

Differenzen- und Differentialgleichungen

Version 1.6 vom 18. Oktober 2003

Karl Dietrich <dietrich@vwl.uni-hannover.de>

Inhaltsverzeichnis

1	Differenzengleichungen	1
1.1	Begriffe und Bezeichnungen	1
1.1.1	Operatoren	1
1.1.1.1	Algebraische Eigenschaften von Operatoren	2
1.1.1.2	Differenz-Operator	2
1.1.1.3	Shift-Operator	3
1.1.1.4	Lag-Operator	3
1.1.1.5	Zentraldifferenzen-Operator	3
1.1.1.6	Differenzen und Differentiale	3
1.1.2	Subskriptschreibweise	4
1.1.3	Klassen von Differenzengleichungen	5
1.1.4	Lösung einer Differenzengleichung	6
1.2	Lineare Dzgl	7
1.2.1	Allgemeine Lösung	7
1.2.2	Homogene Differenzengleichung	8
1.2.3	Inhomogene Differenzengleichung	9
1.3	Aufgaben	10
2	Lineare Dzgl erster Ordnung	11
2.1	Homogener Teil	11
2.1.1	Iteration	12
2.1.2	Zeitpfade der allgemeinen Lösung	12
2.2	Spezielle Lösung	14
2.2.1	Methode der unbestimmten Koeffizienten	14
2.2.1.1	Störfunktion ist konstant	14
2.2.1.2	Störfunktion ist ein Polynom	15
2.2.1.3	Störfunktion enthält Potenzen	16
2.2.1.4	Störfunktion enthält periodische Funktionen	18
2.2.1.5	Kombinationen der Grundtypen	19
2.2.2	Operator-Methode	19
2.2.3	Variation der Parameter	20

2.3	Allgemeine Lösung	21
2.3.1	Reduktion der Ordnung	21
2.3.2	Erzeugende Funktion	23
2.3.3	Start- oder Randbedingung	25
2.4	Anwendungen	26
2.4.1	Dynamik des Einkommensmultiplikators	27
2.4.2	Cobweb Modell	29
2.5	Aufgaben	31
3	Lineare Dzgl zweiter Ordnung	32
3.1	Homogener Teil	32
3.1.1	Charakteristisches Polynom	33
3.1.1.1	Positive Diskriminante	34
3.1.1.2	Diskriminante ist Null	37
	Exkurs: komplexe Zahlen	38
3.1.1.3	Negative Diskriminante	42
3.1.2	Klassifikation der Zeitpfade	44
3.2	Spezielle Lösung	45
3.2.1	Methode der unbestimmten Koeffizienten	45
3.2.2	Operator Methode	47
3.2.3	Variation der Parameter	48
3.3	Allgemeine Lösung	49
3.3.1	Reduktion der Ordnung	49
3.3.2	Erzeugende Funktion	50
3.3.3	Start- oder Randbedingungen	50
3.4	Anwendungen	51
3.5	Aufgaben	54
4	Systeme linearer Dzgl	56
4.1	Eigenwerte und -vektoren	57
4.1.1	Eigenwerte	57
4.1.2	Charakteristisches Polynom	58
4.1.3	Eigenvektoren	59
4.2	Dzgl System 2. Ordnung	60
4.2.1	Variablentransformation	61
4.2.2	Dzgl System n -ter Ordnung	64
4.2.3	Lineare Unabhängigkeit von Eigenvektoren	65
4.2.4	Lösung der n -dimensionalen linearen Dzgl	65
4.2.5	Lösung in Gestalt von Matrizenpotenzen	66
4.3	Sonderfälle bei Eigenwerten	68
4.3.1	Nicht diagonalisierbare (2×2) -Matrizen	68

4.3.2	Lösung nicht diagonalisierbarer Dzgl	72
4.4	Komplexe Eigenwerte und -vektoren	73
4.4.1	Komplexe Eigenwerte bei (2×2) -Matrizen	74
4.4.2	Komplexe Eigenvektoren	74
4.4.3	Dzgl Systeme mit komplexen Eigenwerten	76
4.4.4	Darstellung der Lösung ohne imaginäre Einheit	77
4.5	Markov-Prozesse	78
4.6	Aufgaben	82
5	Differentialgleichungen	83
5.1	Spezielle Dgl erster Ordnung	84
5.1.1	Lineare Dgl	84
5.1.2	Bernoulli-Dgl	86
5.1.3	Trennbare Variablen	88
5.1.4	Riccati-Dgl	89
5.1.5	Aufgaben	89
5.2	Exakte (totale) Dgl	90
5.2.1	Integrierende Faktoren	92
5.2.2	Homogene Dgl	93
5.3	Geometrische Darstellungen	93
5.4	Qualitative Eigenschaften	97
5.4.1	Reduktion auf Systeme erster Ordnung	97
5.4.2	Existenz von Lösungen	98
5.4.3	Parameterabhängigkeit	99
5.4.4	Begriff der allgemeine Lösung einer Dgl	99
5.5	Besonderheiten autonomer Dgl	101
5.5.1	Trajektorien	101
5.5.2	Klassifikation von Trajektorien	102
5.5.3	Phasenportait	103
5.6	Ebene autonome Systeme	105
5.6.1	Hamiltonsche Systeme	108
5.6.2	Erste Integrale	109
5.6.3	Lineare Systeme	110
5.6.3.1	Zwei verschiedene reelle Eigenwerte	111
5.6.3.2	Halbeinfacher reeller Eigenwert	114
5.6.3.3	Einfacher reeller Eigenwert	114
5.6.3.4	Konjugiert komplexes Eigenwertpaar	115
5.6.3.5	Singuläre Matrix	117
5.6.3.6	Klassifikation der Phasenportraits	118

A	Antworten	119
A.1	Ergebnisse	119
A.2	Hinweise	122
A.3	Lösungen	125
B	Bibliographie	141

Kapitel 1

Differenzengleichungen

Wir behandeln ausschließlich lineare Differenzengleichungen (Dzgl) mit konstanten Koeffizienten. Die Darstellung orientiert sich dabei an Kapitel 23 des Lehrbuches von [Simon und Blume \(1994\)](#) und an Teil 1 des Lehrbuches von [Gandolfo \(1997\)](#).

Differenzengleichungen (auch nicht lineare) spielen vor allem in der dynamischen Ökonomik eine Rolle. Die dynamische Ökonomik ist dabei der Inbegriff aller ökonomischen Prozesse, deren zeitliches Verhalten durch Funktionalgleichungen beschrieben wird, bei welchen die Variablen zu unterschiedlichen Zeitpunkten eine wesentliche Rolle spielen. Funktionalgleichungen sind Gleichungen, bei denen als Unbekannte Funktionen statt Zahlen oder Vektoren¹ vorkommen.

1.1 Begriffe und Bezeichnungen

1.1.1 Operatoren

Wir kennen bereits die sogenannten arithmetischen Operationen wie Addition und Multiplikation. Diese können nicht nur auf Zahlen, sondern auch auf Funktionen angewandt werden. Für die Addition steht der Operator $+$. Sind f und g zwei reellwertige Funktionen mit gemeinsamem Definitionsbereich (beispielsweise \mathbb{R}^n , dann ist durch $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ die Summe der beiden Funktionen erklärt. Wiederum ist $+$ der Operator und die beiden

¹Man kann Funktionalgleichungen auch als Gleichungssysteme auffassen, deren Unbekannte Vektoren mit unendlich vielen Komponenten sind. Eine Differenzengleichung ist nach dieser Auffassung ein Gleichungssystem mit abzählbar unendlicher Anzahl von Gleichungen und Unbekannten, während eine Differentialgleichung ein Kontinuum von Gleichungen und Unbekannten bildet.

Funktionen f und g sind die Operanden. Das Ergebnis der Summe beider Funktionen ist eine neue Funktion.

Für Funktionen gibt es eine schier unüberschaubare Fülle von Operatoren die bei Operationen bei Zahlen nicht vorkommen, beispielsweise Integration und Differentiation.

1.1.1.1 Algebraische Eigenschaften von Operatoren

Zwei Operatoren A und B sind gleich ($A = B$), falls für eine beliebige Funktion f gilt $Af = Bf$.

Der Einheitsoperator 1 lässt eine beliebige Funktion f unangetastet.

Der Nulloperator O macht jede Funktion f zur konstanten Nullfunktion 0 .

Sind A und B zwei Operatoren, dann wird das Operatorprodukt $A \cdot B$ definiert durch das hintereinander Ausführen der beiden Operationen: $(A \cdot B)f = A(Bf)$. Dies wird auch als Verkettung von Operatoren bezeichnet. Im Allgemeinen ist $A \cdot B \neq B \cdot A$, d.h. die Verkettung von Operatoren ist *nicht* kommutativ.

Der Operator A ist linear, wenn für beliebige Funktionen f und g mit gleichem Definitionsbereich und beliebige reelle Zahlen α gilt $A(f+g) = Af + Ag$ und $A(\alpha f) = \alpha Af$. Beispielsweise ist das Integral ein linearer Operator.

Sind A und B Operatoren und gilt $(AB)f = f$ für eine beliebige Funktion f , dann bezeichnet man B als den inversen Operator von A und schreibt ihn als A^{-1} oder als $1/A$. Im allgemeinen darf man nicht davon ausgehen, dass dann A auch der inverse Operator von B ist, denn dazu muss $(BA)f = f$ sein.

1.1.1.2 Differenz-Operator

Ist $f(x)$ eine Funktion, dann wird der Differenz-Operator Δ definiert durch

$$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x)$$

dabei ist h eine beliebige positive Zahl und wird als Differenz-Intervall bezeichnet.

Ist speziell $f(x) = x$ die Identitätsfunktion, gilt $\Delta f(x) = \Delta x = x+h-x = h$. Mehrfache (n -fache) Differenzen sind auch möglich, sie werden mit $\Delta^n f(x) = \Delta[\Delta^{n-1} f(x)]$ bezeichnet. Dabei ist beispielsweise

$$\Delta^2 f(x) = \Delta(\Delta f(x)) = \Delta(f(x+h) - f(x)) = f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)$$

1.1.1.3 Shift-Operator

Der Shift-Operator S ist definiert als $Sf(x) = f(x + h)$. Für beliebige reelle Zahlen ist $S^n f(x) = f(x + nh)$ das n -fache des Shift-Operators. Für die Beziehungen zwischen Shift- und Differenz-Operator gilt

$$\Delta = S - 1 \quad \text{und} \quad S = 1 + \Delta$$

1.1.1.4 Lag-Operator

Der Lag-Operator L ist definiert durch $Lf(x) = f(x - h)$. Auch hierfür sind die Potenzen für beliebige reelle Zahlen n definiert als $L^n f = L(L^{n-1} f)$. Der Lag- und der Shift-Operator sind invers zueinander $L = S^{-1}$ und $S = L^{-1}$.

$$\begin{aligned} (LS)f(x) &= L(Sf(x)) = L(f(x + h)) = f(x) \quad \text{und} \\ (SL)f(x) &= S(Lf(x)) = S(f(x - h)) = f(x) \end{aligned}$$

Zwischen Lag und Differenz Operator² gibt es die Beziehungen

$$\Delta = L^{-1} - 1 = \frac{1 - L}{L} \quad \text{und} \quad L = \frac{1}{1 + \Delta}$$

1.1.1.5 Zentraldifferenzen-Operator

Der Zentraldifferenzen-Operator δ ist definiert als $\delta f(x) = f(x + h/2) - f(x - h/2)$. Seine Beziehungen zum Differenz- Lag- und Shift-Operator lautet:

$$\delta = S^{\frac{1}{2}} - S^{-\frac{1}{2}} = \Delta S^{-\frac{1}{2}}$$

1.1.1.6 Differenzen und Differentiale

Wir kennen den Ableitungs-Operator D

$$Df(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

Auch Ableitungen höherer Ordnung lassen sich als Grenzwerte von Quotienten bestimmter Differenzen anschreiben.

Auch der Differential-Operator (der Punkte einer Tangente benennt) d ist mittels Differenzen darstellbar:

$$df(x) = f'(x)\Delta x = f'(x)h = Df(x)h$$

²Hin und wieder wird der Differenz-Operator auch im Sinne der Rückwärts-Differenz definiert, also $\Delta f(x) = f(x) - f(x - h)$. Wir wollen aber bei der eingangs getroffenen Konvention bleiben und unter Δ nur Vorwärts-Differenzen verstehen.

Es liegt daher nahe die üblichen Ableitungs-Regeln auch durch analoge Differenzen zu formulieren. Dies zeigt uns dann nicht nur die enge Verwandtschaft zwischen Differenzen- und Differentialgleichungen, sondern ist auch für numerische Berechnungen von großer Bedeutung.

1.1.2 Subskriptschreibweise

Wird in der Funktion $f(x)$ die Variablentransformation $x = t_0 + ht$ mit festem t_0 und h von x nach t durchgeführt, dann lassen sich die Funktionswerte mit t indizieren:

$$y_t = f(t_0 + ht)$$

Anwendung des Differenz-Operators ergibt in der Subskriptschreibweise

$$\Delta y_t = f(t_0 + h(t+1)) - f(t_0 + ht) = y_{t+1} - y_t$$

Der Shift-Operator führt in dieser Schreibweise zu

$$S y_t = y_{t+1}$$

und in dieser Schreibweise werden die meisten Differenzengleichungen auch angeschrieben. Der Lag-Operator führt in dieser Schreibweise zu

$$L y_t = y_{t-1}$$

Man beachte: die neue Variable t muss nicht ganzzahlig sein. Da sie aus einer linearen Transformation aus der (reellen) Variablen x hervorgeht, ist sie diskret oder stetig, je nachdem ob x diskret oder stetig ist. Ein wichtiger Spezialfall ist jedoch, wenn man t als natürliche Zahl (inklusive Null) auffasst. Wir müssen uns nicht die Frage stellen, ob die Zeit t eine diskrete oder eine stetige Variable *ist*. Diese Frage mögen die Philosophen weiter erörtern. Wesentlich ist für uns lediglich, dass wir sagen können, die Zeit spielt zu unterschiedlichen Zeitpunkten für den dynamischen Prozess eine wesentliche Rolle. Allerdings sind alle unsere Betrachtungen invariant gegenüber der Umkehrung der Zeitrichtung. Dies unterscheidet die Größe t ganz grundsätzlich vom Begriff der historischen Zeit, die unwiederbringlich dahinrinnt.

Um die Darstellung zu vereinfachen, wird bei unserer Betrachtung von Differenzengleichungen generell $t_0 = 0$, $h = 1$ und $t \in \mathbb{N}$ gesetzt. Diese Setzungen lassen sich bei jeder konkreten Anwendung durch geeignete Wahl der ökonomischen Größen im zugrunde liegenden Modell erreichen. Dadurch wird die Subskriptschreibweise schlicht zu $y_t = f(t)$.

1.1.3 Klassen von Differenzengleichungen

Eine Differenzengleichung ist eine implizite Beziehung

$$F(t, y_t, y_{t+1}, y_{t+2}, \dots, y_{t+n}) = 0$$

zwischen den Funktionswerten einer unbekannten Funktion y zu den Zeitpunkten (an den Stellen) $t, t+1, t+2, \dots, t+n$. Die Differenz zwischen dem größten und kleinsten Zeitpunkt n heißt Ordnung der Differenzengleichung.

Kann F nach y_{t+n} aufgelöst werden, dann heißt die Beziehung

$$y_{t+n} = G(t, y_t, y_{t+1}, \dots, y_{t+n-1})$$

explizite Differenzengleichung.

Eine Differenzengleichung heißt autonom, wenn F nicht direkt von t abhängt, sie also als

$$G(y_t, y_{t+1}, y_{t+2}, \dots, y_{t+n}) = 0$$

geschrieben werden kann.

Eine besonders wichtige Klasse bilden die linearen Differenzengleichungen. Sie lassen sich als

$$a_n(t)y_{t+n} + a_{n-1}(t)y_{t+n-1} + \dots + a_0(t)y_t = R(t)$$

anschreiben. Die rein zeitabhängige Funktion $R(t)$ auf der rechten Seite wird Störfunktion genannt.

Wird der Shift-Operator eingesetzt, dann ergibt sich

$$\begin{aligned} a_n(t)S^n y_t + a_{n-1}(t)S^{n-1} y_t + \dots + a_0(t)y_t &= R(t) \\ [a_n(t)S^n + a_{n-1}(t)S^{n-1} + \dots + a_0(t)] y_t &= R(t) \end{aligned}$$

im Wesentlichen ein Polynom vom Grad n im Shift Operator. Diese Darstellung kann die Lösung der Differenzengleichung in bestimmten Fällen erheblich vereinfachen oder gar erst ermöglichen.

Ist bei einer linearen Differenzengleichung die rechte Seite Null, bezeichnet man sie als homogen. Sind die Koeffizienten a_i auf der linken Seite nicht von der Zeit abhängig, so liegt eine lineare Differenzengleichung mit konstanten Koeffizienten vor. Diese Klasse wird uns am meisten beschäftigen, da sie ganz allgemein und explizit lösbar ist. Bei allen anderen Arten von Differenzengleichungen gibt es keinen allgemeinen Lösungsweg, sondern lediglich fallweise unterschiedliche Lösungsansätze. Daher ist das Lösen von Differenzengleichungen eine Kunst und Mathematiker, denen dies gelingt, genießen zu Recht die Bewunderung, die ihnen zuteil wird.

1.1.4 Lösung einer Differenzengleichung

Eine Funktion $\lambda(t)$ ist eine Lösung der Differenzengleichung

$$F(t, y_t, y_{t+1}, y_{t+2}, \dots, y_{t+n}) = 0$$

wenn sie $F(\cdot) = 0$ für alle t identisch erfüllt. Wird also λ in F eingesetzt, ergibt sich für beliebiges $t \in \mathbb{N}$

$$F(t, \lambda(t), \lambda(t+1), \dots, \lambda(t+n)) = 0$$

Es erhebt sich natürlich die Frage, ob eine gegebene Differenzengleichung $F(\cdot) = 0$ überhaupt lösbar ist. Wenn die Beziehung F in y_j stetig ist, dann gibt es auch (mindestens) eine Lösung. Allerdings darf man nicht erwarten, dass diese Lösung als ein geschlossener analytischer Ausdruck angeschrieben werden kann. Über die Lösung lassen sich auch ohne deren genaue Kenntnis eine ganze Reihe von Aussagen machen.

Die allgemeine Lösung einer Differenzengleichung der Ordnung n enthält genau n beliebige einperiodige Konstanten $c_i(t) = c_i(t+1)$, $i = 1, \dots, n$. Diese unbestimmten Konstanten c_i können durch Vorgabe von n Randbedingungen der Art $y(k_1) = b_1, \dots, y(k_n) = b_n$ festgelegt werden. Liegt eine Differenzengleichung n -ter Ordnung $F(\cdot) = 0$ und n Randbedingungen vor, dann spricht man von einer Randwertaufgabe oder von einem Randwertproblem. Wenn die Randbedingungen für die ersten n Zeitpunkte $k_1 = 0, k_2 = 1, \dots, k_n = n-1$ gegeben sind, nennen wir sie Startbedingungen. Sind nun in einer allgemeinen Lösung die beliebigen Konstanten durch Start- oder Randwerte festgelegt, so nennt man diese Funktion eine partikuläre Lösung der Differenzengleichung.

Beispiel

Betrachte die homogene Differenzengleichung erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten $\Delta y_t = a$. Gesucht ist eine Funktion $\lambda(t)$, deren erste Differenz für beliebiges t gleich der Konstanten a ist. Wir probieren eine Gerade in t , also $\lambda(t) = at + c$ mit der unbestimmten Konstanten c und erhalten $\Delta \lambda(t) = \lambda(t+1) - \lambda(t) = [a(t+1) + c] - [at + c] = a$. Somit ist $\lambda(t) = at + c$ und c beliebig eine allgemeine Lösung der Differenzengleichung $\Delta y_t = a$. Wir erhalten bei Vorgabe eines Startwertes, beispielsweise $y_0 = 20$, eine Gleichung zur Bestimmung der Größe c , denn für $t = 0$ muss nun $\lambda(0) = 20$ gelten. Einsetzen ergibt $a \cdot 0 + c = 20$. Folglich ist $\lambda(t) = at + 20$ eine partikuläre Lösung.

Betrachte nun die lineare Differenzengleichung zweiter Ordnung $\Delta^2 y_t = 0$. Als allgemeine Lösung ist eine Funktion $\lambda(t)$ gesucht, deren zweite Differenz

für beliebiges t den Wert Null annimmt. Wir probieren nochmals eine Gerade in t , diesmal jedoch mit zwei unbestimmten Koeffizienten c_1 und c_2 , also $\lambda(t) = c_1 t + c_2$. Durch Einsetzen in die Differenzengleichung prüfen wir, ob eine allgemeine Lösung vorliegt. $\Delta^2 \lambda(t) = \lambda(t+2) - 2\lambda(t+1) + \lambda(t) = [c_1(t+2) + c_2] - 2[c_1(t+1) + c_2] + [c_1 t + c_2] = c_1[(t+2) - 2(t+1) + t] + c_2[1 - 2 + 1] = 0$. Die beiden unbestimmten Koeffizienten c_1 und c_2 können durch die Vorgabe zweier Randwerte, beispielsweise $y_2 = 5$ und $y_8 = 3$ festgelegt werden. Wir erhalten das Gleichungssystem

$$\lambda(2) = 2c_1 + c_2 = 5$$

$$\lambda(8) = 8c_1 + c_2 = 3$$

in den Unbekannten c_1 und c_2 . Seine Lösung (mit Gauß-Algorithmus) lautet $c_1 = -1/3$ und $c_2 = 17/3$. Dies in λ eingesetzt ist dann eine partikuläre Lösung der Differenzengleichung zweiter Ordnung.

1.2 Lineare Differenzengleichungen

Wie bereits erwähnt, werden hier ausschließlich lineare Differenzengleichungen mit konstanten Koeffizienten behandelt. Eine solche Differenzengleichung der Ordnung n hat die Form

$$a_n y_{t+n} + a_{n-1} y_{t+n-1} + \cdots + a_0 y_t = R(t)$$

Die Koeffizienten a_0, \dots, a_n auf der linken Seite hängen nicht von t ab (sind also konstant). Weiterhin wird $a_0 \neq 0$ und $a_n \neq 0$ vorausgesetzt, sonst wäre die Ordnung kleiner als n , die übrigen Koeffizienten können auch Null sein. Da $a_n \neq 0$, kann man die Gleichung durch a_n dividieren, ohne ihre Lösungen zu verändern. Wir werden also ohne Einschränkung immer eine normierte Differenzengleichung betrachten, bei der $a_n = 1$ ist.

1.2.1 Allgemeine Lösung

Für das Lösen von Differenzengleichungen des unterstellten Typs ist es erforderlich zwischen der originalen (im allgemeinen inhomogenen) Dzgl

$$y_{t+n} + a_{n-1} y_{t+n-1} + \cdots + a_0 y_t = R(t)$$

und der zugehörigen homogenen Dzgl

$$y_{t+n} + a_{n-1} y_{t+n-1} + \cdots + a_0 y_t = 0$$

zu unterscheiden. Die homogene Dzgl entsteht, indem die rechte Seite der originalen Dzgl (die Störfunktion $R(t)$) durch 0 ersetzt wird. Manchmal wird die einer inhomogenen Dzgl zugehörige homogene auch als die reduzierte Gleichung der (originalen) Differenzengleichung bezeichnet.

1.2.2 Homogene Differenzengleichung

Für die allgemeine Lösung einer homogenen Differenzengleichung der Ordnung n gibt es mehrere Sätze, die wir ohne (die recht einfachen) Beweise auflisten. Zunächst wird jedoch der Begriff der linearen Abhängigkeit und der linearen Unabhängigkeit von Vektoren auf Funktionen übertragen.

Definition (linear unabhängige Funktionen)

Die n Funktionen $f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)$ heißen linear unabhängig, wenn ihre Linearkombination

$$c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) + \dots + c_n f_n(t)$$

nur dann für beliebiges t gleich Null wird, wenn alle c_i Null sind.

Satz

Angenommen, $f_1(t)$ und $f_2(t)$ sind zwei Lösungen der homogenen Differenzengleichung der Ordnung n

$$y_{t+n} + a_{n-1}y_{t+n-1} + \dots + a_0 y_t = 0$$

Dann ist auch ihre Linearkombination eine Lösung.

Satz (Superpositionsprinzip)

Die allgemeine Lösung der homogenen Differenzengleichung n -ter Ordnung ist eine Linearkombination

$$\Lambda(t, c_1, \dots, c_n) = c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) + \dots + c_n f_n(t)$$

linear unabhängiger Lösungen $f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)$ von ihr.

Satz (Casorati Determinante)

Angenommen, $f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)$ sind n Lösungen der homogenen Differenzengleichung n -ter Ordnung. Sie sind genau dann linear unabhängig, wenn ihre Casorati-Determinante $C(t)$

$$\begin{vmatrix} f_1(t) & f_2(t) & \dots & f_n(t) \\ f_1(t+1) & f_2(t+1) & \dots & f_n(t+1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_1(t+n-1) & f_2(t+n-1) & \dots & f_n(t+n-1) \end{vmatrix}$$

für alle zulässigen t ungleich Null ist.

1.2.3 Inhomogene Differenzengleichung

Satz

Ist $\bar{\lambda}(t)$ eine spezielle Lösung der originalen Differenzengleichung

$$y_{t+n} + a_{n-1}y_{t+n-1} + \cdots + a_0y_t = R(t)$$

und ist $\Lambda(t, c_1, \dots, c_n)$ die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Dzgl, dann lautet die allgemeine Lösung ℓ der originalen Dzgl

$$\ell(t) = \bar{\lambda}(t) + \Lambda(t, c_1, \dots, c_n)$$

Die allgemeine Lösung $\ell(t)$ einer (inhomogenen) linearen Differenzengleichung der Ordnung n ist somit einfach die Summe einer speziellen Lösung und der allgemeinen Lösung der zugehörigen homogenen Dzgl. Ist die originale Dzgl homogen, dann ist eine spezielle Lösung die triviale $\bar{\lambda}(t) = 0$.

Es gibt folgende Verfahren, um sich eine Lösung für die lineare Dzgl zu verschaffen:

1. Methode der unbestimmten Koeffizienten,
2. Spezielles Operator Polynom,
3. Variation der Koeffizienten,
4. Reduktion der Ordnung,
5. Verfahren der erzeugenden Funktion.

Sie werden der Reihe nach in den kommenden Abschnitten behandelt.

Liegt nun eine allgemeine Lösung ℓ einer linearen Dzgl n -ter Ordnung vor, dann enthält sie — wie dies auch bei nicht linearen Dzgl der Fall ist — genau n frei wählbare Koeffizienten. Dies sind die Gewichte c_1, c_2, \dots, c_n in der Linearkombination der allgemeinen Lösung des homogenen Teils. Bei Vorgabe von n Start- oder Randwerten können diese festgelegt werden und es ergibt sich die Lösung einer Randwertaufgabe oder eine partikuläre Lösung. Das Lösen linearer Dzgl der Ordnung n vollzieht sich also in den Schritten:

1. Bestimme eine spezielle Lösung $\bar{\lambda}(t)$, indem entweder die Methode der unbestimmten Koeffizienten oder eines der genannten Verfahren gewählt wird.
2. Bestimme die allgemeine Lösung Λ der zugehörigen homogenen Dzgl.
3. Addiere beide.
4. Sind n Randbedingungen (oder Startbedingungen) gegeben, bestimme die noch freien Koeffizienten c_1, \dots, c_n , sodass ℓ alle Randbedingungen erfüllt. Das Ergebnis ist dann eine partikuläre Lösung.

1.3 Aufgaben

Aufgabe 1.1

Berechne die folgenden Ausdrücke:

- | | |
|---|-----------------------------------|
| (a) $\Delta(2x^2 + 3x)$ | (b) $S(4x - x^2)$ |
| (c) $\Delta^2(x^3 - x^2)$ | (d) $S^3(3x - 2)$ |
| (e) $(2\Delta^2 + \Delta - 1)(x^2 + 2x + 1)$ | (f) $(S^2 - 3S + 2)(2^{x/h} + x)$ |
| (g) $(\Delta + 1)(2\Delta - 1)(x^2 + 2x + 1)$ | (h) $(S - 2)(S - 1)(2^{x/h} + x)$ |

Aufgabe 1.2

Man zeige, dass Δ ein linearer Operator ist. Es ist dabei nachzuweisen, dass für beliebige Funktionen f und g und beliebige reelle Zahlen α gilt

$$\Delta(f(x) + g(x)) = \Delta f(x) + \Delta g(x) \quad (\text{a})$$

$$\Delta(\alpha f(x)) = \alpha \Delta f(x) \quad (\text{b})$$

Aufgabe 1.3

Man beweise die Produkt- und Quotientenregel für den Differenz-Operator

$$\Delta(f(x)g(x)) = f(x)\Delta g(x) + g(x+h)\Delta f(x) \quad (\text{a})$$

$$\Delta\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{g(x)\Delta f(x) - f(x)\Delta g(x)}{g(x)g(x+h)} \quad (\text{b})$$

Aufgabe 1.4

Leite eine Produkt- und eine Quotientenregel für die Subskriptionsschreibweise her.

Aufgabe 1.5

Klassifiziere die folgenden Differenzengleichungen:

$$\sqrt{y_{t+5}^2 - y_{t+3} + y_{t+4}} = 0 \quad (\text{a})$$

$$y_{t+5} + \sqrt{y_{t+3} - y_{t+1}} + ty_{t+4} = 0 \quad (\text{b})$$

$$\frac{t + y_t}{y_{t+1}} + 4 = 0 \quad (\text{c})$$

$$t^5 y_{t+1} - y_t = 23t^2 \quad (\text{d})$$

$$y_{t+3} + y_{t+2} = 0 \quad (\text{e})$$

$$y_{t+3} - y_t = 3t^2 + 1 \quad (\text{f})$$

Kapitel 2

Lineare Differenzengleichung erster Ordnung

Die lineare Differenzengleichung erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten lautet

$$y_{t+1} + ay_t = R(t)$$

wobei $a \neq 0$ und die Störfunktion $R(t)$ bekannt sind.

Wir beginnen die Berechnung von Lösungen mit der allgemeinen Lösung der zugehörigen homogenen Dzgl $y_{t+1} + ay_t = 0$. Alternativ könnten wir auch mit der speziellen Lösung der originalen Dzgl anfangen.

2.1 Homogener Teil

Die homogene Differenzengleichung erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten lautet

$$y_{t+1} + ay_t = 0$$

wobei $a \neq 0$ vorausgesetzt ist. Setzt man $b = -a$ und stellt um, dann besagt $y_{t+1} = by_t$, dass die Größe y in jeder Periode direkt proportional zu ihrem Wert in der Vorperiode ist.

Beispiel (Verzinsung eines Guthabens)

Eine Differenzengleichung der Art $y_{t+1} = by_t$ ergibt sich beispielsweise für ein Bankguthaben, von dem nichts abgehoben und dem jährlich die Zinsen zugeschlagen werden. Sind in einem Jahr y_t DM vorhanden, dann sind es im folgenden Jahr $y_t + \rho y_t = (1 + \rho)y_t$, wobei ρ den jährlichen Zinssatz angibt: $y_{t+1} = (1 + \rho)y_t$.

Gesucht wird eine Funktion $f(t)$, welche die homogene Dzgl erfüllt, also $f(t+1) + af(t) = 0$ oder alternativ $f(t+1) = bf(t)$ mit $b = -a$.

2.1.1 Iteration

Angenommen, f nimmt für $t = 0$ den Wert c an, also $f(0) = c$. Dann muss $f(1) = b(f(0)) = bc$ sein. Durch wiederholtes Einsetzen (Iterieren) in die homogene Dzgl erhalten wir somit

$$\begin{aligned} f(1) &= b f(0) = b c \\ f(2) &= b f(1) = b^2 c \\ f(3) &= b f(2) = b^3 c \\ &\vdots \\ f(t) &= b f(t-1) = b^t c \\ &\vdots \end{aligned}$$

In Übereinstimmung mit dem Satz über die allgemeine Lösung von homogenen Differenzgleichungen n -ter Ordnung erhalten wir also durch die Iteration $n = 1$ linear unabhängige Lösungen $f(t) = b^t c$, die genau $n = 1$ frei wählbare Koeffizienten c enthalten. Dieser frei wählbare Koeffizient c ist durch die Start- oder eine Randbedingung $y_0 = c$ festgelegt.

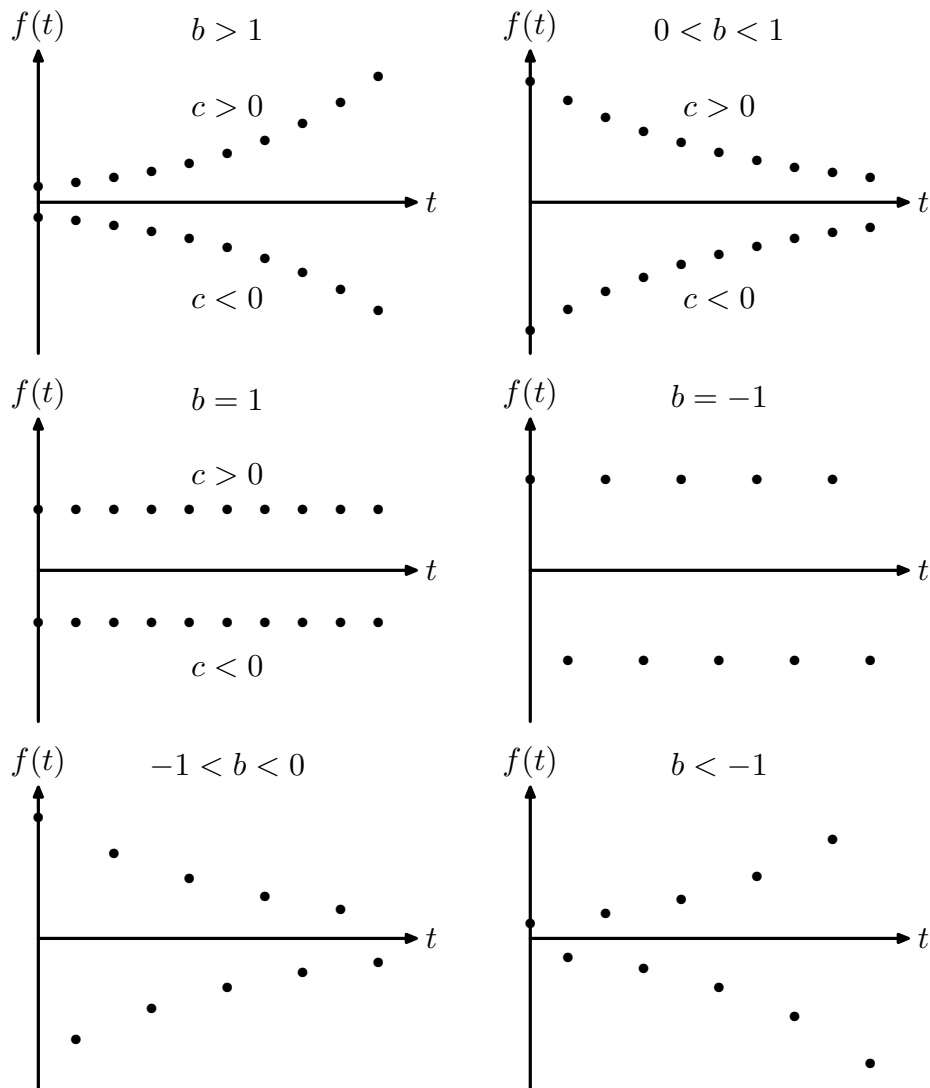
2.1.2 Zeitpfade der allgemeinen Lösung

Das zeitliche Verhalten der allgemeinen Lösung $f(t) = b^t c$ wird maßgeblich durch den Term $b^t = (-a)^t$ beeinflusst. Der frei wählbare Koeffizient c legt nur das Niveau, nicht aber den Verlauf von f fest.

Die Potenzen b^t werden mit zunehmendem t immer größer, falls $b > 1$ ist, sie werden immer kleiner, falls $0 < b < 1$ ist. Im Falle von $b = 1$ bleiben die Potenzen für alle t konstant. Wenn b negativ ist $-a$ also positiv, dann sind die Potenzen b^t für ungerades t negativ und für gerades t positiv. Dadurch ergeben sich Zick-Zack-Pfade. Ist $b = -1$ oder $a = 1$, dann alterniert die allgemeine Lösung zwischen $-bc$ und bc für ungerades und gerades t . Ist $-1 < b < 0$, werden die Ausschläge des Zick-Zack-Pfades mit steigendem t immer kleiner und ist $b < -1$ (beispielsweise $b = -3.1$), dann werden die Ausschläge mit steigendem t immer größer.

