Freie Randwertprobleme

Ben Schweizer

Vorlesung an der Universität Heidelberg
Sommersemester 2004

Inhaltsverzeichnis

Beispiele für freie Ränder und Grundlagen 5
Eine Klassifikation (?) 5
1. Das Hindernisproblem 6
2. Das Grundwasserproblem 8
3. Das Stefan Problem 9
4. Die poröse Medien Gleichung 10
5. Methodischer Überblick 11

Kapitel 1. Hindernisproblem und Variationsungleichungen 15
1. Existenzsatz für Bilinearformen 15
2. Monotone Operatoren 18
3. Eigenschaften der Lösung 22

Kapitel 2. Grundwasserproblem und Variationsungleichungen 29
1. Existenzsatz für allgemeine Variationsungleichungen 29
2. Variationsprobleme von elliptischem Typ 32
3. Das Grundwasserproblem 35

Kapitel 3. Das Stefan Problem 41
1. Ein Existenzsatz 41
2. Eindeutigkeit und Regularität mit L^2-Techniken 48
3. Monotone Abhängigkeit mit einer L^1-L^∞-Technik. 49

Literaturverzeichnis 53

Beispiele für freie Ränder und Grundlagen

Eine Klassifikation (?)

Freie Ränder tauchen in der Natur vielfach auf. Wir können dabei an eine Wasseroberfläche denken, die Kontaktlinie eines aufsitzenden Wassertropfens, an eine Kaltfront in der Atmosphäre, den Grundwasserspiegel im Erdboden, und vieles mehr.

Mathematische Modelle können durch folgende Effekte auf freie Ränder führen.

1. Eine Nebenbedingung ist auf einem Teil des Gebietes 'aktiv', im Rest des Gebietes 'inaktiv'.
2. Ein lösungsabhängiger Koeffizient der Gleichung springt zwischen zwei Werten.
3. Ein Rand zwischen zwei Teilgebieten ist explizit gegeben. Durch überbestimmte Randbedingungen wird die Bewegung bestimmt.
4. Ein Rand ist explizit gegeben und wird entsprechend impliziter Gleichungen bewegt.

Unsere Beispiele werden diese Möglichkeiten vorführen. Wir besprechen nacheinander

1. Das Hindernisproblem
2. Das Grundwasserproblem
3. Stefan Problem (Schmelzen von Eis)
4. Poröse Medien Gleichung (Gasströmung durch Gestein)

Eine Klassifikation von freien Randwertproblemen ist schwer möglich. Wir werden zum Beispiel sehen, dass sich Problem 3 auf eine Gestalt wie in Problem 2 zurückführen lässt. Insbesondere ist die obige Einteilung *keine Klassifikation.*

Eine mögliche Einteilung ist natürlich die in

- stationäre Probleme (Hindernis und Grundwasser),
- instationäre Probleme (Stefan Problem und poröse Medien).

Eine andere Einteilung ist die methodische. In dieser Vorlesung werden unter anderem verwendet:

- Variationsungleichungen (Hindernis und Grundwasser, aber auch im Stefan-Problem),
- Regularisierungen (Stefan Problem und poröse Medien, aber auch im Hindernisproblem).

1. Das Hindernisproblem

Wir stellen uns einen Raum vor (ein Gebiet Ω), in dem, in jedem Raumpunkt $x \in \Omega$ eine Heizung mit Thermostat angebracht ist. Die Heizung in x sorgt dafür, dass die Temperatur $u(x)$ in x nicht unter den Wert $\bar{u}(x)$ absinkt. Ist die Temperatur höher, dann ist die Heizung ausgeschaltet. Zusätzlich seien Randbedingungen gegeben (zum Beispiel gegebene Temperatur an den Wänden). Wir können fragen:

Welches sind die Bestimmungsgleichungen für die Temperatur? Gibt es eine eindeutige stationäre Wärmeverteilung? Wie kann man sie berechnen?

Erste Beschreibung mit Gleichungen. Auf dem Bereich Ω_1 inaktiver Heizungen gilt die stationäre Wärmeleitungsgleichung, also

$$\Delta u = 0 \quad \text{in } \Omega_1. \tag{1.1}$$

Im anderen Bereich sind die Heizungen aktiv, also

$$u = \bar{u} \quad \text{in } \Omega_2. \tag{1.2}$$

Diese Gleichungen bestimmen die Lösung noch nicht – zu jeder Unterteilung in Ω_1 und Ω_2 können wir obige Gleichungen lösen. Es fehlt eine 'Bestimmungsgleichung für den freien Rand'.

Tatsächlich: Angenommen, in einem Punkt $x \in \Omega$ will die Temperatur gemäß $\partial_t u(x) = \Delta u(x)$ zunehmen — dann wird sie dies auch, die Heizung hält sie nicht ab. Wir finden also

$$\Delta u \leq 0 \quad \text{in } \Omega. \tag{1.3}$$

Trivialerweise haben wir noch die Nebenbedingung in Ω_1,

$$u \geq \bar{u} \quad \text{in } \Omega. \tag{1.4}$$

Eine Lösung dieser Gleichung ist nicht eindeutig, wie man sich mit springenden u's überlegen kann. Wir fordern daher zusätzlich noch eine Regularität, entweder $u \in C^0(\Omega)$ oder $u \in H^1(\Omega)$.

Wir sagen, dass $u \in H^1$ Lösung des Hindernisproblems ist, falls für $\Omega_1 := \{x \in \Omega | u(x) > \bar{u}(x)\}$ die Ungleichungen (1.1), (1.3) und (1.4) erfüllt sind.

Das Hindernisproblem als Variationsproblem. Extrem hilfreich ist folgender Zugang. Die Temperatur möchte das Dirichlet-Funktional

$$E(u) := \int_\Omega |\nabla u|^2 \tag{1.5}$$

minimieren, wegen der Heizungen unter der Nebenbedingung

$$u \geq \bar{u}. \tag{1.6}$$

Wir minimieren also E in der Menge

$$M := \{u \in H_0^1(\Omega) | u \geq \bar{u}\}.$$

Sei u ein solches Minimum.

Beh.: u löst das Hindernisproblem. Wegen $u \in M$ ist dann $u \in H^1$ und (1.4) gilt. Falls die Menge $\Omega_1 := \{x \in \Omega | u(x) > \bar{u}(x)\}$ offen ist, so ist lokal jeweils die Dirichlet-Energie minimiert, also gilt (1.1). Für $v \in M$ betrachten wir die Vergleichsfunktionen $u_\varepsilon = u + \varepsilon(v - u)$. Es gilt

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{E(u_\varepsilon) - E(u)}{\varepsilon} \\ &= \frac{1}{\varepsilon} \int_\Omega \nabla(u + \varepsilon(v - u)) \cdot \nabla(u + \varepsilon(v - u)) - |\nabla u|^2 \\ &\to 2 \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla(v - u) = 2 \int_\Omega (-\Delta u)\,(v - u). \end{aligned}$$

Da $v - u$ eine beliebige nichtnegative Funktion sein kann, gilt also $\Delta u \leq 0$ im Distributionssinn.

Wir haben stillschweigend vorausgesetzt, dass alle Funktionen u_ε zulässige Vergleichsfunktionen sind. Für $u \in M$ und $v \in M$ folgt dies aus Konvexität von M. Man überlege sich, dass unsere Menge M tatsächlich konvex ist.

Wir haben die folgende Ungleichung verwendet,

$$2 \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla(v - u) \geq 0 \quad \forall v \in M. \tag{1.7}$$

Dies ist eine typische *Variationsungleichung.*

Beh.: Die Bedingungen $u \in M$ und (1.7) sind äquivalent zum Hindernisproblem. Wir haben gesehen, dass die Variationsungleichung (1.3) liefert. Falls in x gilt $u(x) > \bar{u}(x)$, so sind dort beide Vorzeichen (positiv und negativ) für $v - u$ erlaubt, also gilt dort sogar $\Delta u = 0$.

Nicht-symmetrischer Fall. Für das Hindernisproblem war es 'Zufall', dass wir es als Minimumaufgabe schreiben konnten. Wir sind auch an Verallgemeinerungen der Gleichungen (1.1)–(1.4) beziehungsweise von (1.7) interessiert. Zum Beispiel können wir für eine nicht-symmetrische positive Form

$$a(v, w) := \int_\Omega a_{ij}(x) \partial_i v(x) \partial_j w(x)\, dx$$

interessiert sein an Lösungen der folgenden Aufgabe.

Allgemeines Hindernisproblem: Finde $u \in M$, so dass

$$a(u, v - u) \geq 0 \quad \forall v \in M. \tag{1.8}$$

2. Das Grundwasserproblem

In diesem Problem sei Ω ein Ausschnitt des Erdbodens beziehungsweise von Gestein. In jedem Punkt $x \in \Omega$ herrscht ein Wasserdruck $u(x)$. Oberhalb einer zu bestimmenden Linie Γ (Ebene in 3D) liegt das Wasser in Form von kleinen Tropfen vor, oder jedenfalls so, dass immer Luft in geringem Abstand vorhanden ist (Luft, die nicht eingeschlossen ist, also Luft, die in Kontakt mit der Oberfläche ist). In diesem Bereich Ω_1 herrscht also auch im Wasser der Druck $u = 0$ vor, insbesondere

$$\Delta u = 0 \quad \text{in } \Omega_1.$$

Unterhalb der Linie/Ebene Γ (Bereich Ω_2) ist das Medium wassergesättigt. Dort nimmt der Druck linear nach unten zu, $\partial_{x_n} u(x) + 1 = 0$. Das Wasser versucht im gesättigten Bereich, Druckdifferenzen auszugleichen. Nach dem Gesetz von Darcy entsteht (zusammen mit der Schwerkraft) eine Strömung $v = -\nabla u - e_n$, die inkompressibel ist, also $\nabla \cdot v = 0$. Wir rechnen $0 = \nabla \cdot v = \Delta u$, also

$$\Delta u = 0 \quad \text{in } \Omega_2.$$

Was geschieht an der Grenzfläche? Falls die Fläche sich nicht bewegt, so gilt $v = 0$, also springt $\partial_{x_n} u$ von -1 auf 0, die anderen Ableitungen springen nicht. Also

$$[\nabla u]_\Gamma = e_n.$$

Dies ist eine mögliche Beschreibung des Grundwasserproblems. Es benutzt jedoch den Rand explizit, was den Zugang schwierig macht.

Das Grundwasserproblem in schwacher Form. Wir verwenden die charakteristische Funktion χ_2 von Ω_2. Für die Größe $\nabla u + e_n \chi_2$ erwarten wir keine Sprünge mehr. Das Gebiet Ω_2 ist dadurch charakterisiert, dass dort der Druck positiv ist. Wir fordern also

$$\nabla \cdot (\nabla u + e(u)) = 0 \tag{2.1}$$

für

$$e(x, u) = \begin{cases} 0 & \text{für } u \le 0, \\ e_n & \text{für } u > 0. \end{cases} \tag{2.2}$$

In der schwachen Form schreiben wir

$$\int_\Omega (\nabla u + e(u)) \cdot \nabla \zeta = 0 \quad \forall \zeta. \tag{2.3}$$

Dies hat nun die Struktur der Variationsungleichung aus (1.7). Tatsächlich werden wir Hindernisproblem und Grundwasserproblem mit einem abstrakten Satz über Variationsungleichungen lösen.

3. Das Stefan Problem

Das Stefan Problem in seiner einfachsten Form beschreibt das Schmelzen von Eis. Wir stellen uns einen Container $\bar{\Omega}$ gefüllt mit H_2O vor. Im Gebiet $\Omega_0 \subset \bar{\Omega}$ liegt Eis vor, im Rest Wasser.

An den Containerwänden heizen wir. Das Eis wird dadurch schmelzen und zu einer Zeit $t > 0$ nimmt das Eis das Gebiet $\Omega_t \subset \bar{\Omega}$ ein. Wir nehmen an, dass das Eis immer Temperatur $u = 0$ hat, also

$$u = 0 \quad \text{in } \Omega_t. \tag{3.1}$$

Im restlichen Gebiet gilt die Wärmeleitungsgleichung

$$\partial_t u = \Delta u \quad \text{in } \bar{\Omega} \setminus \Omega_t. \tag{3.2}$$

Zusammen mit Randbedingungen bestimmt dies die Evolution der Temperatur u. Wir brauchen allerdings noch eine Gleichung, die die zeitliche Entwicklung von Ω_t bestimmt. Diese ist durch das Fourier-Gesetz gegeben. Das Fourier-Gesetz besagt, dass (bis auf physikalische Konstanten) ein Wärmestrom $j = -\nabla u$ im Wasser herrscht. Die Wärmemenge, die pro Zeiteinheit in ein Testvolumen auf dem Rand strömt, ist daher gegeben durch $\delta W = -\partial_n u$, wobei n die äußere Normale ist, und die Ableitung wasserseitig genommen werden muss. Um eine Einheitsmenge an Eis zu schmelzen, benötigt man die sogenannte latente Wärme. Die Schmelzgeschwindigkeit ist also proportional zum Wärmefluss und damit

$$V = -\partial_n u|_{\partial\Omega_t}, \tag{3.3}$$

wenn V die normale Geschwindigkeit des freien Randes bezeichnet. Gleichung (3.3) liefert uns eine Vorschrift über die Bewegung des freien Randes.

Die Gleichungen (3.1)–(3.3) beschreiben (bis auf Anfangs- und Randbedingungen) das *einphasige Stefan-Problem ohne Oberflächenspannung.*

In Koordinaten, zweidimensional. Falls der freie Rand lokal als Graph gegeben ist,

$$\Omega_t = \{(x, y)|y < h(x, t)\},$$

dann gilt

$$n = \frac{(-\partial_x h, 1)}{\|(\partial_x h, 1)\|}, \quad \partial_t(x, h(x, t)) = (0, \partial_t h), \quad V = \frac{1}{\|(\partial_x h, 1)\|}\partial_t h.$$

Die Gleichung (3.3) für den freien Rand ist dann

$$V = \frac{1}{\sqrt{1 + |\partial_x h|^2}}\partial_t h = \frac{1}{\sqrt{1 + |\partial_x h|^2}}(\partial_y u - \partial_x h \cdot \partial_x u),$$

oder einfach

$$\partial_t h = \partial_y u - \partial_x h \cdot \partial_x u.$$

Schwache Formulierung. Wir führen die Phasenfunktion $\chi = \chi_t$ ein. Es soll zu jedem Zeitpunkt gelten

$$\chi_t(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x \in \Omega_t, \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases} \tag{3.4}$$

Behauptung: Eine schwache Form des Stefan-Problems lautet

$$\partial_t(u + \chi) = \Delta u, \tag{3.5}$$

gemeint im Distributionssinne.

Wir überprüfen dies für den Fall, dass χ die charakteristische Funktion einer glatt berandeten Menge Ω_t ist. Für Punkte x im Inneren von Ω_t oder im Inneren von $\bar{\Omega} \setminus \Omega_t$ gilt

$$\partial_t u = \Delta u,$$

also die richtige Gleichung.

Für einen Punkt $x \in \partial\Omega_t$ gilt

$$\partial_t \chi = -V \mathcal{H}^{n-1}|_{\partial\Omega_t}$$

für das $n-1$-dimensionale Hausdorff-Maß $\mathcal{H}^{n-1}$.

Andererseits hat auch Δu einen zum Lebesgue-Maß singulären Anteil, nämlich den Sprung in der Ableitung,

$$\Delta u|_{\partial\Omega_t} = [\partial_n u]\mathcal{H}^{n-1}|_{\partial\Omega_t}.$$

Ein Vergleich der beiden singulären Anteile liefert Gleichung (3.3).

Um das Stefan Problem möglichst kompakt zu schreiben, setzen wir $\chi_t(x) := H(u(x,t))$ mit der Sprungfunktion $H(\zeta) = 1$ für $\zeta > 0$, $H(\zeta) = 0$ für $z \leq 0$. Die Aufgabe lautet nun

$$\partial_t(u + H(u)) = \Delta u. \tag{3.6}$$

Bemerkung: In gewissem Sinne ist die schwache Formulierung 'physikalischer' als die starke: Die Größe $(u + H(u))$ ist die freie Energie (Wärmeenergie plus latente Wärme), und (3.6) ist die Evolutionsgleichung.

