Skript

Nichtlineare Partielle Differentialgleichungen

Anton Arnold, Uni Münster, SS 2004

6. September 2004

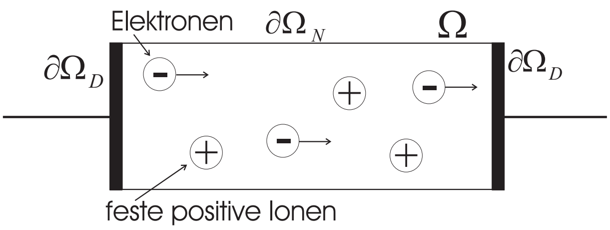
Inhaltsverzeichnis

13 Einleitung / Beispiele

<u>Ziel der Vorlesung</u>: Existenz, Eindeutigkeit von Lösungen und deren qualitatives Verhalten untersuchen.

Einige einfache Beispiele:

13.1 Bewegung von Elektronen in einem Halbleiter



$$n(x,t) \geq 0 \quad ... \quad \text{Dichte der Elektronen in } \Omega$$
$$\Phi(x,t) \quad ... \quad \text{elektrostat. Potential}$$

(Dotierung mit Dichte $C(x) \geq 0$)

$$\begin{cases} n_t &= \underbrace{div(\nabla n)}_{\text{Diffusion}} - \underbrace{div(n\nabla\Phi)}_{\text{Drift}} \\ \\ \Delta\Phi &= n - C(x) \text{ ... Poissongleichung für Potential} \end{cases}$$

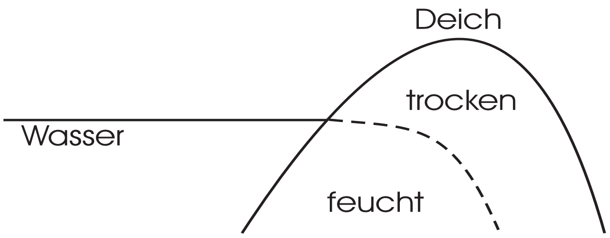
(nichtlineares parabolisch-elliptisches System)

• stationäre Gleichung im thermischen Gleichgewicht:

$$\Delta\Phi = \underbrace{\alpha^2 e^{\Phi}}_{=n(x)} - C(x), \quad x \in \Omega \quad \textit{nichtlineare Poissongleichung}$$

$$+ \text{ RB: } \Phi\,|_{\partial\Omega_D} = \Phi_0(x) \text{ (Kontakte); } \left.\frac{\partial\Phi}{\partial\nu}\right|_{\partial\Omega_N} = 0 \text{ (isolierter Rand)}$$

13.2 Flüssigkeit in einem porösen Medium



$u(x,t) \geq 0$ ... Dichte der Flüssigkeit

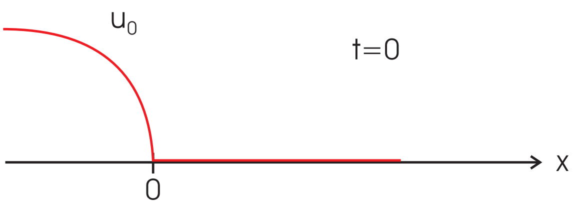
$u_t - \Delta(u^\alpha) = 0,\ \alpha > 1$
+RB, AB

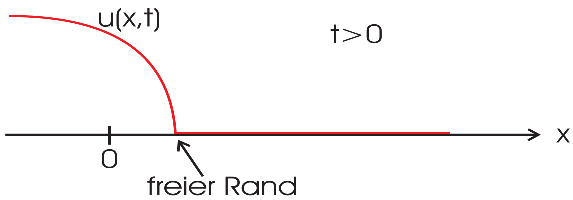
(klassische) poröse Mediumgleichung

$$u_t = \alpha\, div(\underbrace{u^{\alpha-1}}_{\text{Diffusionsrate} \geq 0} \nabla u)$$

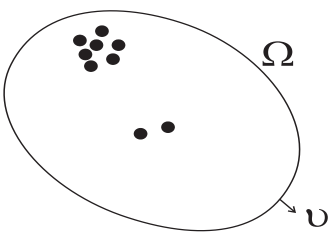
- degeneriert (bzw. ausgeartet) parabolisch

$\Rightarrow$ nur *endliche* Ausbreitungsgeschwindigkeit (im Gegensatz zur Wärmeleitungsgleichung)





13.3 Reaktion von Chemikalien



$u(x,t) \geq 0$ ... Konzentration der Chemikalie

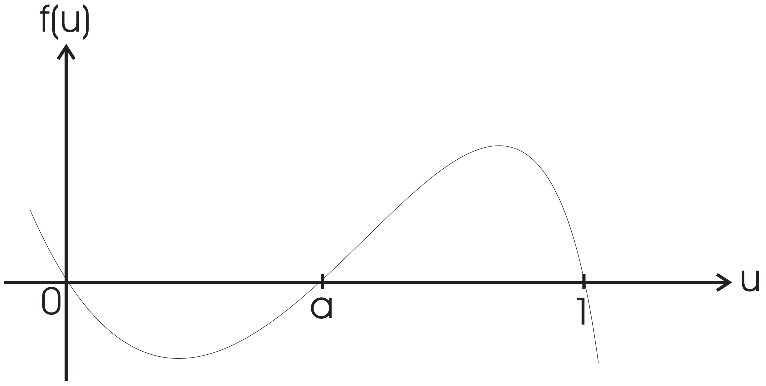
$$u_t - \underbrace{\Delta u}_{\text{Diffusion}} = \underbrace{f(u)}_{\text{Reaktionsterm}} \quad , \Omega \times (0,\infty)$$

RB: $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0,\ \partial\Omega \times (0,\infty)$
AB: $u(x,0) = u_0(x), \Omega$

Reaktions-Diffusionsgleichung (semilinear)

- wandernde Welle für $\Omega = \mathbb{R}$:

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ habe „kubische Gestalt" mit $\int_0^1 f(u)\, du > 0$:



Man kann zeigen ([Ev] § 4.2):

$\exists!\ \sigma < 0$ mit $u(x,t) = v(x - \sigma t)$ löst

$$u_t - u_{xx} = f(u), \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0, \tag{13.1}$$

wobei

$$\lim_{x\to-\infty} u = 0, \quad \lim_{x\to+\infty} u = 1.$$

<u>Idee</u>: Die Konstanten 0,1 sind *stabile Lösungen* von (13.1)
(da $f' < 0$); a ist *instabil* (da $f' \geq 0$).

- Gleichung für $v(x)$: $v'' + \sigma v' + f(v) = 0$

  mit $\lim\limits_{x\to-\infty} v = 0, \quad \lim\limits_{x\to+\infty} v = 1, \quad \lim\limits_{x\to\pm\infty} v'(x) = 0$

- Phasenraumanalyse für $(v, w) := (v, v')$:

$\rightarrow$ autonomes DGl-System 1. Ordnung:

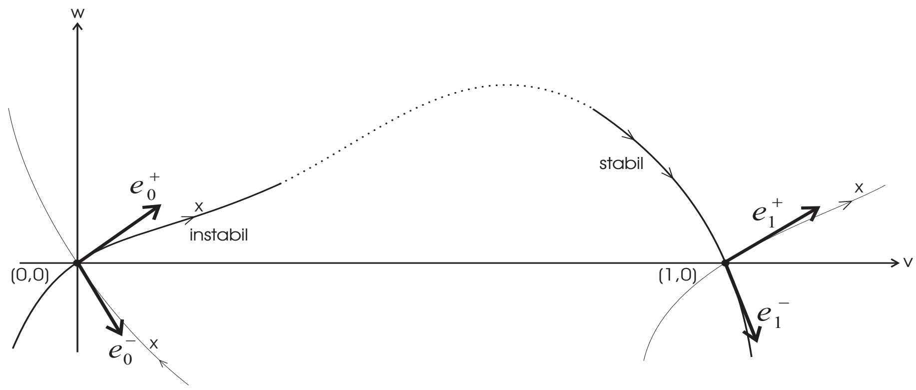
$$\left\{ \begin{array}{lcl} v' & = & w \\ w' & = & -\sigma w - f(v) \end{array} \right. \tag{13.2}$$

mit

$$\lim_{x\to-\infty} (v,w) = (0,0), \quad \lim_{x\to+\infty} (v,w) = (1,0)$$

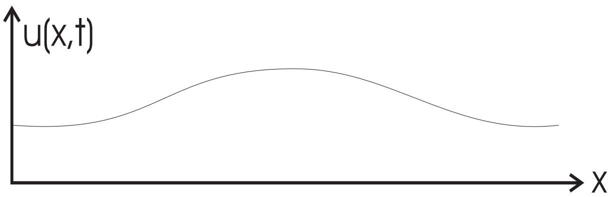
- $(0,0)$, $(1,0)$ sind kritische Punkte von (13.2); Sattelpunkte (der Linearisierung von (13.2))

  zB an $(0,0)$: $\begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -f'(0) & -\sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}$



Für genau ein $\sigma < 0$ $\exists$ *heteroklinischer Orbit* von $(0,0)$ nach $(1,0)$.

13.4 Oberflächenwellen in Wasser



$u(x,t) > 0$ ... Wassertiefe (recht seicht; lange Wellen)

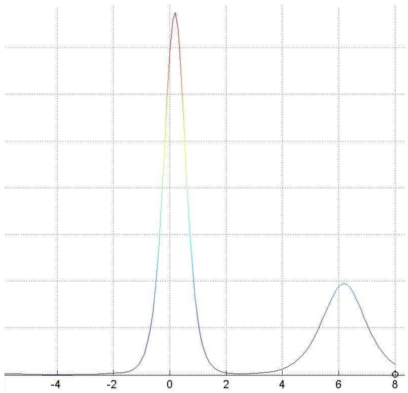
$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0$, in $\mathbb{R} \times (0, \infty)$
\+ AB

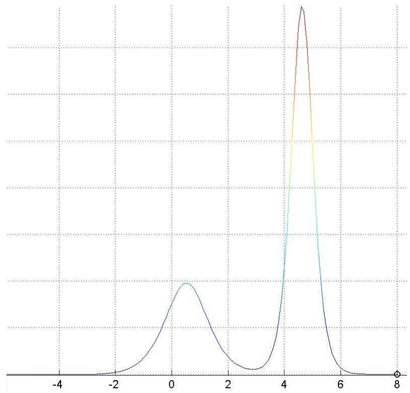
Korteweg- de Vries (KdV) Gleichung

- $\forall \sigma > 0$, $\forall c \in \mathbb{R}$ ist

$$u(x,t) = \frac{\sigma}{2} \cosh^{-2} \left(\frac{\sqrt{\sigma}}{2} (x - \sigma t - c) \right)$$

Lösung von KdV („*Soliton*", Geschwindkeit σ hängt von Höhe ab) $\rightarrow$ einsetzen! Trotz Nichtlinearität gibt es eine Art *Superpositionsprinzip*: 2 Solitonen können einander ohne Änderung durchdringen.

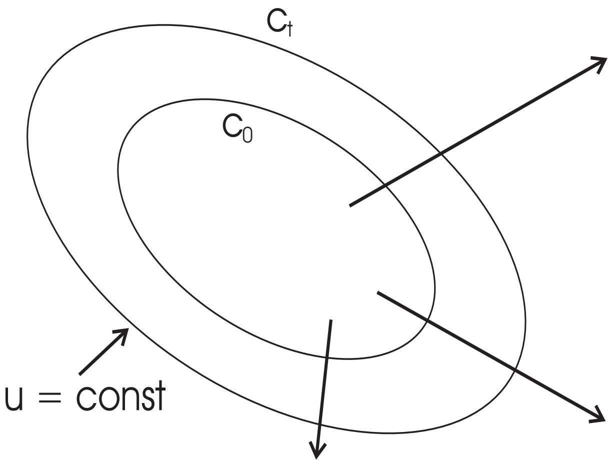




Hohes Soliton ist schneller und „überholt” tiefes Soliton; beide laufen nach rechts.

13.5 Geometrische Optik

Betrachte ausbreitende (Licht-)Wellenfront in homogenem, isotropen Medium ($0 < c =$ Lichtgeschwindigkeit):



Ausbreitungsstrahl $\perp$ Wellenfront (zu jeder Zeit t)

ges: $u(x)$, $x \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, mit

$u = \text{const} = t$ (Niveaulinien) ... Wellenfront zur Zeit t.
$u(x) =$ Zeitpunkt, an dem die Wellenfront durch x geht.

u erfüllt die *Eikonal Gleichung* (voll-nichtlinear!)

$$|\nabla u| = \frac{1}{c}.$$

- spezielle Lösungen:

<u>Kugelwelle</u> um Ursprung: $u(x) = \frac{1}{c}|x| + b,\ b \in \mathbb{R}$
<u>ebene Wellen</u>: $u(x) = a \cdot x + b;\ \ a \in \mathbb{R}^n,\ b \in \mathbb{R},\ |a| = \frac{1}{c}$

- <u>zeitabhängige Formulierung</u>

$S(x,t) := t - u(x)$

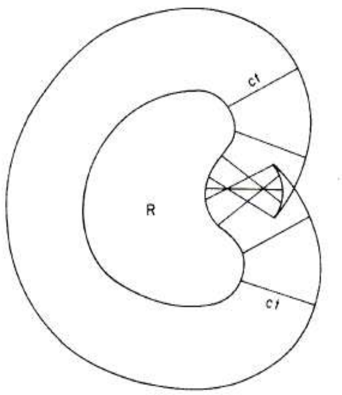
$$\Rightarrow \begin{cases} S_t &= c|\nabla_x S|,\ t > 0 \\ S(x,0) &= S_0(x) \end{cases} \tag{13.3}$$

<u>Wahl der AB</u>: $S(x,0) = 0 \quad \forall x \in C_0$ (geschl. Hyperfläche)
$S < 0$ aussen, $S > 0$ innen (stetig, sonst egal wie)

<u>ges</u>: Evolution der Niveaulinie C_t mit $S(x,t) = 0\ \forall x \in C_t$ (=Front zur Zeit t)

$S < 0 (> 0)$ ... vor (hinter) der Front

- (13.3) besser für Numerik → *Level-Set-Methoden*
- beschreibt auch Entwicklung von *Kaustiken* (Bild aus [Wh])



Wavefront construction for a disturbance initially confined to the region R.

13.6 Hamilton-Mechanik

Hamilton-Jacobi-Gleichung (voll-nichtlinear!) für ein mechanisches System:

$$\begin{cases} u_t + H(\nabla u, x) = 0, \;\; x \in \mathbb{R}^n, \; t > 0 \\ \text{AB: } u(x,0) = u_0(x) \end{cases} \tag{13.4}$$

<u>geg</u>: $H(p,x)$ ... *Hamilton Funktion*, zB

$$\tilde{H} = \underbrace{\frac{1}{2m}|p|^2}_{\text{kin. Energie}} + \underbrace{\Phi(x)}_{\text{pot. Energie}}$$

u hat Dimension einer *Wirkung* (Detailanwendung später)

- Lösung mit Hilfe von *Charakteristiken*:

$$\begin{cases} \left.\begin{array}{rcl} \dot{x}(s) &=& \nabla_p H(p(s), x(s)) \\ \dot{p}(s) &=& -\nabla_x H(p(s), x(s)) \end{array}\right\} \textit{Hamilton Gleichungen} \\ \dot{z}(s) = \nabla_p H(p(x), x(s)) \cdot p(x) - H(p(s), x(s)), \end{cases}$$

mit $z(s) := u(x(s)) \in \mathbb{R}$ (Verifikation durch Einsetzen in (13.4)).

$\rightarrow 2n+1$ gekoppelte DGl. <u>Bem</u>: $t = s$ wählbar.

- Unterschied zu §1 (dort nur für quasilin. Gl. 1. Ordnung)
  $p(x) := \nabla u(x(s)) \in \mathbb{R}^n$ wird als zusätzliche Variable eingeführt.

- speziell für $\tilde{H}(p,x)$:

$$\begin{cases} \left.\begin{array}{rcl} \dot{x} &=& \frac{1}{m} p \\ \dot{p} &=& -\nabla_x \Phi(x) \end{array}\right\} m\ddot{x} = -\nabla_x \Phi \ldots \textit{ Newtonsche Bewegungsgl.} \\ \dot{z} = \frac{1}{2m}|p|^2 - \Phi(x) =: L(p,x) \ldots \textit{ Lagrange Funktion} \end{cases}$$

13.7 Minimalflächen

$(x_1, x_2, u(x_1, x_2)),\; x = (x_1, x_2) \in \Omega$ sei eine Fläche im $\mathbb{R}^3$.

Oberfläche $= \int_\Omega \sqrt{1 + |\nabla u|^2}\, dx$

<u>Aufgabe</u>: Finde Fläche minimalen Inhalts, die die Randbedingung $u = g$ auf $\partial\Omega$ erfüllt ($\rightarrow$ *Variationsproblem*).

Anwendung: eingespannte Membran, Seifenblasen

Man kann zeigen: $u(x)$ erfüllt die *Minimalflächengleichung* (quasilinear, glm. elliptisch)

$$\begin{cases} \operatorname{div} \frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}} = 0 \quad , & \Omega, \\ u = g \quad , & \partial\Omega. \end{cases}$$

bzw: $(1+u_{x_2}^2)u_{x_1x_1} - 2u_{x_1}u_{x_2}u_{x_1x_2} + (1+u_{x_1}^2)u_{x_2x_2} = 0$

Dabei ist $\frac{1}{2} \operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\right)$ die *mittlere Krümmung* der Fläche (=Durchschnitt der Hauptkrümmungen bzw. Min./Max. der Normalkrümmungen).

Minimalflächen: mittlere Krümmung = 0 $\Rightarrow$ lokale Sattelform.

- **Isomerimetrisches Problem** (= „Problem der Dido", 888 v. Chr.):

  Finde geschlossene Kurve C der Länge 2π mit maximalem Inhalt
  ($\rightarrow$ Variationsproblem mit Nebenbedingung).

bzw. als Umfangsminimierung:

<u>ges</u>: $r \in H^1(0, 2\pi),\ r(0) = r(2\pi)$ mit $\int_0^{2\pi} \sqrt{1+(r'(\varphi))^2} r(\varphi)\, d\varphi \xrightarrow{!} \min,$

$$\text{und } \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r^2(\varphi)\, d\varphi = \pi.$$

Wegen Translationsinvarianz <u>keine</u> eindeutige Lösung.

14 nichtlineare elliptische Gleichungen

14.1 monotone Operator-Methode

Betrachte quasilineare Gleichung für $u : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} -\operatorname{div} a(\nabla u) = f & , \quad x \in \Omega \\ u = 0 & , \quad x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{14.1}$$

mit $f \in L^2(\Omega)$; $a = (a_1, ..., a_n)$ ist „glattes" Vektorfeld $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$;
$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränktes Gebiet mit „glattem" Rand.

• *Anwendung*: quasilin. poröse Medium Gleichung, stationär (quasilinear → flussabhängige Durchlässigkeit)

• Bedingungen an a:

Definition 14.1 *Ein Vektorfeld $a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ heißt*

1. monoton, *falls*

$$(a(p) - a(q)) \cdot (p - q) \geq 0 \quad \forall p, q \in \mathbb{R}^n.$$

2. streng monoton, *falls es ein $\Theta > 0$ gibt mit:*

$$(a(p) - a(q)) \cdot (p - q) \geq \Theta |p - q|^2 \quad \forall p, q \in \mathbb{R}^n \tag{14.2}$$

Bsp:
1) Sei $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (streng) konvex $\Rightarrow a = \nabla\Phi$ ist (streng) monoton.

$$\begin{aligned} (a(p) - a(q)) \cdot (p - q) &= \sum_{i=1}^{n} (\partial_i \Phi(p) - \partial_i \Phi(q))(p_i - q_i) \\ &= \int_0^1 \sum_{i,j} \partial_{ij} \Phi(p + t(q - p))(p_j - q_j)(p_i - q_i)\, dt \geq 0 \text{ da } \frac{\partial^2 \Phi}{\partial p^2} \geq 0 \end{aligned}$$

2) Sei skalare Funktion a_j bez. x_j *nicht* monoton wachsend $\Rightarrow$ a ist *nicht* monoton.

- weitere Annahmen:

$$\begin{array}{ll} (A1) & |a(p)| \leq c(1+|p|) \\ (A2) & a(p)\cdot p \geq \alpha|p^2| - \beta \quad \text{(entspricht Koerzivität)} \\ & \text{für } c, \alpha > 0,\ \beta \geq 0;\ \ \forall p \in \mathbb{R}^n \end{array}$$

- schwache Formulierung von (14.1):

ges: $u \in H_0^1(\Omega)$ mit:

$$\int_\Omega a(\nabla u)\cdot \nabla v\, dx = \int_\Omega f v\, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \tag{14.3}$$

Ziel: (14.3) hat eindeutige Lösung $u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$

Strategie:

(i) konstruiere Approximationsfolge u_m in endlich dimensionalem Teilraum von $H_0^1(\Omega)$ (Galerkin Methode)

(ii) $u = \lim_{m\to\infty} u_m$ löst (14.3); Existenz einer schwachen Lösung

(iii) Eindeutigkeit, $u \in H^2(\Omega)$

Schritt (i):

- $\{w_k\}$ sei ON-Basis von $H_0^1(\Omega)$ mit $IP < u, v >_1 = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\, dx$
- suche $u_m = \sum_{k=1}^m d_m^k w_k \in H_0^1(\Omega)$, als Lösung von

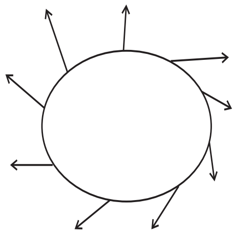
$$\int a(\nabla u_m)\cdot \nabla w_k = \int f w_k;\ \ k = 1, ..., m \tag{14.4}$$

Lemma 14.1 *Sei $v : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ stetig mit*

$$v(x)\cdot x \geq 0 \text{ für } |x| = r \text{ und ein } r > 0.$$

$\Rightarrow \exists x \in \overline{K_r(0)}$ *mit* $v(x) = 0$.

Bew: mit Fixpunktsatz von Brouwer ([Ev] § 9.1).



Satz 14.1 *$\forall m \in \mathbb{N} : \exists$ Lösung u_m von (14.4).*

Bew:
def. stetige Funktion $v = (v^1, ..., v^m) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ durch

$$v^k(\underbrace{d}_{\in \mathbb{R}^m}) := \int_\Omega a(\underbrace{\sum_{j=1}^m d_j \nabla w_j}_{\text{wird } \nabla u_m}) \cdot \nabla w_k - f w_k \, dx; \;\; k = 1, ..., m$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow v(d) \cdot d \quad &= \quad \int a\left(\sum d_j \nabla w_j\right) \cdot \left(\sum d_j \nabla w_j\right) - f\left(\sum d_j w_j\right) \, dx \\ &\overset{(A2)}{\geq} \quad \int \alpha \left|\sum d_j \nabla w_j\right|^2 - \beta - f\left(\sum d_j w_j\right) \, dx \\ &= \quad \alpha |d|^2 - \beta |\Omega| - \sum d_j \int f w_j \, dx \\ &\overset{\text{vollst. Qu.}}{\geq} \quad \frac{\alpha}{2}|d|^2 - \beta|\Omega| - c \sum \langle f, w_j \rangle^2_{L^2(\Omega)} \end{aligned}$$

- sei $y \in H^1_0$ schwache Lösung von $-\Delta y = f$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^m \langle f, w_j \rangle^2_{L^2} = \sum \langle y, w_j \rangle^2_1 \overset{\text{Bessel}}{\leq} \|y\|^2_{H^1_0(\Omega)} \overset{\S\, 8.3}{\leq} c\|f\|^2_{L^2(\Omega)} = \tilde{c}$$

$\Rightarrow v(d) \cdot d \geq \frac{\alpha}{2}|d|^2 - c \geq 0$ für $|d| = r$ und r hinreichend groß.

- aus Lemma 14.1: $\exists d \in \mathbb{R}^m$ mit $v(d) = 0$, also

$$u_m := \sum_{j=1}^m d_j w_j \text{ löst (14.4).}$$

- wichtig: Lemma 14.1 gilt nur für endliche Dimensionen.

$\square$

Einschub: *schwache Konvergenz*

- Sei X $BR \Rightarrow X' = \{$ stetige, lin. Funktionale auf $X\}$ ist BR

Definition 14.2 *Die Folge* $\{u_k\} \subset X$ konvergiert schwach *gegen* $u \in X$ $(u_k \rightharpoonup u)$, *wenn*

$$\langle v, u_k \rangle \to \langle v, u \rangle \quad \forall v \in X'.$$

Es gilt:

(i) $u_k \to u \Rightarrow u_k \rightharpoonup u$

(ii) jede schwach konvergente Folge $(u_k \rightharpoonup u)$ ist beschränkt, und

$$\|u\| \leq \lim_{k\to\infty} \inf \|u_k\|.$$

(Beweis mit Banach-Steinhaus)

(iii) Sei $u_k \rightharpoonup u$ in X und $v_k \to v$ in X'
$\Rightarrow \langle v_k, x_k \rangle \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \langle v, x \rangle$
(wichtig für Konvergenz von quadrat. Termen in PDGl.)

(iv) Für $\dim X < \infty$ gilt: $u_k \to u \Leftrightarrow u_k \rightharpoonup u$

Bsp: $u_k(x) = \sin kx \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$ in $L^2(0,1)$
(aber u_k konvergiert weder punktweise noch f. ü. !)

- Achtung: Nichtlinearitäten sind i.A. *nicht stetig* bez. schw. Konvergenz (vergleiche mit (iii)!).

Bsp: $u_k^2 = \sin^2 kx \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2} \neq (w - \lim u_k)^2 = 0$;
aber: $w_k \to w$ in $L^{2p}(\Omega) \Rightarrow w_k^2 \to w^2$ in $L^p(\Omega)$

Satz 14.2 *(schwache Kompaktheit; Satz von Alaoglu):*
Sei X ein reflexiver BR (d.h. $X'' = X$), und $\{u_k\} \subset X$ beschränkt.
$\Rightarrow \exists$ *Teilfolge* $\{u_{k_j}\} \subset \{u_k\}$ *und* $\exists u \in X$ *mit* $u_{k_j} \rightharpoonup u$

Bem:

(i) Hilbert Räume sind reflexiv.

(ii) $L^p(\Omega)' = L^q(\Omega),\ 1 \leq p < \infty,\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$
$L^p(\Omega)$ ist reflexiv für $1 < p < \infty$

Schritt (ii):

- für den Limes $m \to \infty$ brauchen wir glm. Abschätzungen:

Satz 14.3 *$\exists c$ (unabhängig von m) mit*

$$\|u_m\|_{H_0^1(\Omega)} \le c(1 + \|f\|_{L^2(\Omega)}) \quad \forall m \in \mathbb{N} \tag{14.5}$$

Bew: aus der Galerkin-Gleichung (14.4) folgt (mit $u_m = \sum_{k=1}^m d_m^k w_k$):

$$\int_\Omega a(\nabla u_m) \cdot \nabla u_m \, dx = \int f u_m \, dx \tag{14.6}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \underbrace{\alpha}_{>0} \int |\nabla u_m|^2 \quad &\overset{\text{(A2)}}{\le} \quad \int a(\nabla u_m) \cdot \nabla u_m \, dx + \beta|\Omega| = \int f u_m \, dx + \beta|\Omega| \\
&\le \quad \beta|\Omega| + \varepsilon \int u_m^2 + \frac{1}{4\varepsilon} \int f^2 \\
&\overset{\text{Poincaré}}{\le} \quad \beta|\Omega| + \varepsilon c \int (\nabla u_m)^2 + \frac{1}{4\epsilon} \int f^2
\end{aligned}$$

- (14.5) folgt für $\varepsilon > 0$, klein genug.

□

Limes von u_m für $m \to \infty$

$\|u_m\|_{H_0^1(\Omega)} \le C \Rightarrow$

(i) Laut Satz 14.2 $\exists$ Teilfolge $\{u_{m_j}\}$, $j \in \mathbb{N}$ und $u \in H_0^1(\Omega)$ mit $u_{m_j} \rightharpoonup u$ in $H_0^1(\Omega)$.

d.h. $\langle v, u_{m_j} \rangle \to \langle v, u \rangle \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)' =: H^{-1}(\Omega)$.

$$\text{bzw.} \begin{cases} u_{m_j} \rightharpoonup u & \text{in } L^2(\Omega) \\ \nabla u_{m_j} \rightharpoonup \nabla u & \text{in } L^2(\Omega) \end{cases}$$

(ii) Laut Satz 8.3 ($H^1(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^2(\Omega)$): $u_{m_j} \to u$ in $L^2(\Omega)$

Ziel: Limes $m \to \infty$ in (14.4) ausführen; dann löst u (14.3)

Problem: $a(\nabla u_{m_j}) \longrightarrow a(\nabla u)$?? (Nichtlinearität + schwache Konvergenz von ∇u!)

Rettung: Monotonie von a (*Methode von Browder & Minty*)

Satz 14.4 *Sei a monoton und erfülle (A1), (A2).*
$\Rightarrow$ (14.3) hat eine schwache Lösung.

Bew:

- $\|a(\nabla u_m)\|_{L^2(\Omega)} \overset{(A1)}{\leq} c(1 + \|\nabla u_m\|_{L^2(\Omega)}) \overset{(14.5)}{\leq} c$

$\Rightarrow \exists \vec{b} \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^n)$ und (ev. weitere) Teilfolge, so dass

$$a(\nabla u_{m_j}) \rightharpoonup \vec{b} \text{ in } L^2(\Omega; \mathbb{R}^n)$$

$\Rightarrow$ (Limes in (14.4)): $\int \vec{b} \cdot \nabla w_k = \int f w_k \quad \forall k \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow \int \vec{b} \cdot \nabla v = \int f v \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \tag{14.7}$$

- zeige $\vec{b} = a(\nabla u)$ („Limes-Identifikation") mittels Monotonie von a:
  wegen Monotonie gilt $\forall m \in \mathbb{N},\ \forall x \in H_0^1(\Omega)$:

$$0 \leq \int (a(\nabla u_m) - a(\nabla w)) \cdot (\nabla u_m - \nabla w)\, dx$$

$$\overset{(14.6)}{=} \int \underbrace{\overbrace{f}^{\in L^2} u_m}_{\downarrow} - \underbrace{a(\nabla u_m) \cdot \overbrace{\nabla w}^{\in L^2}}_{\downarrow} - \underbrace{\overbrace{a(\nabla w)}^{\in L^2} \cdot (\nabla u_m}_{\downarrow} - \nabla w)\ dx$$

für $m = m_j \to \infty$

$$0 \leq \int f u - \vec{b} \cdot \nabla w - a(\nabla w) \cdot (\nabla u - \nabla w)\ dx$$

(14.7) mit $v = u$

$$= \int (\vec{b} - a(\nabla w)) \cdot \nabla(u - w)\ dx \quad w \in H_0^1(\Omega)$$

Trick: Konvergenz vom quadr. Term $a(\nabla u_m) \cdot \nabla u_m$ durch (14.6) umgangen.

