_2} = \frac{Q}{P} - \frac{\alpha}{X-a} \ .$$

Die Bedinung ii. ist wegen Satz 13.9 dazu äquivalent, daß $D_{X-a,\alpha}|\mathcal{A}(B^-)$ ein Fredholmoperator mit Index 0 ist. Andererseits kann auf Grund unserer Voraussetzungen P_2 ohne Nullstellen in $B^-(\widehat{\overline{K}})$ gewählt werden. Nach Satz 9.9 existiert dann ein $v \in \mathcal{A}(B^-)^\times$ mit $D_{P_2,Q_2}(v) = 0$. Man prüft nach, daß das Diagramm

$$\begin{CD}
\mathcal{A}(B^-) @>{D_{X-a,\alpha}}>> \mathcal{A}(B^-) \\
@V{v\cdot}V{\cong}V @V{\cong}V{\frac{P}{X-a}v\cdot}V \\
\mathcal{A}(B^-) @>>{D_{P,Q}}> \mathcal{A}(B^-)
\end{CD}$$

kommutativ ist.

Übungsaufgabe: Es gelte $\rho_a(D, r) = r$; besitzt das Polynom P keine Nullstelle in $B^-(\widehat{\overline{K}})$, so ist $D|\mathcal{A}(B^-)$ ein Fredholmoperator mit Index 1.

Der in Satz 13.11 betrachtete Spezialfall ist nicht so weit von dem allgemeinen Fall "$\rho_a(D, r) = r$" entfernt, wie man auf den ersten Blick denken mag. In der folgenden Diskussion nehmen wir an, daß $\rho_a(D, r) = r$ gilt. Wir schreiben

$$\left(\frac{Q}{P}\right)_{B^-} = \frac{Q_1}{P_1} ,$$

wobei alle Nullstellen von P_1 in $B^-(\widehat{\overline{K}})$ liegen mögen. Nach Lemma 13.10 gilt $\rho_a(D_{P_1,Q_1}, r) = r$. Wegen Corollar 13.7 haben wir ferner

$$\alpha := \operatorname{res}_{B^-}\left(\frac{Q}{P}\right) = \operatorname{res}_{B^-}\left(\frac{Q_1}{P_1}\right) \in \mathbb{Z}_p .$$

Einerseits existiert also nach Satz 13.3 eine Folge $\{v_n\}_n$ in $\widehat{\overline{K}}(X)$ mit $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} |\frac{Q_1}{P_1} - \frac{v_n'}{v_n}|_a(r) = 0$. Andererseits finden wir wie im Beweis von Satz 13.8 eine Folge $\{u_n\}_n$ in $K(X)$ mit $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} |\frac{\alpha}{x-a}| - \frac{u_n'}{u_n}|_a(r) = 0$. Für $\frac{Q_2}{P_2} := \frac{Q_1}{P_1} - \frac{\alpha}{X-a}$ ist also $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} |\frac{Q_2}{P_2} - \frac{(v_n/u_n)'}{v_n/u_n}|_a(r) = 0$, und wir können wieder mit Satz 13.3 schließen, daß auch

$$\rho_a(D_{P_2,Q_2}, r) = r$$

gilt. Genauer setzen wir $P_2(X) := (X - a)P_1(X)$ und $Q_2(X) := (X - a)Q_1(X) - \alpha P_1(X)$. Man beachte, daß nicht nur alle Nullstellen von P_2 in $B^-(\widehat{\overline{K}})$ liegen, sondern daß wegen $\deg(Q_1) < \deg(P_1)$ auch

$$\lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{Q_2(x)}{P_2(x)} = 0$$

gilt. Dies besagt sozusagen, daß die rationale Funktione $\frac{Q_2}{P_2}$ keine Pole in dem "affinoiden Ball"

$$B_{\frac{1}{r}}(\infty_a)(\widehat{\overline{K}}) := \{x \in \widehat{\overline{K}} : |x - a| \geq r\} \cup \{\infty\}$$

besitzt. Wir formalisieren diese Feststellung, in dem wir die Bijektion

$$\begin{array}{rcl} B_{\frac{1}{r}}(\infty_a)(\widehat{\overline{K}}) & \xrightarrow{\sim} & B_{\frac{1}{r}}(0)(\widehat{\overline{K}}) \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x-a} \end{array}$$

betrachten und definieren

$$\mathcal{A}_{\frac{1}{r}}(\infty_a) := \left\{ f\left(\frac{1}{x-a}\right) : f \in \mathcal{A}_{\frac{1}{r}}(0) \right\} .$$

Der Ableitung $\frac{d}{dx}$ auf $\mathcal{A}_{\frac{1}{r}}(\infty_a)$ entspricht unter dem Isomorphismus

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{A}_{\frac{1}{r}}(0) & \xrightarrow{\cong} & \mathcal{A}_{\frac{1}{r}}(\infty_a) \\ f(x) & \longmapsto & f\left(\dfrac{1}{x-a}\right) \end{array}$$

der Operator $f(x) \longmapsto -x^2 \frac{df}{dx}$. Wie im Beweis von Lemma 13.6 diskutiert wurde, können wir die führenden Koeffizienten der Polynome P_1 und Q_1 als

$$P_1(X) = X^d + \dots \quad \text{und} \quad Q_1(X) = \alpha X^{d-1} + \dots$$

voraussetzen. Dann sind

$$S(X) := -X^{d+1} P_1\left(\frac{1}{X} + a\right)$$

und

$$T(X) := -X^{d-1} Q_1\left(\frac{1}{X} + a\right) + \alpha X^d P_1\left(\frac{1}{X} + a\right)$$

Polynome; dabei besitzt S genau eine Nullstelle in $B_{\frac{1}{r}}(0)(\widehat{\overline{K}})$, nämlich eine einfache Nullstelle in $X = 0$, und T besitzt ebenfalls eine Nullstelle bei $X = 0$. Folglich hat die rationale Funktion

$$\frac{T}{S}(X) := \frac{Q_1\left(\frac{1}{X} + a\right)}{X^2 P_1\left(\frac{1}{X} + a\right)} - \frac{\alpha}{X} = \frac{1}{X^2} \cdot \left(\frac{Q_2}{P_2}\right)\left(\frac{1}{X} + a\right)$$

keine Pole in $B_{\frac{1}{r}}(0)(\widehat{\overline{K}})$. Ist $\{u_n\}_n$ eine Folge in $\widehat{\overline{K}}(X)$ mit $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} |\frac{Q_2}{P_2} - \frac{u_n'}{u_n}|_a(r) = 0$, so setzen wir $v_n(X) := \frac{1}{u_n\left(\frac{1}{X}+a\right)}$ und erhalten

$$\frac{v_n'}{v_n}(X) = \frac{1}{X^2} \cdot \left(\frac{u_n'}{u_n}\right)\left(\frac{1}{X} + a\right)$$

und somit

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} |\frac{T}{S} - \frac{v_n'}{v_n}|_0\left(\frac{1}{r}\right) = r^2 \cdot \lim_{n\longrightarrow\infty} |\frac{Q_2}{P_2} - \frac{u_n'}{u_n}|_a(r) = 0 .$$

