Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Grundlagen

1.1 Grundlegende Definitionen und Beispiele

1.1.1 Lineare Partielle Differentialgleichungen

Wir betrachten Gleichungen der Form

$$Au = f\,, \tag{1.1}$$

wobei f eine gegebene Funktion (evtl. vektorwertig) auf einer Teilmenge Ω des $\mathbb{R}^n$ ist und A ein linearer Differentialoperator der Form

$$A := \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha \tag{1.2}$$

mit

i) $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n), \quad \alpha_i \in \mathbb{N} \cup \{0\} =: \mathbb{N}_0$, ist ein Multiindex,
ii) $|\alpha| := \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$,
iii) $D^\alpha := D_1^{\alpha_1} \ldots D_n^{\alpha_n}$ und $D_j = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_j}$, i die imaginäre Einheit
iv) Die Koeffizienten a_α sind gegebene (evtl. matrixwertige) Funktionen auf Ω.

Dabei ist die Funktion u die gesuchte Lösung der Differentialgleichung (1.1) auf Ω.

Die kleinste mögliche Zahl m heißt die **Ordnung der Differentialgleichung (1.1)** bzw. die **Ordnung des Differentialoperators (1.2)**. Mit hinreichend glatten Koeffizienten $a_{\alpha\beta}(x)$ betrachten wir auch die Gleichung

$$\sum_{|\alpha|+|\beta| \leq m} D^\alpha(a_{\alpha\beta}(x) D^\beta u) = f.$$

In dieser Vorlesung werden hauptsächlich Differentialgleichungen 2. Ordnung betrachtet, also $m = 2$.

1.1.2 Mathematische Modellierung physikalischer Prozesse

Beim Herleiten mathematischer Modelle geht man i.a. folgendermaßen vor:

i) Ein erster Schritt ist die Festlegung der physikalischen Größen, die den Prozeß bestimmen, z.B. Dichte, Geschwindigkeit, Temperatur u.s.w..

ii) Ein weiterer Schritt ist die Aufstellung der für den Prozeß relevanten physikalischen Gesetze, z.B. Massen-, Impuls-, Energieerhaltung u.s.w..

iii) Oft sind Erhaltungsgesetze in Integralform gegeben. Die Differentialgleichung ergibt sich aus dem Übergang zur lokalen differentiellen Form.

Es folgt nun eine Reihe von Beispielen:

1.1.2.1 Die Gleichung für die longitudinalen elastischen Schwingungen eines Stabes

Wir betrachten einen homogenen elastischen Stab mit Querschnitt S und Materialdichte ρ . Verschiebungen mögen nur in x-Richtung (Längsrichtung) auftreten. Als Referenzkonfiguration werde die Gleichgewichtslage des Stabes betrachtet.

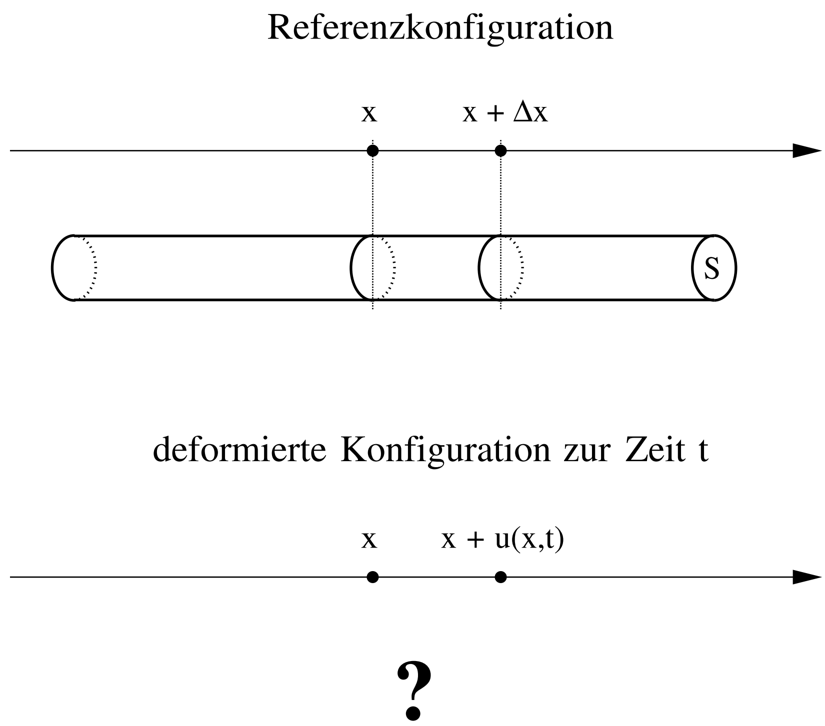


Abbildung 1.1

Die Aufgabe besteht nun darin, eine Gleichung zu finden, die die Verschiebung u in Abhängigkeit vom Ort x und der Zeit t beschreibt.

Alle äußeren Kräfte werden vernachlässigt und nur **interne elastische Kräfte** berücksichtigt.

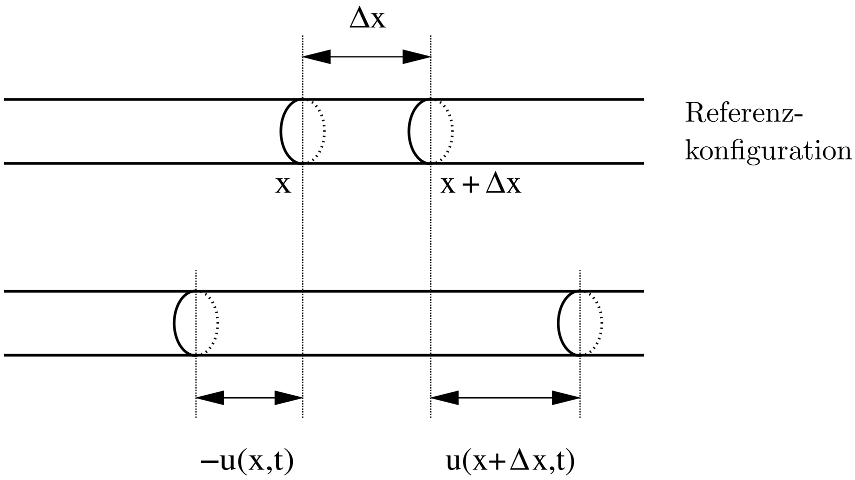


Abbildung 1.2

Zur Zeit t hat das Segment mit der Länge Δx in der Referenzkonfiguration die veränderte Länge

$$l = u(x + \Delta x, t) - u(x, t) + \Delta x$$

Die Längenänderung beträgt also

$$\Delta l = u(x + \Delta x, t) - u(x, t)$$

Somit ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{\Delta l}{l} &= \frac{u(x + \Delta x, t) - u(x, t)}{\Delta x} \left(\frac{1}{1 + \frac{u(x+\Delta x,t) - u(x,t)}{\Delta x}} \right) \\ &= \frac{u(x + \Delta x, t) - u(x, t)}{\Delta x} + g\left(\frac{u(x + \Delta x, t) - u(x, t)}{\Delta x} \right) \end{aligned}$$

Die Funktion g hängt quadratisch von ihrem Argument ab. Deshalb wird dieser Term im Rahmen einer linearisierten Theorie vernachlässigt. Für den Grenzübergang $\Delta x \to 0$ kann man nun folgern

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta l}{l} = u_x(x, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, t)\,.$$

Setzt man ein eindimensionales Medium voraus, so spricht man allgemeiner, d.h. bei Verschiebungen in mehreren Richtungen, von einem **Deformationsgradienten**. Im Fall von drei Raumdimensionen spricht man von **Deformationstensoren**.

Nach dem **Hookeschen Gesetz**, ebenfalls einer linearen Approximation, hängt die Kraft F, welche die Deformation hervorruft, linear von dem negativen Deformationsgradienten bzw. -tensor ab. In unserem Spezialfall haben wir also

$$F \sim -u_x \tag{1.3}$$

und d.h.

$$F(x,t) = -ESu_x(x,t), \qquad F(x+\Delta x,t) = ESu_x(x+\Delta x,t)\,. \tag{1.4}$$

Die Proportionalitätskonstante geteilt durch die Querschnittsfläche S des Stabes wird als Elastizitätskonstante E oder Youngscher Modul bezeichnet.

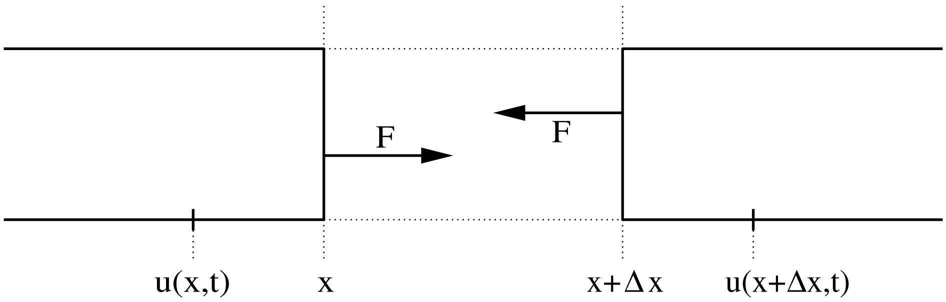


Abbildung 1.3

Die Summe der Kräfte aus (1.4) ergibt

$$F(x,t) + F(x+\Delta x,t) = ES(u_x(x+\Delta x,t) - u_x(x,t))\,.$$

Aufgrund der Definition “Impuls = Masse × Geschwindigkeit” läßt sich der Gesamtimpuls in Integralform angeben. Er lautet:

$$P_{ges} = \int_x^{x+\Delta x} \rho S u_t(x',t)dx'\,.$$

Nach dem Newtonschen Gesetz ist die Summe der Kräfte gleich der zeitlichen Änderung des Gesamtimpulses

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_x^{x+\Delta x} \rho S u_t(x',t)dx' = ES(u_x(x+\Delta x,t) - u_x(x,t))\,.$$

Teilt man diese Gleichung durch Δx, so kann man unter der Annahme ausreichender Differenzierbarkeits- und Stetigkeitseigenschaften von u mit Hilfe des Grenzübergangs $\Delta x \to 0$ zur differentiellen Form übergehen.

$$\lim_{\Delta x\to 0} \rho S \frac{1}{\Delta x} \int_x^{x+\Delta x} u_{tt}(x',t)dx' = ES \lim_{\Delta x\to 0}\Big(\frac{u_x(x+\Delta x,t) - u_x(x,t)}{\Delta x}\Big).$$

Das Ergebnis ist die eindimensionale Wellengleichung

$$u_{tt} = \frac{E}{\rho} u_{xx}.$$

Die Welle bewegt sich mit der Geschwindigkeit $c := \sqrt{\frac{E}{\rho}}$.

1.1.2.2 Die Gleichung für die Wärmeleitung

Wir betrachten ein homogenes Medium der Dichte ρ im $\mathbb{R}^3$. Das Innere des Mediums ist durch das Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ gegeben, seine Grenzflächen mit der Umgebung durch den Rand $\partial\Omega$. Sei $u(x,t)$ die Temperatur des Mediums an der Stelle x zur Zeit t. Wir nehmen an, daß u eine hinreichend glatte Funktion ist.

Wir untersuchen wie vorher ein Testvolumen ΔV in dem Körper mit Oberfläche ΔS in dem Zeitintervall Δt, wobei $\mathbf{n}$ den äußeren Normaleneinheitsvektor der Fläche ΔS repräsentiert.

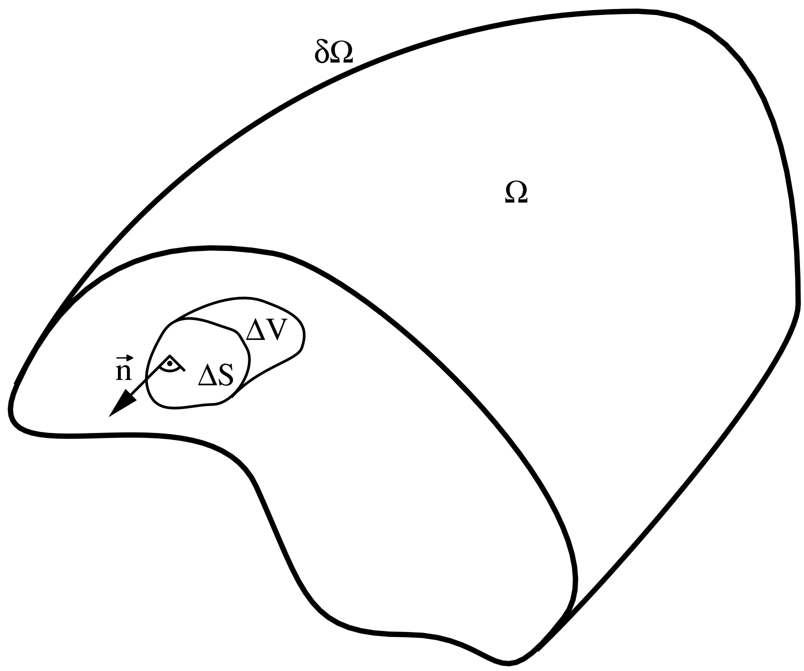


Abbildung 1.4

Nach dem Fouriergesetz der Wärmeleitung ist die Wärmemenge, die das Testvolumen ΔV mit seiner Umgebung austauscht, proportional zum Produkt von ΔS, Δt und der Ableitung von u in Richtung der negativen äußeren Einheitsnormalen

$$\Delta Q = -k \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \Delta S \Delta t.$$

Die Konstante k ist der Koeffizient der thermischen Leitfähigkeit.

Die ausgetauschte Wärmemenge läßt sich andererseits auch mit der spezifischen Wärmekapazität c darstellen. Es ergibt sich folgende Gleichheit:

$$\int\limits_{\Delta V} c\rho(u(x,t+\Delta t)-u(x,t))dx = \int\limits_{t}^{t+\Delta t}\int\limits_{\partial\Delta V} k\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(x,\tau)dsd\tau. \tag{1.5}$$

Mit der Greenschen Formel kann man das rechte Integral umformen

$$\int\limits_{\partial\Delta V} k\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(x,\tau)dS = \int\limits_{\Delta V} k\Delta u(x,\tau)dx\,, \tag{1.6}$$

wobei Δ für den Laplace-Operator steht.

Nun setzt man die rechte Seite von Gleichung (1.6) in (1.5) ein und teilt die entstandene Gleichung durch das Zeitintervall Δt und das Testvolumen ΔV. Der Grenzübergang $\Delta t \to 0$ und $\Delta V \to 0$ gestattet einen Übergang von der Integralform zur differentiellen Form. Wir erhalten

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta t\to 0}\lim_{\Delta V\to 0}\frac{1}{\Delta V}\int\limits_{\Delta V} c\rho\frac{u(x,t+\Delta t)-u(x,t)}{\Delta t}dx \\ = \lim_{\Delta t\to 0}\lim_{\Delta V\to 0}\frac{1}{\Delta t}\frac{1}{\Delta V}\int\limits_{t}^{t+\Delta t}\int\limits_{\Delta V} k\Delta u(x,\tau)dxd\tau\,.\end{aligned}$$

Mit der Ausführung des Grenzübergangs ergibt sich die **Wärmeleitungsgleichung**

$$c\rho u_t = k\Delta u\,.$$

Diese Gleichung setzt die Geschwindigkeit der Wärmeausbreitung als unendlich voraus, was mit dem Fouriergesetz, einem konstitutiven Gesetz, zusammenhängt.

Allgemein ist zu beachten, daß diese Gleichungen immer nur Näherungen beschreiben und deshalb mit einer kritischen experimentellen Prüfung der jeweiligen Situation zu vergleichen sind.

1.1.2.3 Rand- und Anfangsbedingungen

Randbedingungen schaffen die Verbindung der Eigenschaften des betrachteten Mediums mit denen seiner Umgebung.

Bei den longitudinalen elastischen Schwingungen eines Stabes, siehe 1.1.2.1, könnte man z.B. den Stab an einem Ende ($x = 0$) befestigen. Damit könnte an der Stelle $x = 0$ während des ganzen Bewegungsablaufs keine Verschiebung auftreten, wie es in der nachfolgenden Abbildung skizziert wird.

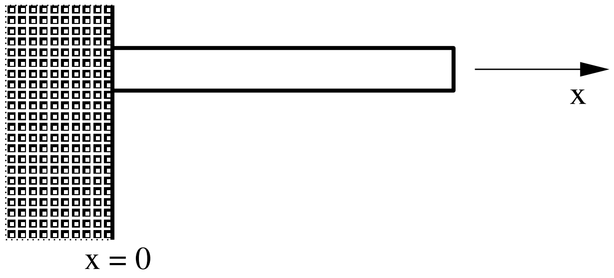


Abbildung 1.5

Mathematisch bedeutet dies

$$u \,\big|_{x=0} = 0\,. \tag{1.7}$$

Andererseits könnte man auch die Kraft an einem Ende des Stabes vorgeben. Läßt man den Stab frei schwingen, so ist diese Kraft Null. Mit (1.3) folgt daraus, daß

$$u_x \,\big|_{x=0} = 0\,. \tag{1.8}$$

Bringt man zwischen Stabende und Wand eine Feder an, so ergibt sich eine Verbindung der beiden Arten von Randbedingungen.

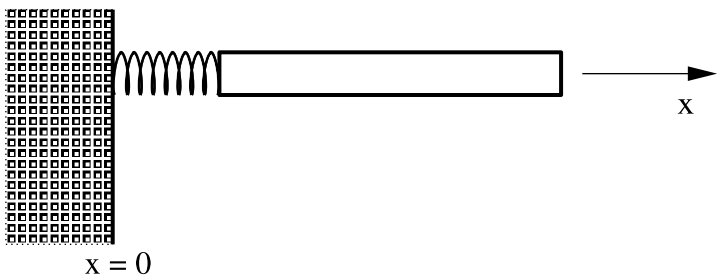


Abbildung 1.6

Mathematisch könnte dies z.B. so aussehen:

$$(ESu_x - ku) \,\big|_{x=0} = 0\,. \tag{1.9}$$

Gibt man bei der Wärmeleitungsgleichung, siehe 1.1.2.2, auf dem Rand des betrachteten Körpers eine Temperaturverteilung φ vor, so gilt

$$u \,\big|_{\partial\Omega} = \varphi. \tag{1.10}$$

Bestimmt man dagegen den Wärmefluß von einem Körper zu seiner Umgebung, so gibt man eine Funktion ψ vor, für die gilt

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\partial\Omega} = \psi. \tag{1.11}$$

Der Vektor **n** steht wieder für die äußere Einheitsnormale des Körpers. Man kann auch wieder die beiden Arten von Randbedingungen verbinden, z.B.

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} - \gamma u\right) \Big|_{\partial\Omega} = 0. \tag{1.12}$$

Bei Randbedingungen in der Art von (1.7) bzw. (1.10) spricht man von **Dirichlet-Randbedingungen**, in der Art von (1.8) bzw. (1.11) von **Neumann-Randbedingungen** und in der Art von (1.9) bzw. (1.12) von **Randbedingungen dritter Art**.

Anfangsbedingungen, d.h. Vorgaben zur Zeit $t = 0$, spiegeln die gesamte Historie des Prozesses wieder.

Bei den Schwingungen des Stabes aus 1.1.2.1 könnte man die Lage des Stabes zur Zeit $t = 0$ vorgeben, sowie seine Anfangsgeschwindigkeit

$$u \Big|_{t=0} = \varphi$$

und

$$u_t \Big|_{t=0} = \psi.$$

Bei der Wärmeleitung, siehe 1.1.2.2, wird oft eine Anfangstemperaturverteilung vorgegeben

$$u \Big|_{t=0} = \varphi.$$

1.1.3 Beispiele linearer partieller Differentialgleichungen

1.1.3.1 Die mehrdimensionale Wellengleichung

Betrachtet wird die folgende Gleichung in einem Gebiet des $\mathbb{R}^n$:

$$u_{tt} = c^2 \Delta u.$$

Hierbei ist Δu der Laplace-Operator

$$\Delta u := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}\,.$$

In obiger Differentialgleichung beschreibt u in vielen Situationen die Wellenbewegung in homogenen und isotropen Medien. Die Konstante c ist die Geschwindigkeit der Welle.

Beispiele:
1. Alle Komponenten der elektrischen Feldstärke und des magnetischen Feldes im Vakuum

genügen der Wellengleichung. Hierbei steht c für die Lichtgeschwindigkeit.
2. Oder betrachte den Druck und die Dichte eines Gases bei kleinen akustischen Schwingungen.
3. Die Schwingungen einer elastischen Membran oder einer Saite bei jeweils kleiner Auslenkung sind ein weiteres Beispiel.

Setzt man eine Funktion der Form

$$u(\mathbf{x}, t) = e^{i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{x})}, \tag{1.13}$$

wobei i die imaginäre Einheit bedeutet, als Lösung an, so ergeben sich Bedingungen an die Frequenz ω und den Wellenvektor $\mathbf{k}$, nämlich

$$-\omega^2 u(\mathbf{x}, t) = -c^2 |\mathbf{k}|^2 u(\mathbf{x}, t).$$

Hiermit ergibt sich nun das **Dispersionsgesetz**

$$\omega^2 = c^2 |\mathbf{k}|^2 ,$$

und

$$u(\mathbf{x}, t) = e^{i|\mathbf{k}|(ct - \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|}\mathbf{x})} .$$

Die Interpretation dafür lautet:

Orte mit gleichem Schwingungsverhalten (gleiche Phase) liegen auf den Ebenenscharen

$$ct - \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|}\mathbf{x} = \text{const} .$$

Für jedes t stellt dies eine Ebene im $\mathbb{R}^n$ dar, die sich in Richtung von $\mathbf{k}$ mit der Geschwindigkeit c bewegt. Man spricht von einer ebenen Welle.

Die Addition zweier Lösungen der Form (1.13) mit verschiedenen Wellenvektoren $\mathbf{k}_1$ und $\mathbf{k}_2$ ergibt wieder eine Lösung, ebenso die Addition zweier Lösungen mit verschiedenen Frequenzen. Man kann zeigen, daß sich durch Superposition solcher Lösungen die allgemeine Lösung ergibt.

Wir betrachten nun den Spezialfall $n = 1$, der sich relativ leicht darstellen läßt. Die allgemeine Lösung lautet

$$u(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct) ,$$

wobei f, g beliebige Funktionen aus $C^2(\mathbb{R})$ sind.

Denn mit Hilfe der Transformation

$$\xi := x - ct, \ \eta := x + ct$$

läßt sich dies schnell beweisen. Sei u eine Lösung der eindimensionalen Wellengleichung. Zweifaches Differenzieren nach t bzw. x ergibt

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial t} = c\left(\frac{\partial u}{\partial \eta} - \frac{\partial u}{\partial \xi}\right),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\right)$$

bzw.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\,.$$

Setzt man diese Terme in die Wellengleichung ein, so ergibt sich

$$u_{\xi\eta} = 0.$$

Dies führt nun zu

$$u(\xi, \eta) = f(\xi) + g(\eta)\,,$$

womit die Behauptung gezeigt ist. ■

Skizze für $c = 1$:

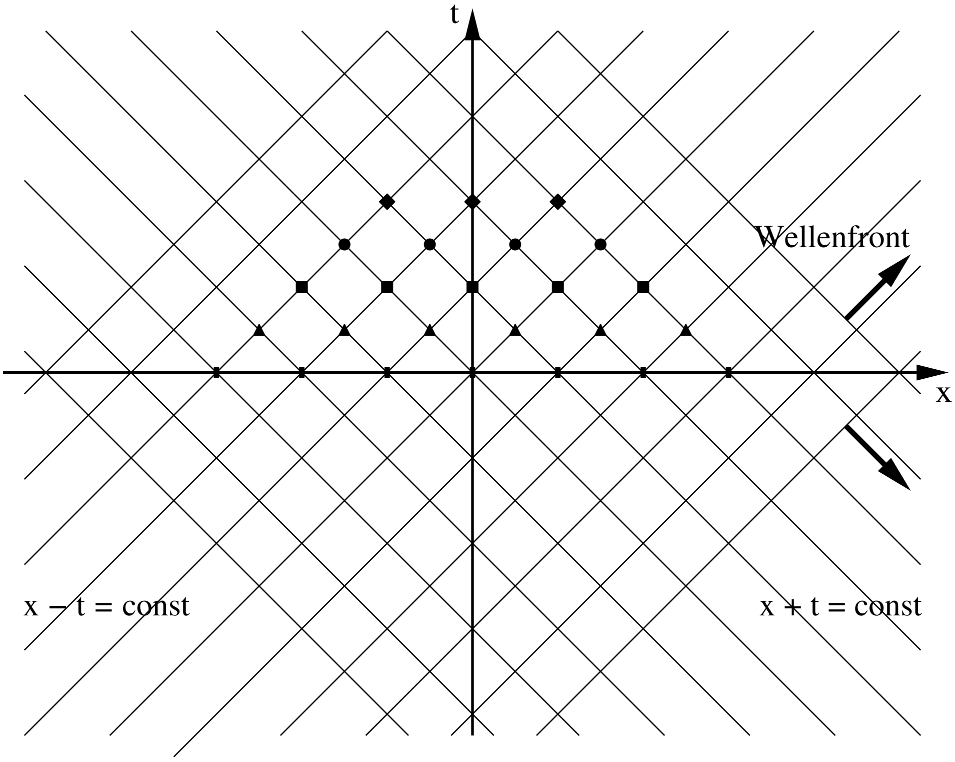


Abbildung 1.7

Verallgemeinerung der Wellengleichung:

$$\rho(x)u_{tt} = \mathrm{div}(A(x)\mathrm{grad}\ u) - q(x)u + f(x,t)\,.$$

Durch diese Gleichung wird eine Welle in einem beliebigen Medium modelliert. Die Dichte $\rho(x) > 0$ ist nun vom Ort abhängig, d.h. das Medium ist inhomogen. Die Anisotropie des Mediums geht über die matrixwertige Funktion $A(x)$ in die Gleichung ein. Man kann zeigen, daß $A(x)$ für jeden Wert x positiv definit ist. Die Funktion $q(x) \geq 0$ spiegelt eine Dissipation der Energie wieder. Äußere Kräfte kann man über $f(x,t)$ in Abhängigkeit von Zeit und Ort einfügen.

Analog kann man die Wärmeleitungsgleichung verallgemeinern und erhält

$$\rho(x)u_t = \operatorname{div}(A(x)\operatorname{grad}\, u) - q(x)u + f(x,t)\,.$$

Wie vorher stehen die Dichtefunktion $\rho(x) > 0$ und die matrixwertige Funktion $A(x)$ für Inhomogenität bzw. Anisotropie des Mediums. Die Funktion $q(x) \geq 0$ steht wieder für Dissipationseffekte und $f(x,t)$ für äußere Einwirkungen, wie Wärmezufuhr.

1.1.3.2 Die Laplace- und Poisson-Gleichung

Die Laplace-Gleichung ist gegeben durch

$$\Delta u = 0.$$

Die Poisson-Gleichung ergibt sich aus der Laplace-Gleichung durch Hinzufügen einer Inhomogenität

$$\Delta u = \rho.$$

Die erste Gleichung ist der stationäre Fall der Wellengleichung oder der Wärmeleitungsgleichung.

Physikalisch beschreiben die beiden Gleichungen das Potential eines elektrostatischen Feldes mit Ladungsdichte ρ.

Nimmt das Innere des betrachteten Mediums das Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein, so kommen auf den Randflächen $\partial\Omega$ Dirichlet-Randbedingungen

$$u\,\big|_{\partial\Omega} = \varphi$$

oder Neumann-Randbedingungen mit $\mathbf{n}$ als äußerer Einheitsnormalen

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\,\Big|_{\partial\Omega} = \psi$$

oder auch Randbedingungen dritter Art in Betracht

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} - \gamma u\right)\Big|_{\partial\Omega} = \eta.$$

Im ersten Fall wird das Potential z.B. auf der Oberfläche eines Körpers festgelegt. Die zweite Gleichung regelt den Potentialfluß auf der Oberfläche, die letzte verbindet beides.

1.1.3.3 Die Helmholtz-Gleichung

Setzt man in die Wellengleichung $u_{tt} = c^2 \Delta u$ die Funktion $u(x,t) = e^{i\omega t} u(x)$ ein, so ergibt sich

$$-\omega^2 e^{i\omega t} u(x) = c^2 e^{i\omega t} \Delta u(x).$$

Mit $\lambda := \frac{\omega^2}{c^2}$ ergibt sich das Eigenwertproblem

$$-\Delta u = \lambda u\,.$$

Als Randbedingungen setzt man

$$u \,\big|_{\partial\Omega} = 0.$$

Man kann zeigen, daß $\lambda > 0$ gelten muß. Mit $k := \frac{\omega}{c}$ ergibt sich nun die **Helmholtz-Gleichung**

$$(\Delta + k^2) u = 0\,.$$

1.1.3.4 Die Maxwell- und Telegraphengleichungen

Die Maxwellgleichungen regeln den Zusammenhang zwischen elektrischem Feld $\mathbf{E} = (E_1, E_2, E_3)$ und magnetischem Feld $\mathbf{H} = (H_1, H_2, H_3)$. Es gilt

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} \mathbf{D} &= 4\pi\rho\,,\\
\operatorname{div} \mathbf{B} &= 0\,,\\
\operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\,,\\
\operatorname{rot} \mathbf{H} &= \frac{4\pi}{c}\mathbf{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\,.
\end{aligned}$$

Hierbei ist $\mathbf{D}$ die elektrische Verschiebungsdichte, $\mathbf{B}$ die magnetische Induktion. ρ steht für die elektrische Ladungsdichte, c für die Vakuumlichtgeschwingigkeit und $\mathbf{j}$ für die elektrische Stromdichte. Im Vakuum gilt

$$\mathbf{D} = \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{H}, \quad \mathbf{j} = 0.$$

Für isotrope Medien dagegen gilt

$$\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu\mathbf{H}, \quad \mathbf{j} = \mathbf{j}_{ext} + \sigma\mathbf{E},$$

wobei ϵ die Dielektrizitätskonstante, μ die magnetische Permeabilität, σ die elektrische Leitfähigkeit und $\mathbf{j}_{ext}$ die externe Stromdichte z.B. durch Diffusion darstellen. Bei anisotropen Medien werden diese Größen teilweise zu Tensoren.

Die Telegraphengleichungen sind ein Spezialfall der Maxwell-Gleichungen, nämlich

$$\begin{aligned}
\frac{\partial i}{\partial x} + C\frac{\partial v}{\partial t} + Gv &= 0\,,\\
\frac{\partial v}{\partial x} + L\frac{\partial i}{\partial t} + Ri &= 0\,.
\end{aligned}$$

Die gesuchten Funktionen v und i stehen für Potential und Stromstärke.

Weiter gehen in die Gleichungen der Widerstand R, die Induktion L, die Kapazität C und die Leitfähigkeit G ein.

1.1.3.5 Die Schrödinger-Gleichung

Sie ist die fundamentale Gleichung der nichtrelativistischen Quantenmechanik. Sie ist gültig für die Zustandsfunktion $\psi(x,t)$ eines Teilchens der Masse m in einem äußeren Feld mit Potential $V(x)$. Dabei ist $\hbar$ das Plancksche Wirkungsquantum. Es gilt

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi + V(x)\psi$$

Als Anfangsbedingungen setzt man

$$\psi\,\big|_{t=0} = \psi_0(x)\,.$$

Mit dem Schrödinger-Operator

$$H := -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(x)$$

kann man die Lösung formal schreiben

$$\psi(t,\cdot) = e^{\frac{i}{\hbar}tH}\psi_0\,.$$

Mit einem Lösungsansatz (siehe auch 1.1.3.3, Helmholtz-Gleichung) der Form

$$\psi(t,x) = e^{-\frac{i}{\hbar}Et}\widetilde{\psi}(x)\,,$$

E eine Konstante, erhält man

$$i\hbar\big(-\frac{i}{\hbar}E\big)e^{-\frac{i}{\hbar}Et}\widetilde{\psi}(x) = -\frac{\hbar^2}{2m}e^{-\frac{i}{\hbar}Et}\Delta\widetilde{\psi}(x) + V(x)e^{-\frac{i}{\hbar}Et}\widetilde{\psi}(x)$$

bzw.

$$\big(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V\big)\widetilde{\psi} = E\widetilde{\psi}.$$

Die **stationäre Schrödinger-Gleichung** lautet somit

$$H\widetilde{\psi} = E\widetilde{\psi}\,.$$

Ein spezielles Beispiel mit $V(x) = |x|^2$ ist der harmonische Oszillator.

1.1.3.6 Die Klein-Gordon-Fock- und die Dirac-Gleichung

Die Schrödinger-Gleichung ist nicht invariant unter der Poincare-Gruppe auf dem $\mathbb{R}^4$. (*Siehe:* L.D. Landau, E.M. Lifschitz: Lehrbuch der theoretischen Physik II, Klassische Feldtheorie.)

Betrachte hierzu die Klein-Gordon-Fock-Gleichung

$$(\hbar^2\Box + m^2c^4)\psi = 0\,,$$

wobei

$$\Box := \frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2\Delta\,.$$

Dabei ist $\Box$ der Wellenoperator oder der d'Alembert-Operator.

Die Klein-Gordon-Fock-Gleichung ist eine Feldgleichung wie die Maxwell-Gleichungen. Mit dem Ansatz

$$\psi(x,t) = e^{\frac{i}{\hbar}(Et+px)}\,,$$

wobei p für den Impuls steht, ergibt sich folgende **Dispersionsrelation**:

$$E^2 = p^2c^2 + m^2c^4.$$

Für ein Teilchen in Ruhe (,d.h. $p = 0$,) gilt $E = \pm mc^2$. Die Klein-Gordon-Fock-Gleichung ist von zweiter Ordnung in $\frac{\partial}{\partial t}$, und man kann aus dem Zustand zur Zeit $t = 0$ nicht auf die Eindeutigkeit der Lösung schließen. Diese Nachteile behebt die Dirac-Gleichung. Wir gehen allerdings hier nicht näher darauf ein.

1.1.3.7 Die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

Sei $u : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine komplexwertige Funktion mit Realteil φ und Imaginärteil ψ. Unter Einbeziehung der Isomorphie $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ ist die Funktion u genau dann im Punkt $z = x + iy$ komplex differenzierbar, wenn die **Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen** erfüllt sind. Somit ergibt sich

$$\varphi_x(x,y) = \psi_y(x,y)\,,$$
$$\varphi_y(x,y) = -\psi_x(x,y)\,.$$

Eine weitere äquivalente Bedingung ist

$$\frac{\partial u}{\partial \overline{z}} = 0\,,$$

wobei $\overline{z}$ konjugiert komplex zur Variablen z ist.

1.1.4 Sachgemäß gestellte Randwertprobleme

Das Konzept von Hadamard:

Ein Randwertproblem heißt **sachgemäß gestellt**, wenn

i) es eine Lösung besitzt (Existenz),

ii) diese Lösung eindeutig ist (Eindeutigkeit),

iii) die Lösung stetig von den Daten abhängt (Stabilität).

1.1.4.1 Hadamards Beispiel

Gegeben sei die Gleichung

$$u_{tt} + u_{xx} = 0 \quad \text{in } \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \,,$$

mit den Anfangsbedingungen

$$u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = \varphi(x).$$

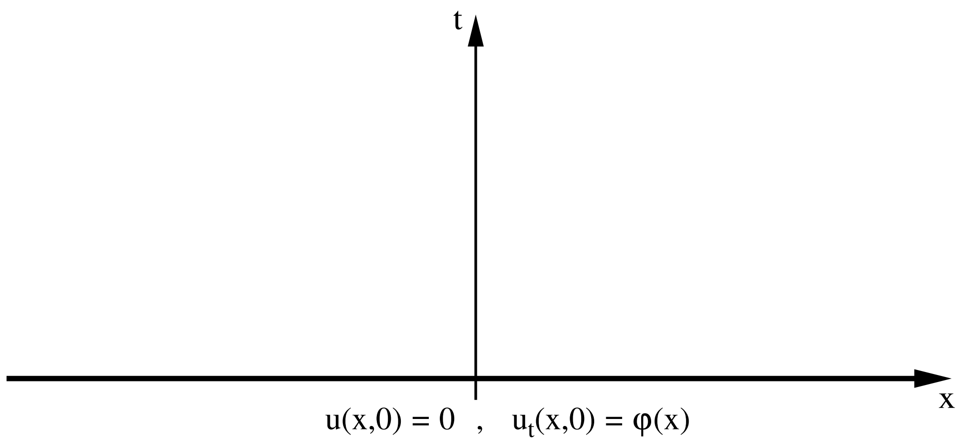


Abbildung 1.8: Gültigkeitsbereich obiger Gleichung

Das Problem hat eine eindeutig bestimmte Lösung in C^2 für $t \geq 0$, siehe hierzu 1.2.

Seien nun speziell die Folgen von Anfangsbedingungen für $n \in \mathbb{N}_0$ gegeben:

$$u_n(x,0) = 0 \,,$$
$$(u_n)_t(x,0) = ne^{-\sqrt{n}} \sin(nx) =: \varphi_n(x) \,.$$

Das jeweilige Anfangswertproblem wird durch die folgenden Funktionen für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ gelöst:

$$u_n(x,t) = \begin{cases} 0, & n = 0, \\ e^{-\sqrt{n}} \sin(nx)\sinh(nt), & n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Dies ergibt sich durch jeweils zweimaliges Differenzieren nach x bzw. t, denn es gilt

$$\frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2} = \sin(nx)\sinh(nt) n^2 e^{-\sqrt{n}}$$

und

$$\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} = -\sin(nx)\sinh(nt) n^2 e^{-\sqrt{n}} .$$

Für große Werte von n wird das Supremum der Anfangswertfunktionen φ_n beliebig klein, d.h. zu jedem $\epsilon > 0$ kann man eine Zahl $N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ finden, so daß für alle $n > N(\epsilon)$ der Wert $\sup_x |\varphi_n(x)| < \epsilon$ gilt.

Andererseits wird für jedes $t_0 > 0$ für große n der Wert des Supremums von $|u_n(\,.\,,t_0)|$ beliebig groß, d.h.

$$\lim_{n\to\infty} \sup_x |u_n(x,t_0)| = \infty ,$$

denn

$$\begin{aligned} \sup_x |u_n(x,t_0)| &= e^{-\sqrt{n}} \sinh(nt_0) = e^{-\sqrt{n}} \frac{e^{nt_0} - e^{-nt_0}}{2} \\ &= \frac{e^{\sqrt{n}(\sqrt{n}t_0 - 1)} - e^{-\sqrt{n}(\sqrt{n}t_0+1)}}{2} \longrightarrow \infty , \end{aligned}$$

für $n \to \infty$.

Es ist auch kein Ausweg, von den Daten, hier also den Funktionen φ_n, Beschränktheit der höheren Ableitungen zu fordern, d.h. das Problem in einer stärkeren Topologie zu betrachten. Denn auch dieses Kriterium ist hier erfüllt. Zu jedem $\epsilon > 0$ und auch zu jedem $m \geq 0$ kann man ein $N(\epsilon, m) \in \mathbb{N}$ finden, so daß für alle $n \geq N(\epsilon, m)$ gilt,

$$\sup_x \sum_{j \leq m} |\varphi_n^{(j)}(x)| \leq \sum_{j \leq m} n^{j+1} e^{-\sqrt{n}} < \epsilon.$$

Man kann also die Anfangswertfunktionen “beliebig nahe an Null” wählen, ohne daß die Lösungsfunktion selbst zumindest in einer Umgebung von $t = 0$ ebenfalls “in der Nähe der Null” liegt. Es handelt sich um ein instabiles, schlecht gestelltes Problem.

Daraus ergibt sich folgende **Konsequenz**:

i) Die Struktur einer Differentialgleichung muß bei der Festlegung der Randwerte beachtet werden.

ii) Die Funktionenräume, in denen das Problem gestellt ist, entscheiden über die Sachgemäßheit.

Definition 1.1.1. Gegeben sei ein Randwertproblem, zusammen mit den Lösungsräumen $U \subset V$ und dem Datenraum F. Dabei seien U, V, F topologische Vektorräume, die Einbettung $U \hookrightarrow V$ sei stetig und die durch V auf U induzierte Topologie stimme mit der Topologie auf U überein.

Das Randwertproblem heißt **sachgemäß gestellt**, wenn zu jedem Datensatz $f \in F$ eine Lösung $u \in U$ des Randwertproblems existiert, diese in U eindeutig bestimmt ist und als Element von V stetig von den Daten $f \in F$ abhängt.

1.1.4.2 Das Cauchy-Problem für die eindimensionale Wellengleichung

Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \qquad x \in \mathbb{R}, \quad 0 \leq t \leq T\,,$$

$$u\,\Big|_{t=0} = \varphi(x), \qquad u_t\,\Big|_{t=0} = \psi(x),$$

wobei die Funktion $\varphi \in C^2(\mathbb{R})$ und die Funktion $\psi \in C^1(\mathbb{R})$ ist.

Die allgemeine Lösung ist gemäß (1.1.3.1) gegeben durch

$$u(x,t) = f(x - ct) + g(x + ct)\,,$$

mit beliebigen Funktionen $f, g \in C^2(\mathbb{R})$.

Wir leiten nun mit Hilfe der Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned} u\,(\xi, 0) = \quad f\,(\xi) + \ g\,(\xi) \quad &= \quad \varphi(\xi)\,, \\ u_t(\xi, 0) = -cf'(\xi) + cg'(\xi) \quad &= \quad \psi(\xi)\,. \end{aligned}$$

die Lösung des Problems her.

Differenziert man die erste Gleichung einmal und multipliziert sie mit c, so ergibt sich

$$cf'(\xi) + cg'(\xi) = c\varphi'(\xi)\,.$$

Addition der beiden letzten Gleichungen führt zu

$$g'(\xi) = \frac{1}{2c}\psi(\xi) + \frac{1}{2}\varphi'(\xi)\,.$$

Es folgt

$$g(\xi) = \frac{1}{2c}\int\limits_0^{\xi} \psi(\eta)d\eta + \frac{1}{2}\varphi(\xi) - \frac{1}{2}\varphi(0) + K_1\,.$$

Dann erhält man

$$f(\xi) = -\frac{1}{2c}\int_0^{\xi} \psi(\eta)d\eta + \frac{1}{2}\varphi(\xi) + \frac{1}{2}\varphi(0) - K_2 \,.$$

Für die Lösung u folgt

$$u(x,t) = \frac{1}{2}(\varphi(x-ct) + \varphi(x+ct)) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \psi(\xi)d\xi \,. \tag{1.14}$$

Das Abhängigkeitsgebiet des Punktes (x_0, t_0) ist auf der folgenden Abbildung skizziert:

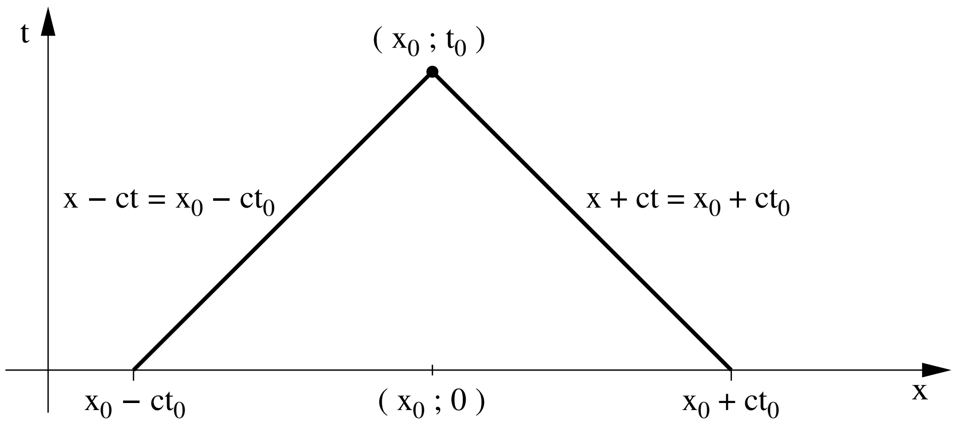


Abbildung 1.9

Der Einflußbereich des Punktes $(x_0, 0)$:

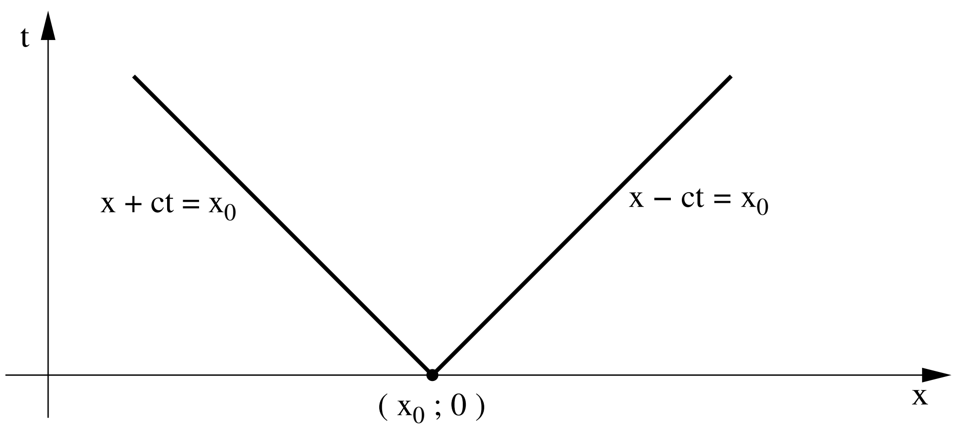


Abbildung 1.10

Das Cauchy-Problem für die Wellengleichung ist sachgemäß gestellt.

Setze als Datenraum

$$F := C_b^k(\mathbb{R}) \times C_b^{k-1}(\mathbb{R}), \qquad k \geq 2\,,$$

und als Lösungsraum

$$U := V := C_b^k(\mathbb{R} \times [0,T])$$

mit der Norm

$$\|v\|_{C_b^K(\mathbb{R}\times[0,T])} := \sum_{|\alpha|\leq k} \sup_{(x,t)\in R\times[0,T]} |D^\alpha v(x)|.$$

Mit $\varphi \in C_b^k(\mathbb{R}), \psi \in C_b^{k-1}(\mathbb{R})$ folgt aus (1.14) $u \in C_b^k(\mathbb{R} \times [0,T])$ für $k \geq 2$, und es gibt eine Konstante $C > 0$ mit

$$\|u\|_{C_b^k(\mathbb{R}\times[0,T])} \leq C\big(\|\varphi\|_{C_b^k(\mathbb{R})} + \|\psi\|_{C_b^{k-1}(\mathbb{R})}\big).$$

Somit hängt u stetig von φ und ψ ab - es sind also alle drei Kriterien erfüllt.

Bemerkung. Für V kann man auch jeden anderen Raum wählen, in den sich $C_b^k(\mathbb{R}\times[0,T])$ stetig einbetten läßt, z.B. $C_b^l(\mathbb{R},[0,T]),\, l \leq k$.

Ob ein Problem sachgemäß gestellt ist, hängt also von dem Daten- bzw. den Lösungsräumen ab. Bei Hadamards Beispiel kommt kein C_b^k-Raum in Frage. Aber auch hier gibt es Räume, in denen das Problem sachgemäß gestellt ist. Sei Z der Raum der Fouriertransformierten von unendlich oft differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger. Setzt man den Datenraum $F := Z$, die Lösungsräume $U := V := C^2(Z,[0,T])$, so ist das Problem sachgemäß gestellt.

1.1.4.3 Das Dirichlet-Problem für die Laplace-Gleichung

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand $\partial\Omega$.

Man betrachtet in Ω das Randwertproblem

$$\Delta u = 0\,,$$

$$u\,\big|_{\partial\Omega} = \varphi\,.$$

In den folgenden Kapiteln wird bei der Wahl $F := C(\partial\Omega)$ als Datenraum sowie $U := V := C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ als Lösungsraum gezeigt, daß dieses Problem eine Lösung besitzt. Eindeutigkeit und stetige Abhängigkeit folgen aus dem Maximumprinzip.

1.1.4.4 Das Cauchy-Problem für die Wärmeleitungsgleichung

Gegeben sei das Randwertproblem

$$u_t = a^2\Delta u, \qquad \text{in } \mathbb{R}^n, \quad t \in [0,T]\,,$$

$$u\,\big|_{t=0} = \varphi, \qquad \text{in } \mathbb{R}^n.$$

Um ein sachgemäß gestelltes Problem zu erhalten, insbesondere die Eindeutigkeit der Lösung zu garantieren, sind Bedingungen an u für $|x| \to \infty$ erforderlich, z.B.

$$F := C_b(\mathbb{R}^n), \qquad U := V := C^\infty(\mathbb{R}^n \times [0,T]) \cap C_b(\mathbb{R}^n \times [0,T])\,. \tag{1.15}$$

Die Lösung ist dann durch die Poissonformel gegeben,

$$u(x,t) = (2a\sqrt{\pi t})^{-n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{-|x-y|^2}{4a^2 t}} \varphi(y)dy\,. \tag{1.16}$$

Darauf wird in den folgenden Kapiteln näher eingegangen.

1.2 Der Satz von Cauchy-Kovalewskaja

1.2.1 Das Cauchysche Anfangswertproblem

Wir betrachten zunächst die gewöhnliche Differentialgleichung bzw. das Anfangswertproblem

$$\frac{du}{dt} = f(t,u), \qquad u(t_0) = u_0.$$

Ein erster Existenz- und Eindeutigkeitsbeweis wurde von Cauchy geführt, und zwar unter der Bedingung, daß f analytisch in einer Umgebung von (t_0, u_0) ist.

Satz 1.2.1. Das obige Problem hat genau eine Lösung, und diese ist analytisch in einer Umgebung von t_0.

Beweis.

1. Schritt: Man setzt u formal als Potenzreihe an. Falls die Behauptung des Theorems stimmt, muß u sich in einer Umgebung des Anfangspunktes (t_0, u_0) so entwickeln lassen. Die Koeffizienten ergeben sich formal aus der Anfangsbedingung und der Differentialgleichung. Dazu machen wir folgenden Ansatz:

$$u(t) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j (t-t_0)^j\,,$$

mit

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{0!} u(t_0) = u_0\,,\\
a_1 &= \frac{1}{1!} u'(t_0) = f\,\Big|_{\substack{t=t_0\\u=u_0}}\,,\\
a_2 &= \frac{1}{2!} u''(t_0) = \frac{1}{2}(f_t + f_u f)\,\Big|_{\substack{t=t_0\\u=u_0}}\,,\\
&\;\;\vdots
\end{aligned}$$

Kann man die Konvergenz dieser Reihe nachweisen, so ist sowohl die Existenz als auch die Eindeutigkeit der Lösung gezeigt.

2. Schritt: Man kann eine gewöhnliche Differentialgleichung konstruieren

$$v' = F(t, v), \qquad v(t_0) = u_0, \tag{1.17}$$

deren Lösung v in einer Umgebung von t_0 analytisch ist,

$$v(t) = \sum_{j=0}^{\infty} A_j (t - t_0)^j$$

und deren Koeffizienten A_j die Terme a_j aus dem ersten Schritt majorisieren. Hiermit ist die Konvergenz der Reihe $\sum_{j=0}^{\infty} a_j (t - t_0)^j$ gezeigt.

a) Konstruktion von F:
Wir konstruieren nun die rechte Seite der Gleichung (1.17). Nach Voraussetzung kann man f in einer Umgebung von (t_0, u_0) in eine Potenzreihe entwickeln

$$f(t, u) = \sum_{i,j=0}^{\infty} b_{ij} (t - t_0)^i (u - u_0)^j .$$

Wählt man einen Punkt $(\tilde{t}, \tilde{u})$ aus dem Konvergenzbereich von f, so konvergiert

$$\sum_{i,ji=0}^{\infty} b_{ij} (\tilde{t} - t_0)^i (\tilde{u} - u_0)^j$$

absolut und gleichmäßig. Daher gibt es eine Konstante $M > 0$, so daß für alle $i, j \in \mathbb{N}_0$

$$|b_{ij}| |\tilde{t} - t_0|^i |\tilde{u} - u_0|^j \le M$$

gilt. Mit $r := \min\{|\tilde{t} - t_0| \, , \, |\tilde{u} - u_0|\}$ folgt für alle $i, j \in \mathbb{N}_0$

$$|b_{ij}| \le M \frac{1}{r^i} \frac{1}{r^j}$$

Setze nun

$$F(t, v) := M \frac{1}{1 - \frac{t - t_0}{r}} \frac{1}{1 - \frac{v - u_0}{r}} .$$

Für $(t, v) \in (t_0 - r, t_0 + r) \times (u_0 - r, u_0 + r)$ gilt dann:

$$F(t, v) = \sum_{i,j=0}^{\infty} B_{ij} (t - t_0)^i (v - u_0)^j \quad \text{mit} \quad B_{ij} := M \tfrac{1}{r^i} \tfrac{1}{r^j} .$$

Nach der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen (Separation der Variablen) existiert eine in einer Umgebung von t_0 unendlich oft differenzierbare Lösung v des Anfangswertproblems (1.17). Es sei

$$v(t) = \sum_{j=0}^{\infty} A_j (t - t_0)^j .$$

b) Für alle $j \in \mathbb{N}$ gilt nun $|a_j| \leq |A_j|$

$$|a_0| = |u(t_0)| = |v(t_0)| = |A_0|\,,$$

$$|a_1| = \frac{1}{1!}|u'(t_0)| = |f(t_0, u(t_0))| = |\sum_{i,j=0}^{\infty} b_{ij}(t_0 - t_0)^i (u_0 - u_0)^j| = |b_{00}| \leq B_{00} = F(t_0, v(t_0))$$
$$= v'(t_0) = A_1\,,$$

$$|a_2| = \frac{1}{2!}|u''(t_0)| = \frac{1}{2!}|\frac{d}{dt}f(t, u(t))\,\Big|_{t=t_0}|$$
$$= \frac{1}{2}|\sum_{i,j=0}^{\infty} b_{ij}[(u(t) - u_0)^j \frac{d}{dt}(t - t_0)^i\,\Big|_{t=t_0} + (t - t_0)^i \frac{d}{dt}(u(t) - u_0)^j\,\Big|_{t=t_0}]|$$
$$= \frac{1}{2}|b_{10} + b_{01}a_1| \leq \frac{1}{2}(|b_{10}| + |b_{01}||a_1|) \leq \frac{1}{2}(B_{10} + B_{01}A_1) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}F(t, v(t))\,\Big|_{t=t_0}$$
$$= \frac{1}{2}v''(t_0) = A_2\,.$$

Auf diese Weise kann man induktiv $|a_j| \leq |A_j|$ für alle $j \in \mathbb{N}$ beweisen. Mit Hilfe des Majorantenkriteriums folgt die Konvergenz der Reihe $\sum_{j=0}^{\infty} a_j(t - t_0)^i$ in einer Umgebung von t_0.
Das Ausgangsproblem hat also lokal eine eindeutig bestimmte Lösung. ■

Die Vorgehensweise kann man nun prinzipiell auch auf bestimmte Anfangswertprobleme partieller Differentialgleichungen übertragen.
Sei ein System partieller Differentialgleichungen folgender Art gegeben:

$$\frac{\partial^{n_i} u_i}{\partial t^{n_i}} = f_i(t, y, u_i, \frac{\partial u_i}{\partial t}, \ldots, \frac{\partial^{n_i - 1} u_i}{\partial t^{n_i - 1}}\,,\, D^\alpha \frac{\partial u_i}{\partial y}), \tag{1.18}$$

wobei α ein Multiindex ist mit $0 \leq |\alpha| \leq n_i - 1$ und $1 \leq i \leq m$. Ferner stehe y für den Vektor $(y_1, \ldots, y_n)$ und die Funktion u für $(u_1, \ldots, u_n)$. Die Funktionen f_i hängen jeweils nur von den Ableitungen der Funktionen u_j bis zur Ordnung n_j, nicht aber von $\frac{\partial^{n_j} u_j}{\partial t^{n_j}}$ ab. Weiter werden die Funktionen f_i als analytisch in allen ihren Argumenten vorausgesetzt (evtl. nur in einem Teilgebiet).