- setze $w := u - \lambda v;\ \lambda > 0,\ v \in H_0^1(\Omega)$ fest

$$\Rightarrow 0 \leq \int (\vec{b} - a(\nabla u - \lambda \nabla v)) \cdot \nabla v\ dx$$

mit $\lambda \to 0$:

$$0 \leq \int (\vec{b} - a(\nabla u)) \cdot \nabla v \ dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

ersetze v durch $-v$:

$$0 = \int (\vec{b} - a(\nabla u)) \cdot \nabla v$$

$$\Rightarrow \int a(\nabla u) \cdot \nabla v = \int fv$$

aus (14.7), also u ist schwache Lösung

$\square$

Schritt (iii):

Satz 14.5 *Sei $a \in C^2(\mathbb{R}^n)$ streng monoton und erfülle (A1),(A2); sei $\partial\Omega$ eine C^2-Mannigfaltigkeit.*

$\Rightarrow$ *(a) schwache Lösung von (14.3) ist eindeutig.*
(b) $u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$.

Bew (a): seien $u_1, u_2 \in H_0^1(\Omega)$ schwache Lösungen

$$\Rightarrow \int a(\nabla u_1) \cdot \nabla v = \int a(\nabla u_2) \cdot \nabla v = \int fv \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

sei $v := u_1 - u_2$

$$\Rightarrow 0 = \int (a(\nabla u_1) - a(\nabla u_2)) \cdot (\nabla u_1 - \nabla u_2) \overset{(14.2)}{\geq} \underbrace{\Theta}_{>0} \int |\nabla u_1 - \nabla u_2|^2,$$

also $u_1 = u_2$ in Ω.

(b)

$$\bullet \operatorname{div} a(\nabla u) = \sum_{j,k=1}^{n} \underbrace{\frac{\partial a_j}{\partial p_k}}_{\text{Jacobi-Matrix von } a(p)} (\nabla u) \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k};$$

Für die eindeutige Lösung u kann $\frac{\partial a_j}{\partial p_k}(\nabla u)$ als *gegebene* Koeffizienten-Matrix betrachtet werden $\Rightarrow u$ erfüllt lin. Gleichung

- wähle $p = q + h\xi,\ h \neq 0$ in (14.2)

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{n} \frac{a_j(q+h\xi) - a_j(q)}{h} \xi_j \geq \Theta|\xi|^2$$

$$h \to 0: \quad \sum_{jk} \underbrace{\frac{\partial a_j}{\partial p_k} \xi_k}_{=\nabla a_j \cdot \xi} \xi_j \geq \underbrace{\Theta}_{>0} |\xi|^2,$$

also: $-\operatorname{div} a(\nabla u) = f$ ist *gleichmäßig elliptisch.*

- mit kleiner Erweiterung von Satz 8.6 (Regularität bis zum Rand; aber hier $\partial a(\nabla u) \notin C^1(\bar{\Omega})$): $u \in H^2(\Omega)$, (14.1) gilt f. ü. in Ω.

$\square$

<u>Referenzen</u>: [Ev] § 9.1, [RR] § 9.3, [Sh2] § II.2

14.2 Vergleichsprinzip für quasilineare Differentialoperatoren

Betrachte den quasilinearen Differentialoperator

$$L(u) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x, \nabla u) u_{x_i x_j} + b(x, u, \nabla u)$$

für $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ (beschränktes Gebiet)

<u>Annahmen</u>:
- $b(x, \cdot, p) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei monoton fallend $\forall x \in \Omega,\ \forall p \in \mathbb{R}^n$.
- a_{ij}, b seien C^1 bez. p.

Satz 14.6 *(Vergleichsprinzip): Seien $u, v \in C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ gegeben, L sei elliptisch bez. u oder v, und*

$$\begin{aligned} L(u) &\geq (>) L(v) && \text{in } \Omega \\ u &\leq v && \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

$\Rightarrow u \leq (<) v$ *in Ω.*

Bew:
• oBdA sei L elliptisch bez. u (d.h. $A(x, \nabla u(x)) = [a_{ij}(x, \nabla u(x))]_{ij} \geq \lambda(x) > 0 \quad \forall x \in \Omega$).

(a)

$$L(u) - L(v) = \sum \overbrace{a_{ij}(x, \nabla u)}^{=:a_{ij}(x)} \partial_{ij}^2 (u - v)$$

$$+ \underbrace{\sum_{ij} [a_{ij}(x, \nabla u) - a_{ij}(x, \nabla v)] \partial_{ij}^2 v + b(x, u, \nabla u) - b(x, u, \nabla v)}_{=:\sum_i b_i(x) \partial_i w \text{ (mit 2x MWS)}}$$

$$+ \underbrace{b(x, u, \nabla v) - b(x, v, \nabla v) \geq 0}_{\leq 0, \text{falls } u(x) \geq v(x), \text{da } b \searrow}; \qquad \text{mit } w := u - v$$

$$\Rightarrow \tilde{L}w := \sum_{ij} a_{ij}(x) \partial_{ij}^2 w + \sum_i b_i(x) \partial_i w \geq 0$$

auf $\Omega_+ = \{x \in \Omega \mid w(x) \geq 0\}$

und $w|_{\partial\Omega} \leq 0$ (lt. VS, also auch $w|_{\partial\Omega_+} \leq 0$.

• lt. Satz 7.1 (schwaches Maximumsprinzip auf $\overset{\circ}{\Omega}_+$): $w \leq 0$ in Ω.

(b) Für $L(u) > L(v)$ (d.h. $\tilde{L}w > 0$ auf $\overset{\circ}{\Omega}_+$) kann w kein nicht-negatives Maximum haben (siehe Beweis von Satz 7.1) $\Rightarrow w < 0$ auf Ω.

□

$\Rightarrow$ ***Eindeutigkeit von klassischen Lösungen*** **des Dirichlet-Problems**

$$\left\{ \begin{array}{rcll} L(u) & = & f(x) & , \ \Omega \\ u & = & u_D(x) & , \ \partial\Omega \end{array} \right. \tag{14.8}$$

Korrolar 14.1 *Seien $u, v \in C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ Lösungen von (14.8) $\Rightarrow u = v$.*

Definition 14.3
(a) $\bar{u} \in C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ heißt obere Lösung *von (14.8), wenn*

$$\begin{array}{rcll} L(\bar{u}) & \leq & f & \text{in } \Omega, \\ \bar{u} & \geq & u_D & \text{auf } \partial\Omega. \end{array}$$

(b) $\underline{u} \in C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ heißt untere Lösung *von (14.8), wenn*

$$\begin{array}{rcll} L(\underline{u}) & \geq & f & \text{in } \Omega, \\ \underline{u} & \leq & u_D & \text{auf } \partial\Omega. \end{array}$$

Korrolar 14.2 *Für eine klassische Lösung u von (14.8) gilt:*

$$\underline{u}(x) \le u(x) \le \bar{u}(x), \ \ x \in \Omega$$

Vergleichsprinzip für schwache Lösungen

betrachte $L(u) = \operatorname{div} a(\nabla u) + b(u, x)$ und

$$\begin{cases} L(u) & = & 0 & , & \Omega \\ u & = & 0 & , & \partial\Omega \end{cases} \tag{14.9}$$

Annahmen:

- $a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ glatt und streng monoton
- $b(\cdot, x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei monoton fallend $\forall x \in \Omega$

Definition 14.4 *(i) $u \in H_0^1(\Omega)$ heißt* schwache Lösung *von (14.9) wenn*

$$\int_\Omega -a(\nabla u) \cdot \nabla v + b(u, x) v \, dx = 0 \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \tag{14.10}$$

(ii) $\bar{u}$ / $\underline{u}$ heißt schwache obere /untere Lösung, *wenn*

$$\int -a(\nabla \bar{u}/\nabla \underline{u}) \cdot \nabla v + b(\bar{u}/\underline{u}, x) v \, dx \le / \ge 0 \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \ \ v \ge 0 \textit{ f.ü.} \tag{14.11}$$

Zusätzlich gelte: $a(\nabla u/\nabla \bar{u}/\nabla \underline{u})$, $b(u/\bar{u}/\underline{u}, x) \in L^2(\Omega)$.

Satz 14.7 *Seien $\bar{u}, \underline{u} \in H^1(\Omega)$ schwache obere und untere Lösungen von (14.9) mit $\underline{u} \le 0$, $\bar{u} \ge 0$ auf $\partial\Omega$.*

$\Rightarrow$ Jede schwache Lösung von (14.9) erfüllt:
$\underline{u}(x) \le u(x) \le \bar{u}(x)$ f.ü. in Ω.

Bew:

(14.11) minus (14.10) für $\bar{u}$:

$$\int_\Omega [a(\nabla u) - a(\nabla \bar{u})] \cdot \nabla v \le \int \underbrace{[b(u, x) - b(\bar{u}, x)]}_{\le 0 \text{ für } u(x) \ge \bar{u}(x)} v \le 0$$

für $v := (u - \bar{u})^+ \ge 0$

Bem: $v \in H_0^1(\Omega) \Rightarrow v^+ \in H_0^1(\Omega)$ und

$$\nabla(v^+) = \begin{cases} \nabla v & , \quad \text{auf } \{v > 0\} \\ 0 & , \quad \text{auf } \{v \leq 0\} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 0 \quad &\geq \quad \int\limits_{\{u \geq \bar{u}\}} [a(\nabla u) - a(\nabla \bar{u})] \cdot \nabla(u - \bar{u})\, dx \\ &\overset{\text{str. mon.}}{\geq} \underbrace{\Theta}_{>0} \int\limits_{\{u \geq \bar{u}\}} |\nabla(u - \bar{u})|^2\, dx = \Theta \int\limits_{\Omega} |\nabla \underbrace{(u - \bar{u})^+}_{\in H_0^1}|^2\, dx \end{aligned}$$

$\Rightarrow u \leq \bar{u}$, wegen Poincaré Ungleichung.

$\square$

Referenzen: [GT] § 8.5, 9.2, [Ev] § 9.3

14.3 Fixpunktmethoden

(i) Fixpunktsatz von Banach für streng kontraktive Abbildungen (bei stationären Problemen muss ein „Parameter" klein sein):

Satz 14.8 *Sei X BR, $A : X \to X$ eine (nichtlin.) Abbildung mit*

$$\|A(u_1) - A(u_2)\| \leq \lambda \|u_1 - u_2\| \quad \forall u_1, u_2 \in X,\ \lambda < 1$$

$\Rightarrow$ *A hat* eindeutigen *Fixpunkt u und $A^k(u_0) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} u \quad \forall u_0 \in X$.*

Bsp:

$$\begin{cases} -\Delta u + b(\nabla u) &= f(x) \quad , \quad \Omega \\ u &= 0 \qquad , \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

mit b Lipschitz hat für $\text{Lip}(b)$ hinreichend klein eine eindeutige schwache Lösung $u \in H_0^1(\Omega)$.

Wähle $A : v \mapsto u$ mit $-\Delta u + b(\nabla v) = f(x),\ \Omega;\ u = 0, \partial\Omega$ (siehe Übung).

(ii) Fixpunktsatz von Schauder für kompakte Abbildungen:

Satz 14.9 *Sei X BR, $\{\} \neq K \subset X$ konvex und $A : K \to K$ eine stetige Abbildung. Ferner sei*
(a) K kompakt,
oder
(b) K abgeschlossen und $A : K \to K$ kompakt.

$\Rightarrow$ A hat einen Fixpunkt in K.

Bew: (nicht konstruktiv) mit FPS von Brouwer (siehe [Ev]).
Bem: *keine* Aussage über *Eindeutigkeit.*

Bsp:

$$\begin{cases} -\Delta u + b(u) &= f(x) \quad , \quad \Omega \\ u &= 0 \quad , \quad \partial\Omega \end{cases}$$

(mit b monoton wachsend und bijektiv auf $\mathbb{R}$) hat eindeutige Lösung.

Wähle $X = L^2(\Omega),\ K = H_0^1(\Omega) \cap \{\underline{u} \le u(x) \le \overline{u}$ f. ü. in $\Omega\}$ (siehe Übung).

Achtung: Wahl von K mit $A : K \to K$ oft trickreich.

typische Anwendungsstrategie für FPS von Schauder:

a) für klassische Lösungen:
   i. (optional) *Eindeutigkeit* der klassischen Lösung: Korrolar 14.1 (durch Maximumsprinzip)
   ii. obere/untere Lösung als *a-priori Schranken* für klassische Lösung: Korrolar 14.2 (durch Maximumsprinzip)
   iii. *Existenz* einer schwachen Lösung (FPS von Schauder, Schranken aus (ii) sind Hinweis für Wahl der konvexen Menge)
   iv. *Regularität*: schwache Lösung ist klassische (§8.5)
b) für schwache Lösungen:
   i. obere/untere Lösung als *a-priori Schranken* für schwache Lösung: Satz 14.7
   ii. Existenz einer schwachen Lösung (FPS von Schauder)
   iii. (optional) *Eindeutigkeit*, z.B. mit L^2-„Energiemethode”
   (vgl. Bew. (a) von Satz 14.5)

Nächster FPS meist leichter anwendbar.

(iii) Fixpunktsatz von Schaefer/Leray-Schauder für kompakte Abbildungen:

Satz 14.10 *Sei X BR und $A : X \to X$ eine stetige, kompakte Abbildung. Sei die Menge*

$$\{u \in X \mid u = \lambda A(u) \text{ für ein } 0 \leq \lambda \leq 1\} \tag{14.12}$$

beschränkt.

$\Rightarrow$ A hat einen Fixpunkt.

Bew: mit FPS von Schauder (siehe [Ev]).
Bem: 1) *keine* Aussage über *Eindeutigkeit*
2) keine konvexe, kompakte Menge festzulegen.

Idee: *a-priori Abschätzung* für mögliche Fixpunkte von λA, $0 \leq \lambda \leq 1$ liefert Existenz eines Fixpunktes von A.

Bsp:

$$\begin{cases} -\Delta u + b(\nabla u) + \mu u &= 0 \quad , \quad \Omega \\ u &= 0 \quad , \quad \partial\Omega \end{cases} \tag{14.13}$$

mit $\partial\Omega \in C^2$, $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ glatt und Lipschitz, daher

$$\exists c > 0 : |b(p)| \leq c(1 + |p|) \quad \forall p \in \mathbb{R}^n. \tag{14.14}$$

Satz 14.11 *Für $\mu > 0$ hinreichend groß hat (14.13) eine Lösung $u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$.*

Bew: betrachte $A : u \mapsto w$ auf $X := H_0^1(\Omega)$, definiert durch

$$\begin{cases} -\Delta w + \mu w &= f(x) := -b(\nabla u) \quad , \quad \Omega \\ w &= 0 \quad , \quad \partial\Omega \end{cases} \tag{14.15}$$

a) $A : X \to X$:
sei $u \in H_0^1(\Omega) \Rightarrow f \in L^2(\Omega)$, wegen Ungleichung (14.14).
$w = A(u) \in H_0^1(\Omega)$ ist eindeutige schwache Lösung von (14.15).

Laut Satz 8.7:

$$\|w\|_{H^2(\Omega)} \leq C\|f\|_{L^2(\Omega)} \tag{14.16}$$

b) A ist stetig und kompakt:

- $u \mapsto b(\nabla u) : H_0^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$ ist Lipschitz,

- $f \mapsto w$: $L^2(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$ ist stetig $\Rightarrow A$ ist stetig.

- Laut (14.14): $u \mapsto b(\nabla u)$ bildet beschränkte Mengen von $H_0^1(\Omega)$ auf beschränkte Mengen von $L^2(\Omega)$ ab.
- Laut (14.16) $f \mapsto w$ bildet beschränkte Mengen von $L^2(\Omega)$ auf beschränkte Mengen von $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ ab; sind präkompakt in $H_0^1(\Omega)$ (lt. Satz 8.3 komp. Einbettung) $\Rightarrow A$ ist kompakt.

c) <u>Beschränktheit von (14.12)</u>:
- Sei $u \in H_0^1(\Omega)$ Lösung von $u = \lambda A(u)$ für ein $0 \leq \lambda \leq 1$, also $w = \frac{u}{\lambda} = A(u)$ mit $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, d.h.

$$\text{f. ü. in } \Omega\text{:} \ -\Delta\left(\frac{u}{\lambda}\right) + \mu\left(\frac{u}{\lambda}\right) = -b(\nabla u) \quad \Big| \cdot \lambda u, \int_\Omega dx$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \quad & \int_\Omega |\nabla u|^2 + \mu u^2 \, dx = -\int_\Omega \lambda b(\nabla u) u \, dx \\ \overset{(14.14),\lambda\leq 1}{\leq} \quad & \int c(1 + |\nabla u|)|u| \, dx \leq \frac{1}{2} \int |\nabla u|^2 \, dx + c_1 \int |u|^2 + 1 \, dx\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ für $\mu > c_1$: $\frac{1}{2} \int |\nabla u|^2 + (\mu - c_1) \int |u|^2 \leq 1$ (unabh. von $0 \leq \lambda \leq 1$)

d) laut Satz 14.10: A hat Fixpunkt $u \in H_0^1(\Omega)$ und $u \in H^2(\Omega)$

□

<u>Referenzen</u>: [Ev] § 9.2, [GT] § 10

14.4 nichtlineare Variationsprobleme

<u>Ziel</u>: Umformulierung von quasilinearen PDGl 2. Ordnung in Minimierungsprobleme für ein *„Energie"-Funktional*

$$E(u) = \int_\Omega L(\nabla u(x), u(x), x) \, dx \tag{14.17}$$

mit reell-wertiger *Lagrange-Funktion* $L(p, z, x)$ (da oft einfacher lösbar).

14.4.1 Euler-Lagrange-Gleichungen

Aufgabe: $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt, $\partial\Omega$ glatt.
Finde (glatte) Funktion $u : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}$ mit $u = g$ auf $\partial\Omega$ (g geg.), die E minimiert.

- notwendige Bedingungen an einen glatten *Minimierer* u:
  definiere $e(\tau) := E(u + \tau v);\ \ \tau \in \mathbb{R},\ \ \forall v \in C_0^\infty(\Omega)$ fest $(\to u + \tau v|_{\partial\Omega} = g)$

$\Rightarrow$ $e'(0) = 0$ (*erste Variation* von E an u in Richtung v),
$e''(0) \geq 0$ (*zweite Variation* von E an u in Richtung v)

Notation:

$$\begin{array}{lcll} \delta E(u,v) & := & e'(0) & \text{... Linearform bez. } v, \\ \delta^2 E(u,v) & := & e''(0) & \text{... quadratische Form bez. } v \end{array}$$

Satz 14.12 *Glatte Minimierer u von E erfüllen:*

(i)

$$-\operatorname{div}_x(\nabla_p L(\nabla u, u, x)) + L_z(\nabla u, u, x) = 0 \ \textit{in}\ \Omega \tag{14.18}$$

*(*Euler-Lagrange-Gleichung *von E),*

(ii)

$$\frac{\partial^2}{\partial p^2} L(\nabla u, u, x) \geq 0 \quad \forall x \in \Omega \quad (\text{Konvexität } \textit{von } L \textit{ bez. } p)$$

Bew:

(i)

$$e(\tau) = \int_\Omega L(\nabla u + \tau \nabla v, u + \tau v, x)\, dx$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 0 = e'(0) \quad &= \int_\Omega \nabla_p L(\nabla u, u, x) \cdot \nabla v + L_z(\nabla u, u, x) v\, dx \\ &\overset{v|_{\partial\Omega}=0}{=} \int_\Omega [-\operatorname{div}_x(\nabla_p L(\nabla u, u, x)) + L_z(\nabla u, u, x)]\, v\, dx \quad \forall v \in C_0^\infty(\Omega) \end{aligned}$$

$\Rightarrow -\operatorname{div}_x(\nabla_p L(\nabla u, u, x)) + L_z(\nabla u, u, x) = 0$ in Ω
(quasilinear, 2. Ordnung)

(ii)

$$0 \leq e''(0) = \int\limits_\Omega \nabla v^T \cdot \frac{\partial^2}{\partial p^2} L(\nabla u, u, x) \cdot \nabla v \tag{14.19}$$

$$+ 2\nabla_p L_z(\nabla u, u, x) \cdot \nabla v\, v + L_{zz}(\nabla u, u, x) v^2 \, dx \quad \forall v \in C_0^\infty(\Omega)$$

Durch Dichtheitsargument gilt es auch für Lipschitz Funktionen mit $v|_{\partial\Omega} = 0$.

- wähle speziell $v = O(\varepsilon)$, $\varepsilon \to 0$ mit $\nabla v = O(1)$, z.B:

$$v(x) := \varepsilon \rho \left(\frac{x \cdot \xi}{\varepsilon} \right) \varphi(x), \;\; x \in \Omega; \;\; \xi \in \mathbb{R}^n \text{ fest}; \;\; \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \text{ beliebig.}$$

$\rho : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist Zig-Zag-Funktion:

$$\rho(x) = \begin{cases} x & , \;\; 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 1 - x & , \;\; \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases} \qquad + \text{ periodische Fortsetzung}$$

also $|\rho'| = 1$ f.ü.

$$\nabla v = \rho' \left(\frac{x \cdot \xi}{\varepsilon} \right) \xi \varphi + O(\varepsilon) \text{ für } \varepsilon \to 0 \tag{14.20}$$

- einsetzen in (14.19):

$$\Rightarrow 0 \leq \int\limits_\Omega \xi^T \cdot \frac{\partial^2}{\partial p^2} L \cdot \xi \varphi^2 |\rho'|^2 \, dx + O(\varepsilon)$$

- mit (14.20) und $\varepsilon \to 0$:

$$\begin{aligned} & 0 \leq \int\limits_\Omega \xi^T \cdot \frac{\partial^2}{\partial p^2} L \cdot \xi \varphi^2 \, dx \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \\ \Rightarrow \quad & \xi^T \cdot \frac{\partial^2}{\partial p^2} L \cdot \xi \geq 0 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \;\; \forall x \in \Omega. \end{aligned}$$

□

<u>Beispiele</u>:

(i)

$$E(u) = \int\limits_\Omega \nabla u \cdot A(x) \cdot \nabla u + c(x)u^2 - 2f(x)u\,dx, \;\; u \in H_0^1(\Omega)$$

mit $A \in L^\infty$, $A(x) \geq \lambda > 0$; $c \geq 0$; $f \in L^2$:

u ist (eindeutiger) Minimierer $\Leftrightarrow$ u ist schwache Lösung von $-\operatorname{div}(A\nabla u) + cu = f,\;\; \Omega;\;\; u|_{\partial\Omega} = 0$ (siehe § 8.6).

(ii) Sei $f = F' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ glatt, $F(0) = 0$,

$$E(u) = \int\limits_\Omega \frac{1}{2}|\nabla u|^2 - F(u)\,dx$$

$\Rightarrow$ Euler-Lagrange Gl: $-\Delta u = f(u)$ in Ω (*nichtlin. Poisson Gl.*)

(iii) Minimierer von

$$E(u) = \int\limits_\Omega \sqrt{1 + |\nabla u|^2}\,dx$$

erfüllen die *Minimalflächengleichung*:

$$\operatorname{div} \frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} = 0, \;\Omega$$

(iv) Fermat'sches Prinzip: optischer Strahlenverlauf $u(x)$ (in inhomogenem Medium) minimiert die Laufzeit zwischen zwei Punkten A und B.

Ausbreitungsgeschwindigkeit $v = \frac{c}{n(x,u)}$; $c =$ Lichtgeschwindigkeit im Vakuum; $0 < n$ $=$ Brechungsindex

$$E(u) = \frac{1}{c} \int\limits_a^b n(x,u)\sqrt{1 + (u')^2}\,dx \to \;\min$$

14.4.2 Existenz von Minimierern

Einschub: *Sobolev Räume* $W^{k,p}(\Omega)$

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ durchwegs ein beschränktes Gebiet mit Lipschitz Rand; $k \in \mathbb{N}_0$, $1 \leq p \leq \infty$.

Definition 14.5 *(Sobolev Räume):*

(i)

$$W^{k,p}(\Omega) := \{u \in L^p(\Omega) | \underbrace{\nabla^\alpha u}_{\text{als Distrib.}} \in L^p(\Omega) \quad \forall |\alpha| \leq k\}$$

Norm:

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} := \begin{cases} \left(\sum_{|\alpha|\leq k} \|\nabla^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)}\right)^{\frac{1}{p}} & , \quad p < \infty \\ \sum_{|\alpha|\leq k} \|\nabla^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)} & , \quad p = \infty \end{cases}$$

(ii) $W_0^{k,p}(\Omega)$*: ist Abschluss von* $C_0^\infty(\Omega)$ *in* $W^{k,p}(\Omega)$.

Notation: $W^{k,p}(\Omega) = H^k(\Omega)$, $W_0^{k,p}(\Omega) = H_0^k(\Omega)$.

Es gilt:

- $W^{p,k}$-Funktionen sind Äquivalenzklassen von Funktionen, die f.ü. übereinstimmen.
- $W^{k,p}(\Omega)$ ist Abschluss von $C^\infty(\bar{\Omega})$ bez. $\|\cdot\|_{W^{k,p}(\Omega)}$, $1 \leq p < \infty$.
- $W^{k,p}(\Omega)$, $W_0^{k,p}(\Omega)$ sind Banach Räume; reflexiv $\Leftrightarrow 1 < p < \infty$.
- $u \in W_0^{k,p}(\Omega) \Leftrightarrow u \in W^{k,p}(\Omega)$ und $\forall |\alpha| \leq k-1$ gilt:
  $\nabla^\alpha u|_{\partial\Omega} = 0$ „im schwachen Sinn"
- *Randspur* für $1 \leq p < \infty$ und $\partial\Omega$ sei C^1: $u \in W^{1,p}(\Omega) \Rightarrow u|_{\partial\Omega} \in L^p(\partial\Omega)$ mit
  $\|u\|_{L^p(\partial\Omega)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$ (C ist unabhängig von u)
- *stetige Einbettung* (auch für $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ unbeschränkt):
  (i) $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, $2 \leq q \leq \frac{2n}{n-2}$ ($2 \leq q < \infty$ für $n = 2$, $2 \leq q \leq \infty$ für $n = 1$)
  $$\text{mit } \|u\|_{L^q} \leq C_q \|u\|_{H^1} \quad \forall u \in H^1(\Omega) \tag{14.21}$$
  bzw (*Sobolev Ungleichung*)
  $$\|u\|_{L^q} \leq C_q \|u\|^{1-\alpha}_{L^2} \|\nabla u\|^\alpha_{L^2} \text{ mit } \alpha = \frac{n}{2}\left(1 - \frac{2}{q}\right) \tag{14.22}$$
  (ii) $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C_B(\bar{\Omega})$, $p > n$ mit
  $$\|u\|_{C(\bar{\Omega})} \leq C_p \|u\|_{W^{1,p}} \quad \forall u \in W^{1,p}(\Omega).$$
- *kompakte Einbettung*: $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$.
  daher: $\|u_k\|_{W^{1,p}} \leq C \quad \forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow \exists$ Teilfolge $\{u_{k_j}\}$ mit
  $u_{k_j} \to u$ in $L^p(\Omega)$ (vgl. Satz 8.3).

Lemma 14.2 *(Poincaré-Ungleichung):* $\forall 1 \leq p \leq \infty : \exists c > 0$ *(unabhängig von u), so dass*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq c\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Bew: [Ev], vgl. Lemma 8.1 für $p = 2$.

Einschub: *untere Halbstetigkeit*

Definition 14.6 *Sei X ein BR, $F : X \to \mathbb{R}$ eine (nichtlineare) Abbildung, $\{u_k\} \subset X$. F heisst*

(i) unterhalb stetig, *wenn*

$$u_k \to u \text{ in } X \Rightarrow F(u) \leq \lim_{k\to\infty} \inf F(u_k);$$

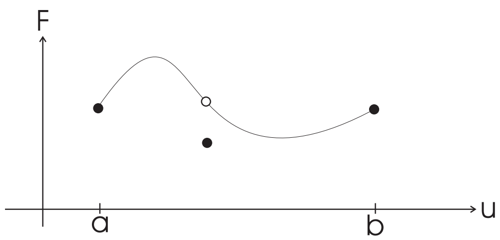
(ii) schwach (folgen)stetig, *wenn*

$$u_k \rightharpoonup u \text{ in } X \Rightarrow F(u) = \lim_{k\to\infty} F(u_k).$$

(iii) schwach (folgen) unterhalbstetig *(SUHS), wenn*

$$u_k \rightharpoonup u \text{ in } X \Rightarrow F(u) \leq \lim_{k\to\infty} \inf F(u_k).$$

Bsp 1: $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ aus Graphik ist unterhalbstetig:



Bsp 2: Jedes *lineare* Funktional in X' ist schwach (folgen) stetig (ist trivial!). Aber i.A. ist Begriff stärker als 'stetig'.

Bsp 3: $F(u) = \|u\|_X$ ist SUHS (siehe Bem. (ii) nach Def. 14.2).
$u_k(x) := \sin kx \overset{k\to\infty}{\rightharpoonup} 0 = u(x)$ in $L^2(0, \pi)$
$\|u_k\|_{L^2(0,\pi)} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \quad \forall k \in \mathbb{N}$

direkte Methode der Variationsrechnung

Aufgabe: Minimiere

$$E(u) = \int_\Omega L(\nabla u, u, x)\, dx, \;\; U \to \mathbb{R}$$

auf $U := \{u \in W^{1,q}(\Omega) \mid \;\; u|_{\partial\Omega} = g\}$ mit $1 < q < \infty$ und $g : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ gegeben, so dass $U \neq \{\}$

• notwendige Bedingung für Lösbarkeit: E ist *nach unten beschränkt*; reicht aber nicht, vgl. $f(x) = e^{-x}$ auf $\mathbb{R}$

$\Rightarrow$ Annahmen an L (für ein $q \in (1, \infty)$ fest):

(A3) $\quad L(p, z, x) \geq \alpha |p|^q - \beta \quad$ (*Koerzivität* von E)

für $\alpha > 0$, $\beta \geq 0$; $\forall p \in \mathbb{R}^n$, $z \in \mathbb{R}$, $x \in \Omega$

$$\Rightarrow E(u) \geq \alpha \|\nabla u\|^q_{L^q(\Omega)} - \gamma \tag{14.23}$$

mit $\gamma = \beta|\Omega|$, und $E(u) \to \infty$ für $\|\nabla u\|_{L^q} \to \infty$.
$\Rightarrow$ E auf ganz U definiert mit Werten in $[\gamma, +\infty]$.

