# Pseudodifferentialoperatoren

**(2+0)-stündige Vorlesung im Wintersemester 2006/2007**

**JÖRG SEILER**

## Inhaltsverzeichnis

# 1 Fouriertransformation und Distributionen

**Definition 1.1** *Eine Funktion $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ heißt schnell fallend, falls sie unendlich oft partiell stetig differenzierbar ist und*

$$\|u\|_k := \sup\left\{|x^\alpha \partial_x^\beta u(x)| \mid x \in \mathbb{R}^n,\ |\alpha| + |\beta| \le k\right\} < \infty \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}_0. \tag{1.1}$$

*Den Vektorraum aller solcher Funktionen bezeichnen wir mit $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Mit den (Halb)normen aus (1.1) ist $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ein Frèchetraum.*

**Definition 1.2** *Eine linerare Abbildung $T : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$ heißt eine temperierte Distribution, falls eine der folgenden äquivalenten Eigenschaften gilt:*

*a) $T$ ist stetig.*

*b) $T$ ist folgenstetig.*

*c) Es gibt eine Konstante $C \ge 0$ und ein $k \in \mathbb{N}_0$, sodass*

$$|T(u)| \le C\|u\|_k \qquad \forall\, u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

*Wir schreiben oft $\langle T, u\rangle = T(u)$. Den Vektorraum aller temperierten Distribution bezeichnen wir mit $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Er ist ein lokalkonvexer Raum mit den Halbnormen*

$$\|T\|_u = |\langle T, u\rangle| \qquad u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n).^1$$

**Beispiel 1.3** a) Reguläre Distributionen: Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ meßbar mit $(1+|x|)^{-N} f(x) \in L_1(\mathbb{R}^n)$ und

$$\langle T_f, u\rangle := \int_{\mathbb{R}^n} f(x)u(x)\,dx \qquad \forall\, u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Die sogenannte Dichte $f$ von $T_f$ ist durch $T_f$ eindeutig bestimmt.[2] Die Abbildung

$$f \mapsto T_f : L_p(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \qquad (1 \le p \le \infty)$$

ist also injektiv; in diesem Sinne gilt $L_p(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

b) $\delta$-Distribution(en): Für festes $y \in \mathbb{R}^n$ ist

$$\langle \delta_y, u\rangle := u(y) \qquad \forall\, u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

c) Der Cauchysche Hauptwert:[3]

$$\left\langle \mathrm{p.v.}\frac{1}{x}, u\right\rangle := \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_{|x|\ge\varepsilon} \frac{u(x)}{x}\,dx \qquad \forall\, u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

---

[1] $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ ist also der Dualraum von $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ versehen mit der schwach-$*$-Topologie.
[2] d.h. $T_f = 0$ impliziert $f = 0$ fast überall
[3] englisch: pricipal value

Wegen $\displaystyle\int_{\varepsilon\le|x|\le 1} \frac{1}{x}\,dx = 0$ gilt

$$\Big\langle \text{p.v.}\frac{1}{x}, u\Big\rangle = \int_{|x|\le 1} \frac{u(x)-u(0)}{x}\,dx + \int_{|x|\ge 1} \frac{u(x)}{x}\,dx.$$

**Definition 1.4** *Es sei $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Die $\alpha$-te partielle Ableitung $\partial^\alpha T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ ist definiert durch*

$$\langle \partial^\alpha T, u\rangle := (-1)^{|\alpha|}\langle T, \partial^\alpha u\rangle \qquad \forall\, u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

*Ist $a \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ von temperiertem Wachstum, d.h.*

$$\forall\, \alpha \in \mathbb{N}_0^n \quad \exists\, C \ge 0,\ N \in \mathbb{N}: \qquad |\partial^\alpha a(x)| \le C(1+|x|)^N \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^n,$$

*so ist $aT \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ definiert durch*

$$\langle aT, u\rangle := \langle T, au\rangle \qquad \forall\, u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

*$T \mapsto \partial^\alpha T$ und $T \mapsto aT$ sind stetige Abbildungen $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.*

**Beispiel 1.5** Sei $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ die reguläre Distribution mit Dichte $h(x) = \begin{cases} 1 & x \ge 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$.[4] Dann ist $T' = \delta$, da

$$\langle T', u\rangle = -\langle T, u'\rangle = -\int_{-\infty}^{\infty} h(x)u'(x)\,dx = -\int_0^\infty u'(x)\,dx = u(0) = \langle \delta, u\rangle.$$

**Definition 1.6 (Fouriertransformation)** *Für $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ definiere*[5]

$$\widehat{u}(\xi) = (\mathcal{F}u)(\xi) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} u(x)\,dx \qquad \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n.$$

*Dabei $x\xi = x\cdot\xi := (x,\xi)_{\mathbb{R}^n} = x_1\xi_1 + \ldots + x_n\xi_n$.*

**Satz 1.7** *$\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ist linear und stetig: Für alle $k \in \mathbb{N}_0$ gibt es ein $C \ge 0$, sodass*

$$\|\widehat{u}\|_k \le C\|u\|_{k+n+1} \qquad \forall\, u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n). \tag{1.2}$$

*Weiterhin gilt*

$$\langle \widehat{u}, v\rangle = \langle u, \widehat{v}\rangle \qquad \forall\, u, v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n). \tag{1.3}$$

Beweis: Zunächst ist für $m \in \mathbb{N}$

$$(1+|x|)^m \le (1+|x_1|+\ldots+|x_n|)^m = \sum_{|\alpha|\le m} c_{\alpha,m}|x^\alpha|$$

[4] Die Funktion $h$ nennt man oft die Heavyside-Funktion.
[5] diesselbe Definition macht auch Sinn für $u \in L_1(\mathbb{R}^n)$

für geeignete $c_{\alpha,m} \in \mathbb{N}$. Daher ist

$$
\begin{aligned}
|\widehat{u}(\xi)| &\le \int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} (1+|x|)^{-(n+1)}(1+|x|)^{n+1}|u(x)|\,dx \\
&\le C\|u\|_{n+1} \int_{\mathbb{R}^n} (1+|x|)^{-(n+1)}\,dx = C\|u\|_{n+1}
\end{aligned}
$$

mit einer Konstante $C \ge 0$.[6] Wegen parieller Integration und $\partial_\xi^\gamma e^{-ix\xi} = (-i)^{|\gamma|}x^\gamma e^{-ix\xi}$ ist

$$\xi^\alpha \partial_\xi^\beta \widehat{u}(\xi) = (-i)^{|\alpha|+|\beta|}\mathcal{F}\big[\partial_x^\alpha(x^\beta u(x))\big](\xi) \quad \Longrightarrow \quad |\xi^\alpha \partial_\xi^\beta \widehat{u}(\xi)| \le C\|\partial_x^\alpha(x^\beta u(x))\|_{n+1}.$$

Nach Produktregel (Leibniz-Formel) ist

$$\partial_x^\alpha(x^\beta u(x)) = \sum_{\gamma\le\alpha} \binom{\alpha}{\gamma} (\partial_x^\gamma x^\beta)(\partial_x^{\alpha-\gamma}u(x)).$$

Da $\partial_x^\gamma x^\beta = \begin{cases} \frac{\beta!}{(\beta-\gamma)!}x^{\beta-\gamma} & : \gamma \le \beta \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases}$, folgt

$$\|\partial_x^\alpha(x^\beta u(x))\|_{n+1} \le C_{\alpha,\beta}\|u\|_{|\alpha|+|\beta|+n+1}.$$

Summiert man über alle Multiindizes mit $|\alpha|+|\beta| \le k$, so folgt (1.2). Schließlich

$$
\begin{aligned}
\langle \widehat{u}, v\rangle &= \int \widehat{u}(\xi)v(\xi)\,d\xi = \int \Big\{ \int e^{-ix\xi}u(x)\,dx \Big\} v(\xi)\,d\xi = \int \Big\{ \int e^{-ix\xi}v(\xi)\,d\xi \Big\} u(x)\,dx \\
&= \int \widehat{v}(x)u(x)\,dx = \langle u, \widehat{v}\rangle
\end{aligned}
$$

nach Satz von Fubini. ∎

**Satz 1.8** *Für $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ definiere*

$$\langle \widehat{T}, u\rangle = \langle T, \widehat{u}\rangle \qquad \forall\, u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

*Dann ist* $\widehat{\ } = \mathcal{F} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ *stetig und hat folgende Eigenschaften:*

*a)* $\widehat{\partial^\alpha T} = i^{|\alpha|}\xi^\alpha \widehat{T}$ *und* $\partial^\alpha \widehat{T} = (-i)^{|\alpha|}\widehat{x^\alpha T}$ *für alle* $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$.

*b) Ist* $C_0(\mathbb{R}^n) = \{f \in C(\mathbb{R}^n) \mid \lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0\}$ *mit der Supremum-Norm versehen,*[7] *so ist* $\mathcal{F} : L_1(\mathbb{R}^n) \to C_0(\mathbb{R}^n)$ *stetig.*[8]

*d) Ist* $(f*g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\,dy$ *die Faltung von* $f, g \in L_1(\mathbb{R}^n)$, *so ist*

$$\mathcal{F}(f*g) = \widehat{f}\,\widehat{g}.$$

[6] Mit Polarkoordinaten: $\int_{\mathbb{R}^n}(1+|x|)^{-L}\,dx = \tau_n \int_0^\infty t^{n-1}(1+t)^{-L} < \infty$, falls $n-1-L < -1$, d.h. $L > n$.

[7] dann ist $C_0(\mathbb{R}^n)$ ein Banachraum

[8] Lemma von Riemann-Lebesgue

**Beispiel 1.9** Fouriertransformation der $\delta$-Distribution:

$$\langle \widehat{\delta_y}, u\rangle = \widehat{u}(y) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ixy} u(x)\, dx = \langle e^{-iy\cdot}, u\rangle.$$

**Satz 1.10** *Es sei*

$$\check{u}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} u(\xi)\, đ\xi, \qquad đ\xi = \frac{1}{(2\pi)^n} d\xi.$$

*Dann ist* $\check{u} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ *stetig und es gilt*

$$\mathcal{F}(\check{u}) = u, \quad (\mathcal{F}u)\check{} = u \qquad \forall\, u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

*Also ist* $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ *bijektiv mit Inverse* $\mathcal{F}^{-1} = \check{}$. *Durch*

$$\langle \check{T}, u\rangle := \langle T, \check{u}\rangle \qquad \forall\, T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \quad \forall\, u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

*erhält man die Inverse* $\mathcal{F}^{-1}$ *von* $\mathcal{F} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

**Satz 1.11 (Plancherel)** $\mathcal{F}$ *schränkt sich ein zu einer bijektiven Abbildung* $\mathcal{F} : L_2(\mathbb{R}^n) \to L_2(\mathbb{R}^n)$ *mit*

$$(\widehat{u}, \widehat{v})_{L_2(\mathbb{R}^n)} = (2\pi)^n (u, v)_{L_2(\mathbb{R}^n)} \qquad \forall\, u \in L_2(\mathbb{R}^n).$$

# 2 Symbole und Pseudodifferentialoperatoren

**Notation:** Für $y \in \mathbb{R}^m$ schreiben wir

$$\langle y\rangle := \sqrt{1 + |y|^2}.$$

Dies ist eine glatte[9] Funktion in $y$ und es gilt

$$\langle y\rangle \leq (1 + |y|) \leq \sqrt{2}\, \langle y\rangle \qquad \forall\, y \in \mathbb{R}^m.$$

**Definition 2.1** *Es sei* $\mu \in \mathbb{R}$. *Mit* $S^\mu(\mathbb{R}^n)$ *bezeichnen wir denjenigen Unterraum von* $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$[10], *dessen Elemente folgende Eigenschaft haben: Für alle* $k \in \mathbb{N}_0$ *ist*

$$\|p\|_k^{(\mu)} := \sup_{\substack{x,\xi \in \mathbb{R}, \\ |\alpha|+|\beta| \leq k}} \left| \partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha p(x, \xi) \right| \langle \xi\rangle^{|\alpha| - \mu} < \infty. \tag{2.1}$$

*Wir nennen solche* $p$ *ein* <u>*(Links-)Symbol*</u> *der* <u>*Ordnung*</u> $\mu$. *Setze*

$$S^{-\infty}(\mathbb{R}^n) = \bigcap_{\mu \in \mathbb{R}} S^\mu(\mathbb{R}^n).$$

**Beispiel 2.2** Es sei $\mu \in \mathbb{N}_0$ und

$$p(x, \xi) = \sum_{|\alpha| \leq \mu} a_\alpha(x) \xi^\alpha, \qquad a_\alpha \in \mathcal{C}_b^\infty(\mathbb{R}^n). \tag{2.2}$$

Dann ist $p \in S^\mu(\mathbb{R}^n)$ ein Linkssymbol der Ordnung $\mu$.

[9] d.h. unendlich oft stetig partiell differenzierbare

[10] dies ist der Raum aller glatten Funktionen $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$

**Beispiel 2.3** Für $\mu \in \mathbb{R}$ ist $\langle\xi\rangle^\mu \in S^\mu(\mathbb{R}^n)$ ein von $x$ unabhängiges Symbol. Denn per Induktion zeigt man: $\partial_\xi^\alpha \langle\xi\rangle^\mu$ ist eine endliche Linearkombination von Termen der Form $p_k(\xi)\langle\xi\rangle^{\mu-2l}$ mit Polynomen $p_k$ vom Grad $\leq k$ und $2l - k \geq |\alpha|$. Also

$$|\partial_\xi^\alpha \langle\xi\rangle^\mu| \leq C\langle\xi\rangle^{\mu-(2l-k)} \leq C\langle\xi\rangle^{\mu-|\alpha|}.$$

**Beispiel 2.4** Es sei $\mu \in \mathbb{R}$ und $p \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ erfülle

$$p(x, t\xi) = t^\mu p(x,\xi) \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^n \quad \forall\, |\xi| \geq 1 \quad \forall\, t \geq 1$$

(man sagt $p$ ist positiv homogen vom Grad $\mu$ für große $\xi$) und

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n,\, |\xi|\leq 1} |\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta p(x,\xi)| < \infty \qquad \forall\, \alpha,\beta \in \mathbb{N}_0^n.$$

Dann ist $p \in S^\mu(\mathbb{R}^n)$ ein Linkssymbol der Ordnung $\mu$.

**Lemma 2.5 (Einfache Eigenschaften)** *Im folgenden seien $\mu, \widetilde{\mu} \in \mathbb{R}$.*

*a)* $S^\mu(\mathbb{R}^n)$ *ist ein Frèchetraum mit den (Halb-)Normen aus* (2.1).

*b)* $p \mapsto \partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta p : S^\mu(\mathbb{R}^n) \to S^{\mu-|\alpha|}(\mathbb{R}^n)$ *ist linear und stetig.*

*c)* $(p,\widetilde{p}) \mapsto p\widetilde{p} : S^\mu(\mathbb{R}^n) \times S^{\widetilde{\mu}}(\mathbb{R}^n) \to S^{\mu+\widetilde{\mu}}(\mathbb{R}^n)$ *ist bilinear und stetig.*

*d)* $S^{\widetilde{\mu}}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow S^\mu(\mathbb{R}^n)$,[11] *falls* $\widetilde{\mu} \leq \mu$.

**Beispiel 2.6** Es sei $p(x,\xi)$ wie in (2.2) und $P : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ der Differentialoperator gegeben durch

$$(Pu)(x) = \sum_{|\alpha|\leq\mu} a_\alpha(x) D_x^\alpha u(x).$$

Wegen Satz 1.8.a) ist

$$\begin{aligned} a_\alpha(x) D^\alpha u(x) &= a_\alpha(x)\, \mathcal{F}^{-1}\big(\xi^\alpha \widehat{u}(\xi)\big)(x) = a_\alpha(x) \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} \xi^\alpha \widehat{u}(\xi)\, đ\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} a_\alpha(x) \xi^\alpha \widehat{u}(\xi)\, đ\xi. \end{aligned}$$

Also erhält man

$$(Pu)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} p(x,\xi) \widehat{u}(\xi)\, đ\xi \qquad \forall\, u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n). \tag{2.3}$$

**Definition 2.7** *Für ein Linkssymbol $p \in S^\mu(\mathbb{R}^n)$ und $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ definiere*

$$[p(x,D)u](x) = [\mathrm{op}(p)u](x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} p(x,\xi) \widehat{u}(\xi)\, đ\xi, \qquad x \in \mathbb{R}^n.$$

$p(x,D) = \mathrm{op}(p)$ *heißt der Pseudodifferentialoperator (kurz: $\psi do$) mit Symbol $p(x,\xi)$.*

[11] $X \hookrightarrow Y$ meint hier, dass $X \subseteq Y$ und dass $x \mapsto x : X \to Y$ stetig ist, also dass die Topologie von $X$ stärker ist als die Spurtopologie von $X$ bzgl. $Y$.

