Einführung in die Vektoranalysis

Skript zur Vorlesung
im Sommersemester 2001

H. v. Weizsäcker **J. Voß**

Fachbereich Mathematik
Universität Kaiserslautern

10. Juli 2001 - Anlegen der ersten Dateien
20. August 2001 - Erste vollständige Version
6. September 2001 - Kleine Verbesserungen
18. September 2001 - Verbesserungen in den ersten Kapiteln
9. Oktober 2001 - Verbesserungen in den hinteren Kapiteln

http://www.mathematik.uni-kl.de/~wwwstoch/2001s/vec-ana.html

Vorwort

Dieser Text entstand aus Aufzeichnungen zur Vorlesung „Vektoranalysis“, die von H. v. Weizsäcker im Sommersemester 2001 an der Universität Kaiserslautern gehalten wurde. Er setzt nur Grundkenntnisse aus Analysis und linearer Algebra voraus und richtet sich hauptsächlich an Studenten im Grundstudium.

Nach einem hinführenden Kapitel über Kurvenintegrale folgt in Kapitel 3-4 eine Einführung in den Formalismus der Differentialformen, die in Kapitel 5 in der Formulierung des Stokeschen Integralsatzes mündet. Da einerseits in einer 2-stündigen Vorlesung in einem Sommersemester wenig Zeit ist und andererseits genügend Platz für vorbereitende Motivation und ein paar Anwendungen bleiben sollte, wird die Stokessche Formel nur für einfache k-dimensionale Flächenstücke in $\mathbb{R}^n$ bewiesen. Im zweiten Teil des Skriptes findet sich ein ausführliches Kapitel über die Integration bezüglich Oberflächenmaßen, das mit dem Beweis des Gaußschen Divergenzsatzes seinen Abschluß findet. Das letzte Kapitel enthält Anwendungen der bisherigen Ergebnisse u.a. in der Potentialtheorie und auf den Brouwerschen Fixpunktsatz.

An den Kapitelenden sind jeweils die Übungsaufgaben aufgeführt, die wir begleitend zur Vorlesung angeboten haben.

Wir danken den Hörern und Übungsteilnehmern für eine Reihe von Korrekturen, Alexander Klein für die Überlassung seiner Mitschrift und Beate Siegler für das Schreiben großer Teile des Texts.

Jochen Voß

Heinrich v. Weizsäcker

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **4**

2 Kurvenintegrale **6**
2.1 Definition des Kurvenintegrals 6
2.2 Die Länge einer Kurve 7
2.3 Integrable Vektorfelder 8
2.4 Zusammenhang mit komplexen Kurvenintegralen 11
2.5 Pfaffsche Formen 12
2.6 Physikalische Notation 13
2.7 Ausblick 14

3 Alternierende Multilinearformen **17**
3.1 Das Dachprodukt 17
3.2 Der Hodge-Operator 21

4 Differentialformen **25**
4.1 Die äußere Ableitung 25
4.2 Zurückholen von Differentialformen 29

5 Die Stokessche Formel **33**

6 Oberflächenmaße **37**
6.1 Definition der Oberflächenmaße 37
6.2 Integration von Differentialformen 40
6.3 Der Spezialfall von Hyperflächen 42
6.4 Umformulierung der Randintegrale 43
6.5 Der Gaußsche Integralsatz 44

7 Einige Anwendungen **48**
7.1 Die Greensche Formel 48
7.2 Zwei Fälle, in denen R kein einfaches Flächenstück ist 50
7.3 Der Gaußsche Mittelwertsatz und das Maximumsprinzip 51
7.4 Die Umkehrung im Poincaréschen Lemma 53
7.5 Der Fixpunktsatz von Brouwer 53

A Tensor- und Dachprodukte **55**

B Das Planimeter **60**

Kapitel 1

Einleitung

Im Zentrum der Vorlesung steht die Herleitung und Anwendung der Stokes-Formel

$$\int_G d\omega = \int_{\partial G} \omega.$$

Hierbei ist G eine k-dimensionale orientierbare Mannigfaltigkeit mit Rand ∂G ($k-1$ dimensional), ω ist eine Differentialform der Ordnung $k-1$ und $d\omega$ ihre äußere Ableitung.

Es geht um eine Verallgemeinerung des Fundamentalsatzes der eindimensionalen Infinitesimalrechnung

$$\int_a^b f'(x)\, dx = f(b) - f(a).$$

Durch das Verständnis dieser Formel erhält man einen guten Zugang zu verschiedenen Gebieten: Die Stokes-Formel enthält den Gaußschen Integralsatz (insbesondere den Cauchyschen Integralsatz). Dieser ist zentral für z.B. Potentialtheorie (und andere Teile der Theorie partieller Differentialgleichungen). Sie ist ferner zentral in der Elektrodynamik (Maxwellgleichungen). Von der Stokesschen Formel aus gibt es auch Querverbindungen zur Differentialgeometrie (und damit zur allgemeinen Relativitätstheorie) und zur algebraischen Topologie.

Motivation durch partielle Integration im $\mathbb{R}^n$:

Definition. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Mit $\mathcal{C}_c^k(U)$ bezeichnen wir den Raum aller k-mal stetig partiell differenzierbaren Funktionen $f\colon U \longrightarrow \mathbb{R}$, die einen kompakten in U enthaltenen Träger haben, wobei der Träger von f definiert ist als $\operatorname{supp}(f) := \overline{\{x \in U : f(x) \neq 0\}}$.

Satz 1 *a) Sei $1 \leq i \leq n$ und $\varphi \in \mathcal{C}_c^1(U)$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Dann ist*

$$\int_U \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)\, dx = 0.$$

b) Sei $f \in \mathcal{C}^1(U)$ (d.h. Träger muss nicht kp. sein), $g \in \mathcal{C}_c^1(U)$. Dann gilt

$$\int_U f(x) \frac{\partial g}{\partial x_i}(x)\, dx \;=\; -\int_U g(x) \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\, dx.$$

Beweis. ad a) OBdA $U = \mathbb{R}^n$. Wir können nämlich φ durch 0 außerhalb von U zu einer Funktion $\tilde{\varphi} \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R}^n)$ fortsetzen. Es gilt:

$$\int_u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial x_i}(x) dx.$$

Sei also $U=\mathbb{R}^n,\ \varphi\in\mathcal{C}_c^1(\mathbb{R}^n)$. Wir wählen $R<\infty$ so, dass $\operatorname{supp}(\varphi)\subset[-R,R]^n$.

$$\Longrightarrow \int_{\mathbb{R}}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(x_1,x_2,\dots,x_n)dx_i=\int_{-R}^{R}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(x_1,x_2,\dots,x_n)dx_i=[\varphi(x_1,\dots,x_n)]_{x_i=-R}^{x_i=R}=0.$$

Darum
$$\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(x)\,dx=\int\dots\int\underbrace{\int\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(x_1,\dots,x_n)dx_i}_{=0}\,dx_1\dots dx_n=0.$$

ad b) Die Funktion $\varphi=f\cdot g$ ist stetig differenzierbar und verschwindet überall dort wo g verschwindet. Also ist $\varphi\in\mathcal{C}_c^1(U)$. Ferner ist $\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}=f\frac{\partial g}{\partial x_i}+\frac{\partial f}{\partial x_i}g$. Also folgt b) aus a).

(q.e.d.)

Bemerkung. Wesentlich bei diesen Formeln ist, dass mindestens eine der beteiligten Funktionen in $\mathcal{C}_c^1(U)$ liegt. Sonst kommen Randterme hinzu, die genau durch den Gaußschen Integralsatz geliefert werden.

Anwendung: Sei $f\in\mathcal{C}^2(U),\ \ g\in\mathcal{C}_c^2(U)$. Dann gilt

$$\int_U\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x)\,g(x)\,dx\ =\ -\int_U\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\,\frac{\partial g}{\partial x_i}(x)\,dx\ =\ \int_U f(x)\cdot\frac{\partial^2 g}{\partial x_i^2}(x)\,dx.$$

Summation über i liefert:

$$\int_U(\Delta f(x))g(x)\,dx=-\int_U\langle\nabla f(x),\nabla g(x)\rangle\,dx=\int_U f(x)\cdot\Delta g(x)\,dx$$

Fachleute sagen dazu: Der Laplace Operator ist selbstadjungiert in $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Konvention: Für Vektoren $x,y\in\mathbb{R}^d$ bezeichnet x^2 hier den Wert $\sum_{i=1}^d x_i^2$ und $x\cdot y$ steht für $\sum_{i=1}^d x_iy_i$.

Aufgabe 1. Sei $f\in\mathcal{L}_1(\mathbb{R}^d)$. Definiere die **Fouriertransformierte** $\hat f\colon\mathbb{R}^d\to\mathbb{C}$ durch

$$\hat f(k)\ =\ \frac{1}{(2\pi)^{d/2}}\int_{\mathbb{R}^d}f(x)e^{-ik\cdot x}\,dx\qquad\text{für alle } k\in\mathbb{R}^d.$$

a) Zeige, dass $\hat f$ auf ganz $\mathbb{R}^d$ definiert, stetig und beschränkt ist.
b) Berechne mittels partieller Integration die Fouriertransformierte von $x\mapsto\exp(-x^2/2)$.

Kapitel 2

Kurvenintegrale

2.1 Definition des Kurvenintegrals

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Aus der Analysis wissen wir, daß die **Ableitung** einer stetig differenzierbaren Funktion $f\colon U \to \mathbb{R}$ der Gradient $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$ ist. Das heißt, wir können die Funktion f als Stammfunktion des Vektorfeldes $\nabla f\colon U \to \mathbb{R}^n$ auffassen.

Frage: Gibt es hierzu eine Integralform $f(y) - f(x) = \int \nabla f$?

Antwort: Ja! Wenn x und y durch eine stetig differenzierbare Kurve verbunden werden können.

Definition. Sei $\gamma\colon [a;b] \to U$ eine stetig differenzierbare Kurve im $\mathbb{R}^n$ und $v\colon U \to \mathbb{R}^n$ ein stetiges Vektorfeld. Dann definiere das Integral von v längs γ durch

$$\int_\gamma v := \int_a^b \langle v(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle \, dt = \int_a^b \sum_{i=1}^n v_i(\gamma(t)) \cdot \gamma_i'(t)\, dt,$$

wobei

$$v(x) = \begin{pmatrix} v_1(x) \\ \vdots \\ v_n(x) \end{pmatrix}, \quad \gamma(t) = \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \vdots \\ \gamma_n(t) \end{pmatrix}, \quad \gamma'(t) = \begin{pmatrix} \gamma_1'(t) \\ \vdots \\ \gamma_n'(t) \end{pmatrix}.$$

$\gamma'(t)$ heißt auch **Tangentialvektor**.

Diese Definition dehnen wir nun weiter auf stetige, stückweise stetig differenzierbare Kurven $\gamma\colon [a;b] \to U$ aus. Hier gibt es $a_k \in [a;b]$ mit $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_m = b$, so daß $\gamma_k := \gamma|_{[a_{k-1};a_k]}$ stetig differenzierbar ist. Definiere dann

$$\int_\gamma v := \sum_{k=1}^m \int_{\gamma_k} v.$$

Satz 2 *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f\colon U \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, $x, y \in U$ seien zwei Punkte, die durch eine stetige, stückweise stetig differenzierbare Kurve $\gamma\colon [a;b] \to U$ verbunden sind, d.h. $\gamma(a) = x, \gamma(b) = y$. Dann gilt*

$$f(y) - f(x) = \int_\gamma \nabla f.$$

Beweis. 1. Fall: γ ist stetig differenzierbar. Dann ist $f \circ \gamma\colon [a;b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und es gilt:

$$(f \circ \gamma)'(t) = \langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle$$

Also $f(y) - f(x) = f \circ \gamma(b) - f \circ \gamma(a) = \int_a^b (f \circ \gamma)'(t) = \int_\gamma \nabla f$.

2. Fall: γ ist stetig und stückweise stetig differenzierbar. Sei $\gamma_k\colon [a_k; a_{k+1}] \to U$ das k-te Teilstück. Dann gilt:

$$\begin{aligned} f(y) - f(x) &= f(\gamma(a_m)) - f(\gamma(a_0)) = \sum_{k=0}^{m-1} \big(f \circ \gamma(a_{k+1}) - f \circ \gamma(a_k)\big) \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} \int_{\gamma_k} \nabla f = \int_\gamma \nabla f. \end{aligned}$$

(q.e.d.)

Bemerkung. Für die Definition des Kurvenintegrals ist es eigentlich ausreichend, dass $v\colon U \to \mathbb{R}^n$ Borel-messbar ist und $\int_a^b \|v(\gamma(t))\| \, \|\gamma'(t)\| dt < \infty$. Der Vektor $\gamma'(t)$ ist Tangentialvektor. Physikalisch ist $\gamma'(t)$ der Geschwindigkeitsvektor und $\|\gamma'(t))\|$ der Geschwindigkeitsbetrag.

Satz 3 *(Parametrisierungsinvarianz) Sei $\varphi\colon [\tilde{a}; \tilde{b}] \to [a; b]$ eine stetige, stückweise $\mathcal{C}^1$-Funktion, streng monoton wachsend mit $\varphi(\tilde{a}) = a$ und $\varphi(\tilde{b}) = b$. Definiere $\tilde{\gamma}\colon [\tilde{a}; \tilde{b}] \to \mathbb{R}^n$ durch $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi$. Dann ist $\tilde{\gamma}$ eine stetige, stückweise $\mathcal{C}^1$-Kurve und es gilt $\int_\gamma v = \int_{\tilde{\gamma}} v$ für alle stetigen Vektorfelder v.*

Beweis.

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{\gamma}} v &= \int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} \langle v(\tilde{\gamma}(s)), \ \tilde{\gamma}'(s)\rangle \, ds \\ &= \int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} \underbrace{\langle v(\gamma(\varphi(s))), \ \gamma'(\varphi(s))\rangle}_{h(\varphi(s))} \varphi'(s) \, ds \\ &= \int_a^b h(t) \, dt \\ &= \int_a^b \langle (v(\gamma(t)), \ \gamma'(t)\rangle \, dt \\ &= \int_\gamma v \end{aligned}$$

Dieser Beweis funktioniert zunächst nur für $\mathcal{C}^1$-Kurven und φ aus $\mathcal{C}^1$. Dann kann man aber das Ergebnis von Teilintervallen auf das ganze Intervall übertragen. (q.e.d.)

2.2 Die Länge einer Kurve

Definition. Die **Länge** l einer stetigen stückweisen $\mathcal{C}^1$-Kurve γ ist definiert als

$$l(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt.$$

Dies entspricht einem Kurvenintegral $\int_\gamma v$, wobei v ein Vektorfeld ist mit $v(\gamma(t)) = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}$ Denn es ist

$$\int_a^b \|\gamma'(t)\| dt = \int_a^b \langle \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}, \ \gamma'(t)\rangle dt.$$

Das Kurvenstück, das in dem kleinen Zeitintervall $[t, t+h]$ durchlaufen wird, hat in erster Taylor-Approximation die gleiche Länge wie der Vektor $h \cdot \gamma'(t)$, also $h \cdot \|\gamma'(t)\|$. Man erhält

$$\sum_{i=1}^n h \cdot \|\gamma'(t_i)\| \sim \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt.$$

Da γ stückweise $\mathcal{C}^1$ (und damit stetig) ist, ist

$$\begin{aligned}\Phi\colon [a;b] &\to [0;l(\gamma)]\\ s &\mapsto \int_a^s \|\gamma'(t)\|dt\end{aligned}$$

eine stetige, stückweise $\mathcal{C}^1$-Funktion. Wenn zusätzlich $\gamma'(t) \neq 0$ überall vorausgesetzt wird, ist Φ auch streng monoton. Also existiert eine Umkehrfunktion $\varphi\colon [0;l(\gamma)] \to [a;b]$ mit $\Phi \circ \varphi = Id$. Die Kurve $\tilde{\gamma} := \gamma \circ \varphi\colon [0;l(\gamma)] \to \mathbb{R}^n$ heißt die durch die Länge parametrisierte Darstellung von γ. Für alle $\tau \in [0;l(\gamma)]$ gilt nämlich in der Tat

$$\begin{aligned}l(\tilde{\gamma}\big|_{[0;\tau]}) &= \int_0^\tau \|\tilde{\gamma}'(s)\|ds = \int_0^\tau \|\gamma'(\varphi(s))\|\,\varphi'(s)ds = \int_a^{\varphi(\tau)} \|\gamma'(t)\|dt\\ &= l(\gamma\big|_{[a;\varphi(\tau)]}) = \Phi(\varphi(\tau)) = \tau.\end{aligned}$$

Eine weitere Parametrisierungsmöglichkeit liefern Graphen:

Sei $f\colon [a;b] \to \mathbb{R}^{n-1}$ eine $\mathcal{C}^1$-Funktion, und $\gamma(t) = (t, f(t)) \in \mathbb{R}^n$. Dann ist $\gamma'(t) = (1, f'(t))$ und daher $l(\gamma) = \int_a^b \sqrt{1 + \|f'(x)\|^2}dx$.

2.3 Integrable Vektorfelder

Dieser Abschnitt gibt eine Antwort auf folgende Frage: Wann existiert zu einem Vektorfeld eine Stammfunktion? Das heißt, wann existiert zu einem gegebenen Vektorfeld v eine skalare Funktion f mit $v = \nabla f$? Die Antwort darauf hängt sowohl von der Gestalt des Definitionsbereichs der Funktionen ab, als auch von der speziellen Form des Vektorfeldes.

Satz 4 *Für offene Teilmengen $U \subseteq \mathbb{R}^n$ sind folgende Bedingungen äquivalent:*

a) Für je zwei Punkte $x, y \in U$ existiert eine stetige, stückweise $\mathcal{C}^1$-Kurve $\gamma\colon [a,b] \to U$ mit $\gamma(a) = x$ und $\gamma(b) = y$.

b) Für je zwei Punkte $x, y \in U$ existiert eine stetige Kurve $\gamma\colon [a;b] \to U$ mit $\gamma(a) = x$ und $\gamma(b) = y$.

c) Es gibt keine Darstellung $U = V \cup W$, wobei V und W disjunkte offene Mengen mit $V \neq \emptyset$, $W \neq \emptyset$ sind.

Beweis. a) $\Rightarrow$ b): trivial

b) $\Rightarrow$ c): Indirekt: angenommen es seien $x \in V$, $y \in W$ und V, W disjunkt, offen. Nach Voraussetzung b) existiert $\gamma\colon [a,b] \to U$ stetig mit $\gamma(a) = x$, $\gamma(b) = y$. Definiere $t^* := \sup\{\, t \mid \gamma([a;t]) \subset V \,\}$. Wegen $\gamma(b) = y \in W$ ist $\gamma([a;b]) \not\subset V$.

Fall 1: $\gamma(t^*) \in V$. Weil V offen und γ stetig ist, ist $\gamma^{-1}(V)$ offen. Also existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass auch $[t^*, t^* + \varepsilon] \subset \gamma^{-1}(V)$. Dies ist ein Widerspruch zur Def. von t^*.

Fall 2: $\gamma(t^*) \in W$. Wie oben folgt aus W offen und γ stetig, dass $\gamma^{-1}(W)$ offen ist. Also existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass $t^* - \varepsilon \in \gamma^{-1}(W)$, was ebenfalls ein Widerspruch ist.

Insgesamt kann $\gamma(t^*)$ damit weder in V noch in W liegen. Das heißt, es existiert keine Zerlegung $U = V \cup W$ wie angegeben.

c) $\Rightarrow$ a): Seien x, y gegeben. Definiere

$$\begin{aligned}V &:= \{\, z \in U \mid z \text{ kann mit } x \text{ durch eine stetige,}\\ &\qquad\qquad \text{stückweise } \mathcal{C}^1\text{-Kurve verbunden werden} \,\}\\ W &:= \{\, z \in U \mid z \text{ kann } \textbf{nicht} \text{ mit } x \text{ durch eine stetige,}\\ &\qquad\qquad \text{stückweise } \mathcal{C}^1\text{-Kurve verbunden werden} \,\}\end{aligned}$$

Offenbar ist $U = V \cup W$, $x \in V$ und $V \cap W = \emptyset$.

Behauptung: V ist offen. Sei $z \in V$. Sei $\varepsilon > 0$, so dass $K_\varepsilon(z) \subset U$. Sei $z' \in K_\varepsilon(z)$. Dann gibt es auch eine stetige, stückweise $\mathcal{C}^1$-Verbindung $x \longrightarrow z'$ $(x \longrightarrow z \longrightarrow z')$.

Behauptung: W offen. Sei $z \in W$. Sei $\varepsilon > 0$, so dass $K_\varepsilon(z) \subset U$. Angenommen $K_\varepsilon(z) \not\subseteq W$, dann existiert ein $z' \in K_\varepsilon(z)$, mit $z' \in U \backslash W = V$. Also existiert eine Verbindung $x \longrightarrow z'$. An diese kann man die Strecke von z' nach z hängen und erhält eine Verbindung $x \longrightarrow z$, also $z \notin W$. Also gilt doch $K_\varepsilon(z) \subset W$ und W ist somit offen. Wegen Voraussetzung c) muss $W = \emptyset$ sein, also $y \in V$. (q.e.d.)

Definition. Eine offene Menge U heißt **Gebiet**, wenn sie eine der drei Eigenschaften a) bis c) hat.

Bemerkung. In der Topologie heißt Eigenschaft b) wegzusammenhängend und c) zusammenhängend.

Sei jetzt $U \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $v\colon U \to \mathbb{R}^n$ ein stetiges Vektorfeld. Gibt es eine Funktion f mit $\nabla f = v$? Gibt es eine Stammfunktion?

Erinnerung: In diesem Fall gilt $f(y) - f(x) = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) = \int_\gamma \nabla f = \int_\gamma v$ für jede stetige, stückweise $\mathcal{C}^1$-Kurve, die x und y verbindet.

Satz 5 *Sei v ein stetiges Vektorfeld. Dann ist das folgende Kriterium ist notwendig und hinreichend dafür, dass v ein Gradient ist. Für je zwei Punkte x, y in U hängt das Kurvenintegral $\int_\gamma v$ nicht von der Wahl der stetigen, stückweisen $\mathcal{C}^1$-Kurve γ, die x und y verbindet, ab.*

Beweis. Die Notwendigkeit haben wir schon gezeigt. Es bleibt zu zeigen, dass das Kriterium hinreichend ist. Sei also $\int_\gamma v$ nur abhängig vom Anfangs- und Endpunkt der Kurve γ. Gesucht ist nun ein f mit $\nabla f = v$. Wähle $x_0 \in U$ fest und definiere $f(x) := \int_\gamma v$, wobei $\gamma\colon [a;b] \to U$ ein stetiger, stückweise $\mathcal{C}^1$-Weg mit $\gamma(a) = x_0$ und $\gamma(b) = x$ ist. Nach Voraussetzung ist f wohldefiniert.

Zeige: $f \in \mathcal{C}^1(U)$ und $\nabla f = v$. Definiere dazu:

$$\overline{\gamma}\colon [a; b+h] \to U$$
$$\overline{\gamma}(t) = \begin{cases} \gamma(t) & \text{falls } t \in [a;b] \\ x + (t-b)\cdot e_i & \text{falls } t \in [b, b+h] \end{cases}$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} f(x + h\cdot e_i) - f(x) &= \int_{\overline{\gamma}} v - \int_\gamma v = \int_0^h \langle v(x + t\cdot e_i),\ e_i\rangle dt \\ &= \int_0^h v_i(x + t\cdot e_i) dt \\ &= h\ v_i(x) + o(h) \end{aligned}$$

Also $\frac{\partial}{\partial x_i} f(x) = v_i(x)$. Da f partiell differenzierbar mit stetigen partiellen Ableitungen ist, ist f stetig differenzierbar. Außerdem folgt $\nabla f = v$. (q.e.d.)

Definition. Eine Kurve heißt **geschlossen**, wenn Anfangs- und Endpunkt zusammenfallen. Ein Vektorfeld v heißt **integrabel**, wenn es ein f gibt mit $\nabla f = v$.

Ein alternatives Integrabilitätskriterium ist:

$$v \text{ integrabel } \iff \int_\gamma v = 0 \quad \forall \text{geschlossenen, stetigen, stückweisen } \mathcal{C}^1\text{-Kurven } \gamma.$$

Beweis. "$\Rightarrow$": Es gilt: $\int_\gamma v = 0$ für den konstanten Weg. Da $\int_\gamma v$ nur von Anfangs- und Endpunkt abhängt, folgt $\int_\gamma v = 0$ für alle geschlossenen Wege.

"$\Leftarrow$": Wenn $\int_\gamma v = 0$ für alle geschlossenen Wege, dann gilt auch $\int_{\gamma_1} v = \int_{\gamma_2} v$, falls γ_1 und γ_2 gleiche Anfangs- und Endpunkte haben. Denn dann gilt:

$$0 = \int_{\gamma_1+(-\gamma_2)} v = \int_{\gamma_1} v - \int_{\gamma_2} v.$$

(q.e.d.)

Frage: Gibt es ein lokales Integrabilitätskriterium?

Bemerkung. Sei v ein $\mathcal{C}^1$-Vektorfeld. Dann ist für die Integrabilität notwendig, dass für alle $i, j \in \{1, \dots, n\}$ gilt

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial v_j}{\partial x_i}(x) \qquad \forall\, x \in U.$$

Beweis. Sei $f \in \mathcal{C}^2(U)$ so dass $v = \nabla f,\ \ v_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$. Dann ist

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial v_j}{\partial x_i}.$$

(q.e.d.)

Ob diese Bedingung hinreichend ist, hängt von U ab.

Beispiel. Sei $n = 2$, $U = \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$ und $v(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$. Dann folgt

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v_1}{\partial y} &= \frac{-(x^2+y^2) - (-y \cdot 2 \cdot y)}{(x^2+y^2)^2} \\
&= \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2} \\
\frac{\partial v_2}{\partial x} &= \frac{-(x^2+y^2) - (-y \cdot 2 \cdot y)}{(x^2+y^2)^2} \\
&= \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}.
\end{aligned}$$

Also ist obige Bedingung erfüllt.

Aber für $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t))$, $t \in [0; 2\pi]$ gilt $\int_\gamma v = 2\pi \neq 0$. Also kann v keine Stammfunktion haben.

Definition. Ein Gebiet $U \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt **sternförmig** bezüglich eines Punktes $p \in U$, falls für alle $x \in U$ der gerade Verbindungsweg $\gamma_x(t) = p + t(x - p)$ ganz in U verläuft.

Der folgende Satz zusammen mit der oben bewiesenen Notwendigkeit der Integrabilitätsbedingungen, ebenso wie seine spätere Verallgemeinerungen (vgl. Satz 28) heißt auch „Lemma von Poincaré".

Satz 6 *Ist U sternförmig und $v\colon U \to \mathbb{R}^n$ ein $\mathcal{C}^1$-Vektorfeld mit $\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{\partial v_j}{\partial x_i}$ für alle i, j, dann existiert eine Stammfunktion.*

Beweis. O.B.d.A. können wir $p = 0$ annehmen. Setze $\gamma_x(t) = tx$ für alle $0 \leq t \leq 1$ und $f(x) := \int_{\gamma_x} v$ für alle $x \in U$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) &= \frac{\partial}{\partial x_i}\int_0^1 \langle v\big(\gamma_x(t)\big), \gamma_x'(t)\rangle\, dt \\ &= \frac{\partial}{\partial x_i}\int_0^1 \sum_{j=1}^n v_j(xt)\cdot x_j\, dt\end{aligned}$$

Da $v \in \mathcal{C}^1$, ist $\frac{\partial v_j}{\partial x_i}$ stetig, also beschränkt auf der Strecke $\gamma_x[0;1]$. Damit können wir Integral und Ableitung vertauschen und es folgt

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) &= \int_0^1 \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\big(v_j(xt)\cdot x_j\big)\, dt \\ &= \int_0^1 \sum_{j=1}^n \Big(\frac{\partial v_j}{\partial x_i}(xt)\cdot t\cdot x_j + v_j(xt)\cdot\delta_{ij}\Big)\, dt \\ &= \int_0^1 t\cdot\frac{d}{dt}\big(v_i(xt)\big)\, dt + \int_0^1 v_i(xt)\, dt \\ &= t\cdot v_i(xt)\big|_{t=0}^1 - \int_0^1 1\cdot v_i(xt)\, dt + \int_0^1 v_i(xt)\, dt \\ &= v_i(x).\end{aligned}$$

(q.e.d.)