(A4) E sei schwach unterhalbstetig auf $W^{1,q}(\Omega)$ (folgt z.B. aus *Konvexität* von L bez. p – siehe Satz 14.13)

Strategie für Existenz eines Minimierers

(i) *E nach unten beschränkt*

$$\Rightarrow \exists \inf_{u \in U} E(u) =: m;$$

wähle *Minimalfolge* $\{u_k\} \subset U$ mit

$$E(u_k) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} m.$$

$\to$ 3 Fragen:

- konvergiert u_k gegen ein u (da U ∞-dimensional)?
- $u \in U$?
- $E(u) = m$?

(ii) Wegen *Koerzivität* (A3) $\Rightarrow \{u_k\}$ ist beschränkt in $W^{1,q}(\Omega)$
$\Rightarrow \exists$ schwach konvergente Teilfolge $\{u_{k_j}\}$ und ein $u \in U \subset W^{1,q}(\Omega)$ mit:

$$\begin{cases} u_{k_j} \rightharpoonup u & \text{in} \quad L^q(\Omega), \\ \nabla u_{k_j} \rightharpoonup \nabla u & \text{in} \quad L^q(\Omega, \mathbb{R}^n) \end{cases}$$

$\rightarrow$ Problem: E nicht linear & (nur) schwache Konvergenz von ∇u_{k_j}.

(iii) *E schwach unterhalbstetig*

$$\Rightarrow E(u) \leq \lim_{k\to\infty} \inf E(u_k) = \lim E(u_k) = m; \text{ also: } E(u) = m,$$

u ist Minimierer.

- Konvexität für (iii), motiviert durch Satz 14.12(b):

Satz 14.13 *(Tonelli) Sei L glatt, nach unten beschränkt und $L(\cdot, z, x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konvex $\forall z \in \mathbb{R}$, $x \in \Omega$.*
$\Rightarrow$ E ist schwach unterhalbstetig auf $W^{1,q}(\Omega)$, $1 < q < \infty$.

Bew:

(i) Sei $u_k \rightharpoonup u$ in $W^{1,q}(\Omega)$.
Definiere $l := \lim_{k\to\infty} \inf E(u_k) > -\infty$,
bzw. $l = \lim_{j\to\infty} E(u_{k_j})$ für eine Teilfolge, und z.z.: $E(u) \leq l$.

$\|u_k\|_{W^{1,q}} \leq c \Rightarrow$ für eine (ev. weitere) Teilfolge gilt (wegen kompakter Einbettung):
$u_{k_j} \to u$ in $L^q(\Omega)$.

$\Rightarrow$ für (ev. weitere) Teilfolge gilt $u_{k_j} \to u$ f.ü. in Ω.
(Korollar von Weyl zu Satz von Riesz-Fischer)

(ii) lt. Satz von Egoroff:
$\forall \varepsilon > 0\ \exists$ meßbare Menge $R_\varepsilon \subset \Omega$ mit $|\Omega - R_\varepsilon| \leq \varepsilon$ und

$$u_{k_j} \to u \quad \text{glm. auf } R_\varepsilon \tag{14.24}$$

- def. $S_\varepsilon := \{x \in \Omega \mid |u(x)| + |\nabla u(x)| \leq \frac{1}{\varepsilon}\}$
$\Rightarrow |\Omega - S_\varepsilon| \xrightarrow{\varepsilon\to 0} 0$
- def. $T_\varepsilon := R_\varepsilon \cap S_\varepsilon \Rightarrow |\Omega - T_\varepsilon| \xrightarrow{\varepsilon\to 0} 0$

(iii) da L nach unten beschränkt, sei oBdA $L \geq 0$ (andernfalls betrachte $\tilde{L} = L + \beta \geq 0$)

$$\begin{aligned}
\Rightarrow E(u_k) \quad &= \int_\Omega L(\nabla u_k, u_k, x)\, dx \overset{L\geq 0}{\geq} \int_{T_\varepsilon} L(\nabla u_k, u_k, x)\, dx \\
&\overset{L \text{ konvex}}{\geq} \int_{T_\varepsilon} L(\overbrace{\nabla u}^{|\cdot|\leq\frac{1}{\varepsilon}}, u_k, x)\, dx + \int_{T_\varepsilon} \nabla_p L(\nabla u, u_k, x) \cdot (\nabla u_k - \nabla u)\, dx \\
k = k_j \to \infty \quad & \qquad\qquad \downarrow \text{ wegen (14.24)} \quad \downarrow \qquad\qquad (14.25) \\
\Rightarrow l = \lim E(u_k) \quad &\geq \int_{T_\varepsilon} L(\nabla u, u, x)\, dx \quad + \quad 0
\end{aligned}$$

da: $\nabla_p L(\nabla u, u_k, x) \to \nabla_p L(\nabla u, u, x)$ glm. auf T_ε, also in $L^{q'}(T_\varepsilon)$; und $\nabla u_k \rightharpoonup \nabla u$ in $L^q(T_\varepsilon)$.

Trick:

- $L(\nabla u_k, u_k, x)$ ist *nichtlinear* in ∇u_k mit $\nabla u_k \rightharpoonup \nabla u$ in $L^q \Rightarrow$ keine Konvergenzinformation.
- (14.25) (=Tangente an ∇u liegt „unter" L, da L konvex) ist *linear* in ∇u_k $\Rightarrow$ Grenzübergang in linearer unterer Schranke möglich.

also: $l \geq \int_{T_\varepsilon} L(\nabla u, u, x)\, dx \quad \forall \varepsilon > 0.$

- mit monotoner Konvergenz für $L_\varepsilon(x) := L(\nabla u, u, x)\chi_{T_\varepsilon}(x) \geq 0$:

$$l \geq \int_\Omega L(\nabla u, u, x)\, dx = E(u).$$

$\square$

Satz 14.14 *(Existenz von Minimierern)*
Sei L glatt, koerziv (d.h. (A3)) und konvex in p und $U \neq \{\}$.
$\Rightarrow \exists u \in U$ mit $E(u) = \min_{w\in U} E(w)$.

Bew:

(i) def. $m := \inf_{w\in U} E(w) < \infty$ (sonst Aussage trivial).
Sei $\{u_k\}$ Minimalfolge:

$$E(u_k) \to m. \tag{14.26}$$

(ii) Beschränktheit von $\{u_k\}$:
oBdA sei $\beta = 0$ in (A3), sonst betrachte $\tilde{L} = L + \beta$

$\Rightarrow E(w) \geq \alpha \|\nabla w\|^q_{L^q(\Omega)} < \infty$

Mit (14.26) folgt:

$$\sup_k \|\nabla u_k\|_{L^q(\Omega)} < \infty \tag{14.27}$$

- wähle $w \in U$ beliebig $\Rightarrow u_k - w \in W_0^{1,q}(\Omega)$

$\Rightarrow$ (mit Poincaré-Ungleichung):

$$\begin{aligned} \|u_k\|_{L^q} &\leq \|u_k - w\|_{L^q} + \|w\|_{L^q} \\ &\leq c\|\nabla u_k - \nabla w\|_{L^q} + c \overset{(14.27)}{\leq} c \quad \forall k \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

$\Rightarrow \{u_k\}$ beschränkt in $W^{1,q}(\Omega)$

(iii) $\exists$ Teilfolge mit $u_{k_j} \rightharpoonup u$ in $W^{1,q}(\Omega)$.

z.z.: $u \in U$, d.h. $u|_{\partial\Omega} = g$

- $u_{k_j} - w \in W_0^{1,q}(\Omega)$ ... abgeschlossener Teilraum von $W^{1,q}(\Omega)$, und auch *schwach abgeschlossen* (laut Satz von Mazur: Eine konvexe, abgeschlossene Teilmenge vom BR X ist *schwach abgeschlossen.*)

$$\Rightarrow u - w \in W_0^{1,q}(\Omega) \Rightarrow u|_{\partial\Omega} = w|_{\partial\Omega} = g$$

- lt. Satz 14.13: $E(u) \leq \lim_{j\to\infty} \inf E(u_{k_j}) = m$
- da $u \in U : E(u) = m = \min_{w\in U} E(w)$.

$\square$

Weitere Annahmen an L für **Eindeutigkeit des Minimierers**:

(A5) $\quad L = L(p, x)$

(A6) $\quad \dfrac{\partial^2}{\partial p^2} L(p, x) \geq \Theta > 0 \quad \forall p \in \mathbb{R}^n,\ x \in \Omega \quad$ (*glm. konvex*)

Satz 14.15 *L erfüllt (A5), (A6).*
$\Rightarrow$ Ein Minimierer $u \in U$ von E ist eindeutig.

Bew:

(i) Seien u_1, u_2 Minimierer. Für $v := \frac{u_1+u_2}{2} \in U$ zeigen wir

$$E(v) \leq \frac{E(u_1) + E(u_2)}{2}$$

(mit "<", ausser für $u_1 = u_2$)

(ii) (A6) $\Rightarrow$

$$L(p,x) \leq L(q,x) + \nabla_p L(q,x) \cdot (p-q) + \frac{\Theta}{2}|p-q|^2$$

- setze $q = \nabla v,\ p = \nabla u_1;\ \int_\Omega \dots dx$

$$\begin{aligned} \Rightarrow E(v) \quad &+ \quad \int \nabla_p L(\nabla v, x) \cdot \frac{\nabla u_1 - \nabla u_2}{2}\, dx \\ &+ \quad \frac{\Theta}{8} \int |\nabla u_1 - \nabla u_2|^2\, dx \leq E(u_1) \end{aligned} \tag{14.28}$$

- vertausche u_1, u_2 und bilde Mittelwert

$$\Rightarrow E(v) + \frac{\Theta}{8} \int |\nabla u_1 - \nabla u_2|^2\, dx \leq \frac{E(u_1) + E(u_2)}{2} = m = \min_{w \in U} E(w)$$

(iii) da $E(v) \geq m \Rightarrow \nabla u_1 = \nabla u_2$.
da $u_1|_{\partial\Omega} = u_2|_{\partial\Omega} = g \Rightarrow u_1 = u_2$

$\square$

14.4.3 Das Minimalflächenproblem

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ beschränkt, $\partial\Omega$ glatt. Minimiere

$$E(u) = \int_\Omega \sqrt{1 + |\nabla u|^2}\, dx \tag{14.29}$$

mit $u|_{\partial\Omega} = g$.

Probleme:

- für Ω nicht konvex hat (14.29) nicht immer eine klassische Lösung $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$.
- E nicht koerziv in $W^{1,q}(\Omega)$, $1 < q < \infty$

- E ist koerziv in $W^{1,1}(\Omega)$, aber $W^{1,1}(\Omega)$ ist nicht reflexiv ($\rightarrow$ Satz 14.2 von Alaoglu nicht anwendbar)

Bem: Für Ω konvex und g mit „beschränkter Steigung" (in geeignetem Sinn) kann man zeigen ([Ze] §52):

(14.29) hat einen Minimierer $u \in W^{1,\infty}(\Omega) = C^{0,1}(\bar{\Omega}) \Rightarrow$ betrachte leicht *modifiziertes Problem*:

Satz 14.16 *Sei (für $R > 0$ fest)*

$$U := \{u \in W^{1,\infty}(\Omega) |\ \|u\|_{W^{1,\infty}(\Omega)} \leq R;\ u = g \ \textit{auf}\ \partial\Omega\} \neq \{\}$$

$\Rightarrow \exists u \in U$ *mit* $E(u) = \min_{w \in U} E(w)$

Bew:

(i) da $E(u) \geq 0$: wähle Minimalfolge $\{u_k\} \subset U$, also $E(u_k) \rightarrow m$. Das alleine impliziert aber nicht die Beschränktheit von $\{u_k\}$!

- laut Problemmodifikation:

$$\|u_k\|_{C^{0,1}(\Omega)} := \max_{x \in \bar{\Omega}} |u_k(x)| + \ \mathrm{Lip}(u_k) = \|u_k\|_{W^{1,\infty}(\Omega)} \leq R,$$

  u_k also *gleichgradig stetig* auf $\bar{\Omega}$.

- laut *Satz von Arzelà-Ascoli*:
  $\exists$ Teilfolge $\{u_{k_j}\}$, die auf $\bar{\Omega}$ gleichmäßig gegen ein $u \in U$ konvergiert.

(ii) $\|u_k\|_{H^1(\Omega)} \leq C\|u_k\|_{W^{1,\infty}}(\Omega) \leq CR \quad \forall k \in \mathbb{N}$,
$\Rightarrow \exists$ (weitere) Teilfolge mit $u_{k_j} \rightharpoonup u$ in $H^1(\Omega)$.

$L(p) = \sqrt{1 + |p|^2} \geq 0$, konvex

- lt. Satz 14.13 (Tonelli):

$$E(u) \leq \lim_{j \to \infty} E(u_{k_j}) = m$$

$\Rightarrow u$ ist Minimierer.

$\square$

Bem: Lösung des modifizierten Problems ist eindeutig in
$\tilde{U} := \{u \in W^{1,\infty}(\Omega) |\ u|_{\partial\Omega} = g\} \neq \{\}$. Seien u_1, u_2 zwei Minimierer mit $\|u_{1,2}\|_{W^{1,\infty}(\Omega)} \leq \tilde{R}$; betrachte

$$\tilde{L}(p) = \begin{cases} \sqrt{1 + |p|^2}, & |p| \leq \tilde{R}, \\ \text{streng konvexe Fortsetzung}, & |p| > \tilde{R}, \end{cases}$$

in Satz 14.15.

- setze $p = \nabla u(x),\ q = \nabla w(x), z = u(x), w = w(x) \in U$

$$\Rightarrow E(u) + \underbrace{\int\limits_\Omega \nabla_p L(\nabla u, u, x) \cdot (\overbrace{\nabla w - \nabla u}^{=\nabla v}) + L_z(\nabla u, u, x)(\overbrace{w-u}^{=v\in W_0^{1,q}(\Omega)})\, dx}_{=0 \text{ wegen } (14.31)} \leq F(w) \quad \forall w \in U$$

$\Rightarrow u$ ist Minimierer.

□

14.4.4 schwache Lösungen der Euler-Lagrange-Gleichung

Ziel: Minimierer $u \in U \subset W^{1,q}(\Omega)$ von

$$E(u) = \int\limits_\Omega L(\nabla u, u, x)\, dx$$

sind *schwache Lösungen* der EL-Gleichung

$$\begin{cases} -\operatorname{div}_x(\nabla_p L(\nabla u, u, x)) + L_z(\nabla u, u, x) = 0 & , \quad \Omega \\ u = g & , \quad \partial\Omega \end{cases} \tag{14.30}$$

(und umgekehrt). In Satz 14.12 war u *glatt* vorausgesetzt.

- Annahmen an L:

$$\begin{aligned} &(\text{A7}) \qquad |L(p,z,x)| \leq C(|p|^q + |z|^q + 1), \\ &(\text{A8}) \qquad |\nabla_p L(p,z,x)| \leq C(|p|^{q-1} + |z|^{q-1} + 1), \\ &(\text{A9}) \qquad |L_z(p,z,x)| \leq C(|p|^{q-1} + |z|^{q-1} + 1), \end{aligned}$$

für ein $C > 0$; $\forall p \in \mathbb{R}^n,\ z \in \mathbb{R},\ x \in \Omega$.

Definition 14.7 *$u \in U$ ist* schwache Lösung *des Randwertproblems (14.30), wenn*

$$\int\limits_\Omega \underbrace{\nabla_p L(\nabla u, u, x)}_{\in L^{q'}} \cdot \underbrace{\nabla_x v}_{\in L^q} + L_z(\nabla u, u, x) v\, dx = 0 \quad \forall v \in W_0^{1,q}(\Omega). \tag{14.31}$$

Bem:

$$\nabla_p L(\nabla u, u, x) \overset{(\text{A8})}{\leq} C(|\nabla u|^{q-1} + |u|^{q-1} + 1) \in L^{q'}(\Omega);\ q' = \frac{q}{q-1}$$

$$L_z(\nabla u, u, x) \overset{(\text{A9})}{\leq} C(|\nabla u|^{q-1} + |u|^{q-1} + 1) \in L^{q'}(\Omega).$$

Satz 14.17 *L erfülle (A7-9), und $u \in U \subset W^{1,q}(\Omega)$ erfülle*

$$E(u) = \min_{w \in U} E(w).$$

$\Rightarrow$ u ist schwache Lösung von (14.30).

Beweis-Idee (ähnlich wie Satz 14.12):
sei $v \in W_0^{1,q}(\Omega)$ fest:

$\forall \tau \in \mathbb{R}$:

$$e(\tau) := E(u + \tau v) = \int_\Omega L(\nabla u + \tau \nabla v, u + \tau v; x)\, dx \overset{\text{(A7)}}{<} \infty$$

- man zeigt: $e'(0)$ existiert (durch Approximation mit $\frac{e(\tau)-e(0)}{\tau}$)
- $e'(0) = 0 \Rightarrow$ (14.31)

$\square$

Umkehrung: Lösungen der EL-Gleichung (14.30) müssen *keine Minima* von $E(u)$ sein, sondern z.B. *Sattelpunkte*.

- Zusatzannahme an L:

(A10) $\quad (p, z) \mapsto L(p, z, x)$ ist konvex $\forall x \in \Omega$.

Satz 14.18 *L erfülle (A10) und $u \in U$ sei schwache Lösung von (14.30).*
$\Rightarrow$ u ist Minimierer von E.

Bew: aus (A10) folgt:

$$L(p, z, x) + \nabla_p L(p, z, x) \cdot (q - p) + L_z(p, z, x)(w - z) \leq L(q, w, x)$$

- setze $p = \nabla u(x),\ q = \nabla w(x),\ z = u(x),\ w = w(x) \in U$

$$\Rightarrow E(u) + \underbrace{\int_\Omega \nabla_p L(\nabla u, u, x) \cdot (\overbrace{\nabla w - \nabla u}^{=\nabla v}) + L_z(\nabla u, u, x) \overbrace{(w - u)}^{=v \in W_0^{1,q}(\Omega)}\, dx}_{=0 \text{ wegen (14.31)}} \leq E(w) \quad \forall w \in U$$

$\Rightarrow$ u ist Minimum.

□

(Referenzen: [Ev] § 8.1-2, [Ze] § 37.4, 38.1-6, 40, 52, [Sh1] § VII.2)

14.5 Variationsprobleme mit Nebenbedingungen

14.5.1 Integral-Nebenbedingungen

Aufgabe: Minimiere

$$E(u) := \int_\Omega L(\nabla u, u, x)\, dx; \;\; u : U \to \mathbb{R}$$

mit geeignetem $U \subset W_0^{1,q}(\Omega)$, unter der *Nebenbedingung* $F(u) = 0$. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sei beschränktes Gebiet, $\partial\Omega$ glatt.

Nebenbedingungen der Form

$$F(u) := \int_\Omega G(\nabla u(x), u(x), x)\, dx = 0$$

mit reellem, glatten $G = G(p, z, x)$ heißen auch *isoperimetrische Nebenbedingungen.*

spezielles Beispiel:

$$E(u) := \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx, \;\; F(u) := \int_\Omega G(u)\, dx, \tag{14.32}$$

unter den Annahmen:

$$|G'(z)| \leq C(|z| + 1), \tag{14.33}$$

daher

$$|G(z)| \leq C(|z|^2 + 1) \quad \forall z \in \mathbb{R}$$

- Existenz eines Minimierers für (14.32):

Satz 14.19 *Sei* $U := \{u \in H_0^1(\Omega) | F(u) = 0\} \neq \{\}$.
$\Rightarrow \exists$ *Minimierer* $u \in U$ *mit*

$$E(u) = \min_{w \in U} E(w).$$

Bew:

(i) $\{u_k\} \subset U$ sei Minimalfolge, also

$$E(u_k) \to m = \inf_{w \in U} E(w)$$

$\Rightarrow \exists$ Teilfolge mit

$$u_{k_j} \rightharpoonup u \text{ in } H_0^1(\Omega) \tag{14.34}$$

und $E(u) \leq m$, da E s.u.h.s. (da $E(u) = \frac{1}{2}\|u\|_{H_0^1(\Omega)}$)

(ii) z.z.: $F(u) = 0$ (dann fertig)

(14.34) $\Rightarrow u_{k_j} \to u$ in $L^2(\Omega)$ (mit kompakter Einbettung, Satz 8.3)

$$\Rightarrow |F(u)| = |F(u) - \underbrace{F(u_k)}_{=0}| \leq \int_\Omega |G(u) - G(u_k)|\, dx$$

$$\overset{\text{MWS, (14.33)}}{\leq} C \int_\Omega \underbrace{|u - u_k|}_{\to 0 \text{ in } L^2}(1 + |u| + |u_k|)\, dx \overset{k \to \infty}{\longrightarrow} 0.$$

$\square$

- EL-Gleichung für (14.32):

Satz 14.20 $u \in U$ *erfülle* $E(u) = \min_{w \in U} E(w)$.

$\Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}$ *(„Lagrange Multiplikator"), so dass*

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\, dx = \lambda \int_\Omega G'(u) v\, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \tag{14.35}$$

Bem:

(i) Notation für (14.35): $\delta E(u, v) = \lambda \delta F(u, v)$

(ii) (14.35) ist die schwache Formulierung von (nicht-lineare Poisson Gleichung)

$$\begin{cases} -\Delta u &= \lambda G'(u) \quad , \quad \Omega \\ \quad u &= 0 \qquad\quad , \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

Das ist ein *nicht-lineares Eigenwertproblem* für (u, λ) mit $u \not\equiv 0$.

(iii) Der Lagrange Multiplikator zu einer (skalaren) Integralbedingung ist eine Konstante.

Bew:

(i) sei $v \in H_0^1(\Omega)$ beliebig aber fest. Sei zunächst $G'(u) \not\equiv 0$ in Ω. Wähle ein $w \in H_0^1(\Omega)$ mit

$$\int_\Omega G'(u)w\, dx \neq 0. \tag{14.36}$$

Definiere

$$\begin{aligned} f(\tau, \sigma) &:= F(u + \tau v + \sigma w) \\ &= \int_\Omega G(u + \tau v + \sigma w)\, dx;\ \tau, \sigma \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

es gilt:

$$f(0,0) = \int_\Omega G(u)\, dx = 0;$$

$f \in C^1$ mit

$$f_\tau = \int_\Omega G'(u + \tau v + \sigma w)v\, dx, \quad f_\sigma = \int_\Omega G'(u + \tau v + \sigma w)w\, dx \tag{14.37}$$

(14.36) $\Rightarrow f_\sigma(0,0) \neq 0$

- laut *Satz über implizite Funktionen*: $\exists \Phi \in C^1(\mathbb{R})$ mit

$$\Phi(0) = 0, \ \ f(\tau, \Phi(\tau)) = 0; \ \ |\tau| \leq \tau_0 \tag{14.38}$$

$\Rightarrow f_\tau(\tau, \Phi(\tau)) + f_\sigma(\tau, \Phi(\tau))\Phi'(\tau) = 0$

$$(14.37) \Rightarrow \Phi'(0) = -\frac{\int G'(u)v\, dx}{\int G'(u)w\, dx} \tag{14.39}$$

(ii) setze $w(\tau) := \tau v + \Phi(\tau) w \in H_0^1(\Omega)$; $|\tau| \leq \tau_0$, und $e(\tau) := E(u + w(\tau))$

(14.38) $\Rightarrow F(u + w(\tau)) = 0$, $u + w(\tau) \in U$

$\Rightarrow e(\cdot)$ hat Minimum an $\tau = 0$

$$\Rightarrow 0 = e'(0) = \int_\Omega \nabla u \cdot [\nabla v + \Phi'(0)\nabla w]\, dx$$

Mit (14.39) und

$$\lambda := \frac{\int \nabla u \cdot \nabla w \, dx}{\int G'(u) w \, dx}$$

folgt:

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \lambda \int_\Omega G'(u) v \, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

(iii) sei nun $G'(u) = 0$ f.ü. in $\Omega \Rightarrow G(u)$ ist konstant in Ω (da $\nabla G(u) = G'(u)\nabla u = 0$) $\Rightarrow$ $G(u) = 0$ f.ü. (da $F(u) = \int G(u)\, dx = 0$)

- da $u|_{\partial\Omega} = 0 \Rightarrow G(0) = 0$, also $0 \in U \subset H_0^1(\Omega)$.

$\Rightarrow$ der Minimierer $u \equiv 0$, da sonst $E(u) > E(0) = 0$ gelten würde.

$\Rightarrow$ (14.35) gilt trivialerweise $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.

$\square$

Bsp: **isoperimetrisches Problem**

Minimiere

$$E(u) := \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + u'^2}\, dx \text{ in } W_0^{1,q}(-1,1),\ 1 < q < 2$$

unter der Nebenbedingung

$$F(u) := \int_{-1}^{1} u(x)\, dx - \frac{\pi}{2} = 0.$$

- Analog zu Satz 14.20 kann man zeigen:

Für Minimierer von E in $U := \{u \in W_0^{1,q}(-1,1) | F(u) = 0\}$ gilt: $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ mit

$$\delta E(u,v) = \lambda \delta F(u,v) \quad \forall v \in W_0^{1,q}(-1,1).$$

d.h.

$$\int_{-1}^{1} \underbrace{\frac{u'}{\sqrt{1+u'^2}}}_{|\cdot| \leq 1 \in L^{q'}} v' \, dx = \lambda \int_{-1}^{1} v \, dx \quad \forall v \in W_0^{1,q}(-1,1).$$

Das ist die schwache Formulierung der EL-Gleichung

$$\begin{cases} -\underbrace{\partial_x \left(\frac{u'}{\sqrt{1+u'^2}} \right)}_{= \text{Krümmung } \kappa(x)} = \lambda \quad , \quad x \in (-1,1) \\ u(-1) = u(1) = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow u(x)$ hat *konstante Krümmung* $\kappa = -\lambda$
$\Rightarrow u(x)$ ist Kreissegment.

Anpassen an $F(u) = 0 \Rightarrow u(x) = \sqrt{1-x^2} \in W_0^{1,q}(-1,1)$.

14.5.2 punktweise Nebenbedingungen

Aufgabe: Minimiere

$$E(\vec{u}) := \int_\Omega L(\nabla \vec{u}, \vec{u}, x) \, dx; \;\; \vec{u} = (u^1, ..., u^m) : \Omega \to \mathbb{R}^m$$

unter der *Nebenbedingung*

$$G(\nabla \vec{u}(x), \vec{u}(x), x) = 0.$$

Für $G = G(z,x)$ heißt die Nebenbedingung *holonom*. Im Spezialfall $G = G(z)$ liegt die Lösung in der durch $G(z) = 0$ def. Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^m$.

Bsp: **harmonische Abbildung in eine Sphäre**

Minimiere

$$E(\vec{u}) := \frac{1}{2} \int_\Omega \underbrace{|\overbrace{D\vec{u}}^{\text{Jacobi-Matrix}}|^2}_{=\sum_{i,j}(\partial_i u^j)^2} \tag{14.40}$$

in $U := \{\vec{u} \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^m) \mid \quad \vec{u}|_{\partial\Omega} = \vec{g};\ |\vec{u}| = 1 \text{ f.ü. } \}$.

Es gilt $M = S^{m-1}$ (=Einheitssphäre).

Anwendung in Modellierung von *Flüssigkristallen*: $\vec{u}(x)$ ist die Richtung der Moleküle an x. Parallelausrichtung der Moleküle (d.h. $D\vec{u} = 0$) minimiert zwar die Energie $E(\vec{u})$, erfüllt aber die RB nicht.

• Existenz eines Minimierers folgt ähnlich wie in Satz 14.19: Aus $\vec{u}_{k_j} \to \vec{u}$ in $L^2(\Omega; \mathbb{R}^m)$ folgt für (weitere) Teilfolge $\vec{u}_{k_j} \to \vec{u}$ f.ü. in Ω, also $|\vec{u}| = 1$ f.ü; $\vec{u} \in U$

Satz 14.21 *(EL-Gleichung)*
Ein Minimierer $\vec{u} \in U$ von (14.40) erfüllt

$$\int_\Omega D\vec{u} : D\vec{v}\, dx = \int_\Omega |D\vec{u}|^2 \vec{u} \cdot \vec{v}\, dx \quad \forall \vec{v} \in H_0^1(\Omega; \mathbb{R}^m) \cap L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^m) \tag{14.41}$$

Bem:

(i) Notation:

$$A, B \in \mathbb{R}^{m\times m};\ A : B := \sum_{i,j=1}^m a_{ij} b_{ij} = \ \mathrm{Tr}(AB^T)$$

(ii) (14.41) ist die schwache Formulierung von

$$\begin{cases} -\Delta\vec{u} &= \lambda(x)\vec{u} \quad , \quad \Omega, \\ \quad \vec{u} &= \quad \vec{g} \quad , \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

Die Funktion $\lambda(x) = |D\vec{u}(x)|^2$ ist der *Lagrange-Multiplikator* zur Nebenbedingung $|\vec{u}| = 1$.

Bew:

(i) sei $\vec{v} \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ fest.
Für kleines τ gilt $|\vec{u} + \tau\vec{v}| \neq 0$ (da $|\vec{u}| = 1$)

$$\Rightarrow \vec{v}(\tau) := \frac{\vec{u} + \tau\vec{v}}{|\vec{u} + \tau\vec{v}|} \in U \tag{14.42}$$

(ii) Für $e(\tau) := E(\vec{v}(\tau))$ gilt:

$$e'(0) = \int_\Omega D\vec{u} : D\vec{v}\,'(0)\, dx = 0$$

aus (14.42): $\vec{v}\,'(0) = ... = \vec{v} - (\vec{u}\cdot\vec{v})\vec{u}$

$$\Rightarrow 0 = \int_\Omega D\vec{u} : D\vec{v} - D\vec{u} : D((\vec{u}\cdot\vec{v})\vec{u})\, dx \tag{14.43}$$

$$\begin{aligned}
& |\vec{u}|^2 \equiv 1 \qquad |\Delta \\
\Rightarrow\quad & \vec{u}\cdot\Delta\vec{u} + |D\vec{u}|^2 = 0 \\
\Rightarrow\quad & \int |D\vec{u}|^2\vec{u}\cdot\vec{v}\, dx = -\int (\vec{u}\cdot\Delta\vec{u})\vec{u}\cdot\vec{v}\, dx \\
& = \int D\vec{u} : D((\vec{u}\cdot\vec{v})\vec{u})\, dx
\end{aligned}$$

einsetzen in (14.43) liefert Ergebnis.

