

Skript zur Vorlesung

**„Zufällige Gleichungen“**

Fakultät für Mathematik

TU Chemnitz

Wintersemester 2003/2004

Hans-Jörg Starkloff

15. März 2004

# Inhaltsverzeichnis

<b>1 Einführung</b>	<b>2</b>
1.1 Einleitende Bemerkungen	2
1.2 Einige einführende Beispiele	6
1.2.1 Algebraische Gleichung ersten Grades	6
1.2.2 Nichtlineare Gleichung mit monotoner Funktion	13
1.2.3 Quadratische Gleichung	14
1.2.4 Randwertproblem für zufällige gewöhnliche Differentialgleichung	19
<b>2 Elemente der Theorie zufälliger Funktionen und der stochastischen Analysis</b>	<b>22</b>
2.1 Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitstheorie	22
2.1.1 Wahrscheinlichkeitsräume	22
2.1.2 Zufallsgrößen	23
2.1.3 Zufallsvektoren	27
2.2 Zufallsfunktionen	30
2.2.1 Zufallsfunktionen, endlichdimensionale Verteilungen, Momentenfunktionen	30
2.2.2 Gleichheit von Zufallsfunktionen	34
2.2.3 Stetigkeit, Ableitungen, Integrale	35
2.2.4 $L^2$ -Theorie	38
2.2.5 WIENER-Prozess und POISSON-Prozess	41
2.3 Stationäre Zufallsprozesse	43
<b>3 Gewöhnliche Differentialgleichungen mit zufälligen Parametern</b>	<b>45</b>
3.1 Grundlegende Begriffe. Existenz- und Eindeutigkeitssätze	45
3.1.1 Deterministische gewöhnliche Differentialgleichungen	45
3.1.2 Zufällige gewöhnliche Differentialgleichungen	50
<b>4 Zufällige lineare Differentialgleichungen mit zufälligen Anfangswerten und stochastischen inhomogenen Termen</b>	<b>56</b>
4.1 Lösungen von Anfangswertaufgaben	56
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>64</b>

# Kapitel 1

## Einführung

### 1.1 Einleitende Bemerkungen

Als erstes kann man die Frage stellen, was zufällige Gleichungen sind. Eine unkomplizierte informelle Antwort lautet: dies sind Gleichungen, in denen bestimmte auftretende Größen oder Parameter als zufällig, d.h. als Zufallsvariable, Zufallsvektoren, Zufallsfunktionen oder allgemeinere Zufallselemente, modelliert und behandelt werden. Daraus folgt, dass auch die Lösungen von zufälligen Gleichungen als geeignete Zufallsvariablen, -vektoren, etc. zu betrachten sind. Da es viele verschiedene Typen von deterministischen Gleichungen gibt, können auch viele verschiedene Typen von zufälligen Gleichungen betrachtet werden. Beispiele dazu werden im nächsten Abschnitt kurz angegeben.

Dann kann man fragen, warum wir uns mit zufälligen Gleichungen beschäftigen sollten. Gleichungen spielen sowohl innerhalb mathematischer Theorien als auch bei Anwendungen der Mathematik auf Probleme anderer Wissenschaften und bei praktischen Aufgaben eine herausragende Rolle. Manchmal ist jedoch eine traditionelle deterministische Modellierung nur ein erster Schritt. Viele (physikalische, ...) Größen ändern sich nicht 100%-ig vorhersagbar, Parameter in den Modellen werden mit statistischen Methoden geschätzt und sind daher nur ungenau bekannt, usw. Eine Möglichkeit der Berücksichtigung dieser Unsicherheit liegt in der Modellierung als Zufallsgrößen. Die mathematische Beschreibung und Behandlung der Unsicherheit kann dabei mit Verweis auf (zumindestens theoretisch mögliche) Massenerscheinungen und damit sozusagen „objektive“ Wahrscheinlichkeiten oder in Bezug auf „subjektive“ Überzeugungen über die Chancen des Eintretens bestimmter zufälliger Ereignisse erfolgen.

Beispiele, die auch in der historischen Entwicklung der Stochastik, insbesondere der Theorie der Zufallsfunktionen, eine große Rolle spielten, sind

- Modelle der statistischen Physik, wo das Wirken vieler Atome, Moleküle, etc. zu berücksichtigen ist;
- Beschreibung von Turbulenzen (von Wind, Wasser, ...), die dadurch verursachten Kräfte auf hohe Bauwerke, Brücken, Schiffe, Ölbohrplattformen, Flugzeugteile, usw.;
- Untersuchung der Auswirkung von Erdbeben auf Gebäude und Anlagen;
- in der Elektrotechnik die Schwankungen von Spannung bzw. Stromstärke („Rauschen“) in Schaltkreisen etc.;
- die Informationsübertragung durch „Kanäle“ die rauschbehaftet sind (z.B. Übertragung der Telemetriedaten in der Raumfahrt);

- Modellierung von ökonomischen Sachverhalten (Aktienkurse, Zinskurse in der stochastischen Finanzmathematik).

Fortschritte bei der Betrachtung und Behandlung stochastischer Modelle ermöglichen einerseits und die Notwendigkeit einer immer besseren Beschreibung und Analyse realer (oder schon abgeleiteter) Systeme erfordern andererseits so die Untersuchung von Gleichungen, bei denen bestimmte Parameter, Operatoren, etc. als zufällig beschrieben werden. Dabei steht aber nicht immer eine konkrete (praktische oder ähnliche) Aufgabenstellung mit einer zwingenden stochastischen Beschreibungskomponente im Hintergrund, häufig spielen auch Wünsche von Mathematikern nach mathematischen Verallgemeinerungen, neuen mathematischen Theorien usw. eine nicht geringe Rolle und führen zu nützlichen Ergebnissen. In diesem Zusammenhang sollte weiterhin erwähnt werden, dass es auch andere Möglichkeiten der mathematischen oder andersweitigen Modellierung von Unsicherheiten gibt, wie z.B. Methoden der Theorie der unscharfen Mengen („fuzzy set theory“) oder Verfahren der Intervallmathematik. Das Ziel einer Untersuchung und die zu erwartenden Möglichkeiten der Lösung der auftretenden Aufgaben sollten bei der Wahl der verwendeten (mathematischen) Methoden eine große Rolle spielen, im Allgemeinen kann man bei keiner Methode von der (100%-ig) richtigen oder wahren sprechen.

Im Vergleich zu rein deterministischen Modellen bekommen mathematische Modelle mit stochastischen Einflüssen im Allgemeinen automatisch eine neue Dimension. So wird zum Beispiel durch die Ersetzung einer festen reellen Zahl in einer deterministischen Gleichung durch eine reellwertige Zufallsgröße ein „eindimensionales“ mathematisches Objekt durch ein „unendlichdimensionales“ ersetzt, da die Zufallsgröße durch ihre Verteilung (Verteilungsfunktion, charakteristische Funktion o.ä.) beschrieben wird. Außerdem tritt im Allgemeinen ein zusätzliches Element der Nichtlinearität auf, da sich Verteilungen „nichtlinear“ verhalten.

Häufig kennt man nicht die vollständige Verteilung der eingehenden zufälligen Parameter, sondern nur abgeleitete Kenngrößen wie Erwartungswert oder zweite Momente. Dann besteht die Aufgabe darin, diese oder andere Kenngrößen für die Lösung zu bestimmen. Dabei ist zu beachten, dass nur in speziellen Fällen Gleichungen für Zufallselemente (-funktionen) auf eindeutige entsprechende Gleichungen für die Kenngrößen führen. Eine weitere Schwierigkeit bei der Betrachtung von zufälligen Gleichungen besteht in der Möglichkeit von verschiedenen Interpretationen der Gleichungen, was zum Beispiel durch verschiedene mögliche Definitionen von grundlegenden Operationen, wie der Ableitung einer Zufallsfunktion pfadweise, im quadratischen Mittel, etc. sichtbar wird.

Man könnte zufällige Gleichungen einfach als eine parametrisierte Familie von gewöhnlichen Gleichungen auffassen. Allerdings ist hier die Art der Parametrisierung durch den Parameter  $\omega$ , der das Resultat eines Zufallsexperimentes widerspiegelt, sehr kompliziert (i. a. werden nur Messbarkeitsanforderungen gestellt) und in der Regel unbekannt; außerdem ist man ja an der Verteilung oder abgeleiteten Kenngrößen interessiert.

Wir wollen im folgenden einige grundlegenden Probleme, Herangehensweisen und Kenntnisse, die zufällige Gleichungen betreffen, vermitteln und dies anhand einer Anzahl von Beispielen illustrieren. Es werden dabei vor allem zufällige gewöhnliche Differentialgleichungen im Mittelpunkt stehen.

Zuvor sollen noch einige Bemerkungen zu möglichen Aufgaben und zu behandelnden Problemen gemacht werden. Zu einigen davon werden später weiterführende Ausführungen folgen, ein Großteil wird aber hier keine oder nur eine geringe Rolle spielen können. Zu nennen wären in diesem Zusammenhang z. B. die folgenden Themen.

- Aufstellen von Gleichungen, Modellierung der zu betrachteten Erscheinung, des Systems; damit eng verbunden ist die
- Interpretation der erhaltenen Gleichungen und die Untersuchung von möglichen bzw. des angebrachten Lösungsbegriffs;
- Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen;
- (stetige) Abhängigkeit der Lösungen von eingehenden Parametern (Stabilitätseigenschaften);
- qualitative Eigenschaften von Lösungen;
- Auffinden von exakten Lösungen, mitunter existieren verschiedene Darstellungsmöglichkeiten;
- Methoden zur näherungsweisen Bestimmung von Lösungen, hierbei sind sowohl theoretische Aussagen zur Approximation von Lösungen als auch die Untersuchung, Bewertung, etc. von numerischen Verfahren wichtig;
- Bestimmung von abgeleiteten Kenngrößen, exakt oder näherungsweise;
- inverse Fragestellungen, wie z. B. die Bestimmung von Parametern bei (näherungsweise) bekannten Lösungen;
- statistische Fragen, z. B. über die Äquivalenz oder Singularität der Maße, die von den Lösungen erzeugt werden;
- Untersuchung des Zusammenhangs zu anderen Typen von Gleichungen oder Modellen;
- ....

Nun sollen noch ein paar Aussagen zur Modellierung folgen.

Häufig spielt der Begriff eines Systems bei der Modellierung und weiteren Untersuchungen eine gewisse Rolle. Bei der zu untersuchenden Erscheinung werden eine äußere Umgebung und das System selber unterschieden. Dann werden *äußere Einwirkungen* auf das System (auch Eingangsparameter genannt) betrachtet, die ein bestimmtes *Verhalten des Systems* (auch als Ausgangsparameter beschrieben) bewirken. Mathematisch werden die äußere Einwirkungen durch Elemente  $q$  einer geeignet gewählten Menge  $Q$ , das Verhalten des Systems durch Elemente  $u$  einer geeignet gewählten Menge  $U$  und die Struktur, die Eigenschaften, das Funktionieren des Systems durch einen Operator  $H : Q \rightarrow U$  beschrieben, so dass also  $u = Hq$  gilt.<sup>1</sup> Dabei sind alle diese Beschreibungselemente i. a. nicht eindeutig bestimmt. Mitunter wird zusätzlich der Zustand des Systems eingeführt, der durch einen weiteren Operator in die Ausgangsparameter transformiert wird. Häufig führt die mathematische Modellierung auch nicht direkt auf die Beziehung  $u = Hq$ , sondern ergibt eine Darstellung  $q = Lu$  mit dem inversen Operator  $L : U \rightarrow Q$ , z. B. in Form einer Differentialgleichung mit einer rechten Seite, in die die Einwirkung  $q$  eingeht. Bestimmte Eigenschaften des Systems, die ihre Beschreibung z. B. in den Koeffizienten der Differentialgleichung finden, können als Parameter  $p$  des Systems betrachtet werden, also  $u = H(p)q$  bzw.  $q = L(p)u$ , oder aber zur äußeren Umgebung gezählt werden. Somit kann selbst bei einer linearen Differentialgleichung (bezüglich des Zustands des Systems) als Grundgleichung für das System der insgesamt zu betrachtende Operator nichtlinear sein. Außerdem kann es sich als erforderlich

---

<sup>1</sup>Die hier verwendeten Bezeichnungen müssen nicht mit später verwendeten übereinstimmen.

erweisen, vorhandene Rückkopplungen (d. h. wenn äußere Einwirkungen  $q$  von dem sich einstellenden Systemzustand  $u$  abhängen) in die Modellierung mit einzubeziehen.

Werden bestimmte Elemente derartiger Modelle als zufällig angenommen, müssen folglich „stochastischen Systeme“ untersucht werden. Dies bedeutet, dass für die entsprechenden Größen und Elemente ihre Verteilungen oder abgeleitete Kenngrößen betrachtet werden und auch wieder Verteilungen oder abgeleitete Kenngrößen für die gesuchten Parameter zu bestimmen sind.

Dabei können in diesem Rahmen u. a. die folgenden grundlegenden Aufgabentypen unterschieden werden.

1. Bestimmung der geforderten Wahrscheinlichkeitseigenschaften der Ausgangsparameter bei bekannten geeigneten Wahrscheinlichkeitseigenschaften der Eingangsparameter und der Parameter des Systems.
2. Bestimmung der Wahrscheinlichkeitseigenschaften der Eingangsparameter bei bekannten geeigneten Wahrscheinlichkeitseigenschaften der Ausgangsparameter und der Parameter des Systems. Dies ist gewissermaßen die inverse Aufgaben zum ersten Aufgabentyp.
3. Bestimmung der Wahrscheinlichkeitseigenschaften des Systems bei bekannten geeigneten gemeinsamen Wahrscheinlichkeitseigenschaften der Eingangs- und Ausgangsparameter, also eine Art der Systemidentifikation.
4. Bestimmung eines (in einem bestimmten Sinne optimalen oder auch des) Systems, welches bei gegebenen Eingangsparametern bestimmte Ausgangsparameter aufweist. Diese Aufgabe fällt in die Klasse der Syntheseaufgaben, während die obigen eher den Analyseaufgaben zuzuordnen sind.

Der erste Aufgabentyp ist dabei von zentraler Bedeutung, da häufig die Lösung der anderen Aufgabentypen auf diesen zurückgeführt wird. Auch hier wird dieser erste Aufgabentyp im Vordergrund der Betrachtungen stehen.

Bei der Behandlung von zufälligen Gleichungen gibt es zwei wesentliche Herangehensweisen. Die erste geht von einer deterministischen Gleichung aus, ersetzt dort bestimmte Größen und Parameter durch stochastische Entsprechungen und untersucht auf der Grundlage bekannter deterministischer Lösungsdarstellungen oder approximativer Lösungsverfahren die Auswirkungen der Ersetzung der deterministischen Parameter durch zufällige und kommt so zu gewünschten Aussagen über die zufälligen Gleichungen. Diese Vorgehensweise wird im Weiteren hauptsächlich genutzt werden.

Die andere Herangehensweise geht von spezifisch stochastischen Gleichungen aus, wie sie z.B. durch den Itô-Kalkül für stochastische Differentialgleichungen beschrieben werden können und entwickelt auf der Grundlage dieser Kalküle geeignete Lösungsverfahren etc.

## 1.2 Einige einführende Beispiele

Wir wollen nun einfache Beispiele zufälliger Gleichungen betrachten, um einige Vorgehensweisen und auftretende Probleme noch besser zu illustrieren. Dabei werden wir uns nicht auf zufällige Differentialgleichungen beschränken.

### 1.2.1 Algebraische Gleichung ersten Grades

Zunächst betrachten wir die einfache lineare Gleichung

$$A(\omega)X(\omega) = B(\omega),$$

hier sind  $A(\omega)$  und  $B(\omega)$  reellwertige Zufallsgrößen, was durch die Angabe von  $(\omega)$ , also die Abhängigkeit vom Elementarereignis  $\omega$  aus einem geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum  $\Omega$  verdeutlicht werden soll. Als Lösung ergibt sich natürlich

$$X(\omega) = \frac{B(\omega)}{A(\omega)}$$

für diejenigen  $\omega$ , für die  $A(\omega) \neq 0$  gilt. Falls für bestimmte  $\omega$  gilt  $A(\omega) = B(\omega) = 0$ , kann  $X(\omega)$  beliebig reell gewählt werden. Es sei hier auch erwähnt, dass falls dieser Fall mit einer Wahrscheinlichkeit echt größer als Null eintritt, im allgemeinen die Konstruktion von nichtmessbaren „Lösungen“  $X(\omega)$  möglich wird. Für die Elementarereignisse  $\omega$ , für die  $A(\omega) = 0$  aber  $B(\omega) \neq 0$  gilt, existiert keine Lösung der Gleichung.

Nun sind aber im allgemeinen Zufallsvariablen nicht durch eine konkrete Abbildung eines Wahrscheinlichkeitsraumes in die Menge der reellen Zahlen gegeben, sondern die eigentliche Charakterisierung erfolgt über Verteilungen. Somit ergibt sich als die (oder eine) wichtige Aufgabe die folgende:

gegeben sei die Verteilung des Zufallsvektors  $(A, B)$ ,

gesucht ist die Verteilung der Lösungszufallsgröße  $X = \frac{B}{A}$ . (Die Messbarkeit dieser Funktion folgt aus Grundtatsachen der Stochastik, Existenz für alle  $\omega \in \Omega$  bzw. f. s. natürlich vorausgesetzt.)

Eine noch umfassendere Aufgabe könnte in der Suche nach der gemeinsamen Verteilung des Zufallsvektors  $(A, B, X)$  bestehen.

Wir wollen hier beispielhaft annehmen, dass der Zufallsvektor  $(A, B)$  eine absolut stetige Verteilung mit Verteilungsdichte  $p_{(A,B)}(\cdot, \cdot)$  besitzt, d. h. für beliebige  $a_1, b_1 \in \mathbb{R}$  gilt für die gemeinsame Verteilungsfunktion von  $(A, B)$

$$F_{(A,B)}(a_1, b_1) := \mathbf{P}(A \leq a_1, B \leq b_1) = \int_{-\infty}^{a_1} \int_{-\infty}^{b_1} p_{(A,B)}(a, b) db da.$$

Dann kann man die Verteilungsfunktion von  $X$  berechnen über die Beziehung

$$F_X(x) := \mathbf{P}(X \leq x) = \mathbf{P}\left(\frac{B}{A} \leq x\right) = \int \int_{\{(a,b):a \neq 0, \frac{b}{a} \leq x\}} p_{(A,B)}(a, b) db da, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Aus

$$\frac{b}{a} \leq x \Leftrightarrow \begin{cases} b \leq ax, & \text{falls } a > 0, \\ b \geq ax, & \text{falls } a < 0, \end{cases}$$

und unter Berücksichtigung von  $\mathbf{P}(A = 0) = 0$  (die Verteilung von  $A$  ist absolutstetig) folgt dann

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^0 \left( \int_{ax}^{\infty} p_{(A,B)}(a, b) db \right) da + \int_0^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{ax} p_{(A,B)}(a, b) db \right) da.$$

Die Dichtefunktion erhält man durch Differentiation der Verteilungsfunktion nach  $x$ , also

$$\begin{aligned} p_X(x) &= \frac{dF_X(x)}{dx} = \int_{-\infty}^0 (-a)p_{(A,B)}(a, ax) da + \int_0^{\infty} ap_{(A,B)}(a, ax) da, \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |a|p_{(A,B)}(a, ax) da, \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Sind  $A$  und  $B$  f. s. positive Zufallsvariablen ergibt dies

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \int_0^{\infty} \left( \int_0^{ax} p_{(A,B)}(a, b) db \right) da, \\ p_X(x) &= \int_0^{\infty} ap_{(A,B)}(a, ax) da. \end{aligned}$$

Sind  $A$  und  $B$  stochastisch unabhängig, kann für die gemeinsame Dichtefunktion

$$p_{(A,B)}(a, b) = p_A(a)p_B(b), \quad a, b \in \mathbb{R},$$

mit den Randverteilungsdichten  $p_A(\cdot)$  und  $p_B(\cdot)$  von  $A$  bzw.  $B$  geschrieben werden. Falls die Momente des zufälligen Quotienten  $X$  existieren, gilt für  $k \in \mathbb{N}$

$$\mathbf{E}\{X^k\} = \int_{-\infty}^{\infty} x^k p_X(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |a|x^k p_{(A,B)}(a, ax) da dx.$$

Sind  $A$  und  $B$  stochastisch unabhängig, können die Momente auch berechnet werden über

$$\mathbf{E}\{X^k\} = \mathbf{E}\{B^k\} \mathbf{E}\left\{\frac{1}{A^k}\right\},$$

insbesondere

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\{X\} &= \mathbf{E}\{B\} \mathbf{E}\left\{\frac{1}{A}\right\}, \\ \mathbf{E}\{X^2\} &= \mathbf{E}\{B^2\} \mathbf{E}\left\{\frac{1}{A^2}\right\}, \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\{B^k\} &= \int_{-\infty}^{\infty} b^k p_B(b) db, \\ \mathbf{E}\{A^{-k}\} &= \int_{-\infty}^{\infty} a^{-k} p_A(a) da = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p_A(a)}{a^k} da. \end{aligned}$$

Der Wert für die Varianz folgt aus der Beziehung

$$\mathbf{Var}\{X\} = \mathbf{E}\{(X - \mathbf{E}\{X\})^2\} = \mathbf{E}\{X^2\} - (\mathbf{E}\{X\})^2.$$

**Beispiel 1** Seien  $A$  und  $B$  unabhängige Zufallsvariable,  $A$  gleichverteilt auf dem Intervall  $(a_{min}, a_{max})$  mit  $0 < a_{min} < a_{max}$  und  $B$  gleichverteilt auf dem Intervall  $(b_{min}, b_{max})$  mit  $0 < b_{min} < b_{max}$ , folglich

$$p_{(A,B)}(a, b) = \begin{cases} \frac{1}{(a_{max}-a_{min})(b_{max}-b_{min})}, & \text{für } a_{min} < a < a_{max}, b_{min} < b < b_{max}, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Dichtefunktion  $p_{(A,B)}(a, ax)$  ist für Werte  $x > 0$  genau dann nicht 0, falls

$$\begin{aligned} a_{min} < a < a_{max} &\quad \text{und} \quad b_{min} < ax < b_{max}, \\ \text{d. h. } a_{min} < a < a_{max} &\quad \text{und} \quad \frac{b_{min}}{x} < a < \frac{b_{max}}{x}. \end{aligned}$$

Die Dichtefunktion  $p_X(x)$  verschwindet also wenn

$$\frac{b_{min}}{x} \geq a_{max} \Leftrightarrow x \leq x_{min} := \frac{b_{min}}{a_{max}} \quad \text{oder} \quad \frac{b_{max}}{x} \leq a_{min} \Leftrightarrow x \geq x_{max} := \frac{b_{max}}{a_{min}}$$

gelten, da sich in diesem Fall die beiden Intervalle  $(a_{min}, a_{max})$  und  $\left(\frac{b_{min}}{x}, \frac{b_{max}}{x}\right)$  nicht überlappen.

Für Werte  $\frac{b_{min}}{a_{max}} < x < \frac{b_{max}}{a_{min}}$  gilt

$$\begin{aligned} p_X(x) &= \int_{\max\left\{a_{min}, \frac{b_{min}}{x}\right\}}^{\min\left\{a_{max}, \frac{b_{max}}{x}\right\}} ap_{(A,B)}(a, ax) da = \int_{\max\left\{a_{min}, \frac{b_{min}}{x}\right\}}^{\min\left\{a_{max}, \frac{b_{max}}{x}\right\}} \frac{a}{(a_{max} - a_{min})(b_{max} - b_{min})} da \\ &= \frac{1}{2(a_{max} - a_{min})(b_{max} - b_{min})} \left\{ \left( \min \left\{ a_{max}, \frac{b_{max}}{x} \right\} \right)^2 - \left( \max \left\{ a_{min}, \frac{b_{min}}{x} \right\} \right)^2 \right\} \end{aligned}$$

und aufgrund der Beziehungen

$$a_{max} \leq \frac{b_{max}}{x} \Leftrightarrow x \leq \frac{b_{max}}{a_{max}} \quad \text{und} \quad a_{min} \geq \frac{b_{min}}{x} \Leftrightarrow x \geq \frac{b_{min}}{a_{min}}$$

auch

$$\begin{aligned} p_X(x) &= \frac{1}{2(a_{max} - a_{min})(b_{max} - b_{min})} \left\{ a_{max}^2 \mathbf{1}_{\left(\frac{b_{min}}{a_{max}}, \frac{b_{max}}{a_{max}}\right]}(x) + \left(\frac{b_{max}}{x}\right)^2 \mathbf{1}_{\left(\frac{b_{max}}{a_{max}}, \frac{b_{max}}{a_{min}}\right)}(x) \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{b_{min}}{x}\right)^2 \mathbf{1}_{\left(\frac{b_{min}}{a_{max}}, \frac{b_{min}}{a_{min}}\right)}(x) - a_{min}^2 \mathbf{1}_{\left[\frac{b_{min}}{a_{min}}, \frac{b_{max}}{a_{min}}\right)}(x) \right\}. \end{aligned}$$

Die Verteilungsfunktion von  $X$  ergibt sich damit zu

$$\begin{aligned} F_X(x) = \mathbf{P}(X \leq x) &= \frac{1}{2(a_{max} - a_{min})(b_{max} - b_{min})} \\ &\left\{ a_{max}^2 \left( x - \frac{b_{min}}{a_{max}} \right) \mathbf{1}_{\left(\frac{b_{min}}{a_{max}}, \frac{b_{max}}{a_{max}}\right)}(x) + a_{max}(b_{max} - b_{min}) \mathbf{1}_{\left[\frac{b_{max}}{a_{max}}, \infty\right)}(x) \right. \\ &\quad + b_{max}^2 \left( \frac{a_{max}}{b_{max}} - \frac{1}{x} \right) \mathbf{1}_{\left(\frac{b_{max}}{a_{max}}, \frac{b_{max}}{a_{min}}\right)}(x) + b_{max}(a_{max} - a_{min}) \mathbf{1}_{\left[\frac{b_{max}}{a_{min}}, \infty\right)}(x) \\ &\quad - b_{min}^2 \left( \frac{a_{max}}{b_{min}} - \frac{1}{x} \right) \mathbf{1}_{\left(\frac{b_{min}}{a_{max}}, \frac{b_{min}}{a_{min}}\right)}(x) - b_{min}(a_{max} - a_{min}) \mathbf{1}_{\left[\frac{b_{min}}{a_{min}}, \infty\right)}(x) \\ &\quad \left. - a_{min}^2 \left( x - \frac{b_{min}}{a_{min}} \right) \mathbf{1}_{\left(\frac{b_{min}}{a_{min}}, \frac{b_{max}}{a_{min}}\right)}(x) - a_{min}(b_{max} - b_{min}) \mathbf{1}_{\left[\frac{b_{max}}{a_{min}}, \infty\right)}(x) \right\}. \end{aligned}$$

Zur Berechnung der Momente erhalten wir für  $k \in \mathbb{N}$

$$\mathbf{E}\{B^k\} = \int_{b_{min}}^{b_{max}} \frac{b^k}{b_{max} - b_{min}} db = \frac{b_{max}^{k+1} - b_{min}^{k+1}}{(k+1)(b_{max} - b_{min})},$$

insbesondere

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\{B\} &= \frac{b_{max} + b_{min}}{2}, \\ \mathbf{E}\{B^2\} &= \frac{b_{max}^3 - b_{min}^3}{3(b_{max} - b_{min})} = \frac{b_{max}^2 + b_{max}b_{min} + b_{min}^2}{3}\end{aligned}$$

und entsprechend

$$\mathbf{E}\{A^{-k}\} = \int_{a_{min}}^{a_{max}} \frac{1}{a^k(a_{max} - a_{min})} da = \begin{cases} \frac{1}{a_{max} - a_{min}} \ln\left(\frac{a_{max}}{a_{min}}\right), & k = 1, \\ \frac{1}{(k-1)(a_{max} - a_{min})} \left(\frac{1}{a_{min}^{k-1}} - \frac{1}{a_{max}^{k-1}}\right), & k \geq 2, \end{cases}$$

also

$$\mathbf{E}\{A^{-2}\} = \frac{1}{a_{max} - a_{min}} \left( \frac{1}{a_{min}} - \frac{1}{a_{max}} \right) = \frac{1}{a_{max}a_{min}}$$

und für  $k \geq 2$

$$\mathbf{E}\{A^{-k}\} = \frac{a_{max}^{k-1} - a_{min}^{k-1}}{(k-1)a_{max}^{k-1}a_{min}^{k-1}(a_{max} - a_{min})}.$$

Dies ergibt

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\{X\} &= \frac{b_{max} + b_{min}}{2(a_{max} - a_{min})} \ln\left(\frac{a_{max}}{a_{min}}\right), \\ \mathbf{E}\{X^2\} &= \frac{b_{max}^3 - b_{min}^3}{3a_{max}a_{min}(b_{max} - b_{min})} = \frac{b_{max}^2 + b_{max}b_{min} + b_{min}^2}{3a_{max}a_{min}}, \\ \mathbf{Var}\{X\} &= \frac{b_{max}^3 - b_{min}^3}{3a_{max}a_{min}(b_{max} - b_{min})} - \left( \frac{b_{max} + b_{min}}{2(a_{max} - a_{min})} \ln\left(\frac{a_{max}}{a_{min}}\right) \right)^2.\end{aligned}$$

In Abbildung 1.1 werden zwei Beispiele von Dichtefunktionen und in Abbildung 1.2 die entsprechenden Verteilungsfunktionen angegeben. Die Parameter wurden wie folgt gewählt.

