Nichtlineare hyperbolische Gleichungen.

1 Hyperbolische Gleichungen

1.1 Einleitung

In dieser Vorlesung geht es um hyperbolische Gleichungen. Es sind Evolutionsgleichungen. Das heißt, wir haben ein System von partiellen Differentialgleichungen in dem eine der unabhängigen Variablen, t genannt, eine ausgezeichnete Rolle spielt. Intuitiv wird t als Zeitkoordinate betrachtet und in den Anwendungen kann t meistens tatsächlich als Zeit interpretiert werden. Sei u die (möglicherweise vektorwertige) Unbekannte in diesem System. Die Grösse u ist eine Funktion von t und x mit Werten im $\mathbf{R}^k$. Dabei gehört t einem Intervall von $\mathbf{R}$ und x einer geeigneten Teilmenge des $\mathbf{R}^n$. Wir suchen Lösungen des Systems mit gegebenen Anfangsdaten bei $t = 0$. Die fundamentalen Fragen sind die der Existenz und Eindeutigkeit. Die Anfangsdaten, die im hyperbolischen Fall geeignet sind, werden jetzt diskutiert.

Die archetypische hyperbolische Gleichung ist die Wellengleichung $\partial_t^2 u = \Delta u$. Als Anfangsdaten für die Wellengleichung muß man nicht nur $u_0(x) = u(t, x)$ vorgeben, sondern auch $u_1(x) = \partial_t u(0, x)$, um eine eindeutige Lösung zu bestimmen. Dies ist nicht verwunderlich, da die Wellengleichung zweiter Ordnung in der Zeit ist. Bei hyperbolischen Gleichungen ist es nicht unbedingt notwendig, auch Randbedingungen vorzugeben, wegen der Existenz eines endlichen Abhängigkeitsgebietes. Dieser Begriff wird später genau erklärt. Es gibt Anwendungen, bei denen es notwendig ist, Randbedingungen für hyperbolische Gleichungen zu betrachten. Anfangsrandwertprobleme für hyperbolische Systeme werden im folgenden nicht behandelt. Die Theorie ist ohnehin eine Erweiterung der hier besprochenen Theorie des reinen Anfangswertproblems, die man vernünftigerweise zuerst lernen wird.

In dieser Vorlesung werden nur klassische Lösungen von hyperbolischen Gleichungen betrachtet. Das heißt die Lösungen sind so oft differenzierbar, daß die Ableitungen die darin vorkommen einen offensichtlichen Sinn haben. Schwache Lösungen von partiellen Differentialgleichungen werden in der Mathematik oft betrachtet aber kommen in dieser Vorlesung nicht vor. Der Grund dafür ist, daß es kaum Fälle gibt, in denen man Existenz und Eindeutigkeit für schwache Lösungen eines hyperbolischen Systems zeigen kann. Das klassische Beispiel, das zeigt wie schwierig es ist, ist der Fall der Eulergleichungen einer idealen Flüssigkeit in einer Raumdimension. Dieses Problem war vor ein paar Jahren immer noch ungelöst, trotz enormer Anstrengungen, eine Lösung zu finden. Obwohl dieses Problem inzwischen eine befriedigende Lösung gefunden hat ist es nach wie vor klar dass das Thema sehr schwierig ist. Wir beschränken uns also auf klassische Lösungen. Es ist typisch, daß klassische Lösungen von hyperbolischen Systemen nur eine endliche Lebenszeit haben. Die Wellengleichung ist hier eine Ausnahme, aber nur weil sie linear ist. Im klassischen Beispiel der Eulergleichungen ist ein physikalischer Grund für die endliche Lebenszeit die Entstehung von Stoßwellen. Dieses Bild kann in eindimensionalen Situationen durch mathematische Ergebnisse untermauert werden. Auf diese Probleme gehen wir hier aber nicht ein. Es sollte einfach erklärt werden, warum Existenz und Eindeutigkeit von klassischen Lösungen, lokal in der Zeit, hier betrachtet werden.

In dier Vorlesung wird der Begriff 'hyperbolisch' nicht definiert. Es wird vielmehr das Wesen dieser Gleichungen durch eine hinreichend breite Auswahl von Beispielen dargestellt. Es gibt nämlich keine Definition von 'hyperbolisch' die, auf der einen Seite als die allgemeine Definition gelten kann und auf der anderen Seite bei Beispielen nachgewiesen werden kann. Eine Definition, die man vorgeschlagen hat ist, daß ein System hyperbolisch ist wenn für Anfangsdaten der Klasse C^∞ immer eine eindeutige lokale Lösung der Klasse C^∞ existiert. Das Problem mit dieser Definition ist natürlich, daß man, um festzustellen, ob ein System die Definition erfüllt, ein Existenz- und Eindeutigkeitstheorem beweisen muß, was 'etwas aufwendig' ist. In Wirklichkeit möchte man ein einfaches Kriterium haben, das die Lösbarkeit des Anfangswertproblems garantiert. Eine Möglichkeit, dies zu tun, benutzt den Begriff des symmetrisch hyperbolischen Systems und darauf werden wir im folgenden eingehen. Ein symmetrisch hyperbolisches System ist ein System von Gleichungen erster Ordnung so daß es so aussieht, als hätten wir den zentralen Fall der Wellengleichung verloren. Dies ist aber nicht der Fall weil die Wellengleichung, wie später gezeigt wird, auf eine Art und Weise auf ein Problem erster Ordnung reduziert werden kann, so daß ein symmetrisch hyperbolisches System dabei herauskommt. Man kann auch, bezüglich der obigen abstrakten Definition fragen, ob man nicht eine andere Differenzierbarkeitsklasse als C^∞ hätte wählen können, und eine andere nützliche Definition bekommen. Dies ist tatsächlich der Fall. Systeme, die schwach hyperbolisch sind im Sinne von Leray-Ohya, erfüllen obige Definition nicht. Sie erfüllen aber die analoge Definition, wo C^∞ durch sogenannte Gevrey-Klassen ersetzt wird und haben ein endliches Abhängigkeitsgebiet. Darauf wird aber im folgenden nicht eingegangen.

Hyperbolische Gleichungen beschreiben Wellen, das heißt Änderungen des Zustandes eines Systems, die sich mit endlicher Geschwindigkeit ausbreiten. Es sollte aber an dieser Stelle gewarnt werden, daß nicht alle Gleichungen, die in der Literatur als Wellengleichungen beschrieben werden, hyperbolisch sind. Beispiele, die nicht hyperbolisch sind, sind z. B. die nichtlineare Schrödinger-Gleichung oder die Korteweg-deVries-Gleichung. Diese werden manchmal als dispersive Wellengleichungen bezeichnet, obwohl sie keine endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit zeigen.

1.2 Beispiele

1. Die Wellengleichung.

$$-\partial_t^2 u + \Delta u = 0 \tag{1}$$

Hier ist $u = u(t, x)$ eine Abbildung von $I \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, wo I eine offenes Intervall ist. Diese Gleichung ist, wie schon erwähnt, das Modell für hyperbolische Gleichungen. Der Fall $n = 2$ beschreibt, in sehr vereinfachter Form, Wellen an der Oberfläche einer Flüssigkeit.

2. Semilineare Wellengleichungen

$$-\partial_t^2 u + \Delta u = u^{2k+1} \tag{2}$$

In dieser Gleichung ist u wie im ersten Beispiel und k ist eine positive ganze Zahl. Dies ist eines der einfachsten Beispiele einer nichtlinearen hyperbolischen Gleichung. Im Gegensatz zum Fall von linearen Gleichungen, gibt es einen wesentlichen Unterschied, ob man die Existenz von Lösungen lokal oder global in der Zeit betrachet. Es ist bekannt, daß die Gleichung (2) zu relativ allgemeinen Anfangsdaten Lösungen besitzt, die lokal in der Zeit existieren. Es ist viel schwieriger zu sagen, ob diese Lösungen so fortgesetzt werden können, daß sie für alle Werte von t existieren. Wenn die Raumdimension

n gleich drei ist, und $k = 1$, ist die Antwort positiv (Jörgens, um 1960). Für $n = 3$ und $k = 2$ gilt globale Existenz auch (Grillakis, um 1990). Für $n = 3$ und $k \geq 3$ ist nichts bekannt. Wir sehen also, daß schon die einfach aussehende Gleichung (2) große Geheimnisse birgt.

3. Wellenabbildung (hyperbolische Ebene).

$$\begin{aligned} -\partial_t^2 u + \Delta u &= -2(\partial_t u \partial_t v - \nabla u \cdot \nabla v) \\ -\partial_t^2 v + \Delta v &= e^{-2v}[(\partial_t u)^2 - |\nabla u|^2] \end{aligned} \tag{3}$$

Dieses Beispiel ist ein nichtlineares System von Gleichungen für zwei unbekannte Funktionen u und v und ist ein wichtiges Modellsystem in der mathematischen Theorie der hyperbolischen Gleichungen. Ähnliche Gleichungen sind in der Physik bekannt, wo sie nichtlineare σ-Modelle heißen. Es gibt verschiedene Arten von Wellenabbildungen, die durch die Wahl einer Riemannschen Mannigfaltigkeit definiert werden. Im Falle der Gleichungen (3) ist die Mannigfaltigkeit die hyperbolische Ebene.

4. Wellenabbildung (allgemein)

$$-\partial_t^2 u^A + \Delta u^A = \sum_{B,C} \Gamma^A_{BC}(u)(\partial_t u^B \partial_t u^C - \nabla u^B \cdot \nabla u^C) \tag{4}$$

Hier haben wir eine Verallgemeinerung des letzten Beispiels, mit k Unbekannten u^A $(A = 1, \ldots, k)$. Die Riemannsche Mannigfaltigkeit, von der vorhin die Rede war, hat hier die Dimension k.

5. Eulergleichungen

$$\begin{aligned} \partial_t \rho + \sum_{j=1}^{3} \partial_j(\rho v_j) &= 0 \\ \partial_t(\rho v_i) + \sum_{j=1}^{3} \partial_j(\rho v_i v_j + \delta_{ij} p) &= 0 \\ \partial_t s + \sum_{j=1}^{3} v_j \partial_j s &= 0 \end{aligned} \tag{5}$$

Die Euler-Gleichungen beschreiben eine ideale Flüssigkeit im $\mathbf{R}^3$ mit Massendichte ρ (die als nichtnegativ angenommen wird), Geschwindigkeit

v und Entropiedichte s. Der Druck p wird durch eine Zustandsgleichung $p = f(\rho, s)$ gegeben. Die Funktion f soll die physikalischen Bedingungen erfüllen, daß $f > 0$ und $\partial f/\partial\rho > 0$ für $\rho > 0$. Ein Fall, der besonders einfach ist, ist der isentropische Fall, wo s als konstant angenommen wird. Dann ist p nur noch Funktion von ρ und die ersten zwei Gleichungen oben definieren die isentropischen Eulergleichungen. Die Eulergleichungen (auch die isentropischen) sind quasilinear aber nicht semilinear. Es handelt sich hier um die Eulergleichungen für eine kompressible Flüssigkeit. Die inkompressiblen Eulergleichungen haben gewisse Gemeinsamkeiten mit hyperbolischen Gleichungen, sind aber nicht hyperbolisch und werden deshalb in dieser Vorlesung nicht weiter betrachtet.

6. Maxwell-Gleichungen im Vakuum

$$\begin{aligned} \partial E/\partial t &= \mathrm{rot} B \\ \partial B/\partial t &= -\mathrm{rot} E \\ \mathrm{div} E = 0 & \qquad \mathrm{div} B = 0 \end{aligned} \tag{6}$$

Die Maxwell-Gleichungen beschreiben das elektromagnetische Feld. Wir betrachten hier nur den quellfreien Fall (Vakuumfall). Die Größen E und B sind Vektorfelder im $\mathbf{R}^3$ zu jedem festen Zeitpunkt; E ist das elektrische Feld und B das Magnetfeld. Die ersten zwei dieser Gleichungen sind die Maxwellschen Entwicklungsgleichungen, die anderen zwei die Zwangsbedingungen. Die Zwangsbedingungen enthalten keine zeitlichen Ableitungen und implizieren die Einschränkungen $\mathrm{div} E_0 = 0$ und $\mathrm{div} B_0 = 0$, wo E_0 bzw. B_0 die Anfangsdaten für E bzw. B sind. Die Entwicklungsgleichungen implizieren, daß $\partial_t(\mathrm{div} E) = 0$ und $\partial_t(\mathrm{div} B) = 0$. Es folgt, daß eine Lösung der Maxwellschen Entwicklungsgleichungen mit Daten, die die Zwangsbedingungen erfüllen, alle Maxwellgleichungen erfüllt. (Propagation der Zwangsbedingungen)

7. Yang-Mills-Gleichungen. Die Yang-Mills-Gleichungen werden hier nicht aufgeschrieben, da dies zu viele differentialgeometrische Kenntnisse voraussetzen würde. Sie stellen eine nichtlineare Verallgemeinerung der Maxwell-Gleichungen dar, sowie die Wellenabbildungen die Wellengleichung nichtlinear verallgemeinern. Die Yang-Mills-Gleichungen sind semilinear. Es handelt sich um ein klassisches Analogon von Gleichungen, die in der modernen Teilchenphysik eine große Rolle spielen.

8. Einstein-Gleichungen. Die Einstein-Gleichungen werden aus den gleichen Gründen wie im letzten Beispiel hier nicht aufgeschrieben. Sie sind quasilinear aber nicht semilinear. Die Nichtlinearität zeigt Ähnlichkeiten mit der der Wellenabbildungen (Terme, die quadratisch sind in den ersten Ableitungen der Unbekannten). Die Einstein-Gleichungen sind die Grundgleichungen der Allgemeinen Relativitätstheorie und beschreiben das Gravitationsfeld.

1.3 Charakteristiken

Obwohl schon darauf verzichtet wurde, eine allgemeine präzise Definition von 'hyperbolisch' zu geben, sollte noch erklärt werden, was bei der Definition der Hyperbolizität eine Rolle spielt. Dazu müssen wir über Charakteristiken reden. Aber zuerst sollte der Begriff der Linearisierung eingeführt werden. Betrachten wir folgendes System von partiellen Differentialgleichungen:

$$\sum_{|\alpha|=s} A^\alpha(y,u,\ldots,D^{s-1}u)D^\alpha u + B(y,u,\ldots,D^{s-1}u) = 0 \tag{7}$$

Die Unbekannte u soll wieder vektorwertig sein, so daß die A^α matrixwertig sind, und B vektorwertig. Hier ist keine Variable t ausgezeichnet worden; der Zusammenhang zu dem, was oben gesagt wurde, ensteht in dem man $y = (t,x)$ schreibt. Die Gleichung (7) ist quasilinear, d.h. linear in den Ableitungen der höchsten Ordnung. Die Diskussion der Linearisierung ginge genau so gut für ein völlig nichtlineares (d. h. nicht quasilineares) System aber es schien günstig, hier den quasilinearen Fall zu betrachten, weil alle im folgenden eingeführten Systeme quasilinear sind. Sei jetzt u eine Lösung von (7). Die Linearisierung des Systems (7) um die Lösung u ist die lineare Gleichung

$$\begin{aligned}&\sum_{|\alpha|=s}\left[A^\alpha(y,u,\ldots,D^{s-1}u)D^\alpha v + \left(\sum_{r=0}^{s-1}\frac{\partial A^\alpha}{\partial(D^r u)}\cdot D^r v\right)D^\alpha u\right]\\ &+\sum_{r=0}^{s-1}\frac{\partial B}{\partial(D^r u)}\cdot D^r v = 0,\end{aligned} \tag{8}$$

betrachtet als eine Gleichung für v. Diese Gleichung hat folgenden Ursprung. Sei $w(\lambda, y)$ eine parameterabhängige Lösung des Systems (7) mit $w(0,y) = u(y)$. Wir können dies auch als eine Schar $w(\lambda)$ von Lösungen des Systems (7) mit $w(0) = u$ beschreiben. Dann erfüllt die Ableitung dieser Schar nach λ, ausgewertet bei $\lambda = 0$, die linearisierte Gleichung (8).

Im allgemeinen wird man sagen, daß (7) hyperbolisch ist an der Lösung u, wenn das lineare System (8) hyperbolisch ist. Das System (7) ist hyperbolisch wenn eine Lösung u dieser Art existiert. So wird das Problem einer Definition für nichtlineare Systeme auf den linearen Fall reduziert. Wir betrachten also jetzt das lineare System:

$$\sum_{|\alpha|\le s} A^\alpha(y)D^\alpha u + B(y) = 0 \tag{9}$$

Eine Bemerkung zum semilinearen Fall ist hier angebracht. Das System (7) ist semilinear wenn A^α nur von y abhängt. Wenn man in dem Fall die Linearisierung in der Form (9) schreibt, hängt $A^\alpha(y)$ für $|\alpha| = s$ nicht von der gewählten Lösung u ab, im Gegensatz zum allgemeinen Fall.

Der Hauptteil der Gleichung (9) ist der Ausdruck $\sum_{|\alpha|=s} A^\alpha(y)D^\alpha u$, d.h. der Teil, der die Ableitungen der höchsten Ordnung enthält. Wenn wir in diesem Ausdruck $D^\alpha u$ durch ξ^α ersetzen, bekommen wir das Hauptsymbol $\sum_{|\alpha|\le s} A^\alpha(y)\xi^\alpha$, eine matrixwertige Funktion von y und $\xi \in \mathbf{R}^n$. Die Determinante des Hauptsymbols ist eine reellwertige Funktion von diesen Variablen und heißt charakteristisches Polynom $P(y,\xi)$. Die Menge:

$$\{(y,\xi) : P(y,\xi) = 0, \xi \neq 0\}$$

heißt charakteristische Menge. Eine Bemerkung, die hier angebracht ist, ist,daß im Gegensatz zum Begriff 'hyperbolisch', der Begriff 'elliptisch' leicht zu definieren ist. Ein System ist nämlich genau dann elliptisch wenn die charakteristische Menge leer ist. Eine Hyperfläche mit Normalenvector ν heißt charakteristisch wenn ν in der charakteristischen Menge liegt, sonst nichtcharakteristisch.

Für einen festen Wert von y ist P ein Polynom der Ordnung sk. Es ist also zu erwarten, daß der Teil der charakteristischen Menge mit diesem festen Wert von y aus höchstens sk (möglicherweise singulären) Hyperflächen besteht. Wenn komplexe Werte von ξ erlaubt wären, sollten es genau sk sein. Aber im allgemeinen brauchen nicht alle reell zu sein. Die Hyperbolizität des Systems hängt damit zusammen, welche Richtung im $\mathbf{R}^{n+1}$ als Zeitrichtung gewählt wird. Wählen wir also eine Spaltung $y = (t,x)$. Entsprechend sei $\xi = (\tau,\zeta)$. Betrachten wir für ein festes $\zeta_0 \neq 0$ die Nullstellen des Ausdrucks $P(t,x,\tau,\zeta_0)$. Wenn t, x und ζ_0 fest sind, handelt es sich um ein Polynom der Ordnung sk in τ.

Definition Das System heißt *strikt hyperbolisch* im Punkt y wenn es eine Wahl von t gibt, so daß für jede Wahl von $\zeta_0 \neq 0$, der Ausdruck $P(t, x, \tau, \zeta_0)$ genau sk verschiedene reelle Nullstellen besitzt.

Ein strikt hyperbolisches System hat ein sachgemäß gestelltes Anfangswertproblem, d.h. es gilt Existenz und Eindeutigkeit. Der Nachteil dieser Definition ist, daß sie in den meisten Beispielen von hyperbolischen Systemen nicht erfüllt ist. Die Vielfachheit der Wurzeln ist meistens größer eins und oft abhängig von der Wahl von ζ_0. Es bleibt aber die Feststellung, daß die Bedingung, daß die Wurzeln alle reell sind, eng mit der Hyperbolizität zusammenhängt. Diese Bedingung ist insbesondere für symmetrich hyperbolische Systeme erfüllt. Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms entsprechen verschiedenen Arten von Wellen. Bevor wir den Begriff 'strikt hyperbolisch' verlassen, sollten wir sie mit unseren Beispielen konfrontieren.

Es ist leicht zu sehen, daß die Wellengleichung strikt hyperbolisch ist. Das gleiche gilt für die Gleichung (2). Das System (3) ist aber nicht strikt hyperbolisch. Die charakterische Menge sieht aus wie bei der Wellengleichung aber besteht aus doppelten Nullstellen des charakteristischen Polynoms. Ein ähnliches Argument gilt im Fall von (4). Die Charakteristiken der Euler- und Maxwell-Gleichungen sind auch keine einfachen Nullstellen, und deshalb sind diese Gleichungen auch nicht strikt hyperbolisch.

