Dr. Jens Wirth
Institut für Angewandte Analysis
TU Bergakademie Freiberg

Analysis V
(Funktionalanalysis)

1. Auflage

Freiberg, 15. August 2006

Inhaltsverzeichnis

Vorrede

Die Funktionalanalysis liefert ein mächtiges Hilfsmittel sowohl zum abstrakten Beschreiben, als auch zum Lösen einer Vielzahl von Problemstellungen der angewandten Mathematik. Ziel der Vorlesung soll neben einer Einführung in die grundlegenden Konzepte wie Banach- und Hilberträume, Algebren beschränkter Operatoren und dualer Räume die Behandlung abstrakter Operatorgleichungen und die Anwendung der Resultate auf Integralgleichungen zweiter Art sein.

Abschluß der Vorlesung bildet eine Einführung in die Spektraltheorie beschränkter Operatoren auf Banach- und Hilberträumen, die Grundlage für weitere Betrachtungen sein kann und sollte.

Weitere Anwendungen und Bezüge zur Behandlung partieller Differentialgleichungen oder singulärer Integralgleichungen können nur am Rande erwähnt werden, für Aspekte nichtlinearer Funktionalanalysis sei auf weiterführende Vorlesungen verwiesen.

(Weiterführende) Literatur

[1] D. Werner, *Funktionalanalysis*
Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2002

[2] H. Heuser, *Funktionalanalysis*
B.G.Teubner, Stuttgart 1992 Stuttgart

[3] M. Dobrowolski, *Angewandte Funktionalanalysis*
Springer-Verlag Berlin-Heidelberg 2006

[4] K. Yosida, *Functional Analysis*
Springer-Verlag New York 1980

[5] R.E. Megginson, *An Introduction to Banach Space Theory*
Springer-Verlag New York 1998

[6] R. Kress, *Linear Integral Equations*
Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1989

[7] R.G. Douglas, *Banach Algebra Techniques in Operator Theory*
Springer-Verlag New York 1998

1 Grundkonzepte: Räume und Algebren

Alles ist Raum.

1.1 Normierte Räume und Banach-Räume

Normen

Ein erster Schritt in die Funktionalanalysis besteht darin, Strukturen der Linearen Algebra mit denen der Topologie, also mit Konvergenzbegriffen und Vorstellungen von Nähe und Umgebung, zu verbinden.

Wir beginnen damit, Vektorräume mit einer *Norm* zu versehen, die anschaulich gesprochen, den *Abstand* zum Nullvektor mißt. Sei im folgenden $\mathbb{K}$ einer der Körper $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.

1.1.1 Definition. Ein *normierter Raum* über $\mathbb{K}$ ist ein Paar $(V, ||\cdot||)$ bestehend aus einem $\mathbb{K}$-Vektorraum V und einer *Normfunktion* $||\cdot|| : V \to \mathbb{R}$, welche die folgenden Bedingungen erfüllt:

(V0) Es gilt $||x|| \geq 0$ für alle $x \in V$.

(V1) Es gilt $||x|| = 0$ genau dann, wenn $x = 0$ gilt.

(V2) Für alle $\lambda \in \mathbb{K}$ und alle $x \in V$ gilt $||\lambda x|| = |\lambda|\, ||x||$.

(V3) Für $x, y \in V$ gilt die *Dreiecksungleichung* $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$.

Es gibt viele Möglichkeiten einen gegebenen Vektorraum mit einer Norm zu versehen.

1.1.2 Beispiel. Auf dem Vektorraum $\mathbb{R}^n$ betrachten wir die p-Normen, die für Vektoren $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ durch

$$||x||_p := \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p}, \qquad p \in [1, \infty) \tag{1.1.1}$$

und

$$||x||_\infty := \max_{i=1,\ldots n} |x_i| \tag{1.1.2}$$

definiert sind. Es gilt für alle $p \in [1, \infty]$ und alle $x \in \mathbb{R}^n$

$$||x||_\infty \leq ||x||_p \leq ||x||_1 \leq n\, ||x||_\infty. \tag{1.1.3}$$

1.1.3 Proposition. *Jeder normierte Raum* $(V, ||\cdot||)$ *ist durch Einführen der zugeordneten Metrik*

$$d(x,y) = ||x-y|| = d(x-y,0) \tag{1.1.4}$$

ein metrischer Raum.

Insbesondere übetragen sich damit alle für metrische Räume gezeigten Sätze unmittelbar auf normierte Räume.

1.1.4 Definition. Zwei verschiedene Normen $||\cdot||_A$ und $||\cdot||_B$ auf V heißen *äquivalent*, falls es eine Konstante $C > 0$ gibt, so daß für alle $x \in V$

$$C^{-1}||x||_A \leq ||x||_B \leq C||x||_A. \tag{1.1.5}$$

1.1.5 Satz. *Sei* V *endlichdimensional. Dann sind auf* V *alle Normen äquivalent.*

Beweis. Sei $\dim V = n$ und $\{e_1, \ldots, e_n\}$ eine Basis von V. Wir zeigen, daß jede Norm $\|\cdot\|$ zur 1-Norm oder *Summennorm*

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \right\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k| \tag{1.1.6}$$

äquivalent ist. Aus der Dreiecksungleichung folgt zunächst

$$\|x\| = \left\| \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \right\| \leq \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k| \|e_k\| \leq C_2 \|x\|_1 \tag{1.1.7}$$

mit $C_2 = \max \|e_k\|$. Betrachtet man umgekehrt die Abbildung

$$N : V \ni x \mapsto \|x\| \in \mathbb{R}, \tag{1.1.8}$$

so ist diese wegen $|N(x) - N(y)| = |\,\|x\| - \|y\|\,| \leq \|x-y\| \leq C_2\|x-y\|_1$ stetig auf $(V, \|\cdot\|_1)$. Die Einheitssphäre

$$S := \{x \in V \mid \|x\|_1 = 1\} \tag{1.1.9}$$

ist als Urbild von $\{1\}$ unter $x \mapsto \|x\|_1$ abgeschlossen und (wegen der kanonischen Identifikation von $(V, \|\cdot\|_1)$ mit $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1)$) kompakt. Nach dem Satz von Weierstraß ist also N auf S nach (oben und) unten beschränkt, es existiert also ein $C_1 > 0$ mit

$$\|x\| = \|x\|_1 \left\| \frac{x}{\|x\|_1} \right\| \geq \|x\|_1 \, C_1. \tag{1.1.10}$$

Damit ist die Äquivalenz gezeigt. □

Im folgenden sollen im wesentlichen nur *unendlichdimensionale* Vektorräume betrachtet werden, die endlichdimensionalen sind durch den vorhergehenden Satz auf die Euklidischen Räume $(\mathbb{R}^n, ||\cdot||_2)$ zurückgeführt.

1.1.6 Beispiele. Es sei $\mathfrak{c}_0$ die Menge der komplexen Nullfolgen (z_n). Bezeichnet man nun zur Nullfolge (z_n) mit $||(z_n)|| := \sup_n |z_n|$, so wird damit $\mathfrak{c}_0$ zu einem normierten Raum. Mit derselben Definition kann man auch die Menge $\mathfrak{c}$ der konvergenten Folgen und die Menge ℓ^∞ der beschränkten Folgen zu einem normierten Raum machen.

1.1.7 Beispiel. Sei X ein kompakter metrischer Raum und $C(X)$ der Vektorraum der stetigen komplexwertigen Funktionen auf X. Dann wird $C(X)$ durch die Supremumsnorm $||f|| := \sup_{x \in X} |f(x)|$ zu einem normierten Raum.

Konvergenz

Da jeder normierte Raum ein metrischer Raum ist, übertragen sich Begriffe wie Konvergenz und Stetigkeit. Sei also im Raum $(V, ||\cdot||)$ eine Folge $x_n \in V$ gegeben. Die Folge konvergiert gegen $x \in V$, falls die Folge der Normen $||x_n - x||$ eine Nullfolge bildet. Wir schreiben dafür kurz $x_n \to x$ für $n \to \infty$. Elementare Eigenschaften konvergenter Folgen übertragen sich unmittelbar von reellen Zahlenfolgen auf Folgen in normierten Räumen, indem man die Normeigenschaften ausnutzt.

1.1.8 Proposition. *1. $x_n \to x$ impliziert $\|x_n\| \to \|x\|$.*

2. $x_n \to x$ und $y_n \to y$ impliziert $x_n + y_n \to x + y$.

3. $x_n \to x$ und $\alpha_n \to \alpha$ für $\alpha_n, \alpha \in \mathbb{K}$ impliziert $\alpha_n x_n \to \alpha x$.

