

Ausgewählte Kapitel aus der Variationsrechnung

J.Moser

Inhaltsverzeichnis

| | |
|--|-----------|
| 0.1 Einführung | 4 |
| 0.2 Zu diesen Vorlesungsnotizen | 5 |
| 1 Eindimensionale Variationsprobleme | 7 |
| 1.1 Regularität der Minimalen | 7 |
| 1.2 Beispiele | 14 |
| 1.3 Das akzessorische Variationsproblem | 22 |
| 1.4 Extremalenfelder für $n=1$ | 28 |
| 1.5 Die Hamiltonsche Formulierung | 33 |
| 1.6 Zusatzaufgaben zum Kapitel 1 | 38 |
| 2 Extremalenfelder und globale Minimale | 41 |
| 2.1 Globale Extremalenfelder | 41 |
| 2.2 Ein Existenzsatz | 45 |
| 2.3 Eigenschaften von globalen Minimalen | 51 |
| 2.4 Kompaktheitseigenschaften der Minimalen | 59 |
| 2.5 \mathcal{M}_α für α irrational, Mathermengen | 67 |
| 2.6 \mathcal{M}_α für α rational | 86 |
| 2.7 Zusatzaufgaben zum Kapitel II | 94 |
| 3 Diskrete Systeme, Anwendungen | 95 |
| 3.1 Monotone Twistabbildungen | 95 |
| 3.2 Ein diskretes Variationsproblem | 109 |
| 3.3 Drei Beispiele | 114 |
| 3.3.1 Die Standardabbildung | 114 |
| 3.3.2 Birkhoff Billiard | 117 |
| 3.3.3 Das duale Billard | 119 |
| 3.4 Ein zweites Variationsproblem | 122 |
| 3.5 Minimale Geodäten auf \mathbf{T}^2 | 123 |
| 3.6 Hedlund's Metrik auf \mathbf{T}^3 | 127 |
| 3.7 Zusatzaufgaben zum Kapitel III | 134 |
| 3.8 Literaturhinweise | 137 |

0.1 Einführung

In dieser Vorlesung soll eine neuere Entwicklung in der Variationsrechnung dargestellt werden, die als **Aubry-Mather-Theorie** bezeichnet wird. Für Aubry, einem theoretischen Physiker, war der Ausgangspunkt die Beschreibung der Bewegung von Elektronen in einem eindimensionalen Kristall durch ein einfaches Modell. Zu diesem Zwecke untersuchte er ein diskretes Variationsproblem und die entsprechenden Minimalen.

Andererseits ging Mather von einer speziellen Klasse inhaltstreuer Kreisringabbildungen, den sogenannten monotonen Twistabbildungen, aus, wie sie in der Mechanik als Poincaréabbildungen auftreten. Solche Abbildungen sind in den 20er Jahren von Birkhoff in mehreren grundlegenden Arbeiten studiert worden. Mather ist es 1982 gelungen, wesentliche Fortschritte auf diesem Gebiet zu machen und die Existenz einer Klasse von abgeschlossenen invarianten Mengen nachzuweisen, die jetzt **Mathermengen** genannt werden. Dieser Existenzbeweis beruht ebenfalls auf einem Variationsprinzip.

Obgleich diese beiden Untersuchungen ganz verschiedene Motivierungen haben, sind sie eng verwandt und besitzen dieselbe mathematische Basis. Im Folgenden werden wir nun nicht diesen Darstellungen folgen, sondern werden den Zusammenhang mit klassischen Resultaten von Jacobi, Legendre, Weierstrass und anderen aus dem vorigen Jahrhundert herstellen. Daher stellen wir die für uns wichtigsten Resultate der klassischen Theorie im Kapitel I zusammen, wobei der Begriff der Extremalenfelder für das Folgende am wichtigsten sein wird.

Im Kapitel II untersuchen wir dann Variationsprobleme auf dem 2-dimensionalen Torus und die dazugehörigen globalen Minimalen, sowie den Zusammenhang zwischen Minimalen und Extremalenfeldern. Auf diese Weise werden wir auf die Mather-Mengen geführt werden. Schliesslich werden wir im Kapitel III den Zusammenhang mit monotonen Twistabbildungen kennenlernen, die für Mather's Theorie der Ausgangspunkt war und auf ein diskretes Variationsproblem stossen, das Aubry's Untersuchungen zugrunde liegt.

Diese Theorie hat darüberhinaus interessante Anwendungen auf die Differentialgeometrie, nämlich auf den Verlauf der geodätschen Linien auf 2-dimensionalen Flächen, insbesondere dem Torus. Dabei spielen die sogenannten **minimalen Geodäten** eine ausgezeichnete Rolle, wie sie von Morse [23] und Hedlund (1932) [14] untersucht wurden.

Die Theorien von Aubry und Mather haben zu neuen Resultaten für die geodätische Strömung auf dem 2-dimensionalen Torus geführt, wie Bangert gezeigt hat. Dabei ist die Beschränkung auf zwei Dimensionen wesentlich, wie das Beispiel in letzten Abschnitt der Vorlesung zeigt. Diese differentialgeometrischen Fragen wer-

den am Ende des dritten Kapitels behandelt.

Wir weisen auf den schönen Übersichtsartikel von Bangert [4] hin, den man zu diesem Skriptum zur Hand haben sollte.

Unsere Beschreibung zielt weniger auf die Allgemeinheit, als darauf, die Zusammenhänge der neuen Entwicklung mit klassischen Begriffen wie den Extremalfeldern aufzuweisen. Insbesondere erscheinen die Mathermengen aus dieser Sicht als 'verallgemeinerte Extremalfelder'.

Bei der Anfertigung des Skriptums war mir Herr O. Knill behilflich, dem ich meinen Dank ausspreche.

Zürich, im September 1988, J. Moser

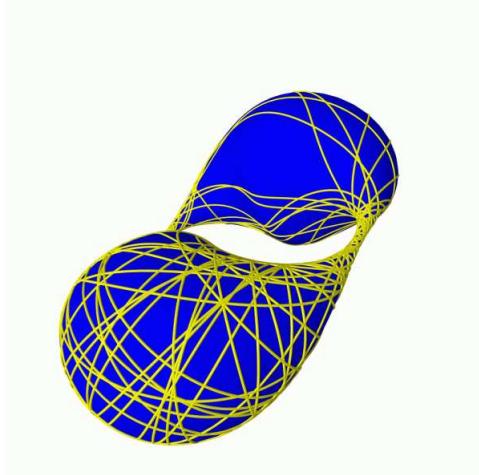
0.2 Zu diesen Vorlesungsnotizen

Diese Vorlesung wurde von J. Moser im Frühjahr 1988 an der ETH Zürich gehalten. Sie wurde von Studenten im 6.-8. Semester besucht. Es befanden sich jedoch auch Doktoranden und Besucher des Forschungsinstitut für Mathematik FIM im Auditorium.

In den 12 Jahren seit der Vorlesung hat die Forschung über dieses spezielle Thema der Variationsrechnung Fortschritte gemacht. Ein paar Hinweise auf die Literatur sind in einem Appendix beigelegt worden. Gerade weil noch wichtige Fragen offen sind, ist dieses Script vielleicht nicht nur von historischem Wert.

Im März 2000 bin ich über alte Disketten dieser Vorlesung gestolpert die ich im Sommer 1998 mit dem Textverarbeitungssystem 'Signum' auf einem Atari ST computer angefertigt hatte. Herr Moser hatte die gedruckten Notizen Anfangs September 1988 sorgfältig durchgeschaut. Da das damals verwendete Textverarbeitungssystem pixelbasiert war, musste das Typesetting nun in L^AT_EX neu gemacht werden. Das Original wurde dabei abgesehen von kleinen, meist stylistischen oder typographischen Korrekturen nicht verändert.

Austin, im Juni 2000, O. Knill
Cambridge, im April 2002, kleinere Korrekturen und Ergänzungen zum Literaturanhang wurden während der Übersetzung ins Englische gemacht. Die Illustrationen sind im Mai-Juni 2002 angefügt worden. O. Knill



Kapitel 1

Eindimensionale Variationsprobleme

1.1 Regularität der Minimalen

Sei Ω ein offenes Gebiet im \mathbf{R}^{n+1} , von dem wir annehmen, dass es einfach zusammenhängend ist. Ein Punkt in Ω habe die Koordinaten $(t, x_1, \dots, x_n) = (t, x)$. Sei $F = F(t, x, p) \in C^r(\Omega \times \mathbf{R}^n)$ mit $r \geq 2$ und seien (t_1, a) und (t_2, b) zwei Punkte in Ω . Der Raum

$$\Gamma := \{\gamma : t \rightarrow x(t) \in \Omega \mid x \in C^1[t_1, t_2], x(t_1) = a, x(t_2) = b\}$$

besteht aus allen stetig differenzierbaren Pfaden, die im Punkt (t_1, a) starten und im Punkt (t_2, b) enden. Auf Γ ist das Funktional

$$I(\gamma) = \int_{t_1}^{t_2} F(t, x(t), \dot{x}(t)) dt$$

definiert.

Definition: Wir sagen $\gamma^* \in \Gamma$ sei **minimal** in Γ , falls

$$I(\gamma) \geq I(\gamma^*), \forall \gamma \in \Gamma .$$

Zunächst suchen wir notwendige Bedingungen für ein Minimum von I . Wir nehmen also zuerst die Existenz einer Minimalen an, und suchen notwendige Bedingungen für ein solches Minimum.

Bemerkung.

Im Allgemeinen braucht ein Minimum gar nicht zu existieren:

- Es könnte sein, dass $\Gamma = \emptyset$ ist.
- Denkbar ist auch, dass ein minimales γ^* nur in $\overline{\Omega}$ liegt.
- Schliesslich könnte zwar das Infimum existieren, ohne dass das Minimum angenommen wird:

Beispiel: Sei $n = 1$, $F(t, x, \dot{x}) = t^2 \cdot \dot{x}^2$, $(t_1, a) = (0, 0)$, $(t_2, b) = (1, 1)$

$$\gamma_m(t) = t^m, \quad I(\gamma_m) = \frac{1}{m+3}, \quad \inf_{m \in \mathbf{N}} I(\gamma_m) = 0,$$

aber für alle $\gamma \in \Gamma$ gilt $I(\gamma) > 0$.

Satz 1.1.1

Falls γ^ minimal ist in Γ so folgt*

$$F_{p_j}(t, x^*, \dot{x}^*) = \int_{t_1}^t F_{x_j}(s, x^*, \dot{x}^*) \, ds = \text{const}$$

*für alle $t_1 \leq t \leq t_2$ und $j = 1, \dots, n$. Diese Gleichungen heiessen **Integrierte Eulergleichungen**.*

Definition: Man nennt ein γ^* **regulär**, falls $\det(F_{p_i p_j}) \neq 0$ für $x = x^*, p = \dot{x}^*$.

Satz 1.1.2

Falls γ^ eine reguläre Minimale ist, so ist $x^* \in C^2[t_1, t_2]$ und es gilt für $j = 1, \dots, n$*

$$\frac{d}{dt} F_{p_j}(t, x^*, \dot{x}^*) = F_{x_j}(t, x^*, \dot{x}^*) \quad (1.1)$$

*Diese Gleichungen heiessen **Eulergleichungen**.*

Definition: Ein Element $\gamma^* \in \Gamma$, das die Eulergleichungen 1.1 erfüllt, nennt man eine **Extremale** in Γ .

Achtung: Nicht jede Extremale ist eine Minimale!

Beweis von Satz 1.1.1:

Beweis. Wir nehmen an, dass γ^* minimal ist in Γ . Sei $\xi \in C_0^1(t_1, t_2) = \{x \in C^1[t_1, t_2] \mid x(t_1) = x(t_2) = 0\}$ und $\gamma_\epsilon : t \mapsto x(t) + \epsilon \xi(t)$. Da Ω offen ist und $\gamma \in \Omega$

ist, so ist auch $\gamma_\epsilon \in \Omega$ für genügend kleines ϵ . Daher gilt

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{d\epsilon} I(\gamma_\epsilon)|_{\epsilon=0} \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \sum_{j=1}^n \left(F_{p_j}(s) \dot{\xi}_j + F_{x_j}(s) \right) \xi_j \, ds \\ &= \int_{t_1}^{t_2} (\lambda(t), \xi(t)) \, dt \end{aligned}$$

mit $\lambda_j(t) = F_{p_j}(t) - \int_{t_1}^{t_2} F_{x_j}(s) \, ds$. Jetzt folgt Satz 1.1.1 aus folgendem Lemma. \square

Lemma 1.1.3 Falls $\lambda \in C[t_1, t_2]$ und
 $\int_{t_1}^{t_2} (\lambda, \dot{\xi}) \, dt = 0, \quad \forall \xi \in C_0^1[t_1, t_2]$
so gilt $\lambda = \text{const.}$

Beweis. Definiere $c = (t_2 - t_1)^{-1} \int_{t_1}^{t_2} \lambda(t) \, dt$ und setze $\xi(t) = \int_{t_1}^{t_2} (\lambda(s) - c) \, ds$. Es ist $\xi \in C_0^1[t_1, t_2]$ und nach Annahme haben wir:

$$0 = \int_{t_1}^{t_2} (\lambda, \dot{\xi}) \, dt \int_{t_1}^{t_2} (\lambda, (\lambda - c)) \, dt = \int_{t_1}^{t_2} (\lambda - c)^2 \, dt$$

wobei die letzte Gleichung aus $\int_{t_1}^{t_2} (\lambda - c)^2 \, dt = 0$ folgte. Da λ stetig vorausgesetzt wurde, impliziert $\int_{t_1}^{t_2} (\lambda - c)^2 \, dt = 0$ die Behauptung $\lambda = \text{const.}$ Damit ist auch der Beweis des Satzes 1.1.1 abgeschlossen. \square

Beweis von Satz 1.1.2.

Beweis. Setze $y_j^* = F_{p_j}(t, x^*, p^*)$. Da nach Voraussetzung $\det(F_{p_i p_j}) \neq 0$ ist an jeder Stelle $(t, x^*(t), \dot{x}^*(t))$, folgt aus dem Satz über implizite Funktionen, dass lokal Funktionen $p_k^* = \phi_k(t, x^*, y^*)$ existieren, die lokal C^1 sind. Aus Satz 1.1.1 wissen wir

$$y_j^* = \text{const} - \int_{t_1}^t F_{x_j}(s, x^*, \dot{x}^*) \, ds \in C^1 \tag{1.2}$$

und damit ist

$$\dot{x}_k^* = \phi_k(t, x^*, y^*) \in C^1$$

also $x_k^* \in C^2$. Die Eulergleichungen erhalten wir nun durch Ableiten der Integrierten Eulergleichungen in Satz 1.1.1. \square

Falls γ^* eine Minimale ist, so gilt

Satz 1.1.4
$$(F_{pp}(t, x^*, y^*)\zeta, \zeta) = \sum_{i,j=1}^n F_{p_i p_j}(t, x^*, y^*)\zeta_i \zeta_j \geq 0$$
 für alle $t_1 < t < t_2$ und alle $\zeta \in \mathbf{R}^n$.

Beweis. Sei γ_ϵ wie im Beweis von Satz 1.1.1 definiert, also $\gamma_\epsilon : t \mapsto x^*(t) + \epsilon \xi(t), \xi \in C_0^1$.

$$0 \leq II := \frac{d^2}{(d\epsilon)^2} I(\gamma_\epsilon)|_{\epsilon=0} \quad (1.3)$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} (F_{pp}\dot{\xi}, \dot{\xi}) + 2(F_{px}\dot{\xi}, \dot{\xi}) + (F_{xx}\xi, \xi) dt. \quad (1.4)$$

II nennt man die **zweite Variation** vom Funktional I. Sei $t \in (t_1, t_2)$ beliebig gegeben. Wir konstruieren nun spezielle Funktionen $\xi_j \in C_0^1(t_1, t_2)$:

$$\xi_j(t) = \zeta_j \psi\left(\frac{t-\tau}{\epsilon}\right)$$

wo $\zeta_j \in \mathbf{R}$ und $\psi \in C^1(\mathbf{R})$ die Bedingungen $\psi(\lambda) = 0$ für $|\lambda| > 1$ und $\int_{\mathbf{R}} (\psi')^2 d\lambda = 1$ erfüllt. Dabei meint ψ' die Ableitung nach der neuen Zeit τ , die wie folgt mit t zusammenhängt:

$$t = \tau + \epsilon \lambda, \quad \epsilon^{-1} dt = d\lambda.$$

Mit

$$\dot{\xi}_j(t) = \epsilon^{-1} \zeta_j \psi'\left(\frac{t-\tau}{\epsilon}\right)$$

und (1.3) gibt das

$$0 \leq \epsilon^3 II = \int_{\mathbf{R}} (F_{pp}\zeta, \zeta)(\psi')^2(\lambda) d\lambda + O(\epsilon)$$

liefert. Für $\epsilon > 0$ und $\epsilon \rightarrow 0$ bedeutet dies aber

$$(F_{pp}(t, x(t), \dot{x}(t))\zeta, \zeta) \geq 0.$$

□

Bemerkung:

Satz 1.1.4 sagt, dass für ein minimales γ^* die Hessesche von F positiv semidefinit ist.

Definition: Wir nennen die Funktion F **autonom**, falls F von t unabhängig ist, also wenn $F_t = 0$ ist.

Satz 1.1.5

Falls F autonom ist, gilt für jede reguläre Extremale

$$H = -F + \sum_{j=1}^n p_j F_{p_j} = \text{const.}$$

*Die Funktion H wird auch **Energie** genannt. Im autonomen Fall haben wir also Energieerhaltung.*

Beweis. Man zeigt einfach, da die partielle Ableitung H_t verschwindet, dass:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} H &= \frac{d}{dt} \left(-F + \sum_{j=1}^n p_j F_{p_j} \right) \\ &= \sum_{j=1}^n \left[-F_{x_j} \dot{x}_j - F_{p_j} \ddot{x}_j + \ddot{x}_j F_{p_j} + \dot{x}_j \frac{d}{dt} F_{p_j} \right] \\ &= \sum_{j=1}^n \left[-F_{x_j} \dot{x}_j - F_{p_j} \ddot{x}_j + \ddot{x}_j F_{p_j} + \dot{x}_j F_{x_j} \right] = 0. \end{aligned}$$

Da wir nach Annahme eine reguläre Extremale vorausgesetzt haben, durften wir nach Satz 1.1.2 die Eulergleichungen benützen. \square

Um verschärfte Regularitätsaussagen zu erhalten, ändern wir den Variationsraum. Wir haben gesehen, dass ein minimales $\gamma^* \in \Gamma$ unter der Bedingung, dass F_{pp} nicht entartet ist, zweimal stetig differenzierbar ist, obwohl die Elemente in Γ nur C^1 vorausgesetzt wurden. Das war die Aussage des Regularitätssatzes 1.1.2.

Wir betrachten jetzt eine grössere Klasse von Kurven

$$\Lambda = \{ \gamma : [t_1, t_2] \rightarrow \Omega, t \mapsto x(t), x \in \text{Lip}[t_1, t_2], x(t_1) = a, x(t_2) = b \}.$$

$\text{Lip}[t_1, t_2]$ bezeichnet dabei den Raum der Lipschitzstetigen Funktionen auf dem Intervall $[t_1, t_2]$. Man beachte, dass jetzt \dot{x} nur noch messbar und beschränkt ist. Trotzdem gibt es analoge Sätze zu Satz 1.1.1 und Satz 1.1.2:

Satz 1.1.6

Ist γ^ eine Minimale in Λ , dann gilt*

$$F_{p_j}(t, x^*, \dot{x}^*) - \int_{t_1}^{t_2} F_{x_j}(s, x^*, \dot{x}^*) ds = \text{const} \quad (1.5)$$

für Lebesgue fast alle $t \in [t_1, t_2]$ und alle $j = 1, \dots, n$.

Beweis. Wie im Beweis von Satz 1.1.1 setzen wir $\gamma_\epsilon = \gamma + \epsilon\xi$, wo aber ξ diesmal in

$$\text{Lip}_0[t_1, t_2] := \{\gamma : t \mapsto x(t) \in \Omega, x \in \text{Lip}[t_1, t_2], x(t_1) = x(t_2) = 0\}$$

liegt.

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{d\epsilon} I(\gamma_\epsilon)|_{\epsilon=0} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (I(\gamma_\epsilon) - I(\gamma_0))/\epsilon \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{t_1}^{t_2} [F(t, \gamma^* + \epsilon\xi, \dot{\gamma}^* + \epsilon\dot{\xi}) - F(t, \gamma^*, \dot{\gamma}^*)]/\epsilon dt \end{aligned}$$

Um den Grenzübergang $\epsilon \rightarrow 0$ innerhalb des Integrals zu machen, können wir den Lebesgue'schen Konvergenzsatz anwenden. Es gilt nämlich für fixiertes t

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} [F(t, \gamma^* + \epsilon\xi, \dot{\gamma}^* + \epsilon\dot{\xi}) - F(t, \gamma^*, \dot{\gamma}^*)]/\epsilon = F_x \xi + F_p \dot{\xi}$$

und

$$\frac{F(t, \gamma^* + \epsilon\xi, \dot{\gamma}^* + \epsilon\dot{\xi}) - F(t, \gamma, \dot{\gamma})}{\epsilon} \leq \sup_{s \in [t_1, t_2]} |F_x(s, x(s), \dot{x}(s))\xi(s) + |F_p(s, x(s))\dot{\xi}(s)|$$

und letzteres ist in $L^1[t_1, t_2]$. Damit wird der Satz von Lebesgue anwendbar und man erhält

$$0 = \frac{d}{d\epsilon} I(\gamma_\epsilon)|_{\epsilon=0} = \int_{t_1}^{t_2} F_x \xi + F_p \dot{\xi} dt = \int_{t_1}^{t_2} \lambda(t) \dot{\xi} dt$$

mit $\lambda(t) = F_p - \int_{t_1}^{t_2} F_x ds$, das beschränkt und messbar ist. Definiere $c = (t_2 - t_1)^{-1} \int_{t_1}^{t_2} \lambda(t) dt$ und setze $\xi(t) = \int_{t_1}^{t_2} (\lambda(s) - c) ds$. Es ist $\xi \in \text{Lip}_0[t_1, t_2]$ und gleich wie im Beweis von Satz 1.1.4 folgert man

$$0 = \int_{t_1}^{t_2} (\lambda, \dot{\xi}) dt = \int_{t_1}^{t_2} (\lambda, (\lambda(t) - c)) dt = \int_{t_1}^{t_2} (\lambda - c)^2 dt,$$

wobei die letzte Gleichung aus $\int_{t_1}^{t_2} (\lambda - c) dt = 0$ folgte. Das bedeutet nun, dass $\lambda = c$ für fast alle $t \in [t_1, t_2]$. \square

Satz 1.1.7

Falls γ^* eine Minimale ist in Λ und $F_{pp}(t, x, p)$ positiv definit ist für alle $(t, x, p) \in \Omega \times \mathbf{R}^n$, so ist $x^* \in C^2[t_1, t_2]$ und

$$\frac{d}{dt} F_{pj}(t, x^*, \dot{x}^*) = F_{xj}(t, x^*, \dot{x}^*)$$

für $j = 1, \dots, n$.

Beweis. Der Beweis benutzt die integrierten Eulergleichungen von Satz 1.1.1 und verwendet die Tatsache, dass die Lösung der impliziten Gleichung $y = F_p(t, x, p)$ für $p = \Phi(t, x, y)$ **global eindeutig** ist. In der Tat: Nähmen wir an, dass zwei Lösungen p und q existierten

$$y = F_p(t, x, p) = F_q(t, x, q).$$

Das implizierte:

$$0 = (F_p(t, x, p) - F_p(t, x, q), p - q) = (A(p - q), p - q)$$

mit

$$A = \int_0^1 F_{pp}(t, x, p + \lambda(q - p)) d\lambda$$

und da A positiv definit vorausgesetzt wurde, folgte $p = q$. Aus den integrierten Eulergleichungen folgt, dass

$$y(t) = F_p(t, x, \dot{x})$$

stetig mit beschränkten Ableitungen ist. Somit ist $\dot{x} = \Phi(t, x, y)$ absolutstetig und Integration liefert $x \in C^1$. Die integrierten Eulergleichungen von Satz 1.1.1 sagen jetzt, dass F_p sogar C^1 ist und wir gewinnen unter Benützung der anfangs bewiesenen globalen Eindeutigkeit, dass $\dot{x} \in C^1$ ist und somit $x \in C^2$. Auch hier erhalten wir nun die Eulergleichungen durch Differentiation von (1.5). \square

Hier noch eine Bemerkung über neuere Entwicklungen:

Wir haben gesehen, dass ein minimales $\gamma^* \in \Lambda$ zweimal stetig differenzierbar ist. Es stellt sich jetzt natürlich die Frage, ob wir solche glatten Minimalen auch in noch grösseren Variationsräumen finden können. Sei zum Beispiel

$$\Lambda_a = \{ \gamma : [t_1, t_2] \rightarrow \Omega, t \mapsto x(t), x \in W^{1,1}[t_1, t_2], x(t_1) = a, x(t_2) = b \}$$

der Raum der **absolutstetigen** γ . Hier muss man für minimale γ Singularitäten in Kauf nehmen, die allerdings von Mass Null sind. Auch kann das Infimum in dieser Klasse Λ_a kleiner sein als in der Lipschitzklasse Λ (**Lavrentiev-Phänomen**). Beispiele dieser Art gehen auf Ball und Mizel zurück. Man kann in der Arbeit von Davie [9] mehr darüber erfahren.

Auch wir werden im nächsten Kapitel für den speziellen Fall, dass $\Omega = \mathbf{T}^2 \times \mathbf{R}$ ist, in einem grösseren Variationsraum arbeiten, nämlich in

$$\Xi = \{ \gamma : [t_1, t_2] \rightarrow \Omega, t \mapsto x(t), x \in W^{1,2}[t_1, t_2], x(t_1) = a, x(t_2) = b \},$$

wobei wir gewisse Wachstumsvoraussetzungen an $F = F(t, x, p)$ für $p \rightarrow \infty$ stellen werden.

1.2 Beispiele

Beispiel 1):

Freie Bewegung eines Massenpunktes auf einer Mannigfaltigkeit.

Sei M eine n -dimensionale Riemann'sche Mannigfaltigkeit mit Metrik $g_{ij} \in C^2(M)$ (wobei die matrix-wertige Funktion g_{ij} natürlich symmetrisch und positiv definit ist) und sei

$$F(x, p) = \frac{1}{2} g_{ij}(x) p^i p^j .$$

(Wir benützen hier die **Einstein'sche Summationskonvention**, die besagt sagt, dass über gleiche oberen und unteren Indizes automatisch summiert wird.) Auf der Mannigfaltigkeit M seien zwei Punkte a und b gegeben, die beide in der gleichen Karte $U \subset M$ liegen sollen. U ist homöomorph zu einem offenen Gebiet in \mathbf{R}^n und wir definieren $W = U \times \mathbf{R}$. Auch seien zwei Zeitpunkte t_1 und t_2 in \mathbf{R} fixiert. Der Raum Λ kann nun wie oben definiert werden. Wir suchen jetzt Gleichungen, die eine Minimale γ^* zum Funktional

$$I(x) = \int_{t_1}^{t_2} F(t, x, x) dt = \int_{t_1}^{t_2} g_{ij}(x) \dot{x}^i \dot{x}^j dt \quad (1.6)$$

erfüllen müssen. Von Satz 1.1.2 wissen wir, dass dies die Eulergleichungen sind. Es ist

$$\begin{aligned} F_{p_k} &= g_{ki} p^i \\ F_{x_k} &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^k} g_{ij}(x) p^i p^j \end{aligned}$$

und die zu γ^* gehörigen Eulergleichungen können unter Verwendung der Identität

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^j} g_{ik}(x) \dot{x}^i \dot{x}^j = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^i} g_{jk}(x) \dot{x}^i \dot{x}^j$$

und Benutzung des **Christoffelsymbols**

$$\Gamma_{ijk} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x^i} g_{jk}(x) + \frac{\partial}{\partial x^j} g_{ik}(x) - \frac{\partial}{\partial x^k} g_{ij}(x) \right]$$

geschrieben werden als

$$g_{ki} \ddot{x}^i = -\Gamma_{ijk} \dot{x}^i \dot{x}^j$$

was mit

$$g^{ij} := g_{ij}^{-1}, \quad \Gamma_{ij}^k := g^{lk} \Gamma_{ijl}$$

in die Form

$$\ddot{x}^k = -\Gamma_{ij}^k \dot{x}^i \dot{x}^j$$

gebracht werden kann. Dies sind die Differentialgleichungen, die die **Geodäten** beschreiben. Da F von t unabhängig ist, ist nach Satz 1.1.5

$$p^k F_{p^k} - F = p^k g_{ki} p^i - F = 2F - F = F$$

eine Konstante entlang der extremalen Bahn und kann physikalisch als kinetische Energie interpretiert werden. Die Eulergleichungen beschreiben die Bahnkurve eines Massenpunktes, der sich in M ohne Einwirkung äusserere Kräfte frei von a nach b bewegt.

Beispiel 2): Geodäten auf Mannigfaltigkeiten.

Wir übernehmen die Notationen vom letzten Beispiel, betrachten diesmal jedoch die neue Funktion

$$G(t, x, p) = \sqrt{g_{ij}(x)p^i p^j} = \sqrt{2F} .$$

Das Funktional

$$I(\gamma) = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{g_{ij}(x)\dot{x}^i \dot{x}^j} dt$$

gibt die Bogenlänge von γ an. Die Eulerschen Gleichungen

$$\frac{d}{dt} G_{p^i} = G_{x^i} \quad (1.7)$$

können mit der alten Funktion F geschrieben werden als

$$\frac{d}{dt} \frac{F_{p^i}}{\sqrt{2F}} = \frac{F_{x^i}}{\sqrt{2F}} \quad (1.8)$$

und diese Gleichungen sind erfüllt, falls

$$\frac{d}{dt} F_{p^i} = F_{x^i} \quad (1.9)$$

und weil $\frac{d}{dt} F = 0$. Damit erhalten wir die gleichen Gleichungen wie im ersten Beispiel. Die Gleichungen (1.8) und (1.9) sind jedoch nicht äquivalent, da eine Umparametrisierung der Zeit $t \mapsto \tau(t)$ die Gleichungen (1.8) invariant lassen im Gegensatz zu den Gleichungen (1.9). Die für die Extremalen von (1.9) ausgezeichnete Parametrisierung ist proportional zur Bogenlänge.

Die Verwandtschaft der beiden Variationsprobleme, die wir in den Beispielen 1) und 2) angetroffen haben, ist ein Spezialfall des **Maupertius Prinzips**, das wir hier der Vollständigkeit halber erwähnen:

Sei die Funktion F gegeben durch

$$F = F_2 + F_1 + F_0$$

wo die F_i unabhängig von t und **homogen** vom Grade j sind. (F_j ist homogen vom Grade j , falls $F_j(t, x, \lambda p) = \lambda F_j(t, x, p)$ für alle $\lambda \in \mathbf{R}$) und F_2 positiv definit vorausgesetzt wird. In diesem Fall wird die Energie

$$pF_p - F = F_2 - F_0$$

invariant gelassen und wir können uns ohne Einschränkung der Allgemeinheit auf die Energiefläche $F_2 - F_0 = 0$ beschränken. Jetzt wird für $F_2 = F_0$

$$F = F - (\sqrt{F_2} - \sqrt{F_0})^2 = 2\sqrt{F_2 F_0} - F_1 = G$$

und

$$I(x) = \int_{t_1}^{t_2} G dt = \int_{t_1}^{t_2} (2\sqrt{F_2 F_0} - F_1) dt$$

ist unabhängig von der Parametrisierung, denn die rechte Seite ist homogen vom Grade 1. Es ist klar, dass falls x die Eulergleichungen für F erfüllt und die Energie $F_2 - F_1 = 0$ ist, x dann auch den Eulergleichungen für G genügt. Der in Beispiel 1) und Beispiel 2) aufgetretene Fall entspricht $F_1 = 0$, $F_0 = c > 0$.

(Maupertiusprinzip) Falls $F = F_2 + F_1 + F_0$, wo die F_j homogen vom Grad j und unabhängig von t sind und F_2 positiv definit ist, dann gilt für ein x , dass sich auf der Energiefläche $F_2 - F_0 = 0$ befindet: x ist eine Lösung der Eulergleichungen

$$\frac{d}{dt} F_p = F_x$$

mit $F_2 = F_0$ genau dann, wenn x die Eulergleichungen $\frac{d}{dt} G_p = G_x$ erfüllt.

Satz 1.2.1

Beweis. Falls x Lösung ist von $\frac{d}{dt} F_p = F_x$ mit $F_2 - F_0 = 0$, so gilt

$$\delta \int G dt = \delta \int F dt - 2 \int (\sqrt{F_2} - \sqrt{F_0}) \delta(\sqrt{F_2} - \sqrt{F_0}) = 0$$

(δI ist die erste Variation vom Funktional I) also ist x kritischer Punkt von $\int G dt = \int (2\sqrt{F_2 F_0} - F_1) dt$ und x erfüllt die Eulergleichungen $\frac{d}{dt} G_p = G_x$. Falls umgekehrt x Lösung ist der Eulergleichungen für G , reparametrisieren wir x so, dass mit der neuen Zeit

$$t = t(s) = \int_{t_1}^s \frac{\sqrt{F_2(\tau, x(\tau), \dot{x}(\tau))}}{\sqrt{F_0(\tau, x(\tau), \dot{x}(\tau))}} d\tau$$

$x(t)$ die Eulergleichungen für F erfüllt, falls $x(s)$ die Eulergleichungen für G erfüllt. Befindet sich $x(t)$ auf der Energiefläche $F_2 = F_0$, so ist $x(t) = x(s)$ und x erfüllt auch die Eulergleichungen für F . \square

Wir sehen aus Satz 1.2.1, dass im Falle $F_1 = 0$ die Extremalen von F gerade die Geodäten in der Metrik $g_{ij}(x)p^i p^j = (p, p)_x = 4F_0(x, p)F_2(x, p)$ entsprechen. Diese Metrik g wird **Jacobimetrifik** genannt.

Beispiel 3): Teilchen in einem Potential im Euklidischen Raum.

Wir betrachten den Weg $x(t)$ eines Teilchens mit Masse m im Euklidischen Raum \mathbf{R}^n , das sich in einem Potential $U(x)$ befindet. Eine Extreme der Lagrangefunktion

$$F(t, x, p) = mp^2/2 + E - U(x)$$

führt auf die Eulergleichungen

$$m\ddot{x} = -\frac{\partial U}{\partial x}.$$

E ist dabei die konstante Energie $pF_p - F = mp^2/2 + U$. Der Ausdruck $F_2 = mp^2/2$ ist dabei positiv definit und homogen vom Grade 2. Weiter ist $F_0 = E - U(x)$ ist homogen vom Grade 0 und $F = F_2 + F_0$. Aus Satz 1.2.1 folgern wir dass die Extremalen von F mit Energie E Geodäten sind bezüglich der Jacobimetrifik

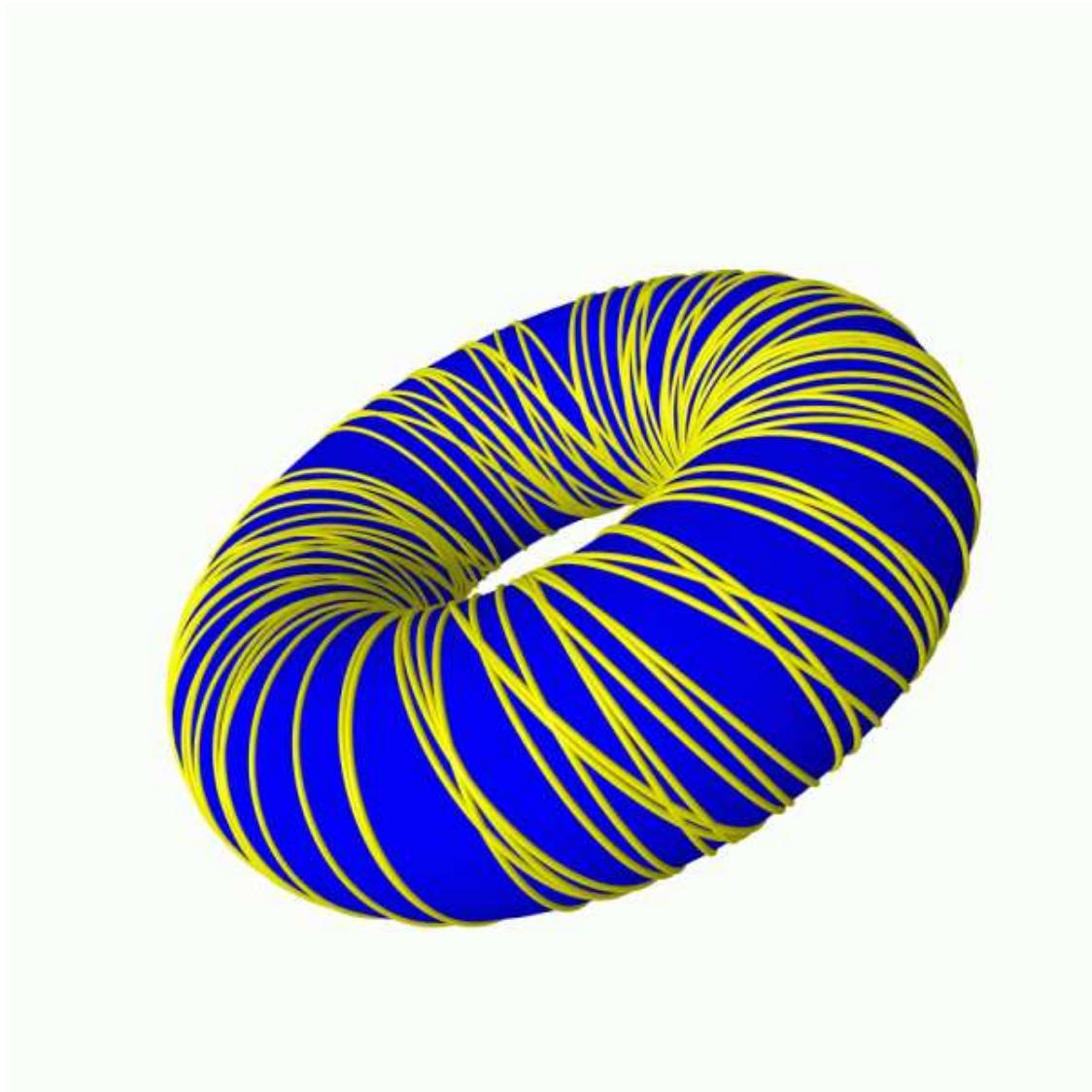
$$g_{ij}(x) = 2(E - U(x))\delta_{ij}.$$

Es ist wohlbekannt, dass den Lösungsbahnen nicht immer Minimalen des Funktionals entsprechen. Im Allgemeinen handelt es sich um stationäre Lösungen. Betrachten wir etwa das lineare Pendel, wo wir in \mathbf{R} das Potential $U(x) = \omega^2 x$ gegeben haben und das Funktional

$$I(x) = \int_0^T F(t, x, \dot{x}) dt = \int_0^T (\dot{x}^2 - \omega^2 x^2) dt$$

minimieren wollen in der Klasse der Funktionen mit $x(0) = 0$ und $x(T) = 0$. Die Lösung $x \equiv 0$ ist eine Lösung der Eulergleichungen. Sie ist jedoch nur dann eine minimale Lösung, falls $0 < T \leq \pi/\omega$. Falls $T > \pi/\omega$ ist, haben wir $I(\xi) < I(0)$ für ein gewisses $\xi \in C(0, T)$ mit $\xi(0) = \xi(T) = 0$.

Beispiel 4): Geodäten auf dem rotationssymmetrischen Torus im \mathbf{R}^3



Der rotationssymmetrische Torus, der in \mathbf{R}^3 eingebettet ist, sei parametrisiert durch

$$x(u, v) = ((a + b \cos(2\pi v)) \cos(2\pi u), (a + b \cos(2\pi v)) \sin(2\pi u), b \sin(2\pi v)) ,$$

wo $0 < b < a$. Die Metrik g_{ij} auf dem Torus gegeben ist durch

$$g_{11} = 4\pi^2(a + b \cos(2\pi v))^2 = 4\pi^2r^2$$

$$\begin{aligned} g_{22} &= 4\pi^2 b^2 \\ g_{12} &= g_{21} = 0 \end{aligned}$$

sodass das Linienelement ds die Form hat:

$$ds^2 = 4\pi^2[(a + b \cos(2\pi v))^2 du^2 + b^2 dv^2] = 4\pi^2(r^2 du^2 + b^2 dv^2).$$

Offenbar sind $v \equiv 0$ und $v \equiv 1/2$ Geodäten, wobei $v \equiv 1/2$ eine minimale Geodäte ist. Die Kurve $v = 0$ ist jedoch keine minimale Geodäte! Wenn wir u als Zeitparameter nehmen, können wir das Problem, Extremale zum Funktional

$$4\pi^2 \int_{t_1}^{t_2} (a + b \cos(2\pi v))^2 \dot{u}^2 + b^2 \dot{v}^2 dt$$

zu finden, reduzieren auf die Aufgabe, Extremale zum Funktional

$$4\pi^2 b^2 \int_{u_2}^{u_1} F(v, v') du, \quad u_j = u(t_j)$$

zu finden, wo

$$F(v, v') = \sqrt{\left(\frac{a}{b} + \cos(2\pi v)\right)^2 + (v')^2}$$

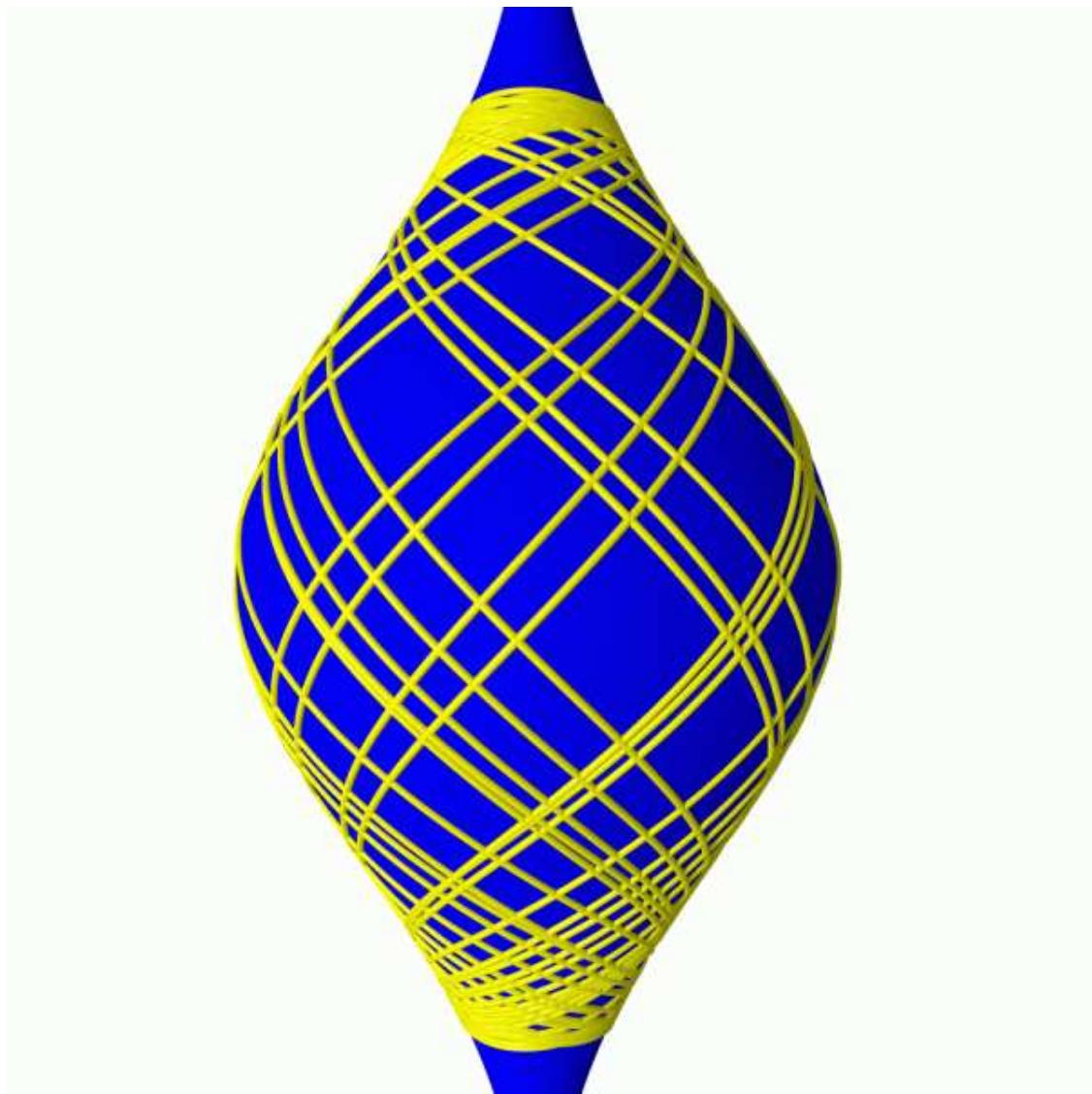
mit $v' = \frac{dv}{du}$. Dies hat geklappt, da unsere ursprüngliche Lagrangefunktion unabhängig war von u . Mit dem Satz von E. Nöther hätten wir sofort eine Erhaltungsgröße, den Drehimpuls gehabt, eine Folge der Tatsache dass der Torus rotationssymmetrisch ist. Mit u als Zeit, wird diese Erhaltungsgröße ein etwas anderes Gesicht bekommen. Alle Lösungen sind regulär und die Eulergleichungen lauten

$$\frac{d}{du} \left(\frac{v'}{F} \right) = F_v$$

und da F autonom ist, d.h. $\frac{dF}{du} = 0$ gilt, haben wir mit Satz 1.1.5 Energieerhaltung:

$$E = v' F_{v'} - F = \frac{v'^2}{F} - F = -b^2 r^2 / F = -b^2 r \sin(\psi) = const.$$

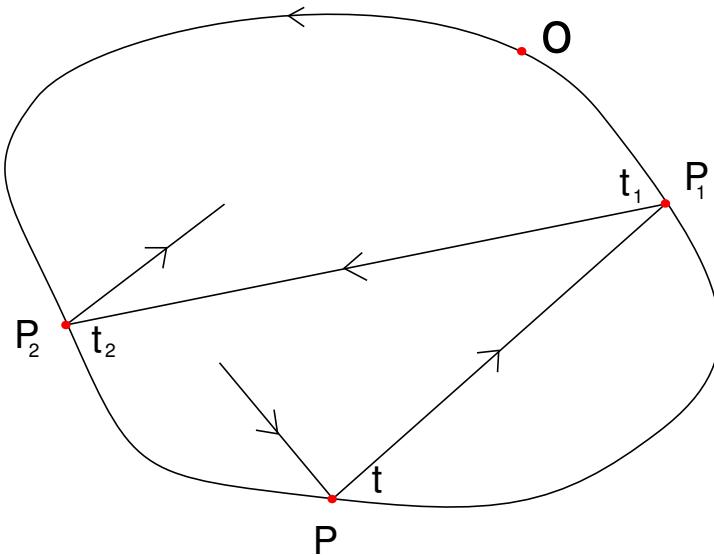
wobei $r = a + b \cos(2\pi v)$ der Abstand von der Rotationsachse ist und $\sin(\psi) = r/F$. Der Winkel ψ hat eine geometrische Interpretation. Er ist der Winkel, der die Tangente an die Geodäte mit dem Meridian $u = const$ einschließt. Für $E = 0$ erhalten wir $\psi = 0 \pmod{\pi}$ und wir sehen, dass die Meridiane Geodäten sind. Die Erhaltungsgröße $r \sin(\psi)$ heißt **Clairaut'sches Integral**. Sie tritt natürlich bei jeder Rotationsfläche als Integral auf.