Wir formulieren nun das **Cauchy-Problem**:
Gesucht ist eine Lösung $(u_1, \ldots, u_m)$ von (1.18), die zusätzlich folgenden Anfangswerten genügt:

$$\frac{\partial^k}{\partial t^k} u(0, y) = \varphi_{ik}(y) \qquad 0 \leq k \leq n_i - 1, \quad 1 \leq i \leq m. \tag{1.19}$$

Die Anfangswertfunktionen φ_{ik} werden ebenfalls in einer Umgebung des Punktes $y = 0$ als analytisch in allen Argumenten $(y_1, \ldots, y_n)$ vorausgesetzt.

Bemerkung. Gegenüber der gewöhnlichen Differentialgleichung zu Beginn setzen wir o.B.d.A. $t_0 = 0$ sowie $u_0 = 0$ voraus. Gilt dies nicht, so setzen wir

$$u^*(t) := u(t - t_0) - u_0\,.$$

Satz 1.2.2. (Der Satz von Cauchy-Kovalewskaja)
Das Cauchysche Anfangswertproblem (1.18), (1.19) hat unter den getroffenen Voraussetzungen genau eine Lösung, und diese ist analytisch in einer Umgebung von $(t, x) = (0, 0)$.

Beweis. Der Übersichtlichkeit halber führen wir den Beweis für ein quasilineares System 1. Ordnung für eine Funktion $u = (u_1, \ldots, u_m) = u(x, y)$, die nur von den zwei Variablen (x, y) abhängt. Wir betrachten also

$$\frac{\partial u_i}{\partial x} = \sum_{k=1}^{m} G_{ik}(u_1, \ldots, u_m) \frac{\partial u_k}{\partial y}, \qquad 1 \le i \le m\,, \tag{1.20}$$

mit den Anfangsbedingungen

$$u_i(0, y) = \varphi_i(y), \qquad 1 \le i \le m. \tag{1.21}$$

Hierbei seien die Funktionen G_{ik} analytisch in einer Umgebung von $(u_1^0, \ldots, u_m^0) = (0, \ldots, 0)$ und φ_i analytisch in einer Umgebung von $y^0 = 0$. Satz 1.2.2 reduziert sich damit auf die Behauptung, daß (1.20) genau eine Lösung besitzt, die in einer Umgebung von $(x, y) = (0, 0)$ analytisch ist und die Anfangswerte (1.21) annimmt.

Der Beweis verläuft nun analog dem von Satz 1.2.1.

In einer Umgebung von $(x, y) = (0, 0)$ kann man die Funktionen φ_i und G_{ik} in Potenzreihen entwickeln, d.h.

$$\varphi_i(y) = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu^i y^\nu, \qquad \text{für } |y| \le \rho\,,$$

$$G_{ik}(u_1, \ldots, u_m) = \sum_{\nu_1, \ldots, \nu_m = 0}^{\infty} b_{\nu_1, \ldots, \nu_m}^{ik} u_1^{\nu_1} u_2^{\nu_2} \ldots u_m^{\nu_m}, \qquad |u_i| \le r.$$

Es gilt wegen $\varphi_i(0) = 0$, also $a_0^i = 0$ für $1 \le i \le m$.
Es ist zu zeigen, daß (1.20), (1.21) eine Lösung der Form

$$u_i(x, y) = \sum_{\lambda, \kappa = 0}^{\infty} c_{\lambda,\kappa}^i x^\lambda y^\kappa, \qquad 1 \le i \le m\,, \tag{1.22}$$

mit geeignetem Konvergenzbereich um $(0, 0)$ besitzt.

Eindeutigkeit:
Es gilt

$$c_{\lambda,\kappa}^i = \frac{1}{\lambda!\kappa!} \frac{\partial^{\lambda+\kappa}}{\partial x^\lambda \partial y^\kappa} u_i(x, y) \Big|_{(x,y)=(0,0)}, \qquad \lambda, \kappa \in \mathbb{N}_0, 1 \le i \le m\,.$$

Aus (1.21) folgt

$$c_{0,0}^i = u_i(0, 0) = \varphi_i(0) = 0, \quad 1 \le i \le m\,.$$

Ferner lassen sich auch alle Ableitungen von u_i nach y an der Stelle $(0, 0)$ aus (1.21) berechnen. Die Differentialgleichung (1.20) ergibt dann alle fehlenden Ableitungen von u_i an der Stelle $(0,0)$. Die Eindeutigkeit dieser Berechnungen ergibt die Eindeutigkeit der Lösung.

Existenz:
Hierzu muß die Konvergenz der Potenzreihe (1.22) nachgewiesen werden.
1. Schritt: Struktur der Koeffizienten $c^i_{\lambda,\kappa}$:
Für $1 \le i \le m$ gilt:

$$\begin{aligned}
c^i_{0,0} &= a^i_0\,, \\
c^i_{1,0} &= \frac{1}{1!}\frac{\partial}{\partial x}u_i\,\Big|_{(0,0)} = \sum_{k=1}^{m} G_{ik}(u_1,\ldots,u_m)\frac{\partial u_k}{\partial y}\,\Big|_{(0,0)} = \\
&= \sum_{k=1}^{m}\ \sum_{\nu_1,\ldots,\nu_m=0}^{\infty} b^{ik}_{\nu_1,\ldots,\nu_m} u_1^{\nu_1}u_2^{\nu_2}\ldots u_m^{\nu_m}\Big(\sum_{\nu=0}^{\infty}\nu a^k_\nu y^{\nu-1}\Big)\,\Big|_{(0,0)} = \sum_{k=1}^{m} b^{ik}_{0,\ldots,0}\cdot a^k_1\,, \\
c^i_{2,0} &= \frac{1}{2!}\frac{\partial^2}{\partial x^2}u_i\,\Big|_{(0,0)} = \frac{1}{2!}\frac{\partial}{\partial x}\Big(\sum_{k=1}^{m}\ \sum_{\nu_1,\ldots,\nu_m=0}^{\infty} b^{ik}_{\nu_1,\ldots,\nu_m}u_1^{\nu_1}\ldots u_m^{\nu_m}\frac{\partial u_k}{\partial y}\Big)\,\Big|_{(0,0)}\,.
\end{aligned}$$

Allgemein ergibt sich die folgende Struktur der Koeffizienten:

$$c^i_{\lambda,\kappa} = P^i_{\lambda,\kappa}(a^j_\nu, b^{js}_{\nu_1,\ldots,\nu_m}),$$

wobei $P^i_{\lambda,\kappa}$ ein Polynom in den Größen $a^j_\nu, b^{js}_{\nu_1,\ldots,\nu_m}$, $1 \le j,s \le m$, $\nu,\nu_1,\ldots,\nu_m \in \mathbb{N}_0$, mit nichtnegativen Koeffizienten ist.

2. Schritt: Einführung einer Majorante.
Man betrachte ein Anfangswertproblem der Form:

$$\frac{\partial v_i}{\partial x} = \sum_{k=1}^{m} K_{ik}(v_1,\ldots,v_m)\frac{\partial v_k}{\partial y}, \qquad 1 \le i \le m\,,$$

$$v_i(0,y) = \psi_i(y), \qquad 1 \le i \le m\,.$$

Die Funktionen K_{ik}, ψ_i seien analytisch, d.h.

$$K_{ik}(v_1,\ldots,v_m) = \sum_{\nu_1,\ldots,\nu_m=0}^{\infty} B^{ik}_{\nu_1,\ldots,\nu_m} v_1^{\nu_1}\ldots v_m^{\nu_m}\,,$$

$$\psi_i(y) = \sum_{\nu=0}^{\infty} A^i_\nu y^\nu\,.$$

Für die noch zu bestimmenden Koeffizienten $A^i_\nu, B^{ik}_{\nu_1,\ldots,\nu_m}$ gelte

$$|a^i_\nu| \le A^i_\nu \qquad \text{sowie} \qquad |b^{ik}_{\nu_1,\ldots,\nu_m}| \le B^{ik}_{\nu_1,\ldots,\nu_m}. \tag{1.23}$$

Setzt man für die Lösungsfunktionen v_i des Systems von partiellen Differentialgleichungen formal wieder eine Potenzreihe

$$v_i(x,y) = \sum_{\lambda,\kappa} C^i_{\lambda,\kappa}x^\lambda y^\kappa \tag{1.24}$$

an, so kann man die Koeffizienten $C^i_{\lambda,\kappa}$ ganz analog zu den Koeffizienten $c^i_{\lambda,\kappa}$ berechnen (siehe 1. Schritt). Es ergibt sich

$$C^i_{\lambda,\kappa} = P^i_{\lambda,\kappa}(A^i_\nu, B^{js}_{\nu_1,\ldots,\nu_m})\,.$$

$P^i_{\lambda,\kappa}$ ist das gleiche Polynom wie das Polynom bei der Berechnung der Koeffizienten $C^i_{\lambda,\kappa}$. Wegen der Nichtnegativität der Koeffizienten $P^i_{\lambda,\kappa}$ ergibt sich

$$C^i_{\lambda,\kappa} \geq c^i_{\lambda,\kappa} \tag{1.25}$$

Konvergieren die Potenzreihen (1.24), so sind sie Majoranten der Potenzreihen.

3. Schritt: Konvergenz der Majorante.
Seien $\rho \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ bzw. $r \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ kleiner als die Konvergenzradien der Reihen

$$\varphi_i(y) = \sum_{\nu=1}^{\infty} a^i_\nu y^i, \qquad 1 \leq i \leq m\,, \tag{1.26}$$

bzw.

$$G_{ik}(u_1,\ldots,u_m) = \sum_{\nu_1,\ldots,\nu_m=0}^{\infty} b^{ik}_{\nu_1,\ldots,\nu_m} u_1^{\nu_1}\ldots u_m^{\nu_m}, \qquad 1 \leq i,k \leq m\,.$$

Wie im 2. Schritt, Teil a) des Beweises von Satz 1.2.1, gibt es eine Konstante $M > 0$, so daß für alle $1 \leq i \leq m$, $\nu \in \mathbb{N}$,

$$|a^i_\nu| \leq \frac{M}{\rho^\nu}$$

gilt sowie für alle $1 \leq i,k \leq m$, $\nu_1,\ldots,\nu_m \in \mathbb{N}_0$,

$$|b^{ik}_{\nu_1,\ldots,\nu_m}| \leq \frac{M}{r^{\nu_1+\ldots+\nu_m}}.$$

O.B.d.A. kann man $M > \frac{r}{m}$ wählen. Die Motivation hierfür ergibt sich im Laufe des Beweises.

Setzt man $A^i_\nu := \frac{M}{\rho^\nu}$, so ergibt sich für $|y| < \rho$

$$\psi_i(y) = \sum_{\nu=0}^{\infty} A^i_\nu y^\nu = M \sum_{\nu=0}^{\infty} \Big(\frac{y}{\rho}\Big)^\nu = \frac{M\rho}{\rho - y}, \qquad 1 \leq i \leq m\,.$$

Für die Konstruktion der Funktionen K_{ik} setzt man

$$B^{ik}_{\nu_1,\ldots,\nu_m} := \frac{M}{r^{\nu_1+\ldots+\nu_m}} \frac{(\nu_1+\ldots+\nu_m)!}{\nu_1!\ldots\nu_m!}\,.$$

Wegen (1.25), (1.26) erfüllen die Koeffizienten A^i_ν, $B^{ik}_{\nu_1,\ldots,\nu_m}$ die Forderung (1.23).

Für den Bereich $|v_1| + \ldots + |v_m| < r$ kann man die Funktionen K_{ik} angeben. Es gilt

$$\begin{aligned}K_{ik}(v_1, \ldots, v_m) &= \sum_{\nu_1,\ldots,\nu_m=0}^{\infty} B^{ik}_{\nu_1,\ldots,\nu_m} v_1^{\nu_1} \ldots v_m^{\nu_m} = \\ &= M \sum_{\nu_1,\ldots,\nu_m=0}^{\infty} \big(\frac{v_1}{r}\big)^{\nu_1} \cdots \big(\frac{v_m}{r}\big)^{\nu_m} \frac{(\nu_1 + \ldots + \nu_m)!}{\nu_1! \ldots \nu_m!} = \\ &= M \frac{1}{1 - \frac{v_1+\ldots+v_m}{r}}, \qquad 1 \le i, k \le m\,.\end{aligned}$$

Mit diesen Vorgaben erhalten wir nun das Anfangswertproblem

$$\frac{\partial v_i}{\partial x} = \frac{M}{1 - \frac{v_1+\ldots+v_m}{r}} \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial v_k}{\partial y}, \qquad 1 \le i \le m\,,$$

$$v_i(0, y) = \frac{M\rho}{\rho - y}, \qquad 1 \le i \le m\,.$$

Da die rechten Seiten jeweils nicht von i abhängen, kann man den Ansatz $v_i(x, y) \equiv v(x, y)$ für alle $1 \le i \le m$ machen.

Das Anfangswertproblem reduziert sich somit auf

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{mM}{1 - \frac{m}{r}v} \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \text{bzw.} \qquad (1 - \tfrac{m}{r}v)v_x - mMv_y = 0\,,$$

mit den Anfangsbedingungen

$$v(0, y) \equiv v_0(y) := \frac{M\rho}{\rho - y}.$$

Dieses Problem muß nun gelöst werden.

Hierzu betrachten wir die etwas allgemeinere Differentialgleichung

$$\alpha(v)v_x + \beta(v)v_y = 0\,. \tag{1.27}$$

Setzt man $\alpha(v) := 1 - \frac{m}{r}v$ und $\beta(v) := -mM$, so ergibt sich unser ursprüngliches Problem. Die Differentialgleichung (1.27) besitzt die durch

$$\alpha(v)y - \beta(v)x = w(v) \tag{1.28}$$

implizit gegebene Lösungsmannigfaltigkeit mit einer beliebigen Funktion $w \in C^1$. Es gilt nämlich: Differenziert man nach x bzw. nach y, so ergibt sich

$$\alpha'(v)v_x y - \beta'(v)v_x x - \beta(v) = w'(v)v_x$$

und

$$\alpha'(v)v_y y + \alpha(v) - \beta'(v)v_y x = w'(v)v_y$$

Multipliziert man die erste Gleichung mit α, die zweite mit β und addiert dann die beiden Gleichungen, so folgt

$$\alpha' y(\alpha v_x + \beta v_y) - \beta' x(\alpha v_x + \beta v_y) = w'(\alpha v_x + \beta v_y).$$

Mit (1.27) folgt die Behauptung.
Bezieht man Anfangsbedingungen der Form $v(0, y) = \varphi(y)$ in die Überlegungen ein, so ergibt sich mit (1.28)

$$w(\varphi) = w(v(0, y)) = \alpha(v(0, y)) \cdot y - \beta(v(0, y)) \cdot 0 = \alpha(\varphi)y.$$

Besitzt φ die Umkehrfunktion χ und setzt man diese ein, so ergibt sich

$$w(\varphi) = \alpha(\varphi)\chi(\varphi)\,.$$

Einsetzen in (1.28) bewirkt

$$\alpha(v)y - \beta(v)x = \alpha(v)\chi(v)$$

oder

$$v(x, y) = \varphi\Big(y - \frac{\beta(v)}{\alpha(v)}x\Big)\,.$$

Anwenden dieser Formel auf das Anfangswertproblem ergibt

$$v = M\rho \frac{1}{\rho - y - \frac{mM}{1 - \frac{m}{v}v} \cdot x}\,.$$

Man kann dies in eine quadratische Gleichung umformen und erhält

$$(1 - \frac{m}{r}v)y + mMx = \frac{\rho}{v}\Big(1 - \frac{m}{r}v\Big)(v - M)\,.$$

Wegen $\frac{r}{m} < M$ bzw. $\frac{m}{r}M > 1$ gibt es eine Lösung hiervon, die den Anfangsbedingungen $v(0, y) = \frac{M\rho}{\rho - y}$, insbesondere $v(0, 0) = M$ genügt. Aus $(1 - \frac{m}{r}v(0, 0))(v(0, 0) - M) = 0$ folgt ferner, daß an der Stelle $(0, 0)$ die Diskriminante der quadratischen Gleichung positiv ist. Dies gilt dann aber auch für eine Umgebung von $(0, 0)$. Deswegen läßt sich die Wurzel dort in eine Potenzreihe entwickeln.
Man kann allerdings die Lösung auch explizit angeben.

$$v(x, y) = \frac{1}{2} \frac{M\Big(1 - \frac{rx}{\rho}\Big) + \frac{r}{m}\Big(1 - \frac{y}{\rho}\Big) + \Big[\Big(M\Big(1 - \frac{rx}{\rho}\Big) - \frac{r}{m}\Big(1 - \frac{y}{\rho}\Big)\Big)^2 - 4\frac{rM}{m}\Big(1 - \frac{y}{\rho}\Big)\frac{rx}{\rho}\Big]^{\frac{1}{2}}}{1 - \frac{y}{\rho}}\,.$$

■

1.2.2 Beispiel zur Nichtexistenz einer analytischen Lösung

Gegeben sei die Wärmeleitungsgleichung:

$$\begin{aligned} &u_t = u_{xx}, \qquad x \in (-1,1), \quad t > 0, \\ &u(x,0) = \frac{1}{1-x}, \qquad x \in (-1,1). \end{aligned} \tag{1.29}$$

Diese Gleichung ist nicht vom Cauchy-Kovalewskaja-Typ! Anfangs- und Koeffizientenfunktionen sind zwar analytisch, aber der Grad der Ableitung nach t auf der linken Seite ist um eins zu niedrig bzw. der Grad der Ableitung nach x auf der rechten Seite um eins zu hoch.

Beweis der Nichtexistenz einer analytischen Lösung

Wir machen für die Lösung den formalen Ansatz

$$u(x,t) = e^{t\frac{d^2}{dx^2}} u(x,0) = e^{t\frac{d^2}{dx^2}}(1 + x + x^2 + \ldots)\,,$$

denn

$$u_t(x,t) = \frac{d^2}{dx^2}\Big(e^{t\frac{d^2}{dx^2}}(1 + x + x^2 + \ldots)\Big) = u_{xx}(x,t)\,.$$

Einsetzen ergibt

$$\begin{aligned} u(0,t) &= \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} t^\nu \frac{d^{2\nu}}{dx^{2\nu}}\right)(1 + x + x^2 + \ldots)\,\Bigg|_{x=0} \\ &= (1 + x + x^2 + \ldots) \\ &+ \frac{1}{1!} t(2 + 6x + 12x^2 + \ldots) \\ &+ \frac{1}{2!} t(4! + \text{ Ausdrücke in } x) \\ &+ \frac{1}{3!} t(6! + \text{ Ausdrücke in } x) \\ &\;\;\vdots \\ &= \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} t^\nu (2\nu)! \end{aligned}$$

Die Reihe divergiert aber für jedes $t \neq 0$.
Somit hat das Cauchy-Problem (1.29) keine analytische Lösung in der Umgebung von $(0,0)$. ∎

1.3 Klassifizierung und Systematik

1.3.1 Differentialgleichungen und ihre Reduktion auf kanonische Form in einem Punkt

Wir kennen drei grundlegende Typen linearer partieller Differentialgleichungen 2. Ordnung. Es handelt sich dabei um

i) elliptische Differentialgleichungen
z.B. die Laplace-Gleichung $\Delta u = 0$

ii) parabolische Differentialgleichungen
z.B. die Wärmeleitungs-Gleichung $u_t - \Delta u = 0$

iii) hyperbolische Differentialgleichungen
z.B. die Wellengleichung $u_{tt} - \Delta u = 0$

Wie in den vorangegangenen Paragraphen steht Δ für den Laplace-Operator im $\mathbb{R}^n$,

$$\Delta := \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \, .$$

Wir betrachten nun die allgemeine lineare partielle Differentialgleichung 2. Ordnung

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^{n} b_j(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} + c(x) u = 0 \, . \tag{1.30}$$

Wir setzen die Koeffizientenfunktionen a_{ij} als reell und symmetrisch in i, j voraus, d.h. $a_{ij} = a_{ji}$ und ordnen der Differentialgleichung (1.30) die quadratische Form Q zu:

$$Q(x, \xi) := \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \xi_i \xi_j = \xi^T A(x) \xi \, , \tag{1.31}$$

mit der Matrixfunktion $A(x) := (a_{ij}(x))_{i,j}$.
Hält man $x \in \mathbb{R}^n$ fest, so sind der Rang von $Q(x, \xi)$ und die Anzahl der positiven und negativen Elemente in der kanonischen Form von $Q(x, \xi)$ invariant. Dies ermöglicht eine Klassifizierung der verschiedenen Differentialgleichungen.

Definition 1.3.1.

i) Die Differentialgleichung (1.30) heißt **elliptisch** in dem Punkt x, wenn die kanonische Form der gemäß (1.31) zugeordneten quadratischen Form $Q(x, \xi)$ entweder n positive oder n negative Koeffizienten hat, d.h. die zugehörige Matrix $A(x)$ entweder positiv oder negativ definit ist.

ii) Die Differentialgleichung (1.30) heißt **hyperbolisch** im Punkt x, wenn die gemäß (1.31) zugeordnete Matrix $A(x)$ den Rang n hat und die kanonische Form der quadratischen Form $Q(x, \xi)$ $(n - 1)$ positive und einen negativen Koeffizienten besitzt (evtl. nach einem Vorzeichenwechsel).

iii) Die Differentialgleichung (1.30) heißt **parabolisch** im Punkt x, wenn die gemäß (1.31) zugeordnete Matrix $A(x)$ den Rang $n-1$ hat und die Vorzeichen der Koeffizienten in der kanonische Form von $Q(x,\xi)$ alle gleich sind, d.h. es gibt entweder $n-1$ negative oder $n-1$ positive Koeffizienten.

Gelten die Bedingungen *i),ii)* oder *iii)* für alle x aus dem betrachteten Gebiet, so nennt man die Differentialgleichung elliptisch, hyperbolisch oder parabolisch.

Anmerkung:
Für parabolische Differentialgleichungen spielen die Ableitungen 1. Ordnung ein wichtige Rolle. Wir werden später strengere Forderungen an die Parabolizität stellen.

Die Charakterisierung bzw. Klasseneinteilung von (1.31) läßt sich natürlich auch über die Eigenwerte von A an der Stelle x ausdrücken. Hat $A(x)$ n positive oder n negative Eigenwerte, so ist die zugehörige Differentialgleichung elliptisch im Punkt x. Bei $n-1$ positiven und einem negativen Eigenwert oder umgekehrt folgt Hyperbolizität im Punkt x. Parabolisch im Punkt x ist die Differentialgleichung, wenn $(n-1)$ positive oder $(n-1)$ negative Eigenwerte vorliegen und der verbleibende Eigenwert verschwindet.

Eine gewisse Rolle spielen auch noch die ultrahyperbolischen Differentialgleichungen: Ist der Rang der gemäß (1.31) zugeordneten quadratischen Form gleich n und besitzt deren kanonische Form p positive und q negative Koeffizienten mit $p \geq 2$ und $q = n - p \geq 2$, so heißt die Differentialgleichung **ultrahyperbolisch**.

Bemerkung. Dies ist keine vollständige Klassifizierung, es werden aber doch die wichtigsten Fälle abgedeckt.
Wichtige Differentialgleichungen der mathematischen Physik sind auch vom **gemischten Typ**, d.h. ihr Typ wechselt innerhalb des betrachteten Gebietes.
Ein Beispiel hierfür ist die **Tricomi-Gleichung**

$$yu_{xx} + u_{yy} = 0, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Diese Gleichung beschreibt die Bewegung eines Körpers in einem Gas mit einer Geschwindigkeit nahe der Schallgeschwindigkeit. Für $y > 0$ ist sie elliptisch, für $y < 0$ hyperbolisch. In dem Bereich $y > 0$ wird eine Unterschallbewegung modelliert, in dem Bereich $y < 0$ eine Überschallbewegung.

1.3.2 Charakteristiken einer Gleichung zweiter Ordnung; Reduktion einer Gleichung zweiter Ordnung in zwei unabhängigen Variablen auf kanonische Form

Definition 1.3.2. Eine Hyperfläche T im $\mathbb{R}^n$, d.h. eine Untermannigfaltigkeit der Codimension 1, deren Normalenvektor $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ in jedem $x \in T$ der Bedingung

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j = 0 \tag{1.32}$$

genügt, heißt **Charakteristik der Differentialgleichung (1.30)**.

Wir betrachten nun den Spezialfall **n=2**. Die Differentialgleichung (1.30) hat die Form

$$au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} + \ldots = 0 \tag{1.33}$$

mit $a = a(x,y)$, $b = b(x,y)$, $c = c(x,y)$ und $(x,y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Die quadratische Form gemäß (1.31) ist gegeben durch

$$Q(x,y;\xi_1,\xi_2) = a(x,y)\xi_1^2 + 2b(x,y)\xi_1\xi_2 + c(x,y)\xi_2^2. \tag{1.34}$$

Die dazugehörige Matrix lautet:

$$A(x,y) = \begin{pmatrix} a(x,y) & b(x,y) \\ b(x,y) & c(x,y) \end{pmatrix}.$$

Gilt $b^2 - ac < 0$, so ist die Differentialgleichung (1.33) elliptisch, für den Fall $b^2 - ac > 0$ hyperbolisch und für $b^2 - ac = 0$ parabolisch.
Im $\mathbb{R}^2$ beschreiben die Charakteristiken Kurven $y = y(x)$, die ausgezeichnet werden durch einen Normalenvektor $\xi = (\xi_1, \xi_2) = (\frac{\partial y}{\partial x}, -1)$ oder $(dy, -dx)$. Setzt man ξ in (1.34) bzw. (1.32) ein, so erhält man

$$a(x,y)\Big(\frac{\partial y}{\partial x}\Big)^2 - 2b(x,y)\frac{\partial y}{\partial x} + c(x,y) = 0$$

bzw.

$$ady^2 - 2bdxdy + cdx^2 = 0\,. \tag{1.35}$$

Besitzt a in dem betrachteten Gebiet keine Nullstelle, so kann man nach $\frac{dy}{dx}$ auflösen. Es gilt

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a}.$$

Ist die Differentialgleichung (1.33) elliptisch, so gibt es zwei konjugiert komplexe Charakteristiken, für den hyperbolischen Fall zwei reelle und im parabolischen Fall nur eine Charakteristik.
Gleichung (1.35) läßt sich auch als "Produkt" schreiben

$$(dy - \frac{1}{a}(+b - \sqrt{b^2 - ac})dx)(dy - \frac{1}{a}(+b + \sqrt{b^2 - ac})dx) = 0.$$

Wir werden nun nacheinander den hyperbolischen, den parabolischen und den elliptischen Fall betrachten.

Der hyperbolische Fall: $b^2 - ac > 0$.
Man hat zwei Pfaffsche Formen

$$ady - (+b - \sqrt{b^2 - ac})dx = 0$$

sowie

$$ady - (+b + \sqrt{b^2 - ac})dx = 0.$$

Hierbei wurde natürlich wie vorher a ohne Nullstellen in dem betrachteten Gebiet Ω vorausgesetzt.

Man hat also durch jeden Punkt $(x_0, y_0) \in \Omega$ genau zwei Charakteristiken, die lokal durch $\varphi_1(x, y) = c_1$ bzw. $\varphi_2(x, y) = c_2$ beschrieben werden. Die Differentiale $d\varphi_1, d\varphi_2$ sind an jeder Stelle linear unabhängig.

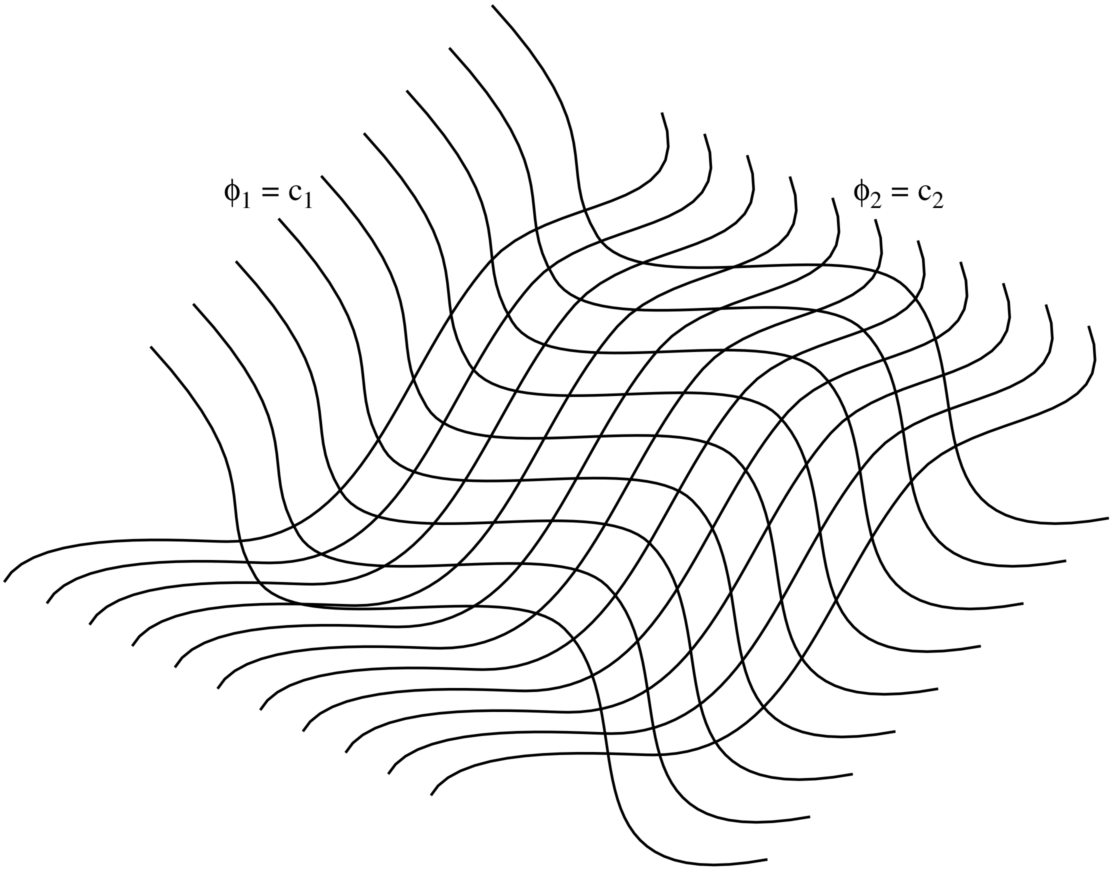


Abbildung 1.11

Zur Erinnerung: Bei der eindimensionalen Wellengleichung $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$, siehe Abschnitt 1.1.3.1, hat man die Charakteristiken $\varphi_1(x, t) := x - ct$ sowie $\varphi_2(x, t) := x + ct$. Die Transformation $\xi := \varphi_1$ und $\eta := \varphi_2$ führte auf die Form $u_{\xi\eta} = 0$.

Die Funktionen φ_1, φ_2 sind erste Integrale der gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$y' = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a}.$$

Wir führen die neuen unabhängigen Variablen ein

$$z := \varphi_1(x,y), \qquad w := \varphi_2(x,y)\,.$$

Nun transformiert man die Ausgangsdifferentialgleichung (1.33) auf die neuen Koordinaten z und w:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\left[a\Big(\frac{\partial z}{\partial x}\Big)^2 + 2b\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} + c\Big(\frac{\partial z}{\partial y}\Big)^2\right]\\
+2&\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial w}\left[a\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y} + b\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial x} + c\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial y}\right]\\
+&\frac{\partial^2 u}{\partial w^2}\left[a\Big(\frac{\partial w}{\partial x}\Big)^2 + 2b\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y} + c\Big(\frac{\partial w}{\partial y}\Big)^2\right] + \ldots = 0\,.
\end{aligned}$$

Nach der Definition von φ_1, φ_2 verschwinden die Koeffizienten von $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ und $\frac{\partial^2 u}{\partial w^2}$. Nach Division durch den Koeffizienten von $\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial w}$ erhält man die Form

$$u_{zw} + \ldots = 0. \tag{1.36}$$

Mit $p := z + w$ und $q := z - w$ erhält man

$$u_{pp} - u_{qq} + \ldots = 0$$

eine Reduktion auf Normalenform in dem betrachteten Gebiet Ω.

Der parabolische Fall: $\quad b^2 - ac = 0$.
Man hat nur eine Pfaffsche Form

$$a dy - 2b dx = 0$$

mit genau einer reellen Charakteristik

$$\varphi(x,y) = c, \qquad d\varphi \neq 0 \quad \text{(lineare Unabhängigkeit!)}.$$

Man führt nun wie bei dem hyperbolischen Fall neue Koordinaten ein:

$$z := \varphi(x,y), \qquad w := \psi(x,y),$$

wobei ψ beliebig gewählt ist, allerdings so daß die Differentiale $d\psi, d\varphi$ linear unabhängig sind. Wie bei dem hyperbolischen Fall transformiert man nun die Ausgangsdifferentialgleichung auf die neuen Koordinaten z und w:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\left[a\Big(\frac{\partial z}{\partial x}\Big)^2 + 2b\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} + c\Big(\frac{\partial z}{\partial y}\Big)^2\right]\\
+&\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial w}\left[a\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y} + b\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial x} + c\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial y}\right]\\
+&\frac{\partial^2 u}{\partial w^2}\left[a\Big(\frac{\partial w}{\partial x}\Big)^2 + 2b\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y} + c\Big(\frac{\partial w}{\partial y}\Big)^2\right] + \ldots = 0
\end{aligned}$$

Der Koeffizient von $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ verschwindet nach der Definition von z. Der Koeffizient von $\frac{\partial^2 u}{\partial w^2}$ darf wegen der linearen Unabhängigkeit von $d\varphi, d\psi$ nicht verschwinden. Die noch vorhandene Freiheit bei der Wahl von ψ kann man dazu benützen, den Koeffizienten von $\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial w}$ verschwinden zu lassen.
Nach Division durch den Koeffizienten von $\frac{\partial^2 u}{\partial w^2}$ gilt

$$u_{ww} + \ldots = 0. \tag{1.37}$$

Der elliptische Fall: $b^2 - ac < 0$.
In diesem Fall hat man zwei Pfaffsche Formen

$$a dy - (b - i\sqrt{ac - b^2}) dx = 0\,,$$

$$a dy - (b + i\sqrt{ac - b^2}) dx = 0\,.$$

Die erste Gleichung besitze dann ein erstes Integral der Form

$$\varphi_1(x, y) + i\varphi_2(x, y) = c\,,$$

mit reellen Funktionen φ_1, φ_2 und einer Konstante $c \in \mathbb{C}$. Aus $d\varphi_1 \neq 0$ folgt $d\varphi_2 \neq 0$ und beide Differntiale sind linear unabhängig. Wir nehmen wieder eine Koordinatentransformation vor,

$$\begin{aligned} z &:= \varphi_1(x, y) + i\varphi_2(x, y)\,, \\ \overline{z} &:= \varphi_1(x, y) - i\varphi_2(x, y)\,. \end{aligned}$$

Wie bei dem hyperbolischen Fall verschwinden bei Ausführung der Koordinatentransformation die Koeffizienten von $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ und $\frac{\partial^2 u}{\partial \overline{z}^2}$. Division durch den verbleibenden Koeffizienten führt zu:

$$u_{z\overline{z}} + \ldots = 0. \tag{1.38}$$

Eine weitere Möglichkeit liegt in der folgenden Transformation:

$$p := \varphi_1(x, y), \qquad q := \varphi_2(x, y).$$

Führt man diese Transformation aus, so verschwindet der Koeffizient von $\frac{\partial^2 u}{\partial p \partial q}$. Die Koeffizienten von $\frac{\partial^2 u}{\partial q^2}$ und $\frac{\partial^2 u}{\partial p^2}$ sind gleich.
Nach Division durch diesen Koeffizienten ergibt sich

$$u_{pp} + u_{qq} + \ldots = 0.$$

Betrachtet man die Gleichungen (1.36), (1.37), (1.38) ohne Terme niederer Ordnung, so kann man jeweils lokal die Form der Lösung angeben.
Im hyperbolischen Fall folgt aus der Gleichung

$$u_{zw} = 0$$

für die Lösung

$$u(z,w) = f(z) + g(w).$$

Im parabolischen Fall mit der Gleichung

$$u_{ww} = 0$$

ist die Lösung von der Form

$$u(z,w) = f(z) + g(z)w.$$

In diesen Gleichungen sind die Funktionen f, g jeweils beliebige Funktionen einer Variablen. Im elliptischen Fall haben wir, falls keine Terme niederer Ordnung vorhanden sind, die Gleichung

$$u_{z\overline{z}} = 0.$$

Für die Lösung ergibt sich

$$u = f(z) + g(\overline{z})\,,$$

wobei f und g jeweils lokal analytische Funktionen sind.

1.3.3 Elliptizität, Hyperbolizität, Parabolizität allgemeiner linearer Differentialgleichungen und Systeme

Sei

$$A := \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x) D^\alpha$$

ein linearer Differentialoperator über einer Teilmenge Ω des $\mathbb{R}^n$.
Wir betrachten die Gleichung

$$Au = f.$$

Definition 1.3.3. Gegeben sei der Operator A. Die Multilinearform

$$a_m(x;\xi) := \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x)\xi^\alpha, \qquad \xi \in \mathbb{R}^n\,,\ \xi^\alpha := (\tfrac{1}{i}\xi_1)^{\alpha_1} \left(\tfrac{1}{i}\xi_2\right)^{\alpha_2} \cdots (\tfrac{1}{i}\xi_n)^{\alpha_n}$$

heißt **(Haupt-)Symbol** des Operators A.

Bemerkung. Für m=2 unterscheidet sich diese Form von der Bilinearform (1.31) nur im Vorzeichen. Man kann wieder zeigen, daß unter entsprechenden Transformationen der Wert des Symbols unverändert bleibt.

Definition 1.3.4. Sei $x \in \Omega$ gegeben. Der Operator A und die Differentialgleichung $Au = f$ heißen **elliptisch** an der Stelle x, wenn für alle $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ das Hauptsymbol $a_m(x,\xi)$ nicht verschwindet.

Ist dies für alle $x \in \Omega$ erfüllt, so heißen der Operator A und die Gleichung $Au = f$ elliptisch. Handelt es sich bei der Gleichung $Au = f$ um ein n-dimensionales System von partiellen Differentialgleichungen und ist als Lösung u eine vektorwertige Funktion mit Bild in dem $\mathbb{R}^n$ gesucht, so sind die Koeffizienten a_α und auch das Symbol $a_m(x;\xi)$ $N \times N$-Matrizen. Man nennt den Operator A bzw. die Gleichung $Au = f$ elliptisch im Punkt x, wenn für alle $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ die Determinante von $a_m(x;\xi)$ nicht verschwindet.

Das Konzept läßt sich noch verallgemeinern, etwa indem man für unterschiedliche Komponenten der Differentialgleichung unterschiedliche Ordnungen betrachtet.

Definition 1.3.5. Sei wieder $x \in \Omega$ gegeben. Der Operator A und die Gleichung $Au = f$ heißen **hyperbolisch** an der Stelle x in Richtung ν, wenn das Symbol $a_m(x,\nu)$ nicht verschwindet, d.h. ν ist keine charakteristische Richtung, und weiter für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$, die nicht parallel ν sind, die Wurzeln λ der Gleichung

$$a_m(x, \xi + \lambda\nu) = 0 \tag{1.39}$$

reell sind.
Der Operator A und die Gleichung $Au = f$ heißen **streng hyperbolisch** an der Stelle x, wenn sie dort hyperbolisch sind und die Wurzeln der Gleichung (1.39) alle verschieden sind.

Analog spricht man von (strenger) Hyperbolizität des Operators A und der Gleichung $Au = f$, wenn die vorher genannten Bedingungen für alle $x \in \Omega$ erfüllt sind.
Im Fall eines N-dimensionalen Systems und einer Lösungsfunktion u mit Bild im $\mathbb{R}^n$, spricht man Hyperbolizität im Punkt x in der Richtung ν, wenn die Determinante von $a_m(x,\nu)$ nicht verschwindet und für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$, die nicht parallel sind, die Wurzeln der Gleichung

$$\det(a_m(x, \xi + \lambda\nu)) = 0$$

reell sind. Sind diese Wurzeln alle verschieden, so liegt strenge Hyperbolizität vor.
Speziell werden häufig Systeme 1. Ordnung betrachtet, in denen die Zeit ausgezeichnet ist.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} A_j \frac{\partial u}{\partial x_j} + Bu + f = 0\,.$$

Die Koeffizienten A_j, B sind $N \times N$-Matrizen, f eine vektorwertige Funktion mit Bild im $\mathbb{R}^n$. Die Lösungsfunktion u ist ebenfalls vektorwertig mit Bild im $\mathbb{R}^n$. Die vorangegangene Gleichung ist genau dann hyperbolisch, wenn für beliebige $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ die Matrix $\sum_{j=1}^n \xi_j A_j$ nur reelle Eigenwerte besitzt. Sie ist genau dann streng hyperbolisch, wenn diese Eigenwerte zusätzlich paarweise verschieden sind.

Definition 1.3.6. Wir betrachten die Gleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{|\alpha| \le 2b} a_\alpha(t,x) D_x^\alpha u + f(x,t)\,.$$

Diese Gleichung heißt **2b-parabolisch**, wenn für alle $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

$$Re \sum_{|\alpha|=2b} a_\alpha(t,x)\xi^\alpha < 0$$

gilt. Für den Spezialfall $b = 1$ fällt diese Definition mit dem Spezialfall aus Definition 1.3.1.*ii)* zusammen.

Kapitel 2

Elliptische Gleichungen

Wir betrachten Operatoren der Form

$$A = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha \,,$$

deren Hauptsymbol $a_m(x, \xi)$ für alle $x \in \Omega$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, im skalarwertigen Fall nicht verschwindet bzw. im matrixwertigen Fall invertierbar ist, für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\xi \neq 0$.

Es wird dann eine Gleichung der Form

$$Au = f$$

untersucht.

Die einfachsten Gleichungen dieser Art sind

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \;+\; \sum_{j=1}^{n} b_j(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \;+\; c(x)u \;=\; f$$

bzw.

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + \sum_{j=1}^{n} b_j(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \;+\; c(x)u \;=\; f \,.$$

Dies sind lineare partielle Differentialgleichungen 2. Ordnung. In Matrixform lauten beispielsweise die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_x & 0 \\ 0 & \partial_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \;=\; 0 \,.$$

Wir beschränken uns jetzt auf den einfachsten Fall einer linearen partiellen Differentialgleichung 2. Ordnung vom elliptischen Typ. Wir betrachten

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 \,, && \text{Laplace-Gleichung} \,, \\ \Delta u &= f \,, && \text{Poisson-Gleichung} \,. \end{aligned}$$

Eine wichtige Rolle spielen weiterhin die sogenannten harmonischen Funktionen.

Definition 2.0.1. Eine Funktion $u \in C^2(\Omega)$ mit

$$\Delta u = 0 \quad \text{in} \quad \Omega \subset \mathbb{R}^n$$

heißt harmonisch.

Mit solchen Funktionen wollen wir uns als nächstes befassen.

2.1 Fundamentallösungen für den Laplace-Operator

Wir betrachten wie immer ein beschränktes Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und fixieren einen Punkt $x_0 \in \Omega$. Wir fragen dann nach Lösungen für die Laplace-Gleichung der Form

$$E(x; x_0) = f(|x - x_0|).$$

Wir setzen $r = |x - x_0| := ||x - x_0||_2$. Damit ergibt sich für den Laplace-Operator, angewandt auf E:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial x_j} &= \frac{\partial E}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x_j} = f' \cdot \frac{x_j - x_{0j}}{|x - x_0|}, \\ \frac{\partial E^2}{\partial x_j^2} &= f''(r)\frac{(x_j - x_{0j})^2}{|x - x_0|^2} + f'(r)\frac{|x - x_0| - \frac{(x_j - x_{0_j})^2}{|x - x_0|}}{|x - x_0|^2}, \end{aligned}$$

für $j = 1, \ldots, n$.
Es folgt (durch Summation)

$$\Delta E = f''(r) + f'(r)\frac{n-1}{r}.$$

Wir müssen demnach eine Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$f''(r) + \frac{n-1}{r}f'(r) = 0$$

suchen. Mit $g := f'$ ergibt sich

$$g'(r) + \frac{n-1}{r}g(r) = 0.$$

Neben der uninteressanten konstanten Lösung ergibt sich:

$$f(r) = C_1(n)\, r^{2-n} + C_2 \qquad \text{für } n \geq 3$$

und

$$f(r) = C_1(n) \ln r + C_2 \qquad \text{für } n = 2$$

Dabei ist C_1 beliebig, C_2 spielt bei unseren Betrachtungen keine Rolle und wird Null gesetzt.

Wir wählen nun C_1 wie folgt:

$$C_1 = \frac{1}{(n-2)\sigma_{n-1}} \qquad \text{für } n \geq 3$$

bzw.

$$C_1 = -\frac{1}{2\pi} \qquad \text{für } n = 2\,.$$

Dabei ist

$$\sigma_{n-1} = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$$

die Oberfläche der Einheitskugel im $\mathbb{R}^n$ und Γ die wohlbekannte Gamma-Funktion.

Die Funktionen

$$E(x;x_0) = \begin{cases} \frac{1}{(n-2)\sigma_{n-1}}|x-x_0|^{2-n} & ,\ n \geq 3\,, \\ \\ -\frac{1}{2\pi}\ln|x-x_0| & ,\ n = 2\,, \end{cases}$$

heißen Singularitäten-Lösungen der Laplace-Gleichung. Wir nennen sie auch spezielle Fundamentallösungen.

Wir betrachten jetzt immer wieder die Greensche Formel

$$\int\limits_D (v\Delta w - w\Delta v)dx = \int\limits_{\partial D} (v\frac{\partial w}{\partial n} - w\frac{\partial v}{\partial n})ds\,, \tag{2.1}$$

wobei $v, w \in C^2(\overline{D})$ und $D \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet ist mit glattem Rand ∂D.

Es sei wieder $x_0 \in \Omega$. Wir wollen eine Darstellung $u(x_0)$ für eine beliebige Funktion $u \in C^2(\overline{\Omega})$ mit Hilfe der Singularitäten-Lösungen der Laplace-Gleichung finden. Wir setzen dazu in der Greenschen Formel $v(x) := E(x;x_0)$ und $w(x) := u(x)$.

Sei $K_\varepsilon(x_0)$ eine Kugel um x_0 mit Radius $\varepsilon > 0$ und der Eigenschaft

$$\overline{K}_\varepsilon(x_0) \subset \Omega\,.$$

Setze $D_\varepsilon := \Omega \setminus \overline{K}_\varepsilon(x_0)$, dann ist

$$\int\limits_{D_\varepsilon} \Big(E(x;x_0)\Delta u - u\Delta E(x;x_0)\Big)dx = \int\limits_{\partial D_\varepsilon} \Big(E\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial E}{\partial n}\Big)ds\,.$$

Wir wollen jetzt den Grenzwert für $\varepsilon \to 0$ betrachten.
Wir analysieren die Terme der Reihe nach für $\varepsilon \to 0$. Es gilt:

(i)
$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{D_\varepsilon} E(x;x_0)\Delta u\,dx = \int\limits_{\Omega} E(x;x_0)\Delta u\,dx\,,$$

denn aus

$$\int\limits_{\Omega} E(x;x_0)\Delta u\,dx = \int\limits_{D_\varepsilon} E(x;x_0)\Delta u\,dx + \int\limits_{\overline{K}_\varepsilon(x_0)} E(x;x_0)\Delta u\,dx$$

folgt durch Umschreibung:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{D_\varepsilon} E(x;x_0)\Delta u dx = \int\limits_{\Omega} E(x;x_0)\Delta u dx - \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\overline{K}_\varepsilon(x_0)} E(x;x_0)\Delta u\,dx\,.$$

Wir zeigen für $n = 2$, daß $\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\overline{K}_\varepsilon(x_0)} E(x;x_0)\Delta u\,dx = 0$. Da nach Annahme $\Delta u \in C\left(\overline{K}_\varepsilon(x_0)\right)$, gilt

$$|\Delta u| \le M$$

in $\overline{K}_\epsilon(x_0)$ mit einer von ε unabhängigen Konstanten M. Daraus ergibt sich nach Aufspalten der Integration

$$\begin{aligned}
\left|\int_{|x-x_0|\le\varepsilon} E(x;x_0)\Delta u\,dx\right| &= \left|\int\limits_0^\varepsilon \int_{|x-x_0|=r} -\frac{1}{2\pi}\ln r\Delta u\,ds\,dr\right| \\
&= \left|-\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\varepsilon \ln r\left(\int_{|x-x_0|=r}\Delta u\,ds\right)dr\right| \\
&\le \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\varepsilon \left|\ln\frac{1}{r}\left(\int_{|x-x_0|=r}\Delta u\,ds\right)\right| dr \\
&\le \frac{1}{2\pi}M\,2\pi\int\limits_0^\varepsilon |r\,\ln\frac{1}{r}|\,dr \le M\,\delta\varepsilon
\end{aligned}$$

da $|r\,\ln\frac{1}{r}| \le \delta$ für $r \le \varepsilon$. Für $\varepsilon \to 0$ folgt $M\,\delta\varepsilon \to 0$.

Falls $n \ge 3$ ergibt sich die Aussage analog.

(ii)
$$\int\limits_{D_\varepsilon} u\Delta E(x;x_0)\,dx = 0\,,$$

da E harmonisch ist, also $\Delta E = 0$.

(iii)
$$\int\limits_{\partial D_\varepsilon} E(x;x_0)\frac{\partial u}{\partial n}ds = -\int\limits_{\partial K_\varepsilon} E(x;x_0)\frac{\partial u}{\partial n}ds + \int\limits_{\partial\Omega} E(x;x_0)\frac{\partial u}{\partial n}ds\,.$$

Es gilt:

$$\int\limits_{\partial K_\varepsilon} E(x;x_0)\frac{\partial u}{\partial n}ds = \begin{cases} \frac{1}{(n-2)\sigma_{n-1}} \int\limits_{\partial K_\varepsilon} \frac{1}{|x-x_0|^{n-2}} \frac{\partial u}{\partial n}\, ds\,, & n \geq 3\,, \\ \\ \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\partial K_\varepsilon} \ln \frac{1}{|x-x_0|} \frac{\partial u}{\partial n}\, ds\,, & n = 2\,. \end{cases}$$

Daraus ergeben sich die Abschätzungen

$$\left|\int_{\partial K_\varepsilon} \frac{1}{|x-x_0|^{n-2}} \frac{\partial u}{\partial n}\, ds\right| \leq \frac{M}{\varepsilon^{n-2}} \int\limits_{\partial K_\varepsilon} ds = \frac{M}{\varepsilon^{n-2}}\, \sigma_{n-1}\, \varepsilon^{n-1}$$

und

$$\left|\int_{\partial K_\varepsilon} \ln \frac{1}{|x-x_0|} \frac{\partial u}{\partial n}\, ds\right| \leq \left|\ln\frac{1}{\varepsilon}\right| M \int\limits_{\partial K_\varepsilon} ds = \varepsilon \left|\ln\frac{1}{\varepsilon}\right| 2\pi M\,.$$

Beachte, daß M eine Schranke für $\frac{\partial u}{\partial n}$ ist. Für $\varepsilon \to 0$ konvergieren demnach beide Integrale gegen Null. Bei den Abschätzungen wurde außerdem die Stetigkeit von $\frac{\partial u}{\partial n}$ ausgenutzt.

