Einführung in die Variationsrechnung

(2+0)-stündige Vorlesung im Sommersemester 2005

JÖRG SEILER

Inhaltsverzeichnis

1 Los geht's!

Beispiel 1.1 (Problem der Brachistochrone (Bernoulli, 1696)) Die beiden Punkte $a = (0,0)$ und $b = (b_1, b_2)$ mit $b_i > 0$ seien durch eine Kurve $y = y(x)$ verbunden[1]. Ein Körper gleite unter Wirkung eines konstanten Schwerefeldes $F \equiv (g, 0)$ mit $g > 0$ reibungsfrei auf der Kurve von a nach b mit Startgeschwindigkeit 0. Wie muß man die Kurve wählen, so daß der Körper in kürzester Zeit in b ankommt?

BILD (Skischanze)

„π mal Daumen“-Herleitung der Durchlaufzeit: m bezeichne die Masse des Körpers, t sei die Zeit, $s = s(t)$ der zur Zeit t zurückgelegte Weg, $(x, y) = (x(t), y(t))$ die Posituion des Körpers zur Zeit t. Wir nehmen an, daß sich jede der Variablen s, t, x, y als Funktion der anderen schreiben läßt.

Mit $y' = \frac{dy}{dx}$ haben wir dann, daß

$$m\,\frac{d^2 s}{dt^2} = m\,\frac{g}{\sqrt{1 + y'^2}},$$

da die linke Seite die Beschleunigungskraft ist, die in tangentialer Richtung auf den Körper wirkt, und die rechte Seite gleich m mal dem Betrag der tangentialen Komponente[2] von $(g, 0)$ ist.

Es ist $s = \displaystyle\int_0^x \sqrt{1 + y'(\tau)^2}\,d\tau$ („Bogenlänge“), also $\sqrt{1 + y'^2} = \frac{ds}{dx} = \frac{ds}{dt}\frac{dt}{dx}$. Dies liefert

$$g = \frac{d^2 s}{dt^2}\sqrt{1 + y'^2} = \frac{d^2 s}{dt^2}\frac{ds}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big(\frac{ds}{dt}\Big)^2 \cdot \frac{dt}{dx},$$

also[3]

$$g\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big(\frac{ds}{dt}\Big)^2 \Rightarrow gx = \frac{1}{2}\Big(\frac{ds}{dt}\Big)^2 \Rightarrow \sqrt{2gx} = \frac{ds}{dt} = \sqrt{1 + y'^2}\frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{dt}{dx} = \sqrt{\frac{1 + y'^2}{2gx}}.$$

Integration bezüglich x von 0 bis b_1 ergibt

$$\text{Durchlaufzeit} = \int_0^{b_1} \frac{1}{\sqrt{2gx}}\sqrt{1 + y'(x)^2}\,dx.$$

„Antwort“ auf die Frage: Mit

$$U := \{y \in \mathcal{C}^1([0, b_1]) \mid y(0) = 0 \text{ und } y(b_1) = b_2\}$$

definiere

$$\mathcal{F} : U \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \mathcal{F}(y) = \int_0^{b_1} \frac{1}{\sqrt{2gx}}\sqrt{1 + y'(x)^2}\,dx.$$

---

[1] d.h. $y(0) = 0$ und $y(b_1) = b_2$

[2] Der (Einheits-)Tangentialvektor an die Kurve im Punkt $(x, y(x))$ ist $\pm(1, y'(x))/\sqrt{1 + y'(x)^2}$

[3] Die erste Implikation folgt durch Integration bzgl. t, die zweite aus der Formel für die Bogenlänge und der Kettenregel.

Finde $y_0 \in U$, so daß $\mathcal{F}(y_0)$ minimal wird.

Kritik: Ist U die richtige Menge auf der wir $\mathcal{F}$ betrachten? Gibt es überhaupt ein Minimum von $\mathcal{F}$ auf U? Wie findet man es?

Gegenstand der Vorlesung ist es, sogenannte *Variationsintegrale*

$$u \mapsto \mathcal{F}(u) = \int_\Omega F(x, u(x), Du(x))\, dx : U \longrightarrow \mathbb{R}$$

auf Teilmengen $U \subset \{u : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^N\}$ auf Extremalstellen zu untersuchen.

Idee: Verallgemeinere die bekannten Methoden zur Extremwertbestimmung von Funktionen $f : U \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

- Notwendige Bedingungen (entspricht $f'(x_0) = 0$)
- Hinreichende Bedingungen (entspricht $f''(x_0)$ positiv/negativ)
- Existenz globaler Extremwerte (entspricht z.B. der Annahme der Extremwerte stetiger Funktionen auf Kompakta)

Definition 1.2 *Es sei U eine Menge und $\mathcal{F} : U \to \mathbb{R}$. Der Punkt $u \in U$ heißt*

a) (globale) Minimalstelle von $\mathcal{F}$, falls $\mathcal{F}(u) \leq \mathcal{F}(v)$ für alle $v \in U$,

b) strikte (globale) Minimalstelle von $\mathcal{F}$, falls $\mathcal{F}(u) < \mathcal{F}(v)$ für alle $v \in U \setminus \{u\}$,

c) [strikte] lokale Minimalstelle von $\mathcal{F}$, falls U ein topologischer Raum ist und eine offene Umgebung $V \subset U$ von u existiert, so daß u eine [strikte] Minimalstelle von $\mathcal{F}|_V$ ist.

Der Wert $\mathcal{F}(u) \in \mathbb{R}$ heißt dann [striktes] Minimum. Entsprechend erklärt man [strikte] Maximalstellen und Extremalstellen.

Beispiel 1.3 Für festes $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ betrachte

$$\mathcal{F}(y) = \int_0^1 (1 + y'(x)^2)^\alpha\, dx \quad \text{auf} \quad U = \{y \in \mathcal{C}^1([0,1]) \mid y(0) = 0,\ y(1) = 1\}.$$

Es ist $\mathcal{F}(y) > 1$ für alle $y \in U$, da $y' \not\equiv 0$[4] für $y \in U$. Für

$$y_n(x) := \begin{cases} 0 & : 0 \leq x \leq 1 - \frac{1}{n} \\ n^2(x - 1 + \frac{1}{n})^2 & : 1 - \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}, \qquad n \in \mathbb{N},$$

ist $y_n \in U$ und

$$\mathcal{F}(y_n) \leq 1 - \frac{1}{n} + \int_{1-\frac{1}{n}}^1 (5n^2)^\alpha\, dx = 1 - \frac{1}{n} + 5^\alpha n^{2\alpha - 1} \xrightarrow{n \to \infty} 1.$$

Also ist $\inf_{y \in U} \mathcal{F}(u) = 1$, das Infimum wird aber nicht angenommen.

[4] Mittelwertsatz

Beispiel 1.4 Für

$$\mathcal{F}(y) = \int_0^1 (y'(x)^2 - 1)^2 \, dx \quad \text{auf} \quad U = \{y \in \mathcal{C}^1([0,1]) \mid y(0) = y(1) = 0\}$$

ist $\inf_{y \in U} \mathcal{F}(u) = 0$, das Infimum wird aber nicht angenommen. Für jede „Zickzackfunktion“ $u : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $u(0) = u(1) = 0$ und $u'(x) = \pm 1$ bis auf endlich viele Ausnahmepunkte gilt aber $\mathcal{F}(u) = 0$.

Für uns werden daher lipschitzstetige Funktionen wichtig: Für $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ definiere

$$\begin{aligned} \Lambda^1(\Omega, \mathbb{R}^N) = \{u : \Omega \to \mathbb{R}^N \mid \\ & u \text{ beschränkt und } \exists\, L \geq 0 \quad \forall\, x, y \in \Omega : \quad |u(x) - u(y)| \leq L|x - y|\}. \end{aligned}$$

Dies ist ein Banachraum mit der Norm

$$\|u\|_{\Lambda^1(\Omega, \mathbb{R}^N)} = \|u\|_{\mathrm{Lip}} = \sup_{x \in \Omega} |u(x)| + \sup_{x \neq y} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|}.$$

Für $N = 1$ schreiben wir $\Lambda^1(\Omega) = \Lambda^1(\Omega, \mathbb{R})$.

Satz 1.5 *Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $u \in \Lambda^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$. Dann existiert die partielle Ableitung $\frac{\partial u}{\partial x_j}(x)$ für fast alle $x \in \Omega$ und $\frac{\partial u}{\partial x_j}$ ist meßbar und (wesentlich) beschränkt auf Ω mit $\|\frac{\partial u}{\partial x_j}\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|u\|_{\Lambda^1(\Omega, \mathbb{R}^N)}$.*

Beweis: Ohne Beweis. ∎

2 Funktionale und ihre Variation I

Im folgenden sei X ein reeller Vektorraum.

Bemerkung 2.1 Ist X normiert, so ist

$$X' := \{x' : X \to \mathbb{R} \mid x' \text{ linear und stetig}\}$$

der topologische Dualraum von X. Dies ist ein Banachraum mit der Operatornorm

$$\|x'\|_{X'} = \sup_{x \neq 0} \frac{|x'(x)|}{\|x\|_X} = \sup_{\|x\|_X = 1} |x'(x)|.$$

Für ein lineares $T : X \to \mathbb{R}$ sind äquivalent:

a) $T \in X'$

b) Für jede Nullfolge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in X ist $(Tx_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge in $\mathbb{R}$.

Definition 2.2 *Es sei $\mathcal{F} : U \subset X \to \mathbb{R}$ eine Abbildung. Für $u \in U$ und $h \in X$ setze*

$$\delta\mathcal{F}(u,h) := \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \mathcal{F}(u+th) = \lim_{t\to 0} \frac{\mathcal{F}(u+th) - \mathcal{F}(u)}{t},$$

sofern $u + th \in U$ für $|t| < \varepsilon = \varepsilon(u,h)$ und der Grenzwert existiert. Wir setzen

$$V^1(\mathcal{F}, u) = \{h \in X \mid \delta\mathcal{F}(u,h) \text{ exoistiert}\}.$$

$\delta\mathcal{F}(u,h)$ heißt die erste Variation von $\mathcal{F}$ an der Stelle u in Richtung h.

Beispiel 2.3 Wie in Beispiel 1.1[5] sei $X = \mathcal{C}^1([0,b_1])$ und

$$\mathcal{F}(y) = \int_0^{b_1} \sqrt{\frac{1 + y'(x)^2}{x}}\, dx \quad \text{auf} \quad U = \{y \in \mathcal{C}^1([0,b_1]) \mid y(0) = 0,\, y(b_1) = b_2\}.$$

Sei $y \in U$. Für $h \in X$ ist $y + th \in U$ für $t \neq 0$ genau dann, wenn $h(0) = 0 = h(b_1)$. Für solche h gilt nach dem Satz von Lebesgue über dominierte Konvergenz, daß

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \mathcal{F}(y+th) &= \int_0^{b_1} \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \sqrt{\frac{1 + (y'(x) + th'(x))^2}{x}}\, dx \\ &= \int_0^{b_1} \frac{y'(x)}{\sqrt{x(1+y'(x)^2)}}\, h'(x)\, dx = \delta\mathcal{F}(y,h). \end{aligned}$$

Insbesondere $V^1(\mathcal{F}, y) = \{y \in \mathcal{C}^1([0,b_1]) \mid y(0) = 0 = y(b_1)\}$.

Definition 2.4 *Es sei X normiert, $\mathcal{F} : U \subset X \to \mathbb{R}$ eine Abbildung und $u \in U$.*

a) Für alle $h \in X$ existiere $\delta\mathcal{F}(u,h)$ und

$$\mathcal{F}'(u) : X \to \mathbb{R}, \qquad h \mapsto \delta\mathcal{F}(u,h)$$

gehöre zu X'. Dann heißt $\mathcal{F}$ Gateaux-differenzierbar an der Stelle u und $\mathcal{F}'(u) \in X'$ heißt Gateaux-Ableitung von $\mathcal{F}$ in u.

b) Es sei $U \subset X$ offen und es gebe ein $A \in X'$ mit

$$\mathcal{F}(u+h) = \mathcal{F}(u) + Ah + r(h) \qquad \forall\, |h| < \varepsilon = \varepsilon(u)$$

und $\frac{|r(h)|}{\|h\|} \xrightarrow{h\to 0} 0$. Dann heißt $\mathcal{F}$ Fréchet-differenzierbar an der Stelle u und $\mathcal{F}'(u) := A \in X'$ heißt Fréchet-Ableitung von $\mathcal{F}$ in u.

Bemerkung 2.5 a) Offenbar gilt: $\mathcal{F}$ Fréchet-differenzierbar an der Stelle $u \Rightarrow \mathcal{F}$ Gateaux-differenzierbar an der Stelle $u \Rightarrow$ Die erste Variation von $\mathcal{F}$ in u existiert für jede Richtung h.

b) Ist $\mathcal{F}$ Fréchet-differenzierbar an der Stelle u, so ist $\mathcal{F}$ dort stetig. Dies gilt nicht bei Gateaux-Differenzierbarkeit.

[5] Den Faktor $1/\sqrt{2g}$ lassen wir hier weg.

Lemma 2.6 *Es sei U eine offene Menge des normierten Raumes X und $\mathcal{F} : U \to \mathbb{R}$ sei Fréchet-differenzierbar in $u \in U$. Ferner sei $\varphi \in \mathcal{C}^1(]-a,a[,X)$ mit $\varphi(0) = u$. Dann ist $(\mathcal{F} \circ \varphi)'(0) = \mathcal{F}'(u)\varphi'(0)$.*

Beweis: Wir schreiben

$$\mathcal{F}(u+h) = \mathcal{F}(u) + \mathcal{F}'(u)h + r(h), \qquad \varphi(t) = \varphi(0) + t\varphi'(0) + s(t).$$

Da U offen und φ stetig, ist $\varphi(t) \in U$ für $|t| < \varepsilon$ und es gilt

$$\frac{\mathcal{F}(\varphi(t)) - \mathcal{F}(\varphi(0))}{t} = \mathcal{F}'(u)\varphi'(0) + \mathcal{F}'(u)\frac{s(t)}{t} + \frac{r(\varphi(t) - \varphi(0))}{t}.$$

Nun ist $s(t)/t \to 0$ für $t \to 0$ und

$$\frac{r(\varphi(t) - \varphi(0))}{t} = \frac{r(\varphi(t) - \varphi(0))}{\varphi(t) - \varphi(0)} \, \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} \xrightarrow{t \to 0} 0,$$

da $\frac{\varphi(t)-\varphi(0)}{t} \to \varphi'(0)$. ■

Definition 2.7 *Es sei $\mathcal{F} : U \subset X \to \mathbb{R}$, $u \in U$ und $k \in \mathbb{N}$. Wir schreiben $h \in V^k(\mathcal{F}, u)$, falls*

a) Es gibt ein $\varepsilon > 0$, so daß $u + th \in U$ für alle $|t| < \varepsilon$.

b) $\Delta_h := \mathcal{F}(u + \cdot h) \in \mathcal{C}^{k-1}(]-\varepsilon, \varepsilon[)$.

c) Es existiert der Grenzwert

$$\delta^k \mathcal{F}(u,h) := \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \Delta_h^{(k-1)}(t) = \lim_{t \to 0} \frac{\Delta_h^{(k-1)}(t) - \Delta_h^{(k-1)}(0)}{t}.$$

$\delta^k \mathcal{F}(u,h)$ heißt k-te Variation von $\mathcal{F}$ an der Stelle u in Richtung h.

Lemma 2.8 *Es sei $\mathcal{F} : U \subset X \to \mathbb{R}$, $u \in U$ und $h \in V^k(\mathcal{F}, u)$. Dann ist $\lambda h \in V^k(\mathcal{F}, u)$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ und*

$$\delta^k \mathcal{F}(u, \lambda h) = \lambda^k \delta^k \mathcal{F}(u,h).$$

Beweis: OBdA ist $\lambda \neq 0$. Dann ist

$$\Delta_{\lambda h}(t) = \mathcal{F}(u + t\lambda h) = \Delta_h(\lambda t) \qquad \forall\, |t| < \frac{\varepsilon}{|\lambda|}.$$

$(k-1)$-mal differenzieren ergibt $\Delta_{\lambda h}^{(k-1)}(t) = \lambda^{k-1}\Delta_h^{(k-1)}(\lambda t)$ für alle $|t| < \frac{\varepsilon}{|\lambda|}$. Jetzt noch einmal in $t = 0$ ableiten. ■

Definition 2.9 *Es sei $\mathcal{F} : U \subset X \to \mathbb{R}$. Dann heißt $u \in U$ ein stationärer Punkt (oder auch kritischer Punkt) von $\mathcal{F}$, falls*

$$\delta\mathcal{F}(u,h) = 0 \qquad \forall\, h \in V^1(\mathcal{F}, u).$$

Satz 2.10 *Es sei $\mathcal{F} : U \subset X \to \mathbb{R}$, $u \in U$ und zu jedem $h \in V^1(\mathcal{F}, u)$ gebe es ein $\varepsilon > 0$, so daß die Funktion $\Delta_h = \mathcal{F}(u + \cdot h) :]-\varepsilon, \varepsilon[\to \mathbb{R}$ in $t = 0$ minimal wird. Dann gilt*

a) u ist ein stationärer Punkt.

b) $\delta^2\mathcal{F}(u, h) \geq 0$ für alle $h \in V^2(\mathcal{F}, u)$.

Beweis: a) Es sei $h \in V^1(\mathcal{F}, u)$.

$$\left.\begin{aligned} \delta\mathcal{F}(u,h) &= \lim_{0<t\to 0} \frac{\Delta_h(t) - \Delta_h(0)}{t} \geq 0 \\ \delta\mathcal{F}(u,h) &= \lim_{0>t\to 0} \frac{\Delta_h(t) - \Delta_h(0)}{t} \leq 0 \end{aligned}\right\} \implies \delta\mathcal{F}(u,h) = 0$$

b) Es sei $h \in V^2(\mathcal{F}, u)$, also $\Delta_h \in \mathcal{C}^1(]-\varepsilon, \varepsilon[)$. Daher

$$\Delta_h(t) - \Delta_h(0) = \int_0^t \Delta_h'(\tau)\, d\tau \qquad \forall\ |t| < \varepsilon.$$

Da $\Delta_h''(0)$ existiert, ist $\Delta_h'(\tau) = \Delta_h'(0) + (\Delta_h''(0) + r(\tau))\tau$ mit $\lim_{\tau\to 0} r(\tau) = 0$. Nach a) ist $\Delta_h'(0) = 0$. Also

$$\Delta_h(t) - \Delta_h(0) = \int_0^t (\Delta_h''(0) + r(\tau))\tau\, d\tau \qquad \forall\ |t| < \varepsilon.$$

Aus $\Delta_h''(0) < 0$ würde folgen, daß $\Delta_h(t) - \Delta_h(0) < 0$ für hinreichend kleine $|t|$. Dies widerspricht aber der Minimalität von $\Delta_h(0)$. ■

Folgerung 2.11 *Es sei X normiert, $U \subset X$ offen und $\mathcal{F} : U \to \mathbb{R}$ habe ein lokales Minimum in $u \in U$. Dann gilt*

a) u ist ein stationärer Punkt.

b) $\delta^2\mathcal{F}(u, h) \geq 0$ für alle $h \in V^2(\mathcal{F}, u)$.

Beispiel 2.12 Es seien die Bezeichnungen wie in Beispiel 2.3. Ist $y \in U$ eine Minimalstelle von $\mathcal{F}$, so muß gelten

$$0 = \delta\mathcal{F}(y, h) = \int_0^{b_1} \underbrace{\frac{y'(x)}{\sqrt{x(1 + y'(x)^2)}}}_{=:f(x)} h'(x)\, dx$$

für alle $h \in V^1(\mathcal{F}, y) = \{u \in \mathcal{C}^1([0, b_1]) \mid u(0) = u(1) = 0\}$. Wir nehmen nun an, daß $f \in \mathcal{C}([0, b_1])$. Setze dann speziell $h(x) = \int_0^x f(\tau)\, d\tau - Cx$ mit $C = \frac{1}{b_1}\int_0^{b_1} f(x)\, dx$. Dann folgt

$$0 = \int_0^{b_1} f(x)(f(x) - C)\, dx = \int_0^{b_1} f(x)^2 - 2Cf(x) + C^2\, dx = \int_0^{b_1} (f(x) - C)^2\, dx,$$

da $\int_0^{b_1} Cf(x)\,dx = b_1 C^2 = \int_0^{b_1} C^2\,dx$. Also ist f konstant auf $[0, b_1]$ bzw.

$$y'(x) = \sqrt{\frac{x}{D-x}} \qquad \text{auf } [0, b_1]$$

für eine Konstante $D > b_1$ [6]. Integration liefert

$$y(x) = D \arctan \sqrt{\frac{x}{D-x}} - \sqrt{Dx - x^2} + E.$$

Wegen $y(0) = 0$ muß $E = 0$ gelten. Können wir D so wählen, daß $y(b_1) = b_2$ bzw. $y(b_1)/b_1 = b_2/b_1$? Setze dazu $\alpha = \alpha_D = 2 \arctan \sqrt{\frac{b_1}{D-b_1}}$. Dann folgt aus trigonometrischen Formeln[7]

$$b_1 = \frac{D}{2}(1 - \cos \alpha), \qquad y(b_1) = \frac{D}{2}(\alpha - \sin \alpha).^8$$

Wir brauchen also ein D mit

$$\frac{b_2}{b_1} = \frac{\alpha - \sin \alpha}{1 - \cos \alpha} =: g(\alpha).$$

g ist monoton wachsend auf $]0, \pi]$ mit $g(\beta) \xrightarrow{\beta \to 0} 0$ und $g(\pi) = \frac{\pi}{2}$. Ist also $0 < \frac{b_2}{b_1} < \frac{\pi}{2}$, so gibt es ein $0 < \beta < \pi$ mit $g(\beta) = \frac{b_2}{b_1}$. Da $\alpha_D \xrightarrow{D \to b_1} \pi$ und $\alpha_D \xrightarrow{D \to \infty} 0$, gibt es ein D mit $\alpha_D = \beta$.