**Beispiel 5): Billiard**

Zur Motivation betrachten wir den geodätischen Fluss auf einer zwei-dimensionalen glatten Riemann'schen Mannigfaltigkeit M , die homöomorph einer Kugel ist und die als Rand eines streng konvexen Körpers im \mathbb{R}^3 eingebettet ist. Die Bilder von M unter den Abbildungen

$$z_n : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3, (x, y, z) \mapsto (x, y, z/n)$$

$M_n = z_n(M)$ sind wieder Riemannsche Mannigfaltigkeiten, die dieselben Eigenschaften wie M haben, insbesondere einen wohldefinierten geodätischen Fluss besitzen. Mit grösser werdendem n werden die M_n immer flacher und als 'Grenzwert' erhält man ein streng konkav convexes ebenes Gebiet. Die Geodäten sind dabei entartet zu Geraden, die den Rand des Gebietes nach dem Gesetz Einfallsinkel=Ausfallsinkel treffen. Das so erhaltene System heisst **Billiard**. Wenn wir den Lauf einer solchen entarteten Geodäten verfolgen und die sukzessiven Aufschläge an der Bande betrachten, erhalten wir eine Abbildung f , die das ganze Billiard vollständig beschreibt. Man kann auch ohne diesen Vorspann von vorne beginnen:



Sei Γ eine konvexe glatte geschlossene Kurve in der Ebene mit Bogenlänge 1. Wir fixieren einen Punkt O und eine Orientierung auf Γ . Jeder Punkt P auf Γ ist nun eine Zahl s zugeordnet, die Bogenlänge des Bogens von O nach P in positiver Umlaufsrichtung. Sei t der Winkel der eine durch P verlaufende Gerade mit der Tangente in P an Γ einschliesst. Falls t verschieden von 0 und π ist, hat die Gerade einen zweiten Schnittpunkt P mit Γ und diesem Schnittpunkt können wir wieder zwei Zahlen s_1 und t_1 zuordnen, die eindeutig bestimmt sind durch Vorgabe der Werte s und t . Falls $t = 0$, setzen wir einfach $(s_1, t_1) = (s, t)$ und für $t = \pi$ nehmen wir $(s_1, t_1) = (s + 1, t)$. Sei ϕ nun die Abbildung, die (s, t) überführt in (s_1, t_1) . Sie ist eine Abbildung des abgeschlossenen Kreisringes

$$A = \{(s, t) \mid s \in \mathbf{R}/\mathbf{Z}, t \in [0, \pi] \}$$

auf sich. Sie lässt den Rand von A , $\delta A = \{t = 0\} \cup \{t = \pi\}$ invariant und falls ϕ

geschrieben wird durch

$$\phi(s, t) = (s_1, t_1) = (f(s, t), g(s, t))$$

gilt $\frac{\partial}{\partial t} f > 0$. Abbildungen dieser Art heissen **monotone Twistabbildungen**. Wir legen nun durch P eine neue Gerade durch Spiegelung der Geraden P_1P an der Tangente von P . Diese neue Gerade schneidet Γ in einem Punkt P_2 . Auf diese Art erhält man eine Folge von Punkten P_n , wobei $\phi(P_n) = P_{n+1}$. Die Menge $\{P_n \mid n \in \mathbf{N}\}$ heisst **Bahn** von P . Eine Bahn heisst **geschlossen** oder **periodisch**, falls ein n existiert mit $P_{i+n} = P_i$. Wir können f auch auf einem Streifen \tilde{A} , der Überlagerungsfläche von A studieren

$$\tilde{A} = \mathbf{R} \times [0, \pi]$$

indem wir für das geliftete $\tilde{\phi}$ festlegen $\tilde{\phi}(s, 0) = 0$, $\tilde{\phi}(s, \pi) = 1$. Man sagt nun, ein Punkt P sei **periodisch vom Typ p/q** mit $p \in \mathbf{Z}$, $q \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$, falls $s_q = s + p$, $t_q = t$. In diesem Fall gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_n}{n} = \frac{p}{q} .$$

Eine Bahn heisst **vom Typ α** , falls

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_n}{n} = \alpha .$$

Es stellt sich sofort die Frage nach der Existenz von Bahnen von vorgeschriebenem Typ $\alpha \in (0, 1)$. Wir werden uns im dritten Kapitel noch näher mit dem Billiard beschäftigen und den Zusammenhang mit der Variationsrechnung herstellen.

1.3 Das akzessorische Variationsproblem

Wir wollen in diesem Abschnitt weitere notwendige Bedingungen kennen lernen, die Minimale erfüllen müssen.

Definition: Falls γ^* eine Extremale ist in Λ , setzen wir $\gamma_\epsilon = \gamma^* + \epsilon\phi$ mit $\phi \in \text{Lip}_0[t_1, t_2]$ und definieren die **2. Variation** als

$$\begin{aligned} II(\phi) &= \left(\frac{d^2}{(de)^2} \right) I(\gamma_\epsilon)|_{\epsilon=0} \\ &= \int_{t_1}^{t_2} (A\dot{\phi}, \dot{\phi}) + 2(B\dot{\phi}, \phi) + (C\phi, \phi) dt \end{aligned}$$

wobei $A = F_{pp}(t, x^*, \dot{x}^*)$, $B = F_{px}(t, x^*, \dot{x}^*)$ und $C = F_{xx}(t, x^*, \dot{x}^*)$. Allgemeiner definiert man die symmetrische Bilinearform

$$II(\phi, \psi) = \int_{t_1}^{t_2} (A\dot{\phi}, \dot{\psi}) + (B\dot{\phi}, \psi) + (B\dot{\psi}, \phi) + (C\phi, \psi) dt$$

und setzt $II(\phi) = II(\phi, \phi)$.

Es ist klar, dass $II(\phi) \geq 0$ eine notwendige Bedingung für ein Minimum ist.

Bemerkung: Die symmetrische Bilinearform II spielt die Rolle der Hesseschen Matrix bei Extremalproblemen von Funktionalen auf \mathbf{R}^m .

Für fixiertes ϕ können wir das Funktional $II(\phi, \psi)$ als Variationsproblem auffassen. Es wird **akzessorisches Variationsproblem** genannt. Mit

$$F(t, \phi, \dot{\phi}) = (A\dot{\phi}, \dot{\phi}) + 2(B\dot{\phi}, \phi) + (C\phi, \phi)$$

schreiben sich die Eulergleichungen zu diesem Problem als

$$\frac{d}{dt} (F_\psi) = F_\psi$$

und das heisst

$$\frac{d}{dt} (A\dot{\phi} + B^T\phi) = B\dot{\phi} + C\phi. \quad (1.10)$$

Diese Gleichungen heissen **Jacobigleichungen** für ϕ .

Definition: Gegeben sei eine Extremale $\gamma^* : t \mapsto x^*(t)$ in Λ . Ein Punkt $(s, x^*(s)) \in \Omega$ mit $s > t_1$ heisst **konjugierter Punkt** zu $(t_1, x^*(t_1))$, falls eine von Null verschiedene Lösung $\phi \in \text{Lip}[t_1, t_2]$ der Jacobigleichungen (1.10) existiert, für die $\phi(t_1) = 0$ und $\phi(s) = 0$ erfüllt ist.

Wir sagen auch, γ^* hat **keinen konjugierten Punkt**, falls kein konjugierter Punkt von $(t_1, x^*(t_1))$ auf dem offenen Segment $\{(t, x^*(t)) \mid t_1 < t < t_2\} \subset \Omega$ existiert.

Satz 1.3.1 Falls γ^* eine Minimale ist, so hat γ^* keinen konjugierten Punkt.

Beweis. Es genügt zu zeigen, dass $II(\phi) \geq 0, \forall \phi \in \text{Lip}_0[t_1, t_2]$ impliziert, dass kein konjugierter Punkt von $(t_1, x(t_1))$ auf dem offenen Segment $\{(t, x^*(t)) \mid t_1 < t < t_2\}$ existiert.

Sei $\psi \in \text{Lip}_0[t_1, t_2]$ eine Lösung der Jacobigleichungen, mit $\psi(s) = 0$ für $s \in (t_1, t_2)$ und $\phi(\psi, \dot{\psi}) = (A\dot{\psi} + B^T\psi)\dot{\psi} + (B\dot{\psi} + C\psi)\psi$. Es ist unter Benützung der Jacobigleichungen

$$\begin{aligned}\int_{t_1}^s \phi(\psi, \dot{\psi}) dt &= \int_{t_1}^s (A\dot{\psi} + B^T\psi)\dot{\psi} + (B\dot{\psi} + C\psi)\psi dt \\ &= \int_{t_1}^s (A\dot{\psi} + B^T\psi)\dot{\psi} + \frac{d}{dt}(A\dot{\psi} + B^T\psi)\psi dt \\ &= \int_{t_1}^s \frac{d}{dt}[(A\dot{\psi} + B^T\psi)\psi] dt \\ &= [(A\dot{\psi} + B^T\psi)\psi]_{t_1}^s = 0.\end{aligned}$$

Es ist $\dot{\psi}(s) \neq 0$, denn $\dot{\psi}(s) = 0$ würde mit $\psi(s) = 0$ wegen des Eindeutigkeitssatzes für gewöhnliche Differentialgleichungen $\psi(s) \equiv 0$ implizieren, was nach Annahme ausgeschlossen ist.

Die Lipschitzfunktion

$$\tilde{\psi}(t) := \begin{cases} \psi(t) & t \in [t_1, s) \\ 0 & t \in [s, t_2] \end{cases}$$

erfüllt nach obiger Rechnung $II(\tilde{\psi}) = 0$. Sie ist deshalb auch Lösung der Jacobigleichung. Da wir $II(\phi) \geq 0, \forall \phi \in \text{Lip}_0[t_1, t_2]$ vorausgesetzt haben, muss ψ minimal sein. ψ ist jedoch nicht C^2 , da $\dot{\psi}(s) \neq 0$, aber $\ddot{\psi}(t) = 0$ für $t \in (s, t_2]$. Das ist ein Widerspruch zu Satz 1.1.2. \square

Es stellt sich nun die Frage, ob die Nichtexistenz von konjugierten Punkten von γ in (t_1, t_2) impliziert, dass $II(f) \geq 0$ für alle $\phi \in \text{Lip}_0[t_1, t_2]$. Die Antwort ist ja im Fall $n = 1$. Wir beschränken uns auch im Folgenden auf den eindimensionalen Fall $n = 1$ und setzen voraus, dass $A, B, C \in C^1[t_1, t_2]$, und $A > 0$ ist.

Sei $n = 1, A > 0$. Gegeben sei eine Extremale $\gamma^* \in \Lambda$. Dann gilt: Es gibt keine konjugierten Punkte von γ , genau dann, wenn

Satz 1.3.2

$$II(\phi) = \int_{t_1}^{t_2} A\dot{\phi}^2 + 2B\phi\dot{\phi} + C\phi^2 dt \geq 0, \forall \phi \in \text{Lip}_0[t_1, t_2].$$

Diese Bedingung $II(\phi) \geq 0, \forall \phi \in \text{Lip}_0[t_1, t_2]$ heisst **Jacobibedingung**. Satz 1.3.1 und Satz 1.3.2 zusammen besagen, dass eine Minimale die Jacobibedingung erfüllt im Falle $n = 1$.

Beweis. Die eine Richtung haben wir mit dem Beweis von Satz 1.3.1 schon erledigt. Was wir noch zeigen müssen, ist, dass die Nichtexistenz von konjugierten Punkten für eine Extremale γ^* impliziert, dass

$$\int_{t_1}^{t_2} A\dot{\phi}^2 + 2B\phi\dot{\phi} + C\phi^2 dt \geq 0, \forall \phi \in \text{Lip}_0[t_1, t_2].$$

Zuerst beweisen wir das unter der etwas stärkeren Annahme, dass kein konjugierter Punkt in $(t_1, t_2]$ existiert. Wir behaupten, dass eine Lösung $\tilde{\phi} \in \text{Lip}[t_1, t_2]$ der Jacobigleichungen existiert, für die gilt $\tilde{\phi}(t) > 0, \forall t \in [t_1, t_2]$ und $\tilde{\phi}(t_1 - \epsilon) = 0$ und $\tilde{\phi}(t_1 + \epsilon) = 1$ für ein gewisses $\epsilon > 0$. Das sieht man so:

Betrachte etwa die Lösung ψ der Jacobigleichungen mit $\psi(t_1) = 0, \dot{\psi}(t_1) = 1$, sodass nach Voraussetzung für die nächst grösse Nullstelle s_2 gilt: $s_2 > t_2$. Dann gibt es aus Stetigkeitsgründen ein $\epsilon > 0$ und eine Lösung $\tilde{\phi}$ mit $\tilde{\phi}(t_1 - \epsilon) = 0$ und $\tilde{\phi}(t_1 + \epsilon) = 1$ und $\tilde{\phi}(t) > 0, \forall t \in [t_1, t_2]$. Für ein solches $\tilde{\phi}$ gibt es ein Lemma:

Falls $\tilde{\phi}$ eine Lösung der Jacobigleichungen ist mit $\tilde{\phi}(t) > 0, \forall t \in [t_1, t_2]$, so gilt für jedes $\phi \in \text{Lip}_0[t_1, t_2]$ mit $\xi := \phi/\tilde{\phi}$

Lemma 1.3.3

$$II(\phi) = \int_{t_1}^{t_2} A\dot{\phi}^2 + 2B\phi\dot{\phi} + C\phi^2 dt = \int_{t_1}^{t_2} A\tilde{\phi}^2\xi^2 dt \geq 0.$$

Beweis. Die folgende Rechnung zum Beweis des Lemmas geht auf Legendre zurück: Es ist $\dot{\phi} = \tilde{\phi}\xi + \tilde{\phi}\dot{\xi}$ und somit

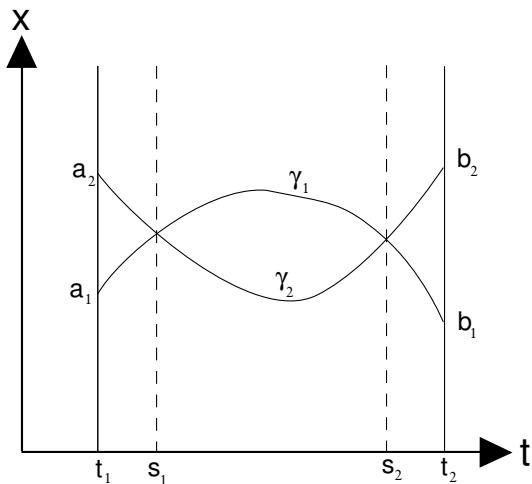
$$\begin{aligned} II(\phi) &= \int_{t_1}^{t_2} A\dot{\phi}^2 + 2B\phi\dot{\phi} + C\phi^2 dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} (A\tilde{\phi}^2 + 2B\tilde{\phi}\tilde{\phi}\dot{\xi} + C\tilde{\phi}^2)\xi^2 dt + \int_{t_1}^{t_2} (2A\tilde{\phi}\tilde{\phi}\dot{\xi} + 2B\tilde{\phi}^2)\xi\dot{\xi} dt + \int_{t_1}^{t_2} A\tilde{\phi}^2\dot{\xi}^2 dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{t_1}^{t_2} [(A\dot{\tilde{\phi}} + B\tilde{\phi})\dot{\tilde{\phi}} + \frac{d}{dt}(A\dot{\tilde{\phi}} + B\tilde{\phi})\tilde{\phi}] \xi^2 dt \\
&+ (A\dot{\tilde{\phi}} + B\tilde{\phi})\tilde{\phi} \frac{d}{dt}\xi^2 + A\tilde{\phi}^2 \dot{\xi}^2 dt \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} ((A\dot{\tilde{\phi}} + B\tilde{\phi})\tilde{\phi}\xi^2) dt + \int_{t_1}^{t_2} A\tilde{\phi}^2 \dot{\xi}^2 dt \\
&= (A\dot{\tilde{\phi}} + B\tilde{\phi})\tilde{\phi}\xi^2|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} A\tilde{\phi}^2 \dot{\xi}^2 dt \\
&= \int_{t_1}^{t_2} A\tilde{\phi}^2 \dot{\xi}^2 dt
\end{aligned}$$

wobei wir in der dritten Gleichung verwendet haben, dass ϕ die Jacobigleichungen erfüllt. \square

Fortsetzung des Beweises von Satz 1.3.2: Es bleibt der Grenzfall, wo $(t_2, x^*(t_2))$ ein konjugierter Punkt ist. Das ist eine Übungsaufgabe (Übung 6 unten). \square

Der nächste Satz gilt auch nur im Falle $n = 1, A(t, x, p) > 0, \forall (t, x, p) \in \Omega \times \mathbf{R}$.



Satz 1.3.4

Sei $n = 1, A > 0$. Für $i = 1, 2$ sei γ_i eine Minimale in
 $\Lambda_i = \{\gamma : t \mapsto x_i(t) \mid x_i \in \text{Lip}[t_1, t_2], x_i(t_1) = a_i, x_i(t_2) = b_i\}$.
 Dann schneiden sich γ_1 und γ_2 für $t_1 < t < t_2$ höchstens einmal.

Beweis. Wir nehmen an, wir hätten zwei γ_i aus Λ_i , die sich im Innern des Intervalls $[t_1, t_2]$ zweimal, nämlich an den Stellen s_1 und s_2 schneiden. Jetzt definieren wir zwei neue Wege $\underline{\gamma}$ und $\bar{\gamma}$ wie folgt:

$$\begin{aligned}\underline{\gamma}(t) &= \begin{cases} \gamma_2(t) & \text{falls } t \in [t_1, s_1] \cup [s_2, t_2] \\ \gamma_1(t) & \text{falls } t \in [s_1, s_2] \end{cases} \\ \bar{\gamma}(t) &= \begin{cases} \gamma_1(t) & \text{falls } t \in [t_1, s_1] \cup [s_2, t_2] \\ \gamma_2(t) & \text{falls } t \in [s_1, s_2] \end{cases}.\end{aligned}$$

Wir bezeichnen noch mit $\tilde{\gamma}_i$ die Einschränkung von γ_i auf $[s_1, s_2]$. Sei

$$\Lambda_0 = \{\dot{\gamma} : t \mapsto x(t), x(t) \in \text{Lip}[s_1, s_2], x(s_i) = x_1(s_i) = x_2(s_i)\}.$$

In dieser Variationsklasse ist $I(\tilde{\gamma}_1) = I(\tilde{\gamma}_2)$, da sowohl γ_1 als auch γ_2 minimal sind. Das bedeutet

$$\begin{aligned}I(\bar{\gamma}) &= I(\gamma_1) \text{ in } \Lambda_1 \\ I(\underline{\gamma}) &= I(\gamma_2) \text{ in } \Lambda_2\end{aligned}$$

und desshalb ist $\tilde{\gamma}$ minimal in Λ_1 und γ_2 minimal in Λ_2 . Dies steht im Widerspruch zum Regularitätssatz, denn die Kurven $\bar{\gamma}$ und $\underline{\gamma}$ sind nicht C^2 , da sich γ_1 und γ_2 transversal schneiden. (Eindeutigkeitssatz für gewöhnliche Differentialgleichungen.) \square

Anwendung: Die Sturm'schen Sätze.

Korollar 1.3.5

Falls s_1 und s_2 zwei aufeinanderfolgende Nullstellen einer Lösung $\phi \neq 0$ der Jacobigleichung ist, so hat jede von ϕ linear unabhängige Lösung genau eine Nullstelle in (s_1, s_2) .

Korollar 1.3.6

Falls $q(t) \leq Q(t)$,

$$\begin{aligned}\ddot{\phi} + q\phi &= 0 \\ \ddot{\Phi} + Q\Phi &= 0\end{aligned}$$

und s_1, s_2 zwei aufeinanderfolgende Nullstellen sind von Φ , so hat ϕ höchstens eine Nullstelle in (s_1, s_2)

Der Beweis der Sturm'schen Sätze ist eine Übungsaufgabe (Siehe Übung7).

1.4 Extremalenfelder für n=1

Wir wollen in diesem Paragraphen im Falle n=1 hinreichende Bedingungen für Minimalität kennenlernen. Wir werden sehen, dass die Eulergleichungen, die Bedingung $F_{pp} > 0$ und die Jacobibedingungen hinreichend sind für ein lokales Minimum. Da all diese Bedingungen lokaler Natur sind, kann man nicht mehr als ein **lokales Minimum** erwarten. Wenn man von einem lokalen Minimum spricht, bezieht man sich auf eine Topologie auf Λ . In der C^0 Topologie auf Λ ist der Abstand zwischen zwei Elementen $\gamma_1 : t \mapsto x_1(t)$ und $\gamma_2 : t \mapsto x_2(t)$ geben durch

$$d(\gamma_1, \gamma_2) = \max_{t \in [t_1, t_2]} \{ |x_1(t) - x_2(t)| \} .$$

Eine Umgebung von γ^* in dieser Topologie heisst **weite Umgebung** von γ . Eine andere mögliche Topologie, die auf Λ hätte eingerichtet werden können, wäre die C^1 Topologie, in der Abstand von γ_1 und γ_2 gemessen wird durch

$$d_1(\gamma_1, \gamma_2) = \sup_{t \in [t_1, t_2]} \{ |x_1(t) - x_2(t)| + |\dot{x}_1(t) - \dot{x}_2(t)| \}$$

wo wir von einer **engen Umgebung** von γ^* sprechen würden.

Definition: $\gamma^* \in \Lambda$ heisst ein **starkes Minimum** in Λ , falls $I(\gamma) \geq I(\gamma^*)$ für alle γ in einer weiten Umgebung von γ^* .

$\gamma^* \in \Lambda$ heisst ein **schwaches Minimum** in Λ , falls $I(\gamma) \geq I(\gamma^*)$ für alle γ in einer engen Umgebung von γ^* .

Wir werden sehen, dass unter der Annahme der Jacobibedingung immer ein Feld von Extremalen gefunden werden kann, die eine weite Umgebung der Extremalen γ^* einfach überdecken. Explizit machen wir die folgende

Definition: Ein **Extremalenfeld** in Ω ist ein in einer weiten Umgebung \mathcal{U} von einer Extremalen definiertes Vektorfeld $\dot{x} = \psi(t, x)$ mit $\psi \in C^1(\Omega)$ mit der Eigenschaft, dass jede Lösung $x(t)$ der Differentialgleichung $\dot{x} = \psi(t, x)$ auch Lösung der Euler'schen Gleichung ist.

Beispiele:

- 1) $F = \frac{1}{2}p^2$ hat die Euler'sche Gleichung $\ddot{x} = 0$ und das Extremalenfeld: $\dot{x} = \psi(t, x) = c = \text{const.}$
- 2) $F = \sqrt{1+p^2}$ ergibt die Euler'sche Gleichung $\ddot{x} = 0$ mit einer Lösung $x = \lambda t$. Die Gleichung $x = \psi(t, x) = x/t$ definiert ein Extremalenfeld für $t > 0$.
- 3) Die Geodäten auf dem in \mathbf{R}^3 eingebetteten Torus, für die der Clairautwinkel ϕ die Gleichung $r \sin(\phi) = c$ erfüllt, wobei $-(a-b) < c < (a-b)$ ist, bilden ein Extremalenfeld. (Übungsaufgabe 12).

$\psi = \psi(t, x)$ definiert ein Extremalenfeld in \mathcal{U} genau dann, wenn für alle $\gamma \in \mathcal{U}$, $\gamma : t \mapsto x(t)$ gilt

Satz 1.4.1

$$D_\psi F_p = F_x$$

für $p = \psi(t, x)$, wo $D_\psi := \partial_t + \psi \partial_x + (\psi_t + \psi \psi_x) \partial_p$ ist.

Beweis. ψ definiert ein Extremalenfeld genauso dann, wenn für alle $\gamma \in \mathcal{U}$, $\gamma : t \mapsto x(t)$ gilt

$$\frac{d}{dt} F_p(t, x, p) = F_x(t, x, p)$$

für $p = \dot{x} = \psi(t, x(t))$ und das heisst

$$\begin{aligned} (\partial_t + \dot{x} \partial_x + \frac{d}{dt} \psi(t, x(t)) \partial_p) F_p &= F_x \\ (\partial_t + \psi \partial_x + (\psi_t + \psi_x \psi) \partial_p) F_p &= F_x . \end{aligned}$$

□

Falls γ^* in ein Extremalenfeld in einer weiten Umgebung

\mathcal{U} von γ^* eingebettet werden kann und $F_{pp}(t, x, p) \geq 0$

Satz 1.4.2 für $(t, x) \in \Omega \forall p$, so ist γ^* eine starke Minimale. Ist $F_{pp}(t, x, p) > 0$ für alle $(t, x) \in \Omega$ und für alle p , so ist γ^* eine eindeutige starke Minimale.

Beweis. Sei \mathcal{U} eine weite Umgebung von γ^* und $F_{pp}(t, x, p) \geq 0$ für $(t, x) \in \Omega, \forall p$. Wir zeigen, dass $I(\gamma^*) \geq I(\gamma)$ für alle $\gamma \in \mathcal{U}$. Sei für $\gamma \in C^2(\Omega)$

$$\begin{aligned} \tilde{F}(t, x, p) &= F(t, x, p) - g_t - g_x p \\ \tilde{I}(\gamma) &= \int_{t_1}^{t_2} \tilde{F}(t, x, p) dt = I(\gamma) - g(t, x)|_{(t_1, b)}^{(t_2, a)} . \end{aligned}$$

Wir suchen nun ein $\gamma \in C^2$ so, dass

$$\begin{aligned} \tilde{F}(t, x, \psi(t, x)) &= 0 \\ \tilde{F}(t, x, p) &\geq 0, \quad \forall p . \end{aligned}$$

(Das bedeutet dann sogar, dass jede Extremale des Extremalenfeldes eine Minimale ist!) Ein solches \tilde{F} definiert ein zu F äquivalentes Variationsprinzip und F erfüllt wegen $\tilde{F}_p = 0$ für $p = \psi(t, x)$ die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} g_x &= F_p(t, x, \psi) \\ g_t &= F(t, x, \psi) - F_p(t, x, \psi) \psi . \end{aligned}$$

Diese beiden Gleichungen heissen die **Fundamentalgleichungen der Variationsrechnung**. Dies ist ein partielles Differentialgleichungssystem der Form

$$\begin{aligned} g_x &= a(t, x) \\ g_t &= b(t, x) \end{aligned}$$

und dies ist lösbar, falls Ω einfach zusammenhängend ist und die Integrabilitätsbedingung $a_t = b_x$ erfüllt ist. (Falls die Rotation eines Vectorfeldes in einem einfach zusammenhängenden Gebiet verschwindet, dann ist das Feld ein Gradientenfeld). Dann berechnet sich g als (vom Weg unabhängiges) Wegintegral

$$g = \int a(t, x) dx + b(t, x) dt .$$

□

Die Kompatibilitätsbedingung $a_t = b_x$:

Lemma 1.4.3 $\frac{\partial}{\partial t} F_p(t, x, \psi(t, x)) = \frac{\partial}{\partial x} (F - \psi F_p)(t, x, \psi(t, x))$

gilt genau dann, wenn ψ ein Extremalenfeld definiert.

Beweis. Das ist einfach eine Rechnung, wobei man beachten muss, dass

$$a(t, x) = F_p(t, x, \psi(t, x))$$

und

$$b(t, x) = (F - \psi F_p)(t, x, \psi(t, x))$$

Funktionen der zwei Variablen t und x sind, F jedoch eine Funktion von drei Variablen t, x, p ist, wobei $p = \psi(t, x)$. Wir schreiben desshalb $\partial_t F, \partial_x F$ und $\partial_p F$, wenn wir die Ableitungen von F nach der ersten, zweiten oder dritten Variablen verstehen und $\frac{\partial}{\partial t} F(t, x, \psi(t, x))$ resp. $\frac{\partial}{\partial x} F(t, x, \psi(t, x))$, wenn $p = \psi(t, x)$ also t und x als einzigen unabhängige Variable verstanden werden. So ist

$$\frac{\partial}{\partial t} a(t, x) = \frac{\partial}{\partial t} F_p(t, x, \psi(t, x)) = F_{pt} + \psi_t F_{pp} \quad (1.11)$$

$$= (\partial_t + \psi_t \partial_p) F_p \quad (1.12)$$

und wegen

$$\frac{\partial}{\partial x} F_p(t, x, \psi(t, x)) = F_{px} + \psi_x F_{pp} = (\partial_x + \psi_x \partial_p) F_p$$

gilt

$$\frac{\partial}{\partial x} b(t, x) = \frac{\partial}{\partial x} [F(t, x, \psi(t, x)) - \psi(t, x) F_p(t, x, \psi(t, x))] \quad (1.13)$$

$$= (\partial_x + \psi_x \partial_p) F - (\psi_x F_p + \psi F_{px} + \psi \psi_x F_{pp}) \quad (1.14)$$

$$= F_x - (\psi_x + \psi \partial_x + \psi \psi_x \partial_p) F_p . \quad (1.15)$$

Also ergeben (1.11) bis (1.13) zusammen

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} b - \frac{\partial}{\partial t} a &= F_x - (\partial_t + \psi \partial_x + (\psi_t + \psi \psi_x) \partial_p) F_p \\ &= F_x - D_\psi F.\end{aligned}$$

Nach Satz 1.4.1 ist jetzt $\partial_x b - \partial_t a = 0$ genau dann, wenn ψ ein Extremalenfeld definiert. \square

Fortsetzung vom Beweis von Satz 1.4.2:

Beweis. Wir haben nun also mit diesem Lemma eine Funktion g gefunden, das sich als ein vom Weg unabhängiges Wegintegral

$$g(t, x) = \int_{(t_1, a)}^{(t, x)} (F - \psi F_p) dt' + F_p dx'$$

darstellen lässt. Dieses Wegintegral heisst **Hilbert's invariantes Integral**. Für jede Kurve $\gamma : t \mapsto x(t)$ gilt:

$$I(\gamma) = \int_{\gamma} F dt = \int_{\gamma} F dt - F_p \dot{x} dt + F_p dx. \quad (1.16)$$

Insbesondere gilt für den Weg γ^* aus dem Extremalenfeld $\dot{x} = \psi(t, x)$

$$I(\gamma^*) = \int_{\gamma^*} (F - \psi F_p) dt + F_p dx$$

und wegen der Wegunabhängigkeit des Integrals gilt auch für $\gamma \in \Lambda$

$$I(\gamma^*) = \int (F - \psi F_p) dt + F_p dx \quad (1.17)$$

und wir erhalten durch Subtraktion von (1.17) von $I(\gamma) = \int_{\gamma} F dt$

$$\begin{aligned}I(\gamma) - I(\gamma^*) &= \int_{\gamma} F(t, x, \dot{x}) - F(t, x, \psi) - (\dot{x} - \psi) F_p(t, x, \psi) dt \\ &= \int_{\gamma} E(t, x, \dot{x}, \psi) dt,\end{aligned}$$

wobei $E(t, x, p, q) = F(t, x, p) - F(t, x, q) - (p - q) F_p(t, x, q)$ **Weierstrass'sche Exzessfunktion** oder kurz **Weierstrass'sche E-funktion** genannt wird. Nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung gibt es ein $\bar{q} \in [p, q]$ mit

$$E(t, x, p, q) = \frac{(p - q)^2}{2} F_{pp}(t, x, \bar{q}) \geq 0$$

nach unserer Voraussetzung für F_{pp} . Diese Ungleichung wird strikt, falls $F_{pp} > 0$ ist und $p \neq q$. Also ist dann $I(\gamma) - I(\gamma^*) \geq 0$ und im Falle $F_{pp} > 0$ gilt $I(\gamma) > I(\gamma^*)$ für $\gamma \neq \gamma^*$. Das heisst, γ^* ist dann die eindeutige starke Minimale. \square

Jetzt kommt die Hauptsache: Eulergleichung, Jacobibedingung und $F_{pp} \geq 0$ sind hinreichend für ein starkes lokales Minimum.

Satz 1.4.4 *Sei γ^* eine Extremale, auf der kein konjugierter Punkt liegt und gilt $F_{pp} \geq 0$ auf Ω , so lässt sich γ^* in ein Extremalenfeld einbetten und ist somit starke Minimale. Ist $F_{pp} > 0$, so ist γ^* eine eindeutige Minimale.*

Beweis. Wir konstruieren ein Extremalenfeld, das γ^* enthält und machen so Satz 1.4.2 anwendbar.

Wähle $\tau < t_1$ nahe genug bei t_1 , sodass alle Lösungen ϕ der Jacobigleichungen mit $\phi(\tau) = 0$ und $\dot{\phi}(\tau) \neq 0$ in $(\tau, t_2]$ nicht Null sind. Das ist aus Stetigkeitsgründen möglich. Nun konstruieren wir ein Feld $x = u(t, \eta)$ von Lösungen der Eulergleichungen, sodass für genügend kleine $|\eta|$

$$\begin{aligned} u(\tau, \eta) &= x^*(\tau) \\ \dot{u}(\tau, \eta) &= \dot{x}^*(\tau) + \eta \end{aligned}$$

gilt. Dies kann nach dem Existenzsatz für gewöhnliche Differentialgleichungen bewerkstelligt werden. Wir zeigen, dass für ein $\delta > 0$ mit $|\eta| < \delta$ diese Extremalen eine weiten Umgebung von γ^* überdecken. Dazu beweisen wir, dass $u_\eta(t, 0) > 0$ für $t \in (\tau, t_2]$.

Wenn wir nämlich die Eulergleichungen

$$\frac{d}{dt} F_p(t, u, \dot{u}) = F_x(t, u, \dot{u})$$

an der Stelle $\eta = 0$ nach η differenzieren, erhalten wir

$$\frac{d}{dt} (A\dot{u}_\eta + B\ddot{u}_\eta) = B\ddot{u}_\eta + Cu_\eta$$

und sehen dass $\phi = u_\eta$ Lösung der Jacobigleichungen ist. Die Behauptung $u_\eta(t, 0) > 0$ für $t \in [t_1, t_2]$ erhalten wir nun aus unserer Annahme am Anfang des Beweises.

Aus $u_\eta(t, 0) > 0$ in $(\tau, t_2]$ folgt nun aus dem Satz über implizite Funktionen, dass für η in einer Umgebung von Null eine Inversfunktion $\eta = v(t, x)$ von $x = u(t, \eta)$ bestimmt werden kann, die C^1 ist und für die gilt

$$0 = v(t, x^*(t)).$$

Insbesondere definiert die C^1 Funktion (u_t und v sind C^1)

$$\psi(t, x) = u_t(t, v(t, x))$$

ein Extremalenfeld ψ

$$\dot{x} = \psi(t, x)$$

das in einer Umgebung von $\{(t, x^*(t)) \mid t_1 \leq t \leq t_2\}$ erklärt ist. Offensichtlich ist jede Lösung von $\dot{x} = \psi(t, x)$ in dieser Umgebung gegeben durch $x = u(t, h)$. Und damit ist jede Lösung von $\dot{x} = \psi(t, x)$ eine Extremale. \square

1.5 Die Hamiltonsche Formulierung

Die Eulergleichungen

$$\frac{d}{dt} F_{p_j} = F_{x_j}$$

die eine Extremale γ in Λ notwendigerweise erfüllen muss, bilden ein Differentialgleichungssystem 2. Ordnung. Falls $\sum_{i,j} F_{p_i p_j} \xi^i \xi^j > 0$ für $\xi \neq 0$, ist die **Legendretransformation**

$$l : \Omega \times \mathbf{R}^n \rightarrow \Omega \times \mathbf{R}^n, (t, x, p) \mapsto (t, x, y)$$

mit $y_j = F_{p_j}(t, x, p)$ umkehrbar eindeutig. Sie ist aber im Allgemeinen nicht surjektiv. Ein typisch nicht surjektiver Fall ist

$$F = \sqrt{1 + p^2}, \quad y = \frac{p}{\sqrt{1 + p^2}} \in (-1, 1).$$

Die inverse Abbildung lässt sich mit der Hamiltonfunktion

$$H(t, x, y) = (y, p) - F(t, x, p)$$

in der Form

$$p = H_y(t, x, y)$$

darstellen. Es gilt $H_{yy}(t, x, y) = p_y = y_p^{-1} = F_{pp}^{-1} > 0$ und die Eulergleichungen gehen mittels der Legendretransformation über in die Hamilton'schen Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \dot{x}_j &= H_{y_j} \\ \dot{y}_j &= -H_{x_j} \end{aligned}$$

die nun ein Differentialgleichungssystem 1. Ordnung bilden. Übrigens kann man diese Hamilton'schen Gleichungen auch als Eulergleichungen des **Aktionsintegrals** oder **Wirkungsintegrals**

$$S = \int_{t_1}^{t_2} y \dot{x} - H(t, x, y) dt$$

interpretieren. Das war **Cartan's Zugang** zu dieser Theorie. Er betrachtete dabei die Differentialform

$$\alpha = ydx - Hdt = dS$$

die **Integralinvariante von Poincaré-Cartan** genannt wird. Das obige Wirkungsintegral ist natürlich nichts anderes als das Hilbert'sche invariante Integral, das wir im dritten Paragaphen angetroffen haben.

Falls die Legendretransformation surjektiv ist, heisst $\Omega \times \mathbf{R}^n$ **der Phasenraum**. Wesentlich ist, dass jetzt y von x unabhängig angeschaut wird, dass also die Differentialform α nicht auf dem (t, x) -Raum, sondern auf dem Phasenraum definiert ist.

Im Falle $n = 1$ ist der Phasenraum dreidimensional. Für eine Funktion $h : (t, x) \mapsto h(t, x)$ ist der Graph

$$\Sigma = \{(t, x, y) \in \Omega \times \mathbf{R}^n \mid y = h(t, x)\}$$

eine zweidimensionale Fläche.

Definition: Die Fläche Σ heisst **invariant** unter der Strömung von H , falls das Vektorfeld

$$X_H = \partial_t + H_y \partial_x - H_x \partial_y$$

tangential ist zu Σ .

Sei ($n = 1$). Falls $\dot{x} = \psi(t, x)$ ein Extremalenfeld ist für F , so ist

$$\Sigma = \{(t, x, y) \in \Omega \times \mathbf{R} \mid y = F_p(t, x, \psi(t, x))\}$$

C^1 und invariant unter der Strömung von H . Umgekehrt gilt: Falls Σ eine unter der Strömung von H invariante Fläche ist, die gegeben ist durch

$$\Sigma = \{(t, x, y) \in \Omega \times \mathbf{R} \mid y = h(t, x)\},$$

wo $h \in C^1(\Omega)$, so ist das Vektorfeld $\dot{x} = \psi(t, x)$ definiert durch

$$\psi = H_y(t, x, h(t, x))$$

ein Extremalenfeld.

Satz 1.5.1

Beweis. Wir nehmen zuerst an, wir hätten ein Extremalenfeld $x = \psi(t, x)$ für F gegeben. Dann gilt nach Satz 1.4.1

$$D_\psi F_p = F_x$$

und nach dem Lemma im Beweis von Satz 1.4.2 ist das genau dann der Fall, falls eine Funktion g existiert, die die Fundamentalgleichungen der Variationsrechnung

$$\begin{aligned} g_x(t, x) &= F_p(t, x, \psi) \\ g_t(t, x) &= F(t, x, y) - \psi F_p(t, x, y) = -H(t, x, g_x) \end{aligned}$$

erfüllt. Die Fläche

$$\Sigma = \{(t, x, p) \mid y = g_x(t, x, \psi)\}$$

ist invariant unter der Strömung von H :

$$\begin{aligned} X_H(y - g_x) &= [\partial_t + H_y \partial_x - H_x \partial_y](y - g_x) \\ &= -H_y g_{xx} - g_{xt} - H_x \\ &= -\partial_x[g_t + H(t, x, g_x)] = 0. \end{aligned}$$

Ist umgekehrt eine Fläche

$$\Sigma = \{(t, x, p) \mid y = h(t, x)\}$$

gegeben, die invariant ist unter der Strömung von H , so gilt nach Definition

$$\begin{aligned} 0 = X_H(y - h(t, x)) &= [\partial_t + H_y \partial_x - H_x \partial_y](y - h(t, x)) \\ &= -H_y h_{xx} - h_{xt} - H_x \\ &= -\partial_x[g_t + H(t, x, h)] \end{aligned}$$

mit der Funktion $g(t, x) = \int_a^x h(t, x') dx'$, die nun die **Hamilton-Jacobigleichungen**

$$\begin{aligned} g_x &= h(t, x) = y = F_p(t, x, \dot{x}) \\ g_t &= -H(t, x, g_x) \end{aligned}$$

erfüllt. Das bedeutet aber, dass $\dot{x} = g_x(t, x) = H_y(t, x, h(x, y))$ ein Extremalenfeld definiert. \square

Der Satz 1.5.1 besagt, dass wir statt von Extremalenfelder zu sprechen, eine Fläche betrachten können, die als Graph von g_x gegeben ist, wobei g Lösung der Hamilton-Jacobi Gleichung

$$g_t = -H(t, x, g_x)$$

ist. Das kann verallgemeinert werden auf $n \geq 1$: Wir betrachten für $g \in C^2(\Omega)$ die Mannigfaltigkeit $\Sigma := \{(t, x, y) \in \Omega \times \mathbf{R}^n \mid y_j = g_{x_j}\}$ wobei

$$g_t + H(t, x, g_x) = 0.$$

Es gilt dann das folgende Resultat:

Satz 1.5.2

- a) Σ ist invariant unter X_H .
 b) Das Vektorfeld $\dot{x} = \psi(t, x)$, mit $\psi(t, x) = H_y(t, x, g_x)$ definiert ein Extremalenfeld für F .
 c) Das Hilbert'sche Integral $\int F + (\dot{x} - \psi)F dt$ ist vom Weg unabhängig.

Die Verifikation dieses Satzes erfolgt wie zuvor bei Satz 1.5.1. Es ist jedoch zu beachten, dass im Falle $n > 1$ **nicht jedes** Feld $\dot{x} = \psi(t, x)$ von Extremalen in der Form $\psi = H_y$ dargestellt werden kann. Die notwendige Bedingung dafür ist die Lösbarkeit der Fundamentalgleichungen

$$\begin{aligned} g_t &= F(t, x, \psi) - \sum_{j=1}^n \psi_j F_{p_j}(t, x, \psi) \\ g_x &= F_{p_j}(t, x, \psi) \end{aligned} \quad (1.18)$$

für g . Von den $n(n+1)/2$ Kompatibilitätsbedingungen, die für deren Lösbarkeit zu erfüllen sind, sind nur die $n(n-1)/2$ Bedingungen

$$\partial_{x_k} F_{p_j}(t, x, \psi) = \partial_{x_j} F_{p_k}(t, x, \psi) \quad (1.19)$$

nötig. Dazu kommen die n Bedingungen

$$D_\psi F_{p_j}(t, x, \psi) = F_{x_j}(t, x, \psi)$$

die ausdrücken, dass die Lösungen von $\dot{x} = \psi$ Extremale sind.

Definition: Ein Vektorfeld $\dot{x} = \psi(t, x)$ heisst **Mayerfeld**, falls es eine Funktion $g(t, x)$ gibt, die die Fundamentalgleichungen (1.18) erfüllt.

Wir haben gerade gesehen, dass ein Vektorfeld ein Mayerfeld ist, genaudann wenn es ein Extremalenfeld ist, dass die **Kompatibilitätsbedingungen** (1.19) erfüllt. Die Kompatibilitätsbedingungen (1.19) drückt man am einfachsten dadurch aus, dass man von der Differentialform

$$\alpha = \sum_j y_j dx_j - H(t, x, y) dt$$

fordert, dass sie geschlossen ist auf $\Sigma = \{(t, x, y) \mid y = h(t, x)\}$:

$$d\alpha|_\Sigma = d[\sum_j h_j dx_j - H(t, x, h) dt] = 0 .$$

Da wir Ω einfach zusammenhängend vorausgesetzt haben, ist dies gleichbedeutend mit Exaktheit, d.h. $\alpha|_\Sigma = dg$ oder explizit

$$\begin{aligned} h_j &= g_{x_j} \\ -H(t, x, h) &= g_t \end{aligned}$$

was mit der Legendretransformation die Fundamentalgleichungen

$$\begin{aligned} F_p(t, x, \psi) &= g_x \\ F(t, x, \psi) - \psi F_p &= g_t \end{aligned}$$

ergibt.

Damit definiert ein Mayerfeld eine Mannigfaltigkeit, die ein Graph von einer Funktion $y = h(t, x)$ ist, derart, dass $d\alpha = 0$ auf $g = h$.

In invariante Sprechweise nennt man eine n -dimensionale Untermannigfaltigkeit einer $(2n+1)$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit mit einer 1-Form α **Legendre-Mannigfaltigkeit**, falls $d\alpha$ dort verschwindet. (Siehe [3] Appendix 4K).

Geometrische Interpretation von g .