1.4 Symmetrisch hyperbolische Systeme

Sei $I \subset \mathbf{R}$ ein offenes Intervall, das die Null enthält, und sei $G \subset \mathbf{R}^k$ eine offene Teilmenge. Seien A^0 und A^i Abbildungen der Klasse C^∞ von $I \times \mathbf{R}^n \times G$ nach $M_k(\mathbf{R})$. Hier bezeichnet $M_k(\mathbf{R})$ den Raum der reellen k mal k Matrizen. Sei B eine Abbildung der Klasse C^∞ von $I \times \mathbf{R}^n \times G$ nach $\mathbf{R}^k$. Wir betrachten das quasilineare Differentialgleichungssystem:

$$A^0(t, x, u)\partial_t u + \sum_{i=1}^{n} A^i(t, x, u)\partial_i u + B(t, x, u) = 0 \tag{10}$$

für eine Funktion u der Klasse C^∞ von $I \times \mathbf{R}^n$ nach G.

Definition Das System (10) heißt *symmetrisch hyperbolisch* wenn
(i) die Matrizen A^0 und A^i symmetrisch sind, für $(t, x, u) \in I \times \mathbf{R}^n \times G$.
(ii) es gibt eine Konstante $C > 0$ derart, daß , für jeden Vektor $v \in \mathbf{R}^n$, die Ungleichung $\langle A^0(t, x, u)v, v\rangle \geq C\langle v, v\rangle$ für alle $(t, x, u) \in I \times \mathbf{R}^n \times G$ gilt.

Wenn eine Matrix A positiv definit ist, dann existiert eine Konstante $C > 0$ derart, daß $\langle Av, v\rangle \geq C\langle v, v\rangle$. Deshalb kann man die zweite Bedingung durch die Aussage ausdrücken, daß A^0 gleichmäßig positiv definit ist. Die Linearisierung der Gleichung (10) ist

$$\begin{aligned} &A^0(t,x,u)\partial_t v + \sum_{i=1}^n A^i(t,x,u)\partial_i v \\ &+ \left[\frac{\partial A^0}{\partial u}(t,x,u)\partial_t u + \sum_{i=1}^n \frac{\partial A^i}{\partial u}(t,x,u)\partial_i u + \frac{\partial B}{\partial u}(t,x,u)\right] v = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

Für eine feste Funktion u mit Werten in G ist das System (11) ein lineares symmetrisch hyperbolisches System. Das System (10) ist genau dann symmetrisch hyperbolisch wenn die Linearisierung dieser Gleichung um jede Funktion u mit Werten in G symmetrisch hyperbolisch ist. Wie sehen die Charakteristiken der Gleichung (10) aus? Dazu brauchen wir ein wenig lineare Algebra. Ein Eigenwert der Matrix M ist eine Lösung λ der Gleichung $\det(M - \lambda I) = 0$. Dies kann folgendermaßen verallgemeinert werden. Sei A eine positiv definite symmetrische Matrix. Ein Eigenwert von M bezüglich A ist eine Lösung λ der Gleichung $\det(M - \lambda A) = 0$. Wenn M symmetrisch ist dann gilt, wie im Spezialfall $A = I$, daß alle Eigenwerte von M bezüglich A reell sind. Das charakteristische Polynom von (11) ist

$$P(t,x,\tau,\zeta) = \det[\tau A^0(t,x,u) + \sum_{i=1}^n \zeta^i A^i(t,x,u)]$$

Die Wurzeln der Gleichung $\det(\tau A^0 + \sum_{i=1}^n \zeta_0^i A^i) = 0$ sind, bis auf einen Faktor -1, die Eigenwerte der Matrix $\sum_{i=1}^n \zeta_0^i A^i$ bezüglich A^0. Sie sind also alle reell. Sie brauchen aber nicht verschieden zu sein. Aus diesem Grund kann die Theorie der symmetrisch hyperbolischen Gleichungen in vielen Situationen angewendet werden, in denen die Systeme nicht strikt hyperbolisch sind. Wenn man zwei symmetrisch hyperbolische Systeme hat mit Unbekannten u und u' und ein System für (u, u') produziert, in dem man diese Gleichungen nebeneinander stellt, dann ist das zusammengesetzte System immer noch symmetrisch hyperbolisch. Ein Anfangsdatum für das System (10) ist eine Funktion $u_0(x)$ von $\mathbf{R}^n$ nach G.

Jetzt wird, wie versprochen, gezeigt, wie die Wellengleichung symmetrisch hyperbolisch geschrieben werden kann. Sei u eine Lösung der Wellengleichung. Sei $v = \partial_t u$ und $w_i = \partial_i u$. Dann erfüllen die $n + 2$ Größen u, v, w_i

folgendes System:

$$\partial_t u = v, \quad \partial_t v = \sum_{i=1}^{n} \partial_i w_i, \quad \partial_t w_i = \partial_i v \tag{12}$$

Dieses System ist symmetrisch hyperbolisch. Auf diese Weise bekommt man von jeder Lösung u der Wellengleichung eine Lösung des Systems (12). Die Anfangsdaten für diese Lösung haben die zusätzliche Eigenschaft, daß $\partial_i u_0 = (w_i)_0$. Umgekehrt, wenn (u, v, w_i) eine Lösung von (12) ist, mit Anfangsdaten, die die zusätzlichen Bedingungen erfüllen, löst u die Wellengleichung. Weil aus dem System (12) folgt, daß $\partial_t(w_i - \partial_i u)$=0. Zusammen mit der Bedingung auf die Anfangsdaten impliziert dies, daß $w_i = \partial_i u$ überall. Dann folgt aus den ersten zwei Gleichungen von (12), daß u die Wellengleichung erfüllt. Die gleiche Methode erlaubt es, die semilinearen Gleichungen der Beispiele (2)-(4) in symmetrisch hyperbolische Form zu bringen. Bei den Beispielen (3)-(4) ist folgendes zu beachten. Es wurde schon erwähnt wie man symmetrisch hyperbolische Gleichungen nebeneinander stellen kann, ohne daß sie diese Eigenschaft verlieren. Anders gesagt, wenn ein System von Differentialgleichungen in zwei Systeme zerfällt, die symmetrisch hyperbolisch sind, und nicht miteinander gekoppelt, dann ist das Gesamtsystem symmetrisch hyperbolisch. Man kann aber mehr sagen. Die analoge Aussage gilt immer noch wenn die Teilsysteme im Hauptteil entkoppelt sind. Dies trifft auf den Fall der Systeme zu, die durch Reduktion der Gleichungen für Wellenabbildungen produziert werden.

Übung Die Maxwell-Gleichungen bilden ein symmetrisch hyperbolisches System

Jetzt wird gezeigt, wie die Eulergleichungen symmetrisch hyperbolisch geschrieben werden können. Es handelt sich bereits um ein System erster Ordnung. Es muß also keine Reduktion durchgeführt werden. Im nicht-isentropischen Fall stellt es sich heraus, daß man die (physikalisch motivierte) Annahme $\partial f/\partial\rho > 0$ machen muß , um ein symmetrisch hyperbolisches System zu bekommen. Dann gibt es eine Funktion g, so daß $\rho = g(s, p)$. Als erster Schritt werden geeignete Linearkombinationen der Gleichungen gebildet. Wenn $-v_i$ mal die erste Gleichung zur Gleichung für v_i addiert wird, heben sich verschiedene Terme weg. Dann wird ρ überall durch p ersetzt, mit Hilfe der Funktion g. Die Terme in der ersten Gleichung, die Ableitungen von s enthalten, verschwinden aufgrund der Entwicklungsgleichung für die Entropie. Es reicht dann, die erste Gleichung mit einem geeigneten positiven

Faktor zu multiplizieren. Die Menge G kann als die gewählt werden, die durch die Ungleichungen $\rho_1 < \rho < \rho_2$ und $0 < s < s_0$ definert wird, wo s_0, ρ_1 und ρ_2 beliebige positive Zahlen sind mit $\rho_1 < \rho_2$.

Übung Nach den eben beschriebenen Manipulationen, bilden die Eulergleichungen ein symmetrisch hyperbolisches System.

Bis jetzt war immer davon die Rede, daß Anfangsdaten auf $t = 0$ vorgegeben werden. Natürlich könnte man auch Daten bei $t = t_0$ geben, t_0 eine beliebige Konstante. Es ist aber auch möglich, Anfangsdaten auf einer allgemeineren Hyperfläche vorzugeben. Sei eine Hyperfläche durch die Gleichung $t = f(x)$ definiert. In einem gegebenen Punkt (t, x) der Hyperfläche ist der Vektor $(1, -\partial_i f)$ normal zur Hyperfläche. Die Hyperfläche heißt *raumartig* bezüglich des symmetrisch hyperbolischen Systems (10) wenn $A^0 - \sum_{i=1}^n A^i \partial_i f$ positiv definit ist. Wir könnten $t' = t - f(x)$ als neue Zeitkoordinate einführen. Dann wären wir, nach der Transformation, in der bekannten Situation, mit Anfangsdaten auf $t' = 0$. Das transformierte A^0 ist positiv definit in einer Umgebung von $t' = 0$. Wenn diese Matrix gleichmäßig positiv definit ist, dann bekommen wir einen lokalen Existenzsatz. Dies wird zum Beispiel der Fall sein, wenn f kompakten Träger hat.

2 Funktionalanalytische Voraussetzungen

2.1 Einbettungssätze

Wir brauchen im folgenden die Räume $L^p(\mathbf{R}^n)$ aller Funktionen deren p-te Potenz integrabel ist mit der Norm

$$\|f\|_{L^p} = \left[\int_{\mathbf{R}^n} |f|^p dx \right]^{1/p} \tag{13}$$

Dabei ist p eine reelle Zahl aus dem Intervall $[1, \infty)$. Der Raum $L^\infty(\mathbf{R}^n)$ ist der Raum aller wesentlich beschränkten Funktionen mit der Norm, die durch das wesentliche Supremum definiert ist. Ausserdem brauchen wir die Sobolevräume $W^{m,p}$ aller Funktionen deren Ableitungen bis zur Ordnung m in L^p liegen. Dabei ist m eine nichtnegative ganze Zahl und p erfüllt die Ungleichung $1 \leq p \leq \infty$.(Der Fall $p = 2$ ist besonders wichtig und spielt einen zentrale Rolle in der Theorie der hyperbolischen Gleichungen. Aus dem Grund führen dafür eine besondere Notation ein und schreiben

$H^m = W^{m,2}$.) In Wirklichkeit sollte man an dieser Stelle von Distributionen statt Funktionen reden und die Ableitungen sind im Sinne von Distributionen zu bilden. Wir können an dieser Stelle auf diese Dinge nicht eingehen. Sie werden aber im folgenden keine grosse Rolle spielen. Der Raum $C_0^\infty(\mathbf{R})$ von Funktionen der Klasse C^∞ mit kompaktem Träger liegt dicht in jedem dieser Sobolevräume mit $p < \infty$. Als nächstes werden einige Einbettungssätze bewiesen. In diesem und im nächsten Abschnitt wird im wesentlichen die Darstellung dieser Sätze durch Taylor [4] übernommen. Zunächst sind einige Vorbereitungen notwendig.

Lemma 2.1.1 Seien X_1 und X_2 Banachräume, und Y ein dichter linearer Teilraum von X_1. Sei L eine lineare Abbildung von Y nach X_2 mit $\|L(x)\|_{X_2} \leq C\|x\|_{X_1}$ für eine Konstante $C > 0$. Dann gibt es eine lineare Abbildung $\tilde{L} : X_1 \to X_2$ deren Einschränkung auf Y mit L übereinstimmt und die die Ungleichung $\|\tilde{L}(x)\|_{X_2} \leq C\|x\|_{X_1}$ erfüllt.

Beweis Wenn $x \in X_1$, dann gibt es eine Folge $x_n \in Y$ mit $\|x_n - x\|_{X_1} \to 0$ wenn $n \to \infty$. (Y liegt dicht in X_1.) Die Folge $\{x_n\}$ ist, da konvergent, eine Cauchy-Folge. Wegen der Abschätzung $\|L(x_m) - L(x_n)\|_{X_2} \leq C\|x_m - x_n\|_{X_1}$ ist $L(x_n)$ auch eine Cauchy-Folge. Deshalb konvergiert $L(x_n)$ gegen einen Limes z. Wenn wir $\{x_n\}$ durch eine andere Folge $\{x'_n\}$ ersetzen, dann konvergiert auch $L(x'_n)$ gegen z. Wir können nämlich das soeben gegebene Argument auf die Folge $x_1, x'_1, x_2, x'_2, \ldots$ anwenden. Es ist also so, daß z nur von x abhängt, und wir können durch $\tilde{L}(x) = z$ eine Abbildung von X_1 nach X_2 definieren. Es ist leicht zu zeigen, daß $\tilde{L}$ linear ist. Außerdem ist die Einschränkung von $\tilde{L}$ auf Y gleich L: man braucht nur Konstante Folgen zu betrachten. Es bleibt, die gewünschte Ungleichung zu beweisen.

$$\begin{aligned} \|\tilde{L}(x)\| &\leq \|\tilde{L}(x_n)\| + \|\tilde{L}(x_n) - \tilde{L}(x)\| && (14) \\ &= \|L(x_n)\| + \|L(x_n) - \tilde{L}(x)\| && (15) \\ &\leq C\|x_n\| + \|L(x_n) - \tilde{L}(x)\| && (16) \end{aligned}$$

Sei $\epsilon > 0$. Da $L(x_n)$ gegen $L(x)$ konvergiert, ist, für n hinreichend groß, der zweite Term kleiner $\epsilon/2$. Andererseits ist der erste Term kleiner $C\|x\| + \epsilon/2$. Es folgt, daß

$$\|\tilde{L}(x)\| \leq C\|x\| + \epsilon$$

Da ϵ beliebig war, folgt das Ergebnis.

Wir werden diese Aussage anwenden wenn, z. B., X_1 ein Sobolevraum ist, und Y der Raum der Funktionen der Klasse C^∞ mit kompaktem Träger.

Ich erinnere an die Hölder-Ungleichung. Sei $1 \leq p \leq \infty$ und p' die eindeutige Zahl (konjugierter Exponent), so daß $1/p + 1/p' = 1$. Sei $f \in L^p(\mathbf{R}^n)$ und $g \in L^{p'}(\mathbf{R}^n)$. Dann ist das Produkt fg in L^1 und $\|fg\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^{p'}}$. Um die Einbettungssätze zu beweisen, benötigen wir eine geringfügige Verallgemeinerung dieser Aussage.

Lemma 2.1.2 (Verallgemeinerte Hölder-Ungleichung) Seien $p_1, \ldots, p_s$ (verallgemeinerte) reelle Zahlen mit $1 \leq p_i \leq \infty$ und $1/p_1 + 1/p_2 + \ldots 1/p_s = 1$. Für $i = 1, 2, \ldots, s$ sei $f_i \in L^{p_i}(\mathbf{R}^n)$. Dann ist das Produkt $f_1 f_2 \ldots f_s$ in L^1, und

$$\|f_1 f_2 \ldots f_s\|_{L^1} \leq \|f_1\|_{L^{p_1}}\|f_2\|_{L^{p_2}} \ldots \|f_s\|_{L^{p_s}}$$

Diese Ungleichung folgt aus der ursprünglichen Hölder-Ungleichung durch Induktion. Jetzt kommen wir zu den ersten Einbettungssätzen.

Lemma 2.1.3 Für $1 \leq p < n$ gehört jede Funktion in $W^{1,p}(\mathbf{R}^n)$ zu $L^{np/(n-p)}(\mathbf{R}^n)$ und es gibt eine Konstante $C > 0$ derart, daß

$$\|u\|_{L^{np/(n-p)}} \leq C\|u\|_{W^{1,p}}$$

für alle $u \in W^{1,p}(\mathbf{R}^n)$.

Es reicht, um das Lemma zu beweisen, die Ungleichung im Falle $u \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ zu beweisen. Wenn die Ungleichung in dem Fall gilt, dann können wir Lemma 2.1.1 anwenden mit $X_1 = W^{1,p}(\mathbf{R}^n)$, $Y = C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ und $X_2 = L^{np/(n-p)}(\mathbf{R}^n)$. Wenn wir L als die Identität wählen, bekommen wir eine Fortsetzung $\tilde{L}$. Ich behaupte, daß $\tilde{L}$ auch die Identität sein muß. Weil, wenn $u_n \to u$ in $W^{1,p}(\mathbf{R}^n)$ und $u_n \to v$ in $L^{np/(n-p)}(\mathbf{R}^n)$ dann muß $u = v$. Diese Art von Argument wird im folgenden oft vorkommen und wird nicht immer explizit wiederholt. Wir können auch die $W^{1,p}$-Norm von u in der Ungleichung durch die L^p- Norm von ∇u ersetzen. Sei jetzt also u eine Funktion in $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$. Es gilt

$$u(x_1, x_2, \ldots, x_n) = u(x_1', x_2, \ldots, x_n) + \int_{x_1'}^{x_1} \partial_1 u(x_1'', x_2, \ldots, x_n) dx_1''$$

Es folgt, daß

$$|u(x_1, x_2, \ldots, x_n)| \leq |u(x_1', x_2, \ldots, x_n)| + \int_{x_1'}^{x_1} |\partial_1 u(x_1'', x_2, \ldots, x_n)| dx_1''$$

Wir können x_1' so wählen, daß $(x_1', x_2, \ldots, x_n)$ außerhalb des Trägers von u liegt. Also gilt

$$|u(x_1, x_2, \ldots, x_n)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |\partial_1 u(x_1'', x_2, \ldots, x_n)| dx_1''$$

Ähnliche Abschätzungen gelten für die anderen Koordinaten. Wenn wir das Produkt dieser n Ungleichungen bilden und daraus die Wurzel der Ordnung $n-1$ ziehen bekommen wir die Ungleichung:

$$|u(x_1, x_2, \ldots, x_n)|^{n/(n-1)} \leq \prod_{i=1}^{n} \left[\int_{-\infty}^{\infty} |\partial_i u| dx_i\right]^{\frac{1}{n-1}}$$

Jetzt wird diese Ungleichung sukzessive nach x_1 bis x_n integriert, wobei in jedem Schritt die verallgemeinerte Hölder-Ungleichung mit allen $p_i = n-1$ angewendet wird. Das Ergebnis ist, daß

$$\int_{\mathbf{R}^n} |u|^{n/(n-1)} dx \leq C \left[\int_{\mathbf{R}^n} |\nabla u| dx\right]^{n/(n-1)}$$

Damit ist das Ergebnis bewiesen im Falle $p = 1$. Um den allgemeinen Fall zu bekommen ersetzt man u in dieser Ungleichung durch $|u|^\gamma$ für einen geeigneten Wert von $\gamma > 1$.

$$\||u|^\gamma\|_{L^{n/(n-1)}} \leq C\||u|^{\gamma-1}|\nabla u|\|_{L^1} \leq C\|\nabla u\|_{L^p}\||u|^{\gamma-1}\|_{L^{p'}}$$

Die Wahl $\gamma = (n-1)p/(n-p)$ liefert

$$\left[\int_{\mathbf{R}^n} |u|^{np/(n-p)} dx\right]^{(n-1)/n} \leq C \left[\int_{\mathbf{R}^n} |u|^{np/(n-p)} dx\right]^{(p-1)/p} \|\nabla u\|_{L^p}$$

und das erwünschte Ergebnis. Mit einer Induktion ergibt sich
Korollar Für $1 \leq kp < n$ gehört jede Funktion in $W^{k,p}(\mathbf{R}^n)$ zu $L^{np/(n-kp)}(\mathbf{R}^n)$ und es gibt eine Konstante C derart, daß

$$\|u\|_{L^{np/(n-kp)}} \leq C\|u\|_{W^{k,p}}$$

für alle $u \in W^{k,p}(\mathbf{R}^n)$.

Die Sätze, die bisher präsentiert wurden, betreffen die Einbettung von einem Sobolevraum in einen anderen. Es gibt auch Sätze, die die Einbettung eines

Sobolevraums in einen Raum beweisen, der durch punktweise Differenzierbarkeitseigenschaften definiert wird. Diese werden als nächstes diskutiert.

