

Die Laplace-Transformation

1.1 Definition der Laplace-Transformation

Die LAPLACE-Transformation kann in gewisser Weise als eine Verallgemeinerung der FOURIER-Transformation angesehen werden. Der augenfälligste Unterschied besteht darin, daß im Frequenzbereich statt der reellen Variablen ω bei der LAPLACE-Transformation die komplexe Variable $p = \sigma + j\omega$ auftritt. Die LAPLACE-Transformierte eines Signals $x(t)$ wird definiert durch

$$X(p) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-pt} dt. \quad (1.1)$$

Da die LAPLACE-Transformierte $X(p)$ für $p = j\omega$ übergeht in die FOURIER-Transformierte $X(j\omega)$, durften wir zur Kennzeichnung beider Funktionen dasselbe Symbol $X(\cdot)$ benutzen. Neben den Bezeichnungen LAPLACE-Transformierte oder Spektralfunktion wird für $X(p)$ auch häufig der Begriff Bildfunktion verwendet. Dementsprechend wird statt vom Frequenzbereich gelegentlich auch vom Bildbereich gesprochen. Setzen wir $p = \sigma + j\omega$ bzw.

$$e^{-pt} = e^{-\sigma t} e^{-j\omega t}$$

in (1.1) ein, so sehen wir, daß (1.1) auch wie folgt interpretiert werden kann:

$$X(\sigma + j\omega) = \mathcal{F} \{ x(t) e^{-\sigma t} \}. \quad (1.2)$$

Die LAPLACE-Transformierte von $x(t)$ ist also nichts anderes als die FOURIER-Transformierte der Funktion $x(t) e^{-\sigma t}$. Um die Bedeutung dieser Aussage zu erkennen, betrachten wir als Beispiel das in Bild 1.1a dargestellte Signal

$$x(t) = \varepsilon(t) e^{\alpha t}, \quad \alpha \in \mathbb{R} \quad (1.3)$$

das nur für $\alpha \leq 0$ eine FOURIER-Transformierte besitzt, nämlich

$$X(j\omega) = \begin{cases} \frac{1}{-\alpha + j\omega} & \text{für } \alpha < 0 \\ \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} & \text{für } \alpha = 0. \end{cases}$$

Die LAPLACE-Transformierte des durch (1.3) definierten Signals existiert hingegen für alle reellen α und ist gegeben durch

$$X(p) = \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon(t) e^{\alpha t} e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} e^{-(p-\alpha)t} dt = \frac{1}{p - \alpha}, \quad (1.4)$$

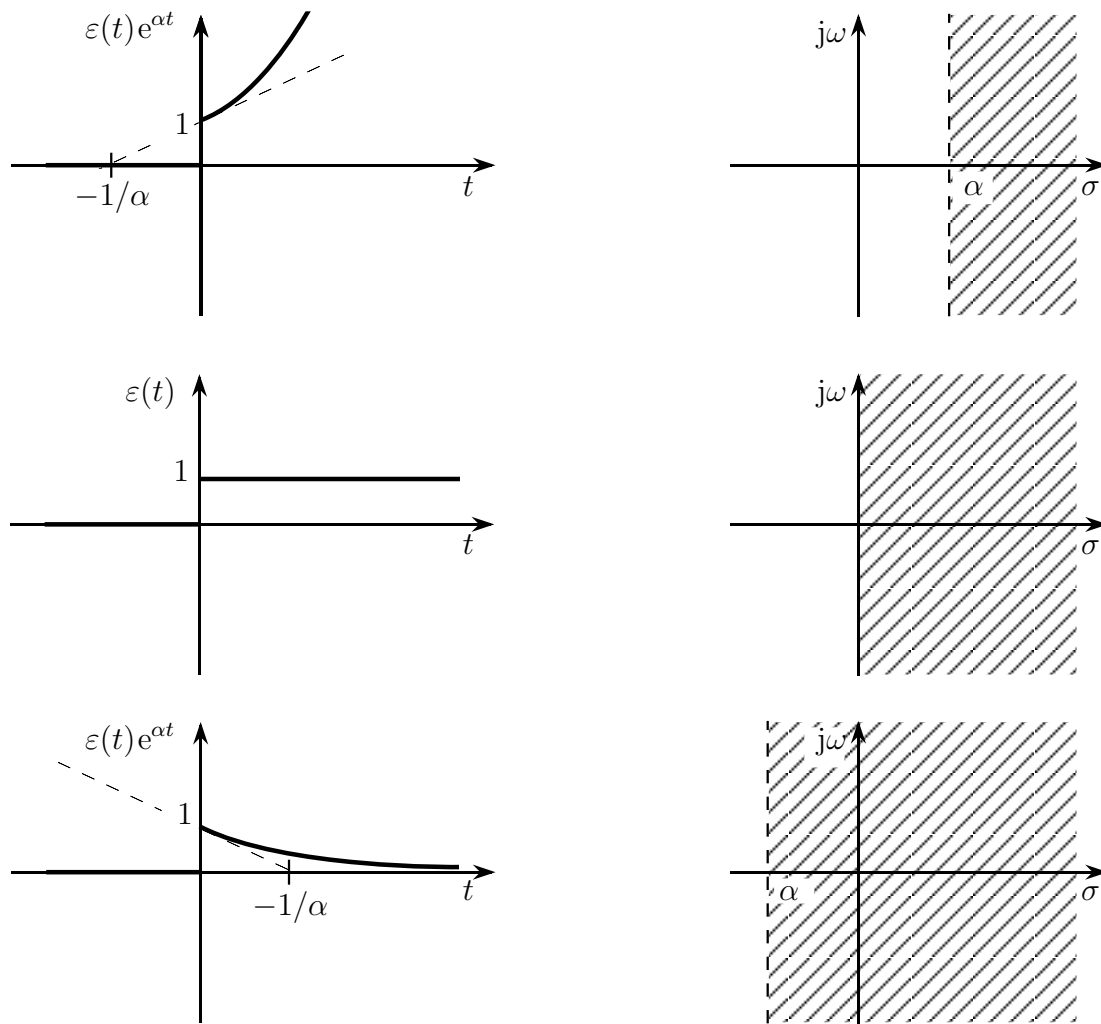


Bild 1.1: Verlauf des Signals $x(t) = \varepsilon(t)e^{\alpha t}$ für unterschiedliche Vorzeichen von α und zugehörige Konvergenzgebiete des LAPLACE-Integrals

wobei allerdings zu beachten ist, daß das Integral nur für $\operatorname{Re}(p - \alpha) > 0$ bzw. $\operatorname{Re} p > \alpha$ konvergiert. Das durch diese Ungleichung definierte Gebiet, das in Bild 1.1b für $\alpha > 0$, $\alpha = 0$ und $\alpha < 0$ dargestellt ist, wird als *Konvergenzgebiet* des LAPLACE-Integrals bezeichnet. Damit die Umkehrung der LAPLACE-Transformation eindeutig vorgenommen werden kann, muß dieses Gebiet jeweils bekannt sein. Die Angabe des Formelausdrucks, wie etwa hier $X(p) = (p - \alpha)^{-1}$, reicht zur Berechnung des zugehörigen Zeitsignals nicht aus. Beispielsweise wird die LAPLACE-Transformierte des in Bild 1.2a dargestellten Signals

$$\tilde{x}(t) = -\varepsilon(-t)e^{\alpha t}, \quad (1.5)$$

d. h.

$$\tilde{X}(p) = -\int_{-\infty}^0 e^{-(p-\alpha)t} dt,$$

ebenfalls durch den Ausdruck $(p - \alpha)^{-1}$ repräsentiert, während das zugehörige Konvergenzgebiet, das in Bild 1.2b für $\alpha < 0$, $\alpha = 0$ und $\alpha > 0$ dargestellt ist, aber durch $\operatorname{Re} p < \alpha$ gegeben ist. Man überzeugt sich leicht, daß die FOURIER-Transformierte des Signals (1.5) nur

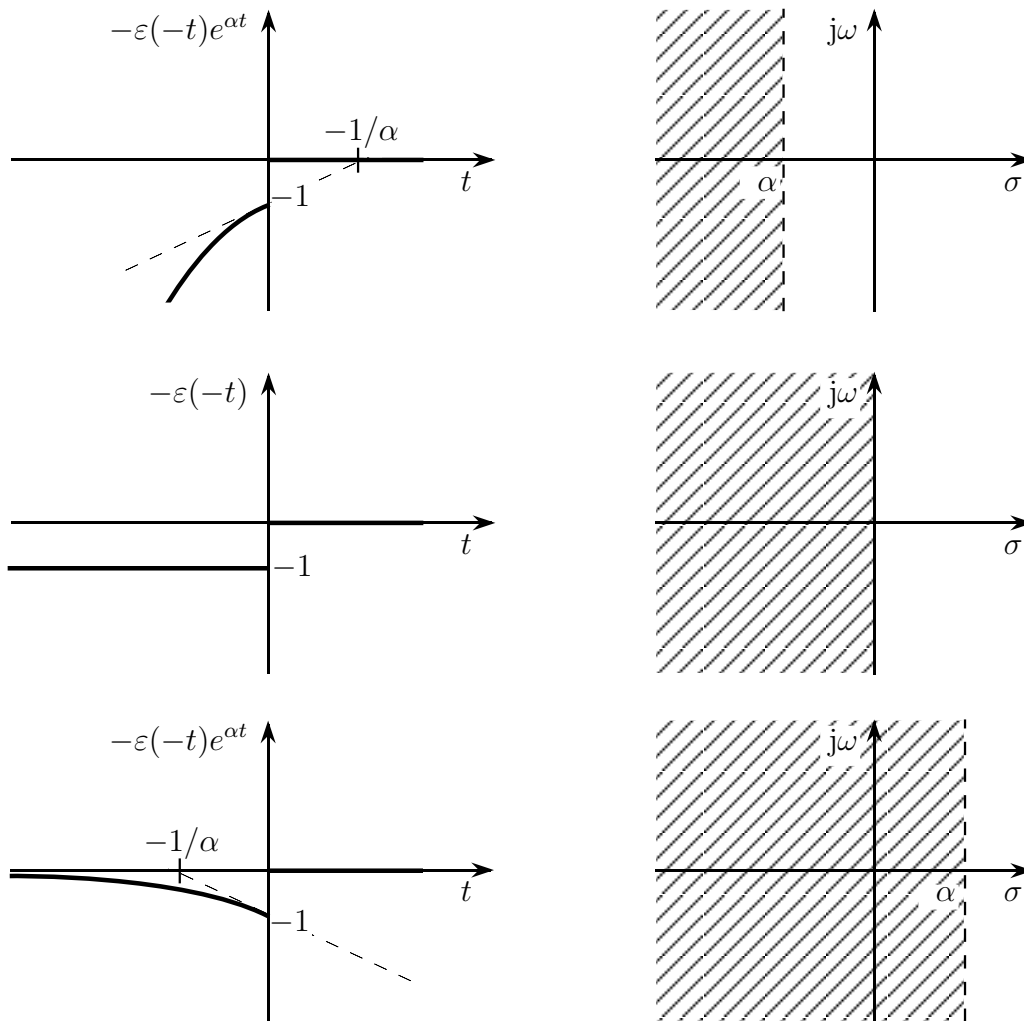


Bild 1.2: Verlauf des Signals $\tilde{x}(t) = -\varepsilon(-t)e^{\alpha t}$ für unterschiedliche Vorzeichen von α und zugehörige Konvergenzgebiete des LAPLACE-Integrals

für $\alpha \geq 0$ existiert und durch

$$\tilde{X}(j\omega) = \begin{cases} \frac{1}{-\alpha + j\omega} & \text{für } \alpha > 0 \\ -\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} & \text{für } \alpha = 0 \end{cases}$$

gegeben ist.

Die beiden Beispiele (1.3) und (1.5) zeigen, daß Signale, die keine FOURIER-Transformierte haben, weil sie etwa im Unendlichen exponentiell ansteigen, dennoch eine LAPLACE-Transformierte besitzen können. Aus diesem Grunde wird die LAPLACE-Transformation häufig als die allgemeinere der beiden Transformationen angesehen. Allerdings gibt es auch Signale, für die das Umgekehrte zutrifft. Beispielsweise besitzen die Signale

$$x_1(t) = \text{si}(\Omega t) \quad \text{und} \quad x_2(t) = \text{sgn}(t)$$

jeweils eine FOURIER-Transformierte, nämlich

$$X_1(j\omega) = \frac{\pi}{\Omega} \text{rect}(\omega/\Omega) \quad \text{bzw.} \quad X_2(j\omega) = \frac{2}{j\omega},$$

aber keine LAPLACE-Transformierte. Auch die Exponentialschwingung $x(t) = e^{j\Omega t}$ und damit jedes periodische Signal hat zwar eine FOURIER-, aber keine LAPLACE-Transformierte.

Schon hieraus wird erkennbar, daß beide Integraltransformationen jeweils ihre eigene Daseinsberechtigung haben. Während die FOURIER-Transformation stärker in der nachrichtentechnischen Systemtheorie Anwendung findet, wird die LAPLACE-Transformation vorzugsweise in der Regelungstechnik eingesetzt, und zwar vor allem in Form der sogenannten *einseitigen LAPLACE-Transformation*.

Bei dieser Transformation wird die Integration nur über die positive t -Achse ausgeführt, d. h., daß die Transformationsvorschrift dann wie folgt lautet:

$$\boxed{X(p) = \int_0^{\infty} x(t) e^{-pt} dt} . \quad (1.6)$$

Da wir uns im weiteren ausschließlich mit der einseitigen LAPLACE-Transformation befassen werden, wollen wir auf die Nennung des Attributs „einseitig“ von nun an verzichten. Den Zusammenhang (1.6) drücken wir symbolisch durch

$$\boxed{X(p) = \mathcal{L}\{x(t)\}} \quad (1.7)$$

aus. Für hinreichend große Werte von $\operatorname{Re} p$ ist in allen praktisch relevanten Fällen die Konvergenz des Integrals (1.6) und damit die Existenz der LAPLACE-Transformation sichergestellt. Handelt es sich bei $x(t)$ etwa um eine Funktion, die über jedes endliche Intervall $[0, T)$ integrierbar ist, und gibt es reelle Konstanten $M > 0$ und σ_0 derart, daß gilt

$$|x(t)| \leq M e^{\sigma_0 t} \quad \text{für } t \geq 0 , \quad (1.8)$$

so folgt für jedes $T > 0$

$$\int_0^T |x(t) e^{-pt}| dt = \int_0^T |x(t)| e^{-t \operatorname{Re} p} dt \leq M \int_0^T e^{(\sigma_0 - \operatorname{Re} p)t} dt = \frac{M}{\operatorname{Re} p - \sigma_0} (1 - e^{(\sigma_0 - \operatorname{Re} p)T}) .$$

Hieraus schließen wir, daß das linke Integral für $T \rightarrow \infty$ gemäß

$$\int_0^T |x(t) e^{-pt}| dt \leq \frac{M}{\operatorname{Re} p - \sigma_0} \quad (1.9)$$

nach oben beschränkt bleibt, falls p der Ungleichung

$$\operatorname{Re} p > \sigma_0 \quad (1.10)$$

genügt. Da die absolute Konvergenz des Integrals die gewöhnliche Konvergenz impliziert, existiert für Signale, die die Bedingung (1.8) erfüllen, die LAPLACE-Transformierte zumindest in dem durch (1.10) charakterisierten Gebiet. Ohne Beweis sei bemerkt, daß das Gebiet, in dem das LAPLACE-Integral absolut konvergiert, grundsätzlich eine offene ($\operatorname{Re} p > \sigma_0$) oder geschlossene ($\operatorname{Re} p \geq \sigma_0$) Halbebene ist, wobei die Sonderfälle $\sigma_0 = -\infty$ (Konvergenz überall in \mathbb{C}) und $\sigma_0 = \infty$ (Konvergenz für kein $p \in \mathbb{C}$) auch auftreten können.

Innerhalb des Konvergenzgebietes stellt die LAPLACE-Transformierte übrigens eine analytische Funktion dar, d. h., sie ist dort in jedem Punkt komplex differenzierbar, und ihre Ableitung ist durch

$$\frac{dX(p)}{dp} = - \int_0^{\infty} t x(t) e^{-pt} dt = -\mathcal{L}\{t x(t)\} \quad (1.11)$$

gegeben. Dies kann ähnlich bewiesen werden wie die komplexe Differenzierbarkeit der FOURIER-Transformierten eines zeitbegrenzten Signals.

Da der Signalverlauf für negative Zeiten nicht von der Transformation erfaßt wird, haben zwei Signale, die sich nur für $t < 0$ voneinander unterscheiden, die gleiche LAPLACE-Transformierte. Somit kann bei der Umkehrung der LAPLACE-Transformation, mit der wir uns im folgenden Abschnitt befassen wollen, keine Aussage über den Signalverlauf für $t < 0$ erwartet werden.

1.2 Umkehrung der Laplace-Transformation

1.2.1 Herleitung des Umkehrintegrals

Die (einseitige) LAPLACE-Transformierte eines Signals $x(t)$ kann offenbar als FOURIER-Transformierte von $\varepsilon(t)x(t)e^{-\sigma t}$ mit $\sigma = \operatorname{Re} p$ aufgefaßt werden, d. h.

$$X(p) = \int_0^{\infty} x(t)e^{-pt}dt = \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon(t)x(t)e^{-\sigma t}e^{-j\omega t}dt = \mathcal{F}\{\varepsilon(t)x(t)e^{-\sigma t}\}. \quad (1.12)$$

Wenden wir die Formel der FOURIER-Rücktransformation auf

$$X(\sigma + j\omega) = \mathcal{F}\{\varepsilon(t)x(t)e^{-\sigma t}\}$$

an, so erhalten wir

$$\varepsilon(t)x(t)e^{-\sigma t} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\sigma + j\omega)e^{j\omega t}d\omega.$$

Die Multiplikation beider Seiten dieser Gleichung mit $e^{\sigma t}$ führt weiter auf

$$\varepsilon(t)x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\sigma + j\omega)e^{(\sigma + j\omega)t}d\omega. \quad (1.13)$$

Gehen wir nun auf die komplexe Integrationsvariable $p = \sigma + j\omega$ über, so folgt schließlich

$$\boxed{\varepsilon(t)x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\alpha - j\infty}^{\alpha + j\infty} X(p)e^{pt}dp}, \quad (1.14)$$

wobei der durch die Grenzen angedeutete Integrationsweg $\gamma = [\alpha - j\infty, \alpha + j\infty]$ eine zur $j\omega$ -Achse parallele Gerade ist, die innerhalb des der LAPLACE-Transformierten $X(p)$ zugeordneten Konvergenzgebietes liegt und die σ -Achse im Punkt α schneidet (Bild 1.3). Symbolisch drücken wir den Zusammenhang (1.14) durch

$$\varepsilon(t)x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(p)\} \quad (1.15)$$

aus. Anhand von (1.14) bzw. (1.15) wird deutlich, daß, wie bereits erwähnt, bei der Rücktransformation keine Aussage bezüglich des Signalverlaufs für negative Zeiten gemacht werden kann. Wird $x(t)$ von vornherein als rechtsseitig vorausgesetzt, so darf statt (1.15) auch einfach

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(p)\} \quad (1.16)$$

geschrieben werden.

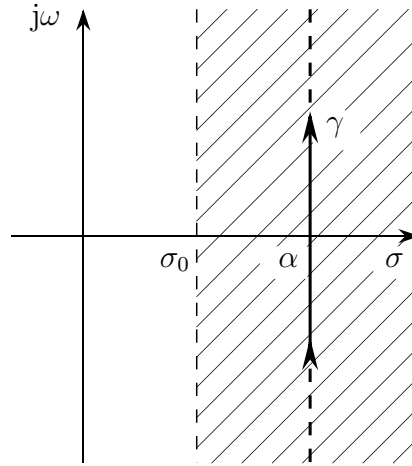


Bild 1.3: Möglicher Integrationsweg bei der LAPLACE-Rücktransformation

1.2.2 Berechnung des Umkehrintegrals mit dem Residuenkalkül

Die Funktion $X(p)$, die, wie schon erwähnt, innerhalb des Konvergenzgebietes analytisch ist, kann häufig in die gesamte komplexe Ebene fortgesetzt werden, und zwar derart, daß sie bis auf endlich viele Singularitäten überall analytisch ist und überdies für $p \rightarrow \infty$ gegen null strebt. Zur bequemen Berechnung des Integrals (1.14) bietet sich dann in vielen Fällen der Residuenkalkül an. Dieses Verfahren wollen wir hier kurz skizzieren.

Wir stellen zunächst das uneigentliche Integral (1.14) als Grenzwert eines eigentlichen Integrals dar, das längs der Strecke $\gamma_1 = [\alpha - j\omega_1, \alpha + j\omega_2]$ berechnet wird:

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{\alpha - j\infty}^{\alpha + j\infty} X(p) e^{pt} dp = \lim_{\substack{\omega_1 \rightarrow \infty \\ \omega_2 \rightarrow \infty}} \frac{1}{2\pi j} \int_{\alpha - j\omega_1}^{\alpha + j\omega_2} X(p) e^{pt} dp. \quad (1.17)$$

Sodann ergänzen wir das rechte Integral in (1.17) zu dem Umlaufintegral

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} X(p) e^{pt} dp, \quad (1.18)$$

bei dem der geschlossene Integrationsweg $\Gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4$ aus den Seiten eines Quadrats mit der Seitenlänge $\omega_1 + \omega_2$ und den Eckpunkten $q_1 = \alpha - j\omega_1$, $q_2 = \alpha + j\omega_2$, $q_3 = \alpha - \omega_1 - \omega_2 + j\omega_2$, $q_4 = \alpha - \omega_1 - \omega_2 - j\omega_1$ besteht (siehe Bild 1.4).

Da wir davon ausgegangen sind, daß $X(p)$ nur endlich viele Singularitäten besitzt, können wir durch Wahl hinreichend großer Werte von ω_1 und ω_2 stets erreichen, daß sämtliche Singularitäten, die wir mit $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ bezeichnen wollen, innerhalb des angegebenen Quadrats liegen. Der Wert des Integrals (1.18) ist dann durch die Summe der Residuen in allen Singularitäten gegeben:

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} X(p) e^{pt} dp = \sum_{\nu=1}^n \operatorname{Res}_{p_{\nu}} X(p) e^{pt}. \quad (1.19)$$

Mit vergleichsweise einfachen Abschätzungen, die wir am Schluß dieses Abschnitts vornehmen wollen, kann für $t > 0$ und unter der oben erwähnten Voraussetzung, $\lim_{p \rightarrow \infty} X(p) = 0$, gezeigt werden, daß das Integral längs des Streckenzugs $\gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4$ für $\omega_1, \omega_2 \rightarrow \infty$ gegen null strebt. Folglich bleibt nach dem Grenzübergang nur das Integral längs γ_1 bzw. längs γ übrig, so daß

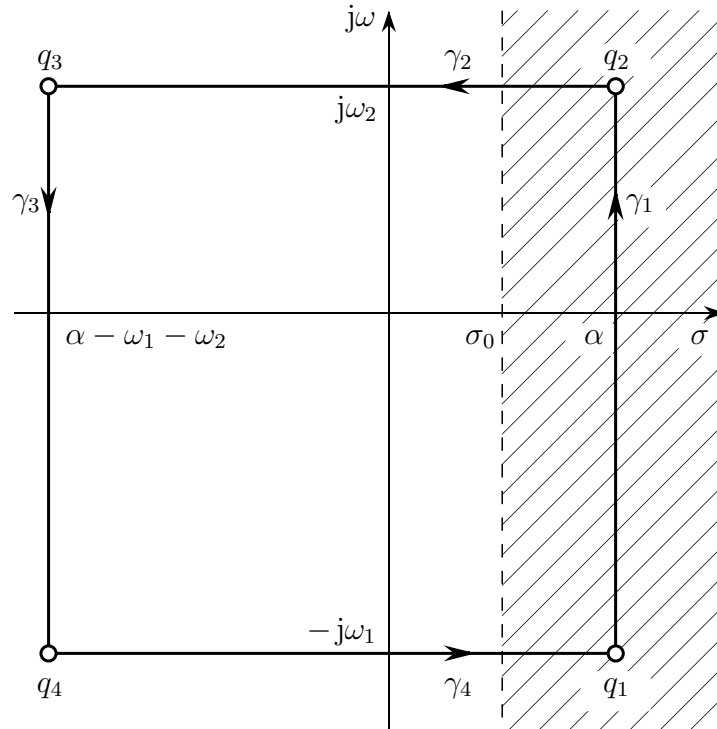


Bild 1.4: Zur Berechnung der Laplace-Rücktransformation mit Hilfe eines Umlaufintegrals

wir schreiben dürfen:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\alpha-j\infty}^{\alpha+j\infty} X(p) e^{pt} dp = \sum_{\nu=1}^n \operatorname{Res}_{p_\nu} X(p) e^{pt}, \quad t > 0. \quad (1.20)$$

Die Berechnung der Residuen ist besonders einfach, wenn es sich bei den Singularitäten von $X(p)$ ausschließlich um Pole handelt. Ist etwa p_0 ein Pol erster Ordnung, so ist das Residuum in diesem Pol durch

$$\operatorname{Res}_{p_0} X(p) e^{pt} = \lim_{p \rightarrow p_0} (p - p_0) X(p) e^{pt} \quad (1.21)$$

gegeben. Hat der Pol p_0 die Ordnung $m \geq 2$, so gilt

$$\operatorname{Res}_{p_0} X(p) e^{pt} = \lim_{p \rightarrow p_0} \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dp^{m-1}} [(p - p_0)^m X(p) e^{pt}]. \quad (1.22)$$

Als ein einfaches Beispiel für die Anwendung des Residuensatzes betrachten wir die Rücktransformation der Spektralfunktion

$$X(p) = \frac{p}{p^2 + \omega_0^2}, \quad \omega_0 > 0$$

die an den Stellen $p = j\omega_0$ und $p = -j\omega_0$ jeweils einen Pol erster Ordnung hat. Für die Residuen der Funktion $X(p) e^{pt}$ erhalten wir unter Verwendung der Beziehung (1.21)

$$\operatorname{Res}_{j\omega_0} X(p) e^{pt} = \lim_{p \rightarrow +j\omega_0} (p - j\omega_0) \frac{p}{p^2 + \omega_0^2} e^{pt} = \frac{1}{2} e^{j\omega_0 t}$$

und

$$\operatorname{Res}_{-j\omega_0} X(p) e^{pt} = \lim_{p \rightarrow -j\omega_0} (p + j\omega_0) \frac{p}{p^2 + \omega_0^2} e^{pt} = \frac{1}{2} e^{-j\omega_0 t}$$

Die zu $X(p)$ gehörige Zeitfunktion $x(t)$ lautet somit für $t > 0$

$$x(t) = \frac{1}{2}e^{j\omega_0 t} + \frac{1}{2}e^{-j\omega_0 t} = \cos \omega_0 t .$$

Folglich können wir schreiben

$$\boxed{\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{p}{p^2 + \omega_0^2} \right\} = \cos \omega_0 t , \quad t > 0} . \quad (1.23)$$

Als weiteres Beispiel transformieren wir die Spektralfunktion

$$X(p) = \frac{1}{(p - p_0)^m} , \quad m \in \mathbb{N} , \quad p_0 \in \mathbb{C}$$

in den Zeitbereich. Berücksichtigen wir (1.22), so folgt für das Residuum von $X(p)e^{pt}$ im Punkte p_0

$$\text{Res}_{p_0} X(p)e^{pt} = \lim_{p \rightarrow p_0} \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dp^{m-1}} e^{pt} = \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} e^{p_0 t} .$$

Wir haben somit das wichtige Ergebnis

$$\boxed{\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(p - p_0)^m} \right\} = \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} e^{p_0 t} , \quad t > 0} , \quad (1.24)$$

das nicht nur für $m = 2, 3, \dots$ gilt, sondern, wie man leicht nachprüft, auch für $m = 1$.

Wie bereits erwähnt, gilt die Formel (1.20) unter der Voraussetzung, daß die Spektralfunktion $X(p)$ im Unendlichen verschwindet. Es stellt sich daher sofort die Frage, ob eine Rücktransformation vom Bild- in den Zeitbereich möglich ist, wenn $X(p)$ für $p \rightarrow \infty$ nicht verschwindet oder sogar im Unendlichen singulär wird. Diese Frage ist zu bejahen, wenn beispielsweise die Spektralfunktionen

$$X_n(p) = p^n , \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.25)$$

in den Zeitbereich transformiert werden sollen. Allerdings müssen dann im Zeitbereich wieder verallgemeinerte Funktionen zugelassen werden. Wir werden uns mit diesem Problem im übernächsten Abschnitt befassen.

Wie angekündigt wollen wir nun zeigen, daß das Integral über $X(p)e^{pt}$ ($t > 0$) längs des Streckenzugs $\gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4$ in Bild 1.4 für $\omega_1, \omega_2 \rightarrow \infty$ gegen null strebt, und zwar unter der Voraussetzung

$$\lim_{p \rightarrow \infty} X(p) = 0 . \quad (1.26)$$

Wir betrachten zunächst das Integral längs der Strecke γ_2 , d. h.

$$I_2 := \int_{\gamma_2} X(p) e^{pt} dp = \int_{\alpha}^{\alpha - \omega_1 - \omega_2} X(\sigma + j\omega_2) e^{(\sigma + j\omega_2)t} d\sigma . \quad (1.27)$$

und schätzen den Betrag des rechten Integrals wie folgt ab:

$$|I_2| = \left| \int_{\alpha}^{\alpha - \omega_1 - \omega_2} X(\sigma + j\omega_2) e^{(\sigma + j\omega_2)t} d\sigma \right| \leq \int_{\alpha - \omega_1 - \omega_2}^{\alpha} |X(\sigma + j\omega_2)| e^{\sigma t} d\sigma .$$

Ersetzen wir nun $|X(\sigma + j\omega_2)|$ durch den maximalen Wert, den dieser Betrag im Intervall $\alpha - \omega_1 - \omega_2 \leq \sigma \leq \alpha$ annehmen kann, so können wir schreiben

$$\int_{\alpha - \omega_1 - \omega_2}^{\alpha} |X(\sigma + j\omega_2)| e^{\sigma t} d\sigma \leq \max_{p \in \gamma_2} |X(p)| \int_{\alpha - \omega_1 - \omega_2}^{\alpha} e^{\sigma t} d\sigma = \max_{p \in \gamma_2} |X(p)| t^{-1} e^{\alpha t} (1 - e^{-(\omega_1 + \omega_2)t}) .$$

Berücksichtigen wir sodann

$$0 < 1 - e^{-(\omega_1 + \omega_2)t} < 1 ,$$

so folgt schließlich für den Betrag des Integrals I_2 die Abschätzung

$$|I_2| \leq \max_{p \in \gamma_2} |X(p)| t^{-1} e^{\alpha t} .$$

Da als Folge der Voraussetzung (1.26) das Maximum von $|X(p)|$ längs der Strecke γ_2 für $\omega_2 \rightarrow \infty$ gegen null strebt, gilt dies auch für $|I_2|$, also

$$\lim_{\omega_2 \rightarrow \infty} I_2 = 0 .$$

Mit ähnlichen Abschätzungen können wir zeigen, daß auch das Integral längs der Strecke γ_4 , d. h.

$$I_4 := \int_{\gamma_4} X(p) e^{pt} dp = \int_{\alpha - \omega_1 - \omega_2}^{\alpha} X(\sigma - j\omega_1) e^{(\sigma - j\omega_1)t} d\sigma , \quad (1.28)$$

für $\omega_1 \rightarrow \infty$ gegen null strebt:

$$\lim_{\omega_1 \rightarrow \infty} I_4 = 0 .$$

Wir müssen uns somit nur noch mit der Abschätzung des Integrals

$$I_3 := \int_{\gamma_3} X(p) e^{pt} dp = -j \int_{-\omega_1}^{\omega_2} X(\alpha - \omega_1 - \omega_2 + j\omega) e^{(\alpha - \omega_1 - \omega_2 + j\omega)t} d\omega \quad (1.29)$$

befassen. Für $|I_3|$ können wir schreiben

$$|I_3| = e^{(\alpha - \omega_1 - \omega_2)t} \left| \int_{-\omega_1}^{\omega_2} X(\alpha - \omega_1 - \omega_2 + j\omega) e^{j\omega t} d\omega \right| .$$

Schätzen wir nun den Betrag des Integranden, also $|X(\alpha - \omega_1 - \omega_2 + j\omega)|$, durch sein Maximum längs der Strecke γ_3 ab, so erhalten wir

$$|I_3| \leq e^{(\alpha - \omega_1 - \omega_2)t} (\omega_1 + \omega_2) \max_{p \in \gamma_3} |X(p)| .$$

Beachten wir, daß $(\omega_1 + \omega_2)e^{-(\omega_1 + \omega_2)t}$ für $t > 0$ und $\omega_1, \omega_2 \rightarrow \infty$ gegen null strebt, so folgt schließlich

$$\lim_{\substack{\omega_1 \rightarrow \infty \\ \omega_2 \rightarrow \infty}} I_3 = 0 .$$

1.3 Eigenschaften der Laplace-Transformation

Viele der Eigenschaften, die bei der Anwendung der LAPLACE-Transformation zu berücksichtigen sind, wurden in ähnlicher Form bereits im Zusammenhang mit der FOURIER-Transformation diskutiert. Hierzu gehören insbesondere die in der Tabelle 1.11 aufgeführten Regeln und Sätze. Mit Ausnahme des Differentiationssatzes, der uns schon in (1.11) begegnet ist, lassen sich diese Aussagen sehr einfach beweisen. Die Bedingung $\alpha > 0$ beim Ähnlichkeitssatz ergibt sich aus der vorausgesetzten „Einseitigkeit“ der Transformation. Sofern durch die angegebenen Operationen das Konvergenzgebiet des jeweiligen LAPLACE-Integrals geändert wird, ist das resultierende Konvergenzgebiet in der letzten Spalte angegeben. Die bei der Transformation der Signale $x(t)$ und $y(t)$ sich ergebenden Konvergenzgebiete sind mit \mathcal{G}_x bzw. \mathcal{G}_y bezeichnet.

Homogenität	$\mathcal{L}\{cx(t)\} = cX(p)$	$c \in \mathbb{C}$	
Additivität	$\mathcal{L}\{x(t) + y(t)\} = X(p) + Y(p)$		$\mathcal{G}_x \cap \mathcal{G}_y$
Konjugation	$\mathcal{L}\{x^*(t)\} = \overline{X}(p)$	$\overline{X}(p) := X^*(p^*)$	
Ähnlichkeitssatz	$\mathcal{L}\{x(\alpha t)\} = \frac{1}{\alpha} X(p/\alpha)$	$\alpha > 0$	$\alpha \mathcal{G}_x$
Modulationssatz	$\mathcal{L}\{e^{p_0 t} x(t)\} = X(p - p_0)$	$p_0 \in \mathbb{C}$	$p_0 + \mathcal{G}_x$
Differentiationssatz	$\mathcal{L}\{-tx(t)\} = \frac{d}{dp} X(p)$		

Tabelle 1.1: Einige Regeln und Sätze der LAPLACE-Transformation

1.3.1 Differentiation und Integration im Zeitbereich

Von besonderer Bedeutung für die Anwendungen ist der nicht in der Tabelle aufgeführte Differentiationssatz, der sich auf die Differentiation im Zeitbereich bezieht und wie folgt formuliert werden kann:

$$\boxed{\mathcal{L}\{\dot{x}(t)\} = pX(p) - x(0+)} . \quad (1.30)$$

Mit $x(0+)$ ist der rechtsseitige Grenzwert des Signals $x(t)$ zum Zeitpunkt $t = 0$ bezeichnet. Der Beweis von (1.30) kann mit partieller Integration wie folgt geführt werden:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\dot{x}(t)\} &= \int_0^\infty \dot{x}(t) e^{-pt} dt = x(t) e^{-pt} \Big|_0^\infty + p \int_0^\infty x(t) e^{-pt} dt \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) e^{-pt} - x(0+) + pX(p) . \end{aligned}$$

Unter der Voraussetzung, daß $x(t)$ für $t \rightarrow \infty$ nicht schneller als exponentiell steigt, ist für hinreichend große Werte von $\operatorname{Re} p$ der auf der rechten Seite der Gleichung stehende Grenzwert null. Der gewünschte Beweis ist somit erbracht.

Wird der Differentiationssatz zweimal hintereinander auf $\mathcal{L}\{\ddot{x}(t)\}$ angewandt, so folgt

$$\mathcal{L}\{\ddot{x}(t)\} = p\mathcal{L}\{\dot{x}(t)\} - \dot{x}(0+) = p^2 X(p) - \dot{x}(0+) - px(0+) .$$

Die n -fache ($n = 1, 2, 3, \dots$) Anwendung des Differentiationssatzes auf die n -te Ableitung von $x(t)$, die wir mit $x^{(n)}(t)$ bezeichnen wollen, ergibt somit

$$\boxed{\mathcal{L}\{x^{(n)}(t)\} = p^n X(p) - \sum_{\nu=0}^{n-1} p^{n-1-\nu} x^{(\nu)}(0+)} . \quad (1.31)$$

Mit der LAPLACE-Transformation lassen sich aufgrund des Differentiationssatzes lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten in äquivalente algebraische Gleichungen überführen, die im Bildbereich gelöst werden können. Durch Rücktransformation der Lösungen

in den Zeitbereich erhält man dann die gewünschten Lösungen der Differentialgleichungen. Als ein einfaches Beispiel für dieses Verfahren betrachten wir die homogene Differentialgleichung

$$\ddot{x}(t) + 2\alpha\dot{x}(t) + (\alpha^2 + \beta^2)x(t) = 0, \quad (1.32)$$

wobei α eine positive und β eine nichtnegative Konstante ist. Diese Differentialgleichung, die beispielsweise den zeitlichen Verlauf der Spannung an der Kapazität eines kurzgeschlossenen RLC -Reihenschwingkreises mit $\alpha = R/(2L)$, $\beta^2 = 1/(LC) - (R/(2L))^2$ und $R \leq 2\sqrt{L/C}$ beschreibt, soll ausgehend von den reellen Anfangsbedingungen

$$\dot{x}(0) = \dot{x}_0 \quad \text{und} \quad x(0) = x_0$$

für $t > 0$ gelöst werden (Bild 1.5).

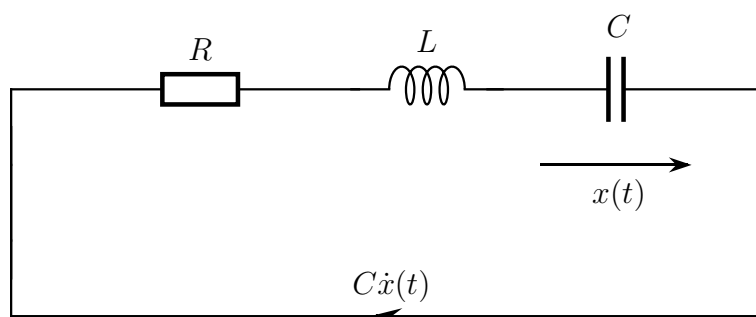


Bild 1.5: RLC -Reihenschwingkreis

Unter Berücksichtigung des Differentiationssatzes ergibt die LAPLACE-Transformation der Differentialgleichung (1.32) folgende (algebraische) Gleichung:

$$p^2 X(p) + 2\alpha p X(p) + (\alpha^2 + \beta^2)X(p) = \dot{x}(0+) + (p + 2\alpha)x(0+). \quad (1.33)$$

Da sowohl $x(t)$ als auch $\dot{x}(t)$ differenzierbar und folglich stetig sind, dürfen wir in (1.33) $x(0+)$ und $\dot{x}(0+)$ durch $x(0) = x_0$ bzw. $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$ ersetzen. Die Auflösung nach $X(p)$ ergibt dann

$$X(p) = \frac{(p + 2\alpha)x(0) + \dot{x}(0)}{p^2 + 2\alpha p + (\alpha^2 + \beta^2)} = \frac{(p + 2\alpha)x_0 + \dot{x}_0}{(p + \alpha + j\beta)(p + \alpha - j\beta)}. \quad (1.34)$$

Die Konstante β sei zunächst positiv. Zur Transformation der Funktion (1.34) in den Zeitbereich bestimmen wir die Residuen der Funktion $X(p)e^{pt}$ an den Stellen $p_1 = -\alpha + j\beta$ und $p_2 = -\alpha - j\beta$:

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{p_1} X(p)e^{pt} &= \lim_{p \rightarrow p_1} (p - p_1) \frac{(p + 2\alpha)x_0 + \dot{x}_0}{(p - p_1)(p - p_2)} e^{pt} = \frac{(p_1 + 2\alpha)x_0 + \dot{x}_0}{p_1 - p_2} e^{p_1 t} \\ \operatorname{Res}_{p_2} X(p)e^{pt} &= \lim_{p \rightarrow p_2} (p - p_2) \frac{(p + 2\alpha)x_0 + \dot{x}_0}{(p - p_1)(p - p_2)} e^{pt} = \frac{(p_2 + 2\alpha)x_0 + \dot{x}_0}{p_2 - p_1} e^{p_2 t} \end{aligned}$$

Berücksichtigen wir schließlich, daß p_1 und p_2 und somit auch $\operatorname{Res}_{p_1} X(p)e^{pt}$ und $\operatorname{Res}_{p_2} X(p)e^{pt}$ jeweils konjugiert komplex zueinander sind, so folgt für $t > 0$

$$x(t) = 2 \operatorname{Re} \operatorname{Res}_{p_1} X(p)e^{pt} = 2 \operatorname{Re} \left[\frac{(p_1 + 2\alpha)x_0 + \dot{x}_0}{p_1 - p_2} e^{p_1 t} \right] = \operatorname{Re} \left[\frac{(\alpha + j\beta)x_0 + \dot{x}_0}{j\beta} e^{p_1 t} \right]$$

und weiter nach Bestimmung des Realteils

$$x(t) = \left(x_0 \cos \beta t + \frac{\alpha x_0 + \dot{x}_0}{\beta} \sin \beta t \right) e^{-\alpha t}, \quad t > 0. \quad (1.35)$$

Nun sei $\beta = 0$. Die Funktion $X(p)$ hat dann einen doppelten Pol an der Stelle $p = -\alpha$. Gemäß (1.22) erhalten wir unter diesen Umständen für das zugehörige Residuum

$$\operatorname{Res}_{-\alpha} X(p) e^{pt} = \lim_{p \rightarrow -\alpha} \frac{d}{dp} [(p + \alpha)^2 X(p) e^{pt}] = \frac{d}{dp} \{ [(p + 2\alpha)x_0 + \dot{x}_0] e^{pt} \} \Big|_{p=-\alpha} \quad (1.36)$$

und weiter, nach Ausführen der Differentiation, für $x(t)$

$$x(t) = [x_0 + (\alpha x_0 + \dot{x}_0)t] e^{-\alpha t}, \quad t > 0. \quad (1.37)$$

Dieses Ergebnis ist offenbar das gleiche, das wir durch den Grenzübergang $\beta \rightarrow 0$ aus (1.35) erhalten können.

Wir hätten diese Lösungen selbstverständlich auch mit dem üblichen Ansatz $x(t) = C e^{pt}$ bzw., im Fall der doppelten Polstelle, mit $x(t) = (C_0 + C_1 t) e^{pt}$ ermitteln können. Zur Bestimmung der Konstanten in den Lösungen

$$x(t) = C_1 e^{p_1 t} + C_2 e^{p_2 t} \quad \text{bzw.} \quad x(t) = (C_0 + C_1 t) e^{pt}$$

wäre dann ein lineares Gleichungssystem zu lösen gewesen, das im vorliegenden Fall die Ordnung zwei gehabt hätte. I. allg. ist die Ordnung dieses Gleichungssystems gleich der Ordnung der zu lösenden Differentialgleichung. Beurteilt man die Lösungsverfahren unter diesem Gesichtspunkt, so kommt – insbesondere bei Systemen höherer Ordnung – dem Verfahren mit der LAPLACE-Transformation ein leichter Vorteil zu.

Wir kommen nun zu einer Umkehrung des Differentiationssatzes, und zwar zu dem Integrationssatz, der wie folgt lautet:

$$\boxed{\mathcal{L} \left\{ \int_0^t x(\tau) d\tau \right\} = \frac{1}{p} X(p), \quad t > 0}. \quad (1.38)$$

Wie im Fall des Differentiationssatzes führen wir den Beweis für die Richtigkeit von (1.38) mit partieller Integration:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \left\{ \int_0^t x(\tau) d\tau \right\} &= \int_0^\infty \left[\int_0^t x(\tau) d\tau \right] e^{-pt} dt = \int_0^\infty x(\tau) d\tau \frac{e^{-pt}}{-p} \Big|_0^\infty + \frac{1}{p} \int_0^\infty x(t) e^{-pt} dt \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\int_0^t x(\tau) d\tau \frac{e^{-pt}}{-p} \right] + \frac{1}{p} \mathcal{L}\{x(t)\}. \end{aligned}$$

Setzen wir voraus, daß der Betrag des Integrals über $x(t)$ für $t \rightarrow \infty$ nicht schneller als exponentiell wächst, so ist für hinreichend große Werte von $\operatorname{Re} p$ der Grenzwert null und der Integrationssatz unter dieser Voraussetzung bewiesen.

1.3.2 Grenzwertsätze

Setzen wir voraus, daß das Signal $x(t)$ die LAPLACE-Transformierte $X(p)$ besitzt und für $t \rightarrow \infty$ einem (endlichen) Grenzwert zustrebt, so gilt folgender *Endwertsatz*:

$$x(\infty) := \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{\substack{p \rightarrow 0 \\ p > 0}} pX(p) . \quad (1.39)$$

Existiert der rechtsseitige Grenzwert $x(0+)$, so gilt der *Anfangswertsatz*:

$$x(0+) := \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} x(t) = \lim_{\substack{p \rightarrow \infty \\ p > 0}} pX(p) . \quad (1.40)$$

Die Ungleichung $p > 0$ unter dem rechten Grenzwertsymbol in beiden Beziehungen soll jeweils darauf hindeuten, daß der Grenzübergang im Bildbereich längs der positiven reellen Achse erfolgt. Häufig können die Grenzübergänge $p \rightarrow \infty$ und $p \rightarrow 0$ aber auch beliebig vorgenommen werden, beispielsweise wenn $X(p)$ eine rationale Funktion ist.

Die Richtigkeit der beiden Grenzwertsätze wollen wir hier nicht beweisen, sondern hierfür lediglich plausible Argumente anführen. Wir gehen aus von dem Differentiationssatz in der Form

$$\int_0^\infty \dot{x}(t) e^{-pt} dt = -x(0+) + pX(p) \quad (1.41)$$

und lassen p längs der positiven σ -Achse einmal gegen 0 und einmal gegen ∞ streben und nehmen zugleich an, daß wir diese Grenzübergänge jeweils mit der Integration vertauschen dürfen und somit schreiben können

$$\lim_{\substack{p \rightarrow 0 \\ p > 0}} \int_0^\infty \dot{x}(t) e^{-pt} dt = \int_0^\infty \dot{x}(t) \lim_{\substack{p \rightarrow 0 \\ p > 0}} e^{-pt} dt = \int_0^\infty \dot{x}(t) dt = x(\infty) - x(0+)$$

bzw.

$$\lim_{\substack{p \rightarrow \infty \\ p > 0}} \int_0^\infty \dot{x}(t) e^{-pt} dt = \int_0^\infty \dot{x}(t) \lim_{\substack{p \rightarrow \infty \\ p > 0}} e^{-pt} dt = 0 .$$

In Verbindung mit (1.41) bestätigen diese beiden Beziehungen unter der angegebenen Voraussetzung die Gültigkeit der Grenzwertsätze.