Ein Mayerfeld wird durch eine Funktion $g = g(t, x)$, die $g_t + H(t, x, g_x) = 0$ erfüllt, vollständig charakterisiert: Das Vektorfeld ist dann gegeben durch

$$\dot{x} = H_y(t, x, g_x) = \psi(t, x) .$$

Dies hat folgende geometrische Bedeutung:

Die Mannigfaltigkeiten $g \equiv \text{const}$, etwa die Mannigfaltigkeiten $g \equiv A$ und $g \equiv B$ sind bezüglich $\int F dt$ äquidistant, d.h. entlang einer Extremalen $\gamma : t \mapsto x(t)$ mit $x(t_A) \in \{g = A\}$ und $x(t_B) \in \{g = B\}$ gilt

$$\int_{t_A}^{t_B} F(t, x(t), \psi(t, x(t))) dt = B - A .$$

denn

$$\frac{d}{dt} g(t, x(t)) = g_t + \psi g_x = F - \psi F_p(t, x, \psi) + \psi F_p(t, x, \psi) = F(t, x, \psi)$$

und das heisst

$$\int_{t_A}^{t_B} F(t, x(t), \psi(t, x(t))) dt = \int_{t_A}^{t_B} \frac{d}{dt} g(t, x(t)) dt = g(t, x(t))|_{t_A}^{t_B} = B - A .$$

Da dies Minimalen sind, misst $\int F(t, x, \psi(t, x)) dt$ in gewissem Sinn den Abstand zwischen den Mannigfaltigkeiten $g = \text{const}$, die auch **Wellenfronten** genannt werden. Dieser Begriff stammt aus der Optik, wo $F(x, p) = \eta(x) \sqrt{1 + |p|^2}$ ist mit dem **Brechungsindex** $\eta(x)$. Die Funktion g wird dort meist mit $S = S(t, x)$ bezeichnet, und die Hamilton-Jacobgleichung

$$S_t + H(x, S_x) = 0$$

nimmt in diesem Fall die Form

$$S_t^2 + |S_x|^2 = \eta^2$$

an, denn

$$\begin{aligned} F_p &= \eta \frac{p}{\sqrt{1+|p|^2}} = y, p = \frac{y}{\sqrt{\eta^2 - |y|^2}}, \\ H &= pF_p - F = -\eta/\sqrt{\eta^2 - |y|^2} = -\sqrt{\eta^2 - |y|^2} \end{aligned}$$

und somit gilt $S_t + H(x, S_x) = S_t - \sqrt{\eta^2 - S_x^2} = 0$. Das zugehörige Extremalenfeld

$$\dot{x} = \psi(t, x) = H_y(t, S_x) = \frac{-S_x}{\sqrt{\eta^2 - |S_x|^2}} = \frac{-S_x}{S_t}$$

ist im (t, x) -Raum orthogonal zu $S(t, x) = \text{const.}$:

$$(\dot{t}, \dot{x}) = (1, \dot{x}) = \lambda(S_t, S_x)$$

mit $\lambda = S_t^{-1}$. 'Die Lichtstrahlen verlaufen senkrecht durch die Wellenfronten'.

1.6 Zusatzaufgaben zum Kapitel 1

1) Zeige, dass in Beispiel 4) von Paragraphe 1.1 die Metrik g_{ij} wie angegeben aussieht.

2) Im Euklidischen dreidimensionalen Raum sei eine Rotationsfläche in Zylinderkoordinaten gegeben durch

$$f(z, r) = 0 .$$

Als lokale Koordinaten auf der Rotationsfläche nimmt man z und ϕ und beschreibt die Fläche lokal durch $r = r(z)$.

a) Zeige, dass die von der Euklidischen Metrik auf \mathbf{R}^3 induzierte Metrik gegeben ist durch

$$ds^2 = g_{11}dz^2 + g_{22}d\phi^2$$

mit

$$g_{11} = 1 + \left(\frac{dr}{dz}\right)^2, \quad g_{22} = r^2(z) .$$

b) Sei $F((\phi, z), (\dot{\phi}, \dot{z})) = \frac{1}{2}(g_{zz}\dot{z}^2 + r^2(z)\dot{\phi}^2)$. Zeige, dass längs einer Geodäte

$$F, p_\phi := \frac{\partial F}{\partial \dot{\phi}} r^2 \dot{\phi}, p_z := \frac{\partial F}{\partial \dot{z}} = g_{11} \dot{z}$$

konstant sind. (Tip: Gehe vor, wie in Beispiel 4) und versuche mit z und ϕ als 'Zeitparameter' zu arbeiten).

c) Bezeichne e_z und e_ϕ die Standardbasisvektoren an der Stelle (z, ϕ) . Der Winkel ψ zwischen e_ϕ und dem Tangentenvektor $v = (\dot{z}, \dot{\phi})$ an die Geodäte ist gegeben als

$$\cos(\psi) = (v, e_\phi) / \sqrt{(v, v)(e_\phi, e_\phi)} .$$

Zeige, dass $r \cos(\psi) = p_\phi / \sqrt{F}$ gilt und somit der **Satz von Clairaut** gilt, der besagt, dass $r \cos(\psi)$ konstant ist längs jeder Geodäte auf der Rotationsfläche.

d) Zeige, dass der geodätische Fluss auf einer Rotationsfläche vollständig integrabel ist. Bestimme die Formeln für $\phi(t)$ und $z(t)$.

3) Zeige, dass es in einem von einer konvexen glatten Kurve berandeten Gebiet ein eingeschriebenes Dreieck maximalen Umfangs gibt. (Insbesondere entartet dieses Dreieck nicht zu einem Zweieck.) Zeige, dass dieses Dreieck eine geschlossene Bahn für das Billiard ist.

4) Beweise, dass das Billiard in einem Kreis für jedes $p/q \in (0, 1)$ Bahnen vom Typ $\alpha = p/q$ hat.

5) Sei $A > 0$ und $A, B, C \in C^1[t_1, t_2]$. Betrachte den linearen Differentialoperator

$$L\Phi = \frac{d}{dt}(A\dot{\Phi} + B\Phi) - (B\dot{\Phi} + C\Phi) .$$

Beweise, dass für $\psi > 0, \psi \in C^1[t_1, t_2], \zeta \in C^1[t_1, t_2]$ die Identität

$$L(\zeta\psi) = \psi^{-1} \frac{d}{dt}(A\psi^2 \dot{\zeta}) + \zeta L(\psi)$$

gilt. Insbesondere für $L\psi = 0, \psi > 0$ hat man

$$L(\zeta\psi) = \psi^{-1} \frac{d}{dt}(A\psi^2 \dot{\zeta}) .$$

Vergleiche diese Formel mit der Legendre'schen Umformung der zweiten Variation.

6) Mache den Beweis von Satz 1.3.2 mit Hilfe des Lemmas von Legendre vollständig: Es ist noch zu zeigen, dass für alle $\phi \in \text{Lip}_0[t_1, t_2]$ gilt

$$II(\phi) = \int_{t_1}^{t_2} A\dot{\phi}^2 + 2B\phi\dot{\phi} + C\phi^2 dt \geq 0$$

falls $(t_2, x^*(t_2))$ der kleinste konjugierte Punkt ist zu $(t_1, x^*(t_1))$. Wähle dazu für jedes genügend kleine $\epsilon > 0$ eine C^1 Funktion η_ϵ , für die gilt:

$$\begin{aligned}\eta_\epsilon(t) &= \begin{cases} 0 & t \in (-\infty, t_1 + \epsilon/2) \cup (t_2 - \epsilon/2, \infty) \\ 1 & t \in [t_1 + \epsilon, t_2 - \epsilon] \end{cases} \\ \dot{\eta}_\epsilon(t) &= O(\epsilon^{-1}), \epsilon \rightarrow 0\end{aligned}$$

und zeige dann

- a) $II(\eta_\epsilon \phi) \geq 0$, $\forall \epsilon$ klein genug.
- b) $II(\eta_\epsilon \phi) \rightarrow II(\phi)$ für $\epsilon \rightarrow 0$.

7) Beweise die Sturm'schen Sätze (Korollar 1.3.5 und Korollar 1.3.6).

8) Es sei $F \in C^2(\Omega \times \mathbf{R})$ derart, dass jede C^2 Funktion $t \mapsto x(t), (t, x(t)) \in \Omega$ der Euler Gleichung

$$\frac{d}{dt} F_p(t, x, \dot{x}) = F_x(t, x, \dot{x})$$

genügt. Zeige dann, das falls Ω einfach zusammenhängend ist, F die Gestalt

$$F(t, x, p) = g_t + g_x p$$

mit $g \in C^1(\Omega)$ haben muss.

9) Zeige, dass für alle $x \in \text{Lip}_0[0, a]$

$$\int_0^a \dot{x}^2 - x^2 dt \geq 0$$

dann und nur dann, wenn $|a| \leq \pi$.

10) Zeige, dass $x \equiv 0$ keine starke Minimale für

$$\int_0^1 (\dot{x}^2 - \dot{x}^4) dt, x(0) = x(1) = 0$$

ist.

11) Bestimme den Abstand der konjugierten Punkte der Geodätschen $v \equiv 0$ in Beispiel 4) und zeige, dass auf der Geodätschen $v \equiv 1/2$ keine konjugierten Punkte vorhanden sind. (Linearisiere die EulerGleichungen für $F = \sqrt{\frac{a}{b} + \cos(2\pi v))^2 + (v')^2}$).

12) Zeige, dass die Geodätschen in Beispiel 4), die gegeben sind durch $I = r \sin(\psi)$, ein Extremalenfeld bilden, falls $-(a - b) < c < a - b$. Diskutiere die Geodätschen für $c = a - b$, für $a - b < c < a + b$ und für $c = a + b$.

Kapitel 2

Extremalenfelder und globale Minimale

2.1 Globale Extremalenfelder

Der zweidimensionale Torus hat die Standarddarstellung $\mathbf{T}^2 = \mathbf{R}^2 / \mathbf{Z}^2$. Wir werden oft auf seiner Überlagerungsfläche \mathbf{R}^2 arbeiten, wo dann alles invariant unter seiner Fundamentalgruppe \mathbf{Z}^2 vorausgesetzt wird. In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit dem Variationsprinzip $\int F(t, x, p) dt$ auf \mathbf{R}^2 , wobei von F folgende Eigenschaften verlangt werden :

i) $F \in C^2(\mathbf{T}^2 \times \mathbf{R}^2)$ d.h.

$$\begin{aligned} a) \quad & F \in C^2(\mathbf{R}^3), \\ b) \quad & F(t+1, x, p) = F(t, x+1, p) = F(t, x, p). \end{aligned} \tag{2.1}$$

ii) H hat quadratisches Wachstum $\exists \delta > 0, c > 0$

$$\begin{aligned} c) \quad & \delta \leq F_{pp} \leq \delta^{-1} \\ d) \quad & |F_x| \leq c(1 + p^2) \\ e) \quad & |F_{tp}| + |F_{px}| \leq c(1 + |p|). \end{aligned} \tag{2.2}$$

In der Hamilton'schen Formulierung sehen diese Bedingungen wegen $F_t = -H_t$, $F_x = -H_x$ und $F_{pp} = H_{yy}^{-1}$ genaugleich aus:

i) $H \in C^2(\mathbf{T}^2 \times \mathbf{R}^2)$ d.h.

$$\begin{aligned} a) \quad & H \in C^2(\mathbf{R}^3) \\ b) \quad & H(t+1, x, y) = H(t, x+1, y) = H(t, x, y). \end{aligned} \tag{2.3}$$

ii) H hat quadratisches Wachstum $\exists \delta > 0, c > 0$

$$\begin{aligned} c) \quad & \delta \leq H_{yy} \leq \delta^{-1} \\ d) \quad & |H_x| \leq c(1 + y^2) \\ e) \quad & |H_{ty}| + |F_{yx}| \leq c(1 + |y|) \end{aligned} \tag{2.4}$$

Beispiel: Nichtlineares Pendel.

Sei $V(t, x) \in C^2(\mathbf{T}^2)$ gegeben durch $V(t, x) = [g(t)/(2\pi)] \cos(2\pi x)$ und $F = p^2/2 + V(t, x)$. Die Eulergleichung

$$\ddot{x} = g(t) \sin(2\pi x) \tag{2.5}$$

ist die Differentialgleichung, die ein Pendel beschreibt, wo die Gravitationsbeschleunigung g periodisch zeitabhängig ist. (z.B. durch Gezeitenwirkung vom Mond.) Übrigens wird die linearisierte Gleichung von (2.5)

$$\ddot{x} = g(t)x$$

Hill'sche Gleichung genannt und ist schon eingehend untersucht worden. Mit $g(t) = -\omega^2(1 + \epsilon \cos(2\pi t))$ heisst die Hill'sche Gleichung **Mathieugleichung**. Man interessiert sich zum Beispiel für die Stabilität des Systems in Abhängigkeit von den Parametern ω und ϵ . Konkret könnte man sich z.B. fragen, ob die schwache Gezeitenwirkung vom Mond ein Pendel auf der Erde, dessen Bewegung reibungsfrei verausgesetzt wird, aufschaukeln kann.

Die Frage nach der Stabilität, die wir im obigen Beispiel angetroffen haben, liegt auch tief im Herzen der allgemeinen Theorie:

Definition: Ein globales Extremalenfeld auf dem Torus ist gegeben durch ein Vektorfeld $\dot{x} = \psi(t, x)$ mit $\psi \in C^1(\mathbf{T}^2)$, sodass jede Lösung $x(t)$ extremal ist, d.h. $D_\psi F_p - F_x|_{p=\psi} = 0$.

Gibt es solche Extremalenfelder überhaupt?

Beispiel: Ungestörtes nichtlineares Pendel.

Falls die Gravitationsbeschleunigung $g(t) = g$ konstant ist, können wir ein Extremalenfeld angeben. In diesem Fall ist F autonom und nach Satz 1.1.5 ist

$$E = pF_p - F = p^2/2 - V(x) = \text{const.}$$

und damit ist falls $E > \max\{V(x) \mid x \in T^1\}$ ein Extremalenfeld gegeben durch

$$\dot{x} = \psi(t, x) = \sqrt{2(E - V(x))}.$$

Das bedeutet in diesem Fall, dass das Problem integrierbar ist und die Lösung mit einem elliptischen Integral explizit angegeben werden kann.

Die Existenz eines Extremalenfeldes ist gleichbedeutend mit Stabilität, denn wir wissen nach Satz 1.5.1, dass in diesem Fall die Flächen

$$\Sigma = \{(t, x, y) \mid y = F_p(t, x, \psi(t, x))\}$$

invariant sind unter der von X_H erzeugten Strömung.

Die Fläche Σ ist ein **invarianter Torus** im Phasenraum $\mathbf{T}^2 \times \mathbf{R}^2$. Die Frage nach der Existenz von invarianten Tori ist delikat und Gegenstand der sogenannten **KAM Theorie**, die wir im letzten Kapitel kurz streifen werden.

Definition: Eine Extremale $x = x(t)$ heisst **globale Minimale**, falls

$$\int_{\mathbf{R}} F(t, x + \phi, \dot{x} + \dot{\phi}) - F(t, x, \dot{x}) dt \geq 0$$

für alle $\phi \in \text{Lip}_{comp}(\mathbf{R}) = \{\phi \in \text{Lip}(\mathbf{R}) \text{ mit kompaktem Träger.}\}$

Definition: Eine Kurve $\gamma : t \mapsto x(t)$ hat einen **Selbstschnitt** auf \mathbf{T}^2 , falls es ein $(j, k) \in \mathbf{Z}^2$ gibt, sodass die Funktion $x(t+j) - k - x(t)$ das Vorzeichen wechselt.

Dass eine Kurve keinen Selbstschnitt hat, heisst, dass für jedes $(j, k) \in \mathbf{Z}^2$ gilt: $x(t+j) - k - x(t) > 0$ oder $x(t+j) - k - x(t) = 0$ oder $x(t+j) - k - x(t) < 0$.

Satz 2.1.1 Falls $\psi \in C^1(\mathbf{T})$ ein Extremalenfeld definiert, so ist jede Lösung von $\dot{x} = \psi(t, x)$ eine globale Minimale und hat keine Selbstschnitte auf dem Torus.

Beweis. Zuerst zum Beweis des ersten Teils der Aussage: Sei $\bar{\gamma} : t \mapsto \bar{x}(t)$ eine Lösung des Extremalenfeldes $\dot{x} = \psi(t, x)$. Da $F_{pp}(t, x, p) > 0$ nach unserer Annahme c) zu Beginn dieses Paragraphen, sind alle Voraussetzungen erfüllt für Satz 1.4.2. Für alle t_1 und $t_2 \in \mathbf{R}$ ist danach $\bar{\gamma}$ eine Minimale in

$$\Lambda(t_1, t_2) := \{\gamma : t \mapsto x(t) \mid x \in \text{Lip}(t_1, t_2), x(t_1) = \bar{x}(t_1), x(t_2) = \bar{x}(t_2)\}.$$

Sei ϕ nun ein beliebiges Element in $\text{Lip}_{comp}(\mathbf{R})$ und $\tilde{\gamma}$ gegeben durch $\tilde{x}(t) = \bar{x}(t) + \phi(t)$. Da ϕ kompakten Träger hat, gibt es ein $T > 0$, sodass $\tilde{\gamma} \in \Lambda(-T, T)$

ist. Es gilt somit

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}} F(t, \tilde{x}, \dot{\tilde{x}}) - F(t, \bar{x}, \dot{\bar{x}}) dt &= \int_{-T}^T F(t, \tilde{x}, \dot{\tilde{x}}) - F(t, \bar{x}, \dot{\bar{x}}) dt \\ &= \int_{-T}^T E(t, \bar{x}, \dot{\bar{x}}, \psi(t, \bar{x})) dt \geq 0, \end{aligned}$$

(wo E die Weierstrass'sche E-funktion ist). Das heisst, dass $\tilde{\gamma}$ eine globale Minimale ist.

Nun zum zweiten Teil der Behauptung:

Falls $x(t)$ Extremale des Extremalenfeldes ist, so auch $y(t) = x(t+j) - k$, da ψ periodisch t und x ist. Falls x und y einen Selbstschnitt haben, so folgt $x \equiv y$ wegen dem Eindeutigkeitssatz für gewöhnliche Differentialgleichungen, denn sowohl x als auch y erfüllen dieselbe Differentialgleichung

$$\dot{x} = \psi(t, x), \dot{y} = \psi(t, y).$$

□

Wir haben jetzt gesehen, dass jede Extremale in einem Extremalenfeld globale Minimale ist. Wie steht es aber mit den globalen Minimalen, wenn wir kein Extremalenfeld haben? Gibt es sie immer noch? Dass im speziellen für den geodätischen Fluss auf dem Torus nur eine Metrik erlaubt, dass jede Extremale globale Minimale ist, sagt uns der Satz von Eberhard Hopf [16], den wir hier ohne Beweis zitieren.

Satz 2.1.2 *Falls alle Geodäten auf dem Torus globale Minimalen sind, so ist der Torus flach, d.h. die Gauss'sche Krümmung ist Null.*

Über den Zusammenhang zwischen Extremalenfelder und minimalen Geodäten kommen wir später noch zu sprechen. Wir sehen also, dass im Allgemeinen globale Extremalenfelder nicht zu existieren brauchen. Nach Satz 1.5.1 können wir ein Extremalenfeld ψ darstellen durch $\psi = H(t, x, g_x)$, wo $g(t, x)$ die **Hamilton-Jacobigleichungen**

$$g_t + H(t, x, g_x) = 0, \quad g_x \in C^1(\mathbf{T}^2)$$

erfüllt und die Existenz einer Funktion g auf \mathbf{T}^2 , die die Hamilton-Jacobigleichungen global löst, ist äquivalent zur Existenz eines globalen Extremalenfeldes. Es ist zwar wohlbekannt, wie man die Hamilton-Jacobigleichungen lokal löst. Hier handelt es sich jedoch um ein globales Problem mit periodischen Randbedingungen und der Satz von Hopf zeigt, dass man dieses Problem im Allgemeinen nicht

lösen kann.

Allerdings werden wir sehen, dass das Problem doch Lösungen hat, wenn man die Klasse der Lösungen ausweitet. Das sind dann in einem gewissen Sinne **schwache Lösungen** und die Minimalen werden uns zu diesen schwachen Lösungen der Hamilton-Jacobigleichungen führen.

2.2 Ein Existenzsatz

Ziel dieses Paragraphen ist es, die Existenz und Regularität von Minimalen mit gegebenen Randwerten und periodischer Minimalen zu beweisen innerhalb einer Funktionenklasse, die grösser ist, als die bisher verwendeten Funktionenklassen. Wir werden dabei die Bedingungen 2.1 und 2.2 für quadratisches Wachstum brauchen.

$W^{1,2}[t_1, t_2]$ bezeichnet den Hilbertraum, den man erhält, wenn $C^1[t_1, t_2]$ bezüglich der Norm

$$\|x\|^2 = \int_{t_1}^{t_2} (x^2 + \dot{x}^2) dt$$

abschliesst. Man nennt ihn auch einen **Sobolevraum**. Er enthält $\text{Lip}[t_1, t_2]$, den Raum der Lipschitzstetigen Funktionen, der auch mit $W^{1,\infty}$ bezeichnet wird. Analog, wie wir Variationsprobleme in Γ und Λ behandelt haben, suchen wir nun in

$$\Xi := \{\gamma : t \mapsto x(t) \in \mathbf{T}^2 \mid x \in W^{1,2}[t_1, t_2], x(t_1) = a, x(t_2) = b\}.$$

Extremalen bezüglich des Variationsproblems gegeben durch das Funktional

$$I(\gamma) = \int_{t_1}^{t_2} F(t, x, \dot{x}) dt.$$

Ξ ist kein linearer Raum. Aber wenn wir etwa

$$x_0 = x_0(t) = \frac{a(t_2 - t) + b(t - t_1)}{t_2 - t_1}$$

setzen, so ist $\Xi = x_0 + \Xi_0$, wo

$$\Xi_0 = \{\gamma : t \mapsto x(t) \in \mathbf{T}^2 \mid x \in W^{1,2}[t_1, t_2], x(t_1) = 0, x(t_2) = 0\}$$

ein Hilbertraum ist.

Satz 2.2.1 Unter den Bedingungen (2.1) bis (2.2) existiert eine Minimale $\gamma^* : t \mapsto x^*(t)$ in Ξ . Es ist $x^* \in C^2[t_1, t_2]$ und x^* erfüllt die Eulergleichungen.

Der Beweis beruht auf einem einfachen Prinzip: Eine nach unten halbstetige und nach unten beschränkte Funktion auf einem kompakten topologischen Raum nimmt ein Minimum an.

Beweis.

1) **I ist nach unten beschränkt:**

$$\mu = \inf\{I(\gamma) \mid \gamma \in \Xi\} > -\infty .$$

Aus $\delta < F_{pp} < \delta^{-1}$ folgt durch Integration: $\exists c$ mit

$$\frac{\delta}{4}p^2 - c \leq F(t, x, p) \leq \delta^{-1}p^2 + c$$

und daraus für jedes $\gamma \in \Xi$,

$$I(\gamma) = \int_{t_1}^{t_2} F(t, x, \dot{x}) dt \geq \frac{\delta}{4} \int_{t_1}^{t_2} \dot{x}^2 dt - c(t_2 - t_1) \geq -c(t_2 - t_1) > -\infty .$$

Das nennt man **Koerzivität**. Das nun endliche Infimum von I sei nun μ genannt.

2) **Der Abschluss der Menge**

$$K := \{\gamma \in \Xi \mid I(\gamma) \leq \mu + 1\}$$

(bezüglich der durch die Norm gegebene Topologie) ist schwach kompakt.

Sei $\gamma \in K$. Aus

$$\mu + 1 \geq I(\gamma) \geq \frac{\delta}{4} \int_{t_1}^{t_2} \dot{x}^2 dt - c(t_2 - t_1)$$

folgt

$$\int_{t_1}^{t_2} \dot{x}^2 dt \leq \frac{4}{\delta}(\mu + 1) =: M_1 ,$$

und mit $|x(t)| \leq a + \int_{t_1}^{t_2} \dot{x}(t) dt \leq a + [\int_{t_1}^{t_2} \dot{x}^2 dt(t_2 - t_1)]^{1/2}$ erhalten wir

$$\int_{t_1}^{t_2} x^2 dt \leq (t_2 - t_1)(a + [\frac{4}{\delta}(\mu + 1)(t_2 - t_1)]^{1/2})^2 =: M_2$$

was zusammen

$$\|\gamma\|^2 = \int_{t_1}^{t_2} (\dot{x}^2 + x^2) dt \leq M_1 + M_2$$

ergibt und das heisst, dass die Menge K beschränkt ist. Also ist auch der starke Abschluss beschränkt. Da eine beschränkte abgeschlossene Menge in Ξ schwach kompakt ist, folgt, dass der Abschluss von K schwach kompakt ist. (Siehe Übungsaufgabe 2 für einen direkten Beweis mit dem Satz von Arzela-Ascoli.)

3) I ist halbstetig nach unten bezüglich der schwachen Topologie.

Wir müssen zeigen, dass $I(\gamma) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} I(\gamma_n)$ falls $\gamma_n \rightarrow_w \gamma$. (Das Symbol \rightarrow_w bezeichnet die Konvergenz in der schwachen Topologie).

a) Die Funktion $p \mapsto F(t, x, p)$ ist konvex:

$$F(t, x, p) - F(t, x, q) \geq F_p(t, x, q)(p - q) .$$

Beweis: Die Behauptung ist gleichbedeutend mit $E(t, x, p, q) \geq 0$.

b) Falls $x_n \rightarrow_w x$, so folgt $\int_{t_1}^{t_2} \phi[\dot{x}_n - \dot{x}] dt \rightarrow 0$ für $\phi \in L^2[t_1, t_2]$.

Beweis: Die Behauptung ist klar für $\phi \in C^1$ mit partieller Integration. Da C^1 dicht in L^2 liegt, können wir für ein beliebiges $\phi \in L^2$ und $\epsilon > 0$ ein $\tilde{\phi} \in C^1$ finden, mit $\|\phi - \tilde{\phi}\|_{L^2} < \epsilon$. Dann ist

$$\left| \int_{t_1}^{t_2} \phi(\dot{x}_n - \dot{x}) dt \right| \leq \left| \int_{t_1}^{t_2} \tilde{\phi}(\dot{x}_n - \dot{x}) dt \right| + 2\epsilon M_1 ,$$

und somit

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \int_{t_1}^{t_2} \phi(\dot{x}_n - \dot{x}) dt \right| \leq 2\epsilon M_1 .$$

c) Falls $x_n \rightarrow_w x$, so folgt $\int_{t_1}^{t_2} \phi[x_n - x] dt \rightarrow 0$ für $\phi \in L^2[t_1, t_2]$.

Beweis: $x_n \rightarrow_w x$ impliziert, dass x_n gleichmässig gegen x konvergiert:

Aus $\int_{t_1}^{t_2} \dot{x}_n^2 dt \leq M_1$ folgt $|x_n(t) - x_n(s)| \leq M_1(|t - s|)^{1/2}$ und $x_n(t) \leq a + M(t - t_1)$ und somit ist $\{x_n \mid n \in \mathbf{N}\}$ eine gleichgradig stetige Familie gleichmässig beschränkter Funktionen. Nach Arzela-Ascoli existiert dann eine Teilfolge von x_n , die gleichmässig konvergiert und wegen $x_n \rightarrow_w x$ muss x dieser Limes sein. Von $\|x_n - x\|_{L^\infty} \rightarrow 0$ folgt mit der Hölder'schen Ungleichung

$$\left| \int_{t_1}^{t_2} \phi[x_n - x] dt \right| \leq \int_{t_1}^{t_2} |\phi| dt, \|x_n - x\|_{L^\infty} \rightarrow 0 .$$

Mit a), b) und c) können wir nun die Behauptung beweisen:

$$\begin{aligned} I(\gamma_n) - I(\gamma) &= \int_{t_1}^{t_2} F(t, x, \dot{x}) - F(t, x_n, \dot{x}_n) \\ &\quad - F(t, x, \dot{x}_n) + F(t, x, \dot{x}_n) - F(t, x, \dot{x}) dt \\ &\geq \int_{t_1}^{t_2} F_x(t, \tilde{x}, \dot{x}_n)(x_n - x) dt \\ &\quad + \int_{t_1}^{t_2} F_p(t, x, \tilde{x})(\dot{x}_n - \dot{x}) dt =: D_n . \end{aligned}$$

Dabei liegt $\tilde{x}(t)$ im Intervall $[x_n(t), x(t)]$ und $\dot{\tilde{x}}$ im Intervall $[\dot{x}_n(t), \dot{x}(t)]$. Für die Ungleichung wurde a) benutzt. Da F_x in L^1 liegt (wegen $|F_x| \leq c(1 + \dot{x}^2) \in L^1$) und F_p in L^1 liegt (wegen $|F_p| \leq c(1 + |\dot{x}|) \in L^2 \subset L^1$), schliessen wir mit b) und c), dass D_n gegen 0 geht mit $n \rightarrow \infty$. Und damit sind wir fertig:

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} I(\gamma) - I(\gamma) \geq 0 .$$

4) Existenz der Minimalen.

Aus 1) bis 3) und der Tatsache, dass eine nach unten halbstetige, nach unten beschränkte Funktion auf einem kompakten Raum ein Minimum annimmt, erhalten wir die Existenz der Minimalen.

5) Regularität der Minimalen.

Sei $\gamma^* : t \mapsto x^*(t)$ das minimale Element in Ξ von dem wir in 4) die Existenz gezeigt haben. Es gilt also für alle $\phi : t \mapsto y(t)$, $\phi \in \Xi$

$$I(\gamma + \epsilon\phi) \geq I(\gamma^*) .$$

Das bedeutet, dass die erste Variation, falls sie existiert, verschwinden muss.

Behauptung: Die erste Variation $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} (I(\gamma^* + \epsilon\phi) - I(\gamma^*))/\epsilon$ existiert.

$$\begin{aligned} [I(\gamma^* + \epsilon\phi) - I(\gamma^*)]/\epsilon &= \int_{t_1}^{t_2} [F(t, x^* + \epsilon y, \dot{x}^* + \epsilon \dot{y}) - F(t, x^*, \dot{x}^*)] dt/\epsilon \\ &= \int_{t_1}^{t_2} [\lambda(t, \epsilon) \dot{y} + \mu(t, \epsilon) y] dt \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} \lambda(t, \epsilon) &= \int_0^1 F_p(t, x^*, \dot{x}^* + \theta \epsilon \dot{y}) d\theta \\ \mu(t, \epsilon) &= \int_0^1 F_x(t, x^* + \theta \epsilon y, \dot{x}^*) d\theta , \end{aligned}$$

die wie folgt abgeschätzt werden können für $\epsilon < 1$, $\theta_0 \in [0, 1]$:

$$\begin{aligned} |\lambda(t, \epsilon)| &\leq c(1 + |\dot{x}^* + \epsilon \theta_0 \dot{y}|) \leq c(1 + |\dot{x}^*| + |\dot{y}|) \\ |\mu(t, \epsilon)| &\leq c(1 + (\dot{x}^*)^2 + \dot{y}^2) . \end{aligned}$$

Nach Lebesgue sind $\lambda(t, \epsilon) \dot{y}$ und $\mu(t, \epsilon) y$ aus $L^1[t_1, t_2]$, da die Majoranten $c(1 + |\dot{x}^*| + |\dot{y}|) \dot{y}$ und $c(1 + (\dot{x}^*)^2 + \dot{y}^2) y$ Lebesgue integrierbar sind. Mit dem Konvergenzsatz von Lebesgue folgt nun die Existenz von $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} [I(\gamma^* + \epsilon\phi) - I(\gamma^*)]/\epsilon = 0$

und damit haben wir

$$\begin{aligned}\lim_{\epsilon \rightarrow 0} [I(\gamma + \epsilon \phi) - I(\gamma)]/\epsilon &= \int_{t_1}^{t_2} F_p(t, x^* \dot{x}^*) \dot{y} + F_x(t, x^*, \dot{x}^*) y \, dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left(F_p(t, x^* \dot{x}^*) - \int_{t_1}^{t_2} F_x(s, x^* \dot{x}^*) \, ds + c \right) \dot{y} \, dt \\ &= 0.\end{aligned}$$

Das bedeutet, dass

$$F_p(t, x^*, \dot{x}^*) = \int_{t_1}^{t_2} F_x(t, x^*, \dot{x}^*) \, ds + c$$

absolutstetig ist. Aus $F_{pp} > 0$ und dem Satz über implizite Funktionen erhalten wir $\dot{x}^* \in C^0$, $x^* \in C^1$, mit den integrierten Eulergleichungen $F_p \in C^1$. Wieder folgt mit dem Satz über implizite Funktionen $\dot{x}^* \in C^1$ und damit ist $x^* \in C^2$. \square

Im zweiten Teil dieses Paragraphen wollen wir einen entsprechenden Existenzsatz für periodische Minimalen formulieren.

Definition: Eine Kurve $\gamma : t \mapsto x(t)$ ist **periodisch vom Typ (q, p)** für $(q, p) \in \mathbf{Z}^2, q \neq 0$, falls $x(t+q) - p \equiv x(t)$.

Sei für $q \neq 0$

$$\Xi_{p,q} = \left\{ \gamma : t \mapsto x(t) = \frac{p}{q}t + \xi(t) \mid \xi \in W^{1,2}[t_1, t_2], \xi(t+q) = \xi(t) \right\}.$$

Mit den Vektorraumoperationen

$$\begin{aligned}\rho \gamma_1 &: \frac{p}{q}t + \rho \xi_1(t) \\ \gamma_1 + \gamma_2 &: \frac{p}{q}t + \xi_1(t) + \xi_2(t)\end{aligned}$$

falls $\gamma_j : t \mapsto \frac{p}{q}t + \xi_j(t)$, und dem Skalarprodukt

$$(\gamma_1, \gamma_2) = \int_0^q \dot{\xi}_1 \dot{\xi}_2 + \ddot{\xi}_1 \ddot{\xi}_2 \, dt$$

wird $\Xi_{p,q}$ zu einem Hilbertraum. Ein Minimum zum Funktional

$$I(\gamma) = \int_0^q F(t, x, \dot{x}) \, dt.$$

Definition: Ein Minimum zum Funktional

$$I(\gamma) = \int_0^q F(t, x, \dot{x}) dt$$

nennen wir **periodische Minimale vom Typ** (q, p) und schreiben $\mathcal{M}(q, p)$ für die Menge der periodischen Minimalen vom Typ (q, p) . (Wir werden manchmal für $\gamma \in \mathcal{M}(q, p)$, $\gamma : t \mapsto x(t)$, auch $x \in \mathcal{M}(q, p)$ schreiben.)

Satz 2.2.2 *Es existiert für jedes $(q, p) \in \mathbf{Z}^2$ mit $q \neq 0$ ein Element $\gamma^* \in \mathcal{M}(q, p)$ mit $\gamma : t \mapsto x^*(t)$, und $x^* \in C^2(\mathbf{R})$ erfüllt die Eulergleichungen.*

Der Beweis von Satz 2.2.2 benutzt haargenau dasselbe Vorgehen, wie der Beweis von Satz 2.2.1.

Bemerkung über die Notwendigkeit des quadratischen Wachstums. Die Bedingungen des quadratischen Wachstums 2.1-2.2 können abgeschwächt werden und man kommt mit superlinearem Wachstum für den Existenzbeweis aus: Ein klassischer Satz von **Tonelli** garantiert die Existenz einer absolutstetigen Minimalen unter der Annahme, dass $F_{pp} \geq 0$ und

$$F(t, x, p) \geq \phi(p) := \lim_{|p| \rightarrow \infty} \frac{\phi(p)}{|p|} = \infty .$$

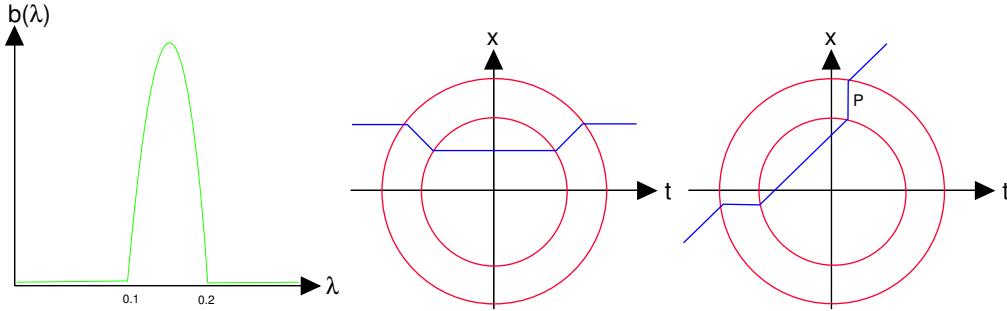
Andererseits gilt ein solcher Existenzsatz nicht mehr, wenn F nur linear in p anwächst. Man kann z.B. zeigen, dass

$$F(x, p) = \sqrt{1 + p^2} + x^2 p^2$$

bei Randbedingungen

$$x(-1) = -a, x(1) = a$$

für hinreichend grosse a keine Minimale besitzt. In diesem Beispiel ist zwar $F_{pp} > 0$ aber das Wachstum für $x = 0$ nur linear. Als Referenz für den Satz von Tonelli und das obige Beispiel siehe [9].



Wir geben noch ein Beispiel ohne Existenz globaler Minimaler, wo $F(t, x, p)$ periodisch ist in t und x . Ein solches Beispiel kann man sich etwa so verschaffen: Es sei

$$F(t, x, p) = a(t, x) \sqrt{1 + p^2}$$

mit $a(t, x) = 1 + b(t^2 + x^2)$ für $|t|, |x| \leq 1$. Dabei ist $b = b(\lambda) \geq 0$ eine C^∞ -Funktion, die ausserhalb vom Intervall $[0.1, 0.2]$ identisch verschwindet. Wir können $a(t, x)$ mit Periode 1 in t und x auf ganz \mathbf{R}^2 fortsetzen. Dann ist $a(t, x) \geq 1$ für alle $t, x \in \mathbf{R}$ und das Variationsproblem wird

$$\int F(t, x, \dot{x}) dt = \int a(t, x) ds$$

wobei $ds = \sqrt{1 + \dot{x}^2} dt$.

Wir betrachten für dieses Variationsproblem ein eindeutiges minimales Segment, das in der Scheibe $t^2 + x^2 \leq 1/4$ liegt und nicht eine Gerade ist. Jetzt benützen wir die Rotationssymmetrie dieses Problems und drehen das Segment derart, dass es sich zwar als Graph $x = x(t)$ darstellen lässt, aber sodass $\dot{x}(\tau) = \infty$ für einen Punkt $P = (\tau, x(\tau))$.

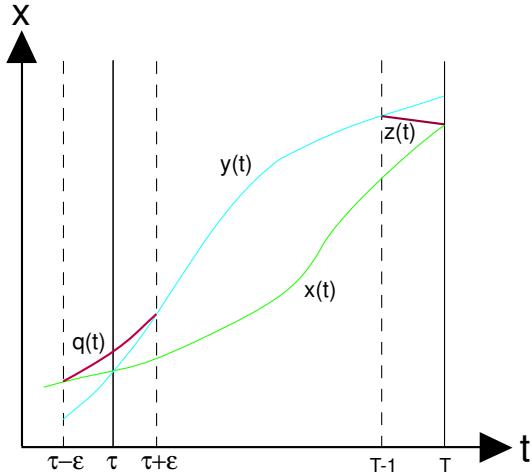
Da dieses Segment für die entsprechende Randbedingung eine eindeutige Minimale ist, sehen wir, dass wir in diesem Falle eine Singularität bei $t = \tau$ erhalten. Bei quadratischem Wachstum ist ein solches singuläres Verhalten ausgeschlossen.

2.3 Eigenschaften von globalen Minimalen

In diesem Abschnitt leiten wir Eigenschaften globaler Minimaler her, die uns im nächsten Abschnitt ihre Konstruktion ermöglichen wird. Auch in diesem Paragraphen ist $n = 1$.

Definition: Es bezeichne \mathcal{M} die Menge der **globalen Minimalen**. Wir schreiben für x und y aus \mathcal{M}

$$\begin{aligned} x \leq y, & \quad x(t) \leq y(t), \forall t \\ x < y, & \quad x(t) < y(t), \forall t \\ x = y, & \quad x(t) = y(t), \forall t \end{aligned}$$



a) Zwei verschiedene globale Minimale x und y aus \mathcal{M} schneiden sich höchstens einmal.

b) Falls $x \leq y$, so ist $x = y$ oder $x < y$.

Satz 2.3.1 c) Falls $\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t)| + |y(t)| = 0$ und $\sup_{t > 0} (|x(t)| + |y(t)|) \leq M < \infty$ so gilt $x < y$ oder $x > y$.
d) Zwei verschiedene periodische Minimale vom Typ (q, p) schneiden sich nicht.

Beweis. a) Seien x und y zwei globale Minimalen die sich im Intervall $[t_1, t_2]$ zweimal schneiden. Die Argumentation im Beweis von Satz 1.3.4 mit \exists anstelle des dort verwendeten Funktionenraumes Λ führt auch hier zu einem Widerspruch.

b) Falls $x(t) = y(t)$ für ein $t \in \mathbf{R}$, so ist, falls $x \leq y$ auch $\dot{x}(t) = \dot{y}(t)$. (Die Funktionen sind differenzierbar da sogar in C^2) und das bedeutet nach dem Eindeutigkeitssatz für gewöhnliche Differentialgleichungen $x = y$.

c) Wir nehmen an, die Behauptung sei falsch und es gäbe unter den Annah-

men der Behauptung eine Stelle $t \in \mathbf{R}$, mit $x(t) = y(t)$. Behauptung (*):

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \left| \int_{\tau}^T F(t, x, \dot{x}) dt - \int_{\tau}^T F(t, y, \dot{y}) dt \right| = 0 .$$

Beweis: wir können ein z wie folgt konstruieren

$$z(t) = \begin{cases} y(t) & t \in [\tau, T-1] \\ x(t) - (t-T)(y(t) - x(t)) & t \in [T-1, T] \end{cases} .$$

Wegen der Minimalität von x gilt

$$\begin{aligned} \int_{\tau}^T F(t, x, \dot{x}) dt &\leq \int_{\tau}^T F(t, z, \dot{z}) dt \\ &= \int_{\tau}^T F(t, y, \dot{y}) dt + \int_{\tau}^T F(t, z, \dot{z}) - F(t, y, \dot{y}) dt \\ &= \int_{\tau}^T F(t, y, \dot{y}) dt + \int_{T-1}^T F(t, z, \dot{z}) - F(t, y, \dot{y}) dt . \end{aligned}$$

Für $t \in [T-1, T]$ liegt $(x(t), \dot{x}(t))$ nach Voraussetzung in der kompakten Menge $\mathbf{T}^2 \times [-M, M]$. Die Menge $\Pi = [T-1, T] \times \mathbf{T}^2 \times [-M, M]$ ist kompakt im Phasenraum $\Omega \times \mathbf{R}$. Nun

$$\begin{aligned} &\int_{T-1}^T F(t, z, \dot{z}) - F(t, y, \dot{y}) dt \\ &\leq \max_{(t,u,v) \in \Pi} \{ F_x(t, u, v) |z(t) - y(t)| + F_p(t, u, v) |\dot{z}(t) - \dot{y}(t)| \} \\ &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

für $T \rightarrow \infty$, nach Voraussetzung über $|y(t) - x(t)|$ und $|\dot{y}(t) - \dot{x}(t)|$. Es ist nämlich $(z(t) - y(t)) = (x(t) - y(t))(1 + t - T)$ für $t \in [T-1, T]$. Und damit ist die Behauptung (*) gezeigt. Andererseits müssen sich die Minimalen $x(t)$ und $y(t)$ an der Stelle $t = \tau$ transversal schneiden, sonst würden sie ja zusammenfallen nach dem Eindeutigkeitssatz für Differentialgleichungen. Das bedeutet aber, dass es ein $\epsilon < 0$ gibt, sodass der Weg $t \mapsto x(t)$ auf dem Intervall $[\tau - \epsilon, T]$ für genügend grosses T nicht minimal sein kann, denn

- auf $[\tau - \epsilon, \tau + \epsilon]$ kann die Wirkung um einen festen positiven Wert kleiner gemacht werden, indem ein minimaler C^2 -Weg $q(t)$ von $x(t - \epsilon)$ nach $y(t + \epsilon)$ gewählt wird, anstelle auf $[\tau - \epsilon, \tau + \epsilon]$ $x(t)$ und $y(t)$ zu folgen und einen Ecken zu machen.
- Nach der Behauptung (*) kann die Differenz der Wirkungen von $x(t)$ und $y(t)$ auf dem Intervall $[\tau, T]$ beliebig klein gemacht werden, indem wir mit T gegen ∞ gehen.

- Der Weg

$$t \mapsto \begin{cases} q(t) & t \in [\tau - \epsilon, \tau + \epsilon] \\ z(t) & t \in [\tau - \epsilon, T] \end{cases}$$

hat also für genügend grosses T eine kleinere Wirkung als $x(t)$. Das ist ein Widerspruch zur Annahme, dass $x(t)$ eine globale Minimale ist.

d) Äquivalent zur Suche eines Minimums vom Funktional

$$I(\gamma) = \int_0^q F(t, x, \dot{x}) dt$$

in $\Xi_{q,p}$ ist die Suche nach einem Minimum von

$$I_\epsilon(\gamma) = \int_\epsilon^{q-\epsilon} F(t, x, \dot{x}) dt$$

schlicht und einfach, weil diese beiden Funktionale auf $\Xi_{q,p}$ zu q, p zusammenfallen. Hat γ zwei Nullstellen in $(0, q]$, können wir ein $\epsilon > 0$ finden, sodass γ zwei Nullstellen in $(\epsilon, q+\epsilon)$ hat. Deshalb kann $I_\epsilon(\gamma)$ nicht minimal sein (dasselbe Argument wie in a)) und somit auch $I(\gamma)$ nicht. γ hat also höchstens 1 Nullstelle in $(0, q]$. Nach dem nächsten Satz 2.3.2 a) (welches im Beweis nur a) dieses Satzes benutzt) hat γ also auch höchstens eine Nullstelle in $(0, Nq]$, ist aber periodisch mit Periode q . \square

Satz 2.3.2 Für alle $N \in \mathbb{N}, (q, p) \in \mathbf{Z}, q \neq 0$ gilt:

- $\gamma \in \mathcal{M}(q, p)$ genau dann, wenn $\gamma \in \mathcal{M}(Nq, Np)$.
- Die Klasse $\mathcal{M}(q, p)$ ist charakterisiert durch $p/q \in \mathbf{Q}$.
- $\mathcal{M}(q, p) \subset \mathcal{M}$.

Beweis. a) (i) Sei $\gamma \in \mathcal{M}(Nq, Np)$ gegeben durch

$$\gamma : x(t) = \frac{p}{q}t + \xi(t)$$

mit $\xi(t + Nq) = \xi(t)$. Wir behaupten, dass $\gamma \in \mathcal{M}(q, p)$. Setze $y(t) = x(t + q) = \frac{p}{q}t + \eta(t)$ mit $\eta(t) = x(t + q) - x(t)$. Da $x(t) - y(t) = x(t) - \eta(t) = x(t) - x(t + q)$ die Periode Nq hat und

$$\int_0^{Nq} (x - y) dt = \int_0^{Nq} (\xi(t) - \xi(t + q)) dt = 0$$

ist, verschwindet $x(t) - y(t)$ nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung an mindestens zwei Stellen in $(0, Nq)$. Satz 2.6 a) impliziert nun $x = y$ und das heisst

$$I(\gamma)|_0^{Nq} = \int_0^{Nq} F(t, x, \dot{x}) dt = N \int_0^q F(t, x, \dot{x}) dt = NI(\gamma)|_0^q .$$

Somit gilt, da $\Xi_{Nq,Np} \supset \Xi_{q,p}$

$$\inf_{\eta \in \Xi_{q,p}} I(\eta)|_0^q \geq \int_{\eta \in \Xi_{Nq,Np}} N^{-1} I(\eta)|_0^{Nq} = N^{-1} I(\gamma)|_0^{Nq} = I(\gamma)|_0^q .$$

Das heisst $\gamma \in \mathcal{M}(q,p)$.