3 Konvexität und Eindeutigkeit

Im folgenden sei X ein reeller Vektorraum und $U \subset X$.

Definition 3.1 *a) U heißt konvex, falls für alle $u, v \in U$ gilt*

$$[u, v] := \{(1 - \lambda)u + \lambda v \mid 0 \le \lambda \le 1\} \subset U.$$

b) Ein Funktional $\mathcal{F} : U \to \mathbb{R}$ heißt konvex, falls U konvex ist und

$$\mathcal{F}((1 - \lambda)u + \lambda v) \le (1 - \lambda)\mathcal{F}(u) + \lambda \mathcal{F}(v) \qquad \forall\, u \ne v \quad \forall\, 0 < \lambda < 1.$$

Gilt sogar „$<$“ so heißt $\mathcal{F}$ strikt konvex. [9]

Satz 3.2 *Es sei $\mathcal{F} : U \to \mathbb{R}$ [strikt] konvex und $u \in U$.*

[6] $D = 1/C^2$

[7] $\cos \alpha = \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}$, $\sin \alpha = 2 \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\alpha}{2}$, $\sin \alpha = \pm \frac{\tan \alpha}{(1+\tan^2 \alpha)^{1/2}}$, $\cos \alpha = \pm \frac{1}{(1+\tan^2 \alpha)^{1/2}}$.

[8] Analoges gilt für jedes $0 \le x \le b_1$ anstelle von b_1, wobei dann $\alpha = 2 \arctan \sqrt{\frac{x}{D-x}}$ ist. Dies zeigt, daß $x \mapsto (x, y(x))$ die Parameterdarstellung einer Zykloide ist, vgl. Formelsammlung.

[9] Für $f \in \mathcal{C}^1(]a, b[)$ ist [strikte] Konvexität äquivalent dazu, daß f' [streng] monoton wachsend ist. Ist f sogar $\mathcal{C}^2(]a, b[)$, so bedeutet Konvexität, daß $f'' \ge 0$ auf $]a, b[$.

a) Zu jedem $v \in U$ existiere ein $\varepsilon > 0$ mit $\mathcal{F}(u) \leq \mathcal{F}(u + \lambda(v-u))$ für alle $0 \leq \lambda \leq \varepsilon$ [10]. Dann ist u eine [strikte] globale Minimalstelle von $\mathcal{F}$.

b) Für $v \in U$ sei stets $v - u \in V^1(\mathcal{F}, u)$. Dann gilt:

$$u \text{ ist [strikte] globale Minimalstelle von } \mathcal{F} \iff \delta\mathcal{F}(u, v-u) = 0 \text{ für alle } v \in U.$$

Beweis: a) Es sei $v \neq u$ und (oBdA) $0 < \varepsilon < 1$. Dann

$$\mathcal{F}(u) \leq \mathcal{F}(u + \varepsilon(v-u)) = \mathcal{F}((1-\varepsilon)u + \varepsilon v) \leq \mathcal{F}(u) + \varepsilon(\mathcal{F}(v) - \mathcal{F}(u)).$$

Also $0 \leq \varepsilon(\mathcal{F}(v) - \mathcal{F}(u))$ bzw. $\mathcal{F}(u) \leq \mathcal{F}(v)$. Bei strikter Konvexität steht überall '$<$'.

b) „$\Rightarrow$“: Ist Satz 2.11.
„$\Leftarrow$“: Sei $u \neq v \in U$ und $h := v - u \in V^1(\mathcal{F}, u)$. Dann gibt es $0 < \varepsilon \leq 1$ mit $u + th \in U$ für alle $|t| < \varepsilon$ und

$$0 = \delta\mathcal{F}(u,h) \xleftarrow{t \to 0+} \frac{\mathcal{F}(u+th) - \mathcal{F}(u)}{t} \leq \frac{\mathcal{F}(u) + t(\mathcal{F}(v) - \mathcal{F}(u)) - \mathcal{F}(u)}{t} = \mathcal{F}(v) - \mathcal{F}(u).$$

Also $\mathcal{F}(u) \leq \mathcal{F}(v)$. ■

Satz 3.3 *Es sei $\mathcal{F} : U \to \mathbb{R}$ ein Funktional. Gilt für alle $u, v \in U$ mit $u \neq v$, daß $v - u \in V^2(\mathcal{F}, u)$ und $\delta^2\mathcal{F}(u, v-u) \geq 0$ $[> 0]$, so ist $\mathcal{F}$ [strikt] konvex.*

Beweis: Es seien $u, v \in U$ mit $h := v - u \neq 0$. Definiere

$$\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}, \qquad t \mapsto \mathcal{F}((1-t)u + tv).$$

Wegen $\varphi(t) = \mathcal{F}(u + t(v-u)) = \mathcal{F}(v + (1-t)(u-v))$ und $v - u \in V^1(\mathcal{F}, u)$ bzw. $u - v \in V^1(\mathcal{F}, v)$ ist $\varphi \in \mathcal{C}([0,1])$. Aus der [strikten] Konvexität von φ folgt dann die von $\mathcal{F}$.

Es ist $\varphi \in \mathcal{C}^1(]0,1[)$: Für festes $0 < t_0 < 1$ ist $\varphi(t_0 + t) = \mathcal{F}((u + t_0 h) + th)$ und

$$h = \frac{1}{1-t_0}(v - (u + t_0 h)) \in V^2(\mathcal{F}, u + t_0 h)$$

nach Lemma 2.8. Also $\varphi \in \mathcal{C}^1(]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[)$ für ein $\varepsilon > 0$. Wiederum nach Lemma 2.8 ist

$$\varphi''(t_0) = \delta^2\mathcal{F}(u + t_0 h, h) = \frac{1}{(1-t_0)^2}\delta^2\mathcal{F}(u + t_0 h, v - (u + t_0 h)) \geq 0 \qquad [> 0].$$

Also ist φ' [streng] monoton wachsend, also φ [strikt] konvex. ■

Beispiel 3.4 Es sei $X = \mathcal{C}^1([a_1, b_1])$, $0 < g \in \mathcal{C}(]a_1, b_1[) \cap L^1([a_1, b_2])$ und

$$\mathcal{F}(u) = \int_{a_1}^{b_1} g(x)\sqrt{1 + u'(x)^2}\, dx$$

[10] Dies ist insbesondere dann der Fall, wenn X normiert ist und u eine lokale Minimalstelle ist

auf

$$U = \{u \in \mathcal{C}^1([a_1, b_1]) \mid u(a_1) = a_2,\ u(b_1) = b_2\}.$$

Für $u \neq v \in U$ ist $h := v - u \in V^2(\mathcal{F}, u)$ und

$$\delta\mathcal{F}(u,h) = \int_{a_1}^{b_1} g(x) \frac{u'(x)h'(x)}{\sqrt{1+u'(x)^2}}\, dx, \qquad \delta^2\mathcal{F}(u,h) = \int_{a_1}^{b_1} g(x) \frac{h'(x)^2}{\sqrt{1+u'(x)^2}}\, dx.$$

Zudem ist $h' \neq 0$[11], also $\delta^2\mathcal{F}(u,h) > 0$. Das Funktional $\mathcal{F}$ ist also strikt konvex.

Insbesondere: Der in Beispiel 2.12 gefundene kritische Punkt y ist das eindeutige, globale Minimum („die kürzeste Verbindung“).

4 Funktionale und ihre Variation II

Wir legen zuerst einige Bezeichnungen fest, die wir im folgenden verwenden werden:

- $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sei offen und beschränkt.
- $\mathbb{R}^{N\times n} = \{p = (p^i_\nu)_{1\le i\le N, 1\le \nu\le n} \mid p^i_\nu \in \mathbb{R}\}$ sei der Raum der reellen $(N\times n)$-Matrizen mit der Euklidnorm.
- Für eine im Punkt x partiell differenzierbare Funktion $u : \Omega \to \mathbb{R}^N$ bezeichne $Du(x) = (\frac{\partial u_i}{\partial x_\nu})$ die Jacobi-Matrix von u in x.
- $\mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{N\times n}$ sei eine offene Menge und $f = f(x,y,p) : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ stetig.
- Wir nennen das Funktional

  $$u \mapsto \mathcal{F}(u) = \int_\Omega f(x, u(x), Du(x))\, dx =: \int_\Omega f(x, u, Du)\, dx$$

  ein Variationsintegral und f die zugehörige Lagrange-Funktion. Dabei sei vorausgesetzt, daß $x \mapsto f(x, u(x), Du(x))$ sinnvoll als Element von $L^1(\Omega)$ zu definieren ist.

Annahme 4.1 *Es sei $f \in \mathcal{C}^2(\mathcal{D}_f)$ und zu jeder beschränkten Menge $B \subset \mathcal{D}_f$ gebe es ein $0 \le g \in L^1(\Omega)$ mit*

$$|f_\#(x,y,p)| \le g(x) \qquad \forall\ (x,y,p) \in B \text{ mit } x \in \Omega.$$

Dabei steht $f_\#$ als Platzhalter für f sowie jede der partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung bzgl. (y,p).

Lemma 4.2 *Es sei $u \in \Lambda^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$. Für jedes $\varepsilon > 0$ ist*

$$U^1_\varepsilon(u) := \{v \in \Lambda^1(\Omega, \mathbb{R}^N) \mid \|u - v\|_{L^\infty} < \varepsilon \text{ und } \|Du - Dv\|_{L^\infty} < \varepsilon\}$$

eine offene Teilmenge von $\Lambda^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$. Aus $\|v - u\|_{\Lambda^1(\Omega,\mathbb{R}^N)} < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$ folgt $v \in U^1_\varepsilon(u)$.

[11] Andernfalls wäre $h \equiv c$ und dann $h \equiv 0$, da $h(a_1) = h(b_1) = 0$. Dies widerspricht $u \neq v$.

Beweis: Zuerst bemerken wir: Für $h \in \Lambda^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$ gilt wegen Satz 1.5, daß

$$\|h\|_\infty \leq \|h\|_{\Lambda^1(\Omega,\mathbb{R}^N)}, \qquad \|Dh\|_\infty \leq \sqrt{n}\|h\|_{\Lambda^1(\Omega,\mathbb{R}^N)}$$

[12]. Dies zeigt sofort die zweite Behauptung.

Sei nun $v \in U^1_\varepsilon(u)$ und $r := \max\{\|u - v\|_\infty, \|Du - Dv\|_\infty\}$. Sei $0 < \delta < \varepsilon - r$ und $h \in \Lambda^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$ mit $\|h\|_{\Lambda^1(\Omega,\mathbb{R}^N)} < \delta/\sqrt{n}$. Dann

$$\begin{aligned}\|u - (v + h)\|_\infty &\leq \|u - v\|_\infty + \|h\|_\infty \leq r + \delta/\sqrt{n} < \varepsilon\\ \|Du - D(v + h)\|_\infty &\leq \|Du - Dv\|_\infty + \|Dh\|_\infty \leq r + \delta < \varepsilon,\end{aligned}$$

also $v + h \in U^1_\varepsilon(u)$. ■

Satz 4.3 *Es gelte die Annahme* 4.1 [13] *und* $u \in \Lambda^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$ *sei derart, daß* $(x, u(x), D(x)) \in \mathcal{D}_f$ *für alle* $x \in \Omega$ *für die* $Du(x)$ *existiert und es ein* $\varepsilon > 0$ *gibt mit*

$$(x, y, p) \in \mathcal{D}_f \text{ falls } |y - u(x)| < \varepsilon \text{ und } |p - Du(x)| < \varepsilon. \tag{4.1}$$

Dann existiert eine offene Umgebung $U \subset \Lambda^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$ *von* u *derart, daß gilt:*

a) Für jedes $v \in U$ *ist* $f(\cdot, v(\cdot), Dv(\cdot)) \in L^1(\Omega)$*. Insbesondere existiert das Funktional* $\mathcal{F} : U \to \mathbb{R}$*.*

b) Für jedes $h \in \Lambda^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$ *ist* $h \in V^2(\mathcal{F}, u)$ *und es gilt*

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{F}(u, h) &= \int_\Omega \sum_{i=1}^N \Big\{ f_{y_i}(x, u, Du)h_i + \sum_{\nu=1}^n f_{p^i_\nu}(x, u, Du)\frac{\partial h_i}{\partial x_\nu} \Big\}\, dx,\\ \delta^2\mathcal{F}(u, h) &= \int_\Omega \sum_{i,k=1}^N \Big\{ f_{y_i y_k}(x, u, Du)h_i h_k + 2\sum_{\nu=1}^n f_{y_i p^k_\nu}(x, u, Du)h_i\frac{\partial h_k}{\partial x_\nu} +\\ &\qquad + \sum_{\mu,\nu=1}^n f_{p^i_\mu p^k_\nu}(x, u, Du)\frac{\partial h_i}{\partial x_\mu}\frac{\partial h_k}{\partial x_\nu} \Big\}\, dx.\end{aligned}$$

Beweis: Wir wählen $U = U^1_\varepsilon(u)$ wie in Lemma 4.2.

a) Wegen (4.1) ist für jedes $v \in U$ die Funktion $f(\cdot, v(\cdot), Dv(\cdot))$ fast überall auf Ω definiert und messbar als Komposition einer meßbaren und einer stetigen Funktion. Die Integrierbarkeit gilt nach Annahme 4.1.

b) Sei $h \in \Lambda^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$. Dann ist $\Delta_t := u + th \in U$ für $|t| < \delta = \delta(h)$, da U offen ist. Die Funktion $(t, x) \mapsto f(x, \Delta_t(x), D\Delta_t(x))$ ist integrierbar bzgl. $x \in \Omega$ und differenzierbar bzgl. $t \in\,]-\delta, \delta[$ mit

$$\frac{\partial}{\partial t} f(x, \Delta_t(x), D\Delta_t(x)) = \sum_{i=1}^N \Big\{ f_{y_i}(x, \Delta_t, D\Delta_t)h_i + \sum_{\nu=1}^n f_{p^i_\nu}(x, \Delta_t, D\Delta_t)\frac{\partial h_i}{\partial x_\nu} \Big\}.$$

[12] $\|Dh\|_\infty = \sup_x \big(\sum_{i,\nu} |\partial_{x_\nu} h_i(x)|^2\big)^{1/2} = \sup_x \big(\sum_\nu |\partial_{x_\nu} h(x)|^2\big)^{1/2} \leq \sqrt{n}\|h\|_{\Lambda^1}$ nach Satz 1.5.

[13] Die Annahmen sind stärker als eventuell notwendig. Für die Formel der ersten Variation, braucht man zum Beispiel nur die entsprechende Annahme für die ersten Ableitungen bzgl. y und p. In der Anwendung dieses Satz kann bzw. sollte man daher „etwas großzügiger“ sein.

Wegen Annahme 4.1 und der Beschränktheit von h und Dh ist $\left|\frac{\partial}{\partial t} f(x, \Delta_t(x), D\Delta_t(x))\right| \leq cg(x)$ für $x \in \Omega$ und $|t| < \delta$. Nach Lebesgue-Sätzen gilt daher

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{F}(\Delta_t) = \int_\Omega \frac{\partial}{\partial t} f(x, \Delta_t, D\Delta_t)\, dx$$

und die Formel für $\delta\mathcal{F}(u, h)$ folgt durch Einsetzen von $t = 0$. Durch analoge Argumentation für die neue „Lagrange-Funktion“

$$f_1(x, y, p) := \sum_{i=1}^{N} \left\{ f_{y_i}(x, y, p) h_i + \sum_{\nu=1}^{n} f_{p_\nu^i}(x, y, p) \frac{\partial h_i}{\partial x_\nu} \right\}$$

erhält man die Formel für $\delta^2\mathcal{F}(u, h)$. ■

Beispiel 4.4 Betrachte in Satz 4.3 den Spezialfall $f = f(x, p)$ bzw. $\mathcal{F}(u) = \int_\Omega f(x, Du)\, dx$. Dann hat man

$$\delta^2\mathcal{F}(u, h) = \int_\Omega \sum_{i,k=1}^{N} \sum_{\mu,\nu=1}^{n} f_{p_\mu^i p_\nu^k}(x, Du) \frac{\partial h_i}{\partial x_\mu} \frac{\partial h_k}{\partial x_\nu}\, dx.$$

Die Lagrange-Funktion f heißt superelliptisch, falls

$$\sum_{i,k=1}^{N} \sum_{\mu,\nu=1}^{n} f_{p_\mu^i p_\nu^k}(x, p) \pi_\mu^i \pi_\nu^k > 0 \qquad \forall\, x, p \in \mathcal{D}_f \quad \forall\, 0 \neq (\pi_\mu^i) \in \mathbb{R}^{N \times n}.$$

Nach Satz 3.3 ist dann $\mathcal{F} : U \to \mathbb{R}$ konvex. Betrachtet man $\mathcal{F}$ auf einer konvexen Teilmenge $U_0 \subset U$, für die gilt

$$u, v \in U_0 \text{ mit } u \neq v \implies D(u - v) \neq 0,$$

so ist $\mathcal{F} : U_0 \to \mathbb{R}$ sogar strikt konvex.

Beispiel 4.5 Es sei $N = 1$[14], Ω zusammenhängend, $\varphi : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ stetig und[15]

$$U_0 = \{u \in \Lambda^1(\Omega) \mid u|_{\partial\Omega} = \varphi\}.$$

Wir definieren das Dirichlet-Integral $\mathcal{F} : U_0 \subset \Lambda^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ durch

$$\mathcal{F}(u) = \frac{1}{2} \int_\Omega \sum_{\nu=1}^{n} \Big(\frac{\partial u}{\partial \nu}(x)\Big)^2\, dx = \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u(x)|^2\, dx.$$

Die Lagrange-Funktion ist also $f(p) = p_1^2 + \ldots + p_n^2 = |p|^2$. Nach Beispiel 4.4 ist $\mathcal{F}$ strikt konvex. Also

Satz: Das Dirichlet-Integral hat höchstens einen stationären Punkt in U. Existiert dieser, so handelt es sich um eine strikte globale Minimalstelle.

[14] D.h. $\mathbb{R}^{N\times n} = \mathbb{R}^{1\times n} = \mathbb{R}^n$.

[15] Für die Definition von U_0 beachte, daß sich jede lipschitz-stetige Funktion automatisch von Ω auf $\overline{\Omega}$ fortsetzen läßt und die Fortsetzung auch lipschitz ist.

Die Existenz ist weitaus schwieriger. Unter geeigneten Regularitätsannahmen, existiert ein Minimum $u \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}) \cap \mathcal{C}^2(\Omega)$. Für dieses gilt dann[16]

$$0 = \delta\mathcal{F}(u,h) = \int_\Omega \sum_{\nu=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_\nu}\frac{\partial h}{\partial x_\nu}\,dx = -\int_\Omega \sum_{\nu=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_\nu^2} h\,dx = -\int_\Omega h(x)\Delta u(x)\,dx$$

für alle $h \in \mathcal{C}^\infty_{\text{comp}}(\Omega)$ [17]. Hieraus folgt (siehe Satz 5.3), daß $\Delta u = 0$ in Ω. u ist also eine in Ω harmonische Funktion mit vorgegebenem Randwert φ.

5 Die Eulerschen Differentialgleichungen

Definition 5.1 *Für $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ setze*

$$\mathcal{C}^k_{\text{comp}}(\Omega) = \{u \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^n) \mid \operatorname{supp} u \textit{ kompakt und } \operatorname{supp} u \subset \Omega\},$$

wobei $\operatorname{supp} u = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n \mid u(x) \neq 0\}}$ [18] *der Träger von u ist, sowie*

$$L^1_{\text{loc}}(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R} \mid f \textit{ meßbar und } f|_K \in L^1(K) \textit{ für jedes Kompaktum } K \subset \Omega\}.$$

Beispiel 5.2 a) Sei $\varrho : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$\varrho(x) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha}\exp\frac{1}{|x|^2-1} & : |x| < 1 \\ 0 & : |x| \geq 1 \end{cases} \qquad \text{mit} \qquad \alpha = \int_{|x|<1} \exp\frac{1}{|x|^2-1}\,dx.$$

Dann ist $\varrho \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $\operatorname{supp}\varrho = \{|x| \leq 1\}$. Die Familie

$$\varrho_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-n}\varrho(\tfrac{x}{\varepsilon}), \qquad \varepsilon > 0,$$

heißt glättender Kern oder mollifier. Es ist $\|\varrho_\varepsilon\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} = 1$ für alle $\varepsilon > 0$.

b) $\mathcal{C}(\Omega) \subset L^1_{\text{loc}}(\Omega)$.

Satz 5.3 (Fundamentallemma der Variationsrechnung) *Es sei $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. Ist*

$$\int_\Omega u(x)\varphi(x)\,dx \geq 0 \; [= 0] \qquad \forall\, 0 \leq \varphi \in \mathcal{C}^\infty_{\text{comp}}(\Omega),$$

so ist $u \geq 0$ $[u = 0]$ fast überall in Ω.

Beweis: 1. Schritt: Es sei $\Omega = \mathbb{R}^n$ und $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt

$$(\varrho_\varepsilon * u)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{\varrho_\varepsilon(x-y)}_{\geq 0 \text{ und } \in \mathcal{C}^\infty_{\text{comp}}(\mathbb{R}^n_y)} u(y)\,dy \geq 0 \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^n.$$

[16] Partielle Integration
[17] Siehe nächsten Abschnitt.
[18] $\overline{B}$ bezeichnet den Abschluß der Menge B, d.h. die kleinste abgeschlossene Menge A, die B enthält.

Nach Sätzen für die Faltung ist $\varrho_\varepsilon * u \xrightarrow{\varepsilon\to 0} u$ in $L^1(\mathbb{R}^n)$. Nach Sätzen über L_1-Konvergenz existiert eine Folge $\varepsilon_k \to 0$ mit $\varrho_{\varepsilon_k} * u \xrightarrow{k\to\infty} u$ punktweise fast überall in $\mathbb{R}^n$. Es folgt $u \geq 0$ fast überall.