**Beispiel 2.8** Jeder Differentialoperator mit Koeffizienten aus $\mathcal{C}_b^\infty(\mathbb{R}^n)$ ist ein $\psi$do, vgl. Beispiel 2.6. Insbesondere gilt für den Laplace-Operatoren:

$$\Delta = \partial_{x_1}^2 + \ldots + \partial_{x_n}^2 = -D_{x_1}^2 - \ldots - D_{x_n}^2 = p(D), \qquad p(\xi) = -\xi_1^2 - \ldots - \xi_n^2 = -|\xi|^2.$$

**Satz 2.9** *Es sei $p \in S^\mu(\mathbb{R}^n)$ ein Linkssymbol. Dann ist*

$$p(x, D) : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

*stetig und linear. Genauer: Zu jedem $k \in \mathbb{N}_0$ gibt es ein $C \geq 0$ derart, dass*

$$\|p(x, D)u\|_k \leq C\|p\|_k^{(\mu)}\|u\|_{k+2n+2+[\mu]} \qquad \forall\, u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \quad \forall\, p \in S^\mu(\mathbb{R}^n),$$

*wobei $[\mu]$ die kleinste natürliche Zahl mit $\max(\mu, 0) \leq [\mu]$ bezeichnet.*

Beweis: Der Einfachheit halber sei $\mu \in \mathbb{N}_0$. Zunächst haben wir für beliebiges $q \in S^\mu(\mathbb{R}^n)$ und $v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, dass

$$\begin{aligned}
\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |[\mathrm{op}(q)v](x)| &\leq \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \langle\xi\rangle^{-n-1}|\langle\xi\rangle^{-\mu}q(x,\xi)|\,|\langle\xi\rangle^{\mu+n+1}\widehat{v}(\xi)|\,đ\xi \\
&\leq \|q\|_0^{(\mu)}\|\langle\xi\rangle^{\mu+n+1}\widehat{v}\|_\infty \int_{\mathbb{R}^n} \langle\xi\rangle^{-n-1}\,đ\xi \\
&\leq C\,\|q\|_0^{(\mu)}\|\widehat{v}\|_{\mu+n+1} \overset{1.7}{\leq} C\,\|q\|_0^{(\mu)}\|v\|_{\mu+2n+2}.
\end{aligned}$$

Für $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$ und $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ gilt nun

$$x^\alpha\partial_x^\beta[\mathrm{op}(p)u](x) = \sum_{\beta_1+\beta_2=\beta} C_{\beta_1,\beta_2}x^\alpha \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi}(\partial_x^{\beta_2}p)(x,\xi)\xi^{\beta_1}\widehat{u}(\xi)\,đ\xi.$$

Verwendet man nun Satz 1.8.a), dass $x^\alpha e^{ix\xi} = D_\xi^\alpha e^{ix\xi}$ und partielle Integration, so folgt

$$\begin{aligned}
x^\alpha\partial_x^\beta[\mathrm{op}(p)u](x) &= \sum_{\substack{\beta_1+\beta_2=\beta\\ \alpha_1+\alpha_2=\alpha}} C_{\beta_1,\beta_2,\alpha_1,\alpha_2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi}(\partial_x^{\beta_2}\partial_\xi^{\alpha_2}p)(x,\xi)\mathcal{F}\big(x_1^\alpha\partial_x^{\beta_1}u\big)(\xi)\,đ\xi \\
&= \sum_{\substack{\beta_1+\beta_2=\beta\\ \alpha_1+\alpha_2=\alpha}} C_{\beta_1,\beta_2,\alpha_1,\alpha_2}\big[\mathrm{op}\big(\partial_x^{\beta_2}\partial_\xi^{\alpha_2}p\big)(x_1^\alpha\partial_x^{\beta_1}u)\big](x).
\end{aligned}$$

Anwenden obiger Abschätzung liefert

$$\begin{aligned}
\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha\partial_x^\beta[\mathrm{op}(p)u](x)| &\leq \sum_{\substack{\beta_1+\beta_2=\beta\\ \alpha_1+\alpha_2=\alpha}} C_{\beta_1,\beta_2,\alpha_1,\alpha_2}\|\partial_x^{\beta_2}\partial_\xi^{\alpha_2}p\|_0^{(\mu-|\alpha_2|)}\|x_1^\alpha\partial_x^{\beta_1}u\|_{\mu+2n+2} \\
&\leq C_{\alpha,\beta}\|p\|_{|\alpha|+|\beta|}^{(\mu)}\|u\|_{\mu+2n+2+|\alpha|+|\beta|}.
\end{aligned}$$

Summation über alle $|\alpha| + |\beta| \leq k$ ergibt die Behauptung. ■

**Definition 2.10** *Es sei $\mu \in \mathbb{R}$ und $p_j \in S^{\mu_j}(\mathbb{R}^n)$ für $j \in \mathbb{N}_0$, wobei*

$$\mu = \mu_0 \geq \mu_1 \geq \mu_2 \geq \ldots \xrightarrow{j \to \infty} -\infty.$$

*Wir sagen, dass $p \in S^{\mu}(\mathbb{R}^n)$ die asymptotische Summe der $p_j$ ist und schreiben $p \sim \sum_{j=0}^{\infty} p_j$, falls*

$$p - \sum_{j=0}^{N-1} p_j \; \in \; S^{\mu_N}(\mathbb{R}^n) \qquad \forall\, N \in \mathbb{N}.$$

**Notation:** $\chi \in \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ heißt eine 0-Ausschneidefunktion, falls $\chi(\xi) = \begin{cases} 0 & : |\xi| \leq 1 \\ 1 & : |\xi| \geq 2 \end{cases}$.[12]

**Satz 2.11** *Es sei $\mu_0 \in \mathbb{R}$ und $p_j \in S^{\mu_j}(\mathbb{R}^n)$, $j \in \mathbb{N}_0$, mit $\mu_j \searrow -\infty$. Dann gibt es ein $p \in S^{\mu_0}(\mathbb{R}^n)$ derart, dass $p \sim \sum_{j=0}^{\infty} p_j$. Dieses $p$ ist modulo $S^{-\infty}(\mathbb{R}^n)$ eindeutig bestimmt.*

Beweis: **Existenz:** Sei $\chi$ eine 0-Ausschneidefunktion und $0 < \varepsilon \leq 1$. Dann ist für $|\alpha| \geq 1$

$$|\partial_{\xi}^{\alpha} \chi(\varepsilon \xi)| \leq \begin{cases} C_{\alpha} \varepsilon^{|\alpha|} & : \xi \in \mathbb{R}^n \\ 0 & : |\xi| \leq \varepsilon^{-1} \text{ oder } 2\varepsilon^{-1} \leq |\xi| \end{cases}.$$

Da $\varepsilon \leq 2|\xi|^{-1} \leq 4\langle\xi\rangle^{-1}$ für $\varepsilon^{-1} \leq |\xi| \leq 2\varepsilon^{-1}$,[13] folgt

$$|\partial_{\xi}^{\alpha} \chi(\varepsilon \xi)| \leq C_{\alpha} \langle\xi\rangle^{-|\alpha|} \qquad \forall\, 0 < \varepsilon \leq 1 \quad \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n$$

für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$.[14] Es folgt

$$\left| \partial_{\xi}^{\alpha} \partial_x^{\beta} [\chi(\varepsilon\xi) p_j(x,\xi)] \right| \leq C_{j,\alpha,\beta} \langle\xi\rangle^{\mu_j - |\alpha|} = (C_{j,\alpha,\beta} \langle\xi\rangle^{-1}) \langle\xi\rangle^{\mu_j + 1 - |\alpha|} \tag{2.4}$$

Jetzt wähle eine Folge $1 \geq \varepsilon_0 > \varepsilon_1 > \ldots > \varepsilon_j \xrightarrow{j \to \infty} 0$ mit

$$C_{j,\alpha,\beta} \varepsilon_j \leq 2^{-j} \qquad \forall\, |\alpha| + |\beta| \leq j.$$

Da $\langle\xi\rangle^{-1} \leq |\xi|^{-1}$ und $\chi(\varepsilon_j \xi) = 0$ für alle $\xi$ mit $|\xi|^{-1} \geq \varepsilon_j$,[15] folgt aus (2.4), dass

$$\left| \partial_{\xi}^{\alpha} \partial_x^{\beta} [\chi(\varepsilon_j \xi) p_j(x,\xi)] \right| \leq 2^{-j} \langle\xi\rangle^{\mu_j + 1 - |\alpha|} \qquad \forall\, (x,\xi) \quad \forall\, |\alpha| + |\beta| \leq j. \tag{2.5}$$

Jetzt definiere

$$p(x,\xi) = \sum_{j=0}^{\infty} \chi(\varepsilon_j \xi) p_j(x,\xi).$$

[12] Statt 1 bzw. 2 kann man auch beliebige Konstanten $0 < c_1 < c_2$ verwenden.
[13] Für $|\xi| \geq 1$ ist $\langle\xi\rangle^2 = 1 + |\xi|^2 \leq |\xi|^2$, also $|\xi|^{-1} \leq \sqrt{2}\langle\xi\rangle^{-1}$.
[14] d.h. $\{\chi(\varepsilon\xi) \mid 0 < \varepsilon \leq 1\}$ ist eine beschränkte Teilmenge in $S^0(\mathbb{R}^n)$.
[15] also auch für alle $\xi$ mit $\langle\xi\rangle^{-1} \geq \varepsilon_j^{-1}$

Dies ist eine lokal endliche Summe, insbesondere $p \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$. Für beliebig gegebenes $N \in \mathbb{N}$ ist

$$p - \sum_{j=0}^{N-1} p_j = \underbrace{\sum_{j=0}^{N-1} (\chi(\varepsilon_j \xi) - 1) p_j}_{\in S^{-\infty}(\mathbb{R}^n),\text{ da } \equiv 0 \text{ für } |\xi| \geq 2\varepsilon_{N-1}^{-1}} + \underbrace{\sum_{j=N}^{\infty} \chi(\varepsilon_j \xi) p_j}_{=: q_N(x,\xi)} .$$

Wir müssen zeigen, dass $q_N \in S^{\mu_N}(\mathbb{R}^n)$ ist. Seien dazu $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$ beliebig vorgegeben. Wähle $j_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$j_0 \geq \max(N, |\alpha| + |\beta|) \text{ und } \mu_{j_0} + 1 \leq \mu_N.$$

Dann ist

$$q_N(x,\xi) = \underbrace{\sum_{j=N}^{j_0-1} \chi(\varepsilon_j \xi) p_j}_{\in S^{\mu_N}(\mathbb{R}^n)} + q_{j_0}(x,\xi).$$

Nach Wahl von $j_0$ und wegen (2.5) gilt

$$|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta q_{j_0}(x,\xi)| \leq \Big( \sum_{j=j_0}^{\infty} 2^{-j} \Big) \langle \xi \rangle^{\mu_N - |\alpha|} \leq \langle \xi \rangle^{\mu_N - |\alpha|}.$$

Daher ist

$$|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta q_N(x,\xi)| \leq C_{\alpha,\beta} \langle \xi \rangle^{\mu_N - |\alpha|}.$$

**Eindeutigkeit:** Seien $p^{(1)}, p^{(2)} \in S^{\mu_0}(\mathbb{R}^n)$ und $p^{(k)} \sim \sum p_j$. Dann ist

$$p^{(1)} - p^{(2)} = \Big(p^{(1)} - \sum_{j=0}^{N-1} p_j\Big) + \Big(p^{(2)} - \sum_{j=0}^{N-1} p_j\Big) \;\in\; S^{\mu_N}(\mathbb{R}^n).$$

Also $p^{(1)} - p^{(2)} \in \bigcap_{N \in \mathbb{N}} S^{\mu_N}(\mathbb{R}^n) = S^{-\infty}(\mathbb{R}^n)$. ■

**Definition 2.12** *Das Symbol $p \in S^\mu(\mathbb{R}^n)$, $\mu \in \mathbb{R}$, heißt ein* <u>*klassisches*</u> *oder* <u>*polyhomogenes*</u> *Symbol, falls es $p_j \in S^{\mu-j}(\mathbb{R}^n)$, $j \in \mathbb{N}_0$, gibt mit*

$$p_j(x, t\xi) = t^{\mu-j} p_j(x,\xi) \qquad \forall\, x \quad \forall\, |\xi| \geq 1 \quad \forall\, t \geq 1$$

*und $p \sim \sum_j p_j$. Den Raum aller solcher Symbole nennen wir $S^\mu_{\mathrm{cl}}(\mathbb{R}^n)$*

**Beispiel 2.13** a) $p(x,\xi) = \sum_{|\alpha| \leq \mu} a_\alpha(x) \xi^\alpha = \sum_{j=0}^{\mu} p_j(x,\xi)$ mit $p_j(x,\xi) = \sum_{|\alpha| = \mu - j} a_\alpha(x) \xi^\alpha$.

b) Es sei $p(\xi) = \langle \xi \rangle^{-2} = \frac{1}{1+|\xi|^2}$. Dann ist $p \in S^{-2}(\mathbb{R}^n)$ und

$$\frac{1}{1+|\xi|^2} - \sum_{j=0}^{N-1} \frac{(-1)^j}{|\xi|^{2(j+1)}} = (-1)^N \frac{1}{|\xi|^{2N}} \frac{1}{1+|\xi|^2} \qquad \forall\, \xi \neq 0.[16]$$

Sei $\chi$ eine 0-Ausschneidefunktion. Nach Beispiel 2.4 ist dann

$$p_j(\xi) = \chi(2\xi) \frac{(-1)^j}{|\xi|^{2(j+1)}} \;\in\; S^{-2(1+j)}(\mathbb{R}^n).$$

[16] Induktion!

Dann ist $p \sim \sum_{j=0}^{\infty} p_j$, da wegen oben und Lemma 2.5.c)

$$p(\xi) - \sum_{j=0}^{N-1} p_j(\xi) = \frac{\chi(2\xi)}{|\xi|^{2N}} \frac{(-1)^N}{(1+|\xi|^2)} + \underbrace{(1-\chi)(2\xi)p(\xi)}_{\in \mathcal{C}^\infty_{\text{comp}}(\mathbb{R}^n) \subset S^{-\infty}(\mathbb{R}^n)} \quad \in \; S^{-2(N+1)}(\mathbb{R}^n).$$

# 3 Oszillator-Integrale

**Bemerkung 3.1** Seien $p_j \in S^{\mu_j}(\mathbb{R}^n)$ und $u, v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Dann

$$[\text{op}(p_j)v](x) = \int \Big( \int e^{i(x-x')\xi} p_j(x,\xi) v(x')\, dx' \Big) đ\xi.$$

Wir führen jetzt eine formale (und tatsächlich falsche) Rechnung zur Komposition zweier $\psi$do durch.

$$\begin{aligned}\big[\text{op}(p_1)\big(\text{op}(p_2)u\big)\big](x) &= \iint e^{i(x-x')\xi'} p_1(x,\xi') \Big( \iint e^{i(x'-z)\xi} p_2(x',\xi) u(z)\, dz đ\xi \Big)\, dx' đ\xi' \\ &= \iiiint e^{i(x-z)\xi} e^{-i(x-x')(\xi-\xi')} p_1(x,\xi') p_2(x',\xi) u(z)\, dx' đ\xi' dz đ\xi.\end{aligned}$$

Nach Variablensubstitution $y = x - x'$ und $\eta = \xi - \xi'$ folgt

$$\begin{aligned} &= \iint e^{i(x-z)\xi} \underbrace{\Big( \iint e^{-iy\eta} p_1(x, \xi+\eta) p_2(x+y,\xi)\, dy đ\eta \Big)}_{=:p(x,\xi)} u(z)\, dz đ\xi \\ &= [\text{op}(p)u](x)\end{aligned}$$

Problem: Der Integrand in der Definition von $p$ ist im allgemeinen nicht integrierbar.

Lösung: Verallgemeinerter Integralbegriff!