Da wir $t \in \mathbb{N}$ unterstellen, ist $f(t)$ eine Folge, genauer: $f(t)$ ist eine geometrische Folge mit dem Quotienten b . Daher lässt sich das Verhalten von $f(t)$ auch durch ihre Eigenschaften als Folge kennzeichnen. Für $0 < |b| < 1$ ist

$f(t)$ eine Nullfolge, d.h. $\lim_{t \rightarrow \infty} = 0$, für $b = 1$ ist $f(t)$ eine konstante Folge, für $b = -1$ ist $f(t)$ eine Folge mit zwei Häufungspunkten und für $|b| > 1$ ist $f(t)$ eine divergente Folge.

Abbildung 2.1: Zeitpfade von $f(t) = b^t c$ 

2.2 Spezielle Lösung

Es gibt mehrere Verfahren zur Bestimmung einer speziellen Lösung der originalen Differenzengleichung. Welches Verfahren am besten geeignet ist, hängt davon ab, wie die Störfunktion $R(t)$ beschaffen ist. Wir behandeln einige gängige Funktionstypen für $R(t)$ zunächst mit der Methode der unbestimmten Koeffizienten und danach die weiteren Verfahren.

2.2.1 Methode der unbestimmten Koeffizienten

Die Methode der unbestimmten Koeffizienten basiert auf „Versuch und Irrtum“. Man beginnt mit einem Funktionstyp für $\bar{\lambda}$ von derselben Art wie $R(t)$. Durch Einsetzen in die Dzgl wird versucht, alle unbestimmten Koeffizienten in $\bar{\lambda}$ zu berechnen. Falls dies gelingt, hat man bereits eine spezielle Lösung. Sollte es nicht gelingen, so multipliziere man den $\bar{\lambda}$ mit t (oder einem Polynom vom Grad 1, 2, ... in t) und versuche es erneut solange, bis ein Funktionstyp passt.

2.2.1.1 Störfunktion ist konstant

Wenn die Störfunktion $R(t)$ eine Konstante d ist, dann lautet die originale Differenzengleichung

$$y_{t+1} + ay_t = d$$

Wir versuchen $\bar{\lambda}(t) = \beta$ einzusetzen und damit den unbestimmten Koeffizienten β zu berechnen:

$$\beta + a\beta = d \quad \rightsquigarrow \quad \beta = \frac{d}{1+a} \quad \text{für } a \neq -1$$

Im Fall von $a = -1$ versagt jedoch der Ansatz $\bar{\lambda} = \beta$, wir versuchen es mit $\bar{\lambda}(t) = t\beta$ und erhalten

$$(t+1)\beta - t\beta = d \quad \rightsquigarrow \quad \beta = d$$

Man beachte, dass für $a = -1$ die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Differenzengleichung *nicht* von t beeinflusst wird, dafür aber die spezielle Lösung.

Zusammenfassend ergibt sich im Falle $R(t) = d$ als spezielle Lösung:

$$\bar{\lambda}(t) = \begin{cases} \frac{d}{1+a} & \text{für } a \neq -1 \\ t d & \text{für } a = -1. \end{cases}$$

2.2.1.2 Störfunktion ist ein Polynom

Angenommen, die Störfunktion ist ein Polynom vom Grad 2 in t . Die originale Differenzengleichung lautet dann

$$y_{t+1} + ay_t = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2$$

Wir versuchen den Lösungsansatz $\bar{\lambda}(t) = \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2$ einzusetzen und Bestimmungsgleichungen für die Koeffizienten β_0 , β_1 und β_2 zu konstruieren.

$$[\beta_0 + \beta_1(t+1) + \beta_2(t+1)^2] + [\beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2] a = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2$$

Nach Umordnen und Sortieren aller Terme erhalten wir

$$\begin{aligned} [\beta_0(1+a) + \beta_1 + \beta_2 - \alpha_0] + [\beta_1(1+a) + 2\beta_2 - \alpha_1] t \\ + [\beta_2(1+a) - \alpha_2] t^2 = 0 \end{aligned}$$

Da diese Gleichung für alle t erfüllt sein muss, müssen die Terme in den eckigen Klammern einzeln gleich Null sein. Wir erhalten somit ein lineares Gleichungssystem mit drei Gleichungen in der Zeilenstaffelform:

$$\begin{aligned} \beta_0(1+a) + \beta_1 + \beta_2 &= \alpha_0 \\ \beta_1(1+a) + 2\beta_2 &= \alpha_1 \\ \beta_2(1+a) &= \alpha_2 \end{aligned}$$

Auch hier ist eine Fallunterscheidung zu treffen. Das Gleichungssystem ist nämlich nur für $a \neq -1$ nach β_0 , β_1 und β_2 lösbar. Angenommen, es ist $a \neq -1$, dann ergibt sich unmittelbar

$$\begin{aligned} \beta_2 &= \frac{\alpha_2}{1+a} \\ \beta_1 &= \frac{\alpha_1}{1+a} - \frac{2\beta_2}{1+a} = \frac{\alpha_1}{1+a} - \frac{2\alpha_2}{(1+a)^2} \\ \beta_0 &= \frac{\alpha_0}{1+a} - \frac{\beta_1}{1+a} - \frac{\beta_2}{1+a} = \frac{\alpha_0}{1+a} - \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{(1+a)^2} - \frac{2\alpha_2}{(1+a)^3} \end{aligned}$$

Einsetzen der drei nunmehr bestimmten Koeffizienten β_0 , β_1 und β_2 in den Lösungsansatz ergibt für $a \neq -1$ die spezielle Lösung

$$\bar{\lambda}(t) = \left[\frac{\alpha_0}{1+a} - \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{(1+a)^2} - \frac{2\alpha_2}{(1+a)^3} \right] + \left[\frac{\alpha_1}{1+a} - \frac{2\alpha_2}{(1+a)^2} \right] t + \frac{\alpha_2}{1+a} t^2$$

Ist hingegen $a = -1$, wird der erste Lösungsansatz (der ja nicht zielführend ist) mit t multipliziert und ein erneuter Versuch gestartet. Die originale Dzgl lautet in diesem Fall

$$y_{t+1} - y_t = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2$$

und die spezielle Lösung wird als

$$\bar{\lambda}(t) = \beta_0 t + \beta_1 t^2 + \beta_2 t^3$$

angesetzt. Dies in die Dzgl eingesetzt ergibt

$$[\beta_0(t+1) + \beta_1(t+1)^2 + \beta_2(t+1)^3] - [\beta_0 t + \beta_1 t^2 + \beta_2 t^3] = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2$$

oder nach Saldieren und Umordnen

$$[\beta_0 + \beta_1 + \beta_2 - \alpha_0] + [2\beta_1 + 3\beta_2 - \alpha_1] t + [3\beta_2 - \alpha_2] t^2 = 0$$

Auch diesmal müssen die Terme in den eckigen Klammern einzeln Null werden, da der Ausdruck für alle t erfüllt sein muss. Daraus resultiert wiederum ein lineares Gleichungssystem in Zeilenstaffelform

$$\beta_0 + \beta_1 + \beta_2 = \alpha_0$$

$$2\beta_1 + 3\beta_2 = \alpha_1$$

$$3\beta_2 = \alpha_2$$

das direkt von unten nach oben nach den unbestimmten Koeffizienten β_0 , β_1 und β_2 aufgelöst werden kann.

$$\beta_2 = \frac{\alpha_2}{3}$$

$$\beta_1 = \frac{\alpha_1}{2} - \frac{3}{2}\beta_2 = \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2}$$

$$\beta_0 = \alpha_0 - \beta_1 - \beta_2 = \alpha_0 - \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2} - \frac{\alpha_2}{3} = \frac{6\alpha_0 - 3\alpha_1 + \alpha_2}{6}$$

und wir erhalten im Fall von $a = -1$ die spezielle Lösung

$$\bar{\lambda}(t) = \frac{6\alpha_0 - 3\alpha_1 + \alpha_2}{6} t + \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2} t^2 + \frac{\alpha_2}{3} t^3$$

Falls $R(t)$ ein Polynom vom Grad k ist, dann wird für $\bar{\lambda}$ zunächst ebenfalls ein Polynom vom gleichen Grad k mit noch unbestimmten Koeffizienten β_0, \dots, β_k angesetzt. Sollte dies nicht zur Bestimmung aller β_i führen, so ist es mit t zu multiplizieren und ein erneuter Versuch zu starten.

2.2.1.3 Störfunktion enthält Potenzen

Wenn die Störfunktion Potenzen von t enthält, dann ist sinngemäß genauso wie bei den vorangehenden Funktionstypen zu verfahren. Im einfachsten Fall ist $R(t) = d^t$ mit $d \neq 0$ und die originale Dzgl lautet

$$y_{t+1} + ay_t = d^t$$

Als Lösungsansatz wird eine Exponentialfunktion mit derselben Basis d gewählt $\bar{\lambda}(t) = \beta d^t$. Einsetzen ergibt eine Bestimmungsgleichung für den Koeffizienten β

$$\beta d^{t+1} + a\beta d^t = d^t \quad \rightsquigarrow \quad d^t [\beta(d+a) - 1] = 0$$

Der Term in der eckigen Klammer muss gleich Null sein, damit das Produkt links für alle t gleich Null ist. Dies ist jedoch im Fall $d+a \neq 0$ also $d \neq -a$ möglich. In diesem Fall ist dann

$$\beta = \frac{1}{a+d}$$

und die spezielle Lösung der originalen Differenzengleichung ist

$$\bar{\lambda}(t) = \frac{d^t}{a+d}$$

Falls nun aber $d = -a$ wird wie üblich der vorige Lösungsansatz mit t multipliziert und ein neuer Versuch nunmehr mit dem Lösungsansatz $\bar{\lambda}(t) = t\beta d^t$ gestartet. Die originale Differenzengleichung lautet in diesem Fall

$$y_{t+1} - dy_t = d^t$$

Einsetzen von $\bar{\lambda}(t)$ und $\bar{\lambda}(t+1)$ ergibt

$$(t+1)\beta d^{t+1} - d\beta t d^t = d^t \quad \rightsquigarrow \quad d^t [\beta d - 1] = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \beta = \frac{1}{d}$$

Die spezielle Lösung der originalen Dzgl lautet also in diesem Fall

$$\bar{\lambda}(t) = t d^{t-1}$$

Zusammenfassend ergibt sich als spezielle Lösung für $R(t) = d^t$

$$\bar{\lambda}(t) = \begin{cases} \frac{d^t}{a+d} & \text{für } d \neq -a \\ t d^{t-1} & \text{für } d = -a \end{cases}$$

Wenn die Störfunktion auf der linken Seite der Differenzengleichung kompliziertere Exponentialfunktionen in t aufweist, dann ist ganz analog zu verfahren. Wesentlich ist, dass man beim Lösungsansatz für $\bar{\lambda}$ stets dieselbe Basis (oder Basen) wählt, die auch in $R(t)$ auftritt.

2.2.1.4 Störfunktion enthält periodische Funktionen

Gemeint sind \sin oder \cos Terme in R . Im einfachsten Fall lautet die originale Differenzengleichung

$$y_{t+1} + ay_t = d \sin \omega t \quad \text{bzw} \quad y_{t+1} + ay_t = d \cos \omega t$$

mit bekanntem $d \neq 0$ und $\omega \neq 0$. Als spezielle Lösung wird eine Kombination aus \sin und \cos mit dem ω aus der originalen Dzgl angesetzt. Dies gilt auch, wenn rechts nur \cos Terme stehen. Wir setzen

$$\bar{\lambda}(t) = \beta_0 \sin \omega t + \beta_1 \cos \omega t$$

an, setzen in die Dzgl ein und erhalten

$$\beta_0 \sin \omega(t+1) + \beta_1 \cos \omega(t+1) + a\beta_0 \sin \omega t + a\beta_1 \cos \omega t = d \sin \omega t$$

Um nun die Terme zusammenzufassen, benötigt man die beiden Additionstheoreme für den Sinus und den Cosinus. Sie lauten

$$\sin(\omega t \pm \omega) = \sin \omega t \cos \omega \pm \sin \omega \cos \omega t$$

$$\cos(\omega t \pm \omega) = \cos \omega \cos \omega t \mp \sin \omega \sin \omega t$$

Zusammenfassen der Sinus- und Cosinus-Terme ergibt

$$\begin{aligned} \sin \omega t [\beta_0 \cos \omega - \beta_1 \sin \omega + a\beta_0 - d] \\ + \cos \omega t [\beta_0 \sin \omega + \beta_1 \cos \omega + a\beta_1] = 0 \end{aligned}$$

Die Terme in der eckigen Klammern müssen wieder Null werden, damit der Ausdruck insgesamt für alle zulässigen t Null wird. Dies ergibt das Gleichungssystem zur Bestimmung der beiden Koeffizienten β_0 und β_1

$$\beta_0 [a + \cos \omega] - \beta_1 \sin \omega = d$$

$$\beta_0 \sin \omega + \beta_1 [a + \cos \omega] = 0$$

Auch hier ist nun eine Fallunterscheidung zu treffen. Das Gleichungssystem ergibt nur dann eine nicht-triviale Lösung, wenn $-a \neq \cos \omega$. Dies nun vorausgesetzt ergibt

$$\begin{aligned} \beta_0 &= \frac{d - (\sin \omega)^2}{a + \cos \omega} \\ \beta_1 &= \frac{-\sin \omega}{a + \cos \omega} \frac{d - (\sin \omega)^2}{a + \cos \omega} \end{aligned}$$

Im Falle von $-a = \cos \omega$ ist der erste Lösungsansatz wieder mit t zu multiplizieren und ein neuer Versuch der Berechnung von β_0 und β_1 zu starten. Die Details sollten zur Übung zu Hause ausgearbeitet werden.

2.2.1.5 Kombinationen der Grundtypen

Wenn die Störfunktion aus einer Kombination der voranstehenden einfachen Fälle zusammengesetzt ist, dann ist auch der Ansatz zur speziellen Lösung in geeigneter Weise zusammenzusetzen.

2.2.2 Operator-Methode

Wenn die Störfunktion unbekannt ist, dann kann die Methode der unbestimmten Koeffizienten nicht benutzt werden. In den Wirtschaftswissenschaften kommt aber häufig der Fall vor, dass die Funktionswerte $R(0)$, $R(1)$, $\dots R(t)$ bekannt sind. Beispielsweise im Rahmen ökonometrischer Schätzungen könnte dies die Zeitreihe einer beobachtbaren Größe x_t sein, während y_t eine unbeobachtbare Größe ist und die reduzierte Form der Beziehung zwischen x und y als eine Differenzengleichung vorliegt.

Angenommen, wir kennen die Zeitreihe $x_t = R(t)$ der Funktionswerte nicht aber den Funktionstyp von R . Die lineare Differenzengleichung lautet in diesem Fall also

$$y_{t+1} + ay_t = x_t$$

wobei für jedes t eine reelle Zahl x_t gegeben ist. Wir suchen eine spezielle Lösung $\bar{\lambda}(t)$, indem im ersten Schritt die linke Seite der Differenzengleichung durch den Shift-Operator ausgedrückt

$$(S + a) \bar{\lambda}(t) = x_t$$

und anschließend durch das Operatorpolynom $S + a$ dividiert wird

$$\bar{\lambda}(t) = \frac{1}{S + a} x_t$$

Der Ausdruck auf der rechten Seite ist nun genauer zu betrachten. Wir können den Quotienten als geometrische Reihe ansetzen

$$\frac{1}{S + a} = \frac{1}{a} \frac{1}{1 - \frac{S}{-a}} = \frac{1}{a} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{S}{-a} \right)^j$$

und somit auf x_t anwenden

$$\frac{1}{a} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{S}{-a} \right)^j x_t = \frac{1}{a} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{-a} \right)^j x_{t+j}$$

Dies ist die sogenannte Vorwärts-Lösung. Sie ist nur dann sinnvoll, wenn $|a| > 1$ gilt, da sonst die geometrische Reihe nicht konvergiert.

Im Fall $|a| < 1$ bildet man eine geeignete Rückwärts-Lösung. Die Darstellung vereinfacht man, indem die Differenzengleichung mit Rückwärtsdifferenz, also als

$$y_t + ay_{t-1} = x_t$$

angesetzt wird. Nun ist die linke Seite durch den Lag-Operator anzuschreiben als

$$(1 + aL) \bar{\lambda}(t) = x_t$$

Das Verfahren verläuft dann mit dem Lag Operator genau so wie oben.

Die Operator-Methode ist sehr allgemein anwendbar, verlangt allerdings auch den sicheren Umgang mit Differenz- Shift- und Lag-Operatoren, sowie den Beziehungen die zwischen ihnen bestehen.

2.2.3 Variation der Parameter

Bei diesem Verfahren wird auch im ersten Schritt die Lösung $f(t) = c(-a)^t$ der zugeordneten homogenen Differenzengleichung bestimmt. Die allgemeine Lösung für y_t wird dann mit unbekanntem Parameter $K(t)$ statt c angesetzt in der Form

$$y_t = K(t)(-a)^t$$

Nun wird der Parameter variiert, sodass die originale Differenzengleichung erfüllt ist:

$$(-a)^{t+1}K(t+1) + a(-a)^tK(t) = R(t)$$

$$(-a)^{t+1} [K(t+1) - K(t)] = R(t)$$

$$\Delta K(t) = \frac{-1}{a} \frac{R(t)}{(-a)^t}$$

$$K(t) = \Delta^{-1} \frac{-1}{a} \frac{R(t)}{(-a)^t}$$

Hierbei nun wieder zu beachten, dass $\Delta = S - 1$ gilt, folglich kann der Parameter $K(t)$ berechnet werden als

$$\begin{aligned} K(t) &= \frac{1}{a} \frac{1}{1 - S} \frac{R(t)}{(-a)^t} \\ &= \frac{1}{a} \sum_{i=0}^{\infty} S^i \frac{R(t)}{(-a)^t} \\ &= \frac{1}{a} \left[\frac{R(t)}{(-a)^t} + \frac{R(t+1)}{(-a)^{t+1}} + \dots \right] \end{aligned}$$

Im Grunde läuft das Verfahren bei Differenzengleichungen erster Ordnung auf die Operator Methode hinaus. Erst bei Differenzengleichungen höherer Ordnung ist es als echte Alternative zur Methode der unbestimmten Koeffizienten anzusehen.

2.3 Allgemeine Lösung

Die allgemeine Lösung $y_t = \ell(t)$ einer linearen Differenzengleichung erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$y_{t+1} + ay_t = R(t)$$

ist die Summe der speziellen Lösung $\bar{\lambda}(t)$ der originalen Dzgl und der allgemeinen Lösung $c(-a)^t$ der zugehörigen homogenen Dzgl.

$$y_t = \bar{\lambda}(t) + c(-a)^t$$

Falls die Störfunktion $R(t)$ eine Konstante, ein Polynom in t , eine Potenzfunktion in t , eine Sinus- bzw. Cosinusfunktion in t oder aus Termen dieser Funktionstypen zusammengesetzt ist, so ist immer die Methode der unbestimmten Koeffizienten die erste Wahl. Trifft dies hingegen nicht zu, so ist man auf die allgemeine Operator Methode oder die Methode der Variation der Parameter angewiesen. Es gibt noch zwei weitere Verfahren, die gewissermaßen in einem Schritt zu einer allgemeinen Lösung der Differenzengleichung führen: die Reduktion der Ordnung und die erzeugende Funktion.

2.3.1 Reduktion der Ordnung

Natürlich kann man die Ordnung einer Differenzengleichung erster Ordnung nicht weiter reduzieren. Was hier jedoch bereits gezeigt werden kann, sind die ersten Schritte bei diesem Lösungsverfahren. Man geht davon aus, dass

die Differenzengleichung n -ter Ordnung mit einem Operatorpolynom in der Form

$$(S - \lambda_1)(S - \lambda_2) \cdots (S - \lambda_n)y_t = R(t)$$

angeschrieben ist. Die λ_i sind dabei die Nullstellen eines charakteristischen Polynoms. Wie man sich eine solche Darstellung einer linearen Differenzengleichung mit konstanten Koeffizienten verschafft, wird im nächsten Kapitel beschrieben. Nun wird eine neue Variable z_t definiert durch

$$z_t = (S - \lambda_2) \cdots (S - \lambda_n)y_t$$

und unsere Differenzengleichung in z_t ist nun nur noch erster Ordnung.

$$(S - \lambda_1)z_t = R(t)$$

Wird das Produkt mit dem Shift-Operator ausgeführt, dann entsteht

$$z_{t+1} - \lambda_1 z_t = R(t)$$

Wir können — da wir in diesem Kapitel nur Differenzengleichungen erster Ordnung betrachten — auf die Einführung einer Variablen z_t verzichten und gleich die Differenzengleichung

$$(S - b)y_t = R(t)$$

betrachten. Da $b = -a \neq 0$ ist, können wir die Dzgl durch b^{t+1} dividieren. Man bezeichnet den Ausdruck

$$\frac{1}{b^{t+1}}$$

als einen summierenden Faktor. Dadurch gelingt es, die Differenzengleichung zu schreiben als

$$\begin{aligned} \frac{y_{t+1}}{b^{t+1}} - \frac{y_t}{b^t} &= \frac{R(t)}{b^{t+1}} \\ \Delta \left(\frac{y_t}{b^t} \right) &= \frac{R(t)}{b^{t+1}} \\ \frac{y_t}{b^t} &= \Delta^{-1} \frac{R(t)}{b^{t+1}} \\ y_t &= b^t \Delta^{-1} \frac{R(t)}{b^{t+1}} = b^t \sum_{j=0}^{t-1} \frac{R(j)}{b^{j+1}} + cb^t \end{aligned}$$

Der letzte Umformungsschritt nutzt dabei den Hauptsatz der bestimmten Summation aus. Dieser ist dem Hauptsatz der Integralrechnung sehr ähnlich.

Satz (Hauptsatz der bestimmten Summation)

Die bestimmte Summation einer Funktion $f(x)$ von $x = a$ bis $x = a + (n-1)h$ mit fester Schrittweite h wird geschrieben als

$$\sum_a^{a+(n-1)h} f(x) = f(a) + f(a+h) + f(a+2h) + \cdots + f(a+(n-1)h)$$

Die bestimmte Summation ist invers zum Differenz-Operator.

$$\sum_a^{a+(n-1)h} f(x) = \Delta^{-1} f(x) \big|_a^{a+nh}$$

Wir hatten bereits vereinbart, dass in der Variablentransformation von x nach t der Anfangszeitpunkt t_0 immer Null und die Schrittweite h immer Eins sein soll. Mit diesen Setzungen lautet dann der Hauptsatz der bestimmten Summation

$$\sum_0^{t-1} f(t) = \Delta^{-1} f(t) \big|_0^t$$

2.3.2 Erzeugende Funktion

Die erzeugende Funktion $G(k)$ für y_t wird definiert als

$$G(k) = \sum_{t=0}^{\infty} y_t k^t$$

Ihr kommt bei manchen Anwendungen auch eine direkte ökonomische Bedeutung zu. Ist beispielsweise y_t das Einkommen einer Wirtschaftseinheit, dann ist $G(k)$ als ihr Vermögen interpretierbar, wobei $k = 1/(1+r)$ als ein geeigneter Abdiskontierungsfaktor anzusehen ist.

Die erzeugende Funktion ist aus der gegebenen Differenzengleichung zu ermitteln. Wir wollen ihre Konstruktion und das Auslesen der allgemeinen Lösung anhand des Beispiels

$$y_{t+1} + ay_t = d$$

demonstrieren. Zunächst wird die Differenzengleichung mit k^t multipliziert und anschließend über alle t summiert. Man erhält

$$\sum_{t=0}^{\infty} y_{t+1} k^t + \sum_{t=0}^{\infty} ay_t k^t - \sum_{t=0}^{\infty} dk^t = 0$$

Nun werden die Reihen so umgeformt, dass sich $G(k)$ substituieren lässt. Am einfachsten behandelt man die drei Summen einzeln:

$$\begin{aligned}\sum_{t=0}^{\infty} dk^t &= \frac{d}{1-k} \quad \text{für } |k| < 1 \\ \sum_{t=0}^{\infty} ay_t k^t &= a \sum_{t=0}^{\infty} y_t k^t = aG(k) \\ \sum_{t=0}^{\infty} y_{t+1} k^t &= y_1 + y_2 k + y_3 k^2 + \dots \\ &= \frac{1}{k} [y_1 k + y_2 k^2 + y_3 k^3 + \dots] \\ &= \frac{1}{k} [-y_0 + y_0 k^0 + y_1 k^1 + y_2 k^2 + y_3 k^3 + \dots] \\ &= \frac{1}{k} [-y_0 + G(k)]\end{aligned}$$

Einsetzen ergibt

$$\frac{1}{k} [-y_0 + G(k)] + aG(k) - \frac{d}{1-k} = 0$$

und Auflösen nach $G(k)$

$$\begin{aligned}G(k) \left[\frac{1}{k} + a \right] &= \frac{y_0}{k} + \frac{d}{1-k} \\ G(k) [1 + ak] &= y_0 + \frac{dk}{1-k} \\ G(k) &= \frac{y_0}{1+ak} + \frac{dk}{(1-k)(1+ak)}\end{aligned}$$

Damit haben wir bereits die erzeugende Funktion ermittelt. Nun soll sie noch so aufbereitet werden, dass aus ihr die allgemeine Lösung y_t direkt ablesbar ist. Dazu wird der letzte Bruch auf der rechten Seite in zwei partielle Brüche zerlegt. Ziel der Umformung ist, dass beide Terme der rechten Seite als Grenzwert geometrischer Reihen geschrieben werden können. Für den ersten Term gelingt dies auf Anhieb:

$$\frac{y_0}{1+ak} = y_0 \frac{1}{1-(-a)k} = y_0 \sum_{t=0}^{\infty} (-a)^t k^t$$

Beim zweiten Bruch muss zuerst eine Partialbruchzerlegung durchgeführt werden. Es soll gelten

$$\frac{dk}{(1-k)(1+ak)} = \frac{Z_1}{1-k} + \frac{Z_2}{1+ak}$$

mit noch unbekannten Zählern Z_1 und Z_2 , für die aber gilt

$$Z_1(1 + ak) + Z_2(1 - k) = dk$$

Durch einen Koeffizientenvergleich erhält man das Gleichungssystem zur Bestimmung der beiden Zähler

$$Z_1 + Z_2 = 0 \quad \text{und} \quad aZ_1 - Z_2 = d$$

mit der Lösung

$$Z_1 = \frac{d}{1+a} \quad \text{und} \quad Z_2 = \frac{-d}{1+a}$$

Damit kann die erzeugende Funktion geschrieben werden als

$$G(k) = \sum_{t=0}^{\infty} \left[y_0(-a)^t + d \frac{1 - (-a)^t}{1+a} \right] k^t$$

und in der eckigen Klammer unter der Summe erscheint die allgemeine Lösung der Differenzengleichung.

2.3.3 Start- oder Randbedingung

Die erzeugende Funktion $G(k)$ für die Differenzengleichung

$$y_{t+1} + ay_t = d \quad \text{mit} \quad a \neq -1$$

enthält explizit den Startwert y_0 . Die allgemeine Lösung, die sich bei der Methode der unbestimmten Koeffizienten ergibt

$$y_t = c(-a)^t + \frac{d}{1+a}$$

sieht rein äußerlich ganz anders aus. Es sind dennoch dieselben Funktionen. Wird ein Startwert y_0 vorgegeben, dann muss gelten:

$$y_0 = c(-a)^0 + \frac{d}{1+a}$$

dies nach dem Parameter c aufgelöst ergibt

$$c = y_0 - \frac{d}{1+a}$$

also lautet die (partikuläre) Lösung

$$\begin{aligned} y_t &= y_0(-a)^t - \frac{d(-a)^t}{1+a} + \frac{d}{1+a} \\ &= y_0(-a)^t + d \frac{1 - (-a)^t}{1+a} \end{aligned}$$

geradeso wie in der erzeugenden Funktion. Diese Darstellung erhält man auch, indem die originale Differenzengleichung mit dem Startwert y_0 iteriert wird:

$$y_1 = d - ay_0$$

$$y_2 = d - ay_1 = d - a(d - ay_0) = d - da + a^2y_0$$

$$y_3 = d - ay_2 = \sum_{i=0}^2 d(-a)^i + (-a)^3y_0 = d \frac{1 - (-a)^3}{1+a} + (-a)^3y_0$$

\vdots

$$y_t = y_0(-a)^t + d \frac{1 - (-a)^t}{1+a}$$

Ist hingegen eine Randbedingung für $t = \tau$ gegeben, dann ist es besser, in die allgemeine Lösung

$$y_t = c(-a)^t + \frac{d}{1+a}$$

einzusetzen und nach c aufzulösen. Für $t = \tau$ ist die linke Seite durch die Randbedingung y_τ vorgegeben, was zu

$$y_\tau = c(-a)^\tau + \frac{d}{1+a} \quad \rightsquigarrow \quad c = \frac{y_\tau}{(-a)^\tau} - \frac{1}{(-a)^\tau} \frac{d}{1+a}$$

führt.

2.4 Anwendungen

Behandelt werden zwei Anwendungen linearer Differenzengleichungen erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten, die zumindest in rudimentärer Form bereits in Makro1 und Makro2 angesprochen wurden. Zum einen handelt es sich um die Dynamik des Einkommensmultiplikators im einfachen keynesianischen Makromodell und zum anderen um das Cobweb Modell.

2.4.1 Dynamik des Einkommensmultiplikators

Wir betrachten den makroökonomischen Gütermarkt einer Volkswirtschaft ohne staatliche Aktivität und ohne außenwirtschaftliche Beziehungen. Die Güternachfrage Y_t^n in Periode t setzt sich folglich aus der Investition I_t und dem Konsum C_t zusammen. Die Produktion Y_t in Periode t passt sich momentan an die Nachfrage an $Y_t = Y_t^n$.

Der Konsum wird durch eine keynesianische Konsumfunktion mit einem sogenannten Robertson-Lag erklärt

$$C_t = C^a + cY_{t-1} \quad \text{wobei} \quad C^a > 0 \quad \text{und} \quad 0 < c < 1$$

Der Robertson-Lag wird damit begründet, dass wegen nachschüssiger Lohn- und Gehaltszahlungen sowie nachschüssigen Gewinnausschüttungen das laufende Einkommen gleich der vorangegangenen Produktion ist.

Die Investition verändere sich in Periode $t = 0$ von I_0 auf $I_0 + \Delta I$ und verharre dort in alle Ewigkeit. In der grauen Vorzeit vor Periode 0 herrschte stets Gleichgewicht auf dem Gütermarkt, also Nachfrage, Produktion und Einkommen hatten alle den Wert

$$Y_0 = \frac{C^a + I_0}{1 - c}$$

Wir kennen bereits das neue Gütermarktgleichgewicht aus der statischen Multiplikatoranalyse:

$$Y^* = Y_0 + \frac{\Delta I}{1 - c}$$

Nun soll jedoch der Zeitpfad von Y_0 nach Y^* beschrieben werden. Dazu wird die Bedingung der momentanen Anpassung der Produktion an die Nachfrage als eine Differenzgleichung notiert.

$$\begin{aligned} Y_{t+1} &= C_{t+1} + I_{t+1} = C^a + cY_t + I_0 + \Delta I \\ Y_{t+1} - cY_t &= C^a + I_0 + \Delta I \end{aligned}$$

Es ist eine lineare Differenzgleichung erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten und einer konstanten Störung entstanden. Ihre Lösung ist nach allem bisher Vorgeführten eine leichte Fingerübung. Die zugehörige homogene Differenzgleichung erhalten wir, indem die Abweichungen der laufenden Produktion vom neuen Gleichgewicht betrachtet werden.

$$y_{t+1} = Y_{t+1} - Y^* \quad \text{und} \quad y_t = Y_t - Y^*$$

Einsetzen ergibt

$$\begin{aligned} y_{t+1} + Y^* - cy_t - cY^* &= C^a + I_0 + \Delta I \\ y_{t+1} - cy_t &= C^a + I_0 + \Delta I - (1 - c)Y^* = 0 \end{aligned}$$

Dieses Resultat sollte nicht überraschen. Die zugehörige homogene Differenzengleichung kann in aller Regel durch diese Variablentransformation erzeugt werden.

Die Lösung der homogenen Differenzengleichung $y_{t+1} - cy_t = 0$ ist

$$y_t = ac^t$$

wobei diesmal¹ c die keynesianische marginale Konsumneigung und a der noch unbestimmte (einperiodige) Parameter der allgemeinen Lösung ist.

Rücktransformation von y_t auf Y_t ergibt bereits die allgemeine Lösung

$$Y_t = ac^t + Y^*$$

und die Konstante a wird durch den Startwert Y_0 festgelegt

$$Y_0 = a + Y^* \quad \rightsquigarrow \quad a = Y_0 - Y^* = \frac{-\Delta I}{1 - c}$$

Also lautet die partikuläre Lösung der Differenzengleichung, welche den Zeitpfad des Einkommens vom alten zum neuen Gleichgewicht beschreibt,

$$Y_t = Y^* - \Delta I \frac{c^t}{1 - c}$$

Da $0 < c < 1$ erfolgt die Anpassung an das neue Gleichgewicht des makroökonomischen Gütermarktes monoton von unten.

Das Modell lässt sich auf mannigfache Weise erweitern und modifizieren. Beispielsweise indem staatliche Aktivitäten, also Staatsausgaben für Güter sowie Steuern, Transfers und Subventionen der unterschiedlichsten Art eingeführt werden. Auch der Außenhandel lässt sich berücksichtigen. Es sind auch Zwei- oder Mehr-Länder-Modelle mit wechselseitigen Impulsen auf das Einkommen durch Im- und Exporte denkbar.

¹Die Symbole a und c haben hier eine andere Bedeutung als in den voranstehenden Abschnitten. Hier soll den Konventionen der Makro Lehrbücher gefolgt werden, während es vorher um rein mathematische Sachverhalte ging.

2.4.2 Cobweb Modell

Betrachtet wird der Markt für ein normales Gut (z.B. Schweine). Die Nachfragekurve ist linear und fallend.

$$x_t^d = a - bp_t \quad a, b > 0$$

Die Angebotskurve ist ebenfalls linear und steigend. Sie hängt jedoch von der Preiserwartung $E(p_t | t-1)$ der Anbieter zum Zeitpunkt $t-1$ für den Zeitpunkt t ab.

$$x_t^s = c + d E(p_t | t-1) \quad d > 0, a > c$$

Üblicherweise wird zur Begründung dieser Zeitverzögerung die sogenannte Hicks'sche Woche herangezogen: Getauscht wird samstags, unter der Woche wird produziert. Also müssen die Produzenten am Montag eine Prognose für den Preis des kommenden Samstags bilden, wenn sie ihre Angebotsentscheidung treffen. Für diese Preisprognose kommen nun mehrere Erwartungshypothesen in Betracht. Wir betrachten jedoch nur den Fall der statischen Erwartungen.

$$E(p_t | t-1) = p_{t-1}$$

Die Produzenten erwarten, dass der alte Preis auch in der nächsten Periode gilt. Der aktuelle Preis p_t ist durch die Bedingung der Markträumung $x_t^s = x_t^d$ bestimmt. Fasst man zusammen, dann ergibt sich eine lineare Differenzengleichung erster Ordnung für den Preis.

$$p_t = \frac{a-c}{b} - \frac{d}{b} p_{t-1}$$

Der Gleichgewichtspreis (Schnittpunkt von Angebots- und Nachfragekurve)

$$p^* = \frac{a-c}{b+d}$$

ist eine spezielle Lösung der Differenzengleichung.

Wir definieren mit $q_t = p_t - p^*$, $t = 1, 2, \dots$ neue Variablen, die Abweichungen der Marktpreise vom Gleichgewichtspreis, und substituieren.

