Technische Universität Chemnitz

Vorlesungsskript

Stochastische Differentialgleichungen

Dr. Starkloff / Dr. Wunderlich

Fakultät für Mathematik - Lehrstuhl Stochastik

14. März 2000

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Differentialgleichungen: wichtiges mathematisches Teilgebiet

- Werkzeug in anderen Wissenschaften und in Anwendungen
- ganze Reihe von Erscheinungen lassen sich (besser) mit zufälligen Modellen beschreiben

$\Rightarrow$ Notwendigkeit auch Differentialgleichungen mit zufälligen Einflüssen zu untersuchen

zwei verschiedene Typen, die sich von der Herangehensweise stark unterscheiden:

1. Differentialgleichungen mit zufälligen Parametern

z.B.

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + f \\ x_0 = c \end{cases}$$

f zufällige Erregung (stetig), eventuell A zufällige Matrix, c zufälliger Anfangswert

für jedes $\omega \in \Omega$:

$$\begin{cases} \dot{x} = A(\omega)x + f_t(\omega) \\ x_0 = c(\omega) \end{cases}$$

deterministische Differentialgleichung (Familie von Differentialgleichungen)

im wesentlichen wird Abhängigkeit von ω untersucht: Verteilung der Lösung, Kenngrößen wie Momente usw. (siehe Vorlesung „Schwach korrelierte zufällige Funktionen“)

2. Stochastische Differentialgleichungen (SDE)

Beispiel 1.1 Brownsche Bewegung eines Partikels
Langevin (1908): $\dot{x} = -\mu x + \sigma \xi_t$

x	Geschwindigkeit des Partikels
μ	Reibungskoeffizient
ξ_t	durch Moleküle ausgeübte Kraft (10^{21} Stöße pro Sekunde, starke Fluktuationen)
$\sigma > 0$	Konstante

Beispiel 1.2 Wärmerauschen in elektrischen Leitern, Schwing-, Schaltkreisen

Beispiel 1.3 Preisprozesse in Finanzmärkten, zeitstetige Modelle für Aktienkurse

Bachelier	(1900)	„$\dot{x} = \mu + \sigma \xi_t$“	(absolute Änderungen)
Samuelson	(1965)	„$\frac{\dot{x}}{x} = \frac{d}{dt}(\ln x) = \mu + \sigma \xi_t$“	(relative Zuwächse, Returns)
		$\Rightarrow$ geometrische Brownsche Bewegung	

x	Aktienkurs
μ	Drift
$\sigma > 0$	Volatilität

Basis des Black-Scholes-Modells für Optionspreise, Nobelpreis 1997 mathematische Schwierigkeit: Zufallsprozeß ξ_t mit unabhängigen Werten hat keine guten mathematischen Eigenschaften (keine meßbaren Trajektorien usw.) und Lösungsprozeß ist eigentlich nicht differenzierbar, d.h. Gleichung oben ist sinnlos (im klassischen Sinne) notwendig neues Kalkül, dazu Übergang zu entsprechender äquivalenter Integralgleichung: (vgl. Beweis Existenz und Eindeutigkeit der Lösung)

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t,x) \\ x_0 = c \end{cases} \quad \widehat{=} \; x_t = c + \int_0^t f(s, x_s)\, ds$$

analog für stochastische Differentialgleichungen (SDE)

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t,x) + g(t,x)\xi_t \\ x_0 = c \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x_t = c + \int_0^t f(s, x_s)\, ds + \int_0^t g(s, x_s)\xi_s\, ds$$

für obiges Weißes Rauschen: $\int_0^t \xi_s\, ds = W_t$ Wiener-Prozeß $\Rightarrow$ wird geschrieben

$$x_t = c + \int_0^t f(s, x_s)\, ds + \int_0^t g(s, x_s)\, dW_s$$

bzw.

$$\begin{cases} dx_t = f(t,x_t)\, dt + g(t,x_t)\, dW_t \\ x_0 = c \end{cases} \quad \text{(dies ist nur eine Schreibweise)}$$

$\Rightarrow$ stochastische Differentialgleichungen können exakt definiert werden, wenn für hinreichende Klasse von Zufallsprozessen stochastisches Integral

$$\int_0^t \eta_s\, dW_s$$

definiert werden kann, z.B. Itô-Integral (1951), und SDE werden dann als Integralgleichungen interpretiert

Bemerkung 1.1

- können noch „weniger“ SDE richtig gelöst werden als im deterministischen Fall; hauptsächlich qualitative Aussagen über Verteilungen, Kenngrößen usw.; quantitative Aussagen häufig durch Simulation
- hier nur gewöhnliche SDE
- hier nur Gleichungen von Typ $dx_t = f(t, x_t)\, dt + g(t, x_t)\, dW_t$,
  allgemeiner wäre möglich statt dW_t : dM_t, M_t: Martingal, Semimartingal;
- hier nur ein ganz kleiner Ausschnitt aus einer riesigen und ziemlich komplizierten Theorie

Literatur

[1] Arnold, L.: Stochastische Differentialgleichungen (1973),
englische Ausgabe (1974/1992).

[2] Øksendal, B.: Stochastic Differential Equations (1992).

[3] Karatzas, I.; Shreve, S. E.: Brownian Motion and Stochastic Calculus (1991).

2 Zufallsfunktionen

2.1 Definitionen

Sei $T \neq \emptyset$ beliebige Indexmenge, $(\Omega, \mathcal{F}, \boldsymbol{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. $\Rightarrow$ Die Familie $(\xi_t, t \in T)$ von Zufallsgrößen heißt stochastischer Prozeß (zufälliger Prozeß, zufällige Funktion) mit Parametermenge (Indexmenge) T und Zustandsraum $\mathbb{R}$.

entsprechende Definitionen für allgemeinere Zustandsräume: $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}^d$, $\mathbb{C}^d$ usw.,
diese Mengen immer mit der σ-Algebra der Borelmengen ausgestattet $\Rightarrow$ meßbare Räume: $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})), (\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C})), \ldots$

T endlich $\Rightarrow$ Zufallsvektor
$T = \mathbb{Z}$ oder $T = \mathbb{N} \Rightarrow$ zufällige Folge, Zeitreihe
$T \subset \mathbb{R} \Rightarrow$ Zufallsprozeß
$T \subset \mathbb{R}^m \Rightarrow$ Zufallsfeld

Abbildung $\xi : \Omega \times T \to \mathbb{R}\ , \quad (\omega, t) \mapsto \xi_t(\omega)$
für fixierte $t \in T$ $\quad \xi_t(\cdot) : \Omega \to \mathbb{R}$ $\quad$ Zufallsvariable
für fixierte $\omega \in \Omega$ $\quad \xi_\cdot(\omega) : T \to \mathbb{R}$ $\quad$ „Realisierung, Trajektorie, Pfad" der Zufallsfunktion

2.2 Endlichdimensionale Verteilungen von Zufallsfunktionen

Zufallsfunktion $(\xi_t, t \in T)$:

$$\begin{aligned}
F_t(x) &= \boldsymbol{P}(\xi_t \leq x) = \boldsymbol{P}(\{\omega \in \Omega : \xi_t(\omega) \leq x\}) \\
F_{t_1,t_2}(x_1, x_2) &= \boldsymbol{P}(\xi_{t_1} \leq x_1, \xi_{t_2} \leq x_2) \\
&\vdots \\
F_{t_1,\ldots,t_n}(x_1, \ldots, x_n) &= \boldsymbol{P}(\xi_{t_1} \leq x_1, \ldots, \xi_{t_n} \leq x_n) \\
&\vdots \\
\forall n \in \mathbb{N} \;\; \forall (t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^n &\;\; \forall (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n
\end{aligned}$$

wenn $(\xi_t, t \in T)$ gegeben $\Rightarrow$ dann ist das System der endlichdimensionalen Verteilungsfunktionen berechenbar

Eigenschaften:

(i) Symmetrie: $(i_1, \ldots, i_n)$ Permutationen von $(1, \ldots, n)$

$\Rightarrow \;\; F_{t_{i_1},\ldots,t_{i_n}}(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}) = F_{t_1,\ldots,t_n}(x_1, \ldots, x_n)$

(ii) Verträglichkeit: für $m < n$ und beliebige $t_{m+1}, \ldots, t_n \in T$

$\Rightarrow \;\; F_{t_1,\ldots,t_m,t_{m+1},\ldots,t_n}(x_1, \ldots, x_m, +\infty, \ldots, +\infty) = F_{t_1,\ldots,t_m}(x_1, \ldots, x_m)$

in seltensten Fällen Zufallsfunktion ξ als Abbildung $(\omega, t) \mapsto \xi_t(\omega)$ gegeben, eher schon als vollständiges System von Verteilungsfunktionen

Satz 2.1 (von Kolmogorov)
Zu jeder Familie von Verteilungsfunktionen, welche die Symmetrie- und Verträglichkeitsbedingungen erfüllt, gibt es einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \boldsymbol{P})$ *und einen Zufallsprozeß*

$(\xi_t, t \in T)$ *darauf, der die vorgegebenen Verteilungen als endlichdimensionale Verteilungen besitzt.*

T kann beliebig sein! Zustandsraum kann z.B. sein $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{R}^d, \mathbb{C}^d$, vollständiger separabler metrischer Raum (hier gibt es Beschränkungen!)

2.3 Äquivalenz von Zufallsfunktionen

Definition 2.1
Zwei Zufallsfunktionen $(\xi_t, t \in T)$ und $(\eta_t, t \in T)$, die

(i) auf verschiedenen Wahrscheinlichkeitsräumen definiert sein können, heißen stochastisch äquivalent im weiteren Sinne, wenn ihre endlichdimensionalen Verteilungen übereinstimmen.
(Die Parametermenge T und der Zustandsraum müssen natürlich übereinstimmen.)

(ii) auf ein und dem selben Wahrscheinlichkeitsraum definiert sind, heißen stochastisch äquivalent, falls gilt

$$\forall t \in T \ \boldsymbol{P}(\xi_t = \eta_t) = 1\,.$$

ξ und η heißen dann Modifikationen bzw. Versionen voneinander.

(iii) auf ein und dem selben Wahrscheinlichkeitsraum definiert sind, heißen ununterscheidbar, falls gilt

$$\boldsymbol{P}(\xi_t = \eta_t \ \forall t \in T) = 1\,.$$

- Es gilt (iii) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (i).
- In (ii) kann die Menge $\{\omega \in \Omega : \xi_t \neq \eta_t\}$ von t abhängen, in (iii) gilt für fast alle $\omega \in \Omega :\ \xi_t = \eta_t \ \forall t \in T$ gleichzeitig.

Beispiel 2.1 $(\Omega, \mathcal{F}, \boldsymbol{P}) = ([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda) \quad T = [0,1]$
$\xi_t(\omega) \equiv 0 \ \forall t \in [0,1] \ \forall \omega \in \Omega$
$\eta_t(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{falls } \omega \neq t \\ 1 & \text{falls } \omega = t \end{cases}$
$\Rightarrow$ ξ und η sind stochastisch äquivalent (Modifikationen), aber nicht ununterscheidbar
ξ hat stetige Trajektorien, η nicht

$$\sup \xi_t(\omega) \equiv 0 \ \forall \omega \in \Omega, \ \sup \eta_t(\omega) \equiv 1 \ \forall \omega \in \Omega$$

Behauptung 2.1

(i) Sind $(\xi_t, t \in T)$ und $(\eta_t, t \in T)$, $T \subset \mathbb{R}$, zwei stochastisch äquivalente Zufallsprozesse, die beide linksseitig (rechtsseitig) stetig sind, dann sind ξ und η ununterscheidbar.

(ii) Ist T abzählbar, so sind zwei stochastisch äquivalente Zufallsprozesse ununterscheidbar.

2.4 Momentenfunktionen

häufig endlichdimensionale Verteilungsfunktionen unbekannt, einfachere Kenngrößen: Momente (falls sie existieren)
$(\xi_t, t \in \mathbb{R})$ reellwertiger Zufallsprozeß mit $\boldsymbol{E}|\xi_t|^r < \infty\ \forall t \in \mathbb{R}$
$\forall k \leq r$ definierte k-te Momentenfunktion

$$m_k(t_1, t_2, \ldots, t_k) = \boldsymbol{E}\xi_{t_1}\xi_{t_2}\ldots\xi_{t_k}$$

wichtigste:

$m_1(t)$ Mittelwertfunktion: $m_1(t) = \boldsymbol{E}\xi_t$
$R(t_1,t_2)$ Korrelationsfunktion: $R(t_1,t_2) = m_2(t_1,t_2) - m_1(t_1)m_1(t_2)$
$= \boldsymbol{E}[\xi_{t_1} - \boldsymbol{E}\xi_{t_1}][\xi_{t_2} - \boldsymbol{E}\xi_{t_2}]$

für komplexwertige Zufallsfunktionen:

$$R(t_1,t_2) = \boldsymbol{E}[\xi_{t_1} - \boldsymbol{E}\xi_{t_1}]\overline{[\xi_{t_2} - \boldsymbol{E}\xi_{t_2}]}$$

Kovarianzfunktion: $C(t_1,t_2) = \boldsymbol{E}\xi_{t_1}\overline{\xi_{t_2}} \ \Rightarrow\ R(t_1,t_2) = C(t_1,t_2) - \boldsymbol{E}\xi_{t_1}\boldsymbol{E}\overline{\xi_{t_2}}$

Eigenschaften:

(i) $R(t_1,t_2)$ nichtnegativ definit:
$\forall n \in \mathbb{N}\ \forall t_1,\ldots,t_n \in T\ \forall z_1,\ldots,z_n \in \mathbb{C}$
$\sum\limits_{i,j=1}^{n} R(t_i,t_j) z_i \overline{z_j} \geq 0$ (reell und nichtnegativ)

(ii) $R(t,t) \geq 0\ \forall t \in T$

(iii) $R(t_1,t_2) = \overline{R(t_2,t_1)}$

(iv) $|R(t_1,t_2)|^2 \leq R(t_1,t_1)R(t_2,t_2)$

Satz 2.2
Für eine beliebig gegebene Funktion $m_1(\cdot)$ auf T und eine beliebig gegebene nichtnegativ definite Funktion $R(\cdot,\cdot)$ auf $T \times T$ existiert eine komplexe Zufallsfunktion, die $m_1(\cdot)$ bzw. $R(\cdot,\cdot)$ als ihre Mittelwertfunktion bzw. Korrelationsfunktion hat. Sind $m_1(\cdot)$ und $R(\cdot,\cdot)$ reellwertig, so existiert ein reellwertiger Prozeß.

Bemerkung 2.1
Sei $(\xi_t, t \in \mathbb{R})$ gegeben mit der Mittelwertfunktion $m_1(t) = \boldsymbol{E}\xi_t$ und der Kovarianzfunktion $C_\xi(t_1,t_2) = \boldsymbol{E}\xi_{t_1}\overline{\xi_{t_2}}$.
Dann gilt für $\eta_t = \mathrm{e}^{i\theta}\xi_t$, θ unabhängig von $(\xi_t, t \in \mathbb{R})$, θ gleichmäßig verteilt auf $[0, 2\pi]$:

$$\boldsymbol{E}\eta_t = 0\,, \quad \boldsymbol{E}\eta_{t_1}\overline{\eta_{t_2}} = R_\eta(t_1,t_2) = C_\xi(t_1,t_2).$$

Beweis:
$\boldsymbol{E}\eta_t = \boldsymbol{E}\,\mathrm{e}^{i\theta}\xi_t = \underbrace{\boldsymbol{E}\,\mathrm{e}^{i\theta}}_{=0}\boldsymbol{E}\xi_t = 0$

$\boldsymbol{E}\eta_{t_1}\overline{\eta_{t_2}} = R_\eta(t_1,t_2) = \boldsymbol{E}\,\mathrm{e}^{i\theta}\xi_{t_1}\,\mathrm{e}^{-i\theta}\overline{\xi_{t_2}} = \boldsymbol{E}\xi_{t_1}\overline{\xi_{t_2}} = C_\xi(t_1,t_2)$ □

$\Rightarrow$ Jede Kovarianzfunktion ist auch Korrelationsfunktion eines (anderen) Zufallsprozesses. Jede Korrelationsfunktion ist auch Kovarianzfunktion eines Zufallsprozesses (für $\eta_t = \xi_t - \boldsymbol{E}\xi_t$).

2.5 Stetigkeit von Trajektorien

- für Anwendungen oft Stetigkeit der Trajektorien gefordert (vgl. Physik), oder auch noch glattere Trajektorien
- sehr kompliziert, notwendige und hinreichende Bedingungen dafür anzugeben
- relativ einfach hinreichende Bedingung über Momente:

Satz 2.3 (von Kolmogorov)
$(\xi_t, t \in \mathbb{R})$ *reellwertiger Prozeß,* $\exists\, \alpha, \beta, c > 0$*:*

$$\boldsymbol{E}|\xi_t - \xi_s|^\alpha \le c\,|t-s|^{1+\beta}\,.$$

Dann besitzt der Zufallsprozeß eine Modifikation mit stetigen Trajektorien.

- wichtig hier Parameterbereich $T = \mathbb{R}$,
  falls $T = \mathbb{R}^d, d > 1$: hinreichende Bedingung ist $\boldsymbol{E}|\xi_t - \xi_s|^\alpha \le c\,|t-s|^{d+\beta},\ \alpha, \beta, c > 0$

2.6 L_2-Theorie

gegeben $(\Omega, \mathcal{F}, \boldsymbol{P})$, betrachten komplexwertige Zufallsgrößen

$$L_2 = L_2(\Omega, \mathcal{F}, \boldsymbol{P}) = \{\xi : \boldsymbol{E}|\xi|^2 < \infty\}$$

eigentlich Äquivalenzklassen von f.s. gleichen Zufallsgrößen

Abb.: $\xi, \eta \mapsto (\xi, \eta) = \boldsymbol{E}\xi\overline{\eta}$ ist Skalarprodukt
$\xi \mapsto \|\xi\| = \sqrt{\boldsymbol{E}|\xi|^2}$ ist Norm

Konvergenz bezüglich dieser Norm: Quadratmittelkonvergenz:

$$\xi_n \stackrel{i.q.M.}{\longrightarrow} \xi \iff \lim_{n\to\infty} \boldsymbol{E}|\xi_n - \xi|^2 = 0 \qquad \text{Bez.: } \xi = \operatorname*{l.i.m.}_{n\to\infty} \xi_n$$ (limit in mean square)

Behauptung 2.2
gegeben sei Folge $(\xi_n, n \in \mathbb{N}),\ \xi_n \in L_2$

(i) $\exists\, \xi \in L_2 : \xi = \operatorname*{l.i.m.}_{n\to\infty} \xi_n \iff \lim_{n,m\to\infty} \boldsymbol{E}|\xi_n - \xi_m|^2 = 0\,,$

d.h. Folge ist Cauchy-Folge (Fundamentalfolge)

(hieraus folgt, daß L_2 ein Hilbert-Raum ist; ob separabel oder nicht, hängt vom zugrundeliegenden Wahrscheinlichkeitsraum ab)

(ii) [Kriterium von Loève]
$\exists\, \xi \in L_2 : \xi = \operatorname*{l.i.m.}_{n\to\infty} \xi_n \iff \exists\, c \in \mathbb{C} : \lim_{n,m\to\infty} \boldsymbol{E}\xi_n\overline{\xi_m} = c$

- Sind ξ und η zentriert, d.h. $\boldsymbol{E}\xi = \boldsymbol{E}\eta = 0$, so bedeutet die Orthogonalität $(\xi, \eta) = \boldsymbol{E}\xi\overline{\eta} = 0$, daß die Zufallsgrößen unkorreliert sind.
- Schwarzsche Ungleichung: $|\boldsymbol{E}\xi\overline{\eta}|^2 \le \boldsymbol{E}|\xi|^2\boldsymbol{E}|\eta|^2$

- aus $\xi = \underset{n\to\infty}{\text{l.i.m.}}\, \xi_n$ folgen: $\boldsymbol{E}\xi = \lim\limits_{n\to\infty} \boldsymbol{E}\xi_n$
  $\boldsymbol{E}|\xi|^2 = \lim\limits_{n\to\infty} \boldsymbol{E}|\xi_n|^2$

betrachten nun Zufallsfunktionen $(\xi_t, t \in \mathbb{R})$ mit $\xi_t \in L_2\ \forall t \in \mathbb{R}$
„second-order process", „lineare Theorie"
Kovarianzfunktion $C(s,t) := \boldsymbol{E}\xi_s\overline{\xi_t}$ (ist positiv definit)
falls $\boldsymbol{E}\xi_t = 0\ \forall t \in \mathbb{R}:\ C(s,t) = R(s,t)$ Korrelationsfunktion

Definition 2.2
Ein Zufallsprozeß ist im Quadratmittel stetig im Punkt $t \in \mathbb{R}$, falls gilt

$$\underset{h\to 0}{\text{l.i.m.}}\, \xi_{t+h} = \xi_t\,.$$

Entsprechend ist der Prozeß stetig auf $T \subset \mathbb{R}$, wenn er in jedem Punkt von T stetig ist.