Schließlich

$$(iv) \qquad \int\limits_{\partial K_\varepsilon} u\,\frac{\partial E(x;x_0)}{\partial n}\, ds = \begin{cases} \frac{1}{(n-2)\sigma_{n-1}} \int\limits_{\partial K_\varepsilon} u\, \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{|x-x_0|^{n-2}}\right) ds\,, & n \geq 3\,, \\ \\ \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\partial K_\varepsilon} u\, \frac{\partial}{\partial n}\left(\ln\frac{1}{|x-x_0|}\right) ds\,, & n = 2\,. \end{cases}$$

Wir betrachten die Normalenableitungen

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{|x-x_0|^{n-2}}\right) = \nabla\left(\frac{1}{|x-x_0|^{n-2}}\right) \cdot \vec{n}\,,$$

mit

$$\nabla\left(\frac{1}{|x-x_0|^{n-2}}\right) = (2-n)|x-x_0|^{-n}(x-x_0)$$

und

$$\vec{n} = -\frac{x-x_0}{|x-x_0|}\,.$$

Insgesamt also

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{|x-x_0|^{n-2}}\right) = -(2-n)|x-x_0|^{1-n}$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{1}{(n-2)\sigma_{n-1}} \int\limits_{\partial K_\varepsilon} u\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{|x-x_0|^{n-2}}\, ds &= \frac{1}{\varepsilon^{n-1}\sigma_{n-1}} \int\limits_{\partial K_\varepsilon} u(x)\, dx \\ &\leq \frac{\varepsilon^{n-1}\sigma_{n-1}}{\varepsilon^{n-1}\sigma_{n-1}} \max_{x\in\partial K_\varepsilon} u(x) \longrightarrow u(x_0) \text{ für } \varepsilon \to 0\,, \end{aligned}$$

(analog für $\geq \min\limits_{x\in\partial K_\varepsilon} u(x)$).
Also gilt für $n \geq 3$:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{(n-2)\sigma_{n-1}} \int\limits_{\partial K_\varepsilon} u \, \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{|x-x_0|^{n-2}}\right) ds \;=\; u(x_0)\,.$$

Im Falle $n = 2$ ergibt sich entsprechend

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\ln \frac{1}{|x-x_0|}\right) \;=\; \nabla\left(\ln|x-x_0|^{-1}\right)\cdot\vec{n} \;=\; -\nabla\left(\ln|x-x_0|\right)\cdot\vec{n} \;=$$

$$-\frac{1}{|x-x_0|}\,\frac{(x-x_0)}{|x-x_0|}\cdot\left(-\frac{(x-x_0)}{|x-x_0|}\right) \;=\; \frac{1}{|x-x_0|}\,,$$

also

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\partial K_\varepsilon} u \frac{\partial}{\partial n}\ln\frac{1}{|x-x_0|}\,ds \;=\; \frac{1}{2\pi\varepsilon}\int\limits_{\partial K_\varepsilon} u(x)\,ds \;\to\; u(x_0)$$

für $\varepsilon \to 0$.

Man erhält zusammenfassend für alle $n \geq 2$:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\partial K_\varepsilon} u\,\frac{E(x;x_0)}{\partial n}\,ds \;=u(x_0)\,.$$

Aus (i)-(iv) erhalten wir dann insgesamt mit Hilfe der Greenschen Identitäten

$$0 = \lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\int\limits_{D_\varepsilon}\Big(E(x;x_0)\Delta u - u\Delta E(x;x_0)\Big)\,dx \;-\; \int\limits_{\partial D_\varepsilon}\left(E(x;x_0)\frac{\partial u}{\partial n} - u\,\frac{\partial E(x;x_0)}{\partial n}\right)\right\} \;=$$

$$= \int\limits_{\Omega} E(x;x_0)\Delta u\,dx - \int\limits_{\partial\Omega}\left(E(x;x_0)\frac{\partial u}{\partial n} - u\,\frac{\partial E(x;x_0)}{\partial n}\right)ds \;+\; u(x_0)\,.$$

Man hat also für jedes $x_0 \in \Omega$ die Darstellung:

$$u(x_0) \;=\; \int\limits_{\partial\Omega} E(x;x_0)\frac{\partial u}{\partial n}\,ds \;-\; \int\limits_{\partial\Omega} u\,\frac{\partial E(x;x_0)}{\partial n}\,ds \;-\; \int\limits_{\Omega} E(x;x_0)\Delta u\,dx\,, \tag{2.2}$$

dabei ist das erste Integral von (2.2) ein sog. Einfachschicht-Potential, das zweite ein Doppelschicht-Potential und das Integral über Ω ein Volumenpotential.

Zusammenfassend läßt sich sagen:

Satz 2.1.1. Jede Funktion $u \in C^2(\bar{\Omega})$ besitzt eine Darstellung als Summe eines Einfachschicht-, Doppelschicht-und Volumenpotentials.

Bemerkung 2.1.2. Für die Aussage des vorherigen Satzes würde auch $u \in C^2(\Omega)$ ausreichen.

Ist nun u eine harmonische Funktion, so folgt aus Darstellung (2.2) unmittelbar

$$u(x_0) \;=\; \int\limits_{\partial\Omega} E(x;x_0)\frac{\partial u}{\partial n}\,ds \;-\; \int\limits_{\partial\Omega} u\,\frac{\partial E(x;x_0)}{\partial n}\,ds\,. \tag{2.3}$$

Will man das Dirichlet-Problem für die Laplace-Gleichung

$$\begin{aligned} \Delta u \;&=\; h \qquad && \text{in } \Omega\,, \\ u \;&=\; f \qquad && \text{auf } \partial\Omega\,, \end{aligned}$$

lösen, so folgt aus (2.2) die Darstellung

$$u(x) \;=\; \int\limits_{\partial\Omega} E(y;x)\frac{\partial u(y)}{\partial n}\,ds_y \;-\; \int\limits_{\partial\Omega} f(y)\frac{\partial E(y;x)}{\partial n}\,ds_y \;-\; \int\limits_{\Omega} E(y;x)\,h(y)\,dy\,,$$

wobei $\frac{\partial u(y)}{\partial n}$ aus dem ersten Integral nicht bekannt ist.
Wir würden also zur Darstellung der Lösung u des Dirichlet-Problems für die Laplace-Gleichung eine Darstellung der Form (2.2) benötigen, aber ohne das Einfachschichtpotential.
Wir verallgemeinern (2.2). Sei dazu $g \in C^2(\bar{\Omega})$ eine harmonische Funktion und $u \in C^2(\bar{\Omega})$ beliebig. Die Greensche Formel (2.1) lautet dann

$$\int\limits_{\Omega} g\Delta u\,dx \;=\; \int\limits_{\partial\Omega} \left(g\frac{\partial u}{\partial n} \;-\; u\,\frac{\partial g}{\partial n} \right) ds$$

bzw.

$$0 \;=\; -\int\limits_{\partial\Omega} \left(g\frac{\partial u}{\partial n} \;-\; u\,\frac{\partial g}{\partial n} \right) ds \;+\; \int\limits_{\Omega} g\,\Delta u\,dy\,.$$

Wir addieren dies zu (2.2) und erhalten:

$$u(x) = \int\limits_{\partial\Omega} \Big(E(y;x) - g \Big)\,\frac{\partial u}{\partial n} ds_y - \int\limits_{\partial\Omega} u\,\frac{\partial}{\partial n}\Big(E(y;x) - g \Big) ds_y - \int\limits_{\Omega} \Delta u \Big(E(y;x) - g \Big) dy\,. \tag{2.4}$$

Wir haben jetzt noch die Freiheit, g zu wählen. Dazu wählen wir für jedes $x \in \Omega$ eine Funktion $g \in C^2(\bar{\Omega})$, die dem folgenden Randwertproblem genügt:

$$\begin{aligned} \Delta_y g(\cdot\,;x) \;&=\; 0 \qquad && \text{für } y \in \Omega\,, \\ g(\cdot\,;x) \;&=\; E(\cdot;x) \qquad && \text{auf } \partial\Omega\,. \end{aligned}$$

Aufgrund der gewählten Randbedingung fällt das erste Integral auf der rechten Seite von (2.4) weg. Man erhält nun für das Dirichlet-Problem folgende Lösungsformel:

$$u(x) = -\int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial n_y} G(y;x)\right) f(y)\, ds_y - \int_{\Omega} G(y;x) h(y)\, dy\,,$$

wobei

$$G(y;x) := E(y;x) - g(y;x)\,.$$

Die Funktion G heißt Greensche Funktion des Dirichlet-Problems für den Laplace-Operator. Die Konstruktion solcher Funktionen wird uns noch beschäftigen.

Bemerkung 2.1.3.

(i) Die Normierung der Singularitätenlösungen hat sich in Hinblick auf die Grenzübergänge als praktisch ergeben.

(ii) Die Normierung erlaubt auch noch folgende Interpretation: Die Singularitätenlösung $E(\cdot;x_0)$ ist das Potential, das eine Punktladung, an der Stelle $x_0 \in \Omega$ gelegen, erzeugt. Denn (2.2) ist gerade die schwache Formulierung von

$$-\Delta E(\cdot;x_0) = \delta(x_0)\,.$$

Hierbei ist $\delta(x_0)$ das Diracsche Delta-Funktional. Sei nämlich $u \in C_0^\infty(\Omega)$ eine beliebige Testfunktion, dann gilt

$$-\int_{\Omega} \Delta E(y;x_0) u(y)\, dy = u(x_0)$$

oder

$$-\int_{\Omega} \Delta u(y) E(y;x_0)\, dy = u(x_0)\,,$$

nach (2.2).

Bemerkung 2.1.4. Allgemein heißen Funktionen der Form

$$\gamma(y;x) := E(y;x) + g(y;x)\,,$$

wobei $g(y;\cdot) \in C^2(\bar{\Omega})$ und harmonisch ist, Grundlösungen der Potentialgleichung.

2.2 Mittelwertsätze und das Maximumprinzip für harmonische Funktionen

2.2.1 Mittelwertsätze

Wir gehen aus von der Greenschen Formel

$$\int\limits_{\Omega} (v\Delta w - w\Delta v)\, dx = \int\limits_{\partial\Omega} \left(v\frac{\partial w}{\partial n} - w\frac{\partial v}{\partial n} \right) ds$$

und betrachten eine beliebige harmonische Funktion $u \in C^2(\bar{\Omega})$.
Setze

$$v := u\,,\; w = 1\,,$$

dann gilt

$$\int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}\, ds = 0\,.$$

Wir formulieren den 1. Mittelwertsatz für harmonische Funktionen.

Satz 2.2.1. (1. Mittelwertsatz) Es sei $u \in C^2(\bar{\Omega})$ eine beliebige harmonische Funktion und $\Omega := \{x \in \mathbb{R}^n |\, |x - x_0| < R\}\,, n \geq 1$ und R eine positive Zahl. Dann gilt:

$$u(x_0) = \frac{1}{\sigma_{n-1} R^{n-1}} \int\limits_{|x-x_0|=R} u(x)\, ds\,.$$

Beweis. Wir benutzen Formel (2.3). Es gilt:

$$u(x_0) = -\int_{|x-x_0|=R} u\,\frac{\partial}{\partial n} E(x; x_0)\, ds = \frac{1}{\sigma_{n-1} R^{n-1}} \int_{|x-x_0|=R} u(x)\, ds\,.$$

■

Satz 2.2.2. (2. Mittelwertsatz) Es sei $u \in C^2(\bar{\Omega})$ eine beliebige harmonische Funktion und $\Omega := \{x \in \mathbb{R}^n |\, |x - x_0| < R\}$. Dann gilt:

$$u(x_0) = \frac{1}{V_n\, R^n} \int\limits_{|x-x_0|\leq R} u(x)\, dx\,.$$

V_n ist das Volumen der Einheitskugel im $\mathbb{R}^n, V_n = \frac{\sigma_{n-1}}{n}$.

Beweis. Nach Satz 2.2.1 gilt für alle $0 < r \leq R$, daß

$$u(x_0) = \frac{1}{\sigma_{n-1} r^{n-1}} \int\limits_{|x-x_0|=r} u(x)\, ds\,.$$

Multiplikation mit r^{n-1} und Integration nach r ergibt

$$\int_0^R u(x_0) r^{n-1}\,dr \;=\; \frac{1}{\sigma_{n-1}} \int_0^R \int_{|x-x_0|=r} u(x)\,ds\,dr\,.$$

Daraus folgt

$$u(x_0) \;=\; \frac{n}{\sigma_{n-1} R^n} \int_{|x-x_0|\le R} u(x)\,dx \;=\; \frac{1}{V_n\,R^n} \int_{|x-x_0|\le R} u(x)\,dx\,.$$

■

Die Mittelwerteigenschaft einer Funktion $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ ist auch hinreichend dafür, daß u harmonisch ist.

Lemma 2.2.3. Es gilt: Sei $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ und gelte

$$u(x_0) \;=\; \frac{1}{V_n\,R^n} \int_{|x-x_0|\le R} u(x)\,dx$$

für alle $x_0 \in \Omega$ und $\bar{K}_R(x_0) \subset \Omega$. Dann ist u harmonisch.

Beweis. Sei $x_0 \in \Omega$ und $\bar{K}_R(x_0) \in \Omega$. Ferner sei v Lösung des Randwertproblems

$$\begin{aligned} \Delta v \;&=\; 0 \qquad && \text{in } K_R(x_0)\,,\\ v = u & && \text{auf } \partial K_R(x_0)\,. \end{aligned}$$

Eine solche Lösung gibt es, wie wir später noch sehen werden. Setze $w := u - v$, dann

$$w|_{\partial K_R(x_0)} \;=\; 0\,.$$

Daraus folgt, daß $w = 0$ gilt und somit

$$u \;=\; v \qquad \text{in } K_R(x_0)\,.$$

(Dies läßt sich später (Satz 2.2.9) mit dem Maximumprinzip rechtfertigen.)
Das gilt für jede Kugel in Ω, also ist u in Ω harmonisch. ■

Bemerkung 2.2.4. Jede harmonische Funktion u muß die Bedingung

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}\,ds \;=\; 0$$

erfüllen.
Dies wird uns bei der Lösung des Neumann-Problems

$$\begin{aligned} \Delta u \;&=\; 0 \qquad && \text{in } \Omega\,,\\ \frac{\partial u}{\partial n} \;&=\; g && \text{auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

wieder begegnen.

2.2.2 Das Maximumprinzip für harmonische Funktionen

Eine unmittelbare Folgerung aus dem 2. Mittelwertsatz für harmonische Funktionen ist

Satz 2.2.5. (Maximumprinzip) Sei u eine harmonische Funktion in Ω. Dann gilt: Ist $x_0 \in \Omega$ mit $u(x_0) \geq u(x)$ $\Big($bzw. $u(x_0) \leq u(x)\Big)$ für alle $|x - x_0| < \varepsilon$, dann folgt

$$u(x) = \text{const}$$

in der Zusammenhangskomponente von Ω, in der x_0 liegt.

Speziell gilt:
Falls $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt ist und $u \in C(\bar{\Omega})$, dann

$$\min_{x \in \partial\Omega} u(x) \leq u(x) \leq \max_{x \in \partial\Omega} u(x)$$

für alle $x \in \Omega$.

Beweis. Nach Satz 2.2.2 gilt

$$u(x_0) = \frac{1}{V_n\, \varepsilon^n} \int\limits_{|x - x_0| \leq \varepsilon} u(x)\, dx\,.$$

Wir nehmen an, es existiert ein $x \in K_\varepsilon(x_0)$ mit $u(x_0) > u(x)$. Dann erhalten wir

$$u(x_0) < \frac{1}{V_n\, \varepsilon^n} \int\limits_{|x - x_0| \leq \varepsilon} dx \quad u(x_0) = u(x_0)\,.$$

Dies ist aber ein Widerspruch. ∎

Wir wollen jetzt genauer untersuchen, wie sich die Funktion u an einer Maximumstelle auf dem Rand Ω verhält. Wir beweisen das berühmte

Lemma von Hopf 2.2.6. Sei $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ eine harmonische Funktion in $\Omega \in \mathbb{R}^n$, die in $x_0 \in \partial\Omega$ ihr Maximum annimmt. An Ω existiere im Punkt x_0 eine Tangentialebene. Ferner existiere

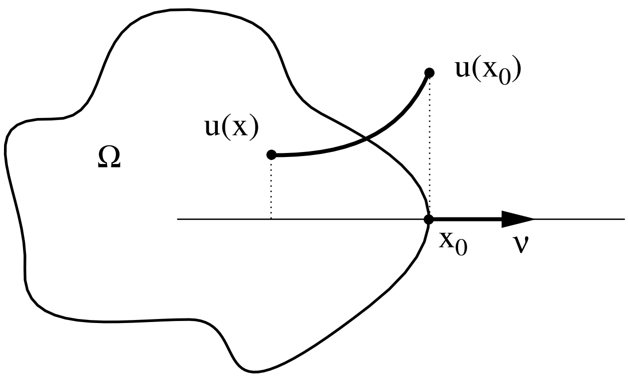
$$\left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{x = x_0} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \Big(u(x_0) - u(x_0 - \nu\varepsilon)\Big)\,.$$

Dann gilt:
Falls $u \not\equiv \text{const}$, dann folgt

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{x = x_0} > 0\,,$$

wobei der Einheitsvektor ν senkrecht zur Tangentialebene steht.

Skizze



$$\frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_{x=x_0} > 0$$

Abbildung 2.1

Beweis. Beweis für $\Omega = K_R(0)$. Wir setzen

$$w(x) = \begin{cases} |x|^{2-n} - R^{2-n} & \text{für } n \geq 3\,, \\ \ln R - \ln|x| & \text{für } n = 2\,. \end{cases}$$

Dann ist die Funktion

$$v(x) := u(x) + \varepsilon w(x)\,, \quad \varepsilon > 0\,,$$

harmonisch in $\frac{R}{2} < x < R$. D.h. aber, v nimmt sein Maximum auf dem Rand an. Aus dem Maximumprinzip, angewandt auf u in $\Omega = K_R(0)$, folgt andererseits

$$\max_{|x|=\frac{R}{2}} u(x) < u(x_0) \quad (da \quad x_0 \in \partial\Omega)$$

falls $u \not\equiv$ const. Somit gilt

$$v(x) < u(x_0) \qquad \text{auf } |x| = \tfrac{R}{2}\,,$$

für hinreichend kleines $\varepsilon > 0$.
Für $|x| = R$ gilt $v(x) = u(x)$ (aus der Definition von w).
Daraus folgt aber, dass v das Maximum ebenfalls bei x_0 annimmt. Also gilt

$$\frac{\partial v(x_0)}{\partial \nu} \geq 0$$

und

$$\frac{\partial u(x_0)}{\partial \nu} \geq -\varepsilon \frac{\partial w(x_0)}{\partial \nu} > 0\,.$$

■

2.2.3 Eindeutigkeit der klassischen Lösungen für das Dirichlet- und das Neumann-Problem

Wir betrachten das Dirichlet-Problem

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 \qquad \text{in } \Omega\,, \\ u &= \varphi \qquad \text{auf } \partial\Omega\,, \end{aligned}$$

sowie das Neumann-Problem

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 \qquad \text{in } \Omega\,, \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= \psi \qquad \text{auf } \partial\Omega\,, \end{aligned}$$

dabei sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, beschränkt.
Unter einer einer klassischen Lösung verstehen wir

$$u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})\,,$$

wobei im Fall des Neumann-Problems $\frac{\partial u}{\partial n}$ auf jedem Randpunkt existieren muß. Die Eindeutigkeit ist in beiden Fällen eine einfache Folgerung aus dem Maximumprinzip bzw. des Hopfschen Lemmas.

1. Das Dirichlet-Problem:
   Seien u_1, u_2 zwei Lösungen, dann folgt mit $v = u_1 - u_2$

   $$\begin{aligned} \Delta v &= 0 \qquad \text{in } \Omega\,, \\ v &= 0 \qquad \text{auf } \partial\Omega\,. \end{aligned}$$

   Aus dem Maximumprinzip folgt

   $$v(x) \equiv 0 \qquad \text{in } \bar{\Omega}\,,$$

   was gleichbedeutend mit der Eindeutigkeit der Lösung ist.

2. Das Neumann-Problem:
   Es seien wiederum u_1, u_2 zwei Lösungen, dann ergibt sich mit $v = u_1 - u_2$

   $$\begin{aligned} \Delta v &= 0 \qquad \text{in } \Omega\,, \\ \frac{\partial v}{\partial n} &= 0 \qquad \text{auf } \partial\Omega\,. \end{aligned}$$

   d.h. auch

   $$\frac{\partial v(x_0)}{\partial n} = 0$$

   im Maximumpunkt x_0. Somit ergibt sich (nach dem Lemma von Hopf)

   $$v(x) \equiv \text{const.}$$

   Zwei Lösungen unterscheiden sich hier also höchstens um eine Konstante.

Bemerkung 2.2.7.

(i) Die obigen Resultate gelten auch für die Poisson-Gleichung.

(ii) Beim Neumann-Problem ist u nicht beliebig; es muß

$$\int_{\partial\Omega} \psi ds = 0$$

gelten. (vgl. Bemerkung 2.2.4)

(iii) Beim Dirichlet-Problem erhält man aus dem Maximumprinzip unmittelbar die stetige Abhängigkeit von den Randdaten in der Supremumsnorm. Dagegen sind beim Neumann-Problem die Überlegungen etwas schwieriger.

2.2.4 Innere a-priori Abschätzungen

Nach Darstellung (2.3)

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} E(y;x)\frac{\partial u}{\partial n} ds_y - \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial E(y;x)}{\partial n} ds_y$$

für harmonische Funktionen u (wir haben die Argumente von E vertauscht, was aufgrund der Form von E erlaubt ist - wir werden darauf noch eingehen) erhält man sofort eine a-priori Abschätzung.

Sei dazu K eine kompakte Teilmenge von Ω und α ein beliebiger Multi-Index, dann gilt die innere a-priori Abschätzung:

$$\sup_{x\in K} |D^\alpha u(x)| \leq C\left\{\sup_{x\in\Omega} |u(x)| + \sum_{j=1}^{n} \sup_{\Omega} \left|\frac{\partial u}{\partial x_j}\right|\right\},$$

wobei $C = C(\alpha, K)$.

Wir können obige Abschätzung verschärfen. Es gilt:

Lemma 2.2.8. Sei $K \subset\subset \Omega$ eine kompakte Teilmenge von Ω und $\varepsilon < \operatorname{dist}(K, \partial\Omega)$. Sei ferner $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit

$$\operatorname{supp}\varphi = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n | \varphi(x) \neq 0\}} \subset K_\varepsilon(0),$$

φ kugelsymmetrisch, d.h. $\varphi(x) = f(r), |x| = r$ und es gelte

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\, dx = 1.$$

Dann gilt für jede harmonische Funktion u in Ω:

$$|D^\alpha u(x)| \le C(\alpha, K) \int_\Omega |u(y)| dy\,,$$

für alle $x \in K$.

Beweis. Aus dem 1. Mittelwertsatz ergibt sich

$$\begin{aligned}
u(x) &= u(x) \int_{K_\varepsilon(x)} \varphi(x-y)\,dy = u(x) \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x-y)\,dy = \\
&= u(x) \int_0^\infty \Big(\int_{|y-x|=r} f(r)\,ds_y \Big)\,dr = u(x) \int_0^\infty f(r)\sigma_{n-1}\, r^{n-1}\,dr = \\
&= \int_0^\infty f(r)\sigma_{n-1}\, r^{n-1}\, u(x)\,dr = \int_0^\infty f(r) \Big(\int_{|y-x|=r} u(y)\,ds_y \Big)\,dr = \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x-y)\,u(y)\,dy = \int_{K_\varepsilon(x)} \varphi(x-y)\,u(y)\,dy\,.
\end{aligned}$$

Wir dürfen jetzt unter dem Integral differenzieren,

$$D^\alpha u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} D_x^\alpha \varphi(x-y)\,u(y)\,dy\,,$$

also

$$\begin{aligned}
|D^\alpha u(x)| &\le \int_{\mathbb{R}^n} |D_x^\alpha \varphi(x-y)||u(y)| dy = \\
&= \int_{K_\varepsilon(x)} |D_x^\alpha \varphi(x-y)||u(y)| dy \le \\
&\le \sup_{y \in K_\varepsilon(x),\, x \in K} |D_x^\alpha \varphi(x-y)| \int_{K_\varepsilon(x)} |u(y)| dy \\
&=: C(\alpha, K) \int_{K_\varepsilon(x)} |u(y)| dy \le C(\alpha, K) \int_\Omega |u(y)| dy\,.
\end{aligned}$$

Dabei hängt ε vom Kompaktum K ab. ■

Satz 2.2.9. (Satz von Harnack). Sei $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge harmonischer Funktionen in Ω mit $\lim\limits_{k\to\infty} u_k = u$, gleichmäßig auf jeder kompakten Menge $K \subset \Omega$. Dann ist auch u in Ω harmonisch.

Beweis.

(i) u ist stetig auf Ω.

(ii) u_k harmonisch auf Ω $\forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow$ (Satz 2.2.1)

$$u_k(x_0) = \frac{1}{\sigma_{n-1}R^{n-1}} \int_{||x-x_0||=R} u_k(x)dx \qquad \forall k \in \mathbb{N}\,,\ \forall x_o \in \Omega\,,\ \bar{K}_R(x_0) \subset \Omega$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \qquad u(x_0) &= \lim_{k\to\infty} u_k(x_0) \qquad \text{nach Voraussetzung} \\ &= \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\sigma_{n-1}R^{n-1}} \int_{||x-x_0||=R} u_k(x)dx = \frac{1}{\sigma_{n-1}R^{n-1}} \int_{||x-x_0||=R} u(x)dx \end{aligned}$$

Dann ist u harmonisch in Ω. ■

Bemerkung 2.2.10. Sei $u \in C^2(\Omega)$ eine harmonische Funktion auf Ω mit $\sup\limits_{\Omega} |u| \leq M$. Dann gilt $\forall x_o \in \Omega\,,\ \forall \bar{K}_R(x_0) \subset \Omega:$

$$|D^\alpha u(x_0)| \leq \left(\frac{n\mathrm{e}}{R}\right)^{|\alpha|} \frac{|\alpha|!}{e} M\,,$$

für alle Multiindizes α der Länge $|\alpha|$.

Beweis.

Wir merken an, daß für jeden Multiindex α, $D^\alpha u$ harmonisch in Ω ist (Darstellungsformel). Dann gilt mit dem Satz von Gauß-Green $\forall x_0 \in \Omega\,, \forall \bar{K}_R(x_0) \subset \Omega\,, \forall\, 1 \leq i \leq n:$

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(x_0) = \frac{1}{V_n R^n} \int_{||x-x_0||\leq R} u_{x_i}(x)dx = \frac{1}{V_n R^n} \int_{||x-x_0||=R} u \frac{(y-x_0)_i}{||y-x_0||} ds_y$$

Da

$$\frac{|(y-x_0)_i|}{||y-x_0||} \leq 1 \qquad \text{und} \qquad \sigma_{n-1} = nV_n,$$

läßt sich abschätzen

$$\left|\frac{\partial u(x_0)}{\partial x_i}\right| \leq \frac{n}{\sigma_{n-1}R^n} M \int_{||x-x_0||=R} \frac{|(y-x_0)_i|}{||y-x_0||} ds_y \leq \frac{n}{\sigma_{n-1}R^n} M \sigma_{n-1} R^{n-1} = \frac{n}{R} M.$$

D.h. für $|\alpha| = 1$ ist die Aussage richtig!

<u>Vollständige Induktion:</u> Es gelte die Abschätzung

$$|D^\alpha u(x_0)| \leq \left(\frac{n\mathrm{e}}{R}\right)^{|\alpha|} \frac{|\alpha|!}{\mathrm{e}} M.$$

Wir zeigen, daß sie dann auch für $|\beta| = |\alpha| + 1$ gilt.
Sei β ein Multiindex mit $|\beta| = |\alpha| + 1$, dann

$$D^\beta u = \frac{\partial}{\partial x_i} D^\alpha u \qquad \text{für ein} \quad 1 \le i \le n.$$

Es sei $\tau \in (0,1)$, dann gilt mit dem 2. Mittelwertsatz und dem Satz von Gauß-Green

$$D^\beta u(x_0) = \frac{n}{\sigma_{n-1}(\tau R)^n} \int_{||x-x_o|| \le \tau R} \frac{\partial}{\partial x_i} D^\alpha u dy = \frac{n}{\sigma_{n-1}\tau^n R^n} \int_{||x-x_o||=\tau R} D^\alpha u \frac{(y-x_0)_i}{||y-x_0||} ds_y \,.$$

Andererseits gilt nach Induktionsvoraussetzung für $y \in \partial K_{\tau R}(x_0)$ angewandt auf eine Kugel mit Radius $(1-\tau)R$, (denn $K_{(1-\tau)R}(y) \subset K_{\tau R}(x_0)$):

$$|D^\alpha u(y)| \le \left(\frac{n\mathrm{e}}{(1-\tau)R}\right)^{|\alpha|} \frac{|\alpha|!}{e} M.$$

Dann gilt

$$|D^\beta u(x_0)| \le \frac{n}{\sigma_{n-1}\tau^n R^n} \sigma_{n-1}\tau^{n-1}R^{n-1} \left(\frac{n\mathrm{e}}{(1-\tau)R}\right)^{|\alpha|} \frac{|\alpha|!}{e} M.$$

Wir haben noch Freiheiten in der Wahl von τ.
Setze

$$\tau := \frac{1}{|\alpha|+1} = \frac{1}{|\beta|}.$$

Mit

$$(1-\tau)^{-|\alpha|} = \left(1 - \frac{1}{|\beta|}\right)^{-|\alpha|} \le \left(1 - \frac{1}{|\beta|}\right)^{-|\beta|} \le \mathrm{e}$$

gilt

$$|D^\beta u(x_0)| \le \frac{n\mathrm{e}}{\tau R} \left(\frac{n\mathrm{e}}{R}\right)^{|\alpha|} \frac{|\alpha|!}{e} M = \left(\frac{n\mathrm{e}}{R}\right)^{|\alpha|+1} (|\alpha|+1)\frac{|\alpha|!}{e} M = \left(\frac{n\mathrm{e}}{R}\right)^{|\alpha|+1} \frac{(|\alpha|+1)!}{e} M.$$

■

Korollar 2.2.11.
Sei u beschränkt und harmonisch in Ω. Dann ist u lokal-analytisch in Ω.

Beweis. Fixiere $x_0 \in \Omega$.
Wähle $R > 0$ mit

$$(n\mathrm{e}^{2n} + 1)R < \min(\mathrm{dist}(x_0, \partial\Omega); 1)\,.$$

Mache eine Taylorreihenentwicklung von u in $K_R(x_0)$ an der Stelle x_0. Dann gilt $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in K_R(x_0)$:

$$u(x) = \sum_{|\alpha| \le n} \frac{D^\alpha u(x_0)}{\alpha!}(x-x_0)^\alpha + \sum_{|\beta|=n+1} \frac{D^\beta u(\xi)}{\beta!}(\xi - x_0)^\beta \quad [1]$$

[1] $\alpha! := \alpha_1!\alpha_2! \cdots \alpha_n!\,;\ (x-x_0)^\alpha = (x_1 - x_{01})_1^\alpha (x_2 - x_{02})_2^\alpha \cdots (x_n - x_{0n})_n^\alpha$

mit $\xi \in K_R(x_0)$.
Wende Bemerkung 2.2.10 auf $K_{n\mathrm{e}^{2n+1}\cdot R}(\xi)$ an:

$$\begin{aligned}\frac{|D^\beta u(\xi)|}{\beta!}|(\xi-x_0)^\beta| \le \left(\frac{n\cdot\mathrm{e}}{n\cdot\mathrm{e}^{2n+1}R}\right)^{|\beta|}\frac{|\beta|!}{\mathrm{e}}M\cdot\frac{1}{\beta!}|(\xi-x_0)^\beta| &\le \left(\frac{1}{\mathrm{e}^{2n}R}\right)^{|\beta|}\frac{M}{\mathrm{e}}\mathrm{e}^{n|\beta|}R^{|\beta|}\\ &\le e^{-n|\beta|}\cdot M\,.\end{aligned}$$

Denn es ist

$$\frac{|\beta|!}{\beta!} \le n^{|\beta|} \le \mathrm{e}^{n|\beta|}.$$

[Nebenrechnung:
Aus der Multinomialformel

$$(x_1+\ldots+x_n)^k = \sum_{|\alpha|=k}\binom{|\alpha|}{\alpha}x^\alpha \qquad \text{hierbei ist} \quad \binom{|\alpha|}{\alpha} = \frac{|\alpha|!}{\alpha!}$$

folgt, daß gilt

$$n^k = (1+\ldots+1)^k = \sum_{|\alpha|=k}\frac{|\alpha|!}{\alpha!} \qquad \text{insbesondere} \qquad \frac{|\beta|!}{\beta!} \le \sum_{|\alpha|=|\beta|}\frac{|\alpha|!}{\alpha!} = n^{|\beta|}.]$$

Für das Restglied der Taylorentwicklung gilt also:

$$\left|\sum_{|\beta|=n+1}\frac{D^\beta u(\xi)}{\beta!}(\xi-x_0)^\beta\right| \le \sum_{|\beta|=n+1}\mathrm{e}^{-n|\beta|}\cdot M \le |\beta|^n\mathrm{e}^{-n|\beta|}\cdot M \longrightarrow 0 \quad \text{für } |\beta|\to\infty.$$

Das heißt, die Taylorreihe konvergiert gleichmäßig gegen u in $K_R(x_0)$. ■

2.3 Die Greensche Funktion der Laplace-Gleichung für das Dirichlet-Problem

In Abschnitt 1 hatten wir die Greensche Funktion definiert durch

$$G(y,x) := E(y;x) - g(y;x)\,,$$

wobei $g(\cdot\,;x)$ Lösung ist von

$$\begin{aligned}\Delta_y g(\cdot\,;x) &= 0 && \text{in } \Omega\\ g(\cdot\,;x) &= E(\cdot\,;x) && \text{auf } \partial\Omega.\end{aligned}$$

Damit ist die Greensche Funktion durch folgende Eigenschaften charakterisiert:

(i) $G(\cdot\,;x) \in C^2(\Omega\setminus\{x\}) \cap C(\bar\Omega\setminus\{x\})\,,$

(ii) $\Delta G(y;x) = 0$ für alle $x \neq y$,
(iii) $G(\cdot\,;x) - E(\cdot\,;x) \in C^2(\Omega)$,
(iv) $G(\cdot\,;x) = 0$ auf $\partial\Omega$.

Bemerkung 2.3.1.

(i) G ist interpretierbar als das Potential einer Punktladung an der Stelle $x \in \Omega$.

(ii) Die Greensche Funktion ist eindeutig bestimmte Lösung des Dirichlet-Problems

$$\begin{aligned} -\Delta_y G(y;x) &= \delta(y-x) && \text{in } \Omega\,, \\ G(y;x) &= 0 && \text{für alle } y \in \partial\Omega\,. \end{aligned}$$

(iii) Wenn es eine Lösung $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ von

$$\begin{aligned} \Delta u &= f && \text{in } \Omega \\ u &= \varphi && \text{auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

gibt, so folgt

$$u(x) = \int_\Omega G(y;x) f(y)\,dy + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial G(y,x)}{\partial n} \varphi(y) ds_y\,.$$

Bemerkung 2.3.2. Die Greensche Funktion ist symmetrisch in ihren Argumenten, d.h.

$$G(y;x) = G(x;y)\,.$$

Beweis. Wir betrachten den Operator

$$\Delta : D_\Delta \to C^\infty(\bar{\Omega})\,,$$

wobei $D_\Delta := \{u \in C^\infty(\bar{\Omega}) |\, u|_{\partial\Omega} = 0\}$. Falls Δ invertierbar ist, gilt

$$(\Delta^{-1} f)(x) = \int_\Omega G(y;x) f(y)\,dy\,.$$

Wegen

$$(\Delta u, v)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega \Delta u\, v\, dx = -\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\, dx = \int_\Omega u \Delta v\, dx = (u, \Delta v)_{L^2(\Omega)}$$

für alle $u, v \in D_\Delta$ ist Δ ein symmetrischer Operator. Dann ist aber auch Δ^{-1} symmetrisch, denn

$$(\Delta^{-1} u, v)_{L^2(\Omega)} = (\Delta^{-1} u, \Delta\Delta^{-1} v)_{L^2(\Omega)} = (\Delta\Delta^{-1} u, \Delta^{-1} v)_{L^2(\Omega)} = (u, \Delta^{-1} v)_{L^2(\Omega)}\,.$$

Folglich ist

$$G(x;y) = G(y;x)\,.$$

■

Wir können also die beiden Argumente vertauschen.
Bisher war Ω immer ein beschränktes Gebiet. Oft betrachtet man aber die Greenschen Funktionen auch in unbeschränkten Gebieten. Dazu reichen die Forderungen (i)-(iv) nicht aus. Wenn etwa Ω ein “Außengebiet” ist, so muß man etwa fordern, daß

$$\lim_{|x|\to\infty} G(x;y) = 0 \qquad \text{für alle } n \geq 3$$

und

$$|G(x;y)| = O(1) \qquad \text{für alle } |x| \to \infty \text{ und } n = 2.$$

Wir führen nun unsere Betrachtung auf dem Halbraum

$$\Omega = \{(x', x_n) |\, x_n > 0,\, x' = (x_1, x_2, ..., x_{n-1})\}$$

fort.

Die Greensche Funktion in Ω geht jetzt aus dem sog. “Reflexionsprinzip” hervor, d.h.

$$G(x;y) = E(x;y) - E(x,\bar{y})\,.$$

Dabei ist $\bar{y} \in \mathbb{R}^n$ der zu $y \in \mathbb{R}^n$ bzgl. $x_n = 0$ symmetrisch gelegene Punkt, also

$$y = (y', y_n) \text{ und } \bar{y} = (y', -y_n).$$

Die Eigenschaften (i)-(iv) sind selbstverständlich erfüllt. Zudem folgt sofort

$$\lim_{|x|\to\infty} G(x;y) = 0 \qquad \text{für } n \geq 3$$

und

$$|G(x,y)| = O(1) \qquad \text{für } |x| \to \infty\,,\ n = 2.$$

Damit folgt für die Lösung des Dirichlet-Problems

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 \qquad \text{in } \Omega\,, \\ u &= \varphi \qquad \text{auf } \partial\Omega\,, \end{aligned}$$

daß

$$u(x) = \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial G(x;y)}{\partial n} \varphi(y)\, ds_y\,.$$

Setzen wir die bereits berechneten Ableitungen von E ein, dann ergibt sich mit $\partial\Omega = \mathbb{R}^{n-1}$ die Lösung

$$u(x) = \frac{2\,x_n}{\sigma_{n-1}} \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{\varphi(y')\, dy'}{(|x'-y'| + x_n^2)^{\frac{n}{2}}}\,.$$

2.3.1 Die Greensche Formel für die Kugel

Sei nun

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n | \, |x| < R\,, \; R < +\infty\}$$

und $y \in \Omega$. Wir spiegeln y an $\partial\Omega$ (Inversion am Kreis), d.h.

$$\bar{y} = \frac{R^2}{|y|} \frac{y}{|y|}\,.$$

Satz 2.3.3. Die Greensche Formel für die Kugel $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um 0 lautet:

$$G(x;y) = E(x;y) - \frac{R^{n-2}}{|y|^{n-2}} E(x;\bar{y})\,.$$

Beweis. Die Bedingungen (i)-(iii) sind erfüllt, da $E(\cdot\,;\bar{y})$ die selben Eigenschaften hat wie $E(\cdot\,;y)$. Eigenschaft (iv) ist aber auch offensichtlich, denn für $y_0 \in \partial\Omega$ ergibt sich mit $|y_0| = R$, daß $\bar{y} = y_0$, also

$$\lim_{y \to y_0} \left(E(x;y) - \frac{R^{n-2}}{|y|^{n-2}} E(x;\bar{y}) \right) = 0\,.$$

■

Man erhält demnach als Lösungsformel für das Dirichlet-Problem

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 \qquad \text{in } \Omega\,, \\ u &= \varphi \qquad \text{auf } \partial\Omega\,, \end{aligned}$$

die Darstellung

$$u(x) = \frac{R^2 - |x|^2}{\sigma_{n-1}\, R} \int\limits_{|y|=R} \frac{\varphi(y)}{|x-y|^n}\, ds_y\,. \tag{2.5}$$

Betrachten wir als Beispiel $n = 2$, dann ergibt sich mit Hilfe von Polarkoordinaten nach leichter Rechnung die Poisson-Formel

$$u(x) = \frac{1}{2\pi R} \int\limits_0^{2\pi} \frac{\varphi(R\cos\Theta, R\sin\Theta)(R^2 - r^2)}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2\,R\,r\cos\Theta}}\, d\Theta\,,$$

wobei $r = |x|$ gesetzt wurde.

2.3.2 Die Harnacksche Ungleichung und der Satz von Liouville

Man erhält aus der Darstellung (2.5) die Ungleichung von Harnack. Es gilt

Satz 2.3.4. (Harnacksche Ungleichung). Sei $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ eine nichtnegative harmonische Funktion und $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n | \, |x| < R \,, R < +\infty\}$. Dann gilt die Abschätzung

$$\frac{R^{n-2}(R-|x|)}{(R+|x|)^{n-1}}\, u(0) \;\leq\; u(x) \;\leq\; \frac{R^{n-2}(R+|x|)}{(R-|x|)^{n-1}}\, u(0)\,.$$

Beweis. Wir benutzen die Darstellung (2.5) und die Dreiecksungleichung,

$$|x| - |y| \;\leq\; |x-y| \;\leq\; |x| + |y|\,.$$

Für $|y| = R$ folgt:

$$(R+|x|)^{-n} \;\leq\; |y-x|^{-n} \;\leq\; (R-|x|)^{-n}\,.$$

Aus (2.5) ergibt sich

$$u(x) \;\leq\; \frac{R^2-|x|^2}{\sigma_{n-1}\, R} \int\limits_{|y|=R} \frac{u(y)}{(R-|x|)^n}\, ds_y \;=\; \frac{(R^2-|x|^2)}{(R-|x|)^n\, \sigma_{n-1}\, R} \int\limits_{|y|=R} u(y)\, ds_y \;=$$

$$=\; \frac{R^2-|x|^2}{(R-|x|)^n\, \sigma_{n-1}\, R} R^{n-1}\, \sigma_{n-1}\, u(0) \;=\; \frac{R^{n-2}(R+|x|)}{(R-|x|)^{n-1}}\, u(0)\,,$$

wobei auf das Randintegral der 1. Mittelwertsatz angewandt wurde. Die umgekehrte Abschätzung verläuft völlig analog. ∎

Folgerung 2.3.5. Falls $u \geq 0$ und u harmonisch ist in $\mathbb{R}^n$, dann ist u überall konstant.

Beweis. Es gilt

$$\frac{R^{n-2}(R \pm |x|)}{(R \mp |x|)^{n-1}} \;=\; \frac{1 \pm \frac{|x|}{R}}{(1 \mp \frac{|x|}{R})^{n-1}}\,.$$

Somit folgt aus der Harnackschen Ungleichung durch Grenzübergang von $R \to \infty$, daß

$$u(0) \;\leq\; u(x) \;\leq\; u(0)\,.$$

∎

Satz 2.3.6. (Satz von Liouville). Eine harmonische Funktion im $\mathbb{R}^n$, die nach unten beschränkt ist, d.h. $u(x) \geq -c$, $c > 0$, ist konstant im $\mathbb{R}^n$.

Beweis. Setze $\tilde{u} = u - c$, dann ergibt sich aus Folgerung 2.3.5 die Behauptung. ∎

2.3.3 Das Dirichlet-Problem für beliebige Gebiete

Sei nun $\Omega \in \mathbb{R}^n$ ein beliebiges Gebiet. Wir betrachten

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 \qquad \text{in } \Omega\,, \\ u &= \varphi \qquad \text{auf } \partial\Omega\,, \end{aligned} \tag{2.6}$$

mit $\varphi \in C(\partial\Omega)$.

Die Aufgabe besteht darin, ein $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ zu finden, das obiges Dirichlet-Problem löst. Es ist klar, daß für beliebiges Ω diese Aufgabe nicht immer lösbar sein kann, insbesondere dann, wenn $\partial\Omega$ nicht glatt ist.

Wir konstruieren jetzt eine in gewissem Sinne "optimale" Lösung von (2.6). Die nachfolgende Konstruktion geht auf Poincaré zurück und heißt "Balayage-Methode" (Auskehrmethode).

Sei dazu $\varphi \in C(\partial\Omega)$. Es lasse sich φ zu einer Funktion

$$\Phi \in C(\bar{\Omega})$$

fortsetzen, mit $\Phi|_{\partial\Omega} = \varphi$.

Wir konstruieren nun eine Folge von Gebieten $\{\Omega_k\}_{k\in\mathbb{N}}, \Omega_k \subset \Omega$, mit folgenden Eigenschaften:

(i) $\partial\Omega_k$ ist glatt,

(ii) $\bar{\Omega}_k \subset \Omega_{k+1}$,

(iii) $\Omega = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Omega_k$.

Wir nehmen an, daß das Dirichlet-Problem

$$\begin{aligned} \Delta u_k &= 0 && \text{in } \Omega_k\,, \\ u_k &= \Phi =: \varphi_k && \text{auf } \partial\Omega_k \end{aligned}$$

eine eindeutige Lösung besitzt, was sich auch tatsächlich mit der Integralmethode zeigen läßt.

Man erhält eine Folge von Lösungen $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$, so daß für alle $x \in \Omega$ ein $k_0 = k_0(x) \in \mathbb{N}$ existiert mit $x \in \Omega_k$ für $k \geq k_0$.

Nach Lemma 2.2.8 gilt für harmonische Funktionen

$$|D^\alpha u(x)| \leq C(\alpha, K) \int_\Omega |u(x)|dx\,,$$

wobei $K \subset \Omega$ kompakt ist und $x \in K$.

Da $\bar{\Omega}_k$ kompakt ist und $\bar{\Omega}_k \subset \Omega_{k+1}$, folgt

$$|D^\alpha u_i(x)| \leq C(\alpha, \bar{\Omega}_k) \int_{\Omega_{k+1}} |u_i(x)|dx\,,$$

für alle $i = k+1, k+2, ...$ und $x \in \bar{\Omega}_k$.

Die Funktionen $u_i\,, i = k+1, k+2, \ldots\,$, sind harmonisch in ihren jeweiligen Definitionsgebieten Ω_i und nehmen daher jeweils auf dem Rand $\partial\Omega_i$ ihr Maximum an. Also gilt

$$|D^\alpha\, u_i(x)| \;\leq\; C(\alpha, \bar{\Omega}_k) \max_{x\in\bar{\Omega}} |\Phi(x)| \;=:\; C'(\alpha, \bar{\Omega}_k)\,.$$

Somit ist die Folge $\{u_i\}$ in jedem Kompaktum $K \subset \Omega$ gleichmäßig beschränkt und gleichgradig stetig.

Nach dem Satz von Arzela-Ascoli existiert damit für jedes Kompaktum $K \subset \Omega$ eine Teilfolge von $\{u_i\}$, die gleichmäßig gegen eine Funktion u konvergiert.

Nach Satz 2.2.5 (Satz von Harnack) ist die Grenzfunktion u harmonisch in Ω.

Es könnte jetzt aber der Fall sein, daß u von der Konstruktion abhängt. Genauer gesagt, von der Fortsetzung Φ und der Folge $\{\Omega_k\}$, da diese beliebig gewählt werden. Aus dem Maximumprinzip folgt aber, daß dies nicht der Fall ist.

Wenn das Dirichlet-Problem eine klassische Lösung hat, so muß diese mit der nach der Balayage-Methode konstruierten Lösung zusammenfallen. Man sieht dies, indem man anstelle von Φ die klassische Lösung nimmt.

Die Frage ist nun, wie sich die Lösung u auf dem eventuell nicht glatten Rand $\partial\Omega$ verhält.

Definition 2.3.7. Ein Punkt $x_0 \in \partial\Omega$ heißt regulär, wenn

$$\lim_{x\to x_0} u(x) \;=\; \varphi(x_0)$$

gilt. Hierbei ist u die mit der Balayage-Methode erzeugte Funktion.

Bemerkung 2.3.8. Das Dirichlet-Problem ist im klassischen Sinne nur lösbar, wenn alle Randpunkte regulär sind.

Gibt es Charakterisierungen für reguläre Punkte, die es gestatten, eine Aussage zu machen, ohne die Balayage-Konstruktion durchzuführen? Die Antwort ist ja und führt auf das Konzept der Kapazität einer Menge. Sei dazu $K \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte Menge und μ ein nicht negatives Borel-Maß auf K. Wir setzen

$$u_\mu(x) \;=\; \int\limits_K E(x;y)\, d\mu(y)\,,$$

wobei $E(x;y)$ die Singularitäten-Funktion aus Abschnitt 1 ist.

Hat nun speziell das Borel-Maß μ bzgl. des Lebesgue-Maßes die Dichte $\varrho(x)$, so folgt

$$u_\mu(x) = u_\varrho(x) \;=\; \int\limits_K E(x;y)\varrho(y)\, dy\,.$$

Dies ist aber gerade das früher schon eingeführte Volumenpotential — auch Newton-Potential genannt — der Potentialgleichung mit der Belegung ϱ. Somit bezeichnet u_ϱ das Potential, das durch eine elektrische Ladung der Dichte ϱ auf K erzeugt wird.

Folgerung 2.3.9.

(i) Aus $E(x;y) = \frac{1}{(n-2)\sigma_{n-1}}|x-y|^{2-n}$ für $n \geq 3$ folgt

$$u_\varrho(x) \geq 0\,,$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

(ii) Aus $E(x;y) = -\frac{1}{2\pi}\ln|x-y|$ für $n = 2$ folgt

$$u_\varrho(x) \geq 0\,,$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$, die nahe bei K liegen und $\mathrm{diam} K < 1$ gilt.

Definition 2.3.10. Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt. Die Zahl

$$C(K) := \sup\{\mu(K) | u_\mu(x) \leq 1, \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n\}$$

heißt Kapazität von K.

Beispiel. Sei K eine einpunktige Menge $\{y\}$. Dann

$$u_\mu(x) = E(x;y)\,\mu \qquad \text{für alle } \mu \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}.$$

Für alle $x \in \mathbb{R}^n$ muß gelten $E(x;y)\mu \leq 1$. Dies ist nur möglich für $\mu = 0$, also

$$C(\{y\}) = 0\,.$$

Das Konzept der Kapazität läßt sich auf allgemeinere Mengen $E \subset \mathbb{R}^n$ ausdehnen. Es sei $E \subset \mathbb{R}^n$ eine beliebige offene Menge. Wir setzen

$$C(E) := \sup_{K \subset E} C(K)\,,$$

wobei K kompakt ist und definieren

$$\begin{aligned} \underline{C}(E) &:= \sup_{K \subset E} C(K)\,, && \text{(Innere Kapazität)} \\ \overline{C}(E) &:= \inf_{K \supset E} C(K)\,, && \text{(Äußere Kapazität)} \end{aligned}$$

wobei E offen ist.

Man kann zeigen, daß

$$\underline{C}(E) = \overline{C}(E)$$

für alle Borel-Mengen E gilt. Demnach heißt $C(E)$ die Kapazität von E.

Wir sind nun daran interessiert, eine Formel zur Berechnung der Kapazität zu finden. Das geht einfach für kompakte Mengen K, wenn ihre Struktur hinreichend einfach ist. Wir betrachten folgenden Sachverhalt:

Sei K ein Kompaktum und $\partial K = K \setminus \mathrm{int} K$ hinreichend glatt.

$\Omega_e := \mathbb{R}^n \setminus K$ ist eine beschränkte Zusammenhangskomponente von $\mathbb{R}^n$. Sei Γ_e der Rand von Ω_e mit $\Gamma_e \subset K$ und Γ_e hinreichend glatt. Wir betrachten das Dirichlet-Problem im "Außengebiet" (exterior domain) Ω_e, d.h.

$$\begin{aligned} \Delta v &= 0 \qquad \text{in } \Omega_e\,, \\ v &= 1 \qquad \text{auf } \Gamma_e\,. \end{aligned}$$

Setze $v \equiv 1$ in $\mathbb{R}^n \setminus \Omega_e$, dann hat die Lösung dieses Problems eine Darstellung über Einschichtpotentiale der Form

$$v(x) \;=\; \int\limits_{\Gamma_e} E(x;y)\frac{\partial v(y)}{\partial n}\,ds_y \;-\; \int\limits_{\Gamma_e} v(y)\frac{\partial E(x;y)}{\partial n}\,ds_y\,,$$

wie bereits gezeigt wurde, wobei das erste Integral das Einfachschichtpotential und das zweite das Doppelschichtpotential darstellt.

Da die Normalenableitung $\frac{\partial v}{\partial n}$ unbekannt ist, suchen wir die Lösung v in der Form eines Einfachschichtpotentials mit einer "künstlichen Belegung" $\sigma(y)$. Im nächsten Abschnitt werden wir zeigen, daß im Falle eines glatten Randes

$$v(x) \;=\; \int\limits_{\Gamma_e} E(x;y)\sigma(y)\,dy$$

gilt und die Belegung σ eindeutig bestimmt ist. D.h. demnach, daß das Borel-Maß μ, das in Definition 2.3.10 das Supremum realisiert, von der Form

$$d\mu(y) \;=\; \sigma(y)\,ds_y$$

ist. Daraus folgt

$$C(K) \;=\; \int\limits_{\Gamma_e} \sigma(y)\,dy\,.$$

Als Spezialfall betrachten wir die Kapazität der Kugel $K_R(0)$ um den Nullpunkt mit Radius R:
Wie man leicht nachrechnet, ist

$$v(x) \;=\; R^{n-2}|x|^{2-n}$$

Lösung des Problems im Außengebiet $R^n \setminus K_R(0)$. Wir wissen auch, daß

$$\frac{\partial v(x)}{\partial n} \;=\; R^{n-2}(n-2)|x|^{1-n}$$

gilt. Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} C\big(K_R(0)\big) &= R^{n-2}(n-2) \int\limits_{|y|=R} |y|^{1-n} ds_y \\ &= R^{n-2}(n-2)R^{1-n}\sigma_{n-1}R^{n-1} \;=\; R^{n-2}(n-2)\sigma_{n-1}\,. \end{aligned}$$

Nach diesem Exkurs kehren wir zur Charakterisierung von regulären Punkten zurück und formulieren dazu ohne Beweis das verblüffende Wiener-Kriterium.

Satz 2.3.11. (Wiener-Kriterium). Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet. Dann gilt die Äquivalenzaussage: Ein Randpunkt $x_0 \in \partial\Omega$ ist genau dann regulär, wenn die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} 4^{k(n-2)} C\Big(\{x \in \bar{\Omega} | x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega, |x - x_0| < 4^{-k}\}\Big), \qquad n \geq 3$$

divergiert.

Beispiele.

(i) $x_0 \in \partial\Omega$ ist ein isolierter Punkt, d.h. $\{x \in \bar{\Omega} | x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega, |x - x_0| < 4^{-k}\} = \{x_0\}$ für k hinreichend groß. Damit folgt
$$C(\{x_0\}) = 0\,.$$
Also ist x_0 nicht regulär.

(ii) Ω erfüllt eine Kegelbedingung an der Stelle $x_0 \in \partial\Omega$, d.h. es gebe einen Kegel $K \subset \mathbb{R}^n \setminus \Omega$ mit Spitze in x_0 und $\mathrm{int}K \neq \emptyset$. Dann ist der Punkt x_0 regulär. Die Kegelbedingung wird sehr häufig als Forderung an ein Lösungsgebiet gestellt. Mehr Informationen darüber findet sich in dem Buch von J. Wloka, Partielle Differentialgleichungen, Teubner Verlag Stuttgart, 1982.

