

# **Modulfunktionen**

Jürgen Elstrodt

31. Januar 2005



# 1 Die Modulgruppe und ihre Untergruppen

## 1.1 Linear-gebrochene Abbildungen

Im folgenden sei  $\mathbb{C}$  die komplexe Ebene,  $\mathbb{P} = \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  die sog. *Riemannsche Zahlenkugel*,  $\mathbb{E} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$  und  $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$ . Weiter sei  $R$  ein kommutativer Ring mit Einselement und dazu

$$\begin{aligned} \mathrm{SL}_2(R) &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in R, ad - bc = 1 \right\} \\ \mathrm{GL}_2(R) &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in R, ad - bc \in R^\times \right\} \end{aligned}$$

Für ein Gebiet  $G \subset \mathbb{P}$  sei  $\operatorname{Aut} G$  die Gruppe der biholomorphen Abbildungen  $f: G \rightarrow G$ .

**1.1.1 Satz** a)  $\operatorname{Aut} \mathbb{P}$  ist die Gruppe der linear gebrochenen Abbildungen des Typs  $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$  mit  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$  und

$$\simeq \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) / \{\lambda I \mid \lambda \in \mathbb{C}^\times\} \simeq \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) / \{\pm I\}.$$

b)  $\operatorname{Aut} \mathbb{C}$  ist die Gruppe der linearen Transformationen vom Typ  $z \mapsto az + b$  mit  $a, b \in \mathbb{C}$ ,  $a \neq 0$ .

c)  $\operatorname{Aut} \mathbb{E}$  ist die Gruppe der linear gebrochenen Abbildungen vom Typ  $z \mapsto e^{i\alpha} \frac{z-z_0}{1-\bar{z}_0 z}$  mit  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $z_0 \in \mathbb{E}$  und gleich der Gruppe der linear gebrochenen Abbildungen vom Typ  $z \mapsto \frac{\alpha z + \beta}{\beta z + \bar{\alpha}}$  mit  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ,  $|\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1$ .

d)  $\operatorname{Aut} \mathbb{H}$  ist die Gruppe der linear gebrochenen Abbildungen des Typs  $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$  mit  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ .

B Siehe Elstrodt (2004)

□

Zur Erinnerung: Sei  $S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ . Dann sei  $Sz := \frac{az+b}{cz+d}$  mit den üblichen Konventionen, falls  $cz+d=0$  oder  $z=\infty$ . Damit gilt:  $S(Tz) = (ST)z$  für alle  $S, T \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ .

**1.1.2 Lemma (Rechenregeln)** Sei  $S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ . Dann gilt:

a)  $Sz - Sw = \frac{z - w}{(cz + d)(cw + d)}$  für  $z, w \in \mathbb{C} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\}$ .

b)  $S'(z) = (cz + d)^{-2}$  für  $z \neq -\frac{d}{c}$ .

c) Sei  $c \neq 0$ . Dann gilt:

$$Sz = \frac{a}{c} - \frac{1}{c(cz + d)} = S\infty - \frac{1}{c(cz + d)}.$$

d) Sei  $S \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ ,  $z \in \mathbb{H}$ . Dann ist

$$\mathrm{Im} Sz = \frac{\mathrm{Im} z}{|cz + d|^2}.$$

e) Für  $S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$  gilt:  $S^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ .

B a) Mit  $ad - bc = 1$  gilt:

$$\begin{aligned} Sz - Sw &= \frac{az + b}{cz + d} - \frac{aw + b}{cw + d} \\ &= \frac{(az + b)(cw + d) - (aw + b)(cz + d)}{(cz + d)(cw + d)} \\ &= \frac{(ad - bc)(z - w)}{(cz + d)(cw + d)} \end{aligned}$$

b) klar nach a) mit  $w \rightarrow z$ .

c)  $w \rightarrow \infty$  in a).

d)  $w = \bar{z}$  in a).

e) klar. □

**Bemerkung** Aus Lemma c) folgt: Linear gebrochene Abbildungen sind „Kreisverwandtschaften“ auf  $\mathbb{P}$ .

**1.1.3 Satz** Jede Transformation  $S \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) / \{\pm I\}$  hat mindestens einen und höchstens zwei Fixpunkte in  $\mathbb{P}$ ; genauer gilt:

Spur  $S = \pm 2 \Leftrightarrow S$  hat genau einen Fixpunkt,

Spur  $S \neq \pm 2 \Leftrightarrow S$  hat genau zwei Fixpunkte.

B Sei  $S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \neq \pm I$ .

(i)  $c = 0 \Rightarrow d = a^{-1} \neq 0$ ,  $Sz = a(az + b)$ .  $\Rightarrow \infty$  ist Fixpunkt von  $S$ . Ferner gilt für  $z \in \mathbb{C}$ :

$$Sz = z \iff z = \frac{ab}{1 - a^2}.$$

Wegen  $S \neq \pm I$  ist nicht zugleich  $a^2 = 1$  und  $b = 0$ . Das heißt: Ist  $a^2 = 1$ , so ist  $b \neq 0$ , es existiert also keine Lösung in  $\mathbb{C}$ .

$$a^2 = 1 \Leftrightarrow a = \pm 1 \Leftrightarrow a + d = \pm 2.$$

Es existiert also genau ein Fixpunkt.

(ii) Ist  $c \neq 0$ , so ist  $\infty$  kein Fixpunkt von  $S$ , mögliche Fixpunkte liegen also nur in  $\mathbb{C}$ . Für  $z \in \mathbb{C}$  gilt jetzt:

$$\begin{aligned} Sz = z &\Leftrightarrow az + b = (cz + d)z \\ &\Leftrightarrow z^2 + \frac{d-a}{c}z - \frac{b}{c} = 0 \\ &\Leftrightarrow z^2 + \frac{d-a}{c}z + \left(\frac{d-a}{2c}\right)^2 = \frac{b}{c} + \left(\frac{d-a}{2c}\right)^2 \\ &= \frac{4(ad-1)}{4c^2} + \frac{d^2 - 2ad + a^2}{4c^2} = \frac{(a+d)^2 - 4}{4c^2} \\ &\Leftrightarrow z = \frac{a-d}{2c} \pm \frac{\sqrt{(a+d)^2 - 4}}{2c}. \end{aligned}$$

Auch hier wurde wieder  $ad - bc = 1$  ausgenutzt. Genau eine Lösung existiert also genau dann, wenn  $\text{Spur } S = a + d = \pm 2$ . Die obige Rechnung liefert uns auch gleich eine Formel für die Fixpunkte von  $S$  im Falle  $c \neq 0$ :

$$\omega_{1/2} = \frac{a-d}{2c} \pm \frac{\sqrt{(a+d)^2 - 4}}{2c}.$$

□

**1.1.4 Korollar** Sei  $\pm I \neq S \in \text{SL}_2(\mathbb{R})$ . Dann gilt:  $S$  hat entweder genau einen Fixpunkt in  $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$  oder zwei Fixpunkte in  $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$  oder zwei konjugiert komplexe Fixpunkte in  $\mathbb{C}$ , und zwar gilt:

- a)  $S$  hat genau einen Fixpunkt in  $\mathbb{R} \cup \{\infty\} \Leftrightarrow \text{Spur } S = \pm 2 \Leftrightarrow S$  heißt parabolisch.
- b)  $S$  hat genau zwei Fixpunkte in  $\mathbb{R} \cup \{\infty\} \Leftrightarrow |\text{Spur } S| > 2 \Leftrightarrow S$  heißt hyperbolisch.
- c)  $S$  hat genau zwei konjugiert komplexe Fixpunkte in  $\mathbb{C} \Leftrightarrow |\text{Spur } S| < 2 \Leftrightarrow S$  heißt elliptisch.

Die Bezeichnungen in den drei Fällen stammen von F. K.

Genauere Diskussion des Abbildungsverhaltens:

**1.1.5 Satz** Sei  $\pm I \neq S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ . Dann gilt:

- a)  $S$  parabolisch  $\Leftrightarrow S$  ist in  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$  zu  $\pm U^{\pm 1}$  konjugiert, wobei  $U^{\mu} := \begin{pmatrix} 1 & \mu \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .
- b)  $S$  hyperbolisch  $\Leftrightarrow S$  ist in  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$  zu  $\pm D_{\lambda}$  konjugiert mit  $\lambda > 1$  und  $D_{\lambda} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}$ .
- c)  $S$  elliptisch  $\Leftrightarrow S$  ist in  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$  konjugiert zu  $R_{\varphi}$  mit  $0 \neq \varphi \in ]-2\pi, 2\pi[$ , wobei wir setzen  $R_{\varphi} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\varphi}{2} & \sin \frac{\varphi}{2} \\ -\sin \frac{\varphi}{2} & \cos \frac{\varphi}{2} \end{pmatrix}$ .

Der jeweils angegebene Vertreter der Konjugations-Klassen von  $S$  ist eindeutig bestimmt.

- B a)  $S$  sei parabolisch und  $\omega \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  der Fixpunkt von  $S$ . Dann existiert ein  $T \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$  mit  $T\omega = \infty$ ; z. B. können wir  $T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\omega} & 0 \\ -1 & \omega \end{pmatrix}$  wählen für  $\omega \notin \{0, \infty\}$  und  $T = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  für  $\omega = 0$  bzw.  $T = I$  für  $\omega = \infty$ .  $\Rightarrow TST^{-1}$  hat den Fixpunkt  $\infty$  und ist parabolisch, also ist mit  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$

$$TST^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}.$$

$\alpha\gamma = 1$ ,  $\alpha + \gamma = \pm 2 \Rightarrow \alpha = \gamma = \pm 1$ .  $\Rightarrow TST^{-1} = U^{\mu}$  mit geeignetem  $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Beachte:  $\mathbb{R} \ni \mu \mapsto \begin{pmatrix} 1 & \mu \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  ist ein Homomorphismus von  $(\mathbb{R}, +)$  in  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ . Es gilt:  $U^{\mu}z = z + \mu$ ,  $U^{\mu}$  ist also eine Translation um  $\mu$ . Weiter ist für  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  die Abbildung  $\lambda \mapsto D_{\lambda}$  ein Homomorphismus von  $\mathbb{R}^{\times}$  in  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$  und es gilt:

$$D_{\lambda}U^{\mu}D_{\lambda^{-1}} = U^{\lambda^2\mu}.$$

Ergebnis:  $S$  parabolisch  $\Rightarrow S$  ist in  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$  zu  $\pm U^{\pm 1}$  konjugiert, und „ $\Leftarrow$ “ gilt trivialerweise.

- b)  $S$  sei hyperbolisch. Dann existiert ein  $T \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ , so dass  $TST^{-1}$  die Fixpunkte 0 und  $\infty$  hat; z. B. leistet für die Fixpunkte  $\omega_1 \neq \infty \neq \omega_2$  die Transformation  $z \mapsto Tz = \frac{z - \omega_1}{z - \omega_2}$  das Verlangte.  $TST^{-1}$  ist hyperbolisch und hat den Fixpunkt  $\infty$ , hat also die Form  $\begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}$  mit  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0, \pm 1\}$ . Außerdem hat  $TST^{-1}$  den Fixpunkt 0, also ist  $\mu = 0$ , d. h.  $TST^{-1} = D_{\lambda}$  mit  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0, \pm 1\}$ . Durch Konjugation mit  $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  (d. h. durch Vertauschen der Fixpunkte) kann man  $\lambda \mapsto \lambda^{-1}$  ersetzen und umgekehrt,  $D_{\lambda}$  lässt sich also dergestalt normieren, dass  $|\lambda| > 1$  ist.

Ergebnis:  $S$  hyperbolisch  $\Rightarrow S$  ist in  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$  zu einer Matrix  $\pm D_{\lambda}$  mit geeignetem  $\lambda > 1$  konjugiert, und „ $\Leftarrow$ “ gilt trivialerweise.  $\lambda$  ist dabei eindeutig bestimmt durch  $\lambda + \lambda^{-1} = |\mathrm{Spur} S|$  und  $\lambda > 1$ ,  $\lambda^2$  heißt der Multiplikator von  $S$ , denn  $(\pm D_{\lambda})z = \lambda^2 z$ .

c)  $S$  sei elliptisch,  $\omega \in \mathbb{H}$  der Fixpunkt von  $S$  in  $\mathbb{H}$ ,

$$T: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{E}, \quad Tz := \frac{z - \omega}{z - \bar{\omega}}, \quad \left( T = \frac{1}{\sqrt{\omega - \bar{\omega}}} \begin{pmatrix} 1 & -\omega \\ 1 & -\bar{\omega} \end{pmatrix} \in \text{SL}_2(\mathbb{C}) \right).$$

$\Rightarrow TST^{-1}$  hat die Fixpunkte 0 und  $\infty$ , also gilt:  $TST^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}$  mit  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0, \pm 1\}$ .

Hier ist  $TST^{-1} \in \text{Aut } \mathbb{E}$  und lässt 0 fest.  $\Rightarrow (TST^{-1})z = \lambda z$  mit  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0, \pm 1\}$ ,  $|\lambda| = 1$ . Wir schreiben  $\lambda = e^{i\frac{\varphi}{2}}$  mit  $-\pi < \frac{\varphi}{2} < \pi$ ,  $\varphi \neq 0$ .  $\Rightarrow TST^{-1}$  vermittelt eine Drehung um 0 mit dem Winkel  $\varphi$ .

Transformation nach  $\mathbb{H}$ :

$$V: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{E}, \quad V = \frac{1}{2i} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix},$$

also  $Vz = \frac{z-i}{z+i}$  für  $z \in \mathbb{H}$ .

$$\Rightarrow V^{-1} \begin{pmatrix} e^{i\frac{\varphi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\varphi}{2}} \end{pmatrix} V = \begin{pmatrix} \cos \frac{\varphi}{2} & \sin \frac{\varphi}{2} \\ -\sin \frac{\varphi}{2} & \cos \frac{\varphi}{2} \end{pmatrix} =: R_\varphi \in \text{SL}_2(\mathbb{R}) \cap \text{SO}_2(\mathbb{R}).$$

$R_\varphi$  hat die Fixpunkte  $i$  und  $-i$ .

$$\underbrace{(V^{-1}T)}_{\in \text{SL}_2(\mathbb{R})} \underbrace{S(V^{-1}T)^{-1}}_{\in \text{SL}_2(\mathbb{R})} = R_\varphi.$$

Bemerkung: Die Fixgruppe von  $i$  in  $\text{SL}_2(\mathbb{R})$  ist gleich der  $\text{SO}_2(\mathbb{R})$ .

Ergebnis:  $S$  elliptisch  $\Rightarrow S$  ist in  $\text{SL}_2(\mathbb{R})$  zu  $R_\varphi$  mit  $0 \neq \varphi \in ]-2\pi, 2\pi[$  konjugiert. Dabei ist  $\varphi$  durch  $\varphi \neq 0$  und  $-\pi < \frac{\varphi}{2} < \pi$  eindeutig festgelegt. Die Abbildung  $\mathbb{R} \ni \varphi \mapsto R_\varphi$  ist ein Homomorphismus von  $(\mathbb{R}, +)$  in  $\text{SO}_2(\mathbb{R})$ .  $\square$

Wir untersuchen das Abbildungsverhalten von  $\pm I \neq S \in \text{SL}_2(\mathbb{R})$  an Hand der Fixkreise auf  $\mathbb{P}$  von  $S$ :

- $S$  parabolisch  $\Rightarrow$  Genau die Kreise auf  $\mathbb{P}$ , die  $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$  im Fixpunkt von  $S$  berühren, werden von  $S$  in sich überführt. Ein Blick auf die dazu orthogonalen Kreise veranschaulicht das Abbildungsverhalten (Abb. 1.1).
- $S$  hyperbolisch  $\Rightarrow$  Genau die Kreise durch die Fixpunkte von  $S$  bleiben fest. Die Schar der Orthogonalkreise veranschaulicht das Abbildungsverhalten (Abb. 1.2).
- $S$  elliptisch  $\Rightarrow$  Jeder Kreis durch die Fixpunkte von  $S$  wird abgebildet auf einen evtl. anderen Kreis. Diese Kreise stehen alle senkrecht auf dem „Hauptkreis“  $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ . Alle Kreise in  $\mathbb{P}$ , die orthogonal sind zu den Kreisen durch die Fixpunkte, sind Fixkreise. Das Innere und das Äußere dieser Fixkreise wird durch  $S$  auf sich abgebildet (Abb. 1.3). Weitere Fixkreise existieren genau dann, wenn  $S$  konjugiert ist zu einer hyperbolischen Drehung um  $\pm\pi$ , d. h. wenn  $S$  konjugiert ist zu  $\pm \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

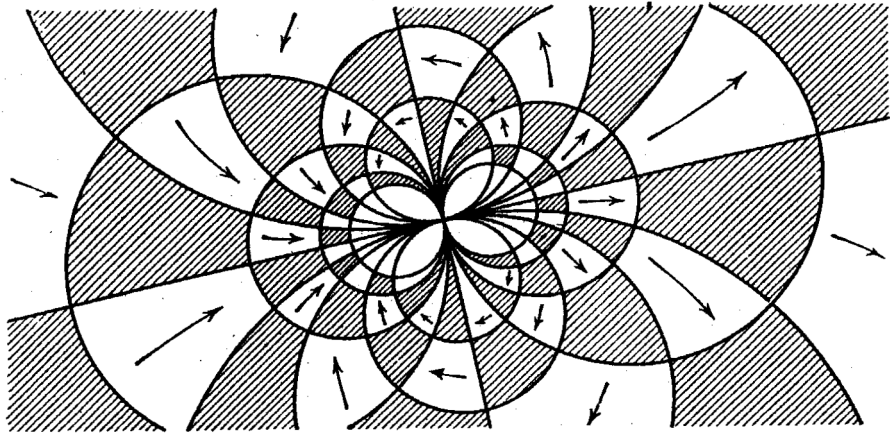


Abbildung 1.1: Parabolische Transformation

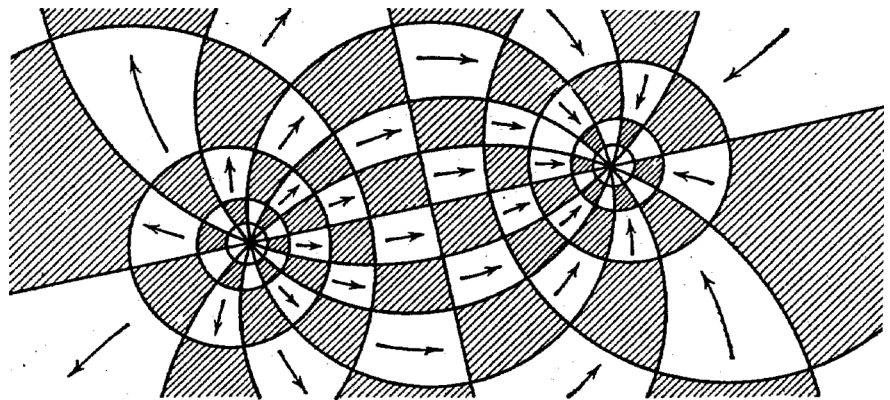


Abbildung 1.2: Hyperbolische Transformation

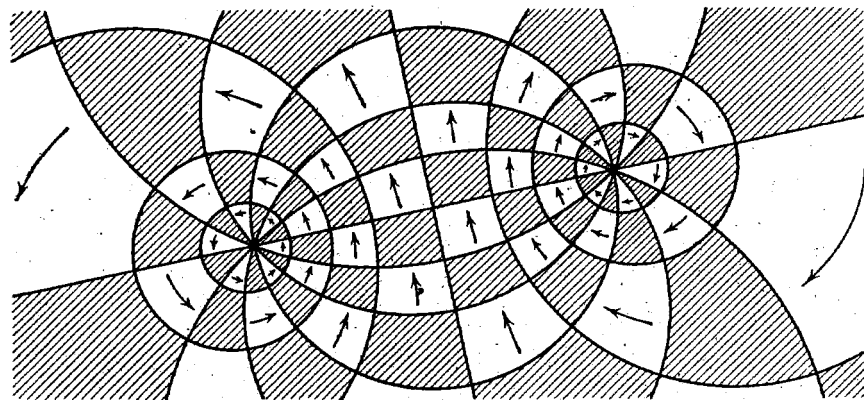


Abbildung 1.3: Elliptische Transformation



## 1.2 Das Poincarésche Modell der hyperbolischen Geometrie

Wir behandeln parallel die Modelle  $\mathbb{E}$  und  $\mathbb{H}$ .

**1.2.1 Definition (H-Punkte, H-Geraden)** Im Folgenden seien H-Punkte hyperbolische Punkte, E-Punkte euklidische Punkte, und analog die Geraden. Wir definieren

	$\mathbb{H}$	$\mathbb{E}$
H-Punkte	E-Punkte in $\mathbb{H}$	E-Punkte in $\mathbb{E}$
H-Geraden	Die in $\mathbb{H}$ gelegenen Stücke von auf $\mathbb{R}$ orthogonalen Kreisbogen bzw. Vertikalgeraden auf $\mathbb{R}$	Die in $\mathbb{E}$ gelegenen Stücke von Orthogonalkreisen auf $\{z \mid  z  = 1\}$ bzw. Durchmesser von $\mathbb{E}$ .

Die üblichen Axiome sind erfüllt, z. B. geht durch je zwei verschiedene Punkte genau eine Gerade; das Parallelenaxiom ist verletzt!

**1.2.2 Definition (Riemannsche Metrik)**  $G = (g_{\mu,\nu})_{\mu,\nu=1,2}$  heißt *Riemannsche Metrik* auf  $\mathbb{H}$ , falls

- a) alle  $g_{\mu,\nu}: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}$   $C^\infty$ -Funktionen sind und
- b)  $G(z)$  (symmetrisch und) positiv definit ist.

Eine Riemannsche Metrik definiert eine Längenmessung:

$$\lambda(C) = \int_a^b \left( \sum_{\mu,\nu=1}^2 g_{\mu,\nu} \dot{x}_\mu \dot{x}_\nu \right)^{\frac{1}{2}} dt,$$

wobei  $C: z(t) = x_1(t) + i x_2(t)$  für  $a \leq t \leq b$  eine stückweise stetig differenzierbare Kurve in  $\mathbb{H}$  ist.

Flächenmessung:

$$\omega(A) = \int_A \sqrt{\det G(z)} dx dy \quad (A \subset \mathbb{H} \text{ Borelsch}).$$

Winkelmessung: In jedem Punkt  $z$  in bezug auf das durch  $G(z)$  gegebene Skalarprodukt.

**1.2.3 Definition (Invarianz)** Die Riemannsche Metrik  $G$  heißt  $SL_2(\mathbb{R})$ -invariant, wenn für alle  $M \in SL_2(\mathbb{R})$  gilt:

$$G(z) = J_M^\top(z) G(Mz) J_M(z) \quad (z \in \mathbb{H}).$$

Dabei sei  $J_M$  die Funktional- oder Jacobi-Matrix von  $M$ , also

$$J_M = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix},$$

falls  $\operatorname{Re} Mz = u$ ,  $\operatorname{Im} Mz = v$ ,  $\operatorname{Re} z = x$ ,  $\operatorname{Im} z = y$ .

**1.2.4 Satz** Jede  $SL_2(\mathbb{R})$ -invariante Riemannsche Metrik auf  $\mathbb{H}$  definiert eine  $SL_2(\mathbb{R})$ -invariante Länge und einen  $SL_2(\mathbb{R})$ -invarianten Flächeninhalt.

B **Invarianz des Flächeninhalts** Sei  $A \subset \mathbb{H}$  Borelsch,  $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ .

$$\begin{aligned}\Rightarrow \omega(MA) &= \int_{MA} \sqrt{\det G(z)} \, dx \, dy \\ &= \int_A \sqrt{\det G(Mz)} |\det J_M(z)| \, dx \, dy \\ &= \int_A \sqrt{\det G(z)} \, dx \, dy = \omega(A)\end{aligned}$$

**Invarianz der Bogenlänge**  $C: z(t) = x(t) + iy(t)$  für  $a \leq t \leq b$  sei eine stetig differenzierbare

Kurve in  $\mathbb{H}$ ,  $\dot{z} := \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix}$ ,  $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ ,  $Mz = u + iv$ ,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  das euklidische Skalarprodukt im  $\mathbb{R}^2$ . Dann gilt:

$$\dot{M}z = \begin{pmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x \dot{x} & u_y \dot{y} \\ v_x \dot{x} & v_y \dot{y} \end{pmatrix} = J_M(z) \dot{z}.$$

Damit folgt:

$$\begin{aligned}\Rightarrow \lambda(MC) &= \int_a^b \langle G(Mz) \dot{M}z, \dot{M}z \rangle^{\frac{1}{2}} \, dt \\ &= \int_a^b \langle G(Mz) J_M(z) \dot{z}, J_M(z) \dot{z} \rangle^{\frac{1}{2}} \, dt \\ &= \int_a^b \langle G(z) \dot{z}, \dot{z} \rangle^{\frac{1}{2}} \, dt = \lambda(C)\end{aligned}$$

□

**1.2.5 Satz**  $G(z) := (\mathrm{Im} z)^{-2} I$  definiert eine  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ -invariante Riemannsche Metrik auf  $\mathbb{H}$ . Das zugehörige Längenelement ist  $ds = \frac{|dz|}{\mathrm{Im} z}$ , der zugehörige invariante Flächeninhalt ist gegeben durch  $d\omega = \frac{d\mathrm{Re} z \, d\mathrm{Im} z}{(\mathrm{Im} z)^2}$ . Die durch  $G$  definierte Winkelmessung ist gleich der euklidischen.

B Sei  $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ ,  $Mz = u + iv$ ,  $z = x + iy$ .

$$\Rightarrow v = \frac{y}{|cz + d|^2} = y |M'(z)|.$$

Unter Benutzung der sog. Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen (siehe Elstrodt (2004), Satz 3.1) erhält man:

$$\begin{aligned}\Rightarrow J_M^\top(z) G(Mz) J_M(z) &= v^{-2} \begin{pmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} \\ &\stackrel{\text{CRD}}{=} v^{-2} \begin{pmatrix} u_x^2 + v_x^2 & 0 \\ 0 & u_y^2 + v_y^2 \end{pmatrix} = v^{-2} \begin{pmatrix} |M'(z)|^2 & 0 \\ 0 & |M'(z)|^2 \end{pmatrix} \\ &= y^{-2} I = G(z)\end{aligned}$$

□

**1.2.6 Satz** Ist  $G$  eine  $SL_2(\mathbb{R})$ -invariante Riemannsche Metrik auf  $\mathbb{H}$ , so existiert ein  $\alpha > 0$ , so dass  $G(z) = \alpha y^{-2} I$ .

B sei zur Übung dem geneigten Leser überlassen.

Hinweis zur Vorgehensweise: Man setzt die Erzeugenden der  $SL_2(\mathbb{R})$  (Translation, Dilatation und  $z \mapsto \frac{1}{z}$ ) in die Gleichung aus Definition 1.2.3 ein und wertet die Ergebnisse aus.  $\square$

**1.2.7 Definition (H-Abstand)** Für  $z, w \in \mathbb{H}$  sei  $|z, w| := \inf \int_C \frac{|dz|}{y}$ , wobei  $C$  eine stückweise stetig differenzierbare Kurve in  $\mathbb{H}$  sei mit Anfangspunkt  $z$  und Endpunkt  $w$ , der H-Abstand von  $z$  und  $w$ .

**1.2.8 Satz** a) Für alle  $S \in SL_2(\mathbb{R})$ ,  $z, w \in \mathbb{H}$  gilt:

$$|Sz, Sw| = |z, w|.$$

b) Für  $z, w \in \mathbb{H}$ ,  $z \neq w$  ist

$$|z, w| = \int_{\mathfrak{s}} \frac{|dz|}{y},$$

wobei  $\mathfrak{s}$  die eindeutig bestimmte H-Strecke von  $z$  nach  $w$  bezeichne.

c)  $|\cdot, \cdot|$  definiert eine Metrik auf  $\mathbb{H}$ .

d) Für  $z, w \in \mathbb{H}$  gilt:

$$|z, w| = \log \frac{1 + \left| \frac{z-w}{z-\bar{w}} \right|}{1 - \left| \frac{z-w}{z-\bar{w}} \right|} \stackrel{z \neq w}{=} \log DV(z, w, w_\infty, z_\infty),$$

wobei das Doppelverhältnis definiert sei wie in Elstrodt (2004) Definition 37.11. Dann gilt auch Satz 37.13 ebenda.

e)  $|\cdot, \cdot|$  ist invariant unter Spiegelung an H-Geraden.

B a) Satz 1.2.4

b) nach a) genügt der Beweis für den Fall  $z = i$ ,  $w = iy_0$ ,  $y_0 > 1$ . Sei  $C$  eine stückweise stetig differenzierbare Kurve von  $i$  nach  $iy_0$ .

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_C \frac{|dz|}{y} &= \int_a^b \frac{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}{y} dt \\ &\geq \int_a^b \frac{|\dot{y}|}{y} dt \geq \left| \int_a^b \frac{\dot{y}}{y} dt \right| \\ &= \left| \log \frac{y(b)}{y(a)} \right| = \log y_0 \\ &= \int_{\mathfrak{s}} \frac{|dz|}{y} = \log DV(i, iy_0, \infty, 0), \end{aligned}$$

und für  $C = \mathfrak{s}$  gilt hier überall „ $=$ “.  $\Rightarrow$  Allgemein gilt für  $z \neq w$ :

$$\int_{\mathfrak{s}} \frac{|dz|}{y} = \log DV(z, w, w_{\infty}, z_{\infty}).$$

c) Noch zu zeigen ist die Positivität für  $z \neq w$ : siehe d) oder Elstrodt (2004) Satz 37.13.

d) Für  $z = w$  ist die Behauptung klar. Für  $z \neq w$  ist

$$\frac{|z-w|^2}{|z-\bar{w}|^2} = \frac{z-w}{z-\bar{w}} \operatorname{div} \frac{\bar{z}-w}{\bar{z}-\bar{w}} = DV(z, \bar{z}, w, \bar{w})$$

Punkt-Paar-invariant, d. h. invariant bei  $(z, w) \mapsto (Sz, Sw)$  mit  $S \in \operatorname{SL}_2(\mathbb{R})$ . Da für  $z = i$ ,  $w = iy_0$ ,  $y_0 > 1$  die Behauptung bereits bekannt ist, folgt die Behauptung.

e) Seien  $z, w \in \mathbb{H}$ ,  $z \neq w$ ,  $g$  eine H-Gerade,  $\sigma$  die Spiegelung an  $g$ ,  $\tau$  die Spiegelung an der H-Geraden durch  $\sigma(z)$  und  $\sigma(w)$ .  $\Rightarrow \tau\sigma(z) = \sigma z$ ,  $\tau\sigma(w) = \sigma(w)$ .

$$\Rightarrow |\sigma z, \sigma w| = \left| \underbrace{\tau\sigma}_{\in \operatorname{SL}_2(\mathbb{R})} z, \underbrace{\tau\sigma}_{\in \operatorname{Aut} \mathbb{H}} w \right| = |z, w|.$$

□

### Bemerkung

a) Man kann zeigen:  $\operatorname{Aut} \mathbb{H} \simeq \operatorname{PSL}_2(\mathbb{R})$  ist die Gruppe der orientierungstreu Isometrien von  $\mathbb{H}$  bzgl. der H-Metrik  $|\cdot, \cdot|$ .  $\operatorname{Aut} \mathbb{H} \cup \sigma \operatorname{Aut} \mathbb{H}$  mit einer Spiegelung an einer H-Geraden  $\sigma$  ist die volle Gruppe der Isometrien von  $|\cdot, \cdot|$ .

b) Für paarweise verschiedene  $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{H}$  steht in der Dreiecksungleichung

$$|z_1, z_3| \leq |z_1, z_2| + |z_2, z_3|$$

genau dann das „ $=$ “-Zeichen, wenn  $z_1, z_2, z_3$  aufeinander folgende Punkte einer H-Geraden sind.

c)  $\operatorname{SL}_2(\mathbb{R})$  operiert zweifach transitiv auf  $\mathbb{H}$ , d. h. für alle  $z, w, z', w' \in \mathbb{H}$  mit  $|z, w| = |z', w'|$  gibt es ein  $S \in \operatorname{SL}_2(\mathbb{R})$  mit  $Sz = z'$  und  $Sw = w'$ .

**1.2.9 Definition (H-Kreise)** Sei  $a \in \mathbb{H}$ ,  $\rho > 0$ .

$$H_{\rho}(a) := \{z \in \mathbb{H} \mid |z, a| = \rho\}$$

ist die H-Kreislinie um  $a$  mit dem H-Radius  $\rho$ .

$$V_{\rho}(a) := \{z \in \mathbb{H} \mid |z, a| \leq \rho\}$$

ist die H-Kreisscheibe um  $a$  mit H-Radius  $\rho$ .

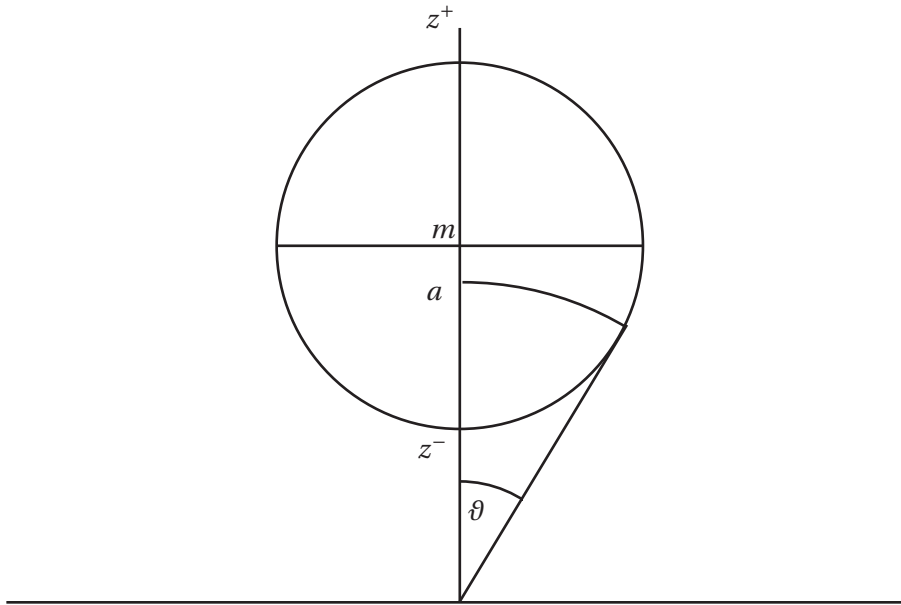


Abbildung 1.4: H-Kreis

**1.2.10 Satz** Sei  $a \in \mathbb{H}$ ,  $\rho > 0$ .

- a)  $S \in \text{SL}_2(\mathbb{R}) \Rightarrow SH_\rho(a) = H_\rho(Sa)$ ,  $SV_\rho(a) = V_\rho(Sa)$ .
- b)  $V_\rho(a)$  ist eine offene euklidische Kreisscheibe in  $\mathbb{H}$  mit Rand  $H_\rho(a)$ . Der E-Mittelpunkt von  $V_\rho(a)$  ist gegeben durch  $m = \text{Re } a + i \cosh \rho \text{Im } a$ , und der E-Radius  $r$  von  $V_\rho(a)$  beträgt  $r = \text{Im } a \sinh \rho$ . Mit  $z^+ = x^+ + i y^+$  und  $z^- = x^- + i y^-$  als Punkte mit maximalem bzw. minimalem Imaginärteil von  $H_\rho(a)$  gilt:

$$\text{Im } a = \sqrt{y^+ y^-}, \quad \text{Im } m = \frac{1}{2} (y^+ + y^-).$$

Mit den Bezeichnungen aus Abb. 1.4 gilt weiter:  $\sin \vartheta = \tanh \rho$  und  $\text{Im } a = \text{Im } m \cos \vartheta$ .

B a) klar

b)

$$\begin{aligned} |z, a| \leq \rho &\Leftrightarrow \frac{1 + \left| \frac{z-a}{z-\bar{a}} \right|}{1 - \left| \frac{z-a}{z-\bar{a}} \right|} \leq e^\rho \\ &\Leftrightarrow \left| \frac{z-a}{z-\bar{a}} \right| \leq \frac{e^\rho - 1}{e^\rho + 1} = \tanh \frac{\rho}{2} \end{aligned}$$

Da linear gebrochene Abbildungen Kreisverwandtschaften sind, ist  $V_\rho(a)$  ein E-Kreis mit Rand  $H_\rho(a)$ . Bei Abbildung  $z \mapsto w = \frac{z-a}{z-\bar{a}}$  wird aus  $V_\rho(a)$  ein E-Kreis um 0 und aus

$\{z | \operatorname{Re} z = \operatorname{Re} a\}$  ein Durchmesser dieses E-Kreises. Da der E-Kreis bei Spiegelung an diesem Durchmesser in sich übergeht, geht auch  $V_\rho(a)$  bei Spiegelung an  $\{z | \operatorname{Re} z = \operatorname{Re} a\}$  in sich über.  $\Rightarrow \operatorname{Re} m = \operatorname{Re} a$  und mit  $a = \alpha + i\beta$  und den Bezeichnungen aus dem Satz gilt:

$$\begin{aligned}\rho &= |a, z^+| = \log \frac{y^+}{\beta} = \log \frac{\beta}{y^-} = |a, z^-|. \\ \Rightarrow y^- &= \beta e^{-\rho}, \quad y^+ = \beta e^\rho \\ \Rightarrow \beta &= \sqrt{y^+ y^-},\end{aligned}$$

also das geometrische Mittel aus  $y^+$  und  $y^-$ . Ferner:  $\operatorname{Im} m = \frac{1}{2}(y^+ + y^-) = \beta \cosh \rho$  und  $r = \frac{1}{2}(y^+ - y^-) = \beta \sinh \rho$ . Zusammenhang mit  $\vartheta$ :  $\sin \vartheta = \frac{r}{\operatorname{Im} m} = \tanh \rho$ , also

$$\operatorname{Im} m \cos \vartheta = \underbrace{\beta \cosh \rho \sqrt{1 - \tanh^2 \rho}}_{=1} = \beta.$$

□

**Ohne Beweis** Der H-Umfang von  $H_\rho(a)$  beträgt  $2\pi \sinh \rho \sim 2\pi \rho$  für  $\rho \rightarrow +0$ .

Der H-Flächeninhalt von  $V_\rho(a)$  beträgt  $2\pi (\cosh \rho - 1) \sim \pi \rho^2$  für  $\rho \rightarrow +0$ .

Zur Vertiefung der Rolle von Carl Friedrich Gauß bei der Entwicklung der nicht-euklidischen Geometrie sei auf Reichardt (1976) verwiesen.

**1.2.11 Satz** Ist  $D$  ein (eigentliches oder uneigentliches) H-Dreieck, so ist

$$\omega(D) = \pi - \text{Summe der Innenwinkel von } D.$$

B a)  $D$  habe einen Nullwinkel, oBdA in  $\infty$ , und oBdA seien die übrigen Ecken von  $D$  auf  $\partial \mathbb{E}$  gelegen, so dass sich die Situation von Abb. 1.5 ergibt.

$$\begin{aligned}\Rightarrow \omega(D) &= \int_D \frac{dx dy}{y^2} = \int_a^b \left( \int_{\sqrt{1-x^2}}^\infty \frac{dy}{y^2} \right) dx \\ &= \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = [-\arccos x]_a^b = \pi - (\alpha + \beta + \gamma).\end{aligned}$$

b)  $D$  habe keinen Nullwinkel,  $D := \Delta(a, b, c)$ ,  $E := \Delta(a, b, d)$ ,  $F := \Delta(b, d, c)$  mit den Bezeichnungen aus Abb. 1.6.

$$\begin{aligned}\Rightarrow \omega(D) &= \omega(E) - \omega(F) \\ &= \pi - (\alpha + \beta + \delta) - (\pi - (\pi - \gamma + \delta)) = \pi - (\alpha + \beta + \gamma).\end{aligned}$$

□

Verpflanzung von  $G = y^{-2}I$  nach  $\mathbb{E}$  vermöge der Abbildung  $z \mapsto w := \frac{z-z_0}{z-\bar{z}_0}$  ( $z \in \mathbb{H}$ ,  $z_0 \in \mathbb{H}$  fest) liefert die Riemannsche Metrik  $\Gamma := 4(1-r^2)^{-1}I$  auf  $\mathbb{E}$  ( $r = |w|$ ). Man rechnet dazu mit  $z = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}$  und  $w = \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix}$  aus:

$$\gamma_{ij} = \sum_{\mu, \nu} g_{\mu, \nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial u^i} \frac{\partial x^\nu}{\partial u^j}.$$

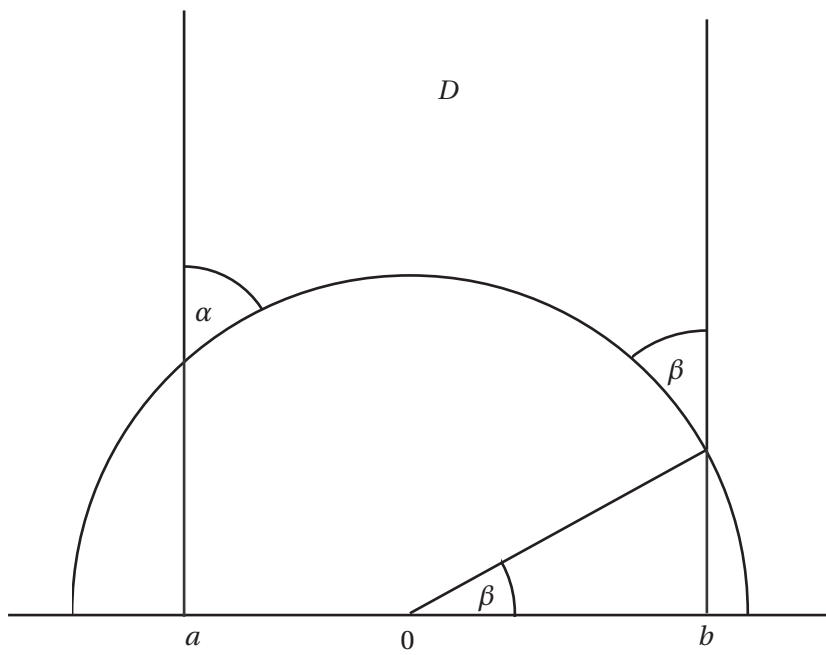


Abbildung 1.5: H-Dreieck mit Nullwinkel in  $\infty$

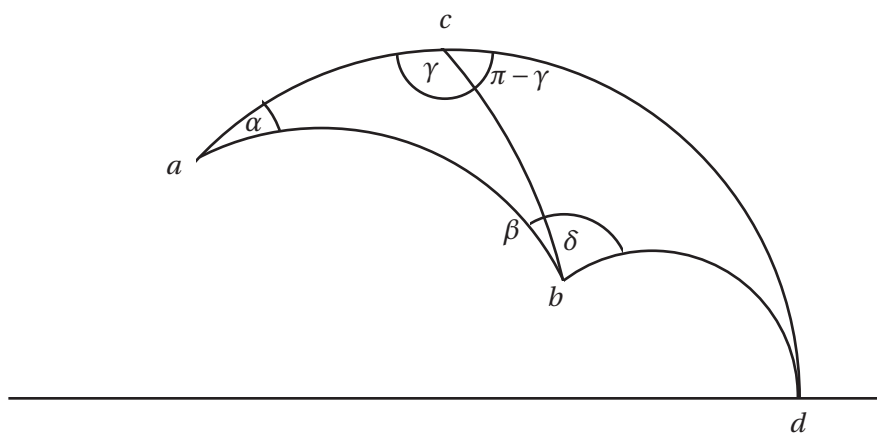


Abbildung 1.6: H-Dreieck ohne Nullwinkel

**Formelsammlung** Wir fassen das bisher bewiesene zusammen zu:

	$\mathbb{H}$	$\mathbb{E}$
Bezeichnung	$z = x + iy$	$w = u + iv = re^{i\varphi}$
Riemannsche Metrik	$y^{-2}I$	$4(1-r^2)^{-2}I$
Linienelement	$ds = \frac{ dz }{y}$	$ds = \frac{2 dw }{(1-r^2)}$
Flächenelement	$d\omega = \frac{dx dy}{y^2}$	$d\omega = \frac{4du dv}{(1-r^2)^2}$
H-Abstand	$ z_1, z_2  = \log \frac{1 + \left  \frac{z_1 - z_2}{z_1 - \bar{z}_2} \right }{1 - \left  \frac{z_1 - z_2}{z_1 - \bar{z}_2} \right }$	$ w_1, w_2  = \log \frac{1 + \left  \frac{w_1 - w_2}{1 - \bar{w}_1 w_2} \right }{1 - \left  \frac{w_1 - w_2}{1 - \bar{w}_1 w_2} \right }$
speziell:	$ i, iy  =  \log y $	$ 0, w  = \log \frac{1+r}{1-r}$

### 1.3 Die Modulgruppe

${}_1\Gamma := \text{SL}_2(\mathbb{Z}) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^{2 \times 2} \mid ad - bc = 1 \right\}$  ist diskrete Untergruppe von  $\text{SL}_2(\mathbb{R})$ . Für  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{SL}_2(\mathbb{R})$  gilt:  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ . Es gilt  $U := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, T := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, -I \in {}_1\Gamma$ . Für  $S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{SL}_2(\mathbb{R})$  sei  $\underline{S} := (c, d)$ .

**1.3.1 Satz** a)  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{SL}_2(\mathbb{Z}) \Rightarrow \text{ggT}(a, b) = \text{ggT}(c, d) = \text{ggT}(a, c) = \text{ggT}(b, d) = 1$ .

b) Sind  $c, d \in \mathbb{Z}$  mit  $\text{ggT}(c, d) = 1$ , so gibt es  $a, b \in \mathbb{Z}$  mit  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in {}_1\Gamma$ .

c) Seien  $A, B \in {}_1\Gamma$ . Dann gilt:  $\underline{A} = \underline{B} \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{Z} \quad A = U^n B$ .

B a) klar wegen der Determinanten-Bedingung.

b)  $\text{ggT}(c, d) = 1 \Rightarrow c$  und  $d$  erzeugen  $\mathbb{Z}$  als Ideal, und wegen  $1 \in \mathbb{Z}$  gibt es  $a, b \in \mathbb{Z}$ , so dass  $ad - bc = 1 \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in {}_1\Gamma$ .

c) „ $\Leftarrow$ “  $\underline{U^n B} = \underline{U^n B} = \underline{IB} = \underline{B}$ .

„ $\Rightarrow$ “  $\underline{AB^{-1}} = \underline{AB^{-1}} = \underline{BB^{-1}} = (0, 1)$ . Es gibt also ein  $n \in \mathbb{Z}$ , so dass  $AB^{-1} = U^n$ , also  $A = U^n B$ .  $\square$

**1.3.2 Satz** Sind  $K, L \subset \mathbb{H}$  kompakt, so gibt es nur endlich viele  $S \in {}_1\Gamma$  mit  $(SK) \cap L \neq \emptyset$ .

B OBdA sei gleich  $K = L = \overline{V_\rho(i)}$  mit  $\rho > 0$ . Ist dann  $(SK) \cap L \neq \emptyset$ , so ist  $|Si, i| \leq 2\rho$ . Wir zeigen: (\*) Es gibt nur endlich viele  $S \in {}_1\Gamma$  mit  $|Si, i| \leq 2\rho$  und damit die Behauptung.

Sei  $\Delta := \{S \in {}_1\Gamma \mid |Si, i| \leq 2\rho\}$ . Wegen  $\text{Im } Si = \frac{1}{c^2 + d^2}$  für  $S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  und

$$\min \left\{ \text{Im } z \mid z \in \overline{V_{2\rho}(i)} \right\} = e^{-2\rho} > 0$$



ist  $c^2 + d^2 \leq e^{2\rho}$ , die Menge  $\{(c, d) \in \mathbb{Z}^2 \mid \exists S \in \Delta \text{ mit } \underline{S} = (c, d)\}$  also endlich. Sei nun  $(c, d) = \underline{M}$  ( $M \in \Delta$ ) ein solches Paar.  $\Rightarrow$  Jedes  $S \in \Delta$  mit  $\underline{S} = (c, d)$  hat die Form  $S = U^n M$  mit  $n \in \mathbb{Z}$ . Hier sind bei festem  $(c, d)$  für  $n$  nur endlich viele Werte möglich, denn

$$|Si, i| = \underbrace{|Mi + n, i|}_{\xrightarrow{|n| \rightarrow \infty} \infty} \leq 2\rho.$$

□

**Bemerkung** Satz 1.3.2 gilt sinngemäß für jede diskrete Untergruppe von  $SL_2(\mathbb{R})$ .

**1.3.3 Korollar**  ${}_1\Gamma$  operiert auf  $\mathbb{H}$  diskontinuierlich, d. h. für jede Folge  $(M_n)_{n \geq 1}$  paarweise verschiedener  $M_n \in {}_1\Gamma$  und für jedes  $z \in \mathbb{H}$  hat die Folge  $(M_n z)_{n \geq 1}$  keinen Häufungspunkt in  $\mathbb{H}$ .

B klar nach Satz 1.3.2

□

**1.3.4 Korollar** Die Fixpunkte elliptischer Transformationen auf  ${}_1\Gamma$  häufen sich nicht in  $\mathbb{H}$ .

B Annahme:  $a \in \mathbb{H}$  sei Häufungspunkt von Fixpunkten elliptischer Elemente  $\in {}_1\Gamma$  und  $V$  eine kompakte Umgebung von  $a$ .  $\Rightarrow V$  enthält unendlich viele Fixpunkte elliptischer Transformationen, und zu jedem dieser Fixpunkte existiert ein elliptisches  $S \in {}_1\Gamma$ , das den Fixpunkt fest lässt. Verschieden Fixpunkte liefern dabei notwendig verschiedene elliptische Transformationen, da die Fixpunkte elliptischer Transformationen komplex konjugierte Paare sind, und nicht mehr als drei Fixpunkte auftreten können bei Transformationen  $S \neq I$ . Daher existieren unendlich viele verschiedene  $S \in {}_1\Gamma$  mit  $SV \cap V \neq \emptyset$   $\nrightarrow$  zu Satz 1.3.2.

□

**1.3.5 Korollar** Zu jedem  $a \in \mathbb{H}$  gibt es eine Umgebung  $V$ , so dass  $\{S \in {}_1\Gamma \mid SV \cap V \neq \emptyset\}$  gleich der Fixgruppe von  $a$  in  ${}_1\Gamma$  ist.

B Sei  $W$  eine kompakte Umgebung von  $a$ .  $\xrightarrow{\text{Satz 1.3.2}} \{S \in {}_1\Gamma \mid SW \cap W \neq \emptyset\} =: \Delta$  ist endlich. Ist  $\Delta$  schon gleich der Fixgruppe von  $a$  in  ${}_1\Gamma$ , so ist die Behauptung klar. Für  $\Delta \supsetneq$  Fixgruppe von  $a$  in  ${}_1\Gamma$  sei  $\rho := \frac{1}{3} \min \{|Sa, a| \mid S \in \Delta, Sa \neq a\}$ .  $\Rightarrow V_\rho(a)$  leistet das Verlangte, denn für  $w \in SV_\rho(a)$ ,  $z \in V_\rho(a)$ ,  $w = S\tau$  mit  $\tau \in V_\rho(a)$  gilt:

$$|w, z| \stackrel{\Delta\text{-Ungl.}}{\geq} \underbrace{|Sa, a|}_{\geq 3\rho} - \underbrace{|w, Sa|}_{=|S\tau, Sa|=|\tau, a| \leq \rho} - \underbrace{|z, a|}_{< \rho} > \rho.$$

□

Für eine Untergruppe  $\Gamma \subset SL_2(\mathbb{R})$  heißen die Fixpunkte der parabolischen / hyperbolischen bzw. elliptischen Elemente von  $\Gamma$  die parabolischen / hyperbolischen bzw. elliptischen Fixpunkte von  $\Gamma$ ; die parabolischen Fixpunkte bezeichnet man auch als Spitzen (engl. cusps) von  $\Gamma$ . Die parabolischen / hyperbolischen bzw. elliptischen Fixpunkte von  $\Gamma$  zerfallen in Bahnen mod  $\Gamma$ , denn: Ist  $p$  ein Fixpunkt von  $S \in \Gamma$  und  $A \in \Gamma$ , so ist  $Ap$  ein Fixpunkt von  $ASA^{-1} \in \Gamma$  vom gleichen Typ, da  $\text{Spur } ASA^{-1} = \text{Spur } S$ . Fixpunkte der gleichen  $\Gamma$ -Bahn heißen  $\Gamma$ -äquivalent.

**1.3.6 Satz** Die Menge der parabolischen Fixpunkte von  ${}_1\Gamma$  ist gleich  $\mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ , und jede Spitze ist zu  $\infty$  äquivalent mod  ${}_1\Gamma$ . Die Fixgruppe von  $\infty$  in  ${}_1\Gamma$  wird erzeugt von  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  und  $-I$ . Ist

$\zeta = -\frac{d}{c} \in \mathbb{Q}$  ( $c, d \in \mathbb{Z}$ ,  $c \neq 0$ ,  $\text{ggT}(c, d) = 1$ ), und sind  $a, b \in \mathbb{Z}$  so gewählt, dass  $A := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in {}_1\Gamma$

liegt, so erzeugen  $A^{-1}UA$  und  $-I$  die Fixgruppe von  $\zeta$  in  ${}_1\Gamma$ .

B  $\infty$  ist Fixpunkt von  $U \in {}_1\Gamma$ ,  $U$  ist parabolisch und jede parabolische Transformation  $\in \text{SL}_2(\mathbb{R})$  mit Fixpunkt  $\infty$  ist von der Form  $\pm U^\alpha$  mit  $\alpha \in \mathbb{R}$ .  $\Rightarrow$  Die Fixgruppe von  $\infty$  in  ${}_1\Gamma$  ist  $\langle U, -I \rangle$ . Sei  $\zeta := -\frac{d}{c}$  ( $c, d \in \mathbb{Z}$ ,  $\text{ggT}(c, d) = 1$ ,  $c \neq 0$ ),  $A$  wie oben. Dann gilt  $A \in {}_1\Gamma$ ,  $A\zeta = \infty =$  Spitze von  ${}_1\Gamma$  mit Fixgruppe  $\langle U, -I \rangle$ .  $\Rightarrow \zeta$  ist Spitze von  ${}_1\Gamma$  mit Fixgruppe  $\langle A^{-1}UA, -I \rangle$ .

Noch zu zeigen: Jeder parabolische Fixpunkt von  ${}_1\Gamma$  liegt in  $\mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ : Das ist klar nach der Fixpunktformel:

$$\omega_{1,2} = \frac{a-d}{2c} \pm \frac{1}{2c} \sqrt{(a+d)^2 - 4} \stackrel{\text{parabolisch}}{=} \frac{a-d}{2c} \in \mathbb{Q} \quad (c \neq 0). \quad \square$$

**1.3.7 Satz** Es gibt genau zwei Äquivalenzklassen elliptischer Fixpunkte von  ${}_1\Gamma$ . Diese werden repräsentiert von  $i$  und  $\rho := e^{\frac{2\pi i}{3}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}i$  oder dem äquivalenten Punkt  $\xi := e^{\frac{\pi i}{3}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}i = \rho + 1$ .

a) Die Fixgruppe von  $i$  in  ${}_1\Gamma$  hat die Ordnung 4 und wird von  $T := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $T^2 = -I$  erzeugt. (Die Ordnung der Fixgruppe in  $\text{PSL}_2(\mathbb{Z})$  ist 2) Die zu  $i \bmod {}_1\Gamma$  äquivalenten Fixpunkte von  ${}_1\Gamma$  in  $\mathbb{H}$  sind genau die komplexen Zahlen der Form  $\omega = \frac{a+i}{c}$  mit  $a, c \in \mathbb{Z}$ ,  $c > 0$ ,  $c \mid (a^2 + 1)$ . Eine Matrix  $S \in {}_1\Gamma \setminus \{\pm I\}$  hat genau dann einen Fixpunkt dieser Gestalt, wenn  $\text{Spur } A = 0$ , und das ist genau dann der Fall, wenn  $S$  in  ${}_1\Gamma$  konjugiert ist zu  $\pm T$ .

b) Die Fixgruppe von  $\rho$  in  ${}_1\Gamma$  hat die Ordnung 6 und wird von  $R := TU = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $R^3 = -I$  erzeugt. Die zu  $\rho$  bezüglich  ${}_1\Gamma$  äquivalenten Punkte in  $\mathbb{H}$  sind genau die komplexen Zahlen der Form  $\omega = \frac{a+\rho^{\text{sgn } c}}{c}$  mit  $a, c \in \mathbb{Z}$ ,  $c \neq 0$ ,  $(a^2 - a + 1) \equiv 0 \pmod{c}$ . Eine Matrix  $S \in {}_1\Gamma \setminus \{\pm I\}$  hat genau dann einen Fixpunkt dieser Form, wenn  $\text{Spur } S = \pm 1$ , und das ist genau dann der Fall, wenn  $S$  in  ${}_1\Gamma$  konjugiert ist zu  $R$ ,  $R^{-1} = -R^2$  (im Fall  $\text{Spur } S = 1$ ) oder zu  $-R$ ,  $R^2$  (im Fall  $\text{Spur } S = -1$ ).

