Spektraltheorie

André Noll

27. Dezember 2003

Die Spektraltheorie untersucht die Lösbarkeitseigenschaften der Gleichung $(T - zI)x = y$, wobei T ein linearer, aber nicht notwendigerweise beschränkter, Operator in einem Banach- oder Hilbertraum X ist, $z \in \mathbb{C}$ und $x, y \in X$. Das Verständnis und die Analyse des Spektrums von Operatoren ist von fundamentaler Bedeutung in der Quantenmechanik, aber auch in vielen anderen Bereichen der Mathematik. Zunächst werden die Grundlagen der Spektraltheorie entwickelt und der Spektralsatz für selbstadjungierte Operatoren bewiesen, der eine konkrete Beschreibung dieser Operatoren liefert. Danach wird kurz auf den Formalismus der Quantenmechanik eingegangen und gezeigt, wie sich die Theorie selbstadjungierter Operatoren auf Schrödingeroperatoren angewenden läßt.

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen **4**
1.1 Vektorräume mit Skalarprodukt 4
1.2 Orthogonalität 5
1.3 Orthonormalsysteme 7

2 Adjungierte Operatoren in Hilberträumen **7**
2.1 Unbeschränkte Operatoren 8
2.2 Graphen und abgeschlossene Operatoren in Hilberträumen 11
2.3 Relative Beschränktheit und der Satz über die Stabilität der Abgeschlossenheit 13
2.4 Hermitesche, symmmetrische und selbstadjungierte Operatoren 15
2.5 Das Monotonieprinzip für selbstadjungierte Operatoren 17

3 Spektraltheorie selbstadjungierter Operatoren **19**
3.1 Grundbegriffe 19
3.2 Die Spektralradius Formel 23
3.3 Das Spektrum selbstadjungierter Operatoren 25

4 Spektralsatz und Spektraldarstellungssatz **28**
4.1 Spektralscharen und Spektralmaße 28
4.2 Integrale über Spektralscharen 31
4.3 Operatoren als Integrale über Spektralscharen 34
4.4 Die Stieltjes Umkehrformel und der Satz von Herglotz 35
4.5 Spektralsatz und Spektraldarstellungssatz 36

5 Anwendung auf die Quantenmechanik **41**
5.1 Formalismus der Quantenmechanik 41
5.2 Quantisierung 42
5.3 Die Evolutionsgruppe 43

A Lösungen zu ausgewählten Übungsaufgaben **46**
A.1 Lösungen zu Abschnitt 1 46
A.2 Lösungen zu Abschnitt 2 47
A.3 Lösungen zu Abschnitt 5 48
A.4 Changelog 48

B Benutzung des CVS Zugangs **50**

C Changelog **52**

Dieses Skript ist eine Ausarbeitung der zweistündigen Vorlesung *Spektraltheorie* von Dr. André Noll, Sommersemester 2003, TU Darmstadt. Es richtet sich weitgehend nach dem Buch [Wei00]. Natürlich können aus Zeitgründen nur Teile dieses Buches behandelt werden.

Das Skript wurde gemeinsam von den Hörern der Vorlesung und dem Dozent erstellt. Mein Dank gilt allen, die bei der Erstellung dieses Scriptes geholfen haben: Benjamin Doenigus, Thomas Forell, Matthias Heß, Claus Kirchner, Céline Schwarz, Kyriakos Stavrakidis.

1 Grundlagen

1.1 Vektorräume mit Skalarprodukt

Definition 1.1 Ein Vektorraum X mit Skalarprodukt heißt *Prähilbertraum*. Durch

$$\|x\| := \langle x, x\rangle^{1/2}, \quad x \in X$$

wird X zu einem normierten Raum. Ist $(X, \|\cdot\|)$ vollständig, so heißt X *Hilbertraum*.

Beispiel 1.2 Einige Beispiele für Hilberträume:

(a)

$$X = \mathbb{C}^n \qquad \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right\rangle = \sum_{j=1}^{n} \bar{x}_j y_j$$

(b) Der *Hilbertsche Folgenraum* ist der Raum

$$\ell^2 := \{(x_j) : x_j \in \mathbb{C}, \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^2 < \infty\}$$

aller quadratsummierbaren Folgen, ausgestattet mit dem Skalarprodukt

$$\langle (x_j)_j, (y_j)_j\rangle := \sum_{j=1}^{\infty} \overline{x_j} y_j.$$

Die (absolute) Konvergenz der Reihe folgt aus der für $a, b > 0$ gültigen Ungleichung $ab \leq (a^2 + b^2)/2$.

(c) Für jeden beliebigen Maßraum $(M, \mathfrak{A}, \mu)$ ist der Raum

$$L^2(M, \mu) := \{f : M \to \mathbb{C} : \int_M |f|^2 \, \mathrm{d}\mu < \infty\}$$

aller quadratintegrierbaren Funktionen, ausgestattet mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g\rangle := \int_M \overline{f} g \, \mathrm{d}\mu$$

ein Hilbertraum.

Satz 1.3 (Cauchy-Schwarzsche Ungleichung) *In jedem Prähilbertraum X gilt*

$$\langle x, y\rangle \leq |\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|, \quad x, y \in X.$$

Dabei gilt $|\langle x, y\rangle| = \|x\|\|y\|$ genau dann, wenn x und y linear abhängig sind, während $\langle x, y\rangle = \|x\|\|y\|$ genau für $x = \lambda y$ mit $\lambda > 0$ gilt.

Übungsaufgabe 1.4 Sei X ein Vektorraum und $s : X \times X \to \mathbb{K}$ eine Sesquilinearform mit zugehöriger quadratischer Form

$$q : X \ni x \mapsto s(x, x) \in \mathbb{K}.$$

Dann gilt:

(a) Falls $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, so gilt die *Polarisierungsidentität*

$$s(x, y) = \frac{1}{4}(q(x + y) - q(x - y) + iq(x - iy) - iq(x + iy)).$$

Insbesondere ist in *komplexen* Hilberträumen eine Sesquilinearform durch ihre quadratische Form bereits eindeutig festgelegt.

(b) In reellen Hilberträumen ist im Allgemeinen s *nicht* durch q eindeutig bestimmt.

(c) Es gilt die *Parallelogrammidentität*

$$q(x + y) + q(x - y) = 2q(x) + 2q(y), \quad x, y \in X.$$

(d) Ist s positiv semidefinit (d.h. $q(x) \geq 0$ für alle $x \in X$), so gilt die Cauchy-Schwarz Ungleichung für s:

$$s(x, y) \leq |s(x, y)| \leq q(x)^{1/2} q(y)^{1/2}, \quad x, y \in X.$$

1.2 Orthogonalität

Definition 1.5 Sei X ein Prähilbertraum, $x, y \in X$, $A, B \subset X$.

(a) x, y heißen *orthogonal* (Schreibweise: $x \perp y$), falls $\langle x, y \rangle = 0$.

(b) x heißt *orthogonal* zu A (Schreibweise: $x \perp A$), falls $\langle x, y \rangle = 0$ für alle $y \in A$.

(c) A, B heißen *orthogonal* (Schreibweise: $A \perp B$), wenn $\langle x, y \rangle = 0$ für alle $x \in A$ und $y \in B$.

(d) $A^\perp := \{x \in X : \langle x, y \rangle = 0 \text{ für alle } y \in A\}$ heißt das *orthogonale Komplement* von A.

Aus dieser Definition folgt sofort, dass für $A, B \subset X$ aus $A \subset B$ stets $A^\perp \supset B^\perp$ folgt. Außerdem ist klar, dass $\{0\}^\perp = X$ und $X^\perp = \{0\}$. Weitere grundlegende Eigenschaften des Skalarprodukts sind in der folgenden Übungsaufgabe zusammmengefaßt.

Übungsaufgabe 1.6 Sei X ein Hilbertraum, und sei $A \subset X$. Zeige:

(a) $A^\perp$ ist ein abgeschlossener Teilraum von X.

(b) Es gilt $A^\perp = \overline{A}^\perp$. Insbesondere folgt $x = 0$, falls $x \perp D$ für eine dichte Teilmenge D von X.

(c) Es gilt $A^\perp = \operatorname{span}(A)^\perp = \overline{\operatorname{span}(A)}^\perp$.

Der folgende Satz zeigt insbesondere, dass in einem Hilbertraum jede konvexe und abgeschlossene Menge, die nicht den Nullvektor beinhaltet, ein eindeutiges Element kleinster Norm enthält.

Satz 1.7 (Approximationssatz) *Es sei X ein Hilbertraum, A abgeschlossen und konvex, und $x \notin A$. Dann existiert genau ein $y \in A$ mit*

$$\|x - y\| = d(x, A) := \inf\{\|x - z\| : z \in A\}.$$

Mit Hilfe des Approximationssatzes beweist man leicht:

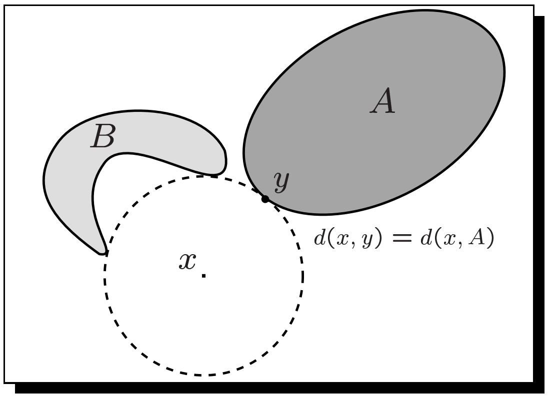

Abb. 1: Konvexe Mengen besitzen höchstens ein Element mit minimalem Abstand

Satz 1.8 (Projektionssatz) *Sei X ein Hilbertraum und M ein abgeschlossener Teilraum von X. Dann gilt*

(a) Jedes $x \in X$ hat eine eindeutige Darstellung $x = y + z$ mit $y \in M$, $z \in M^\perp$. y heißt die orthogonale Projektion *von x auf M.*

(b) Es gilt $M^{\perp\perp} = M$.

Beispiel 1.9 In $X = L^2(-1, 1)$ wird durch

$$M := \{f \in X : f(x) = f(-x) \text{ f.ü.}\}$$

ein abgeschlossener Teilraum definiert. Man rechnet sofort nach, dass

$$M^\perp = \{f \in X : f(x) = -f(-x) \text{ f.ü.}\}.$$

Also läßt sich jede quadratintegrierbare Funktion in eindeutiger Weise als Summe einer geraden und einer ungeraden Funktion darstellen. „Eindeutig“ bedeutet hier natürlich eindeutig als Element von $L^2(-1, 1)$.

1.3 Orthonormalsysteme

Definition 1.10 Eine Familie $M = \{e_\alpha : \alpha \in A\}$ von Vektoren in einem Hilbertraum X heißt *Orthonormalsystem*, falls $\langle e_\alpha, e_\beta\rangle = 0$ für $\alpha \neq \beta$ und $\langle e_\alpha, e_\alpha\rangle = 1$ für jedes $\alpha \in A$. Falls M total ist, d.h. $\overline{\operatorname{span}(M)} = X$, so heißt M *Orthonormalbasis.*

Beispiel 1.11 In $X = L^2(0,1)$ ist das *trigonometrische System* $M := \{e_n : n \in \mathbb{Z}\}$ mit $e_n(x) = e^{2\pi i n x}$ eine Orthonormalbasis.

Satz 1.12 *Sei $M = \{e_\alpha : \alpha \in A\}$ ein Orthonormalsystem.*

(a) *Es gilt die* Bessel-Ungleichung
$$\sum_{\alpha\in A} |\langle e_\alpha, x\rangle|^2 \leq \|x\|^2, \quad x \in X.$$

(b) *M ist genau dann eine Orthonormalbasis, wenn für jedes $x \in X$ die* Parsevalsche Gleichung
$$\sum_{\alpha\in A} |\langle e_\alpha, x\rangle|^2 = \|x\|^2$$
gilt.

(c) *Für $x \in X$ ist die orthogonale Projektion von x auf $\overline{\operatorname{span}}\{e_\alpha : \alpha \in A\}$ gegeben durch $\sum_{\alpha\in A}\langle e_\alpha, x\rangle e_\alpha$.*

Satz 1.13 (Existenz einer Orthonormalbasis) *Sei X ein Hilbertraum*

(a) *X besitzt eine Orthonormalbasis*

(b) *Jedes Orthonormalsystem kann zu einer Orthonormalbasis ergänzt werden.*

Satz 1.14 (Rieszscher Darstellungssatz) *Sei X ein Hilbertraum und $F : X \to \mathbb{K}$ ein stetiges lineares Funktional auf X. Dann existiert genau ein $y \in X$ mit $F(x) = \langle y, x\rangle$ für alle $x \in X$.*

2 Adjungierte Operatoren in Hilberträumen

Seien X, Y Hilberträume und $T \in \mathscr{L}(X,Y) = \{S : X \to Y \text{ linear und beschränkt}\}$, sowie $y \in Y$. Dann definiert
$$F_y : X \ni x \mapsto \langle y, Tx\rangle_Y \in \mathbb{K}$$
ein Element aus X'. Also liefert der Rieszsche Darstellungssatz 1.14 die Existenz eines eindeutigen Elements $y^* \in X$ mit $\langle y^*, x\rangle = \langle y, Tx\rangle$. Die lineare Abbildung
$$T^* : Y \ni y \mapsto y^* \in X$$
heißt der zu T *adjungierte Operator.*

Übungsaufgabe 2.1 (a) T^* ist eindeutig bestimmt durch die Identität

$$\langle T^*y, x\rangle_X = \langle y, Tx\rangle_Y$$

für alle $x \in X$ und $y \in Y$.

(b) Die Abbildung $* : \mathscr{L}(X,Y) \ni T \mapsto T^* \in \mathscr{L}(Y,X)$ ist isometrisch und antilinear, d.h. es gilt $\|T^*\| = \|T\|$ und $(\alpha T + \beta S)^* = \overline{\alpha}T^* + \overline{\beta}S^*$.

2.1 Unbeschränkte Operatoren

Seien X, Y Hilberträume. Unter einem (im Allgemeinen unbeschränkten) Operator von X nach Y versteht man eine lineare Abbildung T, definiert auf einem Teilraum $\mathrm{dom}(T)$ von X mit Werten in Y, Schreibweise: $T : X \supset \mathrm{dom}(T) \to Y$. Um den Begriff des adjungierten Operators auf den unbeschränkten Fall zu übertragen, betrachen wir zunächst Operatoren, die „formal" zueinander adjungiert sind.

Definition 2.2 Die Operatoren $T : X \supset \mathrm{dom}(T) \to Y$ und $S : Y \supset \mathrm{dom}(S) \to X$ heißen *formal zueinander adjungiert*, wenn $\langle y, Tx\rangle = \langle Sy, x\rangle$ für alle $x \in \mathrm{dom}(T)$ und $y \in \mathrm{dom}(S)$ gilt.

Unter diesen allgemeinen Voraussetzungen ist S nicht eindeutig durch T bestimmt. Gilt beispielsweise $\mathrm{dom}(T) = \{0\}$, so ist jedes S formal zu T adjungiert.

Satz 2.3 *Ist $T : X \supset \mathrm{dom}(T) \to Y$ dicht definiert (d.h. $\overline{\mathrm{dom}(T)} = X$), so gibt es genau einen maximalen zu T formal adjungierten Operator T^*.*

Beweis. Seien S_1, S_2 formal zu T adjungiert. Für $y \in \mathrm{dom}(S_1) \cap \mathrm{dom}(S_2)$ gilt

$$\langle S_1y - S_2y, x\rangle = \langle y, Tx\rangle - \langle y, Tx\rangle = 0, \quad x \in \mathrm{dom}(T).$$

Daraus folgt $S_1y = S_2y$. Setze

$$\mathrm{dom}(S) := \mathrm{dom}(S_1) + \mathrm{dom}(S_2) = \{y_1 + y_2 : y_1 \in \mathrm{dom}(S_1), y_2 \in \mathrm{dom}(S_2)\},$$

$$S(y_1 + y_2) = S_1y_1 + S_2y_2.$$

Dann ist S wohldefiniert, S ist Fortsetzung von S_1 und S_2, und S ist formal zu T adjungiert. Daraus folgt die Behauptung, wenn man

$$\mathrm{dom}(T^*) := \bigcup\{\mathrm{dom}(S) : S \text{ formal zu } T \text{ adjungiert}\}$$

setzt, und für $y \in \mathrm{dom}(T^*)$ definiert: $T^*y := Sy$, wobei S so gewählt sei, dass S formal zu T adjungiert ist, und $y \in \mathrm{dom}(S)$ gilt. ■

Übungsaufgabe 2.4 Für jeden dicht definierten Operator $T : X \supset \operatorname{dom}(T) \to Y$ gilt

(a) $\operatorname{dom}(T^*) = \{y \in Y : \exists \tilde{x} \in X \text{ mit } \langle y, Tx \rangle_Y = \langle \tilde{x}, x \rangle_X \text{ für alle } x \in \operatorname{dom}(T)\}$, dieses $\tilde{x}$ ist (im Falle seiner Existenz) eindeutig, und es gilt $T^*y = \tilde{x}$.