Vollständigkeit

Unmittelbar aus der Dreiecksungleichung für Normen ergibt sich, daß jede konvergente Folge in V eine Cauchy-Folge[1] ist, d.h.

$$\forall \epsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall m, n > N : \quad ||x_m - x_n|| \leq \epsilon. \tag{1.1.11}$$

Die Umkehrung dieser Aussage gilt nur in vollständigen metrischen Räumen. Angewandt auf normierte Räume legt das folgende Definition nahe.

1.1.9 Definition. Ein normierter Raum heißt *Banachraum*[2], falls er (als metrischer Raum) vollständig ist.

1.1.10 Satz. *Jeder normierte Raum läßt sich auf eindeutige Weise zu einem Banachraum vervollständigen.*

Beweis. Der Beweis ergibt sich ähnlich dem für metrische Räume. Bezeichne V den normierten Raum und $\mathcal{C}(V)$ die Menge der Cauchy-Folgen aus Elementen von V. Zwei Cauchy-Folgen (x_n) und (y_n) wollen wir als äquivalent bezeichnen, $(x_n) \sim (y_n)$, falls die Differenz $(x_n - y_n)$ eine Nullfolge bildet. Ist die Folge (x_n) in V konvergent, so damit auch (y_n) und wir können die Elemente von V mit den konvergenten Folgen aus $\mathcal{C}(V)/_\sim$ identifizieren. Dies liefert eine Einbettung

$$V \to \mathcal{C}(V)/_\sim. \tag{1.1.12}$$

Als nächsten Schritt wollen wir auf $\mathcal{C}(V)/_\sim$ eine Norm definieren, welche die aus V fortsetzt. Dazu setzen wir für $(x_n) \in \mathcal{C}(V)$

$$||(x_n)|| := \lim_{n\to\infty} ||x_n||. \tag{1.1.13}$$

Diese Norm ist auf Äquivalenzklassen konstant und stimmt für konvergente Folgen mit der Norm in V überein (insbesondere ist V in $C(V)/_\sim$ eingebettet). Als letzten Schritt zeigen

[1] nach Augustin Louis Cauchy, 1789-1857

[2] bezeichnet nach dem polnischen Mathematiker Stefan Banach, 1892-1945

wir, daß $\mathcal{C}(V)/_\sim$ versehen mit dieser Norm ein Banachraum ist. Sei dazu $(x_m)_n = (x_{m,n})$ eine Cauchy-Folge aus $\mathcal{C}(V)/_\sim$. Wir konstruieren eine mögliche Grenzfolge. Für jedes n sei m_n so groß gewählt, daß

$$\|x_{m,n} - x_{m_n,n}\| \leq n^{-1}, \qquad m > m_n. \tag{1.1.14}$$

Betrachtet man jetzt die Folge $(x_{m_n,n})$ so gilt

$$\|(x_m)_n - (x_{m_n,n})\| = \lim_{m\to\infty} \|x_{m,n} - x_{m_n,n}\| \leq n^{-1} \to 0. \tag{1.1.15}$$

Bleibt zu zeigen, daß $(x_{m_n,n})$ selbst Cauchyfolge ist. Dazu identifizieren wir V mit seinem Bild in $C(V)$ und schreiben

$$\begin{aligned}\|x_{m_n,n} - x_{m_k,k}\| &\leq \|x_{m_n,n} - (x_m)_n\| + \|(x_m)_n - (x_m)_k\| + \|(x_m)_k - x_{m_k,k}\| \\ &\leq n^{-1} + \|(x_m)_n - (x_m)_k\| + k^{-1},\end{aligned} \tag{1.1.16}$$

wobei der zweite Summand wegen der Cauchyfolgenbedingung in $C(V)/_\sim$ beliebig klein wird. Damit haben wir eine Grenzfolge konstruiert und der Existenz-Beweis ist beendet. Für die Eindeutigkeit betrachten wir die Einbettung eines normierten Raumes V in eine seiner Vervollständigungen W. Insbesondere ist V dicht in W. Wendet man nun auf V den obigen Prozeß an und konstruiert $\mathcal{C}(V)/_\sim$, so kann man $\mathcal{C}(V)/_\sim$ in W einbetten. Da $\mathcal{C}(V)/_\sim$ vollständig ist, ist er in W abgeschlossen. Dichtheit liefert Gleichheit beider Räume. □

1.1.11 Beispiele. Beispiele zu Banach-Räumen zu formulieren bedeutet in der Regel schwerwiegende mathematische Sätze zu zitieren. Einfachste Beispiele sind alle endlichdimensionalen Räume. Daneben haben wir bereits die Folgenräume

1. $\mathfrak{c}_0$ versehen mit der Maximumnorm,
2. $\mathfrak{c}$ versehen mit der Spremumsnorm,
3. ℓ^∞ versehen mit der Supremumsnorm,

kennengelernt, deren Vollständigkeit als Übungsaufgabe gezeigt werden kann. Weitere Folgenräume ergeben sich als Beispiele der Lebesgueschen Integrationstheorie

4. $\ell^p := \{\ (z_n) \mid \sum_n |z_n|^p < \infty\ \}$ versehen mit der p-Norm, welcher als $L^p(\mathbb{N}, \#)$, $\mathbb{N}$ versehen mit dem Zählmaß $\#$, verstanden werden kann.

1.1.12 Beispiel. Der oben erwähnte Raum der stetigen Funktionen $C(X)$ auf einem kompakten metrischen Raum X ist vollständig. Konvergenz in der Supremumsnorm entspricht gleichmäßiger Konvergenz.

1.1.13 Beispiel. Eine wichtige Klasse von Banachräumen sind die *Lebesgue-Räume*[3] $L^p(\mathbb{R}^n)$ versehen mit der L^p-Norm

$$||f||_p := \left(\int |f(x)|^p \mathrm{d}x\right)^{1/p}, \qquad ||f||_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_x |f(x)|. \tag{1.1.17}$$

Sie sind ein Spezialfall der allgemeinen *Lebesgue-Räume* $L^p(X, \Omega, \mu)$, Ω eine σ-Algebra auf X und $\mu : \Omega \to \mathbb{R}$ ein Maß.

[3] nach Henri Lebesgue, 1875-1941

1.1.14 Beispiel. Ein letztes Beispiel soll die Konstruktion eines neuen Raumes aus zwei normierten Räumen sein, der *Produktraum*. Seien dazu $(V_1, ||\cdot||_1)$ und $(V_2, ||\cdot||_2)$ normierte Räume. Dann definiert

$$||(x,y)||_{1\times 2} := ||x||_1 + ||y||_2 \tag{1.1.18}$$

auf dem Vektorraum der geordneten Paare, $V_1 \times V_2$, eine Norm. Der Produktraum ist ein Banachraum, wenn beide Faktoren welche sind. Neben der oben angegebenen Norm kann man auf dem Produktraum auch die (dazu äquivalenten) Normen

$$\left(\|x\|_1^p + \|y\|_2^p\right)^{1/p}, \qquad \text{oder} \qquad \max(\|x\|_1, \|y\|_2) \tag{1.1.19}$$

verwenden. Das Beispiel überträgt sich unmittelbar auf alle endlichen Produkte.

In Banachräumen gelten alle Sätze, die man als Folgerung des Cauchy-Kriteriums für Folgen erhält. Insbesondere ergeben sich wichtige Konvergenzkriterien für Reihen.

1.1.15 Satz (Majorantenkriterium). *Sei (x_n) eine Folge in einem Banachraum V mit $\|x_n\| \leq \alpha_n$. Gilt dann $\sum_n \alpha_n < \infty$, so konvergiert die Reihe*

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n \tag{1.1.20}$$

absolut (und unbedingt) in V.

Der Beweis erfolgt analog zu den entsprechenden Sätzen für Zahlenreihen.

1.2 Beschränkte Operatoren und Banach-Algebren

Lineare Abbildungen und Stetigkeit

Seien $(V_1, ||\cdot||_1)$ und $(V_2, ||\cdot||_2)$ normierte Räume. Wir wollen zuerst der Frage nachgehen, wann eine lineare Abbildung $A : V_1 \to V_2$ bezüglich der durch die Normen induzierten Topologie stetig ist.