Lemma 2.1.4 Wenn $kp > n$ ist, dann ist jede Funktion in $W^{k,p}(\mathbf{R}^n)$ in $L^\infty(\mathbf{R}^n)$ und ist stetig. Es gibt eine Konstante $C > 0$ derart, daß $\|u\|_{L^\infty} \leq C\|u\|_{W^{k,p}}$ für alle Funktionen u in $W^{k,p}(\mathbf{R}^n)$.
Beweis Um die Aussagen mit L^∞ zu beweisen, reicht es aus, die Ungleichung für $u \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ zu beweisen. Die Begründung solcher Aussagen haben wir schon kennengelernt. Um die Aussage über Stetigkeit zu beweisen, reicht es zu beobachten, daß in der Situation von Lemma 2.1.1 die Abbildung $\tilde{L}$ ihre Werte in $\overline{L(Y)}$ annimmt und daß die stetigen Funktionen einen abgeschlossenen Teilraum von $L^\infty(\mathbf{R}^n)$ bilden. Wenn wir die Ungleichung für eine glatte Funktion u mit kompaktem Träger beweisen wollen reicht es aus $u(0)$ zu beschränken. Ein beliebiger Punkt x des $\mathbf{R}^n$ kann geschrieben werden als $r\omega$, wo ω auf der Einheitssphäre liegt. Sei $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ eine Funktion der Klasse C^∞ mit $g(r) = 1$ für $r < 1/2$ und $g(r) = 0$ für $r > 3/4$. Für jedes ω:

$$\begin{aligned} u(0) &= -\int_0^1 \partial/\partial r[g(r)u(r,\omega)]dr && (17) \\ &= \frac{(-1)^k}{(k-1)!}\int_0^1 r^{k-n}(\partial/\partial r)^k[g(r)u(r,\omega)]r^{n-1}dr && (18) \end{aligned}$$

wo die zweite Zeile durch partielle Integration folgt. Wenn diese Formel über S^{n-1} integriert wird, folgt:

$$|u(0)| \leq C\int_B r^{k-n}|(\partial/\partial r)^k[g(r)u(r,\omega)]|dx$$

wo B die Kugel um den Ursprung mit Radius eins ist. Die Hölder-Ungleichung gibt:

$$\|u(0)\| \leq C\|r^{k-n}\|_{L^{p'}(B)}\|(\partial/\partial r)^k[g(r)u(x)]\|_{L^p(B)}$$

mit $1/p + 1/p' = 1$. Der Operator $(\partial/\partial r)^k$ kann in der Form $\sum A^\alpha D^\alpha$ geschrieben werden, wo die A^α beschränkt sind. Deshalb kann der zweite Faktor durch $\|u\|_{W^{k,p}}$ abgeschätzt werden. Der erste Faktor ist endlich unter der Bedingung $kp > n$ des Theorems.

2.2 Moser-Ungleichungen

Unser Ziel ist es jetzt, die Moser-Abschätzungen zu beweisen. Wir brauchen aber als Zwischenschritt die Gagliardo-Nirenberg-Abschätzungen.

Lemma 2.2.1 Sei j eine ganze Zahl mit $1 \leq j \leq n$. Sei $k > 1$ eine reelle Zahl und $1 \leq p \leq k$. Wir definieren $q_1 = 2k/(p+1)$ und $q_2 = 2k/(p-1)$. Wenn $u \in L^{q_2}(\mathbf{R}^n) \cap W^{2,q_1}(\mathbf{R}^n)$, dann ist $\partial_j u \in L^{2k/p}$ und es existiert eine Konstante $C > 0$, so daß folgende Ungleichung gilt:

$$\|\partial_j u\|^2_{L^{2k/p}} \leq C\|u\|_{L^{q_2}}\|\partial_j^2 u\|_{L^{q_1}}$$

Beweis Wenn $v \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ und $q \geq 2$, dann ist die Funktion $v|v|^{q-2}$ in $C_0^1(\mathbf{R}^n)$ und

$$\partial_j(v|v|^{q-2}) = (q-1)(\partial_j v)|v|^{q-2}$$

Sei $v = \partial_j u$. Dann ist:

$$|\partial_j u|^q = \partial_j(u\partial_j u|\partial_j u|^{q-2}) - (q-1)u\partial_j^2 u|\partial_j u|^{q-2}$$

Wir integrieren jetzt diese Gleichung über $\mathbf{R}^n$ und benutzen die verallgemeinerte Hölder-Ungleichung, um den zweiten Term abzuschätzen. (Der erste Term auf der rechten Seite hat Integral Null.) Das Ergebnis ist

$$\|\partial_j u\|^q_{L^q} \leq |q-1| \ \|u\|_{L^{q_2}}\|\partial_j^2 u\|_{L^{q_1}}\|\partial_j u\|^{q-2}_{L^q}$$

wo $q = 2k/p$. Es bleibt jetzt nur, beide Seiten durch $\|\partial_j u\|^{q-2}_{L^q}$ zu dividieren.

Als nächstes wird diese Ungleichung auf $D^{l-1}u$ angewandt. Es folgt

$$\|D^l u\|^2_{L^{2k/p}} \leq C\|D^{l-1}u\|_{L^{q_2}}\|D^{l+1}u\|_{L^{q_1}}$$

Hier liegt p im Intervall $[1,k]$ und $l \geq 1$ ist eine ganze Zahl. Jetzt benutzen wir die elementare Ungleichung, daß für nichtnegative reelle Zahlen a und b und $\epsilon > 0$ beliebig, $\sqrt{ab} \leq \epsilon a + (1/4\epsilon)b$, mit dem Ergebnis:

$$\|D^l u\|_{L^{2k/p}} \leq C(\epsilon\|D^{l-1}u\|_{L^{2k/(p-1)}} + \epsilon^{-1}\|D^{l+1}u\|_{L^{2k/(p+1)}})$$

Wenn $p \in [2,k]$ und $l \geq 2$ bekommen wir

$$\|D^{l-1}u\|_{L^{2k/(p-1)}} \leq C(\epsilon_1\|D^{l-2}u\|_{L^{2k/(p-2)}} + \epsilon_1^{-1}\|D^l u\|_{L^{2k/p}})$$

Diese zwei Ungleichungen können kombiniert werden, mit ϵ_1 fest und ϵ hinreichend klein, um folgende Abschätzung zu bekommen:

$$\|D^l u\|_{L^{2k/p}} \leq C(\epsilon\|D^{l-2}u\|_{L^{2k/(p-2)}} + C(\epsilon)\|D^{l+1}u\|_{L^{2k/(p+1)}})$$

Nach weiteren Schritten dieser Art, bekommen wir

$$\|D^l u\|_{L^{2k/p}} \leq C(\epsilon\|D^{l-j}u\|_{L^{2k/(p-j)}} + C(\epsilon)\|D^{l+1}u\|_{L^{2k/(p+1)}})$$

für $j \leq p \leq k$ und $l \geq j$. Wir können auch für den zweiten Term einsetzen. Dies führt zu folgendem Ergebnis:

Lemma 2.2.2 Wenn $j \leq p \leq k+1-m$, $l \geq j$, dann gilt (für ϵ hinreichend klein) die Ungleichung

$$\|D^l u\|_{L^{2k/p}} \leq C(\epsilon\|D^{l-j}u\|_{L^{2k/(p-l)}} + C(\epsilon)\|D^{l+m}u\|_{L^{2k/(p+m)}})$$

Der ganze Inhalt dieser Aussage wird schon durch den Spezialfall $l = j$ gegeben, nämlich:

$$\|D^l u\|_{L^{2k/p}} \leq C(\epsilon\|u\|_{L^{2k/(p-l)}} + C(\epsilon)\|D^{l+m}u\|_{L^{2k/(p+m)}})$$

Eine weitere Spezialisierung dieser Abschätzung wird im folgenden von Interesse sein. Es geht um den Fall $p+m=k$:

$$\|D^l u\|_{L^{2k/p}} \leq C(\epsilon\|u\|_{L^{2k/(p-j)}} + C(\epsilon)\|D^{k+l-p}u\|_{L^2})$$

In den Ungleichungen, die wir bewiesen haben, steht immer rechts eine Summe. Jetzt wird diese Summe durch ein Produkt ersetzt.

Lemma 2.2.3 Seien l, μ und m nichtnegative ganze Zahlen mit l nicht größer als das Maximum von μ und m und seien q, r und ρ reelle Zahlen, die im Intervall $[1,\infty]$ liegen. Wir definieren

$$\alpha = \frac{n}{q} - \frac{n}{r} + \mu - l, \quad \beta = -\frac{n}{q} + \frac{n}{\rho} - m + l$$

und nehmen an, daß weder α noch β verschwindet. Wenn die Ungleichung

$$\|D^l u\|_{L^q} \leq C_1\|D^\mu u\|_{L^r} + C_2\|D^m u\|_{L^\rho}$$

für alle $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ gilt, dann gilt

$$\|D^l u\|_{L^q} \leq (C_1 + C_2)\|D^\mu u\|_{L^r}^{\beta/(\alpha+\beta)} \|D^m u\|_{L^\rho}^{\alpha/(\alpha+\beta)}$$

Wenn die erste Ungleichung gilt, dann haben α und β das gleiche Vorzeichen.

Wir schreiben die erste Ungleichung schematisch als $Q \leq C_1 R + C_2 P$. Jetzt ersetzen wir $u(x)$ durch $u(sx)$ in der Ungleichung, und bekommen

$$s^{l-n/q} Q \leq C_1 s^{\mu-n/r} R + C_2 s^{m-n/\rho} P$$

für alle $s > 0$. Wenn wir beide Seiten durch $s^{l-n/q}$ dividieren, folgt $Q \leq C_1 s^\alpha R + C_2 s^{-\beta} P$. Wenn α und β entgegengesetze Vorzeichen hätten, könnte man entweder $s \to 0$ oder $s \to \infty$ gehen lassen und schließen, daß $Q = 0$ ist, eine Absurdität. Also haben α und β das gleiche Vorzeichen. Jetzt soll $s = (P/R)^{1/(\alpha+\beta)}$ gewählt werden. Dann bekommen wir die erwünschte Abschätzung. (Es ist zu bemerken, daß die Wahl von s gerade so ist, daß die zwei Terme auf der rechten Seite gleich sind.)

Wenn wir das Ergebnis von Lemma 2.2.3 auf den Spezialfall der Ungleichung anwenden, die in Lemma 2.2.2 bewiesen wurde, bekommen wir folgendes Theorem:

Theorem 2.2.1 (Gagliardo-Nirenberg) Seien l, p und k positive ganze Zahlen mit $l \leq p \leq k-1$ dann gilt

$$\|D^l u\|_{L^{2k/p}} \leq C\|u\|_{L^{2k/(p-l)}}^{(k-p)/(k+l-p)} \|D^{k+l-p} u\|_{L^2}^{l/(k+l-p)}$$

Insbesondere, wenn $l < k$, können wir $p = l$ setzen, und es gilt

$$\|D^l u\|_{L^{2k/l}} \leq C\|u\|_{L^\infty}^{1-l/k} \|D^k u\|_{L^2}^{l/k}$$

Die Ungleichungen von Gagliardo-Nirenberg sollen jetzt benutzt werden um zu zeigen, daß, unter geeigneten Umständen, Multiplikation und Zusammensetzung mit glatten Funktionen Sobolevräume (vom Typ L^2) in sich selbst abbilden.

Lemma 2.2.4 Wenn β und γ Multiindizes sind, mit $|\beta| + |\gamma| = k$, dann gibt es eine Konstante $C > 0$ derart, daß für alle f und g in $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$,

$$\|(D^\beta f)(D^\gamma g)\|_{L^2} \leq C(\|f\|_{L^\infty} \|D^k g\|_{L^2} + \|D^k f\|_{L^2} \|g\|_{L^\infty})$$

Beweis Die Hölder-Ungleichung impliziert, daß

$$\|(D^\beta f)(D^\gamma g)\|_{L^2} \leq \|D^\beta f\|_{L^{2k/l}} \|D^\gamma g\|_{L^{2k/m}}$$

wobei $l = |\beta|$ und $m = |\gamma|$ ist. Wenn wir die Ungleichung von Gagliardo-Nirenberg auf die Terme auf der rechten Seite anwenden, bekommen wir

$$\begin{aligned} \|(D^\beta f)(D^\gamma g)\|_{L^2} &\leq C\|f\|_{L^\infty}^{(1-l/k)} \|D^k f\|_{L^2}^{l/k} \|g\|_{L^\infty}^{(1-m/k)} \|D^k g\|_{L^2}^{m/k} && (19) \\ = & \quad C(\|f\|_{L^\infty}\|D^k g\|_{L^2})^{m/k} (\|D^k f\|_{L^2}\|g\|_{L^\infty})^{l/k} && (20) \end{aligned}$$

Das Ergebnis folgt jetzt aus der Ungleichung $a^{1/p}b^{1/q} \leq (p^{-1}a + q^{-1}b)$ für positive reelle Zahlen a, b und p, q aus dem Intervall $[1, \infty]$ mit $p^{-1}+q^{-1} = 1$.

Mit diesem Ergebnis können die ersten zwei Moser-Abschätzungen beweisen werden.

Theorem 2.2.2 (Moser) Es gibt eine Konstante $C > 0$, so daß die Abschätzung

$$\|D^\alpha(fg)\|_{L^2} \leq C(\|f\|_{L^\infty}\|D^s g\|_{L^2} + \|D^s f\|_{L^2}\|g\|_{L^\infty})$$

für alle $f, g \in H^s(\mathbf{R}^n) \cap L^\infty(\mathbf{R}^n)$ gilt, wo $s = |\alpha|$. Insbesondere ist $D^\alpha(fg)$ in $L^2(\mathbf{R}^n)$. Es gibt auch eine Konstante $C > 0$, so daß die Abschätzung

$$\|D^\alpha(fg) - fD^\alpha g\|_{L^2} \leq C(\|D^s f\|_{L^2}\|g\|_{L^\infty} + \|\nabla f\|_{L^\infty}\|D^{s-1} g\|_{L^2})$$

für alle $f \in H^s(\mathbf{R}^n) \cap W^{1,\infty}(\mathbf{R}^n)$ und $g \in H^{s-1}(\mathbf{R}^n) \cap L^\infty(\mathbf{R}^n)$.
Beweis Der Beweis wird nur für den Fall $f, g \in C_0^\infty$ gegeben.

$$D^\alpha(fg) = \sum_{\beta+\gamma=\alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta f D^\gamma g$$

Jeder Term auf der rechten Seite kann, mit Hilfe von Lemma 2.2.4, durch den gleichen Ausdruck abgeschätzt werden, was die erste Ungleichung des Theorems liefert.

$$D^\alpha(fg) - fD^\alpha g = \sum_{\beta+\gamma=\alpha, \beta>0} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta f D^\gamma g$$

Der letzte Ausdruck ist eine Linearkombination von Termen der Form $(D^\beta \partial_i f)(D^\gamma g)$, mit $|\beta+\gamma| = s-1$. Deshalb reicht es, um die zweite Ungleichung zu beweisen, Lemma 2.2.4 anzuwenden, mit f ersetzt durch $\partial_i f$.

Um die dritte Moser-Abschätzung zu beweisen, brauchen wir folgende Verallgemeinerung von Lemma 2.2.4.

Lemma 2.2.5 Wenn β_i Multiindizes sind, $i = 1, \ldots, s$ mit $\sum |\beta_i| = k$, dann ist

$$\begin{aligned} &\|(D^{\beta_1} f_1) \ldots (D^{\beta_s} f_s)\|_{L^2} \\ &\leq C(\|f_1\|_{L^\infty} \|f_2\|_{L^\infty} \ldots \|D^k f_s\|_{L^2} + \ldots + \|D^k f_1\|_{L^2} \|f_2\|_{L^\infty} \ldots \|f_s\|_{L^\infty}) \end{aligned} \tag{21}$$

Beweis Der Beweis ist dem von Lemma 2.2.4 sehr ähnlich. Zuerst wird die verallgemeinerte Hölder-Ungleichung angewendet, und dann die Abschätzung von Gagliardo-Nirenberg.

Theorem 2.2.3 (Moser) Sei $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ eine Funktion der Klasse C^∞ mit $F(0) = 0$. Es gibt eine Konstante $C > 0$, die nur von $\|f\|_{L^\infty}$ abhängt, so daß die Abschätzung

$$\|D^\alpha(F(f))\|_{L^2} \leq C(\|f\|_{L^\infty}) \|D^s f\|_{L^2}$$

für alle $f \in H^s(\mathbf{R}^n) \cap L^\infty(\mathbf{R}^n)$ gilt, wo $s = |\alpha|$. Insbesondere ist $D^\alpha(F(f))$ in $L^2(\mathbf{R}^n)$.
Beweis $D^\alpha(F(f)) = \sum_{r \leq s} \sum_{\beta_1+\ldots+\beta_s=\alpha} C_\beta D^{\beta_1} f \ldots D^{\beta_s} f (d^r F/df^r)(f)$. Jetzt kann Lemma 2.2.5 benutzt werden, um das Ergebnis zu bekommen.

Eine wichtige Eigenschaft der Moser-Ungleichungen ist folgende. Die rechte Seite enthält Ausdrücke, die viele Ableitungen enthalten können (die L^2-Normen) und solche, die nicht mehr als eine Ableitung enthalten können (die L^∞-Normen). Die Ausdrücke der ersten Art kommen nur linear vor. Solche Abschätzungen heißen 'zahm'. Wir werden später sehen, daß sie wichtig sind, um ein scharfes Fortsetzungskriterium für symmetrisch hyperbolische Systeme zu bekommen. Wenn man lediglich Existenz zeigen möchte, dann reichen folgende schwächere Konsequenzen der Moser-Ungleichungen. Es ist allerdings so, daß mit den Moser-Ungleichungen, das Argument für das Existenztheorem wesentlich 'sauberer' und effizienter wird.

Lemma 2.2.6 Sei $s > n/2$. Es gibt eine Konstante $C > 0$, so daß die Abschätzung

$$\|fg\|_{H^s} \leq C\|f\|_{H^s}\|g\|_{H^s}$$

für alle $f, g \in H^s(\mathbf{R}^n)$ gilt. Insbesondere ist fg in $H^s(\mathbf{R}^n)$. Wenn F so ist, wie in den Voraussetzungen von Theorem 2.2.3, und $C_1 > 0$ eine Konstante ist, dann gibt es eine Konstante $C_2 > 0$, so daß $\|f\|_{H^s} \leq C_1$ impliziert, daß $\|F(f)\|_{H^s} \leq C_2$.

Beweis Der erste Teil folgt unmittelbar aus Theorem 2.2.2 wenn man benutzt, daß, aufgrund der Sobolev-Ungleichung, die L^∞-Norm durch die H^s-Norm beschränkt werden kann. Der zweite Teil folgt auf ähnliche Art und Weise aus Theorem 2.2.3.

2.3 Satz von Banach-Alaoglu

Im Laufe des Existenzbeweises für symmetrisch hyperbolische Systeme, der im folgenden präsentiert wird, brauchen wir den Satz von Banach-Alaoglu, der jetzt kurz diskutiert wird. Wenn X ein Banachraum ist, sei X' der dazugehörige Dualraum und X'' der zweite Dualraum, d.h. der Dualraum von X'. Es gibt eine natürliche Einbettung i von X in X'', der durch $i(u)(\phi) = \phi(u)$ gegeben wird. Diese Abbildung i ist aber, im allgemeinen nicht surjektiv. Betrachten wir die schwache Topologie auf X'. Eine Folge ϕ_n in X' konvergiert schwach, wenn für ein beliebiges $\omega \in X''$ die Folge $\omega(\phi_n)$ konvergiert. Wir können aber auch folgende schwächere Definition einführen. Für $u \in X$ sei $\omega_u = i(u)$. Eine Folge ϕ_n in X konvergiert schwach* wenn für ein beliebiges $u \in X$ die Folge $\omega_u(\phi_n)$ konvergiert. (Die Terminologie kommt daher, das der Dualraum oft mit X^* statt X' bezeichnet wird.) Es gibt eine Topologie auf X', die schwach*-Topologie, die diesen Konvergenzbegriff für Folgen liefert. Wenn der Raum reflexiv ist, so daß X mit X'' identifiziert werden kann, stimmen schwach und schwach* konvergente Folgen miteinander überein. Im allgemeinen ist dies aber nicht der Fall. Ein Beipiel dafür, das im folgenden wichtig ist, ist der von den L^∞-Räumen. Die Folge des Satzes von Banach-Alaoglu, die wir brauchen, wird jetzt angegeben. Um abzukürzen nennen wir im folgenden den Satz unten selbst Satz von Banach-Alaoglu. Eine Diskussion der Beziehung dieses Theorems zur ursprünglichen Aussage findet man bei Rudin [3].

Theorem 3.1.1 (Banach-Alaoglu) Sei X ein separabler Banachraum. Jede beschränkte Folge in X' hat eine schwach*-konvergente Teilfolge.

Wenn, z. B. X der separable Raum $L^1(\mathbf{R}^n)$ ist, impliziert der Satz, daß jede beschränkte Folge im Dualraum $X' = L^\infty(\mathbf{R}^n)$ eine schwach* konvergente Teilfolge hat.

3 Lokale Existenz für lineare symmetrisch hyperbolische Systeme

3.1 Das Problem

In diesem Abschnitt wollen wir Existenz und Eindeutigkeit im Anfangswertproblem für ein lineares symmetrisch hyperbolisches System mit Koeffizienten der Klasse C^∞ zeigen. Da es sich um ein lineares System handelt, brauchen wir uns nicht um den Unterschied zwischen in der Zeit lokalen und globalen Lösungen zu kümmern. Wir betrachten das System:

$$A^0(t,x)\partial_t u + \sum_{i=1}^n A^i(t,x)\partial_i u + B_1(t,x)u + B_2 = 0 \tag{22}$$

Die Abbildungen A^0, A^i und B_1 sind Abbildungen der Klasse C^∞ von $\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n$ nach $M_k(\mathbf{R})$ und B_2 ist eine Abbildung der Klasse C^∞ von $\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n$ nach $\mathbf{R}^k$. Gesucht wird eine Lösung u, die eine Abbildung der Klasse C^∞ von $\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n$ nach $\mathbf{R}^k$ ist. Der folgende Beweis ist im wesentlichen der, der im Buch von F. John [1] gegeben wird. Die Abweichungen, die es gibt, sind deshalb da, um den Beweis für den nichtlinearen Fall vorzubereiten.