(b) $\operatorname{dom}(T^*) = \{y \in Y : \operatorname{dom}(T) \ni x \mapsto \langle y, Tx \rangle \in \mathbb{K} \text{ ist stetig}\}$ und T^*y ist das Element aus X, das dieses Funktional erzeugt.

Selbst wenn T dicht definiert ist, so braucht dies nicht für T^* zuzutreffen. Daher müssen wir dies in Teil (a) des folgenden Satzes zusätzlich voraussetzen, um von T^{**} sprechen zu können.

Satz 2.5 *Sei $T : X \supset \operatorname{dom}(T) \to Y$ ein dicht definierter Operator. Dann gilt*

(a) Ist $\operatorname{dom}(T^*)$ dicht, so ist $T \subset T^{**}$.

(b) $\operatorname{kern}(T^*) = \operatorname{ran}(T)^\perp$.

(c) T ist genau dann beschränkt, wenn $T^* \in \mathscr{L}(Y, X)$. In diesem Fall gilt $\|T\| = \|T^*\|$.

(d) Ist T beschränkt, so ist T^{**} die eindeutig bestimmte Fortsetzung von T auf X.

Beweis.

(a) Es ist zu zeigen, dass T und T^* formal zueinander adjungiert sind, aber das ist klar.

(b) Wir haben die folgenden Äquivalenzen: $y \in \operatorname{kern}(T^*) \Leftrightarrow T^*y = 0 \Leftrightarrow \langle T^*y, x \rangle = 0 \forall x \in \operatorname{dom}(T) \Leftrightarrow \langle y, Tx \rangle = 0 \forall x \in \operatorname{dom}(T) \Leftrightarrow y \in \operatorname{ran}(T)^\perp$.

(c) Sei T beschränkt. Dann folgt aus der Cauchy-Schwarz Ungleichung

$$|\langle Tx, y \rangle| \leq \|T\| \|x\| \|y\|, \quad x \in \operatorname{dom}(T), y \in Y.$$

Also ist für jedes $y \in Y$ das lineare Funktional $x \mapsto \langle Tx, y \rangle$ stetig auf $\operatorname{dom}(T)$, und Teil (b) von Übungsaufgabe 2.4 impliziert $\operatorname{dom}(T^*) = Y$. Weiter gilt

$$\begin{aligned} &\sup\{|\langle T^*y, x \rangle| : x \in X, y \in \operatorname{dom}(T^*), \|x\|\|y\| = 1\} \\ &= \sup\{|\langle y, Tx \rangle| : x \in \operatorname{dom}(T), y \in \operatorname{dom}(T^*)\} \\ &= \|T\|. \end{aligned}$$

Also ist T^* beschränkt mit $\|T^*\| = \|T\|$.

Sei umgekehrt $T^* \in \mathscr{L}(Y, X)$. Dann folgt aus dem eben Bewiesenen, dass $T^{**} \in \mathscr{L}(X, Y)$, und T ist wegen $T \subset T^{**}$ trivialerweise beschränkt.

(d) Aus (a) folgt $T \subset T^{**}$. Aus (c) folgt $T^{**} \subset \mathscr{L}(X, Y)$. Da $\mathrm{dom}(T)$ dicht in X ist, folgt die Behauptung. ∎

Als nächstes erklären wir für unbeschränkte Operatoren T_1, T_2 die Operatorsumme $T_1 + T_2$ und die Komposition $T_1 T_2$ auf ihren maximalen natürlichen Definitionsbereichen.

Definition 2.6 (a) Seien $T_{1,2} : X \supset \mathrm{dom}(T_{1,2}) \to Y$. Dann heißt

$$\mathrm{dom}(T_1 + T_2) := \mathrm{dom}(T_1) \cap \mathrm{dom}(T_2), \qquad (T_1 + T_2)x := T_1 x + T_2 x$$

die *Operatorsumme* von T_1 und T_2.

(b) Für $T_1 : X \supset \mathrm{dom}(T_1) \to Y$ und $T_1 : Y \supset \mathrm{dom}(T_1) \to Z$ nennt man

$$\mathrm{dom}(T_2 T_1) := \{x \in \mathrm{dom}(T_1) : T_1 x \in \mathrm{dom}(T_2)\}, \qquad T_2 T_1 x := T_2(T_1 x)$$

die *Komposition* aus T_1 und T_2.

Beachte, dass a priori nicht klar ist, wie groß $\mathrm{dom}(T_1 + T_2)$ bzw. $\mathrm{dom}(T_1 T_2)$ sind. Man kann ohne weiteres Operatoren konstruieren, deren Summe bzw. Komposition lediglich auf dem Nullvektor definiert ist. Insbesondere sind $(T_1 + T_2)^*$ und $(T_1 T_2)^*$ im Allgemeinen nicht definiert.

Satz 2.7 *Seien X, Y, Z Hilberträume, $T_2 : X \supset \mathrm{dom}(T_2) \to Y, T_1 : Y \supset \mathrm{dom}(T_1) \to Z$ dicht definiert. Dann gilt*

(a) Ist $T_1 T_2$ dicht definiert, so gilt $(T_1 T_2)^* \supset T_2^* T_1^*$.

(b) Ist $T_1 \in \mathscr{L}(Y, Z)$, so gilt $(T_1 T_2)^* = T_2^* T_1^*$.

Beweis.

(a) Es ist zu zeigen, dass $T_2^* T_1^*$ und $T_1 T_2$ formal zueinander adjungiert sind. Sei also $x \in \mathrm{dom}(T_1 T_2)$, $z \in \mathrm{dom}(T_2^* T_1^*)$. Dann gilt

$$\langle T_2^* T_1^* z, x \rangle \overset{x \in \mathrm{dom}(T_2)}{=} \langle T_1^* z, T_2 x \rangle \overset{T_2 x \in \mathrm{dom}(T_1)}{=} \langle z, T_1 T_2 x \rangle.$$

(b) Es ist $\mathrm{dom}(T_1 T_2) = \mathrm{dom}(T_2)$. Also genügt es wegen Teil (a) zu zeigen, dass $\mathrm{dom}((T_1 T_2)^*) \subset \mathrm{dom}(T_2^* T_1^*) = \{z \in Z : T_1^* z \in \mathrm{dom}(T_2^*)\}$. Sei $z \in \mathrm{dom}((T_1 T_2)^*)$. Dann gilt für $x \in \mathrm{dom}(T_2)$

$$\langle (T_1 T_2)^* z, x \rangle = \langle z, (T_1 T_2) x \rangle = \langle T_1^* z, T_2 x \rangle.$$

Es folgt $T_1^* z \in \mathrm{dom}(T_2^*)$, also $z \in \mathrm{dom}(T_2^* T_1^*)$. ∎

Ganz ähnliche Rechenregeln gelten auch für die Operatorsumme:

Satz 2.8 *Seien X, Y Hilberträume und $T_{1,2} : X \supset \mathrm{dom}(T_{1,2}) \to Y$ dicht definiert.*

(a) Ist auch $T_1 + T_2$ dicht definiert, so gilt $(T_1 + T_2)^* \supset T_1^* + T_2^*$.

(b) Ist $T_2 \in \mathscr{L}(X, Y)$, so gilt $(T_1 + T_2)^* = T_1^* + T_2^*$.

Beweis.

(a) Wir haben zu zeigen, dass $T_1^* + T_2^*$ und $T_1 + T_2$ formal zueinander adjungiert sind. Das ist aber trivial, denn für $x \in \mathrm{dom}(T_1 + T_2)$ und $y \in \mathrm{dom}(T_1^* + T_2^*)$ gilt $\langle (T_1 + T_2)x, y\rangle = \langle x, (T_1^* + T_2^*)y\rangle$.

(b) Wegen $\mathrm{dom}(T_1^* + T_2^*) = \mathrm{dom}(T_1^*)$ und Teil (a) genügt es, die Inklusion $\mathrm{dom}((T_1 + T_2)^*) \subset \mathrm{dom}(T_1^*)$ nachzuweisen. Sei dazu $x \in \mathrm{dom}((T_1 + T_2)^*)$ und $y \in \mathrm{dom}(T_1)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \langle x, T_1 y\rangle &= \langle x, (T_1 + T_2)y\rangle - \langle x, T_2 y\rangle \\ &= \langle (T_1 + T_2)^* x, y\rangle - \langle T_2^* x, y\rangle \\ &= \langle ((T_1 + T_2)^* x - T_2^* x, y\rangle, \end{aligned}$$

und es folgt $x \in \mathrm{dom}(T_1^*)$. ■

2.2 Graphen und abgeschlossene Operatoren in Hilberträumen

Sind X und Y Hilberträume, so wird das kartesische Produkt $X \times Y$ vermöge

$$\langle (x, y), (x', y')\rangle := \langle x, x'\rangle + \langle y, y'\rangle$$

zu einem Hilbertraum. Es tritt in natürlicher Weise bei der Untersuchung des *Graphen*

$$G(T) := \{(x, Tx) \in X \times Y : x \in \mathrm{dom}(T)\} \subset X \times Y$$

eines Operators $T : X \supset \mathrm{dom}(T) \to Y$ auf. Für dicht definiertes T soll in der folgenden Übungsaufgabe der Graph von T^* untersucht werden. Dazu führen wir die linearen Abbildungen

$$U : X \times Y \ni (x, y) \mapsto (y, -x) \in Y \times X,$$

$$V : X \times Y \ni (x, y) \mapsto (y, x) \in Y \times X$$

ein, bei denen es sich offenbar um isometrische Isomorphismen handelt.

Übungsaufgabe 2.9 Sei G eine beliebige Teilmenge von $X \times Y$.

(a) G ist genau dann Graph eines Operators von X nach Y, wenn gilt

   (i) G ist ein Teilraum von $X \times Y$,

   (ii) Aus $(0, y) \in G$ folgt $y = 0$.

(b) Jeder Teilraum eines Graphen ist Graph.

(c) Seien $T_{1,2} : X \supset \mathrm{dom}(T_{1,2}) \to Y$ dicht definiert.

   (i) Dann gilt
$$G(T_1^*) = U\left(G(T_1^*)^\perp\right) = \left(U\left(G(T_1)\right)\right)^\perp.$$

   (ii) Aus $T_1 \subset T_2$ folgt $T_2^* \subset T_1^*$.

(d) Sei $T : X \supset \mathrm{dom}(T) \to Y$ dicht definiert und injektiv. Dann ist auch T^* injektiv, und es gilt $(T^{-1})^* = (T^*)^{-1}$.

Wir sind nun in der Lage, die wichtige Klasse der *abgeschlossenen Operatoren* einzuführen, die einerseits allgemein genug ist, um viele unbeschränkte Operatoren zu enthalten, aber andererseits auch speziell genug ist, denn in dieser Klasse gelten ähnlich schöne Eigenschaften wie in der Klasse der beschränkten Operatoren.

Definition 2.10 Sei $T : X \supset \mathrm{dom}(T) \to Y$.

(a) Die *Graphennorm* $\|\cdot\|_T$ von T ist die durch das Skalarprodukt
$$\langle x, y\rangle_T := \langle x, y\rangle_X + \langle Tx, Ty\rangle_Y$$
erzeugte Norm auf $\mathrm{dom}(T)$.

(b) T heißt *abgeschlossen*, wenn $G(T)$ abgeschlossen in $X \times Y$ ist.

(c) T heißt *abschließbar*, wenn $\overline{G(T)}$ der Graph eines Operators $\overline{T}$ ist. Man nennt $\overline{T}$ den *Abschluss* von T.

(d) Sei T abgeschlossen. $D \subset \mathrm{dom}(T)$ heißt *core* von T, falls $\overline{T_{\restriction D}} = T$ gilt.

Bemerkung 2.11 (a) Folgende Aussagen sind äquivalent:

   (i) T ist abgeschlossen,

   (ii) $(\mathrm{dom}(T), \|\cdot\|_T)$ ist vollständig,

   (iii) Für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $\mathrm{dom}(T)$ mit $x_n \to x$ und $Tx_n \to y$ gilt $x \in \mathrm{dom}(T)$ und $y = Tx$.

(b) Jeder adjungierte Operator ist abgeschlossen.

Übungsaufgabe 2.12 Sei $T : X \supset \mathrm{dom}(T) \to Y$.

(a) Ist T abgeschlossen und D ein Teilraum von $\mathrm{dom}(T)$, so ist $T_{\restriction D}$ abschließbar.

(b) Ist T stetig (d.h. es gibt $C \geq 0$ mit $\|Tx\| \leq C\|x\|$ für alle $x \in \mathrm{dom}(T)$), so ist T abschließbar.

(c) Sei $T \in \mathscr{L}(X, Y)$. Dann ist jeder dichte Teilraum von X ein core von T.

Das wichtigste funktionalanalytische Hilfsmittel in der Spektraltheorie abgeschlossener Operatoren ist der Satz vom abgeschlossenen Graphen, an den wir ohne Beweis erinnern.

Satz 2.13 (Satz vom abgeschlossenen Graphen) *Sei T ein abgeschlossener Operator mit abgeschlossenem Definitionsbereich* $\mathrm{dom}(T)$. *Dann ist T stetig.*

Damit erhält man sehr leicht das folgende Corollar:

Corollar 2.14 *Je zwei Aussagen implizieren die dritte:*

(a) T ist abgeschlossen.

(b) $\mathrm{dom}(T)$ *ist abgeschlossen.*

(c) T ist stetig.

2.3 Relative Beschränktheit und der Satz über die Stabilität der Abgeschlossenheit

In diesem Abschnitt wollen wir zeigen, dass die Abgeschlossenheit eines Operators bei Addition einer „kleinen Störung“ erhalten bleibt. Dazu führen wir zunächst den Begriff der relativen Beschränktheit eines Operators S bzgl. eines Operators T ein.

Definition 2.15 Seien $S : X \supset \mathrm{dom}(S) \to Y$ und $T : X \supset \mathrm{dom}(T) \to Y$. S heißt *T-beschränkt*, wenn $\mathrm{dom}(S) \supset \mathrm{dom}(T)$ und es außerdem Konstanten $a, b \geq 0$ gibt mit

$$\|Sx\| \leq a\|x\| + b\|Tx\|, \quad x \in \mathrm{dom}(T). \tag{1}$$

In diesem Fall heißt

$$\inf\{b \geq 0 : \exists\, a \geq 0 \text{ mit } (1)\}$$

die *T-Schranke von S*.

Beispielsweise ist jedes $S \in \mathscr{L}(X,Y)$ für jeden Operator T stets T-beschränkt mit Schranke 0.

Satz 2.16 (Stabilität der Abgeschlossenheit) *Sei S ein T-beschränkter Operator mit T-Schranke kleiner 1. T ist genau dann abgeschlossen, wenn $T+S$ abgeschlossen ist.*

Beweis. Für $x \in \operatorname{dom}(T)$ gilt

$$\|x\| + \|Tx\| \leq \|x\| + \|(T+S)x\| + \|Sx\| \leq (a+1)\|x\| + \|(T+S)x\| + b\|Tx\|,$$

also

$$\begin{aligned}
\|x\| + \|Tx\| &\leq \frac{1}{1-b}\|x\| + \|Tx\| \\
&\leq \frac{1}{1-b}\left((a+1)\|x\| + \|(T+S)x\|\right) \\
&\leq \frac{a+1}{1-b}\left(\|x\| + \|(T+S)x\|\right).
\end{aligned}$$

Mit der für $\xi, \eta \geq 0$ gültigen Ungleichung

$$(\xi+\eta)^2 \leq 2(\xi^2+\eta^2) \leq 2(\xi+\eta)^2$$

erhalten wir

$$\begin{aligned}
\|x\|_T^2 &= \|x\|^2 + \|Tx\|^2 \leq (\|x\| + \|Tx\|)^2 \\
&\leq \left(\frac{a+1}{1-b}\right)^2 (\|x\| + \|(T+S)x\|)^2 \\
&\leq 2\left(\frac{a+1}{1-b}\right)^2 (\|x\|^2 + \|(T+S)x\|^2) \\
&= 2\left(\frac{a+1}{1-b}\right)^2 \|x\|_{T+S}^2.
\end{aligned}$$

Andererseits gilt:

$$\begin{aligned}
\|x\|_{T+S}^2 &= \|x\|^2 + \|(T+S)x\|^2 \leq (\|x\| + \|(T+S)x\|)^2 \leq (\|x\| + \|Tx\| + \|Sx\|)^2 \\
&\leq ((1+a)\|x\| + (1+b)\|Tx\|)^2 \leq \max(1+a, 1+b)(\|x\| + \|Tx\|)^2 \\
&\leq 2\max(1+a,1+b)(\|x\|^2 + \|Tx\|^2) \\
&= 2\max(1+a,1+b)\|x\|_T^2.
\end{aligned}$$

Also ist $(\operatorname{dom}(T), \|\cdot\|_T)$ genau dann vollständig, wenn $(\operatorname{dom}(T), \|\cdot\|_{T+S})$ vollständig ist.