Beispiel	Verteilung $A$	Verteilung $B$	$x_{min}$	$x_{max}$	$\mathbf{E}\{X\}$	$\mathbf{E}\{X^2\}$	$\mathbf{Var}\{X\}$
1	$U(4, 8)$	$U(1, 2)$	0.125	0.5	0.260	0.0729	0.00535
2	$U(4, 8)$	$U(1, 3)$	0.125	0.75	0.346	0.135	0.0153

Um den Erwartungswert und die Varianz vom Quotienten  $X$  durch entsprechende Kenngrößen von  $A$  und  $B$  darzustellen, bezeichnen wir

$$m_A := \mathbf{E}\{A\}, \quad m_B := \mathbf{E}\{B\}, \quad s_A := \sqrt{\mathbf{Var}\{A\}}, \quad s_B := \sqrt{\mathbf{Var}\{B\}}$$

und ersetzen in den entsprechenden Ausdrücken

$$a_{max} = m_A + \sqrt{3}s_A, \quad a_{min} = m_A - \sqrt{3}s_A, \quad b_{max} = m_B + \sqrt{3}s_B, \quad b_{min} = m_B - \sqrt{3}s_B,$$

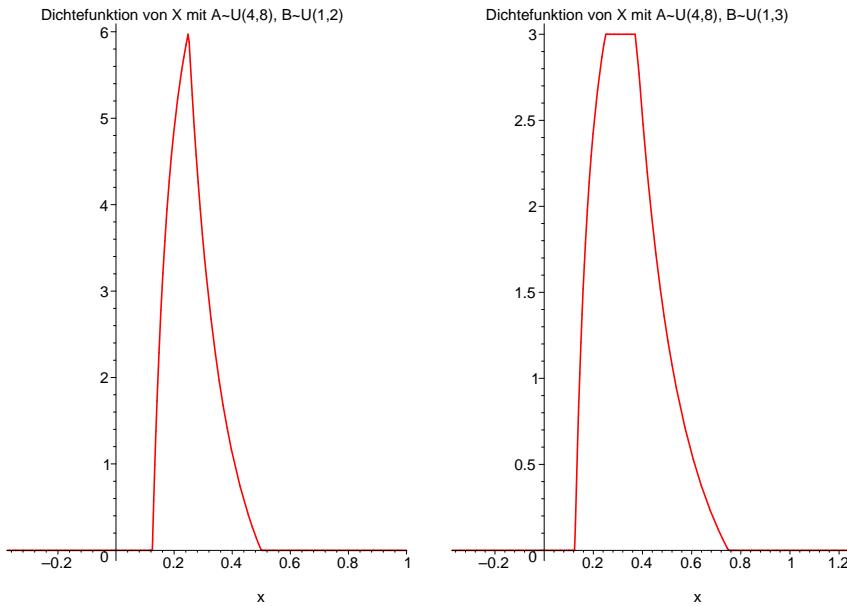


Abbildung 1.1: Dichtefunktionen von  $X = \frac{B}{A}$  falls  $A \sim U(4,8), B \sim U(1,2)$  (links) und  $A \sim U(4,8), Y \sim U(1,3)$  (rechts), ( $A$  und  $B$  unabhängig).

die Lösungen des folgenden linearen Gleichungssystems sind

$$m_A := \frac{a_{\max} + a_{\min}}{2}, \quad s_A := \frac{a_{\max} - a_{\min}}{2\sqrt{3}}, \quad m_B := \frac{b_{\max} + b_{\min}}{2}, \quad s_B := \frac{b_{\max} - b_{\min}}{2\sqrt{3}}.$$

Hier können  $m_A, m_B$  beliebige positive Zahlen sein, aufgrund der Annahmen  $a_{\min} > 0$  und  $b_{\min} > 0$  gilt für die Standardabweichungen  $0 < s_A < \frac{m_A}{\sqrt{3}}$ ,  $0 < s_B < \frac{m_B}{\sqrt{3}}$ .

Der Erwartungswert von  $X$  kann dann geschrieben werden als

$$m_X = \mathbf{E}\{X\} = \frac{\sqrt{3} m_B}{6 s_A} \ln \left( \frac{m_A + \sqrt{3} s_A}{m_A - \sqrt{3} s_A} \right),$$

d. h. er hängt nicht von der Varianz von  $B$  ab, aber von der Varianz von  $A$  und den Erwartungswerten der Zufallsgrößen  $A$  und  $B$ . Für feste Werte  $m_A$  und  $m_B$  ist der Erwartungswert  $m_X$  also nicht eindeutig bestimmt, es gibt keine Gleichung die es erlauben würde,  $m_X$  nur mit Hilfe von  $m_A$  und  $m_B$  zu berechnen.

Um den möglichen Wertebereich für  $m_X$  bei fixierten Werten  $m_A$  und  $m_B$  und variierenden Standardabweichungen  $s_A$  zu bestimmen, führen wir die Hilfsvariable  $v = \frac{\sqrt{3} s_A}{m_A}$  ein, mit  $0 < s_A < \frac{m_A}{\sqrt{3}}$  gilt dann  $0 < v < 1$ . Wir erhalten

$$\mathbf{E}\{X\} = \frac{m_B}{m_A} \frac{1}{2v} \ln \left( \frac{1+v}{1-v} \right).$$

Das linke Bild in Abbildung 1.3 zeigt die Grafik der Hilfsfunktion

$$hf01(v) := \frac{1}{2v} \ln \left( \frac{1+v}{1-v} \right), \quad v \in (0, 1).$$

Grenzwertbetrachtungen führen zu

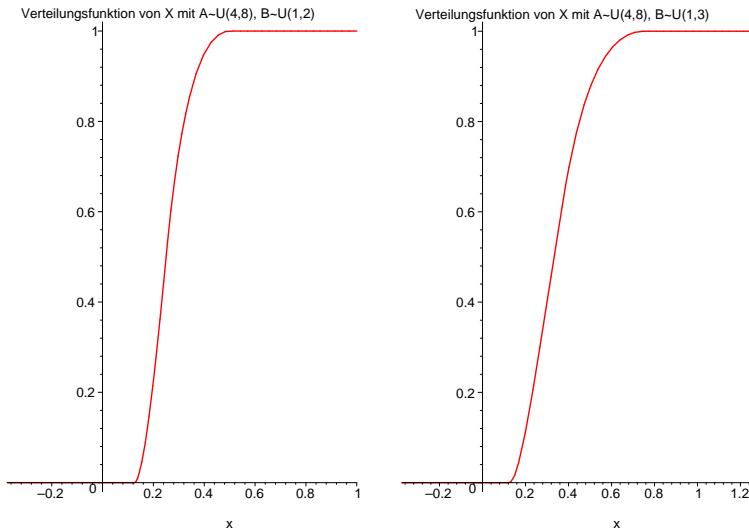


Abbildung 1.2: Verteilungsfunktionen von  $X = \frac{B}{A}$  falls  $A \sim U(4, 8)$ ,  $B \sim U(1, 2)$  (links) und  $A \sim U(4, 8)$ ,  $B \sim U(1, 3)$  (rechts), ( $A$  und  $B$  unabhängig).

$$\begin{aligned} \lim_{v \rightarrow 1^-} \frac{1}{2v} \ln \left( \frac{1+v}{1-v} \right) &= +\infty, \\ \lim_{v \rightarrow 0^+} \frac{1}{2v} \ln \left( \frac{1+v}{1-v} \right) &= \lim_{v \rightarrow 0^+} \frac{1}{2v} \ln \left( 1 + \frac{2v}{1-v} \right) \\ &= \lim_{v \rightarrow 0^+} \frac{1}{2v} \frac{2v}{1-v} = 1, \end{aligned}$$

die vorletzte Gleichheit gilt wegen

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

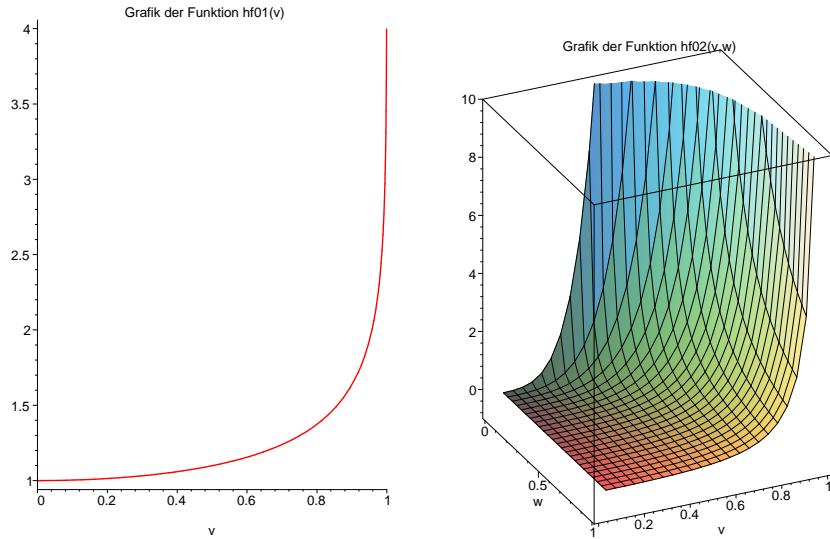
Damit ergibt sich bei festen Werten  $m_A$  und  $m_B$  und variablen Werten  $s_A$  für den Erwartungswert  $\mathbf{E}\{X\} = m_X$  ein Wertebereich von  $\left( \frac{m_A}{m_B}, +\infty \right)$ .

Eine ähnliche Situation besteht für das zweite Moment und die Varianz. Ein expliziter Ausdruck für die Varianz kann durch

$$\mathbf{Var}\{X\} = \frac{m_B^2 + s_B^2}{m_A^2 - 3s_A^2} - \frac{m_B^2}{12s_A^2} \ln^2 \left( \frac{m_A + \sqrt{3}s_A}{m_A - \sqrt{3}s_A} \right)$$

gefunden werden. Wird eine zweite Hilfsvariable  $w = \frac{\sqrt{3}s_B}{m_B}$  eingeführt, die mit  $0 < s_B < \frac{m_B}{\sqrt{3}}$  im Intervall  $0 < w < 1$  variiert, gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{Var}\{X\} &= \frac{s_B^2 \left( \frac{3}{w^2} + 1 \right)}{s_A^2 \left( \frac{3}{w^2} - 3 \right)} - \frac{3s_B^2}{12s_A^2 w^2} \ln^2 \left( \frac{1+v}{1-v} \right) \\ &= \frac{s_B^2 v^2}{s_A^2 w^2} \left\{ \frac{3 + w^2}{3(1 - v^2)} - \frac{1}{4v^2} \ln^2 \left( \frac{1+v}{1-v} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Abbildung 1.3: Hilfsfunktionen  $hf01(v)$  (links) und  $hf02(v, w)$  (rechts).

Eine Grafik der Hilfsfunktion

$$hf02(v, w) := \frac{v^2}{w^2} \left\{ \frac{3 + w^2}{3(1 - v^2)} - \frac{1}{4v^2} \ln^2 \left( \frac{1 + v}{1 - v} \right) \right\}, \quad v, w \in (0, 1)$$

ist im rechten Bild der Abbildung 1.3 zu finden. Es kann ebenfalls gezeigt werden, dass für fixierte Werte  $w \in (0, 1)$  die Grenzwerte

$$\lim_{v \rightarrow 0+} hf02(v, w) = 0, \quad \lim_{v \rightarrow 1-} hf02(v, w) = +\infty.$$

gelten. Damit ist für fixierte Werte  $s_A$  und  $s_B$  und variierende Werte  $m_A$  und  $m_B$  der Wertebereich der Standardabweichungen  $s_X$  das gesamte Intervall  $(0, \infty)$ .  $\diamond$

Wird die gemeinsame Verteilung von  $(A, B, X)$  gesucht, gilt

$$\begin{aligned} F_{(A,B,X)}(a_1, b_1, x) &= \mathbf{P}(A \leq a_1, B \leq b_1, X \leq x) = \mathbf{P} \left( A \leq a_1, B \leq b_1, \frac{B}{A} \leq x \right) \\ &= \int \int_{\{(a,b):a \leq a_1, a \neq 0, b \leq b_1, \frac{b}{a} \leq x\}} p_{(A,B)}(a, b) da db. \end{aligned}$$

Gilt fast sicher  $A > 0$  und  $B > 0$  (und folglich auch  $X > 0$ ), dann erhält man

$$\begin{aligned} F_{(A,B,X)}(a_1, b_1, x) &= \int_0^{a_1} \int_0^{\min\{b_1, ax\}} p_{(A,B)}(a, b) db da \\ &= \begin{cases} \int_0^{a_1} \int_0^{ax} p_{(A,B)}(a, b) db da, & \text{falls } \frac{b_1}{x} \geq a_1 \Leftrightarrow x \leq \frac{b_1}{a_1}, \\ \int_0^{\frac{b_1}{x}} \int_0^{ax} p_{(A,B)}(a, b) db da + \int_{\frac{b_1}{x}}^{a_1} \int_0^{b_1} p_{(A,B)}(a, b) db da, & \text{falls } \frac{b_1}{x} < a_1 \Leftrightarrow x > \frac{b_1}{a_1}. \end{cases} \end{aligned}$$

Sind zusätzlich  $A$  und  $B$  noch unabhängig folgt daraus

$$F_{(A,B,X)}(a_1, b_1, x) = \begin{cases} \int_0^{a_1} F_B(ax) p_A(a) da, & \text{falls } x \leq \frac{b_1}{a_1}, \\ \int_0^{\frac{b_1}{x}} F_B(ax) p_A(a) da + F_B(b_1) \left[ F_A(a_1) - F_A \left( \frac{b_1}{x} \right) \right], & \text{falls } x > \frac{b_1}{a_1}. \end{cases}$$

Da die möglichen Werte des dreidimensionalen reellen Zufallsvektors  $(A, B, X)$  auf einer zweidimensionalen Fläche in  $\mathbb{R}^3$  konzentriert sind, kann dessen Verteilung nicht absolutstetig bezüglich des dreidimensionalen LEBESGUE-Maßes sein, es existiert also keine gemeinsame Verteilungsdichte.

### 1.2.2 Nichtlineare Gleichung mit monotoner Funktion

Sei

$$g : \mathbb{R} \supset \text{Dom}(g) \rightarrow \text{Range}(g) \subset \mathbb{R}$$

eine streng monoton wachsende reellwertige Funktion auf einem Intervall  $\text{Dom}(g)$  der reellen Zahlengeraden. Wir betrachten die im allgemeinen nichtlineare Gleichung

$$g(X(\omega)) = Y(\omega)$$

mit einer reellwertigen Zufallsgröße  $Y$ , die f. s. Werte im Wertebereich  $\text{Range}(g)$  annimmt und z. B. durch ihre Verteilungsfunktion

$$F_Y(y) = \mathbf{P}(Y \leq y), \quad y \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{P}(Y \in \text{Range}(g)) = 1,$$

gegeben ist.

Die eindeutig bestimmte und streng monoton wachsende Umkehrfunktion zu  $g$  bezeichnen wir mit  $h$ , d. h.

$$h : \mathbb{R} \supset \text{Range}(g) \rightarrow \text{Dom}(g) \subset \mathbb{R},$$

mit

$$g(h(y)) = y \quad \forall y \in \text{Range}(g), \quad h(g(x)) = x \quad \forall x \in \text{Dom}(g).$$

Die Verteilung der Lösungszufallsvariablen  $X$  dieser zufälligen Gleichung erhält man dann aus  $g(X) = Y \Leftrightarrow X = h(Y)$  mittels

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \mathbf{P}(X \leq x) = \mathbf{P}(h(Y) \leq x) = \mathbf{P}(Y \leq g(x)) \\ &= F_Y(g(x)), \quad \forall x \in \text{Dom}(g). \end{aligned}$$

Die Funktion  $h(\cdot)$  ist als monotone Funktion eine BOREL-Funktion, damit folgt die Messbarkeit von  $X$  aus der Darstellung  $X = h(Y)$  als Komposition von messbaren Funktionen. Für Werte  $x \in \mathbb{R} \setminus \text{Dom}(g)$  wird die Verteilungsfunktion  $F_X(x)$  konstant fortgesetzt, so dass eine Verteilungsfunktion entsteht.

**Beispiel 2** Betrachten wir als einfaches Beispiel die Funktion

$$g(x) = \ln(x), \quad x > 0, \quad \text{so dass } h(y) = \exp(y), \quad y \in \mathbb{R}, \quad \text{gilt}$$

und eine normalverteilte Zufallsgröße  $Y \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$  mit Erwartungswert  $\mu \in \mathbb{R}$  und Varianz  $\sigma^2 > 0$ , d. h.

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^y \exp\left(-\frac{(u-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) du, \\ p_Y(y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}\right). \end{aligned}$$

Die Lösung der Gleichung

$$\ln(X) = Y$$

ist dann die lognormalverteilte Zufallsgröße  $X = \exp(Y) \sim \mathcal{LN}(\mu, \sigma^2)$ , so dass gilt

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \mathbf{P}(X \leq x) = \mathbf{P}(\exp(Y) \leq x) = \mathbf{P}(Y \leq \ln(x)) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\ln(x)} \exp\left(-\frac{(u-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) du = F_Y(\ln(x)), \quad x > 0, \\ p_X(x) &= \frac{dF_X(x)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2} x} \exp\left(-\frac{(\ln(x)-\mu)^2}{2\sigma^2}\right), \quad x > 0. \end{aligned}$$

Für die Momente erhalten wir für  $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\{X^k\} &= \mathbf{E}\{\exp(kY)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(ku - \frac{(u-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) du, \\ &= \frac{\exp\left(k\mu + \frac{k^2\sigma^2}{2}\right)}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(u-\mu-k\sigma^2)^2}{2\sigma^2}\right) du = \exp\left(k\mu + \frac{k^2\sigma^2}{2}\right), \end{aligned}$$

insbesondere

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\{X\} &= \exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right), \\ \mathbf{E}\{X^2\} &= \exp(2\mu + 2\sigma^2), \\ \mathbf{Var}\{X\} &= \exp(2\mu + \sigma^2) (\exp(\sigma^2) - 1). \end{aligned}$$

Auch hier sehen wir wieder, dass sich der Erwartungswert der Lösung  $X$  nicht eindeutig aus dem Erwartungswert der gegebenen Zufallsvariablen  $Y$  berechnen lässt.  $\diamond$

### 1.2.3 Quadratische Gleichung

Betrachten wir nun die Aufgabe, die Nullstellen eines zufälligen Polynoms zweiten Grades zu bestimmen, d. h. wir suchen die Lösungen der zufälligen quadratischen Gleichung

$$A_2(\omega)X^2(\omega) + A_1(\omega)X(\omega) + A_0(\omega) = 0, \quad \omega \in \Omega.$$

Dabei sei  $(A_0, A_1, A_2)$  ein gegebener reeller Zufallsvektor, bestimmt z. B. durch eine gemeinsame Verteilungsfunktion oder im Fall einer absolut stetigen Verteilung durch eine gemeinsame Verteilungsdichte.

Für die  $\omega \in \Omega$  mit  $A_2(\omega) \neq 0$  kann die Gleichung auf die Normalform

$$X^2 + \frac{A_1(\omega)}{A_2(\omega)}X + \frac{A_0(\omega)}{A_2(\omega)} = 0$$

transformiert und die im allgemeinen komplexen Lösungswerte mit

$$\left\{ \frac{-A_1(\omega) + \sqrt{A_1^2(\omega) - 4A_0(\omega)A_2(\omega)}}{2A_2(\omega)}, \frac{-A_1(\omega) - \sqrt{A_1^2(\omega) - 4A_0(\omega)A_2(\omega)}}{2A_2(\omega)} \right\}$$

angegeben werden. (Für die  $\omega$  mit  $A_2(\omega) = 0$  ergibt sich eine lineare Gleichung, siehe dazu z. B. Abschnitt 1.2.1.)

Werden reelle Nullstellen (Lösungen) gesucht, dann kann es je nach den konkreten Werten von  $(A_0(\omega), A_1(\omega), A_2(\omega)), \omega \in \Omega$ , keine, eine oder zwei verschiedene Lösungen geben, bei dieser stochastischen Fragestellung sind also zuerst die Wahrscheinlichkeiten für diese Ereignisse von großem Interesse. Für einen absolut stetigen zufälligen Koeffizientenvektor wären also die Größen

$$\mathbf{P}(\text{,,genau } k \text{ reelle Lösungen"}) = \int \int \int_{B_k} p_{(A_0, A_1, A_2)}(a_0, a_1, a_2) da_0 da_1 da_2, \quad k = 0, 1, 2,$$

zu berechnen, wobei für die Mengen  $B_k$  entsprechend den zufälligen Ereignissen gelten

$$\begin{aligned} B_0 &= \{(a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{R}^3 : a_2 \neq 0, a_1^2 < 4a_0a_2\}, \\ B_1 &= \{(a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{R}^3 : a_2 \neq 0, a_1^2 = 4a_0a_2\}, \\ B_2 &= \{(a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{R}^3 : a_2 \neq 0, a_1^2 > 4a_0a_2\}. \end{aligned}$$

Die Menge  $B_1$  ist eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit im  $\mathbb{R}^3$ , deshalb ist in diesem Fall eines absolutstetigen Koeffizientenvektors die Wahrscheinlichkeit dafür, dass es genau eine reelle Lösung der quadratischen Gleichung gibt, gleich Null.

Wenn zwei verschiedene reelle (oder auch komplexe) Lösungen existieren, muss eine Auswahl bzw. eine Zuordnung der möglichen Werte zu zwei „Lösungsfunktionen“  $X_1(\omega), X_2(\omega)$  erfolgen. Bei einer beliebigen Zuordnung kann es passieren, dass  $X_1(\cdot)$  und  $X_2(\cdot)$  nicht messbar sind, wie das folgende Beispiel zeigt.

**Beispiel 3** Wir konstruieren explizit einen Wahrscheinlichkeitsraum und geeignete Zufallsvariablen und wählen dazu  $\Omega = (0, 1)$  das Intervall der reellen Zahlen zwischen 0 und 1,  $\mathcal{A} = \mathcal{B}((0, 1))$  die  $\sigma$ -Algebra der BOREL-Mengen auf  $\Omega$  und als Wahrscheinlichkeitsmaß  $\mathbf{P} = \mathbf{Leb}$  das LEBESGUE-Maß auf  $(0, 1)$ . Die quadratische Gleichung sei

$$X^2(\omega) - A_1(\omega)X(\omega) = 0, \omega \in \Omega,$$

wobei die Zufallsvariable  $A_1$  definiert sei durch

$$A_1 : \Omega = (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}, \quad A_1(\omega) = \omega + 1.$$

Diese Funktion ist monoton (und stetig etc.), deshalb ist sie messbar.  $A_1$  ist gleichmäßig verteilt auf dem Intervall  $(1, 2)$ ,  $A_1 \sim U(1, 2)$ . Für festes  $\omega \in \Omega$  sind die Lösungen dieser Gleichung natürlich 0 und  $A_1(\omega) = \omega + 1$ . Sei nun  $B$  eine Teilmenge von  $\Omega = (0, 1)$ , die nicht BOREL-messbar oder sogar nicht LEBESGUE-messbar ist. Wählen wir

$$X_1(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{für } \omega \in B, \\ \omega + 1 & \text{für } \omega \in \Omega \setminus B \end{cases} \quad \text{und} \quad X_2(\omega) = \begin{cases} \omega + 1 & \text{für } \omega \in B, \\ 0 & \text{für } \omega \in \Omega \setminus B, \end{cases}$$

dann sind  $X_1(\cdot), X_2(\cdot)$  zwei Funktionen auf  $\Omega$  (mit für jedes Argument verschiedenen Funktionswerten), die die zufällige quadratische Gleichung für jedes  $\omega \in \Omega$  erfüllen, jedoch nicht messbar, d. h. keine Zufallsvariablen sind. Letzteres folgt aus der Nichtmessbarkeit der Menge  $B$  und den Beziehungen

$$\{\omega \in (0, 1) : X_1(\omega) \leq 0\} = \{\omega \in (0, 1) : X_2(\omega) > 0\} = B.$$

◇

Im allgemeinen Fall einer zufälligen quadratischen Gleichung erzeugt jedoch die Zuordnung

$$X_1(\omega) = \frac{-A_1(\omega) + \sqrt{A_1^2(\omega) - 4A_0(\omega)A_2(\omega)}}{2A_2(\omega)},$$

$$X_2(\omega) = \frac{-A_1(\omega) - \sqrt{A_1^2(\omega) - 4A_0(\omega)A_2(\omega)}}{2A_2(\omega)}$$

auf der Menge  $\{\omega \in \Omega : A_2(\omega) \neq 0, A_1^2(\omega) \geq 4A_0(\omega)A_2(\omega)\}$  zwei reellwertige messbare Funktionen.

Die Verteilung der messbaren Lösungen kann mit Hilfe der obigen Formeln gefunden werden, so gelten z. B. im Fall einer absolutstetigen Verteilung des Zufallsvektors  $(A_0, A_1, A_2)$

$$\mathbf{P}(X_1 \leq x) = \int \int \int_{B(x)} p_{(A_0, A_1, A_2)}(a_0, a_1, a_2) da_2 da_1 da_0,$$

wobei die Menge  $B(x)$  definiert ist durch ( $X_1$  soll reell sein)

$$B(x) := \left\{ (a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{R}^3 : a_2 \neq 0, a_1^2 \geq 4a_0a_2, x \leq \frac{-a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2}}{2a_2} \right\}.$$

Für die im allgemeinen komplexwertige Zufallsgröße  $X_1$  gilt

$$\mathbf{E}\{X_1\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2}}{2a_2} p_{(A_0, A_1, A_2)}(a_0, a_1, a_2) da_2 da_1 da_0.$$

### Anfangswertproblem für zufällige gewöhnliche Differentialgleichung

Betrachten wir nun die zufällige homogene lineare gewöhnliche Differentialgleichung für eine reellwertige Zufallsfunktion  $(X(t); t \in \mathbb{R})$

$$\dot{X}(t, \omega) = A(\omega)X(t, \omega), \quad X(0, \omega) = X_0(\omega), \quad \omega \in \Omega.$$

Hier sind  $A$  und  $X_0$  gegebene Zufallsvariablen, wieder definiert durch ihre gemeinsame Verteilung. Das Intervall der reellen Achse, auf dem eine Lösung einer gewöhnlichen Differentialgleichung bestimmt werden soll, ist nicht immer vorgegeben, wir werden jedoch gleich feststellen, dass in diesem Beispiel die Lösung auf ganz  $\mathbb{R}$  gültig ist. Für feste  $\omega \in \Omega$  ist  $A(\omega)$  eine reelle Zahl, ebenso  $X_0(\omega)$ , und aus der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen wissen wir, dass für diese Werte die Funktion

$$X(t, \omega) = X_0(\omega) \exp(A(\omega)t), \quad t \in \mathbb{R},$$

die Differentialgleichung löst (dies kann man durch einfaches Einsetzen überprüfen). Außerdem ist klar, dass für jeden festen Wert  $t \in \mathbb{R}$  die Abbildungen

$$X(t) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \quad \omega \mapsto X(t, \omega) = X_0(\omega) \exp(A(\omega)t)$$

messbar, also reellwertige Zufallsgrößen sind, d. h. die Familie der Zufallsvariablen  $(X(t); t \in \mathbb{R})$  definiert einen reellwertigen Zufallsprozess (mit Realisierungen, die unendlich oft differenzierbar auf  $\mathbb{R}$  sind). Wir haben somit eine sogenannte pfadweise oder realisierungsweise Lösung der obigen zufälligen gewöhnlichen Differentialgleichung gefunden, das Symbol  $\dot{X}$  kann hier als gewöhnliche Ableitung für alle konkreten Realisierungen der Zufallsfunktion betrachtet werden.

In der Stochastik werden meist zwei Zufallsvariablen miteinander identifiziert wenn sie fast sicher übereinstimmen. In diesem Zusammenhang sollte auch überprüft werden, ob für die Lösung unserer zufälligen Differentialgleichung fast sicher gleiche gegebene Größen auch zu fast sicher gleichen Lösungsprozessen führen. In unserem Fall folgt diese Eigenschaft aus der Darstellung der Lösung. Seien  $\tilde{A}$  und  $\tilde{X}_0$  zwei Zufallsvariablen mit  $\tilde{A} = A$  f. s.,  $\tilde{X}_0 = X$  f. s., d. h.

$$\mathbf{P}(\{\omega : \tilde{A}(\omega) = A(\omega)\}) = 1, \quad \mathbf{P}(\{\omega : \tilde{X}_0(\omega) = X_0(\omega)\}) = 1,$$

dann gilt für die Lösung  $(\tilde{X}(t); t \in \mathbb{R})$  des zufälligen Differentialgleichungsproblems  $\dot{\tilde{X}}(t) = \tilde{A}\tilde{X}(t)$ ,  $\tilde{X}(0) = \tilde{X}_0$  eine analoge Darstellung wie oben und folglich für alle  $t \in \mathbb{R}$

$$\tilde{X}(t) = X(t) \text{ f. s., d. h. } \mathbf{P}(\{\omega : \tilde{X}(t, \omega) = X(t, \omega)\}) = 1.$$

Mehr noch, aus der Lösungsdarstellung folgt die stärkere Eigenschaft

$$\mathbf{P}(\{\omega : \tilde{X}(t, \omega) = X(t, \omega) \forall t \in \mathbb{R}\}) = 1,$$

d. h. die beiden zufälligen Lösungsprozesse  $(X(t); t \in \mathbb{R})$  und  $(\tilde{X}(t); t \in \mathbb{R})$  sind im Sprachgebrauch der stochastischen Analysis ununterscheidbar.

