Nichtlineare Funktionalanalysis

Gerd Herzog, Roland Lemmert

WS 1998/99

Überarbeitete Fassung WS 2003/04.

Inhaltsverzeichnis

1 Literatur, Einleitung

Deimling, Klaus: *Nonlinear Functional Analysis*, Springer-Verlag 1980.
Cronin, Jane: *Fixed points and topological degree in nonlinear analysis*, AMS 1964.
Ortega, J.M.; Rheinboldt W.C.: *Iterative solution of nonlinear equations in several variables*, Academic Press 1970.
Zeidler, N.: *Vorlesungen über nichtlineare Funktionalanalysis I-III*, Teubner Texte Mathematik.

Es seien E, F reelle oder komplexe Vektorräume.
Für eine lineare Abbildung $A : E \to F$ heißt

$$Ax = y.$$

die zugehörige lineare Gleichung.

Ist $\Omega \subseteq E$, $f : \Omega \to F$, so nennen wir

$$f(x) = y.$$

eine nichtlineare Gleichung.

Häufiger Fall ist die Fixpunktgleichung

$$f : \Omega \to E, \quad f(x) = x.$$

Beispiel: Urysohn-Integralgleichungen.

Sei $E = C([a, b], \mathbb{R})$ (versehen mit der Maximumnorm $||\cdot||$), $g : [a, b]^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig, und $f : E \to E$ definiert durch

$$(f(x))(t) = \int_a^b g(t, s, x(s))\ ds.$$

Das zugehörige Fixpunktproblem: $f(x) = x$ lautet dann

$$x(t) = \int_a^b g(t, s, x(s))\ ds \quad (t \in [a, b]).$$

Die Vorgehensweise zur Behandlung nichtlinearer Gleichungen hängt stark von der Struktur des Problems ab. Ist z.B.

$$|g(t, s, \xi) - g(t, s, \eta)| \leq L|\xi - \eta|$$

so ist

$$||f(x) - f(y)|| \leq L(b - a)||x - y||.$$

Im Fall $L(b-a) < 1$ ist f eine Kontraktion und die Integralgleichung besitzt genau eine Lösung in E (Fixpunktsatz von Banach).

Ist hingegen g beschränkt (d.h. $|g(t,s,\xi)| \leq M$), so besitzt obige Integralgleichung ebenfalls eine Lösung. Dies kann mit dem Fixpunktsatz von Schauder bewiesen werden. Im Folgenden werden Methoden zur Lösung nichtlinearer Gleichungen entwickelt, die insbes. den Fixpunktsatz von Schauder als Spezialfall enthalten.

2 Der Brouwersche Abbildungsgrad

Es sei stets $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ nicht leer, beschränkt und offen. Der Brouwersche Abbildungsgrad ordnet jeder stetigen Funktion $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ und jedem $y \notin f(\partial\Omega)$ eine ganze Zahl

$$d(f, \Omega, y) \in \mathbb{Z}$$

zu, so daß (mindestens) gilt:

1. Ist $f(x) = x$ für alle $x \in \Omega$, so ist
$$\begin{aligned} d(f,\Omega,y) &= 1 \qquad \text{für } y \in \Omega \ , \\ d(f,\Omega,y) &= 0 \qquad \text{für } y \notin \overline{\Omega} \ . \end{aligned}$$

2. Ist $d(f, \Omega, y) \neq 0$, so existiert $x \in \Omega$ mit $f(x) = y$.

3. Ist $\Omega \supseteq \Omega_1 \cup \cdots \cup \Omega_k,\ \Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset \quad (i \neq j)$, Ω_j offen,
$\overline{\Omega} = \overline{\Omega}_1 \cup \cdots \cup \overline{\Omega}_k$, so ist
$d(f,\Omega,y) = \sum_{j=1}^{k} d(f,\Omega_j,y)$
(wenn alle Abbildungsgrade definiert sind).

4. Ist $H(t,x)$ stetig auf $[0,1] \times \overline{\Omega}$, $y(t) : \ [0,1] \to \mathbb{R}^n$ stetig mit $y(t) \notin H(t,\partial\Omega), 0 \leq t \leq 1$, so ist $d(H(t,\cdot),\Omega,y(t))$ konstant auf $[0,1]$.

Die Frage, ob ein solcher Abbildungsgrad existiert und welche weiteren Eigenschaften und Konsequenzen er hat, soll im folgenden geklärt werden.

Der Sonderfall $n = 1$:
Man wäre versucht,

$$d(f,\Omega,y) = \text{Anzahl der Lösungen von } f(x) = y$$

zu setzen. Abgesehen von der Tatsache daß die Gleichung unendlich viele Lösungen haben kann, ist selbst in einfachen Fällen Eigenschaft 4. verletzt:

Für

$$\begin{aligned} H(t,x) &= 1-t+tx^2,\ x \in [-1,1] = \overline{\Omega}\ , \\ y(t) &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

ist die Anzahl der Lösungen von $H(t,x) = y(t)$

$$= \begin{cases} 0 & , 0 \leq t < \frac{1}{2} \\ 1 & , t = \frac{1}{2} \\ 2 & , \frac{1}{2} < t \leq 1\ . \end{cases}$$

Sei nun $\Omega = (-1,1)$ und $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ stetig.

Ist $f(-1) = f(1)$ und $y \neq f(1)$, so ist offensichtlich $H(t,x) = (1-t)f(1) + tf(x)$ stetig in (t,x), und für $y \neq f(1)$ $\big($ d. h. $y \notin f(\partial(-1,1))\big)$ ist $H(t,\pm 1) \neq y$ so daß nach 4.

$$d(H(t,\cdot),(-1,1),y)$$

unabhängig von t ist, also $d(f,(-1,1),y) = d(f(1),(-1,1),y) = 0$ sein muß wegen 2. und 4..

$d(f,(-1,1),y)$ verschwindet also für alle $f \in C([-1,1])$ mit $f(-1) = f(1)$ und $y \neq f(1)$.

Ist dagegen $f(-1) \neq f(1)$, so zeigen ähnliche Überlegungen

$$\begin{aligned} d(f,(-1,1),y) = 0 \quad & \text{für} \quad y > \max\{f(1), f(-1)\} \\ & \text{und} \quad y < \min\{f(1), f(-1)\}\ . \end{aligned}$$

Für (es sei etwa $f(-1) < f(1)$) $y_0 \in (f(-1), f(1))$ betrachten wir

$$\begin{aligned} H(t,x) &= (1-t)\left(\frac{x+1}{2}(f(1)-f(-1)) + f(-1)\right) + tx\ , \\ y(t) &= (1-t)y_0 + t\frac{2y_0 - f(1) - f(-1)}{f(1)-f(-1)}\ , \\ H(0,x) = l(x) &= \frac{x+1}{2}\,(f(1)-f(-1)) + f(-1)\ , \\ H_1(t,x) &= (1-t)f(x) + tl(x)\ . \end{aligned}$$

Es ist für $0 \leq t \leq 1$

$$\begin{aligned} H(t,1) &= (1-t)f(1) + t\ , \\ H(t,-1) &= (1-t)f(-1) - t \\ \text{und} \qquad y(t) &\neq H(t,1)\ , \\ y(t) &\neq H(t,-1) \end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir $d\,(f,(-1,1),y_0)$

$$= d\,(l,(-1,1),y_0) \quad = \quad d\left(Id,(-1,1),\ \frac{2y_0 - f(1) - f(-1)}{f(1) - f(-1)}\right) = 1$$

$$\text{wegen } -1 \quad < \quad \frac{2y_0 - f(1) - f(-1)}{f(1) - f(-1)} < 1\ .$$

Für den Fall $f(-1) > y_0 > f(1)$ zeigt man entsprechend (unter wesentlicher Benutzung von 3.)

$$d(f,(-1,1),y_0) = -1\ .$$

Es sei bemerkt, daß wir mit den obigen Überlegungen nachgewiesen haben, daß im Fall $n = 1$ höchstens ein Abbildungsgrad mit den Eigenschaften 1. bis 4. existiert. Man kann sich überlegen, daß umgekehrt durch die oben bestimmten Werte tatsächlich ein Abbildungsgrad definiert ist.
Für $n > 1$ sind die Verhältnisse verwickelter.

Wir werden zunächst den Abbildungsgrad für eine spezielle Klasse von Funktionen $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ und (in Abhängigkeit von den Funktionen) für gewisse $y \in \mathbb{R}^n$ erklären und uns dann Schritt für Schritt durch Approximationsprozesse von den genannten Einschränkungen wieder befreien.

Für $f \in C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$ sei $N_f(\Omega)$ die Menge der *kritischen Punkte* von f, d. h. der Punkte $x \in \Omega$, wo $f'(x)$ nicht regulär (also $\det f'(x) = 0$) ist.

Hilfssatz. *Ist Ω offen und beschränkt, $f \in C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$ und $y \notin f(N_f(\Omega)) \cup f(\partial\Omega)$ so gibt es höchstens endlich viele $x_1, \dots, x_k \in \Omega$ mit $f(x_j) = y$.*

Beweis. Gibt es unendlich viele solcher Punkte, so gibt es eine konvergente Folge (x_j) von paarweise verschiedenen solcher Punkte mit $\overline{x} = \lim_{j\to\infty} x_j \in \Omega$, da wegen $f(\overline{x}) = y$ die Beziehung $\overline{x} \in \partial\Omega$ nicht gelten kann. Wegen $y \notin f(N_f(\Omega))$ ist $f'(\overline{x})$ regulär, also f in einer Umgebung $U(\overline{x})$ injektiv. Dies widerspricht $x_j \in U(\overline{x})$ für hinreichend großes $k \in \mathbb{N}$.

Definition 1. *Für $f \in C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$ und $y \notin f(\partial\Omega) \cup f(N_f(\Omega))$ sei*

$$d(f,\Omega,y) = \sum_{x:f(x)=y} \operatorname{sign} \det f'(x)\ .$$

(Die Summe ist nach dem Hilfssatz endlich, $\sum_{\emptyset} := 0$.)

Satz 1. (Integraldarstellung von E. Heinz.)
Es sei $f \in C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega),\ y \notin f(\partial\Omega) \cup f(N_f(\Omega))$. Dann gibt es $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(f,y) > 0$ mit

$$d(f,\Omega,y) = \int_\Omega \varphi(f(x) - y) \det f'(x) dx$$

für jede stetige Funktion $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ *mit*

$$\operatorname{supp}\varphi \subseteq \overline{K(0,\varepsilon_0)} \qquad (\operatorname{supp}\varphi = \overline{\{x : \varphi(x) \neq 0\}}),$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)dx = 1\ .$$

Beweis. Gibt es kein $x \in \Omega$ mit $f(x) = y$, also keines in $\overline{\Omega}$, so ist $\|f(x)-y\| \geq \varepsilon_0 > 0$ $(x \in \overline{\Omega})$, also

$$\varphi(f(x) - y) \equiv 0 \quad \text{falls} \quad \operatorname{supp}\varphi \subseteq \overline{K(0,\varepsilon_0)}\ ,$$

und damit ist die Behauptung offensichtlich richtig.

Nun sei $f^{-1}(y) = \{x_1, \ldots, x_k\}$, alle x_j verschieden. Da $f'(x_j)$ regulär ist, existieren nach dem Satz über die Existenz der Umkehrfunktion offene Umgebungen $U(x_j)$ mit $\overline{U(x_j)} \subseteq \Omega$, die homöomorph auf eine Kugel $K(y,r)$ abgebildet werden. O.B.d.A. seien die $U(x_j)$ paarweise disjunkt und so klein, daß sign $\det f'(x) =$ sign $\det f'(x_j)$ auf $U(x_j)$ gilt.

Da auf $\overline{\Omega} \setminus \bigcup_{j=1}^{k} U(x_j)$ $f(x) \neq y$ ist, existiert $\varepsilon_0 \in (0,r)$ mit $\|f(x) - y\| \geq \varepsilon_0 > 0$ auf dieser Menge. Damit ist für φ mit $\operatorname{supp}\varphi \subseteq \overline{K(0,\varepsilon_0)} \subseteq K(0,r)$

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega} \varphi(f(x) - y)\ \det f'(x)dx \\
&= \sum_{j=1}^{k} \int_{U(x_j)} \varphi(f(x) - y)\ \det f'(x)dx \\
&= \sum_{j=1}^{k} \text{sign } \det f'(x_j) \int_{U(x_j)} \varphi(f(x) - y)\ |\det f'(x)|dx \\
&= \sum_{j=1}^{k} \text{sign } \det f'(x_j) \underbrace{\int_{K(0,r)} \varphi(\xi)d\xi}_{=1}
\end{aligned}$$

nach der Substitutionsregel für Integrale im $\mathbb{R}^n$ mit

$$\begin{aligned}
\xi &= f(x) - y \quad : x \in U(x_j), \quad \xi \in K(0,r)\ , \\
d\xi &= |\det f'(x)|dx\ .
\end{aligned}$$

Für das Folgende werden noch einige Hilfssätze benötigt.

Hilfssatz 1. *Ist $A(t) = (a_{ij}(t))_1^n$ eine Matrix von nach t differenzierbaren Funktionen, so ist*

$$\frac{d}{dt}\,\mathrm{det}A(t) = \sum_{j=1}^{n} \mathrm{det}A^{(j)}(t)\ ,$$

wobei $A^{(j)}(t)$ aus $A(t)$ durch Differentiation der j-ten Spalte entsteht.

Beweis. Nach der Leibnizschen Formel für Determinanten ist (S_n Permutationsgruppe, $v(\pi)$ Vorzeichen von π)

$$\mathrm{det}A(t) \quad = \quad \sum_{\pi\in S_n} v(\pi)\prod_{i=1}^{n} a_{\pi(i),i}(t)\ ,$$

also

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\,\mathrm{det}A(t) \quad &= \quad \sum_{\pi\in S_n} v(\pi)\frac{d}{dt}\prod_{i=1}^{n} a_{\pi(i),i}(t) \\ &= \quad \sum_{\pi\in S_n} v(\pi)\sum_{j=1}^{n}\prod_{i=1}^{n} a^{(j)}_{\pi(i),i}(t)\ ,\end{aligned}$$

wobei $a^{(j)}_{\pi(i),i}$ bedeutet, daß im Fall $j = i$ nach t differenziert wird, andernfalls nicht.

Hieraus folgt die Behauptung.

Hilfssatz 2. *Es sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ aus $C^2(\Omega)$ und d_{ij} der i-j-te Kofaktor von $f'(x)$, also $d_{ij} = (-1)^{i+j}\cdot$ Determinante der $\frac{\partial}{\partial x_k} f_l$, $l \neq j$, $k \neq i$ (d. h. in $f'(x)$ werden i-te Spalte und j-te Zeile gestrichen). Dann ist für jedes $j = 1, \ldots, n$*

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} d_{ij}(x) = 0, \qquad x \in \Omega\ .$$

Beweis. Es sei j fest und jeweils $\frac{\partial}{\partial x_k} f^0$ derjenige Spaltenvektor, der durch Weglassen des j-ten Elementes der k-ten Spalte von f' entsteht. Läßt man noch die i-te Spalte von f' weg, so ist nach dem Hilfssatz

$$f' = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} f_1 & \frac{\partial}{\partial x_2} f_1 & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n} f_1 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} f_2 & \frac{\partial}{\partial x_2} f_2 & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n} f_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial}{\partial x_1} f_n & \cdots & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n} f_n \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} d_{ij} \quad = \quad (-1)^{i+j}\sum_{k\neq i}\mathrm{det}\Big(\frac{\partial}{\partial x_1} f^0, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_i}\,\frac{\partial}{\partial x_k} f^0, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n} f^0\Big)^{(i)},$$

(wobei $\big(\,\cdot\,\big)^{(i)}$ bedeutet, daß $\frac{\partial f^0}{\partial x_i}$ fehlt), also

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} d_{ij} &= (-1)^j \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \sum_{k \neq i} \det\Big(\frac{\partial}{\partial x_1} f^0, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_k} f^0, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n} f^0\Big)^{(i)} \\
&= (-1)^j \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \Big\{ \sum_{k<i} (-1)^{k-1} \det\Big(\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_k} f^0, \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_1} f^0, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n} f^0}_{\text{Index } k \text{ fehlt}}\Big)^{(i)} \\
&\qquad + \sum_{k>i} (-1)^{k-2} \det\Big(\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_k} f^0, \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_1} f^0, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n} f^0}_{\text{Index } k \text{ fehlt}}\Big)^{(i)} \Big\}
\end{aligned}$$

(Da $\frac{\partial f^0}{\partial x_i}$ fehlt, muß in der zweiten Summe einmal weniger vertauscht werden!)

$$= (-1)^{j-1} \sum_{i=1}^{n} \left\{ \sum_{k=1}^{i-1} (-1)^{k+i} \det\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_k} f^0, \frac{\partial}{\partial x_1} f^0, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n} f^0\right)^{(i,k)} \right\}$$

$$-(-1)^{j-1} \sum_{i=1}^{n} \left\{ \sum_{k=i+1}^{n} (-1)^{k+i} \det\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial x_i} f^0, \frac{\partial}{\partial x_1} f^0, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n} f^0\right)^{(i,k)} \right\} .$$

Mit $c_{ik} = \det\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_k} f^0, \frac{\partial}{\partial x_1} f^0, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n} f^0\right)^{(i,k)} \overset{!}{=} c_{ki}$ schreibt sich dies ausführlich

$$\begin{aligned}
(-1)^{j-1}\{ \quad & (-1)^{1+2} c_{21} \\
& +(-1)^{1+3} c_{31} + (-1)^{2+3} c_{32} \\
& + \ldots \\
& \vdots \\
& +(-1)^{1+n} c_{n1} + (-1)^{2+n} c_{n2} + \cdots + (-1)^{n-1+n} c_{n,n-1}\} \\
\\
-(-1)^{j-1}\{ \quad & (-1)^{2+1} c_{21} + (-1)^{3+1} c_{31} + \cdots + (-1)^{n+1} c_{n1} \\
& +(-1)^{3+2} c_{32} + \cdots + (-1)^{n+2} c_{n2} \\
& + \ldots \\
& \vdots \\
& +(-1)^{n+n-1} c_{n,n-1}\} \ ,
\end{aligned}$$

sodaß die Behauptung folgt.

$\Big($ Es ist

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{i-1}(-1)^{i+k}c_{ik} &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=k+1}^{n}(-1)^{i+k}c_{ik}\\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=i+1}^{n}(-1)^{k+i}c_{ki}\\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=i+1}^{n}(-1)^{i+k}c_{ik}\ . \quad\Big)\end{aligned}$$

Hilfssatz 3. *Es sei $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und $z \in \mathbb{R}^n$ fest. Dann ist*

$$\varphi(x+z) - \varphi(x) = \operatorname{div}_{(x)}\Big(\int_0^1 \varphi(x+sz)ds \cdot z\Big)\ .$$

Beweis. Nach dem Hauptsatz der Differential-und Integralrechnung gilt

$$\begin{aligned}&\varphi(x+z) - \varphi(x)\\ &\quad = \int_0^1 \frac{d}{ds}\ (\varphi(x+sz))ds\\ &\qquad\qquad = \int_0^1 \sum_{i=1}^{n} z_i \frac{\partial}{\partial x_i}\varphi(x+sz)ds\\ &\qquad\qquad = \sum_{i=1}^{n} z_i \frac{\partial}{\partial x_i}\int_0^1 \varphi(x+sz)ds,\end{aligned}$$

woraus die Behauptung folgt.

Hilfssatz 4. *Es sei $u \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, $\operatorname{supp} u = K$ kompakt, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt, $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ aus $C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ und $K \cap f(\partial\Omega) = \emptyset$. Dann existiert $v \in C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$, $v : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ mit $\operatorname{supp} v \subseteq \Omega$ und*

$$\operatorname{div} v(x) = (\operatorname{div} u)(f(x))\ \det f'(x) \quad (x \in \Omega)\ .$$

Beweis. O.B.d.A. sei $n > 1$. Wir setzen für $x \in \Omega$ ($d_{ij}(x)$ seien die Kofaktoren von $f'(x)$)

$$v_i(x) = \sum_{j=1}^{n} u_j(f(x))d_{ij}(x)\ , i = 1, \ldots, n.$$

Es gilt $v \in C^1(\Omega)$. Wegen $K \cap f(\partial\Omega) = \emptyset$ existiert ein $\delta > 0$, so daß aus $x \in \Omega$, $\mathrm{dist}(x, \partial\Omega) < \delta$ sicher $f(x) \notin K$ folgt. Insbesondere ist $v = 0$ für $x \in \Omega$, $\mathrm{dist}(x, \partial\Omega) < \delta$. Da v stetig in Ω ist, kann v durch $v(x) = 0$ stetig auf $\overline{\Omega}$ (sogar auf ganz $\mathbb{R}^n$) fortgesetzt werden, und es ist $\mathrm{supp} v \subseteq \Omega$.

Ferner gilt

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_i} v_i(x) \quad &= \quad \sum_{k,j=1}^{n} \Big(\frac{\partial}{\partial x_k} u_j\Big)\,(f(x)) \cdot \Big(\frac{\partial}{\partial x_i} f_k(x)\Big) \cdot d_{ij}(x) \\ &\quad + \sum_{j=1}^{n} u_j(f(x)) \frac{\partial}{\partial x_i} d_{ij}(x)\ ,\end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} v_i(x) \quad &= \quad \sum_{k,j=1}^{n} \Big(\frac{\partial}{\partial x_k} u_j\Big)(f(x)) \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \Big(\frac{\partial}{\partial x_i} f_k(x)\Big) d_{ij}(x)}_{=\delta_{jk} \det f'(x)} \\ &\quad + \sum_{j=1}^{n} u_j(f(x)) \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} d_{ij}(x)}_{\equiv 0} \\ &= \quad (\mathrm{div} u)(f(x)) \det f'(x)\ .\end{aligned}$$

Satz 2. *Es sei* $f \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$, $y_0 \notin f(\partial\Omega)$ *und* $\alpha = \mathrm{dist}(y_0, f(\partial\Omega))$. *Dann ist* $d(f, \Omega, y)$ *auf* $K(y_0, \alpha) \setminus f(N_f(\Omega))$ *konstant.*

Beweis. Wir wählen $y_1, y_2 \in K(y_0, \alpha) \setminus f(N_f(\Omega))$ und setzen $\delta = \alpha - \max\{\|y_1 - y_0\|, \|y_2 - y_0\|\} > 0$. Nach Satz 1. (Heinz) gibt es $0 < \varepsilon_0 < \delta$, so daß

$$d(f, \Omega, y_i) = \int_{\Omega} \varphi(f(x) - y_i) \det f'(x) dx$$

gilt für $\mathrm{supp}\varphi \subseteq K(0, \varepsilon_0)$, $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) dx = 1$. Wir wählen speziell $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^n)$ und setzen

$$U(y) = (y_1 - y_2) \int_0^1 \varphi(y - y_1 + t(y_1 - y_2)) dt\ .$$

Aus $\|y - y_1 + t(y_1 - y_2)\| < \varepsilon_0$ für ein $t \in [0, 1]$ folgt

$$\begin{aligned}\|y - y_0\| \quad &< \quad \varepsilon_0 + \|y_1 - t(y_1 - y_2) - y_0\| \\ &\leq \quad \varepsilon_0 + \alpha - \delta\ ,\end{aligned}$$

also aus $\|y - y_0\| \geq \varepsilon_0 + \alpha - \delta$ sicher $\|y - y_1 + t(y_1 - y_2)\| \geq \varepsilon_0$, $t \in [0,1]$. Dann ist aber

$$\mathrm{supp} U \subseteq \overline{K(y_0, \alpha + \varepsilon_0 - \delta)} \subseteq K(y_0, \alpha),$$

also $\mathrm{supp} U \cap f(\partial\Omega) = \emptyset$, und nach Hilfssatz 4 existiert $v \in C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$, $\mathrm{supp} v \subseteq \Omega$ und

Ersetze in HS 3:
$z \sim y_1 - y_2$
$x \sim f(x) - y_1$

$$\begin{aligned} \mathrm{div} v(x) &= (\mathrm{div} U)(f(x)) \det f'(x) \\ &= \{\varphi(f(x) - y_2)) - \varphi(f(x) - y_1))\} \det f'(x)\ , \end{aligned}$$

woraus durch Integration über $\mathbb{R}^n$ die Behauptung folgt. (Integralsatz von Gauß).

Nach obigem Satz stellt sich die Frage, "wie groß" $f(N_f(\Omega))$ sein kann. Eine für unsere Zwecke ausreichende Antwort gibt

Hilfssatz 5. (Lemma von Sard).*Es sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^1(\Omega)$ und $W \subseteq \Omega$ ein abgeschlossener Würfel. Dann ist der Lebesgue-Inhalt von $f(N_f(W))$ gleich Null.*

Beweis. (Nagumo). Es sei $1 \geq \varepsilon > 0$ fest vorgegeben. Aufgrund der Voraussetzungen über f gibt es $L > 0$ und $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ mit ($\|\cdot\|$ sei die von der Euklid-Norm erzeugte Matrixnorm)

$$\begin{aligned} \|f'(x)\| &\leq L \ \text{ auf } W \quad , \\ \|f'(x) - f'(\overline{x})\| &< \varepsilon \ \text{ für } \|x - \overline{x}\| < \delta, \quad x, \overline{x} \in W\ . \end{aligned}$$

Dann ist aber für $\|x - \overline{x}\| < \delta, \quad x, \overline{x} \in W$

$$\begin{aligned} & \|f(x) - f(\overline{x}) - f'(\overline{x})(x - \overline{x})\| \\ = & \ \|\int_0^1 f'(\overline{x} + s(x - \overline{x}))(x - \overline{x}) ds - f'(\overline{x})(x - \overline{x})\| \\ = & \left\| \int_0^1 \{f'(\overline{x} + s(x - \overline{x})) - f'(\overline{x})\}(x - \overline{x}) ds \right\| \\ \leq & \int_0^1 \|f'(\overline{x} + s(x - \overline{x})) - f'(\overline{x})\| \cdot \|x - \overline{x}\| ds \\ \leq & \ \varepsilon \|x - \overline{x}\|. \end{aligned}$$

Die Kantenlänge von W sei l. Wir zerlegen W in N^n gleich große Teilwürfel W_i, $1 \leq i \leq N^n$, wobei N so groß gewählt sei, daß der Durchmesser jedes dieser Würfel kleiner oder gleich δ ist:

$$\frac{l}{N} \cdot \sqrt{n} \leq \delta\ .$$

Insbesondere gilt dann für jeden dieser Würfel W_i

$$f(x) - f(\overline{x}) - f'(\overline{x})(x - \overline{x}) = \eta(\overline{x}), \quad x, \overline{x} \in W_i$$

mit

$$\|\eta(\overline{x})\| \leq \varepsilon \cdot \frac{l\sqrt{n}}{N} .$$

Ist speziell $\overline{x}$ kritischer Punkt von f in W, so wählen wir W_i mit $\overline{x} \in W_i$ und bezeichnen mit $\widehat{W_i}$ das Bild von W_i unter der affinen Transformation

$$A(x) = f(\overline{x}) + f'(\overline{x})(x - \overline{x}) ,$$

$\widehat{W_i} = A(W_i)$. $\widehat{W_i}$ hat Lebesgue-Inhalt Null.

Für $y, \widetilde{y} \in \widehat{W_i}$ gilt $y = Ax,\ \widetilde{y} = A\widetilde{x} \ \ (x, \widetilde{x} \in W_i)$, also

$$\begin{aligned} \|y - \widetilde{y}\| &\leq \|f'(\overline{x})(x - \widetilde{x})\| \\ &\leq L\|x - \widetilde{x}\| \leq L \text{ diam } W_i = L\frac{l}{N}\sqrt{n} , \end{aligned}$$

so daß $\text{diam}\widehat{W_i} \leq L\frac{l}{N}\sqrt{n}$ gilt.

Da aber $f(W_i)$ in der $\varepsilon\frac{l}{N}\sqrt{n}$-Umgebung von $\widehat{W_i}$ liegt, liegt es erst recht in einem "Kreiszylinder" mit "Grundkreis" $G = \overline{K(m,\ (L+\varepsilon)\frac{l}{N}\sqrt{n})} \cap H$ ($m \in \widehat{W_i}$ beliebig und H der $\widehat{W_i}$ enthaltende höchstens $n-1$-dimensionale affine Teilraum des $\mathbb{R}^n$) und Höhe $2\varepsilon\frac{l}{N}\sqrt{n}$. Dessen Volumen ist gleich (V_{n-1} Volumen der $n-1$-dimensionalen Einheitskugel)

$$V_{n-1}((L+\varepsilon)\frac{l}{N}\sqrt{n})^{n-1} 2\varepsilon\frac{l}{N}\sqrt{n} ,$$

und da genau N^n Teilwürfel vorhanden sind, liegt das Bild $f(N_f(W))$ der kritischen Punkte in einer Menge mit Lebesgue-Inhalt höchstens

$$\begin{aligned} &N^n V_{n-1}(L+\varepsilon)^{n-1} 2(\frac{l}{N}\sqrt{n})^n \varepsilon \\ &= 2V_{n-1}(L+\varepsilon)^{n-1}(l\sqrt{n})^n \varepsilon . \end{aligned}$$

Da $\varepsilon > 0$ bliebig war, ist der Hilfssatz bewiesen.

Folgerung. *Ist $f \in C^1(\Omega),\ \Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, so ist $f(N_f(\Omega))$ eine Lebesguesche Nullmenge.*

Beweis. Man wähle abzählbar viele abgeschlossene Würfel W_k mit $\Omega = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} W_k$ und beachte

$$f(N_f(\Omega)) = \bigcup_{k=1}^{\infty} f(N_f(W_k)) .$$

Aus der Folgerung ergibt sich insbesondere, daß $f(N_f(\Omega))$ keine inneren Punkte besitzt, daß also in jeder Kugel des $\mathbb{R}^n$ Punkte aus dem Komplement von $f(N_f(\Omega))$ liegen. Nachfolgende Definition ist deshalb sinnvoll.

Definition 2. *Ist $f \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$, $y \notin f(\partial\Omega)$, so wird*

$$d(f, \Omega, y) = d(f, \Omega, \widetilde{y})$$

gesetzt mit

$$\widetilde{y} \notin f(N_f(\Omega)), \quad \|y - \widetilde{y}\| < \operatorname{dist}(y, f(\partial\Omega)) =: \alpha_0 \ .$$

Bemerkungen. 1) Für festes $f \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$, Ω offen und beschränkt, ist damit d (als Funktion von y) stetig auf den zusammenhängenden Teilmengen von $\mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega)$, also insbesondere dort konstant.
2) Ist unter den Annahmen von Definition 2. $d(f, \Omega, y) \neq 0$, so gibt es $x \in \Omega$ mit $f(x) = y$: Man wähle eine gegen y konvergente Folge $(\widetilde{y}_k)$ mit $\widetilde{y}_k \notin f(N_f(\Omega))$, $\|y - \widetilde{y}_k\| < \operatorname{dist}(y, f(\partial\Omega))$. Wegen $d(f, \Omega, \widetilde{y}_k) \neq 0$ gibt es $x_k \in \Omega$ mit $f(x_k) = \widetilde{y}_k$, und die Folge (x_k) ist o.B.d.A konvergent gegen ein $x \in \overline{\Omega}$. Dann ist aber $f(x) = y$ und folglich $x \in \Omega$.