Abschließend formulieren wir den

Satz 2.3.12. Für jedes beschränkte Gebiet $\Omega \in \mathbb{R}^n$ hat die Menge der nicht regulären Randpunkte die Kapazität Null.

2.4 Sprungrelationen

Wir betrachten nun das Einfachschicht- bzw. das Doppelschichtpotential

$$v(x) = \int\limits_{\partial\Omega} E(x;y)\,\sigma(y)\,ds_y$$

bzw.

$$w(x) = \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial n_y} E(x;y)\,\beta(y)\,ds_y$$

und untersuchen deren Verhalten für $x \to x_0$, wobei $x_0 \in \partial\Omega$. Wir setzen im weiteren $\Gamma := \partial\Omega$ und nehmen an, daß Ω und $\Omega_\alpha := \mathbb{R}^n \setminus \Omega$ Gebiete mit glattem Rand sind.

Ferner bezeichnen wir

$$f(x_0)|_+ = \lim_{x \to x_0 \in \Gamma, x \in \Omega} f(x)\,,$$
$$f(x_0)|_- = \lim_{x \to x_0 \in \Gamma, x \in \Omega_\alpha} f(x)\,.$$

An das Gebiet Ω stellen wir folgende

Voraussetzungen A:

(i) Die Menge $F_d := \Gamma \cap K_\delta(x_0)$ ist darstellbar mittels einer C^2-Funktion, Φ, definiert durch

$$x_n \;=\; \Phi(x_1, ..., x_{n-1})\,.$$

(ii) Es existiert eine Konstante $C > 0$, so daß für alle $x \in \mathbb{R}^n$

$$\int\limits_\Gamma \left| \frac{\partial}{\partial n_y} E(x; y) \right| ds_y \;\leq\; C$$

gilt.

Satz 2.4.1. Es gelte Voraussetzung A(i) für Ω, und es sei β stetig auf Γ. Dann existiert

$$w(x) \;=\; \int\limits_\Gamma \frac{\partial}{\partial n_y} E(x, y)\, \beta(y)\, ds_y$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und $w \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \Gamma)$ mit $\Delta w = 0$ in $\mathbb{R}^n \setminus \Gamma$.

Beweis. Bis auf die Existenz des Integrals für $x \in \Gamma$ ist bereits alles gezeigt. Sei deshalb $x \in \Gamma$ und sei $K_\delta(x)$ die in Voraussetzung (i) erwähnte Kugel. Wir verschieben den Koordinatenursprung in x, dann hat die Fläche $F_\delta = \Gamma \cap K_\delta(0)$ die Darstellung

$$x_n \;=\; \Phi(x_1, x_2, ..., x_{n-1})\,, \qquad x_1^2 + x_2^2 + ... + x_{n-1}^2 \;\leq\; \delta^2\,,$$

wie es in der nachfolgenden Graphik im $\mathbb{R}^3$ skizziert wurde.

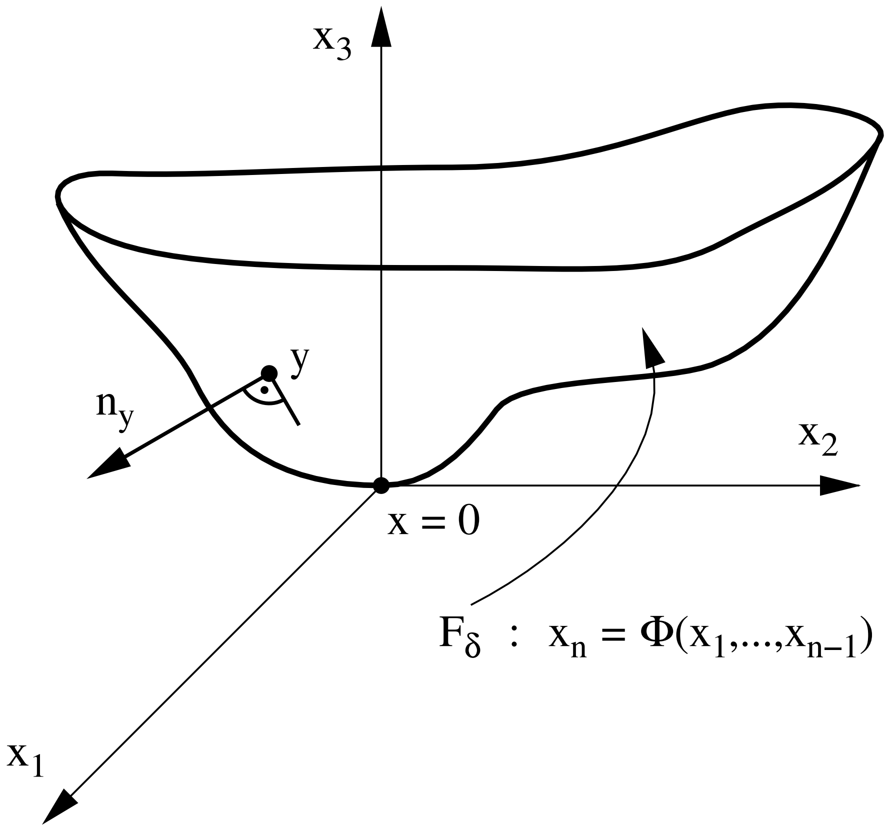


Abbildung 2.2

Durch die Wahl des Koordinatensystems ergibt sich für Φ

$$\Phi(0, ..., 0) \;=\; 0$$

und

$$\Phi_{x_i}(0, ..., 0) \;=\; 0\,,$$

für alle $1 \leq i \leq n-1$.

Sei $\Gamma_1 := \Gamma \setminus F_\delta$ und M eine Schranke von β auf Γ. Dann folgt

$$\int\limits_{\Gamma} \left| \frac{\partial}{\partial n_y} E(0;y)\,\beta(y) \right| ds_y \;\leq\; M \int\limits_{\Gamma_1} \left| \frac{\partial}{\partial n_y} E(0;y) \right| ds_y \;+\; M \int\limits_{F_\delta} \left| \frac{\partial}{\partial n_y} E(0;y) \right| ds_y\,.$$

Das Integral über Γ_1 existiert natürlich. Um die Existenz des zweiten Integrals über F_δ nachzuweisen, genügt es zu zeigen, daß das Integral endlich ist. Sei nun $y \in F_\delta$, dann gilt

$$n_y \;=\; \frac{(\nabla\Phi, -1)}{(1 + |\nabla\Phi|^2)^{\frac{1}{2}}}\,,$$

$$ds_y \;=\; (1 + |\nabla\Phi|^2)^{\frac{1}{2}}\, dy_1, ..., dy_{n-1}\,.$$

Außerdem gilt

$$\frac{\partial}{\partial n_y} E(0;y) \;=\; \nabla_y E(0;y) \cdot n_y \;=\; \frac{1}{\sigma_{n-1}} \, \frac{(y_1, ..., y_n)}{|y|^n} \;\cdot\; n_y \,.$$

Transformieren wir das Integral von F_δ nach $K_\delta(0)$, dann erhält man nach der Dreiecksungleichung

$$\int\limits_{F_\delta} \left| \frac{\partial}{\partial n_y} E(0;y) \right| \, ds_y \;\leq \int\limits_{y_1^2+...+y_{n-1}^2 \leq \delta^2} \frac{|y_1 \Phi_{y_1}| + ... + |y_{n-1}\Phi_{y_{n-1}}| + |y_n|}{|y|^n} \, dy_1 ... dy_{n-1} \,.$$

Eine Taylorentwicklung von Φ_{y_i} um Null ergibt:

$$\Phi_{y_i}(y_1, \ldots, y_{n-1}) \;=\; \Phi_{y_i}(0, \ldots, 0) \;+\; \sum_{j=1}^{n-1} \Phi_{y_i y_j}(\eta_1, \ldots, \eta_{n-1}) \, y_j \,,$$

für gewisse $(\eta_1, \ldots, \eta_{n-1}) \in K_\delta(0)$. Da $\Phi_{y_i}(0, \ldots, 0) = 0$, existiert eine Konstante $C > 0$, so daß

$$|\Phi_{y_i}(y_1, \ldots, y_{n-1})| \;\leq\; C \sum_{k=1}^{n-1} |y_k| \,,$$

also auch

$$\frac{|y_i \Phi_{y_i}|}{|y|^n} \;\leq\; C \, \frac{\sum_{k=1}^{n-1} |y_i| \, |y_k|}{|y|^2} \, \frac{1}{|y|^{n-2}} \;\leq\; \frac{C}{|y|^{n-2}} \,,$$

da $|y_i| \leq |y|$.

Schließlich gilt, nach einer weiteren Taylorentwicklung, daß

$$\frac{|y_n|}{|y|^n} \;\leq\; \frac{|\Phi(y_1, ..., y_{n-1})|}{|y|^n} \;\leq\; C \frac{1}{|y|^{n-2}} \,.$$

Wir haben somit sämtliche Terme des Integranden abgeschätzt und erhalten zusammen

$$\begin{aligned}
\int\limits_{F_\delta} \left| \frac{\partial}{\partial n_y} E(0;y) \right| \, ds_y \;&\leq\; C \int\limits_{y_1^2+...+y_{n-1}^2 \leq \delta^2} \frac{1}{|y|^{n-2}} \, dy_1 ... dy_{n-1} \;= \\
&= C \int_0^\delta \left(\int\limits_{y_1^2+...+y_{n-1}^2 = r^2} \frac{1}{r^{n-2}} \, ds \right) dr \;= \\
&= C \int_0^\delta \frac{1}{r^{n-2}} \left(\int\limits_{y_1^2+...+y_{n-1}^2 = r^2} ds \right) dr \;= \\
&= C \int_0^\delta \frac{1}{r^{n-2}} \sigma_{n-1} \, r^{n-1} \, dr \;=\; \frac{1}{2} C \, \sigma_{n-1} \, \delta^2 \,.
\end{aligned}$$

also existiert das Integral für $x \in \Gamma$. ■

Obwohl das Integral für alle $x \in \mathbb{R}^n$ existiert, läßt sich daraus nicht folgern, daß das Doppelschichtpotential beim Durchgang durch die Fläche Γ sich stetig in x ändert. Um dies genauer zu analysieren, benötigen wir

Lemma 2.4.2. Sei Ω ein beschränktes Gebiet mit Rand Γ, und Ω erfülle Voraussetzung A(i). Dann gilt

$$\int\limits_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial n_y} E(x;y)\, ds_y \;=\; \begin{cases} -1 & \text{für } x \in \Omega\,, \\ \\ -\frac{1}{2} & \text{für } x \in \Gamma\,, \\ \\ 0 & \text{für } x \in \Omega_\alpha\,. \end{cases}$$

Beweis. Wir setzen zunächst in (2.2)

$$u \equiv 0 \quad auf \quad \Omega \quad und \quad u \equiv 1 \quad auf \quad \Omega_a$$

dann ergibt sich sofort

$$\int\limits_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial n_y} E(x;y)\, ds_y \;=\; \begin{cases} -1 & \text{für } x \in \Omega\,, \\ \\ 0 & \text{für } x \in \Omega_\alpha\,. \end{cases}$$

Um den noch ausstehenden Fall zu behandeln, wählen wir in Voraussetzung A(i) $x_0 = 0$ und betrachten die Kugel $K_a(0)$, $0 < a \le \delta$, $\delta > 0$. Wir wenden den Satz von Gauß auf das Gebiet $\Omega \cap \complement K_a$ an, wobei $\complement K_a$ das Komplement von $K_a(0)$ bezeichne. Wir erhalten für $n = 3$:

$$0 \;=\; \int\limits_{\Omega\cap\complement\bar{K}_a} \operatorname{div}_y\Big(\nabla_y \frac{1}{|x-y|}\Big)\, dy \;=\; \int\limits_{\Gamma\cap\complement K_a} \Big(\frac{\partial}{\partial n_y}\frac{1}{|x-y|}\Big)\, ds_y \;+\; \int\limits_{\Omega\cap\partial K_a} \frac{\partial}{\partial n_y}\Big(\frac{1}{|x-y|}\Big)\, ds_y\,,$$

also

$$\int\limits_{\Gamma\cap\complement K_a} \Big(\frac{\partial}{\partial n_y}\frac{1}{|x-y|}\Big)\, ds_y \;=\; -\int\limits_{\Omega\cap\partial K_a} \Big(\frac{\partial}{\partial n_y}\frac{1}{|x-y|}\Big)\, ds_y$$

wobei ∂K_a der Rand von $K_a(0)$ ist.

Auf $\partial K_a \cap \Omega$ gilt

$$n_y \;=\; (0, -y)/a$$

und

$$\frac{\partial}{\partial n_y}\frac{1}{|x-y|} \;=\; \frac{-y}{a^3}\cdot\frac{-y}{a} \;=\; \frac{a^2}{a^4} \;=\; \frac{1}{a^2}\,.$$

Folglich

$$\int\limits_{\Gamma\cap\complement K_a} \frac{\partial}{\partial n_y}\Big(\frac{1}{4\pi}\frac{1}{|x-y|}\Big)\, ds_y \;=\; -\int\limits_{\Omega\cap\partial K_a} \frac{1}{4\pi a^2}\, ds_y \;=\; -\frac{|\partial K_a \cap \Omega|}{4\pi a^2}\,,$$

wobei $|\partial K_a \cap \Omega|$ den Flächeninhalt von $\partial K_a \cap \Omega$ bezeichnet.

Es gilt

$$\frac{|\partial K_a \cap \Omega|}{4\pi a^2} = \frac{\text{Raumwinkel} \cdot a^2}{4\pi a^2} \xrightarrow{a \to 0} \frac{2\pi}{4\pi} = \frac{1}{2}\,.$$

Damit ergibt sich schließlich

$$\int\limits_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial n_y}\Big(\frac{1}{4\pi}\frac{1}{|x-y|}\Big)\, ds_y \;=\; \lim_{a\to 0} \int\limits_{\Gamma \cap \complement \bar{K}_a} \frac{\partial}{\partial n_y}\Big(\frac{1}{4\pi}\frac{1}{|x-y|}\Big)\, ds_y \;=\; -\frac{1}{2}\,.$$

Analog verläuft die Vorgehensweise für $n \geq 4$. ∎

Mit diesem Lemma sind wir nun in der Lage, die fundamentalen Sprungbeziehungen in der Potentialtheorie zu beweisen. Für Doppelschichtpotentiale gilt

Satz 2.4.3. Die Voraussetzung A sei erfüllt.
Sei Ω ein beschränktes Gebiet im $\mathbb{R}^n$ mit Rand Γ. Ferner sei β stetig auf Γ. Dann gelten für das Integral

$$u(x) \;=\; \int\limits_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial n_y} E(x;y)\,\beta(y)\,ds_y$$

mit $x_0 \in \Gamma$ die Beziehungen

$$u(x_0)|_+ \;=\; u(x_0) \;-\; \frac{1}{2}\,\beta(x_0)$$

und

$$u(x_0)|_- \;=\; u(x_0) \;+\; \frac{1}{2}\,\beta(x_0)\,.$$

Beweis. Wir betrachten die Funktion

$$g(x) \;=\; \int\limits_{\Gamma} \Big(\frac{\partial}{\partial n_y} E(x;y)\Big)\Big(\beta(y) - \beta(x_0)\Big)\, ds_y$$

und zeigen zunächst die Stetigkeit von g.

$$g(x) - g(x_0) \;=\; \int\limits_{\Gamma} \Big(\frac{\partial}{\partial n_y}(E(x;y) - E(x_0;y))\Big)\Big(\beta(y) - \beta(x_0)\Big)\, ds_y\,.$$

Sei $\varepsilon > 0$, dann existiert ein $\delta > 0$, so daß $|\beta(y) - \beta(x_0)| \leq C^{-1}\frac{\varepsilon}{4}$ für alle $y \in \Gamma \cap K_\delta(x_0)$. Die Konstante C ist identisch mit der aus Voraussetzung A an Γ.

Es sei jetzt $x \in K_{\frac{\delta}{2}}(x_0)$. Betrachte

$$h(x) \;=\; \int_{\Gamma \setminus (K_\delta(x_0) \cap \Gamma)} \frac{\partial}{\partial n_y}\Big(E(x;y) - E(x_0;y)\Big)\Big(\beta(y) - \beta(x_0)\Big)\, ds_y\,.$$

Dann ist h stetig auf $K_{\frac{\delta}{2}}(x_0)$ und $h(x_0) = 0$. Ferner gilt

$$\begin{aligned} |g(x) - g(x_0)| &\leq C^{-1}\frac{\varepsilon}{4}\int_{K_\delta(x_0)\cap\Gamma}\left(\left|\frac{\partial}{\partial n_y}E(x;y)\right| + \left|\frac{\partial}{\partial n_y}E(x_0;y)\right|\right) ds_y \, + \, |h(x)| \leq \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + |h(x)| \, < \, \varepsilon \, , \end{aligned}$$

falls $|x - x_0|$ klein genug ist, da $h(x) \to h(x_0) = 0$. Also ist g stetig und es folgt, daß

$$g(x) \, = \, u(x) - \beta(x_0)\int\limits_\Gamma \frac{\partial}{\partial n_y}E(x;y)\, ds_y$$

stetig ist. Nach Lemma 2.4.2 folgt für $x \in \Omega$:

$$\begin{aligned} u(x) \, &= \, g(x) - \beta(x_0) \, \longrightarrow \, g(x_0) - \beta(x_0) \qquad \text{für } x \to x_0 \\ &= \, u(x_0) + \frac{1}{2}\beta(x_0) - \beta(x_0) \, = \, u(x_0) - \frac{1}{2}\beta(x_0) \, , \end{aligned}$$

womit die erste der beiden Beziehungen bewiesen ist. Die zweite ergibt sich völlig analog. ■

Wir betrachten jetzt das Einfachschichtpotential

$$v(x) \, = \, \int\limits_\Gamma E(x;y)\sigma(y)\, ds_y \, .$$

Es gilt

Satz 2.4.4. Es gelte Annahme A(i) an Ω und $\sigma \in C(\Gamma)$. Dann existiert das Einfachschichtpotential, es ist stetig in R^n und $v \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \Gamma)$ mit $\Delta v = 0$ in $\mathbb{R}^n \setminus \Gamma$.

Beweis. Wir gehen ganz genauso vor wie in Satz 2.4.1 und zeigen die Existenz des Integrals. Dazu betrachten wir wieder

$$F_\delta \, = \, \Gamma \cap K_\delta(x) \, ,$$

wobei $x \in \Gamma$.

Wir behandeln den Fall $n \geq 3$. Es gilt

$$\begin{aligned} v(x) \, &= \, \int\limits_\Gamma \frac{1}{(n-2)\,\sigma_{n-1}}\,\frac{1}{|x-y|^{n-2}}\,\sigma(y)\, ds_y \\ &= \, \int\limits_{F_\delta} \frac{1}{(n-2)\,\sigma_{n-1}}\,\frac{1}{|x-y|^{n-2}}\,\sigma(y)\, ds_y \, + \int\limits_{\Gamma\setminus F_\delta} \frac{1}{(n-2)\,\sigma_{n-1}}\,\frac{1}{|x-y|^{n-2}}\,\sigma(y)\, ds_y \, . \end{aligned}$$

Es genügt wiederum das Integral über F_δ zu analysieren. Dazu führen wir eine Koordinaten-Transformation durch, indem wir den Ursprung in x legen. Wir erhalten

$$\begin{aligned}\int\limits_{F_\delta} \frac{1}{(n-2)\,\sigma_{n-1}}\,\frac{1}{|y|^{n-2}}\,\sigma(y)\,ds_y \;&\le\; \int_{y_1^2+\ldots+y_{n-1}^2\le\delta^2} \frac{1}{(n-2)\,\sigma_{n-1}}\,\frac{(1+|\nabla\Phi|^2)^{\frac{1}{2}}}{|y|^{n-2}}\,dy_1\ldots dy_{n-1}\\ &\le C\int_{y_1^2+\ldots+y_{n-1}^2\le\delta^2} \frac{1}{|y|^{n-2}}\,dy_1\ldots dy_2\\ &= C\int\limits_0^\delta\left(\int_{y_1^2+\ldots+y_{n-1}^2=\delta^2} r^{2-n}\,ds\right)dr \;=\; \frac{1}{2}C\,\sigma_{n-1}\,\delta^2\,.\end{aligned}$$

Im Fall n=2 ergibt sich in der Abschätzung der Term

$$\delta\ln\delta^{-1}\to 0\,,$$

für $\delta\to 0$, womit alles bewiesen ist. ∎

Trotz dieses Satzes hat man wieder die Sprungbedingung für die Normalenableitung.

Satz 2.4.5. Sei $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit Rand Γ, und Ω erfülle die Bedingungen A(i) und A(ii). Ferner sei σ stetig auf Γ. Dann gelten für das Einfachschichtpotential mit $x\in\Gamma$ die Beziehungen

$$\left.\frac{\partial v(x)}{\partial n_{x_0}}\right|_+ = \int\limits_\Gamma\left(\frac{\partial}{\partial n_{x_0}}E(x_o;y)\right)\sigma(y)\,ds_y + \frac{1}{2}\sigma(x_0)$$

sowie

$$\left.\frac{\partial v(x)}{\partial n_{x_0}}\right|_- = \int\limits_\Gamma\left(\frac{\partial}{\partial n_{x_0}}E(x_o;y)\right)\sigma(y)\,ds_y - \frac{1}{2}\sigma(x_0)\,.$$

Dabei sind die Grenzwertbetrachtungen entlang der Geraden L_0 durch x_0 und parallel zu n_{x_0} zu verstehen, entsprechend der Skizze

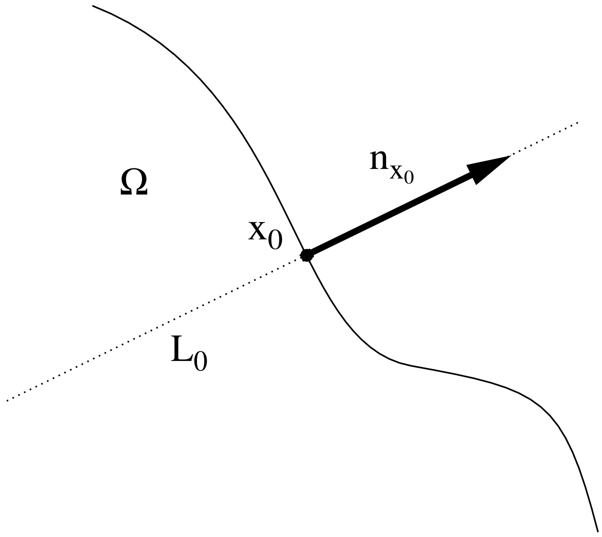


Abbildung 2.3

Beweis. Sei $x_0 \in \Gamma$ und die Koordinaten seien so gewählt, daß $x_0 = (0,...,0)$. Das Flächenelement

$$F_\delta = \Gamma \cap K_\delta(0)$$

habe wieder die Darstellung

$$x_n = \Phi(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}), \qquad x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 \leq \delta^2$$

und

$$n_{x_0} = (0, 0, \dots, 0, -1).$$

Es gilt

$$\Phi(0, \dots, 0) = \Phi_{x_1}(0, \dots, 0) = \dots = \Phi_{x_{n-1}}(0, \dots, 0) = 0.$$

(So wurde das Koordinatensystem gewählt !)
Ferner

$$n_y = \frac{(\nabla\Phi, -1)}{(1 + |\nabla\Phi|^2)^{\frac{1}{2}}},$$

$$ds_y = (1 + |\nabla\Phi|^2)^{\frac{1}{2}}\, dy_1 \dots dy_{n-1}.$$

Die Grenzwerte entlang der Geraden L_0 sind demnach entlang $(0, \dots, 0, x_n)$ und $x_n \to 0$ zu betrachten. Sei jetzt $x \neq x_0$, dann

$$\frac{\partial v(x)}{\partial n_{x_0}} = \int\limits_\Gamma \left(\frac{\partial}{\partial n_{x_0}} E(x; y) \right) \sigma(y)\, ds_y =$$

$$= \int\limits_\Gamma \left[\left(\frac{\partial}{\partial n_{x_0}} + \frac{\partial}{\partial n_y} \right) E(x; y) \right] \sigma(y)\, ds_y - \int\limits_\Gamma \left(\frac{\partial}{\partial n_y} E(x; y) \right) \sigma(y)\, ds_y =: h(x) - u(x).$$

$u(x)$ existiert nach Satz 2.4.1.

Wir werden zeigen, daß h stetig bleibt bei entsprechendem Grenzübergang. Dann folgt aus dem bereits Bewiesenen für Doppelschichtpotentiale

$$\lim_{x\to 0, x\in\Omega} \frac{\partial v(x)}{\partial n_{x_0}} = h(x_0) - u(x_0)|_+ = h(x_0) - u(x_0) + \frac{1}{2}\sigma(x_0) = \frac{\partial v(x_0)}{\partial n_{x_0}} + \frac{1}{2}\sigma(x_0)$$

und somit die Behauptung für die erste der beiden Beziehungen. Die zweite ergibt sich entsprechend.

Wir kommen zur Stetigkeit von h. Es ist klar, daß h stetig ist für $x \neq x_0$.

Betrachte

$$h(x) = \int_{F_\delta} \left[\left(\frac{\partial}{\partial n_{x_0}} + \frac{\partial}{\partial n_y}\right) E(x;y)\right] \sigma(y)\, ds_y + \int_{\Gamma\setminus F_\delta} \left[\left(\frac{\partial}{\partial n_{x_0}} + \frac{\partial}{\partial n_y}\right) E(x;y)\right] \sigma(y)\, ds_y =$$

$$=: h_\delta + h_1(x)\,.$$

Dann gilt

$$|h(x) - h(x_0)| \leq |h_\delta(x)| + |h_\delta(x_0)| + |h_1(x) - h_1(x_0)|\,.$$

Sei nun $\varepsilon > 0$ gegeben.

Da über $\Gamma \setminus F_\delta$ integriert wird, ist h_1 stetig und

$$|h_1(x) - h_1(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}\,,$$

falls $|x - x_0|$ klein genug ist.

Es bleibt zu zeigen, daß $h_\delta(x)$ klein gemacht werden kann, indem $\delta > 0$ klein genug gewählt wird.

Mit $x = (0, \dots, 0, x_n)$ gilt

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial}{\partial n_{x_0}} + \frac{\partial}{\partial n_y}\right) E(x;y) &= \frac{1}{\sigma_{n-1}} \left(\frac{x-y}{|x-y|^n} \cdot n_{x_0} - \frac{x-y}{|x-y|^n} \cdot n_y\right) \\
&= \frac{1}{\sigma_{n-1}} \frac{1}{|x-y|^n} \left((0, \dots, 0, -1) - \frac{\nabla\Phi, -1}{(1 + |\nabla\Phi|^2)^{\frac{1}{2}}}\right) \\
&= \frac{1}{\sigma_{n-1}} \frac{1}{|x-y|^n} \left(\frac{1}{(1 + |\nabla\Phi|^2)^{\frac{1}{2}}} \left(y_1 \Phi_{x_1} + \dots + y_{n-1}\Phi_{x_{n-1}}\right) + \right. \\
&\qquad \left. + \left(1 - (1 + |\nabla\Phi|^2)^{\frac{1}{2}}\right)\left(x_n - y_n\right)\right).
\end{aligned}$$

Die Terme

$$\frac{y_i\, \Phi_{x_i}}{|x-y|^n}$$

lassen sich wieder wie früher abschätzen. Man bekommt

$$\left|\frac{y_i\,\Phi_{x_i}}{|x-y|^n}\right| \;\le\; C\frac{1}{|x-y|^{n-2}}\,.$$

Ferner folgt, daß

$$\left|\frac{1-(1+|\nabla\Phi|^2)^{\frac{1}{2}}}{(1+|\nabla\Phi|^2)^{\frac{1}{2}}}\right| \;=\; \frac{|\nabla\Phi|}{(1+|\nabla\Phi|^2)^{\frac{1}{2}}\Big(1+(1+|\nabla\Phi|^2)^{\frac{1}{2}}\Big)} \;\le\; |\nabla\Phi|^2\,.$$

Zudem wurde früher gezeigt, daß

$$|\Phi_{y_i}(y_1,\dots,y_{n-1})| \;\le\; C_i\Big(|y_1|+\dots+|y_{n-1}|\Big)$$

und daraus

$$\left|\frac{\big(1-(1+|\nabla\Phi|^2)^{\frac{1}{2}}\big)(x_n-y_n)}{\sigma_{n-1}\,|x-y|^n\,(1+|\nabla\Phi|^2)^{\frac{1}{2}}}\right| \;\le$$

$$\le\;\sum_{i=1}^{n-1} C_i^2\Big(|y_1|+\dots+|y_{n-1}|\Big)^2\cdot\frac{1}{\sigma_{n-1}}\,\frac{|x_n-y_n|}{|x-y|^2}\,\frac{1}{|x-y|^{n-2}} \;\le\; \frac{C}{|x-y|^{n-2}}\;.$$

Alles zusammengesetzt, liefert

$$\left|\left(\frac{\partial}{\partial n_{x_0}}+\frac{\partial}{\partial n_y}\right)E(x;y)\right| \;\le\; \frac{C}{|x-y|^{n-2}}\,,$$

also

$$\begin{aligned}
|h_\delta(x)| \;&\le\; \int\limits_{F_\delta}\frac{C}{|x-y|^{n-2}}\;|\sigma(y)|\;ds_y \;\le\\
&\le\;\int_{y_1^2+\dots+y_{n-1}^2\le\delta^2}\frac{C}{|x-y|^{n-2}}\;|\sigma(y)|\,\Big(1+|\nabla\Phi|^2\Big)\,dy_1\dots dy_{n-1}\;\le\\
&\le\; C\int_{y_1^2+\dots+y_{n-1}^2\le\delta^2}\frac{1}{|x-y|^{n-2}}\,dy_1\dots dy_{n-1}\;=\\
&=\; C\,\sigma_{n-1}\,\delta^2\;<\;\frac{\varepsilon}{3}\,,
\end{aligned}$$

falls $\delta>0$ klein genug gewählt wird. Damit gilt insgesamt

$$|h(x)-h(x_0)|\;<\;\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}\;=\;\varepsilon\,,$$

falls $|x-x_0|>0$ und $\delta>0$ klein sind. ∎

Zusammenfassend gilt:

Die Integrale

$$w(x) \;=\; \int\limits_\Gamma \frac{\partial}{\partial n_y} E(x;y)\,\beta(y)\,ds_y$$

und

$$v(x) \;=\; \int\limits_\Gamma E(x;y)\,\sigma(y)\,ds_y$$

existieren und erfüllen

$$w, v \,\in\, C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \Gamma)$$

sowie

$$\Delta w \;=\; \Delta v \;=0 \qquad \text{in } \mathbb{R}^n \setminus \Gamma\,.$$

Außerdem

$$\text{(1)} \qquad \lim_{x\to x_0, x\in\Omega} w(x) \;=\; w(x_0) - \frac{1}{2}\beta(x_0)\,,$$

$$\text{(2)} \qquad \lim_{x\to x_0, x\in\Omega_a} w(x) \;=\; w(x_0) + \frac{1}{2}\beta(x_0)\,,$$

$$\text{(3)} \qquad \lim_{x\to x_0, x\in L_0\cap\Omega} \frac{\partial v(x)}{\partial n_{x_0}} \;=\; \int\limits_\Gamma \left(\frac{\partial}{\partial n_{x_0}} E(x_0;y)\right)\sigma(y)\,ds_y + \frac{1}{2}\sigma(x_0)$$

und

$$\text{(4)} \qquad \lim_{x\to x_0, x\in L_0\cap\Omega_a} \frac{\partial v(x)}{\partial n_{x_0}} \;=\; \int\limits_\Gamma \left(\frac{\partial}{\partial n_{x_0}} E(x_0;y)\right)\sigma(y)\,ds_y - \frac{1}{2}\sigma(x_0)\,.$$

2.5 Integralgleichungen in der Potentialtheorie

In diesem Abschnitt suchen wir Lösungen von

$$\begin{aligned} \Delta u \;&=\; 0 \qquad \text{in } \Omega\,,\\ u \;&=\; \varphi \qquad \text{auf } \Gamma := \partial\Omega \end{aligned}$$

oder

$$\frac{\partial u}{\partial n} \;=\; \varphi \qquad \text{auf } \Gamma$$

in der Form von Doppelschicht- oder Einfachschichtpotentialen. Wir nehmen an, daß das Gebiet Ω beschränkt ist und genügend glatten Rand Γ hat. Wir bezeichnen im folgenden Ω als das innere Gebiet, dagegen $\Omega_a = \mathbb{R}^n \setminus \Omega$ als das äußere Gebiet.

Die Existenz einer Lösung des inneren bzw. äußeren Dirichlet-und Neumann-Problems wird auf die Lösung der entsprechenden Fredholm-Integralgleichungen zurückgeführt.

Wir beginnen unsere Betrachtungen mit dem inneren Dirichlet-Problem

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 \qquad \text{in } \Omega\,, \\ u &= \varphi \qquad \text{auf } \Gamma\,. \end{aligned}$$

Dies ist aufgrund der Sprungrelationen (1) äquivalent zu

$$w - \frac{1}{2}\beta = \varphi$$

oder zu

$$-\frac{\beta(x)}{2} + \int\limits_{\Gamma} \left(\frac{\partial}{\partial n_y} E(x;y) \right) \beta(y)\, ds_y = \varphi(x)\,, x \in \Gamma\,.$$

Es handelt sich hier um die Fredholmsche Integralgleichung 2. Art, die als Lösung eine stetige Funktion β hat. Damit ergibt sich die Lösung $u(x)$ als

$$u(x) = \int\limits_{\Gamma} \left(\frac{\partial}{\partial n_y} E(x;y) \right) \beta(y)\, ds_y\,,$$

mit $u = \varphi$ auf Γ.

Das äußere Dirichlet-Problem

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 \qquad \text{in } \Omega_a\,, \\ u &= \varphi \qquad \text{auf } \Gamma \end{aligned}$$

ist äquivalent zu (2)

$$\frac{\beta(x)}{2} + \int\limits_{\Gamma} \left(\frac{\partial}{\partial n_y} E(x;y) \right) \beta(y)\, ds_y = \varphi(x)\,, \qquad x \in \Gamma\,,$$

wobei hier n_y die nach außen gerichtete Normale darstellt.

Das innere Neumann-Problem läßt sich lösen mit (3)

$$\frac{\sigma(x)}{2} + \int\limits_{\Gamma} \left(\frac{\partial}{\partial n_x} E(x;y) \right) \sigma(y)\, ds_y = \varphi(x)\,, \qquad x \in \Gamma\,,$$

das äußere Neumann-Problem mit

$$-\frac{\sigma(x)}{2} + \int\limits_{\Gamma} \left(\frac{\partial}{\partial n_x} E(x;y) \right) \sigma(y)\, ds_y = \varphi(x)\,, \qquad x \in \Gamma\,.$$

Alle diese Gleichungen sind lösbar nach der Fredholmschen Alternative. Dies ist eine Verallgemeinerung des bekannten Satzes aus der linearen Algebra, nämlich:

Sei A eine reell- oder komplexwertige Matrix. Dann gilt: Entweder hat

$$A\,x \;=\; b$$

eine Lösung $x \in \mathbb{R}^n$ für jeden Vektor $b \in \mathbb{R}^n$, oder

$$A\,x \;=\; 0$$

hat nichttriviale Lösungen.

Entsprechend lautet die Fredholmsche Alternative:

Entweder hat die Integralgleichung

$$(I - \lambda K)\,y \;=\; f$$

für jedes stetige f eine Lösung, oder die homogene Gleichung

$$(I - \lambda K)y \;=\; 0$$

hat nichttriviale Lösungen. Dabei ist I die Identität, $\lambda \in \mathbb{C}$ beliebig und

$$\Big(K\,y\Big)(x) \;=\; \int\limits_a^b k(x,s)\,y(s)\,ds$$

ein Integraloperator. Die Funktionen k , f und y werden im folgenden genauer spezifiziert. Dabei ist k der Kern des Operators.

Es gilt zunächst

Lemma 2.5.1. Sei k ein degenerierter Kern des Integraloperators, d.h. k hat die Darstellung

$$k(x,s) \;= < a(s), b(x) > := \sum_{i=1}^{n} a_i(s)\,\bar{b}_i(x)\,,$$

wobei $a_i, b_i,\ i = 1...\,n$ stetige komplexwertige Funktionen sind. Ist zudem f stetig, dann gilt die Fredholmsche Alternative für die entsprechenden Integralgleichung mit Kern $k(x,s)$.

Beweis. Wir beweisen dieses Lemma, indem wir die Fredholmsche Alternative auf eine Matrixgleichung zurückführen.

Setze o.B.d.A. $\lambda = 1$. Dazu nehmen wir an, daß $y = y(x)$ die Gleichung:

$$y(x) \;=\; f(x) + \int\limits_a^b \sum_{j=1}^{n} a_j(x)\,\bar{b}_j(s)\,y(s)\,ds$$

löst. Dann gilt

$$y(x) \;=\; f(x) \;+\; \sum_{j=1}^{n} \left[\int_a^b \bar{b}_j(s)\, y(s)\, ds \right] a_j(x)\,.$$

Die Integrale auf der rechten Seite sind ganz bestimmte Zahlen, d.h. falls $y(x)$ die Integralgleichung löst, ist $y(x)$ eine Linearkombination von $f(x)$ und weiterhin von den Funktionen $a_1(x), \ldots, a_n(x)$.

Wir definieren

$$< u\,, v > := \int_a^b u(x)\, \bar{v}(x)\, dx\,,$$

und erhalten dann

$$y(x) \;=\; f(x) + \sum_{j=1}^{n} < y\,, b_j > \; a_j(x)$$

Unsere Aufgabe besteht darin, $< y, b_j >$ zu finden. Dazu multiplizieren wir die obige Gleichung mit $\bar{b}_i(x)$ und integrieren von a bis b, also

$$< y\,, b_i > = < f\,, b_i > + \sum_{j=1}^{n} < a_j\,, b_i > < y\,, b_j >\,,$$

wobei $i = 1 \ldots n$. Somit erfüllt der Vektor

$$Y \;=\; \Big(< y\,, b_1 >, \ldots, < y\,, b_n > \Big)^T$$

die Matrixgleichung

$$Y \;=\; F + CY$$

oder

$$(I - C)\, Y \;=\; F\,,$$

wobei

$$F \;=\; \Big(< f\,, b_1 >, \ldots, < f\,, b_n > \Big)^T$$

und

$$C \;=\; \big[< a_j\,, b_i > \big]_{n \times n}$$

eine $n \times n$-Matrix ist.

Also ist $(I - K)\, y \;=\; f$, d.h.

$$y \;=\; f(x) + \sum_{j=1}^{n} Y_j\, a_j(x),$$

äquivalent zu $(I - C)\, Y = F$.

Wir nehmen nun an, die zweite Variante der Fredholm-Alternative gilt nicht für die ursprüngliche Integralgleichung, d.h. aus

$$(I - K)\, y \;=\; 0$$

folgt

$$y \;=\; 0\,.$$

Aus $f = 0$ folgt $F = 0$, und das bedeutet, daß $(I - C)Y = 0$ als einzige Lösung $Y = 0$ hat, da $y_i =< y\,, b_i >$ und $y = 0$. Das bedeutet aber, daß

$$(I - C)\, Y \;=\; F$$

für jedes F eine Lösung hat. Aus der Äquivalenz zwischen den Matrixdarstellungen folgt die Lösbarkeit der letzteren und somit trifft Fredholms Alternativsatz auch für diese zu. ■

Die Kerne, die in unseren Fällen auftreten, sind von der Form

$$k(x,s) \;=\; \frac{m(s,x)}{|x-s|^r}\,,$$

mit m stetig in $[a,b] \times [a,b]$ und $0 < r < 1$. Solche Kerne heißen schwach singulär.

Satz 2.5.2. Für Integralgleichungen mit schwach singulären Kernen gilt die Fredholm-Alternative.

Beweis. Wir setzen o.B.d.A. $\lambda = 1$ und weisen vier Eigenschaften nach, aus denen die Aussage folgt.

(i) Sei $y \in C[a,b]$ beliebig, dann ist das Integral

$$\Big(K\,y\Big)(x) \;=\; \int_a^b k(x,s)\, y(s)\, ds$$

definiert, denn sei $M := \max_{(x,s)\in[a,b]^2} |m(x,s)|$, dann folgt

$$\begin{aligned}\int_a^b |k(x,s)|\,|y|\, ds \;\le\; M\,\|y\|_\infty \int_a^b \frac{1}{|x-s|^r}\, ds \;&=\\ =\; M\,\|y\|_\infty \,\frac{1}{1-r}\Big[(x-a)^{1-r} + (b-x)^{1-r}\Big] \;&<\\ <\; \frac{2\,M\,\|y\|_\infty |b-a|^{1-r}}{1-r} \;&<\; \infty\,.\end{aligned}$$

Dabei bezeichne $\|y\|_\infty$ die Maximumsnorm für stetige Funktionen.

(ii) $Ky \in C[a,b]$., wenn $y \in C[a,b]$:

Betrachte

$$k_n(x,s) \;:=\; \begin{cases} k(x,s) & \text{für } |x-s| \geq \frac{1}{n}\,, \\ \\ m(x,s)\,n^r & \text{für } |x-s| \leq \frac{1}{n}\,, \end{cases}$$

dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$, daß k_n stetig ist. Der entsprechende Integraloperator sei K_n,

$$K_n \;:\; C[a,b] \;\to\; C[a,b]\,.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} |K_n y(x) - K\,y(x)| \;&=\; \left| \int\limits_{x-\frac{1}{n}}^{x+\frac{1}{n}} \left(m(x,s)\,n^r - \frac{m(x,s)}{|x-s|^r} \right) y(s)\,ds \right| \;\leq \\ &\leq\; M\,\|y\|_\infty \left(\int\limits_{x-\frac{1}{n}}^{x+\frac{1}{n}} n^r\,ds \;+ \int\limits_{x-\frac{1}{n}}^{x+\frac{1}{n}} \frac{ds}{|x-s|^r} \right) \;= \\ &=\; M\,\|y\|_\infty \left(2\,n^{r-1} \;+\; \frac{2\,n^{r-1}}{1-r} \right) \;=\; \frac{2\,M\,(2-r)}{(1-r)\,n^{1-r}}\,\|y\|_\infty\,. \end{aligned}$$

Da $r < 1$, ergibt sich

$$\max_{x \in [a,b]} |K_n\,y(x) \;-\; K\,y(x)| \;=\; \|K_n y \;-\; K\,y\|_\infty \;\to\; 0\,,$$

und zwar gleichmäßig für $n \to \infty$.
Also ist $K\,y$ stetig, d.h.

$$K \;:\; C[a,b] \;\to\; C[a,b]\,.$$

Weiter erkennt man, daß

$$\|K_n - K\|_\infty \;\leq\; \frac{2\,M\,(2-r)}{(1-r)\,n^{1-r}}$$

gilt.

(iii) Den stetigen Kern k_n kann man nach Weierstraß beliebig genau durch einen polynomialen Kern $p_m(x,s)$ gleichmäßig approximieren, d.h. für ein vorgegebenes $\varepsilon > 0$ existiert $m \in \mathbb{N}$ mit

$$|k_n(x,s) - p_m(x,s)| \;<\; \varepsilon$$

für alle $(x,s) \in [a,b] \times [a,b]$ und somit

$$\|K_n - P_m\|_\infty \;<\; (b-a)\,\varepsilon\,,$$

wobei P_m der zu p_m entsprechende Integraloperator ist. Daraus folgt

$$\|K - P_m\|_\infty \ \leq \ \|K - K_n\|_\infty + \|K_n - P_m\|_\infty \ \leq \ \frac{2\,M\,(2-r)}{(1-r)\,n^{1-r}} + (b-a)\,\varepsilon\,.$$

Wähle $n \in \mathbb{N}$ so groß, daß

$$\frac{2\,M\,(2-r)}{(1-r)\,n^{1-r}} \ < \ (b-a)\,\varepsilon\,,$$

d.h.

$$\|K - P_m\|_\infty \ \to \ 0 \qquad \text{für } m \to \infty\,.$$

(iv) Daraus ergibt sich aber auch sofort, daß ein $m \in \mathbb{N}$ existiert mit

$$\|K - P_m\| \ < \ 1\,.$$

Fassen wir noch einmal zusammen: Wir haben gezeigt, daß

(i) $K \ : \ C[a,b] \to C[a,b]\,,$

(ii) $K \ = \ P_m + (K - P_m) \ =: \ P_m + R_m\,,$

(iii) P_m hat degenerierten Kern,

(iv) $\|R_m\| \ < \ 1\,.$

Solche Operatoren erfüllen die Fredholmsche Alternative, was wir jetzt noch nachweisen wollen.

Dazu bemerken wir, daß die folgenden Gleichungen äquivalent sind, d. h. alle die gleiche Lösung haben:

$$\left.\begin{aligned} (I-K)y \ &= \ f\,, \\ (I-R_m)y - P_m y \ &= \ f \qquad \text{nach (ii)} \end{aligned}\right\} \tag{$*$}$$

und

$$(I - L_m)y \ = \ g_m\,, \tag{$**$}$$

mit $L_m := (I - R_m)^{-1}\,P_m$ und $g_m := (I - R_m)^{-1}\,f\,.$

(a) Die Inverse von $I - R_m$ existiert nach dem wohlbekannten Satz:

Sei V ein Banachraum und $R_m \in Ł(V)$ hat die Norm $\|R_m\| < 1$ $\big($ siehe (iv)$\big)$. Dann ist der Operator $I - R_m$ invertierbar in $Ł(V)$ und

$$(I - R_m)^{-1} \ = \ \sum_{n=1}^{\infty} (R_m)^n\,.$$

(b) $L_m : C[a,b] \to C[a,b]$ hat degenerierten Kern, denn

$$L_m y(x) = (I - R_m)^{-1} P_m \, y(x) = (I - R_m)^{-1} \int_a^b \sum_{i=1}^{n} a_i(x) \, \bar{b}_i(s) \, y(s) \, ds =:$$

$$=: \int_a^b \sum_{i=1}^{n} A_i(x) \, \bar{b}_i(s) \, y(s) \, ds \,,$$

nach (iii) und mit

$$l(x,s) = \sum_{i=1}^{n} A_i(x) \, \bar{b}_i(s) \,,$$

$$A_i = (I - R_m)^{-1} \, a_i$$

folgt, daß $l(x,s)$ - der Kern von L_m - degeneriert ist.

(c) Für $(*)$ folgt sofort die Fredholmsche Alternative, denn angenommen die zweite Variante der Fredholm-Alternative trifft nicht auf $(*)$ zu, d.h. aus

$$(I - K) \, y = 0$$

folgt, daß $y = 0$. Dann tritt die folgende Situation ein:

Da $f = 0$ gesetzt wurde, gilt in $(**)$ aufgrund der Äquivalenz zu $(*)$, daß auch $g_m = 0$. Also hat

$$(I - L_m) \, y = 0$$

auch nur die triviale Lösung. Nach Lemma 2.5.1 trifft für die letzte Gleichung die Fredholm-Alternative zu, d.h. sie hat für jedes stetige g eine Lösung.

Wegen der Äquivalenz zwischen $(*)$ und $(**)$ folgt somit die Behauptung für $(*)$.

Damit ist Satz 2.5.2 vollständig bewiesen. ■

Anmerkung. Wir haben uns hier nur mit der Fredholm-Alternativen für Funktionen im $\mathbb{R}^1$ befaßt. Natürlich gelten die entsprechenden Überlegungen auch ganz allgemein.

Wir haben nun gezeigt, daß sich die Fredholm- Alternative auf unsere Fälle anwenden läßt. Betrachten wir also das innere Dirichlet-Problem, d.h.

$$-\frac{1}{2}\beta(x) + \int_\Gamma \left(\frac{\partial}{\partial n_y} E(x;y) \right) \beta(y) \, ds_y = \varphi(x) \,,$$

dann müssen wir zeigen, daß

$$-\frac{1}{2}\beta(x) + \int_\Gamma \left(\frac{\partial}{\partial n_y} E(x;y) \right) \beta(y) \, ds_y = 0$$

nur die triviale Lösung $\beta = 0$ hat.

Dazu nehmen wir an, daß β die homogene Gleichung löst, d.h.

$$v(x) \;=\; \int\limits_{\Gamma} E(x;y)\,\beta(y)\,ds_y\,,$$

Dies ist also die Darstellung als Einfachschichtpotential und löst das äußere Neumann-Problem

$$\begin{aligned} \Delta v \;&= 0 \qquad \text{in } \Omega_a\,,\\ \frac{\partial v}{\partial n_a} \;&= 0 \qquad \text{auf } \Gamma\,, \end{aligned}$$

wobei n_a die äußere Normale an Ω_a ist und

$$v \;\to\; 0 \qquad \text{für } |x| \to \infty\,.$$

Das bedeutet aber

$$v \;=\; 0 \qquad \text{in } \Omega_a$$

und somit

$$v \;=\; 0 \qquad \text{auf } \Gamma$$

wegen der Stetigkeit des Einfachschichtpotentials. Dann löst v auch das innere Dirichlet-Problem, also

$$v \;=\; 0 \qquad \text{in } \Omega\,.$$

Daraus folgt

$$\frac{\partial v(z)}{\partial n_x} \;=\; 0$$

für alle $z \in \Omega$. Aus den Sprungrelationen folgt

$$0 \;=\; \int\limits_{\Gamma} \left(\frac{\partial}{\partial n_x} E(x;y)\right) \beta(y)\,ds_y \;+\; \frac{1}{2}\beta(x)\,.$$

Subtrahieren wir dies von der ursprünglichen homogenen Gleichung, dann ergibt sich schließlich

$$\beta(x) \;=\; 0$$

■

An einem Beispiel im $\mathbb{R}^2$ wollen wir nun zum Abschluß des Abschnittes die Methoden benutzen, um die Lösung des Dirichlet-Problems über einer Kreisscheibe zu finden, d.h. wir betrachten in zwei Raumdimensionen das Problem

$$\begin{aligned} \Delta u \;&=\; 0 \qquad \text{in } K_a(0)\,,\; a > 0\,,\\ u \;&=\; f \qquad \text{auf } \partial K_a(0)\,. \end{aligned}$$

Wir nehmen also eine Lösung in der Form eines Doppelschichtintegrals an,

$$u(x) \;=\; \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\partial K_a}\left(\frac{\partial}{\partial n_y}\ \ln\frac{1}{|x-y|}\right)\beta(y)\,ds_y\,.$$

Diese harmonische Funktion nimmt die gewünschten Randdaten an, falls

$$f(x) \;=\; \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\partial K_a}\frac{\partial}{\partial n_y}\left(\ln\frac{1}{|x-y|}\right)\beta(y)\,ds_y \;-\; \frac{1}{2}\,\beta(x)$$

für $x \in \partial K_a$ gilt.

Sei $x, y \in \partial K_a$, dann

$$\frac{\partial}{\partial n_y}\ \ln\frac{1}{|x-y|} \;=\; \frac{x-y}{|x-y|^2}\cdot\frac{y}{a} \;=\; \frac{x\cdot y - a^2}{a(2a^2 - 2\,x\cdot y)} \;=\; -\frac{1}{2a}$$

und somit

$$f(x) \;=\; -\frac{1}{4\pi a}\int\limits_{\partial K_a}\beta(y)\,ds_y \;-\; \frac{1}{2}\beta(x). \tag{2.7}$$

Wir integrieren jetzt (2.7) nach x und erhalten

$$\int\limits_{\partial K_a} f(x)\,ds_x \;=\; \left(-\frac{2\pi a}{4\pi a} - \frac{1}{2}\right)\int\limits_{\partial K_a}\beta(y)\,ds_y$$

bzw.

$$\int\limits_{\partial K_a}\beta(y)\,ds_y \;=\; -\int\limits_{\partial K_a} f(x)\,ds_x\,.$$

Aus (2.7) folgt

$$\beta(x) \;=\; \frac{1}{2\pi a}\int\limits_{\partial K_a} f(z)\,ds_z \;-\; 2\,f(x)\,.$$

Daraus ergibt sich für die Lösung des Dirichlet-Problems

$$u(x) \;=\; \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\partial K_a}\left(\frac{\partial}{\partial n_y}\ \ln\frac{1}{|x-y|}\right)\left[\frac{1}{2\pi a}\int\limits_{\partial K_a} f(z)\,ds_z \;-\; 2\,f(y)\right]ds_y$$

da $\int_{\partial K_a}(\frac{\partial}{\partial n_y}\ \ln\frac{1}{|x-y|})ds_y = -2\pi$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2\pi a}\int\limits_{\partial K_a} f(z)\,ds_z \;-\; \frac{2}{2\pi}\int\limits_{\partial K_a}\left(\frac{\partial}{\partial n_y}\ \ln\frac{1}{|x-y|}\right)f(y)\,ds_y\\
&= -\frac{1}{2\pi a}\int\limits_{\partial K_a}\left(1 + 2a\frac{\partial}{\partial n_y}\ \ln\frac{1}{|x-y|}\right)f(y)\,ds_y\,,
\end{aligned}$$

wobei im zweiten Schritt das Theorem von Gauß verwendet wurde. Schließlich ergibt sich für $x \in K_a(0)$ und $y \in \partial K_a(0)$: ,

$$\begin{aligned} 1 + 2a\frac{\partial}{\partial n_y} \ln \frac{1}{|x-y|} &= 1 + 2a\frac{y}{a} \cdot \frac{x-y}{|x-y|^2} = \\ &= \frac{(x-y)\cdot(x-y) + 2y\cdot(x-y)}{|x-y|^2} = \\ &= \frac{(x-y)\cdot(x+y)}{|x-y|^2} = \frac{|x|^2-a^2}{|x-y|^2}\,. \end{aligned}$$

Somit erhalten wir

$$u(x) = -\frac{1}{2\pi a} \int\limits_{\partial K_a} \frac{|x|^2 - a^2}{|x-y|^2}\, f(y)\, ds_y\,.$$

■

2.5.1 Der Index eines elliptischen Randwertproblems.

Um die Existenz und Eindeutigkeit für allgemeinere elliptische Randwertprobleme zu beweisen, erweist sich der Begriff des Index einer Randwertaufgabe als Schlüssel dazu.