B Sei  $S \in {}_1\Gamma \setminus \{\pm I\}$ ,  $S$  elliptisch.  $\Rightarrow \text{Spur } S \in \{0, \pm 1\}$ . Wegen  $\text{Spur } S = -\text{Spur } (-S)$  genügt die Behandlung der Fälle  $\text{Spur } S = 0$  und  $\text{Spur } S = 1$ .

$\text{Spur } S = 0$  Die Fixpunktformel liefert für  $c \neq 0$ :

$$\omega_{1,2} = \frac{a-d}{2c} \pm \frac{1}{2c} \sqrt{(a+d)^2 - 4}$$

Da  $S$  elliptisch ist, ist automatisch  $c \neq 0$ , so dass  $S$  in  $\mathbb{H}$  den Fixpunkt  $\omega = \frac{a+i\text{sgn } c}{c}$  hat (beachte:  $a+d=0$ !).  $S$  hat das charakteristische Polynom

$$X^2 - (\text{Spur } S)X + \det S = X^2 + 1.$$

Nach Cayley-Hamilton gilt also  $S^2 = -1$ .  $\Rightarrow \text{ord } S = 4$ . Ggf. nach Substitution  $S \mapsto -S$  kann  $c > 0$  angenommen werden, so dass  $S$  den folgenden Fixpunkt hat:

$$\omega = \frac{a+i}{c} \quad (a, c \in \mathbb{Z}, c > 0, c \mid (a^2 + 1)) \quad (1.1)$$

Umgekehrt: Hat  $\omega \in \mathbb{H}$  die Form (1.1), so ist  $b := -\frac{a^2+1}{c} \in \mathbb{Z}$ ,  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in {}_1\Gamma$  ist elliptisch mit Spur 0 und Fixpunkt  $\omega$ . Insbesondere ist  $T = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in {}_1\Gamma$  elliptisch von der Ordnung 4 mit Fixpunkt  $i \in \mathbb{H}$ ,  $T^2 = -I$ .

Bestimmung der Konjugationsklassen: Sei  $S$  elliptisch mit Spur  $S = 0$  (jetzt nicht mehr notwendig  $c > 0$ ),  $S^2 = -I$ . Dann ist  $\mathbb{Z}[S] \simeq \mathbb{Z}[i]$  und somit ein Hauptidealring.  $\mathbb{Z}^2$  ist torsionsfreier  $\mathbb{Z}[S]$ -Modul, denn: Seien  $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ ,  $x \in \mathbb{Z}^2$  mit  $(\alpha + \beta S)x = 0$ . Multiplikation mit  $\alpha - \beta S$  liefert:  $(\alpha^2 + \beta^2)x = 0$  und damit  $\alpha = \beta = 0$  oder  $x = 0$ .  $\Rightarrow \mathbb{Z}^2$  ist torsionsfrei. Folglich ist  $\mathbb{Z}^2$  freier  $\mathbb{Z}[S]$ -Modul vom Rang 1, es gibt also ein  $u \in \mathbb{Z}^2$ , so dass  $\mathbb{Z}^2 = \mathbb{Z}[S]u$ . Setze  $v := Su$ .  $\Rightarrow u, v$  ist eine  $\mathbb{Z}$ -Basis von  $\mathbb{Z}^2$ , insbesondere  $\det(u, v) = \pm 1$ .

a)  $\det(u, v) = 1$ :

$$\Rightarrow S(u, v) = (v, -u) = (u, v) \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{=T}.$$

Mit  $M := (u, v) \in {}_1\Gamma$  gilt:  $M^{-1}SM = T$ .

b)  $\det(u, v) = -1$ :  $M := (v, u) \in {}_1\Gamma$  mit

$$SM = (-u, v) = M \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}_{=-T}.$$

$$\Rightarrow M^{-1}SM = -T.$$

Das beweist Aussage a).

Spur  $S = 1$   $S$  ist elliptisch  $\Rightarrow c \neq 0$ , und  $S$  hat den Fixpunkt

$$\frac{a-d}{2c} + \frac{\sqrt{(a+d)^2 - 4}}{2c} = \frac{2a-1+i\sqrt{3}}{2c} = \frac{a}{c} + \frac{-1+i\sqrt{3}}{2c} = \frac{a+\rho}{c} \in \mathbb{H},$$

falls  $c > 0$ . Im Falle  $c < 0$  ist  $\frac{a+\bar{\rho}}{c} = \frac{a+\rho^{-1}}{c}$  der Fixpunkt in  $\mathbb{H}$ .  $\Rightarrow S$  hat in  $\mathbb{H}$  den Fixpunkt  $\omega = \frac{a+\rho^{\text{sgn } c}}{c}$ . Das charakteristische Polynom von  $S$  lautet  $X^2 - X + 1$ , nach Cayley-Hamilton gilt also  $S^2 - S + I = 0$ . Multiplikation mit  $S + I$  liefert:  $S^3 = -I$ ,  $S$  hat also die Ordnung 6. Speziell gilt:  $R := TU = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  hat den Fixpunkt  $\rho$  in  $\mathbb{H}$ , Spur  $R = 1$ ,  $R^3 = -I$ ,  $\text{ord } R = 6$ .

Sei  $S$  wie oben:  $ad - bc = 1$ ,  $a + d = 1$ .

$$\Rightarrow a(-a+1) - bc = 1 \quad \Rightarrow a^2 - a + 1 \equiv 0 \pmod{c}.$$

Umgekehrt: Sind  $a, c \in \mathbb{Z}$ ,  $c \neq 0$ ,  $a^2 - a + 1 \cong 0 \pmod{c}$ , so ist  $b := -\frac{a^2 - a + 1}{c} \in \mathbb{Z}$ ,  $S := \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a + 1 \end{pmatrix} \in {}_1\Gamma$ , Spur  $S = 1$  und  $S$  ist elliptisch mit Fixpunkt  $\omega$ .

Bestimmung der Konjugationsklassen: Sei  $S$  wie oben:  $S \in {}_1\Gamma$ , Spur  $S = 1$ ,  $S^2 - S + I = 0$ ,  $S^3 = I$ . Dann ist  $\mathbb{Z}[S] \simeq \mathbb{Z}\left[e^{\frac{\pi i}{3}}\right] \simeq \mathbb{Z}[\rho]$  ein Hauptidealring,  $\mathbb{Z}[S]$  operiert auf  $\mathbb{Z}^2$ ,  $\mathbb{Z}^2$  ist torsionsfreier  $\mathbb{Z}[S]$ -Modul: Sei  $x \in \mathbb{Z}^2$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ ,  $(\alpha + \beta S)x = 0$ . Wegen  $S^{-1} = I - S$  multiplizieren wir mit  $(\alpha + \beta(I - S))$  und erhalten:

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta(I - S))(\alpha + \beta S)x &= \left( \alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 \underbrace{(S - S^2)}_{=I} \right) x \\ &= (\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)x = \left( \left( \alpha + \frac{\beta}{2} \right)^2 + \frac{3}{4}\beta^2 \right) x \\ &= 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow \alpha = \beta = 0$  oder  $x = 0$ .  $\Rightarrow \mathbb{Z}^2$  ist freier  $\mathbb{Z}[S]$ -Modul vom Rang 1, so dass es ein  $u \in \mathbb{Z}^2$  gibt mit  $\mathbb{Z}^2 = \mathbb{Z}[S]u$ . Setze  $v := Su$ .  $\Rightarrow u, v$  ist eine  $\mathbb{Z}$ -Basis von  $\mathbb{Z}^2$ , also  $\det(u, v) \pm 1$ :

a)  $\det(u, v) = 1 \Rightarrow M := (u, v) \in {}_1\Gamma$

$$SM = (v, -u + v) = (u, v) \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{=R}$$

$$\Rightarrow M^{-1}SM = R.$$

b)  $\det(u, v) = -1 \Rightarrow M := (v, u) \in {}_1\Gamma$ ,

$$SM = (-u + v, v) = (v, u) \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}_{=R^{-1}}$$

$$\Rightarrow M^{-1}SM = R^{-1}.$$

Daraus folgt Aussage b).

Wegen  $i \notin \mathbb{Q}(\rho)$  ist nun klar: Es gibt genau zwei Bahnen elliptischer Fixpunkte von  ${}_1\Gamma$ .  $\square$

**1.3.8 Satz** Ist  $S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in {}_1\Gamma$ ,  $s := \text{Spur } S$ , so gibt es  $V \in \langle U, T \rangle \subset {}_1\Gamma$ , so dass für  $V^{-1}SV = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$  die Ungleichungen

$$\left| \alpha - \frac{1}{2}s \right| = \left| \delta - \frac{1}{2}s \right| \leq \frac{1}{2}|\gamma|, \quad |\gamma| \leq |\beta|$$

erfüllt sind. Dann ist notwendig auch  $3\gamma^2 \leq |s^2 - 4|$ .

$$B \quad U^{-n} S U^n = \begin{pmatrix} a - nc & b + n(a-d) - n^2 c \\ c & cn + d \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} =: S_1.$$

Hier ist

$$\left| a_1 - \frac{1}{2}s \right| = \left| \frac{a-d}{2} - nc \right| = \left| d_1 - \frac{1}{2}s \right|.$$

$\Rightarrow$  Wir können  $n_1 \in \mathbb{Z}$  so wählen, dass

$$\left| a_1 - \frac{1}{2}s \right| = \left| d_1 - \frac{1}{2}s \right| = \frac{1}{2}|c| = \frac{1}{2}|c_1|.$$

Ist hier  $|c_1| \leq |b_1|$ , so breche man das Verfahren ab, da die Behauptung in diesem Fall bereits erfüllt ist.

Ist  $|c_1| > |b_1|$ , so konjugieren wir mit  $T$ :

$$S_2 := T^{-1} S_1 T = \begin{pmatrix} d_1 & -c_1 \\ -b_1 & a_1 \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}.$$

Hier ist  $|c_2| = |b_1| < |b_2| = |c|$ . Die Wiederholung des ersten Schritts mit  $S_2$  liefert:

$$S_3 := U^{-n_2} S_2 U^{n_2} = \begin{pmatrix} a_3 & b_3 \\ c_3 & d_3 \end{pmatrix},$$

wobei durch geeignete Wahl von  $n_2$  zu erreichen ist, dass

$$\left| a_3 - \frac{1}{2}s \right| = \left| d_3 - \frac{1}{2}s \right| \leq \frac{1}{2}|c_2| = \frac{1}{2}|c_3|.$$

Falls  $|c_3| \leq |b_3|$ , so breche man hier das Verfahren ab, anderenfalls Konjugation mit  $T \dots$

Wegen  $|c_{n+2}| < |c_n|$  bricht das Verfahren nach endlich vielen Schritten ab.

Sei  $V^{-1} S V = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$  wie im Satz.

$$\begin{aligned} \Rightarrow |s^2 - 4| &= |(\alpha + \delta)^2 - 4(\alpha\delta - \beta\gamma)| \\ &= |(\alpha - \delta)^2 + 4\beta\gamma| \geq 4 \underbrace{|\beta|}_{\geq |\gamma|} |\gamma| - \underbrace{(\alpha - \delta)^2}_{\leq \gamma^2} \geq 3\gamma^2. \end{aligned}$$

□

**1.3.9 Korollar** Zu jedem  $s \in \mathbb{Z} \setminus \{\pm 2\}$  gibt es nur endlich viele Konjugationsklassen von  ${}_1\Gamma$  mit der Spur  $s$ .

B Jedes  $s$  ist Spur von z. B.  $\begin{pmatrix} s & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in {}_1\Gamma$ .

Ferner: Sei  $S \in {}_1\Gamma$ , Spur  $S = s$ .  $\xRightarrow{\text{Satz 1.3.8}}$   $S$  ist konjugiert zu  $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in {}_1\Gamma$  mit

$$\left| \alpha - \frac{1}{2}s \right| = \left| \delta - \frac{1}{2}s \right| \leq \frac{1}{2}|\gamma|, \quad |\gamma| \leq |\beta|, \quad 3\gamma^2 \leq |s^2 - 4|.$$

Wegen  $s \neq \pm 2$  ist  $\gamma \neq 0$ , und wegen  $\beta\gamma^2 \leq |s^2 - 4|$  gibt es nur endlich viele Möglichkeiten für  $\gamma$ . Für jedes  $\gamma$  gibt es nur endlich viele Möglichkeiten für  $\alpha$  und  $\delta$  (eigentlich genügt hier die Aussage für  $\alpha$ , weil diese bereits  $\delta$  impliziert), und von diesen  $\alpha, \gamma, \delta$  kommen nur diejenigen in Betracht, für welche  $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$  mit passendem  $\beta \in \mathbb{Z}$  (beachte:  $\gamma \neq 0!$ ),  $|\beta| \geq |\gamma|$ ,  $\alpha + \delta = s$ . Es bleiben also nur endlich viele Möglichkeiten für  $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in {}_1\Gamma$ .  $\square$

### Bemerkungen

- 1) Für  $s = 0$  und  $s = 1$  kann man mit Satz 1.3.8 erneut die Konjugationsklassen elliptischer Elemente in  ${}_1\Gamma$  bestimmen.
- 2) Für  $s = \pm 2$  ist  $S$  konjugiert zu  $\pm U^n$  mit passendem  $n \in \mathbb{Z}$ . Die Matrizen  $\pm U^n$  mit  $n \in \mathbb{Z}$  sind ein genaues Vertretersystem von Matrizen aus  ${}_1\Gamma$  mit Spur  $\pm 2$ .
- 3) Die Fixpunkte hyperbolischer Elemente in  ${}_1\Gamma$  lassen sich genau angeben: Die Menge der Fixpunkte ist genau die Menge der Paare verschiedener konjugierter algebraischer Zahlen eines reell-quadratischen Zahlkörpers (vgl. Schoeneberg (1974), Seite 13, Theorem 9).

**1.3.10 Satz**  ${}_1\Gamma$  wird von  $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  und  $T = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  erzeugt. Auch  $T$  und  $R = TU = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  erzeugen  ${}_1\Gamma$ .

B Sei  $S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in {}_1\Gamma$ .

$$\Rightarrow TS = \begin{pmatrix} -c & -d \\ a & b \end{pmatrix}, \quad U^k S := \begin{pmatrix} a + kc & b + kd \\ c & d \end{pmatrix}.$$

$c = 0$ :  $\Rightarrow S = \pm U^m \in \langle U, T \rangle$  mit passendem  $m \in \mathbb{Z}$ ,  $T^2 = -I$ .

$c \neq 0$ :  $\Rightarrow$  Man kann rekursiv durch Multiplikation mit  $U$ -Potenzen und  $T$  den Betrag von  $c$  verkleinern:

$$\exists k_1 \in \mathbb{Z} \quad 0 \leq a + k_1 c < |c| \quad \Rightarrow TU^{k_1} S = \begin{pmatrix} -c & * \\ a + k_1 c & * \end{pmatrix}.$$

Nach endlich vielen Schritten  $k_1, \dots, k_n$  erhält man

$$TU^{k_n} S = \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \in \langle U, T \rangle. \quad \square$$

Bezeichnet man für  $S \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$  mit  $\bar{S}$  das Bild von  $S$  in  $\mathrm{Aut} \mathbb{H}$  und dementsprechend auch  $\bar{\Gamma} := \{\bar{S} \mid S \in \Gamma\}$ , so gilt:

**1.3.11 Korollar**  $\bar{{}_1\Gamma}$  wird von  $\bar{U}: z \mapsto z + 1$  und  $\bar{T}: z \mapsto -\frac{1}{z}$  erzeugt.

Die Darstellung eines  $S \in {}_1\Gamma$  als Produkt von Faktoren  $U, T$  ist nicht eindeutig, denn  $R^2 = TUTUTU = -I = T^2$ . Wenn man Eindeutigkeit der Darstellung fordert, wählt man andere Erzeugende:

**1.3.12 Satz** Die Erzeugenden  $T = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  und  $V := -R = -TU = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$  von  ${}_1\Gamma$  erfüllen die Relationen

$$T^4 = V^3 = I, \quad VT^2 = T^2V,$$

und diese Relationen definieren  ${}_1\Gamma$ , d. h. alle anderen Relationen zwischen  $V$  und  $T$  folgen aus diesen.

**1.3.13 Satz**  $\overline{{}_1\Gamma}$  ist freies Produkt der von  $\overline{T}$  erzeugten zyklischen Gruppe der Ordnung 2 und der von  $\overline{R}$  erzeugten zyklischen Gruppe der Ordnung 3.

## 1.4 Ein Fundamentalbereich der Modulgruppe

**1.4.1 Definition (Fundamentalmenge)** Sei  $\Gamma \subset {}_1\Gamma$  eine Untergruppe,  $D \subset \mathbb{H}$ . Dann heißt  $D$  eine *Fundamentalmenge* von  $\Gamma$  in  $\mathbb{H}$ , wenn  $D$  ein genaues Vertretersystem der Bahnen von  $\Gamma$  in  $\mathbb{H}$  ist, d. h.  $\Gamma D = \mathbb{H}$ ,  $SD \cap D = \emptyset$  für  $S \in \Gamma \setminus \{\pm I\}$ .

$D$  heißt *Fundamentalbereich* von  $\Gamma$  in  $\mathbb{H}$ , wenn gilt:

- a)  $D$  ist offen,
- b)  $\Gamma \overline{D} = \mathbb{H}$ ,
- c)  $SD \cap D = \emptyset$  für alle  $S \in \Gamma \setminus \{\pm I\}$ ,
- d)  $\overline{D} \setminus D$  ist eine  $\omega$ -Nullmenge.

**Bemerkung** Ist  $D$  ein Fundamentalbereich von  $\Gamma$ , so ist für alle  $S \in \Gamma \setminus \{\pm I\}$  auch  $S\overline{D} \cap D = \emptyset$ , denn: nehmen wir an, dass  $S\overline{D} \cap D \neq \emptyset$  gelte, so gibt es ein  $z \in S\overline{D} \cap D$  und damit auch eine Umgebung  $U$  von  $z$  mit  $U \subset D$ , so dass  $z \in S\overline{D}$  in  $U$  liegt.  $\Rightarrow SD \cap U \neq \emptyset$ , d. h.  $SD \cap D \neq \emptyset$ . Das aber wäre ein Widerspruch zu Punkt c) der Definition.

**1.4.2 Satz**  $D := \{z \in \mathbb{H} \mid |\operatorname{Re} z| < \frac{1}{2}, |z| > 1\}$  ist ein Fundamentalbereich von  ${}_1\Gamma$  in  $\mathbb{H}$ .

B a)  $D$  ist nach Definition offen.

b) Zu zeigen ist:  $\forall z \in \mathbb{H} \quad \exists S \in \langle U, T \rangle \quad Sz \in \overline{D}$ .

Sei  $z \in \mathbb{H}$  fest.  $\Rightarrow \exists n_1 \in \mathbb{Z} \quad z_1 := U^{n_1} z$  erfüllt  $|\operatorname{Re} z_1| \leq \frac{1}{2}$ . Man kann auch  $-\frac{1}{2} \leq \operatorname{Re} z < \frac{1}{2}$  erreichen.

Falls  $|z_1| \geq 1$ , so ist das Ziel erreicht. Anderenfalls führen wir eine induktive Konstruktion durch: Sei  $k \geq 1$  und  $z_k$  schon konstruiert mit  $|\operatorname{Re} z_k| \leq \frac{1}{2}$ . Falls  $|z_k| \geq 1$ , so ist das Ziel erreicht, sonst ist  $|z_k| < 1$ .  $\Rightarrow |Tz_k| > 1$ .

$$\Rightarrow \exists n_{k+1} \in \mathbb{Z} \quad z_{k+1} := U^{n_{k+1}} z_k \quad |\operatorname{Re} z_{k+1}| \leq \frac{1}{2}, \quad \operatorname{Im} z_{k+1} = \operatorname{Im}(Tz_k) = \frac{\operatorname{Im} z_k}{|z_k|^2} > \operatorname{Im} z_k.$$

Nach endlich vielen Schritten bricht das Verfahren ab, da man sonst eine Folge  $(z_k)_{k \geq 1}$  verschiedener Punkte aus  ${}_1\Gamma z$  erhielte, die im Kompaktum  $\{\tau \in \mathbb{H} \mid |\tau| \leq 1, \operatorname{Im} \tau \geq \operatorname{Im} z\}$  einen Häufungspunkt hätte. Dies ist ein Widerspruch zur Diskontinuität von  ${}_1\Gamma$  in  $\mathbb{H}$  nach Satz 1.3.2 und Korollar 1.3.3.

Alternativ kann man in folgender Weise vorgehen: Sei  $z \in \mathbb{H}$ . Dann ist  $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}z$  ein Gitter in  $\mathbb{C}$ . Es gibt einen betragsmäßig kleinsten Gitterpunkt  $\neq 0$ , d. h. es gibt  $c, d \in \mathbb{Z}$  mit  $(c, d) \neq (0, 0)$ , so dass für alle  $m, n \in \mathbb{Z}$  mit  $(m, n) \neq (0, 0)$  gilt:

$$|mz + n| \leq |cz + d|. \quad (1.2)$$

Offenbar gilt  $\operatorname{ggT}(c, d) = 1$ , da man sonst nach Division der rechten Seite durch  $\operatorname{ggT}(c, d)$  ein Paar  $(m, n)$  erhielte, das (1.2) verletzt. Also existieren  $a, b \in \mathbb{Z}$ , so dass  $S := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in {}_1\Gamma$ . Dann ist für alle  $k \in \mathbb{Z}$   $U^k S = \begin{pmatrix} * & * \\ c & d \end{pmatrix}$ . Wegen (1.2) gilt: Für alle  $k \in \mathbb{Z}$  ist  $|U^k S z| \geq 1$ , bei geeigneter Wahl von  $k$  ist dann  $|\operatorname{Re} U^k S z| \leq \frac{1}{2}$ .

c)  $SD \cap D = \emptyset$  für  $S \in {}_1\Gamma \setminus \{\pm I\}$  folgt aus Satz 1.4.3

d) klar □

**1.4.3 Satz** Seien  $z, z' \in \overline{D}$ ,  $S \in {}_1\Gamma \setminus \{\pm I\}$ ,  $Sz = z'$ . Dann liegt einer der folgenden Fälle vor:

- (1)  $\operatorname{Re} z = -\frac{1}{2}$ ,  $S = \pm U$ , d. h.  $z' = z + 1$ .
- (2)  $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}$ ,  $S = \pm U^{-1}$ , d. h.  $z' = z - 1$ .
- (3)  $|z| = |z'| = 1$ ,  $S = \pm T$ , d. h.  $z' = -\frac{1}{z}$ .
- (4)  $z = z' = \rho$ ,  $S \in \langle R \rangle = \langle TU \rangle$ .
- (5)  $z = z' = \xi$ ,  $S \in \langle URU^{-1} \rangle$ .
- (6)  $z = \rho$ ,  $z' = \xi$ ,  $S \in U \langle R \rangle$ .
- (7)  $z = \xi$ ,  $z' = \rho$ ,  $S \in \langle R \rangle U^{-1}$ .

B Sei  $S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ .  $\Rightarrow y' := \operatorname{Im} z' = \frac{y}{|cz+d|^2}$ . Aus Symmetriegründen kann oBdA  $y' \geq y$  angenommen werden, ansonsten Ersetzung  $S \mapsto S^{-1}$ .  $\Rightarrow |cz + d| \leq 1$ .

$$|c| \frac{1}{2} \sqrt{3} \leq |cy| \leq |cz + d| \leq 1.$$

$\Rightarrow c \in \{0, \pm 1\}$ . Von den Fällen  $c = \pm 1$  braucht nur  $c = 1$  behandelt zu werden, sonst Ersetzung  $S \mapsto -S$ .

- a)  $c = 0 \Rightarrow S = \pm U^k$  mit  $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ . Wegen  $z, Sz = z + k \in \overline{D}$  ist notwendig  $k = 1$ ,  $\operatorname{Re} z = -\frac{1}{2}$  (Fall (1)) oder  $\operatorname{Re} z = -\frac{1}{2}$  und  $k = -1$  (Fall (2)).



- b)  $c = 1 \Rightarrow |z + d| = 1, |\operatorname{Re} z| \leq \frac{1}{2} \Rightarrow d \in \{0, \pm 1\}$ , ferner  $|z| \geq 1 \Rightarrow$  Immer ist  $|z| = |z'| = 1$ , und es ist entweder (bi)  $\rho \neq z \neq \xi$  und  $d = 0$  oder (bii)  $z = \rho$  und  $d \in \{0, 1\}$  oder (biii)  $z = \xi$  und  $d \in \{0, -1\}$ . Diese Fälle werden nun diskutiert:

(i)  $\rho \neq z \neq \xi, d = 0 \Rightarrow \underline{S} = \underline{T}$ .

$$\Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \quad S = U^k T \quad \Rightarrow Sz = -\frac{1}{z} + k \in \overline{D}, z \in \overline{D}.$$

Wegen  $\rho \neq z \neq \xi$  folgt dann  $k = 0$  und damit  $S = T$ , also Fall (3).

- (ii) 1.)  $z = \rho, d = 0 \Rightarrow \underline{S} = \underline{T}$ , es gibt also ein  $k \in \mathbb{Z}$ , so dass  $S = U^k T \Rightarrow S\rho = U^k T\rho = \xi + k \in \overline{D} \Rightarrow k \in \{0, -1\}$ , folglich  
 A)  $k = 0 \Rightarrow S = T$ , also Fall (3), oder  
 B)  $k = -1 \Rightarrow S = U^{-1} T = -R^{-1} = R^2 \Rightarrow S \in \langle R \rangle$ , also Fall (4).  
 2.)  $z = \rho, d = 1 \Rightarrow \underline{S} = (1, 1) = \underline{R}$ , es gibt also ein  $k \in \mathbb{Z}$ , so dass  $S = U^k R \Rightarrow S\rho = \rho + k \in \overline{D} \Rightarrow k \in \{0, 1\}$ , folglich  
 A)  $k = 0 \Rightarrow S = R \in \langle R \rangle$ , also Fall (4) oder  
 B)  $k = 1 \Rightarrow S = UR \in U \langle R \rangle$ , also Fall (6).  
 (iii) 1.)  $z = \xi, d = 0 \Rightarrow \underline{S} = \underline{T}$ , es gibt also ein  $k \in \mathbb{Z}$ , so dass  $S = U^k T \Rightarrow S\xi = \xi + k \in \overline{D} \Rightarrow k \in \{0, 1\}$ , folglich  
 A)  $k = 0 \Rightarrow S = T$ , also Fall (3) oder  
 B)  $k = 1 \Rightarrow S = UT = URU^{-1} \in \langle URU^{-1} \rangle$ , also Fall (5).  
 2.)  $z = \xi, d = -1 \Rightarrow \underline{S} = (1, -1) = \underline{TU^{-1}}$ , es gibt also ein  $k \in \mathbb{Z}$ , so dass  $S = U^k TU^{-1} \Rightarrow S\xi = U^k \underbrace{TU^{-1}\xi}_{=\xi} = \xi + k \in \overline{D} \Rightarrow k \in \{0, -1\}$ , folglich  
 A)  $k = 0 \Rightarrow S = TU^{-1} = UR^2 U^{-1} \in \langle URU^{-1} \rangle$ , also Fall (5), oder  
 B)  $k = -1 \Rightarrow S = U^{-1} TU^{-1} = R^2 U^{-1} \in \langle R \rangle U^{-1}$ , also Fall (7).  $\square$

In den obigen Betrachtungen ist ein zweiter Beweis für Satz 1.3.10 enthalten: Seiz  $z \in D, A \in {}_1\Gamma \Rightarrow Az \in \mathbb{H}$  hat einen Vertreter  $w \in \overline{D}$ , und zwar lässt sich  $Az$  durch  $V \in \langle U, T \rangle$  nach  $w$  transformieren, d. h.

$$\exists w \in \overline{D}, V \in \langle U, T \rangle \quad VAz = w.$$

$\Rightarrow z \in D, w \in \overline{D}$  sind  ${}_1\Gamma$ -äquivalent bzgl.  $VA$ . Nach Satz 1.4.3 folgt dann  $VA = \pm I$ , also  $A = \pm V^{-1} \in \langle U, T \rangle$ .

**Bemerkung**  $D$  lässt sich als sog. Poincarésches Normalpolygon auffassen via

$$D = \bigcap_{S \in {}_1\Gamma \setminus \{\pm I\}} \{z \in \mathbb{H} \mid |z, iy_0| < |Sz, iy_0|, y_0 > 1 \text{ fest}\}.$$

Idee:  $\mathbb{R}^2$  mit Gitter  $\mathbb{Z}^2$  als diskreter Transformationsgruppe. Nehme einen festen Punkt, z. B. 0 und dazu für  $z \in \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$  alle Punkte der Bahnen von  $z$ , die am dichtesten bei 0 liegen.

Allgemein: Ist  $\Gamma$  eine diskrete Untergruppe von  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ , so nehme man einen Punkt  $z_0 \in \mathbb{H}$ , der kein elliptischer Fixpunkt von  $\Gamma$  ist, und bilde

$$D := \bigcap_{S \in \Gamma \setminus \{\pm I\}} \{z \in \mathbb{H} \mid |z, z_0| < |Sz, z_0|\}.$$

Dann ist  $D$  ein Fundamentalbereich von  $\Gamma$  in  $\mathbb{H}$ .

**1.4.4 Korollar** Die Menge

$$F := \left\{ z \in \mathbb{H} : -\frac{1}{2} \leq \operatorname{Re} z < \frac{1}{2}, |z| \geq 1; -\frac{1}{2} \leq \operatorname{Re} z \leq 0, \text{ falls } |z| = 1 \right\}$$

ist eine Fundamentalmenge von  ${}_1\Gamma$  in  $\mathbb{H}$ .

B Satz 1.4.2 und Satz 1.4.3 □

## 1.5 Untergruppen der Modulgruppe

**1.5.1 Satz** Es seien  $-I \in \Delta \subset \Gamma \subset {}_1\Gamma$ , und  $F$  sei ein Fundamentalbereich von  $\Gamma$ ,  $\mu := [\Gamma : \Delta] < \infty$ ,  $R_1, \dots, R_\mu \in \Gamma$ . Dann gilt  $G := \bigcup_{v=1}^\mu R_v F$  ist Fundamentalbereich von  $\Delta \iff \Gamma = \bigcup_{v=1}^\mu \Delta R_v$ , d. h.  $R_1, \dots, R_\mu$  bilden ein Vertretersystem der Rechtsnebenklassen von  $\Delta$  in  $\Gamma$ .

B „ $\Rightarrow$ “ Annahme  $\Delta R_j = \Delta R_k$  für  $1 \leq j, k \leq \mu$ . Dann gibt es ein  $S \in \Delta$ , so dass  $SR_j = R_k$ , also  $R_k F \subset G \cap S^{-1}G (= \emptyset, \text{ falls } S \neq \pm I)$ .  $\Rightarrow S = \pm I \Rightarrow R_j = \pm R_k$ . Ist  $j \neq k$ , so ist  $\Delta R_j = \Delta R_k$  wegen  $-I \in \Delta$ ,  $R_1, \dots, R_\mu$  ist kein Vertretersystem der Rechtsnebenklassen von  $\Delta$  in  $\Gamma$ .  $\Rightarrow \exists V \in \Gamma \quad \Delta V \notin \{\Delta R_1, \dots, \Delta R_\mu\}$ . Sei  $z \in F$ . Dann gibt es einen zu  $Vz$   $\Delta$ -äquivalenten Punkt  $w \in \overline{G}$ , also ein  $S \in \Delta$ , so dass  $SVz = w \in \overline{G} = \bigcup_{v=1}^\mu R_v \overline{F}$ . Das gilt, weil  $\mu < \infty$  ist, aber auch, falls die Überdeckung lokal endlich ist.  $\Rightarrow \exists v \in \{1, \dots, \mu\} \quad SV = \pm R_v$ .  $\Rightarrow \Delta V = \Delta SV = \Delta R_v$ , und das ist ein Widerspruch zur Wahl von  $V$ .  $\Rightarrow R_1, \dots, R_\mu$  bilden ein Vertretersystem der Rechtsnebenklassen von  $\Delta$  in  $\Gamma$ .

„ $\Leftarrow$ “  $G$  ist offen und für  $\pm I \neq S \in \Delta$  ist

$$SG \cap G = \left( \bigcup_{v=1}^\mu SR_v F \right) \cap \left( \bigcup_{\rho=1}^\mu R_\rho F \right) = \bigcup_{1 \leq v, \rho \leq \mu} (SR_v F \cap R_\rho F).$$

Für  $v = \rho$  ist  $SR_v \neq \pm R_v$ , da  $S \neq \pm I$ .  $\Rightarrow SR_v F \cap R_v F = \emptyset$ .

Für  $v \neq \rho$  ist auch  $SR_v \neq R_\rho$ , denn  $SR_v \in \Delta R_v$ ,  $\pm R_\rho \in \Delta R_\rho$  und  $\Delta R_v \cap \Delta R_\rho = \emptyset$  nach Voraussetzung.  $\Rightarrow SG \cap G = \emptyset$ .

$$\Delta \overline{G} = \Delta \bigcup_{v=1}^\mu R_v \overline{F} = \bigcup_{v=1}^\mu SR_v \overline{F} = \bigcup_{M \in \Gamma} M \overline{F} = \mathbb{H}.$$

$\operatorname{rd} G$  ist offensichtlich eine Nullmenge. □

**Zusatz** Ist die Überdeckung von  $\mathbb{H}$  durch die Bilder  $M\overline{F}$  lokal endlich, so gilt Satz 1.5.1 auch für  $\mu = \infty$ .

**1.5.2 Korollar** In der Situation aus Satz 1.5.1 hängt  $\omega(F) = \int_F \frac{dx dy}{y^2}$  nicht ab von der Auswahl von  $F$ , und es gilt:  $\omega(G) = \mu\omega(F)$ .

B Die Behauptung folgt direkt aus Lemma 1.5.3. □

**1.5.3 Lemma** In der Situation von Satz 1.5.1 sei  $A \subset \mathbb{H}$  eine Borel-Menge mit  $\Gamma A = \mathbb{H}$  und  $\omega(A \cap SA) = 0$  für  $S \in \Gamma \setminus \{\pm I\}$ . Dann ist  $\omega(A) = \omega(F)$ .

B Bezeichnet man mit  $\overline{\Gamma}$  das Bild von  $\Gamma$  in der  $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$ , so ist  $F = \bigcup_{\overline{S} \in \overline{\Gamma}} F \cap \overline{S}A$  eine bis auf Nullmengen disjunkte Vereinigung.

$$\Rightarrow \omega(F) = \sum_{\overline{S} \in \overline{\Gamma}} \omega(F \cap \overline{S}A) = \sum_{\overline{S} \in \overline{\Gamma}} \omega\left(\left(\overline{S}^{-1}F\right) \cap A\right) = \sum_{\overline{S} \in \overline{\Gamma}} \omega\left(A \cap \overline{S}F\right) = \omega(A)$$

aus Symmetriegründen. □

**1.5.4 Beispiel** Die Thetagruppe  $\Gamma_\theta := \langle U^2, T \rangle$  hat den Fundamentalbereich

$$F := \{z \in \mathbb{H} \mid |z| > 1, -1 < \text{Re } z < 1\}.$$

Begründung:  $F$  ist offen,  $\bigcup_{S \in \Gamma_\theta} S\overline{F} = \mathbb{H}$ , denn für  $z \in \mathbb{H}$  existiert ein  $k_1 \in \mathbb{Z}$  mit  $|\text{Re } U^{2k_1} z| \leq 1$ . Falls  $|U^{2k_1} z| > 1$ , so ende die Konstruktion, anderenfalls Anwendung von  $T$ :  $|TU^{2k_1} z| \geq 1$  und es gibt ein  $k_2 \in \mathbb{Z}$  mit  $|\text{Re } U^{2k_2} TU^{2k_1} z| \leq 1$ . Dabei  $\text{Im } U^{2k_2} TU^{2k_1} z > \text{Im } Z^{2k_1} z = \text{Im } z$ . Induktiv fährt man fort. Falls das Verfahren nicht nach endlich vielen Schritten abbricht, erhalten wir eine Folge paarweise verschiedener zu  $z$   $\Gamma_\theta$ -äquivalenter Punkte im Kompaktum  $\{w \in \mathbb{H} \mid |w| < 1, \text{Im } w \geq \text{Im } z\}$ . Das ist ein Widerspruch zur Diskontinuität von  $\Gamma_\theta$  in  $\mathbb{H}$ .

Sei  $\pm I \neq S \in \Gamma_\theta$ . Wegen  $T^2 = -I$  ist  $S = \pm U^{2k_1} T U^{2k_2} T \dots T U^{2k_n}$  mit  $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{Z}$ ,  $k_2, \dots, k_{n-1} \neq 0$ . Für  $k \in \mathbb{Z}$  setze  $T_k := U^{2k} T U^{-2k}$ .  $\Rightarrow T_k$  sind elliptisch,  $\overline{T_k}$  hat die Ordnung 2 und bildet das Äußere von  $\{|z - 2k| = 1\}$  auf das Innere ab.  $\Rightarrow \exists p_1, \dots, p_n \in \mathbb{Z}$ ,  $q \in \mathbb{Z}$  mit  $S = \pm U^{2q} T_{p_1} \dots T_{p_n}$ ,  $p_v \neq p_{v+1}$  für  $1 \leq v \leq n$ . Für  $n = 0$  ist hier notwendig  $q \neq 0$ . Sei  $z \in F$ . Für  $n = 0$  ist also  $q \neq 0$  und  $Sz \notin F$ . Sei  $n \geq 1$ . Dann liegt  $T_{p_n} z \in \{|\tau - 2p_n| < 1\}$ , also im Äußeren von  $\{|\tau - 2p_{n-1}| = 1\}$ .  $\Rightarrow T_{p_{n-1}} T_{p_n} z \in \{|\tau - 2p_{n-1}| < 1\}$ , insgesamt  $|T_{p_1} \dots T_{p_n} z - 2p_1| < 1$ .  $\Rightarrow Sz = (U^{2q} T_{p_1} \dots T_{p_n}) z \notin F$ .

Offensichtlich ist  $\text{rd } F$  eine Nullmenge.

Ein alternativer Fundamentalbereich von  $\Gamma_\theta$  ist  $G := D \cup UD \cup UTD$  (siehe Abb. 1.7).  $\Rightarrow [{}_1\Gamma : \Gamma_\theta] = 3$ , und  $I, U, UT$  ist ein Vertretersystem der Rechtsnebenklassen. Die Randabbildungen des roten Fundamentalbereichs sind  $U^2, T, UTU^{-1}TU^{-1}$ . Die Bahn  ${}_1\Gamma i = \Gamma_\theta i \sqcup \Gamma_\theta(i+1)$ , denn  $i$  ist elliptischer Fixpunkt von  $\Gamma_\theta$ ,  $i+1$  nicht.  $\rho$  und kein zu  $\rho$   ${}_1\Gamma$ -äquivalenter Punkt sind Fixpunkte von  $\Gamma_\theta$ .  $\Rightarrow \Gamma_\theta$  hat genau eine Bahn elliptischer Fixpunkte, diese wird repräsentiert von  $i$ .

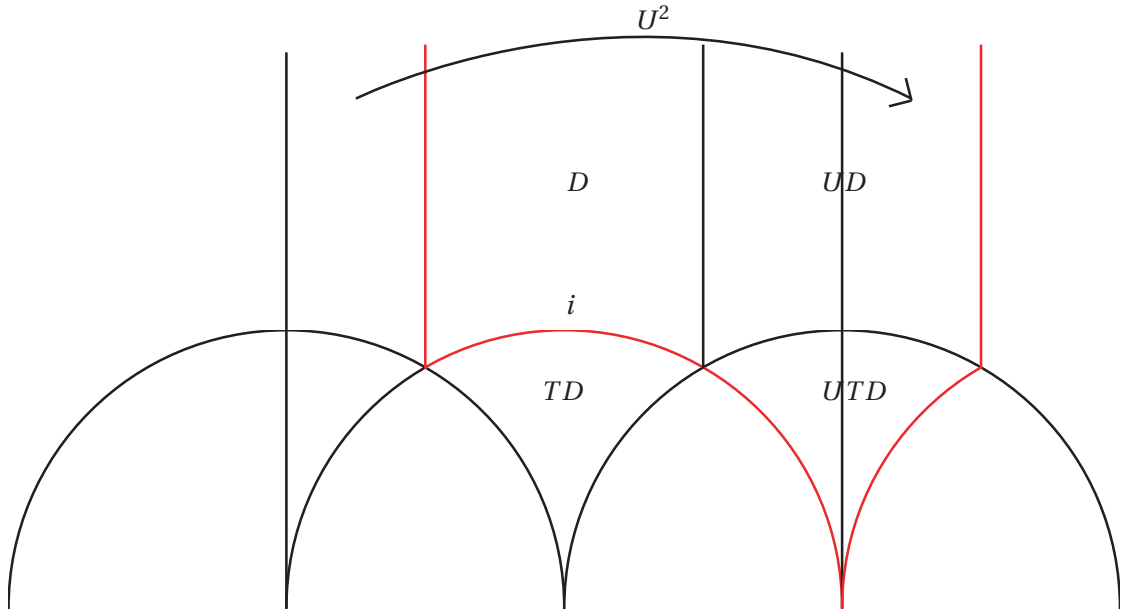


Abbildung 1.7: Ein Fundamentalbereich von  $\Gamma_\theta$

### Behauptung

$$\Gamma_\theta = \{S \in {}_1\Gamma \mid S \cong F \pmod{2} \text{ oder } S \cong T \pmod{2}\} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma \mid a+b+c+d \equiv 0 \pmod{2} \right\}$$

B Sei  $\Delta$  eine der Mengen auf der rechten Seite.  $\Rightarrow \Delta \subset {}_1\Gamma$  ist Untergruppe, denn die Summe der Elemente von  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$  ist  $(a+c)(a'+b') + (b+d)(c'+d')$ , und wegen  $U^2 \in \Delta$ ,  $T \in \Delta$  ist  $\Gamma_\theta \subset \Delta \subset {}_1\Gamma$ .  $U \notin \Delta \Rightarrow \Delta \neq {}_1\Gamma$ ,  $[{}_1\Gamma : \Gamma_\theta] = 3 \Rightarrow \Delta = \Gamma_\theta$ .  $\square$

**1.5.5 Beispiel (Untergruppe von unendlichem Index in  ${}_1\Gamma$ )** Sei  $T_k := U^{2k} T U^{-2k}$  für  $k \in \mathbb{Z}$ .  $\Gamma := \langle T_k : k \in \mathbb{Z} \rangle \subset {}_1\Gamma$  hat den Fundamentalbereich  $G := \bigcap_{k \in \mathbb{Z}} \{z \in \mathbb{H} \mid |z - 2k| > 1\}$ .

Begründung:  $G$  ist offen und für  $z \in \mathbb{H}$  existiert ein  $V \in \Gamma_\theta$  mit  $Vz \in \overline{F}$ , wobei  $F$  ein Fundamentalbereich von  $\Gamma_\theta$  sei. Schreibt man  $V = U^{2\ell} S$  mit  $S \in \Gamma$ ,  $\ell \in \mathbb{Z}$ , so ist

$$Sz = U^{-2\ell} \underbrace{Vz}_{\in \overline{F}} \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} U^{2k} \overline{F} = \overline{G}.$$

Sei  $\pm I \neq S \in \Gamma$ ,  $z \in G$ .  $\Rightarrow S = \pm T_{k_1} \cdots T_{k_n}$  mit  $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{Z}$ ,  $n \geq 1$ .  $\Rightarrow Sz \in \{|\tau - 2k_1| < 1\} \not\subset G$ .  $\Rightarrow Sz \notin G$ .  $\text{rd } G$  ist offensichtlich eine Nullmenge.

**1.5.6 Satz** Sei  $-I \in \Gamma \sqsubset {}_1\Gamma$  und  $\zeta$  sei Spitze von  $\Gamma$ ,  $A \in {}_1\Gamma$  mit  $A\zeta = \infty$ . Dann ist

$$N := \min \left\{ k \in \mathbb{N}, A^{-1} U^k A \in \Gamma \right\}$$

sinnvoll, und  $A^{-1}U^N A$  und  $-I$  erzeugen die Fixgruppe  $\Gamma_\zeta$  von  $\zeta$  in  $\Gamma$ .  $N$  heißt dann die Breite von  $\zeta$  in  $\Gamma$ ,  $A^{-1}U^N A$  heißt die Grundmatrix von  $\zeta$  in  $\Gamma$  und ist eine „normierte Erzeugende“ von  $\Gamma_\zeta$ . Dabei gilt:  $N = [({}_1\Gamma)_\zeta : \Gamma_\zeta]$ .

Die Spitzenbreite ist eine Invariante bzgl. Konjugation von  $\Gamma$  in  ${}_1\Gamma$ . Insbesondere haben im Falle  $\Gamma \triangleleft {}_1\Gamma$  alle Spitzen von  $\Gamma$  die gleiche Breite. – Ist  $\zeta$  auch Spitze einer Untergruppe  $\Delta \subset \Gamma$  mit  $-I \in \Delta$ , so ist die Breite von  $\zeta$  in  $\Delta$  ein ganzzahliges Vielfaches von  $N$ , und zwar gilt:

$$(\text{Breite von } \zeta \text{ in } \Delta) = [({}_1\Gamma)_\zeta : \Delta_\zeta] = [({}_1\Gamma)_\zeta : \Gamma_\zeta] [\Gamma_\zeta : \Delta_\zeta].$$

B Sei  $S \in \Gamma_\zeta$ . Dann liefert Satz 1.3.6:

$$({}_1\Gamma)_\zeta = \langle A^{-1}UA, -I \rangle \Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \quad S = \pm A^{-1}U^k A.$$

$\Rightarrow N$  ist sinnvoll. Division mit Rest zeigt:  $k = qN + R$  mit  $0 \leq r \leq N - 1$ .

$$\Rightarrow A^{-1}U^r A = \pm (A^{-1}U^N A)^{-q} S \in \Gamma.$$

Wegen der Minimalität von  $N$  muss bereits  $r = 0$  gelten.

$$\Rightarrow S = \pm (A^{-1}U^N A)^q \in \langle A^{-1}U^N A, -I \rangle \Rightarrow \Gamma_\zeta = \langle A^{-1}U^N A, -I \rangle.$$

Offenbar ist  $N = [({}_1\Gamma)_\zeta : \Gamma_\zeta]$ . Der Rest ist klar.  $\square$

**1.5.7 Satz** Sei  $-I \in \Gamma \sqsubset {}_1\Gamma$ ,  $\mu := [{}_1\Gamma : \Gamma] < \infty$ . Dann ist die Menge der Spitzen von  $\Gamma$  gleich  $\mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ .  $\Gamma$  hat nur endlich viele  $\Gamma$ -Äquivalenzklassen von Spitzen. Sei  $\zeta_1, \dots, \zeta_p$  ein  $\Gamma$ -Vertretersystem dieser Klassen und  $A_j \in {}_1\Gamma$  so gewählt, dass  $\zeta_j = A_j^{-1}\infty$  für  $j = 1, \dots, p$ ,  $N_j$  sei die Breite von  $\zeta_j$  in  $\Gamma$ .

$$\Rightarrow {}_1\Gamma = \bigcup_{j=1}^p \bigcup_{v=0}^{N_j-1} \Gamma A_j^{-1}U^v$$

ist eine (disjunkte) Zerlegung von  ${}_1\Gamma$  in Rechtsnebenklassen modulo  $\Gamma$ . Speziell gilt:  $\mu = \sum_{j=1}^p N_j$ . Ist  $\Gamma \triangleleft {}_1\Gamma$ , so ist  $N_1 = \dots = N_p =: N$ ,  $m = Np$ .

B Behauptung: Jedes  $\zeta \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$  ist Spitze von  $\Gamma$ .

Begründung: Sei  $\zeta = A^{-1}\infty$  mit  $A \in {}_1\Gamma$ ,  $P := A^{-1}UA$  die Grundmatrix von  $\zeta$  in  ${}_1\Gamma$ . Wegen  $[{}_1\Gamma : \Gamma] < \infty$  kommen in der Folge  $(\Gamma P^i)_{i \in \mathbb{N}_0}$  nur endlich viele verschiedene Glieder vor.  $\Rightarrow \exists m, n \in \mathbb{Z}$ ,  $0 \leq m < n$  mit  $\Gamma P^m = \Gamma P^n \Rightarrow P^{n-m} \in \Gamma$  ist parabolisch mit Fixpunkt  $\zeta$ .  $\Rightarrow \zeta$  ist Spitze von  $\Gamma$ .

Behauptung: Es gibt nur endlich viele  $\Gamma$ -Äquivalenzklassen von Spitzen.

Begründung: Sei  ${}_1\Gamma = \bigcup_{j=1}^\mu \Gamma R_j$  mit geeigneten  $R_1, \dots, R_\mu \in {}_1\Gamma$ .

$$\Rightarrow (\text{Menge der Spitzen von } \Gamma) = \mathbb{Q} \cup \{\infty\} = (\text{Menge der Spitzen von } {}_1\Gamma) = {}_1\Gamma\infty = \bigcup_{j=1}^\mu \Gamma(R_j\infty).$$

$\Rightarrow$  Es gibt nur endlich viele Bahnen von Spitzen von  $\Gamma$ .

Sei  $\zeta_1, \dots, \zeta_p$  mit  $p \geq 1$  ein Vertretersystem der Spitzen von  $\Gamma$ ,  $\zeta_j = A_j^{-1}\infty$  mit geeigneten  $A_j \in {}_1\Gamma$ ,  $N_j$  wie in Satz 1.5.7,  $S \in {}_1\Gamma$ .  $\Rightarrow S\infty$  ist  $\Gamma$ -äquivalent zu einer der Spitzen  $\zeta_1, \dots, \zeta_p$ .

d. h. es gibt  $j \in \{1, \dots, p\}$  und  $M \in \Gamma$ , so dass  $S\infty = M\zeta_j = MA_j^{-1}\infty$ , es gibt also  $n \in \mathbb{Z}$ , so dass  $S = \pm MA_j^{-1}U^n$ . Division mit Rest liefert: Sei  $n = aN_j + b$  mit  $a, b \in \mathbb{Z}$  und  $0 \leq b \leq N_j - 1$ .

$$\Rightarrow S = \pm \underbrace{M(A_j^{-1}U^{N_j}A_j)}_{\in \Gamma} A_j^{-1}U^b \in \Gamma A_j^{-1}U^b.$$

Statt  $0 \leq b \leq N_j - 1$  kann man irgendein Restsystem modulo  $N_j$  wählen, dito im folgenden. Ergebnis:

$${}_1\Gamma = \bigcup_{j=1}^p \bigcup_{v=0}^{N_j-1} \Gamma A_j^{-1}U^v. \quad (1.3)$$

In (1.3) für  $(j, v) \neq (k, \rho)$  für  $1 \leq j, k \leq p$ ,  $v \bmod N_j$ ,  $\rho \bmod N_k$  notwendig  $\Gamma A_j^{-1}U^v \neq \Gamma A_k^{-1}U^\rho$ .

Begründung: Aus  $\Gamma A_j^{-1}U^v = \Gamma A_k^{-1}U^\rho$  folgt  $\zeta_j \cong \zeta_k \bmod \Gamma$ , also  $j = k$  und damit  $A_j^{-1}U^{v-\rho}A_j \in \Gamma \Rightarrow N_j | (v - \rho) \Rightarrow v = \rho$ . Das liefert die Behauptung.  $\square$

**1.5.8 Beispiel**  $\Gamma_\vartheta$  hat als Vertretersystem der Rechtsnebenklassen:  $I, U, UT: {}_1\Gamma = \Gamma_\vartheta \uplus \Gamma_\vartheta U \uplus \Gamma_\vartheta UT$ .  $\Rightarrow \infty, UT\infty = 1$  sind ein Vertretersystem der Spitzen von  $\Gamma_\vartheta$ , falls  $\infty \not\equiv 1 \bmod \Gamma_\vartheta$ . Nun gilt: Die Breite von  $\infty$  in  $\Gamma_\vartheta$  ist 2 ( $U \notin \Gamma_\vartheta$  wegen  $\Gamma_\vartheta \neq {}_1\Gamma$ ),  $[{}_1\Gamma : \Gamma_\vartheta] = 3 =$  Summe der Spitzenbreiten.  $\Rightarrow$  es gibt eine zu  $\infty$  inäquivalente Spitze, also ist  $\infty, 1$  ein Vertretersystem. Ergebnis:  $\Gamma_\vartheta$  hat 2 Klassen parabolischer Fixpunkte repräsentiert durch  $\infty$  und 1.  $N_\infty = 2$ ,  $N_1 = 1$ . In der Fixgruppe von 1 liegt z. B.  $UTU^{-1}TU^{-1} \in \Gamma_\vartheta$  und erzeugt mit  $-I$  die Fixgruppe.

**1.5.9 Satz** Sei  $-I \in \Delta \sqsubset \Gamma \subset {}_1\Gamma$ ,  $\mu := [\Gamma : \Delta] < \infty$ ,  $\Gamma = \bigcup_{v=1}^\mu \Delta R_v$  mit  $R_1, \dots, R_\mu \in \Gamma$ ,  $z_0 \in \mathbb{H}$ . Dann gilt:

- a) Ist  $z_0$  kein Fixpunkt von  $\Gamma$ , so sind  $R_1 z_0, \dots, R_\mu z_0$  inäquivalent bzgl.  $\Delta$ , d. h. die Bahn  $\Gamma z_0$  zerfällt in die  $\mu$  disjunkten Bahnen  $\Delta(R_1 z_0), \dots, \Delta(R_\mu z_0)$ .
- b) Ist  $z_0 \in \mathbb{H}$  ein Fixpunkt von  $\Delta$ , so gilt:  $\Gamma z_0 = \Delta z_0 = {}_1\Gamma z_0$ .
- c) Ist  $\Delta \triangleleft \Gamma$ ,  $z_0$  elliptischer Fixpunkt von  $\Delta$ ,  $S \in \Gamma$ , so ist auch  $Sz_0$  elliptischer Fixpunkt von  $\Delta$ .
- d) Ist  $\Delta \triangleleft \Gamma$ ,  $z_0$  elliptischer Fixpunkt von  $\Delta$ , so zerfällt  $\Gamma z_0$  in  $\mu$  disjunkte Bahnen  $\bmod \Delta$ .

**Kommentar** Bedeutung für die Überlagerung  $\Delta \backslash \mathbb{H} \rightarrow \Gamma \backslash \mathbb{H}$ .

B Für alle  $z_0 \in \mathbb{H}$  ist  $\Gamma z_0 = \bigcup_{v=1}^\mu \Delta(R_v z_0)$ .

- a) Ist  $j \neq k$  und  $\Delta R_j z_0 = \Delta R_k z_0$ , so existiert ein  $S \in \Delta$  mit  $SR_j z_0 = R_k z_0 \Rightarrow R_k^{-1}SR_j z_0 = z_0$ , und für  $j \neq k$  ist  $R_k^{-1}SR_j \neq \pm I$ , denn sonst wäre  $SR_j = \pm R_k \Rightarrow \Delta R_k = \Delta(\pm SR_j) = \Delta R_j$ , und das wäre ein Widerspruch zu  $j \neq k$ .  $\Rightarrow z_0$  ist Fixpunkt von  $\Gamma$ , und das ist ein Widerspruch zur Annahme.  $\Rightarrow$  a)

- b) klar, denn:  $\left(\overline{{}_1\Gamma}\right)_{z_0}$  hat die Ordnung 2 oder 3, und  $-I \in \Delta$ .
- c) Sei  $E \in \Delta$  elliptisch mit Fixpunkt  $z_0$ ,  $S \in \Gamma \Rightarrow SES^{-1} \in \Delta$  ist elliptisch mit Fixpunkt  $Sz_0$ .
- d) Sei  $z_0 \in \mathbb{H}$  elliptischer Fixpunkt und  $A, B \in \Gamma$ . Dann gilt:  $Az_0 \equiv Bz_0 \pmod{\Delta}$ , d. h. es gibt ein  $S \in \Delta$  mit  $SAz_0 = Bz_0 \Leftrightarrow \exists S \in \Delta \quad B^{-1}SA \in \Gamma_{z_0} \stackrel{\text{b)}}{=} \Delta z_0 \sqsubset \Delta. \Rightarrow \exists S \in \Delta \quad SA \in B\Delta = \Delta B$ , da  $D \triangleleft \Gamma. \Rightarrow \Delta A = \Delta B \Rightarrow \Gamma_{z_0}$  zerfällt in  $\mu$  paarweise verschiedene Bahnen  $\pmod{\Delta}$ .  $\square$

**Beispiel**  $\Gamma_\vartheta \sqsubset {}_1\Gamma := \Gamma_\vartheta i \uplus \Gamma_\vartheta(i+1)$ . Für  $z_0 = \rho$  haben wir  ${}_1\Gamma = \Gamma_\vartheta \uplus \Gamma_\vartheta U \uplus \Gamma_\vartheta UT$ .

$$\Rightarrow U\rho = \xi \Rightarrow \Gamma_\vartheta U\rho = \Gamma_\vartheta TU\rho = \Gamma_\vartheta \rho.$$

wegen  $UT\rho = U\xi = \xi + 1 = \rho + 2 = U^2\rho \in \Gamma_\vartheta \rho$ .  $\Gamma_\vartheta(UT\rho) = \Gamma_\vartheta \rho. \Rightarrow {}_1\Gamma\rho = \Gamma_\vartheta \rho$ : Es findet keine Zerlegung statt wie in Satz 1.5.9 a) oder d).