1.2.1 Satz. *Für eine lineare Abbildung $A : V_1 \to V_2$ sind äquivalent:*

1. *A ist stetig.*
2. *A ist an der Stelle $0 \in V_1$ stetig.*
3. *Für A ist der Quotient $||Ax||_2/||x||_1$ auf $V_1 \setminus \{0\}$ beschränkt.*
4. *A ist beschränkt, das heißt A bildet beschränkte Teilmengen auf beschränkte Teilmengen ab.*

Beweis. $[1 \to 2]$ klar.
$[2 \to 3]$ Angenommen 3 gilt nicht. Dann existiert eine Folge x_n, so daß $\|Ax_n\|_2 \geq n^2\|x_n\|_1$ gilt. Betrachtet man nun die Nullfolge $y_n = x_n/n\|x_n\|_1$, so folgt $\|Ay_n\|_2 \geq n$, A ist also in 0 nicht

stetig.
[$3 \to 4$] Sei $C = \sup_x \|Ax\|_2/\|x\|_1$ und $M \subseteq V_1$ eine beschränkte Menge. Dann gibt es ein $R > 0$, so daß $M \subseteq B_R := \{x \in V_1 \mid \|x\|_1 \leq R\}$. Weiter folgt, daß $A(B_R) \subseteq B_{CR}$ gilt, also $A(M) \subseteq B_{CR}$ beschränkt ist.
[$4 \to 3$] Anwendung auf die Einheitskugel in V_2.
[$3 \to 1$] Sei $x_n \to x$ eine konvergente Folge in V_1. Dann gilt mit $C = \sup_x \|Ax\|_2/\|x\|_1$

$$\|Ax_n - Ax\|_2 = \|A(x_n - x)\|_2 \leq C\|x_n - x\|_1 \tag{1.2.1}$$

□

1.2.2 Definition. Sei $A : V_1 \to V_2$ beschränkt. Dann bezeichnet

$$||A|| := \sup_{x \neq 0} \frac{||Ax||_2}{||x||_1} = \sup_{||x||_1 = 1} ||Ax||_2 \tag{1.2.2}$$

die *Operatornorm* von A. Die Menge der beschränkten linearen Abbildungen $\mathcal{L}(V_1, V_2)$ wird damit zu einem normierten Raum, dem *Raum der beschränkten Operatoren*.

1.2.3 Proposition. *1.* $\|\alpha A\| = |\alpha| \, \|A\|$

2. $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$

1.2.4 Satz. *Sei V_2 ein Banachraum. Dann ist auch $\mathcal{L}(V_1, V_2)$ ein Banachraum.*

Beweis. Sei A_k eine Cauchyfolge aus $\mathcal{L}(V_1, V_2)$. Dann ist wegen

$$\|A_k x - A_l x\| \leq \|A_k - A_l\| \, \|x\| \tag{1.2.3}$$

$(A_k x)$ für jedes $x \in V_1$ eine Cauchyfolge aus V_2. Sei ihr Grenzwert mit Ax bezeichnet. Dann ist A offenbar linear und wegen

$$\|Ax\| = \lim_{k \to \infty} \|A_k x\| = \|x\| \lim_{k \to \infty} \|A_k\| < \infty \tag{1.2.4}$$

beschränkt. Insbesondere gilt $\|A_k - A\| \to 0$ und damit $\|A\| = \lim_{k \to \infty} \|A_k\|$. □

Beispiele

1.2.5 Beispiel. Sind V_1 und V_2 beide endlichdimensional, so kann man den Raum der beschränkten Operatoren mit dem Vektorraum der *Matrizen* identifizieren, insbesondere gilt $\mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m) = \mathbb{K}^{n \times m}$.

1.2.6 Beispiel. Beschränkte Operatoren zwischen Folgenräumen lassen sich als unendliche Matrizen verstehen. Wir betrachten einen einfachen Fall. Sei dazu $A : \ell^1 \to \ell^1$ beschränkt. Sei weiter e_m die Folge $(0, 0, \ldots, 1, 0, \ldots)$, die nur an der m-ten Stelle den Eintrag 1 besitzt. Bezeichnet man $Ae_m = (\alpha_n)_m = (\alpha_{n,m})$. Dann kann man die Anwendung des Operators A als Matrix-Vektor-Multiplikation verstehen

$$(y_n) = A(x_m) \qquad \text{falls} \qquad y_n = \sum_m \alpha_{n,m} x_m. \tag{1.2.5}$$

Es stellt sich die Frage nach Bedingungen an die Koeffizienten $\alpha_{m,n}$, so daß der entstehende Operator beschränkt ist. Notwendige Bedingungen sind einfach zu formulieren, da sie nur auf die Anwendung der Dreiecksungleichung hinauslaufen. So ist wegen

$$\|(y_n)\|_1 = \sum_n |y_n| = \sum_n \left|\sum_m \alpha_{n,m} x_m\right| \leq \left(\sum_n \max_m |\alpha_{n,m}|\right) \sum_m |x_m| = C\|(x_m)\|_1 \tag{1.2.6}$$

der Operator A beschränkt, falls

$$C = \sum_n \max_m |\alpha_{n,m}| < \infty \tag{1.2.7}$$

gilt. An dieser Stelle müssen wir offenlassen, ob die Umkehrung dieser Aussage richtig ist.

1.2.7 Beispiel. Seien $X, Y \subseteq \mathbb{R}^n$ der Abschluß beschränkter Gebiete und $k \in C(X \times Y)$ eine auf dem Produkt definierte stetige Funktion. Dann kann man vermittels k durch das Integral

$$Kf(y) = \int_X k(x,y) f(x) \mathrm{d}x \tag{1.2.8}$$

einen Operator $K : C(X) \to C(Y)$ definieren. Dieser ist beschränkt, da

$$\|Kf\| = \sup_{y \in Y} \left| \int_X k(x,y) f(x) \mathrm{d}x \right| \leq |X| \; \|k\| \; \|f\| \tag{1.2.9}$$

gilt. Insbesondere ist auch die Zuordnung $C(X \times Y) \ni k \mapsto K \in \mathcal{L}(C(X), C(Y))$ ein beschränkter Operator. Man bezeichnet K als *Integraloperator mit stetiger Kernfunktion* $k(x,y)$.

1.2.8 Beispiel. Der im letzten Abschnitt definierte Produktraum $V \times V$ für einen normierten Raum V kann auch verstanden werden als $\mathcal{L}(\mathbb{K}^2, V)$. Damit kann man insbesondere nun auch unendliche Produkte eines normierten Raumes mit sich konstruieren, indem man Abbildungen aus Folgenräumen in den Vektorraum V betrachtet, also $\mathcal{L}(\ell^p, V)$.

Ist $A \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$ und $B \in \mathcal{L}(V_2, V_3)$, so kann man die Verkettung BA betrachten. Für die Operatornorm von BA erhält man wegen

$$||BAx|| \leq ||B|| \, ||Ax|| \leq ||B|| \, ||A|| \, ||x||$$

die Abschätzung der *Submultiplikativität* der Operatornorm

$$||BA|| \leq ||B|| \, ||A||. \tag{1.2.10}$$

1.2.9 Definition. Eine lineare Abbildung $A \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$ heißt ein *Isomorphismus* der normierten Räume V_1 und V_2, falls A (stetig) invertierbar ist, das heißt falls ein $B \in \mathcal{L}(V_2, V_1)$ mit $AB = I$ und $BA = I$ existiert. Ein Isomorphismus[4] heißt *isometrisch*, falls er die Norm erhält,

$$||Ax||_2 = ||x||_1, \qquad \forall x \in V_1. \tag{1.2.11}$$

Von spezieller Bedeutung sind die beschränkten Operatoren eines normierten Raumes in sich, das heißt die Menge $\mathcal{L}(V) := \mathcal{L}(V, V)$. Neben der Vektorraumstruktur ist auf dieser Menge auch die Verkettung von Operatoren definiert, die man als Multiplikation in einer Algebra auffassen kann. Die invertierbaren Elemente in dieser Algebra werden als *Automorphismen* bezeichnet.

[4] Tatsächlich ist jede isometrische Abbildung ein Isomorphismus, die Forderung also überflüssig.

Banach-Algebren

1.2.10 Definition. Eine *normierte Algebra* ist ein Paar $(\mathcal{A}, ||\cdot||)$ bestehend aus einer $\mathbb{K}$-Algebra $(\mathcal{A}, +, \cdot)$ und einer Norm $||\cdot||$, die neben den Eigenschaften (V0) – (V3) noch die Eigenschaft

(V4) Für $x, y \in \mathcal{A}$ gilt $||xy|| \leq ||x||\,||y||$.

erfüllt. Ist eine normierte Algebra vollständig, so heißt sie *Banach-Algebra*.

1.2.11 Beispiel. Standardbeispiel einer Banach-Algebra ist die Algebra $\mathcal{L}(V)$ der beschränkten Endomorphismen eines Banachraumes. Vollständigkeit folgt aus Satz 1.2.4.

1.2.12 Beispiel. Sei X kompakter metrischer Raum. Dann ist $C(X)$ versehen mit der (punktweisen) Multiplikation von Funktionen wegen

$$|f(x)g(x)| \leq |f(x)|\,|g(x)| \leq ||f||\,||g||$$

eine normierte Algebra, wegen der Vollständigkeit also eine Banach-Algebra. Invertierbare Elemente sind alle Funktionen, die keine Nullstellen besitzen.

