Skript zu den Vorlesungen Partielle Differentialgleichungen 1 und 2

Herbert Koch

20. April 2004

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einführung

Partielle Differentialgleichungen sind Gleichungen, die partielle Ableitungen von gesuchten Funktionen enthalten. Die Theorie der partiellen Differentialgleichungen untersucht Konsequenzen aus der Information, daß Funktionen PDG's genügen. Die Einleitung soll eine Übersicht über einige PDGs und zu studierende Fragen geben.

1.1 Was ist eine PDG?

Eine möglicherweise vektorwertige Gleichung der Form

$$F(D^k u(x), D^{k-1}u(x), \ldots, Du(x), u(x), x) = 0, \qquad x \in D \subset \mathbb{R}^n \tag{1.1}$$

heißt partielle Differentialgleichung der Ordnung k, wobei F gegeben ist und u die gesuchte (möglicherweise vektorwertige) Funktion ist. Hierbei bezeichnet $D^k u$ den Vektor aller k-ten partiellen Ableitungen. Die Funktion u heißt Lösung, falls sie k mal stetig differenzierbar ist und der Gleichung (1.1) genügt.

Genauer: $u : D \to \mathbb{R}^N$ sei k-mal stetig differenzierbar,

$$F : U \to \mathbb{R}^m, \qquad U \subset \mathbb{R}^{Nn^k} \times \mathbb{R}^{Nn^{k-1}} \cdots \times D.$$

Da höhere Ableitungen nach dem Satz von Schwartz symmetrisch sind, genügt es, F auf *symmetrischen* Werten zu betrachten.

1.2 Beispiele

1. Die Laplacegleichung

$$-\Delta u = -\sum_{i=1}^{n} \partial^2_{x_i x_i} u = 0, \qquad x \in D \subset \mathbb{R}^n$$

Funktionen heißen harmonisch, wenn sie der Laplacegleichung genügen. Das wichtigste Problem ist das Randwertproblem

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 \qquad && \text{in} \quad D \subset \mathbb{R}^n \\ u &= g, && \text{auf} \quad \partial D \end{aligned}$$

wobei g eine gegebene Funktion ist. Die Funktionen

$$\cos x_2 e^{x_1}, 1, x_i, x_1^2 - x_2^2$$

sind harmonisch. Ist $u(x) = f(|x|)$ harmonisch, so genügt f der DGL

$$f'' + \frac{n-1}{t} f' = 0$$

Diese Gleichung hat ein Fundamentalsystem

$$1, \quad r^{2-n}$$

falls $n \geq 3$ und

$$1, \ln r$$

falls $n = 2$.

2. Die Helmholtzgleichung. Hier ist $\lambda \in \mathbb{R}$ gegeben und wir betrachten

$$-\Delta u - \lambda u = 0 \qquad \text{in } D \subset \mathbb{R}^n.$$

Die Funktion $u = e^{\sqrt{\lambda} x_1}$ ist eine Lösung falls $\lambda \geq 0$. Ist $\lambda < 0$ muß $\sqrt{\lambda} = i\sqrt{|\lambda|}$ verwendet werden. Ist $\lambda = -1$ und $n = 3$ so ist

$$u(x) = |x|^{-1} e^{-|x|}$$

eine Lösung in $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$.

3. Die Transportgleichung. Das stetig differenzierbare Vektorfeld $b(x) = (b_i(x))_{1 \leq i \leq n}$ sei gegeben.

$$\partial_t u - \sum_{i=1}^n b_i(x) \partial_{x_i} u = 0 \qquad (t, x) \in D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$$

Sei $u \in C^1(D)$ eine Lösungen. Ist $x(t)$ eine Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$\dot{x}_i = b_i(x) \qquad 1 \leq i \leq n$$

so folgt

$$\frac{d}{dt} u(t, x(t)) = 0.$$

4. Die Liouvillegleichung. Hier ist b wie oben. Wir betrachten

$$u_t - \sum_{i=1}^{n} \partial_{x_i}(b_i u) = 0 \qquad (t,x) \in D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$$

Die Transportgleichungen und die Liouvillegleichung sind sehr ähnlich.

5. Die Wärmeleitungsgleichung.

$$u_t - \Delta u = 0 \qquad (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$$

Eine Lösung ist

$$u(x,t) = \frac{1}{2n}|x|^2 + t$$

sowie für $t > 0$,

$$u(t,x) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}.$$

Die Funktionen $j_\varepsilon(x) = u(\varepsilon^2, x)$ bilden eine Diracschar. Daher ist für jede integrierbare Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ die Funktion

$$u(t,x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} g(y) dy.$$

eine Lösung für $t > 0$, die für $t \to 0$ gegen f konvergiert.

6. Die Schrödingergleichung

$$i\partial_t u + \Delta u = 0 \qquad (t,x)\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n+1}$$

wobei u komplexe Werte annimmt. Lösungen sind

$$u(x,t) = \frac{1}{2n}|x|^2 + it$$

und

$$\frac{1}{(4\pi i t)^{n/2}} e^{i\frac{|x|^2}{4t}}$$

wobei eine geeignete komplexe Wurzel gewählt wird sowie

$$\frac{1}{(4\pi(1+it))^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4+4it}}.$$

7. Die Kolmogorovgleichung beschreibt Erwartungswerte stochastischer Prozesse wie z. B. Werte von Aktien.

$$\frac{\partial}{\partial t} u - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t,x)\partial^2_{x_i x_j} u - \sum_{i=1}^{n} b_i(t,x)\partial_{x_i} u = 0 \qquad (t,x) \in D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$$

wobei a_{ij} und b_i gegebene stetige Funktionen sind und wir annehmen, daß $(a_{ij}(x))$ in jedem Punkt positiv definit ist.

8. Die Fokker-Planckgleichung

$$\partial_t u - \sum_{i,j=1}^{n} \partial^2_{x_i x_j}(a_{ij}(t,x)u) - \sum_{i=1}^{n} \partial_{x_i}(b_i(t,x)u),$$

wobei die a_{ij} und b_i die Eigenschaften wie oben besitzen (möglicherweise zweimal stetig differenzierbar). Die Beziehung zwischen der Fokker-Planckgleichung und der Kolmogorovgleichung ist analog zur Beziehung zwischen der Transportgleichung und der Liouvillegleichung.

9. Die Wellengleichung

$$\partial^2_{tt} u - \Delta u = 0 \qquad (t,x) \in D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n.$$

Lösungen sind

$$x_1^2 - x_2^2, \qquad u(t,x) = f(x_1 - t)$$

wobei f eine beliebige Funktion ist.

10. Die allgemeine Wellengleichung

$$\partial^2_{tt} u - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t,x)\partial^2_{x_i x_j} u + \sum_{i=1}^{n} \partial_{x_i} u = 0 \qquad (t,x) \in D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$$

wobei a_{ij} und b_i gegebene stetige Funktionen sind. Wir nehmen wieder an, daß die Matrizen $(a_{ij}(x))$ überall positiv definit sind.

11. Die Airysche Differentialgleichung

$$u_t + u_{xxx} = 0, \qquad (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

Sie beschreibt die Ausbreitung von bestimmten Wellen auf Oberflächen.

12. Die Balkengleichung

$$u_{tt} + u_{xxxx} = 0 \qquad (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

Ist $u(t,x)$ eine Lösung, die schnell genug für große x fällt, so gilt

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{2}\left(\int u_t^2(t,x) + u_{xx}^2(t,x)\,dx\right) = 0.$$

Diese Gleichungen sind linear, d.h. mit u und v sind auch $u+\lambda v$ Lösungen, $\lambda \in \mathbb{K}$, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Die linke Seite ist ein sogenannter linearer Differentialoperator der Form

$$Lu(x) = \sum_{|\alpha| \le k} a_\alpha(x)\partial^\alpha u(x)$$

mit gegenen Funktionen a_α. Hier ist α eine Multiindex, d.h. ein n-Tupel nichtnegativer ganzer Zahlen und

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 \dots \alpha_n$$

$$\alpha! = \alpha_1!\alpha_2! \dots \alpha_n!$$
$$\partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_n^{\alpha_n}$$
$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$$

Eine PDG heißt *linear*, falls sie sich in der Form

$$Lu(x) = f(x)$$

schreiben läßt.

13. Die Eikonalgleichung.

$$|\nabla u| = 1, \qquad x \in D \subset \mathbb{R}^n$$

wobei

$$\nabla u = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} u \\ \vdots \\ \partial_{x_n} u \end{pmatrix} = Du^T$$

Lösungen sind

$$u(x) = |x| \qquad D = \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$$

und allgemeiner, falls $S \subset \mathbb{R}^n$ eine Mannigfaltigkeit ist, so ist $u(x) = d(x, S)$ eine Lösung der Eikonalgleichung in einer Umgebung auf einer Seite von S.

14. Die nichtlineare Poissongleichung. Hier ist f eine gegebene Funktion und wir betrachten

$$-\Delta u = f(u)$$

15. Die Minimalflächengleichung. Wird eine offene Seifenhaut lokal durch den Graphen der Funktion u beschrieben, so genügt u der Gleichung

$$\nabla \cdot \left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}}\right) = \sum_{i=1}^n \partial_{x_i} \frac{\partial_{x_i} u}{\sqrt{1 + \sum_{j=1}^n (\partial_{x_j} u)^2}}.$$

16. Die Monge-Amperegleichung

$$\det(D^2 u(x)) = f(x)$$

17. Hamilton-Jacobigleichung. Hier ist $H(p, x)$ eine gegebene Hamiltonfunktion.

$$u_t(t, x) + H(\nabla_x u(t, x), x) = 0$$

18. Die skalare Erhaltungsgleichung. Hier ist $F : D \to \mathbb{R}^n$, $D \subset \mathbb{R}$ eine gegebene Funktion und

$$u_t + \nabla \cdot F(u) = \partial_t u + \sum_{i=1}^{n} F_i(u) = 0.$$

Ein konkretes Beispiel ist Burgers Gleichung

$$u_t + u\partial_x u = 0 \qquad (t, x) \in D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

Sei $u(t, x)$ eine Lösung und y eine Lösung von

$$\dot{y} = u(t, y).$$

Dann ist

$$\frac{d}{dt} u(t, y(t)) = u_t(t, y(t)) + \dot{y}u(t, y(t)) = (u_t + uu_x)(t, y(t)) = 0$$

und die Lösung ist konstant auf der Kurve $(t, y(t))$. Dann ist diese Kurve aber eine Gerade.

19. Reaktions-Diffusionsgleichungen. Hier ist f eine gegebene Funktion.

$$u_t - \Delta u = f(u).$$

20. Die poröse Mediengleichung. Sei $1 \leq \gamma$ und

$$u_t - \Delta u^\gamma = 0$$

Diese Gleichung beschreibt die Ausbreitung eines idealen Gases in einem porösen Medium wie Sand.

21. Die nichtlineare Wellengleichung

$$\partial_{tt}^2 u - \Delta u = f(u)$$

$$\partial_{tt}^2 u - \nabla \cdot a(\nabla u) = 0$$

wobei f und $a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ gegebene Funktionen sind.

22. Die Korteweg-de-Vries Gleichung

$$\partial_t u + u\partial_x u + \partial_{xxx}^3 u = 0 \qquad (t, x) \in \mathbb{R}.$$

Diese Gleichung kombiniert Burgers Gleichung und die Airygleichung. Sie beschreibt die Ausbreitung von Oberflächenwellen genauer als die beiden anderen Gleichungen.

Die bisherigen Gleichungen sind skalar.

23. Lineare Elastizität. Sien $\mu > 0$ und $\lambda > 0$. Wir betrachten

$$\mu\Delta u + (\lambda + \mu)\nabla \cdot \nabla u = 0, \qquad D \subset \mathbb{R}^n$$

wobei $u : D \to \mathbb{R}^n$, $(\Delta u)_j = \Delta u_j$.

24. Elastische Wellen

$$\partial_{tt}^2 u - \mu\Delta u - (\lambda + \mu)\nabla \cdot \nabla u = 0, \qquad D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$$

25. Die Maxwellgleichungen. Gesucht sind das elektrische Feld E und das Magnetfeld B im Vakuum. Beide sind Funktionen von t und x und sie haben jeweils drei Komponenten.

$$E_t = \nabla \times B, \quad B_t = -\nabla \times E$$

$$\nabla \cdot B = \nabla \cdot E = 0$$

Jede Komponente einer Lösung der Maxwellgleichung genügt der Wellengleichung.

26. Die Cauchy-Riemanngleichungen: $z = x + iy$,

$$(u, v) : D \to \mathbb{R}^2, \qquad D \subset \mathbb{R}^2$$

$$\partial_x u = \partial_y v \qquad \partial_y u = -\partial_x v$$

heißt Cauchy-Riemannsche Differentialgleichung. Die Lösungen sind holomorphe Funktionen. Jede Komponente einer Lösung genügt der Laplacegleichung.

27. Die Lewygleichung.

$$-u_x - iu_y + 2i(x + iy)u_z = f(x, y, z), \qquad (x, y, z) \in D \subset \mathbb{R}^3$$

wobei f gegeben ist. Für die meisten f hat diese Gleichung keine Lösung.

28. Die Eulergleichungen für inkompressible reibungsfreie Flüssigkeiten. Sei $D \subset \mathbb{R}^3$ offen, $u : \mathbb{R} \times D \to \mathbb{R}^3$ das Geschwindigkeitsfeld einer Strömung und $p : \mathbb{R} \times D \to \mathbb{R}$ der Druck.

$$u_t + \sum_{i=1}^n u_i \partial_{x_i} u + \nabla p = 0$$

$$\nabla \cdot u = 0.$$

29. Die Navier-Stokesgleichungen für inkompressible viskose Strömungen.

$$u_t + \sum_{i=1}^n u_i \partial_{x_i} u - \Delta u + \nabla p = 0$$

$$\nabla \cdot u = 0.$$

Eine PDG heißt quasilinear, wenn sie linear in den höchsten Ableitungen ist und semilinear, falls die Koeffizienten der höchsten Ableitungen nicht von der Lösung abhängen.

In der Vorlesung werden zunächst Transportgleichungen, der Laplaceoperator, die Wärmeleitungsgleichung und die Wellengleichung betrachtet.

1.3 Motivation: Wie kommt man auf PDGs?

Viele PDGs sind durch Probleme der Natur-, Ingenieur-, Wirtschaftswissenschaften oder anderer Gebiete der Mathematik motiviert. Die Eigenschaften harmonischer Funktionen (d.h. von Funktionen, die der Laplacegleichung genügen) hängen nicht davon ab, ob sie ein elektrisches Potential oder den Realteil einer harmonischen Funktion oder ein Gleichgewicht in der Finanzmathematik beschreiben.

Beispiele für die Herleitung von PDGs sind:

1. Die Kontinuitätsgleichung
$$\rho_t + \nabla \cdot (\rho u) = 0 \tag{1.2}$$
2. Ein elektrostatisches Potential minimiert die elektrische Energie.
3. Stochastische Prozesse.
4. Differentialgeometrie. Vorgeschriebene Gaußsche Krümmung.

1.4 Fragen, die in der Vorlesung behandelt werden

1. Konstruktion von Lösungen / spezielle Lösungen
2. Existenz/Nichtexistenz/ Eindeutigkeit
3. Regularität
4. Beobachtbarkeit
5. Kontrolltheorie
6. Qualitative Eigenschaften
7. Approximation von Lösungen

Dabei werden wir den Begriffe der Ableitung und der Limiten von Funktionen neu überdecken, da es oft von Vorteil ist, den Begriff der Lösung abzuschwächen.

Kapitel 2

Grundbegriffe

2.1 Metrische und normierte Räume

Definition 2.1 *Ein metrischer Raum* (X, d) *besteht aus einer Menge* X *und einer Abbildung* $d : X \times X \to \mathbb{R}$*, die folgende Eigenschaften hat:*

1. $d(x, y) \geq 0$*, wobei* $d(x, y)$ *genau dann Null ist, wenn* $x = y$*.*
2. $d(x, y) = d(y, x)$ *(Symmetrie)*
3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ *(Dreiecksungleichung)*

Die Begriffe Cauchyfolge, Limes, konvergente Folge, offene und abgeschlossene Menge, Rand, Abschluss und Inneres werden wie in $\mathbb{R}$ definiert. Wir bezeichnen die Kugel um x mit Radius r mit $B_r(x)$ und den Rand mit $\partial B_r(x)$.