3.2 Das Abhängigkeitsgebiet

Es ist auch möglich, im Raum zu lokalisieren. Dies geschieht mit Hilfe der Begriffe des Abhängigkeitsgebiets, bzw. des Einflußbereichs. Hier ist eine Warnung notwendig. WARNUNG: Einige Autoren vertauschen die Begriffe Abhängigkeitsgebiet und Einflußbereich.

Definition 1 Eine Lösung u eines symmetrisch hyperbolischen Systems auf $I\times\mathbf{R}^n$ sei gegeben. Ein *Abhängigkeitsgebiet* für einen Punkt $(t_0,x_0)\in I\times\mathbf{R}^n$ ist eine Teilmenge G der Anfangshyperfläche $t=0$ mit der Eigenschaft, daß jede glatte Lösung v des Systems, die auf G mit u übereinstimmt, $v(t_0,x_0) = u(t_0,x_0)$ erfüllt.

Nach dieser Definition gibt es kein eindeutiges Abhängigkeitsgebiet. Z. B. ist $G = \mathbf{R}^n$ immer eine Möglichkeit. Kleinere Abhängigkeitsgebiete sind interessanter, aber es gibt kein Theorem, das die Existenz eines minimalen Abhängigkeitsgebietes für eine gegebene Gleichung und Lösung sichern würde. Es ist möglich, auf eine ähnliche Art und Weise das Abhängigkeitsgebiet einer Teilmenge E von $I \times \mathbf{R}^n$ zu definieren, als eine Teilmenge G der Hyperfläche $t = 0$, die ein Abhängigkeitsgebiet für jeden Punkt in E ist. Umgekehrt, haben wir folgende Definition:

Definition 2 Eine Lösung u eines symmetrisch hyperbolischen Systems auf $I \times \mathbf{R}^n$ sei gegeben. Der *Einflußbereich* einer Teilmenge G der Anfangshyperfläche $t = 0$ ist die Menge aller Punkte (t, x) derart, daß G ein Abhängigkeitsgebiet für (t, x) ist.

Der Einflußbereich ist eindeutig definiert, was nicht bedeutet, daß es leicht sein muß, für eine gegebene Gleichung und Lösung, diese Menge zu bestimmen.

Aussagen über das Abhängigkeitsgebiet bei symmetrisch hyperbolischen Systemen können durch Energie-Identitäten gewonnen werden. Eine klassische (d.h. C^1) Lösung u eines linearen symmetrisch hyperbolischen Systems sei gegeben. Sei S_0 bzw. S_1 die Hyperflächen $t = 0$ bzw. $t = f(x)$. Wir nehmen an, daß S_1 eine raumartige Hyperfläche ist. Wir sagen, daß eine offene Teilmenge G von $I \times \mathbf{R}^n$ ein *linsenförmiges Gebiet* ist, das durch S_0 und S_1 definiert ist, wenn G relativ kompakt ist, und der Rand ∂G von G in $S_0 \cup S_1$ enthalten ist. Die Gleichung ist:

$$Pu = A^0 \partial_t u + \sum_{i=1}^{n} A^i \partial_i u + B_1 u + B_2 = 0 \tag{23}$$

wobei wir noch nicht festlegen wollen, wie differenzierbar die Koeffizienten A^0, A^i, B_1 und B_2 sein sollen. Wenn wir $\partial_0 u = \partial_t u$ schreiben, können wir P in der Form $Pu = \sum_{i=0}^{n} A^i \partial_i u + B_1 u + B_2$ schreiben. Im Moment soll der homogene Fall $B_2 = 0$ betrachtet werden. Eine Integration des inneren Produkts $\langle Pu, e^{-kt} u \rangle$ über G, für eine Konstante k, liefert:

$$0 = \int_G e^{-kt} \langle u, \sum_{i=0}^{n} A^i \partial_i u + B_1 u \rangle \tag{24}$$

Das Integral über Terme, die A^i enthalten, kann folgendermaßen ausgedrückt werden

$$\int_G e^{-kt}\langle u, \sum_{i=0}^n A^i\partial_i u\rangle = \int_G \sum_{i=0}^n \frac{1}{2}\partial_i(e^{-kt}\langle u, A^i u\rangle) - \frac{1}{2}\int_G e^{-kt}\langle u, \sum_{i=0}^n \partial_i A^i u\rangle$$
$$+ \frac{1}{2}k\int_G e^{-kt}\langle u, A^0 u\rangle \tag{25}$$

Der erste Term auf der rechten Seite kann, mit Hilfe des Satzes von Stokes, in ein Randintegral umgewandelt werden. Sei $(\partial G)_- = \partial G \cap S_0$ und $(\partial G)_+ = \partial G \cap S_1$. Dann ist das Ergebnis:

$$\int_G \sum_{i=0}^n \partial_i(e^{-kt}\langle u, A^i u\rangle) = \int_{(\partial G)_+} e^{-kt}\langle u, (A^0 - \sum_{i=1}^n A^i\partial_i f)u\rangle - \int_{(\partial G)_-}\langle u, A^0 u\rangle \tag{26}$$

Die Gleichungen (24)-(26) ergeben zusammen:

$$\int_{(\partial G)_+} e^{-kt}\langle u, (A^0 - \sum_{i=1}^n A^i\partial_i f)u\rangle = \int_{(\partial G)_-}\langle u, A^0 u\rangle$$
$$+ \int_G e^{-kt}\langle u, \sum_{i=0}^n \partial_i A^i u\rangle - k\int_G e^{-kt}\langle u, A^0 u\rangle - 2\int_G e^{-kt}\langle u, B_1 u\rangle$$
$$= \int_{(\partial G)_-}\langle u, A^0 u\rangle + \int_G e^{-kt}\langle u, \sum_{i=0}^n \partial_i A^i u - 2B_1 u - kA^0 u\rangle \tag{27}$$

Sei $u = 0$ auf $(\partial G)_-$. Wenn k groß genug gewählt wird, dann ist der letzte Term in (27) negativ, vorausgesetzt, daß u nicht identisch auf G verschwindet. Damit kann die rechte Seite negativ gemacht werden, was zu einem Widerspruch führt, da die linke Seite offensichtlich nichtnegativ ist. Das Verschwinden von u auf ∂G_- impliziert also das Verschwinden von u auf G, und ∂G_- ist ein Abhängigkeitsgebiet für G. Um diese Rechnung zu rechtfertigen reicht es wenn A^0 und A^i $(1 \leq i \leq n)$ C^1 sind und B_1 und B_2 stetig.

Dieses Argument liefert jetzt ein Eindeutigkeitstheorem für lineare symmetrisch hyperbolische Systeme.

Theorem 3.2.1 Seien u, v zwei klassische Lösungen des linearen symmetrisch hyperbolischen Systems (22) auf $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ mit den gleichen Anfangsdaten u_0 bei $t = 0$. Seien A^0 und A^i $(1 \leq i \leq n)$ Abbildungen der Klasse C^1 und B_1 und B_2 stetig. Dann ist $u = v$ in einer Umgebung der Anfangshyperfläche.

Wenn die Matrizen A^i beschränkt sind, für $1,\ldots,n$, ist $u=v$ auf ganz $\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n$.

Beweis Die Funktion $u-v$ ist eine Lösung der homogenen Gleichung mit verschwindenden Anfangsdaten. Da eine Umgebung der Anfangshyperfläche mit linsenförmigen Gebieten überdeckt werden kann, muß , nach dem obigen Argument, $u-v$ auf dieser Umgebung verschwinden. Damit haben wir die erste Aussage des Theorems. Nehmen wir jetzt an, daß die A^i beschränkt sind, für $1,\ldots,n$. Dann reicht es aus, um festzustellen, daß die Hyperfläche S_1 in der Definition eines linsenförmigen Gebiets raumartig ist, $|f'|$ kleiner als eine bestimmte positive Konstante zu wählen. In dem man ein linsenförmiges Gebiet nimmt, das diese Bedingung erfüllt, und dieses in räumlichen Richtungen verschiebt, sieht man, daß in diesem Fall die Umgebung der Anfangshyperfläche, wo Eindeutigkeit gilt, von der Form $I'\times\mathbf{R}^n$ gewählt werden kann. Dabei ist I' ein Intervall, das die Null enthält. Jetzt betrachten wir das Supremum von allen positiven reellen Zahlen T, mit der Eigenschaft, daß $u=v$ für $-T<t<T$. Es ist soeben gezeigt worden, daß $T>0$ ist. Wir möchten zeigen, daß $T=\infty$ ist. Unter der Annahme, daß T endlich ist, muß $u=v$ für $-T\le t\le T$ gelten, wegen der Stetigkeit der Funktionen. In dem wir $t=T$ oder $t=-T$ als neue Anfangshyperfläche wählen, sehen wir, daß $u=v$ auf dem Intervall $(-T-\epsilon,T+\epsilon)$, was der Definition von T widerspricht. Es muß also $T=\infty$ gelten, und das Theorem ist bewiesen.

Als nächstes soll gezeigt werden, daß wenn ein Anfangsdatum u_0 für eine Lösung u eines linearen symmetrisch hyperbolischen Systems mit A^i beschränkt für $i=1,\ldots,n$ kompakten Träger hat, die Einschränkung von u auf jede andere Hyperfläche der Form $t=t_0$ auch kompakten Träger hat. Um konkret zu sein, benutzen wir linsenförmige Gebiete, wo $f(x)=\alpha-\beta|x|^2$ und $\alpha,\beta>0$. Es ist klar, daß eine solche Funktion f ein linsenförmiges Gebiet definiert, sobald die Hyperfläche $t=f(x)$ raumartig ist. Unter der Bedingung, daß die A^i beschränkt sind für $i=1,\ldots,n$ gilt letzteres wenn β hinreichend klein ist, sagen wir $\beta\le\beta_0$. Nehmen wir jetzt an, daß der Träger von u_0 in der Kugel mit Radius R um den Ursprung enthalten ist. Sei jetzt $x_0\in\mathbf{R}^n$ ein Punkt, der außerhalb der Kugel mit Radius $R+\beta_0t_0^2$ um den Ursprung liegt. Eine Betrachtung des linsenförmigen Gebiets mit $\alpha=t_0$ und $\beta=\beta_0$ zeigt, daß die Lösung im Punkt (t_0,x_0) verschwindet. Deshalb ist der Träger der Einschränkung von u auf $t=t_0$ in der Kugel mit Radius $R+\beta_0t_0^2$ enthalten. Wir sehen also, daß der Träger der Lösung zu späteren Zeitpunkten kompakt ist, und wir bekommen eine grobe Abschätzung dafür, wie schnell der Träger sich ausbreitet.

Diese Abschätzung für die Propagationsgeschwindigkeit ist sehr grob, und wir wollen uns jetzt das Abhängigkeitsgebiet im Falle der Wellengleichung genauer anschauen. Dazu wählen wir $f(x) = t_0 - (\tau^2 + |x - x_0|^2)^{1/2}$, wo τ eine positive Konstante ist. Diese Funktion f definiert ein linsenförmiges Gebiet für jeden Wert von τ. Deshalb ist $|x - x_0| \leq (t_0^2 - \tau^2)^{1/2}$ immer ein Abhängigkeitsgebiet für den Punkt $(t_0 - \tau, x_0)$. Ein einfaches Stetigkeitsargument im Limes $\tau \to 0$ zeigt, daß $|x - x_0| \leq t_0$ ein Abhängigkeitsgebiet für den Punkt (t_0, x_0) ist. Dieses Argument hängt nicht von der Dimension ab. Die Frage, ob man ein noch kleineres Abhängigkeitsgebiet für die Wellengleichung finden kann, ist wesentlich subtiler. Für n ungerade ist $|x - x_0| = t_0$ ein Abhängigkeitsgebiet für (t_0, x_0) (Huygensches Prinzip) aber für n gerade (z. B. $n = 2$) ist dies nicht der Fall. Die Tatsache, daß wir das Abhängigkeitsgebiet für die Wellengleichung überhaupt so weit eingrenzen konnten, wie wir es getan haben, liegt daran, daß wir die Geometrie der Charakteristiken gut verstehen. Die Analyse für nichtlineare Wellengleichungen und Wellenabbildungen ist identisch, und die für die Maxwellgleichungen im Vakuum sehr ähnlich. Bei den Eulergleichungen sieht es schon weniger einfach aus, da, wenn man den Schallkegel zurückverfolgt, diese Fläche nicht glatt zu bleiben braucht. Dies ist ein allgemeines Problem bei quasilinearen Gleichungen.

An dieser Stelle können wir schon ein Eindeutigkeitstheorem für nichtlineare symmetrisch hyperbolische Systeme beweisen. Dazu benutzen wir folgendes Lemma.

Lemma 3.2.1 Sei U eine offene Teilmenge des $\mathbf{R}^k$ und sei $F : U \to \mathbf{R}^k$ eine Abbildung der Klasse C^1. Dann gibt es eine stetige Abbildung $M : U \times U \to M_k(\mathbf{R})$, so daß $F(v) - F(u) = M(u, v)(v - u)$.

Beweis Hier wird das Lemma nur unter der zusätzlichen Annahme bewiesen, daß U konvex ist. Wer mit Zerlegungen der eins vertraut ist, wird sehen, daß sie benutzt werden können, um daraus den allgemeinen Fall abzuleiten. Sei $w(t) = (1 - t)u + tv$. Weil U als konvex angenommen wird, ist $w(t) \in U$ für $t \in [0, 1]$ und $F(w(t))$ ist definiert.

$$\begin{aligned} F(v) - F(u) &= F(w(1)) - F(w(0)) && (28) \\ &= \int_0^1 (d/dt)(F(w(t'))dt' && (29) \end{aligned}$$

$$= \int_0^1 DF(w(t'))(dw/dt)(t')dt' \quad (30)$$
$$= \int_0^1 DF(w(t'))(v-u)dt' \quad (31)$$

Wir können also $M(u,v) = \int_0^1 DF(w(t))dt$ setzen. Dieser Ausdruck ist offensichtlich stetig, wenn F eine Abbildung der Klasse C^1 ist.

Theorem 3.2.2 Seien u, v zwei klassische Lösungen des quasilinearen symmetrisch hyperbolischen Systems (10) auf $I \times \mathbf{R}^n$ mit den gleichen Anfangsdaten u_0 bei $t = 0$ wobei A^i eine Abbildung der Klasse C^1 ist, für $0, \ldots, n$ und B auch C^1. Dann ist $u = v$ in einer Umgebung der Anfangshyperfläche. Wenn die Matrizen $A^i(u)$ beschränkt sind, für $1, \ldots, n$, ist $u = v$ auf ganz $I \times \mathbf{R}^n$.
Beweis Es gelten die Gleichungen $\sum_{i=0}^n A^i(u)\partial_i u + B(u) = 0$ und $\sum_{i=0}^n A^i(v)\partial_i v + B(v) = 0$. Deshalb gilt auch

$$\sum_{i=0}^n [A^i(u)\partial_i(u-v) + (A^i(u) - A^i(v))\partial_i v] + B(u) - B(v) = 0 \quad (32)$$

Mit Lemma 3.2.1 können wir diese Gleichung in folgender Form umschreiben:

$$\sum_{i=0}^n A^i(u)\partial_i(u-v) + [\sum_{i=0}^n \tilde{A}^i(u,v)(\partial_i v) + \tilde{B}(u,v)](u-v) = 0 \quad (33)$$

Dies ist ein lineares homogenes symmetrisch hyperbolisches System für $u-v$. Da u und v klassische Lösungen sind ist $A^i(u)$ der Klasse C^1 und die anderen Koeffizienten stetig. Deshalb folgt das erwünschte Ergebnis aus Theorem 3.2.1. (Streng genommen, brauchen wir das Analogon von 3.2.1, wo $\mathbf{R}$ durch ein Intervall I ersetzt wird, aber dieses Analogon kann genauso bewiesen werden.)

Um einen lokalen Existenzsatz (d.h. lokal in der Zeit) für ein symmetrisch hyperbolisches System zu beweisen, reicht es dies lokal im Raum zu tun, wie jetzt erklärt wird. Sei ϕ eine glatte Funktion mit kompaktem Träger, die die Bedingungen $\phi = 1$ für $|x| < 1$, $\phi = 0$ für $|x| > 2$ und $0 \leq \phi(x) \leq 1$ überall im $\mathbf{R}^n$ erfüllt. Sei u_0 ein Anfangsdatum für ein symmetrisch hyperbolisches System. Für jeden Punkt $y \in \mathbf{R}^n$ können wir die Anfangsdaten $u_{0,y}(x) = \phi(x)u_0(y+x)$ betrachten. Nehmen wir an, daß für jede Wahl von y eine Lösung u_y mit Daten $u_{0,y}$ auf dem Gebiet $|x| < 1$, $|t| < T(y)$ existiert.

Dann existiert eine Lösung mit Anfangsdatum u_0. Sei y_k eine Folge, so daß die Kugeln mit Radius 1 um die Punkte y_n eine lokal endliche Überdeckung des $\mathbf{R}^n$ bilden. Zunächst definieren wir $u(t,x)$ auf dem Gebiet $|x-y_k|<1$, $|t|<T(y_k)$ durch $u(t,x)=u_{y_k}(t,x-y)$. Es gibt eine offene Umgebung von $t=0$, wo die Funktion u wohldefiniert ist. Diese Funktion ist eine Lösung der Gleichung mit Anfangsdatum u_0. Dies zeigt, das wir bei Existenzbeweisen ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen können, daß die Anfangsdaten kompakten Träger haben.

3.3 Energieabschätzungen

Nach den Ergebnissen des letzten Abschnitts wissen wir, daß es ausreicht bei Existenzsätzen für symmetrisch hyperbolische Systeme, lokal im Raum zu arbeiten. Deshalb dürfen wir, ohne Beschränkung der Allgemeinheit, die Koeffizienten der Gleichung außerhalb von einem Kompaktum ändern, wenn es uns das Leben erleichtert. Dies wollen wir jetzt mit der Gleichung (22) tun. Sei ϕ eine glatte Funktion mit kompaktem Träger mit den Eigenschaften, die oben verlangt wurden (Abschneidefunktion). In dem wir die Koeffizienten A^i $(1\le i\le n)$, B_1 bzw. B_2 in (22) durch ϕA^i, ϕB_1 bzw. ϕB_2, können wir annehmen, daß diese Koeffizienten kompakten Träger haben. Bei A^0 ist es nicht ganz so einfach. In dem Fall ersetzen wir A^0 durch $\phi A^0+(1-\phi)Id$. Diese Matrix ist positiv definit und ist gleich der Identität in der Nähe des Unendlichen. Eine andere Vereinfachung ist, das Problem auf den Fall mit verschwindenden Anfangsdaten zu reduzieren. Die Lösung u der ursprünglichen Gleichung mit Anfangsdaten u_0 kann durch die Funktion v ersetzt werden, wo $v(t,x)=u(t,x)-u_0(x)$. Diese Funktion erfüllt die Gleichung

$$A^0\partial_t v+\sum_{i=1}^n A^i\partial_i v+B_1 v+[B_2+\sum_{i=1}^n A^i\partial_i u_0+B_1 u_0]=0 \tag{34}$$

mit verschwindenden Anfangsdaten bei $t=0$ und diese Gleichung hat die gleiche Form wie (22). Deshalb können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit im Existenzbeweis annehmen, daß $u_0=0$.

Lemma 3.3.1 Sei u eine glatte Lösung des linearen symmetrisch hyperbolischen Systems (22) mit Anfangsdatum Null auf dem Zeitintervall $[0,T]$, deren Träger im Bereich $|x|<R$ liegt, für eine Konstante $R>0$. Wenn die Koeffizienten A^0, A^i, B_1 und B_2 glatt sind, und wenn A^0-Id, A^i, B_1 und B_2 für $|x|>R$ verschwinden, dann existiert eine Konstante $C>0$, so daß $\|u(t)\|_{H^s}\le C\sup_{0\le t'\le T}\|B_2(t')\|_{H^s}$.