1.2.13 Beispiel. Auf dem Raum $L^1(\mathbb{R}^n)$ kann vermittels der Faltung

$$f * g(x) := \int f(x-y)g(y)\mathrm{d}y \tag{1.2.12}$$

die Struktur einer Banach-Algebra definiert werden. Man beweise dazu die *Youngsche Ungleichung*[5]

$$||f * g||_1 \leq ||f||_1\,||g||_1. \tag{1.2.13}$$

Während die Algebren $C(X)$ und $L^1(\mathbb{R}^n)$ kommutativ sind, ist die Algebra $\mathcal{L}(V)$ (falls $\dim V > 1$) nicht kommutativ. Die Algebra $L^1(\mathbb{R}^n)$ enthält kein Einselement.

Zum Schluß eine erste Anwendung. Ein Operator $A \in \mathcal{L}(V)$ heißt *kontrahierend* , falls $\|A\| < 1$ gilt. Betrachtet man nun Operatorgleichungen der Form

$$x - Ax = y \tag{1.2.14}$$

zu gegebenem $y \in V$, V ein Banachraum, so kann man deren Lösung explizit hinschreiben. Es gilt

$$x = \left(I + \sum_{k=1}^{\infty} A^k\right) y = (I-A)^{-1}y. \tag{1.2.15}$$

Um das zu zeigen, muß die Konvergenz der Reihe nachgewiesen werden. Da V Banachraum ist, ist $\mathcal{L}(V)$ eine Banachalgebra. Da $\|A^k\| \leq \|A\|^k$ ist die geometrische Reihe $\sum_k \|A\|^k$ eine konvergente Majorante, die Ausgangsreihe also in $\mathcal{L}(V)$ absolut und unbedingt konvergent. Einsetzen liefert

$$(I-A)\left(I + \sum_{k=1}^{\infty} A^k\right) = I + \sum_{k=1}^{\infty} A^k - A - \sum_{k=1}^{\infty} A^{k+1} = I. \tag{1.2.16}$$

Insbesondere ist für kontrahierendes A der Operator $I - A$ invertierbar. Die Aussage ist ein Spezialfall des Banachschen Fixpunktsatzes, die Reihendarstellung heißt *Neumannreihe*[6].

[5] nach William Henry Young, 1862-1942.
Es gilt die entsprechende Verallgemeinerung für $L^p * L^q \to L^r$ mit $1/r + 1 = 1/p + 1/q$.

[6] Carl Neumann, 1832-1925

1.3 Unterräume und Approximationaufgaben

Definition und Beispiele

Sei $(V, ||\cdot||)$ ein normierter-Raum. Dann ist auch jeder (algebraische) Teilraum $U \subseteq V$ ein normierter Raum. Ist $(V, ||\cdot||)$ Banachraum, so sind alle abgeschlossenen Unterräume selbst wieder Banach-Räume.

1.3.1 Beispiele. Um Beispiele zu konstruieren, betrachten wir wieder einen linearen Operator $A \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$ zwischen zwei normierten Räumen $(V_1, ||\cdot||_1)$ und $(V_2, ||\cdot||_2)$. Dann ist das *Bild* (engl. range) des Operators

$$R(A) := \{\ Ax \mid x \in V_1\} \subseteq V_2 \tag{1.3.1}$$

ein Teilraum von V_2. Ebenso ist der *Nullraum* oder *Kern* des Operators

$$N(A) := \{\ x \in V_1 \mid Ax = 0\ \} \tag{1.3.2}$$

ein Teilraum. Wie man leicht sieht, ist der Nullraum stets abgeschlossen. Man beweise dies!

1.3.2 Beispiel. Sei $A \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$. Dann ist der Graph

$$\operatorname{graph} A := \{\ (x, Ax) \mid x \in V_1\ \} \tag{1.3.3}$$

ein abgeschlossener Teilraum von $V_1 \times V_2$.

Seien nun U_1 und U_2 zwei Unterräume von V. Dann bezeichnen wir mit

$$U_1 + U_2 = \operatorname{span} U_1 \cup U_2 \tag{1.3.4}$$

die *Summe der Unterräume* U_1 und U_2. Sind beide Unterräume abgeschlossen, so auch ihre Summe. Oft ist es hilfreich, einen (Unter-) Raum in eine Summe kleinerer Teilräume zu zerlegen. Optimal ist es dabei, wenn deren Durchschnitt trivial ist, also $U_1 \cap U_2 = \{0\}$ gilt. In diesem Falle spricht man von einer *direkten Summe der Unterräume* und bezeichnet sie als

$$U_1 \oplus U_2. \tag{1.3.5}$$

1.3.3 Beispiel. Um ein Beispiel anzugeben, betrachten wir den Raum $L^1(\mathbb{R})$ und darin die Unterräume

$$L^1_g(\mathbb{R}) = \{\ f \in L^1(\mathbb{R}) \mid f(x) = f(-x)\ \} \tag{1.3.6}$$
$$L^1_u(\mathbb{R}) = \{\ f \in L^1(\mathbb{R}) \mid f(x) = -f(-x)\ \} \tag{1.3.7}$$

der geraden bzw. ungeraden Funktionen. Beide sind offenbar abgeschlossen und man kann jede Funktion $f \in L^1(\mathbb{R})$ vermittels $f_g(x) = (f(x) + f(-x))/2$ und $f_u(x) = (f(x) - f(-x))/2$ in ihren geraden und ungeraden Anteil zerlegen. Weiterhin muß jede Funktion, die zugleich gerade und ungerade ist, die (fast-überall-) Nullfunktion sein. Es gilt also $L^1(\mathbb{R}) = L^1_g(\mathbb{R}) \oplus L^1_u(\mathbb{R})$.

Approximation

Oft stellt sich die Frage, inwieweit es möglich ist, Elemente von V durch Elemente von U zu approximieren. Zum einen kann dazu U ein *dichter Teilraum* sein, daß heißt zu jedem $x \in V$ und jedem $\epsilon > 0$ existiert ein $y \in U$, so daß $||x - y|| < \epsilon$ gilt.

1.3.4 Beispiel. Der Vektorraum der *Stufenfunktionen*, das heißt die Menge der meßbaren Funktionen im $\mathbb{R}^n$, die nur auf einer beschränkten Menge von Null verschiedene Werte annehmen und auch nur einen endlichen Wertebereich haben, ist dicht in $L^p(\mathbb{R}^n)$ für alle $p \in [1, \infty)$.

1.3.5 Beispiel. Im Raum $C[a, b]$ der stetigen Funktionen auf einem kompakten Intervall ist die Menge aller Polynome ein dichter Teilraum. (Approximationssatz von WEIERSTRASS)

Von anderer Natur ist die Frage nach *Bestapproximationen* aus abgeschlossenen Unterräumen. Sei dazu V ein normierter Raum und U ein abgeschlossener Teilraum. Unter einer/der Bestapproximation eines Elementes $x \in V$ aus U verstehen wir ein $y \in U$, so daß der Approximationsfehler $||x - y||$ minimal wird. Im Unendlichdimensionalen muß eine solche Bestapproximation nicht immer existieren, aber wir können uns an eine solche annähern. Umgekehrt müssen Bestapproximationen nicht eindeutig sein.

1.3.6 Beispiel. Der Raum der Nullfolgen $\mathfrak{c}_0$ ist ein abgeschlossener Teilraum des Raumes der konvergenten Folgen $\mathfrak{c}$. Versucht man nun die konstante Folge $(1) \in \mathfrak{c}$ durch eine Nullfolge zu approximieren, so haben z.b. sämtliche positiven Nullfolgen den Minimalabstand 1, Abstände kleiner 1 kommen gar nicht vor. Die Bestapproximierende ist also nicht eindeutig bestimmt.

1.3.7 Beispiel. Wir bleiben im Raum $\mathfrak{c}_0$. Betrachtet man den Unterraum

$$M = \{(x_k) \mid \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} x_k = 0\}, \tag{1.3.8}$$

so ist dieser abgeschlossen (Übung!) und für keine Folge $(y_n) \in \mathfrak{c}_0 \setminus M$ existiert eine Bestapproximation aus M.