4. Die poröse Medien Gleichung

Wir wollen diese Gleichung physikalisch motivieren. Wir betrachten Gestein, in dem ein Gas vorliegt. Das Gas habe die Dichte $\rho(x,t)$ in jedem Ortspunkt x und zu jeder Zeit $t \geq 0$. Weitere Größen zur Beschreibung der Strömung sind der Druck p und die Strömungsgeschwindigkeit v. Man nimmt (für normierte Materialkonstanten) folgende Gesetze an:

$$\begin{aligned} v &= -\nabla p && \text{Darcy-Gesetz} \\ \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho v) &= 0 && \text{Massenerhaltung,} \\ p &= \rho && \text{Gasgesetz.} \end{aligned}$$

Wir setzen ineinander ein und erhalten für $u := \rho$

$$\partial_t u = \nabla \cdot (u \nabla u). \tag{4.1}$$

Wir können auch $u\nabla u$ als Ableitung schreiben, nämlich $2u\nabla u = \nabla|u|^2$. Nach Weglassen des Faktors 2 (durch Zeitskalierung) finden wir äquivalent

$$\partial_t u = \Delta(u^2). \tag{4.2}$$

Dies ist die klassische Form der porösen Medien Gleichung. Als Verallgemeinerung wird oft der Exponent 2 durch eine Zahl $\gamma > 1$ ersetzt. Dies modelliert zum Beispiel ein allgemeineres Gasgesetz.

Betrachten wir die Gleichung auf dem $\mathbb{R}^n$. Falls wir nichtnegative Anfangsdaten u_0 mit kompaktem Träger wählen, so stellt sich heraus, dass auch zu späteren Zeitpunkten der Träger $\Omega_t := \mathrm{supp}(u) = \{x|u(x) > 0\}$ von u kompakt ist. Es stellt sich somit (implizit) ein freier Rand $\Gamma_t := \partial\Omega_t$ ein. Im physikalischen Modell ist im Gebiet Ω_t Gas vorhanden, im Restgebiet ist kein Gas.

Wir werden nicht die Zeit haben, dieses wichtige Beispiel eines freien Randwertproblems abzudecken. Wir verweisen auf die hervorragend lesbare Einführung von Vazquez, [**5**].

5. Methodischer Überblick

5.1. Direkte Methode der Variationsrechnung. Im symmetrischen Fall des Hindernisproblems lässt sich diese Methode verwenden. Die Menge

$$M := \left\{u \in H_0^1(\Omega) | u - \bar{u} \geq 0\right\}$$

ist eine konvexe Teilmenge des Hilbertraums $H_0^1(\Omega)$. Wir nehmen immer an, dass $\bar{u} \in H^1(\Omega)$ mit $\bar{u}|_{\partial\Omega} \leq 0$, damit $M \neq \emptyset$.

Wir wollen das Funktional

$$\Phi : M \to \mathbb{R},\ u \mapsto \int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla u|^2 + f\,u \tag{5.1}$$

minimieren. Dazu wählen wir eine *Minimalfolge*, also $u_n \in M$ mit $\Phi(u_n) \to \inf_M \Phi$. Aus der Poincaré-Abschätzung folgt dass (i) $\inf_M \Phi > -\infty$ und (ii) u_n ist beschränkt in H^1. Wir wählen eine schwach konvergente Teilfolge $u_n \rightharpoonup u$ in H^1. Wir können zusätzlich annehmen, dass die Teilfolge stark in L^2 konvergiert und ihre Randwerte auch stark konvergieren. Dann folgt (iii) $u \in M$. Formal kann man ausnutzen, dass das Funktional *positiver Anteil* $w \mapsto (w)_+$ stetig $L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ ist. Dann $0 = (\bar{u} - u_n)_+ \to (\bar{u} - u)_+$, also $u \geq \bar{u}$.

Weiterhin ist (iv) das Funktional Φ schwach unterhalbstetig, also

$$\Phi(u) = \inf \Phi. \tag{5.2}$$

Dies gilt, weil Normen immer schwach unterhalbstetig sind.

(Un-)Gleichungen für u. Es gilt für alle Vergleichsfunktionen $v \in M$, dass $\Phi(v) \geq \Phi(u)$, insbesondere, wegen der Konvexität von M,

$$\frac{\Phi(u + \varepsilon(v-u)) - \Phi(u)}{\varepsilon} \geq 0 \quad \forall v \in M.$$

Dies liefert nach Entwickeln von Φ

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla(v-u) + f \cdot (v-u) \geq 0 \quad \forall v \in M. \tag{5.3}$$

Damit haben wir das Hindernisproblem im Fall des Laplace-Operators gelöst. Der Laplace-Operator ist symmetrisch, dies führte dazu, dass das Problem in Form einer Minimierungsaufgabe mit Nebenbedingungen zu schreiben war.

Bemerkung zum nicht-symmetrischen Fall. Im linearen Fall und ohne Nebenbedingungen bietet der Satz von Lax-Milgram eine Alternative zur direkten Methode.

5.2. Variationsungleichungen. Oftmals ist eine Differentialgleichung vom Variationstyp wie in (5.3) gegeben, die aber nicht die Euler-Lagrange Gleichung für ein Minimierungsproblem ist. Einfache Beispiele sind unsymmetrische Operatoren oder für $u : \Omega \to \mathbb{R}^m$ die Gleichung

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi + f(u) \cdot \varphi = 0 \quad \forall \varphi. \tag{5.4}$$

Bemerke: Für $m = 1$ kann man die Stammfunktion von f einführen, um ein Minimumsproblem zu konstruieren.

Wir wollen zeigen, wie sich *nichtlineare* Gleichungen und *Un*gleichungen vom Variationstyp lösen lassen.

Theorem 5.1. *Sei $0 \in M \subset \mathbb{R}^n$, M konvex und abgeschlossen, $F : M \to \mathbb{R}^n$ stetig und koerziv, das heißt*

$$\frac{\langle u, F(u)\rangle_{\mathbb{R}^n}}{\|u\|} \to \infty \quad \textit{für } u \in M, \|u\| \to \infty. \tag{5.5}$$

Dann existiert eine Lösung $u \in M$ der Variationsungleichung

$$\langle F(u), v - u\rangle_{\mathbb{R}^n} \geq 0 \quad \forall v \in M. \tag{5.6}$$

Beweis. *1. Idee:* Für Lösungen der Gleichung $F(u) = 0$ gilt die Ungleichung. Wir würden also gerne nach Fixpunkten von $\mathrm{Id} - F$ suchen. Aber $\mathrm{Id} - F$ bildet nicht nach M ab. Wir verwenden daher die orthogonale Projektion P auf M und suchen Fixpunkte u der Abbildung

$$P \circ (\mathrm{Id} - F) : M \to M, \tag{5.7}$$

also $u \in M$ mit $P(u - F(u)) = u$. Welche Gleichung löst dann u?

Eigenschaft der orthogonalen Projektion P: Die Projektion $P(w)$ eines Elementes w hat die Eigenschaft

$$\langle v - P(w), w - P(w) \rangle \le 0 \quad \forall v \in M.$$

(Beweis: Elementare Geometrie oder [**2**], 2.19). Wir setzen $w = u - F(u)$ und $P(w) = u$ ein und erhalten

$$\langle v - u, -F(u) \rangle \le 0 \quad \forall v \in M, \tag{5.8}$$

also genau das gewünschte Ergebnis.

2. Lösung von (5.7). 1. Fall: M ist beschränkt. In diesem Fall ist die Abbildung $G := P \circ (\mathrm{Id} - F) : M \to M$ ist eine stetige Selbstabbildung einer kompakten konvexen nichtleeren Menge. Nach dem Satz von Brouwer existiert daher ein Fixpunkt u.

2. Fall: M ist unbeschränkt. Wir betrachten für großes $R > 0$ die Menge $M_R := M \cap \bar{B}_R(0)$, die wieder konvex und abgeschlossen ist. Nach dem ersten Fall existiert eine Lösung $u_R \in M_R$ von

$$\langle F(u_R), v - u_R \rangle \ge 0 \quad \forall v \in M_R.$$

Wir hätten gerne dieselbe Ungleichung für alle $v \in M$. Tatsächlich gilt diese für R groß. Mit $v = 0 \in M_R$ gilt

$$\langle F(u_R), u_R \rangle \le 0.$$

Wegen der Koerzivität gilt dann $\|u_R\| \le C$ für ein R-unabhängiges $C > 0$. Wir setzen $R := C + 1$. Dann gilt für ein beliebiges $v \in M$: $u_\varepsilon := u_R + \varepsilon(v - u_R) \in M_R$ für $\varepsilon > 0$ klein. Also ist u_ε zulässig,

$$\langle F(u_R), u_\varepsilon - u_R \rangle \ge 0.$$

Die linke Seite läßt sich auch schreiben als

$$\varepsilon \langle F(u_R), v - u_R \rangle \ge 0,$$

also löst u_R die Variationsungleichung. $\square$

Bemerkung: Im $\mathbb{R}^n$ haben wir nur eine schwache Version der Koerzivität verwendet.

Mit Variationsungleichungen werden wir das Hindernisproblem in der Form (1.8) und das Grundwasserproblem in der Form (2.3) lösen.

5.3. Degenerierte parabolische Gleichungen. Der Zugang sowohl beim Stefan Problem als auch bei der porösen Medien Gleichung ist wie folgt.

- Die Gleichung wird diskretisiert oder regularisiert
- Die vereinfachte Gleichung wird gelöst (mit Abschätzungen)
- Limiten der Lösungen sind schwache Lösungen der Ausgangsgleichungen

In jedem der drei Punkte steckt mathematische Arbeit. Zum Beispiel ist für das Stefan Problem in der starken Formulierung überhaupt nicht klar, wie dies regularisiert werden könnte. Den Ausweg liefert hier die schwache Formulierung aus (3.5).

Die Abschätzungen im zweiten Punkt müssen unabhängig vom Regularisierungsparameter sein. In diesem Schritt erweist sich, ob die Regularisierung geeignet gewählt war.

Im dritten Punkt muss man die Frage stellen, in welchem Sinne die Grenzfunktionen die Gleichung lösen. Liefert die schwache Formulierung noch eine eindeutige Charakterisierung der Lösung?

Stefan Problem. Wir wollen die schwache Gleichung (3.5) lösen. Dazu führen wir die monotone, mehrwertige 'Funktion' $\alpha(\xi) = \xi + \mathrm{sgn}(\xi)$ ein. Die Gleichung war formal $\partial_t \alpha(u) = \Delta u$, was wir mit $w = \alpha(u)$ umschreiben. Wir wollen lösen

$$\partial_t w = \Delta u, \quad w \in \alpha(u).$$

Wir werden eine Zeitdiskretisierung verwenden. Wir lösen in jedem Zeitschritt

$$\begin{aligned} \frac{w^{n+1} - w^n}{\Delta t} - \Delta u^{n+1} &= 0, \\ w^{n+1} &\in \alpha(u^{n+1}). \end{aligned}$$

Poröse Medien Gleichung. Hier wollen wir

$$\partial_t u = \nabla \cdot (u \nabla u)$$

lösen, also eine Diffusionsgleichung mit Diffusionskoeffizienten $K(u) = u$. Für positives K ist dies standard. Unser Ziel ist es also, u positiv zu haben. Wir werden die Startwerte $u_0 \geq 0$ von der 0 wegschieben, um eine nicht-degenerierte parabolische Gleichung zu erhalten, und betrachten Anfangswerte $u_{0n} := u_0 + \frac{1}{n}$. Falls die zugehörige Lösung immer oberhalb der Schwelle $\frac{1}{n}$ bleibt, so bleibt das System parabolisch, und Lösungen u_n existieren. Wir müssen zeigen:

- $u_n \geq \frac{1}{n}$ für alle Zeiten, alle n
- Ein Limes u von u_n existiert
- u erfüllt die Gleichungen

Wir verweisen erneut auf [**5**] für die Durchführung.

KAPITEL 1

Hindernisproblem und Variationsungleichungen

Dieses Kapitel entnimmt Material aus [**4**], Kapitel II–IV.

1. Existenzsatz für Bilinearformen

In diesem Kapitel sei H immer ein reeller Hilbertraum mit Norm $\|.\|$ und Skalarprodukt $\langle .,. \rangle$. Wir betrachten Bilinearformen

$$a : H \times H \to \mathbb{R}, \quad a : (u, v) \mapsto a(u, v).$$

a ist eine stetige Abbildung, die linear ist in beiden Argumenten. Die Form a heißt *koerziv*, falls $\alpha > 0$ existiert mit

$$a(u, u) \geq \alpha \|u\|^2 \quad \forall u \in H.$$

Für eine Teilmenge $K \subset H$ wollen wir folgendes Problem lösen: Finde $u \in K$, so dass

$$a(u, v - u) \geq \langle f, v - u \rangle \quad \forall v \in K. \tag{1.1}$$

Wir können dieses Problem (aufgrund der Linearität des Operators) in recht allgemeiner Weise lösen. Der Vorteil gegenüber Theorem 5.1 ist, dass hier $\mathbb{R}^n$ durch einen Hilbertraum ersetzt ist.

Theorem 1.1. *Sei $a : H \times H \to \mathbb{R}$ eine koerzive Bilinearform, $\emptyset \neq K \subset H$ abgeschlossen und konvex, und f eine Linearform auf H, d.h. $f \in H'$. Dann gibt es eine eindeutige Lösung $u \in K$ von (1.1).*

Der Lösungsoperator $f \mapsto u$ ist Lipschitzstetig. Für $C := \alpha^{-1}$ und Lösungen u_1, u_2 zu f_1, f_2 gilt

$$\|u_1 - u_2\| \leq C \|f_1 - f_2\|. \tag{1.2}$$

Beweis. *1. Wir zeigen zunächst (1.2).* Es seien also u_1 und u_2 Lösungen der Variationsungleichung, also

$$a(u_i, v - u_i) \geq \langle f_i, v - u_i \rangle \quad \forall v \in K, i = 1, 2.$$

Wir setzen nun $v = u_2$ in der Gleichung für u_1 und $v = u_1$ in der Gleichung für u_2. Addieren der Gleichungen liefert

$$a(u_1 - u_2, u_1 - u_2) \leq \langle f_1 - f_2, u_1 - u_2 \rangle.$$

a ist koerziv und daher

$$\alpha \|u_1 - u_2\|^2 \leq \langle f_1 - f_2, u_1 - u_2 \rangle \leq \|f_1 - f_2\|_{H'} \cdot \|u_1 - u_2\|_H,$$

also (1.2).

2. Existenz von Lösungen im symmetrischen Fall. Es sei a symmetrisch. Dann können wir das Funktional

$$\Phi : H \to \mathbb{R}, \quad \Phi(u) := \frac{1}{2}a(u,u) - \langle f, u\rangle$$

betrachten. Wegen der Koerzivität von a gilt $\inf \Phi > -\infty$:

$$\begin{aligned}\Phi(u) &\geq \frac{1}{2}\alpha\|u\|_H^2 - \|f\|_{H'}\ \|u\|_H \geq \frac{1}{2}\alpha\|u\|_H^2 - \frac{1}{2\alpha}\|f\|_{H'}^2\ - \frac{1}{2}\alpha\|u\|_H^2 \\ &\geq -\frac{1}{2\alpha}\|f\|_{H'}^2.\end{aligned}$$

Wir betrachten nun eine Minimalfolge $u_n \in K$. Wir behaupten, dass u_n eine Cauchy-Folge ist. Tatsächlich gilt

$$\begin{aligned}\alpha\|u_n - u_m\|^2 &\leq a(u_n - u_m, u_n - u_m) \\ &= a(u_n, u_n) - 2a(u_n, u_m) + a(u_m, u_m) \\ &= 2a(u_n, u_n) + 2a(u_m, u_m) - a(u_n + u_m, u_n + u_m) \\ &= 4\Phi(u_n) - 4\langle f, u_n\rangle + 4\Phi(u_m) - 4\langle f, u_m\rangle \\ &\quad - 8\Phi(\frac{1}{2}(u_n + u_m)) + 4\langle f, u_n + u_m\rangle \\ &\leq 4\Phi(u_n) + 4\Phi(u_m) - 8\inf \Phi \to 0.\end{aligned}$$

Also hat u_n einen Limes $u \in H$. Da K abgeschlossen ist, gilt $u \in K$. Das Funktional Φ ist (stark) stetig auf H, also $\Phi(u) = \lim \Phi(u_n) = \inf \Phi$. Wir haben das Minimierungsproblem gelöst.