Behauptung 2.3
Der Zufallsprozeß $(\xi_t, t \in \mathbb{R})$ ist im Quadratmittel stetig

(i) im Punkt $t \in \mathbb{R}$ genau dann, wenn die Kovarianzfunktion $C(\cdot,\cdot)$ im Punkt (t,t) stetig ist.

(ii) auf $T \subset \mathbb{R}$ genau dann, wenn die Kovarianzfunktion $C(\cdot,\cdot)$ in jedem Punkt (t,t), $t \in T$ stetig ist. In genau diesem Fall ist die Kovarianzfunktion auf $T \times T$ stetig.

Beweis:
Schwarzsche Ungleichung, Definition,... □

Stetigkeit im Quadratmittel bedeutet nicht, daß die Trajektorien stetig sein müssen (vgl. Poisson-Prozeß).

Definition 2.3
Der Zufallsprozeß $(\xi_t, t \in \mathbb{R})$ besitzt im Punkt t eine Ableitung im Quadratmittel $\dot{\xi}_t$, falls gilt

$$\underset{h\to 0}{\text{l.i.m.}}\, \tfrac{\xi_{t+h}-\xi_t}{h} = \dot{\xi}_t = \tfrac{d\xi_t}{dt}$$

(auch „ξ_t ist differenzierbar im Quadratmittel" in t)
entsprechend für $T \subset \mathbb{R}$, wenn $\forall t \in T$

Definition 2.4
Zweite verallgemeinerte Ableitung der Kovarianzfunktion $C(\cdot,\cdot)$ im Punkt (s,t):

$$\tfrac{\partial^2 C(s,t)}{\partial s \partial t} := \lim_{h_1,h_2\to 0} \tfrac{1}{h_1 h_2}\{C(s+h_1,t+h_2) - C(s+h_1,t) - C(s,t+h_2) + C(s,t)\}$$

Behauptung 2.4

(i) $(\xi_t, t \in \mathbb{R})$ ist genau dann differenzierbar im Quadratmittel im Punkt $t \in \mathbb{R}$, wenn die zweite verallgemeinerte Ableitung der Kovarianzfunktion im Punkt (t,t) existiert.

(ii) Ist $(\xi_t, t \in \mathbb{R})$ q.m.-differenzierbar im Punkt $t \in \mathbb{R}$, existiert die Ableitung im Punkt t $\frac{d\boldsymbol{E}\xi_t}{dt}$ und es gilt

$$\boldsymbol{E}\dot{\xi}_t = \tfrac{d}{dt}\boldsymbol{E}\xi_t\,.$$

(iii) Existiert die zweite verallgemeinerte Ableitung $\frac{\partial^2 C(s,t)}{\partial s \partial t}$ $\forall s = t,\ t \in T$, so ist $(\xi_t, t \in \mathbb{R})$ q.m.-differenzierbar auf T und es gelten

$$\boldsymbol{E}\dot{\xi}_s\overline{\xi_t} = \tfrac{\partial C(s,t)}{\partial s}\,,$$

$$\boldsymbol{E}\dot{\xi}_s\overline{\dot{\xi}_t} = \tfrac{\partial^2 C(s,t)}{\partial s \partial t}\,.$$

2.7 Stationäre Prozesse

Definition 2.5
Zufallsprozeß $(\xi_t, t \in \mathbb{R})$ heißt stationär im weiteren Sinne oder schwach stationär, falls gilt

$$\boldsymbol{E}\xi_t = m = \text{const} \quad \forall t \in \mathbb{R}\,,$$

$$\boldsymbol{E}\xi_{s+h}\overline{\xi_{t+h}} = \boldsymbol{E}\xi_s\overline{\xi_t} \quad \forall s, t, h \in \mathbb{R}\,.$$

nehmen an $m = 0$, dann $C(s,t) = R(s,t) = \boldsymbol{E}\xi_s\overline{\xi_t} = \boldsymbol{E}\xi_0\overline{\xi_{t-s}} = R(t-s)$
Korrelationsfunktion und Kovarianzfunktion hängen nur von der Differenz der Parameterwerte ab!

Behauptung 2.5
Ein stationärer Zufallsprozeß ist genau dann im Quadratmittel

(i) stetig, wenn die Korrelationsfunktion im Nullpunkt stetig ist.

(ii) differenzierbar, wenn die Korrelationsfunktion im Nullpunkt die zweite Ableitung besitzt.

Behauptung 2.6
Ist $(\xi_t, t \in \mathbb{R})$ ein schwach stationärer Zufallsprozeß mit Korrelationsfunktion $R(\cdot)$, der im Quadratmittel stetig ist, so existiert ein eindeutig bestimmtes endliches Maß F auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, so daß gilt

$$R(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{itx}\, F(dx) \qquad \forall t \in (-\infty, \infty).$$

Das Maß F heißt Spektralmaß. Es gilt $F(\mathbb{R}) = R(0)$.
Gilt für die Korrelationsfunktion $\int_{-\infty}^{\infty} |R(t)|\, dt < \infty$, so ist das Maß absolut stetig bezüglich des Lebesgue-Maßes: $F(dx) = f(x)\, dx$ mit der Spektraldichte $f(\cdot)$ (diese ist stetig und beschränkt):

$$R(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{itx} f(x)\, dx\,.$$

Es gilt dann

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-ixt} R(t)\, dt\,.$$

Ist die Korrelationsfunktion R reell und existiert die Spektraldichte f, so gilt:

$$f(x) = f(-x) \text{ f.ü.}$$

Definition 2.6
Der Zufallsprozeß $(\xi_t, t \in \mathbb{R})$ heißt stationär im engeren Sinne (oder streng stationär), falls für die endlichdimensionalen Verteilungen gilt: $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R}\ \forall x_1, \ldots, x_n\ \forall h \in \mathbb{R}$

$$F_{t_1,\ldots,t_n}(x_1, \ldots, x_n) = F_{t_1+h,\ldots,t_n+h}(x_1, \ldots, x_n)\,.$$

Bemerkung 2.2
Ist $(\xi_t, t \in \mathbb{R})$ stationär im engeren Sinne und gilt $\boldsymbol{E}|\xi_t|^2 < \infty\ \forall t \Rightarrow$ dann ist $(\xi_t, t \in \mathbb{R})$ auch stationär im weiteren Sinne.

2.8 Prozesse mit unabhängigen und unkorrelierten Zuwächsen

Definition 2.7
Ein Zufallsprozeß $(\xi_t, t \in T)$, $T \subset \mathbb{R}$, heißt

(i) Prozeß mit unabhängigen Zuwächsen, falls $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall t_1 < t_2 < \ldots < t_n$, $[t_1, t_n] \subset T$ gilt: die Zufallsgrößen $\xi_{t_1}, \xi_{t_2} - \xi_{t_1}, \xi_{t_3} - \xi_{t_2}, \ldots, \xi_{t_n} - \xi_{t_n-1}$ sind in der Gesamtheit unabhängig.

(ii) Prozeß mit unkorrelierten Zuwächsen, falls $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall t_1 < t_2 < \ldots < t_n$, $[t_1, t_n] \subset T$ gilt: die Zufallsgrößen $\xi_{t_1}, \xi_{t_2} - \xi_{t_1}, \xi_{t_3} - \xi_{t_2}, \ldots, \xi_{t_n} - \xi_{t_{n-1}}$ sind paarweise unkorreliert:

$$\boldsymbol{E}[\xi_{t_i} - \xi_{t_{i-1}} - \boldsymbol{E}(\xi_{t_i} - \xi_{t_{i-1}})]\overline{[\xi_{t_j} - \xi_{t_{j-1}} - \boldsymbol{E}(\xi_{t_j} - \xi_{t_{j-1}})]} = 0$$

für $i \neq j,\ i, j \in \{2, \ldots, n\}\,.$

Behauptung 2.7
Sei $(\xi_t, t \in T)$ Prozeß mit unabhängigen Zuwächsen, $\boldsymbol{E}|\xi_t|^2 < \infty\ \forall t \in T \ \Rightarrow\ (\xi_t, t \in T)$ ist Prozeß mit unkorrelierten Zuwächsen.

Beispiel 2.2 Poisson-Prozeß $(\xi_t, t \in [0, \infty))$, Parameter $\lambda > 0$

- $\xi_0 = 0$
- Prozeß mit unabhängigen Zuwächsen

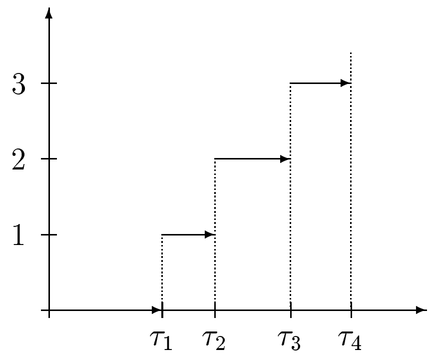
- Zufallsgrößen $\xi_t - \xi_s,\ 0 \leq s \leq t$, sind Poisson-verteilt mit dem Parameter $\lambda(t-s)$, d.h.

$$\boldsymbol{P}\{\xi_t - \xi_s = i\} = \tfrac{(\lambda(t-s))^i}{i!}\,\mathrm{e}^{-\lambda(t-s)} \qquad i = 0, 1, 2, \ldots$$

- Prozeß ist i.q.M. stetig,

  besitzt Modifikation mit rechtsseitig stetigen Trajektorien

- Zufallsgrößen $\tau_1, \tau_2 - \tau_1, \ldots, \tau_n - \tau_{n-1}, \ldots$ sind unabhängig und exponentialverteilt mit dem Parameter λ



typisches Bild

Behauptung 2.8
Sei $(\xi_t, t \in \mathbb{R})$ ein Prozeß mit unkorrelierten Zuwächsen, $\boldsymbol{E}\xi_t = 0\ \forall t \in \mathbb{R}$. Dann existiert eine nichtfallende Funktion $F(\cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, so daß gilt

$$\boldsymbol{E}|\xi_t - \xi_s|^2 = F(t) - F(s)\,, \qquad s < t.$$

Der Prozeß ist genau dann im Quadratmittel stetig (rechtsseitig stetig, linksseitig stetig), wenn die Funktion F stetig (rechtsseitig stetig, linksseitig stetig) ist.
Die Grenzwerte von ξ_t für $t \to \pm\infty$ existieren im Quadratmittel dann und nur dann, wenn $F(-\infty) > -\infty$ bzw. $F(+\infty) < \infty$ gilt.

Beweis:

$$t_0 \text{ fest: } F(t) := \begin{cases} \boldsymbol{E}|\xi_t - \xi_{t_0}|^2 & \text{für } t > t_0 \\ -\boldsymbol{E}|\xi_t - \xi_{t_0}|^2 & \text{für } t < t_0 \\ 0 & \text{für } t = t_0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $F(t)$ nichtfallend, denn für $t > s > t_0$:

$$\begin{aligned} F(t) &= \boldsymbol{E}|\xi_t - \xi_{t_0}|^2 = \boldsymbol{E}|\xi_t - \xi_s + \xi_s - \xi_{t_0}|^2 \\ &= \boldsymbol{E}|\xi_t - \xi_s|^2 + \boldsymbol{E}|\xi_s - \xi_{t_0}|^2 && \text{(unkorrelierte Zuwächse)} \\ &\geq 0 + F(s) \end{aligned}$$

analog andere Fälle $\square$

3 Gaußsche Zufallsfunktionen, Wiener-Prozeß

Definition 3.1
Eine reelle Zufallsvariable ξ heißt Gaußsch oder normalverteilt, wenn für ihre charakteristische Funktion gilt

$$\varphi_\xi(t) = \boldsymbol{E}\,\mathrm{e}^{it\xi} = \mathrm{e}^{imt-\frac{1}{2}\sigma^2t^2}\,, \quad m \in \mathbb{R},\ \sigma \geq 0\,; \qquad \text{Schreibweise: } \xi \sim N(m, \sigma^2)\,.$$

- für $\sigma^2 = 0$ entartet: $\xi = m$ f.s.
- $\boldsymbol{P}(\xi \leq x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int\limits_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-\frac{(u-m)^2}{2\sigma^2}}\,du = F_\xi(x)$ Verteilungsfunktion
- Dichtefunktion: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\,\mathrm{e}^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$
- gilt $\boldsymbol{E}\xi = m$, $\boldsymbol{E}(\xi - m)^2 = \sigma^2$, $\boldsymbol{E}(\xi-m)^{2k+1} = 0 \quad k = 0, 1, \ldots$
  $\boldsymbol{E}(\xi - m)^{2k} = (2k-1)!!\sigma^{2k} \quad k = 1, 2, \ldots$
  $(2k-1)!! = (2k-1)(2k-3)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 1$
- $\xi \sim N(m, \sigma^2) \ \Rightarrow\ \eta = \frac{\xi - m}{\sigma} \sim N(0,1)$ mit Verteilungsfunktion $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\,du$

Definition 3.2
Ein Zufallsvektor $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)^\tau$ heißt Gaußsch, falls

$$\varphi_\xi(t) = \boldsymbol{E}\,\mathrm{e}^{i(t,\xi)} = \mathrm{e}^{im^\tau t - \frac{1}{2}t^\tau C t} \qquad t = \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix},\ m = \begin{pmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_n \end{pmatrix};\ \xi \sim N(m, C)$$

C nichtnegativ definite Matrix

gilt $\boldsymbol{E}\xi_i = m_i\,,\ \boldsymbol{E}[\xi_i - m_i][\xi_j - m_j] = C_{ij}$
falls $\det C > 0\ \exists$ Dichtefunktion

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det C}} \exp(-\tfrac{1}{2}(x-m)^\tau C^{-1}(x-m))$$

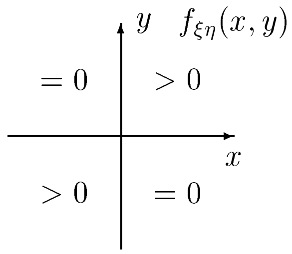
Behauptung 3.1
Ein Zufallsvektor $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)^\tau$ ist Gaußsch genau dann, wenn $\forall \lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ die Zufallsvariable $\lambda_1\xi_1 + \ldots + \lambda_n\xi_n$ Gaußsch ist.

Definition 3.3
Ein Zufallsprozeß $(\xi_t, t \in \mathbb{R})$ heißt Gaußsch, wenn alle seine endlichdimensionalen Verteilungen Gaußsch sind.
äquivalente Bedingung: $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall t_1, \ldots, t_n \in T\,,\ \forall \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}:\ \lambda_1\xi_{t_1} + \ldots + \lambda_n\xi_{t_n}$ ist Gaußsch.

Bemerkung 3.1
Es reicht nicht aus zu fordern, daß die eindimensionalen Verteilungen Gaußsch sind.

z.B. $\xi, \zeta \sim N(0,1)$, unabhängig, $\eta = \begin{cases} |\zeta| & \text{für } \xi \geq 0 \\ -|\zeta| & \text{für } \xi < 0 \end{cases}$

$\Rightarrow\ \xi, \eta \sim N(0,1)$ aber (ξ, η) nicht Gaußsch!



Definition 3.4
Ein komplexer Zufallsprozeß $(\zeta_t = \xi_t + i\eta_t, t \in T)$ heißt Gaußsch, wenn $(\xi_t, t \in T)$, $(\eta_t, t \in T)$ unabhängige reellwertige Gaußprozesse sind.

Behauptung 3.2
Für eine beliebige Funktion $m.$ auf T und eine nichtnegativ definite Funktion $R(\cdot,\cdot)$ auf $T \times T$ existiert ein Gaußscher Zufallsprozeß mit $m.$ als Mittelwertfunktion und $R(\cdot,\cdot)$ als Korrelationsfunktion.
Die Verteilung des Prozesses wird eindeutig durch $m.$ und $R(\cdot,\cdot)$ bestimmt.

Behauptung 3.3
Zwei Komponenten eines reellen Gaußschen Zufallsvektors (ξ, η) sind genau dann unabhängig, wenn sie unkorreliert sind, d.h. $\boldsymbol{E}[\xi - \boldsymbol{E}\xi][\eta - \boldsymbol{E}\eta] = 0$.

Behauptung 3.4
Für eine Gaußsche Folge $(\xi_n, n \in \mathbb{N})$ sind die stochastische und die Konvergenz im p-ten Mittel $\forall p > 0$ äquivalent. Der Grenzwert ist eine Gaußsche Zufallsgröße:

$$\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{P}(|\xi_n - \xi| > \varepsilon) = 0 \ \forall \varepsilon > 0 \ \Leftrightarrow\ \lim_{n\to\infty} \boldsymbol{E}|\xi_n - \xi|^p = 0 \ \forall p > 0\,.$$

Behauptung 3.5
Sind ξ_1 und ξ_2 unabhängige Zufallsgrößen, dann ist ihre Summe $\xi_1 + \xi_2$ genau dann Gauß-verteilt, wenn ξ_1 und ξ_2 Gauß-verteilt sind.

Behauptung 3.6

(i) Ein Gaußscher schwach stationärer Zufallsprozeß ist auch ein streng stationärer Zufallsprozeß.

(ii) Ein Gaußscher Prozeß mit unkorrelierten Zuwächsen ist auch ein Prozeß mit unabhängigen Zuwächsen.

Behauptung 3.7
Sei $(\xi_t, t \in T)$, $T \subset \mathbb{R}$ ein zentrierter reellwertiger Gauß-Prozeß so daß $\exists\, \gamma, c > 0$:

$$\boldsymbol{E}(\xi_t - \xi_s)^2 \leq c|t-s|^\gamma.$$

Dann besitzt der Prozeß eine Modifikation mit stetigen Trajektorien.

Beweis:
$\xi_t - \xi_s$ Gauß-verteilt mit Erwartungswert 0
$\boldsymbol{E}|\xi_t - \xi_s|^{2k} = (2k-1)!!(\boldsymbol{E}|\xi_t - \xi_s|^2)^k \leq (2k-1)!!c^k|t-s|^{k\gamma}$
wählen k so, daß $k\gamma > 1$ und wenden Satz von Kolmogorov (2.5) an □

Definition 3.5
Ein reellwertiger Gaußscher Zufallsprozeß $(W_t, t \in \mathbb{R}_+)$ heißt Wiener-Prozeß oder Brownsche Bewegung, falls gilt:

- $\boldsymbol{E}W_t = 0\,,$
- $R(s,t) = \boldsymbol{E}W_sW_t = s \wedge t = \min\{s,t\}\,,$
- die Trajektorien des Prozesses sind stetig.

Behauptung 3.8
Ein reellwertiger Gaußscher Zufallsprozeß $(\xi_t, t \in \mathbb{R}_+)$ ist genau dann ein Wiener-Prozeß, wenn gilt:

- $\xi_0 = 0$ f.s.,
- $\boldsymbol{E}(\xi_s - \xi_t)^2 = |s-t|\,;\ \boldsymbol{E}\xi_t = 0$ bzw. $\xi_s - \xi_t \sim N(0, |s-t|)\,,$
- $(\xi_t, t \in \mathbb{R}_+)$ ist ein Prozeß mit unabhängigen Zuwächsen,
- die Trajektorien des Prozesses sind stetig.

Beweis:

$\Rightarrow$: $\boldsymbol{E}\xi_0$ und $\boldsymbol{E}\xi_0^2 = R(0,0) = 0 \ \Rightarrow\ \xi_0 = 0$ f.s.

$s < t:\ \boldsymbol{E}\xi_s\xi_t = s \wedge t \Rightarrow \boldsymbol{E}(\xi_s - \xi_t)^2 = \boldsymbol{E}\xi_s^2 - 2\boldsymbol{E}\xi_s\xi_t + \boldsymbol{E}\xi_t^2 = s - 2s + t = t - s = |s-t|$

$$s_1 < t_1 \leq s_2 < t_2:\ \begin{aligned}\boldsymbol{E}[\xi_{t_1} - \xi_{s_1}][\xi_{t_2} - \xi_{s_2}] &= \boldsymbol{E}\xi_{t_1}\xi_{t_2} - \boldsymbol{E}\xi_{s_1}\xi_{t_2} - \boldsymbol{E}\xi_{t_1}\xi_{s_2} + \boldsymbol{E}\xi_{s_1}\xi_{s_2}\\ &= t_1 - s_1 - t_1 + s_1 = 0\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Zuwächse unkorreliert $\Rightarrow$ unabhängig (da Gaußsch)

$\Leftarrow$: $\xi_0 = 0 \Rightarrow \boldsymbol{E}(\xi_s - \xi_0)^2 = \boldsymbol{E}\xi_s^2 = s$

$s < t:\ t - s = \boldsymbol{E}(\xi_t - \xi_s)^2 = \boldsymbol{E}\xi_t^2 - 2\boldsymbol{E}\xi_t\xi_s + \boldsymbol{E}\xi_s^2 = t - 2\boldsymbol{E}\xi_t\xi_s + s$
$\Rightarrow 2\boldsymbol{E}\xi_t\xi_s = 2s \Rightarrow \boldsymbol{E}\xi_t\xi_s = s = s \wedge t$

□

Bemerkung 3.2
Nach dem Satz von Kolmogorov existiert für einen zentrierten Gauß-Prozeß mit Korrelationsfunktion $R(s,t) = s \wedge t$ eine Modifikation mit stetigen Trajektorien (vgl. Behauptung 3.7 mit $c = \gamma = 1$, $\boldsymbol{E}(\xi_t - \xi_s)^2 = |t-s| \leq c|t-s|^\gamma$).