Definition 2.2 *Der metrische Raum* (X, d) *heißt vollständig, wenn jede Cauchyfolge konvergiert. Eine Teilmenge* A *heißt dicht, falls der Abschluß gleich* X *ist. Der metrische Raum* (X, d) *heißt separabel, falls eine abzählbare und dichte Teilmenge existiert.*

Wichtige Beispiele sind normierte Vektorräume. d.h. Vektorräume V mit einer Abbildung $\|.\| : V \to \mathbb{R}$, mit den Eigenschaften

1. $\|v\| \geq 0$ und $\|v\| = 0$ genau dann wenn $v = 0$.
2. $\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$, $\lambda \in \mathbb{K}$, $v \in V$.
3. $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$

wobei die Metrik durch $d(f, g) = \|f - g\|$ definiert wird. Sind V und W normierte Vektorräume, so gilt dies auch für den Raum der stetigen linearen Abbildung $L(V, W)$ mit der Norm von $T \in L(V, W)$

$$\|T\|_{L(V,W)} = \sup_{\|v\|_V \leq 1} \|Tv\|_W.$$

Ein Banachraum ist ein vollständiger normierter Vektorraum. Ist V ein normierter Vektorraum und W ein Banachraum, so ist auch $L(V,W)$ ein Banachraum. Der wichtigste Spezialfall ist der Dualraum eines Banachraumes X, $X^* = L(X, \mathbb{K})$.

Sei (X,d) ein metrischer Raum und $A \subset X$. Eine Überdeckung ist eine Teilmenge V der Potenzmenge bestehend aus offenen Mengen mit

$$A \subset \bigcup_{U \in V} U.$$

Definition 2.3 *Die Menge A ist kompakt, falls jede Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung besitzt.*

Satz 2.4 *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

1. *A ist kompakt.*
2. *A ist folgenkompakt, d.h. jede Folge mit Werten in A besitzt eine konvergente Teilfolge.*
3. *A ist abgeschlossen und präkompakt, d.h. für $\varepsilon > 0$ existiert eine endliche Menge von ε Kugeln, die A überdecken.*

Im $\mathbb{R}^n$ sind einfachere Charakterisierungen kompakter Mengen möglich. Dies besagt der Satz von Heine-Borel.

Satz 2.5 *Eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann kompakt, wenn sie beschränkt und abgeschlossen ist.*

2.2 Funktionenräume stetiger Funktionen

Sei (X,d) ein metrischer Raum. Wir bezeichen die stetigen Funktionen auf X mit $C(X)$ (bzw $C(X,Y)$, falls die Abbildungen in den metrischen Raum Y gehen) und den Raum der stetigen beschränkten Funktionen mit Werten in $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ mit $C_b(X)$. Dieser Raum trägt die Supremumsnorm, die ihn zu einem Banachraum macht.

Wir sagen, eine Funktion $f : X \to Y$ ist Hölderstetig mit Exponent $s \in (0,1]$, falls $C > 0$ existiert mit

$$d_Y(f(x), f(y)) \le C(d_X(x,y))^s \qquad \text{für alle } x, y \text{ mit } d(x,y) \le 1$$

Der Raum $C^s(X)$ der hölderstetigen Funktionen $f : X \to \mathbb{R}$ ist der Untervektorraum von $C_b(X)$ der Funktionen, die hölderstetig mit Exponent s sind. Wir versehen diesen Raum mit der Norm

$$\|f\|_{C^s} = \max\left\{ \|f\|_{sup}, \sup_{0<d(x,y)\le 1} \frac{|f(x)-f(y)|}{d_X(x,y)^s} \right\}$$

Theorem 2.6 *Der Raum C^s ist ein Banachraum.*

Im Fall $s = 1$ schreiben wir in der Regel $C^{0,1}(X)$.

Der Satz von Arzela-Ascoli charakterisiert kompakte Teilmengen in $C_b(X)$, falls X ein kompakter metrischer Raum ist.

Satz 2.7 *Es seien (X, d) ein kompakter metrischer Raum und $A \subset C_b(X)$. Die Menge A ist genau dann kompakt, wenn die Funktionswerte*

$$\{f(x)|f \in A, x \in X\}$$

beschränkt sind und die Funktionen gleichstetig sind, d.h. wenn für $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert mit

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon \qquad \text{falls } d(x, y) < \delta \text{ und } f \in A.$$

Im Folgenden sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen. Der Raum $C^k(D)$ der k mal stetig differenzierbaren Funktionen ist ein Vektorraum. Wir versehen den Untervektorraum $C^k_b(D)$ der Funktionen mit beschränkten Ableitungen mit der Norm

$$\|f\|_{C^k_b(D)} = \max_{|\alpha|\le k} \|\partial^\alpha f\|_{sup}.$$

Sei $0 < s \le 1$. Wir versehen den Untervektorraum $C^{k,s}(D) \subset C^k_b(D)$ der Funktionen mit hölderstetigen Ableitungen mit der Norm

$$\|f\|_{C^{k,s}} = \max_{|\alpha|\le k} \|\partial^\alpha f\|_{C^s}$$

Sei $f : D \to \mathbb{K}$, $\mathbb{K} = \mathbb{C}, \mathbb{R}$. Der Träger von f ist durch

$$\text{supp } f = \overline{\{x : f(x) \neq 0\}} \cap D.$$

definiert. Wir sagen, f hat kompakten Träger, falls der Träger kompakt ist. Wir bezeichnen den Raum der stetigen Funktionen mit kompaktem Träger mit $C_0(D)$ und analog $C^k_0(D)$, $C^s_0(D)$ und $C^{k,s}_0(D)$. Der Raum der beliebig oft differenzierbaren Funktionen ist $C^\infty(D)$ und der Raum der Testfunktionen ist $C^\infty_0(D)$.

2.2.1 Zerlegung der Eins

Kommt später.

2.3 Maß und Integration

Wir beginnen mit dem Begriff der σ Algebra.

Definition 2.8 *Es sei X eine Menge. Eine Teilmenge $\mathcal{A}$ der Potenzmenge heißt σ Algebra, falls*

1. *Die leere Menge* $\{\}$ *liegt in* $\mathcal{A}$.

2. *Mit* $A \in \mathcal{A}$ *ist auch* $X \backslash A \in \mathcal{A}$.

3. *Mit* $A_i \in \mathcal{A}$, $i \in \mathbb{N}$ *ist auch*

$$\bigcup_i A_i \in \mathcal{A}.$$

Beispiele sind $\{\{\}, X\}$, die Potenzmenge, und, für einen topologischen Raum, die Borelsche σ-Algebra der Borelmengen, die von den offenen Mengen erzeugt wird.

Definition 2.9 *Es sei* $\mathcal{A}$ *eine* σ *Algebra auf* X. *Eine Maß* μ *ist eine Abbildung von* $\mathcal{A}$ *nach* $[0, \infty) \cup \{\infty\}$ *mit den Eigenschaften*

1. $\mu(\{\}) = 0$.

2. *Aus* $A, B \in \mathcal{A}$, $A \subset B$ *folgt* $\mu(A) \leq \mu(B)$.

3. *Aus* $A_i \in \mathcal{A}$, $i \in \mathbb{N}$ *paarweise disjunkt folgt*

$$\mu\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

mit den offensichtlichen Rechenregeln für unendlich. Das Tripel (X, A, μ) *heißt Maßraum.*

Als nächstes betrachten wir meßbare Funktionen und Integrale.

Definition 2.10 *Sei* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *ein Maßraum. Eine Funktion* $f : X \to \mathbb{R} \bigcup \{-\infty, \infty\}$ *heißt meßbar, falls für alle* $t \in \mathbb{R}$

$$\{x \in X | f(x) > t\} \in \mathcal{A}$$

Die Funktion

$$\phi_f(t) = \mu(\{x \in X | f(x) > t\})$$

heißt Verteilungsfunktion.

Definition 2.11 *Es seien* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *ein Maßraum und* f $\mathcal{A}$ *meßbar.*

1. *Ist* f *nichtnegativ, so definieren wir das Integral durch*

$$\int f d\mu = \int_0^{\infty} \phi_f(t) dt$$

2. *Die Funktion f heißt integrierbar, falls das Integral über $|f|$ endlich ist. In diesem Fall wird das Integral durch*

$$\int f d\mu = \int \max\{f, 0\} d\mu - \int \max\{-f, 0\} d\mu$$

definiert. Dieses Integral ist auch dann eindeutig bestimmt, wenn nur einer der beiden Summanden endlich ist.

Wir benutzen die Notation

$$f_+ = \max\{f, 0\}, \qquad f_- = \max\{-f, 0\} \tag{2.1}$$

Wir sagen, eine Eigenschaft gilt fast überall, falls eine Nullmenge N existiert (d.h. $\mu(N) = 0$), so daß die Eigenschaft für alle $x \in X \backslash N$ gilt.

Es gelten der Konvergenzsatz von Lebesgue

Theorem 2.12 *Es sei f_n eine Folge integrierbarer Funktionen, h sei nichtnegativ und integrierbar,*

$$|f_n(x)| \leq h(x) \qquad \textit{für fast alle } x \tag{2.2}$$

und der Grenzwert

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x)$$

existiere für fast alle x. Dann gilt

$$\int f_n d\mu \to \int f d\mu \tag{2.3}$$

und der Satz von der monotonen Konvergenz von Beppo Levi

Theorem 2.13 *Es sei f_n eine Folge integrierbarer Funktionen, für fast alle x konvergiere*

$$f_n(x) \to f(x)$$

monoton. Dann gilt

$$\lim_{n \to \infty} \int f_n d\mu = \int f d\mu$$

und das Lemma von Fatou

Theorem 2.14 *Es seien f_n nichtnegative meßbare Funktionen. Es gilt*

$$\liminf_{n \to \infty} \int f_n d\mu \geq \int \liminf_{n \to \infty} f_n d\mu \tag{2.4}$$

Beispiele für Maße:

1. Das Zählmaß, das jeder Teilmenge die Anzahl der Elemente zuordnet, ist ein Maß auf der Potenzmenge.

2. Das Lebesguemaß λ^n ist ein Maß auf der σ-Algebra der Lebesguemengen des $\mathbb{R}^n$, das durch

   (a) $\lambda^n([0,1)^n) = 1$

   (b) Das Lebesguemaß ist translationsinvariant.

   zunächst auf den Borelmengen eindeutig definiert ist. Man erhält die Lebesguemengen, in dem man Mengen nur bis auf Nullmengen unterscheidet.

3. Das Hausdorffmaß. Sei $m \in [0,n]$. Das m dimensionale Hausdorffmaß $\mathcal{H}^m$ ist ein äußeres Maß auf $\mathbb{R}^n$ (hier nicht erklärt) mit folgenden Eigenschaften:

   (a) Jede Borelmenge ist meßbar.

   (b) Ist A eine Menge und T eine (n,n) Matrix, so gilt

   $$\mathcal{H}^m(T(A)) \leq \|T\|^m \mathcal{H}^m(A)$$

   (c) Das Maß ist translationsinvariant.

   (d) Es existieren Mengen mit einem Maß zwischen 0 und ∞.

   Es gilt die Areaformel.

   Theorem 2.15 *Es seien m eine ganze Zahl zwischen 1 und n, $D \subset \mathbb{R}^m$ eine offene Menge und $\psi \in C^1(D;\mathbb{R}^n)$ sei injektiv. Dann gilt*

   $$\mathcal{H}^m(\psi(D)) = \int_D \det(D\psi^T(y)D\psi(y))^{\frac{1}{2}}\, d\lambda^m(y)$$

   und

   $$\int_{\Psi(D)} f d\mathcal{H}^m = \int_D f(\psi(y)) \det(D\psi^T(y)D\psi(y))^{\frac{1}{2}}\, d\lambda^m(y)$$

   wobei der Integrand rechts genau dann λ^m meßbar bzw integrierbar ist, wenn $f\chi_{\psi(D)}$ $\mathcal{H}^M$ meß- bzw integrierbar ist.

4. Es sei $I = (a,b) \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $h : I \to \mathbb{R}$ eine monoton wachsende Funktion. Dann definiert h ein Maß μ_h, das durch

   $$\mu([c,d)) = h(d^-) - h(c^-)$$

   eindeutig definiert ist. Das zugehörige Integral ist das Riemann-Stieltjesintegral, das ähnlich wie das Regelintegral durch Zerlegungen und Treppenfunktionen

   $$\int_c^d f dh = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{N(n)} (f(h(x_j^n)) - f(h(x_{j-1}^n))(h(x_j^n) - h(x_{j-1}^n))$$

   für $a < c < d < b$ definiert werden kann.

5. Sei X ein kompakter metrischer Raum. Der Rieszsche Darstellungssatz ordnet stetigen linearen Abbildungen
$$T : C_b(X) \to \mathbb{R}$$
zwei Maße μ_+ und μ_- auf den Borelmengen zu.

Theorem 2.16 *Es sei X ein kompakter metrischer Raum und*
$$T \in L(C_b(X); \mathbb{R}).$$
Dann existieren zwei eindeutig bestimmte endliche Maße μ_+ und μ_- auf den Borelmengen von X mit den Eigenschaften

(a) Für jede stetige Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ gilt
$$T(f) = \int_X f d\mu_+ - \int_X f d\mu_-$$

(b) Es gilt
$$\|T\|_{L(X;\mathbb{R})} = \mu_+(X) + \mu_-(X)$$

Eine Klasse 'guter' Maße sind die Radonmaße.

Definition 2.17 *Es sei (X, d) ein metrischer Raum, der eine abzählbare Vereinigung kompakter Teilmengen ist, $\mathcal{B}$ die Borelsche σ-Algebra auf X und $\mu : \mathcal{B} \to [0, \infty) \cup \infty$ ein Maß. Das Maß μ heißt Radonmaß, falls es auf kompakten Mengen endlich ist.*

Dies gilt für das Lebesguemaß, aber nicht für das Hausdorffmaß(falls $m < n$).

2.4 Lebesgueräume

Definition 2.18 *Es sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, $1 \le p < \infty$. Der Raum $L^p(\mu)$ der p-integrierbaren Funktionen besteht aus den meßbaren Funktionen, für die $|f|^p$ integrierbar ist mit der Norm*
$$\|f\|_{L^p(\mu)} = \left(\int |f|^p \, d\mu \right)^{1/p}.$$
Im Fall $p = \infty$ sei
$$\|f\|_{L^\infty} = \min_{N \text{ Nullmenge}} \|f|_{X\setminus N}\|_{sup}$$

Bemerkungen:

1. Genauer sind die Elemente von L^p Äquivalenzklassen von Funktionen, die sich nur auf Nullmengen unterscheiden.

2. Die Dreiecksungleichung für die Norm ist die Minkowskiungleichung

$$\|f+g\|_{L^p(\mu)} \leq \|f\|_{L^p(\mu)} + \|g\|_{L^p(\mu)}$$

3. Mit dieser Norm sind die Räume $L^p(\mu)$ Banachräume. Wenn eine Folge f_i in $L^p(\mu)$ konvergiert, so konvergiert eine Teilfolge fast überall. Es gibt jedoch in $L^p(\mu)$ konvergente Folgen, die nicht fast überall konvergieren.

Es gilt die Höldersche Ungleichung.

Theorem 2.19 *Sei* $1 \leq p, q \leq \infty$,

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \tag{2.5}$$

$f \in L^p(\mu)$, $g \in L^q(\mu)$. *Dann ist* fg *integrierbar und*

$$\left| \int fg d\mu \right| \leq \|f\|_{L^p(\mu)} \|g\|_{L^q(\mu)}$$

Bemerkung: Ist $p = 2$, so ist auch $q = 2$. In diesem Fall sind die Räume Hilberträume.

Aufgrund der Hölderschen Ungleichung gibt es die Abbildung

$$j : L^q(\mu) \to L(L^p(\mu), \mathbb{K}), \quad j(g)(f) = \int fg d\mu$$

Diese Abbildung ist immer eine Isometrie und oft surjektiv.

Theorem 2.20 *Sei* $1 < p, q < \infty$, *und es gelte* (2.5). *Dann ist* j *bijektiv.*

Die Aussage gilt auch, wenn μ σ endlich ist, d.h. wenn eine Folge meßbarer Mengen A_i existiert mit

$$\mu(A_i) < \infty, \qquad \bigcup A_i = X$$

und $p = 1$ ist. Dies ist beim Lebesguemaß erfüllt, aber nicht beim Hausdorffmaß, falls $m < n$ ist.

Die Einheitskugel in $L^p(\mu)$ ist gleichmäßig konvex für $1 < p < \infty$.

Theorem 2.21 *Sei* K *eine abgeschlossene konvexe Menge in* $L^p(\mu)$, $1 < p < \infty$ *und* $f \in L^p(\mu)$. *Dann existiert genau ein* $g \in K$ *mit*

$$\|f - g\|_{L^p(\mu)} = d(f, K)$$

Satz 2.22 *Ist* μ *ein Radonmaß und* $1 \leq p < \infty$, *so sind die stetigen Funktionen mit kompakten Träger dicht in* $L^p(\mu)$. *Diese Räume sind separabel, d.h. sie besitzen eine abzählbare dichte Teilmenge.*

2.5 Hilberträume

Definition 2.23 *Ein Banachraum H heißt* Hilbertraum*, falls die Parallelogrammidendität*

$$\|u+v\|_H^2 + \|u-v\|_H^2 = 4(\|u\|_H^2 + \|v\|_H^2)$$

immer erfüllt ist.