Wie schon früher gerechnet gilt für das Minimum die Variationsungleichung: Für Vergleichsfunktionen $v \in K$ sind alle $u_\varepsilon = u + \varepsilon \cdot (v - u)$ zulässige Vergleichsfunktionen (denn K ist konvex). $\Phi(u_\varepsilon) \geq \Phi(u)$ liefert nach Ausmultiplizieren

$$2\varepsilon a(u, v - u) + \varepsilon^2 a(u - v, u - v) \geq \varepsilon\langle f, v - u\rangle.$$

Wir teilen durch ε und setzen $\varepsilon = 0$,

$$a(u, v - u) \geq \langle f, v - u\rangle.$$

Damit ist das Problem im symmetrischen Fall gelöst.

3. Lösung im nicht-symmetrischen Fall. Wir definieren den symmetrischen und den antisymmetrischen Anteil von a durch

$$\begin{aligned}a_s(u,v) &:= \frac{1}{2}\left(a(u,v) + a(v,u)\right), \\ a_a(u,v) &:= \frac{1}{2}\left(a(u,v) - a(v,u)\right),\end{aligned}$$

so dass $a(u,v) = a_s(u,v) + a_a(u,v)$. Wir benutzen eine Kontinuitätsmethode. Dazu sei für $t \in [0,1]$

$$a_t(u,v) := a_s(u,v) + t a_a(u,v).$$

Dann gilt $a_1 = a$ und $a_0 = a_s$. Es gilt $a_t(u,u) = a_s(u,u)$, weshalb alle Operatoren a_t koerziv sind mit der Konstanten α.

Wir betrachten

$$\mathcal{T} := \{t \in [0,1] : \text{ Ungleichung (1.1) lösbar für alle } f \in H'\}.$$

Es gilt $0 \in \mathcal{T}$ wegen der Symmetrie von $a_0 = a_s$. Wir behaupten, dass es $\varepsilon > 0$ gibt, so dass gilt

$$t \in \mathcal{T} \qquad \Rightarrow t' \in \mathcal{T} \quad \forall t < t' \leq \min(t+\varepsilon, 1). \tag{1.3}$$

Sobald dies bewiesen ist, folgt die Lösbarkeit der Ungleichung für $a_1 = a$.

Wir zeigen nun (1.3). Es sei also $t \in \mathcal{T}$ und t' wie gefordert. Wir wollen $a_{t'}(u, v-u) \geq \langle f, v-u\rangle$ für alle f lösen. Wir schreiben dies mit $u^n := u$ als

$$a_t(u, v-u) \geq \langle f, v-u\rangle - (t'-t)a_a(u^n, v-u). \tag{1.4}$$

Nun lösen wir (1.4) mit einer Iteration. Für gegebenes u^n können wir wegen $t \in \mathcal{T}$ nach u auflösen und setzen $u^{n+1} := u$. Die Abbildung $u^n \mapsto u^{n+1}$ ist kontraktiv wegen (1.2): Für zwei verschiedene u^n, $\bar{u}^n$ finden wir für die Lösungen u^{n+1} und $\bar{u}^{n+1}$

$$\|u^{n+1} - \bar{u}^{n+1}\| \leq C\ |t'-t|\ \|u^n - \bar{u}^n\|.$$

Falls $\varepsilon > 0$ klein ist, ist die Abbildung kontraktiv. Sie hat also einen Fixpunkt, und der löst die gewünschte Gleichung für t'. $\square$

Existenz für das Hindernisproblem. Im Hindernisproblem betrachten wir eine offene Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und eine untere-Schranken-Funktion $\psi \in H^1(\Omega)$ mit $\psi \leq 0$ auf $\partial\Omega$. Die Lösung suchen wir in der Menge

$$K := \left\{u \in H_0^1(\Omega) | u \geq \psi\right\} \subset H := H_0^1(\Omega).$$

Wegen der Bedingung an die Randwerte von ψ ist K nicht leer. Die Menge K ist abgeschlossen und konvex.

Wir sind interessiert an Bilinearformen vom Typ

$$a(u,v) := \int_\Omega a_{ij}(x)\partial_i u\, \partial_j v\, dx,$$

für $a_{ij}(x) \geq \alpha$ (als Bilinearform auf $\mathbb{R}^n$) für fast alle $x \in \Omega$. Die Form a ist dann koerziv nach der Poincaré-Ungleichung. Wir können Theorem 1.1 anwenden und erhalten die Existenz einer eindeutigen Lösung u von (1.1),

$$a(u, v-u) \geq \langle f, v-u\rangle \quad \forall v \in K.$$

2. Monotone Operatoren

In diesem Abschnitt wollen wir das obige Verfahren etwas abstrahieren. Wir wollen verallgemeinern

von *linearen Abbildungen* **zu** *monotonen Operatoren.*

Nun sei X ein reflexiver Banachraum und X' sein Dualraum. Wir betrachten Abbildungen $A : X \to X'$. Wichtiger Punkt: A darf eine nichtlineare Abbildung sein. Wir wollen noch eine Nebenbedingung einbauen. Dazu sei $K \subset X$ eine nichtleere, konvexe und abgeschlossene Teilmenge. Unser Ziel: Finde $u \in K$, so dass

$$\langle Au, v - u\rangle \geq 0 \quad \forall v \in K. \tag{2.1}$$

Wir stellen fest, dass für diese Ungleichung A nicht auf ganz X definiert sein muss.

Definition 2.1. *Eine Abbildung $A : K \to X'$ heißt* monoton*, falls*

$$\langle Au - Av, u - v\rangle \geq 0 \quad \forall u, v \in K. \tag{2.2}$$

Die Abbildung A heißt strikt monoton*, falls dabei die Gleichheit nur bei $u = v$ eintritt.*

Bemerkung 2.2. *Für strikt monotone Operatoren sind die Lösungen der Variationsungleichungen (2.1) eindeutig.*

Beweis. Seien u und v Lösungen. Wir wählen in der u-Gleichung die Testfunktionen v und in der v-Gleichung die Testfunktionen u und erhalten

$$\langle Au, v - u\rangle \geq 0,$$
$$\langle Av, u - v\rangle \geq 0.$$

Wir addieren und erhalten $\langle Au - Av, u - v\rangle = 0$. Wegen strikter Monotonie folgt $u = v$. □

Auch Existenzaussagen sind abstrakt möglich. Wir benötigen dazu aber eine gewisse Stetigkeit.

Definition 2.3. $A : K \to X'$ *heißt* stetig auf endlichdimensionalen Teilräumen*, falls für jeden endlichdimensionalen Unterraum $M \subset X$ die Einschränkung von A auf $M \cap K$ stetig ist, also*

$$M \cap K \ni u \mapsto \langle Au, x\rangle \in \mathbb{R}$$

ist stetig für alle $x \in X$.

Eines der wichtigsten Hilfsmittel in der Theorie monotoner Operatoren ist das folgende Minty-Lemma.

LEMMA 2.4 (Minty). *Sei $K \subset X$ abgeschlossen und konvex und $A : K \to X'$ monoton und stetig auf endlichdimensionalen Teilräumen. Sei $u \in K$. Es sind äquivalent*

$$\langle Au, v-u\rangle \geq 0 \quad \forall v \in K \quad \textit{und} \tag{2.3}$$

$$\langle Av, v-u\rangle \geq 0 \quad \forall v \in K. \tag{2.4}$$

BEWEIS. 1. Schritt: (2.3)⇒(2.4). Wir schreiben die Monotonieeigenschaft als

$$0 \leq \langle Av - Au, v-u\rangle = \langle Av, v-u\rangle - \langle Au, v-u\rangle .$$

(2.3) sagt, dass für $u \in K$ der zweite Term positiv ist.

2. Schritt: (2.4)⇒(2.3). Sei $w \in K$. Für $t \in [0,1]$ sei $v = u + t(w - u) \in K$. Dann besagt (2.4)

$$\langle A(u + t(w-u)), t(w-u)\rangle \geq 0.$$

Wir teilen durch t und betrachten $t \to 0$. Links wird nur eine Richtung, nämlich $w - u$ betrachtet, es gilt also Stetigkeit in t. Wir schließen

$$\langle Au, w-u\rangle \geq 0 \quad \forall w \in K,$$

also (2.3). □

Wir können nun ein Existenzresultat angeben. Wir nutzen dabei wesentlich das Minty-Lemma. Zusätzlich werden wir die elementare endliche-Durchschnitte-Eigenschaft verwenden:

> Sei S_i, $i \in I$ eine Familie abgeschlossener Teilmengen einer kompakten Menge K. Dann gilt: Falls alle endlichen Schnitte der S_i nichtleer sind, dann ist auch $\bigcap_{i\in I} S_i$ nichtleer.

Diese Aussage folgt sofort, wenn man die Komplemente $O_i := K \setminus S_i$ betrachtet. Diese sind offen in K. Falls $\bigcap_{i\in I} S_i$ leer ist, so ist O_i eine Überdeckung von K; die endliche Teilüberdeckung liefert, dass dann auch ein endlicher Schnitt leer ist.

THEOREM 2.5. *Sei $\emptyset \neq K \subset X$ abgeschlossen, konvex und beschränkt, und $A : K \to X'$ monoton und stetig auf endlichdimensionalen Teilräumen. Dann existiert eine Lösung $u \in K$ von (2.1),*

$$\langle Au, v-u\rangle \geq 0 \quad \forall v \in K.$$

BEWEIS. 1. Schritt. Nach dem Minty-Lemma können wir folgendes äquivalentes Problem betrachten. Finde $u \in K$ mit

$$\langle Av, v-u\rangle \geq 0 \forall v \in K.$$

Wir betrachten die Lösungsmenge $S(v)$ zu nur einer Testfunktion v, und deren Durchschnitt,

$$S(v) := \{u \in K : \langle Av, v-u\rangle \geq 0\}, \qquad S := \bigcap_{v\in K} S(v).$$

Falls $S \neq \emptyset$, so löst $u \in S$ die Ungleichung für alle v, also auch das Ausgangsproblem.

Wir untersuchen alle topologischen Eigenschaften bezüglich der schwachen Topologie. Jede Menge $S(v)$ ist schwach abgeschlossen (denn für $S(v) \ni u_n \rightharpoonup u$ gilt die Ungleichung auch für u). K ist beschränkt, also haben alle Folgen schwach konvergente Teilfolgen (Limes in X). K ist konvex, also schwach abgeschlossen (Lemma von Mazur, s.u.) und daher ist K schwach kompakt (als abgeschlossene Teilmenge einer kompakten Menge, Satz von Alaoglu, s.u.). Wegen der endlichen-Durchschnitte Eigenschaft genügt es, zu zeigen, dass endliche Schnitte nichtleer sind,

$$S(v_1) \cap ... \cap S(v_n) \neq \emptyset.$$

2. Schritt. Seien v_i, $i = 1, ..., n$ gegeben, und X_n der aufgespannte endlichdimensionale Unterraum von X. Wir betrachten $K_n := K \cap X_n$, abgeschlossen und konvex. In K_n finden wir nach Theorem 5.1 Lösungen $u_n \in K_n$ der Variationsungleichung

$$\langle Au_n, v - u_n \rangle \geq 0 \forall v \in K_n.$$

Nach dem Minty-Lemma folgt dann

$$\langle Av, v - u_n \rangle \geq 0 \forall v \in K_n.$$

Damit haben wir aber u_n im endlichen Schnitt gefunden, der endliche Schnitt ist also nicht leer. □

THEOREM 2.6 (Topologische Aussagen). *Sei X Banachraum, X' der Dualraum.*

- *Jede konvexe abgeschlossene Teilmengen $K \subset X$ ist schwach abgeschlossen.*
- *Lemma von Mazur: Sei $X \ni u_n \rightharpoonup u \in X$. Dann gibt es eine Folge von Konvexkombinationen, die stark gegen u konvergiert.*
- *Satz von Alaoglu: Abgeschlossene Normkugeln in X' sind schwach-* kompakt.*
- *Folgerung für X reflexiv: Abgeschlossene Kugeln in X sind schwach kompakt.*

BEWEIS. (für das Lemma von Mazur) Wir zeigen, dass $X \setminus K$ schwach offen ist. Sei $u_0 \in X \setminus K$. Nach Hahn-Banach kann man 'trennen'; für ein $u^* \in X'$ und $c \in \mathbb{R}$ gilt $\langle u^*, u_0 \rangle < c \leq \langle u^*, u \rangle$ für alle $u \in K$. Dann ist $U := \{u | \langle u^*, u \rangle < c\}$ eine schwach offene Umgebung von u_0 (das Komplement ist abgeschlossen).

Beweis des Corollars: Betrachte die konvexe Hülle C von $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. C ist konvex, und der starke Abschluss $\bar{C}$ ebenfalls. Dann ist $\bar{C}$ nach dem Lemma schwach abgeschlossen, also gilt $u \in \bar{C}$. Also ist u der starke Limes von Konvexkombinationen. □

Bemerkung: Man kann die Beschränktheit von K ersetzen durch Koerzivität von A.

Definition 2.7. *$A : K \to X'$ heißt* koerziv, *falls für ein $u_0 \in K$ gilt*

$$\frac{\langle Au - Au_0, u - u_0 \rangle}{\|u - u_0\|} \to \infty \quad \text{für } u \in K, \|u\| \to \infty. \tag{2.5}$$

Corollar 2.8. *Sei $\emptyset \neq K \subset X$ abgeschlossen und konvex, $A : K \to X'$ monoton, stetig auf endlichdimensionalen Teilräumen und koerziv. Dann existiert eine Lösung $u \in K$ von (2.1),*

$$\langle Au, v - u \rangle \geq 0 \quad \forall v \in K.$$

Beweis. Wir werden für ein $R > 0$ und $K_R := K \cap \bar{B}_R(0)$ zeigen:

$$u \in K_R \text{ mit } \langle Au, v - u \rangle \geq 0 \quad \forall v \in K_R \quad \Rightarrow \quad \|u\| < R. \tag{2.6}$$

Falls (2.6) gezeigt ist: Sei R mit dieser Eigenschaft. Wir können in K_R nach dem Theorem lösen, denn K_R ist konvex, abgeschlossen und beschränkt. Die Lösung erfüllt $\|u\| < R$. Wir behaupten, dass u die Lösung des Ausgangsproblems ist: Zu $v \in K$ sei $v_\varepsilon := u + \varepsilon(v - u)$, es gilt $v_\varepsilon \in K_R$ für kleine $\varepsilon > 0$. Dann folgt

$$0 \leq \langle Au, v_\varepsilon - u \rangle = \varepsilon \langle Au, v - u \rangle .$$

Wir zeigen nun (2.6). Es gilt für großes M

$$\begin{aligned} M\|u - u_0\| &\leq \langle Au - Au_0, u - u_0 \rangle \\ &= - \langle Au, u_0 - u \rangle - \langle Au_0, u \rangle + \langle Au_0, u_0 \rangle \\ &\leq C_0(u_0)\|u\| + C_1(u_0). \end{aligned}$$

Für M größer als M_0 gilt eine Schranke $\|u\| \leq C_2(u_0)$. Wir wählen R so groß, dass für $\|u\| \geq R$ die Ungleichung mit $M \geq M_0$ gilt, und so, dass $R > C_2(u_0)$.

Dann gilt für R Eigenschaft (2.6). Eine Lösung u mit Norm $\|u\| = R$ erfüllt $\|u\| \leq C_2(u_0) < R$; ein Widerspruch. □

Im nächsten Kapitel wird eine Variante des Theorems bewiesen unter der Zusatzvoraussetzung: F ist beschränkt auf beschränkten Mengen. Dann folgt das Corollar aus dem dortigen Existenzsatz unter Verwendung des folgenden Lemmas 2.9.