**1.5.10 Definition (Hauptkongruenzgruppe)** Für  $n \in \mathbb{N}$  sei

$$\Gamma(n) := \{S \in {}_1\Gamma \mid S \equiv I \pmod{n}\} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in {}_1\Gamma \mid a \equiv d \equiv 1 \pmod{n}, b \equiv c \equiv 0 \pmod{n} \right\}$$

die *Hauptkongruenzgruppe mod n*.

$$\Gamma[n] := \Gamma(n) \uplus (-I)\Gamma(n)$$

heißt ebenfalls Hauptkongruenzgruppe mod n.

$$\Gamma_0(n) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in {}_1\Gamma \mid c \equiv 0 \pmod{n} \right\} \quad \text{und} \quad \Gamma^0(n) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in {}_1\Gamma \mid b \equiv 0 \pmod{n} \right\}$$

heißen *Hecke-Gruppen*.

**1.5.11 Folgerung** a)  $\Gamma(n) \triangleleft {}_1\Gamma$ ,  $\Gamma[n] \triangleleft {}_1\Gamma$ ,  $-I \in \Gamma(n) \Leftrightarrow 1 \leq n < 2$ ,  $[{}_1\Gamma : \Gamma(n)] < \infty$ .

$$\text{b) } \Gamma(n) \sqsubset \Gamma[n] \sqsubset \Gamma_0(n) \cap \Gamma^0(n) \sqsubset \left\{ \begin{pmatrix} \Gamma^0(n) \\ \Gamma_0(n) \end{pmatrix} \right\} \sqsubset {}_1\Gamma.$$

$$\text{c) } \Gamma_0(n) = T\Gamma^0(n)T^{-1}.$$

d) Für  $n \geq 2$  ist  $\Gamma_0(n) \neq \Gamma^0(n)$ , d. h. für  $n \geq 2$  sind  $\Gamma_0(n), \Gamma^0(n)$  keine Normalteiler in  ${}_1\Gamma$ .

e) Die Breite jeder Spitze von  $\Gamma[n]$  beträgt  $n$ .

f)  $\Gamma[n]$  hat keine elliptischen Fixpunkte für  $n \geq 2$ .

B a) Der natürliche Homomorphismus  $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  liefert einen natürlichen Homomorphismus

$$\varphi_n: \text{SL}_2(\mathbb{Z}) \rightarrow \underbrace{\text{SL}_2(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})}_{\text{endl. Gruppe}}.$$

und  $\Gamma(n) = \ker \varphi_n. \Rightarrow \Gamma(n)$  ist Normalteiler von endlichem Index, ebenso  $\Gamma[n]$ .

b) klar, da  $\Gamma_0(n)$  und  $\Gamma^0(n)$  Gruppen sind, wie man leicht nachrechnet.

c)  $T \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} T^{-1} = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}.$

d)  $U \in \Gamma_0(n) \setminus \Gamma^0(n)$  für  $n \geq 2$ .

e)  $\min\{k > 0 \mid U^k \in \Gamma[n]\} = n$ .

f) Jede elliptische Matrix in  ${}_1\Gamma$  ist konjugiert zu

$$\pm T = \pm \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \pm R = \pm \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \pm R^{-1} = \pm \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Keine dieser Matrizen liegt in  $\Gamma[n]$  für  $n \geq 2$ . Nach Satz 1.5.9 c) hat damit  $\Gamma[n]$  keine elliptischen Elemente für  $n \geq 2$ .  $\square$

**1.5.12 Satz** a) Der natürliche Homomorphismus  $\varphi_n: \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \rightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$  ist surjektiv.

b)  $[{}_1\Gamma : \Gamma(n)] = n^3 \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right).$

c)  $[{}_1\Gamma : \Gamma[n]] = \begin{cases} 6 & \text{für } n = 2 \\ \frac{1}{2} n^3 \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right) & \text{für } n > 2 \end{cases}$

d)  $[{}_1\Gamma : \Gamma_0(n)] = [{}_1\Gamma : \Gamma^0(n)] = n \prod_{p|n} \left(1 + \frac{1}{p}\right),$

insbesondere ist für jede Primzahl  $p$ :  $[{}_1\Gamma : \Gamma_0(p)] = p + 1$ .

B a) Nach Lemma 1.5.13 gibt es zu jeder Matrix  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  mit  $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$  und  $ad - bc \equiv 1 \pmod{n}$  Matrizen  $L, M \in {}_1\Gamma$ , so dass  $L \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} M = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & \ell \end{pmatrix}$  mit  $k, \ell \in \mathbb{Z}$ .

$$\Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} \ell & 1 \\ \ell - 1 & 1 \end{pmatrix}}_{\in {}_1\Gamma} \underbrace{L \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} M}_{= \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & \ell \end{pmatrix}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -\ell \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\in {}_1\Gamma} = \begin{pmatrix} k\ell & -(k\ell - 1)\ell \\ k\ell - k & -k\ell(\ell - 1) + \ell \end{pmatrix} \equiv \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 - k & 1 \end{pmatrix}}_{\in {}_1\Gamma} \pmod{n},$$

dabei ist  $k\ell \equiv 1 \pmod{n}$ .  $\Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  ist modulo  $n$  zu einer Matrix aus  ${}_1\Gamma$  kongruiert,  $\varphi_n$  ist also surjektiv.



- b) Sei  $\mu(n) := [\Gamma : \Gamma(n)] = \text{ord SL}_2(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ .  $\Rightarrow \mu(n)$  ist multiplikativ, d. h.  $\mu(mn) = \mu(m)\mu(n)$  für  $\text{ggT}(m, n) = 1$ , denn mit a) gilt: Jede Lösung des Systems

$$\begin{aligned} a_1 d_1 - b_1 c_1 &\equiv 1 \pmod{m} \\ a_2 d_2 - b_2 c_2 &\equiv 1 \pmod{n} \end{aligned}$$

definiert eine Lösung der Kongruenz  $ad - bc \equiv 1 \pmod{mn}$ , nämlich die Lösung

$$\begin{aligned} a &\equiv a_1, & b &\equiv b_1, & c &\equiv c_1, & d &\equiv d_1 \pmod{m} \\ a &\equiv a_2, & b &\equiv b_2, & c &\equiv c_2, & d &\equiv d_2 \pmod{n} \end{aligned} \quad (1.4)$$

$a, b, c, d$  sind modulo  $mn$  eindeutig bestimmt nach dem chinesischen Restsatz.

Umgekehrt definiert jede Lösung von  $ad - bc \equiv 1 \pmod{mn}$  vermöge obiger Gleichungen eine Lösung des Systems (1.4).

Zusammen folgt:  $\mu(mn) = \mu(m)\mu(n)$  für  $\text{ggT}(m, n) = 1$ .

Auch  $n \mapsto n^3 \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)$  ist eine multiplikative Funktion. Es genügt also, die Behauptung im Fall  $n = p^\alpha$  mit einer Primzahl  $p$  und  $\alpha \in \mathbb{N}$  zu zeigen:

Für  $a \in \mathbb{Z}$  bezeichnen wir  $\bar{a} = a + p^\alpha \mathbb{Z}$ , ebenso  $\bar{b}, \bar{c}, \bar{d}$ . Gesucht ist

$$\left| \left\{ \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{b} \\ \bar{c} & \bar{d} \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{Z}, \bar{a}\bar{d} - \bar{b}\bar{c} = \bar{a} \right\} \right|.$$

- (i) Ist  $\bar{a} \in (\mathbb{Z}/p^\alpha \mathbb{Z})^\times$ , d. h.  $p \nmid a$ , und wählt man  $\bar{b}, \bar{c} \in \mathbb{Z}/p^\alpha \mathbb{Z}$  ganz beliebig, so gibt es genau ein  $\bar{d}$  mit  $\bar{a}\bar{d} - \bar{b}\bar{c} = \bar{1}$ , nämlich  $\bar{d} = \bar{a}^{-1}(\bar{1} + \bar{b}\bar{c})$ .

$$\Rightarrow \left| \left\{ \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{b} \\ \bar{c} & \bar{d} \end{pmatrix} \in \text{SL}_2(\mathbb{Z}/p^\alpha \mathbb{Z}) : \bar{a} \in (\mathbb{Z}/p^\alpha \mathbb{Z})^\times \right\} \right| = \underbrace{\varphi(p^\alpha)}_{\# \text{ Mögl. für } \bar{a}} \underbrace{p^\alpha}_{\text{für } \bar{b}} \underbrace{p^\alpha}_{\text{für } \bar{c}} = \varphi(p^\alpha) p^{2\alpha}.$$

- (ii) Ist  $\bar{a} \in (\mathbb{Z}/p^\alpha \mathbb{Z}) \setminus (\mathbb{Z}/p^\alpha \mathbb{Z})^\times$ , d. h.  $p \mid a$ , so gilt:

$$|\{\bar{a} : p \mid a\}| = p^{\alpha-1}.$$

Wählt man zu  $\bar{a}$  irgendein  $\bar{d} \in \mathbb{Z}/p^\alpha \mathbb{Z}$  ganz beliebig, so gilt für jede Lösung  $\bar{b}, \bar{c}$  von

$$\bar{a}\bar{d} - \bar{b}\bar{c} = \bar{1} \quad (1.5)$$

notwendig  $p \nmid bc$ , d. h.  $p \nmid b \wedge p \nmid c$ . Wählt man zu  $\bar{a}, \bar{d}$  wie oben irgendein  $\bar{b} \in \mathbb{Z}/p^\alpha \mathbb{Z}$ , so existiert genau ein  $\bar{c}$  mit (1.5), nämlich  $\bar{c} = \bar{b}^{-1}(\bar{a}\bar{d} - \bar{1})$ .

$$\Rightarrow \left| \left\{ \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{b} \\ \bar{c} & \bar{d} \end{pmatrix} \in \text{SL}_2(\mathbb{Z}/p^\alpha \mathbb{Z}) : p \mid a \right\} \right| = \underbrace{p^{\alpha-1}}_{\# \text{ Mögl. für } \bar{a}} \underbrace{p^\alpha}_{\text{für } \bar{d}} \underbrace{\varphi(p^\alpha)}_{\text{für } \bar{b}} = \varphi(p^\alpha) p^{2\alpha-1}.$$

Zusammen gibt das:

$$\mu(p^\alpha) = \varphi(p^\alpha) p^{2\alpha} \left(1 + \frac{1}{p}\right) = p^\alpha \left(1 - \frac{1}{p}\right) p^{2\alpha} \left(1 + \frac{1}{p}\right) = p^{3\alpha} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right).$$

c) klar nach b).

$$d) \quad [{}_1\Gamma : \Gamma_0(n)] = \frac{[{}_1\Gamma : \Gamma(n)]}{[\Gamma_0(n) : \Gamma(n)]}.$$

Hier ist

$$\begin{aligned} & [\Gamma_0(n) : \Gamma(n)] \\ &= \# \text{im } \varphi_n \quad (\varphi_n : \Gamma_0(n) \rightarrow \text{SL}_2(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \text{ der nat. Hom.}) \\ &= \text{Anzahl der Lösungen modulo } n \text{ der Kongruenz } ad - bc, c \equiv 0 \pmod{n} \\ &= n\varphi(n) \quad (\text{da } b \text{ beliebig wählbar; für } a \text{ genau } \varphi(n) \text{ Mögl. und } d = a^{-1} \text{ eind. best.}) \\ &= n^2 \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \\ \Rightarrow [{}_1\Gamma : \Gamma_0(n)] &= \frac{n^3 \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)}{n^2 \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right)} = n \prod_{p|n} \left(1 + \frac{1}{p}\right). \quad \square \end{aligned}$$

**1.5.13 Lemma** Sei  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} =: M \in \text{Mat}_2(\mathbb{Z})$ . Dann gibt es  $P, Q \in \text{SL}_2(\mathbb{Z})$ , so dass  $PMQ$  eine Diagonalmatrix ist.

B Der Fall  $M = 0$  ist klar. Sei also  $M \neq 0$  und

$$\alpha := \min \{|a_{ij}| : a_{ij} \neq 0 \text{ ist Matricelement in einem Produkt } AMB, A, B \in \text{SL}_2(\mathbb{Z})\}.$$

Wir wählen  $A, B \in \text{SL}_2(\mathbb{Z})$  so, dass in  $AMB$  ein Element vom Betrag  $\alpha$  vorkommt. Ggf. nach Wechsel  $A \mapsto -A$  kann oBdA gleich angenommen werden, dass  $\alpha > 0$  in  $AMB$  vorkommt.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & -a \\ d & -c \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ -a & -b \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$  OBdA können  $A$  und  $B$  gleich so gewählt werden, dass  $AMB = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$  mit dem minimalen  $\alpha > 0$ .

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & k\alpha + \beta \\ \gamma & k\gamma + \delta \end{pmatrix}.$$

$\Rightarrow k \in \mathbb{Z}$  kann so gewählt werden, dass  $0 \leq \beta + \alpha k < \alpha$ . Wegen der Minimalität von  $\alpha$  folgt daraus schon  $\beta + \alpha k = 0$ . OBdA können also  $A$  und  $B$  gleich so gewählt werden, dass  $AMB = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$  gilt. Das analoge Argument mit  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \ell & 1 \end{pmatrix}$  liefert:  $\ell \in \mathbb{Z}$  kann so gewählt werden, dass  $0 \leq \ell\alpha + \gamma < \alpha$ , so dass mit der Minimalität von  $\alpha$  auch hier oBdA  $A$  und  $B$  so gewählt werden können, dass  $AMB = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix}$  gilt.  $\square$

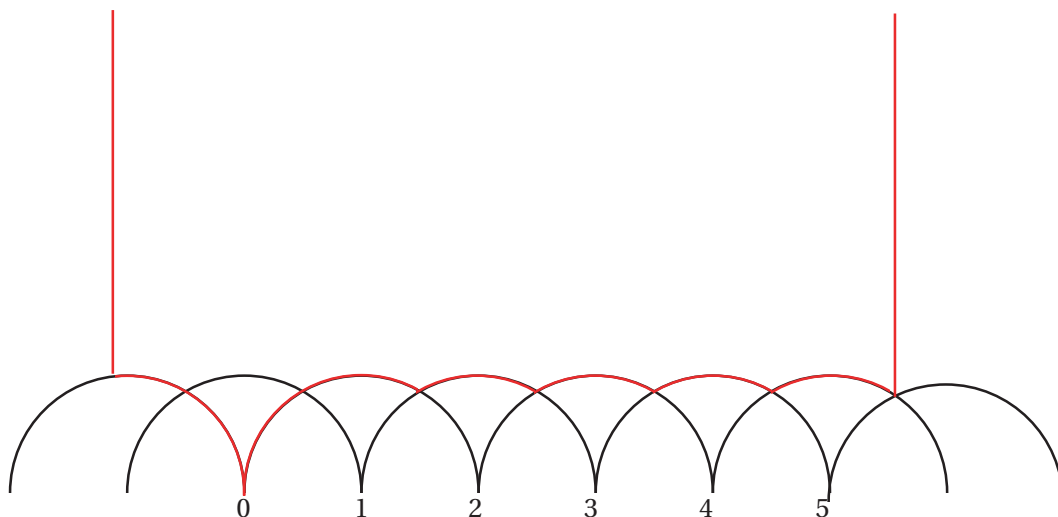


Abbildung 1.8: Ein Fundamentalbereich von  $\Gamma^0(5)$

**1.5.14 Beispiel**  $\Gamma^0(p) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in {}_1\Gamma : b \equiv 0 \pmod{p} \right\}$   
mit  $p$  prim hat in  ${}_1\Gamma$  den Index  $p+1$ .

$$\min \left\{ b > 0 : \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \Gamma^0(p) \right\} = p.$$

Für  $S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma^0(n)$  ( $n \geq 2$ ) ist notwendig  $a \neq 0$ .  $\Rightarrow S\infty = \frac{a}{c} \neq 0$  für alle  $S \in \Gamma^0(n)$ .  $\Rightarrow 0, \infty$  sind inäquivalente Spitzen von  $\Gamma^0(n)$ . Wieder  $n = p$ : Dann liefert Satz 1.5.7:

$${}_1\Gamma = \left( \bigcup_{v=0}^{p-1} \Gamma^0(p) U^v \right) \cup \Gamma^0(p) T.$$

Da der Index  $p+1$  ist, die Breite der Spitze  $\infty = p$ , muss die Breite der Spitze 0 schon 1 sein. Ein Fundamentalbereich für  $\Gamma^0(p)$  (hier  $p = 5$ ) kann also wie in Abb. 1.8 aussehen. Eine Bestimmung der Randabbildungen findet sich bei Schoeneberg (1974), S. 88. Dort läuft  $v$  von  $-\frac{p-1}{2}$  bis  $\frac{p-1}{2}$ .

**1.5.15 Beispiel (Kongruenzuntergruppen der Stufe 2)**  $\varphi_n: \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \rightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$  ist surjektiv. Für  $n = 2$  besteht  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$  aus den  $\varphi_2$ -Bildern von

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$TU = R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad UT = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad UTU = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

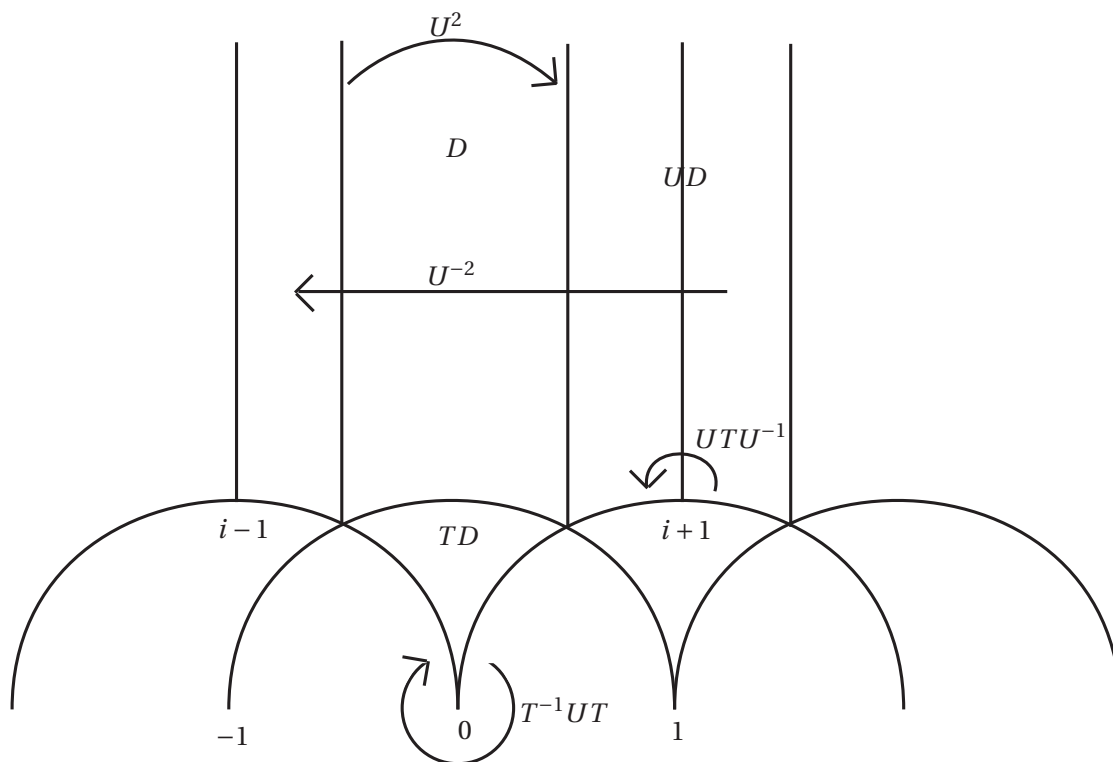


Abbildung 1.9: Ein Fundamentalbereich von  $\Gamma^0(2)$

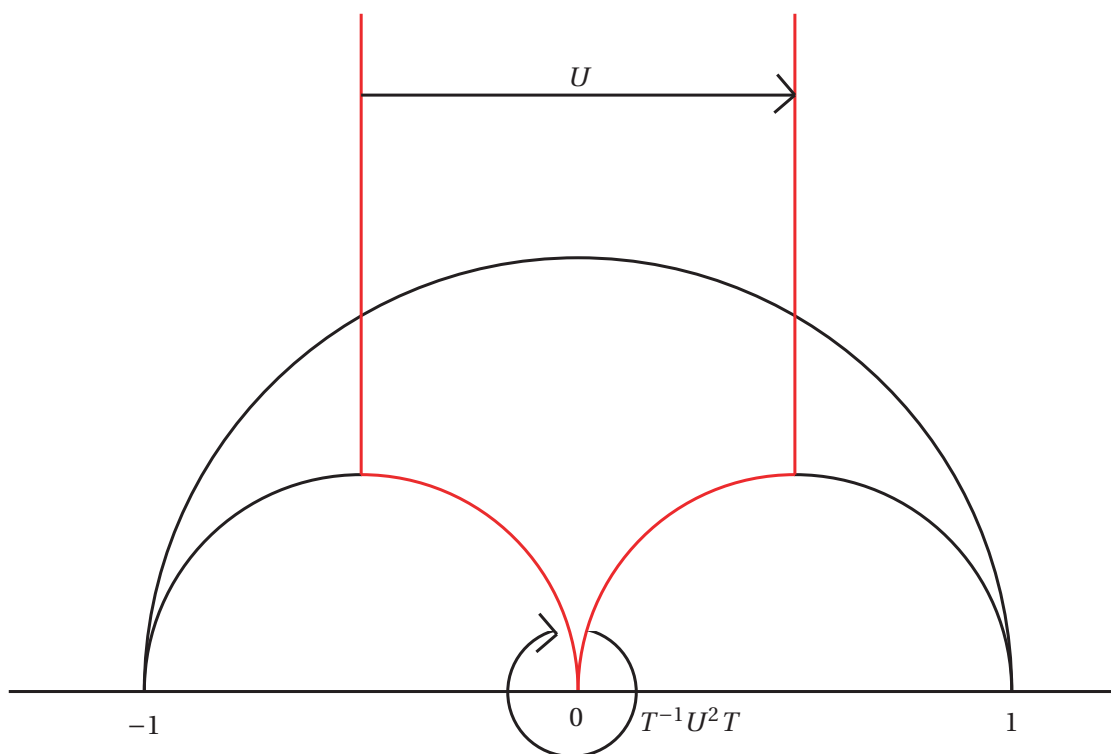


Abbildung 1.10: Ein Fundamentalbereich von  $\Gamma_0(2)$

$$\Gamma(2) = \Gamma[2] = \{M \in {}_1\Gamma : M \equiv I \pmod{2}\} = \ker \varphi_2.$$

$[{}_1\Gamma : \Gamma(2)] = 6 = \text{ord SL}_2(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ . Da  $\Gamma(2) < {}_1\Gamma$  sind alle Spitzenbreiten gleich der Spitzenbreite in  $\infty$ , also 2. Also beträgt die Anzahl der Spitzenklassen 3 und somit liefert

$${}_1\Gamma = (\Gamma(2) \cup \Gamma(2)U) \cup (\Gamma(2)T \cup \Gamma(2)TU) \cup (\Gamma(2)UT \cup \Gamma(2)UTU)$$

den Fundamentalbereich aus Abb. 1.9 von  $\Gamma(2)$ .  $\Gamma(2)$  hat keine elliptischen Fixpunkte. Ähnlich wie im Fall  ${}_1\Gamma$ ,  $\Gamma_\theta$  gilt:

$$\Gamma(2) = \langle U^2, TU^2T^{-1}, -I \rangle.$$

Es gilt  $|\text{SL}_2(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})| = 6$ , es gibt genau 2 Isomorphieklassen von Gruppen der Ordnung 6 repräsentiert durch  $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, +)$  und  $\mathfrak{S}_3$ .  $\text{SL}_2(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$  ist nicht abelsch, also  $\text{SL}_2(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \simeq \mathfrak{S}_3$ .  $\text{SL}_2(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$  hat also genau 3 Untergruppen der Ordnung 2, nämlich

$$G_1 := \langle T \pmod{2} \rangle$$

$$G_2 := \langle U \pmod{2} \rangle$$

$$G_3 := \langle UTU \pmod{2} \rangle$$

$\Rightarrow \varphi_2^{-1}(G_j)$  ist Untergruppe vom Index 3 in  ${}_1\Gamma$ . Offenbar gilt:

$$\varphi_2^{-1}(G_1) = \{M \in {}_1\Gamma : M \equiv I, M \equiv T \pmod{2}\} \stackrel{\text{Beispiel 1.5.4}}{=} \Gamma_\theta$$

$$\varphi_2^{-1}(G_2) = \{M \in {}_1\Gamma : M \equiv I, M \equiv U \pmod{2}\} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in {}_1\Gamma : c \equiv 0 \pmod{2} \right\} = \Gamma_0(2)$$

$$\varphi_2^{-1}(G_3) = \{M \in {}_1\Gamma : M \equiv I, M \equiv UTU \pmod{2}\} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in {}_1\Gamma : b \equiv 0 \pmod{2} \right\} = \Gamma^0(2).$$

$$\Gamma_0(2) \cap \Gamma^0(2) = \Gamma_0(2) \cap \Gamma_\theta = \Gamma^0(2) \cap \Gamma_\theta = \Gamma(2).$$

Bekannt ist:  $\Gamma^0(2) = T^{-1}\Gamma_0(2)T$ ,  $U^{-1}\Gamma_\theta U$  ist Untergruppe vom Index 3, die  $\Gamma(2)$  umfasst. Wegen

$$U^{-1}TU = U^{-2}UTU = \underbrace{U^{-2}}_{\in \Gamma(2)} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{\in \Gamma^0(2) \setminus (\Gamma_0(2) \cup \Gamma_\theta)} \in \Gamma^0(2) \setminus (\Gamma_0(2) \cup \Gamma_\theta)$$

ist  $U^{-1}\Gamma_\theta U = \Gamma^0(2)$ .  $\Rightarrow \Gamma_0(2) = (UT)^{-1}\Gamma_\theta(UT)$ .

Behauptung:  $\Gamma^0(2) = \langle U^2, T^{-1}UT \rangle$ .

Begründung: Zunächst:

$$\Gamma(2) = \langle T^{-1}U^2T, U^2 - I \rangle \subset \langle T^{-1}UT, U^2, -I \rangle \subset \Gamma^0(2).$$

Dabei ist  $T^{-1}UT = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \in \Gamma^0(2) \setminus \Gamma(2)$  und  $U^2 \in \Gamma^0(2)$ , und es gilt:  $-I \in \langle T^{-1}UTU^2 \rangle$ , denn  $(TU)^3 = R^3 = -I$ , d. h.  $TUTUTU = -I = T^2$ .

$$\Rightarrow T^{-1}UT = -TUT = -U^{-1}TU^{-1}(-U^{-1}TU)U^{-2}$$

$$\Rightarrow -U^{-1}TU \in \langle T^{-1}UT, U^2 \rangle. \Rightarrow -I \in \langle T^{-1}UT, U^2 \rangle.$$

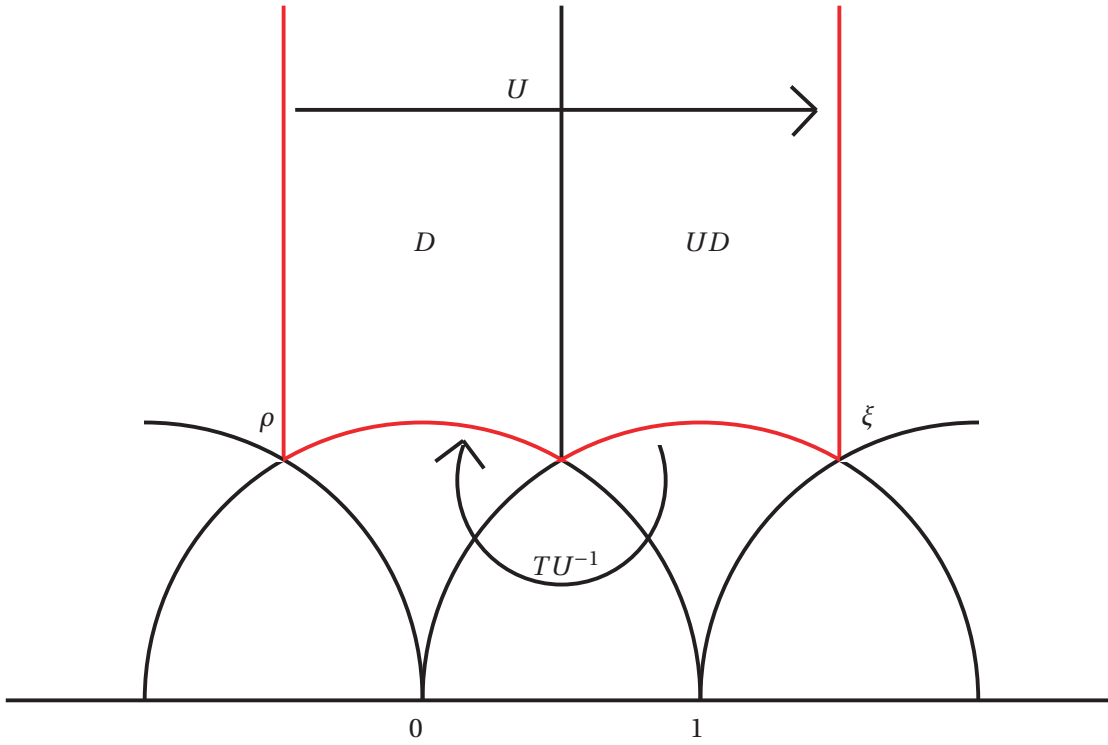


Abbildung 1.11: Ein Fundamentalbereich von  ${}_2\Gamma$

**Folgerung**  $\Gamma_0(2) = T^{-1}\Gamma^0(2)T$  hat den Fundamentalbereich  $T\mathcal{F}^2$  (siehe Abb. 1.10), wobei  $\mathcal{F}^2$  den Fundamentalbereich aus Abb. 1.9 von  $\Gamma^0(2)$  bezeichne, und als Erzeuger haben wir  $\Gamma_0(2) = \langle T^{-1}U^2T, U \rangle$ .

Es gibt noch eine weitere Untergruppe von  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ . Diese entspricht der  $\mathfrak{A}_3 \triangleleft \mathfrak{S}_3$  und ist zyklisch von der Ordnung 3 und entspricht  $G := \langle R \bmod 2 \rangle \triangleleft \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ . Das Urbild  ${}_2\Gamma := \varphi_2^{-1}(G) = \{M \in {}_1\Gamma : M \equiv I \vee M \equiv R \vee M \equiv R^2 \bmod 2\}$  ist Normalteiler vom Index 2 in  ${}_1\Gamma$ . Offenbar gilt:  $U, T \notin {}_2\Gamma$ , denn:  $U, R$  erzeugen ebenso wie  $T, R$  bereits  ${}_1\Gamma$ .  $\Rightarrow {}_1\Gamma = {}_2\Gamma \cup {}_2\Gamma U$ . Dies liefert den Fundamentalbereich aus Abb. 1.11 von  ${}_2\Gamma$ , dieser ist Normalpolygon.  $\Rightarrow {}_2\Gamma = \langle U^2, TU^{-1} \rangle$ .

Die zu  $i$  bzgl.  ${}_1\Gamma$  äquivalenten Punkte haben als Erzeugende der Fixgruppe die zu  $\pm T$  konjugierten Elemente von  ${}_1\Gamma$ , und keines von diesen liegt in  ${}_2\Gamma$ .  $\Rightarrow {}_1\Gamma i$  enthält keine elliptischen Fixpunkte von  ${}_2\Gamma$ . Wegen  $R \in {}_2\Gamma$  ist  $\rho$  Fixpunkt von  ${}_2\Gamma$  und auch  $U\rho = \xi$ , denn  $URU^{-1} \in {}_2\Gamma$ .  $\Rightarrow {}_1\Gamma\rho = {}_2\Gamma\rho \cup {}_2\Gamma\xi$ . Beachte:  $\rho$  und  $\xi$  sind nicht äquivalent modulo  ${}_2\Gamma$  nach Satz 1.4.3 (6). Zusammenfassend ergibt sich folgender

**1.5.16 Satz** *Es gibt genau sechs Untergruppen von  ${}_1\Gamma$ , die den Normalteiler*

$$\Gamma(2) = \{M \in {}_1\Gamma : M \equiv T \bmod 2\}$$

umfassen, und zwar:

Index	Gruppe
1	${}_1\Gamma$
2	${}_2\Gamma = \{M \in {}_1\Gamma : M \equiv I \vee M \equiv R \vee M \equiv R^2 \pmod{2}\} = \langle U^2, TU^{-1} \rangle$
3	$\Gamma_\vartheta = \{M \in {}_1\Gamma : M \equiv I \vee M \equiv T \pmod{2}\} = \langle U^2, T \rangle$ $\Gamma_0(2) = \{M \in {}_1\Gamma : c \equiv 0 \pmod{2}\} = \langle U, T^{-1}U^2T \rangle$ $\Gamma^0(2) = \{M \in {}_1\Gamma : b \equiv 0 \pmod{2}\} = \langle U^2, T^{-1}UT \rangle = T^{-1}\Gamma_0(2)T = U^{-1}\Gamma_\vartheta U$
6	$\Gamma(2) = \langle U^2, T^{-1}U^2T, -I \rangle$

Fundamentalbereiche und Randabbildungen sind den obigen Abbildungen zu entnehmen.

Sonstige Daten:  $p$  sei die Anzahl der Spitzenklassen,  $e_0$  die Anzahl der Klassen elliptischer Fixpunkte,  $\ell_k$  die Ordnung des  $k$ -ten elliptischen Fixpunkts in  $\text{PSL}_2(\mathbb{Z})$ ,  $g$  das Geschlecht der zugehörigen Riemannschen Fläche:

Gruppe	$p$	$e_0$	$\ell_k$	Bahnen elliptischer Fixpunkte	Spitzenbreite	$g$
${}_2\Gamma$	1	2	$\ell_1 = \ell_2 = 3$	${}_2\Gamma\rho, {}_2\Gamma\xi, {}_1\Gamma\rho = {}_2\Gamma\rho \cup {}_2\Gamma\xi$	2	0
$\Gamma_\vartheta$	2	1	$\ell_1 = 2$	$\Gamma_\vartheta i, i+1$ ist kein Fixpunkt ${}_1\Gamma i = \Gamma_\vartheta i \cup \Gamma_\vartheta(i+1)$	$\infty: 2, 1: 1$	0
$\Gamma^0(2)$	2	1	$\ell_1 = 2$	$\Gamma^0(2)(i+1), i$ ist kein Fixpunkt, ${}_1\Gamma i = \Gamma^0(2)i \cup \Gamma^0(2)(i+1)$	$\infty: 2, 0: 1$	0
$\Gamma_0(2)$	2	1	$\ell_1 = 2$	$\Gamma_0(2)\left(\frac{i+1}{2}\right), i$ ist kein Fixpunkt, ${}_1\Gamma i = \Gamma_0(2)\left(\frac{i+1}{2}\right) \cup \Gamma_0(2)i$	$\infty: 1, 0: 2$	0
$\Gamma(2)$	3	0			$\infty: 2, 1: 2, 0: 2$	0

$$\Gamma_\vartheta \cap \Gamma^0(2) = \Gamma_\vartheta \cap \Gamma_0(2) = \Gamma^0(2) \cap \Gamma_0(2) = \Gamma(2).$$

**Zusatz**  ${}_2\Gamma$  ist die einzige Untergruppe vom Index 2 in  ${}_1\Gamma$ .

B Sei  $\Gamma \sqsubset {}_1\Gamma$ ,  $[{}_1\Gamma : \Gamma] 2. \Rightarrow U^2 \in \Gamma$ , denn das Quadrat jedes Elements aus  ${}_1\Gamma$  liegt in  $\Gamma$ .  
 $W := TU^{-1}, \Rightarrow W\xi = \xi, W^3 = -I = T^2 \in \Gamma$ , aber  $W^2 \in \Gamma. \Rightarrow W \in \Gamma$ , also auch  ${}_2\Gamma = \langle U^2, W \rangle \subset \Gamma$ . Gleicher Index liefert die Gleichheit  $\Gamma = {}_2\Gamma$ .  $\square$



## 2 $\Gamma \backslash \mathbb{H}^*$ als topologischer Raum und als Riemannsche Fläche

### 2.1 Der topologische Raum $\Gamma \backslash \mathbb{H}^*$

Voraussetzungen:  $\Gamma \sqsubset_1 \Gamma$  (nicht notwendig von endlichem Index),

$$\mathbb{H}^* := \mathbb{H} \cup \{p \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}, p \text{ Spitze von } \Gamma\}.$$

**2.1.1 Definition (Topologie auf  $\mathbb{H}^*$ )** Wir definieren eine  $\mathbb{H}^*$ -Umgebungsbasis für die Punkte  $z \in \mathbb{H}$  als  $\mathbb{H}$ -Umgebungsfiler von  $z$ , eine  $\mathbb{H}^*$ -Umgebungsbasis der parabolischen Fixpunkte von  $\Gamma$  als  $\{\{p\} \cup \mathcal{P} : \mathcal{P} \text{ Horozykel in } p\}$ . Dadurch wird eine Topologie auf  $\mathbb{H}^*$  erklärt. Für  $p \in \mathbb{R}$  ist ein solcher Horozykel ein Kreis in der oberen Halbebene, der in  $p$  die reelle Achse tangiert; für  $p = \infty$  ist es ein hyperbolischer Kreis um  $\infty$ , also eine Menge der Form  $\{z \in \mathbb{H} : \text{Im } z > z_0\}$  mit einem  $z_0 > 0$ .

**2.1.2 Folgerung**  $\mathbb{H}^*$  ist ein (dicht) zusammenhängender Hausdorff-Raum, und  $\Gamma$  operiert als Gruppe von Homöomorphismen auf  $\mathbb{H}^*$ .  $\mathbb{H}$  ist ein offener dichter Teilraum von  $\mathbb{H}^*$ .  $\mathbb{H}$  ist lokal kompakt,  $\mathbb{H}^*$  nicht, wenn  $\Gamma$  Spitzen hat. Die Horozykel-Umgebungen  $\{p\} \cup \mathcal{P}$  sind offen in  $\mathbb{H}^*$ .

**2.1.3 Lemma** a) Jede Spitze  $p$  von  $\Gamma$  hat eine Umgebung  $V \subset \mathbb{H}^*$ , so dass

$$\Gamma_p = \{S \in \Gamma : SV \cap V \neq \emptyset\}.$$

- b) Zu jeder Spitze  $p$  von  $\Gamma$  und jedem Kompaktum  $K \subset \mathbb{H}$  gibt es eine  $\mathbb{H}^*$ -Umgebung  $V$  von  $p$ , so dass  $SV \cap K = \emptyset$  für alle  $S \in \Gamma$ .
- c) Zu allen  $z, w \in \mathbb{H}$ ,  $\Gamma z \neq \Gamma w$  gibt es Umgebungen  $U$  von  $z$  und  $V$  von  $w$  mit  $SU \cap V = \emptyset$  für alle  $S \in \Gamma$ .

B a) Nach Konjugation von  $\Gamma$  kann gleich oBdA  $p = \infty$  angenommen werden. Wegen

$$\text{Im } Sz = \frac{y}{|cz + d|^2} \stackrel{c \neq 0}{\leq} \frac{1}{c^2 y} \leq \frac{1}{y}$$

(und für  $c = 0$ :  $\text{Im } Sz = \text{Im } z$ ) folgt:

$$S\{z : \text{Im } z > 1\} \cap \{z : \text{Im } z > 1\} = \emptyset$$

für alle  $S \notin \Gamma_\infty$ .  $V := \{\infty\} \cup \{z \in \mathbb{H} : \text{Im } z > 1\}$ .

b) OBdA wieder  $p = \infty$ . Sei

$$0 < \alpha \leq \min \{\operatorname{Im} z : z \in K\} \leq \max \{\operatorname{Im} z : z \in K\} \leq \beta < \infty$$

und

$$V := \{\infty\} \cup \left\{ z \in \mathbb{H} : \operatorname{Im} z > \max \left( \beta, \frac{1}{\alpha} \right) \right\}.$$

$\Rightarrow$  Für alle  $S \in \Gamma_\infty$  ist  $SV \cap K = \emptyset$ , und für  $S \in \Gamma \setminus \Gamma_\infty$  und  $z \in V$  ist

$$\operatorname{Im} Sz = \frac{y}{|cz + d|^2} \leq \frac{1}{y} < \alpha.$$

$\Rightarrow SV \cap K = \emptyset$ .

c) Sei  $K \subset \mathbb{H}$  eine kompakte Umgebung von  $z$ ,  $L \subset \mathbb{H}$  eine kompakte Umgebung von  $w$ .

$$\Rightarrow \{S \in \Gamma : SK \cap L \neq \emptyset\} =: E$$

ist endlich. Wegen  $\Gamma z \neq \Gamma w$  ist  $Sz \neq w$  für alle  $S \in E$ . Für alle  $S \in E$  gibt es also Umgebungen  $U_S$  von  $Sz$  und  $V_S$  von  $w$ , so dass  $U_S \cap V_S = \emptyset$ . Jetzt leisten

$$U := K \cap \bigcap_{S \in E} S^{-1}U_S \quad \text{und} \quad V := K \cap \bigcap_{S \in E} V_S$$

das Verlangte. □

**2.1.4 Satz**  $\Gamma \setminus \mathbb{H}^*$  ist bzgl. der Quotienten-Topologie ein zusammenhängender Hausdorff-Raum mit dem offenen dichten Unterraum  $\Gamma \setminus \mathbb{H}$ .  $\{\Gamma p : p \text{ Spitze von } \Gamma\}$  enthält nur isolierte Punkte.

B Sei  $k: \mathbb{H}^* \rightarrow \Gamma \setminus \mathbb{H}^*$  die kanonische Projektion,  $\Gamma \setminus \mathbb{H}^*$  mit der Quotiententopologie versehen, d. h.  $M \subset \Gamma \setminus \mathbb{H}^*$  ist offen genau dann, wenn  $k^{-1}(M) \subset \mathbb{H}^*$  offen ist. Diese Topologie hat folgende Eigenschaften: Eine Abbildung  $f: \Gamma \setminus \mathbb{H}^* \rightarrow X$  in einen topologischen Raum  $X$  ist stetig  $\Leftrightarrow f \circ k: \mathbb{H}^* \rightarrow X$  ist stetig.  $k$  ist offen, denn: Sei  $A \subset \mathbb{H}^*$  offen.  $\Rightarrow k^{-1}(k(A)) = \bigcup_{S \in \Gamma} SA$  ist offen in  $\mathbb{H}^*$ , also  $k(A)$  offen in  $\Gamma \setminus \mathbb{H}^*$ .

Ergebnis:  $\Gamma \setminus \mathbb{H}$  ist offener Teilraum von  $\Gamma \setminus \mathbb{H}^*$ .

Behauptung:  $\Gamma \setminus \mathbb{H}$  liegt dicht in  $\Gamma \setminus \mathbb{H}^*$ .

Begründung: Sei  $p$  Spitze von  $\Gamma$ ,  $U$  eine offene Umgebung von  $\Gamma p$  in  $\Gamma \setminus \mathbb{H}^*$ .  $\Rightarrow k^{-1}(U)$  ist offene Umgebung von  $p$  in  $\mathbb{H}^*$ .  $\Rightarrow \exists z \in k^{-1}(U) \cap \mathbb{H}$ .  $\Rightarrow \Gamma z \in U$ .  $\Rightarrow \Gamma p \in \overline{\Gamma \setminus \mathbb{H}}$ .

$\mathbb{H}^*$  ist zusammenhängend, also auch  $k(\mathbb{H}^*) = \Gamma \setminus \mathbb{H}^*$ .

Behauptung:  $\Gamma \setminus \mathbb{H}^*$  ist ein Hausdorff-Raum.

Begründung: Seien  $P, Q \in \Gamma \setminus \mathbb{H}^*$ ,  $P \neq Q$ . Fallunterscheidung:

- a)  $P = \Gamma z, Q = \Gamma w$  mit  $z, w \in \mathbb{H}$ . Dann liefert Lemma 2.1.3 c): Es gibt offene Umgebungen  $U$  von  $z$  und  $V$  von  $w$ , so dass  $(\Gamma U) \cap V = \emptyset$ .  $k$  ist offen, also ist  $k(U)$  eine offene Umgebung von  $P$ ,  $k(V)$  eine offene Umgebung von  $Q$  in  $\Gamma \setminus \mathbb{H}^*$  und  $k(U) \cap k(V) = \emptyset$ .
- b)  $P = \Gamma p, Q = \Gamma q$  mit Spitzen  $p, q$  von  $\Gamma$ . Seien  $p = A^{-1}\infty, q = B^{-1}\infty$  mit  $A, B \in {}_1\Gamma, \eta \geq 1$  und

$$\mathfrak{P} := A^{-1}(\{z \in \mathbb{H} : \operatorname{Im} z > \eta\}), \quad \mathfrak{Q} := B^{-1}(\{z \in \mathbb{H} : \operatorname{Im} z > \eta\}).$$

$\Rightarrow U := \{p\} \cup \mathfrak{P}$  und  $V := \{q\} \cup \mathfrak{Q}$  sind Horozykelumgebungen von  $p$  bzw.  $q$  in  $\mathbb{H}^*$ , und es gilt:  $\Gamma \mathfrak{P} \cap \mathfrak{Q} = \emptyset$ .

Begründung indirekt: Annahme: Es gebe ein  $S \in \Gamma$  mit  $S\mathfrak{P} \cap \mathfrak{Q} \neq \emptyset$ .

$$\Rightarrow \underbrace{BSA^{-1}}_{\in {}_1\Gamma}(\{z \in \mathbb{H} : \operatorname{Im} z > \eta\}) \cap \{z \in \mathbb{H} : \operatorname{Im} z > \eta\} \neq \emptyset.$$

$$\Rightarrow BSA^{-1} = \pm U^\ell \text{ mit passendem } \ell \in \mathbb{Z}. \Rightarrow B^{-1}\infty = SA^{-1}\infty. \Rightarrow \Gamma p = \Gamma q. \quad \nexists$$

$$\Rightarrow k(U) \text{ und } k(V) \text{ sind disjunkte Umgebungen von } P = \Gamma p \text{ und } Q = \Gamma q \text{ in } \Gamma \setminus \mathbb{H}^*.$$

- c)  $P = \Gamma p, Q = \Gamma z$  mit einer Spitze  $p$  von  $\Gamma$  und  $z \in \mathbb{H}$ . Sei  $U$  eine relativ kompakte offene Umgebung von  $z \in \mathbb{H}$ . Dann liefert Lemma 2.1.3 a): Es gibt eine offene Umgebung  $V$  von  $p$  in  $\mathbb{H}^*$  mit  $\Gamma V \cap U = \emptyset$ .  $\Rightarrow k(U)$  und  $k(V)$  sind disjunkte Umgebungen von  $P$  bzw.  $Q$  in  $\Gamma \setminus \mathbb{H}^*$ .

Für ein  $A \subset X$  ( $X$  topologischer Raum) heißt ein Punkt  $x \in A$  isolierter Punkt von  $A$ , wenn  $x$  eine Umgebung  $U \subset X$  hat mit  $U \cap A = \{x\}$ . D. h.  $A$  besteht nur aus isolierten Punkten, wenn  $X$  auf  $A$  die diskrete Topologie induziert.

Eine Umgebungs-Basis von  $\Gamma p$  erhält man in der Gestalt  $k(\{p\} \cup \mathcal{P})$ , wobei  $\mathcal{P}$  ein Horozykel in  $p$  sei. Eine solche Umgebung enthält nur die Spitzenklasse  $\Gamma p$ .  $\Rightarrow$  Behauptung.  $\square$

**2.1.5 Satz**  $\Gamma \setminus \mathbb{H}^*$  ist kompakt  $\Leftrightarrow [{}_1\Gamma : \Gamma] < \infty \stackrel{\text{Korollar 1.5.2}}{\Leftrightarrow} \omega(\Gamma \setminus \mathbb{H}) < \infty$ .

B „ $\Rightarrow$ “ Sei  $[{}_1\Gamma : \Gamma] = \infty$ . Dann existieren unendlich viele verschiedene Rechtsnebenklassen  $\Gamma R_\nu$  ( $\nu \in \mathbb{N}$ ),  $R_\nu \in {}_1\Gamma$  von  $\Gamma$  in  ${}_1\Gamma$ . Sei gleich  $\{R_\nu : \nu \in \mathbb{N}\}$  ein Vertretersystem aller Rechtsnebenklassen.  $\Gamma$  hat den Fundamentalbereich  $\bigcup_{\nu=1}^{\infty} R_\nu D$ , wobei  $D$  der Standard-Fundamentalbereich von  ${}_1\Gamma$  ist. Betrachte  $2i \in D$  mit einer kleinen Umgebung  $V \subset D$ .  $\Rightarrow V \cap SV = \emptyset$  für alle  $S \in {}_1\Gamma \setminus \{\pm I\}$ .  $\Rightarrow k(R_\nu V)$  sind disjunkte Umgebungen der Punkte  $k(R_\nu(2i))$ .  $\Rightarrow \{k(R_\nu(2i)) : \nu \in \mathbb{N}\}$  ist unendliche diskreter Teilraum von  $\Gamma \setminus \mathbb{H}^*$  und ist abgeschlossen.  $\Rightarrow \Gamma \setminus \mathbb{H}^*$  ist nicht kompakt.

„ $\Leftarrow$ “  $\Gamma$  hat nur endlich viele Spitzenklassen, etwa  $P_j = \Gamma \zeta_j$  für  $j = 1, \dots, p, p \geq 1$ , da  $[{}_1\Gamma : \Gamma] < \infty$ . Sei  $\mathfrak{U}$  eine offene Überdeckung von  $\Gamma \setminus \mathbb{H}^*$ .  $\Rightarrow \exists U_1, \dots, U_p \in \mathfrak{U}$  mit  $P_j \in U_j$ . Jeder Punkt von  $(\Gamma \setminus \mathbb{H}^*) \setminus \bigcup_{j=1}^p U_j$  hat einen Vertreter in einer endlichen Vereinigung von  ${}_1\Gamma$ -Bildern von  $\overline{D}$ , wobei alle Spitzen dieser Vereinigung längs von Horozyklen abgeschnitten sind. Es gibt also eine kompakte Menge  $M \subset \mathbb{H}$  mit  $(\Gamma \setminus \mathbb{H}^*) \setminus \bigcup_{j=1}^p U_j \subset k(M)$ .  $k$  ist stetig, also  $k(M)$  kompakt in  $\Gamma \setminus \mathbb{H}$ .  $\Rightarrow$  Es gibt eine endliche Teilüberdeckung  $\mathfrak{C} \subset \mathfrak{U}$ , die  $k(M)$  überdeckt.  $\Rightarrow \mathfrak{C} \cup \{U_1, \dots, U_p\}$  ist endliche Teilüberdeckung von  $\mathfrak{U}$ , die  $\Gamma \setminus \mathbb{H}^*$  überdeckt.  $\square$

## 2.2 Die Riemannsche Fläche $\Gamma \setminus \mathbb{H}^*$

**2.2.1 Definition (Riemannsche Fläche)** Eine Riemannsche Fläche ist ein zusammenhängender Hausdorff-Raum  $X$  mit einer Menge  $\mathfrak{A}$  von Homöomorphismen  $\varphi: U \rightarrow \varphi(U) \subset \mathbb{C}$  ( $U \subset X$  offen,  $\varphi(U) \subset \mathbb{C}$  offen), so dass gilt:

a) 
$$\bigcup_{(U, \varphi) \in \mathfrak{A}} U = X$$

b) Sind  $(U, \varphi), (V, \psi) \in \mathfrak{A}$ , so ist

$$\varphi \circ \psi^{-1}: \underbrace{\psi(U \cap V)}_{\subset \mathbb{C} \text{ offen}} \rightarrow \underbrace{\varphi(U \cap V)}_{\subset \mathbb{C} \text{ offen}} \subset \mathbb{C} \text{ offen}$$

holomorph. (Holomorphe Verträglichkeit der Karten)

c)  $\mathfrak{A}$  ist maximal unter den Bedingungen a) und b).

$\mathfrak{A}$  heißt komplexer *Atlas*, die Elemente von  $\mathfrak{A}$  heißen *Karten*. Hat  $\mathfrak{A}$  nur die Eigenschaften a) und b), so kann man durch Hinzunahme aller mit allen Karten von  $\mathfrak{A}$  holomorph verträglichen Karten  $\mathfrak{A}$  zu einem eindeutig bestimmten maximalen Atlas ergänzen.

**2.2.2 Beispiel** a) Jedes Gebiet  $G \subset \mathbb{C}$  ist eine Riemannsche Fläche bzgl. des Atlas  $\mathfrak{A} := \{\text{id}: G \rightarrow G\}$ .

b)  $\mathbb{P} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  ist Riemannsche Fläche bzgl. des Atlas  $\mathfrak{A} := \{(U, \varphi), (V, \psi)\}$ , wobei

$$\begin{aligned} U &:= \mathbb{C}, & \varphi &: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \varphi = \text{id}_{\mathbb{C}}, \\ V &:= \mathbb{P} \setminus \{0\}, & \psi &: V \rightarrow \mathbb{C}, \psi(z) := \begin{cases} \frac{1}{z} & \text{für } z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \\ 0 & \text{für } z = \infty \in \mathbb{P} \end{cases} \end{aligned}$$

Hier ist

$$U \cap V = \mathbb{C}^* = \varphi(U \cap V) = \psi(U \cap V),$$

und für  $w \in \mathbb{C}^*$  ist  $\varphi \circ \psi(w) = \frac{1}{w}$  holomorph auf  $\mathbb{C}^*$ .

c)  $\Lambda = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$  sei ein Gitter in  $\mathbb{C}$ , d. h.  $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$  linear unabhängig über  $\mathbb{R}$ ,  $X := \mathbb{C} / \Lambda$  mit der Quotiententopologie. Die kanonische Projektion  $k: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} / \Lambda$  ist stetig und offen. Wir konstruieren einen Atlas auf  $X$ :

$$\mathfrak{A} := \left\{ (\varphi, k(U)) : U \subset \mathbb{C} \text{ offen}, U \cap (U + \Lambda \setminus \{0\}) = \emptyset, \varphi = (k|_U)^{-1} \right\}$$

Behauptung:  $\mathfrak{A}$  ist ein komplexer Atlas.

Begründung: Seien  $U, V \subset \mathbb{C}$  offen,

$$U \cap (U + \Lambda \setminus \{0\}) = \emptyset = V \cap (V + \Lambda \setminus \{0\}),$$

$\varphi: k(U) \rightarrow U, \psi: k(V) \rightarrow V$  definiert durch  $\varphi^{-1} = k|_U, \psi^{-1} = k|_V$ .

Sei  $z \in \psi(k(U) \cap k(V))$ .  $\varphi \circ \psi^{-1}$  ordnet  $z$  den eindeutig bestimmten in  $U$  gelegenen Vertreter von  $z + \Lambda$  zu, es gibt also ein eindeutiges  $\lambda \in \Lambda$ , so dass  $\varphi \circ \psi^{-1}(z) = z + \lambda$ .

$$\Rightarrow \exists r > 0 \quad K_r(z) \subset \psi(k(U) \cap k(V)) \text{ und } K_r(z) + \lambda \subset \varphi(k(U) \cap k(V)).$$

$\Rightarrow \varphi \circ \psi^{-1}(w) = w + \lambda$  für alle  $w \in K_r(z)$ . D.h.  $\varphi \circ \psi^{-1}$  ist in einer Umgebung jedes Punktes  $z \in \psi(k(U) \cap k(V))$  holomorph.  $\Rightarrow \varphi \circ \psi^{-1}$  ist holomorph.