2. Schritt: Im allgemeinen Fall setzen wir $v(x) := \varrho_\varepsilon(x_0 - x)u(x)$ für ein $x_0 \in \Omega$ und $\varepsilon > 0$ so klein, daß $U_\varepsilon(x_0) \subset \Omega$. Dann ist $v \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und

$$\int_{\mathbb{R}^n} v(x)\varphi(x)\,dx = \int_\Omega u(x)\underbrace{\varphi(x)\varrho_\varepsilon(x_0-x)}_{\geq 0 \text{ und } \in \mathcal{C}^\infty_{\text{comp}}(\Omega)}\,dx \geq 0 \qquad \forall 0 \leq \varphi \in \mathcal{C}^\infty_{\text{comp}}(\Omega).$$

Nach Schritt 1 ist $v \geq 0$ fast überall, also $u \geq 0$ fast überall in $U_{\varepsilon/2}(x_0)$. Da $x_0 \in \Omega$ beliebig ist, folgt $u = 0$ fast überall in Ω.

Der Fall „=“ folgt durch Anwenden des Falles „≥“ auf u und $-u$. ■

Satz 5.4 *Es sei Ω zusammenhängend und $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. Ist*

$$\int_\Omega u(x)\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}(x)\,dx = 0 \qquad \forall\, \varphi \in \mathcal{C}^\infty_{\text{comp}}(\Omega), \quad \forall\, 1 \leq j \leq n,$$

so gibt es ein $c \in \mathbb{R}$ mit $u = c$ fast überall in Ω.

Beweis: Es sei $x_0 \in \Omega$ fest und $\overline{U_{2\varepsilon_0}(x_0)} \subset \Omega$ für $\varepsilon_0 > 0$. Sei $\varphi \in \mathcal{C}^\infty_{\text{comp}}(U_{\varepsilon_0}(x_0))$ beliebig. Dann ist

$$\varphi * \varrho_\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty_{\text{comp}}(U_{2\varepsilon_0}(x_0)) \qquad \forall\, 0 < \varepsilon < \varepsilon_0.$$

Ist χ die charaktertistische Funktion von $U_{2\varepsilon_0}(x_0)$ und $\widetilde{u} := \chi u$, so ist $\widetilde{u} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\mathbb{R}^n} \widetilde{u}(x)\frac{\partial}{\partial x_j}(\varphi * \varrho_\varepsilon)(x)\,dx = \int \widetilde{u}(x)(\varphi * \frac{\partial \varrho_\varepsilon}{\partial x_j})(x)\,dx \\ &= \int \varphi(y)\int \widetilde{u}(x)\frac{\partial\varrho_\varepsilon}{\partial x_j}(x-y)\,dxdy = -\int_{U_{\varepsilon_0}(x_0)} \frac{\partial(\widetilde{u} * \varrho_\varepsilon)}{\partial y_j}(y)\varphi(y)\,dy. \end{aligned}$$

Aus Satz 5.3 folgt $\frac{\partial(\widetilde{u}*\varrho_\varepsilon)}{\partial y_j} \equiv 0$ auf $U_{\varepsilon_0}(x_0)$ für alle $1 \leq j \leq n$. Also gibt es Konstanten c_ε mit $\widetilde{u} * \varrho_\varepsilon \equiv c_\varepsilon$ auf $U_{\varepsilon_0}(x_0)$. Also gilt für fast alle $x \in U_{\varepsilon_0}(x_0)$, daß

$$u(x) = \widetilde{u}(x) \xleftarrow{\varepsilon_k\to 0} (\widetilde{u} * \varrho_{\varepsilon_k})(x) = c_{\varepsilon_k} \xrightarrow{\varepsilon_k\to 0} c_0,$$

d.h. $u = c_0$ fast überall in $U_{\varepsilon_0}(x_0)$. Daher ist die Menge

$$M := \{x \in \Omega \mid u \equiv c_0 \text{ fast überall in einer offenen Umgebung von } x\}$$

nichtleer, offen und abgeschlossen in Ω. Da Ω zusammenhängend ist, muß $M = \Omega$ sein, also $u = c_0$ fast überall in Ω. ■

Annahme 5.5 *Die Lagrange-Funktion f erfülle Annahme* 4.1. *Es sei $u \in \Lambda^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$ und es gebe ein $\varepsilon > 0$ mit*

$$\{(x,y,p) \mid x \in \Omega,\ Du(x) \textit{ existiert und } |y - u(x)| + |p - Du(x)| < \varepsilon\} \subset \mathcal{D}_f.$$

Unter dieser Annahme läßt sich das Funktional $\mathcal{F}$ mit Lagrange-Funktion f definieren auf der Menge

$$U = \{v \in \Lambda^1(\Omega, \mathbb{R}^N) \mid \|u - v\|_{L^\infty(\Omega,\mathbb{R}^N)} + \|Du - Dv\|_{L^\infty(\Omega,\mathbb{R}^{N\times n})} < \varepsilon\}$$

und $V^1(\mathcal{F}, u) = V^1(\mathcal{F}, u) = \Lambda^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$.

Definition 5.6 *Es gelte die Annahme* 5.5.

a) u hat die <u>schwache Minimaleigenschaft</u> bzgl. $\mathcal{F}$, falls es ein $\delta > 0$ gibt mit

$$\mathcal{F}(u) \le \mathcal{F}(u + h) \qquad \forall\, h \in \mathcal{C}^\infty_{\text{comp}}(\Omega, \mathbb{R}^N) \ \textit{mit}\ \|h\|_\infty + \|Dh\|_\infty < \delta.$$

Entsprechend spricht man von schwacher Maximal- und Extremaleigenschaft.

b) u heißt <u>schwache $\mathcal{F}$-Extremale</u>, falls

$$\delta\mathcal{F}(u, h) = 0 \qquad \forall\, h \in \mathcal{C}^\infty_{\text{comp}}(\Omega, \mathbb{R}^N).$$

Beispiel 5.7 Hat u die schwache Extremaleigenschaft, so ist u eine schwache $\mathcal{F}$-Extremale. Die Umkehrung davon ist im allgemeinen falsch: Betrachte

$$\mathcal{F}(u) = \int_{-1}^{1} x^2 u'(x)^2 + x u'(x)^3 \, dx.$$

$u \equiv 0$ ist eine schwache $\mathcal{F}$-Extremale mit $\mathcal{F}(0) = 0$ und

$$\delta^2\mathcal{F}(0, h) = 2\int_{-1}^{1} x^2 h'(x)^2 \, dx > 0 \qquad \forall\, 0 \ne h \in \mathcal{C}^\infty_{\text{comp}}(]-1, 1[).$$

Also hat 0 höchstens die schwache Minimaleigenschaft. Für $h_\varepsilon(x) = \varepsilon\varrho_\varepsilon(x) = \varepsilon^2\varrho(\frac{x}{\varepsilon})$, $\varepsilon < 1$, ist aber

$$\mathcal{F}(h_\varepsilon) = \varepsilon^4\Big\{\underbrace{\varepsilon\int_{-1}^{1} x^2\varrho'(x)^2\,dx}_{\xrightarrow{\varepsilon\to 0} 0} + \underbrace{\int_{-1}^{1} x\varrho'(x)\,dx}_{<0}\Big\} < 0$$

für hinreichend kleine $\varepsilon > 0$ und $h_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon\to 0} 0$ in $\mathcal{C}^1([-1, 1])$.

Satz 5.8 (Eulersche Differentialgleichungen) *Es gelte die Annahme* 5.5 *und es sei $u \in \mathcal{C}^2(\Omega, \mathbb{R}^N)$. Genau dann ist u eine schwache $\mathcal{F}$-Extremale, wenn die partiellen Differentialgleichungen*

$$f_{y_i}(x, u(x), Du(x)) - \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_\nu} f_{p^i_\nu}(x, u(x), Du(x)) = 0 \qquad \forall\, x \in \Omega \tag{5.1}$$

gleichzeitig für $i = 1, \ldots, N$ erfüllt sind. Ausführlich heißt das:

$$f_{y_i}(x, u(x), Du(x)) - \sum_{\nu=1}^{n} f_{p^i_\nu x_\nu}(x, u(x), Du(x)) - \sum_{\nu=1}^{n} f_{p^i_\nu y_k}(x, u(x), Du(x))\frac{\partial u_k}{\partial x_\nu}(x) -$$
$$- \sum_{\mu,\nu=1}^{n}\sum_{k=1}^{N} f_{p^i_\nu p^k_\mu}(x, u(x), Du(x))\frac{\partial^2 u^k}{\partial x_\nu \partial x_\mu} \equiv 0.$$

Beweis: „⇒“: Durch Wahl von $h = \varphi e_i = (0, \ldots, 0, \varphi, 0, \ldots, 0)$ mit $\varphi \in \mathcal{C}^\infty_{\text{comp}}(\Omega)$ folgt aus Satz 4.3, daß

$$\int_\Omega f_{y_i}(x, u, Du)\varphi + \sum_{\nu=1}^n f_{p^i_\nu}(x, u, Du)\frac{\partial \varphi}{\partial x_\nu}\, dx = 0 \qquad \forall\, \varphi \in \mathcal{C}^\infty_{\text{comp}}(\Omega).$$

Nach partieller Integration ist dies äquivalent zu

$$\int_\Omega \Big\{ f_{y_i}(x, u, Du) - \sum_{\nu=1}^n \frac{\partial}{\partial x_\nu} f_{p^i_\nu}(x, u, Du)\Big\}\varphi\, dx = 0 \qquad \forall\, \varphi \in \mathcal{C}^\infty_{\text{comp}}(\Omega).$$

Aus Satz 5.1 folgt (5.1).

„⇐“: Folgt analog: Verwende Satz 4.3 und

$$\delta\mathcal{F}(u, h) = \delta\mathcal{F}(u, h_1e_1 + \ldots + h_Ne_N) = \delta\mathcal{F}(u, h_1e_1) + \ldots + \delta\mathcal{F}(u, h_Ne_N)$$

für $h \in \mathcal{C}^\infty_{\text{comp}}(\Omega, \mathbb{R}^N)$. ■

Bemerkung 5.9 (Euler-Operator) Die Zuordnung $u \mapsto L_f(u)$ mit

$$[L_f(v)](x) = \Big(f_{y_i}(x, v(x), Dv(x)) - \sum_{\nu=1}^n \frac{\partial}{\partial x_\nu} f_{p^i_\nu}(x, v(x), Dv(x))\Big)_{i=1,\ldots,N}, \qquad x \in \Omega,$$

für diejenigen $v \in \mathcal{C}^2(\Omega, \mathbb{R}^N)$ für die die rechte Seite Sinn macht, definiert den sogenannten Euler-Operator L_f zu f. Satz 5.8 formuliert sich dann so: Es sei $u \in \mathcal{C}^2(\Omega, \mathbb{R}^N)$ und es gelte Annahme 5.5. Dann gilt:

$$u \text{ ist schwache } \mathcal{F}\text{-Extremale} \iff L_f(u) = 0.$$

Beispiel 5.10 Es sei $N = 1$ also $\mathbb{R}^{n\times N} = \mathbb{R}^n$ und $Du = \nabla u$. Das Variationsintegral

$$\mathcal{F}(u) = \int_\Omega \Big(\tfrac{1}{2}|\nabla u|^2 + c(x)u\Big)\, dx$$

hat die Lagrangefunktion $f(x, y, p) = \frac{1}{2}|p|^2 + c(x)y$ und den Euler-Operatoren $L_f(u) = -\Delta u + c(x)$ mit dem Laplace-Operatoren $\Delta = \partial^2_{x_1} + \ldots + \partial^2_{x_n}$. Also ist $L_f(u) = 0$ die sogenannte Poisson-Gleichung $\Delta u = c$ in Ω.

Beispiel 5.11

a) $f = f(x, y)$ ist unabhängig von p. Dann reduziert sich (5.1) zu $f_{y_i}(x, u(x)) \equiv 0$ auf Ω für alle $1 \le i \le N$ [19].

b) Ist $n = 1$ und $f = f(y, p)$ unabhängig von x, so ist (5.1) gerade $\frac{d}{dx} f_{p^i}(u(x), u'(x)) \equiv f_{y_i}(u(x), u'(x))$. Hieraus folgt

$$f(u(x), u'(x)) - \sum_{k=1}^N u'_k(x) f_{p^k}(u(x), u'(x)) \equiv \text{const.}^{20}$$

Der[21] Ausdruck

$$f(y, p) + \sum_{k=1}^N p^k f_{p^k}(y, p)$$

ist also ein erstes Integral für $\mathcal{C}^2$-Lösungen der Euler-Gleichung $L_f(u) = 0$.

[19] Dies ist eine implizite Bestimmungsgleichung für u

[21] Beweis: Leite die Gleichung nach x ab.

Satz 5.12 *Es sei $n = 1$ und $\Omega =]a,b[$ ein offenes Intervall. Es gelte die Annahme 5.5, $u \in \Lambda^1(]a,b[,\mathbb{R}^N)$ sei eine schwache $\mathcal{F}$-Extremale und $x_0 \in]a,b[$. Dann gibt es ein $c \in \mathbb{R}^N$ mit*

$$\nabla_p f(x,u(x),u'(x)) = c + \int_{x_0}^x \nabla_y f(t,u(t),u'(t))\,dt \qquad f.f.a.\ x \in]a,b[, \tag{5.2}$$

d.h. u löst die sogenannte Du Bois-Reymondsche Gleichung beziehungsweise die Eulersche Differentialgleichung in integrierter Form.

Beweis: Wie im Beweis von Satz 5.8 erhält man für $1 \le i \le N$

$$\int_a^b \Big(\underbrace{f_{y_i}(x,u,u')}_{=:g(x)\in L^1(]a,b[)} \varphi(x) + f_{p_i}(x,u,u')\varphi'(x)\Big)\,dx = 0 \qquad \forall\, \varphi \in \mathcal{C}^\infty_{\text{comp}}(]a,b[).$$

Wähle Folge $(g_k)_k \subset \mathcal{C}^\infty_{\text{comp}}(]a,b[,\mathbb{R}^N)$ mit $g_k \to g$ in $L^1(]a,b[,\mathbb{R}^N)$. Es folgt

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{k\to\infty} \int_a^b \Big(f_{p_i}(x,u,u') - \int_{x_0}^x g_k(t)\,dt\Big)\varphi'(x)\,dx \\ &= \int_a^b \Big(f_{p_i}(x,u,u') - \int_{x_0}^x f_{y_i}(t,u,u')\,dt\Big)\varphi'(x)\,dx, \end{aligned}$$

da $\int_{x_0}^{\cdot} g_k(t)\,dt \to \int_{x_0}^{\cdot} f_{y_i}(t,u,u')\,dt$ gleichmäßig auf $]a,b[$. Jetzt folgt die Behauptung aus Satz 5.4. ∎

Folgerung 5.13 *Es seien die Bezeichnungen wie in Satz 5.12 aber $u \in \mathcal{C}^1(]a,b[,\mathbb{R}^N)$. Dann folgt aus (5.2), daß $(\nabla_p f)(x,u(x),u'(x)) \in \mathcal{C}^1(]a,b[,\mathbb{R}^N)$ mit Ableitung*

$$\frac{d}{dx}(\nabla_p f)(x,u(x),u'(x)) = \nabla_y f(x,u(x),u'(x)) \qquad \forall\, x \in]a,b[.$$

Ist sogar $u \in \mathcal{C}^2(]a,b[,\mathbb{R}^N)$, so darf man links die Kettenregel anwenden und erhält die Eulerschen Differentialgleichungen aus Satz 5.8.

Bemerkung 5.14 Wann ist eine Differentialgleichung die Euler-Gleichung eines geeigneten Funktionals? Für $n = N = 1$ heißt dies, ob

$$u''(x) = \phi(x,u(x),u'(x)), \qquad a < x < b,$$

äquivalent ist zu $L_f(u) = 0$ für ein geeignetes $f = f(x,y,p)$. Ist f_{pp} immer $\neq 0$, so heißt $L_f(u) = 0$ gerade

$$u'' = \frac{f_y(x,u,u') - f_{px}(x,u,u') - f_{py}(x,u,u')u'}{f_{pp}(x,u,u')}.$$

Man setzt also f an als Lösung der partielle Differentialgleichung

$$f_y - f_{px} - pf_{py} - \phi f_{pp} = 0.$$

(Formales) Differenzieren nach p liefert

$$\phi_p + \frac{\partial}{\partial x} f_{pp} + p\frac{\partial}{\partial y} f_{pp} + \phi\frac{\partial}{\partial p} f_{pp} = 0.$$

Dies ist eine lineare partielle DGL erster Ordnung für f_{pp}. Diese läßt sich eventuell mit der Charakteristiken-Methode lösen. Zweimaliges integrieren bzgl. p liefert f.

6 Reguläre Linienelemente

Im folgenden sei $n = 1$, also $\Omega =]a, b[$ ein Intervall, und es gelte Annahme 5.5.

Definition 6.1 *Ein Punkt $(x, y, p) \in \mathcal{D}_f$ heißt reguläres Linienelement von f, falls*

$$\det \nabla_p^2 f(x, y, p) \neq 0.$$

Dabei bezeichnet $\nabla_p^2 f(x, y, p)$ die Hesse-Matrix (bzgl. p) von f im Punkt (x, y, p).

Lemma 6.2 *Es sei (x_0, y_0, p_0) ein reguläres Linienelement von f und*

$$\pi_0 := \nabla_p f(x_0, y_0, p_0) \in \mathbb{R}^N.$$

Dann gibt es offene Umgebungen $V \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ von (x_0, y_0, π_0) und $W \subset \mathbb{R}^N$ von p_0 sowie eine $\mathcal{C}^1$-Abbildung $\psi : V \to W$ mit folgender Eigenschaft: Für $(x, y, \pi) \in V$ und $p \in W$ ist

$$\nabla_p f(x, y, p) = \pi \iff p = \psi(x, y, \pi).$$

Insbesondere: $(\nabla_p f)(x, y, \psi(x, y, \pi)) = \pi$ für alle $(x, y, \pi) \in V$.

Beweis: Wende den Satz über implizite Funktionen an auf

$$g : \mathcal{D}_f \times \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N, \qquad g(x, y, p, \pi) = \nabla_p f(x, y, p) - \pi.$$

Es ist $g(x_0, y_0, p_0, \pi_0) = 0$ und $(D_p g)(x_0, y_0, p_0, \pi_0) = (\nabla_p^2 f)(x_0, y_0, p_0)$ invertierbar. ∎

Satz 6.3 *Es sei (x_0, y_0, p_0) ein reguläres Linienelement von f, $\pi_0 := \nabla_p f(x_0, y_0, p_0) \in \mathbb{R}^N$ und $\psi : V \to W$ wie in Lemma 6.2.*

a) *Ist I ein offenes Intervall um x_0 und erfüllt $u \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^N)$ das Anfangswertproblem*

$$\begin{gathered} (\nabla_p f)(x, u(x), u'(x)) = \pi_0 + \int_{x_0}^{x} (\nabla_y f)(t, u(t), u'(t))\, dt, \\ u(x_0) = y_0, \qquad u'(x_0) = p_0, \end{gathered} \tag{6.1}$$

auf I, so gibt es ein offenes Intervall J mit $x_0 \in J \subset I$ derart, daß

$$\pi(x) := (\nabla_p f)(x, u(x), u'(x)) \in \mathcal{C}^1(J, \mathbb{R}^N)$$

und die folgende gewöhnliche DGL erfüllt ist:

$$\begin{aligned} & u'(x) = \psi(x, u(x), \pi(x)) \qquad \forall\, x \in J, \\ & \pi'(x) = (\nabla_y f)\big(x, u(x), \psi(x, u(x), \pi(x))\big) \qquad \forall\, x \in J, \\ & u(x_0) = y_0, \qquad \pi(x_0) = \pi_0. \end{aligned} \tag{6.2}$$

b) *Ist J offenes Intervall um x_0 und lösen $u, \pi \in \mathcal{C}^1(J, \mathbb{R}^N)$ die DGL (6.2), so löst u (6.1) auf J.*

Insbesondere sind dann $u, \pi \in \mathcal{C}^2(J, \mathbb{R}^N)$.

Beweis: a) Es ist (sogar) $\pi \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^N)$. Wähle $J \subset I$ derart, daß $(x, u(x), \pi(x)) \in V$ und $u'(x) \in W$ für alle $x \in J$. Nach Lemma 6.2 ist

$$u'(x) = \psi(x, u(x), \pi(x)) \qquad \forall\, x \in J.$$

Ableiten von (6.1) liefert

$$\pi'(x) = (\nabla_y f)(x, u(x), u'(x)) = (\nabla_y f)\big(x, u(x), \psi(x, u(x), \pi(x))\big).$$

b) Sei $(u, \pi) \in \mathcal{C}^1(J, \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$ eine Lösung von (6.2). Für alle $x \in J$ ist insbesondere $(x, u(x), \pi(x)) \in V$ und

$$\begin{aligned} \pi'(x) &= (\nabla_y f)(x, u(x), u'(x)), \\ \pi(x) &\overset{6.2}{=} (\nabla_p f)\big(x, u(x), \psi(x, u(x), \pi(x))\big) = (\nabla_p f)(x, u(x), u'(x)). \end{aligned}$$

Also erfüllt u (6.1) auf J.