2.4 Zusammenhang mit komplexen Kurvenintegralen

Sei $U \subseteq \mathbb{C}$, $\varphi\colon U \to \mathbb{C}$ eine Funktion, $\varphi = g + ih$ und $\gamma = \gamma_1 + i\,\gamma_2$ eine komplexe Kurve. Dann kann man das komplexe Weg-Integral auch umrechnen zu

$$\begin{aligned}\int_\gamma \varphi &= \int_a^b \varphi(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\, dt \\ &= \int_a^b g(\gamma(t))\cdot\gamma_1'(t) - h(\gamma(t))\cdot\gamma_2'(t)\, dt + i\int_a^b h(\gamma(t))\cdot\gamma_1'(t) + g(\gamma(t))\cdot\gamma_2'(t)\, dt \\ &= \int_\gamma v + i\int_\gamma w\end{aligned}$$

wobei $v = (g, -h)$ und $w = (h, g)$

Ist φ reell und $\mathcal{C}^1$, dann sind folgende Bedingungen äquivalent:

1) φ ist holomorph;

2) Die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen gelten, d.h. es gilt

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial y} \quad \text{und} \quad \frac{\partial h}{\partial x} = -\frac{\partial g}{\partial y};$$

3) die Vektorfelder w und v erfüllen die Integrabilitätsbedingung aus Satz 6;

Wenn φ eine dieser Eigenschaften hat, dann gilt nach diesem Satz

4) $\int_\gamma \varphi(z)dz = \int_\gamma v + i\int_\gamma w = 0$ für geschlossene Wege, falls U sternförmig ist. Der letzte Satz enthält also eine Version des Cauchyschen Integralsatzes.

2.5 Pfaffsche Formen

Warum sind Vektorfelder geeignete Objekte zur Integration über Kurven? Wesentlich ist: Für jeden Punkt $p \in U$ ist $v(p)$ vermöge der Abbildung $\gamma'(t) \mapsto \langle v(\gamma(t)),\ \gamma'(t)\rangle$ identifizierbar mit einer Linearform auf dem Raum T_pU aller Tangentialvektoren $\gamma'(t)$ von Kurven die durch $\gamma(t) = p$ laufen. Es gilt aber $T_pU = \mathbb{R}^n$, denn jeder Vektor $u \in \mathbb{R}^n$ ist Tangentialvektor von $\gamma\colon [-\varepsilon;\varepsilon] \to U,\ \ \gamma(t) = p + t\ u$.

T_p^*U ist der Dualraum von $T_pU = \mathbb{R}^n$.

Definition. Eine **Pfaffsche Form**, oder **Differentialform 1. Ordnung** auf U ist eine Abbildung

$$\omega\colon U \to \bigcup_{p\in U} T_p^*U$$

mit $\omega(p) \in T_p^*U \qquad \forall\, p \in U$.

Für ein $u \in T_pU$ wird der Wert von $\omega(p)$ an der Stelle u mit $\langle\omega(p), u\rangle$ bezeichnet. Wenn $f\colon U \to \mathbb{R}$ und $f \in \mathcal{C}^1(U)$ ist, dann gehört dazu die Pfaffsche Form df mit

$$\langle df(p), u\rangle = \langle\nabla f(p), u\rangle = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(p)\, u_j$$

Im Falle des euklidischen Skalarprodukts kann man df alternativ auch folgendermaßen definieren:

$$\langle df(p), u\rangle = \frac{d}{dt}\, f(\gamma(t))\bigg|_{t=0}$$

Dabei ist $\gamma\colon [-\varepsilon;\varepsilon] \to U$ eine $\mathcal{C}^1$-Kurve mit $\gamma(0) = p$ und $\gamma'(0) = u$. Der Beweis der Äquivalenz erfolgt mit Hilfe der Kettenregel.

Spezialfall: Es bezeichne

$$\begin{aligned} x_i\colon \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \\ (p_1, \ldots, p_n) &\mapsto p_i \end{aligned}$$

die i-te Koordinatenfunktion, und $dx_1, \ldots, dx_n$ seien die zugehörigen Pfaffschen Formen. Ist $e_j = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ der j-te Einheitsvektor im $\mathbb{R}^n$, so ist

$$\langle dx_i(p),\ e_j\rangle = \frac{d}{dt} x_i(p + t\cdot e_j)\bigg|_{t=0} = \frac{d}{dt}(p_i + t\ \delta_{i,j})\bigg|_{t=0} = \delta_{i,j}.$$

Damit ist $(dx_1(p), \ldots, dx_n(p))$ eine Basis von T_p^*U und jede Pfaffsche Form hat die Darstellung

$$\omega(p) = \sum_{i=1}^{n} f_i(p) dx_i(p)$$

mit eindeutig bestimmten skalaren Funktionen $f_i\colon U \to \mathbb{R}$ für $1 \le i \le n$. Kurzschreibweise: $\omega = \sum_{i=1}^n f_i dx_i$. Damit erhalten wir eine später nützliche Rechenregel.

Satz 7 *Ist speziell $\omega = df$ für eine $\mathcal{C}^1$-Funktion, so ist $f_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$, also $df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$.*

Beweis. Sei $p \in U$ und $u \in T_pU$. Dann ist

$$\langle dx_i(p), u\rangle = \frac{d}{dt}\, x_i(p + tu)\bigg|_{t=0} = u_i,$$

also

$$\langle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)\, dx_i(p),\ u\rangle = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)\ u_i = \langle df(p), u\rangle.$$

(q.e.d.)

Definition. Ist $\omega = \sum_{i=1}^n f_i dx_i$ gegeben, dann definiere $\int_\gamma \omega$ durch Identifikation von ω mit dem Vektorfeld $v\colon p \mapsto (f_1(p), \ldots, f_n(p))$. Also

$$\int_\gamma \omega = \int_a^b \sum_{i=1}^n f_i(\gamma(t))\ \gamma_i'(t)\, dt.$$

Alle bisherigen Sätze über Kurvenintegrale werden so zu Sätzen über Integrale Pfaffscher Formen.

Beispiel. Wähle $n = 2$ Dann ist

$$\begin{aligned}\int_\gamma (x^5y^6dx + x^2dy) &= \int_\gamma (x^5y^6, x^2)\\ &= \int_a^b \gamma_1^5(t)\ \gamma_2^6(t)\ \gamma_1'(t) + \gamma_1^2(t)\gamma_2'(t)\ dt\end{aligned}$$

2.6 Physikalische Notation

In diesem Abschnitt führen wir alternative Schreibweisen ein, die besonders in der Physik geläufig sind.

Sei γ ein stetiger, stückweise $\mathcal{C}^1$-Weg in U. Dann kann man für jede stetige (allgemein: Borel-messbare) Funktion $h\colon \gamma[a;b] \to \mathbb{R}$ definieren

$$\int_\gamma h\ ds := \int_a^b h(\gamma(t))\|\gamma'(t)\|dt.$$

Für $h = 1$ ergibt sich $\int_\gamma ds$ = Länge von γ. ds heißt auch **skalares Bogenelement** der Kurve.

Wenn $\gamma'(t) \neq 0$ für alle t gilt, so definiere $\tau\big(\gamma(t)\big) := \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}$. Dies ist der normierte Tangentialvektor. Ist nun v ein Vektorfeld, dann gilt

$$\int_\gamma v = \int \langle v(\gamma(t)),\ \tau(\gamma(t))\rangle \cdot \|\gamma'(t)\|\, dt = \int_\gamma \langle v, \tau\rangle\, ds$$

Also kann man das Kurvenintegral auf das Integral bzgl. des skalaren Bogenelementes zurückführen.

Definiere nun noch $d\vec{s} = \gamma'(t)dt$, das **vektorielle Bogenelement**. Dann ist

$$\int v \cdot d\vec{s} = \int v \cdot \tau\, ds.$$

Mehr symbolisch: $d\vec{s} = \tau \cdot ds$.

Beispiel. Sei $E\colon U \to \mathbb{R}^3$ ein elektisches Feld. Auf eine Einheitsprobeladung am Ort x wirkt die Kraft $E(x)$. Verschieben der Ladung längs γ von p_1 nach p_2 bedeutet Arbeit

$$A = \int_\gamma E\ d\vec{s}.$$

Aus physikalischen Gründen sollte das Integral nicht vom Weg abhängen. Das heißt, es existiert ein Potential $-\Phi$ mit

$$E = -\operatorname{grad}\Phi.$$

2.7 Ausblick

Wir haben jetzt die „Stokessche Formel der Stufe 0“ bewiesen:

$$f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) = \int_\gamma \nabla f = \int_\gamma df. \tag{2.1}$$

Wie könnte diese Formel auf einem höherdimensionalen Niveau aussehen? Wir wollen folgendes ersetzen:

- die Kurve γ durch ein parametrisiertes Flächenstück F
- die zweielementige (also nulldimensionale) Menge $\{\gamma(a), \gamma(b)\}$ durch den Rand ∂F von F, also durch die berandende Kurve
- die skalare Funktion f durch ein Vektorfeld bzw. durch eine Pfaffsche Form ω

Damit wird die rechte Seite von (2.1) ersetzt durch $\int_{\partial F} \omega$. Die Pfaffsche Form df soll ersetzt werden durch eine Art Ableitung $d\omega$ von ω. Die rechte Seite wird dann zu $\int_F d\omega$. Also ist unsere Hoffnung $\int_{\partial F} \omega = \int_F d\omega$.

Bemerkung. Wir benötigen „orientierte Integrale“: sowohl in $f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$ als auch in $\int_\gamma \nabla f$ bzw. $\int_{\partial F} \omega$ taucht eine Orientierung auf, das heißt, ein Vorzeichen, das sich durch die Angabe ergibt, in welcher Richtung die Kurve durchlaufen wird.

Frage: Welche Objekte können über Flächenstücke integriert werden? Wir betrachten zunächst ein von zwei Tangentialvektoren $u, w \in T_pF \subseteq T_pU$ aufgespanntes Parallelogramm $P_{p,u,w}$. Für die Integration sind folgende Dinge wichtig:

a) der von u, w aufgespannte Teilraum $\mathrm{span}(u, w)$ von T_pU

b) das zweidimensionale Volumen $\mathrm{vol}_2 P_{p,u,w}$. Dies läßt sich messen als

$$\left|\det \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ w_1 & w_2 \end{pmatrix}\right|$$

wobei $u = \sum_i u_i b_i$, $w = \sum_i w_i b_i$ und $(b_i)_i$ irgendeine ON-Basis von $\mathrm{span}(u, w)$ ist;

c) eine Orientierung des Parallelograms $P_{p,u,w}$. Diese ist **nicht** durch die Menge $P_{p,u,w}$ gegeben. Eine Möglichkeit ist, das Vorzeichen von

$$\det \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ w_1 & w_2 \end{pmatrix}$$

zu wählen. Dies hängt aber von der Basis (b_1, b_2) und von der Reihenfolge der Vektoren u und w ab.

Ein Integral $\int_F \psi$ sollte approximiert werden durch Summen der Form

$$\sum_i \psi(p_i)(u_i, w_i) \cdot \mathrm{vol}_2\, P_{p_i, u_i, w_i},$$

wobei $F \approx \bigcup_i P_{p_i,u_i,w_i}$ mit $u_i, w_i \in T_{p_i}F$ ist.

Welche Eigenschaften von $\psi(p)(u, w)$ sollen wir fordern?

- Bei einem Wechsel der Orientierung soll sich das Vorzeichen der Summe ändern, es soll also Vertauschen von u, w zu Vorzeichenwechsel führen:

$$\psi(p)(u, w) = -\psi(p)(w, u)$$

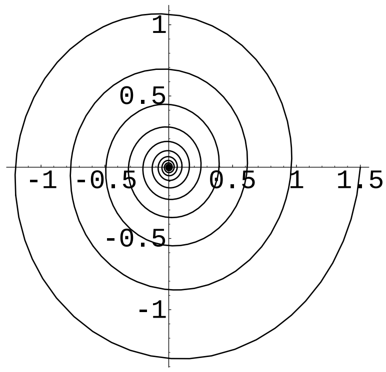


Abbildung 2.1:

- $\psi(p)$ sollte linear in beiden Komponenten sein.

Motivation: Für 1-Formen (= Pfaffsche Formen) α ist $\alpha(p) \in T_p^*U$, also ist $\alpha(p)(u)$ linear in u. Im Spezialfall $\alpha = df$ ist die Zahl $df(u)$ die Richtungsableitung in Richtung u. Also sollte sich auf der nächst höheren Stufe im Fall $\psi = d\omega$ für 1-Formen ω der Ausdruck $d\omega(p)(u,w)$ wie die Richtungsableitung von $\omega(p)(u)$ in Richtung w benehmen. Richtungsableitungen sind lineare Funktionen der Richtung. Daher sollte $d\omega(p)(u,w)$ linear in w sein. Außerdem ist $\omega(p)(u)$ selber linear in u, also auch die Richtungsableitung von $\omega(p)(u)$. Das heißt, $d\omega(p)(u,w)$ sollte auch linear in u sein. Also sollte $\psi(p)$ eine (wegen des ersten Punkts antisymmetrische) Bilinearform sein.

Die Verallgemeinerung auf $k \geq 2$ führt zu alternierenden Multilinearformen der Ordnung k.

Hier ist eine Skizze einer alternativen Motivation der alternierenden Multilinearformen in diesem Zusammenhang: $\int_F \psi$ sollte koordinatenfrei definiert werden können. Wir müssen dabei Objekte haben, die die Jacobi-Determinante im mehrdimensionalen Transformationssatz für Integrale „absorbieren“, das heißt, sie müssen von ähnlicher Bauart sein. (vgl. z.B. Th. Bröcker, Analysis III)

Aufgabe 2. Sei $\gamma\colon [0;1] \to \mathbb{R}^3$ eine stetige, stückweise stetig differenzierbare Kurve von $(1,0,0)$ nach $(3,4,5)$.

a) Sei $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definiert durch $f(x) = -\alpha x$ mit $\alpha > 0$. Zeige, dass das Kurvenintegral $\int_\gamma f$ nicht von der Wahl der Kurve γ abhängt und bestimme den Wert des Integrals.

b) Finde ein Beispiel für ein Vektorfeld g, so dass für g das Kurvenintegral von der Wahl des Weges abhängt.

Aufgabe 3. a) Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $r\colon I \to \mathbb{R}_+$ stetig differenzierbar. Weiter sei $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^2$ die Kurve mit der Polarkoordinatendarstellung $\big(\varphi, r(\varphi)\big)$. Zeige, dass die Länge der Kurve $\int_I \sqrt{r(s)^2 + r'(s)^2}\, ds$ ist.

b) Sei $I = (-\infty; 0]$, $\alpha \in (0; \pi/2)$ und $r(\varphi) = \alpha \exp(\varphi \cot \alpha)$ für alle $\varphi \in I$. Die Kurve γ aus Teil a) ist dann eine Spirale, die alle radialen Linien im Winkel α schneidet (vgl. Abb. 2.1). Bestimme die Länge der Kurve. Ist sie endlich?

Aufgabe 4. Sei $\gamma\colon [a;b] \to \mathbb{R}^d$ eine stetig differenzierbare Kurve. Wir wollen zeigen, dass sich diese Kurve gut durch einen Polygonzug approximieren lässt. Eine Partition von $[a;b]$ mit Feinheit η ist eine Familie $(t_0, t_1, \ldots, t_n)$ mit $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ und $\max\{t_1 - t_0, \ldots, t_n - t_{n-1}\} = \eta$. Aus so einer Partition erhält man einen Polygonzug, indem man die Punkte $\gamma(t_0), \gamma(t_1), \ldots, \gamma(t_n)$ der Reihe nach miteinander verbindet.

Zeige, dass es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass sich für jede Partition $(t_0, t_1, \ldots, t_n)$ des Intervalls $[a;b]$ mit Feinheit kleiner δ die Länge des zugehörigen Polygonzugs von der Länge der Kurve um höchstens ε unterscheidet.

Aufgabe 5. Die verallgemeinerten **Hermitepolynome** $H^{(n)}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ werden durch folgende rekursive Vorschrift definiert:

$$\begin{aligned} H^{(0)}(t,x) &= 1 \\ H^{(1)}(t,x) &= x \end{aligned}$$

für alle $t, x \in \mathbb{R}$ und

$$\begin{aligned} \nabla H^{(n)}(t,x) &= \left(-\tfrac{1}{2} H^{(n-2)}(t,x), H^{(n-1)}(t,x)\right) \\ H^{(n)}(0,0) &= 0 \end{aligned}$$

für alle $t, x \in \mathbb{R}$, $n > 1$.

a) Beweise, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ genau eine Lösung $H^{(n)}$ dieser Rekursionsgleichungen existiert und dass diese Lösung ein Polynom in den beiden Variablen t und x ist.

b) Bestimme die Polynome $H^{(2)}$, $H^{(3)}$ und $H^{(4)}$.

Aufgabe 6. Seien $r, c > 0$ und $\varphi\colon [0; 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ die Schraubenlinie

$$\varphi(t) = \begin{pmatrix} r\cos t \\ r\sin t \\ ct \end{pmatrix}.$$

Berechne die Integrale

$$\int_\varphi \left((x^2 - y^2)\,dx + 3z\,dy + 4xy\,dz\right) \quad \text{und} \quad \int_\varphi (x^4 + y^4 + z^4)\,ds.$$

Kapitel 3

Alternierende Multilinearformen

Dieses Kapitel führt das Konzept der Multilinearform ein, mit dessen Hilfe wir im nächsten Kapitel die Differentialformen einführen werden. Der Text setzt im geringen Umfang Kenntnisse aus der multilinearen Algebra voraus. Eine Einführung in dieses Gebiet gibt der Anhang A. Dort wird das Tensorprodukt von Vektorräumen und das Dachprodukt definiert. (Die Ergebnisse dieses Anhangs sind aber für das Verständnis des weiteren Textes nicht notwendig.) Einführende Bücher sind z.B. [Lan84] und [Gre78].

3.1 Das Dachprodukt

Definition. Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Mit $\bigwedge^k V^*$ oder $\mathrm{Alt}_k V$ wird die Menge der alternierenden k-linearen Abbildungen $\alpha\colon V \times \cdots \times V \to \mathbb{R}$ bezeichnet. Also liegt eine Abbildung α genau dann in $\bigwedge^k V^*$, wenn folgende beiden Bedingungen erfüllt sind.

1) $v \mapsto \alpha(\ldots, v, \ldots)$ ist linear in v bei festgehaltenen übrigen Variablen.

2) $\alpha(\ldots, u, \ldots, w \ldots) = -\alpha(\ldots, w, \ldots, u, \ldots)$ bei festgehaltenen übrigen Variablen.

Die Elemente von $\bigwedge^k V^*$ heissen **alternierende Multilinearformen** der Ordnung k auf V.

Beispiele.

1. Sei $k = 1$. Dann ist $\mathrm{Alt}_1 V = \bigwedge^1 V^* = V^*$.

2. Sei $b_1, \ldots, b_k$ eine feste Basis von V. Dann ist durch

$$\alpha(v_1, \ldots, v_k) \;=\; \det\Big((\xi_{ij})_{ij}\Big) \quad \text{mit } v_i = \textstyle\sum_j \xi_{ij} b_j$$

ein Element von $\bigwedge^{\dim V} V^*$ definiert. Jedes $\alpha \in \bigwedge^{\dim V} V^*$ ist von dieser Form, d.h. es ist $\dim\big(\bigwedge^{\dim V} V^*\big) = 1$.

3. Sei $k < \dim V$, $A\colon V \to W$ surjektiv und $\dim W = k$. Weiter sei $b_1, \ldots, b_k$ eine Basis von W. Definiere

$$\alpha(v_1, \ldots, v_k) \;=\; \det\Big((\xi_{ij})_{ij}\Big) \quad \text{wobei } Av_i = \textstyle\sum_{j=1}^k \xi_{ij} b_j.$$

Dann ist $\alpha \in \bigwedge^k V^*$.

Bemerkung. Für multilineares α ist (falls der Grundkörper Charakteristik ungleich 2 hat) die Bedingung 2) aus der Definition äquivalent zu der Bedingung

2') $\alpha(\ldots, v, \ldots, v, \ldots) = 0$.

Beweis. Zur Vereinfachung der Notation sei $k = 2$.
2) $\Longrightarrow$ 2'): Hier ist $\alpha(x,x) = -\alpha(x,x)$ und wegen $\mathrm{Char}(\mathbb{K}) \neq 2$ folgt $\alpha(x,x) = 0$.
2') $\Longrightarrow$ 2): Für alle x, y gilt hier

$$0 \;=\; \alpha(x+y, x+y) \;=\; \alpha(x,x) + \alpha(x,y) + \alpha(y,x) + \alpha(y,y) \;=\; \alpha(x,y) + \alpha(y,x),$$

also $\alpha(x,y) = -\alpha(y,x)$. (q.e.d.)

Eine weitere Bedingung, die zu 2) äquivalent ist, ist

$$\alpha(v_{\pi(1)}, \ldots, v_{\pi(k)}) \;=\; \mathrm{sgn}(\pi)\, \alpha(v_1, \ldots, v_k).$$

Definition. Seien $\beta_1, \ldots, \beta_k \in V^*$. Dann definiere $\beta_1 \wedge \cdots \wedge \beta_k \in \mathrm{Alt}_k V$ durch

$$\beta_1 \wedge \cdots \wedge \beta_k(v_1, \ldots, v_k) \;:=\; \det\big((\langle \beta_i, v_j \rangle)_{i,j=1,\ldots,k}\big).$$

Bemerkung. Die Abbildung $(V^*)^k \to \mathrm{Alt}_k V$

$$(\beta_1, \ldots, \beta_k) \mapsto \beta_1 \wedge \cdots \wedge \beta_k$$

ist multilinear und alternierend.

Satz 8 *Sei $\beta_1, \ldots, \beta_n$ eine Basis von V^*. Dann bilden die Elemente*

$$\beta_{i_1} \wedge \cdots \wedge \beta_{i_k} \quad \textit{mit} \quad 1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n$$

eine Basis von $\mathrm{Alt}_k V$. Insbesondere ist $\dim \mathrm{Alt}_k V = \binom{n}{k}$. Für $k > n$ ist $\mathrm{Alt}_k V = \{0\}$.

Beweis. Sei $e_1, \ldots, e_n$ die zu $\beta_1, \ldots, \beta_n$ duale Basis von V, d.h. $\langle \beta_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$.
1.) Sei $\alpha \in \mathrm{Alt}_k V$. Dann ist $v = \sum \langle \beta_j, v \rangle e_j$, also

$$\begin{aligned}
\alpha(v_1, \ldots, v_k) \;&=\; \alpha\Big(\sum_{j_1=1}^{n} \langle \beta_{j_1}, v_1 \rangle e_{j_1}, \ldots, \sum_{j_k=1}^{n} \langle \beta_{j_k}, v_k \rangle e_{j_k} \Big) \\
&=\; \sum_{j_1,\ldots,j_k=1}^{n} \langle \beta_{j_1}, v_1 \rangle \cdot \ldots \cdot \langle \beta_{j_k}, v_k \rangle \alpha(e_{j_1}, \ldots, e_{j_k}) \\
&=\; \sum_{1 \leq j_1 < \ldots < j_k \leq n} \; \sum_{\pi \in \mathrm{Perm}_k} \langle \beta_{j_{\pi(1)}}, v_1 \rangle \cdot \ldots \cdot \langle \beta_{j_{\pi(k)}}, v_k \rangle \alpha(e_{j_{\pi(1)}}, \ldots, e_{j_{\pi(k)}}) \\
&\qquad + (\text{Terme, wo zwei Indizes gleich sind}) \\
&=\; \sum_{1 \leq j_1 < \ldots < j_k \leq n} \; \sum_{\pi \in \mathrm{Perm}_k} \langle \beta_{j_{\pi(1)}}, v_1 \rangle \cdot \ldots \cdot \langle \beta_{j_{\pi(k)}}, v_k \rangle \,\mathrm{sgn}(\pi)\, \underbrace{\alpha(e_{j_1}, \ldots, e_{j_k})}_{=: c_{j_1 \cdots j_k}} \\
&=\; \sum_{1 \leq j_1 < \ldots < j_k \leq n} c_{j_1 \cdots j_k} (\beta_{j_1} \wedge \cdots \wedge \beta_{j_k})(v_1, \ldots, v_k)
\end{aligned}$$

2.) Die $\beta_{i_1} \wedge \cdots \wedge \beta_{i_k}$ sind linear unabhängig:
Seien $j_1 < \ldots < j_k$ und $i_1 < \ldots < i_k$. Dann ist

$$\beta_{i_1} \wedge \cdots \wedge \beta_{i_k}(e_{j_1}, \ldots, e_{j_k}) = \begin{cases} \det((\delta_{ij})_{ij}) = 1 & \text{falls}\, i_1 = j_1, \ldots, i_k = j_k \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

denn im zweiten Fall ex. ein j_l, das nicht unter den $i_1, \ldots, i_k$ vorkommt, d.h. die Zeile $\langle \beta_{i_m}, e_{j_l} \rangle$, $m = 1, \ldots, k$ in der Determinante ist 0, also verschwindet die Determinante.
Sei jetzt $\alpha = \sum c_{i_1 \cdots i_k} \beta_{i_1} \wedge \cdots \wedge \beta_{i_k} = 0$. Dann gilt durch Einsetzen

$$0 = \alpha(e_{j_1}, \ldots, e_{j_k}) = c_{j_1 \cdots j_k} \quad \text{für alle } j_1, \ldots, j_k.$$

Daraus folgt die lineare Unabhängigkeit und die Basisaussage für $k \leq n$. (q.e.d.)

Notation. Anstelle von Ausdrücken wie $dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \cdots \wedge dx_n$ schreiben wir zur Abkürzung auch $dx_1 \wedge \cdots \widehat{dx_i} \cdots \wedge dx_n$. Das Dach bezeichnet denjenigen Term, der ausgelassen wird. Dieselbe Konvention verwenden wir gelegentlich in Ausdrücken wie $\alpha(v_1, \ldots \widehat{v_j} \ldots, v_n)$.

Satz 9 *Seien $\beta_1, \ldots, \beta_k \in V^*$ linear unabhängig, $\dim V^* < \infty$. Sei $c \in \mathbb{K}\backslash\{0\}$. Dann gilt für alle $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in V^*$ die Äquivalenz*

$$\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_k = c \cdot \beta_1 \wedge \cdots \wedge \beta_k \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha_i = \sum_{j=1}^{k} c_{ij}\beta_j \text{ für Zahlen } c_{ij} \text{ mit } \det(c_{ij}) = c.$$

Beweis. „$\Longleftarrow$" Für alle $v_1, \ldots, v_k \in V$ ist

$$\begin{aligned} \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_k(v_1, \ldots, v_k) &= \det\Big(\sum_{l=1}^{k} c_{il}\langle \beta_l, v_j\rangle\Big) \\ &= \det\Big((c_{il})_{i,l} \cdot (\langle \beta_l, v_j\rangle)_{l,j}\Big) \\ &= \det\big((c_{il})_{i,l}\big) \cdot \det\big(\langle \beta_l, v_j\rangle_{l,j}\big) \\ &= c \cdot \beta_1 \wedge \cdots \wedge \beta_k(v_1, \ldots, v_k). \end{aligned}$$

„$\Longrightarrow$" Wir ergänzen $\beta_1, \ldots, \beta_k$ zu einer Basis $\beta_1, \ldots, \beta_n$ von V^*. Dann gilt $\alpha_i = \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\beta_j$. Ferner sei wieder $e_1, \ldots, e_n$ die duale Basis zu den β_j. Dann ist

$$\langle \alpha_i, e_l\rangle = \sum c_{ij}\langle \beta_j, e_l\rangle = c_{il}.$$

Betrachte $c_l = (c_{il})_{i=1,\ldots,k} \in \mathbb{K}^k$. Dann ist

$$\begin{aligned} \det(c_1, \ldots, c_k) &= \det(\langle \alpha_i, e_l\rangle) = \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_k(e_1, \ldots, e_k) \\ &= c \cdot \beta_1 \wedge \cdots \wedge \beta_k(e_1, \ldots, e_k) \\ &= c. \end{aligned}$$

Nun ersetze ein c_j mit $1 \leq j \leq k$ durch c_l, $l > k$. Dann ist

$$\begin{aligned} \det(c_1, \ldots, c_{j-1}, c_{j+1}, \ldots, c_k, c_l) &= c \cdot \beta_1 \wedge \cdots \wedge \beta_k(e_1, \ldots, e_{j-1}, e_{j+1}, \ldots, e_k, e_l) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Damit ist $c_l \in \operatorname{Span}(c_1, \ldots \widehat{c_j} \ldots, c_k)$, d.h. es gibt eindeutig bestimmte Zahlen γ_m mit $c_l = \sum_{m=1}^{k} \gamma_m c_m$ und es gilt $\gamma_j = 0$. Dies folgt für alle $j \in \{1, \ldots, k\}$. Also ist $c_l = 0$. Damit ist alles gezeigt. (q.e.d.)

Interpretation: Zwei **Basen** in einem endlich dimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraum heißen **äquivalent**, wenn die eine Basis aus der anderen durch eine lineare Abb. mit positiver Determinante hervorgeht. (Beachte: Basen sind für uns angeordnet, d.h. Familien). Es gibt genau zwei Äquivalenzklassen. Eine **Orientierung** von V ist einfach eine Festlegung, welche dieser Klassen aus den positiv orientierten Basen besteht. Üblicherweise betrachtet man die Standardbasis $e_1, \ldots, e_n$ als positiv orientiert.

Das Volumen vol_k auf $W \subseteq V$, $\dim W = k$ ist durch ein vorgebenes Skalarprodukt festgelegt (durch Translationsinvarianz): Parallelotope, die von ON-Basen aufgespannt werden haben Volumen 1.

Folgerung 1 *Seien $\alpha_i, \beta_i \in (R^n)^*$ linear unabhängig. Dann ist die Bedingung $\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_k = \beta_1 \wedge \ldots \wedge \beta_k$ äquivalent dazu, dass folgende drei Bedingungen gelten:*

1.) Die von $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ bzw. $\beta_1, \ldots, \beta_k$ aufgespannten linearen Räume sind gleich.