Behauptung 3.9
Sei $(W_t,\, t \in \mathbb{R}_+)$ ein Wiener-Prozeß. Dann sind die folgenden Prozesse Wiener-Prozesse:

- $W_t^1 = -W_t \quad \forall t \in \mathbb{R}_+$ Spiegelung der Werte an der Zeitachse
- $W_t^2 = cW_{\frac{t}{c^2}} \quad c > 0;\ \forall t \in \mathbb{R}_+$ Skalenänderung
- $W_t^3 = tW_{\frac{1}{t}},\ W_0^3 = 0 \quad \forall t > 0$ „Projektive Spiegelung" bei $t = \infty$
- $W_t^4 = W_{s-t} - W_s \quad t \in [0,s];\ s > 0$ Zeitumkehr
- $W_t^5 = W_{t-s} - W_s \quad t \geq s > 0$ Zeitverschiebung

Behauptung 3.10

(i) $(W_t,\, t \in \mathbb{R}_+)$ Wiener-Prozeß

$$\lim_{t\to\infty} \frac{W_t}{t} = 0 \ \text{ f.s.} \qquad \text{(Gesetz der großen Zahlen)}$$

(ii) Gesetz vom iterierten Logarithmus

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{W_t}{\sqrt{2t\ln\ln t}} = 1,\ \underline{\lim_{t\to\infty}} \frac{W_t}{\sqrt{2t\ln\ln t}} = -1 \ \text{ f.s.}$$

Behauptung 3.11
(Über die quadratische Variation)
Sei $(W_t,\, t \in \mathbb{R}_+)$ ein Wiener-Prozeß, $0 \leq a < b < \infty$, und $a = t_0^n < t_1^n < \ldots < t_n^n = b$ eine Folge von Zerlegungen des Intervalls $[a,b]$ mit $\max\{t_i^n - t_{i-1}^n;\ i = 1,\ldots,n\} \to 0$ $(n \to \infty)$. Dann konvergiert die Summe der Quadrate der Zuwächse für $n \to \infty$ im Quadratmittel (und folglich auch stochastisch) gegen $b - a$:

$$\underset{\substack{\max\{t_i^n - t_{i-1}^n;\ i=1,\ldots,n\}\to 0\\ n\to\infty}}{\text{l.i.m.}} \sum_{i=0}^{n-1} (W_{t_{i+1}^n} - W_{t_i^n})^2 = b - a\,.$$

Beweis:
Erwartungswert:

$$\boldsymbol{E}\sum_{i=0}^{n-1} (W_{t_{i+1}^n} - W_{t_i^n})^2 = \sum_{i=0}^{n-1} \boldsymbol{E}(W_{t_{i+1}^n} - W_{t_i^n})^2 = \sum_{i=0}^{n-1} t_{i+1}^n - t_i^n = b - a$$

Varianz (aufgrund der Unabhängigkeit):

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{D}\sum_{i=0}^{n-1}(W_{t_{i+1}^n}-W_{t_i^n})^2 &= \sum_{i=0}^{n-1}\boldsymbol{D}(W_{t_{i+1}^n}-W_{t_i^n})^2 \qquad (\text{da } X\sim N(0,\sigma^2)\ \Rightarrow\ \boldsymbol{E}X^4=3\sigma^4)\\
&= \sum_{i=0}^{n-1}\left[\boldsymbol{E}(W_{t_{i+1}^n}-W_{t_i^n})^4-(\boldsymbol{E}(W_{t_{i+1}^n}-W_{t_i^n})^2)^2\right]\\
&= \sum_{i=0}^{n-1}\left[3(t_{i+1}^n-t_i^n)^2-(t_{i+1}^n-t_i^n)^2\right]=2\sum_{i=0}^{n-1}(t_{i+1}^n-t_i^n)^2\\
&\le 2\max\{t_i^n-t_{i-1}^n;\ i=1,\dots,n\}\sum_{i=0}^{n-1}(t_{i+1}^n-t_i^n)\\
&= 2\max\{t_i^n-t_{i-1}^n;\ i=1,\dots,n\}(b-a)\to 0
\end{aligned}$$

wenn $\boldsymbol{E}\eta_n=c$ und $\boldsymbol{D}\eta_n\to 0\ \Rightarrow\ \boldsymbol{E}|\eta_n-c|^2=\boldsymbol{D}\eta_n\to 0$, d.h. $\underset{n\to\infty}{\text{l.i.m.}}\ \eta_n=c$

hier $\eta_n=\sum_{i=0}^{n-1}(W_{t_{i+1}^n}-W_{t_i^n})^2$ □

Definition 3.6
Variation einer Funktion auf dem Intervall $[a,b]$:

$$\underset{[a,b]}{\text{Var}}\ f=\sup\{\sum_{i=0}^{n-1}|f_{t_{i+1}^n}-f_{t_i^n}|\,;\ n\in\mathbb{N},\ a=t_0^n<\ldots<t_n^n=b\}$$

Funktionen mit endlicher Variation sind f.ü. differenzierbar.

Folgerung 3.1

$$\boldsymbol{P}\{\underset{[a,b]}{\text{Var}}\ W_t=\infty\}=1\,,$$

d.h. Wiener-Prozeß besitzt f.s. unendliche Variation.

Beweis:
betrachten quadratische Variation von W_t

$$\sum_{i=0}^{n-1}(W_{t_{i+1}^n}(\omega)-W_{t_i^n}(\omega))^2\le\underbrace{\max\{|W_{t_{i+1}^n}(\omega)-W_{t_i^n}(\omega)|\,;\ i=0,\dots,n-1\}}_{\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0\ \forall\omega}\ \underset{[a,b]}{\text{Var}}\ W_t(\omega),$$

da Trajektorien stetig, d.h. gleichmäßig stetig auf $[a,b]$

falls $\underset{[a,b]}{\text{Var}}\ W_t(\omega)<\infty\ \Rightarrow\ \sum_{i=0}^{n-1}(W_{t_{i+1}^n}(\omega)-W_{t_i^n}(\omega))^2\to 0\ (n\to\infty)$

Widerspruch zu Behauptung 3.11 □

Behauptung 3.12
Wiener-Prozeß $(W_t,\ t\in\mathbb{R}_+)$

(i) ist stetig im quadratischen Mittel.

(ii) ist in keinem Punkt im quadratischen Mittel differenzierbar.

(iii) besitzt f.s. keine differenzierbaren Trajektorien.

Beweis:

(i) Korrelationsfunktion $R(s,t) = s \wedge t$ ist stetig auf $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$.

(ii) $\frac{W_{t+h}-W_t}{h} \sim N(0, \frac{1}{h})$ konvergiert für $h \to 0$ nicht in Verteilung $\Rightarrow$ kann auch nicht im quadratischen Mittel konvergieren

(außerdem $R(s,t)$ in (t,t) nicht differenzierbar).

(iii) Wenn differenzierbare Trajektorien f.s., dann $\frac{W_{t+h}-W_t}{h} \to$ endlicher Grenzwert f.s. ($h \to 0$), Widerspruch zu (ii)

(vgl. f.s. Konvergenz $\Rightarrow$ stochastische Konvergenz $\overset{\text{Gaußsch}}{\Longleftrightarrow}$ Konvergenz i.q.M.).

$\square$

Definition 3.7
Ein vektorieller Zufallsprozeß $(W_t = (W_t^1, \ldots, W_t^n)^\tau,\ t \in \mathbb{R}_+)$ heißt Wiener-Prozeß, wenn $W_\cdot^1, \ldots, W_\cdot^n$ unabhängige eindimensionale Wiener-Prozesse sind.

4 Stochastische Integrale nichtzufälliger Funktionen

Brownsche Bewegung eines Partikels in einer Flüssigkeit
Temperatur konstant $\Rightarrow$ Position (1 Koordinate): $\xi_t = \sigma W_t\,,\ \sigma = \text{const}$
Temperatur stückweise konstant $(= \sigma_i)$ auf Intervallen $[t_i, t_{i+1})$

$$\xi_t = \sum_{t_{i+1}\le t} f_i \cdot (W_{t_{i+1}} - W_{t_i}) + f_k \cdot (W_t - W_{t_k})\,, \quad k = \max\{i :\ t_i \le t\}$$

d.h. Varianz der Brownschen Bewegung von Temperatur σ_i abhängig
Ziel: $\int\limits_0^t f_s\, dW_s$ für stetige f auf $[0,t]$ (z.B. $f = \sigma$)
$W_.$ hat f.s. unbeschränkte Variation, d.h. das Integral kann i.a. nicht trajektorienweise definiert werden
Ausweg: Definition des Integrals im quadratischen Mittel.
allgemeiner: Integration bezüglich eines zufälligen orthogonalen Maßes.
Herangehensweise: Definition des Integrals für eine bestimmte (einfache) Klasse von Funktionen, dann Erweiterung des Definitionsgebietes.

Es seien
$(\Omega, \mathcal{F}, \boldsymbol{P})$ vollständiger Wahrscheinlichkeitsraum
$L_2(\boldsymbol{P}) = L_2(\Omega, \mathcal{F}, \boldsymbol{P})$ (komplexwertige Zufallsgrößen)
X nichtleere Menge
π Halbring von Teilmengen von X:

Halbring: $\emptyset \in \pi$
$\Delta_1, \Delta_2 \in \pi \ \Rightarrow\ \Delta_1 \cap \Delta_2 \in \pi$
$\Delta_1, \Delta_2 \in \pi\,,\ \Delta_2 \subset \Delta_1 \ \Rightarrow\ \exists \Delta_3, \ldots, \Delta_k :\ \Delta_1 \setminus \Delta_2 = \Delta_3 \cup \Delta_4 \cup \ldots \cup \Delta_k$

$\sigma = \sigma(\pi)$ σ-Algebra, die von π erzeugt wird
μ σ-additives nichtnegatives Maß auf σ, welches auf den Mengen aus π endlich ist
$\overline{\sigma}$ Vervollständigung von σ nach dem Maß μ

Definition 4.1
Familie von komplexwertigen Zufallsvariablen $\{\zeta(\Delta) = \zeta(\Delta, \omega),\ \Delta \in \pi\}$ heißt zufälliges orthogonales Maß mit Strukturmaß μ, falls gilt

(i) $\zeta(\Delta) \in L_2(\boldsymbol{P})$, d.h. $\boldsymbol{E}|\zeta(\Delta)|^2 < \infty\ \forall \Delta \in \pi$

(ii) $\boldsymbol{E}\zeta(\Delta_1)\overline{\zeta(\Delta_2)} = \mu(\Delta_1 \cap \Delta_2)\ \forall \Delta_1, \Delta_2 \in \pi$.

Begriff orthogonal: $\boldsymbol{E}\zeta(\Delta_1)\overline{\zeta(\Delta_2)} = (\zeta(\Delta_1), \zeta(\Delta_2))_{L_2(\boldsymbol{P})} = 0$ falls $\Delta_1 \cap \Delta_2 = \emptyset$
„Maß“: falls $\Delta, \Delta_i \in \pi,\ \Delta = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \Delta_i,\ \Delta_i \cap \Delta_j = \emptyset\ i \neq j \ \Rightarrow\ \zeta(\Delta) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \zeta(\Delta_i)$ im $L_2(\boldsymbol{P})$
(Konvergenz im Quadratmittel):

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{E}|\zeta(\Delta) - \sum_{i=1}^{n} \zeta(\Delta_i)|^2 &= \lim_{n\to\infty}\left[\boldsymbol{E}|\zeta(\Delta)|^2 + \sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{E}|\zeta(\Delta_i)|^2 - 2\mathrm{Re}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{E}\zeta(\Delta)\overline{\zeta(\Delta_i)}\right] \\ &= \lim_{n\to\infty}\left[\mu(\Delta) + \sum_{i=1}^{n}\mu(\Delta_i) - 2\sum_{i=1}^{n}\mu(\Delta_i)\right] = 0 \qquad \text{da } \mu\ \sigma\text{-additiv}\end{aligned}$$

Lemma 4.1
Seien $\Delta_i, \Gamma_j \in \pi$; $c_i, d_j \in \mathbb{C}$; $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$ und

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{\Delta_i}(x) = \sum_{j=1}^{m} d_j \chi_{\Gamma_j}(x) \quad \text{f.s. bzgl. } \mu \qquad \left(\chi_{\Delta_i}(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in \Delta_i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \ldots \right)$$

zwei verschiedene Darstellungen einer Funktion.
Dann gelten

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \zeta(\Delta_i) = \sum_{j=1}^{m} d_j \zeta(\Gamma_j) \quad \text{f.s.}$$

und

$$\boldsymbol{E}|\sum_{i=1}^{n} c_i \zeta(\Delta_i)|^2 = \int_X |\sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{\Delta_i}(x)|^2 \mu(dx). \tag{$*$}$$

Beweis:
Beweisen $(*)$: nach Definition

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}|\sum_{i=1}^{n} c_i \zeta(\Delta_i)|^2 &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_i \overline{c_j} \boldsymbol{E}\zeta(\Delta_i)\overline{\zeta(\Delta_j)} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_i \overline{c_j} \mu(\Delta_i \cap \Delta_j) \\ &= \int_X \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_i \overline{c_j} \chi_{\Delta_i}(x)\chi_{\Delta_j}(x)\mu(dx) = \int_X |\sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{\Delta_i}(x)|^2 \mu(dx) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{E}|\sum_{i=1}^{n} c_i \zeta(\Delta_i) - \sum_{j=1}^{m} d_j \zeta(\Gamma_j)|^2 = \int_X |\sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{\Delta_i}(x) - \sum_{j=1}^{m} d_j \chi_{\Gamma_j}(x)|^2 \mu(dx) = 0 \qquad \square$$

Bezeichnen mit $L_0(\mu)$ Menge (von Äquivalenzklassen) von Funktionen der Art $\sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{\Delta_i}(x)$, $\Delta_i \in \pi$, Menge der einfachen Funktionen

$$L_0(\mu) \subseteq L_2(X, \overline{\sigma}, \mu)$$

auf $L_0(\mu)$ definieren wir Operator:

$$I : L_0(\mu) \to L_2(\boldsymbol{P}) \quad \text{gemäß} \quad I(\sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{\Delta_i}) = \sum_{i=1}^{n} c_i \zeta(\Delta_i).$$

Nach dem Lemma 4.1 ist der Operator korrekt definiert, I ist linear und isometrisch (erhält Norm), denn

$$\|f\|^2_{L_0(\mu)} = \int |f|^2 \mu(dx) = \boldsymbol{E}|If|^2 = \|If\|^2_{L_2(\boldsymbol{P})}.$$

Nutzen funktionalanalytisches Lemma:

Lemma 4.2
Seien B_1, B_2 Banach-Räume, B_0 ein linearer Teilraum von B_1. Auf B_0 sei ein linearer isometrischer Operator $I : B_0 \to B_2$ (d.h. $\|Ib\|_{B_2} = \|b\|_{B_1}\ \forall b \in B_0$) gegeben.
Dann existiert und zwar eindeutig bestimmt ein linearer isometrischer Operator $\tilde{I} : \overline{B_0} \to B_2$ ($\overline{B_0}$ ist die Abschließung von B_0 in B_1), der mit I auf B_0 zusammenfällt.

Wählen $B_0 = L_0(\mu) \subseteq L_2(\mu) = B_1$, $B_2 = L_2(\boldsymbol{P})$.

Satz 4.1
Es existiert ein eindeutig bestimmter linearer Operator $I : L_2(\mu) \to L_2(\boldsymbol{P})$, der folgende Eigenschaften besitzt:

(i) $I(\sum\limits_{i=1}^{n} c_i\chi_{\Delta_i}) = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i\zeta(\Delta_i)\ \forall n < \infty,\ \Delta_i \in \pi,\ c_i \in \mathbb{C}\,,$

(ii) $\boldsymbol{E}|If|^2 = \int\limits_X |f|^2\mu(dx)\ \forall f \in L_2(\mu).$

Definition 4.2

$$\int\limits_X f(x)\zeta(dx) := If\,,\ \ (f \in L_2(\mu))$$

If heißt stochastisches Integral der Funktion f bezüglich ζ.

I stetig, für $f \in L_2(\mu)$ $\exists$ Folge einfacher Funktionen $f_n \in L_0(\mu)$ mit $f_n \to f$ in $L_2(\mu)$ $(n \to \infty)$

$$\Rightarrow \int\limits_X f\,\zeta(dx) = \underset{n\to\infty}{\text{l.i.m.}} \int\limits_X f_n\,\zeta(dx)$$

Operator I erhält nicht nur die Norm, sondern auch das Skalarprodukt

- Darstellung des Skalarprodukts durch die Norm oder
- Vergleich der Koeffizienten bei λ für $\boldsymbol{E}|I(f+\lambda g)|^2$ und $\int\limits_X |f+\lambda g|^2\mu(dx)$

$$\Rightarrow\ \ (If, Ig)_{L(\boldsymbol{P})} = (f,g)_{L_2(\mu)}$$

falls $f = \chi_{\Gamma_1},\ g = \chi_{\Gamma_2},\ \Gamma_1, \Gamma_2 \in \overline{\sigma(\pi)},\ \mu(\Gamma_i) < \infty$

$\Rightarrow\ \boldsymbol{E}\int\limits_X \chi_{\Gamma_1}\zeta(dx)\overline{\int\limits_X \chi_{\Gamma_2}\zeta(dx)} = (If, Ig)_{L(\boldsymbol{P})} = (f,g)_{L_2(\mu)} = \int\limits_X \chi_{\Gamma_1}\chi_{\Gamma_2}\mu(dx) = \mu(\Gamma_1 \cap \Gamma_2).$

Erweiterung des Definitionsgebietes des zufälligen orthogonalen Maßes von π auf $\overline{\sigma(\pi)} \cap \{\Gamma : \mu(\Gamma) < \infty\}$:
wenn wir für $\Gamma \in \overline{\sigma(\pi)} \cap \{\Gamma:\ \mu(\Gamma) < \infty\}$

$$\tilde{\zeta}(\Gamma) := \int\limits_X \chi_\Gamma(x)\zeta(dx)$$

definieren, ist $\tilde{\zeta}$ ein zufälliges orthogonales Maß auf $\overline{\sigma(\pi)} \cap \{\Gamma\ :\ \mu(\Gamma)\ <\ \infty\}$ mit dem Strukturmaß μ, außerdem gilt $\tilde{\zeta}(\Delta) = \zeta(\Delta)$ f.s. für $\Delta \in \pi$

Sei $(\xi_t, t \in \mathbb{R})$ ein Prozeß mit unkorrelierten Zuwächsen, $\boldsymbol{E}\xi_t = 0$. Dann existiert nach der Behauptung 2.8 eine nichtfallende Funktion

$$F(.) : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ mit } \boldsymbol{E}|\xi_t - \xi_s|^2 = F(t) - F(s)\,,\ \ s \le t\,.$$

$(\xi_t, t \in \mathbb{R})$ sei rechtsseitig stetig i.q.M., dann ist $F(.)$ rechtsseitig stetig.
F ist (verallgemeinerte) Verteilungsfunktion, μ_F bezeichne zugehöriges Maß ($\mu_F((a,b]) = F(b) - F(a)$).
Durch $\zeta((a,b]) = \xi_b - \xi_a$ wird ein zufälliges orthogonales Maß mit Strukturmaß μ_F definiert; $\pi = \{(a,b],\ a,b \in \mathbb{R}\}$.