Als Beispiel für die Anwendung der Grenzwertsätze betrachten wir die Bildfunktion

$$X(p) = \frac{\alpha_{11}p + \alpha_{12}}{p(\alpha_{21}p + \alpha_{22})} ,$$

wobei $\alpha_{\mu\nu}$ beliebige komplexe Konstanten sind, jedoch mit $\alpha_{21}\alpha_{22} \neq 0$. Unter der Voraussetzung, daß die Grenzwerte $x(\infty)$ und $x(0+)$ existieren, können wir diese wie folgt bestimmen:

$$x(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} pX(p) = \alpha_{12}/\alpha_{22} \qquad x(0+) = \lim_{p \rightarrow \infty} pX(p) = \alpha_{11}/\alpha_{21} .$$

Im vorliegenden Fall läßt sich dieses Ergebnis sofort überprüfen, da die LAPLACE-Rücktransformation nach der Partialbruchzerlegung

$$X(p) = \frac{\alpha_{12}}{\alpha_{22}} p^{-1} + \left(\frac{\alpha_{11}}{\alpha_{21}} - \frac{\alpha_{12}}{\alpha_{22}} \right) \frac{1}{p + \alpha_{22}/\alpha_{21}}$$

leicht durchzuführen ist:

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(p)\} = \frac{\alpha_{12}}{\alpha_{22}} + \left(\frac{\alpha_{11}}{\alpha_{21}} - \frac{\alpha_{12}}{\alpha_{22}} \right) e^{-(\alpha_{22}/\alpha_{21})t}, \quad t > 0.$$

Während der Grenzwert $x(0+)$ aufgrund der Voraussetzung $\alpha_{21}\alpha_{22} \neq 0$ immer existiert und durch $x(0+) = \alpha_{11}/\alpha_{21}$ gegeben ist, strebt $x(t)$ für $t \rightarrow \infty$ nur unter der Bedingung $\operatorname{Re}(\alpha_{22}/\alpha_{21}) > 0$ gegen einen endlichen Grenzwert, nämlich gegen α_{12}/α_{22} .

1.3.3 Verschiebung im Zeitbereich

Da bei der (einseitigen) LAPLACE-Transformation die Integration nur über die positive t -Achse erstreckt wird, nimmt der Verschiebungssatz der LAPLACE-Transformation, d. h.

$$\boxed{\mathcal{L}\{x(t - t_0)\} = e^{-pt_0} \left[X(p) + \int_{-t_0}^0 x(t) e^{-pt} dt \right]}, \quad (1.42)$$

eine etwas andere Form an als der entsprechende Satz der FOURIER-Transformation. Der Beweis für die Richtigkeit der Gleichung (1.42) ergibt sich sofort durch die Substitution $t = t' + t_0$ in dem LAPLACE-Integral:

$$\mathcal{L}\{x(t - t_0)\} = \int_0^\infty x(t - t_0) e^{-pt} dt = \int_{-t_0}^0 x(t') e^{-pt'} dt' + \int_0^\infty x(t') e^{-pt'} dt'.$$

Wenn $x(t)$ rechtsseitig und t_0 nichtnegativ ist, kann das Integral in (1.42) entfallen, da $x(t)$ unter diesen Umständen im Integrationsintervall $(-t_0, 0)$ null ist. Wir können daher schreiben

$$\boxed{\left. \begin{array}{l} t < 0 \\ t_0 \geq 0 \end{array} \Rightarrow x(t) = 0 \right\} \Rightarrow \mathcal{L}\{x(t - t_0)\} = e^{-pt_0} X(p)}. \quad (1.43)$$

Diese Form des Verschiebungssatzes tritt in der Praxis besonders häufig auf, da die angegebene zeitliche Verschiebung um t_0 auf eine Verzögerung des Signals hinausläuft, die prinzipiell bei jeder Signalübertragung auftritt.

1.3.4 Faltung rechtsseitiger Signale

Seien $x_1(t)$ und $x_2(t)$ zwei rechtsseitige Signale und $X_1(p)$ bzw. $X_2(p)$ die zugehörigen LAPLACE-Transformierten. Wir betrachten dann das Faltungsprodukt

$$x_1(t) * x_2(t) = \int_{-\infty}^\infty x_1(\tau) x_2(t - \tau) d\tau,$$

das wir wegen der Rechtsseitigkeit von $x_1(t)$ und $x_2(t)$ wie folgt schreiben können:

$$x_1(t) * x_2(t) = \int_0^t x_1(\tau) x_2(t - \tau) d\tau \quad (1.44)$$

Man kann sich leicht davon überzeugen, daß das Ergebnis des Faltungsprodukts ebenfalls ein rechtsseitiges Signal ist.

Wie im Fall der FOURIER-Transformation gilt auch hier

$$\boxed{\mathcal{L}\{x_1(t) * x_2(t)\} = X_1(p)X_2(p)} . \quad (1.45)$$

Zum Nachweis dieser Beziehung ersetzen wir in dem Integral in (1.44) die obere Grenze wieder durch ∞ und nehmen an, daß wir zur Auswertung des Ausdrucks

$$\mathcal{L}\{x_1(t) * x_2(t)\} = \int_0^\infty \left[\int_0^\infty x_1(\tau)x_2(t-\tau)d\tau \right] e^{-pt}dt$$

die Reihenfolge der Integration vertauschen dürfen:

$$\mathcal{L}\{x_1(t) * x_2(t)\} = \int_0^\infty x_1(\tau) \left[\int_0^\infty x_2(t-\tau)e^{-pt}dt \right] d\tau .$$

Unter Beachtung des Verschiebungssatzes erhalten wir hieraus schließlich das gewünschte Ergebnis

$$\mathcal{L}\{x_1(t) * x_2(t)\} = \int_0^\infty x_1(\tau)e^{-p\tau}d\tau X_2(p) = X_1(p)X_2(p) .$$

1.4 Deltaimpulse im Zeitbereich

Viele idealisierte Signale, wie beispielsweise die Sprungfunktion, das konstante Signal, die Exponentialschwingung usw., konnten mit Hilfe der FOURIER-Transformation nur dadurch im Frequenzbereich dargestellt werden, daß dort verallgemeinerte Funktionen zugelassen wurden, und zwar insbesondere die Deltafunktion. Dies ist bei der LAPLACE-Transformation nicht erforderlich, da der bei der Integration wirksame Faktor $e^{-\sigma t}$ die Konvergenz des LAPLACE-Integrals meistens erzwingt, sogar dann noch, wenn das zu transformierende Signal für $t \rightarrow \infty$ exponentiell steigt. Aus diesem Grunde brauchen bei der Laplace-Transformation im Bildbereich keine verallgemeinerten Funktion zugelassen zu werden. Tatsächlich hat man es ja sogar dort mit einer sehr gutmütigen Funktionsklasse zu tun, nämlich, wie schon erwähnt, mit analytischen Funktionen. Im Zeitbereich bleibt die Verwendung von verallgemeinerten Funktionen aber weiterhin von Bedeutung.

Unter Beachtung der Ausblendeigenschaft erhalten wir für die LAPLACE-Transformierte des zu einem positiven Zeitpunkt t_0 auftretenden Deltaimpulses

$$\mathcal{L}\{\delta(t-t_0)\} = \int_0^\infty \delta(t-t_0)e^{-pt}dt = e^{-pt_0} , \quad t_0 > 0 .$$

Damit ein zum Zeitpunkt $t = 0$ auftretender Deltaimpuls bei der Transformation „voll“ erfaßt wird, wollen wir die untere Integrationsgrenze ab sofort durch $0-$ ersetzen und dies wie folgt interpretieren:

$$\int_{0-}^\infty \cdots dt := \lim_{\substack{\tau \rightarrow 0 \\ \tau > 0}} \int_{-\tau}^\infty \cdots dt .$$

Für beliebige reelle t_0 können wir dann schreiben

$$\boxed{\mathcal{L}\{\delta(t-t_0)\} = \begin{cases} 0 & \text{für } t_0 < 0 \\ e^{-pt_0} & \text{für } t_0 \geq 0 \end{cases}} . \quad (1.46)$$

Hierbei herrscht Konvergenz in der gesamten komplexen Ebene. Dies gilt natürlich auch, wenn mehrere, etwa n , Deltaimpulse auftreten, d. h., wenn beispielsweise die Summe

$$\sum_{\nu=0}^n \alpha_{\nu} \delta(t - t_{\nu}), \quad \alpha_{\nu} \in \mathbb{C}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

transformiert werden soll. Setzen wir voraus, daß die Zeitpunkte t_{ν} alle nichtnegativ sind, so können wir schreiben

$$\mathcal{L} \left\{ \sum_{\nu=0}^n \alpha_{\nu} \delta(t - t_{\nu}) \right\} = \sum_{\nu=0}^n \alpha_{\nu} e^{-pt_{\nu}}. \quad (1.47)$$

Als nächstes nehmen wir an, daß Deltaimpulse zu unendlich vielen Zeitpunkten t_0, t_1, t_2, \dots auftreten, wobei in jedem endlichen Zeitintervall aber nur endlich viele dieser Zeitpunkte liegen, die darüber hinaus gemäß

$$0 \leq t_0 < t_1 < t_2 < \dots < \infty$$

geordnet seien. Wir betrachten also ein Signal der Form

$$x(t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_{\nu} \delta(t - t_{\nu}), \quad \alpha_{\nu} \in \mathbb{C}$$

und definieren dessen LAPLACE-Transformierte durch

$$\mathcal{L}\{x(t)\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\nu=0}^n \alpha_{\nu} e^{-pt_{\nu}}.$$

Gibt es dann reelle Konstanten σ_0 und $M > 0$ derart, daß für alle $\nu = 0, 1, 2, \dots$ die Ungleichung

$$|\alpha_{\nu}| \leq M e^{\sigma_0 t_{\nu}}$$

gilt, so existiert der angegebene Grenzwert in der Halbebene $\operatorname{Re} p > \sigma_0$. Wir wollen dies nur für den in der Praxis häufig auftretenden Fall beweisen, daß die Zeitpunkte äquidistant in einem Abstand $T > 0$ liegen, so daß wir schreiben dürfen

$$t_{\nu} = t_0 + \nu T.$$

Man kann sich leicht davon überzeugen, daß die angegebene Reihe für $\operatorname{Re} p > \sigma_0$ bzw. $e^{(\sigma_0 - \operatorname{Re} p)T} < 1$ sogar absolut konvergiert:

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=0}^n |\alpha_{\nu} e^{-pt_{\nu}}| &\leq M e^{-t_0 \operatorname{Re} p} \sum_{\nu=0}^n e^{(\sigma_0 - \operatorname{Re} p)\nu T} \\ &\leq M e^{-t_0 \operatorname{Re} p} \sum_{\nu=0}^{\infty} e^{(\sigma_0 - \operatorname{Re} p)\nu T} = M e^{-t_0 \operatorname{Re} p} [1 - e^{(\sigma_0 - \operatorname{Re} p)T}]^{-1}. \end{aligned}$$

In der letzten Zeile haben wir von der Summenformel der geometrischen Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} z^{\nu} = (1 - z)^{-1}, \quad |z| < 1$$

Gebrauch gemacht, und zwar mit $z = e^{(\sigma_0 - \operatorname{Re} p)T}$.

1.4.1 Modifizierung des Differentiationssatzes

Da wir auch an der Stelle $t = 0$ einen Deltaimpuls zulassen, müssen wir den Differentiationssatz geringfügig modifizieren und ihn wie folgt formulieren:

$$\boxed{\mathcal{L}\{\dot{x}(t)\} = pX(p) - x(0-)} . \quad (1.48)$$

Der Unterschied zwischen der ursprünglichen und der modifizierten Form des Differentiationssatzes ist natürlich nur von Bedeutung, wenn $x(t)$ an der Stelle $t = 0$ unstetig ist. Springt etwa $x(t)$ dort von $x(0-)$ auf $x(0+)$, also um die Höhe $\Delta = x(0+) - x(0-)$, so können wir $x(t)$ durch

$$x(t) = x_1(t) + \Delta \cdot \varepsilon(t) \quad (1.49)$$

darstellen, wobei $x_1(t)$ an der Stelle $t = 0$ stetig ist und dort den Wert $x_1(0) = x(0-)$ annimmt. Zwischen den LAPLACE-Transformierten von $x(t)$ und $x_1(t)$ besteht offenbar der Zusammenhang

$$\mathcal{L}\{x_1(t)\} = X(p) - \frac{\Delta}{p} . \quad (1.50)$$

Bestimmen wir nun die LAPLACE-Transformierte der Ableitung von (1.49), d. h. von

$$\dot{x}(t) = \dot{x}_1(t) + \Delta \cdot \delta(t) ,$$

und wenden unter Beachtung von (1.50) den Differentiationssatz in der ursprünglichen Form auf $\dot{x}_1(t)$ bzw. $\mathcal{L}\{\dot{x}_1(t)\}$ an, so erhalten wir

$$\mathcal{L}\{\dot{x}(t)\} = \mathcal{L}\{\dot{x}_1(t)\} + \Delta = p \left[X(p) - \frac{\Delta}{p} \right] - x_1(0+) + \Delta = pX(p) - x_1(0+) .$$

Berücksichtigen wir schließlich $x_1(0+) = x_1(0) = x(0-)$, so folgt der Differentiationssatz in der Form (1.48).

Hätten wir versucht, die LAPLACE-Transformierte des Deltaimpulses $\delta(t) = \dot{u}(t)$ mit Hilfe der ursprünglichen Form des Differentiationssatzes aus $\mathcal{L}\{\varepsilon(t)\}$ herzuleiten, so wären wir zu dem (falschen) Ergebnis

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = \mathcal{L}\{\dot{u}(t)\} = p\mathcal{L}\{\varepsilon(t)\} - \varepsilon(0+) = p \frac{1}{p} - 1 = 0$$

gekommen, während die Anwendung von (1.48) wegen $\varepsilon(0-) = 0$ sofort das richtige Resultat liefert, nämlich $\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1$. Als weiteres Beispiel betrachten wir ein System mit der Sprungantwort

$$a(t) = (1 - \alpha e^{-\beta t})\varepsilon(t) \quad \text{mit} \quad \alpha \neq 1 \quad \text{und} \quad \beta > 0$$

und der sich daraus ergebenden Impulsantwort

$$h(t) = \dot{a}(t) = (1 - \alpha)\delta(t) + \alpha\beta e^{-\beta t}\varepsilon(t) .$$

Die LAPLACE-Transformierte von $a(t)$, die wir mit $A(p)$ bezeichnen wollen, ergibt sich zu

$$A(p) = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{p + \beta} = \frac{(1 - \alpha)p + \beta}{p(p + \beta)} .$$

Für die LAPLACE-Transformierte der Impulsantwort $h(t)$, die ja gleich der Übertragungsfunktion $H(p)$ ist, erhalten wir

$$H(p) = (1 - \alpha) + \frac{\alpha\beta}{p + \beta} = \frac{(1 - \alpha)p + \beta}{p + \beta}. \quad (1.51)$$

Wir können leicht überprüfen, daß wir $H(p)$ aus $A(p)$ nur dann mit dem Differentiationssatz ableiten können, wenn wir diesen in der Form (1.48) verwenden. Wegen $a(0-) = 0$ gilt dann einfach $H(p) = pA(p)$. Da die Sprungantwort an der Stelle $t = 0$ springt, und zwar von $a(0-) = 0$ auf $a(0+) = 1 - \alpha$, bezeichnet man das zugehörige System als *sprungfähig*. Aufgrund des Anfangswertsatzes (1.40) können wir die *Sprungfähigkeit* allgemein daran erkennen, daß der Grenzwert

$$a(0+) = \lim_{\substack{p \rightarrow \infty \\ p > 0}} pA(p) = \lim_{\substack{p \rightarrow \infty \\ p > 0}} H(p)$$

existiert und ungleich null ist, das Zähler- und das Nennerpolynom von $H(p)$ also den gleichen Grad haben. Ist ein System sprungfähig, so ist es eigentlich auch *impulsfähig*, d. h., die Impulsantwort enthält an der Stelle $t = 0$ einen (gewichteten) Deltaimpuls.

Gelegentlich steht man vor der Aufgabe, auch Ableitungen des Deltaimpulses in den Bildbereich zu transformieren. Setzen wir voraus, daß wir den Differentiationssatz zur Lösung dieser Aufgabe verwenden können, so folgt für $t_0 \geq 0$ und $m = 0, 1, 2, \dots$

$$\mathcal{L}\{\delta^{(m+1)}(t - t_0)\} = p\mathcal{L}\{\delta^{(m)}(t - t_0)\} \quad \text{mit} \quad \mathcal{L}\{\delta(t - t_0)\} = e^{-pt_0}$$

und somit, per Induktion,

$$\boxed{\mathcal{L}\{\delta^{(m)}(t - t_0)\} = p^m e^{-pt_0}}. \quad (1.52)$$

1.4.2 Im Unendlichen nicht verschwindende Bildfunktionen

Bei der Ausführung der LAPLACE-Rücktransformation mit Hilfe des Residuenkalküls waren wir im Abschnitt 1.2.1 davon ausgegangen, daß die Bildfunktion für $p \rightarrow \infty$ verschwindet. Diese Bedingung erfüllt die Übertragungsfunktion (1.51) offenbar nicht. Wir können sie aber additiv zerlegen in eine Konstante und eine rationale Funktion, die im Unendlichen verschwindet und sich folglich mit Hilfe des Residuenkalküls in den Zeitbereich transformieren läßt. Die Konstante im Bildbereich sollte nach der Rücktransformation einen Deltaimpuls an der Stelle $t = 0$ ergeben; denn es galt ja $\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1$.

Wir wollen dies durch formale Rücktransformation bestätigen, und zwar betrachten wir gleich den etwas allgemeineren Fall

$$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-pt_0}\} = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} e^{p(t-t_0)} dp. \quad (1.53)$$

Hier tritt nun dasselbe Problem auf wie bei der inversen FOURIER-Transformation des Signals $e^{-j\omega t_0}$: Wir stehen vor einem divergenten Integral. Mit der Substitution $p = \sigma + j\omega$ ($\sigma = \text{const.}$) geht (1.53) über in

$$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-pt_0}\} = e^{\sigma(t-t_0)} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega(t-t_0)} d\omega. \quad (1.54)$$

Interpretieren wir dieses uneigentliche Integral als verallgemeinerte Funktion und ersetzen es durch eine Folge aus eigentlichen Integralen mit den Grenzen $-n\Omega$ und $n\Omega$, so folgt

$$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-pt_0}\} = e^{\sigma(t-t_0)} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-n\Omega}^{n\Omega} e^{j\omega(t-t_0)} d\omega \right\} = e^{\sigma(t-t_0)} \delta(t - t_0)$$

und weiter, unter Berücksichtigung der Ausblendeigenschaft $f(t)\delta(t-t_0) = f(t_0)\delta(t-t_0)$,

$$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-pt_0}\} = \delta(t-t_0),$$

so daß für $t_0 \geq 0$ die Formel (1.46) bestätigt wird.

Wir sind nun auch in der Lage, eine Bildfunktion $X(p)$, die rational in einer Variablen $z = e^{-pT}$ mit $T > 0$ ist oder in eine konvergente Potenzreihe der Form

$$X(p) = \sum_{\nu=0}^{\infty} X_{\nu} z^{\nu}, \quad z = e^{-pT}$$

entwickelt werden kann, in den Zeitbereich zu transformieren. Für die Zeitfunktion $x(t)$ erhalten wir

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\sum_{\nu=0}^{\infty} X_{\nu} z^{\nu}\right\} = \sum_{\nu=0}^{\infty} X_{\nu} \delta(t - \nu T), \quad z = e^{-pT}. \quad (1.55)$$

Als ein Beispiel für eine derartige Bildfunktion betrachten wir

$$X(p) = \frac{1}{\cosh pT} = \frac{2e^{-pT}}{1 + e^{-2pT}}$$

und entwickeln diese Funktion in die (geometrische) Reihe

$$X(p) = 2e^{-pT} \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} e^{-2\nu pT} = 2 \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} e^{-(1+2\nu)pT},$$

die für $|e^{-2pT}| < 1$ bzw. $\operatorname{Re} p > 0$ absolut konvergent ist. Die zugehörige Zeitfunktion lautet also

$$\boxed{\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{\cosh pT}\right\} = 2 \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} \delta(t - T - 2\nu T)}. \quad (1.56)$$

Wir wollen nun noch, wie zu Ende des Abschnitts 1.2.1 angekündigt, die Bildfunktion p^m oder – allgemeiner – $p^m e^{-pt_0}$ ($m = 1, 2, 3, \dots$) in den Zeitbereich transformieren. Mit Blick auf (1.52) erwarten wir, daß in diesem Fall Ableitungen des Deltaimpulses auftreten. Mit der Substitution $p = \sigma + j\omega$ ($\sigma = \text{const.}$) geht das Integral der LAPLACE-Rücktransformation über in

$$\mathcal{L}^{-1}\{p^m e^{-pt_0}\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma + j\omega)^m e^{(\sigma+j\omega)(t-t_0)} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^m}{\partial t^m} e^{(\sigma+j\omega)(t-t_0)} d\omega.$$

Wir interpretieren dieses (divergente) Integral nun wieder als verallgemeinerte Funktion und stellen es dar durch eine Folge von eigentlichen Integralen:

$$\mathcal{L}^{-1}\{p^m e^{-pt_0}\} = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-n\Omega}^{n\Omega} \frac{\partial^m}{\partial t^m} e^{(\sigma+j\omega)(t-t_0)} d\omega \right\} = \frac{d^m}{dt^m} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-n\Omega}^{n\Omega} e^{(\sigma+j\omega)(t-t_0)} d\omega \right\}.$$

Klammern wir aus den Elementen der rechten Folge den Faktor $e^{\sigma(t-t_0)}$ aus, der ja bezüglich der Integration eine Konstante ist, so erkennen wir nach Anwendung der Ausblendeigenschaft, daß auch diese Folge ein Repräsentant von $\delta(t-t_0)$ ist. Erwartungsgemäß dürfen wir also schreiben:

$$\boxed{\mathcal{L}^{-1}\{p^m e^{-pt_0}\} = \delta^{(m)}(t-t_0)}. \quad (1.57)$$

Fourier-Transformation zeitdiskreter Signale

2.1 Zum Begriff des zeitdiskreten Signals

Als *zeitdiskretes Signal* bezeichnet man ein reell- oder komplexwertiges Signal $x = x(t_k)$, das auf einer abzählbaren Menge von Zeitpunkten,

$$\mathbb{T} = \{\dots, t_{-2}, t_{-1}, t_0, t_1, t_2, \dots\},$$

definiert ist, die gemäß

$$\dots < t_{-2} < t_{-1} < t_0 < t_1 < t_2 < \dots,$$

geordnet sind. In jedem endlichen Intervall sollen höchstens endlich viele dieser Punkte, die als *Definitionszeitpunkte* bezeichnet werden, liegen. In vielen Anwendungen liegen diese Zeitpunkte äquidistant und lassen sich daher ausdrücken durch

$$t_k = t_0 + kT, \quad k \in \mathbb{Z},$$

wobei T eine positive Konstante ist, die als *Definitionsperiode* bezeichnet wird. Durch eine geeignete Wahl des Zeiteursprungs kann häufig der *Referenzzeitpunkt* t_0 gleich null gesetzt werden, so dass das Argument des Signals mit kT oder sogar nur mit k bezeichnet wird. Gelegentlich wird daher statt $x(kT)$ bzw. $x(k)$ nur x_k geschrieben. Mit anderen Worten, das zeitdiskrete Signal wird als gewöhnliche Zahlenfolge betrachtet. Die Rolle der Zeit wird dann von dem Index k übernommen.

Falls erforderlich, werden wir zur deutlichen Unterscheidung die bislang betrachteten Signale, die auf der Menge der reellen Zahlen oder auf einem reellen Intervall definiert sind, als *zeitkontinuierliche Signale* bezeichnen. Um Missverständnissen vorzubeugen, sei bemerkt, dass der Begriff „zeitkontinuierlich“ nicht die Stetigkeit (engl. *continuity*) impliziert. Ein zeitkontinuierliches Signal muss also keineswegs stetig sein, wie etwa das Sinussignal $\sin \Omega t$ oder die Exponentialschwingung $e^{j\Omega t}$. Beispielsweise sind die Sprungfunktion oder sogar der Deltaimpuls in diesem Sinne als zeitkontinuierliche Signale anzusehen. Insbesondere ist also auch ein Signal der Form

$$x(t) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} x_{\nu} \delta(t - t_{\nu})$$

als zeitkontinuierlich aufzufassen. Dieses Signal kann ohne weiteres der gewöhnlichen FOURIER-Transformation $X = \mathcal{F}\{x\}$ unterworfen und gemäß

$$X(j\omega) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} x_{\nu} e^{-j\omega t_{\nu}}$$

im Frequenzbereich dargestellt werden. Die *gewöhnliche* FOURIER-Transformation werden wir gelegentlich auch als *zeitkontinuierliche* FOURIER-Transformation bezeichnen.

Für die weitere Diskussion setzen wir zunächst voraus, dass ein zeitdiskretes Signal $x(t_k)$ durch Abtastung eines zeitkontinuierlichen Signals $x(t)$ gewonnen wird (siehe Bild 2.1). Der Abstand zwischen zwei *Abtastzeitpunkten* t_k und t_{k+1} , also $T = t_{k+1} - t_k$, wird dann als *Abtastperiode* und $F = 1/T$ als *Abtastfrequenz* oder als *Abtastrate* bezeichnet. Die zugehörige Kreisfrequenz wird mit Ω bezeichnet, d. h. $\Omega = 2\pi/T$.

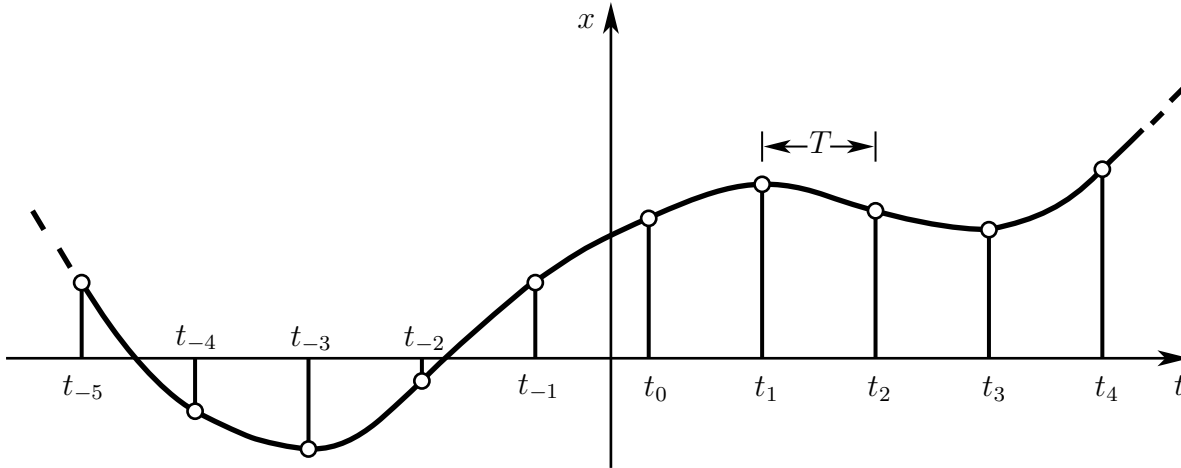


Bild 2.1: Erzeugung eines zeitdiskreten Signals, $x(t_k)$, aus einem zeitkontinuierlichen, $x(t)$.

2.2 Definition der zeitdiskreten Fourier-Transformation

Wir betrachten ein zeitdiskretes Signal $x(t_k)$ und definieren die zugehörige zeitdiskrete FOURIER-Transformierte durch

$$\boxed{\hat{X}(j\omega) = T \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t_k) e^{-j\omega t_k}}. \quad (2.1)$$

Symbolisch drücken wir diesen Zusammenhang durch

$$\hat{X} = \mathcal{F}_d\{x\}$$

aus. Hinreichend, aber keineswegs notwendig für die Existenz der zeitdiskreten FOURIER-Transformierten ist die absolute Summierbarkeit der Funktionswerte $x(t_k)$:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |x(t_k)| < \infty.$$

Falls die Abtastperiode T hinreichend klein ist, kann \hat{X} offenbar als mehr oder weniger gute Approximation der gewöhnlichen FOURIER-Transformierten

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

aufgefasst werden. Bevor wir im nächsten Abschnitt auf den genaueren Zusammenhang zwischen \hat{X} und X eingehen, wollen wir eine Umkehrung der Formel (2.1), also die *inverse zeitdiskrete FOURIER-Transformation* angeben. Hierzu beachten wir zunächst, dass (2.1) in der

Form

$$\widehat{X}(j\omega) = T e^{-j\omega t_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t_k) e^{-j\omega kT} \quad (2.2)$$

dargestellt werden kann. Abgesehen von dem Faktor $T e^{-j\omega t_0}$ handelt es sich bei der zeitdiskreten FOURIER-Transformation also um nichts anderes als um eine FOURIER-Reihe in der Variablen ω mit den FOURIER-Koeffizienten $x(t_k)$. Die Umkehrung der zeitdiskreten FOURIER-Transformation ist daher im Wesentlichen durch die Koeffizientenformel für die FOURIER-Reihe, also durch

$$x(t_k) = \frac{1}{\Omega T} \int_{-\Omega/2}^{\Omega/2} \widehat{X}(j\omega) e^{j\omega t_0} e^{j\omega kT} d\omega$$

gegeben. Setzen wir nun $\Omega T = 2\pi$ und $t_0 + kT = t_k$, so erhalten wir schließlich

$$x(t_k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega/2}^{\Omega/2} \widehat{X}(j\omega) e^{j\omega t_k} d\omega. \quad (2.3)$$

Symbolisch schreiben wir hierfür

$$x = \mathcal{F}_d^{-1}\{\widehat{X}\}.$$

Unter der naheliegenden Annahme, dass $\widehat{X}(j\omega)$ für $T \rightarrow 0$ bzw. $\Omega \rightarrow \infty$ gegen $X(j\omega)$ strebt, geht (2.3) offenbar über in die Formel für die zeitkontinuierliche FOURIER-Rücktransformation:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

Wie im Fall der zeitkontinuierlichen FOURIER-Transformation lassen sich auch für die zeitdiskrete FOURIER-Transformation eine Reihe von Eigenschaften angeben, die sich unmittelbar aus den Eigenschaften der FOURIER-Reihen ergeben. Hierzu gehören insbesondere die Homogenität und die Additivität und folglich die Linearität. Weiter lassen sich ein *Differentiationssatz*

$$\mathcal{F}_d\{t_k x(t_k)\} = j \frac{d\widehat{X}(j\omega)}{d\omega},$$

ein *Verschiebungssatz*

$$\mathcal{F}_d\{x(t_{k-\ell})\} = e^{-j\omega \ell T} \widehat{X}(j\omega), \quad \ell \in \mathbb{Z}$$

und ein *Modulationssatz*

$$\mathcal{F}_d\{e^{j\omega_0 t_k} x(t_k)\} = \widehat{X}(j\omega - j\omega_0), \quad \omega_0 \in \mathbb{R}$$

angeben.

2.3 Poissonsche Formel und Abtasttheorem

2.3.1 Zusammenhang zwischen der zeitdiskreten und der zeitkontinuierlichen Fourier-Transformation

Wir wollen uns in diesem Abschnitt mit der Frage befassen, welcher genaue Zusammenhang zwischen der zeitkontinuierlichen und der zeitdiskreten FOURIER-Transformation besteht. Zu diesem Zweck betrachten wir ein zeitkontinuierliches Signal x mit der FOURIER-Transformierten X . Das durch äquidistante Abtastung zu den Zeitpunkten $t_k = t_0 + kT$ gewonnene zeitdiskrete Signal $x(t_k)$ habe die zeitdiskrete FOURIER-Transformierte \widehat{X} . Da die

Werte $x(t_k)$ sowohl durch Rücktransformation von X als auch von \widehat{X} ermittelt werden können, können wir schreiben

$$x(t_k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t_k} d\omega \quad \text{bzw.} \quad x(t_k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega/2}^{\Omega/2} \widehat{X}(j\omega) e^{j\omega t_k} d\omega .$$

Für alle $k \in \mathbb{Z}$ gilt also

$$\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t_k} d\omega = \int_{-\Omega/2}^{\Omega/2} \widehat{X}(j\omega) e^{j\omega t_k} d\omega . \quad (2.4)$$

Als nächstes ersetzen in (2.4) das links stehende uneigentliche Integral gemäß

$$\int_{-\infty}^{\infty} = \cdots + \int_{-3\Omega/2}^{-\Omega/2} + \int_{-\Omega/2}^{\Omega/2} + \int_{\Omega/2}^{3\Omega/2} + \cdots = \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} \int_{\mu\Omega-\Omega/2}^{\mu\Omega+\Omega/2} .$$

durch eine unendliche Summe von eigentlichen Integralen, d. h.

$$\sum_{\mu=-\infty}^{\infty} \int_{\mu\Omega-\Omega/2}^{\mu\Omega+\Omega/2} X(j\omega) e^{j\omega t_k} d\omega = \int_{-\Omega/2}^{\Omega/2} \widehat{X}(j\omega) e^{j\omega t_k} d\omega ,$$

und nehmen in den unter dem Summenzeichen stehenden Integralen eine Variablensubstitution $\omega \rightarrow \omega + \mu\Omega$ vor:

$$\sum_{\mu=-\infty}^{\infty} \int_{-\Omega/2}^{\Omega/2} X(j\omega + j\mu\Omega) e^{j(\omega + j\mu\Omega)t_k} d\omega = \int_{-\Omega/2}^{\Omega/2} \widehat{X}(j\omega) e^{j\omega t_k} d\omega .$$

Nach dem Vertauschen der Reihenfolge von Summation und Integration und unter Berücksichtigung des aus der Periodizität der Exponentialfunktion folgenden Zusammenhangs

$$e^{j\mu\Omega t_k} = e^{j\mu\Omega(t_0 + kT)} = e^{j\mu\Omega t_0}$$

erhalten wir

$$\int_{-\Omega/2}^{\Omega/2} \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} X(j\omega + j\mu\Omega) e^{j\mu\Omega t_0} e^{j\omega t_k} d\omega = \int_{-\Omega/2}^{\Omega/2} \widehat{X}(j\omega) e^{j\omega t_k} d\omega .$$

bzw.

$$\int_{-\Omega/2}^{\Omega/2} \left(\sum_{\mu=-\infty}^{\infty} X(j\omega + j\mu\Omega) e^{j\mu\Omega t_0} - \widehat{X}(j\omega) \right) e^{j\omega t_k} d\omega = 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z} .$$

Dieses Ergebnis lässt sich auch wie folgt darstellen:

$$\int_{-\Omega/2}^{\Omega/2} \left(\sum_{\mu=-\infty}^{\infty} X(j\omega + j\mu\Omega) e^{j\mu\Omega t_0} - \widehat{X}(j\omega) \right) e^{j\omega t_0} e^{j\omega kT} d\omega = 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z} .$$

Mit anderen Worten, alle FOURIER-Koeffizienten der periodischen Funktion

$$\Delta(j\omega) := \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} X(j\omega + j\mu\Omega) e^{j(\omega + \mu\Omega)t_0} - \widehat{X}(j\omega) e^{j\omega t_0}$$

sind null. Setzen wir voraus, dass X und \hat{X} glatt oder zumindest stückweise glatt sind, so hat auch Δ diese Eigenschaft und wird durch die zugehörige FOURIER-Reihe dargestellt. Da die FOURIER-Koeffizienten aber alle null sind, folgt $\Delta = 0$ und somit

$$\boxed{\hat{X} = \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} X_{\mu} \ , \quad X_{\mu}(j\omega) = X(j\omega + j\mu\Omega)e^{j\mu\Omega t_0}} \quad (2.5)$$

Dies ist der gesuchte Zusammenhang zwischen X und \hat{X} . Falls $X = \mathcal{F}\{x\}$ gegeben ist, können wir hiermit \hat{X} bestimmen. Es stellt sich natürlich auch die umgekehrte Frage, ob nämlich aus \hat{X} auch X bestimmt werden kann. Dies ist in der Tat unter gewissen Bedingungen möglich. Bevor wir uns mit dieser Frage etwas näher befassen, wollen wir aus (2.5) die POISSONSche Formel herleiten.

2.3.2 Die Poissonsche Formel

Drücken wir in (2.5) das zeitdiskrete Spektrum \hat{X} durch die Abtastwerte $x(t_k)$ aus, so erhalten wir

$$T \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t_k) e^{-j\omega t_k} = \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} X(j\omega + j\mu\Omega) e^{j\mu\Omega t_0} \ .$$

Setzen wir nun $t_0 = 0$ und $\omega = 0$, so erhalten wir schließlich die berühmte POISSONSche Formel:

$$\boxed{T \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT) = \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} X(j\mu\Omega) \ , \quad \Omega T = 2\pi} \quad (2.6)$$

Falls x oder X an einer Stelle kT bzw. $j\mu\Omega$ nicht stetig sind, sondern dort eine Sprungstelle besitzen, sind $x(kT)$ und $X(j\mu\Omega)$ jeweils als arithmetisches Mittel aus dem rechtsseitigen und linksseitigen Grenzwert an der betreffenden Stelle zu interpretieren:

$$x(kT) = \frac{x(kT+0) + x(kT-0)}{2} \ , \quad X(j\mu\Omega) = \frac{X(j\mu\Omega + j0) + X(j\mu\Omega - j0)}{2} \ .$$

Hierbei bezeichnen $x(kT+0)$ und $X(j\mu\Omega + j0)$ die rechtsseitigen Grenzwerte

$$x(kT+0) := \lim_{\substack{\tau \rightarrow 0 \\ \tau > 0}} x(t + \tau) \quad \text{bzw.} \quad X(j\mu\Omega + j0) := \lim_{\substack{\omega \rightarrow 0 \\ \omega > 0}} X(j\mu\Omega + j\omega)$$

und $x(kT-0)$ und $X(j\mu\Omega - j0)$ die linksseitigen Grenzwerte

$$x(kT-0) := \lim_{\substack{\tau \rightarrow 0 \\ \tau > 0}} x(t - \tau) \quad \text{bzw.} \quad X(j\mu\Omega - j0) := \lim_{\substack{\omega \rightarrow 0 \\ \omega > 0}} X(j\mu\Omega - j\omega) \ .$$

Wie in der Theorie der FOURIER-Reihen üblich, sind darüber hinaus die in (2.6) auftretenden Reihen im Sinne der sogenannten EISENSTEIN-Summation zu summieren, d. h., die obere und die untere Summationsgrenze müssen zugleich gegen unendlich streben:

$$\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\nu=-n}^n \ .$$

Als ein einfaches Beispiel für die Anwendung der POISSONSchen Formel betrachten wir das Transformationspaar

$$x(t) = 2\varepsilon(t)e^{-\alpha t} \quad \longleftrightarrow \quad X(j\omega) = \frac{2}{\alpha + j\omega} \ , \quad \alpha > 0 \ .$$

Berücksichtigen wir, dass $x(t)$ für $t < 0$ null und daher für $t = 0$ durch $x(0+)/2 = 1$ gegeben ist, so erhalten wir aus (2.6)

$$T + 2T \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\alpha k T} = \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} \frac{2}{\alpha + j\mu\Omega} .$$

Die (geometrische) Reihe auf der linken Seite lässt sich sofort summieren, so dass wir die linke Seite ausdrücken können durch

$$T + 2T \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\alpha k T} = T + 2T \frac{e^{-\alpha T}}{1 - e^{-\alpha T}} = T \cdot \frac{1 + e^{-\alpha T}}{1 - e^{-\alpha T}} = T \coth(\alpha T/2) .$$

Zerlegen wir noch die rechte Seite von (2.6) gemäß

$$\sum_{\mu=-\infty}^{\infty} \frac{2}{\alpha + j\mu\Omega} = \frac{2}{\alpha} + \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{\mu=-n}^{-1} \frac{2}{\alpha + j\mu\Omega} + \sum_{\mu=1}^n \frac{2}{\alpha + j\mu\Omega} \right\}$$

und fassen die rechts stehenden (endlichen) Reihen zu einer zusammen, so erhalten wir schließlich nach Ausführung des Grenzübergangs:

$$T \coth(\alpha T/2) = \frac{2}{\alpha} + \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{4\alpha}{\alpha^2 + \mu^2 \Omega^2} .$$

Obwohl wir diese Beziehung, die als Partialbruchzerlegung des hyperbolischen Cotangens aufgefasst werden kann, unter der Voraussetzung hergeleitet haben, dass α positiv ist, sei bemerkt, dass die Formel auch für $\alpha < 0$ richtig ist, was u. a. daraus folgt, dass die \coth -Funktion ungerade ist. Für $\alpha = 0$ hat die \coth -Funktion übrigens einen einfachen Pol.

2.3.3 Das Abtasttheorem

Wir kommen nun zurück auf die zuvor gestellte Frage, wie und unter welchen Bedingungen das Spektrum X aus \hat{X} wiedergewonnen werden kann. Wir nehmen an, das Signal x sei frequenzbegrenzt, d. h., es gebe eine positive Zahl ω_g derart, dass das Spektrum $X = \mathcal{F}\{x\}$ der Bedingung

$$X(j\omega) = 0 \quad \text{für} \quad \omega \geq \omega_g$$

genügt. Bild 2.2 zeigt das Spektrum eines derartigen Signals. Da das Spektrum im Allgemeinen

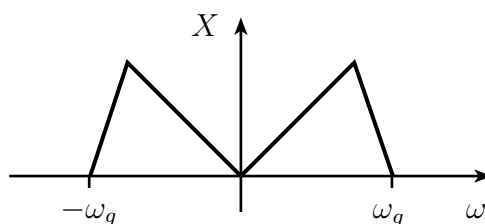


Bild 2.2: Symbolische Darstellung des Spektrums eines mit ω_g frequenzbegrenzten Signals.

komplexe Werte annimmt, ist der angegebene spektrale Verlauf nur symbolisch zu interpretieren. Für unsere Diskussion von Bedeutung ist an dieser Stelle ausschließlich die Tatsache, dass das Spektrum X außerhalb des Intervalls $(-\omega_g, \omega_g)$ null ist. Falls die Bedingung

$$\omega_g \leq \Omega - \omega_g \quad \text{bzw.} \quad \Omega \geq 2\omega_g$$

erfüllt ist, besteht das „zeitdiskrete“ Spektrum \hat{X} aus unendlich vielen sich nicht überlappenden Teilspektren (siehe Bild 2.3). Unter dieser Voraussetzung kann X gemäß

$$X = \text{rect}(\omega/\omega_0) \hat{X} \quad (2.7)$$

aus \hat{X} extrahiert werden, wobei ω_0 der Bedingung

$$\omega_g \leq \omega_0 \leq \Omega - \omega_g$$

genügen muss. Insbesondere kann ω_0 also gleich dem arithmetischen Mittel aus ω_g und $\Omega - \omega_g$ gewählt werden, also gleich $\Omega/2$.

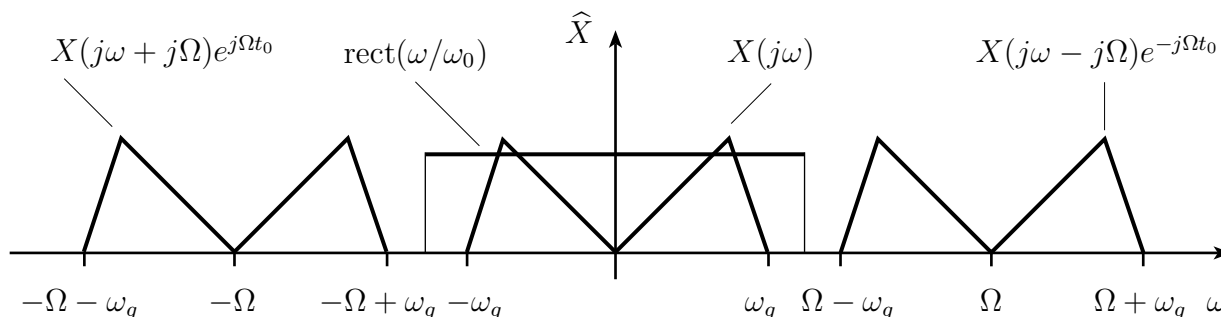


Bild 2.3: Symbolische Darstellung des zu X gehörigen zeitdiskreten Spektrums \hat{X} .

Die Beziehung (2.7) lässt sich auch in den Zeitbereich transformieren, so dass wir $x(t)$ durch die Abtastwerte $x(t_k)$ ausdrücken können. Das entsprechende Ergebnis findet seinen Ausdruck in dem berühmten

Abtasttheorem: Sei x ein Signal, dessen FOURIER-Transformierte, X , die Eigenschaft

$$X(j\omega) = 0 \quad \text{für} \quad \omega \geq \omega_g = 2\pi f_g$$

besitze. Dann kann unter der Bedingung

$$\Omega \geq 2\omega_g \quad \text{bzw.} \quad T \leq \frac{1}{2f_g} \quad (2.8)$$

das Signal x wie folgt aus seinen Abtastwerten $x(t_k)$ wiedergewonnen werden:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t_k) \text{si}[(t - t_k)\Omega/2] . \quad (2.9)$$

Die Aussage des Abtasttheorems, nach der ein frequenzbegrenztes Signal x repräsentiert werden kann durch eine Folge seiner Abtastwerte, bildet die Grundlage für sämtliche modernen Verfahren der Signalverarbeitung, -übertragung und -speicherung. Die Bedingung (2.8) ist offenbar äquivalent zu der Forderung, daß die Abtastrate $F = 1/T$ mindestens doppelt so groß ist wie die höchste in dem Signal x vorkommende Frequenz.

Zum Beweis des Abtasttheorems drücken wir in (2.7) das „zeitdiskrete“ Spektrum \hat{X} mit Hilfe von (2.1) durch die Abtastwerte $x(t_k)$ aus und wählen zugleich $\omega_0 = \Omega/2$:

$$X(j\omega) = T \text{rect}(2\omega/\Omega) \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t_k) e^{-j\omega t_k} . \quad (2.10)$$

Machen wir nun Gebrauch von dem leicht herzuleitenden Transformationspaar

$$T \text{rect}(2\omega/\Omega) \bullet \longleftrightarrow \text{si}(\Omega t/2) , \quad \Omega T = 2\pi ,$$

und berücksichtigen den Verschiebungssatz der FOURIER-Transformation, so erhalten wir nach FOURIER-Rücktransformation der Gleichung (2.10) die zu beweisende Formel (2.9).