(ii) Sei nun umgekehrt $\gamma \in \mathcal{M}(q,p)$ gegeben. Wir zeigen, dass $\gamma \in \mathcal{M}(Nq,Np)$. γ kann als Element von $\Xi_{Nq,Np}$ angesehen werden. Nach dem Existenzsatz 2.2.2 im letzten Paragraphen existiert ein minimales Element $\zeta \in \mathcal{M}(Nq,Np)$ für das insbesondere gilt

$$NI(\gamma)|_0^q = I(\gamma)|_0^{Nq} > I(\zeta)|_0^{Nq} .$$

Aus (i) folgern wir, dass $\zeta \in \mathcal{M}(q,p)$. Das heisst

$$NI(\gamma)|_0^q \geq NI(\zeta)|_0^q .$$

Da $\gamma \in \mathcal{M}(q,p)$ haben wir auch $NI(\gamma)|_0^q \leq NI(\zeta)|_0^q$ und somit

$$NI(\gamma)|_0^q = NI(\zeta)|_0^q$$

und schliesslich

$$I(\gamma)|_0^{Nq} = I(\zeta)|_0^{Nq}$$

was bedeutet, dass $\gamma \in \mathcal{M}(Nq,Np)$.

b) folgt sofort aus a).

c) Sei $\gamma \in \mathcal{M}(q,p)$. Wir haben zu zeigen, dass für $\phi \in \text{Lip}_{comp}(\mathbf{R})$

$$\int_{\mathbf{R}} F(t, x + \phi, \dot{x} + \dot{\phi}) - F(t, x, \dot{x}) dt \geq 0 .$$

Wähle N so gross, dass der Träger von ϕ im Intervall $[-Nq, Nq]$ enthalten ist und setze ϕ $2Nq$ -periodisch fort zu $\tilde{\phi}$. Da $\gamma \in \mathcal{M}(q,p)$, gilt

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}} F(t, x + \phi, \dot{x} + \dot{\phi}) - F(t, x, \dot{x}) dt &= \int_{\mathbf{R}} F(t, x + \phi, \dot{x} + \dot{\phi}) - F(t, x, \dot{x}) dt \\ &= \int_{-Nq}^{Nq} F(t, x + \phi, \dot{x} + \dot{\phi}) - F(t, x, \dot{x}) dt \\ &= \int_{-Nq}^{Nq} F(t, x + \tilde{\phi}, \dot{x} + \tilde{\phi}) - F(t, x, \dot{x}) dt \geq 0 . \end{aligned}$$

□

Satz 7.2 kann man in Worten so zusammenfassen: Periodische Minimale vom Typ (q,p) sind global minimal und charakterisiert durch die rationale Zahl p/q . Wir schreiben desshalb auch $\mathcal{M}(p/q)$ anstelle von $\mathcal{M}(q,p)$.

Satz 2.3.3 *Globale Minimale haben keine Selbstschnitte auf \mathbf{T}^2 .*

Definition: Sei $\mathcal{M}[0,T]$ die Menge der Minimale auf dem Intervall $[0,T]$.

Der Beweis von Satz 2.3.3 braucht Abschätzungen für Elemente in $\mathcal{M}[0,T]$, die wir in einem Lemma vorwegnehmen:

Sei $\gamma \in \mathcal{M}[0,T]$, $\gamma : t \mapsto x(t)$ und $A > T > 1$, sodass $|x(T) - x(0)| \leq A$. Dann gibt es Konstanten c_0, c_1, c_2 , die nur von F abhängen, sodass $\forall t \in [0,T]$ gilt

Lemma 2.3.4

$$a) \quad |x(t) - x(0)| \leq C_0(A) = c_0 A, \quad (2.6)$$

$$b) \quad |\dot{x}(t)| \leq C_1(A) = c_1 A^2 T^{-1}, \quad (2.7)$$

$$c) \quad |\ddot{x}(t)| \leq C_2(A) = c_2 A^4 T^{-2}. \quad (2.8)$$

Beweis. $\gamma : t \mapsto x(t) \in \mathcal{M}[0,T]$. Aus $\delta \leq F_{pp} \leq \delta^{-1}$ erhalten wir durch Integration (vgl. Satz 2.2.1):

$$\begin{aligned} -a_1 + \frac{\delta}{4} \dot{x}^2 &\leq F \leq \delta^{-1} \dot{x}^2 + a_1 \\ -a_1 + \frac{\delta}{4} \dot{y}^2 &\leq F \leq \delta^{-1} \dot{y}^2 + a_1 \end{aligned}$$

und damit, weil wegen der Minimalität von γ die Ungleichung $I(\gamma) \leq I(\eta)$ gilt, ist mit $y = T^{-1}[x(0)(T-t) + x(T)t]$

$$\begin{aligned} -a_1 T + \frac{\delta}{4} \int_0^T \dot{x}^2 dt &\leq \int_0^T F(t, x, \dot{x}) dt \\ &\leq \int_0^T F(t, y, \dot{y}) dt \\ &\leq \delta^{-1} \int_0^T \dot{y}^2 dt + a_1 T \\ &\leq \delta^{-1} [x(T) - x(0)]^2 T^{-1} + a_1 T \\ &\leq \delta^{-1} A^2 T^{-1} + a_1 T. \end{aligned}$$

Das heisst

$$\int_0^T \dot{x}^2 dt \leq 4\delta^{-2}A^2T^{-1} + 8a_1T\delta^{-1} \leq a_2A^2T^{-1} .$$

Jetzt können wir a) erledigen:

$$\begin{aligned} |x(t) - x(0)| &= \left| \int_0^t 1 \cdot \dot{x} ds \right| \\ &\leq \sqrt{t} \left[\int_0^t \dot{x}^2 ds \right]^{1/2} \\ &\leq \sqrt{T} [a_2 A^2 T^{-1}]^{1/2} = c_0 A . \end{aligned}$$

Da γ in $\mathcal{M}[0, T]$ ist, erfüllt $x(t)$ die Eulergleichungen $\frac{d}{dt}F_p = F_x$, d.h.

$$\ddot{x}F_{pp} + \dot{x}F_{xp} + F_{tp} = F_x .$$

Mit $F_{pp} \geq \delta$, $|F_x| \leq c(1 + \dot{x}^2)$, $|F_{xp}| \leq c(1 + |\dot{x}|)$ und $|F_{tp}| \leq c(1 + |\dot{x}|)$, können wir \ddot{x} abschätzen: Es existiert eine Konstante a_3 mit

$$|\ddot{x}| \leq a_3(1 + \dot{x}^2)$$

und somit ist auch b) bald bewiesen: $\forall t, s \in [0, T]$ gilt

$$|\dot{x}(t) - \dot{x}(s)| = \left| \int_s^t \ddot{x} dt \right| \leq a_3 \int_0^T (1 + \dot{x}^2) dt \leq a_3 [T + a_2 A^2 T^{-1}] \leq a_4 A^2 T^{-1} .$$

Es existiert ein $s \in [0, T]$ mit $|\dot{x}(s)| = |[x(T) - x(0)]T^{-1}| \leq AT^{-1}$ und endlich ist

$$|\dot{x}(t)| \leq AT^{-1} + a_4 A^2 T^{-1} \leq c_1 A^2 T^{-1} .$$

c) ergibt sich nun auch gleich:

$$|\ddot{x}(t)| < a_3(1 + \dot{x}^2) \leq a_3[1 + (c_1 AT^{-1})^2] \leq c_2 A^4 T^{-2} .$$

□

Wir kommen nun zum Beweis von Satz 2.3.3:

Beweis. Wir nehmen an, es gäbe ein $\gamma \in \mathcal{M}$ mit einem Selbstschnitt. Das heisst, es gibt $(q, p) \in \mathbf{Z}^2$, $q \neq 0$ und ein $\tau \in \mathbf{R}$ (ohne Einschränkung der Allgemeinheit nehmen wir $\tau = 0$) mit

$$x(\tau + q) - p = x(\tau) .$$

Mit $x(t) = \frac{p}{q}t + \xi(t)$ heisst das

$$x(\tau + q) - p = \frac{p}{q}q + \xi(\tau + q) = \xi(\tau + q) .$$

Da es höchstens einen Schnitt gibt zwischen $x(t)$ und $x(t+q) - p$, gilt

$$\left. \begin{array}{l} x(t+q) - p - x(t) > 0, \quad t > 0 \\ x(t+q) - p - x(t) < 0, \quad t < 0 \end{array} \right\} \text{d.h. } \left. \begin{array}{l} \xi(t+q) - \xi(t) > 0, \quad t > 0 \\ \xi(t+q) - \xi(t) < 0, \quad t < 0 \end{array} \right.$$

oder

$$\left. \begin{array}{l} x(t+q) - p - x(t) < 0, \quad t > 0 \\ x(t+q) - p - x(t) > 0, \quad t < 0 \end{array} \right\} \text{d.h. } \left. \begin{array}{l} \xi(t+q) - \xi(t) < 0, \quad t > 0 \\ \xi(t+q) - \xi(t) > 0, \quad t < 0 \end{array} \right.$$

Wir können uns ohne Einschränkung der Allgemeinheit auf den ersten Fall beschränken. (Ersetze sonst t durch $-t$.) Es gilt also

$$\left. \begin{array}{l} \xi(t+q) - p - \xi(t) < 0, \quad t > 0 \\ \xi(t+q) - p - \xi(t) > 0, \quad t < 0 \end{array} \right\} \text{d.h. } \xi(t) - \xi(t-q) < 0, \quad t < q.$$

Daraus folgt für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$\xi_n(t) := \xi(t+nq) > \xi_{n-1}(t), \quad t > 0 \quad (2.9)$$

$$\xi_n(t) := \xi(t-nq) > \xi_{-n+1}(t), \quad t < q. \quad (2.10)$$

Also ist $\xi_n(t)$ für festes $t > 0$ eine monoton steigende Folge und $\xi_{-n}(t)$ ist für $t < q$ und $n \rightarrow \infty$ ebenfalls monoton steigend. Nach dem Existenzsatz für periodische Minimale im letzten Paragraphen, gibt es ein periodisches $\theta \in \mathcal{M}(q, p)$ $\theta : t \mapsto z(t), z(t) = \frac{p}{q}t + \zeta(t)$ mit $\zeta(t) = \zeta(t+q)$. Die zusätzliche Bedingung

$$z(0) < x(0) < z(0) + 2$$

kann durch eventuelles Verschieben von z erzielt werden. Wir haben somit

$$\zeta(0) < \xi(0) = \xi(q) < \zeta(0) + 2.$$

Da γ und θ sich nicht zweimal schneiden können in $[0, q]$, gilt für $t \in [0, q]$

$$\begin{aligned} z(t) &< x(t) < z(t) + 2 \\ \zeta(t) &< \xi(t) < \zeta(t) + 2. \end{aligned}$$

Wegen $\zeta(t+nq) = \zeta(t)$ und $\xi_n(t) > \xi_{n-1}(t) > \xi(t), \xi_{-n}(t) > \xi_{-n+1}(t)$ für $t \in [0, q]$, gilt für alle $n > 0$ und $t \in [0, q]$ entweder

$$\zeta(t) < \xi_n(t) < \zeta(t) + 2$$

oder

$$\zeta(t) > \xi_n(t) > \zeta(t) + 2$$

denn wegen (2.9) gilt die linke Abschätzung ohnehin und wären beide Abschätzungen falsch, so gäbe es $t', t'' \in [0, q]$ und $n', n'' > 0$ mit

$$\begin{aligned} \xi_{n'}(t') &= \zeta(t') + 2 \\ \xi_{n''}(t'') &= \zeta(t'') + 2 \end{aligned}$$

was zu zwei Schnittpunkten von $x(t)$ und $z(t)$ bei $t = t' + n'$ und $t = t'' + n''$ führen würde. Wiederum können wir uns auf den ersten Fall beschränken, sodass für alle $t > 0$ die Ungleichungen $\zeta(t) < \xi_n(t) < \xi_{n+1}(t) < \zeta(t) + 2$ für $t > 0$ gelten, wo $\zeta(t)$ die Periode q hat. Dies bedeutet nun aber, dass es ein $\kappa(t)$ gibt, mit $\xi_n(t) \rightarrow \kappa(t)$ für $n \rightarrow \infty$, punktweise für jedes $t > 0$. Wegen $\xi_{n+1}(t) = \xi(t+q) \rightarrow \kappa(t+q) = \kappa(t)$ hat κ die Periode q . Wenn wir nun die drei Behauptungen

- i) $\exists M, |\dot{x}(t)| \leq M, t > 0$
- ii) $|x(t+q) - p - x(t)| \rightarrow 0, t \rightarrow \infty$
- iii) $|\dot{x}(t+q) - p - \dot{x}(t)| \rightarrow 0, t \rightarrow \infty$

beweisen können, so sind wir mit Satz 2.6 c) angewendet auf die globalen Minimalen gegeben durch $x(t)$ und $y(t) = x(t+q) - p$ fertig: $x < y$ oder $y < x$ bedeutet nämlich, dass γ keinen Selbstschnitt haben kann, im Widerspruch zur Annahme.

Die Behauptungen i) bis iii) folgen aus dem gerade oben bewiesenen Lemma 2.3.4, denn i) bis iii) sind gleichbedeutend mit

- i)' $\exists M, |\xi_n(t)| \leq M, t \in [0, T]$
- ii)' $|\xi_{n+1}(t) - \xi_n(t)| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty, t \in [0, q]$
- iii)' $|\dot{\xi}_{n+1}(t) - \dot{\xi}_n(t)| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty, t \in [0, q]$.

Die Behauptung i)' haben wir schon erledigt durch Angabe der periodischen Funktion $\xi(t)$. Mit dem oben bewiesenen Lemma 2.3.4 sehen wir, dass

$$\begin{aligned} |\xi_n(t)| &\leq C_1 \\ |\dot{\xi}_n(t)| &\leq C_2 \end{aligned}$$

und das heisst, dass $\xi_n(t)$ und $\dot{\xi}_n(t)$ gleichgradig stetige gleichmässig beschränkte Funktionenfolgen sind, die nach Arzela-Ascoli gleichmässig konvergieren. Damit sind auch (ii) und (iii) bewiesen. \square

Als Korollar dieses Satzes sehen wir, dass falls $\gamma \in \mathcal{M}$ ist und γ nicht periodisch ist, eine **Ordnung auf \mathbf{Z}^2** definiert ist durch

$$(j, k) < (j', k') \text{ falls } x(t+j) - k < x(t+j') - k', \forall t, \quad (2.11)$$

denn der Satz impliziert, dass alle zugelassenen Paare (j, k) und (j', k') sich vergleichen lassen: $(j, k) < (j', k')$ oder $(j, k) > (j', k')$.

2.4 Kompaktheitseigenschaften der Minimalen

Satz 2.4.1 *Für eine globale Minimale $\gamma \in \mathcal{M}, \gamma : t \mapsto x(t)$, existiert der Limes*

$$\alpha = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{x(t)}{t}.$$

Definition: Für $\gamma \in M$ heisst der Grenzwert $\alpha = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{x(t)}{t}$ **Rotationszahl** oder **mittlere Steigung** von γ .

Der Beweis stützt sich auf die Tatsache, dass die Minimale γ und ihre Translation $T_{qp}\gamma : t \mapsto x(t+q) - p$ sich nicht schneiden.

Beweis. Erster Teil des Beweises.

1) Es genügt zu zeigen, dass die Folge $x(j)/j$ für $j \in \mathbf{Z}$, $j \in \mathbf{Z}$ konvergiert, denn nach Lemma 2.3.4 mit $T = 1$ und $A = |x(j+1) - x(j)| + 1$, folgt für $t \in [j, j+1]$, $j > 0$

$$|x(t) - x(j)| < c_0(|x(j+1) - x(j)| + 1)$$

und

$$\begin{aligned} \left| \frac{x(t)}{t} - \frac{x(j)}{j} \right| &\leq \left| \frac{x(t) - x(j)}{t} + x(j)\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{j}\right) \right| \\ &\leq \frac{|x(t) - x(j)|}{j} + \frac{|x(j)|}{j} \frac{(t-j)}{t} \\ &\leq \frac{|x(t) - x(j)|}{j} + \frac{|x(j)|}{j} \frac{1}{t} \\ &\leq c_0 \left| \frac{x(j+1) - x(j)}{j} \right| + \frac{|x(j)|}{j} \frac{1}{t} \end{aligned}$$

falls wir annehmen, dass $\alpha = \lim_{j \rightarrow \infty} x(j)/j$ existiert, gilt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left| \frac{x(t)}{t} - \frac{x(j)}{j} \right| = 0.$$

2) Da $x(t)$ keine Selbstschnitte hat, ist die Abbildung

$$f : S \rightarrow S, S = \{x(j) - k, (j, k) \in \mathbf{Z}^2\}, s = x(j) - k \mapsto f(s) = x(j+1) - k$$

monoton und kommutiert mit $s \mapsto s+1$, d.h.

$$\begin{aligned} f(s) &< f(s'), s < s' \\ f(s+1) &= f(s) + 1. \end{aligned}$$

Anders gesagt, hat $\hat{f}(s) = f(s) - s$ die Periode 1. □

Lemma 2.4.2 $\forall s, s' \in S, |\hat{f}(s) - \hat{f}(s')| < 1$.

Beweis. Wir nehmen an, die Behauptung sei falsch und es gäbe s und $s' \in S$ mit

$$|\hat{f}(s) - \hat{f}(s')| \geq 1 .$$

Da wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen können, dass $\hat{f}(s) \geq \hat{f}(s') + 1$, und dass $s < s' < s + 1$ (Periodizität von \hat{f}) haben wir

$$f(s) - s - f(s') + s' \geq 1 . \quad (2.12)$$

Wegen der Monotonie von f , folgt aus $s < s' < s + 1$

$$f(s) < f(s') < f(s+1)$$

und daraus

$$f(s) + s' < f(s') + s + 1 . \quad (2.13)$$

Gleichung (2.12) steht im Widerspruch zu (2.13). \square

Beweis. Fortsetzung des Beweises.

Die Iterierte von f

$$f^m : x(j) + k \mapsto x(j+m) - k$$

existiert für jedes $m \in \mathbf{Z}$ und f^m hat dieselben Eigenschaften wie f .

3) Die Werte

$$\begin{aligned} b(f) &= \sup_{s \in S} \hat{f}(s) \\ a(f) &= \inf_{s \in S} \hat{f}(s) \end{aligned}$$

erfüllen wegen dem obigen Lemma 2.3.4

$$b(f) - a(f) \leq 1 .$$

Insbesondere sind beide endlich, da

$$b \leq 1 + (f(s_0) - s_0) < \infty, s_0 = x(0) .$$

a und b sind subadditiv, d.h.

$$\begin{aligned} b(f^{j+k}) &\leq b(f^j) + b(f^k) \\ a(f^{j+k}) &\leq a(f^j) + a(f^k) \end{aligned}$$

weil

$$\sup(f^{j+k}(s) - s) \leq \sup(f^j(f^k(s) - f^k(s)) + \sup(f^k(s) - s) \leq b(f^j) + b(f^k) .$$

Es ist wohlbekannt, dass in diesem Fall

$$\begin{aligned}\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{b(f^j)}{j} &= \beta \\ \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{a(f^j)}{j} &= \alpha\end{aligned}$$

existieren. Wegen

$$0 \leq b(f^n) - a(f^n) \leq 1$$

gilt $\alpha = \beta$. Und somit ist der Satz bewiesen. \square

Das Resultat in Satz 2.4.1 kann quantitativ verbessert werden: Wegen der Subadditivität von a und b gilt:

$$\begin{aligned}a(f^k) &\geq ka(f) \\ b(f^k) &\leq kb(f)\end{aligned}$$

und somit

$$a(f) \leq \frac{a(f^m)}{m} \leq \frac{b(f^m)}{m} \leq b(f)$$

was mit $m \rightarrow \infty$

$$a(f) \leq \alpha \leq b(f)$$

ergibt. Das heisst

$$-1 \leq \alpha(f) - b(f) \leq \hat{f}(s) - \alpha \leq b(f) - a(f) \leq 1$$

womit wir folgendes Lemma bewiesen haben:

Lemma 2.4.3

$$|f(s) - s - \alpha| \leq 1, \forall s \in S$$

Wendet man Lemma 2.4.3 auf f^m an, gibt das

$$|f^m(s) - s - m\alpha| \leq 1, \forall s \in S.$$

Dies ist eine Verschärfung von Satz 2.4.1:

$$|\frac{f^m(s) - s}{m} - \alpha| \leq \frac{1}{m}.$$

Speziell erhalten wir

$$|x(m) - x(0) - ma| \leq 1.$$

Satz 2.4.4

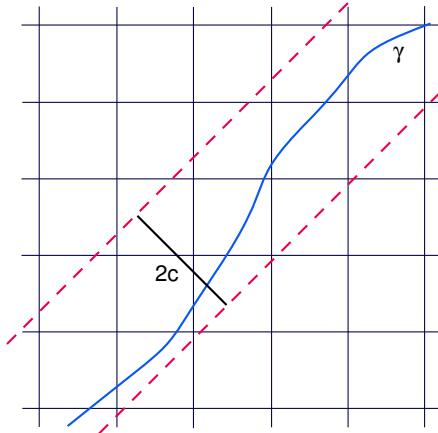
Falls $\gamma : t \mapsto x(t)$ eine globale Minimale ist, so gilt $\forall t \in \mathbf{R}, \forall m \in \mathbf{Z}$,

$$|x(t+m) - x(t) - m\alpha| \leq 1.$$

Beweis. Wenn wir statt der Funktion $F(t, x, \dot{x})$ die um τ verschobene Funktion $F(t+\tau, x, \dot{x})$ betrachten, erhalten wir die gleiche Abschätzung wie in Lemma 2.4.3 und analog ergibt das

$$|x(t+m) - x(t) - m\alpha| \leq 1.$$

□



Es gibt eine Konstante c , die nur von F , nicht aber von $\gamma \in \mathcal{M}$ oder α abhängt, sodass für alle $t, t' \in \mathbf{R}$,

Satz 2.4.5

$|x(t+t') - x(t) - \alpha t'| < c\sqrt{1 + \alpha^2}$
gilt.

Beweis. Wähle $j \in \mathbf{Z}$ so, dass $j \leq t' \leq j+1$. Dann ist mit Lemma 2.4.3 angewendet auf $s = x(t+j)$

$$|x(t+j+1) - x(t+j)| = |f(s) - s| \leq |\alpha| + 1,$$

was nach dem Lemma 2.3.4 mit $T = 1$ und $A = 1 + |\alpha|$,

$$|x(t+t') - x(t+j)| \leq c_0(|\alpha| + 1)$$

liefert. Damit ist unter Benützung von Satz 2.4.4 und Lemma 2.3.4

$$\begin{aligned}
 |x(t+t') - x(t) - \alpha t'| &\leq |x(t+j) - x(t) - \alpha j| + |x(t+t') - x(t+j)| + |\alpha|(t' - j)| \\
 &\leq |1 + c_0(|\alpha| + 1) + |\alpha| = (c_0 + 1)(|\alpha| + 1) \\
 &\leq 2(c_0 + 1)\sqrt{\alpha^2 + 1} \\
 &=: c\sqrt{\alpha^2 + 1}.
 \end{aligned}$$

□

Der Satz 2.4.5 hat folgende geometrische Interpretation: Eine globale Minimale liegt in einem Streifen der Breite $2c$ unabhängig von x und α !

Aus Satz 2.4.1 folgt, dass eine Funktion $\alpha : \mathcal{M} \rightarrow \mathbf{R}, \gamma \mapsto \alpha(\gamma)$ existiert, die einer globalen Minimalen ihre Rotationszahl zuordnet.

Definition: Wir definieren

$$\mathcal{M}_\alpha = \{\gamma \in \mathcal{M} \mid \alpha(\gamma) = \alpha\} \subset \mathcal{M}.$$

- Lemma 2.4.6**
- a) $\mathcal{M} = \bigcup_{\alpha \in \mathbf{R}} \mathcal{M}_\alpha = \mathcal{M}_\alpha$.
 - b) $\mathcal{M}_\alpha \cap \mathcal{M}_\beta = \emptyset, \alpha \neq \beta$.
 - c) $\mathcal{M}_{p/q} \supset \mathcal{M}(p/q) \neq \emptyset$.

Beweis. a) und b) folgen aus Satz 2.4.1.

c) $\mathcal{M}_{p/q} \supset \mathcal{M}(p/q)$ ist selbstverständlich. $\mathcal{M}(p/q) \neq \emptyset$ haben wir in Satz 2.2.1 schon bewiesen. □

Sei $\gamma \in \mathcal{M}_\alpha, \gamma : t \mapsto x(t), |\alpha| \leq A \geq 1$. Dann gilt:
Es existieren Konstanten d_0, d_1 und d_2 , sodass für alle $t, t_1, t_2 \in \mathbf{R}$ gilt

- Satz 2.4.7**
- a) $|x(t_1) - x(t_2) - \alpha(t_1 - t_2)| \leq D_0(A) := d_0 A$
 - b) $|\dot{x}(t)| \leq D_1(A) = d_1 A^2$
 - c) $|\ddot{x}(t)| \leq D_2(A) := d_2 A^4$.

Beweis. a) folgt direkt aus Satz 2.4.5:

$$|x(t_1) - x(t_2) - \alpha(t_1 - t_2)| \leq c\sqrt{1 + \alpha^2} \leq \sqrt{2}c|\alpha| \leq \sqrt{2}A =: d_0 A.$$

b) Aus a) kriegen wir

$$|x(t+T) - x(t)| < |\alpha|T + d_0A \leq A(T + d_0),$$

was uns mit dem Lemma 2.3.4 und mit der Wahl $T = 1$

$$|\dot{x}(t)| \leq c_1[A(T + d_0)]^2 T^{-1} = d_1 A^2.$$

liefert.

c) Wegen

$$|\ddot{x}| \leq a_3(1 + |\dot{x}|^2) \leq a_3(1 + d_1^2 A^4) \leq 2a_3 d_1^2 A^4 = d_2 A^4$$

(man vergleiche Lemma 2.3.4 in letzten Paragraphen), ist auch die dritte Abschätzung wahr. \square

Bemerkung: Denzler [10] hatte Abschätzungen von der Form

$$D_1(A) = e^{d_1 A}$$

gegeben. Die Verbesserungen in Satz 2.4.7 beruhen auf der Benützung der Minimaleigenschaft. Wahrscheinlich sind sie jedoch noch nicht optimal. Man erwartet

$$\begin{aligned} D_1(A) &= d_1 A \\ D_2(A) &= d_2 A^2 \end{aligned}$$

was zum Beispiel für $F = (1 + \frac{1}{2} \sin(2\pi x))p^2$ eintritt, da

$$E = (1 + \frac{1}{2} \sin(2\pi x))\dot{x}^2$$

ein Integral ist und A ist von der Ordnung \sqrt{E} .

Definition: Wir schreiben \mathcal{M}/\mathbf{Z} für den Quotientenraum erhalten durch die Äquivalenzrelation \sim auf \mathcal{M} :

$$x \sim y \Leftrightarrow \exists k \in \mathbf{Z}, x(t) = y(t) + k.$$

Entsprechend wird auf den Teilmengen \mathcal{M}_α der Quotient $\mathcal{M}_\alpha/\mathbf{Z}$ definiert.

Definition: Die $C^1(\mathbf{R})$ -Topologie auf den C^1 -Funktionen auf \mathbf{R} ist definiert durch $x_m(t) \rightarrow x(t), m \rightarrow \infty$ falls für \forall kompakte $K \subset \mathbf{R}$, x_m gleichmässig nach x in der $C^1(K)$ -Topologie konvergiert.

Entsprechend definiert man für $r \geq 0$ die $C^r(\mathbf{R})$ Topologie. Auf dem Raum der C^1 -Wege $\gamma : \mathbf{R} \rightarrow \Omega, t \mapsto x_m(t)$ ist die $C^1(\mathbf{R})$ Topologie natürlich gegeben durch $\gamma_n \rightarrow \gamma$ falls $x_m \rightarrow x$.

Lemma 2.4.8

α ist stetig auf \mathcal{M} , falls auf \mathcal{M} die $C^0(\mathbf{R})$ Topologie gewählt wird.

Beweis. Wir müssen zeigen: Aus $x_m \rightarrow x$ folgt, dass $\alpha_m := \alpha(x_m) \rightarrow \alpha := \alpha(x)$. Da aus Satz 2.4.7 $|x_m(t) - x_m(0) - \alpha t| \leq D_0$ bekannt ist, hat man

$$|\alpha_m - \alpha| \leq \frac{|x(t) - x_m(t) - x(0) + x_m(0)|}{t} + \frac{2D_0}{t}.$$

Für gegebenes $\epsilon > 0$, wähle man nun t so gross, dass $2D_0/t < \epsilon/2$ und dann m so, dass

$$\frac{|x(t) - x_m(t) - x(0) + x_m(0)|}{t} \leq \epsilon/2$$

in $C(K)$ mit kompaktem $K = [-T, T]$, dass t und 0 enthält. Damit ist $|\alpha - \alpha_m| < \epsilon$.

□

Korollar 2.4.9

$\bigcup_{|\alpha| \leq A} \mathcal{M}_\alpha / \mathbf{Z}$ ist kompakt in der $C^1(\mathbf{R})$ Topologie.

Beweis. Dass $\bigcup_{|\alpha| \leq A} \mathcal{M}_\alpha / \mathbf{Z}$ relativ kompakt ist in $C^1(\mathbf{R})$, folgt aus dem Satz von Arzela-Ascoli und Satz 2.4.7. Es fehlt also nur noch die Abgeschlossenheit in $C^1(\mathbf{R})$ zu zeigen, um Kompaktheit zu erhalten. Sei also γ_m eine Folge in $\bigcup_{|\alpha| \leq M} \mathcal{M}_\alpha / \mathbf{Z}$ mit $\gamma_m \rightarrow \gamma \in C^1(\mathbf{R})$ in der C^1 Topologie. Wir behaupten, dass $\gamma \in \bigcup_{|\alpha| \leq M} \mathcal{M}_\alpha / \mathbf{Z}$.

1) $\gamma : t \mapsto x(t) \in \mathcal{M}$: Andernfalls gäbe es ein $\phi \in C_{comp}^1(\mathbf{R})$ mit Träger in $[-T, T]$ und

$$\int_{-T}^T F(t, x + \phi, \dot{x} + \dot{\phi}) dt < \int_{-T}^T F(t, x, \dot{x}) dt.$$

Wegen der gleichmässigen Konvergenz $x_m \rightarrow x$, $\dot{x}_m \rightarrow \dot{x}$ auf $[-T, T]$ folgt, dass für genügend grosses m auch

$$\int_{-T}^T F(t, x_m + \phi, \dot{x}_m + \dot{\phi}) dt < \int_{-T}^T F(t, x_m, \dot{x}_m) dt$$

gilt. Das ist ein Widerspruch.

2) $\gamma \in \bigcup_{|\alpha| \leq M} \mathcal{M}_\alpha / \mathbf{Z}$ folgt aus der Stetigkeit von α , falls die C^1 Topologie auf \mathcal{M} gewählt wird. (Wir hatten sogar Stetigkeit in der schwächeren C^0 Topologie gemäss Lemma 2.4.8). □

Wir wissen bereits von Lemma 2.4.6 dass $\mathcal{M} \supset \mathcal{M}(p/q) \neq \emptyset$. Das heisst $\mathcal{M}_\alpha \neq \emptyset$ für rationales α . Mit Korollar 2.4.9 erhalten wir nun auch die Existenz von Minimalen mit irrationaler Rotationszahl:

Satz 2.4.10 Für jedes $\alpha \in \mathbf{R}$ gilt $\mathcal{M}_\alpha \neq \emptyset$.

Beweis. Sei $\alpha \in \mathbf{R}$ gegeben. Es existiert eine Folge $\{\alpha_m\} \subset \mathbf{Q}$ mit $\alpha_m \rightarrow \alpha$.

Für jedes m wählen wir ein Element $\gamma_m \in \mathcal{M}_{\alpha_m} \subset \bigcup_{|\beta| \subset A} \mathcal{M}_\beta / \mathbf{Z}$ mit $\alpha < A$.

Wegen der in Korollar 2.4.9 bewiesenen Kompaktheit gibt es eine Teilfolge von $\gamma_m \in \mathcal{M}_{\alpha_m}$ die gegen ein Element $\gamma \in \mathcal{M}_\alpha$ konvergiert. \square

2.5 \mathcal{M}_α für α irrational, Mathermengen

Ist α irrational und $\gamma \in \mathcal{M}_\alpha$, $\gamma : t \mapsto x(t)$, so wird die Fundamentalgruppe \mathbf{Z}^2 von \mathbf{T}^2 durch

$$(i, j) < (i', j') \Leftrightarrow x(j) - k < x(j') - k'$$

totalgeordnet, d.h. es gilt auch

$$(i, j) = (i', j') \Leftrightarrow x(j) - k = x(j') - k'$$

denn wenn $x(j) - k = x(j') - k'$, so ist $x(t+q) - p = x(t)$ mit $q = j' - j$ und $p = k' - k$, d.h. $q = p = 0$ oder $\alpha = p/q$. Da aber α irrational ist, folgt $(i, j) = (i', j')$. Diese Ordnung ist dieselbe, wie die Ordnung, die man mit $F = p^2/2$ erhält.

$$(i, j) < (i', j') \Leftrightarrow \alpha j - k < \alpha j' - k' .$$

Sei $S_t := \{\alpha(j+t) - k \mid (j, k) \in \mathbf{Z}^2\}$ und $S = \{(t, \theta) \mid \theta = \alpha(j+t) - k \in S_t, t \in \mathbf{R}\}$. Wir definieren die Abbildung

$$u : S \rightarrow \mathbf{R}, (t, \theta = \alpha(j+t) - k) \mapsto x(j+t) - k .$$

Satz 2.5.1 a) u ist streng monoton in θ , d.h.
 $\alpha(j+t) - k < \alpha(j'+t) - k' \Leftrightarrow x(j+t) - k < x(j'+t) - k'$.
b) $u(t+1, \theta) = u(t, \theta)$.
c) $u(t, \theta+1) = u(t, \theta) + 1$.

Beweis. a) $\alpha(j+t) - k < \alpha(j'+t) - k' \Leftrightarrow x(j+t) - k < x(j'+t) - k'$ ist mit $q = j' - j$ und $p = k' - k$ gleichbedeutend mit

$$0 < \alpha q - p \Leftrightarrow x(t) < x(t+q) - p ,$$

wobei $q > 0$ vorausgesetzt werden kann (vertausche sonst (j, k) mit (j', k') und $<$ mit $>$).

i) Sei $x(t) < x(t + q) - p$. Daraus folgt mit Induktion für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$x(t) < x(t + nq) - np$$

oder nach Division durch nq

$$\frac{x(t)}{nq} < \frac{x(t + nq)}{nq} - \frac{p}{q}.$$

Der Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ ergibt

$$0 \leq \alpha - \frac{p}{q}$$

und da α irrational ist, haben wir $\alpha q > p$.

ii) Für die umgekehrte Implikation argumentieren wir indirekt: Für $x(t) \geq x(t + q) - p$ erhalten wir, wenn wir wie in i) vorgehen, $\alpha < p/q$.

b) Für $\theta = a(j + t) - k$ ist

$$u(t+1, \theta) = u(t+1, \alpha(j+t)-k) = u(t+1, \alpha(j-1+t+1)-k) = x(t+j)-k = u(t, \theta).$$

$$c) u(t, \theta + 1) = u(t, \alpha(j + t) - k + 1) = x(t + j) - k + 1 = u(t, \theta) + 1. \quad \square$$

Für $t = 0$ erhalten wir

$$u(0, \theta + \alpha) = x(j + 1) - k = f(x(j) - k) = f(u(0, \theta))$$

also mit $u_0 = u(0, \cdot)$

$$u_0(\theta + \alpha) = f \circ u_0(\theta).$$

Die Abbildung f ist also konjugiert zur Rotation um den Winkel α . Allerdings ist aber u nur auf S , einer dichten Teilmenge von \mathbf{R} definiert. Falls u stetig fortgesetzt werden könnte, so wäre es wegen der in Satz 2.5.1 bewiesenen Monotonie ein Homöomorphismus und f wäre wirklich konjugiert zu einer Rotation.

Wir definieren durch Abschluss zwei Funktionen u^+ und u^- :

$$\begin{aligned} u^+(t, \theta) &= \lim_{\theta_n \rightarrow \theta, \theta_n > \theta} u(t, \theta_n) \\ u^-(t, \theta) &= \lim_{\theta_n \rightarrow \theta, \theta_n < \theta} u(t, \theta_n). \end{aligned}$$

Es gibt zwei Fälle:

Fall A): $u^+ = u^- = u$ (d.h. u ist stetig).

Fall B): $u^+ \neq u^-$.

Im ersten Fall ist $u = u(t, \theta)$ stetig und streng monoton in θ : In der Tat, falls $\theta < \theta'$ ist, so gibt es (j, k) und (j', k') mit

$$\theta < (t + j)\alpha - k < (t + j')\alpha - k' < \theta'$$

und somit auch mit Satz 2.5.1 a)

$$u(t, \theta) \leq u(t, (t + j)\alpha - k) < u(t, (t + j')\alpha - k') \leq u(t, \theta')$$

und wir haben die strenge Monotonie. Das bedeutet, dass die Abbildung

$$h : (t, \theta) \rightarrow (t, u(t, \theta))$$

ein Homöomorphismus auf \mathbf{R} ist, der als Homöomorphismus auf dem Torus aufgefasst werden kann, da er mit

$$(t, \theta) \mapsto (t + j, \theta + k)$$

vertauscht. Für jedes $\beta \in \mathbf{R}$ ist $\gamma_\beta \in \mathcal{M}_\alpha$, wo

$$\gamma_\beta : t \mapsto x(t, \beta) = u(t, \alpha t + \beta) .$$

und es gilt $x(t, \beta) < x(t, \beta')$ für $\beta < \beta'$. Wir haben also eine einparametrische Schar von Extremalen.

Frage: Ist das ein Extremalenfeld? Formale Differentiation ergibt

$$\frac{d}{dt}x(t, \beta) = (\partial_t + \alpha\partial_\theta)u(t, \theta) = (\partial_t + \alpha\partial_\theta)uh^{-1}(t, x) .$$

Um ein Extremalenfeld zu haben, müsste

$$\psi(t, x) = (\partial_t + \alpha\partial_\theta)uh^{-1}(t, x) = \dot{x}(t, \beta)$$

stetig differenzierbar sein. Das ist im Allgemeinen nicht der Fall. Trotzdem kann man sagen:

Satz 2.5.2 Falls α irrational ist, $|\alpha| \leq A$, $\gamma : t \mapsto x(t) \in \mathcal{M}_\alpha$ ist und der Fall A) vorliegt, dann ist $\psi = (\partial_t + \alpha\partial_\theta)uh^{-1} \in \text{Lip}(\mathbf{T}^2)$.

Beweis. (Der Beweis erfordert den Satz 2.5.3, siehe unten). Zuerst einmal ist ψ auf dem Torus definiert, wegen

$$\psi(t+1, x) = \psi(t, x) = \psi(t, x+1).$$

Für die Lipschitzstetigkeit müssen wir zeigen, dass eine Konstante L existiert, sodass

$$|\psi(t', x') - \psi(t'', x'')| \leq L(|t' - t''| + |x' - x''|).$$

Zu $x' = x(t', \beta')$ und $x'' = x(t'', \beta'')$ führen wir einen dritten Punkt $y = x(t', \beta'')$ ein.

$$\begin{aligned} |\psi(t', y) - \psi(t'', x'')| &= |\dot{x}(t', \beta'') - \dot{x}(t'', \beta'')| \\ &\leq |t' - t''| C_2(A) \\ |\psi(t', x') - \psi(t', y)| &= |\dot{x}(t', \beta') - \dot{x}(t', \beta'')| \\ &\leq M(A)|x' - y| \quad (\text{Satz 2.5.3}) \\ &\leq M(A)|x' - x''| \\ |\psi(t', x') - \psi(t'', x'')| &< |\psi(t', y) - \psi(t'', x'')| + |\psi(t', x') - \psi(t', y)| \\ &\leq L(A)(|t' - t''| + |x' - x''|) \end{aligned}$$

mit $L(A) = \max\{C_2(A), M(A)\}$. Im ersten Schritt der zweiten Gleichung wurde (Satz 2.5.3) benutzt. \square

Satz 2.5.3 Seien $\gamma, \eta \in \mathcal{M}_\alpha$, $\gamma : t \mapsto x(t), \eta : t \mapsto y(t)$, $x(t) > y(t)$, $|\alpha| \leq A > 1$. Dann gibt es eine Konstante $M = M(A)$ mit $|\dot{x} - \dot{y}| \leq M|x - y|$, $\forall t \in \mathbf{R}$.

Beweis. Wir nehmen an, $x, y \in \mathcal{M}[-T, T]$ und wissen bereits aus Lemma 2.3.4, dass

$$|\dot{x}|, |\dot{y}| < C_1(A) = c_1 A^2 T^{-1}.$$

Sei $\xi(t) = x(t) - y(t) > 0$ in $[-T, T]$. Es genügt

$$|\dot{\xi}(0)| < M|\xi(0)|$$

zu zeigen, wegen der Invarianz des Problems bezüglich Zeittranslationen. Die Eulergleichungen

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} F_p(t, x, \dot{x}) - F_x(t, x, \dot{x}) &= 0 \\ \frac{d}{dt} F_p(t, y, \dot{y}) - F_x(t, y, \dot{y}) &= 0 \end{aligned}$$

ergeben nach Subtraktion

$$\frac{d}{dt}(A_0\dot{\xi} + B\xi) - (B\dot{\xi} + C\xi) = 0$$

mit

$$\begin{aligned} A_0 &= \int_0^1 F_{pp}(t, x + \lambda(y - x), \dot{x} + \lambda(\dot{y} - \dot{x})) d\lambda \\ B &= \int_0^1 F_{px}(t, x + \lambda(y - x), \dot{x} + \lambda(\dot{y} - \dot{x})) d\lambda \\ C &= \int_0^1 F_{xx}(t, x + \lambda(y - x), \dot{x} + \lambda(\dot{y} - \dot{x})) d\lambda. \end{aligned}$$

Aus den Annahmen (i) und (ii) aus schliessen wir

$$\begin{aligned} \delta &\leq A_0 \leq \delta^{-1} \\ |B| &\leq \lambda \\ |C| &\leq \lambda^2 \end{aligned}$$

mit $\lambda = c_0 A^2 T^{-1}$, wobei c_0 eine nur von F abhängige Konstante ≥ 1 ist und $A \geq 1$ eine Schranke für $|\alpha|$ oder für $|x(T) - x(-T)|, |y(T) - y(-T)|$ ist. Mit folgendem Lemma ist der Beweis von Satz 2.5.3 abgeschlossen. \square

Lemma 2.5.4

Es sei $\xi = \xi(t)$ eine im Intervall $[-T, T]$ positive Lösung der Jacobischen Gleichung $\frac{d}{dt}(A_0\dot{\xi} + B\xi) = B\dot{\xi} + C\xi$. Dann gilt

$$|\dot{\xi}(0)| \leq M\xi(0),$$

wobei $M = 5c_0 A^2 T^{-1} \delta^{-2}$.

Beweis. Da $\xi > 0$ für $t \in [-T, T]$, können wir

$$\eta := A_0 \frac{\dot{\xi}}{\xi} + B$$

bilden. Für $t = -\tau$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau}\eta &= -\dot{\eta} = -\frac{d}{dt}\left(\frac{A_0\dot{\xi} + B\xi}{\xi}\right) \\ &= \frac{\frac{d}{dt}(A_0\dot{\xi} + B\xi)}{\xi} + \frac{\dot{\xi}}{\xi^2}(A_0\dot{\xi} + B\xi) \\ &= -\frac{B\dot{\xi} + C\xi}{\xi} + A_0\left(\frac{\dot{\xi}}{\xi}\right)^2 + B\frac{\dot{\xi}}{\xi} \\ &= A_0^{-1}(\eta^2 - 2B\eta + B^2 - A_0C) \end{aligned}$$

also

$$\frac{d}{d\tau}\eta = A_0^{-1}(\eta - B)^2 - C.$$

Diese quadratische Differentialgleichung heisst **Riccati-Gleichung**. Wir wollen $|\eta(0)|$ abschätzen. Dabei können wir $\eta(0) > 0$ annehmen, denn wenn wir (t, h) durch $(-t, -h)$ und gleichzeitig B durch $(-B)$ ersetzen, geht die Riccati-Gleichung in sich über.

Behauptung: $|\eta(0)| \leq 4\lambda\delta^{-1}$.

Falls die Behauptung falsch ist, also $\eta(0) > 4\lambda\delta^{-1}$, so folgt für $t > 0$, solange die Lösung existiert

$$\eta(\tau) \geq \eta(0) > 4\lambda\delta^{-1}.$$

In der Tat ist für $\eta > 4\lambda\delta^{-1}$

$$|2B\eta| + |B^2 - A_0C| < 2\lambda\eta + \lambda^2(1 + \delta^{-1}) < 2\lambda\eta + 2\lambda^2\delta^{-1} < \frac{\delta\eta^2}{2} + \frac{\delta\eta^2}{4} = \frac{3}{4}\eta^2\delta$$

sodass aus der Riccattigleichung folgt

$$\frac{d\eta}{d\tau} \geq \delta(\eta^2 - \frac{3}{4}\eta^2\delta) \geq \delta\eta^2/4 > 0$$

und diese Ungleichung liefert nicht nur die Monotonie, sondern auch die Vergleichsfunktion

$$\eta(\tau) \geq \frac{\eta(0)}{1 - \eta(0)\delta\tau/4}$$

die für $t = 4\delta^{-1}\eta(0)^{-1}$ unendlich wird. Folglich wird

$$T < 4\delta^{-1}\eta(0)^{-1}$$

oder $\eta(0) < 4T^{-1}\delta^{-1} \leq 4A^2T^{-1}\delta^{-1} = 4\lambda\delta^{-1}$ im Widerspruch zu unserer Annahme. Also ist die Behauptung $|\eta(0)| \leq 4\lambda\delta^{-1}$ bewiesen. Wegen

$$\frac{\dot{\xi}}{\xi} = A_0^{-1}(\eta - B)$$

ist nun

$$\frac{|\dot{\xi}(0)|}{\xi(0)} \leq \delta^{-1}(4\lambda\delta^{-1} + \lambda) \leq 5\lambda\delta^{-2} = 5c_0A^2T^{-1}\delta^{-2}$$

und das Lemma ist bewiesen. \square

Definition: Ein **globales Lipschitz-Extremalenfeld** auf dem Torus ist gegeben durch ein Vektorfeld $\dot{x} = \psi(t, x)$ mit $\psi \in \text{Lip}(\mathbb{T}^2)$, sodass jede Lösung $x(t)$ extremal ist.