Da ψ und $\nabla_y f$ jeweils $\mathcal{C}^1$ sind, ist (u', π') auch $\mathcal{C}^1$. ■

Satz 6.4 *Es gelte Annahme* 5.5 *und sei $u \in \mathcal{C}^1(]a, b[, \mathbb{R}^N)$ eine schwache $\mathcal{F}$-Extremale. Ist $I \subset\,]a, b[$ ein offenes Intervall und $(x, u(x), u'(x))$ ein reguläres Linienelement der Lagrange-Funktion f für jedes $x \in I$, so ist $u \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{R}^N)$.*

Beweis: u löst die Du-Bois Reymondsche Gleichung für jedes $x_0 \in I$. Nach Satz 6.3 (mit $y_0 = u(x_0)$ und $p_0 = u'(x_0)$) ist u dann $\mathcal{C}^2$ in einer offenen Umgebung von x_0. Da $x_0 \in I$ beliebig ist, folgt die Behauptung. ■

Bemerkung 6.5 Mit den Bezeichnungen aus Lemma 6.2 setze

$$H(x, y, \pi) := \langle \psi(x, y, \pi), \pi \rangle_{\mathbb{R}^N} - f(x, y, \psi(x, y, \pi)), \qquad (x, y, \pi) \in V.$$

Dies ist die sogenannte Hamilton-Funktion zu f. Mit Lemma 6.2 und Kettenregel folgt

$$\begin{aligned} H_x(x, y, \pi) &= -f_x(x, y, \psi(x, y, \pi)), \\ (\nabla_y H)(x, y, \pi) &= -(\nabla_y f)(x, y, \psi(x, y, \pi)), \\ (\nabla_\pi H)(x, y, \pi) &= \psi(x, y, \pi). \end{aligned}$$

Insbesondere ist $H \in \mathcal{C}^2(V)$. Die DGL in (6.2) schreibt sich nun als

$$u'(x) = (\nabla_\pi H)(x, u(x), \pi(x)), \qquad \pi'(x) = -(\nabla_y H)(x, u(x), \pi(x)). \tag{6.3}$$

Dies ist die Eulersche Differentialgleichung in kanonischer Form. Der Übergang von (x, y, p, f) zu (x, y, π, H) heißt Legendre-Transformation.

Bemerkung 6.6 Es sei $H \in \mathcal{C}^2(V)$ die Hamilton-Funktion zu f. Für $K \in \mathcal{C}^1(V)$ heißt

$$\{K, H\} := \langle \nabla_y K, \nabla_\pi H \rangle - \langle \nabla_\pi K, \nabla_y H \rangle = \sum_{i=1}^{N} K_{y_i} H_{\pi_i} - K_{\pi_i} H_{y_i}$$

die Poisson-Klammer von K mit H. Ist (u, π) eine Lösung von (6.3), so ist

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} K(x, u(x), \pi(x)) &= K_x(x, u(x), \pi(x)) + \\ &\quad + \langle (\nabla_y K)(x, u(x), \pi(x)), u'(x) \rangle - \langle (\nabla_\pi K)(x, u(x), \pi(x)), \pi'(x) \rangle \\ &= (K_x + \{K, H\})(x, u(x), \pi(x)).\end{aligned}$$

Weiterhin gibt es zu jedem $(x_0, y_0, \pi_0) \in V$ eine Lösung (u, π) mit $u(x_0) = y_0$ und $\pi(x_0) = \pi_0$. Man sieht also: Genau dann ist K ein erstes Integral für die DGL (6.3)[22], wenn

$$K_x + \{K, H\} \equiv 0 \quad \text{auf} \quad V.$$

Satz 6.7 *Es sei $\mathcal{D}_f = G \times \mathbb{R}^N$ mit einem offenen $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$, es gelte Annahme* 5.5 *und $u \in \Lambda^1(]a, b[, \mathbb{R}^N)$ sei eine schwache $\mathcal{F}$-Extremale. Ist $I \subset]a, b[$ offen und*

$$(\nabla_p^2 f)(x, u(x), p) \text{ positiv [negativ] definit} \qquad \forall\, x \in I \quad \forall\, p \in \mathbb{R}^N,$$

so ist $u \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{R}^N)$.

Beweis: Sei $M := \|u'\|_{L^\infty(]a,b[,\mathbb{R}^N)}$ und $[\alpha, \beta] \subset I$. Da u lipschitz-stetig[23] gilt

$$u(x) = u(\alpha) + \int_\alpha^x u'(t)\, dt \qquad \forall\, \alpha \le x \le \beta.$$

Da $f \in \mathcal{C}^2$, gibt es ein $\varepsilon > 0$ derart, daß $(\nabla_p^2 f)(x, y, p)$ positiv definit ist auf $G' \times U_{2M}(0)$ mit[24]

$$G' = \{(x, y) \in]\alpha - \varepsilon, \beta + \varepsilon[\times \mathbb{R}^N \mid |y - u(x)| < \varepsilon\}.$$

Definiere nun die Abbildung

$$\Phi : G' \times U_{2M}(0) \longrightarrow G' \times \mathbb{R}^N, \qquad \Phi(x, y, p) = (x, y, (\nabla_p f)(x, y, p)).$$

Wir werden nachher zeigen: Φ ist ein $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismus

$$\Phi : G' \times U_{2M}(0) \longrightarrow B := \Phi(G' \times U_{2M}(0)).$$

Nach Satz 5.12 gibt es ein $c \in \mathbb{R}^N$ mit

$$(\nabla_p f)(x, u(x), u'(x)) = c + \int_\alpha^x (\nabla_y f)(t, u(t), u'(t))\, dt =: \pi(x) \qquad \text{f.f.a. } x \in [\alpha, \beta].$$

[22] d.h., für jede Lösung (u, π) ist $K(x, u(x), \pi(x))$ konstant in x

[23] Schon absolute Stetigkeit wäre genug.

[24] Die Annahme des Gegenteils liefert konvergente Folgen $(x_n, y_n, p_n)_n$ und $(v_n)_n$ von Einheitsvektoren mit $\langle (\nabla_p^2 f)(x_n, y_n, p_n) v_n, v_n \rangle \le 0$. Dies steht im Widerspruch zur positiven Definitheit (im Grenzwert).

π ist offenbar stetig. Setze

$$K := \{\Phi(x, u(x), p) \mid \alpha \le x \le \beta,\ p \in \overline{U_M(0)}\} \subset B$$

F.f.a. $x \in [\alpha, \beta]$ ist $(x, u(x), \pi(x)) = \Phi(x, u(x), u'(x)) \in K$. Da K abgeschlossen und π stetig, folgt $(x, u(x), \pi(x)) \in K$ für alle $x \in [\alpha, \beta]$. Dann definiert

$$(x, u(x), p(x)) = \Phi^{-1}(x, u(x), \pi(x))$$

eine stetige Funktion $p : [\alpha, \beta] \to \overline{U_M(0)}$ mit $p(x) = u'(x)$ f. ü. auf $[\alpha, \beta]$. Also ist $u(x) = u(\alpha) + \displaystyle\int_\alpha^x p(t)\, dt$ in $\mathcal{C}^1([\alpha, \beta], \mathbb{R}^N)$.

Φ ist $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismus: Man rechnet nach, daß $\det D\Phi(x, y, p) \neq 0$ für alle $(x, y, p) \in G' \times U_{2M}(0)$. Der Satz über die inverse Funktion liefert, daß B offen ist und Φ ein *lokaler* $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismus ist. Wir müssen also nur noch zeigen, daß Φ injektiv ist, d.h. $(\nabla_p f)(x, y, \cdot) : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ injektiv für jedes gegebene (x, y). Es ist

$$\begin{aligned}(\nabla_p f)(x, y, q) - (\nabla_p f)(x, y, r) &= \int_0^1 \frac{d}{dt}(\nabla_p f)(x, y, r + t(q - r))\, dt \\ &= \int_0^1 \sum_{k=1}^N (\nabla_p f_{p^k})(x, y, r + t(q - r))(q^k - r^k)\, dt.\end{aligned}$$

Für $q \neq r$ folgt mit $s := q - r$ aus der Voraussetzung, daß

$$\begin{aligned}\langle(\nabla_p f)(x, y, q) - (\nabla_p f)(x, y, r), s\rangle &= \int_0^1 \sum_{i,k=1}^N f_{p^i p^k}(x, y, r + ts) s^k s^i\, dt \\ &= \int_0^1 \langle(\nabla_p^2 f)(x, y, r + ts)s, s\rangle\, dt > 0\end{aligned}$$

und somit $(\nabla_p f)(x, y, q) \neq (\nabla_p f)(x, y, r)$. ∎

Beispiel 6.8 Das Funktional (vgl. Beispiel 1.4)

$$\mathcal{F}(u) = \int_0^1 (u'(x)^2 - 1)^2\, dx,$$

hat als schwache $\mathcal{F}$-Extremale z.B. die Funktion $u(x) = \frac{1}{2} - |x - \frac{1}{2}|$, die offenbar nicht $\mathcal{C}^2$ ist. Dies ist möglich wegen

$$f_{pp}(x, y, p) = p(3p^2 - 1) \begin{cases} < 0 & : |p| < 1/\sqrt{3} \\ > 0 & : |p| > 1/\sqrt{3} \end{cases}.$$

7 Erdmannsche Gleichung und Eckenbedingungen

Annahme 7.1 *Es sei* $\mathcal{D}_f = G \times \mathbb{R}^{N \times n}$ *mit einer offenen Menge* $G \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^N$ *und* f *erfülle Annahme* 4.1. *Es sei* $u \in \Lambda^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$ *und es gebe ein* $\varepsilon > 0$ *mit*

$$\{(x, y, p) \mid x \in \Omega \text{ und } |y - u(x)| < \varepsilon\} \subset \mathcal{D}_f.$$

Unter dieser Annahme läßt sich das Variationsintegral $\mathcal{F}$ mit Lagrange-Funktion f definieren auf der Menge

$$U = \{v \in \Lambda^1(\Omega, \mathbb{R}^N) \mid \|u - v\|_{L^\infty(\Omega,\mathbb{R}^N)} < \varepsilon\}$$

und es ist $V^1(\mathcal{F}, u) = V^2(\mathcal{F}, u) = \Lambda^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$. Dies sieht man wie in Satz 4.3.

Definition 7.2 *Es gelte die Annahme* 7.1*. Dann hat* u *die* <u>*starke Minimaleigenschaft*</u> *bzgl.* $\mathcal{F}$*, falls es ein* $\delta > 0$ *gibt mit*

$$\mathcal{F}(u) \leq \mathcal{F}(u + h) \qquad \forall\, h \in \mathcal{C}^\infty_{\text{comp}}(\Omega, \mathbb{R}^N) \text{ mit } \|h\|_{L^\infty(\Omega,\mathbb{R}^N)} < \delta.$$

Analog führt man die starke Maximal- bzw. Extremaleigenschaft ein.

Lemma 7.3 *Es gelte Annahme* 7.1 *und* u *habe die starke Minimaleigenschaft bzgl.* $\mathcal{F}$*. Dann gibt es ein* $\varepsilon > 0$ *derart, daß*

$$\mathcal{F}(u) \leq \mathcal{F}(u + h) \qquad \forall\, h \in \Lambda^1_{\text{comp}}(\Omega, \mathbb{R}^N) \text{ mit } \|h\|_{L^\infty(\Omega,\mathbb{R}^N)} < \delta.$$

Beweis: Es sei $h \in \Lambda^1_{\text{comp}}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ mit $\|h\|_\infty < \delta$ vorgegeben. Für ein (kleines) $\varepsilon_0 > 0$ ist

$$h_\varepsilon := h * \varrho_\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty_{\text{comp}}(\Omega, \mathbb{R}^N) \qquad \forall\, 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$$

und $\|h_\varepsilon - h\|_\infty \xrightarrow{\varepsilon \to 0} 0$. Nach Satz über die dominierte Konvergenz ist f.f.a. $x \in \Omega$

$$\frac{\partial h_\varepsilon}{\partial x_j}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial h}{\partial x_j}(x - y)\varrho_\varepsilon(y)\, dy = \left(\frac{\partial h}{\partial x_j}\right)_\varepsilon(x).$$

Nach Sätzen über die Faltung ist $\left(\frac{\partial h}{\partial x_j}\right)_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \to 0} \frac{\partial h}{\partial x_j}$ in $L_1(\Omega, \mathbb{R}^N)$. Es gibt also eine Nullfolge $\varepsilon_j \to 0$ mit $Dh_{\varepsilon_j}(x) \xrightarrow{j \to \infty} Dh(x)$ f.ü. in Ω. Wegen $\|Dh_\varepsilon\|_\infty \leq \|Dh\|_\infty$ [25] ist

$$\{(x, (u + h_\varepsilon)(x), (u + h_\varepsilon)(x) \mid x \in \Omega,\, 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0\}$$

eine beschränkte Teilmenge von D_f. Also folgt mit dem Satz über dominierte Konvergenz[26], daß

$$\mathcal{F}(u + h) \xleftarrow{j \to \infty} \mathcal{F}(u + h_{\varepsilon_j}) \geq \mathcal{F}(u),$$

wobei '$\geq$' für hinreichend große j gilt, wegen der starken Minimaleigenschaft von u. ∎

Beispiel 7.4 Betrachte auf $\Lambda^1(]-1, 2[)$ das Funktional

$$\mathcal{F}(u) = \int_{-1}^{2} u'(x)^2 + u'(x)^3\, dx.$$

[25] beachte dazu, daß $\|\varrho_\varepsilon\|_{L^1} = 1$ für alle ε

[26] und Annahme 4.1

Jedes $u_\lambda(x) := \lambda x$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$ ist eine schwache $\mathcal{F}$-Extremale. Für $h \in \mathcal{C}^\infty_{\text{comp}}(]-1,2[)$ ist

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(u_\lambda + h) &= \int_{-1}^{2} (\lambda + h'(x))^2 + (\lambda + h'(x))^3 \, dx \\ &= \mathcal{F}(u_\lambda) + \int_{-1}^{2} (1 + 3\lambda + h'(x)) h'(x)^2 \, dx.\end{aligned}$$

Also hat u_λ die schwache Minimal[Maximal]eigenschaft, falls $1 + 3\lambda > 0$ $[1 + 3\lambda < 0]$. Jedoch hat u_λ nie die starke Extremaleigenschaft: Setze

$$h_{\varepsilon,\alpha}(x) = \varepsilon \begin{cases} x/\alpha & : 0 \le x \le \alpha \\ (1-x)/(1-\alpha) & : \alpha \le x \le 1 \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases}, \qquad \text{mit } \varepsilon > 0,\ 0 < \alpha < 1.$$

Dann ist $h_{\varepsilon,\alpha} \in \Lambda^1_{\text{comp}}(]-1,2[)$ mit $\|h_{\varepsilon,\alpha}\|_\infty = \varepsilon$ und man berechnet

$$\mathcal{F}(u_\lambda + h_{\varepsilon,\alpha}) - \mathcal{F}(u_\lambda) =$$
$$\left(\lambda + \tfrac{\varepsilon}{\alpha}\right)^2 ((1+\lambda)\alpha + \varepsilon)) + \left(\lambda - \tfrac{\varepsilon}{1-\alpha}\right)^2 ((1+\lambda)(1-\alpha) - \varepsilon)) \longrightarrow \begin{cases} -\infty & : \alpha \to 1 \\ \infty & : \alpha \to 0 \end{cases}.$$

Satz 7.5 *Es sei* $\Omega = \,]a,b[$ *und* $x_0 \in \,]a,b[$. *Es gelte Annahme* 7.1 *und* u *habe die starke Extremaleigenschaft bzgl.* $\mathcal{F}$. *Mit geeigneten* $c, c' \in \mathbb{R}^N$ *erfüllt dann* u *die Du-Bois Reymondsche Gleichung*

$$(\nabla_p f)(x, u(x), u'(x)) = c + \int_{x_0}^{x} (\nabla_y f)(t, u(t), u'(t)) \, dt$$

sowie die Erdmannsche Gleichung

$$f(x, u(x), u'(x)) - (\nabla_p f)(x, u(x), u'(x)) u'(x) = c' + \int_{x_0}^{x} f_x(t, u(t), u'(t)) \, dt$$

für fast $x \in \,]a,b[$. *Insbesondere gilt: Ist* $f = f(y,p)$ *unabhängig von* x, *so ist*

$$f(u(x), u'(x)) - (\nabla_p f)(u(x), u'(x)) u'(x) = c'$$

fast überall, vgl. Beispiel 5.11.b).

Beweis: Es sei $\varphi \in \mathcal{C}^\infty_{\text{comp}}(]a,b[)$ und

$$\tau_\theta(x) := x + \theta\varphi(x) \qquad \text{für } x \in [a,b] \text{ und } |\theta| < (1 + \|\varphi'\|_\infty)^{-1}.$$

Dann ist $\tau_\theta(x) = x$ für $x \notin \operatorname{supp} \varphi$ und

$$\tau'_\theta(x) = 1 + \theta\varphi'(x) \ge 1 - |\theta| \, \|\varphi'\|_\infty > 0 \qquad \forall\, a \le x \le b.$$

Also ist $\tau_\theta : [a,b] \to [a,b]$ ein $\mathcal{C}^\infty$-Diffeomorphismus. Somit gilt

$$u_\theta := u \circ \tau_\theta^{-1} \ \in\ \Lambda^1(]a,b[, \mathbb{R}^N), \qquad h_\theta := u_\theta - u \ \in\ \Lambda^1_{\text{comp}}(]a,b[, \mathbb{R}^N).$$

Für $\varepsilon > 0$ aus Lemma 7.3 ist außerdem

$$\|h_\theta\|_\infty \le \|u\|_{\Lambda^1} \sup_{y\in[a,b]} |\tau_\theta^{-1}(y) - y| = \|u\|_{\Lambda^1} \sup_{x\in[a,b]} |x - \tau_\theta(x)| = \|u\|_{\Lambda^1} \|\varphi\|_\infty |\theta| < \varepsilon$$

für alle $|\theta| < \varepsilon(1 + \|u\|_{\Lambda^1}\|\varphi\|_\infty)^{-1} =: \theta_0$. Also

$$\mathcal{F}(u) \le \mathcal{F}(u + h_\theta) = \mathcal{F}(u_\theta) \qquad \forall\ |\theta| < \theta_0. \tag{7.1}$$

Es ist

$$u_\theta'(x) = u'(\tau_\theta^{-1}(x)) \frac{d\tau_\theta^{-1}}{dx}(x) = \frac{u'(\tau_\theta^{-1}(x))}{1 + \theta\varphi'(\tau_\theta^{-1}(x))}$$

also, nach der Variablentransformation $y = \tau_\theta^{-1}(x)$,

$$\mathcal{F}(u_\theta) = \int_a^b f(x, u(\tau_\theta(x)), u_\theta'(x))\, dx = \int_a^b f\Big(y + \theta\varphi(y), u(y), \frac{u'(y)}{1 + \theta\varphi'(y)}\Big)(1 + \theta\varphi'(y))\, dy.$$

Zusammen mit (7.1) folgt

$$0 = \frac{d}{d\theta}\Big|_{\theta=0} \mathcal{F}(u_\theta) = \int_a^b f_x(x, u, u')\varphi + \big(f(x, u, u') - (\nabla_p f)(x, u, u')u'\big)\, \varphi'\, dx$$

und nach partieller Integration[27]

$$\int_a^b \Big(- \int_{x_0}^x f_x(t, u, u')\, dt + (f(x, u, u') - (\nabla_p f)(x, u, u')u' \Big)\varphi'\, dx.$$

Da dies für jedes $\varphi \in \mathcal{C}^\infty_{\mathrm{comp}}(]a, b[)$ gilt, folgt die Behauptung aus Satz 5.4. ∎

Satz 7.6 (Erdmannsche Eckenbedingungen) *Es sei* $\Omega =]a, b[$ *und es gelte Annahme 7.1. u besitze die starke Extremaleigenschaft bzgl. $\mathcal{F}$ und sei stückweise stetig differenzierbar*[28]*. Dann gilt für jedes* $x_0 \in]a, b[$

$$\lim_{x\to x_0-0} (\nabla_p f)(x, u(x), u'(x)) = \lim_{x\to x_0+0} (\nabla_p f)(x, u(x), u'(x))$$

sowie

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0-0} &f(x, u(x), u'(x)) - (\nabla_p f)(x, u(x), u'(x))u'(x) = \\ &= \lim_{x\to x_0+0} f(x, u(x), u'(x)) - (\nabla_p f)(x, u(x), u'(x))u'(x).\end{aligned}$$

Beweis: Folgt sofort aus den Formeln in Satz 7.5, da dort die Funktionen auf den rechten Seiten stetig auf $]a, b[$ sind. ∎

[27] vgl. den Beweis von Satz 5.12

[28] D.h., u ist stetig auf $[a, b]$ und es gibt eine Zerlegung $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = b$ derart, daß $u|_{[t_{j-1}, t_j]} \in \mathcal{C}^1([t_{j-1}, t_j], \mathbb{R}^N)$ für alle $j = 1, \ldots, m$.

8 Die Bedingung von Legendre-Hadamard

Satz 8.1 *Es gelte die Annahme* 5.5 *und es sei*

$$\delta^2\mathcal{F}(u,h) \geq 0 \qquad \forall\, h \in \mathcal{C}^\infty_{\text{comp}}(\Omega,\mathbb{R}^N)\ ^{29}.$$

Dann erfüllt u die Legendre-Hadamard-Bedingung

$$\sum_{i,k=1}^N \sum_{\mu,\nu=1}^n f_{p^i_\mu p^k_\nu}(x_0,u(x_0),Du(x_0))\xi_i\xi_k\eta_\mu\eta_\nu \geq 0 \qquad \forall\,\xi\in\mathbb{R}^N \quad \forall\,\eta\in\mathbb{R}^n$$

in jedem Punkt $x_0 \in \Omega$, in dem Du stetig ist[30].