2.3.4 Ergänzende Bemerkungen zur Anwendung des Abtasttheorem

Die angegebene Formel (2.9) zur Wiedergewinnung des zeitkontinuierlichen Signals aus den Abtastwerten ist zwar von großer Bedeutung für viele theoretische Untersuchungen, sie kann aber in dieser Form nicht unmittelbar in der Praxis eingesetzt werden, um etwa aus einer Folge von Abtastwerten das ursprüngliche Signal wiederzugewinnen. Zur Berechnung von $x(t)$ zu einem Zeitpunkt $t \notin \{t_k | t_k = t_0 + kT, k \in \mathbb{Z}\}$ würden sämtliche Abtastwerte benötigt, und zwar nicht nur Werte aus der Vergangenheit ($t_k < t$), sondern auch zukünftige Werte ($t_k > t$). Es leuchtet ein, dass dies aus prinzipiellen physikalischen Gründen nicht realisiert werden kann.

In der Praxis geschieht die Umsetzung eines zeitdiskreten Signals $x(t_k)$ in ein zeitkontinuierliches Signal häufig dadurch, dass die si-Funktion in (2.9) durch einen Rechteckimpuls der Breite T , also durch

$$p(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \leq t < T \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (2.11)$$

ersetzt wird. Das resultierende Signal, nämlich

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t_k) p(t - t_k) , \quad (2.12)$$

stellt eine sogenannte Treppenfunktion dar und kann natürlich nur eine Näherung des eigentlich gewünschten Signals $x(t)$ sein; es ist daher mit \tilde{x} bezeichnet. Bild 2.4 veranschaulicht anhand eines Beispiels den in (2.12) gegebenen Zusammenhang¹. Zur Beurteilung der Güte

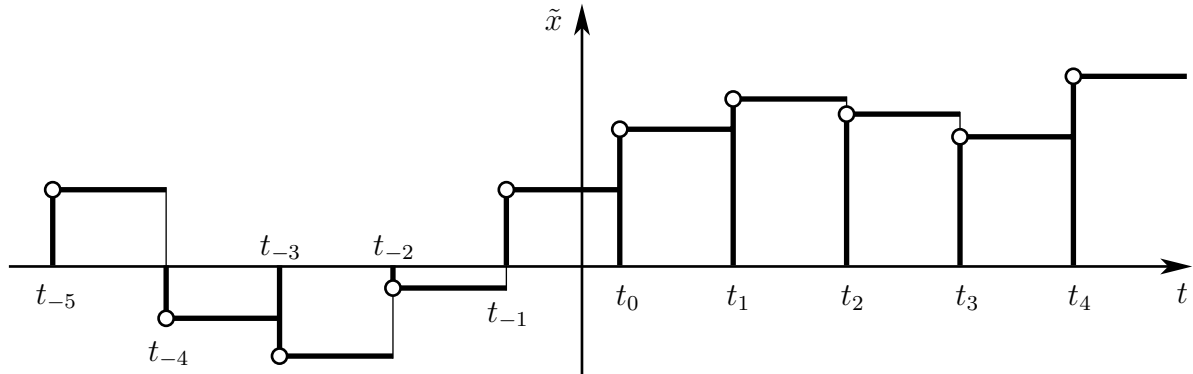


Bild 2.4: Zur Gewinnung eines zeitkontinuierlichen Signals \tilde{x} aus Abtastwerten eines zeitdiskreten Signals $x(t_k)$.

der Näherung bestimmen wir die FOURIER-Transformierte $\tilde{X} = \mathcal{F}\{\tilde{x}\}$. Mit $P = \mathcal{F}\{p\}$ erhalten wir aus (2.12)

$$\tilde{X}(j\omega) = P(j\omega) \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t_k) e^{-j\omega t_k} = \frac{1}{T} P(j\omega) \hat{X}(j\omega) .$$

Berücksichtigen wir nun, dass P durch

$$P(j\omega) = \int_0^T e^{-j\omega t} dt = T e^{-j\omega T/2} \text{si}(\omega T/2)$$

gegeben ist, können wir \tilde{X} wie folgt ausdrücken:

$$\tilde{X}(j\omega) = e^{-j\omega T/2} \text{si}(\omega T/2) \hat{X}(j\omega) .$$

Wir erkennen, dass \tilde{X} alle Spektralanteile enthält, die auch in \hat{X} enthalten sind. Diese werden jedoch mit einer si-Funktion gewichtet, die ihre ersten Nullstellen bei $\pm\Omega$ hat. Gelegentlich spricht man in diesem Zusammenhang auch von der sogenannten si-Verzerrung. Bild 2.5 zeigt den Verlauf der si-Funktion relativ zu der Lage der Teilspektren von \hat{X} . Zusätzlich zu der Gewichtung mit der si-Funktion tritt noch ein Phasenfaktor $\exp(-j\omega T/2)$ auf, der aber lediglich eine zeitliche Verzögerung um $T/2$ widerspiegelt.

Um das Spektrum $X(j\omega)$ aus \tilde{X} herauszufiltern, wird das treppenförmige Signal \tilde{x} auf ein zeitkontinuierliches Tiefpassfilter gegeben, das die Spektralanteile für $|\omega| > \omega_g$ hinreichend stark unterdrückt. Durch einen geeigneten Entwurf dieses Filters kann überdies die leichte Verzerrung des Spektrums im Intervall $(-\omega_g, \omega_g)$, die durch die si-Funktion verursacht wird, wieder ausgeglichen werden.

Bislang waren wir davon ausgegangen, dass die in $\tilde{X}(j\omega)$ enthaltenen Teilspektren $X_\mu(j\omega) = X(j\omega - j\mu\Omega) \exp(-j\mu\Omega t_0)$ sich gegenseitig nicht überlappen. Sollte die Abtastrate zu klein gewählt sein, kommt es aber offenbar zu einer Überlappung der Spektren, so dass es nicht mehr möglich ist, das Spektrum $X(j\omega)$ fehlerfrei aus $\tilde{X}(j\omega)$ herauszufiltern. Da andererseits ein (zeitbegrenztes) Signal aber prinzipiell nicht bandbegrenzt sein kann, tritt in Wirklichkeit

¹Das Ausgangssignal eines Digital/Analog-Umsetzers hat übrigens häufig diese Form.

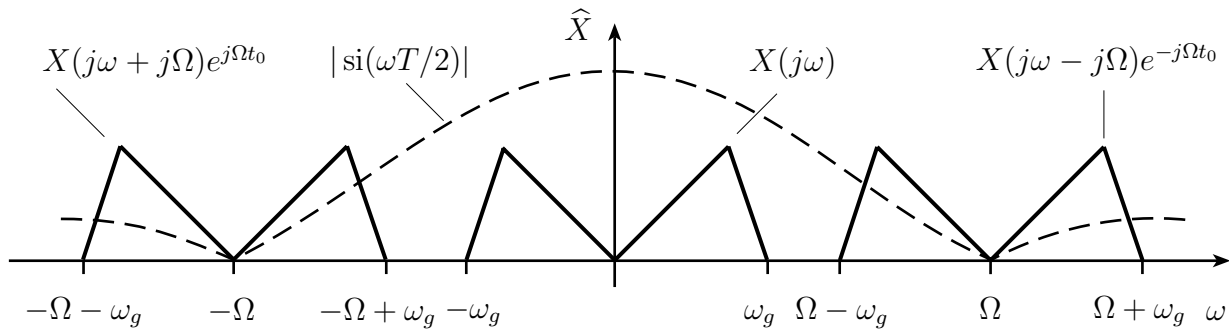
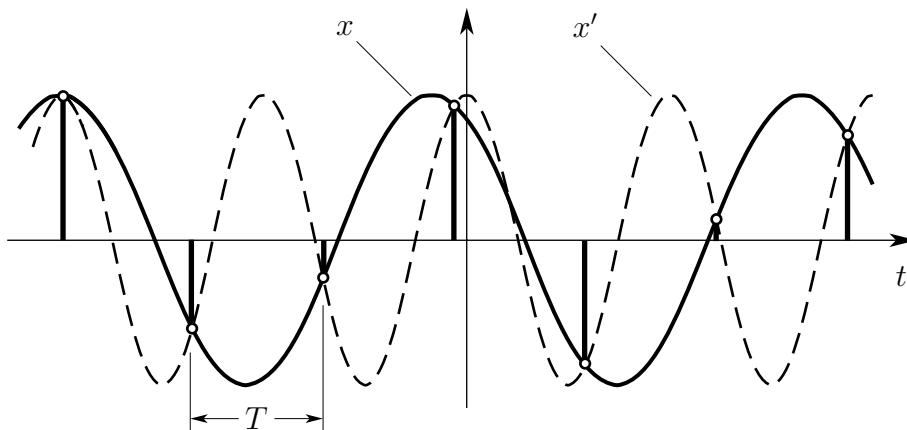


Bild 2.5: Zur Erläuterung der si-Verzerrung

eine gewisse Überlappung der Teilspektren immer auf. Dieses Phänomen wird in der englischsprachigen Literatur als *aliasing* bezeichnet. Der hierdurch verursachte Fehler, der sogenannte *Alias-Fehler*, lässt sich aber durch geeignete Filterung und Wahl einer hinreichend hohen Abtastrate beliebig klein machen. Beispielsweise benutzt man zur Übertragung eines Fernsprechsinals, dessen Grenzfrequenz etwa 3,4 kHz beträgt, eine Abtastrate von 8 kHz. Bei der klassischen CompactDisc (CD) verwendet man eine Abtastrate von 44,1 kHz; offenbar liegt man damit deutlich über dem Zweifachen der von den meisten Menschen wahrnehmbaren höchsten Frequenz.

Bild 2.6: Das Signal x' verletzt die Abtastbedingung, während das Signal x sie erfüllt.

Anhand eines einfachen Beispiels soll abschließend noch die Bedeutung der Einhaltung der Abtastbedingung erläutert werden. Wir betrachten die beiden in Bild 2.6 dargestellten sinusförmigen Signale x und x' . Die Frequenz des Signals x ist kleiner als die halbe Abtastrate und erfüllt somit die Abtastbedingung. Die Frequenz des Signals x' ist größer als die halbe Abtastrate und verletzt folglich die Abtastbedingung. Werden die Signale in der angedeuteten Weise abgetastet, so entsteht jeweils das gleiche zeitdiskrete Signal:

$$x(t_k) = x'(t_k) \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Ein eindeutiger Rückschluss auf das ursprüngliche Signal ist daher nicht mehr möglich.

2.3.5 Äquivalente zeitdiskrete Signale

Gegeben sei ein zeitkontinuierliches Signal ξ , dessen Spektrum, $\Xi = \mathcal{F}\{\xi\}$, außerhalb des Intervalls (ω_g, ω_g) null ist. Dieses Signal werde zweimal mit der Rate

$$F = 1/T \geq \omega_g/\pi \quad (2.13)$$

abgetastet, und zwar einmal zu den Zeitpunkten

$$t_k = t_0 + kT \quad \text{mit} \quad 0 \leq t_0 < T$$

und ein andermal zu den Zeitpunkten

$$t'_k = t'_0 + kT \quad \text{mit} \quad 0 \leq t'_0 < T .$$

In Bild 2.7 ist dieser Vorgang anhand eines Beispiels erläutert. Die resultierenden zeitdiskreten Signale, die mit $x(t_k) := \xi(t_k)$ und $x'(t'_k) := \xi(t'_k)$ bezeichnet werden sollen, sind für $t_0 \neq t'_0$ offenbar verschieden, beinhalten aber die gleiche Information über das ursprüngliche zeitkontinuierliche Signal ξ . Aus beiden zeitdiskreten Signalen kann nämlich wegen Einhaltung der Abtastbedingung (2.13) das Signal ξ wiedergewonnen werden, d. h.,

$$\xi(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t_k) \operatorname{si}[(t - t_k)\Omega/2] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x'(t'_k) \operatorname{si}[(t - t'_k)\Omega/2] .$$

Das Signal ξ kann also sowohl durch $x(t_k)$ als auch durch $x'(t'_k)$ repräsentiert werden. Es liegt daher nahe, diese Signale als äquivalent zu bezeichnen.

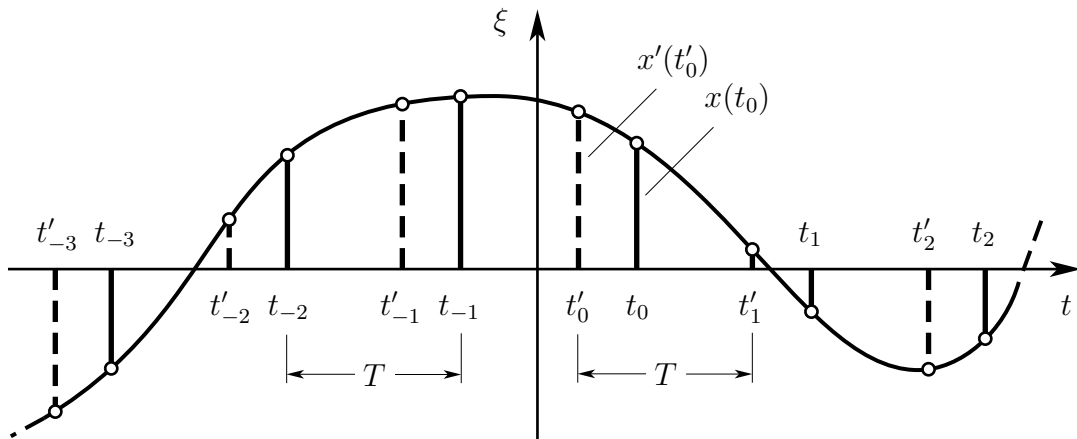


Bild 2.7: Gewinnung zweier äquivalenter zeitdiskreter Signale durch Abtastung eines zeitkontinuierlichen Signals.

Die Äquivalenz zwischen zwei zeitdiskreten Signalen lässt sich auch völlig unabhängig von einem Abtastvorgang festlegen, und zwar mit folgender

Definition. Seien x und x' zwei zeitdiskrete Signale mit den Definitionszeitpunkten

$$t_k = t_0 + kT \quad \text{bzw.} \quad t'_k = t'_0 + kT$$

und den zeitdiskreten FOURIER-Transformierten \hat{X} bzw. \hat{X}' , d. h.,

$$\hat{X}(j\omega) = T \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t_k) e^{-j\omega t_k} \quad \text{bzw.} \quad \hat{X}'(j\omega) = T \sum_{k=-\infty}^{\infty} x'(t'_k) e^{-j\omega t'_k} .$$

Dann heißen die Signale x und x' äquivalent, falls \hat{X} und \hat{X}' im Intervall $(-\Omega/2, \Omega/2)$ gleich sind, d. h., falls

$$\omega \in (-\Omega/2, \Omega/2) \Rightarrow \hat{X}(j\omega) = \hat{X}'(j\omega) . \quad (2.14)$$

Man kann sich leicht davon überzeugen, dass es sich bei der hierdurch definierten Relation zwischen zwei zeitdiskreten Signalen tatsächlich um eine Äquivalenzrelation handelt. Im Zeitbereich besteht zwischen zwei äquivalenten Signalen x und x' übrigens der Zusammenhang

$$x(t_k) = \sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} x'(t'_\kappa) \operatorname{si}[(t_k - t'_\kappa)\Omega/2] \quad \text{bzw.} \quad x'(t'_\kappa) = \sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} x(t_\kappa) \operatorname{si}[(t'_\kappa - t_\kappa)\Omega/2] . \quad (2.15)$$

Zum Beweis ersetzen wir in der Formel für die zeitdiskrete FOURIER-Rücktransformation [vgl. (2.3)], d. h., in

$$x(t_k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega/2}^{\Omega/2} \hat{X}(j\omega) e^{j\omega t_k} d\omega ,$$

die Spektralfunktion \hat{X} durch \hat{X}' und drücken anschließend \hat{X}' durch die Abtastwerte $x'(t'_\kappa)$ aus:

$$x(t_k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega/2}^{\Omega/2} \left(T \sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} x'(t'_\kappa) e^{-j\omega t'_\kappa} \right) e^{j\omega t_k} d\omega .$$

Nach dem Vertauschen der Reihenfolge von Summation und Integration erhalten wir

$$x(t_k) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} x'(t'_\kappa) T \int_{-\Omega/2}^{\Omega/2} e^{j\omega(t_k - t'_\kappa)} d\omega$$

und schließlich — nach Auswertung des Integrals — eine Bestätigung für die Richtigkeit der linken Formel in (2.15). Die rechte Formel in (2.15) lässt sich offenbar in entsprechender Weise bestätigen.

2.3.6 Eine interessante Eigenschaft frequenzbegrenzter Signale

Wir betrachten ein mit ω_g frequenzbegrenztes zeitkontinuierliches Signal x und nehmen an, dass dieses quadratisch über $(-\infty, \infty)$ integrierbar ist. Die Größe

$$w_x := \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$$

wird als *Energie* des Signals x bezeichnet. Sei dann y ein weiteres zeitkontinuierliches Signal, das ebenfalls mit ω_g frequenzbegrenzt und quadratisch integrierbar ist. Aufgrund der SCHWARZschen Ungleichung

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} x(t) y^*(t) dt \right|^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt \int_{-\infty}^{\infty} |y(t)|^2 dt$$

konvergiert dann auch das Integral

$$w_{xy} := \int_{-\infty}^{\infty} x(t) y^*(t) dt , \quad (2.16)$$

das wir als *Kreuzenergie* der Signale x und y bezeichnen wollen².

²Bezeichnet etwa x die (reelle) elektrische Spannung an einem Tor und y den (reellen) Strom, so stellt w_{xy} offenbar die über das Tor übertragene elektrische Energie dar.

Werden nun die Signale x und y unter Beachtung der Bedingung $T < \pi/\omega_g$ zu den Zeitpunkten

$$t_k = t_0 + kT, \quad k \in \mathbb{Z}$$

abgetastet, so lassen sich w_x und w_{xy} wie folgt ausdrücken:

$$w_x = T \sum_{k=-\infty}^{\infty} |x(t_k)|^2 \quad \text{bzw.} \quad w_{xy} = T \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t_k) y^*(t_k). \quad (2.17)$$

Es sei ausdrücklich betont, dass diese Ausdrücke keine Approximationen sind, sondern exakt gelten. Da der linke Ausdruck in (2.17) als Sonderfall ($y = x$) des rechten angesehen werden kann, genügt es, den rechten zu beweisen.

Der Beweis beruht im Wesentlichen auf der Tatsache, dass die frequenzbegrenzten Signale x und y als Folge des Abtasttheorems durch

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t_k) \operatorname{si}[(t - t_k)\Omega/2]$$

bzw.

$$y(t) = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} y(t_\ell) \operatorname{si}[(t - t_\ell)\Omega/2]$$

dargestellt werden können. Setzen wir diese beiden Ausdrücke in (2.16) ein, so erhalten wir nach Vertauschen der Reihenfolge von Integration und Summation

$$w_{xy} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} x(t_k) y^*(t_\ell) \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{si}[(t - t_k)\Omega/2] \operatorname{si}[(t - t_\ell)\Omega/2] dt.$$

Wie wir weiter unten zeigen werden, sind die beiden si-Funktionen für $k \neq \ell$ orthogonal und für $k = \ell$ ergibt das Integral den Wert T , d. h.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{si}[(t - t_k)\Omega/2] \operatorname{si}[(t - t_\ell)\Omega/2] dt = \begin{cases} 0 & \text{für } k \neq \ell \\ T & \text{für } k = \ell \end{cases}.$$

Folglich bleiben von der Doppelreihe nur die Terme mit $k = \ell$ übrig, so dass wir die Richtigkeit der Beziehungen (2.17) nachgewiesen haben.

Um die erwähnte Orthogonalität der si-Funktionen zu zeigen, ersetzen wir in der PARSEVALSchen Gleichung

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(t) v^*(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U(j\omega) V^*(j\omega) d\omega$$

die Funktionen u und v durch $u(t) = \operatorname{si}[(t - t_k)\Omega/2]$ bzw. $v(t) = \operatorname{si}[(t - t_\ell)\Omega/2]$. Berücksichtigen wir, dass U und V^* durch

$$U(j\omega) = T \operatorname{rect}(2\omega/\Omega) e^{-j\omega t_k} \quad \text{bzw.} \quad V^*(j\omega) = T \operatorname{rect}(2\omega/\Omega) e^{j\omega t_\ell}$$

gegeben sind, so erhalten wir schließlich das gewünschte Resultat:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{si}[(t - t_k)\Omega/2] \operatorname{si}[(t - t_\ell)\Omega/2] dt = \frac{T^2}{2\pi} \int_{-\Omega/2}^{\Omega/2} e^{j\omega(t_\ell - t_k)} d\omega = \begin{cases} 0 & \text{für } k \neq \ell \\ T & \text{für } k = \ell \end{cases}.$$

2.4 Die diskrete Fourier-Transformation

2.4.1 Herleitung der diskreten Fourier-Transformation

Neben der gewöhnlichen (zeitkontinuierlichen) FOURIER-Transformation und der im vorausgegangenen Abschnitt ausführlich diskutierten zeitdiskreten FOURIER-Transformation spielt in der Praxis eine weitere mit dem Namen FOURIER verbundene Transformation eine bedeutende Rolle. Bei dieser Transformation wird sowohl die Zeit- als auch die Frequenzachse diskretisiert; man bezeichnet sie daher als *diskrete FOURIER-Transformation* und kürzt sie mit DFT ab. Missverständnisse, die möglicherweise wegen der Ähnlichkeit der Attribute „zeitdiskret“ und „diskret“ auftreten können, lösen sich im Zusammenhang mit konkreten Anwendungen meistens auf.

Um die Zweckmäßigkeit der Einführung der DFT zu erkennen, stellen wir uns die Aufgabe, ein konkret vorliegendes (zeitkontinuierliches) Signal, es heiße x , spektral zu analysieren. In der Praxis wird die Transformation dieses Signals in den Frequenzbereich gemäß

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \quad (2.18)$$

nur in den seltensten Fällen durch direkte Auswertung des Integrals möglich sein, da ein analytischer Ausdruck für $x(t)$ meistens nicht gegeben ist. Aber selbst wenn ein derartiger Ausdruck bekannt sein sollte, wird es vielfach schwierig oder sogar unmöglich sein, das FOURIER-Integral geschlossen zu berechnen. Häufig führt in diesem Fall nur eine numerische Integration zum Erfolg. Dies trifft *a priori* zu, wenn aufgrund einer Abtastung die Werte des Signals nur zu endlich vielen diskreten Zeitpunkten vorliegen.

Um zu erläutern, wie in diesem Fall die Transformation in den Frequenzbereich vorgenommen werden kann, nehmen wir zunächst an, es handele sich um eine ungerade Anzahl, etwa $2n + 1$, Signalwerte, die durch äquidistante Abtastung zu den Zeitpunkten

$$t_{-n}, \dots, t_{-2}, t_{-1}, t_0, t_1, t_2, \dots, t_n$$

gewonnen wurden. Die Abtastperiode, also der Abstand zwischen zwei aufeinander folgenden Abtastzeitpunkten, sei durch Δt gegeben³, so dass diese Zeitpunkte wie folgt charakterisiert werden können:

$$t_\nu = t_0 + \nu \Delta t, \quad \nu = -n, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, n,$$

wobei t_0 eine beliebige reelle Konstante ist, die durch eine geeignete Festlegung des Zeitnullpunkts häufig zu Null gewählt werden kann.

Es liegt dann nahe, das FOURIER-Integral durch eine Summe zu approximieren und diese nur für diskrete Frequenzpunkte,

$$\omega_\mu = \mu \Delta \omega, \quad \mu = -n, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, n$$

auszuwerten:

$$\boxed{\tilde{X}(j\omega_\mu) = \sum_{\nu=-n}^n x(t_\nu) e^{-j\omega_\mu t_\nu} \Delta t} \quad (2.19)$$

³Die Abtastperiode wird hier mit Δt bezeichnet, weil das bislang hierfür benutzte Formelzeichen T einer anderen Verwendung vorbehalten bleibt.

Zur Vereinfachung der folgenden Diskussion setzen wir $t_0 = 0$ voraus. Als Folge dieser Voraussetzung ist \tilde{X} periodisch und genügt der Bedingung

$$\tilde{X}(j\omega_\mu) = \tilde{X}(j\omega_\mu + j\Omega) \quad \text{mit} \quad \Omega = \frac{2\pi}{\Delta t}.$$

Da jedoch $X(j\omega)$ i. allg. nicht periodisch ist, kann $\tilde{X}(j\omega_\mu)$ höchstens im Intervall $(-\Omega/2, \Omega/2)$ näherungsweise mit $X(j\omega_\mu)$ übereinstimmen. Damit diese Näherung möglichst gut ist, muss einerseits die Abtastperiode Δt hinreichend klein sein⁴ und andererseits muss $x(t)$ für $t < -n\Delta t$ und $t > n\Delta t$ Null sein oder zumindest sehr schnell abklingen.

Die Transformationsformel (2.19) ist eindeutig umkehrbar, und zwar ist diese Umkehrung bzw. Rücktransformation durch

$$x(t_\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\mu=-n}^n \tilde{X}(j\omega_\mu) e^{j\omega_\mu t_\lambda} \Delta\omega \quad (2.20)$$

gegeben, wobei $\Delta\omega$ mit Δt gemäß

$$\Delta\omega \Delta t = \frac{2\pi}{2n+1}$$

verknüpft ist. Die Formel (2.20) übernimmt gewissermaßen die Rolle, die sonst die Integralbeziehung

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (2.21)$$

spielt. Wir erkennen, dass $x(t_\lambda)$ durch (2.20) periodisch fortgesetzt wird und der Bedingung

$$x(t_\nu) = x(t_\nu + T) \quad \text{mit} \quad T = (2n+1)\Delta t = \frac{2\pi}{\Delta\omega}$$

genügt. Es liegt also eine ähnliche Situation vor wie im Fall der Funktion \tilde{X} .

Die Integrale in (2.18) und (2.21) können als Grenzwerte der Summen in (2.19) und (2.20) aufgefasst werden. Wählen wir Δt und $\Delta\omega$ gemäß

$$\Delta t = \frac{\tau}{\sqrt{2n+1}} \quad \text{bzw.} \quad \Delta\omega = \frac{2\pi}{\tau\sqrt{2n+1}},$$

wobei τ eine beliebige positive Konstante mit der Dimension der Zeit ist, so ergeben sich die Perioden T und Ω zu

$$T = \tau\sqrt{2n+1} \quad \text{bzw.} \quad \Omega = \frac{2\pi}{\tau}\sqrt{2n+1}.$$

Lassen wir nun n gegen ∞ gehen, so streben offenbar Δt und $\Delta\omega$ gegen Null, während zugleich die Perioden T und Ω unbeschränkt wachsen. Mit anderen Worten, die Summen in (2.19) und (2.20) nähern sich den FOURIER-Integralen (2.18) bzw. (2.21) an.

⁴Eigentlich muss die Bedingung des Abtasttheorems erfüllt sein, nach der die Abtastrate, also $1/\Delta t$, mindestens doppelt so hoch ist wie die höchste in $x(t)$ auftretende Frequenz. D.h., $x(t)$ muss frequenzbegrenzt sein. Dies steht aber im Gegensatz zu der Forderung, dass $x(t)$ auch zeitbegrenzt sein sollte. In der Realität löst sich dieser Widerspruch dadurch auf, dass eine exakte Frequenzbegrenzung, die ja prinzipiell nicht erreicht werden kann, auch nicht erforderlich ist; es muss lediglich sichergestellt sein, dass die resultierenden Fehler hinreichend klein bleiben.

Wenn auch die Summen in (2.19) und (2.20) nur Approximationen der entsprechenden FOURIER-Integrale sind, so charakterisieren sie dennoch Operationen, die exakt invers zueinander zueinander. Bevor wir dies beweisen, vereinfachen wir mit den Abkürzungen

$$x_\nu := x(t_\nu) \quad \text{und} \quad X_\mu := \tilde{X}(j\omega_\mu)$$

unsere Schreibweise und ersetzen das Produkt $\omega_\mu t_\nu$ durch

$$\omega_\mu t_\nu = \mu\nu \Delta\omega \Delta t = \mu\nu \frac{2\pi}{2n+1} .$$

Führen wir schließlich die Größe

$$z := e^{j2\pi/(2n+1)}$$

ein, so können wir den Transformationsformeln (2.19) und (2.20) die einfache Gestalt

$$\boxed{X_\mu = \Delta t \sum_{\nu=-n}^n x_\nu z^{-\mu\nu} \quad \text{bzw.} \quad x_\lambda = \frac{1/\Delta t}{2n+1} \sum_{\mu=-n}^n X_\mu z^{\mu\lambda}} \quad (2.22)$$

geben.

Um zu zeigen, dass diese beiden Formeln tatsächlich invers zueinander sind, brauchen wir nur jede der beiden Formeln in die jeweils andere einzusetzen und zu prüfen, ob in beiden Fällen eine Identität entsteht. Setzen wir die linke Formel von (2.22) in die rechte ein, so erhalten wir die Beziehung

$$x_\lambda = \frac{1}{2n+1} \sum_{\mu=-n}^n \sum_{\nu=-n}^n x_\nu z^{\mu(\lambda-\nu)} . \quad (2.23)$$

Setzen wir umgekehrt die rechte Formel aus (2.22) in die linke ein, so erhalten wir bis auf unterschiedliche Bezeichnungen die gleiche Beziehung. Aus diesem Grunde können wir uns auf den Nachweis der Richtigkeit von (2.23) beschränken.

Zunächst berücksichtigen wir, dass die Reihenfolge der Summenzeichen in (2.23) vertauscht werden darf, so dass wir die Doppelsumme auch in der Form

$$\frac{1}{2n+1} \sum_{\nu=-n}^n x_\nu \sum_{\mu=-n}^n z^{\mu(\lambda-\nu)} \quad (2.24)$$

schreiben dürfen. Weiter unten zeigen wir, dass die rechte Summe (einschließlich des Faktors $(2n+1)^{-1}$) in Abhängigkeit der Differenz $\lambda - \nu$ folgende Werte annimmt:

$$\boxed{\frac{1}{2n+1} \sum_{\mu=-n}^n z^{\mu(\lambda-\nu)} = \begin{cases} 1 & \text{falls } \lambda - \nu = \ell(2n+1) , \ell \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}} . \quad (2.25)$$

Setzen wir dieses Ergebnis in (2.24) ein, so bleibt nur ein Summand übrig:

$$\frac{1}{2n+1} \sum_{\nu=-n}^n x_\nu \sum_{\mu=-n}^n z^{\mu(\lambda-\nu)} = x_\lambda .$$

Somit ist die Beziehung (2.23) bewiesen, die als die zeitdiskrete Version der Gleichung

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{j\omega(t-\tau)} d\tau d\omega ,$$

angesehen werden kann. Um den engen Zusammenhang von (2.23) mit dieser Gleichung deutlicher erkennen zu können, führen wir die ursprünglich benutzten Größen $x(t_\lambda)$, $x(t_\nu)$, ω_μ , t_ν , Δt und $\Delta\omega$ wieder ein und formen (2.23) äquivalent um in

$$x(t_\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\mu=-n}^n \sum_{\nu=-n}^n x(t_\nu) e^{j\omega_\mu(t_\lambda-t_\nu)} \Delta t \Delta\omega .$$

Es bleibt noch die Richtigkeit von (2.25) zu zeigen. Hierzu beachten wir zunächst, dass die Gleichung

$$z^\kappa = 1 \quad \text{bzw.} \quad e^{j\kappa 2\pi/(2n+1)} = 1$$

nur erfüllt ist, wenn $\kappa/(2n+1)$ ganzzahlig ist, also κ ein ganzzahliges Vielfaches von $2n+1$ ist. Für alle anderen Werte von κ gilt $z^\kappa \neq 1$.

Für die folgenden Schritte bezeichne κ die Differenz $\lambda - \nu$. Ist dann κ ein ganzzahliges Vielfaches von $2n+1$, so ist offenbar jedes Glied der Summe in (2.25) gleich 1 und die Richtigkeit der oberen Zeile von (2.25) ist bewiesen. Als nächstes sei κ kein ganzzahliges Vielfaches von $2n+1$, so dass gilt $z^\kappa \neq 1$. Aus

$$(1 - z^\kappa) \sum_{\mu=-n}^n z^{\mu\kappa} = z^{-n\kappa} - z^{(n+1)\kappa} = z^{-n\kappa} (1 - z^{(2n+1)\kappa}) = 0$$

schließen wir dann

$$\sum_{\mu=-n}^n z^{\mu\kappa} = 0 \quad \text{bzw.} \quad \sum_{\mu=-n}^n z^{\mu(\lambda-\nu)} = 0$$

und die Richtigkeit der zweiten Zeile in (2.25) ist bewiesen.

Die durch die Formeln (2.19) bzw. (2.20) bewirkte Periodizität von x und \tilde{X} kommt bei x_ν und X_μ übrigens wie folgt zum Ausdruck:

$$x_\nu = x_{\nu+2n+1} \quad \text{bzw.} \quad X_\mu = X_{\mu+2n+1} .$$

Da auch z^κ eine entsprechende Periodizitätsbedingung, nämlich $z^\kappa = z^{\kappa+2n+1}$, erfüllt, können wir die Summationsgrenzen $-n$ und n in (2.22) durch $-n+k$ bzw. $n+k$ ersetzen, wobei k eine beliebige ganze Zahl ist. Insbesondere können wir also mit $k = n+1$ und $m = 2n+1$ schreiben

$$\boxed{X_\mu = \Delta t \sum_{\nu=1}^m x_\nu z^{-\mu\nu} \quad \text{und} \quad x_\nu = \frac{1}{m\Delta t} \sum_{\mu=1}^m X_\mu z^{\mu\nu} , \quad z = e^{j2\pi/m}} . \quad (2.26)$$

Man kann sich übrigens leicht davon überzeugen, dass m eine beliebige natürliche Zahl sein darf; m muss also nicht, wie bislang angenommen, ungerade sein.

Die beiden Transformationsformeln (2.26) definieren die sogenannte *diskrete FOURIER-Transformation*. Symbolisch schreibt man für den Zusammenhang zwischen x_ν und X_μ auch

$$X_\mu = \text{DFT}\{x_\nu\} \quad \text{bzw.} \quad x_\nu = \text{IDFT}\{X_\mu\} . \quad (2.27)$$

2.4.2 Einige Eigenschaften der diskreten Fourier-Transformation

Häufig wird die diskrete FOURIER-Transformation ohne Bezug zur gewöhnlichen FOURIER-Transformation eingeführt und damit ohne Bezug zur physikalischen Realität und zu den Begriffen Zeit und Frequenz. Die Transformation wird dann lediglich als lineare Abbildung des m -dimensionalen Vektorraums \mathbb{C}^m auf sich selbst gedeutet. Fasst man etwa die Signalwerte x_ν und die Frequenzwerte X_μ zu den m -dimensionalen Vektoren

$$\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3, \dots, x_m]^T \quad \text{und} \quad \mathbf{X} = [X_1, X_2, X_3, \dots, X_m]^T$$

zusammen, so lässt sich die diskrete FOURIER-Transformation auch durch

$$\mathbf{X} = \mathbf{F}\mathbf{x} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{x} = \mathbf{F}^{-1}\mathbf{X}$$

beschreiben, wobei $\mathbf{F} = (F_{\mu\nu})$ eine $m \times m$ -Matrix mit den Elementen $F_{\mu\nu} = \Delta t \cdot z^{-\mu\nu}$ ist. Man erkennt sofort, dass die Matrix \mathbf{F} symmetrisch ist, also die Eigenschaft $\mathbf{F} = \mathbf{F}^T$ besitzt.

Die Konstante Δt , die für uns die Bedeutung der Abtastperiode besitzt, wird dann meistens gleich 1 oder gleich $1/\sqrt{m}$ gesetzt. Die zweite Wahl hat den Vorteil, dass zwischen den beiden Transformationsformeln eine größere Symmetrie entsteht. Die Matrix \mathbf{F} wird in diesem Fall unitär, so dass die Inverse, \mathbf{F}^{-1} , durch $\mathbf{F}^* := (F_{\nu\mu}^*)$ gegeben ist; die Matrix \mathbf{F}^* wird übrigens Transjugierte von \mathbf{F} genannt⁵.

Eine lineare Abbildung mit einer unitären Matrix lässt bekanntlich die EUKLIDISCHE Norm unverändert. Wählen wir also $\Delta t = 1/\sqrt{m}$, so dass die Matrix \mathbf{F} unitär wird, so gilt

$$\mathbf{X}^* \mathbf{X} = \mathbf{x}^* \mathbf{F}^* \mathbf{F} \mathbf{x} = \mathbf{x}^* \mathbf{x} \quad \text{bzw.} \quad \sum_{\mu=1}^m |X_\mu|^2 = \sum_{\nu=1}^m |x_\nu|^2 .$$

Dies ist die PARSEVALSche Gleichung der diskreten FOURIER-Transformation. Bezeichnet \mathbf{y} den m -dimensionalen Vektor, der aus den m Abtastwerten eines weiteren Signals, etwa $y(t)$, gebildet wird, und ist \mathbf{Y} der zugehörige Vektor der Frequenzwerte, so gilt auch hier die allgemeinere Form der PARSEVALSchen Gleichung:

$$\mathbf{Y}^* \mathbf{X} = \mathbf{y}^* \mathbf{F}^* \mathbf{F} \mathbf{x} = \mathbf{y}^* \mathbf{x} \quad \text{bzw.} \quad \sum_{\mu=1}^m X_\mu Y_\mu^* = \sum_{\nu=1}^m x_\nu y_\nu^* .$$

Neben der PARSEVALSchen Gleichung ist im Zusammenhang mit der diskreten FOURIER-Transformation vor allem der Faltungssatz von Bedeutung. Dieser Satz, der sich prinzipiell genauso beweisen lässt wie der entsprechende Satz für die gewöhnliche FOURIER-Transformation, lautet wie folgt:

$$\text{DFT}\{(x * y)_\nu\} = \text{DFT}\{x_\nu\} \text{DFT}\{y_\nu\} .$$

Hierbei kennzeichnet $(x * y)_\nu$ das sogenannte *zyklische Faltungsprodukt*, das definiert ist durch

$$(x * y)_\nu = \sum_{\mu=1}^m x_\mu y_{\nu-\mu} = \sum_{\mu=1}^m y_\mu x_{\nu-\mu} , \quad (2.28)$$

wobei vorausgesetzt wird, dass x_ν und y_ν periodische Folgen mit der Periode m sind.

⁵Da \mathbf{F}^* durch Transposition der Matrix und komplexe Konjugation der Elemente von \mathbf{F} gewonnen wird, bezeichnet man die zugehörige Operation als Transjugation und die resultierende Matrix als Transjugierte.

2.4.3 Die schnelle Fourier-Transformation (FFT)

Besonders effektiv lässt sich die diskrete FOURIER-Transformation auf dem Rechner ausführen, wenn m in möglichst viele Primzahlfaktoren zerlegt werden kann. Aus diesem Grunde wird m , die Zahl der Abtastwerte, vielfach als Zweierpotenz gewählt. Der hierbei zum Einsatz kommende Algorithmus verkürzt die erforderlichen Rechenzeiten ganz wesentlich, und zwar insbesondere dann, wenn m größere Werte annimmt; typische Werte für m sind etwa 512, 1024 oder 2048. Man spricht in diesem Zusammenhang häufig von der *schnellen* FOURIER-Transformation oder von der *Fast Fourier Transform* und kürzt diese mit FFT ab.

Zur Erläuterung des FFT-Algorithmus nehmen wir an, dass der zu transformierende Vektor \mathbf{x} insgesamt $2m$ Komponenten x_ν , $\nu = 1, 2, 3, \dots, 2m$ habe, wobei $2m$ eine Zweierpotenz ist, also eine Darstellung der Form $2m = 2^n$ erlaubt mit $n \in \mathbb{N}$. Setzt man der Einfachheit halber die Abtastperiode Δt gleich 1, so müssen zur Bestimmung der $2m$ Komponenten des Vektors $\mathbf{X} = \mathbf{F}\mathbf{x}$ folgende $2m$ Summen berechnet werden:

$$X_\mu = \sum_{\nu=1}^{2m} x_\nu z^{-\mu\nu}, \quad z = e^{j2\pi/2m} = e^{j\pi/m}, \quad \mu = 1, 2, 3, \dots, 2m. \quad (2.29)$$

Die Matrix \mathbf{F} besitzt also die Form

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} z^{-1} & z^{-2} & \dots & z^{-(2m-1)} & 1 \\ z^{-2} & z^{-4} & \dots & z^{-2(2m-1)} & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ z^{-(2m-1)} & z^{-2(2m-1)} & \dots & z^{-(2m-1)^2} & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bei dieser Darstellung haben wir bereits die Tatsache berücksichtigt, dass wegen

$$z^{-\lambda 2m} = e^{-j\lambda 2\pi} = 1, \quad \forall \lambda \in \mathbb{Z}$$

alle Elemente in der letzten Zeile und der letzten Spalte der Matrix \mathbf{F} den Wert 1 annehmen.

Würde man die Komponenten des Vektors \mathbf{X} dadurch bestimmen, dass man für jeden Index μ die Summe in (2.29) direkt berechnet, so müssten neben $2m(2m-1)$ Additionen insgesamt $(2m-1)^2$ komplexe Multiplikationen ausgeführt werden. Für den nicht außergewöhnlich großen Wert von $2m = 2^{10} = 2.048$ müssten zur einmaligen Transformation des Vektors also mehr als $4 \cdot 10^6$ komplexe Multiplikationen ausgeführt werden. Bei der folgenden Diskussion werden wir uns insbesondere auf die Zahl der erforderlichen komplexen Multiplikationen konzentrieren, da jede dieser Operationen eine wesentlich höhere Rechenzeit erfordert als eine Addition.

Wir wollen nun zeigen, dass die diskrete FOURIER-Transformation des $2m$ -dimensionalen Vektors \mathbf{x} im Wesentlichen auf die Transformation der zwei m -dimensionalen Vektoren

$$\mathbf{x}' := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{2m-1} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{x}'' := \begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \\ \vdots \\ x_{2m} \end{pmatrix} \quad (2.30)$$

zurückgeführt werden kann. Zu diesem Zweck zerlegen wir zunächst die in (2.29) auftretende Summe wie folgt:

$$X_\mu = \sum_{\nu=1}^m x_{2\nu-1} z^{-\mu(2\nu-1)} + \sum_{\nu=1}^m x_{2\nu} z^{-2\mu\nu} = z^\mu \sum_{\nu=1}^m x_{2\nu-1} z^{-2\mu\nu} + \sum_{\nu=1}^m x_{2\nu} z^{-2\mu\nu}.$$

Die beiden Summen auf der rechten Seite, also

$$X'_\mu := \sum_{\nu=1}^m x_{2\nu-1} z_m^{-\mu\nu} \quad \text{und} \quad X''_\mu := \sum_{\nu=1}^m x_{2\nu} z_m^{-\mu\nu} \quad \text{mit} \quad z_m := z^2$$

stellen offenbar die diskreten FOURIER-Transformierten der Vektoren \mathbf{x}' bzw. \mathbf{x}'' dar. Die Komponenten des Vektors \mathbf{X} lassen sich durch

$$X_\mu = z^\mu X'_\mu + X''_\mu \quad (2.31)$$

ausdrücken. Da X'_μ und X''_μ periodisch mit der Periode m sind, also für alle $\mu \in \mathbb{Z}$ den Bedingungen $X'_\mu = X'_{\mu+m}$ bzw. $X''_\mu = X''_{\mu+m}$ genügen, können wir unter Berücksichtigung von $z^{\mu+m} = -z^\mu$ auch schreiben

$$X_{\mu+m} = -z^\mu X'_\mu + X''_\mu. \quad (2.32)$$

Die Größen X'_μ und X''_μ brauchen also nur für $\mu = 1$ bis $\mu = m$ berechnet zu werden. Das heißt,

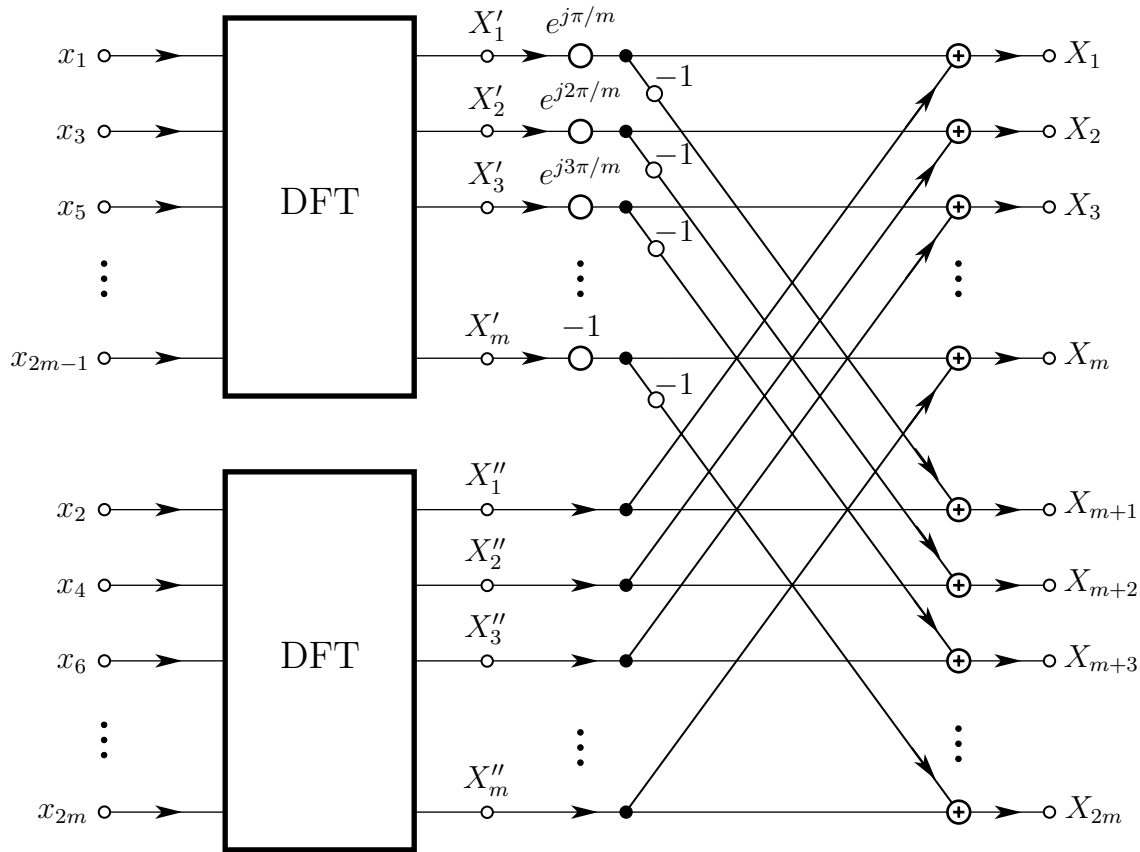


Bild 2.8: Rückführung der FOURIER-Transformation eines $2m$ -dimensionalen Vektors auf die Transformation zweier m -dimensionaler Vektoren.

zur Bestimmung der Komponenten des $2m$ -dimensionalen Vektors \mathbf{X} reicht es, wenn wir die beiden in (2.30) definierten m -dimensionalen Vektoren der diskreten FOURIER-Transformation unterziehen und anschließend die X_μ gemäß (2.31) bzw. (2.32) berechnen (siehe Bild 2.8). Hierzu müssen offenbar weitere m Multiplikationen ausgeführt werden⁶. Bezeichnen wir die

⁶Diese Angabe ist eigentlich etwas übertrieben. Da z^μ für $\mu = m$ den Wert -1 annimmt, benötigt man genommen höchstens $m - 1$ „echte“ Multiplikationen. Eine Multiplikation mit der imaginären Einheit j ist in diesem Sinne natürlich auch nicht als „echte“ Multiplikation anzusehen, denn hierbei werden lediglich Real- und Imaginärteil vertauscht und ein Vorzeichen invertiert.

