Skript zur Vorlesung
Elementare partielle Differentialgleichungen

Prof. Dr. R. Farwig

SS 2003

Technische Universität Darmstadt

1 Mathematische Modellierung

Partielle Differentialgleichungen kommen in den Naturwissenschaften (Physik, Chemie, Biologie), den Ingenieurwissenschaften (Maschinenbau, Elektrotechnik, Mechanik, Materialwissenschaften, Bauingenieurwesen, Geowissenschaften etc.), aber auch den Wirtschaftswissenschaften (insbesondere Finanzmathematik) vor. Zudem haben sie über Jahrhunderte die Entwicklung der mathematischen Analysis beflügelt. Im Gegensatz zu gewöhnlichen Differentialgleichungen, die entweder eine rein zeitliche Entwicklung (Anfangswertprobleme) oder eine rein räumliche, jedoch eindimensionale Entwicklung (Randwertprobleme) beschreiben, modellieren partielle Differentialgleichungen entweder Vorgänge in mehreren Raumdimensionen oder räumlich-zeitliche Vorgänge.

Im Folgenden sollen – ausgehend von einem einfachen räumlich eindimensionalen und zeitlich veränderlichen Prozess – Modelle aus verschiedenen Anwendungsgebieten und mit steigender Komplexität hergeleitet werden.

Eine *Zustandsvariable* $u = u(t,x)$ beschreibe die *Dichte* einer gewissen Größe, wie z.B. Masse, Energie, Bakterien, Autos etc. am Ort $x \in \mathbb{R}$ und zum Zeitpunkt t in einer Röhre kleinen konstanten Querschnitts A.

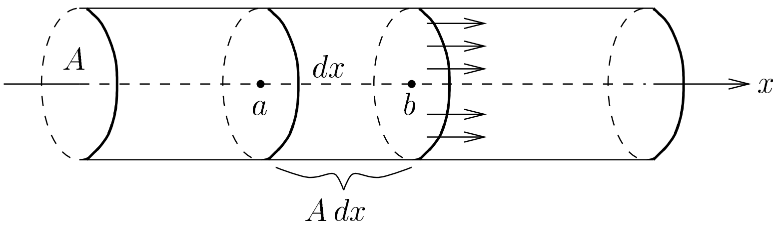


Abbildung 1.1: Zur Massenbilanz in der Röhre

Dann ist $u(t,x)\,Adx$, $dx = b - a$, die im Röhrenabschnitt Adx enthaltene Menge. Der *Fluss* der Größe u werde im Raum-Zeitpunkt (t,x) durch die Flussfunktion $\phi = \phi(t,x,u,\ldots)$ beschrieben; dabei werden wegen des kleinen Querschnitts A Fluktuationen in den zu x orthogonalen Raumrichtungen vernachlässigt. Also ist $A\phi(t,x)$ die Menge, die zur Zeit t durch den Querschnitt A an der Position x fließt. Als Konvention bedeutet dabei $\phi > 0$ ein Fluss nach rechts in Richtung wachsender x–Werte. Schließlich sei $f = f(t,x)$ ein Quellterm, so dass $f(t,x)\,Adx$ die Menge bezeichnet, die im Röhrenabschnitt Adx zur Zeit t erzeugt ($f > 0$, Quelle) oder vernichtet ($f < 0$, Senke) wird.

Damit erhält man in $[t_1,t_2] \times [a,b]$ $(\times A)$ die *Bilanzgleichung*

$$\int_a^b \big(u(t_2,x) - u(t_1,x)\big)\,Adx$$
$$= \int_{t_1}^{t_2} \big(A\phi(t,a) - A\phi(t,b)\big)\,dt + \int_{t_1}^{t_2}\int_a^b f(t,x)\,A\,dx\,dt$$

in Integralform. Unter geeigneten Stetigkeitsvoraussetzungen folgt nach Division durch $A(t_2 - t_1)(b - a)$ im Grenzfall $t_2 \to t_1$, $b \to a$ die *Erhaltungsgleichung*

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) + \frac{\partial \phi}{\partial x}(t,x) = f(t,x)$$

oder kürzer

$$\boxed{u_t + \phi_x = f\,.} \tag{1.1}$$

An dieser Stelle fehlt noch eine sich aus dem konkreten Problem ergebende *Zustandsgleichung*

$$\phi = \phi(t, x, u, \ldots)\,,$$

um eine partielle Differentialgleichung für die gesuchte Funktion u zu erhalten.

Beispiel 1.1 Der Fluss ϕ sei proportional zu u,

$$\phi(t, x, u) = cu\,, \quad c \in \mathbb{R}\,.$$

Im Fall $f \equiv 0$ (keine Quellen oder Senken) liefert (1.1) die *Konvektionsgleichung* (auch *Advektions- oder Transportgleichung*)

$$\boxed{u_t + cu_x = 0\,.} \tag{1.2}$$

Zur Lösung führen wir neue Variablen

$$\xi = x - ct\,, \quad \tau = t \tag{1.3}$$

sowie

$$v(\tau, \xi) := u(t, x) = u(\tau, \xi + c\tau)$$

ein. Dann erfüllt v die Gleichung

$$v_\tau = u_t + cu_x = 0\,,$$

und läßt sich folglich in der Form $v(\tau, \xi) = F(\xi)$ schreiben. Demnach besitzt u die Darstellung

$$u(t, x) = F(x - ct) \tag{1.4}$$

und wird als *travelling wave* bezeichnet. Die Konstante c ist die *Transportgeschwindigkeit*, mit der die Anfangsinformation $u(0, x) = F(x)$ im Falle $c > 0$ nach rechts transportiert wird.

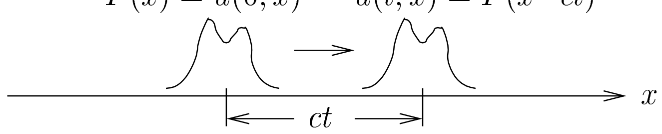


Abbildung 1.2: Eine travelling wave–Lösung

Beispiel 1.2 Bekanntlich wird ein einfacher Wachstums- oder Zerfallsprozess durch die gewöhnliche Differentialgleichung $\frac{du}{dt} = \lambda u$ ($\lambda > 0$ oder $\lambda < 0$) mit Lösung $u(t) = u_0 e^{\lambda t}$ modelliert. Mit dem Quellterm $f(u) = \lambda u$ ($\lambda > 0$: Quelle, $\lambda < 0$: Senke) und der Zustandsgleichung $\phi = cu$ liefert (1.1) die inhomogene Konvektionsgleichung

$$u_t + cu_x = \lambda u\,,$$

die ebenfalls mit der in Beispiel 1.1 beschriebenen Methode gelöst werden kann. Allgemeiner erhält man mit $f = f(t, x, u)$ die *Konvektions-Reaktionsgleichung*

$$u_t + cu_x = f(t, x, u)\,.$$

Beispiel 1.3 Es bezeichne $u(t, x)$ die Anzahl von Autos zur Zeit t pro Straßenkilometer auf einer einspurigen Straße und $\phi(t, x, u)$ die Anzahl von Autos, die pro Stunde den Raum-Zeitpunkt (t, x) passieren. In einem einfachen *Staumodell* wird ϕ durch

$$\phi = \phi(u) = \alpha u(\beta - u)\,, \quad \alpha, \beta > 0\,,$$

modelliert; d.h., für $0 \leq u \ll \beta$ wächst $\phi(u)$ linear wie $\alpha\beta u$ an, für $u \approx \beta$ dagegen wird die große Dichte an Autos den Verkehrsfluss allmählich zum Erliegen bringen. Für $f \equiv 0$ liefert (1.1) die *Staugleichung*

$$u_t + \alpha\big(u(\beta - u)\big)_x = 0\,.$$

Mit $v(t, x) = \beta - 2u(\frac{t}{\alpha}, x)$ erhält man daraus die *Burgers-Gleichung*

$$\boxed{v_t + vv_x = 0\,.} \tag{1.5}$$

Ein besonders vorausschauender Autofahrer wird die Geschwindigkeit nicht nur bei großer Verkehrsdichte ($u \approx \beta$) reduzieren, sonders bereits bei *Zunahme* der Verkehrsdichte vor ihm ($u_x > 0$). Mit Hilfe der verallgemeinerten Zustandsgleichung

$$\phi(u, u_x) = \alpha u(\beta - u) - \varepsilon' u_x\,, \quad \varepsilon' > 0\,,$$

entsteht die Gleichung 2. Ordnung

$$u_t + \alpha\big(u(\beta - u)\big)_x - \varepsilon' u_{xx} = 0$$

und nach Transformation auf v die *viskose Approximation der Burgers-Gleichung* (auch ebenfalls Burgers-Gleichung genannt) mit $\varepsilon = \varepsilon'/\alpha$

$$v_t + vv_x = \varepsilon v_{xx}\,. \tag{1.6}$$

Dabei heißt $\varepsilon > 0$ *Viskositätskoeffizient*. Es zeigt sich, dass der Term εv_{xx} zu einer Glättung der Lösungen von (1.6) gegenüber den Lösungen von (1.5) führt (glatter Verkehrsfluss statt Staubildung).

Beispiel 1.4 Sei u die Konzentration eines Gases (oder z.B. von Insekten/Bakterien in einer Röhre) bzw. sei u die Temperatur in einem Metallstab. Auf Grund der Stöße der einzelnen Teilchen untereinander wird sich Gas von hohen zu niedrigen Konzentrationen bewegen. Der Fluss ist dabei umso größer, je steiler das Konzentrationsgefälle, also der negative Gradient $-u_x$, ist. In diesem Falle wird die Zustandsgleichung $\phi(u) = -ku_x$ benutzt, so dass (1.1) zur *Diffusionsgleichung*

$$\boxed{u_t - ku_{xx} = 0} \tag{1.7}$$

mit der *Diffusionskonstanten* $k > 0$ führt.

Sei z.B. $\theta(t,x)$ die Temperatur, ρ die konstante Dichte und c die spezifische Wärme eines Metallstabs, so dass $u(t,x) = \rho c\theta(t,x)$ die Energiedichte bezeichnet. Nach dem klassischen *Fourier'schen Wärmeleitungsgesetz* ist der Wärmefluss ϕ proportional zu $-u_x$, d.h., mit dem Wärmeleitkoeffizienten $\kappa > 0$ gilt

$$\phi = -\kappa u_x \,.$$

Ist der Metallstab homogen und κ bzgl. x konstant, erhält man mit der Wärmediffusionskonstanten $k = \frac{\kappa}{\rho c} > 0$ die *Wärmeleitungsgleichung*

$$\theta_t - k\theta_{xx} = 0\,. \tag{1.8}$$

Im allgemeinen Fall, in dem κ von x oder sogar von der Temperatur θ abhängt, folgen die komplexeren Gleichungen

$$\theta_t - \big(k(x)\theta_x\big)_x = 0$$

bzw. – als nichtlineares Problem –

$$\theta_t - \big(k(\theta)\theta_x\big)_x = 0\,.$$

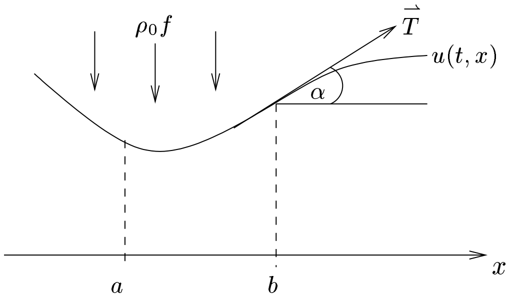
Beispiel 1.5 Zur Herleitung der Wellengleichung betrachte man ein elastisches Seil mit Massendichte $\rho(t,x)$ und vertikaler Auslenkung $u(t,x)$ aus einer stationären Gleichgewichtslage. Wir nehmen an, dass bei kleiner Auslenkung und kleinen Winkeln ($|u_x| \ll 1$) die Spannung $T(t,x)$ im Punkt $\big(x, u(t,x)\big)$ stets tangential zum Seil gerichtet ist und dass horizontale Bewegungen vernachlässigt werden dürfen.

Da kein horizontaler Massenaustausch stattfindet, gilt für beliebige Abszissenwerte $a < b$ und Zeipunkte t unter Berücksichtigung des Bogenlängenelements $\sqrt{1+u_x^2}\,dx$ die Massenbilanz

$$\int_a^b \rho(t,x)\sqrt{1+u_x^2}\,dx = \int_a^b \rho_0(x)dx$$

mit einer geeigneten Funktion $\rho_0(x) > 0$. Nach Division durch $b-a$ und Grenzübergang $b-a \to 0+$ folgt die Gleichung

$$\rho(t,x)\sqrt{1+u_x^2} = \rho_0(x).$$



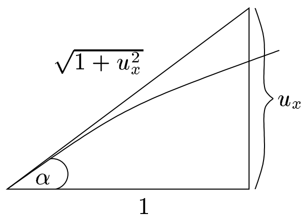


Abbildung 1.3: Zur Herleitung der Wellengleichung

Es bezeichne $\alpha(t,x)$ den Winkel des Seils mit der x-Achse; folglich gilt $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+u_x^2}}$ und $\sin\alpha = \frac{u_x}{\sqrt{1+u_x^2}}$. Die horizontale Kräftebilanz

$$T(t,b)\cos\alpha(t,b) = T(t,a)\cos\alpha(t,a) \quad \text{für alle } a < b$$

impliziert, dass $T(t,x)/\sqrt{1+u_x^2}$ von x unabhängig ist. Es gibt also eine konstante Spannungsgröße $T_0 > 0$ mit

$$\frac{T(t,x)}{\sqrt{1+u_x^2}} = T_0\,,$$

die zusätzlich in t konstant angenommen werden darf. Nach dem Newton'schen Gesetz gilt bei einer von außen auferlegten senkrecht wirkenden Kraftdichte $f(t,x)$ für die vertikale Kraftbilanz

$$\int_a^b \rho_0(x) u_{tt} dx = T(t,x)\sin\alpha(t,x)\Big|_a^b + \int_a^b \rho_0 f\, dx\,. \tag{1.9}$$

Wegen $\sin\alpha = u_x/\sqrt{1+u_x^2}$ kann der erste Term auf der rechten Seite durch

$$T_0 u_x(t,x)\Big|_a^b = T_0 \int_a^b u_{xx}\, dx$$

ersetzt werden. Jetzt liefern Division durch $b-a$ und der Grenzübergang $b-a \to 0+$ in (1.9) die Differentialgleichung

$$\rho_0(x) u_{tt} = T_0\, u_{xx} + \rho_0(x)\, f(t,x)\,.$$

Schließlich führt man durch

$$c(x)^2 = \frac{T_0}{\rho_0(x)}$$

die Größe $c > 0$, die die Dimension einer Geschwindigkeit hat, ein. Damit erhält man, insbesondere wenn ρ_0 und damit auch c von x unabhängig sind, die klassische *eindimensionale Wellengleichung*

$$\boxed{u_{tt} - c^2 u_{xx} = f\,.} \tag{1.10}$$

Für das mehrdimensionale Analogon von (1.10) wird der Term u_{xx} durch den *Laplace-Operator*

$$\Delta u = \sum_{j=1}^{n} \partial_j^2 u = \operatorname{div}(\nabla u)$$

von $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ersetzt. Die Wellengleichung

$$\boxed{u_{tt} - c^2 \Delta u = f} \tag{1.11}$$

beschreibt im $\mathbb{R}^2$ die Schwingungen einer elastischen Membran, im $\mathbb{R}^3$ u.a. die Ausbreitung von Schallwellen. Die Gleichung (1.11) ist die Grundlage zur Modellierung vieler physikalischer Phänomene, u.a. in der Akustik, der Strömungsmechanik und der Theorie der elektromagnetischen Wellen.

Beispiel 1.6 Wir betrachten ein Fluid (Flüssigkeit oder Gas) der Dichte $\rho(t, x)$ und Geschwindigkeit $u(t, x)$ im Raum-Zeitpunkt (t, x). Im eindimensionalen Fall beschreibt $\phi = \rho u$ den Massenfluss, so dass die Massenbilanz

$$\rho_t + (\rho u)_x = 0 \tag{1.12}$$

lautet. Dagegen ist im $\mathbb{R}^3$ (oder $\mathbb{R}^2$) $u = (u_1, u_2, u_3)$ ein Geschwindigkeitsvektor. Zur Herleitung des Analogons von (1.12) betrachte man ein beliebiges, kleines Testvolumen $V \subset \mathbb{R}^3$. Nach dem Massenerhaltungsgesetz ist die zeitliche Änderung (Abnahme) der Gesamtmasse in V, also $-\int_V \rho_t \, dx$, gleich dem Massenfluss $\int_{\partial V} \rho u \cdot N \, d\sigma$ aus dem Testvolumen V heraus; dabei ist N der auf ∂V nach außen

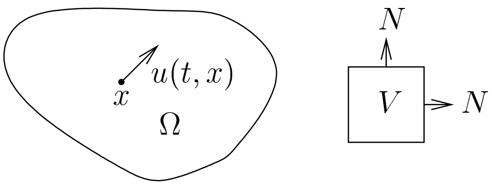


Abbildung 1.4: Zur Herleitung der Massenbilanz

gerichtete Normaleneinheitsvektor. Mit dem Gauß'schen Satz folgt

$$-\int_V \rho_t \, dx = \int_{\partial V} \rho u \cdot N \, d\sigma = \int_V \operatorname{div}(\rho u) \, dx \,.$$

Nach Division durch das Volumen $|V|$ von V liefert der Grenzübergang $|V| \to 0$ die sog. *Kontinuitätsgleichung*

$$\rho_t + \operatorname{div}(\rho u) = 0 \,. \tag{1.13}$$

Zur Analysis der Kräftebilanz beschreibe $x(t) : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^3$ eine Teilchenbahn, so dass also $u\big(t, x(t)\big) = \frac{dx}{dt}$ ist. Dann ist der Beschleunigungsvektor im Raumzeitpunkt (t, x) gegeben durch

$$a\big(t, x(t)\big) = \frac{d}{dt}\, u\big(t, x(t)\big) = \frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial u}{\partial x_i}\, \frac{dx_i}{dt}\,,$$

also

$$a(t, x) = u_t + \sum_{i=1}^{3} u_i\, \frac{\partial u}{\partial x_i} = u_t + u \cdot \nabla u\,.$$

Nun treten in dem Fluid innere Kräfte wie z.B. Druckgradienten $\nabla p(t, x)$ auf. Ist das Fluid *reibungsfrei* und unterliegt einer äußeren Kraft ρf, liefert das Newton'sche Gesetz die *Euler-Gleichungen der Gasdynamik*

$$\begin{aligned} \rho(u_t + u \cdot \nabla u) + \nabla p &= \rho f\,, \\ \rho_t + \operatorname{div}(\rho u) &= 0\,. \end{aligned} \tag{1.14}$$

An dieser Stelle wird jedoch noch eine Zustandsgleichung für p wie z.B. $p = \mathrm{const}\, \rho^\gamma$ mit $\gamma = \frac{5}{3}$ oder $\gamma = \frac{7}{5}$ benötigt.

Von großer Bedeutung ist der Fall *viskoser und inkompressibler* Fluide wie z.B. Wasser. Hier ist die Dichte ρ konstant, so dass (1.13) die Gleichung $\operatorname{div} u = 0$ liefert. Ferner wird ein Kraftterm $-\mu\Delta u$ in (1.14) eingefügt, der die Reibung von Teilchen unterschiedlicher Geschwindigkeit an gemeinsamen Grenzflächen berücksichtigt; $\mu > 0$ ist der Koeffizient der *dynamischen Zähigkeit.* Man erhält die *Navier-Stokes-Gleichungen*

$$\begin{aligned} \rho(u_t + u \cdot \nabla u) - \mu\Delta u + \nabla p &= \rho f\,, \\ \operatorname{div} u &= 0\,, \end{aligned} \tag{1.15}$$

wobei in diesem Fall $p = p(t, x)$ eine unbekannte Funktion ist, für die keine Zustandsgleichung gefordert werden darf. Wir dividieren (1.15) durch die konstante Dichte $\rho > 0$, führen einen neuen Druck p für p/ρ und den Koeffizienten der *kinematischen Zähigkeit* $\nu = \mu/\rho$ ein, und vernachlässigen darüber hinaus für kleine Geschwindigkeiten den nichtlinearen Term $u \cdot \nabla u$. Dadurch entsteht aus (1.15) das lineare Stokes-System

$$\begin{aligned} u_t - \nu\Delta u + \nabla p &= f\,, \\ \operatorname{div} u &= 0\,. \end{aligned} \tag{1.16}$$

Im Fall zeitlich stationärer Strömungen erhält man die *stationäre Stokes-Gleichung*

$$\boxed{\begin{aligned} -\nu\Delta u + \nabla p &= f\,, \\ \operatorname{div} u &= 0\,; \end{aligned}} \tag{1.17}$$

hier hat der Druck $p(x)$ die Funktion eines Lagrange'schen Multiplikators, denn $u(x)$ soll eine Differentialgleichung unter der Nebenbedingung $\operatorname{div} u = 0$ lösen.

Beispiel 1.7 (Stationäre Probleme) (1) Eine Massenverteilung mit Dichte $\rho(x) \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^3$, im $\mathbb{R}^3$ besitzt ein Gravitationspotential $\varphi(x)$, welches durch die sog. *Poisson-Gleichung*

$$\Delta\varphi = 4\pi g\, \rho(x) \quad \text{im } \mathbb{R}^3$$

berechnet werden kann; dabei ist $g \doteq 9.81\, ms^{-2}$ die universelle Gravitationskonstante. Aus dem Potential φ leitet man das Gravitationsfeld $\nabla\varphi(x)$ her, so dass ein Massenpunkt der Masse m am Ort y die Kraft $-m\, \nabla\varphi(y)$ erfährt. Im einfachsten Fall ist die Massenverteilung auf einen Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^3$ konzentriert, und man schreibt $\rho = \delta_{x_0} = \delta(\cdot - x_0)$ mit Hilfe der Dirac-Funktion oder δ-Distribution δ. Die Gleichung

$$\Delta\varphi = 4\pi g\, \delta_{x_0},$$

d.h. insbesondere

$$\Delta\varphi(x) = 0 \quad \text{für } x \in \mathbb{R}^3 \backslash \{x_0\}\,,$$

besitzt – bis auf die multiplikative Konstante $-g$ – das Newton-Potential

$$\varphi(x) = \frac{1}{|x - x_0|}$$

als Lösung.

(2) Ein analoges Problem liegt in der Elektrostatik vor. Für eine gegebene Ladungsverteilung $\rho(x)$ ist die elektrostatische Kraft $f(y)$ gesucht, die diese Ladungsverteilung auf ein Teilchen mit Ladung q am Ort y ausübt. Dazu bestimmt man das Coulomb-Potential φ (im Vakuum) durch

$$-\Delta\varphi = 4\pi\rho$$

und erhält $f(y) = -q\, \nabla\varphi(y)$.

(3) Ein dreidimensionaler Körper $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ habe nach (unendlich) langer Zeit eine stationäre Wärmeverteilung angenommen. Unter der Annahme des Fourier'schen Gesetzes

$$\phi(x) = -k\, \nabla\theta(x)$$

(vgl. Beispiel 1.4) erhält man die partielle Differentialgleichung

$$-\operatorname{div}(k\, \nabla\theta) = 0 \quad \text{in } \Omega\,,$$

falls keine äußeren Wärmequellen vorliegen. Ist der Körper homogen und folglich k konstant, entsteht die *Laplace-Gleichung*

$$\boxed{-\Delta\theta = 0 \quad \text{in } \Omega\,.} \tag{1.18}$$

Um eine sinnvolle Aussage zur Lösbarkeit von (1.18) zu treffen, sind aus mathematischen und physikalischen Gründen *Randbedingungen* an θ auf $\partial\Omega$ zu stellen. Wird die Temperatur θ außen konstant auf θ_0 gehalten, spricht man von *Dirichlet-Randwerten* (auch *Randbedingung 1. Art* oder *wesentliche Randbedingung*). Es ensteht das sog. *Dirichlet-Problem*

$$\boxed{\begin{aligned} -\Delta\theta &= 0 \quad \text{in } \Omega\,, \\ \theta &= \theta_0 \quad \text{auf } \partial\Omega\,. \end{aligned}} \tag{1.19}$$

Ist dagegen der Körper thermisch perfekt isoliert, findet kein Wärmefluss durch den Rand statt; es gilt also

$$\phi \cdot N = -k\,\frac{\partial\theta}{\partial N} = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega\,.$$

Diese Randbedingung heißt *Neumann-Randbedingung*, *natürliche Randbedingung* oder auch *Randbedingung 2. Art*. Statt (1.19) lautet das *Neumann-Problem* also

$$\boxed{\begin{aligned} -\Delta\theta &= 0 \quad \text{in } \Omega\,, \\ \tfrac{\partial\theta}{\partial N} &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega\,. \end{aligned}} \tag{1.20}$$

In einem realen, nicht perfekt isolierten Körper wird der Wärmefluss $\phi \cdot N$ auf $\partial\Omega$ proportional zur anliegenden Temperaturdifferenz $\theta - \theta_0$ sein. Folglich wird (1.18) durch die *Randbedingung der 3. Art* (*Robin-Randbedingung*)

$$\frac{\partial\theta}{\partial N} + \alpha(\theta - \theta_0) = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega$$

ergänzt. Die konstante oder von x abhängige Funktion α ist dabei aus physikalischen Gründen positiv.

Bemerkung 1.8 Die Laplace-Gleichung (1.18) macht deutlich, dass partielle Differentialgleichungen – wie auch gewöhnliche Differentialgleichungen – Randwerte und bei instationären Problemen zusätzlich Anfangswerte benötigen, um sinnvolle Aussagen zu Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen zu gewinnen. Der Einfachheit halber wurde dieser Punkt in den Beispielen 1.2 – 1.6 nicht angesprochen. Darüber hinaus sollte die Lösung stetig von den Daten des Problems abhängen. Dieser Problemkreis führte J. Hadamard (1865–1963) auf den Begriff der Wohlgestelltheit.

Definition 1.9 Eine partielle Differentialgleichung in $(0, T) \times \Omega$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, mit rechter Seite f, kurz $L(u) = f$, mit Randwerten $R(u) = g$ auf $\partial\Omega$ und ggf. Anfangswert $A(u) = u_0$ in $t = 0$ heißt *wohlgestellt im Sinne von Hadamard*, falls die folgenden drei Eigenschaften erfüllt sind:

(1) Für alle (sinnvollen) Daten f, u_0, g besitzt die Gleichung

$$L(u) = f \quad \text{mit } R(u) = g,\ A(u) = u_0$$

mindestens eine Lösung u (**Existenz**).

(2) Zu jedem f, g und u_0 gibt es höchstens eine Lösung (**Eindeutigkeit**).

(3) Die Lösung $u = u(f, g, u_0)$ hängt stetig von den Daten f, g, u_0 ab, d.h., werden die Daten nur wenig gestört, ändert sich auch die Lösung nur wenig (**stetige Abhängigkeit, Stabilität**)

Die Forderungen (1) – (3) hängen entscheidend davon ab, in welchen Funktionenräumen die Daten f, g, u_0 und die Lösung u gefunden und abgeschätzt werden sollen. Zur Untersuchung bieten sich Funktionenräume stetiger und mehrmals stetig differenzierbarer Funktionen wie $C^0(\overline{\Omega})$, $C^k(\overline{\Omega})$ etc., aber auch Räume integrierbarer Funktionen wie $L^1(\Omega)$ und $L^2(\Omega)$ an.

Beispiel 1.10 (1) Die Transportgleichung $u_t + cu_x = 0$ besitzt zum Anfangswert $u(0, x) = u_0(x)$ die eindeutige Lösung

$$u(t, x) = u_0(x - ct)\,.$$

Wir benutzen für u_0 den Raum der beschränkten C^1-Funktionen

$$BC^1(\mathbb{R}) = \{u_0 \in C^1(\mathbb{R}) :\ u_0, u_0' \text{ sind beschränkt}\}$$

mit der passenden Supremumsnorm

$$\|u_0\|_* = \max\{\|u_0\|_\infty,\ \|u_0'\|_\infty\}\,;$$

dabei ist $\|u_0\|_\infty := \{\sup |u_0(x)| :\ x \in \mathbb{R}\}$. Analog sei $BC^1(\mathbb{R}^2)$ mit Hilfe der Norm

$$\|u\|_* = \max(\ \|u\|_\infty,\ \|\partial_1 u\|_\infty, \|\partial_2 u\|_\infty)$$

definiert. Die triviale Abschätzung

$$\|u\|_* \leq \max(1, |c|)\, \|u_0\|_*$$

beweist dann die stetige Abhängigkeit der Lösung u vom Anfangswert u_0.

(2) Jetzt werde die Transportgleichung mit der „Anfangsbedingung“

$$u(s, cs) = u_0(s), \quad s \in \mathbb{R},$$

auf der sog. charakteristischen Kurve (s, cs) betrachtet. Man sieht sofort, dass die Gleichung $u_t + cu_x = 0$ nur lösbar ist, falls $u_0(s)$ konstant ist. Darüber hinaus gibt es unter dieser Voraussetzung unendlich viele Lösungen. Das Problem ist also nicht wohlgestellt!

Der Grund für den eklatanten Unterschied zwischen (1) und (2) wird in §4 bei der Behandlung der Charakteristikenmethode für quasilineare Gleichungen 1. Ordnung klar.

2 Die eindimensionale Wellengleichung

2.1 Das homogene Problem

Gegeben sei die homogene Wellengleichung ($c \in \mathbb{R}_+^*$)

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \quad \text{in } \mathbb{R} \times \mathbb{R} \tag{2.1}$$

mit den Anfangsbedingungen

$$u(0,x) = u_0(x), \quad u_t(0,x) = u_1(x)\,. \tag{2.2}$$

Analog zur Behandlung der Transportgleichung in Beispiel 1.1 werden neue Koordinaten eingeführt, um zu einer direkt lösbaren Gleichung zu kommen. Es sei

$$\xi = x + ct, \quad \eta = x - ct$$

und

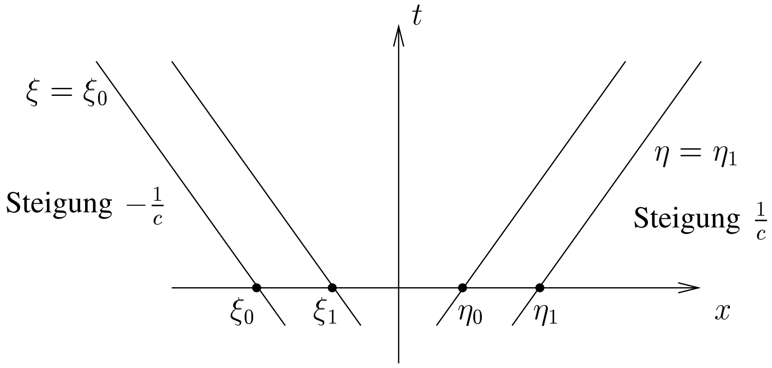


Abbildung 2.1: Geraden $\xi = \text{const}$, $\eta = \text{const}$.

$$v(\xi, \eta) = u(t,x)\,,$$

so dass $\partial_t u + c u_x = 2c v_\xi$ und $\partial_t u - c u_x = -2c v_\eta$ folgen. Dann impliziert (2.1)

$$0 = u_{tt} - c^2 u_{xx} = (\partial_t - c\partial_x)(\partial_t + c\partial_x)u = -4c^2 v_{\xi\eta}\,, \tag{2.3}$$

also

$$v_{\xi\eta} = 0\,. \tag{2.4}$$

Folglich ist v_ξ von η unabhängig, und es gibt eine Funktion $f(\xi)$ mit $v_\xi(\xi,\eta) = f(\xi)$. Integration bzgl. ξ liefert

$$v(\xi,\eta) = \int_{\xi_0}^{\xi} f(s)ds + G(\eta) =: F(\xi) + G(\eta)$$

als allgemeine Lösung von (2.4). Zusammenfassend erhält man mit noch unbekannten Funktionen F und G die Darstellung

$$\boxed{u(x,t) = F(x+ct) + G(x-ct)} \tag{2.5}$$

als allgemeine Lösung von (2.1).