2.) Die von $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ bzw. $\beta_1, \ldots, \beta_k$ aufgespannten Parallelotope haben gleiche Volumina.

3.) Die Basen $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ und $(\beta_1, \ldots, \beta_k)$ haben gleiche Orientierung.

Im $(\mathbb{R}^n)^*$ mit dem üblichen Skalarprodukt erhalten wir eine Bijektion zwischen

$$A := \left\{\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_k \in \mathrm{Alt}_k(\mathbb{R}^n) \;\middle|\; \mathrm{vol}_k\, P_{\alpha_1,\ldots,\alpha_k} = 1\right\}$$

und

$$B := \left\{(W,\sigma) \;\middle|\; W \text{ ist } k\text{-dimensionaler Unterraum von } (\mathbb{R}^n)^* \text{ mit Orientierung } \sigma\right\}.$$

Bemerkung. Sei $k = 2$. Jedes $\alpha \in \mathrm{Alt}_2 V$ ist eine alternierende Bilinearform, kann also bzgl. einer festen Basis $e_1, \ldots, e_n$ von V durch eine schiefsymmetrische Matrix $(a_{ij}) = -(a_{ji})$ vermöge $\alpha(v,w) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} v_i w_j$ dargestellt werden.

Wir betrachten den Spezialfall $\alpha = \beta_1 \wedge \beta_2$ mit $\beta_l \in V^*$. Wenn $e_1^*, \ldots, e_n^*$ die duale Basis und $\beta_l = \sum_{i=1}^n b_{li} e_i^*$ ist, dann folgt

$$\begin{aligned} a_{ij} = \beta_1 \wedge \beta_2(e_i, e_j) &= \det \begin{pmatrix} \langle \beta_1, e_i\rangle & \langle \beta_1, e_j\rangle \\ \langle \beta_2, e_i\rangle & \langle \beta_2, e_j\rangle \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} b_{1i} & b_{1j} \\ b_{2i} & b_{2j} \end{pmatrix} = b_{1i}b_{2j} - b_{1j}b_{2i} \\ &= (b_1 \otimes b_2 - b_2 \otimes b_1)_{ij}, \end{aligned}$$

wobei $(a \otimes b)_{l,m} = a_l b_m$ ist. Die Matrizen dieser Form bilden ein lineares Erzeugendensystem des Raums aller schiefsymmetrischen $n \times n$-Matrizen. Wegen $\mathrm{rg}(a \otimes b) \le 1$ ist $\mathrm{rg}(b_1 \otimes b_2 - b_2 \otimes b_1) \le 2$. Also ist nicht jede schiefsymmetrische Matrix von der Form $b_1 \otimes b_2 - b_2 \otimes b_1$. Also kann man ein allgemeines $\alpha \in \mathrm{Alt}_2 V$ nicht in der Form $\beta_1 \wedge \beta_2$ darstellen.

Eine Multilinearform $\alpha \in \mathrm{Alt}_k V$ heißt **rein**, falls $\alpha = \beta_1 \wedge \cdots \wedge \beta_k$ ist. Ein allgemeines $\alpha \in Alt_k V$ hat dann eine Darstellung $\alpha = \sum_i \lambda_i \beta_1^i \wedge \cdots \wedge \beta_k^i$, wobei analog zum vorigen Absatz ein reines Dachprodukt $\beta_1 \wedge \cdots \wedge \beta_k$ die Form

$$\sum_{\pi \in \mathrm{Perm}_k} \mathrm{sgn}(\pi) b_{\pi(1)} \otimes \ldots \otimes b_{\pi(k)}$$

erhält (vgl. Anhang A).

Die Tensordarstellung ist aber nicht sehr effizient, denn in einer schiefsymmetrischen 4×4-Matrix, z.B. in der Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

sind 10 Einträge redundant, die ganze Information ist in den Einträgen $\{(i,j) | 1 \le i < j \le n\}$ enthalten. Daher werden wir die Tensorschreibweise nicht weiter verwenden.

Satz 10 *(und Definition) Seien $1 \le k, m \le n$. Dann existiert genau eine bilineare Abbildung $\wedge\colon \mathrm{Alt}_k V \times \mathrm{Alt}_m V \to \mathrm{Alt}_{k+m} V$ mit $(\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_k) \wedge (\beta_1 \wedge \cdots \wedge \beta_m) = \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_k \wedge \beta_1 \wedge \cdots \wedge \beta_m$ für alle $\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_1, \ldots, \beta_m \in V^*$.*

Beweisskizze. (vgl. LA) Sei zunächst $e_1^*, \ldots, e_n^*$ eine Basis des Vektorraums V^*. Definiere $(e_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge e_{i_k}^*) \wedge (e_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge e_{i_m}^*)$ durch die obige Formel. Dann gibt es genau eine bilineare Fortsetzung dieser Definition auf $\mathrm{Alt}_k V \times \mathrm{Alt}_m V$. Für diese Fortsetzung gilt dann die obige Formel auch für allgemeinere reine $\wedge$-Produkte.

Bemerkung. $\mathrm{Alt}\, V := \oplus_{k=0}^n \mathrm{Alt}_k V$ wird mit der Operation $\wedge$:

$$(\sum_{k=0}^n \alpha_k) \wedge (\sum_{l=0}^n \beta_l) = \sum_{k,l} \alpha_k \wedge \eta_l$$

zu einer **graduierten Algebra** (Grassmann-Algebra) (d.h. es gibt eine Grad-Funktion wie bei Polynomen). Wir werden dies aber nicht explizit verwenden.

Lemma 1 *Es gilt*

$$\alpha \wedge \beta \;=\; (-1)^{\deg(\alpha)\deg(\beta)} \beta \wedge \alpha \;=\; \begin{cases} -\beta \wedge \alpha & \textit{falls beide Grade ungerade} \\ \beta \wedge \alpha & \textit{sonst} \end{cases}$$

Beispiele: Die Aussage des Lemmas wird sofort deutlich, wenn man folgende beiden Rechnungen nachvollzieht.

$$\begin{aligned}
(\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3) \wedge \beta &= (-1)\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \beta \wedge \alpha_3 \;=\; (-1)^2 \alpha_1 \wedge \beta \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3 \\
&= (-1)^3 \beta \wedge \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3 \\
(\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3) \wedge (\beta_1 \wedge \beta_2) &= (-1)^3 \beta_1 \wedge \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3 \wedge \beta_2 \\
&= (-1)^{3\cdot 2} \beta_1 \wedge \beta_2 \wedge \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_2
\end{aligned}$$

3.2 Der Hodge-Operator

In diesem Abschnitt sei der Vektorraum V mit einem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ versehen. Wir denken dabei insbesondere an $V = \mathbb{R}^n$ mit dem üblichen Euklidischen Skalarprodukt. Dann gibt es vermöge der Abbildung $x \mapsto (y \mapsto \langle x, y \rangle)$ einen Isomorphismus zwischen V und V^* und insbesondere ist auch auf V^* das Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle_{V^*}$ definiert. Wir wählen jetzt eine Orientierung von V und eine positiv orientierte ON-Basis $(e_1^*, \ldots, e_n^*)$ von V^*. Später werden wir nur den Spezialfall $e_i^* = dx_i$ betrachten.

Wie wir bereits gesehen haben, besitzen die beiden Räume $\mathrm{Alt}_k\, V$ und $\mathrm{Alt}_{n-k}\, V$ beide dieselbe Dimension $\binom{n}{k}$.

Definition. Der **Hodge-Operator** φ ist die lineare Abbildung von $\mathrm{Alt}_k\, V$ nach $\mathrm{Alt}_{n-k}\, V$ die folgendermaßen bestimmt ist: Sei $k \geq 0$, $N = \{1, \ldots, n\}$, $S = \{s_1, \ldots, s_k\} \subseteq N$ und $T = N \setminus S = \{t_1, \ldots, t_{n-k}\}$. Dann setze

$$\varphi(e_{s_1}^* \wedge \cdots \wedge e_{s_k}^*) \;:=\; \mathrm{sgn} \begin{pmatrix} 1 & \ldots & k & k+1 & \ldots & n \\ s_1 & \ldots & s_k & t_1 & \ldots & t_{n-k} \end{pmatrix} e_{t_1}^* \wedge \cdots \wedge e_{t_{n-k}}^*.$$

Durch lineare Fortsetzung erhält man so einen Isomorphismus $\varphi\colon\ \mathrm{Alt}_k\, V \to \mathrm{Alt}_{n-k}\, V$.

Bemerkung. Diese Abbildung φ wird in den meisten Texten (z.B. in [Fla89]) mit $*$ bezeichnet. Wir verwenden hier den Buchstaben φ in der Hoffnung, die Notation übersichtlicher zu gestalten, da auch beim Zurückholen von Differentialformen ein Stern auftaucht.

Spezialfälle: Im Fall $k = n-1$ ist $\varphi(\alpha)$ homogen vom Grad 1, also ein Vektor, $\alpha \in \mathrm{Alt}_{n-1}\, V$. Speziell für $n = 3$ und $k = 2$ hat α die Darstellung

$$\begin{aligned}
\alpha &= \alpha_{12}\; e_1 \wedge e_2 + \alpha_{13}\; e_1 \wedge e_3 + \alpha_{23}\; e_2 \wedge e_3 \\
\varphi(\alpha) &= \alpha_{12}\; e_3 - \alpha_{13}\; e_2 + \alpha_{23}\; e_1 \\
\varphi(\varphi(\alpha)) &= \alpha
\end{aligned}$$

In diesem Fall ist $\varphi(x \wedge y) = x \times y$ (s.u.). Also liefert der Hodge Operator eine Verallgemeinerung des üblichen Vektorprodukts in $\mathbb{R}^3$. Ausführlicher geschrieben sei

$$\begin{aligned}
x &= x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 \\
y &= y_1 e_1 + y_2 e_2 + y_3 e_3.
\end{aligned}$$

Dann ist

$$x \wedge y \;=\; \det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} e_1 \wedge e_2 + \det \begin{pmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{pmatrix} e_1 \wedge e_3 + \det \begin{pmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{pmatrix} e_2 \wedge e_3,$$

also

$$x \times y = \det\begin{pmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{pmatrix} e_1 - \det\begin{pmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{pmatrix} e_2 + \det\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} e_3 = \varphi(x \wedge y).$$

Ferner steht $x \times y$ senkrecht auf x, y und aus Aufgabe 12 am Ende dieses Kapitels stammt die Aussage

$$\|x \times y\|^2 = \langle x \wedge y,\ x \wedge y \rangle_{\mathrm{Alt}_2 \mathbb{R}^2} = \big(\mathrm{vol}_2 \text{ des von } x, y \text{ aufgespannten Parallelogramms}\big)^2.$$

Später werden wir noch eine Verallgemeinerung dieser geometrischen Aussage beweisen.

Satz 11 *Für $\alpha \in Alt_k V$, $\dim V = n$ gilt*

$$\varphi\varphi\alpha = (-1)^{k(n-k)}\alpha = \begin{cases} -\alpha & \textit{falls } k \textit{ ungerade und } n \textit{ gerade} \\ \alpha & \textit{sonst} \end{cases}$$

Beweis. Sei speziell $\alpha = e^*_{s_1} \wedge \cdots \wedge e^*_{s_k}$ mit $\{1, \ldots, n\} = \{s_1, \ldots, s_k\} \cup \{t_1, \ldots, t_{n-k}\}$. Nach Definition des Hodge-Operators gilt dann

$$\varphi\alpha \;=\; \mathrm{sgn}\begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \\ s_1 \cdots s_k & t_1 \cdots & t_{n-k} \end{pmatrix} e^*_{t_1} \wedge \cdots \wedge e^*_{t_k},$$

also

$$\begin{aligned} \varphi\varphi\alpha &= \mathrm{sgn}\begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \\ t_1 \cdots t_{n-k} & s_1 \cdots & s_k \end{pmatrix}^{-1} \mathrm{sgn}\begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \\ s_1 \cdots s_k & t_1 \cdots & t_{n-k} \end{pmatrix} \alpha \\ &= \mathrm{sgn}\begin{pmatrix} t_1 \cdots t_{n-k} & s_1 \cdots & s_k \\ s_1 \cdots \quad s_k & t_1 \cdots & t_{n-k} \end{pmatrix} \alpha \;=\; (-1)^{k(n-k)}\alpha \end{aligned}$$

wobei wir verwenden, dass $\mathrm{sgn}\,\pi = \mathrm{sgn}\,\pi^{-1}$ für alle Permutationen gilt und im letzten Schritt wie in Lemma 1 vorgehen (vgl. die dortigen Beispiele). (q.e.d.)

Beispiel. Im Fall $n = 2, k = 1$ ist $\varphi e_1 = e_2$, denn $\mathrm{sgn}\binom{12}{12} = 1$, aber $\varphi e_2 = -e_1$ da $\mathrm{sgn}\binom{12}{21} = -1$. Der Hodge Operator entspricht hier dem Basiswechsel, der zur Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

gehört, bei Identifikation von $\mathbb{R}^2$ mit $\mathbb{C}$ entspricht er also der Multiplikation mit i. Dementsprechend ist $\varphi\varphi\alpha = -\alpha$ analog zu der Beziehung $i^2 = -1$.

Für die nächsten beiden Kapitel reichen die bisher bewiesenen Eigenschaften von φ. Für die Diskussion in Kapitel 6 sei hier noch eine koordinatenfreie Charakterisierung des Hodge Operators gegeben.

Satz 12 *a) Die alternierende n-Form $\sigma = e^*_1 \wedge \ldots \wedge e^*_n$ hängt nicht von der Wahl der positiv orientierten ON-Basis $e^*_1, \ldots, e^*_n$ von V^* ab.*

b) Es gibt genau ein Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle_k$ auf $\mathrm{Alt}_k V$ derart, dass für jede ON-Basis $e^*_1, \ldots, e^*_n$ von V^* die Basis $\{e^*_{i_1} \wedge \ldots \wedge e^*_{i_k},\ 1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n\}$ aus Satz 8 eine ON-Basis von $\mathrm{Alt}_k V$ bezüglich $\langle , \rangle_k$ ist.

c) Für jedes $\omega \in \mathrm{Alt}_k V$ ist $\varphi(\omega)$ der eindeutig bestimmte Vektor aus $\mathrm{Alt}_{n-k} V$ derart, dass für alle $\mu \in \mathrm{Alt}_{n-k} V$ gilt

$$\omega \wedge \mu = \langle \mu, \varphi(\omega) \rangle_{n-k} \sigma.$$

Beweis. a) Dies ist eine unmittelbare Folgerung aus Satz 9.

b) Wir wählen zunächst eine feste ON-Basis $e_1^*, \ldots, e_n^*$. Dann gibt es genau ein Skalarprodukt $\langle , \rangle_k$ auf $\mathrm{Alt}_k V$ so dass $\{e_{i_1}^* \wedge \ldots \wedge e_{i_k}^*,\ 1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n\}$ eine ON-Basis von $\mathrm{Alt}_k V$ ist bezüglich $\langle , \rangle_k$. Dann gilt also

$$\begin{aligned} \langle e_{i_1}^* \wedge \ldots \wedge e_{i_k}^*, e_{j_1}^* \wedge \ldots \wedge e_{j_k}^* \rangle_k &= \begin{cases} 1 & \text{falls} \quad i_l = j_l \quad \text{für alle} \ \ l \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \\ &= \det((\langle e_{i_l}^*, e_{i_m}^* \rangle))_{k,m}. \end{aligned}$$

Auf Grund der Multilinearität aller beteiligten Operationen gilt damit auch

$$\langle \beta_1 \wedge \ldots \wedge \beta_k,\ \gamma_1 \wedge \ldots \wedge \gamma_k \rangle = \det((\langle \eta_l, \gamma_m \rangle))_{k,m}$$

für beliebige $\beta_l, \gamma_m \in V^*$. Insbesondere folgt, dass auch

$$\langle f_{i_1}^* \wedge \ldots \wedge f_{i_k}^*, f_{j_1}^* \wedge \ldots \wedge f_{j_k}^* \rangle = \begin{cases} 1 & \text{falls} \quad i_l = j_l \quad \text{für alle} \ \ l \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

gilt für jede andere ON-Basis $f_1^*, \ldots, f_n^*$ von V^*.

c) Sei zunächst $1 \leq s_1 < \ldots < s_k \leq n$ fest und $\omega = e_{s_1}^* \wedge \ldots \wedge e_{s_k}^*$. Sei $t_1, \ldots, t_{n-k}$ die aufsteigende Nummerierung der übrigen Indizes. Dann ist nach Definition von $\varphi(\omega)$

$$\omega \wedge \varphi(\omega) = \mathrm{sgn} \begin{pmatrix} 1 \ldots\ldots\ldots & n \\ s_1 \ldots s_k t_1 \ldots & t_{n-k} \end{pmatrix} \sigma.$$

Sei $\mu = \Sigma c_{\tau_1 \ldots \tau_{n-k}} e_{\tau_1}^* \wedge \ldots e_{\tau_{n-k}}^*$ ein allgemeines Element von $\mathrm{Alt}_{n-k} V$. Dann ist

$$\begin{aligned} \omega \wedge \mu &= \omega \wedge c_{t_1 \ldots t_{n-k}} e_{t_1}^* \wedge \ldots e_{t_{n-k}}^* \\ &= c_{t_1 \ldots t_{n-k}} \,\mathrm{sgn} \begin{pmatrix} 1 \ldots\ldots\ldots & n \\ s_1 \ldots s_k t_1 \ldots & t_{n-k} \end{pmatrix} \sigma \\ &= \langle \mu, \mathrm{sgn} \begin{pmatrix} 1 \ldots\ldots\ldots & n \\ s_1 \ldots s_k t_1 \ldots & t_{n-k} \end{pmatrix} e_{t_1}^* \wedge \ldots \wedge e_{t_{n-k}}^* \rangle \sigma. \end{aligned}$$

Durch Vergleich sehen wir: $\varphi(\omega)$ ist der (eindeutig bestimmte) Vektor in $\mathrm{Alt}_{n-k} V$ mit

$$\omega \wedge \mu = \langle \mu, \varphi(\omega) \rangle_k \sigma.$$

Da die ω der eben betrachteten Form eine Basis von $\mathrm{Alt}_k V$ bilden, läßt sich diese Aussage auch auf alle $\omega \in \mathrm{Alt}_k V$ fortsetzen. (q.e.d.)

Folgerung 2 *In unserer ursprünglichen Definition von φ kann man die gewählte Basis $e_1^*, \ldots, e_n^*$ durch irgendeine andere positiv orientierte ON-Basis ersetzen.*

Aufgabe 8. Seien $A = (a_1, \ldots, a_n)$ und $B = (b_1, \ldots, b_n)$ zwei $k \times n$-Matrizen, $k \leq n$. Zeige, dass dann

$$\det AB^T = \sum_{1 \leq t_1 < \cdots < t_k \leq n} \det(a_{t_1}, \ldots, a_{t_k}) \det(b_{t_1}, \ldots, b_{t_k})$$

gilt. Hinweis: für den Beweis ist evtl. die Formel

$$\det A = \sum_{\sigma \in \mathrm{Perm}_n} \mathrm{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{i,\sigma(i)},$$

wobei Perm_n die Menge aller Permutationen von $\{1, \ldots, n\}$ ist, nützlich. (Diese Aufgabe wird später in Kapitel 6 verwendet.)

Aufgabe 9. Seien $x, y \in \mathbb{R}^3$ und $z = x \times y$ das gewöhnliche Kreuzprodukt. Jede bilineare Abbildung φ auf $\mathbb{R}^n$ läßt sich als $\varphi(x, y) = (x, Ay)$ für eine geeignete Matrix A schreiben. Stelle die Matrix, die zu $x^t \wedge y^t$ gehört, mit Hilfe der Komponenten von z dar.

Aufgabe 10. Seien G und H zwei unendlich-dimensionale Hilberträume mit Skalarprodukten $(\cdot,\cdot)_G$ und $(\cdot,\cdot)_H$. Durch das algebraische Tensorprodukt $G \otimes H$ erhält man zunächst einen Vektorraum. Indem man $(g_1 \otimes h_1, g_2 \otimes h_2) := (g_1, g_2)_G \cdot (h_1, h_2)_H$ bilinear fortsetzt, erhält man ein Skalarprodukt, und damit eine Norm, auf $G \otimes H$.

Zeige, dass $G \otimes H$ bezüglich dieser Norm nicht vollständig ist.

Tip: Wählt man vollständige Orthonormalsysteme $(g_i)_{i\in\mathbb{N}}$ von G und $(h_i)_{i\in\mathbb{N}}$ von H, so ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} g_i \otimes h_i$ womöglich eine Cauchyfolge in $G \otimes H$, die nicht konvergiert.

Definition. Sei V ein Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ und $\beta_1, \ldots, \beta_k \in V$. Dann heißt

$$\det\Big(\big(\langle\beta_i, \beta_j\rangle\big)_{1\le i,j\le k}\Big)$$

die **Gramsche Determinante** von $\beta_1, \ldots, \beta_k$.

Aufgabe 12. a) Zeige, dass die Gramsche Determinante gleich $\big(\mathrm{vol}_k(P_{\beta_1\cdots\beta_k})\big)^2$ ist, wobei $P_{\beta_1,\ldots,\beta_k}$ das von $\beta_1, \ldots, \beta_k$ aufgespannte Parallelepiped ist. Stelle außerdem die Gramsche Determinante mit Hilfe des äußeren Produkts dar.

b) Verwende das Ergebnis aus Aufgabe 8a um eine Verallgemeinerung des Satzes von Pythagoras zu beweisen, bei dem k-dimensionale Volumina von Parallelepipeden die Rolle der Seitenlängen übernehmen.

Tip: Für $k = 1$ und $\dim V = 2$ sollte sich die normale Version des Satzes von Pythagoras ergeben. Dies ist möglich, da $\mathrm{vol}_1(P_\beta)$ gerade die Länge des Vektors β ist.

Kapitel 4

Differentialformen

In diesem Kapitel werden wir, aufbauend auf den alternierenden Multilinearformen, den Begriff der Differentialform einführen.

In diesem Kapitel sei stets $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Menge.

Wie im ersten Kapitel gesehen, führen die Koordinatenabbildungen $x_i\colon \sum \alpha_i e_i \mapsto \alpha_i$ zu den Pfaffschen Formen $dx_i \in (\mathbb{R}^n)^*$. Mit der üblichen Identifikation ist $dx_i = e_i^* = x_i$ und die dx_i bilden eine Basis von $(\mathbb{R}^n)^*$. Ein allgemeines Element von $\alpha \in \mathrm{Alt}_k(\mathbb{R}^n)$ besitzt daher eine Darstellung als

$$\alpha \;=\; \sum_{i_1<\cdots<i_k} \alpha_{i_1\ldots i_k} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}.$$

Definition. Eine **homogene Differentialform auf** U **vom Grad** k (oder kurz: eine k**-Form**) ist eine Abbildung $\omega\colon U \to \mathrm{Alt}_k \mathbb{R}^n = \mathrm{Alt}_k T\mathbb{R}^n$. Also haben k-Formen ω die Darstellung

$$\omega(p) = \sum_{i_1<\ldots<i_k} \omega_{i_1\ldots i_k}(p)\, dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \quad \text{für alle } p \in U$$

mit eindeutig bestimmten Funktionen $\omega_{i_1\ldots i_k}\colon U \to \mathbb{R}$. Homogene Differentialformen vom Grad 0 sind einfach Abbildungen $\omega\colon U \to \mathbb{R}$.

Eine k-Form ω heißt von der Klasse $\mathcal{C}^k$ bzw. k-mal stetig differenzierbar, falls die Funktionen $\alpha_{i_1\ldots i_k}\mathcal{C}^k$-Funktionen sind.

Die Pfaffschen Formen, die wir bereits eingeführt haben, sind in dieser Sprechweise also 1-Formen.

4.1 Die äußere Ableitung

Definition. Sei ω eine k-Form auf $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Ist $k = 0$ so ist ω eine Abbildung von U nach $\mathbb{R}$. In diesem Falle definiere

$$d\omega = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \omega}{\partial x_i} dx_i.$$

Ist $k > 0$, so hat ω eine Darstellung als $\omega = \sum_{i_1<\cdots<i_k} \omega_{i_1\ldots i_k}\, dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$. In diesem Fall definiere

$$d\omega(p) \;:=\; \sum_{i_1<\cdots<i_k} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \omega_{i_1\ldots i_k}}{\partial x_j}(p)\, dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \quad \text{für alle } p \in U.$$

Die Differentialform $d\omega$ heißt die **äußere Ableitung** von ω.

Die so definierte Operation d ist linear und bildet k-Formen auf $(k+1)$-Formen ab. Bei den Summanden $\omega_{i_1\dots i_k}\,dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k}$ wirkt die äußere Ableitung nur auf die 0-Form $\omega_{i_1\dots i_k}$, die dx_i werden nicht verändert.

Satz 13 *Sei ω eine Differentialform von der Klasse $\mathcal{C}^2$. Dann ist $dd\omega = 0$.*

Beweis. Wir wir eben gesehen haben, genügt es, den Fall einer 0-Form $\omega = \omega_0 \colon U \to \mathbb{R}$ zu betrachten. Es ist $d\omega_0 = \sum_{i=1}^n \frac{\partial\omega_0}{\partial x_i}\,dx_i$, also

$$\begin{aligned}
dd\omega_0 &= \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n \frac{\partial\frac{\partial\omega_0}{\partial x_i}}{\partial x_j}\,dx_j\wedge dx_i \\
&= \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2\omega_0}{\partial x_i\partial x_j}\,dx_j\wedge dx_i \\
&= \sum_{i<j}\left(\frac{\partial^2\omega_0}{\partial x_i\partial x_j} - \frac{\partial^2\omega_0}{\partial x_j\partial x_i}\right)dx_j\wedge dx_i \\
&= 0.
\end{aligned}$$

(q.e.d.)

Folgerung 3 *Gegeben sei eine $\mathcal{C}^1$-Differentialform η vom Grad $k+1$. Notwendig für die Existenz eines ω mit $d\omega = \eta$ ist $d\eta = 0$. Im Fall $k = 0$ ist η eine Pfaffsche Form und $d\eta = 0$ ist äquivalent zu unserer alten Integrabilitätsbedingung $\frac{\partial\eta_i}{\partial x_j} = \frac{\partial\eta_j}{\partial x_i}$.*

Auf die Frage, wann diese Bedingung hinreichend ist, gehen wir in dem vorletzten Abschnitt dieser Vorlesung ein.

Satz 14 *Seien ω und η Differentialformen. Dann gilt*

$$d(\omega\wedge\eta) \;=\; (d\omega)\wedge\eta + (-1)^{\deg(\omega)}\,\omega\wedge d\eta.$$

Ist $d\alpha = 0$, so gilt damit speziell $d(\omega\wedge\alpha) = (d\omega)\wedge\alpha$.

Beweis. Es genügt, die Behauptung für Differentialformen der Gestalt

$$\begin{aligned}
\omega &= \omega_0\,dx_{s_1}\wedge\cdots\wedge dx_{s_k} \quad \text{und} \\
\eta &= \eta_0\,dx_{t_1}\wedge\cdots\wedge dx_{t_m}
\end{aligned}$$

zu zeigen. Der Rest folgt dann mit der Linearität von d.

Seien also ω und η wie oben. Dann gilt

$$\begin{aligned}
d(\omega\wedge\eta) &= d\big(\omega_0\eta_0\,dx_{s_1}\wedge\cdots dx_{s_k}\wedge dx_{t_1}\wedge\cdots\wedge dx_{t_m}\big) \\
&= \sum_i \frac{\partial(\omega_0\eta_0)}{\partial x_i}\,dx_i\wedge dx_{s_1}\wedge\cdots\wedge dx_{t_m} \\
&= \sum_i \frac{\partial\omega_0}{\partial x_i}\eta_0\,dx_i\wedge\cdots + \sum_i \omega_0\frac{\partial\eta_0}{\partial x_i}\,dx_i\wedge\cdots \\
&= \sum_i \frac{\partial\omega_0}{\partial x_i}dx_i\wedge\cdots\wedge dx_{s_k}\wedge\big(\eta_0\,dx_{t_1}\wedge\cdots\wedge dx_{t_m}\big) \\
&\qquad + \sum \omega_0(-1)^k dx_{s_1}\wedge\cdots\wedge dx_{s_k}\wedge\big(\frac{\partial\eta_0}{\partial x_i}\,dx_i\wedge dx_{t_1}\wedge\cdots\wedge dx_{t_m}\big) \\
&= (d\omega)\wedge\eta + (-1)^k\omega\wedge(d\eta)
\end{aligned}$$

(q.e.d.)

Bemerkung. Die Eigenschaften der äußeren Ableitung lassen sich folgendermaßen zusammenfassen. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $\omega\colon U \to \mathrm{Alt}_k\,\mathbb{R}^n = \mathrm{Alt}_k\,TU$ eine stetig differenzierbare k-Form auf U. Dann ist $d\omega$ eine stetige $(k+1)$-Form auf U mit folgenden Eigenschaften:

1) $d(\eta + \omega) \;=\; d\eta + d\omega$
2) $d(\omega \wedge \eta) \;=\; (d\omega) \wedge \eta + (-1)^{\deg \omega} \omega \wedge d\eta$
3) $dd\omega = 0$ für alle $\omega \in \mathcal{C}^2$
4) Im Fall $k = 0$ ist $d\omega = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \omega}{\partial x_i}\, dx_i$.