Die wichtigsten Beispiele sind l^2 und $L^2(\mu)$.

In diesem Fall existiert eine positiv definite Sesquilinearform (über dem Körper $\mathbb{C}$) $< .,. >$ mit den Eigenschaften

1. $< \lambda v, w >= \lambda < v, w >$, $\lambda \in \mathbb{K}$, $v, w \in H$.
2. $< v, w >= \overline{< w, v >}$ $(v, w \in \mathbb{K})$.
3. $< v, v >\geq 0$, $< v, v >= 0$ genau dann wenn $v = 0$.

Zwischen der Norm und dem Skalarprodukt besteht die Beziehung

$$< v, v >= \|v\|_H^2.$$

Es gilt der Rieszsche Darstellungssatz:

Theorem 2.24 *Es sei H ein $\mathbb{K}$ Hilbertraum. Dann ist die Abbildung*

$$j : H \to H^* = L(H, \mathbb{K}), \qquad v \to (w \to < w, v >)$$

injektiv, isometrisch und surjektiv.

Wir können also einen Hilbertraum mit seinem Dualraum identifizieren.

Mit Hilfe des Skalarprodukts definiert man die Begriffe senkrecht, Orthonormalsysteme (ONS) und Orthonormalbasis (ONB). Eine ONB existiert genau dann, wenn H separabel ist. Ist $(v_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine ONB, so gilt immer

$$v = \sum_{i=1} < v, v_i > v_i \tag{2.6}$$

und

$$\|v\|_H^2 = \sum | < v, v_i > |^2 \tag{2.7}$$

2.6 Integration im $\mathbb{R}^n$ und der Satz von Gauß

Für $A \subset \mathbb{R}^n$ und $x \in \mathbb{R}^m$, $m < n$ definieren wir den Schnitt

$$A_x = \left\{ y \in \mathbb{R}^{n-m} : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in A \right\}.$$

Es gelten der Satz von Fubini

Theorem 2.25 *Ist entweder $f : A \to \mathbb{R}$ meßbar und nichtnegativ oder integrierbar, so gilt*

$$\int f d\lambda^n = \int_{\mathbb{R}^m} \int_{A_x} f(x,y) d\lambda^{n-m}(y) d\lambda^m(x) \tag{2.8}$$

wobei der rechte Integrand fast überall definiert ist.

und die Transformationsformel:

Theorem 2.26 *Sei A offen, $\phi : A \to B \subset \mathbb{R}^n$ bijektiv und stetig differenzierbar, $f : B \to \mathbb{R}^n$ meßbar und nichtnegativ oder integrierbar. Dann gilt dies auch für*

$$(f \circ \phi)|\det(D\phi)|$$

und

$$\int_B f d\lambda^n = \int_A (f \circ \phi)|\det(D\phi)| d\lambda^n$$

Die Transformationsformel gilt auch, wenn A meßbar ist und ϕ in einer offenen Umgebung lokal injektiv und differenzierbar ist. Der wichtigste Spezialfall sind *Polarkoordinaten*.

Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, d.h. offen und zusammenhängend. Ein Randpunkt $x \in \partial G$ heißt regulär, wenn eine Umgebung U von x und eine stetig differenzierbare Funktion $\phi : U \to \mathbb{R}$ existieren mit

$$\partial G \cap U = \{x \in U | \phi(x) = 0\}, \qquad \nabla \phi(x) \neq 0.$$

Nach dem Satz von der inversen Funktion bilden die regulären Punkte eine Mannigfaltigkeit der Dimension $n-1$. Nicht reguläre Randpunkte heißen singulär. Sei ν der äußere Normalenvektor in regulären Randpunkten.

Der Satz von Gauß lautet dann:

Theorem 2.27 *Sei G beschränkt, $f \in C^1(G; \mathbb{R}^n)$ sei zusammen mit den ersten Ableitungen stetig auf ∂G fortsetzbar. Es gelte $\mathcal{H}^{n-1}(\partial G) < \infty$. Die singulären Punkte seien eine $\mathcal{H}^{n-1}$ Nullmenge. Dann gilt*

$$\int_G \nabla \cdot f d\lambda^n = \int_{\partial G} f \cdot \nu d\mathcal{H}^{n-1} \tag{2.9}$$

Eine Variante ist der Greensche Satz in der Ebene:

Satz 2.28 *Sei $G \subset \mathbb{R}^2$ wie oben, $f_1, f_2 \in C^1(G)$, wobei sich die Ableitungen stetig auf $\overline{G}$ fortsetzen lassen. Dann gilt*

$$\int_G \partial_1 f_2 - \partial_2 f_1 d\lambda^2 = \int_{\partial G} f_1 dx + f_2 dy$$

wobei das Integral rechts das Kurvenintegral über ∂G bezüglich einer Kurve ist, für die das Gebiet links der Kurve liegt.

2.7 Die Faltung

Sind (X,d) ein metrischer Raum, $(X,\mathcal{B},\mu)$ ein Maßraum, wobei $\mathcal{B}$ die Borelmengen sind und μ ein Radonmaß ist, so definieren wir

$L^p_{loc}(X) = \{f \text{ meßbar} | f\phi \in L^p(X) \text{ für jede stetige Funktion mit kompaktem Träger}\}$

Die Faltung zweier geeigneter Funktionen auf $\mathbb{R}^n$ ist durch

$$f * g(x) = \int f(x-y)g(y)d\lambda^n(y) \tag{2.10}$$

definiert. Es gilt immer

$$f * g = g * f$$

$$f * (g * h) = (f * g) * h.$$

Die Faltung läßt sich für $f \in L^p$ und $g \in L^q$ definieren falls

$$1/p + 1/q \geq 1$$

Satz 2.29 *Es seinen* $1 \leq p,q,r \leq \infty$,

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$$

$f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$. *Dann ist* $f * g \in L^r(\mathbb{R}^n)$ *und*

$$\|f * g\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \|g\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}$$

wobei das Integral (2.10) *für fast alle* x *existiert.*

Eine Diracschar ist eine Funktionenschar

$$j_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n} j(x/\varepsilon)$$

wobei j integrierbar mit Integral 1 ist. Es gilt

Satz 2.30 *Ist* $1 \leq p < \infty$ *und* $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, *so gilt*

$$f_\varepsilon := f * j_\varepsilon \to f$$

in $L^p(\mathbb{R}^n)$. *Die Funktionen* f_ε *sind stetig falls* j *stetig ist. Ist* $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$, *so konvergiert* $f_\varepsilon \to f$ *gleichmäßig mit* $\varepsilon \to 0$.

Ist f und/oder g stetig differenzierbar mit zu 2.29 analogen Eigenschaften der Ableitung, so ist $f * g$ differenzierbar und es gilt

$$\frac{\partial}{\partial x_i} f * g(x) = (\frac{\partial}{\partial x_i} f) * g(x) = (\frac{\partial}{\partial x_i} g) * f(x).$$

Insbesondere läßt sich jede Funktion in $L^p(\mathbb{R}^n)$ durch $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ und durch analytische Funktionen in $L^p(\mathbb{R}^n)$ approximieren, falls $p < \infty$.

2.8 Maximalfunktion und Lebesguepunkte

Definition 2.31 *Sei $1 \leq p \leq \infty$ und $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Wir definieren die Maximalfunktion*

$$Mf(x) = \sup_{B_r(y) \ni x} \lambda^n(B_r(y))^{-1} \int_{B_r(y)} |f(z)| dz.$$

Satz 2.32 *Es gilt immer*

$$\lambda^n(\{x | Mf(x) > \lambda\}) \leq \frac{c}{\lambda} \|f\|_{L^1}$$

und

$$\|Mf\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{cp}{p-1} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

wobei c nur von der Raumdimension abhängt.

Wir nennen x einen Lebesguepunkt von f, wenn für $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert mit

$$\left| \lambda^n(B_r(x_0))^{-1} \int_{B_r(x_0)} f dx - \lambda^n(B_R(y_0))^{-1} \int_{B_R(y_0)} f dx \right| \leq \varepsilon$$

falls $r, R < \delta$ und $x \in B_r(x_0) \cap B_R(y_0)$.

Satz 2.33 *Sei $f \in L^1_{loc}$. Das Komplement der Lebesguepunkte ist eine Nullmenge.*

2.9 Die Fouriertransformation

Wir definieren die Schwartzfunktionen

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) | x^\alpha \partial^\beta f \in C_b \text{ für alle } \alpha, \beta\}$$

und sagen, eine Folge (f_j) von Schwartzfunktionen konvergiert gegen eine Schwartzfunktion f, falls

$$x^\alpha \partial^\beta f_j \to x^\alpha \partial^\beta f$$

gleichmäßig. Eine lineare Abbildung $T : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{K}$ ist stetig, wenn $T(f_j) \to T(f)$ falls $f_j \to f$ in $\mathcal{S}$. Der Vektorraum aller stetigen linearen Abbildungen von $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ nach $\mathbb{K}$ wird mit $\mathcal{S}^*(\mathbb{R}^n)$ bezeichnet.

Im Folgenden betrachten wir komplexwertige Funktionen. Für integrierbare Funktionen definieren wir die Fouriertransformierte

$$\hat{f}(\xi) = F(f)(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int e^{-ix\cdot\xi} f(x)\, dx. \tag{2.11}$$

und die Fouriercotransformierte

$$F^{-1}(g)(x) = (2\pi)^{-n/2} \int e^{ix\cdot\xi} g(\xi)\, d\xi. \tag{2.12}$$

Man rechnet folgende Dinge für $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ nach:

1. $F(\partial_{x_j} f)(\xi) = i\xi_j \hat{f}(\xi)$
2. $F(x_j f)(\xi) = -i\partial_{\xi_j} \hat{f}(\xi)$
3. $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$
4. $\int f\hat{g}\,dx = \int \hat{f}g\,dx$
5. $\|\hat{f}\|_{L^2} = \|f\|_{L^2}$
6. $F^{-1}(F(f)) = f$, $F(F^{-1}g)) = g$.
7. $F(fg)(\xi) = (2\pi)^{n/2}(\hat{f} * \hat{g})(\xi)$.
8. $F(f * g)(\xi) = (2\pi)^{n/2}\hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi)$

Man dehnt die Fouriertransformierte auf $\mathcal{S}^*$ durch

$$F(T)(\phi) = T(F(\phi))$$

aus. Die Einschränkung auf $L^2(\mathbb{R}^n)$ ist eine invertierbare Isometrie, genauer eine unitäre Abbildung mit den Eigenwerten 1, -1, i und $-i$.

2.10 Schwache Konvergenz

Definition 2.34 *Es seien X ein Banachraum, und (x_i) eine Folge in X. Wir sagen, die Folge (x_i) konvergiert schwach gegen $x \in X$, falls*

$$x^*(x_i) \to x^*(x)$$

für alle $x^* \in X^*$.

Eine Folge (x_i^*) in X^* konvergiert schwach-$*$ gegen $x^* \in X^*$, falls

$$x_i^*(x) \to x^*(x)$$

für alle $x \in X$.

Definition 2.35 *Ein Banachraum X heißt* reflexiv, *falls $X^{**} = X$.*

Bemerkung: Es existiert eine natürliche Abbildung $X \to X^{**}$, da $x \in X$ über $x^* \to x^*(x)$ ein Element in X^{**} definiert. Wir identifizieren X mit seinem Bild in X^{**} unter dieser Abbildung. Ist H ein Hilbertraum, so gilt $H^{**} = H$ und, für $1 < p < \infty$, $(L^p(\mu))^{**} = L^p(\mu)$.

Satz 2.36 *Es seien X ein separabler Banachraum mit Dualraum X^* und (x_i^*) eine beschränkte Folge in X^*. Dann existieren eine Teilfolge $(x_{i_j}^*)$ und $x^* \in X^*$ mit*

$$x_{i_j}^*(x) \to x^*(x) \qquad j \to \infty$$

für alle $x \in X$.

Das heißt, jede beschränkte Folge in X^* hat eine schwach $*$ konvergente Teilfolge. Insbesondere hat jede Folge in einem separablen Hilbertraum und jede Folge in einem separablen L^p Raum, $1 < p < \infty$, eine schwach konvergente Teilfolge, da dann $X^{**} = X$.

Kapitel 3

Grundlegende Gleichungen

3.1 Die Transportgleichung

Sei $b \in \mathbb{R}^n$ ein beschränktes stetig differenzierbares Vektorfeld. Wir betrachten die Transportgleichung

$$u_t(t,x) + b(x) \cdot \nabla u(t,x) = 0 \qquad \text{in } (0,\infty) \times \mathbb{R}^n$$

Wir haben bereits gesehen, daß stetig differenzierbare Lösungen auf Orbits der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$\dot{y} = b(y)$$

konstant sind. Diese Gleichung hat globale Lösungen, die differenzierbar von den Anfangswerten abhängen. Ist $b \in \mathbb{R}^n$ konstant, so gilt

$$y(t) = y(0) + tb$$

und für jede Lösung

$$u(t,x) = u(0, x - tb)$$

Damit ist das Anfangswertproblem für jede gegebene Funktion $u_0 \in C^1(\mathbb{R}^n)$

$$u_t(t,x) + b \cdot \nabla u(t,x) = 0 \qquad \text{in } \mathbb{R}^n \times (0,\infty)$$

$$u(0,x) = u_0(x) \qquad \text{für } x \in \mathbb{R}^n$$

eindeutig lösbar. Diese eindeutige Lösung ist

$$u(t,x) = u_0(x - tb)$$

Diese Formel ist für $u_0 \in L^p(\mathbb{R}^n)$ sinnvoll.

3.1.1 Das inhomogene Problem

Es seien $b \in \mathbb{R}^n$, $f \in C^1([0,\infty)\times\mathbb{R}^n)$ und $u_0 \in C^1(\mathbb{R}^n)$ gegeben. Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$u_t + b\cdot\nabla u = f \quad \text{in } (0,\infty)\times\mathbb{R}^n$$

$$u(0,x) = u_0(x) \qquad \text{für } x \in \mathbb{R}^n.$$

Gesucht ist die stetig differenzierbare Funktion u, die diesen beiden Gleichungen genügt. Für $x \in \mathbb{R}^n$ und $s \in \mathbb{R}$ sei $z(s) = u(t+s, x+sb)$. Ist u eine Lösung, so gilt

$$\frac{d}{ds}z(s) = b\cdot\nabla u + u_t = f(t+s, x+sb)$$

und daher

$$u(t,x) - u_0(x-tb) = z(0) - z(-t) = \int_{-t}^{0} \dot z(s)ds = \int_0^t f(s, x+(s-t)b)ds$$

und

$$u(t,x) = u_0(x-tb) + \int_0^t f(s, x+(s-t)b)ds.$$

Andererseits definiert diese Gleichung die gewünschte Lösung, die damit eindeutig ist.

Bei der Transportgleichung gibt es eine enge Beziehung zu den gewöhnlichen DGLs. Dieser Zusammenhang wird Methode der Charakteristiken genannt und funktioniert auch für beschränkte Vektorfelder b.

Es gibt viele Lösungen. Daher wird beim Anfangswertproblem eine frei wählbare Funktion vorgegeben, mit der die Lösung des Anfangswertproblems eindeutig wird.

3.2 Der Laplaceoperator

Wir betrachten die Laplacegleichung

$$-\Delta u = 0 \tag{3.1}$$

deren Lösungen harmonische Funktionen sind und die Poissongleichung

$$-\Delta u = f. \tag{3.2}$$

3.2.1 Die Fundamentallösung

Wir definieren

$$g(x) := \begin{cases} -\frac{1}{2\pi}\log(|x|) & n = 2 \\ \frac{1}{n(n-2)\omega_n}|x|^{2-n} & n \geq 3 \end{cases} \tag{3.3}$$

für $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Diese Funktionen sind harmonisch. Es gilt

$$|\nabla g| \leq \frac{1}{n\omega_n |x|^{n-1}}, \quad |\partial^\alpha g(x)| \leq \frac{n-1}{\omega_n |x|^n},$$

falls $|\alpha| = 2$. Sei $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$ und

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} g(x-y) f(y)\, dy = g * f(x).$$

Satz 3.1 *Sei $f \in C_0^2(\mathbb{R}^n)$. Dann ist $u = g * f \in C^3(\mathbb{R}^n)$ und*

$$-\Delta u = f.$$

Es gilt

$$\sum_{i,j=1}^n \|\partial^2_{x_i x_j} u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \tag{3.4}$$

und

$$\partial_{x_i} u(x) = f * \partial_{x_i} g(x)$$

und, falls x nicht im Träger von f liegt,

$$\partial^2_{x_i x_j} u(x) = \int f(x-y) k(y)\, dy \tag{3.5}$$

mit

$$k(x) = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} g(x). \tag{3.6}$$

Die Gleichung (3.4) gibt Anlass zur Hoffnung, dass sich zweite Ableitungen von u etwa so gut verhalten wie die rechte Seite. Diese Hoffnung ist zum Teil gerechtfertigt.