Der Anteil $G(x-ct)$ in (2.5) definiert eine mit der Geschwindigkeit $c > 0$ *nach rechts* laufende Welle, $F(x-ct)$ dagegen eine nach links laufende Welle. In beiden Fällen bleibt die Gestalt der Wellen erhalten. Damit u die Anfangsbedingungen

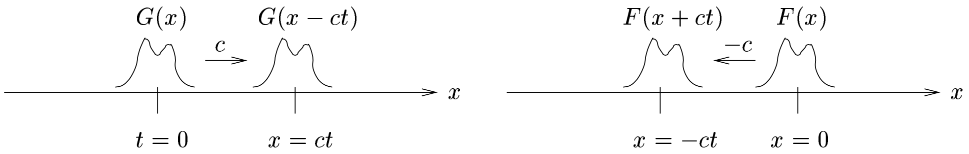


Abbildung 2.2: Nach rechts und links laufende Wellen

(2.2) erfüllt, muss

$$\begin{aligned} u_0 &= u(0,\cdot) = F + G \quad \Rightarrow u_0' = F' + G' \\ u_1 &= u_t(0,\cdot) = cF' - cG' \end{aligned}$$

gelten. Daraus ergibt sich eindeutig

$$F' = \frac{1}{2c}(cu_0' + u_1), \quad G' = \frac{1}{2c}(cu_0' - u_1)\,,$$

also mit Integrationskonstanten $F_0, G_0 \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{2}u_0(x) + \frac{1}{2c}\int_0^x u_1(s)ds + F_0\,, \\ G(x) &= \frac{1}{2}u_0(x) - \frac{1}{2c}\int_0^x u_1(s)ds + G_0\,. \end{aligned}$$

Wegen $F + G = u_0$ ist automatisch $F_0 + G_0 = 0$. Somit können die Integrationskonstanten F_0, G_0 in (2.5) weggelassen werden, und (2.5) nimmt die Form

$$\boxed{u(t,x) = \frac{1}{2}\big(u_0(x+ct) + u_0(x-ct)\big) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} u_1(s)ds} \tag{2.6}$$

an. Eine Probe zeigt, dass (2.6) für $u_0 \in C^2(\mathbb{R})$, $u_1 \in C^1(\mathbb{R})$ tatsächlich eine Lösung von (2.1) – (2.2) liefert.

Satz 2.1 *Für beliebige Anfangswerte $u_0 \in C^2(\mathbb{R})$, $u_1 \in C^1(\mathbb{R})$ besitzt das Anfangswertproblem*

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= 0 \quad \textit{in } \mathbb{R}\times\mathbb{R} \\ u(0,\cdot) &= u_0 \\ u_t(0,\cdot) &= u_1 \end{aligned} \tag{2.7}$$

genau eine Lösung $u \in C^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$; diese Lösung ist durch (2.6) *gegeben.*

Bemerkung 2.2 (1) Sei $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ein beliebiger Raum-Zeit-Punkt mit $t \neq 0$. Dann hängt die Lösung $u(t, x)$ nur von den Anfangswerten $u_0(y)$, $u_1(y)$ mit

$$y \in A(t, x) = [x - c|t|,\, x + c|t|]$$

ab. Das Intervall $A(t, x)$ heißt das *Abhängigkeitsgebiet* der Lösung u in (t, x).

(2) Sei $\xi \in \mathbb{R}$ ein beliebiger Raumpunkt. Dann beeinflussen die Anfangswerte $u_0(\xi)$, $u_1(\xi)$ das Verhalten des Lösung u nur in dem nach oben und unten offenen Doppelkegel

$$E(\xi) = \{(t, x) : \xi - c|t| \leq x \leq \xi + c|t|\},$$

dem sog. *Einflussgebiet.* Ist $u_1 \equiv 0$, so zeigt (2.6), dass

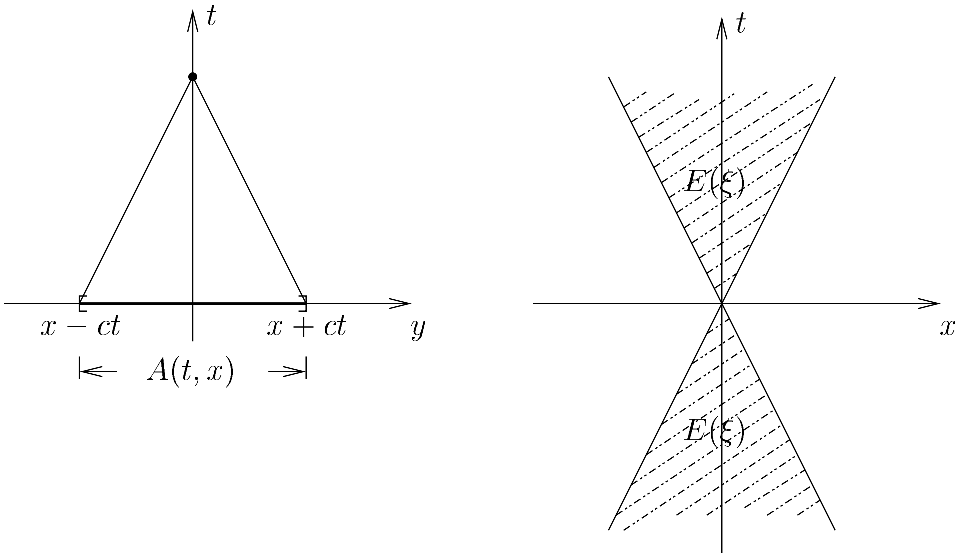


Abbildung 2.3: Abhängigkeits- und Einflussgebiet

$$\partial E(\xi) = \{(t, x) :\ \xi = x \pm c|t|\}$$

als Einflussgebiet genommen werden darf. Das Anfangssignal $u_0(\xi) \neq 0$ wird nur entlang den Charakteristiken $\xi = x \pm c|t|$, vgl. Abbildung 2.1 nach links und rechts transportiert. Im Fall $u_1 \neq 0$ ist i.a. der volle Kegel $E(\xi)$ das Einflussgebiet.

(3) Jetzt seien $x \in \mathbb{R}$ und $\xi \in \mathbb{R}$ fixiert. Dann liegt der Raum-Zeit-Punkt (t, x) für alle t mit

$$|t| > t_0 := \frac{|x - \xi|}{c}$$

im Einflussgebiet $E(\xi)$, d.h., das durch die Anfangswerte $u_0(\xi)$, $u_1(\xi)$ erzeugte Signal wird empfangen. Dieses Signal setzt in $t = \pm t_0$ scharf ein und wird im Fall $u_1 \equiv 0$ für $|t| > t_0$ nicht mehr wahrgenommen. Falls $u_1 \not\equiv 0$, wird u.U. für *alle* $|t| > t_0$ das Anfangssignal vernommen; ist $\int_{-\infty}^{\infty} u_1(s)ds \neq 0$, klingt das aufgenommene Signal für $|t| \to \infty$ nicht ab!

(4) Die Lösung (2.6) gestattet die einfachen punktweisen Abschätzungen

$$|u(t,x)| \leq \|u_0\|_\infty + |t| \, \|u_1\|_\infty$$

und

$$|u(t,x)| \leq \|u_0\|_\infty + \frac{1}{2c}\|u_1\|_1$$

unter Zuhilfenahme der sog. L^1-Norm $\|u_1\|_1 := \int_{-\infty}^{\infty} |u_1(s)| \, ds$. Zur Untersuchung der Wohlgestelltheit der Wellengleichung betrachten wir (2.7) nur auf einem endlichen Zeitintervall $[0,T]$. Ferner benutzen wir die Funktionenräume $BC^2(\mathbb{R})$ für u_0 und $BC^1(\mathbb{R})$ für u_1 mit den Normen

$$\|u_0\|_{BC^2} = \max(\|u_0\|_\infty, \ \|u_0'\|_\infty, \ \|u_0''\|_\infty)$$

etc. sowie den Raum $BC^2([0,T] \times \mathbb{R})$ für die Lösung u. Offensichtlich gestattet (2.6) die einfache Abschätzung

$$\|u\|_{BC^2([0,T]\times\mathbb{R})} \leq K_T(\|u_0\|_{BC^2} + \|u_1\|_{BC^1})$$

mit einer von T abhängenden, jedoch von u_0, u_1 unabhängigen Konstanten $K_T > 0$. Die homogene Wellengleichung, d.h. mit $f = 0$, ist also auf endlichen Zeitintervallen bei den hier benutzten Normen wohlgestellt.

2.2 Das Anfangsrandwertproblem der Wellengleichung

Das *Anfangsrandwertproblem*

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= 0 && \text{in } \mathbb{R} \times (0,\ell) \\ u(0,x) &= u_0(x) && \text{in } (0,\ell) \\ u_t(0,x) &= u_1(x) && \text{in } (0,\ell) \\ u(t,0) = u(t,\ell) &= 0 && \text{für } t \in \mathbb{R} \end{aligned} \tag{2.8}$$

auf dem Intervall $(0,\ell)$ kann durch geschickte Fortsetzung der Anfangswerte $u_0 \in C^2([0,\ell])$, $u_1 \in C^1([0,\ell])$ auf $\mathbb{R}$ auf den Fall (2.7) zurückgeführt werden. Die Identität (2.6) liefert nur für (t,x) mit $x \pm ct \in (0,\ell)$ eine Lösung der Wellengleichung, d.h. für positive t nur im Dreiecksgebiet

$$t \leq \frac{x}{c} \quad \text{und} \quad t \leq \frac{\ell - x}{c}, \quad x \in (0,\ell),$$

s. Abbildung 2.4. Falls (2.6) z.B. in $x = 0$ für $t > 0$ gültig bleiben soll, muss auf Grund der Randbedingung $(2.8)_4$

$$
\begin{aligned}
0 &= u(t,0) = \frac{1}{2}\big(u_0(ct) + u_0(-ct)\big) + \frac{1}{2c}\int_{-ct}^{+ct} u_1 \, ds \\
0 &= u_t(t,0) = \frac{c}{2}\left(u_0'(ct) - u_0'(-ct)\right) + \frac{1}{2}\big(u_1(ct) + u_1(-ct)\big)
\end{aligned}
$$

gelten. Diese Bedingungen können für $|t| < \frac{\ell}{c}$ erfüllt werden, wenn u_0 und u_1 ungerade von $(0,\ell)$ auf $(-\ell,0)$ fortgesetzt werden. Die analoge Aussage trifft in $x = \ell$ zu, wenn u_0 und u_1 ungerade von $(0,\ell)$ auf $(\ell,2\ell)$ fortgesetzt werden.

Insgesamt werden die auf $(-\ell,\ell)$ ungeraden Funktionen u_0 und u_1 2ℓ-periodisch auf $\mathbb{R}$ fortgesetzt und anschließend in der Darstellung (2.6) zur Lösung des Anfangsrandwertproblems (2.8) benutzt. Sind die sich aus $(2.8)_2$ – $(2.8)_4$ ergebenden *Kompatibilitätsbedingungen*

$$
u_0(0) = u_0(\ell) = 0, \quad u_1(0) = u_1(\ell) = 0
$$

erfüllt, sind die oben konstruierten Fortsetzungen von u_0 und u_1 auf $\mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Dagegen ist u_0 i.a. nicht von der Klasse $C^2(\mathbb{R})$ wie in Satz 2.1 gefordert. Um $u \in C^2\big(\mathbb{R} \times (0,\ell)\big)$ zu erreichen, müssten die sich aus $(2.8)_1$ ergebenden weiteren Kompatibilitätsbedingungen

$$
u_{0xx}(0) = u_{xx}(0,0) = \frac{1}{c^2} u_{tt}(0,0) = 0
$$

und $u_{0xx}(\ell) = 0$ erfüllt sein.

Die Lösung des Problems (2.8) wird später mit Hilfe von Fourier-Reihen in vollkommen anderer Form dargestellt werden.

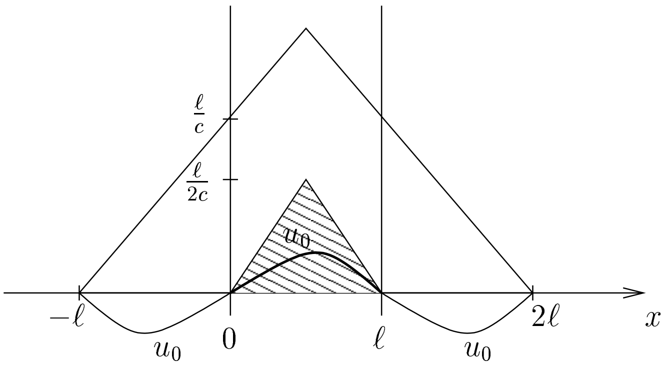


Abbildung 2.4: Fortsetzung des Anfangswertes u_0

Beispiel 2.3 Ein in $(0,\ell)$ eingespanntes Seil werde an der Stelle $x=\frac{\ell}{2}$ auf die Höhe $h>0$ angehoben und anschließend losgelassen. Dann liefern die ungeraden und 2ℓ-periodischen Anfangswerte u_0, u_1 mit

$$u_0(x)=\begin{cases} hx\,, & 0\le x<\ell/2 \\ h(\ell-x)\,, & \ell/2\le x\le\ell \end{cases}\,,\quad u_1(x)=0$$

nach (2.6) die formale Lösung

$$u(t,x)=\frac{1}{2}\big(u_0(x+ct)+u_0(x-ct)\big)\,.$$

Da u_0 in $x=\ell/2$ nicht differenzierbar ist, wird die Lösung im Raum-Zeit-Gebiet $\mathbb{R}\times(0,\ell)$ Linien aufweisen, auf denen sie nicht differenzierbar ist. Für $0\le t\le \min(\frac{x}{c}\,,\,\frac{\ell-x}{c})$, $x\in(0,\ell)$, erhält man

$$u(t,x)=h\begin{cases} x\,, & x+ct\le\frac{\ell}{2} \\ \frac{\ell}{2}-ct\,, & x-ct\le\frac{\ell}{2}\le x+ct \\ \ell-x\,, & x-ct\ge\frac{\ell}{2} \end{cases}\,.$$

Die Unstetigkeitsstellen von u_x laufen von $x=\frac{\ell}{2}$ in $t=0$ mit der Geschwin-

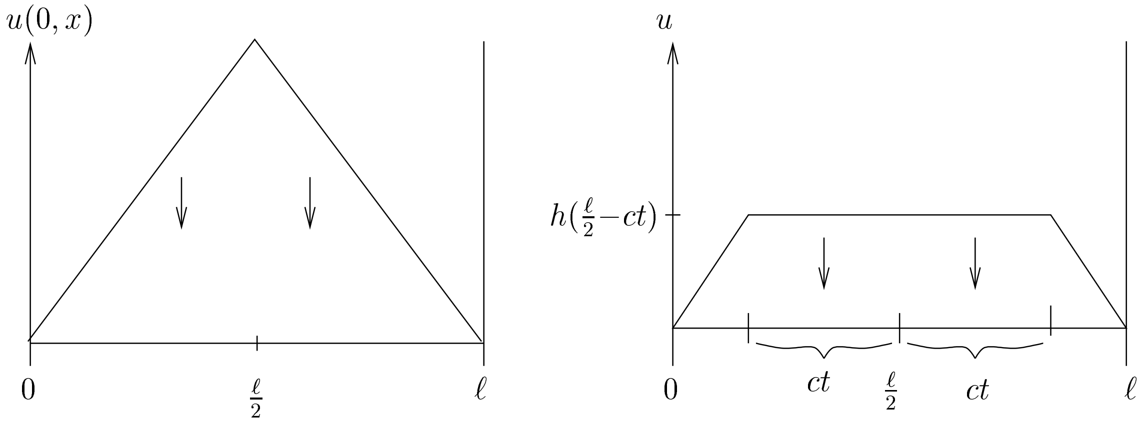


Abbildung 2.5: Das eingespannte Seil

digkeit $\pm c$ im Zeitintervall $[0,\frac{\ell}{2c}]$ nach 0 und nach ℓ und werden dort reflektiert, um sich für $t=\frac{\ell}{c}$ wieder in $x=\frac{\ell}{2}$ zu treffen. In $t=\frac{\ell}{2c}$ ist die potentielle Energie des elastischen Seils komplett in kinetische Energie umgewandelt $\big(u(\frac{\ell}{2c}\,,\cdot)\equiv 0\,,\, u_t(\frac{\ell}{2c}\,,\cdot)\ne 0\big)$.

2.3 Die inhomogene Wellengleichung

Die Wellengleichung

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = f(t,x) \quad \text{in } \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

mit homogenen Randwerten $u_0 = u_1 = 0$ kann mit der Methode der Variablentransformation wie in §2.1 gelöst werden. Sei also

$$\xi = x + ct,\ \eta = x - ct \quad \text{und} \quad v(\xi,\eta) = u(t,x)\,.$$

Eine kleine Rechnung liefert, s. (2.3),

$$v_{\xi,\eta}(\xi,\eta) = -\frac{1}{4c^2}\,F(\xi,\eta) \quad \text{mit} \quad F(\xi,\eta) = f(t,x)\,.$$

Nach Integration bzgl. ξ' von η bis ξ erhält man

$$v_\eta(\xi,\eta) - v_\eta(\eta,\eta) = -\frac{1}{4c^2}\int_\eta^\xi F(\xi',\eta)\,d\xi'\,, \tag{2.9}$$

wobei der Term $v_\eta(\eta,\eta)$ wegen

$$v_\eta(\eta,\eta) = \frac{\partial}{\partial\eta}\,u\big(\frac{\xi-\eta}{2c},\frac{\xi+\eta}{2}\big)\Big|_{\xi=\eta} = \big(-\frac{1}{2c}u_t + \frac{1}{2}\,u_x\big)(0,x) = \frac{1}{2}\big(u_{0x} - \frac{1}{c}u_1\big)(x) = 0$$

verschwindet. Anschließend integriert man (2.9) bzgl. η' von η bis ξ. Da $v(\xi,\xi) = u(0,x) = u_0(x)$ verschwindet, folgt die Gleichung

$$v(\xi,\eta) = \frac{1}{4c^2}\int_\eta^\xi \Big(\int_{\eta'}^\xi F(\xi',\eta')\,d\xi'\Big)\,d\eta'\,. \tag{2.10}$$

Zur Rücktransformation auf (t,x)-Variablen werden (t',x') durch

$$\xi' = x' + ct',\ \eta' = x' - ct'$$

eingeführt. Die Funktionaldeterminante dieser Transformation ist

$$\begin{vmatrix} \xi'_{x'} & \xi'_{t'} \\ \eta'_{x'} & \eta'_{t'} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & c \\ 1 & -c \end{vmatrix} = -2c\,.$$

Ferner besitzt das Integrationsgebiet $\eta \le \eta' \le \xi' \le \xi$, also $x - ct \le x' - ct' \le x' + ct' \le x + ct$, in (t',x')-Variablen die Dreieckgestalt

$$x - c(t-t') \le x' \le x + c(t-t') \quad \text{mit} \quad 0 \le t' \le t\,.$$

Damit lautet (2.10) jetzt

$$u(t,x) = \frac{1}{2c}\int_0^t \Big(\int_{x-c(t-t')}^{x+c(t-t')} f(t',x')dx'\Big)\,dt'\,. \tag{2.11}$$

Man beachte, dass das Integrationsgebiet gerade das in Abbildung 2.3 gezeichnete gleichschenklige Dreieck mit Basis $A(t,x)$ ist. Damit (2.11) eine bzgl. x oder t zweimal stetig differenzierbare Funktion liefert, muss neben $f \in C^0(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ noch die Existenz der partiellen Ableitung $f_x \in C^0(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ gefordert werden.

Sind die Anfangswerte u_0, u_1 von Null verschieden, so kann auf Grund der Linearität der Wellengleichung zur soeben gewonnenen Lösung u die in §2.1 konstruierte Lösung mit Anfangswerten u_0, u_1 addiert werden, um eine Lösung des voll inhomogenen Problems zu finden (*Superpositionsprinzip*).

Satz 2.4 *Seien $u_0 \in C^2(\mathbb{R})$, $u_1 \in C^1(\mathbb{R})$ und $f \in C^0(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ mit $f_x \in C^0(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ gegeben. Dann besitzt die inhomogene Wellengleichung*

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= f \qquad \text{in } \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ u(0,\cdot) &= u_0 \qquad \text{in } \mathbb{R} \\ u_t(0,\cdot) &= u_1 \qquad \text{in } \mathbb{R} \end{aligned}$$

genau eine Lösung $u \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$; diese Lösung hat die Gestalt

$$\begin{aligned} u(t,x) &= \frac{1}{2}\big(u_0(x+ct) + u_0(x-c)\big) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} u_1(s)dx \\ &\quad + \frac{1}{2c}\int_0^t \Big(\int_{x-c(t-t')}^{x+c(t-t')} f(t',x')dx'\Big)dt' \end{aligned}$$

(Formel von d'Alembert).

3 Die Wellengleichung im $\mathbb{R}^n$

Das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 \Delta u &= f \qquad \text{in } \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \\ u(0) &= u_0 \qquad \text{für } t = 0 \\ u_t(0) &= u_1 \qquad \text{für } t = 0 \end{aligned} \tag{3.1}$$

wird durch die *Methode der sphärischen Mittel* auf eine modifizierte Wellengleichung im $\mathbb{R}^1$ zurückgeführt.

3.1 Die Methode der sphärischen Mittel

Definition 3.1 (1) Für $x \in \mathbb{R}^n$ sei $B_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : |y - x| < r\}$ die offene Kugel mit Radius $r > 0$ und Mittelpunkt x; dabei bezeichne $|\cdot|$ die euklidische Norm auf dem $\mathbb{R}^n$. Ist $x = 0$, schreiben wir auch kurz $B_r = B_r(0)$. Auf dem Rand

$$\partial B_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : |y - x| = r\}$$

bezeichne *do* das Oberflächenmaß, ω_n die Oberfläche von ∂B_1, also

$$\omega_n = \int_{\partial B_1} 1 \, do = 2\pi^{n/2}\Gamma\big(\frac{n}{2}\big)$$

und folglich $\int_{\partial B_r} 1 \, do = \omega_n r^{n-1}$ sowie $\int_{B_r} 1 \, dx = \frac{\omega_n}{n} r^n$. Ferner sei $N = N(y) = \frac{y-x}{|y-x|}$ der äußere Normalenvektor in $y \in \partial B_r(x)$ an $B_r(x)$.

(2) Für eine Funktion $h \in C^0(\mathbb{R}^n)$ sei

$$\begin{aligned} M_h(x,r) \;&:=\; \frac{1}{w_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(x)} h(y) \, do_y \\ &=\; \frac{1}{w_n} \int_{\partial B_1} h(x + ry) \, do_y \end{aligned}$$

das *sphärische Mittel* der Funktion h über $\partial B_r(x)$.

Offensichtlich ist die zweite Darstellung von $M_h(x,r)$ auch für $r \le 0$ definiert, und es gilt

$$\begin{aligned} &M_h(x,r) = M_h(x,-r)\,, \\ &M_h(x,r) \to M_h(x,0) = h(x) \quad \text{für } r \to 0 \\ &h \in C^k(\mathbb{R}^n) \Rightarrow M_h \in C^k(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}) \quad \text{für jedes } k \in \mathbb{N}. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Lemma 3.2 *Für $h \in C^2(\mathbb{R}^n)$ gilt die* Gleichung von Darboux

$$\boxed{(\partial_r^2 + \frac{n-1}{r}\partial_r)\, M_h(x,r) = \Delta_x M_h(x,r)\,.} \tag{3.3}$$

mit den „Anfangswerten“

$$M_h(x,0) = h(x), \quad \partial_r M_h(x,0) = 0\,. \tag{3.4}$$

Beweis Da $M_h(x,r)$ in r stetig differenzierbar und gerade ist, muss $\partial_r M_h(x,0) = 0$ gelten; die Eigenschaft $M_h(x,0) = h(x)$ folgt aus der Stetigkeit von h, s. (3.2).

Die explizite Differentiation von M_h bzgl. r führt man in der zweiten Darstellung durch. Da $N = y$ auf ∂B_1 gilt, folgt mit dem Gauß'schen Satz

$$\begin{aligned}
\partial_r M_h(x,r) &= \frac{1}{\omega_n}\int_{\partial B_1} y\cdot\nabla h(x+ry)do_y \\
&= \frac{1}{r\omega_n}\int_{\partial B_1} N\cdot\nabla_y h(x+ry)do_y \\
&= \frac{1}{r\omega_n}\int_{B_1} \Delta_y h(x+ry)dy \\
&= \frac{r}{\omega_n}\int_{B_1} \Delta_x h(x+ry)dy \\
&= \frac{r^{1-n}}{\omega_n}\int_{B_r} \Delta_x h(x+z)dz
\end{aligned}$$

und nach Einführung von Polarkoordinaten für $z \in B_r$

$$\begin{aligned}
\partial_r M_h(x,r) &= r^{1-n}\int_0^r \rho^{n-1}\Delta_x\Big(\frac{1}{\omega_n}\int_{\partial B_1} h(x+\rho y)do_y\Big)d\rho \\
&= r^{1-n}\int_0^r \rho^{n-1}\Delta_x\, M_h(x,\rho)d\rho\,.
\end{aligned}$$

Eine weitere Differentiation nach r liefert

$$\partial_r^2 M_h(x,r) = \frac{1-n}{r}\,\partial_r M_h(x,r) + \Delta_x\, M_h(x,r)$$

und damit die Behauptung. ∎

Lemma 3.3 *Sei $u \in C^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$ eine Lösung der Wellengleichung* (3.1) *mit $f \equiv 0$ und Anfangswerten u_0, u_1 und sei*

$$M_u(x,r,t) = \frac{1}{\omega_n}\int_{\partial B_1} u(t,x+ry)\,do_y\,.$$

Dann ist M_u zweimal stetig partiell differenzierbar bzgl. r und t und genügt der Euler-Poisson-Darboux-Gleichung

$$\partial_t^2 M_u = c^2 \big(\partial_r^2 + \frac{n-1}{r} \, \partial_r \big) M_u \tag{3.5}$$

mit den Anfangswerten

$$M_u(x,r,0) = M_{u_0}(x,r), \quad \partial_t M_u(x,r,0) = M_{u_1}(x,r) \, . \tag{3.6}$$

Beweis Mit Lemma 3.2 folgt sofort aus (3.1), $f \equiv 0$,

$$\begin{aligned} \partial_t^2 M_u(x,r,t) &= \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial B_1} \partial_t^2 u(t, x+ry) \, do_y \\ &= \frac{c^2}{\omega_n} \int_{\partial B_1} \Delta_x u(t,x+ry) \, do_y \, , \end{aligned}$$

also $\partial_t^2 M_u = c^2 \Delta_x M_u = c^2 \big(\partial_r^2 + \frac{n-1}{r} \, \partial_r \big) \, M_u$. Die Identitäten (3.6) sind trivial. ■

3.2 Die homogene Wellengleichung im $\mathbb{R}^3$

Für $n = 3$ läßt sich (3.5) zu

$$\partial_t^2 M_u = c^2 (\partial_r^2 + \frac{2}{r} \, \partial_r) M_u = \frac{1}{r} c^2 \partial_r^2 (r M_u) \, ,$$

also zu

$$\partial_t^2 (r M_u) = c^2 \partial_r^2 (r M_u) \, , \tag{3.7}$$

umschreiben. Für festes $x \in \mathbb{R}^n$ erfüllt $r M_u$ folglich eine eindimensionale Wellengleichung bzgl. (t,r) mit den Anfangswerten

$$r M_u\big|_{t=0} = r M_{u_0}, \quad \partial_t (r M_u)\big|_{t=0} = r M_{u_1} \, . \tag{3.8}$$

Nach Satz 2.1 besitzt (3.7) – (3.8) die eindeutige Lösung

$$\begin{aligned} r M_u(x,r,t) &= \frac{1}{2} \big((r+ct) M_{u_0}(x, r+ct) + (r-ct) M_{u_0}(x, r-ct) \big) \\ &\quad + \frac{1}{2c} \int_{r-ct}^{r+ct} s M_{u_1}(x,s) ds \, . \end{aligned}$$

Da $M_{u_1}(x, \cdot)$ gerade ist, verschwindet das Integral $\int_{ct-r}^{r-ct} s \, M_{u_1}(x,s) ds$, und nach Division durch $r \neq 0$ erhält man

$$\begin{aligned} M_u(x,r,t) &= \frac{1}{2r} \big((ct+r) M_{u_0}(x, ct+r) - (ct-r) M_{u_0}(x, ct-r) \big) \\ &\quad + \frac{1}{2cr} \int_{ct-r}^{ct+r} s \, M_{u_1}(x,s) \, ds \, . \end{aligned}$$

Jetzt kann der Grenzübergang $r \to 0$ durchgeführt werden, indem der erste Term auf der rechten Seite als Differenzenquotient in r aufgefasst wird. Für $r \to 0$ folgt mit $(3.2)_2$

$$\begin{aligned} u(t,x) &= \partial_r\big((ct+r)M_{u_0}(x,ct+r)\big)\big|_{r=0} &&+ \; tM_{u_1}(x,ct) \\ &= \partial_t\big(tM_{u_0}(x,ct)\big) &&+ \; tM_{u_1}(x,ct)\,. \end{aligned}$$

Satz 3.4 *Für Anfangswerte $u_0 \in C^3(\mathbb{R}^3)$ und $u_1 \in C^2(\mathbb{R}^3)$ besitzt die homogene Wellengleichung*

$$u_{tt} - c^2\Delta u = 0 \quad \textit{in } \mathbb{R}\times\mathbb{R}^3$$

genau eine Lösung $u \in C^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)$; diese ist durch die Kirchhoff'sche Formel

$$\boxed{\begin{aligned} u(t,x) &= tM_{u_1}(x,ct) + \partial_t\big(tM_{u_0}(x,ct)\big) \\ &= \frac{1}{4\pi c^2 t}\int_{\partial B_{ct}(x)} u_1 do + \partial_t\Big(\frac{1}{4\pi c^2 t}\int_{\partial B_{ct}(x)} u_0 do\Big) \end{aligned}} \tag{3.9}$$

gegeben.

Beweis Die obige Herleitung führt eindeutig zur Darstellung (3.9). Der Beweis, dass (3.9) eine Lösung liefert, benutzt die auf (3.3) basierende Gleichung

$$\Delta_x(tM_h)(x,t) = t\Delta M_h = t(\partial_t^2 + \frac{2}{t}\,\partial_t)M_h = \partial_t^2(tM_h)$$

sowie $\partial_t M_h(x,0) = 0 \quad$ für $h \in C^2(\mathbb{R}^n)\,.$ ∎

Bemerkung 3.5 (1) Da in (3.9) nur Randintegrale über $\partial B_{ct}(x)$ auftreten, ist das Einflussgebiet $E(\xi)$ eines Punktes $\xi \in \mathbb{R}^3$ der Rand eines Doppelkegels:

$$E(\xi) = \{(t,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^3 \,:\, |x-\xi| = ct\}\,.$$

Für eine Funktion $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ bezeichne

$$\operatorname{supp} h = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n \,:\, h(x) \neq 0\}}$$

den Träger (support) von h. Nun gelte für die Anfangswerte u_0, u_1 die Beziehung

$$\operatorname{supp} u_0 \cup \operatorname{supp} u_1 \subset \overline{B_\varepsilon(\xi)}, \quad \varepsilon > 0\,;$$

d.h., das Anfangssignal ist in der Kugel $\overline{B_\varepsilon(\xi)}$ konzentriert. Dann setzt für einen Punkt $x \notin \overline{B_\varepsilon(\xi)}$ das Signal scharf zum Zeitpunkt

$$t_0 = \frac{1}{c}\operatorname{dist}\big(x, \overline{B_\varepsilon(\xi)}\big) = \frac{1}{c}(|x-\xi| - \varepsilon)$$

ein und endet zum Zeitpunkt

$$t_1 = \frac{1}{c}(|x-\xi| + \varepsilon)$$

(*Huygens'sches Prinzip*).