Beweis: Nach Satz 4.3 haben wir

$$\delta^2\mathcal{F}(u,h) = \int_\Omega \sum_{i,k=1}^N \Big(a^{ik}h_ih_k + \sum_{\nu=1}^n b^{ik}_\nu h_i\frac{\partial h_k}{\partial x_\nu} + \sum_{\mu,\nu=1}^n c^{ik}_{\mu\nu}\frac{\partial h_i}{\partial x_\mu}\frac{\partial h_k}{\partial x_\nu}\Big)\,dx$$

mit den $L_1(\Omega)$-Funktionen

$$\begin{aligned} a^{ik}(x) &:= f_{y_iy_k}(x,u(x),Du(x)),\\ b^{ik}_\nu(x) &:= 2f_{y_ip^k_\nu}(x,u(x),Du(x)),\\ c^{ik}_{\mu\nu}(x) &:= f_{p^i_kp^k_\nu}(x,u(x),Du(x)). \end{aligned}$$

OBdA[31] nehmen wir an, daß $x_0 = 0$. Es sei $V := U_\varepsilon(0) \subset \Omega$ für $\varepsilon > 0$. Für $h \in \mathcal{C}^\infty_{\text{comp}}(V,\mathbb{R}^N)$ setze

$$h_\lambda(x) = \lambda^{1-\frac{n}{2}}h(x/\lambda) \in \mathcal{C}^\infty_{\text{comp}}(V,\mathbb{R}^N), \qquad 0<\lambda<1.$$

Aus $\delta^2\mathcal{F}(u,h_\lambda)\geq 0$ und der Variablentransformation $x=\lambda y$ folgt

$$\int_\Omega \sum_{i,k=1}^N \Big(\lambda^2a^{ik}(\lambda y)h_ih_k + \lambda\sum_{\nu=1}^n b^{ik}_\nu(\lambda y)h_i\frac{\partial h_k}{\partial x_\nu} + \sum_{\mu,\nu=1}^n c^{ik}_{\mu\nu}(\lambda y)\frac{\partial h_i}{\partial x_\mu}\frac{\partial h_k}{\partial x_\nu}\Big)\,dy \geq 0$$

und mit $\lambda\to 0$ erhält man

$$\int_\Omega \sum_{i,k=1}^N\sum_{\mu,\nu=1}^n c^{ik}_{\mu\nu}(0)\frac{\partial h_i}{\partial x_\mu}\frac{\partial h_k}{\partial x_\nu}\,dx \geq 0 \qquad \forall\,h\in\mathcal{C}^\infty_{\text{comp}}(V,\mathbb{R}^N).$$

Wegen $c^{ik}_{\mu\nu} = c^{ki}_{\nu\mu}$ gilt für jedes $z^i_\mu = \alpha^i_\mu + \sqrt{-1}\beta^i_\mu \in \mathbb{C}$

$$\sum_{i,k=1}^N\sum_{\mu,\nu=1}^n c^{ik}_{\mu\nu}(0)z^i_\mu\overline{z^k_\mu} = \sum_{i,k=1}^N\sum_{\mu,\nu=1}^n c^{ik}_{\mu\nu}(0)\alpha^i_\mu + \alpha^k_\nu + \sum_{i,k=1}^N\sum_{\mu,\nu=1}^n c^{ik}_{\mu\nu}(0)\beta^i_\mu + \beta^k_\nu.$$

[29] Dies gilt z.B. wenn u die schwache Minimaleigenschaft bzgl. $\mathcal{F}$ hat.
[30] d.h. es gibt ein in x_0 stetiges g mit $g = Du$ fast überall in Ω.
[31] nach Translation des $\mathbb{R}^n$

Es folgt

$$\int_\Omega \sum_{i,k=1}^{N} \sum_{\mu,\nu=1}^{n} c_{\mu\nu}^{ik}(0) \frac{\partial h_i}{\partial x_\mu} \overline{\frac{\partial h_k}{\partial x_\nu}}\, dx \geq 0 \qquad \forall\, h \in \mathcal{C}^\infty_{\mathrm{comp}}(V, \mathbb{C}^N).$$

Setze hier nun speziell $h(x) = t^-1\varphi(x)e^{it\langle x,\eta\rangle}\xi$ ein, wobei $\varphi \in \mathcal{C}^\infty_{\mathrm{comp}}(V)$ und $t > 0$:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_\Omega \sum_{i,k=1}^{N} \sum_{\mu,\nu=1}^{n} c_{\mu\nu}^{ik}(0)\xi_i\xi_k \Big(t^{-2}\frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu}\frac{\partial\varphi}{\partial x_\nu} + \varphi^2\eta_\mu\eta_\nu\Big)\, dx \\ &\xrightarrow{t\to\infty} \Big(\int_\Omega \varphi^2\, dx\Big) \sum_{i,k=1}^{N} \sum_{\mu,\nu=1}^{n} c_{\mu\nu}^{ik}(0)\xi_i\xi_k\eta_\mu\eta_\nu. \end{aligned}$$

Durch Wahl von φ mit $\displaystyle\int \varphi^2\, dx > 0$ folgt die Behauptung. ■

Definition 8.2 *Ein $u \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$ erfüllt die strikte Legendre-Hadamard-Bedingung, falls es ein $L > 0$ gibt mit*

$$\textbf{(sLH)} \qquad \begin{cases} \displaystyle\sum_{i,k=1}^{N} \sum_{\mu,\nu=1}^{n} f_{p_\mu^i p_\nu^k}(x, u(x), Du(x))\xi_i\xi_k\eta_\mu\eta_\nu \geq L|\xi|^2|\eta|^2 \\ \textit{für alle } x \in \Omega,\ \xi \in \mathbb{R}^N \textit{ und } \eta \in \mathbb{R}^n \end{cases} .$$

Für den folgenden Satz machen wir folgende Annahme:

Annahme 8.3 *f genüge der Annahme* 4.1 *und zu $u \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ gebe es ein $\varepsilon > 0$ mit*

$$\{(x, y, p) \mid x \in \overline{\Omega},\ |y - u(x)| + |p - Du(x)| < \varepsilon\} \subset \mathcal{D}_f.$$

Dann läßt sich das Variationsintegral $\mathcal{F}$ mit der Lagrange-Funktion f definieren auf der Menge

$$\{v \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N) \mid \|u - v\|_{L^\infty(\Omega,\mathbb{R}^N)} + \|Du - Dv\|_{L^\infty(\Omega,\mathbb{R}^{N\times n})} < \varepsilon\}.$$

Satz 8.4 *Es sei $n = 1$ oder $N = 1$ und $f = f(x, p)$ unabhängig von y. Weiterhin genüge $u \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ der strikten Legendre-Hadamard-Bedingung* **(sLH)** *und der Annahme* 8.3. *Dann gibt es ein $\delta > 0$ mit*

$$\mathcal{F}(u) \leq \mathcal{F}(u + h) \qquad \forall\, h \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N) \textit{ mit } \|h\|_\infty + \|Dh\|_\infty < \delta \textit{ und } \delta\mathcal{F}(u, h) = 0.$$

Beweis: $N = 1$: Für $\delta < \varepsilon$ ist $\varphi(\theta) := \mathcal{F}(u + \theta h) \in \mathcal{C}^2([-1, 1])$[32]. Wegen $\varphi'(0) = \delta\mathcal{F}(u, h) = 0$ ist

$$\mathcal{F}(u + h) = \varphi(1) = \varphi(0) + \int_0^1 \varphi'(t)\, dt = \mathcal{F}(u) + \int_0^1 \int_0^t \varphi''(s)\, ds.$$

[32]beachte Satz 4.3

Nach Satz 4.3 ist

$$\begin{aligned}\varphi''(s) = \delta^2\mathcal{F}(u+sh,h) &= \int_\Omega \sum_{\mu,\nu=1}^{n} f_{p_\mu^i p_\nu^k}(x,\nabla u(x)+s\nabla h(x))\frac{\partial h}{\partial x_\mu}\frac{\partial h}{\partial x_\nu}\,dx \\ &\geq \int_\Omega (L-K_h(s,x))|\nabla h(x)|^2\,dx\end{aligned} \tag{8.1}$$

mit

$$K_h(s,x) = \sum_{\mu,\nu=1}^{n} \left| f_{p_\mu^i p_\nu^k}(x,\nabla u(x)+s\nabla h(x)) - f_{p_\mu^i p_\nu^k}(x,\nabla u(x))\right|.$$

Da f gleichmäßig stetig ist auf dem Kompaktum

$$\{(x,p) \mid x\in\overline{\Omega},\ |u(x)-p|\leq\varepsilon/2\},$$

ist $L-K_h(s,x)\geq 0$ für alle $0\leq s\leq 1$ und $x\in\Omega$, falls δ klein genug gewählt ist. Es folgt die Behauptung.

<u>$n=1$:</u> Geht absolut analog. ■

Folgerung 8.5 *Es sei $u\in\mathcal{C}^1(\overline{\Omega},\mathbb{R}^N)$ und die Voraussetzungen wie in Satz 8.4. Dann gilt:*

$$u \text{ ist schwache } \mathcal{F}\text{-Extremale} \iff u \text{ hat die schwache Minimaleigenschaft bzgl. } \mathcal{F}.$$

Beispiel 8.6 Die Aussage von Satz 8.4 stimmt im allgemeinen nicht, falls f von y abhängt, wie etwa bei

$$\mathcal{F}(u) = \int_0^{2\pi} u'(x)^2 - u(x)^2\,dx.$$

Dann ist $f(y,p)=p^2-y^2$, also $f_{pp}(u(x),u'(x))=2>0$, d.h. die strikte Legedre-Hadamard-Bedingung gilt. Andererseits ist $\delta^2\mathcal{F}(u,h)=2\mathcal{F}(h)$ für alle u und somit $\delta^2\mathcal{F}(u,h)<0$ für zum Beispiel $h(x)=\sin x$.

9 Schwache Minimalstellen und die Jacobi-Bedingung

In diesem Abschnitt betrachten wir Variationsintegrale der Form

$$\mathcal{F}(v) = \int_a^b f(x,v(x),v'(x))\,dx, \qquad v\in\mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{R}^N).$$

Annahme 9.1 *Annahme 4.1 sei erfüllt von f und zu $u\in\mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{R}^N)$ gebe es ein $\varepsilon>0$ mit*

$$\{(x,y,p) \mid x\in[a,b],\ |y-u(x)|+|p-u'(x)|<\varepsilon\}\subset\mathcal{D}_f.$$

Unter dieser Annahme, die ab jetzt gelte, kann man das Variationsintegral $\mathcal{F}$ mit Lagrange-Funktion f betrachten auf der Menge

$$\{v\in\mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{R}^N) \mid \|u-v\|_\infty+\|u'-v'\|_\infty<\varepsilon\}.$$

Definition 9.2 *Es gelte Annahme* 9.1. *u heißt <u>schwach $\mathcal{F}$-minimal</u>, falls es ein $\delta > 0$ gibt mit*

$$\mathcal{F}(u) \le \mathcal{F}(u+h) \qquad \forall\, h \in \mathcal{C}_0^1([a,b],\mathbb{R}^N) \text{ mit } \|h\|_\infty < +\|h'\|_\infty < \delta,$$

wobei

$$\mathcal{C}_0^1([a,b],\mathbb{R}^N) := \{h \in \mathcal{C}_0^1([a,b],\mathbb{R}^N) \mid h(a) = h(b) = 0\}.$$

Lemma 9.3 *Ist u schwach $\mathcal{F}$-minimal, so gelten:*

(V1) $\delta\mathcal{F}(u,h) = 0$ *für alle* $h \in \mathcal{C}_0^1([a,b],\mathbb{R}^N)$

(V2) $\delta\mathcal{F}^2(u,h) \ge 0$ *für alle* $h \in \mathcal{C}_0^1([a,b],\mathbb{R}^N)$

(LH) $(\nabla_p^2 f)(x,u(x),u'(x))$ *ist positiv semi-definit für alle* $x \in [a,b]$.

Definition 9.4 *Das <u>akzessorische Integral</u> $\mathcal{F}^a$ zu $\mathcal{F}$ bzgl. u ist das Variationsintegral*

$$h \mapsto \mathcal{F}^a(h) := \delta^2\mathcal{F}(u,h) \overset{4.3}{=} \int_a^b f^a(x,h(x),h'(x))\,dx$$

mit der Lagrange-Funktion

$$f^a(x,y,p) = \langle A_{yy}(x)y,y\rangle + 2\langle A_{yp}(x)p,y\rangle + \langle A_{pp}(x)p,p\rangle,$$

wobei die $N \times N$-Matrizen $A_{yy}(x)$, $A_{yp}(x)$ bzw. $A_{pp}(x)$ folgende Einträge haben:

$$\begin{aligned} A_{y^iy^k}(x) &= f_{y^iy^k}(x,u(x),u'(x)),\\ A_{y^ip^k}(x) &= f_{y^ip^k}(x,u(x),u'(x)),\\ A_{p^ip^k}(x) &= f_{p^ip^k}(x,u(x),u'(x)) \end{aligned}$$

mit Zeilenindex i und Spaltenindex k.

Definition 9.5 *Ein <u>Jacobi-Feld</u> längs u ist eine Funktion $\varphi \in \mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{R}^N)$ derart, daß*

$$\psi := A_{py}\varphi + A_{pp}\varphi' \in \mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{R}^N) \text{ und } \psi' - A_{yy}\varphi - A_{yp}\varphi' \equiv 0 \text{ auf } [a,b],$$

wobei $A_{py} := A_{yp}^t$. Kurzfassung: φ erfüllt die Euler-Gleichung von $\mathcal{F}^a$ [33]*, d.h.*

$$0 = -L_{f^a}(\varphi) = \frac{d}{dx}(A_{py}\varphi + A_{pp}\varphi') - A_{yy}\varphi - A_{yp}\varphi'. \tag{9.1}$$

(9.1) *heißt auch die <u>Jacobi-Gleichung</u> von $\mathcal{F}$ bzgl. u.*

Bemerkung 9.6 Ist A_{pp} invertierbar, so ist Definition 9.5 äquivalent zur Forderung, daß (φ,ψ) eine Lösung des folgenden linearen Systems erster Ordnung ist:

$$\varphi' = A_{pp}^{-1}\psi - A_{pp}^{-1}A_{py}\varphi, \qquad \psi' = (A_{yy} - A_{yp}A_{pp}^{-1}A_{py})\varphi + A_{yp}A_{pp}^{-1}\psi.$$

Insbesondere existiert dann ein Jacobi-Feld.

[33] vgl. (5.1)

Definition 9.7 *a) Ein Punkt* $\widetilde{a} \in \,]a,b]$ *heißt* *konjugiert zu a* *(bzgl.* $\mathcal{F}$ *und* u*), wenn es ein Jacobi-Feld* $0 \neq \varphi \in \mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{R}^N)$ *längs* u *gibt mit* $\varphi(a) = \varphi(\widetilde{a}) = 0$.

b) Die *Jabobi-Bedingung* *an* u *bzw.* $\mathcal{F}^a$ *lautet*

(J) *Es gibt keinen zu* a *konjugierten Punkt in* $]a,b[$.

Die *strikte Jabobi-Bedingung* *an* u *bzw.* $\mathcal{F}^a$ *lautet*

(sJ) *Es gibt keinen zu* a *konjugierten Punkt in* $]a,b]$.

Satz 9.8 *u erfülle die strikte Legendre-Hadamard-Bedingung*

(sLH) $A_{pp}(x) = (\nabla_p^2 f)(x,u(x),u'(x))$ *ist positiv definit für alle* $x \in [a,b]$.

Dann gelten:

a) Ist $\mathcal{F}^a(h) \geq 0$ *für alle* $h \in \mathcal{C}_0^1([a,b],\mathbb{R}^N)$*, so gilt* **(J)**.

b) Ist $\mathcal{F}^a(h) > 0$ *für alle* $0 \neq h \in \mathcal{C}_0^1([a,b],\mathbb{R}^N)$*, so gilt* **(sJ)**[34].

Beweis: Es gebe ein Jacobi-Feld $\varphi \not\equiv 0$ mit $\varphi(\widetilde{a}) = 0$ für ein $a < \widetilde{a} \leq b$. Dann ist

$$h_0(x) := \begin{cases} \varphi(x) & : a \leq x \leq \widetilde{a} \\ 0 & : \widetilde{a} \leq x \leq b \end{cases}$$

stückweise $\mathcal{C}^1$ auf $[a,b]$. Für $a \leq x \leq \widetilde{a}$ gilt

$$f^a(x,h_0,h_0') = \langle A_{yy}\varphi,\varphi\rangle + 2\langle A_{yp}\varphi',\varphi\rangle + \langle A_{pp}\varphi',\varphi'\rangle = \langle A_{yy}\varphi + A_{yp}\varphi',\varphi\rangle + \langle A_{py}\varphi + A_{pp}\varphi',\varphi'\rangle.$$

Mit partieller Integration folgt

$$\int_a^{\widetilde{a}} \langle A_{py}\varphi + A_{pp}\varphi',\varphi'\rangle\,dx = \underbrace{\langle A_{py}\varphi + A_{pp}\varphi',\varphi\rangle\Big|_{x=a}^{x=\widetilde{a}}}_{=0,\text{ da }\varphi(a)=\varphi(\widetilde{a})=0.} - \int_a^{\widetilde{a}} \langle \tfrac{d}{dx}(A_{py}\varphi + A_{pp}\varphi'),\varphi\rangle\,dx.$$

Es folgt

$$\mathcal{F}^a(h_0) = \int_a^{\widetilde{a}} \langle A_{yy}\varphi + A_{yp}\varphi' - \tfrac{d}{dx}(A_{py}\varphi + A_{pp}\varphi'),\varphi\rangle\,dx = \int_a^{\widetilde{a}} \langle L_{f^a}(\varphi),\varphi\rangle\,dx = 0.$$

a) Wir nehmen an, daß oben $a < \widetilde{a} < b$ ist. Angenommen

$$0 = \mathcal{F}^a(h_0) \leq \mathcal{F}^a(h_0 + g) \qquad \forall\, g \in \mathcal{C}^\infty_{\text{comp}}(]a,b[,\mathbb{R}^N).$$

Nach Satz 7.6 erfüllt h_0 die (erste) Erdmannsche Eckenbedingung, d.h.

$$(\nabla_p f^a)(x,h(x),h'(x)) = A_{py}(x)h(x) + A_{pp}(x)h'(x)$$

[34] Der Beweis zeigt: Ohne Annahme von **(sLH)** folgt aus $\mathcal{F}^a(h) > 0$ für alle $0 \neq h \in \mathcal{C}_0^1([a,b],\mathbb{R}^N)$, daß b nicht konjugiert zu a ist.

ist stetig auf $[a,b]$[35]. Da A_{pp}^{-1} stetig ist dann h_0' stetig und somit $\varphi'(\widetilde{a}) = 0$. Mit der Notation aus Definition 9.5 ist daher $\psi(\widetilde{a}) = \varphi(\widetilde{a}) = 0$ und mit Bemerkung 9.6 folgt $\varphi \equiv \psi \equiv 0$, was der Annahme $\varphi \not\equiv 0$ widerspricht.

Also gibt es ein auf $[a,b]$ stückweise stetig differenzierbares $\widetilde{h}$ mit $\widetilde{h}(a) = \widetilde{h}(b) = 0$ und $\mathcal{F}^a(\widetilde{h}) < 0$. Durch „Abrunden der Ecken“[36] von $\widetilde{h}$ findet man ein $h \in \mathcal{C}_0^1([a,b],\mathbb{R}^N)$ mit $\mathcal{F}^a(h) < 0$. Dies steht im Widerspruch zur Annahme.

b) Wäre b konjugiert zu a, so können wir oben $\widetilde{a} = b$ wählen. Dann ist $h_0 = \varphi \in \mathcal{C}_0^1([a,b],\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}$ und $\mathcal{F}^a(h_0) = 0$. Widerspruch. ■

Folgerung 9.9 *Ist u schwach $\mathcal{F}$-minimal und gilt* **(sLH)**[37]*, so gilt* **(J)**.

Beispiel 9.10 Das akzessorische Integral für das Funktional

$$\mathcal{F}(u) = \frac{1}{2}\int_0^b u'(x)^2 - u(x)^2\,dx \qquad (N=1)$$

ist unabhängig von u, nämlich

$$\mathcal{F}^a(h) = \delta^2\mathcal{F}(u,h) = \int_0^b h'(x)^2 - h(x)^2\,dx = 2\mathcal{F}(h).$$

Also ist $A_{yy} = -1$, $A_{yp} = A_{py} = 0$ und $A_{pp} = 1 > 0$. Insbesondere ist **(sLH)** erfüllt und die Jacobi-Gleichung ist

$$0 = -L_{f^a}(\varphi) = \tfrac{d}{dx}(\varphi') + \varphi = \varphi'' + \varphi.$$

Diese hat als allgemeine Lösung

$$\varphi(x) = \alpha\sin x + \beta\cos x, \qquad \alpha,\beta \in \mathbb{R}.$$

Die Lösungen $\varphi \not\equiv 0$ mit $\varphi(0) = 0$ sind also gerade

$$\varphi(x) = \alpha\sin x, \qquad 0 \neq \alpha \in \mathbb{R}.$$

Der kleinste zu $a = 0$ konjugierte Punkt ist also $\widetilde{a} = \pi$.

$b > [=]\pi$: Dann ist **(J)** [**(sJ)**]nicht erfüllt und es muß ein $h \in \mathcal{C}_0^1([0,b])$ mit $\mathcal{F}^a(h) < [\leq]0$ geben. Für $h(x) := \sin\frac{\pi x}{b}$ ist

$$\mathcal{F}^a(h) = \int_0^\pi \frac{\pi}{b}\cos^2 x - \frac{b}{\pi}\sin^2 x\,dx = \left(\frac{\pi}{b} - \frac{b}{\pi}\right)\frac{\pi}{2}.$$

$0 < b < \pi$: Für genügend kleines $\beta > 0$ ist

$$\varphi(x) := \sin x + \beta\cos x \neq 0 \qquad \forall\, 0 \leq x \leq b.$$

[35]Beachte, daß die erste Erdmannsche Eckenbedingung schon aus der Du Bois-Reymondschen Gleichung folgt. Für diese muß die Lagrange-Funktion nicht bzgl. x differenzierbar sein, sondern nur stetig!

[36]siehe Handout

[37]insbesondere ist dann $u \in \mathcal{C}^2(]a,b[,\mathbb{R}^N)$ nach Satz 6.4

Dann löst $r := \frac{\varphi'}{\varphi}$ die Riccati-Gleichung $r' + 1 + r^2 = 0$ auf $[0,b]$ und für jedes $h \in \mathcal{C}_0^1([0,b])$ folgt

$$h'^2 - h^2 - (rh')^2 = h'^2 - h^2 - r'h^2 - 2rhh' = h'^2 + r^2h^2 - 2rhh' = (h' - rh)^2$$

und somit

$$\mathcal{F}^a(h) = \int_0^b h'^2 - h^2 - (rh^2)'\,dx = \int_0^b (h' - rh)^2\,dx \geq 0.$$

Bedingung **(V2)** (welche notwendig ist für die schwache Minimalität einer schwachen $\mathcal{F}$-Extremalen u) ist also erfüllt.