Satz 3.2 *Es seien f, g und u wie oben, $0 < s < 1$ und $1 \leq i, j \leq n$. Dann existiert eine Konstante c, die nur von der Raumdimension abhängt mit*

$$\sup_{x \neq y} \frac{|\partial^2_{ij} u(x) - \partial^2_{ij} u(y)|}{|x-y|^s} \leq \frac{c}{s(1-s)} \sup_{x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|^s}. \tag{3.7}$$

Die Aussage gilt auch, wenn f nur hölderstetig ist.

Andererseits gibt es Beispiele für stetige Funktionen f, für die $f * g$ in der Null nicht zweimal stetig differenzierbar ist.

Beweis: Es genügt für $\tilde{y}$ mit $|\tilde{y}| = 1$ zu zeigen:

$$|\partial^2_{ij} u(0) - \partial^2_{ij} u(\tilde{y})| \leq \frac{c_n}{s(1-s)} \sup_{x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|^s}. \tag{3.8}$$

Wir wählen eine Funktion $v \in C_0^\infty$ mit $\Delta v(0) = 1$ z.B.

$$v(x) = -\begin{cases} \frac{1}{2n} e^{-\frac{1}{1-|x|^2}} & \text{falls } |x| < 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann gilt nach dem Beweis des letzten Teiles von Satz 3.1

$$\sum_{i,j=1}^{n} \int (\partial_{ij}^2 (v - g * (-\Delta v)))^2 dx = 0$$

und damit $\partial_{ij}^2 (v - g^*(-\Delta v)) = 0$, $\partial_i (v - g^*(-\Delta v)) = 0$ und $v = g * (-\Delta v)$ (mit Modifikation falls $n = 2$).

Sei $R > 0$ mit

$$\text{supp } f \subset B_R(0).$$

Wir definieren

$$u_0(x) = f(0) R^2 v(x/R)$$

und erhalten

$$u_0 = g * (f(0)(-\Delta v)(x/R)),$$

wobei

$$|f(0)(\Delta v(\bar{x}/R) - \Delta v(\bar{y}/R))| \leq c(n) R^{s-1} |x - y| \sup_{x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^s}$$

und mit $\tilde{f}(x) = f(x) - f(0)(-\Delta v)(x/R)$

$$\sup_{x \neq y} \frac{|\tilde{f}(x) - \tilde{f}(y)|}{|x - y|^s} \leq c(\phi) \sup_{x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^s}$$

und

$$|\partial_{ij}^2 u_0(0) - \partial_{ij}^2 u_0(\tilde{y})| \leq R^{-1} \|v\|_{C^3} \leq c(n) \sup_{x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^s}.$$

Wir ersetzen u durch $u - u_1$ und f durch $f - f(0)\phi(x/R)$, was wir in der Notation wieder vernachlässigen, und dürfen zusätzlich annehmen, daß $f(0) = 0$.

Wir schreiben

$$u = u_1 + u_2 = (\phi f) * g + ((1 - \phi) f) * g.$$

Nun gilt

$$\partial_{ij}^2 u_2(0) = \int (\partial_{ij}^2 g(y))(1 - \phi(-y)) f(-y) \, dy$$

$$\partial_{ij}^2 u_2(\tilde{y}) = \int (\partial_{ij}^2 g(y))(1 - \phi(\tilde{y} - y)) f(\tilde{y} - y) \, dy = \int (\partial_{ij}^2 g(\tilde{y} + y))(1 - \phi(-y)) f(-y) \, dy$$

und daher

$$I := |\partial_{ij}^2 u_2(0) - \partial_{ij}^2 u_2(\tilde{y})| \leq \int_{R^n} |\partial_{ij}^2 g(y) - \partial_{ij}^2 g(\tilde{y} + y)| (1 - \phi(-y)) f(-y) | dy.$$

Wir schätzen ab:

$$|(1-\phi(-y))f(-y)| \leq |y|^s \sup_{x\neq y} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^s}$$

und, nach dem Mittelwertsatz

$$|\partial_{ij}^2 g(y) - \partial_{ij}^2 g(\tilde{y}+y)| \leq \frac{n}{\omega_n}(|y|/2)^{-1-n}$$

und

$$I \leq \frac{2^{1+n}n}{\omega_n} \sup_{x\neq y} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^s} \int_{\mathbb{R}^n\setminus B_1(0)} |y|^{-1+s-n} dy \leq \frac{c(n)}{1-s} \sup_{x\neq y} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^s}.$$

Im letzten Schritt schätzen wir

$$J = |\partial_{ij}^2 u_1(0) - \partial_{ij}^2 u_1(\tilde{y})|$$

ab. Wie oben dürfen wir annehmen, dass zusätzlich $f(\tilde{y}) = 0$ ist. Wie im letzten Teil von Satz 3.1 gilt

$$\partial_{ij}^2 u_1(0) = \int \partial_{ij}^2 g(y)\phi(-y)f(-y)\, dy,$$

da alle Integrale konvergieren und damit

$$\begin{aligned} |\partial_{ij}^2 u_1(0)| = |\int \partial_{ij}^2 g(y)\phi(-y)f(-y)\, dy| \quad &\leq \quad \frac{1}{\omega_n} \sup_{x\neq y} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^s} \int_{\mathbb{R}^n \cap B_4(0)} |y|^{-n+s} \\ &= \quad \frac{1}{\omega_n s} \sup_{x\neq y} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^s}. \end{aligned}$$

3.2.2 Die Mittelwerteigenschaft

Satz 3.3 *Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet.*
a) Ist $u \in C^2(U)$ harmonisch, so gilt

$$u(x) = (\lambda^n(B_r(x)))^{-1} \int_{B_r(x)} u(y)dy = (\mathcal{H}^{n-1}(\partial B_r(x)))^{-1} \int_{\partial B_r(x)} u(y) d\mathcal{H}^{n-1}(y). \tag{3.9}$$

für jede Kugel mit $\overline{B_r(x)} \subset U$.
b) Gilt

$$u(x) = (\lambda^n(B_r(x)))^{-1} \int_{B_r(x)} u(y)dy$$

für alle derartigen Kugeln, so ist u harmonisch.

3.2.3 Maximumprinzip und Eindeutigkeit

Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet.

Satz 3.4 *Die Funktion $u \in C^2(U) \cap C(\overline{U})$ sei harmonisch in U. Dann ist*

1. $\max_{x \in \overline{U}} u(x) = \max_{x \in \partial U} u(x)$
2. *Falls $x_0 \in U$ existiert mit $u(x_0) = \max_{x \in \overline{U}} u(x)$, so ist u konstant.*

Satz 3.5 *Sei $h \in C(\partial U)$, $f \in C(U)$. Dann gibt es höchstens eine Lösung $u \in C^2(U) \cap C(\overline{U})$ mit*

$$-\Delta u = f \qquad \text{in } U$$

$$u = h \qquad \text{auf } \partial U.$$

3.2.4 Regularität und Abschätzungen

Satz 3.6 *Die Funktion habe die Mittelwerteigenschaft* (3.9) *für jede Kugel in U. Dann ist $u \in C^\infty(U)$.*

Wir können Ableitungen abschätzen.

Satz 3.7 *Die Funktion u sei harmonisch in U und $\overline{B_r(x_0)} \subset U$. Dann gilt*

$$|u(x_0)| \leq \frac{1}{\omega_n r^n} \int_{B_r(x_0)} |u(y)| dy. \tag{3.10}$$

und

$$|\nabla u(x_0)| \leq \frac{c_n}{\omega_n r^{n+1}} \int_{B_r(x_0)} |u(y)| dy. \tag{3.11}$$

Als Konsequenzen der Abschätzungen erhalten wir den Satz von Liouville

Satz 3.8 *Sei $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ beschränkt und harmonisch. Dann ist u konstant.*

und die Darstellungsformel

Satz 3.9 *Sei $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$ mit kompaktem Träger und u eine Lösung von*

$$\Delta u = f$$

in $\mathbb{R}^n$ mit

$$\lim_{|x| \to \infty} \frac{|u(x)|}{|x|} = 0$$

Dann existiert $c \in \mathbb{R}$ mit

$$u(x) = g * f(x) + c.$$

Lemma 3.10 *Es seien $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ mit kompaktem Träger und $\phi : \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \to \mathbb{R}$ analytisch. Dann ist $f * \phi$ außerhalb des Trägers von f analytisch.*

Beweis: Sei x außerhalb des Trägers von f. Nach einer Zerlegung von f dürfen wir annehmen, daß der Träger f in einer Kugel $B_r(x_0)$ enthalten ist, wobei wir r beliebig klein wählen. Wir entwickeln ϕ um $x - x_0$ in eine Potenzreihe

$$\phi(y) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{|\alpha|=j} \frac{\partial^\alpha \phi(x - x_0)}{\alpha!}(y - (x - x_0))^\alpha$$

von der wir annehmen dürfen, daß sie in $B_{2r}(x - x_0)$ gleichmässig konvergiert. Die Faltung mit Polynomen führt wieder zu Polynomen.

Satz 3.11 *Die Funktion u sei harmonisch in U. Dann ist u in U analytisch, d.h. für $x_0 \in U$ konvergiert die Taylorreihe um x_0 in einer Umgebung von x_0.*

3.2.5 Die Harnackungleichung

Satz 3.12 *Es seien V, U offen, V beschränkt und zusammenhängend mit $\overline{V} \subset U$. Dann existiert eine Zahl $c > 0$, die nur von V abhängt, mit*

$$\sup_V u(x) \leq c \inf_V u(x)$$

für jede nichtnegative harmonische Funktion in U.

3.2.6 Die Greensche Funktion und die Poissonformel

Wir suchen eine Formel für die Lösung des Randwertproblems

$$-\Delta u = f \qquad \text{in } U \tag{3.12}$$

$$u = h \qquad \text{auf } \partial U \tag{3.13}$$

wobei u und f gegebene Funktionen sind.

Ein Hilfsmittel sind die Greenschen Formeln.

Satz 3.13 *Sei U ein beschränktes Gebiet, das den Voraussetzungen des Satzes von Gauß genügt und u, v zweimal stetig differenzierbar bis zum Rand. Dann gelten die Formeln:*

$$\int_U v\Delta u \, dx + \int_U \nabla u \cdot \nabla v dx = \int_{\partial U} v \nabla u \cdot \vec{n} d\mathcal{H}^{n-1}(y) \tag{3.14}$$

$$\int_U v\Delta u - u\Delta v dx = \int_{\partial U} v\nabla u \cdot \vec{n} - u\nabla v \cdot \vec{n} d\mathcal{H}^{n-1}(y) \tag{3.15}$$

Wir nehmen nun an, daß wir für $x \in U$ eine harmonische Funktion $w_x(y)$ finden können mit

$$w_x(y) + g(y - x) = 0 \qquad \text{für } y \in \partial U.$$

Es sei

$$G(x, y) = g(y - x) + w_x(y).$$

Sei u eine Lösung des obigen Randwertproblems und $x \in U$, ε klein. Wir wenden die Greensche Formel in $U \backslash B_\varepsilon(x)$ an:

$$\int_{U\backslash B_\varepsilon(x)} G(x,y)\Delta u(y) - u(y)\Delta_y G(x,y)\,dy \qquad + \int_{\partial U} u(y)\nabla_y G(x,y)\vec{n} d\mathcal{H}^{n-1}(y)$$
$$= \int_{\partial B_\varepsilon(x)} (u(y)\nabla_y G(x,y) - G(x,y)\nabla u(y)) \cdot \frac{y-x}{|y-x|} d\mathcal{H}^{n-1}(y)$$

Die rechte Seite konvergiert gegen $-u(x)$ mit $\varepsilon \to 0$ und daher

$$u(x) = \int_U G(x,y)f(y)\,dy + \int_{\partial U} h(y)K(x,y) \cdot \vec{n}\,d\mathcal{H}^{n-1}(y). \tag{3.16}$$

Die Funktion G heißt Greensche Funktion und

$$K(x,y) = -\nabla_y G(x,y) \cdot \vec{n}$$

für $y \in \partial U$ heißt Poissonkern.

Die Greensche Funktion ist symmetrisch in x und y:

Satz 3.14 *Für alle $x, y \in U$, $x \neq y$, gilt:*

$$G(x,y) = G(y,x).$$

3.2.7 Die Poissonformel in der Kugel

Für $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$ sei

$$\tilde{x} = \frac{x}{|x|^2} \tag{3.17}$$

die Inversion an der Einheitssphäre und

$$G(x,y) = g(y-x) - g(|x|(y-\tilde{x})), \quad x \neq y \in \overline{B}_1(0), x \neq 0$$

bzw.

$$G(0,y) = g(y)$$

Diese Funktion ist die Greensche Funktion. Wir erhalten die Greensche Funktion in der Kugel vom Radius r als

$$G_r(x,y) = g(y-x) - g(\frac{|x|}{r}(y - r\widetilde{x/r}))$$

und den Poissonkern

$$K(x,y) := \frac{r^2 - |x|^2}{n\omega_n r} \frac{1}{|x-y|^n} = -\frac{y}{|y|}\nabla_y G_r(x,y).$$

Es gilt dann:

1. Für $|y| = r$ ist die Abbildung
$$B_r(0) \ni x \to K(x,y)$$
harmonisch.

2. Für $|x| < r$ ist
$$\int_{\partial B_r(0)} K(x,y) d\mathcal{H}^{n-1}(y) = 1.$$

3. Es existiert $c_n > 0$ mit
$$|K(x,y)| \leq c_n |x-y|^{1-n}$$
falls $|y| = r$.

4. K ist positiv.

5. Für $x \neq 0$ und $\delta > 0$ gilt
$$\int_{\partial B_r(0) \cap (\mathbb{R}^n \setminus B_\delta(rx/|x|)} K(x,y) d\mathcal{H}^{n-1}(y) \leq c(r - |x|)\delta^{-1} \tag{3.18}$$
und, für $0 < s < 1$
$$\int_{\partial B_r(0)} |K(x,y)||x-y|^s d\mathcal{H}^{n-1}(y) \leq \frac{c}{s}(r-|x|)^s \tag{3.19}$$
sowie falls $|x - \tilde{x}| \leq \frac{1}{2}(r - |x|)$
$$\int_{\partial B_r(0)} |K(x,y) - K(\tilde{x},y)||y - \frac{rx}{|x|}|^s d\mathcal{H}^{n-1}(y) \leq \frac{c}{1-s}|x-\tilde{x}|(r-|x|)^{s-1} \tag{3.20}$$

Satz 3.15 *Sei $h \in C(\partial B_r(0))$ und, für $|x| < r$,*
$$u(x) = \frac{r^2 - |x|^2}{n\omega_n r} \int_{\partial B_r(0)} \frac{h(y)}{|x-y|^n} d\mathcal{H}^{n-1}(y).$$
und $u(x) = h(x)$ für $|x| = r$. Dann gilt:

1. *$u \in C^\infty(B_r(0)) \cap C(\overline{B_r(0)})$.*

2. *u ist harmonisch.*

3. *$u(x) = h(x)$ falls $x \in \partial B_r(0)$.*

4. *Ist h Hölderstetig, so auch u. Es gilt dann*
$$\|u\|_{C^s(B_r(0))} \leq c(n) \|h\|_{C^s(\partial B_r(0))}$$
für $0 < s < 1$ und $r \leq 1$.

Zunächst ist $u \in C^\infty$ und harmonisch in $B_r(0)$.
Behauptung: Für $\varepsilon > 0$ existiert $\delta_1 > 0$ mit

$$\left| u(x) - h(\frac{rx}{|x|}) \right| < \varepsilon/2$$

falls $r - |x| < \delta_1$.