Lemma 2.9 (Stetigkeit). *Situation sei wie im Minty-Lemma, also $K \subset X$ abgeschlossen und konvex und $A : K \to X'$ monoton und stetig* *auf endlichdimensionalen Teilräumen. Dann gilt folgende Stetigkeitsaussage.*

(2.7)
$$u_m \rightharpoonup u \in K \text{ in } X,\ Au_m \overset{*}{\rightharpoonup} f \text{ in } X',\ \limsup_m \langle Au_m, u_m\rangle \le \langle f, u\rangle$$
$$\Rightarrow \langle Au - f, v - u\rangle \ge 0 \forall v \in K \ \&\ \limsup_m \langle Au_m, u_m\rangle = \langle f, u\rangle .$$

Beweis. Seien u_m, u, f wie oben. Wir schreiben die Monotonieeigenschaft von A für $v \in K$ als

$$\begin{aligned} 0 &\le \langle u_m - v, Au_m - Av\rangle \\ &= \langle u_m, Au_m\rangle - \langle v, Au_m\rangle - \langle u_m - v, Av\rangle . \end{aligned}$$

Wir nehmen $\limsup_{m\to\infty}$. Der erste Term erfüllt

$$\limsup_{m\to\infty} \langle u_m, Au_m\rangle \le \langle u, f\rangle , \tag{2.8}$$

in den anderen Termen existiert der Limes. Wir finden

$$\begin{aligned} 0 &\le \langle u, f\rangle - \langle v, f\rangle - \langle u - v, Av\rangle \\ &= \langle u - v, f - Av\rangle = \langle f - Av, v - u\rangle . \end{aligned}$$

Das Minty-Lemma erlaubt, Av durch Au zu ersetzen. Dies zeigt die Ungleichung.

Annahme: $\limsup_m \langle u_m, Au_m\rangle = \langle u, f\rangle - \varepsilon$ für $\varepsilon > 0$. Dann gilt auch die letzte Ungleichung als $\langle f - Av, v - u\rangle \ge \varepsilon$. Wir setzen $v = u$ ein und finden einen Widerspruch. $\square$

3. Eigenschaften der Lösung

Wir betrachten Eigenschaften der Lösung $u \in K := \{u \in H^1_0(\Omega) | u \ge \bar u\}$ der Variationsungleichung (klassisches Hindernisproblem)

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla(v - u) \ge \int_\Omega f\,(v - u) \quad \forall v \in K. \tag{3.1}$$

3.1. Kontaktmenge.

Wir wollen uns mit den Mengen $\Omega_0 := \{x \in \Omega | u(x) = \bar u(x)\}$ und dem freien Rand $\Gamma := \Omega \cap \partial\Omega_0$ beschäftigen. Dazu müssen wir zunächst geeignete Definitionen für solche Mengen finden.

Definition 3.1. *Sei $u \in H^1(\Omega)$, $x \in \Omega$. Wir sagen $u(x) > 0$ im H^1-Sinne, falls es $\rho > 0$ und $\varepsilon > 0$ gibt mit*

$$u - \varepsilon \ge 0 \text{ in } B_\rho(x). \tag{3.2}$$

Dabei ist die letzte Ungleichung als fast überall *zu verstehen.*

Wir sagen $u(x) > v(x)$, falls $(u - v)(x) > 0$.

Bemerkung: Die letzte Ungleichung kann auch gelesen werden als: Die Distribution $u - \varepsilon \in \mathcal{D}'(B_\rho(x))$ ist positiv (angewendet auf eine nichtnegative Testfunktion ergibt sich ein nichtnegatives Resultat).

Die Menge

$$\Omega_1 := \{x \in \Omega | u(x) > \bar{u}(x) \text{ im } H^1 - \text{Sinne}\} \tag{3.3}$$

ist offen. Dies folgt aus der Definition, denn für $x \in \Omega$ mit Werten $\rho, \varepsilon > 0$ kann man in einer $\rho/2$-Umgebung die Werte $\rho/2, \varepsilon$ wählen.

Für eine Lösung u des Hindernisproblems definieren wir Ω_1 wie oben und die *Kontaktmenge* als $\Omega_0 := \Omega \setminus \Omega_1$. Die Kontaktmenge ist abgeschlossen. Der *freie Rand* Γ wird definiert als $\Gamma := \partial\Omega_0 \cap \Omega$.

Sei nun u eine Lösung des Hindernisproblems zum Hindernis $\bar{u}$. Dann gelten die folgenden Ungleichungen:

$$\begin{aligned} u &\geq \bar{u} && \text{in } \Omega, \\ -\Delta u &\geq f && \text{in } \Omega, \\ -\Delta u &= f && \text{in } \Omega_1, \end{aligned}$$

und formal gilt ja $u = \bar{u}$ in Ω_0. Die erste Ungleichung folgt aus $u \in K$, die dritte folgt, weil man zu $x \in \Omega_1$ in beide Richtungen variieren kann. Zur zweiten Ungleichung: In der Ungleichung $a(u, v - u) \geq \langle f, v - u\rangle$ können wir $v = u + \xi$ für beliebiges nichtnegatives ξ setzen. Es gilt also im Distributionssinne

$$\lambda := -\Delta u - f \geq 0.$$

Die dritte Gleichung liefert $\lambda = 0$ in Ω_1. Wir können die Ungleichungen also auch schreiben als

$$\lambda := -\Delta u - f \geq 0, \qquad \operatorname{supp}(\lambda) \subset \Omega_0.$$

3.2. Maximumprinzip. Wir werden das folgende Resultat über Sobolevfunktionen verwenden.

THEOREM 3.2. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $u \in H^{1,s}(\Omega)$ für $s \in [1, \infty]$. Dann gilt $u_+ := \max(u, 0) \in H^{1,s}(\Omega)$ und für $i = 1, ..., n$*

$$\partial_{x_i} u_+ = \begin{cases} \partial_{x_i} u & \text{in } \{x \in \Omega | u(x) > 0\}, \\ 0 & \text{in } \{x \in \Omega | u(x) \leq 0\} \end{cases} \tag{3.4}$$

im Distributionssinne.

Für den Beweis dieses höchst naheliegenden, aber nichttrivialen Resultates siehe [**4**], Theorem A.1, S.50-54.

Für den Laplaceoperator ist eventuell bekannt, dass Oberlösungen, also $g \in H^1$ mit $-\Delta g \geq f$, $g|_{\partial\Omega} \geq 0$ oberhalb von Lösungen u liegen,

$$-\Delta u = f, u|_{\partial\Omega} = 0 \Rightarrow u \leq g.$$

Wir werden ein solches Vergleichsprinzip nun für das Hindernisproblem zeigen. Wir betrachten elliptische Operatoren $L = -\partial_i(a_{ij}(.)\partial_j)$.

Definition 3.3. *$g \in H^1(\Omega)$ heißt Oberlösung, falls*

$$\langle Lg - f, \zeta \rangle \geq 0 \quad \forall 0 \leq \zeta \in H_0^1(\Omega).$$

Theorem 3.4. *Sei u Lösung von (1.1) und g eine Oberlösung $Lg \geq f$ mit $g \geq \bar{u}$ und $g|_{\partial\Omega} \geq 0$. Dann gilt*

$$u \leq g.$$

Beweis. Wir wählen $\eta := \min(u, g)$ mit $\eta \in K$ wegen $\eta \geq \bar{u}$ und $\eta = 0$ auf $\partial\Omega$. Also gilt

$$a(u, \eta - u) \geq \langle f, \eta - u \rangle .$$

Es gilt $\eta - u \leq 0$, also für die Oberlösung g

$$a(g, \eta - u) \leq \langle f, \eta - u \rangle .$$

Subtraktion liefert

$$a(u - g, \eta - u) \geq 0.$$

Nun können wir die Definition von η ausnutzen und berechnen

$$\begin{aligned} 0 \geq a(g - u, \eta - u) &= \int_\Omega a_{ij}\, \partial_i(g - u)\partial_j(\eta - u) \\ &= \int_{\{x : g < u\}} a_{ij}\, \partial_i(g - u)\partial_j(\eta - u) \\ &= \int_{\{x : g < u\}} a_{ij}\, \partial_i(\eta - u)\partial_j(\eta - u) \\ &= \int_\Omega a_{ij}\, \partial_i(\eta - u)\partial_j(\eta - u) \\ &= a(\eta - u, \eta - u) \geq \alpha \|\eta - u\|_{H^1}^2. \end{aligned}$$

Also gilt $\eta = u$ beziehungsweise $u \leq g$. □

Corollar 3.5. *Für $M \geq 0$ und $f = 0$ gelte $\bar{u} \leq M$ in Ω. Dann gilt*

$$u \leq M \text{ in } \Omega.$$

Beweis. Man kann $g \equiv M$ im Theorem wählen. □

3.3. Sprünge über den Rand. Für elliptische Operatoren mit glatten Koeffizienten auf glatten Gebieten Ω gelten Regularitätsaussagen der Form

$$\Delta u = f \in L^s, \quad u \in H_0^1(\Omega) \quad \Rightarrow \quad u \in H^{2,s}(\Omega)$$

mit einer Abschätzung

$$\|u\|_{H^{2,s}} \leq C(\Omega)\|f\|_{L^s}. \tag{3.5}$$

Wir wollen untersuchen, ob eine solche Aussage auch für das Hindernisproblem richtig ist. Die Aussage wäre insofern erstaunlich, als dass dann der Gradient über den freien Rand nicht springen kann.

Wir betrachten Problem (3.1) in einem glatten Gebiet Ω.

THEOREM 3.6. *Sei* $\bar{u} \in H^{2,s}(\Omega)$ *und* $f \in L^s(\Omega)$ *für* $2 \leq s < \infty$. *Dann gilt für die Lösung* u *von (3.1)*

$$u \in H^{2,s}(\Omega). \tag{3.6}$$

Insbesondere hat der Gradient von u *keinen Sprung über den freien Rand* $\Gamma := \Omega \cap \partial\{u > \bar{u}\}$.

BEWEIS. **Idee.** Wir wissen, dass u die Gleichung löst

$$-\Delta u = \begin{cases} f & \text{in } \Omega_1, \\ -\Delta\bar{u} & \text{im Inneren von } \Omega_0. \end{cases}$$

Wir können allerdings nicht ausschließen, dass Δu noch einen singulären Anteil auf $\Gamma = \partial\Omega_0$ hat. Daher können wir die obige Gleichung nicht direkt ausnutzen.

Mit der Funktion θ,

$$\theta(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } t \leq 0, \\ 0 & \text{für } t > 0. \end{cases}$$

können wir auch formal umschreiben in

$$-\Delta u = \theta(u - \bar{u})(-\Delta\bar{u} - f) + f.$$

Da wir $-\Delta u \geq f$ erwarten, können wir auch den positiven Anteil im zweiten Faktor nehmen.

Wir verwenden eine Approximation dieser Gleichung. Dazu approximieren wir θ mit monoton fallenden stetigen Funktionen θ_ε mit $\theta_\varepsilon(t) = 1$ für alle $t \leq 0$ und $\theta_\varepsilon(t) = 0$ für alle $t \geq \varepsilon$. Wir betrachten für $u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega)$

$$-\Delta u_\varepsilon = \theta_\varepsilon(u_\varepsilon - \bar{u})(-\Delta\bar{u} - f)_+ + f. \tag{3.7}$$

Dabei können wir (immer formal) den positiven Anteil nehmen, denn entweder gilt Gleichheit, oder es gilt $u = \bar{u}$ und der Term ist positiv wegen $-\Delta u \geq f$.

1. Schritt. *Behauptung:* Gleichung (3.7) hat eine eindeutige Lösung und es gilt eine Abschätzung

$$\|u_\varepsilon\|_{H^{2,s}} \leq C(\bar{u}, f), \tag{3.8}$$

C unabhängig von ε.

Beweis der Behauptung. Wir wollen die ε-Gleichung abstrakt formulieren. Zu $w \in H_0^1(\Omega)$ können wir $Lw \in H^{-1}(\Omega)$ definieren durch

$$\langle Lw, \zeta \rangle = \int_\Omega \nabla w \cdot \nabla\zeta - [(-\Delta\bar{u} - f)_+\theta_\varepsilon(w - \bar{u}) + f]\,\zeta.$$

Wir behaupten, dass dieser Operator L strikt monoton ist. Tatsächlich gilt

$$\begin{aligned}\langle Lw - Lv, w - v\rangle &= \int_\Omega |\nabla(w-v)|^2 \\ &\quad - \int_\Omega (-\Delta\bar{u} - f)_+ [\theta_\varepsilon(w-\bar{u}) - \theta_\varepsilon(v-\bar{u})]\,(w-v) \\ &\geq \int_\Omega |\nabla(w-v)|^2 \geq c\|w-v\|^2_{H^1}.\end{aligned}$$

L ist insbesondere auch koerziv. Außerdem ist $L : H^1_0 \to H^{-1}$ stetig, also insbesondere stetig auf endlichdimensionalen Teilräumen. Aus Corollar 2.8 (ohne Nebenbedingung) folgt die eindeutige Lösbarkeit von

$$0 = \langle Lu_\varepsilon, \zeta\rangle\,,$$

also von $Lu_\varepsilon = 0$, also von (3.7). Die gleichmäßige Abschätzung für u_ε folgt aus (3.7) mit der Standard-Regularitätsabschätzung (3.5).

Limes $\varepsilon \to 0$. Die Familie $u_\varepsilon \in H^{2,s}$ ist beschränkt; für eine Teilfolge finden wir $u_\varepsilon \rightharpoonup U$ in $H^{2,s}(\Omega)$. Insbesondere hat U die gewünschte Regularität. Es bleibt zu zeigen, dass $U = u$, wobei u die Lösung von (3.1).

2. Schritt. $U \in K$**.** Wir behaupten, dass schon alle $u_\varepsilon \geq \bar{u}$. Dazu betrachten wir $\zeta := (u_\varepsilon - \bar{u})_- := u_\varepsilon - \max(u_\varepsilon, \bar{u}) \leq 0$ und werden zeigen: $\zeta = 0$. Einsetzen in die u_ε-Gleichung liefert

$$\int_\Omega \nabla u_\varepsilon \,\nabla\zeta = \int_\Omega [\theta_\varepsilon(u_\varepsilon - \bar{u})(-\Delta\bar{u} - f)_+ + f]\;\zeta.$$

Außerdem gilt

$$\int_\Omega \nabla\bar{u}\,\nabla\zeta = \int_\Omega (-\Delta\bar{u})\zeta.$$

Wir ziehen diese Gleichungen voneinander ab und erhalten

$$\int_\Omega \nabla(u_\varepsilon - \bar{u})\,\nabla\zeta = \int_\Omega [\theta_\varepsilon(u_\varepsilon - \bar{u})(-\Delta\bar{u} - f)_+ + \Delta\bar{u} + f]\;\zeta.$$

Es gilt $\nabla\zeta = \nabla(u_\varepsilon - \bar{u})\,1_{\{\zeta<0\}}$, also

$$\int_\Omega \nabla\zeta\,\nabla\zeta = \int_{\{\zeta<0\}} [\theta_\varepsilon(u_\varepsilon - \bar{u})(-\Delta\bar{u} - f)_+ + \Delta\bar{u} + f]\;\zeta.$$

$\zeta < 0$ impliziert aber $u_\varepsilon < \bar{u}$, und damit $\theta_\varepsilon(u_\varepsilon - \bar{u}) = 1$. Es folgt

$$\int_\Omega |\nabla\zeta|^2 = \int_{\{\zeta<0\}} [(-\Delta\bar{u} - f)_+ + \Delta\bar{u} + f]\;\zeta \leq 0,$$

also $\zeta = 0$.

Mit den Approximierenden u_ε ist auch $U \in K$.