Lemma 9.11 *Es gebe ein $S \in \mathcal{C}^1([a,b] \times \mathbb{R}^N)$ und ein $\delta > 0$ derart, daß*

$$\begin{aligned} f(x,u(x),&u'(x)) - S_x(x,u(x)) - (\nabla_y S)(x,u(x))u'(x) \\ &\leq f(x,y,p) - S_x(x,y) - (\nabla_y S)(x,y)p \end{aligned} \tag{9.2}$$

für alle

$$(x,y,p) \in [a,b] \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \ \text{mit}\ |y - u(x)| + |p - u'(x)| < \delta.$$

Dann ist

$$\mathcal{F}(u) \leq \mathcal{F}(u+h) \qquad \forall\, 0 \neq h \in \mathcal{C}_0^1([a,b],\mathbb{R}^N)\ \text{mit}\ \|h\|_\infty + \|h'\|_\infty < \delta.$$

Es gilt sogar „<“, falls in (9.2) *„<“ gilt wann immer $y \neq u(x)$.*

Beweis: Setze $v := u + h$. Aus (9.2) folgt

$$f(x,u(x),u'(x)) - \frac{d}{dx}S(x,u(x)) \leq f(x,v(x),v'(x)) - \frac{d}{dx}S(x,v(x)) \qquad \forall\, x \in [a,b],$$

falls $\|h\|_\infty + \|h'\|_\infty < \delta$. Unter der Zusatzannahme gilt „<“ auf einem offenen Teilintervall, falls $h \neq 0$. Integration liefert

$$\int_a^b f(x,u(x),u'(x))\,dx - S(x,u(x))\Big|_{x=a}^{x=b} \leq \int_a^b f(x,v(x),v'(x))\,dx - S(x,v(x))\Big|_{x=a}^{x=b}$$

(mit „<“ bei der Zusatzannahme und $h \neq 0$). Aus $u(a) = v(a)$ und $u(b) = v(b)$ folgt die Behjauptung. ∎

Satz 9.12 *Erfüllt u die Bedingungen* **(V1)**, **(sLH)** *und* **(sJ)**, *so gibt es ein $S \in \mathcal{C}^1([a,b] \times \mathbb{R}^N)$, welches den Vorrausetzungen von Lemma* 9.11 *genügt. Dabei gilt in* (9.2) *‘<’, falls $y \neq u(x)$ ist.*

Der Beweis dieses Satzes benötigt etwas Vorbereitung.

Lemma 9.13 *u erfülle* **(sLH)** *und* **(sJ)**. *Definiere $A, B, C \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}^{N\times N})$ durch*

$$A = -A_{pp}^{-1}A_{py}, \qquad B = A_{pp}^{-1}, \qquad C = A_{yy} - A_{yp}A_{pp}^{-1}A_{py}.$$

Ist $0 \leq \alpha$ genügend klein, so gibt es $\Phi, \Psi \in \mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{R}^{N\times N})$ derart, daß

$$\Phi' = A\Phi + B\Psi, \qquad \Psi' = (C + \alpha I)\Phi - A^t\Psi \qquad \text{auf}\ [a,b],[38] \tag{9.3}$$

sowie

[38] Für $\alpha = 0$ ist dies das zur Jacobi-Gleichung gehörige Matrixsystem, vgl. Bemerkung 9.6.

a) $\det \Phi(x) \neq 0$ *für alle* $x \in [a,b]$,

b) $\Phi^t(x)\Psi(x) = \Psi^t(x)\Phi(x)$ *für alle* $x \in [a,b]$.

BEWEIS: Seien (Φ_0, Ψ_0) und (Φ_1, Ψ_1) Lösungen der DGL mit den Anfangswerten

$$(\Phi_0(a), \Psi_0(a)) = (0, B(a)^{-1}), \qquad (\Phi_1(a), \Psi_1(a)) = (I, 0). \tag{9.4}$$

Mit einem zu wählendem $\beta > 0$ definiere dann

$$\Phi = \Phi_0 + \beta\Phi_1, \qquad \Psi = \Psi_0 + \beta\Psi_1.$$

Dann löst (Φ, Ψ) die DGL mit Anfangswert

$$(\Phi(a), \Psi(a)) = (\beta I, B(a)^{-1})$$

und es folgt $\frac{d}{dx}\big(\Phi^t(x)\Psi(x) - \Psi^t(x)\Phi(x)\big) = 0$ für alle $x \in [a,b]$. Wegen $B = B^t$ ist $\Phi^t(a)\Psi(a) - \Psi^t(a)\Phi(a) = 0$. Es folgt b).

<u>Fall $\alpha = 0$:</u> Es ist $\det \Phi_0(x) \neq 0$ für alle $a < x \leq b$.

Andernfalls gäbe es ein $\widetilde{a} \in \,]a,b]$ und $0 \neq \xi \in \mathbb{R}^N$ mit $\Phi_0(\widetilde{a})\xi = 0$. Dann wäre $\varphi(x) := \Phi_0(x)\xi \not\equiv 0$ [39] ein nichttriviales Jacobi-Feld entlang u mit $\varphi(a) = \varphi(\widetilde{a}) = 0$. Somit wäre $\widetilde{a}$ ein zu a konjugierter Punkt. Dies steht im Widerspruch zur Annahme von **(sJ)**.

Aus $\Phi_0(a) = 0$ und $\Phi_0'(a) = \Phi_1(a) = I$ folgt

$$\Phi_0(x) = (x-a)(I + \rho_0(x)), \qquad \Phi_1(x) = I + (x-a)\rho_1(x)$$

mit $\rho_j \in \mathcal{C}([a,b], \mathbb{R}^{N\times N})$, wobei $\lim\limits_{x\to a} \rho_0(x) = 0$. Somit

$$\Phi(x) = \underbrace{(x-a+\beta)}_{>0 \text{ für } \beta>0}\left(I + \frac{x-a}{x-a+\beta}(\rho_0(x) + \beta\rho_1(x))\right).$$

Wähle nun $a < c < b$ mit $\|\rho(x)\| \leq \frac{1}{3}$ auf $[a,c]$. Wähle dann $\beta_0 > 0$ mit

$$\left\|\frac{x-a}{x-a+\beta}(\rho_0(x) + \beta\rho_1(x))\right\| \leq \|\rho_0(x) + \beta\rho_1(x)\| \leq \frac{1}{2} \qquad \forall\, a \leq x \leq c \quad \forall\, 0 < \beta \leq \beta_0.$$

Also

$$\det \Phi(x) \neq 0 \qquad \forall\, a \leq x \leq c \quad \forall\, 0 < \beta \leq \beta_0.$$

Für hinreichend klein gewähltes β ist aber

$$\Phi(x) = \Phi_0^{-1}(x)(I + \underbrace{\beta\Phi_0(x)\Phi_1(x)}_{\|\cdots\|\leq 1/2})$$

auch invertierbar auf $[c,b]$. Also gilt a).

<u>Fall $\alpha > 0$:</u> Sei β wie eben. Das AWP (9.3), (9.4) hängt stetig vom Parameter $\alpha \geq 0$. Also hängt $(\Phi, \Psi) = (\Phi, \Psi)_\alpha$ stetig (bzgl. der sup-norm) von α ab. Also bleibt Φ_α punktweise invertierbar für hinreichend kleine $\alpha > 0$. ■

[39] Wäre $\varphi \equiv 0$, so folgt aus $\Phi_0' = A\Phi_0 + B\Psi_0$ und der Invertierbarkeit von B, daß $\Psi_0\xi \equiv 0$ auf $[a,b]$. Dies steht im Widerspruch zu $\Psi_0(a) = B(a)^{-1}$.

Folgerung 9.14 *u erfülle* **(sLH)** *und* **(sJ)**. *Seien A, B, C wie in Lemma 9.13. Dann gibt es ein $\alpha > 0$ und eine punktweise symmetrische Lösung $R \in \mathcal{C}^1([a,b], \mathbb{R}^{N\times N})$ der Matrix-Riccati-Gleichung*

$$R' + RA + A^t R + RBR - C = -\alpha I \qquad \textit{auf } [a,b].$$

Beweis: Seien (Φ, Ψ) wie in Lemma 9.13 zu einem festen $\alpha > 0$. Setze $R(x) := \Psi(x)\Phi(x)^{-1}$. Aus der DGL (9.3) folgt

$$(C + \alpha I)\Phi - A^t\Psi = \Psi' = (R\Phi)' = R'\Phi + R(A\Phi + B\Psi) \qquad \text{auf } [a,b].$$

Rechtsmultiplikation mit Φ^{-1} und Umsortieren der Terme ergibt die Behauptung. ■

Beweis von Satz 9.12: Mit $\alpha > 0$ und R wie in Folgerung 9.14 setze

$$\begin{aligned}\pi(x) &= (\nabla_p f)(x, u(x), u'(x)),\\ S(x,y) &= \langle \pi(x), y\rangle + \tfrac{1}{2}\big\langle y - u(x), R(x)(y-u(x))\big\rangle.\end{aligned}$$

Aus **(V1)** und Satz 5.12 folgt

$$\pi \in \mathcal{C}^1([a,b], \mathbb{R}^N) \text{ mit } \pi'(x) = (\nabla_y f)(x, u(x), u'(x)).$$

Insbesondere ist $S \in \mathcal{C}^1([a,b] \times \mathbb{R}^N)$.

Nach Annahme 9.1 gibt es ein $\delta_0 > 0$, so daß

$$\begin{aligned}g(x,y,p) =& f(x,y,p) - S_x(x,y) - \langle S_y(x,y), p\rangle\\ =& f(x,y,p) - \big\langle \pi'(x), y\big\rangle + \big\langle u'(x), R(x)(y-u(x))\big\rangle\\ &- \tfrac{1}{2}\big\langle y - u(x), R'(x)(y-u(x))\big\rangle - \big\langle \pi(x) + R(x)(y-u(x)), p\big\rangle\end{aligned}$$

für alle (x,y,p) mit $x \in [a,b]$ und $|y - u(x)| + |p - u'(x)| \le \delta_0$ definiert ist. Wir müssen zeigen, daß es ein $0 < \delta < \delta_0$ gibt mit

$$g(x, u(x), u'(x)) \le g(x,y,p) \qquad \forall\ (x,y,p) \text{ mit } |y-u(x)| + |p - u'(x)| < \delta \tag{9.5}$$

und strikter Ungleichung, falls $y \neq u(x)$. Nach Taylorformel[40] ist

$$\begin{aligned}g(x,y,p) =& g(x,u(x),u'(x)) + (\nabla_{(y,p)}g)(x,u(x),u'(x))h(x,y,p) +\\ &+ \int_0^1 (1-t)\big\langle(\nabla^2_{(y,p)}g)(x, (1-t)u(x) + ty, (1-t)u'(x) + tp)h(x,y,p), h(x,y,p)\big\rangle\, dt,\end{aligned}$$

wobei $h(x,y,p) = (y - u(x), p - u'(x))$. Man rechnet leicht nach, daß

$$\nabla_{(y,p)}g = \big(\nabla_y f - \pi' - R(p-u') - R'(y-u), \nabla_p f - \pi - R(y-u)\big)\,.$$

Also ist $(\nabla_{(y,p)}g)(x,u(x),u'(x)) \equiv 0$ auf $[a,b]$. Mit

$$F_{**}(x) := (\nabla^2_{(*,*)}f)(x,u(x),u'(x)), \qquad G_{**}(x) := (\nabla^2_{(*,*)}g)(x,u(x),u'(x))$$

[40] Beachte, daß g bzgl. (y,p) zweimal stetig differenzierbar ist.

ist außerdem

$$(\nabla^2_{(y,p)}g)(x,u(x),u'(x)) = \begin{pmatrix} G_{yy} & G_{yp} \\ G_{py} & G_{pp} \end{pmatrix}(x) = \begin{pmatrix} F_{yy}-R' & F_{yp}-R \\ F_{py}-R & B^{-1} \end{pmatrix}(x).$$

Nach Folgerung 9.14 ist

$$\begin{aligned} -\alpha I &= R' + RA + A^tR + RBR - C = R' - RBF_{py} - F_{yp}BR + RBR - F_{yy} + F_{yp}BF_{py} \\ &= R' - F_{yy} + (F_{yp}-R)B(F_{py}-R), \end{aligned}$$

und daher

$$G_{yy} = G_{yp}BG_{py} + \alpha I \qquad \text{auf } [a,b].$$

Für beliebige $(\xi,\eta) \in \mathbb{R}^{2N}$ gilt also

$$\begin{aligned} \left\langle \begin{pmatrix} G_{yy} & G_{yp} \\ G_{py} & G_{pp} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \right\rangle &= \langle G_{yy}\xi,\xi\rangle + \langle G_{yp}\eta,\xi\rangle + \langle G_{py}\xi,\eta\rangle + \langle B^{-1}\eta,\eta\rangle \\ &= \langle G_{yp}BG_{py}\xi,\xi\rangle + \alpha|\xi|^2 + \langle G_{yp}\eta,\xi\rangle + \langle G_{py}\xi,\eta\rangle + \langle B^{-1}\eta,\eta\rangle \\ &= \langle B(G_{yp}\xi + B^{-1}\eta), G_{yp}\xi + B^{-1}\eta\rangle + \alpha|\xi|^2 \\ &\geq \beta|G_{yp}\xi + B^{-1}\eta|^2 + \alpha|\xi|^2, \end{aligned}$$

für ein $\beta > 0$[41]. Also ist

$$\big\langle(\nabla^2_{(y,p)}g)(x,u(x),u'(x))h,h\big\rangle > 0 \qquad \forall\, x \in [a,b] \quad \forall\, 0 \neq h \in \mathbb{R}^{2N}.$$

Wegen Stetigkeit gibt es ein $\delta > 0$ mit

$$\big\langle(\nabla^2_{(y,p)}g)(x,y,p)h,h\big\rangle > 0 \qquad \forall\, (x,y,p) \text{ mit } |y-u(x)| + |p-u'(x)| < \delta \quad \forall\, 0 \neq h \in \mathbb{R}^{2N}.$$

Also gilt (9.5) und Satz 9.12 ist bewiesen! ■

Folgerung 9.15 *u erfülle* **(sLH)** *und es sei $\mathcal{F}^a(h) = \delta^2\mathcal{F}(u,h)$. Dann:*

a) *u erfüllt* **(J)** $\iff$ *$\mathcal{F}^a(h) \geq 0$ für alle $h \in \mathcal{C}^1_0([a,b],\mathbb{R}^N)$.*

b) *u erfüllt* **(sJ)** $\iff$ *$\mathcal{F}^a(h) > 0$ für alle $0 \neq h \in \mathcal{C}^1_0([a,b],\mathbb{R}^N)$.*

Beweis: Die Richtungen „$\Leftarrow$“ haben wir schon in Satz 9.8 gezeigt.

b) Man rechnet leicht nach, daß $\delta^2\mathcal{F}^a(0,g) = 2\mathcal{F}^a(g)$ für alle $g \in \mathcal{C}^1_0([a,b],\mathbb{R}^N)$[42]. Die Jacobi-Gleichung von $\mathcal{F}^a$ bzgl. $h=0$ ist also die Euler-Gleichung von $\mathcal{F}^a$ bzgl. u, also die Jacobi-Gleichung von $\mathcal{F}$ bzgl. u. Also gelten **(sLH)** und **(sJ)** für das Funktional $\mathcal{F}^a$. Wegen

$$\mathcal{F}^a(tg) = t^2\mathcal{F}^a(g) \qquad \forall\, t \in \mathbb{R} \tag{9.6}$$

gilt auch $\delta\mathcal{F}^(0,g) = 0$, d.h. **(V1)**. Nach Satz 9.11 gibt es ein $\delta > 0$ mit

$$0 = \mathcal{F}^a(0) < \mathcal{F}^a(g) \qquad \forall\, 0 \neq g \in \mathcal{C}^1_0([a,b],\mathbb{R}^N) \text{ mit } \|g\|_\infty + \|g'\| < \delta.$$

[41] Beachte, daß B positiv definit auf $[a,b]$ ist.

[42] Das akzessorische Integral zu $\mathcal{F}^a$ bzgl. $h=0$ ist also zweimal das akzessorische Integral von $\mathcal{F}$ bzgl. u.

Wegen (9.6) (mit $t \to 0$) gilt dies dann aber auch für alle $0 \neq g \in \mathcal{C}_0^1([a,b],\mathbb{R}^N)$.

a) Sei $0 < \varepsilon < b-a$ gegeben. Setze

$$\mathcal{F}_\varepsilon(v) = \int_a^{b-\varepsilon} f(x,v,v')\,dx, \qquad u_\varepsilon = u|_{[a,b-\varepsilon]}.$$

Dann erfüllen $\mathcal{F}_\varepsilon$ und u_ε die Voraussetzungen von b). Es folgt

$$\int_a^{b-\varepsilon} f^a(x,g,g')\,dx \geq 0 \qquad \forall\, g \in \mathcal{C}_0^1([a,b-\varepsilon],\mathbb{R}^N),$$

wobei f^a die Lagrange-Funktion von $\mathcal{F}^a$ (bzgl. u) ist. Zu gegebenem $h \in \mathcal{C}_0^1([a,b],\mathbb{R}^N)$ definiere $g_\varepsilon(x) := h(a + \frac{b-a}{b-\varepsilon-a}(x-a)) \in \mathcal{C}_0^1([a,b-\varepsilon],\mathbb{R}^N)$. Dann ist

$$0 \leq \int_a^{b-\varepsilon} f^a\big(x, h(a + \tfrac{b-a}{b-\varepsilon-a}(x-a)), \tfrac{b-a}{b-\varepsilon-a}h'(a + \tfrac{b-a}{b-\varepsilon-a}(x-a))\big)\,dx \xrightarrow{\varepsilon\to 0} \mathcal{F}^a(h).$$

■

Bemerkung 9.16 Wir haben in Abschnitt 9 unter der Annahme 9.1 unter anderem folgende Aussagen gezeigt:

- u schwach $\mathcal{F}$-minimal $\Longrightarrow$ **(V1)**, **(V2)** und **(LH)**
- u schwach $\mathcal{F}$-minimal und **(sLH)** $\Longrightarrow$ **(J)**
- u schwach $\mathcal{F}$-minimal, **(sLH)** und **(V2)** im strikten Sinne $\Longrightarrow$ **(sJ)**
- u erfüllt **(V1)**, **(sLH)** und **(sJ)** $\Longrightarrow$ u schwach $\mathcal{F}$-minimal im strikten Sinne

10 Starke Minimalstellen und die Weierstraß-Bedingung

In diesem Abschnitt betrachten wir wieder Variationsintegrale der Form

$$\mathcal{F}(v) = \int_a^b f(x,v(x),v'(x))\,dx, \qquad v \in \mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{R}^N).$$

Annahme 10.1 *f erfülle Annahme* 4.1 *und habe einen Definitionsbereich der Form $\mathcal{D}_f = G \times \mathbb{R}^N$ mit offenem $G \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}^N$. Es sei $u \in \mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{R}^N)$ und gebe es ein $\varepsilon > 0$ mit*

$$\{(x,y,p) \mid x \in [a,b],\ |y-u(x)| < \varepsilon,\ p \in \mathbb{R}^N\} \subset \mathcal{D}_f.$$

Unter dieser Annahme, die ab jetzt gelte, kann man das Variationsintegral $\mathcal{F}$ mit Lagrange-Funktion f betrachten auf der Menge

$$\{v \in \mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{R}^N) \mid \|u-v\|_\infty < \varepsilon\}.$$

Definition 10.2 *Es gelte Annahme* 10.1. *u heißt <u>stark $\mathcal{F}$-minimal</u>, falls es ein $\delta > 0$ gibt mit*

$$\mathcal{F}(u) \leq \mathcal{F}(u+h) \qquad \forall\, h \in \mathcal{C}_0^1([a,b],\mathbb{R}^N) \text{ mit } \|h\|_\infty < \delta.$$

Definition 10.3 *Die Funktion* $\mathcal{E} : \mathcal{D}_f \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ *mit*

$$\mathcal{E}(x,y,p,q) := f(x,y,q) - f(x,y,p) - (\nabla_p f)(x,y,p)(q-p)$$

heißt Weierstraßsche Exzessfunktion.[43] *Dann erfüllt* u *die Weierstraß-Bedingung, falls*

(W) $\mathcal{E}(x,u(x),u'(x),q) \geq 0$ *für alle* $x \in [a,b]$ *und alle* $q \in \mathbb{R}^N$*,*

und die strikte Weierstraß-Bedingung, falls es ein $\delta > 0$ *gibt mit*

(sW) $\mathcal{E}(x,y,p,q) \geq 0$ *für alle* $q \in \mathbb{R}^N$ *und alle* (x,y,p) *mit* $x \in [a,b]$ *und* $|y-u(x)| + |p-u'(x)| < \delta$.

Beispiel 10.4 Explizit ist die Exzeßfunktion gegeben durch

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(x,y,p,q) &= \int_0^1 \big\langle (\nabla_p f)(x,y,p+t(q-p)) - (\nabla_p f)(x,y,p), q-p \big\rangle \, dt \\ &= \int_0^1 t \int_0^1 \big\langle (\nabla_p^2 f)(x,y,p+st(q-p))(q-p), q-p \big\rangle \, dsdt.\end{aligned}$$

Also sind **(W)** bzw. **(sW)** erfüllt, falls

$(\nabla_p^2 f)(x,u(x),p)$ positiv semi-definit ist für alle $x \in [a,b]$ und $p \in \mathbb{R}^N$,

beziehungsweise, wenn es ein $\delta > 0$ gibt mit

$(\nabla_p^2 f)(x,y,p)$ ist positiv semi-definit für alle $x \in [a,b]$, $|y-u(x)| < \delta$ und $p \in \mathbb{R}^N$.