**2.2.3 Lemma (Konstruktion eines Atlas auf  $\Gamma \backslash \mathbb{H}^*$ )** Grundlage für die Konstruktion ist folgender Sachverhalt: Zu jedem  $p \in \mathbb{H}^*$  existiert eine Umgebung  $V$  von  $p$  in  $\mathbb{H}^*$ , so dass

$$\Gamma_p = \{S \in \Gamma: SV \cap V \neq \emptyset\}.$$

Begründung:

- (i)  $p \in \mathbb{H}$ : Korollar 1.3.5
- (ii)  $p$  Spitze von  $\Gamma$ : Lemma 2.1.3 a)

Dabei kann man  $V$  gleich so wählen, dass  $V$  invariant ist unter  $\Gamma_p$ :

- (i)  $p \in \mathbb{H}$ :  $V := H_\rho(p)$  mit hinreichend kleinem  $\rho > 0$ .
- (ii)  $p$  Spitze von  $\Gamma$ ,  $p = A^{-1}\infty$  mit  $A \in {}_1\Gamma$ :

$$V := \{p\} \cup A^{-1}(\{z \in \mathbb{H}: \operatorname{Im} z > \eta\})$$

mit hinreichend großem  $\eta \geq 1$ .

Sei  $P \in \Gamma \backslash \mathbb{H}^*$ . Für jede Wahl eines  $p \in \mathbb{H}^*$  mit  $P = \Gamma p$  und für jede Wahl eines  $V$  gemäß (i) bzw. (ii) wird ein Homöomorphismus einer Umgebung von  $P$  auf eine Kreisscheibe in  $\mathbb{C}$  erklärt. Zunächst:

$$u: \Gamma_p \backslash V \rightarrow \Gamma \backslash \mathbb{H}^*, \quad \Gamma_p z \mapsto \Gamma z$$

$u$  ist

- injektiv nach Wahl von  $V$ ,
- stetig, da die vorgeschaltete Quotientenabbildung

$$V \xrightarrow{\nu} \Gamma_p \backslash V \xrightarrow{u} \Gamma \backslash \mathbb{H}^*$$

mit  $u \circ \nu = k|_V$  stetig ist,

- offen, denn: Ist  $A \subset \Gamma_p \backslash V$ , so ist  $u(A) = k(\nu^{-1}(A))$  offen in  $\Gamma \backslash \mathbb{H}^*$ , da  $k$  offen ist und  $\nu^{-1}(A)$ .

Wir setzen  $U := u(\Gamma_p \setminus V)$ . Dies ist eine offene Umgebung von  $P$  in  $\Gamma \setminus \mathbb{H}^*$ . Dann ist  $u^{-1}: U \rightarrow \Gamma_p \setminus V$  ein Homöomorphismus. Falls  $p$  kein Fixpunkt von  $\Gamma$  ist, steht hier bereits ein Homöomorphismus von  $U$  auf eine Kreisscheibe in  $\mathbb{C}$ . Allgemein bilden wir  $\Gamma_p \setminus V$  wie folgt auf eine Kreisscheibe ab: 2 Fälle:

- (i)  $p \in \mathbb{H}$ ,  $V = H_\rho(p)$  wird auf eine Kreisscheibe um 0 in  $\mathbb{E}$  abgebildet.

$$V \ni z \mapsto w := Az = \frac{z-p}{z-\bar{p}} \in K_r(0), \quad (1 > r > 0)$$

$\overline{\Gamma_p} := \{\bar{S} \in \bar{\Gamma}: \bar{S}p = p\} \in \text{Aut } \mathbb{H}$  ist zyklisch von der Ordnung  $\ell = 1, 2$  oder  $3$ .  $\Rightarrow A\overline{\Gamma_p}A^{-1}$

ist die Gruppe der Drehungen um 0 von der Form  $w \mapsto e^{2\pi i \frac{k}{\ell}} w$  für  $0 \leq k \leq \ell - 1$ .

Identifikation der Kanten des Winkelraums wird durch eine geeignete Abbildung realisiert. Dabei ist der Fall  $\ell = 1$  trivial. Allgemein gilt:

$$g: V \rightarrow \mathbb{E}, \quad g(z) = \left( \frac{z-p}{z-\bar{p}} \right)^\ell$$

wird kanonisch faktorisiert, die zugehörige Äquivalenzrelation ist gerade durch  $\overline{\Gamma_p}$  gegeben. Man hat also

$$\begin{array}{ccccc} V & \xrightarrow{g} & \mathbb{E} & & \\ \downarrow v & & \uparrow & & \\ \mathfrak{A}(P) \ni U & \xrightarrow{u^{-1}} & \Gamma_p \setminus V & \xrightarrow{h} & g(V) = K_r(0) \end{array}$$

$\Rightarrow h$  ist bijektiv nach Konstruktion, stetig ebenfalls nach Konstruktion, offen, da  $g$  wegen der Holomorphie offen ist.  $\Rightarrow h$  ist ein Homöomorphismus. Wir nehmen  $\varphi := h \circ u^{-1}$  in unseren Atlas  $\mathfrak{A}$  auf als Karte  $(\varphi, U)$ .  $\varphi$  bewirkt folgendes: Sei  $Z \in U$ , dabei  $U$  wie oben eine Umgebung von  $P$  in  $\Gamma \setminus \mathbb{H}^*$ ,  $z$  der Vertreter von  $Z$  in  $V$ :

$$U \ni Z \mapsto \Gamma_p z = V \cap Z \mapsto \left( \frac{z-p}{z-\bar{p}} \right)^\ell \in K_r(0)$$

- (ii)  $p$  Spitze von  $\Gamma$ : Wir gehen aus von  $u^{-1}: U \rightarrow \Gamma_p \setminus V$  und konstruieren einen Homöomorphismus auf eine Kreisscheibe:

$$V := A^{-1} \{z \in \mathbb{H}: \text{Im } z > \eta\} \cup \{p\}, \quad (p = A^{-1}\infty, A \in {}_1\Gamma)$$

$\lambda$  sei die Breite von  $p$  in  $\Gamma$ , d.h.  $A^{-1}U^\lambda A$  ist die Grundmatrix von  $\Gamma p$ .

$$g: V \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto \begin{cases} e^{frm - \pi i \frac{Az}{\lambda}} & \text{für } z \neq p \\ 0 & \text{für } z = p \end{cases}$$

$\Rightarrow g$  ist

- stetig bzgl. der von  $\mathbb{H}^*$  auf  $V$  induzierten Topologie, denn: Für die  $z \neq p$  ist das klar, und weiter gilt für die Mengen  $V_\mu := \{p\} \cup A^{-1}\{z \in \mathbb{H} : \operatorname{Im} z > \mu\}$  mit  $\mu \geq \eta$ : Die  $V_\mu$  bilden eine Umgebungsbasis von  $p$ , und

$$g(V_\mu) = \{w \in \mathbb{C} : |w| < e^{-2\pi\frac{\mu}{\lambda}}\}, \quad (2.1)$$

so dass  $g$  in  $p$  stetig ist,

- offen: Für  $z \neq p$  folgt das aus der Holomorphie der Exponentialfunktion und für  $z = p$  aus (2.1),
- bijektiv: Für  $z, z' \in V \setminus \{p\}$  gilt:

$$\begin{aligned} g(z) = g(z') &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \quad Az = Az' + k\lambda = U^{k\lambda} Az' \\ &\Leftrightarrow z \equiv z' \pmod{\Gamma_p} \end{aligned}$$

Die Faktorisierung sieht wie folgt aus:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{g} & \mathbb{C} \\ \downarrow v & & \uparrow \\ U \xrightarrow{u^{-1}} \Gamma_p \setminus V & \xrightarrow{h} & g(V) = K_r(0), \quad r = e^{-\frac{2\pi\eta}{\lambda}} \end{array}$$

$h$  ist bijektiv nach Konstruktion, stetig und offen wegen der Offenheit von  $g$ , also ein Homöomorphismus.  $\Rightarrow \varphi := h \circ u^{-1} : U \rightarrow K_r(0)$  ist ein Homöomorphismus. Wir nehmen  $(\varphi, U)$  in unseren Atlas  $\mathfrak{A}$  auf.  $\varphi$  bildet wie folgt ab: Sei  $U$  eine Umgebung von  $P$  in  $\Gamma \setminus \mathbb{H}^*$  wie oben,  $Z \in U$ ,  $z$  ein Vertreter von  $Z$  in  $V$ :

$$Z \mapsto \Gamma_p z = V \cap Z \mapsto \begin{cases} e^{2\pi i \frac{Az}{\lambda}} & \text{für } z \neq p \\ 0 & \text{für } z = p \end{cases} \in K_r(0)$$

**2.2.4 Satz**  $\mathfrak{A}$  ist ein komplexer Atlas auf  $\Gamma \setminus \mathbb{H}^*$ , d. h.  $\Gamma \setminus \mathbb{H}^*$  „ist“ eine Riemannsche Fläche.

**B** Zu zeigen ist: Je zwei Karten aus  $\mathfrak{A}$  sind holomorph verträglich. Folgende Typen von Karten kommen in Betracht: Sei  $(\varphi, U) \in \mathfrak{A}$  eine Karte in  $P \in \Gamma \setminus \mathbb{H}^*$ :

- (1)  $P = \Gamma p$  mit  $p \in \mathbb{H}$ ,  $\ell := \operatorname{ord} \overline{\Gamma_p}$ ,  $H_\rho(p)$  sei  $\Gamma_p$ -invariante Umgebung von  $p$  in  $\mathbb{H}$  ( $\rho$  hinreichend klein),  $U$  Umgebung von  $P$  in  $\Gamma \setminus \mathbb{H}^*$ ,  $z \in H_\rho(p)$  ein Vertreter von  $Z$ :

$$U \longrightarrow \Gamma_p \setminus H_\rho(p) \longrightarrow K_r(0)$$

$$Z \longmapsto \Gamma_p z = Z \cap H_\rho(p) \longmapsto \left( \frac{z-p}{z-\overline{p}} \right)^\ell = \varphi(Z)$$

- (2)  $P = \Gamma p$  mit  $p = A^{-1}\infty$  Spitze von  $\Gamma$ ,  $A^{-1}U^\lambda A$  Grundmatrix von  $p$  in  $\Gamma$ , eine Umgebung  $\{p\} \cup \mathcal{P}_p$  von  $p$  in  $\mathbb{H}^*$  mit

$$\mathcal{P}_p = A^{-1} \{z \in \mathbb{H} : \operatorname{Im} z > \eta\} \quad (\eta \geq 1),$$

$z \in \mathcal{P}_p \cup \{p\}$  ein Vertreter von  $Z$ :

$$U \longrightarrow \Gamma_p \setminus \{\mathcal{P}_p \cup \{p\}\} \longrightarrow K_r(0)$$

$$Z \longmapsto \Gamma_p z = Z \cap (\mathcal{P}_p \cup \{p\}) \longmapsto \begin{cases} e^{2\pi i \frac{Az}{\lambda}} & \text{für } z \neq p \\ 0 & \text{für } z = p \end{cases}$$

Ebenso haben wir für die zweite Karte  $(\psi, V) \in \mathfrak{U}$  im Punkt  $Q \in \Gamma \setminus \mathbb{H}^*$ :

- (1')  $Q = \Gamma q$  mit  $q \in \mathbb{H}$ ,  $m := \operatorname{ord} \overline{\Gamma_q}$ ,  $H_\sigma(q)$  sei  $\Gamma_q$ -invariante Umgebung von  $q$  in  $\mathbb{H}$  ( $\sigma$  hinreichend klein),  $V$  Umgebung von  $Q$  in  $\Gamma \setminus \mathbb{H}^*$ ,  $z \in H_\sigma(q)$  ein Vertreter von  $Z$ :

$$V \longrightarrow \Gamma_q \setminus H_\sigma(q) \longrightarrow K_s(0)$$

$$Z \longmapsto \Gamma_q z = Z \cap H_\sigma(q) \longmapsto \left( \frac{z-q}{z-\bar{q}} \right)^m = \psi(Z)$$

- (2')  $Q = \Gamma q$  mit  $q = B^{-1}\infty$  Spitze von  $\Gamma$ ,  $B^{-1}V^\mu B$  Grundmatrix von  $q$  in  $\Gamma$ , eine Umgebung  $\{q\} \cup \mathcal{P}_q$  von  $q$  in  $\mathbb{H}^*$  mit

$$\mathcal{P}_q = B^{-1} \{z \in \mathbb{H} : \operatorname{Im} z > \vartheta\} \quad (\vartheta \geq 1),$$

$z \in \mathcal{P}_q \cup \{q\}$  ein Vertreter von  $Z$ :

$$V \longrightarrow \Gamma_q \setminus \{\mathcal{P}_q \cup \{q\}\} \longrightarrow K_s(0)$$

$$Z \longmapsto \Gamma_q z = Z \cap (\mathcal{P}_q \cup \{q\}) \longmapsto \begin{cases} e^{2\pi i \frac{Bz}{\mu}} & \text{für } z \neq q \\ 0 & \text{für } z = q \end{cases}$$

Wir machen folgende Fallunterscheidung:

- a)  $P = Q \in \Gamma \setminus \mathbb{H} : \Rightarrow \exists S \in \Gamma \quad p = Sq, \ell = m$ , aber evtl.  $\sigma \neq \rho$ .  $\varphi \circ \psi$  vermittelt folgende Zuordnung: Die Elemente  $w \in \psi(U \cap V)$  haben die Form:  $w = \left( \frac{z-q}{z-\bar{q}} \right)^m$  mit  $z \in H_\sigma(q)$ ,  $\Gamma z \in U \cap V$ .

$$\psi^{-1}: w = \left( \frac{z-q}{z-\bar{q}} \right)^m \mapsto \Gamma_q z \mapsto \underbrace{\Gamma z}_{\in U \cap V} = \Gamma(Sz).$$



Nebenbetrachtung:  $Sz \in H_\rho(p)$ , denn:  $Sz \in H_\sigma(p)$ , denn wegen  $|z, q| < \sigma$  ist  $|Sz, Sq| = |Sz, p| < \sigma$ . Ferner hat  $\Gamma z \in U$  einen Vertreter in  $H_\rho(p)$ , etwa  $z'$ . Je 2 Vertreter in  $H_\rho(p)$  sind  $\Gamma_p$ -äquivalent:

- (i) Falls  $\sigma \leq \rho$ , gilt die Behauptung trivialerweise:  $Sz \in H_\sigma(p)$ .
- (ii) Falls  $\sigma \geq \rho$ , so ist  $z'$  Vertreter in  $H_\sigma(p)$ , also modulo  $\Gamma$  äquivalent zu  $Sz \in H_\sigma(p)$ .  
 $\Rightarrow \exists V \in \Gamma_p$  mit  $Sz = Vz' \in H_\rho(p)$ , da  $H_\rho(p)$   $\Gamma_p$ -invariant ist.

$\varphi: \Gamma(Sz) \mapsto \left(\frac{Sz-p}{Sz-\bar{p}}\right)^m$  wegen  $\ell = m$ . Mit  $S = \begin{pmatrix} * & * \\ c & d \end{pmatrix}$  ist

$$\frac{Sz-p}{Sz-\bar{p}} = \frac{Sz-Sq}{Sz-S\bar{q}} = \frac{z-q}{z-\bar{q}} \frac{c\bar{q}+d}{cq+d}.$$

$$\Rightarrow \varphi \circ \psi^{-1}(w) = \left(\frac{Sz-p}{Sz-\bar{p}}\right)^m = \left(\frac{c\bar{q}+d}{cq+d}\right)^m w,$$

und das ist holomorph in Abhängigkeit von  $w$ .

- b)  $P \neq Q$ ,  $P, Q \in \Gamma \setminus \mathbb{H}$ : Sei  $w_0 \in \psi(U \cap V)$ . Wir zeigen:  $\varphi \circ \psi^{-1}$  ist in einer geeigneten Umgebung  $\psi(W)$  ( $W \subset U \cap V$  offen) von  $w_0$  holomorph. Wir wählen dazu  $z_0 \in H_\sigma(q)$  mit  $\psi(\Gamma z_0) = w_0$ . Wegen  $\Gamma z_0 \in U$  hat  $\Gamma z_0$  einen Vertreter in  $H_\rho(p)$ , wir können also ein  $S \in \Gamma$  wählen mit  $Sz_0 \in H_\rho(p)$ . Wir setzen  $W := k(H_\rho(p) \cap SH_\sigma(q))$  mit der kanonischen Abbildung  $k: \mathbb{H}^* \rightarrow \Gamma \setminus \mathbb{H}^*$ .  $W$  ist eine offene Umgebung von  $\Gamma z_0$ ,  $W \subset U \cap V$ ,  $\psi(W)$  ist Umgebung von  $w_0$ , und  $\varphi \circ \psi^{-1}$  vermittelt auf  $\psi(W)$  folgende Zuordnung mit  $z \in H_\sigma(q) \cap S^{-1}H_\rho(p)$ :

$$\psi(W) \ni w = \left(\frac{z-q}{z-\bar{q}}\right)^m \mapsto \Gamma_q z \mapsto \underbrace{\Gamma z}_{\in U \cap V} = \Gamma(Sz) \mapsto \left(\frac{Sz-p}{Sz-\bar{p}}\right)^\ell \in \varphi(U \cap V).$$

Zu zeigen ist nun die holomorphe Abhängigkeit der rechten Seite von  $w$ . Für  $m = 1$  ist das klar. Sei  $m > 1$ . Dann liegt  $H_\rho(p) \cap SH_\sigma(q)$  in einem H-Winkelraum mit Spitze in  $Sq$  und Öffnungswinkel  $< \frac{2\pi}{m}$ , denn: Zwei Punkte des Durchschnitts sind genau dann  $\Gamma$ -äquivalent, wenn sie  $\Gamma_p$ -äquivalent sind. Deshalb können sie nicht in einem Winkelraum mit Öffnungswinkel  $< \frac{2\pi}{m}$  liegen, da sie dann in bezug auf eine elliptische Matrix mit Fixpunkt  $Sq$  äquivalent wären. Eine solche kann aber nicht in  $\Gamma_p$  liegen, da sie sonst in  $\mathbb{C}$  4 Fixpunkte hätte wegen  $P \neq Q$ . Insbesondere liegt  $Sq$  nicht im Durchschnitt. Es kann aber sehr wohl  $H_\rho(p) \subset H_\sigma(Sq)$  gelten.  $\Rightarrow \psi(W)$  liegt in der längs einer von 0 ausgehenden Halbgeraden aufgeschnittenen Einheitskreisscheibe.  $\Rightarrow$  Es gibt eine eindeutige holomorphe Fixierung von  $\sqrt[m]{w} =: z'$  in  $\psi(W)$ , so dass  $z' = \frac{z-q}{z-\bar{q}}$  der inversen Abbildung  $z = \frac{\bar{q}z'-q}{z'-1} \in H_\rho(p) \cap SH_\sigma(q)$  entspricht, und mit dieser holomorphen  $\sqrt[m]{w}$  gilt dann:

$$\varphi \circ \psi^{-1}(w) = \left( \frac{S\left(\frac{\bar{q}\sqrt[m]{w}-q}{\sqrt[m]{w}-1}\right) - p}{S\left(\frac{\bar{q}\sqrt[m]{w}-q}{\sqrt[m]{w}-1}\right) - \bar{p}} \right)^\ell$$

ist holomorph in Abhängigkeit von  $w \in \psi(W)$ .

- c)  $P = \Gamma p$  mit einer Spitze  $p$  von  $\Gamma$ ,  $Q = \Gamma q$  mit  $q \in \mathbb{H}$ : Dann haben wir in  $P$  die Karte  $(\varphi, U)$  vom Typ (2), in  $Q$  die Karte  $(\psi, V)$  vom Typ (1). Diskussion wie unter b) mit Exponentialabbildung am Ende statt  $\left(\frac{Sz-p}{Sz-\bar{p}}\right)^\ell$ . Die Existenz einer holomorphen  $\sqrt[m]{w}$  zeigt man ähnlich wie unter b).
- d)  $P = \Gamma p$  mit  $p \in \mathbb{H}$ ,  $Q = \Gamma q$  mit einer Spitze  $q$  von  $\Gamma$ : folgt aus c) wegen der Biholomorphie.
- e)  $P = \Gamma p$ ,  $Q = \Gamma q$  mit Spitzen  $p, q$  von  $\Gamma$ : Ist  $P \neq Q$ , so gilt:

$$\Gamma(\{p\} \cup \mathcal{P}_p) \cap (\{q\} \cup \mathcal{P}_q) = \emptyset \quad (\text{vgl. Lemma 2.1.3 a)})$$

Bleibt nur der Fall  $P = Q$ , und dabei kann man gleich  $\eta = \vartheta = 1$  annehmen. Rechnung liefert:

$$\varphi \circ \psi^{-1}(w) = \text{const} \cdot w \quad \forall w \in \psi(W). \quad \square$$

Auch  $\Gamma \setminus \mathbb{H}$  ist Riemannsche Fläche und offen und dicht in  $\Gamma \setminus \mathbb{H}^*$ .  $\Gamma \setminus \mathbb{H}^*$  entsteht aus  $\Gamma \setminus \mathbb{H}$  durch Hinzunahme der diskreten Menge der Spitzenbahnen. Die natürlichen Abbildungen  $\mathbb{H} \rightarrow \Gamma \setminus \mathbb{H} \rightarrow \Gamma \setminus \mathbb{H}^*$  sind holomorph.

### 2.2.5 Beispiel ${}_1\Gamma \setminus \mathbb{H}^*$ ist biholomorph äquivalent zu $\mathbb{P}$ .

Nach der Uniformisierungstheorie (siehe z. B. Fischer und Lieb (1988)) ist nur zu zeigen, dass  ${}_1\Gamma \setminus \mathbb{H}^*$  homöomorph ist zu  $\mathbb{P}$  (hier liegt eine ganz spezielle Eigenschaft von  $\mathbb{P}$  vor. Beachte: Je zwei Tori  $\mathbb{C}/(\omega_1\mathbb{Z} + \omega_2\mathbb{Z})$ ,  $\mathbb{C}/(\omega'_1\mathbb{Z} + \omega'_2\mathbb{Z})$  sind stets homöomorph, aber durchaus nicht immer konform äquivalent. Sie sind konform äquivalent genau dann, wenn  ${}_1\Gamma\tau = {}_1\Gamma\tau'$  für die zugehörigen Werte  $\tau = \frac{\omega_1}{\omega_2}$ , und  $\tau' = \frac{\omega'_1}{\omega'_2}$ .) Dass  ${}_1\Gamma \setminus \mathbb{H}^*$  homöomorph zu  $\mathbb{P}$  ist, macht man sich am Fundamentalbereich von  ${}_1\Gamma$  klar.

Ebenso hat man für  $\Gamma_\vartheta$ ,  $\Gamma^0(2)$ ,  $\Gamma_0(2)$ ,  $\Gamma(2)$ , dass die zugehörigen Riemannschen Flächen konform äquivalent sind zu  $\mathbb{P}$ . Die zugehörigen biholomorphen Abbildungen kann man explizit angeben (z. B. ist das für  ${}_1\Gamma$  die Modulfom  $J$ ). Für  $n \geq 6$  ist  $\Gamma[n] \setminus \mathbb{H}^*$  nicht mehr konform äquivalent zu  $\mathbb{P}$ , da das Geschlecht  $\geq 1$  ist.

**2.2.6 Satz** Sei  $-I \in \Delta \sqsubset \Gamma \sqsubset {}_1\Gamma$  und  $\mathbb{H}_\Gamma := \mathbb{H} \cup \{p: p \text{ Spitze von } \Gamma\}$ ,  $\mathbb{H}_\Delta := \mathbb{H} \cup \{p: p \text{ Spitze von } \Delta\}$ ,

$$f: \Delta \setminus \mathbb{H}_\Delta \rightarrow \Gamma \setminus \mathbb{H}_\Gamma, \quad \Delta z \mapsto \Gamma z \quad (z \in \mathbb{H}_\Delta).$$

$\Rightarrow f$  ist holomorph und für alle  $z \in \mathbb{H}_\Delta$  ist  $\text{ord}_{\Delta p} f = \left[ \overline{\Gamma_p}: \overline{\Delta_p} \right] = \text{Vielfachheit}$ , mit der  $f$  in  $\Delta p$  den Wert  $f(\Delta p) = \Gamma p$  annimmt.

Erläuterung:  $X, Y$  seien Riemannsche Flächen,  $f: X \rightarrow Y$  heißt holomorph genau dann, wenn  $f$  stetig ist und für alle  $x_0 \in X$  und alle Karten  $(\varphi, U)$  in  $x_0$  und  $(\psi, V)$  in  $f(x_0)$ , wobei gleich  $U$  so klein gewählt sei, dass  $f(U) \subset V$ , die Abbildung

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}: \varphi(U) \rightarrow \psi(V)$$

holomorph ist. Für nicht konstantes  $f$  ist  $\text{ord}_{x_0} f$  die Nullstellenordnung von  $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(\cdot) - \psi(f(\varphi^{-1}(x_0)))$  im Punkt  $\varphi(x_0)$ . Die Situation entspricht dem folgenden Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc}
& & X & \xrightarrow{f} & Y \\
& & \uparrow & & \uparrow \\
x_0 & \in & U & \xrightarrow{f} & V & \ni f(x_0) \\
& & \downarrow \varphi & & \downarrow \psi \\
& & \varphi(U) & \longrightarrow & \psi(V)
\end{array}$$

- B (i) Sei  $P = \Delta p$  mit  $p \in \mathbb{H}$ ,  $\ell := \text{ord } \overline{\Delta p}$ ,  $m := \text{ord } \overline{\Gamma p}$ .  $\Rightarrow \ell \mid m$ . Wir wählen für  $\Gamma p$  ein geeignetes  $\rho$ . Dieses liefert eine Karte  $(\psi, V)$  im  $\Gamma p$  und eine Karte  $(\varphi, U)$  in  $\Delta p$ .  $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$  liefert folgende Zuordnung:

$$\begin{array}{ccccccc}
K_r(0) & \xrightarrow{\quad} & \Delta_p \setminus H_\rho(p) & \longrightarrow & U & \longrightarrow & V & \xrightarrow{\quad} & \Gamma_p \setminus H_\rho(p) & \longrightarrow & K_{r'}(0) \\
\\
w = \left(\frac{z-p}{z-\bar{p}}\right)^\ell & \xrightarrow{\quad} & \Delta_p z & \xrightarrow{\quad} & \Delta z & \xrightarrow{\quad} & \Gamma z & \xrightarrow{\quad} & \Gamma_p z & \xrightarrow{\quad} & \left(\frac{z-p}{z-\bar{p}}\right)^m = w^{\frac{m}{\ell}}
\end{array}$$

$\varphi^{-1}$  (under  $\Delta_p z \rightarrow \Delta z$ )       $f$  (under  $\Delta z \rightarrow \Gamma z$ )       $\psi$  (under  $\Gamma z \rightarrow \Gamma_p z$ )

Diese ist holomorph in Abhängigkeit von  $w$ , und hier ist  $\frac{m}{\ell} = \left[ \overline{\Gamma p} : \overline{\Delta p} \right]$ .

- (ii) Fall einer Spitze  $p$  von  $\Delta$ ,  $p = A^{-1}\infty$  mit  $A \in {}_1\Gamma$ ,  $\lambda = \text{Breite von } p \text{ in } \Delta$ ,  $\mu = \text{Breite von } p \text{ in } \Gamma$ .  $\Rightarrow \lambda = \mu \left[ \overline{\Gamma p} : \overline{\Delta p} \right]$ . Wir wählen in  $\Delta p$  und  $\Gamma p$  Karten mit demselben  $A$  und dem gleichen Vertreter  $p$ .  $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$  liefert dann folgende Zuordnung:

$$\begin{array}{ccccccc}
K_r(0) & \xrightarrow{\quad} & \Delta_p \setminus (\mathcal{P}_p \cup \{p\}) & \longrightarrow & U & \longrightarrow & V & \longrightarrow & \Gamma_p \setminus (\mathcal{P}_p \cup \{p\}) & \longrightarrow & K_{r'}(0) \\
\\
w & \xrightarrow{\quad} & \Delta_p z & \xrightarrow{\quad} & \Delta z & \xrightarrow{\quad} & \Gamma z & \xrightarrow{\quad} & \Gamma_p z & \xrightarrow{\quad} & w \left[ \overline{\Gamma p} : \overline{\Delta p} \right] \\
\parallel & & \varphi^{-1} & & f & & \psi & & \parallel & & \\
e^{2\pi i \frac{Az}{\lambda}} \text{ bzw. } 0 & & & & & & & & e^{2\pi i \frac{Az}{\mu}} \text{ bzw. } 0 & & 
\end{array}$$

$\Rightarrow$  Holomorphie und Aussage über die Ordnung. □

Ähnlich zeigt man: Konjugierte Untergruppen von  $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$  haben konform äquivalente Riemannsche Flächen.

## 2.3 Untergruppen von endlichem Index in der Modulgruppe und zugehörige verzweigte Überlagerungen Riemannscher Flächen

**2.3.1 Definition (Überlagerung)** Sind  $X$  und  $Y$  topologische Räume, so heißt  $p: Y \rightarrow X$  eine *Überlagerung*, falls  $p$  stetig, offen und diskret, d. h.  $p^{-1}(x) \subset Y$  diskret für alle  $x \in X$ , ist.

**2.3.2 Satz** Sind  $X$  und  $Y$  Riemannsche Flächen,  $p: Y \rightarrow X$  eine nicht-konstante holomorphe Abbildung, so ist  $p$  eine (sog. verzweigte) Überlagerung.

B  $p$  ist laut Definition stetig und als nicht-konstante holomorphe Abbildung offen, da das für solche Abbildungen auf  $\mathbb{C}$  gilt. Wäre das Urbild eines Punktes  $a \in X$  unter  $p$  nicht diskret, so wäre  $p$  nach dem Identitätssatz konstant. Widerspruch!  $\square$

**2.3.3 Definition (Verzweigungspunkt)** Sei  $p: Y \rightarrow X$  eine Überlagerung,  $y \in Y$ .  $y$  heißt *Verzweigungspunkt* von  $p$  genau dann, wenn es keine Umgebung  $V$  von  $y$  gibt, so dass  $p|_V$  injektiv ist. Vergleiche die Situation auf  $\mathbb{R}$ :  $z \mapsto z^2 \Rightarrow 0$  ist Verzweigungspunkt.  $p$  heißt unverzweigt, wenn es keinen Verzweigungspunkt von  $p$  gibt.

**2.3.4 Satz** Seien  $X$  und  $Y$  topologische Räume,  $p: Y \rightarrow X$ .  $p$  ist unverzweigte Überlagerung genau dann, wenn  $p$  lokal topologisch ist.

B Siehe Forster (1977), S. 18  $\square$

Seien  $X, Y$  kompakte Riemannsche Flächen,  $f: X \rightarrow Y$  holomorph. Dann ist  $f$  surjektiv oder konstant, denn: Ist  $f$  nicht konstant, so ist  $f$  offen, also  $\emptyset \neq f(X) \subset Y$  offen;  $X$  ist kompakt und wegen der Stetigkeit von  $f$  auch  $f(X)$ ; da  $Y$  zusammenhängend ist, folgt dann  $f(X) = Y$ .

Sei  $f$  surjektiv. Dann ist  $f$  eine verzweigte Überdeckung. Sei  $x_0 \in X$ ,  $y_0 := f(x_0)$ ,  $\ell :=$  Vielfachheit, mit der  $f$  in  $x_0$  den Wert  $y_0 = f(x_0)$  annimmt.  $x_0$  ist Verzweigungspunkt  $\Leftrightarrow \ell > 1$ .  $v_{x_0}(f) := \ell - 1$  heißt die Verzweigungsordnung von  $f$  in  $x_0$ .

Für alle  $y \in Y$  ist  $f^{-1}(y) \subset X$  eine endliche Teilmenge (nach dem Identitätssatz, da  $X$  kompakt ist).  $\Rightarrow n := \sum_{x \in f^{-1}(y)} v_{f(x)} f$  hängt nicht ab von der Auswahl von  $y$ ,  $n$  heißt der Grad der Überlagerung  $f$  (siehe Forster (1977), S. 28, Satz 4.24).

Beispiele dazu:

- $X = Y = \mathbb{P}$ ,  $f$  nicht-konstantes Polynom: Fundamentalsatz der Algebra,
- $X = \mathbb{C} / \text{Gitter}$ ,  $Y = \mathbb{P}$ : Jede nicht-konstante elliptische Funktion zum betreffenden Gitter nimmt jeden Wert in  $\mathbb{P}$  gleich oft an im Fundamentalparallelogramm.

**2.3.5 Satz** Sei  $-I \in \Delta \sqsubset \Gamma \sqsubset {}_1\Gamma$ ,  $[{}_1\Gamma: \Delta] < \infty$ ,  $\mathbb{H}^* := \mathbb{H} \cup \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ . Dann ist die natürliche Abbildung

$$f: \Delta \setminus \mathbb{H}^* \rightarrow \Gamma \setminus \mathbb{H}^*, \quad \Delta z \mapsto \Gamma z \quad (z \in \mathbb{H}^*)$$

eine Überlagerung kompakter Riemannscher Flächen vom Grad  $n = [\bar{\Gamma} : \bar{\Delta}]$ . Die Verzweigungsordnung von  $f$  in  $P = \Delta p \in \Delta \setminus \mathbb{H}^*$  ist gleich  $v_P(f) = [\bar{\Gamma}_p : \bar{\Delta}_p] - 1$ . Insbesondere ist  $f$  unverzweigt in allen Punkten  $P = \Delta p$ , wenn  $p$  kein Fixpunkt von  $\Delta$  ist. Allgemein: Sei  $Q = \Gamma q \in \Gamma \setminus \mathbb{H}^*$ ,  $f^{-1}(Q) = \{P_1, \dots, P_h\}$ ,  $(P_1, \dots, P_h)$  paarweise verschieden, und seien  $p_1, \dots, p_h \in \mathbb{H}^*$  so gewählt, dass  $P_v = \Delta p_v$ ,  $p_v = S_v p$  ( $p \in \mathbb{H}^*$ ,  $S_v \in \Gamma$ ,  $v = 1, \dots, h$ ). Dann ist

$$\text{vfh}_{P_v} f = [\bar{\Gamma}_{p_v} : \bar{\Delta}_{p_v}] = [\bar{\Gamma}_p : \overline{S_v^{-1} \Delta S_v} \cap \bar{\Gamma}_p].$$

$$\Gamma = \bigcup_{v=1}^h \bigcup_{\mu=1}^{[\bar{\Gamma}_{p_v} : \bar{\Delta}_{p_v}]} \Delta R_\mu S_v \quad \left( \Gamma_{p_v} = \bigcup_{\mu=1}^{[\bar{\Gamma}_{p_v} : \bar{\Delta}_{p_v}]} \Delta R_\mu \text{ Zerlegung in Rechtsnebenklassen} \right)$$

ist eine Zerlegung in Rechtsnebenklassen modulo  $\Delta$ , und es gilt:

$$\text{Grad der Überlagerung} = [\bar{\Gamma} : \bar{\Delta}] = \sum_{v=1}^h [\bar{\Gamma}_{p_v} : \bar{\Delta}_{p_v}] = \sum_{P \in f^{-1}(Q)} \text{vfh}_P f$$

Ist insbesondere  $\Delta \triangleleft \Gamma$ , so ist  $\text{vfh}_{P_1} f = \dots = \text{vfh}_{P_h} f$  und  $[\bar{\Gamma} : \bar{\Delta}] = h \text{vfh}_{P_1} f$ .

B Nach Satz 1.5.9 gilt: Ist  $z_0 \in \mathbb{H}$  kein Fixpunkt von  $\Gamma$ , so zerfällt  $\Gamma z_0$  in  $[\bar{\Gamma} : \bar{\Delta}]$  Bahnen modulo  $\Delta$ , und in allen Urbildpunkten hat  $f$  die Vielfachheit 1 nach Satz 2.2.6. Ebenfalls mit Satz 2.2.6 folgt:  $n = [\bar{\Gamma} : \bar{\Delta}]$  und  $v_{\Delta p} f = [\bar{\Gamma}_p : \bar{\Delta}_p] - 1$ .

Sei  $Q = \Gamma q \in \Gamma \setminus \mathbb{H}^*$ ,  $p_v, P_v, S_v$  wie in Satz 2.3.5.  $p_v = S_v p \Rightarrow \Gamma_{p_v} = S_v \Gamma_p S_v^{-1}$ ,  $\Delta_{p_v} = \Gamma_{p_v} \cap \Delta$ .

$$\Rightarrow \text{vfh}_{P_v} f \stackrel{\text{Satz 2.2.6}}{=} [\bar{\Gamma}_{p_v} : \bar{\Delta}_{p_v}] = [\bar{\Gamma}_p : \overline{S_v^{-1} \Delta S_v} \cap \bar{\Gamma}_p].$$

Sei  $S \in \Gamma$ ,  $f(\Delta(Sp)) = \Gamma(Sp) = \Gamma q = Q \Rightarrow S \in \Delta S_v \Gamma_p$ .

$$\Rightarrow \Gamma = \bigcup_{v=1}^h \Delta S_v \Gamma_p = \bigcup_{v=1}^h \underbrace{\Delta(S_v \Gamma_p S_v^{-1})}_{=\Gamma_{p_v}} S_v = \bigcup_{v=1}^h \bigcup_{\mu=1}^{[\bar{\Gamma}_{p_v} : \bar{\Delta}_{p_v}]} \Delta R_\mu S_v,$$

da  $\Gamma_{p_v} = \bigcup_{\mu=1}^{[\bar{\Gamma}_{p_v} : \bar{\Delta}_{p_v}]} \Delta_{p_v} R_\mu$  eine Zerlegung in Rechtsnebenklassen ist. Die Zerlegung ist disjunkt, denn: Sei  $\Delta R_\mu S_v = R_{\mu'} S_{v'}$ .

$$\Rightarrow P_v = \Delta \underbrace{R_\mu S_v p}_{\in \Gamma_{p_v} = \Delta_{p_v}} = \Delta R_{\mu'} S_{v'} = P_{v'}.$$

$\Rightarrow v = v' \Rightarrow \Delta R_\mu = \Delta R_{\mu'}$  mit  $R_\mu, R_{\mu'} \in \Gamma_{p_v}$ , es gibt also ein  $A \in \Delta$ , so dass  $R_\mu = A R_{\mu'}$ , also auch  $A \in \Delta_{p_v}$ . Nach Definition der  $R_\mu$  folgt daraus  $\mu = \mu'$ .

$$\Rightarrow [\Gamma : \Delta] = [\bar{\Gamma} : \bar{\Delta}] = \sum_{v=1}^h [\bar{\Gamma}_{p_v} : \bar{\Delta}_{p_v}].$$

Der Rest der Behauptung folgt nach früheren Sätzen. □

**2.3.6 Beispiel**  $f: \Gamma_\vartheta \setminus \mathbb{H}^* \rightarrow {}_1\Gamma \setminus \mathbb{H}^*$  (die natürliche Abbildung) ist Überlagerung kompakter Riemannscher Flächen vom Grad 3. Die Verzweigungspunkte sind bekannt:  $\text{vfh}_{\Gamma_\vartheta\infty} f = 2$  (Verzweigungspunkt),  $\text{vfh}_{\Gamma_\vartheta 1} f = 1$  (kein Verzweigungspunkt),  $\text{vfh}_{\Gamma_\vartheta i} f = 1$  (kein Verzweigungspunkt),  $\text{vfh}_{\Gamma_\vartheta(i+1)} f = 2$  (Verzweigungspunkt),  $\text{vfh}_{\Gamma_\vartheta\rho} f = 3$ , da  $\rho$  kein Fixpunkt ist.

Ein Dreieck  $\Delta$  auf einer topologischen Fläche  $M$  ist ein Kompaktum  $\Delta \subset M$ , das zu einer abgeschlossenen euklidischen Dreiecksfläche  $D \subset \mathbb{R}^2$  homöomorph ist. Die Bilder der Eckpunkte von  $D$  heißen *Ecken* von  $\Delta$ , die Bilder der Seiten von  $D$  heißen *Kanten* von  $\Delta$ . Eine *Triangulierung* von  $M$  liegt vor, wenn man ein endliches oder abzählbar unendliches System von Dreiecken auf  $M$  hat, so dass gilt:

- $M$  ist die Vereinigung aller Dreiecke.
- Zwei verschiedene Dreiecke der Triangulierung sind entweder disjunkt oder haben genau eine Ecke oder genau eine Kante gemeinsam.
- Jede Kante gehört zu genau zwei benachbarten Dreiecken.
- Die in einer Ecke zusammenstoßenden Dreiecke bilden einen endlichen Zyklus, in dem jedes Dreieck mit dem folgenden genau eine Kante gemeinsam hat.

Riemannsche Flächen haben stets abzählbare Topologien (abzählbare Basen der offenen Mengen) und sind stets orientierbar und triangulierbar. Kompakte Riemannsche Flächen haben eine endliche Triangulierung.

Verfeinerung von Triangulierungen: Sei  $e := \#\{\text{Ecken}\}$ ,  $f := \#\{\text{Flächen}\}$ ,  $k := \#\{\text{Kanten}\}$ . Zur Verfeinerung einer gegebenen Triangulierung gibt es dann folgende Möglichkeiten:

- 1) Man fügt in die Mitte eines Dreiecks eine neue Ecke ein, die man mit allen alten Ecken verbindet. Es ergibt sich die Wirkung  $e \mapsto e+1$ ,  $k \mapsto k+3$ ,  $f \mapsto f+2$ , also für die Wechselsumme  $e - k + f \mapsto e - k + f$ .
- 2) Man wählt auf der gemeinsamen Kante zweier benachbarter Dreiecke eine neue Ecke, die man mit den jeweils gegenüberliegenden Ecken verbindet. Es stellt sich folgende Wirkung ein:  $e \mapsto e+1$ ,  $k \mapsto k+3$ ,  $f \mapsto f+2$ , also in der Wechselsumme  $e - k + f \mapsto e - k + f$ .

Für jede kompakte Riemannsche Fläche hängt die Zahl  $e - k + f$  nicht ab von der Wahl der Triangulierung.  $e - k + f =: \chi = \text{Euler-Charakteristik} = 2 - 2g \geq 0$ .  $g$  heißt das *Geschlecht* der Fläche und ist die einzige topologische Invariante. Beispiele sind für  $g = 0$  die Sphäre, für  $g = 1$  ein Torus und für beliebiges  $g$  die „Brezelfläche“ mit  $g$  Löchern. Weitere Literatur zu diesem Thema findet sich bei Seifert und Threlfall (1934), Massey (1967) sowie Springer (1957).

**2.3.7 Satz (Riemann-Hurwitzsche Formel)** Sei  $f: X \rightarrow Y$  eine holomorphe Überlagerung kompakter Riemannscher Flächen vom Grad  $n$ ,  $g$  das Geschlecht von  $X$ ,  $g'$  das Geschlecht von  $Y$ . Dann gilt die Riemann-Hurwitzsche Formel:

$$2g - 2 = n(2g' - 2) + \sum_{x \in X} \nu_x(f), \quad (2.2)$$

wobei  $v_x(f) = \text{vfh}_x f - 1$  die Verzweigungsordnung von  $f$  in  $x$  bezeichne.  $\sum_{x \in X} v_x(f)$  nennt man auch die Gesamtverzweigungsordnung von  $f$ .

B Trianguliere  $Y$  so, dass alle Bilder der endlich vielen Verzweigungspunkte von  $f$  Ecken der Triangulierung sind, und so, dass jedes Dreieck der Triangulierung ganz im Definitionsbereich einer Kartenabbildung von  $Y$  liegt. Das Urbild dieser Triangulierung liefert dann eine Triangulierung auf  $X$ . In  $X$  gilt:  $2 - 2g = e - k + f$ , in  $Y$ :  $2 - 2g' = e' - k' + f'$ , wobei folgende Definition gelte:

$$\begin{aligned} e &:= \#\{\text{Ecken in } X\}, & k &:= \#\{\text{Kanten in } X\}, & f &:= \#\{\text{Flächen in } X\} \\ e' &:= \#\{\text{Ecken in } Y\}, & k' &:= \#\{\text{Kanten in } Y\}, & f' &:= \#\{\text{Flächen in } Y\} \end{aligned}$$

$f = nf'$ ,  $k = nk'$  und  $e = ne' - \sum_{x \in X} v_x(f)$ , denn:

$$\begin{aligned} n &= \sum_{x \in f^{-1}(q)} \text{vfh}_x f = \sum_{x \in f^{-1}(q)} v_x(f) + \#f^{-1}(q). \\ \Rightarrow 2 - 2g &= e - k + f = n(e' - k' + f') - \sum_{x \in X} v_x(f) = n(2 - 2g') \sum_{x \in X} v_x(f). \end{aligned}$$

Das liefert die Behauptung.  $\square$

**2.3.8 Beispiel**  $f: \Gamma_\vartheta \setminus \mathbb{H}^* \rightarrow {}_1\Gamma \setminus \mathbb{H}^*$ ,  $g$  sei das Geschlecht von  $\Gamma_\vartheta$ ,  $g' = 0$  das Geschlecht von  ${}_1\Gamma$ ,  $n = 3$ . Mit Satz 2.3.7 und den Ergebnissen aus Beispiel 2.3.6 folgt dann:

$$2g - 2 = 3(2 \cdot 0 - 2) + \sum_{x \in \Gamma_\vartheta \setminus \mathbb{H}^*} v_x(f) - 6 + 1 + 1 + 2 = -2 \Rightarrow g = 0$$

**2.3.9 Satz** Sei  $-I \in \Gamma \sqsubset {}_1\Gamma$ ,  $\mu := [{}_1\Gamma: \Gamma] < \infty$  und für  $\ell \in \{2, 3\}$  sei  $e_\ell$  die Anzahl  $\Gamma$ -inäquivalenter Fixpunkte von  $\Gamma$  mit  $|\overline{\Gamma_p}| = \ell$ ,  $p$  die Anzahl  $\Gamma$ -inäquivalenter parabolischer Fixpunkte von  $\Gamma$  und  $g$  das Geschlecht von  $\Gamma \setminus \mathbb{H}^*$ . Dann gilt die topologische Grundformel:

$$\mu = 12(g - 1) + 6p + 4e_3 + 3e_2. \quad (2.3)$$

B Anwendung von (2.2) auf die Überlagerung  $f: \Gamma \setminus \mathbb{H}^* \rightarrow {}_1\Gamma \setminus \mathbb{H}^*$ :  $f$  ist in allen Nicht-Fixpunkten unverzweigt; bleiben die Urbilder von  ${}_1\Gamma\rho$ ,  ${}_1\Gamma i$  und  ${}_1\Gamma\infty$  zu untersuchen. Sei z. B.  $f^{-1}({}_1\Gamma\rho) = \{P_1, \dots, P_h\}$ ,  $\text{vfh}_{P_v} f \in \{1, 3\}$ . Die Punkte  $P_v$  mit Vielfachheit 1 sind genau die Bahnen der elliptischen Fixpunkte von  $\Gamma$  mit  $|\overline{\Gamma_p}| = 3$ . Ihre Anzahl ist  $e_3$ . Setze  $e'_3 := h - e_3$ .

$$\Rightarrow \mu = \sum_{v=1}^h \text{vfh}_{P_v} f = e_3 + 3e'_3. \quad (2.4)$$

$$\Rightarrow \sum_{v=1}^h v_{P_v}(f) = \sum_{v=1}^h (\text{vfh}_{P_v} f - 1) = 2e'_3 \stackrel{(2.4)}{=} \frac{2}{3}(\mu - e_3).$$

Ebenso berechnet man

$$\sum_{P \in f^{-1}({}_1\Gamma i)} v_P(f) = \frac{1}{2}(\mu - e_2).$$

Ferner:

$$\sum_{P \in f^{-1}({}_1\Gamma\infty)} v_P(f) = \mu - p,$$

denn:  $\mu$  = Summe der Spitzenbreiten von  $\Gamma$  = Summe der Indizes der Fixgruppe =  $\text{vfh } f$ .  
Insgesamt folgt, da  $g' = 0$  gilt:

$$\begin{aligned} 2g - 2 &= \mu(2g' - 2) + \frac{2}{3}(\mu - e_3) + \frac{1}{2}(\mu - e_2) + \mu - p \\ &= \frac{1}{6}\mu - p - \frac{2}{3}e_3 - \frac{1}{2}e_2 \end{aligned}$$

Das liefert die Behauptung.  $\square$

**2.3.10 Korollar** Ist  $-I \in \Gamma \triangleleft {}_1\Gamma$ ,  $\mu := [{}_1\Gamma : \Gamma] < \infty$ ,  $\mu > 3$ ,  $n$  die Breite von  $\infty$  in  $\Gamma$ , so hat  $\Gamma$  keine elliptischen Fixpunkte, und die Riemannsche Fläche  $\Gamma \backslash \mathbb{H}^*$  hat das Geschlecht  $g = 1 + \frac{\mu}{2}(\frac{1}{6} - \frac{1}{N})$ . Insbesondere hat die Hauptkongruenzgruppe  $\Gamma[n] = \{S \in {}_1\Gamma : S \equiv \pm I \pmod{1}\}$  eine kompakte Riemannsche Fläche vom Geschlecht

$$g(n) = \begin{cases} 0 & \text{für } n = 2 \\ 1 + \frac{1}{24}n^2(n-6) \prod_{p|n} (1 - \frac{1}{p^2}) & \text{für } n \geq 3 \end{cases}$$

B Wir schreiben (2.4) in der Form

$$g = \frac{\mu}{12} + 1 - \frac{p}{2} - \frac{e_2}{4} - \frac{e_3}{3}.$$

Wegen  $\Gamma \triangleleft {}_1\Gamma$  gilt nach Satz 1.5.9 d):

$$\begin{aligned} e_2 &= \begin{cases} 0 & \text{falls } i \text{ kein Fixpunkt von } \Gamma \text{ ist} \\ \mu & \text{falls } i \text{ Fixpunkt von } \Gamma \text{ ist} \end{cases} \\ e_3 &= \begin{cases} 0 & \text{falls } \rho \text{ kein Fixpunkt von } \Gamma \text{ ist} \\ \mu & \text{falls } \rho \text{ Fixpunkt von } \Gamma \text{ ist} \end{cases} \\ \mu &= pN \end{aligned}$$

Das gibt die Möglichkeiten aus Tabelle 2.1. Insbesondere für  $\Gamma[n]$  hatten wir in Satz 1.5.12 den angegebenen Index ausgerechnet.  $\square$

**2.3.11 Bemerkung**  $g(n) = 0 \Leftrightarrow n \in \{2, 3, 4, 5\}$ . Für einen endlichen Normalteiler  $\Gamma \triangleleft {}_1\Gamma$  operiert  ${}_1\Gamma/\Gamma$  auf  $\Gamma \backslash \mathbb{H}^*$  als endliche Gruppe von Automorphismen:

$$(\Gamma S)(\Gamma z) = \Gamma(Sz) \quad (S \in {}_1\Gamma)$$

Im Falle  $\Gamma = \Gamma[n]$  mit  $n \in \{2, 3, 4, 5\}$  hat  ${}_1\Gamma/\Gamma[n]$  die Vielfachheit

$n$	2	3	4	5
$ {}_1\Gamma/\Gamma[n] $	6	12	24	60

entspricht also der Dieder-, Tetraeder-, Oktaeder- bzw. Ikosaedergruppe.

Die Zahlen  $e_2, e_3, p$  sind bekannt für  $\Gamma^0(n)$  und  $\Gamma_0(n)$ , siehe Shimura (1971), Schoeneberg (1974), Miyake (1989), Iwaniec (1997).



Fixpunkte	$g \in \mathbb{N}_0$	$\mu \in \mathbb{N}$	$N$	Gruppe
$i, \rho, \infty$	$1 - \frac{\mu}{2} \left( \frac{1}{N} + 1 \right) = 0$	$\frac{2N}{N+1} = 1$	1	${}_1\Gamma$
$\rho, \infty$	$1 - \frac{\mu}{2} \left( \frac{1}{N} + \frac{1}{2} \right) = 0$	$\frac{4N}{N+2} = \begin{cases} 2 \\ 3 \end{cases}$	$\begin{matrix} 2 \\ 6 \end{matrix}$	${}_2\Gamma$ $\not\rightarrow$ zu $\mu \geq N$
$i, \infty$	$1 - \frac{\mu}{2} \left( \frac{1}{N} + \frac{1}{3} \right) = 0$	$\frac{6N}{N+3} = \begin{cases} 3 \\ 4 \\ 5 \end{cases}$	$\begin{matrix} 3 \\ 6 \\ 15 \end{matrix}$	${}_3\Gamma$ $\not\rightarrow$ zu $\mu \geq N$ $\not\rightarrow$ zu $\mu \geq N$
$\infty$	$1 + \frac{\mu}{2} \left( \frac{1}{6} - \frac{1}{N} \right)$	$\mu$	$N$	nicht eindeutig bestimmt.

Tabelle 2.1: Möglichkeiten der spezifischen Daten Riemannscher Flächen

### 3 Meromorphe Funktionen und abelsche Differentiale auf $\Gamma \backslash \mathbb{H}^*$ – Modulfunktionen und Modulformen auf $\mathbb{H}$

#### 3.1 Übertragung meromorpher Funktionen und abelscher Differentiale von $\Gamma \backslash \mathbb{H}^*$ nach $\mathbb{H}$

Voraussetzung in Abschnitt 3.1:  $-I \in \Gamma \subset {}_1\Gamma$ ,  $\mathbb{H}^* := \mathbb{H} \cup \{p: p \text{ parabolischer Fixpunkt von } \Gamma\}$ ,  $X := \Gamma \backslash \mathbb{H}^*$ .

**3.1.1 Satz** Jeder meromorphen Funktion (d. h. holomorphen Abbildung)  $F: X \rightarrow \mathbb{P}$  entspricht vermöge  $f(z) := F(\Gamma z)$  für alle  $z \in \mathbb{H}$  eine Funktion  $f: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{P}$  mit folgenden Eigenschaften:

- a)  $f$  ist meromorph in  $\mathbb{H}$ ,
- b)  $f \circ S = f$  für alle  $S \in \Gamma$ ,
- c) Ist  $p = A^{-1}\infty$  mit einem  $A \in {}_1\Gamma$  parabolischer Fixpunkt von  $\Gamma$  mit Grundmatrix  $A^{-1}U^\lambda A$  in  $\Gamma$ , so hat  $f$  eine in einem hinreichend kleinen Horozykel  $\mathcal{P}$  mit Berührungspunkt  $p$  konvergente Laurent-Entwicklung der Gestalt

$$f(z) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n t^n \quad \left( t = e^{2\pi i \frac{Az}{\lambda}}, z \in \mathcal{P} \right)$$

Man nennt das die „Meromorphie von  $f$  in den Spitzen von  $\Gamma$ “.

Umgekehrt entspricht jeder Funktion  $f: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{P}$  mit den Eigenschaften a)-c) eine meromorphe Funktion  $F: X \rightarrow \mathbb{P}$  vermöge  $F(\Gamma z) := f(z)$  für alle  $z \in \mathbb{H}$ , und die Zuordnungen  $F \mapsto f$  und  $f \mapsto F$  sind bijektiv und zueinander invers.