Beweis Da A^0 gleichmäßig positiv definit ist, gibt es eine Konstante $C_1 > 0$, so daß $\langle v, A^0 v\rangle \geq C_1|v|^2$ für alle $v \in \mathbf{R}^k$. Weil $A^0 - Id$ kompakten Träger hat, gibt es eine Konstante $C_2 > 0$, so daß $\langle v, A^0 v\rangle \leq C_2|v|^2$ für alle $v \in \mathbf{R}^k$. Es folgt, daß $(\langle v, A^0(t,x)v\rangle)^{1/2}$ eine Norm definiert, die mit der üblichen Norm im $\mathbf{R}^k$ gleichmäßig (in (t,x)) äquivalent ist.

$$
\begin{aligned}
(d/dt)\int_{\mathbf{R}^n}\langle u, A^0 u\rangle &= 2\int_{\mathbf{R}^n}\langle u, A^0\partial_t u\rangle + \int_{\mathbf{R}^n}\langle u, \partial_t A^0 u\rangle && (35)\\
&= -2\int_{\mathbf{R}^n}\langle u, \sum_{i=1}^n A^i\partial_i u + B_1 u + B_2\rangle + \int_{\mathbf{R}^n}\langle u, \partial_t A^0 u\rangle && (36)
\end{aligned}
$$

Jetzt werden die räumlichen Ableitungen von u auf der rechten Seite mit Hilfe einer partiellen Integration eliminiert.

$$\int_{\mathbf{R}^n}\langle u, \sum_{i=1}^n A^i\partial_i u\rangle = -\frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}^n}\sum_{i=1}^n\langle\partial_i A^i u, u\rangle \tag{37}$$

Wenn (37) in (40) eingesetzt wird, ist das Ergebnis:

$$(d/dt)\int_{\mathbf{R}^n}\langle u, A^0 u\rangle = \int_{\mathbf{R}^n}\langle u, (\partial_t A^0 + \sum_{i=1}^n\partial_i A^i - 2B_1)u - 2B_2\rangle \tag{38}$$

Es folgt, daß

$$(d/dt)\int_{\mathbf{R}^n}\langle u, A^0 u\rangle \leq C\|u\|^2_{L^2} + \|B_2\|^2_{L^2} \tag{39}$$

Wenn die schon erwähnte Äquivalenz der Normen benutzen, bekommen wir die Ungleichung:

$$(d/dt)\int_{\mathbf{R}^n}\langle u, A^0 u\rangle \leq C\int_{\mathbf{R}^n}\langle u, A^0 u\rangle + \|B_2\|^2_{L^2} \tag{40}$$

Es folgt daraus durch Integration, daß

$$\|u(t)\|_{L^2} \leq C\sup_{0\leq t'\leq t}\|B_2(t')\|_{L^2} \tag{41}$$

Um die Ungleichung für höhere Sobolevnormen zu bekommen, müssen wir eine Gleichung für $D^\alpha u$ herleiten, wo α ein beliebiger Multiindex ist. Die Gleichung lautet:

$$
\begin{aligned}
A^0 \quad & \partial_t(D^\alpha u) + \sum_{i=1}^n A^i \partial_i(D^\alpha u) + [D^\alpha(A^0\partial_t u) - A^0\partial_t(D^\alpha u)] \\
+ \quad & \sum_{i=1}^n [D^\alpha(A^i\partial_i u) - A^i\partial_i(D^\alpha u)] + D^\alpha(B_1 u) + D^\alpha B_2 = 0 \qquad (42)
\end{aligned}
$$

Diese Gleichung für $D^\alpha u$ hat eine ähnliche Form wie die für u, mit dem einzigen Unterschied, das B_2 durch einen komplizierteren Ausdruck ersetzt worden ist. Die Moser-Ungleichungen sind gerade richtig, um diese Terme abzuschätzen. Im Moment, aber, genügt eine gröbere Abschätzung.

$$
\|D^\alpha(A^i\partial_i u) - A^i D^\alpha \partial_i u\|_{L^2} \le C\|u\|_{H^s} \qquad (43)
$$

und

$$
\|D^\alpha(B_1 u)\|_{L^2} \le C\|u\|_{H^s} \qquad (44)
$$

Im Term mit A^0 ist es auch notwendig, die Gleichung (22) einzusetzen. Zunächst bekommen wir:

$$
\|D^\alpha(A^0\partial_t u) - A^0 D^\alpha(\partial_t u)\|_{L^2} \le C\|\partial_t u\|_{H^{s-1}} \qquad (45)
$$

Die Gleichung liefert dann

$$
\|\partial_t u\|_{H^{s-1}} \le C(\|u\|_{H^s} + \|B_2\|_{H^s}) \qquad (46)
$$

Es folgt die Ungleichung:

$$
(d/dt)\int_{\mathbf{R}^n} \langle D^\alpha u, A^0 D^\alpha u\rangle \le C\|u\|_{H^s}^2 + \|B_2\|_{H^s}^2 \qquad (47)
$$

mit $s = |\alpha|$. In dem wir diese Ungleichungen für die Ableitungen bis zu einer bestimmten Ordnung s aufsummieren und wie im Fall $s = 0$ weiter verfahren, bekommen wir die Aussage des Theorems. Mit dieser Ungleichung kann man einen Existenzbeweis konstruieren, den wir hier aber nicht weiter betrachten. Ein abstraktes Argument liefert eine schwache Lösung, und in einem zweiten Schritt muß dann die Glattheit gezeigt werden.

3.4 Diskretisierung

Es wird jetzt die Existenz von Lösungen linearer symmetrisch hyperbolischer Systeme mit Hilfe der Diskretisierung gezeigt. Dazu müssen einige Notationen eingeführt werden. Wir betrachten ein Zeitintervall $[0,T]$ mit T eine feste reelle Zahl, und definieren ein Gitter auf $[0,T]\times\mathbf{R}^n$. Seien h und k zwei positive reelle Zahlen mit der Eigenschaft, daß $T=kl$ für eine ganze Zahl l. Sei Σ die Menge aller Punkte der Form

$$x=(x_1,\ldots,x_n)=(\alpha_1 h,\ldots,\alpha_n h),\quad t=mk,\ 0\le t\le T \tag{48}$$

Hier sind $\alpha_1,\ldots,\alpha_n,m$ ganze Zahlen. Die α_j werden zu einem Multiindex $\tilde{\alpha}$ zusammengefaßt, wo die Schlange andeuten soll, daß die Indizes alle ganzen Zahlen als Werte annehmen dürfen. Dann besteht Σ aus den Punkten

$$x=\tilde{\alpha}h,\quad t=mk \text{ mit } 0\le m\le T/k \tag{49}$$

Wir definieren Operatoren:

$$E_j u(t,x_1,\ldots,x_n)=u(t,x_1,\ldots,x_j+h,\ldots,x_n);\quad j=1,\ldots,n \tag{50}$$

und

$$E_0 u(t,x_1,\ldots,x_n)=u(t+k,x_1,\ldots,x_n) \tag{51}$$

Wir schreiben symbolisch

$$E^{\tilde{\alpha}}u(t,x)=u(t,x+\tilde{\alpha}h) \tag{52}$$

Als nächstes werden folgende Operatoren definiert:

$$\delta_j=h^{-1}(E_j-1);\quad j=1,\ldots,n \tag{53}$$

und

$$\delta_0=k^{-1}(E_0-1) \tag{54}$$

Diese Operatoren kommutieren alle untereinander. Für Funktionen der Klasse C^2 impliziert der Satz von Taylor, daß

$$\delta_j u(t,x)=\partial_j(t,x)+O(h),\quad \delta_0 u(t,x)=\partial_t(t,x)+O(k) \tag{55}$$

Wenn man die Gleichung (22) diskretisieren möchte, scheint es auf den ersten Blick vernünftig, die Differenzengleichung

$$A^0\delta_0 v+\sum_{j=1}^n A^j\delta_j v+B_1 v+B_2=0 \tag{56}$$

zu betrachten. Leider gibt es damit Stabilitätsprobleme, so daß eine kompliziertere Form benutzt werden muß. Geeignet ist die (von Friedrichs eingeführte) Gleichung:

$$k^{-1}A^0\left(E_0-(2n)^{-1}\sum_{j=1}^{n}(E_j+E_j^{-1})\right)v+(2h)^{-1}\sum_{j=1}^{n}A^j(E_j-E_j^{-1})v+B_1v+B_2=0 \tag{57}$$

Dies können wir auch als $\Lambda v=-B_2$ schreiben, für einen geeigneten linearen Operator Λ. Die Gleichung (57) soll für alle Werte von $(t,x)\in\Sigma$ gelten, so daß $0\leq t\leq T-k$. Da A^0 invertierbar ist, kann (57) nach $E_0v=v(t+k)$ aufgelöst werden. Es ist also möglich, die Werte von v zum Zeitpunkt $t+k$ zu berechnen, wenn man die Werte für $t=k$ kennt. Durch den Anfangswert $v(0,x)=0$ ist dann eine Lösung von (57) eindeutig definiert. Es ist also unproblematisch, Existenz für das System von Differenzengleichungen zu beweisen. Die Arbeit ist dann, eine Konvergenzaussage im Limes $(h,k)\to 0$ zu beweisen.

3.5 Konvergenz

Die Methoden, die benutzt werden, um die Konvergenz zu beweisen, sind diskrete Versionen der Energieabschätzungen und Sobolevungleichungen. Die Gleichung (57) wird jetzt folgendermaßen umgeschrieben:

$$A^0E_0v=\sum_{j=1}^{n}(a^jE_j+b^jE_j^{-1})v-kB_1v-kB_2 \tag{58}$$

wo

$$a^j=\frac{1}{2n}A^0-\frac{k}{2h}A^j,\quad b^j=\frac{1}{2n}A^0+\frac{k}{2h}A^j \tag{59}$$

Die Matrizen a^j und b^j sind symmetrisch. Die Tatsache, daß A^0 positiv definit ist, impliziert, daß a^i und b^i auch positiv definit sind, vorausgesetzt, daß k/h hinreichend klein ist. Es existiert also ein positive reelle Zahl λ, so daß diese Matrizen positiv definit sind, wenn $k=\lambda h$. Wenn a positiv definit und symmetrisch ist, gilt die Ungleichung:

$$2\langle v,aw\rangle\leq 2\sqrt{\langle v,av\rangle}\sqrt{\langle w,aw\rangle}\leq\langle v,av\rangle+\langle w,aw\rangle \tag{60}$$

Jetzt bilden wir das innere Produkt der Gleichung (58) mit $2E_0v$ und benutzen (60).

$$2\langle E_0 v, A^0 E_0 v\rangle \leq \langle E_0 v, \left(\sum_{j=1}^{n}(a^j + b^j)\right)(E_0 v)\rangle$$
$$+\sum_{j=1}^{n}\Big(\langle E_j v, a^j(E_j v)\rangle + \langle E_j^{-1} v, b^j(E_j^{-1} v)\rangle\Big)$$
$$-2k\langle E_0 v, B_1 v\rangle - 2k\langle E_0 v, B_2\rangle \tag{61}$$

Es folgt aus (59), daß

$$\sum_{j=1}^{n}(a^j + b^j) = A^0 \tag{62}$$

Außerdem ist

$$\begin{aligned}
\langle E_j v, a^j(E_j v)\rangle &= E_j(\langle v, a^j v\rangle) - \langle E_j v, (E_j a^j - a^j) E_j v\rangle & (63)\\
&= E_j(\langle v, a^j v\rangle) - h\langle E_j v, (\delta_j a^j) E_j v\rangle & (64)
\end{aligned}$$

Die Ableitungen, und infolgedessen auch die Differenzenquotienten der a^i, sind auf dem gegebenen Gebiet $[0, T] \times \mathbf{R}^n$ beschränkt. Es gibt also eine Konstante C derart, daß

$$\langle E_j v, (\delta_j a^j) E_j v\rangle \leq C\langle E_j v, (E_j A^0)(E_j v)\rangle = C E_j(\langle v, A^0 v\rangle) \tag{65}$$

und

$$\langle E_j v, a^j(E_j v)\rangle = E_j(\langle v, a^j v\rangle) + O(hE_j(\langle v, A^0 v\rangle) \tag{66}$$

Auf ähnliche Art und Weise sieht man, daß

$$\langle E_j^{-1} v, b^j(E_j^{-1} v)\rangle = E_j^{-1}(\langle v, b^j v\rangle) + O(hE_j^{-1}(\langle v, A^0 v\rangle)) \tag{67}$$
$$\langle E_0 v, A^0(E_0 v)\rangle = E_0(\langle v, A^0 v\rangle) + O(kE_0(\langle v, A^0 v\rangle)) \tag{68}$$
$$2k\langle E_0 v, B_1 v + B_2\rangle = O(kE_0(\langle v, A^0 v\rangle) + k\langle v, A^0 v\rangle + k\langle B_2, A^0 B_2\rangle) \tag{69}$$

Wenn diese Ungleichungen in (61) eingesetzt werden, ergibt sich:

$$\langle E_0 v, A^0 E_0 v\rangle = \sum_{j=1}^{n}(E_j(\langle v, a^j v\rangle) + E_j^{-1}(\langle v, b^j v\rangle)) \tag{70}$$
$$+O((h(E_j + E_j^{-1})(\langle v, A^0 v\rangle) + k\langle v, A^0 v\rangle + kE_0(\langle v, A^0 v\rangle) + k\langle B_2, A^0 B_2\rangle))$$

Diese Ungleichung wird jetzt für einen festen Wert von $t = mk$ über alle x von der Form $\tilde{\alpha}h$ summiert. Die Energiesumme

$$\eta(t) = h^n \sum_{\tilde{\alpha}} E^{\tilde{\alpha}}(\langle v, A^0 v\rangle) \tag{71}$$

ist ein diskretes Analogon des Energiefunktionals, das im Abschnitt 3.3 betrachtet wurde. Sei

$$\zeta(t) = h^n \sum_{\tilde{\alpha}} E^{\tilde{\alpha}}(\langle B_2, A^0 B_2\rangle) \tag{72}$$

Da alle Funktionen, die eingehen, kompakten Träger haben, enthalten alle Summen, die hier vorkommen, nur endlich viele nichtverschwindende Terme. Die Summe ändert sich nicht, wenn $\langle v, A^0 v\rangle$ durch $E_j(\langle v, A^0 v\rangle)$ oder $E_j^{-1}(\langle v, A^0 v\rangle)$ ersetzt wird, weil die gleichen Terme summiert werden. Diese Aussage spielt eine analoge Rolle in der diskreten Situation, wie die partielle Integration im kontinuierlichen Falle. Es folgt, daß:

$$\begin{aligned} \eta(t+k) &= h^n \sum_{\tilde{\alpha}} \sum_{j=1}^{n} E^{\tilde{\alpha}}(\langle v, a^j v\rangle + \langle v, b^j v\rangle) \\ &+ O(h\eta(t) + k\eta(t) + k\eta(t+k) + k\zeta(t)) \qquad (73) \\ &\leq \eta(t) + K((h+k)\eta(t) + k\eta(t+k) + k\zeta(t)) \qquad (74) \end{aligned}$$

für eine Konstante K. Wenn wir annehmen, daß $k = \lambda h$ so klein ist, daß $Kk < \frac{1}{2}$, dann kann (73) nach $\eta(t+k)$ aufgelöst werden, was zur Ungleichung

$$\eta(t+k) \leq e^{Ck}\eta(t) + k\gamma\zeta(t) \tag{75}$$

führt. Wenn man die Bedingung $\eta(0) = 0$ benutzt folgt durch Induktion:

$$\eta(t) \leq k\gamma e^{CT} \sum_{\nu=0}^{m} \zeta(\nu k) \tag{76}$$

Jetzt wird eine Norm für Funktionen auf dem Gitter durch

$$\|w\|^2 = h^n k \sum_{(t,x)\in\Sigma} \langle w, A^0 w\rangle \tag{77}$$

definiert. Die Summe von (76) über Σ liefert

$$\|v\|^2 \leq \gamma T e^{CT} \|B_2\|^2 = \gamma T e^{CT} \|\Lambda v\|^2 \tag{78}$$

Damit haben wir das diskrete Analogon von (41) erreicht.

Es wird niemanden überraschen, daß der nächste Schritt darin besteht, entsprechende Ungleichungen für Differenzenquotienten herzuleiten. Um dies zu tun, wird der Operator δ_r auf die Gleichung angewendet. Dabei ist folgende Regel für Produkte nützlich:

$$\delta_r(uv) = u\delta_r v + (\delta_r u)(E_r v) \tag{79}$$

Es wird der Operator δ_r auf (58) angewendet, und (79) benutzt. Dabei entsteht ein Term der Form $E_0 E_r v$, der mit Hilfe von (58) eliminiert werden kann. Auf diese Weise können wir eine Gleichung der Form

$$\Lambda(\delta_r v) = -B_2^r \tag{80}$$

wo B_2^r eine Linearkombination von $\delta_r B_2$, $E_r B_2$, $\delta_r v$, $E_r v$, $E_r \delta_s v$ und $E_r E_j^{-1} \delta_s v$ ist. Die Koeffizienten in dieser Linearkombination hängen von A^0, A^i, B_1 und ihren Differenzenquotienten ab. Wenn wir jetzt die Ungleichung (78) auf $\delta_r v$ statt v anwenden, und wenn T hinreichend klein ist, bekommen wir eine Ungleichung der Form

$$\sum_{i=1}^{n} \|\delta_r v\|^2 = O(\|B_2\|^2 + \|B_2^r\|^2) \tag{81}$$

Wie klein T gewählt werden muß, hängt nur von einer Schranke für A^0, A^i und ihren Differenzenquotienten ab, solange A^0 für alle betrachteten Koeffizienten gleichmäßig positiv definit ist. Dieser Vorgang kann jetzt wiederholt werden, um die Ungleichung

$$\sum_{|\alpha|\leq s} \|\delta^\alpha v\|^2 = O(\sum_{|\alpha|\leq s} \|\delta^\alpha B_2\|^2) \tag{82}$$

Hier ist, für einen Multiindex α, $\delta^\alpha = \delta_1^{\alpha_1} \ldots \delta_n^{\alpha_n}$. In dem wir die nochmal die Tatsache benutzen, daß A^0 gleichmäßig positiv definit ist, bekommen wir die Beziehung:

$$h^n \sum_{\tilde{\beta}} \langle \delta^\alpha v(t, \tilde{\beta} h), \delta^\alpha v(t, \tilde{\beta} h)\rangle = O(\sum_{|\gamma|\leq s} \|\delta^\gamma B_2\|^2) \tag{83}$$

Damit sind L^2-Abschätzungen für Lösungen des diskretisierten Systems hergeleitet worden.

Der nächste Schritt ist, diskrete Versionen der Sobolev-Ungleichungen zu beweisen. Sei g eine glatte Funktion von $\mathbf{R}$ nach $\mathbf{R}$ mit kompaktem Träger. Wenn r eine nichtnegative ganze Zahl ist, gilt:

$$\begin{aligned} g(x) &= g(x+rh) - \sum_{\nu=0}^{r-1}(g(x+(\nu+1)h) - g(x+\nu h)) \\ &= g(x+rh) - h\sum_{\nu=0}^{r-1}\delta g(x+\nu h) \end{aligned} \tag{84}$$

Es folgt die Ungleichung

$$g^2(x) \le 2g^2(x+rh) + 2rh^2\sum_{\nu=0}^{r-1}(\delta g(x+\nu h))^2 \tag{85}$$

Diese Ungleichung wird jetzt von $r=0$ bis $r=p-1$ summiert, mit dem Ergebnis:

$$pg^2(x) \le 2\sum_{r=-\infty}^{\infty} g^2(x+rh) + p^2h^2\sum_{r=-\infty}^{\infty}(\delta g(x+rh))^2 \tag{86}$$

Sei p die eindeutige ganze Zahl mit $h^{-1} \le p < h^{-1}+1$. Wenn h hinreichend klein ist (z. B. $h < \sqrt{2}-1$) gilt $p^2h^2 < 2$. Dann impliziert (86), daß

$$g^2(x) \le 2h\sum_{r=-\infty}^{\infty}(g(x+rh))^2 + (\delta g(x+rh))^2 \tag{87}$$

Wenn x/h eine ganze Zahl ist, kann auf der rechten Seite dieser Gleichung x durch 0 ersetzt werden. Jetzt sei g eine reellwertige Funktion auf dem $\mathbf{R}^2$. Durch wiederholte Anwendung von (87) bekommen wir:

$$g^2(x_1,x_2) \le 2h\sum_{r_1=-\infty}^{\infty}[(g(r_1h,x_2))^2 + (\delta g(r_1h,x_2))^2] \tag{88}$$

$$\le 4h^2\sum_{r_1,r_2=-\infty}^{\infty}[(g(r_1h,r_2h))^2 + (\delta_1 g)^2 + (\delta_2 g)^2 + (\delta_1\delta_2 g)^2] \tag{89}$$

Diese Vorgehensweise kann auf jeden Wert von n ausgeweitet werden. Es resultiert, daß für n beliebig und $x \in \mathbf{R}^n$ von der Form $\tilde{\gamma}h$:

$$g^2(x) \le 2^nh^n\sum_{|\alpha|\le n}\sum_{\tilde{\beta}}(\delta^\alpha g(\tilde{\beta}h))^2 \tag{90}$$

Wenn diese Ungleichung mit (83) kombiniert wird folgt, daß für eine Lösung der Differenzengleichung (57) mit verschwindenden Anfangsdaten und α beliebig:

$$|\delta^\alpha v(t,x)|^2 = O(\sum_{|\beta|\le|\alpha|+n} \|\delta^\beta B_2(t,x)\|^2) \tag{91}$$

Hier muß angenommen werden, daß T hinreichend klein ist, je nachdem wie groß $|\alpha|$ ist.