Satz 2.5.2 sagt uns, dass eine Minimale mit irrationaler Rotationszahl im Falle A) in ein globales Lipschitz-Extremalenfeld eingebettet werden kann.

Beispiel: Ungestörtes Pendel.
 $F = \frac{1}{2} (p^2 - \frac{1}{\pi} \cos(2\pi x))$ hat die Eulergleichung

$$\ddot{x} = \frac{1}{2} \sin(2\pi x)$$

mit dem Energieintegral

$$E = \frac{\dot{x}^2}{2} + \frac{1}{4\pi} \cos(2\pi x) \geq -\frac{1}{4\pi} .$$

Speziell für $E = (4\pi)^{-1}$ wird daraus

$$\dot{x}^2 = \frac{1}{2\pi} (1 - \cos(2\pi x)) = \frac{1}{\pi} \sin^2(\pi x)$$

oder

$$\dot{x} = \pm \sin(\pi x)/\sqrt{\pi}$$

und damit dies Periode 1 hat, nehmen wir

$$\dot{x} = |\sin(\pi x)/\sqrt{\pi}| = \psi(t, x) .$$

ψ ist zwar nicht C^1 aber Lipschitzstetig mit Lipschitzkonstante $\sqrt{\pi}$.

In der Hamilton'schen Formulierung liegen die Dinge ganz ähnlich wie früher bei C^1 -Extremalenfelder. Da Lipschitzflächen aber nur fast überall eine Tangentialebene besitzen, geben wir die folgende Definition:

Definition: Die Lipschitzfläche Σ heisst **invariant unter der Strömung von H** , falls das Vektorfeld

$$X_H = \partial_t + H_y \partial_x - H_x \partial_y$$

fast überall tangential ist zu Σ .

Falls $\dot{x} = \psi(t, x)$ ein Lipschitz-Extremalenfeld ist für F , so ist

$$\Sigma = \{(t, x, y) \in \Omega \times \mathbf{R} \mid y = F_p(t, x, \psi(t, x))\}$$

Lipschitz und invariant unter der Strömung von H . Umgekehrt gilt: Falls Σ eine unter der Strömung von H invariante Fläche ist, die gegeben ist durch

$$\Sigma = \{(t, x, y) \in \Omega \times \mathbf{R} \mid y = h(t, x)\}$$

wo $\psi \in \text{Lip}(\Omega)$ ist, so ist das Vektorfeld $\dot{x} = \psi(t, x)$ definiert durch

$$\psi = H_y(t, x, h(t, x))$$

ein Lipschitz-Extremalenfeld.

Satz 2.5.5

Im Beispiel vom mathematischen Pendel, das im ersten Paragraphen vorkam, hatten wir invariante C^1 Tori :

Mit dem Energiewert $E = (4\pi)^{-1}$ haben wir jedoch gesehen, dass das Extremalenfeld nur noch Lipschitzstetig war. Genauso ist der invariante Torus nur noch Lipschitzstetig.

Nachdem uns jetzt im Falle α irrational, Fall A), die Konstruktion eines Lipschitzextremalfeldes gelungen ist, stellt sich die Frage, ob es vielleicht andere $\psi \in \mathcal{M}_\alpha$ gibt, die nicht in dieses Extremalenfeld eingebettet werden können. Ausgehend von einem solchen ψ könnte man ein anderes Extremalenfeld konstruieren. Die Antwort ist negativ:

Satz 2.5.6

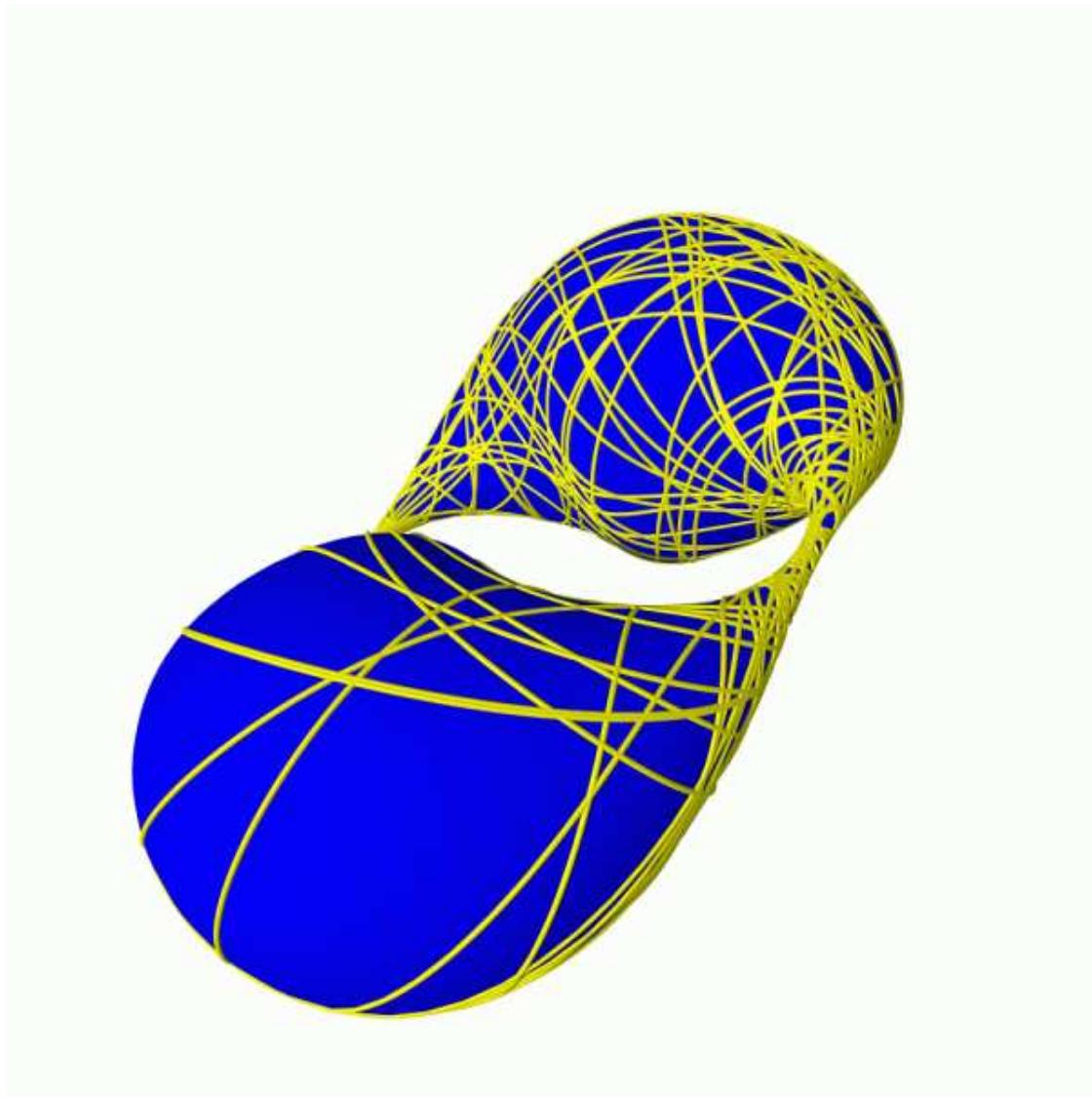
Falls $\gamma, \eta \in \mathcal{M}_\alpha$, $\gamma : t \mapsto x(t)$, $\eta : t \mapsto y(t)$, α irrational und der Fall A) vorliegt für γ , so gilt:
Es existiert ein $\beta \in \mathbf{R}$, sodass $y = u(t, \alpha t + \beta)$ und für η liegt auch Fall A) vor.

Der Beweis von Satz 2.5.6 folgt später.

Bemerkungen:

- 1) Satz 2.5.6 sagt, dass alle Elemente von \mathcal{M}_α zum Extremalenfeld gehören, das von γ erzeugt wird und dass die Fallunterscheidung A) und B) unabhängig vom Element $\gamma \in \mathcal{M}_\alpha$ ist.
- 2) Im Falle A) gibt es zu jedem α genau ein $\gamma \in \mathcal{M}(\alpha)$, mit $x(0) = \alpha$. Das folgt aus dem Existenz und Eindeutigkeitssatz für gewöhnliche Differentialgleichungen.
- 3) Im Falle A) liegt jedes $\gamma \in \mathcal{M}_\alpha$ dicht auf \mathbf{T}^2 , weil die Abbildung in diesem Fall ein Homöomorphismus ist.

Was passiert im Fall B)? Kann er überhaupt auftreten?



Beispiel: Betrachte $F = \frac{1}{2}p^2 + V(t, x)$. Wir nehmen an, der Torus sei durch $|x| \leq 1/2$, $|t| \leq 1/2$ parametrisiert und definieren V wie folgt als $C^\infty(\mathbf{T}^2)$ -Funktion für $0 < \rho < r \leq 1/6$:

$$\begin{aligned}
 V(t, x) &\geq M \geq 1 \quad , \quad \rho^2 \geq x^2 + t^2 \\
 V(t, x) &= v(t^2 + x^2) \geq 0 \quad , \quad \rho^2 \leq x^2 + t^2 \leq r^2 \\
 V(t, x) &= 0 \quad , \quad x^2 + t^2 \geq r^2 .
 \end{aligned}$$

Behauptung: Für jedes $\alpha \in \mathbf{R}$ mit $\rho^2 M > 6(|\alpha| + 1)^4$ liegt der Fall B) vor für \mathcal{M}_α .

Beweis. Wir nehmen an, es gäbe ein $\alpha \in \mathbf{R}$ mit

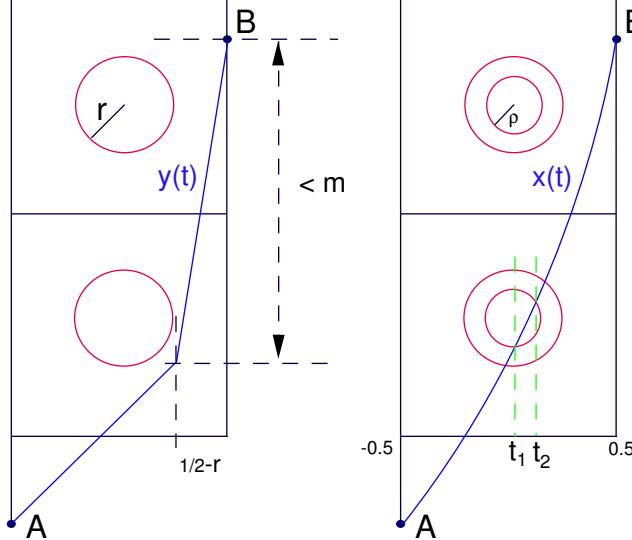
$$\rho^2 M > 6[|\alpha| + 1]^4$$

und es läge der Fall A) vor. Nach obiger Bemerkung 3) gäbe es eine Minimale $\gamma \in \mathcal{M}, \gamma : t \mapsto x(t)$ mit $x(0) = 0$.

Wir werden zeigen, dass γ nicht minimal ist in der Klasse der Kurven, die von $A := (t_1, a = x(t_1)) = (-0.5, x(-0.5))$ nach $B = (t_2, b = x(t_2)) = (0.5, x(0.5))$ verlaufen und kriege so einen Widerspruch.

Da nach Satz 2.4.4 $|x(t + j) - x(t) - j\alpha| \leq 1$ ist, gilt für jedes $j \in \mathbf{Z}$ die Ungleichung

$$m := |x(\frac{1}{2}) - x(-\frac{1}{2})| \leq 1 + |\alpha| .$$



Seien t_1 und t_2 so gewählt, dass

$$\begin{aligned} t_1 &< 0 < t_2 \\ t^2 + x(t)^2 &\leq \rho^2, \quad t \in [t_1, t_2]. \end{aligned}$$

Das heisst, dass der Durchmesser 2ρ von $B_\rho = \{(t, x) \mid t^2 + x^2 \leq \rho^2\}$ kleiner oder gleich ist der Länge von γ zwischen $x(t_1)$ und $x(t_2)$:

$$2\rho \leq \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 + \dot{x}^2} dt \leq \sqrt{t_2 - t_1} \left[\int_{t_1}^{t_2} (1 + \dot{x}^2) dt \right]^{1/2}$$

und so ist

$$\int_{t_1}^{t_2} (1 + \dot{x}^2) dt \geq \frac{4\rho^2}{\tau}.$$

Die Wirkung von γ zwischen A und B kann nun abgeschätzt werden:

$$\begin{aligned} \int_{-1/2}^{1/2} F(t, x, \dot{x}) dt &\geq \int_{t_1}^{t_2} F(t, x, \dot{x}) dt \\ &\geq \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + 1) + (M - \frac{1}{2}) dt \\ &\geq \frac{2\rho^2}{\tau} + (M - \frac{1}{2})\tau. \end{aligned}$$

Mit der speziellen Wahl $\tau = 2\rho[2M - 1]^{-1/2}$ gibt das

$$\int_{-1/2}^{1/2} F(t, x, \dot{x}) dt \geq \frac{2\rho^2}{\tau} + (M - \frac{1}{2})\tau = 2\rho\sqrt{2M - \rho}.$$

Nun wählen wir einen speziellen Weg $\eta : t \mapsto y(t)$, der vollständig im Gebiet verlaufen soll, wo $V = 0$ ist. Das kann gemacht werden mit einer gebrochenen Geraden $t \mapsto y(t)$, wo

$$\dot{y} \leq \frac{m}{(1/2 - r)} \leq 3m.$$

Es ist dann

$$\int_{-1/2}^{1/2} F(t, y, \dot{y}) dt \leq \int_{-1/2}^{1/2} \frac{\dot{y}^2}{2} dt \leq \frac{9}{2}m^2 \leq \frac{9}{2}(1 + |\alpha|)^2.$$

Wegen der Minimalität von γ gilt nun

$$2\rho\sqrt{2M - \rho} \leq \frac{9}{2}(1 + |\alpha|)^2$$

und das heisst

$$\begin{aligned} 4\rho^2(2M - \rho) &\leq \frac{81}{4}(1 + |\alpha|)^4 \\ 4M\rho^2 &\leq \frac{81}{4}(1 + |a|)^4 \\ M\rho^2 &\leq 6(1 + |a|)^4 \end{aligned}$$

was ein Widerspruch ist zur obigen Annahme. \square

Bemerkungen:

- 1) Da V beliebig genau durch reell analytische V approximiert werden kann, ist auch klar, dass ein reell analytisches V existiert, sodass wir im Fall B) sind.
- 2) Ohne Beweis merken wir an, dass wir in diesem Beispiel für festes ρ, r, M mit genügend grossem α immer im Fall A) liegen. Grosses α bedeutet nämlich, dass der Summand $p^2/2$ gegenüber $V(t, x)$ grosses Gewicht hat. Es ist dann gleichbedeutend, ob wir im gegebenen Variationsproblem gegeben durch F mit α nach ∞ gehen, oder ob wir das Variationsproblem gegeben durch

$$F' = \frac{p^2}{2} + \epsilon V(t, x)$$

für $\epsilon \rightarrow 0$ betrachten. Das ist dann ein Problem der Störungsrechnung und Thema der sogenannten KAM- Theorie.

Sei $\gamma \in \mathcal{M}_\alpha$, α irrational und \mathcal{M}_α sei im Fall B). Nach Definition ist $u^+ \neq u^-$, wobei u^+ und u^- die zu γ gehörigen oben konstruierten Funktionen sind. Für jedes t ist $\{\theta \mid u^+(t, \theta) \neq u^-(t, \theta)\}$ abzählbar.

Definition: Wir definieren die Mengen

$$\mathcal{M}_t^\pm := \{u^\pm(t, \theta) \mid \theta \in \mathbf{R}\}$$

und die **Limesmenge** der Bahn γ

$$M(\gamma) = \{u^\pm(t, \theta) \mid t, \theta \in \mathbf{R}\}.$$

$\mathcal{M}_t := \mathcal{M}_t^+ \cap \mathcal{M}_t^-$ ist die Menge der Stetigkeitspunkte von u^+ resp. u^- . Es gibt nur abzählbar viele Unstetigkeitspunkte. Ein wichtiges Resultat dieses Abschnitts ist der folgende Satz:

Satz 2.5.7 Sei α irrational, $\gamma : t \mapsto x(t), \eta : t \mapsto y(t)$ aus $\mathcal{M}(\alpha)$ mit ihren entsprechenden Funktionen u^\pm und v^\pm . Dann existiert eine Konstante $c \in \mathbf{R}$ so dass $u^\pm(t, \theta) = v^\pm(t, \theta + c)$.

Beweis.

1) Es genügt, die Behauptung für $t = 0$ zu zeigen. Sei nämlich gezeigt, dass (mit der Notation $u_0^\pm(\theta) = u^\pm(0, \theta)$) ein c existiert mit

$$u_0^\pm(\theta) = v_0^\pm(\theta + c), \forall \theta.$$

Dann gilt auch

$$u_0^\pm(\theta + \alpha) = v_0^\pm(\theta + \alpha + c).$$

Definiere für festes θ

$$\begin{aligned}\tilde{\gamma} : t &\mapsto \tilde{x}(t) := u^\pm(t, \alpha t + \theta) \\ \tilde{\eta} : t &\mapsto \tilde{v}(t) := v^\pm(t, \alpha t + \theta + c)\end{aligned}$$

$\tilde{\gamma}$ und $\tilde{\eta}$ sind in \mathcal{M}_α . Wegen den zwei Schnittpunkten

$$\begin{aligned}\tilde{x}(1) &= \tilde{y}(1) \\ \tilde{x}(0) &= \tilde{y}(0)\end{aligned}$$

müssen $\tilde{\gamma}$ und $\tilde{\eta}$ zusammenfallen. Ersetzung von $\alpha t + \theta$ durch $\alpha t + \theta + c$ ergibt die Behauptung $u^\pm(t, \theta) = v^\pm(t, \theta + c)$.

2) Falls für ein $\lambda \in \mathbf{R}$ und ein $\theta \in \mathbf{R}$ gilt $v_0^-(\theta + \lambda) - u_0^-(\theta) < 0$, dann folgt $v_0(\theta + \lambda) - u_0(\theta) \leq 0, \forall \theta \in \mathbf{R}$.

Andernfalls ändert $v_0^-(\theta + \lambda) - u_0^-(\theta)$ das Vorzeichen und wegen der Halbstetigkeit existieren Intervalle I^+ und I^- positiver Länge, sodass

$$\begin{aligned}v_0^-(\theta + \lambda) - u_0^-(\theta) &> 0, \text{ in } I^+ \\ v_0^-(\theta + \lambda) - u_0^-(\theta) &< 0, \text{ in } I^-\end{aligned}$$

Wir setzen

$$\begin{aligned}\tilde{x}(t) &= u_0^-(t, \alpha t) \\ \tilde{y}(t) &= v_0^-(t, \alpha t + \lambda)\end{aligned}$$

Dann wird

$$\tilde{y}(j) - \tilde{x}(j) = \tilde{y}(j) - k - (\tilde{x}(j) - k) = v_0^-(\lambda + \alpha j - k) - u_0^-(\alpha j - k)$$

und das ist > 0 , falls $\alpha j - k \in I^+$ und < 0 falls $\alpha j - k \in I^-$. Da $\alpha j - k$ dicht ist in \mathbf{R} , schneiden sich \tilde{x} und \tilde{y} unendlich oft. Widerspruch.

3) $c := \sup\{\lambda \mid v_0^-(\theta + \lambda) - u_0^-(\theta) \leq 0, \forall \theta\}$ ist endlich und das Supremum wird angenommen.

Es gibt eine endliche Konstante M , sodass für alle $\theta \in \mathbf{R}$ gilt

$$\begin{aligned}|v_0^-(\theta + \lambda) - (\theta + \lambda)| &\leq M \\ |u_0^-(\theta) - \theta| &\leq M\end{aligned}$$

da wegen Satz 2.5.1 die beiden Funktionen auf der linken Seite periodisch sind. Somit ist auch

$$|v_0^-(\theta + \lambda) - u_0^-(\theta) - \lambda| \leq 2M$$

oder

$$v_0^-(\theta + \lambda) - u_0^-(\theta) \geq \lambda - 2M$$

und da die linke Seite ≤ 0 ist, folgt

$$\lambda \leq 2M$$

und c ist endlich. Wenn eine Folge λ_n von unten gegen c geht mit

$$v_0^-(\theta + \lambda) - u_0^-(\theta) \leq 0, \forall \theta,$$

so folgt

$$v_0^-(\theta + c) - u_0^-(\theta) \leq 0, \forall \theta$$

wegen der Linksstetigkeit von v_0^- .

4) $v_0^-(\theta + c) - u_0^-(\theta) = 0$, falls $\theta + c$ eine Stetigkeitsstelle von v_0^- ist. Andernfalls $\exists \theta^*$ mit

$$v_0^-(\theta^* + c) - u_0^-(\theta^*) < 0$$

wo $\theta^* + c$ eine Stetigkeitsstelle ist. Das impliziert auch, dass ein $\lambda > c$ existiert mit

$$v_0^-(\theta^* + \lambda) - u_0^-(\theta^*) < 0.$$

Mit Behauptung 2) folgern wir, dass

$$v_0^-(\theta + \lambda) - u_0^-(\theta) \leq 0, \forall \theta$$

und das steht im Widerspruch zur Minimalität von γ .

$$5) v_0^\pm(\theta + c) = u_0^\pm(\theta), \forall \theta.$$

Da es nur abzählbar viele Unstetigkeitstellen gibt, werden v_0^+ und u_0^- durch die Werte an den Stetigkeitsstellen eindeutig festgelegt:

$$v_0^-(\theta + c) = u_0^-(\theta), \forall \theta.$$

Auch ist $v_0^+ = v_0^-$ und $u_0^+ = u_0^-$ an den Stetigkeitsstellen und deshalb gilt für dasselbe c auch

$$v_0^+(\theta + c) = u_0^+(\theta), \forall \theta.$$

□

Im nächsten Satz wird die **Lückenbreite**

$$\xi(t) = x^+(t) - x^-(t) = u^+(t, \alpha t + \beta) - u^-(t, \alpha t + \beta)$$

abgeschätzt:

Satz 2.5.8

Sei $|a| \leq A$ und $M(A)$ die Konstante von Satz 2.5.3. Es existiert eine Konstante $C = C(A) = \log(M(A))$, mit

$$\exp(-C|t-s|) \leq \xi(t)/\xi(s) \leq \exp(C|t-s|).$$

Beweis. Nach Satz 2.5.3 gilt

$$|\dot{\xi}(t)| \leq M\xi(t)$$

und somit

$$\begin{aligned} |\dot{\xi}|/\xi &\leq M \\ \left| \frac{d}{dt} \log \xi \right| &\leq M \\ |\log \xi(t) - \log \xi(s)| &\leq M|t-s|. \end{aligned}$$

□

Satz 2.5.9

Für α irrational ist \mathcal{M}_α totalgeordnet. d.h. $\forall \gamma, \eta \in \mathcal{M}_\alpha$ gilt
 $\gamma < \eta$ oder $\gamma = \eta$ oder $\gamma > \eta$.

Bemerkungen:

- 1) Satz 2.5.9 besagt, dass sich zwei Minimale mit der gleichen Rotationszahl nicht schneiden.
- 2) Wie wir im nächsten Paragraphen sehen werden, ist diese Aussage für $\alpha \in \mathbf{Q}$ falsch. Es gibt in diesem Fall Paare einander sich schneidende Bahnen, sogenannte **homokline Bahnen**.
- 3) Noch eine andere Formulierung von Satz 2.5.9 wäre: Die Projektion

$$p : \mathcal{M}_\alpha \rightarrow \mathbf{R}, x \mapsto x(0)$$

ist injektiv. Das heisst, dass für jedes $a \in \mathbf{R}$ höchstens ein $x \in \mathcal{M}$ existiert mit $x(0) = a$. Im Falle A) ist die Projektion p auch surjektiv im Gegensatz zu Fall B).

4) Aus Satz 2.5.9 folgt Satz 2.5.5.

Beweis von Satz 2.5.9:

Beweis. Wir benützen, dass für $x \in \mathcal{M}_\alpha$ die Menge der Bahnen

$$\{\gamma_{jk} : x(t+j) - k\}$$

und somit auch ihr Abschluss in $\mathcal{M}(x)$ total geordnet ist.

Da nach Definition $u^-(t, \alpha t + \beta) \in \mathcal{M}_\alpha(x)$ ist, folgt die Behauptung für

$$y(t) = u^\pm(t, \alpha t + \beta).$$

Es bleibt nur der Fall, wo y sich in den Lücken der Mathermenge von x befindet, d.h.

$$u^-(0, \beta) < y(0) < u^+(0, \beta).$$

Da nach Satz 2.5.7 die Funktionen u^\pm auch von y erzeugt werden, gilt $\forall t$

$$u^-(t, \alpha t + \beta) < y(t) < u^-(t, \alpha t + \beta)$$

und wir brauchen die Behauptung nur noch zu zeigen, falls sich sowohl x als auch y in derselben Lücke der Mathermenge befinden. Sei also

$$u^-(0, \beta) < x(0) \leq y(0) < u^+(0, \beta).$$

Wir behaupten, dass die Lückengröße

$$\xi(t) := u^+(t, \alpha t + \beta) - u^-(t, \alpha t + \beta) > 0$$

gegen 0 geht für $t \rightarrow \infty$. Das würde bedeuten, dass x und y asymptotisch sind und mit Satz 2.5.3 auch $|\dot{x} - \dot{y}| \rightarrow 0$ und wir wären mit Satz 2.6 c) fertig. Der Flächeninhalt der Lücke

$$\int_{\mathbf{R}} \xi(t) dt \leq \mu(\mathbf{T}^2)$$

ist endlich, wo $\mu(\mathbf{T}^2)$ die Fläche des Torus ist. Aus Satz 2.5.8 wissen wir, dass für $t \in [n, n+1]$ gilt

$$M^{-1} \leq \xi(t)/\xi(n) \leq M$$

und da

$$\sum_{n \in \mathbf{N}} \xi(n) \leq M \int_{\mathbf{R}} \xi(t) dt < \infty$$

ist $\lim_{n \rightarrow \infty} \xi(n) = \lim_{t \rightarrow \infty} \xi(t) = 0$. \square

Wir lassen die Frage offen, ob es minimale Bahnen in den Lücken der Mathermengen gibt und wollen die anderen, die Bahnen der Form

$$x(t) = u^\pm(t, \alpha t + \beta)$$

charakterisieren. Sei

$$\mathcal{U}_\alpha = \{x \in \mathcal{M}_\alpha \mid \exists \beta x(t) = u^\pm(\alpha t + \beta)\}.$$

Definition: Eine Extremale $x(t)$ heisst **rekurrent**, falls es Folgen j_n und k_n gibt mit $j_n \rightarrow \infty$, sodass $x(t + j_n) - k_n - x(t) \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$. Die Menge der rekurrenten Minimalen bezeichnen wir mit \mathcal{M}^{rec} und $\mathcal{M}_\alpha^{rec} := \mathcal{M}^{rec} \cap \mathcal{M}_\alpha$.

Satz 2.5.10 Für irrationales α ist $\mathcal{U}_\alpha = \mathcal{M}_\alpha^{rec}$.

Beweis.

$$(i) \mathcal{U}_\alpha \subset \mathcal{M}_\alpha^{rec}.$$

Falls $x \in \mathcal{U}_\alpha$, $x = u^+(t, \alpha t + \beta)$, so ist

$$x(t + j_n) - k = u^+(t, \alpha t + \beta + \alpha j_n - k_n)$$

und es genügt, Folgen j_n, k_n zu bestimmen, mit $\alpha j_n - k_n \rightarrow 0$. Also ist x rekurrent. Genauso für $x = u^-(t, \alpha t + \beta)$.

$$(ii) \mathcal{M}_\alpha^{rec} \subset \mathcal{U}_\alpha$$

Wir nehmen an, $x \in \mathcal{M}_\alpha \setminus \mathcal{U}_\alpha$. D.h. x ist rekurrent und befindet sich in einer Lücke:

$$\begin{aligned} u^-(0, \beta) &< x(0) < u^+(0, \beta) \\ x(j_n) - k_n &\rightarrow x(0), j_n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Nach Konstruktion von $u^\pm(0, \beta)$, ist

$$x(j_n) - k_n \rightarrow u^\pm(0, \beta)$$

d.h. $x(0) = u^\pm(0, \beta)$. Widerspruch. \square

Definition: Wir definieren $\mathcal{M}_\alpha^{rec}(\gamma) := \mathcal{M}_\alpha(\gamma) \cap \mathcal{M}_\alpha^{rec}$.

Falls α irrational ist, so gilt $\forall \gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{M}_\alpha$ und

$$\mathcal{M}_\alpha^{rec}(\gamma_1) = \mathcal{M}_\alpha^{rec}(\gamma_2) = \mathcal{M}_\alpha^{rec}.$$

Beweis. Nach Satz 2.5.10 ist $\mathcal{M}_\alpha^{rec} = \mathcal{U}_\alpha$ und nach Konstruktion ist $\mathcal{M}_\alpha^{rec}(\gamma) = \mathcal{U}_\alpha$. Satz 2.5.7 besagte, dass \mathcal{U}_α unabhängig von γ ist. \square

Für jedes $(j, k) \in \mathbf{Z}^2$ lässt

$$T_{j,k} : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$$

\mathcal{M}_α und also auch \mathcal{M}_α^{rec} invariant. Welches sind die kleinsten, nicht leeren $T_{j,k}$ -invarianten, abgeschlossenen Teilmengen in \mathcal{M}_α ?

Satz 2.5.12 Es gibt in \mathcal{M}_α genau eine kleinste, nichtleere $T_{j,k}$ -invariante abgeschlossene Teilmenge, nämlich \mathcal{M}_α^{rec} .

Beweis. \mathcal{M}_α^{rec} ist $T_{j,k}$ -invariant, abgeschlossen und nicht leer. Habe $\mathcal{M}_\alpha^* \subset \mathcal{M}_\alpha$ die gleichen Eigenschaften und sei $x^* \in \mathcal{M}_\alpha^*$. Dann ist wegen der Abgeschlossenheit und Invarianz $\mathcal{M}_\alpha^{rec}(x^*) \subset \mathcal{M}_\alpha^*$ und wegen Satz 2.5.11 auch $\mathcal{M}_\alpha^{rec} \subset \mathcal{M}_\alpha^*$. \square

Wir haben \mathcal{M}_α für irrationale α durch Approximation durch periodische Minimale erhalten. Jetzt können wir zeigen, dass jede rekurrente Minimale durch periodische Minimale approximiert werden kann.

Satz 2.5.13

Jedes $x \in \mathcal{M}_\alpha^{rec}$ lässt sich durch periodische Bahnen in \mathcal{M} approximieren.

Beweis. Die Menge \mathcal{M}^* der sich durch periodische Minimalen approximierbaren Bahnen ist $T_{j,k}$ invariant, abgeschlossen und nicht leer. Wegen Satz 2.5.12 gilt $\mathcal{M}_\alpha^{rec} \subset \mathcal{M}^*$. \square

Definition: Man nennt die Elemente in \mathcal{M}_α^{rec} **Mathermengen** falls wir im Falle B) sind.

Mathermengen sind perfekte Mengen, d.h. abgeschlossene nirgends dichte, Mengen bei denen jeder Punkt Häufungspunkt ist. Ein Synonym zum Begriff perfekte Menge ist **Cantormenge**.

Fassen wir die wesentliche Aussage von diesem Paragraphen zusammen:

Satz 2.5.14

Für irrationale α gilt:

Fall A): Alle Minimale $x \in \mathcal{M}_\alpha$ sind dicht auf dem Torus, d.h. für alle $(t, a) \in \mathbf{R}^2$ existiert eine Folge $(j_n, k_n) \in \mathbf{Z}^2$ mit $x(t + j_n) - k_n \rightarrow a$.

Fall B): Keine Minimale $\gamma \in \mathcal{M}_\alpha$ ist dicht auf dem Torus, d.h. falls $u^-(0, \beta) < a < u^+(0, \beta)$, so ist $(0, a)$ niemals Häufungspunkt von x .

Wir wissen, dass beide Fälle A) und B) vorkommen. Es ist jedoch eine delicate Aufgabe, zu entscheiden, in welchem der Fälle wir sind. Die Antwort hängt davon ab, wie gut sich α durch rationale Zahlen approximieren lässt.

Anhang: Denjoytheorie

Die hier entwickelte Theorie ist verwandt mit der **Denjoytheorie**, die schon im ersten Drittel des 20 ten Jahrhunderts entwickelt wurde und deren Hauptresultat wir hier noch ohne Beweis aufführen.

Sei f ein orientierungserhaltender Homöomorphismus des Kreises \mathbf{T} auf sich. Das folgende Lemma von Poincaré sollte mit Satz 2.4.1 verglichen werden.

Lemma 2.5.15 Die Rotationszahl $\alpha(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(t)/n$ existiert und ist unabhängig von t .

Sei $S_t = \{\alpha(j+t) - k \mid (j, k) \in \mathbf{Z}^2\}$ und $S = \{(t, \theta) \mid \theta = \alpha(j+t) - k \in S_t, t \in \mathbf{R}\}$ und

$$u : S \rightarrow \mathbf{R}, (t, \theta = \alpha(j+t) - k) \rightarrow f^j(t) - k.$$

Der nächste Satz sollte mit Satz 2.5.1 verglichen werden:

Satz 2.5.16 a) u ist streng monoton in θ , d.h.
 $\alpha(j+t) - k < \alpha(j'+t) - k' \Leftrightarrow f^j(t) - k < f^{j'}(t) - k'$.
b) $u(t+1, \theta) = u(t, \theta)$.
c) $u(t, \theta+1) = u(t, \theta) + 1$.

Wieder definieren durch Abschluss die zwei Funktionen u^+ und u^- :

$$\begin{aligned} u^+(t, \theta) &= \lim_{\theta_n \rightarrow \theta} u(t, \theta_n) \\ u^-(t, \theta) &= \lim_{\theta_n \rightarrow \theta} u(t, \theta_n) \end{aligned}$$

und haben wieder die zwei Fälle:

Fall A): $u^+ = u^- = u$ (d.h. u ist stetig)

Fall B): $u^+ \neq u^-$.

Die Menge

$$\mathcal{L}^\pm(t) := \{\omega \in \mathbf{T} \mid \exists j_n \rightarrow \pm\infty, f^{j_n}(t) \rightarrow \omega\}.$$

ist abgeschlossen und f -invariant. Der folgende Satz von Denjoy (1932) sollte mit den Sätzen 2.5.10, 2.5.11, 2.5.12 verglichen werden.

Satz 2.5.17 Ist α irrational, so ist $\mathcal{L} = \mathcal{L}^+(t) = \mathcal{L}^-(t)$ unabhängig von t und die kleinste nicht leere f -invariante, abgeschlossene Teilmenge von T . Im Falle A) ist $\mathcal{L} = \mathbf{T}$, im Falle B) ist \mathcal{L} eine perfekte Menge. Falls f' von beschränkter Variation ist, sind wir im Fall A). Für $f \in C^1$ gibt es Beispiele, wo wir im Fall B) sind.

Im Falle B) nennt man die Menge **Denjoy-Minimalmenge**. Wir sehen jetzt den Zusammenhang :

Die Schnitte der Mathermenge mit $t = t_0$ sind Denjoy-Minimalmengen einer Fortsetzung der Abbildung $f : x(j) - k \rightarrow x(j + 1) - k$.

2.6 \mathcal{M}_α für α rational

Sei $\alpha = p/q$ mit $q \neq 0$. Wir haben in Lemma 2.4.6 von Paragraph 2.4 und Satz 2.2.2 gesehen, dass

$$\mathcal{M}_{p/q} \supset \mathcal{M}(q, p) \neq \emptyset.$$

Dabei ist $\mathcal{M}(p/q) = \mathcal{M}(q, p)$ die Menge der minimalen periodischen Bahnen vom Typ (q, p) .

Frage: Ist $\mathcal{M}_{p/q} = \mathcal{M}(p/q)$? Nein! Tatsächlich gibt es Paare von Bahnen in $\mathcal{M}_{p/q}$, die sich einmal schneiden und somit nicht im totalgeordneten $\mathcal{M}(p/q)$ liegen können.

Beispiele:

1) $F = p^2/2$, $\ddot{x} = 0$, $x(t) = \alpha t + \beta$. In diesem Fall ist $\mathcal{M}_{p/q} = \mathcal{M}(p/q)$.

2) $F = p^2/2 + \cos(2\pi x)$, $E = \dot{x}^2/2 + \cos(2\pi x)$ ist konstant. Nimm $\alpha = 0$. Es gilt $\mathcal{M}_0 \neq M(0)$, da $M(0)$ nicht totalgeordnet ist und \mathcal{M} nach Satz 2.5.9 totalgeordnet ist. $M(0)$ ist nicht wohlgeordnet, da sich für $E = (4\pi)^{-1}$ die Separatrizen, die durch

$$\dot{x} = \pm |\sin(\pi x)|/\sqrt{\pi}$$

gegeben sind und die Rotationszahl 0 haben, schneiden.

Definition: Zwei periodische Bahnen $x_1 < x_2 \in \mathcal{M}(p/q)$ heißen **benachbart**, falls kein $x \in \mathcal{M}(p/q)$ existiert mit $x_1 < x < x_2$.

Beachte, dass $\mathcal{M}(p/q)$ wohlgeordnet ist und die Definition darum einen Sinn macht.

Es sei $\gamma \in \mathcal{M}_{p/q}$. Dann gibt es drei Möglichkeiten:

a) $\gamma \in \mathcal{M}(p/q)$, also $x(t+q) - p = x(t)$.

b⁺) Es gibt zwei benachbarte periodische Minimale $\gamma_1 > \gamma_2$, $\gamma_i \in \mathcal{M}(p/q) : \gamma_i : t \mapsto x_i(t)$, sodass

Satz 2.6.1 $x_1(t) - x(t) \rightarrow 0$ für $t \rightarrow \infty$ und
 $x_2(t) - x(t) \rightarrow 0$ für $t \rightarrow -\infty$.

b⁻) Es gibt zwei benachbarte periodische Minimale $\gamma_1 > \gamma_2$, $\gamma_i \in \mathcal{M}(p/q) : \gamma_i : t \mapsto x_i(t)$, sodass

$x_2(t) - x(t) \rightarrow 0$ für $t \rightarrow \infty$ und
 $x_1(t) - x(t) \rightarrow 0$ für $t \rightarrow -\infty$.

Definition: x_1 und x_2 heißen **heterokline Bahnen** und im Falle $x_1 = x_2 \pmod{1}$ nennt man sie **homokline Bahnen**. Wir nennen die Menge der x , die im Falle b[±]) sind $\mathcal{M}_{p/q}^\pm$.

Beweis. Sei $\gamma \in \mathcal{M}_{p/q}, \gamma : t \mapsto x(t)$ aber in $\gamma \notin \mathcal{M}(p/q)$. Also ist für alle t

- (i) $x(t+q) - p > x(t)$ oder
- (ii) $x(t+q) - p < x(t)$.

Wir werden zeigen, dass (i) impliziert, dass b⁺) eintritt: Die Folge

$$y_j(t) = x(t + jq) - pj$$

ist wegen (i) für $j \rightarrow \infty$ monoton zunehmend und beschränkt wegen der Abschätzung

$$|y_j(t) - y_j(0)| \leq C_0$$

also konvergiert y_j gegen eine Funktion $x_2(t)$, die wieder in $\mathcal{M}_{p/q}$ ist. Sie ist sogar periodisch vom Typ (q, p) und liegt damit in $\mathcal{M}(p/q)$. Genauso konvergiert y_j für $j \rightarrow \infty$ gegen eine Funktion $x \in \mathcal{M}(p/q)$. Es bleibt zu zeigen, dass x_1 und x_2 benachbart sind. Sei $\gamma^* : x^* \in \mathcal{M}(p/q)$ mit $x_1 < x^* < x_2$ gegeben und sei A der jetzt obligate Schnittpunkt von x^* mit x .

Es ist also $A = (t_0, x(t_0)) = (t_0, x^*(t_0))$. Wir definieren noch die Punkte $B = (t_0+q, x^*(t_0+q))$, $P = (T-q, x(T-q))$ und $Q = (T, z(T))$, wo $z : t \mapsto x(t-q)$

und $T > t_0 + q$. Die neuen Kurven

$$\begin{aligned}\tilde{x}_1^*(t) &:= \begin{cases} x^*(t), & t \in [t_0, t_0 + q] \\ z(t) & t \in [t_0 + q, T] \end{cases} \\ \tilde{x}_2^*(t) &:= \begin{cases} x(t), & t \in [t_0, T - q] \\ w(t) & t \in [T - q, T] \end{cases}\end{aligned}$$

mit $w(t) = (T-t)x(t) - (T-q-t)z(t)$ sind Konkurrenten in der Klasse der Kurven zwischen A und Q . Es gilt

$$\int_{t_0}^{T-q} F(t, x, \dot{x}) dt = \int_{t_0+q}^T F(t, z, \dot{z}) dt$$

und

$$\begin{aligned}\int_{T-q}^T F(t, w, \dot{w}) dt &=_{T \rightarrow \infty} \int_{T-q}^T F(t, \tilde{x}_2, \dot{\tilde{x}}_2) dt \\ &= \int_{t_0}^{t_0+q} F(t, \tilde{x}_2, \dot{\tilde{x}}_2) dt \\ &= \int_{t_0}^{t_0+q} F(t, x^*, \dot{x}^*) dt.\end{aligned}$$

Die erste Gleichung gilt asymptotisch für $T \rightarrow \infty$. Die zweitletzte Gleichung folgte aus der Periodizität von x_2 , die die letzte aus der Minimalität von x_2 und x^* in $\mathcal{M}(p/q)$. Somit sind für $T \rightarrow \infty$ die Wirkungen von \tilde{x}_1 und \tilde{x}_2 zwischen A und Q approximativ gleich. Die Wirkung des Weges $t \mapsto \tilde{x}_1(t)$ kann man jedoch bei B um einen festen (und T unabhängigen) Betrag kleiner machen, da y dort eine Ecke hat, sodass x^* zwischen A und P nicht minimal sein kann. Das ist ein Widerspruch und somit ist die Annahme der Existenz von x^* absurd. Dass aus (ii) der Fall b) folgt, geht analog. \square

Satz 2.6.2 Falls $x_1, x_2 \in \mathcal{M}(p/q)$ benachbart sind, dann gibt es mindestens 2 nichtperiodische $x^+, x^- \in \mathcal{M}_{p/q}$, wobei x^\pm asymptotisch ist zu x_2 für $t \rightarrow \pm\infty$ und assymptotisch zu x_1 für $t \rightarrow \mp\infty$.

Beweis. Seien $x_1(t)$ und $x_2(t)$ zwei benachbarte Minimale aus $\mathcal{M}(p/q)$. Nach dem Existenzsatz 2.2.1 existiert für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Minimale $z_n(t)$ mit $z_n(-n) = x_1(-n)$, $z_n(n) = x_2(n)$.

Wir nennen $x_m(t) = [x_1(t) + x_2(t)]/2$ die **Mittellinie** von x_1 und x_2 . Durch Zeittranslation kann man immer erreichen, dass

$$\tilde{z}_n(t) = z_n(t + \tau_n)$$

im Intervall $[0, q]$ die Mittellinie x_m schneidet. Wegen der in Satz 2.4.9 bewiesenen Kompaktheit gibt es eine Teilfolge von \tilde{z}_n , die in $\mathcal{M}_{p/q}$ gegen ein Element x^+ konvergiert, das ebenfalls die Mittellinie x_m im Intervall $[0, q]$ schneidet. Ausserdem ist z_m nicht periodisch, da zwischen x_1 und x_2 nach Annahme keine periodische Minimale vom Typ (q, p) existiert. Also folgt die Behauptung aus Satz 2.6.1. Es ist offensichtlich, wie man x^- analog konstruiert. \square

Beispiel: Heterokline Verbindung zweier benachbarten Geodäten (M.Morse 1924) [23]

Sind auf dem Torus zwei minimale benachbarte geschlossene Geodäten gleicher Länge gegeben, so lassen sie sich, (wie wir unten sehen werden), durch eine asymptotische Geodäten verbinden.

Die Sätze 2.6.1 und 2.6.2 können wir kurz so zusammenfassen:

Satz 2.6.3 $\boxed{\mathcal{M}_{p/q} = \mathcal{M}_{p/q}^+ \cup \mathcal{M}_{p/q}^- \cup \mathcal{M}(p/q). \text{ Falls nicht } \mathcal{M}_{p/q} = \mathcal{M}(p/q), \text{ so ist } \mathcal{M}_{p/q}^- \neq \emptyset \text{ und } \mathcal{M}_{p/q}^+ \neq \emptyset.}$

Zusatz: Stabilität der periodischen Minimalen.

Eine periodische Extremale x vom Typ (q, p) erfüllt die Eulergleichung

$$\frac{d}{dt} F_p(t, x, \dot{x}) = F_x(t, x, \dot{x}).$$

Sei ξ eine Lösung der Jacobigleichung

$$\frac{d}{dt} (F_{pp} \dot{\xi}) + (\frac{d}{dt} F_{px} - F_{xx}) \xi = 0$$

kurz notiert als

$$\frac{d}{dt} (a \dot{\xi}) + b \xi = 0, \quad a = F_{pp}(t, x, \dot{x}) > 0.$$

Mit $\xi(t)$ ist auch $\xi(t+q)$ Lösung und wenn ξ_1 und ξ_2 zwei Lösungen sind, so ist die **Wronski-Determinante** $[\xi_1, \xi_2] := a(\dot{\xi}_1 \xi_2 - \dot{\xi}_2 \xi_1)$ eine Konstante. Sie ist verschieden von Null genau dann, wenn ξ_1 und ξ_2 linear unabhängig sind. In diesem Fall gibt es eine Matrix A , sodass

$$\begin{pmatrix} \xi_1(t+q) \\ \xi_2(t+q) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \xi_1(t) \\ \xi_2(t) \end{pmatrix},$$

oder $W(t+q) = W(t)$ mit $W = \begin{pmatrix} \xi_1 & \dot{\xi}_1 \\ \xi_2 & \dot{\xi}_2 \end{pmatrix}$. Der Vergleich der Wronskischen

$$a(t+q) \det W(t+q) = [\xi_1, \xi_2](t+q) = [\xi_1, \xi_2](t) = a(t) \det W(t)$$

liefert wegen $a(t+q) = a(t) > 0$

$$\det(A) = 1$$

und das bedeutet, dass mit λ auch λ^{-1} Eigenwert ist von A und es gibt drei Möglichkeiten:

- | | | |
|----------------------------|---------------------------------------|-------------------|
| elliptischer Fall | $ \lambda = 1, \lambda \neq \pm 1$ | (stabiler Fall) |
| parabolischer Fall | $ \lambda = \pm 1$ | |
| hyperbolischer Fall | λ reell, $\lambda \neq \pm 1$ | (instabiler Fall) |

Definition: Wir sagen, die Extremale x sei **elliptisch**, **hyperbolisch** oder **parabolisch**, je nachdem wir im elliptischen, hyperbolischen oder parabolischen Fall sind.