Zahl der komplexen Multiplikationen, die für die diskrete FOURIER-Transformation eines m -dimensionalen Vektors erforderlich sind, mit $M(m)$, so können wir bei Anwendung des soeben skizzierten Verfahrens offenbar für die Funktion M folgende Beziehung angeben:

$$M(2m) = 2M(m) + m . \quad (2.33)$$

Da wir m als Zweierpotenz vorausgesetzt haben, können wir für $m > 1$ das angegebene Verfahren fortsetzen, bis m den Wert 1 erreicht. Für $m = 1$ muss offenbar keine Multiplikation ausgeführt werden, so dass wir als Anfangswert für die Rekursionsbeziehung $M(1) = 0$ setzen können. Für $m = 2$ erhalten wir dann $M(2) = 1$. Dass dieses Ergebnis korrekt ist, erkennen wir sofort, wenn wir die Transformationsgleichungen für diesen Fall anschreiben:

$$X_1 = x_1 e^{j\pi} + x_2, \quad X_2 = x_1 + x_2 .$$

Genaugenommen brauchen wir natürlich auch hier keine echte Multiplikation auszuführen, da der Koeffizient $e^{j\pi}$ gleich -1 ist. Eine entsprechende Aussage gilt auch im Fall $m = 4$, da hier nur Multiplikationen mit $1, j, -1$ und $-j$ auftreten.

Für die weiteren Zweierpotenzen erhalten wir der Reihe nach

$$M(8) = 12, \quad M(16) = 32, \quad M(32) = 80, \quad M(64) = 192, \quad M(128) = 448 .$$

Es ist zu erkennen, dass M zwar stärker als linear, aber wesentlich schwächer als quadratisch mit m wächst. Man prüft leicht nach, dass

$$M(m) = \frac{m}{2} \lg m$$

eine geschlossene Lösung der Rekursionsbeziehung (2.33) mit dem Anfangswert $M(1) = 0$ ist. Die Funktion \lg bezeichnet den *Logarithmus dualis*, der definiert ist durch $x = 2^{\lg x}$. Für den weiter oben erwähnten Fall $m = 2.048$ erhalten wir hiermit den Wert $M(2.048) = 11.264$, also weniger als 3 Promille des ursprünglichen Wertes.

Die schnelle FOURIER-Transformation ist zu einem außerordentlich wichtigen Werkzeug in vielen Bereichen der Signalverarbeitung geworden. Wendet man die FFT an, so schreibt man häufig

$$X_\mu = \text{FFT}\{x_\nu\} \quad \text{bzw.} \quad x_\nu = \text{IFFT}\{X_\mu\} .$$

Die Bezeichnung schnelle FOURIER-Transformation bzw. FFT ist allerdings nicht ganz konsequent, denn die zugrundeliegende mathematische Operation ist weiterhin die diskrete FOURIER-Transformation. Dennoch hat sich diese Bezeichnungsweise in der Praxis weitgehend durchgesetzt.

Gelegentlich wird auch der Begriff der *schnellen Faltung* verwendet. Es handelt sich hierbei um einen Algorithmus, mit dem die zyklische Faltung numerisch besonders effizient durchgeführt werden kann. Hierbei werden die zu faltenden Signalfolgen, etwa x_ν und y_ν , jeweils der FFT unterworfen. Anschließend werden die zugehörigen FOURIER-Transformierten X_μ und Y_μ miteinander multipliziert. Schließlich wird mit Hilfe der IFFT das Produkt $X_\mu Y_\mu$ zurück in den Zeitbereich transformiert. Formal lässt sich dieser Vorgang wie folgt beschreiben:

$$(x * y)_\nu = \text{IFFT}\{\text{FFT}\{x_\nu\} \cdot \text{FFT}\{y_\nu\}\} .$$

Eine genauere Analyse zeigt, dass gegenüber der unmittelbaren Ausführung der Faltung gemäß (2.28) bei größeren Werten von m die erforderliche Rechenzeit drastisch reduziert werden kann.

Ein wichtiger Aspekt, der hier gar nicht angesprochen wurde, behandelt die Frage, wie bei einem realen Signal, das ja häufig weit mehr als 2048, 4096 oder 8192 Abtastwerte umfasst, durch Einsatz geeigneter Fensterfunktionen eine Zeitbegrenzung vorgenommen werden muss, um abschnittsweise eine Spektralanalyse durchführen zu können.

Die z-Transformation

3.1 Definition der z-Transformation

Die z -Transformation spielt in der Theorie zeitdiskreter Signale und Systeme genau die gleiche Rolle wie die LAPLACE-Transformation im Bereich der zeitkontinuierlichen Signale und Systeme. So wie die LAPLACE-Transformation vielfach zur Lösung linearer Differentialgleichungen eingesetzt wird, löst man mit der z -Transformation häufig lineare Differenzgleichungen.

Um die Analogie zwischen der LAPLACE- und der z -Transformation deutlich zu machen, führen wir zunächst die zeitdiskrete LAPLACE-Transformation ein, die als Verallgemeinerung der zeitdiskreten FOURIER-Transformation aufgefasst werden kann. Ist also x ein zeitdiskretes Signal mit den Definitionszeitpunkten

$$t_k = t_0 + kT, \quad k \in \mathbb{Z},$$

so definieren wir die zu x gehörige zeitdiskrete LAPLACE-Transformierte durch

$$\hat{X}(p) = T \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t_k) e^{-pt_k}. \quad (3.1)$$

Stellen wir die komplexe Frequenz p in der Form $p = \sigma + j\omega$ dar, so können wir, wie im zeitkontinuierlichen Fall, die zeitdiskrete LAPLACE-Transformierte \hat{X} als FOURIER-Transformierte des Signals $x(t_k)e^{-\sigma t_k}$ auffassen:

$$\hat{X}(\sigma + j\omega) = \mathcal{F}_d\{x(t_k)e^{-\sigma t_k}\}.$$

Für die zeitdiskrete LAPLACE-Transformation können ähnliche Eigenschaften angegeben werden wie für die zeitkontinuierliche LAPLACE-Transformation. Auch bezüglich der Existenz der zeitdiskreten LAPLACE-Transformierten gilt Ähnliches wie im Fall der zeitkontinuierlichen Transformation. Das heißt, wenn überhaupt, existiert die zeitdiskrete LAPLACE-Transformierte häufig nur in einem Streifen parallel zur imaginären Achse. Durch den „konvergenzerzeugenden“ Faktor $\exp(-\sigma t_k)$ lassen sich aber viele Signale transformieren, die einer zeitdiskreten FOURIER-Transformation gar nicht unterzogen werden könnten. Andererseits können gewisse Signale, wie etwa die Konstante $x(t_k) = c$ oder die Exponentialschwingung $x(t_k) = \exp(j\omega_0 t_k)$, gar nicht transformiert werden.

Die Formel für die zeitdiskrete LAPLACE-Rücktransformation lautet wie folgt:

$$x(t_k) = \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha-j\Omega/2}^{\alpha+j\Omega/2} \hat{X}(p) e^{pt_k} dp. \quad (3.2)$$

Der durch die Grenzen $\alpha - j\Omega/2$ und $\alpha + j\Omega/2$ angedeutete Integrationsweg verläuft parallel zur $j\omega$ -Achse und liegt innerhalb des Konvergenzgebietes der LAPLACE-Transformierten \hat{X} . Auf

einen Beweis der Formel (3.2) wollen wir an dieser Stelle verzichten, zumal wir die zeitdiskrete LAPLACE-Transformation in der hier eingeführten Form nicht weiter verwenden werden.

In der systemtheoretischen Literatur hat sich übrigens der Begriff „zeitdiskrete LAPLACE-Transformation“ nicht durchgesetzt. Stattdessen verwendet man den Begriff „ z -Transformation“. Diese Bezeichnung leitet sich daraus ab, dass man bei Einführung der Transformation den Ausdruck $\exp(pT)$ eher willkürlich mit dem Buchstaben z abgekürzt hat. Beim Übergang von der zeitdiskreten LAPLACE-Transformation zur z -Transformation wird der vor der Summe in (3.1) stehende Faktor T häufig weggelassen bzw. gleich 1 gesetzt¹. Schließlich wählt man den Zeitpunkt t_0 zu null und schreibt statt $x(t_k)$ bzw. $x(kT)$ nur $x(k)$ oder gar x_k . Modifiziert man die Formel (3.1) in dieser Weise, so erhält man mit $z = \exp(pT)$

$$X(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)z^{-k} . \quad (3.3)$$

Man bezeichnet $X(z)$ als die z -Transformierte des Signals $x(k)$. Symbolisch schreibt man hierfür

$$X(z) = \mathcal{Z}\{x(k)\}$$

oder, mathematisch präziser,

$$X = \mathcal{Z}\{x\} .$$

Wie bei der LAPLACE-Transformation spricht man auch hier davon, dass ein Signal in den z -Bereich oder den *Bildbereich* transformiert wird. Die z -Transformierte eines Signals wird daher auch als *Bildfunktion* bezeichnet. In der Mathematik nennt man bekanntlich eine Reihe der Form (3.3) LAURENT-Reihe (mit dem Entwicklungspunkt $z = 0$). Daher wäre der Name LAURENT-Transformation sicherlich sinnvoller als die Bezeichnung z -Transformation; letztere hat sich aber international durchgesetzt.

Wir wollen zunächst einige Eigenschaften der z -Transformation diskutieren. Zu diesem Zweck zerlegen wir die Reihe (3.3) in zwei Potenzreihen, und zwar in

$$X''(z) = \sum_{k=-\infty}^{-1} x(k)z^{-k} = \sum_{k=1}^{\infty} x(-k)z^k$$

und

$$X'(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-k} .$$

Bei X'' handelt es sich um eine Potenzreihe in der Variablen z mit dem Entwicklungspunkt $z = 0$. Diese Reihe konvergiert offenbar immer für $z = 0$. Sind etwa die Koeffizienten $x(-k)$ für $k \in \mathbb{N}$ durch $x(-k) = k^k$ gegeben, so konvergiert die Reihe sogar nur für $z = 0$. Konvergiert die Reihe auch noch an anderer Stelle, so konvergiert sie innerhalb eines Kreises mit dem Radius

$$R_+ = \left(\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|x(-k)|} \right)^{-1} .$$

Dieser Radius, der sogenannte Konvergenzradius, muss übrigens nicht endlich sein; Konvergenz kann also auch für alle $z \in \mathbb{C}$ herrschen. Beispielsweise führt $x(-k) = k^{-k}$ auf $R_+ = \infty$.

¹In den meisten Lehrbüchern wird übrigens auch die zeitdiskrete FOURIER-Transformation ohne diesen Vorfaktor definiert.

Auch bei X' handelt es sich um eine Potenzreihe, allerdings in der Variablen $1/z$. Eine derartige Reihe konvergiert entweder für kein $z \in \mathbb{C}$ oder für alle z außerhalb eines Kreises mit dem Radius

$$R_- = \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|x(k)|} . \quad (3.4)$$

Falls für ein gegebenes Signal $x(k)$ die Konvergenzradien R_+ und R_- der Bedingung

$$R_- < R_+$$

genügen, existiert die z -Transformierte von $x(k)$, und zwar in dem Ringgebiet (siehe Bild 3.1)

$$R_- < |z| < R_+ .$$

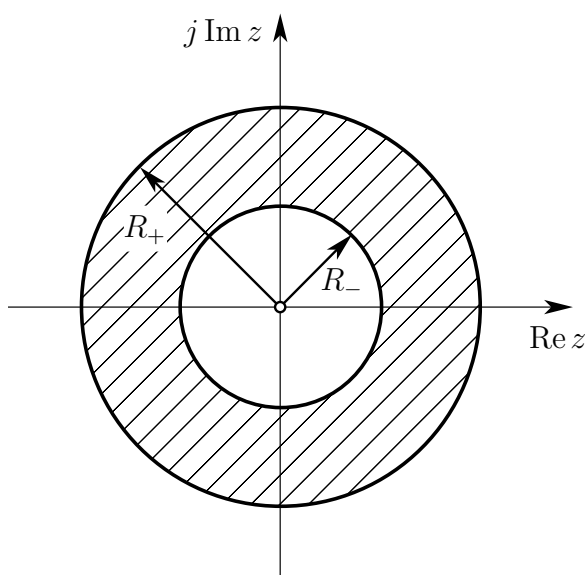


Bild 3.1: Konvergenzgebiet der z -Transformation für $R_+ > R_-$; die Radien R_+ und R_- können entarten zu $R_+ = \infty$ und $R_- = 0$.

In der Praxis ist es häufig nicht erforderlich, die Konvergenzradien mit den „lim sup“-Formeln, die mit den Namen CAUCHY und HADAMARD verbunden sind, zu bestimmen. In vielen Fällen reichen die Kenntnisse über die geometrische Reihe, um die Konvergenz in einem Gebiet nachzuweisen. Genügt etwa x für $k \geq 0$ der Bedingung

$$|x(k)| \leq C_1 R_1^k ,$$

wobei C_1 und R_1 positive Konstanten sind, so konvergiert X' in dem Gebiet $|z| > R_1$ absolut. Der Beweis folgt sofort aus folgender Abschätzung, die für alle $K \in \mathbb{N}$ gültig ist:

$$\sum_{k=0}^K |x(k)z^{-k}| \leq \sum_{k=0}^K C_1 \left| \frac{R_1}{z} \right|^k < C_1 \sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{R_1}{z} \right|^k = \frac{C_1}{1 - |R_1/z|} \quad \text{für } \left| \frac{R_1}{z} \right| < 1 \text{ bzw. } |z| > R_1 .$$

Eine ähnliche Feststellung gilt auch in Bezug auf die Reihe X'' . Diese Reihe konvergiert für $|z| < R_2$, falls x für $k < 0$ der Bedingung

$$|x(k)| \leq C_2 R_2^k$$

genügt, wobei C_2 und R_2 positive Konstanten sind. Der Beweis vollzieht sich in ähnlicher Weise wie im zuvor diskutierten Fall, d. h., auch hier hilft eine Abschätzung mit der geometrischen Reihe. Die beiden Aussagen bezüglich der Radien R_1 und R_2 bleiben übrigens gültig, wenn die Konstanten C_1 und C_2 durch $C_1 k^n$ bzw. $C_2 |k|^n$ ersetzt werden, wobei n eine beliebige natürliche Zahl sein darf.

Um die Bedeutung der Angabe des Konvergenzgebietes zu erläutern, betrachten wir zwei einfache Beispiele. Gegeben seien folgende zeitdiskrete Signale (siehe Bild 3.2):

$$x_1(k) = \begin{cases} 0 & \text{für } k < 0 \\ 1/2 & \text{für } k = 0 \\ 1 & \text{für } k > 0 \end{cases} \quad \text{und} \quad x_2(k) = \begin{cases} -1 & \text{für } k < 0 \\ -1/2 & \text{für } k = 0 \\ 0 & \text{für } k > 0 \end{cases}.$$

Für die z -Transformierte $X_1 = \mathcal{Z}\{x_1\}$ erhalten wir

$$X_1(z) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} z^{-k} = \frac{1}{2} + \frac{z^{-1}}{1 - z^{-1}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{z + 1}{z - 1}, \quad |z| > 1$$

und für $X_2 = \mathcal{Z}\{x_2\}$

$$X_2(z) = -\frac{1}{2} - \sum_{k=-\infty}^{-1} z^{-k} = -\frac{1}{2} - \sum_{k=1}^{\infty} z^k = -\frac{1}{2} - \frac{z}{1 - z} = \frac{1}{2} \cdot \frac{z + 1}{z - 1}, \quad |z| < 1.$$

Wir haben also für beide z -Transformierten den gleichen analytischen Ausdruck gefunden, allerdings sind die Konvergenzgebiete der beiden Reihen verschieden. Die z -Transformierte des Signals x_1 existiert nur außerhalb des Einheitskreises und diejenige des Signals x_2 nur innerhalb des Einheitskreises. Anhand dieses einfachen Beispiels erkennen wir, dass es nicht

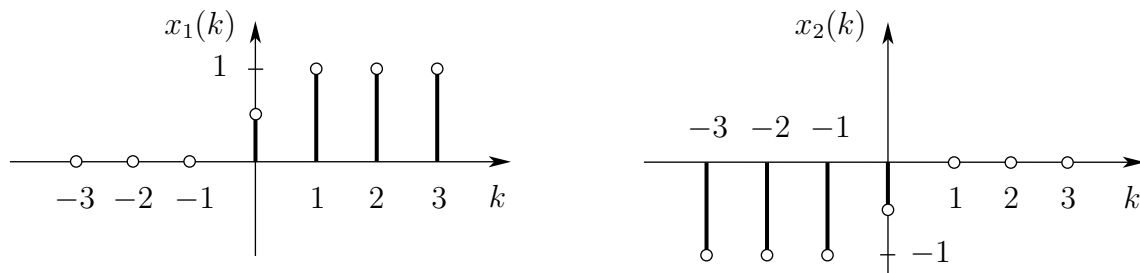


Bild 3.2: Zwei einfache zeitdiskrete Signale, deren z -Transformierte durch den gleichen analytischen Ausdruck gegeben sind.

reicht, einen analytischen Ausdruck für die z -Transformierte anzugeben. Auch das Konvergenzgebiet muss mit angegeben werden, anderenfalls gäbe es keine eindeutige Umkehrung der z -Transformation. Dies ist offenbar genau die gleiche Situation, die uns im Fall der zweiseitigen LAPLACE-Transformation begegnet ist. Wie wir im weiteren Verlauf dieses Kapitels noch sehen werden, tritt dieses Problem bei der einseitigen z -Transformation nicht mehr auf.

Die Summe der beiden Signale x_1 und x_2 ist offenbar gleich der Signumfunktion

$$\text{sgn } k = \begin{cases} -1 & \text{für } k < 0 \\ 0 & \text{für } k = 0 \\ 1 & \text{für } k > 0 \end{cases}.$$

Zu $\operatorname{sgn} k$ kann keine z -Transformierte angegeben werden, da der Durchschnitt der Gebiete $|z| > 1$ und $|z| < 1$ leer ist.

Die Bildfunktionen X_1 bzw. X_2 deuten auch darauf hin, warum es sinnvoll war, von der komplexen Frequenz p überzugehen zu der Variablen $z = \exp(pT)$. Die Bildfunktion ist nämlich in diesem und in vielen anderen Fällen eine rationale Funktion in z ; sie gehört damit zu einer der einfachsten Funktionsklassen. Ausgedrückt durch p lautete übrigens die Bildfunktion für die beiden Beispiele wie folgt:

$$X_1(e^{pT}) = X_2(e^{pT}) = \frac{1}{2} \coth(pT/2) .$$

Ohne Beweis sei bemerkt, dass eine Reihe der Form (3.3) innerhalb ihres Konvergenzgebietes absolut konvergent ist und dass sie dort beliebig oft gliedweise differenziert und integriert werden kann. Die z -Transformierte X ist daher innerhalb des Konvergenzgebietes eine holomorphe Funktion. Aus der Funktionentheorie ist auch bekannt, dass eine Funktion X , die in einem Ringgebiet

$$R_- < |z| < R_+$$

holomorph ist, eindeutig in eine Reihe der Form (3.3) entwickelt werden kann.

Neben der Signumfunktion verwendet man in der Theorie zeitdiskreter Signale gerne das (zeitdiskrete) Sprungsignal

$$u(k) = \begin{cases} 0 & \text{für } k < 0 \\ 1 & \text{für } k \geq 0 \end{cases} \quad (3.5)$$

und den zeitdiskreten δ -Impuls

$$\delta(k) = \begin{cases} 1 & \text{für } k = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} . \quad (3.6)$$

Zwischen u und δ bestehen offenbar die Zusammenhänge

$$u(k) = \sum_{\kappa=-\infty}^k \delta(\kappa) \quad \text{und} \quad \delta(k) = u(k) - u(k-1) . \quad (3.7)$$

Wie im zeitkontinuierlichen Fall kann auch für den zeitdiskreten δ -Impuls eine Ausblendeigenschaft formuliert werden, und zwar entweder in der Form

$$x(k)\delta(k) = x(0)\delta(k) \quad (3.8)$$

oder – mit Hilfe des Summenzeichens – gemäß

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(k) = x(0) . \quad (3.9)$$

Für die z -Transformierten von u und δ , die wir gemäß $U = \mathcal{Z}\{u\}$ und $\Delta = \mathcal{Z}\{\delta\}$ bezeichnen wollen, erhält man

$$U(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} = \frac{z}{z-1} \quad |z| < 1 \quad \text{bzw.} \quad \Delta(z) = 1 \quad z \in \mathbb{C} . \quad (3.10)$$

Bevor wir auf weitere Eigenschaften der z -Transformation eingehen, wollen wir uns im nächsten Abschnitt zunächst mit dem Problem der z -Rücktransformation befassen und u. a. eine geschlossene Formel für die Rücktransformation angeben.

3.2 z-Rücktransformation

Gegeben sei eine Bildfunktion, X , die innerhalb des Ringgebietes

$$0 \leq R_- < |z| < R_+ \leq \infty$$

holomorph ist und deswegen dort in eine LAURENT-Reihe entwickelt werden kann:

$$X(z) = \sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} x(\kappa) z^{-\kappa} .$$

Um die Koeffizienten $x(\kappa)$ zu bestimmen, multiplizieren wir zunächst beide Seiten der Gleichung mit z^{k-1} und integrieren auf beiden Seiten längs einer Kreislinie, \mathfrak{C} , mit dem Mittelpunkt $z = 0$ und einem Radius r , der der Bedingung

$$R_- < r < R_+$$

genügt:

$$\oint_{\mathfrak{C}} X(z) z^{k-1} dz = \oint_{\mathfrak{C}} \sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} x(\kappa) z^{k-\kappa-1} dz .$$

Da der Integrationsweg, wie in Bild 3.3 angedeutet, innerhalb des Konvergenzgebietes der Reihe liegt, können wir die Integration mit der Summation vertauschen und schreiben

$$\oint_{\mathfrak{C}} X(z) z^{k-1} dz = \sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} x(\kappa) \oint_{\mathfrak{C}} z^{k-\kappa-1} dz .$$

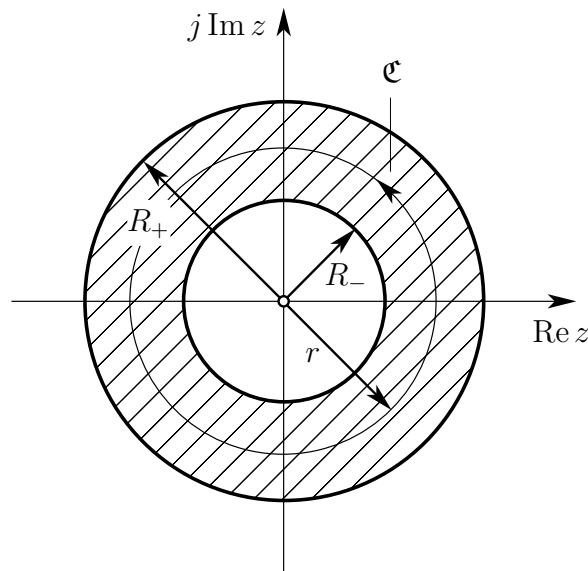


Bild 3.3: Integrationsweg für das Umlaufintegral zur z -Rücktransformation.

Wie wir weiter unten zeigen werden, ergibt die Auswertung des unter dem Summenzeichen stehenden Integrals

$$\oint_{\mathfrak{C}} z^{k-\kappa-1} dz = \begin{cases} 0 & \text{für } k \neq \kappa \\ 2\pi j & \text{für } k = \kappa \end{cases} . \quad (3.11)$$

Folglich bleibt von der Reihe auf der rechten Seite nur der Term $2\pi j x(k)$ übrig, so dass wir für die z -Rücktransformation schreiben können

$$x(k) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\mathcal{C}} X(z) z^{k-1} dz . \quad (3.12)$$

Symbolisch drücken wir diesen Zusammenhang, den wir auch als *inverse z-Transformation* bezeichnen, wie folgt aus:

$$x(k) = \mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\} \quad \text{oder, korrekter,} \quad x = \mathcal{Z}^{-1}\{X\} .$$

Wir können dieses Umlaufintegral umwandeln in ein gewöhnliches Integral mit einer reellen Integrationsvariablen. Hierzu substituieren wir $z = r \exp(j\varphi)$, $dz = jz d\varphi$ und integrieren über $0 < \varphi < 2\pi$:

$$x(k) = \frac{r^k}{2\pi} \int_0^{2\pi} X(re^{j\varphi}) e^{jk\varphi} d\varphi . \quad (3.13)$$

Falls die Konvergenzradien R_- und R_+ der Bedingung

$$R_- < 1 < R_+$$

genügen, der Einheitskreis $|z| = 1$ also zum Konvergenzgebiet gehört, können wir $r = 1$ wählen, so dass (3.13) ersetzt werden kann durch

$$x(k) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} X(e^{j\varphi}) e^{jk\varphi} d\varphi .$$

Bis auf unterschiedliche Symbole ist diese Formel offenbar die gleiche, die wir im Zusammenhang mit den FOURIER-Reihen als Koeffizientenformel kennengelernt haben. Eigentlich war dies auch zu erwarten, da die LAURENT-Reihe (3.3) für $z = \exp(j\varphi)$ in eine FOURIER-Reihe in der Variablen φ übergeht:

$$X(e^{j\varphi}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) e^{-jk\varphi} .$$

Wie angekündigt, wollen wir nun noch die Richtigkeit der Relation (3.11) zeigen. Wir formen auch dieses Integral mit der Substitution $z = r \exp(j\varphi)$ und $dz = jz d\varphi$ in ein gewöhnliches Integral mit der Integrationsvariablen φ um:

$$\oint_{\mathcal{C}} z^{k-\kappa-1} dz = jr^{k-\kappa} \int_0^{2\pi} e^{j(k-\kappa)\varphi} d\varphi = \begin{cases} 0 & \text{für } k - \kappa \neq 0 \\ 2\pi j & \text{für } k - \kappa = 0 \end{cases} .$$

Dies entspricht offenbar der Relation (3.11).

Da die Bildfunktion in den technischen Anwendungen häufig eine rationale Funktion ist, lässt sich die Rücktransformation (3.12) in diesen Fällen meistens bequem mit Hilfe des Residuenkalküls durchführen. Wir werden uns mit diesem Verfahren im Zusammenhang mit der einseitigen z -Transformation noch etwas näher befassen.

Eine andere Möglichkeit der z -Rücktransformation besteht in einer unmittelbaren Reihenentwicklung der Bildfunktion. Hierzu betrachten wir ein einfaches Beispiel und starten mit der Bildfunktion

$$X(z) = \frac{z}{z - \gamma} , \quad (3.14)$$

wobei γ eine von null verschiedene komplexe Konstante ist. Die Entwicklung von X im Punkt $z = 0$ in eine Potenzreihe (geometrische Reihe) ergibt

$$X(z) = -\frac{z/\gamma}{1 - z/\gamma} = -\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{z}{\gamma}\right)^k = -\sum_{k=-\infty}^{-1} \gamma^k z^{-k}, \quad |z| < |\gamma|. \quad (3.15)$$

Das Konvergenzgebiet dieser Reihe ist also das Innere des Kreises mit dem Radius $|\gamma|$ und dem Mittelpunkt 0. Wird X in eine Potenzreihe im Unendlichen entwickelt, so erhalten wir

$$X(z) = \frac{1}{1 - \gamma/z} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\gamma}{z}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma^k z^{-k}, \quad |z| > |\gamma|. \quad (3.16)$$

Der Konvergenzradius ist ebenfalls $|\gamma|$; das Konvergenzgebiet ist aber das Äußere des erwähnten Kreises. Die Entwicklung (3.15) führt also auf das linksseitige Signal

$$x_1(k) = \begin{cases} -\gamma^k & \text{für } k < 0 \\ 0 & \text{für } k \geq 0 \end{cases}$$

und die Entwicklung (3.16) auf das rechtsseitige Signal

$$x_2(k) = \begin{cases} 0 & \text{für } k < 0 \\ \gamma^k & \text{für } k \geq 0 \end{cases}.$$

Unter Verwendung des Sprungsignals (3.5) lassen sich die Signale x_1 und x_2 übrigens auch kompakter ausdrücken:

$$x_1(k) = [u(k) - 1]\gamma^k \quad \text{bzw.} \quad x_2(k) = u(k)\gamma^k.$$

Hat eine rationale Funktion mehrere Pole mit unterschiedlichen Beträgen, so bestehen auch mehrere Möglichkeiten einer Reihenentwicklung. Beispielsweise kann die Bildfunktion

$$X(z) = \frac{2z^2 + z}{(z+2)(z-1)} = \frac{z}{z+2} + \frac{z}{z-1} \quad (3.17)$$

in jedem der folgenden drei Gebiete in eine LAURENT-Reihe entwickelt werden (siehe Bild 3.4):

$$\mathfrak{G}_1 = \{z : |z| < 1\}, \quad \mathfrak{G}_2 = \{z : 1 < |z| < 2\} \quad \text{und} \quad \mathfrak{G}_3 = \{z : |z| > 2\}.$$

Berücksichtigen wir die beiden Entwicklungen, die sich aus (3.14) ergaben, so erhalten wir für (3.17) folgende Reihenentwicklungen

$$\begin{aligned} |z| \in \mathfrak{G}_1 & \Rightarrow X(z) = -\sum_{k=-\infty}^{-1} [(-2)^k + 1] z^{-k} \\ |z| \in \mathfrak{G}_2 & \Rightarrow X(z) = -\sum_{k=-\infty}^{-1} (-2)^k z^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} \\ |z| \in \mathfrak{G}_3 & \Rightarrow X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} [(-2)^k + 1] z^{-k}. \end{aligned}$$

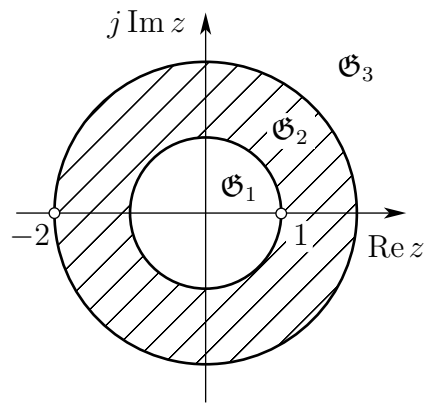


Bild 3.4: Mögliche Konvergenzgebiete für die Entwicklung der Funktion (3.17).

3.3 Einige Eigenschaften der z-Transformation

Die Tatsache, dass X die z -Transformierte von x und umgekehrt x die inverse z -Transformierte von X ist, wollen wir kennzeichnen durch

$$x \circ \bullet X \quad \text{oder} \quad X \bullet \circ x .$$

Dies ist zwar das gleiche Symbol, das wir auch schon bei der FOURIER- und der LAPLACE-Transformation benutzt haben; eine Verwechslungsgefahr besteht indes nicht, da aus dem Zusammenhang eigentlich immer erkennbar ist, um welche Transformation es sich jeweils handelt.

Linearität

Eine grundlegende Eigenschaft der z -Transformation, von der wir schon mehrfach Gebrauch gemacht haben, ist die *Linearität*, die sich aus der *Homogenität* und der *Additivität* zusammensetzt und die sich unmittelbar aus der entsprechenden Eigenschaften der Summe und des Integrals ergibt. Die z -Transformation wird *homogen* genannt, weil für jedes transformierbare Signal x und jede Konstante $c \in \mathbb{C}$ stets gilt

$$\mathcal{Z}\{cx\} = c\mathcal{Z}\{x\} .$$

Bei der Anwendung der Additivität, d. h.

$$\mathcal{Z}\{x + y\} = \mathcal{Z}\{x\} + \mathcal{Z}\{y\} ,$$

ist zu berücksichtigen, dass die Signale x und y möglicherweise unterschiedliche Konvergenzgebiete besitzen. Über das Konvergenzgebiet des Summensignals kann dann nur gesagt werden, dass es mindestens so umfassend ist wie der Durchschnitt der beiden Konvergenzgebiete. Wie wir im Abschnitt 3.1 gesehen haben, kann durchaus die Situation auftreten, dass die z -Transformierte des Summensignals gar nicht existiert.

Verschiebungssatz

Um den Verschiebungssatz bequemer formulieren zu können, führen wir einen Verschiebungsoperator, \mathcal{V} , ein, den wir wie folgt definieren:

$$\mathcal{V}x(k) = x(k - 1) . \quad (3.18)$$

Wenden wir \mathcal{V} n -mal hintereinander auf x an, so schreiben wir $\mathcal{V}^n x$ und interpretieren das Ergebnis gemäß

$$\boxed{\mathcal{V}^n x(k) = x(k - n)} .$$

Wir können die Gültigkeit dieser Beziehung offenbar ausdehnen auf alle $n \in \mathbb{Z}$ und wollen dies im Folgenden auch tun.

Den Verschiebungssatz der z -Transformation können wir dann wie folgt formulieren:

$$\boxed{\mathcal{Z}\{\mathcal{V}^n x\} = z^{-n} \mathcal{Z}\{x\} , \quad n \in \mathbb{Z}} .$$

Die Richtigkeit dieser Aussage ergibt sich sofort aus der Definitionsformel (3.3) durch Verschiebung des Summenindex.

Komplexe Konjugation

Die Konjugation eines komplexen Signals x spiegelt sich im Bildbereich in einer Bikonjugation der z -Transformierten wider:

$$\boxed{x \circ \bullet X \Leftrightarrow x^* \circ \bullet \overline{X}} . \quad (3.19)$$

Die Bikonjugierte \overline{X} ist definiert durch

$$\overline{X}(z) = X^*(z^*) ,$$

wobei das Sternchen wie üblich die komplexe Konjugation kennzeichnet. Der Beweis folgt sofort durch Einsetzen von x in (3.3). Falls x reellwertig ist, also der Gleichung $x = x^*$ genügt, ist $X = \mathcal{Z}\{x\}$ gleich ihrer Bikonjugierten und umgekehrt:

$$\boxed{x = x^* \Leftrightarrow X = \overline{X}} .$$

Eine Funktion $X : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ mit der Eigenschaft $X = \overline{X}$ wird auch als *reelle Funktion* bezeichnet, da sie für reelle Werte des Arguments selbst nur reelle Werte annimmt:

$$z \in \mathbb{R} \Rightarrow X(z) \in \mathbb{R} .$$

Wir wollen ein einfaches Beispiel für die Anwendung der Äquivalenz (3.19) betrachten. Gegeben sei ein reelles Signal s , das wie folgt definiert ist:

$$s(k) = u(k) \cos(\omega_0 k T + \alpha) .$$

Hierbei bezeichnet u das Sprungsignal. Das Signal s lässt sich darstellen als Realteil des komplexen Signals

$$s_+(k) = u(k) e^{j(\omega_0 k T + \alpha)} .$$

Die z -Transformierte des Signals s_+ ergibt

$$S_+(z) = e^{j\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{e^{j\omega_0 T}}{z} \right)^k = \frac{e^{j\alpha}}{1 - e^{j\omega_0 T}/z} = \frac{ze^{j\alpha}}{z - e^{j\omega_0 T}}$$

Somit ist die z -Transformierte von $s = \operatorname{Re} s_+ = \frac{1}{2}(x_+ + x_+^*)$ durch

$$S(z) = \frac{1}{2} [S_+(z) + \overline{S}_+(z)] = \frac{1}{2} \left(\frac{ze^{j\alpha}}{z - e^{j\omega_0 T}} + \frac{ze^{-j\alpha}}{z - e^{-j\omega_0 T}} \right) = \frac{z^2 \cos \alpha - z \cos(\omega_0 T - \alpha)}{z^2 - 2z \cos \omega_0 T + 1}$$

gegeben.

Multiplikation mit k

Wie bereits erwähnt, darf eine LAURENT-Reihe, etwa

$$X(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)z^{-k} ,$$

innerhalb ihres Konvergenzgebietes gliedweise differenziert werden, so dass wir schreiben können

$$\frac{d}{dz}X(z) = - \sum_{k=-\infty}^{\infty} kx(k)z^{-k-1} = -\frac{1}{z} \sum_{k=-\infty}^{\infty} kx(k)z^{-k} .$$

Hieraus folgt

$$\boxed{\mathcal{Z}\{kx(k)\} = -z \frac{d}{dz}X(z)} \quad (3.20)$$

Als ein Beispiel für die Anwendung dieses Satzes transformieren wir das Signal $ku(k)$, wobei u das in (3.5) definierte Sprungsignal bedeutet. Da die z -Transformierte von $u(k)$ durch

$$U(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} = \frac{z}{z-1} , \quad |z| > 1 \quad (3.21)$$

gegeben ist, erhalten wir für $\mathcal{Z}\{ku(k)\}$

$$\mathcal{Z}\{ku(k)\} = -z \frac{d}{dz} \left(\frac{z}{z-1} \right) = \frac{z}{(z-1)^2} .$$

Faltungssatz

Die Faltung zweier zeitdiskreter Signale, x_1 und x_2 , wird definiert durch

$$y(k) = \sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} x_1(\kappa)x_2(k-\kappa) = \sum_{k'=-\infty}^{\infty} x_1(k-k')x_2(k') . \quad (3.22)$$

Wie im zeitkontinuierlichen Bereich spricht man von einem Faltungsprodukt und stellt den Zusammenhang (3.22) symbolisch gemäß

$$y = x_1 * x_2 = x_2 * x_1$$

dar. Es sei jetzt schon bemerkt, dass sich das Übertragungsverhalten linearer zeitdiskreter Systeme mit dieser Faltungsoperation beschreiben lässt.

Falls x_1 und x_2 transformierbar sind und der Durchschnitt der Konvergenzgebiete von $X_1 = \mathcal{Z}\{x_1\}$ und $X_2 = \mathcal{Z}\{x_2\}$ nicht leer ist, können wir schreiben

$$\boxed{\mathcal{Z}\{x_1 * x_2\} = X_1 X_2} .$$

Zum Beweis dieser Beziehung nehmen wir an, dass $y := x_1 * x_2$ die z -Transformierte Y besitzt, und schreiben

$$Y(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} x_1(\kappa) x_2(k - \kappa) z^{-k} .$$

Wir nehmen weiter an, dass die Reihenfolge der beiden Summenzeichen vertauscht werden darf, so dass diese Beziehung übergeht in

$$Y(z) = \sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} x_1(\kappa) \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_2(k - \kappa) z^{-k} .$$

Unter Verwendung des Verschiebungssatzes folgt hieraus schließlich das gewünschte Ergebnis:

$$Y(z) = X_2(z) \sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} x_1(\kappa) z^{-\kappa} = X_1(z) X_2(z) .$$

Als ein einfaches Beispiele für die Anwendung des Faltungssatzes betrachten wir die Faltung eines Signals x mit dem δ -Impuls:

$$(x * \delta)(k) = \sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} x(\kappa) \delta(k - \kappa) = x(k) , \quad (3.23)$$

Der zeitdiskrete δ -Impuls verhält sich bei der zeitdiskreten Faltung also in gleicher Weise wie die 1 bei der Multiplikation. Da die z -Transformierte des δ -Impulses durch $\mathcal{Z}\{\delta\} = 1$ gegeben ist, erhalten wir im z -Bereich die zu erwartende Identität:

$$\mathcal{Z}\{x * \delta\} = \mathcal{Z}\{x\} .$$

Als weiteres Beispiel betrachten wir die Faltung eines Signals x mit dem Sprungsignal:

$$(x * u)(k) = \sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} x(\kappa) u(k - \kappa) = \sum_{\kappa=-\infty}^k x(\kappa) .$$

Folglich erhalten wir für die z -Transformierte des Signals $\sum_{\kappa=-\infty}^k x(\kappa)$

$$\mathcal{Z} \left\{ \sum_{\kappa=-\infty}^k x(\kappa) \right\} = \frac{z}{z-1} X(z) .$$

Modulationssatz

Multiplizieren wir ein zeitdiskretes Signal $x = \mathcal{Z}^{-1}\{X\}$ mit z_1^k , so erhalten wir:

$$\boxed{\mathcal{Z}\{x(k) z_1^k\}(z) = X(z/z_1)} . \quad (3.24)$$

Unter der Voraussetzung, dass der Einheitskreis zum Konvergenzgebiet der z -Transformierten X gehört und z_1 unimodular ist, also durch $z_1 = e^{j\omega_1 T}$ dargestellt werden kann, folgt aus (3.24) u. a.

$$\mathcal{Z}\{x(k) e^{j\omega_1 k T}\}(e^{j\omega T}) = X(e^{j(\omega - \omega_0) T})$$

und somit eine Rechtfertigung für die Bezeichnung *Modulationssatz*. Der Beweis des Modulationssatzes ergibt sich sofort nach Einsetzen des Signals $x(k)z^k$ in die Transformationsformel. Da in der Summe die Variable z durch z/z_1 ersetzt wird, ergibt sich im Fall $|z_1| \neq 1$ eine Änderung des Konvergenzgebietes. Statt

$$R_- < |z| < R_+$$

muss es jetzt

$$|z_1|R_- < |z| < |z_1|R_+$$

heißen.

Im Zusammenhang mit der einseitigen z -Transformation, der wir uns anschließend zuwenden, werden wir eine wichtige Modifikation des Verschiebungssatzes behandeln und zwei Grenzwertsätze kennen lernen.

3.4 Die einseitige z -Transformation

Wie schon erwähnt, wird die z -Transformation vielfach zur Lösung linearer Differenzengleichungen eingesetzt, wobei hauptsächlich sogenannte Anfangswertprobleme betrachtet werden. Zur Behandlung dieser Probleme eignet insbesondere die einseitige z -Transformation, die ähnlich wie die (einseitige) LAPLACE-Transformation nur den rechtsseitigen Teil der Signale erfasst.

Ohne es jeweils ausdrücklich zu erwähnen, setzen wir daher für den Rest dieses Kapitels stets voraus, dass die auftretenden zeitdiskreten Signale rechtsseitig sind, d. h., dass sie für negative Werte des Arguments stets den Wert Null annehmen. Sei also x ein derartiges zeitdiskretes Signal. Die *einseitige z -Transformierte* von x ist dann definiert durch

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-k}.$$

Das Konvergenzgebiet dieser Reihe ist das Äußere eines Kreises, dessen Radius, R , durch

$$R = \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|x(k)|}$$

gegeben ist [vgl. (3.4) und siehe Bild 3.5]. Wenn wir im Folgenden von der z -Transformation sprechen, wollen wir hierunter stets die einseitige z -Transformation verstehen. Das Symbol \mathcal{Z} , das wir zunächst zur Kennzeichnung der zweiseitigen Transformation eingeführt hatten, werden wir zukünftig für die einseitige z -Transformation verwenden. Die z -Rücktransformation kann weiterhin mit der Formel (3.12) durchgeführt werden, d. h. mit

$$x(k) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\mathcal{C}} X(z)z^{k-1} dz, \quad k \geq 0. \quad (3.25)$$

Der Integrationsweg muss natürlich auch hier innerhalb des Konvergenzgebietes verlaufen, und zwar etwa entlang einer Kreislinie mit dem Mittelpunkt $z = 0$ und einem Radius $r > R$.

Wie angekündigt, wollen wir an dieser Stelle kurz daran erinnern, wie das Umlaufintegral mit Hilfe des Residuenkalküls berechnet werden kann. Hierbei werden wir insbesondere auf den Fall eingehen, dass als Singularitäten nur Pole auftreten, was beispielsweise bei rationalen Funktionen gegeben ist.

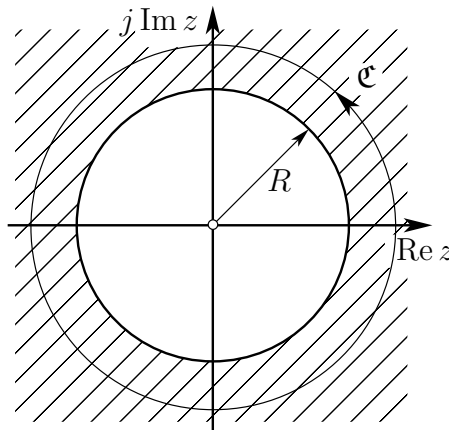


Bild 3.5: Konvergenzgebiet der (einseitigen) z-Transformation; \mathfrak{C} kennzeichnet den im Konvergenzgebiet liegenden Integrationsweg für die Rücktransformation.

Der Einfachheit halber bezeichnen wir den Integranden mit F_k , schreiben also

$$F_k(z) = X(z)z^{k-1}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Da F_k in dem Gebiet außerhalb des Kreises mit dem Radius R holomorph und damit singularitätsfrei ist, liegen sämtliche Singularitäten, die wir als isoliert voraussetzen², innerhalb des Kreises. Bezeichnen wir die Singularitäten mit z_1, z_2, \dots, z_n , so können wir das Umlaufintegral durch die Summe über die Residuen ausdrücken und schreiben

$$x(k) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\mathfrak{C}} F_k(z) dz = \sum_{\nu=1}^n \operatorname{Res}_{z_\nu} F_k.$$

Ist z_ν ein einfacher Pol, so berechnet sich das Residuum an dieser Stelle zu

$$\operatorname{Res}_{z_\nu} F_k = \lim_{z \rightarrow z_\nu} (z - z_\nu) F_k(z)$$

Repräsentiert z_ν einen mehrfachen Pol der Funktion F_k , etwa der Ordnung m , so gilt

$$\operatorname{Res}_{z_\nu} F_k = \lim_{z \rightarrow z_\nu} \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z - z_\nu)^m F_k(z)].$$

Bei rationalen Funktion läuft die Bestimmung der Residuen im Wesentlichen darauf hinaus die Koeffizienten einer Partialbruchzerlegung zu bestimmen. Ist etwa X durch $X(z) = z/(z - z_1)$ und F_k somit durch

$$F_k(z) = \frac{z^k}{z - z_1}$$

gegeben, so folgt

$$x(k) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\mathfrak{C}} \frac{z^k}{z - z_1} dz = \operatorname{Res}_{z_1} F_k = \lim_{z \rightarrow z_1} (z - z_1) F_k(z) = z_1^k.$$

Liegt bei z_1 ein doppelter Pol und ist F_k durch

$$F_k(z) = \frac{z^k}{(z - z_1)^2}$$

²Diese Voraussetzung ist im Fall der rationalen Funktionen, deren einzige Singularitäten ja Pole sind, ohnehin erfüllt.

gegeben, so erhalten wir

$$x(k) = \lim_{z \rightarrow z_1} \frac{d}{dz} [(z - z_1)^2 F_k(z)] = k z_1^{k-1} .$$

Dieses Verfahren kann in gleicher Weise auch bei Polen höherer Ordnung angewandt werden. Natürlich lässt sich auch eine geschlossene Formel angeben, etwa für einen Pol m -ter Ordnung. Allerdings ist das Ergebnis nicht sehr einprägsam, so dass wir auf die Angabe hier verzichten wollen.