Im folgenden werden Abschätzungen wie (91) benötigt, die nicht vom gewählten Wert von h abhängen, so daß es dann möglich ist, h anschließend gegen Null gehen zu lassen. Dazu wird die Summe auf der rechten Seite von (91) durch ein Integral ersetzt. Sei f eine glatte reellwertige Funktion auf dem $\mathbf{R}^n$. Nach dem Mittelwertsatz gilt:

$$\min_{|y-x|\le h} \partial_j f(y) \le \delta f(x) \le \max_{|y-x|\le h} \partial_j f(y) \tag{92}$$

Durch Induktion folgt

$$\min_{|y-x|\le sh} D^\beta f(y) \le \delta^\beta f(x) \le \max_{|y-x|\le sh} D^\beta f(y) \tag{93}$$

Mit anderen Worten, ist $\delta^\beta f(x)$ gleich $D^\beta f(y)$ für ein y mit $|y-x|\le h$. Es folgt, daß der Ausdruck $h^n k\sum_{(t,x)\in\Sigma}(\delta^\beta B_2(t,x))^2$ das Integral $\int_0^T\int_{\mathbf{R}^n}(D^\beta B_2(t,x))^2 dxdt$ approximiert, wie aus der Theorie des Riemann-Integrals bekannt ist. Infolgedessen, und aufgrund der Tatsache, daß B_1 eine glatte Funktion mit kompaktem Träger ist, konvergiert die Summe gegen das Integral für $h\to 0$. Mit Hilfe der Gleichung (57) bekommen wir ähnliche Abschätzungen für Differenzenquotienten wo auch δ_0 vorkommt. Es folgt, daß $\delta_0^i\delta^\alpha v$ für alle i, α mit $i+|\alpha|\le 2$ beschränkt sind, unabhängig von h. (Hier wurde nur benutzt, daß B_2 eine Funktion der Klasse C^{n+2} ist.)

Jetzt sind wir bereit, das Ergebnis zu beweisen. Das Gitter wird verfeinert, durch die Wahl $h=2^{-q}$, $k=2^{-q}\lambda$ und q eine positive Ganze Zahl. Sei Σ_q das Gitter für die gegebene Wahl von q und v^q die Lösung der diskretisierten Gleichung auf diesem Gitter. Für $q'\le q$ ist $\Sigma_{q'}\subset\Sigma_q$. Die Vereinigung der Mengen Σ_q ist eine abzählbare Teilenge σ von $[0,T]\times\mathbf{R}^n$. Die Funktionen $\delta_0^i\delta^\alpha v^q$ mit $i+|\alpha|\le 2$ sind definiert auf $\Sigma_{q'}$ für alle $q'\le q$. Sie sind gleichmäßig beschränkt und, für $i+|\alpha|\le 1$ gleichmäßig Lipschitz-stetig. Die Beschränktheit impliziert, daß es eine Teilfolge S der natürlichen Zahlen gibt, so daß

$$\lim_{q\to\infty, q\in S} \delta_0^i\delta^\alpha v^q(t,x) = u^{i,\alpha}(t,x) \tag{94}$$

für $i+|\alpha| \leq 2$ und $(t,x) \in \sigma$ existiert. Die $u^{i,\alpha}$ sind beschränkt und Lipschitz für $i+|\alpha| \leq 1$. Sie haben also eindeutige Lipschitz-stetige Fortsetzungen auf ganz $[0,T] \times \mathbf{R}^n$.

Die Funktion $u^{0,0}$ ist ein Kandidat für eine Lösung der urprünglichen Gleichung. Da alle approximierenden Funktionen für $t=0$ verschwinden, verschwindet $u^{0,0}$ da auch und hat also das richtige Anfangsdatum, um die gesuchte Lösung zu sein. Es bleibt zu zeigen, daß $u^{0,0}$ die Gleichung erfüllt. Dazu möchten wir zeigen, daß $u^{i,\alpha} = \partial_t^i D^\alpha u^{0,0}$ für $i+|\alpha|=1$. Hier wird der Fall $i=1$, $|\alpha|=0$ explizit bewiesen. Der Fall $i=0$, $|\alpha|=1$ ist ähnlich. Seien (t,x) und $(t,x+c)$ zwei Punkte von σ. Es existiert ein q', so daß (t,x) und $(t,x+c)$ in Σ_q sind, für alle $q \geq q'$. Sei $\epsilon > 0$. Es gibt $q'' > q$, so daß

$$|u(t,x) - v^q(t,x)| < \epsilon, \quad |u(t+c,x) - v^q(t+c,x)| < \epsilon \tag{95}$$

für alle $q > q''$ in S. (Hier haben wir u für $u^{0,0}$ geschrieben.) Es folgt, daß

$$\left| \frac{u(t+c,x) - u(t,x)}{c} - \frac{v^q(t+c,x) - v^q(t,x)}{c} \right| < 2\epsilon/c \tag{96}$$

für $q > q''$ und $q \in S$. Die Zahl c ist von der Form $c = mk$, mit $k = \lambda 2^{-q}$.

$$\begin{aligned}
\left| \frac{v^q(t+c,x) - v^q(t,x)}{c} - \delta_0 v^q(t,x) \right| &= \left| \frac{1}{m} \left(\sum_{\nu=0}^{m-1} \delta_0 v^q(t+\nu k, x) - \delta_0 v^q(t,x) \right) \right| \\
&= \left| \frac{k}{m} \sum_{\nu=0}^{m-1} \sum_{\mu=0}^{\nu-1} \delta_0^2 v^q(t+\mu k, x) \right| \\
&\leq Mmk = Mc
\end{aligned} \tag{97}$$

wo M eine obere Schranke für $\delta_0^2 v^q$ ist. Die Kombination von (96) und (97) liefert

$$\left| \frac{u(t+c,x) - u(t,x)}{c} - \delta_0 v^q(t,x) \right| \leq \frac{2\epsilon}{c} + Mc \tag{98}$$

Wenn wir jetzt q in S gegen unendlich gehen lassen, und dann ϵ gegen Null, kommt die Ungleichung

$$\left| \frac{u(t+c,x) - u(t,x)}{c} - u^{1,0}(t,x) \right| \leq Mc \tag{99}$$

soweit (t,x) und $(t+c,x)$ in σ liegen. Die Stetigkeit von u und $u^{1,0}$ impliziert, daß diese Ungleichung für alle (t,x) und $(t,x+c)$ in $[0,T] \times \mathbf{R}^n$ gilt. Im

Limes $c \to 0$ bekommen wir die erwünschte Beziehung $\partial_t u = u^{1,0}$. Mit dieser Information kann gezeigt werden, daß u die Gleichung erfüllt. Wir müssen nur zeigen, daß die verschiedenen Terme in (57) gegen die entsprechenden Terme in (22) konvergieren. Für die letzten zwei Terme ist dies offensichtlich. Um die Konvergenz des zweiten Terms zu zeigen, kann man die Identität:

$$(2h)^{-1}(E_j - E_j^{-1}) = \frac{1}{2}(1 + E_j^{-1})\delta_j \tag{100}$$

benutzen. Der erste Term kann mit Hilfe der Identität

$$k^{-1}(E_0 + (2n)^{-1}\sum_{j=1}^{n}(E_j + E_j^{-1}))v = (\delta_0 - (2n)^{-1}\lambda^{-1}\sum_{j=1}^{n}\delta_j(1 - E_j^{-1}))v \tag{101}$$

behandelt werden. Damit ist folgender Satz bewiesen:
Theorem 3.5.1 Sei u_0 ein glattes Anfangsdatum mit kompaktem Träger für das lineare symmetrisch hyperbolische System (22). Seien $A^0 - Id$, A^i, B_1 und B_2 glatt mit kompaktem Träger. Dann existiert eine eindeutige klassische Lösung mit dem gegebenen Anfangsdatum auf einem Zeitintervall $[0, T]$

Dieses Theorem ist nicht ganz das, was wir möchten, weil es nur eine klassische Lösung lokal in der Zeit liefert, während es in der Tat eine glatte Lösung global in der Zeit gibt. Die zusätzlichen Aussagen können aber nachgeholt werden:
Theorem 3.5.2 Sei u_0 ein glattes Anfangsdatum mit kompaktem Träger für das lineare symmetrisch hyperbolische System (22). Seien $A^0 - Id$, A^i, B_1 und B_2 glatt mit kompaktem Träger auf jedem endlichen Zeitintervall. Dann existiert eine eindeutige glatte Lösung mit dem gegebenen Anfangsdatum auf dem Zeitintervall $(-\infty, \infty)$.
Beweis (Skizze) Die Methoden, die zur Existenz einer klassischen Lösung auf einem Intervall $[0, T_1]$ führen, können verallgemeinert werden um zu zeigen, daß eine Lösung der Klasse C^2 auf einem Intervall $[0, T_2]$ existiert. Die Länge dieses Intervalls hängt von der Größe der Anfangsdaten im Raum C^l ab, für eine bestimmte Zahl l. Die Beschränkung der Existenzzeit ist, aber, nur eine Folge der Methode, die hier benutzt wurde, und keine intrinsische Eigenschaft des Problems. Wir können nämlich das Datum u_0 bzw.den inhomogenen Term B_2 durch cu_0 bzw. cB_2 ersetzen, und dann wird die Lösung durch cu ersetzt, wegen der Linearität. Durch diese Transformation kann der Fall von allgemeinen Daten mit einem allgemeinen inhomogenen

Term auf den Fall von kleinen Daten einem kleinen inhomogenen Term reduziert werden. In dem wir die Gleichung nach t und x_j differenzieren, und neue Variablen $w = \partial_t u$ und $u_j = \partial_j u$ einführen, bekommen wir ein neues symmetrisch hyperbolisches System. Dieses System unterscheidet sich vom ursprünglichen System nur durch den inhomogenen Term. Daten für das neue System bekommen wir, in dem wir die Daten für das ursprüngliche System differenzieren, und die Gleichung bei $t = 0$ einsetzen. Nach Theorem 3.5.1 hat das neue System eine klassische Lösung auf einem Intervall $[0, T_2]$. Die Größen $w - \partial_t u$ und $u_i - \partial_i u$ sind klassische Lösungen eines homogenen linearen symmetrisch hyperbolischen Systems mit verschwindenden Anfangsdaten. Sie verschwinden also überall. Es folgt, daß das ursprüngliche Gleichungssystem eine Lösung der Klasse C^3 hat auf dem Intervall $[0, T_2]$. Jetzt kann induktiv bewiesen werden, daß die Lösung auf $[0, T_2]$ eine Funktion der Klasse C^k ist für jeden endlichen Wert von k. Deshalb ist diese Lösung eine Funktion der Klasse C^∞. Wenn wir jetzt ein endliches Zeitintervall wählen, sind, nach den Annahmen des Theorems, die Koeffizienten der Gleichung auf diesem Intervall gleichmäßig beschränkt. Deshalb können wir die gleiche Zeit T_2 wählen, wenn wir Anfangsdaten zu verschiedenen Zeitpunkten vorgeben. Da wir das gegebene Intervall durch endlich viele Intervalle der Länge T_2 überdecken können, existieren Lösungen global auf dem gegebenen Intervall. (Hier wurde benutzt, daß das Problem Zeitumkehrinvariant ist, so daß es genau so einfach ist, rückwärts in der Zeit zu lösen.)

Es gibt verschiedene Methoden, um dieses Theorem zu beweisen. Wir haben hier nur die eine vorgestellt. Manche haben folgende allgemeine Struktur gemeinsam. In einem ersten Schritt ersetzt man die Gleichung, die man lösen möchte, durch eine Gleichung, die einfacher zu lösen ist, aber die, in einem bestimmten Sinne, die ursprüngliche Gleichung approximieren soll. Dann muß man in einem zweiten Schritt zeigen, daß die Funktionen, die eine Lösung des ursprünglichen Problems approximieren sollen, tatsächlich gegen eine Lösung dieses Problems konvergieren. Im zweiten Schritt spielen (approximative) Energieungleichungen eine prominente Rolle. Die approximierende Gleichung könnte eine Differenzengleichung sein (wie hier), eine Gleichung mit analytischen Koeffizienten (so daß man das Theorem von Cauchy-Kowalewskaya anwenden kann) oder eine regularisierte Version der Gleichung, wo man die Differentialoperatoren mit Glättungsoperatoren multipliziert. Ohne Zweifel gibt es auch andere Möglichkeiten.

4 Lokale Existenz für quasilineare symmetrisch hyperbolische Systeme

4.1 Das Problem

In diesem Abschnitt wollen wir lokale Existenz im Anfangswertproblem für ein quasilineares symmetrisch hyperbolisches System mit Koeffizienten der Klasse C^∞ zeigen. Die Notation und Annahmen sind wie im Abschnitt 1.4 mit der Ausnahme, daß wir jetzt auch Lösungen betrachten, die nicht notwendigerweise C^∞ sind. Sie werden aber immer klassische Lösungen sein. Es wird angenommen, daß die Koeffizienten abgeschnitten worden sind, wie am Anfang des Abschnitts 3.3, und daß nur Anfangsdaten mit kompaktem Träger betrachtet werden. Eindeutigkeit für (10) ist schon im Theorem 3.2.2 gezeigt worden. Die Funktion u soll ein Anfangsdatum u_0 haben, das im Sobolevraum $H^s(\mathbf{R}^n)$ liegt, mit s hinreichend groß. (Wie groß wird noch präzisiert.) Es wird auch ein scharfes Fortsetzungskriterium bewiesen, das besagt, wann eine Lösung, die lokal in der Zeit definiert ist, auf eine längeres Zeitintervall ausgedehnt werden kann. Der Beweis, der hier vorgeführt wird, ist im wesentlichen der von Majda[Ma]. Die allgemeine Strategie des Beweises ist folgende. Um technische Probleme zu vermeiden, wird das Anfangsdatum u_0 durch eine Folge $\{u_0^j\}$ von glatten Funktionen mit kompaktem Träger, die in $H^s(\mathbf{R}^n)$ gegen u_0 konvergiert, approximiert. Dann wird eine Iteration definiert. Wenn u^{j-1} gegeben ist, soll u^j die Lösung der Gleichung:

$$A^0(t,x,u^{j-1})\partial_t u^j + \sum_{i=1}^{n} A^i(t,x,u^{j-1})\partial_i u^j + B(t,x,u^{j-1}) = 0 \qquad (102)$$

mit Anfangsdatum u_0^j sein. Es geht also darum, eine lineare Gleichung mit glatten Koeffizienten bei glatten Anfangsdaten zu lösen. Dies wurde im Theorem 3.5.2 gemacht. Es ist allerdings folgendes zu beachten. Die Lösung dieser Gleichung braucht nicht global zu existieren, weil u^{j-1} den Rand des Gebiets G erreichen kann, so daß die Koeffizienten nicht mehr definiert sind. Wir bekommen also nur eine lokale Existenzaussage für (102) und die Existenzzeit kann von vornherein von j abhängen. Dies muß kontrolliert werden. Wenn wir eine Folge u^j auf einem festen Zeitintervall haben, muß noch die Konvergenz gegen eine Lösung von (10) gezeigt werden. Das Mittel, um dies zu tun, wird durch die Energieabschätzungen geliefert.

4.2 Die Iteration

Die Iteration, die im letzten Abschnitt kurz beschrieben wurde, wird jetzt formal aufgestellt. Sei u_0 eine Funktion mit Werten im $\mathbf{R}^k$, die dem Sobolevraum $H^s(\mathbf{R}^n)$ gehört. Dann existiert eine Folge u_0^j in $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ mit $\|u_0^j - u_0\|_{H^s} \to 0$ für $j \to \infty$. Sei eine Funktion u^0 auf $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ durch $u^0(t,x) = u_0^0(x)$ definiert. Jetzt wird rekursiv eine Folge u^j definiert. Der Definitionsbereich von u^j ist $[0, T_j)$, wo

$$T_j = \sup\{0 < t \leq T_{j-1} : u^{j-1}([0,t) \times \mathbf{R}^n) \subset G\} \tag{103}$$

Die Funktion u^j ist die eindeutige Lösung von (102) mit Anfangsdaten u_0^j, die nach Theorem 3.5.2 existiert. Jede der Funktionen u^j ist glatt und hat einen Träger, der auf jedem geschlossenen Teilintervall von $[0, T_j)$ in einem Gebiet der Form $|x| < C$ enthalten ist. Deshalb sind partielle Integration und das Vertauschen von Integralen mit Ableitungen für diese Funktionen gerechtfertigt. Auf einem festen abgeschlossenen Intervall kann die Konstante C unabhängig von j gewählt werden, sofern die Lösung u_j auf diesem Intervall definiert ist.

4.3 Energieabschätzungen

Die fundamentale Energieabschätzung für die Gleichung (102) ist folgende:
Lemma 4.3.1 Für $j \geq 1$ sei u^j eine glatte Lösung mit kompaktem Träger der Gleichung (102) auf einem Intervall $[0, T]$ mit $T < T_j$. Es gelte die Anfangsbedingung $u^j(0,x) = u_0^j(x)$, wo u_0^j eine glatte Funktion mit kompaktem Träger ist. Wenn es eine offene Teilmenge G_1 von G gibt mit $\bar{G}_1$ eine kompakte Teilmenge von G, so daß $u^j([0,T] \times \mathbf{R}^n) \subset G_1$, dann existiert eine Konstante $C > 0$, die nur von G_1 und s abhängt, so daß folgende Ungleichung für alle $t \in [0, T]$ gilt:

$$\begin{aligned}
&\|u^j(t)\|_{H^s}^2 \\
&\leq C[\|u_0^j\|_{H^s}^2 + \int_0^t (1 + \|u^j(t')\|_{C^1} + \|u^{j-1}(t')\|_{C^1} + \|\partial_t u^{j-1}(t')\|_{C^0} + \|\partial_t u^j(t')\|_{C^0}) \\
&\times (1 + \|u^{j-1}(t')\|_{H^s} + \|u^j(t')\|_{H^s} + \|\partial_t u^j(t')\|_{H^{s-1}})\|u^j(t')\|_{H^s} dt']
\end{aligned} \tag{104}$$

Beweis Die Norm $\sqrt{\langle v, A^0 v\rangle}$ ist gleichmäßig mit $|v|$ äquivalent, wie im Beweis von Lemma 3.3.1 diskutiert. Wenn wir den Operator D^α auf Gleichung (102) anwenden, bekommen wir folgendes Analogon von (42):

$$A^0(u^{j-1})\partial_t(D^\alpha u^j) + \sum_{i=1}^n A^i(u^{j-1})\partial_i(D^\alpha u^j) + [D^\alpha(A^0(u^{j-1})\partial_t u^j) - A^0(u^{j-1})D^\alpha(\partial_t u^j)]$$
$$+\sum_{i=1}^n [D^\alpha(A^i(u^{j-1})\partial_i u^j) - A^i(u^{j-1})D^\alpha(\partial_i u^j)] + D^\alpha(B(u^{j-1})) = 0 \tag{105}$$

Jetzt wird das innere Produkt dieser Gleichung mit u^j gebildet und die inzwischen bekannte partielle Integration durchgeführt. Das Ergebnis ist:

$$(d/dt)\int_{\mathbf{R}^n}\langle D^\alpha u^j, A^0 D^\alpha u^j\rangle = \int_{\mathbf{R}^n}\langle D^\alpha u^j, (\partial_t A^0(u^{j-1}) + \sum_{i=1}^n \partial_i A^i(u^{j-1}))D^\alpha u^j - 2B^\alpha\rangle \tag{106}$$

wobei

$$B^\alpha = [D^\alpha(A^0(u^{j-1})\partial_t u^j) - A^0(u^{j-1})D^\alpha(\partial_t u^j)]$$
$$+\sum_{i=1}^n [D^\alpha(A^i(u^{j-1})\partial_i u^j) - A^i(u^{j-1})D^\alpha(\partial_i u^j)] + D^\alpha(B(u^{j-1})) \tag{107}$$

Die rechte Seite kann mit Hilfe der Moser-Ungleichungen abgeschätzt werden. Mit der Kettenregel haben wir

$$\partial_t A^0(u^{j-1}) = (DA^0(u^{j-1}))\partial_t u^{j-1}, \quad \partial_i A^i(u^{j-1}) = (DA^i(u^{j-1}))\partial_i u^{j-1} \tag{108}$$

Die Ableitungen DA^0 und DA^i sind beschränkt auf der relativ kompakten Teilmenge G_1. Deshalb gilt

$$\int_{\mathbf{R}^n}\langle D^\alpha u^j, (\partial_t A^0(u^{j-1}) + \sum_{i=1}^n \partial_i A^i(u^{j-1}))D^\alpha u^j\rangle \le C(\|\partial_t u^{j-1}\|_{C^0} + \|u^{j-1}\|_{C^1})\|u^j\|_{H^s}^2 \tag{109}$$

mit $s = |\alpha|$. Um den anderen Term abzuschätzen, ist eine Abschätzung für B^α notwendig. Wir betrachten zunächst den Ausdruck $D^\alpha(B(x,u))$. Wir würden gerne die dritte Moser-Ungleichung darauf anwenden, aber dies ist nicht ohne weiteres möglich, wegen der x-Abhängigkeit von B^α. Dies kann aber umgangen werden. Sei v eine Funktion von $\mathbf{R}^n$ nach $\mathbf{R}^n$, wo die Komponente v_i eine glatte Funktion mit kompaktem Träger ist, die auf dem Träger von u gleich x^i ist. Dann kann die dritte Moser-Ungleichung auf die Funktion (u, v) mit Werten im $\mathbf{R}^{n+k}$ angewendet werden. Es folgt, daß

$$\|D^\alpha B(x, u^{j-1})\|_{L^2} \le C(1 + \|D^s u^{j-1}\|_{L^2}) \tag{110}$$

Die zweite Moser-Abschätzung impliziert, daß

$$\begin{aligned}
&\|D^\alpha(A^i(u^{j-1})\partial_i u^j) - A^i(u^{j-1})D^\alpha(\partial_i u^j)\|_{L^2} &(111)\\
&\le C(\|DA^i(u^{j-1})\|_{L^\infty}\|D^{s-1}\partial_i u^j\|_{L^2} + \|\partial_i u^j\|_{L^\infty}\|D^s(A^i(u^{j-1}))\|_{L^2})\\
&\le C(\|u^{j-1}\|_{C^1}\|u^j\|_{H^s} + \|u^j\|_{C^1}(1+\|u^{j-1}\|_{H^s})) &(112)
\end{aligned}$$

wo in der dritten Zeile die dritte Moser-Ungleichung nochmal benutzt wurde. Auf ähnliche Art und Weise bekommt man

$$\begin{aligned}
&\|D^\alpha(A^0(u^{j-1})\partial_t u^j) - A^0(u^{j-1})D^\alpha(\partial_t u^j)\|_{L^2}\\
&\le C(\|u^{j-1}\|_{C^1}\|\partial_t u^j\|_{H^{s-1}} + \|\partial_t u^j\|_{C^0}(1+\|u^{j-1}\|_{H^s})) \qquad (113)
\end{aligned}$$

Wenn man (109), (110), (112) und (113) in (106) benutzt, und das Ergebnis von 0 bis t integriert, bekommt man die erwünschte Aussage.