Aus der Behauptung folgt die Stetigkeit: Es genügt, die Stetigkeit an einem Randpunkt x_0 zu zeigen. Sei also $\varepsilon > 0$ und $\delta_2 > 0$ mit $|h(y_1) - h(y_2)| < \varepsilon/2$ für $|y_1 - y_2| < \delta_2$. Wir definieren

$$\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}.$$

Dann erhalten wir für $|x - x_0| \leq \delta$

$$|u(x) - u(x_0)| \leq |u(x) - u(\frac{rx}{|x|})| + |h(\frac{rx}{|x|}) - h(x_0)| < \varepsilon.$$

Wir müssen also die Behauptung verifizieren. Es gilt

$$\begin{aligned}
|u(x) - u(\frac{rx}{|x|})| &= \left| \int_{\partial B_r(0)} K(x,y)(h(y) - h(\frac{rx}{|x|}))d\mathcal{H}^{n-1} \right| \\
&\leq \int_{\partial B_r(0)} K(x,y)\varepsilon/2 d\mathcal{H}^{n-1} + \int_{\partial B_r(0)\cap(\mathbb{R}^n \setminus B_{\delta_2}(rx/|x|))} K(x,y) 2\|h\|_{sup} d\mathcal{H}^{n-1} \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + 2c(n)\delta_2^{-1}(r - |x|)\|h\|_{sup}
\end{aligned}$$

Wir wählen

$$\delta_1 = \min\{\delta_2, \varepsilon 2c(n)\delta_2^{-1}\|h\|_{sup}\}.$$

Sei jetzt $0 < s < 1$ und $h \in C^s(\partial B_r(0))$. Zu zeigen ist für $x \neq \tilde{x}, r/2 < |x|, |\tilde{x}| < r$

$$|u(x) - u(\tilde{x})| \leq \frac{c(n)}{s(1-s)}|x - \tilde{x}|^s \sup_{y_1 \neq y_0} \frac{|h(y_1) - h(y_0)|}{|y_0 - y_1|^s}.$$

Es gibt zwei Fälle: $|x - \tilde{x}| \leq \frac{1}{2}(r - |x|)$, in welchem die Aussage mit (3.20) folgt, und $|x - \tilde{x}| \geq \frac{1}{2}(r - |x|)$, in welchem die Aussage mit Hilfe der Dreiecksungleichung eine Konsequenz aus

$$|u(x) - u(\frac{rx}{|x|})| \leq \frac{c(n)}{s}(r - |x|)^s \sup_{y_1 \neq y_0} \frac{|h(y_1) - h(y_0)|}{|y_0 - y_1|^s}. \tag{3.21}$$

ist. Diese Ungleichung wiederum folgt aus (3.19).

3.2.8 Das Perronverfahren

Definition 3.16 *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Die Funktion $u \in C(U)$ heißt* subharmonisch*, falls*

$$u(x_0) \leq (\lambda^n(B_r(x_0)))^{-1} \int_{B_r(x_0)} u(y)dy$$

für alle $\overline{B_r(x_0)} \subset U$. Die Funktion u heißt superharmonisch*, falls $-u$ subharmonisch ist.*

Lemma 3.17 *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, $u \in C(\overline{U})$ subharmonisch. Dann gilt*

$$\max_{x \in \overline{U}} u(x) = \max_{x \in \partial U} u(x),$$

wobei die Ungleichung strikt ist, falls u nicht konstant ist.

Definition 3.18 *Wir definieren $\sigma(U)$ als die Menge die subharmonischen Funktionen und $\Sigma(U)$ als die Menge der superharmonischen Funktionen.*

Lemma 3.19
1. *$v \in \sigma(U)$, $V \subset U$ offen $\Longrightarrow v \in \sigma(V)$.*
2. *$v_i \in \sigma(U)$, $c_i > 0 \Longrightarrow \sum_{i=1}^m c_i v_i \in \sigma(V)$.*
3. *$v_i \in \sigma(U) \Longrightarrow \max_{1 \leq i \leq m} v_i \in \sigma(V)$.*
4. *$v \in \sigma(U)$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton wachsend und konvex $\Longrightarrow f \circ v \in \sigma(V)$.*

Seien $v \in \sigma(U)$, $x_0 \in U$, $R > 0$ und $\overline{B_R(x_0)} \subset U$. Wir definieren H_v durch

$$-\Delta H_v = 0 \qquad \text{in } B_R(x_0)$$

$$H_v = v \qquad \text{auf } \partial B_R(x_0)$$

Lemma 3.20 *Sei*

$$v_{x_0,R}(x) = \begin{cases} v(x) & \text{für } x \in U \backslash B_R(x_0) \\ H_v(x) & \text{für } x \in B_R(x) \end{cases}$$

Es gilt

$$v \leq v_{x_0,R}$$

$$v_{x_0,R} \in \sigma(U)$$

Definition 3.21 *Das beschränkte Gebiet $U \subset \mathbb{R}^n$ genügt der äußeren Kugelbedingung, falls für alle $x \in \partial U$ eine Kugel $B \subset \mathbb{R}^n \backslash U$ existiert mit*

$$\overline{U} \cap \overline{B} = \{x\}$$

Satz 3.22 *Es seien $U \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, das der äußeren Kugelbedingung genügt und $h \in C(\partial U)$. Dann existiert genau eine harmonische Funktion $u \in C^2(U) \cap C(\overline{U})$. mit $u = h$ auf ∂U.*

Der Satz folgt aus zwei Behauptungen:

1. Die Funktion

$$u(x) = \sup\{v(x) | v \in \sigma(U) \cap C(\overline{U}), v(x) \leq h(x) \text{ für } x \in \partial U\}$$

   ist harmonisch.

2. u ist stetig am Rand.

Definition 3.23 *Sei $x \in \partial U$. Eine* Barrierenfunktion *ist eine nichtpositive subharmonische stetige Funktion ϕ, die in $B_\varepsilon(x) \cap \overline{U}$ definiert ist, mit $\phi(x) = 0$ und $\phi(y) < 0$ falls $y \neq x$.*

Satz 3.24 *Es sei U ein beschränktes Gebiet, das in jedem Randpunkt Barrierenfunktionen besitzt, $f \in C^{0,1}(U)$ und $h \in C(\partial U)$. Dann existiert genau eine Lösung $u \in C(\overline{U}) \cap C^2(U)$ des Randwertproblems*

$$-\Delta u = f \qquad \text{in } U$$

$$u = h \qquad \text{auf } \partial U.$$

Insbesondere existiert eine Greensche Funktion G.

3.2.9 Viskositätslösungen

Die Idee des Perronverfahrens ist:

1. Man definiert Unterlösungen und beweist Maximumprinzipien.

2. Dies ergibt einen Ansatz für die Lösung als Supremum aller Unterlösungen. Dieses Supremum ist gleichzeitig Oberlösung.

3. Wesentlich ist die Eindeutigkeit dieser so definierten Lösung.

4. Studium der Regularität und Eigenschaften

Wir betrachten Gleichungen der Form

$$F(x, u, Du, D^2u) = 0 \qquad \text{in } U$$

$$u = h \qquad \text{auf } \partial U$$

mit $F \in C(U \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n \times n})$ unter den Annahmen

1. Für festes x, p, P ist $u \to F(x, u, p, P)$ monoton wachsend.

2. Für festes x, u, p, P und A positiv definit gilt

$$F(x, u, p, P + A) \leq F(x, u, p, P).$$

Eine Funktion $u \in C^2(U) \cap C(\overline{U})$ heißt Unterlösung, falls

1. $u \leq h$ auf dem Rand
2. $F(x, u, Du, D^2u) \leq 0$

und Oberlösung, falls die Ungleichungen mit den umgekehrten Vorzeichen gelten.

Lemma 3.25 *Die Funktion $u \in C^2(U) \cap C(\overline{U})$ sei eine Unterlösung, es sei $\phi \in C^2(U)$ mit:*
Hat $u - \phi$ im Punkt x_0 die isolierte Maximalstelle 0, so ist

$$F(x_0, \phi(x_0), D\phi(x_0), D^2\phi(x_0)) \leq 0 \tag{3.22}$$

Definition 3.26 *Die Funktion $u \in C(\overline{U})$ heißt* Viskositätsunterlösung*, falls*

1. *$u \leq h$ auf dem Rand.*
2. *Aus $\phi \in C^2(\overline{U})$, $u - \phi$ hat in x_0 eine isolierte Maximalstelle mit Wert 0 folgt (3.22).*

Analog definieren wir eine Viskositätsoberlösung und eine Viskositätslösung.

Satz 3.27 *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $h \in C(\partial U)$ mit*

$$|h(x) - h(y)| \leq |x - y| \qquad x, y \in \partial U$$

Dann existiert genau eine Viskositätslösung u von

$$-1 + |\nabla u|^2 = 0 \qquad \text{in } U,$$

$$u = h \qquad \text{auf } \partial U.$$

Sie hat die Form

$$u(x) = \inf_{y \in \partial U} (h(y) + |x - y|)$$

3.3 Die Wärmeleitungsgleichung

Wir betrachten die Wärmeleitungsgleichung

$$u_t - \Delta u = f \qquad \text{in } (0, \infty) \times \mathbb{R}^n$$

und suchen Funktionen u, die zweimal stetig nach den x Variablen und einmal stetig nach t differenzierbar sind und dieser Gleichung genügen. Zusätzlich sei eine stetige Funktion u_0 gegeben. Dann soll u stetig in $[0, \infty) \times \mathbb{R}^n$ sein und $u(0, x) = u_0(x)$ für $x \in \mathbb{R}^n$.

3.3.1 Die Fundamentallösung

Sei für $t > 0$

$$g_t(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}.$$

Dann gilt $0 < g$,

$$\partial_t g - \Delta g = 0 \tag{3.23}$$

und

$$\int_{\mathbb{R}^n} g_t(x)dx = 1. \tag{3.24}$$

Satz 3.28 *Sei $1 \le p \le \infty$ und $u_0 \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Dann ist*

$$u(t,x) = u_0 * g_t(x)$$

für $t > 0$ und $u(0,x) = u_0(x)$ in $C^\infty((0,\infty)\times\mathbb{R}^n)$ eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung, mit

$$u(t,x) \to u_0(x) \qquad \text{für } t \to 0$$

fast überall und, falls $p < \infty$,

$$\|u(t,.) - u_0\|_{L^p} \to 0 \qquad (t \to 0).$$

Ist $u_0 \in C_b(\mathbb{R}^n)$ so ist $u \in C([0,\infty)\times\mathbb{R}^n)$. Es gilt

$$|u(t,x)| \le Mu_0(x)$$

wobei M die Maximalfunktion ist.

Satz 3.29 *Sei $f \in C^1_b([0,\infty)\times\mathbb{R}^n)$ und*

$$u(t,x) = \int_{(0,t)\times\mathbb{R}^n} g_{t-s}(x-y)f(s,y)dyds.$$

Dann ist $u \in C([0,\infty)) \cap C^{1,2}((0,\infty)\times\mathbb{R}^n)$ eine Lösung von

$$u_t - \Delta u = f$$

und $u(0,x) = 0$.

3.3.2 Mittelwerteigenschaft und Maximumprinzip

Definition 3.30 *Sei $x \in \mathbb{R}^n$, $t, r \in (0,\infty)$. Wir definieren*

$$E(t,x;r) = \{(s,y) \in \mathbb{R}^{1+n} | s < t, g_{t-s}(x-y) \ge r^{-n}\}$$

Satz 3.31 *$u \in C^{1,2}((0,t]\times U)$ sei eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung. Dann gilt*

$$u(t,x) = \frac{1}{4r^n}\int_{E(t,x,r)} u(s,y)\frac{|x-y|^2}{(t-s)^2}dyds$$

Wir definieren den parabolischen Rand:

$$\partial_P((0,t)\times U) = (\{0\}\times U)\cup([0,t)\times\partial U)$$

Satz 3.32 *Es sei U ein beschränktes Gebiet. Die Funktion $u \in C^{1,2}((s,t)\times U)\cap C([s,t]\times\overline{U})$ genüge der Wärmeleitungsgleichung. Dann ist*

$$\max_{(\tau,y)\in[s,t]\times\overline{U}} u(\tau,y) = \max_{(\tau,y)\in\partial_P(s,t)\times U} u(\tau,y)$$

Wird das Maximum im (τ,y) im Inneren angenommen, so ist u auf $[0,\tau]\times U$ konstant.

3.3.3 Regularität

Satz 3.33 *Sei u eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung in $(s,t)\times U$. Dann ist $u\in C^\infty((s,t)\times U)$.*

3.3.4 Spezielle Lösungen

Satz 3.34 *Es existiert eine Funktion $u\in C^\infty(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R})$ mit*

$$\mathit{supp}\ u = \{(t,x)|t\ge 0\}$$

und

$$u_t - \Delta u = 0 \qquad \text{in } \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$$

Sei $g\in C^\infty(\mathbb{R})$. Wir suchen eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung ($n=1$) der Form

$$u(t,x) = \sum_{j=0}^\infty g_j(t)x^j$$

mit $g_0(t)=g(t)$, $g_1=0$ und

$$g_j' = (j+2)(j+1)g_{j+2}$$

Mit $\alpha>1$ definieren wir

$$g(t) = \begin{cases} e^{-t^{-\alpha}} & t>0 \\ 0 & t\le 0\end{cases}$$

Behauptung: Es existiert $\theta>0$ mit

$$|g^{(j)}(t)| < \frac{j!}{(\theta t)^j}e^{-\frac{1}{2}t^{-\alpha}} \tag{3.25}$$

für $t>0$.

Damit ist

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty}\left|\frac{g^{(k)}(t)}{(2k)!}\right| &\leq \sum_{k=0}^{\infty}\frac{|x|^{2k}}{k!(\theta k)^k}e^{-\frac{1}{2}t^{-\alpha}} \\ &= \exp\left(\frac{1}{t}\left(\frac{|x|^2}{\theta}-\frac{1}{2}t^{1-\alpha}\right)\right)\end{aligned}$$

und die Reihe und ihre Ableitungen konvergieren gleichmäßig.

Beweis von (3.25). Die Funktion $g(t)$ ist die Einschränkung der holomorphen Funktion

$$z \to e^{-z^{-\alpha}}$$

in dem Sektor $\{|arg(z)| < \frac{\pi}{2\alpha}$ und in $\{|arg(z)| < \frac{\pi}{4\alpha}\}$ ist

$$\mathrm{Re} z^{-\alpha} > \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathrm{Re} z)^{-\alpha}$$

Wir wählen θ klein und erhalten die Abschätzung als Koonsequenz des Cauchyschen Integralsatzes

$$g^{(k)}(t) = \frac{k!}{2\pi i}\int_{\partial B_{\theta t}(t)}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-t)^{k+1}}d\zeta$$

die Behauptung.

3.3.5 Die Energieabschätzung

Sei U ein beschränktes Gebiet, das den Voraussetzungen des Satzes von Gauß genügt. Die Funktion $u \in C_b^2([t_1,t_2]\times\mathbb{R}^n$ sei eine Lösung des Randanfangswertproblems

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u = f, &\qquad (0,T)\times U \\ u = 0 &\qquad [0,T]\times\partial U \\ u(0,x) = u_0(x) &\qquad U \end{aligned}$$

mit $h = 0$. Dann gilt

$$\frac{1}{2}\int_U u^2(t,x)dx + \int_0^t\int_U|\nabla_x u(s,x)|^2 dxds = \frac{1}{2}\int_U u_0^2(x)dx + \int_0^t\int_U fudx\,dt.$$

wobei die rechte Seite mit der Cauchy-Schwartzschen Ungleichung abgeschätzt werden kann. Insbesondere erhalten wir einen alternativen Beweis der Eindeutigkeit.

Wir erhalten

$$\frac{1}{2}\|u(t)\|_{L^2}^2 + \|\,|\nabla u|\,\|_{L^2}^2 \leq \|u_0\|_{L^2}^2 + 2\left(\int_0^t\|f(s)\|ds\right)^2.$$

3.3.6 Eindeutigkeit für $V = \mathbb{R}^n$

Satz 3.35 *Sei $u \in C^{1,2}((0,T]\times\mathbb{R}^n)\cap C([0,T]\times\mathbb{R}^n)$ eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung*

$$u_t - \Delta u = f \qquad \text{in } (0,T)\times\mathbb{R}^n$$

mit

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} u(0,x) = M < \infty$$

und, für ein $A > 0$

$$u(t,x) \leq Ae^{A|x|^2}.$$

Dann gilt immer

$$u(t,x) \leq M$$

Satz 3.36 *Sei $u_0 \in C(\mathbb{R}^n)$, $f \in C((t_1,t_2)\times\mathbb{R}^n)$, $u,v \in C^{1,2}((0,T)\times\mathbb{R}^n)\cap C([0,T]\times\mathbb{R}^n)$ und*

$$u_t - \Delta u = v_t - \Delta v$$
$$u(0,x) = v(0,x) = u_0(x)$$
$$|u(t,x)| + |v(t,x)| \leq e^{A|x|^2}$$

Dann ist $u = v$.