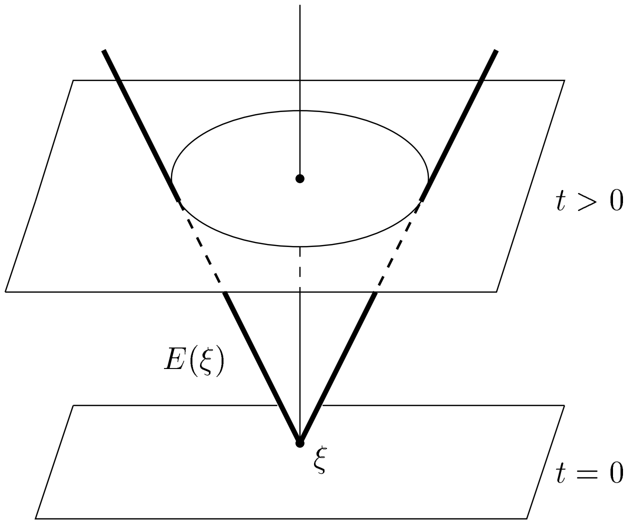


Abbildung 3.1: Das Einflussgebiet $E(\xi)$ der Wellengleichung im $\mathbb{R}^3$

(2) Analog zu (1) sieht man, dass $u(t,x)$ nur von den Daten aus dem Abhängigkeitsgebiet

$$A(t,x) = \{y \in \mathbb{R}^3 : \ |y-x| = c|t|\}$$

bestimmt wird.

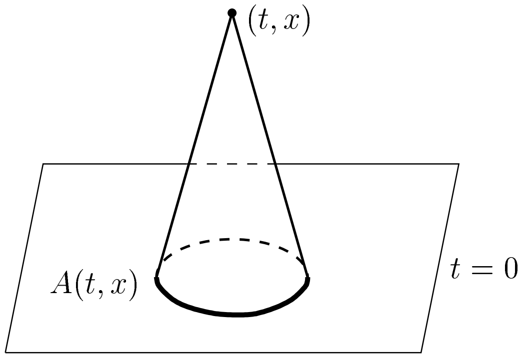


Abbildung 3.2: Das Abhängigkeitsgebiet $A(t,x)$

(3) Eine andere Darstellung der Lösung (3.9) ist

$$u(t,x) = \frac{1}{4\pi c^2 t^2} \int_{\partial B_{ct}(x)} \big(tu_1(y) + u_0(y) + (y-x)\cdot \nabla u_0(y)\big) do_y \,. \qquad (3.10)$$

Aus den Eigenschaften $u_0 \in C^3(\mathbb{R}^3)$ und $u_1 \in C^2(\mathbb{R}^2)$ folgt also *nur* $u \in C^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)$, d.h., man verliert eine Differenzierbarkeitsordnung von $t = 0$ zu $t > 0$. Der physikalische Grund liegt in der „Fokussierung“ von Störungen in den Anfangswerten für wachsende $t > 0$. Also sind $u(T,\cdot)$ und $u_t(T,\cdot)$ keine zulässigen Anfangswerte für die Wellengleichung auf $[T,\infty) \times \mathbb{R}^3$, $T > 0$, im Sinne von Satz 3.4, obwohl die Lösung u für alle $t \in \mathbb{R}$ in C^2 existiert. Der mathematische Hintergrund ist die falsche Wahl der Funktionenräume. Die Räume $L^2(\mathbb{R}^3)$, $L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3)$ sind der Wellengleichung besser als die Räume C^k angepasst.

(4) Es gelte $\operatorname{supp} u_0 \cup \operatorname{supp} u_1 \subset B_r(0)$. Dann gilt für beliebiges $x \in \mathbb{R}^3$ und für große $t > 0$ die Abschätzung

$$|u(t,x)| \leq \frac{M}{t^2}\big(t\|u_1\|_\infty + \|u_0\|_\infty + ct\|\nabla u_0\|_\infty\big) = O\big(\frac{1}{t}\big)\,,$$

wobei die Konstante $M = \frac{1}{4\pi c^2} \cdot \big(\text{Oberflächenmaß von } \partial B_{ct}(x) \cap B_r(0)\big)$ gleichmäßig durch Cr^2 beschränkt ist. Die Signalstärke $|u(t,x)|$ klingt also – unabhängig von der Lage von x – wie $\frac{1}{t}$ ab.

3.3 Der Fall $n = 2$ und die Abstiegsmethode von Hadamard

Sei $u(t,x) = u(t,x_1,x_2)$ eine Lösung der homogenen Wellengleichung im $\mathbb{R}^2$. Im Gegensatz zum dreidimensionalen Fall gestattet die Euler-Poisson-Darboux-Gleichung (vgl. (3.5) in $\mathbb{R}^3$)

$$\partial_t^2 M_u = c^2(\partial_r^2 + \frac{1}{r}\,\partial_r)M_u$$

jetzt keine einfache Lösung. Stattdessen wird bei der Abstiegsmethode von Hadamard im $2D$-Problem künstlich eine x_3-Variable eingeführt, die anschließend auf 0 gesetzt wird. Dementsprechend betrachtet man

$$v(t,x_1,x_2,x_3) := u(t,x_1,x_2)$$

als Lösung der $3D$-Wellengleichung $v_{tt} - c^2\Delta v = 0$ mit Anfangswerten

$$v(0,x_1,x_2,x_3) = u_0(x_1,x_2), \quad v_t(0,x_1,x_2,x_3) = u_1(x_1,x_2)\,. \tag{3.11}$$

Nach Satz 3.4 ist die eindeutige Lösung $v(t,x_1,x_2,x_3)$ zu den Anfangswerten (3.11) durch (3.9) gegeben. Für $x_3 = 0$ folgt mit der Notation $x^0 = (x_1,x_2,0)$

$$\begin{aligned} u(t,x_1,x_2) &= v(x_1,x_2,0,t) \\ &= \frac{1}{4\pi c^2 t}\int_{\partial B_{ct}(x^0)} u_1(y_2,y_2)do_y + \partial_t\Big(\frac{1}{4\pi c^2 t}\int_{\partial B_{ct}(x^0)} u_0(y_1,y_2)do_y\Big)\,, \end{aligned}$$

wobei die Oberflächenintegrale $\int_{\partial B_{ct}(x^0)}(\ldots)do_y$ über den Rand der dreidimensionalen Kugel $B_{ct}(x^0)$ laufen. Als konkrete Parametrisierung der oberen Hälfte $\partial B_{ct}^+(x^0) = \{y \in \partial B_{ct}(x^0) : y_3 > 0\}$ benutzen wir

$$y_3 = y_3(y_1,y_2) = \sqrt{c^2t^2 - (y_1-x_1)^2 - (y_2-x_2)^2}$$

für alle $(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ mit $(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2 < c^2t^2$. Für das Oberflächenelement do_y berechnet man den Term

$$1 + \Big(\frac{\partial y_3}{\partial y_1}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial y_3}{\partial y_2}\Big)^2 = \frac{c^2t^2}{c^2t^2 - (y_1 - x_1)^2 - (y_2 - x_2)^2}\,.$$

Damit erhält man z.B.

$$\begin{aligned}&\int_{\partial B^+_{ct}(x^0)} u_1(y_1, y_2) do_y \\ &\quad = \int_{(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2<c^2t^2} u_1(y_1, y_2)\,\frac{c|t|}{\sqrt{c^2t^2 - (y_1 - x_1)^2 - (y_2 - x_2)^2}}\,dy_1dy_2\,,\end{aligned}$$

bzw. in der üblichen zweidimensionalen Notation

$$c|t| \int_{B_{ct}(x)} \frac{u_1(y)}{\sqrt{c^2t^2 - |x - y|^2}}\,dy$$

mit $y = (y_1, y_2) \in B_{ct}(x) \subset \mathbb{R}^2$. Analog werden die „untere Hälfte“ $\partial B^-_{ct}(x^0) \subset \mathbb{R}^3$ und die Terme mit u_0 behandelt. Schließlich liefert Satz 3.4 die folgende Aussage:

Satz 3.6 Für Daten $u_0 \in C^3(\mathbb{R}^2)$ und $u_1 \in C^2(\mathbb{R}^2)$ besitzt die homogene Wellengleichung

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2\Delta u &= 0 && \text{in } \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \\ u(0) &= u_0 && \text{für } t = 0 \\ u_t(0) &= u_1 && \text{für } t = 0 \end{aligned}$$

die eindeutig bestimmte Lösung

$$\boxed{\begin{aligned} u(t, x) &= \frac{\operatorname{sgn} t}{2\pi c}\int_{B_{ct}(x)} \frac{u_1(y)}{\sqrt{c^2t^2 - |x - y|^2}}dy \\ &\quad + \partial_t\Big(\frac{\operatorname{sgn} t}{2\pi c}\int_{B_{ct}(x)} \frac{u_0(y)}{\sqrt{c^2t^2 - |x - y|^2}}\,dy\Big)\,. \end{aligned}} \tag{3.12}$$

Beweis Für die in (3.11) definierten, von $x_3 \in \mathbb{R}$ unabhängigen Anfangswerte liefert Satz 3.4 wegen der Eindeutigkeitsaussage eine ebenfalls von x_3 unabhängige Lösung v. Deshalb ist die durch (3.12) gegebene Funktion u tatsächlich eine Lösung der $2D$-Wellengleichung. Ist $u(t, x_1, x_2)$ eine Lösung der $2D$-Wellengleichung mit verschwindenden Anfangswerten, so ist $v(t, x_1, x_2, x_3) = u(t, x_1, x_2)$ eine Lösung der $3D$-Wellengleichung mit $v(0) = v_t(0) = 0$. Dann beweist Satz 3.4 die Eindeutigkeit $u = v = 0$. ■

Bemerkung 3.7 (1) Die in (3.12) auftretenden zweidimensionalen Integrale führen zu den Aussagen

$$\begin{aligned} A(t,x) &= \overline{B_{ct}(x)}\,, \\ E(\xi) &= \{(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 : \, |x-\xi| \le c|t|\}\,. \end{aligned}$$

Im Gegensatz zum dreidimensionalen Fall sind $A(t,x)$ bzw. $E(\xi)$ jetzt eine „gefüllte“ Kreisscheibe bzw. ein „gefüllter“ Kegel. Es gilt also nicht das Huygens'sche Prinzip. Sind $u_0, u_1 \in C_0^\infty\big(B_r(0)\big)$, setzt für $x \notin \overline{B_r(0)}$ das Signal in $t = \frac{1}{c}(|x|-r)$ scharf ein und endet i.a. nie! Allerdings klingt das Signal im Punkt x mindestens wie $\frac{1}{t}$, im Fall $u_1 \equiv 0$ sogar wie $\frac{1}{t^2}$ für $t \to \infty$ ab.

(2) Aus $u_0 \in C^3(\mathbb{R}^2)$ und $u_1 \in C^2(\mathbb{R}^2)$ folgt i.a. nicht $u(t,\cdot) \in C^2(\mathbb{R}^2)$. Auf Grund des Terms $(c^2t^2 - |x-y|^2)^{-1/2}$ in (3.12) verliert man etwa die Ordnung $\frac{1}{2}$ an Regularität.

Ausblick 3.8 Die Fälle $n = 5$, $n = 7$ etc. ungerader Dimension werden analog zum Fall $n = 3$ behandelt. In allen ungeraden Raumdimensionen außer $n = 1$ gilt das Huygens'sche Prinzip. Die Lösungen der homogenen Wellengleichung in geraden Raumdimensionen $n = 2k$ erhält man mit der Hadamard'schen Abstiegsmethode aus dem Fall $n = 2k+1$. Für $n = 2k$ gilt das Huygens'sche Prinzip nicht. In jeder Raumdimension n verliert man von $t = 0$ zu $t > 0$ etwa $\frac{n-1}{2}$ Ordnungen an Regularität.

3.4 Die inhomogene Wellengleichung und Duhamel's Prinzip

Die inhomogene Wellengleichung

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 \Delta u &= f(t,x) && \text{in } \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \\ u(0) &= 0 && \text{für } t = 0 \\ u_t(0) &= 0 && \text{für } t = 0 \end{aligned} \tag{3.13}$$

werde nur für die trivialen Anfangswerte $u_0 = u_1 = 0$ betrachtet, da die Lösung für den Fall $f \equiv 0$ mit beliebigen Anfangswerten nach §§3.2 – 3.3 bekannt ist und da für die lineare Wellengleichung das Superpositionsprinzip gilt. Zur Lösung von (3.13) benutzen wir eine Methode, die verwandt ist zur Formel der *Variation der Konstanten* aus der Theorie gewöhnlicher linearer Differentialgleichungen erster Ordnung. Für fest gewähltes, aber beliebiges $s \ge 0$ sei $U = U(s,t,x)$ die Lösung der Wellengleichung

$$\begin{aligned} (\partial_t^2 - c^2\Delta)\, U(s,t,x) &= 0 && \text{für } t > s\,,\ x \in \mathbb{R}^n \\ U(s,s,x) &= 0 && \text{für } t = s\,,\ x \in \mathbb{R}^n \\ U_t(s,s,x) &= f(s,x) && \text{für } t = s\,,\ x \in \mathbb{R}^n \end{aligned} \tag{3.14}$$

und sei

$$u(t,x) := \int_0^t U(s,t,x)\,ds\,.$$

Satz 3.9 *Sei f eine glatte, d.h. unendlich oft stetig differenzierbare Funktion auf* $[0,\infty)\times\mathbb{R}^n$*, und sei für jedes $s\geq 0$ die Funktion $U(s,t,x)$ die Lösung der homogenen Wellengleichung* (3.14)*. Dann ist*

$$u(t,x) = \int_0^t U(s,t,x)\,ds \tag{3.15}$$

die eindeutig bestimmte Lösung der inhomogenen Wellengleichung (3.13)*.*

Beweis Für $f\in C^\infty$ implizieren die expliziten Lösungsformeln (3.9), falls $n=3$, bzw. (3.12), falls $n=2$, dass $U(s,t,x)$ zweimal stetig partiell differenzierbar bzgl. t,x ist. Die Probleme der Regularität und sogar der Integrierbarkeit von $U(s,t,x)$ bzgl. $s\in[0,t]$ sollen hier – außer für $n=3$ in Korollar 3.10 – nicht weiter betrachtet werden. Aus (3.15) folgt $u(0,x)=0$ sowie

$$u_t(t,x) = \underbrace{U(t,t,x)}_{=0} + \int_0^t U_t(s,t,x)\,ds\,,$$

also $u_t(0,x)=0$. Eine weitere Differentiation nach t liefert wegen (3.14)

$$\begin{aligned} u_{tt}(t,x) &= U_t(t,t,x) + \int_0^t U_{tt}(s,t,x)\,ds \\ &= f(t,x) + c^2\Delta\int_0^t U(s,t,x)\,ds\,. \end{aligned}$$

Also löst u die Gleichung (3.13). Die Eindeutigkeitsaussage folgt aus den Eindeutigkeitsaussagen der Sätze 3.4 bzw. 3.6. Der allgemeine Fall $n\geq 4$ soll hier nicht weiter untersucht werden. ■

Im Fall $n=3$ liefert die Lösungsformel (3.9) mit Anfangswert $u_0=0$, $u_1=f(s,\cdot)$ in $t=s$ (für alle $s\geq 0$) die folgende konkrete Lösungsformel für (3.13).

Korollar 3.10 *Für $n=3$ ist*

$$u(t,x) = \frac{1}{4\pi c^2}\int_0^t \frac{1}{t-s}\Big(\int_{\partial B_{c(t-s)}(x)} f(s,y)\,do(y)\Big)\,ds \tag{3.16}$$

die eindeutige Lösung der inhomogenen Wellengleichung (3.13)*. Insbesondere wird das Abhängigkeitsgebiet $A(t,x)$ von u in (t,x) durch den Rand eines Kegels im $\mathbb{R}^4$, nämlich durch*

$$A(t,x) = \{(s,y)\in[0,\infty)\times\mathbb{R}^3 : |y-x| = c|t-s|,\ 0\leq s\leq t\}$$

beschrieben.

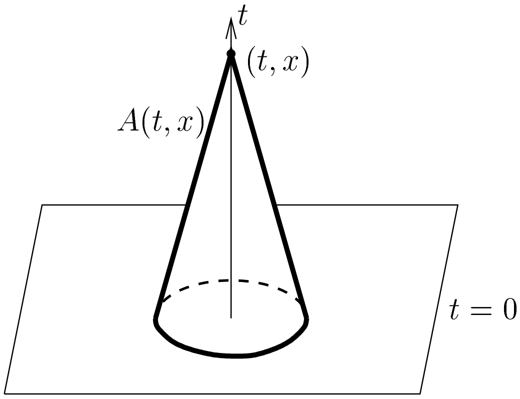


Abbildung 3.3: Das Abhängigkeitsgebiet $A(t, x)$ für die inhomogene Wellengleichung im $\mathbb{R}^3$

Bemerkung 3.11 (1) Im Fall $n = 3$ genügt die Funktion

$$U(s, t, x) = \frac{1}{4\pi c^2(t-s)} \int_{\partial B_{c(t-s)}(x)} f(s, y)\, do(y)$$

der Abschätzung $|U(s, t, x)| \le (t-s)\, \|f\|_\infty$. Deshalb ist das äußere Integral in (3.16) bzgl. $s \in (0, t)$ nicht singulär, sondern ein gewöhnliches Riemann-Integral. Die Voraussetzung $f \in C^2([0, \infty) \times \mathbb{R}^3)$ impliziert bereits $u \in C^2\big((0, \infty) \times \mathbb{R}^3\big)$.

(2) Bei verschwindenden Anfangswerten sei u die durch eine äußere Kraft f mit $\operatorname{supp} f \subset [r, r] \times \overline{B_r(0)}$ angeregte Welle. Nach (3.16) setzt für $n = 3$ das Signal in einem Punkt $x \in \mathbb{R}^3 \backslash \overline{B_r(0)}$ irgendwann ein und endet nach einem Zeitintervall der Länge $2r/c$ scharf. Dieses Signal wird allein durch die Funktionswerte von f, d.h. ohne durch f_t und ∇f gegebene Informationen bestimmt.

Im Fall $n = 2$ setzt das Signal irgendwann ein und klingt für $t \to \infty$ ab. Es hängt ebenfalls nur von f ab, s. (3.12).

Für $n \ge 4$ setzt das Signal scharf ein und endet scharf, falls n ungerade ist, bzw. klingt für $t \to \infty$ ab, falls n gerade ist. Die Form des Signals hängt nicht nur von den Funktionswerten $f(t, x)$ ab, sondern auch von ∇f $(n = 4, 5)$ und von u.U. höheren Ableitungen von f ab; das Signal wird also „verzerrt“.

4 Quasilineare Gleichungen 1. Ordnung

Partielle Differentialgleichungen 1. Ordnung für $u : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ wie z.B. die Transportgleichung $u_t + cu_x = f$ und spezielle nichtlineare Gleichungen können unter Umständen durch das Lösen einer unendlichen Schar von gewöhnlichen Differentialgleichungssystemen explizit gelöst werden.

Definition 4.1 (1) Eine partielle Differentialgleichung 1. Ordnung

$$f(x_1, \ldots, x_n, u, u_{x_1}, \ldots, u_{x_n}) = 0$$

heißt *quasilinear*, falls sie in der Form

$$a_1(x,u)u_{x_1} + \ldots + a_n(x,u)u_{x_n} = c(x,u) \tag{4.1}$$

für $u : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ geschrieben werden kann.

(2) Eine Lösung $z = u(x)$ von (4.1) stellt eine Fläche, eine sog. n–dimensionale Mannigfaltigkeit, im $(n{+}1)$–dimensionalen (x, z)-Raum dar. Eine solche Fläche
$$S = \big\{(x,z) = \big(x, u(x)\big) : \; x \in \Omega\big\}\,,$$
kurz $S = \big\{\big(x, u(x)\big)\big\}$, heißt auch *Integralfläche*.

Sei $S = \big\{\big(x, u(x)\big)\big\}$ eine Integralfläche von (4.1) und $(x_0, z_0) = \big(x_0, u(x_0)\big) \in S$. Dann definieren für $x = x_0$ die Vektoren

$$(1, 0, \ldots, 0, u_{x_1}),\; (0, 1, 0, \ldots, 0, u_{x_2}), \ldots, (0, \ldots, 0, 1, u_{x_n}) \in \mathbb{R}^{n+1} \tag{4.2}$$

n linear unabhängige Tangentialvektoren in (x_0, z_0) an S, so dass

$$N(x_0) = (u_{x_1}, \ldots, u_{x_n}, -1)$$

ein Normalenvektor in (x_0, z_0) ist. Nach (4.1) steht die *charakteristische Richtung*

$$\big(a_1(x_0, z_0), \ldots, a_n(x_0, z_0),\; c(x_0, z_0)\big)$$

senkrecht zu $N(x_0)$ und liegt in der von den Tangentialvektoren (4.2) aufgespannten Tangentialebene. Umgekehrt folgt aus $\big(a_1(x_0, z_0), \ldots,$ $a_n(x_0, z_0),\; c(x_0, z_0)\big) \perp N(x_0)$ sofort, dass (4.1) in x_0 erfüllt ist.

Folgerung 4.2 *Eine Fläche* $S = \big\{\big(x, u(x)\big)\big\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ *ist genau dann eine Integralfläche zu* (4.1)*, wenn in jedem Punkt* $\big(x_0, z_0\big) = \big(x_0,\, u(x_0)\big) \in S$ *die charakteristische Richtung* $\big(a_1(x_0, z_0), \ldots, a_n(x_0, z_0),\; c(x_0, z_0)\big)$ *senkrecht zum Normalenvektor* $N(x_0)$ *steht.*

Definition 4.3 Gegeben seien C^1-Funktionen $a_1(x,z), \ldots, a_n(x,z)$, $c(x,z) : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und ein Punkt $(x_0, z_0) \in \Omega \times \mathbb{R}$. Dann heißt die durch die Lösung des gewöhnlichen Differentialgleichungssystems

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= a_1\big(x(t),\, z(t)\big) \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= a_n\big(x(t),\, z(t)\big) \\ \frac{dz}{dt} &= c\big(x(t),\, z(t)\big) \end{aligned} \tag{4.3}$$

mit Anfangswert

$$x_1(t_0) = x_{01}, \ldots, x_n(t_0) = x_{0n},\ z(t_0) = z_0$$

definierte Kurve $\chi = \big\{\big(x(t), z(t)\big)\big\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ die *charakteristische Kurve* oder auch *Charakteristik* zu (4.1) durch den Punkt (x_0, z_0). Präziser formuliert ist $t \mapsto \big(x(t),\, z(t)\big) = \chi(t)$ die charakteristische Kurve.

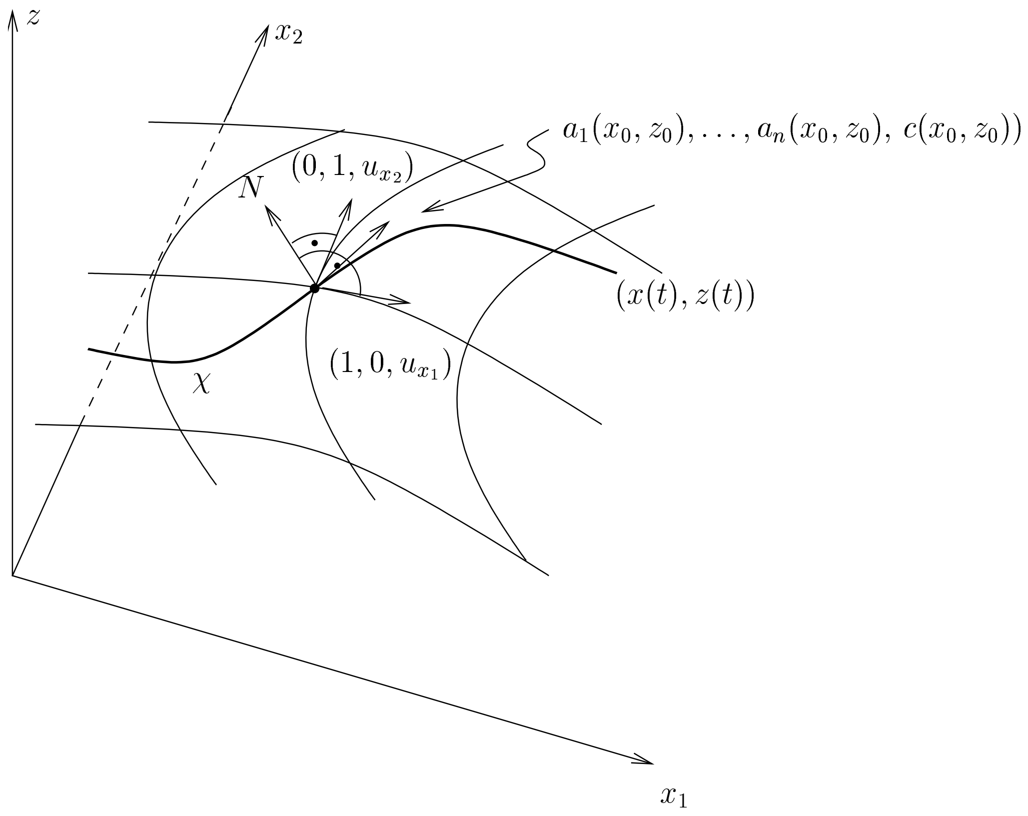


Abbildung 4.1: Integralfläche mit Charakteristik

Die Projektion der Charakteristik in die Grundebene $\mathbb{R}^n$, also die Kurve $t \mapsto \big(x_1(t), \ldots, x_n(t)\big)$, heißt *charakteristische Projektion* oder auch kurz Charakteristik.

Da $a_1, \ldots, a_n$, c stetig differenzierbar sind, besitzt das Differentialgleichungssystem (4.3) genau eine lokale Lösung, d.h., es gibt ein $\delta > 0$ und genau eine Lösung $\big(x(t),\, z(t)\big)$ auf dem Intervall $(t_0 - \delta,\, t_0 + \delta)$.

Satz 4.4 *Eine Fläche $S = \{\big(x,\, u(x)\big)\}$ des $\mathbb{R}^{n+1}$ ist genau dann Integralfläche zu* (4.1)*, wenn sie als Vereinigung von charakteristischen Kurven dargestellt werden kann, d.h., wenn jede charakteristische Kurve, die in S startet, verläuft lokal in S.*

Beweis „$\Leftarrow$" Falls S Vereinigung von charakteristischen Kurven ist, gibt es zu jedem $\big(x_0, z_0\big) = \big(x_0,\, u(x_0)\big) \in S$ eine charakteristische Kurve $\chi \subset S$ mit $\chi(t_0) = (x_0, z_0)$. Nach (4.3) ist

$$\chi'(t_0) = \big(a_1(x_0, z_0)\big), \ldots, a_n(x_0, z_0),\, c(x_0, z_0)\big)$$

ein Tangentialvektor an S in (x_0, z_0). Die charakteristische Richtung $\chi'(t_0)$ steht also senkrecht auf $N(x_0)$. Dann zeigt Folgerung 4.2, dass S eine Integralfläche ist.

„$\Rightarrow$" Sei S eine Integralfläche, $\big(x_0, z_0\big) = \big(x_0,\, u(x_0)\big) \in S$ und sei $t \mapsto \chi(t) = \big(x(t),\, z(t)\big)$ die Charakteristik durch (x_0, z_0), d.h. $\chi(t_0) = (x_0, z_0)$. Es ist $\chi \subset S$ zu zeigen, also

$$z(t) = u\big(x(t)\big) \quad \text{für } |t - t_0| < \delta\,. \tag{4.4}$$

Nun gilt $z(t_0) = z_0 = u(x_0) = u\big(x(t_0)\big)$ sowie wegen (4.3)

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= c\big(x(t),\, z(t)\big)\,, \\ \frac{d}{dt}\, u\big(x(t)\big) &= \sum_{i=1}^{n} u_{x_i}\big(x(t)\big) \cdot \frac{dx_i}{dt} = \sum_{i=1}^{n} a_i\big(x(t), z(t)\big)\, u_{x_i}\big(x(t)\big)\,. \end{aligned}$$

Also löst die Differenz $v(t) = z(t) - u\big(x(t)\big)$ das gewöhnliche Anfangswertproblem

$$v' = c\big(x(t),\, v + u\big(x(t)\big)\big) - \sum_{i=1}^{n} a_i\big(x(t),\, v + u\big(x(t)\big)\big)\, u_{x_i}\big(x(t)\big) \tag{4.5}$$

mit Anfangswert $v(t_0) = 0$. Da S eine Integralfläche und somit u eine Lösung von (4.1) ist, ist insbesondere $v \equiv 0$ eine Lösung von (4.5). Dann liefert der Eindeutigkeitssatz für gewöhnliche Differentialgleichungen – hier wird $a_1, \ldots, a_n$, $c \in C^1$ benötigt –, dass die Lösung $v = z - u \circ x$ mit der trivialen Lösung $v \equiv 0$ übereinstimmt. Damit ist (4.4) gezeigt. ■

Im Folgenden soll zuerst im Fall $n = 2$ gezeigt werden, wie man eine Lösung u von (4.1), also eine Integralfläche $S = \{(x, y, u(x, y))\} \subset \mathbb{R}^3$ mit reellen Variablen x, y konstruiert.

Definition 4.5 (1) Gegeben sei die quasilineare Gleichung

$$a(x, y, u)u_x + b(x, y, u)u_y = c(x, y, u) \tag{4.6}$$

mit $a, b, c \in C^1$ sowie eine doppelpunktfreie „Anfangskurve" $\Gamma(s) \subset \mathbb{R}^3$ der Klasse C^1:

$$\Gamma : \; x = \alpha(s), \; y = \beta(s), \; z = \gamma(s)\,.$$

Das *Cauchy-Problem* zu (4.6) *mit Anfangskurve* Γ besteht darin, eine Lösung u von (4.6) mit der Eigenschaft

$$\gamma(s) = u\big(\alpha(s),\, \beta(s)\big)$$

zu finden.

(2) Falls die Variable y mit der Zeit t identifiziert wird, schreibt man häufig

$$y = \beta(s) = 0 \quad \text{und} \quad x = \alpha(s) = s$$

vor. In diesem Fall ist u eine Lösung des *Anfangswertproblems* (4.6) mit *Anfangswert* $u(x, 0) = \gamma(x)$.