**Definition 3.2 (und Lemma)** *$A^{m,\tau}(\mathbb{R}^n)$ $(m, \tau \in \mathbb{R})$ sei der Raum aller glatter Funktionen $a : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ mit*

$$\|a\|_k^{m,\tau} := \sup_{\substack{|\alpha|+|\beta| \le k \\ y,\eta \in \mathbb{R}^n}} \Big\{ |\partial_\eta^\alpha \partial_y^\beta a(y,\eta)| \langle y \rangle^{-\tau} \langle \eta \rangle^{-m} \Big\} < \infty.$$

*Die Elemente von $A^{m,\tau}(\mathbb{R}^n)$ heißen Amplitudenfunktionen. Dann ist $A^{m,\tau}(\mathbb{R}^n)$ ein Frèchetraum und $S^m(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow A^{m,0}(\mathbb{R}^n)$.*

**Satz 3.3** *Es sei $a \in A^{m,\tau}(\mathbb{R}^n)$ und $\chi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ mit $\chi(0) = 1$. Dann existiert der Grenzwert*

$$\text{Os}[a] = \text{Os}-\iint e^{-iy\eta} a(y,\eta)\, dy đ\eta := \lim_{\varepsilon \to 0} \iint e^{-iy\eta} \chi(\varepsilon y, \varepsilon\eta) a(y,\eta)\, dy đ\eta. \tag{3.1}$$

*Für beliebige $l, l' \in \mathbb{N}_0$ mit $2l > n + m$ und $2l' > n + \tau$ ist*

$$\text{Os}[a] = \iint e^{-iy\eta} \langle y \rangle^{-2l'} (1 - \Delta_\eta)^{l'} \Big[ \langle \eta \rangle^{-2l} (1 - \Delta_y)^l a(y,\eta) \Big]\, dy đ\eta.$$

Beweis: <u>1. Schritt:</u> Setze $\chi_\varepsilon(y,\eta) = \chi(\varepsilon y, \varepsilon\eta)$. Dann gilt

i) $\chi_\varepsilon \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$ für alle $\varepsilon > 0$,

ii) $\sup\left\{|\partial_\eta^\alpha \partial_y^\beta \chi_\varepsilon(y,\eta)| \mid 0 < \varepsilon \leq 1,\ (y,\eta) \in \mathbb{R}^{2n}\right\} < \infty$ für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$,

iii) $\partial_\eta^\alpha \partial_y^\beta \chi_\varepsilon(y,\eta) \xrightarrow{\varepsilon\to 0} \begin{cases} 1 & : |\alpha| + |\beta| = 0 \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases}$ punktweise auf $\mathbb{R}^{2n}$.

<u>1. Schritt:</u> Es gilt

$$\langle y\rangle^{-2l}(1-\Delta_\eta)^l e^{-iy\eta} = e^{-iy\eta} = \langle\eta\rangle^{-2l'}(1-\Delta_y)^{l'} e^{-iy\eta}.$$

Bezeichnet $I_\varepsilon$ die rechte Seite von (3.1), so folgt durch partielle Integration

$$\begin{aligned} I_\varepsilon &= \iint e^{-iy\eta}\langle\eta\rangle^{-2l}(1-\Delta_y)^l(\chi_\varepsilon(y,\eta)a(y,\eta))\,dy đ\eta \\ &= \iint e^{-iy\eta}\underbrace{\langle y\rangle^{-2l'}(1-\Delta_\eta)^{l'}\left[\langle\eta\rangle^{-2l}(1-\Delta_y)^l(\chi_\varepsilon(y,\eta)a(y,\eta))\right]}_{g_\varepsilon(y,\eta)}\,dy đ\eta. \end{aligned}$$

Wegen $\langle\cdot\rangle^r \in S^r(\mathbb{R}^n)$, ii) und Produktregel gilt

$$|g_\varepsilon(y,\eta)| \leq C_{l,l'}\|a\|_{2l+2l'}^{m,\tau}\langle y\rangle^{\tau-2l'}\langle\eta\rangle^{m-2l}. \tag{3.2}$$

Also hat $g_\varepsilon$ eine gleichmäßige $L_1$-Majorante. Wegen iii) ist

$$g_\varepsilon(y,\eta) \xrightarrow{\varepsilon\to 0} \langle y\rangle^{-2l'}(1-\Delta_\eta)^{l'}\left[\langle\eta\rangle^{-2l}(1-\Delta_y)^l a(y,\eta)\right].$$

Die Behauptung folgt aus dem Satz von Lebesgue über dominierte Konvergenz. ■

**Folgerung 3.4** (3.1) *hängt nicht von der Wahl von $\chi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$ ab. Die Abbildung*

$$a \mapsto \mathrm{Os}[a] : A^{m,\tau}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{C}.$$

*ist stetig (beachte* (3.2)*). Ist $a \in L^1(\mathbb{R}^{2q})$, so ist*

$$\mathrm{Os}[a] = \iint e^{-iy\eta}a(y,\eta)\,dy đ\eta.$$

**Satz 3.5 (Dominierte Konvergenz)** *Sei $(a_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset A^{m,\tau}(\mathbb{R}^n)$ eine beschränkte Folge, die punktweise auf $\mathbb{R}^{2n}$ gegen die Funktion $a$ konvergiere. Dann ist $a \in A^{m,\tau}(\mathbb{R}^n)$ und*

$$\lim_{j\to\infty}\mathrm{Os}[a_j] = \mathrm{Os}[a].$$

Beweis: Ein funktionalanalytisches Argument zeigt, dass $a \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ und dass $\partial_\eta^\alpha \partial_y^\beta a_j \xrightarrow{j\to\infty} \partial_\eta^\alpha \partial_y^\beta a$ gleichmäßig auf beschränkten Mengen.[17] Insbesondere gilt dann, dass

$$\langle y\rangle^{-2l'}(1-\Delta_\eta)^{l'}\left[\langle\eta\rangle^{-2l}(1-\Delta_y)^l a_j(y,\eta)\right] \xrightarrow{j\to\infty} \langle y\rangle^{-2l'}(1-\Delta_\eta)^{l'}\left[\langle\eta\rangle^{-2l}(1-\Delta_y)^l a(y,\eta)\right]$$

punktweise auf $\mathbb{R}^{2n}$. Da $(a_j)$ eine beschränkte Folge ist, liefert (3.2) eine gleichmäßige $L_1$-Majorante. Die Behauptung folgt aus dem Satz von Lebesgue über dominierte Konvergenz. ■

**Lemma 3.6** *Es sei $a \in A^{m,\tau}(\mathbb{R}^n)$. Dann gelten:*

a) *Partielle Integration:* $\mathrm{Os}[y^\alpha a] = \mathrm{Os}[D_\eta^\alpha a], \quad \mathrm{Os}[\eta^\beta a] = \mathrm{Os}[D_y^\beta a]$.

b) *Translationsinvarianz:* $\mathrm{Os}[a] = \mathrm{Os}[e^{-i(y\eta_0+y_0\eta+y_0\eta_0)}a(y+y_0,\eta+\eta_0)]$.

c) *Ist $a(y,\eta)=a(y)$, so ist* $\mathrm{Os}[e^{ix\eta}a] = a(x)$.

Beweis: a) Wegen $y^\alpha e^{-iy\eta} = (-D_\eta)^\alpha$ und partieller Integration ist

$$\mathrm{Os}[y^\alpha a] = \lim_{\varepsilon\to 0}\iint e^{-iy\eta}D_\eta^\alpha\big(\chi(\varepsilon y,\varepsilon\eta)a(y,\eta)\big)\,dy đ\eta = \lim_{\varepsilon\to 0}\mathrm{Os}[D_\eta^\alpha\big(\chi(\varepsilon y,\varepsilon\eta)a(y,\eta)\big)].$$

Nun ist aber $\{D_\eta^\alpha\big(\chi(\varepsilon y,\varepsilon\eta)a(y,\eta)\big) \mid 0<\varepsilon\le 1\}$ eine beschränkte Teilmenge von $A^{m,\tau}(\mathbb{R}^n)$ und

$$D_\eta^\alpha\big(\chi(\varepsilon y,\varepsilon\eta)a(y,\eta)\big) \xrightarrow{\varepsilon\to 0} D_\eta^\alpha a(y,\eta)$$

punktweise auf $\mathbb{R}^{2n}$. Jetzt verwende Satz 3.5.

c) Wähle $\chi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ mit $\chi(0)=1$. Dann

$$\begin{aligned}
\mathrm{Os}[e^{ix\eta}a] &= \mathrm{Os}-\iint e^{i(x-y)\eta}a(y)\,dy đ\eta = \lim_{\varepsilon\to 0}\int \chi(\varepsilon y)a(y)\Big(\int e^{i(x-y)\eta}\chi(\varepsilon\eta)\,đ\eta\Big)dy\\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{-n}\int \chi(\varepsilon y)a(y)(\mathcal{F}^{-1}\chi)\big(\tfrac{x-y}{\varepsilon}\big)\,dy\\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\int \chi(\varepsilon(x-\varepsilon z))a(x-\varepsilon z)(\mathcal{F}^{-1}\chi)(z)\,dz\\
&= a(x)\int(\mathcal{F}^{-1}\chi)(z)\,dz = a(x)\chi(0) = a(x).
\end{aligned}$$

■

**Lemma 3.7** *Es sei $0\le f\in L^1(\mathbb{R}^n)$, $a\in A^{m,\tau}(\mathbb{R}^n)$ und $\chi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ mit $\chi(0)=1$.*

a) *Ist $|a(y,\eta)|\le Cf(y)\langle\eta\rangle^m$, so gilt* $\mathrm{Os}[a] = \lim_{\varepsilon\to 0}\iint e^{-iy\eta}\chi(\varepsilon\eta)a(y,\eta)\,dy đ\eta$.

[17] Zunächst ist $(a_j)$ eine beschränkte Folge in $C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$. Da $C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ montelsch ist, hat jede Teilfolge von $(a_j)$ eine konvergente Teilfolge. Wegen der punktweisen Konvergenz gegen $a$, muss der Grenzwert immer $a$ sein. Somit konvergiert $(a_j)$ selbst in $C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ gegen $a$. Die Abschätzungen für eine Amplitudenfunktion bleiben unter dem Grenzwert erhalten.

*b) Ist* $|a(y,\eta)| \leq C\langle y\rangle^{\tau} f(\eta)$*, so gilt* $\mathrm{Os}[a] = \lim_{\varepsilon\to 0} \iint e^{-iy\eta}\chi(\varepsilon y)a(y,\eta)\,dy\bar{d}\eta$.

*c) Gilt in a) zusätzlich, dass* $\int e^{-iy\eta}a(y,\eta)\,dy \in L^1(\mathbb{R}^n_\eta)$*, so ist*

$$\mathrm{Os}[a] = \int \Big(\int e^{-iy\eta}a(y,\eta)\,dy\Big)\bar{d}\eta.$$

*d) Gilt in b) zusätzlich, dass* $\int e^{-iy\eta}a(y,\eta)\,\bar{d}\eta \in L^1(\mathbb{R}^n_y)$*, so ist*

$$\mathrm{Os}[a] = \int \Big(\int e^{-iy\eta}a(y,\eta)\,\bar{d}\eta\Big)dy.$$

Beweis: Siehe Kumano-go, Theorem 6.9 in Chapter 1. ∎

**Lemma 3.8 (Ungleichung von Peetre)** *Es sei* $s \in \mathbb{R}$*. Dann gilt*

$$\langle \xi+\eta\rangle^s \leq 2^{|s|}\langle\xi\rangle^s\langle\eta\rangle^{|s|} \quad \textit{bzw.} \quad \langle\xi\rangle^s \leq 2^{|s|}\langle\xi-\eta\rangle^s\langle\eta\rangle^{|s|} \qquad \forall\, \xi,\eta\in\mathbb{R}^n.$$

Beweis: Zunächst gilt

$$\langle y\rangle \leq (1+|y|) \leq \sqrt{2}\langle y\rangle \qquad \forall\, y\in\mathbb{R}^n.$$[18]

Sei nun $s \geq 0$. Dann

$$1+|\xi+\eta| \leq 1+|\xi|+|\eta| \leq (1+|\xi|)(1+|\eta|) \implies \langle\xi+\eta\rangle^s \leq (1+|\xi|)^s(1+|\eta|)^s \leq 2^s\langle\xi\rangle^s\langle\eta\rangle^s.$$

Für $s \leq 0$ gilt analog

$$\langle\xi\rangle^{-s} \leq 2^{-s}\langle\xi+\eta\rangle^{-s}\langle-\eta\rangle^{-s} \iff \langle\xi+\eta\rangle^s \leq 2^{-s}\langle\xi\rangle^s\langle\eta\rangle^{-s}.$$ ∎

**Satz 3.9 (Fubini)** *Es sei* $a = a(y,y',\eta,\eta') \in A^{m,\tau}(\mathbb{R}^{n+k})$*. Dann ist*

$$b(y,\eta) = \mathrm{Os}-\iint e^{-iy'\eta'}a(y,y',\eta,\eta')\,dy'\bar{d}\eta' \;\in\; A^{m,\tau}(\mathbb{R}^n)$$

*und*

$$\partial_\eta^\alpha\partial_y^\beta b(y,\eta) = \mathrm{Os}-\iint e^{-iy'\eta'}\partial_\eta^\alpha\partial_y^\beta a(y,y',\eta,\eta')\,dy'\bar{d}\eta'.$$

*Weiterhin gilt*

$$\begin{aligned}&\mathrm{Os}-\iint e^{-i(y,y')(\eta,\eta')}a(y,y',\eta,\eta')\,d(y,y')\bar{d}(\eta,\eta')\\ &\qquad = \mathrm{Os}-\iint e^{-iy\eta}\Big(\mathrm{Os}-\iint e^{-iy'\eta'}a(y,y',\eta,\eta')dy'\bar{d}\eta'\Big)\,dy\bar{d}\eta.\end{aligned}$$

[18] Sieht man leicht durch Quadrieren.

Beweis: OBdA $\tau, m \geq 0$. Wegen der Ungleichung von Peetre ist

$$\langle (y,y')\rangle^{\tau}\langle (\eta,\eta')\rangle^{m} \leq 2^{m+\tau}\langle y\rangle^{\tau}\langle y'\rangle^{\tau}\langle \eta\rangle^{m}\langle \eta'\rangle^{m}.$$ [19]

Daher ist $\partial_\eta^\alpha \partial_y^\beta a(y,\cdot,\eta,\cdot) \in A^{m,\tau}(\mathbb{R}^k)$ mit

$$\|\partial_\eta^\alpha \partial_y^\beta a(y,\cdot,\eta,\cdot)\|_k^{m,\tau} \leq C_{k,m}\|a\|_{k+|\alpha|+|\beta|}^{m,\tau}\langle y\rangle^{\tau}\langle \eta\rangle^{m}$$

für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Aus Folgerung 3.4 (und (3.2)) folgt

$$\left|\mathrm{Os}[\partial_\eta^\alpha \partial_y^\beta a(y,\cdot,\eta,\cdot)]\right| \leq C\|a\|_{2(l+l')+|\alpha|+|\beta|}^{m,\tau}\langle y\rangle^{\tau}\langle \eta\rangle^{m},$$

wobei $2l > n+k+m$ und $2l' > n+k+\tau$. Wegen der zweiten Darstellung des Oszillator-Integrals in Satz 3.3 und des Satzes von Lebesgue über Differenzierbarkeit von Parameterintegralen gilt

$$\mathrm{Os}[\partial_\eta^\alpha \partial_y^\beta a(y,\cdot,\eta,\cdot)] = \partial_\eta^\alpha \partial_y^\beta \,\mathrm{Os}[a(y,\cdot,\eta,\cdot)].$$

Weiterhin folgt, dass

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Os}-\iint e^{-iy\eta} b(y,\eta)\,dy đ\eta \\
&\overset{3.3}{=} \int e^{-i(y,y')(\eta,\eta')}(\langle y\rangle\langle y'\rangle)^{-2l'}((1-\Delta_\eta)(1-\Delta_{\eta'}))^{l'} \\
&\qquad \big[(\langle \eta\rangle\langle \eta'\rangle)^{-2l}((1-\Delta_y)(1-\Delta_{y'}))^{l} a(y,y',\eta,\eta')\big]\frac{d(y,y',\eta,\eta')}{(2\pi)^{n+k}} \\
&= \mathrm{Os}-\iint e^{-i(y,y')(\eta,\eta')}(\langle \eta\rangle\langle \eta'\rangle)^{-2l}((1-\Delta_y)(1-\Delta_{y'}))^{l} a(y,y',\eta,\eta')\,d(y,y')đ(\eta,\eta') \\
&= \mathrm{Os}-\iint e^{-i(y,y')(\eta,\eta')} a(y,y',\eta,\eta')\,d(y,y')đ(\eta,\eta'),
\end{aligned}$$

wobei die letzten beiden Gleichungen wegen Lemma 3.6.a) gelten. ■

**Satz 3.10** *Es sei $p \in S^{\mu}(\mathbb{R}^n)$. Dann definiert*

$$[Pu](x) := \mathrm{Os}-\iint e^{-iy\eta} p(x,\eta)u(x+y)\,dy đ\eta, \qquad u \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n),$$

*eine stetige Abbildung $P : C_b^\infty(\mathbb{R}^n) \to C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit*

$$Pu = \mathrm{op}(p)u \qquad \forall\, u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

*Schreibe daher wieder* $\mathrm{op}(p) := P$.