Interessant sind folgende Spezialfälle:

a) Mit $\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{C}([a,b], \mathbb{R}^{N\times N})$ sei

$$f(x,y,p) = \langle \alpha(x)y, y\rangle + 2\langle \beta(x)y, p\rangle + \langle \gamma(x)p, p\rangle.$$

Hier erhält man

$$\mathcal{E}(x,y,p,q) = \tfrac{1}{2}\big\langle (\nabla_p^2 f)(x,y,p)(q-p), q-p\big\rangle = \tfrac{1}{2}\big\langle (\gamma(x)+\gamma(x)^t)(q-p), q-p\big\rangle.$$

Also sind **(W)** bzw. **(sW)** äquivalent zur punktweisen Semi-Definitheit von $\gamma + \gamma^t$ auf $[a,b]$.

b) Ist $N = 1$ und $f(x,y,p) = \omega(x,y)\sqrt{1+p^2}$ mit $\omega > 0$, so ist **(sW)** erfüllt, da

$$(\nabla_p^2 f)(x,y,p) = \omega(x,y)(1+p^2)^{-3/2} > 0.$$

Satz 10.5 *Es gelte Annahme* 10.1 *und* u *erfülle die Bedingungen* **(V1)**, **(sLH)**, **(sJ)** *und* **(sW)**. *Dann gibt es ein* $\gamma > 0$ *mit*

$$\mathcal{F}(u) < \mathcal{F}(u+h) \qquad \forall\, 0 \neq h \in \mathcal{C}_0^1([a,b], \mathbb{R}^N) \text{ mit } \|h\|_\infty < \gamma.$$

Also ist u *stark* $\mathcal{F}$*-minimal im strikten Sinne.*

[43] $\mathcal{E}$ ist der Fehlerterm in der Taylorentwicklung erster Ordnung von f bzgl. p.

Beweis: Es sei $\delta > 0$ so gewählt, daß **(sW)** und die Aussage von Satz 9.12 gilt. Dort verwendeten wir $S \in \mathcal{C}^1([a,b] \times \mathbb{R}^N)$ mit

$$S_y(x,y) = (\nabla_p f)(x, u(x), u'(x)) + R(x)(y - u(x)).$$

Insbesondere gilt

$$(\nabla_p f)(x, u(x), u'(x)) = S_y(x, u(x)) \qquad \forall\, a \le x \le b.$$

Wegen **(sLH)** liefert der Satz über implizite Funktionen[44] die Existenz eine $\mathcal{C}^1$-Funktion

$$\eta : \{(x,y) \mid a \le x \le b,\ |y - u(x)| < \delta\} \longrightarrow \mathbb{R}^N$$

mit

$$(\nabla_p f)(x, y, \eta(x,y)) = S_y(x,y) \qquad \forall\, a \le x \le b,\ |y - u(x)| < \delta.$$

Nach eventueller Verkleinerung von δ kann man oBdA annehmen, daß $\delta \le \gamma$ und $|y - u(x)| + |\eta(x,y) - u'(x)| < \gamma$ für alle (x,y) mit $a \le x \le b$ und $|y - u(x)| < \delta$. Für solche (x,y) und alle $q \in \mathbb{R}^N$ gilt dann

$$\begin{aligned} f(x,u,u') - S_x(x,u) - \langle \nabla_y S(x,u), u' \rangle &\overset{9.11}{\le} f(x,y,\eta) - S_x(x,y) - \langle \nabla_y S(x,y), \eta \rangle \\ &= f(x,y,\eta) - S_x(x,y) - \langle (\nabla_p f)(x,y,\eta), \eta \rangle \\ &\overset{\text{(sW)}}{\le} f(x,y,q) - S_x(x,y) - \langle (\nabla_p f)(x,y,\eta), q \rangle \\ &= f(x,y,q) - S_x(x,y) - \langle \nabla_y S(x,y), q \rangle. \end{aligned}$$

In der ersten Zeile gilt '$<$', falls $y \ne u(x)$. Nun ergibt sich die Behauptung durch Integration wie in Lemma 9.11. ∎

Satz 10.6 *Es gelte Annahme* 10.1 *und u sei stark $\mathcal{F}$-minimal. Dann genügt u der Bedingungen* **(W)**.

Beweis: Mit $\xi \in\,]a,b[$, $q \in \mathbb{R}^N$ und $0 \le \theta < \xi - a$ setze

$$u_\theta(x) = u_{\theta,\xi,q}(x) = \begin{cases} u(x) + (x-a)y_\theta & : a \le x \le \xi - \theta \\ u(\xi) + (x - \xi)q & : \xi - \theta \le x \le \xi \\ u(x) & : \xi \le x \le b \end{cases},$$

wobei y_θ so gewählt ist, daß u_θ stetig und stückweise $\mathcal{C}^1$ ist, also

$$y_\theta = \frac{1}{\xi - \theta - a}\big(u(\xi) - u(\xi - \theta) - \theta q\big).$$

Es ist $u_\theta(a) = u(a)$, $u_\theta(b) = b$ und $u_\theta \xrightarrow{\theta \to 0} u$ gleichmäßig auf $[a,b]$. Für

$$\Delta(\theta) := \mathcal{F}(u_\theta) - \mathcal{F}(u)$$

[44] bzw. eine parameter-abhängige Version, angewendet auf die Funktion $F(x;y,p) := (\nabla_p f)(x, u(x) - y, u'(x) - p) - S_y(x, u(x) - y)$, die auf $[a,b] \times U_\gamma(0) \times \mathbb{R}^N$ definiert und $\mathcal{C}^1$ ist, da $u \in \mathcal{C}^2$ nach Satz 6.4. Dann ist $F(x,0,0) = 0$ und $\frac{\partial F}{\partial p}(x;0,0)$ ist invertierbar für jedes x.

ist $\Delta(0) = 0$ und, wie wir gleich zeigen werden,

$$\Delta'(0) = \frac{d}{d\theta}\Big|_{\theta=0} \mathcal{F}(u_\theta) = \mathcal{E}(\xi, u(\xi), u'(\xi), q).^{45} \tag{10.1}$$

Angenommen, die rechte Seite wäre negativ. Dann wäre $\mathcal{F}(u_\theta) < \mathcal{F}(u)$ für kleine $\theta > 0$. Durch Abrunden von Ecken[46] fände man ein $v \in \mathcal{C}^1([a,b], \mathbb{R}^N)$ mit $\mathcal{F}(v) < \mathcal{F}(u)$ und $v(a) = u(a)$, $v(b) = u(b)$. Dies widerspricht der Minimalität von u.

Zum Beweis von (10.1) schreibe

$$\begin{aligned}\Delta(\theta) = &\int_a^{\xi-\theta} f(x, u(x) + (x-a)y_\theta, u'(x) + y_\theta)\, dx + \\ &+ \int_{\xi-\theta}^{\xi} f(x, u(\xi) + (x-\xi)q, q)\, dx + \int_a^{\xi} f(x, u(x), u'(x))\, dx.\end{aligned}$$

Dann ist

$$\begin{aligned}\Delta'(\theta) = &- f\big(\xi-\theta, u(\xi-\theta) + (\xi-\theta-a)y_\theta, u'(\xi-\theta) + y_\theta\big) + f(\xi-\theta, u(\xi) - \theta q, q) \\ &+ \int_a^{\xi-\theta} \big\langle (\nabla_y f)(x, u(x) + (x-a)y_\theta, u'(x) + y_\theta), (x-a)\tfrac{dy_\theta}{d\theta}\big\rangle\, dx + \\ &+ \int_a^{\xi-\theta} \big\langle (\nabla_p f)(x, u(x) + (x-a)y_\theta, u'(x) + y_\theta), \tfrac{dy_\theta}{d\theta}\big\rangle\, dx.\end{aligned}$$

Aus $y_0 = 0$ und $\frac{d}{d\theta}\big|_{\theta=0} y_\theta = \frac{1}{\xi-a}\big(u'(\xi) - q\big)$ folgt

$$\begin{aligned}\Delta'(0) = &- f(\xi, u(\xi), u'(\xi)) + f(\xi, u(\xi), q) + \\ &+ \Big\langle \int_a^{\xi} (\nabla_y f)(x, u, u')(x-a) + (\nabla_p f)(x, u, u')\, dx, \frac{u'(\xi) - q}{\xi - a}\Big\rangle.\end{aligned}$$

Nach Satz 5.12 ist

$$(\nabla_p f)(x, u(x), u'(x)) = (\nabla_p f)(\xi, u(\xi), u'(\xi)) + \int_\xi^x (\nabla_y f)(t, u(t), u'(t))\, dt$$

und daher nach partieller Integration

$$\begin{aligned}\int_a^{\xi} (x-a)(\nabla_y f)(x, u, u')\, dx &= (x-a)\int_\xi^x (\nabla_y f)(t, u, u')\, dt\Big|_{x=a}^{x=\xi} - \int_a^{\xi}\int_\xi^x (\nabla_y f)(t, u, u')\, dt dx \\ &= (\xi - a)(\nabla_p f)(\xi, u(\xi), u'(\xi)) - \int_a^{\xi} (\nabla_p f)(x, u, u')\, dx.\end{aligned}$$

Einsetzen liefert dann (10.1). ■

[45] Die Exzeßfunktion entsteht also als spezielle Variation von $\mathcal{F}(u)$.

[46] siehe Handout

11 Natürliche Randbedingungen

Bis jetzt haben wir immer nur Variationen $\mathcal{F}(u+h)$ betrachtet mit Funktionen h, die auf dem Rand $\partial\Omega$ von Ω verschwinden. Wir untersuchen nun, was passiert, wenn wir allgemeinere h zulassen.

Annahme 11.1 *Annahme* 4.1 *sei erfüllt von f und zu $u \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ gebe es ein $\varepsilon > 0$ mit*

$$\{(x,y,p) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{N\times n} \mid |y-u(x)| + |p - Du(x)| < \varepsilon\} \subset \mathcal{D}_f.$$

Unter dieser Annahme kann man das Variationsintegral $\mathcal{F}$ mit Lagrange-Funktion f betrachten auf der Menge

$$\{v \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^N) \mid \|u-v\|_\infty + \|Du - Dv\|_\infty < \varepsilon\}.$$

Annahme 11.2 *Es sei $\partial\Omega$ eine $\mathcal{C}^1$-Hyperfläche im $\mathbb{R}^n$ und $\nu : \partial\Omega \to \mathbb{R}^n$ bezeichne die äußere Normale an $\partial\Omega$. Weiterhin sei $R \subset \partial\Omega$ abgeschlossen und*

$$\mathcal{C}^1_R(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N) = \{h \in \mathcal{C}^1_R(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N) \mid h|_R = 0\}.$$

Bemerkung 11.3 Gibt es ein $\delta > 0$ mit

$$\mathcal{F}(u) \le [\ge] \mathcal{F}(u+h) \qquad \forall\, h \in \mathcal{C}^1_R(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N) \text{ mit } \|h\|_\infty + \|Dh\|_\infty < \delta,$$

so ist

$$\delta\mathcal{F}(u,h) = 0 \qquad \forall\, h \in \mathcal{C}^1_R(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N).$$

Satz 11.4 *Setze $\nabla_{p^i} f = (f_{p^i_1}, \ldots, f_{p^i_n})$. Ist $x \mapsto (\nabla_{p^i} f)(x, u(x), Du(x)) \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$*[47] *für alle $1 \le i \le N$, so sind äquivalent:*

a) $\delta\mathcal{F}(u,h) = 0$ *für alle $h \in \mathcal{C}^1_R(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$.*

b) u erfüllt die Euler-Gleichung

$$f_{y_i}(x, u(x), Du(x)) - \sum_{\nu=1}^n \frac{\partial}{\partial x_\nu} f_{p^i_\nu}(x, u(x), Du(x)) = 0 \qquad \forall\, x \in \Omega \quad \forall\, 1 \le i \le N,$$

sowie die natürlichen Randbedingungen

$$\big\langle (\nabla_{p^i} f)(x, u(x), Du(x)), \nu(x) \big\rangle = 0 \qquad \forall\, x \in \partial\Omega \setminus R.$$

Beweis: Nach Satz 4.3 ist a) äquivalent zu

$$\int_\Omega \Big\{ f_{y_i}(x,u,Du)\varphi + \sum_{\nu=1}^n f_{p^i_\nu}(x,u,Du) \frac{\partial \varphi}{\partial x_\nu} \Big\}\, dx = 0 \qquad \forall\, \varphi \in \mathcal{C}^1_R(\overline{\Omega}) \quad \forall\, 1 \le i \le N.$$

[47] Für $n=1$ folgt dies bereits aus a) nach Satz 5.13

Der Integrand läßt sich schreiben als

$$\Big\{ f_{y_i}(x,u,Du) - \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_\nu} f_{p^i_\nu}(x,u,Du) \Big\} \varphi + \operatorname{div}(\varphi(\nabla_{p^i} f)(x,u,Du)).$$

Mit dem Divergenzsatz folgt, daß a) äquivalent ist zu

$$\int_\Omega \Big\{ f_{y_i}(x,u,Du) - \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_\nu} f_{p^i_\nu}(x,u,Du) \Big\} \varphi \, dx + \int_{\partial\Omega} \big\langle (\nabla_{p^i} f)(x,u,Du), \nu \big\rangle \, \varphi \, d\sigma(x) = 0$$

für alle $\varphi \in \mathcal{C}^1_R(\overline{\Omega})$ und $1 \le i \le N$. Dies liefert sofort b) $\Rightarrow$ a). Gilt a) und wählt man speziell $\varphi \in \mathcal{C}^\infty_{\text{comp}}(\Omega)$, so verschwindet das zweite Integral und aus Satz 5.3 folgt, daß u die Euler-Gleichungen erfüllt. Es folgt für $1 \le i \le N$, daß

$$\int_{\partial\Omega \setminus R} \big\langle (\nabla_{p^i} f)(x,u,Du), \nu \big\rangle \, \varphi \, d\sigma(x) = 0 \qquad \forall\, \varphi \in \mathcal{C}^1_R(\overline{\Omega}).$$

Eine Variante von Satz 5.3 liefert $\big\langle (\nabla_{p^i} f)(x,u,Du), \nu \big\rangle = 0$ auf $\partial\Omega \setminus R$. ■

Beispiel 11.5 Es sei $\mathcal{F}$ von der Form

$$\mathcal{F}(u) = \int_\Omega g(x, u(x), |Du(x)|^2)\, dx, \qquad |(a_{ij})|^2 = \sum_{i,j} a_{ij}^2,$$

wobei $g_q(x,y,q) \neq 0$ wann immer $q \ge 0$. Die Lagrangre-Funktion von $\mathcal{F}$ ist $f(x,y,p) = g(x,y,|p|^2)$ und die zugehörigen natürlichen Randbedingungen sind somit

$$2 g_q(x, u(x), |Du(x)|^2) \big\langle \nabla u_i(x), \nu(x) \big\rangle = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \setminus R.$$

Man erhält also die sogenannten <u>Neumannschen Randbedingungen</u>

$$\frac{\partial u_i}{\partial \nu}(x) = \langle \nabla u_i(x), \nu(x) \rangle = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \setminus R \qquad (i = 1, \ldots, N).$$

12 Variationsaufgaben mit Nebenbedingungen

Satz 12.1 (Isoperimetrische Probleme) *Es seien Variationsintegrale $\mathcal{F}, \mathcal{F}^1, \ldots, \mathcal{F}^m$ mit zugehörigen Lagrange-Funktionen $f, f^1, \ldots, f^m$ gegeben. Es sei $u \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ und (f,u) sowie alle (f^j,u) erfüllen die Annahme 11.1[48]. Es sei $\alpha \in \mathbb{R}^m$ fest und*

$$u \in \mathcal{M} := \{ v \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N) \mid \mathcal{F}^1(v) = \alpha_1, \ldots, \mathcal{F}^m(v) = \alpha_m \}.$$

Schließlich sei noch $\mathcal{V}$ ein Vektorraum mit

$$\mathcal{C}^\infty_{\text{comp}}(\Omega, \mathbb{R}^N) \subset \mathcal{V} \subset \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N).$$

Gibt es ein $\delta > 0$ mit

$$\mathcal{F}(u) \le \mathcal{F}(u+h) \qquad \forall\, h \in \mathcal{V} \text{ mit } u+h \in \mathcal{M} \text{ und } \|h\|_\infty + \|Dh\|_\infty < \delta,$$[49]

[48]Insbesondere lassen sich $\mathcal{F}$ und alle $\mathcal{F}^j$ auf einer Menge $\{v \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^N) \mid \|u-v\|_\infty + \|Du-Dv\|_\infty < \varepsilon\}$ mit $\varepsilon > 0$ betrachten.

und sind $\delta\mathcal{F}^1(u,\cdot),\ldots,\delta\mathcal{F}^m(u,\cdot)$ *linear unabhängig als Elemente von*

$$\mathcal{V}^* := \{l : \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{R} \mid l \text{ linear}\},$$

so gibt es genau ein $\lambda = (\lambda_1,\ldots,\lambda_m) \in \mathbb{R}^m$, *so daß*

$$\delta\mathcal{F}^\lambda(u,h) = 0 \qquad \forall\, h \in \mathcal{V}, \qquad \mathcal{F}^\lambda := \mathcal{F} - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \mathcal{F}^j. \tag{12.1}$$

Man nennt $\lambda_1,\ldots,\lambda_m$ *<u>Lagrange-Multiplikatoren</u>. Ist zusätzlich* $u \in \mathcal{C}^2(\Omega,\mathbb{R}^N)$, *so ist* (12.1) *äquivalent zu*

$$L_f(u) = \lambda_1 L_{f^1}(u) + \ldots + \lambda_m L_{f^m}(u).$$

Beweis: Wegen der linearen Unabhängigkeit gibt es höchstens ein solches λ.

<u>1. Schritt:</u> Es gibt einen m-dimensionalen Unterraum $\mathcal{W}$ von $\mathcal{V}$ mit

$$\mathcal{V} = \mathcal{W} \oplus \bigcap_{j=1}^{m} \operatorname{Kern} \delta\mathcal{F}^j(u,\cdot).$$

Dies zeigen wir per Induktion. $m = 1$ ist ok, da

$$\mathcal{V}/\operatorname{Kern} \delta\mathcal{F}^1(u,\cdot) \cong \operatorname{Bild} \delta\mathcal{F}^1(u,\cdot) = \mathbb{R}.$$

Sei die Behauptung gezeigt für $m-1$, d.h.

$$\mathcal{V} = \widetilde{\mathcal{W}} \oplus \bigcap_{j=1}^{m-1} \operatorname{Kern} \delta\mathcal{F}^j(u,\cdot) := \widetilde{\mathcal{W}} \oplus \widetilde{\mathcal{V}}, \qquad \dim \widetilde{\mathcal{W}} = m-1.$$

Die $\delta\mathcal{F}^1(u,\cdot)|_{\widetilde{\mathcal{W}}},\ldots,\delta\mathcal{F}^{m-1}(u,\cdot)|_{\widetilde{\mathcal{W}}}$ bildet eine Basis von $\widetilde{\mathcal{W}}^*$[50] Somit läßt sich $\delta\mathcal{F}^m(u,\cdot)|_{\widetilde{\mathcal{W}}}$ als Linearkombination dieser Funktionale schreiben. Wäre $\delta\mathcal{F}^m(u,\cdot) = 0$ auf $\widetilde{\mathcal{V}}$, so wäre $\delta\mathcal{F}^m(u,\cdot)$ eine Linearkombination der $\delta\mathcal{F}^1(u,\cdot)$, …, $\delta\mathcal{F}^{m-1}(u,\cdot)$ auf ganz $\mathcal{V}$. Dies widerspricht der Annahme der linearen Unabhängigkeit. Also ist

$$\widetilde{\mathcal{V}} = \operatorname{Kern} \delta\mathcal{F}^m(u,\cdot)|_{\widetilde{\mathcal{V}}} \oplus \langle \widetilde{v} \rangle, \qquad 0 \neq \widetilde{v} \in \widetilde{\mathcal{V}}.$$

Nun ist aber

$$\operatorname{Kern} \delta\mathcal{F}^m(u,\cdot)|_{\widetilde{\mathcal{V}}} = \widetilde{\mathcal{V}} \cap \operatorname{Kern} \delta\mathcal{F}^m(u,\cdot) = \bigcap_{j=1}^{m} \operatorname{Kern} \delta\mathcal{F}^j(u,\cdot)$$

und somit folgt die Behauptung mit $\mathcal{W} = \widetilde{\mathcal{W}} \oplus \langle \widetilde{v} \rangle$.

<u>2. Schritt:</u> Es sei $(w_1,\ldots,w_m)$ eine Basis von $\mathcal{W}$ von oben. Dann ist

$$\det \big(\delta\mathcal{F}^j(u,w_k)\big)_{1 \le j,k \le m} \neq 0. \tag{12.2}$$

[49] d.h. u ist eine (schwache) lokale Minimalstelle von $\mathcal{F}$ auf $\{u\}+\mathcal{V}$ unter den Nebenbedingungen $\mathcal{F}^j(u) = \alpha_j$, $j = 1,\ldots,m$.

[50] Es ist $\dim \widetilde{\mathcal{W}}^* = m-1$ und aus $c_1\delta\mathcal{F}^1(u,\cdot) + \ldots + c_{m-1}\delta\mathcal{F}^{m-1}(u,\cdot) = 0$ auf $\widetilde{\mathcal{W}}$ folgt $c_1\delta\mathcal{F}^1(u,\cdot) + \ldots + c_{m-1}\delta\mathcal{F}^{m-1}(u,\cdot) = 0$ auf $\mathcal{V}$, also $c_1 = \ldots = c_{m-1} = 0$.