Satz 3.37 *Es seien $u,v \in C^{1,2}((0,T]\times\mathbb{R}^n)$ mit*

$$u_t - \Delta u = v_t - \Delta v$$

$$|u| + |v| + |u_t| + |v_t| + |Du| + |Dv| \leq Ce^{\frac{|x|^2}{(8+\varepsilon)(T-t)}},$$

$V \subset \mathbb{R}^n$ offen und nichtleer, und $u(T,x) = v(T,x)$ für $x \in V$. Dann ist $u = v$.

3.4 Die Wellengleichung

Wir betrachten die Wellengleichung

$$u_{tt} - \Delta u = 0 \qquad \text{in } \mathbb{R}\times U$$

und die inhomogene Gleichung

$$u_{tt} - \Delta u = f$$

wobei U eine offene Menge ist.

3.4.1 Die d'Alembertsche Formel

Satz 3.38 *Sei $g \in C^2(\mathbb{R})$ und $h \in C^1(\mathbb{R})$. Dann existiert genau eine zweimal stetig differenzierbare Lösung der Wellengleichung mit $u(0,x) = g(x)$ und $u_t(0,x) = h(x)$. Sie wird für $t \geq 0$ durch die Formel*

$$u(t,x) = \frac{1}{2}(g(x+t) + g(x-t)) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} h(y)dy$$

gegeben.

3.4.2 Die Euler-Poisson-Darbouxgleichung

Wir betrachten $u \in C^m([0,\infty) \times \mathbb{R}^n)$

$$u_{tt} - \Delta u = 0$$

$$u(0,x) = g(x) \qquad u_t(0,x) = h(x)$$

und definieren für $x \in \mathbb{R}^n$

$$U(t,x;r) = (\mathcal{H}^{n-1}(\partial B_r(x)))^{-1} \int_{\partial B_r(x)} u(t,y) d\mathcal{H}^{n-1}(y)$$

und

$$G(x;r) = (\mathcal{H}^{n-1}(\partial B_r(x)))^{-1} \int_{\partial B_r(x)} g(y) d\mathcal{H}^{n-1}(y)$$

$$H(x;r) = (\mathcal{H}^{n-1}(\partial B_r(x)))^{-1} \int_{\partial B_r(x)} h(y) d\mathcal{H}^{n-1}(y)$$

Lemma 3.39 *Es gilt*

$$U_{tt} - U_{rr} - \frac{n-1}{r} U_r = 0$$

$$U(0,.) = G, U_t(0,.) = H$$

Der Fall $n = 3$. Sei $\tilde{U} = rU$. Dann erhalten wir

$$\tilde{U}_{tt} - \tilde{U}_{rr} = 0$$

$$\tilde{U}(0,.) = rG \qquad \tilde{U}_t(0,.) = rH$$

und wir erhalten die Kirchhoffsche Formel

$$u(t,x) = (\mathcal{H}^{n-1}(\partial B_t(x)))^{-1} \int_{\partial B_t(x)} th(y) + g(y) + \nabla g(y) \cdot (y-x) d\mathcal{H}^{n-1} \tag{3.26}$$

und für $n = 2$

$$u(t,x) = \frac{1}{2} \lambda^2(B_t(x))^{-1} \int_{B_t(x)} \frac{tg(y) + t^2 h(y) + t \nabla g(y) \cdot (y-x)}{(t^2 - |y-x|^2)^{1/2}} dy. \tag{3.27}$$

3.4.3 Duhamels Prinzip

Duhamels Prinzip liefert eine Lösung der inhomogenen Gleichung.

Satz 3.40 *Sei $f \in C^{[n/2]+1}([0,\infty) \times \mathbb{R}^n)$ und $u^s(t,x)$ sei als Lösung von*

$$u^s_{tt} - \Delta u^s = 0 \qquad \text{in } (s,\infty) \times \mathbb{R}^n$$

$$u^s(s,x) = 0 \qquad u^s_t(s,x) = f(s,x)$$

definiert. Mit

$$u(t,x) = \int_0^t u^s(t,x) ds$$

gilt

$$u_{tt} - \Delta u = f$$

$$u(0,x) = 0 \qquad u_t(0,x) = 0$$

3.4.4 Energiemethoden

We betrachten das Randanfangswertproblem

$$\begin{aligned} u_{tt} - \Delta u &= f && \text{in } (0,T) \times U \\ u &= h && \text{in } (0,T) \times \partial U \\ u(0,x) &= u_0(x) && \text{für } x \in U \\ u_t(0,x) &= u_1(x) && \text{für } x \in U \end{aligned}$$

Satz 3.41 *Es existiert höchstens eine Lösung $u \in C^2([0,T] \times \overline{U})$ dieses Problems.*

Konsequenzen: Endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit. Ableitungen in L^2.

Kapitel 4

Das Cauchyproblem

4.1 Skalare Gleichungen erster Ordnung

Wir betrachten Gleichungen der Form

$$u_t + \sum_{i=1}^{n} a_i(t,x,u)\partial_i u = f(t,x,u)$$

mit

$$u(0,x) = u_0$$

wobei a_i, f und u_0 gegebene stetig differenzierbare Funktionen sind. Dieses Problem heißt Anfangswertproblem oder Cauchyproblem.

Satz 4.1 *Sei $u(t,x)$ eine Lösung und $z_0 = u(t_0,x_0)$. Die* charakteristische Kurve *sei als Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung*

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{a}(t,x,z) \\ f(t,x,z) \end{pmatrix}$$

mit dem Anfangswert $\begin{pmatrix} x_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ *bei t_0 gegeben. Dann ist*

$$u(t,x(t)) = z(t)$$

für t in der Nähe von t_0.

Wir erhalten eine Lösung des Anfangswertproblems:

1. Sei $\Phi(t,y,z)$ die Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung mit dem Anfangswert (y,z) zur Zeit $t_0 = 0$. Wir setzen

$$\psi(t,y) = \Phi(t,y,u_0(y)).$$

2. Sei $x(t,y)$ der Vektor der ersten n Komponenten von ψ. Dann ist
$$y \to x(t,y)$$
für $t=0$ die Identität und nach dem Satz über implizite Funktionen für kleine t invertierbar (für x in einer kompakten Menge). Sei $y(t,x)$ die Umkehrfunktion.

3. Es sei $v(t,y)$ die letzte Komponente von ψ. Dann ist
$$u(t,x) = v(t, y(t,x))$$
die Lösung des Cauchyproblems.

Beispiel: Die Burgersgleichung.

4.2 Der Satz von Cauchy-Kovalevskaya

4.2.1 Nichtcharakteristische Hyperflächen

Sei
$$0 = F(x,u,Du,\dots,D^k u) = A(x,u,Du,\dots,D^{k-1}u)D^k u + f(x,u,Du,\dots,D^{k-1}u) \tag{4.1}$$
eine (vektorwertige) quasilineare Differentialgleichung der Ordnung k.

Es seien $S \subset \mathbb{R}^n$ eine Hyperfläche (Mannigfaltigkeit der Dimension $n-1$) und $u_0 : S \to \mathbb{R}^m$ k mal stetig differenzierbar. Dann heißt S nichtcharakteristisch, wenn für ein nirgends tangentiales Vektorfeld X die Gleichung (4.1) in der Form
$$(\partial_X)^k u = B(u,\dots,D^{k-1}u)D(D^{k-1}u|_S) \tag{4.2}$$
geschrieben werden kann. Ist die Gleichung linear, so hängt der Begriff nicht von u_0 ab.

Nach einer Koordinatentransformation dürfen wir annehmen, dass lokal $S \subset \{x|x_n = 0\}$. Dann hat (4.2) die Form
$$\partial^k_{x_n} u = \sum_{|\alpha|=k,\alpha_n\neq k} B_\alpha(x,u,\dots,D^{k-1}u)\partial^\alpha u + f(x,,u,Du,\dots D^{k-1}u). \tag{4.3}$$

Wie bei gewöhnlichen Differentialgleichung kann diese Gleichung auf ein System erster Ordnung zurückgeführt werden:
$$\partial_t u = \sum_{i=1}^n A_i(t,x,u)\partial_i u + f(t,x,u) \tag{4.4}$$

Für lineare Gleichungen
$$\sum_{|\alpha|\le k} A_\alpha(x)\partial^\alpha u = f$$

ist für $x \in U$, $\xi \in \mathbb{R}^n$

$$a(x,\xi) = \sum_{|\alpha|\leq k} A_\alpha (i\xi)^\alpha$$

das Symbol und

$$a_0(x,\xi) = \sum_{|\alpha|=k} A_\alpha (i\xi)^\alpha$$

das Hauptsymbol. Dann ist $S \subset \mathbb{R}^n$ genau nicht charakteristisch, wenn

$$a_0(x,\vec{n})$$

invertierbar ist für $x \in S$ und $\vec{n}$ ein Normalenvektor.

Eine Gleichung heißt *elliptisch*, wenn jede Hyperfläche nichtcharakteristisch ist, bzw. wenn

$$a_0(x,\xi)$$

invertierbar ist für alle x und $\xi \neq 0$.

4.2.2 Analytische Funktionen

Definition 4.2 *Es seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $u \in C^\infty(U)$. Dann heißt u analytisch in $x_0 \subset U$, falls die Taylorreihe in einer Umgebung von x_0 gegen u konvergiert. Sie heißt analytisch in U, falls u in jedem Punkt analytisch ist. Wir schreiben $f \in C^\omega(U)$.*

Satz 4.3 *Sei $f \in C^\infty(U)$. Dann ist f genau dann analytisch in x_0, falls Zahlen $\varepsilon > 0$, $r > 0$ und $M > 0$ existieren mit*

$$|\partial^\alpha f(x)| \leq M\alpha! r^{-|\alpha|} \tag{4.5}$$

für jeden Multiindex α und $|x - x_0| < \varepsilon$.

Beweis: r_0 sei der kleinste Konvergenzradius von $f_{\vec{n}} = f(x_0 + t\vec{n})$ für jeden Vektor $\vec{n}$ der Länge 1. Wir wählen $r < r_0$.

Definition 4.4 *Wir sagen, $f \in C_{M,r}(x)$, falls die Abschätzung*

$$|\partial^\alpha f(x)| \leq M|\alpha|! r^{-|\alpha|} \tag{4.6}$$

gilt.

Satz 4.5 *Ist $f \in C^\omega(U)$ und ist U zusammenhängend, so bestimmt die Taylorreihe in einem Punkt f eindeutig.*

Beweis: Folgt aus der Aussage für $n = 1$, Funktionentheorie, entlang Wegen.

Definition 4.6 *Es seien $f, F \in C^\infty(B_\varepsilon(0))$. Wir sagen, F majorisiert f ($f << F$), falls*

$$|\partial^\alpha f(0)| \leq \partial^\alpha F(0).$$

Satz 4.7 *Sei $f \in C^\infty(B_\varepsilon(0))$. Dann ist f genau dann in $C_{M,r}(0)$, wenn*

$$\phi = \frac{Mr}{r - x_1 - x_2 - \dots x_n}$$

die Funktion f majorisiert. In diesem Fall ist $f(0) = 0$ genau dann wenn f durch $\phi - M$ majorisiert wird.

Wir verwenden analoge Begriffe für vektorwertige Funktionen.

Satz 4.8 *Seien $0 \in U \subset \mathbb{R}^n$, $0 \in V \subset \mathbb{R}^m$, $f, F \in C^\infty(U, V)$, $f(0) = F(0) = 0$, $g, G \in C^\infty(V)$, $f_j << F_j$ und $g_l << G_L$. Dann folgt $(g \circ f)_l << (G \circ F)_l$.*

Insbesondere folgt aus $f \in C_{M,r}(y)$ mit Werten in $\mathbb{R}^m$ und $g \in C_{\mu,\rho}(v)$ $v = f(y)$

$$g \circ f \in C_{\mu,\rho r/(mM+\rho)}(y)$$

Das Produkt analytischer Funktionen analytisch.

4.2.3 Der Satz von Cauchy-Kowalevskaya

Theorem 4.9 *Die Funktionen a^i_{jk} und b_j seien analytische Funktionen in einer Umgebung der Null in $\mathbb{R}^{N+n}$ und u_0 sei analytisch in einer Umgebung der Null in $\mathbb{R}^n$ mit $u_0(0) = 0$. Dann hat die Differentialgleichung*

$$\frac{\partial}{\partial t} u_j = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^N a^i_{jk}(t, x, u) \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + b_j(t, x, u)$$

und $u(0, x) = u_0(x)$ genau eine analytische Lösung in einer Umgebung der Null.

1. Reduktion: Wir dürfen annehmen: $u_0 = 0$ ($u \to u - u_0$) und a und b hängen nicht von t ab (wir addieren eine Komponente t zu u und die DGL $\frac{du^{N+1}}{dt} = 1$.

2. Durch Differentiation und Anwenden der Gleichung erhalten wir Ausdrücke für höhere Ableitungen. Damit können wir die Koeffizienten der Potenzreihe identifizieren und müssen Konvergenz nachweisen.

3. Alle Daten seien in $C_{M,r}$, ϕ wie oben. Dann werden die Koeffizienten von ϕ majorisiert. Wir betrachten das Problem

   $$\partial_t \psi_j = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^N \phi \frac{d\psi_k}{\partial x_i} + \psi$$

   $$\psi(0, x) = 0$$

   Dann wird $u_j(0)$ durch ψ_j in Null majorisiert und es genügt, eine Lösung des obigen Problems zu konstruieren.

4. Dieses Problem hat eine Lösung der Form

$$\psi_j(t,x) = \psi(t, x_1 + x_2 + \dots x_n)$$

wobei

$$\psi_t = \frac{Mr}{r - s - N\psi}(1 + Nn\partial_s\psi)$$
$$\psi(s,0) = 0$$

Eine Lösung ist

$$\psi(t,s) = \frac{1}{N(n+1)}(r - s - \sqrt{(r-s)^2 - 2(n+1)MNrt}).$$

Kapitel 5

Soboleväume

In diesem Kapitel betrachten wir Sobolevräume und Hilberträume. Wir erhalten die Existenz von schwachen Lösungen verschiedener Differentialgleichungen.

5.1 Distributionen und Sobolevräume

Wir schreiben $\mathcal{D}(U) = C_0^\infty(U)$.

Definition 5.1 *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen.*

1. *Wir sagen, $\phi_j \to \phi$ in $C_0^\infty(U)$ falls*
   (a) *Eine kompakte Menge $K \subset U$ existiert mit*
   $$supp\ \phi_j \subset K$$
   für alle j.
   (b) *$\partial^\alpha \phi_j \to \partial^\alpha \phi$ gleichmäßig für alle Multiindices α.*
2. *$T : C_0^\infty(U) \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$ linear ist eine Distribution, wenn aus $\phi_j \to \phi$ in $C_0^\infty(U)$ folgt $T(\phi_j) \to T(\phi)$.*
3. *Der Raum aller Distributionen wird mit $\mathcal{D}^*(U)$ bezeichnet.*
4. *Wir schreiben $T_j \to T$ in $\mathcal{D}^*(U)$ falls*
   $$T_j(\phi) \to T(\phi)$$
   für alle $\phi \in \mathcal{D}(U)$.
5. *Sei $f \in C^\infty(U)$ und $T \in \mathcal{D}^*(U)$. Das Produkt wird durch*
   $$fT(\phi) = T(f\phi)$$
   für $\phi \in \mathcal{D}(U)$ definiert.

6. *Wir identifizieren $\mathcal{D}(U)$ mit einer Teilmenge von $\mathcal{D}^*(U)$ durch*

$$T_\phi(\psi) = \int_U \phi\psi dx$$

7. *Sei α ein Multiindex. Wir definieren die* schwache Abbleitung

$$\partial^\alpha T(\phi) = (-1)^{|\alpha|} T(\partial^\alpha \phi)$$

8. *Der Träger einer Distribution T ist definiert als das Komplement der grösten offenen Teilmenge V mit*

$$T(\phi) = 0$$

für supp $\phi \subset V$.

9. *Ist $T \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ und $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, so sei*

$$\phi * T = T * \phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$$

durch

$$T(\phi(x - .))$$

definiert.

Beispiele:

1. $f \in L^1_{loc}$, $T_f(\phi) = \int f\phi dx$. Diese Abbildung ist injektiv.
2. Das Diracmaß für $x_0 \in U$, $\delta_{x_0}(\phi) = \phi(x_0)$.
3. Sei g die Fundamentallösung des Laplaceoperators. Dann gilt

$$-\Delta g = \delta_0$$

4. Sei

$$g(t,x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } t \leq 0 \\ (2\pi t)e^{-|x|^2/(4t)} & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann ist

$$(\partial_t - \Delta)g = \delta_0$$

5. Analog läßt sich die Fundamentallösung der Wellengleichung als Distribution definieren.
6. Sei $n = 1$ und

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x \leq 0 \\ 1 & \text{falls } x > 0 \end{cases}$$

Dann ist $H' = \delta_0$.