■

2.4 Hermitesche, symmmetrische und selbstadjungierte Operatoren

Die Klasse der selbstadjungieren Operatoren ist von besonderem Interesse, sowohl in der Spektraltheorie, als auch wegen der physikalischen Interpretation durch die Quantenmechanik. Die folgende Definition enthält neben der Definition des selbstadjungieren Operators auch einige Abschwächungen dieser Begriffsbildung.

Definition 2.17 Ein linerarer Operator $T : X \supset \mathrm{dom}(T) \to X$ heißt

(a) *hermitesch*, wenn T zu sich selbst formal adjungiert ist.

(b) *symmetrisch*, wenn T hermitesch und dicht definiert ist.

(c) *selbstadjungiert*, wenn T dicht definiert ist und $T = T^*$ gilt.

(d) *wesentlich selbstadjungiert*, wenn T dicht definiert ist und T^* selbstadjungiert ist.

Bemerkung 2.18 (a) T ist genau dann symmetrisch, wenn $T \subset T^*$.

(b) Jeder selbstadjungierte Operator ist wesentlich selbstadjungiert, jeder wesentlich selbstadjungierte Operator ist symmetrisch, und jeder symmetrische Operator ist hermitesch. Die Umkehrungen dieser Aussagen gelten im Allgemeinen nicht.

(c) Für $T \in \mathscr{L}(X)$ sind die Begriffe hermitesch, symmetrisch, wesentlich selbstadjungiert und selbstadjungiert äquivalent.

Das folgende Lemma wird zur Charakterisierung der wesentlichen Selbstadjungiertheit (Satz 2.20 (b)) benötigt.

Lemma 2.19 *Sei $T : X \supset \mathrm{dom}(T) \to Y$ dicht definiert.*

(a) T ist genau dann abschließbar, wenn T^* dicht definiert ist. In diesem Fall ist $T^{**} = \overline{T}$.

(b) Ist T abschließbar, so gilt $\overline{T}^* = T^*$.

Beweis.

(a) Es gilt

$$\begin{aligned}
\overline{G(T)} &= G(T)^{\perp\perp} = (U^{-1}(G(T^*)))^{\perp} \\
&= \{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in X \times Y : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} -T^* z \\ z \end{pmatrix} \ \forall\, z \in \mathrm{dom}(T^*)\} \\
&= \{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in X \times Y : \langle x, T^* z\rangle = \langle y, z\rangle \ \forall\, z \in \mathrm{dom}(T^*)\}.
\end{aligned}$$

Also gilt $(0,y) \in \overline{G(T)}$ genau dann, wenn $\langle y,z\rangle = 0$ für alle $z \in \operatorname{dom}(T^*)$, d.h. wenn $y \in \operatorname{dom}(T^*)^\perp$. Mit Übungsaufgabe 2.9 (a) folgt daher, dass $\overline{G(T)}$ genau dann ein Graph ist, wenn $\operatorname{dom}(T^*)$ dicht ist. In diesem Fall erhalten wir

$$G(T^{**}) = U(G(T^*))^\perp = UUG(T)^{\perp\perp} = G(T)^{\perp\perp} = \overline{G(T)} = G(\overline{T}).$$

(b) Die Behauptung folgt aus

$$G(T^*) = U(G(T)^\perp) = U(\overline{G(T)}^\perp) = U(G(\overline{T})^\perp) = G(\overline{T}^*).$$ ■

Satz 2.20 *Sei* $T : X \supset \operatorname{dom}(T) \to X$ *symmetrisch.*

(a) T *ist abschließbar.*

(b) Folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) T *ist wesentlich selbstadjungiert,*

(ii) $\overline{T} = T^*$,

(iii) $\overline{T}$ *ist selbstadjungiert.*

In diesem Fall ist $\overline{T}$ *die einzige selbstadjungierte Fortsetzung von* T.

(c) Ist $\operatorname{dom}(T) = X$, *so ist* T *beschränkt (Satz von Hellinger-Töplitz).*

Beweis.

(a) Wegen $T \subset T^*$ besitzt T die abgeschlossene Fortsetzung T^* und ist damit abschließbar.

(b) Nach Teil (a) ist T abschließbar. Aus Lemma 2.19 (a) folgt daher die Wohldefiniertheit von T^{**} und die Identität $T^{**} = \overline{T}$.

(b)(i)⇒(b)(ii): Nach Voraussetzung ist T^* selbstadjungiert. Also haben wir $T^{**} = T^*$ und damit auch $\overline{T} = T^*$.

(b)(ii)⇒(b)(iii): Aus $\overline{T} = T^*$ folgt $\overline{T}^* = T^{**} = \overline{T}$, d.h. die Selbstadjungiertheit von $\overline{T}$.

(b)(iii)⇒(b)(i): Es ist die Identität $T^{**} = T^*$ zu beweisen. Nach Voraussetzung haben wir $T^{**} = \overline{T} = \overline{T}^*$. Die Behauptung folgt daher aus Lemma 2.19 (b).

(c) Da T abschließbar ist mit $\operatorname{dom}(T) = X$, ist T bereits abgeschlossen. Aus dem Satz vom abgeschlossenen Graphen erhalten wir die Behauptung. ■

2.5 Das Monotonieprinzip für selbstadjungierte Operatoren

Bekanntlich konvergiert jede reelle Zahlenfolge, die monoton und beschränkt ist. Es ist überraschend, dass sich dieses Monotonieprinzip auf den Kontext symmetrischer Operatoren aus $\mathscr{L}(X)$ verallgemeinern läßt.

Satz 2.21 (Monotonieprinzip) *Sei $T_n \in \mathscr{L}(X)$ eine monotone und beschränkte Folge symmetrischer Operatoren, d.h. es gilt*

(a) $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\| < \infty$,

(b) $\langle x, T_n x\rangle \begin{array}{c}\geq\\ \leq\end{array} \langle x, T_{n+1}x\rangle$ *für alle* $x \in X$, $n \in \mathbb{N}$.

Dann existiert ein symmetrischer Operator $T \in \mathscr{L}(X)$ mit $\lim_{n\to\infty} T_n x = Tx$ für alle $x \in X$.

Beweis.
OBdA sei T_n monoton wachsend. Sei $m < n$ fest. Definiere

$$s : X \times X \ni (x, y) \mapsto \langle x, (T_n - T_m)y\rangle \in \mathbb{C}.$$

Dann ist s eine hermitesche, positiv semidefinite Sesquilinearform. Es gilt

$$\|(T_n - T_m)x\|^2 = \langle (T_n - T_m)x, (T_n - T_m)x\rangle = s((T_n - T_m)x, x).$$

Mit der Cauchy-Schwarz Ungleichung für positiv semidefinite Sesquilinearformen (vgl. Übungsaufgabe 1.4 (d)) kann dieser Ausdruck abgeschätzt werden, und wir erhalten

$$\begin{aligned} \|(T_n - T_m)x\|^2 &\leq s((T_n - T_m)x, (T_n - T_m)x)^{\frac{1}{2}} \cdot s(x, x)^{\frac{1}{2}} \\ &= \langle (T_n - T_m)x, (T_n - T_m)^2 x\rangle^{\frac{1}{2}} \cdot \langle x, (T_n - T_m)x\rangle^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Voraussetzung (a) liefert daher zusammen mit der Cauchy-Schwarz Ungleichung für das Skalarprodukt in X

$$\begin{aligned} \|(T_n - T_m)x\|^2 &\leq \|(T_n - T_m)x\|^{\frac{1}{2}} \cdot \|(T_n - T_m)^2 x\|^{\frac{1}{2}} \cdot \langle x, (T_n - T_m)x\rangle^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C_1\|x\|^{\frac{1}{2}} \cdot C_2\|x\|^{\frac{1}{2}} \cdot \langle x, (T_n - T_m)x\rangle^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

mit geeigneten Konstanten $C_1, C_2 \geq 0$. Nun ist aber $(\langle x, T_n x\rangle^{\frac{1}{2}})_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt und monoton, damit konvergent. Deshalb konvergiert die rechte Seite gegen 0 für $n, m \to \infty$. Für $x \in X$ ist somit $(T_n x)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge, also existiert $Tx := \lim_{n\to\infty} T_n x$. Offenbar ist T linear mit $\|T\| \leq C$. Es gilt außerdem

$$\langle Tx, y\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle T_n x, y\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle x, T_n y\rangle = \langle x, Ty\rangle,$$

d.h. T ist symmetrisch. ∎

Corollar 2.22 *Sei $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge abgeschlossener Teilräume von X mit $M_n \subset M_{n+1}$. Sei $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die zugehörige Folge von orthogonalen Projektoren. Dann existiert eine orthogonale Projektion P mit $P_n x \to Px$ für alle $x \in X$. Es gilt* $\operatorname{ran}(P) = \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n}$.

Beweis. Gemäß Satz 2.21 existiert $P(x) := \lim_{n\to\infty} P_n x$ für alle $x \in X$, und P ist selbstadjungiert. Weiter gilt

$$P^2 x = \lim_{n\to\infty} P_n^2 x = \lim_{n\to\infty} P_n x = Px.$$

Also folgt aus Übungsaufgabe 2.23, dass P eine orthogonale Projektion ist. Zum Nachweis der letzen Aussage sei $x \in (\overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n})^\perp$. Dann gilt $x \perp M_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also $P_n x = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Damit ist $Px = \lim_{n\to\infty} P_n x = 0$. Somit gilt $\operatorname{kern}(P) \supset (\overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n})^\perp$. Also gilt

$$\operatorname{ran}(P) = \operatorname{kern}(P^*)^\perp = \operatorname{kern}(P)^\perp \subset \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n}.$$

Ist nun $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n$, so ist $P_n x = x$ für große n, da M_n aufsteigend ist. Somit gilt $Px = x$, also $x \in \operatorname{ran}(P)$. Da $\operatorname{ran}(P) = \operatorname{kern}(P^*)^\perp$ abgeschlossen ist, gilt somit

$$\overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n} \subset \overline{\operatorname{ran}(P)} = \operatorname{ran}(P). \qquad \blacksquare$$

Übungsaufgabe 2.23 Für $P \in \mathscr{L}(X)$ sind äquivalent:

(a) P ist orthogonale Projektion,

(b) P ist selbstadjungiert, und es gilt $P^2 = P$.

Bemerkung 2.24 Seien X, Y Banachräume. Definiert man auf $\mathscr{L}(X,Y)$ das System $(p_x)_{x\in X}$ von Halbnormen via

$$p_x(T) := \|Tx\|, \quad T \in \mathscr{L}(X,Y),$$

so wird $\mathscr{L}(X,Y)$ zu einem lokalkonvexen topologischen Vektorraum. Die von den Halbnormen $(p_x)_{x\in X}$ erzeugte lokalkonvexe Topologie auf $\mathscr{L}(X,Y)$ bezeichnet man als die *starke (Operator-)Topologie*. Sie ist (trotz ihres Namens) gröber als die Topologie, die von der *Operatornorm*

$$\|T\| := \sup\{\|Tx\| : x \in X, \;\; \|x\| = 1\}$$

induziert wird. Satz 2.21 sagt aus, dass jede monotone und beschränkte Folge symmetrischer Operatoren aus $\mathscr{L}(X)$ stets einen „starken Grenzwert“, d.h. einen Limes bzgl. der starken Operatortopologie, besitzt.

Nur der Vollständigkeit wegen erwähnen wir an dieser Stelle außerdem auch die *schwache (Operator-)Topologie* auf $\mathscr{L}(X, Y)$, die per Definition vom System $(p_{x,y^*})_{(x,y^*)\in X\times Y^*}$ mit

$$p_{x,y^*}(T) := |y^*(Tx)|, \quad T \in \mathscr{L}(X, Y),$$

erzeugt wird. Sie ist gröber als die starke Operator-Topologie, und sowohl die starke, als auch die schwache Operator-Topologie sind im Allgemeinen nicht metrisierbar.

Übungsaufgabe 2.25 (a) Gib eine Folge $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $\mathscr{L}(X)$ an mit $\lim_{n\to\infty} T_n x = 0$ für alle $x \in X$ (d.h. $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Nullfolge bzgl. der starken Operatortopologie), aber $\|T_n\|_{\mathscr{L}(X)} = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ (d.h. $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert nicht gegen 0 bzgl. der Operatornorm $\|\cdot\|_{\mathscr{L}(X)}$).

(b) Finde eine schwache Nullfolge $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $\mathscr{L}(X)$, die nicht die stark gegen 0 konvergiert.

3 Spektraltheorie selbstadjungierter Operatoren

3.1 Grundbegriffe

Sei X ein Hilbertraum und $T : X \supset \operatorname{dom}(T) \to X$ ein Operator. Das Ziel ist die Analyse von Lösbarkeitseigenschaften der Gleichung $(T - z)x = y$. Dabei ist es wünschenswert, dass $T - z$ bijektiv und $(T - z)^{-1}$ stetig ist. Daher definieren wir

Definition 3.1 (a) Die Menge

$$\varrho(T) := \{z \in \mathbb{C} : T - z : X \supset \operatorname{dom}(T) \to X \text{ ist bijektiv und } (T - z)^{-1} \text{ ist stetig}\}$$

heißt *Resolventenmenge* von T.

(b) Das *Spektrum* ist gegeben durch $\sigma(T) := \mathbb{C} \setminus \varrho(T)$.

(c) Die Abbildung

$$\varrho(T) \ni z \mapsto (T - z)^{-1} \in \mathscr{L}(X)$$

heißt *Resolvente*.

Beispielsweise gehört jeder Eigenwert von T zum Spektrum, im Allgemeinen besteht das Spektrum jedoch nicht nur aus Eigenwerten.

Die nächste Proposition zeigt, dass man sich bei der Analyse des Spektrums eines Operators auf die Klasse der abgeschlossenen Operatoren zurückziehen darf und dass die Bedingung „$(T-z)^{-1}$ ist stetig“ in Definition 3.1 für abgeschlossene Operatoren redundant ist.

Proposition 3.2 *(a) Ist T nicht abgeschlossen, so ist $\varrho(T)$ leer.*

(b) Sei T abgeschlossen. Dann gilt

$$\varrho(T) = \{z \in \mathbb{C} : T - z : X \supset \mathrm{dom}(T) \to X \text{ ist bijektiv}\}.$$

Beweis.

(a) Gäbe es ein $z \in \varrho(T)$, so wäre $(T-z)^{-1} : X \to X$ abgeschlossen, denn jeder stetige Operator ist abgeschlossen. Dann ist aber $T - z$ abgeschlossen (da der Graph von $T - z$ durch den von $(T-z)^{-1}$ durch Vertauschung der Koordinaten hervorgeht). Damit wäre auch T abgeschlossen.

(b) Ist T abgeschlossen und $z \in \varrho(T)$, so ist nach dem Satz vom abgeschlossenen Graphen $(T-z)^{-1}$ stetig.

Der folgende Störungssatz wird später dazu benutzt werden, um zu zeigen, dass $\varrho(T)$ stets offen, und daher $\sigma(T)$ stets abgeschlossen ist.

Satz 3.3 (Stabilität der stetigen Invertierbarkeit) *Seien $T : X \supset \mathrm{dom}(T) \to X$, $S : X \supset \mathrm{dom}(S) \to X$ Operatoren mit den folgenden drei Eigenschaften:*

(a) T ist abgeschlossen und bijektiv,

(b) $\mathrm{dom}(S) \supset \mathrm{dom}(T)$,

(c) $\|ST^{-1}\| < 1$.

Dann ist auch $T + S$ abgeschlossen und bijektiv, und es gilt

$$(T+S)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n T^{-1} (ST^{-1})^n, \tag{2}$$

wobei die Reihe bezüglich der Operatornorm konvergiert.

Beweis.