Wir haben bei diesen beiden Beispielen die Brüche so gewählt, dass jeweils eine Nullstelle im Ursprung auftrat. Hierdurch wurde der Pol, der in dem Faktor z^{k-1} für $k = 0$ auftritt, von vornherein kompensiert, so dass bei der Bestimmung der Residuen keine Fallunterscheidung bezüglich $k = 0$ und $k > 0$ vorgenommen werden musste. Um eine rationale Funktion X in derartige Partialbrüche zu zerlegen, bietet es sich an, statt X die Funktion X/z zu zerlegen und anschließend das Ergebnis mit z zu multiplizieren.

Die im Abschnitt 3.3 diskutierten Eigenschaften wurden zwar für die zweiseitige Transformation formuliert, gelten in entsprechender Weise aber auch für die einseitige z -Transformation. Eine gewisse Ausnahme stellt allerdings der Verschiebungssatz dar.

Modifikation des Verschiebungssatzes

Wir betrachten ein rechtsseitiges Signal x mit der z -Transformierten X . Verschieben wir x nach rechts, so bleibt das verschobene Signal rechtsseitig und der Verschiebungssatz kann in der diskutierten Form angewandt werden. Eine Verschiebung nach links führt aber i. allg. zu einem Verlust der Rechtsseitigkeit, so dass eine Modifikation des Verschiebungssatzes erforderlich wird. Der Verschiebungssatz nimmt nun folgende Form an:

$$\mathcal{Z}\{\mathcal{V}^{-n}x\}(z) = \begin{cases} z^n X(z) & \text{für } n \leq 0 \\ z^n \left[X(z) - \sum_{\kappa=0}^{n-1} x(\kappa) z^{-\kappa} \right] & \text{für } n > 0 \end{cases} .$$

Der Beweis folgt sofort durch Einsetzen des verschobenen Signals in die Formel für die z -Transformation.

Als erstes Beispiel für die Anwendung des Verschiebungssatzes betrachten wir eine einfache Differenzengleichung:

$$x(k+2) + x(k) = 0 , \quad \text{mit} \quad x(0) = x_0 , \quad x(1) = x_1 .$$

Die z -Transformation dieser Gleichung ergibt

$$z^2 X(z) - x_0 z^2 - x_1 z + X(z) = 0 .$$

Hieraus folgt

$$X(z) = \frac{x_0 z^2 + x_1 z}{z^2 + 1} = \gamma \frac{z}{z + j} + \gamma^* \frac{z}{z - j} , \quad \gamma = \frac{1}{2}(x_0 + j x_1) .$$

Die Rücktransformation führt schließlich auf

$$x(k) = \gamma(-j)^k + \gamma^* j^k = x_0 \cos(k\pi/2) + x_1 \sin(k\pi/2) .$$

Als ein weiteres Beispiel wenden wir uns noch einmal der Rekursionsbeziehung

$$M(2m) = 2M(m) + m \quad \text{mit} \quad M(1) = 0 \quad (3.26)$$

zu, der wir im Zusammenhang mit der schnellen FOURIER-Transformation bereits begegnet waren [siehe (2.33)]. In dieser Form lässt sich die Gleichung offenbar nicht unmittelbar mit der z -Transformations behandelt. Da m , die Zahl der Komponenten des zu transformierenden Vektors, gemäß Voraussetzung eine Zweierpotenz sein sollte, wollen wir m gleich $m = 2^k$ setzen und statt M die Funktion

$$f(k) = M(2^k)$$

betrachten. Die Gleichung 3.26 geht dann über in

$$f(k+1) = 2f(k) + 2^k \quad \text{mit} \quad f(0) = 0 .$$

Durch z -Transformation dieser Gleichung erhalten wir dann

$$zF(z) = 2F(z) + \frac{1}{1 - 2/z} \quad \text{bzw.} \quad F(z) = \frac{z}{(z-2)^2} .$$

Da wir F auch darstellen können durch

$$F(z) = -\frac{z}{2} \frac{d}{dz} \frac{z}{z-2} ,$$

erhalten wir unter Beachtung der Eigenschaft (3.20)

$$f(k) = k2^{k-1}$$

und somit das bereits bekannte Ergebnis

$$M(m) = f(\text{ld } m) = \frac{m}{2} \text{ld } m .$$

Grenzwertsätze

Zum Abschluss dieses Kapitels wollen wir noch zwei Grenzwertsätze betrachten. Der erste Satz stellt einen Zusammenhang zwischen dem Anfangswert $x(0)$ und dem Wert der Bildfunktion im Unendlichen her. Gegeben sei ein rechtsseitiges Signal x mit der z -Transformierten X , d. h.

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-k} .$$

Der Signalwert $x(0)$ ist dann offenbar gleich dem Grenzwert

$$\boxed{x(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z)} .$$

Dieser Satz lässt sich wiederholt anwenden, um sukzessive die Werte $x(1)$, $x(2)$, $x(3)$ usw. aus X zu bestimmen. Die Reihenentwicklung der Funktion $X(z) - x(0)$ lautet offenbar

$$X(z) - x(0) = \sum_{k=1}^{\infty} x(k)z^{-k} = z^{-1}[x(1) + x(2)z^{-1} + x(3)z^{-2} + \dots] .$$

Somit kann $x(1)$ gemäß

$$x(1) = \lim_{z \rightarrow \infty} z[X(z) - x(0)]$$

bestimmt werden. Zur Bestimmung des nächsten Wertes betrachten wir die Reihe

$$X(z) - x(0) - x(1)z^{-1} = z^{-2}[x(2) + x(3)z^{-1} + x(4)z^{-2} \dots] .$$

Der Wert $x(2)$ ergibt sich somit wie folgt:

$$x(2) = \lim_{z \rightarrow \infty} z^2 [X(z) - x(0) - x(1)z^{-1}] .$$

Auf diese Weise können offenbar auch die weiteren Werte bestimmt werden.

Der zweite Grenzwertsatz stellt einen Zusammenhang zwischen $x(\infty) := \lim_{k \rightarrow \infty} x(k)$ und dem Verhalten der Bildfunktion in der Umgebung von $z = 1$ her:

$$\boxed{\lim_{k \rightarrow \infty} x(k) = \lim_{\substack{z \rightarrow 1 \\ |z| > 1}} (z - 1)X(z)} . \quad (3.27)$$

Wie bei dem entsprechenden Satz der LAPLACE-Transformation gilt auch hier der Satz nur unter der Voraussetzung, dass der Grenzwert $x(\infty)$ tatsächlich existiert.

Wir wollen eine Begründung für den Fall geben, dass X eine rationale Funktion ist. Sollte diese Funktion mindestens einen einfachen (oder mehrfachen) Pol, etwa z_ν , außerhalb des Einheitskreises haben, so würde die Rücktransformation des zugehörigen Partialbruches

$$\frac{z}{z - z_\nu} \bullet \longrightarrow u(k)z_\nu^k$$

zu einem Signal führen, dessen Amplitude für $k \rightarrow \infty$ exponentiell wächst. Ein Grenzwert $x(\infty)$ könnte also gar nicht existieren. Lägen alle Pole innerhalb des Einheitskreises, so würde $|x(k)|$ für $k \rightarrow \infty$ exponentiell abnehmen und $x(\infty) = 0$ gelten. Damit $x(k)$ im Unendlichen gegen einen festen Wert strebt, darf höchstens ein Pol auf dem Rand des Einheitskreises liegen, und zwar bei $z = 1$; dieser darf aber nur die Ordnung 1 haben. Hätte er eine größere Ordnung, so würde x zwar nicht exponentiell, aber dennoch (polynomiell) unbeschränkt wachsen. Ein Pol bei $z = -1$ oder ein Polpaar bei $\exp(\pm j\omega_0 T)$ würde ein oszillierendes Verhalten hervorrufen. Wenn also $x(k)$ für $k \rightarrow \infty$ gegen einen festen, von Null verschiedenen Wert $x(\infty)$ streben soll, muss die Partialbruchzerlegung von X auf die folgende Form führen:

$$X(z) = \frac{x(\infty)z}{z - 1} + \sum_{\mu} \frac{\alpha_{\mu}z}{(z - z_{\mu})^{n_{\mu}}} , \quad |z_{\mu}| < 1 .$$

Wenn dieser Ausdruck mit $(z - 1)$ multipliziert und anschließend der Grenzübergang $z \rightarrow 1$ vorgenommen wird, bestätigt sich das in (3.27) angegebene Ergebnis.

Lineare zeitinvariante Systeme

4.1 Zeitdiskrete Systeme

4.1.1 Impulsantwort und Übertragungsfunktion

Wir beschränken uns im Folgenden auf die Behandlung von Systemen mit einem (skalaren) Eingangssignal, x , und einem (skalaren) Ausgangssignal, y . Graphisch stellen wir ein derartiges System durch das in Bild 4.1 gezeigte Rechteck dar. Den Zusammenhang zwischen x und y drücken wir symbolisch durch

$$y = \mathcal{S}\{x\} \quad (4.1)$$

aus. Gelegentlich wird x auch als die *Erregung* oder die *Ursache* und y als die *Antwort* oder die *Wirkung* des Systems bezeichnet. Der Einfachheit halber setzen wir voraus, dass die Definitionszeitpunkte von x und y gleich und durch $t_k = kT$ gegeben sind. Wir können somit die Definitionszeitpunkte durch eine ganze Zahl charakterisieren und daher für die Werte der Signale x und y zum Zeitpunkt kT einfach $x(k)$ bzw. $y(k)$ schreiben.

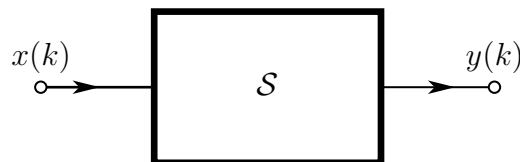


Bild 4.1: Zeitdiskretes System

Im Folgenden schreiben wir den Zusammenhang (4.1) gelegentlich in der mathematisch nicht ganz korrekten, aber unter praktischen Gesichtspunkten dennoch zweckmäßigen Form

$$y(k) = \mathcal{S}\{x(k)\} . \quad (4.2)$$

Additivität

Das System mit dem Systemoperator \mathcal{S} heißt *additiv*, falls für zwei beliebige Eingangssignale x_1 und x_2 stets gilt

$$\mathcal{S}\{x_1 + x_2\} = \mathcal{S}\{x_1\} + \mathcal{S}\{x_2\} .$$

Homogenität

Das System heißt *homogen*, falls für ein beliebiges Eingangssignal x und eine beliebige Konstante $c \in \mathbb{C}$ stets gilt

$$\mathcal{S}\{cx\} = c\mathcal{S}\{x\} .$$

Linearität

Ist das System sowohl additiv als auch homogen, so wird es als *linear* bezeichnet.

Zeitinvarianz

Zur bequemen Definition der *Zeitinvarianz* verwenden wir den in Abschnitt 3.3 eingeführten Verschiebeoperator \mathcal{V} , der definiert ist durch

$$\mathcal{V}x(k) = x(k-1) .$$

Das System mit dem Systemoperator \mathcal{S} heißt *zeitinvariant*, falls \mathcal{S} und \mathcal{V} vertauschbar sind, d. h., falls

$$\mathcal{S}\mathcal{V} = \mathcal{V}\mathcal{S} \quad (4.3)$$

gilt. Mit anderen Worten, wenn das Eingangssignal zeitlich um T verzögert wird, also $x(k)$ durch $x(k-1)$ ersetzt wird, erscheint bei einem zeitinvarianten System auch das Ausgangssignal um den gleichen Wert verschoben; statt $y(k)$ tritt also $y(k-1)$ auf. Man kann übrigens leicht zeigen, dass aus (4.3) auch

$$\mathcal{S}\mathcal{V}^n = \mathcal{V}^n\mathcal{S}$$

folgt, wobei n eine beliebige ganze Zahl ist.

Reelle Systeme

Bevor wir uns mit der Impulsantwort und der Übertragungsfunktion befassen, soll noch kurz der Begriff des *reellen Systems* eingeführt werden, da die meisten in der Praxis auftretenden Systeme diese Eigenschaft besitzen.

Ein System mit dem Eingangssignal x und dem Ausgangssignal y heißt *reell*, falls ein reelles x stets ein reelles y hervorruft, falls also stets die Implikation

$$x = x^* \quad \Rightarrow \quad y = y^* \quad (4.4)$$

gilt.

Zerlegt man ein komplexes Signal, x , gemäß $x = x' + jx''$ nach Real- und Imaginärteil und gibt dies auf den Eingang eines reellen Systems mit dem Systemoperator \mathcal{S} , so folgt aus der Linearität

$$\mathcal{S}\{x' + jx''\} = \mathcal{S}\{x'\} + j\mathcal{S}\{x''\} \quad \text{und} \quad \mathcal{S}\{x' - jx''\} = \mathcal{S}\{x'\} - j\mathcal{S}\{x''\} . \quad (4.5)$$

Eine komplexe Konjugation des Eingangssignals führt also bei einem reellen System zu einer komplexen Konjugation des Ausgangssignals:

$$y = \mathcal{S}\{x\} \quad \Rightarrow \quad y^* = \mathcal{S}\{x^*\} . \quad (4.6)$$

Impulsantwort

Die Antwort des Systems auf eine Erregung mit dem zeitdiskreten δ -Impuls, d. h. auf

$$\delta(k) = \begin{cases} 1 & \text{für } k = 0 \\ 0 & \text{für } k \neq 0 \end{cases} ,$$

heißt *Impulsantwort* und wird mit $h(k)$ bezeichnet:

$$h(k) = \mathcal{S}\{\delta(k)\} .$$

Hierbei wird vorausgesetzt, dass das System vor dem Eintreffen des Impulses in Ruhe war, d. h., dass sämtliche Speicher leer waren.

Antwort auf ein beliebiges Eingangssignal

Ist die Antwort auf den δ -Impuls bekannt, so lässt sich als Folge der Linearität die Antwort auf ein beliebiges zeitdiskretes Signal x leicht berechnen. Um dies zu zeigen, beachten wir, dass jedes zeitdiskrete Signal x sich gemäß

$$x(k) = \cdots + x(-1)\delta(k+1) + x(0)\delta(k) + x(1)\delta(k-1) + \cdots$$

bzw.

$$x(k) = \sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} x(\kappa)\delta(k-\kappa)$$

als Summe über gewichtete δ -Impulse darstellen lässt [siehe (3.23)]. Machen wir dann der Reihe nach Gebrauch von der Zeitinvarianz, der Homogenität und der Additivität des Systems so folgt

$$\mathcal{S}\{\delta(k-\kappa)\} = h(k-\kappa) , \quad (\text{Zeitinvarianz})$$

$$\mathcal{S}\{x(\kappa)\delta(k-\kappa)\} = x(\kappa)h(k-\kappa) \quad (\text{Homogenität})$$

und schließlich

$$\mathcal{S}\left\{\sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} x(\kappa)\delta(k-\kappa)\right\} = \sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} x(\kappa)h(k-\kappa) . \quad (\text{Additivität})$$

Das Ausgangssignal y ist also gleich der Faltung des Eingangssignals mit der Impulsantwort:

$$\boxed{y(k) = \sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} x(\kappa)h(k-\kappa) \quad \text{bzw.} \quad y = x * h} . \quad (4.7)$$

Da die Faltung kommutativ ist, können wir dieses Ergebnis offenbar auch wie folgt ausdrücken:

$$\boxed{y(k) = \sum_{k'=-\infty}^{\infty} h(k')x(k-k')} . \quad (4.8)$$

Man überzeugt sich leicht, dass das System genau dann reell ist, wenn h reell ist, wenn also für alle $k \in \mathbb{Z}$ stets gilt $h(k) \in \mathbb{R}$.

Übertragungsfunktion

Zur Definition der *Übertragungsfunktion* eines linearen zeitdiskreten Systems erregen wir dieses mit einem Signal der Form

$$x(k) = e^{jk\omega T}$$

oder, allgemeiner, mit

$$x(k) = e^{pkT} = z^k , \quad (4.9)$$

wobei p die komplexe Frequenz bedeutet und wobei $z = e^{pT}$ die Variable der z -Transformation kennzeichnet. Falls dann das Ausgangssignal existiert, hat dieses die Form

$$y(k) = H(z)z^k ,$$

wobei die Größe H , die sogenannte Übertragungsfunktion, nur von $z = e^{pT}$ und keinesfalls von k abhängt.

Um diese Aussage zu beweisen, machen wir von der *Homogenität* und der *Zeitinvarianz* des Systems Gebrauch. Das aus (4.9) resultierende Ausgangssignal laute η , d. h.

$$\mathcal{S}\{z^k\} = \eta(k) = \eta(k)z^{-k}z^k.$$

Mit der Abkürzung $H(z, k) := \eta(k)z^{-k}$ können wir dann schreiben

$$\mathcal{S}\{z^k\} = H(z, k)z^k.$$

Als nächstes ersetzen wir das Eingangssignal durch z^{k-1} . Wegen der Zeitinvarianz des Systems lautet das zugehörige Ausgangssignal

$$\mathcal{S}\{z^{k-1}\} = H(z, k-1)z^{k-1}.$$

Da die Verzögerung des Eingangssignals aber auch als Multiplikation des Signals z^k mit z^{-1} interpretiert werden kann, folgt andererseits aus der Homogenität

$$\mathcal{S}\{z^{k-1}\} = z^{-1}\mathcal{S}\{z^k\} = H(z, k)z^{k-1}.$$

Somit gilt

$$H(z, k) = H(z, k-1) \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Die Funktion H ist also gar nicht von dem zweiten Argument abhängig, so dass wir statt $H(z, k)$ einfach $H(z)$ schreiben dürfen und unsere Behauptung bestätigt finden. Da wir als Folge der Homogenität das Eingangssignal auch mit einer komplexen Konstanten, etwa X , multiplizieren können und diese Konstante dann auch beim Ausgangssignal erscheint, dürfen wir zusammenfassend schreiben:

$$\boxed{x(k) = Xz^k \quad \Rightarrow \quad y(k) = Yz^k \quad \text{mit} \quad Y = H(z)X}, \quad (4.10)$$

wobei die Größen X und Y als *komplexe Amplituden* bezeichnet werden.

Es sei daran erinnert, dass wir das Ergebnis (4.10) unter dem Vorbehalt gewonnen haben, dass eine Antwort auf z^k überhaupt existiert. Wir werden auf dieses Problem, das eng mit dem Problem der Stabilität verknüpft ist, im weiteren Verlauf dieses Kapitels noch zurückkommen.

Die Tatsache, dass ein System reell ist, spiegelt sich auch in der Übertragungsfunktion wider, und zwar gilt folgende Äquivalenz:

$$\boxed{\text{System ist reell} \quad \Longleftrightarrow \quad H(z) = H^*(z^*)}. \quad (4.11)$$

Zum Beweis dieser Aussage betrachten wir die Antwort auf die Eingangssignale $x(k) = z^k$ und $x^*(k) = (z^k)^* = (z^*)^k$:

$$\mathcal{S}\{z^k\} = H(z)z^k, \quad \mathcal{S}\{(z^*)^k\} = H(z^*)(z^*)^k. \quad (4.12)$$

Aus (4.6) folgt andererseits wegen $(z^*)^k = (z^k)^*$

$$\mathcal{S}\{(z^*)^k\} = H^*(z)(z^*)^k \quad (4.13)$$

und somit eine Bestätigung für (4.11).

Falls die Antwort auf eine Erregung mit der Exponentialschwingung

$$x(k) = X e^{j\omega k T}$$

existiert, können wir schreiben:

$$x(k) = X e^{j\omega k T} \Rightarrow y(k) = Y e^{j\omega k T} \quad \text{mit} \quad Y = H(e^{j\omega T}) X .$$

Wegen der Linearität des Systems kann damit die Antwort auf ein Eingangssignal, das als Summe über Exponentialschwingungen dargestellt werden kann, d. h. die Antwort auf eine Erregung der Form

$$x(k) = \sum_{\mu} X_{\mu} e^{j\omega_{\mu} k T} ,$$

wie folgt bestimmt werden:

$$y(k) = \sum_{\mu} H(e^{j\omega_{\mu} T}) X_{\mu} e^{j\omega_{\mu} k T} .$$

Besitzt x die zeitdiskrete FOURIER-Transformierte \hat{X} , so lässt sich x gemäß

$$x(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega/2}^{\Omega/2} \hat{X}(j\omega) e^{j\omega k T} d\omega$$

darstellen. Fasst man dieses Integral als Grenzwert einer Summe auf, so erhält man schließlich nach Ausführung des Grenzübergangs für $y = \mathcal{S}\{x\}$ das Ergebnis

$$y(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega/2}^{\Omega/2} \hat{Y}(j\omega) e^{j\omega k T} d\omega \quad \text{mit} \quad \hat{Y}(j\omega) = H(e^{j\omega T}) \hat{X}(j\omega) .$$

Zusammenhang zwischen Impulsantwort und Übertragungsfunktion

Setzen wir $x(k) = z^k$ in (4.7) ein, so folgt

$$y(k) = \sum_{k'=-\infty}^{\infty} h(k') z^{k-k'} = \left\{ \sum_{k'=-\infty}^{\infty} h(k') z^{-k'} \right\} z^k = \mathcal{Z}\{h(k)\} z^k .$$

Falls z zum Konvergenzgebiet der z -Transformierten von h gehört, ist die Übertragungsfunktion H also durch die z -Transformierte von h gegeben:

$$H(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) z^{-k} .$$

4.1.2 Kausalität

Im üblichen Sprachgebrauch werden die Begriffe *kausal* und *Kausalität* vielfach benutzt, um einen Zusammenhang zwischen zwei Ereignissen zu kennzeichnen, um beispielsweise zum Ausdruck zu bringen, dass jede *Wirkung* einer *Ursache* bedarf. In diesem Sinne beschreiben (4.7) und (4.8) den Zusammenhang zwischen der Ursache x und der Wirkung y . Im systemtheoretischen Kontext werden die Begriffe *kausal* und *Kausalität* hingegen benutzt, um bei einem unterstellten Ursache-Wirkungs-Zusammenhang auszudrücken, dass die Wirkung zeitlich nicht vor ihrer Ursache auftreten kann. Dieses Prinzip führt uns bei dem betrachteten System zu folgender

Definition: Ein System mit dem Eingangssignal x und dem Ausgangssignal y heißt *kausal*, falls der Wert des Ausgangssignals zu jedem beliebigen Zeitpunkt $t = kT$, also die Zahl $y(k)$, nicht abhängig ist von zukünftigen Werten des Eingangssignals x , sondern nur vom gegenwärtigen Wert, $x(k)$, und von den vergangenen Werten, also von $x(k-1)$, $x(k-2)$, $x(k-3)$ etc.

Da die Impulsantwort die Wirkung des Systems auf einen Impuls ist, der zum Zeitpunkt $t = 0$ auf das System gegeben wird, darf $h(k)$ für $k < 0$ keine von Null verschiedenen Werte annehmen, d. h., h muss *rechtsseitig* sein. Dass die *Rechtsseitigkeit* von h auch hinreichend für die Kausalität ist folgt sofort, wenn die Bedingung $h(k) = 0$ für $k < 0$ in (4.7) oder (4.8) eingesetzt wird:

$$y(k) = \sum_{\kappa=-\infty}^k x(\kappa)h(k-\kappa) = \sum_{k'=0}^{\infty} h(k')x(k-k') .$$

Man erkennt, dass die zukünftigen Werte von $x(k)$ keinen Einfluss auf $y(k)$ haben. Wir können somit folgendes Ergebnis festhalten:

System ist kausal. \Longleftrightarrow $h(k) = 0 \quad \text{für} \quad k < 0$

Die Übertragungsfunktion eines kausalen Systems ist folglich durch eine Reihe der Form

$$H(z) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)z^{-k} \quad (4.14)$$

gegeben. Wenn diese Reihe konvergiert, so konvergiert sie außerhalb eines Kreises. Insbesondere besitzt H im Unendlichen keine Singularität; H nimmt vielmehr dort den Wert

$$H(\infty) := \lim_{z \rightarrow \infty} H(z) = h(0) \quad (4.15)$$

an. Die Existenz dieses Grenzwertes ist somit eine *notwendige Bedingung* für die Kausalität. Existiert dieser Grenzwert nicht, wie beispielsweise bei den Funktionen

$$H_1(z) = z, \quad H_2(z) = \frac{z^2}{2z+1} \quad \text{oder} \quad H_3(z) = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots,$$

so repräsentiert die jeweilige Funktion mit Sicherheit kein kausales System. Unter der Voraussetzung, dass H außerhalb eines Kreises holomorph ist, ist die Existenz des Grenzwertes (4.15) eine *hinreichende Bedingung* dafür, dass zu H eine rechtsseitige Impulsantwort angegeben werden kann, die ja dann ein kausales System beschreibt. Wie wir im Zusammenhang mit

der Diskussion der z -Transformation im Kapitel 3 gesehen haben, ist die Entwicklung einer Funktion H in eine Reihe der Form

$$H(z) = \sum_k h(k)z^{-k} \quad (4.16)$$

i. allg. keineswegs eindeutig. Beispielsweise kann die Funktion

$$H(z) = \frac{1}{2} \cdot \frac{z+1}{z-1} .$$

entweder gemäß

$$H(z) = \frac{1}{2} + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \dots \quad |z| > 1$$

oder gemäß

$$H(z) = -\frac{1}{2} - z - z^2 - z^3 - \dots \quad |z| < 1$$

in eine derartige Reihe entwickelt werden. Im ersten Fall erhalten wir als Impulsantwort

$$h_1(k) = \begin{cases} 0 & \text{für } k < 0 \\ 1/2 & \text{für } k = 0 \\ 1 & \text{für } k > 0 \end{cases}$$

und im zweiten

$$h_2(k) = \begin{cases} -1 & \text{für } k < 0 \\ -1/2 & \text{für } k = 0 \\ 0 & \text{für } k > 0 \end{cases} .$$

Die rechtsseitige Impulsantwort h_1 beschreibt ein kausales System und h_2 ein nichtkausales.

Obwohl nichtkausale Systeme physikalisch nicht realisierbar sind, werden sie für theoretische Untersuchungen dennoch gerne verwendet.

4.1.3 Stabilität

Wir setzen voraus, dass das System kausal ist, das Ausgangssignal somit wie folgt bestimmt werden kann:

$$y(k) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} h(\kappa)x(k-\kappa) . \quad (4.17)$$

Damit y aber tatsächlich auf diese Weise ermittelt werden kann, muss offenbar die Reihe konvergieren, d. h. der Grenzwert

$$y(k) = \lim_{K \rightarrow \infty} \sum_{\kappa=0}^K h(\kappa)x(k-\kappa)$$

existieren. Dieses Problem hängt sehr eng mit dem der *Stabilität* zusammen. Um diese zu definieren, betrachten wir beschränkte Eingangssignale. Ein Signal x heißt *beschränkt*, falls eine positive Konstante M , die sogenannte Schranke, existiert, so dass

$$|x(k)| \leq M < \infty \quad \forall k \in \mathbb{Z} .$$

Wir definieren dann die Stabilität wie folgt:

Definition: Ein (kausales) System mit der Impulsantwort h heißt *stabil*, falls für jedes beschränkte Eingangssignal x die Reihe (4.17) konvergiert.

Notwendig und hinreichend für die Stabilität ist die absolute Summierbarkeit der Impulsantwort, d. h. die Konvergenz der Reihe $\sum_k |h(k)|$:

$$\boxed{\text{System ist stabil.} \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty} |h(k)| < \infty} . \quad (4.18)$$

Um zu beweisen, dass die rechte Bedingung *hinreichend* für die Stabilität ist, sei zunächst daran erinnert, dass die absolute Konvergenz einer Reihe ihre (gewöhnliche) Konvergenz impliziert. Dass unter der genannten Bedingung die absolute Konvergenz der Reihe (4.17) vorliegt, ergibt sich aus folgender Abschätzung:

$$\sum_{\kappa=0}^{\infty} |h(\kappa)x(k-\kappa)| \leq M \sum_{\kappa=0}^{\infty} |h(\kappa)| < \infty .$$

Um zu zeigen, dass die rechte Bedingung in (4.18) auch *notwendig* für die Stabilität ist, wählen wir für ein gegebenes System das beschränkte Eingangssignal

$$x(k) = M \operatorname{sgn}\{h(-k)\} .$$

Für $y(0)$ erhalten wir dann

$$y(0) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} h(\kappa)x(-\kappa) = M \sum_{\kappa=0}^{\infty} h(\kappa) \operatorname{sgn}\{h(\kappa)\} = M \sum_{\kappa=0}^{\infty} |h(\kappa)| .$$

Wäre $h(k)$ nicht absolut summierbar, so würde diese Reihe nicht konvergieren und $y(0)$ könnte nicht berechnet werden. Die absolute Summierbarkeit der Impulsantwort ist also notwendig für die Konvergenz der Reihe und damit für die Stabilität des Systems.

Das Abklingen der Impulsantwort für $k \rightarrow \infty$ ist übrigens keine hinreichende Bedingung für die Stabilität. Beispielsweise ist ein System mit der (abklingenden) Impulsantwort

$$h(k) = \begin{cases} 0 & \text{für } k \leq 0 \\ k^{-1} & \text{für } k > 0 \end{cases} \quad (4.19)$$

nicht stabil, da

$$\sum_{k=0}^{\infty} |h(k)| = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$$

divergiert.

Wir kommen nun zu der Frage, wie die Stabilität anhand der Übertragungsfunktion zu erkennen ist. Falls h absolut summierbar ist, konvergiert die Reihe

$$H(z) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)z^{-k} \quad (4.20)$$

für alle z mit $|z| \geq 1$ absolut. Dies folgt sofort aus der für alle z mit $|z| \geq 1$ und alle $k \geq 0$ gültigen Beziehung $|h(k)z^{-k}| \leq |h(k)|$. Somit konvergiert die Reihe mit Sicherheit auf dem Rand und außerhalb des Einheitskreises. In diesem Gebiet ist die Summe

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} |h(k)|$$

wegen

$$|H(z)| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |h(k)z^{-k}| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |h(k)| = S$$

eine obere Schranke für $|H(z)|$. Darüber hinaus ist H eine analytische Funktion, und zwar zumindest außerhalb des Einheitskreises.

In der Praxis ist die Übertragungsfunktion eines zeitdiskreten Systems nahezu immer eine rationale Funktion¹ in der Variablen z . Als Singularitäten treten somit nur Pole auf; wegen der Kausalität aber nicht im Unendlichen. Ist das System stabil, die Impulsantwort h also absolut summierbar, so ist, wie wir soeben gesehen haben, H für $|z| \geq 1$ beschränkt; etwaige Pole (Unendlichkeitsstellen) von H können nur für $|z| < 1$ auftreten.

Auch die Umkehrung ist gültig. Mit anderen Worten, ist H eine rationale Funktion, deren Pole alle im Einheitskreis liegen, so stellt H die Übertragungsfunktion eines stabilen Systems dar.

Um dies zu zeigen, nehmen wir an, dass der betragsmäßig größte Pol den Betrag $\rho < 1$ habe. Wird dann H in eine Potenzreihe der Form (4.20) entwickelt, so konvergiert die Reihe für alle z mit $|z| > \rho$ und ist darüber hinaus dort sogar absolut konvergent. Da wegen $\rho < 1$ der Rand des Einheitskreises innerhalb des Konvergenzgebietes liegt, folgt insbesondere, dass die Reihe für $|z| = 1$ absolut konvergent ist und h somit absolut summierbar. Da eine Potenzreihe innerhalb ihres Konvergenzgebietes eine holomorphe Funktion darstellt, stellen wir zusammenfassend fest:

System ist stabil. \iff H ist holomorph für $ z \geq 1$.

Mit anderen Worten:

Ein kausales System mit der rationalen Übertragungsfunktion H ist also genau dann stabil, wenn sämtliche Pole von H innerhalb des Einheitskreises liegen.

¹Zu der Impulsantwort (4.19) gehört übrigens keine rationale Übertragungsfunktion. Die z -Transformierte der durch (4.19) definierten Impulsantwort lautet nämlich

$$H(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{-k}}{k} = \ln \frac{z}{z-1} = -\ln(1 - z^{-1}) . \quad (4.21)$$

Das zugehörige Konvergenzgebiet ist das Äußere des Einheitskreises. Der Rand $|z| = 1$ gehört also nicht mehr dazu; an der Stelle $z = 1$ tritt eine sogenannte *logarithmische Singularität* auf.

4.1.4 Bausteine zur Realisierung zeitdiskreter Systeme

Das einfachste lineare System ist offenbar durch eine Gleichung der Form

$$y(k) = \alpha x(k)$$

gegeben, wobei α eine reelle oder komplexe Konstante ist. Ein derartiges System wird repräsentiert durch einen Multiplizierer, der gemäß Bild 4.2 (a) dargestellt wird. Dieses System

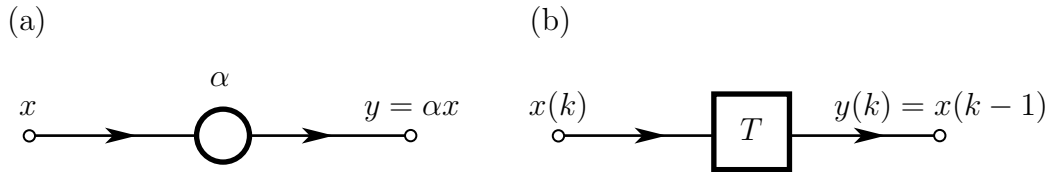


Bild 4.2: (a) Multiplizierer mit einem konstanten Koeffizienten α ; (b) Verzögerungselement mit der Verzögerung T

enthält keine speichernden Elemente und beeinflusst daher alle im Eingangssignal vorhandenen Spektralanteile in gleicher Weise, d. h., alle Spektralanteile werden gleich gedämpft oder gleich verstärkt. Um das Spektrum des Eingangssignals gezielt zu verformen, muss ein System mit einem Gedächtnis behaftet sein, d. h., es muss speichernde Elemente enthalten. In einer zeitkontinuierlichen elektrischen Schaltung werden diese Elemente beispielsweise durch Kapazitäten und Induktivitäten repräsentiert, wodurch in der mathematischen Beschreibung Differentiationen nach der Zeit auftreten.

Ein zeitdiskretes Signal kann natürlich nicht nach der Zeit differenziert werden, es können aber Differenzen, wie etwa $x(k) - x(k-1)$, gebildet werden. Um die in dieser Differenz auftretende zeitliche Verschiebung zu realisieren, wird ein Verzögerungselement benötigt, das durch

$$y(k) = \mathcal{V}x(k) = x(k-1)$$

beschrieben und symbolisch gemäß Bild 4.2 (b) dargestellt wird. Die zu einem derartigen Verzögerungselement gehörende Übertragungsfunktion lautet offenbar $H(z) = z^{-1}$.

Neben Multiplizierern und Verzögerungselementen benötigt man zum Aufbau linearer zeitdiskreter Systeme noch Verzweigungen und Addierer. Eine Verzweigung mit einem Eingangssignal x und n Ausgangssignalen y_1, y_2, \dots, y_n wird definiert durch

$$y_1 = y_2 = \dots = y_n = x.$$

und ein Addierer mit den Eingangssignalen x_1, x_2, \dots, x_n und dem Ausgangssignal y durch

$$y = x_1 + x_2 + \dots + x_n.$$

Die Schaltsymbole für diese Elemente sind in Bild 4.3 (a) und (b) dargestellt, und zwar für $n = 3$. Gelegentlich verwendet man als Symbol für einen Addierer auch nur einen Knoten, also das gleiche Symbol wie für die Verzweigung. Häufig lässt man dann neben mehreren Eingangssignalen zugleich auch mehrere Ausgangssignale zu und definiert das resultierende Bauelement [siehe Bild 4.3 (c)], das eine Kombination aus Addierer und Verzweigung darstellt, gemäß

$$y_1 = y_2 = \dots = y_n = x_1 + x_2 + \dots + x_m.$$

Werden die bislang behandelten Elemente zu Signalflussdiagrammen zusammengesetzt, so muss hierbei folgende Regel beachtet werden:

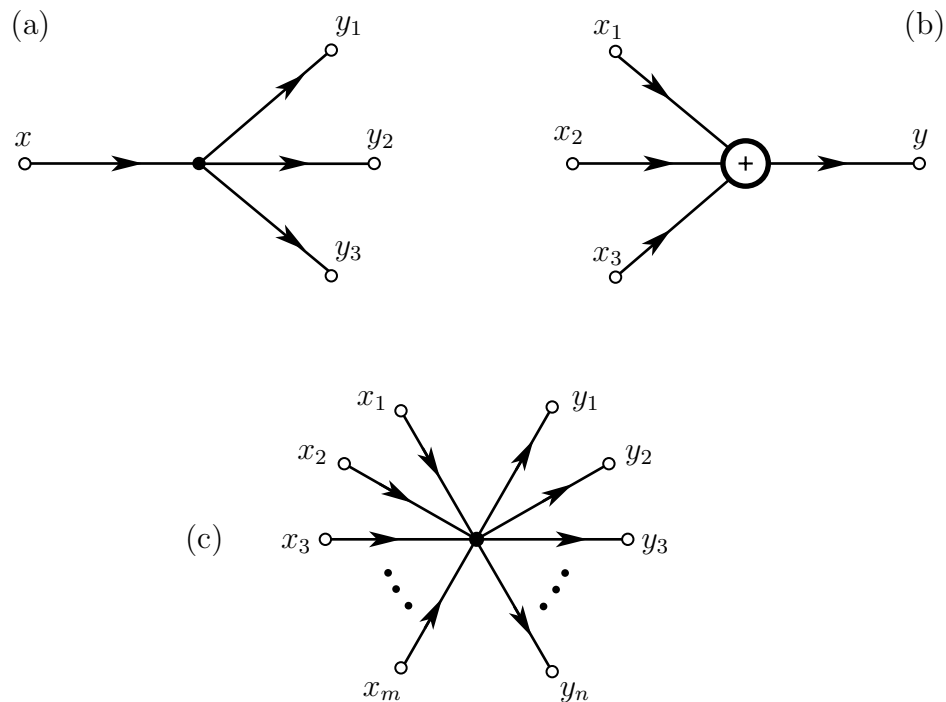


Bild 4.3: (a) Verzweigung mit einem Eingangssignal und drei Ausgangssignalen; (b) Addierer mit drei Eingangssignalen und einem Ausgangssignal; (c) Knoten mit m Eingangssignalen und n Ausgangssignalen

Jede gerichtete Schleife muss mindestens eine Verzögerung enthalten.

Zur Erläuterung und Begründung dieser Aussage betrachten wir die beiden einfachen Signalflussdiagramme in Bild 4.4. Das links abgebildete Signalflussdiagramm enthält, wie durch die beiden roten Bögen angedeutet, zwei gerichtete Schleifen. Diese Schleifen heißen *gerichtet*, weil sie jeweils in Signalfussrichtung durchlaufen werden können. Ein Beispiel für eine *ungerichtete Schleife* enthält das rechts dargestellte Signalflussdiagramm. Während die obere Schleife in Bild 4.4 (a) eine Verzögerung enthält, ist die untere Schleife *verzögerungsfrei*; hierdurch ist dieses Flussdiagramm *nicht realisierbar*. Zur Berechnung des Ausgangssignals des

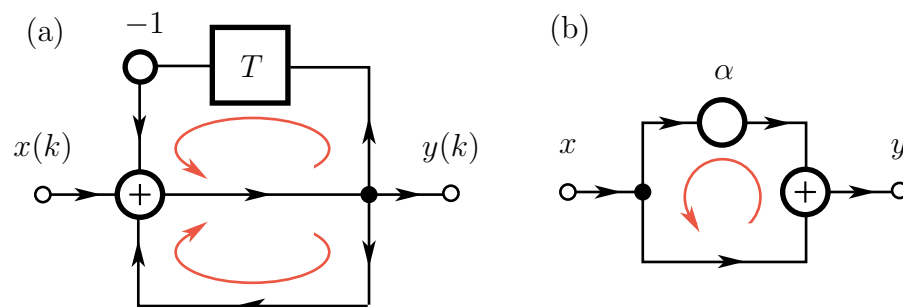


Bild 4.4: (a) Signalflussdiagramm mit zwei gerichteten Schleifen, wobei die obere verzögerungsbehaftet und die untere verzögerungsfrei ist; (b) Signalflussdiagramm mit einer ungerichteten Schleife

Addierers würde nämlich u. a. dieses als Eingangssignal benötigt. Ließe sich dieses Flussdiagramm tatsächlich realisieren, so würde man übrigens das Kausalitätsprinzip verletzen, was man durch eine Analyse des Flussdiagramms sofort erkennen kann. Die Berechnung des Summensignals, das ja identisch mit dem Ausgangssignal $y(k)$ ist, ergibt

$$y(k) = x(k) - y(k-1) + y(k)$$

und weiter

$$y(k-1) = x(k) \quad \text{bzw.} \quad y(k) = x(k+1) .$$

Mit anderen Worten, das Ausgangssignal zum Zeitpunkt $t_k = kT$ wäre gleich dem Eingangssignal zum Zeitpunkt $t_{k+1} = t_k + T$; das System könnte also in die Zukunft schauen und wäre damit nichtkausal. Die zugehörige Übertragungsfunktion lautet übrigens $H(z) = z$; sie verletzt offenbar die Bedingung (4.15).

4.1.5 Zustandsdarstellung zeitdiskreter linearer Systeme

In den folgenden Abschnitten werden wir häufiger skalare Größen zu Vektoren und Matrizen zusammenfassen. Wie im technischen Bereich üblich, werden wir diese Größen gesondert kennzeichnen und durch Fettdruck hervorheben. Für den Nullvektor oder die Nullmatrix verwenden wir das Symbol $\mathbf{0}$ und für die Einheitsmatrix $\mathbf{1}$.

Wir betrachten das in Bild 4.5 dargestellte Signalflussdiagramm, das u. a. zwei Verzögerungen enthält und daher ein System 2. Ordnung repräsentiert. Man überzeugt sich leicht, dass dieses Diagramm keine verzögerungsfreien gerichteten Schleifen enthält und somit realisierbar ist. Berücksichtigen wir, dass die Eingangssignale der Verzögerungen durch $w_1(k+1)$

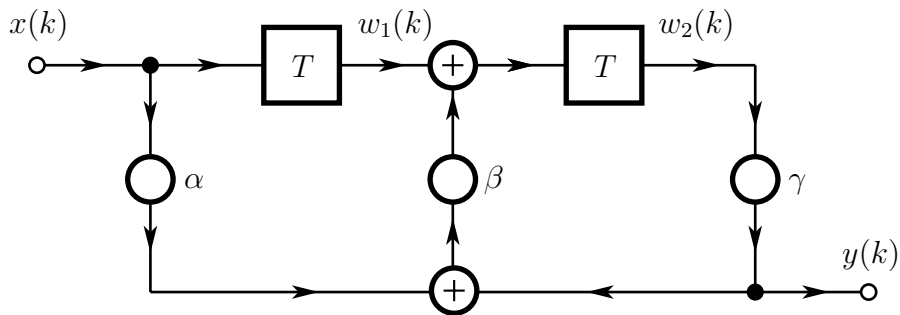


Bild 4.5: Signalflussdiagramm eines einfachen zeitdiskreten Systems

bzw. $w_2(k+1)$ gegeben sind, so können wir dem Flussdiagramm sofort folgende Gleichungen entnehmen:

$$w_1(k+1) = x(k) , \quad w_2(k+1) = w_1(k) + \beta\gamma w_2(k) + \beta\alpha x(k) , \quad y(k) = \gamma w_2(k) .$$

Mit den Definitionen

$$\mathbf{w}(k) := \begin{pmatrix} w_1(k) \\ w_2(k) \end{pmatrix} , \quad \mathbf{A} := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & \beta\gamma \end{pmatrix} , \quad \mathbf{b} := \begin{pmatrix} 1 \\ \beta\alpha \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{c}^T := (0 \quad \gamma)$$

lassen sich diese Gleichungen dann in der Form

$$\mathbf{w}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{w}(k) + \mathbf{b}x(k) , \quad y(k) = \mathbf{c}^T \mathbf{w}(k) \quad (4.22)$$

schreiben. Man bezeichnet diese Gleichungen als die *Zustandsgleichungen* des Systems. Häufig spricht man auch von der *Zustandsdarstellung* oder von dem *Zustandsmodell*. Der Vektor \mathbf{w} heißt *Zustandsvektor* oder kurz *Zustand*. Er repräsentiert gewissermaßen das Gedächtnis des Systems. Zur Erläuterung nehmen wir an, k_0T sei ein beliebig gegebener (diskreter) Zeitpunkt. Um dann das Ausgangssignal für $k \geq k_0$ zu berechnen, benötigt man lediglich den Zustand des Systems zum Zeitpunkt k_0T , also $\mathbf{w}(k_0)$, und das Eingangssignal $x(k)$ für $k \geq k_0$. Sämtliche Spuren, die das Eingangssignal für $k < k_0$ in dem System hinterlässt und die für den Verlauf des Ausgangssignals für $k \geq k_0$ relevant sind, sind somit in dem Zustand $\mathbf{w}(k_0)$ abgelegt.

Bevor wir auf die Berechnung des Ausgangssignals näher eingehen, wollen wir anhand einfacher Überlegungen zeigen, dass sich für jedes realisierbare System, das aus endlich vielen Multiplizierern (mit konstanten Koeffizienten), Addierern, Verzweigungen und Verzögerungen besteht, eine Zustandsdarstellung der Form (4.22) angeben lässt.