Nach Satz 13.3 gilt folglich

$$\rho_0\left(D_{S,T},\frac{1}{r}\right)=\frac{1}{r}\ .$$

Damit können wir Satz 9.9 anwenden und erhalten die Existenz einer Funktion $v\in\mathcal{A}(B^-_{\frac{1}{r}}(0))^\times$ mit $D_{X^{-1}S,X^{-1}T}(v)=0$, d. h. $\frac{v'}{v}=\frac{T}{S}$. Definieren wir

$$\mathcal{A}(B^-_{\frac{1}{r}}(\infty_a)):=\left\{f\left(\frac{1}{x-a}\right):f\in\mathcal{A}(B^-_{\frac{1}{r}}(0))\right\}\ ,$$

so liegt $u(x):=v(\frac{1}{x-a})$ in $\mathcal{A}(B^-_{\frac{1}{r}}(\infty_a))^\times$ und erfüllt

$$\frac{u'}{u}(x)=-\frac{1}{(x-a)^2}\cdot\left(\frac{v'}{v}\right)\left(\frac{1}{x-a}\right)=-\left(\frac{Q_2}{P_2}\right)(x)=-\frac{Q_1}{P_1}(x)+\frac{\alpha}{x-a}$$

und damit

$$\frac{Q}{P}+\frac{u'}{u}=\frac{Q}{P}-\frac{Q_1}{P_1}+\frac{\alpha}{x-a}\ .$$

Wir fassen zusammen.

Bemerkung 13.12: *Gilt $\rho_a(D,r)=r$, so existiert ein $u\in\mathcal{A}(B^-_{\frac{1}{r}}(\infty_a))^\times$ mit:*
– $R:=\frac{Q}{P}+\frac{u'}{u}\in K(X)$;
– der Nenner von R besitzt keine oder genau eine Nullstelle in $B^-(\widehat{\overline{K}})$, nämlich a, und diese ist dann einfach;
– $\mathrm{res}_{B^-}(R)=\mathrm{res}_{B^-}(\frac{Q}{P})\in\mathbb{Z}_p$.

Wirklich brauchbar wird diese Beobachtung erst nach einer Verschärfung der Voraussetzung. Um das Ergebnis zu formulieren zu können, benötigen wir den Raum der *überkonvergenten Funktionen*

$$\mathcal{A}^\dagger(B):=\mathcal{A}^\dagger_r(a):=\bigcup_{\varepsilon>r}\mathcal{A}_\varepsilon(a)\ .$$

Dies ist ein Unterring von $\mathcal{A}(B)$, welcher isomorph ist zum Ring aller Potenzreihen in $x-a$, welche ε-konvergent sind für ein $\varepsilon>r$ bzw. deren Konvergenzradius $>r$ ist. Außerdem definieren wir

$$\mathcal{A}^\dagger_{\frac{1}{r}}(\infty_a):=\left\{f\left(\frac{1}{x-a}\right):f\in\mathcal{A}^\dagger_{\frac{1}{r}}(0)\right\}\ .$$

Satz 13.13: *Sei K p-adisch; es existiere ein $0<\varepsilon_0<r$, so daß $\rho_a(D,\varepsilon)=\varepsilon$ gilt für alle $\varepsilon_0\leq\varepsilon\leq r$; dann gibt es ein $u\in\mathcal{A}^\dagger_{\frac{1}{r}}(\infty_a)^\times$ mit:*
i. $R:=\frac{Q}{P}+\frac{u'}{u}\in K(X)$;
ii. der Nenner von R besitzt keine oder genau eine Nullstelle in $B^-(\widehat{\overline{K}})$, nämlich a, und diese ist dann einfach;
iii. $\mathrm{res}_{B^-}(R)=\mathrm{res}_{B^-}(\frac{Q}{P})\in\mathbb{Z}_p$.

Beweis: Die Funktion $v \in \mathcal{A}(B^-_{\frac{1}{r}}(0))^\times$ aus obiger Diskussion ist bis auf skalare Vielfache eindeutig bestimmt. Es genügt zu zeigen, daß v in $\mathcal{A}(B_\delta(0))^\times$ liegt für ein $\delta > \frac{1}{r}$. Dazu können wir K als algebraisch abgeschlossen annehmen. Dann finden wir ein $r_0 \in |K^\times|$ mit $\varepsilon_0 \leq r_0 < r$ und so, daß P keine Nullstellen in $\{x \in \widehat{\overline{K}} : r_0 \leq |x-a| < r\}$ besitzt. Nun wiederhole man obige Diskussion für r_0 statt r (wobei sich α und $\frac{Q_1}{P_1}$ nicht ändern). Wir erhalten $v \in \mathcal{A}(B^-_{\frac{1}{r_0}}(0))^\times$.

Wir führen folgende Redeweisen ein.

Definition: *i. Zwei rationale Funktionen R und $\tilde{R}$ in $K(X)$ heißen (a,r)-äquivalent, falls ein $u \in \mathcal{A}^\dagger_{\frac{1}{r}}(\infty_a)^\times$ existiert mit $\tilde{R} - R = \frac{u'}{u}$.*
ii. Der Differentialoperator $D_{P,Q}$ heißt (a,r)-singulär-regulär, falls gilt:
- $\rho_a(D_{P,Q}, r) = r$;
- $\frac{Q}{P}$ ist (a,r)-äquivalent zu einer rationalen Funktion in $K(X)$, welche keine oder genau eine Polstelle in $B^-(\widehat{\overline{K}})$ besitzt, die dann außerdem einfach ist.

Wegen $\frac{(uv)'}{uv} = \frac{u'}{u} + \frac{v'}{v}$ ist die (a,r)-Äquivalenz wirklich eine Äquivalenzrelation.