Es gilt für $x \in \operatorname{dom}(T)$

$$\|Sx\| = \|ST^{-1}Tx\| \leq \|ST^{-1}\|\|Tx\| = q\|Tx\|$$

mit $q := \|ST^{-1}\|$. Somit ist S ein T-beschränkter Operator mit T-Schranke $q < 1$. Nach Satz 2.16 ist $T + S$ daher abgeschlossen. Sei $x \in \operatorname{dom}(T + S) = \operatorname{dom}(T) \cap \operatorname{dom}(S) = \operatorname{dom}(T)$ mit $x \neq 0$. Dann gilt

$$\|(T + S)x\| \geq \|Tx\| - \|Sx\| \geq \|Tx\| - q\|Tx\| = (1 - q)\|Tx\| > 0,$$

da T injektiv ist. Somit ist $T + S$ injektiv. Setze nun

$$A_m := \sum_{n=0}^{m} (-1)^n T^{-1}(ST^{-1})^n.$$

Wir zeigen nun, dass $(A_m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\mathscr{L}(X)$ ist. Für $m' > m$ gilt

$$\|A_{m'} - A_m\| = \|\sum_{n=m+1}^{m'} (-1)^n T^{-1}(ST^{-1})^n\| \leq \|T\| \sum_{n=m+1}^{m'} q^n.$$

Da die geometrische Reihe konvergiert, ist die Folge $(A_m)_{m\in\mathbb{N}}$ also eine Cauchy-Folge. Die Vollständigkeit von X impliziert bekanntlich die Vollständigkeit von $\mathscr{L}(X)$. Also gibt es ein $A \in \mathscr{L}(X)$ mit $\|A - A_n\| \to 0$ für $n \to \infty$. Nun gilt

$$\begin{aligned}
\|(T + S) \cdot A_m - I\| &= \|(T + S) \cdot \sum_{n=0}^{m} (-1)^n T^{-1}(ST^{-1})^n - I\| \\
&= \|\sum_{n=0}^{m} (-1)^n (ST^{-1})^n + \sum_{n=0}^{m} (-1)^n (ST^{-1})^{n+1} - I\| \\
&= \|(ST^{-1})^{m+1}\| \leq q^{m+1}.
\end{aligned}$$

Für $y \in X$ setze $y_m := A_m y$. Dann gilt

$$(y_m, (T + S)y_m) \to (Ay, y)$$

für $m \to \infty$. Also ist $(y_m, (T + S)y_m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge im Graph von $T + S$. Da $T + S$ abgeschlossen ist, gilt somit $Ay \in \operatorname{dom}(T + S)$ und $(T + S)Ay = y$. Somit ist $T + S$ surjektiv, und es ist $(T + S)^{-1} = A$. ∎

Corollar 3.4 *Sei $T : X \supset \mathrm{dom}(T) \to X$ abgeschlossen. Dann gilt*

(a) $\varrho(T)$ ist offen, $\sigma(T)$ ist abgeschlossen.

(b) Die Resolvente $\varrho(T) \ni z \mapsto (T-z)^{-1} \in \mathscr{L}(X)$ ist analytisch; genauer, für jedes $z_0 \in \varrho(T)$ ist $z \mapsto (T-z)^{-1}$ in eine normkonvergente Potenzreihe um z_0 entwickelbar, und es gilt

$$(T-z)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (z-z_0)^n (T-z_0)^{-n-1}.$$

Übungsaufgabe 3.5 Zeige: Die Resolvente ist normstetig, d.h. aus $z_n, z \in \varrho(T)$ mit $z_n \to z$ für $n \to \infty$ folgt $\|(T-z_n)^{-1} - (T-z)^{-1}\|_{\mathscr{L}(X)} \to 0$.

Beweis.
Sei $z_0 \in \varrho(T)$, $r := \|(T-z_0)^{-1}\|^{-1}$.

(a) Für $|z-z_0| < r$ gilt

$$\| |z-z_0| (T-z_0)^{-1} \| < 1.$$

Also folgt aus dem Satz über die Stabilität der stetigen Invertierbarkeit (Satz 3.3) die Bijektivität von

$$T - z = T - z_0 + (z_0 - z).$$

Somit ist die r-Kugel um z_0 ganz in $\varrho(T)$ enthalten, d.h. $\varrho(T)$ ist offen.

(b) Für $|z-z_0| < r$ liefert Formel (2) die folgende Darstellung von $(T-z)^{-1}$:

$$\begin{aligned}
(T-z)^{-1} &= ((T-z_0) + (z_0-z))^{-1} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (T-z_0)^{-1} ((z_0-z)(T-z_0)^{-1})^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (z-z_0)^n (T-z_0)^{-n-1}.
\end{aligned}$$

■

Übungsaufgabe 3.6 Seien $T_{1,2} : X \supset \mathrm{dom}(T) \to Y$ bijektiv. Ist $\mathrm{dom}(T_1) \subset \mathrm{dom}(T_2)$, so gilt $T_2^{-1}(T_2 - T_1)T_1^{-1} = T_1^{-1} - T_2^{-1}$.

Satz 3.7 (Resolventengleichungen) *Seien $T_{1,2} : X \supset \mathrm{dom}(T) \to X$.*

(a) Für $z, z' \in \varrho(T_1)$ gilt

$$(T_1 - z)^{-1} - (T_1 - z')^{-1} = (z - z')(T_1 - z)^{-1}(T_1 - z')^{-1}$$

(erste Resolventengleichung).

(b) Ist $\mathrm{dom}(T_1) = \mathrm{dom}(T_2)$*, so gilt für $z \in \varrho(T_1) \cap \varrho(T_2)$ die* zweite Resolventengleichung

$$(T_1 - z)^{-1} - (T_2 - z)^{-1} = (T_1 - z)^{-1}(T_2 - T_1)(T_1 - z)^{-1}.$$

Beweis.

Beide Identitäten folgen sofort aus Übungsaufgabe 3.6. ■

3.2 Die Spektralradius Formel

Für $T \in \mathscr{L}(X)$ ist der Spektralradius $\mathrm{r}(T)$ erklärt durch

$$\mathrm{r}(T) := \limsup_{n \to \infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

Beispielsweise hat $T := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ den Spektralradius 0, aber Norm 1. Der folgende Satz zeigt insbesondere, dass dies für selbstadjungierte Operatoren nicht auftreten kann.

Satz 3.8 *Sei $T \in \mathscr{L}(X)$.*

(a) Es gilt $\mathrm{r}(T) = \lim_{n \to \infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}}$.

(b) Ist T selbstadjungiert, so gilt $\mathrm{r}(T) = \|T\|$.

(c) $\sigma(T) \subset \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq \mathrm{r}(T)\}$*, und für* $|z| > \mathrm{r}(T)$ *gilt*

$$(T - z)^{-1} = -\sum_{n=0}^{\infty} z^{-n-1} T^n \tag{3}$$

(Neumannsche Reihe).

(d) Ist $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, so ist $\sigma(T)$ nicht leer.

Beweis.

(a) Seien $m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}$ beliebig. Dann existieren eindeutig bestimmte $p_n \in \mathbb{N}_0, q_n \in \{0, \dots, m-1\}$ mit $n = p_n m + q_n$. Setze $C_m := \max\{1, \|T\|, \|T^2\|, \dots, \|T^{m-1}\|\}$. Dann gilt

$$\|T^n\| \leq \|T^m\|^{p_n} \|T^{q_n}\| \leq C_m \|T^m\|^{p_n},$$

und es folgt

$$\mathrm{r}(T) \leq \limsup_{n\to\infty} C_m^{\frac{1}{n}} \|T^m\|^{\frac{p_n}{n}} = \limsup_{n\to\infty} C_m^{\frac{1}{n}} \|T^m\|^{\frac{1}{m} - \frac{q_n}{nm}} = \|T^m\|^{\frac{1}{m}}.$$

Da m beliebig war, folgt $\mathrm{r}(T) = \lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}}$.

(b) Da T selbstadjungiert ist, gilt für $x \in X$ mit $\|x\| = 1$

$$\|T^2x\|^2 \geq |\langle T^2x, x\rangle| = |\langle Tx, Tx\rangle| = \|Tx\|^2.$$

Also gilt $\|T^2\| \geq \|T\|^2$. Andererseits ist trivialerweise $\|T^2\| \leq \|T\|^2$. Somit folgt induktiv $\|T^{2^n}\| = \|T\|^{2^n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und wir erhalten

$$\mathrm{r}(T) = \lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \|T^{2^n}\|^{\frac{1}{2^n}} = \|T\|.$$

(c) Nach der Formel von Cauchy-Hadamard beträgt der Konvergenzradius der Potenzreihe $w \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \|T^n\| w^{n+1}$ gerade $1/\mathrm{r}(T)$. Also konvergiert die Reihe (3) für $|z| > \mathrm{r}(T)$ absolut bzgl. $\|\cdot\|_{\mathscr{L}(X)}$. Außerdem gilt

$$(T - z)\sum_{n=0}^{m} z^{-n-1}T^n \;=\; \sum_{n=0}^{m} z^{-n-1}T^{n+1} - \sum_{n=0}^{m} z^{-n}T^n = z^{-m-1}T^{m+1} - \mathrm{id} \to -\mathrm{id}$$

in $\mathscr{L}(X)$ für $m \to \infty$.

(d) Wäre $\varrho(T) = \mathbb{C}$, so wäre die Funktion $\mathbb{C} \ni z \mapsto (T-z)^{-1} \in \mathscr{L}(X)$ nach Corollar 3.4 (b) analytisch. Daraus folgt leicht die Analytizität der Funktionen

$$f_{x,y} : \mathbb{C} \ni z \mapsto \langle x, (T-z)^{-1}y\rangle \in \mathbb{C}, \quad (x, y \in X).$$

Nun gilt für $z \in \mathbb{C}$ und $x \in X$

$$\|(T-z)x\| \geq (|z| - \|T\|)\|x\|,$$

also

$$\|(T-z)^{-1}\| \leq \frac{1}{|z| - \|T\|}.$$

Somit haben wir

$$\lim_{z\to\infty} |f_{x,y}(z)| \leq \lim_{z\to\infty} \frac{\|x\|\|y\|}{|z| - \|T\|} = 0$$

für alle $x, y \in X$. Mit dem Satz von Liouville folgt $f_{x,y}(z) = 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$ und alle $x, y \in X$, also $(T - z)^{-1} = 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$, ein offensichtlicher Widerspruch. ■

3.3 Das Spektrum selbstadjungierter Operatoren

Proposition 3.9 *Sei $T : X \supset \operatorname{dom}(T) \to X$ hermitesch. Dann gilt:*

(a) Alle Eigenwerte von T sind reell.

(b) Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind orthogonal.

Beweis.

(a) Sei $Tx = \lambda x$ mit $\lambda \in \mathbb{C}$ und $x \in X \setminus \{0\}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{\lambda\|x\|^2}{\|x\|^2} = \frac{1}{\|x\|^2}\lambda\langle x, x\rangle = \frac{1}{\|x\|^2}\langle x, \lambda x\rangle = \frac{1}{\|x\|^2}\langle x, Tx\rangle = \frac{1}{\|x\|^2}\langle Tx, x\rangle \\ &= \frac{1}{\|x\|^2}\langle \lambda x, x\rangle = \overline{\lambda}. \end{aligned}$$

(b) Sei $Tx = \lambda x$, $Ty = \mu y$ mit $x, y \in X$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq \mu$. Dann gilt

$$(\lambda - \mu)\langle x, y\rangle = \langle \lambda x, y\rangle - \langle x, \mu y\rangle = \langle Tx, y\rangle - \langle x, Ty\rangle = 0.$$ ■

Proposition 3.10 *Sei $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, T hermitesch, $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Dann gilt*

(a) $T - z$ ist injektiv und stetig invertierbar (aber im Allgemeinen nicht surjektiv).

(b) Ist T abgeschlossen, so ist $\operatorname{ran}(T - z)$ abgeschlossen.

Beweis.

(a) Sei $x \in \operatorname{dom}(T)$ mit $\|x\| = 1$. Da $\langle x, (T - \operatorname{Re} z)x\rangle \in \mathbb{R}$, gilt

$$\|(T - z)x\| \geq |\langle x, (T - z)x\rangle| = |\langle x, (T - \operatorname{Re} z)x\rangle - i\operatorname{Im} z| \geq |\operatorname{Im} z| = |\operatorname{Im} z|\|x\|.$$

Daraus folgen beide Behauptungen aus (a).

(b) Ist T abgeschlossen, so ist auch $(T-z)^{-1}$ abgeschlossen, und aus (a) folgt, dass $(T-z)^{-1}$ stetig ist. Aus dem Corollar zum Satz vom abgeschlossenen Graphen (Corollar 2.14, (a),(c) $\Rightarrow$ (b)) folgt daher die Abgeschlossenheit von $\mathrm{dom}(T-z)^{-1} = \mathrm{ran}(T-z)$.

Satz 3.11 *Sei $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $T : \mathrm{dom}(T) \to X$ symmetrisch.*

(a) Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

(i) T ist selbstadjungiert.

(ii) $\mathrm{ran}(T-z) = X$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

(iii) Es existieren $z_\pm \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Im} z_+ > 0$, $\mathrm{Im} z_- < 0$ und $\mathrm{ran}(T - z_\pm) = X$.

(iv) $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$.

(b) Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

(i) T ist wesentlich selbstadjungiert.

(ii) $\overline{\mathrm{ran}(T-z)} = X$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$

(iii) Es existiert ein $z_\pm \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Im} z_\pm \gtrless 0$ und $\overline{\mathrm{ran}(T-z)} = X$

(iv) $\sigma(\overline{T}) \subset \mathbb{R}$.

Beweis.

(a) (a)(i)$\Rightarrow$(a)(ii): Annahme: Es gibt ein $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ mit $\mathrm{ran}(T-z) \neq X$. Da $\mathrm{ran}(T-z)$ nach Proposition 3.10 (b) abgeschlossen ist, gilt sogar $\overline{\mathrm{ran}(T-z)} \neq X$, also

$$\mathrm{kern}(T - \overline{z}) = \mathrm{ran}(T^* - z)^\perp = \mathrm{ran}(T-z)^\perp \neq \{0\},$$

d.h. $\overline{z}$ ist Eigenwert von T. Dies ist ein Widerspruch, da alle Eigenwerte reell sind.

(a)(ii)$\Rightarrow$(a)(i): Da T symmetrisch ist, gilt $T \subset T^*$. Also genügt es zu zeigen, dass $\mathrm{dom}(T^*) \subset \mathrm{dom}(T)$. Sei $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Dann sind $T-z$ und $T-\overline{z}$ bijektiv, insbesondere gilt $\mathrm{dom}(T-z)^{-1} = X$ und $\mathrm{ran}(T-\overline{z}) = X$. Also können wir für $x \in \mathrm{dom}(T^*)$ definieren:

$$y := (T-z)^{-1}(T^* - z)x,$$

und es folgt $y \in \mathrm{dom}(T) \subset \mathrm{dom}(T^*)$, d.h. wir haben $Ty = T^*y$ und daher nach Konstruktion $(T^* - z)y = (T-z)y = (T^*-z)x$. Also gilt

$$x - y \in \mathrm{kern}(T^* - z) = \mathrm{ran}(T - \overline{z})^\perp = \{0\},$$

und somit $x = y \in \mathrm{dom}(T)$.

(a)(ii)$\Rightarrow$(a)(iii): Das ist trivial.

(a)(iii)$\Rightarrow$(a)(iv): Nach Proposition 3.10 ist $(T - z_\pm)$ injektiv, also gilt $z_\pm \in \varrho(T)$. Mit dem Satz über die Stabilität der stetigen Invertierbarkeit (Satz 3.3) folgt, $z \in \varrho(T)$, falls $|z - z_\pm| < |\mathrm{Im}(z_\pm)| \leq \|(T - z_\pm)^{-1}\|$. Durch Iteration folgt die Behauptung.

(a)(iv)$\Rightarrow$ $(a)(ii)$: Das ist offensichtlich.

(b) Folgt aus (a) und der Identität

$$\overline{\mathrm{ran}(T - z)} = \mathrm{ran}(\overline{T - z}) = \mathrm{ran}(\overline{T} - \overline{z}). \qquad \blacksquare$$

Satz 3.12 *Sei* $T : X \supset \mathrm{dom}(T) \to X$ *selbstadjungiert, und sei* $z \in \mathbb{R}$.

(a) *z ist genau dann Eigenwert von T, wenn* $\mathrm{ran}(T - z)$ *nicht dicht ist. In diesem Fall ist der zugehörige Eigenraum gegeben durch* $\mathrm{ran}(T - z)^\perp$.

(b) *Die folgenden Aussagen sind äquivalent*

  (i) $z \in \sigma(T)$,

  (ii) $\mathrm{ran}(T - z) \neq X$,

  (iii) *Es existiert eine Folge* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *aus* $\mathrm{dom}(T)$ *mit* $\|x_n\| = 1$ *und* $(T-z)x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Beweis.

(a) Die erste Aussage folgt sofort aus

$$\overline{\mathrm{ran}(T - z)} = \mathrm{kern}((T - z)^*)^\perp = \mathrm{kern}(T - z)^\perp,$$

während die zweite Aussage eine direkte Konsequenz der Absgeschlossenheit von $\mathrm{kern}(T - z)$ ist.