Beweis. Sei $\lambda = |\sum_k 2^{-k} y_k|$. Dann ist

$$(z_n)_k = -\frac{2^k}{2^k - 1}(\underbrace{\lambda, \lambda, \ldots, \lambda}_{k \text{ mal}}, 0 \ldots) + (y_n) \tag{1.3.9}$$

für jedes k ein Element von M. Weiterhin gilt $\|(z_n)_k - (y_n)\| \to \lambda$. Also ist der Abstand von (y_n) zu M mindestens λ. Wir zeigen, daß trotzdem kein $(x_n) \in M$ mit $\|(x_n) - (y_n)\| \leq \lambda$ existiert. Angenommen es existiert eins. Dann gilt

$$\begin{aligned} \lambda = |\sum_k 2^{-k} y_k| = |\sum_k 2^{-k}(y_k - x_k)| \leq \sum_k 2^{-k} |x_k - y_k| \\ \leq \lambda \sum_{k<n} 2^{-k} + \frac{1}{2}\lambda \sum_{k \geq n} 2^{-k} < \lambda \end{aligned} \tag{1.3.10}$$

wobei n so groß gewählt wird, daß für $k \geq n$ stets $|x_k - y_k| \leq \frac{1}{2}\lambda$ gilt (Nullfolgen!). Das ist aber ein Widerspruch zur Definition von λ. □

Das Rieszsche Lemma

Verbunden mit der Frage nach Approximationen ist das umgekehrte Problem Punkte zu finden, die von einem Unterraum besonders weit wegliegen. Ein Beispiel dazu ist das Rieszsche[7] Lemma von der Fastsenkrechten.

1.3.8 Lemma (Riesz). *Sei U ein abgeschlossener echter Teilraum von $(V, \|\cdot\|)$. Dann gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $x \in V \setminus U$ mit $\|x\| = 1$ und*

$$\operatorname{dist}(x, U) = \inf\{\|x-y\| \mid y \in U\} \geq 1 - \epsilon. \tag{1.3.11}$$

Beweis. Sei $y \in V \setminus U$. Da U abgeschlossen ist, ist $d := \operatorname{dist}(y, U) > 0$ (Übung!). Dann gibt es also ein $z \in U$ mit

$$0 < \|y - z\| < d/(1-\epsilon). \tag{1.3.12}$$

Setzt man nun $x = (y-z)/\|y-z\|$ so ist $\|x\| = 1$ und für alle $u \in U$

$$\|u - x\| = \big\|u - (y-z)/\|y-z\|\big\| = \big\|(u\|y-z\| + z) - y\big\|/\|y-z\| \geq d/\|y-z\| > 1 - \epsilon. \tag{1.3.13}$$

□

Damit können wir nun folgenden Satz beweisen.

1.3.9 Satz. *Sei V normierter Raum. Dann sind äquivalent:*

1. *V ist endlichdimensional.*
2. *Jede abgeschlossene und beschränkte Teilmenge von V ist kompakt.*

Beweis. $[1 \to 2]$ Ist eine Formulierung des Satzes von Heine-Borel im $\mathbb{R}^n$. Es bleibt die Rückrichtung $[2 \to 1]$. Sei dazu V unendlichdimensional. Wir zeigen, daß dann die abgeschlossene Einheitskugel

$$B := \{x \in V \mid \|x\| \leq 1\} \tag{1.3.14}$$

nicht kompakt ist. Dazu wählen wir x_1 mit $\|x_1\| = 1$ beliebig und setzen $F_1 = \operatorname{span}\{x_1\}$ und konstruieren rekursiv eine Folge F_i und x_i. Weil $F_i \neq V$ ist existiert nach dem Rieszschen Lemma ein x_{i+1} mit $\|x_{i+1}\| = 1$ und $\operatorname{dist}(x_{i+1}, F_i) > \frac{1}{2}$. Setzen $F_{i+1} = \operatorname{span}\{x_1, \ldots, x_{i+1}\}$. Insbesondere erhalten wir damit eine Folge $(x_k) \subseteq B$ mit $\|x_j - x_k\| \geq \frac{1}{2}$ für $j \neq k$. Diese Folge kann also keine konvergente Teilfolge enthalten, also ist die abgeschlossene und beschränkte Menge B nicht kompakt. □

1.4 Der Bairesche Kategoriensatz und seine Folgerungen

Verbunden mit dichten Teilmengen ist der nachfolgende tiefliegende Satz. Seine Grundidee ist verwandt mit der Konstruktion der rationalen Zahlen und der reellen Zahlen. Während sich die rationalen Zahlen als abzählbare Vereinigung der Stammbrüche mit festem Nenner schreiben lassen und keine dieser Teilmengen dicht in $\mathbb{Q}$ ist, enthalten die reellen Zahlen „wesentlich mehr Elemente“.

[7] Fritz Riesz, 1880-1956

1.4.1 Definition. Eine Teilmenge A eines metrischen Raumes heißt von erster Kategorie, wenn sie sich als abzählbare Vereinigung nirgends dichter Teilmengen schreiben läßt. Existiert keine solche Darstellung, so heißt sie von zweiter Kategorie.

1.4.2 Lemma. *Eine Menge M ist genau dann von zweiter Kategorie, wenn aus $M = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ stets folgt, daß die Abschließung wenigstens einer Menge A_k innere Punkte enthält.*

1.4.3 Satz (Baire[8]scher Kategoriensatz). *Jeder vollständige metrische Raum (insbesondere also jeder Banachraum) M ist von zweiter Kategorie.*

Beweis. Gegenannahme: Es existieren nirgends dichte Teilmengen A_k von M mit $M = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$. Da A_1 nirgends dicht ist gibt es ein $x_1 \in M \setminus \overline{A}$. Weil $\overline{A}_1$ abgeschlossen und M offen ist, existiert zu x_1 eine offene Kugel $B_1 = B(x_1, r_1)$ mit Radius $r_1 < 1$, so daß $\overline{B}_1 \cap \overline{A}_1 = \emptyset$ gilt. Weil A_2 nirgends dicht ist, gibt es nun $x_2 \in B_1 \setminus \overline{A}_2$. Weil B_1 offen und $\overline{A}_2$ abgeschlossen ist, gibt es nun eine Kugel $B_2 = B(x_2, r_2)$ mit Radius $r_2 < \frac{1}{2}$, so daß $B_2 \subset B_1$ und $\overline{B}_2 \cap \overline{A}_2 = \emptyset$. Induktiv konstruiert man nun eine Folge ineinandergeschachtelter Kugeln B_k mit Mittelpunkt x_k und Radien $r_k < \frac{1}{k}$, so daß

$$B_k \subset B_{k-1}, \qquad \overline{B}_k \cap \overline{A}_k = \emptyset. \tag{1.4.1}$$

Weil alle Mittelpunkte $x_k, x_{k+1}, \ldots$ in B_k liegen, folgt für $m \geq k$ somit $d(x_k, x_m) \leq 2/k$ und die Folge (x_k) ist Cauchyfolge, konvergiert also gegen ein $x \in M$. Dieses x liegt aber für alle k in $\overline{B}_k$ und deshalb für kein k in $\overline{A}_k$. Widerspruch. □

Als Folgerungen des Baireschen Kategoriensatzes ergeben sich einige der wichtigsten Sätze der Funktionalanalysis, die im folgenden zusammengestellt werden sollen. Hauptproblem ist, Bedingungen anzugeben, unter denen die Inverse eines injektiven Operators *stetig* ist. Beantwortet wird es im wesentlichen durch folgenden Satz.

1.4.4 Satz (Satz von der offenen Abbildung). *Seien V_1 und V_2 Banachräume und sei $A \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$ surjektiv. Dann ist die Bildmenge $A(U)$ jeder offenen Menge $U \subseteq V_1$ offen in V_2.*

Beweis. Sei $B_k := \{x \in V_1 \mid \|x\|_1 < k\}$. Dann ist wegen der Surjektivität von A offenbar $V_2 = \bigcup_k A(B_k)$, es gibt nach dem Satz von Baire also ein k, so daß $\overline{A(B_k)}$ innere Punkte enthält. Es gibt also insbesondere ein $\delta > 0$, so daß $\tilde{B}_\delta := \{x \in V_2 \mid \|x\|_2 < \delta\} \subset \overline{A(B_1)}$.

In einem zweiten Schritt zeigen wir $\overline{A(B_1)} \subset A(B_2)$. Sei dazu $y \in \overline{A(B_1)}$. Dann existiert $x_1 \in B_1$ mit

$$y - Ax_1 \in \tilde{B}_{\delta/2} \subset \overline{A(B_{1/2})}.$$

Rekursiv konstruieren wir nun $x_k \in B_{2^{1-k}}$ mit

$$y - Ax_1 - Ax_2 - \cdots - Ax_k \in \tilde{B_{\delta 2^{-k}}} \subset \overline{A(B_{2^{-k}})}.$$

Die Reihe $\sum x_k$ konvergiert wegen $\|x_k\| < 2^{1-k}$ nach dem Majorantenkriterium absolut gegen ein Element $x \in B_2$ und wegen der Stetigkeit von A folgt $Ax = y$. Somit ist $y \in A(B_2)$, also $\overline{A(B_1)} \subset A(B_2)$.