Lemma 13.14: *Für $\frac{Q}{P}$ und $\frac{Q_1}{P_1}$ in $K(X)$ gilt:*
1. Ist $\frac{Q_1}{P_1} - \frac{Q}{P} = \frac{v'}{v}$ für ein $v \in \mathcal{A}(B^-)^\times$, so ist

$$\rho_a(D_{P_1,Q_1}, \varepsilon) = \rho_a(D_{P,Q}, \varepsilon) \quad \textit{für alle } 0 \leq \varepsilon \leq r\ ;$$

ii. ist $\frac{Q_1}{P_1} - \frac{Q}{P} = \frac{v'}{v}$ für ein $v \in \mathcal{A}^\dagger_{\frac{1}{r}}(\infty_a)^\times$, so existiert ein $0 < \varepsilon_0 < r$ mit

$$\rho_a(D_{P_1,Q_1}, \varepsilon) = \rho_a(D_{P,Q}, \varepsilon) \quad \textit{für alle } \varepsilon_0 \leq \varepsilon \leq r\ .$$

Beweis: Wir wählen $0 \leq \varepsilon_0 < r$ so, daß $v^{\pm 1}$ auf $\{x \in \widehat{\overline{K}} : \varepsilon_0 \leq |x-a| < r\}$ konvergieren. Wegen der Stetigkeit von ρ_a in ε (Satz 9.4) brauchen wir die behauptete Gleichheit nur für $\varepsilon_0 < \varepsilon < r$ zu zeigen. Sei (L, y) ein generischer Punkt von $B_\varepsilon(a)$. Wegen $|y-a| = \varepsilon$ ist $B^-_\varepsilon(y) \subseteq \{x \in L : \varepsilon_0 \leq |x-a| < r\}$ und damit $v \in \mathcal{A}(B^-_\varepsilon(y)(L))^\times$. Seien u_y bzw. $u_{1,y}$ die Lösungen von $D_{P,Q}(u) = 0$ bzw. $D_{P_1,Q_1}(u) = 0$ aus Lemma 9.2. Also

$$\frac{u'_{1,y}}{u_{1,y}} = \frac{Q_1}{P_1} = \frac{Q}{P} + \frac{v'}{v} = \frac{u'_y}{u_y} + \frac{v'}{v} = \frac{(u_y v)'}{u_y v}$$

und damit $cu_{1,y} = u_y v$ mit einem geeigneten Skalar $c \in K^\times$. Daraus folgt sofort

$$\min(\varepsilon, \varepsilon(D_{P_1,Q_1}, y)) = \min(\varepsilon, \varepsilon(D_{P,Q}, y))$$

und mit Lemma 9.7 die Behauptung.

Lemma 13.15: *Sei K p-adisch; der Differentialoperator $D_{P,Q}$ sei (a,r)-singulär-regulär; die rationale Funktion $\frac{Q}{P}$ ist dann (a,r)-äquivalent zu einer rationalen Funktion in $K(X)$, für welche a die einzige eventuelle Polstelle in $B^-(\widehat{\overline{K}})$ ist, und welche*

dann zudem einfach ist.
Beweis: Auf Grund der Voraussetzung und Lemma 13.14.ii können wir annehmen, daß

$$\left(\frac{Q}{P}\right)_{B^-} = \frac{\alpha}{X-c}$$

gilt für ein $c \in B^-$. Nach Corollar 13.7 ist $\alpha = \mathrm{res}_{B^-}(\frac{Q}{P}) \in \mathbb{Z}_p$. Da $\mathbb{Z}$ dicht in $\mathbb{Z}_p$ ist, liegen die verallgemeinerten Binomialkoeffizienten

$$\binom{\alpha}{i} := \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-i+1)}{i!}$$

für $i \geq 0$ wiederum in $\mathbb{Z}_p$. Also hat die Potenzreihe

$$(1+x)^\alpha := \sum_{i=0}^{\infty} \binom{\alpha}{i} x^i$$

den Konvergenzradius 1 und liegt in $\mathcal{A}(B_1^-(0))^\times$. Somit ist $(1+(a-c)x)^\alpha \in \mathcal{A}^\dagger_{\frac{1}{r}}(0)^\times$ und

$$u(x) := (1+(a-c)\frac{1}{x-a})^\alpha = \left(\frac{x-c}{x-a}\right)^\alpha \in \mathcal{A}^\dagger_{\frac{1}{r}}(\infty_a)^\times \ .$$

Wegen $\frac{u'}{u} = \frac{\alpha}{x-c} - \frac{\alpha}{x-a}$ hat $\frac{Q}{P} - \frac{u'}{u}$ höchstens einen (einfachen) Pol in a.

Satz 13.16: *Sei K p-adisch; dann sind äquivalent:*
i. Es existiert ein $0 < \varepsilon_0 < r$, so daß $\rho_a(D_{P,Q}, \varepsilon) = \varepsilon$ für alle $\varepsilon_0 \leq \varepsilon \leq r$;
ii. $D_{P,Q}$ ist (a,r)-singulär-regulär.
Beweis: Die Implikation von i. nach ii. ist Satz 13.13. Sei also umgekehrt $D_{P,Q}$ nun (a,r)-singulär-regulär. Nach Lemma 13.15 existiert ein $u \in \mathcal{A}^\dagger_{\frac{1}{r}}(\infty_a)^\times$, so daß die rationale Funktion $\frac{Q_1}{P_1} := \frac{Q}{P} + \frac{u'}{u}$ als eventuelle einzige (einfache) Polstelle in $B^-(\widehat{\overline{K}})$ den Punkt a besitzt. Aus Lemma 13.14.ii folgt einerseits

$$\rho_a(D_{P_1,Q_1}, r) = \rho_a(D_{P,Q}, r) = r$$

und andererseits, daß es genügt, die Aussage i. für D_{P_1,Q_1} statt $D_{P,Q}$ zu beweisen. Sei $\alpha := \mathrm{res}_{B^-}(\frac{Q_1}{P_1})$. Nach Corollar 13.7 gilt $\alpha \in \mathbb{Z}_p$. Im Beweis von Satz 13.11 bzw. in Satz 9.9 haben wir gesehen, daß ein $v \in \mathcal{A}(B^-)^\times$ existiert mit

$$D_{P_2,Q_2}(v) = 0 \quad \text{für } \frac{Q_2}{P_2} := \frac{Q_1}{P_1} - \frac{\alpha}{X-a} \ .$$

Also ist

$$\frac{Q_1}{P_1} = \frac{\alpha}{X-a} + \frac{v'}{v}$$

und Lemma 13.14.i reduziert uns auf den Beweis von i. für den Differentialoperator $D_{X-a,\alpha}$. Wegen $\alpha \in \mathbb{Z}_p$ ist Letzteres aber in Satz 13.8 enthalten.

Bemerkung 13.17: *Sei K p-adisch, und sei $0 < r_0 < r$ mit $r_0 \in |\widehat{\overline{K}}|$; es gelte $\rho_a(D_{P,Q}, r_0) = r_0$ und $\rho_a(D_{P,Q}, r) = r$; besitzt $\frac{Q}{P}$ keine Pole in $\{x \in \widehat{\overline{K}} : r_0 \leq |x-a| < r\}$, so ist*

$$\rho_a(D_{P,Q}, \varepsilon) = \varepsilon \quad \textit{für alle } r_0 \leq \varepsilon \leq r \ .$$

Beweis: Wir können K als algebraisch abgeschlossen annehmen. Wenn man den Beweis von Satz 13.13 nocheinmal durchgeht, sieht man, daß nur die gegenwärtigen Voraussetzungen benötigt wurden, um die Existenz eines $u \in \mathcal{A}(B^-_{\frac{1}{r_0}}(\infty_a))^\times$ zu zeigen, so daß $\frac{Q_1}{P_1} := \frac{Q}{P} + \frac{u'}{u}$ eine rationale Funktion mit höchstens einer (einfachen) Polstelle in $B^-(\widehat{\overline{K}})$ bei a ist. Unter Benutzung von Lemma 13.14.ii und der Stetigkeit von ρ_a folgt daraus

$$\rho_a(D_{P,Q}, \varepsilon) = \rho_a(D_{P_1,Q_1}, \varepsilon) \quad \text{für alle } r_0 \leq \varepsilon \leq r \ .$$

Nun kann man wie im zweiten Teil des Beweises von Satz 13.16 weiterargumentieren.