Schränkt man die zulässigen φ in der Heinzschen Formel auf rotationssymmetrische Funktionen ein, so erhält man die Darstellung des Abbildungsgrades zunächst für

$$\operatorname{supp}\varphi \subseteq K(0, \operatorname{dist}(y, f(\partial\Omega))) \setminus \overline{K(0, \varepsilon)},$$

$(0 < \varepsilon < \operatorname{dist}(y, f(\partial\Omega))$ beliebig). Dies ist der Inhalt des folgenden Satzes.

Satz 3. *Ist $f \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$, $y \notin f(\partial\Omega)$ und $\eta : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ stetig mit* $\operatorname{supp}\eta \subseteq (0, \operatorname{dist}(y, f(\partial\Omega)))$, $\int\limits_{\mathbb{R}^n} \eta(\|x\|)dx = \Omega_n \cdot \int\limits_0^\infty \eta(s)s^{n-1}ds = 1$, *so gilt*

$$d(f, \Omega, y) = \int\limits_\Omega \eta(\|f(x) - y\|) \det f'(x)dx \ .$$

(Ω_n ist der Oberflächeninhalt der n-dimensionalen Einheitskugel.)

Beweis. 1) Wir zeigen zunächst, daß das rechtsstehende Integral in der angegebenen Klasse von Funktionen η nicht von η abhängt, oder, was auf dasselbe herauskommt:

$$\textit{Aus} \ \ \alpha : [0, \infty) \to \mathbb{R} \ \textit{stetig}, \quad \operatorname{supp}\alpha \subseteq (0, \operatorname{dist}(y, f(\partial\Omega))),$$
$$\int\limits_0^\infty \alpha(s)s^{n-1}ds = 0 \ \ \textit{folgt} \ \ \int\limits_\Omega \alpha(\|f(x) - y\|) \det f'(x)dx = 0 \ .$$

Wir wollen zeigen, daß der Integrand des letzten Integrals die Divergenz einer geeigneten Vektorfunktion v ist und setzen $u_0 \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ fest durch

$$u_0(x) = \left(\frac{1}{\|x\|^n} \int\limits_0^{\|x\|} \alpha(s) s^{n-1} ds \right) \cdot x.$$

(Man beachte, daß u_0 in einer Umgebung um Null verschwindet). Es gilt $\mathrm{div} u_0(x) = \alpha(\|x\|)$, und wegen $\mathrm{supp}\alpha \subseteq (0, \mathrm{dist}(y, f(\partial\Omega)))$ und $\int\limits_0^\infty \alpha(s) s^{n-1} ds = 0$ ist $\mathrm{supp} u_0 \subseteq K(0, \mathrm{dist}(y, f(\partial\Omega)))$. Für

$$u(x) = u_0(x - y)$$

ist dann $\mathrm{supp} u \subseteq K(y, \mathrm{dist}(y, f(\partial\Omega)))$, also $\mathrm{supp} u \cap f(\partial\Omega) = \emptyset$, und nach Hilfssatz 4 existiert v mit $\mathrm{supp} v \subseteq \Omega$, $v \in C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$ und

$$\mathrm{div} v(x) = (\mathrm{div} u)(f(x)) \cdot \det f'(x) = \alpha(\|f(x) - y\|) \cdot \det f'(x) \; .$$

Somit ist der Integrand tatsächlich die Divergenz einer Funktion $v \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ mit $\mathrm{supp} v \subseteq \Omega$. Dann verschwindet aber das Integral, womit 1) bewiesen ist.

2) Nun kann für $y \notin f(N_f(\Omega))$ ein hier speziell betrachtetes η in Satz 1. verwendet werden, und wir erhalten für diesen Fall die Richtigkeit der Behauptung.

3) Für den allgemeinen Fall wählen wir

$$y_k \to y, \quad y_k \notin f(N_f(\Omega)), \quad \|y - y_k\| < \frac{1}{2} \mathrm{dist}(y, f(\partial\Omega))$$

und ein den obigen Bedingungen genügendes η_0 mit

$$\mathrm{supp}\eta_0 \subseteq \left(0, \; \frac{1}{2} \mathrm{dist}(y, f(\partial\Omega))\right) \; .$$

Dann ist wegen $\frac{1}{2} \mathrm{dist}(y, f(\partial\Omega)) \leq \mathrm{dist}(y_k, f(\partial\Omega))$

$$\begin{aligned}
d(f, \Omega, y) &= \lim_{k \to \infty} d(f, \Omega, y_k) && \text{(Satz 2., Def 2.)} \\
&= \lim_{k \to \infty} \int\limits_\Omega \eta_0(\|f(x) - y_k\|) \det f'(x) dx && \text{(2. Schritt)} \\
&= \int\limits_\Omega \lim_{k \to \infty} \eta_0(\|f(x) - y_k\|) \det f'(x) dx \\
&= \int\limits_\Omega \eta_0(\|f(x) - y\|) \det f'(x) dx \; ,
\end{aligned}$$

und erneute Anwendung von 1) liefert die volle Behauptung.

Der Grenzübergang unter dem Integralzeichen ist erlaubt, da nur über eine kompakte (von k unabhängige) Teilmenge von Ω integriert werden muß: Für $x \in \partial\Omega$ und jedes k ist

$$||f(x) - y_k|| \geq \text{dist}(y_k, f(\partial\Omega)) \geq \frac{1}{2}\,\text{dist}(y, f(\partial\Omega)) > c,$$

mit $\text{supp}\eta_0 \subseteq (0, c)$. Wegen $y_k \to y$ existiert eine Kugel $K(x, r_x)$ unabhängig von k mit $||f(\xi) - y_k|| > c$ für $\xi \in K(x, r_x) \cap \overline{\Omega}$. Endlich viele solcher Kugeln $K_1, \ldots, K_j$ überdecken $\partial\Omega$. Die Menge $C = \overline{\Omega} \setminus (K_1 \cup \cdots \cup K_j)$ ist eine kompakte Teilmenge von Ω mit $\eta_0(\|f(x) - y_k\|) = 0$ für alle k und alle $x \in \Omega \setminus C$.

Bemerkung: Mit Hilfe von Satz 3. erhält man die Gültigkeit von Satz 1. (Formel von Heinz) auch für $y \in f(N_f(\Omega))$ $(y \notin f(\partial\Omega))$.

Damit ist es möglich, die **Homotopieinvarianz** (Eigenschaft 4.) des Abbildungsgrades in der Klasse der Funktionen $C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ zu beweisen.

Satz 4. *Es sei $H : [0,1] \times \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ stetig und zweimal nach x stetig differenzierbar in $[0,1] \times \Omega$. Weiter sei $y : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ stetig, und für jedes $t \in [0,1]$ gelte $y(t) \notin H(t, \partial\Omega)$. Dann ist $d(H(t,\cdot), \Omega, y(t))$ konstant in $[0,1]$.*

Beweis. Zunächst sind die betrachteten Abbildungsgrade alle definiert und jeweils ganzzahlig, so daß nur die Stetigkeit von $d(t) = d(H(t,\cdot), \Omega, y(t))$ zu zeigen ist.

Nun ist $\alpha(t) = \text{dist}(y(t), H(t, \partial\Omega)) \geq \alpha > 0$:
Andernfalls gibt es $t_k \to t_0 \in [0,1]$, $x_k \in \partial\Omega$, $x_k \to x_0 \in \partial\Omega$ mit $\alpha(t_k) = \|y(t_k) - H(t_k, x_k)\| \to 0 = \|y(t_0) - H(t_0, x_0)\|$, was $y(t_0) \notin H(t_0, \partial\Omega)$ widerspricht. Dann ist aber

$$d(t) = \int\limits_{\Omega} \varphi(\|H(t,x) - y(t)\|)\ \text{det}H_x(t,x)dx\ ,$$

wobei z. B. $\text{supp}\varphi \subseteq \left(0, \frac{\alpha}{2}\right)$, $\Omega_n \int\limits_0^\infty \varphi(s)s^{n-1}ds = 1$ (Satz 3.) gewählt wurde.
Wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von H auf $[0,1] \times \overline{\Omega}$ gibt es zu $\frac{\alpha}{2} > 0$ ein $\delta > 0$ mit

$$\|H(t,x) - H(t,\overline{x})\| < \frac{\alpha}{2} \ \text{ für } \|x - \overline{x}\| < \delta\ .$$

Ist dann $\text{dist}(x, \partial\Omega) < \delta$, so wählen wir $\overline{x} \in \partial\Omega$ mit $\|x - \overline{x}\| < \delta$ und erhalten

$$\begin{aligned} \|H(t,x) - y(t)\| &\geq \|H(t,\overline{x}) - y(t)\| - \|H(t,x) - H(t,\overline{x})\| \\ &\geq \alpha - \frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha}{2}, \quad t \in [0,1], \end{aligned}$$

so daß $\varphi(\|H(t,x) - y(t)\|) = 0$ folgt. Das Integral braucht also nur über eine kompakte Teilmenge $\overline{\Omega_\delta}$ von Ω ausgewertet zu werden, und aufgrund der gleichmäßigen Stetigkeit des Integranden auf $[0,1] \times \overline{\Omega_\delta}$ folgt die stetige Abhängigkeit des Integrals, also die von d.
Der letzte Satz erlaubt den Beweis der Tatsache, daß zwei Funktionen schon dann gleichen Abbildungsgrad besitzen, wenn sie sich nur auf dem Rand $\partial\Omega$ nicht "allzusehr" unterscheiden:

Satz 5. *Es sei $f \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$, $y \notin f(\partial\Omega)$, $\alpha_0 = \operatorname{dist}(y, f(\partial\Omega))$ und $g \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ mit*

$$\max_{x \in \partial\Omega} \|f(x) - g(x)\| < \alpha_0 \ .$$

Dann ist $d(f,\Omega,y) = d(g,\Omega,y)$.

Beweis. Wir betrachten die spezielle Homotopie ("Verbindungsstrecke")

$$H(t,x) = (1-t)f(x) + tg(x) \ .$$

Wäre $H(t,x) = y$ für ein $x \in \partial\Omega,\ t \in [0,1]$, so wäre

$$f(x) - y = t(f(x) - g(x)) \ ,$$

also

$$\alpha_0 \leq \|f(x) - y\| = t\|f(x) - g(x)\| < \alpha_0 \ .$$

Es gilt demnach $y \notin H(t,\partial\Omega)$, und Satz 4 liefert $d(H(0,\cdot),\Omega,y) = d(H(1,\cdot), \Omega, y)$, was zu beweisen war.

Satz 5. beinhaltet insbesondere, daß der Abbildungsgrad einer Funktion $f \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ nur von den Werten von f auf $\partial\Omega$ abhängt. Um unser eigentliches Ziel, einen Abbildungsgrad für alle $f \in C(\overline{\Omega})$ zu erreichen, gibt es nun (mindestens) zwei Möglichkeiten:

1. Man überlegt sich, daß es zu jedem $f \in C(\overline{\Omega})$ ein $F \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ gibt mit $f(x) = F(x)$ auf $\partial\Omega$ und setzt für $y \notin f(\partial\Omega)$

$$d(f,\Omega,y) = d(F,\Omega,y) \ .$$

   Nach Satz 5. ist so $d(f,\Omega,y)$ eindeutig definiert (d. h. hängt nicht von der Wahl von F ab).

2. Man approximiert f "genauer als $\operatorname{dist}(y, f(\partial\Omega))$" durch $g \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ (es gibt nach dem Approximationssatz von Weierstraß sogar Polynome, die dies leisten) und setzt

$$d(f,\Omega,y) = d(g,\Omega,y) \ .$$

   Wieder ist $d(f,\Omega,y)$ unabhängig von der Wahl von g.

Der zweite Weg wird meist in der Literatur eingeschlagen (vgl. K. Deimling). Wir wollen deshalb den ersten gehen und beweisen zunächst:

Hilfssatz 6. *Ist $A \subseteq \mathbb{R}^n$ abgeschlossen, so existiert ein $r \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $r = 0$ auf A, $r > 0$ in $\mathbb{R}^n \setminus A$.*

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $A \neq \emptyset$, $\mathbb{R}^n$. Für $k \in \mathbb{N}$ sei

$$\begin{aligned} A_k &= \{x \in \mathbb{R}^n : \operatorname{dist}(x, A) \leq \frac{1}{k}\}, \\ d_k(x) &= \min\{1, \operatorname{dist}(x, A_k)\}. \end{aligned}$$

Die Funktion d_k ist stetig und beschränkt auf $\mathbb{R}^n$, nicht negativ sowie identisch 0 auf A_k.

Mit Hilfe von

$$H(x) = \begin{cases} \gamma \cdot e^{-\frac{1}{1-\|x\|^2}} & \|x\| < 1, \\ 0 & \|x\| \geq 1 \end{cases}$$

(es ist $H \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\operatorname{supp} H = \overline{K(0,1)}$, $\gamma > 0$ so gewählt, daß $\int_{\mathbb{R}^n} H(x)dx = 1$ gilt)

setzen wir

$$H_k(x) = k^n H(kx) \qquad (\operatorname{supp} H_k = \overline{K(0, \frac{1}{k})}, \quad \int_{\mathbb{R}^n} H_k(x)dx = 1)$$

und schließlich (*Friedrichssche Glättung*)

$$\widetilde{d_k}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} d_k(\xi) H_k(\xi - x) d\xi \ .$$

Das Integral braucht nur über $K(x, \frac{1}{k})$ erstreckt zu werden. Deshalb ist für $x \in A$ wegen $K(x, \frac{1}{k}) \subseteq A_k$

$$\widetilde{d_k}(x) = \int_{K(x,\frac{1}{k})} d_k(\xi) H_k(\xi - x) d\xi = 0,$$

und für $x \notin A_k$ wegen $d_k(x) > 0$

$$\widetilde{d_k}(x) = \int_{K(x,\frac{1}{k})} d_k(\xi) H_k(\xi - x) d\xi > 0$$

sowie $0 \leq \widetilde{d_k}(x) \leq 1$ auf $\mathbb{R}^n$. Schließlich ist $\widetilde{d_k} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Nun leistet

$$r(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \widetilde{d}_k(x)$$

das Verlangte. Auf A verschwinden nämlich alle $\widetilde{d}_k$, und zu $x \notin A$ gibt es $k \in \mathbb{N}$ mit $\widetilde{d}_k(x) > 0$. Ist schließlich $j = (j_1, \ldots, j_n)$ ein n-Tupel nichtnegativer ganzer Zahlen und (mit $|j| = j_1 + \cdots + j_n$)

$$D^j = \frac{\partial^{|j|}}{(\partial x_1)^{j_1} \cdots (\partial x_n)^{j_n}}$$

eine zugehörige partielle Ableitung, so gibt es zunächst Zahlen M_m mit

$$|D^j H(x)| \leq M_m \text{ für } |j| = m, \; x \in \mathbb{R}^n,$$

also

$$|D^j H_k(x)| \leq k^{n+m} M_m, \; x \in \mathbb{R}^n,$$

sodaß

$$|D^j \widetilde{d}_k(x)| \leq V_n k^{n+m} M_m, \; x \in \mathbb{R}^n,$$

(V_n das Volumen von $K(0,1)$) gilt, und damit

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} D^j \widetilde{d}_k(x)$$

gleichmäßig und absolut auf $\mathbb{R}^n$ konvergiert. Hieraus folgt $r \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Hilfssatz 7. (Fortsetzungssatz von Tietze). *Ist (X, d) ein metrischer Raum, $A \subseteq X$ abgeschlossen, $f : A \to \mathbb{R}$ stetig und beschränkt, so existiert eine stetige Funktion $F : X \to \mathbb{R}$ mit $F = f$ auf A und $\overline{F(X)} \subseteq [\inf f(A), \sup f(A)]$.*

Beweis. Der Fall $f = \text{const}$ ist trivial. Ansonsten kann durch Betrachtung von $\alpha f(x) + \beta$ mit geeigneten α, β $\inf f(A) = 1, \; \sup f(A) = 2$ angenommen werden. Wir setzen

$$F(x) \quad = \quad \begin{cases} f(x) & x \in A, \\ \frac{\inf\{f(y)d(x,y):\; y \in A\}}{\operatorname{dist}(x,A)} & x \notin A. \end{cases}$$

Wegen

$$d(x,y) \leq f(y)d(x,y) \leq 2d(x,y), \quad y \in A$$

folgt

$$\operatorname{dist}(x,A) \leq \inf\{f(y)d(x,y): \quad y \in A\} \leq 2\operatorname{dist}(x,A) \;,$$

also

$$1 \le F(x) \le 2 \quad \text{für } x \in X \; .$$

Weiter stimmt F auf A mit f überein.

Wir setzen zur Abkürzung $h(x) = \inf\{f(y)d(x,y) : y \in A\}$. Für $x, x_0 \in X$, und $y \in A$ ist

$$d(x_0, y) \;\; \le \;\; d(x_0, x) + d(x, y),$$

also (nach Multiplikation mit $f(y)$ und Übergang zum Infimum über $y \in A$)

$$h(x_0) \le h(x) + 2d(x, x_0).$$

Ebenso folgt

$$h(x) \le h(x_0) + 2d(x, x_0),$$

also

$$|h(x) - h(x_0)| \le 2d(x, x_0),$$

sodaß der Zähler von F stetig in $X \backslash A$ (sogar auf X) ist. Der Nenner ist es gleichfalls, so daß F stetig in $X \backslash A$ ist. Da F trivialerweise im Innern von A stetig ist, bleibt die Stetigkeit in $x_0 \in \partial A$ nachzuweisen.

Zu $\varepsilon > 0$ wählen wir zunächst $\delta > 0$ mit

$$|f(x) - f(x_0)| \le \varepsilon \;\; \text{für } d(x_0, x) < \delta, \quad x \in A \; ,$$

also

$$|F(x) - F(x_0)| \le \varepsilon \;\; \text{für } d(x_0, x) < \delta, \quad x \in A \; .$$

Nun sei $d(x, x_0) < \frac{\delta}{4}$, $x \notin A$. Für $y \in A \backslash K(x_0, \delta)$ ist dann

$$f(y)d(x,y) \ge d(x,y) \ge d(x_0, y) - d(x, x_0) \ge \frac{3}{4}\delta,$$

und andererseits

$$f(x_0)d(x, x_0) < \frac{\delta}{2} \; ,$$

sodaß $\inf\{f(y)d(x,y) : \; y \in A\} = \inf\{f(y)d(x,y) : \; y \in A \cap K(x_0, \delta)\}$ gilt. Wegen

$$\begin{aligned} f(x_0) - \varepsilon \le f(y) \le f(x_0) + \varepsilon \qquad & y \in A \cap K(x_0, \delta), \\ \operatorname{dist}(x, A \cap K(x_0, \delta)) = \operatorname{dist}(x, A) \quad & \text{falls } d(x, x_0) < \frac{\delta}{4} \end{aligned}$$

folgt wie oben (Multiplikation mit $d(x,y)$ und Übergang zum Infimum)

$$(f(x_0)-\varepsilon)\mathrm{dist}(x,A) \le h(x) \le (f(x_0)+\varepsilon)\mathrm{dist}(x,A) ,$$

was

$$|F(x)-f(x_0)| \le \varepsilon$$

für $d(x,x_0) < \frac{\delta}{4}$, $x \notin A$ bedeutet.

Hilfssatz 8. *Ist $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ beschränkt und offen und $\varphi \in C(\partial\Omega, \mathbb{R})$, so gibt es $\Phi \in C(\overline{\Omega}) \cap C^\infty(\Omega)$ mit $\Phi = \varphi$ auf $\partial\Omega$.*

Beweis. Wir setzen zunächst φ stetig und beschränkt auf $\mathbb{R}^n$ fort (Hilfssatz 7. (Tietze)) und "mitteln" anschließend mit Hilfe variabel gewählter Radien $r(x)$, r aus Hilfssatz 6. zu $A = \mathbb{R}^n \backslash \Omega$ gewählt. Genauer ist also etwa ($\widetilde{\varphi}$ sei die Fortsetzung)

$$\Phi(x) \quad = \quad \int\limits_{\mathbb{R}^n} \widetilde{\varphi}(\xi) \frac{1}{(r(x))^n} H\left(\frac{\xi - x}{r(x)}\right) d\xi \qquad (x \in \Omega) .$$

$$(H \text{ aus Hilfssatz 6.: } H(x) = \gamma e^{-\frac{1}{1-||x||^2}},\ (||x|| < 1),\ \int\limits_{\mathbb{R}^n} H dx = 1.)$$

Somit gilt

$$\Phi(x) \quad = \quad \int\limits_{\overline{K(x,r(x))}} \widetilde{\varphi}(\xi) \frac{1}{(r(x))^n} H\left(\frac{\xi - x}{r(x)}\right) d\xi \qquad (x \in \Omega) .$$

Zu jedem $x \in \Omega$ existiert ein $\xi(x) \in \overline{K(x,r(x))}$ mit $\Phi(x) = \widetilde{\varphi}(\xi(x))$. Daher folgt für $x_0 \in \partial\Omega$

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in \Omega}} \Phi(x) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in \Omega}} \widetilde{\varphi}(x) = \varphi(x_0) ,$$

so daß Φ durch φ stetig auf $\overline{\Omega}$ ergänzt werden kann.

Weiter ist Φ in Ω beliebig oft differenzierbar: Auf jeder Kugel, deren Abschluß noch in Ω liegt, ist nämlich $r(x) \ge \alpha_0 > 0$ und deshalb der Integrand stetig nach jedem x_i differenzierbar, sodaß unter dem Integralzeichen differenziert werden darf. Auf jede so erhaltene Ableitung ist diese Schlußweise wieder anwendbar und liefert durch vollständige Induktion die Behauptung.

Bemerkungen.

1. Durch koordinatenweise Anwendung der Hilfssätze 6. - 8. erhält man entsprechende Aussagen für vektorwertige Funktionen.

2. Ist auf $[0,1]\times\partial\Omega$ eine bzgl. (t,x) stetige Funktion φ gegeben, so liefern die Hilfssätze 6. - 8. ein $\Phi : [0,1]\times\overline{\Omega}\to\mathbb{R}$, das auf $[0,1]\times\partial\Omega$ mit φ übereinstimmt, stetig ist und dessen sämtliche Ableitungen nach x auf $[0,1]\times\Omega$ stetig (bzgl. (t,x)) sind.

3. Es gibt Φ_k der genannten Art mit $\Phi_k\to\widetilde{\varphi}$ gleichmäßig auf $\overline{\Omega}$: Man muß nur eine Folge von Funktionen r_k nach Hilfssatz 6. mit $r_k\to 0$ (gleichmäßig auf $\overline{\Omega}$) wählen und mit deren Hilfe $\widetilde{\varphi}$ glätten.

Nun sind wir in der Lage, die abschließende Definition des Abbildungsgrades für $f\in C(\overline{\Omega}),\ y\notin f(\partial\Omega)$ zu geben.

Definition 3. *Ist $\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$ beschränkt, offen und $f\in C(\overline{\Omega}),\ y\notin f(\partial\Omega)$, so wird (der Brouwersche Abbildungsgrad)*

$$d(f,\Omega,y)=d(F,\Omega,y)$$

gesetzt; dabei ist $F:\overline{\Omega}\to\mathbb{R}^n$ eine beliebige Funktion aus $C(\overline{\Omega})\cap C^\infty(\Omega)$, die auf $\partial\Omega$ mit f übereinstimmt.

Insbesondere besitzen Funktionen aus $C(\overline{\Omega})$, die auf $\partial\Omega$ übereinstimmen, gleichen Abbildungsgrad.

Satz 6. *Der Abbildungsgrad besitzt die Eigenschaften* 1) *bis* 4) *vom Anfang dieses Abschnittes, Seite 4.*

Beweis.

zu 1) Aus $f(x)=x$ auf Ω folgt $f(x)=x$ auf $\overline{\Omega}$, und f ist schon zulässig für die erste Definition des Abbildungsgrades (Definition 1, Seite 6).

zu 2) Ist $d(f,\Omega,y)$ definiert und $\neq 0$, so wählen wir eine Folge von Funktionen $F_k\in C(\overline{\Omega})\cap C^\infty(\Omega)$ mit $F_k=f$ auf $\partial\Omega$, $F_k\to f$ gleichmäßig auf $\overline{\Omega}$. Wegen $d(f,\Omega,y)=d(F_k,\Omega,y)\neq 0$ existiert zu jedem $k\in\mathbb{N}$ ein $x_k\in\Omega$ mit $F_k(x_k)=y$. Ist (x_{k_j}) eine konvergente Teilfolge mit $\overline{x}=\lim\limits_{j\to\infty}x_{k_j}$, so ist

$$\|f(\overline{x})-y\|\leq\|f(\overline{x})-f(x_{k_j})\|+\|f(x_{k_j})-\underbrace{F_{k_j}(x_{k_j})}_{=y}\|$$

für alle j, was nur für $f(\overline{x})=y$ möglich ist. Wegen $y\notin f(\partial\Omega)$ gilt $\overline{x}\in\Omega$.

zu 3) Es sei $\Omega_0 = \Omega_1 \cup \cdots \cup \Omega_k \subseteq \Omega,\ \Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset\ \ (i \neq j)$ und $\overline{\Omega} = \overline{\Omega}_1 \cup \cdots \cup \overline{\Omega}_k$. Hieraus folgt leicht

$$\overline{\Omega} = \overline{\Omega}_0 \quad \text{und} \quad \bigcup_{i=1}^{k} \partial\Omega_i = \partial\Omega_0 \supseteq \partial\Omega.$$

Nach Voraussetzung ist nun $y \notin \bigcup_i f(\partial\Omega_i) = f(\bigcup_i \partial\Omega_i) = f(\partial\Omega_0)$, sodaß $\operatorname{dist}(y, f(\partial\Omega)) \geq \operatorname{dist}(y, f(\partial\Omega_0)) = \alpha > 0$ gilt.

Wir wählen $F \in C(\overline{\Omega}) \cap C^\infty(\Omega)$ mit $F = f$ auf $\partial\Omega$,

$$\|F(x) - f(x)\| < \alpha$$

auf $\overline{\Omega}$ und $\widetilde{y} \notin F(N_F(\Omega))$ mit $\|y - \widetilde{y}\| < \alpha$. Dann ist

$$\begin{aligned} d(f, \Omega, y) &\underset{(*)}{=} d(F, \Omega, y) \underset{(**)}{=} d(F, \Omega, \widetilde{y}) \\ &\underset{(***)}{=} \sum_{i=1}^{k} d(F, \Omega_i, \widetilde{y}) \\ &\underset{(+)}{=} \sum_{i=1}^{k} d(F, \Omega_i, y) \\ &\underset{(++)}{=} \sum_{i=1}^{k} d(f, \Omega_i, y)\ . \end{aligned}$$

Dabei gelten jeweils die Gleichheitszeichen wegen

- $(*)$ $f = F$ auf $\partial\Omega$, Definition 3.
- $(**)$ $\|y - \widetilde{y}\| < \operatorname{dist}(y, F(\partial\Omega))$, Definition 2.
- $(***)$ $\widetilde{y} \notin F(\partial\Omega_i)$, Definition 1.
- $(+)$ $\|y - \widetilde{y}\| < \operatorname{dist}(y, f(\partial\Omega_0)) \leq \operatorname{dist}(y, f(\partial\Omega_i))$, Definition 2.
- $(++)$ $\|F(x) - f(x)\| < \operatorname{dist}(y, f(\partial\Omega_i))$ auf $\overline{\Omega}_i$, Def. 3 und Satz 5, angewandt auf Ω_i (wähle $F_i \in C(\overline{\Omega_i}) \cap C^\infty(\Omega_i)$ mit $f = F_i$ auf $\partial\Omega_i$).

zu 4) Folgt sofort aus Satz 4 bei Beachtung der Bemerkung 2) nach Hilfssatz 8.. Die Homotopie H braucht nur bzgl. x in Ω “C^∞” abgeändert zu werden.

Natürlich besitzt der Abbildungsgrad noch eine Reihe weiterer nützlicher Eigenschaften wie z.B.:

$$\textit{Für} \quad f,g \in C(\overline{\Omega}),\ y \notin f(\partial\Omega),\ \|f(x)-g(x)\| < \operatorname{dist}(y, f(\partial\Omega)) \ \textit{auf}\ \partial\Omega$$
$$\textit{ist} \quad d(f,\Omega,y) = d(g,\Omega,y).$$

Sie folgt in einfacher Weise aus Definition 3. und Satz 5..
Außerdem ist der Abbildungsgrad durch die Eigenschaften 1) bis 4) bestimmt, vgl. etwa Deimling, NFA.

3 Anwendungen des Brouwerschen Abbildungsgrades

Eine erste wichtige Anwendung des bisherigen ist die *Leray-Schaudersche Alternative*:

Satz. *Es sei $0 \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ (beschränkt, offen) und $f \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$. Dann hat f mindestens eine der beiden Eigenschaften:*

1) f besitzt einen Fixpunkt in $\overline{\Omega}$;

2) es existiert $x_0 \in \partial\Omega$ und $\lambda > 1$ mit $f(x_0) = \lambda x_0$.

Beweis. Gilt 2) nicht, so betrachten wir

$$H(t,x) = x - tf(x)$$

und hierzu $d(H(t,\cdot),\Omega,0)$. H ist stetig auf $[0,1]\times\overline{\Omega}$, es ist $0 \notin H(0,\partial\Omega)$, und für $1 > t > 0$ folgt aus

$$H(t,x) = 0 = x - tf(x)$$

$f(x) = \frac{1}{t}x$, sodaß wegen $\frac{1}{t} > 1$ $x \in \partial\Omega$ nicht möglich ist. Ist nun auch $f(x) \neq x$ auf $\partial\Omega$, so ist wegen $0 \in \Omega$

$$1 = d(H(0,\cdot),\Omega,0) = d(H(1,\cdot),\Omega,0),$$

so daß $x - f(x)$ eine Nullstelle in Ω, also f einen Fixpunkt hat.

Bemerkung. Die Voraussetzung $0 \in \Omega$ kann nicht weggelassen werden.

Als Spezialfall enhält dieser Satz den

Fixpunktsatz von Brouwer. *Jede stetige Selbstabbildung der abgeschlossenen Einheitskugel des $\mathbb{R}^n$ besitzt mindestens einen Fixpunkt.*

Beweis. Der Fall 2) des obigen Satzes (mit $\Omega = K(0,1)$) kann nicht eintreten, denn für $\|x\| = 1$ und $f(x) = \lambda x,\ \lambda > 1$ ist $\|f(x)\| > 1$, also $f(x) \notin K$.

Bemerkungen.

1. Aus der Leray-Schauderschen Alternative folgt, daß f schon dann einen Fixpunkt in $\overline{K(0,1)}$ besitzt, wenn $f(\partial K(0,1)) \subseteq \overline{K(0,1)}$ gilt (Satz von Rothe), oder noch allgemeiner, wenn $f(x) - x$ in keinem Randpunkt von $K(0,1)$ senkrecht nach außen zeigt.