(b) (b)(i)$\Rightarrow$(b)(ii): Wäre $\mathrm{ran}(T - z) = X$, so folgt mit (a), dass $(T - z)$ invertierbar ist. Da aber

$$\mathrm{dom}((T - z)^{-1}) = \mathrm{ran}(T - z) = X$$

ist, wäre $(T - z)^{-1} \in \mathscr{L}(X)$ nach dem Satz vom abgeschlossenen Graphen 2.13. Widerspruch!

(b)(ii)$\Rightarrow$(b)(iii): Wir behandeln zunächst den Fall, dass $\mathrm{ran}(T - z)$ dicht in X ist. Dann kann z wegen Teil (a) kein Eigenwert von T sein, $(T - z)$ ist also injektiv.

Wegen $\mathrm{dom}((T-z)^{-1}) = \mathrm{ran}(T-z) \neq X$ ist $\mathrm{dom}((T-z)^{-1})$ nicht abgeschlossen. Deshalb folgt aus Corollar 2.14, (a),(c) $\Rightarrow$ (b), die Unstetigkeit von $(T-z)^{-1}$. Dies liefert sofort eine Folge mit den in (b)(iii) gewünschten Eigenschaften.

Ist dagegen $\mathrm{ran}(T-z)$ dicht in X, so ist z nach Teil (a) ein Eigenwert von T. Ist x_0 ein zugehöriger normierter Eigenvektor, so hat die durch $x_n := x_0$ erklärte Folge die Eigenschaften aus (b)(iii).

(b)(iii)$\Rightarrow$(b)(i): Wäre $z \in \varrho(T)$, so wäre

$$1 = \|(T-z)^{-1}(T-z)x_n\| \leq \|(T-z)^{-1}\| \|(T-z)x_n\| \to 0. \qquad \blacksquare$$

4 Spektralsatz und Spektraldarstellungssatz

In diesem Kapitel führen wir Spektralscharen ein und zeigen, wie man Funktionen $u : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ über eine Spektralschar E integrieren kann und als Integral einen linearen Operator u_E erhält. Satz 4.11 über den Spektralkalkül gibt Auskunft darüber, welche Eigenschaften von u sich wie auf u_E übertragen.

Die Bedeutung der Spektralscharen und des Spektralkalküls wird liegt darin, dass es zu jedem selbstadjungierten Operator genau eine Spektralschar gibt, so dass der gegebene Operator gerade das Integral der Funktion $\mathbb{R} \ni t \mapsto t \in \mathbb{R}$ über die Spektralschar ist. Dies ist Aussage des Spektralsatzes, den wir in Abschnitt 4.5 beweisen werden.

Besonders vom Standpunkt der Anwendungen ist der Spektraldarstellungsatz von Interesse. Er besagt, dass jeder selbstadjungierte Operator unitär äquivalent zu einem Multiplikationsoperator in einem geeigneten L^2-Raum ist. Dies ist eine einfache Folge des Spektralsatzes.

4.1 Spektralscharen und Spektralmaße

Nach der Definition einer Spektralschar erinnern an das Lebesgue-Stieltjes Integral, sowie an den Vektorraum der Funktionen von beschränkter Variation und definieren die zu einer Spektralschar assoziierten Spektralmaße als die Lebesgue-Stieltjes Maße, deren Verteilungsfunktion in natürlicher Weise aus der Spektralschar hervor geht.

Definition 4.1 Eine Abbildung $E : \mathbb{R} \to \mathscr{L}(X)$ heißt *Spektralschar*, falls gilt:

(a) $E(t)$ ist orthogonale Projektion für alle $t \in \mathbb{R}$,

(b) $E(s) \leq E(t)$ für $s \leq t$ (*Monotonie*),

(c) Es gilt $\text{s–}\lim_{s \downarrow t} E(s) = E(t)$ (*starke Rechtsstetigkeit*),

(d) $\text{s–}\lim_{t \to -\infty} E(t) = 0$,

(e) $\text{s–lim}_{t\to\infty} E(t) = \mathrm{id}_X$.

Aus Corollar 2.22 folgt sofort, dass für alle $t \in \mathbb{R}$ auch $E(t-) := \text{s–lim}_{\delta\downarrow 0} E(t-\delta)$ existiert und gleich der orthogonalen Projektion auf $\overline{\bigcup_{s<t} \mathrm{ran}(E(s))}$ ist.

Übungsaufgabe 4.2 Sei $(M, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, $X := L^2(M, \mathcal{A}, \mu)$ und $g : M \to \mathbb{R}$ meßbar. Zeige, dass durch

$$E(t)f := \chi_{\{x\in M : g(t)\le t\}} f, \quad f \in X, t \in \mathbb{R},$$

eine Spektralschar auf X erklärt ist.

Ist $w : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton wachsend und beschränkt, so kann man das zugehörige *Lebesgue-Stieltjes Maß* μ_w analog zum herkömmlichen Lebesgue-Maß konstruieren, indem man für $a < b$

$$\mu_w((a, b]) := w(b+) - w(a+), \quad \mu_w(\{a\}) := w(a+) - w(a-)$$

definiert und den üblichen Vervollständigungs-Prozeß anwendet. Die Beschränktheit von w sichert, dass μ_w ein endliches Maß ist und dass jedes beschränkte $\phi \in C(\mathbb{R})$ integrierbar bzgl. μ_w ist. Beachte, dass w und $w + c$ für jedes $c \in \mathbb{R}$ das gleiche Maß erzeugen, und dass man ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen darf, dass w rechtsstetig ist. Wir schreiben im Folgenden $\int_{\mathbb{R}} \phi \, \mathrm{d}w$ statt $\int_{\mathbb{R}} \phi \, \mathrm{d}\mu_w$.

Man sagt, eine Funktion $w : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist von *beschränkter Variation*, wenn es eine Konstante $C \ge 0$ gibt mit

$$\sum_{j=1}^{N} |u(t_j) - u(t_{j-1})| \le C$$

für jede Wahl von disjunkten Intervallen $(t_{j-1}, t_j]$. Bekanntlich ist w genau dann von beschränkter Variation, wenn es zwei beschränkte, monoton wachsende Funktionen $w_1, w_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gibt mit $w = w_1 - w_2$. Daher definieren wir

Definition 4.3 Eine Funktion $w : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ heißt von *beschränkter Variation*, wenn es vier monoton wachsende Funktionen $w_1, \ldots, w_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gibt mit

$$w = w_1 - w_2 + i(w_3 - w_4).$$

Die Gesamtheit aller $w : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ von beschränkter Variation bildet einen Vektorraum, den wir mit $BV(\mathbb{R})$ bezeichnen. Jedes $w \in BV(\mathbb{R})$ definiert ein lineares Funktional auf dem Vektoraum $C_b(\mathbb{R})$ aller stetigen und beschränkten Funktionen auf $\mathbb{R}$ via

$$C_b(\mathbb{R}) \ni \phi \mapsto \int_{\mathbb{R}} \phi \, \mathrm{d}w := \int_{\mathbb{R}} \phi \, \mathrm{d}w_1 - \int_{\mathbb{R}} \phi \, \mathrm{d}w_2 + i \int_{\mathbb{R}} \phi \, \mathrm{d}w_3 - i \int_{\mathbb{R}} \phi \, \mathrm{d}w_4 \in \mathbb{C}.$$

Man nennt dieses Funktional (genauer: die Fortsetzung auf den Vektorraum aller μ_w-integrierbaren Funktionen) das von w erzeugte *Lebesgue-Stieltjes Integral*.

Eine Einführung zum Lebesgue Stieljes Integral findet man in [Wal94], Abschnitt 9.32. Für eine tiefere Behandlung sei dem Leser die Monographie [Nat75] empfohlen.

Definition 4.4 Sei E eine Spektralschar

(a) Für $x \in X$ sei

$$\begin{aligned} \varrho_x : \mathbb{R} \ni t \mapsto \langle x, E(t)x \rangle &= \langle x, E(t)^2 x \rangle \\ &= \langle x, E(t)^* E(t) x \rangle \\ &= \|E(t)x\|^2 \in [0, \infty). \end{aligned}$$

Dann ist ϱ_x rechtsstetig, es gilt $\lim_{t\to\infty} \varrho_x(t) = \|x\|^2$ und $\lim_{t\to-\infty} \varrho_x(t) = 0$. Daraus folgt, dass ϱ_x die Verteilungsfunktion eines Lebesque-Stieltjes-Maßes auf $\mathbb{R}$, dem *Spektralmaß* von x, ist.

(b) $u : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ heißt E-messbar, falls u für jedes $x \in X$ eine ϱ_x-messbare Funktion ist.

(c) Für $x \in X$ heißt

$$H_x := \overline{\operatorname{span}\{E(t)x : t \in \mathbb{R}\}}$$

der durch x erzeugte *spektrale Teilraum.*

Bemerkung 4.5 (a) Wir werden im folgenden nicht zwischen dem Spektralmaß und seiner Verteilungsfunktion unterscheiden.

(b) Jedes ϱ_x ist ein endliches Maß; es gilt $\varrho_x(\mathbb{R}) = \|x\|^2$.

(c) Selbst einelementige Mengen sind im Allgemeinen keine ϱ_x-Nullmengen. Insbesondere sind $\varrho_x([a, b])$ und $\varrho_x((a, b))$ im Allgemeinen verschieden.

4.2 Integrale über Spektralscharen

Sei $E : \mathbb{R} \to \mathscr{L}(X)$ eine Spektralschar und $u : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine Treppenfunktion der Form

$$u = \sum_{j=1}^{n} c_j \chi_{I_j}$$

mit disjunkten Konstanzintervallen I_j. Setze

$$\int u \,\mathrm{d}E(t) := \sum_{j=1}^{n} c_j E(I_j) \in \mathscr{L}(X),$$

wobei

$$E((a,b]) := E(b) - E(a), \quad E(\{a\}) := E(a) - E(a-).$$

Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} E((a,b)) &= E(b-) - E(a), \\ E([a,b)) &= E(b-) - E(a-), \\ E([a,b]) &= E(b) - E(a-). \end{aligned}$$

Proposition 4.6 *Für jede Treppenfunktion $u : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ der Form $u = \sum_{j=1}^{n} c_j \chi_{I_j}$ mit disjunkten Konstanzintervallen I_j gilt*

$$\| \int u(t) \,\mathrm{d}E(t) \|_{\mathscr{L}(X)} \le \|u\|_\infty = \max\{|c_1|, \ldots, |c_N|\}$$

Beweis. Für $x \in X$ gilt:

$$\begin{aligned} \| \int u(t) \,\mathrm{d}E(t) x\|^2 &= \langle \sum_{j=1}^{N} c_j E(I_j) x, \sum_{j=1}^{N} c_j E(I_j) x \rangle \\ &= \sum_{j=1}^{N} |c_j|^2 \|E(I_j)x\|^2 \quad \text{(da die Intervalle disjunkt sind)} \\ &= \sum_{j=1}^{N} |c_j|^2 \varrho_x(I_j) \\ &= \int_{\mathbb{R}} |u|^2 \,\mathrm{d}\varrho_x \\ &\le \|u\|_\infty \|x\|^2. \end{aligned}$$

■

Nach der Definition für Integrale über Spektralscharen für Treppenfunktionen erweitern wir jetzt diesen Begriff auf allgemeinere Funktionen. Hierzu stellen wir die folgenden Vorüberlegungen an.

Sei $u : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine E-messbare Funktion, $x \in X$, so dass $u \in L^2(\mathbb{R}, \varrho_x)$. Dann existiert eine Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Treppenfunktionen, mit $u_n \to u$ in $L^2(\mathbb{R}, \varrho_x)$. Es folgt

$$\begin{aligned}
\| \int u_n(t)\,\mathrm{d}E(t)x - \int u_m(t)\,\mathrm{d}E(t)x\|^2 &= \| \int (u_n - u_m)(t)\,\mathrm{d}E(t)x\|^2 \\
&= \int |u_n(t) - u_m(t)|^2\,\mathrm{d}\varrho_x \overset{n,m\to\infty}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}$$

Also können wir definieren

$$\int u(t)\,\mathrm{d}E(t)x := \lim_{n\to\infty} \int u_n(t)\,\mathrm{d}E(t)x. \tag{4}$$

Übungsaufgabe 4.7 Sei $x \in X$ so, dass $u, v \in L^2(\mathbb{R}, \varrho_x)$. Zeige:

(a) $\int u(t)\,\mathrm{d}E(t)$ ist wohldefiniert, d.h. der Grenzwert in (4) hängt nicht von der Wahl der Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ab.

(b) Es gilt $\| \int u(t)\,\mathrm{d}E(t)x\| = \|u\|_{L^2(\mathbb{R},\varrho_x)}$.

(c) Die Abbildung $L^2(\mathbb{R}, \varrho_x) \ni u \mapsto \int u(t)\,\mathrm{d}E(t)x \in X$ ist linear, d.h. es gilt

$$\begin{aligned}
\int (u+v)(t)\,\mathrm{d}E(t)x &= \int u(t)\,\mathrm{d}E(t)x + \int v(t)\,\mathrm{d}E(t)x, \\
\int (\lambda u)(t)\,\mathrm{d}E(t)x &= \lambda \int u(t)\,\mathrm{d}E(t)x.
\end{aligned}$$

Proposition 4.8 *Für $x \in X$ sei $V : \operatorname{span}\{E(t)x : t \in \mathbb{R}\} \to L^2(\mathbb{R}, \varrho_x)$ definiert durch*

$$V(\sum_{j=1}^{N} c_j E(t_j)x) := \sum_{j=1}^{N} c_j \chi_{(-\infty,t_j]}.$$

Dann gilt:

(a) V ist isometrisch.

(b) $U := \overline{V} : H_x \to L^2(\mathbb{R}, \varrho_x)$ ist unitär.

Beweis.

(a) Sei $y \in \operatorname{span}\{E(t)x : t \in \mathbb{R}\}$. Dann existiert $N \in \mathbb{N}$, $d_1, \ldots, d_N \in \mathbb{C}$, disjunkte Invervalle $I_1, \ldots, I_N$ der Form $I_k := (a_k, b_k]$ mit

$$y = \sum_{j=1}^{N} d_k (E(b_k) - E(a_k))x.$$

Daher gilt

$$\begin{aligned}
\|Vy\|^2 &= \|\sum_{k=1}^{N} d_k \chi_{(a_k, b_k]}\|_{L^2(\mathbb{R}, \varrho_x)} \\
&= \sum_{k=1}^{N} |d_k|^2 (\varrho_x(b_k) - \varrho_x(a_k)) \\
&= \sum_{k=1}^{N} |d_k|^2 \|(E(b_k) - E(a_k))x\|^2 \\
&= \|y\|^2.
\end{aligned}$$

(b) Da $\operatorname{ran}(V)$ alle linksstetigen Treppenfunktionen enthält, ist $\operatorname{ran}(V)$ ein dichter Teilraum von $L^2(\mathbb{R}, \varrho_x)$. Also haben wir

$$\operatorname{ran}(U) = \operatorname{ran}(\overline{V}) = \overline{\operatorname{ran}(V)} = L^2(\mathbb{R}, \varrho_x).$$

Aus Übungsaufgabe 4.9 folgt die Behauptung. ∎

Übungsaufgabe 4.9 $U \in \mathscr{L}(X, Y)$ ist genau dann unitär (d.h. es gilt $U^*U = \mathrm{id}_X$ und $UU^* = \mathrm{id}_Y$), wenn U isometrisch und surjektiv ist.

Mit Proposition 4.8 zeigt man folgendes Resultat, das später zum Beweis des Spektraldarstellungssatzes benutzt werden wird.

Übungsaufgabe 4.10 Sei E eine Spektralschar im separablen Hilbertraum X. Dann existiert ein $N \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, Borelmaße $\varrho_1, \ldots, \varrho_N$, sowie ein unitäres

$$U : X \to \bigoplus_{j=1}^{N} L^2(\mathbb{R}, \varrho_j)$$

mit $UE(t)U^{-1} = M_{\chi_{(-\infty, t]}}$.

4.3 Operatoren als Integrale über Spektralscharen

Satz 4.11 (Spektralkalkül) *Sei E eine Spektralschar in X, $u : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, E-messbar. Dann wird durch*

$$\operatorname{dom}(u_E) := \{x \in X : u \in L^2(\mathbb{R}, \varrho_x)\} \qquad u_E x := \int u(t)\,\mathrm{d}E(t)x$$

ein linearer Operator erklärt. Es gilt für E-messbare $u, v : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$

(a)

$$\langle v_E y, u_E x\rangle = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \overline{\varphi_n(v(t))}\varphi_n(u(t))\,\mathrm{d}\langle y, E(t)x\rangle =: \int \overline{v}u\,\mathrm{d}\varrho_{y,x}$$

wobei $y \in \operatorname{dom}(v_E)$, $x \in \operatorname{dom}(u_E)$ und

$$\varphi_n : \mathbb{C} \ni z \mapsto \begin{cases} z & |z| \le n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$4\varrho_{y,x} = \varrho_{x+y} - \varrho_{x-y} + i\varrho_{y-ix} - i\varrho_{y+ix},$$

(b) $\|u_E x\|_X = \|u\|_{L^2(\mathbb{R},\varrho_x)}$ *für* $x \in \operatorname{dom}(u_E)$,

(c) Ist u beschränkt, so ist $u_E \in \mathscr{L}(X)$ mit $\|u_E\|_{\mathscr{L}(X)} \le \sup\{|u(t)| : t \in \mathbb{R}\}$,

(d) $1_E = \mathrm{id}_X$,

(e) $\langle y, u_E x\rangle = \int u(t)\,\mathrm{d}\varrho_{y,x}(t)$, $x \in \operatorname{dom}(u_e), y \in X$,

(f) Aus $u(t) \ge c$ für alle $t \in \mathbb{R}$ folgt $u_E \ge c\,\mathrm{id}_X$,

(g) $u_E + v_E \subset (u+v)_E$ *und* $\operatorname{dom}(u_E + v_E) = \operatorname{dom}((|u| + |v|)_E)$.