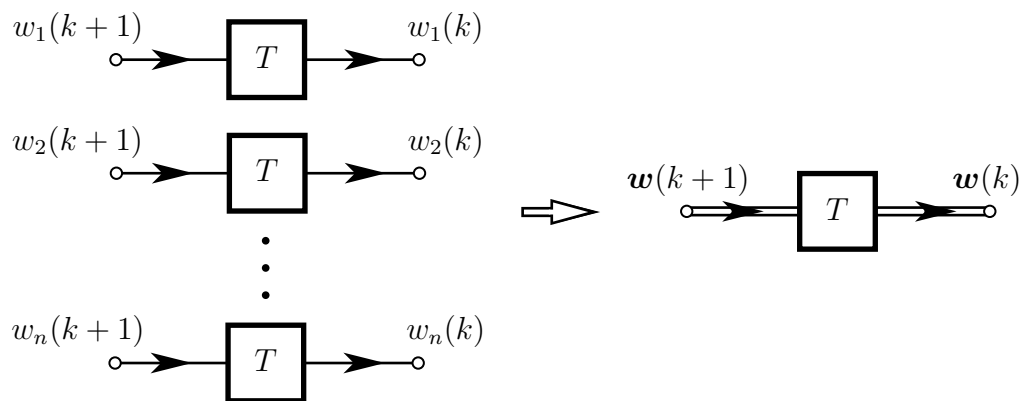


Bild 4.6: Zusammenfassung von n skalaren Verzögerungen zu einer vektoriellen Verzögerung

Wir betrachten ein derartiges System und nehmen an, dass es die Ordnung n besitzt, also n Verzögerungen enthält. Wie in Bild 4.6 angedeutet, fassen wir diese n Verzögerungen zu einer vektoriellen Verzögerung mit dem Eingangsvektor $\mathbf{w}(k+1)$ und dem Ausgangsvektor $\mathbf{w}(k)$ zusammen und stellen das System durch die in Bild 4.7 gezeigte Anordnung dar. Der mit \mathcal{N} bezeichnete Block enthält alle Addierer, Multiplizierer und Verzweigungen. Da gerichtete Schleifen nur über Verzögerungen gebildet werden dürfen, treten innerhalb des Blocks \mathcal{N} keine gerichteten Schleifen auf. Somit können die Komponenten des Vektors $\mathbf{w}(k+1)$ und das

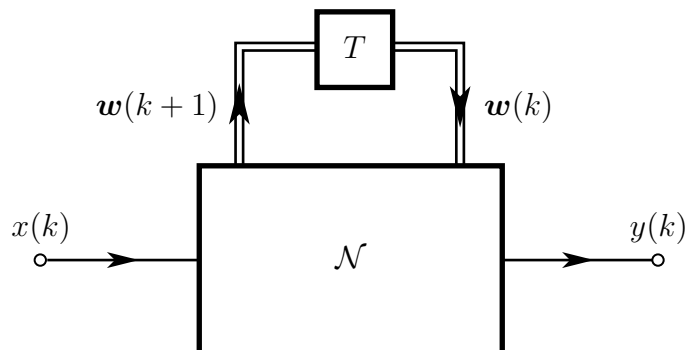


Bild 4.7: Zustandsmodell eines linearen zeitdiskreten Systems

Ausgangssignal $y(k)$ als Linearkombinationen der Komponenten des Vektors $\mathbf{w}(k)$ und des Eingangssignals $x(k)$ dargestellt werden. Fassen wir die Koeffizienten dieser Linearkombina-

tionen zu Matrizen und Vektoren geeigneter Dimension zusammen, so können wir schreiben

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{w}(k+1) &= \mathbf{A}\mathbf{w}(k) + \mathbf{b}x(k) \\ y(k) &= \mathbf{c}^T \mathbf{w}(k) + dx(k) \end{aligned}} \quad (4.23)$$

Abweichend von der Darstellung in (4.22) tritt hier zusätzlich zu der Matrix \mathbf{A} und den Vektoren \mathbf{b} und \mathbf{c}^T die skalare Größe d auf, die in dem zuvor betrachteten Fall gleich null war, da es keinen verzögerungsfreien Signalpfad vom Eingang zum Ausgang gab (siehe Bild 4.5). Benutzt man zur Darstellung der Matrix- und Vektormultiplikationen dasselbe Symbol wie

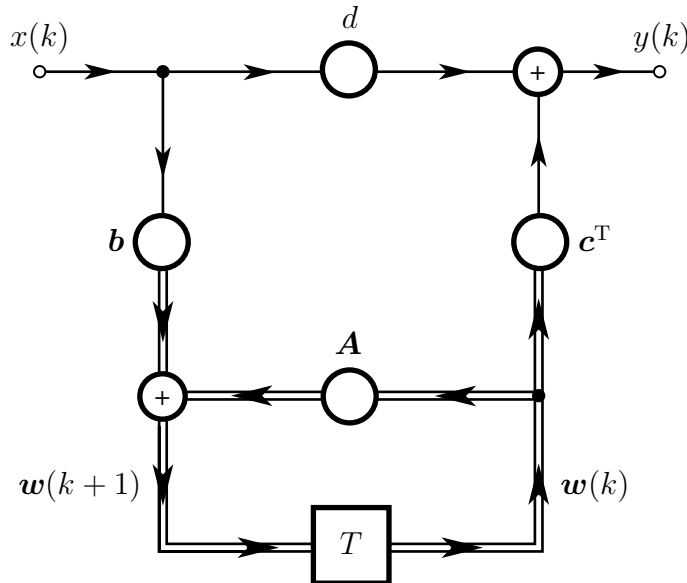


Bild 4.8: Detaillierteres Zustandsmodell eines linearen zeitdiskreten Systems

für die skalare Multiplikation, so lässt sich aus den Zustandsgleichungen (4.23) mühelos das in Bild 4.8 gezeigte Diagramm herleiten.

4.1.6 Lösung der Zustandsgleichung

Bei der ersten Zeile der Zustandsgleichungen (4.23) handelt es sich um ein (inhomogenes) Differenzengleichungssystem 1. Ordnung mit dem Zustandsvektor $\mathbf{w}(k)$ als unbekannte Größe. Als bekannt vorausgesetzt werden der Anfangszustand, also der Zustand $\mathbf{w}_0 := \mathbf{w}(k_0)$ für ein beliebiges $k_0 \in \mathbb{Z}$, und der Verlauf des Eingangssignals $x(k)$ für $k \geq k_0$. Durch wiederholte Anwendung der ersten Zeile der Zustandsgleichungen finden wir dann:

$$\begin{aligned} \mathbf{w}(k_0+1) &= \mathbf{A}\mathbf{w}_0 + \mathbf{b}x(k_0) \\ \mathbf{w}(k_0+2) &= \mathbf{A}^2\mathbf{w}_0 + \mathbf{A}\mathbf{b}x(k_0) + \mathbf{b}x(k_0+1) \\ \mathbf{w}(k_0+3) &= \mathbf{A}^3\mathbf{w}_0 + \mathbf{A}^2\mathbf{b}x(k_0) + \mathbf{A}\mathbf{b}x(k_0+1) + \mathbf{b}x(k_0+2) \\ &\dots\dots \\ \mathbf{w}(k_0+\ell) &= \mathbf{A}^\ell\mathbf{w}_0 + \mathbf{A}^{\ell-1}\mathbf{b}x(k_0) + \mathbf{A}^{\ell-2}\mathbf{b}x(k_0+1) + \dots + \mathbf{b}x(k_0+\ell-1) . \end{aligned}$$

Ersetzen wir nun ℓ durch $k - k_0$, so folgt aus der letzten Zeile

$$\mathbf{w}(k) = \mathbf{A}^{k-k_0}\mathbf{w}_0 + \mathbf{A}^{k-k_0-1}\mathbf{b}x(k_0) + \mathbf{A}^{k-k_0-2}\mathbf{b}x(k_0+1) + \dots + \mathbf{b}x(k-1)$$

bzw.

$$\mathbf{w}(k) = \mathbf{A}^{k-k_0} \mathbf{w}_0 + \sum_{\kappa=1}^{k-k_0} \mathbf{A}^{\kappa-1} \mathbf{b}x(k-\kappa) . \quad (4.24)$$

Dieses Ergebnis lässt sich leicht durch Einsetzen in (4.23) verifizieren. Für das Ausgangssignal erhalten wir hieraus unter Verwendung der zweiten Zeile in (4.23)

$$y(k) = \mathbf{c}^T \mathbf{A}^{k-k_0} \mathbf{w}_0 + \sum_{\kappa=1}^{k-k_0} \mathbf{c}^T \mathbf{A}^{\kappa-1} \mathbf{b}x(k-\kappa) + dx(k) . \quad (4.25)$$

Als Folge der Linearität der Zustandsgleichungen setzen sich der Zustand $\mathbf{w}(k)$ und auch das Ausgangssignal $y(k)$ jeweils additiv aus zwei Teilen zusammen; aus einem, der nur vom Anfangszustand \mathbf{w}_0 abhängt, und einem weiteren, der nur durch das Eingangssignal bestimmt ist.

Wir betrachten den vom Anfangszustand abhängigen Teil des Zustandes, setzen also $x(k) = 0$ für $k \geq k_0$:

$$\mathbf{w}(k, k_0) = \mathbf{A}^{k-k_0} \mathbf{w}_0 .$$

Um die Abhängigkeit des Zustandes vom Anfangszeitpunkt $k_0 T$ deutlich zu machen, ist k_0 als zweites Argument des Zustandes aufgeführt. Damit der Anfangszustand keinen dauernden Einfluss auf den Zustand und damit auf das Ausgangssignal behält, fordern wir, dass $\mathbf{w}(k, k_0)$ für $k_0 \rightarrow -\infty$ verschwindet, und zwar für jeden beliebigen Anfangszustand $\mathbf{w}_0 \in \mathbb{C}^n$:

$$\lim_{k_0 \rightarrow -\infty} \mathbf{w}(k, k_0) = \lim_{k_0 \rightarrow -\infty} \mathbf{A}^{k-k_0} \mathbf{w}_0 = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{w}_0 \in \mathbb{C}^n$$

bzw.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{A}^k \mathbf{w}_0 = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{w}_0 \in \mathbb{C}^n .$$

Diese Forderung ist genau dann erfüllt, wenn sämtliche Eigenwerte von \mathbf{A} innerhalb des Einheitskreises liegen, wenn also

$$\rho(\mathbf{A}) < 1 \quad (4.26)$$

gilt. Hierbei bezeichnet $\rho(\mathbf{A})$ den *Spektralradius* von \mathbf{A} , d. h. den Betrag des betragsmäßig größten Eigenwerts von \mathbf{A} :

$$\rho(\mathbf{A}) = \max\{|z| : \det(z\mathbf{1} - \mathbf{A}) = 0\} .$$

Dass die Bedingung (4.26) *notwendig* für das Verschwinden des Zustands ist, erkennt man beispielsweise wie folgt. Wir nehmen an, die Bedingung sei verletzt, also mindestens ein Eigenwert von \mathbf{A} , er heiße z_0 , genüge der Ungleichung $|z_0| \geq 1$. Als Anfangszustand wählen wir einen zu z_0 gehörenden Eigenvektor, d. h.,

$$\mathbf{A} \mathbf{w}_0 = z_0 \mathbf{w}_0 .$$

Für $\mathbf{A}^2 \mathbf{w}_0$ erhalten wir dann

$$\mathbf{A}^2 \mathbf{w}_0 = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{A} \mathbf{w}_0) = z_0^2 \mathbf{w}_0$$

und für $\mathbf{A}^3 \mathbf{w}_0$

$$\mathbf{A}^3 \mathbf{w}_0 = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{A}^2 \mathbf{w}_0) = z_0^3 \mathbf{w}_0$$

und allgemein für $\mathbf{A}^k \mathbf{w}_0$ mit $k \in \mathbb{N}$

$$\mathbf{A}^k \mathbf{w}_0 = z_0^k \mathbf{w}_0 .$$

Für $|z_0| > 1$ und $k \rightarrow \infty$ strebt $|\mathbf{A}^k \mathbf{w}_0| = |z_0|^k |\mathbf{w}_0|$ gegen Unendlich und für $|z_0| = 1$ bleibt $|\mathbf{A}^k \mathbf{w}_0|$ konstant: $|\mathbf{A}^k \mathbf{w}_0| = |\mathbf{w}_0|$, $k \in \mathbb{N}$.

Damit $\mathbf{A}^k \mathbf{w}_0$ für $k \rightarrow \infty$ überhaupt verschwinden kann, müssen also sämtliche Eigenwerte von \mathbf{A} innerhalb des Einheitskreises liegen; der Spektralradius $\rho(\mathbf{A})$ muss also kleiner als 1 sein. Dass diese Bedingung tatsächlich auch *hinreichend* für das Bestehen der Beziehung $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{A}^k \mathbf{w}_0 = \mathbf{0}$ ist, folgt aus der Tatsache, dass jeder Eigenwert von \mathbf{A}^k , also jede Lösung der Gleichung

$$\det(\zeta \mathbf{1} - \mathbf{A}^k) = 0 ,$$

die k -te Potenz eines Eigenwerts von \mathbf{A} ist². Mit anderen Worten, der Spektralradius von \mathbf{A}^k ist die k -te Potenz des Spektralradius von \mathbf{A} :

$$\rho(\mathbf{A}^k) = \rho^k(\mathbf{A})$$

Wenn aber $\rho(\mathbf{A}) < 1$, so streben $\rho(\mathbf{A}^k)$ und somit sämtliche Eigenwerte von \mathbf{A}^k für $k \rightarrow \infty$ gegen null. Folglich gilt die Implikation

$$\boxed{\rho(\mathbf{A}) < 1 \quad \Rightarrow \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{A}^k = \mathbf{0}} .$$

Ergänzend sei bemerkt, dass die soeben diskutierte Frage unmittelbar mit dem Problem der Stabilität zusammenhängt. Damit ein System sinnvoll zur Übertragung von Signalen eingesetzt werden kann, muss der Spektralradius der Matrix \mathbf{A} , die auch als *Übergangs-* oder *Transitionsmatrix* bezeichnet wird, kleiner als 1 sein, d. h. ihre sämtlichen Eigenwerte müssen innerhalb des Einheitskreises liegen. Es handelt sich hierbei um eine elementare Stabilitätsbedingung, die immer erfüllt sein muss. Nur dadurch ist sichergestellt, dass im eingeschwungenen Zustand das Ausgangssignal nur vom Eingangssignal abhängig ist und nicht von einem lange zurückliegenden Anfangszustand.

4.1.7 Impulsantwort und Übertragungsfunktion

Zur Bestimmung der Impulsantwort setzen wir

$$x(k) = \delta(k) \quad \text{und} \quad \mathbf{w}(k) = \mathbf{0} \quad \text{für} \quad k \leq 0 .$$

Aus (4.25) folgt dann

$$h(k) = \sum_{\kappa=1}^k \mathbf{c}^T \mathbf{A}^{\kappa-1} \mathbf{b} \delta(k - \kappa) + d \delta(k)$$

²Falls \mathbf{A} diagonalisierbar ist, also dargestellt werden kann in der Form $\mathbf{A} = \mathbf{P} \mathbf{D} \mathbf{P}^{-1}$, wobei \mathbf{D} die aus den Eigenwerten von \mathbf{A} bestehende Diagonalmatrix ist, lässt sich diese Tatsache leicht beweisen. Unter dieser Bedingung erhält man nämlich für \mathbf{A}^k

$$\mathbf{A}^k = \underbrace{\mathbf{P} \mathbf{D} \mathbf{P}^{-1} \mathbf{P} \mathbf{D} \mathbf{P}^{-1} \cdots \mathbf{P} \mathbf{D} \mathbf{P}^{-1}}_{k\text{-mal}} = \mathbf{P} \mathbf{D}^k \mathbf{P}^{-1} .$$

Da die Diagonalelemente von \mathbf{D}^k die Eigenwerte von \mathbf{A}^k sind, folgt hieraus die aufgestellte Behauptung.

bzw.

$$h(k) = \begin{cases} 0 & \text{für } k < 0 \\ d & \text{für } k = 0 \\ \mathbf{c}^T \mathbf{A}^{k-1} \mathbf{b} & \text{für } k > 0 \end{cases} . \quad (4.27)$$

Um die Übertragungsfunktion H zu bestimmen, setzen wir

$$x(k) = Xz^k \quad X, z \in \mathbb{C}, z \neq 0$$

in die Gleichung (4.23) ein und wählen für den Zustand $\mathbf{w}(k)$ den Ansatz

$$\mathbf{w}(k) = \mathbf{W}z^k \quad \text{mit} \quad \mathbf{W} \in \mathbb{C}^n .$$

Als Ergebnis erhalten wir

$$\mathbf{W}z^{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{W}z^k + \mathbf{b}Xz^k .$$

Beachten wir $z \neq 0$, so folgt weiter

$$(z\mathbf{1} - \mathbf{A})\mathbf{W} = \mathbf{b}X . \quad (4.28)$$

Falls z kein Eigenwert von \mathbf{A} ist, die Matrix $z\mathbf{1} - \mathbf{A}$ also regulär ist, können wir (4.28) von links mit der Inversen dieser Matrix multiplizieren und daher schreiben

$$\mathbf{W} = (z\mathbf{1} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b}X .$$

Setzen wir schließlich $x(k) = Xz^k$ und $\mathbf{w}(k) = \mathbf{W}z^k$ in die zweite Gleichung (4.23) ein, so erhalten wir

$$y(k) = H(z)Xz^k$$

mit

$$H(z) = \mathbf{c}^T (z\mathbf{1} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b} + d . \quad (4.29)$$

Die Auswertung der Beziehung (4.29) erfordert nur die (endlich häufige) Anwendung der vier Grundrechenarten. Es handelt sich daher bei der Übertragungsfunktion H um eine *rationale Funktion*. Mit dem betrachteten Zustandsmodell kann somit eine nichtrationale Funktion, wie beispielsweise (4.21), nicht realisiert werden.

Wir wollen uns nun davon überzeugen, dass die auf diese Weise ermittelte Übertragungsfunktion tatsächlich gleich der z -Transformierten der oben ermittelten Impulsantwort h ist:

$$\mathcal{Z}\{h\}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)z^{-k} = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{c}^T \mathbf{A}^{k-1} \mathbf{b} z^{-k} + d = \frac{1}{z} \mathbf{c}^T \left[\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\mathbf{A}}{z} \right)^k \right] \mathbf{b} + d . \quad (4.30)$$

Wie weiter unten gezeigt wird, lässt sich die in den eckigen Klammern stehende (geometrische) Reihe gemäß

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\mathbf{A}}{z} \right)^k = (\mathbf{1} - z^{-1} \mathbf{A})^{-1} = z(z\mathbf{1} - \mathbf{A})^{-1}$$

summieren, falls $|z|$ größer als der Spektralradius $\rho(\mathbf{A})$ ist. Setzen wir dieses Ergebnis in (4.30) ein, so finden wir (4.29) bestätigt.

Summation der geometrischen Matrizen-Reihe

Wir betrachten die Summe

$$\sum_{k=0}^{K-1} \mathbf{M}^k ,$$

wobei \mathbf{M} eine quadratische Matrix ist. Die Multiplikation dieser Summe von links mit $\mathbf{1} - \mathbf{M}$ ergibt

$$(\mathbf{1} - \mathbf{M}) \sum_{k=0}^{K-1} \mathbf{M}^k = \mathbf{1} - \mathbf{M}^K .$$

Falls 1 kein Eigenwert von \mathbf{M} ist und somit

$$\det(\mathbf{1} - \mathbf{M}) \neq 0$$

gilt, können wir $\mathbf{1} - \mathbf{M}$ invertieren und schreiben

$$\sum_{k=0}^{K-1} \mathbf{M}^k = (\mathbf{1} - \mathbf{M})^{-1} (\mathbf{1} - \mathbf{M}^K) .$$

Dies Beziehung gilt für alle $K > 1$. Damit aber der Grenzübergang $K \rightarrow \infty$ ausgeführt werden kann, müssen alle Eigenwerte von \mathbf{M} im Einheitskreis liegen, d. h., der Spektralradius $\rho(\mathbf{M})$ muss kleiner als 1 sein. Dann strebt \mathbf{M}^K für $K \rightarrow \infty$ gegen die Nullmatrix und wir erhalten

$$1 > \rho(\mathbf{M}) \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{M}^k = (\mathbf{1} - \mathbf{M})^{-1} .$$

Ersetzen wir nun \mathbf{M} durch \mathbf{A}/z und berücksichtigen

$$\rho(\mathbf{A}) = \rho(z\mathbf{M}) = |z| \rho(\mathbf{M}) ,$$

so folgt

$$|z| > \rho(\mathbf{A}) \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\mathbf{A}}{z} \right)^k = (\mathbf{1} - \mathbf{A}/z)^{-1} .$$

Einige Eigenschaften der Übertragungsfunktion

Die in (4.29) auftretende inverse Matrix $(z\mathbf{1} - \mathbf{A})^{-1}$ lässt sich darstellen gemäß

$$(z\mathbf{1} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{\det(z\mathbf{1} - \mathbf{A})} \text{adj}(z\mathbf{1} - \mathbf{A}) , \quad (4.31)$$

wobei $\text{adj}(z\mathbf{1} - \mathbf{A})$ die Adjungierte von $(z\mathbf{1} - \mathbf{A})$ bezeichnet.

Unter der Voraussetzung, dass die quadratische Matrix \mathbf{A} die Dimension n hat, ist die Determinante $\det(z\mathbf{1} - \mathbf{A})$ ein Polynom n -ten Grades in der Variablen z :

$$\det(z\mathbf{1} - \mathbf{A}) = \prod_{\nu=1}^n (z - z_{\nu}) = z^n + \beta_1 z^{n-1} + \beta_2 z^{n-2} + \cdots + \beta_n .$$

Der Koeffizient der höchsten Potenz ist 1 und das konstante Glied, β_n , ist gleich $(-1)^n \det \mathbf{A}$. Die Elemente der adjungierten Matrix sind bekanntlich mit passenden Vorzeichen versehene $(n-1)$ -reihige Unterdeterminanten der Matrix $(z\mathbf{1} - \mathbf{A})$. Auch diese Unterdeterminanten sind Polynome in z , deren Grad allerdings höchstens $n-1$ ist. Die Adjungierte lässt sich wie folgt als Polynom in z mit matrixwertigen Koeffizienten schreiben:

$$\text{adj}(z\mathbf{1} - \mathbf{A}) = z^{n-1}\mathbf{1} + z^{n-2}\mathbf{A}_2 + z^{n-3}\mathbf{A}_3 + \cdots + (-1)^{n+1}\text{adj } \mathbf{A}.$$

Dass der höchste Koeffizient dieses Polynoms gleich der Einheitsmatrix ist, lässt sich leicht durch Koeffizientenvergleich aus der Beziehung

$$(z\mathbf{1} - \mathbf{A}) \cdot \text{adj}(z\mathbf{1} - \mathbf{A}) = \det(z\mathbf{1} - \mathbf{A}) \cdot \mathbf{1}$$

ablesen, die sich unmittelbar aus (4.31) ergibt.

Die Übertragungsfunktion H lässt sich folglich darstellen als rationale Funktion in der Form

$$H(z) = \frac{\mathbf{c}^T \text{adj}(z\mathbf{1} - \mathbf{A}) \mathbf{b} + d \det(z\mathbf{1} - \mathbf{A})}{\det(z\mathbf{1} - \mathbf{A})}.$$

bzw.

$$H(z) = \frac{\alpha_0 z^n + \alpha_1 z^{n-1} + \alpha_2 z^{n-2} + \cdots + \alpha_n}{z^n + \beta_1 z^{n-1} + \beta_2 z^{n-2} + \cdots + \beta_n}, \quad (4.32)$$

wobei der Koeffizient α_0 durch d gegeben ist. Die Tatsache, dass das Zustandsmodell ein kausales System repräsentiert, kommt hier dadurch zum Ausdruck, dass der Grenzwert

$$H(\infty) = \lim_{z \rightarrow \infty} = \alpha_0 = d$$

existiert [siehe (4.15)]. Die Darstellung (4.32) muss übrigens nicht irreduzibel sein, d. h. im Zähler und Nenner können gleiche Faktoren (Nullstellen) auftreten, die gekürzt werden können und den Grad entsprechend reduzieren. Die Polstellenmenge von H ist aber stets eine Teilmenge der Eigenwerte von \mathbf{A} , also der Nullstellen von $\det(z\mathbf{1} - \mathbf{A})$:

$$\{z : z \text{ ist Polstelle von } H\} \subseteq \{z : z \text{ ist Eigenwert von } \mathbf{A}\}.$$

Da der Spektralradius $\rho(\mathbf{A})$, also der Betrag des betragsmäßig größten Eigenwerts von \mathbf{A} , im Interesse der Stabilität kleiner als 1 sein muss, liegen somit sämtliche Polstellen von H im Einheitskreis.

Setzen wir voraus, dass die Darstellung (4.32) irreduzibel ist, so wird die Übertragungsfunktion durch insgesamt $2n+1$ Koeffizienten festgelegt. Man spricht in diesem Zusammenhang auch davon, dass man zur Festlegung des Übertragungsverhaltens $2n+1$ *Freiheitsgrade* zur Verfügung hat. Das Zustandsmodell mit der Übergangsmatrix \mathbf{A} , den Vektoren \mathbf{b} und \mathbf{c} und dem Skalar d enthält hingegen insgesamt $(n+1)^2$ Parameter bzw. Freiheitsgrade. Könnte man an all diesen Parametern Einstellungen vornehmen, so hätte man insgesamt $(n+1)^2$ „Stellschrauben“ zur Verfügung um eine rationale Funktion festzulegen, in der nur $2n+1$ Parameter auftreten.

Ergänzend sei bemerkt, dass die Übertragungsfunktion H unverändert bleibt, wenn der Zustand \mathbf{w} regulär transformiert wird, d. h., wenn \mathbf{w} durch $\mathbf{w} = \mathbf{T}\tilde{\mathbf{w}}$ ersetzt wird, wobei \mathbf{T} eine reguläre, also invertierbare Matrix ist. Um dies zu zeigen, beachten wir, dass die Zustandsgleichungen mit dem „neuen“ Zustand $\tilde{\mathbf{w}}$ durch

$$\begin{aligned}\mathbf{T}\tilde{\mathbf{w}}(k+1) &= \mathbf{A}\mathbf{T}\tilde{\mathbf{w}}(k) + \mathbf{b}x(k) \\ y(k) &= \mathbf{c}^T\mathbf{T}\tilde{\mathbf{w}}(k) + dx(k)\end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{w}}(k+1) &= \tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{w}}(k) + \tilde{\mathbf{b}}x(k) \\ y(k) &= \tilde{\mathbf{c}}^T\tilde{\mathbf{w}}(k) + dx(k)\end{aligned}$$

mit

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}, \quad \tilde{\mathbf{b}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{b} \quad \text{und} \quad \tilde{\mathbf{c}}^T = \mathbf{c}^T\mathbf{T}$$

gegeben sind. Hieraus folgt dann

$$\begin{aligned}\tilde{H}(z) &= \tilde{\mathbf{c}}^T(z\mathbf{1} - \tilde{\mathbf{A}})^{-1}\tilde{\mathbf{b}} + d = \mathbf{c}^T\mathbf{T}(z\mathbf{1} - \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T})^{-1}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{b} + d \\ &= \mathbf{c}^T(z\mathbf{1} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b} + d,\end{aligned}$$

also die gleiche Übertragungsfunktion wie zuvor.

Im folgenden Abschnitt wollen wir einfache Signalflussdiagramme herleiten, die zur Realisierung einer Übertragungsfunktion n -ten Grades genau n Verzögerungen und $2n + 1$ Multiplizierer benötigen.

4.1.8 Kanonische Signalflussdiagramme

Zur Herleitung kanonischer Signalflussdiagramme gehen wir von einer Übertragungsfunktion der Form (4.32) aus und dividieren Zähler und Nenner durch z^n , stellen also H gemäß

$$H(z) = \frac{a(z^{-1})}{b(z^{-1})}$$

dar, wobei die Polynome a und b durch

$$a(z^{-1}) = \alpha_0 + \alpha_1 z^{-1} + \alpha_2 z^{-2} + \cdots + \alpha_n z^{-n}$$

bzw.

$$b(z^{-1}) = 1 + \beta_1 z^{-1} + \beta_2 z^{-2} + \cdots + \beta_n z^{-n}$$

gegeben sind. Im Interesse der Stabilität muss gewährleistet sein, dass die Nullstellen von b im Einheitskreis liegen, d. h., aus $b(z^{-1}) = 0$ muss stets $|z| < 1$ folgen.

Nichtrekursive Systeme

Wir betrachten zunächst den Fall $b = 1$, d. h. $\beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_n = 0$. Berücksichtigt man $Y = HX$, wobei X und Y die komplexen Amplituden des Eingangssignals x bzw. des Ausgangssignals y bezeichnen, so lässt sich hieraus folgender Zusammenhang zwischen X und Y angeben:

$$Y = (\alpha_0 + \alpha_1 z^{-1} + \alpha_2 z^{-2} + \cdots + \alpha_n z^{-n})X.$$

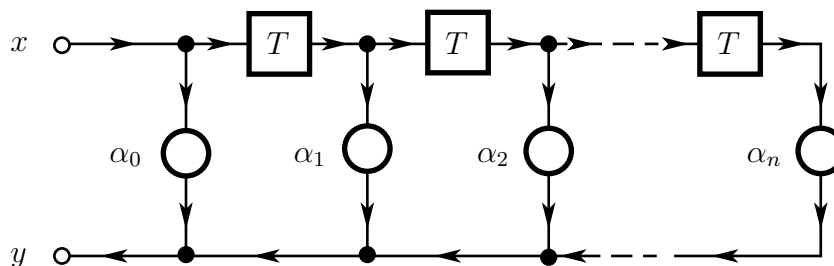


Bild 4.9: Aus (4.33) folgendes kanonisches Signalflussdiagramm

Da z^{-1} die Übertragungsfunktion eines Verzögerungselementes ist, folgt aus dieser Beziehung sofort die Gleichung

$$y(k) = \alpha_0 x(k) + \alpha_1 x(k-1) + \alpha_2 x(k-2) + \cdots + \alpha_n x(k-n) \quad (4.33)$$

und hieraus das in Bild 4.9 dargestellte Signalflussdiagramm. In diesem Diagramm treten offenbar keine gerichteten Schleifen und somit keine Rückkopplungen auf, so dass keine *rekursiven Berechnungen* nötig werden. Ein Signalflussdiagramm mit dieser Eigenschaft wird als *nichtrekursiv* bezeichnet. Man sagt auch, das Diagramm habe eine *nichtrekursive Struktur*, oder, es repräsentiere ein *nichtrekursives System*. Da die Impulsantwort dieses Systems, also

$$h(k) = \begin{cases} 0 & \text{für } k < 0 \\ \alpha_k & \text{für } k = 0, 1, 2, \dots, n \\ 0 & \text{für } k > n \end{cases},$$

von endlicher Dauer ist, bezeichnet man ein derartiges System häufig auch als *FIR-System*, wobei FIR für *finite impulse response* steht. Ein FIR-System ist offenbar immer stabil, weil die Impulsantwort h nur aus endlich vielen Werten besteht und daher stets absolut summierbar ist. Dies ist auch anhand der Übertragungsfunktion erkennbar, da diese einen n -fachen Pol im Ursprung besitzt.

Aus der Beziehung (4.33) kann man ein weiteres Diagramm herleiten (siehe Bild 4.10), das zwar auf den ersten Blick sehr ähnlich dem Diagramm in Bild 4.9 ist. Bei genauerem Hinsehen werden aber Unterschiede deutlich. Im ersten Diagramm durchläuft das Signal x

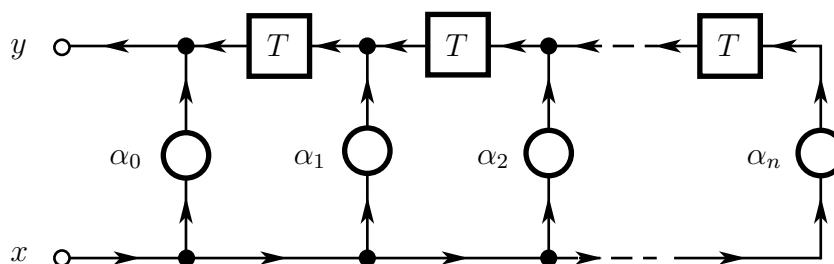


Bild 4.10: Weiteres aus (4.33) folgendes Signalflussdiagramm

die gesamte Verzögerungskette und wird hierbei zwar ständig verzögert, aber nicht weiter verändert. Im zweiten Diagramm wird das durch die Verzögerungskette übertragene Signal an jedem Knoten zwischen den Verzögerungen additiv verändert. Die beiden Diagramme gehen übrigens durch sogenannte *Signalflussumkehr* auseinander hervor. Bei dieser Operation werden die Signalflussrichtungen in allen Zweigen umgekehrt; zugleich müssen die Addierer durch

Verzweigungen und die Verzweigungen durch Addierer ersetzt werden. Als weitere Konsequenz tritt beim zweiten Diagramm das Eingangssignal x unten und das Ausgangssignal y oben auf.

Rekursive Systeme

Wir verlassen nun wieder den Sonderfall $b = 1$ und nehmen an, b sei ein Polynom in z^{-1} vom Grade $n > 0$. Den Zusammenhang zwischen X und Y stellen wir dann dar in der Form

$$b(z^{-1})Y = a(z^{-1})X .$$

Drücken wir die Polynome durch ihre Koeffizienten aus und ordnen die resultierenden Terme entsprechend dem HORNER-Schema, so finden wir

$$Y = \alpha_0 X + z^{-1} (\alpha_1 X - \beta_1 Y + z^{-1} (\alpha_2 X - \beta_2 Y + \cdots + z^{-1} (\alpha_n X - \beta_n Y) \cdots)) . \quad (4.34)$$

Hieraus lässt sich dann ohne Schwierigkeiten das in Bild 4.11 gezeigte Diagramm herleiten. In diesem Diagramm treten insgesamt n gerichtete Schleifen und somit mehrfache Rückkopp-

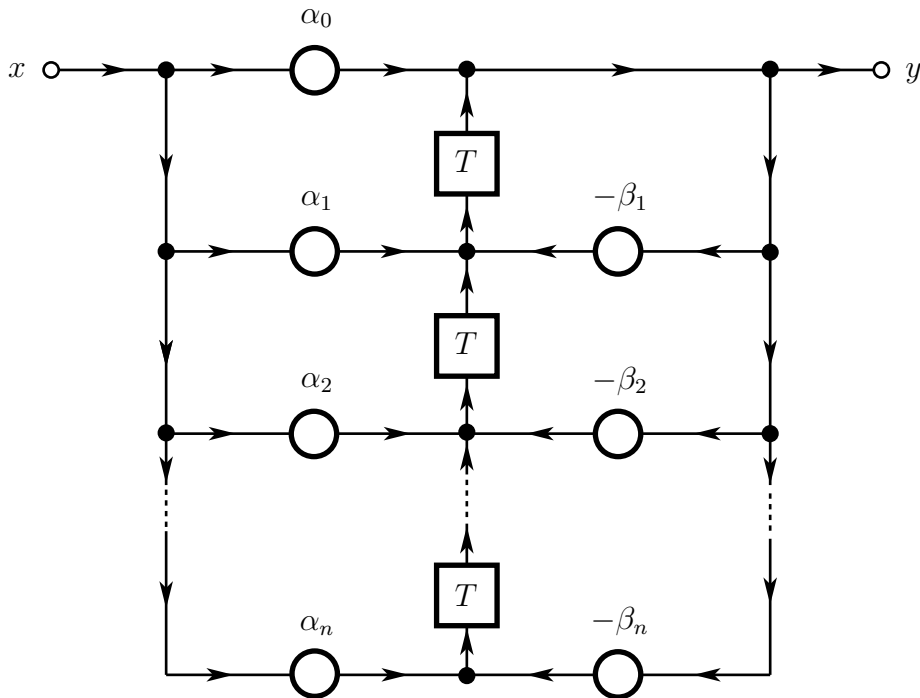


Bild 4.11: Aus (4.34) folgendes Signalflussdiagramm

lungen auf, so dass *rekursive* Berechnungen erforderlich werden. Aus diesem Grunde wird das Signalflussdiagramm als *rekursiv* bezeichnet. Man spricht auch von einer *rekursiven Struktur* oder von einem *rekursiven System*. Abgesehen von Sonderfällen, ist die Impulsantwort eines derartigen Systems von unendlicher Dauer. Deshalb wird ein derartiges System häufig auch *IIR-System* genannt, wobei IIR für *infinite impulse response* steht.

Das Diagramm in Bild 4.10 ist übrigens als Sonderfall in diesem Diagramm enthalten; wir brauchen nur die Koeffizienten $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ gleich null zu setzen.

Zur Herleitung eines weiteren Diagramms führen wir zunächst ein Hilfssignal, v , ein und ordnen diesem die komplexe Amplitude V zu, die wir gemäß

$$V = \frac{1}{b(z^{-1})} X \quad \text{bzw.} \quad (1 + \beta_1 z^{-1} + \beta_2 z^{-2} + \cdots + \beta_n z^{-n}) V = X \quad (4.35)$$

definieren. Die komplexe Amplitude des Ausgangssignals, also Y , ist dann durch

$$Y = a(z^{-1})V \quad \text{bzw.} \quad Y = (\alpha_0 + \alpha_1 z^{-1} + \alpha_2 z^{-2} + \dots + \alpha_n z^{-n})V \quad (4.36)$$

gegeben. Aus diesen beiden Beziehungen lässt sich das Diagramm in Bild 4.12 herleiten. Auch

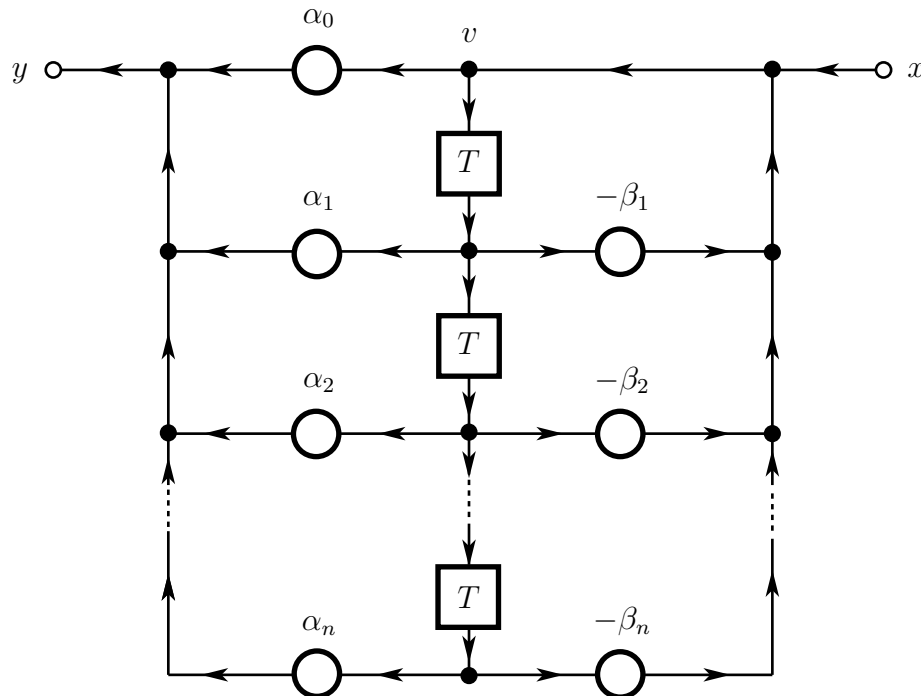


Bild 4.12: Aus (4.35) und (4.36) folgendes Signalflussdiagramm

hierbei handelt es sich offenbar um eine rekursive Struktur. Man überzeugt sich leicht, dass dieses Flussdiagramm durch Signalflussumkehr aus dem Diagramm in Bild 4.12 gewonnen werden kann. Aus diesem Grunde enthält auch dieses Diagramm insgesamt n gerichtete Schleifen. Für $\beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_n = 0$ tritt als Sonderfall offenbar die nichtrekursive Struktur aus Bild 4.9 auf.

Man bezeichnet die beiden Signalflussdiagramme, die in den Bildern 4.11 und 4.12 dargestellt sind, auch als *direkte Strukturen*, da sie direkt aus der Übertragungsfunktion folgen. Die Koeffizienten der Übertragungsfunktion sind genau die gleichen Koeffizienten, die in den Diagrammen auftauchen. Damit ist die Zahl der Freiheitsgrade in der Übertragungsfunktion und in jedem der beiden Flussdiagramme gleich. Signalflussdiagramme, die diese beiden zuletzt genannten Eigenschaften besitzen, bezeichnet man als *kanonisch*.

Bemerkungen zu den direkten Strukturen

Trotz ihrer bestechenden Einfachheit sind die direkten Strukturen nur von geringer Bedeutung für die Praxis, da sie entscheidende Nachteile haben, und zwar insbesondere dann, wenn Systeme höherer Ordnung realisiert werden sollen.

Diese Nachteile werden erkennbar, wenn man beachtet, dass die Systeme digital realisiert werden und dass sowohl die Wortlängen der Koeffizienten als auch die der Signale endlich sind. Als Folge müssen die Koeffizienten und die Signale quantisiert werden. Während die Quantisierung der Koeffizienten nur zu sogenannten Einstellfehlern führen, lässt sich die Quantisierung der Signale als nichtlineare Operation interpretieren.

Obwohl die Einstellfehler in der Größenordnung der niedrigstwertigen Binärstelle liegen, können die Auswirkungen auf das Übertragungsverhalten sehr gravierend sein. Dies hängt damit zusammen, dass die Nullstellen eines Polynoms höherer Ordnung außerordentlich empfindlich auf Änderungen der Koeffizienten reagieren.

Die nichtlinearen Effekte, die durch die Quantisierung der Signale hervorgerufen werden, führen insbesondere bei Systemen höherer Ordnung zu einem Verlust der Stabilität und zu sogenannten parasitären Schwingungen.

Bemerkungen zur Signalflussumkehr

Wie bereits erwähnt, besteht zwischen den Signalflussdiagrammen, die in den Bildern 4.11 und 4.12 dargestellt sind, ein enger Zusammenhang, und zwar geht eines der beiden Diagramme durch Signalflussumkehr aus dem jeweils anderen hervor. Man bezeichnet diesen Übergang auch als *Transposition*. Um diese Begriffsbildung zu erläutern, nehmen wir an, die Zustandsdarstellung des Diagramms in Bild 4.11 sei durch

$$\begin{aligned}\mathbf{w}(k+1) &= \mathbf{A}\mathbf{w}(k) + \mathbf{b}x(k) \\ y(k) &= \mathbf{c}^T \mathbf{w}(k) + dx(k)\end{aligned}$$

gegeben, wobei der Zustandsvektor \mathbf{w} aus den Signalen an den Ausgängen der Verzögerungen gebildet wird. Fasst man die Matrix \mathbf{A} und die Vektoren \mathbf{b} und \mathbf{c} sowie den Skalar d zu der Matrix

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{b} \\ \mathbf{c}^T & d \end{pmatrix}$$

zusammen, so lassen sich die Zustandsgleichungen auch wie folgt schreiben:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{w}(k+1) \\ y(k) \end{pmatrix} = \mathbf{S} \begin{pmatrix} \mathbf{w}(k) \\ x(k) \end{pmatrix}.$$

Werden die Zustandgrößen in dem durch Flussumkehr gewonnenen Diagramm in Bild 4.12 zu einem Vektor $\tilde{\mathbf{w}}$ zusammengefasst, so lautet die zugehörige Zustandsdarstellung

$$\begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{w}}(k+1) \\ y(k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}^T & \mathbf{c} \\ \mathbf{b}^T & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{w}}(k) \\ x(k) \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{w}}(k+1) \\ y(k) \end{pmatrix} = \mathbf{S}^T \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{w}}(k) \\ x(k) \end{pmatrix}.$$

Die Signalflussumkehr spiegelt sich also in einer Transposition der Matrix \mathbf{S} wider. Man kann sich leicht davon überzeugen, dass die Übertragungsfunktion H hierdurch nicht verändert wird. Stellt man nämlich H gemäß

$$H(z) = \mathbf{c}^T (z\mathbf{1} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b} + d$$

dar und transponiert (die skalare Größe) H , die sich ja hierdurch nicht ändert, so findet man den Ausdruck

$$H(z) = \mathbf{b}^T (z\mathbf{1} - \mathbf{A}^T)^{-1} \mathbf{c} + d.$$

4.2 Zeitkontinuierliche Systeme

4.2.1 Vorbemerkungen

Auch in diesem Abschnitt werden wir uns auf die Behandlung von Systemen mit einem Eingangssignal, x , und einem Ausgangssignal, y , beschränken. Diese Signale sind, zumindest prinzipiell, zu allen Zeitpunkten, d. h. für alle $t \in \mathbb{R}$, definiert. Da die Menge der reellen Zahlen auch als *Kontinuum* bezeichnet wird, bezeichnet man diese Signale als *zeitkontinuierlich*. Sind das Eingangs- und das Ausgangssignal eines Systems zeitkontinuierlich, so überträgt man das Attribut auch auf das System und spricht von einem *zeitkontinuierlichen System*.

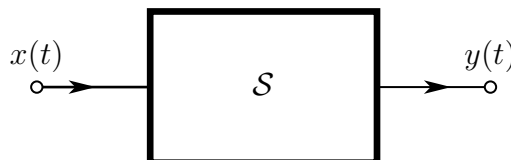


Bild 4.13: Zeitkontinuierliches System

Wie im zeitdiskreten Fall stellen wir auch im zeitkontinuierlichen ein System graphisch durch das in Bild 4.13 gezeigte Rechteck dar. Den Systemoperator bezeichnen wir wieder mit \mathcal{S} und schreiben daher symbolisch

$$y = \mathcal{S}\{x\} .$$

Da, wie bereits erwähnt, die Signale x und y Funktionen der Zeit t sind, schreiben wir gelegentlich diesen Zusammenhang auch in der (mathematisch nicht ganz korrekten) Form

$$y(t) = \mathcal{S}\{x(t)\} .$$

Linearität

Die *Additivität* und die *Homogenität* und folglich die *Linearität* des zeitkontinuierlichen Systems werden in gleicher Weise definiert wie im Fall des zeitdiskreten Systems. Das System heißt also *additiv*, falls \mathcal{S} für alle zulässigen Eingangssignale x_1 und x_2 der Bedingung

$$\mathcal{S}\{x_1 + x_2\} = \mathcal{S}\{x_1\} + \mathcal{S}\{x_2\}$$

genügt, und *homogen*, falls für alle $c \in \mathbb{C}$ stets

$$\mathcal{S}\{cx\} = c\mathcal{S}\{x\}$$

gilt.

Zeitinvarianz

Das System wird *zeitinvariant* genannt, falls eine beliebige zeitliche Verschiebung des Eingangssignals, etwa um t_0 , sich in einer gleichen Verschiebung des Ausgangssignals widerspiegelt:

$$y(t - t_0) = \mathcal{S}\{x(t - t_0)\} .$$

Reelle Systeme

Wie im zeitdiskreten Fall bezeichnet man ein System als *reell*, falls ein reelles Eingangssignal stets ein reelles Ausgangssignal impliziert.

4.2.2 Impulsantwort und Übertragungsfunktion

Impulsantwort

Zur Berechnung des Übertragungsverhaltens eines zeitkontinuierlichen Systems beschreiten wir wie im zeitdiskreten Fall zwei unterschiedliche, aber dennoch äquivalente Wege. Der erste Weg führt uns über die Reaktion des Systems auf den DIRAC-Impuls und macht dann von der Tatsache Gebrauch, dass ein nahezu beliebiges Signal $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ gemäß

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau$$

bzw.

$$x(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t) \quad \text{mit} \quad x_n(t) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} x(\tau_\nu) \delta_n(t - \tau_\nu) \Delta\tau, \quad \tau_\nu = \nu \Delta\tau, \quad \Delta\tau = T/n \quad (4.37)$$

dargestellt werden kann, wobei T eine beliebige positive Konstante und δ_n ein beliebiger Repräsentant der δ -Funktion ist, d. h.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^t \delta_n(\tau) d\tau = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ 1 & \text{für } t > 0 \end{cases}.$$

Wählen wir zur Darstellung des δ -Impulses eine Rechteckfolge mit

$$\delta_n(t) = \begin{cases} n/T & \text{für } |t| < \Delta\tau/2 = T/(2n) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases},$$

so approximiert die Summe in (4.37), wie in Bild 4.14 angedeutet, das Signal x durch eine Treppenfunktion, x_n . Je größer der Index n gewählt wird, je schmäler also der Impuls δ_n wird, um so genauer wird x durch x_n angenähert.