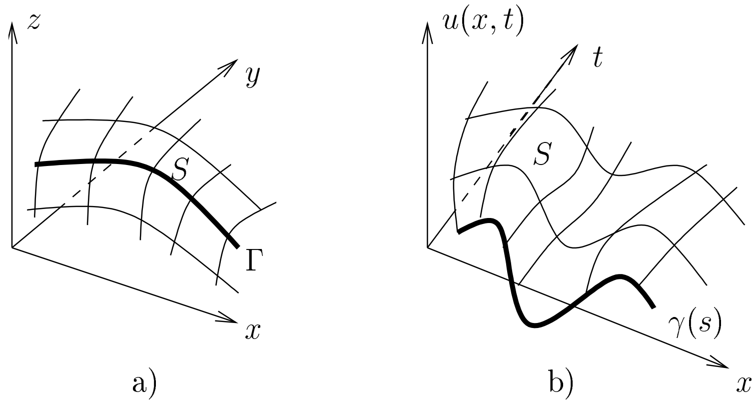


Abbildung 4.2: a) Das allgemeine Cauchy-Problem, b) das Anfangswertproblem

Nun sei eine doppelpunktfreie C^1–Anfangskurve $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ durch $\big(\alpha(s),\, \beta(s)\big),\, \gamma(s)$ zu (4.6) gegeben. Um eine lokale Lösung u von (4.6) zu finden, wird zusätzlich ein Punkt

$$(x_0, y_0, z_0) = \big(\alpha(s_0),\, \beta(s_0),\, \gamma(s_0)\big) \in \Gamma$$

fixiert. Jetzt löst man die durch s parametrisierte Schar gewöhnlicher Differentialgleichungssysteme

$$\begin{aligned} x_t(s,t) &= a(x,y,z) \\ y_t(s,t) &= b(x,y,z) \\ z_t(s,t) &= c(x,y,z) \end{aligned} \tag{4.7}$$

mit Anfangswert

$$x(s,0) = \alpha(s),\ y(s,0) = \beta(s),\ z(s,0) = \gamma(s) \tag{4.8}$$

für $t = 0$ für s nahe bei s_0. Aus der Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen ist bekannt, dass (4.7) – (4.8) eine eindeutige C^1–Lösung

$$(x,y,z)(s,t) \quad \text{für } |s - s_0| < \varepsilon\ ,\ |t| < \varepsilon$$

mit einem $\varepsilon > 0$ besitzt. Die Kurven

$$\chi_s(\cdot) = \big(x(s,\cdot),\ y(s,\cdot),\ z(s,\cdot)\big)$$

bilden eine durch s parametrisierte Schar charakteristischer Kurven χ_s mit Startpunkt $\chi_s(0) = \big(\alpha(s),\ \beta(s),\ \gamma(s)\big)$ auf Γ.

Es stellt sich jedoch die Frage, ob die durch (s,t) parametrisierte Fläche

$$S = \{\big(x(s,t),\ y(s,t),\ z(s,t)\big) :\ |s - s_0| < \varepsilon,\ |t| < \varepsilon\}$$

tatsächlich eine Integralfläche zu (4.6) ist. Äquivalent dazu ist die Frage, ob sich die Abbildung

$$(s,t) \mapsto \big(x(s,t),\ y(s,t)\big) \tag{4.9}$$

lokal zu $\big(s(x,y),\ t(x,y)\big)$ umkehren läßt, so dass anschließend $z(s,t)$ als Funktion $z = u(x,y)$ geschrieben werden kann und u eine Lösung von (4.6) ist. Nach dem Satz über Umkehrfunktionen muss zur Invertierbarkeit von (4.9) in einer Umgebung von $(s_0, 0)$ die Funktionaldeterminante

$$J(s_0,0) = \begin{vmatrix} x_s(s_0,0) & y_s(s_0,0) \\ x_t(s_0,0) & y_t(s_0,0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha'(s_0) & \beta'(s_0) \\ a(x_0,y_0,z_0) & b(x_0,y_0,z_0) \end{vmatrix} \tag{4.10}$$

von 0 verschieden sein. Ist $J(s_0,0) \neq 0$, erhält man eine Fläche

$$S = \{\big(x, y, u(x,y)\big)\}$$

mit $(x_0,y_0,z_0) \in S$ und $\Gamma \cap \{(x,y,z) : |x - x_0| + |y - y_0| + |z - z_0| < \varepsilon'\} \subset S$.

Abschließend bleibt zu zeigen, dass die soeben konstruierte Fläche S sogar eine Integralfläche zu (4.6) ist. In einem beliebigen Punkt

$$\big(x, y,\ u(x,y)\big) = \big(x(s,t),\ y(s,t),\ z(s,t)\big) \in S$$

ist nach (4.7)

$$\big(x_t(s,t),\ y_t(s,t),\ z_t(s,t)\big) = (a,b,c)\,\big(x(s,t),\ y(s,t),\ z(s,t)\big)$$

ein Tangentialvektor an S und steht folglich senkrecht auf dem Normalenvektor $N(x,y)$. Auf Grund von Folgerung 4.2 ist S also eine Integralfläche und u eine lokale Lösung von (4.6).

Bemerkung 4.6 (Geometrische Interpretation der Bedingung $J(s,t) \neq 0$.) Gilt für die Funktionaldeterminante $J(s,t)$, s. (4.10),

$$J(s,t) = \begin{vmatrix} \alpha' & \beta' \\ a & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha' & \beta' & \gamma' \\ a & b & c \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

in einem Punkt (s,t), sind der Tangentialvektor (α',β',γ') von Γ und die charakteristische Richtung (a,b,c) nicht parallel zueinander. Im Punkt $(x_0,y_0,z_0) \in \Gamma$ schneidet die Kurve Γ die charakteristische Richtung $(a,b,c)(x_0,y_0,z_0)$ also *transversal*, d.h. ohne tangentiale Berührung.

Umgekehrt impliziert die Transversalität von Γ und der charakteristischen Richtung (a,b,c) in (x_0,y_0,z_0) bereits $J \neq 0$, falls Γ in einer Integralfläche S liegt. Denn wegen $\Gamma \subset S$ gilt $\gamma(s) = u\big(\alpha(s),\beta(s)\big)$, also $\gamma'(s) = u_x\alpha' + u_y\beta'$ in $s = s_0$, sowie $au_x + bu_y = c$. Dann ist

$$0 \neq \begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \\ \gamma' \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta' c - \gamma' b \\ \gamma' a - \alpha' c \\ \alpha' c - \gamma' a \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} -u_x \\ -u_y \\ 1 \end{pmatrix} ,$$

also $J \neq 0$

Die lokale Lösbarkeit des Cauchy-Problems (4.6) mit Anfangskurve Γ folgt also aus der Transversalität von Γ und charakteristischen Richtungen. Da $J(s_0,0) \neq 0$ äquivalent zur Transversalität von (α',β') und (a,b) in (x_0,y_0,z_0) ist, d.h. zur Transversalität der Projektion von Γ in den $\mathbb{R}^2$ und der charakteristischen Grundrichtung (a,b) in (x_0,y_0,z_0), impliziert bereits die letztere Bedingung im $\mathbb{R}^2$ die lokale Lösbarkeit.

Bemerkung 4.7 (1) Im Fall einer echt quasilinearen Gleichung, wenn also a oder b von u abhängen, geht sogar der Wert $z_0 = \gamma(s_0)$ über $(a,b)(x_0,y_0,z_0)$ in die Lösbarkeitsbedingung $J(s_0,0) \neq 0$ ein. Die Lösbarkeit des Cauchy-Problems hängt also u.U. nicht nur von der Projektion (α',β') von (α',β',γ') in den $\mathbb{R}^2$ ab, sondern auch von der Vorgabe $u = z = \gamma(s)$.

(2) Im Spezialfall linearer partieller Differentialgleichungen 1. Ordnung

$$a(x,y)u_x + b(x,y)u_y = c(x,y)u + d(x,y)$$

entkoppelt das gewöhnliche Differentialgleichungssystem (4.7), (4.8) zu den Gleichungen

$$\begin{cases} x_t(s,t) = a(x,y), & x(s,0) = \alpha(s) \\ y_t(s,t) = b(x,y), & y(s,0) = \beta(s) \end{cases}$$

und

$$z_t(s,t) = c(x,y)z + d(x,y), \quad z(s,0) = \gamma(s)\,.$$

Für jedes feste s definiert die charakteristische Projektion $t \mapsto \big(x(s,t),\, y(s,t)\big)$ eine Kurve im $\mathbb{R}^2$, die lokal auch in der Form $x = x(y)$ bzw. $y = y(x)$ mittels

$$\frac{dx}{dy} = \frac{a(x,y)}{b(x,y)} \quad bzw. \quad \frac{dy}{dx} = \frac{b(x,y)}{a(x,y)}$$

gefunden werden kann. Die Lösbarkeitsbedingung

$$0 \neq J(s_0,0) = \begin{vmatrix} \alpha'(s_0) & \beta'(s_0) \\ a(x_0,y_0) & b(x_0,y_0) \end{vmatrix}$$

hängt nicht vom „Anfangswert“ $\gamma(s_0)$ ab. Analoge Aussagen gelten im semilinearen Fall, in dem die rechte Seite die allgemeine Form $c(x,y,u)$ hat.

Beispiel 4.8 Wir betrachten die Burgers-Gleichung

$$uu_x + u_y = 1$$

mit den „Anfangsbedingungen“

$$\Gamma: \ \alpha(s) = s,\ \beta(s) = s,\ \gamma(s) = \frac{s}{2}\,.$$

Hier ist wegen $a = u$, $b = 1$, $c = 1$ auf Γ

$$J(s,0) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \frac{s}{2} & 1 \end{vmatrix} = 1 - \frac{s}{2} \neq 0 \quad \forall s \neq 2\,.$$

Das gewöhnliche Differentialgleichungssystem (4.7), also

$$x_t = z,\ y_t = 1,\ z_t = 1$$

mit Anfangsbedingung $x(s,0) = s$, $y(s,0) = s$, $z(s,0) = \frac{s}{2}$ besitzt die Lösung

$$z(s,t) = t + \frac{s}{2},\ y(s,t) = t + s \quad \text{und} \quad x(s,t) = \frac{t^2}{2} + \frac{st}{2} + s\,.$$

Eine kleine Rechnung liefert

$$s = \frac{x - y^2/2}{1 - y/2}, \quad t = \frac{y - x}{1 - y/2}$$

und anschließend

$$z = u(x,y) = \frac{2y - x - y^2/2}{2-y}\,.$$

Eine Lösung wird singulär für $y \to 2$; auf der Anfangskurve Γ entspricht das dem Wert $\beta(s) = s \to 2$, für den die Lösbarkeitsbedingung $J(s,0) \neq 0$ verletzt wird.

Im Fall $n \geq 2$ schreibt man für das Cauchy-Problem der quasilinearen Differentialgleichung (4.1) eine $(n{-}1)$–dimensionale Startmannigfaltigkeit

$$\Gamma : \begin{cases} x_i = \alpha_i(s_1,\dots,s_{n-1}), & 1 \leq i \leq n \\ z \ = \gamma(s_1,\dots,s_{n-1}) & \end{cases}$$

im $\mathbb{R}^{n+1}$ vor. Anschließend löst man das gewöhnliche $(n{+}1) \times (n{+}1)$–Differentialgleichungssystem

$$\begin{array}{rcl} x_{1t}(s_1,\dots,s_{n-1},t) & = & a_1(x_1,\dots,x_n,z) \\ \vdots & & \\ x_{nt}(s_1,\dots,s_{n-1},t) & = & a_n(x_1,\dots,x_n,z) \\ z_t(s_1,\dots,s_{n-1},t) & = & c(x_1,\dots,x_n,z) \end{array}$$

mit den Anfangswerten

$$\begin{array}{rcll} x_i(s_1,\dots,x_{n-1},0) & = & \alpha_i(s_1,\dots,s_{n-1}), & 1 \leq i \leq n \\ z(s_1,\dots,s_{n-1},0) & = & \gamma(s_1,\dots,s_{n-1}) & \end{array}$$

für alle $(s_1,\dots,s_{n-1})$. Unter der Voraussetzung $a_1,\dots,a_n,\, c \in C^1$ und $\alpha_1,\dots,\alpha_n,\, \gamma \in C^1$ gibt es eine lokale Lösung $(x,z)(s,t)$ der Klasse C^1 für $|s - s_0| < \varepsilon$, $|t| < \varepsilon$; dabei sei $s = (s_1,\dots,s_{n-1})$ und $s_0 = (s_{01},\dots,s_{0n-1})$ ein Referenzpunkt mit $\big(\alpha(s_0),\gamma(s_0)\big) \in \Gamma$.

Um lokal $z(s_1,\dots,s_{n-1},t)$ als Funktion $z = u(x_1,\dots,x_n)$ schreiben zu können, muss die Bedingung

$$J = \begin{vmatrix} \alpha_{1s_1} & \dots & \alpha_{ns_1} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{1s_{n-1}} & \dots & \alpha_{ns_{n-1}} \\ a_1 & \dots & a_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_{1s_1} & \dots & \alpha_{ns_1} & \gamma_{s_1} \\ \vdots & & & \\ \alpha_{1s_{n-1}} & \dots & \alpha_{ns_{n-1}} & \gamma_{s_{n-1}} \\ a_1 & \dots & a_n & c \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \tag{4.11}$$

in $(s_0,0)$ gelten.

Diese Bedingung besagt, dass der charakteristische Richtungsvektor $(a_1,\dots,a_n,c)$ nicht in dem durch die Tangentialvektoren $(\alpha_{1s_j},\dots,\alpha_{ns_j},\gamma_{s_j})$, $1 \leq j \leq n-1$, aufgespannten Tangentialraum an Γ liegen darf. In diesem Fall heißt die Fläche Γ lokal eine *nicht-charakteristische Fläche.*

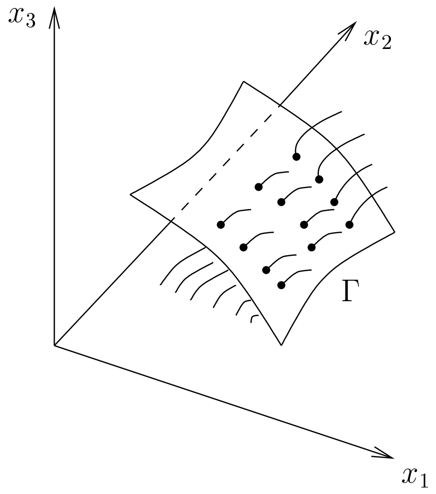


Abbildung 4.3: Projektion der Startmannigfaltigkeit $\Gamma \subset \mathbb{R}^4$ in den $\mathbb{R}^3$ mit charakteristischen Grundkurven $x(s,t)$ im $\mathbb{R}^3$ für festes s

Der Satz über Umkehrfunktionen liefert, dass die Abbildung

$$(s_1, \dots, s_{n-1}, t) \mapsto (x_1, \dots, x_n)(s_1, \dots, s_{n-1}, t)$$

in einer Umgebung von $(s_{01}, \dots, s_{0n-1}, 0)$ umkehrbar ist; die Umkehrfunktion $(s_1, \dots, s_{n-1}, t)(x_1, \dots, x_n)$ ist wieder stetig partiell differenzierbar. Damit erhält man die C^1-Funktion

$$u(x) := z\big((s_1, \dots, s_{n-1}, t)(x_1, \dots, x_n)\big)$$

und die n–dimensionale Mannigfaltigkeit $S = \{\big(x, u(x)\big)\}$. Wie im Fall $n = 2$ beweist Folgerung 4.2, dass S tatsächlich eine Integralfläche, u also eine Lösung von (4.1) ist.

In Vektorschreibweise erhält man den folgenden allgemeinen lokalen Existenz- und Eindeutigkeitssatz:

Satz 4.9 *Es sei eine quasilineare Gleichung*

$$a(x,u) \cdot \nabla u = c(x,u) \tag{4.12}$$

mit $a \in C^1(\Omega \times \mathbb{R})^n$, $c \in C^1(\Omega \times \mathbb{R})$ *über einem Gebiet* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *sowie eine Startmannigfaltigkeit*

$$\Gamma = \{(x,z) = \big(\alpha(s),\, \gamma(s)\big) : s \in V\} \subset \Omega \times \mathbb{R} \tag{4.13}$$

mit injektiver Abbildung $\alpha \in C^1(V)^n$ *und mit* $\gamma \in C^1(V)$ *über einem Gebiet* $V \subset \mathbb{R}^{n-1}$ *gegeben. In einem Punkt* $(x_0, z_0) = \big(\alpha(s_0),\, \gamma(s_0)\big) \in \Gamma$ *sei* Γ *eine nicht-charakteristische Fläche, d.h., in* $(s_0, 0)$ *gelte* (4.11). *Dann besitzt das Cauchy-Problem* (4.12) – (4.13) *mit „Startwerten“ in* Γ *in einer Umgebung* $U \subset \Omega$ *von* x_0 *genau eine Lösung* $u \in C^1(U)$. *Diese Lösung kann durch die zuvor beschriebene Charakteristikenmethode bestimmt werden.*

Definition 4.10 Eine quasilineare Gleichung 1. Ordnung vom Typ

$$u_t + \sum_{i=1}^{n} a_i(u) u_{x_i} = c(u) \tag{4.14}$$

in den $n+1$ unabhängigen Variablen $t, x_1, \ldots, x_n$ heißt *Erhaltungsgleichung mit Quellterm* $c(u)$.

Satz 4.11 *Es seien* $a_1, \ldots, a_n,\ c \in C^1(\mathbb{R})$ *sowie* $u_0 \in C^1(\mathbb{R}^n)$ *gegeben.*

(i) *Die Erhaltungsgleichung* (4.14) *mit Anfangswert* $u(0,x) = u_0(x)$ *besitzt auf jedem Kompaktum* $K \subset \mathbb{R}^n$ *eine eindeutig bestimmte, lokale Lösung, d.h., es gibt ein* $T = T(K, u_0) > 0$ *und eine Lösung* u *auf dem Raum-Zeit-Zylinder* $[0,T] \times K$.

(ii) *Ist* u_0 *sogar beschränkt und Lipschitz-stetig, gibt es ein* $T = T(u_0) > 0$, *so dass die Lösung* u *von* (4.14) *mit Anfangswert* u_0 *sogar auf* $[0,T] \times \mathbb{R}^n$ *existiert.*

Beweis

(i) Man fasst t als Koordinate x_{n+1} auf, setzt $a_{n+1} :\equiv 1$ und betrachtet (4.12) mit der Startmannigfaltigkeit

$$\Gamma:\ x_1(s,0) = s_1, \ldots, x_n(s,0) = s_n,\ x_{n+1}(s,0) = 0,\ z(s,0) = u_0(s)$$

für $s = (s_1, \ldots, s_n) \in K$. Das gewöhnliche Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} x_{1\tau}(s,\tau) &= a_1(z), \ldots, x_{n\tau}(s,\tau) = a_n(z) \\ x_{n+1,\tau}(s,\tau) &= 1 \\ z_\tau(s,\tau) &= c(z) \end{aligned} \tag{4.15}$$

ist für x_{n+1} trivial, bzgl. z entkoppelt und liefert in der Umgebung eines jeden Punktes $s_0 = (s_{01}, \ldots, s_{0n}) \in K$ eine lokale Lösung. Für die Funktionaldeterminante $J(s_0, t)$, s. (4.11), gilt

$$J = \left| \begin{array}{ccc|c} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & 0 \\ \hline a_1 & \ldots & a_n & 1 \end{array} \right| = 1\,.$$

Deshalb liefert der Satz über Umkehrfunktionen für jedes $s_0 \in K$ eine lokale, eindeutige Lösung $u(t,x)$ für $|x - s_0| < \varepsilon,\ 0 \le t < T(s_0)$. Da K kompakt ist, reichen endlich viele dieser lokalen Lösungen aus, um daraus eine in der Zeit lokale Lösung u auf $[0,T] \times K$ zu gewinnen.

(ii) Da u_0 beschränkt ist, besitzt die gewöhnliche Differentialgleichung $z_t = c(z)$ mit Anfangswert $z(s,0) = u_0(s)$ für jedes $s \in \mathbb{R}^n$ eine Lösung $z(s,t)$ auf einem von s unabhängigen Zeitintervall $[0,T_1]$, $T_1 = T_1(u_0) > 0$. Insbesondere ist $z(\mathbb{R}^n \times [0,T_1])$ beschränkt, und die Funktionen a und c sind auf dieser beschränkten Menge Lipschitz-stetig mit geeigneten Lipschitz-Konstanten L_a und L_c. Wegen

$$z(s,t) = u_0(s) + \int_0^t c\big(z(s,\tau)\big)\, d\tau$$

gilt mit der Lipschitz-Konstanten L von u_0 für $t \in [0,T_1]$ und für alle $s, s' \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} |z(s,t) - z(s',t)| &\leq |u_0(s) - u_0(s')| + \int_0^t |c\big(z(s,\tau)\big) - c\big(z(s',\tau)\big)|\, d\tau \\ &\leq L|s-s'| + L_c T_1 \|z(s,\cdot) - z(s',\cdot)\|_{\infty,[0,T_1]}. \end{aligned}$$

Wählt man o.E. $T_1 < \frac{1}{2L_c}$, folgt daraus die Abschätzung

$$\|z(s,\cdot) - z(s',\cdot)\|_{\infty,[0,T_1]} \leq 2L|s-s'|\,.$$

Da $z(\mathbb{R}^n \times [0,T_1])$ beschränkt ist, ist auch $x(s,t)$ für alle $(s,t) \in \mathbb{R}^n \times [0,T_1]$ definiert. Es bleibt die Existenz einer Zahl $T \in (0,T_1]$ zu zeigen, so dass die Abbildung $s \mapsto x(s,t) = \big(x_1(s,t), \ldots, x_n(s,t)\big)$ für jedes $t \in [0,T]$ auf $\mathbb{R}^n$ bijektiv ist. Auf Grund der Identität $x(s,t) = s + \int_0^t a\big(z(s,\tau)\big)\, d\tau$ ist die Fixpunktgleichung

$$s = f(x,t,s) := x - \int_0^t a\big(z(s,\tau)\big)\, d\tau$$

zu untersuchen. Nun genügt f für $x, s, s' \in \mathbb{R}^n$ und $t \in [0,T_1]$ der Abschätzung

$$\begin{aligned} |f(x,t,s) - f(x,t,s')| &\leq \int_0^t |a\big(z(s,\tau)\big) - a\big(z(s',\tau)\big)|\, d\tau \\ &\leq L_a t \cdot 2L\,|s-s'|\,. \end{aligned}$$

Wählt man also $T \in (0,T_1]$ mit der Nebenbedingung $2LL_aT < 1$, liefert der Banachsche Fixpunktsatz für jedes $t \in [0,T]$ offensichtlich, dass $s \mapsto x(s,t)$ eine Bijektion auf $\mathbb{R}^n$ ist. Da $J(s,t) = 1$ gilt, ist die dadurch definierte Umkehrabbildung $s = s(x,t)$ sogar stetig partiell differenzierbar. ∎

Korollar 4.12 *Für eine Erhaltungsgleichung* (4.14) *<u>ohne</u> Quellterm sind die charakteristischen Kurven sogar Geraden; auf jeder charakteristischen Projektion ist die Lösung u konstant.*

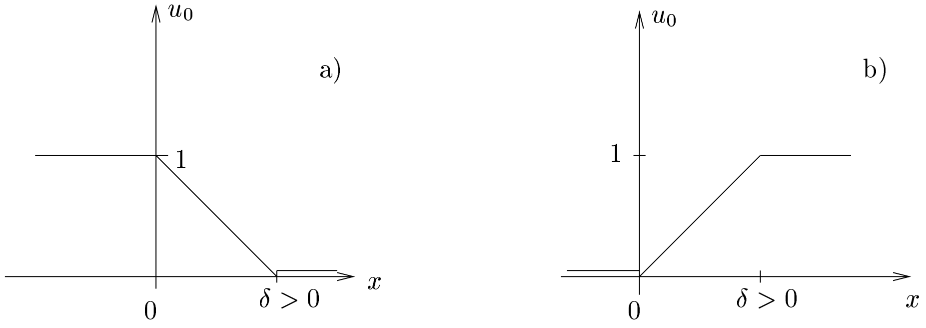


Abbildung 4.4: Anfangswerte für die Burgers-Gleichung

Beweis Aus (4.15) folgt mit $c = 0$, dass $z_\tau = 0$ und somit $z(s,\tau) \equiv u_0(s)$ ist. Also gilt $x_\tau(s,\tau) = a\big(u_0(s)\big)$ und folglich $x(s,\tau) = s + \tau a\big(u_0(s)\big)$. Auf der charakteristischen Projektion, einer Geraden mit Richtungsvektor $a\big(u_0(s)\big)$, ist die Lösung konstant gleich $u_0(s)$. ■

Bemerkung 4.13 Obwohl Korollar 4.12 eine einfache Lösungsstrategie für Erhaltungsgleichungen ohne Quellterm nahelegt, führt dieser Lösungsweg im Rahmen klassischer Lösungen schnell zu unüberwindbaren Problemen. Das Standardbeispiel ist das Cauchy-Problem der Burgers-Gleichung (1.5), also

$$u_t + uu_x = 0, \quad u(0) = u_0\,.$$

Wir betrachten der Einfachheit halber stetige, stückweise lineare Anfangswerte u_0, s. Abb. 4.4. Da hier $a_1(u) = u$, haben die charakteristischen Projektionen in der (x,t)–Ebene die Steigung 1, falls $u_0(x) = 1$, und die Steigung ∞, falls $u_0(x) = 0$. Somit erhält man Abbildung 4.5 für die charakteristischen Projektionen.

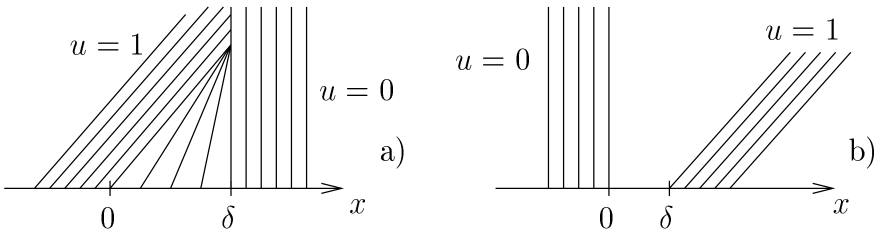


Abbildung 4.5: Lösungen der Burgers-Gleichung

Im Fall a) treffen für $t > \delta$ charakteristische Projektionen mit konstanter Lösung $u = 1$ auf solche mit Lösung $u = 0$. Zur Zeit $t = \delta$ treffen sogar Lösungen mit beliebigen Werten zwischen 0 und 1 aufeinander. Die Lösung der Burgers-Gleichung kann also in endlicher Zeit unstetig werden, obwohl die Anfangsdaten glatt (hier stetig und stückweise linear) sind. Dieses *Shock* genannte Phänomen entspricht in der in §1 betrachteten Staugleichung dem Entstehen eines Staus.

Im Fall b) liefern die glatten Daten auch eine glatte Lösung. Rutschen jedoch die Punkte $x = \delta > 0$ und $x = 0$ in Abbildung 4.4b) zusammen, d.h., betrachten wir die Treppenfunktion

$$u_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ 1 & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

als Anfangswert, liefert die Charakteristikenmethode keine Informationen zur Lösung in der Menge $t > x > 0$. Tatsächlich gibt es unendlich viele Möglichkeiten, eine Lösung für alle $t > 0$, $x \in \mathbb{R}$ zu definieren. Dieses Beispiel zeigt, dass die Behandlung von Erhaltungsgleichungen neue Lösungskonzepte (unstetige Lösungen mit Sprungbedingung bzw. Entropielösungen) erfordert.

5 Charakteristiken von Gleichungen 2. Ordnung

Definition 5.1 Eine partielle Differentialgleichung 2. Ordnung in $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ vom Typ

$$au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} = d \tag{5.1}$$

mit von x, y, u und von den ersten partiellen Ableitungen u_x, u_y abhängenden Koeffizienten a, b, c und d heißt *quasilinear* in u.

Für die quasilineare Gleichung (5.1) sei eine doppelpunktfreie C^1–Kurve $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ mit Parametrisierung

$$\Gamma : x = \alpha(s), \quad y = \beta(s)$$

und Cauchy-Daten

$$u = \gamma(s), \quad u_x = \varphi(s), \quad u_y = \psi(s) \tag{5.2}$$

entlang Γ gegeben. Falls es eine Lösung u von (5.1) mit (5.2) auf Γ gibt, gilt $\gamma(s) = u\big(\alpha(s), \beta(s)\big)$ und somit

$$\gamma'(s) = u_x\alpha' + u_y\beta' = \varphi\alpha' + \psi\beta' \,. \tag{5.3}$$

Die Daten müssen also eine *Kompatibilitätsbedingung* erfüllen; ohne (5.3) wäre das System überbestimmt. Statt neben $u = \gamma(s)$ eine der partiellen Ableitungen u_x oder u_y auf Γ vorzuschreiben, ist es naheliegend, die Normalableitung

$$\frac{\partial u}{\partial N} = \begin{pmatrix} -\beta' \\ \alpha' \end{pmatrix} \cdot \nabla u = \delta(s)$$

durch eine Funktion δ auf Γ vorzugeben; hier ist $N = \begin{pmatrix} -\beta' \\ \alpha' \end{pmatrix}$ ein i.a. nicht auf Länge 1 normierter Normalenvektor. Das *Cauchy-Problem* der quasilinearen Gleichung (5.1) besteht darin, zu den Daten

$$u = \gamma(s), \; \frac{\partial u}{\partial N} = \delta(s) \quad \text{auf } \Gamma : x = \alpha(s), \, y = \beta(s) \tag{5.4}$$

eine Lösung zu finden.

Sei u eine mindestens zweimal stetig differenzierbare Lösung des Cauchy-Problems (5.1), (5.4). Mit den Bezeichnungen $\varphi(s) = u_x\big(\alpha(s), \beta(s)\big)$, $\psi(s) = u_y\big(\alpha(s), \beta(s)\big)$, d.h.

$$\begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} = \nabla u = \frac{1}{\alpha'^2 + \beta'^2} \left(\gamma' \begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} -\beta' \\ \alpha' \end{pmatrix} \right),$$

folgt

$$\varphi' = u_{xx}\alpha' + u_{xy}\beta', \quad \psi' = u_{yx}\alpha' + u_{yy}\beta' \,.$$

Zusammen mit (5.1) erhält man auf Γ das lineare Gleichungssystem

$$D\begin{pmatrix}u_{xx}\\u_{xy}\\u_{yy}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\varphi'\\\psi'\\d\end{pmatrix}\quad\text{mit}\quad D=\begin{pmatrix}\alpha' & \beta' & 0\\0 & \alpha' & \beta'\\a & 2b & c\end{pmatrix}\tag{5.5}$$

und $a=a(\alpha,\beta,\gamma,\varphi,\psi)(s)$, etc. Damit sich die zweiten partiellen Ableitungen entlang Γ eindeutig bestimmen lassen, muss $\det D(s)\neq 0$ sein. Man beachte, dass

$$\det D = a\beta'^2 - 2b\alpha'\beta' + c\alpha'^2\tag{5.6}$$

über a,b und c von γ,δ, also von den Cauchy-Daten u und $\frac{\partial u}{\partial N}$ auf Γ abhängt.

Definition 5.2 Die „Anfangskurve" Γ zu (5.1) heißt *charakteristisch*, falls $\det D=0$ auf Γ gilt. Dagegen heißt sie *nicht-charakteristisch*, falls $\det D\neq 0$ überall entlang Γ gilt.

Falls Γ eine nicht-charakteristische Anfangskurve zu (5.1) ist und u eine unendlich oft differenzierbare Lösung des Cauchy-Problems ist, lassen sich die partiellen Ableitungen um u auf Γ sukzessive bestimmen. Mit (5.5) berechnet man die Ableitungen zweiter Ordnung von u auf Γ. Durch Differentiation von (5.1) nach x folgt

$$\begin{aligned}au_{xxx}+\big(\frac{d}{dx}a\big)u_{xx}+2bu_{xxy}+2\big(\frac{d}{dx}b\big)u_{xy}&\\+cu_{yyx}+\big(\frac{d}{dx}c\big)u_{yy}=\frac{d}{dx}d(x,y,u,u_x,u_y)\,.&\end{aligned}$$

Andererseits liefert Differentiation von u_{xx} und von u_{xy} nach s auf Γ

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}u_{xx}(\alpha,\beta)&=u_{xxx}\alpha'+u_{xxy}\beta'\\\frac{d}{ds}u_{xy}(\alpha,\beta)&=u_{xxy}\alpha'+u_{xyy}\beta'\,.\end{aligned}$$

Insgesamt erhält man ein lineares Gleichungssystem

$$D\begin{pmatrix}u_{xxx}\\u_{xxy}\\u_{xyy}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}d\,u_{xx}/ds\\d\,u_{xy}/ds\\\dots\end{pmatrix}$$

mit bereits explizit bekannter rechter Seite. Da nach Voraussetzung $D=D(s)$ invertierbar ist, können u_{xxx}, u_{xxy} und u_{xyy} eindeutig bestimmt werden. Analog läßt sich u_{yyy} berechnen.