Übungsaufgabe 4.12 (a) $\operatorname{dom}(u_E)$ ist dicht, $u_E^* = (\overline{u})_E$. Insbesondere ist u_E selbstadjungiert, falls u reellwertig ist.

(b) Ist $S \subset \mathbb{R}$, so dass χ_S E-messbar ist, so ist $(\chi_S)_E$ eine orthogonale Projektion.

(c) $u_E v_E \subset (uv)_E$, $\operatorname{dom}(u_E v_E) = \operatorname{dom}(v_E) \cap \operatorname{dom}((uv)_E)$.

4.4 Die Stieltjes Umkehrformel und der Satz von Herglotz

Für den Beweis des Spektralsatzes benötigen wir zwei Hilfsmittel aus der Maßtheorie und der Funktionentheorie, die wir ohne Beweis bereitstellen. Einen Beweis dieser beiden Resultate findet man z.B. in [Wei00].

Im Hinblick auf Resolventen interessieren wir uns insbesondere für die Funktionen $u_z : \mathbb{R} \ni t \mapsto (t-z)^{-1} \in \mathbb{C}$, die für $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ offensichtlich stetig und beschränkt sind, d.h. zu $C_b(\mathbb{R})$ gehören. Also existiert für jedes $w \in BV(\mathbb{R})$ das Lebesgue-Stieltjes Integral

$$f_w(z) := \int_{\mathbb{R}} u_z \,\mathrm{d}w, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R},$$

und man kann sich fragen, ob man die Funktion w aus f_w zurück gewinnen kann. Diese Frage wird durch die *Stieltjes Umkehrformel* geklärt.

Satz 4.13 (Stieltjes Umkehrformel) *Sei $w \in BV(\mathbb{R})$ rechtsstetig mit $w(t) \to 0$ für $t \to -\infty$. Dann gilt*

(a)

$$w(t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\delta \downarrow 0} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{-\infty}^{t+\delta} (f_w(s+i\varepsilon) - f_w(s-i\varepsilon)) \,\mathrm{d}s.$$

Insbesondere ist w durch f_w eindeutig bestimmt.

(b) Ist w reellwertig, so gilt

$$w(t) = \frac{1}{\pi} \lim_{\delta \downarrow 0} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{-\infty}^{t+\delta} f_w(s+i\varepsilon) \,\mathrm{d}s.$$

Man sieht leicht, dass f_w die obere Halbebene $\mathbb{C}_+ := \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im} z > 0\}$ nach $\overline{\mathbb{C}_+}$ abbildet. Außerdem gilt offensichtlich die Abschätzung

$$|f_w(z)| \leq \frac{\mu_w(\mathbb{R})}{|\mathrm{Im} z|}.$$

Der folgende funktionentheoretische Satz von Herglotz beschreibt beschreibt eine Umkehrung dieser Überlegungen.

Satz 4.14 (Herglotz) *Sei $f : \mathbb{C} \to \overline{\mathbb{C}_+}$ holomorph mit $|f(z)\mathrm{Im} z| \leq M$ für alle $z \in \mathbb{C}_+$. Dann gibt es genau eine rechtsstetige, monoton wachsende Funktion $w : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\lim_{t \to -\infty} w(t) = 0$ und $f = f_w$. Es gilt $w(t) \leq M$ für alle $t \in \mathbb{R}$, sowie*

$$w(t) = \frac{1}{\pi} \lim_{\delta \downarrow 0} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{-\infty}^{t+\delta} \mathrm{Im} f(s+i\varepsilon) \,\mathrm{d}s.$$

Bemerkung 4.15 Sei $w \in BV(\mathbb{R})$

(a) Für $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, gehört auch die Funktion

$$w_z : \mathbb{R} \ni t \mapsto \int_{(-\infty,t]} u_z \, \mathrm{d}w \in \mathbb{C}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R},$$

zu $BV(\mathbb{R})$, und es gilt für $t \in \mathbb{R}$

$$\int_{\mathbb{R}} \chi_{(-\infty,t]} \, \mathrm{d}w_z = w_z((-\infty,t]) = w_z(t) = \int_{(-\infty,t]} u_z \, \mathrm{d}w = \int_{\mathbb{R}} \chi_{(-\infty,t]} u_z \, \mathrm{d}w.$$

Da jedes nichtnegative $f \in C_b(\mathbb{R})$ monotoner und punktweiser Limes von Linearkombinationen aus $\{\chi_{(-\infty,t]} : t \in \mathbb{R}\}$ ist, folgt

$$\int_{\mathbb{R}} f \, \mathrm{d}w_z = \int_{\mathbb{R}} f u_z \, \mathrm{d}w, \quad f \in C_b(\mathbb{R}).$$

(b) Für $t \in \mathbb{R}$ sei

$$w_t : \mathbb{R} \ni s \mapsto w(\min(s,t)) \in \mathbb{C}.$$

Dann gilt $w_t \in BV(\mathbb{R})$ und

$$\int_{\mathbb{R}} f \, \mathrm{d}w_t = \int_{(-\infty,t]} f \, \mathrm{d}w$$

für jedes $f \in C_b(\mathbb{R})$.

4.5 Spektralsatz und Spektraldarstellungssatz

Mit den beiden Hilfsmitteln aus dem vorigen Abschmitt können wir den zentralen Satz in der Theorie selbstadjungierter Operatoren beweisen.

Satz 4.16 (Spektralsatz) *Sei T selbstadjungiert. Dann existiert genau eine Spektralschar E mit $T = (\mathrm{id}_{\mathbb{R}})_E$. Falls $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, so gilt für $x, y \in X$ und $t \in \mathbb{R}$ die* Stonesche Formel

$$\langle y, E(t)x \rangle = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\delta \downarrow 0} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{-\infty}^{t+\delta} \langle y, ((T-s-i\varepsilon)^{-1} - (T-s+i\varepsilon)^{-1})x \rangle \, \mathrm{d}s. \tag{5}$$

Beweis. Wir beweisen den Satz nur für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, der reelle Fall kann mittels Komplexifizierung auf den komplexen Fall zurückgeführt werden.

Eindeutigkeit: Sei E eine Spektralschar in X mit $T = (\mathrm{id}_{\mathbb{R}})_E$. Für $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ sei

$$u_z, v_z : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \quad u_z(t) = (t-z)^{-1}, \quad v_z(t) = t - z.$$

Aus Satz 4.11, Teil (d) und (g) folgt $(v_z)_E = T - z$, Übungsaufgabe 4.11 (c) impliziert daher

$$(u_z)_E(T-z) = (u_z)_E(v_z)_E \subset (u_z v_z)_E = 1_E = \mathrm{id}_X$$

und

$$\begin{aligned} \mathrm{dom}((u_z)_E(T-z)) &= \mathrm{dom}((u_z)_E(v_z)_E) = \mathrm{dom}((v_z)_E) \cap \mathrm{dom}((u_z v_z)_E) \\ &= \mathrm{dom}(T-z) \cap \mathrm{dom}(\mathrm{id}_X) = \mathrm{dom}(T). \end{aligned}$$

Also gilt $(u_z)_E(T-z) = \mathrm{id}_{\mathrm{dom}(T)}$. Analog zeigt man, dass $(T-z)(u_z)_E = \mathrm{id}_X$. Damit ist $(u_z)_E = (T-z)^{-1}$, und es folgt mit Satz 4.11 (e) für beliebige $x, y \in X$ und $t \in \mathbb{R}$

$$\langle y, (T-z)^{-1}x \rangle = \langle y, (u_z)_E x \rangle = \int u_z(t)\, \mathrm{d}\langle y, E(t)x \rangle = f_w(z),$$

wobei $w(t) = \langle y, E(t)x \rangle$. Daher ist die Stonesche Formel (5) eine direkte Konsequenz der Stieltjes Umkehrformel aus Satz 4.13. Insbesondere ist E eindeutig durch T bestimmt.

Existenz: Für $x \in X$ sei

$$f_x : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \to \mathbb{C} \quad z \mapsto \langle x, (T-z)^{-1}x \rangle.$$

Wir zeigen, dass jedes f_x die Voraussetzungen des Satzes von Herglotz erfüllt. Für $x \neq 0$ und $z \in \mathbb{C}_+$ gilt

$$\begin{aligned} \mathrm{Im} f_x(z) &= \mathrm{Im}\langle x, (T-z)^{-1}x \rangle \\ &= \mathrm{Im}\langle (T-z)(T-z)^{-1}x, (T-z)^{-1}x \rangle \\ &= \mathrm{Im}(-\overline{z}) \|(T-z)^{-1}x\|^2 \\ &= \mathrm{Im} z \|(T-z)^{-1}x\|^2 > 0 \end{aligned}$$

und

$$|\mathrm{Im}(z) f_x(z)| \le \|x\|^2 \frac{1}{|\mathrm{Im} z|} |\mathrm{Im} z| = \|x\|^2.$$

Mit dem Satz von Herglotz 4.14 folgt daher, dass es genau ein rechtsstetiges monoton wachsendes $w_x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gibt mit $\lim\limits_{t \to -\infty} w_x(t) = 0$, $w_x(t) \le \|x\|^2$ für alle $t \in \mathbb{R}$ und

$$\langle x, (T-z)^{-1}x \rangle = \int \frac{1}{t-z}\, \mathrm{d}w_x(t)$$

für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Dabei ist w_x gegeben durch

$$w_x(t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\delta \downarrow 0} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{-\infty}^{t+\delta} \langle x, ((T - s - i\varepsilon)^{-1} - (T - s + i\varepsilon)^{-1})x \rangle \, \mathrm{d}s.$$

Polarisierung liefert für $x, y \in X$ die Identität

$$\langle y, (T - z)^{-1} x \rangle = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{t - z} \, \mathrm{d}w_{y,x}(t) = f_{w_{y,x}}(z) \tag{6}$$

mit

$$w_{y,x}(t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\delta \downarrow 0} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{-\infty}^{t+\delta} \langle y, ((T - s - i\varepsilon)^{-1} - (T - s + i\varepsilon)^{-1})x \rangle \, \mathrm{d}s.$$

Definiere für $t \in \mathbb{R}$

$$s_t : X \times X \to X \quad s_t(y, x) := w_{y,x}(t).$$

Dann ist s_t eine beschränkte, nicht-negative, hermitesche Sesquilinearform. Mit Übungsaufgabe 4.17 folgt, dass genau ein $E(t) \in \mathscr{L}(X)$ mit $\langle y, E(t)x \rangle = s_t(y, x)$ für alle $x, y \in X$ existiert. Es bleibt zu zeigen, dass $E(t)$ eine Spektralschar ist mit $(\mathrm{id}_{\mathbb{R}})_E = T$. Dazu beweisen wir zunächst, dass $E(s)E(t) = E(\min(s, t))$ für $s, t \in \mathbb{R}$. Sei $z, z' \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Dann folgt aus (6) und der Resolventengleichung

$$\begin{aligned}
f_{w_{(T-\overline{z'})^{-1}y,x}}(z) &= \langle (T - \overline{z'})^{-1} y, (T - z)^{-1} x \rangle = \langle y, (T - z')^{-1} (T - z)^{-1} x \rangle \\
&= \frac{1}{z - z'} (\langle y, (T - z)^{-1} x \rangle - \langle y, (T - z')^{-1} x \rangle) \\
&= \frac{1}{z - z'} (f_{w_{y,x}}(z) - f_{w_{y,x}}(z')) \\
&= \int_{\mathbb{R}} u_z u_{z'} \, \mathrm{d}w_{y,x}.
\end{aligned}$$

Mit Bemerkung 4.15 (a) kann das letzte Integral umgeformt werden, und wir erhalten

$$f_{w_{(T-\overline{z'})^{-1}y,x}}(z) = \int_{\mathbb{R}} u_z \, \mathrm{d}w_{y,x,z'} = f_{w_{y,x,z'}}(z)$$

mit

$$w_{y,x,z'}(t) := \int_{(-\infty, t]} u_{z'} \, \mathrm{d}w_{y,x}.$$

Also liefert die Stieltjes Umkehrformel $w_{y,x,z'} = w_{(T-\overline{z'})^{-1}y,x}$, d.h.

$$\int_{(-\infty,t]} u_{z'}\,\mathrm{d}w_{y,x} = \langle (T-\overline{z'})^{-1}y, E(t)x\rangle = \langle y, (T-z')^{-1}E(t)x\rangle = f_{w_{y,E(t)x}}(z').$$

Sei $w_{y,x,t}(s) := w_{y,x}(\min(s,t))$. Dann gilt wegen Bemerkung 4.15 (b)

$$f_{w_{y,x,t}}(z') = \int_{\mathbb{R}} u_{z'}\,\mathrm{d}w_{y,x,t} = \int_{(-\infty,t]} u_{z'}\,\mathrm{d}w_{y,x} = f_{w_{y,E(t)x}}(z'),$$

und durch nochmalige Anwendung der Stieltjes Umkehrformel erhalten wir $w_{y,x,t} = w_{y,E(t)x}$, also

$$\langle y, E(s)E(t)x\rangle = w_{y,E(t)x}(s) = w_{y,x,t}(s) = \langle y, E(\min(s,t))x\rangle.$$

Somit gilt $E(s)E(t) = E(\min(s,t))$, also insbesondere $E(t)^2 = E(t)$, d.h. jedes $E(t)$ ist eine Projektion. Da s_t hermitesch ist, ist $E(t)$ selbstadjungiert (vgl. Übungsaufgabe 4.17). Also ist $E(t)$ eine orthogonale Projektion. Die Abbildung $\mathbb{R} \ni t \mapsto E(t) \in \mathscr{L}(X)$ ist rechtsstetig bzgl. der starken Operatortopologie, denn es gilt für $t \in \mathbb{R}$ und $\delta > 0$

$$\begin{aligned}
\|E(t+\delta)x - E(t)x\|^2 &= \|E(t+\delta)x\|^2 - \langle E(t+\delta)x, E(t)x\rangle - \langle E(t)x, E(t+\delta)x\rangle \\
&\quad +\|E(t)x\|^2 \\
&= \|E(t+\delta)x\|^2 - \|E(t)x\|^2 \\
&= w_x(t+\delta) - w(t) \xrightarrow{\delta\downarrow 0} 0.
\end{aligned}$$

Wegen $\|E(t)x\|^2 = w_x(t)$ und $\lim_{t\to-\infty} w_x(t) = 0$ haben wir $\text{s–}\lim_{t\to-\infty}E(t) = 0$. Mit dem Korollar zum Monotonieprinzip folgt die Existenz von

$$E_\infty := \text{s–}\lim_{t\to\infty}E(t).$$

Setze $F := \mathrm{id}_X - E_\infty$. Dann folgt

$$E(t)F = E(t) - E(t)E_\infty = E(t) - E(t) = 0$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ und

$$\langle y, (T-z)^{-1}Fx\rangle = \int \frac{1}{t-z}\,\mathrm{d}\langle y, E(t)Fx\rangle = 0$$

für alle $z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$. Hieraus folgt $F = 0$, d.h. $E_\infty = \mathrm{id}_X$. Damit sind alle Eigenschaften einer Spektralschar nachgewiesen. Es bleibt zu zeigen, dass $(\mathrm{id}_{\mathbb{R}})_E = T$. Für $u_z : \mathbb{R} \ni t \mapsto (t-z)^{-1}$ wurde bereits oben gezeigt, dass $(u_z)_E = (T-z)^{-1}$. Daraus folgt mittels des Spektralkalküls, dass $(\mathrm{id}_{\mathbb{R}} - z)_E = T - z$, und somit die Behauptung. ∎

Übungsaufgabe 4.17 Ist $s : X \times X \to \mathbb{K}$ Sesqulininearform auf X mit

$$|s(x,y)| \leq C\|x\|\|y\|$$

für ein $C \geq 0$ und alle $x, y \in X$ (eine solche Sesquliniearform heißt *beschränkt*), so gibt es genau ein $T \in \mathscr{L}(X)$ mit

$$\langle x, Ty \rangle = s(x,y)$$

für alle $x, y \in X$. Ist s hermitesch, so ist T selbstadjungiert.