Durch die Bedingungen 1) bis 4) ist die Operation d eindeutig bestimmt.

In den folgenden Abschnitten werden wir einige Spezialfälle der äußeren Ableitung betrachten. Diese führen zu den, auch aus der Analysis bekannten, Operatoren div, rot und grad.

Eine spezielle Form auf dem $\mathbb{R}^n$ ist

$$\sigma \;:=\; dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n.$$

Dies ist die Determinante, aufgefasst als multilineare Abbildung der Spalten.

Ein weiteres Beispiel ist

$$dS_i \;:=\; \varphi\, dx_i \;=\; (-1)^{i-1} dx_1 \wedge \cdots \widehat{dx_i} \cdots \wedge dx_n.$$

Im $\mathbb{R}^3$ erhält man damit

$$\begin{aligned} dS_1 &= dx_2 \wedge dx_3 \\ dS_2 &= -dx_1 \wedge dx_3 = dx_3 \wedge dx_1 \\ dS_3 &= dx_1 \wedge dx_2. \end{aligned}$$

Sei jetzt ω eine Differentialform vom Grad $n-1$, also

$$\omega(p) \;=\; \sum_{i=1}^n \omega_{1\ldots\widehat{\imath}\ldots n}(p)\, dx_1 \wedge \cdots \widehat{dx_i} \cdots \wedge dx_n \;=\; \sum_{i=1}^n \tilde{\omega}_i(p)\, dS_i$$

mit $\tilde{\omega}_i = (-1)^{i-1} \omega_{1\ldots\widehat{\imath}\ldots n}$. Definiert man nun noch die Pfaffsche Form $\tilde{\omega}$ durch $\tilde{\omega} = \sum_{i=1}^n \tilde{\omega}_i\, dx_i$, so erhält man $\omega = \varphi\tilde{\omega}$.

Satz 15 *Sei $\tilde{\omega}$ eine stetig differenzierbare Pfaffsche Form und $\omega = \varphi\tilde{\omega}$. Dann ist $d\omega = (\operatorname{div} \tilde{\omega})\sigma$.*

Beweis. Es gilt

$$d\omega \;=\; \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \frac{\partial \tilde{\omega}_i}{\partial x_i}\, dx_i \wedge dx_1 \wedge \cdots \widehat{dx_i} \cdots \wedge dx_n \;=\; \sum_{i=1}^n \frac{\partial \tilde{\omega}_i}{\partial x_i}\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n.$$

(q.e.d.)

Ein weiterer Spezialfall ist der Fall von 1-Formen im $\mathbb{R}^3$, also von Pfaffschen Formen ω mit $\omega(p) = \omega_x(p)\, dx + \omega_y(p)\, dy + \omega_z(p)\, dz$. Hier ist

$$\begin{aligned} d\omega &= \Big(\frac{\partial \omega_x}{\partial y}\, dy + \frac{\partial \omega_x}{\partial z}\, dz\Big) \wedge dx + \big(\frac{\partial \omega_y}{\partial x}\, dx + \frac{\partial \omega_y}{\partial z}\, dz\big) \wedge dy + \big(\frac{\partial \omega_z}{\partial x}\, dz + \frac{\partial \omega_z}{\partial y}\, dy\big) \wedge dz \\ &= \Big(\frac{\partial \omega_y}{\partial x} - \frac{\partial \omega_x}{\partial y}\Big) dx \wedge dy + \Big(\frac{\partial \omega_z}{\partial y} - \frac{\partial \omega_y}{\partial z}\Big) dy \wedge dz + \Big(\frac{\partial \omega_z}{\partial x} - \frac{\partial \omega_x}{\partial z}\Big) dx \wedge dz \end{aligned}$$

und damit

$$\operatorname{rot} \omega \;:=\; \varphi d\omega \;=\; \Big(\frac{\partial \omega_z}{\partial y} - \frac{\partial \omega_y}{\partial z}\Big) dx + \Big(\frac{\partial \omega_x}{\partial z} - \frac{\partial \omega_z}{\partial x}\Big) dy + \Big(\frac{\partial \omega_y}{\partial x} - \frac{\partial \omega_x}{\partial y}\Big) dz.$$

Diese Definition stimmt mit der aus der Analysis bekannten überein.

Folgerung 4 *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^3$ offen. Dann gelten folgende Aussagen.*
a) Für $\omega \in \mathcal{C}^2(U)$ ist $\operatorname{rot}\operatorname{grad}\omega = \varphi d(d\omega) = 0$.
b) Für $\mathcal{C}^2$-Vektorfelder $v\colon U \to \mathbb{R}^3$ gilt $\operatorname{div}\operatorname{rot} v = 0$.

Beweis. Teil a) ist klar nach Satz 13.
zu b) Sei $\tilde\omega = \operatorname{rot} v$ und $\omega = \varphi\tilde\omega$. Weil v zweimal stetig differenzierbar ist, ist ω noch in $\mathcal{C}^1$ und mit dem voranstehenden Satz folgt $(\operatorname{div}\operatorname{rot} v)\sigma = (\operatorname{div}\tilde\omega)\sigma = d\varphi\tilde\omega = d\varphi\varphi\, dv = ddv = 0$.
(q.e.d.)

Die Rotation ist natürlich vor allem von 3-dimensionalen physikalischem Kontext relevant. Im Zusammenhang mit Integration ist folgender Satz wichtig für das Verständnis der Divergenz. Die Überlegung taucht z.B. unter dem Stichwort Phasenflüsse in der Physik auf.

Für $t \in (-\varepsilon; +\varepsilon)$ sei $\Phi_t\colon U \to \mathbb{R}^n$ eine Abbildung mit

$$\Phi_t(p) = p + tv(p) + o(t) \quad \text{für } t \to 0.$$

Ein typisches Beispiel für Φ ist der Fluss einer Differentialgleichung $\dot p = v(p)$. Die Abbildung Φ_t ordnet dann jedem Punkt $p_0 \in \mathbb{R}^n$ den Wert $p(t)$ für die Lösung p mit Anfangswert $p(0) = p_0$ zu. Es gilt

$$\begin{aligned}
\det D\Phi_t(p) &= \det D\big(I + tv(p) + o(t)\big)\\
&= \det\big(I + t\cdot Dv(p) + o(t)\big)\\
&= 1 + \operatorname{Sp} Dv(p)\cdot t + o(t)\\
&= 1 + t\cdot \operatorname{div} v(p) + o(t)
\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich folgender

Satz 16 *Wenn $\Phi\colon (-\varepsilon;\varepsilon)\times U \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar ist, dann gilt für jede kompakte Menge $W \subseteq U$ die Beziehung*

$$\frac{d}{dt}\operatorname{vol}(\Phi_t W)\big|_{t=0} = \int_W \operatorname{div} v(x)\, dx.$$

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned}
\int_W \operatorname{div} v(x)\, dx &= \int_W \frac{d}{dt}\big(\det D\Phi_t(x)\big)\Big|_{t=0} dx = \frac{d}{dt}\int_W \det D\Phi_t(x)\, dx\\
&= \frac{d}{dt}\int_W \big|\det D\Phi_t(x)\big|\, dx = \frac{d}{dt}\operatorname{vol}(\Phi_t W),
\end{aligned}$$

da $\det D\Phi_t > 0$ für kleine t gleichmäßig in W ist. (q.e.d.)

Zur Abkürzung ist gelegentlich folgende Notation nützlich, da sie es ermöglicht, weniger Indizes an die Symbole zu schreiben. Ein k-Tupel $1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n$ kann mit der Teilmenge $H \subseteq \{1,\dots,n\}$, $H = \{i_1,\dots,i_k\}$ identifiziert werden. Wir setzen damit $dx_H := dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k}$. Eine k-Form ω schreibt sich $\omega = \sum_{H,|H|=k} a_H\, dx_H$ und es folgt $d\omega = \sum_i\sum_H \frac{\partial a_H}{\partial x_i}\, dx_i \wedge dx_H$.

Beispiel. Die **Maxwellgleichungen** aus der Elektrodynamik lassen sich gut mit dem Formalismus von Differentialformen und äußeren Ableitungen formulieren. Im Gaußschen Maßsystem ausgedrückt lauten die Maxwellgleichungen folgendermaßen.

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot} E &= -\frac{1}{c}\frac{\partial B}{\partial t}\\
\operatorname{rot} H &= \frac{4\pi}{c}J + \frac{1}{c}\frac{\partial D}{\partial t}\\
\operatorname{div} D &= 4\pi\rho\\
\operatorname{div} B &= 0
\end{aligned}$$

Definiere nun die zugehörigen Differentialformen

$$\begin{aligned}
\alpha &:= (E_1\,dx_1 + E_2\,dx_2 + E_3\,dx_3) \wedge c\,dt \\
&\qquad + B_1\,dx_2 \wedge dx_3 + B_2\,dx_3 \wedge dx_1 + B_3\,dx_1 \wedge dx_2 \\
\beta &:= -(H_1\,dx_1 + H_2\,dx_2 + H_3\,dx_3) \wedge c\,dt \\
&\qquad + D_1\,dx_2 \wedge dx_3 + D_2\,dx_3 \wedge dx_1 + D_3\,dx_1 \wedge dx_2 \\
\gamma &:= (J_1\,dx_2 \wedge dx_3 + J_2\,dx_3 \wedge dx_1 + J_3\,dx_1 \wedge dx_2) \wedge dt \\
&\qquad - \rho\,dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3
\end{aligned}$$

Dann ist das System aus den beiden Gleichungen

$$d\alpha = 0 \quad \text{und} \quad d\beta + 4\pi\gamma = 0$$

äquivalent zu den Maxwell-Gleichungen. Dies verifiziert man durch einfaches Nachrechnen.

4.2 Zurückholen von Differentialformen

In diesem Abschnitt werden wir das Konzept des Zurückholens von Differentialformen einführen. Dies ermöglicht es, bei einem Koordinatenwechsel eine Differentialform, die ursprünglich in den alten Koordinaten ausgedrückt war, in das neue Koordinatensystem zu transformieren.

Seien $U \subseteq \mathbb{R}^m$ und $V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Weiter sei $f\colon U \to V$ stetig differenzierbar. Für eine Differentialform η auf V wollen wir eine substituierte Differentialform $f^*\eta$ auf U definieren. Der Übersichtlichkeit halber bezeichnen wir die Koordinaten in U mit $x_1, \ldots, x_m$ und die Koordinaten in V mit $y_1, \ldots, y_n$.

Die Konstruktion von f^* geht nun in mehreren Schritten vor sich:

1) Sei $\eta = \eta_0\colon V \to \mathbb{R}$ eine 0-Form. Dann definiere

$$f^*\eta := \eta_0 \circ f.$$

2) Sei $\eta = dy_i$. Dann setze $f^*dy_i := d(f^*y_i) = d(y_i \circ f) = df_i$. In diesem Fall gilt also

$$f^*dy_i = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} dx_j.$$

3) Für k-Formen der Form $\eta_H\,dy_{i_1} \wedge \cdots \wedge dy_{i_k}$ definiere

$$f^*\big(\eta_H\,dy_{i_1} \wedge \cdots \wedge dy_{i_k}\big) := (f^*\eta_H)(f^*dy_{i_1}) \wedge \cdots \wedge (f^*dy_{i_k}).$$

4) Für allgemeine k-Formen definiere f^* durch lineare Fortsetzung.

Lemma 2 *Die Operation f^* hat folgende Eigenschaften:*

a) Es gilt $f^*(\omega \wedge \eta) = (f^*\omega) \wedge (f^*\eta)$.

b) f^* besitzt die alternative Darstellung

$$f^*\big(\eta_H\,dy_{i_1} \wedge \cdots \wedge dy_{i_k}\big) = (\eta_H \circ f) \sum_{1 \le j_1 < \cdots < j_k \le m} \det\left(\frac{\partial f_{i_l}}{\partial x_{j_r}}\right)_{l,r} dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_k}.$$

Beweis. Zu a) Für 0-Formen ω_0 und η_0 gilt zunächst

$$f^*(\omega_0 \wedge \eta_0) = (\omega_0\eta_0) \circ f = (\omega_0 \circ f) \cdot (\eta_0 \circ f) = (f^*\omega_0) \cdot (f^*\eta_0).$$

Für $\omega = \omega_G \, dy_{s_1} \wedge \cdots \wedge dy_{s_k}$ und $\eta = \eta_H \, dy_{t_1} \wedge \cdots \wedge dy_{t_l}$ gilt weiter

$$\begin{aligned}
&f^*\big(\omega_G \eta_H \, dy_{s_1} \wedge \cdots \wedge dy_{s_k} \wedge dy_{t_1} \wedge \cdots \wedge dy_{t_l}\big) \\
&= f^*(\omega_G \eta_H)(f^* dy_{s_1}) \wedge \cdots \wedge (f^* dy_{s_k}) \wedge (f^* dy_{t_1}) \wedge \cdots \wedge (f^* dy_{t_l}) \\
&= \big(f^*(\omega_G) f^* dy_{s_1} \wedge \cdots \wedge f^* dy_{s_k}\big) \wedge \big(f^*(\eta_H) f^* dy_{t_1} \wedge \cdots \wedge f^* dy_{t_l}\big) \\
&= f^*\omega \wedge f^*\eta
\end{aligned}$$

Zu b) Hier hilft wieder die Darstellung der Determinante als Summe über alle Permutationen. Direktes Nachrechnen liefert

$$\begin{aligned}
&f^*\big(dy_{i_1} \wedge \cdots \wedge dy_{i_k}\big) \\
&= \sum_{t_1=1}^{m} \cdots \sum_{t_k=1}^{m} \frac{\partial f_{i_1}}{\partial x_{t_1}} \cdots \frac{\partial f_{i_k}}{\partial x_{t_k}} \, dx_{t_1} \wedge \cdots \wedge dx_{t_k} \\
&= \sum_{j_1 < \ldots < j_k} \Big(\sum_{\pi \in Perm_k} \operatorname{sgn}(\pi) \frac{\partial f_{i_1}}{\partial x_{j_{\pi(1)}}} \cdot \cdots \cdot \frac{\partial f_{i_k}}{\partial x_{j_{\pi(k)}}} \Big) \, dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_k} \\
&= \sum_{j_1 < \ldots < j_k} \det \left(\frac{\partial f_{i_l}}{\partial x_{j_r}} \right)_{l,r} dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_k}.
\end{aligned}$$

(q.e.d.)

Satz 17 *Sei ω eine stetig differenzierbare k-Form und f eine $\mathcal{C}^2$-Funktion. Dann ist*

$$f^*(d\omega) = d(f^*\omega).$$

Beweis. 1) Im Fall $\omega = y_i$ gilt die Behauptung nach Definition von f^*.
2) Sei nun $\omega = \omega_0 \colon V \to \mathbb{R}$ eine 0-Form auf V. Dann ist

$$d\,f^*\omega_0 \;=\; d(\omega_0 \circ f) \;=\; \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \omega_0 \circ f}{\partial x_j} \, dx_j \;=\; \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \big(\frac{\partial \omega_0}{\partial y_i} \circ f\big) \cdot \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \, dx_j$$

und andererseits auch

$$f^* d\omega_0 \;=\; f^*\Big(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \omega_0}{\partial y_i} \, dy_i\Big) \;=\; \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \omega_0}{\partial y_i} \circ f \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \, dx_j.$$

3) Sei nun $\omega = \omega_0 \, dy_{i_1} \wedge \cdots \wedge dy_{i_k}$. Dann folgt

$$\begin{aligned}
df^*\omega &= d\big(f^*\omega_0 \, (f^* dy_{i_1}) \wedge \cdots \wedge (f^* dy_{i_k})\big) \\
&= df^*\omega_0 \wedge df_{i_1} \wedge \cdots \wedge df_{i_k} \\
&= f^* d\omega_0 \wedge f^* dy_{i_1} \wedge \cdots \wedge f^* dy_{i_k} \\
&= f^*(d\omega_0 \wedge dy_{i_1} \wedge \cdots \wedge dy_{i_k}) \\
&= f^* d\omega.
\end{aligned}$$

Hierbei haben wir im zweiten Gleichheitszeichen die Regel aus Satz 14 und die Tatsache verwendet, daß nach Satz 13 $df^* dy_i = ddf^* y_i = 0$ ist. Für dies Argument benötigen wir $f \in \mathcal{C}^2$. Aus der Linearität von d und f^* folgt dann die Behauptung. (q.e.d.)

Man drückt diese Aussage $f^* d\omega = df^*\omega$ auch folgendermaßen aus: Die Bildung der äußeren Ableitung ist unabhängig von der Wahl des Koordinatensystems.

Satz 18 *Seien $f \colon U \to V$ und $g \colon V \to W$ zwei $\mathcal{C}^2$-Abbildungen. Dann gilt $(g \circ f)^*\omega = f^* g^* \omega$ für alle Differentialformen ω auf W.*

Beweis. Der Beweis verläuft wieder in mehreren Schritten.

1) Sei zunächst η eine 0-Form. Dann ist $(g \circ f)^*\eta = \eta \circ (g \circ f) = (\eta \circ g) \circ f = f^*(g^*\eta)$.

2) Sein nun $\pi_t \colon W \to \mathbb{R}$ eine Projektion. Dann ist

$$f^*g^*\, d\pi_t \;=\; f^*dg^*\pi_t \;=\; df^*g^*\pi_t \;=\; d(g \circ f)^*\pi_t \;=\; (g \circ f)^*\, d\pi_t.$$

3) Der letzte Schritt verläuft analog zu dem oben ausgeführten. (q.e.d.)

Die folgenden Beispiele demonstrieren, dass man für gegebene Differentialformen ω die zurückgeholte Differentialform $f^*\omega$ ohne Mühe explizit ausrechnen kann. Eine anspruchsvollere Anwendung bildet Aufgabe 15.

Beispiel. Sei zunächst $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x,y) = x - y$ und $\omega(t) = dt$ eine Differentialform auf $\mathbb{R}$. Mittels f kann man ω auf den $\mathbb{R}^2$ zurückholen. Man erhält

$$f^*\omega \;=\; f^*dt \;=\; df \;=\; \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy \;=\; dx - dy.$$

Beispiel. Sei $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definiert durch $f(t) = (t^2, t^3)$ und $\omega(x,y) = x\,dy$ eine Differentialform auf dem $\mathbb{R}^2$. Dann ist

$$\big(f^*\omega\big)(t) \;=\; (\pi_1 \circ f) \cdot (\frac{\partial f_2}{\partial t}\,dt) \;=\; t^2 \cdot 3t^2\,dt \;=\; 3t^4\,dt.$$

Beispiel. Für $\omega = dy_1 \wedge dy_2$ erhält man

$$\begin{aligned}
f^*(dy_1 \wedge dy_2) \;&=\; (\sum_j \frac{\partial f_1}{\partial x_j}\,dx_j) \wedge (\sum_l \frac{\partial f_2}{\partial x_l}\,dx_l) \\
&=\; \sum_{j,l} \frac{\partial f_1}{\partial x_j}\frac{\partial f_2}{\partial x_l}\,dx_j \wedge dx_l \\
&=\; \sum_{j<l} (\frac{\partial f_1}{\partial x_j}\frac{\partial f_2}{\partial x_l} - \frac{\partial f_1}{\partial x_l}\frac{\partial f_2}{\partial x_j})\,dx_j \wedge dx_l \\
&=\; \sum_{j<l} \det \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_j} & \frac{\partial f_2}{\partial x_j} \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_l} & \frac{\partial f_2}{\partial x_l} \end{pmatrix} dx_j \wedge dx_l
\end{aligned}$$

Aufgabe 11. Sei $\omega = -(e^x + z^2)\,dx \wedge dy - dx \wedge dz + 2xz\,dy \wedge dz$ auf $U = \mathbb{R}^3$.

a) Zeige $d\omega = 0$.

b) Zeige, dass es eine 1-Form η auf U mit $d\eta = \omega$ gibt. Tip: Man kann η von der Form $f_1\,dx + f_2\,dy$ wählen.

Aufgabe 13. Seien $E^t, D^t, H^t, B^t, J^t\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ für $t \in \mathbb{R}$ und $\rho\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ Abbildungen. Definiere folgende Differentialformen

$$\begin{aligned}
\omega_1^t &= E_1^t\,dx_1 + E_2^t\,dx_2 + E_3^t\,dx_3\\
\omega_2^t &= B_1^t\,dx_2 \wedge dx_3 + B_2^t\,dx_3 \wedge dx_1 + B_3^t\,dx_1 \wedge dx_2\\
\omega_3^t &= H_1^t\,dx_1 + H_2^t\,dx_2 + H_3^t\,dx_3\\
\omega_4^t &= D_1^t\,dx_2 \wedge dx_3 + D_2^t\,dx_3 \wedge dx_1 + D_3^t\,dx_1 \wedge dx_2\\
\omega_5^t &= J_1^t\,dx_2 \wedge dx_3 + J_2^t\,dx_3 \wedge dx_1 + J_3^t\,dx_1 \wedge dx_2.
\end{aligned}$$

Mit $\dot{\omega}_i^t$ bezeichnen wir die partielle Ableitung von ω_i nach t, mit $d\omega_i$ die äußere Ableitung der Differentialform ω_i auf dem Raum $\mathbb{R}^3$.

a) Interpretiere E als elektrische Feldstärke, D als dielektrische Verschiebung, B als magnetische Flussdichte, H als magnetische Feldstärke, J als elektrische Stromdichte und ρ als Raumladungsdichte. Formuliere die Maxwell-Gleichungen mit Hilfe der obigen Bezeichnungen.

b) Definiere den Poynting-Vektor $S = \frac{c}{4\pi} E \times H$. Beweise mit Hilfe von Teil a) die Beziehung

$$\frac{1}{4\pi}\dot{B} \cdot H + E \cdot J + \frac{1}{4\pi} E \cdot \dot{D} + \operatorname{div} S = 0.$$

Aufgabe 14. a) Sei $\omega = A\,dy \wedge dz + B\,dz \wedge dx + C\,dx \wedge dy$ eine 2-Form auf dem $\mathbb{R}^3$ mit $d\omega = 0$, die Abbildungen A, B und C seien stetig differenzierbar und es gelte

$$\begin{aligned}
\alpha = {} & \Big(\int_0^1 A(tx,ty,tz)t\,dt\Big)(y\,dz - z\,dy)\\
& + \Big(\int_0^1 B(tx,ty,tz)t\,dt\Big)(z\,dx - x\,dz)\\
& + \Big(\int_0^1 C(tx,ty,tz)t\,dt\Big)(x\,dy - y\,dx).
\end{aligned}$$

Zeige, dass $d\alpha = \omega$ gilt. (Dies ist ein Spezialfall des später bewiesenen Satz 28).

b) Folgere, dass sich jedes divergenzfreie C^1-Vektorfeld im $\mathbb{R}^3$ als Rotation eines weiteren Vektorfeldes schreiben lässt.

Aufgabe 15. (6 Punkte) Seien $U, V \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ offen, $\Phi\colon U \to \mathbb{R}, (x,u) \mapsto \Phi(x,u)$ zweimal stetig differenzierbar und so, dass mit $p := \nabla_u \Phi$ die Abbildung $f\colon (x,u) \mapsto \big(x, p(x,u)\big)$ ein Diffeomorphismus von U nach V ist. Weiter sei $\Phi(x, \lambda u) = \lambda^2 \Phi(x,u)$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$. Definiere $\Psi\colon V \to \mathbb{R}, (x,p) \mapsto \Psi(x,p)$ durch $\Phi = \Psi \circ f$.

a) Zeige $p(x,u) \cdot u = 2\Phi(x,u)$ für alle $(x,u) \in U$.

b) Zeige, dass $d\Phi = f^* d\Psi$ gilt. Berechne $d\Phi$, $d\Psi$ und $f^* d\Psi$.

c) Beweise $(\nabla_x \Psi) \circ f = -\nabla_x \Phi$ und $\big(\nabla_p \Psi\big) \circ f(x,u) = u$.

Erläuterung: als Funktion Φ kann man sich hier z.B. die kinetische Energie $\frac{1}{2}mu^2$, oder allgemeiner eine Funktion $\frac{1}{2}m(x)u^2$, vorstellen. Dann wäre x der Ort, u die Geschwindigkeit und p der (verallgemeinerte) Impuls. Die Funktion Ψ wäre die kinetische Energie als Funktion von Ort und Impuls.

d) Illustriere die Ergebnisse aus Teil a) bis c) am Beispiel der kinetischen Energie, ausgedrückt in Zylinderkoordinaten: Sei also $U = \{\,(r, \varphi, z, \dot{r}, \dot{\varphi}, \dot{z}) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \mid r \neq 0\,\}$ und $x(t) = \big(r(t)\cos(\varphi(t)), r(t)\sin(\varphi(t)), z(t)\big)$. Drücke zunächst die kinetische Energie $\frac{1}{2}m(\dot{x}(t))^2$ als Funktion $\Phi(r, \varphi, z, \dot{r}, \dot{\varphi}, \dot{z})$ aus, stelle fest, ob die Voraussetzungen des Satzes erfüllt sind, berechne Ψ und p und verifiziere die Gleichungen aus Teil c).

Kapitel 5

Die Stokessche Formel

In diesem Kapitel wollen wir die Stokesche Formel für einfache Flächenstücke formulieren und beweisen.

Zur Vorbereitung erinnern wir an die Integraltransformationsformel: Seien $U, V \subset \mathbb{R}^k$, $f\colon U \to V$ bijektiv und $\mathcal{C}^1$ und ferner sei $\det\bigl(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\bigr) > 0$ für alle $x \in U$. Dann gilt für 0-Formen $\eta_0\colon V \to \mathbb{R}$ die Transformationsformel

$$\int_V \eta_0(y)\,dy \;=\; \int_U \eta_0\bigl(f(x)\bigr)\det\Bigl(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\Bigr)\,dx.$$

Für die k-Form $\eta = \eta_0\,dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_k$ folgt damit

$$\int_V \eta_0\,dy_1 \cdots dy_k \;=\; \int_U \varphi(f^*\eta)dx_1 \ldots dx_k.$$

Dies schreibt man auch in der Form (vgl. die nachfolgende Definition)

$$\int_V \eta = \int_U f^*\eta.$$

Definition. Seien $U \subseteq \mathbb{R}^k$ und $V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f\colon U \to V$ eine injektive $\mathcal{C}^1$ Abbildung.
1) Sei ζ eine k-Form auf U mit $\zeta(u) = \zeta_0(u)\,du_1 \wedge \cdots \wedge du_k$. Dann definiere

$$\int_U \zeta \;:=\; \int_U \zeta_0(u)\,du_1 \cdots du_k \;=\; \int \varphi(\zeta)\,du_1 \cdots du_k$$

2) Sei η eine k-Form auf V. Dann definiere

$$\int_f \eta \;:=\; \int_U f^*\eta.$$

Beachte, daß dies eine direkte Verallgemeinerung des Kurvenintegrals Pfaffscher Formen ist. Wie dort gilt: Diese Größe ist invariant unter Koordinatenwechseln: Sei nämlich U' eine weitere offene Menge, $g\colon U' \to U$ bijektiv und $\mathcal{C}^1$ und es gelte $\det\Bigl(\frac{\partial g_i}{\partial u_j}\Bigr) > 0$ fast überall auf U'. Dann ist nach der einleitenden Rechnung

$$\int_U \zeta \;=\; \int_{U'} \zeta\bigl(g(u)\bigr)\det\Bigl(\frac{\partial g_i}{\partial u_j}\Bigr)\,du_1 \ldots du_k \;=\; \int_{U'} g^*\zeta.$$

Damit folgt

$$\int_f \eta \;=\; \int_U f^*\eta \;=\; \int_{U'} g^*f^*\eta \;=\; \int_{U'} (f \circ g)^*\eta \;=\; \int_{f\circ g} \eta.$$

Definition. Sei $U = \{\, u \in \mathbb{R}^k \mid a_i < u_i < b_i \text{für } i = 1, \ldots, k \,\} \subseteq \mathbb{R}^k$ ein k-dimensionaler offener Würfel und f eine injektive $\mathcal{C}^1$-Abbildung auf einer Umgehung des abgeschlossenen Würfels U. Dann heißt eine Menge der Form $f(U)$ ein **einfaches k-dimensionales Flächenstück**.

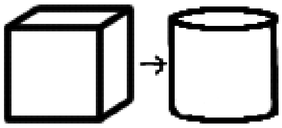
Diese Flächenstücke bilden die Integrationsgebiete, die wir zunächst für den Satz von Stokes zulassen wollen. In Kapitel 7 werden wir auch allgemeinere Integrationsbereiche zulassen, nämlich solche, die sich durch Zusammensetzen aus einfachen Flächenstücken konstruieren lassen. Allerdings ist die Eigenschaft ein einfaches Flächenstück zu sein, eine überraschend geringe Einschränkung an $f(U)$. Aufgabe 17 zeigt, dass der Einheitskreis im $\mathbb{R}^2$ ein einfaches 2-dimensionales Flächenstück ist. Das folgende Lemma folgert daraus, dass auch k-dimensionale Kugeln für alle $k > 0$ einfache k-dimensionale Flächenstücke sind.