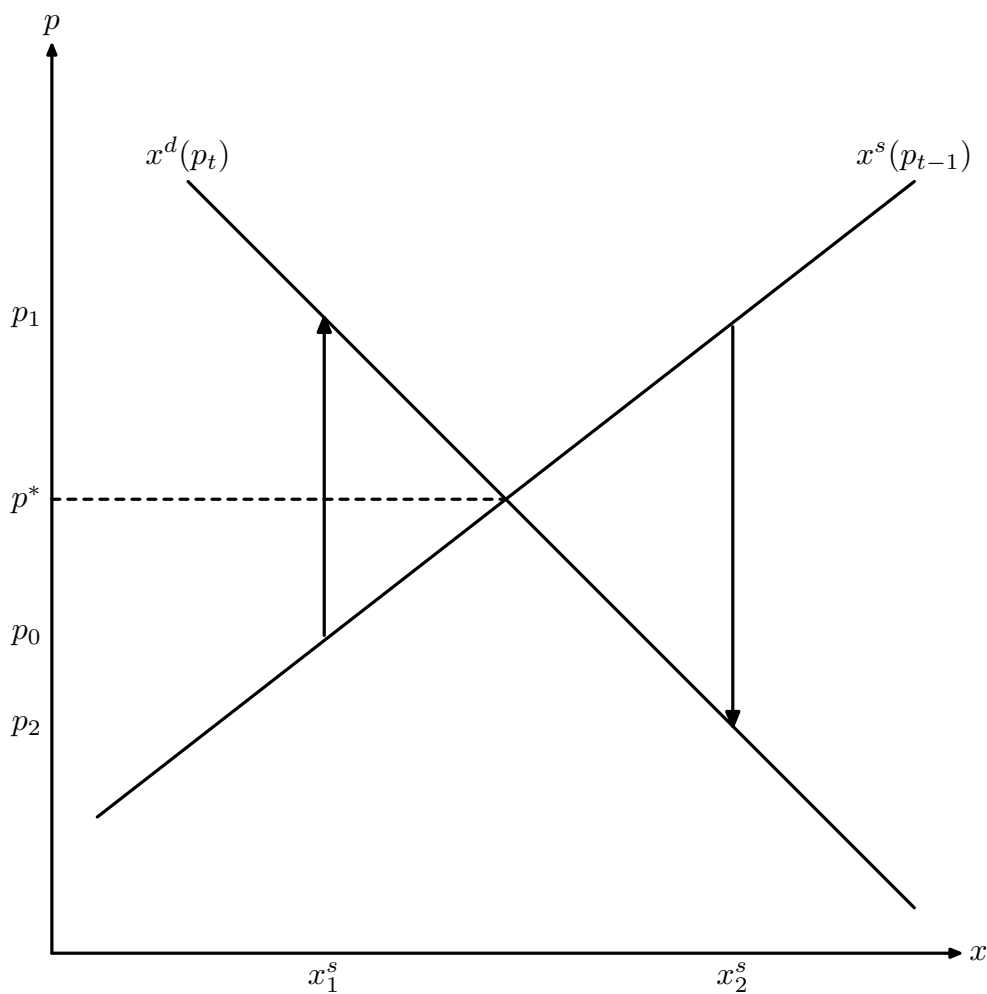
$$\begin{aligned} p_t - p^* &= \frac{a-c}{b} - \frac{d}{b} p_{t-1} - p^* \\ q_t &= \frac{a-c-dp_{t-1}}{b} - \frac{a-c}{b+d} \\ &= -\frac{d}{b} \left[p_{t-1} - \frac{a-c}{b+d} \right] = -\frac{d}{b} q_{t-1} \end{aligned}$$

Dies ist wiederum die zugehörige homogene Differenzengleichung. Ihre allgemeine Lösung ist

$$q_t = A \left(-\frac{d}{b} \right)^t$$

mit frei wählbarem Parameter A , der üblicherweise durch eine anfängliche

Abbildung 2.2:



Preisabweichung q_0 festgelegt wird. Falls $d < b$, konvergiert q_t alternierend gegen Null und die Marktpreise schwanken um den Gleichgewichtspreis mit immer kleineren Abweichungen. Dies ist der auch empirisch nachweisbare

Schweinezyklus.² Im Falle von $d > b$ kommt es zu immer größeren Abweichungen der Marktpreise vom Gleichgewichtspreis.

2.5 Aufgaben

Aufgabe 2.1

Bestimme die partikulären Lösungen folgender Differenzengleichungen

$$y_{t+1} - 0.5y_t = 10 \qquad y_1 = 10 \qquad (a)$$

$$4y_{t+1} + 2y_t = 90 \qquad y_0 = 18 \qquad (b)$$

$$y_{t+1} + y_t = 90 \qquad y_0 = 50 \qquad (c)$$

$$2y_{t+1} + 3y_t + 2 = 0 \qquad y_0 = -1 \qquad (d)$$

$$y_{t+1} - \frac{1}{2}y_t = t + 3 \qquad y_0 = 3 \qquad (f)$$

$$y_t - 3y_{t-1} = 4^t \qquad y_0 = 0 \qquad (g)$$

$$y_{t+1} + \frac{\sqrt{2}}{2}y_t = \cos \frac{\pi t}{4} \qquad y_0 = 0 \qquad (h)$$

Aufgabe 2.2

(a) Untersuche das Cobweb Modell für den Fall adaptiver Preiserwartungen

$$E(p_t | t-1) = E(p_{t-1} | t-2) + h(p_{t-1} - E(p_{t-1} | t-2))$$

wobei $0 < h < 1$.

(b) Zeige, dass bei geeignetem h das Marktgleichgewicht auch dann stabil ist, wenn $d > b$ gilt.

²Die europäische Marktordnung für den Agrarbereich hat den Schweinezyklus außer Kraft gesetzt. Er wurde erstmals in den 30iger Jahren des vorigen Jahrhunderts von Slutsky untersucht.

Kapitel 3

Lineare Differenzengleichung zweiter Ordnung

Eine lineare Differenzengleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten wird allgemein als die Funktionalgleichung

$$y_{t+2} + a_1 y_{t+1} + a_0 y_t = R(t)$$

geschrieben. Der Koeffizient a_0 ist von Null verschieden, sonst wäre die Ordnung lediglich Eins. Der Koeffizient a_1 hingegen darf Null sein. Das Lösungsverfahren erfolgt nach demselben Muster wie bei einer linearen Differenzengleichung erster Ordnung, die Berechnungen sind jedoch aufwändiger.

3.1 Homogener Teil

Die zugehörige homogene Differenzengleichung zweiter Ordnung lautet

$$y_{t+2} + a_1 y_{t+1} + a_0 y_t = 0$$

Die allgemeine Lösung ist zu ermitteln. Sie wird sich als Linearkombination aus zwei linear unabhängigen Lösungen der homogenen Dzgl. zusammensetzen. Wir versuchen den Lösungsansatz $f(t) = \lambda^t$ mit einer unbekannten Zahl λ

$$\lambda^{t+2} + a_1 \lambda^{t+1} + a_0 \lambda^t = \lambda^t [\lambda^2 + a_1 \lambda + a_0] = 0$$

Das Produkt $\lambda^t [\lambda^2 + a_1 \lambda + a_0]$ ist nur dann für alle t gleich Null, wenn einer der beiden Faktoren Null ist. Dies ist für $\lambda = 0$ oder $\lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0$ der Fall. Man nennt $\lambda = 0$ die triviale Lösung, wie auch bei linearen homogenen Gleichungssystemen. Von Interesse sind jedoch die Werte von λ , bei denen im zweiten Fall $\lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0$ wird.

3.1.1 Charakteristisches Polynom

Dadurch, dass ein ganz bestimmter Funktionstyp — eine Exponentialfunktion in t mit unbekannter Basis λ — gewählt wird, gelingt es, die Funktionalgleichung in eine einfache algebraische Gleichung zu transformieren. Wir suchen die Lösungen der quadratischen Gleichung

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0$$

oder, was dasselbe ist, die Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$p(\lambda) = \lambda^2 + a_1\lambda + a_0$$

Man beachte, dass das charakteristische Polynom oder die quadratische Gleichung dieselben Koeffizienten aufweist wie die homogene Differenzengleichung.

Die beiden Nullstellen des charakteristischen Polynoms ergeben sich durch die wohlbekannte Formel der quadratischen Ergänzung als

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} \left[-a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_0} \right]$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2} \left[-a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_0} \right]$$

Der Ausdruck unter der Quadratwurzel

$$\delta = a_1^2 - 4a_0$$

wird als Diskriminante bezeichnet. Er führt uns auf die wichtige Fallunterscheidung bei den Nullstellen des charakteristischen Polynoms und damit auch zur Klassifikation der Lösungen einer homogenen Differenzengleichung zweiter Ordnung.

$\delta > 0$ Beide Nullstellen sind reell und verschieden ($\lambda_1 \neq \lambda_2$ und $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$).

$\delta = 0$ Beide Nullstellen sind identisch, man spricht auch von einer doppelten Nullstelle ($\lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R}$).

$\delta < 0$ Beide Nullstellen sind (konjugiert) komplexe Zahlen.

Bevor wir jedoch die drei Fälle der Reihe nach behandeln, wird noch ein einfaches Kriterium genannt, das es erlaubt, das Vorzeichen der Nullstellen im Falle reeller Zahlen anzugeben. Da die λ 's mit t potenziert die Lösungen der homogenen Differenzengleichung bilden, wird bei positivem λ eine monotone Zeitreihe λ^t erzeugt und bei negativem λ ergibt sich eine alternierende Zeitreihe λ^t . Das Kriterium für die Vorzeichen der Nullstellen wird durch die sogenannte *Vorzeichen-Regel von Descartes* gegeben. Es lautet:

Satz (Vorzeichen-Regel von Descartes)

Die Anzahl der positiven reellen Nullstellen eines Polynoms ist höchstens so groß wie die Anzahl der Vorzeichen-Wechsel der Koeffizienten. Die Anzahl der negativen Nullstellen ist so groß wie die Anzahl der benachbarten Koeffizienten mit demselben Vorzeichen.

Unser charakteristisches Polynom ist normiert (der Leitkoeffizient ist Eins), daher können folgende Vorzeichenmuster auftreten:

+ + + zwei negative Nullstellen,

+ + − eine positive und eine negative Nullstelle, wobei die negative Zahl betragsmäßig größer als die positive ist,

+ − + zwei positive Nullstellen,

+ − − eine positive und eine negative Nullstelle, wobei diesmal die positive Zahl die betragsmäßig größere ist.

+ 0 − eine positive und eine negative Nullstelle $\pm\sqrt{-a_0}$,

+ 0 + rein imaginäre Nullstellen konjugiert komplex $\pm i\sqrt{a_0}$,

Die beiden letzten Vorzeichenmuster kann man direkt aus den Formeln für λ_1 und λ_2 entnehmen, indem $a_1 = 0$ gesetzt wird.

3.1.1.1 Positive Diskriminante

Wenn die Diskriminante positiv ist, ergeben sich zwei verschiedene und reelle Nullstellen λ_1 und λ_2 des charakteristischen Polynoms. Jede Linearkombination

$$c_1\lambda_1^t + c_2\lambda_2^t$$

ist eine Lösung der homogenen Differenzengleichung zweiter Ordnung, wie man durch Einsetzen und Umformen direkt überprüft. Dass $f_1(t) = \lambda_1^t$ und $f_2(t) = \lambda_2^t$ für $\lambda_1 \neq \lambda_2$ linear unabhängig sind, prüft man durch die Casorati-Determinante

$$C(t) = \begin{vmatrix} f_1(t) & f_2(t) \\ f_1(t+1) & f_2(t+1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda_1^t & \lambda_2^t \\ \lambda_1^{t+1} & \lambda_2^{t+1} \end{vmatrix} = \lambda_1^t \lambda_2^t [\lambda_2 - \lambda_1]$$

Diese ist ungleich Null, falls $\lambda_1 \neq \lambda_2$ und beide müssen auch ungleich Null sein. Ist beispielsweise $\lambda_2 = 0$, dann verschwindet die Casorati-Determinante ebenfalls für alle t . In diesem Fall ($\lambda_2 = 0$) lässt sich das charakteristische

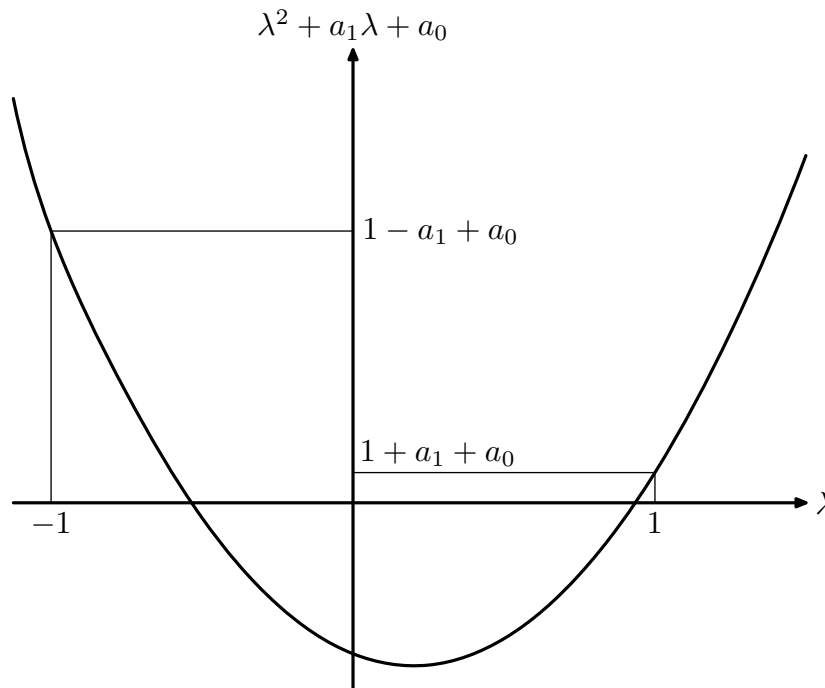
Polynom auch schreiben als $\lambda(\lambda - \lambda_1) = \lambda^2 - \lambda\lambda_1$, also $\lambda_1 = -a_1$ und $a_0 = 0$. Dieser Fall kann aber nicht vorkommen, da für $a_0 = 0$ die Ordnung der Differenzengleichung Eins und nicht Zwei ist. Damit kann bei einer Differenzengleichung zweiter Ordnung weder $\lambda_1 = 0$ noch $\lambda_2 = 0$ vorkommen und der Test mit der Casorati-Determinante ist gültig.

Der Zeitpfad der allgemeinen Lösung der homogenen Differenzengleichung

$$\Lambda(t, c_1, c_2) = c_1 \lambda_1^t + c_2 \lambda_2^t$$

wird durch die Vorzeichen der beiden λ 's und durch ihre Größe bestimmt. Sind beide betragsmäßig kleiner als Eins, dann konvergiert die allgemeine Lösung gegen Null. Ist eines der beiden λ 's betragsmäßig größer als Eins, dann divergiert die allgemeine Lösung. Ist eines der λ 's negativ, dann alterniert die allgemeine Lösung. Diese Muster des Zeitpfades lassen sich unmittelbar aus dem Verhalten der allgemeinen Lösung einer Differenzengleichung erster Ordnung auf den Fall zweiter Ordnung übertragen. Wir benötigen jedoch eigene Kriterien dafür, dass beide λ 's betragsmäßig kleiner als Eins sind. Dazu betrachten wir die sogenannte Schur Parabel, das ist der Graph des

Abbildung 3.1: Schur Parabel



charakteristischen Polynoms. Sie ist nach oben hin geöffnet. Wenn nun die

Funktionswerte sowohl bei -1 als auch bei $+1$ positiv sind, also

$$1 + a_1 + a_0 > 0$$

$$1 - a_1 + a_0 > 0$$

dann gibt es noch folgende Möglichkeiten:

1. beide Schnittpunkte sind kleiner als -1
2. beide Schnittpunkte sind größer als $+1$
3. es gibt keine Schnittpunkte der Parabel mit der λ -Achse
4. beide Schnittpunkte liegen zwischen -1 und $+1$.

In den Fällen 1 und 2 sind die λ_i betragsmäßig größer als Eins, also müssen beide ausgeschlossen werden. In beiden Fällen ist das Produkt der zwei Nullstellen des charakteristischen Polynoms größer als Eins. Daher können beide Fälle ausgeschlossen werden, sobald die Umkehrung gilt:

$$|\lambda_1| < 1 \quad \text{und} \quad |\lambda_2| < 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda_1 \cdot \lambda_2 < 1 .$$

Dieses dritte Stabilitätskriterium wird nun auch mittels der Koeffizienten des charakteristischen Polynoms ausgedrückt:

$$\begin{aligned} \lambda_1 \lambda_2 &= \frac{1}{2} \left[-a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_0} \right] \frac{1}{2} \left[-a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_0} \right] \\ &= \frac{1}{4} \left[a_1^2 - a_1^2 + 4a_0 \right] = a_0 , \end{aligned}$$

also

$$1 - \lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 1 - a_0 > 0$$

Im dritten Fall gibt es keine Schnittpunkte der Parabel mit der λ -Achse, es liegen (konjugiert) komplexe Nullstellen des charakteristischen Polynoms vor. Dieser Fall wird ausführlich im übernächsten Unterabschnitt behandelt. Dort wird u.A. auch gezeigt, dass die soeben hergeleitete dritte Stabilitätsbedingung zu Oszillationen mit gedämpfter Amplitude führt.

Damit sind alle instabilen Fälle ausgeschlossen und nur noch der vierte Fall ($|\lambda_1| < 1$ und $|\lambda_2| < 1$) gilt, sobald die drei sogenannten *Schur-Kriterien*

$$1 + a_1 + a_0 > 0$$

$$1 - a_1 + a_0 > 0$$

$$1 - a_0 > 0$$

erfüllt sind. Sie lassen sich in ähnlicher Weise auch für Differenzengleichung höherer Ordnung konstruieren.

3.1.1.2 Diskriminante ist Null

Ist $\delta = a_1^2 - 4a_0 = 0$, dann gibt es eine zweifache Nullstelle $\lambda^* = -a_1/2$ des charakteristischen Polynoms. In diesem Fall berührt der Scheitel der Schur Parabel die λ -Achse. Wir benötigen aber zwei linear unabhängige Lösungen der homogenen Differenzengleichung

$$y_{t+2} + a_1 y_t + a_0 = 0$$

und probieren dazu neben $f_1(t) = (\lambda^*)^t$ noch $f_2(t) = t(\lambda^*)^t$. Durch Einsetzen und Umformen machen wir die Probe.

$$(t+2)(\lambda^*)^{t+2} + a_1(t+1)(\lambda^*)^{t+1} + a_0 t(\lambda^*)^t = (\lambda^*)^t [(t+2)(\lambda^*)^2 + a_1(t+1)\lambda^* + ta_0]$$

Der Term in der eckigen Klammer muss für alle t gleich Null sein, damit f_2 eine Lösung ist. Einsetzen von $\lambda^* = -a_1/2$ ergibt

$$\begin{aligned} (t+2)(\lambda^*)^2 + a_1(t+1)\lambda^* + ta_0 &= (t+2)\frac{a_1^2}{4} - (t+1)\frac{a_1^2}{2} + ta_0 \\ &= \frac{a_1^2}{4}(t+2-2t-2) + ta_0 \\ &= t\left(-\frac{a_1^2}{4} + a_0\right) = 0 \end{aligned}$$

denn da $\delta = 0$ ist $a_1^2/4 = a_0$. Folglich ist $f_2(t) = t(\lambda^*)^t$ tatsächlich eine weitere Lösung der homogenen Differenzengleichung.

Die lineare Unabhängigkeit der beiden Lösungen testen wir wieder mit der Casorati-Determinante.

$$C(t) = \begin{vmatrix} f_1(t) & f_2(t) \\ f_1(t+1) & f_2(t+1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (\lambda^*)^t & t(\lambda^*)^t \\ (\lambda^*)^{t+1} & (t+1)(\lambda^*)^{t+1} \end{vmatrix} = (\lambda^*)^{2t+1}$$

Sie ist nur dann Null, wenn $\lambda^* = 0$; aber dieser Fall tritt bei einer echten Differenzengleichung zweiter Ordnung nicht ein.

Die allgemeine Lösung einer homogenen Differenzengleichung lautet also im Falle einer doppelten Nullstelle des charakteristischen Polynoms

$$\Lambda(t, c_1, c_2) = c_1(\lambda^*)^t + c_2 t(\lambda^*)^t$$

mit zwei frei wählbaren Parametern c_1 und c_2 , welche durch Start- oder Randbedingungen festgelegt werden können.

Auch im Falle von $\delta = 0$ konvergiert die allgemeine Lösung wenn $|\lambda^*| < 1$ ist. Es ist jedoch nicht unmittelbar einsichtig, dass im Ausdruck $t(\lambda^*)^t$ die Dämpfung durch $(\lambda^*)^t$ im Laufe der Zeit überwiegt, wenn $|\lambda^*| < 1$. Wir zeigen dies für $0 < \lambda^* < 1$ mittels der Ungleichung von Bernoulli.

Satz (Ungleichung von Bernoulli)

Für alle reellen Zahlen $x > -1$, $x \neq 0$ und alle natürlichen Zahlen $n \geq 2$ gilt

$$(1+x)^n > 1+nx$$

Wir setzen für $0 < \lambda^* < 1$

$$\lambda^* = \frac{1}{1+x} \quad \text{mit} \quad x > 0$$

und erhalten die Abschätzung

$$t(\lambda^*)^t = \frac{t}{(1+x)^t} < \frac{t}{1+tx} = \frac{1}{\frac{1}{t}+x} \quad \text{für} \quad t \geq 2$$

Daher ist auch der Grenzwert $\lim_{t \rightarrow \infty} t(\lambda^*)^t$ nach oben beschränkt durch $1/x$. Betrachten wir noch das Verhältnis

$$\frac{(t+1)(\lambda^*)^{t+1}}{t(\lambda^*)^t} = \frac{t+1}{t} \frac{(1+x)^t}{(1+x)^{t+1}} = \frac{1+\frac{1}{t}}{1+x}$$

dann wird klar, es gibt einen Zeitpunkt $T \geq 1/x$, ab dem $t(\lambda^*)^t$ mit steigendem t immer kleiner wird und somit $\lim_{t \rightarrow \infty} t(\lambda^*)^t = 0$ gilt.

Die Betrachtung des Verhaltens von $t(\lambda^*)^t$ deutet auf eine Besonderheit im Falle der doppelten Nullstelle hin. Es kann sehr lange dauern (also das T sehr groß sein), bis sich die Dämpfung in der Lösung bemerkbar macht. Das bedeutet aber auch, dass man für kleines t nicht auf das langfristige Verhalten der Lösung schliessen darf. Die Einschwingphase kann wie gesagt sehr lang sein. Dies sollte als Warnung vor allzu schnellen Schlussfolgerungen aus numerischen Simulationen von Differenzengleichungen ausreichen.

Exkurs: komplexe Zahlen**Definition**

Eine komplexe Zahl ist eine Zahl der Art $a+bi$, wobei a und b reelle Zahlen sind und i — die imaginäre Einheit — die Gleichung $i^2 = -1$ erfüllt.

Die reelle Zahl a heißt **Realteil** und die reelle Zahl b heißt **Imaginärteil** der komplexen Zahl. Eine komplexe Zahl, deren Realteil Null ist, heißt auch **imaginäre Zahl**.

Die Menge aller komplexen Zahlen wird mit \mathbb{C} bezeichnet.

Definition (konjugiert komplexe Zahl)

Zu jeder komplexen Zahl $a+bi$ gibt es eine konjugiert komplexe Zahl

$$\overline{a+bi} = a-bi$$

Sie entsteht, indem der Imaginärteil subtrahiert statt addiert wird.

Mit komplexen Zahlen kann man Rechnen wie mit reellen Zahlen, d.h. die Summe, das Produkt oder die Division ergeben wieder eine komplexe Zahl. Angenommen, a_1 , a_2 , b_1 und b_2 sind reelle Zahlen, dann gilt:

$$(a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) i$$

der Realteil der Summe komplexer Zahlen ist die Summe der Realteile aller Summanden und der Imaginärteil der Summe ist die Summe der Imaginärteile aller Summanden.

Addiert man eine komplexe Zahl und ihre konjugiert komplexe, ergibt sich eine reelle Zahl, der zweifache Realteil.

$$a_1 + b_1 i + \overline{a + bi} = a_1 + b_1 i + a_1 - b_1 i = 2a_1$$

Die komplizierteste Regel bezieht sich auf das Produkt zweier komplexer Zahlen.

$$\begin{aligned} (a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) &= a_1 a_2 + a_1 b_2 i + b_1 a_2 i + b_1 b_2 i^2 \\ &= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i \end{aligned}$$

Speziell gilt das Quadrat

$$(a + bi)^2 = (a^2 - b^2) + 2abi$$

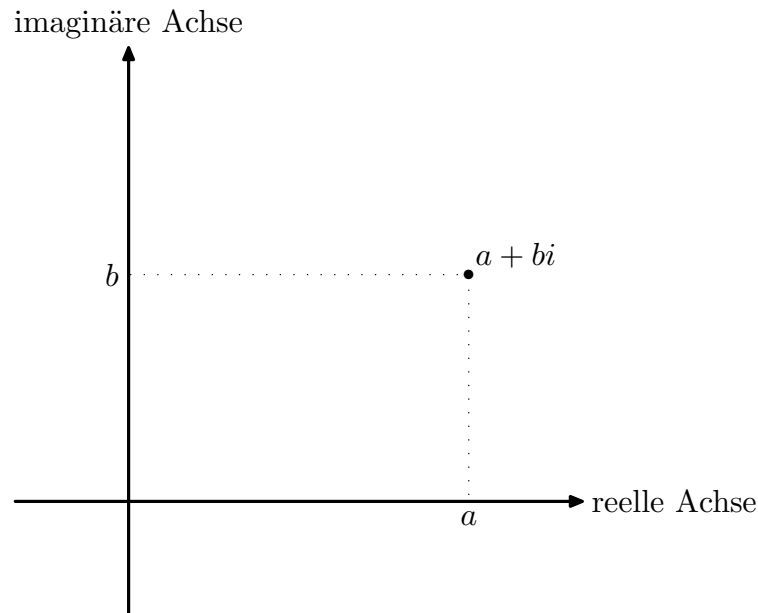
Das Produkt einer komplexen Zahl mit ihrer konjugierten ergibt eine positive reelle Zahl.

$$(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$$

Die Division zweier komplexer Zahlen geschieht, indem zuerst der Nenner in eine positive reelle Zahl verwandelt wird, wozu man den Bruch mit dem konjugiert komplexen Nenner erweitert und anschließend Realteil und Imaginärteil getrennt dividiert. Dies ist natürlich nur dann möglich, wenn $a_2^2 + b_2^2 > 0$ also *keine* Null im Nenner steht.

$$\begin{aligned} \frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} &= \frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} \cdot \frac{a_2 - b_2 i}{a_2 - b_2 i} \\ &= \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + (a_2 b_1 - a_1 b_2) i}{a_2^2 + b_2^2} \\ &= \left(\frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} \right) + \left(\frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} \right) i \end{aligned}$$

Abbildung 3.2: Gauß-Ebene



Geometrische Darstellung komplexer Zahlen

Geradeso wie die reellen Zahlen als Zahlengerade dargestellt werden können, lassen sich die komplexen Zahlen $a + bi$ als geordnete Zahlenpaare (a, b) in einer Ebene darstellen, wobei die Rechts-Achse den Realteil und die Hoch-Achse den Imaginärteil repräsentiert. Der wesentliche Unterschied zu „normalen“ Punkten in der Ebene besteht darin, dass das Produkt komplexer Zahlen wieder eine komplexe Zahl ist, was für Zweitupel nicht gilt.

Betrag einer komplexen Zahl

In der Ebene wird der Abstand des Punktes (a, b) vom Ursprung gemessen durch seine Euklidische Norm

$$\|(a, b)\| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

dasselbe fordern wir für die komplexe Zahl $a + bi$, von der wir bereits wissen, dass

$$(a + bi) \cdot (a - bi) = a^2 + b^2$$

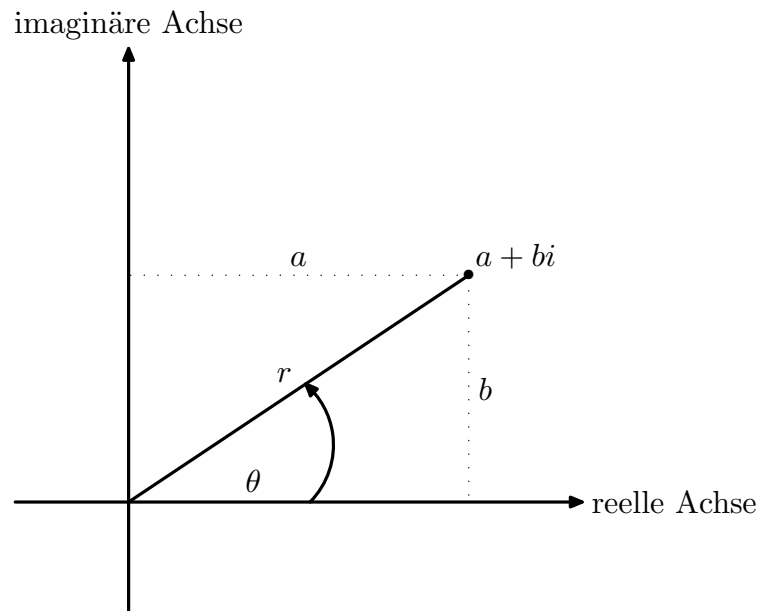
Der Betrag einer komplexen Zahl ist definiert als die Quadratwurzel aus dem Produkt der Zahl mit ihrer konjugierten:

$$|a + bi| = \sqrt{(a + bi) \overline{(a + bi)}} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Polarkoordinaten einer komplexen Zahl

Insbesondere die Potenzen komplexer Zahlen, die für die Lösung von Differenzengleichungen eine wichtige Rolle spielen, ist es nützlich, diese Punkte in der Gaußschen Zahlenebene nicht durch kartesische Koordinaten, sondern durch Polarkoordinaten auszudrücken.

Abbildung 3.3: Polarkoordinaten



$$a + bi = r (\cos \theta + i \sin \theta)$$

wobei

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \cos \theta = \frac{a}{r}, \quad \sin \theta = \frac{b}{r}$$

Rechnen in Polarkoordinaten

Da wir in erster Linie am Multiplizieren und Potenzieren komplexer Zahlen interessiert sind, werden auch nur diese beiden Operationen behandelt. Dazu sind die sogenannten **Additions-Theoreme** für den Sinus und den Cosinus notwendig. Sie sind zur Auffrischung der Schulmathematik nochmals genannt. Sind θ_1 und θ_2 zwei Winkel, dann gilt:

$$\cos \theta_1 \cdot \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \cdot \sin \theta_2 = \cos (\theta_1 + \theta_2)$$

$$\sin \theta_1 \cdot \cos \theta_2 + \sin \theta_2 \cdot \cos \theta_1 = \sin (\theta_1 + \theta_2)$$

Für das Produkt zweier komplexer Zahlen in Polarkoordinaten gilt:

$$\begin{aligned} r_1 (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) \cdot r_2 (\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) \\ = r_1 r_2 [(\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2) + i (\sin \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_2 \cos \theta_1)] \\ = r_1 r_2 [\cos (\theta_1 + \theta_2) + i \sin (\theta_1 + \theta_2)] \end{aligned}$$

Zwei komplexe Zahlen in Polarkoordinaten werden multipliziert, indem ihre Beträge multipliziert und die Argumente des Cosinus und des Sinus addiert werden.

Für Potenzen komplexer Zahlen in Polarkoordinaten gibt es eine besonders einfache Form, die unter dem Namen „Satz von Moivre“ bekannt ist.

Satz (Moivre)

Für jede komplexe Zahl $a + bi$ in Polarkoordinaten $r (\cos \theta + i \sin \theta)$ und jede natürliche Zahl n gilt:

$$(a + bi)^n = r^n [\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)]$$

Taucht eine komplexe Zahl als Exponent auf, dann kann sie mittels der Euler'schen Identität umgeformt werden. Für jede komplexe Zahl $a + ib$ gilt

$$e^{a+bi} = e^a e^{bi} = e^a (\cos b + i \sin b)$$

Speziell ist $e^{\pi i} = -1$.

3.1.1.3 Negative Diskriminante

Falls nun die Diskriminante negativ ist,

$$\delta = a_1^2 - 4a_0 < 0$$

ist $-\delta$ positiv und es lässt sich -1 ausklammern.

$$-1 \cdot [4a_0 - a_1^2] = -1 \cdot [-\delta]$$

Somit gilt für die beiden Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left[-a_1 \pm \sqrt{-1 \cdot (4a_0 - a_1^2)} \right] = \frac{1}{2} \left[-a_1 \pm i\sqrt{4a_0 - a_1^2} \right]$$

also

$$\lambda_1 = \frac{-a_1}{2} + i\frac{\sqrt{-\delta}}{2} \text{ und } \lambda_2 = \bar{\lambda}_1 = \frac{-a_1}{2} - i\frac{\sqrt{-\delta}}{2}$$

Im Falle einer negativen Diskriminante sind die beiden Nullstellen zwei komplexe Zahlen, welche zueinander konjugiert komplex sind.

Die allgemeine Lösung einer homogenen Differenzengleichung zweiter Ordnung lautet im Falle einer negativen Diskriminante

$$\Lambda(t, c_1, c_2) = c_1 \lambda_1^t + c_2 \bar{\lambda}_1^t$$

mit beliebig wählbaren Konstanten c_1 und c_2 . Um die Potenzen der konjugiert komplexen Zahlen zu bilden, schreiben wir sie in polarer Form und nutzen den Satz von De Moivre aus.

$$\Lambda(t, c_1, c_2) = r^t [(c_1 + c_2) \cos \omega t + i(c_1 - c_2) \sin \omega t]$$

wobei

$$r \cos \omega = \frac{-a_1}{2} \quad \text{und} \\ r \sin \omega = \frac{\sqrt{4a_0 - a_1^2}}{2}$$

Die imaginäre Einheit wird aus der allgemeinen Lösung eliminiert, indem auch c_1 und c_2 als konjugiert komplexes Zahlenpaar $\alpha \pm i\beta$ angesetzt wird. Dies führt uns auf die rein reelle Darstellung der allgemeinen Lösung als

$$\Lambda(t, \alpha, \beta) = \frac{r^t}{2} [\alpha \cos \omega t - \beta \sin \omega t]$$

Die beiden trigonometrischen Funktionen \cos und \sin sind periodisch und ihr Wertebereich liegt zwischen -1 und $+1$. Sie bewirken die Oszillation der allgemeinen Lösung. Ob diese Oszillation mit immer größerer Amplitude oder gedämpft erfolgt, wird ausschließlich durch den Term r^t bestimmt. Ist $r = \sqrt{\lambda_1 \bar{\lambda}_1}$ größer als 1, dann nimmt die Amplitude im Laufe der Zeit zu und die allgemeine Lösung divergiert. Ist $r = 1$, dann ergibt sich eine Oszillation mit gleichbleibender Amplitude. Im Falle von $r < 1$ nimmt die Amplitude im Laufe der Zeit ab und Λ strebt gegen Null für $t \rightarrow \infty$.

Abschließend soll — wie bereits angekündigt — die Stabilitätsbedingung $r < 1$ durch die Koeffizienten der Differenzengleichung ausgedrückt werden. Der Betrag r der komplexen Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist genau dann kleiner Eins, wenn sein Quadrat kleiner Eins ist. Da r^2 das Produkt der beiden konjugiert komplexen Zahlen ist, gilt

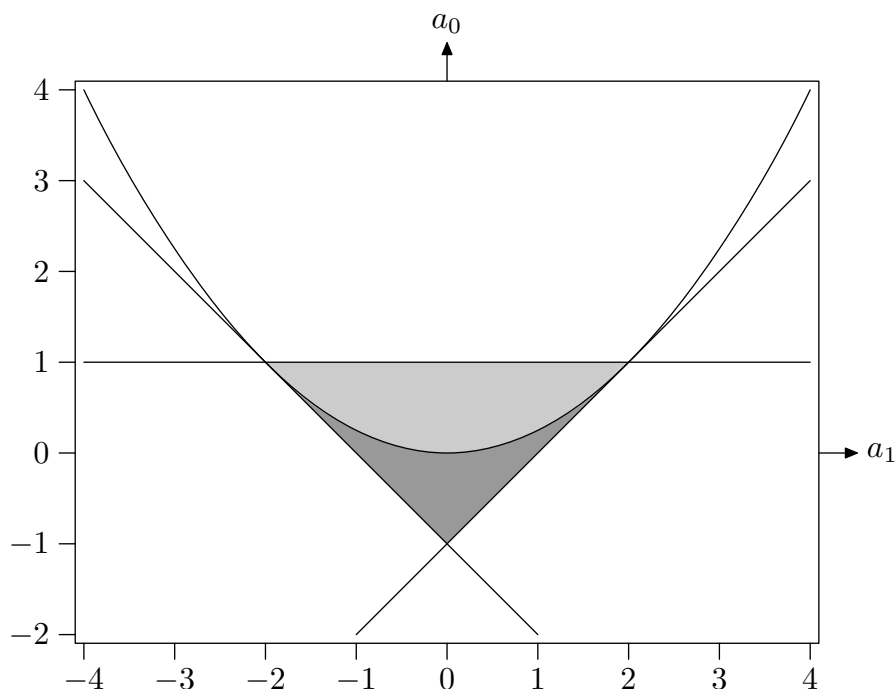
$$\begin{aligned} r < 1 &\iff r^2 < 1 &\iff \lambda_1 \bar{\lambda}_1 < 1 \\ &\iff a_0 < 1 &\iff 1 - a_0 > 0 \end{aligned}$$

Dies ist jedoch das dritte Schur Kriterium.