Bei der Bestimmung der Verteilung der Lösung werden als erstes die sogenannten eindimensionalen Verteilungen, d. h. die Verteilungen der Zufallsvariablen  $X(t)$  für jeweils feste Zeitpunkte  $t \in \mathbb{R}$  interessieren.

**Beispiel 4** Wir nehmen beispielhaft an, dass der Anfangswert  $X_0(\omega) = x_0 > 0, \forall \omega \in \Omega$  eine reelle deterministische Konstante ist und die Zufallsgröße  $A$  normalverteilt mit Erwartungswert  $\mu$  und Varianz  $\sigma^2$  ist ( $A \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ ). Dann ist für feste Werte  $t \in \mathbb{R}$  die Zufallsvariable  $\exp(At)$  lognormalverteilt (siehe z. B. Abschnitt 1.2.2),  $\exp(At) \sim \mathcal{LN}(\mu t, \sigma^2 t^2)$ , und folglich gilt für die eindimensionalen Verteilungsfunktionen in diesem Fall

$$\mathbf{P}(X(t) \leq x) = \mathbf{P}\left(\exp(At) \leq \frac{x}{x_0}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t^2}} \int_{-\infty}^{\ln(x/x_0)} \exp\left(-\frac{(u - \mu t)^2}{2\sigma^2 t^2}\right) du.$$

Für die Erwartungswertfunktion und die Varianzfunktion berechnet man in diesem Fall ohne Schwierigkeit

$$\mathbf{E}\{X(t)\} = \mathbf{E}\{x_0 \exp(At)\} = x_0 \exp\left(\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right),$$

$$\mathbf{Var}\{X(t)\} = \mathbf{Var}\{x_0 \exp(At)\} = x_0^2 \exp(2\mu t + \sigma^2 t^2) (\exp(\sigma^2 t^2) - 1).$$

Als einfache Charakteristik der zweidimensionalen Verteilungen (für die Ausdrücke mit Hilfe der Lösungsdarstellung gefunden werden können) lässt sich die Kovarianzfunktion angeben. Für  $s, t \in \mathbb{R}$  erhält man

$$\begin{aligned} \mathbf{Cov}\{X(s), X(t)\} &= \mathbf{E}\{X(s)X(t)\} - \mathbf{E}\{X(s)\}\mathbf{E}\{X(t)\} \\ &= \mathbf{E}\{x_0^2 \exp(A(s+t))\} - \mathbf{E}\{x_0 \exp(As)\}\mathbf{E}\{x_0 \exp(At)\} \\ &= x_0^2 \exp\left(\mu(s+t) + \frac{\sigma^2(s+t)^2}{2}\right) - x_0^2 \exp\left(\mu s + \frac{\sigma^2 s^2}{2} + \mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right) \\ &= x_0^2 \exp\left(\mu(s+t) + \frac{\sigma^2(s^2+t^2)}{2}\right) (\exp(\sigma^2 st) - 1). \end{aligned}$$

Der zufällige Lösungsprozess besitzt endliche zweite Momente, ebenso gilt dies auch für den in der rechten Seite der Differentialgleichung auftretenden Term  $AX(t)$  wegen

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\{A^2x_0^2 \exp(2At)\} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} a^2 x_0^2 \exp\left(2at - \frac{(a-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) da \\ &= \frac{x_0^2}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} a^2 \exp\left(-\frac{(a-\mu-2\sigma^2t)^2}{2\sigma^2} + \frac{4\sigma^4t^2}{2\sigma^2}\right) da \\ &= x_0^2 (\sigma^2 + (\mu + 2\sigma^2t)^2) \exp(2\sigma^2t^2).\end{aligned}$$

Damit kann in diesem Beispiel die Ausgangsdifferentialgleichung (mit diesen Parametern  $A$  und  $X_0 = x_0$  auch als Differentialgleichung im quadratischen Mittel (die Ableitung  $\dot{X}$  als Ableitung im quadratischen Mittel) verstanden und gelöst werden.  $\diamond$

Unter bestimmten, nicht allzu einschränkenden Bedingungen gilt für die Erwartungswertfunktion eines pfadweise differenzierbaren Zufallsprozesses  $(X(t); t \in \mathbb{R})$  (Existenz wieder vorausgesetzt)

$$m_{\dot{X}}(t) := \mathbf{E}\{\dot{X}(t)\} = \frac{d\mathbf{E}\{X(t)\}}{dt} = \frac{dm_X(t)}{dt} = \dot{m}_X(t).$$

Könnten wir annehmen, dass in unserer Ausgangsdifferentialgleichung der zufällige Koeffizient  $A$  und der zufällige Lösungsprozess stochastisch unabhängig sind, beide endliche Erwartungswerte besitzen und die entsprechenden notwendigen Bedingungen erfüllt sind, würde gelten

$$\frac{d\mathbf{E}\{X(t)\}}{dt} = \mathbf{E}\{\dot{X}(t)\} = \mathbf{E}\{AX(t)\} = \mathbf{E}\{A\}\mathbf{E}\{X(t)\},$$

d. h. falls  $\mathbf{E}\{A\} = \mu \in \mathbb{R}$  würde gelten

$$\dot{m}_X(t) = \mu m_X(t).$$

Dies ist eine deterministische lineare homogene gewöhnliche Differentialgleichung mit allgemeiner Lösung

$$m_X(t) = m_X(0) \exp(\mu t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Oben berechneten wir für einen normalverteilten Koeffizienten  $A$  eine andere Erwartungswertfunktion. Dies zeigt, dass die Annahme der stochastischen Unabhängigkeit von  $A$  und  $(X(t); t \in \mathbb{R})$  hier nicht angebracht ist (und sich folglich unter diesen Bedingungen aus der zufälligen Differentialgleichung für die Zufallsfunktion keine deterministische Differentialgleichung für die entsprechende Erwartungswertfunktion ableiten lässt; entsprechendes gilt natürlich auch für die Korrelationsfunktion etc.). In der Tat folgt ja aus der Lösungsdarstellung, dass die Lösung auf eine ganz bestimmte Art vom Koeffizienten abhängig ist. Die Zufallsgröße  $A$  und der Zufallsprozess  $(\exp(At); t \in \mathbb{R})$  können aber nur dann stochastisch voneinander unabhängig sein, wenn  $A = \mu$  f. s. mit einer festen reellen Zahl  $\mu$  ist (und die zufällige Differentialgleichung zu einer Differentialgleichung mit „deterministischen“ Koeffizienten wird).

Zum Beweis dieser Aussage bemerken wir, dass wenn  $A$  und  $\exp(At)$ ,  $t \neq 0$ , unabhängige Zufallsgrößen sind, auch  $A$  und  $A = \frac{\ln(\exp(At))}{t}$  als stetige Funktionen der Ausgangsgrößen unabhängig sind. Damit gilt für beliebige Borel-Mengen  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$$\mathbf{P}(A \in B) = \mathbf{P}(\{A \in B\} \cap \{\exp(At) \in B\}) = [\mathbf{P}(A \in B)]^2,$$

also  $\mathbf{P}(A \in B) = 0$  oder  $= 1$ , d. h. die Zufallsgröße  $A$  ist fast sicher konstant.

Ähnlich zu den eben beschriebenen Ausführungen lässt sich auch der Fall einer inhomogenen linearen Differentialgleichung erster Ordnung behandeln. Für die zufällige Differentialgleichung

$$\dot{X}(t, \omega) = A(\omega)X(t, \omega) + B(t, \omega), \quad t \in [t_1, t_2], \quad X(t_0, \omega) = X_0(\omega), \quad t_0 \in [t_1, t_2], \quad \omega \in \Omega,$$

mit einem gegebenen Zufallsprozess  $(B(t); t \in [t_1, t_2])$  mit stetigen Trajektorien existiert der zufällige Lösungsprozess

$$X(t) = X_0 \exp(A(t - t_0)) + \int_{t_0}^t \exp(A(t - s))B(s)ds, \quad t \in [t_1, t_2],$$

woraus sich wieder Aussagen über die Verteilung oder Momente etc. gewinnen lassen.

### 1.2.4 Randwertproblem für zufällige gewöhnliche Differentialgleichung

Nun wollen wir noch eine Randwertaufgabe für eine zufällige gewöhnliche Differentialgleichung betrachten. Gesucht sei die Lösung des Problems

$$\ddot{X}(t, \omega) + A^2(\omega)X(t, \omega) = 0, \quad X(0, \omega) = 1, \quad \dot{X}(H(\omega), \omega) = 0, \quad t \in [0, H(\omega)], \quad \omega \in \Omega.$$

Hier seien  $A$  und  $H$  positive reellwertige Zufallsvariablen. Dieses Problem beschreibt als einfaches Modell die Amplitudenänderung einer vertikal einfallenden Erdbebenwelle beim Durchlaufen der obersten Schicht der Erdoberfläche. Dabei wird die Schichtdicke als zufällig angenommen (ungenaue Kenntnisse der Schichtdicke widerspiegeln) und eine Dämpfung wird nicht berücksichtigt. Der positive Koeffizient  $A$  kann in diesem einfachen Modell über die als deterministisch angenommene Erregerfrequenz  $f$  der Welle und die zufällige Wellengeschwindigkeit  $C$  mittels  $A = \frac{2\pi f}{C}$  dargestellt werden. Insbesondere geht man bei dieser Modellbildung von einer konstanten Wellengeschwindigkeit in der Schicht aus, es wird also der Fall eines stochastisch „homogenen“ Mediums betrachtet. Als Variable des Definitionsbereiches der Zufallsfunktion wurde bei dieser Beschreibung etwas unüblich, aber in Übereinstimmung mit dem vorigen Abschnitt, der Buchstabe  $t$  für den vertikalen Abstand von der unteren Schichtgrenze gewählt. Die Randbedingung  $X(0) = 1$  steht für eine einfallende Welle mit Amplitude 1.

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung  $\ddot{x}(t) + a^2x(t) = 0$  mit  $a > 0$  lautet

$$x(t) = k_1 \cos(at) + k_2 \sin(at), \quad k_1, k_2 \in \mathbb{R}.$$

Das Einsetzen der Randbedingungen liefert  $x(0) = 1 = k_1$  und

$$\dot{x}(h) = 0 = -a \sin(ah) + ak_2 \cos(ah) \quad \Rightarrow \quad k_2 = \frac{\sin(ah)}{\cos(ah)},$$

also existiert eine Lösung für diese Randwertaufgabe nur, wenn  $\cos(ah) \neq 0$  gilt, sie lautet dann

$$x(t) = \cos(at) + \frac{\sin(ah)}{\cos(ah)} \sin(at) = \frac{\cos(a(h - t))}{\cos(ah)}.$$

Der Betrag  $|x(h)|$  der gesuchten Funktion für  $t = h$  (entspricht der Erdoberfläche) gibt dann die Amplitude der Welle an der Erdoberfläche an. In diesem Zusammenhang sind zwei Größen von besonderer Bedeutung, die Resonanzfrequenzen und die Verstärkungsfunktion. Die Verstärkungsfunktion geben in Abhängigkeit von der Frequenz der einfallenden Welle die Amplitude der Welle an der Erdoberfläche an. Die Resonanzfrequenzen sind diejenigen Frequenzen, für die die Verstärkungsfunktion (lokale oder globale) Maxima annehmen. In diesem Fall einer Modellierung ohne Berücksichtigung von Dämpfung sind das genau die Stellen, in denen die Verstärkungsfunktion Polstellen besitzt und folglich keine Lösung existiert.

Setzen wir  $a = \frac{2\pi f}{c}$  ein, erhalten wir aus der Bedingung  $\cos(ah) = 0$  für die Nichtexistenz von Lösungen

$$ah = \frac{2\pi f_m h}{c} = \frac{\pi}{2} + m\pi \quad \Leftrightarrow \quad f_m = \frac{c}{4h} + m\frac{c}{2h}, \quad m \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}.$$

Von besonderer Bedeutung ist die Hauptresonanzfrequenz  $f_0 = \frac{c}{4h}$ .

In dem hier betrachteten Fall eines zufälligen Mediums ist die Hauptresonanzfrequenz eine Zufallsgröße, die sich als Quotient der Zufallsvariablen  $C$  und  $4H$  darstellen lässt,

$$F_0(\omega) = \frac{C(\omega)}{4H(\omega)}.$$

Die Verteilung und andere Kenngrößen lassen sich mit Hilfe der Methoden aus Abschnitt 1.2.1 bestimmen.

Die zufällige Verstärkungsfunktion kann mit

$$V(f, \omega) := \frac{1}{\left| \cos \left( \frac{2\pi f H(\omega)}{C(\omega)} \right) \right|}, \quad f \geq 0, \quad \omega \in \Omega,$$

als der Betrag der Lösung für  $t = H(\omega)$  in Abhängigkeit vom Parameter  $f \geq 0$  angegeben werden. Die Messbarkeit dieser Funktion bei fixierten Werten  $f$  folgt u.a. wieder aus obiger Darstellung.

Zur Berechnung der eindimensionalen Verteilungen für feste Werte  $f \geq 0$  sei  $x \geq 1$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} F_{V(f)}(x) &= \mathbf{P}(V(f) \leq x) = \mathbf{P} \left( \frac{1}{\left| \cos \left( \frac{2\pi f H}{C} \right) \right|} \leq x \right) = \mathbf{P} \left( \left| \cos \left( \frac{2\pi f H}{C} \right) \right| \geq \frac{1}{x} \right) \\ &= \mathbf{P} \left( \cos \left( \frac{2\pi f H}{C} \right) \geq \frac{1}{x} \right) + \mathbf{P} \left( \cos \left( \frac{2\pi f H}{C} \right) \leq -\frac{1}{x} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{P} \left( \frac{H}{C} \in \frac{1}{2\pi f} I_k(x) \right) \\ &= F_{\xi} \left( \frac{\arccos \left( \frac{1}{x} \right)}{2\pi f} \right) - F_{\xi}(0) + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ F_{\xi} \left( \frac{k}{2f} + \frac{\arccos \left( \frac{1}{x} \right)}{2\pi f} \right) - F_{\xi} \left( \frac{k}{2f} - \frac{\arccos \left( \frac{1}{x} \right)}{2\pi f} \right) \right]. \end{aligned}$$

Hier wurde der zufällige Quotient  $\frac{H}{C}$  mit  $\xi$  bezeichnet, eine stetige Verteilung von  $\xi$  angenommen und die Intervalle  $I_k(x)$  sind definiert durch  $I_0(x) = \left[ 0, \arccos \left( \frac{1}{x} \right) \right]$  und

$I_k(x) = \left[ k\pi - \arccos\left(\frac{1}{x}\right), k\pi + \arccos\left(\frac{1}{x}\right) \right]$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Damit lassen sich die eindimensionalen Verteilungen der zufälligen Verstärkungsfunktion auch durch die Verteilung der Zufallsvariable  $\xi = \frac{H}{C}$  berechnen. Analog können auch zwei- oder höherdimensionale Verteilungen berechnet werden, ebenso falls sie existieren die Momentenfunktionen, zum Beispiel die Erwartungswertfunktion.

# Kapitel 2

## Elemente der Theorie zufälliger Funktionen und der stochastischen Analysis

### 2.1 Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitstheorie

#### 2.1.1 Wahrscheinlichkeitsräume

Von den Zufallsgrößen und Zufallsfunktionen wird im Weiteren immer angenommen, dass sie auf einem Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$  definiert sind. Der Begriff eines Wahrscheinlichkeitsraumes ist ein grundlegender mathematischer Begriff in der Stochastik, der es erlaubt, viele Schlüsse exakt und relativ einfach durchzuführen. Bestandteile eines Wahrscheinlichkeitsraumes  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$  sind eine nichtleere Menge  $\Omega$ , eine  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{A}$  von Teilmengen dieser Menge  $\Omega$  und ein Wahrscheinlichkeitsmaß  $\mathbf{P}$  auf  $(\Omega, \mathcal{A})$ . Ein System (eine Menge)  $\mathcal{A}$  von Teilmengen der Menge  $\Omega$  wird dabei eine  $\sigma$ -Algebra genannt, wenn die Grundmenge  $\Omega$  und die leere Menge  $\emptyset$  zu  $\mathcal{A}$  gehören, mit einer Menge  $A \in \mathcal{A}$  auch deren Komplementmenge  $\Omega \setminus A$  in  $\mathcal{A}$  liegt und abzählbare Vereinigungen und Durchschnitte von Mengen aus  $\mathcal{A}$  wieder Elemente von  $\mathcal{A}$  sind, d. h. es gelten die Beziehungen

- $\forall A \in \mathcal{A} : A \subset \Omega;$
- $\Omega \in \mathcal{A}, \emptyset \in \mathcal{A};$
- $A \in \mathcal{A} \Rightarrow \Omega \setminus A \in \mathcal{A};$
- $A_n \in \mathcal{A}, n \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}, \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}.$

Die Elemente der  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{A}$  werden auch zufällige Ereignisse oder etwas abstrakter messbare Mengen genannt. Ein Paar  $(\Omega, \mathcal{A})$ , bestehend aus einer nichtleeren Menge  $\Omega$  und einer  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{A}$  von Teilmengen von  $\Omega$  heißt auch messbarer Raum oder Messraum. Das Wahrscheinlichkeitsmaß  $\mathbf{P}$  auf  $(\Omega, \mathcal{A})$  ist eine Abbildung, die jedem zufälligen Ereignis  $A \in \mathcal{A}$  eine reelle Zahl  $\mathbf{P}(A)$  zuordnet, wobei die folgenden Axiome erfüllt sein müssen.

- $0 \leq \mathbf{P}(A) \leq 1 \quad \forall A \in \mathcal{A};$
- $\mathbf{P}(\Omega) = 1;$

- für  $A_n \in \mathcal{A}, n \in \mathbb{N}, A_n \cap A_m = \emptyset$  falls  $n \neq m$ , gilt

$$\mathbf{P} \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_n),$$

wobei letztere Reihe immer (absolut) konvergiert.

Bei den allermeisten mathematischen Untersuchungen zu Zufallsmodellen wird der Wahrscheinlichkeitsraum nicht explizit angegeben. Dann wird angenommen, dass alle definierten und zu definierenden Größen auf einem ausreichend reichhaltigen (aber manchmal auch nicht zu „umfangreichen“) Wahrscheinlichkeitsraum definiert sind. Damit „lebt“ der Wahrscheinlichkeitsraum meist im Verborgenen, er ist auch nicht eindeutig bestimmt. Trotzdem ist er für die mathematisch exakte Modellierung äußerst nützlich. Würde man nur mit Verteilungen der auftretenden Zufallsvariablen und -funktionen arbeiten, würden viele Untersuchungen komplizierter werden.

Wenn in speziellen Situationen ein konkreter Wahrscheinlichkeitsraum verwendet werden soll, kann man diesen häufig folgendermaßen wählen.

Die Grundmenge  $\Omega = [0, 1] \subset \mathbb{R}$  ist das Intervall der reellen Zahlen zwischen 0 und 1. Als  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{A}$  wählen wir die  $\sigma$ -Algebra der BOREL-Mengen auf dem Intervall  $[0, 1]$ , dies ist die kleinste  $\sigma$ -Algebra, die alle offenen Teilintervalle (oder alle offenen Teilmengen, oder alle abgeschlossenen Teilintervalle, ...) enthält,  $\mathcal{A} = \mathcal{B}([0, 1])$ . Als Wahrscheinlichkeitsmaß auf diesem Raum kann man das LEBESGUE-Maß auf dem Intervall  $[0, 1]$  verwenden,  $\mathbf{P} = \mathbf{Leb}$ , damit beträgt das Maß (die Wahrscheinlichkeit) jedes Teilintervalls genau seiner Länge:  $\mathbf{Leb}([a, b]) = b - a$ . (Genauso kann man hier natürlich als Grundmenge das offene Intervall  $(0, 1)$  oder eines der halboffenen Intervalle  $(0, 1]$  oder  $[0, 1)$  betrachten.)

Weitere wichtige messbare Räume sind:

$(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ , die Menge der reellen Zahlen mit der  $\sigma$ -Algebra der BOREL-Mengen in  $\mathbb{R}$  (bezüglich der Topologie, die vom gewöhnlichen Abstand erzeugt wird) und  
 $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ ,  $d \in \mathbb{N}$ , der  $d$ -dimensionale euklidische Raum mit der  $\sigma$ -Algebra der BOREL-Mengen (bezüglich der gewöhnlichen euklidischen Topologie).

## 2.1.2 Zufallsgrößen

Eine reelle Zufallsgröße (Zufallsvariable)  $X$  ist eine messbare Abbildung von einem messbaren Raum  $(\Omega, \mathcal{A})$  (von einem Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ ) in die Menge der reellen Zahlen, ausgestattet mit der  $\sigma$ -Algebra der BOREL-Mengen, d. h. in den messbaren Raum  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ . Genauer gilt

$$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \quad \Omega \ni \omega \mapsto X(\omega) \in \mathbb{R}$$

mit

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\} = \{X \in B\} = X^{-1}(B) \in \mathcal{A}$$

für alle BOREL-Mengen  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ .

Diese mathematisch technische Bedingung bewirkt, dass die mathematischen Schlüsse exakt bleiben. In „angewandten“ stochastischen mathematischen Modellen werden häufig bestimmte Ausgangsgrößen als messbar angenommen, bei der Untersuchung des Modells auftretende weitere Zufallsgrößen sind dann unter nur schwachen und meistens natürlichen Restriktionen wieder messbar.

Als Verallgemeinerung des Begriffes der Zufallsgröße kann der Begriff eines Zufallselementes betrachtet werden. Ist  $(\mathcal{X}, \mathcal{S}_{\mathcal{X}})$  ein messbarer Raum, dann heißt die messbare Abbildung

$$X : \Omega \rightarrow \mathcal{X}, \quad \Omega \ni \omega \mapsto X(\omega) \in \mathcal{X}$$

mit

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\} = \{X \in B\} = X^{-1}(B) \in \mathcal{A}$$

für alle Mengen  $B \in \mathcal{S}_{\mathcal{X}}$  ein Zufallselement in  $(\mathcal{X}, \mathcal{S}_{\mathcal{X}})$  oder einfacher in  $\mathcal{X}$ .

Für die Gleichheit von Zufallsgrößen gibt es verschiedene mögliche Definitionen. Die wichtigste „starke“ Gleichheitsdefinition lautet wie folgt.

Zwei reelle Zufallsgrößen  $X_1, X_2$  auf einem Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$  heißen äquivalent oder f. s. gleich, falls

$$\mathbf{P}(\{\omega : X_1(\omega) = X_2(\omega)\}) = \mathbf{P}(X_1 = X_2) = 1$$

gilt, der mittlere Term ist dabei eine häufig verwendete verkürzte Schreibweise für den linken Ausdruck. Diese Gleichheit wird als

$$X_1 = X_2 \quad \text{f. s.}$$

geschrieben. Es ist leicht zu sehen, dass in der Menge aller reellen Zufallsvariablen auf einem fixierten Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$  die Relation

$$X_1 \sim X_2 \Leftrightarrow X_1 = X_2 \quad \text{f. s.}$$

eine Äquivalenzrelation ist. Die Menge der Äquivalenzklassen von Zufallsvariablen bildet den Raum  $L^0(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P}; \mathbb{R})$ .

Häufig werden bei der Untersuchung von mathematischen Modellen fast sicher gleiche Zufallsvariablen miteinander identifiziert (als gleich angesehen), dies entspricht der Arbeit mit Äquivalenzklassen. Manchmal ist jedoch etwas Vorsicht geboten, so ist z. B. für eine Äquivalenzklasse bei einem festen Wert  $\omega \in \Omega$  kein „Funktionswert“ definiert. Im Rahmen der Betrachtung von Äquivalenzklassen bzw. der Identifizierung von fast sicher gleichen Zufallsgrößen ist es auch möglich, mit Zufallsvariablen zu arbeiten, die nicht für alle  $\omega \in \Omega$  definiert sind, sondern nur auf einer Menge  $\Omega^* \subset \Omega$  vom Maß 1 ( $\mathbf{P}(\Omega^*) = 1$ ).

Da im Allgemeinen die Zufallsvariablen nicht als konkrete Abbildungen des Wahrscheinlichkeitsraumes in die Menge der reellen Zahlen gegeben sind, wird die fast sichere Gleichheit von Zufallsvariablen meistens für aus (als gegeben angesehene) Basisgrößen berechnete untersucht.

Die Summe, die Differenz, das Produkt, der Quotient (wenn der Nenner ungleich Null ist) von zwei Zufallsvariablen sind wieder Zufallsvariablen, diese Operationen sind auch verträglich mit der Äquivalenzklassenbildung.

Jede Zufallsgröße  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  (jede Äquivalenzklasse von f. s. gleichen Zufallsgrößen) erzeugt ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf dem Wertebereich  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ , welches die Verteilung  $P_X$  der Zufallsgröße genannt wird,

$$P_X(B) := \mathbf{P}(\{\omega : X(\omega) \in B\}) = \mathbf{P}(X \in B) = \mathbf{P}(X^{-1}(B)), \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Die Verteilung einer Zufallsgröße  $X$  wird eindeutig bestimmt und beschrieben durch die Verteilungsfunktion  $F_X(\cdot) : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ ,

$$F_X(x) := \mathbf{P}(\{\omega : X(\omega) \leq x\}) = \mathbf{P}(X \leq x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Grundlegende Eigenschaften der Verteilungsfunktion  $F_X(\cdot)$  sind

- (i)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} F_X(x) = 1;$
- (ii)  $F_X(\cdot)$  ist monoton nicht fallend;
- (iii)  $F_X(\cdot)$  ist rechtsseitig stetig auf der gesamten reellen Achse.

Jede reelle Funktion  $\mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  mit diesen Eigenschaften ist Verteilungsfunktion einer Zufallsgröße. (Verteilungsfunktionen für Zufallsgrößen können auch durch die Beziehung  $\tilde{F}_X(x) = \mathbf{P}(X < x)$  definiert werden, dann sind diese Funktionen linksseitig stetig, die anderen Eigenschaften bleiben erhalten.)

Mit Hilfe der Verteilung bzw. der Verteilungsfunktion lässt sich ein schwächerer Begriff der Gleichheit von Zufallsgrößen definieren. Zwei Zufallsgrößen  $X_1 : (\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mathbf{P}_1) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(R))$  und  $X_2 : (\Omega_2, \mathcal{A}_2, \mathbf{P}_2) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(R))$  (d. h. sie können auf verschiedenen Wahrscheinlichkeitsräumen definiert sein) heißen identisch verteilt, falls

$$F_{X_1}(x) = F_{X_2}(x) \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

oder äquivalent dazu

$$P_{X_1}(B) = P_{X_2}(B) \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Es gibt verschiedene Typen von Verteilungen, Verteilungsfunktionen bzw. reellen Zufallsvariablen, und zwar absolut stetige, diskrete und singulär stetige (und Mischungen dieser Typen).

Eine Verteilungsfunktion  $F_X(\cdot)$  ist absolut stetig, wenn eine integrierbare Funktion  $p_X(\cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  existiert mit

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x p_X(u) du, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Dabei ist im Allgemeinen ein LEBESGUE-Integral gemeint, sehr häufig sind diese Funktionen aber auch RIEMANN-integrierbar. Diese Funktion  $p_X(\cdot)$  heißt Verteilungsdichte, für sie gelten  $p_X(u) \geq 0$  für fast alle  $u \in \mathbb{R}$  bezüglich des LEBESGUE-Maßes auf  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  und

$$\int_{-\infty}^{\infty} p_X(u) du = 1.$$

In den Punkten der reellen Zahlengeraden, in denen für eine absolut stetige Verteilungsfunktion die Ableitung existiert, ist diese Ableitung der Wert der Dichtefunktion:

$$p_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}.$$

Genauer gesagt sind zwei Funktionen  $p_1, p_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , die für fast alle  $u \in \mathbb{R}$  bezüglich des LEBESGUE-Maßes übereinstimmen, entweder beide oder keine von beiden Dichtefunktion zur gegebenen Verteilungsfunktion, wir können also auch hier wieder Äquivalenzklassen betrachten. Die Funktion, deren Funktionswerte die Werte der Ableitung der Verteilungsfunktion sind (in den Punkten, in denen die Ableitung existiert), ist ein Vertreter dieser Äquivalenzklasse.

Die Verteilungsfunktion bzw. Verteilung ist eine sehr umfangreiche Charakteristik von Zufallsgrößen. Sehr häufig kann oder muss man mit einfacheren, abgeleiteten Charakteristiken auskommen, die dann die Verteilung der Ausgangsgröße nicht mehr vollständig beschreiben. Eine wichtige Klasse derartiger Charakteristiken sind die Momente der Zufallsgröße.