Sind die Daten α,β,γ und δ sowie die Koeffizienten a,b,c und d unendlich oft differenzierbar und existiert dazu eine C^∞–Lösung u, so läßt sich u in eine formale Potenzreihe entwickeln. Die Glattheit der Daten und Koeffizienten ist jedoch nicht hinreichend, um die Existenz einer C^∞–Lösung bzw. sogar die Konvergenz der formalen Potenzreihe zur Lösung u zu beweisen. Sind dagegen die Daten und Koeffizienten in einem Punkt $(x_0, y_0) \in \Gamma$ reell-analytisch (d.h. durch eine mehrfache, bzgl. aller eindimensionalen Variablen konvergente Potenzreihe darstellbar), so existiert lokal eine ebenfalls reell-analytische Lösung (*Satz von Cauchy-Kowalevski*, s. F. John: Partial Differential Equations).

Zur Diskussion charakteristischer Kurven Γ lösen wir die Gleichung

$$0 = \det D = \alpha\beta'^2 - 2b\alpha'\beta' + c\alpha'^2. \tag{5.7}$$

Gilt lokal $\alpha'(s) \neq 0$, läßt sich Γ über $s = s(\alpha)$ lokal auch als Graph der Funktion $\beta(\alpha)$ schreiben. Dabei gilt

$$\alpha\Big(\frac{d\beta}{d\alpha}\Big)^2 - 2b\,\frac{d\beta}{d\alpha} + c = 0 \tag{5.8}$$

und nach Auflösung der quadratischen Gleichung die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = \frac{1}{a}\left(b \pm \sqrt{b^2 - ac}\right) \tag{5.9}$$

mit Anfangswert $\beta(\alpha_0) = \beta_0$ unter der Voraussetzung $(b^2 - ac)(\alpha_0, \beta_0) \geq 0$. Analog kann man

$$c\Big(\frac{d\alpha}{d\beta}\Big)^2 - 2b\,\frac{d\alpha}{d\beta} + a = 0, \quad \text{also} \quad \frac{d\alpha}{d\beta} = \frac{1}{c}\left(b \pm \sqrt{b^2 - ac}\right) \tag{5.10}$$

mit Anfangswert $\alpha(\beta_0) = \alpha_0$ herleiten, falls $\beta'(s) \neq 0$ und $(b^2 - ac)(\alpha_0, \beta_0) \geq 0$ sind.

Es gibt also nur dann (reelle) Charakteristiken, wenn $b^2 - ac \geq 0$ ist.

Definition 5.3 Eine quasilineare Gleichung (5.1) mit Cauchy-Daten (5.4) heißt

$$\left\{\begin{array}{l}\text{hyperbolisch}\\ \text{parabolisch}\\ \text{elliptisch}\end{array}\right\}, \quad \text{falls} \quad \left\{\begin{array}{l} b^2 - ac > 0\\ b^2 - ac = 0\\ b^2 - ac < 0\end{array}\right\} \quad \text{ist.}$$

In diesem Fall gibt es zwei, eine oder keine reelle Charakteristik.

Bemerkung 5.4 Definition 5.3 hängt im echt quasilinearen Fall, in dem a, b und c Funktionen der Lösung u und/oder ihrer ersten Ableitungen sind, von den Cauchy-Daten γ und δ ab. Sind a, b, c dagegen von u, u_x und u_y unabhängig, bestimmt die Differentialgleichung (5.1) allein den Typ der Gleichung. In diesem Fall heißt (5.1) *semilinear*; nur die rechte Seite d darf von u, u_x und u_y abhängen.

Im Folgenden wird nur noch der semilineare Fall mit $(a,b,c) = (a,b,c)(x,y)$ betrachtet. Zur Vereinfachung von (5.1) soll eine Variablentransformation

$$(x,y) \mapsto \big(\xi(x,y),\, \eta(x,y)\big)$$

durchgeführt werden. Mit diesen neuen Koordinaten sei

$$v(\xi,\eta) = u(x,y)\,.$$

Dann ist z.B. $u_x = v_\xi\, \xi_x + v_\eta\, \eta_x$ und

$$u_{xx} = v_{\xi\xi}\xi_x^2 + 2v_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + v_{\eta\eta}\eta_x^2 + (v_\xi\xi_{xx} + v_\eta\eta_{xx})\,.$$

Insgesamt erhält man für $v(\xi,\eta)$ die semilineare Gleichung

$$Av_{\xi\xi} + 2Bv_{\xi\eta} + Cv_{\eta\eta} = \tilde{d}(\xi,\eta,\nabla\xi,\nabla\eta,\nabla^2\xi,\nabla^2\eta,v,\nabla v) \tag{5.11}$$

mit

$$\begin{aligned} A &= a\xi_x^2 + 2b\xi_x\xi_y + c\xi_y^2 \\ B &= a\xi_x\eta_x + b(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + c\xi_y\eta_y \\ C &= a\eta_x^2 + 2b\eta_x\eta_y + c\eta_y^2\,. \end{aligned} \tag{5.12}$$

Durch geschickte Wahl der Koordinatentransformation $(\xi,\eta)(x,y)$ wird versucht, für A, B und C eine einfache Gestalt zu erreichen.

1. Fall: (5.1) **ist hyperbolisch.** Es gibt zwei Familien $y_1(x), y_2(x)$ von Lösungen der gewöhnlichen Differentialgleichung (5.9), nämlich Lösungen von

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= \frac{1}{a}\big(b + \sqrt{b^2 - ac}\big)(x,y_1), \\ \frac{dy_2}{dx} &= \frac{1}{a}\big(b - \sqrt{b^2 - ac}\big)(x,y_2), \end{aligned} \tag{5.13}$$

parametrisiert durch Anfangswerte $y_1(x_0) = y_{10}$, $y_2(x_0) = y_{20}$ (im Fall $a = 0$ benutze man die Differentialgleichung (5.10)). Anschließend definiert man die Koordinatentransformation

$$\xi(x,y) = y - y_1(x), \quad \eta(x,y) = y - y_2(x),$$

für die in (5.12)

$$A = C = 0$$

gilt. Also besitzt (5.11) die einfache Gestalt $2Bv_{\xi\eta} = \tilde{d}$, oder

$$\boxed{v_{\xi\eta} = \hat{d}\,.} \quad \text{(1. Normalform)}\,. \tag{5.14}$$

Gleichung (5.14) war Ausgangspunkt des Lösungsverfahrens der eindimensionalen Wellengleichung in §2. Charakteristiken von (5.14) sind die Geraden

$$\xi = \text{const} \quad \text{und} \quad \eta = \text{const}.$$

Durch die erneute Transformation

$$(\xi, \eta) \mapsto (x', y') = \big(\xi + \eta,\, \xi - \eta\big), \quad u'(x', y') = v(\xi, \eta),$$

entsteht aus (5.14) die *2. Normalform*

$$\boxed{u'_{x'x'} - u'_{y'y'} = d',}$$

also die wohlbekannte Wellengleichung (mit $t = x'$). Die eindimensionale Wellengleichung ist der Standardvertreter hyperbolischer Gleichungen im $\mathbb{R}^2$.

Die hyperbolische Gleichung (5.14) kann nun mit Hilfe der Charakteristiken für beliebige Cauchy-Daten auf einer nicht-charakteristischen Kurve Γ leicht explizit gelöst werden, falls die rechte Seite $\hat{d}$ nur von x, y abhängt. Eine analoge Aussage trifft auf die allgemeine hyperbolische Differentialgleichung (5.1) mit konstanten Koeffizienten a, b, c und von der Lösung unabhängiger rechter Seite zu, da die Charakteristiken zwei Familien von jeweils parallelen Geraden bilden, die die Ebene doppelt überdecken. Für (5.14) werde z.B. eine Kurve $\Gamma : x = \alpha(s)$, $y = \beta(s)$ mit $\alpha' > 0 > \beta'$ betrachtet, die der Einfachheit halber als Graph $\eta = \eta(\xi)$ geschrieben wird. Ein beliebiger Punkt $(\xi, \eta) \notin \Gamma$ definiert auf Γ eindeutige Projektionspunkte (ξ, η_0) und (ξ_0, η). Dann liefert Integration von (5.14)

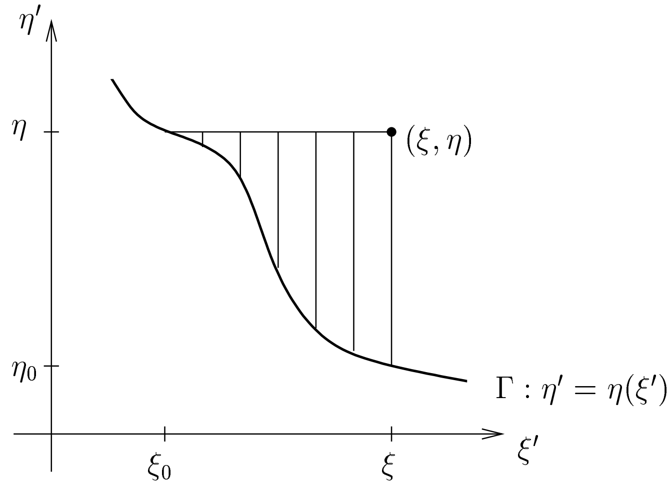


Abbildung 5.1: Das Charakteristikenverfahren für $v_{\xi\eta} = \hat{d}$

bzgl. η' von $\eta(\xi')$ bis η für jedes $\xi' \in [\xi_0, \xi]$

$$v_\xi(\xi', \eta) = v_\xi\big(\xi', \eta(\xi')\big) + \int_{\eta(\xi')}^{\eta} \hat{d}(\xi', \eta')\, d\eta' \,.$$

Eine weitere Integration bzgl. ξ' von ξ_0 bis ξ führt zur Gleichung

$$v(\xi,\eta) = v(\xi_0,\eta) + \int_{\xi_0}^{\xi} v_\xi\big(\xi',\eta(\xi')\big)d\xi' + \int_{\xi_0}^{\xi}\Big(\int_{\eta(\xi')}^{\xi} \hat{d}(\xi',\eta')d\eta'\Big)d\xi'\,.$$

Dabei liegen (ξ_0,η) und $\big(\xi',\eta(\xi')\big)$ auf Γ, so dass $v(\xi_0,\eta)$ bzw. $v_\xi\big(\xi',\eta(\xi')\big)$ durch die Cauchy-Daten γ,δ bekannt sind. Dieses Verfahren wurde bereits in §2.1 zur Lösung der inhomogenen Wellengleichung benutzt; dort war Γ durch $\eta(\xi) = \xi$ gegeben und $\gamma = \delta = 0$. Falls a, b, c nicht konstant sind, müssen die Differentialgleichungen (5.13) gelöst werden, der zu untersuchende Punkt x, y durch zwei Charakteristiken $y_1(x)$, $y_2(x)$ mit Γ verbunden werden und das durch Γ, y_1, y_2 umschlossene Flächenstück durch eine einparametrige Schar von Charakteristiken überdeckt werden. Das Charakteristikenverfahren führt auf ein nichtlineares Integralgleichungssystem, welches nur iterativ gelöst werden kann.

2. Fall: (5.1) **ist parabolisch.** Sei $y(x)$ die Lösung der Differentialgleichung (5.9), d.h. hier $y'(x) = \frac{b}{a}(x,y)$. Wegen $ac = b^2$ folgt dann mit der Wahl $\xi(x,y) = y - y(x)$

$$A = B = 0$$

für jede geeignete Funktion η, die zusammen mit ξ eine gültige Variablentransformation in (x,y) liefert. Damit reduziert sich (5.11) auf die Normalform

$$v_{\eta\eta} = \hat{d}, \tag{5.15}$$

deren Charakteristiken

$$\xi = \text{const}$$

sind. Enthält die rechte Seite $\hat{d}$ den additiven Term $+v_\xi$, lauten die führenden Terme in (5.15)

$$v_\xi - v_{\eta\eta} = d'.$$

Die in §1 eingeführte Wäremleitungsgleichung ist der Standardtyp einer parabolischen Gleichung. Identifiziert man ξ mit der Zeit t und η mit der Ortsvariablen x, legt das Anfangswertproblem $v_t - v_{xx} = 0$ mit $v(0,x) = v_0(x)$ der Wärmeleitungsgleichung die Anfangswerte gerade auf die Charakteristik $t \equiv 0$. Wie wir später sehen werden, wäre v durch die Vorgabe von Anfangswerten $v(0,x)$ und $v_x(0,x)$ im Cauchy-Problem (5.4) i.a. überbestimmt.

3. Fall: (5.1) **ist elliptisch.** Der Einfachheit halber seien a, b und c konstant. Dann erhält man mit der linearen Transformation

$$\xi = \frac{ay - bx}{\sqrt{ac - b^2}}\,, \quad \eta = x$$

aus (5.1) für v die Gleichung $a(v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta}) = \tilde{d}$, da

$$A = C = a \quad \text{und} \quad B = 0$$

gelten. Die Normalform einer elliptischen Gleichung lautet also

$$v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} = \hat{d}\,.$$

Diese Gleichung besitzt keine reellen Charakteristiken, so dass jede doppelpunktfreie C^1–Kurve Γ mit $(\alpha', \beta')(s) \neq 0$ für das Cauchy-Problem benutzt werden darf. Der Standardtyp einer elliptischen Gleichung ist die Laplace-Gleichung $\Delta v = 0$ bzw. das Poisson-Problem $\Delta v = f$. Jedoch sind die in §1 betrachteten physikalisch sinnvollen Randwertaufgaben mit Dirichlet- oder Neumann-Randwerten keine Cauchy-Probleme im Sinne dieses Abschnitts.

6 Die Laplace-Gleichung

6.1 Darstellungsformeln

Wir betrachten die allgemeine *Poisson-Gleichung*

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \Omega$$

in einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Ist $f = 0$ in Ω, so heißt die obige Gleichung auch *Laplace-Gleichung*, und u heißt *harmonisch*.

Lemma 6.1 *Ist $u \in C^2(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$ radialsymmetrisch, d.h. $u(x) = v(r)$, $r = |x|$, mit einer Funktion $v : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, gilt*

$$\boxed{\Delta u = \partial_r^2 u + \tfrac{n-1}{r} \partial_r u}. \tag{6.1}$$

Der Einfachheit halber schreibt man auch $u(x) = u(r)$ und $\Delta u = u_{rr} + \frac{n-1}{r} u_r$. Der Beweis von (6.1) ergibt sich durch Nachrechnen.

Gesucht werden vorerst alle radialsymmetrischen harmonischen Funktionen u auf $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$. Nach (6.1) gilt für $r > 0$

$$0 = u_{rr} + \frac{n-1}{r} u_r,$$

so dass $v = u_r$ die lineare Differentialgleichung 1. Ordnung $v_r = -\frac{n-1}{r} v$ erfüllt. Also ist

$$u_r(r) = c_0 r^{1-n}$$

und folglich

$$u(r) = c_1 + c_0 \begin{cases} \log r \,, & n = 2 \\ \frac{1}{2-n} \, r^{2-n} \,, & n \geq 3 \end{cases} .$$

Mit $c_1 = 0$ und einer speziellen Wahl von c_0 gelangen wir zur folgenden Definition.

Definition 6.2 Es bezeichne $\omega_n = |\partial B_1|$ das Oberflächenmaß der n–dimensionalen Einheitskugel, vgl. Definition 3.1. Dann heißt

$$E(x) = \begin{cases} \frac{1}{(n-2)\omega_n} \, r^{2-n} \,, & n \geq 3 \\ -\frac{1}{2\pi} \log r \,, & n = 2 \end{cases}$$

die *Fundamentallösung* zum *Laplace-Operator* $-\Delta$.

Satz 6.3 (Greensche Formel) *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit stückweise glattem Rand, so dass partielle Integration nach dem Satz von Gauß erlaubt ist. Dann gilt für $u \in C^2(\overline{\Omega})$ und für alle $x \in \Omega$ die Integraldarstellung*

$$\begin{aligned} u(x) \quad &= \quad \int_\Omega E(x-y)(-\Delta u)(y) dy \\ &\quad + \int_{\partial\Omega} \Big(\frac{\partial u}{\partial N}(y) \, E(x-y) - u(y) \, \frac{\partial}{\partial N_y} E(x-y) \Big) \, do_y \,. \end{aligned} \tag{6.2}$$

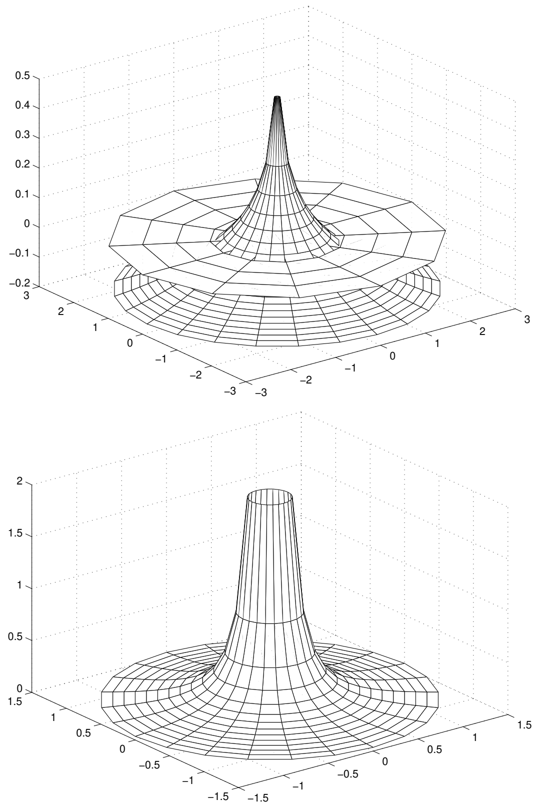


Abbildung 6.1: Die Fundamentallösungen $E(x) = \frac{1}{4\pi r}$ $(n = 3)$ und $E(x) = -\frac{1}{2\pi}\log r$ $(n = 2)$

Dabei bedeutet $u \in C^2(\overline{\Omega})$, dass u in $C^2(\Omega)$ liegt und u sowie die ersten und zweiten partiellen Ableitungen von u auf Ω zu (beschränkten) stetigen Funktionen auf $\overline{\Omega}$ fortsetzbar sind. Damit sind alle Integrale in (6.2) wohldefiniert. Der Ausdruck $\partial/\partial N_y$ deutet an, dass die Normalableitung auf $\partial\Omega$ bzgl. der Variablen y und nicht bzgl. x in $E(x-y)$ berechnet wird. Bevor wir zum Beweis von Satz 6.3 kommen, geben wir drei wichtige Folgerungen an.

Korollar 6.4 (1) *Für jede Funktion $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ mit kompaktem Träger gilt*

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} E(x-y)(-\Delta u)(y)\,dy = E * (-\Delta u)(x)\,. \tag{6.3}$$

(2) *Ist $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit stückweise glattem Rand und $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ harmonisch, gilt*

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} \Big(\frac{\partial u}{\partial N}\, u(y)\, E(x-y) - u(y)\, \frac{\partial}{\partial N_y}\, E(x-y) \Big)\, do_y\,. \tag{6.4}$$

(3) *Jede harmonische Funktion $u \in C^2(\Omega)$ ist unendlich oft stetig partiell differenzierbar und sogar reell analytisch in $x_1, \ldots, x_n$.*

Beweis von Korollar 6.4

(1) Wählt man ein glatt berandetes Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, welches den Träger $\operatorname{supp} u$ enthält, folgt (6.3) aus (6.2), denn die Randintegrale über $\partial\Omega$ verschwinden.

(2) (6.4) folgt sofort aus (6.2), falls $u \in C^2(\overline{\Omega})$ gilt. Ist jedoch nur $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$, betrachtet man die Darstellung (6.2) auf einer Folge von beschränkten, glattberandeten Gebieten (Ω_k) mit

$$\Omega_0 \subset \overline{\Omega}_0 \subset \Omega_1 \subset \overline{\Omega}_1 \subset \ldots \subset \Omega\,,$$

die das Gebiet Ω für $k \to \infty$ in einem gewissen Sinne $(\Omega_k \to \Omega)$ ausschöpfen. Da (6.2) auf Ω_k gilt und partielle Ableitungen zweiter Ordnung in (6.2) für die harmonische Funktion u nicht benötigt werden, folgt (6.4) für $k \to \infty$. Auf weitere Details dieses Approximationsarguments soll hier nicht eingegangen werden.

(3) Für $x_0 \in \Omega$ mit $\overline{B_r(x_0)} \subset \Omega$ benutze man die Integraldarstellung (6.4) in der Form

$$u(x) = \int_{\partial B_r(x_0)} \Big(\frac{\partial u}{\partial N}\, E(x-y) - u\,\frac{\partial}{\partial N_y}\, E(x-y)\Big)\, do_y$$

für $x \in B_r(x_0)$. Da $E(x-y)$ und $\frac{\partial}{\partial N_y}\, E(x-y)$ für $y \in \partial B_r(x_0)$ beliebig oft bzgl. x partiell differenzierbar und sogar reell analytisch sind, ist auch $u(x)$ glatt und sogar reell analytisch.

Beweis von Satz 6.3 Der Beweis beginnt mit dem Integral $\int E(x-y)\,\Delta u(y)\,dy$ und zweifacher partieller Integration. Da $E(x-y)$ jedoch für $y \to x$ singulär wird, wird zuvor die Kugel $B_\varepsilon(x)$ aus Ω herausgeschnitten. Auf dem Integrationsgebiet $\Omega \backslash B_\varepsilon(x)$ erhält man mit zweifacher partieller Integration

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega\backslash B_\varepsilon(x)} E(x-y)\,\Delta u(y)\,dy \\
&\quad= \int_{\Omega\backslash B_\varepsilon(x)} \Delta_y\, E(x-y)\, u(y)\,dy \\
&\quad\quad+ \Big(\int_{\partial\Omega} + \int_{\partial B_\varepsilon(x)}\Big) \Big(E(x-y)\,\frac{\partial u}{\partial N} - \frac{\partial}{\partial N_y}\, E(x-y) u\Big)\, do_y\,.
\end{aligned} \tag{6.5}$$

Da $\Delta_y\, E(x-y) = 0$ für $x \neq y$ gilt, verschwindet das erste Integral auf der rechten Seite. Für den Grenzübergang $\varepsilon \to 0+$ beachte man für $y \in \partial B_\varepsilon(x)$, also $|y-x| = \varepsilon$, die Wachstumsabschätzungen

$$|E(x-y)| = O(\varepsilon^{2-n}) \text{ für } n \geq 3, \quad |E(x-y)| = O(|\log\varepsilon|) \text{ für } n = 2$$

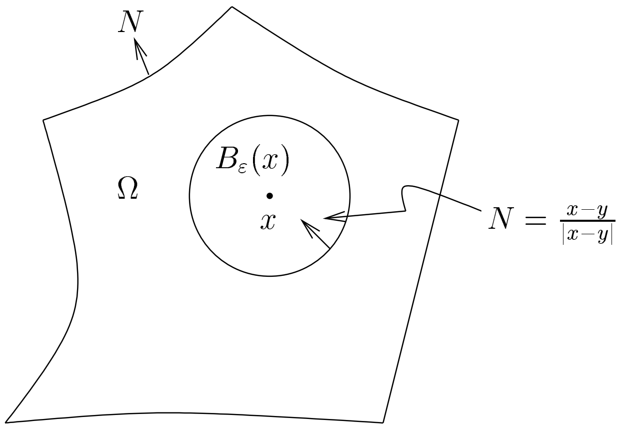


Abbildung 6.2: Zum Beweis von Satz 6.3

sowie $|\partial B_\varepsilon(x)| = \omega_n \varepsilon^{n-1}$. Wegen $u \in C^1(\Omega)$ folgt damit

$$\int_{\partial B_\varepsilon(x)} E(x-y)\frac{\partial u}{\partial N} do_y \to 0 \quad \text{für}\, \varepsilon \to 0+\,.$$

Im zweiten Randintegral über $\partial B_\varepsilon(x)$, wo $N_y = \frac{x-y}{|x-y|}$ gilt, beachte man die Identität

$$\frac{\partial}{\partial N_y}E(x-y) = \frac{1}{\omega_n}\frac{x-y}{|x-y|^n}\cdot\frac{x-y}{|x-y|} = \frac{1}{\omega_n}\varepsilon^{1-n} = \frac{1}{|\partial B_\varepsilon(x)|}.$$

Deshalb liefert die Stetigkeit von u in x die entscheidende Konvergenzaussage

$$\int_{\partial B_\varepsilon(x)} \frac{\partial}{\partial N_y}E(x-y)u(y)do_y = \frac{1}{|\partial B_\varepsilon(x)|}\int_{\partial B_\varepsilon(x)} u(y)do_y \to u(x)$$

für $\varepsilon \to 0+$. Schließlich konvergiert $\int_{\Omega\setminus B_\varepsilon(x)} E(x-y)\Delta u(y)dy$ wegen der Beschränktheit von Δu auf $\overline{\Omega}$ und der lokalen Integrierbarkeit der Singularität $|x-y|^{2-n}$ im $\mathbb{R}^n (n \geq 3)$ bzw. $\log|x-y|$ im $\mathbb{R}^2$ für $\varepsilon \to 0+$ gegen das entsprechende Integral auf Ω. Somit ist das Verhalten aller Integrale in (6.5) für $\varepsilon \to 0+$ geklärt und (6.2) bewiesen. ∎

Da die Randintegrale in (6.2) harmonische Funktionen in x darstellen, ist es nahe liegend, das Poisson-Problem $-\Delta u = f$ für eine stetige Funktion f mittels des Faltungsintegrals $E * (-\Delta u) = E * f$ zu lösen, vgl. (6.3). Während die Singularitäten (für $y \sim x$) in den Integralen

$$\int_\Omega E(x-y)f(y)dy \qquad \text{und} \qquad \int_\Omega \nabla_x E(x-y)f(y)dy$$

für jedes $f \in C^0(\overline{\Omega})$ noch integrierbar sind, ist die Singularität $|\partial_i\partial_j E(x-y)| \approx \frac{1}{|x-y|^n}$, $1 \leq i,j \leq n$, nicht mehr integrierbar. Tatsächlich gibt es *stetige* Funktionen

f, so dass $E * f$ nicht zweimal partiell differenzierbar ist. Dieses Problem ist jedoch lösbar, falls f *Hölder-stetig* auf $\overline{\Omega}$ ist, d.h., es gibt ein $\alpha \in (0,1)$ und eine Konstante $K = K(f)$, so dass die Abschätzung

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x-y|^\alpha \quad \text{für alle} \quad x, y \in \Omega$$

gilt. Unter dieser Voraussetzung existieren die partiellen Ableitungen $\partial_i \partial_j u$ und sind ebenfalls Hölder-stetig auf $\overline{\Omega}$ zum Exponenten α. Anstelle des technisch aufwändigen Beweises soll hier nur der einfachere Fall mit $f \in C^2(\overline{\Omega})$ untersucht werden.

Korollar 6.5 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit stückweise glattem Rand, sei $f \in C^0(\overline{\Omega})$ und*

$$u(x) = \int_\Omega E(x-y) f(y)\, dy.$$

(1) *Die Funktion u ist stetig partiell differenzierbar, und es gilt*

$$\nabla u(x) = \int_\Omega \nabla_x E(x-y)\, f(y)\, dy. \tag{6.6}$$

(2) *Liegt f sogar im Raum $C^1(\overline{\Omega})$, ist u zweimal stetig partiell differenzierbar und eine spezielle Lösung des Poisson-Problems $-\Delta u = f$ in Ω.*

Beweis

(1) Die üblichen Konvergenzsätze können nicht zum Beweis der Aussage $\frac{1}{h}(u(x + h\,e_i) - u(x)) \to \partial u / \partial x_i$ für $h \to 0+$, $1 \leq i \leq n$, benutzt werden, da der Term $E(x + h\,e_i - y)$ eine mit h wandernde Singularität in $y = x + h\,e_i$ besitzt. Stattdessen werden eine Abschneidefunktion $\eta \in C^1(\mathbb{R})$ mit den Eigenschaften

$$0 \leq \eta \leq 1, \quad \eta(t) = 0 \;\text{ für } |t| \leq 1, \quad \eta(t) = 1 \;\text{ für } |t| \geq 2, \quad 0 \leq \frac{d\eta}{dt} \leq 2$$

und $\eta_\varepsilon(y) = \eta(\frac{|y|}{\varepsilon})$, $\varepsilon > 0$, benutzt. Ersetzt man $E(x-y)$ durch $(\eta_\varepsilon E)(x-y)$, erhält man die beliebig oft differenzierbare Funktion

$$u_\varepsilon(x) = \int_\Omega (\eta_\varepsilon E)(x-y)\, f(y)\, dy,$$

die für $\varepsilon \to 0+$ gleichmäßig in $\overline{\Omega}$ gegen u konvergiert. Insbesondere ist u stetig auf $\overline{\Omega}$. Für den gewünschten Gradienten

$$w(x) = \int_\Omega \nabla_x E(x-y)\, f(y)\, dy$$

von $u(x)$, der auf Grund der Abschätzung $|\nabla_x E(x-y)| = O(|x-y|^{1-n})$ für jedes $x \in \overline{\Omega}$ existiert, gilt dann

$$w(x) - \nabla u_\varepsilon(x) = \int_\Omega \nabla\left((1-\eta_\varepsilon)E\right)(x-y)f(y)\,dy.$$

Daraus folgt die Abschätzung

$$\begin{aligned}|w(x) - \nabla u_\varepsilon(x)| &\leq \|f\|_\infty \int_{|x-y|\leq 2\varepsilon} \left(|\nabla E| + \frac{2}{\varepsilon}|E|\right)(x-y)\,dy \\ &\leq \|f\|_\infty\, c\,\varepsilon\big(1 + (|\log\varepsilon|, \quad \text{falls } n=2)\big).\end{aligned}$$

Also konvergiert die Folge der stetigen Funktionen (∇u_ε) für $\varepsilon \to 0+$ gleichmäßig in $\overline{\Omega}$ gegen w. Da bereits $u_\varepsilon \to u$ gezeigt wurde, gilt $w = \nabla u$ und $u \in C^1(\overline{\Omega})$.