Sei nun $h \in \mathcal{V}$ beliebig vorgegeben und

$$F(\tau) = f(u + \tau_0 h + \tau_1 w_1 + \dots \tau_m w_m)$$
$$g^j(\tau) = f^j(u + \tau_0 h + \tau_1 w_1 + \dots \tau_m w_m), \qquad j = 1, \dots, m.$$

Dann sind F und g^j in einer offenen Umgebung $D \subset \mathbb{R}^{m+1}$ von 0 definiert und dort $\mathcal{C}^1$. Mit $g = (g^1, \dots, g^m)$ ist 0 eine lokale Extremalstelle von F auf

$$\widetilde{D} := \{\tau \in D \mid g(\tau) = \alpha\}.$$

Wegen $\frac{\partial g^j}{\partial \tau_k}(0) = \delta \mathcal{F}^j(u, w_k)$, $k \geq 1$, und (12.2) ist $\operatorname{Rang} Dg(0) = m$. Dann ist auch

$$\operatorname{Rang} \begin{pmatrix} DF(0) \\ Dg(0) \end{pmatrix} = m.$$

Denn andernfalls liefert der Satz über die inverse Funktion offene Umgebungen $U \subset D$ von 0 und $V \subset \mathbb{R}^{m+1}$ von $(F(0), g(0)) = (F(0), \alpha)$, sodaß $(F, g) : U \to V$ ein Diffeomorphismus ist. Insbesondere gäbe es eine Nullfolge $(x_k)_{k \geq K}$ mit $g(x_k) = \alpha$ und $F(x_k) = F(0) + (-1)^k / 2k$. Somit $\widetilde{D} \ni x_k \to 0$ und $F(x_k) - F(0)$ wechselt das Vorzeichen, was der Extremalität widerspricht.

Somit gibt es $\lambda = \lambda(h) \in \mathbb{R}^m$ mit

$$\frac{\partial F}{\partial \tau_k}(0) - \sum_{j=1}^m \lambda_j \frac{\partial g^j}{\partial \tau_k}(0) = 0 \qquad \forall\, k = 0, \dots, m.$$

Für $k = 0$ erhält man $\delta \mathcal{F}^\lambda(u, h) = 0$. Der Rest liefert

$$\delta \mathcal{F}^\lambda(u, w_k) = \sum_{j=1}^m \lambda_j \delta \mathcal{F}^j(u, w_k) \qquad \forall\, k = 0, \dots, m.$$

Wegen (12.2) bestimmt dies λ eindeutig und λ hängt nicht von h ab, d.h. $\delta \mathcal{F}^\lambda(u, h) = 0$ für alle $h \in \mathcal{V}$. ■

Beispiel 12.2 (Das klassische isoperimetrische Problem) Sei $U > 0$ vorgegeben. Gesucht ist dasjenige Gebiet $G \subset \mathbb{R}^2$ mit $\mathcal{C}^1$-Rand und Umfang U, welches den größtmöglichen Flächeninhalt $\mathcal{F}$ hat.

Zunächst überlegt man sich, daß G konvex sein muß. Betrachtet man nun ein kleines Kurvenstück Γ von ∂G, so überlegt man sich wie folgt, daß Γ ein Kreisbogen sein muß (und somit G eine Kreischeibe mit Radius $U/2\pi$ ist): Sei $a < b$, $\alpha > b - a$ und

$$\mathcal{M} = \Big\{ v \in \mathcal{C}_0^1([a, b]) \mid \mathcal{F}^1(v) = \int_a^b \sqrt{1 + v'(x)^2}\, dx = \alpha \Big\}.$$

Wegen

$$\delta \mathcal{F}^1(w, h) = \int_a^b \frac{w'(x)}{\sqrt{1 + w'(x)^2}} h'(x)\, dx, \qquad h \in \mathcal{C}^\infty_{\text{comp}}(]a, b[),$$

sind die schwache $\mathcal{F}^1$-Extremalen genau die affin linearen Funktionen[51]. Solche gibt es aber nicht in $\mathcal{M}$[52]. Wir möchten nun

$$\mathcal{F}(v) = \int_a^b v(x)\,dx$$

für $v \in \mathcal{M}$ maximieren. Ist $u \in \mathcal{M}$ ein Maximum, so gibt es nach Satz 12.1 ein $\lambda \in \mathbb{R}$ derart, daß u eine schwache $\mathcal{F}^\lambda$-Extremale für $\mathcal{F}^\lambda = \mathcal{F} - \lambda\mathcal{F}^1$ ist. Es muß $\lambda \neq 0$ sein, da es überhaupt keine $\mathcal{F}$-Extremalen gibt. Da $f^\lambda(x,y,p) = y - \lambda\sqrt{1+p^2}$ ist $u \in \mathcal{C}^2(]a,b[)$ nach Satz 6.4. Es folgt

$$\lambda L_{f^1}(u) = L_f(u) \iff -\frac{d}{dx}\Big(\frac{u'(x)}{\sqrt{1+u'(x)^2}}\Big) = \frac{1}{\lambda}.$$

Integration liefert den Kreisbogen mit Radius $|\lambda|$

$$u(x) = \lambda\sqrt{1-(c_1 - x/\lambda)^2} + c_2, \qquad c_1, c_2 \text{ geeignet.}$$

Wegen $u'' \leq 0$ ist $\lambda > 0$.

Unter der Annahme, daß es ein Gebiet G_0 mit maximalem Flächeninhalt gibt, ergibt sich als Folgerung die isoperimetrische Ungleichung:

$$\text{Flächeninhalt von } G \leq \frac{1}{4\pi}(\text{Länge von } \partial G)$$

für jedes beschränkte Gebiet $G \subset \mathbb{R}^2$ mit $\mathcal{C}^1$-Rand.

Folgerung 12.3 *Es seien die Bezeichnungen und Voraussetzungen wie in Satz* 12.1 *mit* $\mathcal{V} = \mathcal{C}^1_R(\overline{\Omega},\mathbb{R}^N)$. *Es sei* f^λ *die Lagrange-Funktion von* $\mathcal{F}^\lambda$. *Ist* $\partial\Omega$ *eine* $\mathcal{C}^1$*-Hyperfläche und* $x \mapsto (\nabla_{p^i} f^\lambda)(x,u(x),Du(x)) \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega},\mathbb{R}^N)$, *so erfüllt* u *die natürlichen Randbedingungen*

$$\big\langle(\nabla_{p^i} f^\lambda)(x,u(x),Du(x)),\nu(x)\big\rangle = 0 \qquad \forall\, x \in \partial\Omega\setminus R \quad \forall\, 1 \leq i \leq N.$$

Lemma 12.4 *Es seien die Bezeichnungen und Voraussetzungen wie in Satz* 12.1 *und zusätzlich* $u \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega},\mathbb{R}^N)\cap\mathcal{C}^2(\Omega,\mathbb{R}^N)$. *Dann sind äquivalent:*

a) $\delta\mathcal{F}^1(u,\cdot),\dots,\delta\mathcal{F}^m(u,\cdot)$ *sind linear unabhängig in* $\mathcal{C}^\infty_{\mathrm{comp}}(\Omega,\mathbb{R}^N)^*$.

b) $L_{f^1}(u),\dots,L_{f^m}(u)$ *sind linear unabhängige Funktionen in* $\mathcal{C}(\Omega,\mathbb{R}^N)$.

Beachte: Lineare Unabhängigkeit $\mathcal{C}^\infty_{\mathrm{comp}}(\Omega,\mathbb{R}^N)^*$ *impliziert die in* $\mathcal{V}^*$.

Beweis: Für $\lambda \in \mathbb{R}^m$ und $h \in \mathcal{C}^\infty_{\mathrm{comp}}(\Omega,\mathbb{R}^N)$ ist

$$\begin{aligned}\lambda_1\delta\mathcal{F}^1(u,h) + \ldots + \lambda_m\delta\mathcal{F}^m(u,h) &= \delta\big(\lambda_1\mathcal{F}^1 + \ldots + \lambda_m\mathcal{F}^m\big)(u,h)\\ &= \int_\Omega \big\langle\lambda_1 L_{f^1}(u)(x) + \ldots + \lambda_m L_{f^m}(u)(x), h(x)\big\rangle\,dx.\end{aligned}$$

Dann folgt die Behauptung mit Satz 5.3. ■

[51] d.h. $w(x) = ax+b$ mit $a,b \in \mathbb{R}$

[52] wegen $\alpha > b-a$

Satz 12.5 (Holonomische Nebenbedingungen) *Es sei $g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^N, \mathbb{R}^m)$ mit $m < N$ derart, daß*

$$\operatorname{Rang} \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = m \qquad \forall\, (x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^N \text{ mit } g(x,y) = 0\text{[53]}$$

und

$$\mathcal{M} := \{v \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^N) \mid g(x, v(x)) = 0 \quad \forall\, x \in \Omega\}.$$

Das Variationsintegral $\mathcal{F}$ und $u \in \mathcal{M} \cap \mathcal{C}^2(\Omega, \mathbb{R}^N)$ erfüllen Annahme 11.1. *Weiterhin gebe es ein $\delta > 0$ mit*

$$\mathcal{F}(u) \le \mathcal{F}(u+h) \qquad \forall\, h \in \mathcal{C}^1_{\text{comp}}(\Omega, \mathbb{R}^N) \text{ mit } u + h \in \mathcal{M} \text{ und } \|h\|_\infty + \|Dh\|_\infty < \delta.$$

Dann gibt es eindeutig bestimmte Funktionen $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathcal{C}(\Omega)$ mit

$$L_f(u)(x) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j(x)\,(\nabla_y g_j)(x, u(x)) \qquad \forall\, x \in \Omega.$$

Beweis: <u>Vorbemerkung:</u> Die Rang-Annahme stellt sicher, daß jedes

$$M(x) := \{y \in \mathbb{R}^N \mid g(x,y) = 0\}, \qquad x \in \Omega,$$

eine $\mathcal{C}^1$-Fläche der Dimension $N - m$ in $\mathbb{R}^N$ ist und daß

$$\operatorname{Erzeugnis}\big\{(\nabla_y g_j)(x,y), \ldots, (\nabla_y g_m)(x,y)\big\} = (T_y M(x))^{\perp}\text{[54]}$$

der Normalraum an $M(x)$ im Punkt $y \in M(x)$ ist. Wir müssen also zeigen, daß für jedes $x \in \Omega$ der Vektor $L_f(u)(x)$ im Punkt $u(x)$ senkrecht auf $M(x)$ steht. Angenommen, dies gilt nicht. Dann gibt es ein $\xi \in \Omega$ und ein $t_\xi \in T_{u(\xi)}M(\xi)$ mit $\langle L_f(u)(\xi), t_\xi \rangle \ne 0$.

<u>1. Schritt:</u> Es gibt ein Vektorfeld $t \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$ gibt mit

$$t(\xi) = t_\xi \text{ und } t(x) \in T_{u(x)}M(x) \quad \forall\, x \in \Omega,$$

zum Beispiel

$$t(x) := \Big\{ \underbrace{I_N - N(x)^t \left(N(x)N(x)^t\right)^{-1} N(x)}_{\text{orthogonaler Projektor in } \mathbb{R}^N \text{ auf } T_{u(x)}M(x)} \Big\} t_\xi,$$

wobei $N(x) := \frac{\partial g}{\partial y}(x, u(x))$[55]. Für $\varphi \in \mathcal{C}^\infty_{\text{comp}}(\mathbb{R}^n)$ mit $\varphi(0) = 1$ ist $h(x) := \psi\big(\frac{x-\xi}{\varepsilon}\big)t(x) \in \mathcal{C}^1_{\text{comp}}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ für hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ und $h(\xi) = t(\xi)$, sowie

$$\int_\Omega \langle L_f(u)(x), h(x) \rangle\, dx \ne 0.\text{[56]}$$

[53] d.h. die Jacobimatrix von g bzgl. y hat maximalen Rang.

[54] $T_y M$ bezeihnet den Tangentialraum an M im Punkt $y \in M$.

[55] $N(x) : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^m$ ist surjektiv, also $N^t(x) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^N$ injektiv. Aus $NN^t z = 0$ folgt $|N^t z|^2 = \langle NN^t z, z \rangle = 0$, also $N^t z = 0$, also $z = 0$. Somit ist NN^t bijektiv. Mit $P := N^t(NN^t)^{-1}N$ ist offenbar $P^2 = P^t = P$, also P eine orthogonale Projektion. Außerdem ist $\operatorname{Kern} P(x) = \operatorname{Kern} N(x) = T_{u(x)}M(x)$, da die Zeilen von N eine Basis von $T_{u(x)}M(x)^\perp$ bilden.

2. Schritt: Im 3. Schritt konstruieren wie eine Funktion $v \in \mathcal{C}^1(\Omega \times]-\varepsilon, \varepsilon[, \mathbb{R}^N)$ mit

$$v(\cdot, 0) = u \text{ und } v(x,\tau) = u(x) \qquad \forall\, x \in \Omega \setminus \operatorname{supp} h \tag{12.3}$$
$$g(x, v(x,\tau)) = 0 \qquad \forall\, x \in \Omega \quad \forall\, |\tau| < \varepsilon \tag{12.4}$$
$$\frac{\partial v}{\partial \tau}(x,0) = h(x) \qquad \forall\, x \in \Omega. \tag{12.5}$$

Für dieses v gilt dann

$$\frac{\partial}{\partial \tau}\Big|_{\tau=0} \mathcal{F}(v(\cdot,\tau)) = {}^{57}\delta\mathcal{F}(u,h) = \int_\Omega \langle L_f(u)(x), h(x)\rangle\, dx \neq 0,$$

was der Minimalität von u widerspricht.

3. Schritt: OBdA ist $u \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$[58]. Definiere $V : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^N$ durch

$$V(x,\tau,\theta) = u(x) + \tau h(x) + \sum_{j=1}^m \theta_j (\nabla_y g_j)(x, u(x))^t.$$

Dann ist $g(x, V(x,0,0)) = g(x,u(x)) = 0$ und

$$\frac{\partial}{\partial \theta}\Big|_{\theta=0} g(x, V(x,0,\theta)) = \frac{\partial g}{\partial y}(x,u(x)) \frac{\partial V}{\partial \theta}(x,0,0) = \frac{\partial g}{\partial y}(x,u(x)) \Big(\frac{\partial g}{\partial y}(x,u(x))\Big)^t.$$

Diese $(m \times m)$-Matrix ist invertierbar. Der Satz über implizite Funktionen liefert (genau) ein $\theta \in \mathcal{C}^1(\Omega \times]-\varepsilon,\varepsilon[, \mathbb{R}^m)$, sodaß (12.3) und (12.4) gelten für

$$v(x,\tau) := V(x,\tau,\theta(x,\tau))$$

(beachte, daß wegen der Eindeutigkeit $\theta(x,\tau) = 0$ falls $\tau h(x) = 0$). Weiter ist

$$\frac{\partial}{\partial \tau}\Big|_{\tau=0} v(x,\tau) = h(x) + \sum_{j=1}^m \frac{\partial \theta_j}{\partial \tau}(x,0)(\nabla_y g_j)(x,u(x))^t = h(x) + \Big(\frac{\partial g}{\partial y}(x,u(x))\Big)^t \frac{\partial \theta}{\partial \tau}(x,0).$$

Wegen $\frac{\partial g}{\partial y}(x,u(x))h(x) = 0$[59] folgt

$$0 \overset{(12.4)}{=} \frac{\partial}{\partial \tau}\Big|_{\tau=0} g(x, v(x,\tau)) = \frac{\partial g}{\partial y}(x,u(x)) \frac{\partial v}{\partial \tau}(x,0) = \frac{\partial g}{\partial y}(x,u(x)) \Big(\frac{\partial g}{\partial y}(x,u(x))\Big)^t \frac{\partial \theta}{\partial \tau}(x,0).$$

Es folgt $\frac{\partial \theta}{\partial \tau}(x,0) = 0$, also (12.5). ■

[56] Da für hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ der stetige Integrand je nach Vorzeichen von $\langle L_f(u)(\xi), t(\xi)\rangle$ entweder nicht positiv/negativ und ungleich 0 ist.

[57] Dies zeigt man analog zum Beweis des Satzes 4.3.

[58] Beweise sonst den Satz für $\Omega_\varepsilon := \{x \in \Omega \mid \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) > \varepsilon\}$ mit Beliebigem $\varepsilon > 0$.

[59] beachte, daß $h(x)$ tangential an $\partial\Omega$ im Punkt $(x,u(x))$ ist und daß die Zeilren von $\frac{\partial g}{\partial y}(x,u(x))$ eine Basis des Normalenraums bilden.

13 Handout: Abrunden von Ecken

Satz 13.1 *Es sei $v : [a,b] \to \mathbb{R}^N$ stückweise stetig differenzierbar und $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Dann gibt es ein $u \in \mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{R}^N)$ derart, daß*

a) u mit v in einer (kleinen) Umgebung von a bzw. b übereinstimmt,

b) $\|u - v\|_\infty < \varepsilon$.

Ist $\mathcal{F}$ das Variationsintegral zu einer Lagrange-Funktion f mit Definitionsbereich $\mathcal{D}_f = G \times \mathbb{R}^N$ für ein offenes $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$, die Annahme 4.1 erfüllt und ist

$$\{(x,y) \mid a < x < b,\ |v(x) - y| < \delta\} \subset \mathcal{D}_f$$

für ein geeignetes $\delta > 0$, so kann man u auch noch so wählen, daß

c) $|\mathcal{F}(u) - \mathcal{F}(v)| < \varepsilon$.

Beweis: Wir nehmen oBdA an, daß v' an genau einer Stelle $\xi \in]a,b[$ eine Sprungstelle hat. Seien nun $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit $a < \alpha < \xi < \beta < b$. Wir definieren nun

$$u(x) = \begin{cases} p(x) & : \alpha \le x \le \beta \\ v(x) & : x \in [a,b] \setminus [\alpha,\beta] \end{cases},$$

wobei p folgendes kubisches Interpolationspolynom ist:

$$\begin{aligned} p(x) =& \Big\{ \frac{(x-\beta)^2}{h^2} + 2\frac{(x-\alpha)(x-\beta)^2}{h^3} \Big\} (v(\alpha) - v(\beta)) + \\ &+ \frac{(x-\alpha)(x-\beta)^2}{h^2} v'(\alpha) + \frac{(x-\alpha)^2(x-\beta)}{h^2} v'(\beta) + v(\beta), \qquad h := \beta - \alpha. \end{aligned}$$

Da $p^{(j)}(\alpha) = v^{(j)}(\alpha)$ und $p^{(j)}(\beta) = v^{(j)}(\beta)$ für $j = 0, 1$ ist tatsächlich $u \in \mathcal{C}^1([a,b])$ und u erfüllt a). Wir zeigen nun, daß man α und β so wählen kann, daß auch b) und c) gelten.

Für b) beachte, daß

$$\|v - u\|_\infty = \sup_{\alpha \le x \le \beta} |p(x) - v(x)|.$$

Wegen $p(\alpha) = v(\alpha)$ ist für $x \in [\alpha, \beta]$

$$|p(x) - v(x)| \le |p(x) - p(\alpha)| + |v(x) - v(\alpha)| \le \Big(\sup_{\alpha \le y \le \beta} |p'(y)| + \|v\|_{\Lambda^1([a,b])} \Big) h.$$

Nun rechnet man nach, daß

$$\begin{aligned} p'(x) =& 2\Big\{ \frac{x-\beta}{h^2} + \frac{(x-\beta)^2 + 2(x-\alpha)(x-\beta)}{h^3} \Big\} (v(\alpha) - v(\beta)) + \\ &+ \frac{(x-\beta)^2 + 2(x-\alpha)(x-\beta)}{h^2} v'(\alpha) + \frac{(x-\alpha)^2 + 2(x-\alpha)(x-\beta)}{h^2} v'(\beta). \end{aligned}$$

Wegen $|v(\alpha) - v(\beta)| \leq \|v\|_{\Lambda^1([a,b])} h$ gibt es also eine Konstante K mit

$$\sup_{\alpha \leq x \leq \beta} |p'(x)| \leq K \qquad \forall\, \alpha, \beta. \tag{13.1}$$

Also konvergiert $\|v - u\|_\infty$ gegen 0 für $h \to 0$. Zum Beweis von c) beachte, daß

$$\mathcal{F}(u) - \mathcal{F}(v) = \int_\alpha^\beta f(x, p(x), p'(x))\, dx - \int_\alpha^\beta f(x, v(x), v'(x))\, dx.$$

Offenbar konvergiert das zweite Integral gegen 0, falls h gegen 0 strebt. Wegen (13.1) und dem Satz von Lebesgue über dominierte Konvergenz stimmt dies auch für das erste Integral, falls

$$\sup_{\alpha \leq x \leq \beta} |p(x)| \leq L \qquad \forall\, \alpha, \beta$$

für eine Konstante L. Dies erhält man aber direkt aus der Definition von p. ∎

Folgerung 13.2 *Sei nun zusätzlich $G =]a, b[\times \mathbb{R}^N$ und $y_a, y_b \in \mathbb{R}$ gegeben. Mit*

$$U := \{u : [a, b] \to \mathbb{R}^N \mid u \text{ stückweise } \mathcal{C}^1 \text{ und } u(a) = y_a,\ u(b) = y_b\},$$
$$\widetilde{U} := \{u \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R}^N) \mid u(a) = y_a,\ u(b) = y_b\}$$

gilt

$$\inf_{u \in U} \mathcal{F}(u) = \inf_{u \in \widetilde{U}} \mathcal{F}(u).$$

Ist insbesondere $u_0 \in \widetilde{U}$ eine Minimalstelle von $\mathcal{F} : \widetilde{U} \to \mathbb{R}$, so ist u_0 auch eine Minimalstelle von $\mathcal{F} : U \to \mathbb{R}$.

14 Literatur

Die Vorlesung folgt im wesentlichen

[1] F. Mantlik. *Variationsrechnung.* Vorlesungsskript WS 1996/97, Universität Dortmund.

Der gebotene Stoff ist eine Auswahl und Zusammenfassung von Material aus dem Buch

[2] M. Giaquinta, S. Hildebrandt. *Calculus of Variations I.* Grundlehren der math. Wissenschaften **310**, Springer-Verlag, 1996.

welches zur Vertiefung und Erweiterung des Vorlesungsstoffes empfohlen sei.