□

Bsp: **stationäre Stokes-Gleichung**

- Grundmodell für homogene, inkompressible, viskose (Flüssigkeits-)Strömung: *Navier-Stokes-Gleichungen* für Geschwindigkeitsfeld $\vec{u}(\cdot,t) : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ und Druck $p(\cdot,t) : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$; ν = Viskositätsparameter; $\vec{f}(x,t)$ = geg. äußere Kraft:

$$\begin{cases} \alpha\vec{u}_t + \beta\vec{u}\cdot D\vec{u} - \nu\Delta\vec{u} &= -\nabla p + \vec{f} \\ \operatorname{div}\vec{u} &= 0 \qquad \text{... Inkompressibilitätsbedingung} \end{cases}$$

  Spezialfälle:

  $\nu = 0$ ... *Euler Gleichungen* (nicht viskos)
  $\beta = 0$ ... *Stokes Gleichungen* (Linearisierung für $\vec{u}, D\vec{u}$ „klein”)
  $\alpha = 0$ ... *stationäres* Problem

- sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ beschänktes, einfach zusammenhängendes Gebiet.

  stationäres Stokes Problem:

$$\begin{cases} -\Delta\vec{u} &= -\nabla p + \vec{f} \quad , \ \Omega \\ \operatorname{div}\vec{u} &= 0 \quad , \ \Omega \\ \vec{u} &= 0 \quad , \ \partial\Omega \text{ (Haft-Randbedingung)} \end{cases} \tag{14.44}$$

- Lösung durch Minimierungsproblem:

$$E(\vec{u}) := \int_\Omega \frac{1}{2}|D\vec{u}|^2 - \vec{f}\cdot\vec{u}\,dx \xrightarrow{!} \min \quad \text{mit } \vec{f} \in L^2(\Omega;\mathbb{R}^3) \text{ geg.,} \tag{14.45}$$

$U = \{\vec{u} \in H_0^1(\Omega;\mathbb{R}^3) \mid \operatorname{div}\vec{u} = 0 \text{ in } \Omega\}$

- (14.45) hat eindeutigen Minimierer $\vec{u} \in U$ ($\rightarrow$ Übung)

Satz 14.22 *Der Minimierer $\vec{u}$ von (14.45) erfüllt:*

$$\int_\Omega D\vec{u} : D\vec{v} - \vec{f}\cdot\vec{v}\,dx = \int_\Omega p \operatorname{div}\vec{v}\,dx \quad \forall \vec{v} \in H^1(\Omega),\ \textit{mit}\ \operatorname{supp}\vec{v} \subset\subset \Omega, \tag{14.46}$$

*wobei eine geeignete skalare Funktion $p \in L^2_{loc}(\Omega)$ (*Lagrange Multiplikator *zur Nebenbedingung* $\operatorname{div}\vec{u} = 0$*) existiert.*

<u>Bew-Idee</u>: $\delta E(\vec{u},\vec{v}) = \int_\Omega D\vec{u} : D\vec{v} - \vec{f}\cdot\vec{v}\,dx$

(Details: [Ev])

<u>Bem</u>: (14.46) ist schwache Formulierung von (14.44).

14.5.3 Hindernisprobleme / Variationsungleichungen

Bsp: Variationsungleichung

ges: Minima der glatten Funktion $f : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$

$\rightarrow$ 3 Möglichkeiten:

(i)	$f'(x_0)$	$=$	0	,	für $x_0 \in (a,b)$;
(ii)	$f'(x_0)$	$\geq$	0	,	für $x_0 = a$;
(iii)	$f'(x_0)$	$\leq$	0	,	für $x_0 = b$.

Zusammenfassung:

$$f'(x_0)(x - x_0) \geq 0 \qquad \forall x \in [a,b] \tag{14.47}$$

<u>Beachte</u>: Für *innere Punkte* $x_0 \in (a,b)$ gilt: $(x - x_0)$ kann <u>beide</u> Vorzeichen haben, und daher: (14.47) $\Rightarrow f'(x_0) = 0$.

- lt §8.6: $u \in H_0^1(\Omega)$ ist (eindeutiger) Minimierer von

$$E(u) = \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 - f(x)u\, dx$$

$\Leftrightarrow$ $u \in H_0^1(\Omega)$ ist (eindeutige) Lösung der *Variationsgleichung*

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\, dx \int_\Omega fv\, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

also schwache Lösung von

$$\begin{cases} -\Delta u &= f \quad , \quad \Omega \\ u &= 0 \quad , \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

- betrachte nun das *Hindernisproblem*

$$E(u) := \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 - fu\, dx \xrightarrow{!} \min \tag{14.48}$$

in $U := \{u \in H_0^1(\Omega) \,|\, u \geq h \text{ f.ü. in } \Omega\}$, mit gegebenem, glatten *Hindernis* $h : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}$; $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sei beschränkt mit $\partial\Omega$ glatt. U ist dann konvex und (schwach) abgeschlossen.

Satz 14.23 *Sei $f \in L^2(\Omega)$ und $U \neq \{\} \Rightarrow$*

(i) (14.48) hat eine eindeutige Lösung $u \in U$,

(ii) u erfüllt die Variationsungleichung

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla(w-u)\, dx \geq \int_\Omega f(w-u)\, dx \quad \forall w \in U. \tag{14.49}$$

(iii) (14.49) hat eine eindeutige Lösung $u \in U$. Die Abbildung $f \mapsto u$ ist Lipschitz, d.h. $\exists c > 0$ mit

$$\|u_1 - u_2\|_{H_0^1(\Omega)} \leq c\|f_1 - f_2\|_{L^2(\Omega)}. \tag{14.50}$$

Bem: vgl. (14.50) mit Lösungsabschätzung für $-\Delta u = f$, § 8.3.

Bew:

(i) Existenz ist analog zu Satz 14.19; Eindeutigkeit folgt aus strikter Konvexität von $E(u)$ (siehe [Ev] § 8.4)

(ii) a) sei $w \in U$ beliebig
$\Rightarrow u + \tau(w-u) \in U \quad \forall 0 \leq \tau \leq 1$ (da U konvex)

Für $e(\tau) := E(u + \tau(w-u))$ gilt:

$$e(0) \leq e(\tau) \quad \forall 0 \leq \tau \leq 1; \text{ also } e'(0) \geq 0$$

Bem: Wegen der NB $u \geq h$ wurden hier nur *einseitige Variationen* von u verwendet!

b) sei nun $0 < \tau \leq 1$:

$$\frac{e(\tau) - e(0)}{\tau} = ... = \int\limits_\Omega \nabla u \cdot \nabla(w-u) + \frac{\tau}{2}|\nabla(w-u)|^2 - f(w-u)\,dx.$$

Mit $\tau \to 0$ folgt:

$$0 \leq e'(0) = \int\limits_\Omega \nabla u \cdot \nabla(w-u) - f(w-u)\,dx$$

(iii) Seien $(u_i, f_i); i = 1, 2$ Lösungen von (14.49).
Wähle $w = u_2$ für u_1-Ungleichung:

$$\int\limits_\Omega \nabla u_1 \cdot \nabla(u_2 - u_1)\,dx \geq \int\limits_\Omega f_1(u_2 - u_1)\,dx$$

Index-Vertauschung, addieren

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{1}{c}\|u_1 - u_2\|^2_{H^1_0} &\overset{\text{Poincaré}}{\leq} \int\limits_\Omega |\nabla(u_1 - u_2)|^2\,dx \\ &\leq \int (f_1 - f_2)(u_1 - u_2)\,dx \\ &\leq \|f_1 - f_2\|_{L^2}\|u_1 - u_2\|_{H^1_0} \end{aligned}$$

□

Bem:

(i) Typischerweise gibt es eine (relativ abgeschlossene) *Übereinstimmungsmenge* $C := \{x \in \Omega \mid u(x) = h(x)\}$ mit dem *freien Rand* $\partial C \cap \Omega$.

(ii) (14.49) ist schwache Formulierung von $u \geq h$, $-\Delta u \geq f$, f.ü. in Ω

(iii) Auf der (offenen) Menge $O := \{x \in \Omega \mid u(x) > h(x)\}$ gilt $-\Delta u = f$, f.ü.; d.h. die Nebenbedingung $u \geq h$ „wirkt” auf O nicht.

Begründung: sei $v \in C_0^\infty(O)$ fest

$$\Rightarrow \text{ für } |\tau| \ll 1 \text{ gilt: } w := u + \tau v \geq h; \text{ also } w \in U$$

$$(14.49) \Rightarrow \tau \int_O (\nabla u \cdot \nabla v - fv)\, dx \geq 0, \text{ für } \tau \text{ pos. und neg.!}$$

$$\Rightarrow \int_O \nabla u \cdot \nabla v - fv\, dx = 0 \qquad \forall v \in C_0^\infty(\Omega)$$

ferner gilt: $u \in H^2(\Omega)$, siehe [KS]

„Penalty”-Methode für Hindernisprobleme:

Ziel: Approximation der Lösung $u \in U := \{H_0^1(\Omega) \mid u \geq 0\}$ von (14.48) durch nichtlineare elliptische Probleme ($\varepsilon > 0$):

$$\begin{aligned} -\Delta u_\varepsilon + \tfrac{1}{\varepsilon} u_\varepsilon H(-u_\varepsilon) &= f \quad , \quad \Omega \\ u_\varepsilon &= 0 \quad , \quad \partial\Omega \end{aligned} \tag{14.51}$$

Satz 14.24 *Sei $f \in L^2(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt mit glattem Rand. Sei $u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega)$ die (eindeutige) schwache Lösung von (14.51).*
$\Rightarrow u_\varepsilon \rightharpoonup u$ in $H_0^1(\Omega)$ für $\varepsilon \to 0$.

Bew:

(i) a-priori Abschätzungen:
multipliziere (14.51) mit u_ε ; $\int_\Omega \dots dx$

$$\Rightarrow \int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^2 + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega_\varepsilon^-} u_\varepsilon^2\, dx = \int_\Omega f u_\varepsilon\, dx \tag{14.52}$$

mit $\Omega_\varepsilon^- := \{x \in \Omega \mid u_\varepsilon(x) \leq 0\}$

$$\Rightarrow \|u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}^2 \overset{\text{Poincaré}}{\leq} C\|\nabla u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \int_\Omega f u_\varepsilon\, dx \leq C\|f\|_{L^2(\Omega)} \|u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}$$

$$\Rightarrow \|u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|f\|_{L^2(\Omega)} \quad \forall \varepsilon > 0$$

aus (14.52): $\|\nabla u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C\|f\|_{L^2(\Omega)}^2 \quad \forall \varepsilon > 0$

also: $\{u_\varepsilon\}$ glm. beschränkt in $H_0^1(\Omega)$.

$\Rightarrow \exists$ Teilfolge mit $u_\varepsilon \rightharpoonup w$ in $H_0^1(\Omega)$ und $u_\varepsilon \to w$ in $L^2(\Omega)$.

aus (14.52):

$$\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{\Omega_\varepsilon^-} u_\varepsilon^2\,dx \leq \int\limits_\Omega f u_\varepsilon\,dx \leq C\|f\|^2_{L^2(\Omega)} \quad \forall \varepsilon > 0$$

$\Rightarrow u_\varepsilon^- \xrightarrow{\varepsilon\to 0} 0$ in $L^2(\Omega)$; mit Konvergenzordnung 1.

$\Rightarrow w \geq 0$ f.ü. in Ω; also $w \in U$.

(ii) <u>Identifikation des Limes</u>:

u_ε erfüllt laut Def.:

$$\int\limits_\Omega \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla v + \frac{1}{\varepsilon} u_\varepsilon H(-u_\varepsilon) v - f v\,dx = 0 \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \tag{14.53}$$

speziell für $v = u_\varepsilon$:

$$\int\limits_\Omega \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla u_\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} u_\varepsilon^2 H(-u_\varepsilon) - f u_\varepsilon\,dx = 0 \tag{14.54}$$

(14.53) minus (14.54); speziell gilt $\forall v \in U$:

$$\int\limits_\Omega \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla(v - u_\varepsilon) + \underbrace{\frac{1}{\varepsilon} u_\varepsilon H(-u_\varepsilon)}_{\leq 0}(\overbrace{v}^{\geq 0} \underbrace{-u_\varepsilon}_{\geq 0 \text{ auf } \Omega_\varepsilon^-})\,dx = \int f(v - u_\varepsilon)\,dx \tag{14.55}$$

- wegen schwacher Konvergenz in $H_0^1(\Omega)$ gilt ($\|\nabla\cdot\|_{L^2}$ ist Norm in $H_0^1(\Omega)$):

$$-\|\nabla w\|^2_{L^2(\Omega)} \geq -\|\nabla u_\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega)}$$

aus (14.55):

$$\begin{array}{rcl} -\displaystyle\int |\nabla w|^2 + \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla v\,dx & \geq & \displaystyle\int f(v - u_\varepsilon)\,dx \\ \downarrow \varepsilon \to 0 & & \downarrow \varepsilon \to 0 \\ -\displaystyle\int |\nabla w|^2 + \nabla w \cdot \nabla v\,dx & \geq & \displaystyle\int f(v - w)\,dx \quad \forall v \in U \end{array}$$

lt. Satz 14.23: $w = u \in U$ ist *eindeutige* Lösung von (14.48).

(iii) Konvergenz der ganzen Folge:
folgt aus Eindeutigkeit des Limes (generelles Prinzip!):

Annahme: *nicht* die ganze Folge konvergiert

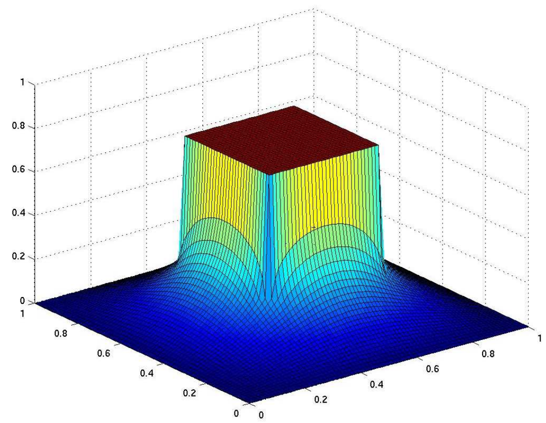
$\Rightarrow \exists$ 2 Häufungspunkte, da $\{u_\varepsilon\}$ beschränkt.
$\Rightarrow$ Widerspruch zur Eindeutigkeit des Limes.

$\square$

Anwendungen:

(i) Membran oberhalb des „Hindernisses" $\{(x, x_{n+1}) | x_{n+1} \leq h,\ x \in \Omega\}$:

$$E(u) = \int_\Omega \sqrt{1 + |\nabla u|^2}\, dx \xrightarrow{!} \min \quad \text{in } U = \{u \in H_0^1(\Omega) | u \geq h\}$$



Minimalfläche über Quaderhindernis

(ii) Biegung eines Stabes (vgl. Splines):

a) betrachte RWP

$$\begin{cases} -u'' &= f(x) &:= 1 & ,0 < x < 1 \\ u(0) &= u(1) &= 0 \end{cases}$$

Variationsgleichung:

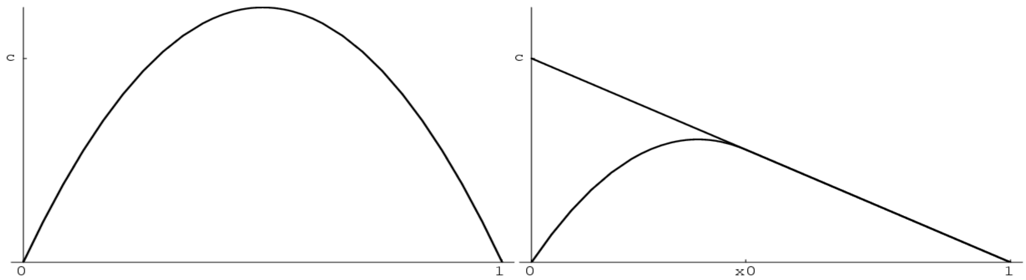
ges: $u \in H_0^1(0,1)$ mit

$$\int_0^1 (u'v' - fv)\, dx = 0 \quad \forall v \in H_0^1(0,1).$$

Lösung:

$$u(x) = \frac{x(1-x)}{2}$$

b) Stab soll unter dem *Hindernis* $h(x) := c(1-x)$, $c \geq 0$ liegen



Elastischer Stab ohne und mit Hindernis

Hindernis-Problem:

$$\begin{cases} -u'' &= 1, \;\; x \in (0, x_0) = O \\ u(0) &= u(1) = 0 \\ u(x) &= h(x), \;\; x \in [x_0, 1) = C \end{cases}$$

x_0 ... *freier Rand*

Variationsungleichung (analog zu (14.49)):

ges: $u \in U := \{u \in H_0^1(0,1) \mid u \leq h\}$ mit

$$\int_0^1 u'(w' - u')\, dx \geq \int_0^1 f(w-u)\, dx \quad \forall w \in U$$

Lösung:

$$u(x) = \begin{cases} c(1-x) - \frac{1}{2}(x - x_0)^2 & , \;\; 0 \leq x \leq x_0 \\ c(1-x) = h(x) & , \;\; x_0 \leq x \leq 1, \end{cases}$$

$$x_0 = \sqrt{2c}$$

(Referenzen: [Ev] § 8.4, [GH] § I.2, [KS])

15 nichtlineare parabolische Gleichungen

15.1 H^{-1} und „parabolische" Sobolev Räume

sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet.

Definition 15.1 $H^{-1}(\Omega) := H_0^1(\Omega)'$ *mit der* Dualitätsklammer

$$\langle \underbrace{f}_{\in H^{-1}}, \underbrace{u}_{\in H_0^1} \rangle \in \mathbb{R}$$

und der Norm

$$\|f\|_{H^{-1}(\Omega)} = \sup_{u \in H_0^1(\Omega);\, \|u\|=1} \langle f, u \rangle.$$

Wegen $D(\Omega) \subset H_0^1(\Omega)$ gilt: $H^{-1}(\Omega) \subset D'(\Omega)$.

Satz 15.1 *(Charakterisierung von H^{-1}) Sei $f \in H^{-1}(\Omega)$. $\Rightarrow$*

(i) $\exists$ Funktionen $f^0, f^1, ..., f^n \in L^2(\Omega)$ mit

$$\langle f, v \rangle = \int_\Omega f^0 v + \sum_{j=1}^n f^j v_{x_j}\, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \tag{15.1}$$

also $f = f^0 - \sum_{j=1}^n f^j_{x_j}$ (Ableitung im distributionellen Sinn)

(ii)

$$\|f\|_{H^{-1}(\Omega)} = \inf_{f^j \in L^2(\Omega)} \left\{ \sqrt{\int_\Omega \sum_{j=0}^n |f^j|^2\, dx} \;\middle|\; (15.1) \textit{ gilt} \right\}$$

<u>Bew</u>: [Ev]

vektor-wertige Funktionen:

Betrachten Lösungen $u(x,t)$ von Evolutionsproblemen als Funktionen von $t \in [0,T]$ mit Werten im Banach Raum X.

Definition 15.2
$C([0,T];X) := \{u : [0,T] \to X \mid u \textit{ stetig in } [0,T]\}$;
$L^p(0,T;X) := \{u : (0,T) \to X \textit{ meßbar} \mid \int_0^T \|u(t)\|_X^p \, dt < \infty\}$, $1 \le p < \infty$;
$L^\infty(0,T;X) := \{u : (0,T) \to X \textit{ meßbar} \mid \operatorname{ess\,sup}_{0<t<T} \|u(t)\|_X < \infty\}$;
$W^{1,p}(0,T;X) := \{u \in L^p(0,T;X) \mid u' \in L^p(0,T;X)\}$, *wobei* u' *die zeitliche Ableitung (im distributionellen Sinn) ist;* $1 \le p \le \infty$.

mit den Normen

$$\begin{aligned}
\|u\|_{C(X)} &= \max_{0\le t\le T} \|u(t)\|_X; \\
\|u\|_{L^p(X)} &= \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p \, dt\right)^{\frac{1}{p}}; \ 1 \le p < \infty; \\
\|u\|_{L^\infty(X)} &= \operatorname{ess\,sup}_{0<t<T} \|u(t)\|_X; \\
\|u\|_{W^{1,p}(X)} &= \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p + \|u'(t)\|_X^p \, dt\right)^{\frac{1}{p}}; \ 1 \le p < \infty; \\
\|u\|_{W^{1,\infty}(X)} &= \operatorname{ess\,sup}_{0<t<T} (\|u(t)\|_X + \|u'(t)\|_X)
\end{aligned}$$

Bem: $u \in C(X) = C([0,T];X)$ muss in x *nicht* stetig sein.

Satz 15.2 *(i)* $C(X); L^p(X); L^\infty(X); W^{1,p}(X), 1 \le p < \infty$ *sind Banach Räume.*

(ii) $L^2(X) = L^2(0,T;X)$ *ist ein Hilbert Raum mit Skalarprodukt*

$$(u,v) = \int_0^T (u(t), v(t))_X \, dt,$$

wenn X *ein Hilbertraum ist.*

(iii) sei X *separabel, und* $1 \le p < \infty \Rightarrow L^p(X)$ *separabel.*

Satz 15.3 *(Pettis): Sei* X *separabler Banach Raum, dann gilt:*
Die Funktion $f : [0,T] \to X$ *ist* messbar $\Leftrightarrow \forall u \in X' : t \mapsto \langle u, f(t)\rangle$ *ist messbar (als skalare Funktion).*

Satz 15.4 *(Sobolev Einbettung, vgl. Satz 8.2)*
Sei $u \in W^{1,p}(X)$ *für ein* $1 \le p \le \infty$.
$\Rightarrow u \in C(X)$ *mit*

$$\|u\|_{C(X)} \le c\|u\|_{W^{1,p}(X)},$$

und c *hängt nur von* T *ab.*

15.2 schwache Formulierungen

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, $\Omega_T := \Omega \times (0, T]$ für festes $T > 0$.

Ziel: Analyse von nichtlinearen parabolischen Gleichungen

$$\begin{cases} u_t + L(u) &= f(x,t) &, \quad \Omega_T \\ u &= 0 &, \quad \partial\Omega \times [0,T] \\ u(x,0) &= u_0(x) &, \quad x \in \Omega \end{cases}$$

Bsp: $u_t - \Delta(u^\alpha) = u_t - \alpha \operatorname{div}(u^{\alpha-1}\nabla u) = 0$ ... poröse Medium Gleichung.
$\alpha u^{\alpha-1}$ ... Diffusionsrate ≥ 0.

- Unterschiede zur Eigenfunktionsentwicklung von § 10.3:
  Operator L (bzw. Diffusionsrate) ist über u implizit t-abhängig. L kann degeneriert sein; im Bsp. für $u = 0$.

Vorstudie: lineare, zeitabhängige Gleichungen, d.h. $L(u) = L(t)u$.

Bsp: $u_t - a(t)\Delta u = f(t)$ mit $f \in L^2(H^{-1}(\Omega))$ geg. und $0 < \alpha \leq a(t) \in C[0, T]$.

Für $u \in L^2(H_0^1(\Omega))$ gilt

$$u_t = a(t)\Delta u + f(t) \in L^2(H^{-1}(\Omega));$$

Gleichung gilt in folgendem Sinn:

$$\forall v \in H_0^1(\Omega) : \langle \underbrace{u'(t) - a(t)\Delta u(t) - f(t)}_{\in H^{-1}(\Omega)}, v\rangle = 0 \text{ f.ü. in } [0,T].$$

Für die *abstrakte Formulierung* von allgemeineren Problemen machen wir

Definition 15.3 *Sei H ein separabler Hilbert Raum und V ein separabler, reflexiver Banach Raum, wobei die Einbettung $V \hookrightarrow H$ stetig und dicht sei; H werde mit H' identifiziert (Riesz-Abbildung!).*

$$V \hookrightarrow H \hookrightarrow V'$$

heißt dann ein Evolutionstripel *(bzw.* Gelfand-Tripel*).*

schwache Formulierung des Ortsoperators:
sei $L(t) \in B(V, V')$ (=beschränkter linearer Operator von V nach V'), und $L(t)$ hängt stetig von $t \in [0, T]$ ab.

zugehörige *Bilinearform* (vgl. §8.3, 8.4):

$$a(t; u, v) = {}_{V'}\langle L(t)u, v\rangle_V \quad \forall u, v \in V$$

Betrachten für gegebene $u_0 \in H,\ f \in L^2(0, T; V')$:

$$\begin{cases} u_t + L(t)u &= f(t) \quad , \quad \Omega_T \\ u &= 0 \quad\quad , \quad \partial\Omega \times [0, T] \\ u(0) &= u_0 \end{cases} \tag{15.2}$$

Bsp: $H = L^2(\Omega),\ V = H_0^1(\Omega),\ V' = H^{-1}(\Omega)$
$L(t) = L = -\Delta;\ a(u, v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx$

Definition 15.4 *$u \in L^2(0, T; V)$ mit $u' \in L^2(0, T; V')$ heißt* schwache Lösung *von (15.2), wenn*

(i) $\forall v \in V$ *gilt:*

$$_{V'}\langle u'(t), v\rangle_V + a(t; u(t), v) = {}_{V'}\langle f(t), v\rangle_V \ \text{f.ü. in } [0, T]. \tag{15.3}$$

(ii) $u(0) = u_0$

Bem: Wegen $V \subset V'$ und Satz 15.4 gilt für schwache Lösungen: $u \in H^1(0, T; V') \hookrightarrow C([0, T]; V')$. D.h. der Anfangswert u_0 wird (zumindest) im V'-Sinn angenommen.

Es gilt sogar mehr:

Lemma 15.1 *Sei $p \in (1, \infty)$ und $p' = \frac{p}{p-1}$, und sei $u \in L^p(V)$ mit $u' \in L^{p'}(V') \Rightarrow$*

(i) $u \in C([0, T]; H)$ *mit*

$$\|u\|_{C(H)} \le c \left(\|u\|_{L^p(V)} + \|u'\|_{L^{p'}(V')} \right), \tag{15.4}$$

und c hängt nur von T ab.

(ii)

$$\frac{d}{dt}\|u(t)\|_H^2 = 2\langle \underbrace{u'(t), u(t)}_{\in L^1(0,T)} \rangle \quad \text{f.ü. in } (0, T)$$

Bew:

(i) Sei zunächst $u \in C^1(H) \Rightarrow$

$$\forall t, t^* \in [0,T] : \|u(t)\|_H^2 = \|u(t^*)\|_H^2 + 2\int_{t^*}^{t} (u'(s), u(s))_H \, ds \tag{15.5}$$

wähle t^* so, dass:

$$\|u(t^*)\|_H^2 = \frac{1}{T}\int_0^T \|u(s)\|_H^2 \, ds$$

Für fast alle $s \in [0,T]$ gilt $u(s) \in V$. Wegen Identifikation von H und H':

$$(\underbrace{u'(s)}_{\text{Funktion } \in H}, u(s))_H = {}_{V'}\langle \underbrace{u'(s)}_{\text{Funktional } \in H' \subset V'}, u(s)\rangle_V \leq \|u'(s)\|_{V'}\|u(s)\|_V \tag{15.6}$$

aus (15.5):

$$\begin{aligned}
\|u(t)\|_H^2 &\leq \frac{1}{T}\int_0^T \|u(s)\|_H^2 \, ds + 2\int_0^T \|u'(s)\|_{V'}\|u(s)\|_V \, ds \\
&\overset{\text{Hölder}}{\leq} \frac{1}{T}\|u\|_{L^2(H)}^2 + 2\|u'\|_{L^{p'}(V')}\|u\|_{L^p(V)} \\
&\leq C(T)\left(\varepsilon\|u\|_{C(H)}^2 + \frac{1}{\varepsilon}\|u\|_{L^p(V)}^2\right) + \|u\|_{L^p(V)}^2 + \|u'\|_{L^{p'}(V')}^2 \quad \forall t \in [0,T]
\end{aligned}$$

(15.4) folgt mit Dichtheitsargument.
(ii) folgt aus (15.5),(15.6)

□

Satz 15.5 *Sei (H, V, V') ein Evolutionstripel, und die Bilinearform $a(t;\cdot,\cdot)$ stetig und koerziv auf V (und stetig in $t \in [0,T]$).*

$\Rightarrow$ (15.2) hat eine eindeutige, schwache Lösung $u \in L^2(V) \cap H^1(V') \cap C(H)$.

Bew-Idee: (Details in [RR]):

(i) Eindeutigkeit:
Wähle Testfunktion $v = u(t)$ in Def. 15.4, $\int_0^T ... \, dt$.
$\Rightarrow$ (mit Lemma 15.1(ii)):

$$\frac{1}{2}\left(\|u(T)\|_H^2 - \|u_0\|_H^2\right) + \int_0^T a(t; u(t), u(t)) \, dt = \int_0^T \langle f(t), u(t)\rangle \, dt \tag{15.7}$$

a koerziv, d.h. $a(t;u,u) \geq \kappa\|u\|_V^2 \Rightarrow$

$$\kappa \int_0^T \|u(t)\|_V^2 \, dt \leq \int_0^T \|f(t)\|_{V'} \|u(t)\|_V \, dt + \frac{1}{2}\|u_0\|_H^2$$

mit $x^2 \leq ax + b^2 (a, b \geq 0) \Rightarrow x \leq a + b$ folgt:

$$\|u\|_{L^2(V)} \leq C\left(\|f\|_{L^2(V')} + \|u_0\|_H\right), \tag{15.8}$$

wobei C nur von κ abhängt.
Das ist *a-priori Abschätzung* $\Rightarrow$ Eindeutigkeit.

(ii) Existenz (mit Galerkin Methode):
Sei $\{\varphi_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ Basis von V. Betrachte die *Galerkin-Gleichungen* für $u_n(t) = \sum_{j=1}^n \alpha_j(t)\varphi_j$:

$$\begin{aligned} (u_n'(t), \varphi_j)_H &= -a(t; u_n(t), \varphi_j) + {}_{V'}\langle f(t), \varphi_j\rangle_V; \; j = 1, ..., n \\ u_n(0) &= P_n u_0 \; (= \text{Orthogonalprojektion von } H \text{ auf } \operatorname{span}[\varphi_1, ..., \varphi_n]) \end{aligned}$$

Lineares ODE-System für $\{\alpha_j(t)\}$ hat eindeutige Lösung.

- u_n erfüllt a-priori Abschätzungen analog zu (15.7), (15.8) – unabhängig von n:

$$\frac{1}{2}(\|u_n(T)\|_H^2 - \underbrace{\|P_n u_0\|_H^2}_{\leq \|u_0\|_H^2}) + \int_0^T a(t; u_n(t), u_n(t)) \, dt = \int_0^T \langle f(t), u_n(t)\rangle \, dt \tag{15.9}$$

$\Rightarrow \|u_n\|_{L^2(V)} \leq C \quad \forall n \in \mathbb{N}$
$\Rightarrow \exists$ Teilfolge mit $u_{n_k} \rightharpoonup u$ in $L^2(V)$.

- $u \in L^2(V) \cap H^1(V')$ ist schwache Lösung von (15.2).
(vgl. Bew. von Satz 15.11i)

□

Bem: Abgesehen von der Zeitabhängigkeit von L ist das ein Spezialfall von Satz 15.9, 15.10.

Bsp: Sei $H = L^2(\Omega), V = H_0^1(\Omega)$,

$$L(t)u := -\sum_{i,j=1}^n (a_{ij}(x,t)u_{x_i})_{x_j} + b_i(x,t)u_{x_i} + c(x,t)u;$$

mit a_{ij}, b_j, c stetig und (a_{ij}) strikt positiv definit.