- B  $F \mapsto f$  a) Die natürliche Abbildung  $\mathbb{H} \rightarrow X$  ist holomorph, folglich ist  $f$  meromorph in  $\mathbb{H}$ . Das liefert a).  
b) ist klar.  
c) ist Ausdruck der Tatsache, dass  $F$  in allen  $\Gamma p$  ( $p$  Spitze von  $\Gamma$ ) meromorph ist: Meromorphie von  $F$  in  $\Gamma p$  bedeutet: Für alle  $z$  in einem hinreichend kleinen Horozykel  $\mathcal{P}$  mit Berührungspunkt  $p$  gilt:

$$F(\Gamma z) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n t^n \quad \left( t = e^{2\pi i \frac{Az}{\lambda}}, z \in \mathcal{P}, k \in \mathbb{Z} \right)$$

$f \mapsto F$  Sei  $f$  mit den Eigenschaften a)-c) gegeben,

$$F(\Gamma z) := f(z), \quad F(\Gamma p) := \begin{cases} \infty & \text{für } k > 0, a_k \neq 0 \\ a_0 & \text{für } k = 0 \\ 0 & \text{für } k > 0 \end{cases}$$

für eine Spitze  $p$  von  $\Gamma$ . Dabei seien die Bezeichnungen wie in c).  $\Rightarrow F$  ist sinnvoll, und in den Spitzen hat  $F$  den Wert  $F(\Gamma p) = \lim_{Z \rightarrow \Gamma p} F(Z)$ , d. h.  $F$  ist stetig, und die Existenz des Limes folgt aus c). Meromorphie von  $F$  in  $\Gamma p$  ist klar nach c). Bleibt die Meromorphie von  $F$  in den Punkten aus  $\Gamma \setminus \mathbb{H}$  zu zeigen: Sei  $p \in \mathbb{H}$ . Dann hat  $f$  in  $p$  eine Laurententwicklung der Form:

$$f(z) = \sum_{n=m}^{\infty} c_n \left( \frac{z-p}{z-\bar{p}} \right)^n, \quad (3.1)$$

und diese konvergiert für  $z \in H_\rho(p)$ ,  $z \neq p$ ,  $\rho > 0$  hinreichend klein. Sei  $\ell := |\overline{\Gamma p}|$ .  $f$  ist  $\Gamma$ -invariant, d. h. die rechte Seite von (3.1) ist invariant bei  $w := \frac{z-p}{z-\bar{p}} \mapsto e^{\frac{2\pi i}{\ell}} w$ , und nach dem Identitätssatz folgt:  $c_n e^{\frac{2\pi n}{\ell}} = c_n$  für alle  $n \geq m$ .  $\Rightarrow (\ell \nmid n \Rightarrow c_n = 0)$ .  $\Rightarrow f$  hat eine Entwicklung der Gestalt

$$f(z) = \sum_{n=m^*}^{\infty} c_n^* t^n$$

mit  $t = \left( \frac{z-p}{z-\bar{p}} \right)^\ell$ , und diese konvergiert in  $H_\rho(p) \setminus \{p\}$ .  $\Rightarrow F$  ist meromorph in  $X$ . Der Rest ist klar.  $\square$

**3.1.2 Definition (Modulfunktion)** Eine Modulfunktion zur Gruppe  $\Gamma$  ist eine Funktion  $f: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{P}$  mit den Eigenschaften a)-c) aus Satz 3.1.1.

Im Fall  $\Gamma = {}_1\Gamma$  heißt  $f$  eine Modulfunktion.

**3.1.3 Folgerung** Die Modulfunktionen zur Gruppe  $\Gamma$  bilden einen Körper  $K(\Gamma)$ . Für  $-I \in \Delta \sqsubset \Gamma$  ist  $K(\Delta)$  eine Erweiterung von  $K(\Gamma)$ .

**3.1.4 Bemerkung** Falls dabei  $[\Gamma: \Delta] < \infty$ , handelt es sich um eine algebraische Erweiterung vom Grad  $[\Gamma: \Delta]$ . Diese Erweiterung ist genau dann eine Galois-Erweiterung, wenn  $\Delta \triangleleft \Gamma$ . Dann ist  $\text{Gal}(K(\Delta) / K(\Gamma)) \simeq \Gamma / \Delta$ .

**3.1.5 Definition (Differential)** Sei  $R$  eine Riemannsche Fläche mit dem Atlas  $\mathfrak{U}$ . Ein *meromorphes Differential*  $k$ -ten Grades ( $k \in \mathbb{Z}$ ) auf  $R$  ist eine Form  $\omega = (\omega_t)_{t \in \mathfrak{U}}$  mit folgenden Eigenschaften:

- a) Für jedes  $t \in \mathfrak{U}$ ,  $t: U_t \rightarrow \mathbb{C}$  ( $U_t \subset R$  offen) ist  $\omega_t: U_t \rightarrow \mathbb{P}$  meromorph, d. h.  $\omega_t \circ t^{-1}$  ist auf  $t(U_t) \subset \mathbb{C}$  meromorph.

b) Für alle  $s, t \in \mathfrak{U}$  gilt in  $U_t \cap U_s$ :

$$\omega_t = \omega_s \cdot \left( \frac{ds}{dt} \right)^k, \text{ genauer}$$

$$\omega_t|_{U_s \cap U_t} = (\omega_s|_{U_s \cap U_t}) \left( (s \circ t^{-1})' \circ t|_{U_s \cap U_t} \right)^k$$

Mit  $\text{Diff}^k(R)$  bezeichnet man den  $\mathbb{C}$ -Vektorraum der meromorphen Differentiale  $k$ -ten Grades auf  $R$ . Als meromorphe oder abelsche Differentiale bezeichnet man die Differentiale ersten Grades, besonders für kompakte Riemannsche Flächen.

**3.1.6 Bemerkungen** a) Ein meromorphes Differential 0-ten Grades ist eine „verträgliche“ Familie meromorpher Funktionen auf  $R$ , d. h.  $\text{Diff}^0(R) = \text{Mer}(R)$ .

b)  $f \in R, \omega \in \text{Diff}^k(R) \Rightarrow f \cdot \omega := (f|_{U_t} \cdot \omega_t)_{t \in \mathfrak{U}} \in \text{Diff}^k(R)$ .

c)  $\omega \in \text{Diff}^k(R), \eta \in \text{Diff}^\ell(R) \Rightarrow \omega\eta := (\omega_t\eta_t)_{t \in \mathfrak{U}} \in \text{Diff}^{k+\ell}(R)$ .

d)  $\omega \in \text{Diff}^k(R), \eta \in \text{Diff}^\ell(R) \setminus \{0\} \Rightarrow \frac{\omega}{\eta} \in \text{Diff}^{k-\ell}(R)$ .

e)  $\text{Diff}^k(R)$  ist ein Vektorraum über  $\text{Mer}(R)$  mit  $\dim_{\text{Mer}(R)} \text{Diff}^k(R) = 1$ . Dies folgt aus a) und c) wegen  $\text{Diff}^k(R) \neq \{0\}$ . Das wiederum folgt aus der Existenz eines nicht-konstanten  $f: R \rightarrow \mathbb{P}$ , da dann  $(df)^k \in \text{Diff}^k(R) \setminus \{0\}$ . Dies lese man entweder bei Forster (1977), S. 120, Satz 16.11 und S. 182, Korollar 26.8 nach, oder bemerke in unserem Fall, dass wir nur Riemannsche Flächen aus der Situation  $\Gamma \setminus \mathbb{H}^*$  betrachten mit  $\Gamma \sqsubset {}_1\Gamma$ . Dann leistet die Modulform  $j$  auf  ${}_1\Gamma$  bereits das Gewünschte. Alternativ zeigt man dies auch mit Hilfe der Poincaréschen Reihen (siehe Kapitel 4).

f)  $d: \text{Mer}(R) \rightarrow \text{Diff}^1(R), f \mapsto df := \left( \frac{df}{dt} \right)_{t \in \mathfrak{U}}$  mit  $\frac{df}{dt} := (f \circ t^{-1})' \circ t: U_t \rightarrow \mathbb{P}$  ist eine  $\mathbb{C}$ -lineare Abbildung mit  $d(fg) = (df)g + f(dg)$ , also eine Derivation. Es gilt:  $df = 0 \Leftrightarrow f$  ist konstant. Ist weiter  $h: f(R) \rightarrow \mathbb{P}$  meromorph, so gilt:  $d(h \circ f) = (h' \circ f) \cdot df$ .

$df \in \text{Diff}^1(R)$ , denn:

$$\begin{aligned}
\frac{df}{dt} &= (f \circ t^{-1})' \circ t = ((f \circ s^{-1}) \circ (s \circ t^{-1}))' \circ t \\
&= ((f \circ s^{-1})' \circ s \circ t^{-1} \circ t) \cdot ((s \circ t^{-1})' \circ t) \\
&= \frac{df}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} \\
d(fg) &= (fg \circ t^{-1})' \circ t = ((f \circ t^{-1})(g \circ t^{-1}))' \circ t \\
&= ((f \circ t^{-1})'(g \circ t^{-1}) + (f \circ t^{-1})(g \circ t^{-1})') \circ t \\
&= (df)g + f(dg) \\
\frac{d(h \circ f)}{dt} &= (h \circ f \circ t^{-1})' \circ t = (g \circ (f \circ t^{-1}))' \circ t \\
&= (h' \circ f \circ t^{-1} \circ t) \cdot ((f \circ t^{-1})' \circ t) \\
&= (h' \circ f) \cdot (f \circ t^{-1}) \circ t = (h' \circ f) \cdot \frac{df}{dt}
\end{aligned}$$

- g) Sei  $G \subset R$  offen,  $R$  eine Riemannsche Fläche. Dann erklären wir für eine meromorphe Funktion  $f: G \rightarrow \mathbb{P}$  eine Ordnung wie folgt: Sei  $p_0 \in G$ ,  $U$  eine offene Umgebung von  $p_0$ ,  $t: U \rightarrow \mathbb{C}$  eine Karte in  $p_0$ ,  $p \in U$ ,  $z := t(p)$ ,  $z_0 := t(p_0)$ . Sei  $U$  gleich so klein, dass  $t(U) \subset \mathbb{C}$  eine Kreisscheibe ist und  $f \circ t^{-1}$  in  $t(U) \setminus \{z_0\}$  holomorph. Dann hat  $f \circ t^{-1}$  in  $z_0$  eine Laurent-Entwicklung

$$\begin{aligned}
f \circ t^{-1}(z) &= \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad (z \in t(U)), \text{ d. h.} \\
f(p) &= \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n (t(p) - t(p_0))^n \quad (p \in U)
\end{aligned}$$

Ist  $f \neq 0$ , so sei gleich  $a_{n_0} \neq 0$ . Dann heißt  $n_0 =: \text{ord}_{p_0} f$  die *Ordnung* von  $f$  in  $p_0$ . Diese hängt mit der Vielfachheit aus §2.3 wie folgt zusammen:

$$\text{ord}_{p_0} f = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \neq f(p_0) \neq \infty \\ \text{vfh}_{p_0} f & \text{für } f(p_0) = 0 \\ -\text{vfh}_{p_0} f & \text{für } f(p_0) = \infty \end{cases}$$

Dieser Ordnungsbegriff ist sinnvoll, da er unabhängig ist von der Wahl der Karte in  $p_0$ : oBdA sei  $u: U \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $u(p_0) =: w_0$ ,  $u(p) =: w$  für  $p \in U$ . Dann ist im Falle  $f \neq 0$

$$f \circ u^{-1}(w) = \sum_{n=m_0}^{\infty} b_n (w - w_0)^n$$

mit  $b_{m_0} \neq 0$ . Hier ist

$$w = u \circ t^{-1}(z) \stackrel{\text{bihol.}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k$$

mit  $c_0 = w_0$  und  $c_1 \neq 0$  wegen der Biholomorphie der Kartenabbildung.

$$\begin{aligned}\Rightarrow f \circ u^{-1}(w) &= \sum_{n=m_0}^{\infty} b_n \left( \sum_{k=1}^{\infty} c_k (z - z_0)^k \right)^n \\ &= \sum_{n=m_0}^{\infty} b_n^* (z - z_0)^n\end{aligned}$$

mit  $b_{m_0}^* = b_{m_0} c_1^{m_0} \neq 0$ . Aus der Eindeutigkeit der Laurent-Entwicklung folgt dann  $n_0 = m_0$ .

$\omega \in \text{Diff}^k(R)$ ,  $p \in R$ ,  $\omega \neq 0$ .  $\Rightarrow \text{ord}_p \omega \in \mathbb{Z}$  ist sinnvoll, da unabhängig von der Kartenwahl. Insbesondere ist es sinnvoll, von Nullstellen und Polen von  $\omega$  zu sprechen, nicht aber von einem Wert von  $\omega$  im Punkt  $p$ .

h)  $\omega \in \text{Diff}^1(R) \Rightarrow \text{Res}_p \omega$  ist sinnvoll, denn wegen  $\omega_t = \omega_s \cdot \frac{ds}{dt}$  ist

$$\text{Res}_p \omega = \frac{1}{2\pi i} \oint \omega_t dt$$

unabhängig von der Wahl der Karte. Alternativ kann man auch mit der Laurent-Entwicklung berechnen, dass  $a_{-1}$  unabhängig von der Kartenwahl ist (siehe Lamotke (2005))

**3.1.7 Definition (Differentialgattungen)** Sei  $\omega \in \text{Diff}^1(R)$ . Dann heißt  $\omega$  ein Differential

- 1. Gattung, wenn  $\omega$  holomorph ist (d. h.  $\text{ord}_p \omega \geq 0$  für alle  $p \in R$ ),
- 2. Gattung, wenn für alle  $p \in R$  gilt:  $\text{Res}_p \omega = 0$ ,
- 3. Gattung, wenn für alle  $p \in R$  gilt:  $\text{ord}_p \omega \geq -1$ .

Z. B. ist für meromorphes  $f: R \rightarrow \mathbb{P}$  das  $df \in \text{Diff}^1(R)$  von zweiter Gattung.

**3.1.8 Satz** Sei  $p \in \mathbb{H}$  kein elliptischer Fixpunkt von  $\Gamma \sqsubset_1 \Gamma$ ,  $\rho > 0$  so klein, dass  $\{\pm I\} = \{S \in \Gamma: SH_\rho(p) \cap H_\rho(p) \neq \emptyset\}$ ,  $U := \{\Gamma z: z \in H_\rho(p)\}$ ,

$$t: U \rightarrow \mathbb{C}, \quad t(\Gamma z) := z - p \quad (z \in H_\rho(p)).$$

Sei  $\omega \in \text{Diff}^k(\Gamma \backslash \mathbb{H}^*)$ . Dann ist das Funktionselement

$$f: H_\rho(p) \rightarrow \mathbb{P}, \quad f(z) := \omega_t(\Gamma z) \quad (z \in H_\rho(p))$$

zu einer wieder mit  $f$  bezeichneten meromorphen Funktion  $f: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{P}$  fortsetzbar, und es gilt:

$$a) \quad f(z) = (cz + d)^{-2k} f(Sz) \quad \left( z \in \mathbb{H}, S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma \right)$$

b) Ist  $p = A^{-1}\infty$  mit  $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in {}_1\Gamma$  ein parabolischer Fixpunkt von  $\Gamma$  mit Grundmatrix  $A^{-1}U^\lambda A$  ( $\lambda \in \mathbb{N}$ ) in  $\Gamma$ , dann hat  $f$  eine in einem Horozykel  $\mathcal{P}$  mit Berührungspunkt  $p$  konvergente Laurent-Entwicklung der Gestalt

$$(\gamma z + \delta)^{2k} f(z) = \sum_{n=m}^{\infty} a_n t^n \quad \left( t = e^{2\pi i \frac{Az}{\lambda}}, a_n \in \mathbb{C} \right)$$

Umgekehrt definiert jede meromorphe Funktion  $f: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{P}$  mit den Eigenschaften a) und b) ein  $\omega \in \text{Diff}^k(\Gamma \setminus \mathbb{H}^*)$  mit  $\omega_t(\Gamma z) = f(z)$  für  $z \in H_\rho(p)$ , und die Zuordnungen  $\omega \mapsto f$  und  $f \mapsto \omega$  sind bijektiv und zueinander invers.

**3.1.9 Definition (Modulform)** Eine Modulform vom Gewicht  $2k$  zur Gruppe  $\Gamma$  ist eine meromorphe Funktion  $f: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{P}$  mit den Eigenschaften a) und b) aus Satz 3.1.8.

Eine Modulform vom Gewicht  $2k$  ist eine Modulform vom Gewicht  $2k$  zu  ${}_1\Gamma$ .

$A_{2k}(\Gamma)$  bezeichne den  $\mathbb{C}$ -Vektorraum der Modulformen vom Gewicht  $2k$  zur Gruppe  $\Gamma$ ,  $A_{2k} := A_{2k}({}_1\Gamma)$ .

B zu Satz 3.1.8. Sei  $\omega \in \text{Diff}^k(\Gamma \setminus \mathbb{H}^*)$ ,  $E$  die Menge der elliptischen Fixpunkte von  $\Gamma$ . Wir definieren zu der fest gewählten Karte  $t$  aus Satz 3.1.8 ein Funktionselement

$$f_p: H_\rho(p) \rightarrow \mathbb{P}, \quad f_p(z) := \omega_t(\Gamma z) \quad (z \in H_\rho(p))$$

Als Karte in  $\Gamma p$  können wir auch

$$u: U \rightarrow \mathbb{C}, \quad u(\Gamma z) := Sz - Sp \quad (z \in H_\rho(p), S \in \Gamma \text{ fest})$$

wählen. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \omega_t &= \omega_u \cdot \left( \frac{du}{dt} \right)^k, \\ \left( \frac{du}{dt} \right)^k (\Gamma z) &= (S'(z))^k = (cz + d)^{-2k} \quad \left( z \in H_\rho(p), S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) \\ \Rightarrow f_p(z) &= (cz + d)^{-2k} f_{Sp}(Sz) \quad (z \in H_\rho(p), S \in \Gamma), \end{aligned} \quad (3.2)$$

denn: Sei  $q \in H_\rho(p)$ ,  $\sigma > 0$  so klein, dass  $\{S \in \Gamma: SH_\sigma(q) \cap H_\sigma(q) \neq \emptyset\} = \{\pm I\}$ . Zu  $q, \sigma$  gehöre die Karte  $v$ ,  $v(\Gamma z) := z - q$  für  $z \in H_\sigma(q)$ .  $\omega_t = \omega_v \left( \frac{dv}{dt} \right)^k$  und  $\left( \frac{dv}{dt} \right) = 1$ .  $\Rightarrow \omega_t = \omega_v$  im gemeinsamen Definitionsbereich, d. h.

$$f_p|_{H_\rho(p) \cap H_\sigma(q)} = f_q|_{H_\rho(p) \cap H_\sigma(q)} \quad (3.3)$$

$\Rightarrow f_p$  hängt lokal nicht von  $p$  ab. Nach (3.3) folgt: Setzt man  $f_p$  längs irgendeines Weges in  $\mathbb{H} \setminus E$  meromorph fort, so ist das Ergebnis der Fortsetzung im Punkt  $w \in \mathbb{H} \setminus E$  gleich  $f_w$ , d. h.  $f_p$  ist zu einer in  $\mathbb{H} \setminus E$  meromorphen Funktion  $f$  fortsetzbar, und (3.2) gilt in  $\mathbb{H} \setminus E$  ohne Indizes.

Wir zeigen jetzt:  $f$  ist in ganz  $\mathbb{H}$  meromorph: Sei dazu  $p \in E$ ,  $\rho > 0$  so klein, dass  $\{\pm I\} = \{S \in \Gamma : SH_\rho(p) \cap H_\rho(p) \neq \emptyset\}$ ,  $U = \{\Gamma z : z \in H_\rho(p)\}$ ,  $\ell := \text{ord } \overline{\Gamma}_p$ , so dass wir für  $z \in H_\rho(p)$  die folgende Kartenabbildung haben:

$$\Gamma \backslash \mathbb{H} \supset U \xrightarrow{\leq} \Gamma_p \backslash H_\rho(p) \longrightarrow K_r(0)$$

$$\Gamma z \longmapsto \Gamma_p z \longmapsto t(\Gamma z) = \left( \frac{z-p}{z-\bar{p}} \right)^\ell$$

Sei  $q \in H_\rho(p) \setminus \{p\} \Rightarrow q \notin E$ , und  $v(\Gamma z) := z - q$  ist Karte bei  $\Gamma q$ .

$$f(z) = \omega_v(\Gamma z) = \omega_t \cdot \left( \frac{dt}{dv} \right)^k \Big|_{\Gamma z} \quad (z \in H_\sigma(q) \subset H_\rho(p), \sigma \text{ hinreichend klein}),$$

wobei

$$\frac{dt}{dv} = \ell \frac{p - \bar{p}}{(z - \bar{p})^\ell} \left( \frac{z - p}{z - \bar{p}} \right)^{\ell-1}.$$

$\Rightarrow f$  ist meromorph in  $p$ , und entwickeln wir  $\omega$  nach  $t$  in der Form

$$\omega_t = \sum_{n=m}^{\infty} a_n t^n \quad \left( a_m \neq 0, t = \left( \frac{z-p}{z-\bar{p}} \right)^\ell \right),$$

so erhalten wir

$$(z - \bar{p})^{2k} f(z) = (\ell(p - \bar{p}))^k \sum_{n=m}^{\infty} a_n t^{n+k(1-\frac{1}{\ell})}.$$

$\Rightarrow \text{ord}_p f = \ell \text{ord}_{\Gamma_p} \omega + k(\ell - 1) =$  klassische Ordnung von  $f$  im Punkt  $p$ . Diese Beziehung legt die Einführung einer sog. *invarianten Ordnung* von  $f$  in  $p$  nahe vermöge

$$v_p(f) := \frac{1}{\ell} \text{ord}_p f = \text{ord}_{\Gamma_p} \omega + k \left( 1 - \frac{1}{\ell} \right) \quad (p \in \mathbb{H})$$

$\Rightarrow f$  ist in  $\mathbb{H}$  meromorph.

Verhalten von  $f$  in den Spitzen: Sei  $p$  parabolischer Fixpunkt von  $\Gamma$ ,  $p = A^{-1}\infty$ , mit  $A \in {}_1\Gamma$  und der Grundmatrix  $A^{-1}U^\lambda A$  zu  $p$  in  $\Gamma$ . Dann haben wir eine Karte in  $\Gamma p$  durch

$$\Gamma \backslash \mathbb{H}^* \supset U \xrightarrow{\leq} \mathcal{P}_p \cup \{p\} \longrightarrow K_r(0),$$

$$\Gamma z \longmapsto \Gamma_p z \longmapsto t(\Gamma z) = \begin{cases} e^{2\pi i \frac{Az}{\lambda}} & \text{für } z \neq p \\ 0 & \text{für } z = p \end{cases}$$



Das liefert eine in  $U$  konvergente Entwicklung  $\omega_t = \sum_{n=m}^{\infty} a_n t^n$  mit  $a_m \neq 0$  (beachte:  $t(\Gamma p) = 0$ !). Sei  $q \in \mathcal{P}_p \Rightarrow q \notin E$ , also ist  $\nu(\Gamma z) := z - p$  für  $z \in H_\sigma(q) \subset \mathcal{P}_p$  eine Karte bei  $\Gamma q$ . In der Kartenumgebung für  $\nu$  gilt:

$$f(z) = \omega_\nu(\Gamma z) = \omega_t \cdot \left( \frac{dt}{d\nu} \right)^k$$

mit  $\underline{A} = (\gamma \quad \delta)$  und

$$\frac{dt}{d\nu} = \frac{d}{dz} e^{2\pi i \frac{Az}{\lambda}} = \frac{2\pi i}{\lambda} (\gamma z + \delta)^{-2} t$$

Mit  $t = e^{2\pi i \frac{Az}{\lambda}}$  folgt daraus:

$$(\gamma z + \delta)^{2k} f(z) = \left( \frac{2\pi i}{\lambda} \right)^k \sum_{n=m}^{\infty} a_n t^{n+k} \quad (z \in \mathcal{P}_p)$$

Mit diesen Bezeichnungen schreibt sich der natürliche Zusammenhang zwischen den Ordnungen von  $f$  und  $\omega$  als

$$\nu_p(f) := \min \{n+k : a_n \neq 0\} = \text{ord}_{\Gamma p} \omega + k$$

Umgekehrt sei  $f: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{P}$  meromorph gegeben mit den Eigenschaften a) und b). Es genügt, die definierende Bedingung für  $\omega$  für einen (nicht notwendig maximalen) Atlas  $\mathfrak{A}$  zu verifizieren. In den Punkten  $p \in \mathbb{H} \setminus E$  nehmen wir einfach die Karte  $\nu(\Gamma z) := z - p$  wie oben. Das Transformationsverhalten der Modulform  $f$  liefert dann das „richtige“ Verhalten von  $\omega$  bei Kartenwechsel in den Nicht-Fixpunkten von  $\Gamma$ . Bleiben die  $\omega_t$  für Karten  $t$  in den elliptischen bzw. parabolischen Fixpunkten zu erklären: Im parabolischen Fall nehmen wir die Entwicklung aus b) und schreiben sie in der Form:

$$(\gamma z + \delta)^{2k} f(z) = \left( \frac{2\pi i}{\lambda} \right)^k \sum_{n=m}^{\infty} a_n t^{n+k}$$

und definieren  $\omega_t := \sum_{n=m}^{\infty} a_n t^n$ . Rückblick auf die bereits gezeigte Richtung „ $\omega \mapsto f$ “ lehrt: Dieses  $\omega_t$  ist mit den bereits vorhandenen  $\omega_\nu$  in der rechten Weise verträglich. Der Fall elliptischer Fixpunkte ist in Satz 3.1.10 enthalten.  $\square$

**3.1.10 Satz** Sei  $f \in A_{2k}(\Gamma)$ ,  $p \in \mathbb{H}$ ,  $\ell := \text{ord}(\overline{\Gamma p})$ . Dann existieren  $b_n \in \mathbb{C}$  für  $n \in \mathbb{Z}$ , so dass für alle  $z \in H_\rho(p)$  ( $\rho > 0$  hinreichend klein) gilt:

$$(z - \overline{p})^{2k} f(z) = \sum_{n=m}^{\infty} b_n t^{n+k} \quad \text{mit } t = \left( \frac{z - p}{z - \overline{p}} \right)^2.$$

B Wir setzen

$$A: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{E}, \quad A = \frac{1}{\sqrt{p - \overline{p}}} \begin{pmatrix} 1 & -p \\ 1 & -\overline{p} \end{pmatrix},$$

d. h.  $Az = \frac{z-p}{z-\bar{p}}$ . Sei weiter

$$R := A^{-1} \begin{pmatrix} e^{\frac{\pi i}{\ell}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{\pi i}{\ell}} \end{pmatrix} A \in \Gamma$$

Dann erzeugt  $R$  bereits  $\Gamma_p$ . Sei  $w := Az = \frac{z-p}{z-\bar{p}}$  und

$$g: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{C}, \quad g(w) := (z - \bar{p})^{2k} w^k f(z).$$

Mit  $\underline{R} = \begin{pmatrix} c & d \end{pmatrix}$  gilt dann:

$$\begin{aligned} g\left(e^{\frac{2\pi i}{\ell}} w\right) &= (Rz - \bar{p})^{2k} e^{\frac{2\pi i k}{\ell}} w^k f(Rz) \stackrel{f \in A_{2k}(\Gamma)}{=} (Rz - R\bar{p})^{2k} e^{\frac{2\pi i k}{\ell}} w^k (cz + d)^{2k} f(z) \\ &= \frac{(z - \bar{p})^{2k}}{(cz + d)^{2k} (c\bar{p} + d)^{2k}} e^{\frac{2\pi i k}{\ell}} (cz + d)^{2k} w^k f(z) \stackrel{!}{=} g(w), \end{aligned}$$

denn mit  $A^{-1} = \frac{1}{\sqrt{p-\bar{p}}} \begin{pmatrix} -\bar{p} & p \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$  ist

$$cp + d = cA^{-1}0 + d = \frac{m_2}{\delta},$$

wobei  $(\gamma \ \delta) = \underline{A}^{-1} = \frac{1}{\sqrt{p-\bar{p}}} \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix}$  und

$$\begin{aligned} (m_1 \ m_2) &= \underline{R}A^{-1} = A^{-1} \begin{pmatrix} e^{\frac{\pi i}{\ell}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{\pi i}{\ell}} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{p-\bar{p}}} \begin{pmatrix} -e^{\frac{\pi i}{\ell}} & e^{-\frac{\pi i}{\ell}} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$\Rightarrow cp + d = e^{-\frac{\pi i}{\ell}}$ , d. h.  $c\bar{p} + d = e^{\frac{\pi i}{\ell}}$ .  $\Rightarrow$  Die Laurent-Entwicklung von  $g$  in 0 hat die Form

$$g(w) = \sum_{n=m}^{\infty} b_n e^{\ell(n+k)}.$$

Nach einer Indexverschiebung liefert das die Behauptung. □

**3.1.11 Definition (Petersson'scher Strich-Operator)** Für  $f: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{P}$  und  $S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  sei

$$f|S(z) := f|_{2k} S(z) := (cz + d)^{2k} f(Sz).$$

**3.1.12 Folgerung** a) Für  $S, T \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$  ist  $f|(ST) = (f|S)|T$ .

b) Das Transformationsverhalten der Modulform  $f \in A_{2k}(\Gamma)$  aus Satz 3.1.8 a) lautet jetzt:

$$f|S = f \quad (S \in \Gamma) \tag{3.4}$$

- c) Aus a) folgt: Ist (3.4) für die  $S$  aus einem Erzeugendensystem von  $\Gamma$  erfüllt, so gilt (3.4) für alle  $S \in \Gamma$ . Speziell: Ist (3.4) für  $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  und  $T = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  erfüllt, so gilt (3.4) für alle  $S \in {}_1\Gamma$ .
- d) Die Fourier-Entwicklung der  $f \in A_{2k}(\Gamma)$  aus Satz 3.1.8 b) lautet jetzt mit einem Horozykel  $\mathcal{P}$  in der Spitze  $p = A^{-1}\infty$  ( $A \in {}_1\Gamma$ ) von der Breite  $\lambda$ :

$$f(z) = \left( \sum_{n=m}^{\infty} a_n e^{\frac{2\pi i z}{\lambda}} \right) | A \quad (z \in \mathcal{P})$$

Wegen a) ist das äquivalent zu

$$f|A^{-1}(z) = \sum_{n=m}^{\infty} a_n e^{\frac{2\pi i z}{\lambda}} \quad (z \in \mathbb{H}, \text{Im } z \text{ hinreichend groß})$$

**Kommentar** Sei  $p = A^{-1}\infty$  Spitze von  $\Gamma$  mit Breite  $\lambda$ ,  $f: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{P}$  meromorph, und in  $p$  gebe es einen polfreien Horozykel  $\mathcal{P} := A^{-1}\{z: \text{Im } z > \eta\}$  mit  $\eta > 0$  hinreichend groß. Weiter gelte  $f|S = f$  für alle  $S \in \Gamma$ . Dann gilt:

$$f|A^{-1}(z + \lambda) = f|A^{-1}|U^\lambda(z) \stackrel{\text{a)}}{=} f|A^{-1}U^\lambda A|A^{-1}(z) = f|A^{-1}(z).$$

$\Rightarrow f|A^{-1}$  ist periodisch modulo  $\lambda$ . Die Funktionentheorie sagt uns dann, dass  $f|A^{-1}$  eine Fourier-Entwicklung der Form

$$f|A^{-1}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{\frac{2\pi i n z}{\lambda}} \quad (\text{Im } z > \eta)$$

besitzt (siehe Elstrodt (2004)).

Von einer Modulform verlangen wir nun, dass diese Entwicklung in Richtung negativer Exponenten abbricht. Dies ist äquivalent dazu, dass das  $f$  entsprechende  $\omega$  in  $\Gamma p$  höchstens einen Pol hat; dementsprechend sagt man auch, dass  $f$  in  $p$  höchstens einen Pol hat. Wir hatten in der Spitzenklasse  $\Gamma p$  definiert:  $\nu_p(f) := \text{ord}_{\Gamma p} \omega + k$ . Ist  $\omega$  in  $\Gamma p$  holomorph,  $k \geq 1$ , so hat diese Fourier-Entwicklung die Gestalt

$$f|A^{-1}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\frac{2\pi i n z}{\lambda}},$$

d. h.  $f$  verschwindet in  $p$ .

**3.1.13 Definition (Spitzenform)**  $f \in A_{2k}(\Gamma)$  heißt *Spitzenform*, wenn  $f$  in  $\mathbb{H}$  holomorph ist und in allen Spitzen von  $\Gamma$  verschwindet, d. h. für eine Spitze  $p = A^{-1}\infty$  von  $\Gamma$  ( $A \in {}_1\Gamma$ ) mit Grundmatrix  $A^{-1}U^\lambda A$  in  $\Gamma$  hat  $f$  in  $p$  eine Fourier-Entwicklung der Form

$$f|A^{-1}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\frac{2\pi i n z}{\lambda}} \iff \nu_p(f) \geq 1$$

Wir haben also folgende Ordnungsdefinition getroffen:  $A_{2k}(\Gamma) \ni f \leftrightarrow \omega \in \text{Diff}^k(\Gamma \setminus \mathbb{H}^*)$ :

$$\nu_p(f) = \begin{cases} \text{ord}_{\Gamma p}(\omega) + k(1 - \frac{1}{\ell}) & \text{für } p \in \mathbb{H}, \ell := \text{ord } \overline{\Gamma p} \\ \text{ord}_{\Gamma p}(\omega) + k & \text{für eine Spitze } p \text{ von } \Gamma \end{cases}$$

**3.1.14 Korollar** Bei der Zuordnung  $\omega \mapsto f$  gemäß Satz 3.1.8 entsprechen die abelschen Differentialiale erster Gattung auf  $\Gamma \setminus \mathbb{H}^*$  den Formen aus  $S_2(\Gamma) := \{\text{Spitzenformen vom Gewicht 2 auf } \Gamma\}$ .

B  $\omega$  von erster Gattung  $\Rightarrow f \in S_2(\Gamma)$  folgt aus dem oben gezeigten.  
Umgekehrt sei  $f \in S_2(\Gamma)$ . Für  $p \in \mathbb{H}$ ,  $\ell := \text{ord } \overline{\Gamma p}$  ist

$$\text{ord}_{\Gamma p}(\omega) = \frac{1}{\ell} \left( \underbrace{\text{ord}_p(f)}_{\geq 0} - \underbrace{k}_{=1} (\ell - 1) \right) \geq -1.$$

$\Rightarrow \omega$  ist in  $\Gamma \setminus \mathbb{H}$  holomorph. Ist  $p$  Spitze von  $\Gamma$ , so gilt:

$$\text{ord}_{\Gamma p}(\omega) = \nu_p(f) - k = \nu_p(f) - 1 \geq 0. \quad \square$$

**3.1.15 Definition (ganze Modulformen)**  $f \in A_{2k}(\Gamma)$  heißt *ganz* (engl. *entire*) genau dann, wenn  $f$  in  $\mathbb{H}$  holomorph ist und in allen Spitzen  $p$  von  $\Gamma$  gilt:  $\nu_p(f) \geq 0$ , d. h.

$$f|A^{-1}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{\frac{2\pi i n z}{\lambda}}.$$

$G_{2k}(\Gamma) := \{f \in A_{2k}(\Gamma) : f \text{ ganz}\} \supset S_{2k}$ . Für  $\Gamma \sqsubset {}_1\Gamma$  mit  $[{}_1\Gamma : \Gamma] < \infty$  werden  $\dim S_{2k}(\Gamma)$  und  $\dim G_{2k}(\Gamma)$  in Kapitel 3.2 bestimmt.

**3.1.16 Korollar** Bei der Zuordnung  $\omega \mapsto f$  gemäß Satz 3.1.8 entsprechen die abelschen Differentialiale dritter Gattung auf  $\Gamma \setminus \mathbb{H}^*$ , die höchstens in den Spitzenklassen von  $\Gamma$  Pole von höchstens erster Ordnung haben, den Formen aus  $G_{2k}(\Gamma)$ .

B siehe Korollar 3.1.14 unter Benutzung von Definition 3.1.15.  $\square$

**3.1.17 Satz** a)  $A_{2k}(\Gamma) \cdot A_{2\ell}(\Gamma) \subset A_{2(k+\ell)}(\Gamma)$ ,  $f \in A_{2k}(\Gamma)$ ,  $g \in A_{2\ell}(\Gamma) \setminus \{0\} \Rightarrow \frac{f}{g} \in A_{2(k-\ell)}(\Gamma)$ .  
 $G_{2k}(\Gamma) \cdot G_{2\ell}(\Gamma) \subset G_{2(k+\ell)}(\Gamma)$ ,  $G_{2k}(\Gamma) \cdot S_{2\ell}(\Gamma) \subset S_{2(k+\ell)}(\Gamma)$ .

b)  $d: A_0(\Gamma) \rightarrow A_2(\Gamma)$ ,  $df := f'$  ist eine lineare Abbildung.

c) Für  $M = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ c & d \end{pmatrix} \in {}_1\Gamma$  definiert

$$A_{2k}(\Gamma) \ni f \mapsto f|M := (cz + d)^{-2k} f(Mz) \in A_{2k}(\Gamma) \quad (z \in \mathbb{H})$$

eine  $\mathbb{C}$ -lineare Bijektion von  $A_{2k}(\Gamma)$  auf  $A_{2k}(M^{-1}\Gamma M)$ , die die zugehörigen Räume  $G_{2k}(\Gamma)$  und  $S_{2k}(\Gamma)$  in  $G_{2k}(M^{-1}\Gamma M)$  bzw.  $S_{2k}(M^{-1}\Gamma M)$  überführt.

B a) und b) sind klar. c) ist eine Übung zur Anwendung des Petersson'schen Strichoperators. Z. B. sei  $S \in \Gamma$ :

$$\Rightarrow (f|M)|(M^{-1}SM) = f|(SM) = (f|S)|M = f|M,$$

da  $f \in A_{2k}(\Gamma)$  ist usw.  $\square$

## 3.2 Der Grad von Divisoren meromorpher Differentiale und Modulformen

**3.2.1 Definition (Divisoren)** Sei  $X$  eine kompakte Riemannsche Fläche. Die Divisorengruppe von  $X$  ist per definitionem die von den Punkten von  $X$  erzeugte freie abelsche Gruppe, d. h.  $\text{Div}(X)$  enthält genau die Funktionen  $X \rightarrow \mathbb{Z}$ , die nur in endlich vielen Punkten von  $X$  einen von 0 verschiedenen Wert haben:

$$D = \sum_{j=1}^m n_j \chi_{\{P_j\}} =: \sum_{j=1}^m n_j P_j \quad (n_j \in \mathbb{Z}, P_j \in X, j = 1, \dots, m)$$

Jede meromorphe Funktion  $0 \neq f: X \rightarrow \mathbb{P}$  hat einen Divisor  $\text{div}(f) := \sum_{P \in X} \text{ord}_P(f) P$ . Beachte:  $X$  ist kompakt,  $f$  hat also nur endlich viele Null- bzw. Polstellen auf  $X$ ! Jedes  $0 \neq \omega \in \text{Diff}^k(X)$  hat einen Divisor  $\text{div}(\omega) := \sum_{P \in X} \text{ord}_P(\omega) \cdot P$ , dabei ist auch hier die Summe endlich und somit sinnvoll. Zwei meromorphe Funktionen  $f, g: X \rightarrow \mathbb{P}$ ,  $f \neq 0 \neq g$  haben den gleichen Divisor genau dann, wenn  $f$  und  $g$  sich höchstens um einen konstanten Faktor  $\neq 0$  unterscheiden, denn:

$$\text{div}\left(\frac{f}{g}\right) = \text{div}(f) - \text{div}(g), \text{ d. h. } \text{div}(f) = \text{div}(g).$$

$\Rightarrow \frac{f}{g}$  ist holomorph auf  $X$ , nach Liouville also konstant. Die Umkehrung ist klar.

Sei  $D \in \text{Div}(X)$ ,  $D = \sum_{j=1}^m n_j P_j$ . Dann ist

$$\deg: \text{Div}(X) \rightarrow \mathbb{Z}, \quad \deg D := \sum_{j=1}^m n_j$$

ein Gruppen-Homomorphismus. Sei  $0 \neq f \in \text{Mer}(X)$ .  $\Rightarrow \deg \text{div}(f) = 0$  (siehe z. B. Forster (1977), S. 28, Korollar 4.25, oder Reyssat (1989), S. 54).  $D \in \text{Div}(X)$  heißt *Hauptdivisor*, wenn es ein  $f \in \text{Mer}(X)$  gibt, so dass  $D = \text{div} f$ . Die Hauptdivisoren liegen in  $\ker \deg$ , d. h. die Hauptdivisoren bilden eine Untergruppe von  $\ker \deg$ , hier herrscht aber nicht notwendig Gleichheit, was man bspw. im folgenden Fall sieht: Sei  $\Lambda$  ein Gitter in  $\mathbb{C}$ ,  $X := \mathbb{C} / \Lambda$ ,  $P, Q \in X$ ,  $P \neq Q$ . Dann liegt  $D := P - Q$  in  $\ker \deg$ , aber  $D$  ist kein Hauptdivisor, da es keine elliptischen Funktionen erster Ordnung gibt.

**3.2.2 Satz** Sei  $X$  eine kompakte Riemannsche Fläche vom Geschlecht  $g$ ,  $0 \neq \omega \in \text{Diff}^1(X)$ . Dann gilt:  $\deg(\text{div}(\omega)) = 2(g - 1)$ .

B Für  $0 \neq \omega, \eta \in \text{Diff}^1(X)$  gilt:  $\deg(\text{div}(\omega)) = \deg(\text{div}(\eta))$ , denn  $f := \frac{\omega}{\eta} \in \text{Mer}(X)$  und  $\deg(\text{div}(f)) = 0$ . Also genügt die Bestimmung des Grads für ein geeignet gewähltes  $\omega$ . Dazu wählen wir ein nicht-konstantes  $f \in \text{Mer}(X)$ , so dass  $f^{-1}(\infty)$  keinen Verzweigungspunkt von  $f$  enthält, und setzen  $\omega := df \in \text{Diff}^1(X)$ . Sei  $n$  der Grad der Überlagerung  $f: X \rightarrow \mathbb{P}$ .  $\Rightarrow \omega$  hat in den  $n$  Punkten aus  $f^{-1}(\infty)$  Pole zweiter Ordnung und keine weiteren Pole. Nullstellen hat  $\omega$  genau in den Punkten, in denen  $f$  eine Entwicklung der Form  $f = \sum_{j \geq m} a_j t^j$  mit  $m \geq 2$  und  $t = e^{\frac{2\pi i Az}{\lambda}}$  besitzt. Dabei ist die Karte  $t$  im Punkt  $P$  so gewählt, dass  $t(P) = 0$

ist. D. h.  $\omega$  hat Nullstellen genau in den Verzweigungspunkten von  $f$ , und zwar ist in einem solchen Verzweigungspunkt

$$\text{ord}_P(\omega) = \text{vfh}_P(f) - 1 = \nu_P(f) = \text{Verzweigungsordnung von } f \text{ in } P.$$

Satz 2.2 liefert in dieser Situation:

$$2g - 2 = n \underbrace{\left( \underbrace{g'}_{=0} - 2 \right)}_{=0} + \sum_{\substack{P \in X \\ P \notin f^{-1}(\infty) = \text{ord}_P(\omega)}} \underbrace{\nu_P(f)}_{= \text{ord}_P(\omega)} = \underbrace{\sum_{\substack{P \in X \\ P \notin f^{-1}(\infty)}} \text{ord}_P(\omega)}_{\text{Nullstellenbeitrag}} - \underbrace{2n}_{\text{Polbeitrag}}.$$

Ein alternativer Beweis benutzt den Satz von Riemann-Roch (Satz 3.3.2), siehe dazu Forster (1977), S. 127, Satz 17.12.  $\square$

**3.2.3 Korollar** Sei  $X$  kompakte Riemannsche Fläche vom Geschlecht  $g$ ,  $0 \neq \omega \in \text{Diff}^k(X)$ . Dann gilt:  $\deg(\text{div}(\omega)) = 2k(g - 1)$ .

B Man wähle ein  $0 \neq \eta \in \text{Diff}^1(X)$  (z. B.  $\eta = df$  mit  $f$  aus Satz 3.2.2).  $\Rightarrow \frac{\omega}{\eta^k} \in \text{Mer}(X)$ .

$$\Rightarrow \deg\left(\text{div}\left(\frac{\omega}{\eta^k}\right)\right) = 0$$

$$\Rightarrow \deg(\text{div}(\omega)) = \deg\left(\text{div}\left(\eta^k\right)\right) = k \deg(\text{div}(\eta)) \stackrel{\text{Satz 3.2.2}}{=} 2k(g - 1) \quad \square$$

Übersetzung in die Sprache der automorphen Formen: Sei  $-I \sqsubset {}_1\Gamma$  mit  $\mu := [{}_1\Gamma : \Gamma] < \infty$ ,  $X := \Gamma \backslash \mathbb{H}^*$  vom Geschlecht  $g$ ,  $\mathbb{H}^* = \mathbb{H} \cup \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Für  $0 \neq f \in A_{2k}(\Gamma)$  sei

$$\begin{aligned} \text{div } f &:= \sum_{P=\Gamma p \in X} \nu_P(f) \cdot P \\ \deg(\text{div } f) &:= \sum_{P=\Gamma p \in X} \nu_P(f). \end{aligned}$$

**3.2.4 Satz (Gewichtsformel)** Für  $0 \neq f \in A_{2k}(\Gamma)$  gilt:

$$\deg(\text{div}(f)) = k \left( 2k - 2 + p + \frac{1}{2}e_2 + \frac{2}{3}e_3 \right) = \frac{1}{6}k\mu = k \frac{1}{2\pi} \omega(\Gamma \backslash \mathbb{H})$$

In dieser Form gilt die Formel für beliebige koendliche Fuchssche Gruppen, wobei  $p$  die Anzahl der Klassen parabolischer Fixpunkte von  $\Gamma$ ,  $e_\ell$  die Anzahl der Klassen elliptischer Fixpunkte  $p$  von  $\Gamma$  mit  $\text{ord } \overline{\Gamma}_p = \ell$  sei für  $\ell = 2, 3$ . Insbesondere ist für  $0 \neq f \in A_{2k}({}_1\Gamma)$

$$\deg(\text{div}(f)) = \frac{2k}{12} = \frac{k}{6}$$

die Gewichtsformel für die Modulgruppe.

B Nach der Formel für  $v_p(f)$  gilt bei der Zuordnung  $f \leftrightarrow \omega$ :

$$\begin{aligned} \deg(\operatorname{div}(f)) &= \deg(\operatorname{div}(\omega)) + k \left( p + \frac{1}{2}e_2 + \frac{2}{3}e_3 \right) \\ &\stackrel{\text{Korollar 3.2.3}}{=} k \left( 2g - 2 + p + \frac{1}{2}e_2 + \frac{2}{3}e_3 \right) \quad \square \\ &\stackrel{\text{Satz 2.3.9}}{=} k \frac{1}{6} \mu \stackrel{\text{Korollar 1.5.2}}{=} k \frac{1}{2\pi} \omega(\Gamma \setminus \mathbb{H}) \end{aligned}$$

**Bemerkung** Satz 3.2.4 lässt sich (wie z. B. im Fall der Modulgruppe) durch Integration von  $\frac{f'}{f}$  über den Rand eines Fundamentalbereichs beweisen (sogar für beliebige koendliche Fuchssche Gruppen).

**3.2.5 Korollar** Sei  $-I \in \Gamma \sqsubset {}_1\Gamma$  mit  $\mu := [{}_1\Gamma : \Gamma] < \infty$ .

a)  $k < 0: \Rightarrow G_{2k}(\Gamma) = \{0\}$ .

b)  $k = 0: \Rightarrow G_0(\Gamma) \simeq \mathbb{C}$ .

B a) Sei  $0 \neq f \in G_{2k}(\Gamma)$ .  $\Rightarrow \deg(\operatorname{div}(f)) = 0$ , da  $f$  ganz ist. Andererseits ist nach Satz 3.2.4  $\deg(\operatorname{div}(f)) = k \frac{1}{6} \mu < 0$ .  $\nexists$

b) Sei  $0 \neq f \in G_0(\Gamma)$ . Nach Satz 3.2.4 ist dann  $\deg(\operatorname{div}(f)) = 0$ , d. h.  $f$  entspricht eine holomorphe Funktion auf  $\Gamma \setminus \mathbb{H}^*$ , und diese ist konstant.  $\Rightarrow f$  ist konstant.  $\square$

**3.2.6 Korollar**  $G_2({}_1\Gamma) = \{0\}$ .

B

$$0 \neq f \in G_2({}_1\Gamma) \Rightarrow \deg(\operatorname{div}(f)) = \frac{1}{6} = v_i(f) + v_\rho(f) + \mathbb{N}_0 = 1 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{2}{3} + \mathbb{N}_0 \geq \frac{7}{6} \quad \nexists \quad \square$$

**3.2.7 Korollar**  $\dim G_{2k}({}_1\Gamma) \leq 1$  für  $k \in \{2, 3, 4, 5, 7\}$ .

B  $0 \neq f \in G_{2k}({}_1\Gamma)$

$$\Rightarrow \deg(\operatorname{div}(f)) = \frac{1}{2} \operatorname{ord}_i(f) + \frac{1}{3} \operatorname{ord}_\rho(f) + \underbrace{\sum_{\substack{P=\Gamma p \in \Gamma \setminus \mathbb{H}^* \\ p \notin \{i, \rho\}}} v_p(f)}_{\in \mathbb{N}_0} = \frac{k}{6}$$

Folgende Fälle lassen sich ablesen:

$k = 2$ : einzige Lösung:  $\operatorname{ord}_\rho(f) = 1$ , alles andere 0.

$k = 3$ : einzige Lösung:  $\operatorname{ord}_i(f) = 1$ , alles andere 0.

$k = 4$ : einzige Lösung:  $\text{ord}_\rho(f) = 2$ , alles andere 0.

$k = 5$ : einzige Lösung:  $\text{ord}_\rho(f) = \text{ord}_i(f) = 1$ , alles andere 0.

$k = 7$ : einzige Lösung:  $\text{ord}_i(f) = 1$ ,  $\text{ord}_\rho(f) = 2$ , alles andere 0.

Jedes  $f \in G_{2k}({}_1\Gamma)$  ist durch seinen Divisor bis auf einen konstanten Faktor  $\neq 0$  eindeutig bestimmt nach Korollar 3.2.5 b).  $\square$

**3.2.8 Korollar** Für  $k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 7\}$  gilt:  $S_{2k}({}_1\Gamma) = \{0\}$ .

B folgt direkt aus Korollar 3.2.7.  $\square$

**Bemerkung** In Korollar 3.2.7 gilt in Wahrheit Gleichheit wie wir später mit Eisenstein-Reihen zeigen werden.

### 3.3 Der Riemann-Rochsche Satz für Modulformen

**3.3.1 Lemma** Sei  $X$  kompakte Riemannsche Fläche,  $D := \sum_{j=1}^m n_j P_j \in \text{Div}(X)$  ( $n_j \in \mathbb{Z}$  für  $j = 1, \dots, m$ ). Dann ist

$$\mathcal{L}(D) := \{f \in \text{Mer}(X) : f = 0 \vee \text{div } f \geq D\}$$

ein endlich-dimensionaler  $\mathbb{C}$ -Vektorraum.

B  $D$  habe genau in  $P_1, \dots, P_k$  die negativen Werte  $n_1, \dots, n_k$ . Seien  $t_1, \dots, t_k$  Karten in hinreichend kleinen Umgebungen von  $P_1, \dots, P_k$ , so dass  $t_j(P_j) = 0$  für  $j = 1, \dots, k$ . Dann ist die Abbildung

$$\varphi: \mathcal{L}(D) \ni f \mapsto \left( \sum_{n=n_1}^{-1} c_{1,n} t_1^n, \dots, \sum_{n=n_k}^{-1} c_{k,n} t_k^n \right)$$

linear, und die Menge der Hauptteile ist ein endlich-dimensionaler  $\mathbb{C}$ -Vektorraum. Weiter ist  $\dim \varphi \in \{0, 1\}$ , also zusammen  $\dim \mathcal{L}(D) < \infty$ .  $\square$

**3.3.2 Satz (Riemann-Roch)** Für jedes  $0 \neq \omega \in \text{Diff}^1(X)$  gilt:

$$\dim \mathcal{L}(D) = \dim \mathcal{L}(-\text{div } \omega - D) - \deg D - (g - 1).$$

B siehe Forster (1977), S. 119 ff., Reyssat (1989), S. 58, Lamotke (2005), S. 26, sowie Ahlfors und Sario (1960), S. 325.  $\square$

**Kommentar** Für  $0 \neq f \in \text{Mer}(X)$  gilt:

$$\text{div } f \geq -\text{div } \omega - D \iff \text{div}(f\omega) \geq -D,$$

und wenn  $f$  den Körper  $\text{Mer}(X)$  durchläuft, so durchläuft  $f\omega$  den Vektorraum  $\text{Diff}^1(X)$ . Das liefert folgende inhaltliche Bedeutung von Satz 3.3.2:

$$\begin{aligned} & \max \left| \{f \in \text{Mer}(X) : f \text{ linear unabhängig, } f = 0 \text{ oder } \text{div } f \geq D\} \right| \\ & - \max \left| \{\eta \in \text{Diff}^1(X) : \eta \text{ linear unabhängig, } \eta = 0 \text{ oder } \text{div } \eta \geq -D\} \right| \\ & = -\deg D - (g - 1) \end{aligned}$$



**3.3.3 Folgerung** a) Die Dimension des Vektorraums der abelschen Differentiale erster Gattung (holomorphe Differentiale) auf  $X$  ist gleich  $g$ .

Begründung: Setze  $D = 0$  in Satz 3.3.2.

b) Für  $0 \neq \omega \in \text{Diff}^1(X)$  gilt nach Satz 3.2.2:

$$\deg \text{div} \omega = 2(g-1).$$

Jetzt können wir das auch wie folgt zeigen: Ersetze in Satz 3.3.2  $D \mapsto -\text{div} \omega - D$ . Dann folgt:

$$\begin{aligned} \dim \mathcal{L}(-\text{div} \omega - D) - \dim \mathcal{L}(D) &= \deg \text{div} \omega + \deg D - (g-1) \\ &= \deg D + (g-1) \\ \Rightarrow \deg \text{div} \omega &= 2(g-1) \end{aligned}$$

Voraussetzungen und Bezeichnungen für Kapitel 3.3:  $\Gamma \sqsubset {}_1\Gamma$ ,  $\mu := [{}_1\Gamma : \Gamma] < \infty$ ,  $X := \Gamma \backslash \mathbb{H}^*$  Riemannsche Fläche vom Geschlecht  $g$ ,  $p$  die Anzahl  $\Gamma$ -inäquivalenter parabolischer Fixpunkte von  $\Gamma$  mit Vertretern  $q_1, \dots, q_p$ ,  $Q_v := \Gamma q_v$  für  $v = 1, \dots, p$  die Spitzenbahnen ( $\in X$ ),  $e_\ell$  sei die Anzahl der Bahnen  $\Gamma$ -inäquivalenter elliptischer Fixpunkte  $z$  von  $\Gamma$  mit  $|\overline{\Gamma z}| = \ell \in \{2, 3\}$  vertreten durch  $z_v^{(\ell)}, Z_v^{(\ell)} := \Gamma z_v^{(\ell)}$  für  $v = 1, \dots, e_\ell$ .

**3.3.4 Definition (Formaler Divisor)** Sei  $-I \in \Gamma$ . Ein *formaler Divisor* zu  $\Gamma$  und  $k \in \mathbb{Z}$  ist ein Divisor der Form  $S = \sum_{P \in X} v(P)P$ , wobei  $v(P) \neq 0$  nur für endlich viele  $P \in X$ , und es gelte  $v(P) - k(1 - \frac{1}{\ell}) \in \mathbb{Z}$ , falls  $P = \Gamma p$ ,  $p \in \mathbb{H}$ ,  $\ell := |\overline{\Gamma p}|$ , und  $v(P) \in \mathbb{Z}$ , falls  $P = \Gamma p$  mit einer Spitze  $p$  von  $\Gamma$ . Für ein solches  $D$  sei  $\deg D := \sum_{P \in X} v(P)$ .

Wir definieren für  $k \in \mathbb{Z}$  und einen formalen Divisor  $D$ :

$$v(\Gamma, 2k, D) := \max \left| \left\{ f \in A_{2k}(\Gamma) : f \text{ linear unabhängig, } f = 0 \vee \text{div } f \geq D \right\} \right|.$$

Man kann leicht sehen, dass für einen Divisor  $D$  zu  $\Gamma$ ,  $k$  auch  $-D$  ein Divisor zu  $\Gamma$ ,  $-k$  ist. Sind  $D$  und  $D'$  Divisoren zu  $\Gamma$ ,  $k$  bzw.  $\Gamma$ ,  $k'$ , so ist  $D + D'$  ein Divisor zu  $\Gamma$ ,  $(k + k')$ .