3.1.2 Klassifikation der Zeitpfade

Wir sind nun in der Lage, die unterschiedlichen Verläufe der allgemeinen Lösung der homogenen Differenzengleichung zweiter Ordnung anhand ihrer beiden Koeffizienten a_0 und a_1 zu klassifizieren. Über Stabilität oder Instabilität geben uns die drei Schurkriterien Aufschluss. Die Grenzfälle sind drei

Abbildung 3.4: Klassifikation der Zeitpfade



Geraden $a_0 = -1 - a_1$, $a_0 = -1 + a_1$ und $a_0 = 1$ in einer a_1 - a_0 -Ebene. Über

monotones oder oszillierendes Verhalten gibt das Vorzeichen der Diskriminante Aufschluss. Der Grenzfall $\delta = 0$ ist dabei eine Parabel $a_0 = a_1^2/4$ in der a_1 - a_0 -Ebene. Nur bei einer Konstellation der Koeffizienten in der dunkel unterlegten Dreiecksfläche sind die drei Schur Kriterien erfüllt. Daher konvergiert $\Lambda(t, c_1, c_2)$ nur, wenn der Punkt (a_1, a_0) in der genannten Dreiecksfläche liegt, außerhalb liegt Instabilität vor. Für die Punkte auf dem Rand lassen sich keine Stabilitätsaussagen treffen. Die Diskriminante ist negativ bei allen Punkten, die oberhalb der Parabel liegen. Im heller unterlegten Bereich über der Parabel und innerhalb des Dreiecks kommt es also zu Oszillationen mit gedämpfter Amplitude. Entlang der a_1 -Achse ist $a_0 = 0$. Dieser Bereich ist auch im Dreieck ausgespart, da sich für $a_0 = 0$ die Ordnung der Differenzengleichung ändert und ein völlig anders Zeitmuster entsteht. Man bezeichnet $a_0 = 0$ auch als Bifurkationspunkt der Differenzengleichung zweiter Ordnung. Wie sich die Zeitpfade der allgemeinen Lösung in den anderen Bereichen der a_1 - a_0 -Ebene gestalten bedarf keiner weiteren Erörterung.

3.2 Spezielle Lösung

Eine spezielle Lösung der originalen Differenzengleichung zweiter Ordnung

$$y_{t+2} + a_1 y_{t+1} + a_0 y_t = R(t)$$

lässt sich mit den bereits im vorigen Kapitel dargestellten Verfahren gewinnen. Wir wollen sie nochmals der Reihe nach mit weiteren Beispielen behandeln.

3.2.1 Methode der unbestimmten Koeffizienten

Gegeben ist die Differenzengleichung

$$y_{t+2} - 6y_{t+1} + 8y_t = 3t^2 + 2 - 5 \cdot 3^t$$

Die zugehörige homogene Dzgl besitzt die allgemeine Lösung

$$\Lambda(t, c_1, c_2) = c_1 2^t + c_2 4^t$$

wie man unmittelbar dem charakteristischen Polynom entnimmt.

Die Störfunktion ist aus einem Polynom $3t^2 + 2$ und aus einem Exponentialterm $5 \cdot 3^t$ zusammengesetzt. Für das Polynom wählen wir den Ansatz

$$\beta_0 t^2 + \beta_1 t + \beta_2$$

und für den Exponentialterm

$$\beta_3 3^t$$

sodass als erster Versuch einer speziellen Lösung

$$\bar{\lambda}(t) = \beta_0 t^2 + \beta_1 t + \beta_2 + \beta_3 3^t$$

angesetzt wird. Durch Einsetzen in die originale Dzgl und Umformen sollen nun die unbestimmten Koeffizienten β_0, \dots, β_3 berechnet werden.

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}(t+2) - 6\bar{\lambda}(t+1) + 8\bar{\lambda}(t) &= \beta_0(t+2)^2 + \beta_1(t+2) + \beta_2 + \beta_3 3^{t+2} \\ &\quad - 6[\beta_0(t+1)^2 + \beta_1(t+1) + \beta_2 + \beta_3 3^{t+1}] \\ &\quad + 8[\beta_0 t^2 + \beta_1 t + \beta_2 + \beta_3 3^t] \\ &= 3\beta_0 t^2 + (3\beta_1 - 8\beta_0)t + 3\beta_2 - 4\beta_1 - 2\beta_0 - \beta_3 3^t \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck muss für alle t gleich der Störfunktion sein

$$3\beta_0 t^2 + (3\beta_1 - 8\beta_0)t + 3\beta_2 - 4\beta_1 - 2\beta_0 - \beta_3 3^t = 3t^2 + 2 - 5 \cdot 3^t$$

Durch einen Koeffizientenvergleich der gleichartigen Terme ergibt sich nun ein Gleichungssystem in den unbestimmten Koeffizienten β_0, \dots, β_3

$$\begin{aligned} 3\beta_0 &= 3 \\ 3\beta_1 - 8\beta_0 &= 0 \\ 3\beta_2 - 4\beta_1 - 2\beta_0 &= 2 \\ \beta_3 &= 5 \end{aligned}$$

mit der Lösung

$$\beta_0 = 1 \quad \beta_1 = \frac{8}{3} \quad \beta_2 = \frac{44}{9} \quad \beta_3 = 5$$

Da wir alle unbestimmten Koeffizienten nunmehr berechnet haben, wird kein weiterer Versuch mit etwas komplizierteren Funktionstypen (Multiplikation mit t) benötigt.

Die allgemeine Lösung dieser Differenzengleichung lautet daher

$$y_t = c_1 2^t + c_2 4^t + t^2 + \frac{8}{3}t + \frac{44}{9} + 5 \cdot 3^t$$

3.2.2 Operator Methode

Wir unterstellen wieder, dass für R nicht der Funktionstyp, sondern nur Funktionswerte x_t bekannt sind.

$$y_{t+2} + a_1 y_{t+1} + a_0 y_t = x_t$$

Die linke Seite wird als Operatorpolynom $S^2 + a_1 S + a_0$ geschrieben und damit dividiert.

$$(S^2 + a_1 S + a_0) y_t = x_t \quad \rightsquigarrow \quad y_t = \frac{1}{S^2 + a_1 S + a_0} x_t$$

Um die rechte Seite nun als geometrische Reihe schreiben zu können, benötigen wir eine Partialbruchzerlegung des reziproken Operatorpolynoms. Wir unterstellen, dass die Nullstellen des charakteristischen Polynoms unterschiedliche reelle Zahlen sind, die beide betragsmäßig größer als Eins sind. Zunächst schreiben wir das Operatorpolynom als Produkt

$$S^2 + a_1 S + a_0 = (\lambda_1 - S)(\lambda_2 - S) = \lambda_1 \lambda_2 \left(1 - \frac{S}{\lambda_1}\right) \left(1 - \frac{S}{\lambda_2}\right)$$

Die Partialbruchzerlegung erfolgt nun nach dem bekannten Schema.

$$\frac{1}{\left(1 - \frac{S}{\lambda_1}\right) \left(1 - \frac{S}{\lambda_2}\right)} = \frac{Z_1}{1 - \frac{S}{\lambda_1}} + \frac{Z_2}{1 - \frac{S}{\lambda_2}}$$

wobei durch einen Koeffizientenvergleich die beiden Zähler Z_1 und Z_2 berechnet werden als

$$Z_1 = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} \quad \text{und} \quad Z_2 = \frac{-\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}$$

Damit ergibt sich insgesamt

$$\begin{aligned} y_t &= \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2} \left[Z_1 \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{S}{\lambda_1}\right)^j x_t + Z_2 \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{S}{\lambda_2}\right)^j x_t \right] \\ &= \frac{1}{\lambda_2(\lambda_1 - \lambda_2)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x_{t+j}}{\lambda_1^j} - \frac{1}{\lambda_1(\lambda_1 - \lambda_2)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x_{t+j}}{\lambda_2^j} \end{aligned}$$

Diese Vorwärtslösung existiert nur, wenn beide λ 's betragsmäßig größer als Eins sind. Sind beide betragsmäßig kleiner als Eins (sind also die Schur Kriterien erfüllt), dann ist eine geeignete Rückwärtslösung mithilfe des Lag-Operators zu konstruieren.

3.2.3 Variation der Parameter

Beim Verfahren der Variation der Parameter geht man von der allgemeinen Lösung der zugehörigen homogenen Dzgl $\Lambda(t, c_1, c_2)$ aus und ersetzt die freien Parameter c_1 und c_2 durch zu bestimmende Funktionen der Zeit $K_1(t)$ und $K_2(t)$. Man kann immer folgendes Gleichungssystem zur Bestimmung der K_i aufstellen:

$$\begin{aligned} f_1 \Delta K_1 + f_2 \Delta K_2 &= 0 \\ (\Delta f_1) \Delta K_1 + (\Delta f_2) \Delta K_2 &= R(t) \end{aligned}$$

Man beachte, dass dieses lineare Gleichungssystem für ΔK_i lösbar ist, wenn f_1 und f_2 linear unabhängig sind, denn die Determinante der Koeffizienten Matrix ist gleich der Casorati Determinante. Aus diesen Lösungen ist dann durch bestimmte Summation auf K_i zu schließen.

Wir betrachten das folgende Beispiel

$$y_{t+2} - 5y_{t+1} + 6y_t = t^2$$

Die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Dzgl lautet

$$\Lambda(t, c_1, c_2) = c_1 2^t + c_2 3^t$$

Nun werden die beiden c_i durch K_i ersetzt und das Gleichungssystem zur Bestimmung von ΔK_i lautet

$$\begin{aligned} 2^{t+1} \Delta K_1 + 3^{t+1} \Delta K_2 &= 0 \\ 2^{t+1} \Delta K_1 + 2 \cdot 3^{t+1} \Delta K_2 &= t^2 \end{aligned}$$

mit den beiden Lösungen

$$\Delta K_1 = \frac{-t^2}{2^{t+1}} \quad \text{und} \quad \Delta K_2 = \frac{t^2}{3^{t+1}}$$

Durch allgemeine Summation erhalten wir (nach einigen nicht ganz trivialen Umformungen)

$$K_1 = \frac{1}{2^t} (t^2 + 2t + 3) + c_1 \quad \text{und} \quad K_2 = -\frac{1}{2 \cdot 3^t} (t^2 + t + 1) + c_2$$

Einsetzen ergibt dann die allgemeine Lösung

$$y_t = c_1 2^t + c_2 3^t + \frac{1}{2} t^2 + \frac{2}{3} t + \frac{5}{2}$$

3.3 Allgemeine Lösung

Die allgemeine Lösung ist die Summe aus $\Lambda(t, c_1, c_2)$ und der speziellen Lösung $\bar{\lambda}$. Wir wollen aber noch die beiden Verfahren zur einschrittigen Konstruktion einer allgemeinen Lösung im Falle einer linearen Differenzengleichung zweiter Ordnung anhand zweier Beispiele Behandeln.

3.3.1 Reduktion der Ordnung

Gegeben ist die Differenzengleichung

$$y_{t+2} - 5y_{t+1} + 6y_t = t^2$$

Sie kann auch als

$$(S - 3)(S - 2)y_t = t^2$$

geschrieben werden, wie man dem charakteristischen Polynom unmittelbar entnimmt. Wir setzen eine neue Variable $z_t = (S - 2)y_t$ an und erhalten eine Differenzengleichung erster Ordnung in z

$$(S - 3)z_t = t^2$$

Multiplikation mit dem summierenden Faktor $1/3^{t+1}$ ergibt

$$\begin{aligned} \frac{z_{t+1}}{3^{t+1}} - \frac{z_t}{3^t} &= \frac{t^2}{3^{t+1}} \\ \Delta \left(\frac{z_t}{3^t} \right) &= \frac{t^2}{3^{t+1}} \\ \frac{z_t}{3^t} &= \Delta^{-1} \frac{t^2}{3^{t+1}} \\ z_t &= 3^t \Delta^{-1} \frac{t^2}{3^{t+1}} \\ &= c_1 3^t - \frac{1}{2} (t^2 + t + 1) \end{aligned}$$

Nun wird z_t durch $(S - 2)y_t$ ersetzt und erneut mit einem summierenden Faktor multipliziert

$$\begin{aligned} (S - 2)y_t &= c_1 3^t - \frac{1}{2} (t^2 + t + 1) \\ y_t &= 2^t \Delta^{-1} \left(\frac{c_1 3^t - \frac{1}{2} (t^2 + t + 1)}{2^{t+1}} \right) \\ &= c^2 2^t + c_3 3^t + \frac{1}{2} t^2 + \frac{3}{2} t + \frac{5}{2} \end{aligned}$$

3.3.2 Erzeugende Funktion

Auch bei diesem Verfahren zur direkten Bestimmung einer allgemeinen Lösung soll ein Beispiel die Herangehensweise verdeutlichen. Gegeben ist die homogene Differenzengleichung zweiter Ordnung

$$y_{t+2} - 3y_{t+1} + 2y_t = 0$$

mit den beiden Startwerten $y_0 = 2$ und $y_1 = 3$. Die erzeugende Funktion G lautet bekanntlich

$$G(k) = \sum_{t=0}^{\infty} y_t k^t$$

Wir multiplizieren die Dzgl mit k^t und summieren

$$\sum_{t=0}^{\infty} y_{t+2} k^t - 3 \sum_{t=0}^{\infty} y_{t+1} k^t + 2 \sum_{t=0}^{\infty} y_t k^t = 0$$

Einsetzen der Definition von $G(k)$ ergibt

$$\frac{G(k) - y_0 - y_1 k}{k^2} - 3 \frac{G(k) - y_0}{k} + 2G(k) = 0$$

Einsetzen der beiden Startbedingungen und Auflösen nach $G(k)$ ergibt

$$G(k) = \frac{2 - 3k}{1 - 3k + 2k^2} = \frac{2 - 3k}{(1 - k)(1 - 2k)}$$

Damit die allgemeine Lösung aus der erzeugenden Funktion direkt ablesbar ist, muss sie als geometrische Reihe angeschrieben werden. Daher ist wieder eine Partialbruchzerlegung angezeigt.

$$\begin{aligned} G(k) &= \frac{2 - 3k}{(1 - k)(1 - 2k)} = \frac{1}{1 - k} + \frac{1}{1 - 2k} \\ &= \sum_{t=0}^{\infty} k^t + \sum_{t=0}^{\infty} (2k)^t = \sum_{t=0}^{\infty} (1 + 2^t) k^t \end{aligned}$$

und somit lautet die partikuläre Lösung $y_t = 1 + 2^t$.

3.3.3 Start- oder Randbedingungen

Im vorigen Unterabschnitt hatten wir bereits zwei Startbedingungen vorgegeben. Dies ist für Differenzengleichungen zweiter Ordnung immer nötig, um die beiden frei wählbaren Parameter c_1 und c_2 aus Λ zu bestimmen. Das Verfahren ist das gleiche wie bei den Differenzengleichungen erster Ordnung, nur dass diesmal zwei Start- oder Randwerte vorgegeben sein müssen, um eine partikuläre Lösung zu bekommen.

3.4 Anwendungen

Die wohl bekannteste Anwendung einer Differenzengleichung zweiter Ordnung in den Wirtschaftswissenschaften ist das sogenannte Multiplikator Akzelerator Modell von Samuelson.

Beispiel (Samuelson-Modell)

Beim Multiplikator-Akzelerator-Modell von Samuelson (1939) handelt es sich um ein Konjunkturmodell, das durch geringe Modifikationen aus dem keynesianischen Gütermarktmodell hervorgeht. Unterstellt wird eine geschlossene Volkswirtschaft ohne staatliche Aktivität.

Folgende Annahmen liegen dem Samuelson-Modell zugrunde:

1. Die makroökonomische Konsumnachfrage ist gegeben durch

$$C_t = cY_{t-1} + C^{aut} \quad 0 < c < 1, \quad C^{aut} > 0.$$

Der Konsum C_t hängt ab vom Einkommen der Vorperiode Y_{t-1} , diese Zeitverzögerung nennt man *Robertson-Lag*. Die Konstante c ist die marginale Konsumquote. Der autonome d.h. einkommensunabhängige Konsum C^{aut} ist ebenfalls eine positive Konstante.

2. Die Investitionsnachfrage setzt sich aus der induzierten und der autonomen Investition zusammen.

$$I_t = I_t^{ind} + I^{aut} \quad I^{aut} > 0.$$

Die autonome Investition ist konstant (genauer: nicht vom Einkommen abhängig, ähnlich wie der autonome Konsum), während die induzierte Investition von der Veränderung der Konsumnachfrage gemäß der Akzelerator-Hypothese abhängt,

$$I_t^{ind} = k(C_t - C_{t-1}), \quad k > 0$$

wobei k der Akzelerationskoeffizient ist. Er ist sowohl durch technische Größen (Kapitalkoeffizient), als auch durch Gewinnerwartungen der Unternehmer (Extrapolation der Konsumententwicklung) erklärbar. Da der Konsum vom Einkommen abhängt, wird auch die induzierte Investition (indirekt) durch die Einkommensveränderung erklärt. Durch Einsetzen ergibt sich

$$I_t^{ind} = ck(Y_{t-1} - Y_{t-2}).$$

3. Die Verwendungsgleichung des Einkommens einer geschlossenen Volkswirtschaft ohne staatliche Aktivität schließt das Modell. Sie ist zugleich als Gleichgewichtsbedingung für den makroökonomischen Gütermarkt zu deuten, wonach die auf dem Einkommen basierenden Pläne der Haushalte und Unternehmen eine Gesamtnachfrage gerade in Höhe des Einkommens ergeben.

$$Y_t = C_t + I_t$$

Wird die Konsum- und Investitionsfunktion in die Gleichgewichtsbedingung eingesetzt dann ergibt sich

$$Y_t = cY_{t-1} + C^{aut} + ck(Y_{t-1} - Y_{t-2}) + I^{aut}$$

eine inhomogene lineare Differenzengleichung zweiter Ordnung in Y mit konstanten Koeffizienten. Wie man durch Einsetzen nachprüft, ist

$$\bar{Y} = \frac{I^{aut} + C^{aut}}{1 - c}$$

eine spezielle Lösung. Da sie unabhängig von der Zeit ist, nennt man sie auch *stationäre Lösung*, es ist das aus dem 45-Grad Diagramm bekannte Gleichgewichtseinkommen.

Die Abweichungen des Einkommens vom Gleichgewichtseinkommen,

$$y_t = Y_t - \bar{Y} ,$$

werden bestimmt durch die allgemeine Lösung der zugehörigen *homogenen* Differenzengleichung

$$y_t - c(1 + k)y_{t-1} + cky_{t-2} = 0$$

Die beiden Nullstellen des charakteristischen Polynoms lauten

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left[c(1 + k) \pm \sqrt{c^2(1 + k)^2 - 4ck} \right]$$

Bei Anwendung der Schur-Kriterien auf die Lösungen für y_t muss gelten:

$$1 - c(1 + k) + ck > 0$$

$$1 + c(1 + k) + ck > 0$$

$$1 - ck > 0$$

Die erste Ungleichung ist erfüllt, da annahmegemäß $0 < c < 1$. Die zweite Ungleichung ist trivialerweise erfüllt, da alle Modellparameter positiv sind.

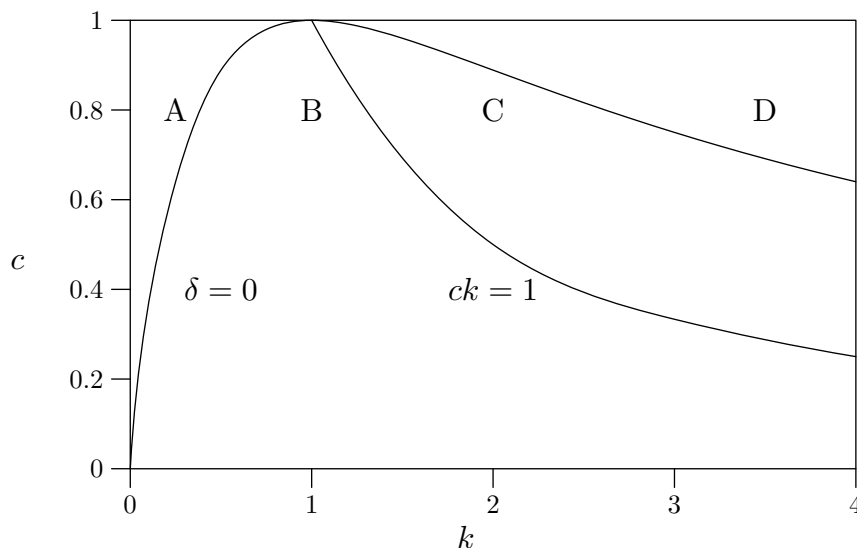
Nur das dritte Schur-Kriterium ist im Samuelson-Modell *nicht* a priori für realistische Parameterkonstellationen erfüllt (z.B. $c = 0,8$ und $k = 4$ impliziert $ck = 3,2$ und es ist dann $1 - ck = -2,2 < 0$). Nur falls die marginale Konsumneigung c kleiner als der Kehrwert des Akzelerators k ist, ist das stationäre Einkommen \bar{Y} stabil. Dieses Resultat ist direkt plausibel, wenn man die induzierte Investition betrachtet. Diese ist stets das ck -fache einer vorangegangenen Einkommensveränderung $Y_{t-1} - Y_{t-2}$. Bei $ck > 1$ kommt es zu einer „Überreaktion“ und nicht zu einer vorsichtigen Anpassung der Investition.

Ob die Nullstellen des charakteristischen Polynoms reelle oder komplexe Zahlen sind, hängt ab von der Größe der Diskriminante δ ab.

$$\delta = c^2(1 + k)^2 - 4ck$$

Damit haben wir zwei Unterscheidungskriterien für die Zeitmuster der allgemeinen Lösung: das dritte Schur Kriterium entscheidet, ob das Gleichgewichtseinkommen \bar{Y} stabil ist oder nicht und das Vorzeichen der Diskriminanten entscheidet über monotone oder wellenförmige Entwicklung des Einkommens. Beide hängen nur von c und k ab. In einem k - c -Diagramm ein-

Abbildung 3.5: Parameter-Raum im Samuelson-Modell



gezeichnet, entstehen durch die Überlagerung der beiden Grenzlinien $c = \frac{1}{k}$ und $\delta = 0$ die Schnittmengen der Parameterkonstellationen zu den kombinierten Zeitpfaden monoton-stabil, monoton-instabil, wellenförmig-stabil und

wellenförmig-instabil. Die Bereiche A, B, C und D sind offene Punktmengen, d.h. die Ränder gehören nicht zu den Mengen. Die c -Achse gehört nicht zum Bereich A, denn es wurde eingangs $k > 0$ unterstellt. Die Linie $c = 1$ gehört ebenfalls nicht zu Bereich A (und auch nicht zu Bereich D, da die marginale Konsumquote c kleiner als Eins ist. Die k -Achse gehört nicht zum Bereich B, denn die marginale Konsumneigung ist positiv. Auch die Parameterkonstellationen auf der Grenzlinie $ck = 1$ gehören weder zum Bereich B noch zum Bereich C, denn das dritte Schur Kriterium ist nicht erfüllt, und dennoch ist das stationäre Einkommen nicht instabil, es kommt zu Oszillationen mit konstanter Amplitude. Auf der Grenzlinie $\delta = 0$ herrschen wiederum besondere Verhältnisse: das charakteristische Polynom besitzt bei diesen Parameterkonstellationen eine doppelte Nullstelle, und es treten weder monotone noch wellenförmige Bewegungen des Einkommens auf. Insgesamt kann man die Abbildung als Bifurkations-Diagramm des Multiplikator-Akzelerator Modells von Samuelson bezeichnen, als geometrische Darstellung der Parameterkonstellationen, die zu den qualitativ unterschiedlichen Zeitpfaden des Einkommens gehören.

3.5 Aufgaben

Aufgabe 3.1

(a) Berechne die allgemeine Lösung der Differenzengleichung

$$y_{t+2} - 6y_{t+1} + 8y_t = 0$$

(b) Berechne dazu die partikuläre Lösung mit den Startwerten $y_0 = 3$ und $y_1 = 2$.

Aufgabe 3.2

(a) Berechne die allgemeine Lösung der Differenzengleichung

$$y_{t+2} - 2y_{t+1} + 5y_t = 0$$

(b) Berechne dazu die partikuläre Lösung mit den Startwerten $y_0 = 0$ und $y_1 = 1$.

Aufgabe 3.3

(a) Bestimme die allgemeine Lösung der Differenzengleichung

$$y_{t+2} - 4y_{t+1} + 4y_t = 0$$

(b) Berechne dazu die partikuläre Lösung mit den Startwerten $y_0 = 1$ und $y_1 = 3$.

Aufgabe 3.4

Bestimme die allgemeine Lösung der Differenzengleichung

$$y_{t+2} - 4y_{t+1} + 4y_t = 3 \cdot 2^t + 5 \cdot 4^t$$

Aufgabe 3.5

Bestimme die allgemeine Lösung der Dzgl

$$y_{t+2} - 4y_{t+1} + 3y_t = 4t$$

Kapitel 4

Systeme linearer Differenzengleichungen

Ein System von linearen Differenzengleichungen enthält mehrere zeitabhängige Funktionen w, x, y, \dots als Unbekannte, beispielsweise

$$w_{t+1} = a_{11}w_t + a_{12}x_t + a_{13}y_t + R_1(t)$$

$$x_{t+1} = a_{21}w_t + a_{22}x_t + a_{23}y_t + R_2(t)$$

$$y_{t+1} = a_{31}w_t + a_{32}x_t + a_{33}y_t + R_3(t)$$

Diese Darstellung wird Normalform des Systems linearer Dzgl genannt. In den Gleichungen stehen links jeweils eine Unbekannte in $t+1$ und rechts steht eine Linearkombination aller Unbekannten in t , sowie etwaige Störfunktionen. Die Ordnung eines Systems von n linearen Differenzengleichungen in Normalform ist gleich der Anzahl der Gleichungen also gleich n . Man kann jede (einzelne) Differenzengleichung n -ter Ordnung durch eine einfache Umbenennung der Variablen y_{t+2}, \dots, y_{t+n} auf ein System von n linearen Differenzengleichungen in Normalform überführen.

Die Differenzengleichung zweiter Ordnung

$$x_{t+2} = ax_{t+1} + bx_t$$

wird beispielsweise durch die Umbenennung $x_{t+1} = y_t$, was $y_{t+1} = x_{t+2}$ impliziert, zu einem System von zwei Differenzengleichungen erster Ordnung:

$$x_{t+1} = y_t$$

$$y_{t+1} = ay_t + bx_t$$

Die Dzgl dritter Ordnung

$$x_{t+3} = ax_{t+2} + bx_{t+1} + cx_t$$

wird durch die beiden Umbenennungen $x_{t+1} = y_t$ und $x_{t+2} = z_t$ zu einem System von drei Differenzgleichungen erster Ordnung

$$x_{t+1} = y_t$$

$$y_{t+1} = z_t$$

$$z_{t+1} = az_t + by_t + cx_t$$

Genauso wird mit einem System von Differenzgleichungen verfahren, bei denen einzelne Gleichungen höherer Ordnung vorkommen. Auf die in Normalform transformierten Systeme von linearen Dzgl lassen sich dann die im Folgenden dargestellten Lösungsverfahren anwenden.

4.1 Eigenwerte und -vektoren

Eigenwerte und -vektoren einer quadratischen Matrix sind bei folgenden Anwendungen von Bedeutung:

- Sie sind die Bausteine, aus denen sich die Lösung linearer dynamischer Modelle zusammensetzt.
- Die Größen der Eigenwerte geben Aufschluss über die Stabilität von Gleichgewichten bei nicht linearen dynamischen Systemen.
- An den Eigenwerten lässt sich die Definitheit symmetrischer Matrizen ablesen.

4.1.1 Eigenwerte

Die n Eigenwerte einer $(n \times n)$ -Matrix sind Zahlen, die die wesentlichen Eigenschaften dieser linearen Abbildung zusammenfassen.

Definition (Eigenwert)

Ein Eigenwert r einer quadratischen Matrix A ist eine Zahl mit der Eigenschaft: Wird r von jedem Hauptdiagonalelement von A subtrahiert, dann entsteht eine singuläre Matrix, d.h. $A - rI$ ist singulär.

Beispiel (direkt erkennbare Eigenwerte)

Bei manchen Matrizen kann man durch scharfes Hinsehen bereits Eigenwerte erkennen: Die Matrix

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

hat einen Eigenwert 2, denn nach Subtraktion entsteht die singuläre Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Diagonalmatrix $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ hat die beiden Eigenwerte 2 und 3.

4.1.2 Charakteristisches Polynom

Den meisten Matrizen sieht man ihre Eigenwerte aber nicht direkt an. Daher ist ein allgemein anwendbarer Algorithmus zur Berechnung der Eigenwerte nötig.

Das wesentliche Kriterium für singuläre Matrizen ist, dass ihre Determinante Null ist. Darum ist r genau dann ein Eigenwert der quadratischen Matrix A , wenn $\det(A - rI) = 0$.

Für $(n \times n)$ -Matrizen ist die linke Seite von

$$\det(A - rI) = 0$$

ein Polynom vom Grad n in der Unbekannten r , es wird als das charakteristische Polynom von A bezeichnet.

Eine Zahl r ist also genau dann ein Eigenwert von A , falls r eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms von A ist.

Bei einer allgemeinen (2×2) Matrix ergibt sich als charakteristisches Polynom

$$\det(A - rI) = \begin{vmatrix} a_{11} - r & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - r \end{vmatrix} = r^2 - (a_{11} + a_{22})r + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})$$

Die Koeffizienten ergeben sich aus den Hauptminoren der Matrix A . Für eine (3×3) Matrix lautet das charakteristische Polynom

$$\begin{aligned} \det(A - rI) &= \begin{vmatrix} a_{11} - r & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - r & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - r \end{vmatrix} \\ &= (-1)^3 \left[r^3 - (a_{11} + a_{22} + a_{33})r^2 \right. \\ &\quad \left. + \left(\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \right) r - \det A \right] \end{aligned}$$

Der führende Koeffizient (der von r^3 oder allgemein von r^n) im charakteristischen Polynom wird immer auf Eins normiert, der Koeffizient von r^2 bzw

allgemein r^{n-1} ist die Summe der Hauptminoren erster Ordnung multipliziert mit $(-1)^1$, der Koeffizient von r oder allgemein von r^{n-2} ist die Summe aller Hauptminoren der Ordnung 2 multipliziert mit $(-1)^2$ bis zum absoluten Glied, das nominell als Summe der Hauptminoren Nullter Ordnung (eben die Determinante) multipliziert mit $(-1)^n$ geschrieben werden kann.

4.1.3 Eigenvektoren

In Mathe1 wurde gezeigt, dass das lineare homogene Gleichungssystem $B\mathbf{x} = \mathbf{0}$ mit regulärer Matrix B nur die triviale Lösung $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ besitzt, während es mit singulärer Matrix B auch nichttriviale Lösungen hat.

Da die Matrix $A - rI$ singulär ist, falls r ein Eigenwert von A ist, besitzt das lineare homogene Gleichungssystem

$$(A - rI)\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

nichttriviale Lösungen $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, diese werden als Eigenvektoren von A zum Eigenwert r bezeichnet.

Man kann das Gleichungssystem zur Berechnung von Eigenvektoren auch umformen zu $A\mathbf{v} = r\mathbf{v}$ und erkennt, wenn \mathbf{v} ein Eigenvektor zu r ist, dann ist dies auch jedes skalare Vielfache von \mathbf{v} .

Beispiel (Berechnung von Eigenwerten und -vektoren)

Die Berechnung erfolgt stets in zwei Schritten: erstens Berechnung der Eigenwerte durch Aufstellen des charakteristischen Polynoms und zweitens Aufstellen der homogenen Gleichungssysteme (pro Eigenwert eines) mit dem zugehörigen Eigenvektor als Unbekannte.

Bestimme die Eigenwerte und -vektoren von

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

das charakteristische Polynom lautet:

$$\det(A - rI) = \begin{vmatrix} -1-r & 3 \\ 2 & 0-r \end{vmatrix} = r(r+1) - 6 = r^2 + r - 6 = (r+3)(r-2)$$

und besitzt die beiden Nullstellen -3 und 2 , dies sind gerade die gesuchten Eigenwerte.

Das homogene lineare Gleichungssystem zur Berechnung des Eigenvektors zu -3 lautet:

$$(A - (-3)I)\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit einer Lösung

$$\begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Auch skalare Vielfache davon lösen das Gleichungssystem. Die Lösungsmenge ist ein eindimensionaler Vektorraum, der **Eigenraum** genannt wird. Die angegebene Lösung ist eine Basis des Eigenraumes.

Genauso wird bei der Berechnung des anderen Eigenvektors zum Eigenwert 2 verfahren.

$$(A - 2I) \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{12} \\ v_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und eine Lösung lautet

$$\begin{pmatrix} v_{12} \\ v_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

d.h. die Winkelhalbierende ist der Eigenraum zum Eigenvektor 2.

4.2 Differenzengleichungssystem 2. Ordnung

Das Differenzengleichungssystem 2. Ordnung in Normalform lautet

$$x_{t+1} = ax_t + by_t$$

$$y_{t+1} = cx_t + dy_t$$

oder matriziell geschrieben

$$\mathbf{z}_{t+1} = \begin{pmatrix} x_{t+1} \\ y_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} = A\mathbf{z}_t$$

Es wäre genauso einfach zu iterieren wie eine eindimensionale Dzgl, wenn die Koeffizienten b und c Null wären, also beide Differenzengleichungen entkoppelt wären

$$x_{t+1} = ax_t$$

$$y_{t+1} = dy_t$$

mit der Lösung $x_t = a^t x_0$ und $y_t = d^t y_0$.

Sind aber die beiden Differenzengleichungen miteinander verkoppelt ($b \neq 0$ oder $c \neq 0$), dann besteht die Lösungstechnik darin, eine Koordinaten- bzw. Variablentransformation durchzuführen, sodass das neue Differenzengleichungssystem entkoppelt ist. Die Konstruktion dieser Variablentransformation basiert auf den Eigenwerten und -vektoren der Koeffizientenmatrix.

4.2.1 Variablentransformation

Die Variablentransformation von \mathbf{z} nach \mathbf{Z} soll mit der Matrix P durchgeführt und mit ihrer inversen P^{-1} rückgängig gemacht werden.

$$\mathbf{z} = P\mathbf{Z} \quad \text{und} \quad \mathbf{Z} = P^{-1}\mathbf{z}$$

Dies angewandt auf das zweidimensionale Differenzengleichungssystem ergibt:

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_{t+1} &= P^{-1}\mathbf{z}_{t+1} \\ &= P^{-1}(A\mathbf{z}_t) \\ &= (P^{-1}A)\mathbf{z}_t \\ &= (P^{-1}A)P\mathbf{Z}_t \\ &= (P^{-1}AP)\mathbf{Z}_t \end{aligned}$$

Durch die Variablentransformation $\mathbf{z} = P\mathbf{Z}$ geht die ursprüngliche Koeffizientenmatrix A in die Matrix $P^{-1}AP$ über mit dem Ziel, diese so einfach wie möglich zu machen, also zu einer Diagonalmatrix D , welche ein entkoppeltes Differenzengleichungssystem in den neuen Variablen \mathbf{Z} liefert.

Welche Art der Transformation führt im zweidimensionalen Fall zu einer Diagonalmatrix $D = P^{-1}AP$?

Angenommen, die beiden Spalten von P werden als \mathbf{v}_1 und \mathbf{v}_2 bezeichnet und die beiden Diagonalelemente von D mit r_1 und r_2 . Dann kann wegen $AP = PD$ auch geschrieben werden:

$$\begin{aligned} A[\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2] &= [\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2] \begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{pmatrix} \\ [A\mathbf{v}_1 \quad A\mathbf{v}_2] &= [r_1\mathbf{v}_1 \quad r_2\mathbf{v}_2] \end{aligned}$$

oder auseinandergeschrieben:

$$A\mathbf{v}_1 = r_1\mathbf{v}_1 \quad \text{und} \quad A\mathbf{v}_2 = r_2\mathbf{v}_2$$

was bedeutet, dass die Spalten der Transformationsmatrix P aus den Eigenvektoren von A gebildet sind und die Diagonalmatrix des entkoppelten Systems aus den Eigenwerten von A besteht.