Auf $\mathcal{A}_{\frac{1}{r}}(0)$ haben wir die Norm $\|f\|_{\frac{1}{r}} = |f|_0(\frac{1}{r}) = \max\limits_{x\in\overline{K},|x|=\frac{1}{r}} |f(x)|$. Dementsprechend haben wir auf $\mathcal{A}_{\frac{1}{r}}(\infty_a)$ die Norm $|f|_a(r) = \max\limits_{x\in\overline{K},|x-a|=r} |f(x)|$. Die Polynome und also erst recht die rationalen Funktionen ohne Pole in $B_{\frac{1}{r}}(0)(\widehat{\overline{K}})$ liegen dicht in dem Banachraum $\mathcal{A}_{\frac{1}{r}}(0)$. Folglich liegen die rationalen Funktionen ohne Pole in $B_{\frac{1}{r}}(\infty_a)(\widehat{\overline{K}})$ dicht in $\mathcal{A}_{\frac{1}{r}}(\infty_a)$ bezüglich $|\ |_a(r)$.

Lemma 13.18: *Sei $R \in K(X)$; existiert ein $u \in \mathcal{A}_{\frac{1}{r}}(\infty_a)^\times$ mit $R = \frac{u'}{u}$, so gilt* $\mathrm{res}_{B^-}(R) = 0$.

Beweis: Wir finden eine Folge $\{u_n\}_n$ rationaler Funktionen ohne Pole in $B_{\frac{1}{r}}(\infty_a)(\widehat{\overline{K}})$ mit $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} |u-u_n|_a(r) = 0$. Wegen Lemma 13.6 gilt $\mathrm{res}_{B^-}(R) = \lim\limits_{n\longrightarrow\infty} \mathrm{res}_{B^-}(\frac{u_n'}{u_n})$. Aus Bemerkung 13.4 wissen wir, daß $\mathrm{res}_{B^-}(\frac{u_n'}{u_n})$ gleich der Differenz aus der Anzahl der Nullstellen und der Anzahl der Polstellen (jeweils mit Multiplizitäten) von u_n in $B^-(\widehat{\overline{K}})$ ist. Da eine rationale Funktion genauso viele Null- wie Polstellen in $\widehat{\overline{K}} \cup \{\infty\}$ besitzt, folgt, daß $-\mathrm{res}_{B^-}(\frac{u_n'}{u_n})$ gleich der Anzahl der Nullstellen von u_n in $B_{\frac{1}{r}}(\infty_a)(\widehat{\overline{K}})$ ist. Für genügend großes n ist $|u-u_n|_a(r) < |u|_a(r)$. Dann ist $\frac{1}{1-\frac{u-u_n}{u}} = \sum\limits_{i\geq 0}(\frac{u-u_n}{u})^i$ konvergent in $\mathcal{A}_{\frac{1}{r}}(\infty_a)$. Somit ist $1-\frac{u-u_n}{u}$ und damit auch $u_n = u-(u-u_n) = u(1-\frac{u-u_n}{u})$ eine Einheit in $\mathcal{A}_{\frac{1}{r}}(\infty_a)$. Also folgt $\mathrm{res}_{B^-}(\frac{u_n'}{u_n}) = 0$ für genügend großes n.

Corollar 13.19: *Sind $R, \tilde{R} \in K(X)$ (a,r)-äquivalent, so gilt*

$$\mathrm{res}_{B^-}(\tilde{R}) = \mathrm{res}_{B^-}(R) \ .$$

§14 Der Robba-Ring

Eine Laurentreihe (in einer Variablen) mit Koeffizienten in K ist eine formale Reihe

$$F(X) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n X^n \quad \text{mit } a_n \in K \ .$$

Sind $0 < \delta \leq \varepsilon$, so heißt $F(X)$ (δ, ε)-konvergent, falls

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} |a_{-n}|\delta^{-n} = \lim_{n\longrightarrow\infty} |a_n|\varepsilon^n = 0 \ .$$

Parallel dazu betrachten wir für ein $a \in K$ und eine beliebige Erweiterung L von K den Kreisring

$$B_{\delta,\varepsilon}(a)(L) := \{x \in L : \delta \leq |x - a| \leq \varepsilon\} \ .$$

Für jede (δ, ε)-konvergente Laurentreihe F konvergiert die Funktion $f(x) = F(x-a)$ auf $B_{\delta,\varepsilon}(a)(L)$. Den Vektorraum aller solchen Funktionen auf $B_{\delta,\varepsilon}(a)$ bezeichnen wir mit $\mathcal{A}_{\delta,\varepsilon}(a)$. Dies ist ein Ring, welcher $\mathcal{A}_\varepsilon(a)$ und $\mathcal{A}_{\frac{1}{\delta}}(\infty_a)$ als Unterringe enthält. Für jedes $\delta \leq \varepsilon' \leq \varepsilon$ ist

$$|f|_a(\varepsilon') := \max_{n\in\mathbb{Z}} |a_n|\varepsilon'^n$$

eine Norm auf $\mathcal{A}_{\delta,\varepsilon}(a)$.

Bezeichne $B = B_r(a)$ weiterhin unseren affinoiden Ball mit zugehörigem affinoiden offenen Ball $B^- = B_r^-(a)$. Der *Robba-Ring* von B^- ist der Ring

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(B^-) : &= \bigcup_{0<\delta<r} \ \bigcap_{\delta\leq\varepsilon<r} \mathcal{A}_{\delta,\varepsilon}(a) \\ &= \text{alle Laurentreihen in } x - a, \text{ welche } (\delta, \varepsilon)\text{-konvergent} \\ & \text{ sind für ein } 0 < \delta < r \text{ und alle } \delta \leq \varepsilon < r \ . \end{aligned}$$

Zu jedem einzelnen $f \in \mathcal{R}(B^-)$ existiert ein $0 < \delta < r$, so daß f auf $\{x \in L : \delta \leq |x - a| < r\}$ konvergiert. Aber es gibt keinen Punkt, in dem alle Funktionen in $\mathcal{R}(B^-)$ konvergieren. Wie die Notation schon andeutet, ist $\mathcal{R}(B^-)$ unabhängig von der Wahl des Punktes $a \in B^-$. Ist nämlich $b \in B^-$, so gilt

$$\mathcal{A}_{\delta,\varepsilon}(b) = \mathcal{A}_{\delta,\varepsilon}(a) \quad \text{für } |a - b| < \delta \leq \varepsilon \ .$$