**3.3.5 Satz (Riemann-Roch für Modulformen)** Sei  $D$  Divisor zu  $\Gamma$ ,  $k$  mit  $k \in \mathbb{Z}$ . Dann ist schon  $v(\Gamma, 2k, D) < \infty$ , und mit dem sog. Verzweigungsdivisor (zu  $\Gamma$ , 1)

$$V := \sum_{v=1}^p Q_v + \sum_{\ell=2}^3 \sum_{v=1}^{e_\ell} \left(1 - \frac{1}{\ell}\right) Z_v^{(\ell)}$$

gilt:

$$\begin{aligned} v(\Gamma, 2k, D) &= v(\Gamma, 2(1-k), V_D) - \deg D + k \frac{\mu}{6} - (g-1) \\ &= v(\Gamma, 2(1-k), V_D) - \deg D + k \deg V + (2k-1)(g-1). \end{aligned}$$

B Wir benutzen die Existenz eines nicht-konstanten  $h \in \text{Mer}(X)$ . Zu einem solchen  $h$  bilden wir  $(dh)^k \in \text{Diff}^k(X) \setminus \{0\}$ . Zu  $(dh)^k$  existiert – wie wir auch noch in Korollar 4.1.4 zeigen werden – ein  $0 \neq f_0 \in A_{2k}(\Gamma)$  wie in der Zuordnung aus Satz 3.1.8. Für  $0 \neq f \in A_{2k}(\Gamma)$  gilt dann:

$$\text{div } f \geq D \iff \text{div } \frac{f}{f_0} \geq \underbrace{D - \text{div } f_0}_{\text{ganzzahliger Divisor}}.$$

$\frac{f}{f_0} \in A_0(\Gamma)$  entspricht eine Funktion aus  $\text{Mer}(X)$ . Sei  $A := D - \text{div } f_0$  (ganzzahliger Divisor),  $0 \neq \omega \in \text{Diff}^1(X)$ .

$$\begin{aligned} \Rightarrow v(\Gamma, 2k, D) &= \underbrace{\dim \mathcal{L}(A)}_{< \infty} \\ &\stackrel{\text{Satz 3.3.2}}{=} \dim \mathcal{L}(-\text{div } \omega - A) - \deg A - (g-1) \\ &\stackrel{\text{Satz 3.2.4}}{=} \dim \mathcal{L}(-\text{div } \omega - A) - \deg D + \underbrace{k \frac{\mu}{6}}_{=\deg \text{div } f_0} - (g-1) \end{aligned}$$

Schreibe  $\dim \mathcal{L}(-\text{div } \omega - A)$  als Dimension eines Vektorraums von Modulformen:

$$A_2(\Gamma) \ni h \leftrightarrow \eta \in \text{Diff}^1(\Gamma \setminus \mathbb{H}^*),$$

dabei gilt:

$$\begin{aligned} &\left. \begin{array}{l} p \in \mathbb{H} \Rightarrow v_p(h) = \text{ord}_{\Gamma p}(\eta) + 1 \left(1 - \frac{1}{\ell}\right) \\ p \text{ Spitze} \Rightarrow v_p(h) = \text{ord}_{\Gamma p}(\eta) + 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{div } h = \text{div } \eta + V \\ &\Rightarrow \dim \mathcal{L}(-\text{div } \omega - A) \\ &= \max \left| \left\{ \eta \in \text{Diff}^1(X) : \eta \text{ linear unabhängig, } \eta = 0 \vee \text{div } \eta \geq -A \right\} \right| \\ &= \max \left| \left\{ h \in A_2(\Gamma) : h \text{ linear unabhängig, } h = 0 \vee \text{div } h \geq V_A = V + \text{div } f_0 - D \right\} \right| \\ &= \max \left| \left\{ g := \frac{h}{f_0} \in A_{2(1-k)}(\Gamma) : g \text{ linear unabhängig, } \text{div } g \geq V_D \right\} \right| \\ &= v(\Gamma, 2(1-k), V-D). \end{aligned}$$

Die zweite Formel ist nun klar nach Satz 2.3.9. □

**3.3.6 Satz** Für  $k \geq 1$  ist

$$\dim G_{2k}(\Gamma) = (2k-1)(g-1) + kp + \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor e_2 + \left\lfloor \frac{2k}{3} \right\rfloor e_3$$

Für  $k \leq 0$  ist die Dimension bereits bekannt aus Korollar 3.2.5.

B Satz 3.3.5 mit

$$D := \sum_{\ell=2}^3 \sum_{v=1}^{\ell} \frac{a_{\ell}}{\ell} Z_v^{(\ell)},$$

wobei  $a_{\ell} \in \{0, 1, \dots, \ell-1\}$  so gewählt ist, dass  $\ell \mid (k + a_{\ell})$ ; insbesondere sind damit die  $a_{\ell}$  eindeutig bestimmt. Sei etwa  $k + a_{\ell} = \ell m$  mit einem  $m \in \mathbb{Z}$ .

$$\Rightarrow \frac{a_{\ell}}{\ell} = k \left(1 - \frac{1}{\ell}\right) + \underbrace{m - k}_{\in \mathbb{Z}}.$$

$\Rightarrow D$  ist Divisor zu  $\Gamma, k$ .

Behauptung: Für  $0 \neq f \in A_{2k}(\Gamma)$  gilt:  $\operatorname{div} f \geq D \Leftrightarrow f \in G_{2k}(\Gamma)$ .

Begründung:

„ $\Rightarrow$ “ klar, da  $f$  in allen  $q \in \mathbb{H}^*$  eine Ordnung  $v_q(f) \geq 0$  hat.

„ $\Leftarrow$ “ In den Spitzen und Nicht-Fixpunkten von  $\Gamma$  in  $\mathbb{H}$  ist alles klar, da dort  $D$  keine von 0 verschiedenen Werte annimmt. Sei also  $q \in \mathbb{H}$  elliptischer Fixpunkt von  $\Gamma$  mit  $\ell := |\overline{\Gamma q}|$ ; dann gilt mit  $f \leftrightarrow \omega \in \operatorname{Diff}^1(X)$

$$\begin{aligned} 0 \leq v_q(f) &= \frac{1}{\ell} \operatorname{ord}_q f = \underbrace{\operatorname{ord}_q \omega}_{=: n} + k \left(1 - \frac{1}{\ell}\right) \\ &= \frac{\ell(n+k) - k}{\ell} = \frac{\ell(n+k) - \overbrace{(k+a_{\ell})}^{\equiv 0 \pmod{\ell}} + a_{\ell}}{\ell} \\ &\geq \min \left\{ \frac{\ell m + a_{\ell}}{\ell} : \ell m + a_{\ell} \geq 0, m \in \mathbb{Z} \right\} = \frac{a_{\ell}}{\ell} \\ &= \text{Wert von } D \text{ in } \Gamma q \end{aligned}$$

$$\Rightarrow v(\Gamma, 2k, D) = \dim G_{2k}(\Gamma).$$

Behauptung:  $v(\Gamma, 2(1-k), V_D) = 0$  (beachte:  $k \geq 1$ !).

Begründung: Sei  $0 \neq f \in A_{2(1-k)}(\Gamma)$  mit  $\operatorname{div} f \geq V - D$ . Dann liefert Satz 3.2.4  $\deg \operatorname{div} f = (1-k) \frac{\mu}{6} \leq 0$ , da  $k \geq 1$ . Andererseits ist

$$\deg(V - D) = \deg V - \deg D = \left(p + \frac{1}{2}e_2 + \frac{2}{3}e_3\right) - \left(\frac{a_2}{2}e_2 + \frac{a_3}{3}e_3\right) \geq p > 0.$$

Dies ist ein Widerspruch, so dass die Wahl von  $f$  nicht zulässig ist. Das liefert die Behauptung.

$$\Rightarrow \dim G_{2k}(\Gamma) = v(\Gamma, 2k, D)$$

$$\begin{aligned} &\stackrel{\text{Satz 3.3.6}}{=} (2k-1)(g-1) - k \deg V - \deg D \\ &= (2k-1)(g-1) + k \left(p + \frac{1}{2}e_2 + \frac{2}{3}e_3\right) - \left(\frac{a_2}{2}e_2 + \frac{a_3}{3}e_3\right) \\ &= (2k-1)(g-1) + kp + \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor e_2 + \left\lfloor \frac{2k}{3} \right\rfloor e_3 \end{aligned}$$

nach Wahl der  $a_\ell$ . □

**3.3.7 Satz** Für  $k > 1$  ist

$$\dim S_{2k}(\Gamma) = (2k-1)(g-1) + (k-1)p + \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor e_2 + \left\lfloor \frac{2k}{3} \right\rfloor e_3 = \dim G_{2k}(\Gamma) - p,$$

$$\dim S_2(\Gamma) = G.$$

B  $\dim S_2(\Gamma) = g$  ist klar, da  $S_2(\Gamma)$  isomorph ist zum Vektorraum der abelschen Differentiale erster Gattung. Dieser hat nach Satz 3.3.2 die Dimension  $g$ .

Sei  $k > 1$ ,  $a_\ell$  wie im Beweis von Satz 3.3.6,

$$D := \sum_{\ell=2}^3 \sum_{v=1}^{e_\ell} \frac{a_\ell}{\ell} Z_v^{(\ell)} + \sum_{v=1}^p Q_v.$$

Dann gilt für  $0 \neq f \in A_{2k}(\Gamma)$ :  $\operatorname{div} f \geq D \Leftrightarrow f \in S_{2k}(\Gamma)$ . Man berechnet dies analog zur Vorgehensweise im Beweis von Satz 3.3.6.

$$\Rightarrow \dim S_{2k}(\Gamma) = \nu(\Gamma, 2k, D) = (2k-1)(g-1) + (k-1)p + \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor e_2 + \left\lfloor \frac{2k}{3} \right\rfloor e_3,$$

falls  $\nu(\Gamma, 2(1-k), V-D) = 0$ . Wiederum in Analogie zum Beweis von Satz 3.3.6 zeigt man: Sei  $0 \neq f \in A_{2(1-k)}(\Gamma)$  mit  $\operatorname{div} f \geq V-D$ .  $\Rightarrow \deg \operatorname{div} f = (1-k)\frac{\mu}{6} < 0$ , da  $k > 1$ . Andererseits ist

$$\deg(V-D) = \deg V - \deg D = \left(p + \frac{1}{2}e_2 + \frac{2}{3}e_3\right) - \left(\frac{a_2}{2}e_2 + \frac{a_3}{3}e_3 + p\right) \geq 0,$$

so dass wir auch hier einen Widerspruch konstruiert haben. Folglich ist die Wahl von  $f$  nicht zulässig. Das liefert die Behauptung. □

**3.3.8 Korollar** Für  $k \in \mathbb{Z}$  gilt:

$$\dim G_{2k}(\Gamma) = \begin{cases} \left\lfloor \frac{k}{6} \right\rfloor + 1 & \text{für } k \geq 0, k \not\equiv 1 \pmod{6} \\ \left\lfloor \frac{k}{6} \right\rfloor & \text{für } k > 0, k \equiv 1 \pmod{6} \\ 0 & \text{für } k < 0 \end{cases}$$

$$\dim S_{2k}(\Gamma) = \begin{cases} \left\lfloor \frac{k}{6} \right\rfloor & \text{für } k \geq 6, k \not\equiv 1 \pmod{6} \\ \left\lfloor \frac{k}{6} \right\rfloor - 1 & \text{für } k > 6, k \equiv 1 \pmod{6} \\ 0 & \text{für } k < 6 \end{cases}$$

**3.3.9 Korollar** Für  $k \in \mathbb{Z}$  gilt:

$$\dim G_{2k}(\Gamma_\vartheta) = \begin{cases} \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor + 1 & \text{für } k \geq 0 \\ 0 & \text{für } k < 0 \end{cases}$$

$$\dim S_{2k}(\Gamma_\vartheta) = \begin{cases} \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor - 1 & \text{für } k \geq 4 \\ 0 & \text{für } k \leq 3 \end{cases}$$

Dito für  $\Gamma^0(2)$  und  $\Gamma_0(2)$ .

**3.3.10 Korollar** Für  $k \in \mathbb{Z}$  gilt:

$$\dim G_{2k}(\Gamma(2)) = \begin{cases} k+1 & \text{für } k \geq 0 \\ 0 & \text{für } k < 0 \end{cases}$$

$$\dim S_{2k}(\Gamma(2)) = \begin{cases} k-2 & \text{für } k \geq 3 \\ 0 & \text{für } k \leq 2 \end{cases}$$

## 4 Beispiele von Modulformen

### 4.1 Poincarésche Reihen

Motivation: Wir wollen Modulformen vom Gewicht  $2k$  konstruieren. Das Problem dabei ist das Transformationsverhalten

$$\underbrace{(cz+d)^{-2k} f(Sz)}_{=f|S(z)} = f(z)$$

für alle  $S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$ . Idee: Man mittelt über die Gruppe  $\Gamma$  und bilde mit einem holomorphen  $h: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$

$$f := \sum_{S \in \Gamma} h|S.$$

Wenn das absolut konvergiert, so hat  $f$  das richtige Transformationsverhalten  $f|S = f$  für alle  $S \in \Gamma$ . Das ist die Idee von Henri Poincaré, die sog. *Poincaréschen Reihen*. Auf diese Weise hat Poincaré die Existenz nicht-konstanter meromorpher Funktionen auf Riemannschen Flächen nachgewiesen.

Modifikation: Wir nehmen an,  $h$  erfülle schon das Transformationsverhalten  $h|M = h$  für alle  $M \in \Delta \sqsubset \Gamma$  (z. B.  $h(z) = e^{2\pi i n z}$  für  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $\Delta = \langle U \rangle$  und  $\Gamma = {}_1\Gamma$ ). Dann wird die Reihe nicht konvergieren und muss wie folgt modifiziert werden: Man setze  $f := \sum_{M \in \mathcal{R}} h|M$  mit einem Vertretersystem  $\mathcal{R}$  von  $\Delta \backslash \Gamma$ . Beachte: Für  $M, M' \in \Gamma$  mit  $\Delta M = \Delta M'$  gilt:  $M = LM'$  mit einem  $L \in \Delta: \Rightarrow h|M = h|LM' = (h|L)|M' = h|M'$ . Dieser Ansatz ist also sinnvoll, da er unabhängig von der Wahl des Vertretersystems ist. Weiter ist für jedes  $S \in \Gamma$  auch  $\mathcal{R}S$  ein Vertretersystem von  $\Delta \backslash \Gamma$ . Wegen der Unabhängigkeit von der Auswahl von  $\mathcal{R}$  ist damit klar:  $f|S = f$  für alle  $S \in \Gamma$ , falls die Reihe absolut konvergiert.

**Voraussetzungen und Bezeichnungen in 4.1** Sei  $-I \in \Gamma \sqsubset {}_1\Gamma$ ,  $p = A^{-1}\infty$  eine Spitze von  $\Gamma$ ,  $A \in {}_1\Gamma$  mit Grundmatrix  $A^{-1}U^\lambda A$ ,  $h(z) := e^{\frac{2\pi i n z}{\lambda}}$  für festes  $n \in \mathbb{Z}$  hat die Eigenschaft, dass

$$h|A^{-1}U^{m\lambda}A(z) = e^{\frac{2\pi i n z}{\lambda}}|U^{m\lambda}A = \left(e^{\frac{2\pi i n z}{\lambda}}|U^{m\lambda}\right)|A = e^{\frac{2\pi i n z}{\lambda}}|A = h(z)$$

für ein  $m \in \mathbb{Z}$ . Der Ansatz klappt folglich mit  $h$  und  $\Delta := \langle A^{-1}U^\lambda A \rangle$ .

**4.1.1 Definition (Poincarésche Reihe)** Für  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $k > 1$  sei die *Poincarésche Reihe* zur Spitze  $p = A^{-1}\infty$  erklärt durch

$$P_n(z, A, \Gamma, 2k) := \frac{1}{2} \sum_{M \in \mathcal{R}} e^{\frac{2\pi i n z}{\lambda}}|_{2k} AM = \frac{1}{2} \sum_{\substack{M \in \mathcal{R} \\ AM = \begin{pmatrix} c & d \end{pmatrix}}} (cz+d)^{-2k} e^{2\pi i n \frac{AMz}{\lambda}}$$

mit einem Vertretersystem  $\mathcal{R}$  von  $\langle A^{-1}U^\lambda A \rangle \setminus \Gamma$ . Wegen  $-I \in \Gamma$  erhält man alle Terme in der Summation doppelt; daher normieren wir wieder mit dem Faktor  $\frac{1}{2}$ . Im Spezialfall  $n = 0$  erhält man die sog. *Eisensteinschen Reihen*.

**Bemerkung** 1) Der Ansatz ist nach obiger Rechnung sinnvoll.

2)  $\mathcal{R}$  ist Vertretersystem von  $\langle A^{-1}U^\lambda A \rangle \setminus \Gamma \Leftrightarrow A\mathcal{R}$  ist maximales System von Matrizen aus  $A\Gamma$  mit verschiedenen zweiten Zeilen, denn für  $M, N \in \Gamma$  gilt:

$$\exists m \in \mathbb{Z} \quad M = A^{-1}U^{m\lambda}AN \Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{Z} \quad AM = U^{m\lambda}AN \Leftrightarrow \underline{AM} = \underline{AN}.$$

3) Ist auch  $B \in {}_1\Gamma$  und  $B^{-1}\infty$  Spitze von  $\Gamma$ , so gilt: Ist  $B^{-1}\infty \equiv A^{-1}\infty \pmod{\Gamma}$ , so gilt im Sinne termweiser Übereinstimmung der formalen Reihen  $P_n(z, A, \Gamma, 2k) = P_n(z, B, \Gamma, 2k)\zeta$  mit geeignetem  $\zeta \in \mathbb{C}$ ,  $|\zeta| = 1$ .

Beweis:  $B^{-1}\infty = L^{-1}A^{-1}\infty$  mit  $L \in \Gamma$ . Ggf. Ersetzung  $L \mapsto -L$  liefert:  $\exists m \in \mathbb{Z} \quad AL = U^mB$ . Mit  $h(z) := e^{\frac{2\pi inz}{\lambda}}$  und  $M \in \Gamma$  gilt dann:

$$h|AM = h|(AL)(L^{-1}M) = e^{\frac{2\pi imn}{\lambda}} (h|B(L^{-1}ML))|L^{-1}.$$

Durchläuft  $M$  ein Vertretersystem von  $\langle A^{-1}U^\lambda A \rangle \setminus \Gamma$ , so durchläuft  $L^{-1}ML$  ein Vertretersystem von  $\langle B^{-1}U^\lambda B \rangle \setminus L^{-1}\Gamma L = \langle B^{-1}U^\lambda B \rangle \setminus \Gamma$ , und die nochmalige Anwendung von  $L^{-1}$  von rechts liefert ein anderes Vertretersystem.

Resultat: Man braucht die  $P_n$  nur für ein Vertretersystem der Spitzenklassen von  $\Gamma$  zu betrachten.

**4.1.2 Lemma** Für  $B \in {}_1\Gamma$  gilt im Sinne termweiser Übereinstimmung der formalen Reihen:

$$P_n(\cdot, A, \Gamma, 2k) \Big|_B = P_n(\cdot, AB, B^{-1}\Gamma B, 2k).$$

B Mit  $h(z) := e^{\frac{2\pi inz}{\lambda}}$  |  $A$  gilt für alle  $M \in \Gamma$ :

$$(h|M)|B = (h|B)|B^{-1}MB = \left(e^{\frac{2\pi inz}{\lambda}} \Big| AB\right) | B^{-1}MB.$$

Hier ist  $(AB)^{-1}\infty = B^{-1}p$  ein parabolischer Fixpunkt von  $B^{-1}\Gamma B$  mit Breite  $\lambda$ , und durchläuft  $M$  ein Vertretersystem von  $\langle A^{-1}U^\lambda A \rangle \setminus \Gamma$ , so durchläuft auch  $B^{-1}MB$  ein Vertretersystem von  $\langle (AB)^{-1}U^\lambda(AB) \rangle \setminus B^{-1}\Gamma B$ .  $\square$

Lemma 4.1.2 gestattet es, die Spitze  $p$  nach  $\infty$  zu transformieren und die Betrachtung Poincaréscher Reihen auf den Fall  $p = \infty$  für eine konjugierte Gruppe zu reduzieren.

**4.1.3 Satz** Für  $k \geq 1$  und  $n \in \mathbb{Z}$  konvergiert

$$P_n(z, A, \Gamma, 2k) := \frac{1}{2} \sum_{\substack{M \in \mathcal{R} \\ AM = \begin{pmatrix} c & d \end{pmatrix}}} (cz + d)^{-2k} e^{2\pi i n \frac{AMz}{\lambda}}, \quad (4.1)$$

wobei  $\mathcal{R}$  ein Vertretersystem von  $\langle A^{-1}U^\lambda A \rangle \setminus \Gamma$  sei, normal in  $\mathbb{H}$  und stellt eine in  $\mathbb{H}$  holomorphe Modulform aus  $A_{2k}(\Gamma)$  dar. Ist  $B \in {}_1\Gamma$  und  $B^{-1}\infty$  eine Spitze von  $\Gamma$ , so gilt mit  $x := \operatorname{Re} z$ ,  $y := \operatorname{Im} z$  für  $y \rightarrow \infty$  gleichmäßig bzgl.  $x \in \mathbb{R}$ :

$$P_n(x + iy, A, \Gamma, 2k) |B^{-1}| = \delta(A, B) e^{\frac{2\pi i n z}{\lambda}} + O(1)$$

mit

$$\delta(A, B) := \begin{cases} e^{\frac{2\pi i n q}{\lambda}} & \text{für } B^{-1}\infty \equiv A^{-1}\infty \pmod{\Gamma} \text{ mit geeignetem } q \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Insbesondere ist  $P_n(\cdot, A, \Gamma, 2k) \in G_{2k}(\Gamma)$  für  $n \geq 0$  und  $P_n(\cdot, A, \Gamma, 2k) \in S_{2k}(\Gamma)$  für  $n > 0$ .

**B normale Konvergenz** Sei  $K \subset \mathbb{H}$  kompakt,  $M \in \mathcal{R}$ ,  $AM = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ c & d \end{pmatrix}$ .

$$\Rightarrow \left| e^{2\pi i n \frac{AMz}{\lambda}} \right| = e^{-2\pi \frac{n}{\lambda} \frac{y}{|cz+d|^2}} \leq e^{2\pi \left| \frac{n}{\lambda} \right| \frac{y}{|cz+d|^2}},$$

und hier ist

$$\frac{y}{|cz+d|^2} \leq \begin{cases} y & \text{für } c = 0 \\ \frac{1}{c^2 y} \leq \frac{1}{y} & \text{für } c \neq 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$  Der Zähler ist gleichmäßig auf  $K$  beschränkt. Es genügt also zu zeigen:

$$\sum'_{(m_1, m_2) \in \mathbb{Z}^2} |m_1 z + m_2|^{-2k}$$

konvergiert normal in  $\mathbb{H}$ . Hier gilt für  $(m_1, m_2) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  und  $z \in K$ :  $\frac{|m_1 z + m_2|}{|m_1 i + m_2|} = |\mu z + \nu|$  mit  $\mu := \frac{m_1}{\sqrt{m_1^2 + m_2^2}}$  und  $\nu = \frac{m_2}{\sqrt{m_1^2 + m_2^2}}$ , und das ist der Wert der stetigen positiven Funktion  $S^1 \times K \rightarrow ]0, \infty[$ ,  $((\mu, \nu), z) \mapsto |\mu z + \nu|$ .

$$\Rightarrow \exists C > 0 \quad \forall z \in K, (m_1, m_2) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0, 0)\} \quad \frac{1}{C} |m_1 i + m_2| \leq |m_1 z + m_2| \leq C |m_1 i + m_2|$$

Es genügt also zu zeigen  $\sum'_{(m_1, m_2) \in \mathbb{Z}^2} (m_1 i + m_2) < \infty$ , was aus Elstrodt (2004) bekannt ist.  $\Rightarrow$  Die Reihe (4.1) konvergiert normal.

**Transformationsverhalten unter  $\Gamma$**  ist klar nach Ansatz.

**Verhalten in den Spitzen von  $\Gamma$**  Nach Lemma 4.1.2 genügt der Beweis der Wachstumsaussage für den Fall  $B = I$ . Dann sind  $A^{-1}\infty$  und  $\infty$  Spitzen von  $\Gamma$ , und das Verhalten von

$$P_n(z, A, \Gamma, 2k) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{M \in \mathcal{R} \\ AM = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ c & d \end{pmatrix}}} e^{2\pi i n \frac{AMz}{\lambda}} (cz + d)^{-2k}$$



für  $y \rightarrow \infty$  ist zu untersuchen. Dabei spielen die Terme mit  $c = 0$  – falls vorhanden – eine Sonderrolle:

$$\exists M \in \mathcal{R}, \quad AM = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot \end{pmatrix} \iff \exists M \in \mathcal{R} \quad AM\infty = \infty \implies A^{-1}\infty \equiv \infty \pmod{\Gamma}.$$

Umgekehrt: Ist  $A^{-1}\infty \equiv \infty \pmod{\Gamma}$ , so gibt es ein  $N \in \Gamma$  mit  $A^{-1}\infty = N\infty$ .  $N$  ist bis auf einen linken Faktor aus  $\Gamma_p = \langle A^{-1}U^\lambda A, I \rangle$  eindeutig bestimmt. Wegen  $-I \in \Gamma$  gibt es dann genau zwei Elemente  $M \in \mathcal{R}$  mit  $A^{-1}\infty = M\infty$ .

D. h.  $A^{-1}\infty \equiv \infty \pmod{\Gamma} \iff$  es gibt genau zwei Elemente  $M \in \mathcal{R}$  mit  $AM = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot \end{pmatrix}$ .

$$\Rightarrow P_n(z, A, \Gamma, 2k) = \delta(A, B) e^{\frac{2\pi i n z}{\lambda}} + \frac{1}{2} \sum_{\substack{M \in \mathcal{R} \\ AM = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ c & d \end{pmatrix} \\ c \neq 0}} (cz + d)^{-2k} e^{2\pi i n \frac{AMz}{\lambda}}$$

mit  $\delta(A, I) = e^{\frac{2\pi i n q}{\lambda}}$  für  $AM = \pm \begin{pmatrix} 1 & q \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

Bleibt zu zeigen: Die letzte Summe in (4.1) konvergiert für  $y \rightarrow \infty$  gleichmäßig bzgl.  $x$  gegen 0: Nun ist für  $c \neq 0$

$$\left| e^{2\pi i n \frac{AMz}{\lambda}} \right| = e^{-2\pi i \frac{n}{\lambda} \frac{y}{|cz+d|^2}} \leq e^{2\pi i \left| \frac{n}{\lambda} \right| \frac{1}{y}} = O(1) \text{ für } y \rightarrow \infty$$

gleichmäßig bzgl.  $x \in \mathbb{R}$ .

Bleibt zu zeigen:

$$\sum_{\substack{M \in \mathcal{R} \\ AM = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ c & d \end{pmatrix} \\ c \neq 0}} |cz + d|^{-2k} \xrightarrow{y \rightarrow \infty} 0$$

gleichmäßig bzgl.  $x$ , d. h.

$$\sum_{\substack{m_1, m_2 \in \mathbb{Z} \\ m_1 \neq 0}} |m_1 z + m_2|^{-2k} \xrightarrow{y \rightarrow \infty} 0$$

gleichmäßig bzgl.  $x$ . Diese Reihe ist periodisch in  $x$  modulo 1, so dass wir das nur für  $x \in [0, 1]$  zeigen müssen. Sei  $V := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \in [0, 1], \operatorname{Im} z \geq 1\}$ . Die Funktion  $z \mapsto \frac{|m_1 z + m_2|}{|m_1 i + m_2|}$  mit  $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$ ,  $m_1 \neq 0$  nimmt in  $V$  ihr Minimum auf  $\{x + i : x \in [0, 1]\}$  an, und die obige Abschätzung auf dem Kompaktum  $K \subset \mathbb{H}$  ergibt:

$$\exists \gamma > 0 \quad \forall m_1, m_2 \in \mathbb{Z}, m_1 \neq 0, z \in V \quad |m_1 z + m_2| \geq \gamma |m_1 i + m_2|.$$

$\Rightarrow \sum_{\substack{m_1, m_2 \in \mathbb{Z} \\ m_1 \neq 0}} |m_1 z + m_2|^{-2k} \xrightarrow{y \rightarrow \infty} 0$  gleichmäßig bzgl.  $x \in V$  und verschwindet termweise

se für  $y \rightarrow \infty$ .  $\Rightarrow \sum_{\substack{m_1, m_2 \in \mathbb{Z} \\ m_1 \neq 0}} |m_1 z + m_2|^{-2k} \xrightarrow{y \rightarrow \infty} 0$  gleichmäßig bzgl.  $x \in \mathbb{R}$ .  $\square$

**4.1.4 Korollar** Sei  $-I \in \Gamma \sqsubset {}_1\Gamma$ ,  $\Gamma$  beliebig (nicht notwendig mit Spitzen). Dann gilt für alle  $k \in \mathbb{Z}$ :  $A_{2k}(\Gamma) \neq \{0\}$  und  $A_0(\Gamma) \neq \mathbb{C}$ .

B OBdA habe  $\Gamma$  Spitzen (der Beweis genügt z. B. für  ${}_1\Gamma$  selbst). Sei  $A^{-1}\infty$  Spitze von  $\Gamma$ ,  $0 \leq m, n \in \mathbb{Z}$ ,  $\ell \geq 1$  so groß, dass  $\ell + k > 1$ . Dann liefert Satz 4.1.3:  $P_n(\cdot, A, \Gamma, 2\ell) \neq 0$  und  $P_m(\cdot, A, \Gamma, 2(k + \ell)) \neq 0$ .

$$0 \neq f := \frac{P_m(\cdot, A, \Gamma, 2(k + \ell))}{P_n(\cdot, A, \Gamma, 2\ell)} \in A_{2k}(\Gamma).$$

Wählt man  $m \neq n$ , so ist  $f$  nicht konstant. □

**Bemerkung** Damit ist für unsere Gruppen und die zugehörigen Riemannschen Flächen unabhängig von den Existenzsätzen der Theorie der Riemannschen Flächen die Existenz nicht-trivialer Funktionen gezeigt.

**4.1.5 Definition (Eisenstein-Reihe)** In den Bezeichnungn von Definition 4.1.1 heißt

$$E(z, A, \Gamma, 2k) := \frac{1}{2} \sum_{\substack{M \in \mathcal{R} \\ \underline{AM} = (c, d)}} (cz + d)^{-2k} \quad (k > 1)$$

die *Eisenstein-Reihe* zur Spitze  $A^{-1}\infty$  der Gruppe  $\Gamma$ .

**4.1.6 Korollar** Sei  $-I \in \Gamma \sqsubset {}_1\Gamma$ ,  $[{}_1\Gamma : \Gamma] < \infty$ ,  $k > 1$ ,  $f \in G_{2k}(\Gamma)$ .  $\Rightarrow$  Es gibt eine Linearkombination  $E$  Eisensteinscher Reihen zu  $\Gamma, k$ , so dass  $f - E \in S_{2k}(\Gamma)$ . Bezeichnet  $\mathcal{E}_{2k}(\Gamma)$  den von den Eisensteinschen Reihen aufgespannten Teilraum von  $G_{2k}(\Gamma)$ , so gilt:  $G_{2k}(\Gamma) = \mathcal{E}_{2k}(\Gamma) \oplus S_{2k}(\Gamma)$ .  $\Rightarrow \dim \mathcal{E}_{2k}(\Gamma) = p = \text{Anzahl der } \Gamma\text{-inäquivalenten Spitzen von } \Gamma$ .

B klar nach Satz 4.1.3 und Bemerkung 3) zu Definition 4.1.1. □

**4.1.7 Beispiele** a)  $\Gamma = {}_1\Gamma$ ,  $k > 1$ :  $E_{2k}(z) = E(z, U, {}_1\Gamma, 2k)$ . Dann folgt mit Korollar 3.3.8, da wegen Satz 4.1.3  $E_{2k} \neq 0$  ist:  $G_{2k}({}_1\Gamma) = \mathbb{C} E_{2k}$  für  $k \in \{2, 3, 4, 5, 7\}$

b)  $E_8 = E_4^2$ ,  $E_{10} = E_4 \cdot E_6$ ,  $E_{14} = E_6 \cdot E_8 = E_4 \cdot E_{10}$  nach a), da der 0-te Fourier-Koeffizient aller Reihen 1 ist.

c)  $\Gamma = \Gamma_\vartheta$ ,  $k > 1$ :  $E_{2k}^\infty(z) = E(z, I, \Gamma_\vartheta, 2k)$ ,  $E_{2k}^1(z) = E(z, TU^{-1}, \Gamma_\vartheta, 2k)$ .  $\Rightarrow G_{2k}(\Gamma_\vartheta) = \mathbb{C} E_{2k}^\infty + \mathbb{C} E_{2k}^1 = \mathcal{E}_{2k}(\Gamma_\vartheta)$  für  $k \in \{2, 3\}$  nach Korollar 3.3.9 und Korollar 4.1.6.

d)  $G_4(\Gamma(2)) = \mathcal{E}_4(\Gamma(2))$ , denn beide Dimensionen sind 3, und es gibt 3 linear unabhängige Eisenstein-Reihen.

## 4.2 Die Eisensteinschen Reihen zur Modulgruppe

Wenn  $\Gamma$  hinreichend gut bekannt ist, kann man die Fourier-Entwicklung der Eisenstein-Reihen ausrechnen. Das geht z. B. für  $\Gamma_\theta$  und für die Hauptkongruenzgruppen wir beschränken uns hier auf den typischen Spezialfall  $\Gamma = {}_1\Gamma$ . Dann haben wir eine Eisenstein-Reihe, nämlich

$$E_{2k}(z) := \frac{1}{2} \sum'_{\substack{c,d \in \mathbb{Z} \\ \text{ggT}(c,d)=1}} (cz+d)^{-2k}, \quad (k > 1)$$

Wir haben sogar gesehen, dass  $\sum'_{m,n \in \mathbb{Z}} (mz+n)^{-2k}$  absolut konvergiert in  $\mathbb{H}$ , und man sieht sofort:

$$\sum'_{m,n \in \mathbb{Z}} (mz+n)^{-2k} = \sum_{v=1}^{\infty} v^{-2k} \sum'_{\substack{c,d \in \mathbb{Z} \\ \text{ggT}(c,d)=1}} (cz+d)^{-2k} = 2\zeta(2k) E_{2k}(z),$$

wobei  $\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$  die Riemannsche  $\zeta$ -Funktion bezeichne für  $s > 1$ . Damit haben wir

$$E_{2k}(z) = \frac{1}{2\zeta(2k)} \sum'_{m,n \in \mathbb{Z}} (mz+n)^{-2k}$$

(hier stehen die aus der Theorie der elliptischen Funktionen bekannten Eisensteinreihen zum Gitter  $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}z$ ), und das ist zur Berechnung der Fourier-Entwicklung von  $E_{2k}$  gut geeignet. Bevor wir die Fourier-Entwicklung von  $E_{2k}$  bestimmen, erinnern wir an folgenden

**4.2.1 Satz** Für  $k \geq 1$  gilt:

$$\zeta(2k) = (-1)^{k-1} \frac{1}{2} \frac{(2\pi)^{2k} B_{2k}}{(2k)!},$$

wobei  $B_{2k}$  die  $(2k)$ -te Bernoullische Zahl bedeutet, die durch

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n$$

definiert ist. Die  $B_n$  sind rationale Zahlen und genügen der Rekursionsformel

$$\binom{n}{0} B_0 + \binom{n}{1} B_1 + \dots + \binom{n}{n-1} B_{n-1} = 0.$$

Es ist  $B_0 = 1$ ,  $B_1 = -\frac{1}{2}$ ,  $B_{2n+1} = 0$  für  $n \geq 1$  und man hat die Werte aus Tabelle 4.1. Weitere Werte finden sich bei Serre (1970), S. 147.

$2k$	$B_{2k}$	$\zeta(2k)$
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{\pi^2}{6}$
4	$-\frac{1}{30}$	$\frac{\pi^4}{90}$
6	$\frac{1}{42}$	$\frac{\pi^6}{945}$
8	$-\frac{1}{30}$	$\frac{\pi^8}{9450}$
10	$\frac{5}{66}$	$\frac{3^5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11}{691 \pi^{12}}$
12	$-\frac{691}{2730}$	$\frac{3^6 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13}{2 \pi^{14}}$
14	$\frac{7}{6}$	$\frac{3^6 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13}{\pi^{14}}$

Tabelle 4.1: Einige Werte der Bernoulli-Zahlen und der Riemannschen  $\zeta$ -Funktion

B Aus Elstrodt (2004) kennen wir die Partialbruchzerlegung des Cotangens:

$$\begin{aligned}
 \pi \cot \pi z &= \frac{1}{z} + \sum'_{n=-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{z+n} - \frac{1}{n} \right) \\
 \pi \cot \pi z &= \pi \frac{\cos \pi z}{\sin \pi z} \\
 &= \pi i \frac{e^{\pi i z} + e^{-\pi i z}}{e^{\pi i z} - e^{-\pi i z}} \\
 &= -\pi i \frac{1 + e^{2\pi i z}}{1 - e^{2\pi i z}} \\
 &= \pi i \left( 1 - \frac{2}{e^{2\pi i z}} \right).
 \end{aligned}$$

Nun ist für  $|z| < 1$

$$\frac{1}{z+n} - \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \left( \frac{1}{1 + \frac{z}{n}} - 1 \right) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{z^k}{n^{k+1}}$$

und das konvergiert bei Summation über alle  $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$  absolut für  $|z| < 1$ , und die Summen

$\sum'_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{n^{k+1}}$  sind für  $k \equiv 0 \pmod{2}$  alle  $= 0$ .

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \sum'_{n \in \mathbb{Z}} \left( \frac{1}{z+n} - \frac{1}{n} \right) &= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left( \sum'_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{n^{k+1}} \right) z^k \\
&= -2 \sum_{k=1}^{\infty} \zeta(2k) z^{2k-1} \\
&= \pi \cot \pi z - \frac{1}{z} \\
&= \pi i - \frac{1}{z} - \frac{2\pi i}{1 - e^{2\pi i z}} \\
&= \pi i - \frac{1}{z} + \frac{1}{z} \frac{2\pi i z}{e^{2\pi i z} - 1} \\
&= \pi i - \frac{1}{z} + \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} (2\pi i z)^k
\end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich liefert jetzt die Behauptung. Die Rekursionsformel für die  $B_k$  folgt aus dem Ansatz.  $\square$

**4.2.2 Lemma** Für  $z \in \mathbb{H}$ ,  $k \geq 1$  gilt:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (z+n)^{-k} = \frac{(-2\pi i)^k}{(k-1)!} \sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1} e^{2\pi i n z}$$

B Man kann eine Fourier-Entwicklung der periodischen Funktion auf der linken Seite ausführen und die Fourier-Koeffizienten mit Hilfe des Residuensatzes berechnen. Noch einfacher ist eine sukzessive Differetiation der Partialbruchentwicklung des Cotangens:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z} + \sum'_{n \in \mathbb{Z}} \left( \frac{1}{z+n} - \frac{1}{n} \right) &= \pi \cot \pi z \\
&= \pi i - \frac{2\pi i}{1 - e^{2\pi i z}} \\
&= \pi i - 2\pi i \sum_{n=0}^{\infty} e^{2\pi i n z} \quad (z \in \mathbb{H})
\end{aligned}$$

$\square$

**4.2.3 Satz** Für alle  $k \geq 2$  ist

$$E_{2k}(z) = 1 - \frac{4k}{B_{2k}} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{2k-1}(n) e^{2\pi i n z}$$

mit  $\sigma_\ell(n) := \sum_{d|n} d^\ell$ . Speziell ist

$$E_4(z) = 1 + 240 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_3(n) e^{2\pi i n z},$$

$$E_6(z) = 1 - 504 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_5(n) e^{2\pi i n z},$$

$$E_8(z) = 1 + 480 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_7(n) e^{2\pi i n z},$$

$$E_{10}(z) = 1 - 264 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_9(n) e^{2\pi i n z},$$

$$E_{12}(z) = 1 + \frac{65520}{691} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{11}(n) e^{2\pi i n z},$$

$$E_{14}(z) = 1 - 24 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{13}(n) e^{2\pi i n z}.$$

B

$$\begin{aligned} 2\zeta(2k) E_{2k}(z) &= \sum'_{m,n \in \mathbb{Z}} (mz + n)^{-2k} \\ &= 2\zeta(2k) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \left( \sum_{n \in \mathbb{Z}} (mz + n)^{-2k} \right) \\ &\stackrel{\text{Lemma 4.2.2}}{=} 2\zeta(2k) + 2 \frac{(-2\pi i)^{2k}}{(2k-1)!} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} n^{2k-1} e^{2\pi i m n z} \\ &= 2\zeta(2k) + 2 \frac{(-2\pi i)^{2k}}{(2k-1)!} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{2k-1}(n) e^{2\pi i n z}, \end{aligned}$$

und mit

$$\zeta(2k) = (-1)^{k-1} \frac{1}{2} \cdot \frac{(2\pi)^{2k} B_{2k}}{(2k)!}$$

folgt die Behauptung. □

**4.2.4 Korollar** Für alle  $n \geq 1$  ist

$$\sigma_7(n) = \sigma_3(n) + 120 \sum_{\nu=1}^{n-1} \sigma_3(\nu) \sigma_3(n-\nu)$$

$$11\sigma_9(n) = 21\sigma_5(n) - 10\sigma_3(n) + 5040 \sum_{k=1}^{n-1} \sigma_3(k) \sigma_5(n-k)$$

B  $E_8 = E_4^2$  nach Beispiele 4.1.7 b), also

$$1 + 480 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_7(n) e^{2\pi i n z} = \left( 1 + 240 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_3(n) e^{2\pi i n z} \right)^2$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert hier die erste Identität.

Ferner ist nach Beispiele 4.1.7 b)  $E_{10} = E_4 E_6$ , und Eintragen der Fourier-Entwicklung sowie Koeffizientenvergleich gibt die Behauptung.  $\square$

Man kann auch in der Gleichung  $E_{14} = E_6 E_8 = E_6 E_4^2$  einen Koeffizientenvergleich führen und hat dann eine Beziehung zwischen  $\sigma_{13}$ ,  $\sigma_5$ ,  $\sigma_7$  bzw.  $\sigma_{13}$ ,  $\sigma_5$  und  $\sigma_3$ . Die Beziehungen aus Korollar 4.2.4 sind nur die ersten aus unendlich vielen derartigen Beziehungen, die man wie folgt auch aus der Theorie der elliptischen Funktionen herleiten kann: Für ein Gitter  $\Lambda = \mathbb{Z} \omega_1 + \mathbb{Z} \omega_2$  setze man für  $n \geq 3$

$$e_n := \sum'_{\omega \in \Lambda} \omega^{-n} = e_n(\Lambda)$$

Dabei verschwindet der Ausdruck für ungerades  $n$ . Dann ist offenbar

$$2\zeta(2k) E_{2k}(z) = \sum'_{m,n \in \mathbb{Z}} (mz + n)^{-2k} = e_{2k}(\mathbb{Z}z + \mathbb{Z}).$$

Die  $e_n$  treten auf in der Laurent-Entwicklung der Weierstraßschen  $\wp$ -Funktion

$$\wp(u) = \frac{1}{u^2} + \sum'_{\omega \in \Lambda} \left( \frac{1}{(u-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right),$$

und zwar entwickelt man zunächst die Weierstraßsche  $\zeta$ -Funktion

$$\begin{aligned} \zeta_W(u) &= \frac{1}{u} + \sum'_{\omega \in \Lambda} \left( \frac{1}{u-\omega} + \frac{1}{\omega} + \frac{u}{\omega^2} \right) \\ &= \frac{1}{u} - \sum'_{\omega \in \Lambda} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{u^n}{\omega^{n+1}} \\ &= \frac{1}{u} - \sum_{n=2}^{\infty} e_{n+1} u^n \\ &= \frac{1}{u} - \sum_{n=2}^{\infty} e_{2n} u^{2n-1}, \end{aligned}$$

also

$$\wp(u) = -\frac{d}{du} \zeta_W(u) = \frac{1}{u^2} + \sum_{n=2}^{\infty} (2n-1) e_{2n} u^{2n-2}.$$

Nun nimmt man die fundamentale Differentialgleichung der  $\wp$ -Funktion

$$\wp'^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3,$$

mit  $g_2 = 60e_4$  und  $g_3 = 140e_6$ , differenziert noch einmal:

$$2\wp'' = 12\wp^2 - g_2, \quad \text{d. h.} \quad \frac{1}{6}\wp'' = \wp^2 - 5e_4.$$

Hier setzt man die Laurent-Entwicklung ein und führt einen Koeffizienten-Vergleich durch. Das liefert für  $n \geq 4$ :

$$\left( \binom{2n-1}{3} - 2(2n-1) \right) e_{2n} = \sum_{k=2}^{n-2} (2k-1)(2(n-k)-1) e_{2k} e_{2(n-k)}.$$

Setzt man hier das Gitter  $\mathbb{Z}z + \mathbb{Z}$  für  $z \in \mathbb{H}$  ein und drückt alles durch die bekannten Fourier-Entwicklungen der  $E_{2k}$  aus, so bekommt man die genannten unendlich vielen Beziehungen zwischen den Teilerpotenzsummen. –

Wir fahren fort in der Betrachtung der Eisensteinreihen zur Modulgruppe und beweisen

#### 4.2.5 Satz

$$E_4(z) = 0 \iff z \equiv \rho \pmod{1\Gamma}$$

$$E_6(z) = 0 \iff z \equiv i \pmod{1\Gamma}$$

*Alle Nullstellen von  $E_4$  und  $E_6$  sind von der Vielfachheit 1.*

B Für alle  $0 \neq f \in A_{2k}(1\Gamma)$  gilt:  $\deg \operatorname{div} f = \frac{k}{6}$ ; also wegen  $E_4 \neq 0 \neq E_6$ :  $\deg \operatorname{div} E_4 = \frac{1}{3}$  und  $\deg \operatorname{div} E_6 = \frac{1}{2}$ . Damit ist alles klar.  $\square$

**Bemerkung** Dass  $E_4(\rho) = 0$  ist, kann man ad hoc so sehen: Es gilt  $\rho^2 + \rho + 1 = 0$  und  $\rho = e^{\frac{2\pi i}{3}}$ , also

$$\begin{aligned} \sum'_{m,n \in \mathbb{Z}} (m\rho + n)^{-4} &= \sum'_{m,n \in \mathbb{Z}} (m\rho + n\rho^3)^{-4} \\ &= \rho^{-4} \sum'_{m,n \in \mathbb{Z}} (m + n\rho^2)^{-4} \\ &= \rho^{-1} \sum'_{m,n \in \mathbb{Z}} ((m-n) - n\rho)^{-4} \\ &= \rho^{-1} \sum'_{m,n \in \mathbb{Z}} (m + n\rho)^{-4} \end{aligned}$$

$\Rightarrow E_4(\rho) = 0$ . Ebenso hat man

$$\begin{aligned} \sum'_{m,n \in \mathbb{Z}} (mi + n)^{-6} &= \sum'_{m,n \in \mathbb{Z}} (mi + ni^2)^{-6} \\ &= i^{-6} \sum'_{m,n \in \mathbb{Z}} (m - ni)^{-6} \\ &= - \sum'_{m,n \in \mathbb{Z}} (m + ni)^{-6} \end{aligned}$$

$\Rightarrow E_6(i) = 0$ . Siehe dazu auch Maass (1983a).

#### 4.2.6 Satz Für $k \geq 2$ hat $G_{2k}(1\Gamma)$ die Basis

$$E_4^m E_6^n \quad (m, n \in \mathbb{N}_0, 2m + 3n = k)$$



B Für  $k \geq 2$  ist

$$\dim G_{2k}(\Gamma) = \begin{cases} \left\lfloor \frac{k}{6} \right\rfloor + 1 & \text{für } k \not\equiv 1 \pmod{6} \\ \left\lfloor \frac{k}{6} \right\rfloor & \text{für } k \equiv 1 \pmod{6} \end{cases} = \# \left\{ \begin{array}{l} \text{Lösungen der diophant. Gleichung} \\ 2m + 3n = k, m, n \in \mathbb{N}_0 \end{array} \right\}$$

denn: Das ist richtig für  $k = 2, 3, 4, 5, 6, 7$  und bei  $k \mapsto k + 6$  wächst  $\dim G_{2k}(\Gamma)$  um 1 und die Lösungsanzahl auch. Ferner sind die angegebenen Funktionen wirklich in  $G_{2k}(\Gamma)$  und sie sind linear unabhängig. Das folgt sofort aus Satz 4.2.5.  $\square$

Damit ist auch auf der Basis unseres Vorgehens (d. h. auf der Basis von Satz 3.3.2) die Tatsache bewiesen, dass man  $\sigma_{2k-1}(n)$  als Polynom in  $\sigma_3(\cdot)$  und  $\sigma_5(\cdot)$  schreiben kann. Ein explizites Verfahren, die lineare Relation zwischen  $E_{2k}$  und den  $E_4^m E_6^n$  ( $m, n \in \mathbb{N}_0$ ,  $2m + 3n = k$ ) wirklich aufzustellen ohne Bezug auf die Theorie der elliptischen Funktionen zu nehmen, gibt Hurwitz in seiner Dissertation auf S. 35 ff. an. Dabei benutzt Hurwitz eine Methode von Eisenstein, und er zitiert Eisensteins große Arbeit: „Genaue Untersuchung der unendlichen Doppelprodukte, aus welchen die elliptischen Funktionen als Quotienten zusammengesetzt sind, und der mit ihnen zusammenhängenden Doppelreihen“, siehe Hurwitz (1847). André Weil zitiert Kummers Bemerkung, dass diese Arbeit Eisensteins selten zitiert worden sei, und bemerkt, dass Kummer und Hurwitz die einzigen Mathematiker des 19. Jahrhunderts gewesen zu sein scheinen, die diese Arbeit zitiert haben (siehe Fricke's Enzyklopädiebericht). Dabei steckt in dieser Arbeit bereits die Weierstraßsche  $\wp$ -Funktion, worauf Hurwitz auf S. 35 seiner Dissertation hinweist, inklusive der Differentialgleichung. Hurwitz dazu an gleicher Stelle „allerdings ohne dass Eisenstein die prinzipielle Bedeutung derselben erkannt hätte“. Weierstraß führte  $\wp$  erst 1862 in seinen Vorlesungen ein.

### 4.3 Die Modulform $\Delta$

$$E_4^3 - E_6^2 \in S_{12}(\Gamma), E_4(\rho) = 0, E_6(\rho) \neq 0. \Rightarrow E_4^3 - E_6^2 \neq 0, \dim S_{12}(\Gamma) = 1. \Rightarrow S_{12}(\Gamma) = \mathbb{C}(E_4^3 - E_6^2).$$

$$\mathbf{4.3.1 Definition (Modulform \Delta)} \quad \Delta := 2^{-6} \cdot 3^{-3} (E_4^3 - E_6^2) = 12^{-3} (E_4^3 - E_6^2) = 1728 (E_4^3 - E_6^2).$$

Zusammenhang mit  $g_2, g_3$ :  $g_2 = 60e_4$ ,  $g_3 = 140e_6$  mit  $e_{2k}(z) = \sum'_{m,n \in \mathbb{Z}} (mz + n)^{-2k}$ .

$$\Delta_0 = g_2^3 - 27g_3^2 \text{ ist die Diskriminante des Polynoms } 4X^3 - g_2X - g_3. \Rightarrow \Delta = (2\pi)^{-12} \Delta_0. \Rightarrow S_{12}(\Gamma) = \mathbb{C}\Delta.$$

**4.3.2 Satz**  $\Delta$  ist nullstellenfrei in  $\mathbb{H}$ ,  $v_\infty(\Delta) = 1$ .

B Entweder zeigt man die Behauptung mit der Theorie der Elliptischen Funktionen für  $\Delta = (2\pi)^{-12} \Delta_0$  und Fourierentwicklung, oder man zeigt mit  $\Delta \neq 0$  und Satz 3.2.4:  $\deg \operatorname{div} \Delta = \frac{k}{6} = 1$ .  $\Delta \in S_{12}(\Gamma)$  und somit  $v_\infty(\Delta) \geq 1$  impliziert dann  $v_\infty(\Delta) = 1$ .  $\square$

**4.3.3 Satz** Schreibt man  $\Delta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) e^{2\pi i n z}$  für  $z \in \mathbb{H}$ , so sind  $\tau(n) \in \mathbb{Z}$  für  $n \in \mathbb{Z}$ , und es gilt:  $\tau(1) = 1$ .

B Mit  $t = e^{2\pi iz}$ , also  $|t| < 1$ , gilt:  $E_4(z) = 1 + 2^4 \cdot 3 \cdot 5P(t)$ ,  $E_6(z) = 1 - 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7Q(t)$  mit  $P(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_3(n) t^n$  und  $Q(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_5(n) t^n$ .

$$\begin{aligned} \Rightarrow \Delta(z) &= 2^{-6} 3^{-3} (E_4^3 - E_6^2) \\ &= 2^{-6} 3^{-3} \left( (1 + 2^4 \cdot 3 \cdot 5P(t))^3 - (1 - 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7Q(t))^2 \right) \\ &= 2^{-6} \cdot 3^{-3} (2^4 \cdot 3^2 \cdot 5P(t) + 2^4 \cdot 3^2 \cdot 7Q(t)) + R(t) \\ &= \frac{1}{12} \sum_{n=1}^{\infty} (5\sigma_3(n) + 7\sigma_5(n)) t^n + R(t), \end{aligned}$$

wobei  $R(t)$  eine für  $|t| < 1$  konvergente Potenzreihe in  $t$  mit Taylor-Koeffizienten in  $\mathbb{Z}$  ist, die mit Potenzen  $t^2$  beginnt. Im Fall  $n = 1$  liest man ab:  $\tau(1) = 1$ . Hier ist für alle  $n \geq 1$   $5\sigma_3(n) + 7\sigma_5(n) \equiv 0 \pmod{12}$ , denn für alle  $d \in \mathbb{N}$  ist

$$5d^3 + 7d^5 \equiv 5d^3 - 5d^5 = 5d^3(1 - d^2) = -5(d-1)d^3(d+1) \equiv 0 \pmod{12} \quad \square$$

**4.3.4 Satz (Ramanujan, 1916)** Für die Koeffizienten  $\tau(n)$  aus der Fourier-Entwicklung von  $\Delta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) e^{2\pi inz}$  gilt:

$$\begin{aligned} \tau(n) &= \frac{65}{756} \sigma_{11}(n) + \frac{691}{756} \sigma_3(n) - \frac{691}{3} \sum_{k=1}^n \sigma_5(k) \sigma_5(n-k), \\ \tau(n) &\equiv \sigma_{11}(n) \pmod{691} \end{aligned}$$

B

$$\begin{aligned} E_6(z) &= 1 - 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_5(n) e^{2\pi inz}, \\ E_{12}(z) &= 1 + \frac{2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13}{691} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{11}(n) e^{2\pi inz} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 691E_{12} - 691E_6^2 \in S_{12}(\Gamma) = \mathbb{C}\Delta. \Rightarrow \exists \alpha \in \mathbb{Z} \quad 691E_{12} - 691E_6^2 = \alpha\Delta. \text{ Wir bestimmen } \alpha:$$

$$691E_{12} - 691E_6^2 = \sum_{n=1}^{\infty} c_n t^n$$

mit  $t = e^{2\pi iz}$  und

$$\begin{aligned} c_n &= 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13 \sigma_{11}(n) - 691 \left( -2^4 \cdot 3^2 \cdot 7 \sigma_5(n) + (2^3 \cdot 3^2 \cdot 7)^2 \sum_{k=1}^{n-1} \sigma_5(k) \sigma_5(n-k) \right) \\ &= 2^4 \cdot 3^2 \cdot 7 \left( 5 \cdot 13 \sigma_{11}(n) + 691 \sigma_5(n) - 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 691 \sum_{k=1}^{n-1} \sigma_5(k) \sigma_5(n-k) \right) \end{aligned}$$

$$\tau(1) = 1 \Rightarrow \alpha = c_1 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 7 (65 + 691) = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 756. \quad c_n = \alpha \tau(n).$$

$$\Rightarrow \tau(n) = \frac{65}{756} \sigma_{11}(n) + \frac{691}{756} \sigma_5(n) - \frac{691}{3} \sum_{k=1}^n \sigma_5(k) \sigma_5(n-k)$$

$$\Rightarrow 756(\tau(n) - \sigma_{11}(n)) \equiv 0 \pmod{691}, \text{ also } \tau(n) \equiv \sigma_{11}(n) \pmod{691}. \quad \square$$

Die Lehmarsche Vermutung besagt:  $\tau(n) \neq 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

**4.3.5 Satz** Für  $k \in \mathbb{Z}$  ist  $S_{2k}(\Gamma) = \Delta G_{2k-12}(\Gamma)$ .

B „ $\supset$ “ ist klar, und die Dimensionen sind gleich. □

**4.3.6 Beispiel**  $S_8(\Gamma_0(2)) = \mathbb{C}(\Delta(z) \Delta(2z))^{1/3}$ .

B  $\dim S_8(\Gamma_0(2)) = \dim S_8(\Gamma) = 1$  nach Korollar 3.3.9.  $\Delta$  ist nullstellenfrei in  $\mathbb{H}$ , also ist auch  $g(z) := \Delta(z) \Delta(2z)$  nullstellenfrei in  $\mathbb{H}$ , hat also eine in  $\mathbb{H}$  holomorphe dritte Wurzel.