Beispiel (Bevölkerungsmodell vom Leslie Typ)

Betrachtet wird eine Spezies, die zwei Jahre lebt. Im ersten Lebensjahr ist die Geburtenrate eines Individuums g_1 und seine Sterberate s_1 , während im zweiten Jahr die Geburtenrate g_2 beträgt. In einem bestimmten Jahr n gibt

es x_t Individuen im ersten und y_t im zweiten Lebensjahr. Ihre Nachkommenschaft beläuft sich somit auf $x_{t+1} = g_1 x_t + g_2 y_t$ und es überleben gerade $y_{t+1} = (1 - s_1)x_t$ der Population in Periode n . Insgesamt erhält man ein zweidimensionales lineares Differenzengleichungssystem

$$\begin{aligned}x_{t+1} &= g_1 x_t + g_2 y_t \\ y_{t+1} &= (1 - s_1)x_t\end{aligned}$$

Um die Bevölkerungsdynamik der Spezies zu beschreiben, sind nun Zahlenwerte für die Koeffizienten zu unterstellen. Es wird $g_1 = 1$, $g_2 = 4$ und $s_1 = 1/2$ angenommen. Wir erhalten somit matriziell geschrieben

$$\begin{bmatrix} x_{t+1} \\ y_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix}$$

Zur Vorbereitung der Variablentransformation sind nun zunächst die Eigenwerte der Koeffizientenmatrix zu berechnen, danach die Eigenvektoren. Das charakteristische Polynom der Koeffizientenmatrix lautet

$$\det \begin{pmatrix} 1 - r & 4 \\ \frac{1}{2} & -r \end{pmatrix} = (r - 2)(r + 1)$$

die beiden Eigenwerte sind $r_1 = 2$ und $r_2 = -1$. Die zugehörigen Eigenvektoren sind zu berechnen als nichttriviale Lösungen der beiden homogenen linearen Gleichungssysteme

$$\begin{pmatrix} 1 - 2 & 4 \\ \frac{1}{2} & -2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 1 + 1 & 4 \\ \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} v_{12} \\ v_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

mit den Lösungen

$$\begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{bmatrix} v_{12} \\ v_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Die Variablentransformation lautet somit

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \quad \text{oder} \quad \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Nun zur Variablentransformation. Wir führen sie ganz explizit durch:

$$\begin{aligned}
 X_{t+1} &= \frac{1}{6}x_{t+1} + \frac{1}{3}y_{t+1} \\
 &= \frac{1}{6}(x_t + 4y_t) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}x_t\right) \\
 &= \frac{1}{3}x_t + \frac{2}{3}y_t \\
 &= \frac{1}{3}(4X_t - 2Y_t) + \frac{2}{3}(X_t + Y_t) \\
 &= 2X_t
 \end{aligned}$$

nun für Y

$$\begin{aligned}
 Y_{t+1} &= -\frac{1}{6}x_{t+1} + \frac{2}{3}y_{t+1} \\
 &= -\frac{1}{6}(x_t + 4y_t) + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}x_t\right) \\
 &= \frac{1}{6}x_t - \frac{2}{3}y_t \\
 &= \frac{1}{6}(4X_t - 2Y_t) - \frac{2}{3}(X_t + Y_t) \\
 &= -Y_t
 \end{aligned}$$

Es hat funktioniert! Die beiden entkoppelten Differenzengleichungen lauten

$$\begin{aligned}
 X_{t+1} &= 2X_t \\
 Y_{t+1} &= -Y_t
 \end{aligned}$$

mit den beiden Lösungen

$$\begin{aligned}
 X_t &= c_1 2^t \\
 Y_t &= c_2 (-1)^t
 \end{aligned}$$

Schließlich ist die Variablentransformation rückgängig zu machen:

$$\begin{aligned}
 x_t &= 4X_t - 2Y_t = 4c_1 2^t - 2c_2 (-1)^t \\
 y_t &= X_t + Y_t = c_1 2^t + c_2 (-1)^t
 \end{aligned}$$

Die beiden noch unbestimmten Größen c_1 und c_2 lassen sich bei Vorgabe zweier Startwerte berechnen. Ist beispielsweise $x_0 = 1$ und $y_0 = 1$, dann gilt

$$\begin{aligned}
 1 &= 4c_1 2^0 - 2c_2 (-1)^0 \\
 1 &= c_1 2^0 + c_2 (-1)^0
 \end{aligned}$$

Dieses lineare Gleichungssystem aufgelöst ergibt $c_1 = 1/2$ und $c_2 = 1/2$.

4.2.2 Dzgl System n -ter Ordnung

Dieselbe Variablentransformation lässt sich auch für n -dimensionale Differenzengleichungssysteme durchführen. Es sind r_1, \dots, r_n die Eigenwerte der $(n \times n)$ -Matrix A und $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ die zugehörigen Eigenvektoren. Die Transformationsmatrix P wird spaltenweise aus den Eigenvektoren zusammengesetzt.

$$\begin{aligned}
 AP &= A \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \dots & \mathbf{v}_n \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} A\mathbf{v}_1 & \dots & A\mathbf{v}_n \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} r_1\mathbf{v}_1 & \dots & r_n\mathbf{v}_n \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \dots & \mathbf{v}_n \end{bmatrix} \begin{pmatrix} r_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & r_n \end{pmatrix} \\
 &= P \begin{pmatrix} r_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & r_n \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Falls P invertierbar ist, kann die vorige Matrixengleichung mit P^{-1} multipliziert werden, um die gewünschte Form

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} r_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & r_n \end{pmatrix}$$

zu erhalten.

Satz

Angenommen, A ist eine $(n \times n)$ -Matrix mit den Eigenwerten r_1, \dots, r_n und den zugehörigen Eigenvektoren $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$. Setze die Matrix

$$P = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \dots & \mathbf{v}_n \end{bmatrix}$$

spaltenweise aus den Eigenvektoren zusammen. Wenn P invertierbar ist, dann gilt

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} r_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & r_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & r_n \end{pmatrix}$$

Und ist umgekehrt $P^{-1}AP$ eine Diagonalmatrix D , dann sind die Spalten von P die Eigenvektoren von A und die Diagonalelemente von D sind die Eigenwerte von A .

4.2.3 Lineare Unabhängigkeit von Eigenvektoren

Die Variablentransformation läuft nur dann, wenn die Transformationsmatrix P invertierbar ist. Das bedeutet aber, dass die Eigenvektoren von A linear unabhängig sein müssen. Dafür gibt der folgende Satz ein einfaches Kriterium.

Satz

Sind r_1, \dots, r_h die h verschiedenen Eigenwerte der $(n \times n)$ -Matrix A und $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_h$ die zugehörigen Eigenvektoren, dann ist das Vektorbündel dieser Eigenvektoren linear unabhängig (d.h. keiner von ihnen kann als Linearkombination der übrigen angeschrieben werden).

Falls also eine $(n \times n)$ -Matrix A genau n verschiedene Eigenwerte hat, sind die n zugehörigen Eigenvektoren linear unabhängig und somit die Transformationsmatrix P invertierbar, da sie aus linear unabhängigen Spalten besteht.

4.2.4 Lösung der n -dimensionalen linearen Dzgl

Gegeben ist das Differenzengleichungssystem

$$\mathbf{z}_{t+1} = A\mathbf{z}_t$$

mit einer $(n \times n)$ -Koeffizientenmatrix A . Wenn die Eigenwerte von A reell und untereinander verschieden sind, lässt sich aus den zugehörigen Eigenvektoren eine invertierbare Transformationsmatrix P bilden und damit eine Variablentransformation $\mathbf{z} = P\mathbf{Z}$ durchführen, die zu einem entkoppelten Differenzengleichungssystem

$$\mathbf{Z}_{t+1} = \begin{pmatrix} r_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & r_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & r_n \end{pmatrix} \mathbf{Z}_t$$

führt. Dessen Lösung ist einfach wie bei n einzelnen Differenzengleichungen anzuschreiben als

$$\begin{aligned} (Z_1)_t &= c_1 r_1^t \\ (Z_2)_t &= c_2 r_2^t \\ &\vdots \\ (Z_n)_t &= c_n r_n^t \end{aligned}$$

Die Rücktransformation auf die \mathbf{z} -Größen ergibt

$$\begin{aligned}\mathbf{z}_t &= \begin{pmatrix} (z_1)_t \\ \vdots \\ (z_n)_t \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} (Z_1)_t \\ \vdots \\ (Z_n)_t \end{pmatrix} \\ &= [\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \dots \quad \mathbf{v}_n] \begin{pmatrix} c_1 r_1^t \\ c_2 r_2^t \\ \vdots \\ c_n r_n^t \end{pmatrix} \\ &= c_1 r_1^t \mathbf{v}_1 + c_2 r_2^t \mathbf{v}_2 + \dots + c_n r_n^t \mathbf{v}_n\end{aligned}$$

als Lösung eine Kombination aus Eigenvektoren und Potenzen der Eigenwerte.

Die Lösung des n -dimensionalen Differenzgleichungssystems setzt sich aus Termen mit der Gestalt

$$c_i \cdot (\text{Eigenwert})^t \cdot (\text{Eigenvektor})$$

zusammen.

Satz

Angenommen, A ist eine $(n \times n)$ -Matrix mit n reellen und verschiedenen Eigenwerten r_1, \dots, r_n und den zugehörigen Eigenvektoren $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$. Dann ist die allgemeine Lösung des n -dimensionalen linearen Differenzgleichungssystems $\mathbf{z}_{t+1} = A\mathbf{z}_t$ gegeben durch

$$\mathbf{z}_t = c_1 r_1^t \mathbf{v}_1 + c_2 r_2^t \mathbf{v}_2 + \dots + c_n r_n^t \mathbf{v}_n$$

Die Größen c_1, \dots, c_n können bei Vorgabe eines Startvektors \mathbf{z}_0 anhand der allgemeinen Lösung ermittelt werden als

$$\mathbf{c} = [\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \dots \quad \mathbf{v}_n]^{-1} \mathbf{z}_0 = P^{-1} \mathbf{z}_0$$

4.2.5 Lösung in Gestalt von Matrizenpotenzen

Ein alternativer Lösungsansatz ist das iterative Verfahren, das bei der einfachen skalaren Differenzgleichung $y_{t+1} = ay_t$ benutzt wurde. Bei vorgegebenem Startvektor \mathbf{z}_0 ergibt sich

$$\mathbf{z}_1 = A\mathbf{z}_0$$

$$\mathbf{z}_2 = A\mathbf{z}_1 = A(A\mathbf{z}_0) = A^2\mathbf{z}_0$$

$$\mathbf{z}_3 = A\mathbf{z}_2 = A(A^2\mathbf{z}_0) = A^3\mathbf{z}_0$$

usw. Die Lösung lautet demnach

$$\mathbf{z}_t = A^t \mathbf{z}_0$$

wobei A^t die n -te Potenz von Matrix A bedeutet.

Im Allgemeinen lässt sich die Matrizenpotenz aber nicht so einfach bilden, es sei denn, es handelt sich um eine Diagonalmatrix, bei welcher nur jedes Diagonalelement für sich potenziert wird.

$$\begin{pmatrix} r_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & r_n \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} r_1^t & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & r_n^t \end{pmatrix}$$

Gibt es jedoch eine invertierbare Transformationsmatrix P , sodass $P^{-1}AP$ gleich einer Diagonalmatrix D ist, dann erhält man als Matrizenpotenzen von A :

$$\begin{aligned} A &= PDP^{-1} \\ A^2 &= (PDP^{-1})(PDP^{-1}) = PD(P^{-1}P)DP^{-1} \\ &= PDDP^{-1} = PD^2P^{-1} \\ A^3 &= AA^2 = (PDP^{-1})(PD^2P^{-1}) \\ &= PD(P^{-1}P)D^2P^{-1} = PDD^2P^{-1} \\ &= PD^3P^{-1} \end{aligned}$$

oder allgemein

$$A^t = PD^tP^{-1} = P \begin{pmatrix} r_1^t & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & r_n^t \end{pmatrix} P^{-1}$$

Satz

Angenommen, A ist eine $(n \times n)$ -Matrix und es gibt eine invertierbare Matrix P , sodass

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} r_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & r_n \end{pmatrix}$$

zu einer Diagonalmatrix wird. Dann gilt

$$A^t = P \begin{pmatrix} r_1^t & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & r_n^t \end{pmatrix} P^{-1}$$

Die Lösung eines linearen Differenzengleichungssystems $\mathbf{z}_{t+1} = A\mathbf{z}_t$ mit der Koeffizientenmatrix A lautet bei vorgegebenem Startvektor \mathbf{z}_0 unter Verwendung des voranstehenden Satzes über Matrizenpotenzen

$$\mathbf{z}_t = P \begin{pmatrix} r_1^t & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & r_n^t \end{pmatrix} P^{-1} \mathbf{z}_0$$

4.3 Sonderfälle bei Eigenwerten

Eigenwerte sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms einer $(n \times n)$ -Matrix. Dabei können drei Fälle auftreten:

1. es gibt n verschiedene reelle Nullstellen;
2. manche Nullstellen treten mehrfach auf;
3. es gibt komplexe Nullstellen.

Die beiden letzten Fälle können kombiniert auftreten. Auch der erste und letzte Fall kann kombiniert auftreten, d.h. dass die Eigenwerte alle verschieden sind, es aber einige komplexe unter ihnen gibt.

Die Entkoppelung linearer Differenzengleichungen kann misslingen, falls im charakteristischen Polynom mehrfache Nullstellen auftreten. Man spricht in diesem Fall von nicht diagonalisierbaren oder defekten Matrizen.

Die Sonderfälle werden nur für (2×2) -Matrizen behandelt. Die angesprochenen Verfahren lassen jedoch auf beliebig dimensionierte quadratische Matrizen anwenden.

4.3.1 Nicht diagonalisierbare (2×2) -Matrizen

Betrachte die beiden Matrizen

$$A_1 = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

die beide einen doppelten Eigenwert von 3 haben. Es gibt aber einen wesentlichen Unterschied zwischen den beiden Matrizen: während A_2 zwei linear unabhängige Eigenvektoren besitzt (beispielsweise die beiden kanonischen Einheitsvektoren des \mathbb{R}^2), besitzt A_1 nur einen Eigenvektor:

$$(A_1 - 3I) \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

besitzt nur die Lösung $v_1 = 1$, $v_2 = -1$ und skalare Vielfache davon. Da A_1 nur einen (unabhängigen) Eigenvektor hat, kann die Matrix nicht diagonalisiert werden, denn dazu wären zwei nötig.

Falls sich eine (2×2) -Matrix mit einem doppelten Eigenwert r^* mittels einer Transformationsmatrix P nicht diagonalisieren lässt (wie beispielsweise A_1), können wir sie vielleicht auf eine ähnlich einfache Form, nämlich

$$\begin{pmatrix} r^* & 1 \\ 0 & r^* \end{pmatrix}$$

bringen? Falls dies möglich ist, erhebt sich die weitere Frage, wie sich in diesem Fall die Lösung des transformierten Differenzengleichungssystems

$$\mathbf{z}_{t+1} = \begin{pmatrix} r^* & 1 \\ 0 & r^* \end{pmatrix} \mathbf{z}_t$$

gestaltet.

Zunächst die erste Frage: Wie muss P beschaffen sein, damit

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} r^* & 1 \\ 0 & r^* \end{pmatrix}$$

Wie schon vorher wird $P = [\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2]$ gesetzt. Nun gilt:

$$\begin{aligned} AP &= P \begin{pmatrix} r^* & 1 \\ 0 & r^* \end{pmatrix} \\ A [\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2] &= [\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2] \begin{pmatrix} r^* & 1 \\ 0 & r^* \end{pmatrix} \\ [A\mathbf{v}_1 \ A\mathbf{v}_2] &= [r^*\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_1 + r^*\mathbf{v}_2] \end{aligned}$$

oder

$$A\mathbf{v}_1 = r^*\mathbf{v}_1 \quad \text{und} \quad A\mathbf{v}_2 = r^*\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_1$$

Die erste Spalte von P ist ein Eigenvektor von A zum Eigenwert r^* und für die zweite Spalte von P gilt $A\mathbf{v}_2 - r^*\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1$ oder $(A - r^*I)\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1$. Da aber $(A - r^*I)\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$ ist dies gleichbedeutend mit

$$(A - r^*I)^2 \mathbf{v}_2 = \mathbf{0} \quad \text{aber} \quad (A - r^*I) \mathbf{v}_2 \neq \mathbf{0}$$

Vektoren mit dieser Eigenschaft werden als verallgemeinerte Eigenvektoren oder auch Hauptvektoren der Stufe 2 bezeichnet.

Beispiel (Berechnung von Eigen- und Hauptvektor)

Das Beispiel mit der nicht diagonalisierbaren Matrix

$$A_1 = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

wird fortgesetzt. Sie hat den zweifachen Eigenwert 3 und der (einzige) unabhängige Eigenvektor ist

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Der Hauptvektor der Stufe 2 ist die Lösung von $(A - 3I) \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1$ bzw.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

also beispielsweise $v_{21} = 1$ und $v_{22} = 0$.

Damit wird die Transformationsmatrix P spaltenweise zusammengesetzt

$$P = [\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2] = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

und man mache die Probe, dass

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

erfüllt ist.

Satz

Angenommen, A ist eine (2×2) -Matrix mit dem doppelten Eigenwert r^* . Dann gilt genau eine der beiden Aussagen.

- Entweder gibt es zwei linear unabhängige Eigenvektoren zu r^* , dann ist aber A ein skalares Vielfaches der Einheitsmatrix

$$A = r^* I .$$

- Oder A hat zu r^* nur einen linear unabhängigen Eigenvektor \mathbf{v}_1 . Dann gibt es einen verallgemeinerten Eigenvektor \mathbf{v}_2 , sodass $(A - r^* I) \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1$. Man setzt die Matrix P spaltenweise aus dem Eigenvektor und dem verallgemeinerten Eigenvektor zusammen $P = [\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2]$ und erhält

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} r^* & 1 \\ 0 & r^* \end{pmatrix}$$

Beispiel (nicht diagonalisierbare (3×3) -Matrix)

Ähnliche Überlegungen lassen sich für (3×3) -Matrizen (und allgemein quadratische Matrizen) anstellen, die Eigenwerte der Vielfachheit $m > 1$ und zugleich weniger als m zugehörige Eigenvektoren aufweisen.

Betrachte beispielsweise die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -4 \\ 1 & 4 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

deren charakteristisches Polynom $(r-3)^2(2-r)$ die doppelte Nullstelle 3 und die einfache Nullstelle 2 hat. Zum Eigenwert 2 gibt es keine Komplikationen bei der Berechnung des zugehörigen Eigenvektors:

$$(A - 2I) \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -4 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{21} \\ v_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit der einfachsten Lösung

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Für den doppelten Eigenwert 3 ergibt sich als Eigenvektor

$$(A - 3I) \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{12} \\ v_{22} \\ v_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

also

$$\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und als Konsequenz ein weiterer verallgemeinerter Eigenvektor \mathbf{v}_3 , der durch das Gleichungssystem $(A - 3I) \mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_2$ bestimmt ist:

$$(A - 3I) \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{13} \\ v_{23} \\ v_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

bzw.

$$\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Zusammenstellen zur Transformationsmatrix P ergibt

$$P = [\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \mathbf{v}_3] = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und zur Probe:

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Die Berechnungen der verallgemeinerten Eigenvektoren bei (3×3) -Matrizen werden sehr schnell kompliziert, vor allem dann, wenn es einen dreifachen Eigenwert gibt. Es ist dann möglich, dass sich zwei unabhängige Eigenvektoren bestimmen lassen und ein dritter verallgemeinerter oder es gibt eine Kaskade $(A - r^*I)\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$, $(A - r^*I)\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1$, $(A - r^*I)\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_2$ usw.

4.3.2 Lösung nicht diagonalisierbarer Dzgl

Angenommen, das lineare Differenzengleichungssystem $\mathbf{z}_{t+1} = A\mathbf{z}_t$ hat eine nicht diagonalisierbare 2×2 -Matrix A mit dem doppelten Eigenwert r^* .

Man führt die Variablentransformation $\mathbf{z} = P\mathbf{Z}$ durch und erhält

$$\mathbf{z}_{t+1} = \begin{pmatrix} X_{t+1} \\ Y_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r^* & 1 \\ 0 & r^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_t \\ Y_t \end{pmatrix}$$

oder

$$\begin{aligned} X_{t+1} &= r^*X_t + Y_t \\ Y_{t+1} &= r^*Y_t \end{aligned}$$

Da die zweite Gleichung eine einfache Differenzengleichung in Y ist, kann sie für sich gelöst

$$Y_t = c_1 (r^*)^t$$

und in die erste eingesetzt werden

$$X_{t+1} = r^*X_t + c_1 (r^*)^t$$

Diese lineare inhomogene Differenzengleichung wird nun iteriert, um die Gestalt der allgemeinen Lösung zu ermitteln:

$$X_0 = c_0$$

$$X_1 = r^* X_0 + c_1 (r^*)^0 = r^* c_0 + c_1$$

$$\begin{aligned} X_2 &= r^* X_1 + c_1 (r^*)^1 = r^* (r^* c_0 + c_1) + c_1 r^* \\ &= (r^*)^2 c_0 + 2c_1 r^* \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_3 &= r^* X_2 + c_1 (r^*)^2 \\ &= r^* ((r^*)^2 c_0 + 2c_1 r^*) + c_1 (r^*)^2 \\ &= (r^*)^3 c_0 + 3c_1 (r^*)^2 \end{aligned}$$

im allgemeinen gilt

$$X_t = c_0 (r^*)^t + t c_1 (r^*)^{t-1}$$

wie man direkt durch Einsetzen in die erste Differenzengleichung prüft. Die allgemeine Lösung lautet

$$\begin{pmatrix} X_t \\ Y_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_0 (r^*)^t + t c_1 (r^*)^{t-1} \\ c_1 (r^*)^t \end{pmatrix}$$

Die Rücktransformation $\mathbf{z} = P\mathbf{Z}$ liefert

$$\mathbf{z}_t = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 \end{bmatrix} \mathbf{Z}_t = (c_0 (r^*)^t + t c_1 (r^*)^{t-1}) \mathbf{v}_1 + c_1 (r^*)^t \mathbf{v}_2$$

4.4 Komplexe Eigenwerte und -vektoren

Die (2×2) -Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ besitzt das charakteristische Polynom

$$\begin{aligned} \det(A - rI) &= \begin{vmatrix} a - r & b \\ c & d - r \end{vmatrix} = r^2 - (a + d)r + (ad - cb) \\ &= r^2 - \text{Tr}(A)r + \det(A) \end{aligned}$$

dessen Nullstellen durch die quadratische Formel

$$r_{1,2} = \frac{1}{2} \left[(a + d) \pm \sqrt{(a + d)^2 - 4(ad - cb)} \right]$$

gegeben sind, vorausgesetzt, der Ausdruck unter der Wurzel, die sogenannte Diskriminante

$$\delta = (a + d)^2 - 4(ad - cb)$$

ist positiv.

Falls die Diskriminante Null ist, liegt der zuvor diskutierte Fall eines doppelten Eigenwertes vor und falls sie negativ ist, gibt es keine reellen Zahlen, welche Nullstellen sein könnten, da das Quadrat jeder reellen Zahl (ob positiv oder negativ) zu einer positiven Zahl führt.

4.4.1 Komplexe Eigenwerte bei (2×2) -Matrizen

Die eingangs betrachtete allgemeine (2×2) -Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ besitzt komplexe Eigenwerte, falls δ die Diskriminante ihres charakteristischen Polynoms negativ ist. Die beiden Eigenwerte bilden in diesem Fall ein Paar zueinander konjugiert komplexer Zahlen, da die Quadratwurzel der Diskriminante den Imaginärteil bildet und einmal addiert und einmal subtrahiert wird. Ist also $\alpha + \beta i$ eine komplexe Nullstelle, dann ist auch $\alpha - \beta i$ eine solche.

Da dies zwei verschiedene komplexe Zahlen sind, werden auch die beiden zugehörigen Eigenvektoren unterschiedlich bzw. linear unabhängig sein. Das bedeutet auch, dass wir bei (2×2) -Matrizen mit komplexen Eigenwerten nicht auf den Sonderfall mehrfacher Eigenwerte achten müssen.

4.4.2 Komplexe Eigenvektoren

Falls die quadratische Matrix A (konjugiert) komplexe Eigenwerte hat, dann haben auch die zugehörigen Eigenvektoren komplexe Komponenten. Ist $\alpha + \beta i$ ein komplexer Eigenwert zu A , und \mathbf{w} der zugehörige Eigenvektor, dann kann dieser — wie eine komplexe Zahl — als Summe $\mathbf{w} = \mathbf{u} + i\mathbf{v}$ geschrieben werden.

$$A(\mathbf{u} + i\mathbf{v}) = (\alpha + \beta i)(\mathbf{u} + i\mathbf{v})$$

Bildet man davon den konjugiert komplexen Ausdruck, dann gilt:

$$\overline{A(\mathbf{u} + i\mathbf{v})} = \overline{(\alpha + \beta i)(\mathbf{u} + i\mathbf{v})}$$

$$A(\mathbf{u} - i\mathbf{v}) = (\alpha - \beta i)(\mathbf{u} - i\mathbf{v}) \quad \text{da} \quad \overline{A} = A$$

also sind auch die beiden Eigenvektoren konjugiert komplex zueinander.

Satz

Angenommen, A ist eine $(n \times n)$ -Matrix mit reellen Elementen. Ist $\alpha + \beta i$ ein Eigenwert von A , dann ist auch die dazu konjugiert komplexe Zahl $\alpha - \beta i$ ein Eigenwert. Ist $\mathbf{u} + i\mathbf{v}$ ein Eigenvektor zu $\alpha + \beta i$, dann ist $\mathbf{u} - i\mathbf{v}$ ein Eigenvektor zu $\alpha - \beta i$.

Ist n ungerade, dann besitzt A mindestens einen reellen Eigenwert.

Beispiel

Das charakteristische Polynom der Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -9 & 1 \end{pmatrix}$ lautet $r^2 - 2r + 10$ und besitzt die beiden Nullstellen $1 + 3i$ und $1 - 3i$. Ein Eigenvektor \mathbf{w} zu $1 + 3i$ ist die Lösung von

$$\begin{pmatrix} -3i & 1 \\ -9 & -3i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

also muss $-3iw_1 + w_2 = 0$ gelten, was für einen Vektor $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3i \end{pmatrix}$ erfüllt ist. Diesen können wir auch in seinen Real- und Imaginärteil zerlegen $\mathbf{w} = \mathbf{u} + i\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$. Ein Eigenvektor zum konjugiert komplexen Eigenwert $1 - 3i$ ist nun

$$\overline{\mathbf{w}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - i \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Die Transformationsmatrix wird — wie üblich — spaltenweise aus den beiden Eigenvektoren zusammengesetzt:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3i & -3i \end{pmatrix}$$

und ihre Inverse lautet

$$P^{-1} = -\frac{1}{6i} \begin{pmatrix} -3i & -1 \\ -3i & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{6}i \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6}i \end{pmatrix}$$

und die Diagonalisierung von A ergibt das erwartete Resultat

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 + 3i & 0 \\ 0 & 1 - 3i \end{pmatrix}$$

Man erkennt, das Verfahren unterscheidet sich in keiner Weise von dem bei verschiedenen reellen Eigenwerten.

Neben der Ähnlichkeitstransformation auf die Diagonalform gibt es im Fall (konjugiert) komplexer Eigenwerte und -vektoren noch eine weitere Ähnlichkeitstransformation, die ganz ohne die imaginäre Einheit auskommt. Das Resultat ist aber keine Diagonalmatrix, sondern eine, die den Realteil auf der Hauptdiagonalen und den Imaginärteil auf der Nebendiagonalen enthält.

Wenn die (2×2) -Matrix A die beiden Eigenwerte $\alpha \pm \beta i$ besitzt, und die zugehörigen Eigenvektoren $\mathbf{u} \pm i\mathbf{v}$ sind, dann gilt

$$A(\mathbf{u} + i\mathbf{v}) = (\alpha + \beta i)(\mathbf{u} + i\mathbf{v})$$

$$A\mathbf{u} + iA\mathbf{v} = (\alpha\mathbf{u} - \beta\mathbf{v}) + i(\beta\mathbf{u} + \alpha\mathbf{v})$$

Der Realteil links muss gleich dem Realteil rechts sein, gleiches gilt für den Imaginärteil links und rechts. Daher können wir schreiben:

$$A\mathbf{u} = \alpha\mathbf{u} - \beta\mathbf{v}$$

$$A\mathbf{v} = \beta\mathbf{u} + \alpha\mathbf{v}$$

Wird nun die Transformationsmatrix spaltenweise aus dem Real- und dem Imaginärteil eines der beiden Eigenvektoren zusammengesetzt, dann ergibt sich folgendes Matrizenprodukt

$$\begin{aligned} A[\mathbf{u} \ \mathbf{v}] &= [A\mathbf{u} \ A\mathbf{v}] \\ &= [\alpha\mathbf{u} - \beta\mathbf{v} \ \beta\mathbf{u} + \alpha\mathbf{v}] \\ &= [\mathbf{u} \ \mathbf{v}] \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Da der Real- und Imaginärteil eines Eigenvektors bei konjugiert komplexen Eigenwerten linear unabhängig sind, kann auch mit der Matrix $[\mathbf{u} \ \mathbf{v}]$ eine Ähnlichkeitstransformation durchgeführt werden. Das Resultat

$$[\mathbf{u} \ \mathbf{v}]^{-1} A [\mathbf{u} \ \mathbf{v}] = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$$

bezeichnet man als die *rational* Normalform der Matrix A . Diese ist vor allem zum Lösen von Systemen linearer Differentialgleichungen von Bedeutung. Auch mit der rationalen Normalform lassen sich recht einfach Matrizenpotenzen bilden, denn sie ist die Summe aus einer mit α multiplizierten Einheitsmatrix und einer schiefsymmetrischen Matrix.

4.4.3 Dzgl Systeme mit komplexen Eigenwerten

Dem allgemeinen Lösungs-Schema für lineare Differenzengleichungssysteme $\mathbf{z}_{t+1} = A\mathbf{z}_t$ folgend, wird zunächst eine Variablentransformation $\mathbf{z} = P\mathbf{Z}$ vorgenommen, sodass das neue System $\mathbf{Z}_{t+1} = (P^{-1}AP)\mathbf{Z}_t$ entkoppelt ist. Nach Lösen wird dann zurücktransformiert.

Falls die (2×2) -Matrix A die konjugiert komplexen Eigenwerte $\alpha \pm \beta i$ und die zugehörigen konjugiert komplexen Eigenvektoren $\mathbf{u} \pm i\mathbf{v}$ besitzt, dann ergibt die Variablentransformation

$$P = [\mathbf{u} + i\mathbf{v} \ \mathbf{u} - i\mathbf{v}]$$

die neue Koeffizientenmatrix

$$(P^{-1}AP) = \begin{pmatrix} \alpha + \beta i & 0 \\ 0 & \alpha - \beta i \end{pmatrix}$$

Das transformierte Differenzengleichungssystem lautet ausgeschrieben

$$X_{t+1} = (\alpha + \beta i) X_t$$

$$Y_{t+1} = (\alpha - \beta i) Y_t$$

mit den Lösungen

$$X_t = k_1 (\alpha + \beta i)^n$$

$$Y_t = k_2 (\alpha - \beta i)^n$$

mit noch unbestimmten Konstanten k_1 und k_2 . Die Rücktransformation ergibt schließlich

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_t &= \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} = [\mathbf{u} + i\mathbf{v} \quad \mathbf{u} - i\mathbf{v}] \begin{pmatrix} k_1 (\alpha + \beta i)^t \\ k_2 (\alpha - \beta i)^t \end{pmatrix} \\ &= k_1 (\alpha + \beta i)^t (\mathbf{u} + i\mathbf{v}) + k_2 (\alpha - \beta i)^t (\mathbf{u} - i\mathbf{v}) \end{aligned}$$

Dies muss jedoch ein Vektor mit reellen Komponenten sein, denn rechts steht eigentlich $A^t \mathbf{z}_0$ und sowohl A wie A^t und \mathbf{z}_0 haben nur reelle Elemente bzw. Komponenten. Daher muss es auch möglich sein, die rechte Seite ohne die imaginäre Einheit i anzuschreiben.

4.4.4 Darstellung der Lösung ohne imaginäre Einheit

Die Elimination von i aus dem Ausdruck

$$k_1 (\alpha + \beta i)^t (\mathbf{u} + i\mathbf{v}) + k_2 (\alpha - \beta i)^t (\mathbf{u} - i\mathbf{v})$$

erfolgt in zwei Schritten.

Erstens ist zu erkennen, dass abgesehen von den beiden Konstanten k_1 und k_2 der zweite Summand gerade das konjugiert Komplexe des ersten Summanden ist. Wenn daher auch k_1 und k_2 als konjugiert komplexes Paar $c_1 \pm c_2 i$ angesetzt werden, dann ergibt sich die Summe aus einem komplexen Vektor und seinem konjugiert komplexen Vektor, wodurch sich der Imaginärteil saldiert. Im zweiten Schritt sollen die Potenz-Ausdrücke mittels des Satzes von De Moivre als Cosinus und Sinus Funktionen geschrieben werden, d.h. $\alpha \pm \beta i$ werden in Polarkoordinaten gesetzt und dann gilt:

$$(\alpha \pm \beta i)^t = r^t (\cos(t\theta) \pm i \sin(t\theta))$$

Einsetzen und Auflösen ergibt schließlich (nach einem recht umfangreichen Ausmultiplizieren der Terme)

$$\mathbf{z}_t = 2r^t [(c_1 \cos t\theta - c_2 \sin t\theta) \mathbf{u} - (c_2 \cos t\theta + c_1 \sin t\theta) \mathbf{v}]$$

Satz

Angenommen, A ist eine reelle (2×2) -Matrix mit den komplexen Eigenwerten $\alpha \pm i\beta$ und den zugehörigen Eigenvektoren $\mathbf{u} \pm i\mathbf{v}$. Schreibe die Eigenwerte in Polarkoordinaten als $r(\cos \theta \pm i \sin \theta)$, wobei

$$r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \text{ und } (\cos \theta, \sin \theta) = \left(\frac{\alpha}{r}, \frac{\beta}{r} \right)$$

Die allgemeine Lösung des linearen Differenzgleichungssystems $\mathbf{z}_{t+1} = A\mathbf{z}_t$ lautet dann

$$\mathbf{z}_t = 2r^t [(c_1 \cos t\theta - c_2 \sin t\theta) \mathbf{u} - (c_2 \cos t\theta + c_1 \sin t\theta) \mathbf{v}]$$

Beispiel

Betrachte die Dzgl

$$x_{t+1} = x_t + y_t$$

$$y_{t+1} = -9x_t + y_t$$

Die Eigenwerte und -vektoren der Koeffizientenmatrix wurden bereits im vorangehenden Beispiel ermittelt als $1 \pm 3i$ und

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \pm i \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Die konjugiert komplexen Eigenwerte lauten in Polarkoordinaten

$$1 \pm 3i = \sqrt{10} \left(\frac{1}{\sqrt{10}} + i \frac{3}{\sqrt{10}} \right) = \sqrt{10} (\cos \theta + i \sin \theta)$$

wobei $\theta = \arccos(1/\sqrt{10}) \approx 71.565^\circ$. Die allgemeine Lösung der Dzgl ergibt sich ohne imaginäre Einheit als

$$x_t = \left(\sqrt{10} \right)^t (c_1 \cos t\theta - c_2 \sin t\theta)$$

$$y_t = \left(\sqrt{10} \right)^t (-3c_2 \cos t\theta - 3c_1 \sin t\theta)$$

4.5 Markov-Prozesse

Markov-Prozesse sind stochastische Prozesse mit den beiden charakteristischen Merkmalen

- die Wahrscheinlichkeit $x_i(t)$, dass sich ein System in Periode t im Zustand i von insgesamt n möglichen Zuständen befindet, wird ausschließlich vom Zustand der Vorperiode beeinflusst;
- die Übergangswahrscheinlichkeiten vom Zustand i nach j , m_{ij} , sind konstant.

Man fasst die Übergangswahrscheinlichkeiten in einer $(n \times n)$ -Matrix M , der sogenannten Markov-Matrix zusammen. Die einzelnen Elemente von M sind nicht negativ und das besondere ist, dass alle Spaltensummen von M gleich Eins sind.

Ein Markov-Prozess ist die n -dimensionale lineare Differenzengleichung

$$\mathbf{x}(t+1) = \begin{bmatrix} x_1(t+1) \\ x_2(t+1) \\ \vdots \\ x_n(t+1) \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots & m_{nn} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} = M\mathbf{x}(t)$$

wobei M eine nicht negative Matrix ist ($M \geq O$), deren Spalten sich zu Eins addieren ($\sum_i m_{ij} = 1$ für $j = 1, \dots, k$).

Beispiel (Beschäftigungsmodell)

Angenommen, $x_1(t)$ ist der Anteil der Beschäftigten und $x_2(t)$ ist der Anteil der Arbeitslosen in Periode t . Die Wahrscheinlichkeit eines Beschäftigten auch in der nächsten Periode beschäftigt zu sein betrage $m_{11} = 0.9$ und mit der Gegenwahrscheinlichkeit $m_{21} = 1 - m_{11} = 0.1$ wird ein Beschäftigter in der Folgeperiode arbeitslos. Die Wahrscheinlichkeit eines Arbeitslosen auch in der nächsten Periode noch arbeitslos zu sein belaufe sich auf $m_{22} = 0.6$ und mit der Gegenwahrscheinlichkeit $m_{12} = 1 - m_{22} = 0.4$ wird ein Arbeitsloser in der Folgeperiode eine Beschäftigung haben. Die zeitliche Entwicklung der beiden Anteile wird beschrieben durch den folgenden Markov-Prozess:

$$x_1(t+1) = 0.9x_1(t) + 0.4x_2(t)$$

$$x_2(t+1) = 0.1x_1(t) + 0.6x_2(t)$$

Die dynamischen Eigenschaften eines Markov-Prozesses basieren auf den beiden besonderen Merkmalen seiner Markov-Matrix. Wir stellen einige wesentliche Aussagen über nicht negative Matrizen zusammen. Diese Aussagen werden auch im Rahmen der Input-Output-Analyse benötigt. Eine umfassende Darstellung aller relevanten Fakten findet man in [Gantmacher \(1986, Kapitel 13\)](#).