Offensichtlich sind $\mathcal{A}(B^-)$ und $\mathcal{A}^\dagger_{\frac{1}{r}}(\infty_a)$ Unterringe von $\mathcal{R}(B^-)$. Aber wir haben auch die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{A}(B^-) \xrightarrow{\subseteq} \mathcal{R}(B^-) \xrightarrow{\gamma_a} \frac{1}{x-a} \mathcal{A}^\dagger_{\frac{1}{r}}(\infty_a) \longrightarrow 0 \ ,$$

wobei

$$\gamma_a \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n (x - a)^n \right) := \sum_{n<0} a_n (x - a)^n$$

natürlich kein Ringhomomorphismus ist.

Bemerkung 14.1: *Jede rationale Funktion $\neq 0$ in $K(X)$ ist invertierbar in $\mathcal{R}(B^-)$.*
Beweis: Es genügt zu zeigen, daß jedes Polynom $S \neq 0$ invertierbar in $\mathcal{R}(B^-)$ ist. Dazu zerlegen wir $S = S_0 S_1$ in ein Produkt von Polynomen S_0 und S_1 so, daß S_0 bzw. S_1 alle Nullstellen bzw. keine Nullstellen in $B^-(\widehat{\overline{K}})$ besitzt. Wir wissen schon (vgl. den Beweis von Satz 9.9), daß S_1 invertierbar in $\mathcal{A}(B^-)$ ist. Andererseits hat das Polynom $X^{\deg(S_0)} S_0(\frac{1}{X}+a)$ keine Nullstelle in $B_{\frac{1}{r}}(0)(\widehat{\overline{K}})$. Ein analoges Argument liefert daher, daß $X^{\deg(S_0)} S_0(\frac{1}{X}+a)$ invertierbar in $\mathcal{A}^{\dagger}_{\frac{1}{r}}(0)$ ist. Folglich ist $(X-a)^{-\deg(S_0)} S_0$ invertierbar in $\mathcal{A}^{\dagger}_{\frac{1}{r}}(\infty_a)$.

Die Ableitung

$$\frac{d}{dx} : f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n (x-a)^n \longmapsto f'(x) := \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} n a_n (x-a)^{n-1}$$

ist wohldefiniert auf allen $\mathcal{A}_{\delta,\varepsilon}(a)$ und damit auch auf $\mathcal{R}(B^-)$. Wir sehen also, daß der Differentialoperator

$$D_{P,Q} : \mathcal{R}(B^-) \longrightarrow \mathcal{R}(B^-)$$

wohldefiniert ist.

Lemma 14.2: *Hat $D_{P,Q}|\mathcal{R}(B^-)$ endlichen Index, so ist $D_{P,Q}|\mathcal{A}(B^-)$ ein Fredholmoperator.*
Beweis: Das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{A}(B^-) \arrow[r, "\subseteq"] \arrow[d, "D_{P,Q}"] & \mathcal{R}(B^-) \arrow[r, "\gamma_a"] \arrow[d, "D_{P,Q}"] & \frac{1}{x-a}\,\mathcal{A}^{\dagger}_{\frac{1}{r}}(\infty_a) \arrow[r] \arrow[d, dashed] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{A}(B^-) \arrow[r, "\subseteq"] & \mathcal{R}(B^-) \arrow[r, "\gamma_a"] & \frac{1}{x-a}\,\mathcal{A}^{\dagger}_{\frac{1}{r}}(\infty_a) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

ist kommutativ mit exakten Zeilen. Wegen des Schlangenlemmas genügt es also zu zeigen, daß der Kern des gestrichelten Pfeiles endlich dimensional ist. Da γ_a ein Projektor auf $\frac{1}{x-a}\,\mathcal{A}^{\dagger}_{\frac{1}{r}}(\infty_a)$ ist, ist der gestrichelte Pfeil gleich dem Kompositum

$$\frac{1}{x-a}\,\mathcal{A}^{\dagger}_{\frac{1}{r}}(\infty_a) \xrightarrow{\subseteq} \mathcal{R}(B^-) \xrightarrow{D_{P,Q}} \mathcal{R}(B^-) \xrightarrow{\gamma_a} \frac{1}{x-a}\,\mathcal{A}^{\dagger}_{\frac{1}{r}}(\infty_a)\ .$$

Es existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so daß sich dieses Kompositum schreiben läßt als

$$\frac{1}{x-a}\,\mathcal{A}^{\dagger}_{\frac{1}{r}}(\infty_a) \xrightarrow{D_{P,Q}} (x-a)^N \mathcal{A}^{\dagger}_{\frac{1}{r}}(\infty_a) \xrightarrow{\gamma_a} \frac{1}{x-a}\,\mathcal{A}^{\dagger}_{\frac{1}{r}}(\infty_a)\ .$$

Der Kern der linken Abbildung ist endlich dimensional nach Voraussetzung. Der Kern der rechten Abbildung hat die Dimension $N+1$. Also ist der Kern des Kompositums endlich dimensional.

Ohne Beweis zitieren wir die sogenannte Motzkin-Zerlegung (Ann. Inst. Fourier 27 (1), S. 67 - 82, 1977).

Satz 14.3: *Jede Einheit $f \in \mathcal{R}(B^-)^\times$ besitzt eine Produktzerlegung*

$$f = (x-a)^m gh$$

mit $m \in \mathbb{Z}$, $g \in \mathcal{A}(B^-)^\times$ und $h \in \mathcal{A}^\dagger_{\frac{1}{r}}(\infty_a)^\times$; dabei ist $\mu(f) := m$ eindeutig durch f bestimmt.

Definition: *Zwei rationale Funktionen R und $\tilde{R}$ in $K(X)$ heißen B^--äquivalent, falls ein $f \in \mathcal{R}(B^-)^\times$ existiert mit $\tilde{R} - R = \frac{f'}{f}$.*

Zur Vereinfachung der Notation bezeichnen wir für ein Polynom $0 \neq S \in K[X]$ im Folgenden mit $n_{B^-}(S)$ die Anzahl der Nullstellen von S (mit Multiplizität) in $B^-(\widehat{\overline{K}})$.