Es stellt sich heraus, dass periodische Minimale nicht stabil sind:

Satz 2.6.4 *Periodische Minimale $\gamma \in \mathcal{M}(p/q), \gamma : t \mapsto x(t)$ sind nicht elliptisch.*

Beweis. Wir wissen, dass für alle globalen Minimalen $\gamma \in \mathcal{M}(p/q)$ eine Lösung $\xi \neq 0$ der Jacobigleichungen höchstens eine Nullstelle besitzen kann. Denn wenn zwei Nullstellen existieren würden, hätte man einen konjuguierten Punkt, was nach Jacobi's Satz 1.3.1 nicht möglich ist. Nehmen wir an, γ sei elliptisch. Es gibt dann nach Definition eine komplexe Lösung der Jacobigleichung $\zeta(t)$, die

$$\zeta(t+q) = \lambda \zeta(t), |\lambda| = 1, \lambda = e^{i\alpha q} \neq 0, 1, \alpha \in \mathbf{R}$$

erfüllt. Für $\pi(t) = e^{-i\alpha t} \zeta(t)$ gilt somit

$$\pi(t+q) = \pi(t).$$

Natürlich ist auch

$$\xi(t) = \operatorname{Re}\zeta(t) = \operatorname{Re}(e^{i\alpha t} \pi(t))$$

eine Lösung der Jacobigleichung. Aus $e^{i\alpha q} \neq 0, 1$ folgt, dass es ein $N > 1$ gibt, sodass

$$\operatorname{Re}(\exp(iN\alpha q)) < 0$$

ist. Das bedeutet, dass

$$\xi(t+Nq)\xi(t) < 0$$

und ξ damit eine Nullstelle $t \in [0, Nq]$ besitzt. Es sind dann aber auch $t + kNq$ Nullstellen für $k \in \mathbf{N}$. Das ist ein Widerspruch. \square

Wir wollen noch zeigen, dass die Situation für $n > 1$ völlig anders liegt und das obige Argument nicht fasst. Dazu betrachten wir für $n = 2$ das Integral

$$\int_{t_1}^{t^2} |\dot{x}^2 - \alpha Jx|^2 dt$$

mit $x \in \text{Lip}(\mathbf{R}, \mathbf{R}^2)$ wobei $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ und α eine reelle Konstante ist. Für die Klasse der periodischen Kurven

$$x(t+1) = x(t)$$

ist offenbar $x \equiv 0$ eine Minimale, da

$$I(x)|_{t_1}^{t_2} = \int_{t_1}^{t_2} |\dot{x} - \alpha Jx|^2 dt \geq 0 .$$

Andererseits ist die Jacobigleichung durch

$$\ddot{\xi} - 2\alpha J\dot{\xi} + \alpha^2\xi = (\frac{d}{dt} - \alpha J)^2\xi = 0$$

gegeben. Es sei nun $c \in \mathbf{C}^2 \setminus \{0\}$ ein komplexer Eigenvektor von J , etwa

$$c = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, Jc = ic .$$

So ist offensichtlich

$$\xi(t) = \text{Re}(e^{iat}c)$$

eine nichttriviale Lösung der Jacobigleichung. D.h. $x = 0$ ist elliptisch. Allerdings besitzt x keine Nullstelle. Wäre nämlich $\xi(\tau) = 0$, so könnten wir durch Translation $\xi(0) = 0$ erreichen, d.h. $\bar{c} = -c$. Aus

$$Jc = ic$$

würde dann $Jc = -ic$ folgen. d.h. $c = 0$, was impliziert, dass ξ identisch 0 ist. Dieses Beispiel zeigt also, dass für $n \geq 2$ periodische Minimale sehr wohl elliptisch sein können.

Zusatzbemerkung über die mittlere Wirkung:

Definition: Für $\gamma \in \mathcal{M}_\alpha$ definieren wir die **mittlere Wirkung** als

$$\Phi(\gamma) = \lim_{T \rightarrow \infty} T^{-1} \int_0^T F(t, x, \dot{x}) dt$$

Satz 2.6.5

a) Für $\gamma \in \mathcal{M}_\alpha$ ist die mittlere Wirkung endlich. Sie ist unabhängig von γ . Wir schreiben desshalb auch $\Phi(\alpha) = \Phi(\gamma)$ mit $\gamma \in \mathcal{M}_\alpha$.

b) Auf \mathbf{Q} ist $\alpha \mapsto \Phi(\alpha)$ streng konvex und Lipschitzstetig.

Es ist zu vermuten, dass $\alpha \mapsto \Phi(\alpha)$ auf ganz \mathbf{R} stetig ist.

Beweis.

a) Für $\alpha = p/q$ und x periodisch ist, folgt die Behauptung aus

$$\Phi(\alpha) = q^{-1} \int_0^q F(t, x, \dot{x}) dt .$$

Im Falle $\alpha = p/q$, wo x nicht periodisch ist, ist die Aussage aus der Tatsache ersichtlich, dass x nach Satz 2.6.1 asymptotisch ist zu einem periodischen \tilde{x} .

Für irrationales α können wir γ aus \mathcal{M}_α voraussetzen, da nicht rekursive Bahnen asymptotisch sind zu rekursiven Bahnen $\tilde{x} = u^\pm(t, \alpha t + \beta)$.

Nach H.Weyl gilt für irrationale α , in t und θ periodische Riemannintegrierbare Funktionen $f = f(t, \theta)$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} T^{-1} \int_0^T f(t, \alpha t + \beta) dt = \int_0^1 \int_0^1 f(t, \theta) dt d\theta .$$

Das zeigt man zuerst für $\exp(2\pi(kt + j\theta))$, dann für trigonometrische Polynome, dann für stetige Funktionen und schliesslich, durch untere Approximation, für Riemannintegrierbare Funktionen. Die Behauptung folgt nun, wenn wir

$$f(t, \theta) = F(t, u^\pm(t, \theta), (\partial_t + \alpha \partial_\theta)u^\pm(t, \theta))$$

setzen.

b) Wir zeigen, dass für $\alpha = p/q$, $\beta = p'/q'$ $\gamma = \rho\alpha + (1 - \rho)\beta$ mit $\rho = s/r \in (0, 1)$

$$\Phi(\gamma) < \rho\Phi(\alpha) + (1 - \rho)\Phi(\beta)$$

gilt. Für $x \in \mathcal{M}(p/q)$, $y \in \mathcal{M}(p'/q')$ definieren wir, falls $x(t_0) = y(t_0)$ der obligate Schnittpunkt ist von x und y

$$z(t) = \begin{cases} x(t), & t \in [t_0, t_0 + qq's] \\ y(t) - (p'q - pq')s, & t \in [t_0 + qq's, t_0 + qq'r] \end{cases}$$

welches stückweise glatt, stetig und periodisch fortsetzbar ist. z hat die Rotationszahl

$$(p'q(r - s) + pq's)/(q'qr) = (1 - \rho)\beta + \rho\alpha = \gamma$$

und da z nicht C^2 ist, gilt

$$\Phi(\gamma) < \frac{1}{qq'r} \int_0^{qq'r} F(t, z, \dot{z}) dt = \rho\Phi(\alpha) + (1 - \rho)\Phi(\beta)$$

und Φ ist Lipschitzstetig, da

$$\begin{aligned} \Phi(\gamma) - \Phi(\beta) &< \rho(\Phi(\alpha) - \Phi(\beta)) \\ &= [(\gamma - \beta)/(\alpha - \beta)](\Phi(\alpha) - \Phi(\beta)) \\ &\leq (\gamma - \beta)2\max(\Phi(\alpha), \Phi(\beta))/(\alpha - \beta). \end{aligned}$$

□

Zusatz: Ein degeneriertes Variationsproblem auf dem Torus.

Die Bestimmung von \mathcal{M}_α für irrationales α ist rechnerisch reduziert auf die Bestimmung von $u = u^\pm(t, \theta)$, da u^+ und u^- ja fast überall übereinstimmen. u erfüllt die Gleichung (schreibe D für $\partial_t + \alpha\partial_\theta$)

$$DF_p(t, u, Du) = F_x(t, u, Du)$$

und das sind die Eulergleichungen zum Variationsproblem

$$\int_0^1 \int_0^1 F(t, u, Du) dt d\theta,$$

wo $u(t, \theta) - \theta$ Periode 1 in t und θ hat und $u(t, \theta)$ monoton ist in θ . Man könnte das Problem der Bestimmung von u direkt so angehen. Die Schwierigkeit besteht aber darin, dass für das Minimum, dessen Existenz leicht bewiesen werden kann, die Gültigkeit der Euler-Gleichung nicht so leicht nachgewiesen werden kann. Es könnte sein, dass die Minimalen am Rand der zulässigen Funktionen liegen könnte, etwa, wenn u auf einem Intervall konstant ist, oder eine Unstetigkeitsstelle besitzt. Das Problem kann jedoch regularisiert werden durch Betrachtung von

$$\tilde{F}(t, \theta, u(t, \theta), \nabla u(t, \theta)) := \frac{\nu}{2} u_\theta^2 + F(t, u(t, \theta), Du(t, \theta))$$

mit $\nu > 0$. Man studiert dann das Variationsproblem

$$\int_0^1 \int_0^1 \tilde{F}(t, u, \nabla u) dt d\theta$$

im Limes $\nu \rightarrow 0$ für $u(t, \theta) - \theta \in W^{1,2}(\mathbf{T}^2)$. Es stellt sich heraus, dass für $\nu > 0$ eine Minimale automatisch streng monoton ist. Das ist ausgeführt in [10].

2.7 Zusatzaufgaben zum Kapitel II

- 1) Zeige, dass für eine Folge $\gamma_n : t \mapsto x_n(t)$ in Ξ gilt: $\gamma_n \rightarrow_w \gamma$ genaudann, wenn x_n gleichmässig gegen x konvergiert und ein $M \in \mathbf{R}$ existiert, sodass $\|\gamma_n\|_{\Xi} \leq M$.
- 2) Beweise die Schwach-Kompaktheit von K im Beweis von Satz 2.2.1 direkt mit Hilfe vom Satz von Arzela-Ascoli.
- 3) Untersuche die Lösungen des nichtlinearen Pendels mit $F = p^2/2 + (1/2\pi) \cos(2\pi x)$ und zugehörigen Eulergleichungen $\dot{x} = \sin(2\pi x)$ auf Minimalität.
- a) eine periodische Schwingung $x(t) = x(t+T)$ mit $x \neq 0$,
 - b) die stabile Gleichgewichtslage $x \equiv 0$,
 - c) die instabile Gleichgewichtslage $x \equiv 1/2$.
- 4) Zeige, dass für $\gamma : t \mapsto x(t)$ mit $\gamma \in \mathcal{M}$ gilt: $\forall t_1, t_2 \in \mathbf{R}$

$$\frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \dot{x}^2 dt \leq c \left\{ \left(\frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1} \right)^2 + 1 \right\} .$$

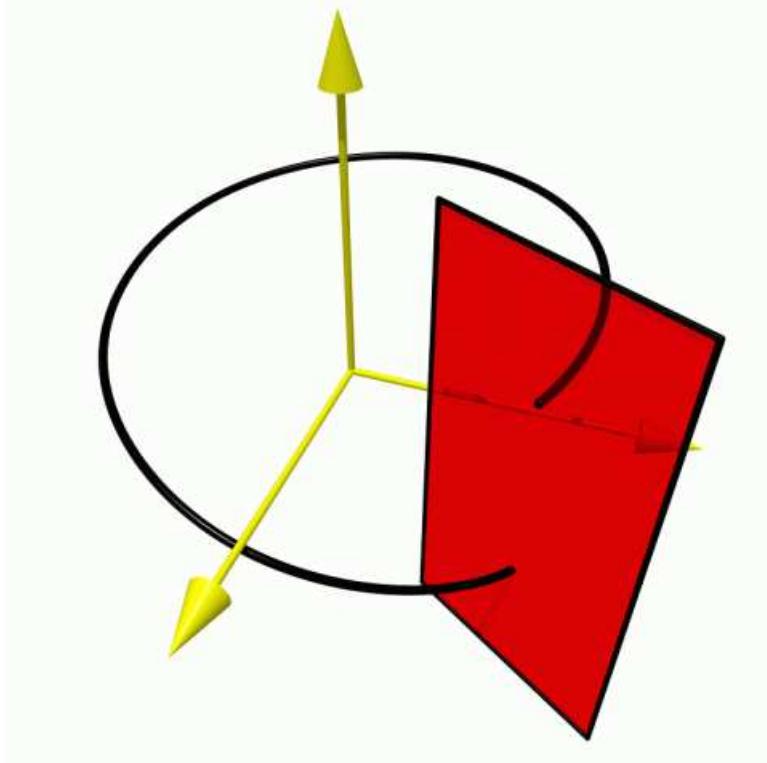
Kapitel 3

Diskrete Systeme, Anwendungen

3.1 Monotone Twistabbildungen

In diesem Kapitel wollen wir Situationen betrachten, die eng verwandt sind mit den Fragen in Kapitel II. In der Tat sind es mehr oder weniger dieselben Fragestellungen, obwohl die Bedingungen nicht identisch sind. Die Betrachtungen erfordern unwesentliche Änderungen, während die zugrunde liegenden Ideen dieselben sind.

Die Resultate von Mather gingen aus von monotonen Twistabbildungen, die wir hier als Anwendungsbeispiel betrachten. Bevor wir diese Abbildung definieren, leiten wir sie aus dem im Kapitel II behandelten Variationsproblem als Poincaréabbildung her.



Wir machen die Voraussetzung, dass F auf \mathbf{T}^2 so gegeben ist, dass keine Extremale in $[0, 1]$ konjugierte Punkte besitzt, d.h. falls $(t_1, x(t_1))$ und $(t_2, x(t_2))$ konjugierte Punkte sind, so ist $t_2 - t_1 > 1$.

Unter den Voraussetzungen von Kapitel II existieren die Lösungen der Euler-Gleichungen

$$\frac{d}{dt} F_{\dot{x}} = F_x$$

für alle t (Übungsaufgabe 1). Deshalb ist die Poincaréabbildung

$$f : S^1 \times \mathbf{R} \rightarrow S^1 \times \mathbf{R}, (x(0), \dot{x}(0)) \mapsto (x(1), \dot{x}(1))$$

wohldefiniert auf dem Zylinder $S^1 \times \mathbf{R} = \{t = 0, x \in S, \dot{x} \in \mathbf{R}\}$, der eine Hyperfläche im Phasenraum $\Omega \times \mathbf{R}$ bildet.

Sei x eine Lösung der Euler-Gleichungen. Wir definieren

$$\begin{aligned} x_0 &:= x(0), \quad x_1 = x(1) \\ y_0 &:= F_p(0, x_0, \dot{x}_0), \quad y_1 := F_p(0, x_1, \dot{x}_1) \end{aligned}$$

und fassen x nun auf als eine Funktion von t, x_0 und x_1 . Mit

$$S(x_0, x_1) = \int_0^1 F(t, x, \dot{x}) dt$$

gilt

$$\begin{aligned} S_{x_0} &= \int_0^1 F_x \frac{dx}{dx_0} + F_p \frac{d\dot{x}}{dx_0} dt = \int_0^1 [F_x - \frac{d}{dt} F_p] \frac{dx}{dx_0} dt + F_p \frac{dx}{dx_0}|_0^1 = -y_0 \\ S_{x_1} &= \int_0^1 F_x \frac{dx}{dx_1} + F_p \frac{d\dot{x}}{dx_1} dt = \int_0^1 [F_x - \frac{d}{dt} F_p] \frac{dx}{dx_1} dt + F_p \frac{dx}{dx_1}|_0^1 = y_1 \end{aligned}$$

und (\dot{x}_0 wird als Funktion von x_0 und x_1 betrachtet)

$$S_{x_0 x_1} = -F_{pp}(0, x_0, \dot{x}_0) \frac{d\dot{x}_0}{dx_1} .$$

Da

$$\xi(t) := \frac{\partial x(t, x_0, x_1)}{\partial x_1}$$

Lösung der Jacobigleichung ist (leite $\partial_t F_p = F_x$ nach x_1 ab) und wir nach Voraussetzung keine konjugierten Punkte haben, gilt wegen $\xi(1) = 1$ und $\xi(0) = 0$ und $\xi(t) > 0$ für $t \in (0, 1)$ und das heisst

$$\dot{\xi}(0) = \frac{d\dot{x}_0}{dx_1} > 0$$

oder $S_{x_0 x_1} < 0$. Zusammenfassend halten wir fest:

$$f : (x_0, y_0) \mapsto (x_1, y_1)$$

erfüllt

$$\begin{aligned} y_0 &= -S_{x_0} \quad , \quad y_1 = S_{x_1} \\ S_{x_0 x_1} &< 0 \quad , \quad \text{d.h. } \frac{\partial y_1}{\partial x_0} > 0 . \end{aligned}$$

Randbemerkung: (vgl. [3] S.260). In der klassischen Mechanik heisst S erzeugende Funktion für die kanonische Transformation ϕ . Die **Hamilton-Jacobi-Methode** zur Integration der Hamiltongleichungen besteht darin, eine erzeugende Funktion S zu finden, sodass

$$H(t, x_0, S_{x_0}(x_0, x_1)) = K(x_1)$$

gilt. Die ursprünglichen Hamiltongleichungen

$$\dot{x}_0 = H_{y_0}, \dot{y}_0 = -H_{x_0}$$

gehen dann über in das integrable System

$$\dot{x}_1 = 0, \dot{y}_1 = K_{x_1} .$$

Bei den meisten integrabilen Systemen der Hamilton'schen Mechanik führt die Hamilton-Jacobi-Methode zum Ziel. Ein Beispiel ist die geodätische Strömung auf dem Ellipsoid.

Statt mit dem Variationsprinzip zu beginnen, können wir auch direkt definieren:

Definition: Eine auf dem Kreisring

$$A = \{(x, y) \mid x \pmod{1}, a \leq y \leq b, -\infty \leq a < b \leq \infty\}$$

definierte Abbildung

$$\phi : A \rightarrow A, (x, y) \mapsto (f(x, y), g(x, y)) = (x_1, y_1)$$

heißt **monotone Twistabbildung**, falls sie ein exakter, randerhaltender C^1 -Diffeomorphismus ist, der eine festgesetzte Fortsetzung auf die Überlagerung von A hat:

- (0) $f, g \in C^1(A)$
- (i) $f(x+1, y) = f(x, y) + 1, g(x+1, y) = g(x, y)$
- (ii) $a = ydx - y_1dx_1 = dh$
- (iii) $g(x, a) = a, g(x, b) = b$
- (iv) $\partial_y f(x, y) > 0 .$

Im Falle, wo a und b endlich sind, könnte man die Bedingung (ii) auch ersetzen durch die etwas schwächere Forderung der Flächenerhaltung

$$dxdy = dx_1dy_1 .$$

Die exakte Symplektizität (ii) folgt dann. Mit der in (ii) vorkommenden erzeugenden Funktion h können wir diese Bedingungen auch anders, aber völlig äquivalent schreiben wobei h_i die Ableitung von h nach der i 'ten Variable bedeutet:

- (0)' $h \in C^2(\mathbf{R}^2)$
- (i)' $h(x+1, x'+1) = h(x, x')$
- (ii)' $y = -h_1(x, x_1), y_1 = h_2(x, x_1)$
- (iii)' $h_1(x, x') + h_2(x, x') = 0$ für $h_1(x, x') = a, b$
- (iv)' $h_{xx'} < 0 .$

Wir interessieren uns für die Bahnen $(x_j, y_j) = \phi^j(x, y)$ ($j \in \mathbf{Z}$) der monotonen Twistabbildung ϕ . Die Dynamik gegeben durch ϕ wird vollständig beschrieben durch eine auf dem Torus \mathbf{T}^2 definierte Funktion h , die (0)' bis (iv)' erfüllt. Die Bewegungsgleichungen

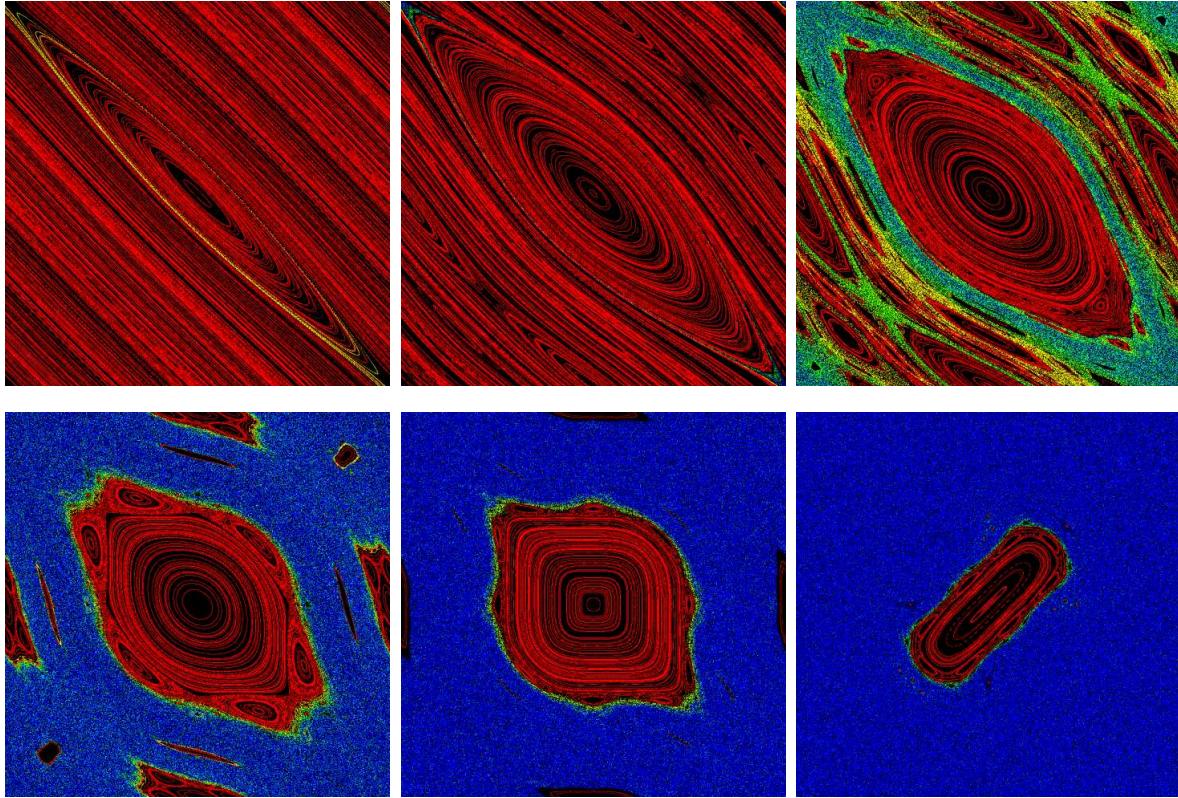
$$h_2(x_{j-1}, x_j) + h_1(x_j, x_{j+1}) = 0$$

bilden eine Differenzengleichung zweiter Ordnung auf \mathbf{T}^1 und können als Eulergleichungen zu einem Variationsprinzip angeschaut werden. (Siehe mehr im nächsten Paragraphen).

Unschwer kann man erkennen, dass die Funktion h , im Falle, wo ϕ die Poincaréabbildung ϕ ist, nichts anderes als die oben definierte Funktion S ist.

Man kann sich die Analogie zwischen dem kontinuierlichen und dem diskreten Fall etwa so vorstellen:

| kontinuierliches System | diskretes System |
|--|---|
| $F(t, x, p)$ | Lagrangefunktion $h(x_j, x_{j+1})$ |
| $\int_{t_1}^{t_2} F(t, x, \dot{x}) dt$ | Wirkung $\sum_{j=n_1}^{n_2-1} h(x_j, x_{j+1})$ |
| $\frac{d}{dt} F_x = F_x$ | Eulergleichung $h_2(x_{j-1}, x_j) = -h_1(x_j, x_{j+1})$ |
| $F_{pp} > 0$ | Legendrebedingung $h_{12} < 0$ |
| $x(t)$ | Extremale x_j |
| $x(t)$ | Minimale x_j |
| $\dot{x}(t)$ | Geschwindigkeit $x_{j+1} - x_j$ |
| $\ddot{x}(t)$ | Beschleunigung $x_{j+1} - 2x_j + x_{j-1}$ |
| $y = F_p(t, x, p)$ | Impulskoordinate $y_{j+1} = h_2(x_{j+1}, x_j)$ |



Beispiel: 1) Die Standardabbildung von Taylor, Greene und Chirikov. Sei auf dem Zylinder

$$A = \{(x, y) \mid x \pmod{1}, y \in \mathbf{R}\}$$

die Abbildung

$$\phi : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + y + \frac{\lambda}{2\pi} \sin(2\pi x) \\ y + \frac{\lambda}{2\pi} \sin(2\pi x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

gegeben. Wegen

$$\begin{aligned} \phi(x+1, y) &= (x_1+1, y) = (x_1, y_1), \\ \phi(x, y+1) &= (x_1+1, y+1) = (x_1, y_1+1) \end{aligned}$$

vertauscht ϕ mit allen Elementen der Fundamentalgruppe des Torus und kann desshalb als Transformation des Torus aufgefasst werden. ϕ hat die erzeugende Funktion

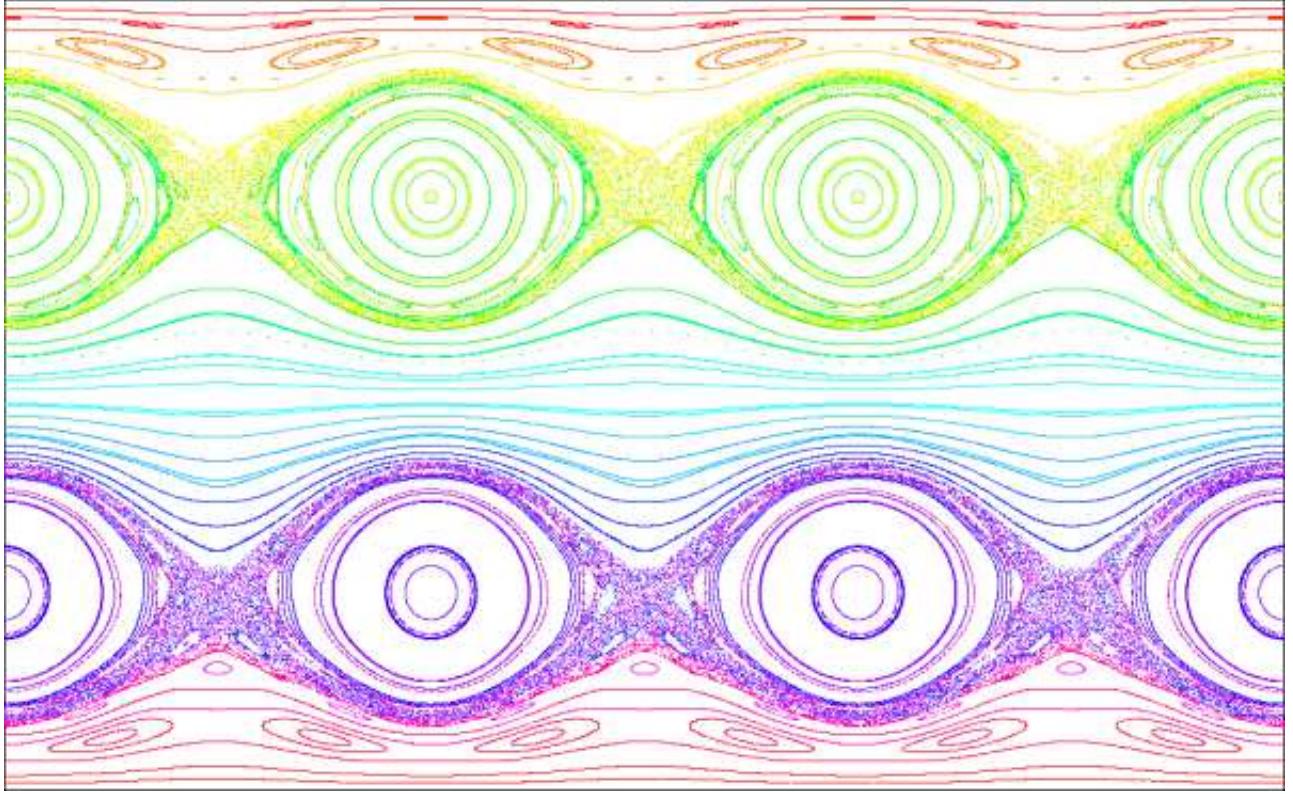
$$h(x, x_1) = \frac{(x_1 - x)^2}{2} - \frac{\lambda}{2\pi} \cos(2\pi x) = \frac{(\Delta x)^2}{2} - \frac{\lambda}{2\pi} \cos(2\pi x).$$

Betrachtet man ein paar Bahnen von ϕ dann sieht man oft stabile periodische Bahnen in der Mitte der 'stabilen Inselchen'. Die instabilen, hyperbolischen Bahnen liegen in 'stochastischen Seen', die bei numerischen Experimenten typischerweise aus einer Bahn bestehen. Invariante Kurven, die sich um den Torus herumwinden, heißen **KAM Tori**. Wird der Parameterwert größer (numerisch sieht man das etwa bei 0.97..), ist auch der letzte KAM torus, der 'goldene Torus' verschwunden. Der Name 'golden' kommt daher, da die Rotationszahl gerade dem goldenen Schnitt entspricht.

Die formale Analogie zwischen diskretem und kontinuierlichem Systemen kann man hier an diesem Beispiel gut beobachten:

| kontinuierliches System | diskretes System |
|--|---|
| $F(t, x, p) = \frac{p^2}{2} - \frac{\lambda}{4\pi^2} \cos(2\pi x)$ | $h(x_j, x_{j+1}) = \frac{(x_{j+1} - x_j)^2}{2} - \frac{\lambda}{4\pi^2} \cos(2\pi x_j)$ |
| $F_{pp} = 1 > 0$ | $h_{12} = -1 < 0$ |
| $\ddot{x} = \frac{\lambda}{2\pi} \sin(2\pi x)$ | $\nabla^2 x_j = \frac{\lambda}{2\pi} \sin(2\pi x_j)$ |
| $y = F_p = p$ | $y_{j+1} = h_2(x_j, x_{j+1}) = (x_{j+1} - x_j) = Dx_j$ |

Es besteht ein wesentlicher Unterschied zwischen dem kontinuierlichen System (dem mathematischen Pendel) und seinem diskreten Bruder, der Standardabbildung. Das kontinuierliche System ist integrierbar: Man kann $x(t)$ ausdrücken durch elliptische Integrale und Jacobi's elliptische Funktion. Die Standardabbildung jedoch ist für fast alle Parameterwerte nicht integrierbar. Wir werden später nochmals auf die Standardabbildung zurückkommen.



Beispiel: 2) Billard. Wir übernehmen die Notation aus dem ersten Paragraphen. Wir beschreiben aber jetzt die Abbildung

$$(s, t) \mapsto (s_1, t_1)$$

die auf dem Kreisring $S^1 \times [0, \pi]$ definiert war, in neuen Koordinaten

$$(x, y) = (s, -\cos(t))$$

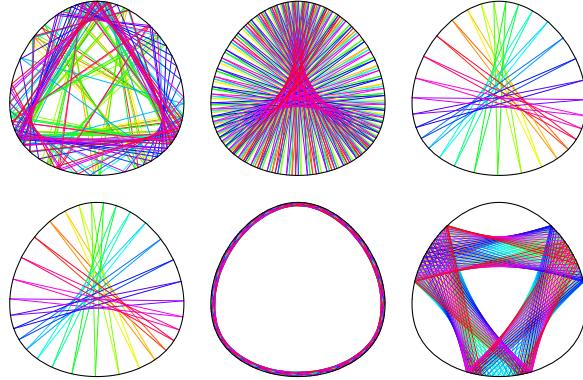
auf dem Kreisring $A = S \times [-1, 1]$. Um zu zeigen, dass

$$\phi : (x, y) \mapsto (x_1, y_1) = (f(x, y), g(x, y))$$

eine monotone Twistabbildung ist, geben wir einfach eine erzeugende Funktion

$$h(x, x_1) = -d(P, P_1)$$

an, die die Eigenschaften (0') bis (iv') erfüllt. Dabei bezeichne $d(P, P_1)$ den Euklidischen Abstand der Punkte P und P_1 auf dem Tischrand, die gegeben sind durch $x = s$ resp. $x_1 = s_1$.



Beweis.

- (0') ist erfüllt, wenn die Kurve C^2 ist.
- (i') ist klar
- (ii') $\cos(t) = h_x, -\cos(t_1) = h_{x_1}$.
- (iii') $x = f(x, 1)$ oder $f(x, -1)$ impliziert $h_x + h_{x_1} = 0$.
- (iv') $h_{xx_1} < 0$ folgt aus der strikten Konvexität der Kurve. \square

Beispiel: 3) Duales Billiard

Wie beim Billiard geben wir eine geschlossene konvexe orientierte Kurve in der Ebene vor und definieren eine Abbildung ϕ auf dem Äusseren von Γ wie folgt. Von irgendeinem Punkt $P \in E$ zeichnen wir die Tangente L zu Γ , wobei wir den Kontaktspunkt (oder den Mittelpunkt des Segmentes $L \cap \Gamma$) mit Q bezeichnen. Die Linie L ist gemäss der Orientierung von Γ aus den zwei möglichen Tangenten ausgewählt worden. Wir benennen den Punkt, den man erhält, wenn man P an Q spiegelt mit P_1 . Die so definierte Abbildung ϕ , die dem Punkt P den Punkt P_1 zuordnet, lässt sich invertieren. Sie ist eindeutig durch die Kurve Γ definiert. Das so erhaltene dynamische System heisst **duales Billiard**. Es gibt hier aber neben den gestellten Fragen, wie zum Beispiel der Frage nach der Existenz von periodischen oder invarianten Kurven auch Probleme, die beim Billiard nicht auftreten: So kann man untersuchen, für welche Γ jede Bahn beschränkt ist oder ob es ein Γ gibt, für das eine Bahn existiert, die ins Unendliche geht. Was die Stabilität betrifft, so weiss man da etwas, wie wir weiter unten noch sehen werden. Auch hier können wir eine erzeugende Funktion für ϕ angeben. Dazu wählen wir die Koordinaten

$$x = \theta/(2\pi), y = t^2/2,$$

wo (t, θ) die Polarkoordinaten des Vektors $(P_1 - P)/2$ ist. Die erzeugende Funktion $h(x, x_1)$ ist gegeben durch den Flächeninhalt des Gebietes zwischen den Geraden QP, P und Q und dem Kurvenstück von Γ zwischen Q und Q_1 . Die Abbildung

$$\phi : (x, y) \mapsto (x_1, y_1)$$

ist auf dem Halbzylinder $A = S^1 \times [0, \infty)$ definiert und die erzeugende Funktion h erfüllt die Eigenschaften (0') bis (iv'), falls wir für Γ eine eine C^1 -Kurve nehmen (Übungsaufgabe).

Wir werden die drei Beispiele noch genauer betrachten. Bei der Untersuchung von monotonen Twistabbildungen ist vor allem die Frage nach invarianten Mengen wie periodischen Bahnen oder invarianten Kurven oder anderen invarianten Mengen wie Cantormengen interessant.

Periodische Bahnen.

Die Existenz von periodischen Bahnen von monotonen Twistabbildungen wird gewährleistet durch den berühmten **Fixpunktsatz von Poincaré-Birkhoff**, den wir hier nur in einem Spezialfall beweisen. Im nächsten Paragraphen werden wir aber auch im Rahmen der im Kapitel II entwickelten Theorie sehen, dass periodische Bahnen existieren müssen.

Definition: Eine Abbildung ϕ

$$(x, y) \mapsto (f(x, y), g(x, y)) = (x_1, y_1)$$

die auf dem Kreisring $A = \{(x, y) \mid x \bmod 1, a \leq y \leq b, -\infty < a < b < +\infty\}$, definiert ist heisst **Twistabbildung**, falls sie folgende Eigenschaften hat:

- (0) ϕ ist ein Homöomorphismus von A .
- (i) $f(x+1, y) = f(x, y) + 1, g(x+1, y) = g(x, y)$ (Fortsetzung auf Überlagerung von A).
- (ii) $dx dy = dx_1 dy_1$ (Inhaltstreue)
- (iii) $g(x, y) = y$ für $y = a, b$ (Randerhaltung)
- (iv) $f(x, a) - x > 0, f(x, b) - x < 0$ (Twisteigenschaft)

Satz 3.1.1 (Poincaré-Birkhoff 1913) Eine Twistabbildung ϕ hat mindestens 2 Fixpunkte.

Einen Beweis lässt sich [6] finden. Im Gegensatz zu den monotonen Twistabbildungen ist aber die Zusammensetzung von Twistabbildungen wieder eine Twistabbildung. Als Korollar erhalten wir desshalb die Existenz von unendlich vielen periodischen Bahnen:

Korollar 3.1.2 Für jede Twistabbildung ϕ gibt es ein q_0 , so dass für alle $q > q_0$ mindestens zwei periodische Bahnen der Periode q von ϕ existieren.

Beweis. Definiere

$$\begin{aligned} m &= \max\{f(x, a) - x \mid x \in \mathbf{R}\} < 0 \\ M &= \min\{f(x, b) - x \mid x \in \mathbf{R}\} > 0. \end{aligned}$$

Dann gilt für jedes $q > 0$ mit der Notation $\phi^j(x, y) = (f^j(x, y), g^j(x, y))$

$$\begin{aligned} \max(f^q(x, a) - x) &\leq \max\left\{\sum_{j=0}^{q-1} f^{j+1}(x, a) - f^j(x, a)\right\} \\ qm < qM &\leq \min\left\{\sum_{j=0}^{q-1} f^{j+1}(x, b) - f^j(x, b)\right\} \leq \min\{f^q(x, b) - x\}. \end{aligned}$$

Sei q_0 so gross, dass $q_0M - q_0m > 1$ ist. Falls $q > q_0$ ist, so gibt es ein $p \in \mathbf{Z}$, mit $qm < p < qM$. Und damit gilt für die Abbildung

$$\phi_{q,p} : (x, y) \mapsto (f^q(x, y) - p, g^q(x, y))$$

die Twistbedingung

$$\phi_{q,p}(x, a) < qm - p < 0 < qM - p < \phi_{q,p}(x, b).$$

Nach Poincaré-Birkhoff hat $\phi_{q,p}$ mindestens zwei Fixpunkte. Das bedeutet: ϕ hat zwei periodische Bahnen vom Typ (q, p) . \square

Ganz einfach zu beweisen ist ein Spezialfall vom Satz 3.1.1:

Spezialfall:

Eine monotone Twistabbildung mit $f_y > 0$ hat mindestens 2 Fixpunkte, falls die Ränder des Kreisrings in verschiedene Richtungen gedreht werden (Eigenschaft (iv) der Twistabbildung).

Beweis des Spezialfalls: Wegen der Twisteigenschaft existiert für jedes x ein $y = z(x)$ mit

$$f(x, z(x)) = x.$$

Die Abbildung z ist C^1 wegen Eigenschaft (0) der monotonen Twistabbildung. Wegen der Inhaltstreue der Abbildung muss sich die Kurve

$$\gamma : x \mapsto (x, z(x)) \in A$$

mit ihrem Bild $\phi(\gamma)$ in mindestens zwei Punkten schneiden. Das sind die zwei Fixpunkte der Abbildung ϕ .

Invariante Kurven.

Unter einer **invarianten Kurve** einer monotonen Twistabbildung ϕ verstehen wir eine geschlossene Kurve im Innern von A , die den inneren Rand $\{y = a\}$ einmal umläuft und unter ϕ invariant ist. Von Birkhoff [12] stammt der folgende Satz:

Satz 3.1.3 *(Birkhoff 1920) Jede invariante Kurve einer monotonen Twistabbildung ist sternförmig, d.h. als Graph $y = w(x)$ einer Funktion w darstellbar.*

Für einen sorgfältigen Beweis konsultiere man den Appendix von Fathi in [15].

Satz 3.1.4 *Jede invariante Kurve einer monotonen Twistabbildung ist als Graph $y = w(x)$ einer Lipschitzstetigen Funktion w darstellbar.*

Beweis. Sei γ eine invariante Kurve der monotonen Twistabbildung ϕ . Mit Birkhoffs Satz wissen wir, dass γ gegeben ist als Graph einer Funktion w . Die Abbildung ϕ induziert auf γ einen Homöomorphismus

$$(x, w(x)) \mapsto (\psi(x), w(\psi(x))) = (f(x, w(x)), g(x, w(x)))$$

gegeben durch eine streng monotone Funktion ψ . Seien (x_j, y_j) und (x'_j, y'_j) zwei Bahnen auf γ . Die x_j und x'_j sind Lösungen der Eulergleichungen

$$\begin{aligned} -h_1(x_j, x_{j+1}) &= h_2(x_{j-1}, x_j) \\ h_2(x'_{j-1}, x'_j) &= -h_1(x'_j, x'_{j+1}). \end{aligned}$$

Wenn wir diese beiden Gleichungen für $j = 0$ addieren und auf beiden Seiten $h_1(x_0, x'_1) - h_2(x_{-1}, x'_0)$ addieren, erhalten wir

$$\begin{aligned} &h_2(x'_{-1}, x'_0) - h_2(x_{-1}, x'_0) + h_1(x_0, x'_1) - h_1(x_0, x_1) \\ &= h_2(x_{-1}, x_0) - h_2(x_{-1}, x'_0) + h_1(x_0, x'_1) - h_1(x'_0, x'_1) \end{aligned}$$

und aus dem Mittelwertsatz folgt

$$\delta(x'_{-1} - x_{-1}) + \delta(x'_1 - x_1) \leq L(x'_0 - x_0)$$

wo $\delta = \min(-h_{12}) > 0$, $L = \max(|h_{11}| + |h_{22}|) < \infty$ gesetzt sind. Wegen $x_1 = \psi(x_0)$, $x_{-1} = \psi^{-1}(x_0)$, folgt

$$|\psi(x'_0) - \psi(x_0)|, |\psi^{-1}(x'_0) - \psi^{-1}(x_0)| \leq \frac{L}{\delta} |x'_0 - x_0|$$

d.h. ψ und ψ^{-1} sind Lipschitzstetig, und daher ist auch

$$\psi(x) = -h_1(x, \psi(x))$$

Lipschitzstetig. □

Die Frage nach der Existenz von invarianten Kurven ist eng verbunden mit Stabilität:

Definition: Der Kreisring A heisst **Instabilitätsgebiet**, falls es eine Bahn (x_j, y_j) gibt, die vom inneren Rand zum äusseren Rand verläuft, genauer, falls

$$\forall \epsilon > 0 \exists n, m \in \mathbf{Z}, y_n \in U_\epsilon := \{a < y < a + \epsilon\}$$

und $y_m \in V_\epsilon := \{b - \epsilon < y < b\}$.

Satz 3.1.5 *A ist ein Instabilitätsgebiet genau dann, wenn es keine invarianten Kurven in A gibt.*

Beweis. Existiert eine invariante Kurve γ in A , so wird A in zwei Gebiete A_a und A_b aufgeteilt, sodass A_a von γ und dem inneren Rand $\{y = a\}$ berandet ist und A_b die Kurven γ und $\{y = b\}$ als Rand hat. Wegen der Stetigkeit der Abbildung und der Randerhaltung werden die Gebiete A_a und A_b auf sich abgebildet. A kann also kein Instabilitätsgebiet sein.

Ist A kein Instabilitätsgebiet, so gibt es ein $\epsilon > 0$, sodass eine Bahn die in U_ϵ startet, niemals in V_ϵ gelangt. Die ϕ invariante Menge

$$U = \bigcup_{j \in \mathbf{Z}} \phi^j(U)$$

ist deshalb disjunkt von V . Sie wird aussen berandet von einer Kurve γ , die ϕ -invariant ist und nach den Sätzen 3.1.3 und 3.1.4 Lipschitzstetig ist. \square

Man weiss, dass für kleine Störungen der **integrablen monotonen Twistabbildung**

$$\phi_\alpha : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + \alpha(y) \\ y \end{pmatrix}, \alpha'(y) \geq \delta > 0$$

invariante Kurven mit 'genügend irrationalen' Rotationszahlen überleben. Das ist die Aussage des **Twisttheorems**, welches einen Teil der KAM Theorie bildet. Siehe [24] für die Referenzen für einen Beweis.

Definition: Der Raum $C^r(A)$ der C^r -Diffeomorphismen auf A hat die Topologie:

$$\|\phi_1 - \phi_2\|_r = \sup_{m+n \leq r} \left(\left| \frac{\partial^{m+n}(f_1 - f_2)}{\partial x^m \partial y^n} \right| + \left| \frac{\partial^{m+n}(g_1 - g_2)}{\partial x^m \partial y^n} \right| \right)$$

wo $\phi_j(x, y) = (f_j(x, y), g_j(x, y))$.

Definition: Wir sagen eine irrationale Zahl β sei **Diophantisch**, falls es positive Konstanten C und τ gibt, so dass für alle ganzen Zahlen $p, q > 0$ gilt

$$\left| \beta - \frac{p}{q} \right| \geq Cq^{-\tau}.$$

Satz 3.1.6

(Twisttheorem) Gegeben sei $\alpha \in C^r[a, b]$ mit $r > 3$ und $\alpha'(y) \geq \delta > 0, \forall y \in [a, b]$. Dann existiert ein $\epsilon > 0$, sodass für jeden flächenerhaltenden C^r -Diffeomorphismus ϕ von A mit $\|\phi - \phi_\alpha\| < \epsilon$ und jedes Diophantischen $\beta \in [\alpha(a), \alpha(b)]$, eine invariante C^1 -Kurve γ_β existiert, wobei die von ϕ auf γ_β induzierte Abbildung ein C^1 Diffeomorphismus mit Rotationszahl β ist.

Bemerkung. Für $r < 3$ gibt es Gegenbeispiele von M. Hermann.

Zusammenhang zwischen den kontinuierlichen und den diskreten Systemen:

Am Anfang dieses Paragraphen haben wir gesehen, dass zu einem F mit $F_{pp} > 0$, für das keine Extremale einen konjugierten Punkt hat, die Poincaréabbildung ϕ mittels der erzeugenden Funktion

$$h(x, x') = \int_0^1 F(t, x, \dot{x}) dt$$

erhalten wird. ϕ ist dann eine monotone Twistabbildung. Das Ausschliessen von konjugierten Punkten ist dabei notwendig. Im Allgemeinen (falls konjugierte Punkte nicht ausgeschlossen werden) kann man die Poincaréabbildung ϕ jedoch als Produkt von monotonen Twistabbildungen schreiben: Es gibt ein $N \in \mathbf{N}$, sodass die Abbildungen

$$\phi_{N,j} : (x(j/N), y(j/N)) \mapsto (x((j+1)/N), y((j+1)/N))$$

monotone Twistabbildungen sind, falls $(x(t), y(t))$ eine Lösung der Hamiltongleichungen

$$\dot{x} = H_y, \dot{y} = -H_x$$

ist. Das sieht man daraus, dass

$$\begin{aligned} x(t + \epsilon) &= x(t) + \epsilon H_y + O(\epsilon^2) \\ y(t + \epsilon) &= y(t) - \epsilon H_x + O(\epsilon^2) \end{aligned}$$

mit $H_{yy} > 0$ für genügend kleines ϵ eine monotone Twistabbildung ist. Die Poincaréabbildung ϕ lässt sich somit schreiben als

$$\phi = \phi_{N,N-1} \circ \phi_{N,N-2} \circ \dots \circ \phi_{N,0}$$

und wir sehen, dass die Extremalen von $\int F dt$ einem Produkt von monotonen Twistabbildungen entsprechen.