Das erste Moment oder der Erwartungswert einer Zufallsgröße  $X$  kann als das abstrakte LEBESGUE-Integral bezüglich  $\mathbf{P}$  oder als STIELTJES-LEBESGUE-Integral bezüglich  $P_X$  oder  $F_X$  definiert werden,

$$\mathbf{E}\{X\} = \int_{\Omega} X(\omega) \mathbf{P}(d\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x dF_X(x),$$

vorausgesetzt eines dieser Integrale existiert. Für nichtnegative Zufallsgrößen  $Y$  gilt dabei

$$\mathbf{E}\{Y\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n2^n-1} \frac{k}{2^n} \mathbf{P}\left(\frac{k}{2^n} < Y \leq \frac{k+1}{2^n}\right) + n \mathbf{P}(Y > n).$$

Für beliebige Zufallsgrößen  $X$  werden die Erwartungswerte vom positiven Anteil  $X_+ = \sup\{X, 0\}$  und vom negativen Anteil  $X_- = \sup\{-X, 0\}$  berechnet. Sind beide endlich, dann gilt nach Definition  $\mathbf{E}\{X\} = \mathbf{E}\{X_+\} - \mathbf{E}\{X_-\}$ . Das  $k$ -te Moment ist der Erwartungswert der Zufallsgröße  $X^k$ , d. h.

$$\mathbf{E}\{X^k\} = \int_{\Omega} X^k(\omega) \mathbf{P}(d\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x^k dF_X(x).$$

Für absolut stetige Zufallsgrößen kann das  $k$ -te Moment auch mit Hilfe der Dichtefunktion berechnet werden,

$$\mathbf{E}\{X^k\} = \int_{-\infty}^{\infty} x^k p_X(x) dx.$$

Diese Momente existieren nicht für alle Zufallsgrößen, die Existenz (die Endlichkeit) der Momente erfordert ein bestimmtes „Verhalten der Verteilung“ für betragsmäßig große Werte. Die wichtigsten Momente, die sehr häufig in stochastischen Modellen verwendet werden, sind der Erwartungswert oder Mittelwert  $\mathbf{E}\{X\}$ , das zweite absolute Moment

$$\mathbf{E}\{X^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 dF_X(x)$$

und die Varianz als zentrales Moment zweiter Ordnung

$$\mathbf{Var}\{X\} = \mathbf{E}\{(X - \mathbf{E}\{X\})^2\} = \mathbf{E}\{X^2\} - (\mathbf{E}\{X\})^2.$$

Die nichtnegative Quadratwurzel aus der Varianz  $\sqrt{\mathbf{Var}\{X\}}$  wird Standardabweichung der Zufallsgröße  $X$  genannt.

Die Verteilung (die Verteilungsfunktion) einer reellwertigen Zufallsgröße kann eindeutig auch durch die zugehörige charakteristische Funktion  $\varphi_X(\cdot)$  beschrieben werden. Sie ist eine komplexwertige Funktion einer reellen Veränderlichen und wird definiert durch

$$\begin{aligned} \varphi_X(u) &:= \mathbf{E}\{\exp(iuX)\} = \mathbf{E}\{\cos(uX) + i \sin(uX)\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{iux} dF_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(ux) dF_X(x) + i \int_{-\infty}^{\infty} \sin(ux) dF_X(x). \end{aligned}$$

Die charakteristische Funktion existiert für jede Verteilungsfunktion (und damit Zufallsgröße), sie ist stetig, beschränkt und nichtnegativ definit, d. h. für beliebige  $n \in \mathbb{N}$  und beliebige Auswahlen  $u_i \in \mathbb{R}, z_i \in \mathbb{C}, i = 1, \dots, n$ , gilt

$$\sum_{i,j=1}^n \varphi_X(u_i - u_j) z_i \overline{z_j} \geq 0.$$

Hier bezeichnet  $\overline{z_j}$  die konjugiert komplexe Zahl zu  $z_j \in \mathbb{C}$ .

Eine Funktion  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  heißt BOREL-Funktion, wenn sie  $\mathcal{B}(\mathbb{R})/\mathcal{B}(\mathbb{R})$ -messbar ist, d. h.

$$g^{-1}(B) = \{x \in \mathbb{R} : g(x) \in B\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Ist  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine BOREL-Funktion und  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  eine reelle Zufallsgröße, dann ist auch  $Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, Y(\omega) := g(X(\omega))$  eine reelle Zufallsgröße. Existiert der Erwartungswert, dann gilt

$$\mathbf{E}\{Y\} = \mathbf{E}\{g(X)\} = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) dF_X(x).$$

### 2.1.3 Zufallsvektoren

Eine endliche Anzahl von reellen Zufallsvariablen  $X_1, \dots, X_n$  auf einem Wahrscheinlichkeitsraum bilden einen Zufallsvektor  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^T$ . Dieser kann als Zeilen- oder Spaltenvektor geschrieben werden, häufig wird mit Spaltenvektoren gearbeitet. Mit  $\cdot^T$  bezeichnen wir hier die Transponierte eines Vektors oder einer Matrix. Eine äquivalente Definition eines Zufallsvektors  $\mathbf{X}$  kann als messbare Abbildung  $\Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  (der  $n$ -dimensionale euklidische Raum  $\mathbb{R}^n$  wird dabei mit der  $\sigma$ -Algebra der BOREL-Mengen  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ ) ausgestattet) gegeben werden. Inhaltlich werden mit einem  $n$ -dimensionalen Zufallsvektor  $n$  zu messende zufällige Größen in einer Zufallssituation modelliert. Für Zufallsvektoren ist die gemeinsame Verteilung der Komponenten  $X_1, \dots, X_n$  wichtig, da im Allgemeinen durch das Annehmen von Werten aus bestimmten Bereichen für eine Komponente die Wahrscheinlichkeiten (Wahrscheinlichkeitsverteilungen) für andere Komponenten beeinflusst werden. Diese gemeinsame Verteilung wird durch die gemeinsame Verteilungsfunktion (Verbundverteilungsfunktion) beschrieben,

$$F_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_n) = F_{(X_1, \dots, X_n)}(x_1, \dots, x_n) = \mathbf{P}(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n), \quad x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}.$$

Aus der Verbundverteilungsfunktion lassen sich die Randverteilungsfunktionen der einzelnen Komponenten oder von Teilvektoren bestimmen, so gilt zum Beispiel

$$F_{X_1}(x_1) = \lim_{x_2 \rightarrow \infty, \dots, x_n \rightarrow \infty} F_{(X_1, \dots, X_n)}(x_1, \dots, x_n), \quad x_1 \in \mathbb{R}.$$

Die Verteilung  $P_{\mathbf{X}}$  des  $n$ -dimensionalen Zufallsvektors  $\mathbf{X}$  ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf dem messbaren Raum  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ , definiert durch

$$P_{\mathbf{X}}(B) = \mathbf{P}(X^{-1}(B)) \quad \text{für } B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n).$$

Für die speziellen Mengen  $B = (-\infty, x_1] \times \dots \times (-\infty, x_n]$  mit  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$  gilt die Beziehung  $P_{\mathbf{X}}(B) = F_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_n)$ .

Ein Zufallsvektor  $\mathbf{X}$  besitzt eine absolut stetige Verteilung, wenn eine gemeinsame Dichtefunktion  $p_{\mathbf{X}}$  existiert, d. h. eine nichtnegative messbare Funktion mit der Eigenschaft

$$F_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_n} p_{\mathbf{X}}(u_1, \dots, u_n) du_1 \dots du_n,$$

auch hier wird dieses Integral im Allgemeinen als  $n$ -dimensionales LEBESGUE-Integral verstanden, in vielen Fällen kann es jedoch auch als RIEMANN-Integral definiert werden. In den Punkten, wo die Ableitung existiert, gilt

$$p_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_n) = \frac{\partial^n F_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_1 \dots \partial x_n}.$$

In diesem Fall sind die Randverteilungsdichten aus der gemeinsamen Dichtefunktion bestimmbar, zum Beispiel gilt für die Dichtefunktion der ersten Komponente  $X_1$

$$p_{X_1}(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} p_{\mathbf{X}}(x_1, u_2, \dots, u_n) du_2 \dots du_n.$$

Wie im Fall von Zufallsgrößen kann eine einfachere, unvollständige Charakterisierung der Verteilung eines Zufallsvektors über abgeleitete Charakteristiken, insbesondere über die Momente, erfolgen. Dabei spielen die Momente erster und zweiter Ordnung eine besondere Rolle. Im Erwartungswertvektor

$$\mathbf{E}\{\mathbf{X}\} := (\mathbf{E}\{X_1\}, \dots, \mathbf{E}\{X_n\})^T$$

werden die Erwartungswerte der einzelnen Komponenten zusammengefasst. Die Kovarianz zweier Komponenten (oder allgemein zweier Zufallsgrößen) ist definiert als

$$\mathbf{Cov}\{X_i, X_j\} := \mathbf{E}\{(X_i - \mathbf{E}\{X_i\})(X_j - \mathbf{E}\{X_j\})\} = \mathbf{E}\{X_i X_j\} - \mathbf{E}\{X_i\}\mathbf{E}\{X_j\},$$

die Größe  $\mathbf{E}\{X_i X_j\}$  heißt zweites gemischtes Moment von  $X_i$  und  $X_j$ . Die Kovarianzen aller Komponenten bilden die  $n \times n$ -Kovarianzmatrix des Zufallsvektors  $\mathbf{X}$ ,

$$\mathbf{Cov}\{\mathbf{X}\} = (\mathbf{Cov}\{X_i, X_j\})_{i,j=1,\dots,n}.$$

Diese ist symmetrisch und nichtnegativ definit, d. h. für alle  $n$ -dimensionalen Spaltenvektoren  $\mathbf{u}$  gilt  $\mathbf{u}^T \mathbf{Cov}\{\mathbf{X}\} \mathbf{u} \geq 0$ . Für einen zufälligen Spaltenvektor  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^T$  können wir auch schreiben

$$\mathbf{Cov}\{\mathbf{X}\} = \mathbf{E}\left\{[\mathbf{X} - \mathbf{E}\{\mathbf{X}\}][\mathbf{X} - \mathbf{E}\{\mathbf{X}\}]^T\right\}.$$

Der Korrelationskoeffizient zweier reeller Zufallsgrößen  $X_i, X_j$  ist unter den Voraussetzungen  $\mathbf{Var}\{X_i\} = \mathbf{Cov}\{X_i, X_i\} > 0, \mathbf{Var}\{X_j\} > 0$  definiert durch

$$\rho(X_i, X_j) := \frac{\mathbf{Cov}\{X_i, X_j\}}{\sqrt{\mathbf{Var}\{X_i\}\mathbf{Var}\{X_j\}}}.$$

Es gilt immer

$$|\rho(X_i, X_j)| \leq 1,$$

im Fall von  $|\rho(X_i, X_j)| = 1$  existieren reelle Zahlen  $a_i, b_j$  und  $c_0$ , so dass  $\mathbf{P}(a_i X_i + b_j X_j = c_0) = 1$  gilt, d. h. es existiert (genau) dann ein linearer (affin linearer) Zusammenhang zwischen beiden Zufallsgrößen.

Zwei Komponenten eines Zufallsvektors (zwei Zufallsgrößen)  $X_i$  und  $X_j$  heißen unkorreliert, falls  $\mathbf{Cov}\{X_i, X_j\} = 0$  gilt.

Teilweise sind auch andere gemischte Momente der Art  $\mathbf{E}\{X_1^{k_1} X_2^{k_2} \dots X_n^{k_n}\}$  wichtig, hier heißt die Zahl  $k_1 + k_2 + \dots + k_n$  Ordnung des Moments.

Die charakteristische Funktion  $\varphi_{\mathbf{X}}$  eines Zufallsvektors  $\mathbf{X}$  ist definiert durch

$$\varphi_{\mathbf{X}}(u_1, \dots, u_n) = \mathbf{E}\{\mathrm{e}^{i(u_1 X_1 + \dots + u_n X_n)}\}.$$

Sie ist eine komplexwertige Funktion von  $n$  reellen Veränderlichen und besitzt analoge Eigenschaften wie charakteristische Funktionen für reellwertige Zufallsgrößen. Insbesondere bestimmt eine charakteristische Funktion vollständig und eindeutig die Verteilung des Zufallsvektors.

Die Komponenten eines Zufallsvektors  $(X_1, \dots, X_n)^T$  sind vollständig (oder in Gesamtheit) stochastisch unabhängig, wenn gilt

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}(\{X_1 \in B_1\} \cap \dots \cap \{X_n \in B_n\}) &= \mathbf{P}(X_1 \in B_1) \cdot \dots \cdot \mathbf{P}(X_n \in B_n), \quad B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), \\
 &\Downarrow \\
 F_{(X_1, \dots, X_n)}(x_1, \dots, x_n) &= F_{X_1}(x_1) \cdot \dots \cdot F_{X_n}(x_n), \quad x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}, \\
 &\Downarrow \\
 \varphi_{(X_1, \dots, X_n)}(u_1, \dots, u_n) &= \varphi_{X_1}(u_1) \cdot \dots \cdot \varphi_{X_n}(u_n), \quad u_1, \dots, u_n \in \mathbb{R}, \\
 &\Downarrow \quad \text{falls absolut stetig} \\
 p_{(X_1, \dots, X_n)}(x_1, \dots, x_n) &= p_{X_1}(x_1) \cdot \dots \cdot p_{X_n}(x_n), \quad x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}.
 \end{aligned}$$

In diesem Fall braucht man nur die eindimensionalen Randverteilungen zu kennen, um die gemeinsame Verteilung angeben zu können. Dies ist günstig für viele Berechnungen. Sind die Komponenten eines Zufallsvektors nicht stochastisch unabhängig, reicht die Kenntnis der Randverteilungen nicht zur Bestimmung der gemeinsamen Verteilung aus.

Sind zwei Komponenten eines Zufallsvektors mit endlichen zweiten Momenten stochastisch unabhängig, dann sind diese auch unkorreliert. Die Umkehrung dieser Aussage gilt im Allgemeinen nicht, d. h. aus der Unkorreliertheit folgt im Allgemeinen nicht die Unabhängigkeit der entsprechenden Zufallsgrößen.

**Beispiel 5** Eine sehr wichtige und häufig anzutreffende Verteilung ist die Normalverteilung, die auch GAUSS-Verteilung genannt wird. Ein  $n$ -dimensionaler Zufallsvektor  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^T$  ist normalverteilt mit den Parametern  $\mathbf{m}$  und  $\mathbf{C}$ , geschrieben als  $\mathbf{X} \sim \mathcal{N}(\mathbf{m}, \mathbf{C})$ , falls für seine charakteristische Funktion gilt

$$\varphi_{\mathbf{X}}(\mathbf{u}) = \exp\left(i\mathbf{m}^T \mathbf{u} - \frac{1}{2}\mathbf{u}^T \mathbf{C} \mathbf{u}\right), \quad \mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)^T \in \mathbb{R}^n.$$

Dabei ist  $\mathbf{m}$  ein  $n$ -dimensionaler (Spalten-)Vektor und  $\mathbf{C}$  eine symmetrische, nichtnegativ definite  $n \times n$  Matrix, und zwar gelten

$$\mathbf{m} = \mathbf{E}\{\mathbf{X}\}, \quad \mathbf{C} = \mathbf{Var}\{\mathbf{X}\}.$$

Falls  $\det \mathbf{C} \neq 0$  (folglich  $\det \mathbf{C} > 0$ ) gilt, existiert die inverse Matrix  $\mathbf{C}^{-1}$  und die Verteilung ist absolut stetig mit der Dichtefunktion

$$p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det \mathbf{C}}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{m})^T \mathbf{C}^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{m})\right), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Zufallsvektoren, die fast sicher konstant sind, etwa  $\mathbf{X} = \mathbf{m}$  f. s., können nach dieser Definition mit zu den normalverteilten Zufallsvektoren gezählt werden. Es gilt die folgende äquivalente Definition von normalverteilten Zufallsvektoren.

Ein Zufallsvektor  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^T$  ist genau dann normalverteilt, wenn für beliebige reelle Vektoren  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)^T \in \mathbb{R}^n$  die Größen  $\mathbf{u}^T \mathbf{X} = u_1 X_1 + \dots + u_n X_n$  reellwertige normalverteilte Zufallsvariablen sind.

Setzt man hier für  $\mathbf{u}$  Vektoren ein, bei denen eine Komponente gleich 1 und die anderen gleich 0 sind, sieht man, dass für normalverteilte Zufallsvektoren die Randverteilungen eindimensionale Normalverteilungen sind. Der umgekehrte Schluss ist im Allgemeinen nicht richtig, d. h. es gibt nicht-normalverteilte Zufallsvektoren, deren eindimensionale Randverteilungen GAUSSsch sind. Ein Beispiel kann folgendermaßen konstruiert werden. Es seien  $\xi$

und  $\eta$  unabhängige, standard-normalverteilte reelle Zufallsgrößen,  $\xi, \eta \sim \mathcal{N}(0, 1)$ . Werden nun zwei Zufallsgrößen vermittels

$$X_1 = \xi, \quad X_2 = \begin{cases} |\eta|, & \text{falls } \xi \geq 0, \\ -|\eta|, & \text{falls } \xi < 0, \end{cases}$$

definiert, dann sind für den Zufallsvektor  $(X_1, X_2)$  die einzelnen Komponenten normalverteilt (der Nachweis kann mit Hilfe der Formel der totalen Wahrscheinlichkeit erfolgen), der Zufallsvektor ist jedoch nicht normalverteilt (es existiert eine Dichtefunktion, die jedoch nur in zwei Quadranten ungleich Null ist). Sind die Komponenten eines Zufallsvektors jedoch unabhängige normalverteilte Zufallsgrößen, dann ist auch der gesamte Vektor normalverteilt.

Weiterhin gilt für GAUSSsche Zufallsvektoren:

Sei  $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)^T \in \mathbb{R}^n$  und  $\mathbf{A} = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$  eine reelle  $n \times n$  Matrix. Ist  $\mathbf{X}$  ein normalverteilter Zufallsvektor,  $\mathbf{X} \sim \mathcal{N}(\mathbf{m}, \mathbf{C})$ , dann ist der Zufallsvektor  $\mathbf{Y} := \mathbf{a} + \mathbf{AX}$  normalverteilt mit Parametern  $\mathbf{E}\{\mathbf{Y}\} = \mathbf{a} + \mathbf{Am}$  und  $\mathbf{Cov}\{\mathbf{Y}\} = \mathbf{AC}\mathbf{A}^T$ , d. h.  $\mathbf{Y} \sim \mathcal{N}(\mathbf{a} + \mathbf{Am}, \mathbf{AC}\mathbf{A}^T)$ .

In den folgenden Punkten werden einige Eigenschaften von normalverteilten Zufallsvektoren angegeben, die bei der häufigen Anwendung dieser Verteilung eine Rolle spielen.

- Bei linearen Operationen bleibt der Verteilungstyp erhalten (siehe oben).
- Die Summe von unabhängigen GAUSSschen Zufallsvektoren ist wieder ein GAUSSscher Zufallsvektor.
- Die Normalverteilung tritt unter bestimmten Voraussetzungen als Grenzverteilung einer geeignet normierten Summe von unabhängigen Zufallsvektoren auf (vgl. Zentralen Grenzverteilungssatz).
- Grenzwerte von normalverteilten Zufallsvektoren sind wieder normalverteilt.
- Die gemeinsame Verteilung (und damit auch alle Momente etc.) eines normalverteilten Zufallsvektors ist durch die Erwartungswerte und Kovarianzen der Komponenten eindeutig bestimmt.
- Sind zwei Komponenten  $X_i, X_j$  eines GAUSSschen Zufallsvektors unkorreliert, d. h. falls  $\mathbf{Cov}\{X_i, X_j\} = 0$ , dann sind diese beiden Komponenten (Zufallsgrößen)  $X_i$  und  $X_j$  auch stochastisch unabhängig.

◊

## 2.2 Zufallsfunktionen

### 2.2.1 Zufallsfunktionen, endlichdimensionale Verteilungen, Momentenfunktionen

Es sei  $\mathbb{T}$  eine nichtleere Menge (die hier typischerweise unendlich viele Elemente enthält).

**Definition 6** Eine Familie  $(X(t); t \in \mathbb{T})$  von reellen Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$  heißt reelle Zufallsfunktion auf  $\mathbb{T}$  (mit Definitionsgebiet  $\mathbb{T}$ ).

Ist das Definitionsbereich  $\mathbb{T}$  ein Intervall der reellen Zahlengeraden, spricht man auch auch von einem Zufallsprozess mit stetiger Zeit, besteht  $\mathbb{T}$  jedoch aus höchstens abzählbar vielen Punkten, von einem Zufallsprozess mit diskreter Zeit. Insbesondere bezeichnet man Zufallsfunktionen mit  $\mathbb{T} = \mathbb{N}$  oder  $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$  o. ä. als Zufallsfolge. Für Mengen  $\mathbb{T} \subset \mathbb{R}^d$ ,  $d \in \{2, 3, \dots\}$ , nutzt man mitunter die Bezeichnung Zufallsfeld, es gibt auch weitere und andere Bezeichnungen.

Je nachdem, welchen Verteilungstypen die Verteilungen der einzelnen Zufallsgrößen  $X(t)$ ,  $t \in \mathbb{T}$ , angehören, unterscheiden sich die mathematischen Hilfsmittel zur Untersuchung. Sind alle Zufallsgrößen absolut stetig, wird manchmal von stetigen Zufallsprozessen gesprochen, bei Vorliegen von diskreten Verteilungen der Werte  $X(t)$ ,  $t \in \mathbb{T}$ , von diskreten Zufallsfunktionen. Zwischen diesen Typen existieren viele Beziehungen, die bei der Untersuchung entsprechender stochastischer Modelle auch ausgenutzt werden.

Ganz analog zu reellen Zufallsvariablen können natürlich auch für Zufallsfunktionen andere Wertebereiche betrachtet werden. Auf diese Weise können komplexwertige oder vektorwertige (hier meint man meist endlichdimensionale) Zufallsfunktionen definiert und untersucht werden. Auch allgemeinere Wertebereiche (auch Phasenräume genannt)  $(\mathcal{X}, \mathcal{S}(\mathcal{X}))$  können behandelt werden.

Laut der Definition von Zufallsfunktionen erhält man für fixierte Werte  $t \in \mathbb{T}$  jeweils eine Zufallsgröße, insgesamt also eine indizierte Menge (eine Familie) von Zufallsvariablen. Wird der „Wert“  $\omega \in \Omega$  festgehalten, ergibt sich eine Funktion  $X(\cdot, \omega) : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ , die Realisierung oder Trajektorie oder Pfad der Zufallsfunktion genannt wird. Damit kann eine Zufallsfunktion auch als Menge aller Realisierungen betrachtet werden, zur Definition von Wahrscheinlichkeiten sind dann weiterführende mathematische Ergebnisse notwendig. Teilweise ist es auch günstig, von vornherein eine Zufallsfunktion als eine Funktion der beiden Veränderlichen  $t \in \mathbb{T}$  und  $\omega \in \Omega$  zu betrachten, d. h.  $X : \mathbb{T} \times \Omega \ni (t, \omega) \mapsto X(t, \omega) \in \mathbb{R}$ .

Eine Charakterisierung von Zufallsfunktionen kann durch die Familie der endlichdimensionalen Verteilungen erfolgen. Dazu wählen wir eine beliebige Anzahl  $n \in \mathbb{N}$  und Punkte  $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{T}$  und betrachten die gemeinsamen Verteilungen der zufälligen Vektoren  $(X(t_1), \dots, X(t_n))$ . Diese können z. B. durch die gemeinsamen Verteilungsfunktionen beschrieben werden,

$$F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n) = F_{(X(t_1), \dots, X(t_n))}(x_1, \dots, x_n) = \mathbf{P}(X(t_1) \leq x_1, \dots, X(t_n) \leq x_n).$$

Die Gesamtheit aller dieser Verteilungen bzw. Verteilungsfunktionen bildet gerade die Familie der endlichdimensionalen Verteilungen bzw. Verteilungsfunktionen und bestimmt die „Verteilung“ der Zufallsfunktion  $(X(t); t \in \mathbb{T})$ . Die endlichdimensionalen Verteilungen einer Zufallsfunktion  $(X(t); t \in \mathbb{T})$  erfüllen automatisch die beiden folgenden Verträglichkeitsbedingungen.

(i) Ist  $(i_1, \dots, i_n)$  eine Permutation von  $(1, \dots, n)$ , dann gilt

$$F_{t_{i_1}, \dots, t_{i_n}}(x_{i_1}, \dots, x_{i_n}) = F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n), \quad x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}.$$

(ii) Für  $1 \leq m < n$  und  $x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}$  gilt

$$F_{t_1, \dots, t_m}(x_1, \dots, x_m) = \lim_{x_{m+1} \rightarrow \infty, \dots, x_n \rightarrow \infty} F_{t_1, \dots, t_m, t_{m+1}, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_n).$$

Bemerkenswert ist, dass man von einer vollständigen Familie von derartigen Verteilungsfunktionen nur diese beiden Bedingungen fordern muss, damit diese Familie auch wirklich eine Familie von endlichdimensionalen Verteilungsfunktionen zu einer Zufallsfunktion ist.

**Satz 7 (Satz von KOLMOGOROV)**

Es sei  $\mathbb{T}$  eine beliebige nichtleere Menge und gegeben sei eine Familie von endlichdimensionalen Verteilungsfunktionen  $F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n)$  mit beliebigen  $n \in \mathbb{N}$  und  $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{T}$ , welche die beiden Verträglichkeitsbedingungen (i) und (ii) erfüllen.

Dann existiert ein Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$  und eine Zufallsfunktion  $(X(t); t \in \mathbb{T})$  darauf, für welche die gegebene Familie von Verteilungsfunktionen genau die Familie der endlichdimensionalen Verteilungsfunktionen ist.

Die Familie der endlichdimensionalen Verteilungen ist naturgemäß ein sehr umfangreiches Objekt. Um konkrete Aussagen machen zu können versucht man, die gemeinsamen Verteilungen höherer Dimension aus denen geringerer Dimension, im Allgemeinen aus eindimensionalen und zweidimensionalen Verteilungen, zu konstruieren. Darauf aufbauend werden verschiedene Klassen von Zufallsprozessen behandelt, so z. B. die Prozesse mit unabhängigen Werten (in diskreter Zeit), Zufallsprozesse mit unabhängigen Zuwächsen oder MARKOV-Prozesse.

**Bemerkung.** Eine Zufallsfunktion kann auch als Maß in einem Funktionenraum betrachtet werden. So kann man z. B. als Raum der Elementarereignisse die Menge aller Funktionen auf  $\mathbb{T}$  wählen,

$$\Omega = \mathbb{R}^{\mathbb{T}} = \{\omega(\cdot) : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \omega(t) \in \mathbb{R}\}.$$

Eine geeignete  $\sigma$ -Algebra ist in diesem Fall die von den sogenannten Zylindermengen, d. h. von Mengen der Art

$$Z_{t_1, \dots, t_n}(B_1, \dots, B_n) = \{\omega(\cdot) \in \mathbb{R}^{\mathbb{T}} : \omega(t_1) \in B_1, \dots, \omega(t_n) \in B_n\}$$

mit  $B_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , erzeugte  $\sigma$ -Algebra, die hier mit  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{T}})$  bezeichnet werden soll. Ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß  $\mathbf{P}$  auf dem messbaren Raum  $(\mathbb{R}^{\mathbb{T}}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{T}}))$  gegeben, gilt für den durch

$$X(t, \omega) := \omega(t), \quad t \in \mathbb{T}, \omega \in \mathbb{R}^{\mathbb{T}},$$

definierten (unmittelbar gegebenen) Zufallsprozess

$$\mathbf{P}(Z_{t_1, \dots, t_n}(B_1, \dots, B_n)) = \mathbf{P}(X(t_1) \in B_1, \dots, X(t_n) \in B_n),$$

d. h. das Maß  $\mathbf{P}$  liefert sofort die endlichdimensionalen Verteilungen. Andererseits kann man ausgehend von einer Familie der endlichdimensionalen Verteilungen das entsprechende Maß auf  $(\mathbb{R}^{\mathbb{T}}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{T}}))$  definieren. Dieses wird auch die Verteilung der entsprechenden Zufallsfunktion genannt.

Eine öfters verwendete Art der Definition von Zufallsfunktionen besteht darin, in einer reellwertigen Funktion mit bestimmten Parametern diese Parameter durch zufällige Variablen zu ersetzen. So können zum Beispiel zufällige Polynome

$$X_1(t) := A_0 + A_1 t + \dots + A_n t^n$$

mit Zufallsvariablen  $A_0, A_1, \dots, A_n$  oder zufällige trigonometrische Polynome der Gestalt  $X_2(t) = A_0 \cos(A_1 t + A_2)$  mit Zufallsgrößen  $A_0, A_1, A_2$  betrachtet werden. Entsprechendes gilt natürlich auch für komplexwertige oder vektorwertige Zufallsfunktionen.

Analog zu Zufallsgrößen und Zufallsvektoren kann eine einfachere und unvollständige Beschreibung der Verteilung einer Zufallsfunktion  $(X(t); t \in \mathbb{T})$  durch abgeleitete Kenngrößen,

vor allem Momentenfunktionen, erfolgen. Dabei ist als wichtigste sicher die Erwartungswertfunktion

$$m_X(t) := \mathbf{E}\{X(t)\}, \quad t \in \mathbb{T},$$

zu nennen. Sie ist für eine reelle Zufallsfunktion eine reellwertige Funktion der Variablen  $t \in \mathbb{T}$  und existiert, wenn für alle Zufallsgrößen  $X(t), t \in \mathbb{T}$ , der Erwartungswert endlich ist. Für Momente zweiter Ordnung kann als Funktion einer Variablen die Varianzfunktion

$$v_X(t) := \mathbf{Var}\{X(t)\} = \mathbf{E}\{[X(t) - m_X(t)]^2\} = \mathbf{E}\{X^2(t)\} - m_X^2(t), \quad t \in \mathbb{T},$$

definiert werden. Weiterhin sind die Kovarianzfunktion

$$C_X(t_1, t_2) := \mathbf{E}\{X(t_1)X(t_2)\}, \quad t_1, t_2 \in \mathbb{T},$$

und die Korrelationsfunktion

$$\begin{aligned} R_X(t_1, t_2) &:= \mathbf{Cov}\{X(t_1), X(t_2)\} = \mathbf{E}\{[X(t_1) - m_X(t_1)][X(t_2) - m_X(t_2)]\} \\ &= C_X(t_1, t_2) - m_X(t_1)m_X(t_2), \quad t_1, t_2 \in \mathbb{T}, \end{aligned}$$

von Interesse (die Begriffe werden in der Literatur nicht einheitlich gebraucht). Letztere beiden Funktionen sind nichtnegativ definit, d. h. für beliebige  $n \geq 2$ ,  $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{T}$  und komplexe Zahlen  $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$  gilt

$$\sum_{i,j=1}^n C_X(t_i, t_j) z_i \overline{z_j} \geq 0, \quad \sum_{i,j=1}^n R_X(t_i, t_j) z_i \overline{z_j} \geq 0.$$

Insbesondere sind diese Funktionen damit symmetrisch, d. h.

$$C_X(t_1, t_2) = C_X(t_2, t_1), \quad R_X(t_1, t_2) = R_X(t_2, t_1), \quad t_1, t_2 \in \mathbb{T},$$

dies folgt auch direkt aus den Definitionen.