[8] Louis Baire, 1874-1932

Sei nun $U \subseteq V_1$ offen. Wir zeigen, daß $A(U)$ offen ist. Sei dazu $y \in A(U)$ und $Ax = y$. Dann existiert ein $\epsilon > 0$ so daß $x + B_\epsilon \subset U$ und somit $A(x + B_\epsilon) = y + A(B_\epsilon) = y + \frac{\epsilon}{2}A(B_2) \subset A(U)$ und nach Schritt 2 enthält $A(B_2)$ eine Nullumgebung, $A(U)$ muß damit offen sein. $\square$

1.4.5 Korollar (Satz über den inversen Operator). *Sind V_1 und V_2 Banachräume und $A \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$ bijektiv. Dann ist A (stetig) invertierbar.*

1.4.6 Korollar. *Seien $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ zwei Normen auf dem linearen Raum V. Sind beide Räume $(V, \|\cdot\|_1)$ und $(V, \|\cdot\|_2)$ vollständig und gibt es ein C so daß $\|x\|_1 \le C\|x\|_2$ für alle $x \in V$ gilt, so sind beide Normen äquivalent.*

Eine weitere Anwendung ist der nachfolgende Satz, er beschreibt die Umkehrung einer vorher schon gemachten Aussage.

1.4.7 Satz (Satz vom abgeschlossenen Graphen). *Seien V_1 und V_2 Banachräume und ist der Graph* graph *A der linearen Abbildung $A : V_1 \to V_2$ abgeschlossene Teilmenge von $V_1 \times V_2$. Dann ist A beschränkt.*

1.5 Hilberträume

Innenprodukte

Jetzt wollen wir den Begriff des Vektorraums mit Geometrie ergänzen. Dazu messen wir nicht nur Abstände zwischen Punkten, sondern auch Winkel zwischen Vektoren.

1.5.1 Definition. Ein *Innenprodukt-* oder *Prähilbertraum* ist ein Vektorraum H zusammen mit einem *Skalarprodukt* $(\cdot,\cdot) : H \times H \to \mathbb{K}$, welches die folgenden Bedingungen erfüllt:

(H1) Symmetrie[9]: Für alle $x, y \in V$ gilt $(x, y) = \overline{(y, x)}$.

(H2) Positiv-Definitheit: Für alle $x \in V$ ist $(x, x) \ge 0$ und $(x, x) = 0$ gilt genau dann, wenn $x = 0$.

(H3) Homogenität: Für $x, y \in V$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$.

(H4) Linearität: Für $x, y, z \in V$ gilt $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$.

Mit der Vereinbarung

$$||x|| = \sqrt{(x, x)} \tag{1.5.1}$$

kann man in jedem Innenproduktraum eine Norm definieren und damit die Struktur eines normierten Raumes erzeugen. (Übungsaufgabe: Man zeige die Normeigenschaften mit Hilfe der Aussagen (H1)–(H4)!) Eine wichtige Eigenschaft des Skalarproduktes ist, daß es bezüglich der Norm (separat) stetig ist. Dies folgt aus

1.5.2 Satz (Schwarz[10]sche Ungleichung). *Es gilt für $x, y \in H$*

$$|(x, y)| \le \|x\|\,\|y\|. \tag{1.5.2}$$

[9] dabei bezeichne $\overline{\alpha}$ die komplexe Konjugierte von α, falls $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

[10] nach Hermann Amandus Schwarz, 1843-1921

Beweis. Für $y = 0$ folgt $(x, y) = 0$ und die Ungleichung ist korrekt. Weiter gilt

$$0 \le (x+\alpha y, x+\alpha y) = (x,x)+\alpha(y,x)+\overline{\alpha}(x,y)+|\alpha|^2(y,y) = (x,x)-(x,y)(y,x)/(y,y) \quad (1.5.3)$$

mit $\alpha = -(x, y)/(y, y)$ und die Behauptung folgt. □

1.5.3 Korollar. *Seien (x_n) und (y_n) in H konvergent Folgen mit Grenzwerten x und y. So gilt $(x_n, y_n) \to (x, y)$.*

1.5.4 Satz (Satz des Pythagoras). *Gilt $(x, y) = 0$, so folgt $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.*

Es stellt sich umgekehrt die Frage, welche Eigenschaften eine Norm in einem normierten Raum haben muß, um aus einem Skalarprodukt hervorzugehen. Die Antwort liefert folgender Satz; der Beweis dazu verbleibt als Übungsaufgabe.

1.5.5 Satz. *In jedem Innenproduktraum erfüllt die Norm* (1.5.1) *die* Parallelogrammgleichung

$$||x + y||^2 + ||x - y||^2 = 2(||x||^2 + ||y||^2) \quad (1.5.4)$$

für alle $x, y \in V$. Erfüllt umgekehrt eine Norm die Parallelogrammgleichung, so läßt sich durch

$$(x, y) := \begin{cases} \left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2 - \left\|\frac{x-y}{2}\right\|^2, & \textit{falls } \mathbb{K} = \mathbb{R}, \\ \left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2 - \left\|\frac{x-y}{2}\right\|^2 + \mathrm{i}\left\|\frac{x+\mathrm{i}y}{2}\right\|^2 - \mathrm{i}\left\|\frac{x-\mathrm{i}y}{2}\right\|^2, & \textit{falls } \mathbb{K} = \mathbb{C}, \end{cases} \quad (1.5.5)$$

ein Skalarprodukt definieren, welches diese Norm induziert.

1.5.6 Definition. Ein Innenproduktraum wird als *Hilbertraum*[11] bezeichnet, falls er (als normierter Raum) vollständig ist.

1.5.7 Beispiel. Standardbeispiel ist der Raum $L^2(\mathbb{R}^n)$ versehen mit dem Innenprodukt

$$(f, g) = \int f(x)\overline{g(x)}\mathrm{d}x. \quad (1.5.6)$$

Die zugeordnete Norm ist die 2-Norm.

1.5.8 Beispiel. Ein weiteres Beispiel erhält man, wenn man den Folgenraum

$$\ell^2 = \left\{ (x_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \;\middle|\; \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^2 < \infty \right\}, \quad (1.5.7)$$

versehen mit dem Skalarprodukt

$$((x_n), (y_n)) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n \overline{y_n} \quad (1.5.8)$$

betrachtet.

[11] David Hilbert, 1862-1943

Der Projektionssatz und Bestapproximationen

Nun soll die geometrische Struktur, die durch ein Innenprodukt induziert wird in den Mittelpunkt gestellt werden. Sei dazu H ein Hilbertraum und $U \subseteq H$ ein Teilraum. Dann definiert man durch

$$U^{\perp} = \{ \, x \in H \mid \forall y \in U : \, (x, y) = 0 \, \} \tag{1.5.9}$$

das *orthogonale Komplement* von U in H

1.5.9 Proposition. *Sei U Teilraum von H.*

1. *$U^{\perp}$ ist abgeschlossener Unterraum von H.*
2. *$(U^{\perp})^{\perp}$ ist der Abschluß von U in H.*
3. *U ist dicht in H genau dann, wenn $U^{\perp} = \{0\}$ ist.*

Nun können wir die Frage nach der Bestapproximation eines Elementes in einem abgeschlossenen Unterraum erneut aufgreifen und (zumindest innerhalb der Struktur eines Hilbertraumes) beantworten.

1.5.10 Satz (Projektionssatz). *Sei U abgeschlossener Teilraum eines Hilbertraumes H. Dann gilt*

$$H = U \oplus U^{\perp}. \tag{1.5.10}$$

Sei weiter $x \in H$ zerlegt in seine Komponenten $x = y + (x - y)$ mit $y \in U$ und $(x - y) \in U^{\perp}$. Dann ist y die Bestapproximation an x aus U, das heißt

$$\forall z \in U : \, ||x - z|| \leq ||x - y|| \tag{1.5.11}$$

und Gleichheit tritt genau für $y = z$ ein.

Beweis. Sei $x \in H$ und $y_n \in U$ eine Minimalfolge, so daß

$$\lim_{n \to \infty} \|x - y_n\| = d = \inf_{y \in U} \|x - y\| \tag{1.5.12}$$

gilt. Sei nun $u = x - y_n$ und $v = x - y_m$, $u - v = y_n - y_m$ und $u + v = 2(x - (y_n + y_m)/2)$. Dann gilt mit der Parallelogrammgleichung

$$\begin{aligned} \|y_m - y_n\|^2 = \|u - v\|^2 = 2(\|x - y_n\|^2 + \|x - y_m\|^2) - 4\|x - (y_n + y_m)/2\|^2 \\ \leq 2(\|x - y_n\|^2 + \|x - y_m\|^2) - 4d^2 \to 0 \end{aligned}$$

für $m, n \to \infty$. Die Folge y_n ist also Cauchyfolge in U, wegen der Abgeschlossenheit von U existiert der Grenzwert y. Dieses y löst die Bestapproximationsaufgabe und erfüllt damit für alle $z \in U$, $\alpha \in \mathbb{K}$

$$\|x - y\|^2 \leq \|x - (y + \alpha z)\|^2 = \|x - y\|^2 - \overline{\alpha}(x - y, z) - \alpha(z, x - y) + |\alpha|^2 \|z\|^2, \tag{1.5.13}$$

speziell mit $\alpha = (x - y, z)/\|z\|^2$ also $|(x - y, z)|^2 \leq 0$, $x - y \perp z$.