Lemma 3 *Sei U ein k-dimensionaler Quader und K eine k-dimensionale Kugel. Dann existiert eine injektive $\mathcal{C}^\infty$-Abbildung $f_k\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ mit $f_k(U) = K$.*

Beweis. (Skizze) Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass $U = (-1;1)^k$ und $K = K_k$ die k-dimensionale Einheitskugel ist.

Sei zunächst $k = 2$: Man kann f_2 in Polarkoordinaten in der Form $f_2(r, \varphi) = (\rho(r, \varphi), \varphi)$ wählen (vgl. Übungsaufgabe 17, die dort konstruierte Abbildung ist sogar $\mathcal{C}^\infty$).

Für den Fall $k \geq 3$ kann man f_k folgendermaßen zusammensetzen: 1. Schritt: $(x, h) \mapsto (f_{k-1}(x), h) = (y, h)$ für alle $x \in \mathbb{R}^{k-1}$ und $h \in \mathbb{R}$.



Schreibe nun $y = s \cdot \bar{y}$ mit $s \geq 0$, $\bar{y} \in S_{k-2} = \operatorname{rd} K_{k-1}$, also $(y, h) \mathrel{\widehat{=}} (\bar{y}, s, h)$. Nun erhalten wir f_k durch die Abbildung

$$(\bar{y}, s, h) \mapsto \big(\bar{y}, \rho(r(s,h)), \varphi(s,h)\big),$$

wobei $r(s, h)$ und $\varphi(s, h)$ die Polarkoordinaten des Punktes (s, h) sind. (q.e.d.)

Sei nun U wieder der Quader. Der Rand $\operatorname{rd}(U)$ von U besteht aus $(k-1)$-dimensionalen Flächenstücken der Form $\{\, u \mid a_i \leq u_i \leq b_i \text{ für } i = 1, \ldots, k,\ i \neq j \text{ und } u_j = c \,\}$ mit $c = a_j$ bzw. $c = b_j$. Es gibt $2k$ solcher Randflächen.

Sei jetzt ϑ eine $(k-1)$-Form auf einer Umgebung von $\overline{U}$, stetig auf $\overline{U}$. Sei $\tilde{\vartheta}_j$ definiert durch

$$\vartheta = \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1} \tilde{\vartheta}_j \, du_1 \wedge \cdots \widehat{du_j} \cdots \wedge du_k,$$

und $\tilde{\vartheta} = \sum_j \tilde{\vartheta}_j \, du_j$. Dann gilt $\varphi(\tilde{\vartheta}) = \vartheta$ und $d\vartheta = \sum_{j=1}^k \frac{\partial \tilde{\vartheta}_j}{\partial u_j}(u) \, du_1 \wedge \cdots \wedge du_k$, also

$$\int_U d\vartheta \;=\; \int_U \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial \tilde{\vartheta}_j}{\partial u_j}(u) \, du_1 \cdots du_k \;=\; \int_U \operatorname{div} \tilde{\vartheta} \, du_1 \cdots du_k. \tag{5.1}$$

Definition. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^k$ ein offener Quader, $V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f\colon \overline{U} \to V$ injektiv.

1) Sei ϑ eine $(k-1)$-Form auf einer Umgebung von $\overline{U}$, stetig auf $\overline{U}$ und $\tilde{\vartheta}$ wie oben. Das Integral von ϑ über den Rand des Gebietes U definieren wir durch

$$\int_{rd(U)} \vartheta \quad := \quad \sum_{j=1}^{k} \int_{\substack{a_i \leq u_i \leq b_i \\ i \neq j}} \big(\tilde{\vartheta}_j(u_1, \ldots, u_{j-1}, b_j, u_{j+1}, \ldots, u_k) \\ - \tilde{\vartheta}_j(u_1, \ldots, u_{j-1}, a_j, u_{j+1}, \ldots, u_k)\big) \, du_1 \ldots \widehat{du_j} \ldots du_k$$

2) Sei η eine $(k-1)$-Form auf V. Dann definiere $\operatorname{rd} f := f\big|_{\operatorname{rd} U}$ und

$$\int_{\operatorname{rd} f} \eta := \int_{\operatorname{rd} U} f^* \eta.$$

Die Wahl der Vorzeichen im ersten Teil der Definition scheint zunächst willkürlich. Wie die folgende Rechnung zeigt fügt sie sich aber gut in das bisherige ein: der j-te Summand in Gleichung (5.1) berechnet sich als

$$\begin{aligned}
\int_U \frac{\partial \tilde{\vartheta}_j}{\partial u_j} du_1 \cdots du_k &= \int_{\substack{a_i \le u_i \le b_i \\ i \ne j}} \Big(\int_{a_j}^{b_j} \frac{\partial \tilde{\vartheta}_j}{\partial u_j} du_j \Big) \, du_1 \ldots \widehat{du_j} \ldots du_k \\
&= \int_{\substack{a_i \le u_i \le b_i \\ i \ne j}} \tilde{\vartheta}_j(u_1, \ldots, b_j, \ldots, u_k) \\
&\qquad - \tilde{\vartheta}_j(u_1, \ldots, a_j, \ldots, u_k) \, du_1 \ldots \widehat{du_j} \ldots du_k,
\end{aligned}$$

und durch Aufsummieren erhält man daraus

$$\int_U d\vartheta = \int_{rdU} \vartheta \quad \text{bzw.} \quad \int_U \operatorname{div} \tilde{\vartheta} \, du = \int_{rdU} \varphi \tilde{\vartheta}.$$

Mittels dieser Begriffe können wir nun die Stokessche Formel formulieren.

Satz 19 ***(Formel von Stokes für einfache Flächenstücke)*** *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^k$ ein offener Quader, $V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f\colon U \to V$ injektiv und $\mathcal{C}^2$ auf einer Umgebung von $\overline{U}$. Weiter sei η eine stetig differenzierbare $(k-1)$-Form auf V. Dann gilt*

$$\int_f d\eta = \int_{\operatorname{rd} f} \eta.$$

Beweis. Es gilt

$$\int_f d\eta = \int_U f^* d\eta = \int_U df^* \eta = \int_{rd\ U} f^* \eta = \int_{rd\ f} \eta.$$

Die Differenzierbarkeit von f wird für das zweite Gleichheitszeichen benötigt. (q.e.d.)

Wir schließen das Kapitel mit einigen Beispielen ab. Zunächst betrachten wir den eindimensionalen Fall, also $k = 1$ und $n = 1$. Sei also $U = (a; b)$ und η eine 0-Form auf U, also eine stetig differenzierbare Funktion $\eta\colon U \to \mathbb{R}$. Als Funktion f verwenden wir die Indentität auf $\mathbb{R}$. Dann ist $d\eta = \eta' dx$ und $\int_{\operatorname{rd} U} \eta = \eta(b) - \eta(a)$. Die Stokesche Formel

$$\int_a^b \eta'(x) \, dx = \int_U d\eta = \int_{\operatorname{rd} U} \eta = \eta(b) - \eta(a)$$

liefert uns hier also den Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung zurück.

Nun betrachten wir den Fall $k = 1$ und $n > 1$. Sei also wieder $U = (a; b)$, $\eta\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine Funktion (d.h. eine 0-Form) und $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ eine Kurve im $\mathbb{R}^n$. Dann ist $d\eta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial y}{\partial x_i} dx_i$ der Gradient von η als Differentialform. Man erhält

$$\int_f d\eta = \int_f \operatorname{grad} \eta = \int_a^b \big\langle \operatorname{grad} \eta(f(t)), f'(t) \big\rangle \, dt$$

und

$$\int_{\operatorname{rd} f} \eta = \int_{\operatorname{rd} U} \eta \circ f = \eta \circ f(b) - \eta \circ f(a) = \eta(f(b)) - \eta(f(a)).$$

Die Formel von Stokes liefert hier die Beziehung

$$\int_a^b \langle \operatorname{grad} \eta(f(t)), f'(t) \rangle \, dt \;=\; \eta(f(b)) - \eta(f(a)),$$

die wir ebenfalls schon kennen.

Sei nun $k = n$, $\tilde{\vartheta}$ ein Vektorfeld auf dem $\mathbb{R}^n$ und η die $(n-1)$-Form mit $\tilde{\vartheta} = \varphi(\eta)$. Weiter sei $f\colon U \to f(U) =: F$ die Parametrisierung eines einfachen Flächenstücks. Dann gilt

$$\int_{\operatorname{rd} f} \eta \;=\; \int_f d\eta \;=\; \int_F \operatorname{div} \tilde{\vartheta} \, dx_1 \ldots dx_n.$$

Aufgabe 16. Die 3-Form η im $\mathbb{R}^4$ sei definiert durch

$$\begin{aligned} \eta(w,x,y,z) \quad = \quad & \big(2wz - 2ze^{-(x^2+y^2+z^2)} + \frac{1}{2}wxz\big)\, dx \wedge dy \wedge dz \\ & - \frac{1}{2}xyz \, dz \wedge dw \wedge dx \\ & + z^2 \, dw \wedge dx \wedge dy. \end{aligned}$$

Weiter sei $W = [-1;1]^4$. Berechne das Integral $\int_{\operatorname{rd} W} \eta$.

Aufgabe 17. Sei $Q = [-1;1]^2$ und K der Einheitskreis im $\mathbb{R}^2$. Finde eine injektive, zweimal stetig differenzierbare Abbildung $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $f(Q) = K$.

Hinweis: Das Problem ist natürlich, eine differenzierbare Abbildung zu finden, die die Ecken des Quadrates gerade biegt. Wenn $q\colon [0;2\pi) \to \mathbb{R}$ so gewählt ist, dass der Rand des Quadrates in Polarkoordinaten die Darstellung $\{\, (q(\varphi), \varphi) \mid \varphi \in [0;2\pi) \,\}$ hat, dann kann man für die Darstellung von f in Polarkoordinaten folgenden Ansatz machen:

$$f(r,\varphi) \;=\; \Big(\frac{\lambda(r)}{\lambda(q(\varphi))}, \varphi\Big)$$

für eine geeignete Funktion λ. Um die Ecken des Quadrates zu handhaben könnte z.B. $\lambda'(\sqrt{2}) = \lambda''(\sqrt{2}) = 0$ nützlich sein. Weitere Bedingungen an λ ergeben sich z.B. aus der Differenzierbarkeit von f im Ursprung.

Kapitel 6

Integration von Differentialformen mit Oberflächenmaßen und der Gaußsche Integralsatz

6.1 Definition der Oberflächenmaße

Sei wieder $U \subseteq \mathbb{R}^k$, $U = (a_1; b_1) \times \cdots \times (a_k; b_k)$ und $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ eine injektive $\mathcal{C}^1$-Funktion. Für $1 \leq i \leq k$ sei

$$\frac{\partial f}{\partial u_i} = (\frac{\partial f_1}{\partial u_i}, \dots, \frac{\partial f_n}{\partial u_i}) \tag{6.1}$$

die vektorwertige partielle Ableitung von f. Für einen festen Punkt $u^0 \in U$ ist $\frac{\partial f}{\partial u_i}(u^0)$ der Tangentialvektor an die Kurve

$$(a_i; b_i) \ni u \mapsto f(u_1^0, \dots, u_{i-1}^0, u, u_{i+1}^0, \dots, u_k^0)$$

mit Werten in der Menge $V = f(U)$.

Bemerkung. Aus Analysis II wissen wir: Sei eine Menge („Untermannigfaltigkeit“) $M \subseteq \mathbb{R}^n$ der Form $M = \bigcap_{i=1}^m \{\varphi_i = 0\}$, wobei $m = n - k$ und die Funktionen φ_i skalare $\mathcal{C}^1$-Funktionen sind, gegeben sowie ein Punkt $a \in M$ derart, dass die Gradienten $\nabla\varphi_i(a)$ linear unabhängig sind. Dann gibt es eine Umgebung W von a und eine stetig differenzierbare Bijektion $f\colon U \to W \cap M$ derart, dass die obigen Tangentialvektoren sogar linear unabhängig sind. In diesem Fall bilden die obigen Tangentialvektoren eine Basis des Tangentialraums von M im Punkt a. Wir können uns also unter der Menge V einen solchen Teil der Mannigfaltigkeit M vorstellen. Die genannte lineare Unabhängigkeit der $\frac{\partial f}{\partial u_i}(u^0)$ wird im folgenden nicht in jedem Punkt u^0 gefordert, ist aber für die Vorstellung die typische Situation.

Wir interessieren uns nun für das k-dimensionale Volumen des von diesen k Vektoren aufgespannten Parallelepipeds P. Hierfür müssen wir das euklidische Skalarprodukt zur Hilfe nehmen. Wenn diese Vektoren linear abhängig sind, ist das Volumen gleich Null. Im anderen Fall betrachten wir irgendeine Orthogonalbasis $b_1, \dots, b_k$ des von diesen k Vektoren aufgespannten Unterraums und die durch

$$\frac{\partial f}{\partial u_i}(u^0) = \sum_{j=1}^k c_{ij} b_j$$

gegebene Koeffizienten-Matrix $C = (c_{ij})$. Dann lässt sich das gesuchte Volumen berechnen zu

$$\begin{aligned}\lambda(u^0) := vol_k(P) &= |\det C| = \sqrt{\det CC^T} = \sqrt{\det(\sum_{l=1}^k c_{il}c_{jl})_{ij}} \\ &= \sqrt{\det\big(\langle \frac{\partial f}{\partial u_i}(u^0), \frac{\partial f}{\partial u_j}(u^0)\rangle_{ij}\big)}.\end{aligned}$$

Vergleiche dazu Aufgabe 12 am Ende von Kapitel 3. In der Wurzel steht die durch die Tangentialvektoren gegebene **Gram**sche Determinante. Im Spezialfall einer linearen Abbildung f kann man damit das Volumen der Bildmenge $V = f(U)$ wegen

$$f(u) = f\big(\sum_{i=1}^k u_i e_i\big) = \sum_{i=1}^k u_i f(e_i) = \sum_{i=1}^k a_i f(e_i) + \sum_{i=1}^k t_i f(e_i)$$

wobei $t_i = (u_i - a_i)/(b_i - a_i) \in (0,1)$ berechnen zu

$$\begin{aligned}\mathrm{vol}_k V &= \mathrm{vol}_k\{\sum_{i=1}^k t_i(b_i - a_i)f(e_i) \,|\, 0 < t_i < 1\} \\ &= \big(\prod_{i=1}^k (b_i - a_i)\big) \,\mathrm{vol}_k\Big\{\sum_{i=1}^k t_i f(e_i) \,\Big|\, 0 < t_i < 1\Big\} \\ &= \big(\prod_{i=1}^k (b_i - a_i)\big) \,\mathrm{vol}_k\Big\{\sum_{i=1}^k t_i \frac{\partial f}{\partial u_i} \,\Big|\, 0 < t_i < 1\Big\} \\ &= \int_U \lambda(u)\, du_1 \ldots du_k.\end{aligned}$$

Dies motiviert die folgende Definition.

Definition. Die Oberfläche der Menge $V = f(U)$ wird definiert als

$$\int_U \lambda(u)\, du = \int_U \sqrt{\det\Big(\langle \frac{\partial f}{\partial u_i}(u), \frac{\partial f}{\partial u_j}(u)\rangle_{ij}\Big)}\, du_1 \ldots du_k.$$

Wir können die obige Determinante auch umformen und erhalten

$$\lambda(u) = \sqrt{\det Df(u)^T Df(u)}$$

oder mit Aufgabe 8 auch

$$\lambda(u) = \sqrt{\sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} \Big(\det(\frac{\partial f_{i_l}}{\partial u_m})_{1 \le l,m \le k}\Big)^2}. \tag{6.2}$$

Insbesondere erhalten wir für eine zweidimensionale Flächen im dreidimensionalen Raum die Oberfläche

$$\int_U \sqrt{\frac{\partial(f_1,f_2)}{\partial(u_1,u_2)}^2 + \frac{\partial(f_1,f_3)}{\partial(u_1,u_2)}^2 + \frac{\partial(f_2,f_3)}{\partial(u_1,u_2)}^2}\, du_1 du_2,$$

wobei $\frac{\partial(f_i,f_j)}{\partial(u_1,u_2)}$ die 2×2 Determinante

$$\frac{\partial f_i}{\partial u_1}\frac{\partial f_j}{\partial u_2} - \frac{\partial f_i}{\partial u_2}\frac{\partial f_j}{\partial u_1}$$

bezeichnet. Im Spezialfall der Form $f_1(x,y) = x, f_2(x,y) = y, f_3(x,y) = g(x,y)$ einer sogenannten nichtparametrischen Fläche erhalten wir die Oberfläche

$$\int_U \sqrt{1 + \frac{\partial g}{\partial x}^2 + \frac{\partial g}{\partial y}^2}\, dx\, dy.$$

Diese Definition lässt sich auf messbare Teilmengen erweitern:

Definition. Sei $f\colon U \to M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine bijektive $\mathcal{C}^1$-Abbildung. Für jede Borel-messbare Teilmenge $A \subseteq M$ definiere $\sigma_M(A)$ durch

$$\sigma_M(A) \;=\; \int_U 1_A\big(f(u)\big)\lambda(u)\, du.$$

Satz 20 *Die Funktion σ_M ist ein Maß. Sie ist unabhängig von der Wahl der parametrisierenden Funktion f, genauer gilt: Ist $U' \subseteq \mathbb{R}^k$ offen und $h\colon U' \to M$ eine bijektive $\mathcal{C}^1$-Funktion, so ist auch*

$$\sigma_M(A) = \int_{U'} 1_A\big(h(u')\big)\sqrt{\det Dh(u')^T Dh(u')}\, du'.$$

Beweis. Dass σ_M ein Maß ist, ist leicht nachzuprüfen.

Sei nun h eine Funktion wie in der Voraussetzung. Für den Beweis der behaupteten Gleichheit bezeichne σ_M^h das durch die rechte Seite definierte Maß und analog $\lambda^h(u')$ den Wert $\sqrt{\det Dh(u')^T Dh(u')}$. Wir betrachten die Teilmenge $N^f = \{f(u) : \lambda(u) = 0\}$ von M. Das nachstehende Lemma zeigt, dass die Menge $U_0' = \{u' : h(u') \notin N^f\}$ offen ist und auf U_0' die Funktion $g = f^{-1} \circ h$ stetig differenzierbar ist. Dann gilt für jede Teilmenge A von M, die N^f nicht trifft, $h^{-1}(A) \subseteq U_0'$ und somit nach dem Integraltransformationssatz:

$$\begin{aligned}\sigma_M(A) &= \int_{\{u\in U:\lambda(u)>0\}} 1_A(f(u))\lambda(u)\, du \\ &= \int_{U_0'} 1_A(f(g(u'))\sqrt{\det Df(g(u'))^T Df(g(u'))}\, du'\end{aligned}$$

und daraus folgt $\sigma_M(A) = \sigma_M^h(A)$, da nach der Kettenregel

$$\begin{aligned}\det Dh(u')^T Dh(u') &= \det Dg(u')^T Df(g(u'))^T Df(g(u'))(Dg(u')) \\ &= (\det Dg(u'))^2 \det Df(g(u'))^T Df(g(u'))\end{aligned}$$

ist.

Es genügt also zu zeigen, dass die Menge N^f für beide Maße eine Nullmenge ist. Dabei folgt $\sigma_M(N^f) = 0$ direkt aus der Definition, denn es ist $1_{N^f}(f(u))\lambda(u) = 0$ für alle $u \in U$.

Für den Nachweis von $\sigma_M^h(N^f) = 0$ sei zunächst analog N^h die Menge aller $h(u')$ mit $\lambda^h(u') = 0$ und $\tilde{N} = N^h \cap (N^f)^c$. Analog zu $\sigma_M(N^f) = 0$ ist $\sigma_M^h(N^h) = 0$. Die Menge $\tilde{N}$ trifft aber N^f nicht, daher ist

$$\begin{aligned}\sigma_M(N^h) &= \sigma_M(N^f \cap N^h) + \sigma_M(\tilde{N}) \\ &= \sigma_M(N^f \cap N^h) + \sigma_M^h(\tilde{N}) \\ &\le \sigma_M(N^f) + \sigma_M^h(N^h) = 0.\end{aligned}$$

Durch Vertauschen der Rollen von f und h erhalten wir analog $\sigma_M^h(N^f) = 0$. (q.e.d.)

Lemma 4 *(Kartenwechsel) Seien U, U' zwei offene Teilmengen des $\mathbb{R}^k$ und f, h zwei bijektive $\mathcal{C}^1$-Abbildungen von U bzw. U' auf eine Teilmenge M des $\mathbb{R}^n$ mit $n \ge k$. Sei U_0 die Menge aller Punkte in U an denen $Df(u)$ Rang k hat. Dann ist die Menge U_0' aller Punkte $u' \in U'$ mit $h(u') \in f(U_0)$ offen und die Abbildung $g = f^{-1} \circ h : U_0' \to U_0$ ist stetig differenzierbar. Ferner ist für jedes $u' \in U_0'$ genau dann $Dg(u')$ invertierbar, wenn $Dh(u')$ Rang k hat.*

Beweis. Sei $u \in U_0$. Die Matrix $Df(u)$ hat Rang k, also hat sie eine quadratische $k \times k$-Untermatrix von vollem Rang. Durch Umnumerieren der Komponenten der Bildvektoren können wir annehmen, ihre ersten k Zeilen seien linear unabhängig. Sei $p_k \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ die Projektion auf die ersten k Komponenten und $\tilde{u} = p_k(f(u))$. Die Abbildung $p_k \circ f$ hat eine nicht-singuläre Funktionalmatrix, also gibt es Umgebungen V von u und $\tilde{V}$ von $\tilde{u}$, so dass $p_k \circ f$ einen Diffeomorphismus von V nach $\tilde{V}$ darstellt. Die Menge W aller Punkte in U' mit $p_k(h(u')) \in \tilde{V}$ ist offen. Auf dieser Menge gilt $f^{-1}(h(u')) = (p_k \circ f)^{-1}(p_k(h(u'))$ und daher ist $f^{-1} \circ h$ stetig differenzierbar auf W. Nach der Kettenregel ist

$$Dh(u') \;=\; Df(g(u'))Dg(u').$$

Weil für $u' \in W$ nach Konstruktion $Df(g(u'))$ vollen Rang hat, ist $Dg(u')$ genau dann invertierbar, wenn $Dh(u')$ Rang k hat. Die Mengen W der angegebenen Gestalt schöpfen U_0' aus. Daraus folgt die Behauptung. (q.e.d.)

Typischerweise kann man eine vorgegebene Menge M, die lokal k-dimensional ist, nicht als Bild einer einzigen Teilmenge des $\mathbb{R}^k$ unter einer bijektiven $\mathcal{C}^1$-Funktion darstellen. Ist etwa M die Oberfläche einer dreidimensionalen Kugel, so braucht man mindestens zwei Karten, um M zu überdecken. Daher ist es nützlich die obige Definition noch etwas zu erweitern:

Definition. Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Menge derart, dass es endlich viele offene Mengen $U_l \subseteq \mathbb{R}^k$ und injektive $\mathcal{C}^1$-Funktionen $f_l \colon U_l \to M$ mit $M \subseteq \bigcup_{l=1}^r M_l$ wobei $M_l = f_l(U_l)$ gibt. Für jedes l und jede Teilmenge A_l von M_l sei $\sigma_{M_l}(A_l)$ wie oben erklärt. Dann setzen wir für jede Borelsche Teilmenge von M

$$\sigma_M(A) \;=\; \sum_{l=1}^{r} \sigma_{M_l}(A_l)$$

wobei $A = \bigcup_{l=1}^r A_l$ irgendeine **disjunkte** Zerlegung von A mit $A_l \subseteq M_l$ ist.

Es ist nicht schwer zu zeigen, dass diese Definition sinnvoll ist, d.h. dass das Resultat nicht von der Wahl der Zerlegung der Menge A abhängt.

6.2 Integration von Differentialformen mit Oberflächenmaßen

Sei jetzt $\eta = \sum_{1 \le s_1 < \cdots < s_k \le n} \eta_{s_1 \cdots s_k}\, dx_{s_1} \wedge \cdots \wedge dx_{s_k}$ eine Differentialform vom Grad k in einer Umgebung der Menge $M = f(U)$. Dann ist

$$\int_f \eta \;=\; \int_U f^*\eta \;=\; \int_U \sum_{1 \le s_1 < \cdots < s_k \le n} \eta_{s_1 \cdots s_k}(f(u)) \det\Big(\frac{\partial f_{s_l}}{\partial u_m}\Big)\, du_1 \ldots du_k \tag{6.3}$$

Mit

$$\nu_{s_1 \cdots s_k}(u) = \frac{1}{\lambda(u)} \det\Big(\frac{\partial f_{s_l}}{\partial u_m}\Big) \tag{6.4}$$

für $\lambda(u) > 0$ (beliebig sonst) wird dies zu

$$\int_f \eta \;=\; \int_U \sum_{1 \le s_1 < \cdots < s_k \le n} \eta_{s_1 \cdots s_k}(f(u)) \nu_{s_1 \cdots s_k}(u) \lambda(u)\, du_1 \ldots du_k \tag{6.5}$$

$$\;=\; \int_M \sum_{1 \le s_1 < \cdots < s_k \le n} \eta_{s_1 \cdots s_k}(y) \nu_{s_1 \cdots s_k}(f^{-1}(y))\, d\sigma_M(y). \tag{6.6}$$

Hier haben wir also das Integral einer Differentialform durch das Maß σ_M ausgedrückt. Allerdings ist hierbei noch unbefriedigend, dass der ν-Anteil von der Parametrisierung abzuhängen scheint. Dies ist aber nicht der Fall, wenn man auf die Orientierung achtet, denn es gilt auch hier

Lemma 5 *Sei $U' \subseteq \mathbb{R}^k$ offen und $g\colon U' \to U$ eine bijektive $\mathcal{C}^1$-Funktion mit $\det Dg(u') > 0$. Für die Funktion $h = f \circ g$ seien λ^h und $\nu^h_{s_1 \cdots s_k}$ analog zu λ und $\nu_{s_1 \cdots s_k}$ definiert. Dann gilt für σ_M-fast alle $y \in M$*

$$\nu_{s_1 \cdots s_k}(f^{-1}(y)) \;=\; \nu^h_{s_1 \cdots s_k}(h^{-1}(y)).$$

Beweis. Die Ausnahmemenge besteht aus den Punkten y mit $\lambda(f^{-1}(y)) = 0$, für die also die Definition von λ an der Stelle $f^{-1}(y)$ sowieso willkürlich ist. Sei also jetzt $u = f^{-1}(y)$ ein Punkt mit $\lambda(u) > 0$. Wie im Beweis des letzten Satzes gilt für $u' = g^{-1}(u)$

$$\lambda^h(u') := \sqrt{\det Dh(u')Dh(u')^T} = \det Dg(u')\lambda(u)$$

wobei wir diesmal auf das Vorzeichen der Determinante achten. Dann folgt wieder mit der Kettenregel

$$\begin{aligned}
\nu^h_{s_1 \cdots s_k}(u') &= \frac{1}{\lambda^h(u')} \det\big(\frac{\partial h_{s_l}}{\partial u'_m}\big) \\
&= \frac{1}{(\det Dg(u'))\lambda(u)} \det\big([\frac{\partial f_{s_l}}{\partial u_m}(u)]Dg(u')\big) \\
&= \frac{1}{\lambda(u)} \det\big(\frac{\partial f_{s_l}}{\partial u_m}(u)\big) = \nu_{s_1 \cdots s_k}(u).
\end{aligned}$$

(q.e.d.)

Bemerkung: Man kann den Integranden in (6.6) noch auf verschiedene Weisen umformen, die wir jedoch später nicht mehr verwenden.

Wenn man den aus den linearen Algebra bekannten Isomorphismus zwischen dem Raum $\mathrm{Alt}_k V$ und dem Dualraum des Dachprodukts $\bigwedge_{i=1}^k V$ benutzt, dann kann man den Integranden in (6.6) auch darstellen als

$$\eta(y)\Big[\frac{1}{\lambda}\frac{\partial f}{\partial u_1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial f}{\partial u_k}\big(f^{-1}(y)\big)\Big] \tag{6.7}$$

wobei wie im Lemma die eckige Klammer von der Wahl der Parametrisierung unabhängig ist. Man kann diesen Ausdruck als vektorielles Flächenelement der Menge M im Punkte y auffassen, in Analogie zum vektoriellen Streckenelement bei Kurven.

Wir vermeiden die genannte Identifizierung und definieren (allerdings nur auf M und nicht auf einer M umfassenden offenen Menge) die Differentialform vol_M durch

$$\begin{aligned}
\mathrm{vol}_M(y) &= \sum_{1 \le s_1 < \cdots < s_k \le n} \nu_{s_1 \cdots s_k}(f^{-1}(y))\, dx_{s_1} \wedge \cdots \wedge dx_{s_k} & (6.8)\\
&= \frac{1}{\lambda(f^{-1}(y))}\omega_1(y) \wedge \cdots \wedge \omega_k(y), & (6.9)
\end{aligned}$$

wobei

$$\omega_i(y) \;=\; \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial u_i}(f^{-1}(y))\, dx_j. \tag{6.10}$$

Die Form vol_M wird auch **Volumenform** genannt. Wieder zeigt das Lemma, dass die Volumenform, im Gegensatz zu den „Hilfsformen“ ω_j und der Funktion λ, nicht von der Parametrisierung abhängt. Wenn wir im Raum $\mathrm{Alt}_k \mathbb{R}^n$ das Skalarprodukt betrachten, bezüglich dem die Familie der $dx_{s_1} \wedge \cdots \wedge dx_{s_k}$ eine ON-Basis bilden, dann ist der Integrand in (6.6) gerade gleich $\langle \eta(y), \mathrm{vol}_M(y) \rangle$.