Definition 4.18 Sei T selbstadjungiert, $N \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, ϱ_j Borelmaße auf $\mathbb{R}$, $j \leq N$. Eine unitäre Abbildung

$$U : X \to \bigoplus_{j=1}^{N} L^2(\mathbb{R}, \varrho_j)$$

heißt *Spektraldarstellung* von T, wenn

$$UTU^{-1} = M_{\mathrm{id}}.$$

M_{id} steht hierbei für den maximalen Multiplikationsoperator mit der Identität in $\mathbb{R}^N$, d.h. $\mathrm{dom}(M_{\mathrm{id}})$ besteht aus allen $f = (f_j)_{j=1,\ldots,N}$ in $\bigoplus_{j=1}^{N} L^2(\mathbb{R}, \varrho_j)$, für die auch die Funktion

$$\mathrm{id} \cdot f : \mathbb{R}^N \ni (x_j)_{j=1,\ldots,N} \mapsto (x_j f(x_j))_{j=1,\ldots,N} \in \mathbb{C}^N$$

zu $\bigoplus_{j=1}^{N} L^2(\mathbb{R}, \varrho_j)$ gehört.

Satz 4.19 *Zu jedem selbstadjungierten Operator im separablen Hilbertraum existiert eine Spektraldarstellung.*

Beweis.

Sei E die Spektralschar von T. Mit Übungsaufgabe 4.10 folgt die Existenz eines $N \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, Borelmaßen $\varrho_1, \ldots, \varrho_N$ und einem unitären

$$U : X \to \bigoplus_{j=1}^{N} L^2(\mathbb{R}, \varrho_j)$$

mit $F(t) := UE(t)U^{-1} = M_{\chi_{(-\infty,t)}}$. Offenbar ist auch F eine Spektralschar, und E–Messbarkeit ist äquivalent zur F–Messbarkeit. Außerdem ist klar, dass F die Spektralschar von M_{id} ist. Ist $u = \sum_{j=1}^{n} c_j \chi_{I_j}$ eine Treppenfunktion, so gilt $u_F = U u_E U^{-1}$. Durch Grenzübergang überträgt sich dies auf beliebige E–messbare Funktionen. Speziell für $u = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ erhalten wir daher

$$UTU^{-1} = U(\mathrm{id}_{\mathbb{R}})_E U^{-1} = (\mathrm{id}_{\mathbb{R}})_F = M_{\mathrm{id}}. \qquad \blacksquare$$

5 Anwendung auf die Quantenmechanik

5.1 Formalismus der Quantenmechanik

In der klassischen Mechanik wird die Bewegung eines Teilchens in einem Kraftfeld durch seine *Ortskoordinate*

$$q = (q_1, q_2, q_3) \in \mathbb{R}^3$$

und seine *Impulskoordinate*

$$p = (p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{R}^3$$

beschrieben. Dazu bedient man sich der Hamiltonfunktion $H : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, die durch die Gesamtenergie des physikalischen Systems gegeben ist:

$$H(q,p) = E_{kin} + E_{pot} = \frac{p^2}{2m} + V(q) = \frac{1}{2m} \sum_{j=1}^{3} p_j^2 + V(q_1, q_2, q_3). \tag{7}$$

Es gelten die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen

$$\frac{\partial H}{\partial p_j} = \dot{q}_j, \quad \frac{\partial H}{\partial q_j} = -\dot{p}_j,$$

also

$$\frac{p_j}{m} = \dot{q}_j, \quad \frac{\partial V}{\partial q_j} = -\dot{p}_j.$$

In der Quantenmechanik wird der Zustand zur Zeit t eines quantenmechanischen Systems nach Schrödinger beschrieben durch die *Zustandsfunktion* (auch Wellenfunktion) $\psi_t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{C}$. Man interpretiert dabei ψ_t als *Wahrscheinlichkeitsdichte*, d.h. die Wahrscheinlichkeit, dass sich das quantenmechanische Teilchen zur Zeit t innerhalb der (Lebesgue-messbaren) Menge $A \subset \mathbb{R}^3$ befindet, ist gegeben durch

$$\int_A |\psi_t(x)|^2 \, \mathrm{d}x.$$

Man nennt daher $X = L^2(\mathbb{R}^3)$ den *Zustandsraum* und sagt die *Zustände* sind die normierten Elemente von X. Der *Erwartungswert* der Ortskoordinate x_j im Zustand ψ berechnet sich nach

$$q_j^\psi = \int_{\mathbb{R}^3} x_j |\psi(x)|^2 \, \mathrm{d}x,$$

falls dieses Integral existiert. Die *Streuung*

$$\sigma_\psi(q_j) = \left(\int_{\mathbb{R}^3} (x_j - q_j^\psi)^2 |\psi(x)|^2 \, \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}}$$

im Zustand ψ beschreibt die mittlere quadratische Abweichung vom Erwartungswert.

5.2 Quantisierung

Um nun von der klassischen Hamiltonfunktion zu einer quantenmechanischen Formulierung zu kommen, ersetzt man den Ort q_j in der Hamiltonfunktion (7) durch den *maximalen Multiplikationsoperator* M_{x_j}, der gegeben ist durch

$$\mathrm{dom}(M_{x_j}) = \{\psi \in X : x_j\psi \in L^2(\mathbb{R}^3)\}, \quad (M_{x_j}\psi)(x) = x_j\psi(x), \quad \psi \in \mathrm{dom}(M_{x_j}).$$

Es gilt also $q_j^\psi = \langle \psi, M_{x_j}\psi\rangle$ und $\sigma_\psi(q_j) = \|(M_{x_j} - q_j^\psi)\psi\|_X$.
Analog wird der Impuls p_j in (7) ersetzt durch den *Impulsoperator* P_j, wobei

$$\mathrm{dom}(P_j) = C_c^\infty(\mathbb{R}^3), \quad P_j\psi := -i\hbar\frac{\partial}{\partial x_j}, \quad \psi \in \mathrm{dom}(P_j),$$

und $\hbar \approx 10^{-34}$ Js das *Plancksche Wirkungsquantum* ist. Es ist offensichtlich, dass Orts- und Impulsoperator symmetrisch sind. Der Erwartungswert der Impulskoordinate im Zustand ψ ist

$$p_j^\psi = \langle \psi, P_j\psi\rangle = \frac{\hbar}{i}\int_{\mathbb{R}^3} \overline{\psi}\frac{\partial}{\partial x_j}\psi \, \mathrm{d}x,$$

und die Streuung von p_j ist gegeben durch

$$\sigma_\psi(p_j) = \|(P_j - p_j^\psi)\psi\|_X = \left(\int_{\mathbb{R}^3}\left|\left(\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x_j} - p_j^\psi\right)\psi(x)\right|^2 \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}},$$

falls dieses Integral existiert. In der folgenden Übungsaufgabe soll gezeigt werden, dass es unmöglich ist, sowohl $\sigma_\psi(q_j)$, als auch $\sigma_\psi(p_j)$ beliebig klein zu machen.

Übungsaufgabe 5.1 (Heisenbergsche Unschärferelation) Für $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^3)$ mit $\|\psi\| = 1$ gilt

$$\sigma_\psi(p_j)\sigma_\psi(q_j) \geq \frac{\hbar}{2}.$$

Die *Dynamik*, d.h. die zeitliche Entwicklung, eines quantenmechanischen Systems wird durch die *Schrödingergleichung* beschrieben:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi_t = S\psi_t,$$

wobei S der *Schrödingeroperator* ist, den man erhält, indem man die Quantisierung auf die Hamiltonfunktion anwendet.

Beispiel 5.2 Ist H gegeben durch (7), so ergibt sich

$$S = \frac{1}{2m} \sum_{j=1}^{3} \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial x_j} \right)^2 + M_V = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + M_V,$$

wobei M_V den maximalen Multiplikationsoperator mit V bezeichnet. Somit erhalten wir die Schrödingergleichung

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + M_V \right) \psi_t = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi_t.$$

Der Erwartungswert $\langle \psi, S\psi \rangle$ des Schrödingeroperators beschreibt die Energie des quantenmechanischen Systems im Zustand ψ. Da Energien stets reell sind, muss S zumindest hermitesch sein. Wir werden im folgenden Abschnitt sehen, dass S sogar selbstadjungiert ist.

5.3 Die Evolutionsgruppe

Es sei $U(t)\psi$ der Zustand des quantenmechanischen Systems zum Zeitpunkt t, falls das System zum Zeitpunkt 0 im Zustand ψ war. Aus physikalischen Gründen sollte gelten:

(a) $\mathrm{dom}(U(t)) = X$, denn jedes $\psi \in X$ sollte als Anfangswert erlaubt sein.

(b) $U(0) = \mathrm{id}$.

(c) $U(t)$ ist linear (Superpositionsprinzip).

(d) $U(t_1 + t_2) = U(t_1)U(t_2) = U(t_2)U(t_1)$, d.h. U ist ein *Gruppenhomomorphismus* von der additiven Gruppe $(\mathbb{R}, +)$ nach $\mathscr{L}(X)$.

(e) $\mathbb{R} \ni t \mapsto U(t) \in \mathscr{L}(X)$ ist stark stetig, d.h. aus $s \to t$ in $\mathbb{R}$ folgt $U(s)\psi \to U(t)\psi$ für jedes $\psi \in X$.

(f) Jedes $U(t)$ ist unitär. Die Isometrie folgt aus der Forderung, dass $U(t)\psi$ wieder ein Zustand sein soll, und aus $U(t)U(-t) = \mathrm{id}$ folgt die Surjektivität von $U(t)$.

Definition 5.3 Eine Abbildung $U : \mathbb{R} \to \mathscr{L}(X)$ mit den obigen Eigenschaften heißt *stark stetige Gruppe unitärer Operatoren*. Ihr *infinitesimaler Generator* A ist gegeben durch

$$\mathrm{dom}(A) = \{\psi \in X : \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(U(t) - \mathrm{id})\psi \text{ existiert}\},$$

$$A\psi := \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(U(t) - \mathrm{id})\psi, \quad \psi \in \mathrm{dom}(A).$$

Es zeigt sich nun, dass der infintesimale Generator einer stark stetigen Gruppe unitärer Operatoren stets selbstadjungiert ist.

Satz 5.4 (Stone) *Sei $U(t)$ eine stark stetige Gruppe unitärer Operatoren mit infinitesimalem Generator A. Dann ist $S := iA$ selbstadjungiert.*

Corollar 5.5 *Sei $U(t)$ eine stark stetige Gruppe unitärer Operatoren mit infinitesimalem Generator A, und sei $S := iA$. Dann ist für jedes $\psi_0 \in \mathrm{dom}(S)$ die Funktion $\psi : \mathbb{R} \ni t \mapsto U(t)\psi_0 \in X$ die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\psi = -iS\psi, \quad \psi(0) = \psi_0. \tag{8}$$

Beweis.

Existenz: Es ist leicht zu sehen, dass aus $\psi_0 \in \mathrm{dom}(S)$ folgt, dass auch $U(t)\psi_0 \in \mathrm{dom}(S)$ gilt mit $SU(t)\psi_0 = U(t)S\psi_0$. Also haben wir

$$\begin{aligned}\frac{1}{h}(\psi(t+h) - \psi(t)) &= \frac{1}{h}\left(U(t+h) - U(t)\right)\psi_0 = U(t)\frac{1}{h}\left(U(h) - \mathrm{id}\right)\psi_0 \\ &\overset{h\to 0}{\longrightarrow} -iU(t)S\psi_0 = -iSU(t)\psi_0 = S\psi.\end{aligned}$$

Eindeutigkeit: Sind $\psi_1, \psi_2 : \mathbb{R} \to \mathrm{dom}(S)$ Lösungen von (8), so löst $\phi := \psi_1 - \psi_2$ ebenfalls die Differentialgleichung, jetzt aber mit Anfangswert 0. Daraus folgt

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\phi(t)\|^2 &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle\phi(t), \phi(t)\rangle \\ &= \langle\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\phi(t), \phi(t)\rangle + \langle\phi(t), \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\phi(t)\rangle \\ &= \langle -iS\phi(t), \phi(t)\rangle + \langle\phi(t), -iS\phi(t)\rangle \\ &= i(\langle S\phi(t), \phi(t)\rangle - \langle\phi(t), S\phi(t)\rangle) \\ &= 0,\end{aligned}$$

und es folgt $\|\phi(t)\| = \|\phi(0)\| = \|0\| = 0$ für jedes $t \in \mathbb{R}$. ■

Es zeigt sich nun, dass $A := iS$ für *jeden* selbstadjungierten Operator S infinitesimaler Generator einer stark stetigen Gruppe unitärer Operatoren ist. Daher ist das Anfangswertproblem (8) für *jedes* selbstadjungierte S und alle $\psi_0 \in \mathrm{dom}(S)$ eindeutig lösbar.

Satz 5.6 *Für jeden selbstadjungierten Operator S ist iS Generator einer stark stetigen Gruppe unitärer Operatoren. Diese ist gegeben durch $U(t) := \mathrm{e}^{itS} := \int \mathrm{e}^{its}\,\mathrm{d}E_S(s)$.*

Beweis. Aus dem Spektralkalkül folgt sofort, dass $(U(t))_{t\in\mathbb{R}}$ eine stark stetige Gruppe unitärer Operatoren ist. Wegen

$$\frac{1}{t}\left(\mathrm{e}^{its}-1\right) \xrightarrow{t\to 0} -is$$

und

$$|\frac{1}{t}\left(\mathrm{e}^{its}-1\right)| \leq |s|,\ s\in\mathbb{R},\ t\neq 0$$

konvergiert $\frac{1}{t}\left(\mathrm{e}^{its}-1\right)$ genau dann in $L^2(\mathbb{R},\varrho_\psi)$, wenn $\mathrm{id}\in L^2(\mathbb{R},\varrho_\psi)$, d.h. wenn $\psi\in\mathrm{dom}(S)$. In diesem Fall gilt

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left(U(t)-\mathrm{id}\right)\psi = -iS\psi.$$

Daher ist iS der infinitesimale Generator von $(U(t))_{t\in\mathbb{R}}$. ■

A Lösungen zu ausgewählten Übungsaufgaben

A.1 Lösungen zu Abschnitt 1

Lösung zu Aufgabe 1.4:

(a) Durch Auflösen der quadratischen Formen erhält man

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{4}(q(x+y) - q(x-y) + iq(x-iy) - iq(x+iy)) \\
&= \frac{1}{4}(s(x,x) + s(x,y) + s(y,x) + s(y,y) \\
&\qquad -s(x,x) + s(x,y) + s(y,x) - s(y,y) \\
&\qquad +is(x,x) + s(x,y) - s(y,x) + is(y,y) \\
&\qquad -is(x,x) + s(x,y) - s(y,x) - is(y,y)) \\
&= s(x,y).
\end{aligned}$$

(b) Definiere für $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ die Sesquilinearformen

$$s_1, s_2 : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

durch

$$\begin{aligned}
s_1(x,y) &:= (x_1, x_2)\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = x_2 y_1 - x_1 y_2, \\
s_2(x,y) &:= 0.
\end{aligned}$$

Für die zugehörigen quadratischen Formen q_1, q_2 gilt offensichtlich $q_1(x) = q_2(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}^2$. Also erzeugen die verschiedenen Sesquilinearformen s_1, s_2 die gleichen quadratischen Formen.

(c) Analog zum ersten Aufgabenteil. ■

Lösung zu Aufgabe 1.6:

(a) Seien $x, y \in A^\perp$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Dann gilt für $z \in A$

$$\langle z, \alpha x + \beta y \rangle = \alpha \langle z, y \rangle + \beta \langle z, y \rangle = 0.$$

Also ist $A^\perp$ ein Teilraum von X.

Um die Abgeschlossenheit zu zeigen sei $a_n \in A^\perp$ eine konvergente Folge mit dem Grenzwert $a \in X$. Aufgrund der Stetigkeit des Skalarproduktes gilt für alle $y \in A$:

$$\langle a, y \rangle = \langle \lim_{n\to\infty} a_n, y \rangle = \lim_{n\to\infty} \langle a_n, y \rangle = 0.$$

(b) Aus $A \subset \overline{A}$ folgt offenbar $A^\perp \supset \overline{A}^\perp$. Zum Nachweis der anderen Inklusion sei $x \in A^\perp$, $y \in \overline{A}$. Dann gibt es eine Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus A mit $y_n \to y$. Es folgt

$$\langle x, y\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle x, y_n\rangle = 0,$$

d.h. wir haben $A^\perp \subset \overline{A}^\perp$.