Damit folgt $H = U + U^{\perp}$, wegen $U \cap U^{\perp}$ also die Behauptung. □

Zu einem Unterraum U eines Hilbertraums H kann man also den *Projektionsoperator*

$$P_U : H \to U \tag{1.5.14}$$

definieren, der jedem $x \in H$ seine Bestapproximation $P_U x \in U$ zuordnet. Dabei ist P_U linear und beschränkt und erfüllt $P_U^2 = P_U$. Weiter gilt $P_{U^\perp} = I - P_U$.

1.5.11 Beispiel. Es gilt

$$L^2(\mathbb{R}^n) = L_g^2(\mathbb{R}^n) \oplus L_u^2(\mathbb{R}^n), \tag{1.5.15}$$

wobei die Unterräume der geraden Funktionen $L_g^2(\mathbb{R}^n)$ und der ungeraden Funktionen $L_u^2(\mathbb{R}^n)$ paarweise orthogonal sind,

$$L_u^2(\mathbb{R}^n) = (L_g^2(\mathbb{R}^n))^\perp. \tag{1.5.16}$$

Die Bestapproximation einer Funktion $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ durch eine gerade Funktion aus $L_g^2(\mathbb{R}^n)$ ist durch den geraden Anteil

$$f_g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \tag{1.5.17}$$

gegeben.

1.5.12 Beispiel. Sei $A : H_1 \to H_2$ ein beschränkter Operator mit abgeschlossenem Bild. Dann kann man zu A die *Pseudo-Inverse* A^P durch das Bestapproximationsproblem

$$A^P y = x \qquad \Longleftrightarrow \qquad \|Ax - y\| \to \min \quad \text{und dabei} \quad \|x\| \to \min \tag{1.5.18}$$

definieren. Die Untersuchung der Abbildung A^P erfolgt in mehreren Schritten. Zuerst betrachten wir die (rein algebraisch) definierte induzierte Abbildung

$$\tilde{A} : H_1/_{N(A)} \to R(A). \tag{1.5.19}$$

Diese ist bijektiv. Da A ein abgeschlossenes Bild besitzt ist $R(A)$ ein Hilbertraum. Der Quotientenraum $H_1/_{N(A)}$ kann durch

$$\|x + N(A)\|_{H_1/_{N(A)}} = \inf\{\|y\|_1 \mid y \in x + N(A)\} = \|P_{N(A)^\perp} x\|_1 \tag{1.5.20}$$

zu einem (mittels $P_{N(A)^\perp}$ zu $N(A)^\perp$ isomorphen) Hilbertraum gemacht machten. Auf diesem ist $\tilde{A}$ stetig, also nach dem Satz über den inversen Operator auch stetig invertierbar.

Nun gilt

$$A^P = P_{N(A)^\perp} \tilde{A}^{-1} P_{R(A)}. \tag{1.5.21}$$

Insbesondere ist A^P selbst ein beschränkter Operator mit abgeschlossenem Bild. Für diesen gilt

$$A^P A = P_{N(A)^\perp} \tilde{A}^{-1} A = P_{N(A)^\perp} \tag{1.5.22}$$

und

$$AA^P = A(I - P_{N(A)})\tilde{A}^{-1} P_{R(A)} = P_{R(A)} - AP_{N(A)}\tilde{A}^{-1} P_{R(A)} = P_{R(A)}. \tag{1.5.23}$$

Separabilität und Orthogonalbasen

Wir wollen einen Hilbertraum als *separabel* bezeichnen, falls er eine abzählbare dichte Teilmenge besitzt.

1.5.13 Beispiel. Der Hilbertraum $L^2(G)$, $G \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, ist separabel. Dies folgt daraus, daß die dichte Teilmenge der Stufenfunktionen mit rationalen Funktionswerten und über Quadern mit rationalen Koordinaten dicht in $L^2(G)$ ist.

Separable Hilberträume sind durch eine einfache Eigenschaft gekennzeichnet, sie sind isomorph zum Folgenraum ℓ^2. Um dies zu zeigen, konstruieren wir eine sogenannte *Orthonormalbasis* des separablen Hilbertraums H.

1.5.14 Definition. Eine Folge (e_n) von Elementen des Hilbertraums H heißt *Orthonormalsystem* von H, falls $(e_i, e_j) = 0$ für $i \neq j$ und $||e_i|| = 1$ für alle i gilt. Ist zusätzlich $\operatorname{span}\{ e_n \mid n \in \mathbb{N} \}$ dicht in H, so spricht man von einer *Orthonormalbasis*.

Wir konstruieren eine Orthonormalbasis von H, indem wir auf die abzählbare dichte Teilmenge das Verfahren der Gram-Schmidt[12]-Orthogonalisierung anwenden. Bezeichne dazu (x_n) eine Abzählung der dichten Teilmenge. Dann definieren wir (e_n) rekursiv durch $e_1 = x_1/||x_1||$ und

$$\tilde{x}_{n+1} = x_{n+1} - \sum_{i=1}^{n} (x_{n+1}, e_i) e_i = x_{n+1} - P_{\operatorname{span}\{e_1,\dots,e_n\}} x_{n+1}, \tag{1.5.24}$$

falls $\tilde{x}_{n+1} = 0$ streichen wir das entsprechende Element x_n aus der Liste, andernfalls setzen wir $e_{n+1} = \tilde{x}_{n+1}/||\tilde{x}_{n+1}||$.

Weiter folgt aus dem Projektionssatz die *Besselsche Ungleichung*[13]

$$\sum_{i=1}^{N} |(x, e_i)|^2 \leq ||x||^2 \tag{1.5.25}$$

für jedes $x \in H$ und jedes Orthonormalsystem (e_n). Angewandt auf eine Orthonormalbasis ergibt sich daraus die *Parsevalsche Gleichung*

1.5.15 Satz. *Sei H ein separabler Hilbertraum und (e_n) eine Orthonormalbasis. Dann gilt für alle $x \in H$*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(x, e_n)|^2 = ||x||^2. \tag{1.5.26}$$

Insbesondere ist die Abbildung

$$H \ni x \mapsto ((x, e_n)) \in \ell^2 \tag{1.5.27}$$

ein isometrischer Isomorphismus der Hilberträume H und ℓ^2.

[12] Erhard Schmidt, 1876-1959
[13] Friedrich Wilhelm Bessel, 1784-1846

1.5.16 Beispiel. Standardbeispiel einer Orthonormalbasis ist die Basis der trigonometrischen Polynome im $L^2(0,1)$, in komplexer Form gegeben durch die Funktionen $e^{2\pi ikx}$ zu $k \in \mathbb{Z}$. Die Darstellungen bezüglich dieser Basis sind gerade die Fourierreihen.

Sei $f \in L^2(0,1)$. Dann gilt

$$f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{2\pi ikx}, \qquad c_k = (f(x), e^{2\pi ikx}) = \int_0^1 f(x)e^{-2\pi ikx}\mathrm{d}x \tag{1.5.28}$$

als in $L^2(0,1)$ konvergente Reihe.

1.5.17 Beispiel. Wendet man in $L^2[-1,1]$ auf die Folge der Polynome x^n, $n = 0,1,\dots$ das Gram-Schmidt-Verfahren an, so ergibt sich eine Folge spezieller Orthogonalpolynome, die sogenannten *Legendrepolynome*[14]. Man berechne die ersten Legendrepolynome und begründe daß die Folge dieser Polynome eine Orthonormalbasis bildet.

1.5.18 Beispiel. Dasselbe kann man auch in gewichteten L^2-Räumen machen, dabei ergeben sich spezielle Systeme von Orthogonalpolynomen. Genannt seien hier nur die *Tschebyscheff-Polynome*[15] $T_n(t)$, die durch die Eigenschaften

$$T_0(t) = 1, \qquad T_n(\cos\phi) = \cos(n\phi) \tag{1.5.29}$$

charakterisiert sind. Für sie gilt

$$\int_{-1}^1 T_m(t)T_n(t)\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} = 0, \qquad m \neq n, \tag{1.5.30}$$

normiert man sie entsprechend entsteht eine Orthonormalbasis.