2. Bezüglich welcher Norm hier die Einheitskugel betrachtet wird spielt offensichtlich keine Rolle.

3. Allgemeiner sei $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ein sublineares Funktional ($p(x+y) \leq p(x) + p(y)$, $p(\lambda x) = \lambda p(x)$ für $\lambda \geq 0$). Die "Einheitskugel" $K = \{x : \ p(x) \leq 1\}$ sei beschränkt. Dann besitzt jede stetige Selbstabbildung von K einen Fixpunkt. Zum Beweis braucht nur $\partial K = \{x : \ p(x) = 1\}$ bewiesen und die Leray-Schaudersche Alternative verwendet zu werden:

   Zunächst ist p stetig, denn $K(0,r) \subseteq K$ für ein $r > 0$. Ist $x_0 \in \mathbb{R}^n$ fest und $\varepsilon > 0$ so gilt für $||x - x_0|| < \delta := \varepsilon r$:

   $$|p(x) - p(x_0)| \leq \max\{p(x - x_0), p(x_0 - x)\} < \varepsilon.$$

   Damit ist $\{p(x) < 1\}$ offen und $K = \overline{\{p(x) < 1\}}$. Ist nun $f : K \to K$ stetig, $x_0 \in \partial K$, $\lambda > 1$ und $f(x_0) = \lambda x_0$, so ist $p(f(x_0)) = \lambda > 1$, ein Widerspruch. Also hat f einen Fixpunkt.

   Jede beschränkte abgeschlossene konvexe Menge $C \subseteq \mathbb{R}^n$, die 0 im Innern enthält ist Einheitskugel für ein geeignetes p (Minkowski-Funktional). Setze

   $$p(x) := \inf\{\mu > 0 : x \in \mu C\}.$$

   Dann ist p sublinear und $C = K$.

4. Ist schließlich $C \subseteq \mathbb{R}^n$ eine beliebige abgeschlossene, beschränkte, konvexe Menge und x_0 innerer Punkt von C, so ist 0 innerer Punkt von $C_{x_0} := C - x_0$, und g, definiert durch

   $$g(x) = f(x + x_0) - x_0, \quad x \in C_{x_0},$$

   bildet C_{x_0} in sich ab, falls f die Menge C in sich abbildet. Jeder Fixpunkt $\overline{x}$ von g liefert dann den Fixpunkt $\overline{x} + x_0$ von f.

Satz von Rouché. *Ist $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $f, g \in C(\overline{\Omega})$ mit $\|g(x)\| < \|f(x)\|$ auf $\partial\Omega$, so ist $d(f+g, \Omega, 0) = d(f, \Omega, 0)$.*

Beweis. Für $H(t,x) = f(x) + tg(x)$ folgt aus $x \in \partial\Omega$, $t \in [0,1]$

$$\|H(t,x)\| \geq \|f(x)\| - \|g(x)\| > 0 \ .$$

Hieraus folgt die Behauptung.

"Igelsatz". *Ist $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $0 \in \Omega$, n ungerade und $f \in C(\partial\Omega)$ mit $f(x) \neq 0$ auf $\partial\Omega$, so existiert ein $x \in \partial\Omega$ und $\lambda \neq 0$ mit $f(x) = \lambda x$.*

Beweis. Da n ungerade und $0 \in \Omega$ ist, gilt

$$d(-\mathrm{Id}, \Omega, 0) = -1 \; .$$

Durch

$$H(t,x) = t(1-t)f(x) + (2t-1)x$$

ist eine Homotopie gegeben mit $H(0,x) = -x, \; H(1,x) = x$, für die wegen $0 \in \Omega$ nicht

$$0 \notin H(t, \partial\Omega) \quad (t \in (0,1))$$

gelten kann, da sonst $d(H(t,\cdot), \Omega, 0)$ konstant wäre. Also gibt es $x_0 \in \partial\Omega, \; 0 < t < 1$ mit

$$t(1-t)f(x_0) + (2t-1)x_0 = 0 \; ,$$

und wegen $f(x_0) \neq 0$ ist $2t - 1 \neq 0$. Setze $\lambda = -\frac{2t-1}{t(1-t)}$.
Man mache sich die Bezeichnung "Igelsatz" am Beispiel $\Omega = K(0,1)$ klar!

4 Der Abbildungsgrad in endlich-dimensionalen normierten Räumen

Es sei $(E, \|\cdot\|)$ ein endlich-dimensionaler normierter Raum und $b_1, \dots, b_n$ eine Basis in E. Vermöge

$$Lx = (\xi_1, \dots, \xi_n) \quad \text{für } x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i b_i$$

ist dann ein linearer Homöomorphismus von E auf $\mathbb{R}^n$ gegeben.

Ist $\Omega \subseteq E$ offen und beschränkt und $f : \overline{\Omega} \to E$ stetig, so ist

$$\begin{aligned} \widetilde{\Omega} &= L(\Omega) \subseteq \mathbb{R}^n \quad \text{offen, beschränkt,} \\ \widetilde{f} &= L \circ f \circ L^{-1} \in C(\overline{\widetilde{\Omega}}, \mathbb{R}^n), \end{aligned}$$

und für $y \notin f(\partial\Omega)$ gilt $Ly \notin \widetilde{f}(\partial\widetilde{\Omega})$ (sonst wäre $Ly = \widetilde{f}(\widetilde{x}) = L(f(\underbrace{L^{-1}\widetilde{x}}_{\in \partial\Omega}))$, also $y \in f(\partial\Omega)$).

Deshalb ist $d(\widetilde{f}, \widetilde{\Omega}, \widetilde{y})$ (mit $\widetilde{y} := Ly$) definiert und von der gewählten Basis $b_1, \dots, b_n$ in E unabhängig: Für eine zweite Basis $a_1, \dots, a_n$ erhält man gemäß obigem Vorgehen $\widetilde{\widetilde{\Omega}}, \widetilde{\widetilde{f}}, \widetilde{\widetilde{y}}$, die durch eine reguläre Matrixtransformation aus $\widetilde{\Omega}, \widetilde{f}, \widetilde{y}$ hervorgehen. Durch

$$\begin{array}{ccc} (\xi_1, \ldots \xi_n) & \xrightarrow{L^{-1}} x \xrightarrow{M} & (\eta_1, \ldots, \eta_n) \\ (\text{bzgl. } b_i) & & (\text{bzgl. } a_i) \end{array}$$

ist ein linearer Homöomorphismus A von $\mathbb{R}^n$ auf sich definiert, der $\widetilde{\Omega}$ auf $\widetilde{\widetilde{\Omega}}$, $\widetilde{y}$ auf $\widetilde{\widetilde{y}}$ abbildet und $\widetilde{f}$ mit $\widetilde{\widetilde{f}}$ nach der Formel

$$L^{-1}\widetilde{f}(\xi_1, \ldots, \xi_n) = f(x) = M^{-1}\widetilde{\widetilde{f}}(\eta_1, \ldots, \eta_n)$$

miteinander verknüpft. Also ist wegen $(A = ML^{-1})$

$$\begin{aligned} \widetilde{\widetilde{f}}(\eta_1, \ldots, \eta_n) &= ML^{-1}\widetilde{f}(\xi_1, \ldots, \xi_n) \\ &= (ML^{-1} \circ \widetilde{f} \circ LM^{-1})(\eta_1, \ldots, \eta_n) \; . \end{aligned}$$

Für $f \in C^k(\Omega)$ sind $\widetilde{f} \in C^k(\widetilde{\Omega}), \widetilde{\widetilde{f}} \in C^k(\widetilde{\widetilde{\Omega}})$, und

$$\widetilde{\widetilde{f}}\,' = ML^{-1}\widetilde{f}'LM^{-1} \; ,$$

also $\det\widetilde{\widetilde{f}}\,' = \det\widetilde{f}'$. Dann stimmen aber $d(\widetilde{\Omega}, \widetilde{f}, \widetilde{y})$ und $d(\widetilde{\widetilde{\Omega}}, \widetilde{\widetilde{f}}, \widetilde{\widetilde{y}})$ überein, und es ist sinnvoll

$$d(f, \Omega, y) = d(\widetilde{f}, \widetilde{\Omega}, \widetilde{y})$$

zu setzen. d heißt Brouwerscher Abbildungsgrad in E und besitzt die Eigenschaften 1) bis 4) aus 2.

Ist nun $E_0 \subseteq E$ ein linearer Teilraum, $\Omega \subseteq E$ offen und beschränkt mit $E_0 \cap \Omega \neq \emptyset$ sowie $f : \overline{\Omega} \to E$ stetig, $f(E_0 \cap \Omega) \subseteq E_0$ und $y \notin f(\partial\Omega),\ y \in E_0$, so hätte man gerne $d(f, \Omega, y) = d(f|_{\overline{E_0 \cap \Omega}},\ E_0 \cap \Omega, y)$. Daß dies nicht immer richtig sein kann, liegt auf der Hand. (Man betrachte etwa in $E = \mathbb{C}$, $E_0 = \mathbb{R}$ die Funktion $f(z) = z^2$ auf $\overline{K(0,1)}$ zu $y = 0$). Ist jedoch $f = \mathrm{Id} - g$ mit $g \in C(\overline{\Omega}, E_0)$, sodaß insbesondere aus $x \notin E_0$ auch $f(x) \notin E_0$ folgt, gilt tatsächlich diese Gleichheit:

Wir denken uns eine Basis in E_0 fixiert, erweitern diese zu einer Basis von E und numerieren so, daß die $b_1, \ldots, b_m$ den Teilraum E_0 aufspannen ($\dim E = n$, $\dim E_0 = m < n$). Dann wird in der natürlichen Homöomorphie von E auf den $\mathbb{R}^n$ der Teilraum E_0 auf $\mathbb{R}^m$ abgebildet, der mit $\{x : x_{m+1} = \cdots = x_n = 0\} \subseteq \mathbb{R}^n$ identifiziert werden kann.

Es kann also tatsächlich $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $\Omega \cap \mathbb{R}^m \neq \emptyset$, $f = \mathrm{Id} - g$ mit $g(\overline{\Omega}) \subseteq \mathbb{R}^m$ und $y \notin f(\partial\Omega)$ angenommen werden.

Setzt man $\Omega_m = \mathbb{R}^m \cap \Omega$, $f_m = f\big|_{\overline{\Omega_m}}$ und ist $f \in C^1(\Omega)$, $x \in \Omega_m$ so ist

$$f'(x) = \begin{pmatrix} f'_m(x) & R(x) \\ 0 & \mathrm{Id}_{n-m} \end{pmatrix} \ , \quad R = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_{m+1}} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_{m+1}} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix},$$

und nach dem Determinanten-Entwicklungssatz ist

$$\det{}_n f'(x) = \det{}_m f'_m(x) \ . \qquad (*)$$

Wegen $f^{-1}(y) = f_m^{-1}(y)$ für $y \in \mathbb{R}^m$ folgt hieraus die Behauptung für $f \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$, $y \notin f(N_f(\Omega))$. Aus $(*)$ folgt weiter

$$N_f(\Omega) \cap \Omega_m = N_{f_m}(\Omega_m) \ ,$$

so daß $\mathbb{R}^m \ni y^* \notin f_m(N_{f_m}(\Omega_m))$ auch $y^* \notin f(N_f(\Omega))$ nach sich zieht. Also ist für geeignet gewähltes $y^* \in \mathbb{R}^m$

$$d(f, \Omega, y) = d(f, \Omega, y^*) = d(f_m, \Omega_m, y^*) = d(f_m, \Omega_m, y) \ ,$$

so daß die Behauptung auch für $y \in f(N_f(\Omega))$ gilt. Für $f \in C(\overline{\Omega})$ beweist man die Behauptung schließlich, indem man g in Ω "C^∞" abändert.

5 Endlich-dimensionale und kompakte Abbildungen

In diesem Abschnitt seien E, F normierte Räume.

Definition. Es sei $M \subseteq E$ und $g: \ M \to F$. g heißt
endlich-dimensional, falls $g(M)$ in einem endlich-dimensionalen Teilraum von F liegt,
kompakt, falls $\overline{g(A)}$ kompakt ist für jede beschränkte Teilmenge A von M.

Bemerkung. Eine endlich-dimensionale Funktion f braucht nicht kompakt zu sein und umgekehrt. Sie ist kompakt genau dann, wenn sie beschränkte Mengen in beschränkte Mengen abbildet.

Satz. *Es seien E, F normiert und $M \subseteq E$. Dann gilt:*

a) *Ist $M \subseteq E$ beschränkt und $g : M \to F$ kompakt, so existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ eine endlich-dimensionale kompakte Funktion g_ε mit $\|g(x) - g_\varepsilon(x)\| < \varepsilon$ für alle $x \in M$ (Schauder). Ist g stetig, so können die g_ε stetig gewählt werden.*

b) *Ist F vollständig, $g_n : M \to F$ eine Folge kompakter Abbildungen mit*

$$g(x) = \lim_{n\to\infty} g_n(x)$$

gleichmäßig auf jeder beschränkten Teilmenge von M, so ist g kompakt. Insbesondere gilt die Umkehrung von a).

c) *Ist $E = F$ und $f = \mathrm{Id} - g$, $g : M \to F$ kompakt und stetig, so sind die Bilder beschränkter und abgeschlossener Teilmengen von M abgeschlossen. Ist zusätzlich M abgeschlossen und beschränkt und $K \subseteq E$ kompakt, so ist $f^{-1}(K) \cap M$ kompakt.*

Beweis.

a) Da $\overline{g(M)}$ kompakt ist, existieren zu $\varepsilon > 0$ endlich viele Punkte $x_i \in M$ mit

$$\overline{g(M)} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} K(g(x_i),\ \varepsilon)\ .$$

Wir setzen

$$\phi_i(y) = \max\{0,\ \varepsilon - \|y - g(x_i)\|\}$$

und hiermit

$$\lambda_i(y) = \frac{\phi_i(y)}{\sum\limits_{j=1}^{n} \phi_j(y)}\ , \quad y \in \bigcup_{i=1}^{n} K(g(x_i),\ \varepsilon)\ .$$

(Man beachte, daß auf $\overline{g(M)}$ die Summe im Nenner stets positiv ist!)

Schließlich setzen wir

$$g_\varepsilon(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(g(x)) \cdot g(x_i)\ .$$

g_ε ist auf M definiert (und stetig, falls g dies ist), $g_\varepsilon(M)$ liegt in dem von den $g(x_i)$ erzeugten höchstens n-dimensionalen Teilraum von F und ist beschränkt. Weiter ist

$$\begin{aligned}
\|g(x) - g_\varepsilon(x)\| &= \left\|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(g(x))(g(x) - g(x_i))\right\| \\
&\le \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(g(x))\ \|g(x) - g(x_i)\|
\end{aligned}$$

und für die i, für die $\|g(x) - g(x_i)\| \geq \varepsilon$ ist, ist $\lambda_i(g(x)) = 0$. Also ist $\|g(x) - g_\varepsilon(x)\| < \varepsilon,\ x \in M$.

b) Es sei $A \subseteq M$ eine beschränkte Teilmenge von M und $\varepsilon > 0$. Wählt man $n \in \mathbb{N}$ so, daß

$$\|g_n(x) - g(x)\| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für } x \in A$$

gilt, und endlich viele Punkte $y_1, \dots, y_k \in g_n(A)$ mit

$$g_n(A) \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} K(y_i, \frac{\varepsilon}{2}),$$

so folgt

$$g(A) \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} K(y_i, \varepsilon).$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war ist $g(A)$ totalbeschränkt, also $\overline{g(A)}$ kompakt.

c) Es sei $f = \mathrm{Id} - g$, g kompakt und $A \subseteq M$ beschränkt und abgeschlossen. Ist (y_n) eine in E konvergente Folge von Elementen aus $f(A)$, also

$$y_n = x_n - g(x_n), \quad x_n \in A\ ,$$

so besitzt $(g(x_n))$ eine konvergente Teilfolge $(g(x_{n_k}))$. Dann folgt aus $y_n \to y$ sicher $y_{n_k} \to y$, so daß (x_{n_k}) konvergiert gegen ein $x \in A$. Aus der Stetigkeit folgt dann $y = x - g(x) \in f(A)$. Ist schließlich M abgeschlossen und beschränkt, $K \subseteq E$ kompakt und $x_n \in f^{-1}(K) \cap M$, so ist

$$f(x_n) = x_n - g(x_n) \in K\ ;$$

die Folge $(f(x_n))$ besitzt eine konvergente Teilfolge, kann also o.B.d.A. als konvergent angenommen werden. Da $(g(x_n))$ ihrerseits eine konvergente Teilfolge $(g(x_{n_k}))$ besitzt, ist die Folge (x_{n_k}) konvergent, $x_{n_k} \to x \in M$ (abgeschlossen). Wegen $f(x) = \lim f(x_{n_k}) \in K$ ist $x \in f^{-1}(K) \cap M$, also diese Menge kompakt.

6 Der Leray-Schaudersche Abbildungsgrad

Es sei E reeller, normierter Raum, $\Omega \subseteq E$ offen und beschränkt, $f = \mathrm{Id} - g$, wobei g auf $\overline{\Omega}$ stetig und kompakt ist und es gelte $y \notin f(\partial\Omega)$. Dann ist $f(\partial\Omega)$ abgeschlossen, also $\mathrm{dist}(y, f(\partial\Omega)) = \alpha > 0$.

Zu g gibt es nach dem Satz aus 5. eine endlich-dimensionale, stetige, kompakte Funktion g_α mit

$$\sup_{x\in\overline{\Omega}} \|g(x) - g_\alpha(x)\| < \alpha \ .$$

Wir wählen nun einen endlich-dimensionalen Teilraum E_1 von E, der $g_\alpha(\overline{\Omega})$ und y enthält, Ω schneidet, und setzen $\Omega_1 = E_1 \cap \Omega \neq \emptyset$. Ω_1 ist offen und beschränkt in E_1, es gilt $\overline{\Omega}_1 \subseteq E_1 \cap \overline{\Omega}$, $\partial\Omega_1 \subseteq E_1 \cap \partial\Omega$, und mit $f_\alpha = \mathrm{Id} - g_\alpha$ folgt

$$\begin{aligned} &f_\alpha(\overline{\Omega}_1) \subseteq f_\alpha(E_1 \cap \overline{\Omega}) \subseteq E_1, \\ &y \notin f_\alpha(\partial\Omega_1) \end{aligned}$$

(sonst wäre $y = x_0 - g_\alpha(x_0)$, $x_0 \in \partial\Omega_1 \subseteq E_1 \cap \partial\Omega$, also $\|f(x_0) - y\| = \|x_0 - g(x_0) - y\| = \|g(x_0) - g_\alpha(x_0)\| < \alpha$ im Widerspruch zur Definition von α).

Der Brouwersche Abbildungsgrad

$$d(f_\alpha, \Omega_1, y)$$

ist also definiert und von der speziellen Wahl von g_α und E_1 unabhängig, solange die Bedingungen

$$\sup_{x\in\overline{\Omega}} \|g(x) - g_\alpha(x)\| < \alpha,\ g_\alpha(\overline{\Omega}) \subseteq E_1,\ y \in E_1,\ \Omega \cap E_1 \neq \emptyset$$

erfüllt sind.

Beweis. Es sei

$$\begin{aligned} &\widetilde{g_\alpha} : \overline{\Omega} \to \widetilde{E_1},\ \sup_{x\in\overline{\Omega}} \|g(x) - \widetilde{g_\alpha}(x)\| < \alpha \ , \\ &y \in \widetilde{E_1},\ \Omega \cap \widetilde{E_1} \neq \emptyset \ . \end{aligned}$$

Wir setzen $E_0 =$ lin. Hülle von $E_1 \cup \widetilde{E_1}$ und erhalten aus den Überlegungen in 4. sofort

$$\begin{aligned} d(\mathrm{Id} - \widetilde{g_\alpha}, \Omega \cap E_0, y) &= d(\mathrm{Id} - \widetilde{g_\alpha}, \Omega \cap \widetilde{E_1}, y) \ , \\ d(\mathrm{Id} - g_\alpha, \Omega \cap E_0, y) &= d(\mathrm{Id} - g_\alpha, \Omega \cap E_1, y) \ . \end{aligned}$$

In E_0 sind aber $\mathrm{Id} - g_\alpha$ und $\mathrm{Id} - \widetilde{g_\alpha}$ homotop: Mit

$$H(t,x) = t(x - g_\alpha(x)) + (1-t)(x - \widetilde{g_\alpha}(x)) \ ,$$

folgt für $x \in \partial(\Omega \cap E_0) \subseteq \partial\Omega$

$$\|f(x) - H(t,x)\| = \|t(f(x) - (x - g_\alpha(x))) + (1-t)(f(x) - (x - \widetilde{g_\alpha}(x))\| < \alpha \ ,$$

also $H(t,x) \neq y$ für $(t,x) \in [0,1] \times \partial(\Omega \cap E_0)$.

Also ist tatsächlich $d(\mathrm{Id} - \widetilde{g_\alpha}, \Omega \cap \widetilde{E_1}, y) = d(\mathrm{Id} - g_\alpha, \Omega_1 \cap E_1, y)$.

Definition. Ist E reell, normiert, $\Omega \subseteq E$ offen, beschränkt, $f = \mathrm{Id} - g, \ \ g : \overline{\Omega} \to E$ stetig, kompakt, $y \notin f(\partial\Omega)$ so heißt

$$d(f, \Omega, y) = d(\mathrm{Id} - g_\alpha, \Omega \cap E_1, y)$$

mit

$$\dim E_1 < \infty, \Omega \cap E_1 \neq \emptyset, y \in E_1, g_\alpha(\overline{\Omega}) \subseteq E_1, \sup_{x \in \overline{\Omega}} \|g(x) - g_\alpha(x)\| < \alpha$$

der Leray-Schaudersche Abbildungsgrad von f bzgl. Ω und y.

7 Eigenschaften des Leray-Schauderschen Abbildungsgrades

Es sei E reeller, normierter Raum, $\Omega \subseteq E$ offen und beschränkt. Dann hat der L-S-Grad folgende Eigenschaften:

1. $d(\mathrm{Id}, \Omega, y) = \begin{cases} 1 & \text{für } y \in \Omega \\ 0 & \text{für } y \notin \overline{\Omega} \end{cases}$

2. Ist $f = \mathrm{Id} - g, \ g : \overline{\Omega} \to E$ kompakt und stetig und $d(f, \Omega, y) \neq 0$, so existiert $x \in \Omega$ mit $f(x) = y$.

3. Sind Ω_i offen, $\Omega_i \subseteq \Omega, \ i = 1, \ldots k, \ \Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset \ (i \neq j), \ \bigcup_{i=1}^{k} \overline{\Omega}_i = \overline{\Omega}$ und $y \notin f(\partial\Omega_i) \ (i = 1, \ldots, k)$, so gilt (mit $f = \mathrm{Id} - g, \ g$ kompakt, stetig)
$$d(f, \Omega, y) = \sum_{i=1}^{k} d(f, \Omega_i, y) \ .$$

4. Ist $h : [0,1] \times \overline{\Omega} \to E$ kompakt und stetig (als Abbildung einer Teilmenge von $\mathbb{R} \times E$ nach E), $y : [0,1] \to E$ stetig und $H = \mathrm{Id} - h, \ y(t) \notin H(t, \partial\Omega)$, so ist $d(H(t,\cdot), \Omega, y(t))$ konstant.

Beweis.

1. Es ist $g = 0$ selbst schon endlich-dimensional. Im Fall $y \in \Omega$ kann deshalb $E_1 = \{ty : t \in \mathbb{R}\}$ gewählt werden, und es ist mit $\Omega_1 = \Omega \cap E_1$
$$d(\mathrm{Id}, \Omega, y) = d(\mathrm{Id}, \Omega_1, y) = 1 \ \ \text{wegen } y \in \Omega_1 \ .$$
Ist dagegen $y \notin \overline{\Omega}$, so wähle man $x_0 \in \Omega$ und $E_1 = \text{lin. Hülle}\,\{x_0, y\}, \ \Omega_1 = \Omega \cap E_1$. Dann ist $y \notin \overline{\Omega_1}$, somit ist
$$d(\mathrm{Id}, \Omega, y) = d(\mathrm{Id}, \Omega_1, y) = 0 \ .$$

2. Wir setzen $\alpha = \operatorname{dist}(y, f(\partial\Omega))$ und wählen eine Folge von endlich-dimensionalen, kompakten g_n mit $\alpha > \sup\limits_{x\in\overline{\Omega}} \|g(x) - g_n(x)\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Zu jedem n wählen wir $E_n \subseteq E,\ \dim E_n < \infty,\ g_n(\overline{\Omega}) \subseteq E_n,\ y \in E_n,\ E_n \cap \Omega \neq \emptyset$. Dann ist jeweils

$$d(\mathrm{Id} - g_n, \Omega \cap E_n, y) = d(\mathrm{Id} - g, \Omega, y) \neq 0 \ ,$$

so daß jeweils $x_n \in \Omega \cap E_n$ existiert mit

$$x_n - g_n(x_n) = y \ .$$

Hieraus folgt

$$\|f(x_n) - y\| = \|g_n(x_n) - g(x_n)\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \ ,$$

so daß $y \in f(\overline{\Omega})$ gilt wegen der Abgeschlossenheit dieser Menge (vgl. 5.). Wegen $y \notin f(\partial\Omega)$ gibt es also $x \in \Omega$ mit $y = f(x)$.

3. Wegen $\partial\Omega \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{k} \partial\Omega_i$ ist $y \notin f(\partial\Omega)$, und wir wählen zunächst $g_\alpha : \overline{\Omega} \to E$ kompakt und endlich-dimensional mit

$$\sup_{x\in\overline{\Omega}} \|g(x) - g_\alpha(x)\| < \min_i \operatorname{dist}(y, f(\partial\Omega_i)) =: \alpha.$$

Alsdann wählen wir $E_1 \subseteq E,\ \dim E_1 < \infty$ mit $g_\alpha(\overline{\Omega}) \subseteq E_1,\ E_1 \cap \Omega_i \neq \emptyset,\ i = 1, \ldots, k,\ y \in E_1$. Dann ist

$$d(f, \Omega, y) = d(\mathrm{Id} - g_\alpha, \Omega \cap E_1, y) \ .$$

Die Menge X der Lösungen von $x - g_\alpha(x) = y$ in $\overline{\Omega}$ ist kompakt (also abgeschlossen) und liegt offensichtlich in $\Omega \cap E_1$ (wegen $x = y + g_\alpha(x) \in E_1$) und sogar in $\bigcup\limits_{i=1}^{k} \Omega_i \cap E_1 \subseteq \Omega \cap E_1$: wäre nämlich $x \notin \bigcup\limits_{i=1}^{k} \Omega_i \cap E_1$, so wegen $\overline{\Omega} = \bigcup\limits_{i=1}^{k} \overline{\Omega}_i$ doch sicher in einem $\overline{\Omega}_i$, also in $\partial\Omega_i$ (bzgl. E), was wegen $\alpha > \|g(x) - g_\alpha(x)\| = \|g(x) - x + y\| \geq \alpha$ nicht möglich ist. Also ist weiter

$$\begin{aligned} d(f, \Omega, y) &= d(\mathrm{Id} - g_\alpha, \bigcup_{i=1}^{k} (\Omega_i \cap E_1), y) \\ &= \sum_{i=1}^{k} d(\mathrm{Id} - g_\alpha, \Omega_i \cap E_1, y) \\ &= \sum_{i=1}^{k} d(\mathrm{Id} - g, \Omega_i, y) \ . \end{aligned}$$

(Dabei wurde $(\Omega_i \cap E_1) \cap (\Omega_j \cap E_1) = \emptyset$ $(i \neq j)$ und die Additivität des Abbildungsgrades in endlich-dimensionalen Vektorräumen benutzt.)

4. Es sei also $H = \mathrm{Id} - h,\ h : [0,1] \times \overline{\Omega} \to E$ kompakt und stetig, $y : [0,1] \to E$ stetig und $y(t) \notin H(t, \partial\Omega)$. Dann existiert $\alpha > 0$ mit $\mathrm{dist}(y(t), H(t, \partial\Omega)) \geq \alpha > 0$ für $t \in [0,1]$ (sonst existiert $t_n \to t_0,\ x_n \in \partial\Omega$ mit $y(t_n) - x_n + h(t_n, x_n) \to 0$. Dann gibt es eine Teilfolge $x_{n_k} \to x_0 \in \partial\Omega,\ y(t_0) - x_0 + h(t_0, x_0) = 0$ $W!$). Nun gibt es nach 5. ein $h_\alpha : [0,1] \times \overline{\Omega} \to E_1$ stetig, $\dim E_1 < \infty$ mit $\sup\limits_{(t,x) \in [0,1] \times \overline{\Omega}} \|h_\alpha(t,x) - h(t,x)\| < \frac{\alpha}{2}$ und ein endlich- dimensionales $y_\alpha : [0,1] \to E_2$ mit $\|y_\alpha(t) - y(t)\| < \frac{\alpha}{2}$ $(t \in [0,1])$.

   Ist $E_3 =$ lin. Hülle von $\{E_1, E_2, w\}$ ($w \in \Omega$ fest), dann

$$\begin{aligned} d(H(t,\cdot), \Omega, y(t)) &= d(H(t,\cdot), \Omega, y_\alpha(t)) \\ &= d(\mathrm{Id} - h_\alpha(t,\cdot), \Omega \cap E_3, y_\alpha(t)) \\ &= \text{const.} \end{aligned}$$

Aus diesen Eigenschaften folgen wie früher

Leray-Schaudersche Alternative. Ist $0 \in \Omega \subseteq E$, $g : \overline{\Omega} \to E$ kompakt und stetig, so besitzt g wenigstens eine der beiden Eigenschaften:

1. g besitzt einen Fixpunkt in $\overline{\Omega}$.

2. Es existiert $x_0 \in \partial\Omega$ und $\lambda > 1$ mit $g(x_0) = \lambda x_0$.

Fixpunktsatz von Schauder. Ist E reell, normiert und $g : \overline{K(0,1)} \to \overline{K(0,1)}$ kompakt und stetig, so besitzt g mindestens einen Fixpunkt.

Weiter hängt der Abbildungsgrad nur von den Werten von f auf $\partial\Omega$ ab, und es ist

$$d(f, \Omega, y) = d(f, \Omega \backslash A, y)\ ,$$

falls $A \subseteq \overline{\Omega}$ abgeschlossen ist und $f(x) \neq y$ für $x \in A$ gilt.

8 Ungerade Abbildungen

Es seien E, F Vektorräume, $\Omega \subseteq E$ und $f : \Omega \to F$ eine Abbildung.
Ω heißt *symmetrisch (zum Nullpunkt)*, wenn $-\Omega = \Omega$ ist. f heißt *ungerade*, wenn Ω symmetrisch ist und wenn $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in \Omega$ gilt. Z. B. ist jede lineare Abbildung ungerade bzgl. jeder symmetrischen Menge Ω. Ein wichtiges Hilfsmittel bei der Behandlung ungerader Abbildungen ist der

Hilfssatz. Es seien $K, Q \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt mit $K \subseteq Q$. Ist $f : K \to \mathbb{R}^m$ $(m > n)$ stetig und $0 \notin f(K)$, so existiert eine stetige Fortsetzung $F : Q \to \mathbb{R}^m$ von f mit $0 \notin F(Q)$.

Beweis. O.B.d.A. $||\cdot||$ die Euklid Norm und $Q = \overline{K(0,R)} \subseteq \mathbb{R}^n$ eine abgeschlossene Kugel, die K im Innern enthält, und wir identifizieren $\mathbb{R}^n$ mit dem Teilraum von $\mathbb{R}^m$, der aus den $(x_1, \ldots, x_n,\ 0, \ldots, 0)$ besteht. Wir setzen

$$\alpha = \operatorname{dist}(0, f(K)) \ .$$

Zunächst gibt es eine Funktion $g \in C(K(0,R+1), \mathbb{R}^m)$ mit $g = f$ auf K, die in $K(0,R+1)\backslash K$ beliebig oft differenzierbar ist, und g kann durch

$$G(x_1, \ldots, x_m) := g(x_1, \ldots, x_n)$$

auf $K_m(0,R+1) \subseteq \mathbb{R}^m$ fortgesetzt werden.
Wegen $N_G(K(0,R+1)\backslash K) = K(0,R+1)\backslash K$ ist nach dem Lemma von Sard $G(K(0,R+1)\backslash K) = g(K(0,R+1)\backslash K)$ eine m-dimensionale Nullmenge, so daß insbesondere $y_0 \in \mathbb{R}^m,\ \|y_0\| < \frac{\alpha}{4}$ existiert mit $y_0 \notin g(\overline{K(0,R)})$.