Beweis: Für festes $x$ und $u \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$ ist

$$a(y,\eta) := p(x,\eta)u(x+y) \in A^{\mu,0}(\mathbb{R}^n).$$

[19] Schreibe $(y,y') = (y,0) + (0,y')$.

Also ist $P$ wohldefiniert. Die Abbildungseigenschaft folgt dann mit der Darstellung aus Satz 3.3 ähnlich wie in Satz 2.9. Für $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ist

$$[\mathrm{op}(p)u](x) = \int \Big( \int e^{i(x-y)\eta} p(x,\eta)u(y)\, dy\Big) đ\eta = \int \Big( \underbrace{\int e^{-iy\eta} p(x,\eta)u(x+y)\, dy}_{\in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n_\eta)}\Big) đ\eta$$

$$\overset{3.7.c)}{=} \mathrm{Os}[p(x,\eta)u(x+y)]$$

■

**Folgerung 3.11** *Es sei $p \in S^\mu(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt*

$$p(x,\xi) = e^{-ix\xi}[\mathrm{op}(p)e^{i\xi\cdot}](x) \qquad \forall\, x,\xi \in \mathbb{R}^n.$$

*Insbesondere hat jeder $\psi$do ein eindeutig bestimmtes Linkssymbol.*

Beweis: Es ist $e^{i\xi\cdot} \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$. Wegen Satz 3.10 gilt also

$$\begin{aligned}
e^{-ix\xi}[\mathrm{op}(p)e^{i\xi\cdot}](x) &= \mathrm{Os}-\iint e^{-iy\eta}e^{iy\xi}p(x,\eta)\, dyđ\eta \\
&\overset{3.6.b)}{=} \mathrm{Os}-\iint e^{-iy\eta}p(x,\xi+\eta)\, dyđ\eta \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0} \int \Big( \int e^{-iy\eta}\chi(\varepsilon y)\, dy\Big)\chi(\varepsilon\eta)p(x,\xi+\eta)\, đ\eta \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0} \int \varepsilon^{-n}\widehat{\chi}(\eta/\varepsilon)\chi(\varepsilon\eta)p(x,\xi+\eta)\, đ\eta \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0} \int \widehat{\chi}(\eta)\chi(\varepsilon^2\eta)p(x,\xi+\varepsilon\eta)\, đ\eta \\
&= p(x,\xi)\int \widehat{\chi}(\eta)\, đ\eta = p(x,\xi)\chi(0) = p(x,\xi),
\end{aligned}$$

wobei $\chi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ mit $\chi(0) = 1$. ■

# 4 Doppelsymbole, Algebraeigenschaft und Elliptizität

**Definition 4.1** *Es seien $\mu, \mu' \in \mathbb{R}$. Dann bezeichnet $S^{\mu,\mu'}(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)$ den Raum aller glatten Funktionen $p : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ mit*

$$\|p\|_k^{\mu,\mu'} := \sup_{\substack{x,x',\xi,\xi' \in \mathbb{R}^n,\\ |\alpha|+|\alpha'|+|\beta|+|\beta'|\le k}} \Big|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta \partial_{\xi'}^{\alpha'} \partial_{x'}^{\beta'} p(x,\xi,x',\xi')\Big| < \infty$$

*für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Dies ist ein Frèchetraum mit vorigen (Halb-)normen. Die Elemente nennen wir Doppelsymbole.*

**Satz 4.2** *Es sei $p \in S^{\mu,\mu'}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$. Dann definiert*

$$Pu(x) := \mathrm{Os}-\iint e^{-i(y,y')(\eta,\eta')} p(x,\eta,x+y,\eta')u(x+y+y')\,d(y,y')đ(\eta,\eta')$$

*einen stetigen Operatoren $P : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ bzw. $P : C_b^\infty(\mathbb{R}^n) \to C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$. Wir schreiben wieder*

$$P = \mathrm{op}(p) = p(x, D_x, x', D_{x'}).$$

*Es gilt*

$$Pu(x) = \int e^{ix'\xi}\Big(\int e^{-ix\xi}\Big(\int e^{ix'\xi'}\Big(\int e^{-ix''\xi'} p(x,\xi,x',\xi')u(x'')\,dx''\Big)đ\xi'\Big)dx'\Big)đ\xi.$$

Beweis: Für festes $x$ ist

$$a(y,y',\eta,\eta') = p(x,\eta,x+y,\eta')u(x+y+y') \in A^{|\mu|+|\mu'|,0}(\mathbb{R}^{2n}).$$

Daher ist $Pu(x)$ wohldefiniert. Für die zweite Darstellung von $Pu(x)$ siehe Kumano-go, Lemma 2.3 in Chapter 2. Die Abbildungseigenschaft von $P$ folgt aus (4.2), siehe unten. ■

**Beispiel 4.3** Es seien $a_j(x) \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$ und $p_j(\xi) \in S^{\mu_j}(\mathbb{R}^n)$. Dann ist

$$p(x,\xi,x',\xi') = a_1(x)p_1(\xi)a_s(x')p_2(\xi') \;\in\; S^{\mu_1,\mu_2}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$$

und

$$\mathrm{op}(p) = M_{a_1} \circ p_1(D) \circ M_{a_2} \circ p_2(D),$$

wobei $M_{a_j}$ den Operator der Multiplikation mit $a_j$ bezeichnet.

**Beispiel 4.4** Es seien $p_j \in S^{\mu_j}(\mathbb{R}^n)$ $(j = 0,1)$ zwei Linkssymbole. Dann ist

$$p(x,\xi,x',\xi') := p_1(x,\xi)p_2(x',\xi') \in S^{\mu_1,\mu_2}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n).$$

Der Satz von Fubini 3.9 zeigt, dass die formale Rechnung aus Bemerkung (3.1) korrekt ist, wenn man Oszillator-Integrale verwendet, d.h.

$$p(x,D_x,x',D_{x'})u = \big(p_1(x,D) \circ p_2(x,D)\big)u, \qquad u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

**Satz 4.5** *Für $p \in S^{\mu,\mu'}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ setze*

$$p_L(x,\xi) = \mathrm{Os}-\iint e^{-iy\eta} p(x,\xi+\eta,x+y,\xi)\,dyđeta.$$

*Dann ist*

$$p \mapsto p_L : S^{\mu,\mu'}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n) \longrightarrow S^{\mu+\mu'}(\mathbb{R}^n) \tag{4.1}$$

*eine stetige Abbildung und*

$$p_L(x,D) = p(x,D_x,x',D_{x'}). \tag{4.2}$$

*Weiterhin gilt die asymptotische Entwicklung*

$$p_L(x,\xi) \sim \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha!}\partial_\xi^\alpha D_{x'}^\alpha p(x,\xi,x',\xi')\Big|_{x'=x,\xi'=\xi}. \tag{4.3}$$

Beweis: Zunächst ist wegen der Peetreschen Ungleichung und der Kettenregel

$$\left|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta \partial_\eta^{\alpha'} \partial_{x'}^{\beta'} p(x,\xi+\eta,x+y,\xi)\right| \le C\|p\|^{\mu,\mu'}_{|\alpha|+|\beta|+|\alpha'|+|\beta'|} \langle\eta\rangle^{|\mu|+|\alpha|}\langle\xi\rangle^{\mu+\mu'-|\alpha|} \tag{4.4}$$

mit $C = C(\alpha,\alpha',\beta,\beta',\mu')$. Aus Satz 3.5 folgt,[20] dass $p_L \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ mit

$$\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta p_L(x,\xi) = \mathrm{Os}_{y,\eta}\left[\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta p(x,\xi+\eta,x+y,\xi)\right].$$

Aus der Stetigkeit von $\mathrm{Os}[\cdot]$, vgl. Folgerung 3.4, und (4.4) folgt (4.1).

Per Taylor-Entwicklung gilt

$$\begin{aligned} p(x,\xi+\eta,x+y,\xi) = &\sum_{|\alpha|<N} \frac{\eta^\alpha}{\alpha!} p_\alpha(x,\xi,x+y,\xi) + \\ &+ N\sum_{|\alpha|=N}\frac{\eta^\alpha}{\alpha!}\int_0^1 (1-\theta)^{N-1} p_\alpha(x,\xi+\theta\eta,x+y,\xi)\,d\theta, \end{aligned}$$

wobei $p_\alpha(x,\xi,y,\eta) = \partial_\xi^\alpha p(x,\xi,y,\eta)$. Wegen Lemma 3.6.a) ist also

$$\begin{aligned} p_L(x,\xi) = &\sum_{|\alpha|<N}\frac{1}{\alpha!}\mathrm{Os}_{y,\eta}[(D_{x'}^\alpha p_\alpha)(x,\xi,x+y,\xi)] + \\ &+ N\sum_{|\alpha|=N}\frac{1}{\alpha!}\int_0^1 \underbrace{\mathrm{Os}_{y,\eta}\left[(D_{x'}^\alpha p_\alpha)(x,\xi+\theta\eta,x+y,\xi)\right]}_{=:r_{\alpha,\theta}(x,\xi)}\,d\theta. \end{aligned}$$

Nach Lemma 3.6.c) gilt

$$\mathrm{Os}_{y,\eta}[(D_{x'}^\alpha p_\alpha)(x,\xi,x+y,\xi)] = (D_{x'}^\alpha p_\alpha)(x,\xi,x,\xi).$$

Gleichmäßige Abschätzungen in $0 \le \theta \le 1$ wie oben in (4.4) zeigen, dass $\{r_{\alpha,\theta} \mid 0 \le \theta \le 1\}$ eine beschränkte Menge in $S^{\mu+\mu'-|\alpha|}(\mathbb{R}^n)$ ist. Das zeigt (4.3).

Sein nun $\chi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ mit $\chi(0) = 1$. Dann ist

$$p_{L,\varepsilon}(x,\xi) := \chi(\varepsilon\xi)\iint e^{-iy\eta}\chi(\varepsilon y)\chi(\varepsilon\eta)p(x,\xi+\eta,x+y,\xi)\,dy đ\eta \xrightarrow{\varepsilon\to 0} p_L(x,\xi)$$

und, gleichmäßig in $0 < \varepsilon \le 1$,

$$|p_{L,\varepsilon}(x,\xi)| \le C\langle\xi\rangle^{|\mu|+\mu'} \qquad \forall\, x,\xi \in \mathbb{R}^n.$$

Wegen dominierter Konvergenz ist also für beliebiges $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$$\begin{aligned} [p_L(x,D)u](x) &= \lim_{\varepsilon\to 0}\iint e^{ix\xi'} p_{L,\varepsilon}(x,\xi')\widehat{u}(\xi')\,đ\xi' \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\int e^{ix\xi}\Big(\int e^{-ix'\xi}\Big(\int e^{ix'\xi'}p_\varepsilon(x,\xi,x',\xi')\widehat{u}(\xi')\,đ\xi'\Big)dx'\Big)đ\xi \end{aligned}$$

mit

$$p_\varepsilon(x,\xi,x',\xi') = \chi(\varepsilon(\xi-\xi'))\chi(\varepsilon(x-x'))\chi(\varepsilon\xi')p(x,\xi,x',\xi').$$

Drei mal dominierte Konvergenz zeigt, dass man $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}$ ganz nach Innen ziehen kann. (4.2) folgt dann aus Satz 4.2. ■

[20] als Analogon zu den klassischen über Differenzierbarkeit von Parameter-Integralen

**Satz 4.6** *Für $p_j \in S^{\mu_j}(\mathbb{R}^n)$ setze*

$$(p_1 \# p_2)(x,\xi) = \mathrm{Os}-\iint e^{-iy\eta} p_1(x,\xi+\eta) p_2(x+y,\xi)\, dy đ\eta.^{21}$$

*Dann ist*

$$(p_1,p_2) \mapsto p_1 \# p_2 : S^{\mu_1}(\mathbb{R}^n) \times S^{\mu_2}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow S^{\mu_1+\mu_2}(\mathbb{R}^n) \tag{4.5}$$

*bilinear und stetig und*

$$\mathrm{op}(p_1)\mathrm{op}(p_2) = \mathrm{op}(p_1 \# p_2).$$

*Es gilt die asymptotische Entwicklung*

$$p_1 \# p_2 \sim \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha!} (\partial_\xi^\alpha p_1)(D_x^\alpha p_2). \tag{4.6}$$

Beweis: Folgt sofort aus Beispiel 4.4 und Satz 4.5. ■

**Folgerung 4.7** *a) Sind $p_j \in S^{\mu_j}(\mathbb{R}^n)$, so gilt*

$$p_1 \# p_2 - p_1 p_2 \in S^{\mu_1+\mu_2-1}(\mathbb{R}^n).$$

*b) Ist $[A,B] = AB - BA$ der Kommutator von $A$ und $B$, so gilt*

$$[\mathrm{op}(p_1), \mathrm{op}(p_2)] \in S^{\mu_1+\mu_2-1}(\mathbb{R}^n).$$

*c) Seien $p \in S^\mu(\mathbb{R}^n)$ und $\varphi, \psi \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $\varphi\psi = 0$. Dann ist*

$$\varphi \circ \mathrm{op}(p) \circ \psi \in S^{-\infty}(\mathbb{R}^n).$$

**Definition 4.8** *Das Symbol $p \in S^\mu(\mathbb{R}^n)$ bzw. der Operator $\mathrm{op}(p)$ heißen elliptisch, falls es $C, R \geq 0$ gibt derart, dass $p(x,\xi) \neq 0$ für alle $|\xi| \geq R$ und*

$$\left| \frac{1}{p(x,\xi)} \right| \leq C \langle \xi \rangle^{-\mu} \qquad \forall\, x \quad \forall\, |\xi| \geq R. \tag{4.7}$$

**Beispiel 4.9** a) $\Delta$ ist elliptisch der Ordnung 2, da $\Delta = \mathrm{op}(p)$ mit $p(\xi) = -|\xi|^2$.

b) Es sei $p \in S^\mu(\mathbb{R}^n)$ elliptisch und $p' \in S^{\mu'}(\mathbb{R}^n)$ mit $\mu' < \mu$. Dann ist $p + p'$ elliptisch der Ordnung $\mu$: Für $|\xi|$ hinreichend groß ist

$$p + p' = p(1 + p'/p) \quad \text{und} \quad |p'(x,\xi)/p(x,\xi)| \leq 1/2.$$

**Satz 4.10** *Es sei $p \in S^\mu(\mathbb{R}^n)$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

*a) $p$ ist elliptisch.*

*b) Es gibt ein $q_L \in S^{-\mu}(\mathbb{R}^n)$ mit $1 - q_L \# p \in S^{-\infty}(\mathbb{R}^n)$.*

[21] $p_1 \# p_2$ heißt das Leibniz-Produkt von $p_1$ mit $p_2$.

c) *Es gibt ein* $q_R \in S^{-\mu}(\mathbb{R}^n)$ *mit* $1 - p\#q_R \in S^{-\infty}(\mathbb{R}^n)$.