Man unterscheidet bei nicht negativen Matrizen in zerlegbare und unzerlegbare Matrizen. Die unzerlegbaren nicht negativen Matrizen werden wiederum

unterteilt in die zyklischen und die azyklischen. Wir erhalten also folgende Klassifikation:

$$\text{nicht neg Matrizen} \begin{cases} \text{zerlegbar} \\ \text{unzerlegbar} \begin{cases} \text{zyklisch} \\ \text{azyklisch} \end{cases} \end{cases}$$

Definition (Zerlegbarkeit)

Eine $(n \times n)$ -Matrix A ist zerlegbar, wenn sie durch Vertauschungen von Spalten und denselben Zeilen mittels einer Permutationsmatrix P auf eine Blockdreiecksform gebracht werden kann.

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ O & A_{22} \end{pmatrix}$$

Die Untermatrizen A_{11} und A_{22} sind quadratisch und die Summe ihrer Zeilen (oder Spalten) ist gleich n .

Die Matrix A heißt vollständig zerlegbar, wenn auch die Untermatrix A_{12} nur Nullen enthält (wie dies bei der Untermatrix A_{21} als definierende Eigenschaft verlangt ist).

Die Matrix A heißt unzerlegbar, wenn sie nicht zerlegbar ist.

Definition (zyklische Matrix)

Eine unzerlegbare Matrix A ist zyklisch, wenn sie durch Vertauschungen von Spalten und denselben Zeilen mittels einer Permutationsmatrix P auf folgende besondere Nebendiagonalform gebracht werden kann:

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} O & A_{12} & O & O & \cdots & O \\ O & O & A_{23} & O & \cdots & O \\ O & O & O & A_{34} & \cdots & O \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ O & O & O & O & \cdots & A_{k-1,k} \\ A_{k,1} & O & O & O & \cdots & O \end{pmatrix}$$

Die Nullmatrizen auf der Hauptdiagonalen müssen dabei alle quadratisch sein. Die Untermatrizen $A_{12}, \dots, A_{k-1,k}$ und $A_{k,1}$ dürfen rechteckig sein.

Eine unzerlegbare Matrix A ist azyklisch (oder primitiv), falls sie nicht zyklisch ist.

Für nicht negative quadratische Matrizen ist der Satz von Frobenius und Perron von Bedeutung. Alle weitere Verfeinerungen beziehen sich auf ihn.

Satz (Frobenius und Perron)

Ist A eine quadratische, nicht negative Matrix, dann gilt:

1. sie besitzt einen reellen, nicht negativen Eigenwert $\lambda(A)$,
2. er ist größer oder gleich dem Betrag aller übrigen Eigenwerte von A ,
3. diesem (Frobenius-) Eigenwert ist ein nicht negativer Eigenvektor $\mathbf{v}_{\lambda(A)}$ zugeordnet.

Satz (Fisher und Takayama)

Der Frobenius Eigenwert $\lambda(A)$ einer nicht negativen Matrix A liegt zwischen dem Minimum und dem Maximum der Spaltensummen von A . Er liegt auch zwischen dem Minimum und dem Maximum der Zeilensummen von A .

Die Aussagen des Satzes von Frobenius und Perron werden verschärft im Falle einer unzerlegbaren nicht negativen Matrix.

Satz

Ist A eine unzerlegbare nicht negative Matrix, dann ist der (Frobenius-) Eigenwert $\lambda(A)$ streng positiv und der ihm zugeordnete Eigenvektor $\mathbf{v}_{\lambda(A)}$ ist ebenfalls streng positiv.

Der (Frobenius-) Eigenwert $\lambda(A)$ ist zudem eine einfache Nullstelle des charakteristischen Polynoms von A .

Die Aussage des Satzes von Frobenius und Perron wird noch weiter verschärft, wenn die nicht negative quadratische Matrix A primitiv (d.h. azyklisch) ist.

Satz

Der Frobenius-Eigenwert $\lambda(A)$ einer primitiven nicht negativen quadratischen Matrix A ist strikt größer als alle übrigen Eigenwerte von A .

Eine quadratische Matrix ist genau dann primitiv (oder azyklisch), wenn sie unzerlegbar ist und eines ihrer Elemente auf der Hauptdiagonalen von Null verschieden ist.

Nicht negative Matrizen besitzen eine Vielzahl weiterer Eigenschaften, die in der Ökonomie wichtig sind. So ist beispielsweise jede nicht negative primitive tridiagonale Matrix durch eine Ähnlichkeitstransformation mit einer Diagonalmatrix symmetrisierbar (was wohl eine Ursache für die heftige Debatte um das Transformationsproblem von Werten in Preise ist). Daher besitzt eine solche Matrix nur reelle Eigenwerte. Wir wollen das Thema aber nicht weiter vertiefen.

4.6 Aufgaben

Aufgabe 4.1

Bestimme die allgemeine Lösungen folgender linearer Dzgl:

$$x_{t+1} = 3x_t, \quad y_{t+1} = x_t + 2y_t \quad (\text{a})$$

$$x_{t+1} = 2y_t, \quad y_{t+1} = -2x_t + 5y_t \quad (\text{b})$$

$$x_{t+1} = x_t - y_t, \quad y_{t+1} = 2x_t + 4y_t \quad (\text{c})$$

$$x_{t+1} = 3x_t - y_t, \quad y_{t+1} = -x_t + 2y_t - z_t, \quad z_{t+1} = -y_t + 3z_t \quad (\text{d})$$

$$x_{t+1} = 4x_t - 2y_t - 2z_t, \quad y_{t+1} = y_t, \quad z_{t+1} = x_t + z_t \quad (\text{e})$$

Aufgabe 4.2

Konstruiere Eigen- und Hauptvektoren zu den Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

und löse die beiden zugehörigen Dzgl $\mathbf{z}_{t+1} = A\mathbf{z}_t$ und $\mathbf{z}_{t+1} = B\mathbf{z}_t$.

Aufgabe 4.3

Bestimme die Lösung folgender Dzgl

$$x_{t+1} = 3x_t + 5y_t, \quad y_{t+1} = -2x_t + y_t \quad (\text{a})$$

$$x_{t+1} = 2x_t - 5y_t, \quad y_{t+1} = x_t - 2y_t - 3z_t, \quad z_{t+1} = y_t + 2z_t \quad (\text{b})$$

Kapitel 5

Differentialgleichungen

Eine gewöhnliche Differentialgleichung ist ein Ausdruck, der eine Beziehung zwischen einer Funktion einer Variablen und der Ableitung dieser Variablen erklärt. Eine partielle Differentialgleichung ist eine Beziehung zwischen einer Funktion mit mehreren Variablen und deren partiellen Ableitungen. Wir betrachten nur gewöhnliche Differentialgleichungen.

Die Begriffe Ordnung einer Dgl, autonome Dgl, lineare Dgl, lineare Dgl mit konstanten Koeffizienten etc. haben dieselbe Bedeutung wie bei Differenzgleichungen.

Definition (gewöhnliche Differentialgleichung)

Eine gewöhnliche Differentialgleichung (Dgl) ist eine Gleichung $y' = f(t, y)$ zwischen der Ableitung einer unbekannten Funktion $y(t)$ und einer Funktion $f(t, y)$, die sowohl y selbst als auch t enthalten kann.

Die Unbekannte y kann auch ein n -dimensionaler Vektor sein. Ist dies aber nicht der Fall, dann bezeichnet man die Dgl auch als skalare Dgl.

Wird f nur von y beeinflusst, liegt eine autonome Dgl vor.

Kommen höhere Ableitungen vor, dann bezeichnet die höchste Ableitung die Ordnung der Dgl. Eine gewöhnliche Dgl der Ordnung n lässt sich allgemein als implizite Funktion

$$f(t, y^{(n)}, \dots, y'', y', y) = 0$$

schreiben.

Eine auf einem Intervall $I \in \mathbb{R}$ n -mal differenzierbare Funktion $\lambda : I \mapsto \mathbb{R}$ heißt Lösung der Dgl, wenn $f(t, \lambda^{(n)}, \dots, \lambda'', \lambda', \lambda) = 0$ gilt.

Es gibt zwar einen recht allgemeinen Existenzsatz über die Lösung einer gewöhnlichen Dgl, aber die Lösungen selbst einfach anmutender Dgl, wie beispielsweise $y' = t^2 + y^2$, können nicht explizit angegeben werden.

5.1 Spezielle Dgl erster Ordnung

Alle Dgl, die in diesem Abschnitt betrachtet werden, sind skalar und von erster Ordnung, d.h. die Variable y ist ein Skalar und die Ableitung y' ist die höchste vorkommende. Auch wenn für fast alle eine explizite Lösung angegeben wird, sollte dies nicht zu dem falschen Eindruck führen, das Lösen von Dgl wäre eine einfache Sache.

5.1.1 Lineare Dgl

Die einfachste lineare Dgl ist $y' = ay$, wobei der Parameter a von Null verschieden ist. Ihre allgemeine Lösung lautet $\lambda(t) = ce^{at}$. Man prüft die sogenannte Lösungsidentität: $\lambda' = cae^{at} = a(ce^{at}) = a\lambda$. Die verbleibende Unbekannte c kann durch eine (hier nicht vorliegende) Randbedingung festgelegt werden. Wir werden durch weitere Beispiele sehen, dass die Anzahl der unbestimmten Koeffizienten in der Lösung einer Dgl immer mit der Ordnung der Dgl übereinstimmt.

Die nächst einfache Dgl ist eine inhomogene Variante $y' = ay + b$, wobei die beiden Parameter a und b von Null verschieden und konstant sind. Ihre allgemeine Lösung lautet

$$\lambda(t) = -\frac{b}{a} + ke^{at}$$

Diese allgemeine Lösung kommt folgendermaßen zustande: die Inhomogenität besteht in einer (zeitunabhängigen) Konstanten b , daher wird probeweise eine spezielle Lösung λ_s als Konstante angesetzt, also $\lambda'_s = 0$ mit dem Resultat:

$$a\lambda_s + b = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \lambda_s = -\frac{b}{a}$$

als nächstes versuchen wir einen Ansatz $\lambda = \lambda_s + \lambda_h$, wobei gemäß Voraussetzung $\lambda' = 0 + \lambda'_h$ gilt:

$$\lambda' = \lambda'_h = a(\lambda_s + \lambda_h) + b = a\left(-\frac{b}{a} + \lambda_h\right) + b = a\lambda_h$$

aber die allgemeine Lösung dieser homogenen Dgl $\lambda'_h = a\lambda_h$ kennen wir bereits, somit ist die allgemeine Lösung die Summe aus einer speziellen Lösung λ_s und der allgemeinen Lösung λ_h des homogenen Teils der Dgl.

Falls a eine Funktion von t ist, ergibt sich eine nicht-autonome homogene Dgl $y' = a(t)y$ mit der allgemeinen Lösung

$$\lambda(t) = ke^{\int^t a(s) ds}$$

Ist eine Randbedingung $y(0) = y_0$ vorgegeben, so ist die nicht spezifizierte Untergrenze des Integrals durch 0 und k durch y_0 zu ersetzen.

Beispiel (Herleitung von Dichten aus Ausfallraten)

Sei f die Dichtefunktion einer stetigen Zufallsvariablen $t \geq 0$ und F die zugehörige Verteilungsfunktion. Man kann sich t anschaulich als die Lebensdauer eines elektrischen oder mechanischen Bauteils vorstellen.

$$R(t) = 1 - F(t) = \Pr\{T > t\}$$

ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Bauteil mindestens t Zeiteinheiten funktioniert und wird als Verlässlichkeitsfunktion bezeichnet. Bei gegebenen f , F und R wird die Ausfallrate oder die Hazard-Funktion durch

$$Z(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)} = \frac{f(t)}{R(t)}$$

definiert. Die Ausfallrate ist ein Maß für die Wahrscheinlichkeit, dass das Bauteil in den nächsten Δt Zeiteinheiten ausfällt, gegeben, dass es bis zum Zeitpunkt t funktionierte.

Um nun eine Dichte f aus einem gegebenen Ausdruck für Z zu konstruieren, setzt man die Dgl $Z = -R'/R$ mit der Anfangsbedingung $R(0) = 1 - F(0) = 1$ an, denn $-R' = F' = f$. Die lineare homogene Dgl $R' - ZR = 0$ in R besitzt die Lösung $R(t) = e^{-\int_0^t Z(s) ds}$ und wegen $f = F' = -R'$ ergibt sich als gesuchte Dichte $f(t) = Z(t)e^{-\int_0^t Z(s) ds}$.

Setzt man beispielsweise $Z = \alpha$ konstant, dann ergibt sich als zugehörige Dichte die bekannte Dichte der Exponentialverteilung $f = \alpha e^{-\alpha t}$.

Die komplizierteste Form dieser Gruppe der linearen Dgl ist die einer inhomogenen nicht-autonomen Dgl.

Die allgemeine Lösung der Dgl $y' = a(t)y + b(t)$ lautet:

$$\lambda(t) = \left[c + \int^t b(s) e^{-\int^s a(u) du} ds \right] e^{\int^t a(s) ds}$$

Ist ein Anfangswert $y(0) = y_0$ vorgegeben, dann sind die Untergrenzen der Integrale alle durch 0 und der unbestimmte Koeffizient c durch y_0 zu ersetzen. Der Ausdruck

$$e^{-\int^s a(u) du} ds$$

wird als integrierender Faktor bezeichnet. Es gibt einen eigenen Abschnitt zum Thema integrierender Faktoren.

5.1.2 Bernoulli-Dgl

Eine Dgl vom Bernoulli Typ besitzt die Gestalt

$$y' = a(t)y + b(t)y^\alpha$$

wobei α eine reelle Zahl ist, die weder Null noch Eins ist. Durch die Variablentransformation

$$z = y^{1-\alpha}$$

geht sie indes über in die lineare Dgl

$$z' = (1-\alpha)a(t)z + (1-\alpha)b(t)$$

Beispiel

Die Dgl

$$y' = \frac{1}{t}y + ty^3 \quad y(1) = 0$$

ist vom Bernoulli Typ mit $\alpha = 3$. Also ist die Variablentransformation

$$z = y^{-2}$$

anzusetzen, woraus folgt

$$z' = -2y^{-3}y' = -2y^{-3} \left[\frac{1}{t}y + ty^3 \right] = -2\frac{1}{t}y^{-2} - 2t = -2\frac{1}{t}z - 2t$$

Beispiel (Logistische Differentialgleichung)

Der Wachstumsprozess einer Population (beispielsweise die Heringe der Nordsee) sei beschrieben durch $y' = \alpha y - \beta y^2$, dabei gibt $y(t)$ den Bestand der Population zum Zeitpunkt t an. Die beiden positiven Parameter α und β beschreiben die Geburtenüberschussrate und den sozialen Stressfaktor. Durch den sozialen Reibungsterm $-\beta y^2$ ergibt sich eine autonome Bernoulli-Dgl. Mit der Variablentransformation $z = 1/y$ geht sie über in eine autonome lineare inhomogene Dgl $z' = -\alpha z + \beta$, deren allgemeine Lösung

$$\lambda(t) = \frac{\beta}{\alpha} + ce^{-\alpha t}$$

bereits bekannt ist. Rücktransformation auf den Bestand der Population ergibt

$$y(t) = \frac{1}{\lambda(t)} = \frac{\alpha}{\beta + \alpha ce^{-\alpha t}}$$

Ist ein Anfangswert der Population $y(0) = y_0$ gegeben, kann die Größe c bestimmt werden

$$y(0) = y_0 = \frac{\alpha}{\beta + \alpha c} \rightsquigarrow c = \frac{\alpha - y_0\beta}{y_0\alpha}$$

Einsetzen und Umformen ergibt schließlich

$$y(t) = \frac{y_0\alpha}{y_0\beta + (\alpha - y_0\beta)e^{-\alpha t}} \rightsquigarrow \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \frac{\alpha}{\beta}$$

Bemerkenswert ist, dass die Population *unabhängig* vom Anfangsbestand $y_0 \geq 0$ langfristig auf ein konstantes Niveau α/β zustrebt.

Beispiel (Fundamentalgleichung im Wachstumsmodell von Solow)

Die sogenannte Fundamentalgleichung des neoklassischen Wachstumsmodells (von Solow) bei einer Cobb-Douglas-Produktionsfunktion lautet:

$$k' = sk^a - bk \quad \text{wobei} \quad 0 < s, a < 1 \quad \text{und} \quad b > 0$$

die Parameter s , a und b sind konstant.

Es handelt sich um eine Bernoulli-Dgl. Sie wird mittels der Transformation $z = k^{1-a}$, also $z' = (1-a)k^{-a}k'$ in die lineare Dgl mit konstanten Koeffizienten

$$z' = (1-a)s - (1-a)bz$$

überführt. Diese besitzt die Lösung

$$z(t) = \frac{s}{b} + Ke^{-(1-a)bt}$$

wobei die Unbekannte K später durch den Startwert k_0 bestimmt wird. Rücktransformation $k(t) = z(t)^{1/(1-a)}$ ergibt:

$$k(t) = \left(\frac{s}{b} + Ke^{-(1-a)bt} \right)^{\frac{1}{1-a}}$$

Hieraus lässt sich die Kapitalintensität im langfristigen Wachstumsgleichgewicht $k^* = \lim_{t \rightarrow \infty} k(t)$ bestimmen als

$$k^* = \left(\frac{s}{b} \right)^{\frac{1}{1-a}}$$

5.1.3 Trennbare Variablen

Eine Dgl der Form $y' = h(t)g(y)$ heißt separabel. Sie wird gelöst durch Trennung der Variablen. Man schreibt formal

$$y' = \frac{dy}{dt}$$

und trennt die Terme — was nur bei $g(y) \neq 0$ erlaubt ist und integriert

$$\int^y \frac{dy}{g(y)} = \int^t h(t) dt + c$$

Gibt es eine Startbedingung $y(0) = y_0$, dann entfällt die Integrationskonstante c und links ist y_0 als Untergrenze und rechts 0 als Untergrenze der Integrale zu setzen.

Ist $g(t_0) = 0$ ergibt sich sofort als Lösung $y(t) = t_0$. Ob es noch weitere Lösungen gibt, hängt von der Funktion g ab.

Ist $y' = g(y)$ liegt der besondere Fall trennbarer Variablen mit $h(t) = 1$ vor. Man bezeichnet diese Form als autonome Dgl.

Ist $y' = h(t)$ liegt der zweite Spezialfall trennbarer Variablen mit $g(y) = 1$ vor. Es geht eigentlich nur darum, eine Stammfunktion $\int h(t) dt$ zu finden.

Beispiel (Arrow-Pratt Maß der relativen Risiko-Aversion)

Das Arrow-Pratt Maß der relativen Risiko-Aversion beim Vermögen x ist der Ausdruck

$$-\frac{u''(x)x}{u'(x)}$$

also die Elastizität des Grenznutzens u' in Bezug auf x . In vielen Modellen wird eine konstante relative Risiko-Aversion unterstellt. Welche Nutzenfunktionen u erfüllen diese Eigenschaft?

Zunächst wird eine Variablensubstitution $u' = y$ durchgeführt und dann der Ausdruck konstant gesetzt:

$$b = -\frac{y'x}{y}$$

es ergibt sich die Dgl $y'x = by$ mit trennbaren Variablen

$$\frac{dy}{y} = -b \frac{dx}{x} \quad \rightsquigarrow \quad \int \frac{dy}{y} = -b \int \frac{dx}{x}$$

mit der Lösung $\ln y = -b \ln(x + C)$ oder aufgelöst

$$y = e^{-b \ln x} e^{-bC} = c_1 x^{-b}$$

Rücksubstitution $u' = y$ ergibt

$$u = \int y' dx = \int c_1 x^{-b} = \begin{cases} c_2 + c_1 \ln x & \text{für } b = 1 \\ c_2 + \frac{c_1}{1-b} x^{1-b} & \text{für } b \neq 1 \end{cases}$$

5.1.4 Riccati-Dgl

Die Dgl

$$y' = a(t)y^2 + b(t)y + c(t)$$

heißt Riccati-Dgl. Sie wird gelöst, indem eine Dgl zweiter Ordnung

$$au'' - [a' + bc]u' + a^2cu = 0$$

nach der neuen Unbekannten u gelöst wird. Die Lösung der Riccati-Dgl ergibt sich dann als

$$y = -\frac{1}{a} \frac{u'}{u}$$

Beispiel

Die Dgl $y' = 1 + y^2$ ist vom Riccati Typ mit $a = 1$, $b = 0$ und $c = 1$. Damit lautet die zugehörige Dgl zweiter Ordnung $u'' = u$ mit der Lösung $u(t) = \cos(t)$. Einsetzen in den Lösungsansatz ergibt

$$y = -\frac{\cos'}{\cos} = \frac{\sin}{\cos} = \tan$$

Wir machen die Probe:

$$\tan' = \left(\frac{\sin}{\cos}\right)' = \frac{\sin' \cos - \sin \cos'}{\cos^2} = \frac{\cos^2 + \sin^2}{\cos^2} = 1 + \left(\frac{\sin}{\cos}\right)^2 = 1 + \tan^2$$

also erfüllt $y = \tan$ die Dgl $y' = 1 + y^2$.

5.1.5 Aufgaben

Aufgabe 5.1

Bestimme die allgemeine Lösung folgender Dgl, sowie die partikuläre Lösung für $y(1) = 1$. (a) $y' = 5 - y$ (b) $y' = t - y$ (c) $y' = y - t^2$ (d) $y' = y^3/t^3$ (e) $y' = t^3/y^3$ (f) $ty' + (1 - t)y = e^{2t}$.

Aufgabe 5.2

Löse allgemein die folgenden Dgl

$$(a) \quad y' - y = ty^5 \quad (b) \quad y' + 2ty + ty^4 = 0$$

5.2 Exakte (totale) Dgl

Betrachtet wird eine implizite Dgl der Form $y'g(t, y) + h(t, y) = 0$, wobei die beiden Funktionen g und h in einem sogenannten offenen Rechtecksgebiet $D \subseteq \mathbb{R}^2$ definiert und stetig differenzierbar sind. Das offene Rechtecksgebiet ist in diesem Fall mit zwei Variablen das kartesische Produkt zweier reeller offener Intervalle, die auch einseitig oder beidseitig unbeschränkt sein dürfen. Die Dgl $y'g(t, y) + h(t, y) = 0$ heißt exakt, wenn es eine Stammfunktion S gibt mit

$$\frac{\partial S}{\partial t} = h(t, y) \quad \text{und} \quad \frac{\partial S}{\partial y} = g(t, y)$$

Die Integrabilitätsbedingung

$$\frac{\partial g}{\partial t} = \frac{\partial h}{\partial y}$$

ist für offene Rechtecksgebiete notwendig und hinreichend für die Exaktheit. In diesem Fall besitzt für beliebiges $(t_0, y_0) \in D$ die eindeutig bestimmte Stammfunktion $S_0(t, y)$, die beiden Darstellungen

$$\begin{aligned} S_0(t, y) &= \int_{t_0}^t h(s, y) \, ds + \int_{y_0}^y g(t_0, w) \, dw \\ &= \int_{t_0}^t h(s, y_0) \, ds + \int_{y_0}^y g(t, w) \, dw \end{aligned}$$

Bei der Lösung von Dgl der Form $y'g(t, y) + h(t, y) = 0$ sind folgende Schritte zweckmäßig:

1. Prüfe auf Exaktheit anhand der Integrabilitätsbedingung

$$\frac{\partial g}{\partial t} = \frac{\partial h}{\partial y}$$

sollte sie nicht gegeben sein, kann man versuchen, sie mittels eines integrierenden Faktors (wie im nächsten Abschnitt beschrieben) exakt zu machen;

2. Berechnung der Stammfunktion S anhand einer der beiden Darstellungen;

3. Berechnung der allgemeinen oder einer speziellen Lösung. Ist eine Anfangsbedingung $y(t_0) = y_0$ gegeben, so liefert die Auflösung der Gleichung $S(t, y) = S(t_0, y_0)$ nach y , insbesondere also

$$\int_{t_0}^t h(s, y) \, ds + \int_{y_0}^y g(t_0, w) \, dw = 0$$

die Lösung der exakten Dgl.

Beispiel

Bestimme alle Lösungen der Dgl

$$y' \frac{2y(t-1)}{1+y^2} + \log(1+y^2) = 0$$

Die beiden (Koeffizienten-) Funktionen

$$g(t, y) = \frac{2y(t-1)}{1+y^2} \quad \text{und} \quad h(t, y) = \log(1+y^2)$$

sind auf \mathbb{R}^2 stetig differenzierbar und es gilt

$$\frac{\partial g}{\partial t} = \frac{2y}{1+y^2} = \frac{\partial h}{\partial y}$$

also ist die Integrabilitätsbedingung erfüllt. Wir wählen $(t_0, y_0) = (0, 0)$ und bilden eine Stammfunktion:

$$S_0(t, y) = \int_0^t \log(1+0^2) \, ds + \int_0^y \frac{2w(t-1)}{1+w^2} \, dw = (t-1) \log(1+y^2)$$

Alle Lösungen erhält man durch Auflösen der Gleichung $(t-1) \log(1+y^2) = c$ nach y .

Beispiel (Klasse der separablen Dgl)

Bei der separablen Dgl $y' = p(t)q(y)$ liegt es nahe, sie als $y' - p(t)q(y) = 0$ zu schreiben mit $g(t, y) = 1$ und $h(t, y) = -p(t)q(y)$; allerdings ist dann die Integrabilitätsbedingung nicht erfüllt. Sie gilt jedoch für

$$y' \frac{1}{q(y)} - p(t) = 0 \quad \text{da} \quad \frac{\partial g}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{q(y)} = 0 = \frac{\partial}{\partial y} p(t) = \frac{\partial h}{\partial y}$$

Man wählt ein y_0 bei dem $q(y_0) \neq 0$ gilt, sowie ein t_0 und berechnet die Stammfunktion

$$S(t, y) = \int_{y_0}^y \frac{dw}{q(w)} - \int_{t_0}^t p(s) \, ds$$

Mit der Gleichung $S(t, y) = k$ ergibt sich dann die allgemeine Lösung wie bereits angegeben.

5.2.1 Integrierende Faktoren

Gegeben ist eine Dgl der Form

$$y'g(t, y) + h(t, y) = 0$$

Eine stetig differenzierbare Funktion $m(t, y) \neq 0$ heißt integrierender Faktor der Dgl, wenn

$$y'g(t, y)m(t, y) + h(t, y)m(t, y) = 0$$

eine exakte Dgl ist.

Soll eine gewöhnliche Dgl $y' = f(t, y)$ durch einen integrierenden Faktor gelöst werden, lässt sich folgendermaßen verfahren:

1. Man schreibt die explizite Dgl in die implizite Form $y'g(t, y) + h(t, y) = 0$ um, wenn möglich auf mehrere verschiedene Weisen.

Beispiel

Die Dgl $y' = ty$ kann alternativ als

$$\begin{aligned} y' - ty &= 0 & t, y \in \mathbb{R} & & y' \frac{1}{y} - t &= 0 & t, y \in \mathbb{R} \ y \neq 0 \\ y' \frac{1}{t} - y &= 0 & t, y \in \mathbb{R} \ t \neq 0 & & y' \frac{1}{ty} - 1 &= 0 & t, y \in \mathbb{R} \ ty \neq 0 \end{aligned}$$

geschrieben werden.

2. Gilt für eine dieser Darstellungen die Integrabilitätsbedingung

$$\frac{\partial g}{\partial t}(t, y) = \frac{\partial h}{\partial y}(t, y)$$

so ist die Dgl bereits exakt und die weitere Lösung kann durch die Berechnung einer Stammfunktion erfolgen. Im voranstehenden Beispiel erfüllt nur die zweite Darstellung die Integrabilitätsbedingung.

3. Ist keine der Darstellungen exakt, kann man einen integrierenden Faktor durch die (kaum zu findende Lösung) der folgenden *partiellen Dgl* konstruieren:

$$\frac{\partial}{\partial t} [g(t, y)m(t, y)] = \frac{\partial}{\partial y} [h(t, y)m(t, y)]$$

Ist jedoch der Ausdruck

$$\frac{1}{g(t, y)} \left[\frac{\partial h}{\partial y}(t, y) - \frac{\partial g}{\partial t}(t, y) \right]$$

unabhängig von y , so ist die Funktion $p(t) = e^{P(t)}$ ein integrierender Faktor, wobei $P(t)$ eine Stammfunktion des vorigen Ausdrucks ist. Damit wird $y'g(t, y)p(t) + h(t, y)p(t) = 0$ zu einer exakten Dgl.

Analog, ist der Ausdruck

$$\frac{1}{h(t, y)} \left[\frac{\partial g}{\partial t}(t, y) - \frac{\partial h}{\partial y}(t, y) \right]$$

unabhängig von t , so ist die Funktion $q(y) = e^{Q(y)}$ ein integrierender Faktor, wobei $Q(y)$ eine Stammfunktion des vorigen Ausdrucks ist. Somit ist $y'g(t, y)q(y) + h(t, y)q(y) = 0$ eine exakte Dgl.

5.2.2 Homogene Dgl

Ist die rechte Seite der Dgl $y' = f(t, y)$ homogen vom Grad Null, d.h. gilt für $\sigma \neq 0$ die Beziehung $f(\sigma t, \sigma y) = f(t, y)$, so bezeichnet man die Dgl als homogen oder auch als Ähnlichkeits-Dgl.

Sie lässt sich durch $z = y/t$ in eine mit getrennten Variablen transformieren.

$$z' = \frac{f(1, z) - z}{t}$$

Diese Transformation gilt nicht nur bei skalaren Dgl, sondern allgemein.

Beispiel

Die Dgl

$$y' = \frac{y}{t} + \sqrt{1 - \frac{y^2}{t^2}}$$

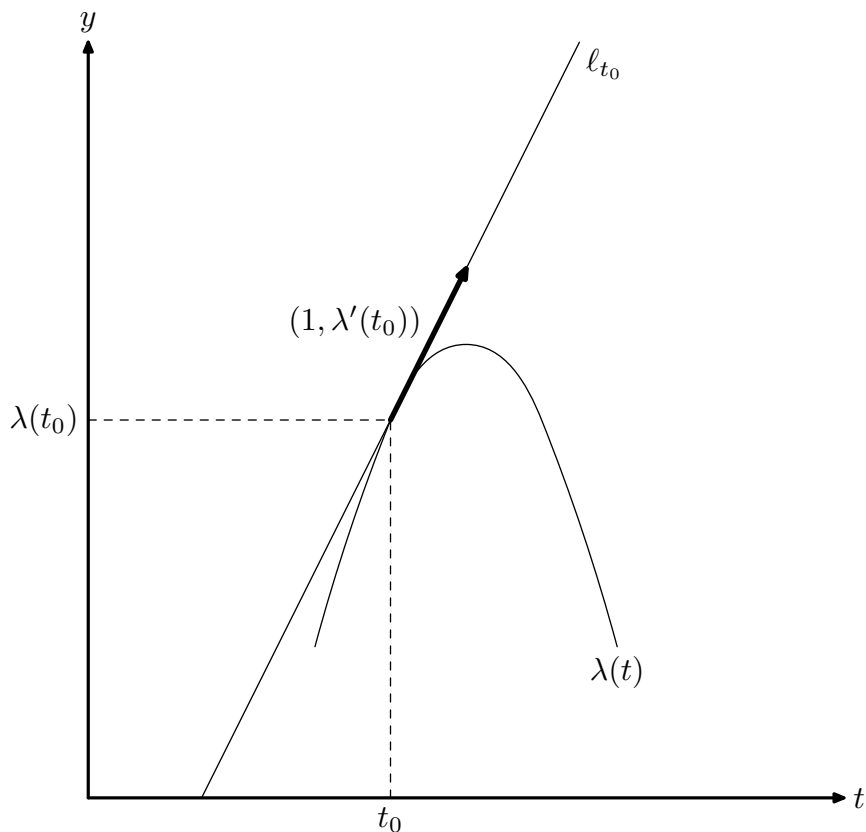
ist homogen (vom Grad Null). Mit $z = y/t$ ergibt sich

$$z' = \frac{y't - y}{t^2} = \frac{\sqrt{1 - z^2}}{t}$$

5.3 Geometrische Darstellungen

Die Lösung λ einer Dgl $y' = f(t, y)$ ist eine auf einem Intervall I differenzierbare Funktion $\lambda : I \mapsto \mathbb{R}^n$, die der Identität $\lambda'(t) = f(t, \lambda(t))$ genügt und deren Graph $\Lambda = \{(t, \lambda(t)) \in D : t \in I\}$ eine differenzierbare Kurve, die sogenannte Lösungs- oder Integralkurve in D ist. Der Tangentialvektor im Kurvenpunkt $(t_0, \lambda(t_0))$ von Λ ist der Richtungsvektor $(1, \lambda'(t_0))$ der approximierenden Geraden ℓ_{t_0} . Der Richtungsvektor von Λ im Punkt $(t_0, \lambda(t_0))$ ist

Abbildung 5.1: Lösungskurve mit Richtungsvektor



bekanntlich nur der Richtung und nicht der Länge (Betrag) nach bestimmt als $(1, \lambda'(t_0))$. Seine zweite Komponente kann auch durch die rechte Seite der Dgl ersetzt werden, damit gilt $(1, f(t_0, \lambda(t_0)))$.

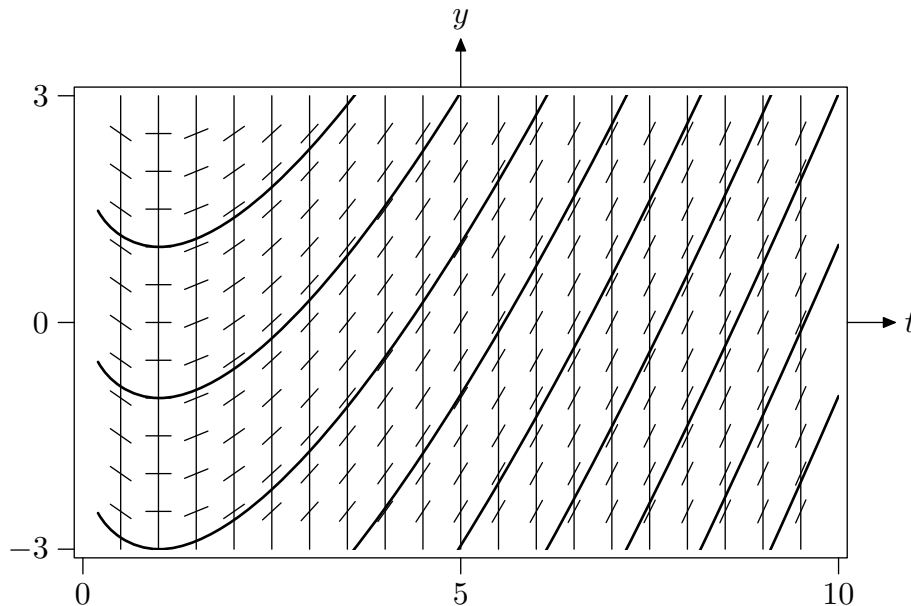
Dies lässt sich verallgemeinern für jeden Punkt aus dem Definitionsbereich von f . Alleine das Vektorfeld $(t, y) \mapsto (1, f(t, y))$ ist bestimmend für den Verlauf der Lösungskurven. Oder umgekehrt: die Lösungskurven der Dgl passen sich in dieses Vektorfeld ein.

Für den Fall skalarer Dgl kann man dies direkt geometrisch veranschaulichen. Durch jeden Punkt $(t, y) \in D$ denke man sich ein kurzes Geradenstück einheitlicher Länge mit Richtungsvektor $(1, f(t, y))$ angeheftet, ein sogenanntes Linienelement. Die Gesamtheit dieser Linienelemente wird als Richtungsfeld bezeichnet. Es wird durch Zeichnen hinreichend vieler Linienelemente (beispielsweise auf einem Gitternetz) veranschaulicht. Lösungskurven der Dgl passen sich nun tangential zu Linienelementen in das Richtungsfeld ein.

Bei dieser zeichnerischen Darstellung der Dgl sind die Isoklinen, d.h. Kurven

gleicher Steigung von großer Bedeutung, sie besitzen die Form $f(t, y) = c$, wobei c eine reelle Zahl ist. Die Isokline zum Niveau Null trennt dabei die Bereiche von Wachsen und Fallen von Lösungskurven.