Für $\widetilde{g} := g - y_0$ ist also $0 \notin \widetilde{g}(\overline{K(0,R)})$, und auf K gilt sogar

$$\|\widetilde{g}(x)\| = \|g(x) - y_0\| = \|f(x) - y_0\| \geq \|f(x)\| - \|y_0\| \geq \alpha - \frac{\alpha}{4} = \frac{3}{4}\alpha \ .$$

Durch "Streckung" von $\widetilde{g}$ mit Hilfe von

$$\varphi(t) \quad = \quad \begin{cases} 1 & t \geq \frac{3\alpha}{4} \\ \frac{4}{3\alpha} \cdot t & 0 \leq t \leq \frac{3\alpha}{4} \end{cases} \quad ,$$

also indem

$$g^*(x) = \frac{\widetilde{g}(x)}{\varphi(\|\widetilde{g}(x)\|)} \qquad \text{(es ist } \widetilde{g}(x) \neq 0\text{)}$$

gesetzt wird, kann

$$\|g^*(x)\| \geq \frac{\|\widetilde{g}(x)\|}{\frac{4}{3\alpha}\|\widetilde{g}(x)\|} = \frac{3\alpha}{4}$$

auf $\overline{K(0,R)}$ erreicht werden mit $g^*(x) = \widetilde{g}(x)$ auf K.

Schließlich setzen wir

$$F(x) := g^*(x) + y_0 \ .$$

F ist stetig, es gilt für $x \in K : F(x) = \widetilde{g}(x) + y_0 = g(x) = f(x)$, und auf $\overline{K(0,R)}$ ist

$$\|F(x)\| = \|g^*(x) + y_0\| \geq \|g^*(x)\| - \|y_0\| \geq \frac{3\alpha}{4} - \frac{\alpha}{4} = \frac{\alpha}{2} \ .$$

Bemerkung. Indem man φ mit ähnlichen Eigenschaften, aber aus $C^\infty(\mathbb{R}_+)$ wählt, erhält man sogar $F \in C^\infty(K(0,R)\backslash K)$.

Außerdem sei bemerkt, daß man ohne den Satz von Dugundji ausgekommen ist.

Satz. Es sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt, symmetrisch, mit $0 \notin \overline{\Omega}$ und $f : \partial\Omega \to \mathbb{R}^m$ $(m > n)$ stetig und ungerade mit $0 \notin f(\partial\Omega)$. Dann gibt es eine stetige, ungerade Fortsetzung F von f auf $\overline{\Omega}$ mit $0 \notin F(\overline{\Omega})$.

Beweis. (Durch Induktion nach n.)
$\mathbf{n = 1}$: Es ist $\Omega = \Omega_+ \cup (-\Omega_+)$ mit $\Omega_+ = \mathbb{R}_+ \cap \Omega$, $\overline{\Omega} = \overline{\Omega}_+ \cup (-\overline{\Omega}_+)$, $\partial\Omega = \partial\Omega_+ \cup (-\partial\Omega_+)$. Wegen $0 \notin \overline{\Omega}$ ist $\partial\Omega_+ \subseteq (0, R)$ (R geeignet gewählt), und der Hilfssatz liefert eine Fortsetzung F_+ von $f/_{\partial\Omega_+}$ auf $\overline{\Omega}_+$ mit $0 \notin F_+(\overline{\Omega}_+)$. Wegen $0 \notin \overline{\Omega}$ ist die Vereinigung $\overline{\Omega}_+ \cup (-\overline{\Omega}_+)$ disjunkt und deshalb

$$F(x) \quad = \quad \begin{cases} F_+(x) & x \in \overline{\Omega}_+ \\ -F_+(-x) & x \in -\overline{\Omega}_+ \end{cases}$$

wohl definiert und eine stetige ungerade Fortsetzung von f auf $\overline{\Omega}$ mit $0 \notin F(\overline{\Omega})$.

Nun sei die Behauptung für $n-1$ schon bewiesen und $n < m$. Wir zerlegen

$$\Omega = \Omega_+ \cup -\Omega_+ \cup \Omega_0$$

mit $\Omega_+ := \{x \in \Omega : x_n > 0\}$, $\Omega_0 = \{x \in \Omega : x_n = 0\}$.
Ist $\Omega_0 = \emptyset$, so wählen wir in obigem Hilfssatz $K = \partial\Omega$ und setzen f zunächst stetig und nullstellenfrei auf $\partial\Omega \cup \Omega_+$ fort, etwa zu $\widetilde{f}$. Danach setzen wir

$$F(x) = \begin{cases} \widetilde{f}(x) & x \in \partial\Omega \cup \Omega_+ \\ -\widetilde{f}(-x) & x \in -\Omega_+ \end{cases} \quad .$$

Ist $\Omega_0 \neq \emptyset$, so ist Ω_0 offen im $\mathbb{R}^{n-1}$ und $f/_{\partial\Omega_0}$ ($\partial\Omega_0$ bzgl. $\mathbb{R}^{n-1}$, ebenso $\overline{\Omega}_0$) ist ungerade und $\neq 0$. Wir erhalten dann zunächst aus der Induktionsannahme ein $\widetilde{f} : \overline{\Omega}_0 \to \mathbb{R}^m$ stetig, $0 \notin \widetilde{f}(\overline{\Omega}_0)$, $\widetilde{f}$ ungerade. Dann ist f^* definiert durch

$$f^*(x) = \begin{cases} \widetilde{f}(x) & x \in \overline{\Omega}_0 \\ f(x) & x \in \partial\Omega \end{cases} \quad ,$$

nullstellenfrei und ungerade auf der symmetrischen Menge $\overline{\Omega}_0 \cup \partial\Omega$. Man kann dann nach dem Hilfssatz f^* nullstellenfrei auf $\overline{\Omega}_0 \cup \partial\Omega \cup \Omega_+$ fortsetzen und erhält durch

$$F(x) = \begin{cases} f^*(x) & x \in \overline{\Omega}_0 \cup \partial\Omega \cup \Omega_+ \\ -f^*(-x) & x \in -\Omega_+ \end{cases}$$

das gewünschte.

Bemerkung. Im Beweis haben wir des öfteren stillschweigend von folgender Tatsache Gebrauch gemacht:

Sind $A, B \subseteq X$ (metr. Raum) abgeschlossen,
$f : A \to E$ stetig, $g : B \to E$ stetig und gilt $f = g$ auf $A \cap B$, so ist

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & x \in A \\ g(x) & x \in B \end{cases}$$

wohldefiniert und stetig auf $A \cup B$.

Korollar. Ist $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n,\ n \geq 2,\ \Omega_0 = \Omega \cap \{x : x_n = 0\} \neq \emptyset,\ \Omega$ beschränkt, offen, symmetrisch, $0 \notin \overline{\Omega}$ und $f : \partial\Omega \to \mathbb{R}^n$ stetig, ungerade und ohne Nullstellen, so gibt es eine stetige, ungerade Fortsetzung F auf $\overline{\Omega}$, die auf $\overline{\Omega}_0$ keine Nullstelle hat.

Beweis. Zunächst besitzt $f/_{\partial\Omega_0}$ eine stetige, ungerade, nullstellenfreie Fortsetzung $\widetilde{f}$ auf $\overline{\Omega}_0$ (Abschluß in $\{x : x_n = 0\}$), und diese (ergänzt durch f auf $\partial\Omega$) eine stetige Fortsetzung $\widehat{f}$ (nach Tietze) auf $\overline{\Omega}$. Dann ist

$$F(x) = \frac{1}{2}(\widehat{f}(x) - \widehat{f}(-x))$$

stetig, ungerade mit $F(x) = f(x)$ auf $\partial\Omega$, $F(x) = \widetilde{f}(x)$ auf $\overline{\Omega}_0$ (wegen ungerade).

Satz. Es sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt, symmetrisch mit $0 \in \Omega$. Ist $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ stetig und ungerade mit $0 \notin f(\partial\Omega)$, so ist $d(f, \Omega, 0)$ ungerade. (Insbesondere besitzt f eine Nullstelle in Ω).

Beweis. Wir wählen $\varepsilon > 0$ so, daß $\overline{K(0,\varepsilon)} \subseteq \Omega$ gilt und setzen ($\Omega^\varepsilon := \Omega \backslash \overline{K(0,\varepsilon)}$)

$$g(x) = \begin{cases} x & \|x\| \leq \varepsilon \\ f(x) & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

stetig auf $\overline{\Omega}$ fort. Die Abbildung g ist auf $\partial\Omega^\varepsilon$ ungerade, und aus den Eigenschaften des Abbildungsgrades folgt

$$\begin{aligned} d(f, \Omega, 0) &= d(g, \Omega, 0) = d(g, K(0,\varepsilon), 0) + d(g, \Omega^\varepsilon, 0) \\ &= 1 + d(g, \Omega^\varepsilon, 0)\ , \end{aligned}$$

und es bleibt zu zeigen, daß $d(g, \Omega^\varepsilon, 0)$ gerade ist. Nun sei $\Omega_0^\varepsilon = \{x : x_n = 0\} \cap \Omega^\varepsilon$. Nach obiger Folgerung existiert zu $g/_{\partial\Omega^\varepsilon}$ eine stetige, ungerade Fortsetzung G mit $0 \notin G(\overline{\Omega_0^\varepsilon})$ und $d(G, \Omega^\varepsilon, 0) = d(g, \Omega^\varepsilon, 0)$. Dann ist ($\Omega_+^\varepsilon = \{x \in \Omega^\varepsilon, x_n > 0\}$)

$$d(G, \Omega^\varepsilon, 0) = d(G, \Omega_+^\varepsilon, 0) + d(G, -\Omega_+^\varepsilon, 0)\ ,$$

und die lineare Transformation $Lx = -x$ bildet $-\Omega_+^\varepsilon$ auf Ω_+^ε ab, und es ist

$$L^{-1}G(Lx) = -G(-x) = G(x) \ ,$$

also

$$d(G, -\Omega_+^\varepsilon, 0) = d(G, \Omega_+^\varepsilon, 0) \ . \quad \text{(vgl. 4.)}$$

Demnach ist $d(G, \Omega^\varepsilon, 0)$ gerade.

Bemerkung. Ist $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ symmetrisch, so ist $f : \partial\Omega \to \mathbb{R}^n$ mit $f \neq 0$ auf $\partial\Omega$ zu einer ungeraden Abbildung homotop; gilt zusätzlich

$$\frac{f(x)}{\|f(x)\|} \neq \frac{f(-x)}{\|f(-x)\|} \ , \qquad (*)$$

so kann H ohne Nullstellen auf $[0,1] \times \partial\Omega$ gewählt werden:

$$\text{Für } H(t,x) = f(x) - tf(-x) \text{ ist } H(0,x) = f(x) \ ,$$

$H(1,x)$ ist ungerade, und aus

$$H(t,x) = 0 = f(x) - tf(-x) \quad 0 \leq t \leq 1$$

folgt

$$t = \frac{\|f(x)\|}{\|f(-x)\|} \ ,$$

was $(*)$ widerspricht.

9 Der Satz von Lusternik-Schnirelman-Borsuk

Wir ziehen einige Folgerungen aus dem Satz aus 8.

Satz. Ist $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt, symmetrisch mit $0 \in \Omega$, und $A_1, \ldots, A_p$ abgeschlossene Mengen mit $A_i \cap (-A_i) = \emptyset$ und $\partial\Omega \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{p} A_i$, so gilt $p > n$.

Beweis. Aus den Voraussetzungen folgt

$$\partial\Omega \subseteq \bigcup_{i=1}^{p-1} A_i \cup (-A_i) \ :$$

$x \in \partial\Omega$ hat $x \in A_i$, $1 \leq i \leq p$ zur Folge. Für $1 \leq i \leq p-1$ ist nichts zu zeigen, und im Fall $x \in A_p$ folgt $-x \notin A_p$, also $-x \in A_j$ mit $1 \leq j \leq p-1$. Nun setzen wir $f : \partial\Omega \to \mathbb{R}^n$ fest durch

$$f_i(x) = \begin{cases} 1 & x \in A_i \cap \partial\Omega \\ -1 & x \in -A_i \cap \partial\Omega \end{cases} \quad 1 \leq i \leq p-1 \quad ,$$

und im Fall $p \leq n$ kann noch

$$f_i(x) = 1,\ x \in \overline{\Omega},\ p \leq i \leq n$$

gesetzt werden. $f : \partial\Omega \to \mathbb{R}^n$ ist stetig mit $\frac{f(x)}{\|f(x)\|} \neq \frac{f(-x)}{\|f(-x)\|}$ auf $\partial\Omega$, es gilt $f(x) \neq 0$ auf $\partial\Omega$, also $d(f, \Omega, 0) \neq 0$.[1] f besitzt also in Ω eine Nullstelle, was $f_n(x) \equiv 1$ widerspricht.

Satz von Borsuk-Ulam. Ist $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ beschränkt, offen, symmetrisch, $0 \in \Omega$ und $f : \partial\Omega \to$ echten Unterraum stetig, so existiert $x \in \partial\Omega$ mit $f(x) = f(-x)$.

Beweis. Es sei f stetig auf $\overline{\Omega}$ mit Werten im Unterraum fortgesetzt. Ist $f(x) \neq f(-x)$ auf $\partial\Omega$, so ist

$$g(x) = f(x) - f(-x)$$

stetig und ungerade auf $\overline{\Omega}$ und ohne Nullstellen auf $\partial\Omega$. Deshalb ist $d(g, \Omega, 0)$ ungerade, also $d(g, \Omega, y)$ ungerade auf $K(0, \alpha)$ mit $\alpha = \operatorname{dist}(0, g(\partial\Omega))$. Insbesondere ist $K(0, \alpha) \subseteq g(\Omega)$

$$\subseteq f(\Omega) - f(\Omega) \subseteq \text{ Unterraum}$$

im Widerspruch zur Voraussetzung.

Folgerung. Es gibt keine injektive stetige Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ für $m < n$. Insbesondere sind $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^m$ für $m \neq n$ nicht homöomorph.

Satz (Brouwer, Schauder). Es sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ lokal injektiv. Dann ist $f(\Omega)$ offen im $\mathbb{R}^n$.

Beweis. Es sei $x_0 \in \Omega,\ y_0 = f(x_0)$. Zunächst existiert $r > 0$, so daß f auf $K(x_0, r)$ injektiv ist. Wir betrachten für $0 \leq t \leq 1,\ x \in \partial K(0, r)$

$$H(t, x) = f\left(\frac{1}{1+t}\, x + x_0\right) - f\left(-\frac{t}{1+t}\, x + x_0\right) .$$

Wäre $H = 0$ für ein $t \in [0, 1],\ x \in \partial K(0, r)$, so wäre

$$\frac{x}{1+t} = -\frac{t}{1+t}\, x ,$$

also $x = 0$ im Widerspruch zu $x \in \partial K(0, r)$.

Deshalb ist $d(H(0, \cdot), K(0, r), 0) = d(H(1, \cdot), K(0, r), 0)$, also wegen $H(1, x) = -H(1, -x)$

$$d(f(\cdot + x_0) - y_0, K(0, r), 0) \text{ ungerade} .$$

[1] Vgl. die Bemerkung nach dem letzten Satz

Dann ist aber für $\|y - y_0\| < \alpha$ (α geeignet gewählt)

$$f(x + x_0) = y$$

lösbar, d. h. y_0 ist innerer Punkt von $f(\Omega)$.

Bemerkung. Der Satz liefert noch: 1) Ist f lokal injektiv, so sind Bilder offener Teilmengen von Ω offen.
2) Ist f injektiv, so ist $f^{-1} : f(\Omega) \to \Omega$ stetig.

10 Die Sätze aus 8 und 9 in normierten Räumen.

Satz. Es sei $\Omega \subseteq E$ (normiert) offen, beschränkt und symmetrisch, $0 \in \Omega$, $f = \text{Id} - g$, $g : \overline{\Omega} \to E$ kompakt, stetig und ungerade; $f \neq 0$ auf $\partial\Omega$. Dann ist $d(f, \Omega, 0)$ ungerade.

Beweis. Zu $\alpha = \text{dist}(0, f(\partial\Omega))$ wählen wir ein endlich-dimensionales $g_1 : \overline{\Omega} \to E_1$, $\dim E_1 < \infty$ mit $\sup\limits_{x\in\overline{\Omega}} \|g(x) - g_1(x)\| < \alpha$ und setzen

$$g_2(x) = \frac{1}{2}\left(g_1(x) - g_1(-x)\right) .$$

Dann ist auch $\sup\limits_{x\in\overline{\Omega}} \|g_2(x) - g(x)\| < \alpha$ und $d(\text{ Id} - g_2, \Omega \cap E_1, 0) = d(f, \Omega, 0)$ ungerade.

Folgerung 1. Es sei E, Ω wie oben, $f = \text{Id} - g$, $g : \overline{\Omega} \to E$ stetig und kompakt, und $f(\overline{\Omega})$ liege in einem echten Teilraum von E. Dann gibt es $x \in \partial\Omega$ mit $f(x) = f(-x)$.

Folgerung 2. (Schauder) Es sei $\Omega \subseteq E$ offen, $f = \text{Id} - g$, $g : \overline{\Omega} \to E$ stetig und kompakt und f lokal injektiv. Dann ist f offen.

Folgerung 3. (Fredholmsche Alternative) Ist E normiert und $A : E \to E$ linear, stetig und kompakt, so gilt:

Die Gleichung

$$x - Ax = y$$

ist genau dann stets eindeutig lösbar, wenn die zugehörige homogene Gleichung

$$x - Ax = 0$$

nur trivial lösbar ist.

Beweis. Ist $x - Ax = y$ eindeutig lösbar, so besitzt die homogene Gleichung nur die triviale Lösung.
Besitzt umgekehrt die homogene Gleichung nur die triviale Lösung, so ist $f = \mathrm{Id} - A$ injektiv, $f(E)$ also offen. Da $f(E)$ gleichzeitig Untervektorraum ist, folgt $f(E) = E$.

11 Anwendungen

Integralgleichungen und der Satz von Perow.

Es seien $k : [a, b]^2 \to \mathbb{R}$ und $f : [a, b] \times \mathbb{R}$ stetig.

Wir betrachten den stetigen Integraloperator $F : C([a, b]) \to C([a, b])$ definiert durch

$$F(u)(t) = \int_a^b k(t, s) f(s, u(s)) ds.$$

(Bemerkung: k heißt auch Kern des Integraloperators.)

Wir zeigen zunächst: F ist kompakt.

Beweis: Sei $M \subseteq C([a, b])$ beschränkt, also $\|u\| \leq \alpha$ $(u \in M)$. Sei $\varepsilon > 0$.

Da k gleichmäßig stetig auf $[a, b] \times [a, b]$ ist, existiert ein $\delta > 0$ mit

$$|k(t, s) - k(\widetilde{t}, s)| \leq \frac{\varepsilon}{c(b-a)} \quad (t, \widetilde{t}, s \in [a, b], |t - \widetilde{t}| \leq \delta),$$

dabei sei

$$c > 0 \ \text{ mit } \ |f(s, u(s))| \leq c \quad (s \in [a, b], u \in M).$$

Für $t, \widetilde{t} \in [a, b], |t - \widetilde{t}| \leq \delta$ und $u \in M$ folgt

$$|F(u)(t) - F(u)(\widetilde{t})| \leq \int_a^b |k(t, s) - k(\widetilde{t}, s)| \, |f(s, u(s))| ds$$

$\leq \int_a^b \frac{\varepsilon}{c(b-a)} \cdot c ds = \varepsilon$. Somit ist $F(M)$ gleichgradig stetig. Wegen

$$|F(u)(t)| \leq (b - a) \cdot \left(\max_{[a,b]^2} |k| \right) \cdot c \quad (t \in [a, b], \ u \in M)$$

ist $F(M)$ beschränkt. Nach dem Satz vor Arzelà-Ascoli ist $\overline{F(M)}$ kompakt.

Folgerung: $A : C([a,b]) \to C([a,b])$, $(Au)(t) := \int\limits_a^b k(t,s)h(s)u(s)ds$ ist ein linearer kompakter Operator ($h : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig).

Aus der Fredholmschen Alternative folgt:

Die Igl. $u(t) = \int\limits_a^b k(t,s)h(s)u(s)ds + v(t)$ ist genau dann für jedes $v \in C([a,b])$ eindeutig lösbar, wenn die homogene Gleichung $u(t) = \int\limits_a^b k(t,s)h(s)u(s)ds$ nur die Lösung $u = 0$ besitzt.

Im nichtlinearen Fall sei nun $f : [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ beschränkt; $|f(s,x)| \leq \beta \quad ((s,x) \in [a,b] \times \mathbb{R})$.

Wir betrachten $K := \overline{K(0,R)}$ in $C([a,b])$ mit $R \geq \beta(b-a) \max\limits_{[a,b]^2} |k|$. Dann ist $F(K) \subseteq K$:

$$|(F(u)(t)| \leq \int\limits_a^b |k(t,s)| \cdot \beta ds \leq \beta(b-a) \max_{[a,b]^2} |k| = R$$

und $F : K \to K$ ist kompakt.

Nach dem FPS von Schauder besizt die Igl.

$$u(t) = \int\limits_a^b k(t,s)f(s,u(s))ds$$

mindestens eine Lösung in K.

Zurück zum linearen Fall:

Es sei $A : C([a,b]) \to C([a,b])$ wie oben, und so, daß $u(t) = \int\limits_a^b k(t,s)h(s)u(s)ds$ nur trivial lösbar ist.

Wir wollen zeigen: $|d(\mathrm{id} - A, K(0,r), 0)| = 1$ für jedes $r > 0$.

Behauptung: Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein linearer stetiger endlichdimensionaler Operator A_ε mit $\|A_\varepsilon - A\| \leq \varepsilon$.

Beweis: Es sei $\varepsilon > 0$, und $\delta > 0$ so, daß

$$|k(t,s) - k(\widetilde{t},s)| \leq \varepsilon \ (t, \widetilde{t}, s \in [a,b], \ |t - \widetilde{t}| \leq \delta).$$

Es sei $\gamma_1, \dots, \gamma_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Zerlegung der Eins, also $\gamma_j \geq 0$ stetig, $\sum\limits_{j=1}^{n} \gamma_j(t) = 1$ mit $\operatorname{supp} \gamma_j \subseteq [t_j, t_j + \delta] \subseteq [a,b]$.

Sei $A_\varepsilon : C([a,b]) \to C([a,b])$ definiert durch

$$(A_\varepsilon u)(t) = \int\limits_a^b k_\varepsilon(t,s)h(s)u(s)ds$$

mit $k_\varepsilon(t,s) := \sum\limits_{j=1}^{n} \gamma_j(t)k(t_j, s)$.

Für $u \in C([a,b]), \|u\| = 1$ folgt

$$|(Au)(t) - (A_\varepsilon u)(t)| = \left| \int\limits_a^b \left(\sum_{j=1}^{n} \gamma_j(t)(k(t,s) - k(t_j,s)) \right) h(s)u(s)ds \right|$$

$$\leq \int\limits_a^b \left(\sum_{j=1}^{n} \gamma_j(t) \cdot \varepsilon \right) \|h\| \cdot \|u\| ds \leq (b-a)\|h\| \cdot \varepsilon.$$

Hieraus folgt die Behauptung.

Nun sei $r > 0$ fest und $\alpha = \operatorname{dist}\,(0, (\mathrm{id} - A)(\partial K(0,r)))$, und es sei $A_\alpha : E \to E_1$ so gewählt, daß $\sup_{\|x\| \leq r} \|Ax - A_\alpha x\| < \alpha$ gilt, mit $\dim E_1 < \infty$. Offensichtlich gilt $0 \in E_1$ und $E_1 \cap K(0,r) \neq \emptyset$. Damit ist

$$d(\mathrm{id} - A, K(0,r), 0) = d(\mathrm{id} - A_\alpha, K(0,r) \cap E_1, 0).$$

Aus der Existenz des zweiten Abbildungsgrades (vgl. die Def. des LS-Grades) folgt, daß $\mathrm{id} - A_\alpha$ bijektiv ist und somit ist $|d(\mathrm{id} - A_\alpha, K(0,r) \cap E_1, 0)| = 1$.

Der folgende Satz geht in seiner Form für RWPe (k die Greensche Funktion) zurück auf Perow:

Satz: Es seien $k : [a,b]^2 \to \mathbb{R}, f : [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig mit

1.) $u(t) = \int\limits_a^b k(t,s)h(s)u(s)ds$ ist nur trivial lösbar;

2.) $\lim\limits_{|\sigma| \to \infty} \frac{\|f(\cdot,\sigma) - \sigma h\|}{|\sigma|} = \lim\limits_{|\sigma| \to \infty} \frac{\max\limits_{t \in [a,b]} |f(t,\sigma) - \sigma h(t)|}{|\sigma|} = 0.$

Dann besitzt die Igl. $u(t) = \int\limits_a^b k(t,s)f(s,u(s))ds + v(t)$ mindestens eine Lösung für jedes $v \in C([a,b])$.

Beweis: Wir betrachten $A, F : C([a,b]) \to C([a,b])$,

$$(Au)(t) = \int\limits_a^b k(t,s)h(s)u(s)ds,$$

$$F(u)(t) = \int\limits_a^b k(t,s)f(s,u(s))ds + v(t)$$

(v fest).

Aus 2. folgt: Zu $\varepsilon > 0$ existiert ein $\sigma_0 > 0$, so daß für $|\sigma| \geq \sigma_0$ gilt:

$$\frac{\max\limits_{t\in[a,b],|x|\leq|\sigma|} |f(t,x) - xh(t)|}{|\sigma|} < \varepsilon.$$

Nachweis: Andernfalls existiert ein $\varepsilon_0 > 0$ und zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein σ_n mit $|\sigma_n| \geq n$ sowie x_n, t_n mit $|x_n| < |\sigma_n|$, so daß gilt:

$$\frac{|f(t_n,x_n) - x_n h(t_n)|}{|\sigma_n|} \geq \varepsilon_0.$$

Es gilt $|\sigma_n| \to \infty$ und somit:

$$\frac{|f(t_n,x_n) - x_n h(t_n)|}{|x_n|} \cdot \frac{|x_n|}{|\sigma_n|} \to 0 \quad (n \to \infty) \qquad\qquad \text{Wid.}$$

(Bem.: Fallunterscheidung: (x_n) beschränkt; $|x_{n_k}| \to \infty$.)

Wir erhalten:

$$\frac{\|F(u) - Au\|}{\|u\|} \to 0 \quad (\|u\| \to \infty):$$

$$\frac{\left|\int\limits_a^b k(t,s)(f(s,u(s)) - h(s)u(s))ds\right|}{\|u\|} \leq \max_{[a,b]^2} |k| \int\limits_a^b \frac{|f((s,u(s)) - h(s)u(s)|}{\|u\|} ds$$

$\leq (\max\limits_{[a,b]^2} |k|)\varepsilon(b-a)$ für $\|u\| \geq \sigma_0$.

Da $\mathrm{id} - A$ invertierbar ist (vgl. Fredholmsche Alternative), existiert ein $c > 0$ mit $\|u - Au\| \geq c\|u\|$ $(u \in C([a,b]))$.

Damit ist für $t \in [0,1]$:

$$\|u - Au + t(Au - F(u))\| \geq \left(c - \frac{\|Au - F(u)\|}{\|u\|}\right) \cdot \|u\| \ (u \neq 0).$$

Wähle $r > 0$ so, daß $\frac{\|Au-F(u)\|}{\|u\|} < c$ $(\|u\| = r)$ und setze

$$H(t,u) = u - Au + t(Au - F(u)).$$

Dann ist $0 \notin H(t, \partial K(0,r))$ $(t \in [0,1])$ und somit

$$d(\mathrm{id} - F, K(0,r), 0) = d(\mathrm{id} - A, K(0,r), 0) \neq 0.$$

Somit hat $u(t) = F(u)(t) = \int\limits_a^b k(t,s)f(s,u(s))ds + v(t)$ eine Lösung in $C([a,b])$ (sogar in $K(0,r)$). Insbesondere ist die Abbildung

$$u \mapsto u - \int\limits_a^b k(\cdot,s)f(s,u(s))ds$$

surjektiv.

Beispiel: $k(t,s) = G(t,s) = \left\{ \begin{array}{ll} s(1-t) & 0 \le s \le t \le 1 \\ t(1-s) & 0 \le t \le s \le 1 \end{array} \right.$

$([a,b] = [0,1])$.

Die Igl. $u(t) = \int\limits_0^1 G(t,s)3\pi^2 u(s)ds$ hat nur die triviale Lösung, da das RWP $u'' + 3\pi^2 u = 0,\ u(0) = u(1) = 0$ nur die triviale Lösung besitzt.

Betrachte: $g : [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ g(t,x) = t\sqrt{|x|}$.

Das RWP $u''(t) + 3\pi^2 u(t) + t\sqrt{|u(t)|} + w(t) = 0,\ u(0) = u(1) = 0$ ist lösbar für jedes $w \in C([0,1])$: Die äquivalente Igl. ist

$$u(t) = \int\limits_0^1 G(t,s)f(s,u(s))ds + \int\limits_0^1 G(t,s)w(s)ds$$

mit $f(t,x) = 3\pi^2 x + t\sqrt{|x|}$, und es gilt

$$\frac{\|f(\cdot,\sigma) - 3\pi^2\sigma\|}{|\sigma|} = \frac{\sqrt{|\sigma|}}{|\sigma|} = \frac{1}{\sqrt{|\sigma|}} \to 0 \quad (|\sigma| \to \infty).$$

Existenz periodischer Lösungen von Systemen gewöhnlicher Differentialgleichungen.
Es sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $T > 0$ und $f : [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig. Die Anfangswertprobleme

$$\left.\begin{array}{l} x'(t) = f(t,x(t)) \\ x(0) = z \end{array}\right\} \qquad (*)$$

seien für alle $z \in \overline{\Omega}$ stets eindeutig lösbar auf $[0,T]$. Damit ist für jedes $t \geq 0$ durch

$$U(t,z) = x(t), \quad x \text{ Lösung von } (\,*\,)$$

eine Funktion von $\overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ definiert ("Translation längs Trajektorien"). U ist für festes $z \in \overline{\Omega}$ stetig in t, und aus der Eindeutigkeit folgt die bezüglich t gleichmäßige Stetigkeit von U in z: Dazu ist nur die Stetigkeit (in jedem Punkt z_0) der Zuordnung $z \to x \in C([0,T],\mathbb{R}^n)$ zu beachten.

Damit ist U stetig in beiden Variablen, und die Existenz einer T-periodischen Lösung von $(*)$ ist äquivalent zur Existenz von Fixpunkten von $U(T,\cdot)$.