Die Erwartungswertfunktion kann eine beliebige reelle Funktion auf  $\mathbb{T}$  sein, die Varianzfunktion eine beliebige nichtnegative Funktion.

Ein wichtiges Beispiel für Zufallsfunktionen sind die GAUSSschen oder normalverteilten Zufallsfunktionen.

**Definition 8** Eine Zufallsfunktion  $(X(t); t \in \mathbb{T})$  heißt GAUSSsche Zufallsfunktion, wenn alle ihre endlichdimensionalen Verteilungen GAUSSsch sind.

Da Normalverteilungen eindeutig und vollständig durch Erwartungswerte und Kovarianzen bestimmt werden, sind für eine gegebene Erwartungswertfunktion und Kovarianzfunktion (bzw. Korrelationsfunktion) alle endlichdimensionalen Verteilungen und damit auch die Verteilung der GAUSSschen Zufallsfunktion eindeutig bestimmt. Aus dem Satz 7 von KOLMOGOROV folgt auch die folgende Aussage.

**Behauptung 9** Für jede reelle Funktion  $m(t), t \in \mathbb{T}$ , und jede nichtnegativ definite Funktion  $R(t_1, t_2), t_1, t_2 \in \mathbb{T}$ , existiert eine GAUSSsche Zufallsfunktion  $(X(t); t \in \mathbb{T})$  auf einem Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$  mit  $m(\cdot)$  als Erwartungswertfunktion und  $R(\cdot, \cdot)$  als Korrelationsfunktion.

## 2.2.2 Gleichheit von Zufallsfunktionen

Für die Gleichheit von Zufallsfunktionen existieren wieder verschiedene Begriffe.

**Definition 10** (i) Zwei Zufallsfunktionen  $(X_1(t); t \in \mathbb{T})$  und  $(X_2(t); t \in \mathbb{T})$  (möglichsterweise definiert auf verschiedenen Wahrscheinlichkeitsräumen) heißen identisch verteilt, falls alle endlichdimensionalen Verteilungen von  $(X_1(t); t \in \mathbb{T})$  mit den entsprechenden endlichdimensionalen Verteilungen von  $(X_2(t); t \in \mathbb{T})$  übereinstimmen.

(ii) Zwei Zufallsfunktionen  $(X_1(t); t \in \mathbb{T})$  und  $(X_2(t); t \in \mathbb{T})$  auf einem Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$  heißen äquivalent, falls für alle  $t \in \mathbb{T}$  gilt

$$\mathbf{P}(X_1(t) = X_2(t)) = 1.$$

Dann werden beide Zufallsfunktionen auch Modifikationen oder Versionen voneinander genannt.

(iii) Zwei Zufallsfunktionen  $(X_1(t); t \in \mathbb{T})$  und  $(X_2(t); t \in \mathbb{T})$  auf einem Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$  heißen ununterscheidbar, falls gilt

$$\mathbf{P}(X_1(t) = X_2(t) \quad \forall t \in \mathbb{T}) = 1.$$

Sind zwei Zufallsfunktionen ununterscheidbar, sind sie auch äquivalent, sind zwei Zufallsfunktionen äquivalent, dann sind sie auch identisch verteilt. Das folgende Beispiel illustriert den Unterschied zwischen äquivalenten und ununterscheidbaren Zufallsfunktionen.

**Beispiel 11** Der Wahrscheinlichkeitsraum sei gegeben durch  $\Omega = [0, 1]$ ,  $\mathcal{A} = \mathcal{B}([0, 1])$ ,  $\mathbf{P} = \text{Leb}$ . Wir definieren zwei Zufallsfunktionen auf  $\mathbb{T} = [0, 1]$  mittels

$$X_1(t, \omega) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{T} = [0, 1], \quad \forall \omega \in \Omega = [0, 1],$$

$$X_2(t, \omega) = \begin{cases} 0 & \forall (t, \omega) \in \mathbb{T} \times \Omega = [0, 1]^2 \text{ mit } t \neq \omega, \\ 1 & \forall (t, \omega) \in \mathbb{T} \times \Omega = [0, 1]^2 \text{ mit } t = \omega. \end{cases}$$

Für fixierte Werte  $t \in \mathbb{T}$  gilt  $\mathbf{P}(\{\omega : \omega = t\}) = 0$ , folglich  $\mathbf{P}(X_1(t) = X_2(t)) = 1$ , d. h. die beiden Zufallsfunktionen sind äquivalent. Andererseits ist aber

$$\mathbf{P}(\{\omega : X_1(t, \omega) = X_2(t, \omega) \quad \forall t \in \mathbb{T}\}) = \mathbf{P}(\emptyset) = 0,$$

d. h. beide Zufallsfunktionen sind nicht ununterscheidbar. Da die beiden Zufallsfunktionen äquivalent sind, stimmen die endlichdimensionalen Verteilungen der beiden überein. Demgegenüber gibt es aber hinsichtlich wesentlicher Eigenschaften der Trajektorien große Unterschiede, so gilt zum Beispiel

$$\mathbf{P}(\{\omega : X_1(\cdot, \omega) \text{ ist stetig auf } [0, 1]\}) = 1, \quad \mathbf{P}(\{\omega : X_2(\cdot, \omega) \text{ ist stetig auf } [0, 1]\}) = 0.$$

Auch die Verteilungen von wichtigen Funktionalen unterscheiden sich, z. B.

$$\mathbf{P}\left(\left\{\omega : \sup_{t \in [0, 1]} X_1(t, \omega) \leq 0.5\right\}\right) = 1, \quad \mathbf{P}\left(\left\{\omega : \sup_{t \in [0, 1]} X_2(t, \omega) \leq 0.5\right\}\right) = 0.$$

◇

Man sieht an diesem Beispiel, dass viele für die mathematische Modellierung bedeutsame Eigenschaften von Zufallsfunktionen nicht durch die endlichdimensionalen Verteilungen vollständig bestimmt werden. Deshalb ist es meist notwendig, stärkere Bedingungen zu fordern. Ein typisches Beispiel in dieser Richtung liefert die nächste Behauptung.

**Behauptung 12** Seien  $(X_1(t); t \in (a, b))$  und  $(X_2(t); t \in (a, b))$ ,  $-\infty \leq a < b \leq \infty$ , zwei äquivalente Zufallsfunktionen, für die fast alle Trajektorien rechtsseitig stetig (oder linksseitig stetig) auf dem gesamten Definitionsbereich sind. Dann sind beide Zufallsfunktionen ununterscheidbar.

Diese Aussage folgt aus der Tatsache, dass für stetige Funktionen die Funktionswerte in beliebigen Punkten schon durch die Funktionswerte für eine abzählbare, im Definitionsbereich dichte Menge (z. B. die rationalen Zahlen im Definitionsbereich) bestimmt werden, sie ergeben sich als entsprechende Grenzwerte.

### 2.2.3 Stetigkeit, Ableitungen, Integrale

Für die stochastische Analysis, insbesondere auch zur Untersuchung von zufälligen Differentialgleichungen benötigen wir zufällige Analoga für Stetigkeit, Ableitung, Integrale. Nun ist aus der Grundvorlesung Stochastik bekannt, dass verschiedene Konvergenzarten für Folgen von Zufallsgrößen existieren (diese Folgen von Zufallsgrößen sind ja nichts anderes als Zufallsprozesse mit diskreter Zeit). Wichtige Konvergenzarten sind die fast sichere Konvergenz (Konvergenz mit Wahrscheinlichkeit 1), die stochastische Konvergenz (Konvergenz in Wahrscheinlichkeit), die Konvergenz im  $p$ -ten Mittel ( $p > 0$ , am häufigsten wird der Fall  $p = 2$ , die Konvergenz im quadratischen Mittel, verwendet) und die Konvergenz in Verteilung (die schwache Konvergenz). Aus der fast sicheren Konvergenz folgt die stochastische Konvergenz, ebenso aus der Konvergenz im  $p$ -ten Mittel. Aus der stochastischen Konvergenz folgt die schwache Konvergenz. Für die Konvergenzarten gelten auch entsprechende CAUCHY-Kriterien.

Diesen Konvergenzarten entsprechen jeweilige Stetigkeitsbegriffe für Zufallsfunktionen.

**Definition 13** Es sei  $(X(t); t \in \mathbb{R})$  ein reeller Zufallsprozess. Dieser ist im Punkt  $t_0 \in \mathbb{R}$

- (i) f. s. stetig, falls  $\mathbf{P} \left( \left\{ \omega : \lim_{t \rightarrow t_0} X(t, \omega) = X(t_0, \omega) \right\} \right) = 1$ , d. h.  $X(t) \xrightarrow{f.s.} X(t_0)$  falls  $t \rightarrow t_0$ ;
- (ii) stochastisch stetig, falls  $\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{P} (\{\omega : |X(t, \omega) - X(t_0, \omega)| > \varepsilon\}) = 0 \quad \forall \varepsilon > 0$ , d. h.  $X(t) \xrightarrow{p} X(t_0)$  falls  $t \rightarrow t_0$ ;
- (iii) im  $p$ -ten Mittel ( $p > 0$ ) stetig, falls  $\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{E} \{|X(t) - X(t_0)|^p\} = 0$ , d. h.  $X(t) \xrightarrow{L^p} X(t_0)$  falls  $t \rightarrow t_0$ ;
- (iv) in Verteilung stetig, falls für beliebige stetige beschränkte Funktionen  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  gilt  $\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{E} \{f(X(t))\} = \mathbf{E} \{f(X(t_0))\}$ .

Ein Zufallsprozess heißt entsprechend stetig auf einem Intervall (oder einer anderen Menge), falls er in allen Punkten des Intervalls (der anderen Menge) stetig ist.

Für die stochastische Stetigkeit und die Stetigkeit im  $p$ -ten Mittel (auch für die Stetigkeit in Verteilung) gelten viele analoge Aussagen wie für stetige reellwertige Funktionen. So sind zum Beispiel stochastisch stetige Funktionen auf einem kompakten Intervall  $\mathbb{T}$  gleichmäßig stochastisch stetig und stochastisch beschränkt, d. h. es gelten

$$\forall \varepsilon, \eta > 0 \quad \exists \delta > 0 : \mathbf{P}(|X(t) - X(s)| > \varepsilon) < \eta \quad \text{falls } |t - s| < \delta,$$

bzw.

$$\limsup_{c \rightarrow \infty} \sup_{t \in \mathbb{T}} \mathbf{P}(|X(t)| > c) = 0.$$

### Bemerkungen

- Die Stetigkeit in Verteilung hängt nur von den eindimensionalen Verteilungen eines Zufallsprozesses ab.
- Die Stetigkeit im  $p$ -ten Mittel ( $p > 0$ ) und die stochastische Stetigkeit hängen nur von den zweidimensionalen Verteilungen eines Zufallsprozesses ab.
- Die stochastische Konvergenz, die Konvergenz im  $p$ -ten Mittel ( $p > 0$ ) und die Konvergenz in Verteilung (und damit die entsprechenden Stetigkeiten) sind metrische Begriffe, d. h. es existieren im Raum der Zufallsvariablen (bzw. in Teilräumen) Metriken, welche diese Konvergenzen erzeugen. So kann zum Beispiel die stochastische Konvergenz durch die Metrik  $d_p(X, Y) := \mathbf{E} \left\{ \frac{|X - Y|}{1 + |X - Y|} \right\}$  erzeugt werden. Die fast sichere Konvergenz ist demgegenüber kein metrischer Begriff.

Da Ableitungen Grenzwerte von Differenzenquotienten sind, können entsprechend verschiedene Ableitungsbegriffe für Zufallsfunktionen definiert werden. So heißt zum Beispiel ein Zufallsprozess  $(X(t); t \in \mathbb{R})$  im Punkt  $t_0 \in \mathbb{R}$  differenzierbar im Sinne der fast sicheren Konvergenz, falls eine Zufallsgröße  $Y$  existiert mit

$$\mathbf{P} \left( \lim_{h \rightarrow 0} \frac{X(t_0 + h) - X(t_0)}{h} = Y \right) = 1,$$

$Y$  heißt dann Ableitung und wird mit  $\dot{X}(t_0)$  oder  $\frac{dX(t_0)}{dt} = \frac{dX(t)}{dt} \Big|_{t=t_0}$  bezeichnet. Eine analoge Definition gilt für die Konvergenz im  $p$ -ten Mittel ( $p > 0$ ), hier ist wieder der Fall  $p = 2$  besonders wichtig, der etwas später ausführlicher behandelt werden soll. Als mögliche Konvergenz kann auch die stochastische Konvergenz betrachtet werden, allerdings gibt es in diesem Fall Zufallsprozesse, die nicht äquivalent zu einer konstanten Zufallsgröße sind, deren Ableitung aber Null ist (vgl. das Beispiel des POISSON-Prozesses weiter unten). Damit ist das Integral der Ableitung nicht der Ausgangsprozess selber, dies ist jedoch eine wünschenswerte Eigenschaft bei der Betrachtung von Ableitungen und Integralen.

Zufällige RIEMANN-Integrale können bezüglich der fast sicheren Konvergenz und der Konvergenz im  $p$ -ten Mittel als entsprechende Grenzwerte von RIEMANNSchen Integralsummen definiert werden (falls der Grenzwert fast sicher eindeutig und unabhängig von der Zerlegung des Intervall es existiert). Die Punkte der Zerlegung und der Auswertung des Integranden werden dabei nicht zufällig gewählt.

Eine weitere häufig verwendete Möglichkeit zur Untersuchung der Stetigkeit, von Ableitungen und Integralen von Zufallsfunktionen besteht in der pfadweisen (trajektorienweisen, realisierungsweisen) Betrachtung von Stetigkeit, Differenzierbarkeit und Integrierbarkeit. So heißt ein reeller Zufallsprozess  $(X(t); t \in \mathbb{R})$  auf dem Intervall  $\mathbb{T}_1 = (a, b), -\infty \leq a < b \leq \infty$ , realisierungsweise stetig, falls

$$\mathbf{P} (\{\omega : X(t, \omega) \text{ ist stetig } \forall t \in \mathbb{T}_1\}) = 1$$

gilt. Entsprechend können realisierungsweise Ableitungen auf Intervallen und realisierungsweise Integrale definiert werden. Das obige Beispiel 11 zeigt, dass diese Eigenschaften nicht aus den endlichdimensionalen Verteilungen des Zufallsprozesses folgen. Die Frage, die in diesem Zusammenhang gewöhnlich gestellt wird, lautet dann:

Gibt es eine Version  $(\tilde{X}(t); t \in \mathbb{T})$  des Zufallsprozesses  $(X(t); t \in \mathbb{T})$  (d. h. einen zu  $(X(t); t \in \mathbb{T})$  äquivalenten Zufallsprozess), für den die gewünschte Eigenschaft erfüllt ist. Existiert eine solche Version, wird dann immer mit dieser gearbeitet. Im obigen Beispiel ist die Antwort bezüglich der Stetigkeit ja, der äquivalente Prozess  $(X_1(t); t \in [0, 1])$  besitzt stetige Trajektorien.

Eine weitere, noch schwächere Fragestellung wäre:

Gibt es einen Zufallsprozess  $(\hat{X}(t); t \in \mathbb{T})$  mit denselben endlichdimensionalen Verteilungen wie  $(X(t); t \in \mathbb{T})$  (d. h. einen identisch verteilten Zufallsprozess), für den die geforderte Eigenschaft erfüllt ist.

In diesem Zusammenhang sind Sätze wichtig, die aussagen, dass zu einem gegebenen Zufallsprozess  $(X(t); t \in \mathbb{T})$  eine Version mit stetigen Trajektorien existiert, d. h. es existiert ein Zufallsprozess  $(\tilde{X}(t); t \in \mathbb{T})$  auf demselben Wahrscheinlichkeitsraum, so dass  $X(t) = \tilde{X}(t)$  f. s.  $\forall t \in \mathbb{T}$  und  $\mathbf{P}(\{\omega : \tilde{X}(\cdot, \omega) \text{ ist stetig auf } \mathbb{T}\}) = 1$  gelten. Häufig kann die folgende hinreichende Bedingung genutzt werden.

**Satz 14 (Kriterium von KOLMOGOROV)**

- Es sei  $(X(t); t \in [a, b] \subset \mathbb{R})$  ein Zufallsprozess mit  $\mathbf{E}\{X(t)\} = 0$ ,  $t \in [a, b]$ . Existieren positive Konstanten  $\alpha, \beta, \gamma$  und  $\delta$  mit

$$\mathbf{E}\{|X(t+h) - X(t)|^\alpha\} \leq \gamma|h|^{1+\beta}, \quad |h| \leq \delta, \quad t, t+h \in [a, b],$$

dann existiert ein zu  $(X(t); t \in [a, b] \subset \mathbb{R})$  äquivalenter Zufallsprozess mit stetigen Trajektorien auf  $[a, b]$ .

- Es sei  $(X(\mathbf{t}); \mathbf{t} \in \mathbb{T} = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_d, b_d] \subset \mathbb{R}^d)$ ,  $d \in \mathbb{N}$ , ein Zufallsfeld mit  $\mathbf{E}\{X(\mathbf{t})\} = 0$ ,  $\mathbf{t} \in \mathbb{T}$ . Existieren positive Konstanten  $\alpha, \beta, \gamma$  und  $\delta$  mit

$$\mathbf{E}\{|X(\mathbf{t} + \mathbf{h}) - X(\mathbf{t})|^\alpha\} \leq \gamma|\mathbf{h}|^{d+\beta}, \quad |\mathbf{h}| \leq \delta, \quad \mathbf{t}, \mathbf{t} + \mathbf{h} \in \mathbb{T},$$

dann existiert ein zu  $(X(\mathbf{t}); \mathbf{t} \in \mathbb{T})$  äquivalentes Zufallsfeld mit stetigen Trajektorien auf  $\mathbb{T}$ .

Bei diesem Satz ist es wesentlich, dass auf der rechten Seite der Ungleichungen im Exponenten Zahlen echt größer 1 (bzw.  $d$  für Zufallsfelder) stehen, vergleiche dazu das Beispiel des POISSON-Prozesses weiter unten.

Für GAUSSsche Zufallsprozesse kann der Satz verstärkt werden.

**Folgerung 15** Es sei  $(X(t); t \in \mathbb{T} = [a, b] \subset \mathbb{R})$  ein zentraler GAUSSscher Zufallsprozess. Existieren positive Konstanten  $\alpha, \beta, \gamma$  und  $\delta$  mit

$$\mathbf{E}\{|X(t+h) - X(t)|^\alpha\} \leq \gamma|h|^\beta, \quad |h| \leq \delta, \quad t, t+h \in [a, b],$$

dann existiert ein zu  $(X(t); t \in \mathbb{T})$  äquivalenter Zufallsprozess mit stetigen Trajektorien auf  $\mathbb{T}$ .

Im Unterschied zur allgemeinen Situation braucht für GAUSSsche Zufallsprozesse der Exponent auf der rechten Seite der Abschätzung also nur streng positiv sein.

*Beweis.* Für GAUSSsche Zufallsprozesse kann immer  $X(t+h) - X(t) = c\xi$  mit einer standardnormalverteilten Zufallsgröße  $\xi \sim \mathcal{N}(0, 1)$  und einer Konstanten  $c = c(t, h) \geq 0$  geschrieben werden. Aus der Bedingung der Folgerung erhält man

$$\mathbf{E}\{|c\xi|^\alpha\} = c^\alpha \mathbf{E}\{|\xi|^\alpha\} < \gamma|h|^\beta,$$

(dabei hängt  $\mathbf{E}\{|\xi|^\alpha\} > 0$  nicht von  $t$  und  $h$  ab), folglich gilt auch

$$c^\alpha < \frac{\gamma|h|^\beta}{\mathbf{E}\{|\xi|^\alpha\}}.$$

Damit gilt für beliebige  $n > 0$

$$\mathbf{E}\{|c\xi|^{\alpha n}\} = c^{\alpha n} \mathbf{E}\{|\xi|^{\alpha n}\} < \frac{\gamma^n|h|^{\beta n}}{(\mathbf{E}\{|\xi|^\alpha\})^n} \mathbf{E}\{|\xi|^{\alpha n}\}.$$

Wählen wir nun  $n > 0$  so, dass  $\beta n = 1 + \beta_1 > 1$  und setzen  $\alpha_1 := \alpha n > 0$ ,  $\gamma_1 := \frac{\gamma^n}{(\mathbf{E}\{|\xi|^\alpha\})^n} \mathbf{E}\{|\xi|^{\alpha n}\} > 0$ , dann erhalten wir

$$\mathbf{E}\{|X(t+h) - X(t)|^{\alpha_1}\} = \mathbf{E}\{|c(t, h)\xi|^{\alpha n}\} \leq \gamma_1|h|^{1+\beta_1}, \quad |h| \leq \delta, \quad t, t+h \in [a, b],$$

und nach dem Satz 14 von KOLMOGOROV existiert eine Version mit stetigen Realisierungen.  $\square$

Oben angegebene Bedingungen sind nur hinreichend, auch unter noch schwächeren Voraussetzungen (die meistens aber schwieriger zu überprüfen sind) kann die Existenz von Versionen mit stetigen Realisierungen gezeigt werden. Insbesondere können noch für spezielle Prozessklassen, wie stationäre Zufallsprozesse oder GAUSSsche Zufallsprozesse stärkere Resultate in der Literatur gefunden werden. Analog gibt es auch Bedingungen für die Existenz von äquivalenten Zufallsprozessen mit differenzierbaren Trajektorien usw.

## 2.2.4 $L^2$ -Theorie

Bei der Behandlung von zufälligen Gleichungen spielt die Konvergenz im quadratischen Mittel häufig eine sehr große Rolle. Dies hängt einerseits damit zusammen, dass der Raum der quadratisch integrierbaren Zufallsgrößen sehr schöne mathematische Eigenschaften besitzt. Er kann als HILBERT-Raum betrachtet werden, wodurch insbesondere für lineare Operatoren Ergebnisse der Funktionalanalysis genutzt werden können. Andererseits sind es häufig gerade erste und zweite Momente, über die zumindestens näherungsweise mit Mitteln der mathematischen Statistik Aussagen in praktischen Situationen getroffen werden können.

Wir betrachten also den Raum aller Äquivalenzklassen von reellen Zufallsvariablen mit endlichem zweiten Moment auf einem fixierten Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$  und bezeichnen ihn mit  $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P}) = L^2$ . Damit liegt eine Zufallsgröße  $X$  im Raum  $L^2$  (genauer gesagt: gehört zu einer Äquivalenzklasse dieses Raumes) genau dann, wenn  $\mathbf{E}\{|X|^2\} < \infty$  gilt. Wegen

$$\mathbf{E}\{|X|\} = \mathbf{E}\{|X| \cdot 1\} \leq \sqrt{\mathbf{E}\{|X|^2\} \mathbf{E}\{1^2\}} = \sqrt{\mathbf{E}\{|X|^2\}} < \infty$$

muss dann auch das erste Moment, d. h. der endliche Erwartungswert der Zufallsgröße existieren.

Der Raum  $L^2$  ist ein HILBERT-Raum, d. h. ein linearer Raum mit Skalarprodukt, der vollständig ist bezüglich der durch das Skalarprodukt erzeugten Norm. Das Skalarprodukt zweier Zufallsgrößen  $X$  und  $Y$  (zweier Äquivalenzklassen) ist dabei mittels  $\mathbf{E}\{XY\}$  definiert, die Norm einer Zufallsgröße durch  $\|X\|_{L^2} := \sqrt{\mathbf{E}\{|X|^2\}}$ . Die Konvergenz im quadratischen Mittel einer Folge  $(X_n; n \in \mathbb{N})$  von Elementen aus  $L^2$  ist dann die Normkonvergenz, folglich

$$X_n \xrightarrow{L^2} X \Leftrightarrow \mathbf{E}\{|X_n - X|^2\} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

In diesem Fall gelten dann auch

$$\mathbf{E}\{|X_n - X|\} \rightarrow 0, \quad |\mathbf{E}\{X_n\} - \mathbf{E}\{X\}| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Für die Konvergenz im quadratischen Mittel gilt ein entsprechendes CAUCHY-Kriterium.

**Behauptung 16** *Es sei  $(X_n; n \in \mathbb{N})$  eine Folge von Zufallsvariablen aus dem Raum  $L^2$ . Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent.*

(i) *Die Folge konvergiert im quadratischen Mittel gegen eine Zufallsgröße  $X \in L^2$ ,*

$$X_n \xrightarrow{L^2} X \quad (n \rightarrow \infty).$$

(ii) *Die Folge ist eine CAUCHY-Folge (Fundamentalfolge) bezüglich der Norm  $\|\cdot\|_{L^2}$ , d. h.*

$$\lim_{m,n \rightarrow \infty} \mathbf{E}\{|X_n - X_m|^2\} = 0.$$

(iii) *Für die Folge gilt das LOÈVE-Kriterium, d. h. es existiert eine reelle Zahl  $c$ , so dass gilt*

$$\lim_{m,n \rightarrow \infty} \mathbf{E}\{X_n \cdot X_m\} = c.$$

Aus dieser Behauptung folgen Bedingungen für die Quadratmittelstetigkeit, -differenzierbarkeit und -integrierbarkeit für Zufallsfunktionen zweiter Ordnung.

**Definition 17** *Eine Zufallsfunktion  $(X(t); t \in \mathbb{T})$  heißt Zufallsfunktion zweiter Ordnung, wenn alle Zufallsgrößen  $X(t), t \in \mathbb{T}$ , endliche zweite Momente besitzen, also im Raum  $L^2$  liegen.*

In diesem Fall sind die Erwartungswertfunktion, die Kovarianzfunktion und die Korrelationsfunktion definiert, d. h. für  $s, t \in \mathbb{T}$  gelten

$$\begin{aligned} m_X(t) &:= \mathbf{E}\{X(t)\}, \\ C_X(s, t) &:= \mathbf{E}\{X(s)X(t)\}, \\ R_X(s, t) &:= \mathbf{E}\{[X(s) - m_X(s)][X(t) - m_X(t)]\} = C_X(s, t) - m_X(s)m_X(t). \end{aligned}$$

Ist das Definitionsbereich  $\mathbb{T}$  ein Intervall der reellen Achse, dann kann eine Zufallsfunktion zweiter Ordnung als eine Kurve im Raum  $L^2$  betrachtet werden. Sind nur Erwartungswertfunktion und Kovarianz- oder Korrelationsfunktion gegeben, dann erhält man eine Klasse von Kurven in  $L^2$ .

**Behauptung 18** *Für eine Zufallsfunktion  $(X(t); t \in \mathbb{T} = (a, b) \subset \mathbb{R})$  zweiter Ordnung sind die folgenden Bedingungen äquivalent.*

- (i) Die Zufallsfunktion ist im Punkt  $t_0 \in \mathbb{T}$  im quadratischen Mittel stetig (ist im quadratischen Mittel stetig auf  $\mathbb{T}$ ).
- (ii) Die Kovarianzfunktion  $C_X(\cdot, \cdot)$  ist im Punkt  $(t_0, t_0) \in \mathbb{T} \times \mathbb{T}$  stetig (ist in allen Punkten  $(t, t) \in \mathbb{T} \times \mathbb{T}$  stetig).
- (iii) Die Erwartungswertfunktion  $m_X(\cdot)$  ist stetig im Punkt  $t_0 \in \mathbb{T}$  (in allen Punkten  $t \in \mathbb{T}$ ) und die Korrelationsfunktion  $R_X(\cdot, \cdot)$  ist im Punkt  $(t_0, t_0) \in \mathbb{T} \times \mathbb{T}$  stetig (ist in allen Punkten  $(t, t) \in \mathbb{T} \times \mathbb{T}$  stetig).

Die Zufallsfunktion  $(X(t); t \in \mathbb{T} = (a, b) \subset \mathbb{R})$  zweiter Ordnung ist genau dann auf  $\mathbb{T} = (a, b)$  im quadratischen Mittel stetig, wenn die Korrelations- und die Kovarianzfunktion auf  $\mathbb{T} \times \mathbb{T}$  stetig sind und die Erwartungswertfunktion auf  $\mathbb{T}$  stetig ist.

Im Hinblick auf die Differenzierbarkeit im quadratischen Mittel gilt die folgende Aussage.