3. Schritt. U **löst die Ungleichung.** Wir wenden das Minty-Lemma auf $\langle Lu_\varepsilon, v - u_\varepsilon\rangle \geq 0 \forall v \in H_0^1(\Omega)$ an. Es gilt also

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle Lv, v - u_\varepsilon\rangle \\ &= \int_\Omega \nabla v\, \nabla(v - u_\varepsilon) - [\theta_\varepsilon(v - \bar{u})(-\Delta\bar{u} - f)_+ + f]\,(v - u_\varepsilon). \end{aligned}$$

Wir betrachten nun v mit $v \geq \bar{u} + \min(\delta, \operatorname{dist}(x, \partial\Omega))$. Dann gilt für $\varepsilon < \delta$, dass in Punkten x mit Abstand mindestens δ vom Rand, $\theta_\varepsilon((v - \bar{u})(x)) = 0$. Das Randintegral ist klein, falls $\delta > 0$ klein ist, also

$$o(1) \leq \int_\Omega \nabla v\, \nabla(v - u_\varepsilon) - f\,(v - u_\varepsilon) \qquad \forall \varepsilon < \delta.$$

gleichmäßig in ε für $\delta \to 0$. Im Limes $\varepsilon \to 0$ finden wir

$$o(1) \leq \int_\Omega \nabla v\, \nabla(v - U) - f\,(v - U).$$

Sei nun $v \in K$ eine beliebige Testfunktion. Wir approximieren mit $v_\delta(x) := v(x) + \min(\delta, \operatorname{dist}(x, \partial\Omega))$. Alle v_δ sind zulässig und es gilt $v_\delta \to v$ in $H^{1,s}$ für $\delta \to 0$. Es folgt im Limes $\delta \to 0$

$$0 \leq \int_\Omega \nabla v\, \nabla(v - U) - f\,(v - U) \qquad \forall v \in K.$$

Nach dem Minty-Lemma haben wir damit eine Lösung der Ungleichung (3.1) gefunden. $\square$

Das Theorem liefert: Die Lösung u des Hindernisproblems erfüllt

$$-\Delta u = f\,1_{\{u > \bar{u}\}} - \Delta\bar{u}\,1_{\{u = \bar{u}\}}.$$

Für $s > N$ ist die Lösung in $H^{2,s} \subset C^{1,\alpha}$ für hinreichend kleines α. Insbesondere ist der Gradient stetig über den freien Rand.

KAPITEL 2

Grundwasserproblem und Variationsungleichungen

Dieses Kapitel setzt die Analyse von Variationsungleichungen fort. Uns leitet dabei folgende Beobachtung.

- Für die Lösung der endlichdimensionalen Variationsungleichung haben wir nur die Stetigkeit, nicht die Monotonie des Operators gebraucht.
- Die Übertragung ins Unendlichdimensionale haben wir für monotone Operatoren durchgeführt, denn für diese konnten wir den Minty-Trick verwenden. Für den Beweis reicht uns aber eine Stetigkeitseigenschaft des Operators.

1. Existenzsatz für allgemeine Variationsungleichungen

In Lemma 2.9 haben wir eine Stetigkeit für monotone Operatoren gezeigt, nämlich

(1.1)

$$u_m \rightharpoonup u \in K \text{ in } X,\ Au_m \overset{*}{\rightharpoonup} f \text{ in } X',\ \limsup_m \langle Au_m, u_m\rangle \leq \langle f, u\rangle$$
$$\Rightarrow \langle Au - f, v - u\rangle \geq 0 \forall v \in K \ \&\ \limsup_m \langle Au_m, u_m\rangle = \langle f, u\rangle\,.$$

Dies ist genau die Stetigkeitsbedingung, die wir benötigen, um unendlichdimensionale Variationsprobleme zu lösen.

Theorem 1.1. *Sei X separabler, reflexiver Banachraum, $K \subset X$ konvex, abgeschlossen und nichtleer, $A : K \to X'$ sei beschränkt auf beschränkten Teilmengen, koerziv bezüglich $u_0 \in K$ und erfülle die Stetigkeitsbedingung (1.1).*

Dann existiert eine Lösung $u \in K$ der Variationsungleichung

$$\langle Au, v - u\rangle \geq 0 \quad \forall v \in K. \tag{1.2}$$

Beweis. *1. Fall: X endlichdimensional.* In diesem Fall gibt es einen Isomorphismus zwischen X und X' und wir können A identifizieren mit $A : K \to X$, so dass $\langle Au, v\rangle$ dargestellt wird mit einem Skalarprodukt $\langle ., .\rangle$. Wenn wir nun wüßten, dass $A : K \to X$ stetig ist, dann könnten wir Theorem 5.1 anwenden und wären fertig.

Damit der Beweis von Theorem 5.1 funktioniert, müssen wir zeigen, dass

$$G := P \circ (\mathrm{Id} - A) : K \to K$$

stetig ist, wobei P die orthogonale Projektion auf K ist.

Wir wählen einen Unterraum $W \subset X$, so dass $K \subset W$ und K ein Inneres hat (relativ in W).

1. Fall, a) X endlichdimensional und A in Umgebung von K (relativ W) definiert mit Beschränktheit und der Stetigkeitsbedingung, K beschränkt. Wir zeigen nun Stetigkeit von G. Sei $K \ni u_m \to u \in K$. Dann sind die Au_m beschränkt; wegen Endlichdimensionalität gilt $Au_m \to f$ für eine Teilfolge. Die Stetigkeitsbedingung ist anwendbar und liefert

$$\langle Au - f, v - u \rangle \geq 0$$

für alle v in einer Umgebung von K. Dann gilt die Ungleichung sogar für alle $v \in W$, denn es gilt $u \in K$. Also gilt $Au - f \perp W$. Wir betrachten die orthogonale Projektion $Q : X \to W$ und nutzen $P \circ Q = P$. Es gilt

$$P(u - Au) = P \circ Q(u - Au) = P \circ Q(u - f) = P(u - f),$$

also, zusammen mit der Stetigkeit von P,

$$G(u) = P(u - Au) \overset{(!)}{=} P(u - f) = \lim P(u_m - Au_m) = \lim G(u_m).$$

Damit ist die Stetigkeit von G gezeigt. Wir finden eine Lösung der Variationsungleichung.

1. Fall, b) X endlichdimensional, K beschränkt, allgemeines $A : K \to X'$. Wir verkleinern K auf die Menge

$$K_\delta := \{x \in K | B_\delta(x) \cap W \subset K\}.$$

Dann ist K_δ abgeschlossen und konvex, und A ist auf einer δ-Umgebung von K_δ definiert und erfüllt die Voraussetzungen. Wir finden also eine Lösung $u_\delta \in K_\delta$,

$$\langle Au_\delta, v - u_\delta \rangle \geq 0 \quad \forall v \in K_\delta. \tag{1.3}$$

X ist endlichdimensional, daher finden wir für eine Teilfolge $u_\delta \to u \in K$, $Au_\delta \to f \in X'$. Die Stetigkeitsbedingung liefert

$$\langle Au - f, v - u \rangle \geq 0 \quad \forall v \in K.$$

Zu beliebigem $v \in K$ finden wir $v_\delta \to v$, $v_\delta \in K_\delta$ und damit

$$0 \leq \langle Au_\delta, v_\delta - u_\delta \rangle \to \langle f, v - u \rangle \leq \langle Au, v - u \rangle .$$

Damit haben wir die Ungleichung gelöst.

1. Fall, c) X endlichdimensional, K und A allgemein. Für unbeschränktes K schneiden wir ab und lösen zunächst auf $K_R := K \cap B_R(0)$. Wegen Koerzivität bleiben die Lösungen u_R beschränkt und sind ab einem bestimmten R schon die Lösungen der vollen Variationsungleichung (wie in Corollar 2.8).

2. Fall: X unendlichdimensional. Da X separabel ist, gibt es eine abzählbare Basis und zugehörige Unterräume $X_N \subset X_{N+1} \subset X$ für $N \in \mathbb{N}$, und es gilt

$$K = \overline{\bigcup_{N \in \mathbb{N}} K_N}, \qquad K_N := K \cap X_N.$$

Wir definieren $A_N : K_N \to X'_N$ durch

$$\langle A_N u, v \rangle := \langle Au, v \rangle \quad \forall u \in K_N, v \in X_N.$$

Gemäß Fall 1 gibt es Lösungen $u_N \in K_N$ von

$$\langle A_N u_N, v - u_N \rangle \geq 0 \quad \forall v \in K_N. \tag{1.4}$$

Die Koerzivität liefert, dass die u_N beschränkt sind. X ist reflexiv, daher für eine Teilfolge $u_N \rightharpoonup u$ in X. Da K abgeschlossen und konvex ist, gilt $u \in K$. Wegen der Beschränktheit von A sind die Au_N beschränkt und daher für eine neuerliche Teilfolge $Au_N \overset{*}{\rightharpoonup} f$ in X'.

Für $v \in K_{N_0}$ und $N \geq N_0$ gilt wegen $K_{N_0} \subset K_N$

$$\langle A_N u_N, u_N \rangle \leq \langle A_N u_N, v \rangle = \langle Au_N, v \rangle \to \langle f, v \rangle\,,$$

also

$$\limsup_N \langle Au_N, u_N \rangle \leq \langle f, v \rangle\,.$$

Wir können $v = u_{N_0}$ setzen und erhalten im Limes die Ungleichung mit u statt v. Dann ist die Stetigkeitsbedingung anwendbar und liefert

$$\langle Au - f, v - u \rangle \geq 0 \quad \forall v \in K,$$

und $\limsup_N \langle Au_N, u_N \rangle = \langle f, u \rangle$. Nach obiger Ungleichung gilt für $v \in K_{N_0}$ die Ungleichung $\langle f, v - u \rangle \geq 0$, also

$$\langle Au, v - u \rangle \geq 0 \quad \forall v \in K_{N_0}.$$

Da die K_N dicht in K liegen, ist damit die Variationsungleichung gezeigt. □

Wir wollen nun sehen, dass sich mit dem obigen Satz tatsächlich mehr Operatoren behandeln lassen als nur monotone.

DEFINITION 1.2. *Wir nennen A einen* gestört monotonen Operator, *falls $A : K \to X'$ gegeben ist durch $Au = B(u,u)$, so dass $B : K \times K \to X'$ für alle $u_1, u_2 \in K$ erfüllt:*

$B(u_1, .) : K \to X'$ *monoton und stetig auf endl.dim. UR'en,*

$B(., u_2) : (K, \text{schwach}) \to (X', \text{schwach}*)$ *stetig,*

$\langle ., B(., u_2) \rangle : (K, \text{schwach}) \to \mathbb{R}$ *unterhalbstetig.*

LEMMA 1.3. *Sei A ein gestört monotoner Operator. Dann erfüllt A die Stetigkeitsbedingung (1.1).*

Beweis. Es seien $u_n \rightharpoonup u$ und $Au_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ wie in den Voraussetzungen von (1.1). Wir schreiben zunächst die Monotonie von $B(u_1, .)$ für beliebiges $v \in K$ aus,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle B(u_n, u_n) - B(u_n, v), u_n - v\rangle \\ &= \langle B(u_n, u_n), u_n\rangle - \langle B(u_n, u_n), v\rangle - \langle B(u_n, v), u_n\rangle + \langle B(u_n, v), v\rangle . \end{aligned}$$

Nun wollen wir den Limes superior bilden. Im ersten Term nutzen wir die Voraussetzung an die Folge, $\limsup \langle Au_n, u_n\rangle = \langle f, u\rangle - \lambda$ für $\lambda \geq 0$. Im zweiten Term nutzen wir die Voraussetzung $Au_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$. Mit den Voraussetzungen an B können wir in den anderen beiden Termen zum Limes übergehen und finden

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle f, u\rangle - \lambda - \langle f, v\rangle - \langle B(u, v), u\rangle + \langle B(u, v), v\rangle \\ &= -\lambda + \langle B(u, v) - f, v - u\rangle . \end{aligned}$$

Wir setzen $v = u$ und finden $\lambda = 0$. Wir wenden das Minty-Lemma auf $B(u, .)$ an und finden

$$0 \leq \langle B(u, u) - f, v - u\rangle \, \forall v \in K.$$

Dies, zusammen mit $\lambda = 0$, liefert genau die Stetigkeitsaussage. □

2. Variationsprobleme von elliptischem Typ

Wir wollen uns auf eine kleine Klasse von Operatoren beschränken, um die Argumente klar zu machen und sie nicht zu technisch werden zu lassen. Für allgemeinere Operatoren verweisen wir auf [**1**].

Wir betrachten Grundwasserströmungen mit Diffusionsmatrix $d(x, u) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (Leitfähigkeit, Porösität) und Kräften $e(x, u) \in \mathbb{R}^n$ (Gewichtskraft), also

$$Au(x) := \nabla \cdot [-d(x, u)\nabla u + e(x, u)] + f(x, u). \tag{2.1}$$

Wir beschränken uns auf homogene Dirichlet-Randbedingungen $u = 0$ und betrachten als treibende Kraft eine Volumenkraft f. Das Umgekehrte wäre physikalischer, aber in der Notation aufwendiger. Zudem beschränken wir uns im Folgenden auf den Fall $p = 2$.

Wir wollen Voraussetzungen an d, e und f angeben, so dass A ein Operator $H^1_0 \to (H^1_0)' = H^{-1}$ ist. Wir schreiben A als

$$\begin{aligned} Au &= B(u, u), \\ \langle B(v, w), \varphi\rangle &= \int_\Omega \{d(., v)\nabla w \cdot \nabla\varphi - e(., v) \cdot \nabla\varphi + f(., v)\varphi\} . \end{aligned}$$

Wir wählen $q > 1$ mit

$$1 - \frac{n}{2} \geq -\frac{n}{q}.$$

Dann gilt $H^1 \subset L^q$. Damit wir die Integrale in der B-Definition ausführen können, nehmen wir *Wachstumsbedingungen* an:

$$|d(v)| \leq C, \tag{2.2}$$

$$|e(v)| \leq C|v|^{q/2} + C, \tag{2.3}$$

$$|f(v)| \leq C|v|^{q-1} + C. \tag{2.4}$$

Unter diesen Voraussetzungen lassen sich alle Integrale bilden. Für $v \in L^q$ gilt $e(.,v) \in L^2$ und für $q^* = q/(q-1)$ gilt

$$\frac{1}{q^*} + \frac{1}{q} = 1 \quad \text{und} \quad f(.,v) \in L^{q^*} \quad \forall v \in L^q.$$

Dies sichert die Wohldefiniertheit von A.

Wir wollen nachweisen, dass A ein gestört monotoner Operator ist. Dazu müssen wir zusätzlich annehmen, dass

(2.5) $d(.,z) \geq c_0 > 0$,

(2.6) $|e(.,z)|$ wächst nicht linear für $|z| \to \infty$,

(2.7) $-z\,f(.,z)$ wächst nicht quadratisch für $|z| \to \infty$.

Die letzten beiden Bedingungen sind aufgrund der x-Abhängigkeit nicht mathematisch präzise. Es genügt zum Beispiel folgende Annahme. *Für jedes $\delta > 0$ existiert $C_\delta \in \mathbb{R}$, so dass*

$$|e(x,z)| \leq \delta z + C_\delta \quad \forall x \in \Omega, z \in \mathbb{R},$$
$$-z\,f(x,z) \leq \delta z^2 + C_\delta \quad \forall x \in \Omega, z \in \mathbb{R}.$$

Die Bedingung an e verschärft Voraussetzung (2.3), während die Voraussetzung an f als Vorzeichenbedingung interpretiert werden kann.

PROPOSITION 2.1. *$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sei beschränkt, die Koeffizienten d, e, und f seien meßbar in x, zusätzlich seien d und e stetig in u und (2.2)–(2.7) seien erfüllt. Dann ist A beschränkt auf beschränkten Teilmengen von H^1_0 und koerziv bezüglich 0. Zudem ist A ein gestört monotoner Operator.*

BEWEIS. Beschränkte Mengen in H^1 sind auch beschränkt in L^q. Wegen der Wachstumsvoraussetzungen ist A dort beschränkt.

Für die Koerzivität nutzen wir die Poincaré-Ungleichung und erhalten

$$\langle Au, u\rangle \geq cc_0\|u\|^2_{H^1} - \left|\int_\Omega e(u)\nabla u\right| + \int_\Omega f(u)u \to \infty$$

für $\|u\|_{H^1} \to \infty$ wegen (2.6) und (2.7).

Wir weisen nun nach, dass A gestört monoton ist. $B(v,.)$ ist stetig und monoton wegen der strikten Positivität von d. Weiterhin ist $B(.,w)$ schwach stetig: Sei $v_n \rightharpoonup v$ in H^1_0. Wir können annehmen, dass $v_n \to v$ punktweise fast überall. Für eine Teilfolge hat zudem $d(.,v_n)$ einen schwach-$*$ Limes in L^∞, $e(.,v_n)$ einen schwachen Limes in L^2, und $f(.,v_n)$ einen schwachen Limes in L^{q^*}. Diese müssen mit den punktweise Limiten fast überall übereinstimmen, also

$$\begin{aligned} d(.,v_n)\nabla w\cdot\nabla\varphi + e(.,v_n)\cdot\nabla\varphi + f(.,v_n)\varphi \\ \to d(.,v)\nabla w\cdot\nabla\varphi + e(.,v)\cdot\nabla\varphi + f(.,v)\varphi \end{aligned}$$

in L^1. Insbesondere ist der Limes eindeutig und die ganze Folge konvergiert. Damit ist gezeigt, dass $B(.,w)$ schwach stetig ist.