Es ist nun naheliegend, insbesondere die Homotopieinvarianz des Abbildungsgrades heranzuziehen. Insbesondere betrachten wir

$$H(t,z) = \frac{1}{t}(U(t,z) - z), \quad t \in (0,T], \; z \in \overline{\Omega}\,.$$

Wegen $\lim\limits_{t \to 0} \frac{1}{t}(U(t,z) - z) = x'(0) = f(0,z)$ kann H durch die Fortsetzung $H(0,z) = f(0,z)$ stetig ergänzt werden.

(t) Weiß man nun, daß $H(t,z) \neq 0$ für $t \in [0,T], \; z \in \partial\Omega$ ist (dies ist im wesentlichen eine Bedingung an f außerhalb Ω; keine Lösung, die auf $\partial\Omega$ startet, soll für $t \in (0,T]$ nach z zurückkehren, bzw. $f(0,z) \neq 0, \; z \in \partial\Omega$), so ist

$$d(\frac{1}{T}(U(T,\cdot) - \mathrm{Id}), \Omega, 0) = d(f(0,\cdot), \Omega, 0)\,,$$

und es gilt der

Satz. Es sei Ω beschränkt, offen, $f : [0,T] \times \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ sei stetig und besitze für jedes $z \in \overline{\Omega}$ genau eine Lösung auf $[0,T]$ zu $(*)$ und es gelte (t). Ist dann $d(f(0,\cdot),\Omega,0) \neq 0$, so besitzt die Differentialgleichung $x' = f(t,x)$ eine T-periodische Lösung (d. h. eine Lösung mit $x(0) = x(T)$.)

Im folgenden Satz werden hinreichende Bedingungen dafür angegeben, daß die Voraussetzungen des obigen Satzes erfüllt sind.

Satz. Es sei Ω offen, beschränkt und konvex mit $0 \in \Omega$. Zu jedem $x \in \partial\Omega$ existiere eine äußere Normale $n(x)$ (d. h. $K(x+n(x),1) \cap \Omega = \emptyset, \; \|n(x)\| = 1$) mit

$$\text{(R)} \qquad n(x) \cdot f(t,x) > 0 \quad x \in \partial\Omega, \; t \in [0,T].$$

$f : [0,T] \times \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ sei stetig und erfülle bzgl. x eine Lipschitz-Bedingung. Dann besitzt $x' = f(t,x)$ eine T-periodische Lösung.

Beweis. Wir setzen $P(x) = \lambda(x) \cdot x \in \partial\Omega$ und hiermit f auf $[0,T] \times \mathbb{R}^n$ fort gemäß

$$F(t,x) = f(t, P(x)) \text{ für } x \in \mathbb{R}^n \ .$$

Weil P lokal Lipschitz-stetig ist, ist F lokal Lipschitz-stetig in x; es existieren also stets eindeutig bestimmte Lösungen zu $(*)$ auf $[0,T]$.
Wegen (R) ist $f(0,x) \neq 0$ auf $\partial\Omega$, und ebenso ist $\lambda x + (1-\lambda) f(0,x) \neq 0$ auf $\partial\Omega$, wegen $n(x) \cdot x > 0$. Dann ist

$$d(f(0,\cdot), \Omega, 0) = d(\mathrm{Id}, \Omega, 0) = 1 \ ,$$

und wegen der Randbedingung (R) kehrt keine Lösung, die von $\partial\Omega$ ausgeht, zurück.
(Vgl. Schmitt Skriptum)

12 Nichtkompaktheitsmaße

Es sei (X,d) ein metrischer Raum und $A \subseteq X$ beschränkt. A hat dann auch endlichen Durchmesser

$$\mathrm{diam} A = \sup_{x,y \in A} d(x,y) = \mathrm{diam} \overline{A} < \infty.$$

Jeder beschränkten Teilmenge von X ordnen wir das *Kuratowskische Nichtkompaktheitsmaß*

$$\gamma(A) = \inf\{\alpha > 0 : \text{es gibt endlich viele } A_j : A \subseteq \bigcup A_j, \mathrm{diam} A_j \leq \alpha\}$$

zu. Eine Variante ist das *Hausdorffsche Nichtkompaktheitsmaß*

$$\chi(A) = \inf\{\alpha > 0 : \text{es gibt endlich viele } x_j \in X : A \subseteq \bigcup K(x_j, \alpha)\}.$$

Man beachte, daß in beiden Fällen die Mengen, von denen das Infimum gebildet wird, jeweils Teilintervalle I_A von $[0,\infty)$ sind.
Unter Beachtung von

$$\mathrm{diam} K(x,r) \leq 2r$$

und der Tatsache, daß jede nichtleere Menge vom Durchmesser α in einer Kugel mit Radius $\alpha + \varepsilon$ liegt ($\varepsilon > 0$ beliebig) erhält man

$$\chi(A) \leq \gamma(A) \leq 2\chi(A)$$

für jede beschränkte Teilmenge A von X.
Satz. *Es sei (X,d) ein metrischer Raum und $A, B \subseteq X$ beschränkt. Dann gilt*

1. $\gamma(A) \leq \mathrm{diam}A$.

2. $A \subseteq B \Longrightarrow \gamma(A) \leq \gamma(B)$.

3. $\gamma(A \cup B) = \max\{\gamma(A), \gamma(B)\}$.

4. $\gamma(\overline{A}) = \gamma(A)$.

5. $\gamma(A) = 0 \Longleftrightarrow A$ *ist totalbeschränkt.*

6. A *kompakt* $\Longleftrightarrow \gamma(A) = 0,\ A$ *vollständig.*

7. *Für* $A_r = \bigcup_{a\in A} \overline{K(a,r)}$ *gilt*

$$\gamma(A_r) \leq \gamma(A) + 2r.$$

(Entsprechende Aussagen gelten auch für χ).
Beweis. 1. folgt sofort aus der Definition, und 2. gilt wegen $I_B \subseteq I_A$.
3. Aus 2. folgt zunächst $\max\{\gamma(A), \gamma(B)\} \leq \gamma(A \cup B)$. Ist andererseits $\alpha \in I_A$, $\beta \in I_B$, so ist

$$A \cup B \subseteq \bigcup A_j \cup \bigcup B_k$$

mit $\mathrm{diam}A_j \leq \alpha,\ \mathrm{diam}B_k \leq \beta$, also $\gamma(A \cup B) \leq \max\{\alpha, \beta\}$. Hieraus folgt die Behauptung.
4. Folgt aus $A \subseteq \overline{A}$ und $\mathrm{diam}A_j = \mathrm{diam}\overline{A_j}$.
5. Dies ist eigentlich nur eine Umformulierung des Begriffes 'totalbeschränkt', der bedeutet:
Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es endlich viele Punkte $x_j \in X$ mit $A \subseteq \bigcup K(x_j, \varepsilon)$.
Ist dann A totalbeschränkt, so ist wegen $\mathrm{diam}K(x_j, \varepsilon) \leq 2\varepsilon$ jedenfalls $\gamma(A) \leq 2\varepsilon$, also $\gamma(A) = 0$.
Ist umgekehrt $\gamma(A) = 0$, so gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ endlich viele A_j mit $\mathrm{diam}A_j < \varepsilon$ und $A \subseteq \bigcup A_j$, und zu jedem j ein $x_j \in X$ mit $A_j \subseteq K(x_j, \varepsilon)$. Also ist A totalbeschränkt.
6. Folgt aus 5., weil A kompakt ist genau dann wenn A vollständig und totalbeschränkt ist.
7. Folgt unter Beachtung von

$$\mathrm{diam}(A_j)_r \leq \mathrm{diam}A_j + 2r$$

und

$$A_r \subseteq \bigcup (A_j)_r \text{ falls } A \subseteq \bigcup A_j.$$

Bemerkung: Ist E normiert und $\dim E = \infty$, so ist das Kuratowskische Nichtkompaktheitsmaß der Einheitskugel K gleich 2.

Beweis. Es sei $(A_i)_{i=1}^n$ eine endliche Überdeckung der Einheitskugel durch abgeschlossene Mengen vom Durchmesser $\mathrm{diam}A_i \leq \alpha$. Wir wählen einen Teilraum E_n der Dimension n und betrachten $B_i = A_i \cap \partial(K \cap E_n)$.

Die B_i überdecken $\partial(K \cap E_n) = \partial K_n$ und sind abgeschlossen in E_n. Nach dem Satz von Lusternik-Schnirelman-Borsuk besitzt eine der Mengen B_i ein diametrales Punktepaar, und folglich ist $\mathrm{diam} A_i \geq \mathrm{diam} B_i \geq 2$.

Also ist $\alpha \geq 2$ und damit $\gamma(K) \geq 2$. $\gamma(K) \leq 2$ ist trivial.

Satz. (Kuratowski) *Ist (X, d) vollständig und (A_n) eine fallende Folge von nichtleeren, abgeschlossenen und beschränkten Teilmengen von X mit $\gamma(A_n) \to 0$ für $n \to \infty$, so ist*

$$D := \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

nichtleer und kompakt.

Beweis. Offenbar ist D abgeschlossen und $\gamma(D) = 0$, somit ist D kompakt. Um nachzuweisen, daß D nicht leer ist, wählen wir $a_n \in A_n$ und bemerken

$$\{a_n, a_{n+1}, \dots\} \subseteq A_n$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Es folgt

$$\gamma(\{a_1, a_2, \dots\}) = \gamma(\{a_n, a_{n+1}, \dots\}) \leq \gamma(A_n) \to 0 \ (n \to \infty),$$

also $\gamma(\{a_1, a_2, \dots\}) = 0$. Die Menge dieser Folgenglieder ist also relativ kompakt, und (a_n) enthält deshalb eine konvergente Teilfolge a_{n_k} mit Grenzwert x. Offenbar ist $x \in \bigcap A_n = D$, also $D \neq \emptyset$.

Der Satz enthält insbesondere die Fälle

a) $\mathrm{diam} A_n \to 0$ $(n \to \infty)$ ('Cantorscher Durchschnittssatz').

b) Ein A_n ist kompakt.

Sind (X_1, d_1), (X_2, d_2) metrische Räume und $f : X_1 \to X_2$ eine Abbildung, die beschränkte Mengen in beschränkte Mengen abbildet und zu der eine Konstante $k \geq 0$ existiert, sodaß

$$\gamma_2(f(A)) \leq k\gamma_1(A)$$

für jede beschränkte Teilmenge A von X_1 gilt, so sagen wir, daß f einer *γ-Lipschitzbedingung mit der Konstanten k* genügt. (Hier seien γ_i die mittels der d_i gebildeten Nichtkompaktheitsmaße).

Hilfssatz. *Die Abbildung f genügt genau dann einer γ-Lipschitzbedingung mit der Konstanten k, wenn sie beschränkte Mengen in beschränkte Mengen abbildet und für solche Mengen*

$$\gamma_2(f(A)) \leq k \mathrm{diam} A$$

gilt.

Beweis. Die Notwendigkeit dieser Bedingung folgt aus $\gamma_1(A) \leq \mathrm{diam} A$.

Nun sei $\varepsilon > 0$ beliebig und $A_1, \dots, A_n$ gewählt mit $\mathrm{diam} A_j \leq \gamma_1(A) + \varepsilon$ und $A \subseteq A_1 \cup \dots \cup A_n$. Dann gilt

$$f(A) \subseteq f(A_1) \cup \dots \cup f(A_n),$$

also

$$\begin{aligned}
\gamma_2(f(A)) &\leq \gamma_2(f(A_1)\cup\cdots\cup f(A_n)) \\
&= \max_{1\leq j\leq n} \gamma_2(f(A_j)) \\
&\leq \max_{1\leq j\leq n} k\mathrm{diam} A_j \\
&\leq k(\gamma_1(A)+\varepsilon),
\end{aligned}$$

und $\varepsilon \to 0$ liefert die Behauptung.
Weiter sieht man sofort, daß f einer γ-Lipschitzbedingung mit der Konstanten k genügt, falls f Lipschitzstetig mit der Konstanten k ist.
Satz. (Volkmann) *Genügt $f : X \to X$ einer γ-Lipschitzbedingung mit der Konstanten $q < 1$ und ist (x_n) eine beschränkte Folge in X mit $d(f(x_n), x_n) \to 0$ für $n \to \infty$, so gilt*

$$\gamma(\{x_n\}) = 0.$$

Beweis. Mit $\varepsilon_n = \max_{k\geq n} d(f(x_k), x_k)$ gilt

$$\{x_n, x_{n+1}, \dots\} \subseteq \{f(x_n), f(x_{n+1}), \dots\}_{\varepsilon_n},$$

also

$$\begin{aligned}
\gamma(\{x_1, x_2, \dots\}) &= \gamma(\{x_n, x_{n+1}, \dots\}) \\
&\leq \gamma(\{f(x_n), f(x_{n+1}), \dots\}_{\varepsilon_n}) \\
&\leq \gamma(\{f(x_n), f(x_{n+1}), \dots\}) + 2\varepsilon_n \\
&\leq q\gamma(\{x_n, x_{n+1}, \dots\}) + 2\varepsilon_n \\
&= q\gamma(\{x_1, x_2, \dots\}) + 2\varepsilon_n,
\end{aligned}$$

also

$$\gamma(\{x_1, x_2, \dots\}) \leq \frac{1}{1-q} 2\varepsilon_n,$$

und $n \to \infty$ liefert die Behauptung.
Ist zusätzlich zu obigen Voraussetzungen X vollständig und f stetig, so besitzt f in X einen Fixpunkt (als Grenzwert einer konvergenten Teilfolge der x_n).

13 Nichtkompaktheitsmaße in normierten Räumen

Sie sind definiert als die Nichtkompaktheitsmaße bezüglich der von der Norm definierten Metrik.

Satz. Es sei E normiert und $A, B \subseteq E$ beschränkte Teilmengen. Dann gilt

a) $\gamma(A+B) \leq \gamma(A) + \gamma(B)$,

b) $\gamma(\lambda A) = |\lambda|\gamma(A)$.

c) $\gamma(\mathrm{conv}A) = \gamma(A) \quad (= \gamma(\overline{\mathrm{conv}}A))$.

Beweis. a) Sind $A_1, \ldots, A_k$ bzw. $B_1, \ldots, B_l$ Mengen, die A bzw. B überdecken, so überdeckt das System $A_i + B_j$, $1 \leq i \leq k$, $1 \leq j \leq l$ offensichtlich $A + B$, und es ist trivialerweise

$$\mathrm{diam}(A_i + B_j) \leq \mathrm{diam}A_i + \mathrm{diam}B_j \ .$$

Hieraus folgt a).

b) Es kann $\lambda \neq 0$ angenommen werden. Wegen

$$\mathrm{diam}(\lambda A_i) = |\lambda| \mathrm{diam}A_i$$

und der trivialen Tatsache, daß $\{\lambda A_i\}$ eine Überdeckung von λA ist, falls $\{A_i\}$ eine solche von A ist (und umgekehrt), folgt sofort die Behauptung.

c) Aus $A \subseteq \mathrm{conv}A$ folgt $\gamma(A) \leq \gamma(\mathrm{conv}A)$. Nun sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben und $A_1, \ldots, A_k$ bestimmt mit $A \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{k} A_i$, $\mathrm{diam}A_i < \gamma(A) + \varepsilon$. Wegen $\mathrm{diam}A_i = \mathrm{diam}\ \mathrm{conv}A_i$ (!) können die A_i als konvex und weiter $A \cap A_i \neq \emptyset$ angenommen werden.

(!): Ist $x = \sum \lambda_i a_i$, $y = \sum \mu_j b_j$, $\lambda_i \geq 0, \mu_j \geq 0$, $\sum \lambda_i = \sum \mu_j = 1$, $a_i, b_j \in A$, so ist

$$\begin{aligned}
\|x-y\| &= \|\sum_i \lambda_i a_i - \sum_j \mu_j b_j\| \\
&= \|\sum_i \lambda_i (\sum_j \mu_j) a_i - \sum_j \mu_j (\sum \lambda_i) b_j\| \\
&= \|\sum_{i,j} \lambda_i \mu_j (a_i - b_j)\| \leq \underbrace{\left(\sum_{i,j} \lambda_i \mu_j\right)}_{=1} \mathrm{diam}A \ .
\end{aligned}$$

Wir setzen für $\lambda \in \{\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k) \in \mathbb{R}^k \text{ mit } \lambda_i \geq 0,\ \sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i = 1\} =: \Lambda$,

$$\begin{aligned}
M(\lambda) &:= \sum_{i=1}^{k} \lambda_i A_i \ , \\
M &:= \bigcup_{\lambda \in \Lambda} M(\lambda) \ .
\end{aligned}$$

$\underline{M \text{ ist konvex :}}$ Ist $x \in M(\lambda)$, $\overline{x} \in M(\overline{\lambda})$, $0 < t < 1$, so ist (OBdA sei $\lambda_i + \overline{\lambda_i} > 0$, $i = 1, \ldots, k$)

$$\begin{aligned}
(1-t)x + t\overline{x} &= (1-t)\sum_{i=1}^{k} \lambda_i a_i + t\sum_{i=1}^{k} \overline{\lambda_i}\overline{a_i}, \quad a_i, \overline{a_i} \in A_i \\
&= \sum_{i=1}^{k} \{(1-t)\lambda_i a_i + t\overline{\lambda_i}\overline{a_i}\} \\
&= \sum_{i=1}^{k} ((1-t)\lambda_i + t\overline{\lambda_i}) \underbrace{\left\{ \frac{(1-t)\lambda_i}{(1-t)\lambda_i + t\overline{\lambda_i}}\, a_i + \frac{t\overline{\lambda_i}}{(1-t)\lambda_i + t\overline{\lambda_i}}\, \overline{a_i} \right\}}_{\in A_i}
\end{aligned}$$

und die $\mu_i := (1-t)\lambda_i + t\overline{\lambda_i}$ sind nichtnegativ mit Summe 1.

Wegen $A \subseteq M$ gilt deshalb

$$\mathrm{conv} A \subseteq M\ .$$

Da $\Lambda \subseteq \mathbb{R}^k$ kompakt ist, existieren endlich viele $\lambda^{(1)}, \ldots, \lambda^{(m)} \in \Lambda$ mit $\bigcup\limits_{j=1}^{m} K(\lambda^{(j)}, \varepsilon) \supseteq \Lambda$. (Kugel im $\mathbb{R}^k$ bzgl. der l^1-Norm.) Für $x \in M$, d. h. $x \in M(\lambda)$ wählen wir ein solches $\lambda^{(j)}$ und erhalten ($x = \sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i a_i$)

$$\begin{aligned}
\|x &- \sum_{i=1}^{k} \lambda_i^{(j)} a_i\| \\
&\leq \sum_{i=1}^{k} |\lambda_i - \lambda_i^{(j)}| \cdot \|a_i\|\ , \quad \|a_i\| \leq C + \mathrm{diam} A_i\ , \text{ wenn } C \text{ eine Schranke für } A \text{ ist.} \\
&< \varepsilon \cdot \underbrace{(C + \gamma(A) + \varepsilon)}_{=:K}
\end{aligned}$$

Dies bedeutet $x \in (M(\lambda^{(j)}))_{\varepsilon \cdot K}$, also

$$\mathrm{conv} A \subseteq M \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} (M(\lambda^{(j)}))_{\varepsilon \cdot K}\ .$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned}
\gamma(\mathrm{conv} A) &\leq \gamma(M) \leq \max_j \gamma[(M(\lambda^{(j)}))_{\varepsilon \cdot K}] \\
&\leq \max_j \gamma(M(\lambda^{(j)})) + 2\varepsilon \cdot K \\
&\leq \max_j \sum_{i=1}^{k} \lambda_i^{(j)} \gamma(A_i) + 2\varepsilon \cdot K \\
&\leq \gamma(A) + \varepsilon + 2\varepsilon \cdot K\ .
\end{aligned}$$

Hieraus folgt die Behauptung.

Obiger Satz, Teil c) stammt von Darbo und verallgemeinert den
Satz von Mazur. Ist $A \subseteq E$ (Banachraum) kompakt, so ist $\overline{\text{conv}}A$ kompakt.

Beweis. Es genügt zu bemerken, daß in einem Banachraum eine Teilmenge M genau dann relativ kompakt ist, wenn ihr Kuratowskisches Nichtkompaktheitsmaß verschwindet.

14 Der Fortsetzungssatz von Dugundji

Dieser ist eine Verallgemeinerung des Fortsetzungssatzes von Urysohn-Tietze für Funktionen mit Werten in einem normierten Raum. Als Hilfsmittel hierzu benutzen wir den

Satz von Stone. Jeder metrische Raum (X, d) ist parakompakt, d. h. jede offene Überdeckung besitzt eine lokal endliche Verfeinerung: Ist $\mathcal{A} = \{U_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ eine offene Überdeckung, so existiert eine offene Überdeckung $\mathcal{D} = \{V_\mu : \mu \in M\}$ mit:

a) Zu jedem V_μ existiert ein U_λ mit $V_\mu \subseteq U_\lambda$.

b) Jedes $x \in X$ besitzt eine Umgebung $V(x)$ mit: Die Menge der μ mit $V(x) \cap V_\mu \neq \emptyset$ ist endlich.

Beweis. Im folgenden sei $\text{dist}(x, \emptyset) := \text{dist}(A, \emptyset) := \infty$ für $x \in X$ und $A \subseteq X$. Wir schreiben für $A \subseteq X$ $\;(A)_\varepsilon = \{x \in X : \text{dist}(x, A) < \varepsilon\}$.

1. Wir zeigen zunächst: Jede abzählbare offene Überdeckung (U_i) von X besitzt eine abzählbare, lokalendliche Verfeinerung (V_i), die <u>auch</u> X überdeckt, mit $V_i \subseteq U_i$. O.B.d.A sei $\emptyset \neq U_i \neq X$.

$$\text{Setze} \quad V_1 = U_1, \quad \text{und für } n > 1$$
$$V_n = U_n \cap \bigcap_{i=1}^{n-1} (X \backslash U_i)_{1/n} \ .$$

   V_n ist offen, $V_n \subseteq U_n$. (V_n) überdeckt X: Ist $x \in X$ beliebig und $n(x)$ die kleinste natürliche Zahl k mit $x \in U_k$, so ist $x \notin U_i$ für $i = 1, \ldots, n(x) - 1$, also $\text{dist}(x, X \backslash U_i) = 0$ für diese i. Deshalb ist $x \in V_{n(x)}$.

   Schließlich ist

$$\text{dist}(x, X \backslash U_{n(x)}) =: \alpha > 0 \ ,$$

und $V(x) := \{y : \mathrm{dist}(y, X\backslash U_{n(x)}) > \frac{\alpha}{2}\}$ ist eine offene Umgebung von x, die kein V_k mit $k > \max\{n(x), \frac{2}{\alpha}\}$ trifft:

$$\begin{aligned} y \in V(x) \quad &\Leftrightarrow \quad \mathrm{dist}(y, X\backslash U_{n(x)}) > \frac{\alpha}{2}\,, \quad \frac{\alpha}{2} > \frac{1}{k} \\ &\Rightarrow \quad \mathrm{dist}(y, X\backslash U_{n(x)}) > \frac{1}{k}\,, \quad n(x) < k \\ &\Rightarrow \quad y \notin (X\backslash U_{n(x)})_{1/k} \supseteq V_k\,. \end{aligned}$$

2. Nun sei $\{U_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ eine offene Überdeckung von X (o.B.d.A sei $\emptyset \neq U_\lambda \neq X$), und Λ sei wohlgeordnet (jede nichtleere Teilmenge besitzt ein kleinstes Element). Für jedes (fest) $n \in \mathbb{N}$ definieren wir durch transfinite Induktion abgeschlossene Mengen $H_{n,\lambda}$ wie folgt ($\underline{\lambda}$ sei das kleinste Element von Λ)

$$\begin{aligned} H_{n,\underline{\lambda}} \quad &= \quad \left\{x : \mathrm{dist}(x, X\backslash U_{\underline{\lambda}}) \geq \frac{1}{n}\right\} \\ &\ \vdots \\ H_{n,\lambda} \quad &= \quad \left\{x : \mathrm{dist}(x, X\backslash U_\lambda) \geq \frac{1}{n}\right\} \cap \left\{x : \mathrm{dist}(x, \bigcup_{\mu<\lambda} H_{n,\mu}) \geq \frac{1}{n}\right\}\,. \end{aligned}$$

Für diese Mengen gilt

a) $(H_{n,\lambda})_{1/n} \subseteq U_\lambda$ für jedes (n, λ): $x \in (H_{n,\lambda})_{1/n}$ bedeutet $\mathrm{dist}(x, H_{n,\lambda}) < \frac{1}{n}$, es existiert also $y \in H_{n,\lambda}$ mit $d(x, y) < \frac{1}{n}$. $y \in H_{n,\lambda}$ impliziert

$$\mathrm{dist}(y, X\backslash U_\lambda) \geq \frac{1}{n} > d(y, x)\,,$$

was $x \in U_\lambda$ zur Folge hat.

b) Für $\mu < \lambda$ ist $\mathrm{dist}(H_{n,\lambda}, H_{n,\mu}) \geq \frac{1}{n}$:
Ist $x \in H_{n,\lambda}$, so folgt für $\mu < \lambda$

$$\mathrm{dist}(x, H_{n,\mu}) \geq \frac{1}{n}\,,$$

also $\mathrm{dist}(H_{n,\lambda}, H_{n,\mu}) \geq \frac{1}{n}$.

c) $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} H_{n,\lambda} = X$.
Ist nämlich $x \in X$, so gibt es ein kleinstes $\lambda(x)$ mit $x \in U_{\lambda(x)}$. Wir wählen $n \in \mathbb{N}$ so groß, daß $K(x, \frac{1}{n}) \subseteq U_{\lambda(x)}$ gilt; dann ist $x \in H_{n,\lambda(x)}$: Andernfalls gäbe es $\mu < \lambda(x)$ mit $\mathrm{dist}(x, H_{n,\mu}) < \frac{1}{n}$, also ein $y \in H_{n,\mu}$ mit $d(x, y) < \frac{1}{n}$, was (vgl. Definition von $H_{n,\mu}$ bzw. a)) $x \in U_\mu$ nach sich zieht. Dies widerspricht der Wahl von $\lambda(x)$.

Nun setzen wir

$$\begin{aligned} G_{n,\lambda} &= (H_{n,\lambda})_{1/3n} \ , \\ Q_n &= \bigcup_{\lambda\in\Lambda} G_{n,\lambda} \ . \end{aligned}$$

Die Q_n bilden eine abzählbare offene Überdeckung von X und haben nach dem 1. Teil des Beweises eine lokal endliche Verfeinerung $Q'_n \subseteq \bigcup\limits_{\lambda} G_{n,\lambda}$; deshalb ist auch durch

$$V_{n,\lambda} \quad = \quad Q'_n \cap G_{n,\lambda} \ , \quad n \in \mathbb{N}, \ \lambda \in \Lambda$$

eine offene Überdeckung von X gegeben ($x \in X \Rightarrow x \in Q'_n \subseteq \bigcup\limits_{\lambda} G_{n,\lambda}$, also $x \in V_{n,\lambda}$ für ein (n, λ)), und es gilt

$$V_{n,\lambda} \subseteq G_{n,\lambda} = (H_{n,\lambda})_{\frac{1}{3n}} \subseteq U_\lambda \ .$$

$\{V_{n,\lambda} : \lambda \in \Lambda, \ n \in \mathbb{N}\}$ ist lokal endlich:
Da (Q'_n) lokal endlich ist, gibt es $W(x)$ mit

$$W(x) \cap Q'_n = \emptyset \ \text{ für } n > N \ .$$

Nun ist wegen b)

$$\text{dist}(G_{n,\mu}, G_{n,\lambda}) \geq \frac{1}{3n} \ ,$$

so daß $K(x, \frac{1}{6N})$ höchstens eines der $G_{n,\lambda}$ für $n \leq N$ treffen kann. Dann trifft aber $W(x) \cap K(x, \frac{1}{6N})$ höchstens N der Mengen $V_{n,\lambda}$.
q.e.d.

Fortsetzungssatz von Dugundji. Ist $A \neq \emptyset$ eine abgeschlossene Teilmenge des metrischen Raumes X und $f : A \to E$ stetig (E normiert), so existiert eine stetige Funktion $F : X \to \text{conv} f(A)$ mit $F(x) = f(x)$ auf A.

Beweis. Für jedes $x \in X \backslash A$ sei $U(x) = K(x, \frac{1}{4}\text{dist}(x, A))$. Dann ist $\text{diam} U(x) \leq \frac{2}{3}\text{dist}(U(x), A) < \text{dist}(U(x), A)$.

Wegen $X\backslash A = \bigcup\limits_{x\in X\backslash A} U(x)$ gibt es eine lokal endliche Verfeinerung der $U(x)$, die ebenfalls $X\backslash A$ überdeckt, etwa $V_\lambda, \ \lambda \in \Lambda$. Dann ist aber für $x \notin A$

$$\alpha(x) = \sum_{\lambda\in\Lambda} \text{dist}(x, X\backslash V_\lambda)$$

lokal endlich, d. h. daß die Summe in einer Umgebung $W(x)$ nur aus der gleichen endlichen Anzahl von Summanden $\neq 0$ besteht. α ist stetig, > 0, in $X\backslash A$. Nun wählen wir zu jedem $\lambda \in \Lambda$ ein $a_\lambda \in A$ mit

$$\text{dist}(a_\lambda, V_\lambda) \quad < \quad 2\text{dist}(A, V_\lambda) \ .$$

(Dies ist wegen $\mathrm{dist}(A, V_\lambda) \geq \mathrm{dist}(A, U(x)) > 0$ für $V_\lambda \subseteq U(x),\ x \notin A$ möglich), und setzen

$$F(x) \;=\; \begin{cases} f(x),\ x \in A \\ \frac{1}{\alpha(x)} \sum\limits_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{dist}(x, X\backslash V_\lambda) f(a_\lambda), x \notin A \end{cases} .$$

Offenbar ist diese Funktion auf X definiert, es gilt $F(x) \in \mathrm{conv} f(A)$, und F ist sowohl in $X\backslash A$ als auch in inneren Punkten von A stetig.

Nun sei $x_0 \in \partial A$, ε beliebig. Zunächst gibt es $\delta > 0$ mit $\|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon$ für $x \in A,\ d(x, x_0) < \delta$.

Nun sei $x \in X\backslash A,\ d(x, x_0) < \frac{\delta}{4}$. Dann ist wegen $\alpha(x) = \sum\limits_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{dist}(x, X\backslash V_\lambda)$

$$\|F(x) - f(x_0)\| \leq \frac{1}{\alpha(x)} \sum_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{dist}(x, X\backslash V_\lambda) \|f(a_\lambda) - f(x_0))\| ,$$

und es genügt zu zeigen, daß aus

$$\mathrm{dist}(x, X\backslash V_\lambda) \neq 0, \quad d(x, x_0) < \frac{\delta}{4}$$

sicher $\qquad \|f(a_\lambda) - f(x_0)\| < \varepsilon$
folgt. $\mathrm{dist}(x, X\backslash V_\lambda) \neq 0$ bedeutet aber $x \in V_\lambda \subseteq U(x_1)$, x_1 passend.