**Behauptung 19** Die Zufallsfunktion  $(X(t); t \in \mathbb{T} = (a, b) \subset \mathbb{R})$  zweiter Ordnung besitzt genau dann eine Quadratmittelableitung  $\dot{X}(t_0)$  im Punkt  $t_0 \in (a, b)$ , falls die gemischte zweite Ableitung der Kovarianzfunktion  $C_X(\cdot, \cdot)$  im Punkt  $(t_0, t_0) \in \mathbb{T} \times \mathbb{T}$  existiert, d. h.

$$\begin{aligned} \exists \lim_{h, h' \rightarrow 0} & \frac{C_X(t_0 + h, t_0 + h') - C_X(t_0, t_0 + h') - C_X(t_0 + h, t_0) + C_X(t_0, t_0)}{hh'} \\ &= \left. \frac{\partial^2 C_X(s, t)}{\partial s \partial t} \right|_{s=t_0, t=t_0} \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Eine äquivalente Bedingung dazu lautet: die Erwartungswertfunktion ist differenzierbar im Punkt  $t_0 \in \mathbb{T}$  und die Korrelationsfunktion besitzt die gemischte zweite Ableitung im Punkt  $(t_0, t_0) \in \mathbb{T} \times \mathbb{T}$ .

In diesem Fall ist der Erwartungswert der Ableitung im Punkt  $t_0$  die Ableitung der Erwartungswertfunktion in diesem Punkt, d. h. es gilt  $m_{\dot{X}}(t_0) := \mathbf{E}\{\dot{X}(t_0)\} = \dot{m}_X(t_0)$ .

Auch Kovarianz- und Korrelationsfunktionen der Quadratmittelableitung sowie Kreuzkovarianz- und Korrelationsfunktionen vom Zufallsprozess und seiner Quadratmittelableitung können mit Hilfe der Ausgangskovarianz- (bzw. Korrelations-)Funktion angegeben werden.

**Behauptung 20** Die Zufallsfunktion  $(X(t); t \in \mathbb{T} = (a, b) \subset \mathbb{R})$  zweiter Ordnung ist genau dann auf  $(a, b)$  im quadratischen Mittel differenzierbar mit Ableitung  $(\dot{X}(t); t \in \mathbb{T})$ , falls in jedem Punkt  $(t_0, t_0) \in (a, b) \times (a, b)$  die gemischte zweite Ableitung der Kovarianzfunktion

$$\left. \frac{\partial^2 C_X(s, t)}{\partial s \partial t} \right|_{s=t_0, t=t_0} \in \mathbb{R}$$

existiert. In diesem Fall gelten auch

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\{\dot{X}(s)X(t)\} &= \frac{\partial C_X(s, t)}{\partial s}, \quad s, t \in (a, b), \\ \mathbf{E}\{\dot{X}(s)\dot{X}(t)\} &= \frac{\partial^2 C_X(s, t)}{\partial s \partial t}, \quad s, t \in (a, b). \end{aligned}$$

Auch für Quadratmittelintegrale lassen sich einfache Bedingungen für die Existenz angeben.

Sei z. B.  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine deterministische Funktion und  $(X(t); t \in \mathbb{T} = [a, b] \subset \mathbb{R})$  eine Zufallsfunktion zweiter Ordnung. Dann existiert genau dann das Integral

$$\int_a^b g(t)X(t) dt$$

im quadratischen Mittel (als RIEMANN-Integral), falls das Integral

$$\int_a^b \int_a^b g(t_1)g(t_2) \mathbf{E}\{X(t_1)X(t_2)\} dt_2 dt_1 = \int_a^b \int_a^b g(t_1)g(t_2) C_X(t_1, t_2) dt_2 dt_1$$

existiert (als RIEMANN-Integral). Für endliche Intervalle, stückweise stetige Funktionen  $g(\cdot)$  und im quadratischen Mittel stetige Zufallsfunktionen  $(X(t); t \in \mathbb{T} = [a, b] \subset \mathbb{R})$  ist diese Bedingung erfüllt.

## 2.2.5 WIENER-Prozess und POISSON-Prozess

Im Folgenden sollen kurz die Definitionen und einige Eigenschaften von zwei sehr wichtigen Zufallsprozessen angegeben werden. Insbesondere dient dies der Illustration der bisherigen allgemeinen Aussagen über Zufallsfunktionen.

**Definition 21** Ein Zufallsprozess  $(W(t); t \in \mathbb{R}_+)$  heißt Standard-WIENER-Prozess, falls

- (i)  $W(0) = 0$  fast sicher;
- (ii)  $(W(t); t \in \mathbb{R}_+)$  ist ein Prozess mit unabhängigen Zuwächsen, d. h. für  $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n$  sind die Zufallsgrößen  $W(t_1) - W(t_0), \dots, W(t_n) - W(t_{n-1})$  in der Gesamtheit stochastisch unabhängig;
- (iii)  $(W(t); t \in \mathbb{R}_+)$  ist ein GAUSS-Prozess und es gilt  $W(t+h) - W(t) \sim \mathcal{N}(0, h)$  für  $t \geq 0, h > 0$ ;
- (iv) fast alle Trajektorien des Prozesses sind stetige Funktionen.

Aus den Punkten (i) und (iii) der Definition folgt  $W(t) \sim \mathcal{N}(0, t), t \geq 0$ , d. h.

$$\mathbf{E}\{W(t)\} = 0, \quad \mathbf{E}\{W^2(t)\} = \mathbf{Var}\{W(t)\} = t, \quad t \geq 0.$$

Weiterhin gilt für die Kovarianz- (und Korrelations-)Funktion

$$C_W(t_1, t_2) = R_W(t_1, t_2) = t_1 \wedge t_2 = \min\{t_1, t_2\}, \quad t_1, t_2 \geq 0.$$

Wegen  $\mathbf{E}\{|W(t+h) - W(t)|^2\} = h, t, h \geq 0$ , existiert nach der Folgerung 15 aus dem Kriterium von KOLMOGOROV für GAUSS-Prozesse eine Version mit stetigen Trajektorien. Dies kann auch direkt aus dem Kriterium von KOLMOGOROV mit Hilfe der Beziehung  $\mathbf{E}\{|W(t+h) - W(t)|^4\} = 3h^2, t, h \geq 0$ , gezeigt werden. Da die Trajektorien stetige Funktionen sind, ist ein WIENER-Prozess auch f. s. stetig auf  $\mathbb{T} = \mathbb{R}_+$ . Die Korrelationsfunktion ist stetig, demzufolge ist der Prozess auch im quadratischen Mittel stetig auf  $\mathbb{T}$ . Nebenbei bemerkt folgt diese Eigenschaft für GAUSS-Prozesse schon aus der Stetigkeit bezüglich der fast sicheren Konvergenz.

Dieser Zufallsprozess besitzt allerdings keine Ableitung, weder im quadratischen Mittel oder fast sicher, noch realisierungsweise auf Teilintervallen. Hinsichtlich der Quadratmittelableitung kann dies aus der Nichtexistenz der gemischten zweiten Ableitung der Kovarianzfunktion in Diagonalpunkten  $(t_0, t_0) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$  gefolgert werden. Noch allgemeiner gilt aber für  $t \geq 0, h > 0$

$$\frac{W(t+h) - W(t)}{h} \sim \mathcal{N} \left( 0, \frac{1}{h} \right),$$

damit kann der Differenzenquotient für  $h \rightarrow 0$  nicht in Verteilung (und folglich auch nicht im quadratischen Mittel oder stochastisch oder fast sicher) gegen eine Verteilung einer reellen Zufallsgröße konvergieren.

Ein anderer Typ von Zufallsprozessen wird durch einen POISSON-Prozess gegeben.

**Definition 22** Ein Zufallsprozess  $(X(t); t \in \mathbb{R}_+)$  heißt POISSON-Prozess mit Parameter oder Intensität  $\lambda > 0$ , falls

- (i)  $X(0) = 0$  fast sicher;
- (ii)  $(X(t); t \in \mathbb{R}_+)$  ist ein Prozess mit unabhängigen Zuwächsen, d. h. für  $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n$  sind die Zufallsgrößen  $X(t_1) - X(t_0), \dots, X(t_n) - X(t_{n-1})$  in der Gesamtheit stochastisch unabhängig;
- (iii) die Zuwächse  $X(t+h) - X(t), t, h \geq 0$ , sind POISSON-verteilt mit Parameter  $\lambda \cdot h > 0$ , d. h.

$$\mathbf{P}(X(t+h) - X(t) = k) = \frac{(\lambda h)^k}{k!} e^{-\lambda h}, \quad k = 0, 1, \dots;$$

- (iv) fast alle Trajektorien des Prozesses sind rechtsseitig stetig und besitzen linksseitige Grenzwerte.

Als mögliche Werte zu festen Zeitpunkten kommen also nur die Zahlen  $0, 1, \dots$  in Frage. Fast alle Trajektorien eines POISSON-Prozesses sind stückweise konstant mit Sprüngen jeweils um 1. Bezeichnen wir

$$\begin{aligned} T'_1 &:= \inf\{t \geq 0 : X(t) \geq 1\}, & T_1 &:= T'_1, \\ T'_2 &:= \inf\{t \geq 0 : X(t) \geq 2\}, & T_2 &:= T'_2 - T'_1, \\ &\text{usw.} & & \\ T'_k &:= \inf\{t \geq 0 : X(t) \geq k\}, & T_k &:= T'_k - T'_{k-1} \end{aligned}$$

für  $k \in \mathbb{N}$ , erhalten wir die zufälligen Zeiten (dies sind nichtnegative Zufallsgrößen) der Sprünge  $T'_k$ . Für einen POISSON-Prozess gilt, dass die Zufallsgrößen  $T_k, k \in \mathbb{N}$ , in der Gesamtheit stochastisch unabhängig und exponentialverteilt mit dem Parameter  $\lambda > 0$  sind. Für die Momentenfunktionen eines POISSON-Prozesses gelten

$$\begin{aligned} m_X(t) &= \lambda t, & R_X(s, t) &= \lambda \min\{s, t\}, & C_X(s, t) &= \lambda \min\{s, t\} + \lambda^2 st, & s, t \geq 0, \\ \mathbf{E}\{|X(t+h) - X(t)|\} &= \lambda|h|, & \mathbf{E}\{|X(t+h) - X(t)|^2\} &= \lambda|h| + (\lambda|h|)^2, & t, h \geq 0. \end{aligned}$$

Für feste Zeitpunkte  $t_0 \geq 0$  ist ein POISSON-Prozess fast sicher und im quadratischen Mittel stetig. Die Quadratmittelstetigkeit folgt dabei aus der Stetigkeit der Kovarianzfunktion. Die fast sichere Stetigkeit kann wie folgt gezeigt werden.

$$\mathbf{P}(\{X(\cdot) \text{ ist stetig in } t_0\}) = 1 - \mathbf{P}(\{T'_1 = t_0\} \cup \{T'_2 = t_0\} \cup \dots) \geq 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}(T'_k = t_0) = 1,$$

da die Zufallsgrößen  $T'_k, k \in \mathbb{N}$ , eine stetige Verteilung besitzen.

Auf Intervallen positiver Länge  $[a, b], b > a \geq 0$ , ist allerdings keine realisierungsweise Stetigkeit vorzufinden,

$$\mathbf{P}(\{X(\cdot) \text{ ist stetig auf } [a, b]\}) < 1.$$

So gilt zum Beispiel für  $b > 0$

$$\mathbf{P}(\{X(\cdot) \text{ ist stetig auf } [0, b]\}) = \mathbf{P}(X(b) = 0) = e^{-\lambda b}.$$

Da die Realisierungen eines POISSON-Prozesses stückweise konstant sind und die zufälligen Sprungzeiten eine stetige Verteilung besitzen, existiert für feste Zeitpunkte  $t_0 \geq 0$  auch eine Ableitung bezüglich der fast sicheren Konvergenz und diese ist konstant mit Wert 0. Dies gilt auch für die Ableitung bezüglich der stochastischen Konvergenz, was auch durch die Betrachtung des Differenzenquotienten gezeigt werden kann. So besitzt die diskrete Zufallsgröße

$$\xi(h) := \frac{X(t_0 + h) - X(t_0)}{h}, \quad t_0 \geq 0, h > 0,$$

die Verteilung

$$\mathbf{P}\left(\xi(h) = \frac{k}{h}\right) = \frac{(\lambda h)^k}{k!} e^{-\lambda h}, \quad k \in \mathbb{N}_0,$$

folglich gilt für  $0 < \varepsilon < 1$  und  $0 < h$

$$0 \leq \mathbf{P}(\xi(h) > \varepsilon) = \mathbf{P}(|\xi(h) - 0| > \varepsilon) = 1 - \mathbf{P}(\xi(h) = 0) = 1 - e^{-\lambda h} \rightarrow 0 \ (h \rightarrow 0).$$

Also existiert die Ableitung identisch 0 im Sinne der stochastischen Konvergenz. Insbesondere folgt hieraus, dass der Zufallsprozess selber nicht als Integral über seine Ableitung geschrieben werden kann. Wie schon weiter oben erwähnt, ist dies aber eine wünschenswerte Eigenschaft bei der Nutzung von zufälligen Ableitungen und Integralen.

Im quadratischen Mittel existiert jedoch auch für feste Zeitpunkte  $t_0 \geq 0$  keine Ableitung. Dies kann mit Hilfe des zweiten Momentes des Differenzenquotienten gezeigt werden,

$$\mathbf{E} \left\{ \left| \frac{X(t_0 + h) - X(t_0)}{h} \right|^2 \right\} = \frac{\lambda h + (\lambda h)^2}{h^2} = \lambda^2 + \frac{\lambda}{h}, \quad h > 0,$$

dieser Ausdruck divergiert gegen  $+\infty$  für  $h \rightarrow 0+$ .

Auf festen Intervallen positiver Länge kann natürlich auch nicht eine realisierungsweise Ableitung existieren, da die Pfade schon nicht fast sicher stetig auf solchen Intervallen sind.

## 2.3 Stationäre Zufallsprozesse

Eine wichtige Klasse von Zufallsprozessen, die bei einer Reihe von Untersuchungen von zufälligen Gleichungen eine große Rolle spielt, ist die Klasse der stationären Zufallsprozesse. Stationäre Zufallsprozesse sind dadurch gekennzeichnet, dass sich im zeitlichen Verlauf wichtige stochastische Charakteristiken nicht ändern, sie beschreiben also eine zufällige Zustandsänderung, die aber statistisch gesehen zu relativ gleichbleibenden Zuständen führt. Damit entsprechen stationäre Zufallsprozesse den konstanten Funktion, einen engen Zusammenhang gibt es aber auch zu periodischen Funktionen. Je nachdem, welche Charakteristiken im Vordergrund stehen, können verschiedene Definitionen von stationären Zufallsprozessen gegeben werden.

**Definition 23** Ein reellwertiger Zufallsprozess  $(X(t); t \in \mathbb{R})$  heißt stationär im engeren Sinne oder streng stationär, wenn alle endlichdimensionalen Verteilungen invariant bezüglich von Zeittransformationen sind, d. h.

$$\mathbf{P}(X(t_1) \in B_1, \dots, X(t_n) \in B_n) = \mathbf{P}(X(t_1 + \tau) \in B_1, \dots, X(t_n + \tau) \in B_n)$$

für beliebige  $n \in \mathbb{N}$ ,  $t_i \in \mathbb{R}$ ,  $\tau \in \mathbb{R}$ ,  $B_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

**Definition 24** Ein reellwertiger Zufallsprozess  $(X(t); t \in \mathbb{R})$  zweiter Ordnung heißt stationär im weiteren Sinne oder schwach stationär, wenn die Erwartungswertfunktion konstant ist, d. h. es gibt ein  $m \in \mathbb{R}$  mit

$$\mathbf{E}\{X(t)\} = m_X(t) = m, \quad t \in \mathbb{R},$$

und die Korrelationsfunktion (bzw. Kovarianzfunktion) invariant bezüglich von Zeittransformationen ist, d. h.

$$\begin{aligned} R_X(s, t) &= \mathbf{E}\{[X(s) - m_X(s)][X(t) - m_X(t)]\} = R_X(s + \tau, t + \tau) \quad \text{und} \\ C_X(s, t) &= \mathbf{E}\{X(s)X(t)\} = C_X(s + \tau, t + \tau) \end{aligned}$$

für beliebige  $s, t, \tau \in \mathbb{R}$ .

Setzt man für  $\tau$  den Wert  $-s$  ein, sieht man, dass damit die Korrelations- und die Kovarianzfunktion nur von einer Variablen abhängen,

$$\begin{aligned} R_X(s, t) &= R_X(0, t - s) = \tilde{R}_X(t - s), \\ C_X(s, t) &= C_X(0, t - s) = \tilde{C}_X(t - s). \end{aligned}$$

Für diese Funktionen einer Veränderlichen wird dann meistens auch wieder  $R_X(\cdot)$  bzw.  $C_X(\cdot)$  geschrieben, so auch hier im Folgenden.

Natürlich können analog stationäre Prozesse auf geeigneten Teilmengen der reellen Achse definiert werden, ebenso Prozesse mit komplexen oder vektoriellen Werten.

Ein stark stationärer Zufallsprozess mit endlichen zweiten Momenten ist auch schwach stationär, es gibt aber schwach stationäre Zufallsprozesse, die nicht stark stationär sind. Da die endlichdimensionalen Verteilungen von GAUSSschen Zufallsprozessen jedoch eindeutig durch die ersten und zweiten Momente definiert sind, gilt in diesem Spezialfall die Umkehrung.

**Behauptung 25** Ein GAUSSscher Zufallsprozess auf  $\mathbb{R}$  ist genau dann stark stationär, wenn er schwach stationär ist.

Neben der Korrelationsfunktion können viele schwach stationäre Zufallsprozesse auch durch die sogenannte Spektraldichte beschrieben werden. Diese ist eine Version der FOURIERtransformation der Korrelationsfunktion, genauer gilt als Definition üblicherweise

$$S_X(\alpha) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_X(s) e^{-i\alpha s} ds, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

(Mitunter unterscheiden sich die Definitionen leicht). Die Spektraldichte existiert insbesondere dann, wenn die Korrelationsfunktion absolut integrierbar ist, d. h.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |R_X(s)| ds < \infty$$

gilt. Die Korrelationsfunktion lässt sich mittels

$$R_X(s) := \int_{-\infty}^{\infty} S_X(\alpha) e^{-i\alpha s} d\alpha, \quad s \in \mathbb{R},$$

aus der Spektraldichte berechnen.

# Kapitel 3

## Gewöhnliche Differentialgleichungen mit zufälligen Parametern

### 3.1 Grundlegende Begriffe. Existenz- und Eindeutigkeitssätze

#### 3.1.1 Deterministische gewöhnliche Differentialgleichungen

Eine gewöhnliche Differentialgleichung ist eine Gleichung für eine unbekannte Funktion einer unabhängigen Veränderlichen, in der diese Funktion und deren Ableitungen vorkommen. Der Grad der höchsten vorkommenden Ableitung wird Ordnung der Differentialgleichung genannt. Wir werden hier die unabhängige Veränderliche mit  $t$  und die gesuchten Funktionen mit  $x(\cdot)$  bezeichnen, entsprechend sind die Ableitungen dann

$$\frac{dx(t)}{dt} = \dot{x}(t), \quad \frac{d^2x(t)}{dt^2} = \ddot{x}(t), \quad \dots, \quad \frac{d^kx(t)}{dt^k} = x^{(k)}(t), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Genauer kann eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung für eine unbekannte Funktion durch eine Beziehung

$$\tilde{f}(t, x, \dot{x}) = 0$$

definiert werden, hier bezeichnet  $\tilde{f}(\cdot) : \mathbb{R}^3 \supset \tilde{B} \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion (i. a. mit bestimmten Regularitätseigenschaften), definiert auf einer Teilmenge  $\tilde{B}$  des Raumes  $\mathbb{R}^3$ , die z. B. offen und zusammenhängend oder der Abschluss einer solchen Menge ist. Damit wird eine implizite Differentialgleichung gegeben, häufig ist jedoch die Auflösung (zumindest lokal) nach der Variablen  $\dot{x}$  möglich. So lassen sich explizite Differentialgleichungen

$$\dot{x} = f(t, x) \tag{3.1}$$

mit einer Funktion  $f(\cdot) : \mathbb{R}^2 \supset B \rightarrow \mathbb{R}$  definieren, wobei im Allgemeinen wieder bestimmte zusätzliche Regularitätsforderungen an die Funktion  $f(\cdot)$  und das Definitionsbereich  $B \subset \mathbb{R}^2$  gestellt werden.

Lösung der Differentialgleichung (3.1) ist eine reellwertige Funktion  $(x(t); t \in \mathbb{T})$ , definiert auf einem Intervall  $\mathbb{R} \supset \mathbb{T} \neq \emptyset$ , welche die Differentialgleichung erfüllt, d. h. es gelten für beliebige  $t \in \mathbb{T}$

$$(t, x(t)) \in B, \quad \exists \dot{x}(t) \quad \text{und} \quad \dot{x}(t) = f(t, x(t)).$$

Ist das Intervall  $\mathbb{T}$  halboffen oder abgeschlossen, sollen an entsprechenden endlichen Randpunkten die jeweiligen einseitigen Ableitungen existieren und die Gleichung erfüllen. Es wird dabei vorausgesetzt, dass das Innere des Intervalls  $\mathbb{T}$  nicht die leere Menge ist. Eine Differentialgleichung besitzt i. a. unendlich viele Lösungen. Durch Vorgabe von Anfangsbedingungen

$$(t_0, x_0) \in B \quad (3.2)$$

können spezielle Lösungen ausgewählt werden.

Eine Funktion  $(x(t); t \in \mathbb{T})$  ist Lösung der Differentialgleichung (3.1) zur Anfangsbedingung (3.2) oder Lösung des Anfangswertproblems (der Anfangswertaufgabe) (3.1), (3.2), wenn sie die Gleichung erfüllt (also Lösung ist) und zusätzlich  $t_0 \in \mathbb{T}$  und  $x(t_0) = x_0$  gelten.

Sehr häufig ist nicht nur eine Funktion gesucht, sondern eine endliche Anzahl von Funktionen, dabei bestehen funktionale Abhängigkeiten zwischen diesen Funktionen und deren Ableitungen. Die Differentialgleichungen können dann typischerweise zu einem (expliziten) System von Differentialgleichungen erster Ordnung zusammengefasst werden und vektoriell beschrieben werden. Dazu bezeichnen wir

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}(\cdot) = \begin{pmatrix} x_1(\cdot) \\ x_2(\cdot) \\ \vdots \\ x_n(\cdot) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) = \begin{pmatrix} f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ f_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \end{pmatrix},$$

mit jeweils skalaren Größen  $x_i, x_i(\cdot), f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

Das System der Differentialgleichungen, mit anderen Worten die vektorielle gewöhnliche Differentialgleichung, wird dann

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$$

geschrieben, hier ist  $\mathbf{f}(\cdot, \cdot) : \mathbb{R}^{n+1} \supset B \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine geeignete Vektorfunktion. Eine Anfangsbedingung lautet nun

$$(t_0, \mathbf{x}_0) \in B \quad \text{mit} \quad \mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \\ \vdots \\ x_{n0} \end{pmatrix}.$$

Eine explizite Differentialgleichung  $n$ -ter Ordnung ( $n \in \mathbb{N}$ )

$$x^{(n)} = f(t, x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)})$$

mit einer Funktion

$$f(\cdot) : \mathbb{R}^{n+1} \supset B \rightarrow \mathbb{R}$$

kann durch die bekannte Transformation

$$\begin{aligned} x_1(t) &= x(t), \\ x_2(t) &= \dot{x}_1(t) = \dot{x}(t) \\ &\dots \\ x_n(t) &= \dot{x}_{n-1}(t) = x^{(n-1)}(t) \end{aligned}$$

in das System von expliziten Differentialgleichungen erster Ordnung

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$$

mit den Bezeichnungen

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \\ f(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \end{pmatrix}$$

überführt werden. Anfangsbedingungen  $(t_0, x_0, x_0^{(1)}, \dots, x_0^{(n-1)}) \in B$  (d. h. wenn für Lösungen die Erfüllung der Bedingungen

$$x(t_0) = x_0, \quad \dot{x}(t_0) = x_0^{(1)}, \quad \dots, \quad x^{(n-1)}(t_0) = x_0^{(n-1)}$$

gefordert wird) gehen dabei in die Anfangsbedingungen

$$(t_0, \mathbf{x}_0) \in B \quad \text{mit} \quad \mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_0^{(1)} \\ \vdots \\ x_0^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

über.

Ist die Funktion  $\mathbf{f}(\cdot)$  linear bezüglich der Argumente  $x_1, x_2, \dots, x_n$  (mit Koeffizienten, die von der unabhängigen Veränderlichen  $t$  abhängen können), dann wird von einem linearen Differentialgleichungssystem  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$  gesprochen. Die allgemeine Gestalt eines solchen Systems ist damit

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \dots + a_{1n}(t)x_n + b_1(t) \\ \dot{x}_2 = a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \dots + a_{2n}(t)x_n + b_2(t) \\ \dots \\ \dot{x}_n = a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \dots + a_{nn}(t)x_n + b_n(t), \end{cases} \quad (3.3)$$

hier sind  $a_{ij}(\cdot), b_j(\cdot)$ ,  $i, j = 1, \dots, n$ , bekannte Funktionen.

Existenz- und Eindeutigkeitssätze für Lösungen von Differentialgleichungen spielen in der Theorie eine wichtige Rolle. Für Anfangswertprobleme

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}), & \mathbf{f} : \mathbb{R}^{n+1} \supset B \rightarrow \mathbb{R}^n, \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, & (t_0, \mathbf{x}_0) \in B, \end{cases} \quad (3.4)$$

für Systeme von Differentialgleichungen erster Ordnung gibt es dabei zwei wichtige Typen von Sätzen. Zum ersten Typ gehört der Existenzsatz für Lösungen von PEANO.

**Satz 26** *Es sei  $B$  ein Gebiet im Raum  $\mathbb{R}^{n+1}$  (d. h. eine offene und zusammenhängende Menge) und die Funktion  $\mathbf{f}(\cdot)$  sei stetig in  $B$ . Dann besitzt das Anfangswertproblem (3.4) mindestens eine Lösung. Jede Lösung lässt sich nach rechts und links (bezüglich der Zeitvariable  $t$ ) bis zum Rand von  $B$  fortsetzen.*

Unter der Bedingung der Stetigkeit der Funktion  $\mathbf{f}(\cdot)$  existieren also für alle Anfangswertaufgaben (bei geeigneten Mengen  $B$ ) Lösungen. Die Lösungen müssen aber nicht eindeutig bestimmt sein. In diesem Zusammenhang sei noch die folgende Bemerkung angeführt.

**Bemerkung.** Eine Lösung einer Differentialgleichung ist definiert auf einem Intervall, damit ergeben verschiedene Definitionsintervalle eigentlich verschiedene „Lösungen“. Es seien zum Beispiel  $(\mathbf{x}(t); t \in \mathbb{T})$  und  $(\bar{\mathbf{x}}(t); t \in \bar{\mathbb{T}})$  zwei Lösungen zum Anfangswertproblem (3.4). Gibt es einen Wert  $t \in \mathbb{T} \cap \bar{\mathbb{T}}$  mit  $\mathbf{x}(t) \neq \bar{\mathbf{x}}(t)$ , dann sind zwei „wesentlich“ verschiedene Lösungen gegeben. Gilt allerdings  $\mathbf{x}(t) = \bar{\mathbf{x}}(t)$  für alle  $t \in \mathbb{T} \cap \bar{\mathbb{T}}$ , dann kann auf  $\tilde{\mathbb{T}} := \mathbb{T} \cup \bar{\mathbb{T}}$  eine Lösung  $(\tilde{\mathbf{x}}(t); t \in \tilde{\mathbb{T}})$  der Anfangswertaufgabe (3.4) mittels

$$\tilde{\mathbf{x}}(t) := \begin{cases} \mathbf{x}(t) = \bar{\mathbf{x}}(t), & t \in \mathbb{T} \cap \bar{\mathbb{T}}, \\ \mathbf{x}(t), & t \in \mathbb{T} \setminus \bar{\mathbb{T}}, \\ \bar{\mathbf{x}}(t), & t \in \bar{\mathbb{T}} \setminus \mathbb{T}, \end{cases}$$

definiert werden. Auf diese Weise kann also eine Fortsetzung der Lösung erfolgen (von der in dem Satz 26 von PEANO gesprochen wird). Gibt es nur eine eindeutig bestimmte Fortsetzung einer Lösung der Anfangswertaufgabe, dann spricht man von einer eindeutig bestimmten Lösung. (Damit werden die Lösung auf dem maximal möglichen Definitionsintervall und Einschränkungen auf verschiedene Teilintervalle in diesem Sinne nicht unterschieden bzw. man meint gleich die Lösung auf dem maximal möglichen Definitionsintervall.)

Der folgende bekannte Satz von PICARD - LINDELÖF gibt hinreichende Bedingungen für die Existenz von eindeutigen Lösungen zu Anfangswertproblemen an.

**Satz 27** *Es sei  $B \subset \mathbb{R}^{n+1}$  ein Gebiet, die Funktion  $\mathbf{f}(\cdot)$  sei stetig in  $B$  und genüge dort einer lokalen LIPSCHITZ-Bedingung bezüglich  $\mathbf{x}$ , d. h. für beliebige Punkte  $(\bar{t}, \bar{\mathbf{x}}) \in B$  existiert eine Umgebung*

$$U = \{(t, \mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{n+1} : |\bar{t} - t| < \delta, \|\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}\| < \delta\}$$

mit einem  $\delta > 0$ , so dass für alle Punkte  $(t, \mathbf{x}), (t, \tilde{\mathbf{x}}) \in U \cap B$  gilt

$$\|\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) - \mathbf{f}(t, \tilde{\mathbf{x}})\| \leq c \|\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}\| \quad (3.5)$$

mit einer Konstanten  $c > 0$  (die von der Umgebung abhängen kann).