Satz 14.4: *Sei K algebraisch abgeschlossen, und seien $\frac{Q}{P}$ und $\frac{Q_1}{P_1}$ zwei B^--äquivalente rationale Funktionen in $K(X)$; hat $D_{P,Q}|\mathcal{R}(B^-)$ endlichen Index, so auch $D_{P_1,Q_1}|\mathcal{R}(B^-)$, und es gilt*

$$\mathrm{ind}(D_{P,Q}|\mathcal{R}(B^-)) = \mathrm{ind}(D_{P_1,Q_1}|\mathcal{R}(B^-))$$

und

$$\mathrm{ind}(D_{P,Q}|\mathcal{A}(B^-)) + n_{B^-}(P) = \mathrm{ind}(D_{P_1,Q_1}|\mathcal{A}(B^-)) + n_{B^-}(P_1)\ .$$

Beweis: Sei $\frac{Q_1}{P_1} - \frac{Q}{P} = \frac{f'}{f}$ mit $f \in \mathcal{R}(B^-)^\times$. Das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{R}(B^-) \arrow[r, "D_{P,Q}"] \arrow[d, "f\cdot"', "\cong"] & \mathcal{R}(B^-) \arrow[d, "\cong"', "\frac{P_1}{P}f\cdot"] \\
\mathcal{R}(B^-) \arrow[r, "D_{P_1,Q_1}"'] & \mathcal{R}(B^-)
\end{tikzcd}$$

(beachte Bemerkung 14.1) zeigt, daß mit $D_{P,Q}|\mathcal{R}(B^-)$ auch $D_{P_1,Q_1}|\mathcal{R}(B^-)$ den gleichen endlichen Index hat. Nach Lemma 14.2 sind ferner $D_{P,Q}|\mathcal{A}(B^-)$ und $P_{P_1,Q_1}|\mathcal{A}(B^-)$ beides Fredholmoperatoren. Es bleibt also, die behauptete Identität für ihre Indizes zu zeigen. Wegen Lemma 8.2 und §8 Beispiel II) ist diese äquivalent zu

$$\mathrm{ind}(P_1 D_{P,Q}|\mathcal{A}(B^-)) = \mathrm{ind}(P D_{P_1,Q_1}|\mathcal{A}(B^-))\ .$$

Sei $f = (x-a)^m gh$ eine Motzkin-Zerlegung von f. Es genügt, die beiden Fälle $f = (x-a)^m$ und $f = gh$ zu betrachten.
1. Fall: Sei $f = (x-a)^m$. Dann haben wir das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A}(B^-) \arrow[r, "P_1 D_{P,Q}"] \arrow[d, "(x-a)^m\cdot"'] & \mathcal{A}(B^-) \arrow[d, "(x-a)^m\cdot"] \\
\mathcal{A}(B^-) \arrow[r, "P D_{P_1,Q_1}"'] & \mathcal{A}(B^-)\ .
\end{tikzcd}$$

Die Identität folgt also wiederum mit Lemma 8.2 und §8 Beispiel II).
2. Fall: Sei $f = gh$. Zunächst haben wir das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A}(B^-) \arrow[r, "P_1 D_{P,Q}"] \arrow[d, "g\cdot"', "\cong"] & \mathcal{A}(B^-) \arrow[d, "\cong"', "g\cdot"] \\
\mathcal{A}(B^-) \arrow[r, "P_1 D_{P,Q} - P_1 P \frac{g'}{g}"'] & \mathcal{A}(B^-)
\end{tikzcd}$$

und ein analoges auf $\mathcal{R}(B^-)$. Außerdem gilt

$$P_1 D_{P,Q} - P_1 P\,\frac{g'}{g} = P D_{P_1,Q_1} + P P_1 \frac{h'}{h}\ .$$

Also reduziert sich die behauptete Identität auf

$$\operatorname{ind}(P D_{P_1,Q_1} + P P_1 \frac{h'}{h} | \mathcal{A}(B^-)) = \operatorname{ind}(P D_{P_1,Q_1} | \mathcal{A}(B^-))\ .$$

Wegen Bemerkung 14.1 haben wir andererseits

$$\begin{aligned}
&\operatorname{ind}(P D_{P_1,Q_1} | \mathcal{R}(B^-)) = \operatorname{ind}(D_{P_1,Q_1} | \mathcal{R}(B^-)) = \operatorname{ind}(D_{P,Q} | \mathcal{R}(B^-)) \\
&= \operatorname{ind}(P_1 D_{P,Q} | \mathcal{R}(B^-)) = \operatorname{ind}(P_1 D_{P,Q} - P_1 P\,\frac{g'}{g} | \mathcal{R}(B^-)) \\
&= \operatorname{ind}(P D_{P_1,Q_1} + P P_1 \frac{h'}{h} | \mathcal{R}(B^-))\ .
\end{aligned}$$

Unter Verwendung der kurzen exakten Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{A}(B^-) \xrightarrow{\subseteq} \mathcal{R}(B^-) \xrightarrow{\gamma_a} \frac{1}{x-a}\,\mathcal{A}^\dagger_{\frac{1}{r}}(\infty_a) \longrightarrow 0$$

und Lemma 8.1 folgt, daß die gesuchte Identität gleichbedeutend ist mit

$$\operatorname{ind}(\gamma_a \circ (P D_{P_1,Q_1} + P P_1 \frac{h'}{h}) | \frac{1}{x-a} \mathcal{A}^\dagger_{\frac{1}{r}}(\infty_a)) = \operatorname{ind}(\gamma_a \circ P D_{P_1,Q_1} | \frac{1}{x-a} \mathcal{A}^\dagger_{\frac{1}{r}}(\infty_a))\ .$$

Nun existiert aber ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$(P D_{P_1,Q_1} + P P_1 \frac{h'}{h})(\frac{1}{x-a} \mathcal{A}^\dagger_{\frac{1}{r}}(\infty_a)) + P D_{P_1,Q_1}(\frac{1}{x-a} \mathcal{A}^\dagger_{\frac{1}{r}}(\infty_a)) \subseteq (x-a)^N \mathcal{A}^\dagger_{\frac{1}{r}}(\infty_a)\ .$$

Deswegen genügt es schließlich zu zeigen, daß die beiden Operatoren

$$P D_{P_1,Q_1} + P P_1 \frac{h'}{h} \text{ und } P D_{P_1,Q_1} : \frac{1}{x-a} \mathcal{A}^\dagger_{\frac{1}{r}}(\infty_a) \longrightarrow (x-a)^N \cdot \mathcal{A}^\dagger_{\frac{1}{r}}(\infty_a)$$

den gleichen Index haben. Dies ist aber klar auf Grund des kommutativen Diagrammes

$$\begin{tikzcd}
\frac{1}{x-a}\,\mathcal{A}^\dagger_{\frac{1}{r}}(\infty_a) \arrow[r, "P D_{P_1,Q_1} + P P_1 \frac{h'}{h}"] \arrow[d, "h\cdot"', "\cong"] & (x-a)^N \mathcal{A}^\dagger_{\frac{1}{r}}(\infty_a) \arrow[d, "\cong"', "h\cdot"] \\
\frac{1}{x-a}\,\mathcal{A}^\dagger_{\frac{1}{r}}(\infty_a) \arrow[r, "P D_{P_1,Q_1}"'] & (x-a)^N \mathcal{A}^\dagger_{\frac{1}{r}}(\infty_a)\ .
\end{tikzcd}$$