Nun ist für $x \in V_\lambda \subseteq U(x_1)$

$$\begin{aligned} d(x_0, a_\lambda) &\leq d(x_0, x) + d(x, a_\lambda) \\ &\leq d(x_0, x) + \mathrm{dist}(a_\lambda, V_\lambda) + \mathrm{diam} V_\lambda \\ &\leq d(x_0, x) + 2\mathrm{dist}(A, V_\lambda) + \mathrm{diam} U(x_1) \\ &\leq d(x_0, x) + 2\mathrm{dist}(A, V_\lambda) + \mathrm{dist}(U(x_1), A) \\ &\leq d(x_0, x) + 2\mathrm{dist}(A, V_\lambda) + \mathrm{dist}(V_\lambda, A) \\ &\leq d(x_0, x) + 3\mathrm{dist}(A, V_\lambda) \\ &\leq 4d(x_0, x) , \end{aligned}$$

wegen $x_0 \in A,\ x \in V_\lambda$. Somit ist für $d(x_0, x) < \frac{\delta}{4}$ $d(x_0, a_\lambda) < \delta$, also $\|f(a_\lambda) - f(x_0)\| < \varepsilon$. Dann ist auch $\|F(x) - f(x_0)\| < \varepsilon$.

15 Der Fixpunktsatz von Darbo-Sadovski

Um den Fixpunktsatz von Darbo beweisen zu können, benötigen wir noch folgende Fassung des Fixpunktsatzes von Schauder:

Satz. Ist $\phi \neq C \subseteq E$ (Banachraum) beschränkt, abgeschlossen und konvex und $f : C \to C$ stetig und kompakt, so besitzt f wenigstens einen Fixpunkt.

Beweis. Es sei $R > 0$ so gewählt, daß $C \subseteq \overline{K(0,R)}$ gilt. Wir setzen nach dem Fortsetzungssatz von Dugundji f stetig auf $\overline{K(0,R)}$ fort mit $F(\overline{K(0,R)}) \subseteq \operatorname{conv} f(C)$.

Nach Voraussetzung ist $\overline{f(C)}$ kompakt, also auch $\overline{F(\overline{K(0,R)})}$ wegen

$$\overline{F(\overline{K(0,R)})} \subseteq \overline{\operatorname{conv}} f(C) \subseteq \overline{\operatorname{conv}} \overline{f(C)} \ ,$$

und letztere Menge ist nach Mazur kompakt.

Nach dem Satz von Schauder besitzt F einen Fixpunkt $x_0 \in \overline{K(0,R)}$:

$$x_0 = F(x_0) \in \operatorname{conv} f(C) \subseteq C \ ,$$

also ist $f(x_0) = F(x_0) = x_0$.

Bemerkung: Mit Hilfe der Schauderschen Approximationen kann folgender Satz bewiesen werden (vgl. Dugundji-Granas):

Satz. Ist $C \neq \emptyset$ eine abgeschlossene konvexe Teilmenge des normierten Raumes E und $f : C \to C$ stetig und $\overline{f(C)}$ kompakt, so besitzt f einen Fixpunkt in C.

In Verallgemeinerung des Begriffes der k-Mengenkontraktion nennt man eine Selbstabbildung f des metrischen Raumes X kondensierend, wenn gilt

$$A \subseteq X \text{ beschränkt, } \gamma(A) > 0 \Longrightarrow \gamma(f(A)) < \gamma(A)$$

(insbesondere ist $f(A)$ beschränkt für beschränktes A).

Satz (Darbo-Sadovsky): Ist $\emptyset \neq C \subseteq E$ (Banachraum) abgeschlossen und konvex und $f : C \to C$ stetig und kondensierend mit $f(C)$ beschränkt, so besitzt f in C wenigstens einen Fixpunkt.

Beweis. $C_1 := \overline{\operatorname{conv}} f(C)$ ist beschränkt, $\neq \emptyset$. Wir wählen $x_0 \in C_1$ beliebig und setzen

$$\mathcal{C} = \{M : x_0 \in M \subseteq C_1, M \text{ abgeschlossen konvex, } \ f(M) \subseteq M\} \ .$$

Es ist $C_1 \in \mathcal{C}$ und ebenso

$$C_2 := \bigcap_{M \in \mathcal{C}} M \in \mathcal{C}.$$

Nun sei

$$C_3 = \overline{\text{conv}}(\{x_0\} \cup f(C_2)) \ .$$

Es ist $x_0 \in C_3$, C_3 abgeschlossen, konvex, und wegen $x_0 \in C_2$, $f(C_2) \subseteq C_2$ ist $\{x_0\} \cup f(C_2) \subseteq C_2$, also $C_3 \subseteq C_2$.

Damit ist auch $f(C_3) \subseteq f(C_2) \subseteq \{x_0\} \cup f(C_2) \subseteq C_3$ also $C_3 \in \mathcal{C}$. Damit ist $C_2 = C_3$, woraus im Falle $\gamma(C_2) > 0$ der Widerspruch

$$\begin{aligned}\gamma(C_2) &= \gamma(\overline{\text{conv}}(\{x_0\} \cup f(C_2))) \\ &= \gamma(\{x_0\} \cup f(C_2)) = \gamma(f(C_2)) < \gamma(C_2)\end{aligned}$$

folgen würde. Also ist $C_2 \neq \emptyset$ kompakt, und es ist $f(C_2) \subseteq C_2$. Nach Schauder besitzt f in C_2 einen Fixpunkt.

Beispiel:

Sei $\emptyset \neq C \subseteq E$ abgeschlossen, beschränkt, konvex,
$g_1 : C \to C$ Lipschitz-stetig mit Konstante 1, und
$g_2 : C \to C$ stetig und kompakt.
Weiter sei $\lambda \in [0, 1)$ und $f = \lambda g_1 + (1 - \lambda) g_2 : C \to C$.
Ist $A \subseteq C$, so ist $f(A)$ beschränkt und

$$\gamma(f(A)) \leq \gamma(\lambda g_1(A) + (1 - \lambda) g_2(A)) \leq \lambda \gamma(g_1(A)) + (1 - \lambda)\gamma(g_2(A))$$

$$= \lambda\gamma(g_1(A)) \leq \lambda(\gamma(A)).$$

Nach dem FPS von Darbo-Sadovsky hat f einen Fixpunkt.

16 Differentialrechnung in normierten Räumen

Es seinen E, F normiert, $\{0\} \neq L \subseteq E$ ein linearer Teilraum von E und $f : U(x_0) \to F$ eine Abbildung ($U(x_0) \subseteq E$ Umgebung von x_0). f heißt im Punkt x_0 nach L differenzierbar, wenn eine lineare Abbildung $f'_L(x_0) : L \to F$ existiert mit

$$f(x_0 + h) - f(x_0) - f'_L(x_0)(h) = o(h) \text{ für } h \to 0,\ h \in L.$$

Dabei bedeutet $o(h)$, daß

$$\lim_{h \to 0,\ h \in L} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - f'_L(x_0)(h)}{\|h\|} = 0$$

gilt.
Bemerkungen.
1.) Für $L = \text{span}\{e\}$, $\|e\| = 1$ heißt $f'_L(x_0) =: \frac{\partial f(x_0)}{\partial e}$ die (zweiseitige) Richtungsableitung von f in Richtung e. Sie kann als Element von F aufgefaßt werden.
2.) Für $L = E$ schreibt man nur $f'(x_0)$.

Satz. *Die Ableitung $f'_L(x_0)$ ist eindeutig bestimmt.*
Beweis. Ist $A : L \to F$ eine weitere lineare Abbildung mit der geforderten Eigenschaft, so gilt für beliebiges $\varepsilon > 0$ und alle hinreichend kleinen $h \in L$, $\|h\| \leq \delta$

$$\|A(h) - f'_L(x_0)(h)\|$$

$$\leq \|f(x_0 + h) - f(x_0) - f'_L(x_0)(h)\| + \|f(x_0 + h) - f(x_0) - A(h)\| \leq 2\varepsilon\|h\|,$$

also für beliebiges $x \in L$

$$\|A(\frac{x}{\|x\|})\delta - f'_L(x_0)(\frac{x}{\|x\|})\delta\| \leq 2\varepsilon\delta,$$

also

$$\|A(x) - f'_L(x_0)(x)\| \leq 2\varepsilon\|x\|$$

und damit $A = f'_L(x_0)$.
Satz *Ist f in einer Umgebung $U(x_0) \cap (\{x_0\} + L)$ beschränkt und in x_0 nach L differenzierbar, so ist $f'_L(x_0)$ stetig und $f\big|_{U(x_0)\cap(\{x_0\}+L)}$ ist in x_0 stetig.*
Beweis. Nach Voraussetzung gibt es eine Konstante $C \geq 0$, sodaß für $h \in L$ mit $x_0 + h \in U(x_0)$

$$\|f(x_0 + h) - f(x_0)\| \leq C$$

gilt. Weiter gibt es ein $\delta > 0$ mit

$$\|f(x_0 + h) - f(x_0) - f'_L(x_0)(h)\| \leq 1 \text{ für } \|h\| < \delta.$$

Hieraus folgt

$$\|f'_L(x_0)(h)\| \leq C + 1,$$

also die Stetigkeit von $f'_L(x_0)$. Damit gilt auch

$$\|f(x_0 + h) - f(x_0)\| \leq \|f(x_0 + h) - f(x_0) - f'_L(x_0)(h)\| + \|f'_L(x_0)(h)\| < 2\varepsilon,$$

wenn $\delta > 0$ so gewählt wird, daß für $h \in L$, $\|h\| < \delta$ jeder der beiden Summanden kleiner als ε wird.
Insbesondere ist also $f'(x_0)$ stetig genau dann, wenn f im Punkt x_0 stetig ist. In diesem Fall nennt man $f'(x_0)$ auch *Fréchet- Ableitung* von f an der Stelle x_0.

Bem.: Im Fall $\dim E = \infty$ gibt es immer unstetige lineare Abbildungen von E nach F.

Beweis: Es genügt unstetige lineare Funktionale
$\varphi : E \to \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$) zu finden und $Ax = \varphi(x)x_0$ ($x_0 \in F \setminus \{0\}$ fest) zu betrachten.

Es sei $B = \{b_j : j \in J\}$ eine Hamelbasis von E mit $\|b_j\| = 1$ ($j \in J$). Es sei $C = \{b_{j_1}, b_{j_2}, \dots\}$ eine abzählbare TM von B. Durch $\varphi(b_{j_k}) = k$ ($k \in \mathbb{N}$), $\varphi(b_j) = 0$ ($b_j \notin C$) wird ein lineares Funktional $\varphi : E \to \mathbb{R}$ festgelegt.
Dieses ist unstetig, da $\varphi(\overline{K(0,1)})$ unbeschränkt ist.

(Oder: $\left(\frac{b_{j_k}}{k}\right)$ ist eine Nullfolge in E mit $\varphi\left(\frac{b_{j_k}}{k}\right) = 1 \not\to 0 = \varphi(0)$.)

Der nachfolgende Satz bezieht sich auf den Fall $E = \mathbb{R}$:
Mittelwertsatz. *Ist $f : [a,b] \to F$ stetig und in (a,b) differenzierbar, so gilt*

$$f(b) - f(a) \in (b-a)\overline{\operatorname{conv}}\{f'(\tau) : a < \tau < b\}.$$

Weiter gibt es ein $\tau \in (a,b)$ mit

$$\|f(b) - f(a)\| \le (b-a)\|f'(\tau)\|.$$

Beweis. Wäre die erste Behauptung falsch, so gäbe es nach der geometrischen Form des Satzes von Hahn-Banach ein stetiges lineares Funktional φ mit

$$\varphi(\frac{f(b) - f(a)}{b-a}) < \varphi(c) \text{ für alle } c \in \overline{\operatorname{conv}}\{f'(\tau) : a < \tau < b\}.$$

Nun ist $h(t) = \varphi(f(t))$ auf $[a,b]$ stetig und in (a,b) differenzierbar mit $h'(t) = \varphi(f'(t))$. Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung gibt es aber ein $\tau \in (a,b)$ mit

$$\frac{h(b) - h(a)}{b-a} = h'(\tau) = \varphi(f'(\tau)) > \varphi(\frac{f(b) - f(a)}{b-a}) = \frac{h(b) - h(a)}{b-a},$$

ein Widerspruch.
Zum Beweis der zweiten Behauptung wählen wir ein $\varphi \in E^\star$ mit $\|\varphi\| = 1$, $\varphi(f(b) - f(a)) = \|f(b) - f(a)\|$ und erhalten

$$\|f(b) - f(a)\| = \varphi(f(b) - f(a)) = (b-a)\varphi(f'(\tau)) \le (b-a)\|f'(\tau)\|$$

für ein $\tau \in (a,b)$.
Als Folgerung halten wir fest: Ist $f'(t) = 0$ in einem Intervall, so ist f konstant.
Beispiele. 1.) Wie schon erwähnt, kann für $E = \mathbb{R}$ (es ist dann zwangsläufig $L = E$) die Ableitung mit dem Element $f'(x_0)(1) \in F$ identifiziert werden. f ist genau dann im Punkt x_0 differenzierbar, wenn

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

existiert, und in diesem Fall ist $f'(x_0)$ gleich diesem Limes.
2.) Ist $L = E$, $F = \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$), so ist die Ableitung ein lineares Funktional, also im Fall der Stetigkeit ein Element von $E^\star$. Hier schreibt man auch $f'(x_0) = \nabla f(x_0)$ (Gradient von f an der Stelle x_0).
3.) Ist $f : E \to F$ eine lineare Abbildung, also $f(x) = A(x)$, so ist f in jedem Punkt $x_0 \in E$ differenzierbar, und es gilt $f'(x_0) = A$. (Die Ableitung ist 'konstant').
4.) Es gilt die *Kettenregel:* Ist $f : U(x_0) \to F$ in x_0 differenzierbar und $g : V(f(x_0)) \to G$ in $f(x_0)$ differenzierbar, so ist $g \circ f$ in x_0 differenzierbar (falls in einer Umgebung von x_0 definiert), und es gilt

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \circ f'(x_0).$$

5.) Ist E ein reeller Hilbertraum und $A : E \to E$ eine stetige lineare Abbildung, so ist $f : E \to \mathbb{R}$, gegeben durch $f(x) = (A(x), x)$ in jedem Punkt differenzierbar, und es gilt

$$f'(x) = (A^\star + A)(x),$$

es ist also $f'(x)$ linear in x (als Abbildung $E \to E$ betrachtet). Deshalb ist $f''(x) = A^\star + A$.
6.) Es sei $E = C([0,1])$, versehen mit der Maximumnorm, und $g : [0,1] \times [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und nach der letzten Variablen stetig differenzierbar. Durch

$$f(x)(t) = \int_0^1 g(t, s, x(s))ds$$

ist dann eine Funktion $f : E \to E$ definiert. Sie ist in jedem Punkt $x_0 \in E$ differenzierbar, und $f'(x_0)$ ist gegeben durch

$$f'(x_0)(h) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x} g(\cdot, s, x_0(s))h(s)ds.$$

Ist nämlich $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben, so gibt es ein $\delta > 0$ mit

$$|g(t, s, x_0(s) + d) - g(t, s, x_0(s)) - \frac{\partial}{\partial x} g(t, s, x_0(s))d| < \varepsilon |d|$$

für alle $t, s \in [0,1]$ und alle d mit $|d| < \delta$. Dann folgt für $h \in E$ mit $\|h\| < \delta$

$$\|f(x_0 + h) - f(x_0) - f'(x_0)(h)\| \le \varepsilon \|h\|$$

und hieraus die Behauptung.
Satz. *Sind E, F normierte Räume, $U(x_0) \subseteq E$ eine Umgebung, und genügt $f : U(x_0) \to F$ einer γ-Lipschitzbedingung mit der Konstanten k und ist sie in x_0 stetig und differenzierbar, so genügt $f'(x_0)$ einer γ-Lipschitzbedingung.*
Beweis. Wegen der Stetigkeit von f im Punkt x_0 ist $f'(x_0)$ stetig, bildet also beschränkte Mengen in beschränkte Mengen ab.

Nun sei $A \subseteq E$ beschränkt (durch $c > 0$) und $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann gibt es $\delta > 0$ mit

$$f(x_0 + h) - f(x_0) - f'(x_0)(h) = r(h),$$

wobei $\|r(h)\| \le \varepsilon\|h\|$ gilt für alle h mit $\|h\| \le \delta$. Wir wählen $\mu > 0$ so, daß $\|\mu a\| < \delta$ für alle $a \in A$ gilt und erhalten

$$\begin{aligned} f'(x_0)(a) &= \frac{1}{\mu} f'(x_0)(\mu a) \\ &= \frac{1}{\mu}(f(x_0 + \mu a) - f(x_0)) - \frac{r(\mu a)}{\mu} \\ &\in (-\frac{1}{\mu} f(x_0) + \frac{1}{\mu} f(x_0 + \mu A))_{\varepsilon c} =: B, \end{aligned}$$

und für $\gamma(B)$ folgt

$$\begin{aligned} \gamma(B) &\le \frac{k}{\mu}\gamma(\mu A) + 2\varepsilon c \\ &\le k\gamma(A) + 2\varepsilon c. \end{aligned}$$

Hieraus folgt für $\varepsilon \to 0$ die Behauptung.
Man beachte, daß insbesondere $f'(x_0)$ stetig und kompakt ist, wenn f in $U(x_0)$ kompakt und im Punkt x_0 stetig und differenzierbar ist.
Eine Umkehrung des obigen Satzes, also die Möglichkeit, aus dem Bestehen einer $\gamma-$Lipschitzbedingung für die Ableitungen $f'(x)$ für $x \in U(x_0)$ auf das Bestehen einer solchen Bedingung für f zu schließen, besteht i.a. nicht:
Man betrachte $E = c_0$, den Banachraum aller reellen Nullfolgen versehen mit der Maximumnorm, und $f : c_0 \to c_0$, definiert durch

$$f_k(x_1, x_2, \dots) = x_k^3, \; k = 1, 2, \dots.$$

Wegen $f(\overline{K(0,1)}) = \overline{K(0,1)}$ ist $k \ge 1$ falls f einer $\gamma-$ Lipschitzbedingung genügt mit der Konstanten k, aber alle Ableitungen $f'(x_0)$ sind (als Multiplikation mit der Nullfolge $3(x_{0,1}^2, x_{0,2}^2, \dots)$) kompakt. Jedoch hängen das Bestehen einer Lipschitzbedingung und der Gültigkeit von $\|f'(x)\| \le k$ ganz eng zusammen:
Satz. *Sind E, F normierte Räume, ist $U \subseteq E$ konvex mit nichtleerem Innern und ist $f : U \to F$ stetig und in* $\mathrm{int}U$ *differenzierbar, so gilt:*
f genügt in U genau dann einer Lipschitzbedingung mit der Konstanten k, wenn $\|f'(x)\| \le k$ für alle $x \in \mathrm{int}U$ gilt.
Insbesondere ist $\sup_{x\in U} \|f'(x)\|$ die kleinste Lipschitzkonstante von f.
Beweis. Genügt f einer Lipschitzbedingung mit der Konstanten k und ist $x \in \mathrm{int}U$, so gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit $K(x, \delta) \subseteq U$ und

$$\|f'(x)(\overline{x} - x)\| \le \|f(\overline{x}) - f(x)\| + \varepsilon\|\overline{x} - x\|$$

für $\overline{x} \in K(x, \delta)$, also

$$\|f'(x)(\overline{x} - x)\| \le k\|\overline{x} - x\| + \varepsilon\|\overline{x} - x\|.$$

Dann gilt diese Ungleichung für $z \in E$, anstelle von $\overline{x} - x$,woraus

$$\|f'(x)\| \leq k + \varepsilon$$

folgt. $\varepsilon \to 0$ liefert die Behauptung.
Umgekehrt folgt aus dem Mittelwertsatz unmittelbar

$$\|f(\overline{x}) - f(x)\| \leq \|f'(x + \tau(\overline{x} - x))\| \|\overline{x} - x\| \leq k\|\overline{x} - x\|.$$

17 Der Integralbegriff

Es sei M eine Menge, V ein reeller Vektorraum von Funktionen von M nach $\mathbb{R}$ und J ein lineares Funktional. (Man stelle sich für M einen Maßraum mit einem Maß μ, für V einen Vektorraum von bezüglich μ integrierbaren reellertigen Funktionen und $J(u) = \int_M u(x)d\mu(x)$ vor). Das Funktional J soll für gewisse Funktionen $f : M \to E$ erklärt werden, wobei E ein normierter Raum (oder allgemeiner ein lokalkonvexer topologischer Vektorraum) ist.
Für eine derartige Funktion f sagen wir, daß $J_E(f) \in E$ *existiert*, wenn für alle $\varphi \in E^\star$ die Verkettung $\varphi \circ f$ in V liegt und stets

$$\varphi(J_E(f)) = J(\varphi \circ f)$$

gilt.
1) $J_E(f)$ ist eindeutig bestimmt (und deshalb diese Schreibweise nachträglich gerechtfertigt): Ist $x \in E$ ein weiteres Element mit der verlangten Eigenschaft, so folgt $\varphi(x) = \varphi(J_E(f))$ für alle $\varphi \in E^\star$, also $x = J_E(f)$ nach dem Satz von Hahn-Banach.
2) Die Menge $\mathcal{V}$ aller $f : M \to E$, für die $J_E(f)$ existiert ist ein reeller Vektorraum, und J_E ist eine lineare Abbildung von $\mathcal{V}$ nach E:
Offenbar ist $f \equiv 0$ in $\mathcal{V}$, und für $f_1, f_2 \in \mathcal{V}$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ ist $\varphi \circ (f_1 + \alpha f_2) = \varphi \circ f_1 + \alpha\varphi \circ f_2$ in V und es gilt für beliebiges $\varphi \in E^\star$

$$\varphi(J_E(f_1) + \alpha J_E(f_2)) = J(\varphi \circ (f_1 + \alpha f_2)).$$

Also ist $f_1 + \alpha f_2 \in \mathcal{V}$ und

$$J_E(f_1 + \alpha f_2) = J_E(f_1) + \alpha J_E(f_2)$$

wegen der Eindeutigkeit nach 1). Insbesondere ist $J_E(0) = 0$.
Ab jetzt schreiben wir nur noch J anstelle von J_E. Wir nennen J *monoton wachsend*, wenn aus $u(m) \le v(m)$ für alle $m \in M$ die Ungleichung $J(u) \le J(v)$ folgt und *streng monoton wachsend*, wenn aus $u(m) < v(m)$ für alle $m \in M$ auch $J(u) < J(v)$ gilt.
Mittelwertsatz. (1. Form) *Ist J monoton wachsend, so gilt für $f \in \mathcal{V}$ mit $\|f(m)\| \le v(m)$ $(m \in M)$, $v \in V$*

$$\|J(f)\| \le J(v).$$

Ist $\|f(\cdot)\| \in V$, so gilt also

$$\|J(f)\| \le J(\|f(\cdot)\|).$$

Beweis. Wir wählen nach dem Satz von Hahn-Banach ein $\varphi \in E^\star$ mit $\|\varphi\| = 1$ und $\varphi(J(f)) = \|J(f)\|$. Dann ist wegen $|\varphi(f(m))| \le \|f(m)\| \le v(m)$

$$\|J(f)\| = \varphi(J(f)) = J(\varphi \circ f) \le J(v).$$

Mittelwertsatz. (2. Form) *Ist J streng monoton wachsend und ist $0 < v \in V$, $f \in \mathcal{V}$ so gilt*

$$J(f) \in J(v)\ \overline{\text{conv}}\{\frac{f(m)}{v(m)} : m \in M\}.$$

Beweis. Wenn nicht läßt sich nach dem Satz von Hahn-Banach der Punkt $\frac{J(f)}{J(v)}$ von der Menge $\overline{\text{conv}}\{\frac{f(m)}{v(m)} : m \in M\}$ durch eine Hyperebene echt trennen; es gibt also ein $\varphi \in E^\star$ mit

$$\varphi(c) < \varphi(\frac{J(f)}{J(v)}),\ c \in \overline{\text{conv}}\{\frac{f(m)}{v(m)} : m \in M\}.$$

Speziell wird

$$\varphi(\frac{f(m)}{v(m)}) < \varphi(\frac{J(f)}{J(v)}),\ m \in M,$$

also nach Multiplikation mit $v(m)$ und Anwendung von J

$$J(\varphi \circ f) < \varphi(\frac{J(f)}{J(v)})J(v) = \varphi(J(f)),$$

ein Widerspruch.

Beispiele. 1) Es sei $M = [a, b]$, V der Vektorraum aller auf $[a, b]$ im Riemannschen Sinn integrierbaren Funktionen und J das Riemann-Integral. J ist im Fall $a < b$ streng monoton wachsend, und das zugehörige $J = J_E$ nennt man (schwaches) Riemann-Integral.

2) Entsprechendes gilt für $V = L^1(a, b)$, J das Lebesgue-Integral.

3) Es sei $M = \mathbb{N}$, $V = l^1(\mathbb{N})$ und $J(v) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n$. Für einen normierten Raum E bedeutet $f \in \mathcal{V}$ dann, daß für jedes $\varphi \in E^\star$ die Folge $(\varphi(f_n))$ in $l^1(\mathbb{N})$ liegt, daß also

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi(f_n)| < \infty$$

gilt und ein Element $J(f) \in E$ existiert mit

$$\varphi(J(f)) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(f_n)$$

für alle $\varphi \in E^\star$. $f \in \mathcal{V}$ impliziert also, daß $\sum f_n$ schwach konvergiert gegen $J(f)$, und zwar unbedingt, d.h. auch bei jeder Umordnung.

Im folgenden Satz gelten alle oben eingeführten Bezeichnungen; E ist ein beliebiger normieter Raum.

Existenzsatz. *Es sei $J : V \to \mathbb{R}$ streng monoton wachsend, $0 < v \in V$ und $f : M \to E$ mit $\varphi \circ f \in V$ für alle $\varphi \in E^\star$. Ist*

$$C := \overline{\text{conv}}\ \{\frac{f(m)}{v(m)} : m \in M\}$$

schwach kompakt, so existiert $J(f)$, und es gilt $J(f) \in J(v)C$.
Beweis. Es sei $\phi = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ eine beliebige endliche Teilmenge von $E^\star$ und

$$K_\phi = \{y \in C : \varphi_k(y) = \frac{1}{J(v)}\, J(\varphi_k \circ f),\ 1 \leq k \leq n\}.$$

Jedes K_ϕ ist als Durchschnitt einer schwach abgeschlossenen Menge mit C schwach kompakt. Ist nun (was unten noch bewiesen wird) jedes K_ϕ nicht leer, so besitzt das System aller K_ϕ die 'endliche Durchschnittseigenschaft', also wegen der schwachen Kompaktheit von C einen nichtleeren Durchschnitt. Ist etwa y in diesem, so folgt

$$\varphi(J(v)y) = J(\varphi \circ f)$$

für alle $\varphi \in E^\star$, sodaß $J(v)y = J(f)$ gilt. Dann besteht dieser Durchschnitt nur aus einem Element, und es gilt $J(f) \in J(v)C$.
Nun sei ein K_ϕ vorgelegt und $L : E \to \mathbb{R}^n$ definiert durch

$$L(x) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \vdots \\ \varphi_n(x) \end{pmatrix}.$$

L ist linear und stetig, also $K = L(C)$ kompakt und konvex. Wir setzen

$$z = \frac{1}{J(v)} \begin{pmatrix} J(\varphi_1 \circ f) \\ \vdots \\ J(\varphi_n \circ f) \end{pmatrix}$$

und weisen $z \in K$ nach: wäre dies falsch, so gäbe es $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ mit

$$\sum_{i=1}^{n} c_i k_i < \sum_{i=1}^{n} c_i z_i$$

(Hahn-Banach) für alle $k = (k_1, \ldots, k_n) \in K$. Insbesondere wäre für jedes $m \in M$

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_i(\frac{f(m)}{v(m)}) < \sum_{i=1}^{n} c_i z_i,$$

woraus durch Multiplikation mit $v(m)$ und Anwendung von J

$$\sum_{i=1}^{n} c_i J(\varphi_i \circ f) < J(v) \sum_{i=1}^{n} c_i z_i$$

folgt. Diese Ungleichung widerspricht der Definition von z.
Also ist $z \in K$, also $z = L(y)$ für ein $y \in C$, und für ein solches y gilt

$$\varphi_i(y) = (L(y))_i = z_i = \frac{1}{J(v)} J(\varphi_i \circ f),\ 1 \leq i \leq n,$$

also $y \in K_\phi$.

18 Der Hauptsatz der Differential-und Integralrechnung

Mit den Bezeichnungen des vorigen Abschnitts setzen wir

$$M = [a,b] \subseteq \mathbb{R},\ V = C[a,b],\ J(u) = \int_a^b u(t)dt,\ v \equiv 1$$

und erhalten zu einem beliebig vorgegebenen Banachraum E den entsprechenden Raum $\mathcal{V}$ aller Funktionen $f : [a,b] \to E$, für die $J(f)$ existiert. Der Existenzsatz liefert, daß alle stetigen Funktionen zu $\mathcal{V}$ gehören, weil die abgeschlossene konvexe Hülle jeder kompakten Menge kompakt ist. Ist ferner $c > b$ und f auf $[a,c]$ stetig, so gilt (wir schreiben $J(f) = \int_a^b f(t)dt$)

$$\int_a^b f(t)dt + \int_b^c f(t)dt = \int_a^c f(t)dt,$$

denn für beliebiges $\varphi \in E^\star$ ist (Eindeutigkeitsschluß!)

$$\begin{aligned}
\varphi(\int_a^b f(t)dt + \int_b^c f(t)dt) &= \varphi(\int_a^b f(t)dt) + \varphi(\int_b^c f(t)dt) \\
&= \int_a^b \varphi \circ f(t)dt + \int_b^c \varphi \circ f(t)dt \\
&= \int_a^c \varphi \circ f(t)dt = \varphi(\int_a^c f(t)dt).
\end{aligned}$$

Satz. (Hauptsatz, 1. Form) *Ist $f : [a,b] \to E$ stetig, so ist F, definiert durch*

$$F(t) = \int_a^t f(s)ds$$

differenzierbar, und es gilt $F'(t) = f(t)$. (Für $t = a, b$ sind die jeweiligen einseitigen Ableitungen gemeint).

Beweis. Es ist für $h > 0$, $t + h \le b$

$$\begin{aligned}
\|F(t+h) - F(t) - hf(t)\| &= \| \int_t^{t+h} f(s)ds - hf(t)\| \\
&= h\|\frac{1}{h}\int_t^{t+h} (f(s) - f(t))ds\| \\
&\le \int_t^{t+h} \|f(s) - f(t)\|ds,
\end{aligned}$$

und für $h < 0$, $t + h \ge a$ gilt eine entsprechende Formel. Insgesamt erhält man für $h \ne 0$

$$\|F(t+h) - F(t) - hf(t)\| \le |\int_t^{t+h} \|f(s) - f(t)\|ds|.$$

Wählt man nun zu $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit $\|f(s) - f(t)\| < \varepsilon$ für $|s - t| < \delta$, so folgt weiter

$$\|F(t+h) - F(t) - hf(t)\| \leq |h|\varepsilon \text{ für } |h| < \delta,$$

sodaß $F'(t) = f(t)$ ist.

Folgerung. (Hauptsatz, 2. Form) *Ist $F : [a, b] \to E$ stetig differenzierbar, so gilt*

$$F(b) - F(a) = \int_a^b F'(s)ds.$$

Beweis. Aus obigem folgt für $t \in (a, b)$

$$(F(t) - F(a) - \int_a^t F'(s)ds)' = 0,$$

daß also der Ausdruck in Klammern konstant, also identisch Null ist.