Es stellt sich jetzt die Frage, ob **jede** monotone Twistabbildung durch ein Variationsproblem auf dem Torus erhalten werden kann. Das ist für glatte (C^∞) Abbildungen in der Tat der Fall [25]. Das Resultat lautet:

(Interpolationssatz) Für jede C^∞ monotone Twistabbildung ϕ gibt es eine Hamiltonfunktion $H = H(t, x, y) \in C^\infty(\mathbf{R} \times A)$ mit

- a) $H(t + 1, x, y) = H(t, x, y) = H(t, x + 1, y)$
- b) $H_x(t, x, y) = 0, y = a, b$
- c) $H_{yy} > 0,$

Satz 3.1.7

sodass die Abbildung ϕ , die die Anfangswerte (x_0, y_0) der Lösungen von

$$\dot{x} = H_y(t, x, y), y = -H_x(t, x, y)$$

überführt in $(x(t), y(t))$, mit ϕ übereinstimmt für $t = 1$.

Mit diesem Satz wird die Mathertheorie für monotone C^∞ Twistabbildungen eine direkte Konsequenz der in Kapitel II aufgebauten Theorie.

3.2 Ein diskretes Variationsproblem

In diesem Paragraphen untersuchen wir ein Variationsproblem, das verwandt ist mit dem in Kapitel II definierten Problem. Wir werden hier jedoch nicht wieder von vorne beginnen, sondern einfach die Resultate auflisten, die man mit den gleichen Ideen von Kapitel II beweisen kann. In [26] sind die Beweise explizit gemacht für diese Situation. Sei

$$\Phi = \{x : \mathbf{Z} \mapsto \mathbf{R}\}$$

der Raum der zweiseitigen Folgen reeller Zahlen versehen mit der Produkttopologie. Ein Element $x \in \Phi$ wird **Trajektorie** oder **Bahn** genannt und man schreibt $\{x_j\}_{j \in \mathbf{Z}}$ für x .

Definition: Für eine gegebene Funktion $h : R^2 \rightarrow R$ definieren wir

$$H(x_j, \dots, x_k) = \sum_{i=j}^{k-1} h(x_i, x_{i+1})$$

und sagen, (x_j, \dots, x_k) sei ein **minimaler Abschnitt**, falls

$$H(x_j + \xi_j, x_{j+1} + \xi_{j+1}, \dots, x_k + \xi_k) \geq H(x_j, \dots, x_k),$$

$$\forall \xi_j, \dots, \xi_k \in \mathbf{R}.$$

Definition: Eine Bahn (x_j) heisst **minimal**, falls jeder Abschnitt (x_j, \dots, x_k) ein minimaler Abschnitt ist. Man schreibt \mathcal{M} für die Menge der minimalen Elemente von Φ . Falls $h \in C^2$ ist, sagen wir, x sei **stationär** oder **extremal**, wenn x die Eulergleichung

$$h_2(x_{i-1}, x_i) + h_1(x_i, x_{i+1}) = 0, \forall i \in \mathbf{Z}$$

erfüllt.

Natürlich ist jede minimale Bahn extremal. Wir könnten hier von h

- (i) $h(x, x') = h(x+1, x'+1)$
- (ii) $h \in C^2(\mathbf{R})$
- (iii) $h_{12} \leq -\delta < 0$

fordern. Speziell erfüllt die erzeugende Funktion einer monotonen Twistabbildung diese Forderungen, zusätzlich jedoch noch

- (iv) $h_1(x, x') + h_2(x, x') = 0$, falls $h_1(x, x') = a, b$.

Man kommt auch mit schwächeren Voraussetzungen aus [4]: (ii) und (iii) können ersetzt werden. Wir wollen statt mit (i) bis (iii) nur mit den folgenden Bedingungen auskommen:

- (i') $h(x, x') = h(x+1, x'+1)$
- (ii') $h \in C^2(\mathbf{R})$
- (iii') $h(x, x+\lambda) \rightarrow \infty$, uniform in $x, \lambda \rightarrow \infty$
- (iv') $x < x'$ oder $y < y' \Rightarrow h(x, y) + h(x', y') < h(x, y') + h(x', y)$
- (v') $(x', x, x''), (y', x, y'')$ minimal $\Rightarrow (x' - y')(x'' - y'') < 0$.

Bedingung (iii') folgt aus (iii), falls $h \in C^2$, wegen

$$\begin{aligned} -\lambda^2 \frac{\delta}{2} &\geq \int_x^{x+\lambda} d\xi \int_{\xi}^{x+\lambda} h_{12}(\xi, \eta) d\eta \\ &= -h(x, x + \lambda) + h(x + \lambda, x + \lambda) - \int_x^{x+\lambda} h_1(\xi, \xi) d\xi \\ &= -h(x, x + \lambda) + O(\lambda). \end{aligned}$$

Die Bedingung (iv') erhält man ähnlich aus (iii), da

$$-\delta(x' - x)(y' - y) \geq \int_x^{x'} \int_y^{y'} d\xi h_{12}(\xi, \eta) d\eta = h(x', y') + h(x, y) - h(x, y') - h(x', y)$$

und (v') folgt aus (iii) wegen der Monotonie von $y \mapsto h_1(x, y)$ und $x \mapsto h_2(x, y)$.

$x' < y'$ bedeutet $h_2(x', x) > h_2(y', x) > h_2(y', y)$ und $x'' < y''$ ergibt $h_1(x, x'') > h_1(x, y'') > h_1(y, y'')$. Addition gibt einen Widerspruch zu den Euler-Gleichungen $h_2(x', x) + h_1(x, x'') = 0$ und $h_2(y', y) + h_1(y, y'') = 0$.

Wir übersetzen die Resultate und Definitionen aus Kapitel II auf die jetzige Situation. Wie die übersetzten Beweise explizit aussehen, kann man in [4] verfolgen.

Satz 3.2.1 (vgl. Satz 2.4.1 oder [4], 3.16) Zu jedem $(x_i)_{i \in \mathbb{Z}} \in \mathcal{M}$ existiert die Rotationszahl $\alpha = \lim_{i \rightarrow \infty} x_i/i$.

Für monotone Twistabbildungen liegt die Rotationszahl im Twistintervall $[\alpha_a, \alpha_b]$ die Rotationszahl einer Bahn x ist, die $h_1(x_j, x_{j+1}) = a$ (bsp. $h_1(x_j, x_{j+1}) = b$) erfüllt.

Definition: Die Menge der Minimalen mit Rotationszahl α nennen wir \mathcal{M}_α .

Definition: Eine Bahn x heisst **periodisch vom Typ (q,p)** , falls $x_{j+q} - p = x_j$ und die Menge dieser Bahnen sei $\mathcal{M}(q,p)$.

Definition: Wir sagen, zwei Trajektorien $(x_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ und $(y_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ schneiden sich

- a) **an der Stelle k** , falls $(x_{k-1} - y_{k-1})(x_{k+1} - y_{k+1}) < 0$ und $x_k = y_k$.
- b) **zwischen k und $k+1$** , falls $(x_k - y_k)(x_{k+1} - y_{k+1}) < 0$.

Definition: Auf \mathcal{M} ist die **partielle Ordnung**

$$x \leq y \Leftrightarrow x_i \leq y_i, \forall i \in \mathbf{Z}$$

$$x < y \Leftrightarrow x_i < y_i, \forall i \in \mathbf{Z}$$

gegeben.

Vergleiche das nächste Resultat mit Satz 2.6 oder [4],3.1,3.2,3.9).

Satz 3.2.2

- a) Zwei verschiedene minimale Trajektorien schneiden sich höchstens einmal.
- b) Falls $x \leq y$, so ist $x = y$ oder $x < y$.
- c) Falls $\lim_{i \rightarrow \infty} |x_i - y_i| = 0$, so gilt $x < y$ oder $x > y$.
- d) Zwei verschiedene Minimale vom Typ (q, p) schneiden sich nicht, d.h. $\mathcal{M}(q, p)$ ist total geordnet.

Bemerkung. Zum Beweis von Satz 3.2.2: Das Vorgehen ist das gleiche wie in Satz 2.6. Für a) brauchen wir die Transversalitätsbedingung (v') und die Ordnungsbedingung (iv').

Für den nächsten Satz, siehe Satz 2.3.3 oder [4],3.13).

Satz 3.2.3

(vgl. Satz 2.3.3 oder [4],3.13). Minimale haben keine Selbstschnitte auf \mathbf{T}^2 .

Siehe Sätze 6.2 und 8.6 in [4] oder [4] 3.3 und 3.17) zum Vergleich mit dem folgenden Satz:

Satz 3.2.4

- a) Für jedes $(q, p) \in \mathbf{Z}^2$ mit $q \neq 0$ gibt es Minimale vom Typ (q, p) .
- b) $\mathcal{M}_\alpha \neq \emptyset$ für alle $\alpha \in \mathbf{R}$.

Für monotone Twistabbildungen heisst das, dass zu jedem α im Twistintervall $[\alpha_a, \alpha_b]$ minimale Trajektorien mit der Rotationszahl α gibt.

Satz 3.2.5

(vgl. Satz 2.5.9 oder [4],4.1) Für irrationales α ist \mathcal{M}_α total geordnet.

Definition: Für $x \in \mathcal{M}_\alpha$ und α irrational definieren wir die Abbildung $u : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$

$$u : i = \alpha j - k \mapsto x_j - k$$

und durch Abschluss die zwei halbstetigen Funktionen

$$\begin{aligned} u^+ &= \lim_{\theta < \theta_n \rightarrow \theta} u(\theta_n) \\ u^- &= \lim_{\theta > \theta_n \rightarrow \theta} u(\theta_n) \end{aligned}$$

was wieder die Unterscheidung in die zwei Fälle A) und B) gibt:

Fall A): $u^+ = u^- = u$

Fall B): $u^+ \neq u^-$.

Satz 3.2.6 (vgl. Sätze 9.1, 9.13 oder [4], 2.3.). u^\pm sind streng monoton in θ .

Definition: Eine Trajektorie $x \in \mathcal{M}_\alpha$ heisst **rekurrent**, falls $(j_m, k_m) \in \mathbf{Z}^2$ existieren, sodass $x_{i+j_m} - k_m \rightarrow x_i$ für $m \rightarrow \infty$. Die Menge der rekurrenten Trajektorien wird mit \mathcal{M}^{rec} bezeichnet. Die Elemente von $\mathcal{M}_\alpha^{rec} = \mathcal{M}_\alpha \cap \mathcal{M}^{rec}$ werden im Falle B) **Mathermengen** genannt. Sei noch

$$\mathcal{U}_\alpha := \{x \in \mathcal{M}_\alpha \mid x_j = u^+(\alpha j + \beta) \text{ oder } x_j = u^-(\alpha j + \beta)\}$$

für $\beta \in \mathbf{R}$.

Vergleiche das nächste Resultat mit Sätzen 2.5.10-2.5.13 oder 4.5, 4.6 in [4].

Satz 3.2.7

- a) $\mathcal{U}_\alpha = \mathcal{M}_\alpha^{rec}$
- b) \mathcal{M}_α ist unabhängig vom x , das u erzeugt hat.
- c) $x \in \mathcal{M}_\alpha^{rec}$ lässt sich durch periodische Minimale approximieren.
- d) Jedes $x \in \mathcal{M}_\alpha$ ist asymptotisch zu einem $x^- \in \mathcal{M}_\alpha^{rec}$.

Auf $\mathcal{U}_\alpha^{rec} = \mathcal{M}_\alpha$ definieren wir die Abbildung (vgl. auch 11.4)

$$\psi : u(\theta) \mapsto u(\theta + \alpha).$$

Definition: Im Falle, wo h eine monotone Twistabbildung ϕ erzeugt, definieren wir für jedes irrationale $\alpha \in [\alpha_a, \alpha_b]$ die Menge

$$\mathcal{M}_\alpha = \{(x, y) \mid x = u^\pm(\theta), \theta \in \mathbf{R}, y = -h_1(x, \psi(x))\}.$$

(Mather, vgl. [4], 7.6) Ist h eine erzeugende Funktion für eine monotone Twistabbildung auf dem Kreisring A , so gilt für jedes irrationale α im Twistintervall $[\alpha_a, \alpha_b]$.

Satz 3.2.8

- a) \mathcal{M}_α ist eine nichtleere Teilmenge von A , die ϕ -invariant ist.
- b) \mathcal{M}_α ist der Graph einer Lipschitzfunktion $\omega : A_\alpha \rightarrow [a, b]$, die auf den abgeschlossenen auf der abgeschlossenen Menge $A_\alpha = \{u^\pm(\theta) \mid \theta \in \mathbf{R}\}$ definiert ist. $\omega(x) = -h_1(x, \psi(x))$.
- c) Die auf \mathcal{M}_α induzierte Abbildung ist ordnungserhaltend.
- d) Die Menge \mathcal{A}_α die Projektion von \mathcal{M}_α auf S^1 ist entweder ganz \mathbf{R} oder dann eine Cantormenge. Im ersten Fall sind wir im Falle A) und der Graph von ω ist eine invariante Lipschitzkurve. Im zweiten Fall sind wir im Falle B) und \mathcal{M}_α heisst **Mathermenge** zur Rotationszahl α .

Wir verweisen auf die neuen Arbeiten von S.B.Angenent [2, 1], in denen diese Ideen weitergeführt und verallgemeinert werden. Einerseits werden für monotone Twistabbildungen periodische Bahnen konstruiert, die nicht minimal zu sein brauchen, sondern einen vorgeschriebenen Index besitzen. Dabei ist Index im Sinne der Morsetheorie zu verstehen und beim Beweis kommt die von Conley verallgemeinerte Morsetheorie zum Zuge. Andererseits studiert Angenent Situationen, bei denen die Differenzengleichungen zweiter Ordnung wie $h_2(x_{i-1}, x_i) + h_1(x_i, x_{i+1}) = 0$ durch Differenzengleichungen höherer Ordnung ersetzt werden.

3.3 Drei Beispiele

In diesem Paragraphen wollen wir nochmals auf die drei Beispiele für monotone Twistabbildungen zurückkommen, die wir schon angetroffen haben: Standardabbildung, Billiard und duales Billiard .

3.3.1 Die Standardabbildung

Mather hat in [22] gezeigt, dass die Standardabbildung für Parameterwerte $|\lambda| > 4/3$ keine invarianten Kurven in A haben kann. Wir zeigen zuerst, dass für $|\lambda| > 2$

keine invarianten Kurven existieren können:

Nach Birkhoff's Satz 3.1.4 kann eine invariante Kurve als Graph einer Lipschitzfunktion $y = \omega(x)$ dargestellt werden und die induzierte Abbildung

$$x_1 = \psi(x) = f(x, \omega(x))$$

wäre Lösung der Gleichung

$$h_1(x, \psi(x)) + h_2(\psi^{-1}(x), x) = 0 .$$

Das heisst, wenn wir

$$\begin{aligned} h_1(x, x_1) &= -(x_1 - x) - \frac{\lambda}{2\pi} \sin(2\pi x) \\ h_2(x, x_1) &= x_1 - x_0 \end{aligned}$$

einsetzen:

$$-(\psi(x) - x) - \frac{\lambda}{2\pi} \sin(2\pi x) + x - \psi^{-1}(x) = 0$$

oder

$$\psi(x) + \psi^{-1}(x) = 2x - \frac{\lambda}{2\pi} \sin(2\pi x) .$$

Die linke Seite ist eine monoton steigende Lipschitzfunktion und das ist für $|\lambda| > 2$ ein Widerspruch, da dann die Ableitung der rechten Seite

$$2 - \lambda \cos(2\pi x)$$

Nullstellen hat.

Satz 3.3.1 (Mather) Die Standardabbildung hat für Parameterwerte $|\lambda| > 4/3$ keine invarianten Kurven.

Beweis. Wir haben gerade gesehen, dass die auf eine invariante Kurve induzierte Abbildung ψ die Gleichung

$$g(x) = \psi(x) + \psi^{-1}(x) = 2x - \frac{\lambda}{2\pi} \sin(2\pi x)$$

erfüllt. Es gilt für Lebesgue fast alle x

$$m := 2 - |\lambda| < g'(x) \leq 2 + |\lambda| =: M .$$

Es bezeichne $\text{esssup}(f)$ das **wesentliche Supremum** von f und $\text{essinf}(f)$ das wesentliche Infimum. Sei

$$\begin{aligned} R &= \text{esssup } \psi'(x) \\ r &= \text{essinf } \psi'(x) . \end{aligned}$$

Es ist also für fast alle x

$$\begin{aligned} r &\leq \psi'(x) \leq R \\ R^{-1} &\leq \psi'(x) \leq r^{-1} \end{aligned}$$

und somit

- a) $\max\{R + R^{-1}, r + r^{-1}\} \leq \max g'(x) \leq M$
- b) $2\min\{r, R^{-1}\} < r + R^{-1} \leq \min g'(x) = m$.

Aus a) folgt

$$R, r^{-1} \leq \frac{1}{2}(M + \sqrt{M^2 - 4}) .$$

Aus b) folgt

$$\max(R, r^{-1}) \geq \frac{2}{m} .$$

Zusammen

$$\frac{2}{m} \leq \frac{1}{2}(M + \sqrt{M^2 - 4}) .$$

Wenn wir $m = 2 - |\lambda|$ und $M = 2 + |\lambda|$ einsetzen, ergibt das

$$(3|\lambda| - 4)|\lambda| \leq 0 .$$

Also $|\lambda| \leq 4/3$. □

Bemerkungen:

- 1) Satz 3.3.1 wurde von MacKay und Percival verbessert [19]. Sie können die Nichtexistenz von invarianten Kurven für $|\lambda| > 63/64$ zeigen.
- 2) Numerische Experimente von Greene [13] lassen vermuten, dass der kritische Wert, wo die letzte invariante Kurve verschwindet, $\lambda = 0.971635\dots$ ist.

Satz 3.3.2 *Es gibt ein $\epsilon > 0$, so dass für $|\lambda| < \epsilon$ für jede Diophantische Rotationszahl β , die Menge \mathcal{M}_β eine invariante Lipschitzkurve ist.*

Beweis. Wende das Twisttheorem 3.1.6 an. Die Funktion $\alpha(y)$ ist natürlich gegeben durch $\alpha(y) = y$. □

Bemerkung: Man hat heute explizite Schranken für ϵ : siehe [15]. Celletti und Chierchia haben kürzlich gezeigt [8], dass die Standardabbildung für $|\lambda| \leq 0.65$ analytische invariante Kurven besitzt.

Eine direkte Folge von Satz 12.7 und Satz 3.3.1 ist:

Satz 3.3.3 *Für jedes $\alpha \in \mathbf{R}$ existieren Mathermengen \mathcal{M}_α für die Standardabbildung. Für $\alpha = p/q$ gibt es periodische Bahnen vom Typ (q, p) , für irrationale α und $|\lambda| > 4/3$ projiziert \mathcal{M}_α auf eine Cantormenge.*

Wenn wir für zunehmende Werte von λ ein paar Bahnen der Standardabbildung betrachten, dann sehen wir folgendes. Für $\lambda = 0$, dem ungestörte Fall, liegen alle Bahnen auf invarianten Kurven. Für $\lambda = 0.2$ sehen wir im Nullpunkt $(0, 0)$ einen ellipischen Fixpunkt. Allmählich, z.B. für $\lambda = 0.4$, in der Nähe eines hyperbolischen Fixpunktes wächst ein Gebiet der Unstabilität. Für $\lambda = 0.6$ gibt es immer noch invariante KAM Tori. Dann, z.B. bei $\lambda = 0.8$ wird die Dynamik wird mehr und mehr ungeordnet. Für $\lambda = 1.0$ gibt beweisbar keine invarianten Kurven mehr die um den Torus herum gehen. $\lambda = 1.2$, der 'stochastische See' verdrängt die 'Stabilitätsinselchen'. Man vermutet, dass für grosse λ die Dynamik ergodisch ist auf einer Menge von positivem Mass. Für $\lambda = 10.0$ sieht man keine Inselchen mehr obwohl deren Existenz nicht ausgeschlossen ist.

3.3.2 Birkhoff Billiard

Auch von Mather [21] stammen Beispiele, wo die von einer geschlossene konvexe C^2 -Kurve Γ erzeugte Billiardabbildung keine invariante Kurve hat.

Satz 3.3.4 *(Mather) Hat Γ einen Flachpunkt, das heisst einen Punkt, wo die Krümmung verschwindet, so hat ϕ keine invariante Kurve.*

Zum Beispiel hat die Kurve gegeben durch $x^4 + y^4 = 1$ Flachpunkte.

Beweis. Wenn eine invariante Kurve für die Billiardabbildung ϕ existieren würde, so würde durch jeden Punkt P von Γ eine minimale Billiardbahn verlaufen. Wir zeigen, dass das für den Flachpunkt $P_0 \in \Gamma$ nicht stimmen kann. Gäbe es eine Minimale durch P_0 , so bezeichnen wir mit P_{-1} und P_1 die benachbarten Aufschlagpunkte der Billiardbahn. Wir zeichnen die Ellipse, die durch P_0 geht und die beiden Punkte P_{-1} und P_1 als Brennpunkte hat. In einer Umgebung von P_0 verläuft Γ ausserhalb dieser Ellipse, da P_0 ein Flachpunkt ist. Das heisst, dass für ein Punkt $P \in \Gamma$ in einer Umgebung von P_0 die Länge des Weges $P_{-1}PP_1$ grösser ist als die Länge des Weges $P_{-1}P_0P_1$, was im Widerspruch zur Minimalität der

Bahn steht. □

Definition: Man nennt eine stückweise glatte, geschlossene Kurve γ im Innern des Billiardtisches Γ eine **Kaustik**, falls eine Billiardbahn, die tangential zu γ verläuft, nach jeder Reflexion an Γ tangential bleibt zu γ .

Natürlich liefert die Existenz einer Kaustik eine invariante Kurve $\{(s, \psi(x))\}$ für das Billiardabbildung. Dabei ist $\psi(s)$ der Startwinkel an der Bande ist, mit dem die Kaustik gestreift wird.

Von Lazutkin und Douady wurde bewiesen [18, 11], dass man für eine glatte Billiardkurve Γ , die überall positive Krümmung hat, in der Nähe der Kurve Γ immer '**Flüstergalerien**' findet:

Satz 3.3.5 Ist die Krümmung der Kurve Γ überall positiv und ist $\Gamma \in C^6$, so gibt es in der Nähe der Kurve Γ immer Kaustiken, d.h. invariante Kurven der Billardabbildung in der Nähe von $y = 0$ und $y = \pi$.

Von Hubacher [17] stammt das Resultat, dass eine Diskontinuität in der Krümmung von Γ keine Kaustiken in der Nähe von Γ erlaubt:

Satz 3.3.6 Hat die Krümmung von Γ an mindestens einer Stelle eine Diskontinuität, so gibt es in der Nähe des Randes $y = -1$ und $y = 1$ von A keine invarianten Kurven.

Dieser Satz macht keine Aussage über die globale Nichtexistenz von invarianten Kurven der Billardabbildung in diesem Fall und in der Tat gibt es Beispiele, wo die Krümmung von Γ Diskontinuitäten hat, obwohl Kaustiken existieren.

Auch direkt aus Satz 3.2.7 haben wir folgendes Resultat:

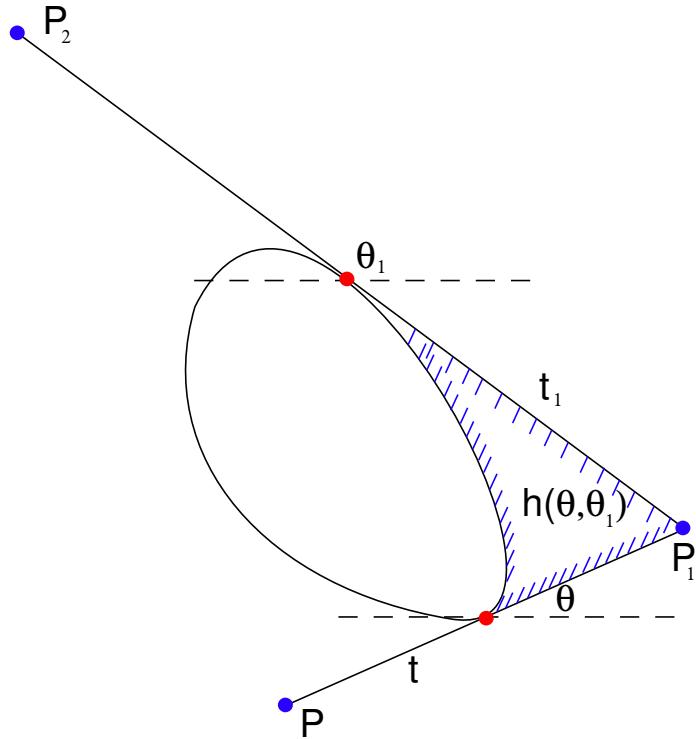
Satz 3.3.7 Zu jedem $\alpha \in (0, 1)$ gibt es Bahnen der Billardabbildung mit Rotationszahl α .

Zusatz: **Ergodisches Billard von Bunimovich.**

Definition: Eine flächenerhaltende Abbildung ϕ des Kreisrings A heisst **ergodisch**, falls jede unter ϕ -invariante messbare Teilmenge das Lebesgue Mass 0 oder 1 hat.

Ist ϕ ergodisch, so ist A ein Instabilitätsgebiet. Mehr noch: Es gibt Bahnen in A , die jedem Punkt in A beliebig nahe kommen. (Transitivität). Bunimovich hat in [7] Beispiele von ergodischen Billard's angegeben. Ergodische Billards haben keine invarianten Kurven. Anmerkung: Die Mathertheorie gilt aber nicht ohne Weiteres für das Bunimovich Billiard, dessen Twistabbildung zwar stetig aber nicht glatt ist.

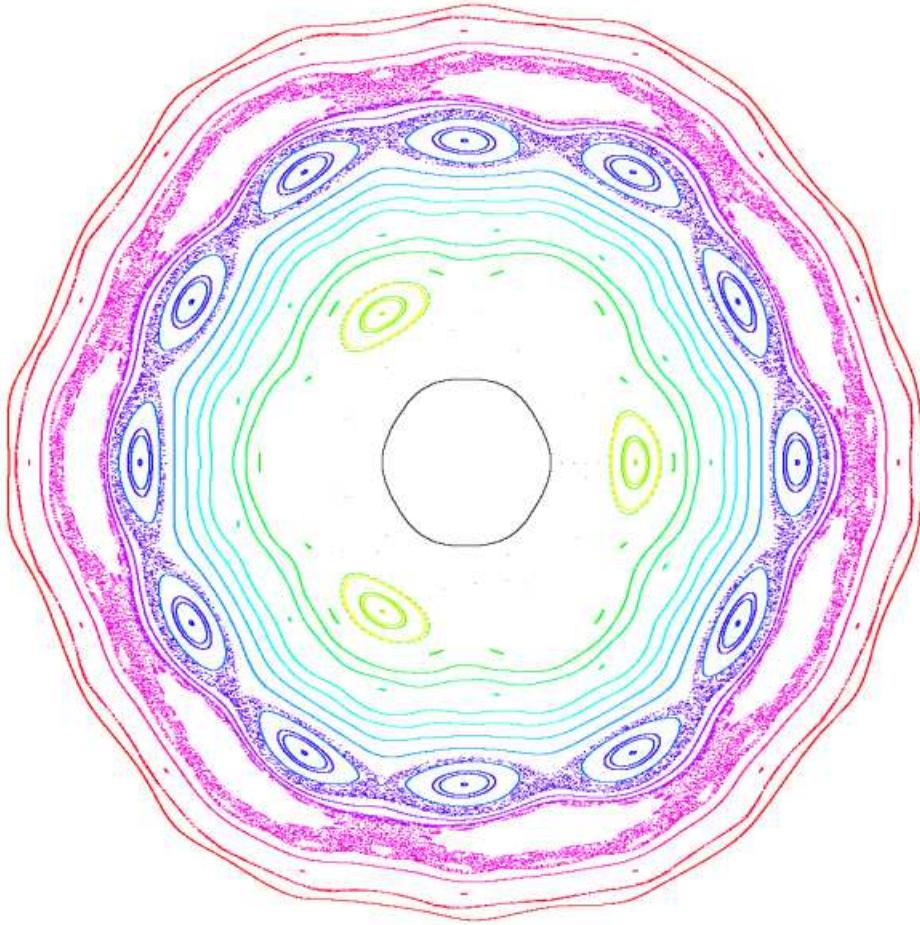
3.3.3 Das duale Billard



Das duale Billard wurde von B.H.Neumann vorgeschlagen (siehe [24]). Im Gegensatz zum Billard erzeugen affin äquivalente Kurven affin äquivalente Orbits. Mather's Satz 3.2.8 angewendet auf dieses Problem ergibt:

Satz 3.3.8

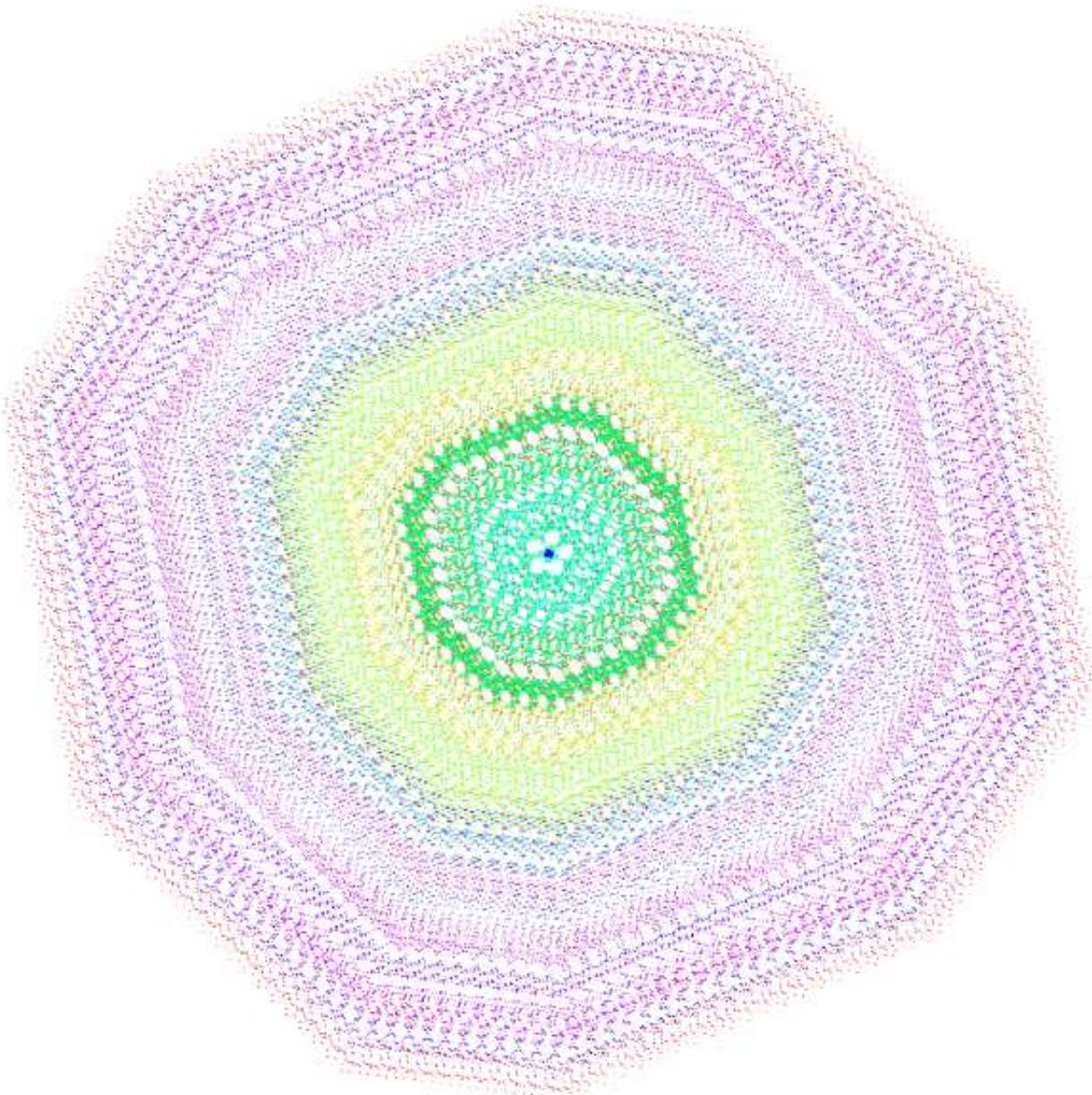
Falls Γ glatt ist, dann existiert zu jedem $\alpha \in (0, 1)$ ein Punkt ausserhalb der Kurve Γ , dessen Iterierte mit einem mittleren Winkel α um die Kurve herumdrehen.



Eine Folge einer Version des Twisttheorems 3.1.6 für kleine Twiststärken ist der folgende Satz:

Satz 3.3.9 *Ist die Kurve γ mindestens C^r mit $r > 4$, so ist jede Bahn des dualen Billards beschränkt.*

Sei Γ eine beliebige konvexe geschlossenen Kurve. Zu jedem Winkel $\psi \in [0, 2\pi)$ konstruieren wir den kleinsten Streifen berandet durch zwei Geraden mit Steigung $\arctan(\psi)$, der die ganze Kurve Γ enthält. Die beiden Geraden schneiden sich im Allgemeinen mit Γ in zwei Intervallen. Sei ξ der Vektor vom Mittelpunkt des ersten zum Mittelpunkt des zweiten Intervalls. Die konvexe geschlossene Kurve γ mit der Polardarstellung $r(\psi) = |\xi_\psi|$ heisst **Fundamentalkurve** von Γ .



Sie ist zentra尔斯ymmetrisch und kann desshalb als Rand der Einheitskugel im \mathbf{R}^2 zur Norm

$$\|x\| = \min\{\lambda \in \mathbf{R} \mid \lambda x \in \gamma\}$$

aufgefasst werden. Wir bennenen den Rand der Einheitskugel vom Dualraum vom Banachraum $(\mathbf{R}^2, \|\cdot\|)$ mit γ^* . Diese Kurve heisst **duale Fundamentalkurve von Γ** . Weit weg von der Kurve Γ bewegt sich eine Bahn in der Nähe einer Kurve, die die Form der dualen Fundamentalkurve von Γ hat. Ist Γ ein Polygon, so ist die duale Fundamentalkurve γ^* von Γ wieder ein Polygon. Haben die Ecken von γ rationale Koordinaten, so sagt man, Γ sei ein **rationales Polygon**. Von Vivaldi und Shaidenko [27] stammt der folgende Satz:

Satz 3.3.10

(Vivaldi und Shaidenko) Ist Γ ein rationales Polygon, so sind alle Bahnen des dualen Billards periodisch. Es gibt in diesem Fall invariante Kurven ähnlich der dualen Fundamentalkurve γ^ von Γ .*

Offenes Problem: Es ist unbekannt, ob es ein duales Billard gibt, sodass keine invariante Kurve existiert. In anderen Worten: ist es möglich dass für eine konvexe Kurve γ und einen Punkt P ausserhalb von γ die Folge $\phi_\gamma^n(P)$ unbeschränkt ist, wo ϕ_γ die duale Billiardabbildung ist?

3.4 Ein zweites Variationsproblem

Im Grunde könnte man für die Berechnung der Mathermengen im diskreten die ganze bisher entwickelte Theorie überspringen und einfach eine Funktion u untersuchen, die folgende Eigenschaften hat:

- (i) u ist monoton
- (ii) $u(\theta + 1) = u(\theta) + 1$.
- (iii) $h_1(u(\theta), u(\theta + \alpha)) + h_2(u(\theta - \alpha), u(\theta)) = 0$.

Man kann dies als Variationsproblem auffassen. Die Gleichung (iii) ist die Eulergleichung, die ein Extremum des Funktionalen

$$I_\alpha(u) = \int_0^1 h(u(\theta), u(\theta + \alpha)) d\theta$$

auf der Klasse \mathcal{N} der Funktionene, die (i) und (ii) genügen, erfüllen muss. Auf diese Weise hat Mather die Existenz von u^\pm nachgewiesen [20]. Eine Schwierigkeit bei diesem Ansatz besteht darin, die Eulergleichungen nachzuweisen. Formal geht das:

$$\frac{d}{d\epsilon} I_\epsilon(u + \epsilon v)|_{\epsilon=0} = \int_0^1 h_1(u, u(\theta + \alpha))v + h_2(u, u(\theta) + \alpha)v(\theta + \alpha) d\theta$$

$$= \int_0^1 [h_1(u, u(\theta + \alpha)) + h_2(u(\theta - \alpha), u(\theta))]v(\theta) d\theta$$

aber wir können in der Klasse \mathcal{N} nicht beliebig variiert, da sonst die Monotonie verloren gehen kann. Mather kommt jedoch mit einer geeigneten Parametrisierung zum Ziel.

Eine andere Möglichkeit wäre, das Variationsproblem zu regularisieren: Wir betrachten für jedes $\nu > 0$ das Funktional

$$I^{(\nu)}(u) = \int_0^1 \frac{\nu}{2} u_\theta^2 + h(u(\theta), u(\theta + \alpha)) d\theta$$

und suchen ein Minimum in der Klasse der Funktionen u , für die $u(\theta) - \theta$ ein Wahrscheinlichkeitsmass ist auf S^1 :

$$u - Id \in M^1(\mathbf{T}^1).$$

Die Euler'sche Gleichung zu diesem Problem ist eine Differential-Differenzen Gleichung

$$-\nu u_{\theta\theta} + h_1(u(\theta), u(\theta + \alpha)) + h_2(u(\theta + \alpha), u(\theta)) = 0$$

für die man zeigen kann, dass das Minimum u_θ^* regulär und monoton ist:

$$u_\nu^*(\theta) - \theta \in C^2(S^1), \quad du_\nu^*(\theta)/d\theta > 0.$$

Wegen der Schwach-Kompaktheit der Einheitskugel von $M^1(S^1)$ konvergiert für $\nu_k \rightarrow 0$ die Folge $u_{\nu_k}^*$ schwach gegen ein u^* und u^* erfüllt alle anfangs gestellten Forderungen (i) bis (iii).

Bemerkung. Diese Vorgehen könnte vielleicht auch zur numerischen Bestimmung der Mathermengen gebraucht werden.

3.5 Minimale Geodäten auf \mathbf{T}^2

Minimale Geodäten auf dem Torus sind schon 1932 von Hedlund [14] untersucht worden. In [5] hat Bangert die Resultate von Hedlund auf die obige Theorie zurückgeführt und wesentlich erweitert. Wir werden in diesem Paragraphen diese Reduktion beschreiben und für die Beweise auf Bangert verweisen. Auf dem zweidimensionalen Torus $\mathbf{T}^2 = \mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$ sei die Metrik

$$ds^2 = g_{ij}(q)dq^i dq^j, \quad g_{ij} \in C^2(\mathbf{T}^2)$$

positiv definit gegeben. Die Länge einer stückweise stetigen Kurve $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^2$ wird gemessen mit

$$\begin{aligned} L(\gamma) &= \int_a^b F(q, \dot{q}) dt \\ F(q, \dot{q}) &= ([g_{ij}(q)\dot{q}^i \dot{q}^j])^{1/2} \end{aligned}$$

und die Distanz von zwei Punkten p und q ist

$$d(q, p) = \inf\{L(\gamma) \mid \gamma(a) = p, \gamma(b) = q\}.$$

Man sagt einer solchen Metrik **Finslermetrik**. Eine Finslermetrik ist eine Metrik definiert durch d , wo F homogen vom Grad 1 ist und die Legendrebedingung erfüllt. Die oben definierte Metrik verallgemeinert die **Riemannsche Metrik**, bei der g_{ij} symmetrisch vorausgesetzt wird.

Definition: Eine Kurve $\gamma : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2$ heisst **minimale Geodäte** falls für alle $[a, b] \subset \mathbf{R}$ gilt

$$d(\gamma(a), \gamma(b)) = L(\gamma)|_a^b.$$

Wir bezeichnen wieder mit \mathcal{M} die Menge der minimalen Geodäten auf \mathbf{R}^2 .

Schon Morse hatte 1924 minimale Geodäten auf Überlagerungen von 2-dimensionalen Riemann'schen Mannigfaltigkeiten vom Geschlecht ≥ 2 untersucht [23]. Hedlund's Resultat aus 1934 war:

- a) Zwei minimale Geodäten schneiden sich höchstens einmal.
- b) Es gibt eine Konstante D , die nur von g abhängig ist, sodass jede minimale Geodäte in einem Streifen der Breite $2D$ liegt: \exists Konstanten A, B, C mit $A^2 + B^2 = 1$, sodass für jede minimale Geodäte $\gamma : t \mapsto (q_1(t), q_2(t))$ gilt

$$|Aq_1(t) + Bq_2(t) + C| \leq D, \forall t \in \mathbf{R}.$$

- c) In jedem Streifen dieser Art existiert eine Geodäte: $\forall A, B, C$ mit $A^2 + B^2 = 1$, \exists minimale Geodäte $\gamma : t \mapsto (q_1(t), q_2(t))$

$$|Aq_1(t) + Bq_2(t) + C| \leq D, \forall t \in \mathbf{R}$$

mit Rotationszahl

$$\alpha = -A/B = \lim_{t \rightarrow \infty} q_2(t)/q_1(t)$$

die auch den Wert ∞ annehmen kann.

d) $\gamma \in \mathcal{M}$ hat keine Selbstschnitte auf dem Torus.

e) Falls α irrational ist, so ist \mathcal{M}_α die Menge der minimalen Geodäten mit Rotationszahl α wohlgeordnet.

Satz 3.5.1

Wie stehen diese Resultate in Verbindung mit der in Kapitel II entwickelten Theorie? Das Variationsproblem, das wir früher studiert haben, war gegeben durch

$$I(\gamma) = \int_{\gamma} F(t, x, \dot{x}) dt = \int_{\gamma} F(q_1, q_2, \frac{dq_2}{dq_1}) dq_1 ,$$

wo $(t, x(t))$ ein Graph einer Funktion war. Jetzt betrachten wir beliebige Kurven $(q_1(t), q_2(t))$, die sich im Allgemeinen nicht als Graph $q_2 = \phi(q_1)$ schreiben lassen. Auch wenn wir $q_2 = \phi(q_1)$ hätten, wie zum Beispiel im Falle der Euklidischen Metrik

$$F = [1 + (\frac{dq_2}{dq_1})^2]^{1/2}$$

so hat man nicht quadratisches Wachstum. Wie diese Problematik umgangen werden kann, hat Bangert gezeigt. Wir nehmen den folgenden Existenzsatz als gesichert an: (vgl [4] 6.1, 6.2).

Satz 3.5.2

a) Zwei beliebige Punkte p und q auf \mathbf{R}^2 können durch ein minimales geodätisches Segment verbunden werden. d.h.
 $\exists \gamma^* : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^2, s \mapsto q^*(s)$ mit $q^*(a) = p, q^*(b) = q$ und
 $L(\gamma^*) = d(p, q)$.

b) In jeder Homotopieklassse $\{\gamma : s \mapsto q(s) \mid q(s+L) = q(s) + j, j \in \mathbf{Z}^2\}$ gibt es mindestens eine Minimale. Diese hat keine Selbstschnitte auf \mathbf{T}^2 .

Sei $\gamma : s \mapsto q(s) = (q_1(s), q_2(s))$ eine Geodäte parametrisiert durch die Bogenlänge s . Nach dem eben angegebenen Satz, gibt es ein minimales $\gamma^* : s \mapsto q^*(s)$ mit

$$q^*(s+L) = q^*(s) + e_2 ,$$

wobei e_2 der Basisvektor der zweiten Koordinate ist. Da diese Minimale keine Selbstschnitte hat, können wir eine Koordinatentransformation machen, sodass in den neuen Koordinaten

$$q_1(s) = 0, q_2(s) = s$$

ist. Damit ist

$$(k, s) = q^*(s) + k, \forall k \in \mathbf{Z} .$$

Definiere

$$h(\xi, \eta) := \bar{d}((0, \xi), (1, \eta))$$

wobei \bar{d} die Metrik d in den neuen Koordinaten ist. Die Länge eines gebrochenen Bogenstücks zwischen p und q , das aus minimalen Geodätensegmenten zusammengesetzt wird, ist gegeben durch

$$\sum_{j=1}^r h(x_j, x_{j+1})$$

und das Minimum

$$\min_{x_1=p}^{x_r=q} \sum_{j=1}^r h(x_j, x_{j+1})$$

wird angenommen von einem minimalen Geodätensegment, das $(1, x_1)$ und (r, x_2) verbindet.

Die folgende Aussage reduziert das Problem auf die frühere Theorie. Vergleiche 6.4 in [4].

Satz 3.5.3 Die Funktion h erfüllt die Eigenschaften (i') bis (iv').

Wir können die Resultate so zusammensammeln (vergleiche [4] 6.5 bis 6.10.)

Satz 3.5.4

- a) Für jedes $\alpha \in \mathbf{R}$ existiert eine minimale Geodäte mit Rotationszahl α .
- b) Minimale Geodäten haben keine Selbstschnitte auf dem Torus.
- c) Periodische minimale Geodäten sind Minimale in ihrer Homotopieklassse.
- d) Zwei verschiedene periodische minimale Geodäten der gleichen Periode schneiden sich nicht.
- e) Eine minimale Geodäte γ mit Rotationszahl α ist entweder periodisch oder enthalten in einem Streifen gebildet von zwei periodischen minimalen Geodäten γ^+ und γ^- der gleichen Rotationszahl. In jeder Zeitrichtung ist γ asymptotisch zu genau einer der Geodäten γ^+ oder γ^- . Es gibt zwischen γ^+ und γ^- keine weiteren periodischen minimalen Geodäten. (Sie sind benachbart).
- f) In jedem Streifen gebildet durch zwei benachbarte minimale periodische Geodäten γ^- und γ^+ der Rotationszahl α gibt es in beiden Richtungen heterokline Verbindungen.
- g) Zwei verschiedene minimale Geodäten mit irrationaler Rotationszahl schneiden sich nicht.
- h) Für α irrational gibt es zwei Fälle:

Fall A): Durch jeden Punkt von \mathbf{R}^2 geht eine rekurrente minimale Geodäte der Rotationszahl α .

Fall B): Die rekurrenten minimalen Geodäten dieser Rotationszahl schneiden jede minimale periodische Geodäte in einer Cantormenge.