(2) Ist $f \in C^1(\overline{\Omega})$, liefert eine partielle Integration in (6.6)

$$\begin{aligned}\nabla u(x) &= -\int_\Omega \nabla_y\, E(x-y)f(y)\,dy \\ &= \int_\Omega E(x-y)\nabla f(y)\,dy - \int_{\partial\Omega} E(x-y)f(y)\,N(y)\,do_y;\end{aligned}$$

dabei muss im Beweis die partielle Integration zuerst über $\Omega\backslash B_\varepsilon(x)$ und ein anschließender Grenzübergang $\varepsilon \to 0+$ wie im Beweis von Satz 6.3 durchgeführt werden. Da ∇f beschränkt auf $\overline{\Omega}$ ist, können nach (1) partielle Ableitungen zweiter Ordnung von u angegeben werden. Insbesondere gilt

$$\begin{aligned}\Delta u(x) &= \sum_{i=1}^n \left(\int_\Omega \partial_{x_i} E(x-y)\partial_i f(y)dy - \int_{\partial\Omega} \partial_{x_i} E(x-y)f(y)N_i(y)\,do_y\right) \\ &= -\int_\Omega \nabla_y\, E(x-y)\,\cdot\,\nabla f(y)dy + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial E}{\partial N_y}(x-y)f(y)\,do_y.\end{aligned}$$

Zur Vorbereitung einer weiteren partiellen Integration im ersten Integral wird Ω durch $\Omega\backslash B_\varepsilon(x)$ ersetzt. Da $\Delta E(x-y) = 0$ für $x \neq y$ ist und sich die Randintegrale über $\partial\Omega$ aufheben, liefert der Grenzübergang

$$-\int_{\partial B_\varepsilon(x)} \frac{\partial E}{\partial N_y}(x-y)f(y)do_y \to -f(x) \quad \text{für}\, \varepsilon \to 0+,$$

s. Beweis von Satz 6.3, die Behauptung $-\Delta u = f$. ■

Die abschließende Darstellungsformel (6.7), die sog. Mittelwertformel, ist entscheidend für den Beweis des Maximum- und Minimumprinzips im Abschnitt 6.2. Diese wichtigen Prinzipien zur Abschätzung von Lösungen werden jedoch nicht nur für Lösungen von partiellen Differential*gleichungen* benötigt, sondern auch für „Lösungen“ von Differential*ungleichungen*. Dementsprechend wird der Begriff der harmonischen Funktion wie folgt verallgemeinert:

Definition 6.6 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. Eine Funktion $u \in C^2(\Omega)$ heißt*

$$\left\{\begin{array}{l} \textit{subharmonisch} \\ \textit{harmonisch} \\ \textit{superharmonisch} \end{array}\right\}, \quad \textit{falls} \quad \left\{\begin{array}{c} -\Delta u \le 0 \\ -\Delta u = 0 \\ -\Delta u \ge 0 \end{array}\right\} \quad \textit{in } \Omega \textit{ gilt.}$$

Satz 6.7 (Mittelwertformel) *Sei $u \in C^2(\Omega)$ harmonisch. Dann gelten für alle Kugeln $B_R(x)$ mit $\overline{B_R(x)} \subset \Omega$ die Darstellungen*

$$u(x) = \frac{1}{w_n R^{n-1}} \int_{\partial B_R(x)} u(y)\, do \tag{6.7}$$

und

$$u(x) = \frac{n}{w_n R^n} \int_{B_R(x)} u(y)\, dy. \tag{6.8}$$

Ist u sub- oder superharmonisch, muss in beiden Formeln das Gleichheitszeichen durch $\le$ bzw. durch $\ge$ ersetzt werden.

Beweis Nach der Gleichung von Darboux, s. Lemma 3.2, gilt für das sphärische Mittel

$$M_u(x,r) = \frac{1}{w_n\, R^{n-1}} \int_{\partial B_R(x)} u\, do = \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial B_1} u(x+ry) do_y$$

von u die Gleichung bzw. Ungleichung

$$\left(\partial_r^2 + \frac{n-1}{r}\,\partial_r\right) M_u(x,r) = \Delta_x\, M_u\,(x,r) = M_{\Delta u}(x,r) = 0 \text{ bzw. } \left\{\begin{array}{c} \ge 0 \\ \le 0 \end{array}\right\},$$

falls u harmonisch bzw. $\left\{\begin{array}{l} \text{subharmonisch} \\ \text{superharmonisch} \end{array}\right\}$ ist. Ferner ist $M_u(x,0) = u(x)$ und $\partial_r\, M_u(x,0) = 0$. Im Fall einer subharmonischen Funktion u gilt also für $v(r) = r^{n-1}\,\partial_r\, M_u(x,r)$

$$v' \ge 0, \quad v(0) = 0,$$

woraus $v(r) \ge 0$ für alle $r \ge 0$ folgt. Demnach ist $M_u(x,r)$ monoton wachsend bzgl. $r \ge 0$. Insbesondere gilt

$$u(x) = M_u(x,0) \le M_u(x,r) = \frac{1}{w_n R^{n-1}} \int_{\partial B_R(x)} u\, do.$$

Damit ist (6.7) (in Ungleichungsform) für subharmonische Funktionen bewiesen. Integriert man die Ungleichung

$$w_n r^{n-1} u(x) \le \int_{\partial B_r(x)} u\, do$$

bzgl. r von 0 bis R, folgt nach Division durch $w_n\, R^n/n$ die Aussage (6.8) als Ungleichung. Analog erhält man die gewünschten Ungleichungen für superharmonische Funktionen. Da eine harmonische Funktion sowohl sub- als auch superharmonisch ist, folgen (6.7) und (6.8) für harmonische Funktionen. ∎

6.2 Maximum- und Minimumprinzip

Satz 6.8 (Schwaches Maximum- und Minimumprinzip) *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet und $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$.*

(1) *Ist u subharmonisch, gilt*

$$\sup_{\overline{\Omega}} u = \sup_{\partial\Omega} u\,. \tag{6.9}$$

(2) *Ist u superharmonisch, gilt*

$$\inf_{\overline{\Omega}} u = \inf_{\partial\Omega} u\,. \tag{6.10}$$

Beweis Sei u subharmonisch. Da Ω beschränkt und u stetig auf $\overline{\Omega}$ ist, nimmt u sein Maximum in einem Punkt $x_0 \in \overline{\Omega}$ an. Würde x_0 in Ω liegen, folgt $\Delta u(x_0) \le 0$. Dabei ist $\Delta u(x_0) < 0$ ausgeschlossen, denn u ist subharmonisch.

Um den möglichen Fall $\Delta u(x_0) = 0$ zu umgehen, betrachten wir $v_\varepsilon(x) = u(x) + \varepsilon|x|^2$, $\varepsilon > 0$, statt u. Wegen $-\Delta v_\varepsilon = -\Delta u - 2n\varepsilon < 0$ ist v_ε in Ω subharmonisch. Nach dem obigen Beweisteil kann v_ε sein Maximum nur auf $\partial\Omega$ annehmen, d.h.

$$\sup_{\overline{\Omega}} u \le \sup_{\overline{\Omega}}(u + \varepsilon|x|^2) = \sup_{\partial\Omega}(u + \varepsilon|x|^2)\,.$$

Für $\varepsilon \to 0+$ folgt daraus $\sup_{\overline{\Omega}} u \le \sup_{\partial\Omega} u$ und damit die Behauptung.

Ist u superharmonisch, wird die Aussage analog bewiesen. ∎

Korollar 6.9 (Eindeutigkeitssatz) *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, sei $f \in C^0(\Omega)$ und $g \in C^0(\partial\Omega)$. Dann besitzt das Dirichlet-Problem*

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \quad \text{in } \Omega \\ u &= g \quad \text{auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

höchstens *eine Lösung $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$.*

Beweis Seien $u_1, u_2 \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ Lösungen des Dirichlet-Problems. Dann löst $v = u_1 - u_2$ die homogene Gleichung

$$-\Delta v = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad v = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega\,.$$

Nach Satz 6.8 genügt v dem schwachen Maximum- und Minimumprinzip. Daraus folgt $v = 0$ und $u_1 = u_2$. ∎

Eine Verschärfung des schwachen Maximum- und Minimumprinzips Satz 6.8 wird mit der Mittelwertformel (6.8) bewiesen.

Satz 6.10 (Starkes Maximum- und Minimumprinzip) *Sei* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *ein (beschränktes oder unbeschränktes) Gebiet und sei* $u \in C^2(\Omega)$ *sub- bzw. superharmonisch. Falls es einen Punkt* $x_0 \in \Omega$ *mit der Eigenschaft*

$$u(x_0) = \sup_\Omega u \quad \textit{bzw.} \quad u(x_0) = \inf_\Omega u$$

gibt, ist u konstant. Insbesondere kann eine harmonische Funktion ihr Maximum oder Minimum nicht in Ω *annehmen, falls die Funktion nicht konstant ist.*

Beweis Sei u subharmonisch und gelte $u(x_0) = \sup_\Omega u$. Nach (6.8) gilt für jede Kugel $B_R(x_0)$ mit $\overline{B_R(x_0)} \subset \Omega$

$$u(x_0) \leq \frac{n}{w_n R^n} \int_{B_R(x_0)} u(y)dy \leq \sup_\Omega u = u(x_0)\,.$$

Deshalb stimmt u auf $B_R(x_0)$ mit $u(x_0)$ überein.

Zum Abschluss des Beweises wird ein topologisches Argument benutzt. Sei $M = \{y \in \Omega : u(y) = u(x_0)\}$. Nach Voraussetzung ist $M \neq \emptyset$. Die Stetigkeit von u impliziert die relative Abgeschlossenheit von M in Ω. Schließlich zeigt der erste Beweisschritt, dass M auch offen ist. Da Ω ein Gebiet ist, folgt $M = \Omega$; die Funktion u ist also auf Ω konstant gleich $u(x_0)$. ■

6.3 Greensche Funktionen und Poisson-Kerne

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet mit stückweise glattem Rand. Im *Dirichlet-Problem der Laplace-Gleichung* wird zu einer vorgegebenen Randfunktion $a : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ eine Funktion $u \in C^2(\Omega)$ gesucht mit

$$\begin{aligned} -\Delta u &= 0 \quad \text{in } \Omega \\ u &= a \quad \text{auf } \partial\Omega\,. \end{aligned} \tag{6.11}$$

Dabei bedeutet $u = a$ auf $\partial\Omega$, dass für jedes $x \in \partial\Omega$

$$a(x) = \lim_{\substack{y\to x\\ y\in\Omega}} u(y) \tag{6.12}$$

gilt. In diesem Fall ist a in x stetig, denn zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ mit $|a(x) - u(y)| < \varepsilon$ für alle $y \in B_\delta(x) \cap \Omega$. Betrachtet man jetzt eine Folge $(y_k) \subset B_\delta(x) \cap \Omega$ mit $y_k \to x' \in B_\delta(x) \cap \partial\Omega$, folgt aus (6.12)

$$|a(x) - a(x')| \leq \varepsilon \quad \text{für alle } \; x' \in B_\delta(x) \cap \partial\Omega.$$

Analog wird das *Neumann-Problem der Laplace-Gleichung* durch

$$-\Delta u = 0 \;\text{ in}\,\Omega, \quad \frac{\partial u}{\partial N} = a \;\text{ auf }\; \partial\Omega \tag{6.13}$$

definiert.

Lemma 6.11 *In der Greenschen Formel* (6.2) *ersetze man die Fundamentallösung* $E(x-y)$ *durch*

$$G(x,y) = E(x-y) - g(x,y) \tag{6.14}$$

mit einer Funktion $g : \Omega \times \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$*, die für festes* $x \in \Omega$ *bzgl.* $y \in \Omega$ *harmonisch ist und* $g(x,\cdot) \in C^1(\overline{\Omega})$ *erfüllt. Dann gilt für* $u \in C^2(\overline{\Omega})$ *und jedes* $x \in \Omega$ *die Integraldarstellung*

$$u(x) = \int_\Omega G(x,y)(-\Delta u)(y)dy + \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial N} G(x,y) - u \frac{\partial}{\partial N_y} G(x,y) \right) do_y. \tag{6.15}$$

Beweis Man wiederhole den Beweis von Satz 6.3, indem man mit dem Integral $\int G(x,y)(-\Delta u)(y)dy$ über $\Omega \backslash B_\varepsilon(x)$ startet. Da g keine Singularitäten in $\Omega \times \overline{\Omega}$ besitzt, entstehen keine neuen Terme oder Schwierigkeiten beim Grenzübergang $\varepsilon \to 0+$. ∎

Zur Lösung des Dirichlet-Problems (6.11) versuche man, die Funktion g in Lemma 6.11 derart zu wählen, dass $G(x,y)$ für jedes $x \in \Omega$ und $y \in \partial\Omega$ verschwindet. D.h., für alle $x \in \Omega$ gelte

$$g(x,\cdot) = E(x-\cdot) \quad \text{auf } \partial\Omega\,. \tag{6.16}$$

In diesem Fall heißt $G(x,y) = E(x-y) - g(x,y)$ die *Greensche Funktion* zu $-\Delta$ auf Ω. Offensichtlich hat G für jedes $x \in \Omega$ die folgenden Eigenschaften:

$$\begin{aligned} &G(x,\cdot) \text{ ist harmonisch in } \Omega\backslash\{x\} \\ &G(x,\cdot) \in C^1(\overline{\Omega}\backslash\{x\}) \\ &G(x,\cdot) = 0 \text{ auf } \partial\Omega \\ &G(x,y) \approx E(x-y) \text{ für } y \to x. \end{aligned} \tag{6.17}$$

Satz 6.12 *Für das beschränkte, glattberandete Gebiet* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *gebe es eine Greensche Funktion* $G(x,y)$*. Dann gilt für jede harmonische Funktion* $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ *die Integraldarstellung*

$$u(x) = -\int_{\partial\Omega} u(y) \frac{\partial}{\partial N_y} G(x,y)\, do_y\,. \tag{6.18}$$

Beweis Ist $u \in C^2(\overline{\Omega})$, folgt die Behauptung mit Lemma 6.11. Falls nur $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ gilt, benutzt man (6.15) mit der gegebenen Greenschen Funktion G auf einer geeigneten Folge von Gebieten (Ω_k), die Ω von innen ausschöpfen, vgl. den Beweis von Korollar 6.4. Mit (6.17) folgt für jedes $x \in \Omega$ – unter Weglassen weiterer Details –, dass

$$\int_{\partial\Omega_k} \Big(\frac{\partial u}{\partial N} G(x,y) - u \frac{\partial}{\partial N_y} G(x,y) \Big) do_y$$

für $k \to \infty$ gegen die rechte Seite von (6.18) konvergiert. ■

Die Formel (6.18) liefert eine mögliche Lösung des Dirichlet-Problems (6.11), nämlich

$$u(x) = -\int_{\partial\Omega} a(y) \frac{\partial}{\partial N_y} G(x,y)\, do_y \,.$$

Im Einzelfall muss jedoch gezeigt werden, dass u tatsächlich harmonisch ist und die Randwerte a im Sinne von (6.12) annimmt.

Beispiel 6.13 Sei $\Omega = \mathbb{R}^n_+ = \{x = (x', x_n) : \ x' \in \mathbb{R}^{n-1},\, x_n > 0\}$ der obere Halbraum. Obwohl Ω unbeschränkt ist, führt das zuvor beschriebene Verfahren zum Ziel. Für $x = (x', x_n) \in \Omega$ sei

$$x^* = (x', -x_n) \in \mathbb{R}^n_-$$

der am Halbraumrand $\partial\Omega = \{(x', 0) : x' \in \mathbb{R}^{n-1}\}$ gespiegelte Punkt, und sei

$$\begin{aligned} G(x,y) &= E(x-y) - E(x^* - y) \\ &= E(x-y) - E(x - y^*)\,. \end{aligned}$$

Da $E(x^* - y)$ keine Singularität für $x \in \Omega$, $y \in \overline{\Omega}$ besitzt, erfüllt G die Bedingungen (6.17) und ist eine geeignete Greensche Funktion. Für $y = (y', 0) \in \partial\mathbb{R}^n_+$, $n \geq 2$, berechnet man mit dem Normalenvektor $N_y = -e_n = (0, \ldots, 0, -1)$ den sog. *Cauchy-Poisson-Kern*

$$K(x, y') := -\frac{\partial}{\partial N_y} G(x,y) = +\frac{\partial}{\partial y_n} G(x,y) = \frac{2}{\omega_n} \frac{x_n}{|x-y|^n}\,,$$

also

$$K(x,y') = \frac{2}{\omega_n} \frac{x_n}{(|x'-y'|^2 + x_n^2)^{n/2}} \quad \text{für } x \in \mathbb{R}^n,\ y' \in \mathbb{R}^{n-1}\,. \tag{6.19}$$

Offensichtlich hat K für $y = (y', 0) \in \partial\mathbb{R}^n_+$ die folgenden Eigenschaften:

$$\begin{aligned} &K(x,y') \text{ ist harmonisch in } x \in \mathbb{R}^n_+\,, \\ &K(x,y') \to 0 \quad \text{für } x \to x_0 \in \partial\mathbb{R}^n_+,\, x_0 \neq y\,, \\ &K(x,y') > 0 \quad \text{für } x > 0\,, \\ &\int_{\partial\mathbb{R}^n_+} K(x,y')dy' = 1 \quad \text{für } x \in \mathbb{R}^n_+\,. \end{aligned} \tag{6.20}$$

Die erste Eigenschaft folgt aus der Harmonizität von G in x und aus der Definition $K = -\frac{\partial}{\partial N_y} G$. Zum Beweis der wichtigen Integralbedingung $(6.20)_4$ benutze man (6.15) für $u \equiv 1$ auf der oberen Halbkugel

$$B_R^+ = \{y = (y', y_n) \in B_R :\ y_n > 0\} \subset \mathbb{R}^n_+$$

mit $x \in B_R^+$ und lasse R gegen unendlich laufen. Nach (6.15) ist

$$1 = \int_{|y'|\le R} K(x,y')dy' - \int_{\partial B_R^+ \cap \mathbb{R}_+^n} \frac{\partial}{\partial N_y} G(x,y)\, do_y\,,$$

wobei für $y \in \partial B_R^+ \cap \mathbb{R}_+^n$ wegen $N_y = \frac{y}{|y|}$

$$\frac{\partial}{\partial N_y} G(x,y) = \frac{1}{\omega_n}\Big(\frac{x-y}{|x-y|^n} - \frac{x^*-y}{|x^*-y|^n}\Big)\cdot\frac{y}{|y|}$$

gilt. Die Summanden mit $x|x-y|^{-n}$ bzw. $x^*|x^*-y|^{-n}$ sind für $y \in \partial B_R^+ \cap \mathbb{R}_+^n$ vom Typ $O(R^{-n})$. Ferner gilt

$$|x-y|^n = |y|^n\left|1-\frac{x}{|y|}\right|^n = |y|^n\big(1+O(R^{-1})\big)\,,$$

und $|x^*-y|^n = |y|^n\big(1+O(R^{-1})\big)$, so dass auch

$$\Big(\frac{y}{|x-y|^n} - \frac{y}{|x^*-y|^n}\Big) = y\,\frac{|x^*-y|^n - |x-y|^n}{|x-y|^n\cdot|x^*-y|^n}$$

vom Typ $O(R^{-n})$ ist. Da das Oberflächenmaß von $\partial B_R^+ \cap \mathbb{R}_+^n$ nur wie $O(R^{n-1})$ anwächst, folgt für $R\to\infty$ die Integralbedingung $(6.20)_4$.

Satz 6.14 *Für jede beschränkte, stetige Funktion $a \in BC^0(\mathbb{R}^{n-1})$ ist*

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} a(y')\,K(x,y')\,dy' \tag{6.21}$$

eine harmonische Funktion in $BC^0(\overline{\mathbb{R}_+^n})$, die die Randwerte a auf $\partial\mathbb{R}_+^n$ annimmt.

Beweis An der Darstellung des Cauchy-Poisson-Kerns (6.19) liest man das Abklingverhalten

$$|K(x,y')| \le \frac{c(x_n)}{(x_n^2+|y'|^2)^{n/2}} \le \frac{c(x_n)}{|y'|^n}$$

mit einer von x_n abhängigen Konstanten $c(x_n)$ für $|y'|\to\infty$ ab. Da sich das Abklingverhalten bzgl. $|y'|\to\infty$ für partielle Ableitungen nach x nicht verschlechtert, zeigt man mit Hilfe von Differenzenquotienten die Differenzierbarkeit von u nach x.. Insbesondere dürfen partielle Ableitungen für $u(x)$ unter dem Integralzeichen auf $K(x,y')$ angewandt werden. Da K bzgl. x harmonisch ist, gilt $\Delta u = 0$. Aus $(6.20)_{3,4}$ folgt die Abschätzung $|u(x)| \le \|a\|_\infty$, so dass u auf der oberen Halbebene beschränkt ist.

Der Beweis, dass $u(x)\to a(x_0')$ für $x \in \mathbb{R}_+^n$, $x \to (x_0',0) \in \partial\mathbb{R}_+^n$, konvergiert, benutzt die sich aus $(6.20)_4$ ergebende Darstellung

$$u(x) - a(x_0') = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} K(x,y')\,\big(a(y')-a(x_0')\big)\,dy'\,,$$

die Stetigkeit von a und $(6.20)_{1-3}$. Da in Satz 6.17 ein analoger Beweis für die Kugel $\Omega = B_R(0)$ geführt werden wird, soll an dieser Stelle auf weitere Beweisdetails verzichtet werden. ■

Bemerkung 6.15 Die Lösung u aus (6.21) des Dirichlet-Problems (6.11) ist *nicht* eindeutig, denn neben u ist $u(x)+\alpha x_n$ für jedes $\alpha \neq 0$ eine Lösung von (6.11) zum Randwert a. Dagegen kann man mit einem Approximationsargument wie im Beweis der Integralbedingung $(6.20)_4$ zeigen, dass (6.11) nur eine beschränkte Lösung besitzt.

Beispiel 6.16 Sei $\Omega = B_R = B_R(0) \subset \mathbb{R}^n$. Analog zum Fall $\Omega = \mathbb{R}^n_+$ wird die Greensche Funktion aus der Fundamentallösung durch eine Spiegelung von Punkten $x \in \Omega$ an $\partial\Omega$ gewonnen. Zu $x \in B_R$ bezeichne

$$x^* = \frac{R^2}{|x|^2}\, x \in \overline{B_R}^c$$

den Punkt auf dem durch 0 gehenden Strahl mit der Normbedingung $\frac{|x^*|}{R} = \frac{R}{|x|}$. Dann sei

$$G(x,y) := E(x-y) - E\Big(\frac{|x|}{R}\,(x^* - y)\Big)\,. \tag{6.22}$$

Offensichtlich ist $g(x,y) = E\big(\frac{|x|}{R}\,(x^*-y)\big)$ harmonisch in $y \in B_R$. Auf Grund der Gleichung

$$\Big(\frac{|x|}{R}\,|x^*-y|\Big)^2 = R^2 - 2x\cdot y + \frac{|x|^2|y|^2}{R^2} = \Big(\frac{|y|}{R}\,|y^*-x|\Big)^2$$

und $E(x-y) = "E(|x-y|)"$ gilt aber

$$G(x,y) = G(y,x)\,,$$

so dass G auch bzgl. $x \in B_R \backslash \{y\}$ harmonisch ist. Schließlich verschwindet G für $y \in \partial B_R$, denn $y^* = y$ für $|y| = R$. Die in Anbetracht von Satz 6.12 zu berechnende Normalableitung in G für $|y| = R$ liefert den *Poisson-Kern*

$$K(x,y) = -\frac{\partial}{\partial N_y}\, G(x,y) = \frac{R^2 - |x|^2}{\omega_n\, R|x-y|^n}\,. \tag{6.23}$$

Satz 6.17 (1) *Für jede harmonische Funktion* $u \in C^2(B_R) \cap C^0(\overline{B_R})$ *gilt die* Poissonsche Integralformel

$$u(x) = \int_{\partial B_R} K(x,y)\, u(y)\, do_y \tag{6.24}$$

mit dem Poisson-Kern K *aus* (6.23).

(2) *Für jede Randfunktion* $a \in C^0(\partial B_R)$ *ist*

$$u(x) = \int_{\partial B_R} K(x,y)\, a(y)\, do_y$$

die eindeutige Lösung des Dirichlet-Problems (6.11).

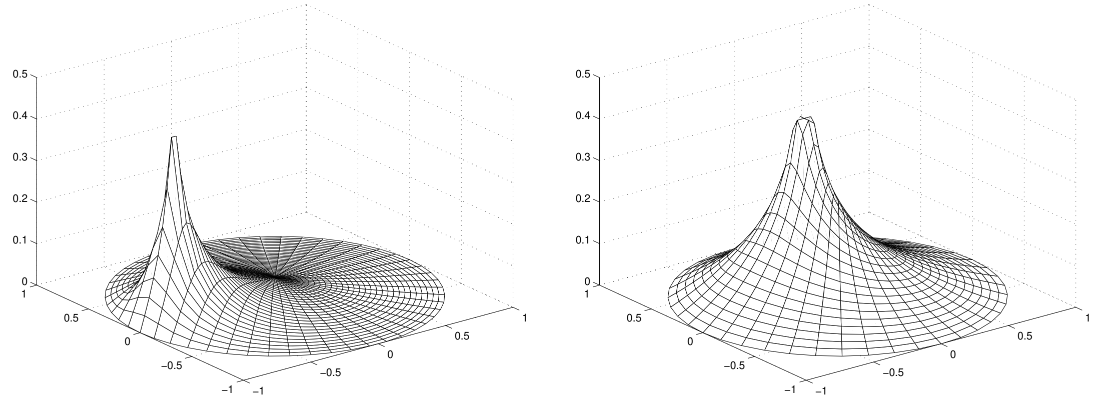


Abbildung 6.4: Die Greensche Funktion $G(x,y)$ in $B_1 \subset \mathbb{R}^2$ für $y = \binom{-3/4}{0}$ und für $y = \binom{-1/4}{0}$ (auf geeigneter Höhe abgeschnitten)

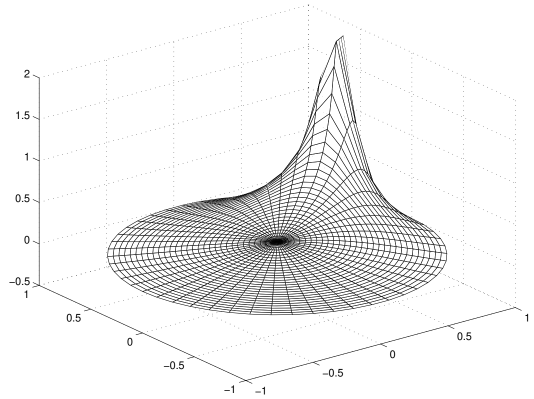


Abbildung 6.4: Der Poisson-Kern für $B_1 \subset \mathbb{R}^2$ (auf der Höhe 2 abgeschnitten)

Beweis

(1) Für $u \in C^2(B_R) \cap C^1(\overline{B_R})$ folgt die Behauptung sofort mit Satz 6.12. Ist dagegen $u \in C^2(B_R) \cap C^0(\overline{B_R})$ harmonisch, betrachte man für $\lambda > 1$ die skalierte Funktion

$$u_\lambda(x) = u\big(\frac{x}{\lambda}\big) \in C^2(\overline{B_R}),$$

die ebenfalls harmonisch ist. Dann gilt mit Satz 6.12 und mit (6.23) für $x \in B_R$

$$u\big(\frac{x}{\lambda}\big) = \frac{R^2 - |x|^2}{\omega_n R} \int_{\partial B_R} \frac{u\big(\frac{y}{\lambda}\big)}{|x-y|^n}\, do_y\,.$$

Da $u \in C^0(\overline{B_R})$ ist, folgt für $\lambda \to 1+$ die Aussage (6.24).

(2) Da $K(x,y)$ für $y \in \partial B_R$ keine Singularität bzgl. x in Ω hat, folgt sofort die Differenzierbarkeit von $u(x)$ und insbesondere die Harmonizität von u in Ω.

Es bleibt also für jeden Randpunkt $x_0 \in \partial B_R$ die Konvergenz

$$u(x) \to a(x_0) \quad \text{für } x \in B_R,\ x \to x_0$$

zu zeigen. Da $K > 0$ und nach (6.24) mit $u \equiv 1$

$$\int_{\partial B_R} K(x,y)\,do_y = 1 \tag{6.25}$$

gilt, schätzen wir für ein geeignetes $\delta > 0$ wie folgt ab:

$$\begin{aligned} |u(x) - a(x_0)| &= \Big|\int_{\partial B_R} K(x,y)\,\big(a(y) - a(x_0)\big)\,do_y\Big| \\ &\le \Big(\int_{\substack{y\in\partial B_R \\ |y-x_0|<\delta}} + \int_{\substack{y\in\partial B_R \\ |y-x_0|\ge\delta}}\Big) K(x,y)\,|a(y) - a(x_0)|\,do_y\,. \end{aligned}$$

Zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ wählt man auf Grund der Stetigkeit von a ein $\delta > 0$ mit

$$|a(y) - a(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für alle } y \in \partial B_R,\ |y - x_0| < \delta\,.$$

Damit wird das erste Integral auf der rechten Seite wegen $K > 0$ und (6.25) durch $\frac{\varepsilon}{2}$ abgeschätzt. Für das zweite Integral über $\partial B_R \backslash B_\delta(x_0)$ benutze man für $|x - x_0| < \frac{\delta}{2}$ die Abschätzung

$$\int_{\substack{y\in\partial B_R \\ |y-x_0|\ge\delta}} \frac{1}{|x-y|^n}\,do_y \le \int_{\substack{y\in\partial B_R \\ |y-x_0|\ge\delta}} \frac{1}{(\delta/2)^n}\,do_y \le \frac{\omega_n R^{n-1}}{(\delta/2)^n}\,,$$

woraus man

$$\int_{\substack{y\in\partial B_R \\ |y-x_0|>\delta}} K(x,y)\,|a(y) - a(x_0)|\,do_y \le 2\|a\|_\infty \frac{R^2 - |x|^2}{\omega_n R}\,\frac{\omega_n R^{n-1}}{(\delta/2)^n}$$

ableitet. An dieser Stelle wählt man $|x - x_0|$ $(< \frac{\delta}{2})$ und damit $R^2 - |x|^2$ zusätzlich so klein, dass die rechte Seite kleiner als $\frac{\varepsilon}{2}$ wird. Zusammenfassend erhält man ein $\delta' = \delta'(\varepsilon) > 0$, so dass $|u(x) - a(x_0)| < \varepsilon$ für alle $x \in B_R$ mit $|x - x_0| < \delta'$ folgt. ∎

Korollar 6.18 *Für die zweidimensionale Kreisscheibe B_1 und für jede stetige 2π-periodische Funktion $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist (mit $x = (r\cos\theta,\ r\sin\theta)$)*

$$u(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1 - r^2}{r^2 - 2r\cos(\theta - \varphi) + 1}\,a(\varphi)\,d\varphi$$

die eindeutige Lösung des Dirichlet-Problems (6.21) *mit Randwerten $a(\varphi)$ in $x = (\cos\varphi, \sin\varphi)$, $0 \le \varphi < 2\pi$.*

Mit der Methode von O. Perron (1923) läßt sich das Dirichlet-Problem

$$-\Delta u = 0 \quad \text{in } \Omega, \qquad u = a \quad \text{auf } \partial\Omega \tag{6.26}$$

für beliebige beschränkte Gebiete $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und für Randdaten $a \in C^0(\partial\Omega)$ (eindeutig) lösen, falls $\partial\Omega$ geeignete Bedingungen erfüllt.

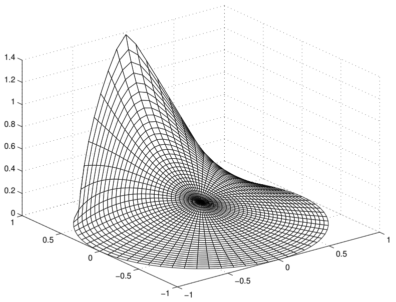


Abbildung 6.5: Lösung des Dirichlet-Problems in B_1 mit den Randdaten $a(\varphi) = \max(0, \frac{\pi}{2} - |\pi - 2\varphi|)$

Satz 6.19 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, ein beschränktes Gebiet und $a \in C^0(\partial\Omega)$.*

(1) *Das Dirichlet-Problem* (6.26) *besitzt genau eine Lösung $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$, falls $\partial\Omega$ die folgende Regularitätsbedingung erfüllt:*

Fall $n \geq 3$ *In jedem Punkt $x \in \partial\Omega$ genügt Ω der* äußeren Kugelbedingung, *d.h., es gibt eine Kugel $B_r(y) \subset \mathbb{R}^n \backslash \Omega$ mit $x \in \partial B_r(y)$.*

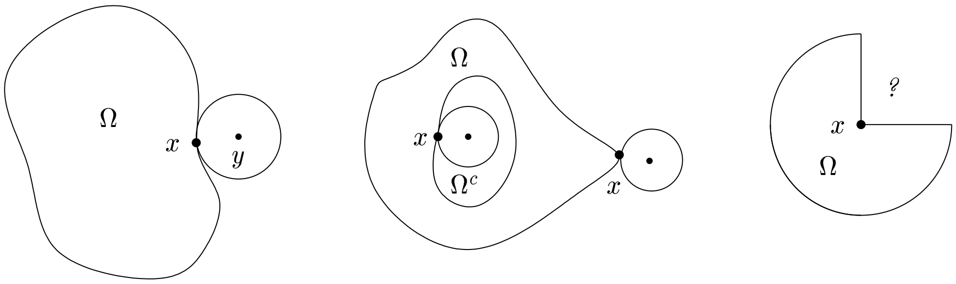


Abbildung 6.6: Zur äußeren Kugelbedingung

Diese Bedingung ist erfüllt, falls sich $\partial\Omega$ lokal – nach einer geeigneten orthogonalen Koordinatentransformation – als Graph einer C^2-Funktion schreiben läßt.