$\forall f \in L_2(\mu_F)$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (deterministisch), kann definiert werden

$$If = \int\limits_{\mathbb{R}} f(x)\zeta(dx) =: \int\limits_{\mathbb{R}} f(t)\,d\xi_t\,.$$

Es gilt: $\boldsymbol{E}\left[\int\limits_{\mathbb{R}} f(t)\,d\xi_t\right]^2 = \int\limits_{\mathbb{R}} f^2(x)\,dF(x).$

- a, b endlich, f stetig $\Rightarrow$

  $$\int\limits_a^b f(t)\,d\xi_t = \underset{n\to\infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{i=0}^{n-1} f(s_i^n)(\xi_{t_{i+1}^n} - \xi_{t_i^n})$$

  bei Verfeinerung der Zerlegung $a = t_0^n < t_1^n < \ldots < t_n^n = b,\ s_i^n \in [t_i^n, t_{i+1}^n]$
  $\max\{t_{i+1}^n - t_i^n;\ i = 0, \ldots, n-1\} \to 0\ (n \to \infty)$

- ist f stetig differenzierbar, gilt

  $$\int\limits_a^b f(t)\,d\xi_t = f(b)\xi_b - f(a)\xi_a - \int\limits_a^b \xi_t f'(t)\,dt \qquad \text{(partielle Integration)}$$

  $\uparrow$ Integral im Quadratmittel

Für schwach stationäre Zufallsprozesse gilt noch folgende Spektralzerlegung (der Trajektorien):

Satz 4.2
Sei $(\xi_t, t \in \mathbb{R})$ ein im Quadratmittel stetiger schwach stationärer Prozeß mit $\boldsymbol{E}\xi_t = 0$, μ_F sei das Spektralmaß von ξ. Dann existiert ein zufälliges orthogonales Maß ζ auf den Intervallen $(a, b]$, so daß $\boldsymbol{E}\zeta(a, b] = 0$, $\boldsymbol{E}|\zeta(a, b]|^2 = F(a, b]$ gelten und

$$\xi_t = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\zeta(dx) \quad \text{f.s.} \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Zwei solche Maße fallen auf jedem Intervall $(a, b]$ f.s. zusammen.

Für Integral bezüglich Wiener-Prozeß gilt:
$(W_t, t \in \mathbb{R}_+)$ Prozeß mit unabhängigen Zuwächsen $\Rightarrow$ mit unkorrelierten Zuwächsen.
Es gilt: Strukturmaß μ_F besitzt verallgemeinerte Verteilungsfunktion $F(t) = t$ (stetig), d.h. $\mu_F = \lambda$ – Lebesgue-Maß.

$$\boldsymbol{E}|W_t - W_s|^2 = t - s\,,\ \ s \le t$$

$$\forall f \in L_2([a, b], \mathcal{B}[a, b], \lambda)\ \exists \int\limits_a^b f(t)\,dW_t$$

- $\int\limits_a^b f(t)\,dW_t \sim N(0, \int\limits_a^b f^2(x)\,dx)$

- allgemeiner: $\left(\int\limits_a^t f(s)\,dW_s,\ t \in [a, b]\right)$ ist ein Gauß-Prozeß mit Erwartungswert 0 und Korrelationsfunktion

  $$R(s, t) = \int\limits_a^{s\wedge t} f^2(u)\,du = \left(\int\limits_a^s f^2(u)\,du\right) \wedge \left(\int\limits_a^t f^2(u)\,du\right)$$

5 Bedingter Erwartungswert

Bedingte Wahrscheinlichkeit:
Beispiel: Wahrscheinlichkeit eine 4 zu würfeln, wenn bekannt ist, daß gerade Zahl gewürfelt wurde: $\frac{1/6}{1/2} = \frac{1}{3}$
allgemein: $A, B \in \mathcal{F}$, $(\Omega, \mathcal{F}, \boldsymbol{P})$ Wahrscheinlichkeitsraum, $\boldsymbol{P}(A) \neq 0$

$$\boldsymbol{P}(B \mid A) = \frac{\boldsymbol{P}(A \cap B)}{\boldsymbol{P}(A)} \qquad \text{„}A \text{ eingetroffen“}$$

wenn auch $\boldsymbol{P}(\Omega \setminus A) \neq 0$

$$\boldsymbol{P}(B \mid \Omega \setminus A) = \frac{\boldsymbol{P}((\Omega \setminus A) \cap B)}{\boldsymbol{P}(\Omega \setminus A)}$$

später: bedingte Wahrscheinlichkeit bezüglich σ-Algebra, hier $\{A,\, \Omega \setminus A,\, \emptyset, \Omega\}$

Bedingte Erwartung: auf $(\Omega, \mathcal{F}, \boldsymbol{P})$ sei meßbare Funktion $f : \Omega \to \mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$ gegeben

$$A_n = \{\omega : f(\omega) = n\} \in \mathcal{F}$$

$\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ andere reellwertige Zufallsgröße
natürliche Definition für bedingten Erwartungswert der Zufallsgröße ξ bezüglich der gegebenen Funktion f: eine Zufallsgröße $\eta(.)$, welche die Werte

$$y_n = \frac{\int\limits_{A_n} \xi \, d\boldsymbol{P}}{\boldsymbol{P}(A_n)}$$

für die $\omega \in A_n$ mit $\boldsymbol{P}(A_n) \neq 0$ annimmt.
Falls $\boldsymbol{P}(A_n) = 0$, wird $y_n = 0$ festgelegt.
D.h., ξ wird auf den Mengen, auf denen f konstant ist, gemittelt.

- exakte Definition in allgemeinen Fall: nicht über punktweise Definition, sondern über Integralbeziehung
- bedingter Erwartungswert bezüglich einer σ-Algebra
- bedingter Erwartungswert (und bedingte Wahrscheinlichkeit) sind Zufallsgrößen, keine deterministischen Funktionen (i.a.)!

Definition 5.1
$(\Omega, \mathcal{F}, \boldsymbol{P})$ vollständiger Wahrscheinlichkeitsraum, $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ Teil-σ-Algebra, ξ, η Zufallsvariablen mit $\boldsymbol{E}|\xi| < \infty$, $\boldsymbol{E}|\eta| < \infty$, η sei $\mathcal{G}$-meßbar, es gelte $\boldsymbol{E}\xi\chi_A = \boldsymbol{E}\eta\chi_A \quad \forall A \in \mathcal{G}$.
Dann heißt η bedingter Erwartungswert von ξ unter der Bedingung $\mathcal{G}$ (bzw. bzgl. $\mathcal{G}$) und man schreibt $\eta = \boldsymbol{E}\{\xi \mid \mathcal{G}\}$.
Wird die σ-Algebra $\mathcal{G}$ durch ein Zufallselement erzeugt, $\mathcal{G} = \sigma\{\zeta\}$, wird auch $\eta = \boldsymbol{E}\{\xi \mid \zeta\}$ geschrieben.

Behauptung 5.1
(Korrektheit der Bezeichnung $\boldsymbol{E}\{\xi \mid \mathcal{G}\}$)
Sind η_1, η_2 bedingte Erwartungswerte von ξ unter der Bedingung $\mathcal{G}$, so gilt $\eta_1 = \eta_2$ f.s.

Beweis:
Nach Definition $\boldsymbol{E}\eta_1\chi_A = \boldsymbol{E}\eta_2\chi_A = \boldsymbol{E}\xi\chi_A \Rightarrow \boldsymbol{E}(\eta_1 - \eta_2)\chi_A = 0 \quad \forall A \in \mathcal{G}$. $\eta_1 - \eta_2$ ist $\mathcal{G}$-meßbar, nehmen $A = \{\omega : \eta_1(\omega) - \eta_2(\omega) \geq 0\} \Rightarrow \boldsymbol{E}(\eta_1 - \eta_2)^+ = 0 \Rightarrow (\eta_1 - \eta_2)^+ = 0$ f.s.
$\Rightarrow \eta_1 \leq \eta_2$ f.s.
analog $\eta_2 \leq \eta_1$ f.s. □

Ist $\eta = \boldsymbol{E}\{\xi \mid \mathcal{G}\}$, η_1 $\mathcal{G}$-meßbar und $\eta = \eta_1$ f.s. $\Rightarrow$ gilt auch $\eta_1 = \boldsymbol{E}\{\xi \mid \mathcal{G}\}$, d.h. bedingter Erwartungswert ist nur f.s. eindeutig bestimmt.
Gehören zu $\mathcal{G}$ alle Mengen vom $\boldsymbol{P}$-Maß 0 ($A \subset \Omega$, $\exists A_1 \in \mathcal{F}$, $\boldsymbol{P}(A_1) = 0$ und $A \subset A_1 \Rightarrow A \in \mathcal{G}$), dann sind alle zu $\eta = \boldsymbol{E}\{\xi \mid \mathcal{G}\}$ äquivalenten Zufallsvariablen auch Versionen des bedingten Erwartungswertes von ξ bezüglich $\mathcal{G}$.

Satz 5.1 (Existenz des bedingten Erwartungswertes)
Es gelte $\boldsymbol{E}|\xi| < \infty$. Dann existiert $\boldsymbol{E}\{\xi \mid \mathcal{G}\}$.

Beweis:

- maßtheoretischer Beweis

  $(\Omega, \mathcal{G}, \boldsymbol{P})$ ist Wahrscheinlichkeitsraum
  betrachten darauf Mengenfunktion $\mu_+(A) = \boldsymbol{E}\chi_A\xi^+$, $A \in \mathcal{G}$, ist σ-additive Mengenfunktion (Eigenschaften des Integrals)
  $\mu_+(A)$ Maß auf $(\Omega, \mathcal{G})$, $\mu_+(\Omega) = \boldsymbol{E}\xi^+ < \infty$, $\mu_+(A) = 0$ falls $\boldsymbol{P}(A) = 0$
  $\Rightarrow \mu_+ \ll \boldsymbol{P}$ (absolut stetig bzgl. $\boldsymbol{P}$)
  nach Satz von Radon-Nikodym existiert eine $\mathcal{G}$-meßbare Funktion $\eta_{(+)} \geq 0$, so daß

  $$\mu(A) = \int_A \eta_{(+)}(\omega)\boldsymbol{P}(d\omega) = \boldsymbol{E}\chi_A\eta_{(+)} \quad \forall A \in \mathcal{G}$$

  gilt. Analog $\exists$ $\mathcal{G}$-meßbare Funktion $\eta_{(-)} \geq 0$: $\boldsymbol{E}\chi_A\xi^- = \boldsymbol{E}\chi_A\eta_{(-)} \quad \forall A \in \mathcal{G}$
  Zufallsgröße $\eta = \eta_{(+)} - \eta_{(-)}$ ist gesuchter bedingter Erwartungswert ...

- funktionalanalytischer Beweis

  allgemeine Aussage:
  $(\Omega, \mathcal{F}, \boldsymbol{P})$ Wahrscheinlichkeitsraum
  $f : (\Omega, \mathcal{F}) \to (E, \mathcal{E})$ meßbar
  Q : induziertes Maß auf $(E, \mathcal{E})$: $Q(A) = \boldsymbol{P}(f^{-1}(A))\ \forall A \in \mathcal{E}$
  $\xi : (\Omega, \mathcal{F}, \boldsymbol{P}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, integrierbar: $\boldsymbol{E}|\xi| < \infty$

  $\Rightarrow$ $\exists$ Q-integrierbare Zufallsgröße η auf $(E, \mathcal{E}, Q)$, so daß $\forall A \in \mathcal{E}$:

  $$\int_A \eta(x)\, Q(dx) = \int_{f^{-1}(A)} \xi(\omega)\, \boldsymbol{P}(d\omega). \qquad (*)$$

  genügt eine Zufallsgröße η_1 auf $(E, \mathcal{E}, Q)$ auch dieser Gleichung, so gilt $\eta = \eta_1$ f.s., Eindeutigkeit wie vorne
  nehmen zuerst an $\xi \in L_2(\Omega, \mathcal{F}, \boldsymbol{P})$: Abb. $\varphi : L_2(E, \mathcal{E}, Q) \to \mathbb{R}$

  $$\varphi(\zeta) := \int_\Omega (\zeta \circ f)(\omega)\xi(\omega)\, \boldsymbol{P}(d\omega)$$

  φ lineares Funktional auf $L_2(E, \mathcal{E}, Q)$, $\|\varphi\| \leq \|\xi\|_{L_2(\boldsymbol{P})}$, allgemeine Form von linearen Funktionalen im Hilbert-Raum $\Rightarrow$ $\exists \eta \in L_2(E, \mathcal{E}, Q)$:

$$\varphi(\zeta) = \int_\Omega (\zeta \circ f)(\omega)\xi(\omega)\, \boldsymbol{P}(d\omega) = \int_E \zeta(x)\eta(x)\, Q(dx) \quad \forall \zeta \in L_2(E, \mathcal{E}, Q)$$

η ist $\mathcal{E}$-meßbar, falls für $\zeta = \chi_A(x)$, $A \in \mathcal{E}$ $\Rightarrow$ nötige Gleichung $(*)$
falls $\xi \in L_2(\Omega, \mathcal{F}, \boldsymbol{P})$, $\xi \geq 0$ $\Rightarrow$ $\int_A \eta(x)\, Q(dx) \geq 0\ \forall A \in \mathcal{E} \Rightarrow \eta \geq 0$
falls ξ nur integrierbar $\Rightarrow$ ξ^+, ξ^- integrierbar, $\xi_n^+ = \xi^+ \wedge n \in L_2(\Omega, \mathcal{F}, \boldsymbol{P})$, $\xi_n^- = \xi^- \wedge n \in L_2(\Omega, \mathcal{F}, \boldsymbol{P})$
$\Rightarrow$ $\exists \eta_n^+, \eta_n^-$ mit entsprechender Gleichung $(*)$ für ξ_n^+, ξ_n^-;
da η_n^+ monoton wachsend ist, $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \eta_n^+ = \eta^+$ und da $\boldsymbol{E}\eta_n^+ < \boldsymbol{E}\xi^+$ folgt aus dem Satz von Lebesgue $\boldsymbol{E}\eta^+ = \lim\limits_{n\to\infty} \boldsymbol{E}\eta_n^+ = \boldsymbol{E}\xi^+$, analog $\exists \eta^- = \lim\limits_{n\to\infty} \eta_n^- \ \ldots$
$\eta = \eta^+ - \eta_-$ ist gesuchte Zufallsvariable
hier: $E = \Omega$, $\mathcal{E} = \mathcal{G}$, Q ist Einschränkung von $\boldsymbol{P}$ auf $\mathcal{G}$

$\square$

„lineare“ Eigenschaften des bedingten Erwartungswertes

- $\boldsymbol{E}|\xi| < \infty$, c konstant $\Rightarrow$ $\boldsymbol{E}\{c\xi \mid \mathcal{G}\} = c\boldsymbol{E}\{\xi \mid \mathcal{G}\}$ f.s.

  Beweis:
  $\boldsymbol{E}c\xi\chi_A = c\boldsymbol{E}\xi\chi_A = c\boldsymbol{E}\eta\chi_A = \boldsymbol{E}c\eta\chi_A \quad \forall A \in \mathcal{G},\ \eta = \boldsymbol{E}\{\xi \mid \mathcal{G}\}$ $\square$

  insbesondere für $c = 0$: $\boldsymbol{E}\{0 \mid \mathcal{G}\} = 0$ f.s.

- $\boldsymbol{E}|\xi| < \infty$ $\Rightarrow$ $\boldsymbol{E}\boldsymbol{E}\{\xi \mid \mathcal{G}\} = \boldsymbol{E}\xi$

  Beweis:
  $A = \Omega$, $\boldsymbol{E}\boldsymbol{E}\{\xi \mid \mathcal{G}\} = \boldsymbol{E}\chi_A\boldsymbol{E}\{\xi \mid \mathcal{G}\} = \boldsymbol{E}\chi_A\xi = \boldsymbol{E}\xi$ $\square$

- $\boldsymbol{E}|\xi_1| < \infty$, $\boldsymbol{E}|\xi_2| < \infty$ $\Rightarrow \boldsymbol{E}\{\xi_1 \pm \xi_2 \mid \mathcal{G}\} = \boldsymbol{E}\{\xi_1 \mid \mathcal{G}\} \pm \boldsymbol{E}\{\xi_2 \mid \mathcal{G}\}$ f.s.

  Beweis:
  $\eta_i = \boldsymbol{E}\{\xi_i \mid \mathcal{G}\}$, $i = 1, 2$
  $\boldsymbol{E}(\xi_1 \pm \xi_2)\chi_A = \boldsymbol{E}\xi\chi_A \pm \boldsymbol{E}\xi_2\chi_A = \boldsymbol{E}\eta_1\chi_A \pm \boldsymbol{E}\eta_2\chi_A = \boldsymbol{E}(\eta_1 \pm \eta_2)\chi_A\ \forall A \in \mathcal{G}$ $\square$

- $\boldsymbol{E}|\xi| < \infty$, ξ $\mathcal{G}$-meßbar $\Rightarrow$ $\boldsymbol{E}\{\xi \mid \mathcal{G}\} = \xi$ f.s.

  Beweis:
  Definition $\Rightarrow$ $\eta = \boldsymbol{E}\{\xi \mid \mathcal{G}\}$ ist $\mathcal{G}$-meßbar und $\boldsymbol{E}\xi\chi_A = \boldsymbol{E}\eta\chi_A\ \forall A \in \mathcal{G}$ $\square$

- $\boldsymbol{E}|\xi| < \infty$, $\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}$ Teil-σ-Algebra $\Rightarrow$ $\boldsymbol{E}\left\{\boldsymbol{E}\{\xi \mid \mathcal{G}\} \mid \mathcal{G}_1\right\} = \boldsymbol{E}\{\xi \mid \mathcal{G}_1\}$ f.s.
  (kleinere σ-Algebra „frißt“ größere)
  auch $\underbrace{\boldsymbol{E}\{\boldsymbol{E}\{\xi \mid \mathcal{G}_1\} \mid \mathcal{G}\}}_{\mathcal{G}_1\text{-meßbare Version}} = \boldsymbol{E}\{\xi \mid \mathcal{G}_1\}$ f.s.

  Beweis:
  $\eta = \boldsymbol{E}\{\xi \mid \mathcal{G}\}$, $\eta_1 = \boldsymbol{E}\{\xi \mid \mathcal{G}_1\}$
  $A \in \mathcal{G}_1$ $\Rightarrow$ $A \in \mathcal{G}$ $\Rightarrow$ $\boldsymbol{E}\eta\chi_A = \boldsymbol{E}\eta_1\chi_A = \boldsymbol{E}\xi\chi_A$ $\Rightarrow$ $\boldsymbol{E}\{\eta \mid \mathcal{G}_1\} = \eta_1$ $\square$

Monotonie-, Grenzwerteigenschaften des bedingten Erwartungswertes

- $\boldsymbol{E}|\xi_1| < \infty,\ \boldsymbol{E}|\xi_2| < \infty,\ \xi_2 \geq \xi_1$ f.s. $\Rightarrow\ \boldsymbol{E}\{\xi_2 \mid \mathcal{G}\} \geq \boldsymbol{E}\{\xi_1 \mid \mathcal{G}\}$ f.s.

  Beweis:
  $\eta_i = \boldsymbol{E}\{\xi_i \mid \mathcal{G}\},\ A = \{\omega :\ \eta_2(\omega) - \eta_1(\omega) \leq 0\}$
  $\boldsymbol{E}(\eta_2 - \eta_1)^- = -\boldsymbol{E}\eta_2\chi_A + \boldsymbol{E}\eta_1\chi_A = -\boldsymbol{E}\xi_2\chi_A + \boldsymbol{E}\xi_1\chi_A \leq 0\ \Rightarrow\ \boldsymbol{E}(\eta_2 - \eta_1)^- = 0\ \Rightarrow$
  $\eta_2 \geq \eta_1$ f.s. $\square$

- $\xi \geq 0,\ \boldsymbol{E}\xi < \infty\ \Rightarrow\ \boldsymbol{E}\{\xi \mid \mathcal{G}\} \geq \boldsymbol{E}\{0 \mid \mathcal{G}\} = 0$ f.s.