Sei $U^{j,s}(t)$ durch

$$[U^{j,s}(t)]^2 = \sup_{0\le j'\le j}\sum_{|\alpha|\le s}\int_{\mathbf{R}^n}\langle A^0 D^\alpha u^{j'}, D^\alpha u^{j'}\rangle$$

definiert, wo die Folge u^j durch die Iteration erzeugt wird. Sei $N^j(t)$ das entsprechende Maximum von $\|u^{j'}(t)\|_{C^1}$. Mit Hilfe der Gleichung folgt unmittelbar, daß für $j \ge 1$, $\|\partial_t u^j(t)\|_{C^0} + \|\partial_t u^{j-1}(t)\|_{C^0}$ durch $C(1+N^j(t))$ abgeschätzt werden kann. Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß $[U^{j,s}(0)]^2 \le 2\sum_{|\alpha|\le s}\langle A^0 D^\alpha u_0, D^\alpha u_0\rangle$ für alle j. Wenn wir das Maximum über j' der Ungleichung von Lemma 4.3.1 bilden folgt:

$$[U^{j,s}(t)]^2 \le [U^{j,s}(0)]^2 + C\int_0^t (1+N^j(t'))(1+U^{j,s}(t') + \|\partial_t u(t')\|_{H^{s-1}})U^{j,s}(t')dt' \qquad (114)$$

Die Gleichung (102), zusammen mit den ersten und dritten Moser-Ungleichungen liefert die Ungleichung

$$\|\partial_t u^j(t)\|_{H^{s-1}} \le C(1+N^j(t))(1+U^{j,s}(t)) \qquad (115)$$

Dies erlaubt es, die explizite Norm von $\partial_t u$ von (114) zu eliminieren, mit dem Ergebnis:

$$[U^{j,s}(t)]^2 \le [U^{j,s}(0)]^2 + C\int_0^t (1+N^j(t'))^2(1+U^{j,s}(t'))U^{j,s}(t')dt' \qquad (116)$$

Auf diese Integralungleichung kann die Gronwall-Ungleichung angewendet werden. Da es in der Literatur viele Varianten dieser Ungleichung gibt, möchten wir eine Form explizit angeben, die für unsere Zwecke ausreichen wird.

Lemma 4.3.2 (Gronwall-Ungleichung) Seien v und h stetige Funktionen auf dem Intervall $[0,T]$ mit $h \geq 0$, so daß die Ungleichung

$$v(t) \leq C_1 + \int_0^t h(t')v(t')dt' \tag{117}$$

auf $[0,T]$ gilt. Dann gilt auch

$$v(t) \leq C_1 \exp\left(\int_0^t h(t')dt'\right) \tag{118}$$

Dies ist ein Spezialfall einer Aussage, die sich auf Seite 15 von [Wa] befindet. Dort gibt es auch eine Diskussion von verschiedenen Formen dieser Ungleichung. Auf dem abgeschlossenen Intervall $[0,T_1]$ mit $0 < T_1 \leq T$ gilt, als Folge von (116), die Ungleichung:

$$[U^{j,s}(t)]^2 \leq [U^{j,s}(0)]^2 + C\int_0^{T_1}(1+N^j(t'))^2dt' + C\int_0^t(1+N^j(t'))^2[U^{j,s}(t')]^2dt' \tag{119}$$

Mit (118) ergibt sich dann

$$[U^{j,s}(t)]^2 \leq \left[[U^{j,s}(0)]^2 + C\int_0^{T_1}(1+N^j(t'))^2dt'\right]\exp\left[C\int_0^t(1+N^j(t'))^2dt'\right] \tag{120}$$

Wenn wir in (120) $t = T_1$ setzen und dann bei der Notation T_1 durch t ersetzen, kommt die Ungleichung

$$[U^{j,s}(t)]^2 \leq \left[[U^{j,s}(0)]^2 + C\int_0^{t}(1+N^j(t'))^2dt'\right]\exp\left[C\int_0^t(1+N^j(t'))^2dt'\right] \tag{121}$$

die uns ermöglichen wird, die Funktionen $u^j(t)$ in der H^s-Norm zu beschränken. Eine offensichtliche Vorgehensweise wäre jetzt die Differenz zweier Terme der Iteration abzuschätzen und auf diese Weise ein Kontraktion in der H^s-Norm zu bekommen. Leider ist es so, daß wenn man das direkt versucht, eine Schranke für die H^{s+1}-Norm notwendig ist. Aus diesem Grund muß ein anderer Weg eingeschlagen werden. Dazu braucht man lediglich eine Abschätzung für die L^2-Norm der Differenz, die jetzt hergeleitet wird. Für $j \geq 2$ gilt die Gleichung:

$$A(u^j)\partial_t(u^j - u^{j-1}) + \sum_{i=1}^{n} A^i(u^j)\partial_i(u^j - u^{j-1})$$
$$+[\tilde{A}^0(u^j, u^{j-1})\partial_t u^{j-1} + \sum_{i=1}^{n} \tilde{A}^i(u^j, u^{j-1})\partial_i u^{j-1} + \tilde{B}(u^j, u^{j-1})](u^j - u^{j-1}) = 0 \tag{122}$$

Dies ist, abgesehen von Unterschieden in der Notation mit (32) identisch und wird mit Hilfe von Lemma 3.2.1 hergeleitet. Aus dieser Gleichung bekommt man folgende Energieabschätzung:

$$\|u^j(t) - u^{j-1}(t)\|^2_{L^2} \leq \|u^j_0(t) - u^{j-1}_0(t)\|^2_{L^2} \tag{123}$$
$$+C\int_0^t (1 + \|u^j(t')\|_{C^1} + \|u^{j-1}(t')\|_{C^1})\|u^j(t') - u^{j-1}(t')\|^2_{L^2} dt'$$

Nehmen wir jetzt an, daß $s > n/2 + 1$. Sei $V^j(t) = \|u^j - u^{j-1}\|_{L^2}$. Dann gilt nach (124) und dem Sobolevschen Einbettungssatz, daß

$$[V^j(t)]^2 \leq [V^j(0)]^2 + C\int_0^t (1 + U^{j,s}(t'))[V^{j-1}(t')]^2 dt' \tag{124}$$

Wenn wir das Maximum auf einem Intervall $[0, T']$ mit $T' \leq T$ bilden, dann bekommen wir:

$$\sup_{0\leq t\leq T'} [V^j(t)]^2 \leq [V^j(0)]^2 + CT' \sup_{0\leq t\leq T'} (1 + U^{j,s}(t)) \sup_{0\leq t\leq T'} [V^{j-1}(t)]^2 \tag{125}$$

4.4 Konvergenz

Bevor wir die Konvergenz der Iteration beweisen, liegt es nahe, wie im linearen Fall, das Problem auf den Fall mit verschwindenden Anfangsdaten zu reduzieren. Da das Anfangsdatum nur endlich oft differenzierbar ist, würde die Gleichung für $u - u_0$ aber keine glatten Koeffizienten haben. Deshalb ersetzen wir stattdessen u durch $u - u^0_0$. Dann hat die Transformierte Gleichung glatte Koeffizienten. Die Anfangsdaten verschwinden nicht aber können so klein gemacht werden, wie wir wollen, durch eine geeignete Wahl von u^0_0. Von jetzt an wird angenommen, das eine solche Transformation gemacht worden ist. Es folgt aus dem Sobolevschen Einbettungssatz, daß es für $s > n/2 + 1$ eine Konstante $C > 0$ gibt, so daß $N^j(t) \leq CU^{j,s}(t)$. Wenn dies mit (116) kombiniert wird, bekommt man folgende Integralungleichung für $U^{j,s}(t)$:

$$[U^{j,s}(t)]^2 \leq C[\|u_0\|^2_{H^s} + \int_0^t (1 + [U^{j,s}(t')]^2)^2 dt'] \tag{126}$$

Eine Funktion, die diese Ungleichung erfüllt, kann durch die Lösung der entsprechenden Integralgleichung abgeschätzt werden. Die Gleichung ist:

$$f(t) = C[\|u_0\|^2_{H^s} + \int_0^t (1 + f(t'))^2 dt'] \tag{127}$$

Diese Lösung wird wiederum gegeben durch die Lösung der entsprechenden Differentialgleichung

$$df/dt = C(1 + f)^2 \tag{128}$$

mit Anfangswert $C\|u_0\|^2_{H^s}$. Es gibt eine Zahl $T > 0$ derart, daß diese Lösung kleiner ist als $2C\|u_0\|^2_{H^s}$ auf dem Intervall $[0, T]$. Daraus folgt, daß es eine Zahl $T > 0$ gibt, so daß die Werte von allen Funktionen u^j auf dem Intervall $[0, T]$ in G_1 bleiben, soweit sie definiert sind. Die Definition von T_j impliziert, daß, unter diesen Umständen, $T_j \geq T$ für alle j. Wir sehen also, daß alle Funktionen u^j auf einem gemeinsamen Intervall $[0, T]$ definiert sind. Außerdem sind die H^s-Normen von u^j auf diesem Intervall gleichmäßig beschränkt.

Jetzt müssen einige Funktionenräume eingeführt werden. Es sind Räume von Funktionen, die das Intervall $[0, T]$ in einen Banachraum X abbilden. Die Funktionen, die stetig sind, bezüglich der Topologie, die Durch die Norm von X definiert ist, bilden den Raum $C^0([0, T], X)$. Mit der Norm $\|u\| = \sup_{0 \leq t \leq T} \|u(t)\|_X$ ist dies ein Banachraum. Da Differenzierbarkeit von Funktionen auf $[0, T]$ mit Werten in X definiert ist, können wir den Raum $C^1([0, T], X)$, der auch ein Banachraum ist, entsprechend definieren. Der Vektorraum $C_w([0, T], X)$ von Funktionen auf $[0, T]$ mit Werten in X, die stetig sind bezüglich der schwachen Topologie auf X wird auch benötigt. Wir brauchen allerdings auf diesem Raum keine Norm zu definieren. Der Begriff von meßbaren Funktionen von $[0, T]$ nach X wird auch gebraucht. Eine solche Funktion u heißt meßbar, wenn, für jede offene Teilmenge W von X in der Normtopologie, $u^{-1}(W)$ meßbar ist. Es gibt auch den Begriff der schwachen Meßbarkeit. Die Funktion u heißt schwach meßbar, wenn für jedes Element ϕ von X', die skalare Funktion $\phi(u(t))$ meßbar ist. Der Satz von Pettis sagt, daß wenn der Raum X separabel ist, Meßbarkeit und schwache Meßbarkeit äquivalent sind. Mit diesen Definitionen ist es möglich, L^p-Räume von Funktionen mit Werten in X zu definieren. Was wir konkret brauchen, sind die Räume $L^1([0,T],X)$ und $L^\infty([0,T],X)$, im Falle, daß X ein separabler reflexiver Banachraum ist. Dies sind Banachräume, $L^1([0,T],X)$ ist separabel, und $L^\infty([0,T],X')$ ist der Dualraum von $L^1([0,T],X)$. Weitere Einzelheiten über diese Räume erfährt man im Buch von Zeidler [Ze].

Für eine reelle Zahl s wird der Sobolevraum $H^s(\mathbf{R}^n)$ als die Vervollständigung des Raumes $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ bezüglich der Norm

$$\|u\|_{H^s}^2 = \int_{\mathbf{R}^n} (\hat{u}(\xi))^2 (1+|\xi|^2)^s d\xi \tag{129}$$

definiert. Hier bezeichnet $\hat{u}$ die Fourier-Transformierte von u. Für s eine Ganze Zahl ist diese Norm mit der üblichen H^s-Norm äquivalent, so daß die neuen Räume mit den alten identifiziert werden können.

Übung Aus der Hölder-Ungleichung folgt, daß

$$\|u\|_{H^{s'}} \le \|u\|_{H^s}^{\frac{s'}{s}} \|u\|_{L^2}^{1-\frac{s'}{s}} \tag{130}$$

für $0 < s' < s$ und alle $u \in H^s(\mathbf{R}^n)$.

Das Hauptergebnis dieses Abschnitts ist ein Existenztheorem für quasilineare symmetrisch hyperbolische Systeme. Es wird nach wie vor angenommen, daß wir die Koeffizienten geeignet abgeschnitten haben.

Theorem 4.4.1 Sei $u_0 \in H^s(\mathbf{R}^n)$ ein Anfangsdatum für das quasilineare symmetrisch hyperbolische System (10) mit $s > n/2+1$ eine ganze Zahl. Seien $A^0 - Id$, A^i und B glatte Funktionen, die für $|x| > R$ verschwinden. Dann existiert eine eindeutige klassische Lösung mit dem gegebenen Anfangsdatum auf einem Zeitintervall $[0,T]$. Diese Lösung liegt im Raum $C^0([0,T],H^{s'}(\mathbf{R}^n)) \cap C^1([0,T],H^{s'-1}(\mathbf{R}^n))$ für jeden Wert von s' im Intervall $[0,s)$.

Beweis Wir betrachten die oben eingeführte Iteration, die eine Folge $\{u^j\}$ von glatten Funktionen auf $[0,T]\times\mathbf{R}^n$ definiert. Nach (126) ist diese Folge in $C^0([0,T],H^s(\mathbf{R}^n))$ beschränkt. Die Zahl T' in der Ungleichung (125) kann so klein gewählt werden, daß $CT' < 1$. Außerdem dürfen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß die Anfangsdaten so approximiert werden, daß $V^j(0) \le 2^{-j}$. Dann gilt, nach (125):

$$\sup_{0\le t\le T'} [V^j(t)]^2 \le 2^{-2j} + K \sup_{0\le t\le T'} [V^{j-1}(t)]^2 \tag{131}$$

Die Summe von 1 bis N ergibt dann:

$$\sum_{j=0}^{N}[\sup_{0\le t\le T'}[V^j(t)]^2] \le 1 + a_0 + K\sum_{j=0}^{N}[\sup_{0\le t\le T'}[V^j(t)]^2] \tag{132}$$

Daraus folgt, daß die unendliche Summe konvergiert und daß u^j eine Cauchy-Folge im Raum $C^0([0,T],L^2(\mathbf{R}^n))$ ist. Die Interpolationsungleichung (130) impliziert jetzt, daß sie auch eine Cauchy-Folge in $C^0([0,T],H^{s'}(\mathbf{R}^n))$ ist, für alle $s' < s$. Mit der Gleichung beweist man, daß $\partial_t u$ eine Cauchy-Folge in $C^0([0,T],H^{s'-1}(\mathbf{R}^n))$ ist. Insbesondere, da $s > n/2+1$ ist, kann s' größer als $n/2+1$ gewählt werden. Dies beweist, daß u^j in $C^1([0,T]\times\mathbf{R}^n)$ gegen einen Limes u konvergiert, und daß diese Funktion u eine klassische Lösung von (10) ist. Diese Lösung hat das richtige Anfangsdatum, nämlich u_0. Das Argument liefert auch die Regularitätsaussage des Theorems, nämlich $u \in C^0([0,T],H^{s'}(\mathbf{R}^n)) \cap C^1([0,T],H^{s'-1}(\mathbf{R}^n))$ für $0 \le s' < s$.

4.5 Zusätzliche Regularität

Theorem 4.4.1 hat den Nachteil, daß man etwas Regularität verliert, nämlich das Anfangsdatum ist in $H^s(\mathbf{R}^n)$ aber die Lösung nur in $H^{s'}(\mathbf{R}^n)$ für jeden festen Wert von t. In diesem Abschnitt wird dieses Problem beseitigt. Der Sobolevraum $H^{-s}(\mathbf{R}^n)$ ist der Dualraum von $H^s(\mathbf{R}^n)$ und $H^{-s'}(\mathbf{R}^n)$ liegt dicht in $H^{-s}(\mathbf{R}^n)$ für $s' < s$. Sei v ein Element von $H^{-s}(\mathbf{R}^n)$. Dann kann v durch Elemente w von $H^{-s'}(\mathbf{R}^n)$ beliebig nahe in der H^{-s}-Norm approximiert werden. Insbesondere kann w so gewählt werden, daß

$$\langle u^j(t) - u^{j'}(t), v - w\rangle < \epsilon/2 \tag{133}$$

für $t \in [0,T]$. Hier wurde benutzt, daß die Folge u^j in $C^0([0,T],H^s(\mathbf{R}^n))$ beschränkt ist. Da $u^j - u$ in $C^0([0,T],H^{s'}(\mathbf{R}^n))$ gegen Null konvergiert, können j und j' so groß gewählt werden, daß

$$\langle u^j(t) - u^{j'}(t), w\rangle < \epsilon/2 \tag{134}$$

Die Kombination von (134) und (135) liefert die Abschätzung

$$\langle u^j(t) - u^{j'}(t), v\rangle < \epsilon \tag{135}$$

Es folgt, daß $u \in C^0_w([0,T],H^s(\mathbf{R}^n))$. Eine weitere Aussage bekommt man aus dem Theorem von Banach-Alaoglu (Theorem 3.1.1). Es ist nämlich so, daß $L^\infty([0,T], H^s(\mathbf{R}^n))$ der Dualraum von $L^1([0,T], H^{-s}(\mathbf{R}^n))$ ist. Der zweite Raum ist auch separabel. Deshalb kann Theorem 3.1.1 angewendet werden um zu zeigen, daß $u \in L^\infty([0,T], H^s(\mathbf{R}^n))$.

Um zu zeigen, daß $u \in C^0([0,T], H^s(\mathbf{R}^n))$, wird ein anderes Argument gebraucht. Wir wissen schon, daß $u(t) \in H^s(\mathbf{R}^n)$ für jeden Wert von t. Es bleibt, die Stetigkeit bezüglich der durch die Norm definierte Topologie zu beweisen. Wir werden zeigen, daß u im Punkt $t = 0$ von rechts stetig ist. Da das Argument nicht davon berührt wird, wenn man eine Zeittranslation macht oder die Zeitrichtung umkehrt ist dies ausreichend. Wir möchten also zeigen, daß $\lim_{m\to\infty} \|u(t_m) - u(0)\|_{H^s} = 0$ für jede Folge von Zahlen t_m aus dem Intervall $[0,T]$, die gegen Null konvergiert. Wir wissen schon, daß $u(t_m)$ schwach gegen $u(0)$ konvergiert. Wenn wir wüßten, daß $\|u(0)\|_{H^s} \geq \limsup \|u(t_m)\|_{H^s}$, könnten wir das erwünschte Ergebnis mit folgendem Lemma bekommen:

Lemma 4.5.1 Sei H ein Hilbertraum und $\{u_m\}$ eine Folge in H, die schwach gegen $u \in H$ konvergiert. Wenn $\|u\| \geq \limsup \|u_m\|$, dann gilt $\|u - u_m\| \to 0$.