Fall $n = 2$ *Zu jedem Punkt $x \in \partial\Omega$ gibt es eine doppelpunktfreie (stetige) Kurve $\gamma \subset \mathbb{R}^2 \backslash \Omega$ mit Anfangspunkt x. Mit anderen Worten: keine Zusammenhangskomponente von $\mathbb{R}^n \backslash \Omega$ besteht aus einem isolierten Punkt.*

(2) *Der Rand „$\partial\Omega$ sei von der Klasse C^3“, d.h., $\partial\Omega$ läßt sich lokal – nach einer geeigneten orthogonalen Koordinatentransformation – als Graph einer C^3-Funktion schreiben. Ferner gelte $a \in C^3(\partial\Omega)$. Dann gilt $u \in C^2(\overline{\Omega})$, und es gibt eine Konstante $C = C(\Omega) > 0$, so dass*

$$\|u\|_{C^2(\overline{\Omega}} \leq C\|a\|_{C^2(\partial\Omega)}$$

erfüllt ist.

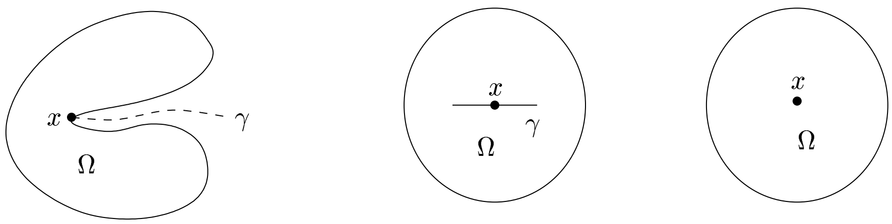


Abbildung 6.7: Zur Regularität im Fall $n = 2$

Beweis Zum Beweis, der über die in §§6.1 – 6.2 bewiesenen Eigenschaften für (sub-)harmonische Funktionen weit hinausgeht, sei auf die Monographien

D. Gilberg, N.S. Trudinger: Elliptic Partial Differential Equations of Second Order, Springer Verlag 1977, 1983

J. Jost: Partielle Differentialgleichungen, Springer Verlag 1998

verwiesen. ■

Bemerkung 6.20 (1) Die im Fall $n = 2$ geforderte Randregularität ist minimal; der Beweis benutzt funktionentheoretische Methoden, die nur für $n = 2$ zur Verfügung stehen.

(2) Das Dirichlet-Problem (6.26) besitzt für die punktierte Kreisscheibe $\Omega = B_1 \backslash \{0\}$ mit den Randdaten $u = 0$ auf ∂B_1 und $u = 1$ in $x = 0$ *keine* Lösung $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$; zum Beweis wende man das schwache Maximumprinzip auf $u(x) + \varepsilon \log |x|$, $\varepsilon \geq 0$, in $B_1 \backslash B_r$, $0 < r \ll 1$, an.

(3) Die Regularitätsaussage von Satz 6.19 (2) gilt bereits, falls „$\partial\Omega$ von der Klasse $C^{2,\alpha}$“, $0 < \alpha < 1$, ist und $a \in C^{2,\alpha}(\partial\Omega)$ gilt. In diesem Fall genügt u der *a priori*-Abschätzung

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})} \leq C\|a\|_{C^{2,\alpha}(\partial\Omega)} .$$

(4) Satz 6.19 läßt sich mit Hilfe von §6.1 auf die Lösung des Poisson-Problems $-\Delta u = f$ in Ω, $u = a$ auf $\partial\Omega$ für Daten $f \in C^\alpha(\overline{\Omega})$, $0 < \alpha < 1$, und $a \in C^0(\partial\Omega)$ bzw. $a \in C^{2,\alpha}(\partial\Omega)$ verallgemeinern.

Mit Satz 6.19 beweist man die Existenz der Greenschen Funktion $G(x, y)$ zum Dirichlet-Problem in beschränkten Gebieten $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und analysiert anschließend ihre Eigenschaften, ohne G genau zu kennen.

Satz 6.21 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, welches die Regularitätsanforderungen an $\partial\Omega$ nach Satz 6.19 (1) erfüllt.*

(1) *Es gibt genau eine Greensche Funktion $G(\cdot, \cdot)$ zum Dirichlet-Problem von $-\Delta$ auf Ω. Für alle $x, y \in \Omega$ mit $x \neq y$ gilt*

$$\begin{array}{lcl} 0 < G(x,y) < E(x,y) & , & n \geq 3 \\ 0 < G(x,y) & , & n = 2 \end{array} . \tag{6.27}$$

(2) *Sei $\partial\Omega$ von der Klasse C^3 (oder $C^{2,\alpha}$, $0 < \alpha < 1$). Dann ist G symmetrisch, d.h.*

$$G(x,y) = G(y,x) \quad \text{für alle} \quad x, y \in \Omega, \quad x \neq y\,. \tag{6.28}$$

Ferner gilt für alle $x, y \in \Omega$

$$G(\cdot, y) \in C^2(\overline{\Omega}\backslash\{y\}), \quad G(x, \cdot) \in C^2(\overline{\Omega}\backslash\{x\})$$

sowie

$$\frac{\partial}{\partial N_x} G(x,y) < 0 \quad \text{für } x \in \partial\Omega,\ y \in \Omega\,. \tag{6.29}$$

Beweis

(1) Nach Satz 6.19 (1) gibt es für jedes feste $x \in \Omega$ eine eindeutig bestimmte Funktion $g(x, \cdot)$ mit den Eigenschaften

$$-\Delta_y g(x,y) = 0 \quad \text{in } \Omega, \qquad g(x,y) = E(x-y) \quad \text{auf } \partial\Omega\,.$$

Dann ist $G(x,y) = E(x-y) - g(x,y)$ die eindeutig bestimmte Greensche Funktion.

Im Fall $n \geq 3$ ist $\inf_{y\in\partial\Omega} E(x-y) > 0$, so dass nach dem schwachen Minimumprinzip $g(x,y) > 0$ für alle $y \in \Omega$ folgt. Also ist $G(x,y) < E(x-y)$.

Nun sei $n \geq 2$ und $x \in \Omega$ fest gewählt. Da $g(x, \cdot) \in C^0(\overline{\Omega})$ und $E(x-y) \to +\infty$ für $y \to x$, gilt für alle $r > 0$ genügend klein:

$$G(x,y) = E(x-y) - g(x,y) > 0 \quad \text{für } y \in \partial B_r(x) \subset \Omega\,.$$

Da außerdem $G(x, \cdot)$ harmonisch in $\Omega\backslash\overline{B_r(x)}$ und $G(x,\cdot) = 0$ auf $\partial\Omega$ ist, folgt mit dem schwachen Minimumprinzip

$$G(x, \cdot) > 0 \quad \text{in } \Omega\backslash\overline{B_r(x)}\,.$$

Im Grenzfall $r \to 0+$ erhält man die Behauptung $G(x,y) > 0$ für alle $y \in \Omega$, $y \neq x$.

(2) Nach der Regularitätsaussage Satz 6.19 (2) gilt $g(x, \cdot) \in C^2(\overline{\Omega})$, also auch $G(x, \cdot) \in C^2(\overline{\Omega}\backslash\{x\})$ für alle $x \in \Omega$. Zum Beweis der Symmetrie schneide man disjunkte Kugeln $B_\varepsilon = B_\varepsilon(x)$ und $B'_\varepsilon = B_\varepsilon(y)$ aus Ω aus und benutze die Greensche Formel auf $\Omega' = \Omega\backslash B_\varepsilon\backslash B'_\varepsilon$. Für $\varepsilon > 0$ genügend klein gilt

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{\Omega'} \big(G(x,z)\cdot\Delta G(y,z) - \Delta G(x,z)\cdot G(y,z)\big)\,dz \\
&= \Big(\int_{\partial\Omega} + \int_{\partial B_\varepsilon} + \int_{\partial B'_\varepsilon}\Big)\Big(G(x,z)\cdot\frac{\partial}{\partial N_z}G(y,z) - \frac{\partial}{\partial N_z}G(x,z)\cdot G(y,z)\Big)\,do_z\,.
\end{aligned} \tag{6.30}$$

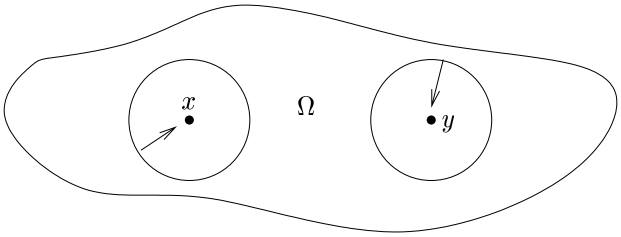


Abbildung 6.8: Zur Anwendung der Greenschen Formel

Auf Grund der Randbedingung an G auf $\partial\Omega$ verschwindet das Integral über $\partial\Omega$. Auf $\partial B_\varepsilon(x)$ gilt $G(x,z) = O(\varepsilon^{2-n})$, $n \geq 3$, bzw. $G(x,z) = O(|\log\varepsilon|)$, $n \geq 2$, während $\frac{\partial}{\partial N_z} G(y,z)$ für $\varepsilon \to 0+$ beschränkt bleibt. Daraus folgt

$$\int_{\partial B_\varepsilon(x)} G(x,z) \cdot \frac{\partial}{\partial N_z} G(y,z)\, do_z \to 0 \quad \text{für } \varepsilon \to 0+ \ .$$

Ebenso konvergiert $\int_{\partial B_\varepsilon(y)} \frac{\partial}{\partial N_z} G(x,z) \cdot G(y,z)\, do_z$ für $\varepsilon \to 0+$ gegen 0. Entscheidend ist das Verhalten

$$\frac{\partial}{\partial N_z} G(x,z) = \frac{\partial}{\partial N_z} E(x-z) + O(1) = \frac{\varepsilon^{1-n}}{\omega_n} + O(1)$$

für $z \in \partial B_\varepsilon(x)$, $\varepsilon \to 0+$, welches wegen der Stetigkeit von $G(y,z)$ in $z = x$ die Konvergenz

$$\int_{\partial B_\varepsilon(x)} \frac{\partial}{\partial N_z} G(x,z) \cdot G(y,z)\, do_z \to G(y,x)$$

für $\varepsilon \to 0+$ liefert. Analog beweist man, dass das verbleibende Randintegral über $\partial B_\varepsilon(y)$ für $\varepsilon \to 0+$ gegen $G(x,y)$ konvergiert. Zusammenfassend erhält man aus (6.30) für $\varepsilon \to 0+$ die Aussage

$$0 = -G(y,x) + G(x,y)\,,$$

also die Symmetrie.

Da $G(x,y)$ für festes $x \in \Omega$ zweimal stetig partiell differenzierbar bzgl. $y \in \Omega\backslash\{x\}$ ist, liefert die Symmetrie, dass G auch bzgl. x von der Klasse C^2 ist. Insbesondere gilt für festes $y \in \Omega$

$$G(x,y) = 0 \quad \text{für } x \in \partial\Omega, \qquad G(x,y) > 0 \quad \text{für } x \in \Omega\backslash\{y\}\,.$$

Dann beweist Lemma **??** angewandt auf $G(\cdot,y)$ in $\Omega\backslash\overline{B_\varepsilon(y)}$ die Aussage $\partial G(x,y)/\partial N_x < 0$ für $x \in \partial\Omega$. ∎

Korollar 6.22 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit Rand von der Klasse C^3 (oder $C^{2,\alpha}$, $0 < \alpha < 1$), sei $f \in C^0(\overline{\Omega})$, $a \in C^0(\partial\Omega)$ und sei $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ die Lösung des Dirichlet-Problems*

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \Omega, \qquad u = a \quad \text{auf } \partial\Omega\,.$$

Dann gilt für $x \in \Omega$

$$u(x) = \int_\Omega G(x,y)\, f(y)\, dy - \int_{\partial\Omega} a(y)\, \frac{\partial}{\partial N_y}\, G(x,y) do_y\,.$$

7 Die Wärmeleitungsgleichung im $\mathbb{R}^n$

7.1 Die Fourier-Transformation und Faltungsintegrale auf $L^p(\mathbb{R}^n)$

Definition 7.1 Sei $1 \leq p < \infty$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. Dann ist

$$\begin{aligned} L^p(\Omega) \quad = \quad & \Big\{ u : \Omega \to \mathbb{R} \text{ (oder } \mathbb{C}) : \ u \text{ ist „messbar“}, \\ & \|u\|_p := \Big(\int_\Omega |u(x)|^p \, dx \Big)^{1/p} < \infty \Big\}. \end{aligned}$$

Für $p = \infty$ definiert man

$$\begin{aligned} L^\infty(\Omega) \quad = \quad & \{ u : \Omega \to \mathbb{R} \text{ (oder } \mathbb{C}) : \ u \text{ ist wesentlich beschränkt}, \\ & \|u\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \Omega} |u(x)| < \infty \}; \end{aligned}$$

man beachte, dass die Norm $\|\cdot\|_\infty$ auch in der Form

$$\|u\|_\infty \quad = \quad \inf\{ K \geq 0 : |u(x)| \leq K \text{ „fast überall“} \}$$

geschrieben werden darf.

Satz 7.2 *Für jedes $p \in [1, \infty]$ und für jedes Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ist $L^p(\Omega)$ ein vollständiger, normierter Vektorraum. Insbesondere gilt die Dreiecksungleichung*

$$\boxed{\|u + v\|_p \leq \|u\|_p + \|v\|_p}$$

für alle $u, v \in L^p(\Omega)$.

Satz 7.3 *Sei $1 \leq p \leq \infty$, und sei $p' := \frac{p}{p-1}$ ($p' = 1$, falls $p = \infty$, bzw. $p' = \infty$, falls $p = 1$) der zu p konjugierte Exponent. Dann gilt für $u \in L^p(\Omega)$, $v \in L^{p'}(\Omega)$ stets $uv \in L^1(\Omega)$ und*

$$\boxed{\|u \cdot v\|_1 \leq \|u\|_p \|v\|_{p'}.} \qquad \textit{(Hölder-Ungleichung)}$$

Satz 7.4 *Sei $p \in [1, \infty]$ und $u \in L^1(\mathbb{R}^n), v \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Dann konvergiert das sog.* Faltungsintegral

$$\boxed{u * v(x) = \int_{\mathbb{R}^n} u(x - y) v(y) dy}$$

für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$ und definiert eine Funktion $u*v \in L^p(\mathbb{R}^n)$ mit der Eigenschaft

$$\boxed{\|u * v\|_p \leq \|u\|_1 \|v\|_p.}$$

Korollar 7.5 *Das Faltungsprodukt $*$ aus Satz 7.4 hat die folgenden Eigenschaften:*

(1) $u * v = v * u$ f.ü. (Kommutativität)
für alle $u \in L^1(\mathbb{R}^n), v \in L^p(\mathbb{R}^n), 1 \le p \le \infty$.

(2) $(u * v) * w = u * (v * w)$ (Assoziativität)
falls zwei der Funktionen u, v, w in $L^1(\mathbb{R}^n)$ liegen und eine in $L^p(\mathbb{R}^n), 1 \le p \le \infty$, liegt.

(3) $(u + v) * w = u * w + v * w$ (Distributivgesetz)
für $u, v \in L^1(\mathbb{R}^n), w \in L^p(\mathbb{R}^n)$ oder $u, v \in L^p(\mathbb{R}^n), w \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

Definition 7.6 *Für eine Funktion $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ wird die Fourier-Transformierte $\hat{f} = \mathcal{F}(f)$ punktweise für $\xi \in \mathbb{R}^n$ definiert durch*

$$\boxed{\hat{f}(\xi) = \textstyle\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi} f(x)dx.}$$

Für eine Funktion $h = h(\xi) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ wird die Fourier-Rücktransformierte $\mathcal{F}^{-1}h$ punktweise für $x \in \mathbb{R}^n$ definiert durch

$$\boxed{\check{h}(x) = \mathcal{F}^{-1}h(x) = \tfrac{1}{(2\pi)^n} \textstyle\int_{\mathbb{R}^n} e^{+ix\cdot\xi} h(\xi)d\xi.}$$

Satz 7.7 (1) *Für $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ gilt $\hat{f} \in C^0(\mathbb{R}^n)$ und $\hat{f}(\xi) \to 0$ für $|\xi| \to \infty$.*

(2) *Gilt neben $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ sogar $|x|f(x) \in L^1(\mathbb{R}^n)$, so ist $\hat{f}$ stetig partiell bzgl. ξ differenzierbar, und es gilt*

$$\frac{\partial \hat{f}}{\partial \xi_j} = -i(\widehat{x_j f})(\xi), \quad 1 \le j \le n.$$

(3) *Gilt $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap C^1(\mathbb{R}^n)$ sowie $\nabla f \in L^1(\mathbb{R}^n)^n$, so ist*

$$\boxed{\widehat{\partial_j f}(\xi) = i\xi_j \hat{f}(\xi),} \quad 1 \le j \le n.$$

(4) *Analoge Aussagen gelten auch für die Fourier-Rücktransformation.*

Beispiel 7.8 Im $\mathbb{R}^1$ besitzt die L^1-Funktion $h(x) = e^{-x^2/2}$ die Fourier-Transformierte $\hat{h}(\xi) = \sqrt{2\pi}e^{-\xi^2/2}$. Insbesondere ist $\mathcal{F}^{-1} \circ \mathcal{F}h = h$.

Satz 7.9 *Für beliebige Funktionen $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ gilt*

$$\boxed{\widehat{f * g} = \hat{f} \cdot \hat{g}.}$$

Satz 7.10 *(Umkehrsatz) Ist $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und auch $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$, so gilt*

$$\boxed{\mathcal{F}^{-1}\hat{f} = \mathcal{F}^{-1} \circ \mathcal{F}f = f} \quad \textit{f.ü.}$$

Satz 7.11 *Für $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ gilt $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ sowie*

$$\boxed{\|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2;}$$

dabei wird die Integration über $\xi \in \mathbb{R}^n$ bzgl. $đ\xi = \frac{1}{(2\pi)^n} d\xi$ genommen, d.h.

$$\frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 dx.$$

Bemerkung 7.12 Zu jeder Funktion $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ gibt es eine Folge $(f_k) \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $f_k \to f$ in $L^2(\mathbb{R}^n)$ für $k \to \infty$, d.h.

$$\|f - f_k\|_2 \to 0 \text{ für } k \to \infty.$$

Also gilt nach Satz 7.11

$$\|\hat{f}_k - \hat{f}_j\|_2 = \|f_k - f_j\|_2 \to 0 \text{ für } k, j \to \infty.$$

Die Folge $(\hat{f}_k) \subset L^2(\mathbb{R}^n)$ ist also eine Cauchy-Folge, und es gibt nach Satz 7.2 ein $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$ mit

$$\hat{f}_k \to g \text{ in } L^2(\mathbb{R}^n) \text{ für } k \to \infty.$$

Deshalb definieren wir die Fourier-Transformierte $\hat{f}$ von $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ durch $g = \lim_{k\to\infty} \hat{f}_k \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

Satz 7.13 *Die in Bemerkung 7.12 durchgeführte Konstruktion gestattet eine Erweiterung der Fourier-Transformation von $L^1(\mathbb{R}^n)$ auf $L^2(\mathbb{R}^n)$. Die wieder mit $\mathcal{F}$ bezeichnete Abbildung*

$$\mathcal{F} = L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n), \quad f \mapsto \hat{f},$$

hat die Eigenschaften:

(1) *$\mathcal{F}$ ist linear, stetig und bijektiv, $\mathcal{F}^{-1} \circ \mathcal{F} = id$ auf $L^2(\mathbb{R}^n)$.*

(2) *Für $f, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$ gilt*

$$\boxed{\|f\|_2 = \|\hat{f}\|_2} \quad \textit{(Satz von Plancherel)}$$

und

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\overline{g(x)}dx = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) \cdot \overline{\widehat{g(\xi)}}đ\xi$$

mit $đ\xi = \frac{1}{(2\pi)^n} d\xi$.

(3) *Für $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ lassen sich $\hat{f}$ aus f und f aus $\hat{f}$ als L^2-Grenzwerte wie folgt berechnen:*

$$\begin{aligned} \int_{B_R} f(x) e^{-ix\cdot\xi} dx &\;\to\; \hat{f}(\xi) \quad \text{für}\, R \to \infty, \\ \int_{B_R} \hat{f}(\xi) e^{+ix\cdot\xi} đ\xi &\;\to\; f(x) \quad \text{für}\, R \to \infty \end{aligned}$$

mit $đ\xi = \frac{1}{(2\pi)^n} d\xi$.

Korollar 7.14 (1) *Sei $u \in L^2(\mathbb{R}^n) \cap C^1(\mathbb{R}^n)$ und $\nabla u \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt*

$$\widehat{\nabla u}(\xi) = i\xi \hat{u}(\xi)$$

sowie $\xi\hat{u}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^n)$ und $\|\xi\hat{u}(\xi)\|_2 = \|\nabla u\|_2$.

(2) *Umgekehrt sei $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ und $\xi\hat{u}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Dann besitzt u partielle Ableitungen 1. Ordnung $\partial_j u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ im folgenden Sinne (sog.* schwache Ableitungen*):*

$$\int_{\mathbb{R}^n} u\, \partial_j \varphi\, dx = - \int_{\mathbb{R}^n} \partial_j u \cdot \varphi\, dx$$

für alle reellwertigen Funktionen $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Beweis (2) Zu $\xi_j \hat{u}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^n)$ gibt es nach Satz 7.13(1) ein $v_j \in L^2(\mathbb{R}^n)$ mit $\hat{v}_j = i\xi_j \hat{u}$. Dann gilt für alle reellwertigen Funktionen $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ nach Satz 7.13(2)

$$\begin{aligned} &\int u \partial_j \varphi\, dx = \int u\, \overline{\partial_j \varphi}\, dx = \int \hat{u}\, \overline{\widehat{\partial_j \varphi}}\, đ\xi \\ &\underset{(1)}{=} \int \hat{u}\, \overline{i\xi_j \hat{\varphi}}\, đ\xi = - \int i\xi_j \hat{u}\, \overline{\hat{\varphi}}\, đ\xi = - \int \hat{v}_j\, \overline{\hat{\varphi}}\, đ\xi \underset{(1)}{=} - \int v_j \varphi\, dx\,. \end{aligned}$$

Eine Funktion v_j mit dieser Eigenschaft ist eindeutig bestimmt. ∎

7.2 Der Wärmeleitungskern

Zur Lösung der Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{aligned} u_t - k\,\Delta u &= 0 \qquad \text{in } (0,\infty) \times \mathbb{R}^n \\ u(0) &= u_0 \qquad \text{für } t = 0 \end{aligned} \tag{7.1}$$

wird eine (formale) Fourier-Transformation bzgl. $x \in \mathbb{R}^n$ durchgeführt. Aus (7.1) erhält man die gewöhnliche Differentialgleichung 1. Ordnung

$$\hat{u}_t + k|\xi|^2\, \hat{u} = 0, \quad \hat{u}(0) = \hat{u}_0$$

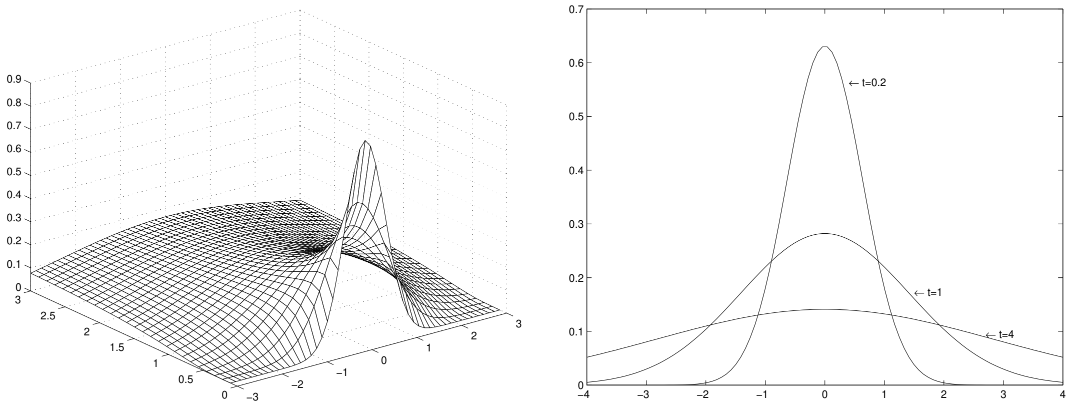


Abbildung 7.1: Der Wärmeleitungskern $E(t,x)$ im $\mathbb{R}^1$

bzgl. t mit Parameter $\xi \in \mathbb{R}^n$ und Anfangswert $\hat{u}_0(\xi)$. Die eindeutig bestimmte Lösung lautet

$$\hat{u}(t,\xi) = e^{-k|\xi|^2 t}\hat{u}_0(\xi)\,,$$

also nach Satz 7.9

$$u(t,x) = \mathcal{F}^{-1}(e^{-k|\xi|^2 t}\hat{u}_0(\xi))(x) = \mathcal{F}^{-1}(e^{-k|\xi|^2 t}) * u_0(x)\,. \tag{7.2}$$

Zur Berechnung von $\mathcal{F}^{-1}(e^{-k|\xi|^2 t})$ benutzen wir Beispiel 7.8 wie folgt: für jedes $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ gilt punktweise

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{-1}(e^{-k|\xi|^2 t})(x) &= \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}} \ldots \Big(\int_{\mathbb{R}} e^{i\xi_1 x_1} e^{-k\xi_1^2 t}\,d\xi_1\Big)\ldots e^{i\xi_n x_n} e^{-k\xi_n^2 t}\,d\xi_n \\ &= \mathcal{F}_1^{-1}\big(e^{-k\xi_1^2 t}\big)(x_1)\cdot\ldots\cdot\mathcal{F}_n^{-1}\big(e^{-k\xi_n^2 t}\big)(x_n)\end{aligned}$$

mit der Fourier-Rücktransformation $\mathcal{F}_j^{-1}, 1 \le j \le n$, über $\mathbb{R}^1$. Nach Beispiel 7.8 und einer Anwendung der Substitutionsregel ist z.B. für $j = 1$

$$\mathcal{F}_1^{-1}\big(e^{-k\xi_1^2 t}\big)(x_1) = \mathcal{F}_1^{-1}\Big(e^{-(\sqrt{2kt}\,\xi_1)^2/2}\Big)(x_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sqrt{2kt}}\,e^{-(x_1/\sqrt{2kt})^2/2},$$

woraus

$$\mathcal{F}^{-1}\big(e^{-k|\xi|^2 t}\big)(x) = \frac{1}{(4\pi kt)^{n/2}}\,e^{-\frac{|x|^2}{4kt}}$$

[h!] folgt. Definiert man jetzt den *Wärmeleitungskern* $E(t,x)$ durch

$$\boxed{E(t,x) = \frac{1}{(4\pi kt)^{n/2}}\,e^{-\frac{|x|^2}{4kt}}\,,} \tag{7.3}$$

erhält man die formale Lösung

$$\boxed{u(t,x) = E(t,\cdot) * u_0(x) = \frac{1}{(4\pi kt)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4kt}}\,u_0(y)\,dy} \tag{7.4}$$

von (7.1).

Satz 7.15 *Der Wärmeleitungskern $E(t,x)$ im $\mathbb{R}^n$ besitzt die folgenden Eigenschaften:*

(1) *$E(t,x)$ ist unendlich oft stetig partiell differenzierbar in den Variablen $t > 0$ und $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$. Darüber hinaus ist E sogar reell analytisch in $t, x_1, \dots, x_n$, d.h., E läßt sich als $(n+1)$–fache konvergente Potenzreihe bzgl. $t, x_1, \dots, x_n$ mit beliebigem Entwicklungspunkt $t_0 > 0$, $x_{01}, \dots, x_{0n} \in \mathbb{R}$ schreiben*

(2) *$E(t,x) > 0$ für alle $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^n$*

(3) *Für $t \to 0+$ gilt*

$$E(t,x) \to \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ +\infty, & x = 0\,. \end{cases}$$

(4) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} E(t,x)\,dx = 1$ *für alle* $t > 0$.

(5) *Bezüglich der Faltung in der Ortsvariablen x gilt*

$$\boxed{E(t,\cdot) * E(s,\cdot) = E(t+s,\cdot)} \quad \text{für alle } t,s > 0\,.$$

(6) *Für jedes $t > 0$ und $x \in \mathbb{R}^n$ gilt*

$$\partial_t E = k\Delta E\,.$$

Beweis Die Eigenschaften (1) – (4) und (6) (bis auf die reelle Analytizität) sind trivial und ergeben sich aus der Definition. Die Normierungsbedingung (4) folgt auch aus der Gleichung

$$\int_{\mathbb{R}^n} E(t,x)dx = \mathcal{F}\big(E(t,\cdot)\big)(\xi = 0) = e^{-k|\xi|^2 t}\big|_{\xi=0} = 1\,.$$

Die Faltungsidentität in (5) läßt sich explizit nachrechnen, folgt aber auch aus der Funktionalgleichung

$$e^{-k|\xi|^2 t}\, e^{-k|\xi|^2 s} = e^{-k|\xi|^2 (t+s)}$$

und der Formel $\mathcal{F}^{-1}(\hat{u}\,\hat{v}) = u * v$, s. Satz 7.9. ∎

7.3 Existenz von Lösungen der Wärmeleitungsgleichung

Satz 7.16 *Sei $u_0 \in BC^0(\mathbb{R}^n) = C^0(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$, also ein stetiger beschränkter Anfangswert. Dann ist*

$$u(t,x) = E(t,\cdot) * u_0, \quad \textit{kurz } u(t) = E(t)u_0\,,$$

eine unendlich oft stetig partiell differenzierbare und sogar reell-analytische Funktion auf $(0,\infty)\times\mathbb{R}^n$, die das Anfangswertproblem (7.1) löst. Dabei gilt $u(0) = u_0$ im Sinne

$$u(t,x) \to u_0(x_0) \quad \textit{für } (t,x) \to (0,x_0), \quad t > 0\,. \tag{7.5}$$

Beweis Wir beweisen, dass $u(t) = E(t)u_0$ nach x_1 partiell differenzierbar mit Ableitung

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\, u(t,x) = \Big(\frac{\partial}{\partial x_1}\, E(t,\cdot)\Big) * u_0(x) \tag{7.6}$$

ist; analoge Ergebnisse gelten für $\partial_2, \ldots, \partial_n$, für $\partial/\partial t$ und für partielle Ableitungen höherer Ordnung. Insbesondere folgt

$$(\partial_t - \Delta)u(t,x) = \big(\partial_t - \Delta_x E(t,\cdot)\big) * u_0 = 0$$

mit Hilfe von Satz 7.15(6). Zum Beweis von (7.6) betrachten wir der Einfachheit halber nur den eindimensionalen Fall, also $x = x_1$, und $k = 1$. Es sei

$$f(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{1/2}} e^{-x^2/4t},$$

so dass nach zweimaliger Anwendung des Mittelwertsatzes für $h \neq 0$

$$\frac{1}{h}\big(f(x+h) - f(x)\big) - f'(x) = f'(x+\theta h) - f'(x) = \theta h\, f''(x+\theta' h)$$

mit $0 < \theta,\, \theta' < 1$ gilt. Wegen $f''(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{1/2}}\big(-\frac{1}{2t} + \frac{x^2}{4t^2}\big)e^{-x^2/4t}$ und der elementaren Ungleichung

$$\frac{x^2}{4t}\, e^{-x^2/4t} = 2\cdot\frac{x^2}{8t}\, e^{-x^2/8t}\cdot e^{-x^2/8t} \leq Ce^{-x^2/8t}\,,$$

die aus $ue^{-u} \leq C$ für $u \geq 0$ folgt, genügt f'' der Abschätzung

$$\begin{aligned} |f''(x+\theta' h)| &\leq \frac{C}{t}\, e^{-(x+\theta' h)^2/8t} \leq \frac{C}{t}\, e^{-x^2/8t}\, e^{|h|\,|x|/4t} \\ &\leq \frac{C}{t}\, e^{-x^2/8t}\, e^{x^2/16t}\, e^{4h^2/t^2} \leq C(t) e^{-x^2/16t}\,; \end{aligned}$$

Dabei wurde in der vorletzten Ungleichung $\frac{|h|\,|x|}{4t} \le \frac{x^2}{16t} + \frac{h^2}{4t}$ ausgenutzt; ferner ist die Konstante $C(t)$ von θ', h und x unabhängig. Nun folgt

$$\begin{aligned}
&\Big|\frac{1}{h}\big(u(t,x+h) - u(t,x)\big) - \big(\frac{\partial}{\partial x} E(t,\cdot)\big) * u_0(x)\Big| \\
&\quad = \Big|\int_{\mathbb{R}} \Big(\frac{1}{h}\big(f(x+h-y) - f(x-y)\big) - f'(x-y)\Big)\, u_0(y)\, dy\Big| \\
&\quad \le C(t) \int_{\mathbb{R}} \theta |h| e^{-(x-y)^2/16t} |u_0(y)| dy \\
&\quad \le |h| C(t) \|u_0\|_\infty \int_{\mathbb{R}} e^{-(x-y)^2/16t}\, dy \\
&\quad \to 0 \quad \text{für } h \to 0\,.
\end{aligned}$$

Also ist $u(t,x)$ bzgl. x differenzierbar, die Ableitung lautet $\frac{\partial}{\partial x} E(t,\cdot) * u_0(x)$. Aus der reellen Analytizität von E, s. Satz 7.15(1), folgt – ohne Beweis (!) – die reelle Analytizität von $u(t,x)$.