- $\boldsymbol{E}|\xi_i| < \infty,\ \boldsymbol{E}|\xi| < \infty,\ \xi_{i+1} \geq \xi_i$ f.s. $i = 1, 2, \ldots,\ \xi = \lim\limits_{i\to\infty} \xi_i$ f.s.
  $\Rightarrow\ \boldsymbol{E}\{\xi \mid \mathcal{G}\} = \lim\limits_{i\to\infty} \boldsymbol{E}\{\xi_i \mid \mathcal{G}\}$ f.s. (Satz über monotone Konvergenz)

  Beweis:
  $\eta_i = \boldsymbol{E}\{\xi_i \mid \mathcal{G}\}$, Zufallsgrößen η_i wachsen f.s., $\tilde{\eta} := \lim\limits_{i\to\infty} \eta_i$
  nach Satz über monotone Konvergenz für (gewöhnliche) Integrale: $\forall A \in \mathcal{G}$
  $\boldsymbol{E}\xi\chi_A = \lim\limits_{i\to\infty} \boldsymbol{E}\xi_i\chi_A = \lim\limits_{i\to\infty} \boldsymbol{E}\eta_i\chi_A = \boldsymbol{E}\tilde{\eta}\chi_A$
  $\Rightarrow$ nach Definition: $\tilde{\eta} = \boldsymbol{E}\{\xi \mid \mathcal{G}\}$. $\square$

- $\xi_i \geq 0,\ \boldsymbol{E}\xi_i < \infty,\ i = 1, 2, \ldots,\ \boldsymbol{E} \varliminf\limits_{i\to\infty} \xi_i < \infty$
  $\Rightarrow\ \boldsymbol{E}\{\varliminf\limits_{i\to\infty} \xi_i \mid \mathcal{G}\} \leq \varliminf\limits_{i\to\infty} \boldsymbol{E}\{\xi_i \mid \mathcal{G}\}$ f.s. (Lemma von Fatou)

  Beweis:
  $\inf\{\xi_i :\ i \geq n\}$ wächst mit wachsendem n
  $\Rightarrow$ Vorige Behauptung
  $\boldsymbol{E}\{\lim\limits_{n\to\infty} \inf\{\xi_i :\ i \geq n\} \mid \mathcal{G}\} = \lim\limits_{n\to\infty} \boldsymbol{E}\{\inf\limits_{i\geq n} \xi_i \mid \mathcal{G}\} \leq \lim\limits_{n\to\infty} \inf\limits_{i\geq n} \boldsymbol{E}\{\xi_i \mid \mathcal{G}\}$ f.s. $\square$

- $|\xi_i| \leq \eta,\ \boldsymbol{E}\eta < \infty,\ \exists\, \xi := \lim\limits_{i\to\infty} \xi_i$ f.s.
  $\Rightarrow\ \boldsymbol{E}\{\xi \mid \mathcal{G}\} = \lim\limits_{i\to\infty} \boldsymbol{E}\{\xi_i \mid \mathcal{G}\}$ f.s., wobei der letzte Grenzwert f.s. existiert (Satz über die majorisierte Konvergenz)

  Beweis:
  nach voriger Behauptung

  $$\begin{aligned}\varliminf_{i\to\infty} \boldsymbol{E}\{\xi_i \mid \mathcal{G}\} &= \varliminf_{i\to\infty} \boldsymbol{E}\{\xi_i + \eta \mid \mathcal{G}\} - \boldsymbol{E}\{\eta \mid \mathcal{G}\} \geq \boldsymbol{E}\{\xi + \eta \mid \mathcal{G}\} - \boldsymbol{E}\{\eta \mid \mathcal{G}\}\\ &= \boldsymbol{E}\{\xi \mid \mathcal{G}\} = -\boldsymbol{E}\{-\xi \mid \mathcal{G}\} = -\boldsymbol{E}\{\underbrace{\eta - \xi}_{\geq 0} \mid \mathcal{G}\} + \boldsymbol{E}\{\eta \mid \mathcal{G}\}\\ &\geq -\varliminf_{i\to\infty} \boldsymbol{E}\{\eta - \xi_i \mid \mathcal{G}\} + \boldsymbol{E}\{\eta \mid \mathcal{G}\} \geq \varlimsup_{i\to\infty} \boldsymbol{E}\{\xi_i \mid \mathcal{G}\}\end{aligned}$$ $\square$

- $\varphi(t)$ konvexe Funktion auf $\mathbb{R}$, $\boldsymbol{E}|\xi| < \infty,\ \boldsymbol{E}|\varphi(\xi)| < \infty$
  $\Rightarrow\ \boldsymbol{E}\{\varphi(\xi) \mid \mathcal{G}\} \geq \varphi(\boldsymbol{E}\{\xi \mid \mathcal{G}\})$ f.s. (Jensensche Ungleichung)

  Beweis:
  φ konvex auf $\mathbb{R}$ (endlich), $\exists\,(a_i, b_i)\ i \in \mathbb{N} :\ \varphi(t) = \sup\limits_i (a_i t + b_i)$
  $\forall i \in \mathbb{N} :\ \varphi(t) \geq a_i t + b_i$

$$\boldsymbol{E}\{\varphi(\xi) \mid \mathcal{G}\} \geq \boldsymbol{E}\{a_i\xi + b_i \mid \mathcal{G}\} = a_i\boldsymbol{E}\{\xi \mid \mathcal{G}\} + b_i$$
$$\sup_i \ \Rightarrow \ \boldsymbol{E}\{\varphi(\xi) \mid \mathcal{G}\} \geq \varphi(\boldsymbol{E}\{\xi \mid \mathcal{G}\}) \text{ f.s.} \qquad \square$$

- $p \geq 1: \ \boldsymbol{E}|\xi|^p < \infty \ \Rightarrow \ |\boldsymbol{E}\{\xi \mid \mathcal{G}\}|^p \leq \boldsymbol{E}\{|\xi|^p \mid \mathcal{G}\}$ f.s.,
  speziell $|\boldsymbol{E}\{\xi \mid \mathcal{G}\}| \leq \boldsymbol{E}\{|\xi| \mid \mathcal{G}\}$
- $\boldsymbol{E}|\xi| < \infty, \ \boldsymbol{E}|\xi - \xi_i| \to 0 \ (i \to \infty)$
  $\Rightarrow \ \boldsymbol{E}|\boldsymbol{E}\{\xi \mid \mathcal{G}\} - \boldsymbol{E}\{\xi_i \mid \mathcal{G}\}| \leq \boldsymbol{E}\boldsymbol{E}\{|\xi - \xi_i| \mid \mathcal{G}\} = \boldsymbol{E}|\xi - \xi_i| \to 0 \ (i \to \infty)$.

Eigenschaften im Zusammenhang mit der Unabhängigkeit

Definition 5.2
Zufallsgröße ξ und σ-Algebra $\mathcal{G}$ heißen unabhängig, falls $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \ \forall A \in \mathcal{G}$ die Ereignisse $\{\omega : \xi(\omega) \in B\}$ und A unabhängig sind, d.h.

$$\boldsymbol{P}\{\{\omega : \xi(\omega) \in B\} \cap A\} = \boldsymbol{P}\{\omega : \xi(\omega) \in B\}\boldsymbol{P}(A)$$

- $\boldsymbol{E}|\xi| < \infty, \ \xi$ und $\mathcal{G}$ unabhängig $\Rightarrow \ \boldsymbol{E}\{\xi \mid \mathcal{G}\} = \boldsymbol{E}\xi$ f.s.

  Beweis:
  $\kappa_n(t) = 2^{-n}[2^n t], \ \xi_n = \kappa_n(\xi) \ \Rightarrow \ |\xi - \xi_n| \leq 2^{-n}, \ A \in \mathcal{G}$
  $$\Rightarrow \ \boldsymbol{E}\xi\chi_A = \lim_{n\to\infty} \boldsymbol{E}\xi_n\chi_A = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tfrac{k}{2^n}\boldsymbol{P}\{\tfrac{k}{2^n} \leq \xi < \tfrac{k+1}{2^n}, \ A\} \qquad \square$$
  $$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tfrac{k}{2^n}\boldsymbol{P}\{\tfrac{k}{2^n} \leq \xi < \tfrac{k+1}{2^n}\}\boldsymbol{P}(A) = \boldsymbol{P}(A)\boldsymbol{E}\xi = \boldsymbol{E}(\chi_A\boldsymbol{E}\xi)$$

- insbesondere gilt $\boldsymbol{E}\{c \mid \mathcal{G}\} = c$ f.s. für jede Konstante c
- $\boldsymbol{E}|\xi| < \infty, \ B \in \mathcal{G} \ \Rightarrow \ \boldsymbol{E}\{\xi\chi_B \mid \mathcal{G}\} = \chi_B\boldsymbol{E}\{\xi \mid \mathcal{G}\}$ f.s.

  Beweis:
  $\eta = \boldsymbol{E}\{\xi \mid \mathcal{G}\} \ \Rightarrow \ \forall A \in \mathcal{G}: \ \boldsymbol{E}\xi\chi_A\chi_B = \boldsymbol{E}\xi\chi_{AB} = \boldsymbol{E}\eta\chi_{AB} = \boldsymbol{E}(\eta\chi_B)\chi_A$ $\square$

- $\boldsymbol{E}|\xi| < \infty, \ \boldsymbol{E}|\xi\zeta| < \infty, \ \zeta$ ist $\mathcal{G}$-meßbar
  $\Rightarrow \ \boldsymbol{E}\{\xi\zeta \mid \mathcal{G}\} = \zeta\boldsymbol{E}\{\xi \mid \mathcal{G}\}$ f.s.

  Beweis:
  können annehmen $\zeta \geq 0$ (ansonsten $\zeta = \zeta^+ - \zeta^-$) ...
  $\zeta_n = \kappa_n(\zeta) \ \Rightarrow \ |\zeta_n\xi| \leq |\zeta\xi| \ \Rightarrow \ \exists\, \boldsymbol{E}\zeta_n\xi, \ \boldsymbol{E}\{\zeta_n\xi \mid \mathcal{G}\}$
  $B_{n,k} := \{\omega : \frac{k}{2^n} \leq \zeta < \frac{k+1}{2^n}\}$
  $\Rightarrow \ \chi_{B_{n,k}}\boldsymbol{E}\{\zeta_n\xi \mid \mathcal{G}\} = \boldsymbol{E}\{\chi_{B_{n,k}}\zeta_n\xi \mid \mathcal{G}\} = \frac{k}{2^n}\chi_{B_{n,k}}\boldsymbol{E}\{\xi \mid \mathcal{G}\} = \zeta_n\chi_{B_{n,k}}\boldsymbol{E}\{\xi \mid \mathcal{G}\}$ f.s.
  $\Rightarrow \ \boldsymbol{E}\{\zeta_n\xi \mid \mathcal{G}\} = \zeta_n\boldsymbol{E}\{\xi \mid \mathcal{G}\}$ f.s. auf $B_{n,k}$
  $\bigcup_k B_{n,k} = \Omega \ \Rightarrow$ f.s. auf Ω; $n \to \infty: \ \zeta_n\xi \to \zeta\xi, \ \zeta_n \to \zeta$ f.s. ... $\square$

- $f(x,y)$ Borelsche Funktion der Veränderlichen (x,y); ζ $\mathcal{G}$-meßbar, ξ unabhängig von $\mathcal{G}$, $\boldsymbol{E}|f(\xi,\zeta)| < \infty$.
  Dann ist $\Phi(y) := \boldsymbol{E}f(\xi,y)$ eine Borelsche Funktion von y und
  $$\boldsymbol{E}\{f(\xi,\zeta) \mid \mathcal{G}\} = \Phi(\zeta) \text{ f.s.}$$

- $H = L_2(\Omega,\mathcal{F},\boldsymbol{P}),\ H_1 = L_2(\Omega,\mathcal{G},\boldsymbol{P}),\ H_1 \subset H$,
  $\Pi_{\mathcal{G}}$: Operator der orthogonalen Projektion von H auf H_1, $\boldsymbol{E}\xi^2 < \infty$
  $\Rightarrow\ \Pi_{\mathcal{G}}\xi = \boldsymbol{E}\{\xi \mid \mathcal{G}\}$

  Beweis:
  $\Pi_{\mathcal{G}}\xi$ ist $\mathcal{G}$-meßbar
  $\xi - \Pi_{\mathcal{G}}\xi \perp \eta\ \forall \eta \in H_1$, d.h. $\boldsymbol{E}(\xi - \Pi_{\mathcal{G}}\xi)\eta = 0$ (als orthogonale Projektion)
  nehmen $\eta = \chi_A,\ A \in \mathcal{G}\ \Rightarrow\ 0 = \boldsymbol{E}(\xi - \Pi_{\mathcal{G}}\xi)\chi_A\ \Rightarrow\ \boldsymbol{E}\xi\chi_A = \boldsymbol{E}\Pi_{\mathcal{G}}\xi\chi_A$
  $\Rightarrow\ \Pi_{\mathcal{G}} = \boldsymbol{E}\{\xi \mid \mathcal{G}\}$ □

- $\boldsymbol{E}\xi^2 < \infty,\ H_1 = L_2(\Omega,\mathcal{G},\boldsymbol{P})$, dann gilt: Länge des Vektors $\xi - \Pi_{\mathcal{G}}\xi$ (im $L_2(\Omega,\mathcal{F},\boldsymbol{P})$) ist die kürzeste von allen Längen der Vektoren $\xi - \eta$ mit $\eta \in H_1$:
  $$\boldsymbol{E}(\xi - \boldsymbol{E}\{\xi \mid \mathcal{G}\})^2 = \min_{\eta \in H_1} \boldsymbol{E}(\xi - \eta)^2$$

- A_i, $i = 1,2,\ldots$, paarweise disjunkt, $\bigcup\limits_i A_i = \Omega,\ \boldsymbol{P}(A_i) > 0\ \forall i = 1,2,\ldots,$
  $\mathcal{G} = \sigma\{A_i : i \geq 1\},\ \boldsymbol{E}|\xi| < \infty$
  $\Rightarrow\ \boldsymbol{E}\{\xi \mid \mathcal{G}\} = \frac{\boldsymbol{E}\xi\chi_{A_i}}{\boldsymbol{P}(A_i)}$ f.s. auf A_i

  Beweis:
  $\eta := \frac{\boldsymbol{E}\xi\chi_{A_i}}{\boldsymbol{P}(A_i)}$ auf $A_i\ \Rightarrow\ \eta$ ist $\mathcal{G}$-meßbar,
  $\boldsymbol{E}|\eta| = \sum\limits_i \left|\frac{\boldsymbol{E}\xi\chi_{A_i}}{\boldsymbol{P}(A_i)}\right| \boldsymbol{P}(A_i) = \sum\limits_i |\boldsymbol{E}\xi\chi_{A_i}| \leq \sum\limits_i \boldsymbol{E}|\xi|\chi_{A_i} = \boldsymbol{E}|\xi| < \infty$
  $A \in \mathcal{G}\ \Rightarrow\ A = \sum\limits_j A_{i_j}$ mit $i_{j_1} \neq i_{j_2}$ für $j_1 \neq j_2$
  $\Rightarrow\ \boldsymbol{E}\xi\chi_A = \sum\limits_j \boldsymbol{E}\xi\chi_{A_{i_j}} = \sum\limits_j \boldsymbol{E}\eta\chi_{A_{i_j}} = \boldsymbol{E}\eta\chi_A$ □

Satz 5.2 (über die normale Korrelation)
$(\xi,\xi_1,\ldots,\xi_n)$ Gaußscher Zufallsvektor,
$\mathcal{G} = \sigma\{(\xi_1,\ldots,\xi_n)\}$ σ-Algebra, die von $\xi_1,\ldots,\xi_n$ erzeugt wird

$$\Rightarrow\ \boldsymbol{E}\{\xi \mid \mathcal{G}\} = a + b_1\xi_1 + \ldots + b_n\xi_n \text{ f.s.}$$

(d.h. bedingter Erwartungswert ist affin lineare Funktion von $\xi_1,\ldots,\xi_n$), wobei als Konstanten $a, b_1,\ldots,b_n$ eine beliebige Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}\xi &= a + b_1\boldsymbol{E}\xi_1 + \ldots + b_n\boldsymbol{E}\xi_n \\ \boldsymbol{E}\xi\xi_i &= a\boldsymbol{E}\xi_i + b_1\boldsymbol{E}\xi_1\xi_i + \ldots + b_n\boldsymbol{E}\xi_n\xi_i\,,\ i = 1,\ldots,n \end{aligned} \tag{S}$$

genommen werden kann. Dieses System hat immer mindestens eine Lösung.

Beweis:
Funktion $\boldsymbol{E}[\xi - (a + b_1\xi_1 + \ldots + b_n\xi_n)]^2$ ist eine nichtnegative quadratische Funktion von $(a, b_1, \ldots, b_n)$ und erreicht in einem Punkt ihr absolutes Minimum
notwendige Bedingung: partiellen Ableitungen nach $a, b_1, \ldots, b_n$ sind Null in diesem Punkt
$\boldsymbol{E}[\xi - (a + b_1\xi_1 + \ldots + b_n\xi_n)]^2 =$

$$= \boldsymbol{E}\xi^2 + a^2 + \sum_{i=1}^n b_i^2 \boldsymbol{E}\xi_i^2 - 2a\boldsymbol{E}\xi - 2\sum_{i=1}^n b_i \boldsymbol{E}\xi\xi_i + 2\sum_{i,j=1}^n b_i b_j \boldsymbol{E}\xi_i\xi_j - 2a\sum_{i=1}^n b_i \boldsymbol{E}\xi_i$$

Ableitungen ergeben genau System (S)
Da Minimumspunkt existiert, existiert Lösung von (S);
für jede Lösung von (S) gilt

$$\boldsymbol{E}(\xi - (a + b_1\xi_1 + \ldots + b_n\xi_n))\xi_i = 0\,,\ \ \boldsymbol{E}(\xi - (a + b_1\xi_1 + \ldots + b_n\xi_n)) = 0$$

$\Rightarrow$ im Gaußschen Zufallsvektor $(\eta, \xi_1, \ldots, \xi_n)$ mit $\eta = \xi - (a + b_1\xi_1 + \ldots + b_n\xi_n)$ ist die Zufallsgröße η nicht korreliert mit $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$
da Gaußsch $\Rightarrow$ η unabhängig von $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ $\Rightarrow$ η unabhängig von $\mathcal{G} = \sigma\{(\xi_1, \ldots, \xi_n)\}$

$$\boldsymbol{E}\{\eta \mid \mathcal{G}\} = \boldsymbol{E}\eta = 0 \text{ f.s.}$$

da ξ_i $\mathcal{G}$-meßbar: $0 = \boldsymbol{E}\{\eta \mid \mathcal{G}\} = \boldsymbol{E}\{\xi \mid \mathcal{G}\} - (a + b_1\xi_1 + \ldots + b_n\xi_n) = 0$ f.s.
$\Rightarrow$ $\boldsymbol{E}\{\xi \mid \mathcal{G}\} = a + b_1\xi_1 + \ldots + b_n\xi_n$ □

- Spezialfall $n = 1$:

  Sei $(\xi, \xi_1) \sim N\left(\binom{0}{0}, \begin{pmatrix} \sigma_0^2 & \varrho_{01} \\ \varrho_{01} & \sigma_1^2 \end{pmatrix}\right)$, $\qquad \varrho_{01} = \boldsymbol{E}\xi\xi_1$

  $\boldsymbol{E}\xi = a + b_1\boldsymbol{E}\xi_1 \ \Rightarrow\ a = 0$

  $\boldsymbol{E}\xi\xi_1 = b_1\boldsymbol{E}\xi_1^2 \ \Rightarrow\ b_1 = \frac{\boldsymbol{E}\xi\xi_1}{\boldsymbol{E}\xi_1^2} = \frac{\varrho_{01}}{\sigma_1^2} \ \Rightarrow\ \boldsymbol{E}\{\xi \mid \xi_1\} = \frac{\varrho_{01}}{\sigma_1^2}\xi_1$

  (vgl. Ausgleichsgerade)

6 Martingale

$(\Omega, \mathcal{F}, \boldsymbol{P})$ vollständiger Wahrscheinlichkeitsraum
$T = \mathbb{R}_+,\ \mathbb{N}_0,\ [0, T_1]$

Filtration von σ-Algebren
$(\mathcal{F}_t,\, t \in T):\ \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}\ \forall t \in T;\ \mathcal{F}_{t_1} \subseteq \mathcal{F}_{t_2}$ falls $t_1 \leq t_2$
Filtration ist vollständig, falls $\forall t \in T\ \mathcal{F}_t$ alle $\boldsymbol{P}$-Nullmengen enthält
Bezeichnung: $\overline{\mathcal{F}_t}$-Vervollständigung von $\mathcal{F}_t$

Definition 6.1
Zufallsprozeß $(\xi_t,\, t \in T)$ heißt adaptiert bezüglich der Filtration $(\mathcal{F}_t,\, t \in T)$, falls $\forall t \in T$ gilt: ξ_t ist $\mathcal{F}_t$-meßbar.

Definition 6.2
Zufallsprozeß $(\xi_t,\, t \in T)$ heißt Martingal bezüglich der Filtration $(\mathcal{F}_t,\, t \in T)$, falls gilt:

(i) Prozeß ist adaptiert

(ii) $\boldsymbol{E}|\xi_t| < \infty\ \forall t \in T$

(iii) $\boldsymbol{E}\{\xi_t \mid \mathcal{F}_s\} = \xi_s$ f.s. $\forall s \leq t,\ s, t \in T$.

Gilt in (iii) $\forall s \leq t,\ s, t \in T$:

- $\boldsymbol{E}\{\xi_t \mid \mathcal{F}_s\} \leq \xi_s$ f.s., dann heißt der Prozeß Supermartingal.
- $\boldsymbol{E}\{\xi_t \mid \mathcal{F}_s\} \geq \xi_s$ f.s., dann heißt der Prozeß Submartingal.