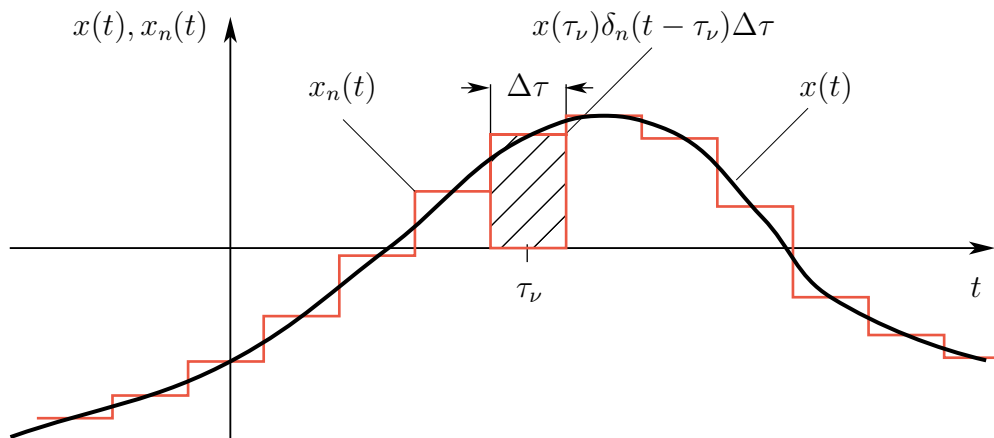
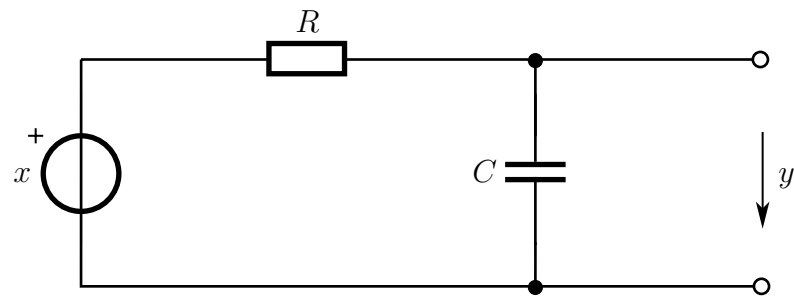


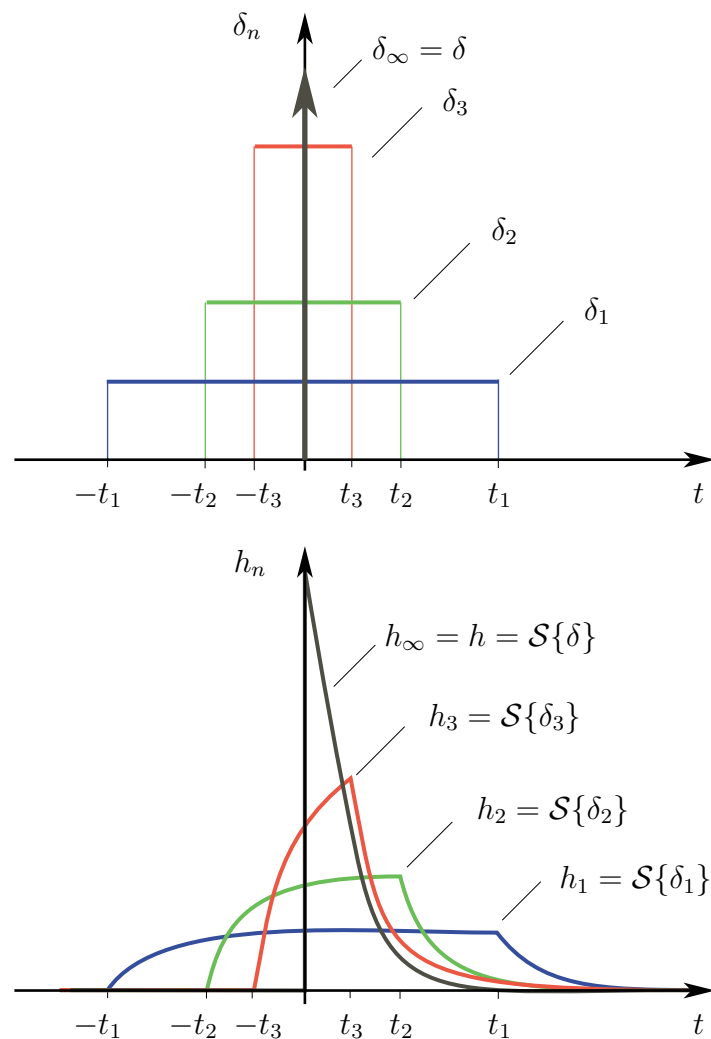
Bild 4.14: Annäherung eines zeitkontinuierlichen Signals, x , durch eine Treppenfunktion, x_n

Um das Ausgangssignal zu berechnen, bestimmt man zunächst $h_n = \mathcal{S}\{\delta_n\}$. Die auf diese Weise definierte Folge $h := \{h_n\}$ stellt eine verallgemeinerte Funktion dar, die als *Impulsantwort* bezeichnet wird:

$$h = \mathcal{S}\{\delta\}.$$

**Bild 4.15:** Einfaches System

Häufig wird für $n \rightarrow \infty$ die Folge h_n sogar gegen eine gewöhnliche Funktion konvergieren. Als ein Beispiel für diese Situation betrachten wir das einfache System in Bild 4.15. Der obere Teil des Bildes 4.16 zeigt vier verschiedene Eingangssignale x und der untere Teil die entsprechenden Systemreaktionen. Die Rechteckimpulse δ_n haben zwar unterschiedliche Breiten und Höhen, aber gleiche Flächen.

**Bild 4.16:** Zur Darstellung der Impulsantwort h durch eine Folge $h_n = \mathcal{S}\{\delta_n\}$

Mit Blick auf (4.37) machen wir der Reihe nach Gebrauch von der Zeitinvarianz, der

Homogenität und der Additivität des Systems:

$$\begin{aligned}\mathcal{S}\{\delta_n(t - \tau_\nu)\} &= h_n(t - \tau_\nu) , & (\text{Zeitinvarianz}) \\ \mathcal{S}\{x(\tau_\nu)\delta_n(t - \tau_\nu)\} &= x(\tau_\nu)h_n(t - \tau_\nu) & (\text{Homogenität})\end{aligned}$$

und schließlich

$$\mathcal{S}\{x_n(t)\} = \mathcal{S}\left\{\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} x(\tau_\nu)\delta_n(t - \tau_\nu)\Delta\tau\right\} = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} x(\tau_\nu)h_n(t - \tau_\nu)\Delta\tau . \quad (\text{Additivität})$$

Mit dem Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ geht x_n über in x , h_n in h und die rechte Summe in das Integral

$$\boxed{y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t - \tau) d\tau} . \quad (4.38)$$

Das Ausgangssignal ist also gleich der Faltung des Eingangssignals mit der Impulsantwort:

$$\boxed{y = x * h = h * x} .$$

Dieses Ergebnis ist offenbar das gleiche, das wir im zeitdiskreten Fall erhalten hatten. Allerdings wurde dort die Faltung mit Hilfe einer Summe definiert.

Man überzeugt sich leicht, dass ein System mit der Impulsantwort h genau dann reell ist, wenn h reell ist, wenn also für alle t stets gilt $h(t) \in \mathbb{R}$.

Übertragungsfunktion

Der zweite Weg zur Berechnung des Übertragungsverhaltens basiert auf der Tatsache, dass ein lineares System, das mit einem Signal der Form

$$x(t) = e^{j\omega t}$$

oder allgemeiner

$$x(t) = e^{pt} , \quad p \in \mathbb{C} \quad (4.39)$$

erregt wird, mit einem Signal der gleichen Form antwortet, nämlich mit

$$y(t) = H(p)e^{pt} .$$

Die Größe H , die nur von der *komplexen Frequenz* p und insbesondere nicht von x abhängt, heißt *Übertragungsfunktion*.

Um die Richtigkeit dieser Aussage zu zeigen, benötigen wir nur die Zeitinvarianz und die Homogenität des Systems. Wir nehmen also an, dass das System mit dem Signal (4.39) erregt wird und dass das zugehörige Ausgangssignal, es heiße $\eta(t)$, existiert:

$$\mathcal{S}\{e^{pt}\} = \eta(t) .$$

Da e^{pt} niemals 0 wird, können wir schreiben

$$\mathcal{S}\{e^{pt}\} = \eta(t) = \eta(t)e^{-pt}e^{pt} = H(p, t)e^{pt} .$$

Wir betrachten nun die Antwort auf $e^{p(t-t_0)}$, wobei t_0 eine beliebige reelle Konstante bedeuten soll. Berücksichtigen wir die Zeitinvarianz, so erhalten wir

$$\mathcal{S}\{e^{p(t-t_0)}\} = H(p, t-t_0)e^{p(t-t_0)} . \quad (4.40)$$

Die zeitliche Verschiebung um t_0 kann aber auch als Multiplikation des Eingangssignals mit der komplexen Konstanten e^{-pt_0} interpretiert werden, so dass wegen der Homogenität auch

$$\mathcal{S}\{e^{p(t-t_0)}\} = e^{-pt_0}\mathcal{S}\{e^{pt}\} = H(p, t)e^{p(t-t_0)} \quad (4.41)$$

gelten muss. Da t_0 eine beliebige reelle Konstante ist, schließen wir aus (4.40) und (4.41), dass H gar nicht von der Zeit abhängt und nur, wie oben behauptet, eine Funktion der komplexen Frequenz ist. Wegen der Homogenität des Systems können wir das Eingangssignal auch mit einer beliebigen komplexen Konstanten X multiplizieren und daher schreiben:

$$\boxed{x(t) = Xe^{pt} \Rightarrow y(t) = Ye^{pt} \quad \text{mit} \quad Y = H(p)X} . \quad (4.42)$$

Auf die Frage, ob ein System reell ist oder nicht, gibt folgende Äquivalenz eine Antwort:

$$\boxed{\text{System ist reell} \iff H(p) = H^*(p^*)} .$$

Diese Aussage kann in gleicher Weise bewiesen werden wie die Äquivalenz (4.11).

Falls das System mit der Exponentialschwingung

$$x(t) = Xe^{j\omega t}$$

erregt wird, erhalten wir:

$$\boxed{x(t) = Xe^{j\omega t} \Rightarrow y(t) = Ye^{j\omega t} \quad \text{mit} \quad Y = H(j\omega)X} .$$

Wegen der Linearität des Systems kann damit die Antwort auf ein Eingangssignal, das als Summe über Exponentialschwingungen dargestellt werden kann, d. h. die Antwort auf eine Erregung der Form

$$x(t) = \sum_{\mu} X_{\mu} e^{j\omega_{\mu} t} ,$$

wie folgt bestimmt werden:

$$y(t) = \sum_{\mu} H(j\omega_{\mu}) X_{\mu} e^{j\omega_{\mu} t} .$$

Ist x als FOURIER-Integral

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

darstellbar und fassen wir dieses Integral als Grenzwert einer Summe auf, d. h.

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} X(j\omega_{\nu}) e^{j\omega_{\nu} t} \Delta\omega , \quad \omega_{\nu} = \nu\Delta\omega , \quad \Delta\omega > 0 , \quad (4.43)$$

so erhalten wir weiter

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} H(j\omega_\nu) X(j\omega_\nu) e^{j\omega_\nu t} \Delta\omega .$$

und schließlich nach Ausführung des Grenzübergangs

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Y(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad \text{mit} \quad Y(j\omega) = H(j\omega) X(j\omega) .$$

Zusammenhang zwischen Impulsantwort und Übertragungsfunktion

Wir setzen $x(t) = e^{pt}$ in das rechte Integral der Gleichung (4.38) ein und erhalten

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{p(t-\tau)} d\tau = e^{pt} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-p\tau} d\tau = e^{pt} \mathcal{L}\{h\}(p) .$$

Falls p zum Konvergenzgebiet des LAPLACE-Integrals gehört, die LAPLACE-Transformierte der Impulsantwort also existiert, gilt erwartungsgemäß

$$H(p) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-pt} dt .$$

4.2.3 Kausalität

Zur Bedeutung des Begriffs Kausalität sei auf die kurzen Ausführungen zu Beginn des Abschnitts 4.1.2 verwiesen. Diese beziehen sich zwar auf zeitdiskrete Systeme, sie gelten aber in entsprechender Weise auch für zeitkontinuierliche. Zur Festlegung der Kausalität eines zeitkontinuierlichen Systems verwenden wir folgende

Definition: Ein System mit dem Eingangssignal x und dem Ausgangssignal y heißt *kausal*, falls der Wert des Ausgangssignals zu jedem beliebigen Zeitpunkt $t_1 \in \mathbb{R}$, also die Zahl $y(t_1)$, nicht abhängig ist von zukünftigen Werten des Eingangssignals x , also nicht abhängig ist von $x(t)$ für $t > t_1$, sondern nur von $x(t)$ für $t \leq t_1$.

Wie im zeitdiskreten Fall ist das System genau dann kausal, wenn die Impulsantwort rechtsseitig ist:

$$\text{System ist kausal.} \quad \Longleftrightarrow \quad h(t) = 0 \quad \text{für} \quad t < 0 . \quad (4.44)$$

Die Bedingung ist offenbar notwendig, da h die Antwort auf einen Impuls ist, der zum Zeitpunkt $t = 0$ wirksam ist. Um zu zeigen, dass die Bedingung auch hinreichend ist, zerlegen wir zunächst das rechte Integral in (4.38) wie folgt:

$$y(t) = \int_{-\infty}^0 h(\tau) x(t-\tau) d\tau + \int_0^{\infty} h(\tau) x(t-\tau) d\tau .$$

Falls h rechtsseitig ist, also $h(t) = 0$ für $t < 0$ gilt, fällt das linke Integral weg und das Ausgangssignal ist durch

$$y(t) = \int_0^{\infty} h(\tau) x(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^t x(\tau) h(t-\tau) d\tau$$

gegeben. Man erkennt sofort, dass nur vergangene Werte von x auf das Ausgangssignal wirken, so dass die Kausalität nachgewiesen ist.

Die Kausalität spiegelt sich auch in gewissen Eigenschaften der Übertragungsfunktion wider. Hier wollen wir einen Aspekt etwas näher beleuchten, und zwar werden wir einen Zusammenhang zwischen dem Real- und dem Imaginärteil der Übertragungsfunktion eines kausalen Systems herleiten. Wir nehmen zunächst an, dass die Impulsantwort für $t = 0$ den Wert 0 annimmt. Die Rechtsseitigkeit von h können wir dann ausdrücken durch die Beziehung

$$h(t) = \operatorname{sgn}(t)h(t) . \quad (4.45)$$

Unter der Annahme, dass die FOURIER-Transformierte von h existiert, können wir diese Beziehung auf Grund des Faltungssatzes gemäß

$$H = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}\{\operatorname{sgn}\} * H ,$$

in den Frequenzbereich übertragen. Da die FOURIER-Transformierte der Signum-Funktion durch

$$\mathcal{F}\{\operatorname{sgn}\}(j\omega) = \frac{2}{j\omega}$$

gegeben ist, folgt

$$H(j\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{H(jv)}{j\omega - jv} dv = -j \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{H(jv)}{\omega - v} dv . \quad (4.46)$$

Die auf der rechten Seite stehende Integraltransformation, allerdings ohne den Faktor $-j$, wird HILBERT-Transformation genannt und mit dem Symbol \mathcal{H} gekennzeichnet³. Wir können den Zusammenhang (4.46) also kompakt durch

$$H = -j\mathcal{H}\{H\} \quad (4.47)$$

ausdrücken. Setzen wir $H(j\omega) = R(\omega) + jX(\omega)$ mit $R = \operatorname{Re} H$ und $X = \operatorname{Im} H$, so folgt aus (4.47)

$$R = \mathcal{H}\{X\} \quad \text{und} \quad X = -\mathcal{H}\{R\} .$$

Ausführlich geschrieben lauten diese Beziehungen

$$R(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{X(v)}{\omega - v} dv \quad \text{bzw.} \quad X(\omega) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{R(v)}{\omega - v} dv .$$

Auch diese Integrale sind jeweils im Sinne des CAUCHYSchen Hauptwerts auszuwerten (siehe Fußnote 3).

³Das in (4.46) auftretende Integral ist im Sinne des CAUCHYSchen Hauptwerts zu interpretieren. Dieser Wert, der häufig mit V.P. (*valor principalis*) gekennzeichnet wird, ist im vorliegenden Fall wegen der Singularität des Integranden an der Stelle $v = \omega$ durch

$$\text{V.P.} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots dv = \lim_{\Omega \rightarrow \infty} \lim_{\substack{\alpha \rightarrow 0 \\ \alpha > 0}} \left[\int_{-\Omega}^{\omega - \alpha} \cdots dv + \int_{\omega + \alpha}^{\Omega} \cdots dv \right]$$

definiert.

Es bleibt jetzt noch die Frage zu beantworten, wie diese Beziehungen modifiziert werden müssen, wenn h der Bedingung $h(0) = 0$ nicht genügt. Nimmt h für $t = 0$ einen von null verschiedenen, aber endlichen Wert an, ändert sich gar nichts, da der Wert des FOURIER-Integrals hierdurch nicht verändert wird. Tritt allerdings für $t = 0$ ein δ -Impuls auf, etwa mit dem Gewicht γ , muss die Beziehung (4.45) durch

$$h(t) = \operatorname{sgn}(t)h(t) + \gamma\delta(t) .$$

ersetzt werden. Die FOURIER-Transformation dieses Ausdrucks liefert

$$H = -j\mathcal{H}\{H\} + \gamma \quad \text{bzw.} \quad H(j\omega) = -j\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{H(jv)}{\omega - v} dv + \gamma .$$

Setzen wir γ als reell voraus, so erhalten wir nach Zerlegung in Real- und Imaginärteil

$$\boxed{R(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{X(v)}{\omega - v} dv + \gamma \quad \text{bzw.} \quad X(\omega) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{R(v)}{\omega - v} dv} . \quad (4.48)$$

Bei vorgegebenem Imaginärteil liegt also der Realteil der Übertragungsfunktion bis auf eine additive Konstante fest. Ist der Realteil vorgegeben, so liegt der Imaginärteil eindeutig fest.

Diese Zusammenhänge zwischen dem Realteil und dem Imaginärteil der Übertragungsfunktion eines kausalen Systems spielen in vielen Bereichen der Physik eine Rolle. Da beispielsweise auch die Impedanz eines linearen Eintors als Übertragungsfunktion aufgefasst werden kann, besteht auch zwischen deren Realteil und deren Imaginärteil der angegebene Zusammenhang, und zwar unter der Voraussetzung, dass die Impedanz im Unendlichen keinen Pol besitzt. Anhand dieses Beispiels wird auch klar, warum der Realteil nur bis auf eine Konstante aus dem Imaginärteil folgt. Ist etwa Z mit $Z(j\omega) = R(\omega) + jX(\omega)$ eine gegebene Impedanz, so besitzt $Z_1 := R_1 + Z$ mit $R_1 > 0$ offenbar den gleichen Imaginärteil wie Z . Da aber die Realteile von Z und Z_1 verschieden sind, leuchtet es unmittelbar ein, dass der Realteil einer Impedanz nicht vollständig aus dem Imaginärteil gewonnen werden kann.

Im physikalischen Kontext sind die Zusammenhänge (4.48) häufig mit den Namen der Physiker KRAMERS und KRONIG verbunden. Man spricht dann von den KRAMERS-KRONIG-Beziehungen.

4.2.4 Stabilität

Hinter kaum einem anderen Begriff der Systemtheorie verbergen sich so viele unterschiedliche Definitionen wie hinter dem Begriff der Stabilität. Einige Definitionen berücksichtigen nur die Übertragungseigenschaften eines Systems. Andere beziehen sich auf das Verhalten der Systemgrößen bei abgeschaltetem Eingangssignal und beliebigen Anfangsbedingungen. Hierzu gehören etwa die mit dem Namen LJAPUNOV verknüpften Stabilitätskonzepte. Da wir bei unserer Systembeschreibung zunächst nur den durch die Impulsantwort oder durch die Übertragungsfunktion beschriebenen funktionalen Zusammenhang zwischen Eingangs- und Ausgangssignal im Auge haben, wollen wir für die Stabilität eine Definition verwenden, die sich nur auf das Übertragungsverhalten bezieht.

Bei den folgenden Untersuchungen setzen wir grundsätzlich voraus, dass die zu betrachtenden Systeme kausal sind. Das Übertragungsverhalten eines derartigen Systems können wir daher durch

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau)h(t - \tau) d\tau \quad (4.49)$$

ausdrücken. Damit das Ausgangssignal y tatsächlich mit dieser Formel berechnet werden kann, muss zunächst einmal das Produkt $x(\tau)h(t - \tau)$ über jedes endliche Intervall $t_0 \leq \tau \leq t$ integrierbar sein.⁴ Ohne jeweils darauf hinzuweisen, wollen wir im folgenden stets davon ausgehen, dass diese Voraussetzung erfüllt ist. Nimmt ein Eingangssignal x erst ab einem Zeitpunkt t_0 von null verschiedene Werte an und ist außerdem das System für $t < t_0$ in Ruhe, so kann das Ausgangssignal unter den gegebenen Voraussetzungen offenbar für jedes $t > t_0$ gemäß

$$y(t) = \int_{t_0}^t x(\tau)h(t - \tau) d\tau$$

berechnet werden.

Wir lassen nun den Zeitpunkt t_0 gegen $-\infty$ streben und nehmen an, dass das Eingangssignal beschränkt ist, d. h., dass es eine positive Zahl M gibt, so dass

$$|x(t)| \leq M. \quad (4.50)$$

Falls dann für jedes beschränkte Eingangssignal das Integral in (4.49) konvergiert, also der Grenzwert

$$\int_{-\infty}^t x(\tau)h(t - \tau) d\tau = \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} \int_{t_0}^t x(\tau)h(t - \tau) d\tau$$

existiert, bezeichnen wir das System als *stabil*.

Setzen wir voraus, dass h eine „gewöhnliche“ Funktion ist, so liegt *Stabilität* genau dann vor, wenn h über $[0, \infty)$ absolut integrierbar ist, d. h., wenn gilt

$$\boxed{\int_0^{\infty} |h(t)| dt < \infty}. \quad (4.51)$$

Zum Nachweis der *Notwendigkeit* dieser Bedingung nehmen wir an, dass h reell ist, und wählen das spezielle Eingangssignal

$$x(t) = \operatorname{sgn}[h(-t)],$$

das offenbar mit $M = 1$ der Ungleichung (4.50) genügt, und berechnen das zugehörige Ausgangssignal zum Zeitpunkt $t = 0$:

$$y(0) = \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} \int_{t_0}^0 \operatorname{sgn}[h(-\tau)]h(-\tau) d\tau = \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} \int_0^{-t_0} |h(t)| dt.$$

Da das rechte Integral in Abhängigkeit der oberen Grenze monoton wächst, konvergiert es genau dann, wenn es für $-t_0 \rightarrow \infty$ beschränkt bleibt, also der Bedingung (4.51) genügt.

Um nachzuweisen, dass die Bedingung (4.51) auch *hinreichend* für die Stabilität ist, wollen wir zeigen, dass das Integral

$$\int_{-\infty}^t x(\tau)h(t - \tau) d\tau$$

unter den Bedingungen (4.50) und (4.51) absolut konvergiert, dass also der Grenzwert

$$\lim_{t_0 \rightarrow -\infty} \int_{t_0}^t |x(\tau)h(t - \tau)| d\tau \quad (4.52)$$

⁴Ein hinreichende Bedingung hierfür ist z. B. die stückweise Stetigkeit der Funktionen x und h . Die Integrierbarkeit ist aber auch dann noch gegeben, wenn diese Funktionen in jedem endlichen Intervall zusätzlich endlich viele Deltaimpulse enthalten.

existiert. Hierzu schätzen wir dieses Integral für $t > t_0$ wie folgt nach oben ab:

$$\int_{t_0}^t |x(\tau)h(t-\tau)| d\tau \leq M \int_{t_0}^t |h(t-\tau)| d\tau = M \int_0^{t-t_0} |h(\tau)| d\tau \leq M \int_0^\infty |h(\tau)| d\tau. \quad (4.53)$$

Für $t_0 \rightarrow -\infty$ bleibt also das auf der linken Seite stehende Integral beschränkt, so dass, wie behauptet, der Grenzwert (4.52) existiert. Beachten wir schließlich, dass die absolute Konvergenz die „einfache“ Konvergenz impliziert, so erkennen wir, dass die Bedingung (4.51) nicht nur notwendig, sondern auch hinreichend für die Stabilität ist.

Bei den bisherigen Stabilitätsbetrachtungen haben wir vorausgesetzt, dass h eine gewöhnliche Funktion ist, also insbesondere keine Deltaimpulse enthält. Wir wollen diese Voraussetzung nun fallenlassen und annehmen, dass h durch

$$h(t) = h_0(t) + \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_\nu \delta(t - \tau_\nu) \quad (4.54)$$

dargestellt werden kann, wobei h_0 eine gewöhnliche Funktion ist und wobei die Konstanten α_ν reell oder komplex sind. Das System mit der Impulsantwort h können wir darstellen durch eine Parallelschaltung von zwei Systemen, wobei eines die Impulsantwort h_0 und das andere die Impulsantwort

$$h_1(t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_\nu \delta(t - \tau_\nu)$$

besitzt (siehe Bild 4.17). Als Folge der Kausalität muss h_0 rechtsseitig sein und die Zeitpunkte

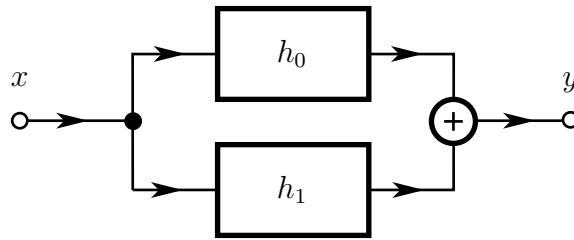


Bild 4.17: Parallelschaltung zweier Systeme

τ_ν , die wir gemäß $\tau_\nu < \tau_{\nu+1}$ ordnen wollen, dürfen nicht negativ sein, d. h.,

$$0 \leq \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots$$

Setzen wir (4.54) in (4.38) ein und berücksichtigen die Ausblendeigenschaft der Deltafunktion, so erhalten wir für das Ausgangssignal

$$y(t) = y_0(t) + y_1(t)$$

mit

$$y_0(t) = \int_0^\infty h_0(\tau)x(t-\tau) d\tau \quad \text{und} \quad y_1(t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_\nu x(t - \tau_\nu).$$

Mit einer ähnlichen Argumentation wie zuvor kann gezeigt werden, dass Stabilität genau dann vorliegt, wenn $h_0(t)$ über $[0, \infty)$ absolut integrierbar und zugleich die Folge $\{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots\}$ absolut summierbar ist, d. h., wenn gilt

$$\left[\int_0^\infty |h_0(t)| dt + \sum_{\nu=0}^{\infty} |\alpha_\nu| < \infty \right]. \quad (4.55)$$

Natürlich könnte man auch daran denken, Impulsantworten zu betrachten, die nicht nur Deltaimpulse, sondern auch erste und höhere Ableitungen dieser Impulse enthalten. Dies würde darauf hinauslaufen, dass das Eingangssignal bei der Übertragung einmal oder mehrmals differenziert wird. Das einfachste Beispiel für eine derartige Impulsantwort lautet $h(t) = \delta'(t)$. In diesem Fall ergibt sich das Ausgangssignal zu

$$y(t) = \delta'(t) * x(t) = \dot{x}(t) .$$

Sieht man von einzelnen Bauelementen (Kapazitäten, Induktivitäten etc.) ab, tritt dieses Übertragungsverhalten bei den in der Praxis relevanten Systemen fast nie auf. Wir beschränken uns daher bei unseren Untersuchungen auf Systeme, deren Impulsantworten entweder gewöhnliche Funktionen sind oder die Form (4.54) besitzen.

Eigenschaften der Übertragungsfunktion eines stabilen Systems

Zunächst sei die Impulsantwort h wieder eine gewöhnliche Funktion. Liegt Stabilität vor, so ist h absolut integrierbar, und zwar wegen der Rechtsseitigkeit sogar über $(-\infty, \infty)$. Somit existiert in diesem Fall die LAPLACE-Transformierte, und zwar zumindest für $\operatorname{Re} p \geq 0$:

$$H(p) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} h(t)e^{-pt} dt .$$

Setzen wir $p = \sigma + j\omega$, so können wir dieses Integral auch wie folgt interpretieren:

$$H(p) = \int_0^{\infty} h(t)e^{-\sigma t}e^{-j\omega t} dt = \mathcal{F}\{h(t)e^{-\sigma t}\} .$$

Da für $\sigma t \geq 0$ die Ungleichung

$$|h(t)e^{-\sigma t}| \leq |h(t)|$$

besteht, ist für $\sigma \geq 0$ auch $h(t)e^{-\sigma t}$ absolut integrierbar. Folglich ist $H(p)$ für alle p mit $\operatorname{Re} p \geq 0$ beschränkt:

$$\boxed{\operatorname{Re} p \geq 0 \quad \Rightarrow \quad |H(p)| \leq \int_0^{\infty} |h(t)e^{-pt}| dt \leq \int_0^{\infty} |h(t)| dt < \infty} . \quad (4.56)$$

Falls die Impulsantwort $h(t)$ auch Deltaimpulse enthält, also durch (4.54) dargestellt werden kann, erhalten wir für die Übertragungsfunktion

$$H(p) = \int_0^{\infty} h_0(t)e^{-pt} dt + \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_{\nu} e^{-p\tau_{\nu}}$$

Auch hier können wir sofort zeigen, dass im Fall der Stabilität die Funktion $H(p)$ in der abgeschlossenen rechten p -Halbebene beschränkt bleibt:

$$\boxed{\operatorname{Re} p \geq 0 \quad \Rightarrow \quad |H(p)| \leq \int_0^{\infty} |h_0(t)| dt + \sum_{\nu=0}^{\infty} |\alpha_{\nu}| < \infty} . \quad (4.57)$$

Die Übertragungsfunktion $H(p)$ eines stabilen Systems kann also in der abgeschlossenen rechten p -Halbebene keine Unendlichkeitsstellen haben. Ist $H(p)$ eine rationale Funktion, so bedeutet dies, dass sämtliche Pole von $H(p)$ in der offenen linken p -Halbebene liegen müssen.

Die Umkehrung dieser Aussage gilt übrigens auch, d. h., wenn eine rationale Übertragungsfunktion,

$$H(p) = \frac{\alpha_n p^n + \alpha_{n-1} p^{n-1} + \cdots + \alpha_0}{p^n + \beta_{n-1} p^{n-1} + \cdots + \beta_0},$$

nur Pole in der linken p -Halbebene besitzt, dann ist das zugehörige System stabil. Wir wollen dies für den Fall zeigen, dass H nur einfache Pole hat. Diese seien mit p_1, p_2, \dots, p_n bezeichnet. Die Funktion H kann dann wie folgt in Partialbrüche zerlegt werden:

$$H(p) = \sum_{\nu=1}^n \frac{H_\nu}{p - p_\nu} + H_\infty, \quad \operatorname{Re} p_\nu < 0$$

mit

$$H_\nu = \lim_{p \rightarrow p_\nu} (p - p_\nu) H(p) \quad \text{und} \quad H_\infty = \lim_{p \rightarrow \infty} H(p) = \alpha_n.$$

Berücksichtigen wir nun, dass die inverse LAPLACE-Transformierte von $(p - p_\nu)^{-1}$ durch

$$\varepsilon(t) e^{p_\nu t}$$

gegeben ist, wobei ε die Sprungfunktion bedeutet, so erhalten wir für $h = \mathcal{L}^{-1}\{H\}$

$$h(t) = \sum_{\nu=1}^n h_\nu(t) + H_\infty \delta(t)$$

mit

$$h_\nu(t) = \varepsilon(t) H_\nu e^{p_\nu t}.$$

Da H_∞ der Bedingung $|H_\infty| < \infty$ genügt, brauchen wir zur Bestätigung der Stabilität nur nachzuweisen, dass $\sum_\nu h_\nu$ absolut über $[0, \infty)$ integrierbar ist. Mit Hilfe der Dreiecksungleichung

$$\left| \sum_{\nu=1}^n h_\nu(t) \right| \leq \sum_{\nu=1}^n |h_\nu(t)|$$

und der Beziehung

$$|h_\nu(t)| = \varepsilon(t) |H_\nu| e^{t \operatorname{Re} p_\nu}$$

können wir dies wie folgt zeigen:

$$\int_0^\infty \left| \sum_{\nu=1}^n h_\nu(t) \right| dt \leq \sum_{\nu=1}^n |H_\nu| \int_0^\infty e^{t \operatorname{Re} p_\nu} dt = \sum_{\nu=1}^n \frac{|H_\nu|}{-\operatorname{Re} p_\nu} = \sum_{\nu=1}^n \frac{|H_\nu|}{|\operatorname{Re} p_\nu|}.$$

4.2.5 Zustandsdarstellung zeitkontinuierlicher linearer Systeme

Zur Erläuterung der Begriffe *Zustandsraum* und *Zustandsdarstellung* im zeitkontinuierlichen Fall berechnen wir zunächst einige einfache Schaltungen. Als erstes betrachten wir den Reihenschwingkreis in Bild 4.18, der von einer widerstandsbehafteten Quelle mit der Ursprungsspannung x erregt wird. Als Ausgangssignal dieses einfachen Systems diene die Spannung über dem Reihenschwingkreis, also y .

Das „Gedächtnis“ dieses Systems wird offenbar repräsentiert durch zwei *reaktive Elemente*, und zwar durch die Induktivität und die Kapazität. Der durch die Induktivität fließende Strom

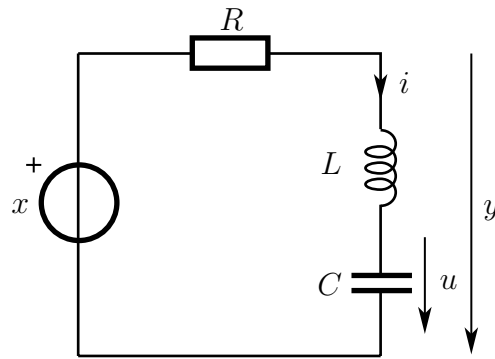


Bild 4.18: Reihenschwingkreis als Beispiel für ein zeitkontinuierliches lineares System

i sowie die über der Kapazität liegende Spannung u stellen die sogenannten *Zustandsgrößen* dieses Systems dar. Die im System gespeicherte Energie, die ja bekanntlich durch

$$L \frac{i^2}{2} + C \frac{u^2}{2}$$

gegeben ist, wird genau durch diese beiden Größen festgelegt; sie beschreiben somit den energetischen Zustand.

Durch Anwendung der KIRCHHOFFSchen Spannungsregel und der Elementbeziehungen lassen sich mühelos folgende Gleichungen aufstellen:

$$Ri + L \frac{di}{dt} + u = x, \quad C \frac{du}{dt} = i \quad \text{und} \quad y = x - Ri. \quad (4.58)$$

Fassen wir die beiden Zustandsgrößen i und u zu einem Vektor, dem sogenannten *Zustandsvektor*

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} i \\ u \end{pmatrix}$$

zusammen, so können die beiden ersten Gleichungen in (4.58) äquivalent durch

$$\dot{\mathbf{w}} = \mathbf{A}\mathbf{w} + \mathbf{b}x \quad \text{mit} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -R/L & -1/L \\ 1/C & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1/L \\ 0 \end{pmatrix}$$

ersetzt werden und die dritte Gleichung lässt sich in der Form

$$y = \mathbf{c}^T \mathbf{w} + dx \quad \text{mit} \quad \mathbf{c}^T = \begin{pmatrix} -R & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad d = 1$$

schreiben. Zusammenfassend können wir das System also durch die beiden folgenden Gleichungen, den sogenannten *Zustandsgleichungen*, beschreiben:

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{\mathbf{w}} &= \mathbf{A}\mathbf{w} + \mathbf{b}x \\ y &= \mathbf{c}^T \mathbf{w} + dx \end{aligned}}. \quad (4.59)$$

Die Zahl der Zustandsgrößen, also die Dimension des Vektors \mathbf{w} , bezeichnet man auch als die *Ordnung des Systems*. Bei diesem Beispiel ist die Ordnung also 2.

Als nächstes betrachten wir ein System dritter Ordnung, nämlich die einfache Filterschaltung in Bild 4.19, die insgesamt drei reaktive Elemente enthält, nämlich zwei Induktivitäten

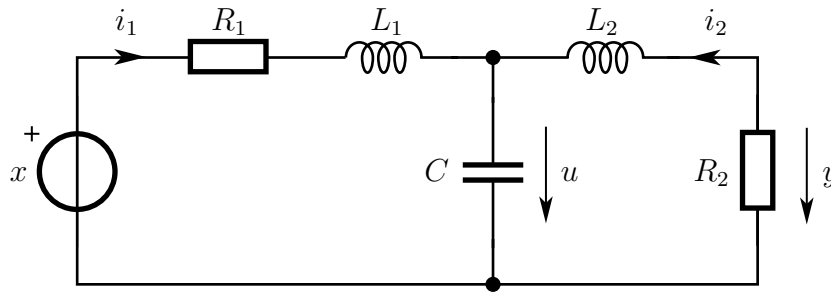


Bild 4.19: Einfache Filterschaltung als Beispiel für ein zeitkontinuierliches lineares System

und eine Kapazität. Fassen wir i_1 und i_2 als Schleifenströme auf, so können wir mit Hilfe der KIRCHHOFFSchen Spannungsregel sofort die beiden folgenden Gleichungen aufstellen:

$$R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + u = x \quad (4.60)$$

$$R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + u = 0 . \quad (4.61)$$

Als weitere Gleichungen zur Berechnung der Schaltung benötigen wir noch die Definitionsgleichung der Kapazität und den Zusammenhang zwischen y und i_2 :

$$C \frac{du}{dt} = i_1 + i_2 \quad \text{bzw.} \quad y = -R_2 i_2 . \quad (4.62)$$

Den Zustandsvektor, der in diesem Fall drei Komponenten besitzt, definieren wir gemäß

$$\mathbf{w} = (i_1 \quad i_2 \quad u)^T .$$

Auch die Gleichungen (4.60) bis (4.62) nehmen die Form der Zustandsgleichungen an, wenn \mathbf{A} , \mathbf{b} , \mathbf{c} und d wie folgt definiert werden:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -R_1/L_1 & 0 & -1/L_1 \\ 0 & -R_2/L_2 & -1/L_2 \\ 1/C & 1/C & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1/L_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ -R_2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad d = 0 .$$

Zustandsgleichungen der Form (4.59) lassen sich nicht nur für elektrische Schaltungen, sondern für viele physikalische Systeme angeben. Als ein besonders einfaches Beispiel für ein mechanisches System zweiter Ordnung betrachten wir die Anordnung in Bild 4.20. Ein starrer Körper mit der Masse m liegt reibungsfrei auf einer ebenen Unterlage und ist auf der rechten Seite mit einer Feder und einem Dämpfer mit einer starren Wand verbunden. Die Feder mit der Federkonstanten γ und der Dämpfer mit der Dämpfungskonstanten δ seien linear, d. h. γ und δ sind konstant. Als Eingangssignal wirke auf den Körper von links eine Kraft f und als Ausgangssignal legen wir die von der Ruhelage aus gemessene Verschiebung des Körpers nach rechts, also die Größe y , fest. Die speichernden Elemente sind in diesem Fall die Feder und die Masse. Als Zustandsgrößen wählen wir y und die Geschwindigkeit $v = \dot{y}$ und bilden daraus den Zustandsvektor

$$\mathbf{w} = (v \quad y) .$$

Das Eingangssignal, also die Kraft f , steht im Gleichgewicht mit der Summe aus Trägheitskraft $m\dot{v}$, Dämpferkraft δv und Federkraft γy :

$$m\dot{v} + \delta v + \gamma y = f, \quad v = \dot{y}$$

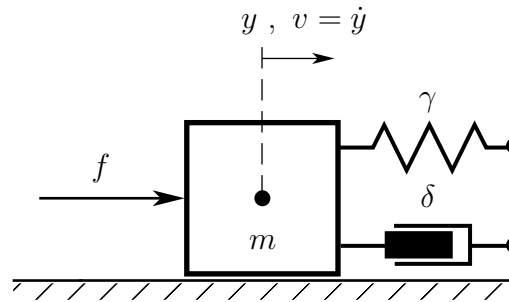


Bild 4.20: Feder-Masse-Dämpfer-Anordnung als Beispiel für ein zeitkontinuierliches lineares System

Mit den Festlegungen $x = f$ sowie

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -\delta/m & -\gamma/m \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1/m \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad d = 0.$$

nehmen auch diese Gleichungen wieder die Form (4.59) an.

An dieser Stelle drängt sich die Frage auf, ob jedes lineare System oder zumindest jede lineare Schaltung durch Zustandsgleichungen der Form (4.59) beschrieben werden kann. Im allgemeinen muss diese Frage verneint werden. Für eine genauere Modellierung physikalischer Systeme benötigt man nämlich sogenannte partielle Differentialgleichungen. Derartige Gleichungen treten beispielsweise bei der Beschreibung einer elektrischen Leitung auf. Eine Beschränkung auf gewöhnliche Differentialgleichungen oder gewöhnliche Differentialgleichungssysteme ist nur dann möglich, wenn mit Systemmodellen aus konzentrierten Bauelementen, starren Körpern, punktförmigen Massen etc. gearbeitet werden kann.

Die Zahl der unabhängigen Zustandsgrößen in einer elektrischen Schaltung ist häufig, aber nicht immer, gleich der Zahl der reaktiven Elemente. Sind beispielsweise zwei Kapazitäten parallel geschaltet oder sind drei oder mehr Kapazitäten zu einer Schleife zusammengeschaltet, so ist die Zahl der unabhängigen Zustandsgrößen kleiner als die Zahl der reaktiven Elemente. Zur Erläuterung dieses Sachverhalts betrachten wir die Schaltung in Bild 4.21. Es liegt

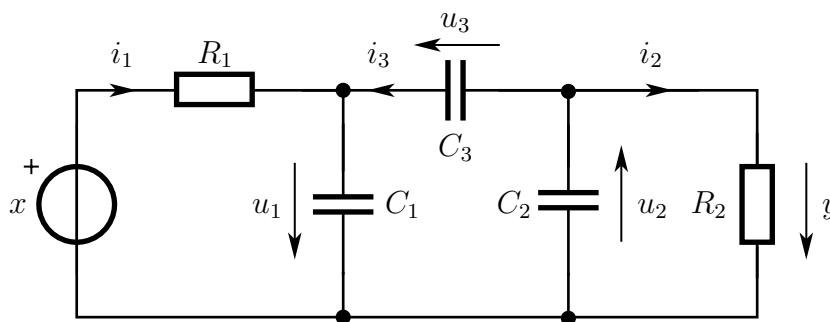


Bild 4.21: Schaltung mit einer kapazitiven Schleife

zunächst nahe, als Zustandsgrößen die Spannungen u_1 , u_2 und u_3 zu wählen und diese zu dem Zustandsvektor

$$\mathbf{w} = (u_1 \quad u_2 \quad u_3)^T$$

zusammenzufassen. Die KIRCHHOFFSche Spannungsregel liefert dann die drei Gleichungen

$$i_1 R_1 + u_1 = x, \quad i_2 R_2 + u_2 = 0 \quad \text{und} \quad u_1 + u_2 + u_3 = 0.$$

Hinzu kommen die Definitionsgleichungen für die Kapazitäten, nämlich

$$C_1 \frac{du_1}{dt} = i_1 + i_3, \quad C_2 \frac{du_2}{dt} = i_2 + i_3 \quad \text{und} \quad C_3 \frac{du_3}{dt} = i_3.$$

Nach Elimination der drei Ströme i_1 , i_2 und i_3 bleiben von diesen sechs Gleichungen genau drei übrig, die wir wie folgt anordnen wollen:

$$\begin{pmatrix} C_1 & 0 & -C_3 \\ 0 & C_2 & -C_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/R_1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/R_2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/R_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} x.$$

Mit den Abkürzungen

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} C_1 & 0 & -C_3 \\ 0 & C_2 & -C_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1/R_1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/R_2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1/R_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

kann dieser Zusammenhang gemäß

$$\mathbf{E}\dot{\mathbf{w}} = \mathbf{A}\mathbf{w} + \mathbf{b}x$$

auch kompakter dargestellt werden. Da die Matrix \mathbf{E} singulär ist, lässt sich diese Gleichung aber nicht nach $\dot{\mathbf{w}}$ auflösen, so dass eine Darstellung der Form (4.59) nicht unmittelbar möglich ist. Da die Komponenten des Zustandsvektors \mathbf{w} , also die Spannungen über den drei Kapazitäten, stets der Bedingung $u_1 + u_2 + u_3 = 0$ genügen, liegt \mathbf{w} immer in der durch die Vektoren

$$\mathbf{w}_1 = (1 \quad -1 \quad 0)^T \quad \text{und} \quad \mathbf{w}_2 = (1 \quad 0 \quad -1)^T$$

aufgespannten Ebene. Der Zustandsraum hat also nur die Dimension zwei. Insbesondere muss auch ein etwaig vorgegebener Anfangszustand immer in dieser Ebene liegen.

Im vorliegenden Fall ist das Problem besonders leicht zu durchschauen und daher auch leicht zu lösen. Wir brauchen ja nur eine der drei Zustandsgrößen, etwa u_3 , durch die beiden anderen auszudrücken. Wir ersetzen also u_3 durch $-(u_1 + u_2)$ und erhalten nach kurzer Rechnung

$$\begin{pmatrix} C_1 + C_3 & C_3 \\ C_3 & C_2 + C_3 \end{pmatrix} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/R_1 & 0 \\ 0 & -1/R_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/R_1 \\ 0 \end{pmatrix} x.$$

Da die ganz links stehende Matrix die Determinante $C_1 C_2 + C_2 C_3 + C_3 C_1$ besitzt und daher stets regulär ist, kann dieses Gleichungssystem tatsächlich derart umgeformt werden, dass es die Form (4.59) annimmt.

Das soeben skizzierte Problem tritt beispielsweise auch dann auf, wenn die von irgendeinem Knoten (oder Überknoten) eines Netzwerks abgehenden Zweige Induktivitäten enthalten. Sind die Ströme durch diese Induktivitäten, die ja als Zustandsgrößen benutzt werden können, geeignet orientiert, so ist die Summe der Ströme gleich Null und es liegt eine ähnliche Situation vor wie im Fall der kapazitiven Schleife. Ein Beispiel für diese Situation zeigt Bild 4.22. Eine derartige Schaltung wird gelegentlich als Ersatzschaltung für zwei gekoppelte Induktivitäten verwendet. Da die Ströme i_1 , i_2 und i_3 der Knotenregel

$$i_1 + i_2 + i_3 = 0$$

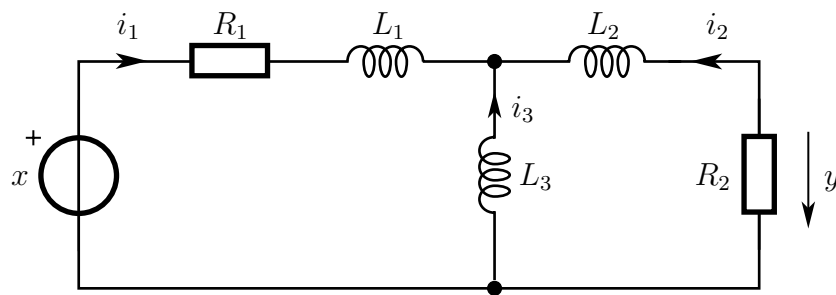


Bild 4.22: Schaltung mit einem Stern aus Induktivitäten

genügen, kann ein Strom, etwa i_3 , durch die beiden anderen ersetzt werden, so dass auch in diesem Fall Zustandsgleichungen mit nur zwei Zustandsgrößen angegeben werden können.