19 Das Newton-Verfahren

Wir betrachten das 'vereinfachte Newtonverfahren' in einer Version von Kantorowitsch, und beweisen als Vorbereitung den

Satz. (Majorantenverfahren) *Es sei E ein Banachraum, $K = K(x_0, R)$ eine offene Kugel, $f : K \to E$ stetig differenzierbar und $\gamma : [t_0, t_0 + R) \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit*

$$\|f(x_0) - x_0\| \leq \gamma(t_0) - t_0,$$
$$\|f'(x)\| \leq \gamma'(t) \text{ für } \|x - x_0\| \leq t - t_0.$$

Weiter sei

$$t_1 = \gamma(t_0), \ldots, t_{n+1} = \gamma(t_n), \ldots$$

und

$$x_1 = f(x_0), \ldots, x_{n+1} = f(x_n), \ldots$$

Besitzt γ einen Fixpunkt in $[t_0, t_0 + R)$, so besitzt auch f einen Fixpunkt in K. (t_n) konvergiert monoton gegen den kleinsten Fixpunkt $\underline{t}$ von γ, (x_n) gegen einen Fixpunkt $\underline{x}$ von f und es gilt

$$\|\underline{x} - x_n\| \leq \underline{t} - t_n.$$

($t_n \in [t_0, t_0 + R)$ und $x_n \in K$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist Teil der Behauptung).

Beweis. Es sei $\underline{t}$ der kleinste Fixpunkt von γ. Nach Voraussetzung ist $t_1 = \gamma(t_0) \geq t_0$ und γ monoton wachsend. Wegen $t_0 \leq \underline{t}$ ist dann $t_1 = \gamma(t_0) \leq \gamma(\underline{t}) = \underline{t}$, also

$$t_0 \leq t_1 \leq \underline{t},$$

und durch Induktion folgt, daß (t_n) wachsend und durch $\underline{t}$ beschränkt ist, also daß

$$\lim_{n\to\infty} t_n = \underline{t}$$

gilt. Betrachtet man parallel dazu die sukzessiven Approximationen für die Gleichung $f(x) = x$, ausgehend von x_0, so folgt aus der ersten der vorausgesetzten Ungleichungen

$$\|x_1 - x_0\| \leq t_1 - t_0.$$

Ist nun $\|x_j - x_{j-1}\| \leq t_j - t_{j-1}$ für $1 \leq j \leq k$ schon bewiesen, so folgt zunächst leicht $\|x_j - x_0\| \leq t_j - t_0$ für diese j, und für

$$\begin{aligned} x(s) &= x_{k-1} + s(x_k - x_{k-1}),\ 0 \leq s \leq 1 \\ t(s) &= t_{k-1} + s(t_k - t_{k-1}),\ 0 \leq s \leq 1 \end{aligned}$$

ist dann

$$\begin{aligned} \|x(s) - x_0\| &\leq \|x(s) - x_{k-1}\| + \|x_{k-1} - x_0\| \\ &\leq s\|x_k - x_{k-1}\| + t_{k-1} - t_0 \\ &\leq s(t_k - t_{k-1}) + t_{k-1} - t_0 \\ &= t(s) - t_0, \end{aligned}$$

also wegen der zweiten der vorausgesetzten Ungleichungen $\|f'(x(s))\| \leq \gamma'(t(s))$, $0 \leq s \leq 1$. Wegen $x(1) = x_k$, $x(0) = x_{k-1}$ ist weiter

$$\begin{aligned} \|x_{k+1} - x_k\| &= \|f(x_k) - f(x_{k-1})\| = \|\int_0^1 (f(x(s)))' ds\| \\ &= \|\int_0^1 f'(x(s))(x_k - x_{k-1}) ds\| \\ &\leq \int_0^1 \|f'(x(s))\| \|x_k - x_{k-1}\| ds \\ &\leq \int_0^1 \gamma'(t(s))(t_k - t_{k-1}) ds \\ &= \int_0^1 (\gamma(t(s)))' ds = t_{k+1} - t_k, \end{aligned}$$

also die Induktionsbehauptung bewiesen.
Für $p, n \in \mathbb{N}$ folgt hieraus

$$\begin{aligned} \|x_{n+p} - x_n\| &\leq \|x_{n+p} - x_{n+p-1}\| + \cdots + \|x_{n+1} - x_n\| \\ &\leq t_{n+p} - t_{n+p-1} + \cdots + t_{n+1} - t_n = t_{n+p} - t_n, \end{aligned}$$

sodaß (x_n) eine Cauchyfolge, also konvergent ist. Für den Limes $\underline{x}$ gilt $\underline{x} = f(\underline{x})$, und $p \to \infty$ liefert

$$\|\underline{x} - x_n\| \leq \underline{t} - t_n,\ n \in \mathbb{N}.$$

Damit ist alles bewiesen.
Bemerkung. (Eindeutigkeit). Gibt es zusätzlich zu den Voraussetzungen des obigen Satzes ein $0 < r < R$ mit $\gamma(t_0 + r) \leq t_0 + r$ und besitzt γ in $[t_0, t_0 + r]$ genau einen Fixpunkt, so besitzt auch f in $\overline{K(x_0, r)}$ genau einen Fixpunkt. Zum Beweis betrachtet man zwei weitere Folgen $(\overline{t}_n)$, $\overline{x}_n$, definiert durch

$$\begin{aligned} \overline{t}_{n+1} &= \gamma(\overline{t}_n),\ \overline{t}_0 = t_0 + r, \\ \overline{x}_{n+1} &= f(\overline{x}_n),\ \overline{x}_0 \in \overline{K(x_0, r)} \text{ (beliebig)}, \end{aligned}$$

und weist $\overline{t}_n \to \underline{t}$ (fallend) sowie

$$\|x_n - \overline{x}_n\| \leq \overline{t}_n - t_n,\ n \in \mathbb{N}$$

nach. Hieraus folgt dann alles.
Satz. (Kantorowitsch) *Es seien E, F Banachräume, $K = K(x_0, R) \subseteq E$ eine offene Kugel und*

$$T : K \to F$$

zweimal stetig differenzierbar; $T'(x_0) : E \to F$ sei ein Homöomorphismus. Die Funktion $\delta : [t_0, t_0{+}R) \to \mathbb{R}$ sei zweimal stetig differenzierbar mit $\delta'(t_0) < 0$, und es gelte

$$\begin{aligned} \|(T'(x_0))^{-1}(T(x_0))\| &\leq -\frac{\delta(t_0)}{\delta'(t_0)} \\ \|((T'(x_0))^{-1}(T''(x)))\| &\leq -\frac{\delta''(t)}{\delta'(t_0)} \quad \text{für} \quad \|x - x_0\| \leq t - t_0. \end{aligned}$$

(Die Norm in der zweiten Ungleichung ist in $\mathcal{L}(E, \mathcal{L}(E, E))$ zu verstehen). Besitzt δ eine Nullstelle in $[t_0, t_0 + R)$, so sind durch

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - (T'(x_0))^{-1}T(x_n), \\ t_{n+1} &= t_n - \frac{\delta(t_n)}{\delta'(t_0)} \end{aligned}$$

Folgen in K bzw. $[t_0, t_0 + R)$ definiert, die gegen eine Nullstelle $x^\star$ bzw. $t^\star$ von T bzw. δ konvergieren, und es gilt

$$\|x^\star - x_n\| \leq t^\star - t_n.$$

Besitzt δ in $[t_0, t_0{+}r] \subseteq [t_0, t_0{+}R)$ genau eine Nullstelle und gilt $\delta(t_0{+}r) \leq 0$, so besitzt T in $\overline{K(x_0, r)}$ genau eine Nullstelle.
Beweis. (Durch Zurückführung auf das Majorantenverfahren). Wir setzen

$$\begin{aligned} f(x) &= x - (T'(x_0))^{-1}T(x), \\ \gamma(t) &= t - \frac{\delta(t)}{\delta'(t_0)}. \end{aligned}$$

f ist auf K definiert mit Werten in E und zweimal stetig differenzierbar mit

$$\begin{aligned} f'(x) &= \mathrm{Id} - (T'(x_0))^{-1}T'(x), \\ f''(x) &= -(T'(x_0))^{-1}T''(x). \end{aligned}$$

γ ist auf $[t_0, t_0 + R)$ definiert und reellwertig mit

$$\gamma'(t) = 1 - \frac{\delta'(t)}{\delta'(t_0)}.$$

Weiter ist

$$\|f(x_0) - x_0\| = \|(T'(x_0))^{-1}T(x_0)\| \leq -\frac{\delta(t_0)}{\delta'(t_0)} = \gamma(t_0) - t_0,$$

und wegen $f'(x_0) = 0$ wird für $\|x - x_0\| \leq t - t_0$

$$\begin{aligned} \|f'(x)\| &= \| \int_0^1 f''(x_0 + \tau(x - x_0))(x - x_0)d\tau\| \\ &\leq \int \|(T'(x_0))^{-1}T''(x_0 + \tau(x - x_0))\|\|x - x_0\|d\tau \\ &\leq -\frac{1}{\delta'(t_0)} \int_0^1 \delta''(t_0 + \tau(t - t_0))(t - t_0)d\tau \\ &= -\frac{1}{\delta'(t_0)}(\delta'(t) - \delta'(t_0)) = \gamma'(t). \end{aligned}$$

Es sind also die Voraussetzungen des Satzes über das Majorantenverfahren erfüllt; beachtet man, daß die Iterationen mit f bzw. γ gerade denen für T bzw. δ und daß Fixpunkte von f bzw. γ Nullstellen von T bzw. δ entsprechen, ist der Satz bewiesen. Der Zusatz über die Eindeutigkeit entspricht dem Zusatz zum Majorantenverfahren.
Als **Beispiel** betrachten wir das Randwertproblem 1. Art

$$\begin{aligned} x''(\tau) &= f(\tau, x(\tau)), \quad \tau \in [0, 1], \\ x(0) &= 0, \\ x(1) &= 0 \end{aligned}$$

mit einer zweimal nach x stetig differenzierbaren Funktion $f : [0, 1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dieses ist äquivalent zur Integralgleichung

$$x(\tau) = -\int_0^1 G(\tau, s)f(s, x(s))ds$$

mit

$$G(\tau, s) = \begin{cases} \tau(1 - s) & \text{für } 0 \leq \tau \leq s \leq 1, \\ s(1 - \tau) & \text{für } 0 \leq s \leq \tau \leq 1. \end{cases}$$

Betrachtet man $E = C[0,1]$ mit der Maximumnorm, so ist durch

$$T(x)(\tau) = x(\tau) + \int_0^1 G(\tau, s) f(s, x(s)) ds$$

eine Abbildung $T : E \to E$ definiert. Für festes $x_0 \in E$ ist $T'(x_0)$ gegeben durch

$$T'(x_0)(h) = h + \int_0^1 G(\cdot, s) f_x(s, x_0(s)) h(s) ds,$$

also die Injektivität von $T'(x_0)$ äquivalent dazu, daß das lineare Randwertproblem

$$\begin{aligned} h''(\tau) &= f_x(\tau, x_0(\tau)) h(\tau), \quad \tau \in [0,1], \\ h(0) &= 0, \\ h(1) &= 0 \end{aligned}$$

nur trivial lösbar ist. Dann ist aber $T'(x_0) : E \to E$ auch surjektiv: Dies kann man mit Hilfe der Fredholmschen Alternative schließen ($T'(x_0)$ ist eine kompakte Störung der Identität) oder direkt, indem man zu gegebenem $r \in E$ das Randwertproblem

$$\begin{aligned} d''(\tau) &= f_x(\tau, x_0(\tau)) d(\tau) + f_x(\tau, x_0(\tau)) r(\tau), \quad \tau \in [0,1], \\ d(0) &= 0, \\ d(1) &= 0 \end{aligned}$$

löst, $h = d + r$ setzt und $T'(x_0)(h) = r$ nachrechnet. Um die Voraussetzungen des Satzes von Kantorowitsch nachzuweisen, setzen wir $r = T(x_0)$ und betrachten die Gleichung $T'(x_0)(h) = T(x_0)$, welche äquivalent zum Randwertproblem (mit $f_0(s) = f(s, x_0(s))$, $f_1(s) = f_x(s, x_0(s))$)

$$\begin{aligned} (h - x_0)'' &= f_1 \cdot (h - x_0) + f_1 \cdot x_0 - f_0, \\ (h - x_0)(0) &= 0, \\ (h - x_0)(1) &= 0. \end{aligned}$$

Mithilfe der Greenschen Funktion

$$G_0(\tau, s) = \begin{cases} \frac{1}{c} u_1(\tau) u_2(s) & \text{für } 0 \le \tau \le s \le 1, \\ \frac{1}{c} u_1(s) u_2(\tau) & \text{für } 0 \le s \le \tau \le 1 \end{cases}$$

(wobei $\{u_1, u_2\}$ ein Fundamentalsystem der zugehörigen homogenen Differentialgleichung $u'' = f_1 u$ mit $u_1(0) = 0$, $u_2(1) = 0$ und $c = u_1(1) u_2'(1)$ ist) ergibt sich

$$h = x_0 + \int_0^1 G_0(\cdot, s)(f_1(s) x_0(s) - f_0(s)) ds,$$

woraus eine Schranke K für $\|(T'(x_0))^{-1}T(x_0)\|$ bestimmt werden kann. Eine Schranke für $\|(T'(x_0))^{-1}T''(x)\|$ für $\|x-x_0\| \leq t$ erhält man, indem man zunächst für $v_1, v_2 \in E$ die Gleichung

$$T'(x_0)h = T''(x)(v_1,v_2) = -\int_0^1 G(\cdot,s)f_{xx}(s,x(s))v_1(s)v_2(s)ds$$

betrachtet, welche

$$h = \int_0^1 G_0(\cdot,s)f_{xx}(s,x(s))v_1(s)v_2(s)ds$$

liefert. Ist nun

$$m(t) := \max\{|f_{xx}(\tau,x)| : \ 0 \leq \tau \leq 1, \ |x - x_0(\tau)| \leq t\},$$

so folgt

$$\|(T'(x_0))^{-1}T''(x)\| \leq m(t) \max_{0\leq\tau\leq 1} \int_0^1 |G_0(\tau,s)|ds =: M(t),$$

und wir setzen schließlich für $t \in [0,\infty)$

$$\delta(t) = K - t + \int_0^t \int_0^s M(\sigma)d\sigma ds.$$

Besitzt δ eine Nullstelle in $[0,\infty)$, so hat die Randwertaufgabe eine Lösung.

20 Fixpunktsätze in geordneten Mengen

Die Menge M heißt *geordnet* (eigentlich *halbgeordnet*, wenn eine Relation $\leq$ in M gegeben ist mit

$$\begin{aligned} x &\leq x, \ (x \in M), \\ x &\leq y, y \leq z \Longrightarrow x \leq z, \\ x &\leq y, y \leq x \Longrightarrow x = y. \end{aligned}$$

Gilt für beliebige $x, y \in M$ wenigstens eine der Relationen $x \leq y$ oder $y \leq x$, so heißt M *linear geordnet*.
Ist $X \subseteq M$ und gibt es ein $\overline{x} \in M$ mit $x \leq \overline{x}$ für alle $x \in X$, so heißt $\overline{x}$ eine *obere Schranke von* X. Entsprechend ist der Begriff untere Schranke erklärt. Ist $\overline{x}$ eine obere Schranke von X, die untere Schranke aller oberen Schranken von X ist, so heißt $\overline{x}$ das *Supremum* von X, $\overline{x} = \sup X$. Jede Teilmenge X von M besitzt höchstens ein Supremum. Das *Infimum* ist entsprechend erklärt.
$m \in M$ heißt *maximal* (in M), wenn es kein von m verschiedenes Element $\overline{m}$ von M gibt mit $m \leq \overline{m}$.

Für derartige Ordnungen benutzen wir die üblichen Sprechweisen: so nennen wir etwa y größer oder gleich x, wenn $x \leq y$ gilt.
Beispiele für geordnete Mengen ist etwa die Potenzmenge $\mathcal{P}(A)$ einer Menge A bezüglich der Inklusion oder eine Menge von reellwertigen Funktionen auf einer Menge unter der punktweisen Ordnung.
Die Abbildung $f : M \to M$ heißt *monoton wachsend* wenn für alle $x, y \in M$

$$x \leq y \implies f(x) \leq f(y)$$

gilt.
Satz. (Knaster -Tarski). *Es sei M geordnet, $f : M \to M$ monoton wachsend, und es gelte*

a) *Es gibt $v \in M$ mit $v \leq f(v)$,*

b) *Jede nichtleere linear geordnete Teilmenge von $\{x \in M : v \leq x\}$ besitzt ein Supremum.*

Dann ist $F = \{x \in M : v \leq x,\ f(x) = x\}$ nicht leer, und F besitzt maximale Elemente.
Beweis. Wir betrachten

$$X = \{x \in M : v \leq x \leq f(x)\},$$

und weisen nach, daß für $(X, \leq)$ die Voraussetzungen des Zornschen Lemmas erfüllt sind. Wegen $v \in X$ ist diese Menge nicht leer. Ist $\emptyset \neq K \subseteq X$ linear geordnet, so besitzt K nach b) ein Supremum $u = \sup K \in M$; insbesondere ist $v \leq k \leq u$ für alle $k \in K$, also

$$v \leq k \leq f(k) \leq f(u),\ k \in K.$$

Also ist $f(u)$ obere Schranke für K, also $u \leq f(u)$, und wegen $v \leq u$ ist dann sogar u in X. Nach dem Zornschen Lemma besitzt X wenigstens ein maximales Element $\overline{x}$ für welches also

$$v \leq \overline{x} \leq f(\overline{x})$$

gilt. Aus der Monotonie von f folgt dann

$$v \leq f(\overline{x}) \leq f(f(\overline{x})),$$

also auch $f(\overline{x}) \in X$, was wegen der Maximalität von $\overline{x}$ die Gleichung $f(\overline{x}) = \overline{x}$ impliziert.
Ist schliesslich $\overline{x} \leq x$ mit

$$v \leq x = f(x)$$

gegeben, so ist $x \in X$, also $x = \overline{x}$.

Zusatz zum Satz von Knaster- Tarski: *Besitzt zusätzlich zu den Voraussetzungen des obigen Satzes jede zweielementige Menge ein Supremum (in M), so besitzt jede zweielementige Menge in X ein Supremum (in X), also X genau ein maximales Element. Dieses ist das größte Element von F.*
Beweis. Wir setzen für $x, y \in X$ $s := x \vee y$ und erhalten aus

$$\begin{aligned} x &\leq s, \\ y &\leq s \end{aligned}$$

die Ungleichungen

$$\begin{aligned} v &\leq x \leq f(x) \leq f(s), \\ v &\leq y \leq f(y) \leq f(s), \end{aligned}$$

sodaß $f(s)$ eine obere Schranke von $\{x, y\}$ ist. Also folgt $s \leq f(s)$ und wegen $v \leq s$ auch $s \in X$.
Sind x, y beide maximal in X, so folgt offenbar $x = x \vee y = y$. Ist schließlich $\overline{x}$ das maximale Element von X und $x \in F \subseteq X$, so ist

$$s = x \vee \overline{x} \in X,$$

und aus $s \geq \overline{x}$ folgt dann $s = \overline{x}$, also $x \leq \overline{x}$.
Ein weiterer Fixpunktsatz, der für Anwendungen manchmal besser geeignet ist, lautet:
Satz. *Es sei M geordnet, $f : M \to M$ monoton wachsend, und es gelte*

a) *Es gibt $v \in M$ mit $v \leq f(v)$,*

b) *Jede nichtleere linear geordnete Teilmenge von*

$$X_0 = \{x \in M : \exists \xi \in M : x = f(\xi),\ v \leq \xi \leq x\}$$

besitzt ein Supremum (in M).

Dann ist $F = \{x \in M : v \leq x = f(x)\}$ nicht leer, und F besitzt maximale Elemente.
Beweis. Wegen $f(v) \in X_0$ ist X_0 nichtleer, und es ist $f(X_0) \subseteq X_0$: für $x = f(\xi) \in X_0$ gilt

$$v \leq f(v) \leq f(\xi) \leq f(f(\xi)),$$

also

$$v \leq x \leq f(x),$$

also $f(x) \in X_0$ und $x \leq f(x)$. Nun sei wieder K eine linear geordnete Teilmenge von X_0. Nach b) besitzt K ein Supremum $\overline{x} \in M$. Für $k \in K$ gilt dann $v \leq k \leq f(k)$ und $k \leq \overline{x}$, also

$$v \leq k \leq f(k) \leq f(\overline{x}).$$

Folglich ist $f(\overline{x})$ eine obere Schranke für K, also

$$v \leq \overline{x} \leq f(\overline{x}),$$

also $f(\overline{x}) \in X_0$. Nach dem Zornschen Lemma besitzt X_0 ein maximales Element x_0, und für jedes solche folgt aus $x_0 \leq f(x_0) \in X_0$ dann $f(x_0) = x_0$. F ist also nicht leer, und wegen $F \subseteq X_0$ ist jedes maximale Element von X_0, das in F liegt, auch dort maximal.
Hier gilt mit ähnlichem Beweis folgender **Zusatz**:
Besitzt zusätzlich zu den Voraussetzungen des obigen Satzes jede zweielementige Menge ein Supremum (in M), so besitzt jede zweielementige Menge in X_0 ein Supremum (in X_0), also X_0 genau ein maximales Element. Dieses ist das größte Element von F.
Beispiel. Es sei $\varphi : [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ beschränkt, etwa $|\varphi(t,x)| \leq L$ und monoton wachsend bezüglich der zweiten Variablen. Weiter sei f derart, daß

$$\int_0^t \varphi(s,x(s))ds$$

für jede Lipschitzstetige Funktion $x : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit Lipschitzkonstante L und $x(0) = 0$ existiert (im Riemannschen oder Lebesgueschen Sinn). Wir suchen Lösungen von

$$x(t) = \int_0^t \varphi(s,x(s))ds.$$

Hierzu setzen wir

$$M = \{x \in C[0,1] : x(0) = 0,\ |x(t) - x(\overline{t})| \leq L|t - \overline{t}|,\ t, \overline{t} \in [0,1]\},$$

$$x \leq y \Longleftrightarrow x(t) \leq y(t),\ t \in [0,1],$$

und

$$f(x)(t) = \int_0^t \varphi(s,x(s))ds.$$

f ist monoton wachsend und bildet M in sich ab, und für $v(t) = -Lt$ gilt $v \leq f(v)$.
Nun besitzt in M sogar jede nichtleere Teilmenge X ein Supremum, nämlich

$$s(t) = \sup\{x(t) : x \in X\} :$$

es ist $s(0) = 0$, und für $t, \overline{t} \in [0,1]$ und beliebiges $\varepsilon > 0$ gibt es ein $x_\varepsilon \in X$ mit

$$\begin{aligned} s(t) - s(\overline{t}) &\leq x_\varepsilon(t) + \varepsilon - s(\overline{t}) \\ &\leq x_\varepsilon(t) + \varepsilon - x_\varepsilon(\overline{t}) \\ &\leq L|t - \overline{t}| + \varepsilon, \end{aligned}$$

und $\varepsilon \to 0$ liefert

$$s(t) - s(\overline{t}) \leq L|t - \overline{t}|.$$

Vertauschen von t und $\bar{t}$ beweist die Lipschitzstetigkeit von s mit der Konstanten L. s ist also obere Schranke von X, und, wie man leicht sieht, sogar das Supremum von X. Der Fixpunktsatz von Knaster- Tarski (nebst Zusatz) liefert die Existenz eines größten Fixpunktes von f.

21 Ordnung in metrischen Räumen

Es sei (X, d) ein metrischer Raum und $\varphi : X \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann wird durch

$$x \leq y \Longleftrightarrow d(x, y) \leq \varphi(y) - \varphi(x)$$

eine Ordnung erklärt; der Beweis ist einfach.
Die Funktion φ ist bezüglich dieser Ordnung streng monoton wachsend: Aus $x \leq y$, $x \neq y$ folgt nämlich

$$0 < d(x, y) \leq \varphi(y) - \varphi(x).$$

Ist φ stetig, so ist $\leq$ abgeschlossen, d.h. aus $x_n \to x$, $y_n \to y$, $x_n \leq y_n$ folgt $x \leq y$: dies folgt aus $d(x_n, y_n) \leq \varphi(y_n) - \varphi(x_n)$ durch Grenzübergang $n \to \infty$.
Ist φ auf X *unterhalb stetig*, d.h. gilt
Zu jedem $x \in X$ und jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ mit

$$d(\xi, x) < \delta \Longrightarrow \varphi(\xi) > \varphi(x) - \varepsilon,$$

so sind die Mengen der Form

$$\{x : x \leq y\}$$

abgeschlossen.
Entsprechend gilt:
Ist φ auf X *oberhalb stetig*, d.h. gilt
Zu jedem $x \in X$ und jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ mit

$$d(\xi, x) < \delta \Longrightarrow \varphi(\xi) < \varphi(x) + \varepsilon,$$

so sind die Mengen der Form

$$\{x : x \geq y\}$$

abgeschlossen.
Gilt nämlich etwa $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ und $x_n \geq y$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also

$$d(x_n, y) \leq \varphi(x_n) - \varphi(y) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N},$$

so folgt für $n \to \infty$

$$d(x, y) \leq \liminf_{n\to\infty} \varphi(x_n) - \varphi(y) \leq \varphi(x) - \varphi(y),$$

also $x \geq y$.
Satz. *Ist (X, d) vollständig und $\varphi : X \to \mathbb{R}$ nach oben beschränkt, so ist jede monoton wachsende Folge in X konvergent.*
Beweis. Aus der Monotonie der Folge (x_n) folgt

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq \varphi(x_{n+1}) - \varphi(x_n),\ n \in \mathbb{N}$$

und hieraus die Konvergenz von

$$\sum_{k=1}^{\infty} d(x_{k+1}, x_k).$$

Also ist (x_n) eine Cauchyfolge.
Bemerkung. Man würde erwarten, daß $x = \lim x_n$ eine obere Schranke für die Menge der x_n ist. Wählt man $X = [0, 1]$, $d(x, y) = |x - y|$ und

$$\varphi(x) = \begin{cases} x & \text{für } 0 \leq x < \frac{1}{2}, \\ 0 & \text{für } \frac{1}{2} \leq x \leq 1, \end{cases}$$

so ist $x_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1}$ wachsend, es gilt $\lim x_n = \frac{1}{2}$, aber $x_n \leq \frac{1}{2}$ gilt für kein n.
Satz. *Ist $\varphi : X \to \mathbb{R}$ oberhalb stetig, so ist*

$$x_n \leq \lim_{n\to\infty} x_n,\ n \in \mathbb{N}$$

für jede monoton wachsende konvergente Folge (x_n).
Beweis. Für $m > n$ ist nach Voraussetzung

$$d(x_m, x_n) \leq \varphi(x_m) - \varphi(x_n),$$

woraus durch Grenzübergang $m \to \infty$ mit $\overline{x} = \lim_{m\to\infty} x_m$

$$\begin{aligned} d(\overline{x}, x_n) &\leq \limsup_{m\to\infty} \varphi(x_m) - \varphi(x_n) \\ &\leq \varphi(\overline{x}) - \varphi(x_n), \end{aligned}$$

also $x_n \leq \overline{x}$ folgt.
Satz. (Brondsted) *Ist (X, d) vollständig, $\varphi : X \to \mathbb{R}$ oberhalb stetig und nach oben beschränkt, so gibt es zu jedem $x_0 \in X$ ein maximales $\overline{x} \geq x_0$.*
Beweis. Wir wählen $x_1 \in \Omega_0 := \{x \in X : x \geq x_0\}$ mit

$$\varphi(x_1) \geq \sup_{x\in\Omega_0} \varphi(x) - 1,$$

und induktiv $x_{n+1} \in \Omega_n := \{x \in X : x \geq x_n\}$ mit

$$\varphi(x_{n+1}) \geq \sup_{x\in\Omega_n} \varphi(x) - \frac{1}{n+1}.$$

Nach Konstruktion gilt

$$x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots$$

und

$$\Omega_{n+1} \subseteq \Omega_n \quad \text{und} \quad x_n \in \Omega_n.$$

Für $x \in \Omega_n$, also $x \geq x_n \geq x_{n-1}$ erhalten wir

$$\varphi(x) \leq \varphi(x_n) + \frac{1}{n}$$

und damit

$$d(x, x_n) \leq \varphi(x) - \varphi(x_n) \leq \frac{1}{n}.$$

Folglich ist $\operatorname{diam}\Omega_n \leq \frac{2}{n}$, und wegen der Halbstetigkeit von φ sind diese Mengen alle abgeschlossen. Nach dem Cantorschen Durchschnittssatz ist

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} \Omega_n = \{\overline{x}\}$$

mit $\overline{x} = \lim_{n\to\infty} x_n$ und $x_n \leq \overline{x}$ für alle $n \geq 0$. Ist schliesslich $\widetilde{x} \geq \overline{x} \geq x_n$, so ist $\widetilde{x} \in \bigcap_{n=0}^{\infty} \Omega_n$, also $\widetilde{x} = \overline{x}$ und damit $\overline{x}$ maximal.

Folgerung. (Caristi-Kirk) *Sind X und φ wie oben und $f : X \to X$ eine Abbildung mit*

$$d(f(x), x) \leq \varphi(f(x)) - \varphi(x), \quad x \in X,$$

so gibt es zu jedem $x_0 \in X$ einen Fixpunkt $\overline{x}$ von f mit $\overline{x} \geq x_0$.

Zum **Beweis** braucht nur bemerkt zu werden, daß nach Voraussetzung $f(x) \geq x$ für alle $x \in X$ gilt, und daß deshalb jedes maximale Element Fixpunkt von f ist.

Ist $f : X \to X$ eine Kontraktion mit Konstante $q < 1$ und setzt man

$$\varphi(x) = \frac{d(f(x), x)}{q-1},$$

so sind alle Voraussetzungen der obigen Folgerung erfüllt (φ ist stetig und ≤ 0) und man erhält die Existenzaussage des Fixpunktsatzes von Banach: es ist nämlich

$$\varphi(f(x)) = \frac{d(f(f(x)), f(x))}{q-1} \geq \frac{q}{q-1} d(f(x), x) = d(f(x), x) + \varphi(x),$$

also $f(x) \geq x$ für alle $x \in X$. Die Folge der sukzessiven Approximationen ist deshalb bei beliebigem Anfangselement wachsend und konvergiert gegen den (eindeutig bestimmten) Fixpunkt, der übrigens das einzige maximale Element von $(X, \leq)$ ist.

22 Geordnete Banachräume

Definition. Eine nichtleere abgeschlossene Teilmenge K des reellen Banachraumes E heißt *Keil*, wenn gilt

1) $x, y \in K \Rightarrow x + y \in K$,

2) $x \in K,\ \lambda \geq 0 \Rightarrow \lambda x \in K$.

Gilt zusätzlich

3) $K \cap (-K) = \{0\}$,

so heißt K *Kegel*.

Jeder Keil ist konvex und enthält die Null. Jeder Kegel erzeugt in E eine Halbordnung $\leq$ durch

$$x \leq y \Leftrightarrow y - x \in K;$$

diese Halbordnung ist mit den algebraischen Operationen im Sinne von

$$\begin{aligned} x \leq y,\ z \in E \quad &\Rightarrow \quad x + z \leq y + z, \\ x \leq y,\ \lambda \geq 0 \quad &\Rightarrow \quad \lambda x \leq \lambda y \end{aligned}$$

verträglich. Außerdem gilt

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n,\ y = \lim_{n\to\infty} y_n,\ x_n \leq y_n \Rightarrow x \leq y.$$

(Ist umgekehrt in E eine Halbordnung gegeben mit diesen Eigenschaften, so ist $K = \{x : 0 \leq x\}$ ein abgeschlossener Kegel.)