Schließlich betrachten wir noch $\langle v_n, B(v_n,w)\rangle$ für $v_n \rightharpoonup v$ in H^1. Wieder können wir annehmen, dass $v_n \to v$ stark in L^2 und punktweise fast überall.

a) d-Term. Nach dem Lebesgue-Konvergenzsatz gilt wegen der gleichmäßigen Schranke für d die Konvergenz $d(.,v_n) \to d(.,v)$ in L^2. Die Funktionen $d(.,v_n)\nabla v_n$ sind L^2-beschränkt und haben für eine Teilfolge einen schwachen Limes. Es bleibt zu zeigen, dass dieser identisch ist mit $d(.,v)\nabla v$. Aber für glatte φ gilt

$$\int_\Omega d(.,v_n)\nabla v_n\,\varphi \to \int_\Omega d(.,v)\nabla v\,\varphi$$

wegen der starken L^2-Konvergenz der $d(.,v_n)$ und der schwachen Konvergenz der ∇v_n.

b) e-Term. Wegen (2.6) gilt $|e(.,v_n)| \le |v_n| + C_1 \to |v| + C_1$ in L^2. Nach dem allgemeinen Lebesgue-Konvergenzsatz (sh. z.B. [**2**], Stichwort ist *Vitali-Konvergenzsatz*) folgt $e(.,v_n) \to e(.,v)$ in L^2.

c) f-Term. Schließlich schreiben wir

$$\int_\Omega f(v_n)v_n = \int_\Omega \left\{f(v_n)v_n + |v_n|^2 + C_1\right\} - \int_\Omega \left\{|v_n|^2 + C_1\right\}.$$

Im ersten Integral ist der Integrand nichtnegativ nach (2.7); das Lemma von Fatou liefert die Unterhalbstetigkeit. Das zweite Integral konvergiert wegen der starken Konvergenz $v_n \to v$ in L^2. $\square$

Wir sind im Beweis mehrfach zu einer Teilfolge übergegangen, behaupteten aber die Konvergenz der gesamten Folge. Dies ist ein Standard-Trick: Wenn der Limes eindeutig bestimmt ist, dann konvergiert die gesamte Folge. Genauer:

Lemma 2.2 (Lemma ohne Name). *Sei X ein Banachraum und (x_n) eine Folge und $x \in X$ ein Punkt in X. Angenommen, zu jeder beliebigen Teilfolge $(x_{n_k})_k$ können wir eine weitere Teilfolge $(x_{n_{k_i}})_i$ auswählen, so dass $x_{n_{k_i}} \to x$ für $i \to \infty$. Dann gilt*

$$x_n \to x \quad \text{für } n \to \infty. \tag{2.8}$$

Beweis. Angenommen, (2.8) gilt nicht. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$ und eine Teilfolge $(x_{n_k})_k$ mit $\|x_{n_k} - x\| \ge \varepsilon$ für alle k. Diese Teilfolge kann aber keine Teilfolge haben, die gegen x konvergiert. $\square$

Wir können Proposition 2.1 mit Lemma 1.3 zusammenbringen und erhalten als Corollar aus Theorem 1.1 folgenden Satz.

COROLLAR 2.3. *Zu Randwerten gegeben durch* $U_0 \in H^1(\Omega)$ *sei* $K := \{u \in H^1(\Omega) | (u - U_0)|_{\partial\Omega} = 0\}$ *und* $A : K \to (H^1)'$ *gegeben durch*

$$\langle Au, \varphi \rangle = \int_\Omega [d(., u)\nabla u - e(., u)] \nabla\varphi + \int_\Omega f(., u)\varphi,$$

mit d, e, f *wie in der Proposition, insbesondere stetig. Dann gibt eine Lösung* $u \in K$ *der Gleichung* $Au = 0$*, also von*

$$\nabla \cdot [d(., u)\nabla u - e(., u)] = f(., u). \tag{2.9}$$

Bemerkung zum Beweis: Der Operator $A : K \to H^{-1}$ ist gestört monoton. Der Beweis ist identisch wie der Beweis von Proposition 2.1.

Bemerkungen zu Verallgemeinerungen.

- Als Grundraum kann L^p statt L^2 gewählt werden. Dies erlaubt eine größere Klasse an Nichtlinearitäten.
- (2.6) und (2.7) können allgemeiner interpretiert werden.
- Statt $d(x, u)\nabla u$ kann man allgemeine $a(x, u, \nabla u)$ betrachten. Insbesondere interessant:

  $$a(x, u, \nabla u) = |\nabla u|^{p-2}\nabla u.$$

  Diese Wahl ist zulšsig im Grundraum L^p. Man betrachtet dann den p-Laplace-Operator.

All diese Verallgemeinerungen können mit Theorem 1.1 betrachtet werden. Notwendig ist dafür nur Geduld beim Aufschreiben, zusätzliche Argumente werden nicht benötigt.

3. Das Grundwasserproblem

Wir betrachten nun das Problem aus der Einleitung, Abschnitt 2. Hier springt der Koeffizient $e(., u)$ in $u = 0$, dies führt zum Auftreten eines freien Randes, nämlich $\{x \in \Omega | u(x) = 0\}$. Konkret hatten wir $e(x, u) = -\chi(u)e_n$ mit $\chi(z) = 1$ für $z > 0$ und $\chi(z) = 0$ für $z \leq 0$.

Allgemeiner betrachten wir

$$e(x, z) = \begin{cases} e^+(x, z) & z > 0, \\ e^-(x, z) & z \leq 0, \end{cases}$$

wobei $e^\pm$ stetig sind und die Wachstumsbedingung erfüllen.

Wir gehen über zu einer mengenwertigen Funktion

$$\begin{aligned} e(x, z) &:= \{e(x, z)\} && z \neq 0, \\ e(x, 0) &:= \left\{\alpha e^+(x, 0) + (1 - \alpha)e^-(x, 0) | \alpha \in [0, 1]\right\}. \end{aligned}$$

Für meßbare Funktionen $u : \Omega \to \mathbb{R}$ und $\gamma : \Omega \to \mathbb{R}^n$ schreiben wir

$$\begin{aligned}
&\gamma \in e(.,u)\\
:\Longleftrightarrow\ &\exists \chi : \{u=0\} \to [0,1] \text{ meßbar } : \gamma(.) = \chi e^+(.,0) + (1-\chi(.))e^-(.,0)\\
&\qquad\qquad\text{punktweise in } \{u=0\}\\
\Longleftrightarrow\ &\exists \chi : \Omega \to [0,1] \text{ meßbar } : \gamma(.) = \chi e^+(.,0) + (1-\chi(.))e^-(.,0)\\
&\qquad\qquad\text{punktweise in } \Omega, \quad \chi = 1 \text{ in } \{u>0\}, \chi = 0 \text{ in } \{u<0\}.
\end{aligned}$$

Theorem 3.1. *Seien $d, e^\pm, f$ meßbar in x, stetig in z, Wachstum und Monotonie wie in (2.2)–(2.7), Ω beschränkt und Lipschitz, $U_0 \in H^1(\Omega)$.*

Dann gibt es eine Lösung $u \in H^1(\Omega)$, $\gamma \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^n)$ von

$$\gamma \in e(.,u), \tag{3.1}$$

$$\nabla \cdot [d(.,u)\nabla u - \gamma] = f(.,u) \tag{3.2}$$

mit $u = U_0$ auf $\partial\Omega$.

Interpretation: Der freie Rand $\{u = 0\}$ kann ein niederdimensionales Objekt sein. In diesem Fall sind die Ausgangsgleichungen gelöst, denn $\gamma = e(.,u)$ gilt fast überall. Der freie Rand kann aber auch *dick* sein, also nicht niederdimensional. In diesem Fall herrscht ein *Mischzustand* vor, e^+ und e^- werden beide verwendet, effektiv sehen wir eine Konvexkombination.

Beweis. Definiere stetige e_ε durch

$$e_\varepsilon(x,z) := \begin{cases} e^+(x,z) & z \geq \varepsilon,\\ \text{lineare Interpolation} & z \in [-\varepsilon, \varepsilon],\\ e^-(x,z) & z \leq -\varepsilon. \end{cases}$$

Dieses e_ε erfüllt die Wachstums- und Monotoniebedingungen gleichmäßig in ε. Wir finden Lösungen u_ε von

$$\nabla \cdot [d(.,u_\varepsilon)\nabla u_\varepsilon - e_\varepsilon(.,u_\varepsilon)] = f(.,u_\varepsilon)$$

mit $u_\varepsilon = U_0$ auf $\partial\Omega$.

Die Operatoren A_ε sind gleichmäßig koerziv, daher gilt mit C unabhängig von ε

$$\|u_\varepsilon\|_{H^1} \leq C.$$

Wir wählen eine Teilfolge $\varepsilon \to 0$ und $u \in H^1$ mit

$$\begin{aligned} u_\varepsilon &\rightharpoonup u \quad \text{in } H^1,\\ u_\varepsilon &\to u \quad \text{in } L^2 \text{ und punktweise f. üb.} \end{aligned}$$

u ist der Kandidat für unsere Lösung. Die Grenzübergänge

$$\int_\Omega d(.,u_\varepsilon)\nabla u_\varepsilon\,\nabla\varphi \to \int_\Omega d(.,u)\nabla u\,\nabla\varphi$$
$$\int_\Omega f(.,u_\varepsilon)\,\varphi \to \int_\Omega f(.,u)\,\varphi$$

sind standard, denn $d(.,u_\varepsilon) \to d(.,u)$ punktweise und damit stark nach dem Lebesgue Konvergenzsatz. $f(.,u_\varepsilon) \to f(.,u)$ schwach in L^{q^*} wegen punktweiser Konvergenz und Kompaktheit in der schwachen Topologie.

Interessant ist der e-Term. Wir wissen, dass $e_\varepsilon(.,u_\varepsilon) \to e_\varepsilon(.,u)$ punktweise f.üb. auf $\{u \neq 0\}$, denn dort sind die e_ε gleichmäßig stetig. Weiterhin gilt $\|e_\varepsilon(.,u_\varepsilon)\|_{L^2} \le C$ wegen der Wachstumsannahmen. Wir finden also einen schwachen Limes $\gamma \in L^2(\Omega)$,

$$e_\varepsilon(.,u_\varepsilon) \rightharpoonup \gamma \text{ in } L^2(\Omega).$$

Insbesondere gilt

$$\int_\Omega e_\varepsilon(.,u_\varepsilon)\,\nabla\varphi \to \int_\Omega \gamma\,\nabla\varphi,$$

und wir haben (3.2) für (u,γ) nachgewiesen. Es bleibt, (3.1) zu zeigen.

Die Funktionen $e_\varepsilon(.,u_\varepsilon)\,\chi_{\{u\neq 0\}}$ konvergieren schwach gegen $\gamma\chi_{\{u\neq 0\}}$ und punktweise gegen $e(.,u)\,\chi_{\{u\neq 0\}}$, also gilt

$$\gamma = e(.,u) \quad \text{f.üb. in } \{u \neq 0\}.$$

Es bleibt, die Menge $S := \{x \in \Omega | u(x) = 0\}$ zu betrachten. In S gilt $u_\varepsilon \to 0$ punktweise fast überall. Nach dem Satz von Egoroff gibt es für jedes $\delta > 0$ eine Menge $S_\delta \subset S$ mit $|S \setminus S_\delta| \le \delta$ und

$$u_\varepsilon \to 0 \quad \text{gleichmäßig auf } S_\delta.$$

Auf S_δ gilt dann für jedes $\eta > 0$ und $\varepsilon \le \varepsilon_0(\eta)$

$$e_\varepsilon(.,u_\varepsilon)|_{S_\delta} \in \operatorname{conv}\left\{e^\pm(.,\pm z) : S_\delta \to \mathbb{R}^n | 0 \le z \le \eta\right\} =: K_\eta.$$

Nach dem Lemma von Mazur (siehe Theorem 2.6) ist $\bar K_\eta$, Abschluss in $L^2(S_\delta)$, schwach abgeschlossen in L^2. Es folgt

$$\gamma|_{S_\delta} \in \bar K_\eta$$

für beliebiges $\eta > 0$. Es gilt aber

$$\bar K_\eta = \big\{v : S_\delta \to \mathbb{R}^n | v(x) \in \operatorname{conv}\{e^\pm(x,\pm z) | 0 \le z \le \eta\} \\ \text{für fast alle } x \in S_\delta\big\}$$

Diese Charakterisierung folgt aus der Tatsache, dass für eine stark konvergente Funktionenfolge eine Teilfolge fast überall konvergiert. Wegen der Stetigkeit von e^+ und e^- finden wir $\gamma \in e(.,0)$ auf S_δ. Es gilt also

$$\gamma \in e(.,u)$$

auf beliebig großen Teilmengen von Ω. Also gilt die Inklusion fast überall. $\square$

Mit dem Satz ist unser Ausgangs-Grundwasserproblem gelöst. Im allgemeinen finden wir eine sogenannte Mischzone mit $u = 0$. Eine solche Zone haben wir erwartet.

Frage: Welche Bedeutung hat γ? In der Gleichung $\nabla\cdot[-\nabla u+\gamma] = f$ ist $-\nabla u+\gamma$ die Geschwindigkeit der Strömung. In einer offenen Menge mit $u = 0$ gilt $\nabla u = 0$ und daher ist γ dort die Geschwindigkeit.

Die Schranke $\gamma \in -[0, 1] \cdot e_n$ bedeutet, dass die Strömung nur entlang der Gravitation erfolgen kann und maximal mit der 'freien Gravitationsgeschwindigkeit' im porösen Medium. Es kann aber auch ein kleinerer Wert angenommen werden. Die Interpretation ist, dass in diesem Fall das Fluid nicht das gesamte Volumen (für die Strömung) nutzt.

3.1. Ein eindimensionales Beispiel. Wir betrachten einen Testzylinder, gefüllt mit porösem Material, oben ($x > 0$) mit einer Leitfähigkeit $d_1 = 1$ (normalisiert), unten ($x < 0$) mit Leitfähigkeit d_0. Falls $d_0 > 1$ haben wir unten größere Poren, die bei derselben Druckdifferenz und Gewichtskraft eine schnellere Strömung ermöglichen.

Wir betrachten also auf $\Omega = (-1, 1)$ das Problem mit der x-abhängigen Diffusion $d(x) = d_0 > 0$ für $x \in (-1, 0)$ und $d(x) = 1$ für $x \in (0, 1)$. Weiterhin sei $e(x, u) = -d(x)\chi(u)$ (die Leitfähigkeit tritt als Faktor auch im Gravitationsterm auf). Dann ist unsere Gleichung

$$[d \cdot (u' - \gamma)]' = 0.$$

Diese eindimensionale Gleichung liefert uns

$$d \cdot (u' - \gamma) = \lambda \quad \text{auf } (-1, 1).$$

Falls $u > 0$, dann $\gamma = -1$. In einem Bereich mit positivem u ist daher u stückweise linear. In Bereichen mit $u = 0$ ist u trivialerweise linear.

Wir suchen nun eine Lösung, in der eine Mischzone auftritt; den Übergang zu gesättigter Strömung erwarten wir in $x = 0$. Wir suchen also u mit $u = 0$ auf $(-1, 0)$ und $u > 0$ auf $(0, 1)$. Es gilt dann

$$\gamma = -\frac{\lambda}{d_0} \text{ auf } (-1, 0),$$
$$u' = \lambda - 1 \text{ auf } (0, 1).$$

Um die Randbedingung rechts zu erfüllen, müssen wir $\lambda = u_0 + 1$ setzen. Wir können die Gleichungen lösen, falls

$$\frac{u_0 + 1}{d_0} \in [0, 1],$$

also falls $u_0 \le d_0 - 1$.

Physikalische Interpretation: Im oberen Bereich bewirkt die Gewichtskraft zusammen mit dem Druckgradienten einen bestimmten Fluid-Durchsatz. Im unteren Teil wirkt kein Druckgradient, und die Gewichtskraft wird eventuell nicht voll genutzt ($|\gamma| < 1$), aber die große Leitfähigkeit d_0 ermöglicht dennoch denselben Fluid-Durchsatz.