Behauptung:  $\Delta(nz) \in S_{12}(\Gamma_0(n))$ .

Begründung: Sei  $S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(n)$ .  $\Rightarrow c \equiv 0 \pmod n$ .

$$\begin{aligned} \Rightarrow \Delta(nz) \Big|_{12} S &= (cz + d)^{-12} \Delta\left(n \frac{az + b}{cz + d}\right) \\ &= \left(\frac{c}{n}nz + d\right)^{-12} \Delta\left(\frac{anz + bn}{\frac{c}{n}nz + d}\right) \\ &= \left(\Delta \Big|_{12} \begin{pmatrix} a & bn \\ \frac{c}{n} & d \end{pmatrix}\right)(nz) = \Delta(nz) \end{aligned}$$

$\Rightarrow (z \mapsto \Delta(nz))$  hat das richtige Transformationsverhalten und verschwindet in allen Spitzen.

$\Rightarrow \Delta(nz) \in S_{12}(\Gamma_0(n))$ .  $\Rightarrow g \in S_{24}(\Gamma_0(2))$ . Sei  $0 \neq f \in S_8(\Gamma_0(2))$ . (Wegen  $\dim S_8(\Gamma_0(2)) = 1$  ist  $f$  dann bis auf einen konstanten Faktor eindeutig bestimmt.)  $\Rightarrow f^3 \in S_{24}(\Gamma_0(2))$ .  $\Rightarrow \frac{f^3}{g} \in A_0(\Gamma_0(2))$  und  $\frac{f^3}{g}$  ist holomorph in  $\mathbb{H}$ . Wir zeigen:  $\frac{f^3}{g}$  hat in allen Spitzen von  $\Gamma_0(2)$  eine Ordnung  $\geq 0$ .

**Spitze  $\infty$ :**  $q = e^{2\pi iz}$ .

$$\Rightarrow g(z) = \Delta(z) \Delta(2z) = q \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n q^n\right) q^2 \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} a'_n q^{2n}\right) = q^3 \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n q^n\right)$$

mit gewissen Koeffizienten  $a_n, a'_n, b_n$ .  $\Rightarrow v_{\infty}(g) = 3$ .  $f$  verschwindet in  $\infty$ .  $\Rightarrow v_{\infty}(f^3) \geq 3$ .  $\Rightarrow v_{\infty}\left(\frac{f^3}{g}\right) \geq 0$ .

**Spitze 0:**  $0 = T^{-1}\infty$  mit  $T = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow g \Big|_{24} T^{-1}(z) &= z^{-24} \Delta(Tz) \Delta\left(-\frac{2}{z}\right) \\ &= \underbrace{z^{-12} \Delta\left(-\frac{1}{z}\right)}_{=\Delta \Big| T(z)=\Delta(z)} \cdot \underbrace{z^{-12} \Delta\left(-\frac{2}{z}\right)}_{=2^{-12} \Delta \Big|_{12} T\left(\frac{z}{2}\right)=2^{-12} \Delta\left(\frac{z}{2}\right)} \\ &= 2^{-12} \Delta(z) \Delta\left(\frac{z}{2}\right) = 2^{-12} e^{3\frac{2\pi iz}{2}} (1 + \dots) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow v_0(g) = 3, v_0(f^3) \geq 3. \Rightarrow v_0\left(\frac{f^3}{g}\right) \geq 0.$$

$\Rightarrow \frac{f^3}{g} \in G_0(\Gamma_0(2))$ , also konstant. Das liefert die Behauptung.  $\square$

**Bemerkung** Nach gleichem Muster kann man zeigen: Für  $n \in \{2, 3, 5, 11\}$  gilt:

$$S_{24/(n+1)}(\Gamma_0(n)) = \mathbb{C}(\Delta(z)\Delta(nz))^{\frac{1}{n+1}}$$

Für  $n \in \{2, 3, 4, 6, 12\}$  gilt:

$$S_{12/n}(\Gamma(n)) = \mathbb{C} \cdot \Delta^{\frac{1}{n}}$$

## 4.4 Die Dedekindsche $\eta$ -Funktion

### 4.4.1 Definition (Dedekind, 1877)

$$\eta(z) := e^{\frac{\pi iz}{12}} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - e^{2\pi i n z}) \quad (z \in \mathbb{H})$$

Offenbar gilt:  $\eta(z+1) = e^{\frac{\pi i}{12}} \eta(z)$ .

### 4.4.2 Satz (Dedekind)

$$\eta\left(-\frac{1}{z}\right) = \sqrt{\frac{z}{i}} \eta(z) \quad (z \in \mathbb{H}),$$

dabei  $\sqrt{\frac{z}{i}} > 0$  für  $z = iy$  mit  $y > 0$ .

B Es genügt zu zeigen:

$$\log \eta\left(\frac{i}{y}\right) - \log \eta(iy) = \frac{1}{2} \log y \quad (y > 0)$$

Hier ist

$$\begin{aligned} \log \eta(iy) &= -\frac{\pi y}{12} + \log \prod_{n=1}^{\infty} (1 - e^{-2\pi n y}) = -\frac{\pi y}{12} + \sum_{n=1}^{\infty} \log(1 - e^{-2\pi n y}) \\ &= -\frac{\pi y}{12} - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-2\pi m n y}}{m} = -\frac{\pi y}{12} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \frac{e^{-2\pi m y}}{1 - e^{-2\pi m y}} \\ &= -\frac{\pi y}{12} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \frac{1}{1 - e^{-2\pi m y}}. \end{aligned}$$

D. h. zu zeigen ist

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \frac{1}{1 - e^{-2\pi m y}} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \frac{1}{1 - e^{-2\pi \frac{m}{y}}} - \frac{\pi}{12} \left(y - \frac{1}{y}\right) = -\frac{1}{2} \log y \quad (y > 0) \quad (4.2)$$

Wir beweisen das mit dem Residuen-Kalkül angewandt auf die Funktionen

$$F_n(z) := -\frac{1}{8z} \cot\left(\pi i \left(n + \frac{1}{2}\right) z\right) \cot\left(\frac{\pi \left(n + \frac{1}{2}\right) z}{y}\right)$$

( $y > 0$  fest,  $z$  komplexe Variable) und den Weg  $C$ , der aus den Strecken ( $y \rightarrow i \rightarrow -y \rightarrow -i \rightarrow y$ ) besteht.  $F_n$  hat innerhalb von  $C$  einfache Pole in  $\frac{ik}{n+\frac{1}{2}}$  für  $k = \pm 1, \dots, \pm n$  und in  $\frac{ky}{n+\frac{1}{2}}$  für  $k = \pm 1, \dots, \pm n$  und einen dreifachen Pol in 0 mit  $\text{Res}_0 F_n = \frac{i}{24} \left(y - \frac{1}{y}\right)$ . Beachte:  $\cot t = \frac{1}{t} - \frac{1}{3}t + \dots$ . Weiter ist  $\text{Res}_{t=0} \cot(\alpha t) = \frac{1}{\alpha}$  für  $\alpha \neq 0$ , also

$$\text{Res}_{\frac{ik}{n+\frac{1}{2}}} F_n = \frac{1}{8\pi k} \cot \frac{\pi i k}{y}, \quad \text{Res}_{\frac{ky}{n+\frac{1}{2}}} F_n = -\frac{1}{8\pi k} \cot(\pi i k y).$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sum_{z \in \text{int } C} \text{Res}_z F_n &= \frac{i}{24} \left(y - \frac{1}{y}\right) + \sum_{k=-n}'^n \frac{1}{8\pi k} \cot \frac{\pi i k}{y} - \sum_{k=-n}'^n \frac{1}{8\pi k} \cot \pi i k y \\ &\stackrel{*}{=} 2\pi i \sum_{z \in \text{int } C} \text{Res}_z F_n = -\frac{\pi}{12} \left(y - \frac{1}{y}\right) + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \frac{1}{1 - e^{2\pi k y}} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \frac{1}{1 - e^{2\pi \frac{k}{y}}} \\ &= n\text{-te Teilsumme auf der linken Seite von (4.2)} \\ &= \int_C F_n(z) dz \end{aligned}$$

Dabei gilt \* wegen  $\cot i t = \frac{1}{i} \left(1 - \frac{2}{1 - e^{2t}}\right)$ . Noch zu zeigen ist also  $\int_C F_n(z) dz \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{2} \log y$ . Es gilt:

$$\begin{aligned} z \cdot F_n(z) &= -\frac{1}{8} \cot \left( \pi i \left( n + \frac{1}{2} \right) z \right) \cot \left( \pi \left( n + \frac{1}{2} \right) \frac{z}{y} \right) \\ &= \frac{1}{8} \left( 1 - \frac{2}{1 - e^{-2\pi \left( n + \frac{1}{2} \right) z}} \right) \left( 1 - \frac{2}{1 - e^{2\pi i \left( n + \frac{1}{2} \right) \frac{z}{y}}} \right) \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \begin{cases} \frac{1}{8} & \text{für } z \in \mathbb{H}, \text{Re } z > 0 \\ -\frac{1}{8} & \text{für } z \in \mathbb{H}, \text{Re } z < 0 \end{cases} \end{aligned} \tag{4.3}$$

$z \cdot F_n(z)$  ist gerade, der Limes ist also auf ganz  $C$  bekannt (0 in den Ecken).

Behauptung:  $z \cdot F_n(z)$  ist auf  $C$  gleichmäßig beschränkt bzgl.  $n$

Begründung: Abschätzung auf dem Weg von  $y$  nach  $i$ ,  $z = i + t(y - i)$  für  $0 \leq t \leq 1$ : Zu zeigen ist, dass die vorkommenden Nenner in der Darstellung (4.3) betragsmäßig durch

eine positive Konstante gleichmäßig in  $n$  nach unten beschränkt sind.

$$\begin{aligned}
\left|1 - e^{-2\pi(n+\frac{1}{2})z}\right|^2 &= \left|1 - e^{-2\pi(n+\frac{1}{2})(ty+(1-t)i)}\right|^2 \\
&= 1 - 2\cos\left(2\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)(1-t)\right)e^{-2\pi(n+\frac{1}{2})ty} + e^{-4\pi(n+\frac{1}{2})ty} \\
&= 1 + 2\cos\left(2\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)e^{-2\pi(n+\frac{1}{2})ty} + e^{-4\pi(n+\frac{1}{2})ty} \\
&\geq \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \leq t \leq \frac{1}{4(n+\frac{1}{2})} \\ 1 - 2e^{-2\pi(n+\frac{1}{2})ty} + e^{-4\pi(n+\frac{1}{2})\frac{1-t}{y}} & \text{für } \frac{1}{4(n+\frac{1}{2})} \leq t \leq 1 \end{cases} \\
&\geq \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \leq t \leq \frac{1}{4(n+\frac{1}{2})} \\ \left(1 - e^{-2\pi(n+\frac{1}{2})ty}\right)^2 & \text{für } \frac{1}{4(n+\frac{1}{2})} \leq t \leq 1 \end{cases} \\
&\geq \left(1 - e^{-\frac{\pi}{2}y}\right)^2 \quad (0 \leq t \leq 1)
\end{aligned}$$

Weiter ist auf der Strecke von  $y$  nach  $i$

$$\begin{aligned}
\left|1 - e^{2\pi i(n+\frac{1}{2})\frac{z}{y}}\right|^2 &= 1 - 2\cos\left(2\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)e^{-2\pi(n+\frac{1}{2})\frac{1-t}{y}} + e^{-4\pi(n+\frac{1}{2})\frac{1-t}{y}} \\
&= \text{obiger Ausdruck mit } t \mapsto 1-t \text{ und } y \mapsto \frac{1}{y} \\
&\geq \left(1 - e^{-\frac{\pi}{2y}}\right)^2 > 0 \quad (0 \leq t \leq 1)
\end{aligned}$$

$\Rightarrow |z \cdot F_n(z)| \leq \alpha$  mit geeignetem  $\alpha > 0$  für alle  $z \in [C]$  auf der Strecke von  $y$  nach  $i$ . Es gilt  $z \cdot F_n(z) = -\bar{z} \cdot F_n(\bar{z})$ , also gilt die gleiche Abschätzung auf der Strecke von  $-i$  nach  $y$ .  $z \cdot F_n(z)$  ist gerade, also gilt diese Abschätzung auf ganz  $C$ . Mit majorisierter Konvergenz dürfen wir also folgern:

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \int_C F_n(z) dz &= \int_C \left( \lim_{n \rightarrow \infty} (z \cdot F_n(z)) \right) \frac{dz}{z} \\
&= \frac{1}{8} \left( \int_y^i \frac{dz}{z} + \int_i^{-y} \frac{dz}{z} - \int_{-y}^{-i} \frac{dz}{z} - \int_{-i}^y \frac{dz}{z} \right) \\
&= \frac{1}{4} \left( \frac{\pi i}{2} - \log y - \left( \log y + \frac{\pi i}{2} \right) \right) \\
&= -\frac{1}{2} \log y
\end{aligned}$$

□

**4.4.3 Satz** Zu jedem  $S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in {}_1\Gamma$  existiert eine 24. Einheitswurzel  $v(S)$ , so dass gilt:

$$\eta(Sz) = v(S)(cz+d)^{\frac{1}{2}}\eta(z),$$

wobei die Quadratwurzel durch  $-\pi < \arg w \leq \pi$  für  $0 \neq w \in \mathbb{C}$  fixiert sei.

B Die Behauptung gilt nach Satz 4.4.2 und der vorstehenden Bemerkung für  $T$  und  $U$ , also für ganz  ${}_1\Gamma$ .  $\square$

**Bemerkung**  $\eta$  ist Modulform vom Gewicht  $\frac{1}{2}$  zum Multiplikatorsystem  $\nu$ ,  $\nu$  lässt sich explizit angeben, siehe Rademacher (1973), Knopp (1970), Apostol (1976) und Petersson (1982).

#### 4.4.4 Korollar (C.G.J. Jacobi)

$$\Delta(z) = \eta^{24}(z) = e^{2\pi iz} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - e^{2\pi inz})^{24}$$

B Satz 4.4.3  $\Rightarrow \eta^{24} \in S_{12}({}_1\Gamma)$ , und die Fourier-Entwicklung von  $\eta^{24}$  beginnt mit Termen  $e^{2\pi iz} + \dots$   $\tau(1) = 1$ , also wegen  $\dim S_{12}({}_1\Gamma) = 1$  sofort  $\Delta = \eta^{24}$ .  $\square$

Wir fragen uns nach der Fourier-Entwicklung von  $\eta$ : Leonard Euler tätigte folgende Überlegungen:

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n) = 1 - q - q^2 + q^5 + q^7 - q^{12} - q^{15} + q^{22} + q^{26} - q^{35} - q^{40} + q^{51} + \dots$$

Wir betrachten Exponenten und deren Differenzen:

Exp.	1	2	5	7	12	15	22	26	35	40	51
Diff.	1	1	3	2	5	3	7	4	9	5	11

Schreibt man diese Folge alternierend nach links und rechts, nimmt sie die Form von Tabelle 4.2 an: Die Exponenten bilden offensichtlich eine arithmetische Progression zweiter

40	26	15	7	2	0	1	5	12	22	35	51
-14	-11	-8	-5	-2	1	4	7	10	13	16	
3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	

Tabelle 4.2: Exponenten alternierend geschrieben

Ordnung  $a_m = \alpha m^2 + \beta m + \gamma$  für  $m \in \mathbb{Z}$ .  $a_0 = 1$ ,  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 5$ .  $\Rightarrow a_m = \frac{1}{2}(3m^2 - m)$  für  $m \in \mathbb{Z}$ , die sog. Pentagonalzahlen.

#### 4.4.5 Satz (Eulerscher Pentagonalzahlensatz) (1742 vermutet, 1750 bewiesen)

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} (-1)^m q^{\frac{3m^2+m}{2}}$$

Siehe dazu Rademacher (1973), Neher (1985) und Siegel.

B Aus Elstrodt (2004), Kapitel 28, erhalten wir das Resultat

$$\Theta(z, \tau) := \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{\pi i \tau (n+z)^2} = \sqrt{\frac{\tau}{i}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{-\pi i \frac{k^2}{\tau} + 2\pi i k z} \quad (\tau \in \mathbb{H}, z \in \mathbb{C}).$$

Wir setzen

$$\vartheta(z, \tau) := \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{\pi i n^2 \tau + 2\pi i n z} \quad (\tau \in \mathbb{H}, z \in \mathbb{C})$$

und erhalten die  $\Theta$ -Formel:

$$\vartheta\left(z, -\frac{1}{\tau}\right) = \sqrt{\frac{\tau}{i}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{\pi i \tau (n+z)^2} \quad (4.4)$$

Wir haben  $\sum_{m \in \mathbb{Z}} (-1)^m q^{\frac{3m^2+m}{2}}$ , setzen dort  $q = e^{2\pi i \tau}$  und erhalten

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{\pi i m^2 \cdot 3\tau + \pi i m(\tau+1)} = \vartheta\left(\frac{\tau+1}{2}, 3\tau\right).$$

Damit ist die Behauptung von Satz 4.4.5 äquivalent zur Gleichung

$$\eta(\tau) = e^{\frac{\pi i \tau}{12}} \vartheta\left(\frac{\tau+1}{2}, 3\tau\right) =: f(\tau)$$

Zum Beweis zeigen wir:  $\frac{f}{\eta} \in G_0(1, \Gamma)$ . Offenbar ist  $\frac{f}{\eta}$  holomorph in  $\mathbb{H}$ .

(i)  $\tau \mapsto \vartheta\left(\frac{\tau+1}{2}, 3\tau\right)$  ist periodisch modulo 1 nach obiger Umformung, also ist  $\frac{f}{\eta}$  periodisch modulo 1.

(ii)

$$\begin{aligned} f\left(-\frac{1}{\tau}\right) &= e^{-\frac{\pi i}{12\tau}} \vartheta\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2\tau}, -\frac{3}{\tau}\right) \\ &\stackrel{(4.4)}{=} e^{-\frac{\pi i}{12\tau}} \sqrt{\frac{\tau}{3i}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{\frac{\pi i \tau}{12} (2n+1-\frac{1}{\tau})^2} \\ &= \sqrt{\frac{\tau}{3i}} \sum_{\substack{u \in \mathbb{Z} \\ u \equiv 1 \pmod{2}}} e^{\frac{\pi i \tau}{12} u^2 - \frac{\pi i u}{6}} \\ &\stackrel{\text{gerade}}{=} \sqrt{\frac{\tau}{3i}} \sum_{\substack{u \in \mathbb{Z} \\ u \equiv 1 \pmod{2}}} e^{\frac{\pi i \tau}{12} u^2} \cdot \frac{1}{2} \left( e^{-\frac{\pi i u}{6}} + e^{\frac{\pi i u}{6}} \right) \\ &\stackrel{\text{RK-Zerl.}}{\stackrel{\text{mod } 6}}{=} \sqrt{\frac{\tau}{3i}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{\frac{\pi i \tau}{12} (6n+1)^2} \underbrace{\left( e^{\frac{\pi i (6n+1)}{6}} + e^{-\frac{\pi i (6n+1)}{6}} \right)}_{=(-1)^n \sqrt{3}} \\ &= \sqrt{\frac{\tau}{i}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n e^{\frac{\pi i \tau}{12} (6n+1)^2} \\ &= \sqrt{\frac{\tau}{i}} e^{\frac{\pi i \tau}{12}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{\pi i n^2 \cdot 3\tau + \pi i n(\tau+1)} \\ &= \sqrt{\frac{\tau}{i}} f(\tau) \end{aligned}$$

Dabei haben wir ausgenutzt, dass für  $u = 3v$  mit  $v \equiv 1 \pmod{2}$  gilt:  $e^{\frac{\pi i u}{6}} + e^{-\frac{\pi i u}{6}} = 0$ .  
 $\Rightarrow \frac{f}{\eta}$  ist invariant unter der Transformation  $\tau \mapsto -\frac{1}{\tau}$ .



$$(iii) \quad \frac{f}{\eta} \xrightarrow{\operatorname{Im} z \rightarrow \infty} 1.$$

$\Rightarrow \frac{f}{\eta} \in G_0(1\Gamma) = \mathbb{C} \cdot 1$ , wegen des Grenzwertes also bereits  $f = \eta$ . □

## 4.5 Die Modulfunktion $J$

**4.5.1 Definition (Modulfunktion  $J$ )**  $J := \frac{E_4^3}{\Delta}$  heißt die absolute Invariante (zur Modulgruppe).

**Bemerkung** In Termen von  $g_2, g_3$  setzt man in der Theorie elliptischer Funktionen  $j = \frac{g_2^3}{g_2^3 - 27g_3^2}$ ,  $J = 12^3 j$ .

**4.5.2 Satz**  $J$  ist eine in  $\mathbb{H}$  holomorphe Modulfunktion mit der Fourier-Entwicklung

$$J(\tau) = \frac{1}{q} + 744 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n q^n \quad \left( q = e^{2\pi i \tau}, \tau \in \mathbb{H} \right)$$

mit  $c_n \in \mathbb{N}$ . Genauer gilt:

$n$	1	2	3	4
$c_n$	196.884	21.492.760	864.299.970	20.245.856.256

B  $\Delta$  ist nullstellenfrei in  $\mathbb{H}$ .  $\Rightarrow J \in A_0(1\Gamma)$  ist in  $\mathbb{H}$  holomorph.

$$\begin{aligned} J(\tau) &= \frac{E_4^3}{\Delta} = \frac{(1 + 240 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_3(n) q^n)^3}{q \cdot \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)^{24}} \\ &= \frac{1}{q} \left( 1 + 240 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_3(n) q^n \right)^3 \left( \prod_{n=1}^{\infty} (1 + q^n + q^{2n} + \dots) \right)^{24} \end{aligned}$$

hat Koeffizienten in  $\mathbb{N}$ . □

**Bemerkung** Die  $c_n$  haben bemerkenswerte Teilbarkeitseigenschaften (siehe Serre (1970) und Apostol (1976)).

1973 vermuteten Bernd Fischer (Bielefeld) und Robert Griess die Existenz einer endlichen einfachen Gruppe  $M$  der Ordnung

$$\begin{aligned} |M| &= 2^{46} \cdot 3^{20} \cdot 5^9 \cdot 7^6 \cdot 11^2 \cdot 13^3 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 41 \cdot 71 \\ &= 808.017.424.794.512.875.886.459.904.961.710.757.005.754.368.000.000.000 \\ &\approx 8 \cdot 10^{53} \end{aligned}$$

Conway und Norton zeigten: Wenn  $M$  existiert, so ist der kleinste nicht-triviale Grad einer irreduziblen Darstellung von  $M$  gleich 196.883. Man kann unter der Annahme der Existenz von  $M$  eine vollständige Charaktertafel von  $M$  hinschreiben:  $\chi_1 = 1$ ,  $\chi_2 =$  die von Conway

und Norton gefundene Darstellung, ...,  $\chi_{172}$ .

McKay bemerkte 1978, dass  $\chi_1(1) + \chi_2(1) = c_1$  gilt. Darauf aufbauend zeigte Tom Thompson:

$$\begin{aligned}\chi_1(1) + \chi_2(1) + \chi_3(1) &= c_2 \\ 2\chi_1(1) + 2\chi_2(1) + \chi_3(1) + \chi_4(1) &= c_3 \\ 3\chi_1(1) + 3\chi_2(1) + \chi_3(1) + 2\chi_4(1) + \chi_5(1) &= c_4 \\ 4\chi_1(1) + 5\chi_2(1) + 3\chi_3(1) + 2\chi_4(1) + \chi_5(1) + \chi_6(1) + \chi_7(1) &= c_5\end{aligned}$$

Diese Resultate finden sich in Conway und Norton (1979). Die Existenz von  $M$  zeigte Robert Griess 1982, die Verbindung zur Theorie der elliptischen Funktionen erfolgte in Borcherds (1992).

**4.5.3 Korollar**  $\overline{J(z)} = J(-\bar{z})$  für alle  $z \in \mathbb{H}$ .

B  $J$  hat reelle Fourier-Koeffizienten. □

Allgemeine Theorie liefert:  $J$  entspricht eine holomorphe Abbildung

$$J^*: {}_1\Gamma \backslash \mathbb{H}^* \rightarrow \mathbb{P}.$$

$J^*$  ist holomorph in  ${}_1\Gamma \backslash \mathbb{H}$  und hat in  ${}_1\Gamma\infty$  einen Pol 1. Ordnung mit Residuum 1. D. h.  $J^*$  ist eine konforme Abbildung von  ${}_1\Gamma \backslash \mathbb{H}^* \rightarrow \mathbb{P}$ . Das liefert

**4.5.4 Korollar**  $J$  definiert eine konforme Abbildung  $J^*: {}_1\Gamma \backslash \mathbb{H}^* \rightarrow \mathbb{P}$ .

**4.5.5 Korollar**  $A_0({}_1\Gamma) = \mathbb{C}(J)$ .

B  $\text{Mer}(\mathbb{P}) = \mathbb{C}(\text{id})$ . □

**4.5.6 Korollar**  $\mathbb{C}[J] = \{f \in A_0({}_1\Gamma) : f \text{ holomorph in } \mathbb{H}\}$

B Die in  $\mathbb{C}$  holomorphen Funktionen sind genau die Polynome. □

**Bemerkung** Entsprechendes gilt für alle Quotienten  $\Gamma \backslash \mathbb{H}^*$  vom Geschlecht 0.

**4.5.7 Korollar** Zu jedem  $z \in \mathbb{C}$  existiert eine eindeutige Äquivalenzklasse von Gittern in  $\mathbb{C}$  (modulo Homothetie) mit absoluter Invariante  $J(\tau) = z$ .

B  $J$  bildet den Fundamentalbereich  $\tilde{D} = F \setminus \{\infty\}$  aus Korollar 1.4.4 bijektiv auf ganz  $\mathbb{C}$  ab. Die Gitter  $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau$  mit  $\tau \in \tilde{D}$  bilden nach Elstrodt (2004) ein Vertretersystem der Gitter in  $\mathbb{C}$  modulo Äquivalenz. □

Umkehrproblem aus der Theorie der elliptischen Funktionen:  $\Lambda = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$  sei ein Gitter in  $\mathbb{C}$ , dazu  $\wp(z)$  mit der Differentialgleichung  $\wp'^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3$  mit  $g_2 = 60 \sum'_{\omega \in \Lambda} \omega^{-4}$  und  $g_3 = 140 \sum'_{\omega \in \Lambda} \omega^{-6}$ . Die Diskriminante  $g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0$  verschwindet nicht. In dieser Situation stellt sich das Umkehrproblem: Seien  $\gamma_2, \gamma_3 \in \mathbb{C}$  gegeben mit  $\gamma_2^3 - 27\gamma_3^2 \neq 0$ . Gibt es ein Gitter  $\Lambda$  in  $\mathbb{C}$  mit  $g_2 = \gamma_2$  und  $g_3 = \gamma_3$ ?

**4.5.8 Satz** Zu jedem Paar  $(\gamma_2, \gamma_3) \in \mathbb{C}^2$  mit  $\gamma_2^3 - 27\gamma_3^2 \neq 0$  existiert ein Gitter  $\Lambda$  in  $\mathbb{C}$  mit zugehörigen Invarianten  $g_2, g_3$ , so dass  $g_2 = \gamma_2$  und  $g_3 = \gamma_3$ .

B Fallunterscheidung:

(i)  $\gamma_2 = 0 \Rightarrow \gamma_3 \neq 0$ . Wir wissen:

$$\begin{aligned} g_2(1, \rho) &= 2\zeta(4) E_4(\rho) = 0 \\ g_3(1, \rho) &= 2\zeta(6) E_6(\rho) \neq 0. \end{aligned}$$

Es gibt also ein  $\omega_1 \in \mathbb{C}^*$  mit  $\omega_1^6 = \frac{g_3(1, \rho)}{\gamma_3}$ . Mit solchem  $\omega_1$  setze man  $\omega_2 := \omega_1 \rho$ ,  $\Lambda := \mathbb{Z} \omega_1 + \mathbb{Z} \omega_2$ . Dann ist  $\Lambda$  ein Gitter in  $\mathbb{C}$ , und es gilt:

$$\begin{aligned} g_2(\omega_1, \omega_2) &= \omega_1^{-4} g_2(1, \rho) = 0 = \gamma_2, \\ g_3(\omega_1, \omega_2) &= \omega_1^{-6} g_3(1, \rho) = \gamma_3. \end{aligned}$$

(ii)  $\gamma_3 = 0 \Rightarrow \gamma_2 \neq 0$ . Wir wissen:

$$\begin{aligned} g_2(1, i) &= 2\zeta(4) E_4(i) \neq 0 \\ g_3(1, i) &= 2\zeta(6) E_6(i) = 0. \end{aligned}$$

Es gibt also ein  $\omega_1 \in \mathbb{C}^*$  mit  $\omega_1^4 = \frac{g_2(1, i)}{\gamma_2}$ . Dazu setze  $\omega_2 := i \omega_1$ ,  $\Lambda := \mathbb{Z} \omega_1 + \mathbb{Z} \omega_2$ . Dann ist  $\Lambda$  ein Gitter in  $\mathbb{C}$ , und es gilt:

$$\begin{aligned} g_2(\omega_1, \omega_2) &= \omega_1^{-4} g_2(1, i) = \gamma_2, \\ g_3(\omega_1, \omega_2) &= \omega_1^{-6} g_3(1, i) = \gamma_3. \end{aligned}$$

(iii)  $\gamma_2 \neq 0 \neq \gamma_3$ . Nach Korollar 4.5.4 wissen wir dann: Es gibt ein  $\tau \in \mathbb{H}$  (eindeutig in  $\tilde{D}$ ), so dass  $j(\tau) = \frac{\gamma_2^3}{\gamma_2^3 - 27\gamma_3^2}$ .  $\gamma_2 \neq 0 \Rightarrow j(\tau) \neq 0 \Rightarrow \tau \notin {}_1\Gamma\rho$ .  $\gamma_3 \neq 0 \Rightarrow j(\tau) \neq 1 \Rightarrow \tau \notin {}_1\Gamma i$ . Es gibt also ein  $\omega_1 \in \mathbb{C}^*$  mit  $\omega_1^2 = \frac{\gamma_2 g_3(1, \tau)}{\gamma_3 g_2(1, \tau)}$ . Wir setzen  $\omega_2 := \omega_1 \tau$  und  $\Lambda := \mathbb{Z} \omega_1 + \mathbb{Z} \omega_2$ . Dann ist  $\Lambda$  ein Gitter in  $\mathbb{C}$ .

$$\frac{g_2(\omega_1, \omega_2)}{g_3(\omega_1, \omega_2)} = \frac{\omega_1^{-4} g_2(1, \tau)}{\omega_1^{-6} g_3(1, \tau)} = \frac{\gamma_2}{\gamma_3} \quad (4.5)$$

Nach Wahl von  $\tau$  ist weiter

$$\begin{aligned} \frac{27\gamma_3^2}{\gamma_2^3} &= \frac{j(\tau) - 1}{j(\tau)} = \frac{27g_3^2(1, \tau)}{g_2^3(1, \tau)} \\ &= \frac{27\omega_1^{12} g_3^2(\omega_1, \omega_2)}{\omega_1^{12} g_2^3(\omega_1, \omega_2)} \\ &\stackrel{(4.5)}{=} 27 \left( \frac{\gamma_3}{\gamma_2} \right)^2 \frac{1}{g_2(\omega_1, \omega_2)} \end{aligned}$$

$\Rightarrow g_2(\omega_1, \omega_2) = \gamma_2$  und wegen (4.5) auch  $g_3(\omega_1, \omega_2) = \gamma_3$ . □

Auch für  $\Gamma_\theta$  und  $\Gamma(2)$  kann man das Analogon der Abbildung  $J$  konkret angeben, bspw.

**4.5.9 Satz**  $f(z) := \frac{\Delta(z)}{\Delta(\frac{z+1}{2})}$  ist eine in  $\mathbb{H}$  holomorphe Modulfunktion zur Gruppe  $\Gamma_\theta$  mit  $v_\infty(f) = 1$  und  $v_1(f) = -1$ .

B **Holomorphie in  $\mathbb{H}$**  klar

**Transformationsverhalten**

$$\begin{aligned} f(U^2 z) &= f(z+2) = \frac{\Delta(z+2)}{\Delta(\frac{z+1}{2}+1)} = \frac{\Delta(z)}{\Delta(\frac{z+1}{2})} \\ f(Tz) &= f\left(-\frac{1}{z}\right) = \frac{\Delta(-\frac{1}{z})}{\Delta(\frac{-\frac{1}{z}+1}{2})} = \frac{\Delta(-\frac{1}{z})}{\Delta(\frac{\frac{z+1}{2}-1}{2})} \\ &= \frac{\Delta(-\frac{1}{z})}{\Delta(A(\frac{z+1}{2}))} = \frac{z^{12}\Delta(z)}{(2\frac{z+1}{2}-1)^{12}\Delta(\frac{z+1}{2})} = \frac{\Delta(z)}{\Delta(\frac{z+1}{2})} = f(z) \end{aligned}$$

mit  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \in {}_1\Gamma \Rightarrow f$  ist invariant unter  $\Gamma_\theta$ .

**Verhalten in  $\infty$**   $\Delta(z) = e^{2\pi iz} (1 + (e^{2\pi iz}))$ , wobei  $(e^{2\pi iz})$  eine Potenzreihe in  $e^{2\pi iz}$  bezeichne.

$$\Rightarrow f(z) = \frac{\Delta(z)}{\Delta(\frac{z+1}{2})} = \frac{e^{2\pi iz} (1 + (e^{2\pi iz}))}{e^{\pi i(z+1)} (1 + (e^{\pi iz}))} = -e^{\pi iz} (1 + (e^{\pi iz}))$$

Die Breite der Spitze  $\infty$  in  $\Gamma_\theta$  beträgt 2, also hat  $f$  in  $\infty$  eine Fourier-Entwicklung vom richtigen Typ mit  $v_\infty(f) = 1$ .

**Verhalten von  $f$  in 1** 1 ist Spitze der Breite 1 von  $\Gamma_\theta$ ,  $1 = UT\infty = A^{-1}\infty$  in alter Schreibweise mit  $A^{-1} = UT$ .

$$\begin{aligned} f|_0 A^{-1}(z) &= f(UTz) = f\left(-\frac{1}{z} + 1\right) \\ &= \frac{\Delta(\frac{z-1}{2})}{\Delta(\frac{(-\frac{1}{z}+1)+1}{2})} = \frac{\Delta(-\frac{1}{z})}{\Delta(-\frac{1}{2z})} \\ &= \frac{z^{12}\Delta(z)}{(2z)^{12}\Delta(2z)} = 2^{-12} e^{-2\pi iz} (1 + (e^{2\pi iz})) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow v_1(f) = -1. \quad \square$$

**4.5.10 Korollar**  $f(z) = \frac{\Delta(z)}{\Delta(\frac{z+1}{2})} \in A_0(\Gamma_\theta)$  definiert eine konforme Abbildung von  $\Gamma_\theta \backslash \mathbb{H}^* \rightarrow \mathbb{P}$ ,  $A_0(\Gamma_\theta) = \mathbb{C}(f)$  und  $\{h \in A_0(\Gamma_\theta) : h \text{ holomorph in } \mathbb{H}\} = \mathbb{C}[f]$ .

Analog kann man für  $\Gamma(2)$  zeigen:  $\wp'^2 = 4(\wp - e_1)(\wp - e_2)(\wp - e_3)$  mit  $e_j = \wp\left(\frac{\omega_j}{2}\right)$ ,  $\omega_3 := \omega_1 + \omega_2$ ,  $\tau := \frac{\omega_2}{\omega_1}$ . Dann sind die  $e_i$  paarweise verschieden, und es gilt:

$$\begin{aligned} e_1 &= \omega_1^{-2} \left( \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} \sum'_{m,n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{\left(m - \frac{1}{2} + n\tau\right)^2} - \frac{1}{(m + n\tau)^2} \right) \\ e_2 &= \omega_1^{-2} \left( \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} \sum'_{m,n \in \mathbb{Z}} \left( m + \left(n - \frac{1}{2}\right)\tau \right)^{-2} - (m + n\tau)^{-2} \right) \\ e_3 &= \omega_1^{-2} \left( \frac{1}{\left(\frac{\tau+1}{2}\right)^2} \sum'_{m,n \in \mathbb{Z}} \left( m - \frac{1}{2} + \left(n - \frac{1}{2}\right)\tau \right)^{-2} - (m + n\tau)^{-2} \right) \end{aligned}$$

Setze  $e_j(\tau) := \omega_1^2 e_j$ . Dann ist die sog. Legendresche Modulfunktion

$$\lambda(\tau) := \frac{e_3(\tau) - e_2(\tau)}{e_1(\tau) - e_2(\tau)}$$

eine Funktion in  $A_0(\Gamma(2))$  mit  $\lambda(\tau) \notin \{0, 1\}$  für alle  $\tau \in \mathbb{H}$ .  $\lambda$  ist das Analogon zu  $J$  für  $\Gamma(2)$ . Insbesondere ist

$$J(\tau) = \frac{4}{27} \frac{(1 - \lambda(\tau) + \lambda^2(\tau))^3}{\lambda^2(\tau)(1 - \lambda^2(\tau))}$$

Siehe dazu auch Ahlfors (1985), Rudin (2002), Chandrasekharan (1985), Tricomi (1948) und Hurwitz (1964).

**4.5.11 Satz** *Ist  $z \in \mathbb{H}$  Element eines imaginärquadratischen Zahlkörpers, so ist  $J(a)$  eine ganze algebraische Zahl.*

B Shimura (1971), S. 108, Theorem 4.14 □

**4.5.12 Satz** *Ist  $z \in \mathbb{H}$  algebraisch, und ist  $z$  nicht Element eines imaginärquadratischen Zahlkörpers, so ist  $J(z)$  transzendent.*

B Siegel (1949). Siehe dazu auch Borel (1966) □

## 5 Metrisierung und Vollständigkeitssatz

### 5.1 Die Peterssionsche Metrisierung

Ansatz: Wir wollen auf  $S_{2k}(\Gamma)$  ein Skalarprodukt definieren durch Integration bzgl. des invarianten Maßes  $d\omega = \frac{dx dy}{y^2}$  über einen Fundamentalbereich  $\mathcal{F}$  von  $\Gamma$ . Dabei brauchen wir einen  $\Gamma$ -invarianten Integranden. Seien etwa  $f, g \in S_{2k}(\Gamma)$ ,  $f|_{2k} S = f$ ,  $g|_{2k} S = g$  für alle  $S \in \Gamma$ .

Dann ist  $(y^k f) \overline{(y^k g)}$   $\Gamma$ -invariant, denn für alle  $S \in S_{2k}(\Gamma)$  gilt:

$$(\operatorname{Im} S z)^{2k} f(Sz) \overline{g(Sz)} = \frac{y^{2k}}{|cz+d|^{4k}} (cz+d)^{2k} f(z) \overline{(cz+d)^{2k} g(z)} = y^{2k} f(z) \overline{g(z)}$$

(Dito. für  $k \in \mathbb{R}$  und  $f, g$  mit dem Transformationsverhalten  $f|_{2k} S = \nu(S) f$ ,  $g|_{2k} S = \nu(S) g$  mit  $|\nu(S)| = 1 \dots$ )

**5.1.1 Definition (Petersson-Produkt)** Sei  $-I \in \Gamma \sqsubset {}_1\Gamma$  und  $\mathcal{F} \subset \mathbb{H}$  sei eine messbare Fundamentalmenge von  $\Gamma$  (bzw.  $\mathcal{F}$  sei eine Menge, die sich von einer solchen Menge nur um eine Nullmenge unterscheidet). Für  $k \in \mathbb{N}$ ,  $f, g \in G_{2k}(\Gamma)$  heißt dann

$$\langle f, g \rangle := \int_{\mathcal{F}} f \overline{g} y^{2k} d\omega$$

das innere Produkt oder *Petersson-Produkt* von  $f$  und  $g$ , falls dieses Integral existiert (das Integral hängt dann nicht von der Auswahl von  $\mathcal{F}$  ab).  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  ist ein inneres Produkt auf der Menge der quadratisch integrierbaren Funktionen aus  $G_{2k}(\Gamma)$ . Dabei heißt  $f \in G_{2k}(\Gamma)$  quadratisch integrierbar, falls  $\int_{\mathcal{F}} |y^k f|^2 d\omega < \infty$ .

**5.1.2 Satz** Sei  $-I \in \Gamma \sqsubset {}_1\Gamma$ ,  $[{}_1\Gamma : \Gamma] < \infty$ ,  $k \geq 1$ ,  $f \in G_{2k}(\Gamma)$ ,  $g \in S_{2k}(\Gamma)$ . Dann existiert das Integral  $\int_{\mathcal{F}} f \overline{g} y^{2k} d\omega$ . Insbesondere definiert  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  ein inneres Produkt auf  $S_{2k}(\Gamma)$ .

B Wir wählen einen Fundamentalbereich von  $\Gamma$ , der aus endlich vielen Translaten des Fundamentalbereichs  $\mathcal{D}$  von  ${}_1\Gamma$  besteht. Dann ist nur zu zeigen, dass  $y^{2k} f \overline{g}$   $\omega$ -integrierbar ist über jedem Spitzensektor von  $\mathcal{F}$ . Sei etwa  $p = A^{-1}\infty$  ( $A^{-1} \in {}_1\Gamma$ ) Spitze der Breite  $\lambda$  von  $\Gamma$ ,  $S = A^{-1}\mathcal{V}$ ,  $\mathcal{V} := \{x+iy : \alpha \leq x \leq \alpha+\lambda, y \geq \beta, \alpha \in \mathbb{R}, \beta > 0\}$  Spitzensektor von  $\mathcal{F}$ .  $f$  und  $g$  haben eine Fourier-Entwicklung:

$$\begin{aligned} f|_{2k} A^{-1}(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{2\pi i \frac{nz}{\lambda}}, \\ g|_{2k} A^{-1}(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{2\pi i \frac{nz}{\lambda}} \end{aligned}$$

Das Produkt dieser Funktionen verschwindet gleichmäßig in  $x$  exponentiell für  $y \rightarrow \infty$ .  $\Rightarrow$   
Das Integral  $\int_{\mathcal{V}} (f|A^{-1}) \overline{(g|A^{-1})} y^{2k} d\omega$  existiert. Hier ist

$$f|A^{-1}(z) \overline{g|A^{-1}(z)} y^{2k} = (\operatorname{Im} A^{-1} z)^{2k} f(A^{-1} z) \overline{g(A^{-1} z)}.$$

Die Transformationsformel liefert dann die Existenz des Integrals

$$\int_{S=A^{-1}\mathcal{V}} y^{2k} f \overline{g} d\omega \quad \square$$

**5.1.3 Lemma** Unter den Voraussetzungen von Satz 5.1.2 gilt mit  $S \in {}_1\Gamma$ :

$$\langle f|S, g|S \rangle = \langle f, g \rangle$$

Dabei ist die linke Seite in  $S^{-1}\Gamma S$  bzgl.  $2k$ ,  $S^{-1}\mathcal{F}$  zu lesen.

B

$$\begin{aligned} \langle f|s, g|s \rangle &= \int_{S^{-1}\mathcal{F}} y^{-2k} f|S \overline{g|S} d\omega = \int_{S^{-1}\mathcal{F}} (\operatorname{Im} Sz)^{2k} f(Sz) \overline{g(Sz)} d\omega \\ &= \int_{\mathcal{F}} y^{2k} f \overline{g} d\omega = \langle f, g \rangle \end{aligned} \quad \square$$

## 5.2 Koeffizientenformel und Vollständigkeitssatz für Poincarésche Reihen

**5.2.1 Satz (Erich Hecke)** Ist  $-I \in \Gamma \sqsubset {}_1\Gamma$ ,  $[{}_1\Gamma : \Gamma] < \infty$  und  $f \in S_{2k}(\Gamma)$ , so ist  $y^k f$  in  $\mathbb{H}$  beschränkt.

B  $|y^k f|$  ist  $\Gamma$ -invariant. Der Nachweis der Beschränktheit genügt also in einem Fundamentalbereich und somit bereits in jedem Spitzensektor. Dazu sei  $p = A^{-1}\infty$  ( $A \in {}_1\Gamma$ ) Spitze der Breite  $\lambda$  von  $\Gamma$ ,  $S = A^{-1}\mathcal{V}$  mit  $\mathcal{V} := \{x + iy : \alpha \leq x \leq \alpha + \lambda, y \geq \beta, \alpha \in \mathbb{R}, \beta > 0\}$ . Dann ist für  $z \in \mathcal{V}$

$$|y^k f(A^{-1}z)| = |y^k| \left| f|_{2k} A^{-1}(z) \right| = y^k \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{2\pi i \frac{nz}{\lambda}} \right| \xrightarrow{y \rightarrow \infty} 0$$

gleichmäßig bzgl.  $x$ .  $\square$

**5.2.2 Satz (Peterssonsche Koeffizientenformel)** (1940) Sei  $-I \in \Gamma \sqsubset {}_1\Gamma$ ,  $[{}_1\Gamma : \Gamma] < \infty$ ,  $k < 1$ ,  $p = A^{-1}\infty$ , Spitze der Breite  $\lambda$  von  $\Gamma$  und

$$P_n(z, A, \Gamma, 2k) := \frac{1}{2} \sum_{\substack{M \in \mathcal{R} \\ AM = (c \ d)}} \frac{e^{2\pi i n \frac{AMz}{\lambda}}}{(cz + d)^{2k}} \quad (n \in \mathbb{Z})$$

die zugehörigen Poincaréschen Reihen, dabei  $\mathcal{R}$  ein Vertretersystem von  $\langle A^{-1}U^\lambda A \rangle \setminus \Gamma$ . Sei ferner  $f \in S_{2k}(\Gamma)$  und  $f|A^{-1}(z) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m e^{2\pi i m \frac{z}{\lambda}}$  die Fourier-Entwicklung von  $f$  in der Spitze  $p$ . Dann gilt:

$$\langle f, P_n \rangle = \begin{cases} 0 & \text{für } n = 0 \\ \frac{\lambda^{2k}(2k-2)!}{(4\pi n)^{2k-1}} a_n & \text{für } n \geq 1 \end{cases}$$

B Sei  $n \geq 0$ .  $\Rightarrow P_n \in G_{2k}(\Gamma)$ . Nach Lemma 5.1.3 folgt dann:

$$\langle f, P_n \rangle = \langle f|A^{-1}, P_n|A^{-1} \rangle \stackrel{\text{Lemma 4.1.2}}{=} \langle f|A^{-1}, P_n(\cdot, I, A\Gamma A^{-1}, 2k) \rangle.$$

Der Beweis genügt also für  $A = I$  und  $p = \infty$ . Seien also  $A = I$ ,  $p = \infty$  und  $\varphi_n(z) := \exp(2\pi i n \frac{z}{\lambda})$  für  $z \in \mathbb{H}$ . Dann gilt formal folgende Umformung:

$$\begin{aligned} \langle f, P_n \rangle &= \frac{1}{2} \int_{\mathcal{F}} f(z) \sum_{M \in \mathcal{R}} \overline{\varphi_n| M(z)} y^{2k} d\omega(z) \\ &= \sum_{M \in \mathcal{R}} \frac{1}{2} \int_{\mathcal{F}} \underbrace{f| M \overline{\varphi_n| M}}_{=f} y^{2k} d\omega = \sum_{M \in \mathcal{R}} \frac{1}{2} \int_{M\mathcal{F}} f \overline{\varphi_n} y^{2k} d\omega \\ &\quad = (\text{Im } Mz)^{2k} (f \circ M) \overline{(\varphi_n \circ M)} \\ &= \int_{\bigcup_{M \in \mathcal{R}} M\mathcal{F}} f \overline{\varphi_n} y^{2k} d\omega, \end{aligned}$$

wobei wir oBdA  $\mathcal{R}$  gleich so wählen, dass mit  $M \in \mathcal{R}$  auch gleich  $-M \in \mathcal{R}$  gilt. Bei dieser Wahl von  $\mathcal{R}$  ist  $\bigcup_{M \in \mathcal{R}} M\mathcal{F}$  eine messbare Fundamentalmenge von  $\Gamma_\infty$ , und der Integrand  $f \overline{\varphi_n} y^{2k}$  ist  $\Gamma_\infty$ -invariant. Falls alles absolut konvergiert, darf der Integrationsbereich  $\bigcup_{M \in \mathcal{R}} M\mathcal{F}$  ersetzt werden durch den Vertikalhalbstreifen  $\mathcal{V} := \{x + iy : 0 \leq x \leq \lambda, y > 0\}$ , der ebenfalls modulo Nullmengen eine Fundamentalmenge von  $\Gamma_\infty$  ist. Nun ist aber  $\int_{\mathcal{V}} (y^k f) \overline{(y^k \varphi_n)} d\omega$  absolut konvergent, denn:

(i)  $y^k f$  ist beschränkt in  $\mathbb{H}$  nach Satz 5.2.1.

$$\Rightarrow \iint_{\{x+iy: 0 \leq x \leq \lambda, 0 < y < 1\}} \underbrace{|y^k f|}_{\leq C} \underbrace{|y^k \varphi_n|}_{=y^k e^{2\pi n \frac{y}{\lambda}} \leq 1} d\omega \leq \lambda C \int_0^1 y^{k-2} dy < \infty.$$

(ii)  $f$  verschwindet gleichmäßig in  $x$  exponentiell für  $y \rightarrow \infty$ , und  $\varphi_n$  ist beschränkt.  $\Rightarrow$  Konvergenz im Unendlichen.

$\Rightarrow \int_{\mathcal{V}} |y^k f| |y^k \varphi_n| d\omega < \infty$ , obige Umformung ist also korrekt wegen majorisierter Konvergenz. Wir fahren demnach fort:

$$\begin{aligned} \langle f, P_n \rangle &= \int_{\mathcal{V}} f(z) \overline{\varphi_n(z)} y^{2k} d\omega \\ &= \iint_{\{0 \leq x \leq \lambda, y > 0\}} \left( \sum_{m=1}^{\infty} a_m e^{2\pi i m \frac{z}{\lambda}} \right) e^{-2\pi i n \frac{x-iy}{\lambda}} y^{2k-2} dx dy \end{aligned}$$



Erst  $x$ -Integration, diese ist termweise erlaubt, es bleibt also nur der Beitrag für  $m = n$ . Für  $n = 0$  verschwinden alle  $x$ -Integrale und damit  $\langle f, P_0 \rangle = 0$ . Für  $n \geq 1$  folgt:

$$\begin{aligned}
 &= \lambda a_n \int_0^\infty e^{-4\pi n \frac{y}{\lambda}} y^{2k-2} dy \\
 &\stackrel{\frac{4\pi n y}{\lambda} \mapsto t}{=} \lambda a_n \left( \frac{\lambda}{4\pi n} \right)^{2k-1} \underbrace{\int_0^\infty e^{-t} t^{2k-2} dt}_{=\Gamma(2k-1)=(2k-2)!}
 \end{aligned}
 \quad \square$$

**Bemerkung** Für  $n = 0$  besagt Satz 5.2.2: Die Spitzenformen zu  $\Gamma$  stehen senkrecht auf den Eisensteinreihen zu  $\Gamma$  im Sinne des Petersson-Produkts, d. h.  $G_{2k}(\Gamma) = \mathcal{E}_{2k}(\Gamma) \oplus S_{2k}(\Gamma)$  ist eine „orthogonale“ Zerlegung im Sinne des Petersson-Produkts.

**5.2.3 Korollar (Vollständigkeitsatz)** Unter den Voraussetzungen von Satz 5.2.2 gilt: Für jedes feste  $A \in {}_1\Gamma$  enthält  $\{P_n(\cdot, A, \Gamma, 2k) : n \geq 1\}$  eine Basis von  $S_{2k}(\Gamma)$ . Das System der Eisenstein-Reihen (für jede Spitzenklasse eine) zu  $\Gamma$  kann durch Hinzunahme geeigneter endlich vieler  $P_n(\cdot, A, \Gamma, 2k)$  ( $n \geq 1$ ) zu einer Basis von  $G_{2k}(\Gamma)$  ergänzt werden.

B Sei  $T \subset S_{2k}(\Gamma)$  der von  $\{P_n(\cdot, A, \Gamma, 2k) : n \geq 1\}$  ( $A$  fest) erzeugte lineare Teilraum von  $S_{2k}(\Gamma)$ .

Behauptung:  $T = S_{2k}(\Gamma)$ .

Begründung: Sei  $f \in S_{2k}(\Gamma)$ ,  $f \perp T$ . Dann verschwinden nach Satz 5.2.2 alle Fourierkoeffizienten von  $f$  zur Spitze  $A^{-1}\infty$ , also ist  $f = 0$ .  $\square$

**5.2.4 Korollar** Sei  $\Gamma = {}_1\Gamma$ ,  $d_{2k} := \dim S_{2k}({}_1\Gamma)$ ,  $P_n := P_n(\cdot, I, {}_1\Gamma, 2k)$ ,  $k > 1$ .  $\Rightarrow \{P_n : n = 1, \dots, d_{2k}\}$  ist Basis von  $S_{2k}({}_1\Gamma)$ . Zusammen mit  $P_0 := E_{2k}$  hat man eine Basis von  $G_{2k}({}_1\Gamma)$ .

B  $\mathcal{T} := \text{span}\{P_1, \dots, P_n\} \subset S_{2k}({}_1\Gamma)$ . Sei  $f \in S_{2k}({}_1\Gamma)$ ,  $f \perp \mathcal{T}$ . Mit Satz 5.2.2 folgt dann  $f$  hat eine Fourier-Entwicklung der Form  $f(z) = \sum_{n=d_{2k}+1}^\infty a_n e^{2\pi i n z}$ . Annahme  $f \neq 0$ .

$$\Rightarrow v_\infty f \geq d_{2k} + 1 \quad (5.1)$$

Weiter gilt:  $\deg \text{div } f = \frac{k}{6}$ ,

$$d_{2k} + 1 = \dim G_{2k}({}_1\Gamma) \stackrel{\text{Korollar 3.3.8}}{=} \begin{cases} \left\lfloor \frac{k}{6} \right\rfloor + 1 & \text{für } k \not\equiv 1 \pmod{6} \\ \left\lfloor \frac{k}{6} \right\rfloor & \text{für } k \equiv 1 \pmod{6} \end{cases}$$

Für  $k \not\equiv 1 \pmod{6}$  ist

$$v_\infty f \geq d_{2k} + 1 = \left\lfloor \frac{k}{6} \right\rfloor + 1 > \frac{k}{6} = \deg \text{div } f$$

und das ist offensichtlich ein Widerspruch. Für  $k \equiv 1 \pmod{6}$  ist

$$\deg \text{div } f = \frac{k}{6} = \left\lfloor \frac{k}{6} \right\rfloor + \frac{1}{6} = d_{2k} + 1 + \frac{1}{6} = v_\infty f + \frac{1}{6}$$

(In (5.1) gilt hier notwendig Gleichheit!) und auch dies ist ein Widerspruch zur Definition von  $\deg \text{div } f$ , da in der Summe nur nicht-negative Brüche mit 2 oder 3 im Nenner auftauchen.  $\Rightarrow f = 0$ .  $\square$

### 5.3 Wachstum von Fourier-Koeffizienten von Modulformen

**5.3.1 Satz** Sei  $-I \in \Gamma \sqsubset {}_1\Gamma$ ,  $[{}_1\Gamma : \Gamma] < \infty$ ,  $p = A^{-1}\infty$  Spitze von  $\Gamma$  der Breite  $\lambda$  ( $A \in {}_1\Gamma$ ),  $f \in S_{2k}(\Gamma)$ ,  $f|A^{-1}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{2\pi i n \frac{z}{\lambda}}$ . Dann gilt:  $a_n = \mathcal{O}(n^k)$  für  $n \rightarrow \infty$ .

B Für jedes  $y > 0$  ist

$$a_n = \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda (f|A^{-1}(x+iy)) e^{-2\pi i n \frac{x+iy}{\lambda}} dx$$

Hier ist  $f|A^{-1}$  Spitzenform (zu  $A\Gamma A^{-1}$ ), also gilt nach Satz 5.2.1:  $y^k f|A^{-1}(x+iy) \leq C$  mit geeignetem  $C \geq 0$  für alle  $z = x+iy \in \mathbb{H}$ .  $\Rightarrow |a_n| \leq C y^{-k} e^{2\pi n \frac{y}{\lambda}}$  für alle  $y > 0$ . Setze  $y := \frac{1}{n} \Rightarrow a_n = \mathcal{O}(n^k)$  für  $n \rightarrow \infty$ .  $\square$

**5.3.2 Satz** Sei  $-I \in \Gamma \sqsubset {}_1\Gamma$ ,  $[{}_1\Gamma : \Gamma] < \infty$ ,  $p = A^{-1}\infty$  Spitze von  $\Gamma$  der Breite  $\lambda$  ( $A \in {}_1\Gamma$ ),  $f \in G_{2k}(\Gamma)$ ,  $f|A^{-1}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{2\pi i n \frac{z}{\lambda}}$ . Dann gilt:  $a_n = \mathcal{O}(n^{2k-1})$  für  $n \rightarrow \infty$ .