Dann besitzt das Anfangswertproblem (3.4) genau eine Lösung. Sie lässt sich nach rechts und links bis zum Rand von  $B$  fortsetzen.

**Bemerkung.** Die lokale LIPSCHITZ-Bedingung ist insbesondere dann erfüllt, wenn die Funktion  $\mathbf{f}(\cdot)$  auf  $B$  stetig differenzierbar ist.

Unter stärkeren Bedingungen kann die Existenz von Lösungen auch auf fest vorgegebenen Definitionsintervallen gezeigt werden.

**Satz 28** *Es gelte  $B = [t_0, t_0 + h] \times \mathbb{R}^n$ ,  $t_0 \in \mathbb{R}$ ,  $h > 0$ , die Funktion  $\mathbf{f}(\cdot)$  sei stetig auf  $B$  und genüge einer globalen LIPSCHITZ-Bedingung (3.5) für beliebige Punkte  $\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ ,  $t \in [t_0, t_0 + h]$  mit einer Konstanten  $c$  unabhängig von  $t, \mathbf{x}, \tilde{\mathbf{x}}$ .*

*Dann existiert genau eine Lösung des Anfangswertproblems (3.4), die auf  $\mathbb{T} = [t_0, t_0 + h]$  definiert ist.*

Das folgende Beispiel zeigt, dass falls nur eine lokale LIPSCHITZ-Bedingung gültig ist, die Lösungen bei Annäherung an endliche Argumente gegen Unendlich konvergieren können („Explosion der Lösung“), also Lösungen nicht überall definiert sein müssen.

**Beispiel 29** Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$\dot{x} = ax^2, \quad x(0) = b,$$

für eine reelle Funktion  $x(\cdot)$  mit den Parametern  $a \neq 0, b \neq 0$ . Die Funktion  $f(t, x) = ax^2$  ist hier stetig auf dem gesamten Raum  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ . Dies ist eine (nichtlineare) Differentialgleichung mit trennbaren Veränderlichen, als Lösung erhält man

$$\begin{aligned} \frac{dx}{x^2} &= a dt \\ \frac{1}{b} - \frac{1}{x} &= at \\ x(t) &= \frac{b}{1 - abt}. \end{aligned}$$

Diese Funktion besitzt eine Besonderheit im Punkt  $t^* := \frac{1}{ab}$ . Eine Lösung des Anfangswertproblems kann somit nur auf den Intervallen  $(\frac{1}{ab}, \infty)$  falls  $ab < 0$  bzw.  $(-\infty, \frac{1}{ab})$  falls  $ab > 0$  definiert werden und nicht auf der gesamten reellen Zahlengeraden.  $\diamond$

Für lineare Differentialgleichungssysteme gilt der folgende Satz.

**Satz 30** Es sei  $\mathbb{T} \subset \mathbb{R}$  ein Intervall mit nichtleerem Inneren und die Funktionen  $(a_{ij}(t); t \in \mathbb{T})$ ,  $(b_j(t); t \in \mathbb{T})$ ,  $i, j = 1, \dots, n$ , seien stetig auf  $\mathbb{T}$ . Dann besitzt das lineare Differentialgleichungssystem (3.3) zu jeder Anfangsbedingung  $(t_0, (x_{10}, \dots, x_{n0})^T) \in \mathbb{T} \times \mathbb{R}^n$  eine eindeutig bestimmte Lösung, die auf  $\mathbb{T}$  definiert ist.

**Bemerkung.** Zum Beweis des Existenz- und Eindeutigkeitssatzes von PICARD - LINDELÖF kann man die Tatsache nutzen, dass das Anfangswertproblem (3.4) für stetige Funktionen  $\mathbf{f}(\cdot)$  äquivalent zur (vektoriellen) Integralgleichung

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{f}(s, \mathbf{x}(s)) ds$$

ist. Eine geeignete Anwendung des BANACHSchen Fixpunktsatzes ergibt dann die Aussage des Satzes.

**Bemerkung.** Neben Anfangswertproblemen werden für gewöhnliche Differentialgleichungen auch andere Aufgabenstellungen betrachtet, so z. B.

- Randwertprobleme (z. B. für Differentialgleichungen höherer Ordnung, hier werden Werte der Lösung bzw. für entsprechende Ableitungen an verschiedenen Punkten des Definitionsbereichs vorgegeben);
- die Suche von periodischen Lösungen (insbesondere wenn die in der Gleichung vorkommenden Parameterfunktionen periodisch sind);
- die Suche von Lösungen mit einem bestimmten Verhalten für  $t \rightarrow \infty$ .

Es sei weiterhin noch erwähnt, dass auch allgemeinere Lösungsbegriffe behandelt werden. So kann man zum Beispiel nur die Absolutstetigkeit der Lösungsfunktionen in einem Intervall  $\mathbb{T}$  und die Erfüllung der Differentialgleichung für fast alle  $t \in \mathbb{T}$  (fast alle bezüglich des LEBESGUE-Maßes auf  $\mathbb{T}$ ) fordern (Lösungen im Sinne von CARATHEODORY).

### 3.1.2 Zufällige gewöhnliche Differentialgleichungen

Im Folgenden seien alle auftretenden Zufallsgrößen, Zufallsvektoren und Zufallsfunktionen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$  definiert. Wir werden hier zur besseren Unterscheidung häufig Zufallsvariable, -vektoren oder -funktionen mit großen Buchstaben schreiben, so z. B.  $(X(t); t \in \mathbb{T})$  für einen Zufallsprozess auf  $\mathbb{T}$ , welcher der deterministischen Funktion  $(x(t); t \in \mathbb{T})$  in den obigen Ausführungen entspricht. Die Abhängigkeit von  $\omega$  wird meist nicht explizit angegeben.

Eine explizite zufällige Differentialgleichung erster Ordnung für einen reellwertigen Zufallsprozess kann dann durch

$$\dot{X} = F(t, X, \omega)$$

mit einer Funktion

$$F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \Omega \supset B \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

mit bestimmten Regularitätsbedingungen bezüglich der Menge  $B$  (Gebiet o. ä.) und der Funktion  $F(\cdot, \cdot, \cdot)$  (Messbarkeit, …) geschrieben werden. Die entsprechende vektorielle Variante lautet

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{F}(t, \mathbf{X}, \omega), \quad \mathbf{F} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \Omega \supset B \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n. \quad (3.6)$$

Häufig wird der Zufall nur durch zufällige Parameterfunktionen in die zufällige Differentialgleichung eingehen, das heißt in diesem Fall gilt für die Funktion  $\mathbf{F}(\cdot)$  zum Beispiel

$$\mathbf{F}(t, \mathbf{x}, \omega) = \tilde{\mathbf{f}}(t, \mathbf{x}, \xi_1(t, \omega), \dots, \xi_r(t, \omega))$$

mit einer endlichen Anzahl von reellwertigen Zufallsprozessen  $(\xi_k(t); t \in \mathbb{T}), k = 1, \dots, r$ , und einer deterministischen Funktion

$$\tilde{\mathbf{f}} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \supset B \times \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^n.$$

Wie in der Stochastik üblich kann man zulassen, dass die zufällige Differentialgleichung nur für Argumente  $\omega \in \Omega_1$  mit  $\mathbf{P}(\Omega_1) = 1$  definiert ist. Ebenfalls kann man Differentialgleichungen betrachten, bei denen das Definitionsbereich der Funktion  $\mathbf{F}(\cdot, \cdot, \omega)$  von  $\omega$  abhängt, d. h. im Fall von  $B = B(\omega)$ .

Eine Anfangsbedingung für eine vektorielle zufällige Differentialgleichung lautet

$$(t_0, \mathbf{X}_0) \quad (3.7)$$

mit einem Zufallsvektor  $\mathbf{X}_0$ , so dass fast sicher  $(t_0, \mathbf{X}_0) \in B$  gilt.

**Definition 31** Ein Zufallsprozess  $(\mathbf{X}(t); t \in \mathbb{T})$  heißt auf dem Intervall  $\mathbb{T}$  realisierungsweise (pfadweise, trajektorienweise) Lösung der zufälligen gewöhnlichen Differentialgleichung (3.6), falls für (fast) alle Realisierungen (Pfade, Trajektorien)  $(\mathbf{X}(t, \omega); t \in \mathbb{T}, \omega \in \Omega)$

$$\frac{d\mathbf{X}(t, \omega)}{dt} = \mathbf{F}(t, \mathbf{X}(t, \omega), \omega)$$

für alle  $t \in \mathbb{T}$  gilt.

Gilt darüber hinaus  $\mathbf{X}(t_0, \omega) = \mathbf{X}_0(\omega)$  f. s., dann heißt der Zufallsprozess realisierungsweise Lösung auf  $\mathbb{T}$  zur Anfangsbedingung  $(t_0, \mathbf{X}_0)$ .

Die realisierungsweisen Lösungen auf  $\mathbb{T}$  zur Anfangsbedingung (3.7) heißen eindeutig in  $\mathbb{T}$ , wenn beliebige realisierungsweise Lösungen auf  $\mathbb{T}$  zu dieser Anfangsbedingung ununterscheidbar sind.

Im Zusammenhang mit dieser Definition werden zwei Probleme wichtig, die unter stochastischen Gegebenheiten zu berücksichtigen sind und die bewirken, dass hier nicht nur einfach eine parametrisierte Familie von deterministischen gewöhnlichen Differentialgleichungen betrachtet werden kann.

1. Das Definitionsintervall einer Lösung soll auf einem von  $\omega \in \Omega$  unabhängigen Zeitintervall definiert sein. Das folgende Beispiel zeigt, dass Aufgabenstellungen auftreten, in denen diese Eigenschaft nicht erfüllt ist. Durch geeignete Definitionen von Zufallsprozessen auf zufälligen Zeitintervallen können gegebenenfalls auch solche Probleme behandelt werden.

**Beispiel 32** Wir betrachten für eine reellwertige Zufallsgröße  $A$  das Anfangswertproblem für die zufällige gewöhnliche Differentialgleichung

$$\dot{X} = 2AtX^2, \quad X(0) = 1.$$

Die Lösung kann wie folgt gefunden werden.

$$\begin{aligned} \frac{dX(t)}{X^2(t)} &= 2At \, dt \\ 1 - \frac{1}{X(t)} &= At^2 \\ X(t) &= \frac{1}{1 - At^2}. \end{aligned}$$

Diese Lösung ist nur für Werte  $t \in \mathbb{R}$  definiert, für welche  $1 - At^2 > 0$ , oder äquivalent dazu  $t^2 < \frac{1}{A}$ , gilt. Ist zum Beispiel die Zufallsvariable  $A$  exponentialverteilt mit Parameter  $\lambda > 0$ , dann gilt für alle  $t \neq 0$

$$\mathbf{P} \left( \left\{ \omega \in \Omega : t^2 < \frac{1}{A(\omega)} \right\} \right) = \mathbf{P} \left( \left\{ \omega \in \Omega : A(\omega) < \frac{1}{t^2} \right\} \right) = 1 - \exp \left( -\frac{\lambda}{t^2} \right) < 1,$$

d. h. es gibt kein von  $\omega$  unabhängiges Intervall, auf dem der „Zufallsprozess“

$$X(t) = \frac{1}{1 - At^2}$$

mit Wahrscheinlichkeit 1 realisierungsweise Lösung des Anfangswertproblems sein könnte.  $\diamond$

2. Die Familie von „Lösungspfaden“ (mit Parameter  $\omega \in \Omega$ ) muss ein Zufallsprozess sein, d. h. es sind gewisse Messbarkeitsbedingungen bezüglich der Abhängigkeit vom Parameter  $\omega$  zu fordern. Auch hier soll ein Beispiel verdeutlichen, dass dies nicht automatisch gewährleistet wird.

**Beispiel 33** Wir betrachten das Anfangswertproblem für die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\dot{X} = \sqrt{|X|}, \quad X(0) = 0.$$

Weiterhin sei  $\Omega^* \subset \Omega$  eine nichtmessbare Menge,  $\Omega^* \notin \mathcal{A}$ , folglich auch  $\Omega \setminus \Omega^* \notin \mathcal{A}$ . (Unter allgemein üblichen Annahmen und für hinreichend reichhaltige Wahrscheinlichkeitsräume, wie z. B. das Intervall  $[0, 1] \subset \mathbb{R}$  mit der  $\sigma$ -Algebra der BOREL- oder LEBESGUE-Mengen existieren immer auch nichtmessbare Mengen.) Definieren wir nun

$$X^*(t, \omega) := \begin{cases} 0 & \text{für } \omega \in \Omega^*, \quad t \geq 0, \\ \frac{t^2}{4} & \text{für } \omega \in \Omega \setminus \Omega^*, \quad t \geq 0, \end{cases}$$

erhalten wir für jedes feste  $\omega \in \Omega$  in  $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$  eine Lösung des Anfangswertproblems, die gesamte Familie dieser Funktionen definiert aber keinen Zufallsprozess, da für feste  $t > 0$  z. B. gilt

$$\{\omega \in \Omega : X^*(t, \omega) > 0\} = \Omega \setminus \Omega^* \notin \mathcal{A}.$$

Ganz analog kann man das Anfangswertproblem

$$\dot{X} = 3X^{\frac{2}{3}}, \quad X(0) = 0,$$

und als „Lösungen“ die Funktionen

$$X^*(t, \omega) := \begin{cases} 0 & \text{für } \omega \in \Omega^*, \quad t \in \mathbb{R}, \\ t^3 & \text{für } \omega \in \Omega \setminus \Omega^*, \quad t \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

betrachten. ◊

Nun sollen noch als zweiter wichtiger Lösungsbegriff Quadratmittellösungen definiert werden.

**Definition 34** Ein Zufallsprozess  $(\mathbf{X}(t); t \in \mathbb{T})$  2. Ordnung (d. h. mit endlichen zweiten Momenten) heißt auf dem Intervall  $\mathbb{T}$  Quadratmittellösung (Lösung im quadratischen Mittel) der zufälligen gewöhnlichen Differentialgleichung (3.6), falls auf  $\mathbb{T}$  die Quadratmittelableitung  $(\dot{\mathbf{X}}(t); t \in \mathbb{T})$  existiert und für alle  $t \in \mathbb{T}$

$$\dot{\mathbf{X}}(t, \omega) = \mathbf{F}(t, \mathbf{X}(t, \omega), \omega)$$

fast sicher gilt.

Gilt darüber hinaus  $\mathbf{X}(t_0, \omega) = \mathbf{X}_0(\omega)$  f. s. (mit  $\mathbf{E}\{\|\mathbf{X}_0\|^2\} < \infty$ ), dann heißt der Zufallsprozess Quadratmittellösung von (3.6) auf  $\mathbb{T}$  zur Anfangsbedingung  $(t_0, \mathbf{X}_0)$ .

Die Quadratmittellösungen auf  $\mathbb{T}$  zur Anfangsbedingung (3.7) heißen eindeutig in  $\mathbb{T}$ , falls für jedes Paar  $(\mathbf{X}(t); t \in \mathbb{T}), (\widetilde{\mathbf{X}}(t); t \in \mathbb{T})$  von Quadratmittellösungen zu dieser Anfangsbedingung  $\mathbf{X}(t, \omega) = \widetilde{\mathbf{X}}(t, \omega)$  f. s. für alle  $t \in \mathbb{T}$  gilt, d. h. beide Zufallsprozesse äquivalent sind.

**Bemerkung:** Quadratmittellösungen von zufälligen Differentialgleichungen müssen nicht unbedingt differenzierbare Trajektorien besitzen. So ist ein Zufallsprozess  $(X(t); t \in \mathbb{R}_+)$  mit existierender Quadratmittelableitung  $(\dot{X}(t); t \in \mathbb{R}_+)$  aber nichtdifferenzierbaren Trajektorien Lösung der zufälligen Differentialgleichung

$$\dot{X} = B(t)$$

falls  $B(t) = \dot{X}(t)$ .

**Bemerkung:** Es werden auch weitere und allgemeinere Lösungsbegriffe betrachtet. So können z. B. realisierungsweise verallgemeinerte Lösungen im Sinne von CARATHEODORY

untersucht werden. Eine andere Möglichkeit besteht darin, die Existenz von Ableitungen nur im Sinne der schwachen  $L^2$ -Konvergenz zu fordern. Letzteres bedeutet, dass Zufallsvariablen  ${}^{(w)}\dot{X}(t)$  existieren, so dass für beliebige Zufallsvariable  $Y \in L^2$  gilt

$$\lim_{h \rightarrow 0} \mathbf{E} \left\{ Y \frac{X(t+h) - X(t)}{h} \right\} = \mathbf{E}\{Y {}^{(w)}\dot{X}(t)\},$$

analog im Vektorfall.

Existenz- und Eindeutigkeitssätze für Lösungen von zufälligen Differentialgleichungen sind im Vergleich zu den entsprechenden Sätzen für deterministische Differentialgleichungen meist schwieriger zu handhaben und nicht von so großer Allgemeinheit. Zuerst seien hier Varianten der Existenz- und Eindeutigkeitssätze für realisierungsweise Lösungen angeführt.

**Satz 35** *Die Funktion  $\mathbf{F}(\cdot, \cdot, \cdot)$  sei messbar und für fast alle  $\omega \in \Omega$  erfülle  $\mathbf{F}(\cdot, \cdot, \omega)$  die Bedingungen des Satzes 27 von PICARD-LINDELÖF mit eindeutigen Lösungen  $(\mathbf{X}(t, \omega); t \in \mathbb{T}_\omega)$  mit  $\mathbf{X}(t_0, \omega) = \mathbf{X}_0$ . Für diese  $\omega$  existiere ein von  $\omega$  unabhängiges Intervall  $\emptyset \neq \mathbb{T} \subset \mathbb{T}_\omega$ . Dann ist  $(\mathbf{X}(t); t \in \mathbb{T})$  eine eindeutig bestimmte realisierungsweise Lösung des Anfangswertproblems (3.6), (3.7).*

**Satz 36** *Es sei  $\mathbf{F} : [t_0, t_0 + h] \times \mathbb{R}^n \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  messbar ( $t_0 \in \mathbb{R}, h > 0$ ), für fast alle  $\omega \in \Omega$  sei  $\mathbf{F}(\cdot, \cdot, \omega)$  stetig auf  $[t_0, t_0 + h] \times \mathbb{R}^n$  und es existiere eine nichtnegative Zufallsvariable  $C(\omega)$  mit*

$$\|\mathbf{F}(t, \mathbf{x}, \omega) - \mathbf{F}(t, \tilde{\mathbf{x}}, \omega)\| \leq C(\omega) \|\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}\| \quad \forall \mathbf{x}, \tilde{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n, \forall t \in [t_0, t_0 + h], \text{ fast sicher.}$$

*Dann existiert zu jeder Anfangsbedingung  $(t_0, \mathbf{X}_0(\omega))$  eine eindeutig bestimmte realisierungsweise Lösung der zufälligen Differentialgleichung (3.6), die auf  $[t_0, t_0 + h]$  definiert ist.*

Für zufällige lineare Differentialgleichungen gilt analog zu den entsprechenden deterministischen Differentialgleichungen der folgende Satz.

**Satz 37** *Es sei  $\mathbb{T} \subset \mathbb{R}$  ein Intervall mit nichtleerem Inneren und die Zufallsfunktionen  $(A_{ij}(t); t \in \mathbb{T})$ ,  $(B_i(t); t \in \mathbb{T})$ ,  $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ , besitzen fast sicher stetige Trajektorien auf  $\mathbb{T}$ .*

*Dann besitzt das zufällige lineare Differentialgleichungssystem*

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{X} + \mathbf{B}(t)$$

*mit*

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}(t) = \begin{pmatrix} A_{11}(t) & \dots & A_{1n}(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{n1}(t) & \dots & A_{nn}(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}(t) = \begin{pmatrix} B_1(t) \\ \vdots \\ B_n(t) \end{pmatrix}$$

*für jede Anfangsbedingung  $(t_0 \in \mathbb{T}, (X_{10}(\omega), \dots, X_{n0}(\omega))^T)$  eine eindeutig bestimmte realisierungsweise Lösung, die auf  $\mathbb{T}$  definiert ist.*

Ein Problem bei der Anwendung dieser Sätze besteht darin, dass entsprechende Eigenschaften der Trajektorien der zufälligen Koeffizientenfunktionen nachgewiesen werden müssen, was nicht immer so leicht möglich ist.

Wenn nur die schwächeren Bedingungen des Satzes von PEANO über die Existenz von Lösungen realisierungsweise erfüllt sind, müssen zwei Probleme beachtet werden, einmal die

Existenz eines von  $\omega \in \Omega$  unabhängigen Definitionsintervall und zum Zweiten die Messbarkeitsbedingung an den zufälligen Lösungsprozess. Häufig ist es jedoch so, dass sich die Lösungen als Grenzwerte eines Approximationsverfahrens (wie sukzessive Approximation, Polygonzugverfahren) mit günstigen Regularitätseigenschaften z. B. bezüglich der Messbarkeit ergeben, dann entsteht im Allgemeinen eine messbare Lösung.

Für Quadratmitteldifferentialgleichungen ist die Existenz der Momente ein möglicher Problempunkt.

Betrachten wir zum Beispiel die Differentialgleichung  $\dot{X} = AX^2$  mit einer Zufallsgröße  $A$ . Bei einer Interpretation als Quadratmitteldifferentialgleichung müssen dann die Lösung  $(X(t); t \in \mathbb{T})$  und der Zufallsprozess der Quadratmittelableitung  $(\dot{X}(t); t \in \mathbb{T})$  Prozesse zweiter Ordnung sein. Insbesondere folgt dann aus der Bedingung  $\mathbf{E}\{\dot{X}^2(t)\} < \infty$  auch die Forderung

$$\mathbf{E}\left\{\left[AX^2(t)\right]^2\right\} = \mathbf{E}\{A^2X^4(t)\} < \infty,$$

d. h. unter relativ schwachen Bedingungen an die Verteilung des zufälligen Koeffizienten  $A$  muss für eine Lösung sogar  $\mathbf{E}\{X^4(t)\} < \infty$  gelten, usw. Ähnliche Situationen betreffen Momente von zufälligen Koeffizienten (auch bei linearen Differentialgleichungen) oder Momente von Anfangsbedingungen.

Wenn die Funktion  $\mathbf{F}(\cdot, \cdot, \cdot) : \mathbb{T} \times \mathbb{R}^n \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Abbildung

$$\tilde{\mathbf{F}} : \mathbb{T} \times L^2(\Omega; \mathbb{R}^n) \times \Omega \rightarrow L^2(\Omega; \mathbb{R}^n); \quad (t, \mathbf{Y}(\omega), \omega) \mapsto \mathbf{F}(t, \mathbf{Y}(\omega), \omega) \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^n)$$

erzeugt (dazu ist unter Anderem eine Verträglichkeit mit der Äquivalenzklassenbildung notwendig), dann kann die Theorie der BANACH- (bzw. HILBERT-Raum-wertigen Differentialgleichungen verwendet werden. Dabei existieren Resultate, die analog zu Resultaten für vektorwertige (mit endlicher Dimension) Differentialgleichungen sind. So gilt zum Beispiel das folgende Theorem.

**Satz 38** Für die Funktion  $\tilde{\mathbf{F}}(\cdot)$  mit  $\mathbb{T} = [t_0, t_0 + h]$ ,  $t_0 \in \mathbb{R}$ ,  $h > 0$ , gelte

$$\mathbf{E}\left\{\|\tilde{\mathbf{F}}(t, \mathbf{Y}, \cdot) - \tilde{\mathbf{F}}(t, \bar{\mathbf{Y}}, \cdot)\|^2\right\} \leq c \mathbf{E}\{\|\mathbf{Y} - \bar{\mathbf{Y}}\|^2\}$$

für alle  $t \in [t_0, t_0 + h]$ ,  $\mathbf{Y}, \bar{\mathbf{Y}} \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^n)$  mit einer Konstanten  $c > 0$ .

Dann existiert zu jeder Anfangsbedingung  $(t_0, \mathbf{X}_0)$ ,  $\mathbf{X}_0 \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^n)$ , eine eindeutige Quadratmittellösung der zufälligen Differentialgleichung (3.6), die auf  $[t_0, t_0 + h]$  definiert ist.

Das folgende Beispiel zeigt, dass dieser Satz nur beschränkt anwendbar ist.

**Beispiel 39** Wir betrachten die reelle lineare zufällige Differentialgleichung

$$\dot{X} = AX, \quad X(0) = X_0 \in L^2(\Omega; \mathbb{R})$$

mit einer Zufallsgröße  $A$ . Dann existiert eine eindeutige realisierungsweise Lösung

$$X(t) = X_0 \exp(At), \quad t \in \mathbb{R},$$

die auch die Quadratmittellösung im Fall ihrer Existenz ist. Dazu ist die Erfüllung der Bedingung

$$\mathbf{E}\{X^2(t)\} < \infty \Leftrightarrow \mathbf{E}\{X_0^2 \exp(2At)\} < \infty, \quad t \in \mathbb{R},$$

notwendig. Setzen wir zusätzlich voraus, dass die Zufallsvariablen  $X_0$  und  $A$  stochastisch unabhängig sind, erhalten wir die notwendige Bedingung  $\mathbf{E}\{\exp(2At)\} < \infty$  für die Existenz einer Quadratmittellösung. Diese Bedingung ist insbesondere für fast sicher beschränkte Zufallsvariable  $A$ , d. h. wenn  $|A(\omega)| < a$  fast sicher mit einer Konstanten  $a > 0$  gilt, erfüllt, aber zum Beispiel auch für normalverteilte Zufallsvariable  $A$  (dann ist  $\exp(2At)$  logarithmisch normalverteilt mit endlichem Erwartungswert).

Für die (hier skalare) Funktion  $\tilde{F}(\cdot)$  aus dem vorigen Satz gilt  $\tilde{F}(t, Y, \cdot) = AY$  und folglich

$$\mathbf{E}\left\{|\tilde{F}(t, Y, \cdot) - \tilde{F}(t, \bar{Y}, \cdot)|^2\right\} = \mathbf{E}\left\{|A|^2|Y - \bar{Y}|^2\right\}.$$

Der letzte Ausdruck kann für allgemeine Zufallsgrößen  $Y - \bar{Y} \in L^2(\Omega; \mathbb{R})$  unendlich werden (z. B. falls  $Y - \bar{Y} = A$  und  $\mathbf{E}\{|A|^4\} = \infty$ ). Ist jedoch der zufällige Koeffizient  $A$  fast sicher beschränkt,  $|A(\omega)| < a$  f. s. mit  $a > 0$ , dann gilt

$$\mathbf{E}\left\{|A|^2|Y - \bar{Y}|^2\right\} \leq a^2 \mathbf{E}\left\{|Y - \bar{Y}|^2\right\}$$

und der Satz ist anwendbar. Für normalverteilte Koeffizienten  $A$  (und davon stochastisch unabhängige Anfangsbedingungen  $X_0$ ) kann der Satz in dieser Form jedoch nicht angewendet werden, obwohl in dieser Situation auch die Quadratmittellösungen existieren.  $\diamond$

# Kapitel 4

## Zufällige lineare Differentialgleichungen mit zufälligen Anfangswerten und stochastischen inhomogenen Termen

### 4.1 Lösungen von Anfangswertaufgaben

Wir betrachten nun eine spezielle Klasse von zufälligen gewöhnlichen Differentialgleichungen, für die weitgehende Aussagen über Charakteristiken mit relativ einfachen Mitteln gefunden werden können. Dies ist die Klasse der linearen Differentialgleichungen, bei denen die Koeffizienten deterministisch, der inhomogene Term und die Anfangswerte jedoch zufällig sind. Genauer untersuchen wir Anfangswertaufgaben für Systeme von  $n$  Differentialgleichungen (mit anderen Worten: eine vektorielle Differentialgleichung) der Gestalt

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{a}(t)\mathbf{X} + \mathbf{Z}(t), \quad \mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}_0 \quad (4.1)$$

mit einer deterministischen stetigen  $n \times n$ -Matrixfunktion  $\mathbf{a}(t) = (a_{ij}(t))_{i,j=1,\dots,n}$ ,  $t \in \mathbb{T}$ , einem vektoriellen Zufallsprozess  $(\mathbf{Z}(t); t \in \mathbb{T}) = ((Z_1(t), \dots, Z_n(t))^T; t \in \mathbb{T})$  und einem Zufallsvektor  $\mathbf{X}_0 = (X_{10}, \dots, X_{n0})^T$ . Das Definitionsgesetz  $\mathbb{T}$  der Koeffizientenmatrixfunktion und des vektoriellen Zufallsprozesses soll ein Intervall mit nichtleerem Inneren der reellen Achse sein, außerdem soll  $t_0 \in \mathbb{T}$  gelten. (Um eventuell mögliche Verwechslungen mit dem bei der Behandlung von zufälligen (stochastischen) Differentialgleichungen häufig benutzten Symbol  $B(t)$  für die Brownsche Bewegung oder eine fraktale Brownsche Bewegung zu vermeiden, wurde jetzt die Bezeichnung  $Z(t)$  für den inhomogenen Term gewählt.)

Aus der Theorie der deterministischen Differentialgleichungen ist bekannt, dass die Lösungen der zugehörigen deterministischen homogenen linearen Differentialgleichung

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{a}(t)\mathbf{x} \quad (4.2)$$

einen  $n$ -dimensionalen Vektorraum bilden.