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mit glattem Rand $\partial\Omega$. Wir betrachten einen Operator der Form

$$A = \sum_{|a| \le m} a_\alpha(x)\, D^a$$

mit $a_\alpha \in C^\infty(\bar{\Omega})$. Es sei daran erinnert, daß A elliptisch ist, wenn das Hauptsymbol

$$a_m(x;\xi) = \sum_{|a|=m} a_\alpha(x)\xi^a \neq 0$$

in Ω für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ liegt.

Daraus folgt, daß m notwendigerweise gerade sein muß.

Wir betrachten das Randwertproblem

$$\begin{aligned} Au &= f \qquad \text{in } \Omega\,, \\ B_j u &= \varphi_j\,, j = 1, 2, \dots, \frac{m}{2} \qquad \text{auf } \partial\Omega\,. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Dabei ist $B_j = B_j(x, \Omega)$ ein Differentialoperator der Ordnung $m_j < m$, der in einer Umgebung des Randes $\partial\Omega$ erklärt ist und glatte Koeffizienten hat.

Satz 2.5.3. Das Randwertproblem (2.8) sei elliptisch. Dann gilt

(i) Für alle $\gamma > m$, γ nicht ganzzahlig, ist

$$\mathcal{A} : C^\gamma(\Omega) \to C^{\gamma-m}(\Omega) \times \prod_{j=1}^{\frac{m}{2}} C^{\gamma-m_j}\Big(\partial\Omega\Big),$$

$$u \;\mapsto\; \{Au, B_1 u|_{\partial\Omega}, \dots, B_{\frac{m}{2}} u|_{\partial\Omega}\}$$

ein Fredholm-Operator mit $\ker \mathcal{A} < \infty$. Im $\mathcal{A}$ ist abgeschlossen und $\operatorname{codim}(\operatorname{im}\mathcal{A}) < \infty$.

(ii) Falls $\partial\Omega$ und die Koeffizienten von A, B_j sowie f und φ_j analytisch sind, dann ist auch die Lösung u von (2.8) analytisch.

(iii) Für alle $\gamma > m$, γ nicht ganzzahlig, gilt

$$\|u\|_{(\gamma)} \;\leq\; C\Big\{\|Au\|_{(\gamma-m)} + \sum_{j=1}^{\frac{m}{2}} \|B_j u\|_{(\gamma-m_j)} + \|u\|_{C(\bar{\Omega})}\Big\}.$$

Der Beweis wird durch Reduktion auf Integralgleichungen geführt.

Definition 2.5.4. Betrachte den Operator

$$\mathcal{A} :\; E_1 \;\to\; E_2\,.$$

Der Index des Operators $\mathcal{A}$ ist definiert durch

$$\operatorname{ind}\mathcal{A} := \;-\dim(\ker \mathcal{A}) - \dim(\operatorname{coker}\mathcal{A})\,.$$

Hierbei sind E_1, E_2 Vektorräume und

$$\operatorname{coker}\mathcal{A} \;=\; E_2/\operatorname{Im}\mathcal{A}\,.$$

Der Index eines Operators ist invariant unter Homotopietransformationen in der Klasse der elliptischen Randwertprobleme.

Kapitel 3

Hyperbolische Differentialgleichungen

Wir schreiben die Definition 1.3.5 in einer etwas konventionelleren Form:

$$A := \sum_{|\alpha|+j\le m} a_{\alpha,j}(t,x) D_x^\alpha D_t^j\,, \qquad t\in\mathbb{R},\ x\in\mathbb{R}^n\,. \tag{3.1}$$

A heißt hyperbolisch an der Stelle (t,x) (in t-Richtung), wenn für das Hauptsymbol

$$A_m(t,x,(\tau,\xi)) = \sum_{|\alpha|+j=m} a_{\alpha,j}(t,x)\xi^\alpha\tau^j\,, \qquad ((\tau,\xi)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)\,,$$

gilt:

i) $A_m(t,x,(1,0)) = a_{0,m}(t,x)\cdot 1^m \neq 0$ (t-Achse ist keine Charakteristik)

ii) Das Polynom

$$\pi(\lambda) := A_m(t,x,(\tau,\xi)+\lambda\cdot(1,0)) = \sum_{|\alpha|+j=m} a_{\alpha,j}(t,x)\xi^\alpha\cdot(\lambda+\tau)^j$$

für alle $(\tau,\xi)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ nur reelle Nullstellen besitzt. Man sieht sofort, daß wir eine einfachere, aber zu *ii)* äquivalente Bedingung erhalten, wenn wir $\tau = 0$ setzen.

Sind die Wurzeln zusätzlich alle einfach, so heißt A strikt hyperbolisch an der Stelle (t,x), gelten die Eigenschaften **für alle** $(t,x)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$, so spricht man einfach von dem hyperbolischen bzw. streng hyperbolischen Differentialoperator A.

Bemerkung. Die Übertragung auf **Systeme** partieller Differentialgleichungen, bei denen $a_{\alpha,j}(t,x)$ Matrizen sind, wurde in den Einführungskapiteln ebenfalls besprochen.

3.1 Das Cauchy-Problem

Die Eigenschaft eines Operators, hyperbolisch zu sein, hängt mit der sachgemäßen Gestelltheit des Cauchy-Problems für diesen Operator zusammen. Wir erinnern uns: notwendig aber nicht hinreichend für die sachgemäße Gestelltheit eines Problems war die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung. Der folgende Satz zeigt, daß dies beim Cauchy-Problem gerade für die hyperbolischen Differentialoperatoren zutrifft.

Satz 3.1.1. Der Operator A nach (3.1), aber **mit konstanten Koeffizienten** $a_{\alpha,j}(t,x) \equiv a_{\alpha,j}$ ist **genau dann** hyperbolisch, wenn die Gleichung

$$Au = f$$

eine eindeutig bestimmte Lösung $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$ für jedes $f \in C_0^\infty(H)$ hat, mit

$$H := \{(t,x) | t \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}^n\}.$$

Der Beweis findet sich in Gårding, L.: Acta Math. 85, 1-62.

Bemerkung. $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$ bezeichnet den Raum der Distributionen auf $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+1})$, dem Raum der beliebig oft auf dem $\mathbb{R}^{n+1}$ differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger. Eine kurze Einführung der Distributionen findet sich in Otto Forster, *Analysis III*, Vieweg 1984. Für eine ausführlichere Darstellung der Theorie, wie sie im Zusammenhang mit partiellen Differentialgleichungen benötigt wird, kann man das Buch von Joseph Wloka, *Partielle Differentialgleichungen: Sobolevräume und Randwertaufgaben*, Teubner 1982, heranziehen.

Wegen der Bedeutung des Cauchy-Problems werden wir uns auch in 3.2/3.3 weiter mit ihm auseinandersetzen, allerdings eingeschränkt auf Probleme mit klassischen Lösungen, die also nicht nur in Distributionenräumen sondern in 'gewöhnlichen' Funktionenräumen liegen.

3.2 Energieabschätzungen

Die Methode der Energieabschätzungen spielt bei der Diskussion des Cauchy-Problems eine wichtige Rolle. Das folgende Beispiel soll die Herleitung und Nützlichkeit dieser Abschätzungen anhand eines besonders einfachen Falles demonstrieren.

Beispiel 3.2.1. Wir betrachten eine Lösung des Cauchy-Problems zur n-dimensionalen Wellengleichung mit $u(t,*) \in C_0^2(\mathbb{R}^n)$ für alle $t \in [0,T]$:

$$\begin{aligned} \Box u &:= \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0 \qquad \text{für} \quad 0 < t \leq T, \\ u(0,x) &= \varphi_0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = \varphi_1\,, \qquad x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Wir multiplizieren die Differentialgleichung $\Box u = 0$ mit $\dot{u} = \frac{\partial u}{\partial t}$ und integrieren partiell:

$$\begin{aligned}
0 = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Box u \dot{u} dx dt &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} (\dot{u}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \dot{u}\Delta u) dx dt \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^t \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\dot{u}^2) dt dx + \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^t \nabla u \cdot \nabla \dot{u} dx dt \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^t \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\dot{u}^2) dt dx + \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^t \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}|\nabla u|^2 dx dt \\
&= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} (\dot{u}^2(t) - \underbrace{\dot{u}^2(0)}_{=\varphi_1^2}) dx + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} (|\nabla u(t)|^2 - \underbrace{|\nabla u(0)|^2}_{=|\nabla \varphi_0|^2}) dx.
\end{aligned}$$

Setze

$$\begin{aligned}
E_0 &:= \int_{\mathbb{R}^n} (\varphi_1^2 + |\nabla \varphi_0|^2) dx\,, \\
E_t &:= \int_{\mathbb{R}^n} (\dot{u}^2(t,x) + |\nabla u(t,x)|^2) dx\,, \\
\Rightarrow E_t &= E_0 \qquad \text{für alle } t \geq 0.
\end{aligned}$$

Die letzte Gleichung drückt die Erhaltung der physikalischen Energie aus.

Bemerkungen:

1. Mit dem so gewonnenen Ergebnis läßt sich leicht die Eindeutigkeit der Lösungen von (3.2) zeigen. Wegen der Linearität von $\Box$ genügt es, nur den Fall $\varphi_0 \equiv \varphi_1 \equiv 0$ zu betrachten. Dann ist aber $E_0 = 0$, also $E_t = 0$ für alle $t \geq 0$, also $\dot{u}(t) = 0$ für alle $t \Rightarrow u(t,x) \equiv \text{const} = u(0,x) = \varphi_0(x) = 0$, d.h. $u \equiv 0$.

2. Die Herleitung der Energiegleichung ist nicht untypisch auch für komplexere Probleme, insbesondere wird der Trick, mit $\dot{u} = \frac{\partial u}{\partial t}$ zu multiplizieren, häufiger eingesetzt. Allerdings ist das Ergebnis oft eine Ungleichung, keine Gleichung, und die auftretenden Größen lassen sich nicht immer als physikalische Energien interpretieren.

Wir betrachten jetzt das Cauchy-Problem für streng hyperbolische Systeme 1. Ordnung. Sei für $x \in \mathbb{R}^n,\ 0 \leq t \leq T$:

$$P(t,x,D_t,D_x) := D_t + \sum_{j=1}^n a_j(t,x) D_j + a_0(t,x)$$

mit

$$D_t = \frac{\partial}{\partial t}$$
$$D_j = \frac{\partial}{\partial x_j} \qquad j = 1, \dots, n\,,$$
$$D_x = \Big(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\Big)\,,$$

$a_j(t,x) \in \mathbb{R}^{N\times N}$ mit glatten und auf $0 \le t \le T$ beschränkten Matrixelementen.

Wir nehmen an:

i) Für alle Wurzeln λ von
$$\det(\lambda I + \sum_{j=1}^{n} a_j(t,x)\xi_j) = 0$$
gilt $\lambda \in \mathbb{R}$ und paarweise verschieden für alle $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ (strenge Hyperbolizität von P).

ii) Es gibt eine von t, x und ξ unabhängige Konstante $C_0 > 0$ mit
$$|\lambda(t,x,\xi) - \lambda'(t,x,\xi)| \ge C_0|\xi|.$$
für alle $t \in [0,T]$ und für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und je zwei verschiedene Wurzeln $\lambda(t,x,\xi)$ und $\lambda'(t,x,\xi)$. $|\xi|$ bezeichnet hier die gewöhnliche euklidische Norm, $|\xi| = (|\xi_1|^2 + \ldots + |\xi_n|^2)^{\frac{1}{2}}$.

Für die folgenden Sätze benötigen wir Elemente der Sobolevraumtheorie. Wir geben hier nur eine - möglichst einfache - Definition der ganzzahligen Sobolevräume an und verweisen für eine Darstellung der Theorie auf die einschlägige Fachliteratur, etwa auf
Joseph Wloka, *Partielle Differentialgleichungen: Sobolevräume und Randwertaufgaben.* Teubner, 1982.

Definition. Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und
$$\mathcal{E}(\Omega) := \{\varphi : \Omega \to \mathbb{C} \mid \quad \varphi \text{ ist in } \Omega \text{ beliebig oft differenzierbar.}\}$$
Seien ferner $(\cdot,\cdot)_\Omega$ und $\|\cdot\|_\Omega$ das $L_2(\Omega)$-Skalarprodukt und die $L_2(\Omega)$-Norm,
$$(\varphi,\psi)_\Omega := \int_\Omega \varphi(x)\overline{\psi(x)}dx \qquad \text{für } \varphi,\psi \in \mathcal{E}(\Omega)\,,$$
$$\|\varphi\|_\Omega := [(\varphi,\varphi)_\Omega]^{\frac{1}{2}} = \Big(\int_\Omega |\varphi(x)|^2 dx\Big)^{\frac{1}{2}} \qquad \text{für } \varphi \in \mathcal{E}(\Omega)\,.$$

(**Bemerkung.** Für $\varphi \in \mathcal{E}(\Omega)$ ist natürlich der Fall $\|\varphi\|_\Omega = \infty$ möglich!)

Definiere damit zu $s \in \mathbb{N}_0$ das Skalarprodukt
$$(\varphi,\psi)_{s,\Omega} := \sum_{|l|\le s} (D^l\varphi, D^l\psi)_\Omega \qquad \text{für } \varphi,\psi \in \mathcal{E}(\Omega)$$
und die (kanonisch) zugehörige Sobolevnorm

$$\| \varphi \|_{s,\Omega} := [(\varphi, \varphi)_{s,\Omega}]^{\frac{1}{2}} = \Big(\sum_{|l| \le s} \| D^l \varphi \|_{\Omega}^2\Big)^{\frac{1}{2}} \qquad \text{für } \varphi \in \mathcal{E}(\Omega)\,,$$

wobei $D^l, |l|$ den üblichen Notationen für Differentialoperatoren und Multiindizes folgen. Dann ist der Sobolevraum $H^s(\Omega)$ definiert als **Vervollständigung** von

$$\{\varphi \in \mathcal{E}(\Omega); \quad \| \varphi \|_{s,\Omega} < \infty\}$$

bezüglich der Sobolevnorm $\| \cdot \|_{s,\Omega}$, d.h.

$$H^s(\Omega) := \overline{\{\varphi \in \mathcal{E}(\Omega);\ \| \varphi \|_{s,\Omega} < \infty\}}^{\|-\|_{s,\Omega}}\,.$$

Bemerkung. $(H^s(\Omega);\ (.,.)_{s,\Omega})$ ist ein separabler Hilbertraum.

In den folgenden Sätzen beschränken wir uns auf die Situation $\Omega = \mathbb{R}^n$.

Satz 3.2.2. Für jede reelle Zahl s gibt es eine Konstante $C = C(s, T)$ mit

$$\| u(t, \cdot) \|_s \le C \cdot \int_0^T \| Pu(\tau, \cdot) \|_s \, d\tau, \qquad 0 < t \le T.$$

Hierbei ist $u = (u_1, \ldots, u_N)$, für die die Anfangsbedingung $u(0, x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ erfüllt ist, und deren Komponenten als Funktionen in x (mit t nur als Parameter) aus $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ stammen.
Außerdem bezeichnet $\| \cdot \|_s$ die Sobolevnorm für vektorwertige Funktionen, d.h. für $f = (f_1, \ldots, f_N) \in (H^s(\mathbb{R}^n))^N$. Diese erhält man auf natürliche Weise aus der skalaren Sobolevnorm durch

$$\| f \|_s := \Big(\sum_{j=1}^{N} \underbrace{\| f_j \|_{s,\mathbb{R}^n}^2}_{\substack{H^s\text{-Norm} \\ \text{mit } \Omega = \mathbb{R}^n}} \Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Beweis. Der längliche Beweis findet sich in Louis Nirenberg, *Lectures on linear partial differential equations.* Regional Conference Series in Mathematics, No. 17, American Mathematical Society (AMS).

Korollar 3.2.3. Das Cauchy-Problem

$$\begin{aligned} P(t, x, D_t, D_x)u &= f(t, x), \qquad 0 < t < T\,, \\ u(0, x) &= \varphi \end{aligned}$$

ist höchstens eindeutig lösbar in $C^1(\mathbb{R}^n)$.

Beweis. Seien $u, v \in C^1$ zwei Lösungen, und $\|\cdot\|_1$ die Sobolevnorm zu $s = 1$.
Setze $w := u - v$.
Aus Satz 3.2.2 folgt dann

$$\|w(t,\cdot)\|_1 \le C \int_0^T \|Pw(\tau,\cdot)\|_1 d\tau = 0$$
$$\Rightarrow w(t,x) = 0 \qquad \text{für} \;\; 0 < t \le T, \quad x \in \mathbb{R}^n \,.$$

Außerdem gilt wegen der Anfangsbedingung $w(0,x) = u(0,x) - v(0,x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.
■

Der zugehörige **Existenz**satz stützt sich auf moderne funktionalanalytische Methoden und setzt Kenntnisse aus der in dieser Vorlesung nur sehr kursorisch behandelten Hilbert- und Sobolevraumtheorie voraus. Wir geben ihn hier daher nicht an und verweisen im Zusammenhang mit dieser und weiteren Existenz- und Eindeutigkeitsfragen bei hyperbolischen Differentialgleichungen auf die umfangreiche Fachliteratur.

3.3 Das Cauchy-Problem für die Wellengleichung

Wir fragen nach expliziten Lösungen für das Cauchy-Problem

$$\begin{aligned} &\Box u = c^2 \Delta u - u_{tt} = 0, \qquad t \ge 0, \quad x \in \mathbb{R}^n \,, \\ &u(0,x) = \varphi_0(x) \,, \qquad u_t(0,x) = \varphi_1(x) \,, \end{aligned} \tag{3.3}$$

für die Dimensionen $n = 1, 2, 3$.
Für den Fall $n = 1$ hatten wir in 1.1.4 bereits explizite Lösungen kennengelernt.

n = 1: **d'Alembert-Formel**

$$u(t,x) = \frac{1}{2}(\varphi_0(x - ct) + \varphi_0(x + ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \varphi_1(\xi) d\xi \,.$$

Auch für den Fall $n = 2$ und $n = 3$ gibt es explizite Lösungsformeln.

n = 2: **Poisson-Formel**

$$\begin{aligned} u(t,x,y) = \frac{1}{2\pi c} \frac{\partial}{\partial t} \int_{K_{ct}} \frac{\varphi_0(\xi,\eta)}{(c^2t^2 - (x-\xi)^2 - (y-\eta)^2)^{\frac{1}{2}}} d\xi d\eta \\ + \frac{1}{2\pi c} \int_{K_{ct}} \frac{\varphi_1(\xi,\eta)}{(c^2t^2 - (x-\xi)^2 - (y-\eta)^2)^{\frac{1}{2}}} d\xi d\eta \,, \end{aligned}$$

mit $K_{ct} := \{(\xi,\eta); \quad (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 \le c^2t^2\}$.

n = 3: **Kirchhoff-Formel**

$$\begin{aligned} u(t,x,y,z) \; &= \frac{1}{4\pi c^2}\frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{1}{t}\int\limits_{\partial K_{ct}} \varphi_0(\xi,\eta,\zeta)dS(\xi,\eta,\zeta)\Big) \\ &\quad + \frac{1}{4\pi c^2 t}\int\limits_{\partial K_{ct}} \varphi_1(\xi,\eta,\zeta)dS(\xi,\eta,\zeta)\,, \end{aligned} \tag{3.4}$$

mit $\partial K_{ct} := \{(\xi,\eta,\zeta);\quad (x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2 = c^2t^2\}$.

Man beachte, daß im zweidimensionalen Fall über die **gesamte** 2-Kugel integriert wird, im dreidimensionalen Fall nur über die **Oberfläche** der 3-Kugel. Dies hat Konsequenzen für das Langzeitverhalten der Lösung, die wir unter dem Stichwort 'Huygensches Prinzip' im letzten Paragraphen dieses Kapitels diskutieren werden.

Wir betrachten zunächst den 3D-Fall, also die Kirchhoff-Formel. Dazu erweist sich der Begriff des **sphärischen Mittels** einer Funktion $f = f(x)$ als nützlich:

$$(M(t)f)(x) := \frac{1}{4\pi}\int\limits_{|\nu|=1} f(x+\nu t)d\omega(\nu)\,. \tag{3.5}$$

Bemerkung. $(M(t)f)(x)$ ist C^k bzgl. t und x, wenn $f \in C^k$ bzgl. x. Außerdem ist $(M(0)f)(x) = f(x)$.

Im folgenden setzen wir bis auf weiteres $c = 1$.

Satz 3.3.1.
Es seien $\varphi_0 \in C^3, \varphi_1 \in C^2$ und

$$u(t,x,y,z) := t(M(t)\varphi_1)(x,y,z) + \frac{\partial}{\partial t}[t(M(t)\varphi_0)(x,y,z)]\,. \tag{3.6}$$

Damit gilt: $u \in C^2$ und

$$\begin{aligned} \Box u = \Delta u - u_{tt} &= 0\,, \\ u(0,x,y,z) &= \varphi_0(x,y,z)\,, \\ u_t(0,x,y,z) &= \varphi_1(x,y,z)\,. \end{aligned}$$

Beweis. Durch Nachrechnen, zunächst für die Anfangsbedingungen.

i) Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned} u(0,x,y,z) &= \{(M(t)\varphi_0)(x,y,z) + t[(M(t)\varphi_1)(x,y,z) + (M_t(t)\varphi_0)(x,y,z)]\}|_{t=0} \\ &= (M(0)\varphi_0)(x,y,z) \\ &= \varphi_0(x,y,z), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_t(0,x,y,z) &= \{(M(t)\varphi_1) + 2(M_t(t))\varphi_0 + t[(M_t(t)\varphi_1) + (M_{tt}(t)\varphi_0)]\}(x,y,z)|_{t=0} \\ &= \{(M(0)\varphi_1) + 2(M_t(0)\varphi_0)\}(x,y,z) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_t(0)\varphi_0 &= \frac{1}{4\pi} \int\limits_{|\nu|=1} < \text{grad } \varphi_0, \nu > d\omega(\nu) \\ &= \frac{1}{4\pi} \int\limits_{|\nu|\leq 1} \nabla_\nu(\text{grad } \varphi_0)\, dV(\nu) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Der Index ν am Nablaoperator in der vorletzten Zeile soll andeuten, auf welche Variable der Operator wirkt. Die vorausgegangene Umformung stützt sich im übrigen auf den Satz von Gauß.

$$\Rightarrow \qquad \begin{aligned} u_t(0,x,y,z) &= (M(0)\varphi_1)(x,y,z) \\ &= \varphi_1(x,y,z) \end{aligned}$$

ii) Wir zeigen nun, daß Funktionen der Form

$$f(t,x) = t(M(t)\varphi)(x) = \frac{t}{4\pi} \int\limits_{|\nu|=1} \varphi(x+\nu t)d\omega$$

mit $\varphi \in C^2$ die Wellengleichung erfüllen.
Berechnung der einzelnen Terme:

$$\begin{aligned} f_{tt} &= (M(t)\varphi + tM_t(t)\varphi)_t \\ &= 2M_t(t)\varphi + tM_{tt}(t)\varphi \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
(M_t(t)\varphi)(x) &= \frac{1}{4\pi} \int\limits_{|\nu|=1} < \text{grad}\ \varphi(x+\nu t), \nu > d\omega(\nu) \\
&= \frac{1}{4\pi t^2} \int\limits_{|x-y|=t} < \text{grad}\ \varphi(y), \nu > dS(y) \quad dS = t^2 d\omega\,, \quad y = x + \nu t, \\
&= \frac{1}{4\pi t^2} \int\limits_{|x-y|\le t} \Delta\varphi(y) dy \qquad \text{Satz von Gauß}, \\
&= \frac{1}{4\pi t^2} \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{|x-y|=\tau} \Delta\varphi(y) dS(y).
\end{aligned}
$$

Durch Ableiten der letzten Formel Berechnung von

$$(M_{tt}(t)\varphi)(x) = -\frac{1}{2\pi t^3} \int\limits_{|x-y|\le t} \Delta\varphi(y)dy + \frac{1}{4\pi t^2} \int\limits_{|x-y|=t} \Delta\varphi(y)dS(y)$$

damit

$$
\begin{aligned}
f_{tt} &= 2 \cdot \frac{1}{4\pi t^2} \int\limits_{|x-y|\le t} \Delta\varphi(y)dy - t \cdot \left[\frac{1}{2\pi t^3} \int\limits_{|x-y|\le t} \Delta\varphi(y)dy - \frac{1}{4\pi t^2} \int\limits_{|x-y|=t} \Delta\varphi(y)dS(y) \right] \\
&= \frac{1}{4\pi t} \int\limits_{|x-y|=t} \Delta\varphi(y)ds(y)
\end{aligned}
$$

Berechnung von Δf:

$$
\begin{aligned}
\Delta f(t,x) &= \frac{t}{4\pi} \int\limits_{|\nu|=1} \Delta\varphi(x+vt)dw \\
&= \frac{1}{4\pi t} \int\limits_{|x-y|=t} \Delta\varphi(y)dS \quad \text{Substitution wie vorher}
\end{aligned}
$$

Ergebnis: $f_{tt} - \Delta f = 0$.

Wir müssen noch zeigen, daß auch $\frac{\partial}{\partial t}[tM(t)\varphi_0]$ die Wellengleichung erfüllt.
Setze $g(t,x) := (tM(t)\varphi_0)(x)$
$\overset{\text{s.o.}}{\Longrightarrow}$ $\quad 0 = \frac{\partial}{\partial t}(\Delta g - g_{tt}) = \Delta g_t - (g_t)_{tt}$
$\Rightarrow$ $\quad g_t$ erfüllt die Wellengleichung.

Die Eindeutigkeit der Lösung findet man durch systematische Konstruktion. Gleichzeitig erkennt man, wie man zu einer solchen Lösungsformel kommt.

Sei $u \in C^2$ eine beliebige Lösung von

$$\Delta u - u_{tt} = 0\,,$$

$$u(0,y) = \varphi_0(y)\,, \qquad u_t(0,y) = \varphi_1(y). \tag{3.7}$$

Nun ist

$$\begin{aligned}
\int\limits_{|y-x|\le r} \Delta u(t,y)dy &= \int\limits_{|y-x|=r} \nabla u(t,y)\cdot n\, dS(y) \\
&= r^2 \int\limits_{|\nu|=1} < \nabla u(t,x+\nu r), \nu > d\omega(\nu) \\
&= r^2 \frac{\partial}{\partial r} \int\limits_{|\nu|=1} u(t,x+\nu r) d\omega \\
&= 4\pi r^2 (\tilde{M}u)_r \ ,
\end{aligned}$$

wo

$$\tilde{M}u(t,r;x) := \frac{1}{4\pi} \int\limits_{|\nu|=1} u(t,x+\nu r)d\omega. \tag{3.8}$$

Für u_{tt} ergibt sich

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial r} \int\limits_{|y-x|\le r} u_{tt}(t,y)dy &= \frac{\partial}{\partial r} \int\limits_0^r d\rho \int\limits_{|y-x|=\rho} u_{tt}(t,y)dS(y) \\
&= \int\limits_{|y-x|=r} u_{tt}(t,y)dS(y) \\
&= r^2 (\int\limits_{|\nu|=1} u(t,x+\nu r)d\omega)_{tt} \\
&= 4\pi r^2 (\tilde{M}u)_{tt}
\end{aligned}$$

Verknüpft man die linken Seiten der beiden letzten Gleichungen mit der Differentialgleichung (3.7), so ergibt sich

$$4\pi (r^2(\tilde{M}u)_r)_r = 4\pi r^2 (\tilde{M}u)_{tt}.$$

Wegen

$$\begin{aligned}
(r^2(\tilde{M}u)_r)_r &= 2r(\tilde{M}u)_r + r^2(\tilde{M}u)_{rr} \\
&= r(r\tilde{M}u)_{rr}
\end{aligned}$$

bedeutet dies

$$(r\tilde{M}u)_{rr} = (r\tilde{M}u)_{tt},$$

d.h. $r\tilde{M}u(t,r;x)$ erfüllt als Funktion in t und r die eindimensionale Wellengleichung. Für diese kennen wir aus 1.1.4 die allgemeine Lösung:

$$r\tilde{M}u(t,r;x) = w_1(r+t;x) + w_2(r-t;x).$$

Dazu seien $w_1, w_2 \in C^2$ beliebige Funktionen in r und t.
Wegen

$$\begin{aligned}
&\lim_{r\to 0} r\tilde{M}(u) = 0 \qquad \text{für alle } t\,, \\
&\Rightarrow w_1(t;x) = -w_2(-t;x) \qquad \text{für alle } t\,, \\
&\Rightarrow r\tilde{M}(u) = w_1(r+t;x) - w_1(t-r;x) \\
&\Rightarrow \lim_{r\to 0} \tilde{M}(u) = 2w_1'(t;x)
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Andererseits, nochmal nach (3.8):

$$\lim_{r\to 0} \tilde{M}(u) = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{|\nu|=1} u(t,x)d\omega(\nu) = u(t,x)$$

$$\Rightarrow 2w_1'(t;x) = u(t,x) \tag{3.10}$$

Aus (3.9) folgt aber auch:

$$(r\tilde{M}u)_r + (r\tilde{M}u)_t = 2w_1'(r+t;x).$$

Wir vertauschen t und r und setzen das neue $r = 0$

$$(t\tilde{M}u(0,t;x))_t + (t\tilde{M}u(r,t;x))_r|_{r=0} = 2w_1'(t;x).$$

Dieses Ergebnis setzen wir in die linke Seite von (3.10) ein, womit wir erhalten

$$\begin{aligned}
u(t,x) &= 2w'(t;x) \\
&= \Big(\frac{t}{4\pi} \int\limits_{|\nu|=1} u(0,x+\nu t)d\omega\Big)_t + \frac{t}{4\pi} \int\limits_{|\nu|=1} u_t(0,x+\nu t)d\omega \\
&= \frac{t}{4\pi} \int\limits_{|\nu|=1} \varphi_1(x+\nu t)d\omega + \frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{t}{4\pi} \int\limits_{|\nu|=1} \varphi_0(x+\nu t)d\omega\Big) \\
&= tM(t)\varphi_1 + \frac{\partial}{\partial t}(tM(t)\varphi_0)\,.
\end{aligned}$$

Das ist aber genau die hergeleitete Formel. ■

Bemerkung. Die hier berechnete Lösung hängt stetig von den Anfangsdaten ab, denn beim Übergang von φ_0 nach $\hat{\varphi}_0 = \varphi_0 + \epsilon_0$, φ_1 nach $\hat{\varphi}_1 = \varphi_1 + \epsilon_1$ ändert sich die Lösung von u nach $\hat{u}$ um

$$\begin{aligned}
|\hat{u}(t,x,y,z) - u(t,x,y,z)| &\leq |t \cdot M(t) \cdot \epsilon_1| + |M(t) \cdot \epsilon_0| + |t \cdot \frac{\partial}{\partial t}(M(t) \cdot \epsilon_0)| \\
&\leq \frac{1}{4\pi} \cdot t \cdot \epsilon_1 \cdot \mathrm{vol}(S^2) + \frac{1}{4\pi}\epsilon_0 \cdot \mathrm{vol}(S^2) + 0 \\
&= c_1 \cdot t\epsilon_1 + c_2 \cdot \epsilon_0\,,
\end{aligned}$$

worin $\mathrm{vol}(S^2)$ die Oberfläche der Einheitskugel im $\mathbb{R}^3$ bezeichnet.

Zusammenfassung. Bringen wir unser Ergebnis (3.6) in die Form (3.4), d.h. auf die Kirchhoff-Formel für das Cauchy-Problem zu der nicht normierten Wellengleichung:

$$\begin{aligned} c^2\Delta u - u_{tt} &= 0 \\ u(0,x) &= \varphi_0(x) \\ u_t(0,x) &= \varphi_1(x). \end{aligned}$$

Definiere $\tilde{u}(t,x,y,z) := u(t/c,x,y,z)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \tilde{u}_{tt} &= \frac{1}{c^2}u_{tt} = \Delta u = \Delta\tilde{u}; \\ \tilde{u}(0,x) &= \varphi_0(x); \\ \tilde{u}_t(0,x) &= \frac{1}{c}u_t(0,x) = \frac{1}{c}\varphi_1(x), \end{aligned}$$

d.h. $\tilde{u}$ löst das Cauchy-Problem für die normierte Wellengleichung und den Anfangsdaten φ_0 und φ_1/c Dafür können wir aber die bereits bewiesenen Lösungsformeln verwenden,

$$\begin{aligned} \tilde{u}(t,x,y,z) &= t\,\tilde{M}(t)\frac{\varphi_1}{c} + \frac{\partial}{\partial t}t\,\tilde{M}(t)\varphi_0 \\ \Longrightarrow \qquad u(t,x,y,z) &= \tilde{u}(ct,x,y,z) \\ &= tM(ct)\varphi_1(x,y,z) + \frac{\partial}{\partial\tau}[(\tau M(\tau)\varphi_0)(x,y,z)]\Big|_{\tau=ct} \\ &= tM(ct)\varphi_1(x,y,z) + \frac{\partial}{\partial t}[(ctM(ct)\varphi_0)(x,y,z)]\cdot\frac{dt}{d\tau}\Big|_{\tau=ct} \\ &\overset{(3.5)}{=} \frac{t}{4\pi}\int\limits_{|\nu|=1}\varphi_1(x+c\nu t)d\omega(\nu) + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{ct}{4\pi}\int\limits_{|\nu|=1}\varphi_0(x+c\nu t)d\omega(\nu)\right] \end{aligned}$$

Mit der Substitution $y = x + c\nu t,\ d\omega(\nu) = dS(y)/c^2t^2$ kommt schließlich

$$u(t,x,y,z) = \frac{1}{4\pi c^2 t}\int\limits_{S_{ct}(x)}\varphi_1(y)dS(y) + \frac{1}{4\pi c^2}\frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{1}{t}\int\limits_{S_{ct}(x)}\varphi_0(y)dS(y)\Big)$$

Das ist gerade (3.4). ■

Wir betrachten jetzt den Fall $n = 2$.

$$\begin{aligned} \Delta u - u_{tt} &= 0 \\ u(0,\overline{x}) &= \varphi_0(\overline{x}) \\ u_t(0,\overline{x}) &= \varphi_1(\overline{x}). \end{aligned} \tag{3.11}$$

Hierbei wurde $\overline{x} = (x_1, x_2)$ gesetzt.
Wir betrachten zunächst wieder den Fall $c := 1$.

Satz 3.3.2. Es seien $\varphi_0 \in C^3, \varphi_1 \in C^2$ und

$$u(t,\overline{x}) := \left(\overline{M}(t)\varphi_1\right)(x) + \frac{\partial}{\partial t}\left(\overline{M}(t)\varphi_0\right)(x)$$

mit

$$\overline{M}(t)\varphi_i = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\overline{y}-\overline{x}|\leq t} \frac{\varphi_i(\overline{y})}{(t^2-|\overline{y}-\overline{x}|^2)^{\frac{1}{2}}}d\overline{y}$$

Dann gilt:

i) $u \in C^2$

ii) u löst das Cauchysche Anfangswertproblem (3.11) für die zweidimensionale Wellengleichung.

Beweis: Wir betrachten die Formel (3.6) für den dreidimensionalen Fall und verwenden sie für die Anfangsdaten ϕ_0, ϕ_1, wobei wir definieren:

$$\phi_i(x_1,x_2,x_3) := \varphi_i(\overline{x}) \qquad i = 0,1.$$

Damit ist (U statt u geschrieben, um Verwechslung mit der zweidimensionalen Lösung zu vermeiden):

$$U(t,x_1,x_2,x_3) = t(M(t)\phi_1)(x_1,x_2,x_3) + \frac{\partial}{\partial t}[t(M(t)\phi_0)(x_1,x_2,x_3)]$$

mit

$$(M(t)\phi_i)(x) := \frac{1}{4\pi}\int\limits_{|\nu|=1}\phi_i(x+\nu t)d\omega, \qquad \begin{array}{c} x=(x_1,x_2,x_3) \\ i=0,1. \end{array}$$

eine Lösung des zu den Anfangsdaten ϕ_0, ϕ_1 gehörenden dreidimensionalen Cauchy-Problems. Man sieht sofort: U hängt nicht von x_3 ab, d.h. $\partial^2 U/\partial x_3^2 \equiv 0$, also löst U nicht nur die dreidimensionale, sondern sogar die zweidimensionale Wellengleichung. Wir müssen die obige Formel nur noch umrechnen und haben dann mit $u(\overline{x}) := U(\overline{x},0) = U(x_1,x_2,0)$ die gesuchte Darstellung der Lösung des zweidimensionalen Cauchy-Problems.

$$\begin{aligned} tM(t)\phi_i &= \frac{t}{4\pi}\int\limits_{|\nu|=1}\phi_i(x+\nu t)d\omega \\ &= \frac{1}{4\pi t}\int\limits_{|x-y|=t}\varphi_i(y)dS \end{aligned}$$

Parametrisierung der Fläche $|x-y| = t$ als Funktion von $\overline{y}$.

$$
\begin{aligned}
y_3 &= x_3 \pm \sqrt{t^2 - |\overline{y}-\overline{x}|^2} \\
\text{d.h. } y &= (y_1, y_2, x_3 \pm \sqrt{t^2 - |\overline{y}-\overline{x}|^2}) =: h(\overline{y}) \\
\Rightarrow dS &= [\det(Dh^T(\overline{y}) \cdot Dh(\overline{y}))]^{\frac{1}{2}} d\overline{y} \\
&= \left[1 + \left(\frac{\partial}{\partial y_1}(x_3 \pm \sqrt{t^2 - |\overline{y}-\overline{x}|^2})\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y_2}(x_3 \pm \sqrt{t^2 - |\overline{y}-\overline{x}|^2})\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} dy_1 dy_2 \\
&= \left[1 + \frac{(y_1-x_1)^2}{t^2 - |\overline{y}-\overline{x}|^2} + \frac{(y_2-x_2)^2}{t^2 - |\overline{y}-\overline{x}|^2}\right]^{\frac{1}{2}} dy_1 dy_2 \\
&= \frac{t}{\sqrt{t^2 - |\overline{y}-\overline{x}|^2}} dy_1 dy_2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow tM(t)\varphi_i &= 2\frac{1}{4\pi} \int\limits_{|\overline{y}-\overline{x}| \leq t} \frac{\varphi_i(\overline{y})}{\sqrt{t^2 - |\overline{y}-\overline{x}|^2}} dy_1 dy_2 \\
&\stackrel{\text{Def.}}{=} \overline{M}(t)\varphi_i.
\end{aligned}
$$

■

3.4 Das Huygensche Prinzip

Wir betrachten nochmals die Kirchhoff-Formel ($n = 3$), aus Gründen der Einfachheit mit $\varphi_0 \equiv 0$. Es sei $\overline{x} := (x, y, z)$.

$$
u(t, \overline{x}) = \frac{1}{4\pi c^2 t} \int\limits_{\partial K_{ct}(x,y,z)} \varphi_1(\xi, \eta, \zeta) dS \tag{3.12}
$$

$$
\partial K_{ct}(x, y, z) := \{(\xi, \eta, \zeta) | (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\xi)^2 = c^2 t^2\}
$$

Es sei $\varphi_1 \in C^2(\mathbb{R}^3)$, $\varphi_1(x, y, z) = 0$ für $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \Omega$ ($\Omega \in \mathbb{R}^3$ beschränktes Gebiet) und $\varphi_1(x, y, z) > 0$ für $(x, y, z) \in \Omega$.

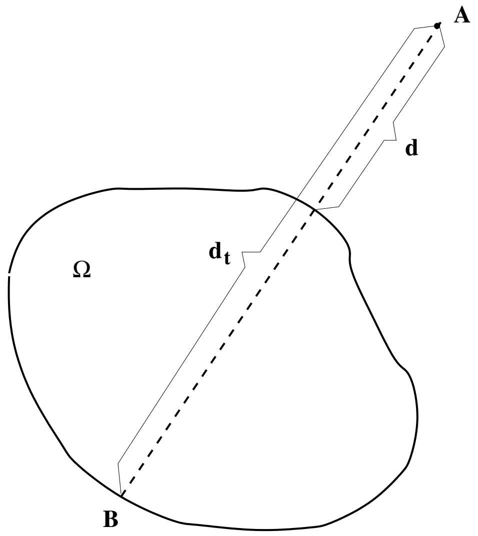


Abbildung 3.1

Sei $A \in \mathbb{R}^3 \setminus \Omega$. Nach (3.12) gilt:

$$u(t,A) = \frac{1}{4\pi c^2 t} \int\limits_{\partial K_{ct}(A)} \varphi_1(\xi,\eta,\zeta)dS$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad & u(t,A) = 0 \qquad \text{für alle } t \leq t_1 := \tfrac{d}{c}, \qquad d := \operatorname{dist}(A,\overline{\Omega}); \\ & u(t,A) = 0 \qquad \text{für alle } t \geq t_2 := \tfrac{d_1}{c}, \qquad d_1 := \sup_{B\in\Omega}[\operatorname{dist}(A,B)]; \end{aligned}$$

Für $t_1 < t < t_2 \ : \ u(t,A) > 0$.

Wenn man Ω auf einen Punkt (etwa 0) zusammenzieht, so merkt der Punkt A den Anfangswert an der Stelle 0 nur zur Zeit $t = \frac{d}{c}$. Das ist der Kern des Huyghen-Prinzips:

> ‘Ein scharf lokalisierter Anfangszustand wird an jeder Stelle des $\mathbb{R}^3$ nach einer wohlbestimmten Zeit als scharfes Phänomen wahrgenommen’.

Oder auch anders ausgedrückt:

> ‘Die Funktionswerte u an der Stelle (t,x,y,z) hängen von dem Schnitt des Kegel**mantel**s (Spitze (t,x,y,z), Steigung c) mit $\{t=0\}$ ab’.

Jeder Punkt $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, in dem die Anfangswerte $\neq 0$ sind, ist Zentrum einer Kugelwelle, die sich mit der Geschwindigkeit c ausbreitet. Für eine bestimmte Zeit t verschwindet die Lösung außerhalb eines bestimmten Gebietes Ω_t. Der Rand dieses Gebietes S_t ist die Enveloppe aller dieser Kugelwellen mit Radius ct.
Wenn Ω beschränkt ist, besteht von einem bestimmten Zeitpunkt t die Fläche S_t aus zwei zusammenhängenden Komponenten. Die am weitesten von Ω weg liegt, heißt die **Wellenfront**, die andere die **rückwärtige Welle**.

Im Fall $\mathbf{n = 2}$ gilt das Huyghensche Prinzip nicht. Wenn die Anfangsdaten in einem beschränkten Gebiet Ω nicht Null sind, verschwindet die Lösung zur Zeit t an allen Stellen mit einer Entfernung von Ω, die größer als ct ist. In allen anderen Punkten ist sie ungleich Null. In der Lösungsformel wird nämlich nicht nur über die Sphäre sondern über die ganze Vollkugel integriert. Es gibt demgemäß eine Wellenfront aber keine rückwärtige Welle. Das nennt man **Dissipation** der rückwärtigen Welle.

Der allgemeine Fall. Wir betrachten die Legendre-Polynome:

$$P_0(t) = 1, \quad P_k(t) = \frac{1}{2^k k!} \frac{d^k}{dt^k}(t^2 - 1)^k \qquad k + 1, 2, \ldots$$

Dann folgt für die Lösung des Cauchy-Problems:

$$u(t,x) = \frac{\partial}{\partial t} T_{\varphi_0}(t,x) + T_{\varphi_1}(t,x)$$

mit

$$T_\varphi(t,x) = \frac{1}{2(2\pi)^{k+1}} \sum_{j=0}^{k} \frac{\partial^j}{\partial t^j} \frac{P_k^{(k-j)}(1)}{t^{2k+1-j}} \int_{S_t} \varphi(y)dS \qquad \text{für} \quad \mathbf{n = 2k + 1}; \quad k = 1, 2, \ldots$$

$$T_\varphi(t,x) = \frac{1}{(2\pi)^{k+1}} \sum_{j=0}^{k} \frac{\partial^j}{\partial t^j} \frac{P_k^{(k-j)}(1)}{t^{2k-j}} \int_{|y|<t} \frac{\varphi(y)}{\sqrt{t^2 - |y|^2}} dy \qquad \text{für} \quad \mathbf{n = 2k}; \quad k = 1, 2, \ldots$$

Formeln von **Herglotz-Petrovskij**

Entsprechend der Fälle $n = 2$ und $n = 3$ ist die Gültigkeit des Huyghenschen Prinzips für **ungerade** Dimension gegeben, **nicht** dagegen für **gerade** n.

Der Beweis der obigen Formeln erfolgt über Konstruktion von Singularitätenlösungen.

Spezialfall: Für $k = 1$ erhält man gerade die alte Kirchhoffsche bzw. Poissonsche Formel.

Kapitel 4

Parabolische Differentialgleichungen

4.1 Maximum–Prinzip

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, $Q := Q_T := (0, T] \times \Omega$ ein Ort–Zeit–Zylinder, seien $a_{ij}, b_i, c, f \in C(\overline{Q}),\ i, j = 1, \ldots, n$ und $A := (a_{ij}) = A^T$ symmetrisch.
Der Differentialoperator

$$L := -\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \cdot \frac{\partial^2}{\partial x_i \, \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}$$

heißt parabolisch

$$:\Longleftrightarrow \qquad \forall (t, x) \in Q : \qquad \forall v \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\} : \qquad v^T \cdot A(t, x) \cdot v \gneqq 0 \, ,$$

d.h. wenn in jedem Punkt des Zylinders das Hauptsymbol eine positiv definite Bilinearform ist, bzw. gleichmäßig parabolisch

$$:\Longleftrightarrow \qquad \exists \, \mu \in \mathbb{R}^+ : \qquad (\, v^T A v \,) \, (t, x) \geq \mu \cdot \|v\|^2 \, , \qquad \forall (t, x) \in Q \, .$$

wenn also das Hauptsymbol auf der Einheitskugel nicht beliebig nahe bei 0 liegen kann.
$L \cdot u + c \cdot u = f$ ist dann eine lineare Differentialgleichung 2. Ordnung.

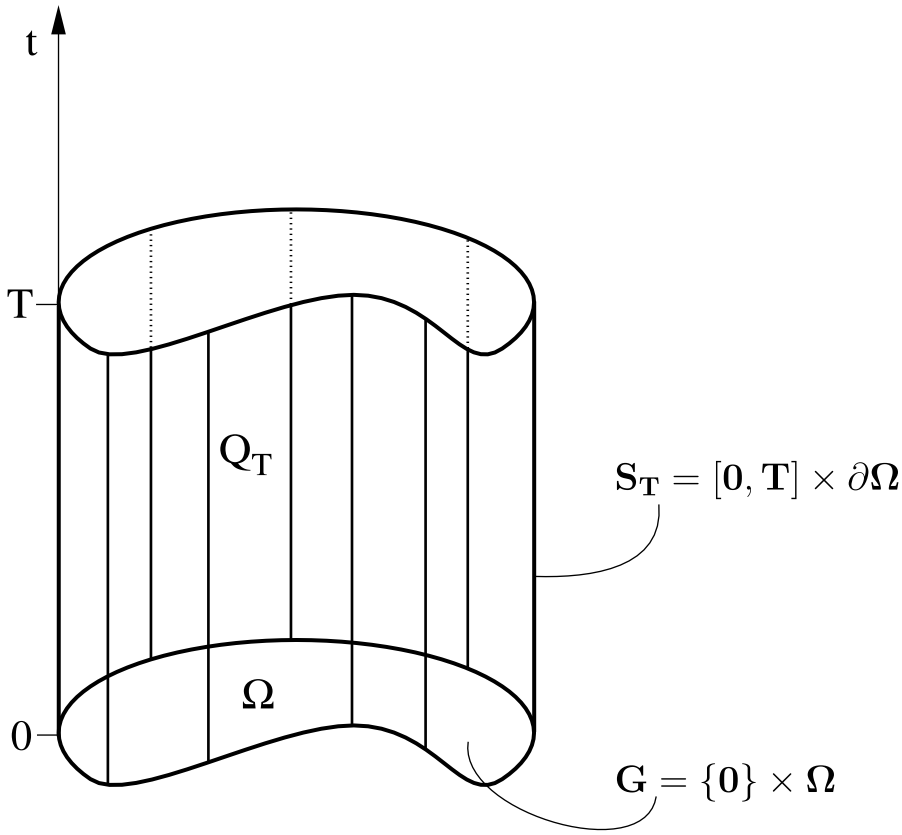


Abbildung 4.1: Ort–Zeit–Zylinder

Im folgenden sei stets $u \in C(\overline{Q})$, $u_t, u_{x_i}, u_{x_i x_j} \in C(Q)$.

Satz 4.1.1. (Schwaches) Maximum–Prinzip, Monotonieprinzip
L sei parabolisch und $c \in C(\overline{Q})$. Ferner

$$\begin{aligned} L \cdot u + c \cdot u &\geq 0 \qquad \text{auf } Q \text{ , und} \\ u &\leq 0 \qquad \text{auf } G \cup S_T \, , \end{aligned}$$

wobei $G := \{0\} \times \Omega \, , S_T := [0, T] \times \partial\Omega$.
Dann ist

$$u \leq 0 \qquad \text{auf ganz } \overline{Q} \, .$$

D.h. ist $L \cdot u + c \cdot u \geq 0$, so folgt aus $u \leq 0$ auf Boden und Mantel des Zylinders schon $u \leq 0$ überall.

Bemerkung. Anders formuliert: u löst $(L + c) \cdot u = f$ und $f \geq 0$.

Beweis.
$c = c(t, x) \in C(\overline{Q})$ ist beschränkt, also gibt es $M \in \mathbb{R}^+$ mit $c \lneqq M$ auf $\overline{Q_T}$.
Angenommen $u \gneqq 0$ bei $(t_0, x_0) \in \overline{Q}$ [d.h. in $\{T\} \times \Omega$ oder in $\mathring{Q}$] .

Definiere: $v(t,x) := u(t,x) \cdot \exp(-M \cdot t)$.

Sei $(t_1, x_1) \in \overline{Q}$ mit $v(t_1, x_1) = \max v$. Nach obiger Annahme ist $v(t_1, x_1) \gneqq 0$. Ferner ist bei der Maximalstelle (t_1, x_1)

$$\frac{\partial}{\partial t} v \;\geq\; 0\,, \quad \frac{\partial}{\partial x_i} v \;=\; 0\,, \quad H(v) \;:=\; \left(\frac{\partial^2}{\partial x_i\, \partial x_j} \cdot v \right) \quad \text{negativ definit.}$$

Zwischenbemerkung:

Satz. Hellwig: Partielle Differentialgleichungen, Seite 88

$$A = A^T,\, B = B^T \;\in\; M(n, \mathbb{R}) \qquad \text{mit } \forall v \in \mathbb{R}^n : \; v^T A v \geq 0\,, v^T B v \leq 0$$

$$\Longrightarrow \qquad \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \cdot b_{ij} \;\leq\; 0\,.$$

Das Skalarprodukt zweier verschiedenartig semidefiniter Matrizen ist nicht positiv.
Hier ist also mit $B := H(v)$

$$\sum a_{ij} \cdot \frac{\partial^2}{\partial x_i\, \partial x_j} \cdot v \;\leq\; 0\,.$$

Nach Wahl von M ist ferner $(c - M) \cdot v \;\lneqq\; 0$ bei (t_1, x_1).
Insgesamt ist bei $(t_1; x_1) \in \overline{Q}$

$$(L + c - M) \cdot v \;=\; \underbrace{-\frac{\partial v}{\partial t}}_{\leq 0} + \underbrace{\sum a_{ij}\, v_{x_i x_j}}_{\leq 0} + \sum b_i \cdot 0 \;+\; \underbrace{(c - M) \cdot v\,,}_{\lneqq 0}$$

also

$$(L + c - M) \cdot v \;<\; 0\,.$$

Andererseits ist

$$\begin{aligned} (L + c - M) \cdot v \;&=\; \mathrm{e}^{-M \cdot t} \cdot (L + c) \cdot u \;+\; \mathrm{e}^{-M \cdot t} \cdot M \cdot u \;-\; M \cdot \mathrm{e}^{-M \cdot t} \cdot u \\ &=\; \underbrace{\mathrm{e}^{-M \cdot t}}_{>0} \cdot \quad \underbrace{(L + c) \cdot u}_{\geq 0 \text{ nach Vor.}} \end{aligned}$$

also

$$(L + c - M) \cdot v \;\geq\; 0\,. \qquad \text{Widerspruch !!}$$

■

Korollar 4.1.2.
Ist L parabolisch und $L \cdot u + c \cdot u = f$ auf Q, dann ist

$$|u(t,x)| \leq K \cdot \left[\max_{\overline{G}} |u| + \max_{S_T} |u| + T \cdot \max_{\overline{Q}} |f| \right] \qquad \text{mit } K \in \mathbb{R}^+ \text{ und } G, S_T \text{ wie oben,}$$

d.h. die Lösung der Differentialgleichung kann abgeschätzt werden durch die Maxima der Randwerte und der rechten Seite.

Beweis. Zunächst sei $c \leq 0$.
Definiere $v(t,x) := \pm u(t,x) - (M + N \cdot t)$,
wobei $M := \max_{\overline{G}} |u| + \max_{S_T} |u|$, $N := \max_{\overline{Q}} |f|$.
Es ist

$$\begin{aligned}(L+c)v &= \pm(L+c)u + N - c(M+N\cdot t)\\ &= \underbrace{\pm f + N}_{\geq 0} - \underbrace{c}_{\leq 0} \cdot \underbrace{(M+N\cdot t)}_{\geq 0}\end{aligned}$$

nach Definition von M, N und Voraussetzung an c,

also

$$(L+c)v \geq 0\,.$$

Auf dem Rand gilt:
Auf $G = \{0\} \times \Omega$ ist $v(0,x) = \pm u(0,x) - M \leq 0$ nach Definition von M
und auf $S_T = [0;T] \times \partial\Omega$ ebenso $v \leq \pm u - M \leq 0$.
Satz 4.1.1 liefert $v \leq 0$ auf $\overline{Q}$ also $|u| \leq M + N \cdot t \leq M + N \cdot T$.