B Es genügt der Beweis für die Eisenstein-Reihen, das steht z. B. allgemein bei Maass (1983b) Wir brauchen den Satz nur für  $\Gamma = {}_1\Gamma$ , und dann kann man für  $E_{2k}$  wie folgt abschätzen: Der  $n$ -te Fourier-Koeffizient ist ein konstantes Vielfaches von  $\sigma_{2k-1}(n)$ , und hier gilt:

$$n^{2k-1} < \sigma_{2k-1}(n) = \sum_{\substack{d|n \\ d>0}} d^{2k-1} = n^{2k-1} \sum_{\substack{d|n \\ d>0}} \frac{1}{\left(\frac{n}{d}\right)^{2k-1}} < \zeta(2k-1) n^{2k-1} \quad \square$$

**5.3.3 Korollar** Sei  $-I \in \Gamma \sqsubset {}_1\Gamma$ ,  $[{}_1\Gamma : \Gamma] < \infty$ ,  $p = A^{-1}\infty$  Spitze von  $\Gamma$  der Breite  $\lambda$  ( $A \in {}_1\Gamma$ ),  $f \in G_{2k}(\Gamma)$ ,  $f|A^{-1}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{2\pi i n \frac{z}{\lambda}}$ . Dann konvergiert  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$  absolut für  $\operatorname{Re} s > r(f)$  mit

$$r(f) := \begin{cases} k+1 & \text{für } f \in S_{2k}(\Gamma) \\ 2k & \text{für } f \in G_{2k}(\Gamma) \end{cases}.$$

B Satz 5.3.1 und Satz 5.3.2  $\square$

# 6 Die Hecke'schen Operatoren

Für Kapitel 6 sei stets  $G_{2k} := G_{2k}({}_1\Gamma)$  und  $S_{2k} := S_{2k}({}_1\Gamma)$ .

## 6.1 Definition der Hecke'schen Operatoren und grundlegende Eigenschaften

**6.1.1 Definition**  $\mathbb{O}_n := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{Z}, ad - bc = n \right\}$ .

Für  $S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{GL}_2^+(\mathbb{R}) := \{A \in \text{GL}_2(\mathbb{R}) : \det A > 0\}$  sei

$$f|_{2k} S(z) := (cz + d)^{-2k} f\left(\frac{az + b}{cz + d}\right)$$

Dann gilt auch für  $S, S' \in \text{GL}_2^+(\mathbb{R})$ :  $f|SS' = (f|S)|S'$ .

Wir wollen Elemente von  $\mathbb{O}_n$  auf Modulformen anwenden: Sei  $f \in G_{2k}$ ,  $S, S' \in \mathbb{O}_n$ , und es gebe  $M \in {}_1\Gamma$  mit  $S' = MS$ .

$$\Rightarrow f|S' = f|MS = \underbrace{(f|M)}_{=f}|S = f|S \quad (6.1)$$

Idee: Wir mitteln über ein Vertretersystem der Rechtsnebenklassen von  ${}_1\Gamma \backslash \mathbb{O}_n$ .

**6.1.2 Satz**  $\mathcal{R}_n := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} : a, b, d \in \mathbb{Z}, ad = n, d > 0, b \bmod d \right\}$  ist (endliches) Vertretersystem der Rechtsnebenklassen  ${}_1\Gamma S$  ( $S \in \mathbb{O}_n$ ) von  ${}_1\Gamma \backslash \mathbb{O}_n$ .

B a) Für alle  $S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{O}_n$  existiert ein  $V = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in {}_1\Gamma$  mit  $\underline{VS} = \begin{pmatrix} 0 & * \\ \gamma a + \delta c & * \end{pmatrix}$ , denn  $\underline{VS} = \begin{pmatrix} \gamma a + \delta c & * \end{pmatrix}$ . Zu vorgegebenem  $S \in \mathbb{O}_n$  kann man die Zeile

$$(\gamma \quad \delta) := \left( \frac{c}{\text{ggT}(a,c)} \quad \frac{-a}{\text{ggT}(a,c)} \right)$$

zu einem  $V = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in {}_1\Gamma$  ergänzen. Ggf Ersetzung  $V \mapsto -V$  liefert:  $V$  kann so gewählt werden, dass in  $VS = \begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & d' \end{pmatrix}$  schon  $d' > 0$  gilt.

$$\Rightarrow U^m VS = \begin{pmatrix} a' & b' + md' \\ 0 & d' \end{pmatrix} \quad (6.2)$$

$$\Rightarrow \forall S \in \mathbb{O}_n \quad \exists R \in \mathcal{R}_n \quad {}_1\Gamma S = {}_1\Gamma R.$$

- b) Verschiedene Elemente aus  $\mathcal{R}_n$  sind nicht äquivalent. Gelte z. B.  $V \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & d_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix}$  mit  $V \in {}_1\Gamma$ ,  $\begin{pmatrix} a_j & b_j \\ 0 & d_j \end{pmatrix} \in \mathcal{R}_n$  für  $j = 1, 2$ , so hat man

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & d_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_1 & \alpha b_1 + \beta d_1 \\ \gamma a_1 & \gamma b_1 + \delta d_1 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix}$$

und damit  $a_1 d_1 = n$ , also  $a_1, a_2 > 0$  wegen  $d_1, d_2 > 0$ .  $\Rightarrow \gamma = 0$ .  $\Rightarrow \alpha = \delta = \pm 1$ . Andererseits folgt aus  $a_1, a_2 > 0$  schon  $\alpha = \delta = 1$ .  $\Rightarrow V = \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .  $\Rightarrow d_1 = d_2$ . (6.2) mit  $m := \beta$  liefert  $b_1 = b_2$ .  $\square$

**6.1.3 Definition** Sei  $\mathcal{V}_n$  ein Vertretersystem der Rechtsnebenklassen von  ${}_1\Gamma \setminus \mathbb{G}_n$ . Der von rechts operierende lineare Operator  $T_n: G_{2k} \rightarrow G_{2k}$  sei definiert durch

$$f|T_n(z) := n^{2k-1} \sum_{S \in \mathcal{V}_n} f|S(z) \quad (f \in G_{2k})$$

**Bemerkung** a)  $T_n$  ist sinnvoll definiert, da unabhängig von der Auswahl von  $\mathcal{V}_n$  nach (6.1).

b)  $T_n(G_{2k}) \subset G_{2k}$  nach Satz 6.1.4

c)  $T_1 = \text{id}$ .

**6.1.4 Satz** a)  $T_n(G_{2k}) \subset G_{2k}$ ,  $T_n(S_{2k}) \subset S_{2k}$ .

b) Ist  $f \in G_{2k}$  und  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(f) e^{2\pi i n z}$ , so ist  $f|T_n(z) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m(f|T_n) e^{2\pi i m z}$  mit

$$a_m(f|T_n) = \sum_{\substack{d|\text{ggT}(m,n) \\ d>0}} d^{2k-1} a_{\frac{mn}{d^2}}(f).$$

Insbesondere ist

$$\begin{aligned} a_0(f|T_n) &= \sigma_{2k-1}(n) a_0(f), \\ a_1(f|T_n) &= a_n(f), \\ a_m(f|T_n) &= a_n(f|T_m) \quad (m, n \geq 1), \\ a_m(f|T_n) &= a_{mn}(f) \quad (\text{ggT}(m, n) = 1). \end{aligned}$$

B a) Sei  $f \in G_{2k}$ .  $\Rightarrow f|T_n$  ist in  $\mathbb{H}$  holomorph, und da für alle  $M \in {}_1\Gamma$  auch  $\mathcal{V}_n M$  ein Vertretersystem der Rechtsnebenklassen ist, folgt

$$(f|T_n)|M = \left( n^{2k-1} \sum_{S \in \mathcal{V}_n} f|S \right) |M = n^{2k-1} \sum_{S \in \mathcal{V}_n} f|(SM) = n^{2k-1} \sum_{S \in \mathcal{V}_n M} f|S = f|T_n.$$

Der Rest folgt aus b).

b) Aus Satz 6.1.2 folgt:  $\mathcal{R}_n$  ist ein Vertretersystem der Rechtsnebenklassen.

$$\begin{aligned}
\Rightarrow f|T_n(z) &= n^{2k-1} \sum_{\substack{ad=n \\ d>0 \\ b \bmod d}} d^{-2k} \sum_{m=0}^{\infty} a_m e^{2\pi i m \frac{az+b}{d}} \\
&= n^{2k-1} \sum_{\substack{ad=n \\ d>0}} d^{-2k} \sum_{m=0}^{\infty} a_m \underbrace{\left( \sum_{b \bmod d} e^{2\pi i m \frac{b}{d}} \right)}_{= \begin{cases} 0 & \text{für } d \nmid m \\ d & \text{für } d \mid m \end{cases}} e^{2\pi i m \frac{az}{d}} \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\substack{d \mid n \\ d>0}} \left( \frac{n}{d} \right)^{2k-1} a_{md} e^{2\pi i m \frac{n}{d} z} \\
&= \sum_{\ell=0}^{\infty} \left( \sum_{\substack{t \mid \text{ggT}(n, \ell) \\ t>0}} t^{2k-1} a_{\frac{\ell n}{t^2}} \right) e^{2\pi i \ell z}
\end{aligned}$$

mit  $t := \frac{n}{d} \Rightarrow t \mid n, t > 0, mt =: \ell \Rightarrow t \mid \ell$  und  $\frac{mn}{t} = \frac{\ell n}{t^2}$ . □

**6.1.5 Korollar** a)  $\Delta|T_n = \tau(n)\Delta$  für  $n \geq 1$ .

b)  $\tau(mn) = \tau(m)\tau(n)$ , falls  $\text{ggT}(m, n) = 1$ , d. h.  $\tau$  ist multiplikativ. Dieses Resultat vermutete Ramanujan 1916, bewiesen wurde es 1917 von Mordell.

B a)  $\Delta|T_n \in S_{12} = \mathbb{C}\Delta$ , und nach Satz 6.1.4 b) gilt  $a_1(\Delta|T_n) = \tau(n)$ . Wir wissen:  $\tau(1) = 1$ , also  $\Delta|T_n = \tau(n)\Delta$ .

b) Nach Satz 6.1.4 ist  $a_m(f|T_n) = a_{mn}(f)$ , falls  $\text{ggT}(m, n) = 1$ .

$$\Rightarrow \tau(mn) = a_{mn}(\Delta) = a_m(\Delta|T_n) = \tau(n)\tau(m) \quad \square$$

**6.1.6 Satz (Hecke)** Für  $m, n \geq 1$  gilt:  $T_m T_n = \sum_{d \mid \text{ggT}(m, n)} d^{2k-1} T_{\frac{mn}{d^2}}$ .

B a) Gelte  $\text{ggT}(m, n) = 1$ . Dann gilt für alle  $f \in G_{2k}$ :

$$\begin{aligned}
f|T_m T_n &= (f|T_m)|T_n = (mn)^{2k-1} \sum_{\substack{a'd'=m \\ d'>0 \\ b' \bmod d' b \bmod d}} \sum_{\substack{ad=n \\ d>0}} f \left| \begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & d' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \right. \\
&= (mn)^{2k-1} \sum_{\substack{a'd'=m \\ ad=n \\ d, d'>0 \\ b' \bmod d \\ b \bmod d'}} f \left| \begin{pmatrix} aa' & a'b + b'd \\ 0 & dd' \end{pmatrix} \right.
\end{aligned}$$

Hier wird über ein System vom Typ  $\mathcal{R}_{mn}$  summiert.  $\mathcal{R}_{mn}$  enthält alle  $\begin{pmatrix} a'' & b'' \\ 0 & d'' \end{pmatrix}$  mit  $a''d'' = mn$ ,  $b'' \bmod d''$  und  $d'' > 0$ . Jedes Paar  $a'', d''$  mit  $a''d'' = mn$  und  $d'' > 0$  definiert wegen  $\text{ggT}(m, n) = 1$  genau ein System von Zahlen  $a', d', a, d$  mit  $a'' = aa'$ ,  $d'' = dd'$ ,  $a'd' = m$ ,  $ad = n$ . Dabei durchläuft  $a'b + b'd$  ein Restsystem  $\bmod dd'$ , wenn  $b \bmod d$  und  $b' \bmod d'$  läuft, denn: Es liegen höchstens  $dd'$  verschiedene Restklassen modulo  $dd'$  vor, und wenn  $b \bmod d$ ,  $b' \bmod d'$  läuft, so werden  $dd' = dd'$  verschiedene Klassen repräsentiert: Gelte nämlich  $a'b + b'd \equiv a'b_1 + b'_1d \bmod dd'$ , so gilt  $a'(b - b_1) \equiv 0 \bmod d$  und  $\text{ggT}(a', d) = 1$  wegen  $\text{ggT}(m, n) = 1$ , also  $b \equiv b_1 \bmod d$  und damit  $b = b_1$ , da  $b$  und  $b_1$  einem Restklassensystem modulo  $d$  entnommen sind. Analog folgt auch  $b' = b'_1$ .

$\Rightarrow f | T_m T_n = f | T_{mn}$  falls  $\text{ggT}(m, n) = 1$ . Wir können daher jetzt die Behauptung auf den Fall von Primpotenzen reduzieren.

- b) Wir zeigen zunächst die Behauptung für  $m = p^v$  ( $v \geq 1$ ) und  $n = p$  mit einer Primzahl  $p$ . Dann ist

$$\mathcal{R}_p = \left\{ \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & p \end{pmatrix}, b \bmod p \right\}$$

Das liefert

$$f | T_p = p^{2k-1} \left( f | \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \sum_{b \bmod p} f | \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & p \end{pmatrix} \right)$$

Ferner gilt:

$$f | T_{p^v} = p^{v(2k-1)} \sum_{\substack{0 \leq \mu \leq v \\ b_\mu \bmod p^\mu}} f | \begin{pmatrix} p^{v-\mu} & b_\mu \\ 0 & p^\mu \end{pmatrix}$$

Wir fügen diese beiden Resultate zusammen und erhalten

$$\begin{aligned} f | T_{p^v} T_p &= p^{(v+1)(2k-1)} \sum_{\substack{0 \leq \mu \leq v \\ b_\mu \bmod p^\mu}} f | \begin{pmatrix} p^{v+1-\mu} & b_\mu \\ 0 & p^\mu \end{pmatrix} \\ &\quad + p^{(v+1)(2k-1)} \sum_{\substack{0 \leq \mu \leq v \\ b_\mu \bmod p^\mu \\ b \bmod p}} f | \begin{pmatrix} p^{v-\mu} & p^{v-\mu}b + pb_\mu \\ 0 & p^{\mu+1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Hier ergänzen die zu  $\mu = v$  gehörigen Summanden der zweiten Summe die erste Summe zu  $f | T_{p^{v+1}}$ , denn  $b + pb_v$  ( $b \bmod p$ ,  $b_v \bmod p^v$ ) durchläuft ein Restsystem mo-

dulo  $p^{v+1}$ .

$$\begin{aligned} \Rightarrow f \mid T_{p^v} T_p - f \mid T_{p^{v+1}} &= p^{(v+1)(2k-1)} \sum_{\substack{0 \leq \mu \leq v-1 \\ b_\mu \mod p^\mu \\ b \mod p}} f \mid \underbrace{\begin{pmatrix} p^{v-\mu} & p^{v-\mu} b + p b_\mu \\ 0 & p^{\mu+1} \end{pmatrix}}_{\in p \mathbb{O}_{p^{v-1}}} \\ &= p^{(v+1)(2k-1)} \sum_{\substack{0 \leq \mu \leq v-1 \\ b_\mu \mod p^\mu \\ b \mod p}} f \mid \begin{pmatrix} p^{v-\mu-1} & p^{v-\mu-1} b + b_\mu \\ 0 & p^\mu \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Wir summieren außen über  $b$  und innen über  $\mu$  und  $b_\mu$ .  $\Rightarrow$  Bei festem  $b, \mu$  durchläuft  $p^{v-\mu-1} b + b_\mu$  ein volles Restsystem modulo  $p^\mu$ , und die innere Summe wird zu  $(f \mid T_{p^{v-1}}) p^{-(v-1)(2k-1)}$ . Wir können also fortfahren

$$f \mid T_{p^v} T_p - f \mid T_{p^{v+1}} = p^{2k-2} \sum_{b \mod p} f \mid T_{p^{v-1}} = p^{2k-1} f \mid T_{p^{v-1}}$$

- c) Seien nun  $m, n$  beliebig. Mit Induktion folgt aus b):  $T_{p^v}$  ist ein Polynom in  $T_p$ .  $\Rightarrow$  Alle  $T_{p^v}, T_{p^\mu}$  sind miteinander vertauschbar. a) liefert dann die Vertauschbarkeit aller  $T_m, T_n$ . Es genügt jetzt der Beweis der Formel aus Satz 6.1.6 für  $m = p^\mu, n = p^v, \mu \leq v$ . Das geht mit endlicher Induktion nach  $\mu$ . Zu zeigen ist

$$T_{p^\mu} T_{p^v} = \sum_{0 \leq \rho \leq \mu} p^{\rho(2k-1)} T_{p^{\mu+v-2\rho}}$$

$\mu = 0$  klar

$\mu = 1$  klar nach b)

$\mu \mapsto \mu + 1$  Sei  $1 \leq \mu < v$  und die Behauptung richtig für alle  $\mu'$  mit  $0 \leq \mu' \leq \mu$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} T_p T_{p^\mu} T_{p^v} &\stackrel{\text{b)}}{=} T_{p^{\mu+1}} T_{p^v} + p^{2k-1} T_{p^{\mu-1}} T_{p^v} \\ \stackrel{\text{IV}}{\Rightarrow} T_{p^{\mu+1}} T_{p^v} &= \sum_{\rho=0}^{\mu} p^{\rho(2k-1)} T_p T_{p^{\mu+v-2\rho}} - p^{2k-1} T_{p^{\mu-1}} T_{p^v} \\ &\stackrel{\text{IV, b)}}{=} \sum_{\rho=0}^{\mu} p^{\rho(2k-1)} T_{p^{v+1+\mu-2\rho}} + \sum_{\rho=0}^{\mu} p^{(\rho+1)(2k-1)} \underbrace{T_{p^{\mu-1+v+2\rho}}}_{= T_{p^{\mu+1+v-2(\rho+1)}}} \\ &\quad - \sum_{\rho=0}^{\mu-1} p^{(\rho+1)(2k-1)} T_{p^{\mu-1+v-2\rho}} \\ &= \sum_{\rho=0}^{\mu+1} p^{\rho(2k-1)} T_{p^{\mu+1+v-2\rho}} \end{aligned}$$

Der Term für  $\rho = \mu$  ergänzt die erste Summe zu  $\sum_{\rho=0}^{\mu+1} p^{\rho(2k-1)} T_{p^{\mu+1+v-2\rho}}$ . Das liefert die Behauptung.  $\square$

**6.1.7 Korollar (Ramanujan, 1916 (Verm.), Mordell, 1917 (Bew.))** Für die Fourierkoeffizienten  $\tau(n)$  von  $\Delta$  gilt:

$$\tau(m)\tau(n) = \sum_{d \mid \gcd(m,n)} d^{11} \tau\left(\frac{mn}{d^2}\right),$$

insbesondere ist  $\tau$  multiplikativ, und für jede Primzahl  $p$  gilt:

$$\tau(p^{v+1}) = \tau(p)\tau(p^v) - p^{11}\tau(p^{v-1}) \quad (v \geq 1).$$

B Korollar 6.1.5 und Satz 6.1.6 □

**6.1.8 Korollar (Maurice Newman, 1975)** Für  $n \geq 1$  gilt:

$$\tau(2n) \equiv 0 \pmod{2^3}$$

$$\tau(3n) \equiv 0 \pmod{3^2}$$

$$\tau(5n) \equiv 0 \pmod{5}$$

$$\tau(7n) \equiv 0 \pmod{7}$$

$$\tau(2411n) \equiv 0 \pmod{2411}$$

B Sei  $p$  eine Primzahl, und es gelte  $\tau(p) \equiv 0 \pmod{p^\alpha}$  mit  $1 \leq \alpha \leq 11$ . Dann liefert die Rekursionsformel aus Korollar 6.1.7:  $\tau(p^v) \equiv 0 \pmod{p^\alpha}$  für  $v \geq 1$ .

Sei  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n = p^\mu m$  mit  $p \nmid m$ ,  $\mu \geq 0$ .

$$\Rightarrow \tau(np)\tau(p^{\mu+1})\tau(m) \equiv 0 \pmod{p^\alpha}.$$

Nun ist

$$\tau(2) = -24 \equiv 0 \pmod{2^3}$$

$$\tau(3) = 252 \equiv 0 \pmod{3^2}$$

$$\tau(5) = 4830 \equiv 0 \pmod{5}$$

$$\tau(7) = -16744 \equiv 0 \pmod{7}$$

$$\tau(2411) \equiv 0 \pmod{2411}$$

Das liefert die Behauptung. □

Newmans Ergebnis steht bei Niebur (1975). Niebur teilt mit, dass es keine weiteren  $p$  mit  $\tau(p) \equiv 0 \pmod{p}$  gibt, für welche gilt:  $2 \leq p \leq 65063$ .

## 6.2 Wirkung der $T_n$ auf die Poincaré-Reihen, Selbstadjungiertheit der $T_n$

In Kapitel 6.2 gelte  $\Gamma = {}_1\Gamma$ ,  $k > 1$  und  $P_\nu(z) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{M \in \mathcal{R} \\ \underline{M} = (c \ d)}} \frac{e^{2\pi i \nu Mz}}{(cz+d)^{2k}}$  mit  $\nu \in \mathbb{N}_0$ , dabei sei  $\mathcal{R}$  ein Vertretersystem von  $\langle U \rangle \setminus {}_1\Gamma$ .



### 6.2.1 Satz

$$P_v | T_n = n^{2k-1} \sum_{d | \text{ggT}(n, v)} d^{1-2k} P_{\frac{vn}{d^2}}$$

B Setze  $\varphi_n(z) := e^{2\pi i v z}$ . Dann gilt

$$P_v | T_n = n^{2k-1} \sum_{S \in \mathcal{R}_n} P_v | S = n^{2k-1} \frac{1}{2} \sum_{\substack{M \in \mathcal{R} \\ S \in \mathcal{R}_n}} \varphi_v | MS$$

Hier ist die Vertauschung von  $M$  und  $S$  zulässig, denn nach Definition ist  $\mathbb{O}_n = {}_1\Gamma\mathcal{R}_n = \langle U \rangle \mathcal{R} \mathcal{R}_n$ , und die Darstellung eines jeden Elements aus  $\mathbb{O}_n$  als Produkt in der angegebenen Reihenfolge ist eindeutig. Wir zeigen:  $\mathbb{O}_n = \langle U \rangle \mathcal{R}_n \mathcal{R}$ . Dazu sei  $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \mathbb{O}_n$ .

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \langle U \rangle \mathcal{R}_n \mathcal{R}. \\ &\Leftrightarrow \exists M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{R} \quad \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \in \langle U \rangle \mathcal{R}_n. \\ &\Leftrightarrow \exists M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{R} \quad \gamma d - \delta c = 0 \wedge -\gamma b + \delta a > 0. \end{aligned}$$

Nun gibt es zu  $(\gamma \ \delta)$  genau zwei  $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{R}$  mit  $\gamma d - \delta c = 0$ , und wegen  $(b \ -a) \neq (0 \ 0)$  hat genau eine von diesen zusätzlich die Eigenschaft  $-\gamma b + \delta a > 0$ . Da dieses Paar genau ein  $M \in \mathcal{R}$  festlegt mit  $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ , erhalten wir  $\mathbb{O}_n = \langle U \rangle \mathcal{R} \mathcal{R}_n = \langle U \rangle \mathcal{R}_n \mathcal{R}$ , und hier wird jedes Element genau einmal dargestellt.

$$\begin{aligned} \Rightarrow P_v | T_n(z) &= \frac{1}{2} n^{2k-1} \sum_{M \in \mathcal{R}} \left( \sum_{\substack{ad=n \\ d>0 \\ b \text{ mod } d}} d^{2k} e^{2\pi i v \frac{az+b}{d}} \right) | M \\ &= \frac{1}{2} n^{2k-1} \sum_{M \in \mathcal{R}} \left( \sum_{\substack{d | \text{ggT}(n, v) \\ d>0}} d^{1-2k} e^{2\pi i \frac{vn}{d^2} z} \right) | M \\ &= n^{2k-1} \sum_{\substack{d | \text{ggT}(n, v) \\ d>0}} d^{1-2k} P_{\frac{vn}{d^2}}(z), \end{aligned}$$

da

$$\sum_{b \text{ mod } d} e^{2\pi i v \frac{b}{d}} = \begin{cases} 0 & \text{für } d \nmid v \\ d & \text{für } d | v \end{cases}.$$

□

**6.2.2 Korollar**  $E_{2k} | T_n = \sigma_{2k-1}(n) E_{2k}$  für  $k \geq 2$ .

B Satz 6.2.1 mit  $\nu = 0$ . □

**6.2.3 Korollar**  $P_1 | T_n = n^{2k-1} P_n$ .

B Satz 6.2.1 mit  $\nu = 1$ . □

**6.2.4 Korollar**  $n^{1-2k} P_\nu | T_n = \nu^{1-2k} P_n | T_\nu$  für  $\nu, n \geq 1$ .

B Satz 6.2.1 □

**6.2.5 Satz (Hans Petersson, 1939)** Für  $n \geq 1$  ist  $T_n: S_{2k} \rightarrow S_{2k}$  selbstadjungiert bzgl. des Petersson'schen Skalarprodukts  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .

B OBdA sei  $k \geq 2$ , da  $S_{2k} = \{0\}$  für  $k \leq 5$ .

Da die  $P_\nu$  ( $\nu \geq 1$ ) den Raum  $S_{2k}$  erzeugen, genügt es zu zeigen: für alle  $f \in S_{2k}$  und  $n, \nu \geq 1$  gilt:

$$\langle f | T_n, P_\nu \rangle = \langle f, P_\nu | T_n \rangle.$$

Nun gilt mit  $f(z) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m(f) e^{2\pi i m z}$  nach Satz 6.1.4

$$a_m(f | T_n) = \sum_{\substack{d | \text{ggT}(m, n) \\ d > 0}} d^{2k-1} a_{\frac{mn}{d^2}}(f)$$

und nach Satz 5.2.2

$$\begin{aligned} \langle f, P_\nu \rangle &= \underbrace{\frac{(2k-2)!}{(4\pi)^{2k-1}}}_{=: \gamma_k} \nu^{1-2k} a_\nu(f) \\ \Rightarrow \langle f | T_n, P_\nu \rangle &= \gamma_k \nu^{1-2k} a_\nu(f | T_n) = \gamma_k \nu^{1-2k} \sum_{\substack{d | \text{ggT}(n, \nu) \\ d > 0}} d^{2k-1} a_{\frac{n\nu}{d^2}}(f) \end{aligned}$$

Ferner gilt nach Satz 6.2.1 und Satz 5.2.2:

$$\begin{aligned} \langle f, P_\nu | T_n \rangle &= \langle f, n^{2k-1} \sum_{\substack{d | \text{ggT}(n, \nu) \\ d > 0}} d^{1-2k} P_{\frac{\nu n}{d^2}} \rangle = \gamma_k \sum_{\substack{d | \text{ggT}(\nu, n) \\ d > 0}} d^{2k-1} a_{\frac{n\nu}{d^2}}(f) \\ &= \gamma_k \nu^{1-2k} \sum_{\substack{d | \text{ggT}(n, \nu) \\ d > 0}} n^{2k-1} d^{1-2k} \left( \frac{\nu n}{d^2} \right)^{1-2k} a_{\frac{n\nu}{d^2}}(f) \end{aligned}$$

□

## 6.3 Eigenfunktionen der Hecke-Operatoren und Dirichletsche Reihen mit Eulerscher Produkt-Entwicklung

**6.3.1 Satz (Hans Petersson)** Es gibt eine Orthonormalbasis von  $S_{2k}$ , die aus simultanen Eigenfunktionen aller Hecke-Operatoren  $T_n$  ( $n \geq 1$ ) besteht.

B Die  $T_n$  ( $n \geq 1$ ) sind selbstadjungiert und vertauschbar. Das liefert mit Argumenten der Linearen Algebra die Behauptung. Nachzulesen sind diese bei Gantmacher (1965).  $\square$

**6.3.2 Satz** Sei  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{2\pi i n z} \in G_{2k}$  ( $k > 1$ ), und für die Primzahl  $p$  gelte  $f|T_p = \lambda f$  mit geeignetem  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Dann lässt sich von der Dirichlet-Reihe

$$D(s) := \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s} \quad \left( \operatorname{Re} s > \begin{cases} k+1 & \text{für } f \in S_{2k} \\ k & \text{für } f \in G_{2k} \setminus S_{2k} \end{cases} \right)$$

ein Eulerfaktor abspalten:

$$D(s) = \left( 1 - \frac{\lambda}{p^s} + \frac{p^{2k-1}}{p^{2s}} \right)^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s} \quad \left( \operatorname{Re} s > \begin{cases} k+1 & \text{für } f \in S_{2k} \\ k & \text{für } f \in G_{2k} \setminus S_{2k} \end{cases} \right)$$

B Die Rekursionsformel aus Satz 6.1.6 b) liefert:  $T_p T_{p^n} = T_{p^{n+1}} + p^{2k-1} T_{p^{n-1}}$ ,  $T_1 = \operatorname{id}$ ,  $T_{p^n} \in \mathbb{C}[T_p]$ .  $\Rightarrow f$  ist Eigenfunktion aller  $T_{p^v}$ :  $f|T_{p^v} = \lambda_v f$  ( $v \geq 0$ ) mit  $\lambda_0 = 1$ ,  $\lambda_1 = \lambda$ ,  $\lambda_{n+1} = \lambda \lambda_n - p^{2k-1} \lambda_{n-1}$  ( $n \geq 1$ ). Wir wissen:

$$\lambda_v a_n(f) = a_n(f|T_{p^v}) = \sum_{\substack{d|\operatorname{ggT}(n, p^v) \\ d>0}} d^{2k-1} a_{\frac{np^v}{d^2}}(f).$$

Für  $p \nmid n$  gilt:  $\lambda_v a_n(f) = a_{np^v}(f)$ .

$$\begin{aligned} \Rightarrow D(s) &= \sum_{m=1}^{\infty} a_m m^{-s} = \sum_{\substack{n \geq 1 \\ v \geq 0 \\ \operatorname{ggT}(n, p)=1}} a_{np^v} n^{-s} p^{-vs} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s} \sum_{v=0}^{\infty} \lambda_v p^{-vs} \quad \left( \operatorname{Re} s > \begin{cases} k+1 & \text{für } f \in S_{2k} \\ k & \text{für } f \in G_{2k} \setminus S_{2k} \end{cases} \right) \end{aligned}$$

Die obige Rekursionsformel für die  $\lambda_v$  liefert dann

$$\left( 1 - \frac{\lambda}{p^s} + \frac{p^{2k-1}}{p^{2s}} \right) \sum_{v=0}^{\infty} \frac{\lambda_v}{p^{vs}} = 1 + \frac{\lambda}{p^s} + \sum_{v=2}^{\infty} \frac{\lambda_v}{p^{vs}} - \frac{\lambda}{p^s} - \sum_{v=2}^{\infty} \frac{\lambda \lambda_{v-1}}{p^{vs}} + \sum_{v=2}^{\infty} \frac{p^{2k-1} \lambda_{v-2}}{p^{vs}} = 1 \quad \square$$

**6.3.3 Satz** Sei  $k \geq 2$  und  $f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m e^{2\pi i m z} \in G_{2k}$  simultane Eigenfunktion aller  $T_n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ); das impliziert insbesondere  $f \neq 0$ .  $\Rightarrow f|T_n = \lambda_n f$ ,  $\lambda_n = \lambda_n(f)$  ( $n \geq 1$ ). Dann ist  $a_1 \neq 0$ , und normiert man zu  $a_1 = 1$ , so gilt:  $a_n = \lambda_n \in \mathbb{R}$  ( $n \geq 1$ ), und es gilt:

a) Ist  $a_0 \neq 0$ , so ist  $f = -\frac{B_{2k}}{4k} E_{2k}$  und  $\lambda_n = \sigma_{2k-1}(n)$  ( $n \geq 1$ ). *Nota bene:* Nach Korollar 6.2.2 ist  $E_{2k}$  simultane Eigenfunktion aller  $T_n$  mit den Eigenwerten  $\sigma_{2k-1}(n)$  ( $n \geq 1$ ).

b) Ist  $a_0 = 0$ , d. h.  $f \in S_{2k}$ , so gilt bei Normierung  $a_1 = 1$ :  $a_n = \lambda_n$  ( $n \geq 1$ ), d. h.  $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e^{2\pi i n z}$ . *Nota bene:* Musterbeispiel hierfür ist  $f = \Delta$ .

c) Die Dirichletreihe  $D(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n n^{-s}$  zerfällt vollständig in ein Eulerprodukt

$$D(s) = \prod_{p \text{ prim}} \left( 1 - \frac{\lambda_p}{p^s} + \frac{p^{2k-1}}{p^{2s}} \right)^{-1} \quad \left( \operatorname{Re} s > \begin{cases} k+1 & \text{für } f \in S_{2k} \\ k & \text{für } f \in G_{2k} \setminus S_{2k} \end{cases} \right)$$

**Folgerung** Die simultanen Eigenräume der  $T_n$  sind eindimensional.

B Satz 6.1.4 liefert:  $a_1(f|T_n) = a_n(f)$ .  $\Rightarrow a_n = \lambda_n a_1$  ( $n \geq 1$ ). Wäre  $a_1 = 0$ , so auch  $a_n = 0$  für alle  $n \geq 1$ .  $\Rightarrow f = a_0$ , und das geht wegen  $k \geq 2$  nur für  $a_0 = 0$ .  $\Rightarrow f$  wäre keine Eigenfunktion.  $\Rightarrow a_1 \neq 0$ .

Jetzt Renormierung zu  $a_1 = 1$ .  $\Rightarrow a_n = \lambda_n$  ( $n \geq 1$ ), und es folgt b)

zu a): Sei  $a_0 \neq 0$ ,  $a_1 = 1$ . Dann gilt nach Satz 6.1.4:  $\lambda_n a_0 = a_0(f|T_n) = \sigma_{2k-1}(n)$ .  $\Rightarrow \lambda_n = \sigma_{2k-1}(n)$  ( $n \geq 1$ ).  $g := f + \frac{B_{2k}}{4k} E_{2k} \in G_{2k}$  ist Lösung von  $g|T_n = \sigma_{2k-1}(n)g$  und hat  $a_1(g) = 0$ . Nach dem schon Bewiesenen folgt daraus  $g \equiv 0$ , also  $f = -\frac{B_{2k}}{4k} E_{2k}$ .

zu c): Die  $\lambda_n$  sind multiplikativ:

$$\lambda_m \lambda_n = \sum_{\substack{d | \operatorname{ggT}(m,n) \\ d > 0}} d^{2k-1} \lambda_{\frac{mn}{d^2}}.$$

$$\Rightarrow \lambda_m \lambda_n = \lambda_{mn} \text{ für } \operatorname{ggT}(m, n) = 1. \quad \lambda_p \lambda_{p^v} = \lambda_{p^{v+1}} + p^{2k-1} \lambda_{p^{v-1}}.$$

$$\Rightarrow D(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n n^{-s} = \prod_{p \text{ prim}} \left( \sum_{v=0}^{\infty} \frac{\lambda_{p^v}}{p^{vs}} \right) = \prod_{p \text{ prim}} \left( 1 - \frac{\lambda_p}{p^s} + \frac{p^{2k-1}}{p^{2s}} \right)^{-1}$$

nach dem Beweis zu Satz 6.3.2. □

### 6.3.4 Beispiele a) $k \geq 2$ :

$$\begin{aligned} F_{2k} := -\frac{B_{2k}}{4k} E_{2k} &\mapsto D(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{2k-1}(n) n^{-s} = \zeta(s) \zeta(s-2k+1) \\ &= \prod_{p \text{ prim}} \left( 1 - \frac{1+p^{2k-1}}{p^s} + \frac{p^{2k-1}}{p^{2s}} \right)^{-1} \end{aligned}$$

b)

$$f = \Delta \mapsto D(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) n^{-s} = \prod_{p \text{ prim}} \left( 1 - \frac{\tau(p)}{p^s} + \frac{p^{2k-1}}{p^{2s}} \right)^{-1}$$

(vermutet von Ramanujan, bewiesen von Mordell).

**6.3.5 Satz (Hauptsatz über die Hecke-Operatoren zur Modulgruppe)** Sei  $k \geq 2$  und

$$d := \dim S_{2k} = \begin{cases} \left\lfloor \frac{k}{6} \right\rfloor & \text{für } k \not\equiv 1 \pmod{6} \\ \left\lfloor \frac{k}{6} \right\rfloor + 1 & \text{für } k \equiv 1 \pmod{6} \end{cases}$$

Dann gibt es eine Basis von  $G_{2k}$  bestehend aus  $d + 1$  Modulformen  $f_0, \dots, f_d$  mit erstem Fourier-Koeffizienten 1, welche simultane Eigenfunktionen aller  $T_n$  sind ( $n \geq 1$ ), so dass gilt:  $f_0 = -\frac{B_{2k}}{4k} E_{2k}$  und  $f_1, \dots, f_d$  bilden eine Orthogonalbasis von  $S_{2k}$ . Die  $f_0$  zugeordnete Dirichletreihe ist

$$D_0(s) = \zeta(s) \zeta(s - 2k + 1) = \prod_{p \text{ prim}} \left( -\frac{1 + p^{2k-1}}{p^s} + \frac{p^{2k-1}}{p^{2s}} \right)^{-1},$$

und die den  $f_1, \dots, f_d$  zugeordneten Dirichletreihen  $D_1, \dots, D_d$  definieren ganze Funktionen von  $s$  und besitzen eine Eulersche Produktentwicklung

$$D_v(s) = \prod_{p \text{ prim}} \left( 1 - \frac{\lambda_v(p)}{p^s} + \frac{p^{2k-1}}{p^{2s}} \right)^{-1} \quad (\operatorname{Re} s > k + 1),$$

wobei  $f_v | T_n = \lambda_v(n) f_v$  ( $v = 1, \dots, d, n \geq 1$ ).  $f_v(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_v(n) e^{2\pi i n z}$ . Die  $f_v$  ( $0 \leq v \leq d$ ) sind bis auf die Reihenfolge eindeutig bestimmt. Die  $D_v$  genügen der Funktionalgleichung

$$(2\pi)^{-s} \Gamma(s) D_v(s) = (-1)^k (2\pi)^{s-2k} \Gamma(2k-s) D_v(2k-s) \quad (0 \leq v \leq d).$$

B Die Existenz ist klar nach Satz 6.3.1 und Korollar 6.2.2. Die Aussagen über  $D_0$ , die ersten Fourier-Koeffizienten und das Eulerprodukt stehen in Satz 6.3.3, die Funktionalgleichung für  $D_0$  ist klar von der  $\zeta$ -Funktion her. Bleibt zu zeigen:  $D_1, \dots, D_d$  sind ganze Funktionen von  $s$  und erfüllen die Funktionalgleichung: Sei  $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{2\pi i n z} \in S_{2k}$ ,  $D(s) := \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$  für  $\operatorname{Re} s > k + 1$ . Aus  $\Gamma(s) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^s \frac{dt}{t}$  für  $\operatorname{Re} s > 0$  folgt:

$$(2\pi)^{-s} \Gamma(s) n^{-s} = \int_0^{\infty} e^{-2\pi n y} y^{s-1} dy.$$

Für  $\operatorname{Re} s > k + 1$  gilt:

$$\begin{aligned} (2\pi)^{-s} \Gamma(s) D(s) &= \int_0^{\infty} f(iy) y^{s-1} dy = \int_1^{\infty} f(iy) y^{s-1} dy + \int_0^1 f(iy) y^{s-1} dy \\ &= \int_1^{\infty} f(iy) y^{s-1} dy + \int_0^1 (iy)^{-2k} f\left(\frac{i}{y}\right) y^{s-1} dy \\ &= \int_1^{\infty} f(iy) \left( y^s + (-1)^k y^{2k-s} \right) \frac{dy}{y} \end{aligned}$$

Das ist eine ganze Funktion von  $s$  und genügt der Funktionalgleichung

$$(2\pi)^{-s} \Gamma(s) D(s) = (-1)^k (2\pi)^{s-2k} \Gamma(2k-s) D(2k-s)$$

Die  $f_v$  ( $v = 0, \dots, d$ ) sind bis auf die Reihenfolge eindeutig bestimmt. Da eine Basis von  $G_{2k}$  vorliegt, hat eine der Funktionen – etwa  $f_0$  – einen 0-ten Fourier-Koeffizienten  $\neq 0$ . Nach Satz 6.3.3 ist dann  $f_0 = -\frac{B_{2k}}{4k} E_{2k}$ . Weiter liegen nach Satz 6.3.3  $f_1, \dots, f_d$  in  $S_{2k}$ . Da nach Satz 6.3.3 b) die simultanen Eigenräume eindimensional sind, folgt der Rest der Behauptung.  $\square$

**Ramanujan-Peterssonsche Vermutung** Sei  $k \geq 2$ ,  $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{2\pi i n z} \in S_{2k}$ ,  $a_1 = 1$ ,  $f|T_n = a_n f$  ( $n \geq 1$ ),

$$D(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s} = \prod_{p \text{ prim}} \left( 1 - \frac{a_p}{p^s} + \frac{p^{2k-1}}{p^{2s}} \right)^{-1}.$$

Hans Petersson vermutete 1939:  $\Phi_p(X) := X^2 - a_p X + p^{2k-1}$  hat nicht zwei verschiedene reelle Nullstellen. Für  $f = \Delta$  hat Ramanujan das schon 1916 vermutet. Die Nullstellen von  $\Phi_p$  sind

$$\alpha_p^{\pm} := \frac{a_p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a_p}{2}\right)^2 - p^{2k-1}}.$$

Also sind äquivalent:

- (A) die Ramanujan-Peterssonsche Vermutung,
- (B)  $|a_p| \leq 2p^{k-\frac{1}{2}}$  für alle Primzahlen  $p$ ,
- (C)  $|\alpha_p^{\pm}| = p^{k-\frac{1}{2}}$ .

Pierre Deligne bewies in Deligne (1974) diese Vermutung.

# Index

Abbildung, linear gebrochene  
    elliptisch, 5  
    hyperbolisch, 5  
    Multiplikator, 6  
    parabolisch, 5

Atlas, 47

Derivation, 63

Differential, 62

Divisor, 72

    formaler, 76

    Hauptdivisor, 72

    Verzweigungs-, 76

Dreieck, 57

Formelsammlung

    H-Geometrie, 17

Fundamentalebene, 25

Fundamentalmenge, 25

Grundmatrix, 31

Hauptkongruenzgruppe, 34

Hecke-Gruppen, 34

Hecke-Operator, 111

Horozykel, 44

Karte, 47

Metrik

    Riemannsche, 9

Modulform, 66

Modulfunktion, 62

    Legendresche, 104

Normalpolygon

    Poincarésches, 27

Ordnung, 64

Reihe

    Eisensteinsche, 82

    Poincarésche, 81

Riemannsche Fläche, 47

    Euler-Charakteristik, 57

    Geschlecht, 57

Spitze, 19

    Breite, 31

Spitzenform, 70

Triangulierung, 57

Verzweigungspunkt, 55

Zahlenkugel, Riemannsche, 3

Überlagerung, 55

    Grad, 55

# Literaturverzeichnis

- Ahlfors 1985** A , Lars V.: *Complex analysis : an introduction to the theory of analytic functions of one complex variable*. 3. ed., 8. print. Auckland : McGraw-Hill, 1985 (International series in pure and applied mathematics)
- Ahlfors und Sario 1960** A , Lars V. ; S , Leo: *Riemann surfaces*. Princeton, NJ : Princeton University Press, 1960 (Princeton mathematical series 26)
- Apostol 1976** A , Tom M.: *Modular functions and Dirichlet series in number theory*. 2. Aufl. New York : Springer, 1976 (Graduate texts in mathematics)
- Borcherds 1992** B , Richard E.: Monstrous Moonshine and Monstrous Lie Superalgebras. In: *Inventiones Mathematicae* (1992), Nr. 109, S. 405–444
- Borel 1966** B , Armand (Hrsg.): *Seminar on Complex Multiplication*. Berlin [u.a.] : Springer, 1966 (Lecture notes in mathematics 21)
- Chandrasekharan 1985** C , Komaravolu: *Elliptic functions*. Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo : Springer, 1985 (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 281)
- Conway und Norton 1979** C , John H. ; N , Simon P.: Monstrous moonshine. In: *Bulletin of the London Mathematical Society* (1979), Nr. 11, S. 308–339
- Deligne 1974** D , Pierre: La conjecture de Weil: I. In: *Publications mathématiques de l'I.H.É.S* 43 (1974), S. 273–307
- Elstrodt 2001** E , Jürgen: A Trace Formula for Hecke Operators on  $L^2(S^2)$  and Modular Forms on  $\Gamma_0(4)$ . In: *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg* 71 (2001), S. 181–196
- Elstrodt 2004** E , Jürgen: *Funktionentheorie*. April 2004. – URL <http://www.muenster.de/~j-engel/Mathe/FT.pdf>. – Skript zu den Vorlesungen im SS 2003 und WS 2003/2004
- Fischer und Lieb 1988** F , Wolfgang ; L , Ingo: *Ausgewählte Kapitel aus der Funktionentheorie*. Braunschweig, Wiesbaden : Vieweg, 1988 (Vieweg-Studium 48)
- Ford 1951** F , Lester R.: *Automorphic functions*. 2. Aufl. New York : Chelsea, 1951 (Chelsea scientific books)
- Forster 1977** F , Otto: *Riemannsche Flächen*. Berlin [u.a.] : Springer, 1977 (Heidelberger Taschenbücher 184)



- Gantmacher 1965** G , Feliks R.: *Matrizenrechnung*. S. 268. Berlin : Deutscher Verlag der Wissenschaft, 1965. – Satz 11
- Gunning 1962** G , Robert C.: *Lectures on modular forms*. Princeton, N.J. : Princeton University Press, 1962 (Annals of mathematics studies 48)
- Hecke 1970** H , Erich: *Mathematische Werke*. Göttingen : Vandenhoeck & Ruprecht, 1970
- Hurwitz 1847** H , Adolf: In: C , August L. (Hrsg.): *Journal für die reine und angewandte Mathematik* Bd. 35. 1847, S. 153–274
- Hurwitz 1964** H , Adolf ; C , Richard (Hrsg.): *Vorlesungen über allgemeine Funktionentheorie und elliptische Funktionen*. 4. verm. u. verb. Aufl. Berlin, Heidelberg, Göttingen, New York : Springer, 1964 (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen 3)
- Iwaniec 1997** I , Henryk: *Topics in classical automorphic forms*. Providence, RI : American Mathematical Society, 1997 (Graduate studies in mathematics 17)
- Knopp 1970** K , Marvin I.: *Modular functions in analytic number theory*. Chicago : Markham, 1970 (Markham mathematics series)
- Koblitz 1993** K , Neal: *Introduction to elliptic curves and modular forms*. 2. Aufl. New York [u.a.] : Springer, 1993 (Graduate texts in mathematics 97)
- Koecher und Krieg 1998** K , Max ; K , Aloys: *Elliptische Funktionen und Modulformen*. Berlin [u.a.] : Springer, 1998
- Kuyk 1973–4** K , Willem (Hrsg.) ; International Summer School University of Antwerp (Veranst.): *Modular functions of one variable*. Bd. I–VI. Berlin [u.a.] : Springer, 1973–4. (Lecture notes in mathematics 320, 349, 350, 476)
- Lamotke 2005** L , Klaus: *Riemannsche Flächen*. Berlin [u.a.] : Springer, 2005 (Grundwissen Mathematik)
- Lang 1973** L , Serge: *Elliptic functions*. Reading, Mass. [u.a.] : Addison-Wesley, 1973 (Advanced book program)
- Lang 1976** L , Serge: *Introduction to modular forms*. Berlin [u.a.] : Springer, 1976
- Lehner 1964** L , Joseph: *Discontinuous groups and automorphic functions*. Providence, RI : American Mathematical Society, 1964
- Lehner 1966** L , Joseph: *A short course in automorphic functions*. New York : Rinehart and Winston, 1966 (Athena series)
- Maak und Hecke** M , Wilhelm ; H , Erich: *Modulfunktionen*. Mathematisches Institut der Universität Göttingen

- Maass 1983a** M , Hans: *Lectures on modular functions of one complex variable*. 2. rev. Aufl. Bombay : Springer, 1983 (Tata Institute of Fundamental Research lectures on mathematics and physics)
- Maass 1983b** M , Hans: *Theorem 26*. S. 163. Siehe (Maass 1983a)
- Massey 1967** M , William S.: *Algebraic topology: an introduction*. New York, NY [u.a.] : Harcourt, Brace and World, 1967 (Harbrace College mathematics series)
- Miyake 1989** M , Toshitsune: *Modular forms*. Berlin [u.a.] : Springer, 1989
- Neher 1985** N , Erhard: Jacobis Tripelprodukt-Identität und  $\eta$ -Identitäten in der Theorie affiner Lie-Algebren. In: J , K. (Hrsg.) ; F , U. (Hrsg.) ; S , J. (Hrsg.): *Jahresbericht Deutsche Mathematiker Vereinigung*, 1985, S. 164–181
- Niebur 1975** N , Douglas: A formula for Ramanujans  $\tau$ -functions. In: *Illinois journal of mathematics* (1975), Nr. 19, S. 448–449
- Ogg 1969** O , Andrew: *Modular forms and Dirichlet series*. New York : Benjamin, 1969 (Mathematics lecture note series 39)
- Petersson 1982** P , Hans: *Modulfunktionen und quadratische Formen*. Berlin, Heidelberg, New York : Springer, 1982 (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 100)
- Rademacher 1973** R , Hans: *Topics in analytic number theory*. Berlin [u.a.] : Springer, 1973 (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete 169)
- Rankin 1964** R , Robert A.: *Elliptic modular functions and forms*. Indiana University Press, 1964 (Indiana University Lecture Notes)
- Rankin 1969** R , Robert A.: *The modular group and its subgroups*. Madras : Ramanujan Institute, 1969 (The Ramanujan Institute lecture notes 2)
- Rankin 1977** R , Robert A.: *Modular forms and functions*. Cambridge : Cambridge University Press, 1977
- Reichardt 1976** R , Hans: *Gauß und die nicht-euklidische Geometrie*. Leipzig : Teubner, 1976
- Reyssat 1989** R , Eric: *Quelques aspects des surfaces de Riemann*. Boston [u.a.] : Birkhäuser, 1989 (Progress in mathematics 77)
- Rudin 2002** R , Walter: *Real and complex analysis*. 3. ed. New York, Hamburg [u.a.] : McGraw-Hill, 2002
- Schoeneberg 1974** S , Bruno: *Elliptic modular functions*. Berlin, Heidelberg, New York : Springer, 1974 (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 203)

- Seifert und Threlfall 1934** S , Herbert ; T , William: *Lehrbuch der Topologie*. Leipzig : Teubner, 1934
- Serre 1970** S , Jean-Pierre: *Cours d'arithmétique*. 1. éd. Paris : Presses Universitaires de France, 1970 (Collection SUP / Mathématicien 2)
- Shimura 1971** S , Goro: *Introduction to the arithmetic theory of automorphic functions*. Princeton, NJ : Princeton University Press, 1971 (Publications of the Mathematical Society of Japan 11)
- Siegel** S , Carl L.: *Analytische Zahlentheorie II*. Vorlesungsausarbeitung
- Siegel 1949** S , Carl L.: *Annals of Mathematical Studies*. Bd. 16: *Transcendental numbers*. S. 98–99. Princeton : Princeton University Press, 1949
- Springer 1957** S , George: *Introduction to Riemann surfaces*. Reading, Mass. : Addison-Wesley, 1957 (Addison-Wesley mathematics series)
- Terras 1985–1988** T , Audrey: *Harmonic analysis on symmetric spaces and applications*. Berlin, Heidelberg , New York , London , Paris , Tokyo : Springer, 1985-1988
- Tricomi 1948** T , Francesco G.: *Elliptische Funktionen*. Leipzig : Akademische Verlagsgesellschaft, 1948 (Mathematik und ihre Anwendungen in Physik und Technik : Reihe A 20)
- Weil 1976** W , André: *Elliptic functions according to Eisenstein and Kronecker*. Berlin [u.a.] : Springer, 1976 (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 88)

## Abbildungsverzeichnis

1.1	Parabolische Transformation . . . . .	8
1.2	Hyperbolische Transformation . . . . .	8
1.3	Elliptische Transformation . . . . .	8
1.4	H-Kreis . . . . .	13
1.5	H-Dreieck mit Nullwinkel in $\infty$ . . . . .	15
1.6	H-Dreieck ohne Nullwinkel . . . . .	16
1.7	Ein Fundamentalbereich von $\Gamma_\theta$ . . . . .	30
1.8	Ein Fundamentalbereich von $\Gamma^0(5)$ . . . . .	38
1.9	Ein Fundamentalbereich von $\Gamma^0(2)$ . . . . .	39
1.10	Ein Fundamentalbereich von $\Gamma_0(2)$ . . . . .	40
1.11	Ein Fundamentalbereich von ${}_2\Gamma$ . . . . .	42

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Die Modulgruppe und ihre Untergruppen</b>	<b>3</b>
1.1	Linear-gebrochene Abbildungen . . . . .	3
1.2	Das Poincarésche Modell der hyperbolischen Geometrie . . . . .	9
1.3	Die Modulgruppe . . . . .	18
1.4	Ein Fundamentalbereich der Modulgruppe . . . . .	25
1.5	Untergruppen der Modulgruppe . . . . .	28
<b>2</b>	<b><math>\Gamma \backslash \mathbb{H}^*</math> als topologischer Raum und als Riemannsche Fläche</b>	<b>44</b>
2.1	Der topologische Raum $\Gamma \backslash \mathbb{H}^*$ . . . . .	44
2.2	Die Riemannsche Fläche $\Gamma \backslash \mathbb{H}^*$ . . . . .	47
2.3	Untergruppen von endlichem Index in der Modulgruppe und zugehörige verzweigte Überlagerungen Riemannscher Flächen . . . . .	55
<b>3</b>	<b>Meromorphe Funktionen und abelsche Differentiale auf <math>\Gamma \backslash \mathbb{H}^*</math> – Modulfunktionen und Modulformen auf <math>\mathbb{H}</math></b>	<b>61</b>
3.1	Übertragung meromorpher Funktionen und abelscher Differentiale von $\Gamma \backslash \mathbb{H}^*$ nach $\mathbb{H}$ . . . . .	61
3.2	Der Grad von Divisoren meromorpher Differentiale und Modulformen . . . . .	72
3.3	Der Riemann-Rochsche Satz für Modulformen . . . . .	75
<b>4</b>	<b>Beispiele von Modulformen</b>	<b>81</b>
4.1	Poincarésche Reihen . . . . .	81
4.2	Die Eisensteinschen Reihen zur Modulgruppe . . . . .	86
4.3	Die Modulform $\Delta$ . . . . .	92
4.4	Die Dedekindsche $\eta$ -Funktion . . . . .	95
4.5	Die Modulfunktion $J$ . . . . .	100
<b>5</b>	<b>Metrisierung und Vollständigkeitssatz</b>	<b>105</b>
5.1	Die Peterssonssche Metrisierung . . . . .	105
5.2	Koeffizientenformel und Vollständigkeitssatz für Poincarésche Reihen . . . . .	106
5.3	Wachstum von Fourier-Koeffizienten von Modulformen . . . . .	109
<b>6</b>	<b>Die Heckschen Operatoren</b>	<b>110</b>
6.1	Definition der Heckschen Operatoren und grundlegende Eigenschaften . . . . .	110
6.2	Wirkung der $T_n$ auf die Poincaré-Reihen, Selbstadjungiertheit der $T_n$ . . . . .	115

6.3	Eigenfunktionen der Hecke-Operatoren und Dirichletsche Reihen mit Eulerscher Produkt-Entwicklung . . . . .	118
-----	--	-----