$q_L$ *heißt eine Linksparametrix,* $q_R$ *eine Rechtsparametrix.*

Beweis: b) $\Rightarrow$ a): Sei $r := 1 - q_L\#p \in S^{-\infty}(\mathbb{R}^n)$. Nach Folgerung 4.7.a) gibt es dann ein $s \in S^{-1}(\mathbb{R}^n)$ mit

$$1 - r = q_L\#p = q_L p + s \quad \Longrightarrow \quad q_L p = 1 - (r + s).$$

Da $t := r + s \in S^{-1}(\mathbb{R}^n)$ gibt es ein $R \geq 0$ mit

$$|t(x,\xi)| \leq \frac{1}{2} \qquad \forall\, x \quad \forall\, |\xi| \geq R.$$

Für $|\xi| \geq R$ gilt also

$$\frac{1}{p(x,\xi)} = \frac{1}{1 + t(x,\xi)} q_L(x,\xi).$$

Offenbar gilt dann (4.7).

a) $\Rightarrow$ b): Wähle eine Ausscheidefunktion $\chi$ mit $\chi(\xi) = 0$ , falls $|\xi| \leq R$. Setze dann

$$q(x,\xi) := \chi(\xi)\, \frac{1}{p(x,\xi)} \qquad \forall\, x, \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Dann gilt

$$\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta q(x,\xi) \equiv \chi(\xi) \partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta \frac{1}{p(x,\xi)} \quad \operatorname{mod} S^{-\infty}(\mathbb{R}^n).$$

Per Induktion

$$\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta \frac{1}{p} = \sum_{k=1}^{|\alpha|+|\beta|} \sum_{\substack{\alpha_1+\ldots+\alpha_k=\alpha \\ \beta_1+\ldots+\beta_k=\beta}} C_{\alpha_1,\ldots,\beta_k} (\partial_\xi^{\alpha_1} \partial_x^{\beta_1} p) \cdots (\partial_\xi^{\alpha_k} \partial_x^{\beta_k} p) \Big(\frac{1}{p}\Big)^{1+k}.$$

Es folgt, dass $q \in S^{-m}(\mathbb{R}^n)$. Nach Folgerung 4.7.a) gibt es ein $\widetilde{r} \in S^{-1}$ mit

$$q\#p = qp + \widetilde{r} = \chi + \widetilde{r} = 1 - (\underbrace{(1-\chi) - \widetilde{r}}_{=:r \in S^{-1}(\mathbb{R}^n)}).$$

Nach Satz 4.6 und Satz 2.11 gibt es ein $\widetilde{q} \in S^0(\mathbb{R}^n)$ mit

$$\widetilde{q} \sim \sum_{j=0}^{\infty} r^{\#j}, \qquad r^{\#j} = r \underbrace{\# \ldots \#}_{j\text{-mal}} r.$$

Setze dann $q_L := \widetilde{q}\#q$. Dann gilt

$$q_L\#p = \widetilde{q}\#(1-r) \equiv \sum_{j=0}^{N-1} r^{\#j}\#(1-r) = 1 - r^{\#N} \equiv 1 \quad \operatorname{mod} S^{-N}(\mathbb{R}^n).$$

Da man $N \in \mathbb{N}$ beliebig wählen kann, gilt $q_L\#p - 1 \in S^{-\infty}(\mathbb{R}^n)$.

a) $\Leftrightarrow$ c): Analog. ∎

**Folgerung 4.11** *Ist $p \in S^\mu(\mathbb{R}^n)$ elliptisch, so ist jede Linksparametrix auch eine Rechtsparametrix und umgekehrt. Wir sprechen daher nur von einer* <u>*Parametrix*</u>.

Beweis: Seien $q_L$ und $q_R$ die Links- bzw. Rechtsparametrix. Dann, modulo $S^{-\infty}(\mathbb{R}^n)$,

$$q_L = q_L\#1 \equiv q_L\#(p\#q_R) = (q_L\#p)\#q_R \equiv 1\#q_R = q_R.$$

Also folgt $p\#q_L \equiv p\#q_R \equiv 1$, sowie $q_R\#p \equiv q_L\#p \equiv 1$. ■

**Satz 4.12** *Es sei $p \in S^\mu(\mathbb{R}^n)$. Dann gibt es genau ein Symbol $p^t \in S^\mu(\mathbb{R}^n)$ bzw. $p^* \in S^\mu(\mathbb{R}^n)$ mit*

$$\langle \mathrm{op}(p)u, v\rangle = \langle u, \mathrm{op}(p^t)v\rangle \quad \textit{bzw.} \quad (\mathrm{op}(p)u, v)_{L^2(\mathbb{R}^n)} = (u, \mathrm{op}(p^*)v)_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$ [22]

*für alle $u, v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Es ist*

$$p^t(x,\xi) \sim \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \frac{(-1)^{|\alpha|}}{\alpha!}(\partial_\xi^\alpha D_x^\alpha p)(x,-\xi), \qquad p^*(x,\xi) \sim \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha!}\partial_\xi^\alpha D_x^\alpha \overline{p(x,\xi)}.$$

*$\mathrm{op}(p^t)$ bzw. $\mathrm{op}(p^*)$ heißen der* <u>*transponierte*</u> *bzw.* <u>*formal adjungierte*</u> *Operator von $\mathrm{op}(p)$.*

Beweis: Sei $\chi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ mit $\chi(0) = 1$ und $\chi(-\xi) = \chi(\xi)$. Da $\chi(\varepsilon\xi)p(x,\xi) \in S^\mu(\mathbb{R}^n)$ gleichgmäßig in $0 < \varepsilon \le 1$ gilt

$$\begin{aligned}\langle \mathrm{op}(p)u, v\rangle &= \lim_{\varepsilon\to 0}\int \Big(\iint e^{i(x-y)\xi}\chi(\varepsilon\xi)p(x,\xi)u(y)\,dy đ\eta\Big)v(x)\,dx \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\int \Big(\iint e^{i(y-x')\xi}\chi(\varepsilon\xi)\widetilde{p}(x',\xi)v(x')\,dx'đ\xi\Big)u(y)\,dy = \langle u, \mathrm{op}(\widetilde{p})v\rangle\end{aligned}$$

mit dem (von $x, \xi'$ unabhängigen) Doppelsymbol $\widetilde{p}(x',\xi) = p(x',-\xi)$. Nach Satz 4.5 gilt dann die Behauptung mit

$$p^t(x,\xi) = \mathrm{Os}-\iint e^{-iy\eta}\widetilde{p}(x+y,\xi)\,dyđ\eta.$$

Die asymptotische Entwicklung ist gerade (4.3). Der formal adjungierte Operator geht analog. ■

**Folgerung 4.13** *Es sei $p \in S^\mu(\mathbb{R}^n)$. Für $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ definiert*

$$(\mathrm{op}(p)T, \varphi) := (T, \mathrm{op}(p^t)\varphi) \qquad \forall\, \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

*eine Distribution $\mathrm{op}(p)T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. In diesem Sinne ist*

$$\mathrm{op}(p) : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n).$$

*Die Einschränkung auf $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ bzw. $C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$ stimmen mit den Abbildungen aus Definition 2.7 bzw. Definition 3.10 überein.*

[22] Dabei: $\langle f, g\rangle = \int f(x)g(x)\,dx$

## 5 Stetigkeit in Sobolevräumen

**Definition 5.1 (und Satz)** *Es sei $s \in \mathbb{R}$ und*

$$H^s(\mathbb{R}^n) := \left\{ u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \mid \widehat{u} \text{ ist regulär und } \|u\|_s := \Big( \int \langle\xi\rangle^{2s} |\widehat{u}(\xi)|^2 \, d\xi \Big)^{1/2} < \infty \right\}.$$

*Dann ist $H^s(\mathbb{R}^n)$ ein Hilbertraum mit Skalarprodukt*

$$(u, v)_s = \int \langle\xi\rangle^{2s} \widehat{u}(\xi) \overline{\widehat{v}(\xi)} \, d\xi.$$

*$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ist eine dichte Teilmenge von $H^s(\mathbb{R}^n)$. Ist $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ und $s \in \mathbb{N}_0$ so gilt:*

$$u \in H^s(\mathbb{R}^n) \iff \partial^\alpha u \in L_2(\mathbb{R}^n) \qquad \forall\, |\alpha| \le s. \tag{5.1}$$

*Jedes Funktional $T \in (H^s(\mathbb{R}^n))'$ ist von der Form*

$$u \mapsto (u, v)_{L^2(\mathbb{R}^n)}, \qquad v \in H^{-s}(\mathbb{R}^n).$$ [23]

*Definieren wir*

$$\Lambda^\mu := \langle D\rangle^\mu = \mathrm{op}(\langle\xi\rangle^\mu) : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n),$$

*so gilt*

$$\Lambda^0 = 1, \qquad \Lambda^\mu \circ \Lambda^{\mu'} = \Lambda^{\mu+\mu'}.$$

*Insbesondere induziert $\Lambda^\mu$ Isomorphismen*

$$\Lambda^\mu : H^s(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H^{s-\mu}(\mathbb{R}^n) \qquad \forall\, s \in \mathbb{R}. \tag{5.2}$$ [24]

*Man nennt $\Lambda^\mu$ eine Ordnungs-Reduktion.*

BEWEIS: Zur Dichtheit: Die Abbildung $\Phi_s : u \mapsto \langle\cdot\rangle^s \widehat{u}$ ist ein isometrischer Isomorphismus $H^s(\mathbb{R}^n) \to L_2(\mathbb{R}^n)$ mit $\Phi_s^{-1}(v) = \mathcal{F}^{-1}(\langle\cdot\rangle^{-s} v)$. Jetzt verwende, dass $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dicht in $L_2(\mathbb{R}^n)$ ist und dass $\Phi_s^{-1} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Für (5.1) zeige allgemeiner:

$$u \in H^s(\mathbb{R}^n) \iff u, D_1 u, \ldots, D_n u \in H^{s-1}(\mathbb{R}^n).$$

Wegen $\langle\xi\rangle^2 = 1 + \xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2$ ist

$$|\langle\xi\rangle^{s+1} \widehat{u}(\xi)|^2 = |\langle\xi\rangle^s \widehat{u}(\xi)|^2 + \sum_{j=1}^n |\langle\xi\rangle^s \xi_j \widehat{u}(\xi)|^2 = |\langle\xi\rangle^s \widehat{u}(\xi)|^2 + \sum_{j=1}^n |\langle\xi\rangle^s \widehat{\partial_j u}(\xi)|^2.$$

Es folgt

$$\|u\|_{s+1}^2 = \|u\|_s^2 + \sum_{j=1}^n \|\partial_j u\|_s^2.$$

(5.2) folgt aus $\widehat{\Lambda^\mu u}(\xi) = \langle\xi\rangle^\mu \widehat{u}(\xi)$. ■

[23] Kurz gesagt: $(H^s(\mathbb{R}^n))' = H^{-s}(\mathbb{R}^n)$.

**Satz 5.2** *Es sei* $a : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ $2n$*-mal stetig differenzierbar und*

$$\pi(a) := \sup_{\substack{x,\xi \in \mathbb{R}^n,\\ \alpha,\beta \leq (1,\ldots,1)}} \left| \partial_\eta^\alpha \partial_y^\beta a(x,\xi) \right| < \infty,$$

*sowie*

$$[\mathrm{op}(a)u](x) := \int e^{ix\xi} a(x,\xi) \widehat{u}(\xi) \, đ\xi, \qquad u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

*Dann gibt es ein* $C \geq 0$*, das nicht von* $a$ *abhängt, mit*

$$\|\mathrm{op}(a)u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq c\, \pi(a) \, \|u\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} \qquad \forall \, u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

*Insbesondere induziert* $\mathrm{op}(a)$ *einen stetigen Operatoren*

$$\mathrm{op}(a) : L^2(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n).$$

Beweis: Wir verwenden folgende Notationen: Für $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ und $x \in \mathbb{R}^n$ sei

$$(i+x)^\alpha = (i+x_1)^{\alpha_1} \cdots (i+x_n)^{\alpha_n}, \qquad (i+D)^\alpha = (i+D_1)^{\alpha_1} \cdots (i+D_n)^{\alpha_n}.$$

Dann ist

$$(i+D_x)^\alpha e^{ixy} = (i+y)^\alpha e^{ixy}.$$

Wir setzen $\delta = (1,\ldots,1)$ und im folgenden sind $u, v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

**1. Schritt:** $\mathrm{op}(a)u \in L_2(\mathbb{R}^n)$, da nach partieller Integration

$$\mathrm{op}(a)u(x) = \underbrace{(i+x)^{-\delta}}_{\in L^2(\mathbb{R}^n_x)} \underbrace{\int e^{ix\xi} (i - D_\xi)^\delta [a(x,\xi)\widehat{u}(\xi)] \, đ\xi}_{\text{beschränkt}}.$$

Nach dem Satz von Riesz und wegen der Dichtheit von $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ in $L_2(\mathbb{R}^n)$ gilt

$$\|\mathrm{op}(a)u\|_{L^2} = \sup_{0 \neq v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)} \frac{(\mathrm{op}(a)u, v)_{L^2}}{\|v\|_{L^2}}. \tag{5.3}$$

**2. Schritt:** Wir nehmen nun an, dass $a$ kompakten Träger in $\mathbb{R}^{2n}$ hat. Dann

$$\begin{aligned}(\mathrm{op}(a)u, v)_{L^2} &= \iiint e^{i(x-y)\xi} a(x,\xi) u(y) \overline{v(x)} \, dy đ\xi dx \\ &= \iiiint e^{i(x-y)\xi - ix\eta} a(x,\xi) u(y) \overline{\widehat{v}(\eta)} \, dy đ\xi dx đ\eta.\end{aligned}$$

Partielle Integration liefert

$$\begin{aligned}(\mathrm{op}(a)u, v)_{L^2} = \iiiint & e^{i(x-y)\xi - ix\eta} (i - D_x)^\delta \\ & \left\{ (i - D_\xi)^\delta a(x,\xi) \frac{u(y)}{(i+x-y)^\delta} \right\} \frac{\overline{\widehat{v}(\eta)}}{(i+\xi-\eta)^\delta} \, dy đ\xi dx đ\eta.\end{aligned}$$

Aus
$$(i-D)^\delta(fg)=\sum_{\alpha\le\delta}(-1)^{|\alpha|}\big((i-D)^{\delta-\alpha}f\big)D^\alpha g$$
folgt dann
$$\begin{aligned}(\mathrm{op}(a)u,v)_{L^2}&=\sum_{\alpha\le\delta}\iiiint e^{i(x-y)\xi-ix\eta}(-1)^{|\alpha|}\Big\{D_x^\alpha(i-D_\xi)^\delta a(x,\xi)\Big\}\times\\&\qquad\times\Big\{(i-D_x)^{\delta-\alpha}\frac{u(y)}{(i+x-y)^\delta}\Big\}\frac{\overline{\widehat{v}(\eta)}}{(i+\xi-\eta)^\delta}\,dy đ\xi dx đ\eta\\&=\sum_{\alpha\le\delta}\iint e^{ix\xi}\Big\{D_x^\alpha(i-D_\xi)^\delta a(x,\xi)\Big\}f_\alpha(x,\xi)g(x,\xi)\,dx đ\xi,\end{aligned}$$
wobei
$$\begin{aligned}g(x,\xi)=g(x,\xi;v)&=\int e^{-ix\eta}\frac{\overline{\widehat{v}(\eta)}}{(i+\xi-\eta)^\delta}\,đ\eta\\f_\alpha(x,\xi)=f_\alpha(x,\xi;u)&=(-1)^{|\alpha|}\int e^{-iy\xi}(i-D_x)^{\delta-\alpha}\frac{u(y)}{(i+x-y)^\delta}\,dy.\end{aligned}$$
Die Hölder-Ungleichung impliziert
$$\big|(\mathrm{op}(a)u,v)_{L^2}\big|\le C\,\pi(a)\sum_{\alpha\le\delta}\|f_\alpha\|_{L^2(\mathbb{R}^{2n})}\|g\|_{L^2(\mathbb{R}^{2n})}.$$
Wegen des Satzes von Plancherel ist
$$\|g(x,\xi)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n_x)}=(2\pi)^n\Big\|\frac{\overline{\widehat{v}(\eta)}}{(i+\xi-\eta)^\delta}\Big\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n_\eta)}$$
und
$$\begin{aligned}\|g\|^2_{L^2(\mathbb{R}^{2n})}&=\int\|g(x,\xi)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n_x)}\,d\xi=(2\pi)^n\iint\Big|\frac{\widehat{v}(\eta)}{(i+\xi-\eta)^\delta}\Big|^2\,d\xi d\eta\\&=(2\pi)^n\int\frac{1}{(i+\xi)^{2\delta}}\,d\xi\int|\widehat{v}(\eta)|^2\,d\eta=C\|v\|^2_{L^2}\end{aligned}$$
Analog hat man
$$\begin{aligned}\|f_\alpha\|^2_{L^2(\mathbb{R}^{2n})}&=\int\|f_\alpha(x,\xi)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n_\xi)}\,dx=(2\pi)^n\iint\Big|(i-D_x)^{\delta-\alpha}\frac{u(y)}{(i+x-y)^\delta}\Big|^2\,dxdy\\&=(2\pi)^n\int\Big|(i-D_x)^{\delta-\alpha}\frac{1}{(i+x)^\delta}\Big|^2\,dx\int|u(y)|^2\,dy=C_\alpha\|u\|^2_{L^2}\end{aligned}$$
Insgesamt folgt
$$\big|(\mathrm{op}(a)u,v)_{L^2}\big|\le C\,\pi(a)\,\|u\|_{L^2}\|v\|_{L^2}.$$