Es gilt immer

$$\partial^\alpha(\partial^\beta T) = \partial^\beta(\partial^\alpha T)$$

Aus $T_j \to T$ folgt $\partial^\alpha T_j \to \partial^\alpha T$ in $\mathcal{D}^*$. Es gilt die Leibnizregel: Ist $\phi \in C^\infty(U)$ und $T \in \mathcal{D}^*$, so gilt

$$\partial_i(\phi T) = (\partial_i \phi)T + \phi \partial_i T.$$

Ist $\psi : U \to V$ glatt und $T \in \mathcal{D}^*(V)$, so definiert

$$\psi^* T(\phi) = T(\phi \circ \psi)$$

die zurückgezogene Distribution.

Satz 5.2 *1. Sei j_ε eine Diracschar von C^∞ Funktionen mit Träger in $B_\varepsilon(0)$ und $T \in \mathcal{D}^*(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt*

$$j_\varepsilon * T \to T$$

2. $\mathcal{D} \subset \mathcal{D}^*$ ist dicht.

3. Ist U ein Gebiet, $T \in \mathcal{D}^*(U)$ und $\partial_i T = 0$ für $1 \le i \le n$, so ist T konstant.

5.2 Definition der Sobolevräume

Definition 5.3 *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $1 \le p \le \infty$. Der Sobolevraum $W^{1,p}(U)$ ist der Teilraum von $L^p(U)$ von Funktionen f, für die $\partial_i f \in L^p(U)$, mit der Norm*

$$\|f\|^p_{W^{1,p}(U)} = \|f\|^p_{L^p(U)} + \sum_{i=1}^n \|\partial_i f\|^p_{L^p(U)}$$

falls $p < \infty$ und

$$\|f\|_{W^{1,\infty}(U)} = \max\{\|f\|_{L^\infty(U)}, \sum_{i=1}^n \|\partial_i f\|_{L^\infty(U)}\}$$

Analog definieren wir die Sobolevräume $W^{k,p}(U)$, $k \in \mathbb{N}$. Ist $V \subset U$ und $f \in W^{k,p}(U)$, so folgt $f \in W^{k,p}(V)$. Für $\phi \in C^1_b(U)$ und $f \in W^{1,p}(U)$ ist $\phi f \in W^{1,p}(U)$ und es gilt die Leibnizregel

$$\partial_i(\phi f) = (\partial_i \phi) f + \phi \partial_i f.$$

Ist $\psi : U \to V$ ein C^1 Diffeomorphismus, und $f \in W^{1,p}(U)$, so gilt die Kettenregel

$$\partial_{y_i}(f \circ \psi)(y) = \sum_{j=1}^n \frac{df}{\partial x_i}\bigg|_{\psi(y)} \frac{\partial x_j}{\partial y_i}(y) \tag{5.1}$$

Wir schreiben

$$f_m \to f \quad \text{in } W^{k,p}(U)$$

für die Konvergenz in $W^{k,p}$. Konvergenz in $W^{k,p}(U)$ impliziert Konvergenz in $L^p(U)$ und auch in $\mathcal{D}^*(U)$.

Satz 5.4 *Sei $1 \leq p \leq \infty$. Der Raum $W^{k,p}(U)$ ist ein Banachraum.*

Definition 5.5 *Wir definieren $W_0^{1,p}(U)$ als den Abschluß von $\mathcal{D}(U)$ in $W^{1,p}(U)$. Funktionen in $W_0^{1,p}(U)$ können durch Null zu Funktionen in $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ fortgesetzt werden.*

Satz 5.6 *Für $1 \leq p < \infty$ ist $\mathcal{D}(U) \subset W_0^{1,p}(U)$ dicht.*

Definition 5.7 *Sei $1 \leq p < \infty (= \infty)$, $1/p + 1/q = 1$. Wir sagen, (f_j) konvergiert schwach $(*)$ gegen f in $L^p(\mu)$, falls*

$$\int f_j g d\mu \to \int f g d\mu.$$

Wir sagen (f_j) konvergiert schwach $(*)$ gegen f in $W^{k,p}(U)$, falls f_j gegen f und alle Ableitungen bis zur Ordnung k schwach $(*)$ gegen die Ableitungen von f konvergieren.

Schwache Konvergenz in $W^{k,p}(U)$ impliziert schwache Konvergenz in $L^p(U)$ und damit in $\mathcal{D}^*$. Konvergieren f_j und alle Ableitungen der Ordnung $\leq k$ schwach in $L^p(U)$, so konvergiert f_j schwach gegen f in $W^{k,p}(U)$. Wir schreiben

$$f_j \rightharpoonup f \qquad \text{in } W^{k,p}(U)$$

bzw

$$f_j \rightharpoonup^* f \qquad \text{in } W^{k,\infty}(U)$$

Satz 5.8 *Sei $1 < p \leq \infty$ und $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Jede beschränkte Folge in $L^p(U)$ enthält eine schwach$(*)$ konvergente Teilfolge.*

Sei M die Anzahl der Multiindizes der Länge $\leq k$. Die Abbildung

$$W^{k,p}(U) \to (L^p)^M$$

$$f \to (\partial^\alpha f)_{|\alpha| \leq k}$$

ist eine Isometrie auf einen abgeschlossenen Teilraum.

Satz 5.9 *Sei $1 < p \leq \infty$, $k \in \mathbb{N}$ und $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Jede beschränkte Teilfolge in $W^{k,p}(U)$ enthält eine schwach$(*)$ konvergente Teilfolge.*

Satz 5.10 *Es sei $1 < p \leq \infty$, (f_j) eine beschränkte Folge in $W^{k,p}(U)$, die in $\mathcal{D}^*$ gegen $f \in \mathcal{D}^*(U)$ konvergiert. Dann ist $f \in W^{k,p}(U)$ und $f_j \rightharpoonup f$ in $W^{k,p}(U)$.*

Satz 5.11 *Sei $k \in \mathbb{N}$, $1 \leq p \leq \infty$, (f_j) konvergiere schwach $(*)$ gegen f in $W^{k,p}(U)$. Dann gilt*

$$\|f\|_{W^{k,p}(U)} \leq \liminf_{j \to \infty} \|f_j\|_{W^{k,p}(U)}$$

Satz 5.12 *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $k \in \mathbb{N}$, $1 \leq p < \infty$. Dann enthalten die Räume $W^{k,p}(U)$ eine abzählbare dichte Teilmenge.*

5.3 Fortsetzungen

Seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen und $k \geq 1$. Wir sagen $\phi : U \to V$ ist ein C^k Diffeomorphismus, falls $\phi : U \to V$ invertierbar ist und ϕ und ϕ^{-1} k mal stetig differenzierbar sind.

Definition 5.13 *Wir sagen, die offene Menge U hat einen Lipschitzrand in einer Umgebung von $x_0 \subset \partial U$, falls eine Umgebung V von x_0, ein Einheitsvektor $\vec{n}$ und eine Lipschitzfunktion h existieren mit*

$$V \cap U = \{x \in V : \vec{n} \cdot x = h(x - (\vec{n} \cdot x)\vec{n})\}$$

Bemerkung: C^k-Rand.

Satz 5.14 *Es seien $U \subset \mathbb{R}^n$ ein offenes beschränktes Gebiet mit Lipschitzrand, $1 \leq p \leq \infty$, $k \geq 0$. Dann existiert eine lineare Abbildung $E : W^{k,p}(U) \to W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$ mit $Ef(x) = f(x)$ für fast alle $x \in U$ und*

$$\|Ef\|_{W^{k,p}(\mathbb{R}^n)} \leq c\|f\|_{W^{k,p}(U)}$$

Beweis nur für C^k-Ränder. Sonst: Stein, *Singular integrals*.

5.4 Approximation von Sobolevfunktionen

Für $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\varepsilon > 0$ sei

$$U_\varepsilon = \{x \in U | d(x, \mathbb{R}^n \backslash U) > \varepsilon\}$$

Hat $\eta \in L^1(\mathbb{R}^n)$ den Träger in $B_\varepsilon(0)$, so ist

$$f * \eta$$

in U_ε für alle Funktionen $f \in L^1_{loc}$ definiert und es gilt

$$\|f * \eta\|_{L^p(U_\varepsilon)} \leq \|f\|_{L^p(U)} \|\eta\|_{L^1}.$$

Satz 5.15 *Sei $1 \leq p < \infty$, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\eta_j \in C^\infty$ eine Diracschar mit Träger in $B_{1/j}(0)$ und $\varepsilon > 0$. Ist $j\varepsilon > 1$ und $f \in W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$, so ist $f * \eta_j \in C^\infty(U_\varepsilon)$ und*

$$f * \eta_j \to f \qquad \text{in } W^{k,p}(U_\varepsilon)$$

Satz 5.16 *Sei $1 \leq p < \infty$, $U \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und offen, $f \in W^{k,p}(U)$. Dann existieren Funktionen $f_j \in C^\infty(U) \cap W^{k,p}(U)$ mit*

$$f_j \to f \qquad \text{in } W^{k,p}(U).$$

Satz 5.17 *Ist U offen, beschränkt mit Lipschitzrand, $1 \leq p < \infty$, $k \in \mathbb{N}$, $f \in W^{k,p}(U)$ so können wir $f_j \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ wählen.*

Bemerkung: Die Aussagen von Satz (5.15) - (5.17) bleiben richtig für $p = \infty$, wenn die Konvergenz durch schwach$*$ Konvergenz ersetzt wird.

5.5 Finite Differenzen und die Poincareungleichung

Für $h \in \mathbb{R}^n$ und $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ sei

$$f_h(x) = f(x-h)$$

Satz 5.18 *Sei $1 \le p \le \infty$. Ist $f \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ so gilt*

$$\|f_h - f\|_{L^p} \le |h| \| |\nabla f| \|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Umgekehrt: Ist $1 < p \le \infty$, $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ und

$$\sup_{h\to 0} \left\| \frac{f_h - f}{|h|} \right\|_{L^p} < \infty$$

so ist $f \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ und

$$\lim_{t\to 0} \left\| \frac{f_{te_j} - f}{|t|} \right\|_{L^p} = \|\partial_{x_j} f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

Satz 5.19 *Die Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ sei beschränkt (mit Durchmesser d) und offen. Dann gilt für $f \in W_0^{1,p}(U)$*

$$\|f\|_{L^p(U)} \le d \| |\nabla f| \|_{L^p(U)} \tag{5.2}$$

5.6 Kompakte Teilmengen von $L^p(U)$

Satz 5.20 *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $1 \le p < \infty$, $A \subset L^p(U)$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

1. *A ist präkompakt.*
2. *A ist beschränkt und für $\varepsilon > 0$ existieren $\delta > 0$ und $R > 0$ mit*
   (a) $\|f\|_{L^p((U\setminus U_\delta)\cap B_R(0))} < \varepsilon$
   (b) $\|f_h - f\|_{L^p(U_\delta)} < \varepsilon$ *für* $|h| < \delta$

   falls $f \in A$.

Bemerkung: Die Rückrichtung gilt auch für $p = \infty$.

Satz 5.21 *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $1 \le p < \infty$.*

1. *Die Kugel vom Radius R*
   $$A = \{f \in W_0^{1,p}(U) | \|f\|_{W^{1,p}(U)} \le R\}$$
   ist präkompakt in $L^p(U)$.
2. *Hat U einen Lipschitzrand, so ist die Kugel*
   $$A = \{f \in W^{1,p}(U) | \|f\|_{W^{1,p}(U)} \le R\}$$
   präkompakt in $L^p(U)$.

5.7 Sobolev- und Morreyungleichungen

Lemma 5.22 *Seien* $1 \le p \le r \le q \le \infty$ *und*

$$\frac{1}{r} = \frac{\lambda}{p} + \frac{1-\lambda}{q}$$

Dann gilt immer

$$\|f\|_{L^r(\mu)} \le \|f\|_{L^p(\mu)}^{\lambda} \|f\|_{L^q(\mu)}^{1-\lambda}$$

Aus $0 \le s_0 \le s \le s_1 \le 1$ *und*

$$s = \lambda s_0 + (1-\lambda)s_1$$

folgt

$$\|f\|_{C^s} \le \|f\|_{C^{s_0}}^{\lambda} \|f\|_{C^{s_1}}^{1-\lambda}$$

Satz 5.23 *Sei* $1 \le q < n$,

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{n},$$

$$f \in W^{1,q}(\mathbb{R}^n).$$

Dann ist $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ *und*

$$\|f\|_{L^p} \le c(n)q\|f\|_{W^{1,q}(\mathbb{R}^n)}$$

Satz 5.24 *Sei* $n < p \le \infty$ *und* $f \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. *Dann sind alle Punkte Lebesguepunkte. Wir identifizieren* f *mit dem Vertreter, der an jedem Punkt mit dem Limes des Mittelwerts im Lebesguepunkt übereinstimmt. Dann gilt*

$$\sup_{x \ne y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|^{1-n/p}} \le c(n,p)\||\nabla f|\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

Außerdem ist f *fast überall differenzierbar und die schwache und die klassische Ableitung stimmen fast überall überein.*

Genauer: Aus $f \in W^{1,p}(B_{2R}(x_0))$, $x, y \in B_R(x_0)$ folgt die Abschätzung von Morrey

$$|f(x) - f(y)| \le c(n,p)R^{1-n/p}\||\nabla f|\|_{L^p(B_R(x_0))}.$$

Daraus folgt der Satz von Rademacher:

Satz 5.25 *Es sei* $U \subset \mathbb{R}^n$ *offen und* $f : U \to \mathbb{R}$ *Lipschitzstetig. Dann ist* f *fast überall differenzierbar. Besitzt* U *einen Lipschitzrand, so gilt*

$$C^{0,1}(U) = W^{1,\infty}(U)$$

mit äquivalenten Normen.

Satz 5.26 *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt mit Lipschitzrand, $1 \le p \le \infty$,*

$$\frac{1}{q} + \frac{1}{n} > \frac{1}{p}$$

Dann ist

$$\{f \in L^q(U) | \|f\|_{W^{1,p}(U)} \le 1\} \subset L^q(U)$$

präkompakt. Ist $p > n$ und

$$0 < s < 1 - \frac{n}{p}$$

so ist

$$\{f \in C^s(U) | \|f\|_{W^{1,p}(U)} \le 1\} \subset C^s(U)$$

präkompakt.

5.8 Die Kettenregel

Satz 5.27 *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt mit Lipschitzrand, $\phi \in C^{0,1}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $1 \le p \le \infty$ und $f \in W^{1,p}(U)$. Dann ist $\phi \circ f \in W^{1,p}(U)$ und es gilt fast überall*

$$\partial_{x_i}(\phi \circ f) = (\phi' \circ f) \frac{\partial}{\partial x_i} f$$

Beweisschritt: $N \subset U_j$, U_j offen, $U_{j+1} \subset U_j$ vom Maß $< 1/j$, $h_j = \chi_{U_j}$, $\phi_j(t) = \int_0^t h(s) ds$ folgt

$$\phi_j \circ f \to 0 \text{ in } L^p(U)$$

beschränkt in $W^{1,p}(U)$, also konvergiert $\phi_j \circ f$ im Distributionssinn gegen Null. Aus $A \subset \cap_j U_j$ folgt daher

$$\chi_N \circ f \nabla f = 0$$

fast überall.

5.9 Spuren

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt mit Lipschitzrand und X ein C^1 Vektorfeld mit $< X, \vec{n} > \neq 0$ am Rand. Nach dem Satz von Gauß (für C^1 Ränder) gilt

$$\int_U \text{div } (fX) dx = \int_{\partial U} fX \cdot \vec{n} d\mathcal{H}^{n-1}$$

In dieser Sitzung definieren wir die Spur von Funktionen.

Sei $f \in W^{1,p}(U)$, $1 \le p \le \infty$. Wir definieren die Spur $g \in L^p(\partial U)$ durch

$$\int_{\partial U} X \cdot \vec{n} g \phi d\mathcal{H}^{n-1} = \int_U \text{div } (fX\phi) dx$$

für $\phi \in C^1(U)$

Bemerkung: Nur C^1 Ränder. Es folgt aus der Definition des Hausdorffmaßes, daß das Integral über Lipschitzränder wohldefiniert ist. Die Areaformel gilt auch für Lipschitzränder bzw Lipschitzfunktionen. (Ohne Beweis)

Satz 5.28 *Sei $1 \leq p \leq \infty$, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen beschränkt, mit Lipschitzrand. Es gilt:*

$$\|f|_{\partial U}\|_{L^p(\partial U)} \leq c\|f\|_{W^{1,p}(U)}.$$

Beweis: Nur C^1 Rand.