Weiterhin existiert eine Matrixfunktion  $\Phi(t, s)$ ,  $t, s \in \mathbb{T}$ , die Fundamentalmatrix genannt wird und folgende Eigenschaften besitzt:

1. die Matrixfunktion ist stetig und besitzt stetige Ableitungen,
2.  $\det \Phi(t, s) \neq 0$ ,  $\forall t, s \in \mathbb{T}$ , d. h. alle Matrizen sind regulär,

3.  $\Phi(t, t) = \mathbf{I}$ ,  $\forall t \in \mathbb{T}$  ( $\mathbf{I}$  ist die  $n \times n$ -Einheitsmatrix),
4. für  $t_0, t_1, t_2 \in \mathbb{T}$  gilt  $\Phi(t_2, t_0) = \Phi(t_2, t_1)\Phi(t_1, t_0)$ ,
5. die Fundamentalmatrix genügt für feste Werte  $s \in \mathbb{T}$  der Matrixdifferentialgleichung  $\frac{d\Phi(t, s)}{dt} = \mathbf{a}(t)\Phi(t, s)$  mit der Anfangsbedingung  $\Phi(s, s) = \mathbf{I}$ .

Für feste Werte  $s \in \mathbb{T}$  bilden die Spalten der Fundamentalmatrix als Funktionen von  $t \in \mathbb{T}$  eine Basis des Vektorraums der Lösungen der homogenen Differentialgleichung (4.2).

Für das Anfangswertproblem (4.1) mit der zufälligen inhomogenen Gleichung gelten folgende Aussagen.

#### Satz 40

- (i) Ist der stochastische Prozess  $(\mathbf{Z}(t); t \in \mathbb{T})$  realisierungsweise stetig auf  $\mathbb{T}$ , so ist

$$\mathbf{X}(t) = \Phi(t, t_0)\mathbf{X}_0 + \int_{t_0}^t \Phi(t, s)\mathbf{Z}(s) ds = \Phi(t, t_0)\mathbf{X}_0 + \Phi(t, t_0) \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(s, t_0)\mathbf{Z}(s) ds \quad (4.3)$$

die eindeutige realisierungsweise Lösung des Anfangswertproblems (4.1), das Integral wird dabei als realisierungsweises RIEMANN- (oder LEBESGUE-)Integral verstanden.

- (ii) Ist  $(\mathbf{Z}(t); t \in \mathbb{T})$  ein im Quadratmittel stetiger Zufallsprozess auf  $\mathbb{T}$ , so ist

$$\mathbf{X}(t) = \Phi(t, t_0)\mathbf{X}_0 + \int_{t_0}^t \Phi(t, s)\mathbf{Z}(s) ds = \Phi(t, t_0)\mathbf{X}_0 + \Phi(t, t_0) \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(s, t_0)\mathbf{Z}(s) ds$$

die eindeutige Quadratmittellösung des Anfangswertproblems (4.1) unter Voraussetzung  $\mathbf{E}\{\|\mathbf{X}_0\|^2\} < \infty$ , hier ist das Integral als Integral im quadratischen Mittel zu verstehen.

- (iii) Ist  $(\mathbf{Z}(t); t \in \mathbb{T})$  ein im quadratischen Mittel und realisierungsweise stetiger Zufallsprozess 2. Ordnung auf  $\mathbb{T}$  und gilt  $\mathbf{E}\{\|\mathbf{X}_0\|^2\} < \infty$ , so sind realisierungsweise Lösungen und Quadratmittellösungen von (4.1) äquivalent.

Im allgemeinen Fall kann die Fundamentalmatrix nicht analytisch angegeben werden. Eine näherungsweise Berechnung ist mit Hilfe obiger linearer Matrixdifferentialgleichung möglich. Im wichtigen Spezialfall einer Gleichung mit konstanten Koeffizienten

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{a}\mathbf{X} + \mathbf{Z}, \quad \mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}_0 \quad (4.4)$$

mit einer deterministischen Matrix  $\mathbf{a} = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ , lautet die Fundamentalmatrix

$$\Phi(t, s) = \exp((t-s)\mathbf{a}) = e^{(t-s)\mathbf{a}}, \quad t, s \in \mathbb{T}.$$

Die Exponenten  $\exp(\mathbf{c})$  einer Matrix  $\mathbf{c} = (c_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$  kann dabei über die Reihe

$$\exp(\mathbf{c}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \mathbf{c}^k = \mathbf{I} + \mathbf{c} + \frac{1}{2}\mathbf{c}^2 + \dots$$

mit der Einheitsmatrix  $\mathbf{I} = \mathbf{c}^0$  definiert werden, für die Ableitung der Matrixfunktion gilt

$$\frac{d \exp(t\mathbf{c})}{dt} = \mathbf{c} \exp(t\mathbf{c}) = \exp(t\mathbf{c}) \mathbf{c}.$$

Entsprechende Lösungen realisierungsweise bzw. im quadratischen Mittel der Anfangswertaufgabe (4.4) sind

$$\mathbf{X}(t) = e^{(t-t_0)\mathbf{a}} \mathbf{X}_0 + \int_{t_0}^t e^{(t-s)\mathbf{a}} \mathbf{Z}(s) ds = e^{(t-t_0)\mathbf{a}} \mathbf{X}_0 + e^{t\mathbf{a}} \int_{t_0}^t e^{-s\mathbf{a}} \mathbf{Z}(s) ds.$$

Berechnet man zur Probe die Ableitung dieser Vektorfunktion nach  $t$ , erhält man

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{X}}(t) &= \mathbf{a} e^{(t-t_0)\mathbf{a}} \mathbf{X}_0 + \mathbf{a} e^{t\mathbf{a}} \int_{t_0}^t e^{-s\mathbf{a}} \mathbf{Z}(s) ds + \mathbf{a} e^{t\mathbf{a}} e^{-t\mathbf{a}} \mathbf{Z}(t) \\ &= \mathbf{a} \left( e^{(t-t_0)\mathbf{a}} \mathbf{X}_0 + e^{t\mathbf{a}} \int_{t_0}^t e^{-s\mathbf{a}} \mathbf{Z}(s) ds \right) + \mathbf{Z}(t) \\ &= \mathbf{a} \mathbf{X}(t) + \mathbf{Z}(t). \end{aligned}$$

In vielen Fällen interessieren von den zufälligen Lösungsprozessen statistische Charakteristiken, vor allem die Erwartungswertfunktion und die Korrelationsfunktion. Zu ihrer Bestimmung müssen für diesen speziellen Typ von zufälligen Gleichungen auch nur die ersten bzw. zweiten Momente von zufälligen Anfangsbedingungen und dem zufälligen inhomogenen Term bekannt sein. Für die Erwartungswertfunktion gilt die folgende Aussage.

**Satz 41** Sei

- (a)  $(\mathbf{Z}(t); t \in \mathbb{T})$  realisierungsweise stetig auf  $\mathbb{T}$  mit einer stetigen Erwartungswertfunktion  $\mathbf{m}_Z(t) := \mathbf{E}\{\mathbf{Z}(t)\}$  und  $\mathbf{E}\{\|\mathbf{X}_0\|\} < \infty$  bzw.  
 (b)  $(\mathbf{Z}(t); t \in \mathbb{T})$  in quadratischen Mittel stetig auf  $\mathbb{T}$  und  $\mathbf{E}\{\|\mathbf{X}_0\|^2\} < \infty$ .  
 Dann existiert für die realisierungsweise bzw. Quadratmittellösung von (4.1) die Erwartungswertfunktion und es gilt

$$\mathbf{m}_X(t) := \mathbf{E}\{\mathbf{X}(t)\} = \Phi(t, t_0) \mathbf{E}\{\mathbf{X}_0\} + \int_{t_0}^t \Phi(t, s) \mathbf{m}_Z(s) ds.$$

Die Erwartungswertfunktion  $\mathbf{m}_X(t)$  ist Lösung der deterministischen Vektordifferentialgleichung

$$\dot{\mathbf{m}}_X(t) = \mathbf{a}(t) \mathbf{m}_X(t) + \mathbf{m}_Z(t) \quad (4.5)$$

auf  $\mathbb{T}$  mit der Anfangsbedingung  $\mathbf{m}_X(t_0) = \mathbf{E}\{\mathbf{X}_0\}$ .

*Beweis.* Die Lösung des zufälligen Anfangswertproblems (4.1) existiert unter den angegebenen Voraussetzungen und sie kann dargestellt werden durch

$$\mathbf{X}(t) = \Phi(t, t_0) \mathbf{X}_0 + \int_{t_0}^t \Phi(t, s) \mathbf{Z}(s) ds.$$

Für den Ausdruck auf der rechten Seite existiert die Erwartungswertfunktion, demzufolge auch für  $\mathbf{X}(t)$ , d. h. es gilt

$$\mathbf{m}_X(t) := \mathbf{E}\{\mathbf{X}(t)\} = \Phi(t, t_0) \mathbf{E}\{\mathbf{X}_0\} + \int_{t_0}^t \Phi(t, s) \mathbf{E}\{\mathbf{Z}(s)\} ds.$$

Werden beide Seiten dieser Gleichung nach  $t$  differenziert, erhält man

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{m}}_{\mathbf{X}}(t) &= \dot{\Phi}(t, t_0) \mathbf{E}\{\mathbf{X}_0\} + \Phi(t, t) \mathbf{E}\{\mathbf{Z}(t)\} + \int_{t_0}^t \dot{\Phi}(t, s) \mathbf{E}\{\mathbf{Z}(s)\} ds \\ &= \mathbf{a}(t) \Phi(t, t_0) \mathbf{E}\{\mathbf{X}_0\} + \mathbf{m}_{\mathbf{Z}}(t) + \mathbf{a}(t) \int_{t_0}^t \Phi(t, s) \mathbf{m}_{\mathbf{Z}}(s) ds\end{aligned}$$

und damit die Differentialgleichung (4.5). Außerdem gilt für den Anfangszeitpunkt  $t = t_0$

$$\mathbf{E}\{\mathbf{X}(t_0)\} = \mathbf{m}_{\mathbf{X}}(t_0) = \mathbf{E}\{\mathbf{X}_0\}.$$

□

Zur Bestimmung der Momente zweiter Ordnung nehmen wir an, dass  $(\mathbf{Z}(t); t \in \mathbb{T})$  im Quadratmittel stetig auf  $\mathbb{T}$  ist und  $\mathbf{E}\{\|\mathbf{X}_0\|^2\} < \infty$  gilt.

Dann folgt für  $t_1, t_2 \in \mathbb{T}$  aus

$$\mathbf{X}(t_i) = \Phi(t_i, t_0) \mathbf{X}_0 + \int_{t_0}^{t_i} \Phi(t_i, s_i) \mathbf{Z}(s_i) ds_i, \quad i = 1, 2,$$

für die Kovarianzfunktion

$$\begin{aligned}\mathbf{C}_{\mathbf{XX}}(t_1, t_2) &:= \mathbf{E}\{\mathbf{X}(t_1) \mathbf{X}^T(t_2)\} \\ &= \mathbf{E} \left\{ \left[ \Phi(t_1, t_0) \mathbf{X}_0 + \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, s_1) \mathbf{Z}(s_1) ds_1 \right] \left[ \Phi(t_2, t_0) \mathbf{X}_0 + \int_{t_0}^{t_2} \Phi(t_2, s_2) \mathbf{Z}(s_2) ds_2 \right]^T \right\} \\ &= \Phi(t_1, t_0) \mathbf{E}\{\mathbf{X}_0 \mathbf{X}_0^T\} \Phi^T(t_2, t_0) + \Phi(t_1, t_0) \int_{t_0}^{t_2} \mathbf{E}\{\mathbf{X}_0 \mathbf{Z}^T(s_2)\} \Phi^T(t_2, s_2) ds_2 \\ &\quad + \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, s_1) \mathbf{E}\{\mathbf{Z}(s_1) \mathbf{X}_0^T\} ds_1 \Phi^T(t_2, t_0) \\ &\quad + \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{t_2} \Phi(t_1, s_1) \mathbf{E}\{\mathbf{Z}(s_1) \mathbf{Z}^T(s_2)\} \Phi^T(t_2, s_2) ds_2 ds_1.\end{aligned}$$

Analog erhält man für die Korrelationsfunktion

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_{\mathbf{XX}}(t_1, t_2) &:= \mathbf{Cov}\{\mathbf{X}(t_1), \mathbf{X}(t_2)\} = \mathbf{E}\{[\mathbf{X}(t_1) - \mathbf{m}_{\mathbf{X}}(t_1)][\mathbf{X}(t_2) - \mathbf{m}_{\mathbf{X}}(t_2)]^T\} \\ &= \Phi(t_1, t_0) \mathbf{Cov}\{\mathbf{X}_0, \mathbf{X}_0\} \Phi^T(t_2, t_0) + \Phi(t_1, t_0) \int_{t_0}^{t_2} \mathbf{Cov}\{\mathbf{X}_0, \mathbf{Z}(s_2)\} \Phi^T(t_2, s_2) ds_2 \\ &\quad + \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, s_1) \mathbf{Cov}\{\mathbf{Z}(s_1), \mathbf{X}_0\} ds_1 \Phi^T(t_2, t_0) \\ &\quad + \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{t_2} \Phi(t_1, s_1) \mathbf{Cov}\{\mathbf{Z}(s_1) \mathbf{Z}^T(s_2)\} \Phi^T(t_2, s_2) ds_2 ds_1.\end{aligned}$$

Damit können bei gegebenen Momenten erster und zweiter Ordnung von  $\mathbf{X}_0$  und  $(\mathbf{Z}(t); t \in \mathbb{T})$ , d. h. von den Vektoren bzw. Matrizen  $\mathbf{E}\{\mathbf{X}_0\}$ ,  $\mathbf{E}\{\mathbf{X}_0 \mathbf{X}_0^T\} = \mathbf{Cov}\{\mathbf{X}_0, \mathbf{X}_0\}$ ,  $\mathbf{E}\{\mathbf{Z}(t)\}$ ,  $\mathbf{E}\{\mathbf{X}_0 \mathbf{Z}^T(t)\} = \mathbf{Cov}\{\mathbf{X}_0, \mathbf{Z}(t)\}$ ,  $\mathbf{E}\{\mathbf{Z}(t_1) \mathbf{Z}^T(t_2)\} = \mathbf{Cov}\{\mathbf{Z}(t_1), \mathbf{Z}(t_2)\}$ ,  $t, t_1, t_2 \in \mathbb{T}$ , bei Kenntnis der Übertragungsmatrix  $\Phi(t, t_0)$  erste und zweite Momente der Lösung berechnet

werden. Ebenso können daraus Kreuzkovarianz und -korrelationsfunktionen z. B. der Lösung und ihrer Ableitung etc. bestimmt werden. So gilt exemplarisch

$$\begin{aligned}\mathbf{C}_{\dot{\mathbf{X}}\mathbf{X}}(t_1, t_2) &:= \mathbf{E}\{\dot{\mathbf{X}}(t_1)\mathbf{X}^T(t_2)\} \\ &= \mathbf{a}(t_1)\mathbf{E}\{\mathbf{X}(t_1)\mathbf{X}^T(t_2)\} + \mathbf{E}\{\mathbf{Z}(t_1)\mathbf{X}^T(t_2)\},\end{aligned}$$

hier können die gegebenen und schon berechneten Größen eingesetzt werden. Eine andere Möglichkeit besteht in der Berechnung der partiellen Ableitung

$$\mathbf{C}_{\dot{\mathbf{X}}\mathbf{X}}(t_1, t_2) = \frac{\partial \mathbf{C}_{\mathbf{X}\mathbf{X}}(t_1, t_2)}{\partial t_1}.$$

Die Kreuzkovarianzfunktion der Lösung und der Erregerfunktion findet man durch

$$\begin{aligned}\mathbf{C}_{\mathbf{X}\mathbf{Z}}(t_1, t_2) &= \mathbf{E}\{\mathbf{X}(t_1)\mathbf{Z}^T(t_2)\} = \mathbf{E}\left\{\left[\Phi(t_1, t_0)\mathbf{X}_0 + \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, s)\mathbf{Z}(s)ds\right]\mathbf{Z}^T(t_2)\right\} \\ &= \Phi(t_1, t_0)\mathbf{E}\{\mathbf{X}_0\mathbf{Z}^T(t_2)\} + \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, s)\mathbf{E}\{\mathbf{Z}(s)\mathbf{Z}^T(t_2)\} ds.\end{aligned}$$

Analog lassen sich entsprechende Korrelationsfunktionen berechnen.

Ist die Übertragungsfunktion nicht exakt angebar, können numerisch berechnete Näherungswerte bei einer numerischen Integration verwendet werden.

Die Matrixkovarianz- und Korrelationsfunktionen sind aber auch Lösungen von deterministischen Differentialgleichungssystemen.

So kann in der Beziehung

$$\mathbf{C}_{\dot{\mathbf{X}}\mathbf{Z}}(t_1, t_2) = \mathbf{E}\{\dot{\mathbf{X}}(t_1)\mathbf{Z}^T(t_2)\} = \frac{\partial \mathbf{C}_{\mathbf{X}\mathbf{Z}}(t_1, t_2)}{\partial t_1}$$

für  $\dot{\mathbf{X}}(t_1)$  der Ausdruck aus der Differentialgleichung eingesetzt werden,

$$= \mathbf{a}(t_1)\mathbf{E}\{\mathbf{X}(t_1)\mathbf{Z}^T(t_2)\} + \mathbf{E}\{\mathbf{Z}(t_1)\mathbf{Z}^T(t_2)\},$$

d. h. für feste  $t_2 \in \mathbb{T}$  gilt jeweils die deterministische gewöhnliche Differentialgleichung (mit  $t_2$  als festem Parameter)

$$\frac{\partial \mathbf{C}_{\mathbf{X}\mathbf{Z}}(t_1, t_2)}{\partial t_1} = \mathbf{a}(t_1)\mathbf{C}_{\mathbf{X}\mathbf{Z}}(t_1, t_2) + \mathbf{C}_{\mathbf{Z}\mathbf{Z}}(t_1, t_2)$$

mit der Anfangsbedingung

$$\mathbf{C}_{\mathbf{X}\mathbf{Z}}(t_0, t_2) = \mathbf{E}\{\mathbf{Z}(t_0)\mathbf{Z}^T(t_2)\} = \mathbf{E}\{\mathbf{X}_0\mathbf{Z}^T(t_2)\}.$$

Hieraus folgt

$$\mathbf{C}_{\mathbf{Z}\mathbf{X}}(t_1, t_2) = \mathbf{E}\{\mathbf{Z}(t_1)\mathbf{X}^T(t_2)\} = (\mathbf{E}\{\mathbf{X}(t_2)\mathbf{Z}(t_1)\})^T = \mathbf{C}_{\mathbf{X}\mathbf{Z}}^T(t_2, t_1).$$

Weiterhin gilt für das zweite gemischte Moment der Ableitung der Lösung und der Lösung selber zum jeweils gleichen Zeitpunkt

$$\begin{aligned}\mathbf{C}_{\dot{\mathbf{X}}\mathbf{X}}(t, t) &= \mathbf{E}\{\dot{\mathbf{X}}(t)\mathbf{X}^T(t)\} = \frac{d\mathbf{E}\{\mathbf{X}(t)\mathbf{X}^T(t)\}}{dt} = \frac{d\mathbf{C}_{\mathbf{X}\mathbf{X}}(t, t)}{dt} \\ &= \mathbf{a}(t)\mathbf{E}\{\mathbf{X}(t)\mathbf{X}^T(t)\} + \mathbf{E}\{\mathbf{Z}(t)\mathbf{X}^T(t)\},\end{aligned}$$

d. h. es gilt die deterministische gewöhnliche Matrixdifferentialgleichung

$$\frac{d\mathbf{C}_{\mathbf{XX}}(t, t)}{dt} = \mathbf{a}(t)\mathbf{C}_{\mathbf{XX}}(t, t) + \mathbf{C}_{\mathbf{ZX}}(t, t)$$

mit der Anfangsbedingung

$$\mathbf{C}_{\mathbf{XX}}(t_0, t_0) = \mathbf{E} \{ \mathbf{X}(t_0)\mathbf{X}^T(t_0) \} = \mathbf{E} \{ \mathbf{X}_0\mathbf{X}_0^T \}.$$

Schließlich gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{\dot{\mathbf{X}}\mathbf{X}}(t_1, t_2) &= \mathbf{E} \{ \dot{\mathbf{X}}(t_1)\mathbf{X}^T(t_2) \} = \frac{\partial \mathbf{E} \{ \mathbf{X}(t_1)\mathbf{X}^T(t_2) \}}{\partial t_1} = \frac{\partial \mathbf{C}_{\mathbf{XX}}(t_1, t_1)}{\partial t_1} \\ &= \mathbf{a}(t_1)\mathbf{E} \{ \mathbf{X}(t_1)\mathbf{X}^T(t_2) \} + \mathbf{E} \{ \mathbf{Z}(t_1)\mathbf{X}^T(t_2) \}, \end{aligned}$$

d. h. es gilt für feste  $t_2 \in \mathbb{T}$  jeweils die deterministische gewöhnliche Matrixdifferentialgleichung

$$\frac{\partial \mathbf{C}_{\mathbf{XX}}(t_1, t_2)}{\partial t_1} = \mathbf{a}(t_1)\mathbf{C}_{\mathbf{XX}}(t_1, t_2) + \mathbf{C}_{\mathbf{ZX}}(t_1, t_2)$$

mit jeweils der Anfangsbedingung

$$\mathbf{C}_{\mathbf{XX}}(t_1, t_2)|_{t_1=t_2} = \mathbf{E} \{ \mathbf{X}(t_2)\mathbf{X}^T(t_2) \} = \mathbf{C}_{\mathbf{XX}}(t_2, t_2).$$

Bei allen diesen Matrixdifferentialgleichungen unterscheiden sich nur die inhomogenen Terme und die jeweiligen Anfangsbedingungen.

Für die Matrixkovarianzfunktion  $\mathbf{C}_{\mathbf{XX}}(t_1, t_2)$  gilt auch eine partielle Matrixdifferentialgleichung

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathbf{C}_{\mathbf{XX}}(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2} &= \mathbf{a}(t_1)\mathbf{C}_{\mathbf{XX}}(t_1, t_2)\mathbf{a}^T(t_2) + \mathbf{a}(t_1)\mathbf{C}_{\mathbf{XZ}}(t_1, t_2) \\ &\quad + \mathbf{C}_{\mathbf{ZX}}(t_1, t_2)\mathbf{a}^T(t_2) + \mathbf{C}_{\mathbf{ZZ}}(t_1, t_2). \end{aligned}$$

Entsprechende Formeln kann man auch für die Matrixkorrelationsfunktionen  $\mathbf{R}_{\mathbf{XX}}(t_1, t_2)$  finden.

Im Gaußschen Fall können neben den Aussagen über die Momentenfunktionen auch Aussagen über die Verteilung getroffen werden.

**Satz 42** Ist  $((\mathbf{X}_0, \mathbf{Z}(t)); t \in \mathbb{T})$  ein im quadratischen Mittel stetiger Gaußscher Vektorprozess, so ist die Quadratmittellösung von (4.1) ein Gaußscher Zufallsprozess und auch  $((\mathbf{X}_0, \mathbf{Z}(t), \mathbf{X}(t)); t \in \mathbb{T})$  ist ein normalverteilter Vektorprozess.

Der Erwartungswert und die zweiten Momente können mit den obigen Formeln bestimmt werden.

*Beweis.* Für die Lösung gilt

$$\mathbf{X}(t) = \Phi(t, t_0)\mathbf{X}_0 + \int_{t_0}^t \Phi(t, s)\mathbf{Z}(s) ds$$

Der erste Summand  $\Phi(t, t_0)\mathbf{X}_0$  ist normalverteilt, da  $\mathbf{X}_0$  ein Gaußscher Zufallsvektor ist und die Matrixübertragungsfunktion deterministisch. Das Integral ist der Grenzwert im quadratischen Mittel der Riemannschen Integralsummen, d. h.

$$\int_{t_0}^t \Phi(t, s)\mathbf{Z}(s) ds = \text{q.M.} - \lim_{m \rightarrow \infty, \max_{i=1, \dots, m} |\tau_i - \tau_{i-1}| \rightarrow 0} \Phi(t, \tau_i^*)\mathbf{Z}(\tau_i^*)[\tau_i - \tau_{i-1}]$$

mit  $t_0 = \tau_0 < \dots < \tau_m = t$ ,  $\tau_i^* \in [\tau_{i-1}, \tau_i]$ . Da jede dieser Summen normalverteilt ist und Quadratmittelgrenzwerte von normalverteilten Zufallsgrößen wieder normalverteilt sind, folgt hieraus, dass das Integral Gaußsch ist. Entsprechendes gilt auch für die gemeinsame Verteilung von  $((\mathbf{X}_0, \mathbf{Z}(t), \mathbf{X}(t)); t \in \mathbb{T})$ .  $\square$

Wird ein Differentialgleichungsproblem

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{a}\mathbf{X} + \mathbf{Z}, \quad \mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}_0,$$

mit einer konstanten deterministischen Matrix  $\mathbf{a} = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$  betrachtet, kann in den Formeln für die ersten und zweiten Momente die bekannte Fundamentalmatrix

$$\Phi(t, s) = \exp((t-s)\mathbf{a}) = e^{(t-s)\mathbf{a}}, \quad t, s \in \mathbb{T},$$

eingesetzt werden.

**Beispiel 43** Ein wichtiges und grundlegendes Beispiel behandelt einen linearen Einmassenschwinger mit zufälliger Erregung.

Dies führt auf eine gewöhnliche lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$\ddot{X}(t) + 2\delta\theta_0\dot{X}(t) + \theta_0^2 X(t) = Z(t) \quad (4.6)$$

mit  $\theta_0 > 0, \delta > 0$  und entsprechenden Anfangsbedingungen

$$X(t_0) = X_0, \quad \dot{X}(t_0) = \dot{X}_0. \quad (4.7)$$

Wir werden hier  $0 < \delta < 1$  voraussetzen, dies ist der häufigste Fall einer schwachen oder unterkritischen Dämpfung. Bezeichnen wir

$$\theta_d := \theta_0\sqrt{1 - \delta^2},$$

kann die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung  $\ddot{x} + 2\delta\theta_0\dot{x} + \theta_0^2 x = 0$  mit

$$x(t) = e^{-\delta\theta_0 t} (c_1 \cos(\theta_d t) + c_2 \sin(\theta_d t))$$

mit beliebigen Konstanten  $c_1, c_2$  angegeben werden.

Die Impulsantwortfunktion zur Differentialgleichung (4.6) ist eine Funktion  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , die für Werte  $t < 0$  verschwindet,  $h(t) = 0$  falls  $t < 0$ , und für nichtnegative Argumente Lösung der homogenen Differentialgleichung mit Anfangswerten  $h(0) = 0$  und  $\dot{h}(0) = 1$  ist. Die zufällige Funktion  $\int_0^t h(t-s)Z(s) ds$  ist dann Lösung der inhomogenen Differentialgleichung (4.6) mit homogenen Anfangsbedingungen. In unserem Fall gilt für die Impulsantwortfunktion

$$h_d(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ \frac{1}{\theta_d} e^{-\delta\theta_0 t} \sin(\theta_d t), & t \geq 0. \end{cases}$$

Damit erhält man als allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung und Lösung des Anfangswertproblems für  $t \geq t_0$

$$X(t) = e^{-\delta\theta_0(t-t_0)} [C_1 \cos(\theta_d(t-t_0)) + C_2 \sin(\theta_d(t-t_0))] + \int_{t_0}^t h_d(t-s)Z(s) ds$$

mit Werten aus den Anfangsbedingungen

$$C_1 = X_0, \quad C_2 = \frac{\dot{X}_0 + \delta\theta_0 X_0}{\theta_d}.$$

Hieraus können dann Aussagen über die Verteilung der Lösung oder über Momentenfunktionen gemacht werden.

So gilt zum Beispiel unter der Voraussetzung  $\mathbf{E}\{|X_0|\} < \infty$ ,  $\mathbf{E}\{Z(t)\} = m_Z(t)$  endlich und stetig, für die Erwartungswertfunktion  $m_X(t) = \mathbf{E}\{X(t)\}$  der Lösung

$$m_X(t) = e^{-\delta\theta_0(t-t_0)} \left[ \mathbf{E}\{X_0\} \cos(\theta_d(t-t_0)) + \frac{\mathbf{E}\{\dot{X}_0\} + \delta\theta_0 \mathbf{E}\{X_0\}}{\theta_d} \sin(\theta_d(t-t_0)) \right] \\ + \int_{t_0}^t h_d(t-s) m_Z(s) ds$$

und analog für andere Momente.

Natürlich könnte man diese Differentialgleichung zweiter Ordnung in ein System von Differentialgleichungen erster Ordnung überführen und entsprechende Berechnungen ausführen.

◇

# Literaturverzeichnis

- [1] V.V. Bolotin. *Wahrscheinlichkeitsmethoden zur Berechnung von Konstruktionen*. Verlag für Bauwesen Berlin, 1981.
- [2] H. Bunke. *Gewöhnliche Differentialgleichungen mit zufälligen Parametern*. Akademie-Verlag Berlin, 1972.
- [3] W. Heinrich und K. Hennig. *Zufallsschwingungen mechanischer Systeme*. Akademie-Verlag Berlin, 1977.
- [4] T.T. Soong und M. Grigoriu. *Random vibration of mechanical and structural systems*. Prentice Hall Englewood Hall, 1993.
- [5] H.-J. Starkloff, J. vom Scheidt und R. Wunderlich. Remarks on randomly excited oscillators. *ZAMM Z. Angew. Math. Mech.*, 82(11-12):847–859, 2002.
- [6] A.D. Wentzell. *Theorie zufälliger Prozesse*. Akademie-Verlag Berlin, 1979.