Zum Beweis von (7.5) sei $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und $\varepsilon > 0$ gewählt. Da u_0 in x_0 stetig ist, gibt es ein $\delta > 0$ mit

$$|u_0(y) - u_0(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}\,, \quad \text{falls } |y - x_0| < 2\delta\,.$$

Für $x \in B_\delta(x_0)$ erhält man die Abschätzung

$$\begin{aligned}
|u(t,x) - u_0(x_0)| &= \Big|\int_{\mathbb{R}^n} E(t,x-y)\big(u_0(y) - u_0(x_0)\big)\, dy\Big| \\
&\le \int_{|y-x|<\delta} E(t,x-y)\, |u_0(y) - u_0(x_0)|\, dy \\
&\quad + \int_{|y-x|>\delta} E(t,x-y) |u_0(y) - u_0(x_0)|\, dy\,,
\end{aligned}$$

da nach Satz 7.15 $E(t,\cdot) > 0$ und $\int_{\mathbb{R}^n} E(t,x)\, dx = 1$ gilt. Aus $x \in B_\delta(x_0)$ und $y \in B_\delta(x)$ folgt $|y - x_0| < 2\delta$, so dass das erste Integral auf der rechten Seite durch

$$\int_{|y-x|<\delta} E(t,x-y)\, \frac{\varepsilon}{2}\, dy < \frac{\varepsilon}{2}$$

beschränkt ist. Das zweite Integral wird durch

$$\int_{|y-x|>\delta} E(t,x-y)\, 2\|u_0\|_\infty\, dy = \frac{2\|u_0\|_\infty}{\pi^{n/2}} \int_{|z| \ge \frac{\delta}{\sqrt{4kt}}} e^{-|z|^2} dz$$

abgeschätzt; es ist also kleiner als $\frac{\varepsilon}{2}$, falls $0 < t < \delta' = \delta'(\delta, u_0)$ ist. Insgesamt folgt

$$|u(t,x) - u_0(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

für $|x - x_0| < \delta = \delta(\varepsilon)$ und $0 < t < \delta'$. ∎

Korollar 7.17 (1) *In Satz 7.16 ist die Konvergenz* $u(t,x) \to u_0(x_0)$ *sogar gleichmäßig bezüglich* $x_0 \in \mathbb{R}^n$*, falls* $u \in BUC(\mathbb{R}^n)$ *gilt, d.h., falls* $u \in BC(\mathbb{R}^n)$ *sogar gleichmäßig stetig ist.*

(2) *Satz 7.16 gilt sogar, wenn* $u_0 \in C^0(\mathbb{R}^n)$ *der Wachstumsabschätzung*

$$|u_0(x)| \le ce^{M|x|}, \quad x > 0,\ M \in \mathbb{R},$$

genügt.

Beweis

(1) folgt aus einer Inspektion des 2. Beweisteils von Satz 7.16.

(2) Wegen

$$|u_0(y)| \le ce^{M|y|} \le ce^{M|x|}\, e^{M|y-x|} \le C_\varepsilon(x)\, e^{\varepsilon|y-x|^2}$$

für beliebig kleines $\varepsilon > 0$ bleibt der Beweis von Satz 7.16 auch bei der Wachstumsabschätzung aus (2) gültig.

Bemerkung 7.18 Die Lösung $u(t) = E(t)u_0$ hat die folgenden Eigenschaften:

(1) Wegen $E(t,\cdot) > 0$ und $\int_{\mathbb{R}^n} E(t,x)dx = 1$ gilt das sog. *schwache Maximum- und Minimumprinzip*

$$\inf u_0 \le u(t,x) \le \sup u_0 \quad \text{auf } [0,\infty) \times \mathbb{R}^n.$$

Während für einen konstanten Anfangswert u_0 die Lösung $u \equiv u_0$ lautet, gilt für jeden nichtkonstanten Anfangswert u_0 nach Satz 7.15(2), (4) sogar

$$\inf u_0 < u(t,x) < \sup u_0 \quad \text{auf } (0,\infty) \times \mathbb{R}^n.$$

Falls umgekehrt $u(t,x) = \inf u_0$ oder $u(t,x) = \sup u_0$ in einem Punkt (t,x) mit $t > 0$ gilt, ist $u = u_0$ konstant *(starkes Maximum- und Minimumprinzip).*

(2) Für alle $t > 0$ ist $u(t,x)$ eine unendlich oft stetig partiell differenzierbare Funktion bzgl. x, auch wenn u_0 nur stetig ist oder sogar nur in $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ liegt. Im Fall $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ gilt

$$u(t,x) \to u_0(x_0) \quad \text{für } t \to 0+,\ x \to x_0$$

nur, falls die Punktauswertung $u_0(x_0)$ sinnvoll ist und u_0 in einer Umgebung von x_0 f.ü. mit einer stetigen Funktion übereinstimmt. Andernfalls wird der Anfangswert $u(0) = u_0$ in einer *schwachen Form* angenommen: für jede Testfunktion $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} u(t,x)\,\varphi(x)\,dx = \int u_0(x)\,\varphi(t,x)\,dx \to \int u_0(x)\,\varphi(x)\,dx$$

für $t \to 0+$, wobei $\varphi(t,x) = E(t,\cdot) * \varphi(x)$ die Lösung der Wärmeleitungsgleichung (7.1) mit Anfangswert φ bezeichnet.

(3) Der Lösungsoperator $u_0 \mapsto E(t)u_0$ hat also eine stark regularisierende Wirkung; nicht differenzierbare Stellen von u_0 und sogar Unstetigkeiten von u_0 werden für jedes noch so kleine $t > 0$ weggeglättet!

(4) Wegen $E(t,x) > 0$ für alle $t > 0$ und für alle $x \in \mathbb{R}^n$ beeinflussen die Funktionswerte von u_0 in $B_\varepsilon(x_0)$ die Lösung $u(t,x)$ für jedes $t > 0$ und in jedem $x \in \mathbb{R}^n$. Im Gegensatz zu den bei der Wellengleichung besprochenen Phänomenen besitzen Lösungen der Wärmeleitungsgleichung eine *unendlich große Ausbreitungsgeschwindigkeit*. Insofern ist die Wärmeleitungsgleichung kein realistisches Modell der Wärmeausbreitung.

(5) Der Lösungsoperator

$$E(t) : BC^0(\mathbb{R}^n) \to BC^0(\mathbb{R}^n), \quad u_0 \mapsto E(t)u_0\,,$$

ist für jedes $t > 0$ ein linearer, stetiger Operator, wenn $BC^0(\mathbb{R}^n)$ mit der Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$ versehen wird:

$$\|E(t)u_0 - E(t)v_0\|_\infty \le \|u_0 - v_0\|_\infty \quad \text{für alle } u_0, v_0 \in BC^0(\mathbb{R}^n)\,.$$

Ferner gilt wegen $E(t,\cdot) * E(s,\cdot) = E(t+s,\cdot)$ die *Halbgruppeneigenschaft*

$$\begin{aligned} E(t)\,E(s) &= E(t+s) \quad \text{für alle } t,s \ge 0\,,\\ E(0) &= id\,. \end{aligned}$$

Auf dem mit der Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$ versehenen Raum $BUC(\mathbb{R}^n)$ ist $E(\cdot)$ nach Korollar 7.17(1) sogar im folgenden Sinne *stark stetig*:

$$\begin{aligned} E(t)u_0 &\to E(t_0)u_0 \qquad \text{für } t \to t_0,\ t_0 > 0\,,\\ E(t)u_0 &\to u_0 \qquad\quad\ \ \text{für } t \to 0+\,. \end{aligned}$$

Unter Vorwegnahme der Eindeutigkeit der Lösung, s. Satz 7.23, stellt die Wärmeleitungsgleichung also ein wohlgestelltes Problem im Raum $BUC(\mathbb{R}^n)$ dar.

Das Anfangswertproblem (7.1) kann mit Hilfe der Formel $u(t,x) = E(t,\cdot) * u_0(x) = E(t)u_0$ und von Satz 7.4 auch für Anfangswerte $u_0 \in L^p(\mathbb{R}^n)$ betrachtet werden.

Satz 7.19 *Sei ein Anfangswert $u_0 \in L^p(\mathbb{R}^n), 1 \le p < \infty$, gegeben. Dann ist $u(t) = E(t)u_0$ eine unendlich oft bzgl. $t > 0$ und $x \in \mathbb{R}^n$ differenzierbare Funktion, die das Anfangswertproblem (7.1) im Sinne*

$$u(t,\cdot) \to u_0 \ \text{in } L^p(\mathbb{R}^n) \quad \text{für } t \to 0+ \tag{7.7}$$

löst. Ferner gilt

$$u(t,\cdot) \in L^p(\mathbb{R}^n), \quad \|u(t,\cdot)\|_p \le \|u_0\|_p \quad \text{für alle } t > 0\,. \tag{7.8}$$

Beweis Aus $0 < E(t,\cdot) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und $\int_{\mathbb{R}^n} E(t,x)dx = 1$ folgen mit Satz 7.4 die Aussage $u(t,\cdot) \in L^p(\mathbb{R}^n)$ und die Abschätzung

$$\|u(t,\cdot)\|_p = \|E(t,\cdot) * u_0\|_p \leq \|E(t,\cdot)\|_1 \, \|u_0\|_p = \|u_0\|_p \, .$$

Zum Beweis der Differenzierbarkeit betrachten wir exemplarisch die Ableitung $\partial_1 = \partial/\partial x_1$ und nutzen aus, dass u_0 beliebig gut in der L^p-Norm durch $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$-Funktionen approximiert werden kann: zu $k \in \mathbb{N}$ gibt es $\varphi_k \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit

$$\|u_0 - \varphi_k\|_p < \frac{1}{k} \, . \tag{7.9}$$

Nach Satz 7.16 ist die Lösung $E(t)\varphi_k$ unendlich oft differenzierbar in $t > 0$ und $x \in \mathbb{R}^n$, und es gilt z.B.

$$\partial_1\big(E(t)\varphi_k\big)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_1} E(t, x-y)\, \varphi_k(y)\, dy \, .$$

Dabei ist

$$\partial_{x_1} E(t, x-y) = \frac{-(x_1-y_1)/2kt}{(4\pi kt)^{n/2}}\, e^{-\frac{|x-y|^2}{4kt}}$$

und genügt der Abschätzung

$$|\partial_{x_1} E(t, x-y)| \leq \frac{C}{\sqrt{t}}\, \frac{1}{(4\pi kt)^{n/2}}\, e^{-\frac{|x-y|^2}{8kt}} \, ,$$

da $\frac{|x_1-y_1|}{\sqrt{t}}\, e^{-|x-y|^2/8kt}$ gleichmäßig beschränkt ist. Insbesondere gilt mit $p' = \frac{p}{p-1}$

$$\|\partial_{x_1} E(t,\cdot)\|_{p'} \leq C(t)$$

mit einer Funktion $C : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ (man kann $C(t) = c_0 t^{-\frac{1}{2}-\frac{n}{2p}}$ wählen). Analog erhält man

$$\|E(t,\cdot)\|_{p'} + \|\partial_t E(t,\cdot)\|_{p'} + \|\nabla^2 E(t,\cdot)\|_{p'} \leq C(t) \, .$$

Mit der Hölder-Ungleichung (Satz 7.3) folgt

$$\begin{aligned} |E(t)\, u_0(x) - E(t)\, \varphi_k(x)| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} E(t, x-y)\, |u_0(y) - \varphi_k(y)|\, dy \\ &\leq \|E(t,\cdot)\|_{p'}\, \|u_0 - \varphi_k\|_p \\ &\leq C(t)\, \frac{1}{k} \, , \end{aligned}$$

also die *gleichmäßige* Konvergenz der Funktionenfolge $\big(E(t)\varphi_k\big)_k$ gegen $E(t)u_0$; insbesondere ist $E(t)u_0$ für jedes $t > 0$ stetig. Da $\partial_1\big(E(t)u_0\big) = \big(\partial_1 E(t,\cdot)\big) * u_0$ gelten soll, leiten wir zuerst die Abschätzung

$$|(\partial_1 E(t,\cdot) * u_0 - \partial_1 E(t,\cdot) * \varphi_k)(x)| \leq C(t)\, \frac{1}{k}$$

analog her. Die Funktionenfolge der Ableitungen $\big(\partial_1 E(t,\cdot) * \varphi_k\big)_k = \partial_1\big(E(t)\varphi_k\big)_k$ konvergiert also gleichmäßig gegen die Funktion $\partial_1 E(t,\cdot) * u_0$. Daraus folgt mit Standardargumenten der Analysis, dass $E(t)u_0$ partiell nach x_1 differenzierbar ist, und dass

$$\partial_1\big(E(t,\cdot) * u_0\big) = \partial_1 E(t,\cdot) * u_0$$

gilt. Analoge Aussagen gelten für $\partial_2, \ldots, \partial_n$ und für die Zeitableitung ∂_t. Da diese ersten Ableitungen stetig sind, ist $u(t,x)$ sogar stetig partiell differenzierbar. Höhere Ableitungen werden analog behandelt.

Zum Beweis der Aussage (7.7) benutzen wir wieder (7.9) und folgern mit (7.8) und der Dreiecksungleichung für die L^p-Norm, s. Satz 7.2,

$$\begin{aligned}
\|E(t)u_0 - u_0\|_p &\le \|E(t)(u_0 - \varphi_k)\|_p + \|E(t)\varphi_k - \varphi_k\|_p + \|\varphi_k - u_0\|_p \\
&\le 2\|u_0 - \varphi_k\|_p + \|E(t)\varphi_k - \varphi_k\|_p \\
&\le \frac{2}{k} + \|E(t)\varphi_k - \varphi_k\|_p \,.
\end{aligned}$$

Wählt man zu $\varepsilon > 0$ ein $k \in \mathbb{N}$ mit $k > \frac{4}{\varepsilon}$, bleibt für $\varphi = \varphi_k \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$

$$\|E(t)\varphi - \varphi\|_p < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für } 0 < t < \delta' \tag{7.10}$$

für ein geeignetes $\delta' > 0$ zu zeigen. Dazu benutzen wir wieder Satz 7.15(2), (4) und schätzen mit der Hölder-Ungleichung wie folgt ab:

$$\begin{aligned}
\|E(t)\varphi - \varphi\|_p^p &\le \int_{\mathbb{R}^n} \Big(\int_{\mathbb{R}^n} E(t,y)\,|\varphi(x-y) - \varphi(x)| dy\Big)^p dx \\
&= \int \Big(\int \underbrace{E(t,y)^{1/p'}}_{p'}\ \underbrace{E(t,y)^{1/p}\,|\varphi(x-y) - \varphi(x)|}_{p}\ dy\Big)^p dx \\
&\le \int \Big(\underbrace{\Big(\int E(t,y)dy\Big)^{p/p'}}_{=1} \int E(t,y)\,|\varphi(x-y) - \varphi(x)|^p dy\Big) dx \\
&= \int E(t,y)\Big(\int |\varphi(x-y) - \varphi(x)|^p dx\Big) dy \,.
\end{aligned}$$

Das letzte Integral über $y \in \mathbb{R}^n$ wird aufgespalten in die Anteile über $y \in B_\delta$ und über $y \notin B_\delta$ mit einem geeigneten $\delta > 0$. Da $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ einen kompakten Träger hat und folglich gleichmäßig stetig ist, findet man zu $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit

$$\int |\varphi(x-y) - \varphi(x)|^p\, dx < \Big(\frac{\varepsilon}{4}\Big)^p \quad \text{für alle } y \in B_\delta \,.$$

Für den Anteil $y \notin B_\delta$ gilt

$$\begin{aligned}
\int_{|y|>\delta} E(t,y)\, \|\varphi(\cdot - y) - \varphi\|_p^p\, dy &\le (2\|\varphi\|_p)^p \int_{|y|>\delta} E(t,y)\, dy \\
&= \frac{(2\|\varphi\|_p)^p}{\pi^{n/2}} \int_{|z|>\frac{\delta}{4kt}} e^{-|z|^2} dz \le \Big(\frac{\varepsilon}{4}\Big)^p ,
\end{aligned}$$

falls $0 < t < \delta'$ mit einem geeigneten $\delta' > 0$ erfüllt ist. Insgesamt erhalten wir

$$\begin{aligned}
\|E(t)\varphi - \varphi\|_p^p &\le \Big(\int_{y\in B_\delta} + \int_{y\notin B_\delta}\Big) E(t,y)\Big(\int |\varphi(x-y)-\varphi(x)|^p dx\Big)\, dy \\
&\le \Big(\frac{\varepsilon}{4}\Big)^p \int_{y\in B_\delta} E(t,y)\, dy + \Big(\frac{\varepsilon}{4}\Big)^p \\
&\le 2\Big(\frac{\varepsilon}{4}\Big)^p
\end{aligned}$$

und folglich (7.10). Damit ist (7.7) bewiesen. ■

Als Beispiel einer *inhomogenen Wärmeleitungsgleichung* betrachten wir das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned}
u_t - k\Delta u &= f(t,x) \quad \text{in } (0,\infty)\times\mathbb{R}^n \\
u(0) &= 0\,.
\end{aligned} \tag{7.11}$$

Nach Duhamel's Prinzip, vgl. §3.4 zur Wellengleichung, kann man die Lösung in der Form $u(t,\cdot) = \int_0^t U(t,s,\cdot)ds$ gewinnen, wobei $U(t,s,\cdot)$ die Wärmeleitungsgleichung

$$U_t - k\Delta U = 0, \quad U(s,s,\cdot) = f(s,\cdot)$$

löst. Nach Satz 7.16 oder Satz 7.19 ist

$$U(t,s,\cdot) = E(t-s)f(s,\cdot) = \int_{\mathbb{R}^n} E(t-s,\, x-y)\, f(s,y)\, dy$$

eine Lösung, woraus

$$u(t,x) = \int_0^t E(t-s,\cdot) * f(s,\cdot)(x)\, ds \tag{7.12}$$

folgt. Eine Rechnung zeigt sofort, dass u (7.11) löst. Ein Problem entsteht jedoch z.B. bei der Zeitableitung

$$\int_0^t \partial_t E(t-s,\cdot) * f(s,\cdot)(x)\, ds \approx \int_0^t \frac{1}{t-s}(\ldots)\, ds\,,$$

welche ein singuläres Integral liefert. Unter geeigneten Voraussetzungen an f erhält man den folgenden Satz, den wir nicht beweisen wollen.

Satz 7.20 *Sei $f \in BC(\overline{\mathbb{R}}_+ \times \mathbb{R}^n)$ lokal Hölder-stetig bzgl. x, d.h., es gibt ein $\delta > 0$ und zu jedem Kompaktum $K \subset \mathbb{R}^n$ ein $c = c(K)$ mit*

$$|f(t,x) - f(t,y)| \le c\,|x-y|^\delta \quad \textit{für alle } x,y \in K \textit{ und } t \ge 0\,.$$

Dann löst u aus (7.12) die inhomogene Wärmeleitungsgleichung

$$u_t - k\Delta u = f \quad \textit{in } \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n,\ u(0) = 0\,.$$

7.4 Das Maximumprinzip und die Eindeutigkeit von Lösungen

Satz 7.21 (Schwaches Maximumprinzip) *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, sei $T > 0$, $\Omega_T = (0,T) \times \Omega$ und sei*

$$u \in C^0(\overline{\Omega_T}) \quad \text{mit} \quad u_t \in C^0(\Omega_T),\ \nabla^2 u \in C^0(\Omega_T)$$

gegeben ($\nabla^2 u \in C^0(\Omega_T)$ bedeutet $\partial_i \partial_j u \in C^0(\Omega_T)$ für alle $1 \leq i,\ j \leq n$). Erfüllt u die Ungleichung

$$u_t - k\Delta u \leq 0 \quad \text{in } \Omega_T\,,$$

gilt

$$\boxed{\max_{\overline{\Omega_T}} u = \max_{\partial_p \Omega_T} u\,,} \tag{7.13}$$

wobei

$$\partial_p \Omega_T = \big\{(t,x) \in \overline{\Omega_T} : t = 0 \quad \text{oder} \quad x \in \partial\Omega\big\} = (\{0\} \times \overline{\Omega}) \cup ([0,T] \times \partial\Omega)$$

den parabolischen Rand *von Ω_T bezeichnet.*

Beweis Im ersten Teil des Beweises gelte sogar

$$u_t - k\Delta u < 0 \quad \text{in } \Omega_T\,.$$

Dann nimmt u für jedes $\varepsilon \in (0,T)$ sein Maximum in $\overline{\Omega_{T-\varepsilon}}$ in einem Punkt $(t,x) \in \overline{\Omega_{T-\varepsilon}}$ an. Falls (t,x) ein innerer Punkt von $\overline{\Omega_{T-\varepsilon}}$ wäre, gilt in $(t,x) \in \Omega_{T-\varepsilon}$

$$u_t(t,x) = 0 \quad \text{und} \quad \Delta u(t,x) \leq 0$$

im Widerspruch zur Voraussetzung $(u_t - k\Delta u)(t,x) < 0$. Wäre $t = T - \varepsilon$, würde $u_t(t,x) \geq 0$ und wie zuvor $\Delta u(t,x) \leq 0$ gelten, woraus wieder ein Widerspruch zu $(u_t - k\Delta u)(t,x) < 0$ folgen würde. Also liegt (t,x) auf dem parabolischen Rand, und es gilt

$$\max_{\overline{\Omega_{T-\varepsilon}}} u = \max_{\partial_p \Omega_{T-\varepsilon}} u \leq \max_{\partial_p \Omega_T} u \quad \text{für alle } \varepsilon \in (0,T)\,.$$

Da u stetig auf $\overline{\Omega_T}$ ist, folgt für $\varepsilon \to 0+$ die Behauptung.

Nun gelte $u_t - k\Delta u \leq 0$ in Ω_T. Statt u betrachte man die Funktion

$$v = u - \varepsilon t, \quad \varepsilon > 0,$$

für die

$$v_t - k\Delta v = u_t - k\Delta u - \varepsilon < 0 \quad \text{in } \Omega_T$$

gilt. Nach dem ersten Teil des Beweises folgt

$$\max_{\overline{\Omega_T}} (u - \varepsilon t) = \max_{\partial_p \Omega_T} (u - \varepsilon t) \leq \max_{\partial_p \Omega_T} u\,.$$

Im Grenzwert $\varepsilon \to 0+$ erhält man die Behauptung. ■

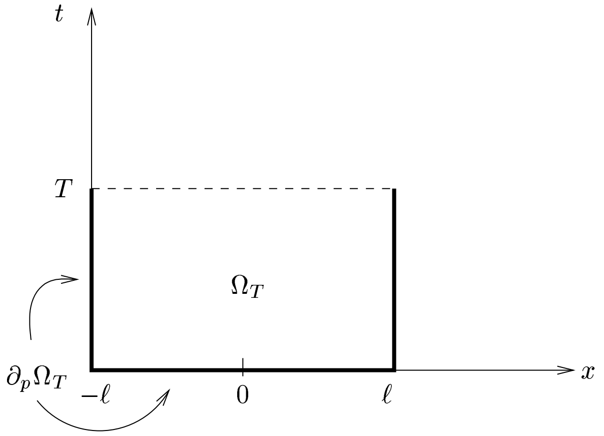


Abbildung 7.2: Der parabolische Rand $\partial_p\Omega_T$ für $\Omega = (_\ell, \ell) \subset \mathbb{R}^1$

Korollar 7.22 (A priori-Abschätzungen und Eindeutigkeit in beschränkten Gebieten) *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, und sei $u \in C^0(\overline{\Omega_T})$ mit $\partial_t u$, $\nabla^2 u \in C^0(\Omega_T)$ eine Lösung des Anfangsrandwertproblems*

$$\begin{aligned} u_t - k\Delta u &= f && \textit{in } \Omega_T \\ u(0) &= u_0 && \textit{für } t = 0 \\ u &= g && \textit{auf } (0,T) \times \partial\Omega \end{aligned}$$

mit stetigen Funktionen $f \in C^0(\overline{\Omega_T})$, $u_0 \in C^0(\overline{\Omega})$ und $g \in C^0([0,T] \times \partial\Omega)$. Dann gilt die a priori-Abschätzung

$$\|u\|_\infty \leq \|u_0\|_\infty + \|g\|_\infty + T\|f\|_\infty \,. \tag{7.14}$$

Insbesondere ist u eindeutig durch die Daten f, u_0 und g bestimmt.

Beweis Die Funktion $w_\pm = \pm u - t\|f\|_\infty$ genügt den Voraussetzungen von Satz 7.21; insbesondere gilt

$$(w_\pm)_t - k\Delta w_\pm = \pm f - \|f\|_\infty \leq 0 \quad \text{in } \Omega_T \,.$$

Also liefert Satz 7.21 die Abschätzung

$$(\pm u - t\|f\|_\infty)(t,x) \leq \|u_0\|_\infty + \|g\|_\infty$$

und damit (7.14). Auf Grund der Linearität des Problems reicht es, zum Beweis der Eindeutigkeit den Fall $f = 0$, $u_0 = 0$, $g = 0$ zu betrachten. In diesem Fall liefert (7.14) jedoch sofort die Eindeutigkeit $u = 0$. ■

Das schwache Maximumprinzip (Satz 7.21) führt in Korollar 7.22 zur Eindeutigkeitsaussage für die Wärmeleitungslgleichung in beschränkten Gebieten. Zusammen mit einer weitern Bedingung, einer Wachstumsabschätzung für $|x| \to \infty$, werden wir daraus die Eindeutigkeit für $\Omega = \mathbb{R}^n$ ableiten.

Satz 7.23 (Schwaches Maximumprinzip und Eindeutigkeit für $\Omega = \mathbb{R}^n$)
Sei $\Omega = \mathbb{R}^n$ und sei $u \in C^0(\overline{\Omega_T})$ mit u_t, $\nabla^2 u \in C^0(\Omega_T)$ und

$$u_t - k\Delta u \leq 0 \quad \text{in } \Omega_T = (0,T) \times \mathbb{R}^n$$

gegeben. Ferner gelte die bzgl. $t \in [0,T)$ gleichmäßige Abschätzung

$$u(t,x) \leq Me^{a|x|^2} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n \tag{7.15}$$

mit Konstanten $M, a \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\boxed{\max_{\overline{\Omega_T}} u = \max_{\Omega} u(0,\cdot)\,.} \tag{7.16}$$

Insbesondere ist eine Lösung u der Wärmeleitungsgleichung im $\mathbb{R}^n$ innerhalb der Funktionenklasse

$$C^0_{M,a}(\overline{\Omega_T}) = \{u \in C^0(\overline{\Omega_T}) : \quad \text{es gibt } M, a \in \mathbb{R} : \ |u(t,x)| \leq Me^{a|x|^2} \ \text{in } \mathbb{R}^n\}$$

eindeutig.

Beweis Um in (7.15) mit exponentiell anwachsenden Termen ($a > 0$) arbeiten zu können, wird die Funktion

$$\tilde{E}(t,x) = \frac{1}{\big(4\pi k(2T-t)\big)^{n/2}} \exp\Big(+ \frac{|x|^2}{4k(2T-t)}\Big)$$

für $x \in \mathbb{R}^n$, $0 < t < 2T$, benutzt. Da $\tilde{E}(t,x_1,\dots,x_n) = E(2T-t, ix_1,\dots,ix_n)$ gilt, erkennt man $\tilde{E}$ sofort als Lösung der Wärmeleitungsgleichung in $(0,2T)$. Zur Anwendung von Satz 7.21 betrachten wir für jedes $y \in \mathbb{R}^n$ die Kugel $G = B_\rho(y)$, $\rho > |y| > 0$, sowie im Raum-Zeit-Zylinder $G_T = (0,T) \times G$ die Funktion

$$v_\mu(t,x) = u(t,x) - \mu\tilde{E}(t,x) \quad \text{mit } \mu > 0\,.$$

Da $(\partial_t - k\Delta)v_\mu \leq 0$ in G_T gilt, liefert Satz 7.21 die Aussage

$$\max_{\overline{G_T}} v_\mu = \max_{\partial_p G_T} v_\mu\,.$$

Dabei gelten für v_μ auf $\partial_p G_T$ die Ungleichungen

$$v_\mu(0,x) \leq u(0,x) \quad \text{für } x \in G$$

sowie für $x \in \partial G$, $t \in (0,T)$

$$\begin{aligned} v_\mu(t,x) &\leq Me^{a|x|^2} - \frac{\mu}{\big(4\pi k(2T-t)\big)^{n/2}} \exp\frac{|x|^2}{4k(2T-t)} \\ &\leq Me^{a(|y|+\rho)^2} - \frac{\mu}{(8\pi kT)^{n/2}} \exp\frac{(\rho-|y|)^2}{8kT}\,. \end{aligned}$$

Ist jetzt

$$a < \frac{1}{8kT}$$

erfüllt und wählt man $\rho = \rho(a, y, T, \mu, M)$ genügend groß, folgen die Abschätzungen $\max\limits_{\partial_p G_T} v_\mu \le \max\limits_{\overline{G}} u(0, x)$ und mit Satz 7.21

$$\max_{\overline{G_T}} v_\mu \le \max_{\Omega} u(0, \cdot)\,.$$

Im Limes $\mu \to 0+$ ersieht man daraus die Behauptung (7.16). Falls die Annahme $a < \frac{1}{8kT}$ nicht erfüllt ist, folgt mit einer Zahl $\tau \in \left(0, \frac{1}{8ka}\right)$ in endlich vielen Schritten aus

$$u(t, x) \le \max_{\Omega} u(t - \tau, \cdot) \le \ldots \le \max_{\Omega} u(0, \cdot)$$

die erste Behauptung (7.16).

Ist $u \in C^0_{M,a}(\overline{\Omega_T})$ eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung, gilt (7.16) für $\pm u$. Daraus folgt im Fall $u_0 = 0$ sofort $u \equiv 0$. ∎