Nun unterliege c keiner weiteren Einschränkung mehr, außer $c \in C(\overline{Q})$.
Definiere $w := u \cdot \mathrm{e}^{-\varepsilon \cdot t}$ mit $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$.
Es ist dann:

$$\begin{aligned}f &= (L+c)\cdot u = (L+c)\cdot(\mathrm{e}^{\varepsilon\cdot t}\cdot w)\\ &= \mathrm{e}^{\varepsilon\cdot t}\cdot(L+c)\cdot w + \mathrm{e}^{\varepsilon\cdot t}\cdot(-\varepsilon)\cdot w = \mathrm{e}^{\varepsilon\cdot t}\Big(L + (c-\varepsilon)\Big)\cdot w\,.\end{aligned}$$

Weil c beschränkt ist, gilt $c - \varepsilon \lneqq 0$ für ε groß genug.
Wie im 1.Teil bewiesen, gilt wegen

$$\Big(L + (c-\varepsilon)\Big)\cdot w = \mathrm{e}^{-\varepsilon\cdot t}\cdot f \qquad \text{mit } (c - \varepsilon \lneqq 0)$$

hier also

$$|u \cdot \mathrm{e}^{-\varepsilon\cdot t}| = |w| \leq \max_{\overline{G}} |w| + \max_{S_T} |w| + T \cdot \max_{\overline{Q}} |\mathrm{e}^{-\varepsilon\cdot t} f|$$

und daher

$$|u| \leq \mathrm{e}^{\varepsilon\cdot t}\cdot[\max_{\overline{G}} |w| + \max_{S_T} |w| + T \cdot \max_{\overline{Q}} \mathrm{e}^{-\varepsilon\cdot t}|f|]\,,$$

und mit

$$\begin{aligned}&\mathrm{e}^{\varepsilon\cdot t} \leq \mathrm{e}^{\varepsilon\cdot T} =: K\\ &\mathrm{e}^{-\varepsilon\cdot t} \leq 1 \Longrightarrow \mathrm{e}^{-\varepsilon\cdot t}|f| \leq |f|,\ \ |w| = \mathrm{e}^{-\varepsilon\cdot t}\cdot|u| \leq |u|\end{aligned}$$

hat man

$$|u| \leq K \cdot [\max_{\overline{G}} |u| + \max_{S_T} |u| + T \cdot \max_{\overline{Q}} |f|]\,.$$

■

Bemerkung. Es stellen sich keine Anforderungen an das Vorzeichenverhalten von c; c muß lediglich beschränkt sein. [Dies ist wegen $c \in C(\overline{Q})$ und der Beschränktheit von Q der Fall.]

Korollar 4.1.3. Ist L parabolisch und $L \cdot u = 0$ auf Q, so folgt

$$\min_{\Gamma} u \;\leq\; u(t,x) \;\leq\; \max_{\Gamma} u\,,$$

wobei $\Gamma := G \cup S_T = \{0\} \times \Omega \cup [0,T] \times \partial\Omega\,.$

D.h. eine Lösung der homogenen Gleichung mit $c = 0$ nimmt Maximum und Minimum auf dem Rand an.

Beweis. Definiere $v := u - M$, wobei $M := \max_{\Gamma} u$.
Dann ist $v \leq 0$ auf Γ und offensichtlich $L \cdot v = L \cdot u = 0\,.$
Nach Satz 4.1.1 ist dann $v \leq 0$ auf ganz $\overline{Q}$, d.h. $u \leq \max_{\Gamma} u$ auf $\overline{Q}\,.$
Für $m := \min_{\Gamma} u$ verfährt man analog mit $v := m - u\,.$ ■

Satz 4.1.4. Starkes Maximum–Prinzip
L sei gleichmäßig parabolisch, $c \leq 0$, $f \geq 0$ auf einem beliebigen Gebiet $D \subseteq \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$, das nicht unbedingt zylinderförmig sein muß ! a_{ij}, b_i, c seien stetig und beschränkt auf D, f nur stetig.

> Ist dann $(L + c) \cdot u = f$ und $u(\tilde{p}) = M$ bei $\tilde{p} = (\tilde{t}; \tilde{x}) \in D$, wobei $M := \sup_{\overline{D}} u \geq 0$ so folgt,
>
> daß bei jedem $p = (t,x) \in D$, welches von $\tilde{p}$ aus durch eine Abwärtstreppe erreicht werden kann, $u(p) = M = u(\tilde{p})$ ist.

Eine Abwärtstreppe sei dabei ein Weg, der aus endlich vielen Stücken besteht, wo $t =$const oder $x =$const.

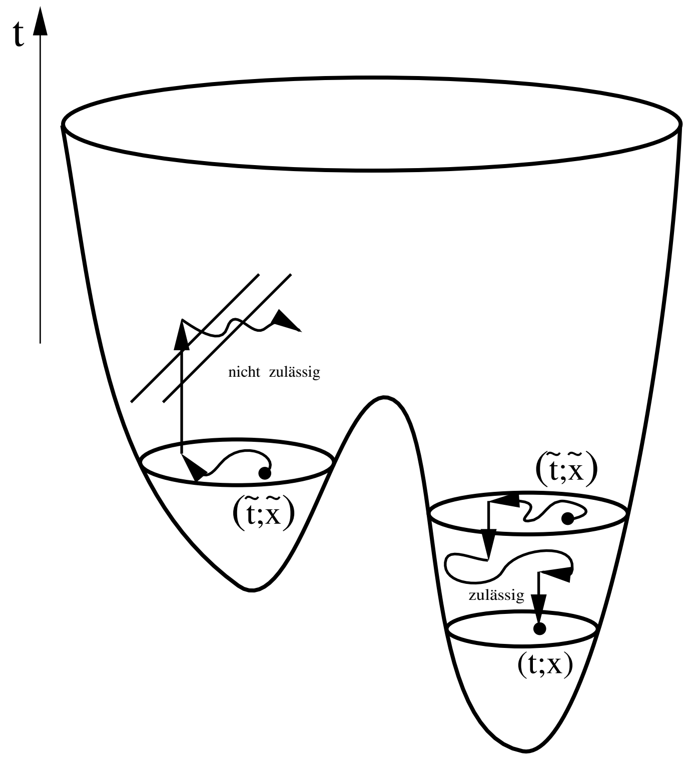


Abbildung 4.2: Zulässige [Abwärts–] und unzulässige [Aufwärts–] Treppen

Im folgenden sei stets

- L gleichmäßig parabolisch,
- $D \subseteq \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$ ein beliebiges Gebiet,
- a_{ij} , b_i , c , stetig und beschränkt, f stetig und
- $M = \sup_{\overline{D}} u$.

Bemerkung. Für Zylindergebiete $D = [t_1; t_2] \times \Omega$ folgt unter den Voraussetzungen von Satz 4.1.4

$$u = \text{const} = M \qquad \text{auf } \{t \leq \tilde{t}\} \cap D\,.$$

Wir beweisen eine schwächere Form dieses Satzes 4.1.4, nämlich

Satz 4.1.5. Ist $L \cdot u \geq 0$ auf D und $u(\tilde{p}) = M$ bei $\tilde{p} \in D$, dann gilt die Aussage von Satz 4.1.4 .

Bemerkung. Zum Beweis des Satzes 4.1.4 siehe *Russian Mathematical Surveys* 17, No 3, 1-146 (1962).

Beweis. Satz 4.1.5

Der Beweis wird o.B.d.A. für den Fall $L \cdot u \geq 0$ geführt; man benötigt hierzu folgende Lemmata:

Lemma 4.1.6.
Es sei $\bar{p} = (\bar{t}, \bar{x})$ ein beliebiger Punkt und $K = K_{\bar{r}}(\bar{p})$ eine Kugel mit $\overline{K} \subseteq D$. Es gelte weiter $u < M$ in K und $u(p_1) = M$ bei $p_1 = (t_1, x_1) \in \partial K$,
so folgt
t_1 ist maximaler oder minimaler t–Wert in K .

D.h. bläst man eine Kugel auf, wo $u < M$, so stößt man mit einem Pol an.

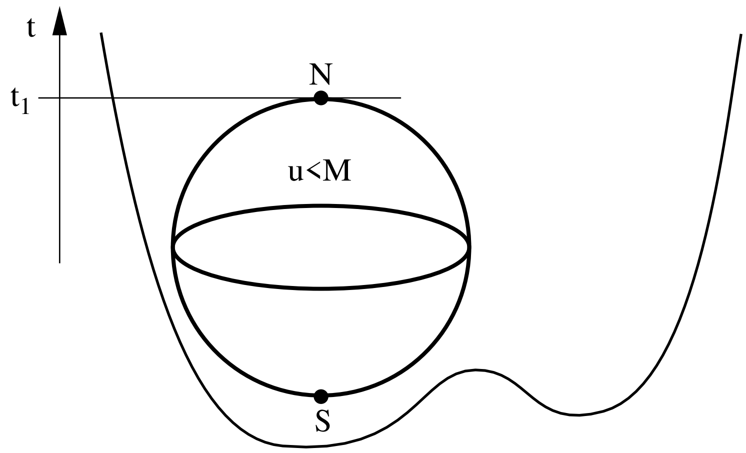


Abbildung 4.3: **Das Maximum tritt an einem Pol auf.**

Beweis. O.B.d.A. sei p_1 der einzige Punkt auf ∂K, damit auf $\overline{K}$, wo $u = M$; ansonsten verkleinere K zu K' .

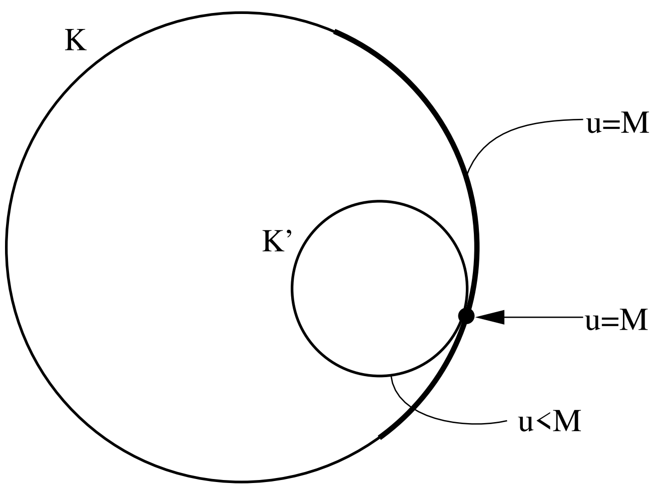


Abbildung 4.4: **Eventuell wird K zu K' verkleinert.**

Angenommen $x_1 \neq \bar{x}$, was gleichbedeutend ist mit $|x_1 - \bar{x}| > 0$, dann gibt es also $r_1 \in \mathbb{R}^+$ mit $r_1 < |x_1 - \bar{x}| \leq \bar{r}$. Es ist nämlich $K = K_{\bar{r}}(\bar{p})$, $p_1 \in \partial K$.

Sei o.B.d.A. $K_1 := K_{r_1}(p_1) \subseteq D$ [Wähle r_1 klein genug.] und sei ferner $\Gamma_1 := \partial K_1 \cap \overline{K}$, $\Gamma_2 := \partial K_1 \setminus \Gamma_1$, also $\partial K_1 = \Gamma_1 \dot{\cup} \Gamma_2$.

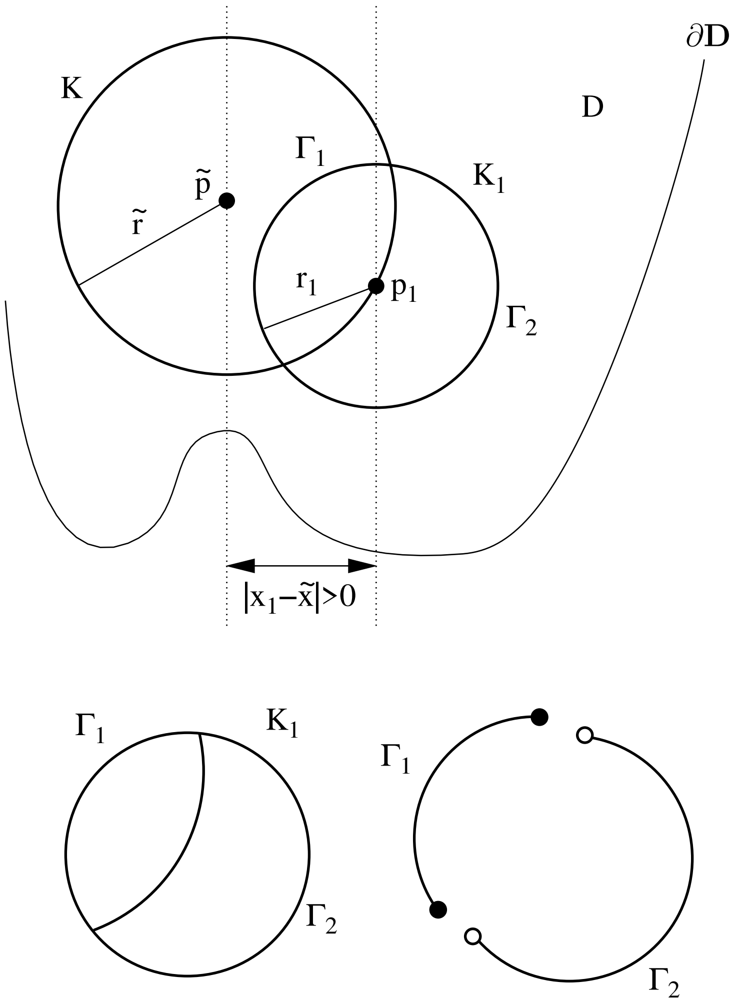


Abbildung 4.5: Zerlegung des Randes ∂K_1 durch K

Γ_1 ist komapkt, und es ist $u < M$, da auf $\overline{K}$ gilt $u = M$ nur in $p_1 \notin \Gamma_1$. Also gibt es $\delta \in \mathbb{R}^+$ mit $u < M - \delta$ auf Γ_1 . Auf Γ_2 insbesondere, wie auf ganz D , ist $u \leq M = \sup u$.

Definiere $h(x,t) := \exp(-\alpha \cdot [|x-\bar{x}|^2 + |t-\bar{t}|^2]) - \exp(-\alpha \bar{r}^2)$, wobei $\alpha \in \mathbb{R}^+$ später noch zu spezifizieren ist.

Es gilt:

(A.) $h > 0$ auf $K, h = 0$ auf ∂K und $h < 0$ auf $\complement(K) := (\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n) \setminus K$.

Auf $\overline{K}_1$ gilt wegen $(t,x) \in \overline{K}_1 \implies |x-\bar{x}| \gneqq 0$:

$$\begin{aligned} L \cdot h &= \exp(-\alpha[..]) \cdot [(-2\alpha)(t-\bar{t}) + (-2\alpha)^2 \sum a_{ij}(x_i-\bar{x}_i)(x_j-\bar{x}_j) + \\ &\quad + \sum a_{ij}(-2\alpha) + (-2\alpha) \sum b_i \cdot (x_i - \bar{x}_i)] \\ &\geq \exp(-\alpha[..]) \cdot \left[4\alpha^2\mu \cdot |x-\bar{x}|^2 + 2\alpha[-(t-\bar{t}) - \sum b_i(x_i-\bar{x}_i) - \sum a_{ij}]\right] \\ &\qquad\qquad [\text{da } L \text{ gleichmäßig parabolisch}] \\ &\gneqq 0 \quad \text{für } \alpha \text{ groß genug, da } |x-\bar{x}|^2 \gneqq 0 \quad \text{also} \end{aligned}$$

(B.) $L \cdot h \gneqq 0$ auf $\overline{K}_1$.

Definiere $v := u + \varepsilon \cdot h$ mit $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$.
Da $u \lneqq M - \delta$ auf Γ_1, ist $v \lneqq M$ auf Γ_1 für ε klein genug.

Da $h \lneqq 0$ auf Γ_2 [wegen $\Gamma_2 \subseteq \complement(K)und(A.)$] und $u \leq M$ auf Γ_2, ist $v \lneqq M$ auf Γ_2, somit $v \lneqq M$ auf ganz ∂K_1.

Aber $p_1 \in \partial K$. Wegen (A.) liefert $h(p_1) = 0$ und damit $v(p_1) = u(p_1) = M$. Weil $p_1 \in \mathring{K}_1$, nimmt also v sein Maximum in einem inneren Punkt $\hat{p} \in \mathring{K}_1$ an. Dort ist $v_t = v_{x_i} = 0$ und $H(v)$ negativ definit, also $(L\cdot v)\,(\hat{p}) \leq 0$, ähnlich dem Beweis von Satz 4.1.1, im Widerspruch zu $L \cdot v = L \cdot u + \varepsilon \cdot L \cdot h = f + \varepsilon \cdot L \cdot h \gneqq 0$, aufgrund $f \geq 0$ nach Voraussetzung, $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ und $L \cdot h \gneqq 0$ nach (B.).

Es ist also entgegen der Annahme tatsächlich $x_1 = \bar{x}$, was genau die Behauptung liefert, daß p_1 ein Pol sein muß. ∎

Lemma 4.1.7. Ist $L \cdot u \geq 0$ und $u \leq M$ auf D und $u(p_0) \lneqq M$ in einem Punkt $p_0 = (t_0, x_0) \in D$, so folgt $u \lneqq M$ auf G, wobei $G \subset \{t = t_0\} \cap D$ maximal zusammenhängend mit $p_0 \in G$ sei.

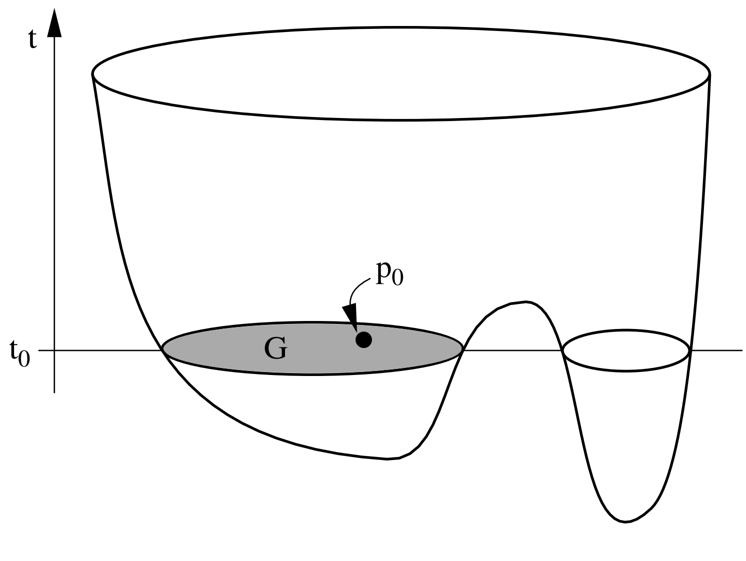


Abbildung 4.6: Zusammenhangskomponente, wo $u < M$

Bemerkung. Dies ist der horizontale Teil von Satz 4.1.5, denn:

Läßt man von $\tilde{p}$ aus nur Wege in der $t = \tilde{t}$–Ebene zu — bewegt man sich also nur horizontal — erreicht man genau die Zusammenhangskomponente G.
Wäre darin $u(p_1) \lneqq M$, so nach Lemma 4.1.7 $u \lneqq M$ auf ganz G, also auch $u(\tilde{p}) \neq M$ entgegen der Voraussetzung. ■

Beweis. Lemma 4.1.7:

Angenommen $u(p_1) = M$ bei $p_1 := (t_0, x_1) \in G$.

O.B.d.A. sei (t_0, x) ein Punkt in G mit $u(t_0, x) \lneqq M$ und $|x - x_0| < |x_1 - x_0|$, ansonsten wähle x_1 näher bei x_0.

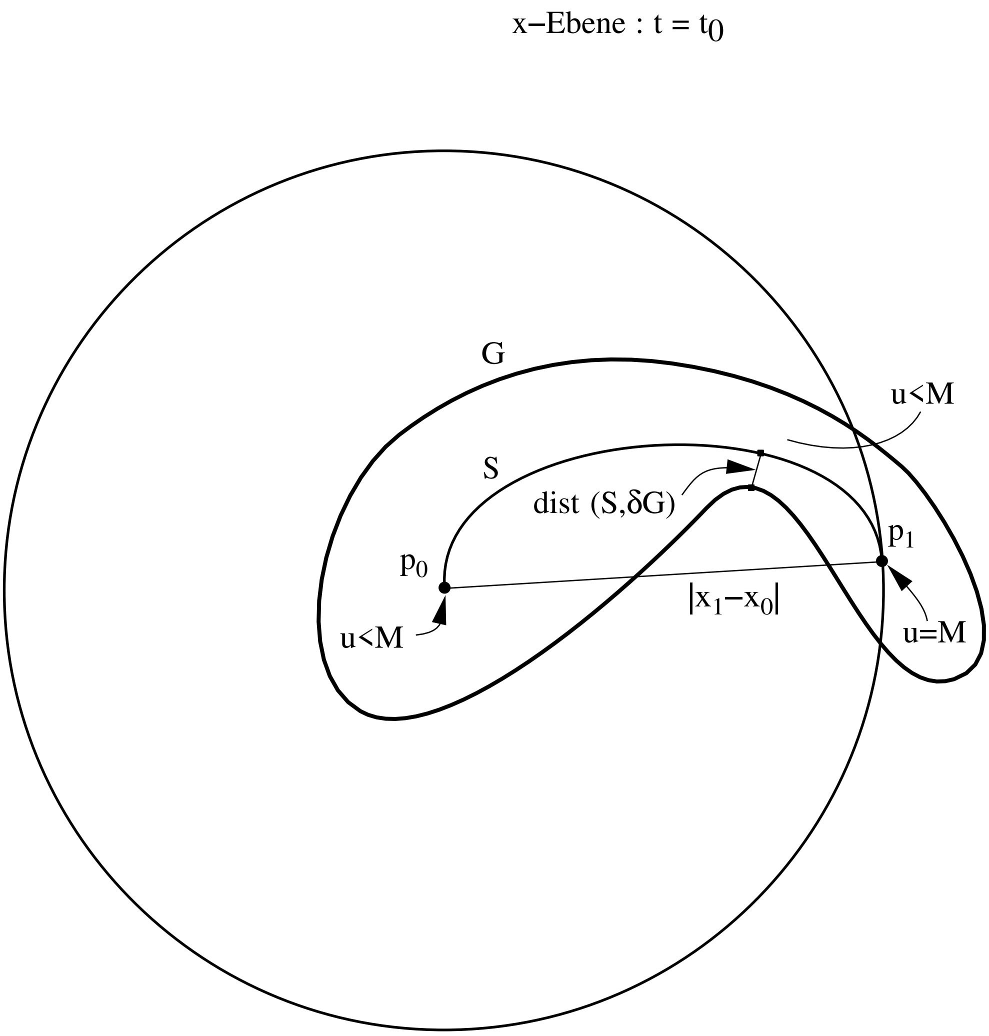


Abbildung 4.7: **Der Weg S im $t = t_0$–Schnitt von G**

Es sei

- S ein Weg zwischen p_0 und p_1 in G, den es in der Zusammenhangskomponente immer gibt,
- $\delta_0 := \min\{|x_0 - x_1|, \mathrm{dist}(S, \partial G)\}$,
- $T := \{x \,|\, 0 < |x - x_1| < \delta_0\}$ eine gelochte Kreisscheibe um p_1 in G, welche p_0 nicht enthält.

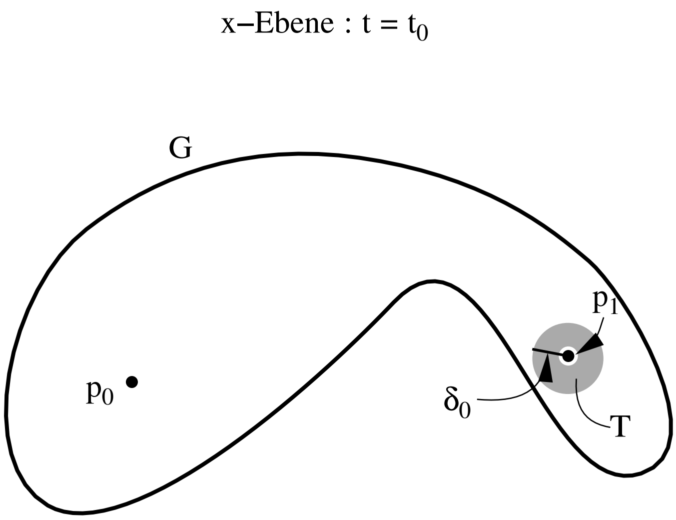


Abbildung 4.8: Die gelochte Kreisscheibe T um p_1 im obigen Schnitt

Definiere die Funktion

$$d : T \to \mathbb{R}^+ \qquad \text{mit} \qquad d(x) := \mathrm{dist}\Big((t_0; x), D \cap \{q | u(q) = M\}\Big)\,.$$

D.h. d liefert für $p = (t_0; x) \in t_0 \times T \subseteq G$ den Abstand zum nächsten Punkt $q \in D$, wo $u(q) = M$. q ist dabei natürlich i.a. nicht mehr aus G, d.h. $q = (t; y), t \neq t_0$.
Nach Annahme ist $u(p_1) = M, p_1 = (t_0; x_1)$, also

(A.) $$d(x) \leq |(t_0; x) - p_1| = |x - x_1|\,.$$

Nach Lemma 4.1.6 hat der zu $p = (t_0; x)$ am nächsten gelegene Punkt q mit $u(q) = M$, die Form $q = (t; x)$, ist also mit gleichem x–Wert um $d(x)$ in t–Richtung nach oben oder unten verschoben, und ist für $p \neq p_1 \Longleftrightarrow x \neq x_1$ von p_1 verschieden: $q \neq p_1$.
Also ist $d(x) = |(t_0, x) - q| = |(t_0; x) - (t; x)| = |t - t_0| \lneqq |(t_0; x) - p_1| = |x - x_1| \lneqq \delta_0$.

Beachte noch einmal, daß $u(q) = M$ für $q = (t_0 + d(x); x)$ oder $q = (t_0 - d(x); x)$.

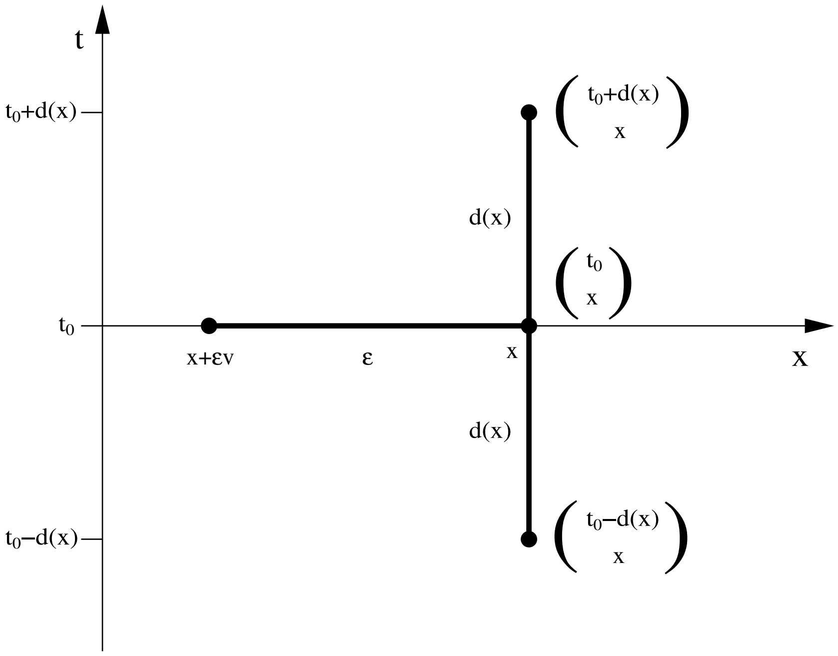


Abbildung 4.9: $u = M$ **wird vertikal am schnellsten erreicht.**

Nun seien $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ und $v \in \mathbb{R}^n$ mit $|v| = 1$.
Nach Pythagoras ist, falls $x, x + \varepsilon \cdot v \in T$,

$$d(x + \varepsilon \cdot v) \leq \sqrt{\varepsilon^2 + d(x)^2} = d(x) + \frac{\varepsilon^2}{2 \cdot d(x)} - \underbrace{\ldots}_{\gneqq 0},$$

[Taylor–Entwicklung der Wurzel um $\varepsilon = 0$ für $d(x) \gneqq 0$]
also

(B.)
$$d(x + \varepsilon \cdot v) \lneqq d(x) + \frac{\varepsilon^2}{2 \cdot d(x)}.$$

Man beachte, daß dies aber nur für $d(x) \gneqq 0$ gilt!
Weiter ist

$$\begin{aligned} d(x + \varepsilon \cdot v) &= \operatorname{dist}\Big((t_0; x + \varepsilon \cdot v), D \cap \{u = M\}\Big) \\ &\leq |(t_0; x + \varepsilon \cdot v) - (t_0 + d(x), x)| \qquad \text{[siehe Zeichnung 4.10]} \\ &= \sqrt{\varepsilon^2 + d(x)^2}. \end{aligned}$$

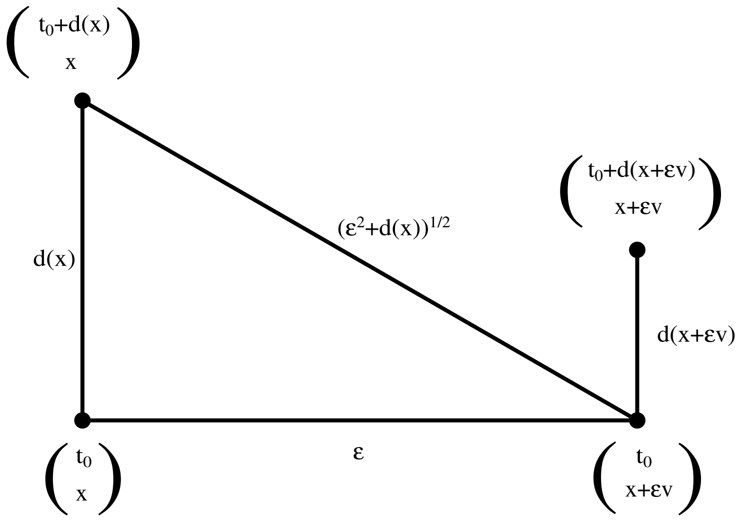


Abbildung 4.10: **Pythagoras mit** $x, x+\varepsilon \cdot v$ **und** $d(x)$

Vertauscht man die Rollen von $x, x+\varepsilon \cdot v$ erhält man

$$d(x) \ \leq \ \sqrt{\varepsilon^2 + d(x+\varepsilon \cdot v)^2}\,,$$

also

(C.)
$$d(x+\varepsilon \cdot v) \geq \sqrt{d(x)^2 - \varepsilon^2}\,.$$

Damit wird nun gezeigt, daß $d = 0$ überall auf T ist.
Angenommen nun, es ist $d(x_2) \gneqq 0$ für ein $x_2 \in T$, also x_2 mit $0 < |x_1 - x_2| < \delta_0$. Sei dann $\varepsilon \in (0; d(x_2)) \neq \emptyset$, ferner $v \in \mathbb{R}^n$ mit $|v| = 1$ und $x_2 + \varepsilon \cdot v \in T$. Unterteile die Strecke $[(t_0; x_2); (t_0; x_2 + \varepsilon \cdot v)]$ in k gleiche Teile durch die Punkte

$$(t_0; x_2 + \frac{\nu}{k} \cdot \varepsilon \cdot v) \ \ | \, \nu \in \{0, ..., k\}\,.$$

O.B.d.A. sei $[x_2; x_2 + \varepsilon \cdot v] \subseteq T$, ansonsten — wenn $x_1 \in [x_2; x_2 + \varepsilon \cdot v]$ — schreite in 2 Teilschritten auf den Seiten der Länge $\frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon$ eines gleichseitigen Dreieckes mit Basis $[x_2; x_2 + \varepsilon \cdot v]$ und Höhe $\frac{1}{2}\varepsilon$ von x_2 über x_M nach $x_2 + \varepsilon \cdot v$ und argumentiere für beide Teile statt für einen Teil wie folgt:

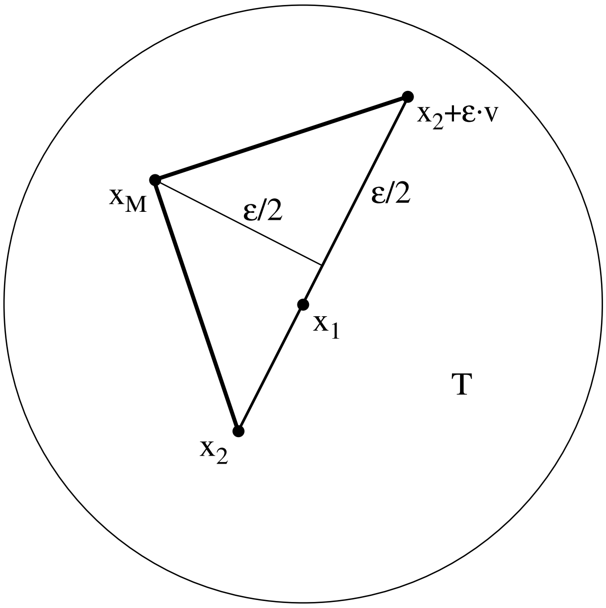


Abbildung 4.11: Falls der Kreismittelpunkt auf der Verbindungsstrecke liegt, geht man einen Umweg.

Bei den Teilpunkten gilt nach (B.) und (C.)

$$d(x_2 + \frac{\nu+1}{k} \cdot \varepsilon \cdot v) - d(x_2 + \frac{\nu}{k} \cdot \varepsilon \cdot v) \;\lneqq\; \frac{\varepsilon^2}{k^2} \frac{1}{2 \cdot d(x_2 + \frac{\nu}{k} \cdot \varepsilon \cdot v)}$$

$$\leq \frac{\varepsilon^2}{2 \cdot k^2} \frac{1}{\sqrt{d(x_2)^2 - \frac{\nu^2}{k^2} \cdot \varepsilon^2}} \leq \frac{\varepsilon^2}{2 \cdot k^2} \frac{1}{\sqrt{d(x_2)^2 - \varepsilon^2}} .$$

Bemerkung. Der nächste Punkt, wo $d = 0$ ist, hat die Entfernung $d(x_2)$ von x_2 .
Für $\varepsilon < d(x_2)$ ist bei $x_2 + \frac{\nu}{k} \cdot \varepsilon \cdot v$ im Abstand $\frac{\nu}{k} \cdot \varepsilon \leq \varepsilon < d(x_2)$ auch $d(x_2 + \frac{\nu}{k} \cdot \varepsilon \cdot v) \gneqq 0$, weshalb obige Abschätzungen auch wirklich durchgeführt werden können.
Durch k–faches Aufsummieren erhält man

$$d(x_2 + \varepsilon \cdot v) - d(x_2) \;\leq\; k \cdot \frac{\varepsilon^2}{2k^2} \frac{1}{\sqrt{d^2 - \varepsilon^2}} \;=\; \frac{\varepsilon^2}{2k} \frac{1}{\sqrt{d(x_2)^2 - \varepsilon^2}} .$$

und $k \to \infty$ liefert $d(x_2 + \varepsilon \cdot v) - d(x_2) \leq 0$

(D.) $\iff$ $d(x_2 + \varepsilon \cdot v) \leq d(x_2)$.

Wählt man noch zusätzlich $\varepsilon < \frac{1}{\sqrt{2}} d(x_2)$, hat man mit (C.)

(E.) $d(x_2 + \varepsilon \cdot v) \;\geq\; \sqrt{(d(x_2)^2 - \varepsilon^2} \;\gneqq\; \sqrt{d(x_2)^2 - \frac{1}{2} d(x_2)^2} \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}} d(x_2) \;\gneqq\; \varepsilon$.

Für $\varepsilon \in (0; d(x_2))$ ist nach (D.) $d(x_2 + \varepsilon \cdot v) \leq d(x_2)$, für $\varepsilon \in (0; \frac{1}{\sqrt{2}} d(x_2))$ nach oben $d(x_2 + \varepsilon \cdot v) \gneqq \varepsilon$, also $\varepsilon \in (0; d(x_2 + \varepsilon \cdot v))$, und man erhält aus (E.) unter Vertauschen der Rollen von $x_2, x_2 + \varepsilon \cdot v$ für $\varepsilon \in (0; \frac{1}{\sqrt{2}} d(x_2))$

(F.) $$d(x_2) \leq d(x_2 + \varepsilon \cdot v) .$$

(E.) und (F.) zusammen ergeben $d(x_2) = d(x_2 + \varepsilon \cdot v)$.

Sei also ein solches $\varepsilon \in (0; \frac{1}{\sqrt{2}} d(x_2))$ fest gewählt; dann zeigen obige Betrachtungen, daß in jedem $y \in T$ mit $|y - x_2| < \varepsilon$, also auf ganz $K_\varepsilon(x_2) \cap T$ gilt: $d = d(x_2)$ =const.
Weil in $y \in T$ gilt $d(y) = d(x_2)$, sind dort mit dem gewählten ε die selben Bedingungen erfüllt, wie in x_2, und man kann um y wieder einen Kreis $K_\varepsilon(y)$ schlagen, wo d =const.
Durch Überdecken des kompakten $\overline{T}$ mit endlich vielen solchen Kreisen erkennt man, daß $d = d(x_2)$ =const auf ganz T.
Es ist $d(x_1) = 0$, aber $x_1 \notin T$.
Jedoch kann man in der gelochten Kreisscheibe T beliebig nahe an p_1 bzw x_1 herantreten, genauer, zu $\delta \in \mathbb{R}^+$ gibt es $x \in T$ mit $|x_1 - x| < \delta$.
Wegen (A.) ist $d(x) \leq |x - x_1| < \delta$, also $d(x_2) = d(x) < \delta$.
Wegen beliebigem $\delta \in \mathbb{R}^+$ muß $d(x_2)$ kleiner als jedes δ sein, also verschwinden, was der Annahme $d(x_2) \gneqq 0$ widerspricht.

Man hat also tatsächlich $d = 0$ auf ganz T, also muß auch in dem nichtleeren Schnitt von T und $K_{|x_1 - x_0|}(x_0)$ gelten: $d = 0$, was der Voraussetzung bzw. Annahme widerspricht, daß dort $d \gneqq 0$ wegen $u \lneqq M$. ∎

Lemma 4.1.8. Ist $L \cdot u \geq 0$ auf D und $u \lneqq M$ auf $E := D \cap \{t \in (t_1; t_2)\}$, wobei $t_1 < t_2 \in \mathbb{R}^+$, so folgt $u \lneqq M$ auf $D \cap \{t = t_2\}$.

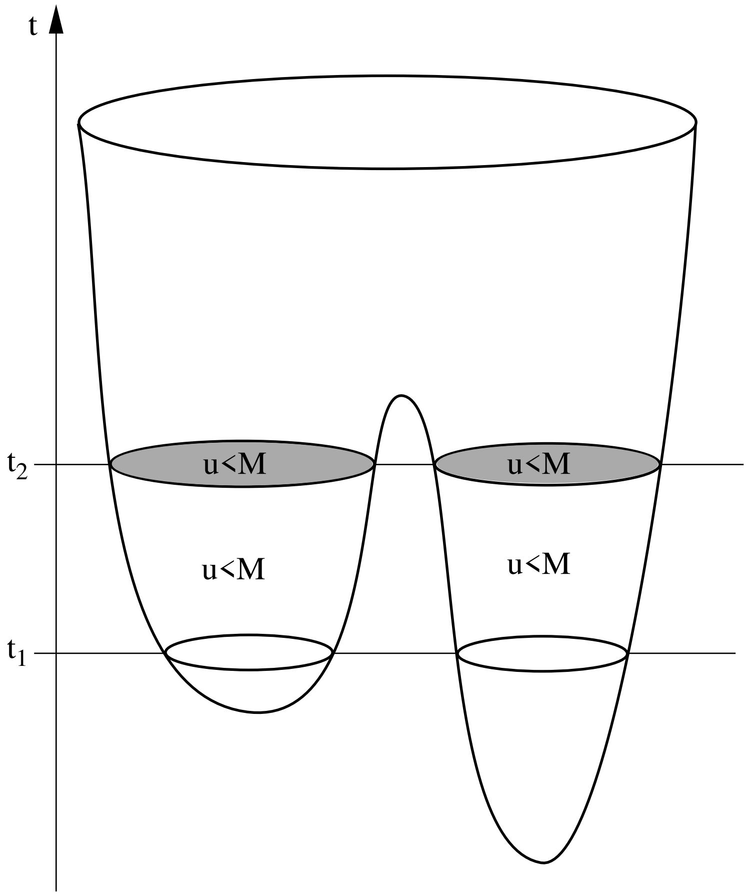


Abbildung 4.12: Auch auf einer oberen Randfläche bleibt $u < M$.

Bemerkung. Dies ist der vertikale Teil von Satz 4.1.5, denn:

Angenommen $u(t_2; x_0) = M$, jedoch $u(t_1; x_0) \lneqq M$, wobei $A := (t_1; t_2) \times x_0 \subseteq D$ $[t_1 < t_2]$ ein vertikales Stück einer Abwärtstreppe in D ist;

O.B.d.A. sei dann $(t_2; x_0)$ der einzige Punkt in $\overline{A}$, wo $u = M$, ansonsten wähle t_2 näher bei t_1. Sei ferner $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ so klein, daß der Zylinder $Z := (t_1; t_2) \times K^n_\varepsilon(x_0)$ in D liegt, dann ist $u \lneqq M$ auf A, nach Lemma 4.1.7 auch auf Z, und nach Lemma 4.1.8 auch auf $\{t_2\} \times K^n_\varepsilon(x_0)$, also insbesondere $u(t_2; x_0) \lneqq M$, im Widerspruch zur Annahme. ■

Beweis. Lemma 4.1.8

Angenommen es ist $u = M$ bei $p_2 = (t_2; x_2) \in D$.
Sei $r \in \mathbb{R}^+$ mit $K_r(p_2) \subseteq D \cap \{t > t_1\}$.

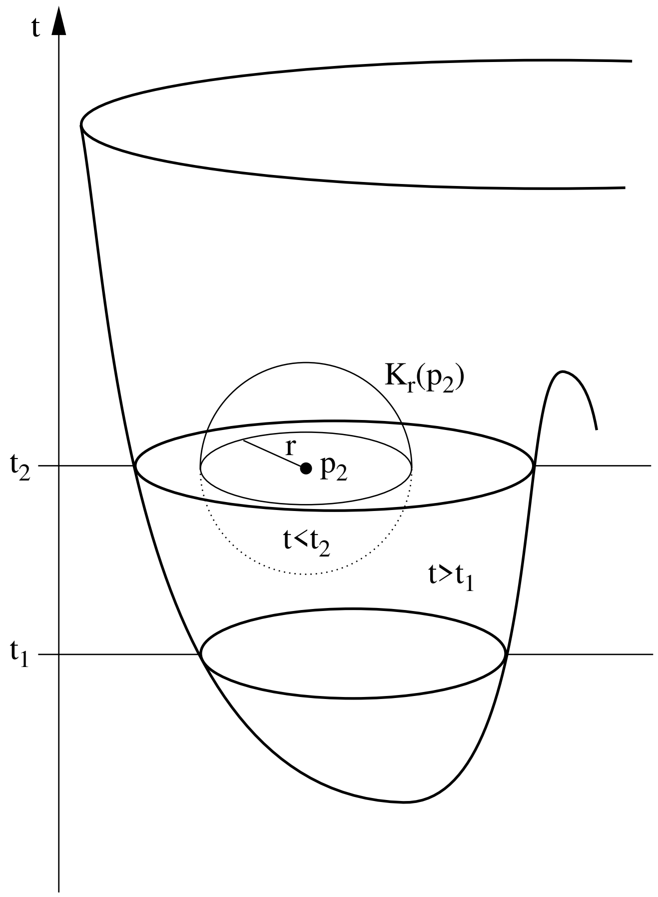


Abbildung 4.13: **Die Umgebung des Punktes p_2, wo nach Annahme $u = M$.**

Definiere

$$h(t,x) := \exp\Big(-\alpha \cdot |x - x_2|^2 - \alpha \cdot |t - t_2|\Big) - 1 \leq 0$$

mit später noch zu spezifizierendem $\alpha \in \mathbb{R}^+$.

$$L \cdot h \geq \exp(-\alpha|x - x_2|^2 - \alpha|t - t_2|) \cdot \big[4\alpha^2\mu|x - x_2|^2 - 2\alpha(\sum b_i\,(x_i - x_i^{(2)}) + \sum a_{ij}) - \alpha\big]$$

gilt wie in Lemma 4.1.6.
Wähle nun α so groß, daß $L \cdot h \gneqq 0$ in $S := K_r(p_2) \cap \{t \leq t_2\}$.

$$\Phi := \{(t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \mid (x - x_2)^2 + \alpha(t - t_2) \leq 0\}$$

ist ein volles, nach $t < t_2$ geöffnetes Paraboloid mit Scheitel p_2.
$H := \{t_2\} \times \mathbb{R}^n$ ist die Tangentialebene an $\partial\Phi$ in p_2.

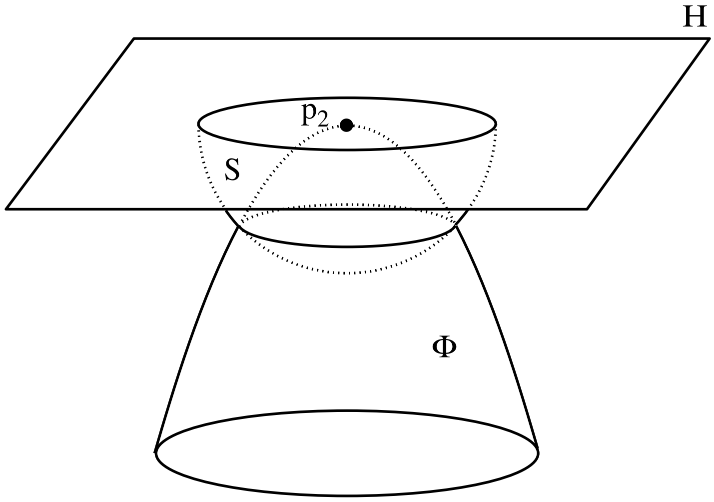


Abbildung 4.14: Das Paraboloid bei p_2.

Definiere

$\Gamma_1 := \partial K_r(p_2) \cap \Phi$
(die Kugelkalotte von $\partial K_r(p_2)$, welche im Paraboloid–Inneren liegt,)

$\Gamma_2 := K_r(p_2) \cap \partial\Phi$
(das Stück Paraboloid–Oberfläche, welches im Kugel–Inneren liegt) und

$G := \overline{\overset{\circ}{K_r}(p_2)} \cap \Phi$
(das offene Schnittvolumen von vollen Paraboloid und Kugel)

Offensichtlich ist gerade $\Gamma_1 \dot{\cup} \Gamma_2 = \partial G$.

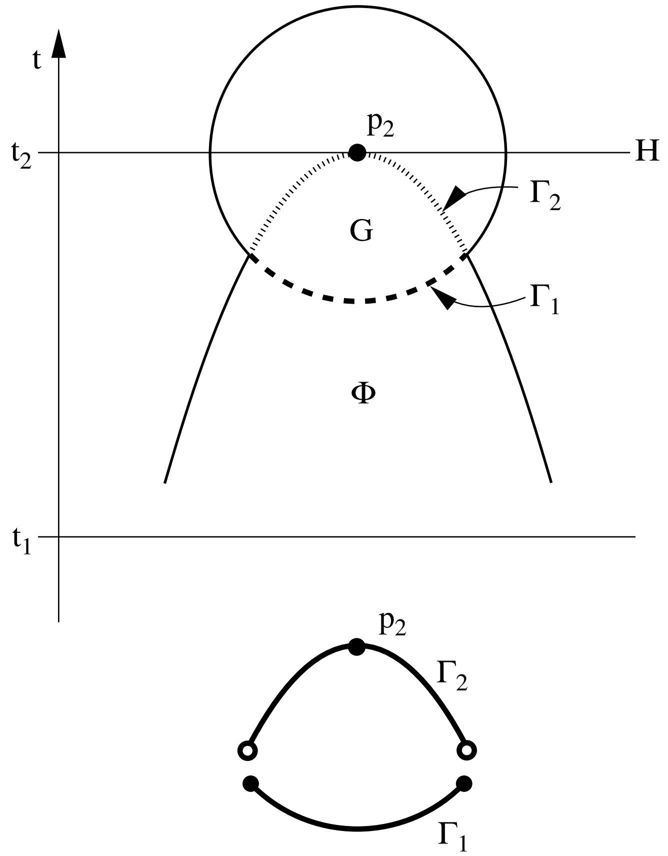


Abbildung 4.15: Schnitt von Paraboloid und Umgebungskugel

Auf dem Randstück $\Gamma_1 \subseteq E$ ist nach Voraussetzung $u \lneqq M$, und weil Γ_1 kompakt ist, kann u nicht beliebig nahe an M herankommen: $\exists \delta \in \mathbb{R}^+$ mit $u \leq M - \delta$ auf Γ_1.

Definiere $v := u + h$, dann ist

$L \cdot v \gneqq 0$ auf G, da $L \cdot u \geq 0$ auf $D \supseteq G$ und $L \cdot h \gneqq 0$ auf $S \supseteq G$;
$v \lneqq M$ auf G, da $u \lneqq M$ auf $E \supseteq G$ und $h \lneqq 0$ für $p \neq p_2$;
$v \leq M$ auf Γ_2, da $u \leq M$ auf Γ_2 aus Stetigkeitsgründen und $h \leq 0$;
$v \leq M - \delta$ auf Γ_1, also $v \leq M$ auf ∂G insgesamt.

Mit $u(p_2) = M$ nach Annahme und offensichtlich $h(p_2) = 0$, gilt $v(p_2) = M$. Also nimmt v sein Maximum nur in p_2 auf ∂G an. Dort muß dann $\frac{\partial}{\partial t} v(p_2) \geq 0$ sein, und wegen $\frac{\partial}{\partial t} h(p_2) = -\alpha \lneqq 0$ ist $\frac{\partial}{\partial t} u(p_2) = \frac{\partial}{\partial t} v - \frac{\partial}{\partial t} h \gneqq 0$. Weil p_2, wo u ein Maximum annimmt, ein innerer Punkt von $D \cap \{t = t_2\}$ ist, ist dort $\frac{\partial}{\partial x_i} u(p_2) = 0$ und $H(u)(p_2)$ ist negativ definit, weshalb wieder $\sum a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} u(p_2) \leq 0$ folgt.

Damit ist

$$\begin{aligned} L \cdot u(p_2) &= \underbrace{-\frac{\partial}{\partial t} u(p_2)}_{\lneqq 0} + \underbrace{\sum a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} u(p_2)}_{\leq 0} + \underbrace{\sum b_i \frac{\partial}{\partial x_i} u(p_2)}_{=0}, \\ L \cdot u(p_2) &\lneqq 0 \qquad \text{bei } p_2 \in D, \end{aligned}$$

im Widerspruch zur Voraussetzung. ■

Nun kann der Beweis von Satz 4.1.5 erfolgen.

Beweis. Satz 4.1.5:

Ist unter den dortigen Voraussetzungen $p \in D$ von $\tilde{p}$ durch eine Abwärtstreppe erreichbar, tragen nach Lemma 4.1.7 die horizontalen und nach Lemma 4.1.8 die vertikalen Stücke konstante Werte von u, und somit trägt die ganze endliche, zusammengesetzte Treppe den Wert $u(\tilde{p})$ von $\tilde{p}$ abwärts nach p zu $u(p) = u(\tilde{p})$. ■

Im elliptischen Fall werden Randmaxima mit positiver Normalenableitung angenommen. Ähnlich kann man im parabolischen Fall zeigen, daß Randmaxima nicht mit horizontaler Tangente angenommen werden.

Wir geben die folgende

Definition. ∂D hat bei $p \in \partial D$ die Kugeleigenschaft $\Longleftrightarrow \exists K = K_R(S)$ Kugel mit $\mathring{K} \subseteq D, p \in \partial K, u \lneqq M$ auf $\mathring{K}$,
d.h. wenn man den Randpunkt p mit einer Kugel berühren kann, die ganz im Inneren von D liegt, und worauf $u \lneqq M$.

Bemerkung. Eine solche Kugel existiert offensichtlich höchstens in den Fällen A,B , sicher nicht bei C,D . [siehe Abbildung (4.16)]

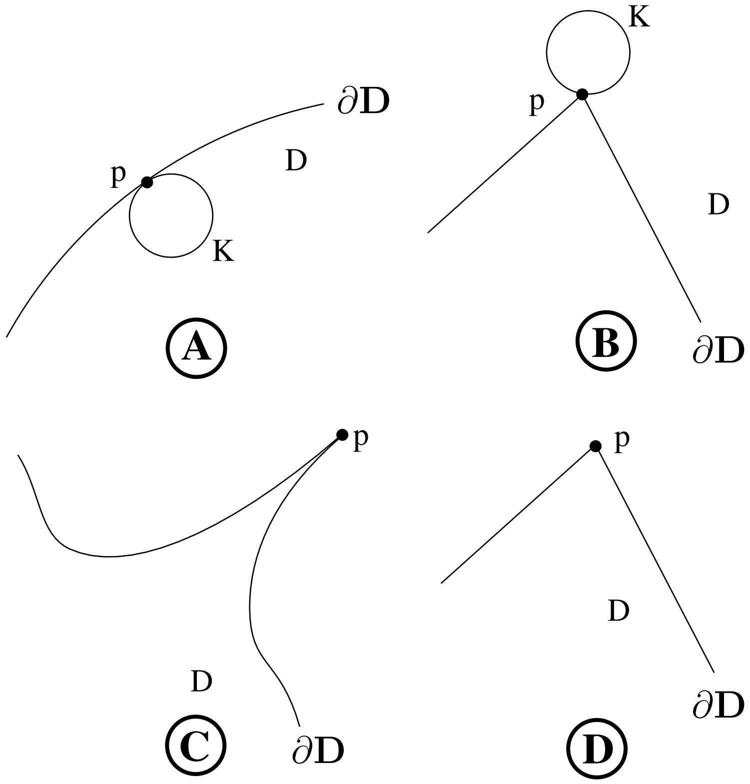


Abbildung 4.16: Verschiedene Situationen am Rand

Satz 4.1.9. Hopf
Sei u eine Lösung von $(L+c)\cdot u = f$ und $c \leq 0, f \geq 0$ auf D;
∂D habe die Kugeleigenschaft bei $p_0 \in \partial D, u(p_0) = M$;
ferner sei die Strecke $[S; p_0]$ nicht parallel zur t–Achse [S ist der Mittelpunkt der Kugel.],
so folgt $\forall v \in \mathbb{R}^{n+1}$ mit einer Richtung von p_0 ins Äußere von D:

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{v}}(p_0) \gneqq 0\,,$$

d.h. in p_0 ist jede Ableitung nach außen echt positiv.