Beweis In einem ersten Schritt wird gezeigt, daß $\|u_m\| \to \|u\|$. Dazu reicht es, unter den gegebenen Annahmen, zu zeigen, daß $\|u\| \leq \liminf \|u_m\|$. Wenn $u = 0$ gilt die Ungleichung. Sie ist auch skaleninvariant. Wir können also, ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß $\|u\| = 1$. Dann gilt

$$\liminf \|u_m\| \geq \liminf \langle u, u_m \rangle = 1 = \|u\|$$

Damit ist die erste Aussage bewiesen. Jetzt

$$\begin{aligned} \|u - u_m\|^2 &= \langle u - u_m, u - u_m \rangle && (136) \\ &= \|u_m\|^2 - 2\langle u, u_m \rangle + \|u\|^2 && (137) \end{aligned}$$

Der letzte Ausdruck strebt gegen Null wegen der schwachen Konvergenz und der Aussage des ersten Schritts. Es folgt, daß $u_m \to u$.

Die Norm, die Durch

$$\|v\|^2_{s,A^0} = \sum_{|\alpha| \leq s} \langle A^0 D^\alpha v, D^\alpha v \rangle \qquad (138)$$

definiert wird, ist mit der üblichen H^s-Norm äquivalent. Diese Norm kommt offenbar von einem entsprechenden inneren Produkt, und Lemma 4.5.1 wird jetzt auf den von diesem inneren Produkt definierten Hilbertraum angewendet. Die Energieabschätzungen, zusammen mit dem, was wir über die Beschränktheit der Folge u^j wissen, liefert eine Abschätzung der Form

$$\|u^j(t)\|^2_{s,A^0} \leq \|u^j(0)\|^2_{s,A^0} + r(t) \tag{139}$$

wo die Funktion $r(t)$ unabhängig von j ist, und erfüllt die Beziehung $r(t) = o(t)$ für $t \to 0$. Daraus folgt, daß:

$$\begin{aligned} \|u(t)\|^2_{s,A^0} &\leq \limsup_{j\to\infty} \|u^j(t)\|^2_{s,A^0} \\ &\leq \limsup_{j\to\infty} \|u^j(0)\|^2_{s,A^0} + r(t) \\ &= \|u(0)\|^2_{s,A^0} + r(t) \end{aligned} \tag{140}$$

Die erste Ungleichung benutzt die schwache Konvergenz der Folge. Mit (140) ist das Argument vollständig.

4.6 Ein Fortsetzungskriterium

Wenn u eine Lösung der Gleichung (10) ist, die im Raum $C^0([0,T), H^s(\mathbf{R}^n)) \cap C^1([0,T), H^{s-1}(\mathbf{R}^n))$ liegt, dann gilt gilt das Analogon der in t integrierten Form von (106), wo man u^{j-1} und u^j durch u ersetzt, und die Definition von B^α entsprechend ändert. Es ist nämlich möglich den Übergang zum Limes in dieser integrierten Form zu rechtfertigen. Dieses B^α kann, wie im Abschnitt 4.3, abgeschätzt werden, mit dem Ergebnis:

$$\begin{aligned} \|u(t)\|^2_{H^s} &\leq C[\|u_0\|^2_{H^s} + \int_0^t (1 + \|u(t')\|_{C^1} + \|\partial_t u(t')\|_{C^0}) \\ \times & \quad (1 + \|u(t')\|_{H^s} + \|\partial_t u(t')\|_{H^{s-1}})\|u(t')\|_{H^s} dt'] \end{aligned} \tag{141}$$

Wenn wir eine Lösung im Raum $C^0([0,T], H^s(\mathbf{R}^n))$ haben, wie im letzten Abschnitt, können wir die Gleichung benutzen, um $\|\partial_t u\|_{H^{s-1}}$ durch $\|u\|_{H^s}$ zu ersetzen. Die Ungleichung (141) vereinfacht sich dann auf

$$\|u(t)\|^2_{H^s} \leq C[\|u_0\|^2_{H^s} + \int_0^t (1 + \|u(t')\|_{C^1} + \|\partial_t u\|_{C^0})(1 + \|u(t')\|^2_{H^s}) dt'] \tag{142}$$

Die Existenzzeit T der Lösung im Theorem 4.4.1 hängt nur von der H^s-Norm der Daten, sofern diese ihre Werte in einer festen relativ kompakten

Menge G_1 haben. Die Ungleichung (141) zeigt, daß so lange die C^1-Norm der Lösung endlich bleibt, die H^s-Norm auch endlich bleibt. Wir bekommen also folgendes Theorem:

Theorem 4.6.1 Sei u eine klassische Lösung der Gleichung (10) auf einem Intervall $[0,T)$ mit einem Anfangsdatum $u_0 \in H^s(\mathbf{R}^n)$, $s > n/2+1$. Wenn die C^1-Norm von u und die C^0-Norm von $\partial_t u$ auf $[0,T)$ beschränkt sind, und die Werte von u in einer offenen Menge G_1 liegen, deren kompakten Träger in G enthalten ist, dann kann u als klassische Lösung auf ein Intervall $[0,T')$ mit $T' > T$ fortgesetzt werden und die fortgesetzte Lösung liegt im Raum $C^0([0,T'),H^s(\mathbf{R}^n)) \cap C^1([0,T'),H^{s-1}(\mathbf{R}^n))$.

Beweis Nach Theorem 4.4.1 existiert eine Lösung im Raum $C^0([0,T''),H^s(\mathbf{R}^n))$ auf einem kurzen Intervall. Dies ist eine klassische Lösung und muß mit der gegebenen klassischen Lösung übereinstimmen, solange beide existieren. Die Beschränktheit der C^1-Norm, und deshalb auch der H^s-Norm zeigt, daß die Lösung in $C^0([0,T''),H^s(\mathbf{R}^n))$ bis, und jenseits von, T mit der gleichen Regularität fortgesetzt werden kann.

Ein interessantes Korollar dieser Aussage ist, daß es zu Anfangsdaten der Klasse C^∞ glatte Lösungen gibt. Das Existenzintervall in H^s kann nicht mit wachsendem s schrumpfen.

Für spezielle symmetrisch hyperbolische Systeme kann dieses Fortsetzungskriterium verbessert werden, wie man durch eine genaue Betrachtung des Beweises sieht. Wenn, z. B. das System semilinear ist, kann man die C^1-Norm von u durch die C^0-Norm ersetzen. Für eine semilineare Wellengleichung heißt das, daß wenn man die Gleichung auf erste Ordnung reduziert, die C^0-Norm der neuen Variablen ausreicht, um die weitere Existenz der Lösung zu garantieren. Mit anderen Worten, reicht die C^1-Norm der ursprünglichen Variablen und die C^0-Norm ihrer zeitlichen Ableitungen. Wenn man die Unbekannten u in einem semilinearen symmetrisch hyperbolischen System als (u_1,u_2) schreiben kann, wobei die Gleichung in u_2 linear ist, mit Koeffizienten die nur von t und x abhängen, dann muß nur die L^∞-Norm von u_1 kontrolliert werden, um die weitere Existenz einer Lösung zu sichern. Dies kann man benutzen, um zu zeigen, daß eine Lösung der Gleichung (2) existiert, solange u Punktweise beschränkt bleibt.

5 Globale Ergebnisse

5.1 Überblick

Wir haben schon gesehen, daß man für lineare symmetrisch hyperbolische Gleichungen zeigen kann, daß zu glatten Anfangsdaten eindeutige globale Lösungen existieren. Damit sind die Fälle der Gleichungen (1) und (6) erledigt. Im quasilinearen Fall gibt es keine vergleichbare Aussage. Eine eindeutige Lösung existiert lokal in der Zeit, aber die Frage, ob eine globale Lösung existiert, muß von Fall zu Fall einzeln untersucht werden. Die Kriterien des Abschnitts 4.6 sagen, daß globale Existenz für die Gleichungen (2), (3), bzw. (4) existieren wenn $\|u\|_{C^0}$, $\|(u,v)\|_{C^1} + \|(\partial_t u, \partial_t v)\|_{C^0}$ bzw. $\|u^A\|_{C^1} + \|\partial_t u^A\|_{C^0}$ beschränkt bleiben. Ich sage hier nichts zu den Eulergleichungen, da man in dem Fall sowieso keine globale Existenz erwarten kann. In den nächsten zwei Abschnitten werden zwei Beispiele vorgeführt, wo das Kriterium nachgewiesen werden kann.

Wenn globale Existenz für allgemeine Daten nicht gilt, oder zumindest nicht gezeigt werden kann, kann man versuchen globale Existenz für Daten zu beweisen, die nahe bei Daten sind, für die globale Existenz bekannt ist. Der bekannteste Fall ist der, wo $u = 0$ die Gleichung erfüllt, und man Daten in der Nähe von dem entsprechenden verschwindenden Anfangsdatum untersucht. In dem Fall redet man von kleinen Daten. Im vierten Abschnitt wird ein Beispiel dieser Art behandelt.

5.2 Die eindimensionale Wellenabbildung

In diesem Abschnitt wird gezeigt, daß zu glatten Anfangsdaten mit kompaktem Träger für eine Wellenabbildung in einer Raumdimension eine globale Lösung existiert. Es wird nur die spezielle Wellenabbildung (3) diskutiert. Für eine allgemeine Wellenabbildung in einer Raumdimension gibt es keine weiteren analytischen Schwierigkeiten. Es wird aber etwas Differentialgeometrie gebraucht, die wir hier nicht einführen möchten. Nach den Bemerkungen des letzten Abschnitts wissen wir, das es reicht zu zeigen, daß für eine Lösung des Systems auf einem Intervall $[0,T)$ die Größe

$$\|u(t)\|_{C^1} + \|v(t)\|_{C^1} + \|\partial_t u(t)\|_{C^0} + \|\partial_t v(t)\|_{C^0} \tag{143}$$

beschränkt ist. Die Energie

$$\mathcal{E} = \int_{\mathbf{R}} \frac{1}{2}\{e^{-2v}[(\partial_t u)^2 + |\partial_x u|^2] + (\partial_t v)^2 + |\partial_x v|^2\}dx \tag{144}$$

ist Zeitunabhängig. Die Gleichungen für die Wellenabbildung sind von der Form:

$$-\partial_t^2 u + \partial_x^2 u = Q_u \tag{145}$$
$$-\partial_t^2 v + \partial_x^2 v = Q_v \tag{146}$$

für bestimmte Quellterme Q_u und Q_v. Die L^1-Norm von $Q_v(t)$ kann durch die Energie beschränkt werden. Eine klassische Darstellungsformel für Lösungen der inhomogenen Wellengleichung in einer Raumdimension ist

$$u(t,x) = \frac{1}{2}\left[u(0,t-x) + u(0,t+x) + \int_{x-t}^{x+t} \partial_t u(0,x')dx' + \int_\Delta Q_u(t',x')dt'dx'\right] \tag{147}$$

Hier bezeichnet Δ das Dreieck dessen Ecken die Punkte (t,x), $(0,t-x)$ und $(0,t-x)$ sind. Natürlich gilt die analoge Formel für v. Der einzige Term auf der rechten Seite von (147), die nicht durch die Daten bestimmt ist, und deshalb nicht von vornherein beschränkt ist, ist der letzte. Im Fall von v:

$$\left|\int_\Delta Q_v(t',x')dt'dx'\right| \le \int_0^t \|Q_v(t')\|_{L^1} dt' \tag{148}$$

Die rechte Seite dieser Ungleichung ist bekanntlich beschränkt. Jetzt zeigt das Analogon von (147) für v, daß v beschränkt ist. Unter diesen Umständen kann die L^1-Norm von Q_u durch die Energie beschränkt werden. Die Beschränktheit von u folgt dann aus (147).

Jetzt möchten wir die ersten Ableitungen von u und v beschränken. Dazu ist es nützlich die Koordinaten $\xi = t+x$ und $\eta = t-x$ einzuführen, zusammen mit den entsprechenden Ableitungen

$$u_\xi = \partial_t u + \partial_x u, \quad u_\eta = \partial_t u - \partial_x u \tag{149}$$

Wir benutzen auch $u_{\xi\eta}$ für die zweite Ableitung $\partial_t^2 u - \partial_x^2 u$. Die Wellenabbildung (3) in einer Raumdimension hat dann die Form:

$$u_{\xi\eta} = (u_\xi v_\eta + u_\eta v_\xi) \tag{150}$$
$$v_{\xi\eta} = -e^{-2v} u_\eta u_\xi \tag{151}$$

Diese Gleichung sollen jetzt in ξ- und η-Richtung integriert werden. Wenn dies naiv gemacht wird ist die rechte Seite quadratisch in den Unbekannten und es ist nicht möglich, etwas über die Beschränkheit der Lösung zu sagen. Wir müssen vielmehr die besondere Struktur der Nichtlinearität ausnutzen, was in folgender Rechnung geschieht.

$$\begin{aligned} \partial/\partial\xi \quad (e^{-2v}u_\eta^2 + v_\eta^2) &= 0 \\ \partial/\partial\eta \quad (e^{-2v}u_\xi^2 + v_\xi^2) &= 0 \end{aligned} \tag{152}$$

Daraus folgt, daß die Größen $e^{-v}u_\xi$, $e^{-v}u_\eta$, v_ξ und v_η durch die Anfangsdaten beschränkt werden können. Da wir schon wissen, daß v beschränkt ist, haben wir damit auch Abschätzungen für u_ξ und u_η. Es folgt eine Abschätzung für $\partial_t u$, $\partial_x u$, $\partial_t v$ und $\partial_x v$. Die Tatsache, daß die quadratichen Terme behandelt werden konnten hängt damit zusammen, daß die Gleichung die Nullbedingung von Klainerman erfüllt.

Bei diesem Problem ist eine andere Vorgehensweise möglich. Man könnte zuerst (152) benutzten, was zur Beschränktheit von v_t führt. Eine Integration in t sichert dann die Beschränktheit von v. Dann kann (152) nochmal benutzt werden, um u zu kontrollieren. Ab diesem Punkt läuft das Argument wie vorher. Der Grund dafür, daß zuerst das etwas kompliziertere Argument vorgeführt wurde ist das es ein breiteres Anwendungsgebiet hat.

5.3 Eine semilineare Wellengleichung

Der Inhalt dieses Abschnitts ist ein globaler Existenzsatz für die Gleichung (2) im Falle $n = 3$ und $k = 1$. Wir betrachten Anfangsdaten mit kompaktem Träger. Aus Abschnitt 4.6 wissen wir, daß es ausreicht, zu zeigen, daß für eine beliebige Lösung auf einem Intervall $[0, T]$ die L^∞-Norm der Lösung beschränkt ist. Mit dem Sobolevschen Einbettungssatz folgt, daß es reicht, die H^2-Norm der Lösung zu beschränken. Dies wird mit Hilfe von Energieabschätzungen gemacht. Aus (2) folgt die Gleichung

$$-\partial_t^2(\partial_i u) + \Delta(\partial_i u) = 3u^2\partial_i u \tag{153}$$

Die Energie:

$$\mathcal{E} = \int_{\mathbf{R}^3} \frac{1}{2}[(\partial_t u)^2 + |\nabla u|^2] + \frac{1}{4}u^4 \tag{154}$$

ist Zeitunabhängig. Da wir den Träger der Lösung kontrollieren können, kann die L^2-Norm durch die L^4-Norm kontrolliert werden. Es folgt also aus der Energieerhaltung, daß $\|u\|_{H^1}$ beschränkt ist. Wenn wir (153) mit $\partial_t\partial_x u$ multiplizieren und integrieren, folgt

$$(d/dt)\left[\int_{\mathbf{R}^3}\frac{1}{2}((\partial_t\partial_i u)^2+|\nabla\partial_i u|^2)\right]=-3\int_{\mathbf{R}^3}u^2\partial_i u\partial_t\partial_i u \tag{155}$$

Das letzte Integral kann durch $\frac{3}{2}[\|\partial_i\partial_t u\|^2_{L^2}+\|u^2\partial_i u\|^2_{L^2}]$ abgeschätzt werden. Jetzt muß der zweite Term etwas genauer betrachtet werden.

$$\|u^2\partial_i u\|^2_{L^2} = \textstyle\int_{\mathbf{R}^3}u^4(\partial_i u)^2 \tag{156}$$
$$\leq \left[\int_{\mathbf{R}^3}u^6\right]^{2/3}\left[\int_{\mathbf{R}^3}(\partial_i u)^6\right]^{1/3}$$
$$\leq C\|u\|^4_{H^1}\|u\|^2_{H^2} \tag{157}$$

Der erste Schritt benutzt die Hölder-Ungleichung und die zweite die Sobolevungleichung. Dieses Argument funktioniert nicht für höhere Potenzen in Dimension $n=3$. Anderseits bekommt man auf diese Weise globale Existenz für jede ganze Zahl $k\geq 1$ im Falle $n=2$.

5.4 Dissipative symmetrisch hyperbolische Gleichungen

In diesem Abschnitt wird folgendes symmetrisch hyperbolisches System betrachet:

$$\partial_t u+\sum_{i=1}^n A^i(u)\partial_i u+\lambda u=0 \tag{158}$$

Es wird angenommen, daß $\lambda>0$. Es handelt sich bestimmt nicht um das allgemeinste System, das mit den Techniken behandelt werden kann, die im folgenden diskutiert werden. Es ist aber hinreichend allgemein, um die wesentlichen Ideen zu illustrieren. Die Funktion u, die identisch verschwindet, ist offenbar eine Lösung von (158), die global in der Zeit existiert. Es geht jetzt darum zu zeigen, daß die Lösungen u, die zu Daten u_0 mit kleiner Sobolevnorm gehören, global in der Zeit existieren, und daß in diesem Fall die Sobolevnorm $\|u\|_{H^s}$ für s hinreichend groß exponentiell gegen Null konvergiert.

Die Fundamentale Idee ist, für das System (158) eine Energieabschätzung herzuleiten, wo der Term, der, der λ enthält, explizit behalten wird. Ein wesentlicher Punkt ist, daß die Koeffizienten nicht explizit von t oder x

abhängen. Deshalb kommt die Eins als Summand nicht mehr vor. Die Abschätzung ist:

$$(d/dt)\|u(t)\|^2_{H^s} \leq (-\lambda + \|u(t)\|_{C^1} + \|\partial_t u(t)\|_{C^0})\|u(t)\|^2_{H^s} \tag{159}$$

Wenn $\|u\|_{H^s}$ klein ist, ist $\|u\|_{C^1}$ nach dem Sobolevschen Einbettungssatz auch klein. Die Gleichung zeigt dann, daß $\|\partial_t u\|_{C^0}$ klein ist. Es folgt, daß es ein $\epsilon > 0$ gibt, so daß $\|u(t)\|_{H^s} \leq \epsilon$ impliziert, daß der Ausdruck $-\lambda + \|u(t)\|_{C^1} + \|\partial_t u(t)\|_{C^0}$ negativ ist. Betrachten wir ein Anfangsdatum u_0 mit der Eigenschaft, daß $\|u_0\|_{H^s} \leq \epsilon/2$. In der Nähe von $t = 0$ folgt aus Stetigkeit, daß $\|u(t)\|_{H^s} < \epsilon$. Sei jetzt T^* das Supremum der Zahlen T, so daß eine Lösung von (158) auf dem Intervall $[0, T]$ existiert, und $\|u(t)\|_{H^s} \leq \epsilon$ dort. Wenn $T < \infty$, impliziert das Fortsetzungskriterium, daß die Lösung auf einem längeren Zeitintervall existiert. Aber bei $t = T^*$ ist die Ableitung von $\|u(t)\|_{H^s}$ negativ, was zu einem Widerspruch zur Definition von T^* führt. Es bleibt also nur die Möglichkeit, daß $T^* = \infty$. Außerdem ist dann der Ausdruck $-\lambda + \|u(t)\|_{C^1} + \|\partial_t u(t)\|_{C^0}$ überall kleiner als eine negative Konstante, und $\|u(t)\|_{H^s}$ fällt exponentiell ab als $t \to \infty$. Wir sehen also, daß die Lösung $u = 0$ asymptotisch stabil ist.

References

[1] John, F.: Partial Differential Equations (4th Edition) Springer, Berlin (1982).

[2] Majda, A.: Compressible Fluid Flow and Systems of Conservation Laws in Several Space Dimensions. Springer, Berlin (1984).

[3] Rudin, W.: Functional Analysis (2nd Edition). McGraw-Hill, New York (1991).

[4] Taylor, M.: Partial Differential Equations III. Nonlinear Equations. Springer, Berlin (1996).

[5] Walter, A.: Differential and Integral Inequalities. Springer, Berlin (1970).

[6] Zeidler, E.: Nonlinear Functional Analysis and its Applications. II. Springer, Berlin (1990).