- $(\xi_t,\, t \in T)$ ist Supermartingal $\Longleftrightarrow$ $(-\xi_t,\, t \in T)$ ist Submartingal
- Martingal ist sowohl Super- als auch Submartingal
- es gilt für $s \leq t$:

$$\boldsymbol{E}[\underbrace{\boldsymbol{E}\{\xi_t \mid \mathcal{F}_s\}}_{=\xi_s}] = \boldsymbol{E}\xi_t \begin{cases} = \boldsymbol{E}\xi_s & \Rightarrow t \mapsto \boldsymbol{E}\xi_t \text{ ist konstant, Martingal} \\ \leq \boldsymbol{E}\xi_s & \Rightarrow t \mapsto \boldsymbol{E}\xi_t \text{ ist monoton nicht wachsend, Supermartingal} \\ \geq \boldsymbol{E}\xi_s & \Rightarrow t \mapsto \boldsymbol{E}\xi_t \text{ ist monoton nicht fallend, Submartingal} \end{cases}$$

Beispiel 6.1

- $\boldsymbol{E}|\xi| < \infty,\ (\mathcal{F}_t,\, t \in T)$ Filtration
  $\xi_t := \boldsymbol{E}\{\xi \mid \mathcal{F}_t\}\ \Rightarrow\ (\xi_t,\, t \in T)$ ist Martingal bezüglich $(\mathcal{F}_t,\, t \in T)$.

  Beweis:
  $\boldsymbol{E}\{\xi_t \mid \mathcal{F}_s\} = \boldsymbol{E}\{\boldsymbol{E}\{\xi \mid \mathcal{F}_t\} \mid \mathcal{F}_s\} = \boldsymbol{E}\{\xi \mid \mathcal{F}_s\} = \xi_s$ f.s. $s \leq t$ □

- $(W_t,\, t \in \mathbb{R}_+)$ Wiener-Prozeß, $\mathcal{F}_t = \sigma(\{W_s,\, s \leq t\})$

– $(W_t,\, t \in \mathbb{R}_+)$ Martingal bzgl. $\mathcal{F}_t$

Beweis:

$$s \le t\colon \boldsymbol{E}\{W_t \mid \mathcal{F}_s\} = \boldsymbol{E}\{W_t - W_s + W_s \mid \mathcal{F}_s\} = \underbrace{\boldsymbol{E}\{W_t - W_s \mid \mathcal{F}_s\}}_{= \boldsymbol{E}[W_t - W_s] = 0} + \underbrace{\boldsymbol{E}\{W_s \mid \mathcal{F}_s\}}_{= W_s} = W_s$$

□

– $(\exp(W_t - \frac{t}{2}),\, t \in \mathbb{R}_+)$ Martingal bzgl. $\mathcal{F}_t$ (vgl. geometrische Brownsche Bewegung)

Beweis: $s \le t$:

$$\boldsymbol{E}\{\, \mathrm{e}^{W_t - \frac{t}{2}} \mid \mathcal{F}_s\} = \boldsymbol{E}\{\, \mathrm{e}^{W_t - W_s - \frac{t-s}{2} + W_s - \frac{s}{2}} \mid \mathcal{F}_s\} = \boldsymbol{E}\{\underbrace{\mathrm{e}^{W_t - W_s - \frac{t-s}{2}}}_{\text{unabhängig von } \mathcal{F}_s} \underbrace{\mathrm{e}^{W_s - \frac{s}{2}}}_{\mathcal{F}_s\text{-meßbar}} \mid \mathcal{F}_s\}$$

$$= \underbrace{\boldsymbol{E}\, \mathrm{e}^{W_t - W_s - \frac{t-s}{2}}}_{=1} \mathrm{e}^{W_s - \frac{s}{2}} = \mathrm{e}^{W_s - \frac{s}{2}}$$

$W_t - W_s - \frac{t-s}{2} \sim N(-\frac{\sigma^2}{2}, \sigma^2)$ mit $\sigma^2 = t - s$

$$\Rightarrow \boldsymbol{E}\, \mathrm{e}^{W_t - W_s - \frac{t-s}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{u - \frac{\sigma^2}{2}}\, \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}}\, du = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{(u-\sigma^2)^2}{2\sigma^2}}\, du$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{v^2}{2}}\, dv = 1 \quad (v = \tfrac{u-\sigma^2}{\sigma})$$

□

- $\eta_1, \dots, \eta_N$ unabhängige Zufallsvariable, $\boldsymbol{E}\eta_n = 0$, $\mathcal{F}_n = \sigma\{\eta_1, \dots, \eta_n\}$

  $\xi_n = \eta_1 + \ldots + \eta_n \;\Rightarrow\; (\xi_n,\, \mathcal{F}_n,\, n = 1, \dots, N)$ Martingal

  Beweis: $m > n$:

$$\boldsymbol{E}\{\xi_m \mid \mathcal{F}_n\} = \boldsymbol{E}\{\eta_1 + \ldots + \eta_m \mid \mathcal{F}_n\} = \eta_1 + \ldots + \eta_n + \underbrace{\boldsymbol{E}\{\eta_{n+1} + \ldots + \eta_m \mid \mathcal{F}_n\}}_{\substack{= \boldsymbol{E}[\eta_{n+1} + \ldots + \eta_m] = 0 \\ \text{da } \eta_{n+1}, \dots, \eta_m \text{ unabhängig von } \mathcal{F}_n}}$$

$$= \eta_1 + \ldots + \eta_n = \xi_n$$

□

Behauptung 6.1
$(\xi_t,\, t \in T)$ Martingal, $\varphi(.)$ konvexe Funktion, $\boldsymbol{E}|\varphi(\xi_t)| < \infty\ \forall t \in T$
$\Rightarrow\ (\varphi(\xi_t),\, t \in T)$ ist Submartingal.
Insbesondere ist $(|\xi_t|,\, t \in T)$ ein Submartingal.

Beweis:

$s \le t,\ \boldsymbol{E}\{\varphi(\xi_t) \mid \mathcal{F}_s\} \overset{\text{Jensensche Ungleichung}}{\ge} \varphi(\boldsymbol{E}\{\xi_t \mid \mathcal{F}_s\}) = \varphi(\xi_s)$, da $(\xi_t,\, t \in T)$ Martingal □

Behauptung 6.2
$(\xi_t,\, t \in T)$ Submartingal, $\varphi(.)$ konvexe nicht fallende Funktion, $\boldsymbol{E}|\varphi(\xi_t)| < \infty\ \forall t \in T$
$\Rightarrow\ (\varphi(\xi_t),\, t \in T)$ ist Submartingal.
Insbesondere ist $(\xi_t^+,\, t \in T)$ ein Submartingal.

Beweis:
$s \le t$, $\boldsymbol{E}\{\varphi(\xi_t) \mid \mathcal{F}_s\} \overset{\text{Jensensche Ungleichung}}{\ge} \varphi(\underbrace{\boldsymbol{E}\{\xi_t \mid \mathcal{F}_s\}}_{\ge \xi_s}) \ge \varphi(\xi_s)$, da φ nicht fallend und $\boldsymbol{E}\{\xi_t \mid \mathcal{F}_s\} \ge \xi_s$ f.s. □

Behauptung 6.3

$(\xi_n,\, \mathcal{F}_n,\, n \in \mathbb{N})$ Martingal $\iff$
- $(\xi_n,\, n \in \mathbb{N})$ $\mathcal{F}_n$-adaptiert
- $\boldsymbol{E}|\xi_n| < \infty\ \forall n \in \mathbb{N}$
- $\boldsymbol{E}\{\xi_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\} = \xi_n$ f.s. $\forall n \in \mathbb{N}$

Beweis:
$\boldsymbol{E}\{\xi_{n+2} \mid \mathcal{F}_n\} = \boldsymbol{E}\{\underbrace{\boldsymbol{E}\{\xi_{n+2} \mid \mathcal{F}_{n+1}\}}_{=\xi_{n+1}} \mid \mathcal{F}_n\} = \boldsymbol{E}\{\xi_{n+1} \mid \mathcal{F}\} = \xi_n$ f.s. usw. □

analog für Sub- und Supermartingale

Markow-Zeiten

$(\mathcal{F}_t,\, t \in T)$ Filtration, $T \subset \mathbb{R}_+$

Definition 6.3
Zufallsgröße τ mit Werten aus $\overline{T}$ heißt Markow-Zeit (oder Stoppzeit) (bzgl. $(\mathcal{F}_t,\, t \in T)$), falls $\forall t \in T\ \{\omega : \tau(\omega) \le t\} \in \mathcal{F}_t$.

$$\overline{T} = \begin{cases} \mathbb{N} \cup \{+\infty\} & \text{falls } T = \mathbb{N} \\ \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\} & \text{falls } T = \mathbb{R}_+ \end{cases}, \text{ d.h. } \tau \text{ kann Wert unendlich annehmen}$$

Beispiel 6.2 $\tau(\omega) = t_0$ (fixierter deterministischer Zeitpunkt), $t_0 \ge 0 \Rightarrow\ \tau$ ist Markow-Zeit

Behauptung 6.4
τ_1, τ_2 Markow-Zeiten $\Rightarrow\ \tau_1 \vee \tau_2,\ \tau_1 \wedge \tau_2,\ \tau_1 + t_0$ Markow-Zeiten $(t_0 \ge 0)$

Beweis:
$$\{\tau_1 \vee \tau_2 \le t\} = \{\tau_1 \le t\} \cap \{\tau_2 \le t\} \in \mathcal{F}_t$$
$$\{\tau_1 \wedge \tau_2 \le t\} = \{\tau_1 \le t\} \cup \{\tau_2 \le t\} \in \mathcal{F}_t$$
□

Behauptung 6.5
$T = \mathbb{N},\ \tau : \Omega \to \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ meßbar ist Markow-Zeit $\iff\ \{\omega : \tau(\omega) = n\} \in \mathcal{F}_n\ \forall n \in \mathbb{N}$

Beispiel 6.3
$(\xi_n,\, n \in \mathbb{N})$ Folge von Zufallsgrößen, ξ_n $\mathcal{F}_n$-meßbar $\forall n \in \mathbb{N},\ c \in \mathbb{R}$

$$\tau(\omega) = \inf\{n > 0 : \xi_n(\omega) \ge c\}$$

(Moment des ersten Überschreitens vom Niveau c) mit $\inf \emptyset := +\infty$

$\Rightarrow$ τ ist Markow-Zeit.

Beweis:
$\{\omega : \tau(\omega) > n\} = \{\omega : \xi_1(\omega) < c, \dots, \xi_n(\omega) < c\} \in \mathcal{F}_n \Rightarrow$ Komplement $\{\omega : \tau(\omega) \leq n\} \in \mathcal{F}_n \underset{\text{Def}}{\Rightarrow}$ Behauptung $\square$

Definition 6.4
$(\xi_n,\ n \in \mathbb{N})$ Folge von Zufallsgrößen, τ nichtnegative ganzzahlige Zufallsgröße.
Folge $(\eta_n,\ n \in \mathbb{N})$ mit

$$\eta_n := \xi_{n\wedge\tau} = \begin{cases} \xi_n & n \leq \tau \\ \xi_\tau & n > \tau \end{cases}$$

heißt zur Zeit τ gestoppte Folge.

Satz 6.1 (Doob; über die Stoppung eines Submartingals)
$(\xi_n,\ \mathcal{F}_n,\ n \in \mathbb{N}_0)$ *Submartingal (Martingal), τ eine Markow-Zeit bzgl.* $(\mathcal{F}_n,\ n \in \mathbb{N}_0)$.
Dann ist die gestoppte Folge $(\xi_{n\wedge\tau},\ \mathcal{F}_n,\ n \in \mathbb{N}_0)$ *auch ein Submartingal (Martingal).*

Beweis:

$$\xi_{n\wedge\tau} = \xi_0\chi_{\tau=0} + \ldots + \xi_{n-1}\chi_{\tau=n-1} + \xi_n\chi_{\tau\geq n}$$
$$\chi_{\tau\leq n}\xi_\tau = \xi_0\chi_{\tau=0} + \ldots + \xi_n\chi_{\tau=n}$$

$\Rightarrow$ $\xi_{n\wedge\tau}$ und $\chi_{\tau\leq n}\xi_\tau$ sind $\mathcal{F}_n$-meßbar und

$$\boldsymbol{E}\{\xi_{(n+1)\wedge\tau} \mid \mathcal{F}\} = \underbrace{\boldsymbol{E}\{\chi_{\tau>n}\xi_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\}}_{=\chi_{\tau>n}\boldsymbol{E}\{\xi_{n+1}|\mathcal{F}_n\}\geq\chi_{\tau>n}\xi_n} + \boldsymbol{E}\{\underbrace{\chi_{\tau\leq n}\xi_\tau}_{\mathcal{F}_n \text{ meßbar}} \mid \mathcal{F}_n\} \geq \chi_{\tau>n}\xi_n + \chi_{\tau\leq n}\xi_\tau = \xi_{n\wedge\tau} \text{ f.s.}$$

$\square$

Folgerung 6.1
Sei τ eine beschränkte Markow-Zeit. Dann gilt auf der Menge $\{\omega : \tau(\omega) \geq n\}$

$$\boldsymbol{E}\{\xi_\tau \mid \mathcal{F}_n\} \geq \xi_n \text{ f.s.}$$

Beweis:
Gelte $\tau(\omega) \leq N\ \forall\omega \in \Omega\ \Rightarrow\ \xi_\tau = \xi_{\tau\wedge(N+n)}$ und

$$\boldsymbol{E}\{\xi_\tau \mid \mathcal{F}_n\} = \boldsymbol{E}\{\xi_{\tau\wedge(N+n)} \mid \mathcal{F}_n\} \geq \xi_{\tau\wedge n} \text{ f.s.}$$
$$\text{und } \xi_{\tau\wedge n} = \xi_n \text{ auf } \{\omega : \tau(\omega) \geq n\}$$

da $(\xi_{\tau\wedge m},\ \mathcal{F}_m,\ m \in \mathbb{N}_0)$ Submartingal ist $\square$

Definition 6.5
τ Markow-Zeit, $T = \mathbb{N}_0$

$$\mathcal{F}_\tau := \{A \subset \mathcal{F}_\infty : A \cap \{\tau(\omega) \leq n\} \in \mathcal{F}_n\ \forall n = 0, 1, \ldots, \infty\}$$

$\mathcal{F}_\infty = \mathcal{F}$ hier (oder $\mathcal{F}_\infty = \bigvee_n \mathcal{F}_n$)

$\Rightarrow$ $\mathcal{F}_\tau$ ist σ-Algebra (σ-Algebra der Ereignisse, die dem zufälligen Moment τ vorausgehen)

Lemma 6.1
ξ, ξ_n $n = 0, 1, \ldots, \infty$ Zufallsvariable, ξ_n $\mathcal{F}_n$-meßbar $\forall n$, $\boldsymbol{E}|\xi| < \infty$, τ, σ Markow-Zeiten
$\Rightarrow$

(i) $A \in \mathcal{F}_\tau \iff A \cap \{\omega : \tau(\omega) = n\} \in \mathcal{F}_n \ \forall n = 0, 1, \ldots, \infty$

(ii) $\{\omega : \tau \le \sigma\} \in \mathcal{F}_\sigma \cap \mathcal{F}_\tau$ und falls gilt $\tau \le \sigma$, dann auch $\mathcal{F}_\tau \subseteq \mathcal{F}_\sigma$

(iii) τ, ξ_τ und $\xi_n \chi_{\tau=n}$ sind $\mathcal{F}_\tau$-meßbar $\forall n = 0, 1, \ldots, \infty$

(iv) $\boldsymbol{E}\{\xi \mid \mathcal{F}_\tau\} = \boldsymbol{E}\{\xi \mid \mathcal{F}_n\}$ f.s. auf der Menge $\{\tau = n\}$ $\forall n = 0, 1, \ldots, \infty$

Beweis:

(i) selbständig

(ii) $\{\tau \le \sigma\} \cap \{\sigma = n\} = \{\tau \le n, \sigma = n\} \in \mathcal{F}_n \underset{\text{(i)}}{\Rightarrow} \{\tau \le \sigma\} \in \mathcal{F}_\sigma$
$\{\tau \le \sigma\} \cap \{\tau = n\} = \{\tau = n, \sigma \ge n\} \in \mathcal{F}_n \underset{\text{(i)}}{\Rightarrow} \{\tau \le \sigma\} \in \mathcal{F}_\tau$
$\Rightarrow$ aus (i) folgt $\{\tau \le \sigma\} \in \mathcal{F}_\sigma \cap \mathcal{F}_\tau$
falls $\tau \le \sigma$, $A \in \mathcal{F}_\tau \ \Rightarrow$
$A \cap \{\sigma = n\} = \bigcup_{i=0}^{n} A \cap \{\tau = i\} \cap \{\sigma = n\} \in \mathcal{F}_n$, da $A \cap \{\tau = i\} \in \mathcal{F}_i \subset \mathcal{F}_n$
$\Rightarrow \ A \in \mathcal{F}_\sigma$ und $\mathcal{F}_\tau \subset \mathcal{F}_\sigma$.

(iii) Konstante ist Markow-Zeit $\Rightarrow$ aus (ii) folgt $\{\tau \le n\} \in \mathcal{F}_\tau \ \forall n = 0, 1, \ldots, \infty$
$\Rightarrow \ \tau$ ist $\mathcal{F}_\tau$-meßbar

$A = \{\xi_\tau < c\}$, $c \in \mathbb{R} \ \Rightarrow \ A \cap \{\tau = n\} = \{\xi_n < c, \tau = n\} \in \mathcal{F}_n \ \forall n = 0, 1, \ldots, \infty$
$\Rightarrow \ \xi_\tau$ ist $\mathcal{F}_\tau$-meßbar

$\xi_n \chi_{\tau=n} = \chi_{\tau=n} \xi_\tau \ \Rightarrow \ \xi_n \chi_{\tau=n}$ sind $\mathcal{F}_\tau$-meßbar $\forall n = 0, 1, \ldots, \infty$

(iv) Sei $\eta = \chi_{\tau=n} \boldsymbol{E}\{\xi \mid \mathcal{F}_\tau\}$, $\zeta = \chi_{\tau=n} \boldsymbol{E}\{\xi \mid \mathcal{F}_n\}$
$\forall c \in \mathbb{R} : \ \{\eta < c\} = \{\tau \ne n, \, 0 < c\} \cup (\{\tau = n\} \cap \{\boldsymbol{E}\{\xi \mid \mathcal{F}_\tau\} < c\}) \in \mathcal{F}_n$
aus (i) und Definition von $\mathcal{F}_\tau \ \Rightarrow \ \eta$ ist $\mathcal{F}_n$-meßbar

$\forall A \in \mathcal{F}_n$ folgt aus (iii) (mit $\xi_n := \chi_A$)
$\boldsymbol{E}\chi_A \eta = \boldsymbol{E}\chi_A \chi_{\tau=n} \boldsymbol{E}\{\xi \mid \mathcal{F}_\tau\} = \boldsymbol{E}\boldsymbol{E}\{\chi_A \chi_{\tau=n} \xi \mid \mathcal{F}_\tau\} = \boldsymbol{E}\chi_A \chi_{\tau=n} \xi$
$= \boldsymbol{E}(\chi_A \chi_{\tau=n} \boldsymbol{E}\{\xi \mid \mathcal{F}_n\}) = \boldsymbol{E}\chi_A \zeta$
$\Rightarrow \ \zeta = \boldsymbol{E}\{\eta \mid \mathcal{F}_n\} = \eta$ f.s.

□

Satz 6.2
$(\xi_n, \mathcal{F}_n, n = 0, 1, \ldots)$ *Submartingal;*
τ_i, $i = 1, \ldots, m$ *beschränkte Markow-Zeiten,* $\tau_1 \le \tau_2 \le \ldots \le \tau_m$
$\Rightarrow \ (\xi_{\tau_i}, \mathcal{F}_{\tau_i}, i = 1, \ldots, m)$ *ist ein Submartingal.*

Folgerung 6.2
τ, σ beschränkte Markow-Zeiten, $\tau \leq \sigma \;\Rightarrow\; \xi_\tau \leq \boldsymbol{E}\{\xi_\sigma \mid \mathcal{F}_\tau\},\; \boldsymbol{E}\xi_\tau \leq \boldsymbol{E}\xi_\sigma$

Satz 6.3 (Kolmogorov-Doob-Ungleichung)

(i) $(\xi_n,\, \mathcal{F}_n,\, n \in \mathbb{N}_0)$ *Submartingal,* $c > 0$

a) $N \in \mathbb{N}_0 \;\Rightarrow\; \boldsymbol{P}\{\max_{n \leq N} \xi_n \geq c\} \leq \frac{1}{c}\boldsymbol{E}\xi_N \chi_{\{\max_{n\leq N}\xi_n \geq c\}} \leq \frac{1}{c}\boldsymbol{E}\xi_N^+$

b) $\boldsymbol{P}\{\sup_n \xi_n \geq c\} \leq \frac{1}{c}\sup_n \boldsymbol{E}\xi_n^+$

(ii) $(\xi_n,\, \mathcal{F}_n,\, n \in \mathbb{N}_0)$ *Supermartingal,* $\xi_n \geq 0,\; c > 0$
$\Rightarrow\; \boldsymbol{P}\{\sup_n \xi_n \geq c\} \leq \frac{1}{c}\boldsymbol{E}\xi_0.$

Satz 6.4 (Doobsche Ungleichung)
$(\xi_n,\, \mathcal{F}_n,\, n \in \mathbb{N}_0)$ *nichtnegatives Submartingal,* $p > 1 \Rightarrow$
$$\boldsymbol{E}[\sup_n \xi_n]^p \leq (\tfrac{p}{p-1})^p \sup_n \boldsymbol{E}\xi_n^p$$
Insbesondere gilt für $p = 2$: $\quad \boldsymbol{E}[\sup_n \xi_n]^2 \leq 4\sup_n \boldsymbol{E}\xi_n^2$

Sätze über die Konvergenz von Sub-/ Supermartingalen

Satz 6.5
Gilt eine der folgenden Bedingungen für eine adaptierte Folge $(\xi_n,\, \mathcal{F}_n,\, n \in \mathbb{N}_0)$*, so existiert f.s. der Grenzwert* $\lim_{n\to\infty} \xi_n$.