Gleichung für $\tilde{u}(x,t) = u(x,t)e^{-\beta t}$ (β groß genug) erfüllt Vorraussetzungen von Satz 15.5. Insbesondere ist $\tilde{a}(t;\cdot,\cdot) = a(t;\cdot,\cdot) + \beta(\cdot,\cdot)_{L^2}$ koerziv auf V (siehe Übung).

(Referenzen: [RR] §10.1, [Ev] § 7.1, [Sh2] § III.1-2)

15.3 Reaktions-Diffusionsgleichungen

betrachte für festes $T > 0$:

$$\begin{cases} u_t - \Delta u &= f(u) & ,\Omega_T \\ u &= 0 & ,\partial\Omega \times [0,T] \\ u(0) &= u_0 & \in L^2(\Omega) \end{cases} \tag{15.10}$$

Definition 15.5 *$u \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ mit $u' \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$ ist* schwache Lösung *von (15.10), wenn (analog zu Def. 15.4):*

(i) $\forall v \in H_0^1(\Omega) : \langle u'(t), v\rangle + a(u(t), v) = \langle f(u(t)), v\rangle$ f.ü. in $[0,T]$,
wobei $a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx$;

(ii) $u(0) = u_0$.

Satz 15.6 *Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lipschitz (mit konst. C_L) $\Rightarrow \exists!$ schwache Lösung von (15.10)*

Bew: Idee: FPS von Banach in $X = C([0,T_1]; L^2(\Omega))$ (wegen Lemma 15.1(i)) für $T_1 \in (0,T]$ hinreichend klein.

(i) Definition des Fixpunktoperators A:

$$f \text{ Lipschitz } \Rightarrow |f(z)| \le C(1 + |z|) \tag{15.11}$$

sei $u \in X \Rightarrow h(t) := f(u(t)) \in C([0,T_1]; L^2(\Omega)) \subset L^2(0,T_1; L^2(\Omega))$.

laut Satz 15.5: Das *lineare* Problem

$$\begin{cases} w_t - \Delta w &= h & ,\Omega_{T_1} \\ w &= 0 & ,\partial\Omega \times [0,T_1] \\ w(0) &= u_0 \end{cases} \tag{15.12}$$

hat eindeutige schwache Lösung $w \in L^2(H_0^1(\Omega)) \cap H^1(H^{-1}(\Omega)) \cap C(L^2(\Omega))$
$\Rightarrow A(u) := w \in X$

(ii) Kontraktivität von A:

Seien $w = A(u), \tilde{w} = A(\tilde{u}), h = f(u), \tilde{h} = f(\tilde{u})$.
$w - \tilde{w}$ erfüllt $\forall v \in H_0^1(\Omega)$:

$$\langle w' - \tilde{w}', v\rangle + a(w - \tilde{w}, v) = (h - \tilde{h}, v)_{L^2} \quad \text{f.ü. in } [0, T]$$

wähle $v = w(t) - \tilde{w}(t)$ (analog zu Satz 15.5) $\Rightarrow$ f.ü. in $[0, T]$ gilt:

$$\begin{aligned} & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\|w - \tilde{w}\|^2_{L^2(\Omega)} + 2\|\nabla(w - \tilde{w})\|^2_{L^2(\Omega} = 2(h - \tilde{h}, w - \tilde{w})_{L^2} \\ \leq \quad & \varepsilon\|w - \tilde{w}\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{\varepsilon}\|f(u) - f(\tilde{u})\|^2_{L^2(\Omega)} \qquad (15.13) \\ \overset{\text{Poincaré, (15.11)}}{\leq} \quad & \varepsilon C_p^2\|\nabla(w - \tilde{w})\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{C_L^2}{\varepsilon}\|u - \tilde{u}\|^2_{L^2(\Omega)} \end{aligned}$$

wähle $\varepsilon C_p^2 = 2 \Rightarrow$

$$\|w(s) - \tilde{w}(s)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \frac{C_L^2}{\varepsilon}\int_0^s \|u(t) - \tilde{u}(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\, dt \leq \frac{C_L^2}{\varepsilon} T_1\|u - \tilde{u}\|^2_X \quad \forall s \in [0, T_1] \tag{15.14}$$

$\Rightarrow$ Für T_1 klein genug (hängt nur von C_p und C_L ab!) ist A kontraktiv.

$\Rightarrow$ FPS von Banach: FP-Problem $A(u) = u$ hat eindeutige Lösung $u \in X$. Wegen (15.12) ist u auch eind. schwache Lösung von (15.10).

(iii) Fortsetzung der Lösung:

$u \in X \Rightarrow u(T_1) \in L^2(\Omega) \Rightarrow$ Lösung kann auf $[T_1, 2T_1]$ usw. fortgesetzt werden.

□

Beweisalternative: A^n ist kontraktiv auf $C([0, T]; L^2(\Omega))$ für $n = n(T)$ groß genug (→ Übung).

Bem: Satz 15.6 gilt analog für Systeme, d.h. $u \in \mathbb{R}^n$ (siehe [Ev]). Lipschitz-Annahme an f ist mathematisch wichtig, aber für chemische Anwendungen eine wesentliche Einschränkung: Dort ist f meist ein Polynom (z.B. quadratisch bei binärer Reaktion).

Definition 15.6 *Seien X, Y Banach Räume. $f : X \mapsto Y$ heisst* lokal Lipschitz*, wenn $\forall R \geq 0$: $\exists L(R)$ mit*

$$\|f(u_1) - f(u_2)\|_Y \leq L(R)\|u_1 - u_2\|_X \quad \forall u_{1,2} \in X \text{ mit } \|u_{1,2}\| \leq R.$$

Bem: f muss hier keine skalare (d.h. punktweise) Funktion von $u(x)$ sein; kann Differential-, Integraloperatoren beinhalten.

Bsp: $f(u) = \pm u^2$

$\Rightarrow f : L^2(\Omega) \to L^1(\Omega) \not\subset L^2(\Omega)$, aber $L^1(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega)$ in 1D.

$$\begin{aligned}\|f(u_1) - f(u_2)\|_{H^{-1}(\Omega)} &\leq C\|(u_1 - u_2)(u_1 + u_2)\|_{L^1(\Omega)} \\ &\leq \underbrace{2RC}_{=:L(R)} \|u_1 - u_2\|_{L^2(\Omega)} \text{ für } \|u_{1,2}\|_{L^2(\Omega)} \leq R\end{aligned}$$

Satz 15.7 *Sei $f : L^2(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ lokal Lipschitz $\Rightarrow$*

(i) $\exists t_{\max} \in (0, \infty]$, und $\forall T < t_{\max}$ gilt: (15.10) hat eindeutige schwache Lösung auf $[0, T]$.

(ii) falls $t_{\max} < \infty$, dann:

$$\lim_{t \nearrow t_{\max}} \|u(t)\|_{L^2(\Omega)} = \infty.$$

(analog zu ODEs)

Bew:

(i) Verwende FPS von Banach auf Kugel

$$K_R := \{u \in X = C([0, T_1]; L^2(\Omega)) \mid \|u\|_X \leq R\}$$

mit $R = R(\|u_0\|_{L^2(\Omega)}) := 2\max(\|u_0\|_{L^2(\Omega)}, 1)$.

a) Definition des Fixpunktoperators A wie in Satz 15.6:

Sei $u \in K_R \Rightarrow h(t) := f(u(t)) \in C([0, T_1]; H^{-1}(\Omega))$
$\Rightarrow A(u) := w \in X$ löst (15.12).

b) $\underline{A : K_R \to K_R}$:

auf K_R gilt:

$$\|f(u)\|_{H^{-1}} \leq \|f(0)\|_{H^{-1}} + \|f(u) - f(0)\|_{H^{-1}} \leq \|f(0)\|_{H^{-1}} + L(R)\|u\|_{L^2} \quad (15.15)$$

Sei $u \in K_R$; wähle Testfunktion $w(t)$ für (15.12) (analog zu (15.13)).

$\Rightarrow$ f.ü. in $[0, T_1]$ gilt:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\|w\|^2_{L^2(\Omega)} \quad + \quad & 2\|\nabla w\|^2_{L^2(\Omega)} = 2\langle f(u(t)), w(t)\rangle \qquad (15.16) \\ \leq \quad & \frac{1}{\varepsilon}\|f(u(t))\|^2_{H^{-1}(\Omega)} + \varepsilon\|w(t)\|^2_{H^1_0(\Omega)} \\ \overset{\text{Poincaré}}{\leq} \quad & \frac{1}{\varepsilon}\|f(u(t))\|^2_{H^{-1}(\Omega)} + \varepsilon(C_p^2 + 1)\|\nabla w(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \end{aligned}$$

mit $\varepsilon(C_p^2 + 1) = 2$ und (15.15) $\Rightarrow \forall s \in [0, T_1]$:

$$\begin{aligned} \|w(s)\|^2_{L^2(\Omega)} \quad & \leq \quad \|u_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{2}{\varepsilon}\int_0^{T_1} \|f(0)\|^2_{H^{-1}(\Omega)} + L(R)^2\|u(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\, dt \\ & \leq \quad \|u_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{2}{\varepsilon}T_1\left[\|f(0)\|^2_{H^{-1}(\Omega)} + L(R)^2R^2\right] \end{aligned}$$

Für

$$T_1 \leq \delta(\|u_0\|_{L^2}) := \frac{3}{4(C_p^2 + 1)}\frac{R^2}{\|f(0)\|^2_{H^{-1}} + L(R)^2R^2}$$

gilt: $\|w(s)\|_{L^2(\Omega)} \leq R$, also $w \in K_R$.

Bem:
(1) Wenn $f(u)$ nur lokal Lipschitz, dann: $L(R) \overset{R\to\infty}{\longrightarrow} \infty$, $\delta(\|u_0\|) \to 0$.
(2)$\|w(0)\| = \|u_0\| \leq \frac{R}{2}$; $\|w(t)\|$ stetig $\Rightarrow$ für T_1 klein bleibt w in K_R.

c) Kontraktivität von A:

Analog zu (15.14):

$$\|w(s) - \tilde{w}(s)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \frac{L(R)^2}{\varepsilon}T_1\|u - \tilde{u}\|^2_X \quad \forall s \in [0, T_1]$$

$\Rightarrow$ für $T_1 \leq \delta(\|u_0\|_{L^2})$ ist A kontraktiv.
$\Rightarrow$ (15.10) hat eindeutige schwache Lösung auf $[0, T_1]$.

d) Fortsetzung der Lösung:

$u(T_1) \in L^2(\Omega) \Rightarrow$ Lösung kann auf $[T_1, T_1 + \delta(\|u(T_1)\|_{L^2})]$ (mit $\delta > 0$) usw. fortgesetzt werden. Wenn $\|u(t)\|$ wächst (und $f(u)$ nur lokal Lipschitz), wird δ immer kleiner. $\Rightarrow$ *max. Existenzintervall* $[0, t_{\max})$

(ii) Annahme: $t_{\max} < \infty$, und $\lim_{t \nearrow t_{\max}} \|u(t)\|_{L^2(\Omega)} < \infty$ oder Limes $\nexists$.

$\Rightarrow \exists$ Folge $t_n \nearrow t_{\max}$ mit $\|u(t_n)\|_{L^2(\Omega)} \leq C \quad \forall n.$

Für t_n „nahe genug bei" $t_{\max}$ kann $u(t)$ auf $[t_n, t_n + \delta]$ fortgesetzt werden (wobei $\delta = \delta(C)$, unabhängig von t_n), mit $t_n + \delta > t_{\max}$.

Widerspruch zur Def. von $t_{\max}$.

$\square$

Bsp. 1:

$$u_t - \Delta u = f(u) = u^2,\ u(t=0) = u_0 \tag{15.17}$$

Gegenlaufende Effekte: Δu glättet, während u^2 die Lösung „aufblasen" läßt (vgl. $u_t = u^2$).

$\Rightarrow$ (15.17) hat nicht für alle $u_0 \in L^2(\Omega)$ eine glatte, zeitlich globale Lösung (siehe [Ev] § 9.4).

Bsp. 2: (15.17) mit $f(u) = -u|u|$; entspricht Verbrauch der chemischen Substanz mit Dichte $u(x,t) \geq 0$ ($\rightarrow$ Dissipation).

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist monoton fallend; $-f$ auch monoton in folgendem Sinn (zumindest in 1D).

Definition 15.7 *$f : H_0^1(\Omega) \rightarrow H^{-1}(\Omega)$ heisst* monoton*, wenn*

$$\langle f(u_1) - f(u_2), u_1 - u_2 \rangle \geq 0 \quad \forall u_{1,2} \in H_0^1(\Omega).$$

Satz 15.8 *Sei $f : L^2(\Omega) \rightarrow H^{-1}(\Omega)$ lokal Lipschitz und $-f|_{H_0^1}$ monoton $\Rightarrow$*

(i) (15.10) hat eindeutige schwache Lösung auf $[0, \infty)$.

(ii) Sei zusätzlich $f(0) = 0 \Rightarrow$

$$\|u(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u_0\|_{L^2(\Omega)} e^{-C_p^2 t};\ \ t \geq 0,$$

mit Poincaré-Konstante C_p.

Bew:

(i) Ziel: *a-priori Abschätzung* für $\|u(t)\|_{L^2(\Omega)}$ $\forall t \geq 0 \Rightarrow$ schließt $t_{\max} < \infty$ aus (laut Satz 15.7ii).

Sei u die schwache Lösung von (15.10) auf $[0, t_{\max})$. Analog zu (15.16) gilt f.ü. in $[0, t_{\max})$:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\|u\|^2_{L^2(\Omega)} &\leq -2\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} + 2\langle f(u), u\rangle \\
&\overset{-f \text{ monoton}}{\leq} -2\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} + 2\ {}_{H^{-1}}\langle f(0), u\rangle_{H^1_0} \qquad (15.18)\\
&\overset{\text{Poincaré}}{\leq} -2\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} + 2\|f(0)\|_{H^{-1}(\Omega)}\sqrt{1+C_p^2}\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \\
&\overset{\text{vollst. Quadrat}}{\leq} C = C(\|f(0)\|_{H^{-1}}, C_p)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \|u(t)\|_{L^2(\Omega)} &\leq \|u_0\|_{L^2(\Omega)} + Ct \quad \forall t \in [0, t_{\max}) \\
\Rightarrow t_{\max} = \infty &
\end{aligned}$$

(ii) aus (15.18) folgt für f.a. $t \geq 0$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\|u\|^2_{L^2(\Omega)} \leq -2\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} \overset{\text{Poincaré}}{\leq} -2C_p^2\|u\|^2_{L^2(\Omega)}$$

□

(Referenzen: [Ev] §9.2, [Pa] § 6.1)

15.4 quasilineare parabolische Gleichungen

sei $T > 0$ fest.

Bsp 1:

$$\begin{cases} u_t - \operatorname{div}(a(u)\nabla u) = 0 & , \Omega_T \\ u = 0 & , \partial\Omega \times [0,T] \\ u(0) = u_0 & \in L^2(\Omega) \end{cases} \qquad (15.19)$$

mit $a \in C(\mathbb{R}); a(u) \geq \delta_1 > 0\ \forall u \in \mathbb{R}$ (d.h. *gleichmäßig parabolisches* Problem);

z.B.: $a(u) = |u|^{m-1} + \delta,\ m > 1$ (modifizierte poröse Medium Gleichung)

Später zusätzlich nötig: $a(u) \leq \delta_2$ („äquivalent" zu $u_0 \in L^\infty(\Omega)$, wegen Maximumsprinzip)

allgemeinere Probleme (abstraktes Cauchy-Problem)

Sei V ein separabler, reflexiver Banach Raum, H ein Hilbert Raum, $V \subset H \subset V'$ ein Evolutionstripel, und $A : V \to V'$ (zB: $V = H_0^1(\Omega), A = -\Delta$):

$$\left\{ \begin{array}{rcl} u'(t) + A(u(t)) & = & f(t), 0 < t < T \\ u(0) & = & u_0 \in H \end{array} \right. \tag{15.20}$$

Suchen Lösung $u \in X := L^p(0,T;V)$ (für ein $p \in (1,\infty)$ fest) mit $u' \in X' = L^{p'}(0,T;V')$. $f \in X'$ geg.

Laut Lemma 15.1 $\Rightarrow u \in C([0,T];H)$

<u>schwache Formulierung</u>:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \langle u'(t), v\rangle + \langle A(u(t)), v\rangle & = & \langle f(t), v\rangle \text{ f.ü. in } [0,T], \\ u(0) & = & u_0 \text{ in } H. \end{array} \right.$$

<u>äquivalente Operator-Formulierung</u>:

Sei $A : X \to X'$, $f \in X'$:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} u' + A(u) & = & f \text{ in } X' \\ u(0) & = & u_0 \in H \end{array} \right. \tag{15.21}$$

Einschub: nichtlineare Abbildungen

Definition 15.8 *Seien X, Y Banach Räume. $A : X \to Y$ heißt*

(i) beschränkt*, wenn $\forall S \subset X$:*
S beschränkt in $X \Rightarrow A(S)$ ist beschränkt in Y;

(ii) demistetig*, wenn $\forall \{u_n\} \subset X$:*
$u_n \to u$ in $X \Rightarrow A(u_n) \rightharpoonup A(u)$ in Y.

Definition 15.9 *Sei V reflexiver Banach Raum. $A : V \to V'$ heißt*

(i) hemistetig*, wenn $\forall u, v \in V$:*
$t \mapsto \langle A(u + tv), v\rangle$ ist stetig (als Fkt $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$);

(ii) vom Typ M, *wenn* $\forall \{u_n\} \subset V$:
wenn $u_n \rightharpoonup u$ *in* V, $A(u_n) \rightharpoonup f$ *in* V' *(*V *ist reflexiv) und* $\limsup \langle A(u_n), u_n\rangle \le \langle f, u\rangle$
$\Rightarrow A(u) = f$*;*

(iii) koerziv, *wenn* $\forall u \in V$

$$\frac{\langle A(u), u\rangle}{\|u\|} \longrightarrow \infty \text{ für } \|u\| \to \infty$$

Lemma 15.2 *Sei* $A : V \to V'$

(i) hemistetig und monoton $\Rightarrow$ *A ist vom Typ M*

(ii) vom Typ M und beschränkt $\Rightarrow$ *A ist demistetig*

(iii) demistetig $\Rightarrow$ *A ist hemistetig.*

Bew: [Sh2]

Bsp 1: Sei $V = H_0^1(\Omega)$, $A(u) = -\operatorname{div}(a(u)\nabla u) : H_0^1 \to H^{-1}$, mit $a \in C(\mathbb{R}), 0 < \delta_1 \le a(u) \le \delta_2$.

- A ist beschränkt, da $\forall u, v \in H_0^1(\Omega)$:

$$|\langle A(u), v\rangle| = \left|\int a(u)\nabla u \cdot \nabla v \, dx\right| \le \|a\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\|u\|_{H_0^1}\|v\|_{H_0^1} \tag{15.22}$$

- A ist koerziv, da

$$\langle A(u), u\rangle \overset{\text{Poincaré}}{\ge} C\delta_1\|u\|^2_{H_0^1} \quad \forall u \in H_0^1(\Omega)$$

- A ist vom Typ M, da:
  Sei $u_n \rightharpoonup u$ in H_0^1 mit $A(u_n) \rightharpoonup f$ in H^{-1} und $v \in C_0^\infty(\bar{\Omega})$

  $\Rightarrow u_n \to u$ in $L^2(\Omega)$, $a(u_n) \to a(u)$ in $L^2(\Omega)$ (mit Lebesgue).

  $\Rightarrow \langle A(u_n), v\rangle = \int \underbrace{a(u_n)\nabla v}_{\in L^2(\Omega)} \cdot \nabla u_n \, dx \to \int \underbrace{a(u)\nabla v}_{\in L^2(\Omega)} \cdot \nabla u \, dx = \langle f, v\rangle$,
  da $f \in H^{-1}$ und C_0^∞ dicht in H_0^1: $f = -\operatorname{div}(a(u)\nabla u) = A(u)$

- A ist demistetig laut Lemma 15.2ii

  Bem: sogar mehr gezeigt: A ist *schwach abgeschlossen*.

Satz 15.9 *Sei der* Ortsoperator $A : V \to V'$ *gegeben, sodass für seine Orts-Zeit-Interpretation gilt:*
$A : X = L^p(V) \to X' = L^{p'}(V')$ *ist (für ein festes* $p \in (1, \infty)$*) vom Typ M, beschränkt und koerziv mit*

$$ {}_{X'}\langle A(v), v\rangle_X \geq \alpha \|v\|_X^p \quad \forall v \in X (\alpha > 0) \tag{15.23}$$

$\Rightarrow$ *(15.21) hat (mindestens) eine schwache Lösung* $u \in X$*.*

Bew:

(i) Galerkin-Methode:
Sei $\{\varphi_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ Basis von V und $V_n := \operatorname{span}[\varphi_1, ..., \varphi_n]$.
Laut Lemma 15.2b: $A : X \to X'$ ist demistetig.
$\Rightarrow A : V \to V'$ ist demistetig (wähle $\{u_n\} \subset V$; mit $u_n = \text{const}$ in t gilt $\{u_n\} \subset X$)

$\Rightarrow$ Einschränkung von $A : V_n \to V_n'$ ist stetig (da V_n' endlich-dim. und $V_n \subset V \subset H \subset V' \subset V_n'$)

Galerkin-Gleichungen für $u_n(t) \in V_n$ sind nichtlineares ODE-System:

$$(u_n'(t), \varphi_j)_H + {}_{V'}\langle A(u_n(t)), \varphi_j\rangle_V = {}_{V'}\langle f(t), \varphi_j\rangle_V; \ j = 1, ..., n \tag{15.24}$$

mit $u_n(0) = P_n u_0 \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} u_0$ in H (P_n = Orthogonalprojektion von H auf V_n)
Lösung $u_n(t)$ existiert laut Satz von Peano (aber nicht notwendigerweise eindeutig).

a-priori Abschätzung von u_n (analog zu (15.9)):

$$\frac{1}{2}\|u_n(t)\|_H^2 + \alpha \underbrace{\int_0^t \|u_n(s)\|_V^p \, ds}_{\leq \|u_n\|_X^p} \leq \frac{1}{2}\|P_n u_0\|_H^2 + \int_0^t \|f(s)\|_{V'}\|u_n(s)\|_V \, ds, \ 0 \leq t \leq t_{\max} \leq T$$

Wir verwendeten dabei Testfunktion $u_n(s) \in V_n$ in (15.24) und Koerzivität (15.23).

Folgerungen:

- $$\|u_n(t)\|_H^2 \leq \|P_n u_0\|_H^2 + C_n \int_0^t \underbrace{\|f(s)\|_{V'}}_{\in L^1(0,T)} \|u_n(s)\|_H \, ds$$

  (Normen für $u_n \in V_n$ äquivalent)
  Gronwall $\Rightarrow$ max. Existenzintervall für alle u_n ist $[0, T]$.

- $$\begin{aligned}\|u_n(T)\|_H^2+\alpha\|u_n\|_X^p &\leq \|u_0\|_H^2-\alpha\|u_n\|_X^p+2\|f\|_{X'}\|u_n\|_X\\ &\overset{p>1}{\leq} \|u_0\|_H^2+C(\alpha,f)\text{...vollst. Quadrat, falls } p=2\end{aligned}$$

(ii) Existenz eines Limes:

- $\{u_n\}$ beschränkt in X und $L^\infty(0,T;H)$
  $\Rightarrow \exists$ Teilfolge $\{u_n\}$ mit $u_n \rightharpoonup u$ in X, $u_n(T) \rightharpoonup u^*$ in H
- $\{A(u_n)\}$ beschränkt in X' (da A beschränkt)
  $\Rightarrow A(u_n) \rightharpoonup z$ in X'

(iii) Identifikation des Limes:
Sei $\psi \in C^1[0,T]$; integriere (15.24) in t:

$$-\int_0^T(u_n(t),\underbrace{\psi'(t)\varphi_j}_{\in X'=L^{p'}(V')})dt+\int_0^T\langle A(u_n)-f,\underbrace{\psi(t)\varphi_j}_{\in X=L^p(V)}\rangle dt=(u_n(0),\underbrace{\varphi_j}_{\in H})\psi(0)-(u_n(T),\underbrace{\varphi_j}_{\in H})\psi(T) \tag{15.25}$$

$$\downarrow n\to\infty$$

$$-\int_0^T(u(t),\psi'(t)\varphi_j)\,dt+\int_0^T\langle z-f,\psi(t)\varphi_j\rangle\,dt=(u_0,\varphi_j)\psi(0)-(u^*,\varphi_j)\psi(T)$$

- $C^1[0,T]$ dicht in $L^p(0,T)$ und $\{\varphi_j\}$ ist Basis von V
  $\Rightarrow$ für $u\in X$ gilt:

$$\begin{cases} u'+z &= f \quad \text{in } X' \\ u(0) &= u_0 \quad ,u(T)=u^* \text{ in } H\end{cases} \tag{15.26}$$

(iv) Identifikation von $z=A(u)$:
aus (15.25):

$$_{X'}\langle A(u_n),\underbrace{u_n}_{\in X}\rangle_X = {}_{X'}\langle f,u_n\rangle_X+\frac{1}{2}\|u_n(0)\|_H^2-\frac{1}{2}\|u_n(T)\|_H^2,\ \forall n\in\mathbb{N}$$

$$\limsup_{n\to\infty} \quad \downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow$$

$$\limsup_{n\to\infty}\langle A(u_n),u_n\rangle \leq \langle f,u\rangle+\frac{1}{2}\|u_0\|_H^2-\frac{1}{2}\|u(T)\|_H^2$$

da $\|u(T)\|_H\leq \liminf\|u_n(T)\|_H$ ($\|\cdot\|$ schwach unterhalb stetig), bzw. $-\|u(T)\|_H\geq \limsup(-\|u_n(T)\|_H)$

- Laut Lemma 15.1:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\|u(t)\|_H^2 = 2 \ {}_{V'}\langle u'(t), u(t)\rangle_V,$$

integriert in t:

$$\frac{1}{2}\|u(T)\|_H^2 - \frac{1}{2}\|u_0\|_H^2 = \int_0^T \langle u'(t), u(t)\rangle \, dt \overset{(15.26)}{=} \ {}_{X'}\langle f - z, u\rangle_X$$

also:

$$\left.\begin{array}{l} u_n \rightharpoonup u \text{ in } X \\ A(u_n) \rightharpoonup z \text{ in } X' \\ \limsup\langle A(u_n), u_n\rangle \leq \langle z, u\rangle \end{array}\right\} \Rightarrow A(u) = z, \text{ da } A \text{ Typ M}$$

□

Vorraussetzungen für Satz 15.9:
Vergleich von $A : V \to V'$ und $A : X \to X'$ (d.h. Orts- bzw. Orts-Zeit-Interpretation)

Lemma 15.3 *Sei $A : V \to V'$ und*

(i) demistetig $\Rightarrow$
$\forall$ meßbare Funktionen $u : [0, T] \to V$ ist $A(u(\cdot)) : [0, T] \to V'$ messbar;

(ii) demistetig und beschränkt mit

$$\|A(u)\|_{V'} \leq C\|u\|_V^{p-1}, \ u \in V \tag{15.27}$$

$\Rightarrow A : X \to X'$ und ist demistetig.

Lemma 15.4 *Sei $A : V \to V'$ und $A : X \to X'$ und*

(i) V-monoton $\Rightarrow$ A ist X-monoton;

(ii) beschränkt mit (15.27) und V-hemistetig $\Rightarrow$ A ist X-hemistetig

Bew: [Sh2]

Bsp 2:

$$\left\{\begin{array}{rcll} u_t - \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) & = & 0 & , \Omega_T;\ 2 \leq p < \infty \\ u & = & 0 & , \partial\Omega \times [0, T] \\ u(0) & = & u_0 & \in L^2(\Omega) \end{array}\right.$$

Diese *degenerierte* quasilin. Gl. (ähnlich zu poröser Medien Gleichung) hat eindeutige schwache Lösung mit $V = W_0^{1,p}(\Omega)$, $H = L^2(\Omega)$, da:
$A : V \to V'$ ist demistetig, beschränkt, monoton, koerziv ($\to$ Übung).

$A : V \to V'$, da $\forall v \in W_0^{1,p}(\Omega)$:

$$\begin{aligned} {}_{V'}\langle A(u), v\rangle_V &= \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla v \, dx \\ &\overset{\text{Hölder}}{\leq} \|\nabla u\|_{L^p}^{p-1} \|\nabla v\|_{L^p} \leq \|u\|_{W_0^{1,p}}^{p-1} \|v\|_{W_0^{1,p}} \end{aligned}$$

Eindeutigkeit der Lösung nur unter Zusatzannahmen:

Satz 15.10 *Sei $A : V \to V'$ monoton (zusätzlich zu Bed. von Satz 15.9).*
$\Rightarrow \exists!$ *schwache Lösung $u \in X$ von (15.21).*

Bew: Seien $u_{1,2} \in X$ schwache Lösungen mit $u'_{1,2} \in X'$. Analog zu Lemma 15.1 gilt f.ü. in $[0, T]$:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} \|u_1(t) - u_2(t)\|_H^2 &= 2\langle u'_1(t) - u'_2(t), u_1(t) - u_2(t)\rangle \\ &= -2 \ {}_{V'}\langle A(u_1(t)) - A(u_2(t)), u_1(t) - u_2(t)\rangle_V \leq 0 \end{aligned}$$

□

Bsp 1: $u_t = \operatorname{div}(a(u)\nabla u) =: -A(u)$

Sei $V = H_0^1(\Omega),\ X = L^2(H_0^1)$ ($p = 2$ wegen (15.22),(15.27))

$A : V \to V'$ ist i.A. nicht monoton.
$A : X \to X'$ ist zwar beschränkt und koerziv ($\to$ Übung), aber i.A. nicht vom Typ M.

$\Rightarrow$ Satz 15.10 kann nicht angewendet werden und Satz 15.9 muss etwas modifiziert werden. Für den Existenzbeweis brauchen wir folgendes Kompaktheitsresultat für Funktionen von x und t:

Lemma 15.5 *(von Aubin; Bew. [Sh2])*
Seien B_0, B, B_1 Banach Räume (B_0, B_1 reflexiv) mit
$B_0 \hookrightarrow\hookrightarrow B \hookrightarrow B_1$. *Sei $1 < p < \infty$, $1 < q < \infty$.*

$\Rightarrow$ *Die Einbettung*

$$\{u \in L^p(0,T;B_0) \mid u' \in L^q(0,T;B_1)\} \hookrightarrow L^p(0,T;B)$$

ist kompakt.