(c) Die zweite Identität wurde bereits in (b) bewiesen. Für die erste Identität genügt es wegen $A \subset \operatorname{span}(A)$, die Inklusion $A^\perp \subset \operatorname{span}(A)^\perp$ nachzuweisen. Sei also $x \in A^\perp$, $y \in \operatorname{span}(A)$. Dann gibt es $y_1, \ldots, y_n \in A$ und $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ mit $y = \alpha_1 y_1 + \ldots + \alpha_n y_n$, und wir erhalten

$$\langle x, y\rangle = \left\langle x, \sum_{j=1}^n \alpha_j y_j \right\rangle = \sum_{j=1}^n \alpha_j \langle x, y_j\rangle = 0. \qquad \blacksquare$$

A.2 Lösungen zu Abschnitt 2

Lösung zu Aufgabe 2.1:

(a) Seien $S_1, S_2 \in \mathscr{L}(Y, X)$ mit

$$\langle S_1 y, x\rangle = \langle y, Tx\rangle = \langle S_2 y, x\rangle$$

für alle $x \in X$, $y \in Y$. Dies bedeutet, dass für jedes $y \in Y$ der Vektor $S_1 y - S_2 y$ orthogonal zu X ist. Wegen $X^\perp = \{0\}$ folgt $S_1 = S_2$.

(b) (i) $*$ ist eine Isometrie, denn es gilt

$$\begin{aligned} \|T^*\| &= \sup\{|\langle T^* y, x\rangle| : x \in X, y \in Y, \|x\| = 1, \|y\| = 1\} \\ &= \sup\{|\langle y, Tx\rangle| : x \in X, y \in Y, \|x\| = 1, \|y\| = 1\} \\ &= \|T\|. \end{aligned}$$

(ii) $*$ ist antilinear: Für $x, y \in X$ und $T, S \in \mathscr{L}(X, Y)$ gilt

$$\begin{aligned} \langle (\alpha T + \beta S)^* y, x\rangle &= \langle y, (\alpha T + \beta S)x\rangle \\ &= \alpha\langle y, Tx\rangle + \beta\langle y, Sx\rangle \\ &= \alpha\langle T^* y, x\rangle + \beta\langle S^* y, x\rangle \\ &= \langle (\bar{\alpha} T^* + \bar{\beta} S^*)y, x\rangle. \end{aligned} \qquad \blacksquare$$

A.3 Lösungen zu Abschnitt 5

Lösung zu Aufgabe 5.1:

Aus der Cauchy-Schwarz Ungleichung und der Hermitizität der Operatoren $(M_{x_j} - q_j^\psi)$ und $(P_j - p_j^\psi)$ folgt für $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^3)$ mit $\|\psi\| = 1$

$$\begin{aligned}
\sigma_\psi(p_j)\sigma_\psi(q_j) &= \left(\int_{\mathbb{R}} \left(M_{x_j} - q_j^\psi\right)^2 |\psi(x)|^2 \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}} \left(P_j - p_j^\psi\right)^2 |\psi(x)|^2 \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\geq \left|\left\langle \left(M_{x_j} - q_j^\psi\right)\psi, \left(P_j - p_j^\psi\right)\psi \right\rangle\right| \\
&\geq \left|\mathrm{Im}\left\langle \left(M_{x_j} - q_j^\psi\right)\psi, \left(P_j - p_j^\psi\right)\psi \right\rangle\right| \\
&= \frac{1}{2}\left|\left\langle \left(M_{x_j} - q_j^\psi\right)\psi, \left(P_j - p_j^\psi\right)\psi \right\rangle - \left\langle \left(P_j - p_j^\psi\right)\psi, \left(M_{x_j} - q_j^\psi\right)\psi \right\rangle\right| \\
&= \frac{1}{2}\left|\left\langle \psi, \left(M_{x_j} - q_j^\psi\right)\left(P_j - p_j^\psi\right)\psi \right\rangle - \left\langle \psi, \left(P_j - p_j^\psi\right)\left(M_{x_j} - q_j^\psi\right)\psi \right\rangle\right| \\
&= \frac{1}{2}\left|\left\langle \psi, \left[\left(M_{x_j} - q_j^\psi\right)\left(P_j - p_j^\psi\right) - \left(P_j - p_j^\psi\right)\left(M_{x_j} - q_j^\psi\right)\right]\psi \right\rangle\right|.
\end{aligned}$$

Eine triviale Rechnung zeigt, dass $(M_{x_j}P_j - P_jM_{x_j})\psi = -i\hbar\psi$. Damit vereinfacht sich der letzte Ausdruck, und wir erhalten

$$\sigma_\psi(p_j)\sigma_\psi(q_j) \geq \frac{1}{2}\left|\langle\psi, -i\hbar\psi\rangle\right| = \frac{\hbar}{2}\left|\langle\psi,\psi\rangle\right| = \frac{\hbar}{2}. \qquad \blacksquare$$

A.4 Changelog

```
$Log: loesungen.tex,v $
Revision 1.10  2003/11/06 17:36:02  andre
nuke unverstaendlichen Loesungsversuch von Aufgabe ueber Graphen

Revision 1.9  2003/11/06 17:32:15  andre
benutze gleiche Notation wie im script

Revision 1.8  2003/11/06 17:15:27  andre
Ausfuehrlichere Loesung zur Aufgabe ueber Unschaerferelation

Revision 1.7  2003/10/24 09:25:56  andre
kill syntax errors

Revision 1.6  2003/10/22 22:18:06  benjamin
kleine verbesserung
```

```
Revision 1.5  2003/10/21 20:50:20  benjamin
Versuch der Loesung von Heisenberg und Aufgabe 2.12a

Revision 1.4  2003/05/12 15:28:41  andre
nuke numtoalpha

Revision 1.3  2003/05/03 09:52:04  andre
benutze qed Symbol am Aufgabenende

Revision 1.2  2003/05/03 09:03:01  andre
major cleanup, changelog fuer loesungen.tex
```

B Benutzung des CVS Zugangs

```
Voraussetzungen:
~~~~~~~~~~~~~~~~

- UNIX
- ssh
- cvs
- LaTeX
- bash ?!

Sollte bei jeder aktuellen Linux Distribution bereits installiert sein.

LOGIN, SERVER, PFAD, PASS und PROJECT muessen im folgenden durch die
persoenlichen Daten ersetzt werden.

Einmaliges Einrichten:
~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~


Secure Shell benutzen:

echo 'export CVS_RSH=ssh' >> ~/.profile; . ~/.profile

Ausgaben von cvs schoener gestalten (optional):

printf 'diff -u\nupdate -P\ncvs -q\n' > ~/.cvsrc

Einloggen:

cvs -d :pserver:LOGIN SERVER:PFAD login

Passwort PASS eingeben

Lokale Kopie auschecken (co=checkout):

cvs -d :pserver:LOGIN SERVER:PFAD co PROJECT

Arbeiten mit cvs und make
~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~

Alle cvs Befehle sollten im aktuellen PROJECT Verzeichnis ausgefuehrt werden.

Unterschied zwischen Repository und lokaler Kopie anzeigen (optional):

cvs diff

Lokale Kopie aktualisieren:

cvs update

Yes, it's that easy!
```

```
Die folgenden Befehle sind nur notwendig, wenn du selbst zur
Entwicklung des Projekts beitragen moechtest:

Eigene Aenderungen ins Repository uebertragen (ci = commit):

cvs ci -m "Kommentar, der die Aenderung beschreibt" dateiname

File hinzufuegen:

cvs add newfile.tex
  cvs ci -m "added newfile.tex" newfile.tex

Anmerkungen:
~~~~~~~~~~~~
Es ist zweckmaessig, ein "cvs update" zu machen, bevor man beginnt
Aenderungen an der lokalen Kopie vorzunehmen, sowie die gemachten
Aenderungen mittels "cvs ci" ins repository zu uebertragen, sobald man
fertig ist. Das veringert die Wahrscheinlichkeit von Konflikten, die
entstehen koennen, wenn jemand anderes gerade gleichzeitig Aenderungen
vornimmt.

But hey: cvs steht fuer "CONCURRENT Versions System". Es wird alles
getan, um Konflikte sachgerecht zu handhaben.

Und last, but not least: Du kannst mit deinem Zugang zwar Files
aendern und loeschen, aber du kannst (so ohne weiteres)

      NICHT DIE VERGANGENHEIT AENDERN.

Falls also jemand (bewusst oder unbewusst) die Daten im repository
loescht, so sind sie nicht wirklich geloescht, sondern ein einfacher
cvs Befehl genuegt, um die Version vor dem Disaster zurueckzuholen. Und
ausserdem hat sowieso jeder eine lokale Kopie, und es gibt Backups...

Fazit: Don't worry, just use it because you'll love it.

Weitergehende Informationen:
~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~
- man cvs
- Das freie CVS Buch: http://cvsbook.red-bean.com/
```

C Changelog

```
$Log: script.tex,v $
Revision 1.59  2003/11/06 17:19:45  andre
Tippfehler

Revision 1.58  2003/10/22 22:18:06  benjamin
kleine verbesserung

Revision 1.57  2003/10/21 20:52:51  benjamin
Versuch der Loesung von Heisenberg und Aufgabe 2.12a

Revision 1.56  2003/10/18 10:42:22  andre
ersetze alten Kommentar durch Danksagungen

Revision 1.55  2003/10/07 19:23:03  andre
mehrere kleine Tippfehler

Revision 1.54  2003/10/01 12:36:14  andre
Literatur update

Revision 1.53  2003/10/01 11:27:03  andre
Debugging und verbindender Text im Abschmitt QM, Teil 2/2

Revision 1.52  2003/09/30 14:37:05  andre
Debugging und verbindender Text im Abschmitt QM, Teil 1/2

Revision 1.51  2003/09/28 14:41:37  benjamin
fehler verbessert

Revision 1.50  2003/09/25 02:30:13  benjamin
vorlesung qm etwas variiert

Revision 1.49  2003/07/25 16:01:59  andre
fix overful box in Changlog

Revision 1.48  2003/07/25 15:59:16  andre
Erlaeuterungen zum Spektraldarstellungssatz, Beweis verstaendlicher formulieren

Revision 1.47  2003/07/25 13:20:06  andre
neue Bemerkung ueber das Rechnen mit Lebesgue Stieltjes Integralen,
Existenzbeweis des Spektralsatzes verstaendlicher formulieren

Revision 1.46  2003/07/24 15:36:14  andre
Zwei Tippfehler

Revision 1.45  2003/07/23 16:19:35  andre
Eindeutigkeitsbeweis des Spektralsatzes hinzufuegen

Revision 1.43  2003/07/21 11:34:56  andre
feinere Strukturierungen, einige Tippfehler, modifiziertes Vorwort
```

Revision 1.42 2003/07/19 16:53:45 andre
Debugging und verbindender Text im Abschnitt Spektralkalkl, Spektralsatz

Revision 1.41 2003/07/17 00:21:12 thomas
Vorlesung von 12.07.2003 geTeXt

Revision 1.40 2003/07/10 17:24:46 andre
kleine Korrekturen zur Stieltjes Umkehrformel und zum Satz von Herglotz

Revision 1.39 2003/07/09 20:18:13 andre
Lebesgue-Stieljes Integrale, Stieltjes Umkehrformel und Satz von Herglotz

Revision 1.38 2003/07/09 15:46:22 andre
Othographie, verbindender Text, Debugging, Teil Abschnitt Spektrum
selbstadjungierter Operatoren und Abschnitt Integrale ueber
Spektralscharen

Revision 1.37 2003/07/08 14:39:14 thomas
Rest - suche noch Verbesserung fuer s-lim

Revision 1.36 2003/07/08 00:42:56 thomas
naechstes Teilstueck

Revision 1.35 2003/07/07 13:47:25 thomas
Beginn Mitschrift 12.06.

Revision 1.34 2003/06/21 13:23:44 andre
feinere Strukturierungen, nuke Versionsnummer

Revision 1.33 2003/06/20 12:15:52 andre
verbindender Text, bessere Formulierungen

Revision 1.32 2003/06/12 09:18:14 celine
Mitschrift 05.06.

Revision 1.31 2003/06/06 21:59:56 matze
Korrekturen

Revision 1.30 2003/06/04 12:08:13 andre
Tippfehler beseitigen, verbindender Text und Orthographie

Revision 1.29 2003/06/03 20:24:43 andre
CVS Konflikt mit Claus reparieren

Revision 1.28 2003/06/03 12:18:47 claus
Kapitel 3

Revision 1.27 2003/06/01 15:29:07 andre
Debugging Abschnitt Graphen Teil II, Orthographie, verbindender Text,
einige Bemerkungen zur starken und schwachen Operatortopologie

Revision 1.26 2003/05/30 14:24:50 andre
Fix Definition der Selbstadjungiertheit, Orthografische Verbesserungen

Revision 1.25 2003/05/28 07:42:31 claus
test

Revision 1.24 2003/05/21 11:52:00 andre
Debug Satz von der Stabilitaet der Abgeschlossenheit, Teil I

Revision 1.23 2003/05/20 20:37:14 kyri
Vorlesung vom 15.05.

Revision 1.22 2003/05/12 13:31:43 andre
nuke numtoalpha, setze stattdessen thelabelenumi direkt

Revision 1.21 2003/05/11 19:24:27 andre
neu: drawpic, um via picins Bilder einzubinden. Einige Tippfehler

Revision 1.20 2003/05/11 16:38:41 andre
Verbindender Text, bessere Formulierungen, dom(T) statt D(T)

Revision 1.19 2003/05/11 14:39:38 andre
fix cr

Revision 1.18 2003/05/10 20:50:38 matze
Mitschrift 8.5.;schoeneres \L=mathscr{L},dazu package mathrsfs eingebunden

Revision 1.17 2003/05/09 17:10:41 andre
Beschreibung hinzufuegen

Revision 1.16 2003/05/04 22:41:48 thomas
Fehlerkorrektur

Revision 1.15 2003/05/04 22:38:27 thomas
Bild zu Approximationssatz eingefgt

Revision 1.14 2003/05/03 11:39:00 andre
Literaurliste und weitere kleine Ergaenzungen

Revision 1.13 2003/05/03 10:45:33 andre
fix numtoalpha (erster LaTeX Lauf produziert Fehler)

Revision 1.12 2003/05/03 09:53:16 andre
neu: voodoo qed aus Distributionen Skript

Revision 1.11 2003/05/03 09:05:54 andre
neu: numtoalpha, um in Aufzaehlungen Nummern nach a,b,c.. zu wandeln

Revision 1.10 2003/05/02 12:13:47 andre
Mehr orthografische Verbesserungen und verbindender Text

Revision 1.9 2003/05/02 11:57:18 andre

```
Orthografische Verbesserungen

Revision 1.8  2003/04/28 23:55:39  andre
neu: changlog und cvs Anleitung

Revision 1.7  2003/04/28 21:44:30  andre
Weiterer verbindender Text

Revision 1.6  2003/04/28 20:37:09  andre
verbindender Text, bessere Formulierungen

Revision 1.5  2003/04/28 19:10:48  andre
fuege log-keyword expansion hinzu

Revision 1.1-1.4 thomas
Intitial Version und Loesungen fuer erste Uebungsaufgaben
```

Literatur

[AG81] N. I. Achieser and I. M. Glasmann. *Theorie der linearen Operatoren im Hilbert-Raum.* Verlag Harri Deutsch, 8. edition, 1981. Übersetzung aus dem Russischen von Hellmuth Baumgärtel, Vorwort von G. Köthe.

[Heu92] H. Heuser. *Funktionalanalysis.* Mathematische Leitfäden. Teubner, 3. edition, 1992.

[HS91] F. Hirzebruch and W. Scharlau. *Einführung in die Funktionalanalysis*, volume 296 of *B.I.-Hochschultaschenbücher [B.I. University Paperbacks].* Bibliographisches Institut, 1991.

[Nat75] I.P. Natanson. *Theorie der Funktionen einer reellen Veränderlichen*, volume VI of *Mathematische Lehrbücher und Monographien.* Akademie Verlag, 4 edition, 1975.

[RS75] M. Reed and B. Simon. *Methods of Modern Mathematical Physics II: Fourier Analysis, Selfadjointness.* Academic Press, New York, 1975.

[RS80] M. Reed and B. Simon. *Methods of Modern Mathematical Physics I: Functional Analysis.* Academic Press, New York, 2nd edition, 1980.

[Rud73] W. Rudin. *Functional Analysis.* McGraw-Hill, Series in higher mathematics, 1973.

[Tri80] H. Triebel. *Höhere Analysis.* Thun, Frankfurt am Main: Verlag Harri Deutsch., 1980. 2., verb. Aufl.

[Wal94] W. Walter. *Analysis II*. Springer, 1994. 4., durchges. u. erg. Aufl.

[Wei00] J. Weidmann. *Lineare Operatoren in Hilberträumen. Teil 1.* Mathematische Leitfäden. Teubner, 2000.