Abschließend sei erwähnt, dass die in den Bildern 4.21 und 4.22 skizzierten Fälle auch gleichzeitig auftreten können. Darüber hinaus können ideale Spannungs- oder Stromquellen zu den gleichen Problemen führen. Wir wollen diese Thematik hier aber nicht weiter vertiefen, sondern für die folgenden Untersuchungen stets annehmen, dass die Zustandsgleichungen einer linearen Schaltung in der Form (4.59) vorliegen.

Bei der Aufstellung der Zustandsgleichungen für ein elektrisches Netzwerk treten übrigens dann keine Probleme auf, wenn zu dem Graphen des Netzwerks ein vollständiger Baum derart angegeben werden kann, dass sämtliche Kapazitäten und alle idealen Spannungsquellen in den Zweigen des Baumes liegen.

4.2.6 Lösung der Zustandsgleichungen

Bei den bislang betrachteten zeitkontinuierlichen Systeme handelte es sich offenbar um reelle Systeme. In dem Zustandsmodell kommt diese Eigenschaft dadurch zum Ausdruck, dass die Elemente von \mathbf{A} , \mathbf{b} und \mathbf{c} sowie der Skalar d reelle Zahlen sind. Bei unseren folgenden Untersuchungen wollen wir zulassen, dass diese Größen auch komplexe Werte annehmen können. Es sei darauf hingewiesen, dass die hierdurch zu gewinnende Allgemeinheit nicht durch einen höheren mathematischen Aufwand erkauft wird.

Der durch die Gleichungen (4.59) beschriebene Zusammenhang lässt sich auch anschaulich in Form des in Bild 4.23 dargestellten Signalfussdiagramms deuten. Dieses Diagramm hat offenbar die gleiche Struktur wie das (zeitdiskrete) Diagramm in Bild 4.8, allerdings ist die (vektorielle) Verzögerung ersetzt durch einen (vektoriellen) Integrierer, der gemäß

$$\mathbf{w}(t) = \mathbf{w}(t_0) + \int_{t_0}^t \dot{\mathbf{w}}(\tau) d\tau .$$

definiert ist, wobei die Größe t_0 den sogenannten *Anfangszeitpunkt* bezeichnet, zu dem das System in Betrieb genommen wird.

Lösung der homogenen Gleichung

Wir behandeln die erste der beiden Zustandsgleichungen (4.59) und setzen zunächst $x = 0$, so dass folgende Gleichung übrigbleibt:

$$\dot{\mathbf{w}} = \mathbf{A}\mathbf{w} . \quad (4.63)$$

Dies ist eine *homogene (vektorielle) Differentialgleichung 1. Ordnung*. Gelegentlich schreibt

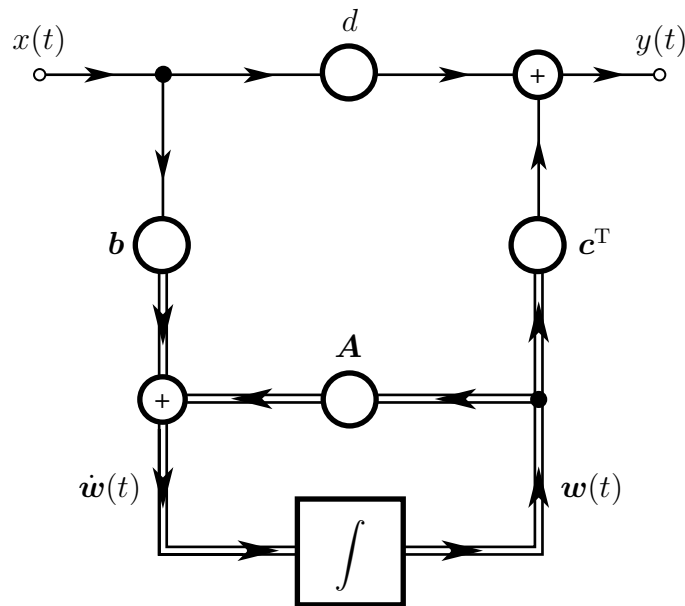


Bild 4.23: Veranschaulichung der Zustandsgleichungen (4.59) durch ein Signalflussdiagramm

man diese Gleichung auch in der ausführlichen Form

$$\begin{aligned}\dot{w}_1 &= a_{11}w_1 + a_{12}w_2 + \cdots + a_{1n}w_n \\ \dot{w}_2 &= a_{21}w_1 + a_{22}w_2 + \cdots + a_{2n}w_n \\ &\vdots \\ \dot{w}_n &= a_{n1}w_1 + a_{n2}w_2 + \cdots + a_{nn}w_n\end{aligned}$$

und spricht dann von einem *homogenen Differentialgleichungssystem 1. Ordnung*.

Bevor wir uns der Lösung der Gleichung (4.63) zuwenden, rekapitulieren wir zunächst den skalaren Fall, d. h. wir betrachten die Gleichung

$$\dot{w} = aw, \quad (4.64)$$

wobei a eine beliebige komplexe Konstante ist. Eine Lösung dieser Gleichung ist, wie man durch Einsetzen in (4.64) sofort erkennen kann, durch

$$w_0(t) = e^{at}$$

gegeben. Um sämtliche Lösungen zu finden, beachten wir, dass wegen $e^\zeta \neq 0 \quad \forall \zeta \in \mathbb{C}$ jede Funktion $w : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ gemäß

$$w(t) = e^{at}\gamma(t)$$

dargestellt werden kann; wir brauchen ja nur γ gleich $\gamma(t) = e^{-at}w(t)$ zu wählen. Unter der Annahme, dass γ differenzierbar ist, erhalten wir für \dot{w}

$$\dot{w}(t) = ae^{at}\gamma(t) + e^{at}\dot{\gamma}(t).$$

Nach Einsetzen dieses Ausdrucks in (4.64) finden wir

$$\dot{\gamma}(t) = 0 \quad \text{bzw.} \quad \gamma(t) = \text{const.}$$

Mit anderen Worten, jede Lösung der Gleichung (4.64) hat die Form

$$w(t) = e^{at}\gamma \quad \text{mit} \quad \gamma = \text{const.}$$

Offenbar ist die Konstante γ gleich $w(0)$, so dass man die Lösung auch gemäß

$$w(t) = e^{at}w(0)$$

schreiben kann.

Wir wenden uns nun der Gleichung (4.63) zu und nehmen zunächst an, dass die Matrix \mathbf{A} diagonalisierbar ist, d. h., dass \mathbf{A} gemäß

$$\mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{P}\mathbf{Q}^{-1} \quad (4.65)$$

dargestellt werden kann, wobei

$$\mathbf{P} = \text{diag}(p_1, p_2, \dots, p_n) = \begin{pmatrix} p_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & p_n \end{pmatrix}$$

die aus den Eigenwerten von \mathbf{A} gebildete Diagonalmatrix ist und wobei die Spalten der (regulären) Matrix \mathbf{Q} die zugehörigen Eigenvektoren sind. Setzen wir (4.65) in (4.63) ein, so folgt

$$\dot{\mathbf{w}} = \mathbf{Q}\mathbf{P}\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{w} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{Q}^{-1}\dot{\mathbf{w}} = \mathbf{P}\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{w}.$$

Mit Hilfe des Vektors $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)^T = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{w}$ lässt sich dieser Sachverhalt kompakter durch

$$\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{P}\mathbf{v}$$

bzw.

$$\dot{v}_\nu = p_\nu v_\nu, \quad \nu = 1, 2, \dots, n \quad (4.66)$$

ausdrücken. Das ursprüngliche Gleichungssystem wurde also entkoppelt und besteht nun aus n skalaren Differentialgleichungen mit den Lösungen

$$v_\nu(t) = e^{p_\nu t} v_\nu(0), \quad \nu = 1, 2, \dots, n.$$

Es sei bemerkt, dass die Koeffizienten p_ν in den Differentialgleichungen (4.66) i. allg. komplex sind, und zwar selbst dann, wenn \mathbf{A} nur reelle Elemente enthält.

Unter Verwendung der Matrix

$$e^{\mathbf{P}t} := \begin{pmatrix} e^{p_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{p_2 t} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & e^{p_n t} \end{pmatrix}$$

lassen sich diese Lösungen zusammenfassen zu

$$\mathbf{v}(t) = e^{\mathbf{P}t}\mathbf{v}(0). \quad (4.67)$$

Zur Begründung der Schreibweise $e^{\mathbf{P}t}$ sei daran erinnert, dass für alle $z \in \mathbb{C}$ die Exponentialfunktion e^z durch die Reihe

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots = \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{z^\mu}{\mu!}$$

definiert ist. Ersetzt man hierin die (skalare) Variable z durch eine quadratische Matrix, etwa \mathbf{M} , so liegt es nahe, die *Matrix-Exponentialfunktion* $e^{\mathbf{M}}$ wie folgt zu definieren:

$$e^{\mathbf{M}} := \mathbf{1} + \mathbf{M} + \frac{1}{2!}\mathbf{M}^2 + \frac{1}{3!}\mathbf{M}^3 + \cdots = \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{1}{\mu!}\mathbf{M}^\mu.$$

Ohne Beweis sei bemerkt, dass diese Reihe immer konvergiert⁵.

Übertragen wir diese Definition auf $e^{\mathbf{P}t}$ und berücksichtigen, dass die μ -te Potenz der Matrix $\mathbf{P}t$ durch

$$(\mathbf{P}t)^\mu = \begin{pmatrix} (p_1 t)^\mu & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & (p_2 t)^\mu & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & (p_n t)^\mu \end{pmatrix}$$

gegeben ist, so erhalten wir die bereits benutzte Beziehung

$$e^{\mathbf{P}t} = \begin{pmatrix} e^{p_1 t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{p_2 t} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{p_n t} \end{pmatrix}.$$

Wir erkennen also, dass die eingeführte Definition der Matrix-Exponentialfunktion zumindest für Diagonalmatrizen sinnvoll ist, und werden im weiteren Verlauf sehen, dass diese Aussage auch auf andere Matrizen zutrifft.

Als nächstes ersetzen wir in (4.67) den Vektor \mathbf{v} gemäß $\mathbf{v} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{w}$ wieder durch \mathbf{w} und schreiben

$$\mathbf{w}(t) = \boldsymbol{\phi}(t)\mathbf{w}(0) \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{\phi}(t) = \mathbf{Q}e^{\mathbf{P}t}\mathbf{Q}^{-1}.$$

Die Matrix $\boldsymbol{\phi}$ beschreibt den *Übergang*, also die *Transition*, vom Zustand $\mathbf{w}(0)$ zum Zustand $\mathbf{w}(t)$; sie heißt daher *Transitionsmatrix* und kann dargestellt werden in der Form

$$\boldsymbol{\phi}(t) = e^{\mathbf{A}t}.$$

Um dies einzusehen, stellen wir die Matrix \mathbf{A} , die wir ja bislang als diagonalisierbar vorausgesetzt haben, gemäß $\mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{P}\mathbf{Q}^{-1}$ dar und beachten, dass die μ -te Potenz von \mathbf{A} in der Form

$$\mathbf{A}^\mu = \underbrace{\mathbf{Q}\mathbf{P}\mathbf{Q}^{-1} \cdot \mathbf{Q}\mathbf{P}\mathbf{Q}^{-1} \cdots \mathbf{Q}\mathbf{P}\mathbf{Q}^{-1}}_{\mu\text{-mal}} = \mathbf{Q}\mathbf{P}^\mu\mathbf{Q}^{-1}$$

⁵Problemlos zeigen lässt sich dies, wenn man von einer Matrixnorm $\|\cdot\|$ ausgeht, die die Eigenschaften $\|\mathbf{M} + \mathbf{N}\| \leq \|\mathbf{M}\| + \|\mathbf{N}\|$ und $\|\mathbf{M}\mathbf{N}\| \leq \|\mathbf{M}\|\|\mathbf{N}\|$ besitzt.

geschrieben werden kann. Für e^{At} erhalten wir daher

$$e^{At} = \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{1}{\mu!} (At)^{\mu} = Q \left[\sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{1}{\mu!} (Pt)^{\mu} \right] Q^{-1} = Q e^{Pt} Q^{-1}$$

und finden somit die Behauptung bestätigt.

Unabhängig davon, ob die Matrix A diagonalisiert werden kann oder nicht, ist die Lösung der Gleichung (4.63) stets durch

$$w(t) = \phi(t)w(0) \quad \text{mit} \quad \phi(t) = e^{At}$$

gegeben. Bevor wir dies zeigen, sollen zunächst einige Eigenschaften der Matrix-Exponentialfunktion und insbesondere der Transitionsmatrix vorgestellt und diskutiert werden.

Einige Eigenschaften der Matrix-Exponentialfunktion und der Transitionsmatrix

Seien A und B zwei $n \times n$ -Matrizen mit i. allg. komplexen Koeffizienten, d. h. $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Falls A und B (bezüglich der Multiplikation) vertauschbar sind, gilt auch für die Matrix-Exponentialfunktion das bekannte Additionstheorem, d. h.

$$AB = BA \quad \Rightarrow \quad e^{A+B} = e^A e^B. \quad (4.68)$$

Der Beweis lässt sich in gleicher Weise führen wie im skalaren Fall. Die Vertauschbarkeit von A und B muss übrigens vorausgesetzt werden, weil i. allg. nur unter dieser Bedingung die bei dem Beweis auftretende binomische Formel in der bekannten Form gilt, d. h.

$$AB = BA \quad \Rightarrow \quad (A+B)^m = \sum_{\mu=0}^m \binom{m}{\mu} A^{\mu} B^{m-\mu}.$$

Setzen wir $B = -A$ in (4.68) ein, so erkennen wir, dass wegen $e^0 = 1$ die Inverse von e^A stets existiert und durch

$$(e^A)^{-1} = e^{-A} \quad (4.69)$$

gegeben ist.

Wir wenden uns nun der Transitionsmatrix $\phi(t) = e^{At}$ zu; diese besitzt die folgenden Eigenschaften:

1. Die Transitionsmatrix ϕ ist mit der Matrix A vertauschbar:

$$A\phi = \phi A.$$

2. Für $t = 0$ geht $\phi(t)$ über in die Einheitsmatrix:

$$\phi(0) = 1.$$

3. Die Matrix $\phi(t)$ ist für alle $t \in \mathbb{R}$ regulär und ihre Inverse ist durch $\phi(-t)$ gegeben:

$$\boxed{\phi^{-1}(t) = \phi(-t)} . \quad (4.70)$$

4. Seien t_1 und t_2 zwei beliebige Zeitpunkte. Dann gilt

$$\boxed{\phi(t_1 + t_2) = \phi(t_1)\phi(t_2) = \phi(t_2)\phi(t_1)} .$$

5. Die Transitionsmatrix ϕ genügt der Differentialgleichung

$$\boxed{\dot{\phi} = \mathbf{A}\phi \quad \text{mit} \quad \phi(0) = \mathbf{1}} \quad (4.71)$$

und ist zugleich die einzige Lösung dieser Gleichung.

6. Ist \mathbf{q} ein Eigenvektor der Matrix \mathbf{A} und p der zugehörige Eigenwert, so ist \mathbf{q} auch ein Eigenvektor der Transitionsmatrix $\phi(t)$ und e^{pt} ist der zugehörige Eigenwert:

$$\boxed{\mathbf{A}\mathbf{q} = p\mathbf{q} \quad \Rightarrow \quad \phi(t)\mathbf{q} = e^{pt}\mathbf{q}} . \quad (4.72)$$

Die ersten vier Eigenschaften ergeben sich sofort aus den entsprechenden Eigenschaften der Matrix-Exponentialfunktion. Zum Nachweis der fünften Eigenschaft gehen wir von der Darstellung der Funktion ϕ durch die Potenzreihe

$$\phi(t) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{1}{\mu!} (\mathbf{A}t)^{\mu} = \mathbf{1} + \mathbf{A}t + \frac{(\mathbf{A}t)^2}{2!} + \frac{(\mathbf{A}t)^3}{3!} + \dots$$

aus und berechnen die Ableitung von ϕ :

$$\begin{aligned} \dot{\phi}(t) &= \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\phi(t+\tau) - \phi(t)}{\tau} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\phi(\tau) - \mathbf{1}}{\tau} \phi(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \left[\mathbf{A}\tau + \frac{(\mathbf{A}\tau)^2}{2!} + \frac{(\mathbf{A}\tau)^3}{3!} + \dots \right] \phi(t) \\ &= \mathbf{A}\phi(t) . \end{aligned}$$

Um zu beweisen, dass ϕ die einzige Lösung der Differentialgleichung (4.71) ist, beachten wir, dass wegen (4.70) jede beliebige Funktion $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^{n \times n}$ dargestellt werden kann gemäß

$$\psi(t) = \phi(t)\Gamma(t) \quad \text{mit} \quad \Gamma(t) = \phi(-t)\psi(t) .$$

Setzen wir ψ als Unbekannte in die Gleichung (4.71) ein, so finden wir

$$\dot{\Gamma}(t) = 0 \quad \text{bzw.} \quad \Gamma(t) = \text{const.}$$

Wegen der Anfangsbedingung $\phi(0) = \mathbf{1}$ folgt $\Gamma = \mathbf{1}$ und der Nachweis, dass $\phi(t) = \exp(\mathbf{A}t)$ die einzige Lösung der Differentialgleichung (4.71) ist, ist erbracht.

Die sechste Eigenschaft folgt sofort aus der Tatsache, dass ein Eigenvektor von \mathbf{A} zugleich auch ein Eigenvektor von \mathbf{A}^{μ} ist:

$$\mathbf{A}\mathbf{q} = p\mathbf{q} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A}^{\mu}\mathbf{q} = p^{\mu}\mathbf{q} .$$

Wir kehren nun zurück zu der homogenen Differentialgleichung

$$\dot{\mathbf{w}} = \mathbf{A}\mathbf{w}$$

Dass, wie bereits erwähnt,

$$\mathbf{w}(t) = \phi(t)\mathbf{w}(0) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{w}(0)$$

diese Gleichung löst und keine weitere Lösung existiert, ergibt sich unmittelbar aus der Eigenschaft (4.71). Ist der Anfangszustand, \mathbf{w}_0 , nicht zum Zeitpunkt $t = 0$ gegeben, sondern zu einem irgendeinem beliebigen Zeitpunkt, etwa $t = t_0$, so können wir unter Berücksichtigung der erwähnten Eigenschaften der Transitionsmatrix und wegen $\mathbf{w}_0 = \phi(t_0)\mathbf{w}(0)$ schreiben

$$\mathbf{w}(t) = \phi(t)\mathbf{w}(0) = \phi(t)\phi^{-1}(t_0)\mathbf{w}_0 = \phi(t)\phi(-t_0)\mathbf{w}_0$$

und somit

$$\boxed{\mathbf{w}(t) = \phi(t - t_0)\mathbf{w}_0, \quad \mathbf{w}_0 = \mathbf{w}(t_0)}.$$

Lösung der inhomogenen Gleichung

Wir nehmen an, das Eingangssignal x sei verschieden von Null, und betrachten die erste Gleichung in (4.59):

$$\dot{\mathbf{w}} = \mathbf{A}\mathbf{w} + \mathbf{b}x. \quad (4.73)$$

Um eine Lösung dieser Gleichung, die auch als inhomogene Differentialgleichung bezeichnet wird, mit dem Anfangszustand $\mathbf{w}_0 = \mathbf{w}(t_0)$ zu finden, verwenden wir die Methode der *Variation der Konstanten*. Wir wählen für den Zustand \mathbf{w} den Ansatz

$$\mathbf{w}(t) = \phi(t)\gamma(t) \quad \text{mit} \quad \gamma(t_0) = \phi(-t_0)\mathbf{w}_0.$$

Setzen wir diesen Ausdruck in (4.73) ein, so folgt

$$\phi(t)\dot{\gamma}(t) = \mathbf{b}x(t) \quad \text{bzw.} \quad \dot{\gamma}(t) = \phi(-t)\mathbf{b}x(t).$$

Unter Berücksichtigung von $\gamma(t_0) = \phi(-t_0)\mathbf{w}_0$ folgt weiter für γ

$$\gamma(t) = \phi(-t_0)\mathbf{w}_0 + \int_{t_0}^t \phi(-\tau)\mathbf{b}x(\tau) d\tau$$

und schließlich für \mathbf{w}

$$\boxed{\mathbf{w}(t) = \phi(t - t_0)\mathbf{w}_0 + \int_{t_0}^t \phi(t - \tau)\mathbf{b}x(\tau) d\tau}.$$

Für das Ausgangssignal erhalten wir hieraus unter Verwendung der zweiten Zeile in (4.59)

$$\boxed{y(t) = \mathbf{c}^T \phi(t - t_0)\mathbf{w}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{c}^T \phi(t - \tau)\mathbf{b}x(\tau) d\tau + d \cdot x(t)} \quad (4.74)$$

Wie im zeitdiskreten Fall können wir auch hier feststellen, dass als Folge der Linearität der Zustandsgleichungen der Zustand $\mathbf{w}(t)$ und auch das Ausgangssignal $y(t)$ sich jeweils aus zwei

Teilen zusammensetzen; aus einem, der nur vom Anfangszustand \mathbf{w}_0 abhängt, und einem weiteren, der nur durch das Eingangssignal bestimmt ist.

Damit der Einfluss eines beliebigen Anfangszustandes auf den weiteren Verlauf des Zustandes für $t_0 \rightarrow -\infty$ verschwindet, muss gelten

$$\lim_{t_0 \rightarrow -\infty} \phi(t - t_0) \mathbf{w}_0 = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{w}_0 \in \mathbb{C}^n$$

bzw.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t) \mathbf{w}_0 = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{w}_0 \in \mathbb{C}^n .$$

Diese Forderung ist genau dann erfüllt, wenn sämtliche Eigenwerte von \mathbf{A} in der linken p -Halbebene liegen, wenn also stets folgende Implikation gilt:

$$\det(p\mathbf{1} - \mathbf{A}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{Re} p < 0 .$$

Bezeichnen wir den Realteil des am weitesten rechts liegenden Eigenwerts der Matrix \mathbf{A} mit $\alpha(\mathbf{A})$, d. h.

$$\alpha(\mathbf{A}) = \max\{\operatorname{Re} p : \det(p\mathbf{1} - \mathbf{A}) = 0\} , \quad (4.75)$$

so lässt sich diese Bedingung äquivalent durch

$$\alpha(\mathbf{A}) < 0$$

ausdrücken (siehe Bild 4.24). Dass diese Bedingung *notwendig* für das Verschwinden des Zu-

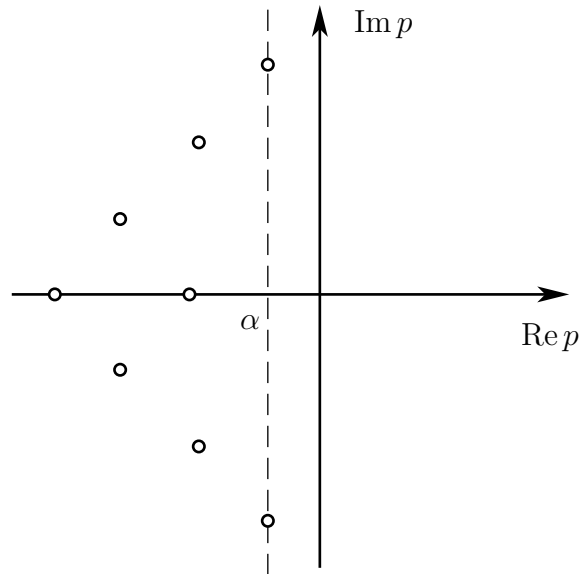


Bild 4.24: Zur Definition der Größe $\alpha(\mathbf{A})$: Die Kreise in der linken p -Halbebene sollen die Lage der Eigenwerte von \mathbf{A} kennzeichnen. Die Größe $\alpha(\mathbf{A})$ ist gleich dem Realteil des am weitesten rechts liegenden Eigenwerts bzw. des am weitesten rechts liegende Eigenwertpaars.

stands ist, erkennt man wie folgt. Wir nehmen an, die Bedingung sei verletzt, also mindestens ein Eigenwert von \mathbf{A} , er heiße p_0 , genüge der Ungleichung $\operatorname{Re} p_0 \geq 0$. Als Anfangszustand wählen wir einen zu p_0 gehörenden Eigenvektor, d. h.

$$\mathbf{A} \mathbf{w}_0 = p_0 \mathbf{w}_0 .$$

Als Folge der Eigenschaft (4.72) erhalten wir dann

$$\phi(t)\mathbf{w}_0 = e^{p_0 t}\mathbf{w}_0$$

und somit

$$|\phi(t)\mathbf{w}_0| = e^{t \operatorname{Re} p_0} |\mathbf{w}_0| .$$

Falls $\operatorname{Re} p_0 > 0$, wächst der links stehende Betrag für $t \rightarrow \infty$ exponentiell an. Ist der Realteil von p_0 null, so würde $|\phi(t)\mathbf{w}_0|$ zwar nicht exponentiell wachsen, aber auch nicht verschwinden. Damit $|\phi(t)\mathbf{w}_0|$ für $t \rightarrow \infty$ verschwinden kann, müssen also alle Eigenwerte von \mathbf{A} einen negativen Realteil haben.

Diese Bedingung ist auch hinreichend für das Verschwinden des Einflusses des Anfangszustandes. Dies lässt sich leicht für den Fall zeigen, dass die $n \times n$ -Matrix \mathbf{A} insgesamt n linear unabhängige Eigenvektoren $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_n$ besitzt. Unter dieser Bedingung kann nicht nur \mathbf{A} , sondern, wie bereits erwähnt, auch $\phi(t)$ diagonalisiert werden. Die Transitionsmatrix kann also gemäß

$$\phi(t) = \mathbf{Q} \begin{pmatrix} e^{p_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{p_2 t} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & e^{p_n t} \end{pmatrix} \mathbf{Q}^{-1}$$

dargestellt werden und man erkennt, dass $\phi(t)$ genau dann für $t \rightarrow \infty$ verschwindet, wenn alle Eigenwerte p_ν einen negativen Realteil haben. In diesem Fall liegen die Eigenwerte der Transitionsmatrix für $t > 0$ innerhalb des Einheitskreises, d. h. der Spektralradius von $\phi(t)$ ist kleiner als 1 und strebt für $t \rightarrow \infty$ gegen Null.

Damit ein System sinnvoll zur Übertragung von Signalen eingesetzt werden kann, muss der Einfluss des Anfangszustandes auf den momentanen Zustand und damit auf das Ausgangssignal verschwinden. Dies ist aber genau dann gegeben, sämtliche Eigenwerte von \mathbf{A} in der linken p -Halbebene liegen. Es handelt sich hierbei um eine elementare Stabilitätsforderung, die bei Übertragungssystemen immer erfüllt sein muss. Nur dadurch ist sichergestellt, dass im eingeschwungenen Zustand das Ausgangssignal nur vom Eingangssignal abhängig ist und nicht von einem lange zurückliegenden Anfangszustand.

4.2.7 Impulsantwort und Übertragungsfunktion

Zur Bestimmung der Impulsantwort setzen wir

$$x(t) = \delta(t) \quad \text{und} \quad \mathbf{w}_0 = \mathbf{0} , \quad t_0 < 0 .$$

Aus (4.74) folgt dann

$$h(t) = \int_{t_0}^t \mathbf{c}^T \phi(t - \tau) \mathbf{b} \delta(\tau) d\tau + d\delta(t) .$$

Unter Beachtung der Ausblendeigenschaft der δ -Funktion folgt hieraus

$$\boxed{h(t) = \mathbf{c}^T \phi(t) \mathbf{b} \varepsilon(t) + d\delta(t)} , \quad (4.76)$$

wobei ε die Sprungfunktion kennzeichnet.

Um die Übertragungsfunktion H zu bestimmen, setzen wir

$$x(t) = X e^{pt} \quad X, p \in \mathbb{C}$$

in die Gleichung (4.74) ein und wählen für den Zustand $\mathbf{w}(t)$ den Ansatz

$$\mathbf{w}(t) = \mathbf{W} e^{pt} \quad \text{mit} \quad \mathbf{W} \in \mathbb{C}^n .$$

Als Ergebnis erhalten wir

$$p \mathbf{W} e^{pt} = \mathbf{A} \mathbf{W} e^{pt} + \mathbf{b} X e^{pt} .$$

Wegen $e^\zeta \neq 0 \quad \forall \zeta \in \mathbb{C}$ folgt weiter

$$(p \mathbf{1} - \mathbf{A}) \mathbf{W} = \mathbf{b} X . \quad (4.77)$$

Falls p kein Eigenwert von \mathbf{A} ist, die Matrix $p \mathbf{1} - \mathbf{A}$ also regulär ist, können wir (4.77) von links mit der Inversen dieser Matrix multiplizieren und schreiben

$$\mathbf{W} = (p \mathbf{1} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b} X .$$

Setzen wir schließlich $x(t) = X e^{pt}$ und $\mathbf{w}(t) = \mathbf{W} e^{pt}$ in die zweite der Gleichungen (4.59) ein, so erhalten wir

$$y(t) = H(p) X e^{pt}$$

mit

$$H(p) = \mathbf{c}^T (p \mathbf{1} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b} + d .$$

Mit Ausnahme der Bezeichnung für die unabhängige Variable ist diese Funktion offenbar die gleiche, die wir für das zeitdiskrete Zustandsmodell gefunden haben. Das heißt, dass die mathematischen Eigenschaften die wir für die zeitdiskrete Übertragungsfunktion herleiten konnten, auch hier gelten. Insbesondere ist H eine rationale Funktion und kann gemäß

$$H(p) = \frac{\mathbf{c}^T \text{adj}(p \mathbf{1} - \mathbf{A}) \mathbf{b} + d \det(p \mathbf{1} - \mathbf{A})}{\det(p \mathbf{1} - \mathbf{A})} .$$

bzw.

$$H(p) = \frac{\alpha_n p^n + \alpha_{n-1} p^{n-1} + \dots + \alpha_0}{p^n + \beta_{n-1} p^{n-1} + \dots + \beta_0} , \quad (4.78)$$

dargestellt werden, wobei der Koeffizient α_n durch d gegeben ist. Wie im zeitdiskreten Fall kann auch hier die Situation auftreten, dass Zähler und Nenner gleiche Teiler enthalten, die gekürzt werden können und den Grad entsprechend reduzieren. Die Polstellenmenge von H ist aber stets eine Teilmenge der Eigenwerte von \mathbf{A} , also der Nullstellen von $\det(p \mathbf{1} - \mathbf{A})$:

$$\{p : p \text{ ist Polstelle von } H\} \subseteq \{p : p \text{ ist Eigenwert von } \mathbf{A}\} .$$

Wenn auch die mathematischen Eigenschaften der zeitdiskreten und der zeitkontinuierlichen Übertragungsfunktion gleich sind, bestehen in systemtheoretischer Hinsicht doch wesentliche Unterschiede. Bevor wir uns mit diesen Unterschieden etwas näher befassen, wollen

wir uns davon überzeugen, dass die durch (4.78) definierte Übertragungsfunktion gleich der LAPLACE-Transformierten der Impulsantwort (4.76) ist:

$$\mathcal{L}\{h\}(p) = \int_{0-}^{\infty} h(t)e^{-pt} dt = \int_{0-}^{\infty} \mathbf{c}^T \boldsymbol{\phi}(t) \mathbf{b} e^{-pt} dt + d = \mathbf{c}^T \boldsymbol{\Phi}(p) \mathbf{b} + d .$$

Hierin bezeichnet $\boldsymbol{\Phi}$ die LAPLACE-Transformierte der Transitionsmatrix $\boldsymbol{\phi}$, die durch

$$\boldsymbol{\Phi}(p) = (p\mathbf{1} - \mathbf{A})^{-1} , \quad \operatorname{Re} p > \alpha(\mathbf{A}) \quad (4.79)$$

gegeben ist, wobei $\alpha(\mathbf{A})$ gleich dem Realteil des am weitesten rechts liegenden Eigenwerts der Matrix \mathbf{A} ist:

$$\alpha(\mathbf{A}) = \max\{\operatorname{Re} p : \det(p\mathbf{1} - \mathbf{A}) = 0\} .$$

Die Gerade $p = \alpha(\mathbf{A})$ begrenzt also das Konvergenzgebiet des LAPLACE-Integrals nach links.

Um zu zeigen, dass die LAPLACE-Transformierte der Transitionsmatrix tatsächlich durch (4.79) gegeben ist, sei zunächst bemerkt, dass die LAPLACE-Transformierte einer Matrix elementweise definiert wird. Sodann sei daran erinnert, dass die Transitionsmatrix eindeutig durch die Differentialgleichung

$$\dot{\boldsymbol{\phi}} = \mathbf{A}\boldsymbol{\phi} , \quad \boldsymbol{\phi}(0) = \mathbf{1}$$

charakterisiert werden kann. Die LAPLACE-Transformation dieser Gleichung ergibt unter Berücksichtigung des Differentiationssatzes

$$p\boldsymbol{\Phi}(p) - \boldsymbol{\phi}(0) = \mathbf{A}\boldsymbol{\Phi}(p)$$

und somit den bereits oben erwähnten Ausdruck

$$\boldsymbol{\Phi}(p) = (p\mathbf{1} - \mathbf{A})^{-1} .$$

Da rechts von der Geraden $\operatorname{Re} p = \alpha(\mathbf{A})$ keine Singularitäten auftauchen (siehe Bild 4.24) konvergiert das LAPLACE-Integral für alle p mit $\operatorname{Re} p > \alpha(\mathbf{A})$.

4.3 Die Bilinear-Transformation

Wie bereits erwähnt, besteht in systemtheoretischer Hinsicht ein erheblicher Unterschied zwischen der Übertragungsfunktion eines zeitkontinuierlichen Systems und derjenigen eines zeitdiskreten Systems. Der Einfachheit halber wollen wir bei der folgenden Diskussion die Übertragungsfunktion des zeitkontinuierlichen Systems mit H_k und die des zeitdiskreten Systems mit H_d bezeichnen.

Sowohl H_k als auch H_d haben sich als rationale Funktionen herausgestellt, aber die Bedeutung der unabhängigen Variablen war in beiden Fällen unterschiedlich. Im zeitkontinuierlichen Fall ist die Übertragungsfunktion, also H_k , eine rationale Funktion der komplexen Frequenz, die wir mit p bezeichnet hatten. Im Interesse der Stabilität muss H_k in $\{p \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} p > 0\}$ holomorph sein, d.h. etwaige Pole müssen in der offenen linken Halbebene liegen. Da eine rationale Funktion außer an den Polen überall holomorph ist, muss also H_k in der rechten Halbebene beschränkt bleiben:

$$|H_k(p)| < M < \infty \quad \text{für} \quad \operatorname{Re} p > 0 .$$

Das spektrale Verhalten der Funktion H_k wird bestimmt durch den Verlauf der Funktion für $\operatorname{Re} p = 0$ bzw. für $p = j\omega$. Bezeichnet $X(j\omega)$ das Spektrum des Eingangssignals, dann ist

$$Y(j\omega) = H_k(j\omega)X(j\omega)$$

das Spektrum des Ausgangssignals. Sowohl $H_k(j\omega)$ als auch $|H_k(j\omega)|^2$ sind rationale Funktionen der (reellen) Frequenz ω .

Im zeitdiskreten Fall ist die Übertragungsfunktion, also H_d , wie bereits mehrfach erwähnt, ebenfalls eine rationale Funktion, aber nicht der komplexen Frequenz p , sondern der Variablen

$$z = e^{pT} ,$$

wobei T die Betriebsperiode des zeitdiskreten Systems bezeichnet. Fassen wir H_d in Abhängigkeit von p auf, betrachten also in Wirklichkeit die Funktion $\hat{H}_d(p) := H_d(e^{pT})$, so ist die Übertragungsfunktion sogar transzendent und periodisch mit der Periode $j2\pi$:

$$\hat{H}_d(p) = \hat{H}_d(p + j2\pi) .$$

Im Interesse der Stabilität muss H_d in $\{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$ holomorph sein und wegen der Kausalität für $z \rightarrow \infty$ endlich bleiben. Sämtliche Pole von H_d müssen also innerhalb des Einheitskreises liegen. Da H_d rational ist, können wir also schreiben

$$|H_d(z)| < M < \infty \quad \text{für} \quad |z| > 1 .$$

Das spektrale Verhalten der Funktion H_k wird bestimmt durch $\hat{H}_d(j\omega) = H(e^{j\omega T})$. Das Spektrum des Ausgangssignals berechnet sich also gemäß

$$\hat{Y}(j\omega) = H_d(e^{j\omega T})\hat{X}(j\omega) \quad \text{bzw.} \quad \hat{Y}(j\omega) = \hat{H}_d(j\omega)\hat{X}(j\omega) ,$$

wobei \hat{X} und \hat{Y} die zeitdiskreten FOURIER-Transformierten von x bzw. y bezeichnen. Wegen der Periodizität der Funktion \hat{H}_d braucht im Frequenzbereich nur eine Periode betrachtet zu werden, also beispielsweise das sogenannte NYQUIST-Intervall

$$-\pi/T < \omega < \pi/T .$$

Wir wollen nun eine einfache Transformation einführen, die es uns gestattet, die Funktion H_d derart zu transformieren, dass diese in gewisser Weise die Eigenschaften der Funktion H_k annimmt. Hierzu ersetzen wir die Variable z durch

$$z = \frac{1 + \psi}{1 - \psi} \quad \Longleftrightarrow \quad \psi = \frac{z - 1}{z + 1} \quad (4.80)$$

und fassen H_d als Funktion von ψ auf, betrachten also die Funktion \tilde{H}_d mit

$$\tilde{H}_d(\psi) = H_d\left(\frac{1 + \psi}{1 - \psi}\right).$$

Weil (4.80) auch in der Form

$$f(z, \psi) = 0 \quad \text{mit} \quad f(z, \psi) = \psi z - z + \psi + 1$$

geschrieben werden kann, wobei f eine lineare Funktion sowohl der Variablen ψ als auch der Variablen z ist, bezeichnet man die durch (4.80) definierte Abbildung häufig als *Bilinear-Transformation*, und zwar vor allem im technischen Bereich.

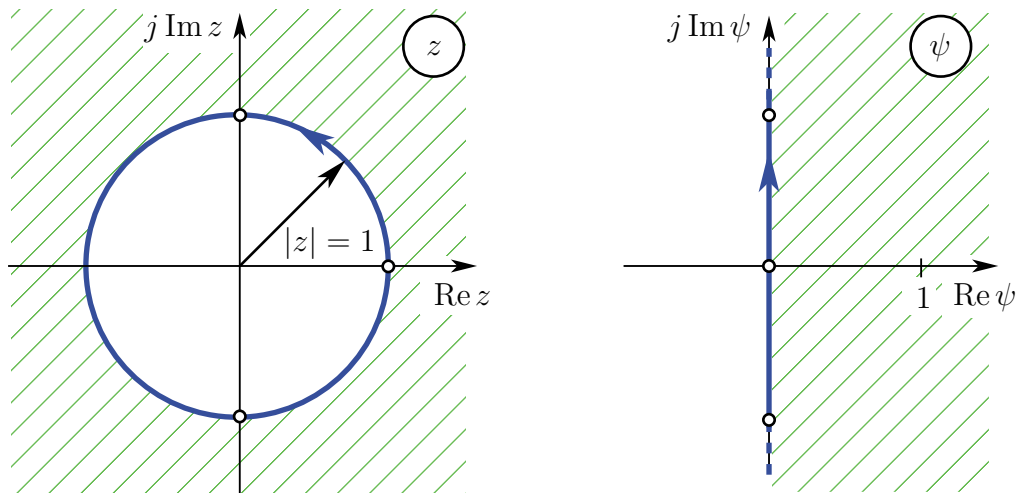


Bild 4.25: Bilinear-Transformation: Das Äußere des Einheitskreises in der z -Ebene einschließlich des Punktes ∞ wird bijektiv auf die offene rechte ψ -Halbebene abgebildet. Der Rand des Einheitskreises wird ebenfalls bijektiv auf die (abgeschlossene) imaginäre Achse abgebildet.

Die Bilinear-Transformation bildet die durch den Punkt ∞ abgeschlossene komplexe ψ -Ebene umkehrbar eindeutig auf die ebenfalls mit dem Punkt ∞ abgeschlossene z -Ebene ab⁶. Es handelt sich also um eine *bijektive Abbildung*. Insbesondere können folgende Äquivalenzen angegeben werden:

$$z = -1 \quad \Longleftrightarrow \quad \psi = \infty \quad (4.81)$$

$$z = \infty \quad \Longleftrightarrow \quad \psi = 1 \quad (4.82)$$

$$|z| < 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \text{Re } \psi < 0 \quad (4.83)$$

$$z \neq -1 \wedge |z| = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \text{Re } \psi = 0 \quad (4.84)$$

$$|z| > 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \text{Re } \psi > 0 \wedge \psi \neq 1 \quad (4.85)$$

⁶Mathematisch handelt es sich bei der z - und der ψ -Ebene natürlich jeweils um die gleiche Menge, nämlich um die abgeschlossene komplexe Ebene $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Da den Variablen z und ψ in der Systemtheorie aber jeweils eine eigene Bedeutung zukommt, ist die hier vorgenommene Unterscheidung sinnvoll.

In Bild 4.25 sind diese Zusammenhänge veranschaulicht; farblich hervorgehoben sind die Äquivalenzen (4.84) und (4.85).

Die beiden ersten Äquivalenzen ergeben sich unmittelbar aus den Gleichungen (4.80), während die verbleibenden drei sofort aus

$$|z|^2 = \frac{1 + \psi}{1 - \psi} \cdot \frac{1 + \psi^*}{1 - \psi^*} = 1 + 4 \frac{\operatorname{Re} \psi}{|1 - \psi|^2} \quad (4.86)$$

und

$$\operatorname{Re} \psi = \frac{1}{2} \left[\frac{z - 1}{z + 1} + \frac{z^* - 1}{z^* + 1} \right] = \frac{|z|^2 - 1}{|z + 1|^2} \quad (4.87)$$

resultieren.

Mit Hilfe der angegebenen Äquivalenzen lässt sich leicht die Richtigkeit der beiden folgenden Sätze zeigen:

Satz: Sei h ein Polynom n -ten Grades mit

$$h(\psi) = h_n \psi^n + h_{n-1} \psi^{n-1} + \dots + h_0 \quad \text{und} \quad h(\psi) \neq 0 \quad \text{für} \quad \operatorname{Re} \psi \geq 0. \quad (4.88)$$

Dann ist g mit

$$g(z) = (z + 1)^n h\left(\frac{z - 1}{z + 1}\right) \quad (4.89)$$

ein Polynom n -ten Grades mit der Eigenschaft

$$g(z) \neq 0 \quad \text{für} \quad |z| \geq 1.$$

Satz: Sei g ein Polynom n -ten Grades mit

$$g(z) = g_n z^n + g_{n-1} z^{n-1} + \dots + g_0 \quad \text{und} \quad g(z) \neq 0 \quad \text{für} \quad |z| \geq 1. \quad (4.90)$$

Dann ist h mit

$$h(\psi) = (1 - \psi)^n g\left(\frac{1 + \psi}{1 - \psi}\right)$$

ein Polynom n -ten Grades mit der Eigenschaft

$$h(\psi) \neq 0 \quad \text{für} \quad \operatorname{Re} \psi \geq 0. \quad (4.91)$$

Ein Polynom mit der Eigenschaft (4.88) bzw. (4.91) heißt übrigens *HURWITZ-Polynom* und ein Polynom mit der Eigenschaft (4.89) bzw. (4.90) wird *Einheitskreis-Polynom* genannt. Zur Sicherstellung der Stabilität muss also der Nenner von H_k ein HURWITZ-Polynom und der Nenner von H_d ein Einheitskreis-Polynom sein. Mit Hilfe der Bilinear-Transformation wird also aus der Übertragungsfunktion eines stabilen (und kausalen) zeitdiskreten Systems die Übertragungsfunktion eines stabilen zeitkontinuierlichen Systems und umgekehrt. Das heißt, dass Stabilitätskriterien, die für zeitkontinuierliche Systeme formuliert sind, unmittelbar auf zeitdiskrete Systeme übertragen werden können (und natürlich umgekehrt).

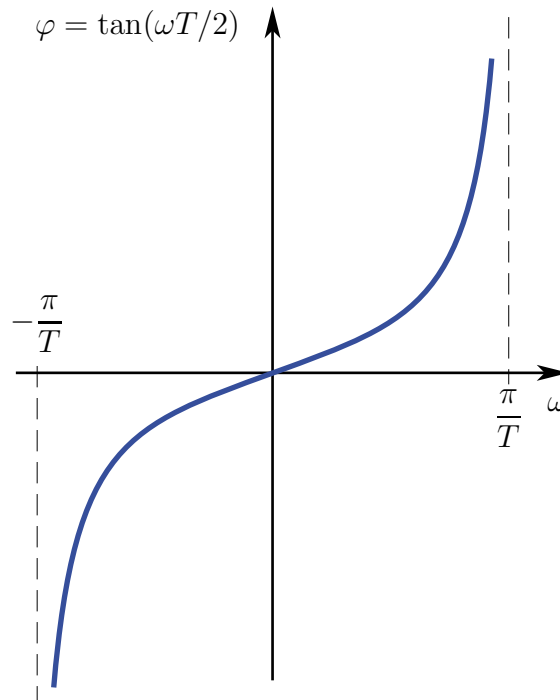


Bild 4.26: Bilinear-Transformation: Das reelle Frequenzintervall $(-\pi/2, \pi/2)$ wird bijektiv auf \mathbb{R} abgebildet.

Neben der Stabilität kann mit Hilfe der Bilinear-Transformation auch noch ein weiteres Problem gelöst werden. Das auf Grund des Abtasttheorems für zeitdiskrete Systeme interessierende Frequenzintervall

$$-\pi/T < \omega < \pi/T$$

wird mit der Bilinear-Transformation bijektiv auf \mathbb{R} abgebildet. Setzt man nämlich $z = e^{j\omega T}$ in (4.80) ein, so folgt

$$\psi = \frac{e^{j\omega T} - 1}{e^{j\omega T} + 1} = j\varphi \quad \text{mit} \quad \varphi = \tan\left(\frac{\omega T}{2}\right).$$

Man bezeichnet φ auch als *äquivalente Frequenzvariable*. Der Zusammenhang zwischen ω und φ ist in Bild 4.26 graphisch dargestellt. Die durch die Bilinear-Transformation aus H_d bzw. $|H_d|^2$ gewonnenen Funktionen $\tilde{H}_d(j\varphi)$ und $|\tilde{H}_d(j\varphi)|^2$ sind nun wieder rationale Funktionen, und zwar der Frequenzvariablen φ . Somit können mathematische Approximationsverfahren, die seit langem für rationale Funktionen bekannt sind, unmittelbar auf zeitdiskrete Aufgabenstellungen angewandt werden.