Anwendungsbeispiel: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt,

$\{u_n\}$ glm. beschränkt in $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ und
$\{u_n'\}$ glm. beschränkt in $L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$

$\Rightarrow$ für eine Teilfolge gilt $u_{n_k} \to u$ in $L^2(0,T;L^2(\Omega))$

Satz 15.11 *Sei $a \in C(\mathbb{R})$ mit $0 < \delta_1 \leq a(u) \leq \delta_2$.*
$\Rightarrow \exists!$ *schwache Lösung $u \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ von (15.19).*

Bew:

(i) Existenz (größtenteils analog zu Satz 15.9):

a) Basiswahl für Galerkin-Methode:
Sei $\{\varphi_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ *Orthogonalbasis* von $V = H_0^1(\Omega)$ (bez. $\|u\|_{H_0^1} = \|\nabla u\|_{L^2}$) und gleichzeitig *Orthonormalbasis* von $H = L^2(\Omega)$.

Wähle z.B. die Eigenfunktionen von $L = -\Delta$ in $H_0^1(\Omega)$.

Laut *Entwicklungssatz* 10.2: $\{\varphi_j\}$ ist ONB von $L^2(\Omega)$.

Ferner:

$$(\varphi_j, \varphi_k)_{H_0^1} = \int_\Omega \nabla\varphi_j \cdot \nabla\varphi_k \, dx = -\int_\Omega \Delta\varphi_j\varphi_k \, dx = \lambda_j \int \varphi_j\varphi_k \, dx = 0$$

b) a-priori Abschätzung von u_n':

- Galerkin-Gleichungen für $u_n(t) = \sum_{j=1}^n \alpha_j(t)\varphi_j$:

$$(u_n'(t), \varphi_j)_H = - \ {}_{V'}\langle A(u_n(t)), \varphi_j\rangle_V; \ \ j = 1, ..., n$$

- Sei $v \in H_0^1(\Omega)$ beliebig mit $\|v\|_{H_0^1} \leq 1$.
  $v = v_1 + v_2$ mit $v_1 \in V_n = \text{span}[\varphi_1, ..., \varphi_n]$, $v_2 \perp_{L^2} V_n$.
  $\Rightarrow \|v_1\|_{H_0^1} \leq \|v\|_{H_0^1} \leq 1$, da $\{\varphi_j\}$ OGB von H_0^1.

- da $u_n'(t) \in V_n \subset L^2(\Omega)$:

$$_{V'}\langle u_n'(t), v\rangle_V = (u_n'(t), v)_H = (u_n'(t), v_1)_H = -\langle A(u_n(t)), v_1\rangle$$

$\Rightarrow$ (mit $\|v_1\|_{H_0^1} \leq 1$)

$$\|u_n'(t)\|_{H^{-1}} = \sup_{\|v\|_{H_0^1}\leq 1} |\langle u_n'(t), v\rangle| \leq \|A(u_n(t))\|_{H^{-1}}$$

$$\Rightarrow \|u_n'\|_{X'} \leq \|A(u_n)\|_{X'} \leq C \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{15.28}$$

(laut Satz 15.9), mit $X' = L^2(H^{-1})$.

- laut Satz 15.9:

$$\|u_n\|_X \leq C \tag{15.29}$$

$\Rightarrow$ (mit Aubin-Lemma) $\exists$ Teilfolge mit

$$u_n \to u \text{ in } L^2(0,T;L^2(\Omega)) \tag{15.30}$$

Bem: ohne Aubin-Lemma hätten wir nur schwache Konvergenz bez. $t \Rightarrow$ dann keine Info über $a(u_n)$.

c) Ersatz für „Typ M-Eigenschaft" (zur Identifikation $A(u) = z$):
(analog zum Bew. von $A: V \to V'$ ist Typ M)

- aus (15.28): für eine Teilfolge gilt $A(u_n) \rightharpoonup z$ in X'
- aus (15.29): für eine Teilfolge gilt $\nabla u_n \rightharpoonup \nabla u$ in $L^2(\Omega_T)$
- aus (15.30): $a(u_n) \to a(u)$ in $L^2(\Omega_T)$ (mit Lebesgue)

- sei $v \in C_0^\infty(\Omega \times (0,T))$

$$\Rightarrow \quad {}_{X'}\langle A(u_n), v\rangle_X = \int\int_{\Omega_T} a(u_n)\nabla v \cdot \nabla u_n \, dx\, dt$$

$$\to \int\int_{\Omega_T} a(u)\nabla v \cdot \nabla u \, dx\, dt = \quad {}_{X'}\langle z, v\rangle_X$$

$\Rightarrow A(u) = z$
$\Rightarrow$ analog zu (15.25), (15.26): $u' + A(u) = 0$ in X'.

(ii) Eindeutigkeit:
Schreibe (15.19) als

$$u_t = \Delta b(u) \quad \text{in } L^2(H^{-1}(\Omega)) \tag{15.31}$$

mit $b(z) := \int_0^z a(w)\, dw \Rightarrow b(0) = 0$; $b \in C^1(\mathbb{R})$ monoton wachsend, $|b(z)| \leq \delta_2 |z|$.

Seien $u_{1,2} \in L^2(H_0^1(\Omega))$ zwei schwache Lösungen, also

$$(u_1 - u_2)_t = \Delta(b(u_1) - b(u_2)). \tag{15.32}$$

Wähle für (15.32) die spezielle (trickreiche) Testfunktion

$$v(x,t) := \int_t^T b(u_1(x,s)) - b(u_2(x,s))\, ds \quad \in H^1(0,T; H_0^1(\Omega))$$

mit

$$\begin{aligned} v(T) &= 0, \\ v_t &= -b(u_1) + b(u_2) \in L^2(H_0^1), \\ \nabla v &= \int_t^T \nabla[b(u_1(s)) - b(u_2(s))]\, ds \quad \in H^1(L^2). \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int_0^T \int_\Omega (u_1 - u_2)[b(u_1) - b(u_2)]\, dx\, dt \tag{15.33}$$

$$= -\int_0^T \int_\Omega \nabla[b(u_1(t)) - b(u_2(t))] \cdot \int_t^T \nabla[b(u_1(s)) - b(u_2(s))]\, ds\, dx\, dt$$

$$\overset{(*)}{=} -\frac{1}{2} \int_\Omega \left| \int_0^T \nabla(b(u_1) - b(u_2))\, dt \right|^2 dx \le 0$$

aber (15.33) ≥ 0, da $b \nearrow \quad \Rightarrow u_1 = u_2$ f.ü. in Ω_T.

$$(*) \text{ da } \int_0^T f(t) \int_t^T f(s)\, ds\, dt = \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^T f(t) f(s)\, ds\, dt = \frac{1}{2} \left[\int_0^T f(t)\, dt \right]^2$$

$\square$

(<u>Referenzen</u>: [Sh2] § II.1-2, III.1, III.4, [Va] § II.2, [Ev] § 7.1)

15.5 Die poröse Medium Gleichung

Betrachte

$$\begin{cases} u_t = \Delta u^m & , \Omega_T \\ u = 0 & , \partial\Omega \times [0,T] \\ u(x,0) = u_0(x) \in L^1_+(\Omega) \end{cases} \tag{15.34}$$

mit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt, $\partial\Omega \in C^{2+\alpha}$ für ein $\alpha \in (0,1)$.

Die PMGl ist *degeneriert parabolisch* (für $u(x,t) \geq 0$).

Definition 15.10 *$u \geq 0$ heißt* schwache Lösung *von (15.34), wenn*

(i) $u^m \in L^2((0,T); H^1_0(\Omega))$,

(ii) u erfüllt

$$\iint\limits_{\Omega_T} \nabla(u^m) \cdot \nabla\varphi - u\varphi_t \, dx\, dt = \int\limits_{\Omega} u_0(x)\varphi(x,0)\, dx \tag{15.35}$$

$\forall \varphi \in C^1(\overline{\Omega_T})$ *mit* $\varphi(x,T) = 0$

Bem: Schwache Lösungen von (15.34) sind eindeutig: analog zu Satz 15.11 ii (bzw. [Va] § II.2).

Satz 15.12 *Sei $u_0 \in L^{m+1}_+(\Omega) \Rightarrow \exists!$ schwache Lösung von (15.34) bis zu $T = \infty$.*

Bew:

(i) glatte Approximationslösungen:

- Sei $u_0 \in C_0^\infty(\Omega)$
  u_n löse:

$$\begin{cases} (u_n)_t = \Delta u_n^m, \Omega_\infty := \Omega \times (0,\infty) \\ u_n(x,t) = \frac{1}{n}, \partial\Omega \times [0,\infty) \\ u_n(x,0) = u_{0n}(x) := u_0(x) + \frac{1}{n} \end{cases} \tag{15.36}$$

- laut schwachem Maximumsprinzip (Satz 9.2):

$$\frac{1}{n} \leq u_n(x,t) \leq M + \frac{1}{n} \text{ in } \overline{\Omega_\infty}, \text{ mit } M := \sup(u_0). \tag{15.37}$$

  $\Rightarrow u_n$ löst die *nicht degenerierten* (glm. parabolischen) Probleme

$$(u_n)_t = \operatorname{div}(a_n(u_n)\nabla u_n) \tag{15.38}$$

  mit $a_n \in C(\mathbb{R}), 0 < \frac{1}{2n} \leq a_n(u) \leq M + \frac{2}{n}$ und
  $a_n(u) = mu^{m-1}$ auf $[\frac{1}{n}, M + \frac{1}{n}]$.

- laut Satz 15.11 (für $v_n = u_n - \frac{1}{n}$): (15.38) hat eindeutige schwache Lösung $u_n - \frac{1}{n} \in L^2(H_0^1(\Omega)) \cap C(L^2(\Omega))$

- laut [LSU], § 6 gilt sogar:

  $u_n \in C^{2,1}(\overline{\Omega_\infty}) \cap C^\infty(\Omega_\infty)$ (d.h. $u_n, (u_n)_x, (u_n)_{xx}, (u_n)_t \in C(\overline{\Omega_\infty})$);
  u_n ist also klassische Lösung $\Rightarrow$ Maximumsprinzip darf angewendet werden.

(ii) <u>a-priori Abschätzungen, Konvergenz</u>:

- aus Maximumsprinzip:

  $0 < u_{n+1}(x,t) \leq u_n(x,t)$ in $\overline{\Omega_\infty}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

  Definiere
  $$u(x,t) = \lim_{n\to\infty} u_n(x,t) \quad \forall (x,t) \in \overline{\Omega_\infty}$$
  $\Rightarrow u_n(t) \to u(t)$ in $L^p(\Omega)$ $\forall t \in [0,T]$ $\forall 1 \leq p < \infty$;
  $u_n \to 0$ in $L^p(\Omega_T)$ $\forall T > 0$ (monotone Konvergenz)

- aus (15.37): $0 \leq u \leq M$ in $\overline{\Omega_\infty}$

- <u>a-priori Abschätzung für $\nabla(u^m)$</u>:
  Multipliziere (15.36) mit $\varphi_n := u_n^m - (\frac{1}{n})^m$; $\int\int\, dx\, dt \Rightarrow$

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \int_0^T |\nabla u_n^m|^2\, dx\, dt &= \int_\Omega \left(\frac{1}{m+1} u_{0n}^m(x) - \frac{1}{n^m} \right) u_{0n}(x)\, dx \\
&\quad - \int_\Omega \left(\frac{1}{m+1} \underbrace{u_n^m}_{\geq 0}(x,T) - \frac{1}{n^m} \right) \underbrace{u_n}_{\leq M + \frac{1}{n}}(x,T)\, dx \qquad (15.39) \\
&\leq \frac{1}{m+1} \int \left(u_0(x) + \frac{1}{n} \right)^{m+1} dx + \frac{1}{n^m} \left(M + \frac{1}{n} \right) \int_\Omega dx \\
&\leq C \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall T > 0
\end{aligned}$$

- $\Rightarrow \{\nabla u_n^m\}$ glm. beschränkt in $L^2(\Omega_\infty) \Rightarrow$ für eine Teilfolge gilt:
  $$\nabla u_{n_k}^m \xrightharpoonup{k\to\infty} \psi \text{ in } L^2(\Omega_\infty)$$
  da auch $u_n^m \to u^m$ in $L^2(\Omega_T)$, gilt $\psi = \nabla u^m$.

  Limes ist eindeutig $\Rightarrow$ ganze Folge ∇u_n^m konvergiert:
  $u_n^m \rightharpoonup u^m$ in $L^2(0,T;H^1(\Omega))$

- Limes in Gl. (15.39) $\Rightarrow$ *Energieabschätzung*:

$$(m+1) \underbrace{\iint\limits_{\Omega_T} |\nabla u^m|^2 \, dx \, dt}_{\leq \lim_{n\to\infty} \inf \|\nabla u_n^m\|^2_{L^2(\Omega_T)}} + \int\limits_{\Omega} u^{m+1}(x,T) \, dx \leq \int\limits_{\Omega} u_0^{m+1}(x) \, dx \quad \forall T > 0 \tag{15.40}$$

- Randbedingung von u:

$$u_n^m \in C^{2,1}(\overline{\Omega_T}), \quad u_n^m|_{\partial\Omega\times[0,T]} = n^{-m}, \quad \forall T > 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{u_n^m - n^{-m}}_{\in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} \rightharpoonup u^m \text{ in } L^2(0,T;H^1(\Omega))$$

$\Rightarrow u^m \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$, da H_0^1 schwach abgeschlossen (Satz von Mazur).

- u_n ist klassische Lösung $\Rightarrow$ erfüllt (15.35) mit AB u_{0n}.
  Limes $n \to \infty$ liefert (15.35) für $u \Rightarrow u$ ist schwache Lösung von (15.34).

- Vergleichsprinzip:
  Betrachte 2 ABen mit $u_0(x) \leq \tilde{u_0}(x) \; \forall x \in \Omega$
  $\Rightarrow u_{0n} \leq \widetilde{u_{0n}} \Rightarrow$ (mit Maximumsprinzip) $u_n \leq \tilde{u_n} \; \forall n$
  $\Rightarrow u(x,t) \leq \tilde{u}(x,t)$ (durch $n \to \infty$)

(iii) beschränkte Anfangsdaten:
Sei $u_0 \in L^\infty(\Omega)$ mit $\operatorname{supp} u_0 \subset \Omega$:
Approximationsmethode und Vergleichspinzip von (i,ii) funktionieren genauso mit $u_n \in C^\infty(\Omega_\infty) \cap C^{2,1}(\bar{\Omega} \times (0,\infty))$ (aber u_n ist an $t = 0$ nicht unbedingt stetig). u_0 beschränkt, ist für Lösung von (15.38) wichtig.

(iv) allgemeine Anfangsdaten:
Sei $u_0 \in L_+^{m+1}(\Omega)$.

- Wähle wachsende Folge von Abschneidefunktionen $0 \leq \zeta_k(x) \leq 1$ mit $\operatorname{supp} \zeta_k \subset \Omega$, $\zeta_k \nearrow 1$ (punktweise).

  Approximation der AB:
  $u_{0k}(x) := \min(u_0(x)\zeta_k(x), k)$ erfüllt die Kriterien von (iii).

  $\Rightarrow$ (iii) liefert schwache Lösung u_k von (15.34) mit

$$u_{k+1}(x,t) \geq u_k(x,t) \text{ in } \Omega_\infty. \tag{15.41}$$

Bem: $u_0 \in L^{m+1}$ konnte nicht direkt durch $\{u_{0k}\} \subset C_0^\infty$ approximiert werden (typischerweise mit Faltung), da dann die Monotonie (15.41) nicht garantiert ist.

- laut (15.40):
  $\{u_k\}$ glm. beschränkt in $L^\infty(0,T;L^{m+1}(\Omega))$
  $\{\nabla u_k^m\}$ glm. beschränkt in $L^2(\Omega_\infty)$

  $\Rightarrow$ (mit (15.41)) u_k konv. f.ü. gegen $u \in L^\infty(0,T;L^{m+1}(\Omega))$ und u ist eindeutig;

  $\nabla u_k^m \rightharpoonup \nabla u^m$ in $L^2(\Omega_\infty)$

- u erfüllt (15.40), $\|\nabla \cdot\|_{L^2}$ ist Norm auf H_0^1
  $\Rightarrow u^m \in L^2(0,\infty;H_0^1(\Omega))$.

  u_k erfüllt (15.35) mit AB u_{0k}; $u_{0k} \to u_0$ in $L^{m+1}(\Omega)$.

  $\Rightarrow u$ erfüllt (15.35), ist schwache Lösung von (15.34).

$\square$

Bem:
Bedingung $u_0 \in L^{m+1}(\Omega)$ kommt aus Energieabschätzung (15.40); kann ausgedehnt werden [Va]:

$\forall u_0 \in L_+^1(\Omega) : \exists!$ Lösung $u \in C([0,\infty), L_+^1(\Omega))$.

PMGl. generiert also eine *nichtlineare, stark stetige Halbgruppe* auf $L_+^1(\Omega)$.

Ferner $u \in C^\infty(O); O := \{u(x,t) > 0\} \subset \Omega_\infty$

(Referenzen: [Va] § II)

16 nichtlineare Wellengleichungen

Wir betrachten hier nur semilineare Wellengleichungen (bes. NLW, NLS); diese entwickeln *keine Schocks*. Ferner nur Ganzraumprobleme, d.h. $\Omega = \mathbb{R}^n$.

16.1 Wellengleichungen als Hamilton'sche Systeme

Sei X ein Hilbert Raum, $E : X \to \mathbb{R}$ ein Funktional („Energie") mit Fréchet-Ableitung $E' : X \to X'$ (=1. Variation von E) und $J : X' \to X$ ein linearer, (bez. ${}_{X'}\langle \cdot, \cdot \rangle_X$) schiefsymmetrischer Operator. Wir betrachten Evolutionsgleichungen für $u(t) \in X$ in *Hamilton Form*:

$$u_t = JE'(u).$$

$\Rightarrow$ *Energieerhaltung*:

$$\frac{\partial E(u)}{\partial t} = {}_{X'}\langle E'(u), u_t \rangle_X = {}_{X'}\langle E'(u), JE'(u) \rangle_X = 0 \tag{16.1}$$

Bsp 1: $u = (x, p) \in X = \mathbb{R}^{2n}$; $E(x, p)$ ... Hamilton-Funktion,

$$E' = \left(\frac{\partial E}{\partial x}, \frac{\partial E}{\partial p} \right)^T; \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow x_t = \frac{\partial E}{\partial p}, \ p_t = -\frac{\partial E}{\partial x} \text{ ... \textit{Hamilton Gleichungen}}$$

Bsp 2: $u = u(x) \in X = L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$;

$$E(u) = \int \frac{1}{2} |\nabla u|^2 + F(u)\, dx \text{ mit } F : \mathbb{C} \to \mathbb{R}; \ \ J = -i;$$

$$E'(u) = -\Delta u + f(u) \text{ mit „ } f = F' \text{ " (vgl. Euler-Lagrange Gleichung)}$$

$$\Rightarrow iu_t + \Delta u - f(u) = 0 \text{ ... \textit{nichtlineare Schrödinger Gl.} (NLS)} \tag{16.2}$$

Generelle Annahme:

$$f(u) = g(|u|^2)u \text{ mit reeller Funktion } g, \ F(u) = \frac{1}{2} G(|u|^2), \ G' = g, \ G(0) = 0. \tag{16.3}$$

Besonders wichtig (z.B. in nichtlinearer Optik/Lasers: t-Achse = Ausbreitungsrichtung):

$f(u) = \pm|u|^2 u$ ... (de-)fokusierende kubisch-NLS

Bsp 3:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in X = H^1 \times L^2;\ E\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \int \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{2}|\nabla u|^2 + F(u)\,dx$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}_{=J}\underbrace{\begin{pmatrix} -\Delta u + f(u) \\ v \end{pmatrix}}_{=E'} \text{ mit } F' = f;$$

bzw. (mit $v = u_t$):

$$u_{tt} - \Delta u + f(u) = 0 \text{ ... } \textit{nichtlineare Wellengleichung} \text{ (NLW)} \tag{16.4}$$

Generelle Annahme (oBdA):
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(0) = 0, F(0) = 0$.

Spezialfall: $f(u) = m^2 u$

$$u_{tt} - \Delta u + m^2 u = 0 \text{ ... } \textit{Klein-Gordon Gleichung} \text{ der relativistischen Quantenmechanik} \tag{16.5}$$

Physikalische Motivation: relativist. Energie: $E^2 = c^2 p^2 + m^2 c^4$

Quantisierungsregeln (vgl. Schrödinger Gl. mit $E = \frac{p^2}{2m}$):
$E \longrightarrow i\hbar\partial_t,\ p \longrightarrow -i\hbar\nabla$
$\Rightarrow -\hbar^2 u_{tt} = -\hbar^2 c^2 \Delta u + m^2 c^2 u$

Bsp 4:

$$X = H^1(\mathbb{R}); E(u) = \int \frac{1}{2}|u_x|^2 + F(u)\,dx;\ \ J = \partial_x$$

$\Rightarrow u_t = \partial_x(-\partial_x^2 u + F'(u))$ ... verallgemeinerte *Korteweg-de Vries Gleichung*
Für $F = 3u^2$ ... Standard KdV

(Referenzen: [Stra] § 1)

16.2 Abschätzungen und Erhaltungsgrößen

... sind wesentlich für Beweis der Existenz von Lösungen und deren strukturellem Verhalten (z.B. für $t \to \infty$).

Satz 16.1 *(Riesz-Thorin-Interpolation); Bew: [RS2])*
Seien $\langle M, \mu\rangle$ und $\langle N, \nu\rangle$ Maßräume und sei $T : L^{p_0}(M, d\mu) \cap L^{p_1}(M, d\mu) \to L^{q_0}(N, d\nu) \cap L^{q_1}(N, d\nu)$ eine lineare Abbildung mit $1 \leq p_0, p_1, q_0, q_1 \leq \infty$ und

$$\|Tf\|_{q_0} \leq M_0\|f\|_{p_0}, \quad \|Tf\|_{q_1} \leq M_1\|f\|_{p_1}$$

$\Rightarrow \exists!$ *Erweiterung $T : L^{p_t} \to L^{q_t}$ mit*

$$\frac{1}{p_t} = \frac{t}{p_1} + \frac{1-t}{p_0}, \quad \frac{1}{q_t} = \frac{t}{q_1} + \frac{1-t}{q_0},$$

$$\|Tf\|_{q_t} \leq M_0^{1-t} M_1^t \|f\|_{p_t}.$$

freie Schrödinger Gleichung:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} iu_t + \Delta u & = & 0,\ \mathbb{R}^n,\ t \in \mathbb{R} \\ u(x,0) & = & u_0(x) \end{array} \right. \tag{16.6}$$

Lösungsabschätzungen durch Interpolation in Lemma 12.2:

Lemma 16.1 *Sei $u_0 \in L^p(\mathbb{R}^n)$ für ein $p \in [1,2]$*

$$\Rightarrow \|u(\cdot,t)\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)} \leq (4\pi t)^{\frac{n}{2}-\frac{n}{p}} \|u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \tag{16.7}$$

Gemischte *Raum-Zeit-Abschätzung* in $L^r(L^p) = L^r(\mathbb{R}_t; L^p(\mathbb{R}^n_x))$:

Lemma 16.2 *(Strichartz-Abschätzung) Sei $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^n) \Rightarrow$*

(i)

$$\|u\|_{L^{2+\frac{4}{n}}(L^{2+\frac{4}{n}})} \leq c\|u_0\|_{L^2} \tag{16.8}$$

(ii)

$$\|u\|_{L^r(L^p)} \leq c\|u_0\|_{L^2} \tag{16.9}$$

mit $r = \frac{4p}{n(p-2)}$, $\quad 2 \leq p < \frac{2n}{n-2}$ ($p \leq \infty$ für $n = 1$ oder $n = 2$)

Bew: (i) in [Stra], [RS2]; (ii) durch Interpolation zwischen (i) und $\|u\|_{L^\infty(L^2)} = \|u_0\|_{L^2}$.

Bem: (16.8), (16.9) bedeutet, dass u für $t \to \pm\infty$ in gewissem Sinn abklingt; $u(t)$ ist für f.a. $t \in \mathbb{R}$ regulärer (d.h. in $L^p(\mathbb{R}^n_x)$, $p > 2$) als die AB u_0. Für eine *reversible* Gleichung ist das bemerkenswert! Kann daher auch nur für f.a. $t \in \mathbb{R}$ gelten.

Lineare Wellengleichung:

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u &= 0,\ \mathbb{R}^t,\ t \in \mathbb{R} \\ u(x,0) &= u_0(x) \\ u_t(x,0) &= u_1(x) \end{cases} \tag{16.10}$$

Lemma 16.3 *Sei $u_0 \equiv 0$, $u_1 \in W^{[\frac{n}{2}],1}(\mathbb{R}^n)$*

$$\Rightarrow \|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \le ct^{-\frac{n-1}{2}} \|u_1\|_{W^{[\frac{n}{2}],1}(\mathbb{R}^n)} \tag{16.11}$$

Bew:

- $\underline{n=1}$ aus d'Alembert'scher Lösung (siehe §11.1)
- $\underline{n=3}$ allgemeine Lösungsformel (siehe [Wh] §7.6):

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{4\pi t}\int\limits_{|y-x|=t} u_0(y)\,dS_y\right] + \frac{1}{4\pi t}\int\limits_{|y-x|=t} u_1(y)\,dS_y \\ &\overset{\text{Div. Satz}}{=} \frac{1}{4\pi t}\int\limits_{|y-x|\le t} \operatorname{div}_y\left(\underbrace{\frac{y-x}{t}}_{=\nu} u_1(y)\right) dy \\ &\le \frac{1}{4\pi t}\int\limits_{|y-x|\le t} |\nabla u_1(y)| + \frac{3}{t}|u_1(y)|\,dy \end{aligned} \tag{16.12}$$

  ν ... äußerer Normalenvektor

  Ferner:

$$\int\limits_{|y-x|\le t} |u_1|\,dy \overset{\text{Hölder}}{\le} ct\|u_1\|_{L^{\frac{3}{2}}(\mathbb{R}^3)} \overset{(*)}{\le} ct\|\nabla u_1\|_{L^1(\mathbb{R}^3)}$$

  (*) Gagliardo-Nierenberg-Ungleichung

- Für allgemeines n: [Stra]

□

Bem: Grund für das Abklingen in (16.12) ist die Wellenausbreitung entlang von Charakteristiken in einer wachsenden Kugel der Dimension $n-1$. Andererseits bleibt $\|u(t)\|_{L^2}$ beschränkt (→ Übung).

Erhaltungsgrößen:
systematische Herleitung mit dem *Noether Theorem*:

Ist ein Variationsproblem invariant unter einer Transformationsgruppe, so erfüllt die EL-Gleichung ein Erhaltungsgesetz.

Sei X Banach Raum und $\mathcal{E} : X \to \mathbb{R}$ ein zu minimierendes Funktional. Sei $\{T(s),\ s \in \mathbb{R}\}$ eine Gruppe von linearen Transformationen auf X (also $T(0) = I$) mit

$$\mathcal{E}(T(s)u) = \mathcal{E}(u) \quad \forall s \in \mathbb{R},\ \forall u \in X.$$

$\frac{d}{ds}$ an $s = 0 \Rightarrow$

$${}_{X'}\langle \mathcal{E}'(u), Lu \rangle_X = 0 \qquad \forall u \in X \tag{16.13}$$

mit $L = \frac{d}{ds}T(s)\big|_{s=0}$ (*Generator* der Transformationsgruppe) und der Fréchet-Ableitung $\mathcal{E}'$.

Bsp 1: Sei $\mathcal{E}(u) = \int \frac{1}{2}|\nabla u|^2 + F(u)\, dx$; mit EL-Gleichung $-\Delta u + F'(u) = 0$.

Interpretation von (16.13):

$$\langle \mathcal{E}'(u), Lu \rangle = \int [-\Delta u + F'(u)] \cdot Lu\, dx \tag{16.14}$$

verschwindet (formal), da Integrand in Divergenz-Form (in x).

Bsp 2: Sei

$$\mathcal{E}(u) = \iint\limits_{\mathbb{R}^{n+1}} -\frac{1}{2}u_t^2 + \frac{1}{2}|\nabla u|^2 + F(u)\, dx\, dt \tag{16.15}$$

(rein formales Integral, Konvergenz unklar) mit $F(0) = 0$; EL-Gleichung ist NLW (mit $F' = f$).

Betrachte *Zeittranslation* $T(s) : u(x,t) \mapsto u(x, t+s)$ mit Generator $L = \partial_t$. Multipliziere NLW mit $u_t \Rightarrow$

$$[u_{tt} - \Delta u + F'(u)]u_t = \partial_t \left[\underbrace{\frac{1}{2}u_t^2 + \frac{1}{2}|\nabla u|^2 + F(u)}_{=:e}\right] - \mathrm{div}_x \left[\underbrace{u_t \nabla u}_{=:p}\right] = 0 \tag{16.16}$$

(analog zu (16.14) in (x,t)-Divergenz-Form), mit *Energiedichte* $e(u)$, *Impulsdichte* $p(u)$.

$\Rightarrow$ (mit geeigneten Randbedingungen für $|x| \to \infty$):

$$E(u) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{2}u_t^2 + \frac{1}{2}|\nabla u|^2 + F(u)\, dx = \text{ const in } t,$$

d.h. *Energieerhaltung* (vgl. Bsp 2 aus § 16.1 und (16.1))

Anwendung: aus (16.16) folgt für $F(u) \geq 0$, dass sich Signale in der NLW höchstens mit Geschwindigkeit 1 ausbreiten; Bew: [Stra] §2.

Bsp 3: Die *Streckungstransformation* $T(s) : u(x,t) \mapsto \lambda^{\frac{n-1}{2}} u(\lambda x, \lambda t)$; $\lambda = 1 + s$ mit Generator $L = t\partial_t + x \cdot \nabla + \frac{n-1}{2}$ läßt $\mathcal{E}(u)$ aus (16.15) zumindest für NLW mit $F = 0$ invariant.

$\Rightarrow$ *Streckungsidentität* („dilation identity"):

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} te + x \cdot \nabla u u_t + \frac{n-1}{2} u u_t \, dx = -\frac{1}{2} \int\limits_{\mathbb{R}^n} H(u)\, dx \tag{16.17}$$

mit $H(u) := (n-1)uf(u) - 2(n+1)F(u)$

Bsp 4: Sei

$$\mathcal{E}(u) = \iint\limits_{\mathbb{R}^{n+1}} \frac{1}{2} \operatorname{Im} u_t \bar{u} + \frac{1}{2}|\nabla u|^2 + F(u)\, dx\, dt$$

mit Annahme (16.3); EL-Gleichung ist NLS.