Satz 5.29 *Sei U beschränkt, offen mit Lipschitzrand, $1 \leq p < \infty$, $k \in \mathbb{N}$. Dann ist*

$$W_0^{1,p}(U) = \{f \in W^{1,p}(U) | f|_{\partial U} = 0\}.$$

5.10 Der Fall $p = 2$ und Hilberträume

Satz 5.30 *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $k \in \mathbb{N}$. Die Abbildung*

$$W^{k,2}(U;\mathbb{C}) \times W^{k,2}(U;\mathbb{C}) \ni (f,g) \to \sum_{|\alpha| \leq k} \int_U \partial^\alpha f \overline{\partial^\alpha g} dx =: < f,g >_{W^{k,2}(U)} \in \mathbb{C}$$

definiert ein komplexes Skalarprodukt, mit dem die Räume $W^{k,2}(U;\mathbb{C})$ separable Hilberträume werden. Ist

$$\phi \in L(W^{k,2}(U;\mathbb{C});\mathbb{C})$$

eine stetige lineare Abbildung, so existiert genau ein $g \in W^{k,2}(U;\mathbb{C})$ mit

$$\phi(f) = < f,g >_{W^{k,2}(U)}$$

für alle f. Es gilt außerdem: $\|\phi\| = \|g\|_{W^{k,2}(U)}$.

Im Folgenden sei H ein Hilbertraum mit Skalarprodukt $< .,. >$ und Norm $\|.\|$ und

$$A : H \times H \to \mathbb{C}$$

eine Abbildung, linear in der ersten Komponente, antilinear in der zweiten, mit

$$|A[f,f]| \leq C\|f\|_H \|g\|_H$$

$$\text{Re } A(f,f) \geq \delta \|f\|^2.$$

Der Satz von Lax-Milgram.

Satz 5.31 *Unter diesen Voraussetzungen existiert genau eine invertierbare stetige lineare Abbildung $T : H \to H$ mit*

$$A(Tf,g) = < f,g >$$

für alle $f,g \in H$.

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $a_{ij} \in L^\infty(U)$ $1 \le i, j \le n$ und $\kappa > 0$. Es gelte

$$\mathrm{Re} \sum_{i,j=1}^n a^{ij} \xi_i \xi_j \ge \kappa |\xi|^2 \text{ für fast alle } x \text{ und alle } \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Derartige Koeffizienten heißen elliptisch. Es seien

$$b_i^1, b_i^2 \in L^\infty(U), \qquad 1 \le i \le n$$

und

$$c \in L^\infty(U).$$

Für $\gamma \in \mathbb{C}$ betrachten wir die quadratische Form auf $W_0^{1,2}(U)$:

$$A_\gamma[f,g] = \int \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \partial_i f \overline{\partial_j g} + \sum_{i=1}^n (b_i^1 \partial_i f \overline{g} + b_i^2 f \overline{\partial_i g}) + (c+\gamma) f \overline{g} dx$$

Es gilt nun

$$|A_\gamma[f,g]| \le C \|f\|_{W_0^{1,2}(U)} \|g\|_{W_0^{1,2}(U)}$$

und

$$\mathrm{Re}\ A_\gamma[f,f] \ge \delta \||\nabla f|\|_{L^2}^2 - C \||\nabla f|\|_{L^2} \|f\|_{W_0^{1,2}} + \ \mathrm{Re}\ \gamma \|f\|_{L^2}^2$$

Ist $\gamma \in \mathbb{R}$, $\gamma \ge C^2$ so folgt

$$\mathrm{Re}\ A_\gamma[f,f] \ge \frac{\delta}{2} \||\nabla f|\|_{L^2}^2 + \frac{\gamma}{2} \|f\|_{L^2}^2$$

und A_γ erfüllt die Voraussetzungen des Lemmas von Lax-Milgram.

Sind $\gamma = 0$, $b_i^1 = 0$, $b_i^2 = 0$ und $c \ge 0$, so gilt

$$\mathrm{Re}\ A_0[f,f] \ge \delta \||\nabla f|\|_{L^2}^2 \ge \frac{\delta}{C} \|f\|_{W_0^{1,2}(U)}^2$$

wegen des Lemmas von Lax-Milgram. Sei $f \in L^2(U)$. Dann definiert $g \to \int f \overline{g} dx$ eine antilineare Abbildung von $W_0^{1,2}(U) \to \mathbb{C}$. Nach dem Satz von Lax Milgram existiert genau ein $Tf \in W_0^{1,2}(U)$ mit

$$A_0(Tf, g) = \int_U f \overline{g} dx$$

(Analog A_γ). Wir schreiben $u = Tf$. Für $\phi \in \mathcal{D}(U)$ gilt nun

$$A_\gamma(u, \phi) = \int_U f \overline{\phi} dx$$

und damit im Distributionssinn

$$-\sum_{j=1}^n \partial_j \Big(\sum_{i=1}^n a_{ij} \partial_i u + b_j^2 u\Big) + \sum_{i=1}^n b_i^1 \partial_i u + cu + \gamma u = f \tag{5.3}$$

Derartige Lösungen heißen schwache Lösungen. Sie sind unter den Voraussetzungen des Satzes von Lax-Milgram eindeutig unter Dirichletrandbedingungen:

$$u|_{\partial U} = 0.$$

Die Abbildung T ist kompakt als Abbildung von L^2 nach L^2: Ist f_j eine beschränkte Folge in L^2, so ist (Tf_j) eine beschränkte Folge in $W_0^{1,2}(U)$ und sie enthält daher eine in L^2 konvergente Teilfolge (nach Satz 5.21).

Wir betrachten L_γ von $W_0^{1,2}(U)$ in die linearen Abbildungen von $W_0^{1,2}(U)$ nach $\mathbb{C}$ mit

$$g \to \overline{A_\gamma[f,g]} = L_\gamma f(g)$$

Dann ist

$$L_\gamma T_\gamma f = f$$

und

$$T_\gamma L_\gamma f = f$$

d.h. $T_\gamma = (L_\gamma)^{-1}$. Ist A_γ hermitesch, so gilt für $f, g \in L^2$

$$\int_U (L_\gamma f)\overline{g} dx = \int_U f(\overline{L_\gamma g})\, dx$$

D.h. L_γ ist formal selbstadjungiert.

Es gilt die Fredholmsche Alternative.

Satz 5.32 *Sei L_γ wie oben, $\gamma \in \mathbb{R}$.*

1. *Dann sind äquivalent:*
   (a) *$L_\gamma u = f$ besitzt immer genau eine Lösung*
   (b) *$L_\gamma u = 0$ impliziert $u = 0$.*
2. *Die Dimension von $N(L_\gamma) = \{u \in W_0^{1,2}(U) | L_\gamma u = 0\}$ ist endlich. Das Bild $R(L_\gamma) = \{L_\gamma f \in (W_0^{1,2})^* | f \in W_0^{1,2}(U)\}$ ist abgeschlossen.*
3. *Die Gleichung*
   $$L_\gamma u = f$$
   hat genau dann eine Lösung, wenn
   $$< f, v >_{L^2} = 0 \qquad \textit{für } L_\gamma^* v = 0$$

Definition 5.33 *Die Menge der γ, für die $L_{-\gamma}$ nichttriviale Lösungen von $L_{-\gamma} u = 0$ besitzt, heißt Spektrum von L_0.*

Satz 5.34 *In jedem Halbraum $\{\lambda |\ Re\ \lambda \leq R\}$ liegen nur endlich viele Spektralwerte.*

Satz 5.35 *Ist $L^* = L$, so existiert eine ONB aus Eigenfunktionen mit*

$$L\phi_j = \lambda_j \phi_j$$

für eine reelle monoton wachsende Folge λ_j ohne Häufungswerte.

Es gilt die Charakterisierung über den Rayleighquotienten:

$$\lambda_{j+1} = \sup_{E, \dim E = j} \inf_{v \in E, \|v\|_{L^2}=1} A_\gamma[v,v]$$

und

$$\lambda_j = \inf_{E, \dim E = j} \sup_{v \in E, \|v\|_{L^2}=1} A_\gamma[v,v]$$

5.10.1 Beispiele

1. $U = (-\pi, \pi)$, $-u'' = \gamma u$
2. $U = (-\pi, \pi) \times (-\pi, \pi)$, $-\Delta u = \lambda u$

5.10.2 Finite Elemente und Galerkinapproximation

Wir betrachten L. Sei $V_j \subset W_0^{1,2}(U)$ ein Folge von endlich dimensionalen Untervektorräumen mit

1. $V_j \subset V_{j+1}$
2. $\bigcup V_j$ ist dicht in $W_0^{1,2}(U)$ und damit auch in $L^2(U)$.

Beispiele:

1. Die von den Eigenfunktionen von $-\Delta$ aufgespannten Untervektorräume (Spektralmethode)
2. Wir betrachten eine Folge von Triangulierungen der Feinheit $1/j$, die jeweils in der vorigen enthalten sind. Wir nehmen an, daß der Rand in $1/j$ Kugeln von Ecken auf dem Rand enthalten ist. Sei V_j die Menge der dazugehörigen stetigen stückweise linearen Funktionen, die auf den Randpunkten der Triangulierung Null sind. Basis: 1 in einer Ecke, Null sonst.

Wir erhalten folgende approximative Beschreibung:

$$A_\gamma[u_j, \phi] = < f, \phi >_{L^2}$$

wobei wir $u_j \in V_j$ suchen, für das diese Gleichung für alle $\phi \in V_j$ gilt. Dies führt auf ein lineares Gleichungssystem, das eindeutig lösbar ist, wenn die Voraussetzungen des Satzes von Lax-Milgram erfüllt sind. Es gilt dann:

$$\|u_j\|_{W_0^{1,2}(U)} \le c \|f\|_{L^2}$$

für eine feste Konstante c. Damit existiert eine Teilfolge, die schwach gegen eine Funktion u konvergiert. Daher gilt

$$A_\gamma[u, \phi] = < f, \phi >_{L^2}$$

für alle $\phi \in \bigcup V_j$. Dieser Raum ist dicht in $L^2(U)$ und damit ist

$$L_\gamma u = f$$

Kapitel 6

Variationsrechnung

6.1 Einführung und die erste Variation

Wir betrachten stetig diff'bare Lagrangefunktionen für $U \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und offen:

$$L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \overline{U} \to \mathbb{R},$$

die wir

$$L(p, z, x)$$

schreiben. Wir verwenden

$$D_p L, D_z L, D_x L$$

für die entsprechenden Funktionalmatrizen. Die sogenannten Funktionale

$$I[w] := \int_U L(Dw(x), w(x), x) dx$$

sind die zentralen Objekte dieses Kapitels, wobei w eine geeignete Funktion auf U ist.

Wir suchen Minimalstellen dieses Funktionals in gewissen Klassen von Funktionen, z.B. C^1 Funktionen mit festen Randwerten. Ist u eine derartige Funktion, die Minimalstelle ist, so gilt

$$I[u + \tau v] \geq I[u]$$

für jede Testfunktion v. Sei

$$f(\tau) = I[u + \tau v].$$

Dann ist f stetig differenzierbar (Majorisierte Konvergenz) und $f'(0) = 0$. Dies ergibt

$$\begin{aligned} 0 &= \int_U \nabla v D_p L(Du, u, x) + v D_u L(Du, u, x) dx \\ &= \int_U v(-\nabla \cdot (D_p L(Du, u, x)) + D_u L(Du, u, x)) dx \end{aligned}$$

und die Euler-Lagrangegleichung

$$-\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial p_j} L(Du, u, x) + \frac{\partial}{\partial z} L(Du, u, x) = 0$$

Beispiele

1. Das Dirichletsche Prinzip $L = \frac{1}{2}|p|^2$
2. Elliptische Gleichungen $L = \frac{1}{2}\sum_{i.j=1}^{n} a^{ij} p_i p_j - zf(x)dx$, wobei die (a^{ij}) beschränkt, meßbar und gleichmäßig positiv definit sind.
3. Die Minimalflächengleichung

$$L(p, z, x) = \left(1 + |p|^2\right)^{1/2}$$

Die zweite Variation.

Die Lagrangefunktion sei zweimal stetig diff'bar. Dann ist mit der obigen Notation

$$0 \le f''(0) = \int_U \sum_{i,j=1}^{n} L_{p_i p_j}(Du, u, x) v_{x_i} v_{x_j} + 2\sum_{j=1}^{n} L_{p_j z}(Du, u, x) v_{x_i} v + L_{zz}(Du, u, x) v^2 dx$$

Dies gilt für jede Lipschitzfunktion v, die auf dem Rand verschwindet.

Sei $\xi \in \mathbb{R}^n$, $x \in U$ und

$$v(x) := \varepsilon \rho(\frac{x \cdot \xi}{\varepsilon}) \zeta(x)$$

wobei $\zeta \in C_0^\infty(U)$ und

$$\rho(x) = \begin{cases} x & \text{if } 0 \le x \le \frac{1}{2}, \\ 1 - x & \text{if} \frac{1}{2} \le x \le 1, \\ \rho(x+1) = \rho(x) & \end{cases}$$

Der Limes $\varepsilon \to 0$ ergibt

$$\sum_{i,j} L_{p_i p_j}(Du(x), u(x), x) \xi_i \xi_j \ge 0$$

für fast alle $x \in U$ und $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Analoge Aussagen gelten für Systeme. Hier ist

$$L \in C^1(\mathbb{R}^{n \times m} \times \mathbb{R}^m \times \overline{U})$$

Sei u eine differenzierbare Minimalstelle. Die Euler-Lagrangegleichungen sind

$$0 = -\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial p_j^k} L(Du, u, x) + \frac{\partial}{\partial z^k} L(Du, u, x) \qquad 1 \le k \le m \tag{6.1}$$

Wie oben folgt aus der zweiten Variation für $\xi \in \mathbb{R}^n$ und $\eta \in \mathbb{R}^m$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{m} \frac{\partial^2}{\partial p_i^k \partial p_j^l} L(Du, u, x)\xi_i\xi_j\eta_k\eta_l \geq 0$$

Ist diese Ungleichung für alle Argumente erfüllt, so heißt L Rang-1 konvex.

Konsequenz: Zumindest an der Minimalstelle muß die Lagrangefunktion 'konvex' bzw 'Rang-1 konvex' sein.

6.1.1 Null-Lagrangefunktionen

Definition 6.1 *Die Funktion L heißt Null-Lagrangefunktion, falls jede Funktion $u \in C^2(U)$ den Euler-Lagrangegleichungen* (6.1) *genügt.*

Satz 6.2 *Sei L eine Null-Lagrangefunktion, $u, v \in C^2(\overline{U})$ mit $u = v$ auf ∂U. Dann ist*

$$I[u] = I[v]$$

Definition 6.3 *Ist A eine (n,n) Matrix, so ist die Adjunkte Matrix bzw Cofaktormatrix $cof(A)$ die (n,n) Matrix mit den Einträgen $(-1)^{i+j}det(A_{ij})$ wobei A_{ij} die $(n-1, n-1)$ Matrix ist, die man aus A enthält, indem man die i-te Zeile und die j te Spalte streicht.*

Lemma 6.4 *Sei $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ zweimal stetig differenzierbar. Dann ist*

$$\sum_{i=1}^{n} \partial_{x_i}(cof Du)_{ki} = 0.$$

Satz 6.5 *Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt und $m = n$. Dann ist*

$$L(P, z, x) = \det(P)$$

eine Null-Lagrangefunktion.

Anwendung: Der Brouwersche Fixpunktsatz.

Satz 6.6 *(Brouwersche Fixpunktsatz) Sei*

$$u : \overline{B_1(0)} \to \overline{B_1(0)}$$

stetig. Dann existiert ein Fixpunkt, d.h. ein Punkt x mit

$$u(x) = x$$

6.2 Existenz von Minimalstellen

Motiviert durch analoge Probleme in Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ wollen wir zunächst die Koerzivität sicherstellen. Insbesondere soll jede Minimalfolge in einem Sobolevraum beschränkt sein. Wir fixieren den Exponenten $1 < q < \infty$.

Wir machen immer folgende Annahme: Es existieren $\alpha > 0$ und $\beta \geq 0$ mit

$$L(p, z, x) \geq \alpha |p|^q - \beta \tag{6.2}$$

für alle p, z, x.

Dann ist

$$I[w] \geq \alpha \| \, |Dw| \, \|_{L^q(U)} - \beta \lambda^n(U).$$

Insbesondere folgt

$$I[w] \to \infty \text{ if } \|w\|_{W^{1,q}} \to \infty.$$

Für geeignete Funktionen $g \in W^{1,q}(U)$ betrachten wir

$$\mathcal{A} = \{w \in W^{1,q}(U) | w = g \text{ auf } \partial U\}.$$

6.3 Regularität

6.4 Kritische Punkte