Satz 14.5: *Seien* $\frac{Q}{P}$ *und* $\frac{Q_1}{P_1}$ *zwei* B^-*-äquivalente rationale Funktionen in* $K(X)$*; dann gilt:*
i. Es existiert ein $0 < \varepsilon_0 < r$ *mit*

$$\rho_a(D_{P_1,Q_1},\varepsilon) = \rho_a(D_{P,Q},\varepsilon) \quad \textit{für alle} \quad \varepsilon_0 \le \varepsilon \le r \ ;$$

ii. $\mathrm{res}_{B^-}(\frac{Q_1}{P_1}) = \mathrm{res}_{B^-}(\frac{Q}{P}) + \mu(f)$*, falls* $\frac{Q_1}{P_1} - \frac{Q}{P} = \frac{f'}{f}$ *mit* $f \in \mathcal{R}(B^-)^\times$.
Beweis: i. Man wiederhole den Beweis von Lemma 13.14. ii. (Skizze) Die Abbildung

$$\mathrm{res}_{B^-} : K(X) \longrightarrow K$$

setzt sich fort zu der Linearform

$$\begin{array}{rrcl} \mathrm{res}: & \mathcal{R}(B^-) & \longrightarrow & K \\ & \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} a_n(x-a)^n & \longmapsto & a_{-1} \ . \end{array}$$

Es genügt also zu zeigen, daß gilt

$$\mathrm{res}\left(\frac{f'}{f}\right) = \mu(f) \quad \text{für alle } f \in \mathcal{R}(B^-) \ .$$

Sei $f = (x-a)^m gh$ eine Motzkin-Zerlegung von f. Dann ist

$$\mathrm{res}\left(\frac{f'}{f}\right) = \mathrm{res}\left(\frac{m}{x-a}\right) + \mathrm{res}\left(\frac{g'}{g}\right) + \mathrm{res}\left(\frac{h'}{h}\right) = \mu(f) + \mathrm{res}\left(\frac{h'}{h}\right) \ ,$$

da trivialerweise $\mathrm{res}|\mathcal{A}(B^-) = 0$. In Verallgemeinerung des Argumentes im Beweis von Lemma 13.18 zeigt man, daß

$$\mathrm{res}\left(\frac{h'}{h}\right) = 0 \quad \text{für alle } h \in \mathcal{A}^\dagger_{\frac{1}{r}}(\infty_a)^\times \ .$$

Die B^--Äquivalenz ist am besten in dem folgenden allgemeinen algebraischen Kontext zu verstehen.

Definition: *Ein* $\mathcal{R}(B^-)$*-Differentialmodul ist ein Paar* (M, D) *bestehend aus einem freien* $\mathcal{R}(B^-)$*-Modul* M *von endlichem Rang und einem* K*-linearen Operator* $D : M \longrightarrow M$*, für welchen gilt*

$$D(fm) = f'm + fD(m) \quad \textit{für alle } f \in \mathcal{R}(B^-) \textit{ und } m \in M \ .$$

Natürlich heißen zwei $\mathcal{R}(B^-)$-Differentialmoduln (M_1, D_1) und (M_2, D_2) isomorph, wenn es einen $\mathcal{R}(B^-)$-linearen Isomorphismus

$$\alpha : M_1 \xrightarrow{\cong} M_2 \quad \text{mit } D_2 \circ \alpha = \alpha \circ D_1$$

gibt. Die Differentialmoduln von Rang 1 sind bis auf Isomorphie von der Form $(\mathcal{R}(B^-), D)$. Dabei sind $(\mathcal{R}(B^-), D_1)$ und $(\mathcal{R}(B^-), D_2)$ genau dann isomorph, wenn ein $f \in \mathcal{R}(B^-)^\times$ existiert mit

$$D_1 - D_2 = \left(\frac{f'}{f}\cdot\right) .$$

Als Ausblick sei das folgende Theorem von Christol/Mebkhout (vormals die sogenannte Robba-Vermutung) erwähnt.

Theorem: *Hat der Differentialoperator $D \in K[x, \frac{d}{dx}]$ auf $\mathcal{R}(B^-)$ einen Index, so ist dieser $= 0$.*

§15 **Der Indexsatz**

Sei K p-adisch und algebraisch abgeschlossen. Sei $B = B_r(a)$ ein affinoider Ball, $B^- = B_r^-(a)$, $D := D_{P,Q}$ und $n_{B^-}(P)$ die Anzahl der Nullstellen von P in B^-.

Satz 15.1: *Es liege nicht der Fall vor, daß D (a, r)-singular-regulär ist mit einer Liouville-Zahl* $\mathrm{res}_{B^-}(\frac{Q}{P})$*; dann gilt:*
i. $D|\mathcal{A}(B^-)$ ist ein Fredholmoperator;
ii. die linksseitige Ableitung der Funktion $v_a(D,\ .)$ im Punkte $\log r$ *existiert;*
iii. $\mathrm{ind}(D|\mathcal{A}(B^-)) = d^-v_a(D, \log r) - n_{B^-}(P)$.
Beweis: 1. Fall: D sei (a, r)-singulär-regulär, aber $\alpha := \mathrm{res}_{B^-}(\frac{Q}{P})$ sei keine Liouville-Zahl. Im Beweis von Satz 13.16 haben wir gesehen, daß $\frac{Q}{P}$ B^--äquivalent zu $\frac{\alpha}{X-a}$ ist (beachte dabei auch Corollar 13.19). Eine leichte Verallgemeinerung des Beweises von Satz 13.9 ergibt, daß $D_{X-a,\alpha}$ sowohl auf $\mathcal{R}(B^-)$ wie auf $\mathcal{A}(B^-)$ den Index 0 hat. Also folgt aus Satz 14.4, daß $D_{P,Q}$ auf $\mathcal{R}(B^-)$ den Index 0 und auf $\mathcal{A}(B^-)$ den Index $1 - n_{B^-}(P)$ hat. Nach Satz 14.5.i und Satz 13.8 existiert ein $0 < \varepsilon_0 < r$, so daß $\rho_a(D, \varepsilon) = \varepsilon$ für alle $\varepsilon_0 \le \varepsilon \le r$. Also ist $d^-v_a(D, \log r) = 1$.
2. Fall: Es existiere eine Folge $0 < \varepsilon_1 < \ldots < \varepsilon_n < \ldots < r$, welche gegen r konvergiert, und so daß $\rho_a(D, \varepsilon_n) = \varepsilon_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Wegen der Stetigkeit von $\rho_a(D, .)$ ist dann auch $\rho_a(D, r) = r$. Wir können sicherlich ein $n_0 \in \mathbb{N}$ so wählen, daß P keine Nullstellen in $\{x : \varepsilon_{n_0} \le |x - a| < r\}$ besitzt. Wenden wir Bemerkung 13.17 auf eine Erweiterung L von K mit $|L^\times| = \mathbb{R}_{>0}$ an, so erhalten wir $\rho_a(D, \varepsilon) = \varepsilon$ für alle $\varepsilon_{n_0} \le \varepsilon \le r$. Nach Satz 13.13 sind wir damit aber im ersten Fall.
3. Fall: Es existiere ein $0 < \varepsilon_0 < r$, so daß $\rho_a(D, \varepsilon) < \varepsilon$ gilt für alle $\varepsilon_0 \le \varepsilon < r$. Wir können dann zusätzlich annehmen, daß P keine Nullstellen in $\{x : \varepsilon_0 \le |x - a| < r\}$ besitzt. Nach Lemma 10.5 ist die Funktion $v_a(D, t)$ auf $[\log \varepsilon_0, \log r)$ stückweise linear und konkav, und alle links- wie rechtsseitigen Ableitungen sind ganze Zahlen. Genauer ist