(a) $(\xi_n,\, \mathcal{F}_n,\, n \in \mathbb{N}_0)$ *Submartingal und* $\sup_n \boldsymbol{E}\xi_n^+ < \infty$

(b) $(\xi_n,\, \mathcal{F}_n,\, n \in \mathbb{N}_0)$ *Supermartingal und* $\sup_n \boldsymbol{E}\xi_n^- < \infty$

(c) $(\xi_n,\, \mathcal{F}_n,\, n \in \mathbb{N}_0)$ *Martingal und* $\sup_n \boldsymbol{E}|\xi_n| < \infty$

Folgerung 6.3
Ein nichtnegatives Supermartingal besitzt einen f.s. Grenzwert für $n \to \infty$.

Folgerung 6.4
$(\xi_n,\, \mathcal{F}_n,\, n \in \mathbb{N}_0)$ Martingal, $|\xi_n| < \xi \;\forall n \in \mathbb{N}_0,\; \boldsymbol{E}\xi < \infty;\; \xi_\infty = \lim_{n\to\infty} \xi_n$ f.s.
$\Rightarrow\; \xi_n = \boldsymbol{E}\{\xi_\infty \mid \mathcal{F}_n\}$ f.s.

Satz 6.6 (Levy)
$\boldsymbol{E}|\xi| < \infty,\; (\mathcal{F}_n,\, n \in \mathbb{N}_0)$ *Filtration,* $\mathcal{F}_\infty := \bigvee_n \mathcal{F}_n$
$\Rightarrow\; \lim_{n\to\infty} \boldsymbol{E}\{\xi \mid \mathcal{F}_n\} = \boldsymbol{E}\{\xi \mid \mathcal{F}_\infty\}$ *f.s. und* $\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{E}|\boldsymbol{E}\{\xi \mid \mathcal{F}_\infty\} - \boldsymbol{E}\{\xi \mid \mathcal{F}_n\}| = 0$
(d.h. $\boldsymbol{E}\{\xi \mid \mathcal{F}_n\}$ *konvergiert f.s. als auch im Mittel gegen* $\boldsymbol{E}\{\xi \mid \mathcal{F}_\infty\}$*).*

7 Stochastisches Itô-Integral

$(\Omega, \mathcal{F}, \boldsymbol{P})$ vollständiger Wahrscheinlichkeitsraum
$(\mathcal{F}_t,\, t \geq 0)$ Filtration

Definition 7.1
$(W_t,\, t \geq 0)$ heißt Wiener-Prozeß bzgl. der Filtration $(\mathcal{F}_t,\, t \geq 0)$, wenn

(i) $(W_t,\, t \geq 0)$ Wiener-Prozeß

(ii) $(W_t,\, t \geq 0)$ ist adaptiert, d.h. $\forall t \geq 0$ ist W_t $\mathcal{F}_t$-meßbar

(iii) $W_{t+h} - W_t$ ist unabhängig von $\mathcal{F}_t$ $\forall t \geq 0$ $\forall h \geq 0$

Definition 7.2
Auf $\Omega \times [0, \infty)$ sei Funktion $(f_t(\omega),\, t \geq 0,\, \omega \in \Omega)$ gegeben. Sie heißt Stufenfunktion (bzgl. t), falls Punkte existieren $0 = t_0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_n < \infty$ (t_i unabhängig von ω), so daß

- f_{t_i} $\mathcal{F}_i$-meßbar sind
- $f_t = f_{t_i}$ für $t \in [t_i, t_{i+1}),\ i = 0, \ldots, n-1$
- $f_t = 0$ für $t \geq t_n$.

H_0 sei die Menge der Stufenfunktionen f mit $\boldsymbol{E} f_t^2 < \infty$ $\forall t \geq 0$.

Zuerst wird Itô-Integral für Funktionen aus H_0 definiert, dann verallgemeinert.

Definition 7.3
f Stufenfunktion,

$$If := \sum_{i=0}^{n-1} f_{t_i}(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}) \quad \text{heißt Itô-Integral von } f$$

(hängt nicht von der Wahl der Zerlegung ab $\Rightarrow$ korrekt definiert)

Lemma 7.1
$f \in H_0 \;\Rightarrow\; \boldsymbol{E}(If)^2 = \boldsymbol{E} \int\limits_0^\infty f_t^2\, dt$ und $\boldsymbol{E} If = 0$

Beweis:

$$\boldsymbol{E} f_{t_i}^2 (W_{t_{i+1}} - W_{t_i})^2 = \boldsymbol{E} f_{t_i}^2 \boldsymbol{E}\{(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})^2 \mid \mathcal{F}_{t_i}\} = \boldsymbol{E} f_{t_i}^2 (t_{i+1} - t_i)$$

$$\boldsymbol{E} f_{t_i} f_{t_j} (W_{t_{i+1}} - W_{t_i})(W_{t_{j+1}} - W_{t_j}) = \boldsymbol{E} f_{t_i}(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}) f_{t_j} \underbrace{\boldsymbol{E}\{(W_{t_{j+1}} - W_{t_j}) \mid \mathcal{F}_{t_j}\}}_{=0} = 0$$

für $i < j \;\Rightarrow\; t_{i+1} \leq t_j$: $f_{t_j},\ W_{t_{i+1}} - W_{t_i},\ f_{t_i}$ sind $\mathcal{F}_{t_j}$-meßbar, $W_{t_{j+1}} - W_{t_j}$ unabhängig von $\mathcal{F}_{t_j}$,

$$\begin{aligned}
\Rightarrow\ \boldsymbol{E}(If)^2 &= \sum_{i=0}^{n-1} \boldsymbol{E} f_{t_i}^2 (W_{t_{i+1}} - W_{t_i})^2 + 2 \sum_{i<j\leq n-1} \boldsymbol{E} f_{t_i} f_{t_j} (W_{t_{i+1}} - W_{t_i})(W_{t_{j+1}} - W_{t_j}) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \boldsymbol{E} f_{t_i}^2 (t_{i+1} - t_i) = \boldsymbol{E} \int\limits_0^\infty f_t^2\, dt
\end{aligned}$$

Analog $\boldsymbol{E} f_{t_i}(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}) = 0 \;\Rightarrow\; \boldsymbol{E} If = 0$ $\square$

Definition 7.4
Für $f \in H_0$ sei $I_s f := I(\chi_{[0,s)} f)$.

Lemma 7.2
$(I_s, \mathcal{F}_s, s \geq 0)$ ist ein Martingal.

Beweis:
o.B.d.A. sei s Punkt der Zerlegung $\{t_0, \ldots, t_n\}$, $s = t_k$:

$$\chi_{[0,s)}(t) f_t = \sum_{i=0}^{k-1} f_{t_i} \chi_{[t_i, t_{i+1})}(t) \;\Rightarrow\; I_s f = \sum_{i=0}^{k-1} f_{t_i}(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})$$

$I_s f$ ist $\mathcal{F}_s$-meßbar $\forall s \geq 0$
sei $t \leq s,\ t, s \in \{t_0, \ldots, t_n\},\ t = t_r,\ s = t_k$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}\{I_s f - I_t f \mid \mathcal{F}_t\} &= \boldsymbol{E}\left\{\sum_{i=r}^{k-1} f_{t_i}(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}) \mid \mathcal{F}_t\right\} \\ &= \sum_{i=r}^{k-1} \boldsymbol{E}\{f_{t_i} \underbrace{\boldsymbol{E}\{W_{t_{i+1}} - W_{t_i} \mid \mathcal{F}_{t_i}\}}_{=0} \mid \mathcal{F}_t\} = 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow\; \boldsymbol{E}\{I_s f \mid \mathcal{F}_t\} = I_t f$ $\square$

Lemma 7.3
(Doobsche Ungleichung für das stochastische Integral)

$f \in H_0 \;\Rightarrow\; \boldsymbol{E} \sup\limits_{s \geq 0} (I_s f)^2 \leq 4 \boldsymbol{E} \int\limits_0^\infty f_t^2 \, dt$

Beweis:
Doobsche Ungleichung für Martingale $\Rightarrow$ $\boldsymbol{E}[\sup\limits_n \xi_n]^2 \leq 4 \sup\limits_n \boldsymbol{E} \xi_n^2$

hier: $\xi_n \widehat{=} I_s f,\ \boldsymbol{E}[I_s f]^2 = \int\limits_0^s f_t^2 \, dt \leq \int\limits_0^\infty f_t^2 \, dt$ $\square$

Erweiterung der Integraldefinition auf einen größeren Raum:

Betrachten H_0 als Teilmenge des $L_2([0, \infty) \times \Omega)$.
Auf H_0 wird linearer isometrischer Operator I von H_0 in $L_2(\Omega)$ definiert,
können I eindeutig fortsetzen zu einem linearen isometrischen Operator von $\overline{H_0}$ ($\overline{H_0}$: Abschluß in $L_2([0, \infty) \times \Omega)$) in $L_2(\Omega)$.
wieder Bezeichnung: If

$$\forall f \in \overline{H_0}: \quad \int\limits_0^\infty f_t \, dW_t := If \quad \text{Itô-Integral von } f$$

bei Integration von nichtzufälligen Funktionen möglich: Erweiterung auf gesamten Raum $L_2(\mu)$ (μ Strukturmaß)
hier ist $\overline{H_0}$ *echter* Teilraum von $L_2([0, \infty) \times \Omega)$:

z.B.: $f_t(\omega) = W_1(\omega)\chi_{[0,1]}(t) \begin{cases} \notin \overline{H_0} \\ \in L_2([0,\infty) \times \Omega) \end{cases}$,

für $s < 1$ ist f_s nicht $\mathcal{F}_s$-meßbar, stochastisches Integral der Art $\int\limits_0^\infty W_1 \chi_{[0,1]}(t)\, dW_t$ nicht definiert

für $f \in \overline{H_0},\ s \geq 0$ wird weiter definiert:

$$\int\limits_0^s f_t\, dW_t := \int\limits_0^\infty \chi_{[0,s)}(t) f_t\, dW_t.$$

Bemerkung 7.1
Itô-Integral: Elemente aus $L_2(\Omega)$, d.h. nur f.s. eindeutig definiert.
Wichtig ist Frage der Stetigkeit bzgl. veränderlicher oberer Grenze des Integrals.

Satz 7.1
$f \in \overline{H_0} \ \Rightarrow$ Prozeß $(\int\limits_0^s f_t\, dW_t,\ s \geq 0)$ besitzt eine stetige Modifikation.

Beweis:
entfällt (Approximation durch Stufenfunktionen, Doobsche Ungleichung) □

Welche Zufallsprozesse gehören zu $\overline{H_0}$, d.h. sind Itô-integrierbar?

Definition 7.5
H ist die Menge der Zufallsprozesse $(f_t(\omega),\ t \geq 0,\ \omega \in \Omega)$ mit

(i) $(f_t,\ t \geq 0)$ ist adaptiert (d.h. f_t ist $\mathcal{F}_t$-meßbar $\forall t \geq 0$)

(ii) $(f_t,\ t \geq 0)$ ist meßbar, d.h. Abbildung $(\omega, t) \mapsto f_t(\omega)$ ist meßbar bzgl. σ-Algebra $\mathcal{F} \times \mathcal{B}([0,\infty))$

(iii) $\boldsymbol{E} \int\limits_0^\infty f_t^2\, dt < \infty$

Satz 7.2
$H \subseteq \overline{H_0}$, d.h. alle Zufallsprozesse aus H sind Itô-integrierbar.

Eigenschaften des Itô-Integrals auf H

Satz 7.3
$f, g \in H,\ a, b \in \mathbb{R} \ \Rightarrow$

(i) (Linearität) für alle t gleichzeitig f.s.

$$\int\limits_0^t (af_s + bg_s)\, dW_s = a \int\limits_0^t f_s\, dW_s + b \int\limits_0^t g_s\, dW_s,$$

(ii) $\boldsymbol{E}\int\limits_0^\infty f_t\,dW_t = 0$

(iii) *Prozeß* $(\int\limits_0^t f_s\,dW_s,\ t\geq 0)$ *ist ein Martingal bezüglich* $(\overline{\mathcal{F}_t},\ t\geq 0)$

(iv) $\boldsymbol{E}\sup\limits_t(\int\limits_0^t f_s\,dW_s)^2 \leq 4\boldsymbol{E}\int\limits_0^\infty f_s^2\,ds$

(v) *Sei* $A\in\mathcal{F},\ T\in[0,\infty),\ f_t(\omega)=g_t(\omega)\ \forall\omega\in A,\ t\in[0,T)$

$\Rightarrow\ \chi_A(\omega)\int\limits_0^t f_s\,dW_s = \chi_A(\omega)\int\limits_0^t g_s\,dW_s$ *f.s. gleichzeitig für alle* $t\in[0,T]$

Stochastisches Itô-Integral bzgl. Wiener-Prozeß kann noch erweitert werden:

Definition 7.6
S ist die Menge aller Zufallsprozesse $(f_t,\ t\geq 0)$ mit

(i) $(f_t,\ t\geq 0)$ ist adaptiert

(ii) $(f_t,\ t\geq 0)$ ist meßbar bzgl. (t,ω)

(iii) $\forall T\geq 0:\ \int\limits_0^T f_s^2\,ds<\infty$ f.s. (bisher $\boldsymbol{E}\int\limits_0^\infty f_s^2\,ds<\infty\ \Rightarrow\ \int\limits_0^\infty f_s^2\,ds<\infty$ f.s.!)

Mit Hilfe von Stoppzeiten $\tau(n)\to\infty$ $(n\to\infty)$ läßt sich stochastisches Integral für Funktionen aus S definieren.

Eigenschaften:

Satz 7.4

(i) $f\in S\ \Rightarrow\ \int\limits_0^t f_s\,dW_s$ *stetig in* t *und* $\mathcal{F}_t$*-meßbar* $\forall t\geq 0$

(ii) $f,g\in S,\ a,b\in\mathbb{R}\ \Rightarrow\ \int\limits_0^t(af_s+bg_s)\,dW_s = a\int\limits_0^t f_s\,dW_s + b\int\limits_0^t g_s\,dW_s$

(iii) *falls* $f_t=f_{t_i}$ *für* $t\in[t_i,t_{i+1}),\ 0=t_0<t_1<\ldots,\ f_{t_i}\ \mathcal{F}_{t_i}$*-meßbar*

$\Rightarrow\ f\in S$ *und*

$$\int\limits_0^t f_s\,dW_s = \sum_{t_{i+1}<t} f_{t_i}(W_{t_{i+1}}-W_{t_i}) + f_{t_k}(W_t-W_{t_k})\ \textit{f.s.}$$

mit k *so, daß* $t_k\leq t$ *und* t_{k+1} *nicht definiert oder* $>t$

(iv) $f,g\in S,\ T<\infty,\ A\in\mathcal{F},\ f_s(\omega)=g_s(\omega)\ \forall s\in[0,T]\ \forall\omega\in A\ \Rightarrow$

$$\int\limits_0^t f_s\,dW_s = \int\limits_0^t g_s\,dW_s\quad \forall t\in[0,T]\ \textit{f.s. auf } A$$

(v) $f \in S,\ T < \infty,\ \tau$ *Markow-Zeit,* $\tau \leq T \ \Rightarrow$

$$\int_0^\tau f_s\,dW_s = \int_0^T \chi_{[0,\tau)}(s) f_s\,dW_s \quad f.s.$$

(vi) $f \in S,\ \tau$ *endliche Markow-Zeit,* $\boldsymbol{E}\int_0^\tau f_s^2\,ds < \infty \ \Rightarrow$

$$\int_0^\tau f_s\,dW_s = \int_0^\infty \chi_{[0,\tau)}(s) f_s\,dW_s \ f.s.$$
$$\boldsymbol{E}\Big(\int_0^\tau f_s\,dW_s\Big)^2 = \boldsymbol{E}\int_0^\tau f_s^2\,ds$$
$$\boldsymbol{E}\int_0^\tau f_s\,dW_s = 0$$

Insbesondere gilt für $f \equiv 1$ *und* $\boldsymbol{E}\tau < \infty$: $\boldsymbol{E}W_\tau^2 = \boldsymbol{E}\tau,\ \boldsymbol{E}W_\tau = 0$

(vii) $f \in S,\ T \leq \infty,\ \boldsymbol{E}\int_0^T f_t^2\,dt < \infty$

$$\Rightarrow \int_0^t f_s\,dW_s \text{ ist ein Martingal für } t \in [0,T] \cap [0,\infty)$$

(viii) $f \in S,\ 0 \leq t_1 \leq t_2 < \infty,\ g\ \mathcal{F}_{t_1}$*-meßbar,* $\boldsymbol{E}g^2 < \infty \ \Rightarrow$

$$g\int_{t_1}^{t_2} f_s\,dW_s = \int_{t_1}^{t_2} g f_s\,dW_s \ f.s.$$

wobei gilt: für adaptierte und meßbare Funktionen mit $\int_{t_1}^{t_2} f_s^2\,dW_s < \infty$ *f.s.*

$$\int_{t_1}^{t_2} f_s\,dW_s := \int_0^{t_2} \chi_{[t_1,t_2)}(s) f_s\,dW_s$$

Stochastisches Integral bzgl. vektoriellem Wiener-Prozeß:

$\left(W_t = \begin{pmatrix} W_t^1 \\ \vdots \\ W_t^n \end{pmatrix},\ t \geq 0 \right)$ n-dimensionaler Wiener-Prozeß bzgl. Filtration $(\mathcal{F}_t,\ t \geq 0)$

(W_t adaptiert, W_t^i unabhängige Wiener-Prozesse, $W_{t+h} - W_t$ unabhängig von $\mathcal{F}_t\ \forall t \geq 0\ \forall h > 0$)

$(f_t = (f_t^1, \dots, f_t^n),\ t \geq 0):\quad f \in S^{(n)}\ (f \in H^{(n)}) \underset{\text{Def}}{\Longleftrightarrow} f^i \in S\ (f^i \in H)\ \forall i = 1, \dots, n$

$f \in S^{(n)}$

$$\int_0^t f_s\,dW_s := \int_0^t f_s^1\,dW_s^1 + \ldots + \int_0^t f_s^n\,dW_s^n, \quad \text{(wie Skalarprodukt)}$$

$f, g \in S^{(n)},\ T < \infty,\ \boldsymbol{E} \int\limits_0^T (\|f_s\|^2 + \|g_s\|^2)\, ds < \infty\ \Rightarrow$

$$\boldsymbol{E} \left[\int\limits_0^T f_s\, dW_s \int\limits_0^T g_s\, dW_s \right] = \boldsymbol{E} \int\limits_0^T (f_s, g_s)\, ds$$

$\uparrow$ Skalarprodukt

Wenn Matrixfunktionen integriert werden entsprechend:

$\sigma_t = (\sigma_t^{ij}),\ i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n,\ \sigma_t^{ij} \in S$

$$\int\limits_0^t \sigma_s\, dW_s = \begin{pmatrix} \sum\limits_{j=1}^n \int\limits_0^t \sigma_s^{1j}\, dW_s^j \\ \vdots \\ \sum\limits_{j=1}^n \int\limits_0^t \sigma_s^{mj}\, dW_s^j \end{pmatrix}$$

falls $\boldsymbol{E} \int\limits_0^t \operatorname{tr}[\sigma_s \sigma_s^\tau]\, ds < \infty\ \Rightarrow\ \boldsymbol{E} \left\| \int\limits_0^t \sigma_s\, dW_s \right\|^2 = \boldsymbol{E} \int\limits_0^t \operatorname{tr}[\sigma_s \sigma_s^\tau]\, ds$

8 Itô-Formel und Satz von Girsanov

in deterministischer Analysis äußerst wichtig: Kettenregel (Differentiation einer zusammengesetzten Funktion)
entsprechendes Analogon für „stochastische Differentiale“: Itô-Formel

Definition 8.1
Auf $(\Omega, \mathcal{F}, \boldsymbol{P})$ seien gegeben:

- n-dimensionaler Wiener-Prozeß $(W_t,\, \mathcal{F}_t,\, t \geq 0)$
- stetiger $\mathcal{F}_t$-adaptierter m-dimensionaler Prozeß $(\xi_t,\, t \geq 0)$
- $m \times n$ matrixwertiger Prozeß $(\sigma_t,\, t \geq 0)$, $\sigma_t^{ij} \in S$
- m-dimensionaler adaptierter Prozeß $(b_t,\, t \geq 0)$ mit $\int\limits_0^t |b_s|\, ds < \infty$ f.s. $\forall t$

und es gelte

$$\xi_t = \xi_0 + \int\limits_0^t \sigma_s\, dW_s + \int\limits_0^t b_s\, ds \ \forall t \text{ f.s.}$$

Dann schreibt man

$$d\xi_t = \sigma_t\, dW_t + b_t\, dt,$$

der formale Ausdruck $\sigma_t\, dW_t + b_t\, dt$ heißt stochastisches Differential von ξ_t und man sagt ξ_t besitzt ein stochastisches Differential.

deterministische Kettenregel $df(g(t)) = f'(g(t))\, dg(t)$ ist hier nicht gültig:
falls es richtig wäre
$d(W_t^2) = 2W_t\, dW_t$, d.h. $W_t^2 = 2\int\limits_0^t W_s\, dW_s$
Widerspruch zu $\boldsymbol{E}W_t^2 = t$, denn für $\boldsymbol{E}\int\limits_0^t W_s^2\, ds = \frac{t^2}{2} < \infty$ ist $\boldsymbol{E}\int\limits_0^t W_s\, dW_s = 0$
Rechenregeln für stochastische Differentiale der Art $\sigma_t\, dW_t + b_t\, dt$

- Addition, Skalarprodukt, Ausklammern,...