Beispiele: 1) $E = \mathbb{R}^3,\ K = \{(x, y, z) : \sqrt{x^2 + y^2} \leq z\}$ ("Eistütenkegel")

2) $E = \mathbb{R}^3,\ K = \{(x, y, z) : x, y, z \geq 0\}$ ("Nat. Kegel")

3) $E = l_1(\mathbb{N}),\ K = \{x = (x_1, x_2, \dots);\ x_k \geq 0,\ k \in \mathbb{N}\}$.

Es sei nun E^* der Dualraum von E und K ein Kegel.

Die Menge

$$K^* = \{\varphi \in E^* : \varphi(x) \geq 0 \text{ für alle } x \in K\}$$

ist, wie man leicht beweist, ein Keil, der <u>duale Keil</u>.

Behauptung: K^* ist ein Kegel $\Longleftrightarrow \overline{K - K} = E$ (K ist "<u>total</u>").

Beweis: "$\Longrightarrow$". Ist $\overline{K - K} \neq E$ und $x_0 \in E \backslash \overline{K - K}$, so existiert nach dem Satz von Hahn-Banach ein $\varphi \in E^*$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ mit

$$\varphi(k) \leq \alpha < \varphi(x_0) \quad \text{für alle } k \in \overline{K - K}.$$

(Beachte: $\overline{K-K}$ ist konvex.)

Wegen $0 \in \overline{K-K}$ und $k \in \overline{K-K} \Longrightarrow \lambda k \in \overline{K-K}$ $(\lambda \in \mathbb{R})$ ist

$$\varphi(\lambda k) = \lambda \varphi(k) \le \alpha, \ \ \lambda \in \mathbb{R},$$

also $\varphi(k) = 0, \ k \in \overline{K-K}$, also $\varphi = 0$ auf K und $\alpha \ge 0$.

Damit ist $\pm\varphi \in K^*$, also K^* kein Kegel ($\varphi \neq 0!$).

"$\Leftarrow$". Es gelte $\overline{K-K} = E$ und es sei $\varphi \in K^* \cap (-K^*)$, also $\varphi(k) = 0$ für alle $k \in K$. Zu $x \in E$ gibt es Folgen $(k_n), \ (l_n)$ mit $k_n, l_n \in K, \ k_n - l_n \to x$. Dann folgt

$$\varphi(x) = \lim_{n\to\infty} \varphi(k_n - l_n) = 0,$$

also $\varphi = 0$.
Satz. Ist E ein B-Raum, $K \subseteq E$ ein Kegel, K^* der duale Keil, so gilt

a) $K^* \neq \{0\}$ (falls $\dim E > 0$), und es ist

$$x \in K \text{ falls } \varphi(x) \ge 0 \text{ für alle } \varphi \in K^* \text{ ist,}$$

d.h., zu $x \notin K$ existiert $\varphi \in K^*$ mit $\varphi(x) < 0$.

b) Es sei $\mathrm{int}K \neq \emptyset$. Für $x_0 \in \mathrm{int}K, \ \varphi \in K^*, \ \varphi \neq 0$ gilt $\varphi(x_0) > 0$. Zu $x_0 \in \partial K$ existiert $\varphi \in K^*, \ \varphi \neq 0$ mit $\varphi(x_0) = 0$.

Beweis: a) Es sei $x_0 \notin K$, und $r = \mathrm{dist}(x_0, K) > 0$. Nach dem Trennungssatz existiert $\varphi \in E^*$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ mit

$$\varphi(x) < \alpha \le \varphi(k), \quad x \in K(x_0, r), \quad k \in K.$$

Wegen $0 \in K$ und $\varphi(0) = 0$ ist $\alpha \le 0$, und $\varphi(k) < 0$ ist wegen

$$\varphi(\lambda k) = \lambda\varphi(k) \ge \alpha \quad (\lambda \ge 0)$$

für kein $k \in K$ möglich. (Insbesondere ist $\alpha = 0$ oben zulässig.)
Es folgt $\varphi \in K^*, \ \varphi(x_0) < 0$. Hieraus folgt a).

b) Hier können $\mathrm{int}K$ und $\{x_0\}$ (mit $x_0 \in \partial K$) wie oben getrennt werden, es existiert also $\varphi \in E^*$ mit

$$\varphi(x_0) < \varphi(k), \quad k \in \mathrm{int}K.$$

Wie in a) folgt $\varphi(k) \ge 0$, $k \in \mathrm{int}K$, und somit $\varphi \in K^*$ (da φ stetig ist).
$k \to 0$ liefert $\varphi(x_0) \le 0$. Also ist $\varphi(x_0) = 0$, und die zweite Behauptung bewiesen.

Ist $x_0 \in \mathrm{int}K$, so gibt es $r > 0$ mit $\overline{K(x_0, r)} \subseteq K$, ist $\varphi \in K^*$ mit $\varphi(x_0) = 0$, so ist für beliebiges $x \neq 0$

$$\varphi\left(x_0 + r\frac{x}{\|x\|}\right) \geq 0,$$

also auch $\varphi(x) \geq 0$ und damit $\varphi = 0$.

Ein Kegel heißt <u>normal</u>, wenn $\alpha > 0$ existiert mit

$$0 \leq x \leq y \Rightarrow \|x\| \leq \alpha\|y\|.$$

Insbesondere sind in einem Raum, der durch einen normalen Kegel geordnet ist, <u>Ordnungsintervalle</u>

$$[a, b] = \{x \in E : a \leq x \leq b\}$$

beschränkt, denn aus $a \leq x \leq b$ folgt $0 \leq x - a \leq b - a$, also $\|x\| - \|a\| \leq \|x - a\| \leq \alpha\|b - a\|$ und somit

$$\|x\| \leq \|a\| + \alpha\|b - a\|.$$

Lemma 1. K ist normal genau dann, wenn

$$M = (\overline{K(0,1)} + K) \cap (\overline{K(0,1)} - K)$$

beschränkt ist.

Beweis: "$\Rightarrow$". Ist $x \in M$, also $x = e_1 + k_1 = e_2 - k_2$, $\|e_i\| \leq 1$, $k_i \in K$, so ist $e_1 \leq x \leq e_2$, also nach der gerade bewiesenen Ungleichung

$$\|x\| \leq 1 + 2\alpha.$$

M ist also beschränkt. "$\Leftarrow$". Ist umgekehrt $\|x\| \leq r$ für alle $x \in M$, und $0 \leq x \leq y$ ($\neq 0$ OBdA), so ist

$$\frac{y - x}{\|y\|} \in (\overline{K(0,1)} - K) \cap K \subseteq M,$$

also

$$\|y - x\| \leq r \cdot \|y\|$$

und damit

$$\|x\| \leq (r + 1)\|y\|.$$

Bemerkung: K ist normal genau dann, wenn $\inf\{\|x+y\| : x, y \in \partial K(0,1) \cap K\} > 0$ ist.

Der Kegel K heißt <u>reproduzierend</u>, wenn

$$E = K - K$$

gilt. Jeder Kegel mit nichtleerem Inneren ist reproduzierend: Ist etwa $x_0 \in \mathrm{int}K$ und $r > 0$, sodaß $\overline{K(x_0, r)} \subseteq \mathrm{int}K$, so ist für $x \in E \backslash \{0\}$ $x_0 + \frac{r}{\|x\|} \cdot x \in K$, also

$$x = \frac{\|x\|}{r}\left(x_0 + \frac{r}{\|x\|}x\right) - \frac{\|x\|}{r}x_0 \in K - K.$$

Lemma 2. K ist reproduzierend genau dann, wenn ein $r > 0$ existiert mit $K(0,r) \subseteq \underbrace{(\overline{K(0,1)} \cap K)}_{=:C} - (\overline{K(0,1)} \cap K)$.

Beweis: "$\Rightarrow$". Aus $E = K - K$ folgt

$$E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} n(C - C),$$

sodaß nach dem Satz von Baire die abgeschlossene Hülle eines der Summanden, also $\overline{C - C}$ einen inneren Punkt besitzt. Da $C - C$, also auch $\overline{C - C}$ symmetrisch und konvex ist, ist 0 innerer Punkt von $\overline{C - C}$, also existiert $r > 0$ mit $\overline{K(0, 2r)} \subseteq \overline{C - C}$.

Dann folgt $\overline{K(0, r)} \subseteq C - C$:
Ist nämlich $\|x\| \leq r$, so existiert wegen $\overline{K(0,r)} \subseteq \frac{1}{2}\overline{C - C}$ ein $x_1 = k_1 - l_1 \in \frac{1}{2}(C - C)$ mit (also $\|k_1\|, \|l_1\| \leq \frac{1}{2},\ k_1, l_1 \in K$)

$$\|x - x_1\| \leq \frac{r}{2};$$

dann ein $x_2 = k_2 - l_2 \in \frac{1}{4}(C - C)$ mit $(\|k_2\|, \|l_2\| \leq \frac{1}{4},\ k_2, l_2 \in K)$

$$\|x - x_1 - x_2\| \leq \frac{r}{4} \quad \text{usw.}$$

Durch Induktion erhält man eine Folge (x_n) mit

$$x_n = k_n - l_n, \quad \|k_n\|, \|l_n\| \leq \frac{1}{2^n}, \quad k_n, l_n \in K$$
$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} k_n - \sum_{n=1}^{\infty} l_n = k - l$$

mit $\|k\|,\ \|l\| \leq 1,\ k, l \in K$, also $x \in C - C$.

Umgekehrt folgt aus $\overline{K(0,r)} \subseteq C - C$ für $x \neq 0$

$$\frac{x}{\|x\|} \cdot r = k - l, \quad \|k\|, \|l\| \leq 1, \ k, l \in K,$$

also

$$x = \frac{\|x\|}{r} \cdot k - \frac{\|x\|}{r} \cdot l \in K - K.$$

Satz. Ist E Banachraum, $K \subseteq E$ ein totaler Kegel und K^* der duale Kegel, so gilt:

a) K ist reproduzierend genau dann, wenn K^* normal ist.
b) K ist normal genau dann, wenn K^* reproduzierend ist. (Lemma 2, M. Krein)

Bem.: Obiger Satz gilt auch wenn K nur ein Kegel, und damit K^* evtl. nur ein Keil ist.
Beweis: a) "$\Rightarrow$". Ist $E = K - K$, so gibt es $r > 0$ mit

$$\overline{K(0,r)} \subseteq (\overline{K(0,1)} \cap K) - (\overline{K(0,1)} \cap K).$$

Aus $0 \leq \varphi \leq \psi$ und $x \in E,\ x = \frac{\|x\|}{r}(k-l),\ \|k\|, \|l\| \leq 1,\ k, l \in K$ folgt dann

$$\varphi(x) = \frac{\|x\|}{r}\varphi(k-l) \leq \frac{\|x\|}{r}\psi(k) \leq \frac{\|x\|}{r}\|\psi\|,$$

also

$$\|\varphi\| \leq \frac{1}{r}\|\psi\|.$$

K^* ist demnach normal.

"$\Leftarrow$". Ist K nicht reproduzierend, so gibt es (Lemma 2) zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $x \in E$ mit $\|x\| \leq \frac{1}{n}, x \notin \overline{C - C},\ C$ wie in Lemma 2. Zu diesem x gibt es nach dem Trennungssatz ein $\varphi \in E^*$ mit (beachte: $\overline{C - C}$ ist abg., konvex und symmetrisch)

$$\varphi(x) > 1 > \varphi(d),\ d \in \overline{C - C};$$

insbesondere ist $\|\varphi\| > n$. Wenn $\varphi \in (\overline{K_{E^*}(0,1)} + K^*) \cap (\overline{K_{E^*}(0,1)} - K^*)$ gezeigt werden kann, kann K^* nicht normal sein. (Lemma 1)

Es sei also $\varphi \notin \overline{K_{E^*}(0,1)} + K^*$; da $\overline{K_{E^*}(0,1)}$ schwach*-kompakt und K^* schwach*-abgeschlossen ist, ist $\overline{K_{E^*}(0,1)} + K^*$ schwach*-abgeschlossen. Also gibt es $y \in E$ mit

$$\psi(y) < 1 < \varphi(y) \quad \text{für alle } \psi \in \overline{K_{E^*}(0,1)} + K^*$$

also (wegen $0 \in \overline{K_{E^*}(0,1)} \cap K^*$)

$$\begin{aligned} \psi(y) &\leq 1 \quad \text{für alle } \psi \text{ mit } \|\psi\| \leq 1 \text{ und} \\ \psi(y) &\leq 1 \qquad\quad \text{für alle } \psi \in K^*, \end{aligned}$$

folglich $y \in \overline{K(0,1)} \cap (-K) = -C$ und deshalb $\varphi(y) < 1$, ein Widerspruch.

Da $\varphi \notin \overline{K_{E^*}(0,1) - K^*}$ dasselbe wie $-\varphi \notin \overline{K_{E^*}(0,1) + K^*}$ bedeutet, folgt $\varphi \in \overline{K_{E^*}(0,1) - K^*}$ ähnlich.
Damit ist a) bewiesen.

b) "$\Rightarrow$". Ist K normal und K^* nicht reproduzierend, so ist

$$\underbrace{(\overline{K_{E^*}(0,1)} \cap K^*)}_{C^*} - (\overline{K_{E^*}(0,1)} \cap K^*)$$

keine Nullumgebung. Es gibt dann $x \in E$ mit beliebig großer Norm mit

$$\varphi(x) < 1 \ \text{ für alle } \varphi \in C^* - C^*.$$

Wie oben beweist man

$$x \in (\overline{K(0,1)} + K) \cap (\overline{K(0,1)} - K)$$

im Widerspruch zur Normalität von K.
"$\Leftarrow$". Ist K^* reproduzierend so ist nach a.) K^{**} normal. Wegen $K \subseteq K^{**}$ ist K normal.

Wir betrachten zunächst noch einige weitere (mögliche) Eigenschaften von Kegeln.

Definition. Ein Kegel $K \subseteq E$ heißt
a) regulär, wenn jede nach oben beschränkte wachsende Folge konvergent ist,
b) vollständig regulär, wenn jede beschränkte wachsende Folge konvergent ist,
c) minihedral, wenn $\sup\{x, y\}$ für alle $x, y \in E$ existiert,
d) streng minihedral, wenn jede nach oben beschränkte Menge ein Supremum besitzt,
e) aufblasbar, ("allows plastering"), wenn $\varphi \in E^*, \alpha > 0$ existieren mit

$$\varphi(x) \geq \alpha \|x\| \ \text{ für alle } x \in K.$$

Satz. Es gilt die Hierarchie
K aufblasbar $\Rightarrow$ K vollständig regulär $\Rightarrow$ K regulär $\Rightarrow$ K normal.
$\Leftarrow$ falls int$K \neq \emptyset$

Beweis: 1) Ist K aufblasbar und (x_n) beschränkt und monoton wachsend sowie φ wie in der Definition von aufblasbar, so gilt für $n, p \in \mathbb{N}$

$$\alpha \|x_{n+p} - x_n\| \leq \varphi(x_{n+p} - x_n),$$

und da $(\varphi(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge ist (sie ist wachsend und beschränkt), ist auch $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine solche.

3) Ist K regulär und nicht normal, so gibt es $x_n, y_n \in K \cap \partial K(0,1)$, mit $\|x_n + y_n\| \leq \frac{1}{2^n}$. Dann ist

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} x_k \leq \sum_{k=1}^{\infty} (x_k + y_k) \in K$$

und (s_n) wachsend, also konvergent im Widerspruch zu

$$\|s_{n+1} - s_n\| = \|x_{n+1}\| = 1.$$

2) Nimmt man an, daß "vollständig regulär $\Rightarrow$ normal" gilt, und ist (x_n) wachsend mit $x_n \leq y, n \in \mathbb{N}$, so gilt auch

$$\|y - x_n\| \leq \alpha \|y - x_1\|, \quad (\alpha \text{ Konstante aus normal})$$

sodaß (x_n) beschränkt und damit konvergent ist.
Also folgt 2).

Ist schließlich K vollständig regulär und nicht normal, so wählen wir (x_n), (y_n) wie unter 3) und setzen

$$v_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} (x_k + y_k), \;\; v_{2n+1} = v_{2n} + x_{2n+1}.$$

(v_n) ist wachsend und beschränkt, also konvergent im Widerspruch zu

$$\|v_{2n+1} - v_{2n}\| = 1.$$

Bemerkungen: Für keine der drei Implikationen gilt i.a. die Umkehrung. Im Fall $\dim E < \infty$ ist jeder Kegel vollständig regulär.

Satz. Es sei E Banachraum, $K \subseteq E$ ein Kegel, $[a,b] \subseteq E$ ein Ordnungsintervall und $f : [a,b] \to [a,b]$ wachsend. Dann besitzt f einen Fixpunkt, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

a) K ist streng minihedral,

b) K ist regulär und f stetig,

Beweis: Allgemein folgt aus den Voraussetzungen

$$f(a) \geq a, \quad f(b) \leq b.$$

a) Es sei $M = \{x \in [a,b] : f(x) \geq x\}$. Es ist $a \in M$, und wegen $a \leq x \leq f(x) \leq b \Rightarrow a \leq f(a) \leq f(x) \leq f(f(x)) \leq f(b) \leq b$ auch $f(M) \subseteq M$. Da K streng minihedral ist, existiert $x_0 = \sup M$, und wegen $a \leq x \leq x_0 \leq b$, $x \in M$, also

$$x \leq f(x) \leq f(x_0), \quad x \in M,$$

und die sup-Eigenschaft von x_0 liefert $x_0 \leq f(x_0)$, also $x_0 \in M$. Also ist $f(x_0) \in M$, folglich $f(x_0) \leq x_0$, also insgesamt $f(x_0) = x_0$.

b) $(f^n(a))$ ist wachsend und nach oben durch b beschränkt. Also ist $(f^n(a))$ konvergent, etwa gegen x_0; die Stetigkeit von f ergibt $f(x_0) = x_0$.

Es sei bemerkt, daß a) ein Spezialfall des Fixpunktsatzes von Knaster-Tarski ist (mit $X = [a, b]$):

Quasimonotone Funktionen:
Ist E ein durch einen Kegel K geordneter normierter Raum und $f : D \to E,\ D \subseteq E$ eine Funktion, so heißt f quasimonoton wachsend (i.S. von Volkmann), wenn gilt:

$$\text{Aus } x, y, \in D,\ x \leq y,\ \varphi \in K^*,\ \varphi(x) = \varphi(y) \text{ folgt } \varphi(f(x)) \leq \varphi(f(y)).$$

Man mache sich klar, daß diese Bedingung im Fall $E = \mathbb{R},\ K = \mathbb{R}_+$ für jede Funktion erfüllt ist.

Existiert zu $f : D \to E$ ein $\lambda \in \mathbb{R}$, sodaß $f + \lambda\mathrm{Id}$ monoton wächst, so ist f quasimonoton wachsend. Die Umkehrung gilt i.a. nicht (etwa in $E = \mathbb{R}$).

Für lineare (oder affine) Abbildungen (mit $D = E$) gilt diese Umkehrung i.a. auch nicht: Im Fall $E = \mathbb{R}^3$ ist sie für den natürlichen Kegel richtig, für den Eistütenkegel nicht!

Satz. Die affine Abbildung $f(x) = Ax + b : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ist bzgl. des natürlichen Kegels quasimonoton wachsend genau dann, wenn für die Elemente a_{ij} von A stets $a_{ij} \geq 0$ (für $i \neq j$) gilt.

Beweis: OBdA ist $b = 0$. Ist f quasimonoton wachsend, so wählen wir $x = 0,\ y = e_j = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ und $\varphi \in K^*$ gegeben durch $\varphi(x) = x_i,\ j \neq i$. Es folgt $\varphi(Ae_j) = a_{ij} \geq 0$.

Ist umgekehrt diese Bedingung erfüllt und $x \leq y,\ \varphi(z) = a \cdot z = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i z_i$, $a_i \geq 0$, so folgt aus $\varphi(y - x) = 0 = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i(y_i - x_i)$, daß $a_i(y_i - x_i) = 0$ $(i = 1, \ldots, n)$ ist.
Dann haben wir mit $z = A(y - x)$

$$\begin{aligned}
\varphi(z) &= \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{i=1}^{n} a_{ij}(y_j - x_j) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \cdot \underbrace{a_i \underbrace{(y_j - x_j)}_{\geq 0}}_{=0 \text{ für } i=j} \geq 0.
\end{aligned}$$

Eine äquivalente Formulierung des Zwischenwertsatzes in $\mathbb{R}^1$ ist:
Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, $f(a) \geq a,\ f(b) \leq b$, so besitzt f einen Fixpunkt.

Die sinngemäße Übertragung dieses Satzes ist ohne zusätzliche Voraussetzungen an f oder den die Ordnung definierenden Kegel i.a. falsch. Es gilt aber

Satz. Ist E normiert, $K \subseteq E$ ein Kegel mit $\mathrm{int}K \neq \emptyset$ und $a, b \in E$ mit $b - a \in \mathrm{int}K,\ f : [a, b] \to E$ quasimonoton wachsend mit $f(a) \geq a,\ f(b) \leq b$, so erfüllt f auf $\partial[a, b]$ die Leray-Schaudersche Randbedingung bezüglich $\frac{a+b}{2} \in \mathrm{int}[a, b]$.

Beweis: Es ist $[a, b] = (a + K) \cap (b - K)$, also

$$\partial[a, b] = ((a + \partial K) \cap (b - K)) \cup ((a + K) \cap (b - \partial K)).$$

Daß $\frac{a+b}{2} \in \mathrm{int}[a, b]$ gilt, ist leicht zu sehen.

Ist nun $x_0 \in \partial[a, b]$ und $\lambda > 1$ mit

$$f(x_0) - \frac{a + b}{2} = \lambda \left(x_0 - \frac{a + b}{2} \right),$$

und ist etwa $x_0 \in (a + \partial K) \cap (b - K)$, so ist $x_0 - a \in \partial K$ und $b - x_0 \in K$. Wählt man $\varphi \in K^* \backslash \{0\}$ mit $\varphi(x_0 - a) = 0$, so gilt wegen der Quasimonotonie von f

$$\varphi(f(x_0)) \geq \varphi(f(a)) \geq \varphi(a)$$

im Widerspruch zu

$$\begin{aligned} \varphi(f(x_0)) &= \lambda\varphi(x_0) + (1 - \lambda)\varphi\left(\frac{a + b}{2}\right) \\ &< \lambda\varphi(x_0) + (1 - \lambda)\varphi(a) \qquad \left(\text{beachte } \frac{a + b}{2} - a \in \mathrm{int}K\right) \\ &= \varphi(a). \end{aligned}$$

Den Fall $x_0 \in (a + K) \cap (b - \partial K)$ behandelt man sinngemäß.

Ab jetzt schreiben wir $a \ll b \Longleftrightarrow b - a \in \mathrm{int}K$.

Folgerung. Ist E ein Banachraum, $K \subseteq E$ ein Kegel mit $\mathrm{int}K \neq \emptyset,\ a \ll b,\ [a, b]$ beschränkt, und $f : [a, b] \to E$ eine stetige, kompakte und quasimonoton wachsende Abbildung mit $f(a) \geq a,\ f(b) \leq b$, so besitzt f einen Fixpunkt in $[a, b]$.

Beweis: Folgt aus der Leray-Schauderschen Alternative angewandt auf

$$g(y) := f(y + (a + b)/2) - (a + b)/2, \quad y \in [a - (a + b)/2, b - (a + b)/2]$$

mit $\Omega = \mathrm{int}[a - (a+b)/2, b - (a+b)/2]$. Beachte: $0 \in \Omega$.

Beispiele: 1. Sei $E = c(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ versehen mit der Supremumsnorm und $K = \{x \in c : x_k \geq 0 (k \in \mathbb{N})\}$. Der Kegel K ist normal und hat nichtleeres Inneres. Die affine Abbildung

$$f(x) = (0, 1, x_1, x_2, x_3, \dots)$$

ist stetig, wachsend, insbes. also quasimonoton wachsend. Sei $a = (0)$, $b = (1)$. Dann ist $a \ll b$, $f(a) \geq a$, $f(b) \leq b$ aber f hat keinen Fixpunkt, denn $f(x) = x$ impliziert

$$x = (0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots) \notin c.$$

Bem.: $f : [a, b] \to E$ ist nicht kompakt.

2. Sei $E = \mathbb{R}^2$, $K = K_{nat}$. Die Abbildung

$$g(x, y) = (-2 \exp(-y^3) \cos^2(x), -\exp(-x^5) \cos^4(y)).$$

ist stetig und quasimonoton wachsend auf $\mathbb{R}^2$ (vgl. den Satz am Ende dieses Paragraphen). Für $a = -\pi/2(1, 1) \ll b = (0, 0)$ gilt $g(a) \geq a$, $g(b) \leq b$. Ferner ist $g : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ kompakt und besitzt somit einen Fixpunkt in $[a, b]$. Bem.: Der FPS von Brouwer ist nicht anwendbar, da $g([a, b])$ keine Teilmenge von $[a, b]$ ist. Z.B. ist $g(b) = (-2, -1) \notin [a, b]$.

Wir wollen noch die Bedeutung der Quasimonotonie für Differentialgleichungen in Banachräumen betrachten, beschränken uns aber der Einfachheit halber auf lineare Differentialgleichungen mit "konstanten Koeffizienten": Dazu sei E ein Banachraum, $A : E \to E$ linear und stetig. Dann ist die Lösung von

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t), \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

durch

$$x(t) = e^{tA} x_0 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k \, x_0$$

gegeben.

Satz. Ist (unter obigen Gegebenheiten) $\mathrm{int} K \neq \emptyset$, so gilt
A quasimonton wachsend $\Longleftrightarrow$ e^{tA} wachsend für alle $t \geq 0$.

Beweis: "$\Rightarrow$" Wir wählen $p \in \mathrm{int} K$ und hierzu $\lambda > 0$ mit

$$Ap \ll \lambda p.$$

Es sei $x_0 \geq 0$. Zu beliebigem $\varepsilon > 0$ setzen wir mit $x(t) = e^{tA}x_0$

$$x_\varepsilon(t) = x(t) + \varepsilon e^{\lambda t} p.$$

Dann ist zunächst $x_\varepsilon(0) = x_0 + \varepsilon p \in \mathrm{int}K$ und

$$\begin{aligned} x_\varepsilon'(t) - Ax_\varepsilon(t) &= x'(t) + \lambda \varepsilon e^{\lambda t} p - Ax(t) - \varepsilon e^{\lambda t} Ap \\ &= \varepsilon e^{\lambda t}(\lambda p - Ap), \quad \text{also} \\ 0 \ll x_\varepsilon'(t) &- Ax_\varepsilon(t), \ t \geq 0. \end{aligned}$$

Würde nicht $x_\varepsilon(t) \in \mathrm{int}K$ $(t \geq 0)$ gelten, so gäbe es ein erstes $t_0 > 0$ mit $x_\varepsilon(t_0) \in \partial K$ und hierzu $\varphi \in K^* \backslash \{0\}$ mit $\varphi(x_\varepsilon(t_0)) = 0$, $\varphi(x_\varepsilon(t)) > 0$ für $0 \leq t \leq t_0$.
Also wäre $\varphi(x_\varepsilon'(t_0)) \leq 0$, und hieraus ergibt sich der Widerspruch

$$0 < \underbrace{\varphi(x_\varepsilon'(t_0))}_{\leq 0} - \underbrace{\varphi(Ax_\varepsilon(t_0))}_{\geq 0} \leq 0.$$

"$\Leftarrow$" Wegen der Linearität der Abbildung $x \to Ax$ genügt es, die Aussage

$$x_0 \in K, \ \varphi \in K^*, \ \varphi(x_0) = 0 \Rightarrow \varphi(Ax_0) \geq 0$$

zu beweisen: Es gelte also diese Voraussetzung.

Dann ist (x sei die zugehörige Lösung)

$$\varphi(Ax_0) = \varphi(x'(0)) = \lim_{t \searrow 0} \frac{\varphi(x(t)) - \varphi(x_0)}{t} \geq 0$$

wegen $\varphi(x(t)) \geq 0, \ t \in [0, \infty)$ (weil $e^{tA}x_0 \geq 0$ für $x_0 \geq 0$).

Bemerkung: Obiger Satz gilt auch ohne die Voraussetzung $\mathrm{int}K \neq \emptyset$.

Wir bemerken weiter: Die Menge Q der quasimonoton wachsenden linearen Selbstabbildungen eines Banachraumes E ist ein Keil (in der Operatornorm-topologie) in $\mathcal{L}(E)$.

Die algebraischen Eigenschaften sind trivial; gilt $A_n \to A$ und ist $x \geq 0$, $\varphi \in K^*$, $\varphi(x) = 0$, so ist $\varphi(A_n x) \geq 0$, also auch $\varphi(Ax) \geq 0$. Also ist Q abg.

Die Menge W derjenigen Selbstabbildungen A, zu denen ein $\lambda \in \mathbb{R}$ existiert, sodaß $A + \lambda \mathrm{Id}$ monoton wachsend ist, hat ebenfalls die algebr. Eigenschaften eines Keils, und es gilt $W \subseteq Q$. I.a. gilt $W \neq Q$, aber immer $\overline{W} = Q$.

Ist nämlich e^{tA} monoton wachsend für $t \geq 0$, so ist

$$\frac{e^{tA} - \mathrm{Id}}{t} \in W \quad (t > 0),$$

und wegen

$$\frac{e^{tA} - \mathrm{Id}}{t} \underset{t \to 0}{\longrightarrow} A$$

ist $A \in \overline{W}$, falls $A \in Q$.

Gilt $A \in Q$ und $-A \in Q$ so folgt $A^2 \in Q$, denn aus $x \geq 0$, $\varphi \in K^*$, $\varphi(x) = 0$ folgt $\varphi(Ax) = 0$ und damit

$$\varphi(A^2 x) = \lim_{t \to 0} \frac{\varphi(e^{tA} x)}{t^2} \geq 0.$$

I.a. folgt aus $A \in Q$ nicht $A^2 \in Q$.

Für differenzierbare Abbildungen kann die Frage nach der Quasimonotonie folgendermaßen auf den linearen Fall zurückgeführt werden:

Satz. Ist $D \subseteq E$ konvex und offen und $f : D \to E$ stetig differenzierbar, so ist f quasimonton wachsend genau dann wenn $x \mapsto f'(z)x$ für jedes $z \in D$ quasimonton wachsend ist.

Beweis: Sei f quasimonton wachsend und $z \in D$. Sei $x \geq 0$, $\varphi \in K^*$, $\varphi(x) = 0$. Es ex. ein $\varepsilon > 0$ mit $z \leq z + tx \in D$, und $\varphi(z) = \varphi(z + tx)$, $t \in [0, \varepsilon]$. Es folgt

$$\varphi(f'(z)x) = \lim_{t \to 0+} \frac{\varphi(f(z + tx)) - \varphi(f(z))}{t} \geq 0.$$

Sei umgekehrt $x \mapsto f'(z)x$ quasimonton wachsend ($z \in D$). Es sei $x, y \in D$, $x \leq y$, $\varphi \in K^*$, $\varphi(y - x) = 0$. Nach dem MWS ex. $t_0 \in [0, 1]$ mit

$$\varphi(f(y) - f(x)) = \varphi(f'(x + t_0(y - x))(y - x)) \geq 0.$$