Der Name Volumenform erklärt sich aus folgender Beobachtung: Für jede skalare stetige (oder auch nichtnegative messbare) Funktion p auf M betrachte die Form $\eta = p\,\mathrm{vol}_M$ auf M

mit den Koeffientenfunktionen $\eta_{s_1\cdots s_k}(y) = p(y)\nu_{s_1\cdots s_k}(f^{-1}(y))$. Dann gilt wegen (6.2) und (6.5)

$$\begin{aligned}
\int_f p\,\mathrm{vol}_M &= \int_U \sum_{1\le s_1<\cdots<s_k\le n} p(f(u))\nu^2_{s_1\cdots s_k}(u)\lambda(u)\,du \\
&= \int_U p(f(u)) \sum_{1\le s_1<\cdots<s_k\le n} \left(\det(\frac{\partial f_{i_l}}{\partial u_m})_{1\le l,m\le k}\right)^2 \frac{1}{\lambda(u)^2}\lambda(u)\,du \\
&= \int_U p(f(u))\lambda(u)\,du \\
&= \int_M p(y)\,d\sigma_M(y).
\end{aligned}$$

6.3 Der Spezialfall von Hyperflächen

Wir betrachten den Fall $k = n-1$. Dann ist die Differentialform η von der Gestalt $\eta = \varphi\tilde{\eta}$, wobei $\tilde{\eta} = \sum_{j=1}^n \tilde{\eta}_j dx_j$ eine 1-Form ist, also einem Vektorfeld entspricht. Dementsprechend sei $\tilde{\nu}_j(y) = (-1)^{j-1}\nu_{1\cdots\hat{j}\cdots n}(f^{-1}(y))$ und $\tilde{\nu}(y) = \sum_{j=1}^n \tilde{\nu}_j(y)dx_j$ wobei die $v_{1\ldots\hat{j}\ldots n}$ wie in (6.4) erklärt sind. Dann lässt sich der Integrand in (6.6) auch schreiben als $\sum_{j=1}^n \tilde{\eta}_j(y)\tilde{\nu}_j(y) = \langle\tilde{\eta}(y),\tilde{\nu}(y)\rangle$. Das der 1-Form $\tilde{\nu}$ entsprechende auf M definierte $\mathbb{R}^n$-wertige Vektorfeld bezeichnen wir ebenfalls mit $\tilde{\nu}$. Es hat eine einfache geometrische Interpretation als **Normalenfeld**:

Satz 21 *Sei $f\colon U \to M$ eine bijektive $\mathcal{C}^1$-Funktion. Für jeden Punkt $y \in M$ mit $\lambda(f^{-1}(y)) > 0$ ist $\tilde{\nu}(y)$ der eindeutig bestimmte Vektor der Länge 1, der senkrecht auf dem Tangentialraum T_yM steht, derart dass die Basis*

$$\tilde{\nu}(y), \frac{\partial f}{\partial u_1}(f^{-1}(y)), \ldots, \frac{\partial f}{\partial u_{n-1}}(f^{-1}(y))$$

des $\mathbb{R}^n$ positiv orientiert ist. Für jede auf einer Umgebung von M definierte $(n-1)$-Form η gilt

$$\int_f \eta = \int_M \langle\tilde{\eta}(y),\tilde{\nu}(y)\rangle\ \sigma_M(dy), \tag{6.11}$$

wobei $\tilde{\eta}$ das oben definierte Vektorfeld mit $\varphi(\tilde{\eta}) = \eta$ ist.

Beweis. Die im nachstehenden Lemma angegebene Eigenschaften des Hodge-Operators φ verallgemeinert die bekannten Eigenschaften des Vektorprodukts im Fall $n = 3$. Wir wenden das Lemma an auf die in (6.10) durch die Tangentialvektoren $\frac{\partial f}{\partial u_i}$ definierten 1-Formen ω_i. Nach Konstruktion von $\tilde{\nu}$ und der Definition in (6.8) ist $\varphi(\tilde{\nu})$ gerade die Volumenform σ von M. Wegen Teil b) des Lemmas und der Darstellung (6.9) steht das Vektorfeld $\tilde{\nu}$ senkrecht auf den $n-1$ Tangentialvektoren. Wegen Eigenschaft c) im Lemma und der Definition von λ kürzt sich in der Norm von $\tilde{\nu}(y)$ der Faktor $\lambda(f^{-1}(y))$ heraus und es ist $\|\nu(y)\| = 1$. Schließlich folgt die Aussage über die Orientierung aus Teil a) des Lemmas. (q.e.d.)

Lemma 6 *Sind $\beta_1,\ldots,\beta_{n-1} \in (\mathbb{R}^n)^*$ linear unabhängig und ist $\varphi(\beta_n) = \beta_1\wedge\cdots\wedge\beta_{n-1}$, dann gilt:*

a) $\beta_n,\beta_1,\cdots,\beta_{n-1}$ ist eine positiv orientierte Basis von $(\mathbb{R}^n)^*$,

b) $\langle\beta_n,\beta_j\rangle = 0$ für alle $j < n$,

c) $\|\beta_n\| = \mathrm{vol}_{n-1}(P_{\beta_1,\ldots,\beta_{n-1}})$.

Beweis. Es genügt, den Fall zu betrachten, dass die Vektoren $\beta_1, \ldots, \beta_{n-1}$ eine ON-Basis der von ihnen aufgespannten Hyperebene bilden, denn eine Basistransformation mit positiver Determinante ändert nichts an den Teilaussagen a) und b); und in c) ändern sich beide Seiten nach Satz 9 um den gleichen Faktor. Ferner ändert sich der Hodge-Operator nach Satz 12 nicht, wenn man in seiner Definition von einer vorgegebenen ON-Basis zu einer anderen übergeht. Also können wir annehmen, dass die $\beta_1, \ldots, \beta_{n-1}$ gerade die ersten $n-1$ Einheitsvektoren sind. Dann folgen alle drei Eigenschaften direkt aus der Definition des Hodge-Operators. (q.e.d.)

6.4 Umformulierung der Randintegrale

Wir wollen jetzt die früher gesondert definierten Rand-Integrale $\int_{\mathrm{rd}\, f} \eta$ von $(k-1)$-Formen auf die eben diskutierten Integrale zurückführen. Sei wieder V eine offene Umgebung des abgeschlossenen Quaders $\overline{U} \subseteq \mathbb{R}^k$. Sei

$$\begin{aligned} \vartheta &= \sum_{j=1}^{k} \vartheta_j \, dx_1 \wedge \cdots \widehat{dx_j} \cdots \wedge dx_k \\ &= \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1} \tilde{\vartheta}_j \, dx_1 \wedge \cdots \widehat{dx_j} \cdots \wedge dx_k \;=\; \varphi(\tilde{\vartheta}) \end{aligned}$$

eine Differentialform der Ordnung $k-1$ auf V. Für $1 \le j \le n$ sei U_j^+ die „obere“ Seitenfläche $\{u \in \overline{U} : u_j = b_j\}$ und entsprechend U_j^- die „untere“ Seitenfläche $\{u \in \overline{U} : u_j = a_j\}$. Das früher definierte Integral

$$\int_{\mathrm{rd}\, U} \vartheta \;=\; \sum_{j=1}^{k} \int_{U_j} \tilde{\vartheta}_j(u_1, \ldots, u_{j-1}, b_j, \ldots, u_k) \;-\; \tilde{\vartheta}_j(u_1, \ldots, u_{j-1}, a_j, \cdots, u_k)\, du$$

lässt sich auch schreiben als

$$\begin{aligned} \int_{\mathrm{rd}\, U} \vartheta &= \sum_{j=1}^{k} \int_{U_j^+} \langle \tilde{\vartheta}(x), e_j \rangle \, d\sigma_{U_j^+}(x) + \int_{U_j^-} \langle \tilde{\vartheta}(x), -e_j \rangle \;\sigma_{U_j^-}(dx) \\ &= \int_{\partial U} \langle \tilde{\vartheta}(x), \tilde{\nu}_U(x) \rangle \;\sigma_{\partial U}(dx). \end{aligned}$$

Hierbei stehen die beiden Vektoren e_j und $-e_j$ senkrecht auf den beiden Seitenflächen U_j^+ und U_j^- und zwar zeigen sie jeweils nach außen von U aus gesehen. Das Vektorfeld $\tilde{\nu}_U$ nimmt auf der Seitenfläche U_j^+ den Wert e_j und auf der Seitenfläche U_j^- den Wert $-e_j$ an. Unter Berücksichtigung des letzten Satzes erhalten wir also auch

$$\int_{\mathrm{rd}\, U} \vartheta \;=\; \sum_{j=1}^{k} \int_{p_j^+} \vartheta \;+\; \int_{p_j^-} \vartheta, \tag{6.12}$$

wobei die Abbildungen p_j^+ und p_j^- Pametrisierungen der Seitenflächen U_j^+, U_j^- sind, derart dass die Basen

$$e_j, \frac{\partial p_j^+}{w_1}(w), \ldots, \frac{\partial p_j^+}{w_{k-1}}(w) \tag{6.13}$$

$$-e_j, \frac{\partial p_j^-}{w_1}(w), \ldots, \frac{\partial p_j^-}{w_{k-1}}(w) \tag{6.14}$$

des $\mathbb{R}^k$ jeweils positiv orientiert sind.

6.5 Der Gaußsche Integralsatz für einfache reguläre Flächenstücke

Wir nennen ein n-dimensionales Flächenstück $M \subseteq \mathbb{R}^n$ **regulär**, wenn es eine Parametrisierung durch eine injektive $\mathcal{C}^1$-Funktion f von einer Umgebung V des Quaders $\overline{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ gibt mit $M = f(\overline{U})$ gibt, so dass die Determinante $\det Df(u)$ entweder in ganz V nichtnegativ oder in ganz V nichtpositiv ist und für $\sigma_{\partial U}$-fast alle $u \in \partial U$ nicht verschwindet. Ein Vektor $n(y)$ der Länge 1, welcher senkrecht auf dem Tangentialraum $T_y\partial M$ steht, heißt **äußerer Normalenvektor** im Punkt y, wenn es ein $t_0 > 0$ gibt, so dass $y + tn(y) \notin M$ und $y - tn(y) \in M$ für alle $t \in (0, t_0)$ gilt. Wir erinnern in diesem Zusammenhang daran, dass wir eine Ausnahmemenge von Punkten $u \in \overline{U}$ mit $\det Df(u) = 0$ zulassen müssen, wenn wir etwa eine Vollkugel als ein Beispiel eines reguläres Flächenstück erhalten wollen.

Ferner brauchen wir noch einen technischen Hilfsbegriff, der sich auf eine bestimmte Parametrisierung f bezieht. Sei $u \in \partial U$ ein Punkt, der im geometrisch Inneren einer der Seitenflächen $U_j^\pm$ liegt, derart dass $\operatorname{rg} Df(u) = n$ (oder äquivalent $\lambda(u) > 0$) gilt. Dann nennen wir den Punkt $y = f(u)$ einen **normalen Randpunkt** von M bezüglich der Parametrisierung f. Beim Beispiel einer Vollkugel M wird klar, dass bei gegebener Parametrisierung f nicht alle Punkte im Rand normale Randpunkte bezüglich f sind, obwohl alle Punkte des Randes apriori gleichberechtigt sind.

Lemma 7 *Sei y ein normaler Randpunkt eines n-dimensionalen Flächenstücks $M \subseteq \mathbb{R}^n$ bezüglich einer injektiven $\mathcal{C}^1$- Parametrisierung f. Dann gilt:*

a) y liegt im topologischen Rand ∂M,

b) es gibt einen eindeutig bestimmten äußeren Normalenvektor im Punkt y.

Beweis. Wir bemerken zunächst, dass für eine injektive stetige Abbildung zwischen metrischen Räumen stets $f(\partial U) \subseteq \partial f(U)$ gilt. Dies beweist a).

Sei $u = f^{-1}(y)$. Wir nehmen zunächst an, es sei $u \in U_j^+$ für ein j. Nach Voraussetzung ist $Df(\overline{u})$ nicht singulär in einer kleinen Kugel K mit Mittelpunkt u mit $K \cap \partial U \subseteq U_j^+$ und nach dem Satz über inverse Funktionen ist $f(K)$ eine Umgebung von y und $f_{|K} \colon K \to f(K)$ ist bijektiv und in beiden Richtungen differenzierbar, insbesondere stetig. Also kann man die Vorbemerkung auch auf die Umkehrabbildung anwenden und wir erhalten $f(K \cap U_j^+) = \partial M \cap f(K)$. Sei die $\mathcal{C}^1$ Abbildung g_j durch $g_j(y) = \langle f^{-1}(y), e_j\rangle - b_j$ definiert. Dann ist $\partial M \cap f(K) = \{g_j = 0\} \cap f(K)$. Daher ist diese Menge lokal von dem in Analysis II, Abschnitt 1.4 betrachteten Typ. Ihr Normalenraum im Punkt y ist also eindimensional, und zwar wird er von $\nabla g_j(y)$ aufgespannt (Analysis II, Satz 6). Wegen $f(K) \cap M = f(K \cap \overline{U}) = f(K) \cap \{g_j \leq 0\}$ kann man leicht nachprüfen, dass $\nabla g_j(y)/\|\nabla g_j(y)\|$ der eindeutig bestimmte äußere Normalenvektor im Punkt y ist.

Wenn $u \in U_j^-$ ist, brauchen wir im obigen Argument nur U_j^+ durch U_j^-, den Vektor e_i durch $-e_i$ und die Zahl b_j durch a_j zu ersetzen. (q.e.d.)

Satz 22 *(Gaußscher Divergenzsatz) Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ ein einfaches reguläres n-dimensionales Flächenstück. Weiter sei v ein $\mathcal{C}^1$-Vektorfeld auf einer Umgebung von M. Dann gilt*

$$\int_M \operatorname{div} v(x)\, dx \;=\; \int_{\partial M} \langle v(y), \mathrm{n}(y)\rangle\; \sigma_{\partial M}(dy) \tag{6.15}$$

wobei $\mathrm{n}(y)$ *den $\sigma_{\partial M}$-fast-überall definierten äußeren Normalenvektor im Punkt y bezeichnet.*

Beweis. Sei $U \subseteq V$ und $f \colon V \to \mathbb{R}^n$ injektiv mit $f(\overline{U}) = M$ eine Parametrisierung wie zu Beginn dieses Abschnitts angegeben.

Sei $v(x) = \sum_{i=1}^n v_i(x)e_i$ und η die durch $\eta = \varphi(\sum v_i dx_i)$ gegebene $(n-1)$-Form auf der Umgebung von M, auf der v definiert ist. Dann ist $d\eta = (\operatorname{div} v)\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$. Wir betrachten zunächst den Fall, dass $\det Df \geq 0$ auf V. Damit ist nach dem Integraltransformationssatz und den Definitionen in Kapitel 4 und 5

$$\int_M \operatorname{div} v(x)\,dx = \int_U \operatorname{div} v(f(u)) \det Df(u)\,du = \int_U f^* d\eta = \int_f d\eta. \tag{6.16}$$

Falls $\det Df \leq 0$ auf V, gilt entsprechend

$$\int_M \operatorname{div} v(x)\,dx = -\int_U \operatorname{div} v(f(u)) \det Df(u)\,du = -\int_U f^* d\eta = -\int_f d\eta. \tag{6.17}$$

Nun betrachten wir die rechte Seite von (6.15). Es genügt nach der Stokesschen Formel, sie entsprechend durch $\int_{\mathrm{rd}\, f} \eta$ auszudrücken. Dies leistet die folgende Aussage. (q.e.d.)

Lemma 8 *Seien das Flächenstück M, das Vektorfeld v und der äußere Normalenvektor wie im vorigen Satz. Sei η die $n-1$-Form $\varphi(\sum v_i dx_i)$. Dann gilt*

$$\int_{\mathrm{rd}\, f} \eta = \pm \int_{\partial M} \langle v(y), \mathrm{n}(y)\rangle \; \sigma_{\partial M}(dy), \tag{6.18}$$

wobei $\pm$ das (konstante) Vorzeichen der Funktionaldeterminante $\det Df(x)$ *der Parametrisierung f ist.*

Beweis. Das Integral auf der rechten Seite lässt sich darstellen als

$$\sum_{j=1}^{n} \int_{M_j^+} \langle v(y), \mathrm{n}(y)\rangle \; \sigma_{M_j^+}(dy) + \int_{M_j^-} \langle v(y), \mathrm{n}(y)\rangle \; \sigma_{M_j^-}(dy) \tag{6.19}$$

wobei $M_j^+ = f(U_j^+)$ bzw. $M_j^- = f(U_j^-)$. Denn das Oberflächenmaß $\sigma_{\partial M}$ ist die Summe der Oberflächenmaße $\sigma_{M_j^\pm}$, da sich je zwei der Randmengen $U_j^\pm$ nur auf einer höchstens $(n-2)$-dimensionalen Menge, d.h. einer Nullmenge bezüglich des $(n-1)$-dimensionalen Oberflächenmaßes schneiden.

Wir betrachten einen Term der Form $\int_{M_j^+} \langle v(y), \mathrm{n}(y)\rangle \; \sigma_{M_j^+}(dy)$ in (6.19). Wenn wir Satz 21 auf die Menge M_j^+ anwenden, ist nach Konstruktion von η das Vektorfeld v gerade das $\tilde{\eta}$ aus diesem Satz. Sei $U_j \subseteq \overline{U_j} \subseteq V_j \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ und $p_j^+ : V_j \to V$ wie in (6.12) definiert. Die Funktion $f_j^+ = f \circ p_j^+$ ist dann eine Parametrisierung der Fläche M_j^+.

Wir werden zeigen, dass für $\sigma_{M_j^+}$-fast alle $y \in M_j^+$ der Vektor $\tilde{\nu}(y)$ aus Satz 21 gerade gleich $\pm \mathrm{n}(y)$ ist, wobei $\pm = sgn(\det Df(x))$. Dann erhalten wir aus diesem Satz

$$\int_{M_j^+} \langle v(y), \mathrm{n}(y)\rangle \; \sigma_{M_j^+}(dy) \quad = \quad \pm \int_{f_j^+} \eta = \pm \int_{U_j} (f \circ p_j^+)^* \eta = \pm \int_{p_j^+} f^* \eta$$

und analog

$$\int_{M_j^-} \langle v(y), \mathrm{n}(y)\rangle \; \sigma_{M_j^-}(dy) \quad = \quad \pm \int_{f_j^-} \eta = \int_{U_j} (f \circ p_j^-)^* \eta = \pm \int_{p_j^-} f^* \eta$$

und schließlich durch Kombination von (6.12) und (6.19) die Behauptung.

Für $\sigma_{\partial U}$-fast alle $u \in \partial U$ ist der Punkt $y = f(u)$ ein normaler Randpunkt bezüglich f nach Voraussetzung über M und f. Also sind $\sigma_{\partial M}$-fast alle $y \in \partial M$ normale Randpunkte. Es bleibt $\mathrm{n}(y) = \pm\tilde{\nu}(y)$ zu zeigen für jeden normalen Randpunkt. Da beide Vektoren Länge 1 haben und senkrecht auf der Hyperebene $T_y \partial M$ stehen, brauchen wir nur zu zeigen, dass sie gleich orientiert sind im Fall $\det Df(x) \geq 0$ und entgegengesetzt orientiert im andern Fall.

Sei hierfür zunächst $\det Df(x) \geq 0$. Für $y \in M_j^+$, $w = (f_j^+)^{-1}(y) = (p_j^+)^{-1}(u)$ und für $1 \leq i \leq n-1$ werde der Vektor $\frac{\partial p_j^+}{w_i}(w)$ mit b_i bezeichnet. Ferner ist nach der Kettenregel

$\frac{\partial f_j^+}{w_i}(w) = Df(u)(b_i)$. Also besagt die Charakterisierung von $\tilde{\nu}(y)$ aus Satz 21 gerade, dass die Basis

$$\tilde{\nu}(y), Df(u)(b_1), \ldots, Df(u)(b_{n-1})$$

positiv orientiert ist.

Es genügt zu sehen, dass auch $\mathrm{n}(y), Df(u)(b_1), \ldots, Df(u)(b_{n-1})$ positiv orientiert ist. Hierin kann man $\mathrm{n}(y)$ durch $\nabla g_j(y)$ ersetzen, wobei g_j die Abbildung im Beweis des vorigen Lemmas ist, denn die beiden Vektoren unterscheiden sich nur durch einen positiven Faktor. Wegen $\langle \nabla g_j(y), z\rangle = \langle e_j, Df^{-1}(y)(z)\rangle = \langle (Df^{-1}(y))^t e_j, z\rangle$ ist $Df(u)^t \nabla g_j(y) = e_j$. Andererseits ist nach Voraussetzung zu Beginn des Beweises die Determinante $\det Df(u)$ nichtnegativ und weil y ein normaler Randpunkt ist, sogar positiv. Daher hat die Basis

$$\nabla g_j(y), Df(u)(b_1), \ldots, Df(u)(b_{n-1}) \tag{6.20}$$

die gleiche Orientierung wie ihr Bild unter $Df(u)^t$, also wie die Basis

$$e_j, Df(u)^t Df(u)(b_1), \ldots, Df(u)^t Df(u)(b_{n-1}). \tag{6.21}$$

Diese ist aber wie $e_j, b_1, \ldots, b_{n-1}$, also nach der Wahl von p_j^+ positiv orientiert. Dies beweist $\tilde{\nu}(y) = \mathrm{n}(y)$ für alle $y \in M_j^+$. Einige Zeilen weiter unten werden wir verwenden, dass in diesem letzten Schritt das Vorzeichen von $\det Df(u)$ keine Rolle mehr spielt, da $Df(u)^t Df(u)$ stets positiv definit ist, also bzgl. beliebiger Basen positive Hauptminoren hat.

Ein analoger Schluß, in dem der Vektor e_j durch $-e_j$ und die Abbildung p_j^+ durch p_j^- ersetzt wird, zeigt, dass auch für $y \in M_j^-$ die beiden Normalvektoren übereinstimmen.

Schließlich behandeln wir den Fall, dass die Funktionaldeterminante der Parametrisierung überall nichtpositiv ist. Dann ist für jeden normalen Randpunkt die Basis (6.20) umgekehrt orientiert wie die Basis (6.21) und daher ist $\tilde{\nu}(y) = -\mathrm{n}(y)$, so dass sich nach Satz 21 auch in (6.18) ein Vorzeichen ändert. (q.e.d.)

Aufgabe 18. Wenn man den Parabelbogen $f\colon [-b; b] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = cx^2$ im $\mathbb{R}^3$ um die y-Achse rotiert, dann erhält man die Kappe eines Rotationsparaboloids. Bestimme die Fläche dieser Kappe.

Aufgabe 20. Berechne die Oberfläche

a) eines Torus im $\mathbb{R}^3$ mit Radien $0 < r < R$, also von

$$T = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x - y\| \le r \text{ für ein } y = (y_1, y_2, 0) \text{ mit } y_1^2 + y_2^2 = R^2\}.$$

mit $K = \{\,(x, y, 0) \mid x^2 + y^2 = R^2\,\}$.

b) einer n-dimensionalen Kugel.

Aufgabe 21. Beweise mit Hilfe des Stokeschen Integralsatzes den **Satz von Green**: Sei $G \subseteq \mathbb{R}^2$ ein einfaches Flächenstück und seien $P, Q\colon G \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbare Funktionen. Dann gilt

$$\int_G \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\, dx\, dy = \int_{\partial G} P\, dx + Q\, dy.$$

In welche Richtung muß man den Rand im dem Kurvenintegral auf der rechten Seite durchlaufen, damit das Vorzeichen stimmt?

Aufgabe 19. (Das Planimeter) Zwei Stangen in (bzw. kurz über) der Ebene sind durch ein Scharnier bei B miteinander verbunden. Die erste Stange hat Länge b, reicht vom Ursprung zum Punkt B und ist im Ursprung drehbar gelagert. Die zweite Stange mit Endpunkten A und C hat Länge $a+1$ und ist im Punkte B drehbar mit der ersten Stange verbunden. Der Abstand von A nach B ist 1, von B nach C ist er a.

Im Punkt A ist ein Rad mit Radius r an der Stange befestigt, so dass es sich mit der Stange als Achse auf der Ebene rollen kann. Bewegt man nun den Punkt C über die Ebene, so folgt das Gestell aus den zwei Stangen dieser Bewegung und das Rad rollt über die Ebene.

Sei nun G ein einfaches, 2-dimensionales Flächenstück in der Ebene, das den Ursprung nicht enthält, aber das klein genug ist, damit man durch Bewegen von Punkt C jeden Punkt von G erreichen kann. Man führt nun den Punkt C einmal entlang des Randes um das Gebiet G herum. Beweise dass (bei geeigneter Umlaufrichtung) die Fläche von G gerade $2\pi ra$ mal die Gesamtzahl der Umdrehungen des Rades ist. Funktioniert das auch noch, wenn G den Ursprung enthält?

Hinweis: Hier hilft der Satz von Green. Das Integral über das Gebiet ergibt dann gerade die Fläche des Gebietes, das Intgral über den Rand wird mit Hilfe des Rades „mechanisch“ bestimmt.

Kapitel 7

Einige Anwendungen

Wir wollen in diesem Kapitel einige Sätze beweisen, die die Kraft des Differentialformenkalküls illustrieren sollen. Dabei wechseln wir bewußt mehrfach zwischen Formulierung mit Differentialformen (inklusive Hodge-Operator φ) und Formulierungen ohne diese Sprache hin und her, um zu verdeutlichen, daß dieser Formalismus kein Selbstzweck ist.

7.1 Die Greensche Formel

Im folgenden sei $R \subset \mathbb{R}^n$ ein einfaches, n-dimensionales Flächenstück mit Rand ∂R. Für $\mathcal{C}^1$-Funktionen u, v auf R setze

$$D(u,v) = \int_R \langle \nabla u, \nabla v \rangle \, dx.$$

Dieser Ausdruck ist offenbar bilinear in den Variablen u und v. Er heißt auch Dirichlet-Integral und D ist die (klassische) Dirichlet-Form. Wir sind ihm schon am Ende des ersten Kapitels begegnet. Mit dem Hodge-Operator läßt er sich umformen zu

$$D(u,v) = \int_R \sum_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_i} \, dx = \int_R du \wedge \varphi dv,$$

denn es ist (vgl. Satz 15)

$$\varphi \, dv = \varphi(\sum_j \frac{\partial v}{\partial x_j} dx_j) = \sum_j (-1)^{j-1} \frac{\partial v}{\partial x_j} dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \ldots \wedge dx_n.$$

und damit

$$du \wedge \varphi dv = \sum_j \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_j} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n.$$

Aus Symmetrie ergibt sich auch $D(u,v) = \int_R dv \wedge \varphi(du)$.

Lemma 9 *Für $v \in \mathcal{C}^2$ ist $d(\varphi \, dv) = \Delta v \cdot \sigma$.*

Beweis.

$$\begin{aligned} d(\varphi \ dv) &= \sum_j (-1)^{j-1} \frac{\partial^2 v}{\partial^2 x_j} dx_j \wedge dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \ldots \wedge dx_n \\ &= \sum_j \frac{\partial^2 v}{\partial^2 x_j} dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n. \end{aligned}$$

(q.e.d.)