(i) Die Streckung $u(x,t) \mapsto \lambda^{\frac{n}{2}} u(\lambda x, \lambda^2 t)$; $\lambda = 1 + s$ mit Generator $L = 2t\partial_t + x \cdot \nabla + \frac{n}{2}$ führt auf die *Streckungsidentität*:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} \int \frac{1}{2} \operatorname{Im}(x \cdot \nabla \bar{u} u) + t|\nabla u|^2 + 2tF(u)\, dx = -\frac{1}{2} \int K(u)\, dx \tag{16.18}$$

mit $K(u) := nf(u)\bar{u} - 2(n+2)F(u)$.

(ii) *pseudo-konforme Identität* (basiert auch auf Noether Theorem; Herleitung [Ca]):

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} \int \frac{1}{2}|xu - 2it\nabla u|^2 + 4t^2 F(u)\, dx = -2t \int K(u)\, dx \tag{16.19}$$

Anwendung: Sei $K \geq 0$ und $F \geq 0$ (z.B. defokusierende NLS: $f(u) = |u|^2 u$, $F(u) = \frac{1}{4}|u|^4, K(u) = \left(\frac{n}{2} - 1\right)|u|^4 \geq 0$ für $n \geq 2$) $\Rightarrow$

a)
$$4t^2 \int\limits_{\mathbb{R}^n} F(u)\,dx \le C = \frac{1}{2} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |xu_0(x)|^2\,dx \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow \int F(u)\,dx = O(t^{-2})$ ... Einfluss des nichtlinearen Terms verschwindet für $t \to \pm\infty$.

b) $xu_0 \in L^2(\mathbb{R}^n) \Rightarrow xu(t) - 2it\nabla u(t) \in L^2(\mathbb{R}^n)$
falls $u(t) \in L^2(\mathbb{R})$, dann gilt: $xu(t) \in L^2_{\text{loc}} \Rightarrow \nabla u(t) \in L^2_{\text{loc}}$

also: Gewinn einer Ortsableitung für $t > 0$

(iii) geschickte Kombination von (16.18), (16.19) liefert die *Varianzidentität*:
$$\frac{d^2}{dt^2} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |x|^2\,|u|^2\,dx = 16E(u) + 4\int K(u)\,dx, \tag{16.20}$$
mit der Energie $E(u) = \int \frac{1}{2}|\nabla u|^2 + F(u)\,dx$

(Referenzen: [Stra] § 1-2, 4; [RS2] § IX.4; [SS] § 1-2; [Ca] § 7.1)

16.3 globale Lösungen von NLS, NLW

- betrachte zunächst lineare inhomogene Schrödinger Gleichung

$$\begin{cases} iu_t + \Delta u &= h(x,t) & , x \in \mathbb{R}^n,\ t \in \mathbb{R} \\ u(x,0) &= u_0 & \in L^2(\mathbb{R}^n) \end{cases} \tag{16.21}$$

Sei $T_0(s) := e^{is\Delta}$, $s \in \mathbb{R}$ die *Evolutionsgruppe* der freien Schrödinger Gleichung auf $L^2(\mathbb{R}^n)$ (siehe Satz 12.6).

$\forall s \in \mathbb{R}$ ist $T_0(s)$ unitär, d.h.
$$(T_0(s)u, v) = (u, T_0(-s)v) \quad \forall u, v \in L^2(\mathbb{R}^n)$$

- Integralform für Lösung von (16.21) (*Duhamel Formel*):

$$u(t) = T_0(t)u_0 - i\int\limits_0^t T_0(t-s)h(s)\,ds \tag{16.22}$$

Satz 16.2 *Sei* $h \in L^{r'}_{loc}(\mathbb{R}; L^{1+\frac{1}{p}}(\mathbb{R}^n))$ *mit* $1 < p < 1 + \frac{4}{n-2}$ *(bzw.* $1 < p < \infty$ *für* $n = 1, 2$*) und* $r = \frac{4}{n}\frac{p+1}{p-1}$ $\Rightarrow$ *(16.21) hat eine eindeutige* (milde) *Lösung* $u \in C(\mathbb{R}; L^2(\mathbb{R}^n))$*; ist durch (16.22) gegeben.*

Bew:
- $T_0(t)u_0 \in C(L^2)$ laut Satz 16.2
- Abschätzung des inhomogenen Terms

$$v(t) := -i \int_0^t T_0(t-s)h(s)\,ds$$

$$\begin{aligned}
\forall t : \|v(t)\|^2_{L^2} &= (v(t), v(t)) \\
&\overset{T_0(s)\text{ unitär}}{=} \int_0^t \int_0^t (T_0(\sigma - s)h(s), h(\sigma))\,ds\,d\sigma \\
&\overset{\text{Hölder}}{\leq} \int_0^t \int_0^t \|T_0(\sigma - s)h(s)\|_{L^{p+1}} \|h(\sigma)\|_{L^{1+\frac{1}{p}}}\,ds\,d\sigma \\
&\overset{(16.7)}{=} c \int_0^t \int_0^t |\sigma - s|^{-\frac{2}{r}} \|h(s)\|_{L^{1+\frac{1}{p}}} \|h(\sigma)\|_{L^{1+\frac{1}{p}}}\,ds\,d\sigma \\
&\overset{(*)}{\leq} c\|h\|^2_{L^{r'}(0,t;L^{1+\frac{1}{p}}(\mathbb{R}^n))}
\end{aligned} \tag{16.23}$$

$\Rightarrow v \in C(L^2)$; u aus (16.22) ist eindeutig.

(*) folgt mit *verallgemeinerter Young-Ungleichung* und Hölder:

$$\int_0^t |\sigma - s|^{-\frac{2}{r}} \|h(s)\|_{L^{1+\frac{1}{p}}}\,ds$$

$$= |\sigma|^{-\frac{2}{r}} * (\|h(\sigma)\|_{L^{1+\frac{1}{p}}} \chi_{[0,t]}(\sigma)) \in L^r(\mathbb{R}_\sigma)$$

□

Lemma 16.4 *(verallgemeinerte Young-Ungleichung) Sei* $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ *mit* $1 < p < \infty$, $0 < q < n$; $\frac{1}{p} + \frac{q}{n} - 1 = \frac{1}{r}$ *mit* $1 < r < \infty$.

$$\Rightarrow \|\,|x|^{-q} * f\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} \leq C\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Bew: [RS2]

- betrachte NLS

$$\begin{cases} iu_t + \Delta u - f(u) &= 0, \quad x \in \mathbb{R}^n,\ t \in \mathbb{R} \\ u(x,0) &= u_0 \end{cases} \tag{16.24}$$

mit $f(u) = g(|u|^2)u,\ F(u) = \frac{1}{2}G(|u|^2),\ G' = g,\ G(0) = 0;$

$$f \in C^1(\mathbb{R}) \text{ mit } |f'(u)| \le c|u|^{p-1} \tag{16.25}$$

für ein $p \in (1, 1 + \frac{4}{n-2})$ (bzw. $p \in (1, \infty)$ für $n = 1, 2$), und

$$F(u) \ge -c|u|^2 - c|u|^{q+1} \text{ für ein } q < 1 + \frac{4}{n}. \tag{16.26}$$

Bsp: $n = 1, f(u) = \pm|u|^2 u, F(u) = \pm\frac{1}{4}|u|^4$: (16.25),(16.26) sind erfüllt.
$n = 2$ oder 3, $f(u) = +|u|^2 u$: Bedinungen sind auch erfüllt.

Energie-a-priori-Abschätzungen:

Energie

$$E(u) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{2}|\nabla u|^2 + F(u)\, dx$$

laut § 16.1-2: $\|u(t)|_{L^2} = \|u_0\|_{L^2},\ E(u(t)) = E(u_0) \quad \forall t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{1}{2}\|\nabla u(t)\|_{L^2}^2 &= E(u_0) - \int F(u(t))\, dx \\ &\overset{(16.26)}{\le} E(u_0) + c\|u(t)\|_{L^2}^2 + c\|u(t)\|_{L^{q+1}}^{L^{q+1}} \\ &\overset{\text{Sobolev Ungl.}}{\le} E(u_0) + c\|u_0\|_{L^2}^2 + c\|u_0\|_{L^2}^{q+1-\frac{n}{2}(q-1)} \cdot \|\nabla u(t)\|_{L^2}^{\frac{n}{2}(q-1)} \end{aligned}$$

wegen $\frac{n}{2}(q-1) < 2$ (aus (16.26)):

$$\|\nabla u(t)\|_{L^2} \le C(u_0) \quad \forall t \in \mathbb{R}, \tag{16.27}$$

$$|\int F(u(t))\, dx| \le C(u_0) \quad \forall t \in \mathbb{R}, \tag{16.28}$$

$$\|u(t)\|_{L^{p+1}} \le C\|u(t)\|_{H^1} \le C(\|u_0\|_{H^1}, E(u_0)) \quad \forall t \in \mathbb{R}, \tag{16.29}$$

mit Sobolev Ungleichung und p aus (16.25).

Satz 16.3 *Sei $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^n)$ und $E(u_0) < \infty$.*
$\Rightarrow$ (16.24) hat eindeutige Lösung $u \in X := C_B(\mathbb{R}; H^1(\mathbb{R}^n))$.

Bew:

(i) Eindeutigkeit:
seien $u_{1,2} \in X$ Lösungen $\Rightarrow$ (mit Sobolev Einbettung) $u_{1,2} \in L^\infty(\mathbb{R}; L^{p+1}(\mathbb{R}^n))$
$\Rightarrow$ (mit Duhamel); $r = \frac{4}{n}\frac{p+1}{p-1} > 2$:

$$\forall t \in \mathbb{R}: \quad u_1(t) - u_2(t) = i\int\limits_0^t T_0(t-s)[f(u_1(s)) - f(u_2(s))]\, ds$$

$$\Rightarrow \|u_1(t) - u_2(t)\|_{L^{p+1}} \overset{(16.7)}{\leq} c\int\limits_0^t (t-s)^{-\frac{2}{r}} \|f(u_1(s)) - f(u_2(s))\|_{L^{1+\frac{1}{p}}}\, ds$$

$$\overset{\text{MWS, (16.25), Hölder}}{\leq} c\int\limits_0^t (t-s)^{-\frac{2}{r}} \left[\|u_1(s)\|_{L^{p+1}}^{p-1} + \|u_2(s)\|_{L^{p+1}}^{p-1}\right] \|u_1(s) - u_2(s)\|_{L^{p+1}}\, ds$$

$$\overset{(16.29)}{\leq} c(u_0)T^{1-\frac{2}{r}} \sup_{0\leq t\leq T} \|u_1(t) - u_2(t)\|_{L^{p+1}}$$

$\Rightarrow u_1 \equiv u_2$ auf $[0,T]$ für $c(u_0)T^{1-\frac{2}{r}} < 1$

Gleiches Argument auf $[T,2T], [2T,3T], \ldots$ wiederholen $\Rightarrow u_1 \equiv u_2 \;\; \forall t$.

(ii) Existenz:
- Integralform von (16.24):

$$u(t) = \underbrace{T_0(t)u_0}_{=:v(t)} + i\int\limits_0^t T_0(t-s)f(u(s))\, ds =: v(t) + N(u)(t) \tag{16.30}$$

- betrachte folgende *abgeschlossene* Teilmenge eines Banach Raumes:

$$Y := \left\{u \in C_t(L_x^2) \cap L_t^r(L_x^{p+1}) \;\middle|\; \|u\|_{L^\infty(H^1)} + \|u\|_{L^r(W^{1,p+1})} \leq R\right\}$$

mit der Norm $\|u\|_Y := \|u\|_{C(L^2)} + \|u\|_{L^r(L^{p+1})}$.

Achtung: Kugel ist bez. strikterer Norm als $\|\cdot\|_Y$ definiert (Abgeschlossenheit $\rightarrow$ Übung)!

- $R = R(u_0) := 2(2c+1)\|u_0\|_{H^1(\mathbb{R}^n)}$, mit c aus Strichartz-Ungleichung (16.9):

$$\|v\|_{L_t^r(L_x^{p+1})} \leq c\|u_0\|_{L^2} \tag{16.31}$$

Analog gilt: $\|\nabla v\|_{L^r(L^{p+1})} \leq c\|\nabla u_0\|_{L^2}$, da ∇ und $T_0(t) = e^{-is\Delta}$ kommutieren.
Ferner: $\|v\|_{H^1} = \|u_0\|_{H^1}$

- Insges.: $v \in Y$ und

$$\|v\|_{L^\infty(H^1)} + \|v\|_{L^r(W^{1,p+1})} \leq \frac{R}{2}$$

- Bew-Idee (Details in [Stra]):
Für T hinreichend klein ist die Abbildung $A : u \mapsto v + N(u)$ (=Picard-Iteration) eine Kontraktion in Y:

- zu zeigen:

  a) für $u \in Y$ gilt: $N(u) \in Y$ mit $\|N(u)\|_{L^\infty(H^1)} + \|N(u)\|_{L^r(W^{1,p+1})} \leq \frac{R}{2}$; also $A(u) \in Y$;

  b) $\|N(u_1) - N(u_2)\|_Y \leq C(T,R)\|u_1 - u_2\|_Y$, wobei $C(T,R) \xrightarrow{T\to 0} 0$.

$\Rightarrow$ (mit FPS von Banach) $\exists!$ Lösung $u \in L^\infty([0,T]; H^1(\mathbb{R}^n))$

- aus (16.30) folgt sogar $u \in C([0,T]; H^1(\mathbb{R}^n))$
- T hängt nur von $\|u_0\|_{H^1}$ ab, und $\|u(t)\|_{H^1} \leq C \quad \forall t \in \mathbb{R}$ (laut (16.27)) $\Rightarrow$ Lösung kann auf $[T, 2T], [-T, 0]$, usw. fortgesetzt werden.

$\square$

Reformulierung der nichtlinearen Klein-Gordon-Gleichung (NLKG):

$$u_{tt} - \Delta u + m^2 u = -\lambda |u|^{p-1}u, \ \ x \in \mathbb{R}^n, \ t \in \mathbb{R} \tag{16.32}$$

sei

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} u(x,t) \\ v(x,t) \end{pmatrix} \text{ mit } v = u_t \text{ und } f(\Phi) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\lambda|u|^{p-1}u \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Phi' - \begin{pmatrix} 0 & I \\ \Delta - m^2 & 0 \end{pmatrix} \Phi = f(\Phi) \\ \Phi(0) = \Phi_0 = \begin{pmatrix} u_0(x) \\ v_0(x) \end{pmatrix} \in X := H^1(\mathbb{R}^n) \times L^2(\mathbb{R}^n) \end{cases} \tag{16.33}$$

- betrachte zunächst lineare Klein-Gordon Gleichung für $m > 0$:

$$\Phi' = -iA\Phi, \ \Phi(0) = \Phi_0 \in X \tag{16.34}$$

mit Operator

$$A := i \begin{pmatrix} 0 & I \\ \Delta - m^2 & 0 \end{pmatrix}$$

• Operator $B^2 := -\Delta + m^2 \geq 0$, selbstadjungiert auf $L^2(\mathbb{R}^n)$ mit Definitionsgebiet $D(B^2) = H^2(\mathbb{R}^n)$ (vgl. § 12)

Definiere $B := \sqrt{-\Delta + m^2} \geq 0$ mittels FT:

$$Bu = \mathcal{F}^{-1}_{y \to x}\left(\sqrt{|y|^2 + m^2}\hat{u}(y)\right)$$

mit $D(B) = H^1(\mathbb{R}^n)$, da:

$$\begin{aligned} \|Bu\|^2_{L^2} &\overset{\text{Plancherel}}{=} \|\sqrt{|y|^2 + m^2}\hat{u}(y)\|^2_{L^2} \\ &= \int (|y|^2 + m^2)|\hat{u}(y)|^2\, dy \\ &= \|\nabla u\|^2_{L^2} + \underbrace{m^2}_{>0} \|u\|^2_{L^2} \text{ ... äquivalent zu } \|u\|^2_{H^1} \end{aligned}$$

• $\|\Phi\|^2_X := \|Bu\|^2_{L^2} + \|v\|^2_{L^2}$

• A ist selbstadjungiert auf X mit $D(A) = H^2(\mathbb{R}^n) \times H^1(\mathbb{R}^n)$

• laut *Satz von Stone* ([Pa]: $-iA$ ist infinitesimaler Generator einer C_0-Gruppe von unitären Operatoren auf Hilbert Raum $H \Leftrightarrow A$ ist s.a. auf H):

$$W(t) := e^{-itA} = \begin{pmatrix} \cos tB & B^{-1}\sin tB \\ -B\sin tB & \cos tB \end{pmatrix}$$

(jeder Term via FT definiert; vgl. § 11.2) ist C_0-Gruppe auf X. $W(t)\Phi_0 \in C(\mathbb{R}; X)$ löst (16.34).

• NLKG in Integralform:

$$\Phi(t) = W(t)\Phi_0 + \int_0^t W(t-s)f(\Phi(s))\, ds \tag{16.35}$$

$\rightarrow$ suchen t-globale milde Lösung $\Phi \in C(\mathbb{R}; X)$; reellwertig, falls $u_0(x)$ und $v_0(x)$ reell.

• <u>Energieerhaltung</u>:

laut § 16.1:

$$E(\Phi(t)) := \int \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{2}|\nabla u|^2 + \frac{m^2}{2}u^2 + F(u)\, dx = E(\Phi_0), \tag{16.36}$$

mit

$$F(u) = \frac{\lambda}{p+1}|u|^{p+1} \geq 0$$

Satz 16.4 *Die NLKG (16.32) mit $m \geq 0$, $\lambda \geq 0$, $1 \leq p \leq \frac{n}{n-2}$ ($1 \leq p < \infty$ für $n = 1, 2$) und $\Phi_0 \in X$ hat eine eindeutige milde Lösung $\Phi \in C(\mathbb{R}; X)$.*

Bew-Idee: (Details: [R])

(i) t-lokale Lösung für $m > 0$:
- $f : X \to X$, da für $\Phi = (u, v)^T$:

$$\|f(\Phi)\|_X = \lambda \| \, |u|^{p-1} u \|_{L^2} = \lambda \|u\|^p_{L^{2p}} \overset{\text{Sobolev}}{\leq} C\|u\|^p_{H^1} \leq C\|\Phi\|^p_X$$

- also: f lokal Lipschitz in X
- laut Satz 6.1.4, [Pa] (vgl. auch Satz 15.7): (16.35) hat eindeutige milde Lösung $\Phi \in C((t_{\text{min}}, t_{\text{max}}); X)$. Falls $t_{\text{max}} < \infty$, dann $\lim_{t \nearrow t_{\text{max}}} \|\Phi(t)\|_X = \infty$ (analog für t_{min})

(ii) t-globale Lösung für $m > 0$:

$$E(\Phi_0) \overset{\text{Sobolev}}{\leq} C(\|\Phi_0\|^2_X + \|\Phi_0\|^{p+1}_X),$$

da $p + 1 \leq \frac{2n}{n-2} = p^*$ ... Sobolev Index für $n \geq 3$

Umgekehrt:

$$\begin{aligned} \|\Phi(t)\|^2_X &= \|\nabla u\|^2_{L^2} + m^2\|u\|^2_{L^2} + \|v\|^2_{L^2} \\ &\overset{(*)}{\leq} 2E(\Phi(t)) + m^2\|u(t)\|^2_{L^2} \\ &\leq 2E(\Phi_0) + m^2 \left[\frac{1}{2}\|\Phi_0\|_X + t^2 E(\Phi_0)\right] \quad \forall t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

mit $u(t) = u_0 + \int_0^t v(s)\, ds \in L^2(\mathbb{R}^n) \quad \forall t \in \mathbb{R}$.
(*) Wir verwenden hier den Term $\int \frac{m^2}{2} u^2 \, dx$ von $E(\Phi)$ nicht, damit die Abschätzung auch für (iii) funktioniert.

$\Rightarrow t_{\text{max}} = -t_{\text{min}} = \infty$

- Energieerhaltung müßte aber erst für reguläre Lösungen rigoros gerechtfertigt werden; dann Dichtheitsargument.

(iii) $m = 0$:
Schreibe (16.32) mit einem $m_0 > 0$ als:

$$\Phi' - \begin{pmatrix} 0 & I \\ \Delta - m_0^2 & 0 \end{pmatrix} \Phi = \begin{pmatrix} 0 \\ -\lambda|u|^{p-1}u + m_0^2 u \end{pmatrix} =: \tilde{f}(\Phi)$$

$\tilde{f}$ ist lokal Lipschitz auf $X \Rightarrow$ Rest analog zu $m > 0$.

□

(Referenzen: [Stra] § 3; [R] § 1-2; [Pa] § 1,6)

16.4 „Explosion" von Lösungen

Bsp 1: $u_{tt} \pm u^3 = 0$

(i) pos. Vorzeichen $\Rightarrow (u_t)^2 + \frac{u^4}{2} = E = \text{const in } t$
$\Rightarrow$ alle Lösungen liegen auf geschlossenen Kurven im (u, u_t)-Phasenraum $\Rightarrow$ existieren für $t \in \mathbb{R}$

(ii) neg. Vorzeichen $\Rightarrow (u_t)^2 - \frac{u^4}{2} = E = \text{const}$
seien $u(0) = u_0$ und $u_t(0) > 0$ gegeben mit $E > 0$

$$\Rightarrow t = \int_{u_0}^{u(t)} (E + \frac{1}{2}v^4)^{-\frac{1}{2}}\, dv$$

Sei

$$T := \int_{u_0}^{\infty} (E + \frac{1}{2}v^4)^{-\frac{1}{2}}\, dv < \infty$$

also $\lim_{t \nearrow T} u(t) = \infty$, d.h. Explosion der Lösung.

Bsp 2: NLS:

$$iu_t + \Delta u - f(u) = 0,\ u(0) = u_0 \tag{16.37}$$

mit

$$K(u) := nf(u)\bar{u} - 2(n+2)F(u) \leq 0 \quad \forall u \in \mathbb{R} \tag{16.38}$$

(z.B. fokussierende kubische NLS für $n \geq 2$... Gegenstück zu Satz 16.2)

Satz 16.5 *Es gelte* $E(u_0) = \int \frac{1}{2}|\nabla u_0|^2 + F(u_0)\, dx < 0$.

$\Rightarrow$ keine glatte Lösung der NLS (16.37), (16.38) kann für alle Zeiten existieren. („glatt" heisst hinreichend differenzierbar und abklingend bei $|x| = \infty$, so dass alle Terme im Beweis definiert sind.)

Bew: laut Varianzidentität (16.20)

$$\frac{d^2}{dt^2}\int |x|^2|u|^2\,dx = 16E(u) + 4\int K(u)\,dx \le 16E(u_0)$$

$$\Rightarrow \int |x|^2\,|u(t)|^2\,dx \le 8\underbrace{E(u_0)}_{<0}t^2 + c_1 t + c_0 < 0$$

für t groß $\Rightarrow$ Widerspruch.

$\square$

Beispiel einer Explosion:
Sei $f(u) = |u|^{\frac{4}{n}}u$ (z.B. fokussierende kubische NLS für $n = 2$; das ist der relevante Fall in Optik).

Spezielle Lösung von (16.37):

$$u(x,t) = \tilde{\varphi}\left(\frac{|x|}{t^* - t}\right)\underbrace{[4\pi i(t^* - t)]^{-\frac{n}{2}}e^{\frac{i|x|^2}{4(t^*-t)}}}_{\text{FL der freien Schröd. Gl. auf } \mathbb{R}^n}\ ,\ 0 \le t < t^*$$

und $\varphi(x) = \tilde{\varphi}(|x|)$ erfüllt:

$$-\Delta\varphi - \frac{1}{(4\pi)^2}|\varphi|^{\frac{4}{n}}\varphi = 0,\ \ \mathbb{R}^n$$

$\Rightarrow$ Explosion an $x = 0$, $t = t^*$ in $L^\infty(\mathbb{R}^n)$, $H^1(\mathbb{R}^n)$, aber $\|u(t)\|_{L^2} =$ const.

(Referenzen: [Stra] § 4; [SS] § 5.1)

16.5 Stabilität von Solitonen

fokussierende NLS

$$iu_t + \Delta u + |u|^{2\sigma}u = 0,\ x \in \mathbb{R}^n,\ t \in \mathbb{R}$$

spezielle Lösungen als *stehende Welle*:

$$u(x,t) = e^{i\lambda^2 t}\varphi(x)$$

mit

$$\Delta\varphi - \lambda^2\varphi + |\varphi|^{2\sigma}\varphi = 0 \tag{16.39}$$

(Lösbarkeit: [SS] § 4.2)

für $n = 1$: (16.39) hat eindeutige (nicht konstante) Lösung (bis auf Translation)

$$g(x) = \frac{[\lambda^2(\sigma+1)]^{\frac{1}{2\sigma}}}{\cosh^{\frac{1}{\sigma}}(\lambda\sigma x)} \tag{16.40}$$

$n \in \mathbb{N}$: $\exists!$ positive, radialsymmetrische (z.B. um $x = 0$) Lösung g („Grundzustand"); klingt für $|x| \to \infty$ monoton ab.

aus Galilei-Invarianz $\Rightarrow$ *wandernde Wellen* („Soliton")

Frage: Sind diese stehenden/wandernden Wellen stabil?

Lineare Stabilitätsanalyse (Heuristik):

- kleine Störungen von $g(x)e^{i\lambda^2 t}$:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= g(x)(1+r(x,t))e^{i(\lambda^2 t + s(x,t))} \\ &\approx [g(x) + \underbrace{v(x,t)}_{:=gr} + i\underbrace{w(x,t)}_{:=gs}]e^{i\lambda^2 t} \end{aligned} \tag{16.41}$$

- Linearisierung der NLS um $ge^{i\lambda^2 t} \Rightarrow$

$$\partial_t \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & L_0 \\ -L_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}$$

mit den selbstadj. Operatoren $L_0 = -\Delta + \lambda^2 - g^{2\sigma}$, $L_1 = -\Delta + \lambda^2 - (2\sigma+1)g^{2\sigma}$

- Annahme: zeitharmonische Störung

$v, w \propto e^{i\Omega t}$, $\Omega \in \mathbb{C}$

$$\Rightarrow \Omega^2 v = L_0 L_1 v \tag{16.42}$$

- g löst (16.39)

$$\Rightarrow L_0 v = -\frac{1}{g}\operatorname{div}\left(g^2 \nabla\left(\frac{1}{g}v\right)\right)$$

$$\Rightarrow \int\limits_{\mathbb{R}^n} v L_0 v \, dx = \int \left|\nabla\left(\frac{v}{g}\right)\right|^2 g^2 \, dx \geq 0 \Rightarrow L_0 \geq 0$$

ferner: $L_0 g = 0,\ L_1(\nabla g) = 0$

- aus Monotonie von $g \Rightarrow \nabla g$ hat einzige Nullstelle an $x = 0$. Man kann zeigen: L_1 hat genau einen neg. Eigenwert; 0 ist der 2. EW (zum EV ∇g)

- suchen Vorzeichen-Information über Ω_m^2 = Minimum von Ω^2 in (16.42):

aus (16.42):

$$\Omega^2(\sqrt{L_0}^{-1} v) = \underbrace{\sqrt{L_0} L_1 \sqrt{L_0}}_{\text{selbstadj.}}(\sqrt{L_0}^{-1} v) \text{ falls } v \perp g$$

$\Rightarrow \Omega^2 \in \mathbb{R}$
für $\Omega \neq 0$ gilt für Lösungen von (16.42): $(v, g) = 0$

Lemma 16.5 *Unter obigen Annahmen gilt:*

$$\operatorname{sgn}(2 - n\sigma) = \operatorname{sgn}(\Omega_m^2)$$

<u>Beweis</u>:

- Minimum von Ω^2 auf $\{v \in L^2 \mid v \perp g\}$:

$$\Omega_m^2(\sqrt{L_0}^{-1} v, \sqrt{L_0}^{-1} v)_{L^2} = (\sqrt{L_0}^{-1} v, \sqrt{L_0} L_1 v)_{L^2}$$

$$\Omega_m^2 = \min \frac{(v, L_1 v)}{(v, L_0^{-1} v)} \quad \text{(Rayleigh Quotient)}$$

auf $\{g\}^\perp$ gilt: L_0 strikt positiv
$\Rightarrow \operatorname{sgn}(\Omega_m^2)$ wird nur durch $\operatorname{sgn}(v, L_1 v)$ bestimmt.

Betrachte daher das Minimum von

$$\frac{1}{2}(v, L_1 v) = \frac{1}{2} \int |\nabla v|^2 + [\lambda^2 - (2\sigma + 1) g^{2\sigma}] v^2 \, dx$$

auf $\{g\}^\perp$ mit $\|v\|_{L^2} = 1$;
das ist ein (quadratisches) Minimierungsproblem mit den Nebenbedingungen

$$\int v^2 \, dx = 1, \quad \int vg \, dx = 0$$

Zugehörige (modifizierte) EL-Gleichung für das Minimum $\tilde{v}$:

$$-\Delta \tilde{v} + [\lambda^2 - (2\sigma + 1) g^{2\sigma}] \tilde{v} = \quad L_1 \tilde{v} = \tilde{\mu} \tilde{v} + \alpha g, \tag{16.43}$$

$\tilde{\mu}, \alpha \in \mathbb{R}$ ... Lagrange Multiplikatoren

Wegen $\tilde{v} \perp g, \|\tilde{v}\| = 1$: $(\tilde{v}, L_1\tilde{v}) = \tilde{\mu}$

• $\alpha \neq 0$, da Grundzustände von $L_0 (= g)$ und L_1 nicht orthogonal sein können (keine Nullstellen).

• Eigenwerte von L_1: $\mu_0 < \mu_1 = 0 < \mu_2 ...$
da $g \perp \nabla g$ (=EV zu μ_1), kann (16.43) für $\mu \in (\mu_0, \mu_2)$ aufgelöst werden:

$$\tilde{v} = \alpha(L_1 - \mu)^{-1} g$$

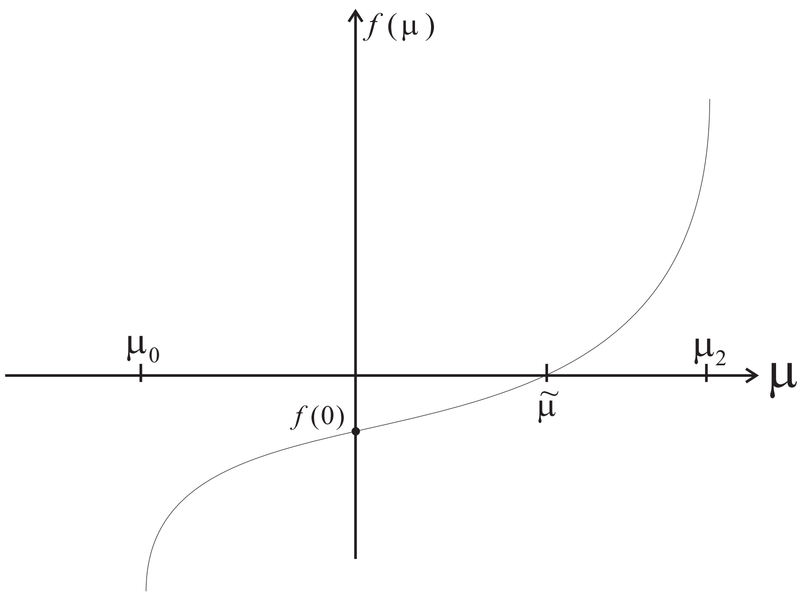
$$\Rightarrow 0 = (g, \tilde{v}) = \alpha(g, (L_1 - \mu)^{-1} g) =: \alpha f(\mu)$$

• $f : (\mu_0, \mu_2) \to \mathbb{R}$ hat Nullstelle $\tilde{\mu} \in (\mu_0, \mu_2)$, da f monoton und

$$\lim_{\mu \searrow \mu_0} f(\mu) = -\infty, \quad \lim_{\mu \nearrow \mu_2} f(\mu) = \infty$$

(folgt aus Monotonie von $(\mu_j - \mu)^{-1}$ und Spektraldarstellung von L_1.