- i) Jede nichtrekurrente minimale Geodäte der irrationalen Rotationszahl α ist eingeschlossen zwischen zwei minimalen Geodäten, die beide vorwärts und rückwärts asymptotisch sind.
- j) Jede nichtrekurrente minimale Geodäte kann durch periodische minimale Geodäten approximiert werden.

3.6 Hedlund's Metrik auf \mathbf{T}^3

Wir beschreiben zum Schluss noch eine Metrik auf dem dreidimensionalen Torus, deren Konstruktion auf Hedlund zurückgeht und die zeigen soll, dass die obige Theorie auf $n = 2$ beschränkt ist. Der Grund liegt darin, dass sich nicht parallele Geraden im \mathbf{R}^2 schneiden im Gegensatz zum \mathbf{R}^3 , wo es natürlich windschiefe Ge-

raden gibt.

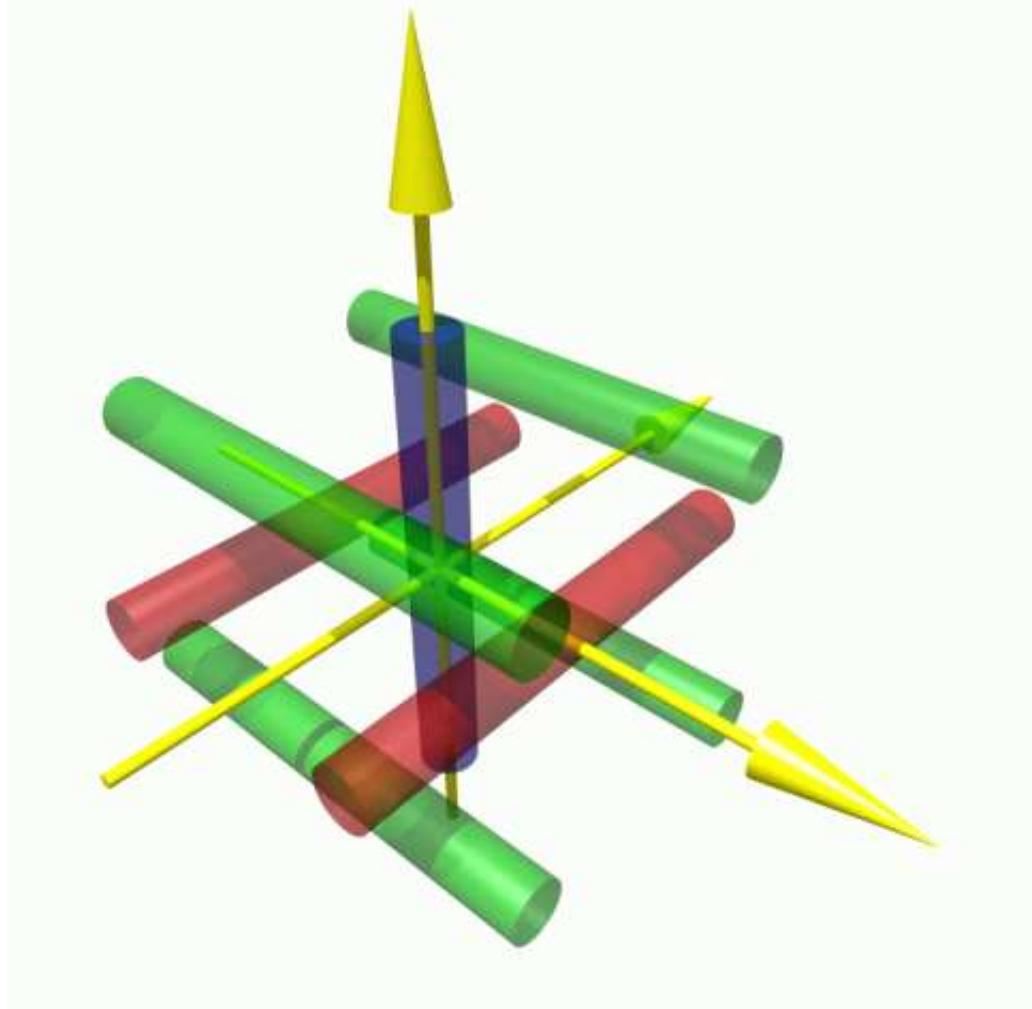
Die Hauptpunkte sind folgende:

- 1) Es ist im Allgemeinen falsch, dass es für jede Richtung eine Minimale in diese Richtung gibt. Es gibt ein Beispiel, wo nur 3 asymptotische Richtungen existieren.
- 2) Es ist im Allgemeinen falsch, dass falls $\gamma^*(s + L) = \gamma^*(s) + k$ minimal in dieser Klasse $\mathcal{M}(L, k)$ ist, auch $\gamma^*(s + NL) = \gamma^*(s) + NL$ minimal in $\mathcal{M}(NL, Nk)$ ist, denn sonst wäre γ^* eine globale Minimale und somit asymptotisch zu einer der drei ausgezeichneten Richtungen.

Immerhin gibt es aber mindestens $\dim(H_1(\mathbf{T}^3, \mathbf{R})) = 3$ Minimale [5], denn es gilt allgemein:

Satz 3.6.1 *Auf einer kompakten Mannigfaltigkeit M mit $\dim(M) \geq 3$ und nicht kompakter Überlagerung, gibt es mindestens $\dim(H_1(M, \mathbf{R}))$ minimale Geodäten.*

Das Beispiel:



Auf $\mathbf{R}^3 = \mathbf{R}^3/\mathbf{Z}^3$ definieren wir die Metrik

$$g_{ij}(x) = \eta^2(x)\delta_{ij},$$

wobei $\eta \in C^\infty(\mathbf{T}^3)$, $\eta > 0$ ist.

Wir brauchen 3 geschlossene Kurven γ_1 , γ_2 und γ_3 auf \mathbf{T}^3 , die sich paarweise nicht schneiden. (e_i bezeichne die Einheitsvektoren in \mathbf{R}^3).

$$\gamma_1 : t \mapsto te_1$$

$$\begin{aligned}\gamma_2 : t &\mapsto te_2 + \frac{1}{2}te_1 \\ \gamma_3 : t &\mapsto te_3 + \frac{1}{2}te_2 + \frac{1}{2}te_1 \\ \Gamma &= \bigcup_{j=1}^3 \gamma_j.\end{aligned}$$

Sei $0 < \epsilon < 10^{-2}$ fest gegeben. Die ϵ -Umgebungen $U_\epsilon(\gamma_i)$ bilden dünne Kanäle in \mathbf{T}^3 , die sich nicht schneiden. Bezeichne noch

$$U(\gamma) = \bigcup_{j=1}^3 U_\epsilon(\gamma_j)$$

das ganze Kanalsystem.

Sei $0 < \epsilon_i \leq \epsilon < 10^{-2}$ für $i = 1, 2, 3$ und $\eta \in C^\infty(\mathbf{T}^3)$ mit

- i) $\eta(x) \leq 1 + \epsilon, \forall x \in \mathbf{T}^3$
- ii) $\eta(x) \geq 1, \forall x \in \mathbf{T}^3 \setminus U(\gamma)$
- iii) $\eta(x) \geq \epsilon_i, \forall x \in U(\gamma_i) \setminus \gamma_i$.
- iv) $\eta(x) = \epsilon_i, \forall x \in \gamma_i$.

Die Resultate sind nun:

Satz 3.6.2

- a) Die Gesamtlänge der Segmente ausserhalb $U(\gamma)$ für Minimale ist < 4 .
- b) Jede Minimale wechselt von einem Kanal zum anderen höchstens 4 mal.
- c) Jede Minimale ist für $s \rightarrow \pm\infty$ asymptotisch zu einem der γ_i .
- d) Jede der γ_i ist eine Minimale.

Beweis. Zunächst betrachten wir beliebige stückweise C^1 Kurven, die wir mit der Bogenlänge s parametrisieren:

$$\gamma : [a, b] \mapsto \mathbf{R}^3, s \mapsto \gamma(s)$$

mit $\eta^2 |\dot{\gamma}(s)|^2 = 1$, sodass

$$L(\gamma) = \int_a^b \eta |\dot{\gamma}| ds = \int_a^b ds = b - a.$$

Wir bezeichnen mit A die Menge der Zeitpunkte, wo γ ausserhalb der Kanäle ist

$$A = \{s \in [a, b] : \gamma(s) \notin U(\Gamma)\}$$

und sei

$$\gamma(A) = \int_A ds \leq L(\gamma) .$$

Schliesslich brauchen wir den Vektor $x = \gamma(b) - \gamma(a)$. Der Beweis wird nun von zwei Lemmas unterbrochen. \square

(Abschätzung der Zeit ausserhalb der Kanäle) Für jedes stückweise C^1 -Kurvenstück $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^3$ gilt

Lemma 3.6.3

$$\gamma(A) \leq \frac{11}{10}[L(\gamma) - \sum_{j=1}^3 \epsilon_j |x|_j] + 10^{-2} .$$

Beweis. Sei für $j = 1, 2, 3$

$$\begin{aligned} A_j &= \{s \in [a, b] \mid \gamma(s) \in U_\epsilon(\gamma_j)\} \\ A &= \{s \in [a, b] \mid \gamma(s) \notin U(\Gamma)\} \end{aligned}$$

sodass $[a, b] = A \cup A_1 \cup A_2 \cup A_3$ ist. Wenn n_j die Anzahl der Besuche von γ in $U_\epsilon(\gamma_j)$ bezeichnet, gilt, da der Querschnitt von $U_\epsilon(\gamma_j) \leq 2\epsilon$ ist

$$\begin{aligned} \left| \int_{A_j} \dot{\gamma}_j \, ds \right| &\leq 2n_j \epsilon, i \neq j \\ \left| \int_{A_j} \dot{\gamma}_j \, ds \right| &\geq \left| \int_{[a, b]} \dot{\gamma}_j \, ds \right| - \left| \int_{[a, b] \setminus A_j} \dot{\gamma}_j \, ds \right| = |x_j| - \left| \int_{[a, b] \setminus A_j} \dot{\gamma}_j \, ds \right| \\ \left| \int_{[a, b] \setminus A_j} \dot{\gamma}_j \, ds \right| &\leq \int_A |\dot{\gamma}_j| \, ds + \sum_{i \neq j} \left| \int_{A_i} \dot{\gamma}_j \, ds \right| \geq \int_A \eta |\dot{\gamma}_j| \, ds + 2(n_i + n_k) \epsilon \\ &= \lambda(A) + 2(n_i + n_k) \epsilon, \quad (\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}) . \end{aligned}$$

Das heisst

$$\lambda(A_j) = \int_{A_j} \eta |\dot{\gamma}| \, ds \geq \epsilon_j \left| \int_{A_j} \dot{\gamma}_j \, ds \right| \geq \epsilon_j \{|x_j| - \lambda(A) - 2(n_i + n_k) \epsilon\} .$$

Addition ergibt

$$\begin{aligned} L(\gamma) &= \lambda(A) + \sum_{j=1}^3 \lambda(A_j) \\ &\geq \lambda(A) + \sum_j \epsilon_j |x_j| - 3\epsilon \lambda(A) - 4\epsilon^2 (n_1 + n_2 + n_3) \\ &\geq (1 - 3\epsilon) \lambda(A) + \sum_{j=1}^3 [\epsilon_j |x_j| - 4\epsilon^2 \eta_j] . \end{aligned}$$

Andererseits muss es $n_1 + n_2 + n_3 - 1$ Wechsel zwischen Kanälen geben, während denen γ ausserhalb von $U_\epsilon(\Gamma)$ ist. Da der Abstand zwischen zwei Kanälen $\geq (1/2 - 2\epsilon)$ ist, folgt

$$\lambda(A) \geq \left(\sum_{j=1}^3 \eta_j - 1 \right) \left(\frac{1}{2} - 2\epsilon \right),$$

das heisst

$$\sum_{j=1}^3 \eta_j \leq \lambda(A) \left(\frac{1}{2} - 2\epsilon \right)^{-1}$$

sodass

$$\begin{aligned} L(\gamma) &\geq \lambda(A) [1 - 3\epsilon - 4\epsilon^2 \left(\frac{1}{2} - 2\epsilon \right)^{-1} + \sum_{j=1}^3 \epsilon_j |x_j|] - 4\epsilon^2 \\ &\geq \frac{10}{11} (\lambda(A) + \sum_{j=1}^3 \epsilon_j |x_j|) - 4\epsilon^2 \end{aligned}$$

und damit

$$\lambda(A) \leq \frac{11}{10} (L(\gamma) - \sum_{j=1}^3 \epsilon_j |x_j|) + 10^{-2}.$$

□

(Abschätzung der Länge eines minimalen Kurvenstücks)

Lemma 3.6.4

$$L(\gamma) = d(\gamma(a), \gamma(b)) \leq \sum_{j=1}^3 \epsilon_j |x_j| + 3(1 + \epsilon).$$

Beweis. Die Länge eines minimalen Weges von a bis zum Kanal $U_\epsilon(\gamma_j)$ oder eines Weges, der von $U_\epsilon(\gamma_j)$ zu $U_\epsilon(\gamma_i)$ wechselt, ist kleiner als $(1 + \epsilon)$. Die Länge des Weges in einem der Kanäle $U_\epsilon(\gamma_i)$, um in der i -ten Koordinatenrichtung zu laufen, ist kleiner oder gleich $\epsilon_j |x_j|$. Also ist

$$L(\gamma) \leq 3(1 + \epsilon) + \sum_{j=1}^3 \epsilon_j |x_j|.$$

□

Beweis. Fortsetzung vom Beweis von Satz 3.6.2:

a) folgt nun direkt aus Lemma 3.6.3 und Lemma 3.6.4:

$$\lambda(A) \leq \frac{11}{10}(L(\gamma) - \sum_{j=1}^3 \epsilon_j |x_j|) + 10^{-2} \leq \frac{11}{10}3(1+\epsilon) + 10^{-2} < 4 .$$

b) Sei $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^2$ ein minimales Segment, sodass $\gamma(a)$ und $\gamma(b) \in U(\Gamma)$. Es ist

$$L(\gamma) \leq 2(1+\epsilon) + 2\epsilon + \sum_{j=1}^3 \epsilon_j |x_j| .$$

Wenn N die Anzahl der Kanalwechsel ist, so ist

$$N\left(\frac{1}{2} - 2\epsilon\right) \leq \lambda(A) \leq \frac{11}{10}[2(1+\epsilon) + 2\epsilon + 10^{-2}]$$

das heisst $N < 5$ und damit $N \leq 4$.

c) Da wir nur endlich viele Wechsel haben, verläuft eine Minimale γ schliesslich in einem Kanal $U_\epsilon(\gamma_k)$ und es ist nicht schwer zu sehen, dass dann γ asymptotisch zu γ_k sein muss (Übungsaufgabe). \square

Bemerkung.

Es gilt (Übungsaufgabe) für alle $p, x \in \mathbf{R}^3$ sogar

$$\sum_{i=1}^3 \epsilon_i |x_i| - 4 \leq d(p, p+x) \leq \sum_{i=1}^3 \epsilon_i |x_i| + 4 .$$

und damit existiert die **stabile Metrik**

$$\tilde{d}(p, p+x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{d(p, p+Nx)}{N} = \sum_{j=1}^3 \epsilon_j |x_j| .$$

Die **stabile Norm** auf $H_1(\mathbf{T}^3, \mathbf{R})$ ist, wenn γ eine geschlossene Kurve in \mathbf{T}^3 , die ein Element in $H_1(\mathbf{T}^3, \mathbf{R})$ repräsentiert)

$$\|v\| = \tilde{d}(\gamma(0), \gamma(L))$$

hat eine Einheitskugel in der Form eines Oktaeders. Es stellt sich heraus, dass im Allgemeinen die Existenz und die Eigenschaften von minimalen Geodäten im engen Zusammenhang mit der Konvexität der Einheitskugel der stabilen Norm steht. (Siehe [5]).

3.7 Zusatzaufgaben zum Kapitel III

1) Verifiziere, dass im Billard und im dualen Billard die erzeugenden Funktionen die Eigenschaften (0') bis (iv') haben.

2) Zeige, dass in Hedlund's Beispiel eine minimale Geodäte immer asymptotisch ist zu einem der γ_k ist.

3) Beweise, dass die Kurven γ_k , $k = 1, 2, 3$ in Hedlund's Beispiel Minimale sind.

4) Verifiziere in Hedlunds Beispiel

$$\sum_{i=1}^3 \epsilon_i |x_i| - 4 \leq d(p, p+x) \leq \sum_{i=1}^3 \epsilon_i |x_i| + 4 .$$

Literaturverzeichnis

- [1] S. Angenent. Monotone recurrence relations their Birkhoff orbits and topological entropy. To appear in Ergodic theory and dynamical systems.
- [2] S. Angenent. The periodic orbits of an area preserving twist map. *Commun. Math. Phys.*, 115:353–374, 1988.
- [3] V.I. Arnold. *Mathematical Methods of classical mechanics*. Springer Verlag, New York, second edition, 1980.
- [4] V. Bangert. Mather sets for twist maps and geodesics on tori. *Dynamics Reported*, 1:1–55, 1988.
- [5] V. Bangert. Minimal geodesics. Preprint Mathematisches Institut Bern, 1988.
- [6] M. Brown and W.D. Neuman. Proof of the Poincaré-Birkhoff fixed point theorem. *Mich. Math. J.*, 24:21–31, 1975.
- [7] L.A. Bunimovich. On the ergodic properties of nowhere dispersing billiards. *Commun. Math. Phys.*, 65:295–312, 1979.
- [8] A. Celletti and L. Chierchia. Construction of analytic KAM surfaces and effective stability bounds. *Commun. Math. Phys.*, 118:119–161, 1988.
- [9] A.M. Davie. Singular minimizers in the calculus of variations. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. 1, 2 (Berkeley, Calif., 1986)*, pages 900–905. AMS, Providence RI, 1987.
- [10] J. Denzler. Mather sets for plane hamiltonian systems. *ZAMP*, 38:791–812, 1987.
- [11] R. Douady. Application du théorème des tores invariantes. These 3 ème cycle, Université Paris VII, 1982.
- [12] G.D. Birkhoff. Surface transformations and their dynamical applications. *Acta Math.*, 43:1–119, 1920.

- [13] J. Greene. A method for determining a stochastic transition. *J. Math. Phys.*, 20:1183–1201, 1979.
- [14] G.A. Hedlund. Geodesics on a two-dimensional riemannian manifold with periodic coefficients. *Annals of Mathematics*, 32:719–739, 1932.
- [15] M.R. Herman. *Sur les courbes invariantes par les difféomorphismes de l’anneau. Vol. 1*, volume 103 of *Astérisque*. Société Mathématique de France, Paris, 1983.
- [16] E. Hopf. Closed surfaces without conjugate points. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, 34:47–51, 1948.
- [17] A. Hubacher. Instability of the boundary in the billiard ball problem. *Commun. Math. Phys.*, 108:483–488, 1987.
- [18] V.F. Lazutkin. The existence of caustics for a billiard problem in a convex domain. *Math. Izvestija*, 7:185–214, 1973.
- [19] R.S. MacKay and I.C. Percival. Converse KAM: theory and practice. *Commun. Math. Phys.*, 98:469–512, 1985.
- [20] J. Mather. Existence of quasi-periodic orbits for twist homeomorphism of the annulus. *Topology*, 21:457–467, 1982.
- [21] J.N. Mather. Glancing billiards. *Ergod. Th. Dyn. Sys.*, 2:397–403, 1982.
- [22] J.N. Mather. Nonexistence of invariant circles. *Ergod. Th. Dyn. Sys.*, 4:301–309, 1984.
- [23] M. Morse. A fundamental class of geodesics on any closed surface of genus greater than one. *Trans. Am. Math. Soc.*, 26:25–65, 1924.
- [24] J. Moser. *Stable and random Motion in dynamical systems*. Princeton University Press, Princeton, 1973.
- [25] J. Moser. Break-down of stability. In *Nonlinear dynamics aspects of particle accelerators (Santa Margherita di Pula, 1985)*, volume 247 of *Lect. Notes in Phys.*, pages 492–518, 1986.
- [26] J. Moser. On the construction of invariant curves and Mather sets via a regularized variational principle. In *Periodic Solutions of Hamiltonian Systems and Related Topics*, pages 221–234, 1987.
- [27] F. Vivaldi and A. Shaidenko. Global stability of a class of discontinuous dual billiards. *Commun. Math. Phys.*, 110:625–640, 1987.

Appendix

3.8 Literaturhinweise

Every problem in the calculus of variations has a solution, provided the word solution is suitably understood.

David Hilbert

Seit dem Entstehung dieses Scripts ist einiges in diesem Forschungsbereich über Dynamischen Systeme passiert. In diesem Anhang werden einige Literaturhinweise gegeben.

Zu den klassischen Resultaten der Variationsrechnung kann speziell [26, 32] empfohlen werden. Weiter inzwischen erschienene Bücher der Variationsrechnung sind [31, 71]. Vorlesungsnotizen von Hildebrandt [30], die damals als Fotokopien erhältlich waren, sind in [26] eingegangen, ein Werk, das dem Leser zu empfehlen ist, der mehr über die klassischen Variationsprobleme lesen will. Schliesslich soll auch auf Moser's Übersichtsartikel [60] hingewiesen werden.

Mehr über geodätische Flüsse befindet sich in [19, 12, 61]. Im Zusammenhang zum Satz von Hopf seien noch Arbeiten über integrale geodätische Flüsse auf dem zwei-dimensionalen Torus mit Liouvillemetriken $g_{ij}(x, y) = (f(x) + h(y))\delta_{ij}$ erwähnt (siehe [8, 53, 64]). Diese Metriken haben zusätzlich zum Energieintegral $H(x, y, p, q) = (p^2 + q^2)/4(f(x) + h(y))$ das quadratische Integral $F(x, y, p, q) = (h(y)p - f(x)q)/4(f(x) + h(y))$. Eine Auflisten aller integrbaren geodätischer Flüsse scheint noch nicht möglich (siehe [76]). Für einen weiteren Satz vom Hopf-Typ konsultiere man [62]. Das Hopftheorem für höhere Dimensionen (unter dem Namen Hopfvermutung bekannt) ist in [18] bewiesen worden.

Mehr über Aubry-Mather theorie kann in [47] gefunden werden. Mather's erste Arbeit ist in [46] nachzulesen. Später hat Mather das Variationsproblem neu für invariante Masse formuliert und weiter untersucht (siehe z.B. [49, 51, 50, 52]).

Die Koordinaten zu Angenent's Arbeit sind [3]. Die erwähnte Arbeit von Bangert ist in [9] erschienen.

Die Konstruktion von Aubry-Mathermengen mittels Abschluss von periodischen Minimalen ist in [33, 34] ausgeführt. Für einen alternativen Beweis von Teilen der Mathertheorie, siehe [27]. Dieser Ansatz liefert zwar nicht alle Resultate der Mathertheorie, kann jedoch verallgemeinert werden [39]. Für höher-dimensionale Mathertheorie, siehe [66]. Für Billiards liefert die mittlere minimale Wirkung Invarianten [67]. Das in dieser Vorlesung erwähnte regularisiertes Variationsprinzip ist in [57, 58] im Detail beschrieben. Für die Ursprünge des in dieser Vorlesung beschriebenen Ansatzes sind auch [55, 23] relevant. Die Sicht von Aubry-Mathermengen als abgeschlossene Mengen von schwachen Lösungen der Hamilton-Jacobi-Gleichungen $u_t + H(x, t, u)_x = 0$, (das ist eine forcierte Burger-Gleichung $u_t + uu_x + V_x(x, t) = 0$ im Falle $H(x, t, p) = p^2/2 + V(x, t)$), wird in [24] behandelt. Die Arbeit von Mané über Mathertheorie die in [44] angekündigt wurde, ist nach seinem Tod in [45] erschienen.

Der Satz von Poincaré-Birkhoff, der zuerst von Birkhoff in [13] bewiesen wurde, hat später neue Beweise erhalten [17, 48, 1].

Für die Aubry-Mather Theorie in höheren Dimensionen sind viele Fragen offen. In [65] wird die mittlere Wirkung in höheren Dimensionen betrachtet. Das höher-dimensionale Frenkel-Kontorova-Modell ist in [66] behandelt.

Eine gute Einführung in die Theorie des Billiards ist [72]. Für einen sorgfältiger Beweis für die Existenz von Klassen von periodischen Bahnen im Billiard siehe [77]. Ein Satz für Billiards, der eng mit dem Satz von Hopf verwandt ist, wurde in [11] bewiesen und in [78] vereinfacht. Eine manchmal Birkhoff attributierte Frage ist, ob jedes glatte und strikt konvexe Billiard integabel ist. Das Problem scheint immer noch offen. Die Frage hängt auch von der Definition der Integrität ab. Birkhoff machte zwar Andeutungen [14, 15], scheint aber die Frage selbst nie aufgeschrieben zu haben. Die Frage wurde von H. Poritski in [63] explizit gestellt und zum ersten Mal angegangen. Die Vermutung sollte desshalb eher **Birkhoff-Poritski-Vermutung** heißen. Für mehr Literatur und Resultate über Kaustiken von Billiards kann man [72, 37, 28] konsultieren.

Mehr über die Standardabbildung kann in den Textbüchern [68, 20, 35, 42] nachgelesen werden. Die Abbildung erschien um 1960 im Zusammenhang mit der Dynamik von Elektronen in Microtrons [22]. Sie wurde zuerst von Taylor im Jahre 1968 numerisch studiert und von Chirikov in 1969 (siehe [25, 21]). Die Abbildung erscheint auch unter dem Namen 'gekickter Rotator' und beschreibt Gleichgewichtszustände im Frenkel-Kontorova Modell [40, 6].

Das Aufbrechen der invarianten Tori, der Übergang von KAM Mathermengen zu Cantorus-Mathermengen im Speziellen, ist ein aktives Forschungsgebiet. Die Frage, ob der MacKay Fixpunkt existiert ist noch offen. In einem etwas grösseren Raum von 'kommutierenden Paaren' ist die Existenz eines periodischen Orbits der Periode 3 gezeigt worden [70]. Ein neuer Ansatz auf die Frage des Aufbrechens von invarianten Kurven macht Renormalisierung im Raum von Hamiltonischen Flüssen [38]. Auch dort wird ein nichttrivialer Fixpunkt vermutet. (Koch hat kürzlich einen Beweis der Existenz vom MacKay Fixpunkt angekündigt). Für Renormalisierungsansätze zum Verstehen des Aufbrechens von invarianten Kurven konsultiere man man [43, 69, 70, 38].

Im Variationsproblem für Twistabbildungen kann man auch für allgemeinere kritische Punkte suchen. Eine elegante Konstruktion von kritischen Punkten stammt von Aubry und Abramovici [7, 4, 5]. Siehe [36] für eine Formulierung mittels Percival Funktional.

Ein Teil der Theorie des Aufbrechens von invarianten Kurven wird heute 'Converse KAM-Theorie' genannt.

Das duale Billiard wird manchmal auch 'Aussenbilliard' oder 'Moser Billiard' genannt. Letzterer Name kommt daher, dass Moser das System oft in Artikeln oder Vorträgen propagiert hat, z.B. im Artikel [54] oder im Buch [54]. Die Frage, ob ein konkaves Aussenbilliard mit unbeschränkter Bahn existiert, ist noch offen. Neueres über dieses dynamischen System findet sich in [73, 74, 75]. Der Beweis von Vivaldi und Shaidenko hatte eine Lücke. Ein neuer Beweis war in [29] zu finden, siehe auch [16].

Die verschiedenen heute bekannten Ansätze zur Mathertheorie sind:

- Aubry's Ansatz via minimaler Grundzustände ist historisch der erste und zeigt die Verbindungen der Thematik mit der statistischen Mechanik und der Festkörperphysik.
- Mather's Konstruktion ist ein neueres Stück Variationsrechnung.
- Katok's Konstruktion über Birkhoff periodische Bahnen liefert den vielleicht technisch einfachste Beweis.
- Golés Beweis liefert zwar schwächerer Resultate, kann jedoch verallgemeinert werden.
- Bangert knüpft die Theorie an klassische Variationsrechnung und an die Theorie der Geodäten an.
- Moser's Viskositätsbeweis ist von klassische Methoden der Theorie der partiellen Differentialgleichungen motiviert.

Im Gegensatz zu Variationsproblemen, bei denen kompakte Lösungen von differenzierbaren Funktionalen gesucht werden, kann man, wie das Thema in diesem Skript zeigt, die Mathertheorie als ein Variationsproblem auffassen. Es werden dabei nichtkompakte Lösungen gesucht, die minimal sind bezüglich kompakten Störungen. Bei solchen Variationsproblemen ist der Beweis der **Existenz** von Lösungen schon mit einiger Arbeit verbunden.

Im weiteren Rahmen führt die Theorie von nichtkompakten Minimalen in die Störungstheorie nicht-kompakter pseudo-holomorpher Kurven auf Tori mit fast komplexer Struktur [59], sowie zur Theorie elliptischer partieller Differentialgleichungen [56] oder der Theorie von minimalen Blätterungen [10].

Wie das Beispiel von Hedlund zeigt, ist die Mathertheorie nicht ohne weiteres auf höhere Dimensionen erweiterbar. Es stellt sich zum Beispiel die Frage, was mit den Minimalen passiert, die auf dem flachen integrablen drei-dimensionalen Torus existieren, wenn die Metrik zur Hedlund-Metrik deformiert wird oder ob es eine Mathertheorie gibt, die in der Nähe von flachen Tori anwendbar ist. In [41] wurde die Hedlundmetrik eingehend untersucht und die Existenz von vielen Lösungen des geodätischen Flusses sowie Nichtintegrabilität bewiesen. Für Metriken vom Hedlund Typ auf allgemeineren Mannigfaltigkeiten konsultiere man [2].

Literaturverzeichnis

- [1] S. Alpern and V.S. Prasad. Fixed points of area-preserving annulus homeomorphisms. In *Fixed point theory and applications (Marseille, 1989)*, pages 1–8. Longman Sci. Tech., Harlow, 1991.
- [2] B. Ammann. Minimal geodesics and nilpotent fundamental groups. *Geom. Dedicata*, 67:129–148, 1997.
- [3] S. Angenent. Monotone recurrence relations their Birkhoff orbits and topological entropy. *Ergod. Th. Dyn. Sys.*, 10:15–41, 1990.
- [4] S. Aubry. The concept of anti-integrability: definition, theorems and applications to the Standard map. In K.Meyer R.Mc Gehee, editor, *Twist mappings and their Applications*, IMA Volumes in Mathematics, Vol. 44. Springer Verlag, 1992.
- [5] S. Aubry. The concept of anti-integrability: definition, theorems and applications to the Standard map. In *Twist mappings and their applications*, volume 44 of *IMA Vol. Math. Appl.*, pages 7–54. Springer, New York, 1992.
- [6] S. Aubry and P.Y. Le Daeron. The discrete Frenkel Kontorova model and its extensions. I. Exact results for the ground-states. *Physica D*, 8:381–422, 1983.
- [7] S. Aubry and G.Abramovici. Chaotic trajectories in the Standard map. the concept of anti-integrability. *Physica D*, 43:199–219, 1990.
- [8] I.K. Babenko and N.N. Nekhoroshev. Complex structures on two-dimensional tori that admit metrics with a nontrivial quadratic integral. *Mat. Zametki*, 58:643–652, 1995.
- [9] V. Bangert. Minimal geodesics. *Ergod. Th. Dyn. Sys.*, 10:263–286, 1990.
- [10] V. Bangert. Minimal foliations and laminations. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, (Zürich, 1994)*, pages 453–464. Birkhäuser, Basel, 1995.

- [11] M. Bialy. Convex billiards and a theorem of E.Hopf. *Math. Z.*, 214:147–154, 1993.
- [12] M.L. Bialy. Aubry-mather sets and birkhoff's theorem for geodesic flows on the two-dimensional torus. *Commun. Math. Phys.*, 126:13–24, 1989.
- [13] G. D. Birkhoff. ?? *Acta Math.*, 47:297–311, 1925.
- [14] G.D. Birkhoff. On the periodic motions of dynamical systems. *Acta Math.*, 50:359–379, 1950.
- [15] G.D. Birkhoff. *Dynamical systems*. Colloquium Publications, Vol. IX. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1966.
- [16] C. Blatter. Rationale duale Billards. *Elem. Math.*, 56:147–156, 2001.
- [17] M. Brown and W.D. Neuman. Proof of the Poincaré-Birkhoff fixed point theorem. *Mich. Math. J.*, 24:21–31, 1975.
- [18] D. Burago and S. Ivanov. Riemannian tori without conjugate points are flat. *Geom. Funct. Anal.*, 4:259–269, 1994.
- [19] M. Bialy (Byalyi) and L. Polterovich. Geodesic flows on the two-dimensional torus and phase transitions- commensurability-noncommensurability. *Funktional. Anal. i Prilozhen*, 20:9–16, 1986. in Russian.
- [20] P. Le Calvez. Propriétés dynamiques des difféomorphismes de l'anneau et du tore. *Astérisque*, 204:1–131, 1991.
- [21] B.V. Chirikov. A universal instability of many-dimensional oscillator systems. *Phys. Rep.*, 52:263–379, 1979.
- [22] B.V. Chirikov. Particle confinement and adiabatic invariance. *Proc. R. Soc. Lond. A*, 413:145–156, 1987.
- [23] J. Denzler. Studium globaler minimaler eines variationsproblems. Diplomarbeit ETH Zürich, WS 86/87, betreut von J.Moser.
- [24] Weinan E. Aubry-Mather theory and periodic solutions of the forced Burgers equation. *Commun. Pure Appl. Math.*, 52:811–828, 1999.
- [25] C. Froeschlé. A numerical study of the stochasticity of dynamical systems with two degree of freedom. *Astron. Astroph.*, 9:15–23, 1970.
- [26] M. Giaquinta and S. Hildebrandt. *Calculus of variations. I,II*, volume 310 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften*. Springer-Verlag, Berlin, 1996.
- [27] C. Golé. A new proof of Aubry-Mather's theorem. *Math. Z.*, 210:441–448, 1992.

- [28] E. Gutkin and A. Katok. Caustics for inner and outer billiards. *Commun. Math. Phys.*, 173:101–133, 1995.
- [29] Eugene Gutkin and Nándor Simányi. Dual polygonal billiards and necklace dynamics. *Commun. Math. Phys.*, 143:431–449, 1992.
- [30] S. Hildebrandt. Variationsrechnung und Hamilton’sche Mechanik. Vorlesungsskript Sommersemester 1977, Bonn, 1977.
- [31] H. Hofer and E. Zehnder. *Symplectic invariants and Hamiltonian dynamics*. Birkhäuser advanced texts. Birkhäuser Verlag, Basel, 1994.
- [32] J. Jost and X. Li-Jost. *Calculus of Variations*, volume 64 of *Cambridge studies in advanced mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1998.
- [33] A. Katok. Some remarks on Birkhoff and Mather twist map theorems. *Ergod. Th. Dyn. Sys.*, 2:185–194, 1982.
- [34] A. Katok. Periodic and quasiperiodic orbits for twist maps. In *Dynamical systems and chaos (Sitges/Barcelona, 1982)*, pages 47–65. Springer, 1983.
- [35] A. Katok and B. Hasselblatt. *Introduction to the modern theory of dynamical systems*, volume 54 of *Encyclopedia of Mathematics and its applications*. Cambridge University Press, 1995.
- [36] O. Knill. Topological entropy of some Standard type monotone twist maps. *Trans. Am. Math. Soc.*, 348:2999–3013, 1996.
- [37] O. Knill. On nonconvex caustics of convex billiards. *Elemente der Mathematik*, 53:89–106, 1998.
- [38] H. Koch. A renormalization group for hamiltonians, with applications to kamo tori. *Ergod. Th. Dyn. Sys.*, 19:475–521, 1999.
- [39] H. Koch, R. de la Llave, and C. Radin. Aubry-Mather theory for functions on lattices. *Discrete Contin. Dynam. Systems*, 3:135–151, 1997.
- [40] T. Kontorova and Y.I. Frenkel. ?? *Zhurnal Eksper. i Teoret. Fiziki*, 8:1340–1349, 1938. reference given in [6].
- [41] M. Levi. Shadowing property of geodesics in Hedlund’s metric. *Ergod. Th. Dyn. Sys.*, 17:187–203, 1997.
- [42] A.J. Lichtenberg and M.A. Lieberman. *Regular and Chaotic Dynamics*, volume 38 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer Verlag, New York, second edition, 1992.
- [43] R.S. MacKay. *Renormalisation in area-preserving maps*, volume 6 of *Advanced Series in Nonlinear Dynamics*. World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 1993.

- [44] R. Mané. Ergodic variational methods: new techniques and new problems. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol.1,2 (Zürich, 1994)*, pages 1216–1220. Birkhäuser, Basel, 1995.
- [45] R. Mané. Lagrangian flows: the dynamics of globally minimizing orbits. *Bol. Soc. Brasil. Mat. (N.S.)*, 28:141–153, 1997.
- [46] J. Mather. Existence of quasi-periodic orbits for twist homeomorphism of the annulus. *Topology*, 21:457–467, 1982.
- [47] J. Mather and G. Forni. Action minimizing orbits in Hamiltonian systems. In *Transition to chaos in classical and quantum mechanics (Montecatini Terme, 1991)*, volume 1589 of *Lecture Notes in Math.*, pages 92–186. Springer, Berlin, 1994.
- [48] J.N. Mather. Area preserving twist homeomorphism of the annulus. *Comment. Math. Helv.*, 54:397–404, 1979.
- [49] J.N. Mather. Minimal measures. *Comment. Math. Helv.*, 64:375–394, 1989.
- [50] J.N. Mather. Action minimizing invariant measures for positive definite Lagrangian systems. *Math. Z.*, 207:169–207, 1991.
- [51] J.N. Mather. Variational construction of orbits of twist diffeomorphisms. *Journal of the AMS*, 4:207–263, 1991.
- [52] J.N. Mather. Variational construction of connecting orbits. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 43:1349–1386, 1993.
- [53] V.S. Matveev. Square-integrable geodesic flows on the torus and the Klein bottle. *Regul. Khaoticheskaya Din.*, 2:96–102, 1997.
- [54] J. Moser. Is the solar system stable? *The Mathematical Intelligencer*, 1:65–71, 1978.
- [55] J. Moser. Recent developments in the theory of Hamiltonian systems. *SIAM Review*, 28:459–485, 1986.
- [56] J. Moser. Quasi-periodic solutions of nonlinear elliptic partial differential equations. *Bol. Soc. Brasil. Mat. (N.S.)*, 20:29–45, 1989.
- [57] J. Moser. Smooth approximation of Mather sets of monotone twist mappings. *Comm. Pure Appl. Math.*, 47:625–652, 1994.
- [58] J. Moser. An unusual variational problem connected with Mather’s theory for monotone twist mappings. In *Seminar on Dynamical Systems (St. Petersburg, 1991)*, pages 81–89. Birkhäuser, Basel, 1994.

- [59] J. Moser. On the persistence of pseudo-holomorphic curves on an almost complex torus (with an appendix by Jürgen Pöschel). *Invent. Math.*, 119:401–442, 1995.
- [60] J. Moser. Dynamical systems-past and present. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. I (Berlin, 1998)*, pages 381–402, 1998.
- [61] G.P. Paternain. *Geodesic Flows*. Birkhäuser, Boston, 1999.
- [62] I.V. Polterovich. On a characterization of flat metrics on 2-torus. *J. Dynam. Control Systems*, 2:89–101, 1996.
- [63] H. Poritsky. The billiard ball problem on a table with a convex boundary—an illustrative dynamical problem. *Annals of Mathematics*, 51:456–470, 1950.
- [64] E.N. Selivanova and A.M. Stepin. On the dynamic properties of geodesic flows of Liouville metrics on a two-dimensional torus. *Tr. Mat. Inst. Steklova*, 216:158–175, 1997.
- [65] W. Senn. Strikte Konvexität für Variationsprobleme auf dem n-dimensionalem Torus. *Manuscripta Math.*, 71:45–65, 1991.
- [66] W.M. Senn. Phase-locking in the multidimensional Frenkel-Kontorova model. *Math. Z.*, 227:623–643, 1998.
- [67] K-F. Siburg. Aubry-Mather theory and the inverse spectral problem for planar convex domains. *Israel J. Math.*, 113:285–304, 1999.
- [68] Ya. G. Sinai. *Topics in ergodic theory*, volume 44 of *Princeton Mathematical Series*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1994.
- [69] A. Stirnemann. Renormalization for golden circles. *Commun. Math. Phys.*, 152:369–431, 1993.
- [70] A. Stirnemann. Towards an existence proof of MacKay’s fixed point. *Commun. Math. Phys.*, 188:723–735, 1997.
- [71] M. Struwe. *Variational Methods*. Springer Verlag, 1990.
- [72] S. Tabachnikov. *Billiards*. Panoramas et synthèses. Société Mathématique de France, 1995.
- [73] S. Tabachnikov. On the dual billiard problem. *Adv. Math.*, 115:221–249, 1995.
- [74] S. Tabachnikov. Asymptotic dynamics of the dual billiard transformation. *J. Stat. Phys.*, 83:27–37, 1996.
- [75] S. Tabachnikov. Fagnano orbits of polygonal dual billiards. *Geom. Dedicata*, 77:279–286, 1999.

- [76] I.A. Taĭmanov. Topology of Riemannian manifolds with integrable geodesic flows. *Trudy Mat. Inst. Steklov.*, 205:150–163, 1994.
- [77] D.V. Treshchev V.V. Kozlov. *Billiards*, volume 89 of *Translations of mathematical monographs*. AMS, 1991.
- [78] M. Wojtkowski. Two applications of jacobi fields to the billiard ball problem. *J. Diff. Geom.*, 40:155–164, 1994.

Index

- Überlagerungsfläche, 22
- Aktionsintegral, 33
- Angenent, 114
- Aubry, 4
- Aubry-Mather Theorie, 4
- Aussenbilliard, 103
- Autonom, 11
- Bahn
 - minimal, 110
 - Periodisch, 22
 - periodisch , 111
 - vom Typ α , 22
- Bahnen
 - heteroklin, 87
 - homoklin, 87
- Bangert, 5
- Benachbare Minimale, 86
- Billiard, 20, 21
- Billiard
 - Dual, 103
- Brechungsindex, 37
- Cantormenge, 84
- Christoffelsymbol, 14
- Clairot, 39
- Clairot'sches Integral, 19
- Conley, 114
- Conley theorie, 114
- Denjoy theory, 84
- Diophantisches, 108
- Duales Billiard, 103
- Einstein'sche Summationskonvention,
 - 14
- Energie, 11
- Enge Umgebung, 28
- Ergodisch, 118
- Ergodizität, 118
- Eulergleichungen , Eindimensionales Variationsproblem8, Integrierte8
- Extremale, 8
- Extremale
 - elliptisch , 90
 - hyperbolisch , 90
 - parabolisch , 90
- Extremalenfeld, 28
- Exzessfunktion von Weierstrass, 31
- Fall
 - A), 69
 - B), 69
- Finslermetrik, 124
- Flüstergalerien, 118
- Frenkel-Kontorova-modell, 138
- Fundamentalgleichungen der Variationsrechnung, 30
- Funktion
 - autonom , 11
- Geodäte, 15
- Geodäte
 - minimale , 124
- Geodätische Strömung auf Ellipsoid,
 - 98
- Gleichung
 - Hamilton-Jacobi, 35

- Goldener Torus, 101
 Hamilton-Jacobi Gleichung, 35
 Hamilton-Jacobi-Methode, 97
 Hamilton-Jacobigleichung, 35
 Hamilton-Jacobigleichungen, 44
 Hedlund, 4, 124
 Hedlund's Metrik, 128
 Heterokline Bahnen, 87
 Hilbert'sches invariantes Integral, 31
 Hill'sche Gleichung, 42
 homogen, 16
 Homokline Bahnen, 81, 87
 Instabilitätsgebiet, 107
 Integral
 Clairot, 19
 Integralinvariante von Poincaré-Cartan, 34
 Integrierte Eulergleichungen, 8
 Invariante Fläche, 34
 Invariante Kurve, 106
 Invarianter Torus, 43
 Invariantes Integral von Hilbert, 31
 Jacobigleichungen, 23
 Jacobimetrik, 17
 KAM Theorie, 43, 78
 KAM Tori, 101
 Kaustik, 118
 Koerzivität, 46
 Kompaktheitsprinzip, 46
 Konjugierter Punkt, 23
 Kurve
 Selbstschnitt, 43
 Lückenbreite, 80
 Lavrentiev Phänomen, 13
 Legendretransformation, 33
 Limesmenge, 78
 Lipschitz Extremalenfeld, 72
 Mather, 4
 Mathermenge, 84, 113
 Mathieugleichung, 42
 Maupertius Prinzip, 16
 Mayerfeld, 36
 Menge der Minimalen, 50
 Metrik
 Finsler, 124
 Riemannsche, 124
 Minimale
 benachbart, 86
 Definition, 7
 regulär , 8
 Minimale Bahn, 110
 Minimale der Rotationszahl α , 111
 Minimale Geodäten, 123
 Minimlae Geodäte, 124
 Minimum , Schwaches28, starkes28
 Mittellinie, 88
 Mittlere Steigung, 60
 Mittlere Wirkung, 91
 Monotone Twistabbildung, 22, 98
 Morse, 4, 124
 Morse theorie, 114
 Nichtlineares Pendel, 42
 Norm
 Stabile , 133
 Optik, 37
 Ordnung auf \mathbb{Z}^2 , 59
 Partielle Ordnung auf den Minimalen, 112
 Pendel, 42
 Periodische Bahn, 22
 periodische Bahn , 111
 Periodische Minimale, 50
 Poincaréabbildung, 4
 Prinzip von Maupertius, 16
 Quadratisches Wachstum, 42
 Reguläre Minimale, 8
 Regularitaetssatz, 8
 Rekurrent, 82
 Rekurrente Trajektorie, 113

- Riccati Gleichung, 72
Riemannsche Mannigfaltigkeit, 14
Riemannsche Metrik, 124
Rotationsfläche, 19
Rotationszahl, 60

Satz
 Bangert , 128
 Birkhoff, 106
 Hedlund, 124
 Hopf, 44
 Hubacher , 118
 Mather, 117
 Poincaré-Birkhoff, 104
 Tonelli, 50
 twist theorem, 108
Satz von Clairaut, 39
Schneiden von periodischen Bahnen,
 111
Schwache Minimale, 28
Selbstschnitt, 43
Sobolevraum, 45
Störungsrechnung, 78
Stabile Norm, 133
Standardabbildung, 114
Starke Minimale, 28
sternförmig, 106
Sturm'sche Sätze, 27

Topologie , C^1 65
 C^r , 107
Torus
 KAM, 101
 Parametrisierung, 18
Trajektorie
 rekurrent, 113
Twistabbildung, 104
Twisttheorem, 108

Umgebung
 enge , 28
 weite, 28

Weierstrass'sche Exzessfunktion, 31