Aus der Stokesschen Formel respektive dem Gaußschen Divergenzsatz ergibt sich wegen $d(u\varphi dv) = du \wedge \varphi dv + u \wedge d(\varphi dv)$ und des Lemmas der folgende

Satz 23 *(Greensche Formel) Unter den obigen Voraussetzungen gilt*

$$\int_{\partial R} u\ \varphi dv = D(u,v) + \int_R u\Delta v\,\sigma$$

oder in anderer Schreibweise

$$\int_{\partial R} u(x)\cdot\langle\nabla v(x), \mathrm{n}(x)\rangle\, d\sigma_{\partial R}(x) = D(u,v) + \int_R u(x)\,\Delta v(x)\,dx.$$

Verwenden wir die Symmetrie $D(u,v) = D(v,u)$, schreiben wir die Greensche Formel auch mit vertauschten Rollen von u und v hin und subtrahieren die Ergebnisse, so erhalten wir die

Folgerung 5 *(Symmetrische Greensche Formel)*

$$\int_{\partial R} u\langle\nabla v, \mathrm{n}\rangle - v\langle\nabla u, \mathrm{n}\rangle\, d\sigma_{\partial R} = \int_R u\ \Delta v - v\ \Delta u\, dx.$$

Ist speziell v harmonisch in R, d.h. $\Delta u = 0$, dann ist

$$\int_{\partial R} (u\,\frac{\partial v}{\partial \mathrm{n}} - v\,\frac{\partial u}{\partial \mathrm{n}})\, d\sigma_{\partial R} + \int_R v\ \Delta u\ dx = 0.$$

Sind beide harmonisch, so ist

$$\int_{\partial R} u\,\frac{\partial v}{\partial \mathrm{n}}\ d\sigma_{\partial R} = \int_{\partial R} v\,\frac{\partial u}{\partial \mathrm{n}}\ d\sigma_{\partial R}. \tag{7.1}$$

Wir werden später folgende spezielle Beispiele brauchen. Sei $r(x) = |x| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$. Dann ist $r\ dr = \sum_{i=1}^n x_i dx_i$ und daher

$$\varphi(r\ dr) = \sum_i x_i \varphi(dx_i) = \sum_i (-1)^{i-1} x_i\ dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \ldots \wedge dx_n =: \sigma_{n-1}.$$

Diese Differentialform ist wichtig insbesondere weil sie in einer einfachen Beziehung zum n-dimensionalen Volumen steht: Es ist

$$\frac{1}{n} d\ \sigma_{n-1} = \frac{1}{n}\cdot n\ dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n = \sigma$$

Ferner führen wir die folgende reskalierte Version von σ_{n-1} ein: Es sei

$$\tau := \frac{\sigma_{n-1}}{r^n}.$$

Außerdem betrachten wir für $n \geq 2$ und $x \neq 0$ die Funktion $v(x) := \frac{1}{r(x)^{n-2}}$. Dann gilt $dv = -\frac{n-2}{r^n} r\ dr$ also

$$\nabla v(x) = -(n-2)\frac{x}{|x|^n}$$

und

$$\varphi(dv) = -(n-2)\frac{1}{r^n}\sigma_{n-1} = -(n-2)\tau.$$

Schließlich zeigt eine einfache Rechnung, daß v harmonisch ist für $x \neq 0$. Im Differentialformenkalkül sieht diese Rechnung so aus:

$$\begin{aligned}
\Delta v\,\sigma &= d(\varphi dv) = -(n-2) d\frac{1}{r^n}\sigma_{n-1} \\
&= -(n-2)\big(\frac{n}{r^n}\sigma - d\frac{1}{r^n} \wedge \sigma_{n-1}\big) \\
&= -(n-2)n\big(\frac{1}{r^n}\sigma - \frac{1}{r^{n+2}} r dr \wedge \sigma_{n-1}\big) \\
&= -(n-2)n\big(\frac{1}{r^n}\sigma - \frac{1}{r^{n+2}} r^2\sigma\big) = 0.
\end{aligned}$$

7.2 Zwei Fälle, in denen R kein einfaches Flächenstück ist

Wir würden gerne den Gaußschen Integralsatz auf ein R anwenden, das die 0 nicht enthält (wegen der Singularität von $\frac{1}{r^{n-2}}$): Für $\varepsilon > 0$ sei $R_\varepsilon = R \backslash \{r < \varepsilon\}$. Dann ist $\partial R_\varepsilon = \partial R \cup \{r = \varepsilon\}$ für kleine ε.

Problem: R_ε ist kein einfaches Flächenstück. Wir benötigen also die Stokessche Formel auch für bestimmte Gebiete, die nicht einfache Flächenstücke sind. Aus Zeitmangel gehen wir für diese Ausdehnung nicht den systematischen Weg mit simplizialen Ketten, sondern verwenden dabei einfache Ad-hoc-Argumente, die jedoch die wesentliche Idee des Zusammenklebens, auf der auch die allgemeine Theorie beruht, enthalten.

Lösung: Wir nehmen zusätzlich an, daß das Gebiet R sternförmig bezüglich des Ursprungs ist und betrachten die Mengen

$$\begin{aligned} R_\varepsilon^+ &= \{x \in R_\varepsilon | x_n \geq 0\} \\ R_\varepsilon^- &= \{x \in R_\varepsilon | x_n \leq 0\}. \end{aligned}$$

Es ist leicht zu sehen, daß sie einfache Flächenstücke sind. Ihre Ränder haben den gemeinsamen Teil $R_0 = \{x \in R | x_n = 0,\ r > \varepsilon\}$. Auf diesem gemeinsamen Teil sind die äußeren Normalenvektoren entgegengesetzt: Es ist

$$\mathrm{n}_{R_\varepsilon^+}(x) = -\mathrm{n}_{R_\varepsilon^-}(x)$$

falls $x_n = 0$. Deswegen heben sich die Teilintegrale über dieses Randstück auf (vgl. Kapitel 6). Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_{R_\varepsilon} d\eta &= \int_{R_\varepsilon^+} d\eta + \int_{R_\varepsilon^-} d\eta \\ &\overset{\text{Stokes}}{=} \int_{\partial R_\varepsilon^+} \eta + \int_{\partial R_\varepsilon^-} \eta \\ &= \int_{\partial R_\varepsilon^+ \cap \{x_n=0\}} \eta + \int_{\partial R_\varepsilon^+ \backslash \{x_n=0\}} \eta + \\ &\quad + \int_{\partial R_\varepsilon^- \cap \{x_n=0\}} \eta + \int_{\partial R_\varepsilon^- \backslash \{x_n=0\}} \eta \\ &= \int_{\partial R_\varepsilon^+ \backslash \{x_n=0\}} \eta + \int_{\partial R_\varepsilon^- \backslash \{x_n=0\}} \eta = \int_{\partial R_\varepsilon} \eta \end{aligned}$$

Also ist die Stokessche Formel bzw. der Gaußsche Integralsatz auch für R_ε gültig. Bei dem Randintegral beachte aber, daß die Orientierung der Sphäre $\{r = \varepsilon\}$ der üblichen entegegengesetzt ist, da der äußere Normalenvektor von R_ε gebildet wird und daher in das innere der Kugel $\{r \leq \varepsilon\}$ zeigt. Aus der oben angegebenen Zerlegung des Randes von R_ε folgt also für jedes stetig differenzierbare Vektorfeld a auf R_ε mit Lemma 8

$$\begin{aligned} \int_{R_\varepsilon} \operatorname{div} a(x)\ dx &= \int_{\partial R_\varepsilon} \langle a(y), \mathrm{n}_{R_\varepsilon}(y)\rangle \sigma_{R_\varepsilon}(dy) \\ &= \int_{\partial R} \langle a(y), \mathrm{n}_R(y)\rangle \sigma_R(dy)\eta - \int_{\{r=\varepsilon\}} \langle a(y), \mathrm{n}_{\{r=\varepsilon\}}(y)\rangle \sigma_{\{r=\varepsilon\}}(dy) \end{aligned}$$

wobei im letzten Teilintegral der äußere Normalenvektor im üblichen Sinn verstanden ist.

Ein anderes Beispiel, in dem die Stokessche Formel aus Kapitel 5 nicht unmittelbar angewendet werden kann ist im folgenden Satz gegeben. Wir verwenden ihn im letzten Abschnitt.

Satz 24 *Sei η eine stetig diffbare $(n-2)$-Form auf einer Umgebung der Sphäre $S_{n-1} \subseteq \mathbb{R}^n$. Dann gilt*

$$\int_{S_{n-1}} d\eta = 0.$$

Hier sind zwei nicht ganz ausreichende Beweisideen: 1.) Wenn man η sogar auf die volle Einheitskugel fortsetzen kann und η zweimal stetig differenzierbar ist, ist der Satz eine Folgerung aus $dd\eta = 0$.

2.) Die Sphäre S_{n-1} ist eine Untermannigfaltigkeit mit leerem Rand: $\partial S_{n-1} = \emptyset$, aber kein einfaches Flächenstück. Wenn wir die Stokessche Formel trotzdem anwenden, dann ergibt sich wie gewünscht

$$\int_{S_{n-1}} d\eta = \int_{\partial S_{n-1}} \eta = \int_{\emptyset} \eta = 0.$$

Dies ist ein korrekter Beweis, wenn man wie z.B. im Lehrbuch von Forster die entsprechende Version der Stokesschen Formel zur Verfügung hat. Der folgende Beweis umgeht diese Schwierigkeit wieder durch einen kleinen Trick.

Beweis. Wir entfernen eine kleine Umgebung des n-te Einheitsvektors e_n (Anschaulich: Wir entfernen eine kleine Polarkappe um den Nordpol.) Es sei also $S_{n-1}^{\varepsilon} = S_{n-1} \backslash B(\varepsilon, e_n)$. Dann ist (z.B. mit stereographischer Projektion) leicht zu sehen, daß S_{n-1}^{ε} ein einfaches Flächenstück ist. Aus der Stetigkeit der Form η folgt mit unserer Stokesschen Formel

$$\int_{S_{n-1}} d\eta = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{S_{n-1}^{\varepsilon}} d\eta = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\partial S_{n-1}^{\varepsilon}} \eta = 0.$$

(q.e.d.)

7.3 Der Gaußsche Mittelwertsatz und das Maximumsprinzip für harmonische Funktionen

Sei jetzt wieder R ein bezüglich des Ursprungs sternförmiges einfaches reguläres Flächenstück und R_ε entstehe wie im letzten Abschnitt durch Entfernen einer ε-Kugel aus R. In diesem Abschnitt sei u eine feste harmonische Funktion. Dann gilt für die in R_ε harmonische Funktion Funktion $v = \frac{1}{r^{n-2}}$ nach (7.1)

$$\begin{aligned}
\int_{\partial R_\varepsilon} u \, \frac{\partial v}{\partial \mathrm{n}_{(R_\varepsilon)}} &= \int_{\partial R} u \frac{\partial v}{\partial \mathrm{n}} - \int_{\{r=\varepsilon\}} u \frac{\partial v}{\partial \mathrm{n}_{\text{außen}}} \\
&= \int_{\partial R} u \; \varphi dv - \int_{\{r=\varepsilon\}} u \; \varphi dv \\
&= \int_{\partial R} v \; \varphi du - \int_{\{r=\varepsilon\}} v \; \varphi du.
\end{aligned}$$

Wir erinnern uns nun an die spezielle Gestalt von v und die Formen σ_{n-1}, τ. Es war $\tau = \frac{\sigma_{n-1}}{r^n} = -\frac{1}{n-2} \varphi dv$. Damit ist

$$-(n-2) \int_{\partial R} u\tau + (n-2) \int_{\{r=\varepsilon\}} u \; \tau = \int_{\partial R} \frac{1}{r^{n-2}} \varphi(du) - \int_{\{r=\varepsilon\}} \frac{1}{r^{n-2}} \varphi(du).$$

Nun berechnen wir die Integrale über $\{r = \varepsilon\}$. Es ist

$$\begin{aligned}
\int_{\{r=\varepsilon\}} u \; \tau &= \frac{1}{\varepsilon^n} \int_{\{r=\varepsilon\}} u \; \sigma_{n-1} = \frac{1}{\varepsilon^n} \int_{\{r \le \varepsilon\}} d(u \sigma_{n-1}) \\
&= \frac{1}{\varepsilon^n} \int_{\{r \le \varepsilon\}} du \wedge \sigma_{n-1} + u \; n\sigma
\end{aligned}$$

Andererseits ist wegen der Differenzierbarkeit von u $u(x) = u(0) + O(\varepsilon)$ für $|x| \le \varepsilon$ und daher

$$\begin{aligned}
\int_{\{r \le \varepsilon\}} u \; \sigma &= u(0) \int_{\{r \le \varepsilon\}} \sigma + O(\varepsilon) \int_{\{r \le \varepsilon\}} \sigma \\
&= (u(0) V_n + O(\varepsilon)) \, \varepsilon^n,
\end{aligned}$$

wobei V_n das Volumen der n-dimensionalen Einheitskugel ist, und

$$\int_{\{r\le\varepsilon\}} du\wedge\sigma_{n-1} = \int_{\{r\le\varepsilon\}} \langle\nabla u(x), x\rangle dx = O(\varepsilon)\,\varepsilon^n$$

Wenn wir den, übrigens auch aus dem Satz von Gauß folgenden, Zusammenhang zwischen Volumen V_n und Oberfläche A_{n-1} der Kugel verwenden, erhalten wir

$$\int_{\{r=\varepsilon\}} u\,\tau = n\,V_n u(0) + O(\varepsilon) = A_{n-1}u(0) + O(\varepsilon).$$

Das andere Integral über $\{r=\varepsilon\}$ berechnet sich zu

$$\begin{aligned}\int_{\{r=\varepsilon\}} \frac{1}{r^{n-2}}\varphi(du) &= \frac{1}{\varepsilon^{n-2}}\int_{\{r=\varepsilon\}} \varphi(du)\\ &= \frac{1}{\varepsilon^{n-2}}\int_{\{r\le\varepsilon\}} d(\varphi\ du)\\ &= \frac{1}{\varepsilon^{n-2}}\int_{\{r\le\varepsilon\}} \Delta u\,\sigma = 0,\end{aligned}$$

da u harmonisch ist. Insgesamt erhalten wir den

Satz 25 *Für eine harmonische Funktion u auf einem bezüglich des Nullpunkts sternförmigen einfachen Flächenstück R gilt*

$$\begin{aligned}u(0) &= \frac{1}{A_{n-1}}\int_{\partial R} u\,\tau + \frac{1}{(n-2)A_{n-1}}\int_{\partial R}\frac{1}{r^{n-2}}\,\varphi(du)\\ &= \frac{1}{A_{n-1}}\int_{\partial R}\frac{u}{r^n}\langle x,\mathrm{n}\rangle\ d\sigma_{\partial R} + \frac{1}{(n-2)A_{n-1}}\int_{\partial R}\frac{1}{r^{n-2}}\langle\nabla u,\mathrm{n}\rangle\ d\sigma_{\partial R}.\end{aligned}$$

Speziell sei $R = B(a) = \{r\le a\}$. Dann ist wie eben (ersetze ε durch a)

$$\int_{\partial B(a)}\frac{1}{r^{n-2}}\,\varphi(du) = 0$$

und $\langle\frac{x}{r^n},\mathrm{n}(x)\rangle = \frac{1}{a^{n-1}}$ auf dem Rand der Kugel. Also ergibt sich der

Satz 26 *(Mittelwertsatz von Gauß). Ist u harmonisch in einer Kugel $B(a)=\{r\le a\}$, dann ist*

$$u(0) = \frac{1}{a^{n-1}A_{n-1}}\int_{\partial B(a)} u(x)\sigma_{\partial B(a)}.$$

Hieraus folgt für beliebige Gebiete

Satz 27 *(Maximumsprinzip für harmonische Funktionen). Sei R ein Gebiet, u harmonisch in R. Wenn u sein Maximum im Inneren von R annimmt, dann ist u konstant.*

Beweis. Sei $m = \sup_{x\in R} u(x)$ und sei $G = \{x\in R|u(x)=m\}$. Dann ist die Menge $R\backslash G = \{x|u(x)<m\}$ offen. Wir zeigen: G ist auch offen. Da R ein Gebiet ist und G nach Voraussetzung nicht leer ist, muß dann $R\backslash G$ leer sein, woraus die Behauptung folgt. Sei $x_0\in G$. Es ist $u(x)\le m$ auf jeder in R enthaltenen Kugel $B=B(a,x_0)$. Also ist

$$m = u(x_0) = \frac{1}{a^{n-1}A_{n-1}}\int_{\partial B} u(y)\,\sigma_{\partial B}(dy) \le m\ \underbrace{\frac{1}{a^{n-1}A_{n-1}}\int 1\ \sigma\ (dy)}_{=1} = m$$

und damit $u(y)=m$ für $\sigma_{\partial B}$ - fast alle $y\in\partial B(a,x_0)$. Die Stetigkeit von u impliziert, daß u konstant den Wert m auf dem ganzen Rand $\partial B(a,x_0)$ annimmt. Dies gilt für jede Kugel mit $B(x_0,a)\subseteq R$. Daher ist u konstant gleich m auf einer ganzen Umgebung von x_0. Also ist G offen. (q.e.d.)

7.4 Die Umkehrung im Poincaréschen Lemma

Aus der Gleichung $dd\alpha = 0$ folgt, daß für eine stetig differenzierbare Differentialform ω die Bedingung $d\omega = 0$ notwendig ist für die Existenz eines α mit $d\alpha = \omega$. Dies ist ganz analog zu der in Kapitel 2 betrachteten Frage, wann ein gegebenes Vektorfeld ein Gradientenfeld ist. Damals hatten wir gezeigt, daß die notwendigen Integrabilitätsbedingungen (, die nach Folgerung 3 der Bedingung $d\omega = 0$ entsprechen) für sternförmige Gebiete auch hinreichend sind. Wir wollen in diesem Abschnitt als Vorbereitung auf die Anwendung im nächsten Abschnitt die entsprechende Aussage für Differentialformen beweisen. Wir beginnen mit einer etwas technischen Aussage.

Lemma 10 *$U \subseteq \mathbb{R}^n$ sei offen, $V \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ offen, $[0;1] \times U \subseteq V$.*
Definiere $j_t : U \longrightarrow V$ durch $j_t(x) = (t, x)$.
Für eine $(k+1)$-Form ω auf V definiere weiter eine k-Form $K\omega$ auf U durch

$$K\omega = \begin{cases} 0 & \text{falls} \quad \omega = a\; dx_{s_1} \wedge \ldots \wedge dx_{s_{k+1}} \\ (\int_0^1 a(s,x)ds)dx_{s_1} \wedge \ldots \wedge dx_{s_k} & \text{falls} \quad \omega = a(t,x)dt \wedge dx_{s_1} \wedge \ldots \wedge dx_{s_k}. \end{cases}$$

Dann gilt

$$K(d\omega) + d(K\omega) = j_1^*\omega - j_0^*\omega.$$

Beweis. Durch Nachrechnen. (q.e.d.)

Daraus ergibt sich der angekündigte Satz. Die Sternförmigkeit des Gebiets U wird dabei abgeschwächt zu der Bedingung, daß U glatt zu einem Punkt zusammenziehbar ist, genauer daß eine zweimal stetig differenzierbare Abbildung $\Phi : [0;1] \times U \longrightarrow U$ mit $\Phi(1,x) = x,\ \Phi(0,x) = p$ für ein $p \in U$ existiert. Offensichtlich ist jedes sternförmige Gebiet stetig zu einem Punkt zusammenziehbar.

Satz 28 *Das Gebiet U sei glatt zu einem Punkt zusammenziehbar. Wenn ω eine $(k+1)$-Form auf U mit $d\omega = 0$ ist, dann ex. eine k-Form α mit $d\alpha = \omega$.*

Beweis. Offenbar ist $\Phi \circ j_1(x) = x$ und $\Phi \circ j_0(x) = p$ für alle $x \in U$. Daraus folgt $j_1^*\Phi^*\omega = \omega$, und $j_0^*\Phi^*\omega = 0$. Für letzteres beachte, daß diese Form einerseits keine Anteile der Ordnung 0 hat und andererseits die partiellen Ableitungen der zurückholenden Funktion $j_0 \circ \Phi$ verschwinden, weil sie konstant ist.

Setze $\alpha = K(\Phi^*\omega)$. Dann ist wegen

$$K(d\Phi^*\omega) = K(\Phi^* d\omega) = K(\Phi^* 0) = K(0) = 0$$

nach dem Lemma

$$d\alpha = d\; K(\Phi^*\omega) + K(d\Phi^*\omega) = j_1^*\varphi^*\omega - j_0^*\varphi^*\omega = \omega.$$

(q.e.d.)

7.5 Der Fixpunktsatz von Brouwer

Als Illustration der Anwendung der Differentialformen in einem scheinbar völlig fremden Gebiet und als Andeutung der engen Verbindungen des Satzes von Stokes zur Topologie beweisen wir zum Abschluß den

Satz 29 *(Brouwerscher Fixpunktsatz) Jede stetige Abbildung f der abgeschlossenen n-dimensionalen Einheitskugel $\overline{B(1)}$ in sich hat mindestens einen Fixpunkt.*

Beweis. 1. Sei zunächst f fortsetzbar zu einer $\mathcal{C}^2$-Funktion auf ganz $\mathbb{R}^n$ mit Werten in $B(1)$. Wir nehmen an, es gebe keinen Fixpunkt.

Für $t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n$ sei $g(t,x) = g_t(x) = x - t\, f(x)$. Dann ist gemäß unserer Annahme $g_1(x) = x - f(x) \neq 0$ für alle $x \in \overline{B(1)}$. Wir können ein $\delta > 0$ finden so, daß $0 \notin g_t(\overline{B(1+\delta)})$ für alle $t \geq 1 - \delta$, da das Urbild von $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ unter g eine offene Umgebung von $\{1\} \times \overline{B(1)}$ ist. Mit diesem δ gilt dann für $t < 1 - \delta$ und $|\, \|x\| - 1\,| < \delta$ auch

$$\|g_t(x)\| \geq \|x\| - t\|f(x)\| > 1 - \delta - (1-\delta)\|f(x)\| \geq 0.$$

also ist sogar $g_t(x) \neq 0$ für alle $t \in [0,1]$ und alle x in einer Umgebung U der Sphäre S_{n-1}.

Sei wieder wie am Ende des ersten Abschnitts die $n-1$-Form τ erklärt durch

$$\tau = \frac{\sigma_{n-1}}{r^n} = \frac{1}{n-2}\varphi dv,$$

wobei $v = \frac{1}{r^{n-2}}$ harmonisch in $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ ist. Also ist $d\tau = 0$ in $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$. Die zurückgeholte Form $g_1^*\tau$ ist auf ganz $B(r)$ definiert und es gilt $dg_1^*\tau = g_1^* d\tau = 0$. Nach Satz 28 existiert eine $n-2$-Form η auf $B(r)$ mit $d\eta = g_1^*\tau$. Damit folgt aus Satz 24

$$\int_{S_{n-1}} g_1^*\tau = 0.$$

Andererseits ist

$$\int_{S_{n-1}} g_0^*\tau = \int_{S_{n-1}} \tau \neq 0.$$

Schließlich ist die Form $g^*\tau$ auf einer Umgebung von $[0,1] \times U$ definiert und es gilt wieder $dg^*\tau = g^* d\tau = 0$. Damit folgt nach Lemma 10 für $\vartheta = K(g^*\tau)$

$$d\vartheta = j_1^* g^*\tau - j_0^* g^*\tau = g_1^*\tau - g_0^*\tau.$$

Mit Satz 24 ergibt sich insgesamt ein Widerspruch:

$$0 = \int_{S_{n-1}} d\vartheta = \int_{S_{n-1}} g_1^*\tau - \int_{S_{n-1}} g_0^*\tau = 0 - \int_{S_{n-1}} g_0^*\tau \neq 0.$$

Also muß f unter der obigen Zusatzannahme einen Fixpunkt haben.

2. Sei nun f eine allgemeine stetige Funktion von $\overline{B(1)}$ in sich. Wir nehmen wieder an, es sei $f(x) \neq x \quad \forall x \in \overline{B(1)}$. Dann existiert ein δ mit $\|f(x) - x\| > \delta \quad \forall x \in \overline{B(1)}$. Es genügt zu zeigen: Es gibt ein $\tilde{f} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \overline{B(1)},\ \ \tilde{f} \in \mathcal{C}^2$ mit

$$\|\tilde{f}(x) - f(x)\| < \frac{\delta}{2} \quad \forall x \in \overline{B(1)}.$$

Dann wäre nämlich $\|\tilde{f}(x) - x\| \geq \|x - f(x)\| - \|\tilde{f}(x) - f(x)\| > \frac{\delta}{2}$ für alle x, aber nach 1.) müßte $\tilde{f}$ einen Fixpunkt haben.

Wir konstruieren die gesuchte Funktion durch Faltung. Für $\varepsilon > 0$ setze zunächst $f_\varepsilon(x) = f(\frac{x}{1+\varepsilon})$ für $\|x\| \leq 1 + \varepsilon$ und $f_\varepsilon(x) = 0$ sonst. Dann ist $\|f(x) - f_\varepsilon(y)\| < \frac{\delta}{2}$ falls $x \in \overline{B(1)}$ und $\|x - y\| < \varepsilon$, sofern nur ε hinreichend klein ist. Für ein solches ε sei dann $\tilde{f} = f_\varepsilon * h$ mit einer Funktion

$$h \geq 0,\ \ h \in C^\infty,\ \int h(x)dx = 1,\ \operatorname{supp} h \subset B_\varepsilon(0).$$

Dann ist $\tilde{f} \in C^\infty$, und aus der Darstellung

$$\tilde{f}(x) = \int f_\varepsilon(y)\, h(x-y)\, dy$$

folgt, daß $\tilde{f}(x)$ ein Mittelwert der Funktionswerte von f_ε in der ε-Kugel um x ist und damit gilt auch $\|\tilde{f}(x) - f(x)\| < \frac{\delta}{2}$ wie verlangt. (q.e.d.)

Anhang A

Ergänzungen zu Tensorprodukten und Dach-Produkten

1. Funktorielle Definition des Tensorproduktes Seien $V_1, \ldots, V_k$ $\mathbb{K}$-Vektorräume. Zu jedem $\mathbb{K}$-Vektorraum Z und jeder multilinearen Abbildung $\varphi\colon V_1 \times \ldots \times V_k \longrightarrow Z$ existiert genau eine lineare Abbildung $\psi\colon V_1 \otimes \ldots \otimes V_k \longrightarrow Z$ mit $\psi \circ \otimes_k = \varphi$, dh. $\psi(v_1 \otimes \ldots \otimes v_k) = \varphi(v_1, \ldots, v_k)$ gilt für alle $v_1, \cdots, v_k$. Der Vektorraum $V_1 \otimes \ldots \otimes V_k$ und die multilineare Abb. $\otimes_k\colon V_1 \times \ldots \times V_k \longrightarrow V_1 \otimes \ldots \otimes V_k$ sind durch diese universelle Eigenschaft bis auf einen kanonischen Isomorphismus eindeutig bestimmt.

2. Das (algebraische) Tensorprodukt von Funktionenräumen Wir wollen zunächst das Tensorprodukt in einer in der Analysis gebräuchlichen Art konkreter angeben.

Seien $T_1, \ldots, T_k$ Mengen und $L_1, \ldots, L_k$ lineare Räume skalarwertiger Funktionen über diesen Mengen: $L_l \subset \mathbb{K}^{T_l}$. Dann definiere die Abbildung

$$\chi\colon L_1 \times \ldots \times L_k \to \mathbb{K}^{T_1 \times \ldots \times T_k}$$

durch

$$\chi(f_1, \ldots, f_k)(t_1, \ldots, t_k) \; =; f_1(t_1) \ldots f_k(t_k).$$

Lemma 11 *Sei für jeden Index $l \in \{1, \cdots, k\}$ ein System $(f_{i_l})_{i_l}$ linear unabhängiger Funktionen in L_l gegeben. Dann sind auch die Produkt-Funktionen der Form $\chi(f_{i_1}, \ldots, f_{i_k})$ linear unabhängig.*

Beweis. Induktion nach k. Der Fall $k = 1$ ist klar.
$k - 1 \longrightarrow k$: Sei $\sum_{i_1 \ldots i_k} a_{i_1 \ldots i_k} \chi(f_{i_1}, \ldots, f_{i_k}) = 0$, dh. für alle $t_1, \ldots, t_k$ ist

$$\begin{aligned} 0 &= \sum a_{i_1 \ldots i_k} f_{i_1}(t_1) \ldots f_{i_k}(t_k) \\ &= \sum_{i_1} \Bigg(\sum_{i_2 \ldots i_k} a_{i_1 \ldots i_k} f_{i_2}(t_2) \ldots f_{i_k}(t_k) \Bigg) f_{i_l}(t_i). \end{aligned}$$

Wegen der linearen Unabhängigkeit der (f_{i_1}) verschwinden die inneren Summen $\forall\, t_2, \ldots, t_k$. Daraus folgt nach Induktionsvoraussetzung $a_{i_1} \ldots a_{i_k} = 0$. (q.e.d.)

Folgerung 6 *Sei W die lineare Hülle der Produkt-Funktionen $\chi(f_1, \ldots, f_k)$. Dann kann man W mit $L_1 \otimes \ldots \otimes L_k$ und $\chi(f_1, \ldots, f_k)$ mit $f_1 \otimes \ldots \otimes f_k$ identifizieren.*

Beweis. a) Erste Möglichkeit: Man weist mit Hilfe des Lemmas nach, dass zu jeder multilinearen Abbildung $\varphi : L_1 \times \ldots \times L_k \longrightarrow Z$ die Vorschrift

$$\psi(\chi(f_1, \ldots, f_k)) := \varphi(f_1, \ldots, f_k)$$

eine wohldefinierte lineare Abbildung $\psi : W \longrightarrow Z$ mit $\psi \circ \chi = \varphi$ definiert. Dazu benutzt man, ausgehend von Basen in den Räumen L_i, die zugehörige Basis von W nach dem Lemma. Auf dieser Basis verwendet man die obige Formel zur Definition von ψ und setzt dann eindeutig linear fort. Die Multilinearität von φ impliziert, dass dann für diese Fortsetzung die obige Formel gültig bleibt.