Abbildung 5.2: Richtungsfeld, Isoklinen und Lösungskurven von $y' = \ln t$



Über das Krümmungsverhalten (konvex versus konkav) gibt der geometrische Ort der Wendepunkte von Lösungskurven Auskunft. Er ist bestimmt durch

$$\frac{\partial f(t, y)}{\partial t} + \frac{\partial f(t, y)}{\partial y} f(t, y) = 0$$

Die Graphik der Abbildung 5.2 enthält eine repräsentative Auswahl von Linienelementen (die kurzen Strecken) auf einem Gitternetz, sowie Isoklinen (die senkrechten Linien) und einige Teile von Lösungskurven der Dgl $y' = \ln t$. Man sieht sofort die Anpassung der Lösungskurven in das Richtungsfeld. Diese Dgl ist separabel und stellt ein reines Integrationsproblem dar. Stammfunktionen sind

$$\lambda(t) = \int \ln t \, dt = t(\ln t - 1) + c$$

wobei die unbestimmte reelle Zahl c durch eine Randbedingung festgelegt wird.

Sowohl die Isoklinen (geometrischer Ort der Lösungskurven mit gleicher Steigung) als auch die Linienelemente lassen sich *ohne Kenntnis* der Stammfunktion konstruieren. Für eine Isokline der Dgl $y' = \ln t$ gilt

$$\ln t = c \quad \text{mit} \quad c \in \mathbb{R} \quad \rightsquigarrow \quad t = e^c$$

d.h. sie sind in der t - y -Ebene immer senkrecht. Diese einfache Eigenschaft der Isoklinen gilt für alle reinen Integrationsaufgaben, d.h. bei allen Dgl der Form $y' = g(t)$. Die Isokline zum Niveau Null ($c = 0$) ist die senkrechte Linie durch den Punkt $(1,0)$. Man kann sie auch daran erkennen, dass alle Linienelemente auf dieser Isokline waagerecht sind.

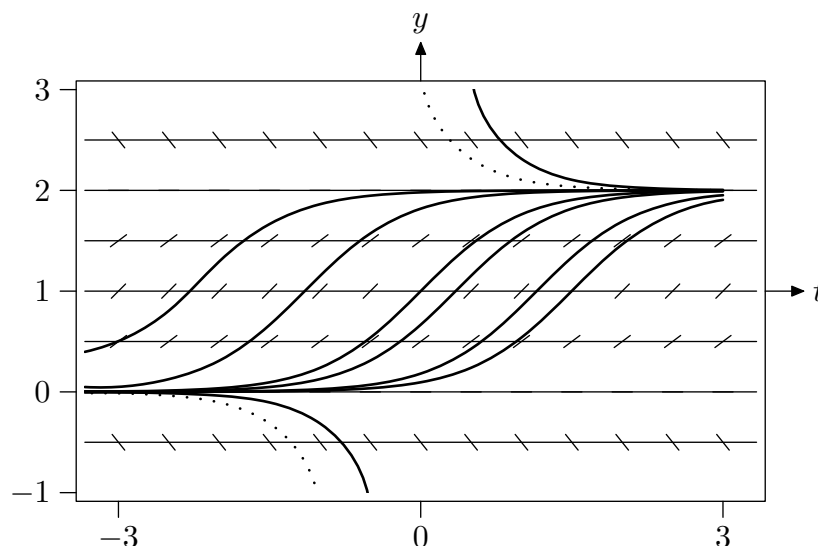
Die Bestimmungsgleichung für Wendepunkte von Lösungskurven lautet für diese Dgl

$$\frac{\partial \ln t}{\partial t} + \frac{\partial \ln t}{\partial y} \ln t = \frac{\partial \ln t}{\partial t} = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \frac{1}{t} = 0$$

und besitzt keine (reelle) Lösung. Die Lösungskurven weisen also keine Wendepunkte auf.

Die logistische Dgl $y' = y(\alpha - \beta y)$ ist autonom, daher verlaufen ihre Isoklinen waagerecht (sind unabhängig von t). Die Isoklinen zum Niveau Null sind gerade die Nullstellen der rechten Seite, also $y = 0$ und $y = \alpha/\beta$. Diese

Abbildung 5.3: Richtungsfeld der logistischen Dgl $y' = y(2 - y)$



beiden Isoklinen zum Niveau Null teilen die t - y -Ebene in drei waagerechte

Streifen. Im mittleren Streifen zwischen 0 und α/β ($= 2$ in der Abbildung) steigen die Lösungskurven und in den beiden äußeren Streifen fallen sie. Da die rechte Seite $g(y)$ einer autonomen Dgl von t unabhängig ist, vereinfacht sich die Bestimmungsgleichung für Wendepunkte der Lösungskurven zu

$$\frac{\partial g}{\partial y} g(y) = g'(y) g(y) = 0$$

Somit sind sowohl die Isoklinen zum Niveau Null ($g = 0$), als auch die Extremstellen (Minima und Maxima) von g (i.e. $g' = 0$), Wendepunkte, im obigen Beispiel der logistischen Dgl also die Werte $y = 0$, $y = 2$ und $y = 1$. Die allgemeine Lösung einer logistischen Dgl $y' = y(\alpha - \beta y)$ mit positiven Parametern α und β lautet

$$y(t) = \frac{\alpha}{\beta + \alpha c e^{-\alpha t}}$$

welche für negatives c eine Polstelle besitzt. In der voranstehenden Abbildung 5.3 sind für zwei negative Werte von c solche Lösungskurven abgebildet. Man erkennt, dass je ein Zweig im oberen und unteren waagerechten Streifen liegt. Das bedeutet, dass für negatives k das maximale Lösungsintervall (für t) entweder von minus Unendlich bis zur Polstelle oder von der Polstelle bis plus Unendlich verläuft.

Ist im Beispiel ein Anfangswert $y_0 > 2$ gegeben, ergibt sich eine Lösungskurve im oberen Streifen, liegt y_0 zwischen Null und Zwei resultiert eine Lösungskurve im mittleren Streifen und ein negatives y_0 führt in den unteren Streifen.

5.4 Qualitative Eigenschaften

Qualitative Eigenschaften gewöhnlicher Dgl sind solche, die man ohne explizite Lösung angeben kann. Die voranstehenden Richtungsfelder gehören auch in diese Rubrik, aber in diesem Unterabschnitt geht es in erster Linie um analytische Eigenschaften.

5.4.1 Reduktion auf Systeme erster Ordnung

Eine (explizite) gewöhnliche Dgl der Ordnung n

$$y^{(n)} = f(t, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$$

lässt sich durch Einführung neuer Variablenvektoren x_1, \dots, x_n in ein Dgl-System erster Ordnung überführen. Man setzt $x_1 = y$, $x_2 = y'$, ... und erhält

folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}x_1' &= x_2 \\x_2' &= x_3 \\&\vdots \\x_{n-1}' &= x_n \\x_n' &= f(t, x_1, x_2, \dots, x_n)\end{aligned}$$

Statt einer Dgl der Ordnung n ist nun ein System mit n Dgl der Ordnung 1 zu untersuchen. Beides ist äquivalent, d.h. eine Lösung des Dgl-Systems ist auch eine Lösung der Dgl n -ter Ordnung und umgekehrt. Daher werden sich alle weiteren Überlegungen und Aussagen immer auf eine explizite Dgl erster Ordnung beziehen, wobei y und y' einfach als N -dimensionale Vektoren aufzufassen sind.

Beispiel (Euler-Gleichung)

Die Lösung der Hauptaufgabe der dynamischen Optimierung mit dem Integranden $F(t, y, y')$ ist die Lösung der Euler-Gleichung, einer skalaren Dgl zweiter Ordnung

$$y'' F_{y'y'} + y' F_{y'y} + F_{y't} - F_y = 0$$

Man setzt $x_1 = y$ und $x_2 = y'$ und es ergibt sich im Falle der Nichtentartung ($F_{y'y'} \neq 0$) ein System zweier Dgl erster Ordnung

$$\begin{aligned}x_1' &= x_2 \\x_2' &= -x_2 \frac{F(t, x_1, x_2)_{x_2 x_1}}{F(t, x_1, x_2)_{x_2 x_2}} - \frac{F(t, x_1, x_2)_{x_2 t}}{F(t, x_1, x_2)_{x_2 x_2}} + \frac{F(t, x_1, x_2)_{x_1}}{F(t, x_1, x_2)_{x_2 x_2}}\end{aligned}$$

Bei mehreren Zustandsvariablen ist genauso zu verfahren.

5.4.2 Existenz von Lösungen

Satz (Allgemeiner Existenz- und Eindeutigkeitssatz)

Ist die Funktion $f(t, y)$ (d.h. die rechte Seite der Dgl) stetig und sind die partiellen Ableitungen nach den N Komponenten von y stetig, dann gibt es für alle Punkte (t_0, y_0) aus dem Definitionsbereich von f ein eindeutig bestimmtes Zeitintervall, das t_0 enthält und das Anfangswertproblem

$$y' = f(t, y) \quad y(t_0) = y_0$$

besitzt auf diesem Zeitintervall genau eine Lösung $\mu(t)$.

Besitzt die Funktion $f(t, y)$ einen Definitionsbereich der Form $(a, b) \times \mathbb{R}^N$ mit $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ und ist f linear beschränkt, d.h. es gilt die Abschätzung

$$\|f(t, y)\| \leq \rho(t)\|y\| + \sigma(t)$$

für alle $t \in (a, b)$ und alle $y \in \mathbb{R}^N$ und stetigen Funktionen $\rho, \sigma : (a, b) \mapsto \mathbb{R}_0^+$, dann existiert die Lösung auf dem ganzen Zeitintervall (a, b) .

Eine direkte Folgerung aus dieser Eigenschaft ist die Existenz der Lösung auf dem ganzen Zeitintervall bei linearen Dgl der Form $y' = A(t)y + g(t)$ mit stetiger Matrix $A(t)$.

5.4.3 Parameterabhängigkeit

Gegeben sei eine gewöhnliche Dgl, deren rechte Seite neben t und y auch noch von einem Parameter(vektor) $\alpha \in \mathbb{R}^M$ abhängt

$$y' = f(t, y, \alpha)$$

Ist nun f stetig und nach y und dem Parametervektor α stetig differenzierbar, dann lässt sich diese Parameterabhängigkeit beseitigen.

Die Parameterabhängigkeit wird beseitigt, indem einfach ein neuer Variablenvektor x definiert und folgendes Anfangsproblem betrachtet wird:

$$\begin{aligned} y' &= f(t, y, x) & y(t_0) &= y_0 \\ x' &= 0 & x(t_0) &= \alpha \end{aligned}$$

Weiterhin lässt sich auch die Startbedingung $y(t_0) = y_0$ wie ein Parameter behandeln: Ist $\kappa(t)$ die maximale Lösung zum Anfangswertproblem

$$y' = f(t + t_0, y + y_0, \alpha) \quad y(0) = 0$$

dann ist $\kappa(t) = \mu(t + t_0) - y_0$, wobei μ die Lösung des ursprünglichen Anfangsproblems ist.

5.4.4 Begriff der allgemeine Lösung einer Dgl

Die Lösung $\mu(t)$ einer Dgl ist zunächst eine vektorwertige Funktion der Zeit. Sie wird jedoch auch durch die Anfangszeit t_0 , den Anfangswert y_0 und die Parameter α beeinflusst, sowohl in ihrer funktionalen Form als auch in ihrem Definitionsbereich, d.h. dem Zeitintervall, in dem sie gültig ist.

In der rechten Seite der parameterabhängigen Dgl $y' = f(t, y, \alpha)$ ist t eine reelle Zahl aus einem Intervall, wobei auch $-\infty$ und $+\infty$ zugelassen sind,

y ist ein N -dimensionaler Vektor und α ist ein M -dimensionaler Vektor. Ein sinnvoller Definitionsbereich für f ist somit eine offene Teilmenge D des \mathbb{R}^{1+N+M} , wenn immer die Reihenfolge der Argumente von f beachtet wird. Die Offenheit des Definitionsbereiches ist notwendig, da überall stetige partielle Ableitungen unterstellt werden.

Für beliebige Werte (τ, γ, α) aus dem Definitionsbereich von f bezeichne $I_{\max}(\tau, \gamma, \alpha)$ das maximale Existenzintervall und $\mu_{\tau, \gamma, \alpha}(t)$ die Lösung der Dgl $y' = f(t, y, \alpha)$ zur Anfangsbedingung $y(\tau) = \gamma$. Die für alle $(t, \tau, \gamma, \alpha)$ aus der Menge

$$\Omega = \{(t, \tau, \gamma, \alpha) \in \mathbb{R}^{1+1+N+M} : (\tau, \gamma, \alpha) \in D, \quad t \in I_{\max}(\tau, \gamma, \alpha)\}$$

definierte Funktion

$$\lambda(t; \tau, \gamma, \alpha) = \mu_{\tau, \gamma, \alpha}(t)$$

nennt man die allgemeine Lösung der (parameterabhängigen) Dgl.

Das maximale Lösungsintervall $I_{\max}(\tau, \gamma, \alpha)$ der allgemeinen Lösung ist unabhängig von den Variablen (τ, γ) , solange sich das Anfangspaar (τ, γ) auf der Lösungskurve befindet. Wählt man also eine andere Anfangszeit $\sigma \in I_{\max}(\tau, \gamma, \alpha)$ mit dem Wert der allgemeinen Lösung $\lambda(\sigma; \tau, \gamma, \alpha)$, dann stimmen beide Intervalle überein:

$$I_{\max}(\tau, \gamma, \alpha) = I_{\max}(\sigma, \lambda(\sigma; \tau, \gamma, \alpha), \alpha)$$

Startet man zum Zeitpunkt τ im Punkt (τ, γ) , so befindet sich die Lösungskurve im Zeitpunkt \tilde{t} im Punkt $(\tilde{t}, \lambda(\tilde{t}; \tau, \gamma, \alpha))$. Legt man andererseits im Zeitpunkt σ zwischendurch einen Zwischenstopp ein und startet dann erneut, also im Punkt $(\sigma, \lambda(\sigma; \tau, \gamma, \alpha))$, so landet man zum Zeitpunkt \tilde{t} an derselben Stelle. Es gilt allgemein die sogenannte Kozyklus-Eigenschaft der allgemeinen Lösung:

$$\lambda(t; \sigma, \lambda(\sigma; \tau, \gamma, \alpha), \alpha) = \lambda(t; \tau, \gamma, \alpha)$$

Der Definitionsbereich Ω der allgemeinen Lösung λ ist eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^{1+1+N+M}$ und λ ist eine stetige Funktion aller ihrer Variablen.

Satz (Differenzierbarkeit der allgemeinen Lösung)

Ist die rechte Seite f der Dgl $y' = f(t, y, \alpha)$ eine nach y und den Parametern α zweimal stetig differenzierbare Funktion, dann ist die allgemeine Lösung $\lambda(t; \tau, \gamma, \alpha)$ sogar einmal stetig nach allen Variablen differenzierbar, d.h. nach der Zeit t , der Anfangszeit τ , dem Anfangswert γ und den Parametern α .

5.5 Besonderheiten autonomer Dgl

Bekanntlich ist die rechte Seite einer autonomen Dgl von t unabhängig. Alle Eigenschaften gewöhnlicher Dgl gelten auch für autonome Dgl. Wegen der Unabhängigkeit der rechten Seite von t weisen sie jedoch eine Reihe von Besonderheiten auf, die es bei gewöhnlichen Dgl sonst nicht gibt.

Das maximale Existenzintervall I_{\max} ist bis auf eine einfache Translation (Verschiebung nach links oder rechts) von der Anfangszeit unabhängig und die allgemeine Lösung einer autonomen Dgl ist sogar translationsinvariant:

$$\lambda(t; \tau, \gamma, \alpha) = \lambda(t + \sigma - \tau; \sigma, \gamma, \alpha)$$

Setzt man für die von der Anfangszeit unabhängige allgemeine Lösung

$$\varphi(t; \gamma, \alpha) = \lambda(t; 0, \gamma, \alpha)$$

dann gilt die grundlegende Gruppeneigenschaft dynamischer Systeme

$$\varphi(t; \varphi(s; \gamma, \alpha), \alpha) = \varphi(t + s; \gamma, \alpha)$$

5.5.1 Trajektorien

Aufgrund der Translationsinvarianz besitzen sämtliche Lösungskurven einer autonomen Dgl $y' = f(y)$ eine gemeinsame Projektion in der y -Raum, dasselbe gilt für die Richtungsvektoren $(1, f(y))$, deren Projektion in den y -Raum gerade $f(y)$ ist.

Definition

Eine Teilmenge T des Definitionsbereichs $D \subseteq \mathbb{R}^N$ einer autonomen Dgl $y' = f(y)$ heißt Trajektorie, falls es eine maximale Lösung $\mu : I \mapsto D$ gibt mit

$$T = \{\mu(t) \in D : t \in I\}$$

Für jedes $\gamma \in D$ heißt die Menge

$$O(\gamma) = \{\varphi(t; \gamma) \in D : t \in (J^-(\gamma), J^+(\gamma))\}$$

Orbit (Bahn) oder Trajektorie durch γ , wobei $(J^-(\gamma), J^+(\gamma))$ das maximale Lösungsintervall zum Anfangswert γ bezeichnet.

Als Bildmenge einer Lösung einer Dgl, also einer differenzierbaren Funktion, sind Trajektorien glatte Kurven im \mathbb{R}^N , deren Orientierung durch den Kurvenparameter t gegeben wird. Bei der geometrischen Darstellung wird

diese Orientierung durch Pfeile angeben, wobei die Pfeilspitze in Richtung wachsender t -Werte zeigt.

Jeder Lösung einer allgemeinen (also nichtautonomen) Dgl entspricht genau eine Lösungskurve. Bei autonomen Dgl ist dies jedoch nicht der Fall. Da die Lösungen translationsinvariant sind, gibt es zu jedem Anfangswert γ eine maximale Lösung $\varphi(t; \gamma)$, die bezüglich t translationsinvariant ist und folglich dieselbe Bildmenge als Trajektorie (Orbit, Bahn) besitzt.

Beispiel (Trajektorien der logistischen Dgl)

Die anfangszeitunabhängige allgemeine Lösung der Dgl $y' = y(\alpha - y)$ lautet

$$\varphi(t; \gamma, \alpha) = \begin{cases} \frac{\alpha\gamma}{\gamma + (\alpha - \gamma)e^{-\alpha t}} & \text{für } \alpha \neq 0 \\ \frac{\gamma}{1 + \gamma t} & \text{für } \alpha = 0 \end{cases}$$

Für den Parameterwert $\alpha = 2$ liegt bereits das Richtungsfeld vor (vgl. Abbildung 5.3). Werden die Lösungskurven in den drei Streifen auf die y -Achse projiziert, ergeben sich die drei Intervalle $(-\infty, 0)$, $(0, \alpha)$ und $(\alpha, +\infty)$, sowie die beiden Einpunktigen Mengen $\{0\}$ und $\{\alpha\}$, was den fünf Bahnen der Dgl entspricht. Damit stehen den unendlich vielen Lösungskurven ganze fünf Trajektorien gegenüber.

Schichtet man die Trajektorien für alternative Parameterwerte $\alpha \in \mathbb{R}$ nebeneinander, so entstehen die Trajektorien des parameterunabhängigen Systems

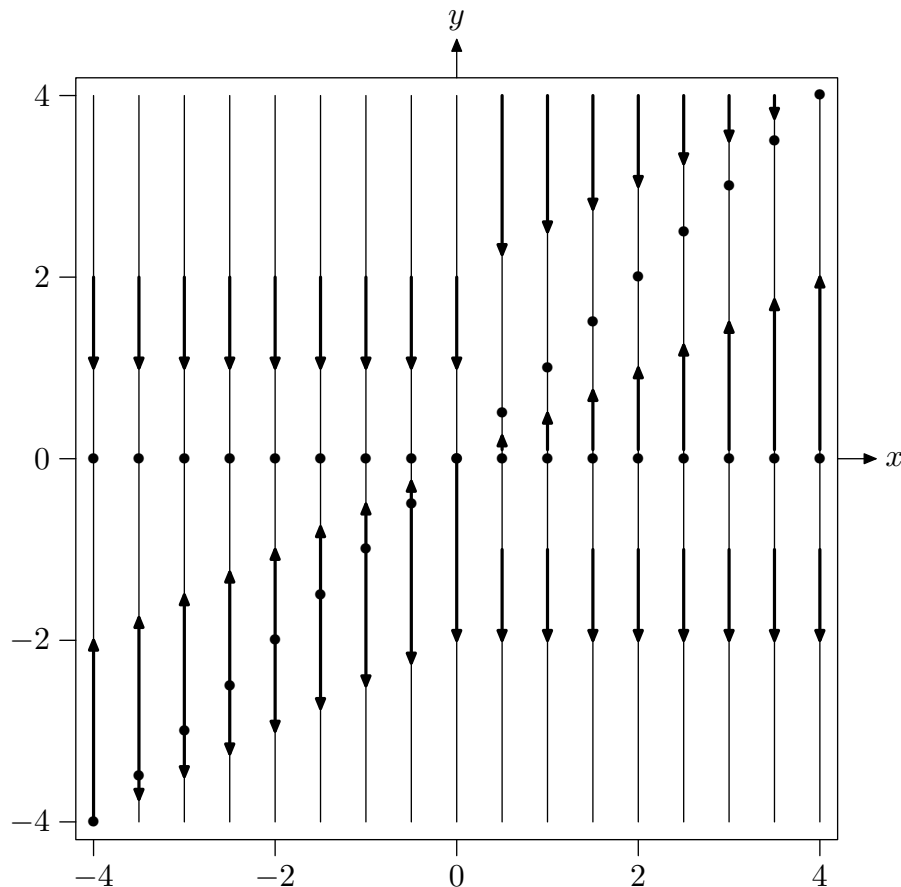
$$\begin{aligned} y' &= y(x - y) \\ x' &= 0 \end{aligned}$$

5.5.2 Klassifikation von Trajektorien

Ist der Definitionsbereich D der rechten Seite einer autonomen Dgl $y' = f(y)$ eine offene Teilmenge des \mathbb{R}^N und ist f auf D stetig differenzierbar, dann gibt es für jede maximale Lösung $\varphi(t; \gamma)$ und die zugehörige Trajektorie $O(\gamma)$ zum Anfangswert $\gamma \in D$ genau eine von drei Fällen:

1. das maximale Lösungsintervall ist $(-\infty, +\infty)$ und φ ist konstant, d.h. die zugehörige Trajektorie ist einpunktig;
2. das maximale Lösungsintervall ist $(-\infty, +\infty)$ und φ ist nicht konstant und periodisch, d.h. die zugehörige Trajektorie ist eine geschlossene Kurve (kreisförmig);

Abbildung 5.4: Trajektorien der parameterunabhängigen logistischen Dgl



3. φ ist injektiv, d.h. die zugehörige Trajektorie ist eine doppeltpunktfreie Kurve ohne die Endpunkte.

Bei skalaren autonomen Dgl kommt der zweite Fall nicht vor.

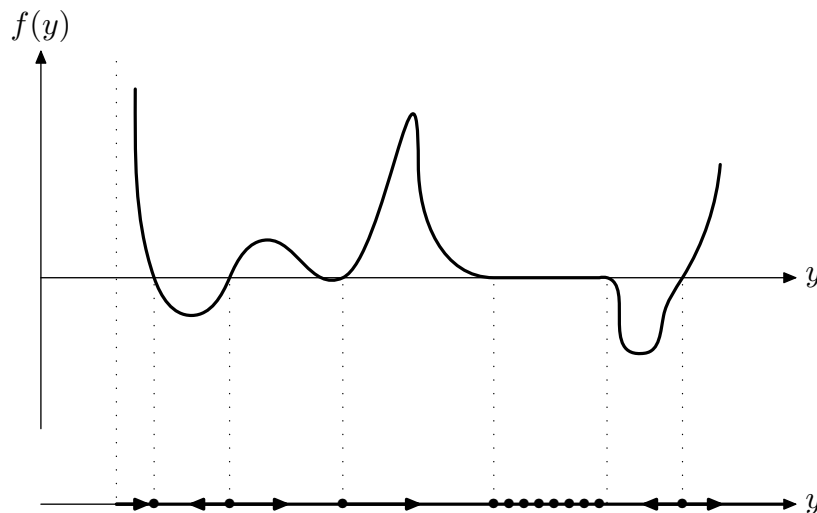
5.5.3 Phasenportait

Die Menge aller Trajektorien einer autonomen Dgl bezeichnet man als Phasenportrait. Trajektorien sind einerseits Mengen und bei stetig differenzierbarer rechter Seite der Dgl glatte Kurven im \mathbb{R}^N . Das Phasenportrait ist somit ein Mengensystem oder speziell eine Menge glatter Kurven. Es stellt sich die Frage, ob sich Trajektorien schneiden können, oder anders formuliert, ob durch einen Punkt γ des Definitionsbereiches mehr als eine Trajektorie verläuft. Die Antwort ist Nein! Die Trajektorien einer autonomen Dgl zerlegen

den Definitionsbereich D in disjunkte Teilmengen.

Der obere Teil der Abbildung 5.5 ist ein sogenanntes Phasendiagramm; es handelt sich um den Graphen der Funktion $f(y)$. Im unteren Teil ist das

Abbildung 5.5: Phasendiagramm und Phasenportrait einer skalaren Dgl



Phasenportrait der skalaren Dgl $y' = f(y)$ dargestellt. Die Nullstellen der Funktion f sind die stationären Punkte der Dgl, und zugleich die einpunktigen Trajektorien ($\varphi(t) = \text{konst.}$). Wenn man diese einpunktigen Trajektorien im Phasenportrait eingezeichnet hat, sind zugleich die übrigen Trajektorien festgelegt: es sind die Intervalle dazwischen. Auf jedem dieser Intervalle hat f ein einheitliches Vorzeichen, was die durch Pfeile angedeutete Orientierung der Trajektorie bestimmt.

Bei höherdimensionalen Dgl ist es im allgemeinen nicht möglich, das Phasenportrait so einfach zu erstellen. In diesem Fall denkt man sich in jedem Punkt γ des Definitionsbereichs von f einen Richtungsvektor $f(\gamma)$. Dieser Richtungsvektor ist der Tangentialvektor an die Trajektorie $O(\gamma)$ im Punkt γ und die Orientierung dieser Trajektorie wird durch die Richtung von $f(\gamma)$ angegeben. Die Trajektorien einer autonomen Dgl passen sich analog zu den Lösungskurven in das Vektorfeld $y \mapsto f(y)$ ein. Allerdings können die Tangentialvektoren von Trajektorien senkrecht sein, was bei den Linienelementen eines Richtungsfeldes ausgeschlossen ist (dort ist die erste Koordinate eines Vektors stets positiv).

Im Prinzip wird bei der geometrischen Veranschaulichung eines Phasenportraits genauso verfahren wie bei der Konstruktion eines Richtungsfeldes: Für eine repräsentative Anzahl von Punkten γ aus dem Definitionsbereich von

f (am besten auf einem Gitter) werden kleine Pfeile mit der Richtung $f(\gamma)$ eingezeichnet, wobei der Punkt γ am besten in die Mitte seines Pfeiles gelegt wird.

Beispiel (Phasenportrait des harmonischen Oszillators)

Der harmonische Oszillator $y'' = -y$ ist eine autonome Dgl zweiter Ordnung. Durch Einführen einer neuen Variablen $y' = x$ geht er in das äquivalente System

$$\begin{aligned} y' &= x \\ x' &= -y \end{aligned}$$

zweier Dgl erster Ordnung über. Zur Konstruktion des Phasenportraits ist das Vektorfeld $(y, x) \mapsto (x, -y)$ zu betrachten. In einen Punkt (y_0, x_0) der reellen Zahlenebene ist ein (kurzer) Vektor mittig zu plazieren, der in Richtung $(x_0, -y_0)$ zeigt. Die Länge des Vektors kann beispielsweise durch Division mit seiner Norm auf die Länge 1 gebracht werden (je engmaschiger das Gitter, desto kürzer sollten die Vektoren sein, damit sie sich nicht überdecken). Im Punkt $(2, 3)$ zeigt der Vektor in Richtung $(3, -2)$, seine Länge wird auf 1 normiert durch Division mit $\|(3, -2)\| = \sqrt{3^2 + 2^2}$. Wie zu erwarten war, ergeben sich als Trajektorien konzentrische Kreise, die im Uhrzeigersinn durchlaufen werden, denn die allgemeine Lösung des Harmonischen Oszillators lautet:

$$\begin{aligned} y(t) &= \sin(t) \\ x(t) &= \cos(t) \end{aligned}$$

5.6 Ebene autonome Systeme

Ebene autonome Systeme von Dgl lassen sich fast immer auf eine skalare Dgl erster Ordnung reduzieren. Daher sind sie immer noch recht einfach zu behandeln.

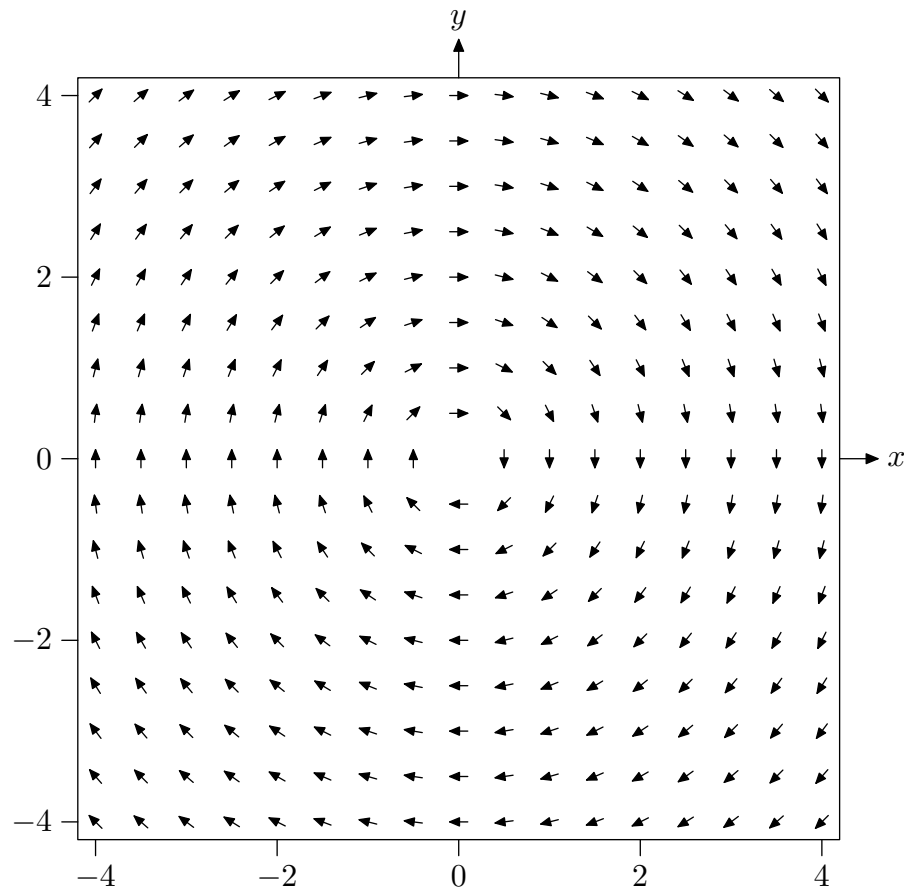
Satz (Reduktion ebener autonomer Systeme)

Ist beim ebenen autonomen System

$$\begin{aligned} x' &= f(x, y) \\ y' &= g(x, y) \end{aligned}$$

der Definitionsbereich eine offene Teilmenge des \mathbb{R}^2 und sind die beiden rechten Seiten f und g stetig differenzierbar und ist $f(x, y) \neq 0$ im ganzen Definitionsbereich, dann ist die Trajektorie $O(\xi, \eta)$ durch den Punkt (ξ, η) identisch

Abbildung 5.6: Phasenportrait, Richtungsfeld des harmonischen Oszillators



mit der maximalen Lösungskurve $L(\xi, \eta)$ zum Anfangswertproblem

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x, y)}{f(x, y)}, \quad y(\xi) = \eta$$

Unter den genannten Voraussetzungen kann die Zeitabhängigkeit der Trajektorie also eliminiert werden. Besitzen die Funktionen f und g Nullstellen im Definitionsbereich D , kann man sich auf die jeweiligen Monotoniebereiche beschränken und dort das skalare Anfangswertproblem betrachten. Die Isoklinen zum Niveau Null stellen Ruhelagen dar und trennen die Monotoniebereiche.

Beispiel (Das Räuber-Beute-Modell)

Das ursprüngliche Räuber-Beute-Modell geht auf den Amerikaner A. J. Lot-

ka und den Italiener V. Volterra zurück, während das Goodwin-Modell zyklischen Wachstums eine ökonomische Anwendung dessen darstellt.

$$\begin{aligned} x' &= x(a - by) & a, b > 0 & \quad \text{(Beute)} \\ y' &= y(cx - d) & c, d > 0 & \quad \text{(Räuber)} \end{aligned}$$

Man erkennt sofort den Nullpunkt und $(\frac{d}{c}, \frac{a}{b})$ als Ruhelagen (einpunktige Trajektorien) des Systems. Die x -Achse sowie die Senkrechte $(\frac{d}{c}, y)$ sind geometrische Örter waagerechter Linienelemente und auf der y -Achse sowie der Waagerechten $(x, \frac{a}{b})$ verläuft das Vektorfeld senkrecht.

Betrachtet man nur den ökonomisch relevanten positiven Orthanten \mathbb{R}_+^2 , dann sind auch die vier Monotoniebereiche der Trajektorien erkennbar: Für y zwischen 0 und $\frac{a}{b}$ ist $x' > 0$ und für $y > \frac{a}{b}$ ist x' negativ. Für x zwischen 0 und $\frac{d}{c}$ ist y' negativ und für $x > \frac{d}{c}$ positiv.

Um eine repräsentative Trajektorie durch den Punkt (ξ, η) zu konstruieren, ist das Anfangswertproblem

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(cx - d)}{x(a - by)}, \quad y(\xi) = \eta$$

zu lösen. Diese skalare Dgl kann implizit umgeschrieben werden als

$$\frac{dy}{dx} x(a - by) + y(d - cx) = 0$$

und durch den integrierenden Faktor $1/xy$ zur exakten Dgl

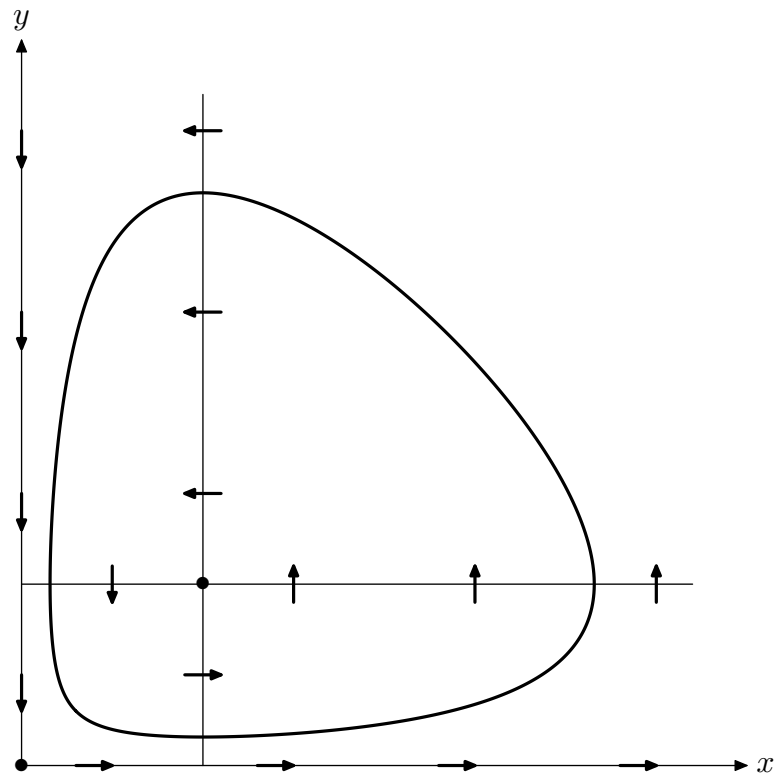
$$\frac{dy}{dx} \frac{a - by}{y} + \frac{d - cx}{x} = 0$$

gemacht werden, deren Stammfunktion in den vier Monotoniebereichen jeweils durch

$$S(x, y) = \int^y \frac{a}{v} - b \, dv + \int^x \frac{d}{w} - c \, dw = a \ln y - by + d \ln x - cx + k$$

gegeben ist. Die Integrationskonstante k ist dabei so zu wählen, dass die Lösungskurve durch den Punkt (ξ, η) läuft. Die Abbildung 5.7 stellt das Räuber-Beute-Modell mit den Parametern $a = b = c = d = 1$ dar. Die Linienelemente an den beiden Isoklinen, bei denen das Vektorfeld waagerecht oder senkrecht verläuft, zeigen zugleich an, dass die repräsentative Trajektorie (und damit alle) entgegen dem Uhrzeigersinn durchlaufen wird.