KAPITEL 3

Das Stefan Problem

Wir führen hier die Analyse des Stefan Problems (Schmelzen von Eis) fort. Wir hatten schon die schwache Formulierung angegeben. Das Grundgebiet ist $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, es ist teils mit flüssigem Wasser, teils mit Eis ausgefüllt. Wir beschreiben das System mit der Temperatur $u : \Omega \to \mathbb{R}$ und der freien Energie $\tilde{\alpha}(u) = u + \chi(u)$,

$$\chi(\theta) = \begin{cases} 1 & \text{für } \theta > 0, \\ 0 & \text{für } \theta \leq 0. \end{cases} \tag{0.3}$$

Die schwache Form des Stefan-Problems lautet

$$\partial_t(\tilde{\alpha}(u)) = \Delta u. \tag{0.4}$$

Wir werden diese Gleichung umformulieren, dann die Existenz von Lösungen, die Eindeutigkeit und erste Regularitätseigenschaften der Lösung zeigen. Wir folgen dabei [**6**], Kapitel II.

In der Formulierung (0.4) tauchen zwei Probleme auf.

- $\tilde{\alpha}$ ist nicht differenzierbar.
- Die Wahl von $\tilde{\alpha}(0) = 0$ ist willkürlich.

Das erste Problem ist nicht fundamental, wir fordern (0.4) im Distributionssinne. Um das zweite Probleme zu lösen führen wir (wie im Grundwasserproblem) eine mengenwertige Funktion $\alpha : \mathbb{R} \to 2^{\mathbb{R}}$ ein,

$$\alpha(\theta) = \begin{cases} \{\theta + 1\} & \text{für } \theta > 0, \\ [0, 1] & \text{für } \theta = 0, \\ \{\theta\} & \text{für } \theta < 0. \end{cases} \tag{0.5}$$

Wir wollen dann folgendes Problem lösen. Finde $u, w : [0, T] \times \Omega \to \mathbb{R}$ mit

$$\begin{aligned} \partial_t w &= \Delta u, \\ w &\in \alpha(u). \end{aligned} \tag{0.6}$$

Zusätzlich müssen wir noch Anfangs- und Randbedingungen stellen.

1. Ein Existenzsatz

Unseren Existenzsatz wollen wir für möglichst allgemeines α führen. Wir werden fordern, dass α ein maximal monotoner Graph $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist.

Dabei bedeutet:

1. α Graph $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$: Es gibt $D(\alpha) \subset \mathbb{R}$ und $\alpha : D(\alpha) \to 2^{\mathbb{R}}$.

2. α monotoner Graph:

$$(f-g)\cdot(u-v) \geq 0 \qquad \forall f \in \alpha(u), g \in \alpha(v). \tag{1.1}$$

Eine analoge Definition hatten wir früher schon für Abbildungen; im $\mathbb{R}^n$ oder Hilbertraum muss man $\cdot$ durch $\langle .,. \rangle$ ersetzen.

3. α maximal monotoner Graph $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$(f-g)\cdot(u-v) \geq 0 \; \forall v, g \in \alpha(v) \iff u \in D(\alpha),\; f \in \alpha(u). \tag{1.2}$$

Die Maximalität impliziert, dass man keine Paare (u, f) zum Graph hinzunehmen kann, ohne die Monotonie zu zerstören. Daher der Name *maximal monoton*.

Für uns (im Eindimensionalen) gilt: α kann mit durchgezogener Linie gezeichnet werden.

Wir nehmen im folgenden immer die Normalisierung

$$\alpha(0) \ni 0 \tag{1.3}$$

an. Wir können Umkehrgraph und Stammfunktionen definieren,

$$\beta := \alpha^{-1},$$
$$a(\xi) := \int_0^\xi \tilde{\alpha}(\eta)\, d\eta,$$
$$b(\xi) := \int_0^\xi \tilde{\beta}(\eta)\, d\eta.$$

Dabei werden $\tilde{\alpha}(\eta) \in \alpha(\eta)$ und $\tilde{\beta}(\eta) \in \beta(\eta)$ beliebig gewählt. Da α maximal monoton ist, ist β auf einem Intervall, das die 0 enthält, definiert. Entsprechend ist a auf $\mathbb{R}$ und b auf einem Intervall definiert. Die Definition ist unabhängig von der Wahl von $\tilde{\alpha}$ und $\tilde{\beta}$. Die folgt aus der Tatsache, dass α und β nur abzählbar viele mengenwertige Punkte haben.

Bemerkung: Mit dem *Subdifferential* ∂ gilt $\partial a = \alpha$ und $\partial b = \beta$.

Die schwache Formulierung (mit Räumen). Wir verwenden die Standardräume

$$V := H_0^1 \subset L^2(\Omega) = L^2(\Omega)' \subset V' = H^{-1}(\Omega).$$

Den Laplaceoperator formalisieren wir wie folgt: $A = -\Delta : V \to V'$ definiert durch

$$\langle Au, \varphi \rangle := \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi \qquad \forall \varphi \in V.$$

Wir geben uns Anfangswerte und rechte Seite vor:

$$w^0 \in L^2(\Omega),$$
$$f \in L^2((0,T), V'),$$

und setzen $Q := \Omega \times (0,T)$. Unser Problem lautet:

$$\text{Finde } u \in L^2((0,T),V), w \in L^2((0,T),L^2(\Omega)) :$$
$$w \in \alpha(u) \quad \text{fast überall in } Q,$$
$$(1.4) \qquad \int_Q (-w\partial_t\varphi + \nabla u \cdot \nabla\varphi) = \int_0^T \langle f,\varphi\rangle + \int_\Omega w^0\varphi(.,t=0)$$
$$\forall\varphi \in L^2((0,T),V) \cap H^1((0,T),L^2(\Omega)),\ \varphi(.,T) \equiv 0.$$

Wir werden beweisen:

Theorem 1.1 (Existenz). *Sei α ein maximal monotoner Graph $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $0 \in \alpha(0)$, $T > 0$ fest, $f \in L^2((0,T),V')$, $w^0 \in L^2(\Omega)$ mit $b(w^0) \in L^1(\Omega)$, und α habe höchstens lineares Wachstum,*

$$(1.5) \qquad \exists L, M > 0 \quad \forall v \in \mathbb{R}, g \in \alpha(v) : \quad |g| \le L|v| + M.$$

Dann hat (1.4) eine Lösung mit $w \in L^\infty((0,T),L^2(\Omega))$.

Beweis. Wir diskretisieren die Zeit, um Näherungslösungen zu erhalten. Ein Limes ist dann eine Lösung des Ausgangsproblems ('Rothe-Methode').

Schritt 1: Zeitdiskretisierung. Wir diskretisieren die Zeit uniform N Zeitschritten,

$$N \in \mathbb{N} \text{ groß, Schrittweite } \Delta t := \frac{T}{N}, \quad t_n := n\,\Delta t.$$

Die diskrete Lösung ist abhängig von N, wir schreiben daher w_N, u_N etc. Anfangswerte sind $w_N^0 := w^0$. Die rechte Seite muss auch diskretisiert werden,

$$f_N^n := \frac{1}{\Delta t}\int_{t_{n-1}}^{t_n} f(s)\,ds \in V'.$$

In jedem Zeitschritt n lösen wir folgendes Problem: Zu w_N^{n-1} finde $w_N^n \in L^2(\Omega)$ und $u_N^n \in V$ mit

$$(1.6) \qquad \begin{aligned} \frac{w_N^n - w_N^{n-1}}{\Delta t} + Au_N^n = f_N^n \quad &\text{in } V', \\ w_N^n \in \alpha(u_N^n) \quad &\text{fast überall in } \Omega. \end{aligned}$$

Beh. A: Problem (1.6) ist lösbar.
Bew. A: Wir betrachten das Funktional $J_N^n : V \to \mathbb{R}$,

$$J_N^n(v) := \int_\Omega \left\{ a(v) + \frac{\Delta t}{2}|\nabla v|^2 - w_N^{n-1}\cdot v \right\} - \Delta t\ \langle f_N^n, v\rangle\,.$$

J_N^n ist konvex (also $J_N^n(\theta v + (1-\theta)w) \le ...$): Lineare und quadratische Terme trivialerweise konvex. Die Funktion a ist konvex, weil a die schwache Ableitung $\tilde\alpha$ hat, und diese ist monoton.

J_N^n ist koerziv: Das Funktional enthält die H^1-Norm von v, beziehungsweise (nach Poincaré), eine dazu äquivalente Norm. Wegen $0 \in \alpha(0)$ ist a positiv.

J_N^n ist schwach unterhalbstetig: Sei $v_k \rightharpoonup v$ schwach in V. Nach dem Lemma von Mazur können wir eine Folge $\tilde{v}_k$ von Konvexkombinationen wählen, mit $\tilde{v}_k \to v$ stark in V. Wegen Konvexität von J_N^n gilt $J_N^n(\tilde{v}_k) \leq J_N^n(v)$. Aber $J_N^n(\tilde{v}_k) \to J_N^n(v)$, denn $\tilde{v}_k \to v$ in L^p für ein $p > 2$ nach der Sobolev-Einbettung, und $a(\tilde{v}_k) \to a(v)$ punktweise fast überall und schwach in $L^{p/2}$ wegen höchstens quadratischem Wachstum von a.

Die direkte Methode der Variationsrechnung liefert

$$\exists u_N^n \in V : \quad J_N^n(u_N^n) = \inf_{v \in V} J_N^n(v).$$

Für die rechtsseitige Ableitung von a gilt

$$\frac{d^+}{dz} a(z) := \lim_{0<h\to 0} \frac{a(z+h) - a(z)}{h} = \lim_{0<h\to 0} \frac{1}{h} \int_z^{z+h} \alpha = \alpha^+(z),$$

wobei $\alpha^+(z) = \sup \alpha(z)$. Ebenso die linksseitige Ableitung. Zu $u_N^n : \Omega \to \mathbb{R}$ und $\varphi \in L^\infty(\Omega, [0,\infty))$ betrachten wir die Funktionen

$$g_h(x) := \frac{1}{h} \left[a(u_N^n(x) + h \cdot \varphi(x)) - a(u_N^n(x)) \right].$$

Nach Obigem gilt

$$g_h(x) \to g^+(x) = \alpha^+(u_N^n(x)) \cdot \varphi(x)$$

für alle $x \in \Omega$. Zudem $|g_h(x)| \leq C(\lambda)$ für alle x in $\Omega_\lambda := \{|u_N^n(x)| \leq \lambda\}$. Für das Komplement gilt

$$\int_{\Omega \setminus \Omega_\lambda} |u_N^n| \leq \int_{\Omega \setminus \Omega_\lambda} \frac{|u_N^n|^2}{\lambda} \leq C \frac{1}{\lambda}.$$

Wegen Minimalität und Lebesgueschem Konvergenzsatz gilt dann

$$\begin{aligned} 0 &\leq \lim_{0<h\to 0} \frac{1}{h} \left(J_N^n(u_N^n + h\,\varphi) - J_N^n(u_N^n) \right) \\ &= \lim_{0<h\to 0} \int_{\Omega\setminus\Omega_\lambda} g_h + \lim_{0<h\to 0} \int_{\Omega_\lambda} g_h + \left\langle \Delta t\, A u_N^n - w_N^{n-1} - \Delta t\, f_N^n, \varphi \right\rangle \\ &= o_\lambda(1) + \int_\Omega \alpha^+(u_N^n) \cdot \varphi + \left\langle \Delta t\, A u_N^n - w_N^{n-1} - \Delta t\, f_N^n, \varphi \right\rangle. \end{aligned}$$

Da λ beliebig war, gilt die Ungleichung ohne den Fehlerterm; für die Distribution $\mu := -\left[\Delta t\, A u_N^n - w_N^{n-1} - \Delta t\, f_N^n \right]$ gilt

$$\mu \leq \alpha^+(u_N^n)$$

im Distributionssinne bei Anwendung auf nichtnegative Testfunktionen. Durch Ersetzung φ mit $-\varphi$ finden wir ebenso

$$\mu \geq \alpha^-(u_N^n).$$

$\alpha^{\pm}(u_N^n)$ sind jeweils $L^2(\Omega)$-Funktionen und wir schließen, dass auch die Distribution μ eine L^2-Funktion ist. Beweis: Die Glättungen mit Diracfolgen erhalten die Ordnung und wir erhalten

$$(\alpha^-(u_N^n))_\varepsilon \le \mu_\varepsilon \le (\alpha^+(u_N^n))_\varepsilon.$$

Linke und rechte Seite konvergieren in L^2, daher ist auch μ_ε in L^2 beschränkt und daher $\mu \in L^2$. Dann gilt $\alpha^-(u_N^n) \le \mu \le \alpha^+(u_N^n)$ punktweise.

Für ein geeignetes $w_N^n \in \alpha(u_N^n)$ gilt also die Gleichheit

$$0 = \left\langle w_N^n + \Delta t\, A u_N^n - w_N^{n-1} - \Delta t\, f_N^n, \varphi \right\rangle$$

für alle $\varphi \in L^\infty \cap V$. Beliebige solche φ können in V durch $\varphi_k \in L^\infty \cap V$ approximiert werden. Also gilt die Gleichung in V' und wir haben (1.6) gezeigt. Damit ist Beh. A bewiesen.

Schritt 2: A priori Abschätzungen. Wir testen (1.6) mit der Lösung, genauer, mit $\Delta t\, u_N^n$:

$$\int_\Omega (w_N^n - w_N^{n-1}) \cdot u_N^n + \langle A u_N^n, u_N^n \rangle \ \Delta t \ = \langle f_N^n, u_N^n \rangle \ \Delta t.$$

Für den ersten Term behaupten wir: *Beh. B:*

$$w_i \in \alpha(u_i),\ i = 1,2 \quad \Rightarrow \quad (w_2 - w_1) \cdot u_2 \ge b(w_2) - b(w_1).$$

Bew. B: 1. Fall: $u_2 > u_1$. Dann $w_2 \ge w_1$ wegen Monotonie. Also

$$b(w_2) - b(w_1) = \int_{w_1}^{w_2} \tilde{\beta}(\eta)\, d\eta \le (w_2 - w_1) \cdot u_2,$$

denn $\tilde{\beta}(\eta) \le u_2$. Ebenso gilt für den 2. Fall: $u_2 < u_1$, $w_2 \le w_1$:

$$b(w_2) - b(w_1) = -\int_{w_2}^{w_1} \tilde{\beta}(\eta)\, d\eta \le (w_1 - w_2) \cdot (-u_2).$$

Und für den 3. Fall: $u_2 = u_1$ gilt (o.E. $w_2 > w_1$):

$$b(w_2) - b(w_1) = \int_{w_1}^{w_2} \tilde{\beta}(\eta)\, d\eta = (w_2 - w_1) \cdot u_2.$$

Also gilt Beh. B.

Wir finden für den ersten Term in unserer Abschätzung

$$\int_\Omega (w_N^n - w_N^{n-1}) \cdot u_N^n \ge \int_\Omega b(w_N^n) - b(w_N^{n-1}).$$

Wir summieren die Abschätzungen für $n = 0$ bis $n = m$ und finden

(1.7)

$$\int_\Omega b(w_N^m) - \int_\Omega b(w^0) + \sum_{n=0}^m \Delta t \int_\Omega |\nabla u_N^n|^2 \le \sum_{n=0}^m \Delta t \, \|f_N^n\|_{V'} \, \|u_N^n\|_V$$
$$\le \|f\|_{L^2((0,T),V')} \cdot \left(\sum_{n=0}^m \Delta t \, \|u_N^n\|_V^2 \right)^{1/2} .$$

Wir sehen, dass wir Abschätzungen für $b(w) \in L^\infty L^1$ und für $u \in L^2 V$ erwarten können.

Beh. C: $b(\eta) \ge \frac{1}{2L}(\eta - M)^2$ für alle $\eta \in \mathbb{R}$. *Bew. C:* Tatsächlich gilt

$$\eta \ge 0, \xi \in \beta(\eta) \Rightarrow \eta \in \alpha(\xi) \Rightarrow |\eta| \le L|\xi| + M,$$

also

$$\int_0^{\eta_0} \tilde\beta(\eta)\, d\eta \ge \int_0^{\eta_0} \frac{\eta - M}{L}.$$

Für $\eta < 0$ wird ebenso gerechnet; Beh. C folgt.