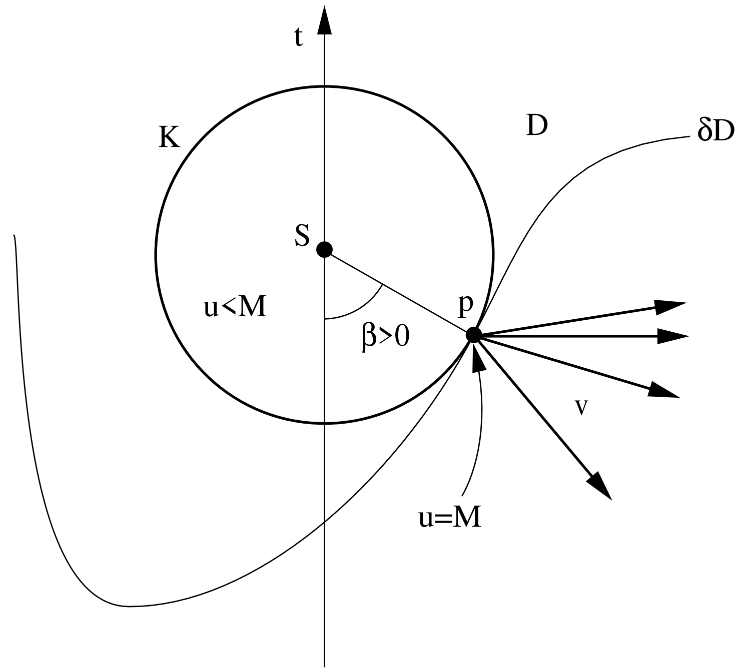


Abbildung 4.17: Berührkugel und äußere Richtungen an p

Bemerkung.

1. Im elliptischen Fall hatte man dies nur in Normalenrichtung.

2. Es gilt auch die duale Aussage

$$f \leq 0, u(p_0) = m := \min_{\overline{D}} u \Longrightarrow \frac{\partial u}{\partial \vec{v}}(p_0) \lneqq 0 \ .$$

Nur die folgende Form von Satz 4.1.9 wird bewiesen:

Lemma 4.1.10.
Ist $L \cdot u \geq 0$, ∂D mit der Kugeleigenschaft bei $p_0 \in \partial D$, wo $u(p_0) = M$ und $[S; p_0] \not\parallel$ t–Achse, so folgt, daß $\frac{\partial u}{\partial \vec{v}}(p_0) \gneqq 0$ für alle Auswärtsvektoren v .

Der Beweis zu Lemma 4.1.10 wurde in der Vorlesung aus Zeitgründen nicht vorgetragen, hier aber für interessierte Studenten eingefügt.

Beweis. Die Stecke zwischen $p_0 = (t_0; x_0)$ und $S = (t_1; x_1)$ ist nicht parallel zur t–Achse, weshalb sich deren x–Koordinaten echt unterscheiden müssen: $\exists \varrho \in \mathbb{R}^+ / \varrho < |x_0 - x_1|$. Sei $K_1 := K_\varrho(p_0)$, $K := K_R(S)$ aus der Kugeleigenschaft. $G := K \cap K_1$ wird berandet von $\partial G = \Gamma_1 \dot{\cup} \Gamma_2$ mit $\Gamma_1 := \partial K_1 \cap \overline{K}, \Gamma_2 := \partial K \cap \mathring{K}_1$.

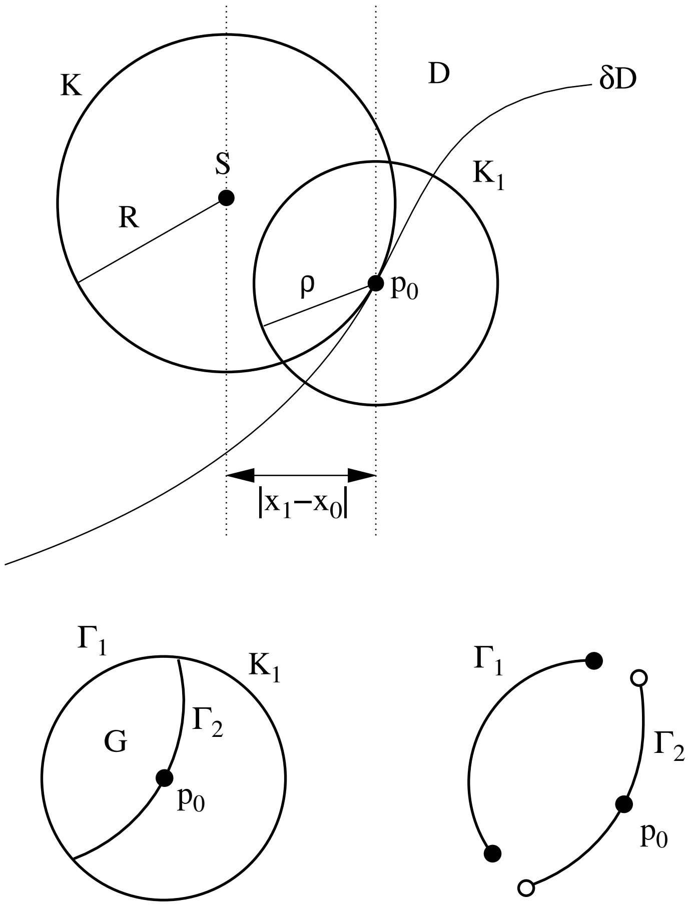


Abbildung 4.18: Schnitt von Berührkugel und Umgebungskugel

O.B.d.A. sei $u \lneqq M$ auf Γ_1, ansonsten verwende $K' := K_{R'}(S')$ anstelle von K, wobei S' aus $[S; p_0]$ näher bei p_0 liege, aber weiterhin $|x_1' - x_0| > \varrho$. Definiert man Γ_1, Γ_2 mit K' statt K, so liegt Γ_1 ganz in $\mathring{K}$, wo nach der Kugeleigenschaft $u \lneqq M$ ist.

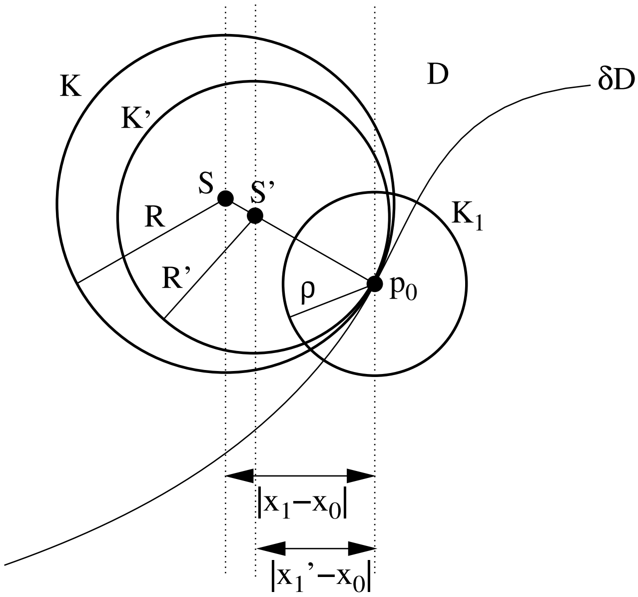


Abbildung 4.19: Die Berührkugel wird eventuell verkleinert.

Da Γ_1 kompakt, gibt es $\delta \in \mathbb{R}^+$ mit $u \leq M-\delta$ auf Γ_1 . Es ist $u(p_0) = M$ nach Voraussetzung. Ferner sei Œ $u \lneqq M$ auf $\Gamma_2 \setminus \{p_0\}$, ansonsten verwende K' statt K wie oben. Definiere $h(t,x) := \exp(-\alpha[|x-x_1|^2 + (t-t_1)^2]) - \exp(-\alpha\mathbb{R}^2)$ mit $\alpha \in \mathbb{R}^+$, wie in Lemma 4.1.6 und $v := u + \varepsilon \cdot h$ mit $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Wie dort ist $h > 0$ auf $K, h = 0$ auf ∂K und $h < 0$ auf $\complement(K)$. Ferner ist $L \cdot h \gneqq 0$ auf $\overline{G}$ für α groß genug und $L \cdot v = \underbrace{L \cdot u}_{\geq 0} + \varepsilon \cdot \underbrace{L \cdot h}_{\gneqq 0} \gneqq 0$. Wähle nun ε so klein, daß $v \lneqq M$ auf Γ_1 , was möglich ist, da dort $h \geq 0$, $u \leq M - \delta$ und außerdem Γ_1 kompakt ist. $v \lneqq M$ auf $\Gamma_2 \setminus \{p_0\}$ gilt ohnehin, da nach oben dort $u \lneqq M$ und $h = 0$. Insgesamt hat man

$$
\begin{aligned}
v &\lneqq M \quad \text{auf} \quad \partial G \setminus \{p_0\}\,, \\
v(p_0) &= u(p_0) + \varepsilon \cdot h(p_0) = M + \varepsilon \cdot 0 = M \;.
\end{aligned}
$$

v nimmt in keinem inneren Punkt von G einen Wert $N \geq M$ an, sonst wäre nach Satz 4.1.5 auch in allen Punkten aus G mit kleinerer Zeit–Koordinate $v = N$, und aus Stetigkeitkeitsgründen auch in solchen Punkten von $\partial G \setminus \{p_0\}$, wo andererseits $v \lneqq M \leq N$. Also nimmt v nur auf ∂G in p_0 sein Maximum M an. Dort ist

$$
0 \leq \frac{\partial v}{\partial \vec{v}}(p_0) = \frac{\partial u}{\partial \vec{v}}(p_0) + \varepsilon \cdot \frac{\partial h}{\partial \vec{v}}(p_0) \;.
$$

Nun ist aber

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} h(p_0) &= -2\alpha(t_0 - t_1) \cdot \exp(-\alpha R^2) \;, \\
\frac{\partial}{\partial x_i} h(p_0) &= -2\alpha(x_i^{(0)} - x_i^{(1)}) \cdot \exp(-\alpha R^2) \;,
\end{aligned}
$$

also

$$\begin{aligned}\frac{\partial h}{\partial \vec{v}}(p_0) &= -2\alpha \cdot \exp(-\alpha R^2) \cdot (p_0 - S)^T \cdot \vec{v} \\ &= \lambda \cdot (-2\exp(-\alpha R^2)) \cdot \vec{n}^T \cdot \vec{v}\ .\end{aligned}$$

Dabei ist $\vec{n}$ die äußere Normale an ∂D in p_0 , die ja parallel zum Radius $(p_0 - S)$ des Berührkreises K, und gleich orientiert, somit ein positives $[\lambda \in \mathbb{R}^+]$ Vielfaches davon ist. Weil $\mathring{K} \subset D$, kann eine äußere Richtung $\vec{v}$ nie tangential an ∂K in p_0 sein und daher mit $\vec{n}$ nur Winkel in $[0; \frac{\pi}{2})$ einschließen, weshalb $\vec{n}^T \cdot \vec{v} \gneqq 0$. Dies liefert $\frac{\partial h}{\partial \vec{v}}(p_0) \lneqq 0$, und mit $\frac{\partial v}{\partial \vec{v}}(p_0) \geq 0$:

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{v}}(p_0) = \frac{\partial v}{\partial \vec{v}} - \varepsilon \frac{\partial h}{\partial \vec{v}} \gneqq 0\ .$$

■

Korollar 4.1.11. Falls $M = 0$, bleiben das starke Maximumprinzip [Satz 4.1.4] und der Satz von Hopf [Satz 4.1.9] auch ohne die Einschränkung $c \leq 0$ gültig, c muß nur nach oben beschränkt sein, was nach den Voraussetzungen ab Satz 4.1.4 der Fall ist.

Beweis. Sei $v(t,x) := u(t,x) \cdot \exp(-r \cdot t)$. Es ist nach den jeweiligen Voraussetzungen: $(L + c) \cdot u \geq 0$.

$$\begin{aligned}(L+c)\cdot(v \cdot e^{r\cdot t}) &= e^{r\cdot t}\,[(L+c)\cdot v - r \cdot v] \\ &= e^{r\cdot t}\,[L + (c-r)] \cdot v \\ &\geq 0\ .\end{aligned}$$

Also ist

Wählt man r so groß, daß $c - r \leq 0$, was möglich ist, da c beschränkt ist, dann gelten die beiden Sätze für v mit $M_v := \max v$. Nun ist aber wegen $M_u := \max u = 0$ und $v = u \cdot e^{-r\cdot t}$

$$v(p) = M_v = 0 \iff u(p) = M_u = 0\ ,$$

und die entsprechende Aussagen übertragen sich von v auf u . ■

Wir machen hier in der Vorlesung weiter.

4.2 Die Poisson–Formel

Zur Lösung des Cauchy–Anfangswertproblems:

DG:	$\frac{\partial}{\partial t}u - \alpha^2 \cdot \Delta u = 0$	auf	$\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$,
AB:	$u = \varphi$	auf	$t = 0$.

Berechne formal [!, zunächst ohne Überprüfung der erforderlichen Voraussetzungen] die Fourier–Transformierte von u:

$$\hat{u}(t,\xi) = \mathcal{F}(u)\,(t,\xi) := \int\limits_{\mathbb{R}^n} u(t,x) \cdot \exp(-i \cdot x^T \cdot \xi)\, dx$$

Für $\quad f := \exp(-i \cdot x^T \cdot \xi) \quad$ ist $\quad D^2_{x_i} f = -\xi_i^2 \cdot f\,, \quad \Delta f = -|\xi|^2 \cdot f\,, \quad$ also

$$\begin{aligned}
-\alpha^2 \cdot |\xi|^2 \cdot \hat{u} &= \alpha^2 \int\limits_{\mathbb{R}^n} u \cdot (-|\xi|^2) \cdot f \;=\; \alpha^2 \int u \cdot \Delta f \\
&= \alpha^2 \cdot \int \Delta u \cdot f \;=\; \alpha^2 \cdot \mathcal{F}(\Delta u) \\
&= \mathcal{F}(\alpha^2 \cdot \Delta u) \;=\; \mathcal{F}(\frac{\partial}{\partial t} u) \\
&= \int \frac{\partial}{\partial t} u \cdot f \;=\; \frac{\partial}{\partial t} \int u \cdot f \\
&\quad \text{[letzteres wegen der gleichmäßigen Konvergenz des Integrals]} \\
&= \frac{\partial}{\partial t} \hat{u}\,.
\end{aligned}$$

Also erhält man insgesamt

$$\text{DG:} \qquad \frac{\partial}{\partial t}\hat{u} + \alpha^2 |\xi|^2 \cdot \hat{u} \;=\; 0\,,$$

ferner

$$\text{AB:} \qquad \hat{u} = \hat{\varphi} \qquad \text{auf} \quad t = 0\,.$$

Dies ist eine gewöhnliche DG in der Fourier–Transformierten $\hat{u}$ mit der Lösung

$$\hat{u} \;=\; \hat{\varphi}(\xi) \cdot \exp(-\alpha^2 \cdot |\xi|^2 \cdot t)\,,$$

wobei $\hat{\varphi}(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) \exp(-i \cdot x^T \cdot \xi) dx\,.$

Die inverse Fourier–Transformation $u = \mathcal{F}^{-1}(\hat{u})$

$$u(t,x) \;=\; \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \hat{u}(t,\xi) \cdot \exp(i \cdot \xi^T \cdot x) \cdot d\xi$$

liefert

$$\begin{aligned}
u(t,x) &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \hat{\varphi}(\xi) \exp(-\alpha^2 \cdot |\xi|^2 \cdot t) \cdot \exp(i \cdot x^T \cdot \xi) \cdot d\xi \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(z) \cdot \frac{1}{(2\pi)^n} \cdot \int\limits_{\mathbb{R}^n} \exp(i \cdot (x-z)^T \xi) \cdot \exp(-\alpha^2 \cdot |\xi|^2 \cdot t) \cdot d\xi \cdot dz\;,
\end{aligned}$$

und mit dem Residuensatz ausgerechnet die Formel von Poisson:

$$u(t,x) \;=\; \frac{1}{(4\pi\cdot\alpha^2\cdot t)^{\frac{1}{2}n}}\cdot\int\limits_{\mathbb{R}^n}\varphi(z)\cdot\exp\left(-\frac{|x-z|^2}{4\alpha^2 t}\right)\cdot\,dz\,.$$

Nun, diese Rechnung mit $\mathcal{F},\mathcal{F}^{-1}$ ist korrekt für $\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit kompaktem Träger; ansonsten muß, um die Konvergenz sicherzustellen, das Wachstumsverhalten von φ gewissen Einschränkungen unterworfen werden.

Bemerkung.

1. Die allgemeine Gleichung

   $$\frac{\partial}{\partial t}u-\sum a_{ij}\cdot\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}u \;=\; 0 \qquad \text{mit } A:=(a_{ij})=\text{const, positiv definit}$$

   hat die Lösung

   $$u(t,x) \;=\; \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{1}{2}n}\cdot\sqrt{\det A}}\cdot\int\limits_{\mathbb{R}^n}\varphi(z)\exp\Big(-\frac{1}{4t}(x-z)^T\cdot A^{-1}\cdot(x-z)\Big)\cdot dz\,.$$

2. Für $A\neq$const kann man mit der Fourier–Transformation und der Variation der Anfangsfunktion ähnliche Formeln ableiten.

3. Die Gestalt der Poisson–Formel ist unabhängig von der Raumdimension n;
   daher genügt es, sich auf $n=1$ zu beschränken [im Unterschied zu elliptischen und insbesondere hyperbolischen Gleichungen].
   Ferner sei o.B.d.A. $\alpha=1$, also

   $$\text{DG}: \qquad \frac{\partial}{\partial t}u=\frac{\partial^2}{\partial x^2}u \qquad \text{auf} \quad \mathbb{R}^+\times\mathbb{R}\,,$$

   eindimensionale Wärmeleitungsgleichung

   $$\text{AB}: \qquad u\;=\;\varphi \qquad \text{auf} \quad t=0\;.$$

$$K(t,x) \;:=\; \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\cdot\exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right)$$

heißt Grundlösung der Wärmeleitungsgleichung und löst offensichtlich die Differentialgleichung [nachrechnen].

Dann löst nach oben [siehe Poisson–Formel]

$$u(t,x) \;:=\; \int\limits_{\mathbb{R}}\varphi(z)\cdot K(t,x-z)dz$$

die Differentialgleichung mit den Anfangsbedingungen.

Die Grundlösung hat folgende Eigenschaften:

Satz 4.2.1.

1. $K(t,x) > 0 \qquad$ für $t > 0$.
2. Für $t \in \mathbb{R}^+$ ist $\lim_{|x|\to\infty} K(t,x) = 0$.
   Das gleiche gilt für alle Ableitungen von K .
   Der Grenzübergang erfolgt exponentiell fallend.
3. Ist $\delta \in \mathbb{R}^+$ fest, so ist $\lim_{t \geq 0} K(t,x) = 0$ gleichmäßig für alle x mit $|x| \geq \delta$.
4. Ist $\delta \in \mathbb{R}^+$, so gilt: $\lim_{t \geq 0} \int\limits_{|x|\geq\delta} K(t,x)dx = 0$.
5. $\forall t \in \mathbb{R}^+ : \int\limits_{\mathbb{R}} K(t,x)dx = 1$.
6. $\lim_{x \leq 0}[-\int\limits_0^t \frac{\partial}{\partial x} K(t-\tau,x)d\tau] = -\frac{1}{2}$.
7. $\lim_{x \geq 0}[-\int\limits_0^t \frac{\partial}{\partial x} K(t-\tau,x)d\tau] = +\frac{1}{2}$.
8. Für $t \in \mathbb{R}^+$ ist K analytisch in t, x .

Beweis.

1. klar
2. Für festes $t \in \mathbb{R}^+$ sind alle Ableitungen von K von der Form
$$c(t) \cdot p(x) \cdot \exp\left(-\frac{1}{4t}x^2\right) \qquad \text{mit einem Polynom } p \in \mathbb{R}[x] \ ,$$
   was bekanntlich für $|x| \to \infty$ exponentiell unter jede Schranke fällt.
3. Für $|x| \geq \delta$ ist $K \leq \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \exp\left(-\frac{\delta^2}{4} \cdot \frac{1}{t}\right)$,
   und wieder ist mit $s := \frac{1}{\sqrt{t}} \to \infty \Longleftrightarrow t \to 0$
   $0 = \lim_{s\to\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \cdot s \cdot \exp\left(-\frac{\delta^2}{4}s^2\right) \geq \lim_{t\to 0} K \geq 0$,

   was die Behauptung liefert, da die Konvergenzgeschwindigkeit offensichtlich unabhängig vom speziellen Wert von x ist.
5. $\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-s^2} ds = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$, Γ ist die Gammafunktion und liefert mit $s := \frac{x}{\sqrt{4t}}$, $ds = \frac{1}{\sqrt{4t}}dx$:
$$\frac{1}{\sqrt{4t}} \int\limits_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right)dx \ = \ \sqrt{\pi} \ .$$
4. Zu jedem $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ gibt es ein $\delta' \in \mathbb{R}^+$ mit $\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{|s|\geq\delta'} e^{-s^2} ds \lneqq \varepsilon$.

Mit $s := \frac{x}{\sqrt{4t}}$ wie oben ist dies gleichbedeutend mit

$$\begin{aligned}\epsilon &> \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int\limits_{|x|\geq\sqrt{4t}\cdot\delta'} \exp\Big(-\frac{x^2}{4t}\Big)dx \\ &= \int\limits_{|x|\geq\sqrt{4t}\delta'} K\,dx \ .\end{aligned}$$

Für $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ ist dann für $t < \alpha := \frac{\delta^2}{4\delta'^2} \iff \delta' \cdot \sqrt{4t} < \delta$ [mit δ' wie oben]

$$\int\limits_{|x|\geq\delta} K \quad \leq \quad \int\limits_{|x|\geq\sqrt{4t}\delta'} K \quad \lneqq \quad \varepsilon \ .$$

6. und 7.
Aus

$$-\int\limits_0^t \frac{\partial}{\partial x} K(t-\tau,x)d\tau = \int\limits_0^t \frac{2x}{4(t-\tau)} \cdot \frac{1}{\sqrt{4\pi(t-\tau)}} \exp\Big(-\frac{x^2}{4(t-\tau)}\Big)d\tau$$

wird mit

$$s := \frac{x}{\sqrt{4(t-\tau)}}, \qquad ds = \frac{2x}{\sqrt{4(t-\tau)}^3}d\tau$$

und den Integralgrenzen

$$s_1 = \frac{x}{2\sqrt{t}}, \qquad s_2 = \begin{cases} x > 0: & +\infty, \\ x < 0: & -\infty, \end{cases}$$

zu

$$-\int_0^t \frac{\partial}{\partial x} K(t-\tau,x)dx = \int\limits_{\frac{x}{2\sqrt{t}}}^{\pm\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \exp(-s^2)\,ds \ .$$

So daß man erhält

$$\begin{aligned}\lim_{x\searrow 0}\Big(-\int_0^t \frac{\partial}{\partial x}K\,d\tau\Big) &= \lim_{x\searrow 0}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{\frac{x}{2\sqrt{t}}}^{+\infty} \exp(-s^2)\,ds \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{\infty} \exp(-s^2)\,ds = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{2}\sqrt{\pi} = \frac{1}{2} \quad \text{und}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\nearrow 0}\Big(-\int_0^t \frac{\partial}{\partial x}K\,d\tau\Big) &= \lim_{x\nearrow 0}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{\frac{x}{2\sqrt{t}}}^{-\infty} \exp(-s^2)\,ds \\ &= -\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{0} \exp(-s^2)\,ds = -\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{2}\sqrt{\pi} = -\frac{1}{2} \ .\end{aligned}$$

8. K ist offensichtlich unendlich oft differenzierbar.

■

4.3 Die Fundamentallösung des Cauchy–Problems

Die Poisson–Formel $u(t,x) = \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(z)\, K(t, x-z)\, dz$ wurde hergeleitet, ohne die Zulässigkeit der Transformationsschritte sicherzustellen; daher stellt sich nun die Frage, wann dieses Integral eine sinnvolle Funktion liefert, genauer: für welche Anfangsfunktionen φ es gleichmäßig konvergiert. Zunächst sei für $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$

$$F_1 := \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \exp\Bigl(-\frac{\bigl(1+\frac{1}{\varepsilon}\bigr)\, x^2}{4t}\Bigr)\,,\ G_1 := \exp\Bigl(-\frac{(1+\varepsilon)\cdot y^2}{4t}\Bigr)\ ,$$
$$F_2 := \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \exp\Bigl(-\frac{\bigl(1-\frac{1}{\varepsilon}\bigr)\, x^2}{4t}\Bigr)\,,\ G_2 := \exp\Bigl(-\frac{(1-\varepsilon)\cdot y^2}{4t}\Bigr)\ .$$

Die Ungleichung von Young $\quad 2xy \le \frac{1}{\varepsilon}\cdot x^2 + \varepsilon\cdot y^2$
bzw. mit $(-x)$ statt x in der Form $\quad -2xy \le \frac{1}{\varepsilon}\cdot x^2 + \varepsilon\cdot y^2$

liefert

$$-x^2 - y^2 + 2xy \ \le\ -x^2 - y^2 + \frac{1}{\varepsilon}\, x^2 + \varepsilon y^2$$

bzw.

$$x^2 + y^2 - 2xy \ \le\ x^2 + y^2 + \frac{1}{\varepsilon}\, x^2 + \varepsilon y^2\ ,$$

somit

$$-(x-y)^2 \ \le\ -\Bigl[\bigl(1-\frac{1}{\varepsilon}\bigr)x^2 + (1-\varepsilon)y^2\Bigr]$$

bzw.

$$-(x-y)^2 \ \ge\ -\Bigl[\bigl(1+\frac{1}{\varepsilon}\bigr)x^2 + (1+\varepsilon)y^2\Bigr]\,,$$

und insgesamt

$$F_1\cdot G_1 \ \le\ \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\ \exp\bigl(-\frac{1}{4t}\cdot(x-y)^2\bigr) \ =\ K(t, x-y) \ \le\ F_2\cdot G_2\,.$$

Sei nun φ stetig.

1. Fall: $\varphi(x) = c_1\cdot\exp(c_2\cdot|x|^{2+\alpha})$ $\qquad$ mit $c_i, \alpha \in \mathbb{R}^+$.
   Es ist dann

$$\begin{aligned}\varphi(z)\cdot K(t, x-z) \ &\ge\ c_1\cdot\exp(c_2\cdot|z|^{2+\alpha} - \frac{1+\varepsilon}{4t}\cdot|z|^2)\cdot F_1(t,z)\\ &=\ c_1\cdot\exp(|z|^2\Bigl[c_2\cdot|z|^\alpha - \frac{1+\varepsilon}{4t}\Bigr])\cdot F_1(t,z)\,.\end{aligned}$$

Falls nun $\left[c_2 \cdot |z|^\alpha - \frac{1+\varepsilon}{4t}\right] \gneqq 0 \iff c_2 \cdot |z|^\alpha > \frac{1+\varepsilon}{4t}$ wird, kann nicht mehr über den unbeschränkten Rest von $\mathbb{R}$ integriert werden.
Für $r \to \infty$ gilt also $\int\limits_{-r}^{+r} \varphi(z) \cdot K(t, x-z) dz \to \infty$.
D.h. das Integral der Poisson–Formel divergiert für alle stetigen Anfangsfunktionen φ, die sich für $|x| \to \infty$ asymptotisch verhalten wie $c_1 \cdot \exp(c_2 \cdot |x|^{2+\alpha})$ mit $c_i, \alpha \in \mathbb{R}^+$.

2. Fall: $\varphi(x) = c_1 \cdot \exp(c_2 \cdot |x|^2)$, d.h. $\alpha = 0$.

   Dann ist
$$\varphi \cdot K \leq c_1 \cdot F_2(t, z) \cdot \exp\Big(\big[c_2 - \frac{1-\varepsilon}{4t}\big] \cdot |z|^2\Big) ,$$
   und das Integral existiert für $c_2 \lneqq \frac{1-\varepsilon}{4t} \iff t \in (0; \frac{1-\varepsilon}{4c_2}) =: I_L$.
   D.h. für φ mit diesem asymptotischen Verhalten existiert eine Lösung [von Poisson–Form], aber nur für das Zeitintervall I_L .

3. Fall: $\varphi(x) = c_1 \cdot \exp(c_2 \cdot |x|^{1+\alpha})$ mit $\alpha \in [0; 1)$.

   Es ist
$$\varphi \cdot K \leq c_1 \cdot F_2 \cdot \exp\left(\Big[\frac{c_2}{|z|^{1-\alpha}} - \frac{1-\varepsilon}{4t}\Big] \cdot |z|^2\right)$$
   und $\quad \frac{c_2}{|z|^{1-\alpha}} < \frac{1-\varepsilon}{4t} \iff |z| > \left(\frac{4t \cdot c_2}{1-\varepsilon}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} =: \lambda$,

   was sicher außerhalb des kompakten Intervalls $[-\lambda, +\lambda]$ der Fall ist. Eine solche Situation liegt dann für jeden t–Wert vor.

   D.h. die Lösung existiert für alle Zeiten, falls $|\varphi| \lneqq c_1 \cdot \exp(c_2 |x|^2)$.

Bemerkung.

1. Die Bedingung der Stetigkeit von φ kann abgeschwächt werden z.B. zu stückweise stetig.
2. In den Konvergenzfällen hat man analytische Lösungen u .

Nun stellt sich noch die Frage, ob mit diesen Formeln für $t \to 0$ auch die Anfangswerte angenommen werden.

Lemma 4.3.1. Sei φ stetig und $|\varphi| \leq c_1 \cdot \exp(c_2 \cdot |x|^2)$, so folgt $\lim_{t\to 0} u(t, x) = \varphi(x)$ gleichmäßig auf jedem Kompaktum von $\mathbb{R}$.

Wurde in der Vorlesung aus Zeitgründen nicht vorgetragen.

Beweis.

Es ist

$$\frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int\limits_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{(x-z)^2}{4t}\right) dz \;=\; 1\,,$$

also

$$\frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int\limits_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{(x-z)^2}{4t}\right) \cdot \varphi(x)\, dz \;=\; \varphi(x)\,.$$

Ferner

$$\frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int\limits_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{(x-z)^2}{4t}\right) \cdot \varphi(z)\, dz \;=\; u(t,x)\,,$$

somit

$$u(t,x) - \varphi(x) \;=\; \sum_{i=1}^{3} I_i\,,$$

wobei

$$I_1(t,x) \;:=\; \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int\limits_{-\infty}^{x-\delta} \exp\left(-\frac{(x-z)^2}{4t}\right)[\varphi(z)-\varphi(x)]\, dz\;,$$

$$I_2(t,x) \;:=\; \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int\limits_{x-\delta}^{x+\delta} \exp\left(-\frac{(x-z)^2}{4t}\right)[\varphi(z)-\varphi(x)]\, dz \quad \text{und}$$

$$I_3(t,x) \;:=\; \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int\limits_{x+\delta}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(x-z)^2}{4t}\right)[\varphi(z)-\varphi(x)]\, dz\,.$$

Bemerkung. Problematisch ist die Stelle $z = x$, da dort $\exp(0) = 1$ den Faktor $\frac{1}{\sqrt{t}}, t \to 0$ nicht kompensieren kann. Deshalb wird eine Umgehung davon in I_2 gesondert betrachtet.

Ist $K \subset \mathbb{R}$ kompakt, so gibt es für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ ein $\delta \in \mathbb{R}^+$, so daß für $a, b \in K$ mit $|a-b| < \delta$ gilt $|\varphi(a) - \varphi(b)| < \frac{1}{3}\varepsilon$. [φ stetig auf kompakt ist gleichmäßig stetig.]

Sei also $K \subset \mathbb{R}$ kompakt mit $z, x\pm\delta \in K, |z-x| < \delta$. Sei ferner $A \in \mathbb{R}^+$ mit $K \subset \{|x| \leq A\}$. Es ist dann

$$|I_2| \;\leq\; \int\limits_{x-\delta}^{x+\delta} K(t, x-z)\, |\varphi(z) - \varphi(x)|\, dz \;\leq\; \frac{1}{3}\varepsilon \int\limits_{\mathbb{R}} K(t, x-z)\, dz \;=\; \frac{1}{3}\varepsilon\,.$$

Mit geeigneten c_i ist $|\varphi(z) - \varphi(x)| \;\leq\; |\varphi(z)| + |\varphi(x)| \;\leq\; c_1 \cdot \exp(c_2 \cdot |z|^2)$, und dann

$$|I_3| \;\leq\; \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\, c_1 \cdot \int\limits_{x+\delta}^{\infty} \exp\left(-\frac{|x-z|^2}{4t}\right) exp(c_2 \cdot |z|^2)\, dz\,.$$

Die Substitution $\qquad s := \frac{x-z}{2\sqrt{t}} \to dz = -2\sqrt{t}ds, \qquad s_1 = -\frac{\delta}{2\sqrt{t}}, \qquad s_2 = -\infty$

liefert

$$|I_3| \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}} c_1 \int\limits_{-\infty}^{s_1} \exp(-s^2)\, \exp(c_2 \cdot (x - 2\sqrt{t}s)^2)\, ds\,.$$

Nun ist

$$\begin{aligned} 0 &\leq c_2 \cdot (x + 2 \cdot \sqrt{t} \cdot s)^2 \\ &= c_2 \cdot x^2 + 4 \cdot c_2 \cdot \sqrt{t} \cdot s \cdot x + 4 \cdot c_2 \cdot t \cdot s^2\,, \end{aligned}$$

also

$$c_2 \cdot x^2 - 4 \cdot c_2 \cdot \sqrt{t} \cdot s \cdot x + 4 \cdot c_2 \cdot t \cdot s^2 \leq 2 \cdot c_2 \cdot x^2 + 8 \cdot c_2 \cdot t \cdot s^2$$

$\Longleftrightarrow$

$$c_2 \cdot (x - 2\sqrt{t} \cdot s)^2 \leq 2 \cdot c_2 \cdot x^2 + 8 \cdot c_2 \cdot t \cdot s^2\,.$$

Damit

$$\begin{aligned} |I_3| &\leq \frac{1}{\sqrt{\pi}} c_1 \int\limits_{-\infty}^{s_1} \exp(-s^2)\, \exp(2 \cdot c_2 \cdot x^2 + 8 \cdot c_2 \cdot t \cdot s^2)\, ds \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} c_1 \exp(2 \cdot c_2 \cdot x^2) \int\limits_{-\infty}^{s_1} \exp\Big(s^2[8 \cdot c_2 \cdot t - 1]\Big)\, ds\,. \end{aligned}$$

Nun ist $8c_2t - 1 \leq -\frac{1}{2} \Longleftrightarrow t < \frac{1}{16 \cdot c_2}$,.
Ist also $t \in (0; \frac{1}{16 \cdot c_2})$, $\lambda := \frac{1}{\sqrt{\pi}} c_1 \exp(2 \cdot c_2 \cdot A^2)$, dann ist auf $K \subseteq \{|x| \leq A\}$

$$|I_3| \leq \lambda \cdot \int\limits_{-\infty}^{-\frac{\delta}{2\sqrt{t}}} \exp\Big(-\frac{1}{2}s^2\Big)\, ds\,,$$

und es gibt $\tau_3 \in \mathbb{R}^+$ [kleiner als $\frac{1}{16c_2}$] mit

$$t \in (0, \tau_3) \Longrightarrow |I_3| \leq \frac{1}{3}\varepsilon \qquad \text{gleichmäßig für } |x| < A\,.$$

Analog bekommt man $|I_1| \leq \frac{1}{3}\varepsilon$.
Insgesamt sind nun alle $|I_i| \leq \frac{1}{3}\varepsilon$, $i = 1, 2, 3$, und zwar für beliebige ε .
Man kann dann stets ein δ finden, und $u - \varphi$ in die I_i zerlegen, so daß auf dem Kompaktum $K \subseteq \{|x| \leq A\}$ ein $\tau \in \mathbb{R}^+$ so gewählt werden kann, daß für $t \leq \tau$ dann $|u(t,x) - \varphi(x)| \leq \varepsilon$ gleichmäßig sogar für $|x| < A$ gilt.

Also: $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ : \exists \tau \in \mathbb{R}^+ \,|\, t \in (0; \tau] \Longrightarrow |u(t,x) - \varphi(x)| < \varepsilon$ gleichmäßig für $|x| < A$. ■

Wir machen hier in der Vorlesung weiter.

Zusammenfassung:

Satz 4.3.2.

DG: $\frac{\partial}{\partial t}u = \frac{\partial^2}{\partial x^2}u \qquad$ auf $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$,

AB: $u = \varphi \qquad$ auf $t = 0$.

Sei φ stetig und formal $u(t,x) := \int_{\mathbb{R}} \varphi(z)\, K(t, x-z)\, dz$.

1. Ist $|\varphi(x)| \le c_1 \cdot \exp(c_2 \cdot |x|^{1+\alpha})$, $\qquad \alpha \in [0;1)$,

   so liefert u eine Lösung für alle Zeiten.

2. Ist $\varphi \approx c_1 \cdot \exp(c_2 \cdot |x|^2)$ asymptotisch für $|x| \to \infty$,

   so hat man mit u eine Lösung im Zeitintervall $I_L := (0; \frac{1}{4c_2})$.

Nun wird die Eindeutigkeit untersucht.

Wurde in der Vorlesung aus Zeitgründen nicht vorgetragen.

Zunächst ist für $|\varphi| \le c_1 \cdot \exp(c_2 \cdot |x|^2)$

$$|u| \le \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} c_1 \int_{\mathbb{R}} \exp(c_2 \cdot |z|^2) \exp\left(-\frac{(x-z)^2}{4t}\right) dz ,$$

und mit $s := \frac{x-z}{2\sqrt{t}}$ ist

$$\begin{aligned} |u| &\le \frac{1}{\sqrt{\pi}}\, c_1 \int_{\mathbb{R}} \exp(-s^2) \exp(c_2 \cdot (x - 2\sqrt{t}\cdot s)^2)\, ds \\ &\le \frac{1}{\sqrt{\pi}}\, c_1 \exp(2c_2x^2) \int_{\mathbb{R}} \exp(-\frac{1}{2}s^2)\, ds \qquad \text{für } t \in (0; \tfrac{1}{16c_2}) \quad . \end{aligned}$$

Bemerkung. Wie schon an anderer Stelle oft verwendet, ist $\int_{\mathbb{R}} \exp(-\frac{1}{2}x^2)dx = \sqrt{\pi}$.

Also ist $|u| \le c_1 \cdot \exp(2c_2x^2)$. Dies ist eine Aussage über das Wachstumsverhalten der Lösung, welches somit beschränkt ist. Man zeigt nun, daß es höchstens eine Lösung geben kann, welche diese Bedingung erfüllt. Angenommen u, v seien Lösungen mit diesem Wachstumsverhalten.
Für $w := u - v$ ist $\qquad \frac{\partial}{\partial t}w = \frac{\partial^2}{\partial x^2}w, \qquad w(0,x) = 0$,
also genügt auch w als Lösung der Bedingung $|w| \le c_1 \cdot \exp(c_2 \cdot |x|^2)$.

1. Methode der Vergleichsfunktion:

Man zeigt $w = 0$ durch Konstruktion einer Vergleichslösung

$$F \;:=\; \frac{1}{\sqrt{1-4c_3\cdot t}}\cdot\exp\left(\frac{c_3\cdot x^2}{1-4c_3\cdot t}\right) \;=\; \sqrt{4\pi}\cdot K(1+\alpha^2 t,\alpha x)$$

mit $\alpha := i\cdot\sqrt{4c_3}, \qquad c_3 \geq c_2, \frac{1}{4T}$.

Es ist

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}F \;&=\; \frac{\partial^2}{\partial x^2}F \qquad \text{auf } (0;\tfrac{1}{4c_3})\times\mathbb{R} \;=:\; D\,, \\ F(0,x) \;&=\; \exp(c_3x^2) \qquad \text{auf } \mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

Sei nun $(t_1;x_1) \in D$ beliebig, $A \in \mathbb{R}^+$ mit $|x_1| < A$.

Definiere $R := [0;\frac{1}{4c_3}] \times [-A;+A]$

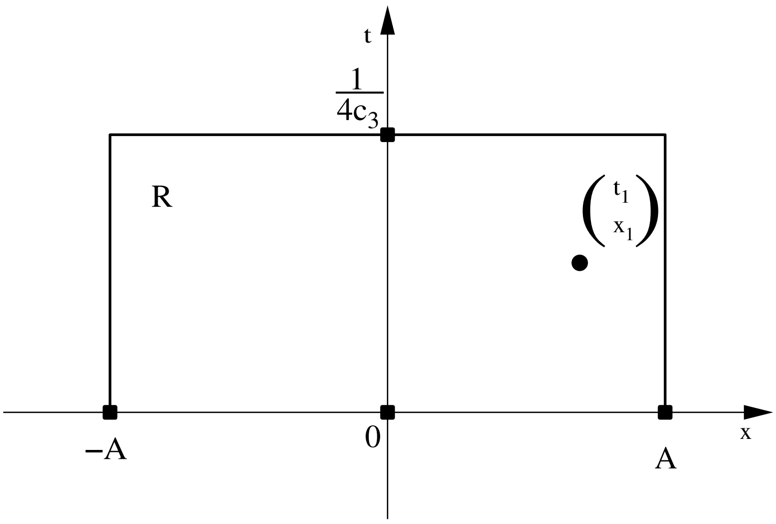


Abbildung 4.20: Das Rechteck um den beliebig herausgegriffenen Punkt.

und $h := c_1\cdot\exp\Big((c_2-c_3)\cdot A^2\Big)\cdot F(t,x)\,.$

Vergleiche nun w mit h auf R:

- $t = 0$:

  $w(0,x) = 0$

  $h(0,x) = c_1\exp\Big((c_2-c_3)A^2\Big)\exp(c_3x^2)$

  Hier ist auf alle Fälle $|w| \lneqq |h|$.

- $x = \pm A; t \in (0; \frac{1}{4c_3})$:

  $|w(t,x)| \le c_1 \cdot \exp(c_2 \cdot A^2)$ [beachte: $c_i \in \mathbb{R}^+$]

  $$|h(t, \pm A)| \;=\; c_1 \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1-4c_3 t}}}_{>1} \exp(c_2 \cdot A^2) \cdot \underbrace{\exp\Bigg(c_3 A^2 \, \frac{4c_3 t}{1-4c_3 t} \Bigg)}_{>1} \;>\; c_1 \, \exp(c_2 \cdot A^2)$$

  Also ist auch hier: $|w| \lneqq |h|$.

Das schwache Maximum–Prinzip besagt, daß dann auf ganz $\mathbb{R}$, insbesondere in (t_1, x_1) $w - h \le 0$ und $-h - w \le 0$ gilt, also $-h \le w \le +h \Longleftrightarrow |w| \le |h|$.

$$|w(t_1, x_1)| \;\le\; c_1 \cdot \exp\Big((c_2 - c_3) \cdot A^2 \Big) \cdot F(t_1, x_1) \text{ gilt daher mit } c_2 - c_3 < 0 \;.$$

Da ferner $A \in \mathbb{R}^+$ nur die Bedingung $|x_1| < A$ erfüllen muß, insbesondere beliebig groß gewählt werden kann, ist auch $|w(t_1, x_1)|$ beliebig klein, verschwindet also: $w(t_1, x_1) = 0$.

Da aber $(t_1, x_1) \in D$ beliebig war, ist überhaupt $w = 0$, also $u = v$ auf $D = (0; \frac{1}{4c_3}) \times \mathbb{R}$.

Insgesamt hat man also jetzt im 1.Schritt die Eindeutigkeit lokal gezeigt; nämlich für $t \in (0; \frac{1}{4c_3})$.

2. Sei nun $T \in \mathbb{R}^+$ beliebig.

   Jetzt wird die Eindeutigkeit auch für $t \in I_2 := [\frac{1}{4c_3}; T)$ bewiesen :

   Angenommen, es ist nicht $w \equiv 0$ in $I_2 \times \mathbb{R}$.

   Dann gibt es ein $T_1 \in I_2$ minimal, so daß eine Folge $\{(t_n; x_n)\} \subseteq I_2 \times \mathbb{R}$ existiert mit $t_n \overset{>}{\longrightarrow} T_1, w(t_n, x_n) \neq 0$.

   Wählt man ε klein genug, liefert die Wiederholung des Beweises aus Schritt 1. für die Anfangszeit $T_1 - \varepsilon$ den Wert $w(t_n, x_n) = 0$, im Widerspruch zur Annahme.

Wir machen hier in der Vorlesung weiter.

Zusammenfassung:

Satz 4.3.3. Eindeutigkeit:
Die Lösung von $u = \int \varphi \cdot K$ aus Satz 4.3.2 ist eindeutig in der Klasse der Lösungen v mit Wachstumsverhalten

$$|v| \;\le\; c_1 \exp(c_2 \cdot x^2) \;, \qquad c_i \in \mathbb{R}^+ \,.$$

Beispiel:
Keine Eindeutigkeit hat man in folgendem Fall:

$$\frac{\partial}{\partial t} u \;=\; \frac{\partial^2}{\partial x^2} u \qquad \text{auf } \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \,,$$

$$u(0,x) = 0 \qquad \text{auf } \mathbb{R}\,.$$

$u \equiv 0$ ist sicher eine Lösung, welche zusätzlich die Wachstumsbedingung erfüllt.
Eine weitere ist

$$u(t,x) := \sum_{n\in\mathbb{N}_0} f^{(n)}(t) \cdot \frac{1}{(2n)!} \cdot x^{2n}\,,$$

wobei $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ mit $f(t) > 0$ für $t > 0$ und $f(t) = 0$ für $t \leq 0$, sowie $|f^{(n)}(t)| \leq Cn^{n\gamma}$, $1 < \gamma < 2$. Eine solche Funktion f gibt es (vgl. Hörmander, Springer-Verlag, Sect. 1.3).

Man kann zeigen, daß diese Reihe gleichmäßig konvergiert für $|x| < R$, $R > 0$ beliebig, und gliedweise differenziert werden darf, somit das Anfangswertproblem löst. Aber: sie wächst stärker als $c_1 \cdot \exp(c_2 \cdot x^2)$; nämlich wie $c_1 \cdot \exp\left(c_2|x|^{\frac{2}{2-\gamma}}\right)$.

4.4 Anfangs–/Randwertprobleme für die Wärmeleitungsgleichung im $\mathbb{R}^3$

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ sei ein beschränktes Gebiet, $T \in \mathbb{R}^+$, $Q_T := (0,T) \times \Omega$, $S_T := (0,T] \times \partial\Omega$, $G := \{0\} \times \Omega$, siehe Abbildung (4.1).

Gestellt sei folgendes Problem:

$$\frac{\partial}{\partial t} u = a \cdot \Delta u \qquad \text{auf } Q_T$$

$$u = 0 \qquad \text{auf } \overline{G}\,, \qquad u = f \qquad \text{auf } \overline{S_T}\,.$$

Bemerkung.

1. Œ seien die Anfangsdaten 0 auf G; ansonsten transformiere.

2. Die erforderliche Kompatibilitätsbedingung an Anfangs– und Randdaten lautet:

$$(K) \qquad\qquad f = 0 \qquad \text{auf } \{0\} \times \partial\Omega\,.$$

3. vgl.: Beim Cauchy–Problem war $x \in \mathbb{R}^n$, hier ist $x \in \Omega \subsetneq \mathbb{R}^n$.

zur Eindeutigkeit:

Diese erhält man ohne weiteres:
Sind u, v Lösungen, so auch $w := u - v$ mit $w = 0$ auf $G \cup S_T$.
Das schwache Maximum–Prinzip liefert $w = 0$ auf $\overline{Q}$.

zur Existenz:

Diese ist hier schwieriger zu zeigen:
Bisher wurde ganz wesentlich benutzt, daß x ganz $\mathbb{R}^n$ durchlaufen kann. Jetzt schlägt man den Weg über Ein– und Doppeschichtpotentiale und dann Integralgleichungen ein.

Idee:

Suche eine Lösung der Form

$$u = a \cdot \int\limits_{S_t} \frac{\partial}{\partial \vec{n}_z} K(a(t-\tau), x-z)\, \mu(\tau, z)\, ds_z\, d\tau$$

mit noch unbekanntem $\mu = \mu(t,x)$ und $a \in \mathbb{R}^+$.
Die Sprungrelation für $x \to x_0 \in \partial\Omega$ liefert dann:

$$f(t,x) = \pm\frac{1}{2}\mu(t,x) + a \cdot \int\limits_{S_t} \frac{\partial}{\partial \vec{n}_z} K \cdot \mu\, ds_z d\tau\,.$$

Bemerkung.
Im Unterschied zum elliptischen Fall hängt hier das Integrationsgebiet S_t von t ab: $S_t := (0;t] \times \partial\Omega$. Man erhält also eine Volterra–Integralgleichung, die man nach dem Banach–Fixpunktsatz durch Iteration löst:

Startfunktion: $\mu_0(t,x)$,
Iteration: $\mu_{n+1} := -2f + 2a \int\limits_{S_t} \frac{\partial}{\partial \vec{n}_z} K \cdot \mu\, ds_z d\tau$.

Die Iteration ist eine Kontraktion, weshalb $\{\mu_n\}$ einen Grenzwert liefert.
In $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^3$ ist $K(t,x) := \frac{1}{\sqrt{4\pi t}^3} \exp(-\frac{|x|^2}{4t})$ die Grundlösung.
Die Potentiale sind:

Einschichtpotential:

$$v(t,x) := a \cdot \int\limits_{S_t} K(a \cdot (t-\tau), x-z)\, \varrho(\tau,z)\, ds_z\, d\tau\,,$$

Doppelschichtpotential:

$$w(t,x) := a \cdot \int\limits_{S_t} \frac{\partial}{\partial \vec{n}_z} K(a \cdot (t-\tau), x-z) \cdot \mu(\tau,z)\, ds_z\, d\tau\,.$$

Ziel: Herleitung von Sprungrelationen für $x \to x_0 \in \partial\Omega$.
Die Argumentationsweise ähnelt dem elliptischen Fall.

1. Doppelschichtpotential:
Das Integral wird unter Berücksichtigung der Singularität in der Zeit aufgespalten :

$$w = I + J \quad \text{mit} \quad I := a \cdot \int\limits_{S_t} \frac{\partial}{\partial \vec{n}_z} K \cdot \mu(t,z)\, ds_z\, d\tau\,, \quad J := a \cdot \int\limits_{S_t} \frac{\partial}{\partial \vec{n}_z} K \cdot \big[\mu(\tau,z) - \mu(t,z)\big]\, ds_z\, d\tau\,.$$

Man berechnet I zu:

$$I = a \cdot \int\limits_{\partial\Omega} \mu(t,z) \int\limits_0^t 2\vec{n}_z(z-x)\frac{1}{\sqrt{4\pi(a(t-\tau))}^3} \exp\left(-\frac{(z-x)^2}{4a(t-\tau)}\right) \cdot \left(-\frac{1}{4a(t-\tau)}\right) d\tau\, ds_z$$

$$= a \cdot (-1) \cdot 2\frac{1}{\sqrt{\pi}^3} \int\limits_{\partial\Omega} \mu \cdot \vec{n}_z(z-x) \int\limits_0^t \exp\left(-\frac{(z-x)^2}{4a(t-\tau)}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{4 \cdot a(t-\tau)}^5}\, d\tau\, ds_z\,,$$

mit $\quad \lambda := \frac{r^2}{4a(t-\tau)}, \qquad r := |z-x|, \qquad d\tau = (t-\tau)\frac{1}{\lambda} d\lambda, \qquad \lambda_1 = \frac{r^2}{4at}, \qquad \lambda_2 = +\infty\ :$

$$\begin{aligned} I\ &=\ -2 \cdot a\frac{1}{\sqrt{\pi}^3} \int\limits_{\partial\Omega} \mu \cdot \vec{n}_z(z-x) \int\limits_{\lambda_1}^{\infty} \exp(-\lambda) \cdot \sqrt{\frac{\lambda}{r^2}}^5 \cdot (t-\tau)\frac{1}{\lambda} \cdot d\lambda \cdot ds_z \\ &=\ \frac{2 \cdot a}{\sqrt{\pi}^3} \int\limits_{\partial\Omega} \mu \cdot \vec{n}_z(x-z) \int\limits_{\lambda_1}^{\infty} \exp(-\lambda) \cdot\ \lambda \cdot \sqrt{\lambda} \cdot \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{1}{r^5} \cdot \frac{r^2}{4a} \cdot d\lambda \cdot ds_z \\ &=\ \frac{1}{2 \cdot \sqrt{\pi}^3} \int\limits_{\partial\Omega} \mu \cdot \vec{n}_z(x-z)\frac{1}{r^3} \int\limits_{\lambda_1}^{\infty} \sqrt{\lambda} \cdot \exp(-\lambda) \cdot d\lambda \cdot ds_y\,. \end{aligned}$$

Verwendet man $\quad \Phi(t,r) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\lambda_1 = \frac{r^2}{4a \cdot t}}^{\infty} \sqrt{\lambda} \exp(-\lambda)\, d\lambda\ \to\ \frac{2}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\ = 1\ $ für $r \to 0$
und

(A.) $\quad \frac{\partial}{\partial \vec{n}_z}\left(\frac{1}{4\pi r}\right) = \frac{1}{4\pi} \cdot \vec{n}_z \cdot (x-z) \cdot \frac{1}{r^3}\,, \qquad$ ist

$$I\ =\ \frac{1}{4\pi} \int\limits_{\partial\Omega} \mu \cdot \vec{n}_z(x-z)\frac{1}{r^3}\Phi(t,r)\, ds_z\ =\ \int\limits_{\partial\Omega} \mu \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{n}_z}\left(\frac{1}{4\pi r}\right) \Phi(t,r)\, ds_z\,,$$

$$I(t,x)\ =\ \int\limits_{\partial\Omega} \mu(t,z)\frac{\partial}{\partial \vec{n}_z}\left(\frac{1}{4\pi|x-z|}\right) \Phi(t,|x-z|)\, ds_z\,.$$

Man beachte, daß $E = \frac{\partial}{\partial \vec{n}_z}\left(\frac{1}{4\pi r}\right)$ gerade die Singularitätenfunktion der Laplace–Gleichung ist. Für den elliptischen Fall kennt man aber die Sprungrelationen :

$$\begin{aligned} \lim_{x \to x_0, x \in \Omega} I(t,x)\ &=\ -\frac{1}{2}\mu(t,x_0) \cdot \underbrace{\Phi(t,0)}_{=1} + I(t,x_0) \qquad [r = |x_0 - z|] \\ &=\ -\frac{1}{2}\mu(t,x_0)\ +\ I(t,x_0)\,, \\ \lim_{x \to x_0, x \in \complement(\Omega)} I(t,x)\ &=\ +\frac{1}{2}\mu(t,x_0)\ +\ I(t,x_0)\,. \end{aligned}$$

I wieder in Ausgangsform geschrieben :

$$\lim_{x \to x_0, x \in \Omega} I(t,x) = -\frac{1}{2}\mu(t,x_0) + a \cdot \int\limits_{S_t} \frac{\partial}{\partial \vec{n}_z} K(a \cdot (t-\tau), x_0 - z)\mu(\tau, z)\, ds_z\, d\tau\,,$$

$$\lim_{x \to x_0, x \in \complement(\Omega)} I(t,x) = +\frac{1}{2}\mu(t,x_0) + a \cdot \int\limits_{S_t} \frac{\partial}{\partial \vec{n}_z} K \cdot \mu\,.$$

Bemerkung.