Abbildung 5.7: Phasenportrait des Räuber-Beute-Modells



5.6.1 Hamiltonsche Systeme

Ein ebenes autonomes System

$$x' = f(x, y)$$

$$y' = g(x, y)$$

dessen rechte Seiten auf einer offenen Teilmenge D des \mathbb{R}^2 stetig differenzierbar sind, wird Hamiltonsches System genannt, wenn es eine auf D stetig differenzierbare reellwertige Hamilton-Funktion $H : D \mapsto \mathbb{R}$ gibt mit der Eigenschaft

$$\frac{\partial H(x, y)}{\partial x} = -g(x, y) \quad \text{und}$$

$$\frac{\partial H(x, y)}{\partial y} = f(x, y)$$

Die Hamilton-Funktion spielt hier dieselbe Rolle wie die Stammfunktion bei den exakten Dgl. Es gibt auch beim sogenannten Maximumsprinzip von Pon-

tryagin eine Hamilton-Funktion mit denselben definierenden Eigenschaften — wie sich im dritten Teil der Veranstaltung zeigen wird.

Zur Bestimmung von Trajektorien (und damit Phasenportraits) Hamiltonscher Systeme sind folgende Schritte sinnvoll:

1. Prüfe anhand der Integrabilitätsbedingung

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\partial g}{\partial y}$$

ob das System $x' = f(x, y)$ und $y' = g(x, y)$ hamiltonsch ist. Diese Bedingung ist auf jedem Rechtecksgebiet notwendig und hinreichend.

2. Setze die Hamilton-Funktion an:

$$H_0(x, y) = \int_{y_0}^y f(x, v) \, dv - \int_{x_0}^x g(w, y) \, dw$$

3. Ist $H(x, y)$ eine beliebige Hamiltonfunktion, so besteht für jedes $(\xi, \eta) \in D$ die Niveaumenge

$$N_c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : H(x, y) = H(\xi, \eta)\}$$

aus Trajektorien, sie enthält insbesondere die Trajektorie $O(\xi, \eta)$, die durch den Punkt ξ, η verläuft.

5.6.2 Erste Integrale

Falls das implizit geschriebene ebene autonome System

$$\frac{dy}{dx} f(x, y) - g(x, y) = 0$$

noch keine exakte Dgl ist, wird nach einem integrierenden Faktor $m(x, y)$ gesucht, sodass

$$\frac{dy}{dx} f(x, y)m(x, y) - g(x, y)m(x, y) = 0$$

eine exakte Dgl ist. Im Beispiel des Räuber-Beute-Modells wurde genau so verfahren.

Gibt es zu einem ebenen autonomen System

$$x' = f(x, y)$$

$$y' = g(x, y)$$

dessen rechte Seiten auf einer offenen Teilmenge D des \mathbb{R}^2 stetig differenzierbar sind, eine reellwertige, stetig differenzierbare Funktion $F : D \mapsto \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} f(x, y) + \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} g(x, y) = 0$$

auf ganz D , so heißt F erstes Integral.

Erste Integrale sind entlang einer Trajektorie konstant genau wie Hamilton-Funktionen. Allerdings sind nur die nichttrivialen ersten Integrale von Bedeutung, das sind solche, die auf keiner offenen Teilmenge von D konstant sind.

Ein (nichttriviales) erstes Integral berechnet man als Stammfunktion S der mittels des integrierenden Faktors $m(x, y)$ exakt gemachten Dgl

$$\frac{dy}{dx} f(x, y) m(x, y) - g(x, y) m(x, y) = 0$$

5.6.3 Lineare Systeme

Ein lineares Dgl System, das zugleich autonom und eben ist,

$$x' = a_{11}x + a_{12}y$$

$$y' = a_{21}x + a_{22}y$$

lässt sich auch matriziell schreiben als $z' = Az$, wobei z' bzw. z Spaltenvektoren $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ und A die 2×2 Koeffizientenmatrix mit reellen Elementen darstellt.

Es soll für jede Dgl dieser Art die allgemeine Lösung und das zugehörige Phasenportrait ermittelt werden. Dabei spielen die Eigenwerte der Koeffizientenmatrix A eine entscheidende Rolle: mittels einer Ähnlichkeitstransformation mit Transformationsmatrix T (die spaltenweise aus den Eigen- und Hauptvektoren von A aufgebaut ist) kann jede Matrix auf die Jordan-Normalform TAT^{-1} gebracht werden, bei der auf der Hauptdiagonalen die Eigenwerte von A stehen.

Bei reellen 2×2 Matrizen ergeben sich folgende vier Fälle:

1. Besitzt A zwei verschiedene reelle Eigenwerte ρ und σ , so ist A ähnlich zu $B = \begin{pmatrix} \rho & 0 \\ 0 & \sigma \end{pmatrix}$.
2. Besitzt A einen doppelten Eigenwert ρ mit zwei linear unabhängigen Eigenvektoren, so ist A ähnlich zu $B = \begin{pmatrix} \rho & 0 \\ 0 & \rho \end{pmatrix}$.

3. Besitzt A einen doppelten Eigenwert ρ mit einem linear unabhängigen Eigenvektor, so ist A ähnlich zu $B = \begin{pmatrix} \rho & 1 \\ 0 & \rho \end{pmatrix}$.
4. Besitzt A ein konjugiert komplexes Paar $\rho \pm i\sigma$ von Eigenwerten mit $\sigma \neq 0$, so ist A ähnlich der reellen Matrix $B = \begin{pmatrix} \rho & \sigma \\ -\sigma & \rho \end{pmatrix}$.

Für jeden der vier Fälle soll das System in der Normalform $w' = Bw$ mit $w = Tz$ und $B = TAT^{-1}$ allgemein gelöst und das Phasenportrait erstellt werden, dabei kommt dem Ursprung als normalerweise einzige Ruhelage des Systems besondere Aufmerksamkeit zu. Weiterhin ist zu unterscheiden, ob die Koeffizientenmatrix singulär oder regulär ist. Falls A regulär ist, sind die Eigenwerte von Null verschieden.

5.6.3.1 Reguläre Matrix, zwei verschiedene reelle Eigenwerte

Ist $B = \begin{pmatrix} \rho & 0 \\ 0 & \sigma \end{pmatrix}$, mit $\rho, \sigma \in \mathbb{R}$, $\rho \neq \sigma$ so besteht das Dgl System aus den beiden unabhängigen Gleichungen $x' = \rho x$ und $y' = \sigma y$. Für die allgemeine Lösung gilt:

$$\varphi(t; \xi, \eta) = (\xi e^{\rho t}, \eta e^{\sigma t})$$

und die Trajektorie durch den Punkt (ξ, η) lautet somit

$$O(\xi, \eta) = \{(\xi e^{\rho t}, \eta e^{\sigma t}) \in \mathbb{R}^2 : t \in \mathbb{R}\}$$

Neben der Ruhelage $(0, 0)$ erkennt man die vier Halbachsen als Trajektorien. Alle übrigen Trajektorien in den vier offenen Quadranten des \mathbb{R}^2 besitzen die Darstellung

$$O(\xi, \eta) = \left\{ \left(y, \eta \left(\frac{x}{\xi} \right)^{\frac{\sigma}{\rho}} \right) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x}{\xi} > 0 \right\}$$

die man durch Auflösen der ersten Koordinate nach t und Einsetzen in die zweite erhält:

$$\begin{aligned} x = \xi e^{\rho t} &\rightsquigarrow t = \frac{1}{\rho} \ln \left(\frac{x}{\xi} \right) \\ y = \eta e^{\sigma t} &= \eta e^{\sigma \frac{1}{\rho} \ln \left(\frac{x}{\xi} \right)} = \eta \exp \left(\ln \left(\frac{x}{\xi} \right)^{\frac{\sigma}{\rho}} \right) = \eta \left(\frac{x}{\xi} \right)^{\frac{\sigma}{\rho}} \end{aligned}$$

Die Phasenportraits werden maßgeblich durch die Vorzeichen der beiden Eigenwerte beeinflusst. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit wird $\rho < \sigma$ unterstellt. Sind beide negativ, so ist der Ursprung ein stabiler zwei-tangentiger Knoten. Ist nur σ positiv und ρ negativ, so wird der Ursprung als Sattelpunkt bezeichnet. Sind beide Eigenwerte positiv, so heißt der Ursprung instabiler zwei-tangentiger Knoten.

Abbildung 5.8: Stabiler und instabiler zwei-tangentiger Knoten

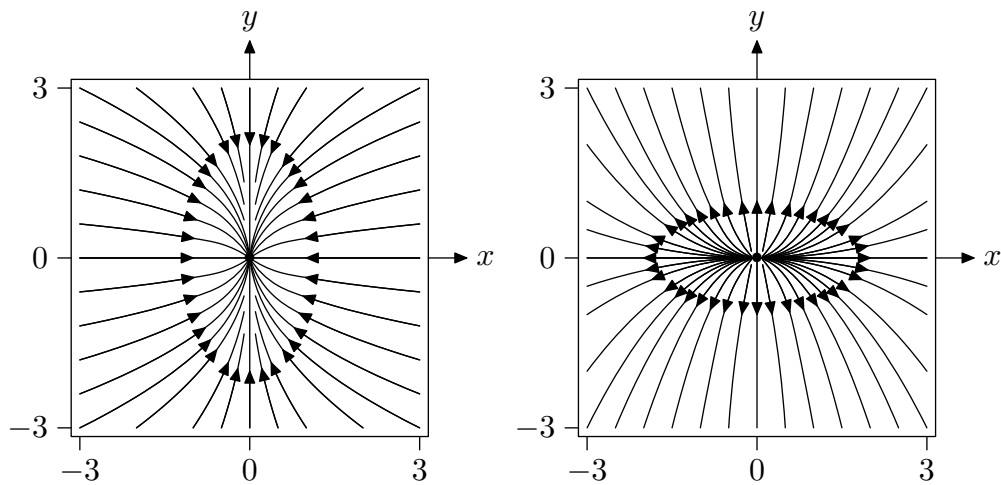
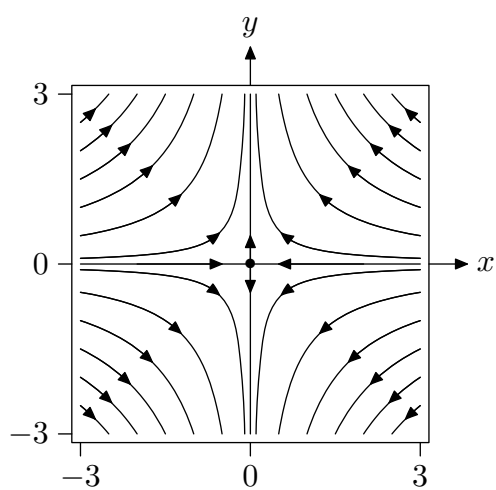


Abbildung 5.9: Sattelpunkt



5.6.3.2 Reguläre Matrix mit halbeinfachem reellen Eigenwert

In diesem Fall besitzt die Matrix B die Gestalt $\begin{pmatrix} \rho & 0 \\ 0 & \rho \end{pmatrix}$. Der Eigenwert ρ wird halbeinfach genannt, da die Vielfachheit der Nullstelle des charakteristischen Polynoms mit der Dimension des Eigenraumes übereinstimmt. Die allgemeine Lösung ist

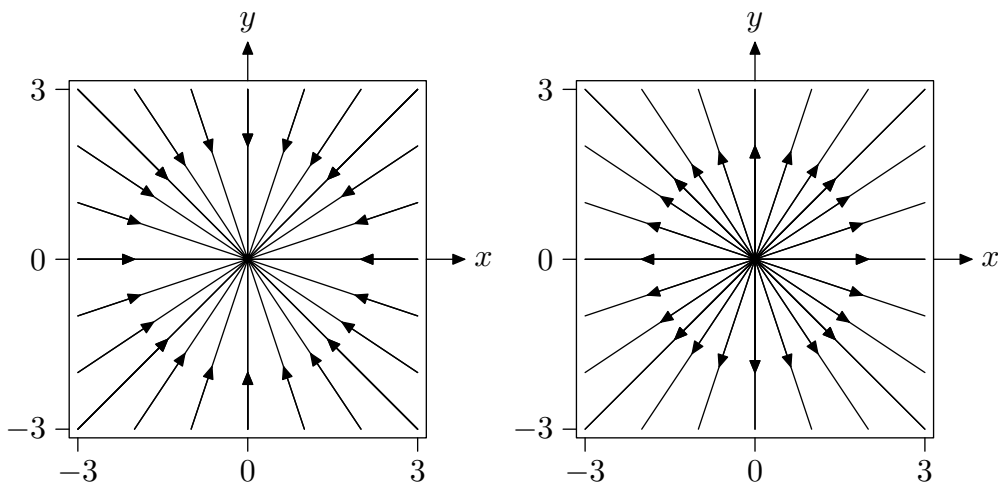
$$\varphi(t; \xi, \eta) = (\xi e^{\rho t}, \eta e^{\rho t})$$

Auch hier sind der Ursprung und die vier Halbachsen Trajektorien, diese besitzen in den vier offenen Quadranten der x - y -Ebene die Darstellung

$$O(\xi, \eta) = \left\{ \left(x, \frac{\eta}{\xi} x \right) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x}{\xi} > 0 \right\}$$

es handelt sich also um Ursprungsgeraden. Ist $\rho < 0$, so heißt die Ruhelage (der Ursprung) stabiler viel-tangentiger Knoten, und für $\rho > 0$ analog instabiler viel-tangentiger Knoten.

Abbildung 5.10: Stabiler und instabiler viel-tangentiger Knoten



5.6.3.3 Reguläre Matrix mit einfachem reellen Eigenwert

Die Matrix B lautet $\begin{pmatrix} \rho & 1 \\ 0 & \rho \end{pmatrix}$. Für das zugehörige Dgl System $x' = \rho x + y$ und $y' = \rho y$ ergibt sich die (anfangszeitunabhängige) allgemeine Lösung

$$\varphi(t; \xi, \eta) = (\xi e^{\rho t} + \eta t e^{\rho t}, \eta e^{\rho t})$$

In diesem Fall ist es zur Elimination des Kurvenparameters t sinnvoll, die zweite Koordinatenfunktion nach t aufzulösen und in die erste einzusetzen:

$$y = \eta e^{\rho t} \rightsquigarrow t = \frac{1}{\rho} \ln \left(\frac{y}{\eta} \right)$$

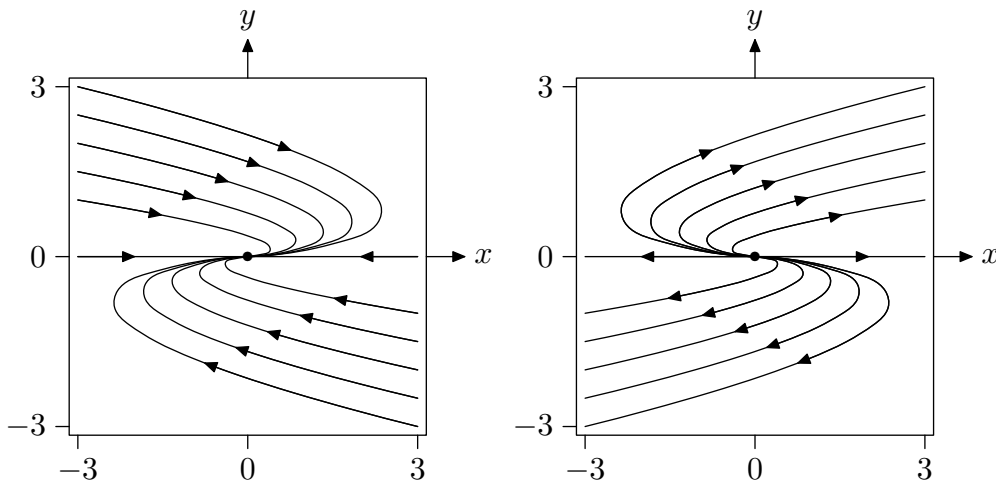
$$x = \xi \exp \left(\ln \left(\frac{y}{\eta} \right) \right) + \frac{\eta}{\rho} \ln \left(\frac{y}{\eta} \right) \exp \left(\ln \left(\frac{y}{\eta} \right) \right) = \frac{\xi}{\eta} y + \frac{y}{\rho} \ln \left(\frac{y}{\eta} \right)$$

Es ergibt sich als explizite Darstellung von Trajektorien in den offenen Quadranten des \mathbb{R}^2

$$O(\xi, \eta) = \left\{ \left(\frac{\xi}{\eta} y + \frac{y}{\rho} \ln \left(\frac{y}{\eta} \right), y \right) \in \mathbb{R}^2 : \frac{y}{\eta} > 0 \right\}$$

Aus der folgenden Abbildung 5.11 ist zu entnehmen, dass die Tangenten aller Trajektorien im Ursprung waagerecht verlaufen. Daher wird er in diesem Fall als ein-tangentiger Knoten bezeichnet. Je nachdem, ob ρ negativ oder positiv ist, heißt er zusätzlich stabil oder instabil.

Abbildung 5.11: Stabiler und instabiler ein-tangentiger Knoten



5.6.3.4 Reguläre Matrix mit konjugiert komplexem Eigenwertepaar

Wir wählen in diesem Fall nicht die beiden konjugiert komplexen Eigenvektoren als Spalten der Transformationsmatrix. Die erste Spalte von T ist der

Realteil u und die zweite der Imaginärteil v des Eigenvektors zu $\rho + i\sigma$, wobei $\sigma \neq 0$:

$$AT = A[u, v] = [\rho u - \sigma v, \sigma u + \rho v] = [u, v] \begin{pmatrix} \rho & \sigma \\ -\sigma & \rho \end{pmatrix}$$

Die allgemeine Lösung lautet

$$\varphi(t; \xi, \eta) = e^{\rho t} (\xi \cos \sigma t + \eta \sin \sigma t, \eta \cos \sigma t - \xi \sin \sigma t)$$

bei der sich die Elimination von t nicht lohnt, um Trajektorien darzustellen, sondern eher die Darstellung mittels Polarkoordinaten. Da sowohl \sin als auch \cos durch -1 und 1 beschränkt sind, spielt das Vorzeichen des Imaginärteils σ keine Rolle. Über Stabilität oder Instabilität entscheidet ausschließlich das Vorzeichen vom Realteil ρ . Ist ρ negativ, so heißt der Ursprung stabiler Strudel, ist $\rho = 0$ — liegen also rein imaginäre Eigenwerte vor, so wird der Ursprung als Zentrum oder Wirbel bezeichnet, und ist ρ positiv, heißt der Ursprung instabiler Strudel.

Im Falle komplexer Eigenwerte sind die Halbachsen keine Trajektorien mehr. Trajektorien verlaufen spiralgig, oder beim Wirbel in Form konzentrischer Kreise um den Ursprung. Die Orientierung der Trajektorien hängt vom Vorzeichen von σ ab. Ist $\sigma > 0$ drehen die Trajektorien im Uhrzeigersinn um den Ursprung, ist $\sigma < 0$ entgegen dem Uhrzeigersinn. Wir wollen nur den Fall $\sigma > 0$ betrachten, der auch der eingangs getroffenen Annahme $\rho < \sigma$ entspricht.

Abbildung 5.12: Stabiler und instabiler Strudel

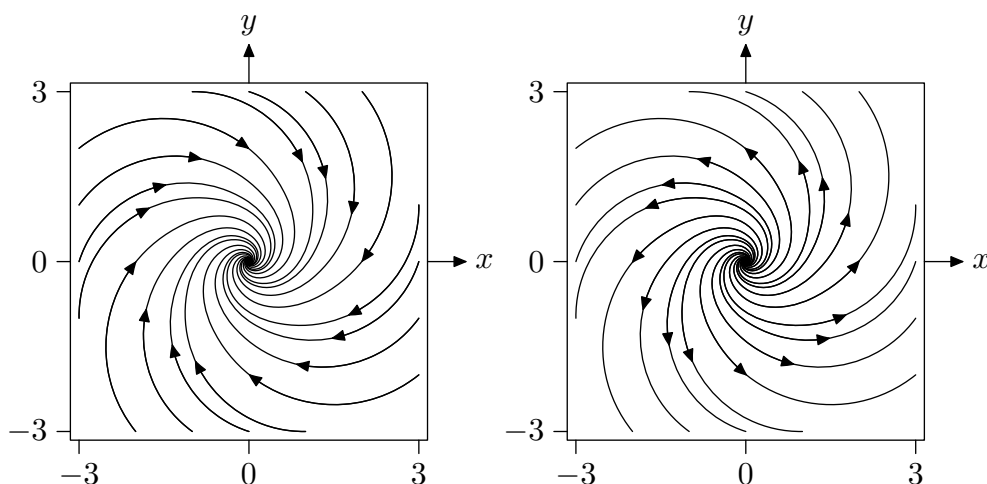
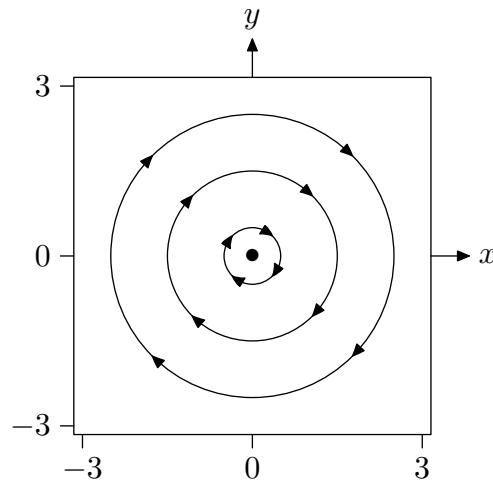


Abbildung 5.13: Zentrum oder Wirbel



5.6.3.5 Singuläre Matrix

Ist A singulär, so ist mindestens ein Eigenwert Null. Neben dem Ursprung gibt es weitere Ruhelagen. Daher und aufgrund der untergeordneten Bedeutung werden keine neue Bezeichnungen der Unterfälle (wie Knoten oder Spirale) eingeführt. Gemäß der Annahme $\rho \leq \sigma$ lassen sich vier Fälle unterscheiden:

1. $\rho < 0$ und $\sigma = 0$ mit der allgemeinen Lösung

$$\varphi(t; \xi, \eta) = (\xi e^{\rho t}, \eta)$$

2. $\rho = 0$ und $\sigma > 0$ mit der allgemeinen Lösung

$$\varphi(t; \xi, \eta) = (\xi, \eta e^{\sigma t})$$

3. $\rho = 0$ als halbeinfacher Eigenwert der allgemeinen Lösung

$$\varphi(t; \xi, \eta) = (\xi, \eta)$$

4. $\rho = 0$ als Eigenwert mit nur einem linear unabhängigen Eigenvektor. Die allgemeine Lösung lautet wegen $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\varphi(t; \xi, \eta) = (\xi + t\eta, \eta)$$

5.6.3.6 Klassifikation der Phasenportraits

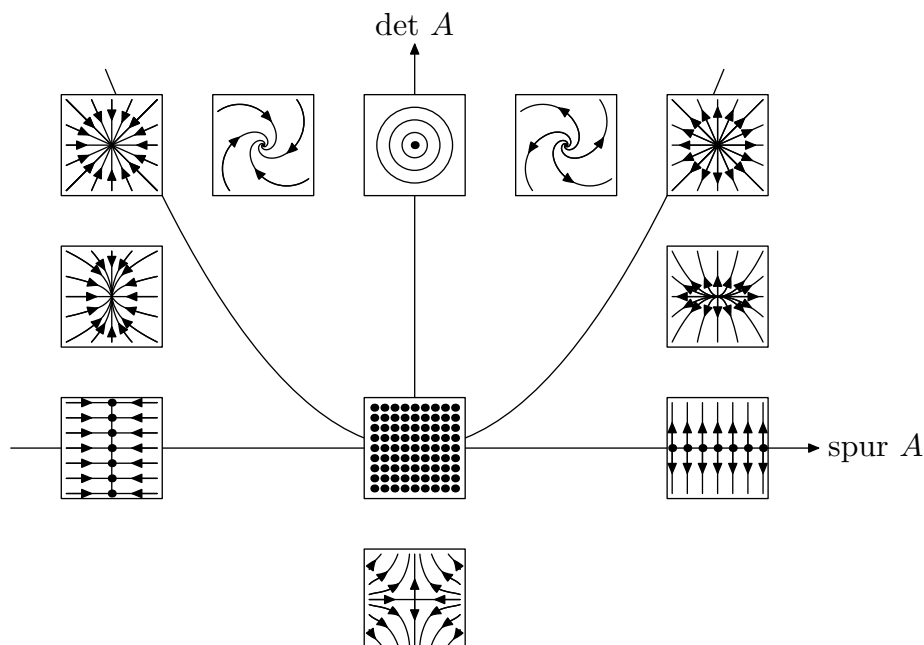
Die Eigenwerte einer reellen 2×2 Matrix A sind die Nullstellen ihres charakteristischen Polynoms $\det(A - \delta I) = \delta^2 - \delta \operatorname{spur} A + \det A$ also

$$\delta_{1,2} = \frac{1}{2} \left[\operatorname{spur} A \pm \sqrt{(\operatorname{spur} A)^2 - 4 \det A} \right]$$

Weiter gelten zwei einfache Beziehungen zwischen den Eigenwerten, der Spur (d.h. Summe der Hauptdiagonalelemente) und der Determinante einer reellen quadratischen Matrix — die nicht auf den 2×2 Fall beschränkt sind: die Summe aller Eigenwerte ist gleich der Spur einer quadratischen Matrix A und das Produkt aller Eigenwerte ist gleich der Determinanten.

Damit lassen sich nun alle vorigen Phasenportraits in einer $\operatorname{spur} A$ - $\det A$ -Ebene bestimmten Bereichen zuordnen: die doppelten Eigenwerte liegen auf der Parabel $\det A = (\operatorname{spur} A)^2/4$, konjugiert komplexe Eigenwerte liegen oberhalb dieser Parabel und reelle Eigenwerte unterhalb. Ist die Determinante negativ, so besitzen die Eigenwerte unterschiedliche Vorzeichen. Ist die Determinante positiv, so besitzen die Eigenwerte gleiches Vorzeichen und die Spur entscheidet, ob beide positiv oder negativ (im Realteil) sind.

Abbildung 5.14: Klassifikation der Phasenportraits



Anhang A

Ergebnisse und Hinweise

A.1 Ergebnisse

Ergebnis 1.1

Die Lösungen von Aufgabe (e) und (g) stimmen überein und die von (f) und (h). Dies zeigt die Äquivalenz der Operatoren.

$$4xh + 2h^2 + 3h \quad (a)$$

$$4x + 4h - x^2 - 2xh - h^2 \quad (b)$$

$$6h^2x + 6h^3 - 2h^2 \quad (c)$$

$$3(x + 3h) - 2 \quad (d)$$

$$5h^2 + 2hx + 2h - x^2 - 2x - 1 \quad (e)$$

$$- h \quad (f)$$

Ergebnis 1.2

Das Resultat ist ja bereits genannt. Der Beweis ist jeweils zweizeilig.

Ergebnis 1.3

Das Resultat ist ja bereits genannt. der Weg besteht aus jeweils zwei Zeilen.

Ergebnis 1.4

$$\Delta y_t z_t = z_{t+1} \Delta y_t + y_t \Delta z_t$$
$$\Delta \begin{bmatrix} y_t \\ z_t \end{bmatrix} = \frac{z_t \Delta y_t - y_t \Delta z_t}{z_{t+1} z_t}$$

Ergebnis 1.5

- (a) Nicht linear, implizit, mit konstanten Koeffizienten (autonom), kann aber zur expliziten umgeschrieben werden. Ordnung 2.

- (b) Nicht linear, mit variablen Koeffizienten, kann ebenfalls explizit geschrieben werden. Ordnung 4.
- (c) dito, Ordnung 1.
- (d) linear, inhomogen mit variablen Koeffizienten, Ordnung 1.
- (e) linear, homogen, mit konstanten Koeffizienten, Ordnung 1.
- (f) linear, inhomogen, mit konstanten Koeffizienten Ordnung 3.

Ergebnis 2.1

$$y_t = -20(0.5)^t + 20 \quad (\text{a})$$

$$y_t = 3 \left(\frac{1}{2} \right)^t + 15 \quad (\text{b})$$

$$y_t = 5(-1)^t + 45 \quad (\text{c})$$

$$y_t = \frac{-3}{5} \left(\frac{-3}{2} \right)^t - \frac{2}{5} \quad (\text{d})$$

$$y_t = \left(\frac{1}{2} \right)^t + 2 + 2t \quad (\text{f})$$

$$y_t = -4(3)^t + 4^{t+1} \quad (\text{g})$$

$$y_t = \frac{-4}{5\sqrt{2}} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^t + \frac{2}{5\sqrt{2}} \sin \frac{\pi}{4}t + \frac{4}{5\sqrt{2}} \cos \frac{\pi}{4}t \quad (\text{h})$$

Ergebnis 2.2

(a) Die zu untersuchende Differenzengleichung lautet:

$$p_t = h \frac{a-c}{b} + p_{t-1} \left(1 - h - h \frac{d}{b} \right)$$

(b) Für $0 < h < 1$ gilt stets

$$1 - h - h \frac{d}{b} > -\frac{d}{b}$$

Ergebnis 3.1

(a) $\Lambda(t, c_1, c_2) = c_1 4^t + c_2 2^t$

(b) $y_t = -2 \cdot 4^t + 5 \cdot 2^t$

Ergebnis 3.2

(a) $\Lambda(t, c_1, c_2) = 5^{\frac{t}{2}}(c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t), \omega = 1.1071.$

(b) $y_t = 5^{(t-1)/2} \frac{\sin \omega t}{\sin \omega}$

Ergebnis 3.3

(a) $\Lambda(t, c_1, c_2) = c_1 2^t + c_2 t 2^t.$

(b)

$$y_t = \left(1 + \frac{t}{2}\right) 2^t$$

Ergebnis 3.4

$$y_t = c_1 2^t + c_2 t 2^t + \frac{2}{8} t^2 2^t + \frac{5}{4} 4^t$$

Ergebnis 3.5

$$y_t = -t^2 + c_1 3^t + c_2$$

Ergebnis 4.1

$$\begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix} = c_1 3^t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 2^t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{a})$$

$$\begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix} = c_1 4^t \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad (\text{b})$$

$$\begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix} = c_1 3^t \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix} + c_2 2^t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{c})$$

$$\begin{bmatrix} x_t \\ y_t \\ z_t \end{bmatrix} = c_1 3^t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + c_2 4^t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{d})$$

$$\begin{bmatrix} x_t \\ y_t \\ z_t \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + c_2 2^t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + c_3 3^t \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{e})$$

Ergebnis 4.2

Die Matrix aus Eigen- und Hauptvektor zu A lautet

$$P = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und die Lösung der zugehörigen Dzgl

$$\begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix} = (c_2 2^t + n c_1 2^{n-1}) \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_1 2^t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Die Matrix aus Eigen- und Hauptvektor zu A lautet

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

und die Lösung der zugehörigen Dzgl

$$\begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix} = (c_2 3^t + n c_1 3^{n-1}) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_1 3^t \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Ergebnis 4.3

$$\begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix} = \left(\sqrt{13} \right)^t \left[(c_1 \cos t\theta - c_2 \sin t\theta) \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} + (c_2 \cos t\theta + c_1 \sin t\theta) \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} \right] \quad (\text{a})$$

$$\begin{bmatrix} x_t \\ y_t \\ z_t \end{bmatrix} = 2^t \left(c_1 \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \left(c_2 \cos \frac{t\pi}{2} - c_3 \sin \frac{t\pi}{2} \right) \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} - \left(c_3 \cos \frac{n\pi}{2} + c_2 \sin \frac{n\pi}{2} \right) \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \quad (\text{b})$$

Ergebnis 5.1

- (a) $y(t) = ce^{-t} + 5$ und $c = -4e$ bei $y(1) = 1$.
- (b) $y(t) = ce^{-t} - 1 + t$ und $c = e$ bei $y(1) = 1$.
- (c) $y(t) = ce^t + t^2 + 2t + 2$ und $c = -4/e$ bei $y(1) = 1$.
- (d) $y(t) = \pm t$ bei $y(1) = 1$.
- (e) $y(t) = \pm t$ bei $y(1) = 1$.
- (f) $y(t) = [e^{1+t} - e^2] [t - 1 - \ln t]$.

Ergebnis 5.2

- (a) $1/y(t)^4 = ce^{-4t} - t + 1/4$.
- (b) $1/y(t)^3 = -1/2 + ce^{3t^2}$.

A.2 Hinweise

Hinweis 1.1

Im Allgemeinen lauten die Definitionen für den Differenz und den Shift Operator $\Delta f(x) = f(x+h) - f(x)$ und $Sf(x) = f(x+h)$.

Hinweis 1.2

Man wendet einfach die Definition an.

Hinweis 1.3

Man wende die Definition an und erweitere geeignet.

Hinweis 1.4

Setze $y_t = f(a + th)$ und $z_t = g(a + th)$ und bilde $\Delta y_t z_z$, sowie $\Delta y_t / z_t$.

Hinweis 1.5

Beachte die unterschiedlichen Begriffe zur Bezeichnung der Dzgl.

Hinweis 2.1

Zuerst die zugehörige homogene Differenzengleichung allgemein lösen. Danach mittels der Methode der unbestimmten Koeffizienten eine spezielle Lösung der originalen Dzgl. konstruieren. Die vorkommenden Störfunktionen wurden alle behandelt. Zuletzt die Start- bzw. Randbedingung benutzen, um den frei wählbaren Parameter in der Lösung der homogenen Dzgl. zu bestimmen.

Hinweis 2.2

Die Hauptschwierigkeit besteht wohl im Eliminieren der adaptiven Preisprognose aus der Gleichgewichtsbedingung. Es gibt dafür ein Standardverfahren wie folgt:

1. Setze x_t^s und x_t^d in die Gleichgewichtsbedingung ein und löse nach p_t auf:

$$p_t = \frac{a - c}{b} - \frac{d}{b} E(p_t | t - 1)$$

2. Setze die adaptive Preisprognose in diese Gleichung ein.
3. Schreibe die Gleichgewichtsbedingung für die Periode $t - 1$ an und multipliziere sie mit $h - 1$

$$(h - 1)p_{t-1} = (h - 1)\frac{a - c}{b} - (h - 1)\frac{d}{b} E(p_{t-1} | t - 2)$$

4. Addiere die beiden letzten Gleichungen

$$p_t + (h - 1)p_{t-1} = h\frac{a - c}{b} - h\frac{d}{b}p_{t-1}$$

5. Löse nach p_t auf.

Hinweis 3.1

- (a) Stelle das charakteristische Polynom auf und bestimme seine Nullstellen.
(b) Setze die Dzgl für $t = 0$ und $t = 1$ an. Das Gleichungssystem enthält dann nur noch die beiden Parameter c_1 und c_2 als Unbekannte.

Hinweis 3.2

Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms sind konjugiert komplex.

Hinweis 3.3

Das charakteristische Polynom besitzt eine doppelte Nullstelle.

Hinweis 3.4

Die zugehörige homogene Differenzengleichung wurde bereits in der vorigen Aufgabe gelöst. Hier ist nun — beispielsweise mit dem Verfahren der unbestimmten Koeffizienten eine spezielle Lösung zu konstruieren.

Hinweis 3.5

Es handelt sich um eine inhomogene Dzgl zweiter Ordnung. Man muss wirklich per Superposition mehrere Versuche machen.

Hinweis 4.1

Die Lösung kann immer nach demselben Schema erfolgen.

1. Schreibe die Dzgl matriziell,
2. berechne anhand des charakteristischen Polynoms die Eigenwerte der Koeffizientenmatrix,
3. bestimme zu jedem Eigenwert einen Eigenvektor,
4. stelle die Eigenvektoren spaltenweise zur Transformationsmatrix zusammen,
5. schreibe die allgemeine Lösung der entkoppelten Dzgl als Potenzen der Eigenwerte an,
6. multipliziere mit der Transformationsmatrix, um die Lösung der ursprünglichen Dzgl zu erhalten,
7. prüfe durch Einsetzen in die Dzgl, ob es sich tatsächlich um die Lösung oder um einen Rechenfehler handelt.

Hinweis 4.2

Beachte den besonderen Lösungsansatz im Falle mehrfacher Eigenwerte.

Hinweis 4.3

Bei reellen Koeffizienten-Matrizen treten komplexe Eigenwerte immer in konjugiert komplexen Paaren auf. Man beachte die Darstellung in Polar-Koordinaten.

Hinweis 5.1

Bestimme zuerst den Typ, wähle danach die Lösungsmethoden. Die Verfahren sind ganz genau dieselben wie bei den Differenzengleichungen.

Hinweis 5.2

Es sind Bernoulli Dgl.

Anhang B

Bibliographie

Giancarlo Gandolfo. *Economic Dynamics, Study Edition*. Springer, Berlin usw., 1997. ISBN 3-540-62760-X.

Felix R. Gantmacher. *Matrizentheorie*. physica-verlag, Wien, 1986. ISBN 3-5401-6582-7.

Paul Anthony Samuelson. Interactions between the multiplier analysis and the principle of acceleration. *Review of Economics and Statistics*, 21:75–78, 1939.

Carl P. Simon und Lawrence Blume. *Mathematics for Economists*. Norton, New York, London, 1994. ISBN 0-393-95733-0.