Wir können also abschätzen:

$$\|w_N^m\|_{L^2(\Omega)} \le C(1 + \|b(w_N^m)\|_{L^1(\Omega)}) \le C. \tag{1.8}$$

Für den Grenzübergang müssen wir Interpolationen betrachten:

$w_N :=$ lineare Interpolation der w_N^n in den Punkten t_n.
$\bar u_N :=$ konstante Interpolation der u_N^n mit den Werten 'von rechts'.

Ebenso $\bar w_N$ und $\bar f_N$. Wir haben Abschätzungen für

$$w_N \in L^\infty((0,T), L^2), \qquad \bar u_N \in L^2((0,T), V). \tag{1.9}$$

Gleichung (1.6) liefert

$$\partial_t w_N + A\bar u_N = \bar f_N \quad \text{in } V', \text{fast alle } t \in [0,T]. \tag{1.10}$$

Wir müssen nur noch den Limes in dieser Gleichung bilden. Wir ersehen aus der diskreten Gleichung noch, dass $\partial_t w_N \in L^2((0,T), V')$ beschränkt ist.

Schritt 3: Grenzübergang. Nach Auswahl einer Teilfolge finden wir

$$\bar u_N \rightharpoonup u \text{ in } L^2((0,T), V),$$
$$w_N \rightharpoonup w \text{ in } H^1((0,T), V'),$$
$$w_N \overset{*}{\rightharpoonup} w \text{ in } L^\infty((0,T), L^2(\Omega)).$$

Wegen (1.10) wird insbesondere auch die Integralgleichung (1.4) von $\bar u_N$ und w_N mit rechter Seite $\bar f_N$ erfüllt. Dann gilt (1.4) auch für den Limes.

Es bleibt zu zeigen:

$$w \in \alpha(u) \text{ fast überall in } Q. \tag{1.11}$$

Die Konvergenz $w_N \to w$ ist stark in $L^2((0,T),V')$. Dies folgt aus der Tatsache, dass wir sowohl mehr räumliche, als auch mehr zeitliche Regularität haben. Für einen Beweis dieser Kompaktheit wählt man eine abzählbare, dichte Menge von $t_k \in (0,T)$. Für eine Teilfolge konvergieren die $w_N(.,t_k)$ stark in V', weil $L^2 \subset V'$ kompakt ist. Wegen der H^1-Regularität in der Zeit konvergiert die Teilfolge dann sogar gleichmäßig in t, insbesondere sogar $w \in C^0((0,T),V')$.

Wir werden diese starke Konvergenz verwenden, indem wir ausnutzen, dass

$$\int_0^T \langle \bar{w}_N, \bar{u}_N \rangle \to \int_0^T \langle w, u \rangle .$$

Um nun (1.11) zu zeigen, müssen wir die Charakterisierung der maximalen Monotonie von α ausnutzen. Für $w, u \in \mathbb{R}$ gilt

$$w \in \alpha(u) \quad \Longleftrightarrow \quad (w-g)\cdot(u-v) \geq 0 \;\forall v \in \mathbb{R}, g \in \alpha(v).$$

Sei nun $v \in L^2V$ und $g \in L^2V'$ mit $g \in \alpha(v)$ fast überall in Q. Dann gilt wegen Monotonie und Konvergenz der approximativen Lösungen

$$0 \leq \int_Q (\bar{w}_N - g)\cdot(\bar{u}_N - v) \to \int_Q (w-g)\cdot(u-v).$$

Wir wählen nun eine Kugel $B := B_\delta(x_0,t_0)$ im Raum-Zeit-Zylinder Q. Wir wollen für beliebiges $v_0 \in \mathbb{R}$ und $g_0 \in \alpha(v_0)$ einsetzen

$$\begin{aligned} v_\delta(x,t) &= \chi_B(x,t)v_0 + (1-\chi_B)(x,t)\, u(x,t),\\ g_\delta(x,t) &= \chi_B(x,t)g_0 + (1-\chi_B)(x,t)\, \tilde{\alpha}(u(x,t)). \end{aligned}$$

Weil v_δ nicht in L^2V ist, müssen wir in $L^2(Q)$ approximieren. Wir finden $v_\delta = L^2(Q) - \lim_{\varepsilon\to 0} v_{\delta,\varepsilon}$ und $g_\delta = L^2(Q) - \lim_{\varepsilon\to 0} g_{\delta,\varepsilon}$ mit $v_{\delta,\varepsilon} \in L^2V$. Dies ist möglich, denn zu glatten Approximationen $v_{\delta,\varepsilon}$ können wir, falls nötig, springende Approximationen $g_{\delta,\varepsilon}$ wählen. Im Limes gilt

$$0 \leq \int_Q (w-g_\delta)\cdot(u-v_\delta) = \int_B (w-g_0)\cdot(u-v_0).$$

Für Lebesgue-Punkte (x_0,t_0) von w, u und $w\cdot u$ konvergieren B-Mittelwerte der Funktionen für $\delta \to 0$ gegen die Punktwerte in (x_0,t_0). In solchen Punkten gilt also

$$0 \leq (w(x_0,t_0) - g_0)\cdot(u(x_0,t_0) - v_0).$$

Der Satz von Lebesgue liefert aber, dass fast alle Punkte in Q Lebesgue-Punkte sind. Da v_0 und $g_0 \in \alpha(v_0)$ beliebig waren, gilt für fast alle $(x_0,t_0) \in Q$

$$w(x_0,t_0) \in \alpha(u(x_0,t_0)).$$

Damit ist das Theorem bewiesen. $\square$

2. Eindeutigkeit und Regularität mit L^2-Techniken

Wir haben den Lösungsbegriff verallgemeinert. Um zu zeigen, dass der Lösungsbegriff nicht zu allgemein gewählt wurde, müssen wir noch die Eindeutigkeit der Lösungen von (1.4) nachweisen. Wir erinnern daran, dass (1.4) die schwache Formulierung war von

$$\begin{aligned}&\text{Finde } u \in L^2((0,T),V), w \in L^2((0,T),L^2(\Omega)) :\\ &w \in \alpha(u) \quad \text{fast überall in } Q,\\ &\partial_t w + Au = f, \quad w(t=0) = w^0.\end{aligned} \tag{2.1}$$

Theorem 2.1 (Eindeutigkeit). *Sei α ein maximal monotoner Graph $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $0 \in \alpha(0)$, $T > 0$ fest. Wir betrachten zwei verschiedene Daten $f_i \in L^2((0,T),V')$, $w_i^0 \in L^2(\Omega)$ mit $b(w_i^0) \in L^1(\Omega)$, $i = 1,2$.*

Dann gilt für die Lösungen (w_1,u_1) und (w_2,u_2) von (1.4)

$$\begin{aligned}&\|w_1 - w_2\|_{L^\infty V'} + \left\| \int_0^{\cdot} (u_1-u_2)(.,\tau)\,d\tau \right\|_{L^\infty V}\\ &\qquad \le C\left(\|w_1^0 - w_2^0\|_{V'} + \|f_1 - f_2\|_{L^1 V'}\right).\end{aligned} \tag{2.2}$$

Beweis. Wir betrachten Zeitintegrale der Form

$$z_i(.,t) := \int_0^t u_i(.,\tau)\,d\tau,$$

$$F_i(.,t) := w_i^0 + \int_0^t f_i(.,\tau)\,d\tau.$$

Diese erfüllen

$$w_i + Az_i = F_i. \tag{2.3}$$

Wir betrachten nun die Differenzen $w = w_1 - w_2$ und $u = u_1 - u_2$, die dieselben Gleichungen mit Differenzen $z = z_1 - z_2$ und $F = F_1 - F_2$ erfüllen. Nun testen wir die Gleichung mit $u = \partial_t z$. Wegen der Monotonie von α gilt $w \cdot u = (w_1 - w_2)\cdot(u_1-u_2) \ge 0$, also

$$\partial_t \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla z|^2 \le \langle F, \partial_t z\rangle.$$

Integration über $(0,T)$ liefert

$$\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla z(t)|^2 \le -\int_0^t \langle \partial_t F, z\rangle + \langle F(t), z(t)\rangle,$$

also

$$\|z\|^2_{L^\infty V} \le \|\partial_t F\|_{L^1 V'}\ \|z\|_{L^\infty V} + \|F\|_{L^\infty V'}\ \|z\|_{L^\infty V}.$$

Die Abschätzung für w folgt dann aus der Gleichung (2.3) für die Differenz durch Einsetzen der Abschätzungen für die anderen Terme. □

Wir wenden uns nun der Frage zu, ob für Daten mit besserer Regularität die Lösung ebenfalls eine bessere Regularität hat. Tatsächlich gilt eine solches Resultat.

Theorem 2.2 (Regularität). *Die Voraussetzungen seien wie in Theorem 1.1, zusätzlich sei α stark monoton, d.h. für $c > 0$ gelte*

$$(w_1 - w_2) \cdot (u_1 - u_2) \geq c\,(u_1 - u_2)^2 \quad \forall (u_i, w_i) \in \mathrm{graph}(\alpha), i = 1, 2,$$

weiterhin $u^0 := \beta(w^0) \in V$ und $f \in L^2(Q)$. Dann hat die Lösung (u, w) von (1.4) die Regularität

$$\begin{aligned} u &\in H^1((0,T), L^2(\Omega)) \cap L^\infty((0,T), V), \\ w &\in L^\infty((0,T), L^2(\Omega)). \end{aligned}$$

Der Beweis basiert auf dem Testen der diskreten Gleichung mit Differenzen $u_N^n - u_N^{n-1}$ (anstelle, wie im vorigen Beweis, mit u_N^n). Wir finden Abschätzungen, die eine halbe Stufe besser sind. Der Beweis ist sehr direkt und sollte zur Übung ausgeführt werden. Eine Musterlösung findet sich in [**6**], II, Theorem 2.5.

3. Monotone Abhängigkeit mit einer L^1-L^∞-Technik.

Theorem 3.1 (Monotonie). *Die Voraussetzungen seien wie in Theorem 1.1, weiterhin seien $f_i \in L^2((0,T), V')$, $f_1 - f_2 \in L^1(Q)$, $w_i^0 \in L^2(\Omega)$ mit $b(w_i^0) \in L^1(\Omega)$, $i = 1, 2$.*

Dann gilt für die Lösungen (w_1, u_1) und (w_2, u_2) von (1.4) für fast alle $t \in (0, T)$

$$\begin{aligned} \int_\Omega (w_1 - w_2)_+(x,t)\,dx &\leq \int_\Omega (w_1^0 - w_2^0)_+(x)\,dx \\ &\quad + \int_0^t \int_\Omega (f_1 - f_2)_+(x,\tau)\,dx\,d\tau. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Insbesondere gilt für $w_1^0 < w_2^0$ und $f_1 < f_2$, dass $w_1 < w_2$ für fast alle Zeiten.

Beweis. **1. Schritt.** Zunächst nehmen wir an, dass α und die Daten zusätzliche Eigenschaften haben:

α ist Lipschitz-stetig und stark monoton, d.h. für ein $c > 0$ gilt

$$(\alpha(u_1) - \alpha(u_2)) \cdot (u_1 - u_2) \geq c\,(u_1 - u_2)^2.$$

Weiterhin gelte $u_i^0 := \beta(w_i^0) \in V$ und $f_i \in L^2(Q)$.

Später werden wir den allgemeinen Fall als Grenzfall betrachten.

Wir betrachten die Differenzen $u = u_1 - u_2$, $w = w_1 - w_2$ und $f = f_1 - f_2$, die charakteristische Funktion $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$H(\eta) := \begin{cases} 0 & \text{für } \eta \leq 0, \\ 1 & \text{für } \eta > 0, \end{cases} \tag{3.2}$$

und die geglätteten Versionen, die Funktionen $H_j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$H_j(\eta) := \begin{cases} 0 & \text{für } \eta < 0, \\ j\eta & \text{für } 0 \le \eta \le \frac{1}{j}, \\ 1 & \text{für } \eta > \frac{1}{j}. \end{cases} \tag{3.3}$$

Wir testen nun die Differenz der (w_i, u_i)-Gleichungen mit $H_j(u)$. Dabei können wir ausnutzen, dass

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla H_j(u) = \int_\Omega H_j'(u)|\nabla u|^2 \ge 0$$

für fast alle t. Wir finden daher

$$\int_\Omega \partial_t w \; H_j(u) \le \int_\Omega f \; H_j(u) \le \int_\Omega f_+.$$

In dieser Ungleichung bilden wir nun den Limes $j \to \infty$. Da $w = \alpha(u)$ für eine Lipschitz-Funktion α, liefert Theorem 2.2 auch $w \in H^1((0,T), L^2(\Omega))$. Für fast alle t ist also $\partial_t w$ eine $L^2(\Omega)$-Funktion. Weiterhin gilt $H_j(u(.,t)) \to H(u(.,t))$ punktweise und beschränkt, also in $L^2(\Omega)$ für fast alle t. Wir können also für fast alle t den Limes bilden und finden

$$\int_\Omega \partial_t w \; H(u) \le \int_\Omega f_+.$$

Da α (in diesem Teil des Beweises) eine monotone Funktion ist, gilt $H(u) = H(w)$ (Vorzeichen von Differenzen bleiben erhalten). Daher

$$\partial_t \int_\Omega w_+(.,t) = \int_\Omega \partial_t w \, H(w) \le \int_\Omega f_+$$

fast überall. Integration über t liefert (3.1).

2. Schritt. Allgemeiner Fall. Wir approximieren α mit α_n, w_i^0 mit w_{in}^0 und f_i mit f_{in}. Für die entsprechenden Lösungen w_{1n} und w_{2n} gilt die Monotonieformel nach dem ersten Schritt. Wir wollen in den entsprechenden Abschätzungen (3.1) den Limes $n \to \infty$ durchführen. Auf der rechten Seite konvergieren die Integrale zum Gewünschten. Wir behaupten, dass

$$(w_{1n} - w_{2n})(t) \rightharpoonup (w_1 - w_2)(t) \quad \text{in } L^2(\Omega) \tag{3.4}$$

für fast alle t. Tatsächlich sind alle Folgen $[(w_{1n} - w_{2n})(t)]_n$ gleichmäßig beschränkt in $L^2(\Omega)$, denn die a priori Schranke für $w \in L^\infty((0,T), L^2(\Omega))$ hängt nur von den Normen der Daten und von den Konstanten L und M ab (siehe (1.7) und (1.8)). Für festes t und für eine Teilfolge einer beliebigen Teilfolge gilt dann $(w_{1n} - w_{2n})(t) \rightharpoonup z(t)$ für ein $z(t)$. Wegen der starken Konvergenz $(w_{1n} - w_{2n})(t) \to (w_1 - w_2)(t)$ in V' folgen $z(t) = (w_1 - w_2)(t)$ und die Konvergenz der gesamten Folge (einmal mehr Lemma 2.2 aus Kapitel 2).

Wir nutzen nun (3.4) und die schwache Unterhalbstetigkeit konvexer Funktionale. Die Funktion "positiver Anteil" $(.)_+$ ist konvex, mit dem Lemma von Mazur folgt daraus

$$\liminf_{n\to\infty} \int_\Omega (w_{1n} - w_{2n})_+ \geq \int_\Omega (w_1 - w_2)_+ \tag{3.5}$$

für fast alle t. Insbesondere können wir damit den Limes in der Monotonieformel (3.1) bilden. $\square$

Literaturverzeichnis

[1] H.-W. Alt. Elliptische Probleme mit freiem Rand. Teil I. *Vorlesungsreihe des SFB 256*, Universität Bonn, 1991.

[2] H.-W. Alt. Lineare Funktionalanalysis. *Springer Hochschultext*, 1985.

[3] L.C. Evans. Partial Differential Equations. *Amer. Math. Soc.*, 1998.

[4] D. Kinderlehrer, G. Stampacchia. An introduction to variational inequalities and their applications, *Academic Press*, 1980.

[5] J. L. Vazquez. An introduction to the mathematical theory of the porous medium equation. *Über Internet verfügbar.*

[6] A. Visintin. Models of Phase transitions. *Birkhäuser*, 1996.