• es gilt $\operatorname{sgn} \tilde{\mu} = -\operatorname{sgn} f(0) = -\operatorname{sgn}(g, L_1^{-1} g)$



• Bestimmung von $f(0)$:

$g(\lambda^2)$ erfüllt $L_0 g = -\Delta g + \lambda^2 g - g^{2\sigma+1} = 0$

differenzieren nach λ^2

$$\Rightarrow L_1 \frac{\partial g}{\partial \lambda^2} + g = 0$$

$$\Rightarrow f(0) = -\left(g, \frac{\partial g}{\partial \lambda^2} \right) = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \lambda^2} \int g^2 \, dx$$

- aus Skalierung $\varphi(x) = \lambda^{\frac{1}{\sigma}} \Phi(\lambda x)$ von (16.39) erhält man

$$\int g(\lambda^2)^2 \, dx = \lambda^{\frac{2}{\sigma} - n} \int g(1)^2 \, dx$$

$$\Rightarrow \operatorname{sgn} \left(\frac{\partial}{\partial \lambda^2} \int g^2 \, dx \right) = \operatorname{sgn} \left(\frac{2}{\sigma} - n \right) = -\operatorname{sgn} f(0) = \operatorname{sgn} \tilde{\mu} = \operatorname{sgn} \Omega_m^2$$

$\square$

- Klassifikation (durch heuristische Analyse):

  (i) $n\sigma > 2$:

  $$\frac{\partial}{\partial \lambda^2} \int g^2 \, dx < 0, \;\; \tilde{\mu} < 0, \; \Omega_m^2 < 0$$

  $\Rightarrow$ gestörtes Problem (16.41) hat Moden $e^{\pm |\Omega_m| t}$
  $\Rightarrow$ *instabil*

  (ii) $n\sigma < 2$:
  $\Omega_m^2 > 0 \Rightarrow$ Moden $e^{\pm i |\Omega_m| t}$
  $\Rightarrow$ *linear stabil*

  (iii) $n\sigma = 2$: keine Aussage

also: 1D-Solitonen der fokussierenden kubischen ($\sigma = 1$) NLS stabil.

rigoroser Zugang: [SS] § 4.4; [Stra] § 7

(Referenzen: [SS] § 4)

A Literaturverzeichnis

[Ca] **T. Cazenave**, *An introduction to nonlinear Schrödinger equations* , Textos de Métodos Matemáticos 22, I.M.U.F.R.J., Rio de Janeiro, 1989.

[Ev] **L. C. Evans**, *Partial Differential Equations*, AMS, 1998

[GH] **M. Giaquinta, S. Hildebrandt**, *Calculus of Variations I - The Lagrangian Formalism*, Springer, 1996.

[GT] **D. Gilbarg, N.S. Trudinger**, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer, 1977.

[KS] **D. Kinderlehrer, G. Stampacchia**, *An Introduction to Variational Inequalities and their Applications*, Academic Press (1980).

[LSU] **O.A. Ladyzenskaja, V.A. Solonnikov, N.N. Ural'ceva**, *Linear and quasilinear equations of parabolic type*, Translations of Mathematical Monographs, 23, AMS, Providence, 1968.

[Pa] **A. Pazy**, *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, Springer, 1983.

[R] **M. Reed**, *Abstract non-linear wave equations*, Lecture notes in mathematics 507, Springer 1976.

[RR] **M. Renardy & R.C. Rogers**, *An Introduction to Partial Differential Equations*, Springer, New York, 1993

[RS2] **M. Reed, B. Simon**, *Methods of Modern Mathematical Physics II: Fourier Analysis, Self-Adjointness*, Academic Press, 1975.

[Se] **J.A. Sethian**, *Level set methods and fast marching methods*, Cambridge Univ. Press, 2000

[Sh1] **R.E. Showalter**, *Hilbert Space Methods for Partial Differential Equations*, Electron. J. Diff. Eqns., 1994
http://ejde.math.swt.edu/Monographs/01/abstr.htm

[Sh2] **R.E. Showalter**, *Monotone Operators in Banach Space and Nonlinear Partial Differential Equations*, AMS, 1997
http://www.ams.org/online_bks/surv49/

[SS] **C. Sulem, P.L. Sulem**, *The nonlinear Schrödinger equation*, Springer, 1999.

[Stra] **W.A. Strauss**, *Nonlinear Wave Equations*, NSF-CBMS Research Monograph No. 73, Amer. Math. Soc., Providence, 1989.

[St] **M. Struwe**, *Variational Methods. Applications to Nonlinear Partial Differential Equations and Hamiltonian System*, Springer, 1990.

[Va] **J.L. Vazquez**, *An Introduction to the mathematical theory of the Porous Medium Equation*, in Shape Optimization and Free Boundaries (Montreal, PQ, 1990), 347–389, NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci., 380, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1992.
http://www.uam.es/personal_pdi/ciencias/jvazquez/pmebook.ps

[Wh] **G. B. Whitham**, *Linear and nonlinear waves*, Wiley, 1974.

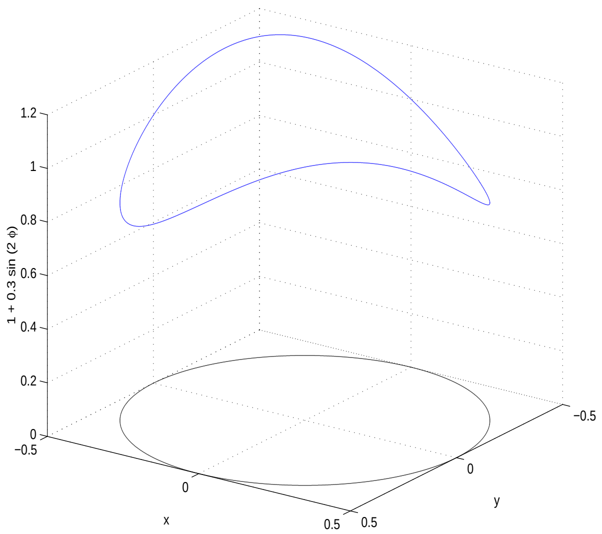
[Ze] **E. Zeidler**, *Nonlinear Functional Analysis and its Applications III - Variational Methods and Optimization*, Springer, 1985.

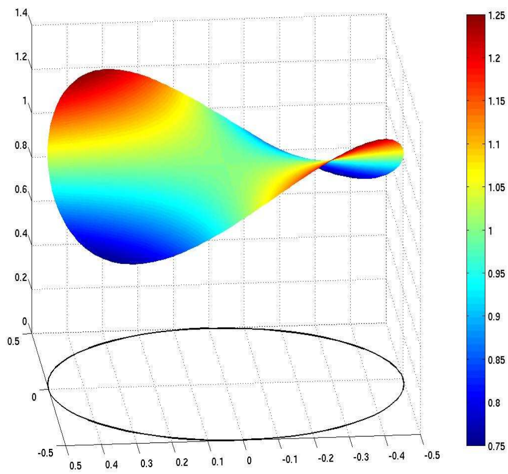
B Folien

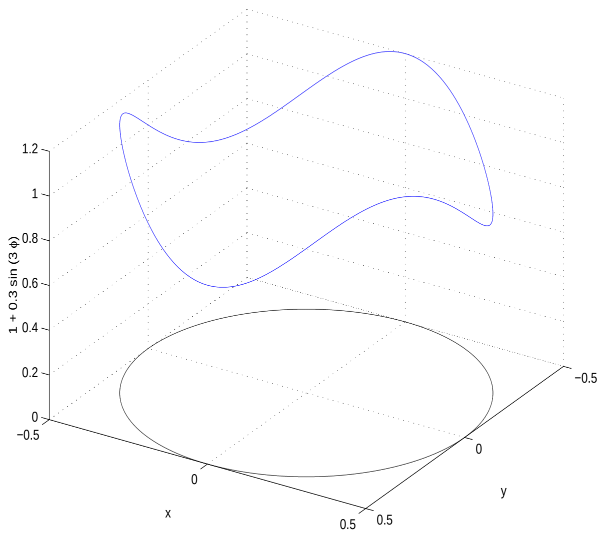
Minimalflächen

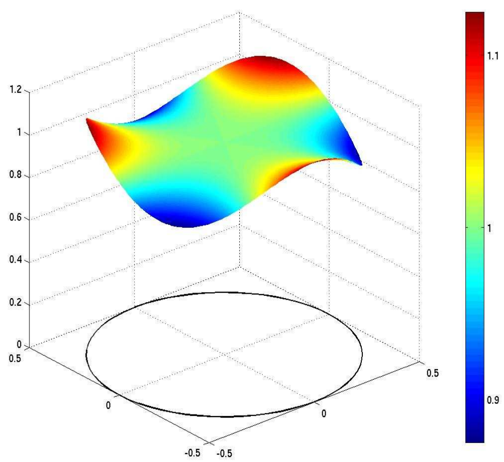
$$\begin{cases} (1+u_y^2)u_{xx} - 2u_xu_yu_{xy} + (1+u_x^2)u_{yy} &= 0, \quad \Omega \\ u &= g, \quad \partial\Omega \end{cases}$$

$$\Omega = \{x^2 + y^2 < 0.25\}$$





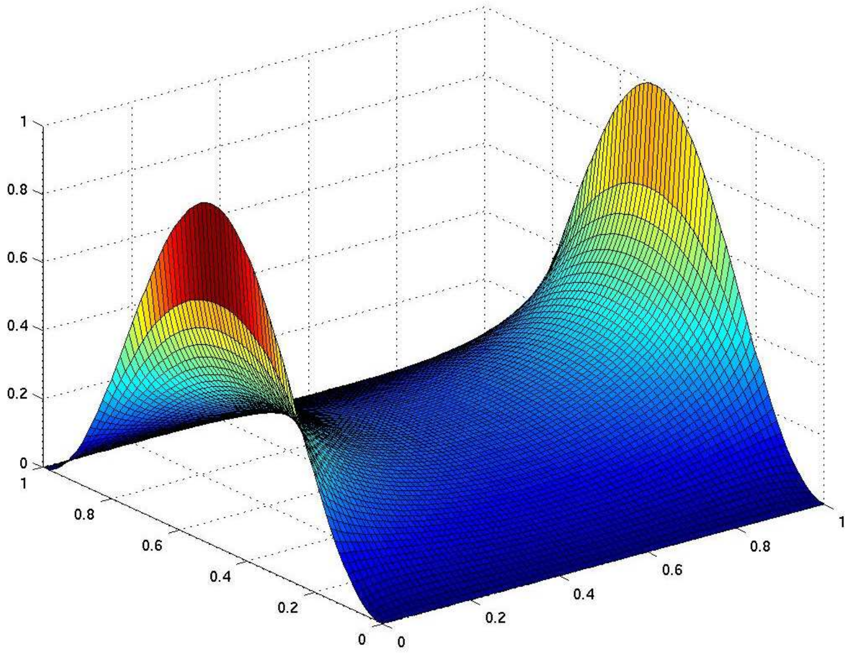




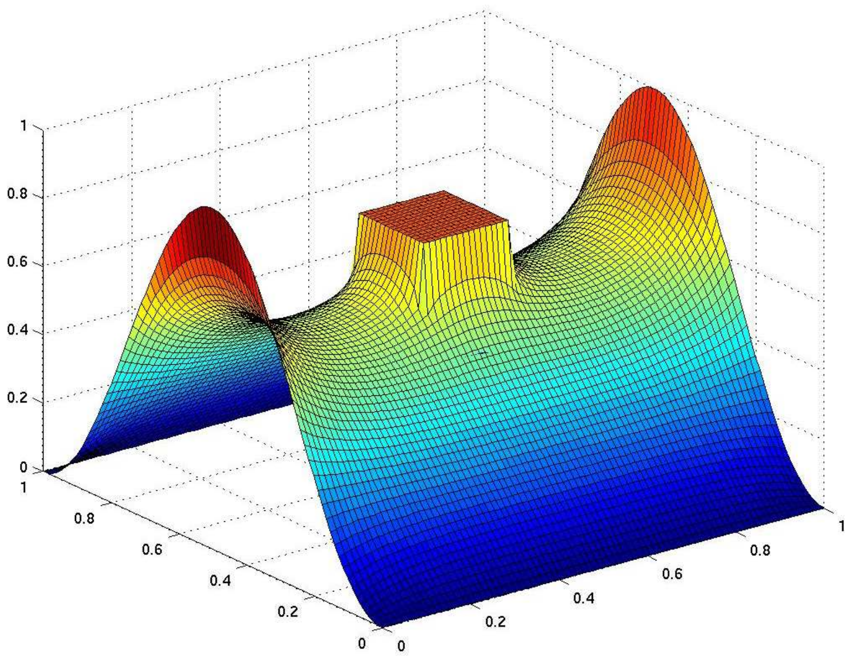
Randkurve $g(\Phi)$ auf $\partial\Omega$

Minimalfläche $u(x,y)$

Minimalflächen mit Hindernis



Minimalfläche mit Sinus-Randbedingung



Minimalfläche mit Sinus-Randbedingung über Quader-Hindernis

Hindernisproblem, “Penalty”-Methode

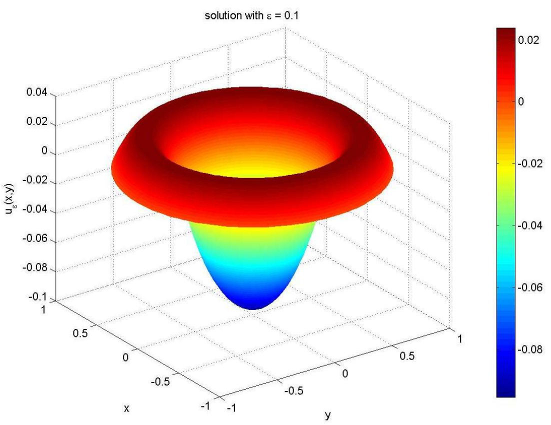
$$E(u) := \int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla u|^2 - f u \, dx \stackrel{!}{\longrightarrow} \min$$

$$\text{in } U := \{u \in H_0^1(\Omega) \mid u \geq 0\},\ \Omega = K_1(0),$$

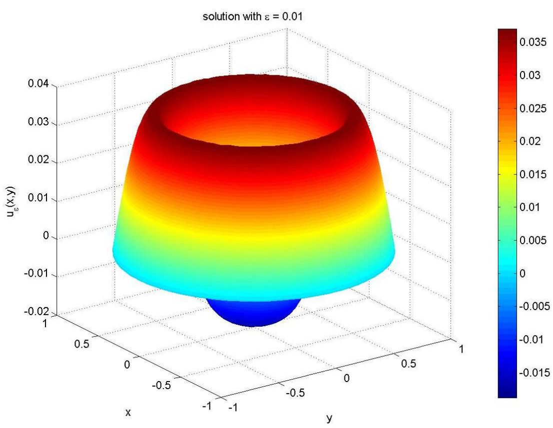
$$f(x) := \begin{cases} 1, & 0.5 < |x| < 1 \\ -2, & |x| < 0.5 \end{cases}$$

“Penalty”-Approximation: $u^\varepsilon \rightharpoonup u$ in $H_0^1(\Omega)$ für $\varepsilon \to 0$:

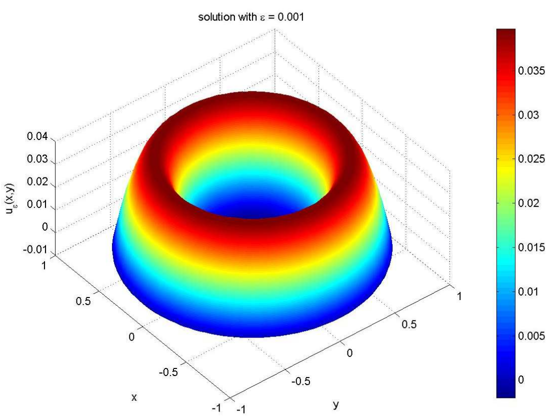
$$\begin{aligned} -\Delta u^\varepsilon + \tfrac{1}{\varepsilon} u^\varepsilon H(-u^\varepsilon) &= f, \quad \Omega \\ u^\varepsilon &= 0, \quad \partial\Omega \end{aligned}$$



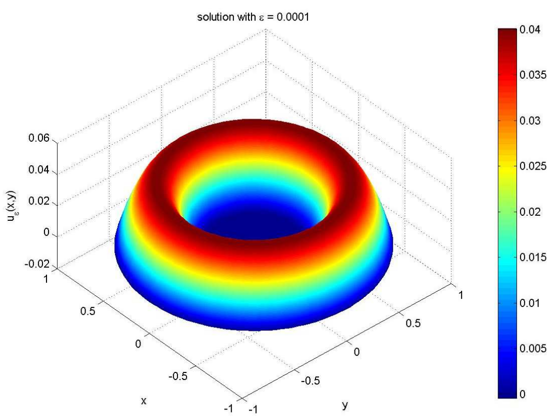
freies Minimum in $H_0^1(\Omega)$



mit Strafterm, $\varepsilon = 0.01$

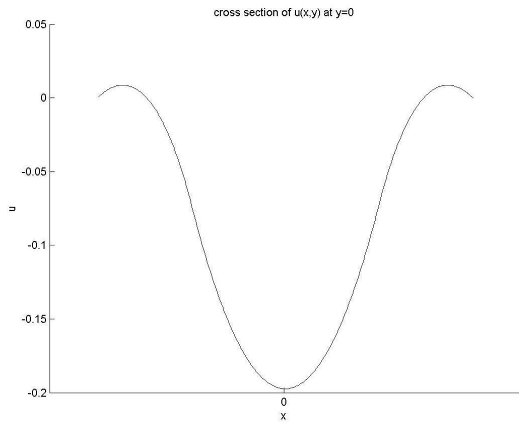


mit Strafterm, $\varepsilon = 0.001$

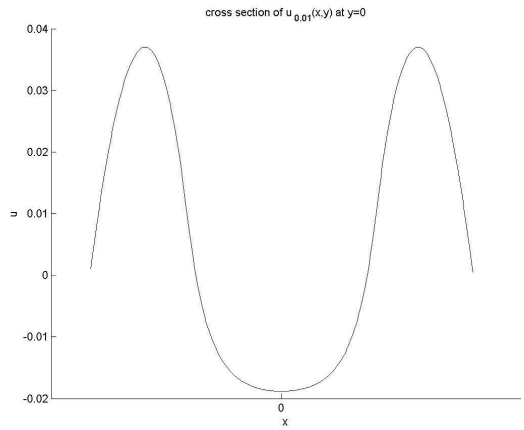


mit Strafterm, $\varepsilon = 0.0001$

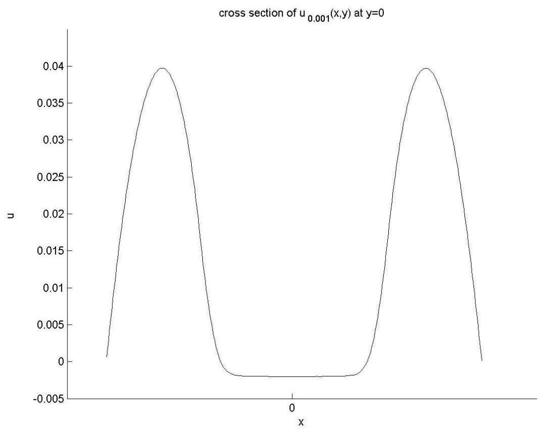
“Penalty”-Approximationen – Querschnitte



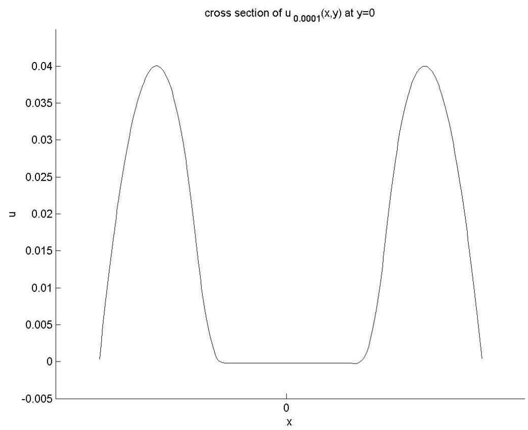
freies Minimum in $H_0^1(\Omega)$



mit Strafterm, $\varepsilon = 0.01$



mit Strafterm, $\varepsilon = 0.001$



mit Strafterm, $\varepsilon = 0.0001$

Für Minimum an $x = 0$ (bzw. ‘inneres Plateau’) gilt: $u_\varepsilon(0) \approx -2\varepsilon$

“Penalty”-Methode, asymptotisches Verhalten

“Penalty”-Approximation in u^ε:

$$\begin{array}{rcl} -\Delta u^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} u^\varepsilon H(-u^\varepsilon) &=& f \quad , \quad \Omega \\ u^\varepsilon &=& 0 \quad , \quad \partial\Omega \end{array} \tag{B.1}$$

- Übereinstimmungsmenge (d.h. $u_0(x) = 0$) $\quad C \subset K_0(\frac{1}{2})$
- asymptotische Entwicklung in C:

$$u^\varepsilon(x) \approx u_0(x) + \varepsilon u_1(x) < 0 \quad \Rightarrow H(-u^\varepsilon) = 1$$

- einsetzen in (B.1), Koeffizientenvergleich:

$$\begin{array}{rl} O(\frac{1}{\varepsilon}): & u_0(x) = 0 \\ O(1): & -\Delta u_0 + \frac{1}{\varepsilon} \cdot \varepsilon u_1 = f \\ \Rightarrow & u_1 = f \Rightarrow u^\varepsilon(x) \approx -2\varepsilon, \;\; x \in C \end{array}$$

- numerische Lösung am Ursprung:

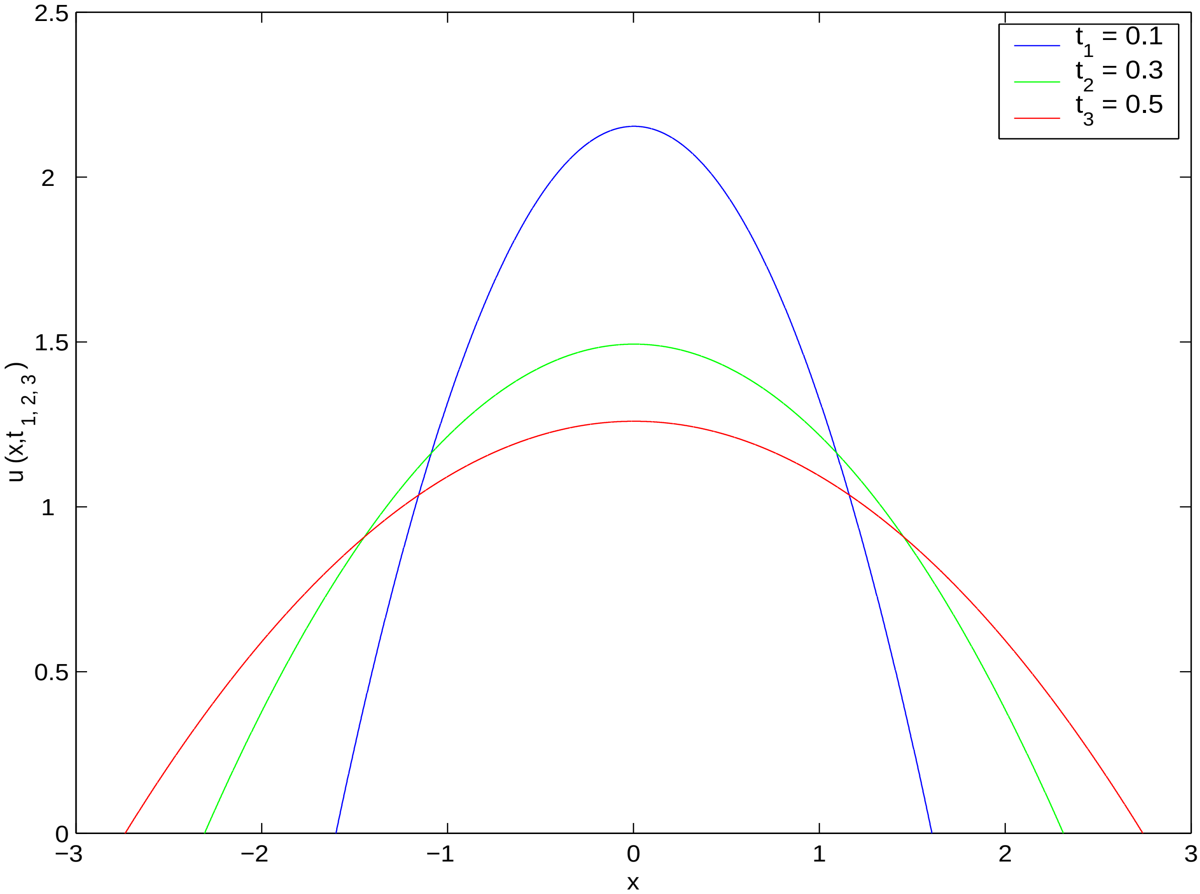
ε	$u^\varepsilon(0,0)$
0.1	- 0.0954511
0.01	- 0.0188197
0.001	- 0.0020001
0.0001	- 0.0002005

Poröse Medium Gleichung

$$u_t = (u^2)_{xx},\ \mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_t^+ \text{ mit } m = 2$$

Fundamentallösung:

$$u(x,t) = t^{-\frac{1}{3}} \left(C - \frac{1}{12} \frac{x^2}{t^{\frac{2}{3}}} \right)_+,\ \text{hier für } C = 1$$



(In-)Stabilität von stehenden Wellen

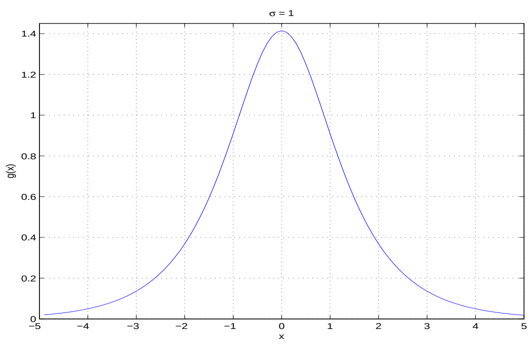
fokussierende nichtlin. Schrödinger Gleichung:

$$iu_t + u_{xx} + |u|^{2\sigma} u = 0, \;\; x \in \mathbb{R}, \;\; t \in \mathbb{R}$$

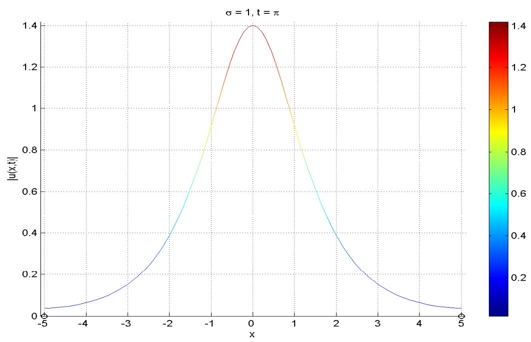
stehende Wellen:

$$u(x,t) = e^{i\lambda^2 t} g(x), \;\; g(x) = \frac{[\lambda^2(\sigma+1)]^{\frac{1}{2\sigma}}}{\cosh^{\frac{1}{\sigma}}(\lambda\sigma x)}$$

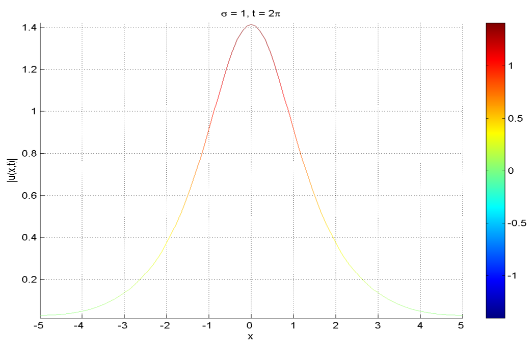
<u>stabil</u> für $\sigma = 1 < 2$ (alles für $\lambda = 1$):



(exakte) Anfangsbedingung

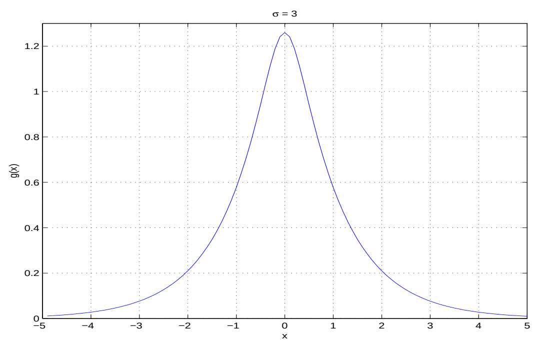


numerische Lösung bei $t = \pi$

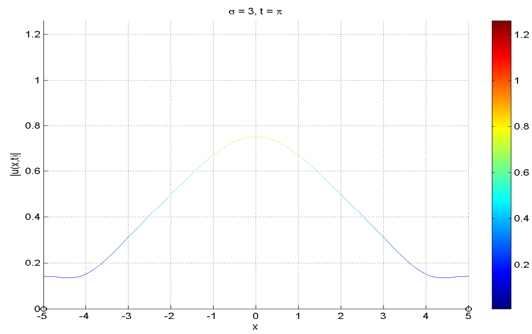


numerische Lösung bei $t = 2\pi$

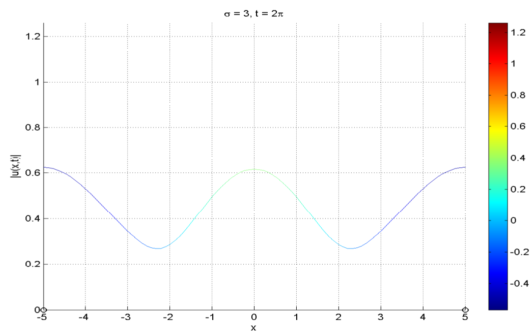
<u>instabil</u> für $\sigma = 3 > 2$:



(exakte) Anfangsbedingung



(„falsche") numerische Lösung bei $t = \pi$



(„falsche") numerische Lösung bei $t = 2\pi$