Also hat (W, χ) die universelle Eigenschaft in der Definition des Tensorprodukts. Vorteil: man braucht nicht die Existenz des Tensorprodukts.

b) Alternativ: Man verwendet die Existenz eines Tensorprodukts im Sinn der obigen universellen Eigenschaft. Dann existiert eine lineare Abbildung $\tilde{\psi} : L_1 \otimes \ldots \otimes L_k \longrightarrow W$ mit $\tilde{\psi}(f_1 \otimes \ldots \otimes f_k) = \chi(f_1, \ldots, f_k)$. Offenbar ist $\tilde{\psi}$ surjektiv und mit dem Lemma läßt sich leicht zeigen, dass $\tilde{\psi}$ auch injektiv, also ein Isomorphismus ist. (q.e.d.)

Wir betrachten nun einige Beispiele dieses Prinzips.

3. Tensorprodukte allgemeiner Vektorräume Seien $V_1, \ldots, V_k$ beliebige Vektorräume. Wir wählen $T_l = V_l^*$ und $L_l = V_l$ wobei V_l in natürlicher Weise in $\mathbb{K}^{V_l{}^*}$ eingebettet ist. Wir erhalten also aus der Folgerung eine neue Konstruktion des Tensorprodukts beliebiger Vektorräume.

4. Zum Satz von Fubini Für jedes l sei $T_l = \mathcal{A}_l$ eine σ-Algebra über einer Menge X_l und $\mu_l : \mathcal{A}_l \longrightarrow [0, \infty)$ sei ein endliches Maß. Dann kann man nach dem Eindeutigkeitssatz für Maße das Produktmaß der μ_l mit der Abbildung

$$\mathcal{A}_1 \times \ldots \times \mathcal{A}_k \longrightarrow [0, \infty)$$

$$(A_1, \ldots, A_k) \longmapsto \Pi_{l=1}^k \mu_l(A_l)$$

identifizieren. Daher ist die Bezeichnung $\mu_1 \otimes \ldots \otimes \mu_k$ im Satz von Fubini berechtigt.

Bemerkung. Man kann noch eine andere Verbindung zum Satz von Fubini herstellen. Sei hierzu zur Vereinfachung $k = 2$ und $L_l = \mathcal{L}^1(\mu_l)$. Dann kann man mit dem Satz von Fubini zeigen, dass der resultierende Raum W dicht ist in dem Raum $\mathcal{L}^1(\mu_1 \otimes \mu_2)$ bezüglich $\|f\| = \int |f| \, d\mu_1 \otimes \mu_2$. Dies und ähnliche Beispiele führen dazu, dass man in der Funktionalanalysis statt des Tensorproduktes dessen Vervollständigung bezüglich geeigneter (Halb-)Normen betrachtet. Zur Unterscheidung nennt man dann das Tensorprodukt der Linearen Algebra das algebraische Tensorprodukt.

5. Tensorprodukte von Dualräumen. Seien $V_1, \ldots, V_k$ Vektorräume. Auf Grund der universellen Eigenschaft des Tensorprodukts, angewendet auf den Zielraum $Z = \mathbb{K}$, gibt es einen kanonischen Isomorphismus zwischen dem Raum $M_k(V_1, \cdots, V_k)$ aller (skalaren) Multilinearformen auf $V_1 \times \cdots \times V_k$ und dem Dualraum $(V_1 \otimes \ldots \otimes V_k)^*$.

Wir wenden die obige Folgerung an auf $L_l = V_l^*$. Offenbar ist für alle $\beta_1, \cdots, \beta_k$ mit $\beta_l \in V_l^*$ die Produkt-Funktion $\chi(\beta_1, \cdots, \beta_k) = \beta_1 \otimes \cdots \otimes \beta_k$ ein Element von $M_k(V_1, \cdots, V_k)$. Es ergibt sich eine Einbettung

$$V_1^* \otimes \ldots \otimes V_k^* \longrightarrow M_k(V_1, \cdots, V_k)$$

und zusammen mit dem erwähnten Isomorphismus eine Einbettung

$$V_1^* \otimes \ldots \otimes V_k^* \longrightarrow (V_1 \otimes \ldots \otimes V_k)^*.$$

Satz 30 *Für endlich-dimensionale Vektorräume sind diese beiden Einbettungen surjektiv, also Isomorphismen.*

Beweis. Zu zeigen ist noch, dass jede Multilinearform α eine Linearkombination von Funktionen der Form $\beta_1 \otimes \cdots \otimes \beta_k$ ist mit $\beta_l \in V_l^*$. Hierfür seien $(e_{i_1}), \ldots, (e_{i_k})$ Basen von $V_1, \ldots, V_k$ und $(\beta_{i_1}), \ldots, (\beta_{i_k})$ die zugehörigen dualen Basen von $V_1^*, \ldots, V_k^*$. Dann gilt für alle $(v_1, \ldots, v_k) \in V_1 \times \ldots \times V_k$

$$\begin{aligned} \alpha(v_1, \ldots, v_k) &= \alpha(\sum_{i_1} \langle \beta_{i_1}, v_1 \rangle e_{i_1}, \ldots, \sum_{i_k} \langle \beta_{i_k}, v_k \rangle e_{i_k}) \\ &= \sum_{i_1, \ldots, i_k} \langle \beta_{i_1}, v_1 \rangle \ldots \langle \beta_{i_k}, v_k \rangle \alpha(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}) \\ &= \sum_{i_1, \ldots, i_k} c_{i_1 \ldots i_k} \beta_{i_1} \otimes \ldots \otimes \beta_{i_k}(v_1, \cdots, v_k) \end{aligned}$$

wobei $c_{i_1 \ldots i_k} = \alpha(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k})$. (q.e.d.)

Bemerkung Wir behaupten, dass für unendlich-dimensionale Räume der Satz falsch wird. Seien V und W beide gleich der direkten Summe $\mathbb{R}^{[\mathbb{N}]}$ einer Folge von reellen Geraden. Dann ist $V \otimes W$ isomorph zu $\mathbb{R}^{[\mathbb{N} \times \mathbb{N}]}$, dh. dem Raum aller unendlichen Matrizen (Doppelfolgen) mit nur endlich vielen nicht verschwindenden Einträgen. Die algebraischen Dualräume V^* und W^* sind dann isomorph zum Raum $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ aller reellen Folgen und entsprechend $(V \times W)^*$ isomorph zum Raum $\mathbb{R}^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}$ aller reellen Doppelfolgen.

Sei speziell $\alpha = (\delta^{ij})$. Wir behaupten, dass α keine Darstellung als endliche Linearkombination

$$\alpha = \sum_{m=1}^{n} c_m \beta_m \otimes \gamma_m$$

besitzt. Dabei ist $(\beta_m \otimes \gamma_m)^{ij} = \beta_m^i \gamma_m^j$. Zum Beweis beachte, dass jeder Term in dieser Summe eine Matrix beschreibt, deren Zeilen alle Vielfache des gleichen Vektors γ_m sind. Also hat jeder Term in dieser Summe als Matrix höchstens den Rang 1. Daher hat die Summenmatrix höchstens den Rang n, wogegen die unendlich vielen Zeilen von α alle linear unabhängig sind.

6. Produkte von Multilinearformen Seien $k, m \in \mathbb{N}$ und zwei Tupel von Vektorräumen $V_1, \cdots, V_k$ und $V_{k+1}, \cdots, V_{k+m}$ gegeben. Ganz analog zum vorangegangen Beispiel können wir die Folgerung 6 anwenden auf die beiden Räume $M_k(V_1, \cdots, V_k)$ und $M_m(V_{k+1}, \cdots, V_{k+m})$. Es ergibt sich eine Einbettung

$$M_k(V_1, \cdots, V_k) \otimes M_m(V_{k+1}, \cdots, V_{k+m}) \longrightarrow M_{k+m}(V_1, \cdots, V_{k+m}),$$

die ebenfalls im endlich-dimensionalen Fall surjektiv und damit ein Isomorphismus ist. Dabei geht $\alpha \otimes \beta$ über in die Multilinearform

$$(v_1, \cdots, v_{k+m}) \mapsto \alpha(v_1, \cdots, v_k)\beta(v_{k+1}, \cdots, v_{k+m}).$$

Die entstehende, ebenfalls mit dem Symbol $\otimes$ bezeichnete Verknüpfung von Multilinearformen beliebiger Ordnung ist offensichtlich assoziativ.

7. Gemischte Tensoren Dieser Abschnitt ist im wesentlichen aus dem Skript Lineare Algebra I und II von G. Trautmann (Kaiserslautern 1995) übernommen.

Ist V ein n-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum, und sind p, q natürliche Zahlen, so schreiben wir

$$T_q^p V = \underbrace{V \otimes \ldots \otimes V}_{p} \otimes \underbrace{V^* \otimes \ldots \otimes V^*}_{q}$$

für das Tensorprodukt aus p Faktoren V und q Faktoren V^*. Ist $e_1, \dots, e_n \in V$ eine Basis, so schreibt sich jeder Tensor $\alpha \in T_q^p V$ als Summe

$$\alpha = \sum a_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_p} \otimes e_{j_1}^* \otimes \dots \otimes e_{j_q}^*,$$

wobei die $e_1^*, \dots, e_n^*$ die zu der gegebenen duale Basis ist. Dabei ist über alle Indextupel $(i_1, \dots, i_p) \in [1,n]^P$ und $(j_1, \dots, j_q) \in [1,n]^q$ zu summieren. Nach dem Lemma 11 sind dann die Koeffizienten eindeutig bestimmt. Insbesondere hat man dann vermöge der Basiswahl die bijektive Abbildung, also den Isomorphismus,

$$\begin{array}{rcl} \xi & \longleftrightarrow & (a_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}) \\ T_q^p V & \longleftrightarrow & \mathbb{K}^{n^p} \times \mathbb{K}^{n^q} \cong \mathbb{K}^{n^{p+q}} \end{array}$$

der klassischerweise meist als (ungenügende) Definition von Tensor genommen wurde. Er ist weiter nichts als eine spezielle Basisdarstellung von $T_q^p V$.

Wir bemerken, dass dies wieder als ein Spezialfall der Situation in Folgerung 6 aufgefaßt werden kann: Man wählt $T_l = [1,n]$ und identifiziert vermöge der angegebenen Basen für die ersten p Faktoren V und für die zweiten q Faktoren V^* mit dem linearen Raum aller Funktionen von $[1,n]$ nach $\mathbb{K}$. Dann wird das Tensorprodukt $T_q^p V$ isomorph zum Raum aller skalaren Funktionen auf $T_1 \times \dots \times T_{p+q}$ bzw $[1,n]^p \times [1,n]^q$. Dies ist gerade eine andere Schreibweise für die Menge aller dieser Multiindexungetüme $(a_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p})$.

Basistransformation: Ist $f_1, \dots, f_n$ eine weitere Basis von V und $f_1^*, \dots, f_n^*$ ihre duale Basis, und ist $S = (s_{ki})$ die Transformationsmatrix mit

$$e_i = \sum_k s_{ki} f_k, \text{ so ist } e_j^* = \sum_l \check{s}_{jl} f_l^*,$$

wobei $s^{-1} = (\check{s}_{jl})$ ist. Setzt man dies nun in die Darstellung von ξ ein, so erhalten wir

$$\xi = \sum s_{k_i i_1} \cdot \dots \cdot s_{k_p i_p} a_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} \check{s}_{j_l l_1} \cdot \dots \cdot \check{s}_{j_q l_q} f_{j_1} \otimes \dots \otimes f_{k_p} \otimes f_{l_1}^* \otimes \dots \otimes f_{l_q}^*,$$

wo über alle auftretenden Indizes zu summieren ist. Sind dann $b_{l_1 \dots l_q}^{k_1 \dots k_p}$ die Koeffizienten von ξ zur Basis $f_1, \dots, f_n$, so haben wir die Formel

$$\boxed{b_{l_1 \dots l_q}^{k_1 \dots k_p} = \sum_{\substack{i_1 \dots i_p \\ j_1 \dots j_q}} s_{k_1 i_1} \dots s_{k_p i_p} a_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} \check{s}_{j_1 l_1} \dots \check{s}_{j_q l_q}}\,.$$

8. Das Dach-Produkt Das $\bigwedge$-Produkt läßt sich entweder analog zu den Tensorprodukten behandeln oder auf diese zurückführen. Wir betrachten 4 Möglichkeiten für die Definition des äußeren Produkts:

a) die funktorielle Definition als universelles Objekt bezüglich der alternierenden multilinearen Abbildungen,

b) $\bigwedge^k V = \otimes^k V/\mathfrak{a}$ wobei $\mathfrak{a} = \text{span}\,\{x_1 \otimes \dots \otimes x_k : \exists i \neq j \text{ mit } x_i = x_j\}$. Dann wird

$$v_1 \wedge \dots \wedge v_k = pr_{\mathfrak{a}}(v_1 \otimes \dots \otimes v_k)$$

wobei $pr_{\mathfrak{a}}$ die kanonische Projektion ist.

In Algebra-Texten wird meistens eine dieser beiden Definitionen a) oder b) gewählt und gezeigt, dass sie äquivalent sind. Ferner ist für endlich-dimensionales V die Dimension von $\bigwedge^k V$ gleich $\binom{n}{k}$ wobei $\dim V = n$.

c) Wir betrachten zunächst den Raum $\mathrm{Alt}_k V \subset M_k(V^k)$ aller alternierenden Multilinearformen auf V^k und definieren eine Abbildung $\mathrm{alt}_k : M_k(V^k) \longrightarrow \mathrm{Alt}_k V$ durch

$$(\mathrm{alt}_k \alpha)(v_1, \ldots, v_k) = \sum_{\pi \in \mathrm{Perm}_k} \mathrm{sgn}(\pi)\, \alpha(v_{\pi(1)}, \ldots, v_{\pi(k)}).$$

Wenn wir die Einbettung $\otimes^k V^* \to M_k(V^k)$ aus Punkt 5. verwenden und mit dem Tensorprodukt in den Dualräumen verknüpfen erhalten wir eine Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \wedge^k : (V^*)^k & \longrightarrow & \mathrm{Alt}_k V \\ (\beta_1, \cdots, \beta_k) & \longmapsto & \beta_1 \wedge \cdots \wedge \beta_k = \mathrm{alt}_k(\beta_1 \otimes \cdots \otimes \beta_k), \end{array}$$

wobei man durch Einsetzen also

$$\beta_1 \wedge \cdots \wedge \beta_k(v_1, \cdots, v_k) = \det\big(\langle \beta_i, v_j \rangle\big)$$

erhält. Dies ist die in der Vorlesung angegebene Version des äußeren Produkts von Dualräumen. Dort wurde gezeigt, dass für n-dimensionale Räume $\wedge^k((V^*)^k) = \mathrm{Alt}_k V$ ist. Die hierin enthaltene Surjektivität ist in vollständiger Analogie zu Satz 1. Ferner ist ebenfalls $\dim \mathrm{Alt}_k V = \binom{n}{k}$.

d) Analog zu c) können wir auch die ebenfalls mit alt_k bezeichnete Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{alt}_k : \otimes^k V & \longrightarrow & \otimes^k V \\ (v_1 \otimes \ldots \otimes v_k) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{\pi \in \mathrm{Perm}_k} \mathrm{sgn}(\pi) v_{\pi(1)} \otimes \ldots \otimes v_{\pi(k)}. \end{array}$$

betrachten. Wenn man V als Unterraum von V^{**} auffaßt und das Tensorprodukt $\otimes^k V$ dementsprechend zunächst in $\otimes^k V^{**}$ und dann in $M_k((V^*)^k)$ einbettet, entsteht diese Abbildung einfach als Einschränkung der in c) betrachteten. Wir bezeichnen mit $\bigwedge^k V$ den Bildraum $\mathrm{alt}_k\big(\otimes^k V\big)$ und definieren die Abbildung $\wedge_k : V^k \longrightarrow \bigwedge^k V$ des äußeren Produkts dann einfach wieder als die Verknüpfung $\mathrm{alt}_k \circ \otimes_k$, dh. es gilt

$$v_1 \wedge \ldots \wedge v_k = \mathrm{alt}_k(v_1 \otimes \ldots \otimes v_k).$$

Satz 31 *Der Bildraum $\bigwedge^k V \subset \otimes^k V$ besteht genau aus den „alternierenden Tensoren", also aus den Tensoren, die $\sum c^{i_1 \cdots i_k} f_{i_1} \otimes \ldots \otimes f_{i_k} = sgn(\pi) \sum_{i_1 \ldots i_k} c^{i_1 \cdots i_k} f_{i_{\pi(1)}} \otimes \ldots \otimes f_{i_{\pi(k)}}$, oder kurz $c^{i_1 \cdots i_k} = sgn(\pi)\, c^{i_{\pi(1)} \cdots i_{\pi(k)}}$ für alle Permutationen $\pi \in \mathrm{Perm}_k$ erfüllen. Wenn diese Eigenschaft für eine Zerlegung als Summe von reinen Tensoren gilt, dann auch für alle anderen solchen Darstellungen. Der Kern der linearen Abbildung alt_k ist gerade der Raum $\mathfrak{a}$ in Definition b).*

Beweis. dass jeder Tensor der Form $\mathrm{alt}_k \alpha$ alternierend ist, ist klar. Umgekehrt sei α selbst ein (in einer Darstellung) alternierender Tensor. Dann definiert er eine alternierende Multilinearform auf $(V^*)^k$, was impliziert, dass die Alternierungsbedingung auch für alle anderen Darstellungen gilt. Wenn V endlich-dimensional ist, kann man dann die am Ende von c) oben erwähnte Surjektivität auf den Raum $\mathrm{Alt}_k V^*$ anwenden, um zu sehen, dass α im Bild der Abbildung alt_k vorkommt. Weil die lineare Abbildung alt_k antisymmetrisch in der Reihenfolge der Tensorfaktoren ist, enthält ihr Kern den Raum $\mathfrak{a}$. Andererseits ist die Dimension $\binom{n}{k}$ des Bildraums gerade gleich der Dimension des in b) betrachteten Quotientenraums nach $\mathfrak{a}$. Also kann der Kern unserer linearen Abbildung den Raum $\mathfrak{a}$ nicht echt umfassen.

Der Fall von unendlichdimenionalem V läßt sich hierauf zurückführen, was wir jedoch nicht mehr ausführen. (q.e.d.)

Aus der letzten Teilaussage folgt, dass die in b) und d) konstruierten Dachprodukte zueinander isomorph sind.

Anhang B

Das Planimeter

Dieser Anhang enthält eine Beispiellösung zu Aufgabe 19 am Ende von Kapitel 6. Zu Erinnerung wiederholen wir hier nocheinmal die Aufgabenstellung (vgl. Abb. B.1).

Zwei Stangen in (bzw. kurz über) der Ebene sind durch ein Scharnier bei B miteinander verbunden. Die erste Stange hat Länge b, reicht vom Ursprung zum Punkt B und ist im Ursprung drehbar gelagert. Die zweite Stange mit Endpunkten A und C hat Länge $a+1$ und ist im Punkte B drehbar mit der ersten Stange verbunden. Der Abstand von A nach B ist 1, von B nach C ist er a.

Im Punkt A ist ein Rad mit Radius r an der Stange befestigt, so dass es sich mit der Stange als Achse auf der Ebene rollen kann. Bewegt man nun den Punkt C über die Ebene, so folgt das Gestell aus den zwei Stangen dieser Bewegung und das Rad rollt über die Ebene.

Sei nun G ein einfaches, 2-dimensionales Flächenstück in der Ebene, das den Ursprung nicht enthält, aber das klein genug ist, damit man durch Bewegen von Punkt C jeden Punkt von G erreichen kann. Man führt nun den Punkt C einmal entlang des Randes um das Gebiet G herum. Beweise dass (bei geeigneter Umlaufrichtung) die Fläche von G gerade $2\pi ra$ mal die Gesamtzahl der Umdrehungen des Rades ist.

Für die Lösung untersuchen wir zunächst die Geometrie des Planimetergestänges. Der Punkt C wird nun entlang der Kurve γ bewegt. $L(t)$ sei die Strecke, die das Rad beim Bewegen bis zur Zeit t rollt, $A(t)$ und $B(t)$ seien die Positionen der Punkte A und B und $\alpha(t)$ sowie $\beta(t)$ die Winkel der Stangen AC und $0B$ zur x-Achse, jeweils zur Zeit t.

Die Bewegung des Rades setzt sich aus einem gleitenden Teil in Richtung parallel zur Stange AC und einem rollenden Teil senkrecht zu AC zusammen. Für L trägt nur der rollende Teil bei. Da das Rad im Punkt A gelagert ist, gilt

$$L'(t) \;=\; \begin{pmatrix} -\sin\alpha(t) \\ \cos\alpha(t) \end{pmatrix} \cdot \big(A(t)\big)'.$$

Lemma 12 *Wenn $\gamma\colon [0;T] \to \mathbb{R}^2$ geschlossen ist, dann hängt die Strecke, die das Rad rollt, nicht von der Position des Rades auf der Stange AC ab.*

Beweis. Sei $\tilde{L}$ die Strecke, die ein zweites Rad, das im Punkt $\tilde{A} = B + r\big(\cos(\alpha), \sin(\alpha)\big)$ montiert ist, rollt. Dann ist

$$\tilde{A}(t) = \begin{pmatrix} B_1(t) + r\cos\alpha(t) \\ B_2(t) + r\sin\alpha(t) \end{pmatrix},$$

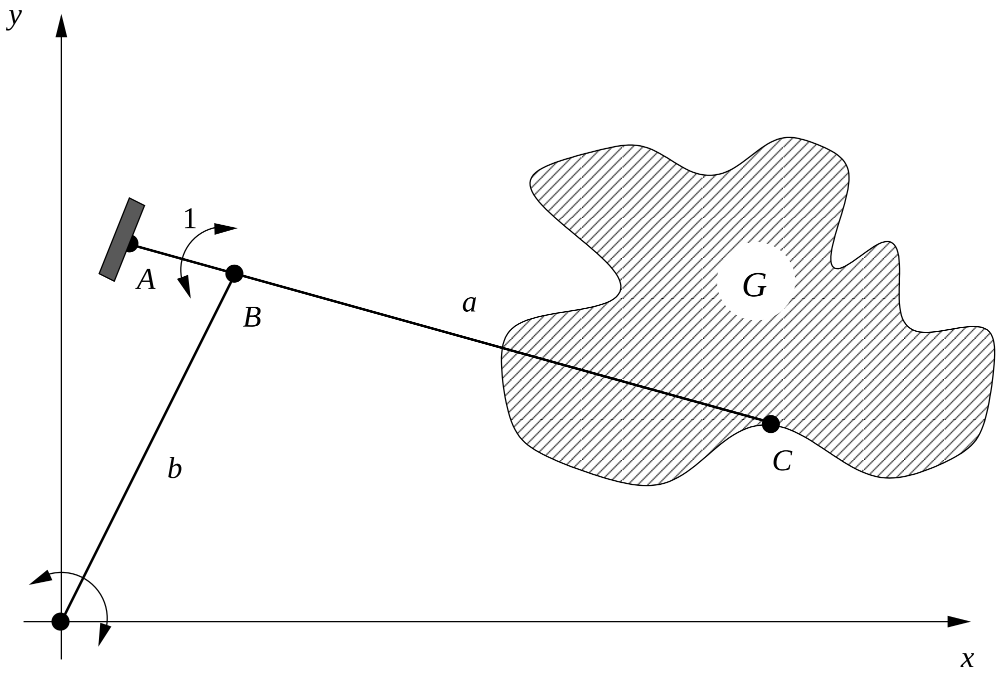


Abbildung B.1: Schemazeichnung für das Planimeter aus Aufgabe 19.

also

$$\begin{aligned}
\tilde{L}(T) &= \int_0^T \frac{\partial \tilde{L}}{\partial t}(t)\,dt \\
&= \int_0^T \begin{pmatrix} -\sin\alpha(t) \\ \cos\alpha(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B_1'(t) - r\alpha'(t)\sin\alpha(t) \\ B_2'(t) + r\alpha'(t)\cos\alpha(t) \end{pmatrix} dt \\
&= \int_0^T -\sin\alpha(t)B_1'(t) + \cos\alpha(t)B_2'(t) + r\alpha'(t)\,dt
\end{aligned}$$

und für $r = -1$

$$L(T) = \int_0^T -\sin\alpha(t)B_1'(t) + \cos\alpha(t)B_2'(t) - \alpha'(t)\,dt.$$

Damit folgt $\tilde{L}(T) - L(T) = (r+1)\int_0^T \alpha'(t)\,dt = \alpha(T) - \alpha(0) = 0$, da das Planimeter einer geschlossenen Kurve folgt. (q.e.d.)

Also können wir im folgenden annehmen, dass das Rad im Punkt C befestigt ist. Das Ergebnis ist das selbe, wie für ein Planimeter mit Rad in A. Die Strecke, die das Rad in C rollt, ist

$$\begin{aligned}
L_C(T) &= \int_0^T \frac{\partial L_C}{\partial t}(t)\,dt \\
&= \int_0^T \begin{pmatrix} -\sin\alpha(t) \\ \cos\alpha(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_1'(t) \\ C_2'(t) \end{pmatrix} dt \\
&= \int_0^T v\big(\gamma(t)\big) \cdot \gamma'(t)\,dt \;=\; \int_\gamma v,
\end{aligned}$$

wobei $v\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ein Vektorfeld mit

$$v\big(\gamma(t)\big) \;=\; \begin{pmatrix} -\sin\alpha(t) \\ \cos\alpha(t) \end{pmatrix}$$

ist.

Nun kann man den Satz von Green anwenden. Definiere P und Q durch $v = P\,dx + Q\,dy$. Man erhält

$$L(t) \;=\; \int_{\partial G} P\,dx + Q\,dy \;=\; \int_G \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy.$$

Die rechte Seite kann man mit Hilfe der Kettenregel ausrechen:

$$\frac{\partial P}{\partial y} \;=\; \frac{\partial P}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial \beta}\frac{\partial \beta}{\partial y} \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} \;=\; \frac{\partial Q}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial \beta}\frac{\partial \beta}{\partial x}$$

Die Position des Punktes $C = (x, y)$ ist

$$C(\alpha,\beta) \;=\; \begin{pmatrix} b\cdot\cos\beta + a\cdot\cos\alpha \\ b\cdot\sin\beta + a\cdot\sin\alpha \end{pmatrix},$$

also

$$DC(\alpha,\beta) \;=\; \begin{pmatrix} -a\sin\alpha & -b\sin\beta \\ a\cos\alpha & b\cos\beta \end{pmatrix}.$$

Für die Umkehrfunktion folgt damit

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \frac{\partial\alpha}{\partial x} & \frac{\partial\alpha}{\partial y} \\ \frac{\partial\beta}{\partial x} & \frac{\partial\beta}{\partial y} \end{pmatrix} \;&=\; D(C^{-1}) \;=\; (DC)^{-1} \\ &=\; \begin{pmatrix} -a\sin\alpha & -b\sin\beta \\ a\cos\alpha & b\cos\beta \end{pmatrix}^{-1} \;=\; \frac{\begin{pmatrix} b\cos\beta & b\sin\beta \\ -a\cos\alpha & -a\sin\alpha \end{pmatrix}}{ab(\cos\alpha\sin\beta - \sin\alpha\cos\beta)} \end{aligned}$$

und daraus dann

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \;=\; \frac{-b\sin\alpha\cos\beta + b\sin\beta\cos\alpha}{ab(\cos\alpha\sin\beta - \sin\alpha\cos\beta)} \;=\; 1/a.$$

Also gilt

$$|G| \;=\; \int_G 1\,dx\,dy \;=\; a\cdot L(t) \;=\; a\cdot 2\pi r N,$$

wobei N die Zahl der Umdrehungen des Rades ist. Damit ist alles gezeigt.

Index

Ableitung
äußere, 25
Alt, 20
Alt_k, 17

Bogenelement
skalares, 13
vektorielles, 13

Dachprodukt, 18
Differentialform, 25
Differentialform 1. Ordnung, 12
div, 27
Divergenz, 27
dS_i, 27

φ, 21
Flächenelement, 41
Flächenstück
einfaches, 34
reguläres, 44

Gebiet, 9
sternförmiges, 10
Gramsche Determinante, 24, 38

Hodge-Operator, 21

Kurve
geschlossene, 9

Länge einer Kurve, 7

Maxwellgleichungen, 28
Multilinearform
alternierende, 17
reine, 20

Normalenfeld, 42
Normalenvektor
äußerer, 44

Oberfächenmaß, 39
Oberfläche, 38
Orientierung, 19

Pfaffsche Form, 12
Planimeter, 47, 60

Randpunkt
normaler, 44
rot, 27
Rotation, 27

σ, 27
Satz
von Gauß, 44
von Green, 49
von Stokes, 35

Vektorfeld
integrables, 9
Volumenform, 41

Literaturverzeichnis

[Fla89] Harley Flanders. *Differential Forms with Applications to the Physical Sciences.* Dover Publications, Inc., New York, second edition edition, 1989.

[For83] O. Forster. *Analysis 3.* Vieweg Studium 52, Wiesbaden, 1983. Dritte Auflage.

[For84] O. Forster. *Analysis 2.* Vieweg Studium 36, Wiesbaden, 1984. Fünfte Auflage.

[For99] O. Forster. *Analysis 1.* Vieweg Studium 24, Wiesbaden, 1999. Fünfte Auflage.

[Gre78] W. Greub. *Multilinear Algebra.* Springer, 1978.

[Lan84] Serge A. Lang. *Algebra.* Addison-Wesley Longman, Inc., 1984.