**3. Schritt:** Sei nun $a$ allgemein. Wähle $\chi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)$ mit $\chi(0,0)=1$ und setze
$$a_\varepsilon(x,\xi)=\chi(\varepsilon x,\varepsilon\xi)a(x,\xi),\qquad 0<\varepsilon\le 1.$$

Dann gilt

$$\pi(a_\varepsilon) \le C_\chi \pi(a) \qquad \forall\, 0 < \varepsilon \le 1$$

und, nach Schritt 2,

$$(\mathrm{op}(a)u, v)_{L^2} \xleftarrow{\varepsilon\to 0} (\mathrm{op}(a_\varepsilon)u, v)_{L^2} \le\ C_\chi\, \pi(a)\, \|u\|_{L^2}\|v\|_{L^2}.$$

Für die Konvergenz setze $b_\varepsilon = a_\varepsilon - a$. Dann ist

$$[\mathrm{op}(b_\varepsilon]u)(x) = \int e^{ix\xi} b_\varepsilon(x,\xi)\widehat{u}(\xi)\, đ\xi \xrightarrow{\varepsilon\to 0} 0$$

wegen dominierter Konvergenz und $\mathrm{op}(b_\varepsilon)u$ ist beschränkt, gleichmäßig in $\varepsilon$. Wieder mit dominierter Konvergenz folgt

$$(\mathrm{op}(b_\varepsilon)u, v)_{L^2} = \int (B_\varepsilon u)(x)\overline{v(x)}\, dx \xrightarrow{\varepsilon\to 0} 0.$$

Aus (5.3) folgt die Behauptung. ■

**Satz 5.3** *Es sei $p \in S^\mu(\mathbb{R}^n)$. Dann ist*

$$\mathrm{op}(p) : H^s(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H^{s-\mu}(\mathbb{R}^n), \qquad s \in \mathbb{R},$$

*stetig und ebenso*

$$p \mapsto \mathrm{op}(p) : S^\mu(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{L}(H^s(\mathbb{R}^n), H^{s-\mu}(\mathbb{R}^n)), \qquad s \in \mathbb{R}.$$

Beweis: Nach Satz 5.2 gelten die Behauptungen für $\mu = s = 0$. Im allgemeinen setzen wir

$$a_p(x,\xi) = \langle\xi\rangle^{s-\mu} \# \big(p(x,\xi)\langle\xi\rangle^{-s}\big).$$

Dann ist

$$p \mapsto a_p : S^\mu(\mathbb{R}^n) \longrightarrow S^0(\mathbb{R}^n)$$

stetig und

$$\mathrm{op}(p) = \Lambda^{\mu-s} \circ \mathrm{op}(a_p) \circ \Lambda^s.$$

Anders gesagt, das folgende Diagramm ist kommutativ:

$$\begin{array}{ccc}
L^2(\mathbb{R}^n) & \xrightarrow{\mathrm{op}(a_p)} & L^2(\mathbb{R}^n) \\
{\scriptstyle \Lambda^s}\big\uparrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \Lambda^{\mu-s}} \\
H^s(\mathbb{R}^n) & \xrightarrow{\mathrm{op}(p)} & H^{s-\mu}(\mathbb{R}^n)
\end{array}$$

Da Ordnungsreduktionen stetig sind folgt die Behauptung. ■

**Folgerung 5.4 (Elliptische Regularität)** *Es sei $p \in S^\mu(\mathbb{R}^n)$ elliptisch. Es sei $u \in \cup_{t\in\mathbb{R}} H^t(\mathbb{R}^n)$ eine Lösung von $\mathrm{op}(p)u = f$ und $f \in H^s(\mathbb{R}^n)$. Dann ist $u \in H^{s+\mu}(\mathbb{R}^n)$.*

Beweis: Sei $q \in S^{-\mu}(\mathbb{R}^n)$ eine Parametrix von $p$. Dann ist $r := q\#p - 1 \in S^{-\infty}(\mathbb{R}^n)$ und

$$\operatorname{op}(q)f = \operatorname{op}(q\#p)u = u - \operatorname{op}(r)u.$$

Nach Satz 5.3 sind $\operatorname{op}(q)f \in H^{s+\mu}(\mathbb{R}^n)$ und $\operatorname{op}(r)u \in H^\infty(\mathbb{R}^n)$. ■

**Folgerung 5.5** *a) Ist $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$ harmonisch,*[25] *so ist $u \in H^\infty(\mathbb{R}^n)$.*

*a) Ist $p \in S^\mu(\mathbb{R}^n)$ elliptisch und $\mu > 0$. Ist $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$ und $Pu = \lambda u$ mit $\lambda \in \mathbb{C}$, so ist $u \in H^\infty(\mathbb{R}^n)$.*

**Folgerung 5.6** *Ist $p \in S^\mu(\mathbb{R}^n)$ so gilt*

$$(\operatorname{op}(p)u, v)_{L^2(\mathbb{R}^n)} = (u, \operatorname{op}(p^*)v) \qquad \forall\, u \in H^s(\mathbb{R}^n) \quad \forall\, v \in H^{\mu-s}(\mathbb{R}^n).$$

# 6 Elliptizität und Fredholm-Eigenschaft

**Definition 6.1 (Gewichtete Sobolevräume)** *Es seien $s, \delta \in \mathbb{R}$. Dann setze*

$$H^{s,\delta}(\mathbb{R}^n) = \left\{ u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \mid \langle\cdot\rangle^\delta u \in H^s(\mathbb{R}^n) \right\}, \qquad (u,v)_{s,\delta} = (\langle\cdot\rangle^\delta u, \langle\cdot\rangle^\delta v)_s.$$

*Man kann zeigen, dass*

$$\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) = \bigcup_{s,\delta\in\mathbb{R}} H^{s,\delta}(\mathbb{R}^n).$$

**Satz 6.2 (Kolmogorov)** *Es sei $1 \le p < \infty$ und $A \subset L^p(\mathbb{R}^n)$. Genau dann ist $A$ relativ kompakt, wenn:*

*i) $A$ ist beschränkt.*

*ii) Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ mit*

$$\int |u(x+h) - u(x)|^p \, dx < \varepsilon \qquad \forall\, |h| < \delta \quad \forall\, u \in A.$$

*iii) Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $R > 0$ mit*

$$\int_{|x|\ge R} |u(x)|^p \, dx < \varepsilon \qquad \forall\, u \in A.$$

**Satz 6.3** *Für $s \ge s'$ und $\delta \ge \delta'$ ist*

$$H^{s,\delta}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow H^{s',\delta'}(\mathbb{R}^n).$$

*Die Einbettung ist kompakt, falls $s > s'$ und $\delta > \delta'$.*

[25] d.h. $\Delta u = 0$

Beweis: Wir beweisen die Aussage für $s' = \delta' = 0$.[26] Wegen $H^s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ ist

$$\|u\|_{L^2} \le C_s \|u\|_s = C_s \|\langle\cdot\rangle^{-\delta}\langle\cdot\rangle^{\delta}u\|_s \overset{5.3}{\le} C_{s,\delta}\|\langle\cdot\rangle^{\delta}u\|_s = C_{s,\delta}\|u\|_{s,\delta} \qquad \forall\, u \in H^{s,\delta}(\mathbb{R}^n).$$

Wir müssen jetzt zeigen, dass

$$A := \{u \in H^{s,\delta} \mid \|u\|_{s,\delta} \le 1\}$$

relativ kompakt in $L^2(\mathbb{R}^n)$ ist. Eigenschaft 6.2.i) ist klar, und

$$\int_{|x|\ge R} |u(x)|^2\, dx \le \|\langle\cdot\rangle^{\delta}u\|_{L^2}^2 \sup_{|x|\ge R} \langle x\rangle^{-2\delta} \le C_s^2\,(1+R^2)^{-\delta} \qquad \forall\, u \in A$$

zeigt Eigenschaft 6.2.iii). Nach dem Satz von Plancherel gilt

$$\int |u(x+h) - u(x)|^2\, dx = (2\pi)^{2n} \int \left|e^{ih\xi}\widehat{u}(\xi) - \widehat{u}(\xi)\right|^2 d\xi \le C_{s,\delta} \sup_{\xi\in\mathbb{R}^n} \left|e^{ih\xi} - 1\right|^2 \langle\xi\rangle^{-2s}.$$

Zu gegebenem $\varepsilon > 0$ gibt es offenbar ein $R \ge 0$ mit

$$\left|e^{ih\xi} - 1\right|^2 \langle\xi\rangle^{-2s} \le 4\langle\xi\rangle^{-2s} < \varepsilon \qquad \forall\, |\xi| \ge R \quad \forall\, h.$$

Nach Taylorformel ist

$$\left|e^{ih\xi} - 1\right|^2 \langle\xi\rangle^{-2s} \le C\,|h\xi| \sup_{y\in\mathbb{R}^n} |e^{ihy}| \le CR|h| \qquad \forall\, |\xi| \le R \quad \forall\, h.$$

Also gilt Eigenschaft 6.2.ii). ■

**Satz 6.4** *Es seien $\mu, m \in \mathbb{R}$. Wir definieren $S^{\mu,m}(\mathbb{R}^n)$ als Raum aller $C^\infty$-Funktionen mit*

$$\|p\|_k^{\mu,m} := \sup_{\substack{x,\xi\in\mathbb{R}^n \\ |\alpha|+|\beta|\le k}} |\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta p(x,\xi)| \langle x\rangle^{|\beta|-m} \langle\xi\rangle^{|\alpha|-\mu} < \infty$$

*für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Dann „verallgemeinern“ sich alle bisherigen Resultate entsprechend:*

*a) Für $p \in S^{\mu,m}(\mathbb{R}^n)$ ist $\mathrm{op}(p) : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $\mathrm{op}(p) : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ und*

$$\mathrm{op}(p) : H^{s,\delta}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H^{s-\mu,\delta-m}(\mathbb{R}^n) \qquad \forall\, s, \delta \in \mathbb{R}.$$

*b) Für $p_j \in S^{\mu_j,m_j}(\mathbb{R}^n)$ ist*

$$\mathrm{op}(p_1)\mathrm{op}(p_2) = \mathrm{op}(p_1\#p_2) \quad \text{mit} \quad p_1\#p_2 \in S^{\mu_1+\mu_2,m_1+m_2}(\mathbb{R}^n),$$

*mit der asymptotischen Entwicklung*

$$p_1\#p_2 \sim \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha!} \underbrace{(\partial_\xi^\alpha p_1)(D_x^\alpha p_2)}_{\in S^{\mu_1+\mu_2-|\alpha|,m_1+m_2-|\alpha|}(\mathbb{R}^n)},$$

*d.h. für alle $N \in \mathbb{N}_0$ ist*

$$p_1\#p_2 - \sum_{|\alpha|=0}^{N-1} \frac{1}{\alpha!}(\partial_\xi^\alpha p_1)(D_x^\alpha p_2) \;\in\; S^{\mu_1+\mu_2-N,m_1+m_2-N}(\mathbb{R}^n).$$

[26] Der allgemeine Fall benötigt unten folgende Resultate.

*c)* $p \in S^{\mu,m}(\mathbb{R}^n)$ *heißt elliptisch, falls es* $C, R \geq 0$ *gibt mit*

$$\left|\frac{1}{p(x,\xi)}\right| \leq C\,\langle x\rangle^{-m}\langle\xi\rangle^{-\mu} \qquad \forall\ |(x,\xi)| \geq R.$$

*Dann (und nur dann!) hat* $p$ *eine Parametrix* $q \in S^{-\mu,-m}(\mathbb{R}^n)$*, d.h.*

$$p\#q - 1,\ q\#p - 1\ \in\ S^{-\infty,-\infty}(\mathbb{R}^n).$$

**Beispiel 6.5** $P = 1 - \Delta = \mathrm{op}(\langle\xi\rangle^2)$ ist ein elliptischer Operator in $S^{2,0}(\mathbb{R}^n)$.

**Folgerung 6.6** *a) Satz* 6.3 *gilt für beliebige* $s', \delta'$.

*b)* $p \in S^{\mu-\varepsilon,m-\varepsilon}(\mathbb{R}^n)$ *mit* $\varepsilon > 0$ *induziert kompakte Operatoren*

$$\mathrm{op}(p) : H^{s,\delta}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H^{s-\mu,\delta-m}(\mathbb{R}^n) \qquad \forall\ s,\delta \in \mathbb{R}.$$

Beweis: a) Das folgende Diagramm ist kommutativ:

$$\begin{array}{ccc} H^{s-s',\delta-\delta'}(\mathbb{R}^n) & \xrightarrow{\mathrm{id}} & L^2(\mathbb{R}^n) \\ {\scriptstyle \mathrm{op}(\langle\xi\rangle^{s'})\mathrm{op}(\langle x\rangle^{\delta'})}\uparrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{op}(\langle x\rangle^{-\delta'})\mathrm{op}(\langle\xi\rangle^{s'})} \\ H^{s,\delta}(\mathbb{R}^n) & \xrightarrow{\mathrm{id}} & H^{s',\delta'}(\mathbb{R}^n) \end{array}$$

Die Einbettung in der oberen Zeile ist kompakt. Jetzt verwende Satz 9.1.ii).

b) Nach a) ist $H^{s,\delta}(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{\mathrm{op}(p)} H^{s-\mu+\varepsilon,\delta-m+\varepsilon}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow H^{s-\mu,\delta-m}(\mathbb{R}^n)$ kompakt. ∎

**Satz 6.7** *Es sei* $p \in S^{\mu,m}(\mathbb{R}^n)$ *elliptisch und*

$$P_{s,\delta} := \mathrm{op}(p) : H^{s,\delta}(\mathbb{R}^n) \to H^{s-\mu,\delta-m}(\mathbb{R}^n), \qquad s,\delta \in \mathbb{R}.$$

*Dann gelten:*

*a)* $P_{s,\delta}$ *sind Fredholm-Operatoren.*

*b)* $\mathrm{Kern}\,P_{s,\delta} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ *und* $\mathrm{ind}\,P_{s,\delta}$ *sind unabhängig von* $s,\delta$.

Beweis: a) Eine Parametrix $q \in S^{-\mu,-m}(\mathbb{R}^n)$ liefert eine Inverse von $P_{s,\delta}$ modulo Operatoren aus $S^{-\infty,-\infty}(\mathbb{R}^n)$. Diese sind kompakt.

b) Nach Elliptischer Regularität gilt

$$\mathrm{Kern}\,P_{s,\delta} \subset \bigcap_{t,\rho\in\mathbb{R}} H^{t,\rho}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Da mit $p$ auch $p^* \in S^{\mu,m}(\mathbb{R}^n)$ elliptisch ist, ist

$$V := \mathrm{Kern}(\mathrm{op}(p^*)\big|_{H^{s,\delta}}) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

unabhängig von $s,\delta$ und endlichdimensional.