1. Die Existenz der Integrale $\int_{S_t}$ für $x \to x_0$ wäre noch zu zeigen; dies ergibt sich aber unten aus der Betrachtung von J wie im elliptischen Fall.

2. Da die Sprünge schon von I geleistet werden, erwartet man stetiges J.

Man zeigt also nun : $x \to x_0, x \notin \partial\Omega \implies J(t,x) \to J(t,x_0)\,.$

Wurde in der Vorlesung aus Zeitgründen nicht vorgetragen.

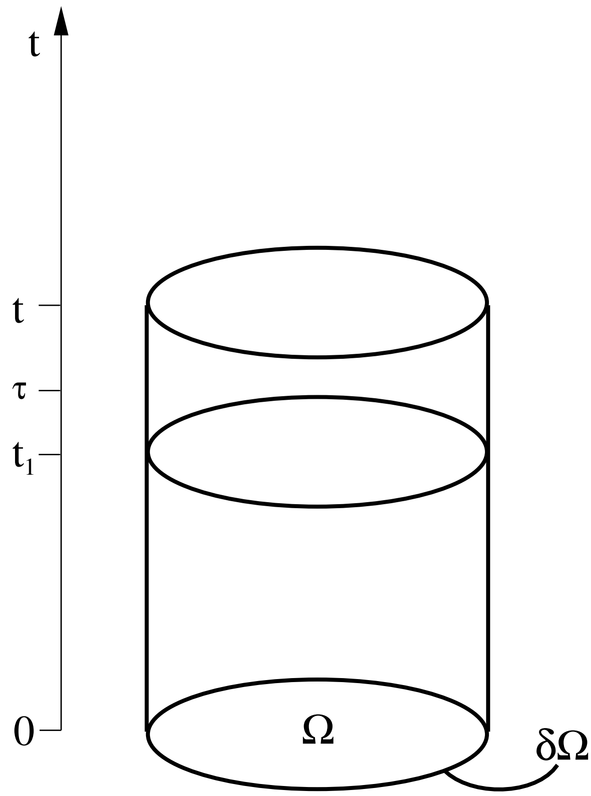


Abbildung 4.21: Betrachte das Verhalten von μ auf $[t_1; t]$ klein genug.

Zu $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ gibt es $t_1 \in \mathbb{R}^+$ so nahe bei t, daß für $\tau \in [t_1; t] : |\mu(t,x) - \mu(\tau,x)| < \varepsilon$ auf ganz $\partial\Omega[\ni x]$ —da μ stetig vorausgesetzt.

Zerlege $J = J_1 + J_2$, wobei

$$J_1(t,x) \;:=\; a \cdot \int\limits_{S_{t_1}} \frac{\partial}{\partial \vec{n}_z} K(a(t-\tau), x-z) \cdot [\mu(\tau,z) - \mu(t,z)]\, ds_z\, d\tau \qquad \text{und}$$

$$J_2(t,x) \;:=\; a \cdot \int\limits_{t_1}^{t} \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial \vec{n}_z} K(a(t-\tau), x-z) \cdot [\mu(\tau,z) - \mu(t,z)]\, ds_z\, d\tau\,.$$

In J_2 ist die Singularität von K bei $\tau = t$ enthalten; der Integrand in J_1 ist nicht singulär, J_1 stetig:

$$\lim_{x \to x_0, x \notin \partial\Omega} J_1(t,x) \;=\; J_1(t,x_0)$$

nun zu J_2:

$$\text{Es sei } x_0 \in \partial\Omega, \text{Œ } x_0 = 0\,.$$

Voraussetzungen:

1. Es sei $F_\delta := \partial\Omega \cap K_\delta(x_0)$ darstellbar durch eine C^2-Funktion Φ :

$$F_\delta = \{y \,|\, y_1^2 + y_2^2 \le \delta^2, y_3 = \Phi(y_1,y_2)\}\,.$$

Œ sei das Koordinatensystem so gewählt, daß

$$0 \;=\; \Phi(0) \;=\; \frac{\partial}{\partial y_i}\Phi(0)\,, \qquad i = 1,2\,.$$

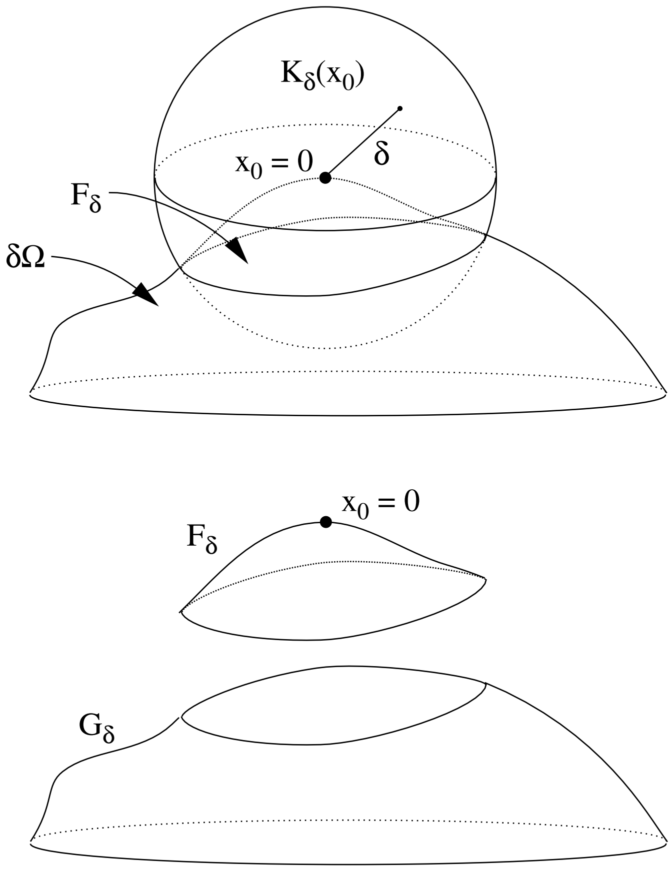


Abbildung 4.22: F_δ **wird von** $K_\delta(x_0)$ **aus** $\partial\Omega$ **ausgeschnitten.**

$$G_\delta \;:=\; \partial\Omega \;\setminus\; F_\delta$$

2. Es gebe eine vom Punkt x unabhängige obere Schranke $c \in \mathbb{R}^+$ für das Integral obiger Normalenableitung : $\quad \exists c > 0\, \forall x \in \mathbb{R}^3 : \int\limits_{\partial\Omega} \left| \frac{\partial}{\partial \vec{n}_z} \left(\frac{1}{4\pi r} \right) \right| \, ds_z \;\leq\; c\,.$

Es gilt [man beachte $x_0 = 0$]:

$$\begin{aligned}
&\Big|J_2(t,x) - J_2(t,x_0)\Big| = \\
&= a \cdot \int_{t_1}^{t} \int_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial \vec{n}_z} \Big[K(a(t-\tau), x-z) - K(a(t-\tau), -z)\Big] \Big[\mu(\tau,z) - \mu(t,z)\Big]\, ds_z\, d\tau \\
&\le a \cdot \varepsilon \int_{t_1}^{t} \int_{F_\delta} \left[\left|\frac{\partial}{\partial \vec{n}_z} K(a(t-\tau), x-z)\right| + \left|\frac{\partial}{\partial \vec{n}_z} K(a(t-\tau), -z)\right|\right] + \\
&\quad + a \cdot \varepsilon \int_{t_1}^{t} \int_{G_\delta} \left[\left|\frac{\partial}{\partial \vec{n}_z} K(a(t-\tau), x-z)\right| + \left|\frac{\partial}{\partial \vec{n}_z} K(a(t-\tau), -z)\right|\right] \\
&=: a\varepsilon[K_1 + K_2] + a\varepsilon K_3\,.
\end{aligned}$$

Auf F_δ ist

$$\begin{aligned}
z &= \Big(z_1, z_2, \Phi(z_1,z_2)\Big)^T, \\
\vec{n}_z &= \frac{(D_1\Phi, D_2\Phi, -1)^T}{\sqrt{1 + (D_1\Phi)^2 + (D_2\Phi)^2}}\,.
\end{aligned}$$

Wie im elliptischen Fall hat man

$$|\vec{n}_z \cdot z|\, ds_z \le M \cdot (z_1^2 + z_2^2) \cdot dz_1 \cdot dz_2 \qquad \text{mit} \quad M \in \mathbb{R}^+\,.$$

Es ist $\quad \frac{\partial}{\partial \vec{n}_z} K(a(t-\tau), x-z) = \frac{1}{2a(t-\tau)} \vec{n}_z \cdot (x-z) \cdot K\,, \quad$ daher

$$\begin{aligned}
K_2 &= \int_{t_1}^{t} \int_{F_\delta} \left|\frac{\partial}{\partial \vec{n}_z} K(a(t-\tau), -z)\right| ds_z\, d\tau \\
&= \int_{t_1}^{t} \int_{F_\delta} \frac{1}{2a(t-\tau)} \cdot \vec{n}_z \cdot z \cdot K \cdot ds_z\, d\tau \\
&\le \int_{t_1}^{t} \int_{K_\delta} \frac{M \cdot (z_1^2 + z_2^2)}{2a(t-\tau)} K\, dz_1\, dz_2\, d\tau\,, \qquad \text{in Polarkoordinaten:} \\
&= \int_{t_1}^{t} \int_{0}^{2\pi} \int_{0}^{\delta} \frac{M \cdot r^2}{2a(t-\tau)} \cdot \frac{1}{\sqrt{4\pi a(t-\tau)}^3} \exp\left(\frac{-|z|^2}{4a(t-\tau)}\right) \cdot r \cdot dr\, d\varphi\, d\tau\,.
\end{aligned}$$

Mit $|z|^2 = z_1^2 + z_2^2 + \Phi^2 = r^2 + \Phi^2$ hat man

$$K_2 \le \int_{t_1}^{t} \int_{0}^{2\pi} \int_{0}^{\delta} \frac{M \cdot r^3}{(4a(t-\tau))^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{4 \cdot a(t-\tau)}} \exp\left(-\frac{r^2 + \Phi^2}{4a(t-\tau)}\right) \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}^3}\, dr\, d\varphi\, d\tau\,.$$

Streiche nun den Summanden Φ^2 in $r^2+\Phi^2$ und ersetze dafür $\int\limits_0^\delta$ durch $\int\limits_0^\infty$; dann wird der Wert des Integrals höchstens vergrößert:

$$K_2 \;\le\; \int\limits_{t_1}^{t}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\infty} \frac{r^3}{(4a(t-\tau))^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{t-\tau}}\,\exp\left(-\frac{r^2}{4a(t-\tau)}\right) dr\,d\varphi\,d\tau\,\frac{M}{\sqrt{a}\sqrt{\pi}^3}$$

Man substituiert $\qquad \lambda := \frac{r^2}{4a(t-\tau)}\,, \qquad dr = \frac{r}{2\lambda}d\lambda\,, \qquad \lambda_1 = 0\,, \qquad \lambda_2 = +\infty\;,$
und erhält

$$\begin{aligned}
K_2 \;&\le\; \int\limits_{t_1}^{t}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\infty} \frac{r^4}{(4a(t-\tau))^2}\frac{1}{\lambda}\frac{1}{\sqrt{t-\tau}}\exp(-\lambda)\,d\lambda\,d\varphi\,d\tau\,\frac{M}{2\sqrt{a}\sqrt{\pi}^3}\\
&= \int\limits_{t_1}^{t}\frac{1}{\sqrt{t-\tau}}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\infty}\lambda\cdot\exp(-\lambda)\,d\lambda\,d\varphi\,d\tau\,\frac{M}{2\sqrt{a}\sqrt{\pi}^3}\\
&= \int\limits_{t_1}^{t}\frac{1}{\sqrt{t-\tau}}\,d\tau\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\cdot 1\cdot\frac{M}{2\sqrt{a}\sqrt{\pi}^3} \qquad \left[\int\limits_0^{\infty}\lambda\exp(-\lambda)d\lambda = 1\right]\\
&= \frac{2\pi M}{2\sqrt{a}\pi\sqrt{\pi}}(-2)\cdot\sqrt{t-\tau}\,\Big|_{t_1}^{t} \;=\; \frac{2M}{\sqrt{a}\sqrt{\pi}}\sqrt{t-t_1}
\end{aligned}$$

und schließlich

$$K_2 \;\le\; \frac{2M}{\sqrt{a}\sqrt{\pi}}\sqrt{t-t_1}\,.$$

In K_1 ist $x-z\neq 0$, da $x\notin\partial\Omega$.

$$K_1 \;\le\; \int\limits_{t_1}^{t}\int\limits_{F_\delta}\left|\frac{\vec{n}_z(x-z)}{2a(t-\tau)}\right|\frac{1}{\sqrt{4\pi a(t-\tau)}^3}\exp\left(-\frac{|x-z|^2}{4a(t-\tau)}\right)ds_z\,d\tau$$

wird mit $\qquad \lambda := \frac{r^2}{4a(t-\tau)}\,, \qquad d\tau = (t-\tau)\frac{1}{\lambda}d\lambda\,, \qquad \lambda_1 = \frac{r^2}{4a(t-t_1)}\,, \qquad \lambda_2 = +\infty \qquad$ zu

$$\begin{aligned}
K_1 \;&\le\; \int\limits_{F_\delta}|\vec{n}_z\cdot(x-z)|\int\limits_{\lambda_1}^{\infty}\frac{1}{r^3}\cdot\frac{r^2}{4a(t-\tau)}\frac{r}{\sqrt{4a(t-\tau)}}\frac{1}{\lambda}\exp(-\lambda)\,d\lambda\,ds_z\cdot\frac{1}{2a\sqrt{\pi}^3}\\
&\le\; \frac{1}{2a\sqrt{\pi}^3}\int\limits_{F_\delta}|\vec{n}_z\cdot(x-z)|\cdot\frac{1}{r^3}\int\limits_0^{\infty}\sqrt{\lambda}\exp(-\lambda)\,d\lambda\,ds_z\\
&\le\; \frac{1}{2a\sqrt{\pi}^3}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi}4\pi\int\limits_{\partial\Omega}\frac{\partial}{\partial\vec{n}_z}\left(\frac{1}{4\pi r}\right)ds_z\,.
\end{aligned}$$

Hierbei wurde das Integral $\int\limits_{F_\delta}$ wegen $F_\delta = \partial\Omega\cap K_\delta \subseteq \partial\Omega$ zu $\int\limits_{\partial\Omega}$ vergrößert, und (A.) verwendet.

Nach Voraussetzung 2. ist $\int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial \vec{n}_z}\left(\frac{1}{4\pi r}\right) ds_z \le c$, also

$$K_1 \;\le\; \frac{1}{a}\cdot c\,.$$

Zuletzt K_3:

Weil $x \to x_0 = 0$ betrachtet wird, kann $x \in K_{\frac{1}{2}\delta}(0)$ angenommen werden, weshalb für $z \in G_\delta = \partial\Omega \setminus K_\delta(0)$ gilt: $x - z \neq 0$ und $z \neq 0$.
Die Anwendung der für K_1 benutzten Variablentransformation einmal mit $r = |x - z|$, einmal mit $r := |z| = |0 - z|$ liefert wie für K_1:

$$K_3 \;\le\; 2\cdot\frac{1}{a}\cdot c\,.$$

Insgesamt ist

$$|J_2(t,x) - J_2(t,x_0)| \;\le\; a\cdot\varepsilon\left[\frac{2M}{\sqrt{a}\sqrt{\pi}}\sqrt{t-t_1} + 3\frac{1}{a}\cdot c\right]$$

für $x \in K_{\frac{1}{2}\delta}(0)$, $x \notin \partial\Omega$, was die Stetigkeit $x \notin \partial\Omega, x \to x_0 = 0 \implies J_2(t,x) \to J_2(t,x_0)$ liefert. ■

Wir machen hier in der Vorlesung weiter.

Zusammenfassung:

Satz 4.4.1. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ ein Gebiet, worauf Voraussetzungen 1., 2. erfüllbar seien, ferner $\mu \in C(\mathbb{R}_0^+ \times \partial\Omega)$.
Dann gilt:
Das Doppelschichtpotential

$$w(t,x) \;:=\; a\cdot\int\limits_{S_t}\frac{\partial}{\partial\vec{n}_z}K(a(t-\tau), x-z)\mu(\tau,z)\,ds_z\,d\tau \qquad \text{auf} \quad \mathbb{R}_0^+\times\mathbb{R}^3$$

erfüllt die

1. Sprungrelation bei $x_0 \in \partial\Omega$

$$\lim_{x\to x_0, x\in\Omega} w(t,x) \;=\; -\frac{1}{2}\mu(t,x_0) + w(t,x_0)\,,$$
$$\lim_{x\to x_0, x\in\complement(\overline{\Omega})} w(t,x) \;=\; +\frac{1}{2}\mu(t,x_0) + w(t,x_0)$$

und die

2. Differentialgleichung

DG: $\quad \dfrac{\partial}{\partial t}w = a\cdot\Delta w \qquad$ auf $t \in \mathbb{R}^+, x \notin \partial\Omega$,

AB: $\quad w(0,x) = 0 \qquad$ auf $x \notin \partial\Omega$.

Beweis.

1. Man hatte $w = I + J\,,\ J\ =\ J_1 + J_2$

   mit $\quad \lim_{x\to x_0} I = \mp\frac{1}{2}\mu(t,x_0) + I(t,x_0)\,, \qquad \lim_{x\to x_0} J_i = J_i(t,x_0)\,,$

   was die Behauptung zeigt.

2. Nachrechnen,

   unter wesentlicher Verwendung von Satz 4.2.1 , Eigenschaft 2. .

■

Satz 4.4.2. Sei Ω wie in Satz 4.4.1, $\varrho \in C(\mathbb{R}_0^+ \times \partial\Omega)$. Das Einschichtpotential

$$v(t,x)\ :=\ a\cdot \int\limits_{S_t} K(a(t-\tau), x-z)\varrho(\tau,z)\,ds_z\,d\tau \qquad \text{auf } \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}^3$$

erfüllt die

1. Sprungrelation bei $x_0 \in \partial\Omega$

$$\begin{aligned} \lim_{x\to x_0, x\in\Omega} \frac{\partial}{\partial\vec{n}_0} v(t,x) \ &=\ +\frac{1}{2}\varrho(t,x_0)\ +\ \frac{\partial}{\partial\vec{n}_0} v(t,x_0)\ , \\ \lim_{x\to x_0, x\in\complement(\overline{\Omega})} \frac{\partial}{\partial\vec{n}_0} v(t,x) \ &=\ -\frac{1}{2}\varrho(t,x_0)\ +\ \frac{\partial}{\partial\vec{n}_0} v(t,x_0) \qquad \text{und die} \end{aligned}$$

2. Differentialgleichung

   DG: $\frac{\partial}{\partial t} v = a\cdot\Delta v \qquad$ auf $t\in\mathbb{R}^+, x\notin\partial\Omega\,,$

   AB: $v(0,x) = 0 \qquad$ auf $x\notin\partial\Omega\,.$

Bemerkung. $\vec{n}_0$ ist die äußere Normale an $\partial\Omega$ in x_0; der Grenzübergang muß auf dieser Geraden $x_0 + \mathbb{R}\vec{n}_0$ erfolgen.

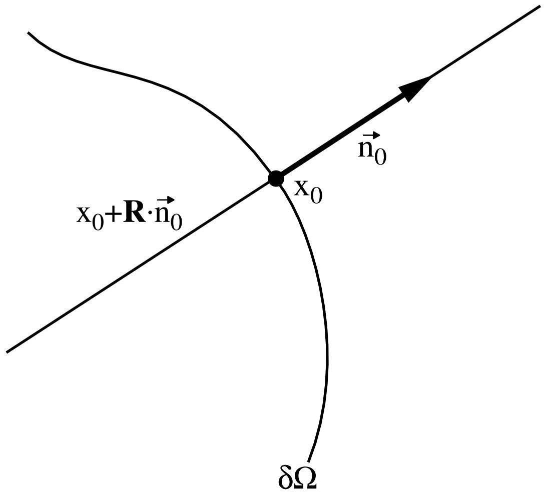


Abbildung 4.23: Der Grenzübergang erfolgt auf der Geraden durch x_0, normal auf $\partial\Omega$.

Beweis.
Der Beweis verläuft ähnlich dem im elliptischen Fall.
Das Anfangs–/Randwertproblem lautet:

$$\begin{array}{lll} \text{DG:} & \dfrac{\partial}{\partial t}u = a\cdot\Delta u & \text{auf } Q_T = (0;T)\times\Omega\,, \\ \text{AB:} & u = 0 & \text{auf } \overline{G} = \{0\}\times\overline{\Omega}\,, \\ \text{RB:} & u = f & \text{auf } \overline{S_T} = [0;T]\times\partial\Omega\ , \end{array}$$

mit • $T\in\mathbb{R}^+$,

• $f = 0$ auf $0\times\partial\Omega$ [Kompatibilität], $f\in C(\overline{S_T})$.

gesucht: Lösung $u\in C^{1,2}(Q_T)\cap C(\overline{Q_T})$ $\quad [C^{1,2}(Q_T) = \{u \mid \frac{\partial}{\partial t}u, \frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}u\in C(Q_T)\}]$

in Form eines DSP: $\quad u = a\cdot\int\limits_{S_t}\frac{\partial}{\partial\vec{n}_z}K\cdot\mu\,.$

Bestimme also so ein stetiges μ .

Für ein so definiertes u ist nach Lemma [siehe unten] $\lim_{t\to 0}u(t,0) = 0$; also ist u auf $[0;T]\times\Omega$ stetig fortsetzbar und erfüllt stets die homogene Anfangsbedingung [die DG ohnehin].
Für Stetigkeit muß für $x\to x_0$ gelten: $u(t,x)\to f(t,x_0)$.
Mit der Sprungbedingung für das DSP erhält man

$$f(t,x)\ =\ -\frac{1}{2}\mu(t,x) + a\cdot\int\limits_{S_t}\frac{\partial}{\partial\vec{n}_z}K(a(t-\tau)),x-z)\mu(\tau,z)\,ds_z\,d\tau \qquad \text{auf}\,\mathbb{R}_0^+\times\partial\Omega\ .$$

Dies ist eine Volterra–Integralgleichung, weil die Integrationsgrenzen über S_t von den freien

Variablen (t,x) abhängen, und zwar 2. Art, da die gesuchte Funktion μ innerhalb und außerhalb des Integrals auftritt.

Wie im elliptischen Fall versucht man, die IG iterativ zu lösen:

Startfunktion: $\mu_0(t,x)$,
Iteration: $\mu_{n+1} := -2f + 2a \cdot \int\limits_{S_t} \frac{\partial}{\partial \vec{n}_z} K \cdot \mu_n$.

Kann man zeigen, daß

1. $\{\mu_n\}$ stetige Funktionen auf $\overline{S_T}$ sind und

2. die Reihe $\mu_0 + \sum_{\mathbb{N}} [\mu_n - \mu_{n-1}]$ auf $\overline{S_T}$ gleichmäßig konvergiert,

dann ist $\mu := \lim \mu_n = \mu_0 + \sum_{\mathbb{N}} [\mu_n - \mu_{n-1}]$ eine stetige Lösung der Integralgleichung, und $u := a \cdot \int\limits_{S_t} \frac{\partial}{\partial \vec{n}_z} K \cdot \mu$ löst die DG und AB ohnehin, ferner die RB nach Konstruktion.

Somit löst u das gesamte Anfangs–/Randwertproblem.
Man beachte, daß korrekterweise die Sprungrelation nur dann verwendet werden darf, wenn $\partial\Omega$ die Voraussetzungen 1.,2. erfüllt, was daher ab jetzt stets angenommen wird.

zunächst:

Lemma 4.4.3. Ist $h \in C(\overline{S_T})$ mit $|h(t,x)| \leq M \cdot t^\alpha$, wobei $M \in \mathbb{R}^+, \alpha \in (-1;\infty)$, so folgt

$$\left| 2a \int\limits_{S_t} \frac{\partial}{\partial \vec{n}_z} K(a(t-\tau), x-z) h(\tau, z)\, ds_z\, d\tau \right| \leq L \cdot M \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+\frac{3}{2})} t^{\alpha+\frac{1}{2}}$$

mit L unabhängig von h!

Beweis. siehe einschlägige Literatur; ■

Ist nun $\mu_0 \in C(\overline{S_T})$,
dann liefert das Lemma mit $\alpha = 0$ aus der Iterationsvorschrift: $\mu_1 \in C(\overline{S_T})$;
ebenso $\forall n: \ \mu_n \in C(\overline{S_T})$, womit 1. erledigt ist.
Mit $M := \max_{\overline{S_T}} |\mu_1 - \mu_0|$ liefert das Lemma mit $\alpha = 0$ aus $\mu_2 - \mu_1 = 2a \int\limits_{S_t} \frac{\partial}{\partial \vec{n}_z} K \cdot (\mu_1 - \mu_0)$
die Abschätzung $|\mu_2 - \mu_1| \leq 2 \cdot L \cdot M \cdot t^{\frac{1}{2}}$ und daraus mit $\alpha = \frac{1}{2}$:

$$|\mu_3 - \mu_2| \leq L \cdot (2 \cdot L \cdot M) \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(2)} t = \frac{M \cdot (L \cdot \sqrt{\pi})^2}{\Gamma(2)} \cdot t,$$

und allgemein:

$$|\mu_{n+1} - \mu_n| \leq \frac{M \cdot (L \cdot \sqrt{\pi})^n}{\Gamma(\frac{1}{2}n+1)} t^{\frac{1}{2}n} \leq \frac{M \cdot (L \cdot \sqrt{\pi T})^n}{\Gamma(\frac{1}{2}n+1)}.$$

Der M–Test nach Weierstraß erbringt mit dem letzten Resultat die absolute, aber auch die gleichmäßige Konvergenz der Reihe in Punkt 2..

Und insgesamt ist u mit $\lim \mu_n$ tatsächlich eine Lösung des Anfangs–/Randwertproblems.

■

Satz 4.4.4. Für $f \in C(\overline{S_T})$ mit $f(0,x) = 0$ auf $\partial\Omega$ hat obiges Anfangs–/Randwertproblem genau eine Lösung $u \in C^{1,2}(Q_T) \cap C(\overline{Q_T})$.

Bemerkung. Dieser Satz läßt sich noch auf die Situation inhomogener Anfangsbedingungen und einer Differentialgleichung mit Quellterm $g(t,x)$ verallgemeinern.

Kapitel 5

Freie Randwertprobleme

5.1 Das Einphasen-Stefan-Problem

Das Einphasen-Stefan-Problem ist wohl das einfachste Beispiel eines freien Randwertproblems für die Wärmeleitungsgleichung. Wir betrachten dazu eine aus Eis bestehende Region, die bei $0^0 C$ an ein Wassergebiet grenzt. Der Definitionsbereich für die Wärmeleitungsgleichung ist lediglich die Wasserregion, weshalb von einem Einphasenproblem gesprochen wird. Führt man nun dem Wasser von außen beispielsweise Wärmeenergie zu, beginnt das angrenzende Eis zu schmelzen und die Front zwischen Eis und Wasser wandert in die mit Eis gefüllte Region. Die Bewegung des freien Randes wird also durch die Anfangs- und Randdaten für die Temperatur des Wasserbereichs sowie der Anfangskonstellation des freien Randes bestimmt. Mit Hilfe der physikalischen Eigenschaften der vorliegenden Situation werden wir eine Beziehung zwischen der Lösung der Gleichung und deren zeitabhängigem Definitionsbereich herstellen. Wir formulieren das Stefan-Problem in einer Raumdimension und bezeichnen mit $x = s(t)$, $0 < t \leq T$, die Position der Wasser-Eis-Front. Der Definitionsbereich für die Wärmeleitungsgleichung im Wasser ist dann

$$D_T = \{(x,t)|0 < x < s(t), 0 < t \leq T\}.$$

Falls $x > s(t)$ gilt, befinden wir uns im Eis und auf $x = s(t)$ hat die Temperatur $u(x,t)$ einen Wert von $0^0 C$, womit eine Randbedingung bereits festgelegt ist.

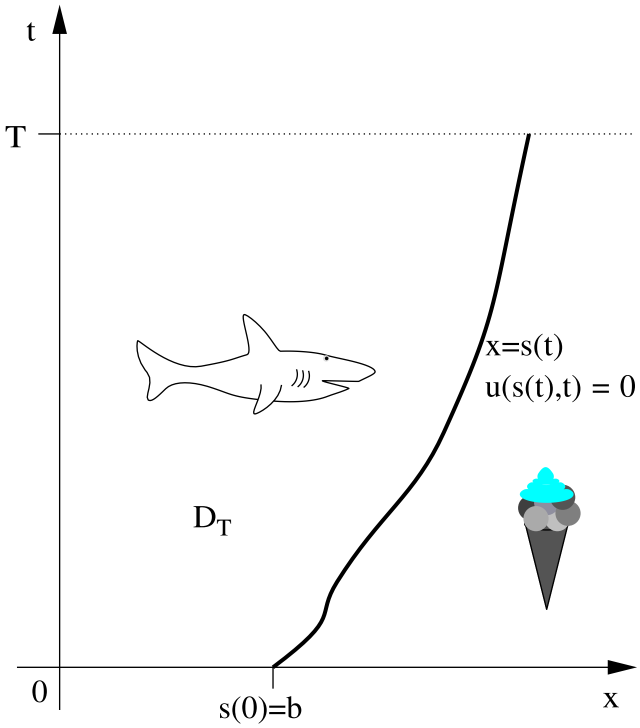


Abbildung 5.1

In D_T betrachten wir die einfache Form der Wärmeleitungsgleichung

$$u_t = u_{xx}$$

mit der Anfangsbedingung

$$u(x,0) = \varphi(x) \geq 0, \qquad 0 \leq x \leq b$$

und auf dem festen Rand, bei $x = 0$, nehmen wir an, daß eine Wärmemenge zufließt, also

$$-u_x(0,t) = h(t) > 0, \qquad 0 < t \leq T.$$

Um eine Bewegungsgleichung für den freien Rand $x = s(t)$ herzuleiten, verwenden wir das Fouriersche Gesetz. Wir haben also angenommen, daß das Eis bei $0^0 C$ beginnt. Um es zum Schmelzen zu bringen, muß die ganze an der Wasser-Eis-Front $x = s(t)$ ankommende Wärmeenergie genutzt werden. Die zeitliche Änderung von s ist proportional zur Energierate, d.h. also nach dem Fourierschen Gesetz

$$\alpha \dot{s}(t) = -k u_x(s(t),t),$$

wobei α das Produkt zwischen der Dichte des Eises und der latenten Wärme des Schmelzvorgangs ist, dagegen k die thermische Leitfähigkeit des Wassers beschreibt. Der Einfachheit halber setzen wir diese Konstanten gleich eins und haben in

$$D_T = \{(x,t) | 0 < x < s(t), 0 < t \leq T\}$$

folgendes Problem:

$$\begin{aligned}
&u_t = u_{xx}, \qquad 0 < x < s(t), \quad 0 < t \le T,\\
&-u_x(0,t) = h(t) > 0, \qquad 0 < t \le T,\\
&u(x,0) = \varphi(x) \ge 0, \qquad 0 \le x \le b = s(0),\\
&u(s(t),t) = 0, \qquad 0 < t \le T
\end{aligned} \tag{5.1}$$

$$\begin{aligned}
&\dot{s}(t) = -u_x(s(t),t), \qquad 0 < t \le T,\\
&s(0) = b.
\end{aligned} \tag{5.2}$$

Das Problem besteht nun darin, das Paar (u, s) zu bestimmen.

Definition 5.1.1. Das Paar (u, s) ist eine Lösung von (5.1) und (5.2), falls $s \in C^1(0,T) \cap C[0,T], s(0) = b$ sowie u eine Lösung der partiellen Differentialgleichung für dieses s ist und zusammen (5.2) erfüllen. Dabei ist es auch zulässig, daß die Randdaten h und φ nur stückweise stetig sind.

Es gilt zunächst:

Lemma 5.1.2. Die Bedingung

$$\dot{s}(t) = -u_x(s(t),t), \qquad 0 < t \le T,$$

kann ersetzt werden durch die äquivalente Integralbedingung

$$s(t) = b + \int_0^b \varphi(\xi)d\xi + \int_0^t h(\tau)d\tau - \int_0^{s(t)} u(\xi,t)d\xi, \qquad \text{für} \quad 0 < t \le T. \tag{5.3}$$

Beweis. Wir setzen $\mathcal{L}(u) = u_t - u_{xx} = 0$ und betrachten die Greensche Identität

$$\int_D \{v\mathcal{L}(u) - u\mathcal{M}(v)\}dxdt = \int_{\partial D} \{(vu_x - uv_x)dt - uvdx\},$$

mit $\mathcal{M}(v) = v_t + v_{xx}$. Setzen wir $v = -1$, dann ergibt sich

$$0 = \int_{\partial D} \{-u_x dt + udx\}.$$

Sei nun (u, s) ist eine Lösung von (5.1) und (5.2) sowie

$$D = D_\tau \cap \{(\xi,\tau) | 0 < \epsilon \le \tau \le t\},$$

dann folgt aus $\dot{s}(t) = -u_x(s(t), t), s(0) = b$,

$$0 = \int\limits_{\partial D} -u_x dt + \int\limits_{\partial D} u dx = -\int\limits_{\epsilon}^{t} h(\tau)d\tau + s(t) - s(\epsilon) - \int\limits_{0}^{s(\epsilon)} u(\xi, \epsilon)d\xi + \int\limits_{0}^{s(t)} u(\xi, t)d\xi.$$

Für $\epsilon \to 0$ ergibt sich die gewünschte Integraldarstellung.

Umgekehrt, falls also (u, s) Lösung von (5.1)und (5.3) ist, falls zudem u_x existiert und stetig ist auf $x = s(t)$, folgt aus der Integraldarstellung und der Greenschen Identität, daß

$$s(t) = b - \int\limits_{0}^{t} u_x(s(\tau), \tau)d\tau.$$

Differentiation nach t liefert die Behauptung. ∎

Bemerkung 5.1.3. Wir haben bisher verwendet, daß u_x existiert und stetig ist auf $x = s(t)$. Wir werden zeigen, daß $s(t)$ hölderstetig ist mit Hölder-Konstante $\frac{1}{2}$. Das bedeutet, u_x existiert auf s und ist stetig.

Beweis. Siehe J. R. Cammon, The One-Dimensional Heat Equation, Lemma 14.4.1.

Bemerkung 5.1.4. Da die Daten $h, \varphi, u(s(t), t) \geq 0$ sind, folgt unmittelbar nach dem Maximumprinzip, daß

$$u(x, t) \geq 0 \quad \text{in} \quad D_T$$

gilt.

Ebenso ergibt sich sofort aus dem starken Maximumprinzip

Bemerkung 5.1.5. Jede Lösung von (5.1) ist nichtnegativ. Außerdem gilt für jede Lösung von (5.1) und (5.2), daß

$$\dot{s}(t) = -u_x(s(t), t) \geq 0, \qquad 0 < t \leq T,$$

ist. Falls φ positiv ist und/oder $h(t)$ ist positiv in jeder Umgebung von $t = 0$, dann

$$\dot{s}(t) = -u_x(s(t), t) > 0, \qquad 0 < t \leq T.$$

5.2 Eindeutigkeit der Lösung

Wir kommen nun zur Eindeutigkeit der Lösung von (5.1) und (5.2). Um diese nachzuweisen, formulieren wir eine Aussage über die monotone Abhängigkeit des freien Randes von den Daten.

Lemma 5.2.1. Seien (u_1, s_1) und (u_2, s_2) Lösungen des Stefan-Problems (5.1) und (5.2) zu den jeweiligen Daten (b_1, φ_1, h_1) und (b_2, φ_2, h_2). Falls

$$b_1 < b_2 \quad (\text{bzw.} b_1 \leq b_2), \quad \varphi_1 \leq \varphi_2, \quad h_1 \leq h_2$$

gilt, dann

$$s_1 < s_2 \quad (s_1 \leq s_2).$$

Beweis. Wir zeigen zunächst, $s_1 < s_2$, falls $b_1 < b_2$ gilt. Wir nehmen das Gegenteil an, d.h. es existiert ein $t_0 > 0$ mit $s_1(t_0) = s_2(t_0)$ und somit

$$\dot{s}_1(t_0) \geq \dot{s}_2(t_0).$$

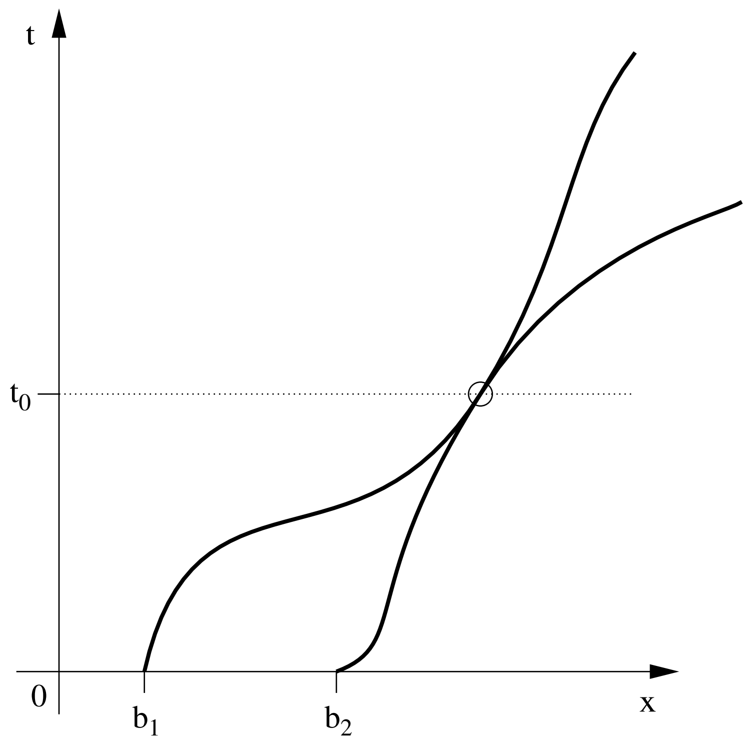


Abbildung 5.2

Ist nun o.B.d.A. h_2 oder $\varphi_2 \not\equiv 0$, dann folgt nach dem starken Maximumprinzip

$$u_2(s_1(t), t) > 0 \qquad \text{in} \qquad 0 < t \leq t_0.$$

Das bedeutet

$$u_2 - u_1 > 0 \qquad \text{in} \qquad 0 < x \leq s_1(t),$$

für $0 < t < t_0$, da $u_1(s_1(t), t) = 0$ gilt.

Da u_1 und u_2 bei $(s_1(t_0), t_0)$ verschwinden, folgt aus dem Lemma von Hopf, daß

$$\dot{s}_1(t_0) - \dot{s}_2(t_0) = u_{2_x}(s_1(t_0), t_0) - u_{1_x}(s_1(t_0), t_0) < 0.$$

Dies ist ein Widerspruch, also $s_1 < s_2$ in $0 < t \leq T$.

Um $s_1 \leq s_2$ für $b_1 \leq b_2$ zu beweisen, nehmen wir an, daß für ein $\delta > 0$ das Paar (u_2^δ, s_2^δ) eine Lösung von (5.1) und (5.2) ist, zu den Daten $(b_2 + \delta, \varphi_2, h_2)$, wobei φ_2 zu Null fortgesetzt wird außerhalb $0 \leq x \leq b_2$. Nach dem ersten Teil des Beweises gilt also

$$s_1 < s_2^\delta,$$

da $b_1 < b_2 + \delta$.

Die Lösungen (u_2, s_2) und (u_2^δ, s_2^δ) müssen aber beide die Integralbedingung (5.3) erfüllen.

Subtraktion der entsprechenden Bedingungen ergibt

$$s_2^\delta(t) - s_2(t) = \delta - \int_0^{s_2(t)} \{u_2^\delta(\xi, t) - u_2(\xi, t)\} d\xi - \int_{s_2(t)}^{s_2^\delta(t)} u_2^\delta(\xi, t) d\xi.$$

Nach dem Maximumprinzip gilt

$$u_2^\delta \geq 0 \qquad \text{und} \qquad u_2^\delta - u_2 \geq 0.$$

Somit

$$s_2^\delta(t) \leq s_2(t) + \delta$$

und

$$s_1(t) < s_2(t) + \delta.$$

Da aber $\delta > 0$ beliebig klein sein kann, folgt

$$s_1 \leq s_2 \qquad \text{für} \qquad b_1 \leq b_2.$$

■

Satz 5.2.2. (Eindeutigkeit). Das Stefan-Problem hat höchstens eine Lösung.

Beweis. Falls (u_1, s_1) und (u_2, s_2) Lösungen zu denselben Daten sind, folgt aus der Monotonie des Randes $s_1 \leq s_2$ und $s_1 \geq s_2$, also $s_1 = s_2$. Entsprechend ergibt sich $u_1 = u_2$.

■

5.3 Existenz einer Lösung

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit der Existenz einer Lösung für das Stefan-Problem (5.1) und (5.2). Wir verwenden dazu die sog. Retardationsmethode, die etwas später genauer erklärt wird.

Für das weitere stellen wir folgende Annahmen an die Daten:

Annahme A. Es ist h eine beschränkte, (stückweise) stetige nichtnegative Funktion. Ebenso ist φ eine (stückweise) stetige und nichtnegative Funktion mit der Eigenschaft

$$0 \leq \varphi(x) \leq N(b - x),$$

wobei $x \in [0, b]$ und $N > 0$.

Wir beweisen zunächst eine A-priori-Abschätzung einer möglichen Lösung u von (5.1) mit monoton steigendem Rand s.

Lemma 5.3.1. Sei u eine Lösung von (5.1) und der Rand s sei nichtfallend. Es gelte Annahme A, dann existiert eine Konstante $C = \max(M, N)$, mit $M = \sup_{0 \leq t \leq T} h(t)$ und N aus Annahme A, so daß

$$0 \leq \rho^{-1} u(s(t) - \rho, t) \leq C$$

für alle $0 \leq t \leq T$ und $0 < \rho < s(t)$.

Beweis. Da $\varphi, h \geq 0$ folgt aus dem Maximumprinzip, daß

$$u \geq 0.$$

Setze $C = \max(M, N)$ und definiere für jedes $t_0 \in [0, T]$ die Funktion

$$w(x) = C\{s(t_0) - x\}.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} w_t - w_{xx} &= 0, \\ -w_x(0) &= C \geq M \geq h, \\ w(x) &\geq C\{b - x\} \geq N\{b - x\} \geq \varphi, \\ w(s(t)) &= C\{s(t_0) - s(t)\} \geq 0, \end{aligned}$$

in $0 \leq t \leq t_0$. Nach dem Maximumprinzip gilt

$$u(x, t) \leq w(x), \qquad 0 \leq x \leq s(t), \quad 0 \leq t \leq t_0.$$

Somit

$$0 \leq \rho^{-1} u(s(t_0) - \rho, t_0) \leq \rho^{-1}(w(s(t_0) - \rho)) = \rho^{-1} C \rho = C.$$

■

Bemerkung 5.3.2. Falls nun $u_x(s(t), t)$ existiert, dann folgt aus der obigen Abschätzung

$$-C \leq u_x(s(t), t) \leq 0.$$

Denn

$$0 \leq \frac{u(s(t) - \rho, t) - u(s(t), t)}{\rho} = -\frac{u(s(t), t) - u(s(t) - \rho, t)}{\rho} \leq C.$$

Für $\rho \to 0$ ergibt sich die Behauptung.

Wir kommen nun zur Existenzaussage.

Satz 5.3.3. Es gelte Annahme A mit $b > 0$. Dann existiert eine eindeutige Lösung (u, s) für das Stefan-Problem (5.1) und (5.2). Zudem gilt für den freien Rand

$$0 \leq \dot{s}(t) \leq C,$$

wobei $C = \max(M, N)$.

Wir skizzieren zunächst die Vorgehensweise des Existenzbeweises und erläutern dann das Prinzip der Retardations(Verzögerungs)methode.

Für jedes τ, $0 < \tau < b$, konstruieren wir eine Familie von Approximationslösungen (u^τ, s^τ) für die Lösung von (5.1) und (5.2) durch

$$\begin{aligned} &\dot{s}^\tau(t) = -u_x^\tau(s^\tau(t-\tau), t-\tau), \quad t > \tau, \\ &s(t) = b, \quad 0 \leq t \leq \tau. \end{aligned}$$

Dies entspricht einer zeitlichen Verzögerung (Retardation) um den Parameter τ. Sei

$$\chi^\tau = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq b - \tau, \\ 0, & b - \tau < x \leq b, \end{cases}$$

und $\varphi^\tau = \chi^\tau \varphi$.

Im ersten Intervall $0 \leq t \leq \tau$ setzen wir also

$$s^\tau(t) \equiv b$$

und definieren u^τ als die eindeutige Lösung des entsprechenden Stefan-Problems in

$$0 \leq x \leq s^\tau(t), \qquad 0 \leq t \leq \tau.$$

Es ist klar, daß $u^\tau(b, t)$ existiert und stetig ist für $0 \leq t \leq \tau$. Zudem gilt in diesem Zeitintervall

$$0 \leq -u_x^\tau(b, t) \leq C.$$

Wir gehen also induktiv vor, wie es in Abbildung **??** veranschaulicht ist, indem wir annehmen, daß in

$$0 \leq t \leq n\tau$$

die Lösung (u^τ, s^τ) bereits konstruiert ist, $s^\tau \in C^1[0, n\tau]$ (speziell also lipschitzstetig ist) und u_x^τ die entsprechenden Bedingungen erfüllt. Ebenso gelte

$$s^\tau(t) = b - \int_\tau^t u_x^\tau(s^\tau(\eta - \tau), \eta - \tau) d\eta.$$

In

$$n\tau \leq t \leq (n+1)\tau$$

ist $s^\tau(t)$ durch (5.3) definiert und löst in diesem Intervall (5.1).

Fahren wir so fort, können wir im ganzen Intervall $[0, T]$ eine Approximation konstruieren.

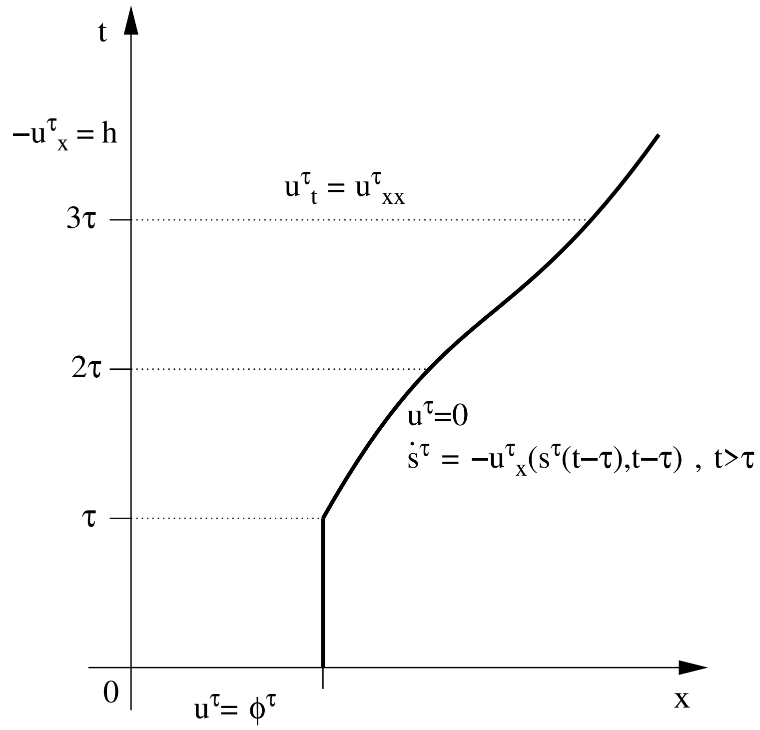


Abbildung 5.3

Wir sind nun in der Lage mit Hilfe von Approximationslösungen, wie sie eben hergeleitet wurden, Satz 5.3.3 zu beweisen.

Beweis. Wir verwenden also das Retardationsargument, um eine Familie von Approximationslösungen (u^τ, s^τ), $0 < \tau < \tau_0$, zu bekommen, wobei

$$\begin{aligned} &\dot{s}^\tau(t) = -u^\tau_x(s^\tau(t-\tau), t-\tau), \qquad t > \tau, \\ &s^\tau(t) = b, \qquad 0 \le t \le \tau. \end{aligned}$$

Es gilt

$$0 \le \dot{s}^\tau(t) \le C, \qquad 0 < t < \tau$$

und aus der Integraldarstellung (5.3) auch

$$b \le s^\tau(t) \le b + CT.$$

Die Familie ist demnach gleichgradig stetig und gleichmäßig beschränkt. Aus dem Satz von Arcela-Ascoli folgt, daß eine Teilfolge $\{s^{\tau_i}\}$ existiert mit

$$s^{\tau_i} \to s \text{ gleichmäßig für } \tau^i \to 0 \text{ in } 0 \le t \le T.$$

Sei u die zu diesem s gehörige Lösung von (5.1).

Setze
$$\alpha^\tau(t) = \min(s^\tau(t), s(t))$$
und betrachte
$$w = u^\tau - u.$$
Nach Lemma 5.3.1 gilt auf $x = \alpha^\tau(t)$
$$|w(\alpha^\tau(t))| \leq C|s^\tau(t) - s(t)|,$$
sowie
$$\begin{aligned} w(x,0) &= 0 \qquad \text{in } 0 \leq x \leq b - \tau, \\ |w(x,0)| &\leq C\tau \qquad \text{in } b - \tau \leq x \leq b, \end{aligned}$$
nach Annahme A.

Auf $x = 0$ gilt
$$w_x(0,t) = 0.$$
Also gilt nach dem Maximumprinzip
$$C\|s^\tau - s\|_{[0,T]} + C\tau \pm w(x,t) \geq 0,$$
wobei $\|s^\tau - s\|_{[0,T]} := \sup_{0\leq t\leq T} |s^\tau(t) - s(t)|$.

Somit
$$|u^\tau(x,t) - u(x,t)| \leq C\{\|s^\tau - s\|_{[0,T]} + \tau\}.$$
Eine ähnliche Abschätzung für w gilt auch in $\alpha^\tau(t) \leq x \leq \beta^\tau(t),\ 0 \leq t \leq T$, wobei
$$\beta^\tau(t) = \max(s^\tau(t), s(t)).$$
Damit folgt aus der gleichmäßigen Konvergenz von s^τ nach s auch die gleichmäßige Konvergenz von u^τ nach u für $\tau \to 0$.

Wir verwenden nun die Integralidentität (5.3) auf u^τ an, d.h.
$$-\int_0^t u_x^\tau(s^\tau(\eta),\eta)d\eta = \int_0^{b-\tau} \varphi(\xi)d\xi + \int_0^t h(\eta)d\eta - \int_0^{s^\tau(t)} u^\tau(\xi,t)d\xi$$
bzw.
$$s^\tau(t+\tau) = b + \int_0^{b-\tau} \varphi(\xi)d\xi + \int_0^t h(\eta)d\eta - \int_0^{s^\tau(t)} u^\tau(\xi,t)d\xi.$$
Für $\tau \to 0$ erfüllt auch (u,s) diese Bedingung. Da s lipschitzstetig ist, mit Lipschitz-Konstante C, und $0 \leq \varphi \leq N(b-x)$, folgt nach Bemerkung 5.1.3, daß $u_x(s(t),t)$ existiert und stetig ist. Aus Lemma 5.1.2 und Satz 5.2.2 folgt die Behauptung. ■

Bisher hatten wir $b > 0$ angenommen. Beginnt dagegen der freie Rand im Ursprung, also $b = 0$, dann erübrigt sich die Anfangsbedingung φ und es gilt

Lemma 5.3.4. Sei $b = 0$ und gelte Annahme A, wobei die Bedingung an φ irrelevant ist.

Dann besitzt das entsprechende Stefan-Problem (5.1) und (5.2) eine eindeutig bestimmte Lösung (u, s). Ferner gilt die Abschätzung

$$0 \leq \dot{s}(t) \leq C,$$

wobei $C = \sup_{0 \leq t \leq r} h(t)$.

Beweis. Sei (u^b, s^b) eine Lösung zu den Daten $(b, \varphi = 0, h)$, $b > 0$. Betrachte

$$\lim_{b \to 0} (u^b, s^b)$$

und verwende Satz 5.3.3 sowie den Satz von Arcela-Ascoli. ■

Folgerung. Wir können somit die Bedingung $0 \leq \varphi(x) \leq N(b - x)$ aus Annahme A vergessen und aus den Sätzen 5.3.3 und 5.3.4 schließen, daß für $b \geq 0$ das Stefan-Problem eine Lösung hat, falls φ lediglich beschränkt, (stückweise) stetig und nichtnegativ ist.

Man könnte nun das asymptotische Verhalten des freien Randes für $t \to \infty$ studieren, sowie die stetige Abhängigkeit des freien Randes von den gegebenen Daten des Stefan-Problems. Dazu verweisen wir jedoch auf das Buch von J. R. Cannon, The One-Dimensional Heat Equation.