$$d^-v_a(D, t) = n_{B^-}(P) - \frac{1}{m} n_{B^-_{\exp t}(a)}(Q^*_m)$$

für ein $m \in \mathbb{N}$, welches von $t \in [\log \varepsilon_0, \log r)$ abhängt. Mit $\varepsilon := \exp t$ ergibt sich also

$$\begin{aligned} d^-v_a(D, t) &= -\tfrac{1}{m}(n_{B^-_\varepsilon(a)}(\text{Zähler}(R^*_m)) - n_{B^-_\varepsilon(a)}(\text{Nenner}(R^*_m))) \\ &\ge -\tfrac{1}{m} \cdot \text{ Anzahl der Polstellen von } R^*_m \text{ in } B_{\frac{1}{\varepsilon}}(\infty_a) \;. \end{aligned}$$

Aus der Rekursionsformel für R_m^* folgt aber

$$\begin{aligned}&\text{Anzahl der Polstellen von } R_m^* \text{ in } B_{\frac{1}{\varepsilon}}(\infty_a)\\ &\qquad\leq m\cdot \text{Anzahl der Polstellen von } \frac{Q}{P} \text{ in } B_{\frac{1}{\varepsilon}}(\infty_a)\ .\end{aligned}$$

Somit erhalten wir

$$\begin{aligned} d^-v_a(D,t) &\geq -\text{Anzahl der Polstellen von } \tfrac{Q}{P} \text{ in } B_{\frac{1}{\varepsilon}}(\infty_a)\\ &\geq -\text{Anzahl der Polstellen von } \tfrac{Q}{P} \text{ in } B_{\frac{1}{\varepsilon_0}}(\infty_a)\ ,\end{aligned}$$

wobei der letzte Term unabhängig von t ist. Folglich existiert ein $\varepsilon_0 \leq \varepsilon_1 < r$, so daß $v_a(D,t)$ auf $[\log\varepsilon_1, \log t)$ und damit auf $[\log\varepsilon_1, \log r]$ linear ist. Nach Satz 10.4 ist dann

$$\mathrm{ind}(D|\mathcal{A}_\rho(a)) = d^-v_a(D, \log r) - n_{B^-}(P)$$

für alle $\rho \in [\varepsilon_1, r) \cap |K|$. Wir wählen eine Folge $\varepsilon_1 \leq \rho_1 < \ldots < \rho_i < \ldots < r$ in $|K|$, welche gegen r konvergiert. Dann ist

$$\mathcal{A}_{\rho_1}(a) \supseteq \ldots \supseteq \mathcal{A}_{\rho_1}(a) \supseteq \ldots$$

eine absteigende Folge von Banachräumen mit

$$\mathcal{A}(B^-) = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{A}_{\rho_i}(a)\ .$$

Die absteigende Folge der endlich dimensionalen Kerne $ker(D|\mathcal{A}_{\rho_i}(a))$ muß konstant werden. Also folgt

$$ker(D|\mathcal{A}(B^-)) = ker(D|\mathcal{A}_{\rho_i}(a)) \quad \text{für großes } i\ .$$

Da der Index $\mathrm{ind}(D|\mathcal{A}_{\rho_i}(a))$ nicht von i abhängt, wird auch die Folge der Dimensionen der Vektorräume $coker(D|\mathcal{A}_{\rho_i}(a))$ konstant. Alle Inklusionen $\mathcal{A}_{\rho_{i+1}}(a) \subseteq \mathcal{A}_{\rho_i}(a)$ haben dichtes Bild, da in allen diesen Räumen die Polynome dicht liegen. Nach Satz 8.8 sind also für großes i die äußeren senkrechten Pfeile in dem kommutativen Diagramm

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & ker(D|\mathcal{A}_{\rho_{i+1}}(a)) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] & \mathcal{A}_{\rho_{i+1}}(a) \arrow[r, "D"] \arrow[d, "\subseteq"'] & \mathcal{A}_{\rho_{i+1}}(a) \arrow[r] \arrow[d, "\subseteq"'] & coker(D|\mathcal{A}_{\rho_{i+1}}(a)) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] & 0 \\ 0 \arrow[r] & ker(D|\mathcal{A}_{\rho_i}(a)) \arrow[r] & \mathcal{A}_{\rho_i}(a) \arrow[r, "D"] & \mathcal{A}_{\rho_i}(a) \arrow[r] & coker(D|\mathcal{A}_{\rho_i}(a)) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Isomorphismen von endlich dimensionalen Vektorräumen. Mit Hilfe der sogenannten Mittag-Leffler-Bedingung (EGA III 0.13.2.4) folgert man, daß die durch Übergang zum projektiven Limes entstehende Sequenz ebenfalls exakt ist. Das bedeutet insbesondere

$$coker(D|\mathcal{A}(B^-)) \cong \varprojlim_i coker(D|\mathcal{A}_{\rho_i}(a))\ .$$

Für großes i ist die rechte Seite aber isomorph zu $coker(D|\mathcal{A}_{\rho_i}(a))$ und damit

$$\mathrm{ind}(D|\mathcal{A}(B^-)) = \mathrm{ind}(D|\mathcal{A}_{\rho_i}(a)) = d^- v_a(D, \log r) - n_{B^-}(P) \ .$$

Bemerkung 15.2: *Es gelte $\rho_a(D,r) = r$. Ist D (a,r)-singulär-regulär und* $\mathrm{res}_{B^-}(\frac{Q}{P})$ *keine Liouville-Zahl, so ist*

$$d^- v_a(D, \log r) = 1 \ .$$

Ist D nicht (a,r)-singulär-regulär, so zeigen die Argumente im 3. Fall des obigen Beweises, daß

$$d^- v_a(D, \log r) > 1 \ .$$