Sei nun $J_{s,\delta} : H^{s,\delta}(\mathbb{R}^n) \to H^{-s,-\delta}(\mathbb{R}^n)$ derjenige Isomorphismus mit

$$(u,v)_{s,\delta} = (u, Jv)_{L^2} \qquad \forall\, u,v \in H^{s,\delta}(\mathbb{R}^n).^{27}$$

Dann gilt für alle $u \in H^{s,\delta}(\mathbb{R}^n)$ und $v \in H^{s-\mu,\delta-\mu}(\mathbb{R}^n)$

$$(\mathrm{op}(p)u, v)_{s-\mu,\delta-\mu} = (\mathrm{op}(p)u, J_{s-\mu,\delta-m}v)_{L^2} = (u, \mathrm{op}(p^*)(J_{s-\mu,\delta-m}v))_{L^2}.$$

Also ist

$$v \in (\mathrm{Bild}\, P_{s,\delta})^\perp \iff J_{s-\mu,\delta-m}v \in V.$$

Insbesondere ist

$$\mathrm{codim}\,\mathrm{Bild}\, P_{s,\delta} = \dim\,(\mathrm{Bild}\, P_{s,\delta})^\perp = \dim V$$

unabhängig von $s, \delta$. ■

**Lemma 6.8 (und Definition)** *Es sei $0 < \tau < \frac{1}{2}$ fest. Für $y, \eta \in \mathbb{R}^n$ und $s > 0$ setze*

$$[I(s,y,\eta)u](x) = s^{\tau n/2} e^{isx\eta} u(s^\tau(x-y)), \qquad u \in L_2(\mathbb{R}^n).$$

*Dann ist $I(s,y,\eta) \in \mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n))$ eine Isometrie mit Inverse*

$$[I(s,y,\eta)^{-1}u](x) = s^{-\tau n/2} e^{-is(y+s^{-\tau}x)\eta} u(y + s^{-\tau}x).$$

*Für $p \in S^{0,0}(\mathbb{R}^n)$ ist*

$$I(s,y,\eta)^{-1}\,\mathrm{op}(p)\,I(s,y,\eta) = \mathrm{op}(p(s,y,\eta))$$

*mit*

$$p(x,\xi;s,y,\eta) := p(y + s^{-\tau}x, s\eta + s^\tau\xi) \;\in\; S^{0,0}(\mathbb{R}^n).$$

*Für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$ gelten die Abschätzungen*

$$|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta p(x,\xi;s,y,\eta)| \le 2^{|\alpha|} \|p\|^{0,0}_{|\alpha|+|\beta|} \frac{\langle\xi\rangle^{|\alpha|}}{|\eta|^{|\alpha|}} s^{-\tau|\beta|} s^{-(1-2\tau)|\alpha|},$$

*gleichmäßig für $s \ge 1$ und $x, \xi, y, \eta \in \mathbb{R}^n$.*

Beweis: Die ersten Aussagen sind elementar. Wegen der Kettenregel ist

$$|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta p(x,\xi;s,y,\eta)| \le \|p\|^{0,0}_{|\alpha|+|\beta|} \langle s\eta + s^\tau\xi\rangle^{-|\alpha|} s^{-\tau|\beta|} s^{\tau|\alpha|}.$$

Mit der Peetreschen Ungleichung folgt

$$\langle s\eta + s^\tau\xi\rangle^{-|\alpha|} s^{\tau|\alpha|} \le 2^{|\alpha|} \langle s\eta\rangle^{-|\alpha|} \big(\langle s^\tau\xi\rangle s^\tau\big)^{|\alpha|} \le 2^{|\alpha|} \Big(\frac{s^{2\tau}(1 + s^{2\tau}|\xi|^2)}{s^2|\eta|^2}\Big)^{|\alpha|/2}.$$

Schließlich ist, für $\lambda \ge 1$,

$$s^{2\tau}(1 + s^{2\tau}|\xi|^2) = s^{4\tau}(s^{-2\tau} + |\xi|^2) \le s^{4\tau}(1 + |\xi|^2) = s^{4\tau}\langle\xi\rangle^2.$$

Einsetzen liefert die Abschätzung. ■

[27] Nach dem Darstellungssatz von Riesz jedes Funktional auf einem Hilbertraum $H$ von der Form $x \mapsto (x,y)$ mit $y \in H$.

**Satz 6.9** *Es seien* $p \in S^{\mu,m}(\mathbb{R}^n)$, $s_0, \delta_0 \in \mathbb{R}$ *und*

$$P := \mathrm{op}(p) : H^{s_0,\delta_0}(\mathbb{R}^n) \to H^{s_0-\mu,\delta_0-m}(\mathbb{R}^n)$$

*sei ein Fredholm-Operator. Dann ist* $p$ *elliptisch (der Ordnung* $\mu, m$*).*

Beweis: **1. Schritt:** Wir definieren $\widetilde{p} \in S^{0,0}$ durch

$$\widetilde{p}(x,\xi) = (\langle x\rangle^{\delta_0-m}\langle\xi\rangle^{s_0-\mu})\#p(x,\xi)\#(\langle x\rangle^{-\delta_0}\langle\xi\rangle^{-s_0}).$$

das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} H^{s_0,\delta_0}(\mathbb{R}^n) & \xrightarrow{\mathrm{op}(p)} & H^{s_0-\mu,\delta_0-m}(\mathbb{R}^n) \\ {\scriptstyle \mathrm{op}(\langle x\rangle^{-\delta_0}\langle\xi\rangle^{-s_0})}\uparrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{op}(\langle x\rangle^{\delta_0-m}\langle\xi\rangle^{s_0-\mu})} \\ L^2(\mathbb{R}^n) & \xrightarrow{\mathrm{op}(\widetilde{p})} & L^2(\mathbb{R}^n) \end{array}$$

kommutativ und die vertikalen Abbildungen sind Isomorphismen. Also ist $\mathrm{op}(\widetilde{p}) : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ fredholmsch. Ist $\widetilde{p}$ elliptisch, so auch $p$, da

$$\widetilde{p}(x,\xi) = p(x,\xi)\langle x\rangle^{-m}\langle\xi\rangle^{-\mu} \mod S^{-1,-1}(\mathbb{R}^n).$$

In anderen Worten: OBdA ist $\mu = m = s_0 = \delta_0 = 0$ und wir müssen zeigen, dass

$$|p(x,\xi)| \geq C > 0 \qquad \forall\, |(x,\xi)| \geq R.$$

**2. Schritt:** Es sei $Q \in \mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n))$ derart, dass $K := 1 - QP$ kompakt ist. Wir zeigen, dass es ein $R \geq 0$ gibt mit

$$|p(x,\xi)| \geq \frac{1}{2\|Q\|} \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^n \quad \forall\, |\xi| \geq R. \tag{6.1}$$

Angenommen nicht. Dann

$$\exists\, ((x_k,\xi_k))_k \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : \quad |\xi_k| \xrightarrow{k\to\infty} \infty \quad \text{und} \quad |p(x_k,\xi_k)| \leq \frac{1}{2\|Q\|}.$$

OBdA ist

$$p(x_k,\xi_k) \xrightarrow{k\to\infty} p^* \qquad \left(\text{mit } |p^*| \leq \tfrac{1}{2\|Q\|}\right).$$

Wir setzen dann

$$s_k := |\xi_k|, \quad I_k := I\left(s_k, x_k, \tfrac{\xi_k}{|\xi_k|}\right), \quad p_k(x,\xi) := p\left(x,\xi; s_k, x_k, \tfrac{\xi_k}{|\xi_k|}\right).$$

Sei nun $0 \neq u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ fest gewählt. Wir werden unten zeigen, dass

$$I_k^{-1}\mathrm{op}(p)I_k u = \mathrm{op}(p_k)u \xrightarrow{k\to\infty} p^* u \qquad \text{in } L^2(\mathbb{R}^n). \tag{6.2}$$

Ist $v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, so gilt

$$\begin{aligned} |(I_k u, v)_{L^2}| &= \left| \int s_k^{\tau n/2} e^{ix_k\xi_k} u(s_k^{\tau}(x-x_k))\overline{v(x)}\, dx \right| \\ &\leq s_k^{-\tau n/2} \int |u(y)||v(x_k + s_k^{-\tau} y)|\, dy \leq s_k^{-\tau n/2}\|v\|_{L^\infty}\|u\|_{L^1} \xrightarrow{k\to\infty} 0. \end{aligned}$$

Da $I_k$ Isometrien sind und $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dicht in $L^2(\mathbb{R}^n)$, folgt

$$|(I_k u, v)_{L^2}| \xrightarrow{k\to\infty} 0 \qquad \forall\, v \in L^2(\mathbb{R}^n) \tag{6.3}$$

(d.h. $(I_k u)_k$ konvergiert schwach gegen 0 in $L^2(\mathbb{R}^n)$). Jetzt folgt

$$\begin{aligned}\|u\| &= \|(QP+K)I_k u\| \leq \|QI_k\|\, \|I_k^{-1}\mathrm{op}(p)I_k u\| + \|KI_k u\| \\ &= \|Q\|\, \|\mathrm{op}(p_k)u\| + \|KI_k u\| \xrightarrow{k\to\infty} \|Q\|\, |p^*|\, \|u\|\end{aligned}$$

wegen (6.2), (6.3) und Satz 9.1.i). Dies steht im Widerspruch zu $|p^*| \leq \frac{1}{2\|Q\|}$. Also gilt (6.1).

**3. Schritt:** Mit $\mathrm{op}(p)$ ist auch

$$\mathcal{F}\,\mathrm{op}(p)\,\mathcal{F}^{-1} : L^2(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$$

ein Fredholm-Operator. Wir werden unten zeigen, dass

$$\mathcal{F}\,\mathrm{op}(p)\,\mathcal{F}^{-1} = \mathrm{op}(\widetilde{p}) \quad \text{mit} \quad \widetilde{p}(x,\xi) = p(-\xi, x) \bmod S^{-1,-1}(\mathbb{R}^n). \tag{6.4}$$

(6.1) gilt für $\widetilde{p}$ und es folgt, dass

$$|p(x,\xi)| \geq \frac{1}{4\|Q\|} \qquad \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n \quad \forall\, |x| \geq R$$

für ein hinreichen großes $R \geq 0$. Also ist $p$ elliptisch. ∎

Beweis (von (6.2)): Nach Lemma 6.8 mit $\eta = \xi_k/|\xi_k|$ gilt insbesondere

$$\left|\partial_\xi^\alpha (p_k(x,\xi) - p^*)\right| \leq 2^{|\alpha|+1} \|p\|^{0,0}_{|\alpha|} \langle \xi \rangle^{|\alpha|} \qquad \forall\, x, \xi, k.$$

Zusammen mit partieller Integration folgt

$$\left|\langle x\rangle^{2l}\big([\mathrm{op}(p_k)u](x) - p^* u(x)\big)\right| = \left|\int e^{ix\xi}(1-\Delta_\xi)^l \big\{(p_k(x,\xi) - p^*)\widehat{u}(\xi)\big\}\, đ\xi\right| \leq C_{l,u}.$$

Daher ist

$$\left|[\mathrm{op}(p_k)u](x) - p^* u(x)\right|^2 \leq C_{l,u}^2 \langle x\rangle^{-4l} \;\in\; L^1(\mathbb{R}^n_x),$$

wenn man $l > n/4$ wählt. Nach dominierter Konvergenz genügt es also zu zeigen, dass

$$[\mathrm{op}(p_k)u](x) - p^* u(x) \xrightarrow{k\to\infty} 0 \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^n.$$

Da

$$[\mathrm{op}(p_k)u](x) - p^* u(x) = \int e^{ix\xi}(p_k(x,\xi) - p^*)\widehat{u}(\xi)\, đ\xi$$

gilt dies, falls

$$p_k(x,\xi) - p^* \xrightarrow{k\to\infty} 0 \qquad \forall\, x, \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Mit Taylor-Formel ist

$$
\begin{aligned}
|p_k(x,\xi)-p(x_k,\xi_k)| &= |p_k(x_k+s_k^{-\tau}x,\xi_k+s_k^\tau\xi)-p(x_k,\xi_k)| \\
&= \Big|\int_0^1 (\nabla_{(x,\xi)}p)(x_k+\theta s_k^{-\tau}x,\xi_k+\theta s_k^\tau\xi)\begin{pmatrix} s_k^{-\tau}x \\ s_k^\tau\xi\end{pmatrix}\,d\theta\Big| \\
&\le \underbrace{\sqrt{n}\|p\|_1^{0,0}}_{=:c}\Big(s_k^{-\tau}|x|+s_k^\tau|\xi|\int_0^1\langle\xi_k+\theta s_k^\tau\xi\rangle^{-1}\,d\theta\Big) \\
&\le c\Big(s_k^{-\tau}|x|+s_k^\tau|\xi|\int_0^1|\xi_k+\theta s_k^\tau\xi|^{-1}\,d\theta\Big) \\
&\overset{\xi\neq 0}{=} c\Big(s_k^{-\tau}|x|+\int_0^1\Big|\frac{\xi_k}{s_k^\tau|\xi|}+\theta\frac{\xi}{|\xi|}\Big|^{-1}\,d\theta\Big) \\
&= c\Big(s_k^{-\tau}|x|+\int_0^1\Big|\frac{\xi_k}{|\xi_k|}\frac{s_k^{1-\tau}}{|\xi|}+\theta\frac{\xi}{|\xi|}\Big|^{-1}\,d\theta\Big) \\
&\le c\Big(s_k^{-\tau}|x|+\int_0^1\Big(\Big|\frac{\xi_k}{|\xi_k|}\frac{s_k^{1-\tau}}{|\xi|}\Big|-1\Big)^{-1}\,d\theta\Big) \\
&= c\Big(s_k^{-\tau}|x|+\Big(\frac{s_k^{1-\tau}}{|\xi|}-1\Big)^{-1}\Big)\xrightarrow{k\to\infty}0,
\end{aligned}
$$

da $s_k\xrightarrow{k\to\infty}\infty$ (für $\xi=0$ ist man nach der zweiten Zeilen fertig). Also

$$p_k(x,\xi)-p^*=(p_k(x,\xi)-p(x_k,\xi_k))+(p(x_k,\xi_k)-p^*)\xrightarrow{k\to\infty}0. \qquad \blacksquare$$

Beweis (von (6.4)): Es ist

$$[\mathrm{op}(p)u](\xi)=\int e^{i\xi x'}p(\xi,x')\widehat{u}(x')\,đx',$$

also

$$
\begin{aligned}
(\mathcal{F}_{\xi\to x}[\mathrm{op}(p)\check{u}])(x) &= \int e^{-i\xi x}\Big(\int e^{i\xi x'}p(\xi,x')u(x')\,đx'\Big)\,d\xi \\
&= \mathrm{Os}-\iint e^{i(x-x')\xi}p(-\xi,x')u(x')\,dx'đ\xi.
\end{aligned}
$$

Also ist $\mathcal{F}\mathrm{op}(p)\mathcal{F}^{-1}$ der $\psi$do mit Doppelsymbol $p(-\xi,x')$. Die asymptotische Entwicklung in Satz 4.5[28] liefert die Behauptung. $\blacksquare$

**Lemma 6.10** *Es sei $R:\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\to\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Dann sind äquivalent:*

*a)* $R=\mathrm{op}(r)$ *für ein* $r\in S^{-\infty,-\infty}(\mathbb{R}^n)$.

[28] in der Version für Doppelsymbolklassen $S^{m,\mu,m',\mu'}(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)$, die definiert sind durch

$$|\partial_\xi^\alpha\partial_x^\beta\partial_{\xi'}^{\alpha'}\partial_{x'}^{\beta'}p(x,\xi,x',\xi')|\le C\langle x\rangle^{m-|\beta|}\langle\xi\rangle^{\mu-|\alpha|}\langle x'\rangle^{m'-|\beta'|}\langle\xi'\rangle^{\mu'-|\alpha'|}.$$

*b) Es gibt ein* $k \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$ *mit* $(Ru)(x) = \int k(x,y)u(y)\,dy$ *für alle* $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Beweis: a)⇒b): Da $S^{-\infty,-\infty}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n}_{(x,\xi)})$, ist

$$\widetilde{k}(x,z) := \int e^{iz\xi} r(x,\xi)\,đ\xi \;\in\; \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n}_{(x,z)}).$$

Wegen der Peetreschen Ungleichung ist also auch

$$k(x,y) := \widetilde{k}(x, x-y) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n}_{(x,y)}).$$

Offenbar ist

$$[\mathrm{op}(r)u](x) = \int \Big(\int e^{i(x-y)\xi} r(x,\xi)\,đ\xi\Big) u(y)\,dy = \int k(x,y)u(y)\,dy.$$

b)⇒a): Es ist

$$(Ru)(x) = \int k(x,y)\Big(\int e^{iy\xi}\widehat{u}(\xi)\,đ\xi\Big)\,dy = \int e^{ix\xi}\underbrace{\Big(\int e^{i(y-x)\xi}k(x,y)\,dy\Big)}_{=:r(x,\xi)}\widehat{u}(\xi)\,đ\xi.$$

Es ist $r \in S^{-\infty,-\infty}(\mathbb{R}^n)$. ■

**Satz 6.11 (Spektralinvarianz)** *Es sei* $p \in S^{\mu,m}(\mathbb{R}^n)$ *und*

$$\mathrm{op}(p) : H^{s,\delta}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H^{s-\mu,\delta-m}(\mathbb{R}^n)$$

*ein Isomorphismus für ein* $s = s_0$ *und* $\delta = \delta_0$. *Dann ist* $\mathrm{op}(p)$ *ein Isomorphismus für alle* $s, \delta \in \mathbb{R}$ *und*

$$\mathrm{op}(p)^{-1} = \mathrm{op}(p^{(-1)}) \quad \text{für ein} \quad p^{(-1)} \in S^{-\mu,-m}(\mathbb{R}^n).$$

Beweis: Wie im Beweis von Satz 6.9 können wir oBdA annehmen, dass $\mu = m = 0$ und $\mathrm{op}(p) : L^2(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{\cong} L^2(\mathbb{R}^n)$.