Multiplikationstafel:

	dt	dW_t^i	dW_t^j
dt	0	0	0
dW_t^i	0	dt	0
dW_t^j	0	0	dt

$i \neq j$

vgl. $\boldsymbol{E}(\Delta W_t)^2 = \boldsymbol{E}(W_{t+\Delta} - W_t)^2 = \Delta$

Lemma 8.1
(Produktregel) Seien ξ_t, η_t m-dimensionale Prozesse, die ein stochastisches Differential besitzen. Dann besitzt der Prozeß $\xi_t \eta_t$ ein stochastisches Differential und es gilt

$$d(\xi_t\eta_t) = \eta_t\, d\xi_t + \xi_t\, d\eta_t + d\xi_t\, d\eta_t.$$

Satz 8.1 (Itô-Formel)
Der m-dimensionale Prozeß ξ_t besitze ein stochastisches Differential und die reellwertige Funktion $u(x) = u(x^1,\ldots,x^m)$ sei 2-mal stetig differenzierbar bzgl. x. Dann besitzt der Prozeß $u(\xi_t)$ ein stochastisches Differential

$$du(\xi_t) = \sum_{i=1}^m u_{x^i}(\xi_t)\, d\xi_t^i + \tfrac{1}{2} \sum_{i,j=1}^m u_{x^i x^j}(\xi_t)\, d\xi_t^i\, d\xi_t^j. \qquad (*)$$

andere Form:

$d\xi_t = \sigma_t\, dW_t + b_t\, dt,\ a = \frac{1}{2}\sigma_t\sigma_t^\tau\ (m \times m\text{-Matrix})$

$\Rightarrow\ d\xi_t^i\, d\xi_t^j = \sum_{k=1}^n (\sigma_t^{ik}\, dW_t^k + b_t^i\, dt) \sum_{l=1}^n (\sigma_t^{jl}\, dW_t^l + b_t^j\, dt) = \sum_{k=1}^n \sigma_t^{ik}\sigma_t^{jk}(dW_t)^2 = 2a_t^{ij}\, dt$

$$L_t u(x) := \sum_{i,j=1}^m a_t^{ij} u_{x^i x^j}(x) + \sum_{i=1}^m b_t^i u_{x^i}(x) \text{ Differentialoperator zu } \xi_t$$

$$u_x = \operatorname{grad} u = (u_{x^1},\ldots,u_{x^m})^\tau$$

$(*)\ \Rightarrow$

$$du(\xi_t) = L_t u(\xi_t)\, dt + \sigma_t^\tau u_x(\xi_t)\, dW_t, \text{ d.h.}$$
$$u(\xi_t) = u(\xi_0) + \int_0^t L_s u(\xi_s)\, ds + \int_0^t \sigma_s^\tau u_x(\xi_s)\, dW_s\ \forall t \text{ f.s.}$$

eindimensionaler Fall $m = n = 1$

$$\begin{aligned} d\xi_t &= \sigma_t\, dW_t + b_t\, dt \\ \Rightarrow\ du(\xi_t) &= u'(\xi_t)\, d\xi_t + \tfrac{1}{2}u''(\xi_t)\, d\xi_t\, d\xi_t \\ &= u'(\xi_t)(\sigma_t\, dW_t + b_t\, dt) + \tfrac{1}{2}u''(\xi_t)\sigma_t^2\, dt \\ &= u'(\xi_t)\sigma_t\, dW_t + [u'(\xi_t)b_t + \tfrac{1}{2}u''(\xi_t)\sigma_t^2]dt \end{aligned}$$

speziell $b_t = 0,\ \sigma_t = 1,\ \xi_t = W_t$:

$$\begin{aligned} du(W_t) &= u(W_{t+dt}) - u(W_t) \underset{\text{Taylor}}{=} u(W_t + dW_t) - u(W_t) \\ &= u(W_t) + u'(W_t)dW_t + \tfrac{1}{2}u''(W_t)(dW_t)^2 + \ldots - u(W_t) \\ &= u'(W_t)dW_t + \tfrac{1}{2}u''(W_t)dt \end{aligned}$$

Beispiel 8.1

(i) $\xi_t = W_t = \int_0^t 1\, dW_s$, d.h. $\sigma_t \equiv 1,\ b_t = 0$

$u(x) = x^2\ \Rightarrow\ u'(x) = 2x,\ u''(x) = 2$

$du(\xi_t) = d(W_t)^2 = 2W_t\, dW_t + dt$, d.h. $W_t^2 = 2\int_0^t W_s\, dW_s + t$

(ii) $\xi_t = W_t - \frac{t}{2} = \int\limits_0^t 1\, dW_s + \int\limits_0^t -\frac{1}{2}\, ds$, d.h. $\sigma_t \equiv 1,\ b_t \equiv -\frac{1}{2}$

$u(x) = \mathrm{e}^x \ \Rightarrow\ u'(x) = u''(x) = \mathrm{e}^x$

$du(\xi_t) = d(\mathrm{e}^{W_t - \frac{t}{2}}) = \mathrm{e}^{W_t - \frac{t}{2}}\, dW_t + [-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{W_t - \frac{t}{2}} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{W_t - \frac{t}{2}}]\, dt = \mathrm{e}^{W_t - \frac{t}{2}}\, dW_t$

d.h. für $\eta_t = \mathrm{e}^{W_t - \frac{t}{2}}$ gilt $d\eta_t = \eta_t\, dW_t$

(Lösung der deterministischen DGL $df = f\, dt$ ist $f(t) = \mathrm{e}^t$)

Zum Satz von Girsanov, zur Einfachheit eindimensionaler Prozesse

Lemma 8.2
Sei $b \in S$ und

$$\varrho_t = \varrho_t(b) = \exp(\int\limits_0^t b_s\, dW_s - \frac{1}{2}\int\limits_0^t b_s^2\, ds)$$

Dann gelten

(i) $d\varrho_t = b_t \varrho_t\, dW_t$

(ii) ϱ ist ein Supermartingal

(iii) ist der Prozeß $(b_t,\, t \geq 0)$ beschränkt, ist $(\varrho_t,\, t \geq 0)$ ein Martingal, insbesondere gilt $\boldsymbol{E}\varrho_t = 1\ \forall t$.

(iv) falls für eine Zahl $T \in [0, \infty)$ gilt $\boldsymbol{E}\varrho_T = 1$, ist $(\varrho_t,\, \mathcal{F}_t,\, t \in [0,T])$ ein Martingal und für eine beliebige Folge beschränkter Prozesse $(b_t^n,\, t \geq 0) \in S$ mit

$$\int\limits_0^T |b_s^n - b_s|^2\, ds \to 0 \text{ f.s.} \quad \text{gilt} \quad \boldsymbol{E}|\varrho_T(b^n) - \varrho_T(b)| \to 0\,.$$

Satz 8.2 (Girsanov)
Sei $(W_t,\, t \geq 0)$ ein Wiener-Prozeß auf $(\Omega, \mathcal{F}, \boldsymbol{P})$ bezüglich der Filtration $(\mathcal{F}_t,\, t \geq 0)$, $b \in S$, $T \in [0, \infty)$ und $\boldsymbol{E}\varrho_T(b) = 1$.
Auf $(\Omega, \mathcal{F})$ wird das Maß $\tilde{\boldsymbol{P}}$ gemäß

$$\tilde{\boldsymbol{P}}(d\omega) = \varrho_T(b, \omega)\boldsymbol{P}(d\omega)$$

eingeführt.
Dann ist $(W_t - \int\limits_0^t b_s\, ds,\, \mathcal{F}_t,\, t \in [0,T])$ ein Wiener-Prozeß auf $(\Omega, \mathcal{F}, \tilde{\boldsymbol{P}})$.

$$\left(\forall A \in \mathcal{F} \quad \tilde{\boldsymbol{P}}(A) = \int\limits_A \varrho_T(b, \omega)\, \boldsymbol{P}(d\omega)\right)$$

Beispiel 8.2 $b_s = \mu$ f.s. $\mu \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow\ W_t - \int\limits_0^t b_s\, ds = W_t - \mu t$ (Wiener-Prozeß mit Drift, für $\mu \neq 0$ kein Martingal)

$$\varrho_t = \exp\left(\int\limits_0^t b_s\, dW_s - \frac{1}{2}\int\limits_0^t b_s^2\, ds\right) = \exp\left(\mu W_t - \frac{\mu^2}{2}t\right)$$

$\forall T \in [0,\infty)$ ist $\boldsymbol{E}\varrho_T = 1$.
Beweis:
$Z = \mu W_T - \frac{\mu^2}{2}T \sim N(-\frac{\mu^2}{2}T, \mu^2 T) \underset{\sigma^2=\mu^2 T}{=} N(-\frac{\sigma^2}{2}, \sigma^2)$

$$\Rightarrow\ \boldsymbol{E}\varrho_T = \boldsymbol{E}\,\mathrm{e}^Z = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^u \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(u+\frac{\sigma^2}{2})^2}{2\sigma^2}\right) du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(u-\frac{\sigma^2}{2})^2}{2\sigma^2}\right) du = 1 \qquad \square$$

Satz 8.2 $\Rightarrow$ unter $\tilde{\boldsymbol{P}}$ ist $(W_t - \mu t,\ \mathcal{F}_t,\ t \in [0,T])$ ein (Standard-) Wiener-Prozeß (d.h. ohne Drift, damit Martingal)
Anwendung in stochastischen Finanzmodellen, $\tilde{\boldsymbol{P}}$ heißt äquivalentes Martingalmaß

9 Stochastische Itô-Differentialgleichungen

$(\Omega, \mathcal{F}, \boldsymbol{P})$ vollständiger Wahrscheinlichkeitsraum
$(\mathcal{F}_t,\, t \geq 0)$ vollständige Filtration
$(W_t,\, \mathcal{F}_t,\, t \geq 0)$ (eindimensionaler) Wiener-Prozeß
$b(t,x), \sigma(t,x)$ Borelsche Funktionen auf $[0,\infty) \times \mathbb{R}$ (oder $[0,T] \times \mathbb{R}$) mit $\exists K > 0$

$$|\sigma(t,x)|^2 + |b(t,x)|^2 \leq K(1+x^2) \quad \text{(Wachstumsbedingung)}$$

$$|\sigma(t,x) - \sigma(t,y)|^2 + |b(t,x) - b(t,y)|^2 \leq K|x-y|^2 \quad \text{(Lipschitz-Bedingung)}$$

ξ_0 $\mathcal{F}_0$-meßbare Zufallsgröße
betrachten Itô-Gleichung

$$\xi_t = \xi_0 + \int_0^t \sigma(s,\xi_s)\, dW_s + \int_0^t b(s,\xi_s)\, ds, \quad t \geq 0 \tag{$*$}$$

geschrieben auch

$$\begin{cases} d\xi_t = \sigma(t,\xi_t)\, dW_t + b(t,\xi_t)\, dt \\ \xi_t|_{t=0} = \xi_0 \end{cases}$$

Definition 9.1
Ein Zufallsprozeß $(\xi_t,\, t \geq 0)$ auf $(\Omega, \mathcal{F}, \boldsymbol{P})$ heißt (starke) Lösung der Gleichung $(*)$, falls er

(i) adaptiert ist bezüglich $(\mathcal{F}_t,\, t \geq 0)$,

(ii) stetige Trajektorien besitzt,

(iii) $(*)$ genügt für alle $t \geq 0$ gleichzeitig f.s.

für jeden adaptierten stetigen Prozeß $(\xi_t,\, t \geq 0)$ ist $(\xi_t(\omega))$ meßbar bzgl. (t,ω), $\sigma(s,\xi_s(\omega))$ meßbar bzgl. (s,ω) und adaptiert;
Funktionen $\sigma(s,\xi_s(\omega)), b(s,\xi_s(\omega))$ sind beschränkt auf $[0,t]$ $\forall$ feste ω und $t \geq 0$ $((\xi_t(\omega),\, t \geq 0)$ stetig auf endlichen Intervallen $\Rightarrow$ beschränkt und Wachstumsbedingung)
$\Rightarrow$ rechte Seite von $(*)$ hat Sinn

Satz 9.1
Die Gleichung $(*)$ besitzt unter den angegebenen Bedingungen eine starke Lösung.

Satz 9.2 (stetige Abhängigkeit von Anfangsbedingungen)
Seien $\mathcal{F}_0$-meßbare Zufallsgrößen ξ_0^n derart gegeben, daß $\xi_0^n \to \xi_0$ (f.s.) $n \to \infty$. Es gelte

$$\xi_t = \xi_0 + \int_0^t \sigma(s,\xi_s)\, dW_s + \int_0^t b(s,\xi_s)\, ds, \; t \geq 0$$

$$\xi_t^n = \xi_0^n + \int_0^t \sigma(s,\xi_s^n)\, dW_s + \int_0^t b(s,\xi_s^n)\, ds, \; t \geq 0$$

$\Rightarrow$ $\boldsymbol{P}\{\sup\limits_{0\leq t\leq T} |\xi_t^n - \xi_t| \geq \varepsilon\} \to 0$ $(n \to \infty)$ $\forall \varepsilon > 0$ $\forall T \in [0,\infty)$.

Folgerung 9.1
(Eindeutigkeit der Lösung)
Seien $(\xi_t,\, t \geq 0)$, $(\eta_t,\, t \geq 0)$ Lösungen der Gleichung $(*)$.
Dann gilt $\boldsymbol{P}\{\sup\limits_{t\geq 0} |\xi_t - \eta_t| = 0\} = 1$, d.h. die Lösungsprozesse sind ununterscheidbar.

Beispiel 9.1 Geometrische Brownsche Bewegung

$$d\xi_t = \mu\xi_t\, dt + \nu\xi_t\, dW_t\,,\ \xi_0 = c\,(>0),\ \mu,\nu,c \in \mathbb{R}$$

Modell für Preisprozesse von Finanzgütern
Gleichung für relativen Zuwachs:

$$\frac{d\xi_t}{\xi_t} = \mu\, dt + \nu\, dW_t \qquad \text{(Brownsche Bewegung mit Drift)}$$

$b(t,x) = \mu x,\ \sigma(t,x) = \nu x$ linear in x, unabhängig von t, erfüllen Wachstums- und Lipschitzbedingung
$\Rightarrow$ es existiert eine eindeutige Lösung, sie lautet

$$\xi_t = c\exp\left(\left(\mu - \frac{\nu^2}{2}\right)t + \nu W_t\right),\ t \geq 0$$

Beweis: mit Itô-Formel

$$\eta_t := \ln\xi_t - \ln c = \int_0^t \left(\mu - \frac{\nu^2}{2}\right) ds + \int_0^t \nu\, dW_s$$

besitzt stochastisches Differential

$$d\eta_t = \left(\mu - \frac{\nu^2}{2}\right) dt + \nu\, dW_t$$

$\Rightarrow\ \xi_t = c\,\mathrm{e}^{\eta_t}$ besitzt stochastisches Differential (vgl. Beispiel 8.1 (ii))

$$d\xi_t = \left(c\,\mathrm{e}^{\eta_t}\left(\mu - \frac{\nu^2}{2}\right) + \frac{1}{2}c\,\mathrm{e}^{\eta_t}\nu^2\right) dt + c\,\mathrm{e}^{\eta_t}\nu\, dW_t = \mu\xi_t\, dt + \nu\xi_t\, dW_t$$

□

ξ_t besitzt $\forall t \geq 0$ gleiches Vorzeichen wie c
da $\eta_t \sim N\left(\left(\mu - \frac{\nu^2}{2}\right)t, \nu^2 t\right)\ \Rightarrow\ \xi_t$ ist logarithmisch normalverteilt

Beispiel 9.2 Langevin-Gleichung

$$d\xi_t = -\mu\xi_t\, dt + \nu\, dW_t\,,\ \xi_0 = c\,,\ \mu,\nu > 0, c \in \mathbb{R}$$

(vgl. Abschnitt 1, Beispiel 1.1: Brownsche Bewegung eines Partikels unter Einfluß von Reibung, ξ_t Geschwindigkeitskomponente)
$b(t,x) = -\mu x$, $\sigma(t,x) \equiv \nu$ erfüllen Wachstums- und Lipschitzbedingung
$\Rightarrow$ es existiert eine eindeutige Lösung, sie lautet

$$\xi_t = \mathrm{e}^{-\mu t}c + \nu\int_0^t \mathrm{e}^{-\mu(t-s)}dW_s \qquad \text{(Ornstein-Uhlenbeck-Prozeß)}$$

Beweis: mit Produktregel (Lemma 8.1)
Seien $\eta_t = c + \nu\int_0^t \mathrm{e}^{\mu s}dW_s$ und $\varphi_t = \mathrm{e}^{-\mu t}$
$\Rightarrow\ \eta_t$ besitzt stochastisches Differential $d\eta_t = \nu\,\mathrm{e}^{\mu t}dW_t$,

der Prozeß $\xi_t = \varphi_t \eta_t$ besitzt stochastisches Differential

$$\begin{aligned} d\xi_t &= d\varphi_t \eta_t + \varphi_t\, d\eta_t + d\varphi_t\, d\eta_t \\ &= (-\mu \underbrace{\mathrm{e}^{-\mu t}}_{\varphi_t} dt)\eta_t + \underbrace{\mathrm{e}^{-\mu t}}_{\varphi_t}(\nu \underbrace{\mathrm{e}^{\mu t}}_{\varphi_t^{-1}} dW_t) + 0 \\ &= -\mu \xi_t\, dt + \nu\, dW_t \end{aligned}$$

□

ξ_t ist ein Gaußscher Prozeß.

Sei $c = 0 \;\Rightarrow\; \xi_t = \nu\, \mathrm{e}^{-\mu t} \underbrace{\int_0^t f_u\, dW_u}_{\zeta_t}$ mit $f_u = \mathrm{e}^{\mu u}$

Eigenschaften von Itô-Integralen $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}\zeta_t &= 0 \\ \boldsymbol{E}\zeta_t^2 &= \int_0^t f_u^2\, du = \int_0^t \mathrm{e}^{2\mu u} du = \tfrac{1}{2\mu}(\mathrm{e}^{2\mu t} - 1) \\ \boldsymbol{E}\zeta_s\zeta_t &= \int_0^{s\wedge t} f_u^2\, du = \tfrac{1}{2\mu}(\mathrm{e}^{2\mu(s\wedge t)} - 1) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ ξ_t ist zentrierter Gaußprozeß mit Korrelationsfunktion

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}\xi_s\xi_t &= \tfrac{\nu^2}{2\mu}\, \mathrm{e}^{-\mu(t+s)}(\mathrm{e}^{2\mu(s\wedge t)} - 1) = \tfrac{\nu^2}{2\mu}(\mathrm{e}^{-\mu|t-s|} - \mathrm{e}^{-\mu(t+s)}) \\ &\underset{\substack{s,t\to\infty \\ t-s=\tau}}{\longrightarrow} \tfrac{\nu^2}{2\mu}\, \mathrm{e}^{-\mu|\tau|} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ asymptotisch stationär