**1. Schritt:** Nach Satz 6.9 ist $p$ elliptisch. Also gibt es eine Parametrix $q \in S^{0,0}(\mathbb{R}^n)$, also

$$r_0 := q\#p - 1,\; r_1 := p\#q - 1 \;\in\; S^{-\infty,-\infty}(\mathbb{R}^n).$$

Auf $L^2(\mathbb{R}^n)$ gilt daher

$$\mathrm{op}(p)^{-1} = \mathrm{op}(q) - \mathrm{op}(r_0)\mathrm{op}(p)^{-1}, \qquad \mathrm{op}(p)^{-1} = \mathrm{op}(q) - \mathrm{op}(p)^{-1}\mathrm{op}(r_1).$$

Setzt man die erste in die zweite Gleichung ein, so folgt

$$\mathrm{op}(p)^{-1} = \mathrm{op}(q) - \mathrm{op}(q)\mathrm{op}(r_1) + \mathrm{op}(r_0)\mathrm{op}(p)^{-1}\mathrm{op}(r_1) =: \mathrm{op}(q - q\#r_1) + R.$$

Offenbar ist $q - q\#r_1 \in S^{0,0}(\mathbb{R}^n)$.

**2. Schritt:** Seien $k_j(x,y) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$ die Integralkerne von $\mathrm{op}(r_j)$, vgl. Lemma 6.10. Betrachte $k_j$ als

$$k_0(x,y) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n_x, L^2(\mathbb{R}^n_y)), \qquad k_1(x,y) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n_y, L^2(\mathbb{R}^n_x)).$$

Dann hat $\mathrm{op}(p)^{-1}\mathrm{op}(r_1)$ den Integralkern

$$\widetilde{k}_1(x,y) = \left[\mathrm{op}(p)^{-1}k_1(\cdot,y)\right](x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n_y, L^2(\mathbb{R}^n_x))$$

und $R$ hat den Integralkern

$$k(x,y) = \int k_0(x,z)\widetilde{k}_1(z,y)\,dz \;\in\; \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n}_{(x,y)}).$$

Also ist $R = \mathrm{op}(r)$ mit $r \in S^{-\infty,-\infty}$.

**3. Schritt:** Es ist $p^{(-1)} := q - q\#r_1 + r \in S^{0,0}(\mathbb{R}^n)$ und $\mathrm{op}(p)^{-1} = \mathrm{op}(p^{(-1)})$ auf $L^2(\mathbb{R}^n)$. Offenbar

$$\mathrm{op}(p),\, \mathrm{op}(p^{(-1)}) \;\in\; \mathcal{L}(H^{s,\delta}(\mathbb{R}^n)) \qquad \forall\, s,\delta \in \mathbb{R}.$$

Zu $u \in H^{s,\delta}(\mathbb{R}^n)$ gibt es Folge $(u_k)_k \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ mit $u_k \xrightarrow{k\to\infty} u$ in $H^{s,\delta}(\mathbb{R}^n)$. Dann ist

$$\mathrm{op}(p)\mathrm{op}(p^{(-1)})u = \mathrm{op}(p\#p^{(-1)})u \xleftarrow{k\to\infty} \mathrm{op}(p\#p^{(-1)})u_k = \mathrm{op}(p)\mathrm{op}(p^{(-1)})u_k = u_k \xrightarrow{k\to\infty} u$$

(Konvergenz in $H^{s,\delta}(\mathbb{R}^n)$) und analog

$$\mathrm{op}(p^{(-1)})\mathrm{op}(p)u = u.$$

Dies zeigt die Behauptung. ■

**Satz 6.12** *Es sei $p \in S^\mu(\mathbb{R}^n)$ elliptisch und $\mu > 0$. Es sei $s \in \mathbb{R}$. Dann gibt es genau einen abgeschlossenen Operatoren*

$$P : \mathcal{D}(P) \subset H^s(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H^s(\mathbb{R}^n)$$

*mit $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{D}(P)$ und $P = \mathrm{op}(p)$ auf $\mathcal{D}(P)$. Dieser ist gegeben durch*

$$\mathcal{D}(P) = H^{s+\mu}(\mathbb{R}^n), \qquad Pu = \mathrm{op}(p)u.^{29}$$

Beweis: **1. Schritt:** Definiere $P_{\max}$ durch

$$P_{\max} = \mathrm{op}(p) \quad \text{auf} \quad \mathcal{D}(P_{\max}) := \{u \in H^s(\mathbb{R}^n) \mid \mathrm{op}(p)u \in H^s(\mathbb{R}^n)\}.$$

Dann ist $P_{\max}$ abgeschlossen: Sei dazu $(u_k)_k \subset \mathcal{D}(P_{\max})$ mit

$$u_k \xrightarrow{k\to\infty} u \quad \text{und} \quad P_{\max}u_k \xrightarrow{k\to\infty} v \quad \text{in } H^s(\mathbb{R}^n).$$

Aus Satz 5.3 folgt, dass $P_{\max}u_k = \mathrm{op}(p)u_k \xrightarrow{k\to\infty} \mathrm{op}(p)u$ in $H^{s-\mu}(\mathbb{R}^n)$. Wegen der Eindeutigkeit des Grenzwertes muss also $\mathrm{op}(p)u = v \in H^s(\mathbb{R}^n)$ sein, d.h. $u \in \mathcal{D}(P_{\max})$ und $P_{\max}u = v$.

[29] die analoge Aussage gilt für $p \in S^{\mu,m}$ mit $\mu, m \geq 0$. Dann ist $\mathcal{D}(P) = H^{s+\mu,\delta+m}(\mathbb{R}^n) \subset H^{s,\delta}(\mathbb{R}^n)$.

**2. Schritt:** Sei nun $P$ irgendeine abgeschlossener Operator mit $P = \mathrm{op}(p)$ auf $\mathcal{D}(P)$. Sei $q \in S^{-\mu}(\mathbb{R}^n)$ eine Parametrix zu $p$ und $r := q\#p - 1$. Dann ist $r \in S^{-\infty}(\mathbb{R}^n)$ und für $u \in \mathcal{D}(P)$ gilt

$$u = \mathrm{op}(q\#p)u - \mathrm{op}(r)u = \mathrm{op}(q)(Pu) - \mathrm{op}(r)u \in H^{s+\mu}(\mathbb{R}^n).$$

Also ist $\mathcal{D}(P) \subset H^{s+\mu}(\mathbb{R}^n)$.

**3. Schritt:** Nach dem ersten Schritt ist

$$\mathrm{op}(p) : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset H^s(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H^s(\mathbb{R}^n)$$

abschließbar. Bezeichne mit $P_{\min}$ den Abschluß. Dieser ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(P_{\min}) = \big\{ u \in H^s(\mathbb{R}^n) \mid \exists\, (u_k)_k \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \quad \exists\, v \in H^s(\mathbb{R}^n) :& \\ u_k \xrightarrow{k\to\infty} u \text{ und } \mathrm{op}(p)u_k \xrightarrow{k\to\infty} v \text{ in } H^s(\mathbb{R}^n) \big\},& \\ P_{\min} u = v.& \end{aligned}$$

Aus Satz 5.3 folgt, dass $P_{\min} = \mathrm{op}(p)$ auf $\mathcal{D}(P_{\min})$. Wegen der Dichtheit von $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ in $H^{s+\mu}(\mathbb{R}^n)$ ist offenbar $H^{s+\mu}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{D}(P_{\min})$.

**4. Schritt:** Für irgendeine abgeschlossenen Operatoren mit $P = \mathrm{op}(p)$ auf $\mathcal{D}(P)$ gilt also

$$H^{s+\mu}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{D}(P_{\min}) \subset \mathcal{D}(P) \subset H^{s+\mu}(\mathbb{R}^n).$$

Dies zeigt offenbar die Behauptung. ∎

# 9 Fredholm-Operatoren (in Hilberträumen)

**Satz 9.1** *Es seien $H_0, H_1$ Hilberträume. Ein Operator $K \in \mathcal{L}(H_0, H_1)$ heißt kompakt, wenn eine der folgenden äquivalenten Eigenschaften gilt:*

*a)* *$K$ bildet beschränkte in relativ kompakte Mengen ab.*

*b)* *Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge, so hat $(Kx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge.*

*c)* *Es gibt $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\dim \operatorname{Bild} K_n < \infty$ und $K_n \xrightarrow{n\to\infty} K$ in $\mathcal{L}(H_0, H_1)$.*

*Die Menge*

$$\mathcal{K}(H_0, H_1) := \{K \in \mathcal{L}(H_0, H_1) \mid K \text{ kompakt}\}$$

*bildet einen abgeschlossenen Unterraum von $\mathcal{L}(H_0, H_1)$. Es gelten folgende Aussagen:*

*i)* *Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ <u>schwach</u> konvergent gegen $x$,*[30] *so ist $(Kx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent gegen $Kx$.*

*ii)* *Sind $P_0 \in \mathcal{L}(H, H_0)$, $P_1 \in \mathcal{L}(H_1, H)$, so sind $KP_0 \in \mathcal{K}(H, H_0)$ und $P_1K \in \mathcal{K}(H_0, H)$.*

**Satz 9.2** *Es seien $H_0, H_1$ Hilberträume. Ein $P \in \mathcal{L}(H_0, H_1)$ heißt ein <u>Fredholm-Operator</u>, falls eine der folgenden äquivalenten Eigenschaften gilt:*

*a)* *Es ist*

$$\dim \operatorname{Kern} P < \infty \quad \textit{und} \quad \operatorname{codim} \operatorname{Bild} P := \dim H_1/\operatorname{Bild} P < \infty.$$

*b)* *$P$ ist invertierbar modulo kompakter Operatoren, d.h. es gibt $Q \in \mathcal{L}(H_1, H_0)$ mit*

$$QP - 1 \in \mathcal{K}(H_0) \quad \textit{und} \quad PQ - 1 \in \mathcal{K}(H_1).$$

*In diesem Fall ist $\operatorname{Bild} P$ abgeschlossen in $H_1$ und wir setzen*

$$\operatorname{ind} P := \dim \operatorname{Kern} P - \operatorname{codim} \operatorname{Bild} P.$$

*Es gelten folgende Aussagen:*

*i)* *Sind $P \in \mathcal{F}(H_0, H_1)$ und $K \in \mathcal{K}(H_0, H_1)$, so ist $P + K \in \mathcal{F}(H_0, H_1)$ und*

$$\operatorname{ind} (P + K) = \operatorname{ind} P.$$

*ii)* *Sind $P_j \in \mathcal{F}(H_j, H_{j+1})$ für $j = 0, 1$, so ist $P_1P_0 \in \mathcal{F}(H_0, H_2)$ und*

$$\operatorname{ind} P_1P_0 = \operatorname{ind} P_0 + \operatorname{ind} P_1.$$

*iii)* *$\mathcal{F}(H_0, H_1)$ ist eine offene Teilmenge von $\mathcal{L}(H_0, H_1)$ und $\operatorname{ind} : \mathcal{F}(H_0, H_1) \to \mathbb{C}$ ist lokal konstant.*[31]

[30] d.h. $(y, x_n) \xrightarrow{n\to\infty} (y, x)$ für alle $y \in H$

[31] Insbesondere ist ind konstant auf den Zusammenhangskomponenten von $\mathcal{F}(H_0, H_1)$.

# 10 Unbeschränkte Operatoren (in Hilberträumen)

Im folgenden sei $H$ ein Hilbertraum mit Skalarprodukt $(\cdot,\cdot)$ und Norm $\|\cdot\|$.

**Definition 10.1 (und Satz)** *Eine linerare Abbildung $A : \mathcal{D}(A) \subset H \to H$ heißt ein abgeschlossener Operator in $H$, falls gilt:*

*i) Ist $(x_n)_n \subset \mathcal{D}(A)$ mit $x_n \to x$ und $Ax_n \to y$ in $H$, so ist $x \in \mathcal{D}(A)$ und $Ax = y$.*

*Dies ist äquivalent zu jeder der folgenden Eigenschaften:*

*ii) $\mathrm{Graph}(A) := \{(x, Ax) |\ x \in \mathcal{D}(A)\}$ ist ein abgeschlossener Unterraum von $H \oplus H$.*

*iii) $\mathcal{D}(A)$ versehen mit dem Skalarprodukt*

$$\langle x, y\rangle := (x, y) + (Ax, Ay), \qquad x, y \in \mathcal{D}(A),$$

*ist ein Hilbertraum.*

**Satz 10.2 (vom abgeschlossenen Graphen)** *Es sei $A : H \to H$ linear. Dann:*

$$A \in \mathcal{L}(H) \iff A : \mathcal{D}(A) = H \to H \text{ abgeschlossen.}$$

**Definition 10.3 (und Satz)** *Es sei $A : \mathcal{D}(A) \subset H \to H$ abgeschlossen. Die Resolventenmenge von $A$ ist*

$$\rho(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} |\ \lambda - A : \mathcal{D}(A) \to H \text{ ist bijektiv}\}$$

*(wir identifizieren $\lambda \in \mathbb{C}$ mit der Abbildung $x \mapsto \lambda x \in \mathcal{L}(H)$). Das Spektrum von $A$ ist*

$$\sigma(A) := \mathbb{C} \setminus \rho(A).$$

*Für jedes $\lambda \in \varrho(A)$ ist automatisch $(\lambda - A)^{-1} \in \mathcal{L}(H)$.*

**Satz 10.4** *Es sei $A : \mathcal{D}(A) \subset X \to X$ abgeschlossen. Dann gelten:*

*a) $\rho(A)$ ist offen in $\mathbb{C}$ (und damit $\sigma(A)$ abgeschlossen). Ist $\lambda_0 \in \rho(A)$, so ist*

$$(\lambda - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda_0 - \lambda)^n (\lambda_0 - A)^{-(n+1)} \qquad \forall\ |\lambda - \lambda_0| < \frac{1}{\|(\lambda_0 - A)^{-1}\|}.$$

*b) $\lambda \mapsto (\lambda - A)^{-1} : \rho(A) \to \mathcal{L}(X)$ ist holomorph und*

$$\frac{d^n}{d\lambda^n}(\lambda - A)^{-1} = (-1)^n\, n!\, (\lambda - A)^{-(n+1)} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

*c) Ist $\mathrm{dist}(\lambda, \sigma(A)) := \inf\{|\lambda - z|\,|\ z \in \sigma(A)\}$ der Abstand von $\lambda$ zu $\sigma(A)$, so ist*

$$\frac{1}{\mathrm{dist}(\lambda, \sigma(A))} \le \|(\lambda - A)^{-1}\| \qquad \forall\, \lambda \in \rho(A).$$

**Definition 10.5** *Ein lineare Abbildung $A : \mathcal{D}(A) \subset H \to H$ heißt abschließbar, falls es einen abgeschlossenen Operatoren $B : \mathcal{D}(B) \subset H \to H$ gibt mit $\overline{\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(B)}$. Jedes solche $B$ heißt eine abgeschlossene Erweiterung von $A$.*

**Satz 10.6** *Es sei $A : \mathcal{D}(A) \subset H \to H$ linear. Dann sind äquivalent:*

*a) $A$ ist abschließbar.*

*b) Es gibt ein lineares $B : \mathcal{D}(B) \subset H \to H$ mit $\mathrm{Graph}(B) = \overline{\mathrm{Graph}(A)}$.*

*c) Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Nullfolge in $H$ für die $(Ax_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $H$ konvergiert, so ist auch $(Ax_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge.*

*In diesem Fall ist $B$ die kleinste abgeschlossene Erweiterung von $A$, d.h. $\mathcal{D}(B) \subset \mathcal{D}(\widetilde{B})$ für jede beliebige abgeschlossene Erweiterung $\widetilde{B}$ von $A$. Man schreibt $\overline{A} = A_{\min} := B$ und spricht vom Abschluß bzw. der minimalen Erweiterung von $A$.*

**Definition 10.7 (und Satz)** *Es sei $A : \mathcal{D}(A) \subset H \to H$ linear und dicht definiert, d.h. $\mathcal{D}(A)$ sei dicht in $H$. Der adjungierte Operator $A^*$ von $A$ ist definiert durch*

$$\mathcal{D}(A^*) = \{x \in H \mid \exists\, y \in H \quad \forall\, z \in \mathcal{D}(A) : \quad (y, z) = (x, Az)\}, \qquad A^*x = y.$$

*$A^*$ ist immer abgeschlossen. Ist $A$ abschließbar, so ist $A_{\min} = (A^*)^*$. Gilt $A = A^*$, so heißt $A$ selbstadjungiert.*