1.6 Ausblick: Topologische Vektorräume

Bis jetzt haben wir eine Norm genutzt, um in einem Vektorraum Begriffe wie Nähe oder Konvergenz zu definieren. Verzichtet man auf eine Quantifizierung des Begriffs Nähe, so kann man auch anders vorgehen und einen Vektorraum nur mit einer Topologie versehen.

Ein erster Schritt dazu wären Vektorräumen, in denen die Konvergenz durch ein System von Seminormen beschrieben wird.

1.6.1 Definition. Ein Paar bestehend aus einem Vektorraum V und einem System von *Seminormen* $p_\alpha : V \to \mathbb{R}$, $\alpha \in I$, welches die Eigenschaften

(S1) Jede Seminorm p_α, $\alpha \in I$, erfüllt die Eigenschaften (V0), (V2) und (V3).

(S2) Gilt $p_\alpha(x) = 0$ für alle $\alpha \in I$, so folgt $x = 0$.

erfüllt, wird als *lokalkonvexer Raum* bezeichnet.

[14] Adrien Marie Legendre, 1752-1833
[15] Pafnuti L. Tschebyscheff, 1821-1894

Konvergenz einer Folge (x_n) gegen x in einem lokalkonvexen Raum bedeutet, daß für alle $\alpha \in I$ die Folge $p_\alpha(x - x_n)$ eine Nullfolge ist.

Man kann noch wesentlich schwächere Strukturen definieren. Das Allgemeinste, was wir hier betrachten wollen, ist der sogenannte topologische Vektorraum.

1.6.2 Definition. Ein Vektorraum V zusammen mit einer Topologie $\mathcal{O}$ wird als *topologischer Vektorraum* bezeichnet, wenn die Operationen $+ : V \times V \to V$ und $\cdot : \mathbb{K} \times V \to V$ beide bezüglich dieser Topologie (separat) stetig sind.

1.7 Die Topologie der starken Operatorkonvergenz

Das erste Kapitel soll damit abgeschlossen werden, daß wir den Raum $\mathcal{L}(V_1, V_2)$, den wir als normierten Raum kennengelernt haben mit einer schwächeren lokalkonvexen Struktur versehen.

1.7.1 Definition. Sei $A_n : V_1 \to V_2$ eine Folge von Operatoren. Dann konvergiert A_n *stark*, falls für alle $x \in V_1$ die Folge $A_n x$ in V_2 konvergiert. Insbesondere bestimmt dann der Grenzwert $Ax := \lim_{n\to\infty} A_n x$ eine lineare Abbildung $A : V_1 \to V_2$, in Zeichen

$$A = \operatorname*{s-lim}_{n\to\infty} A_n. \tag{1.7.1}$$

Starke Konvergenz enstpricht der Konvergenz in einem lokalkonvexen Raum, der durch das (nicht abzählbare) System der Seminormen

$$p_x(A) = ||Ax||_2, \qquad x \in V_1 \tag{1.7.2}$$

beschrieben wird. Ein erstes, überaschendes Resultat ist

1.7.2 Satz (Satz über die gleichmäßige Beschränktheit). *Sei V_1 ein Banachraum und V_2 normierter Raum. Ist dann die Folge $A_n \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$ punktweise beschränkt, $p_x(A_n) \le \alpha_x$, so ist die Folge der Operatornormen $\|A_n\|$ beschränkt.*

Beweis. Der Beweis beruht auf dem Baireschen Kategoriensatz, angewandt in V_1. Dazu betrachten wir die Mengen

$$B_k = \{x \in V_1 \mid \sup_n \|A_n x\| \le k\}.$$

Dann ist nach Vorrausetzung $\bigcup_k B_k = V_1$. Weiter ist jedes der B_k als Durchschnitt

$$B_k = \bigcap_n B_k^n = \{x \in V_1 \mid \|A_n x\| \le k\}$$

darstellbar. Die Stetigkeit aller A_n impliziert, daß alle B_k^n und damit auch B_k abgeschlossene Mengen sind. Also enthält eine der Mengen B_k einen inneren Punkt x_0. Folglich gibt es ein $\epsilon > 0$ so daß für $\|x\| \le \epsilon$ und alle n

$$\|A_n x\| = \|A_n(x + x_0) - A_n x_0\| \le \|A_n(x + x_0)\| + \|A_n x_0\| \le 2k$$

gilt, insbesondere folgt $\|A_n\| \le 2k/\epsilon$. $\square$

Es stellt sich die Frage, ob der Raum $\mathcal{L}(V_1, V_2)$ auch bezüglich der starken Konvergenz abgeschlossen ist. Daß dies wirklich der Fall ist, ergibt ich aus dem Satz über die gleichmäßige Beschränktheit. Wesentlich ist die Linearität der Abbildungen und, daß V_1 ein Banachraum ist.

1.7.3 Korollar. *Sei V_1 Banachraum und V_2 normierter Raum. Konvergiert dann eine Folge $A_n \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$ stark gegen die Abbildung $A : V_1 \to V_2$. Dann ist A stetig und erfüllt*

$$\|A\| \leq \sup_n \|A_n\|. \tag{1.7.3}$$

1.7.4 Satz (Banach-Steinhaus). *Sei $A_n \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$ eine Folge von Operatoren zwischen zwei Banachräumen V_1 und V_2 Dann sind äquivalent:*

1. *A_n konvergiert stark gegen $A \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$,*
2. *die Folge der Operatornormen $||A_n||$ ist beschränkt und auf einer dichten Teilmenge M von V_1 konvergiert $A_n x$ gegen Ax.*

Beweis. $[1 \to 2]$ folgt unmittelbar aus dem Satz über die gleichmäßige Beschränktheit. $[2 \to 1]$ Sei dazu $y \in V_1$ gegeben. Wir wählen $\epsilon > 0$ und $\gamma := \sup_n \|A_n\|$. Sei weiter $x \in M$ mit $\|x - y\| \leq \epsilon/(3\gamma)$. Dann konvergiert $(A_n x)$, es gibt also ein n_0, so daß für $m, n \geq n_0$ stets $\|A_m x - A_n x\| \leq \epsilon/3$. Für diese Indizes gilt dann

$$\|A_n y - A_m y\| \leq \|A_n y - A_n x\| + \|A_n x - A_m x\| + \|A_m x - A_m y\| \leq \gamma\epsilon/(3\gamma) + \epsilon/3 + \gamma\epsilon/(3\gamma) \leq \epsilon, \tag{1.7.4}$$

$A_n y$ ist Cauchyfolge und somit konvergent. Die Behauptung folgt aus dem vorigen Satz. □

2 Dualitätstheorie

Alles kann man von zwei Seiten betrachten.

2.1 Dualräume

Definition

In diesem Abschnitt soll ein spezieller Raum beschränkter Operatoren, der *Dualraum*

$$V' = \mathcal{L}(V, \mathbb{K}) \tag{2.1.1}$$

im Zentrum stehen. Elemente des Dualraumes werden kurz als *beschränkte Linearformen* oder *beschränktes lineares Funktional* bezeichnet, wir verwenden dafür griechische Buchstaben. Für $\phi \in V'$ schreiben wir statt $\phi(x)$ (oder, was als Operator ja auch Sinnvoll wäre ϕx) kurz $\langle \phi, x \rangle$. Die formale Analogie in der Schreibweise zu einem Skalarprodukt wird später noch durch entsprechende Resultate untermauert.

2.1.1 Beispiele. Beispiele linearer Funktionale auf Räumen stetiger Funktionen sind

- die durch $\langle \delta, x \rangle = x(0)$ für $x \in C[0,1]$ definierte *Diracsche*[1] *Deltafunktion* bzw. das *Diracsche Punktmaß*,
- das Riemann-Integral

  $$R(f) = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t \tag{2.1.2}$$

  für $f \in C[a,b]$. Es ist ebenso ein beschränktes lineares Funktional auf dem Raum der Riemann-integrierbaren Funktionen $R[a,b]$.
- Zur numerischen Berechnung des Riemann-Integrals werden *Quadraturformeln* verwendet. Diese sind oft von der Form

  $$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \approx Q(f) = \sum_{k=1}^{n} a_k f(t_k) \tag{2.1.3}$$

  mit Knoten $t_k \in [a,b]$ und vorgegebenen Gewichten a_k. Eine Quadraturformel $Q(f)$ ist also auch ein beschränktes lineares Funktional auf $C[a,b]$. Es stellt sich die Frage, ob eine Folge von Quadraturformeln $Q_n(f)$ gegen das Riemann-Integral $R(f)$ konvergiert.

[1] Paul Dirac, 1902-1984

Es sei noch an die Norm in V' erinnert

$$\|\phi\| = \sup_{x \neq 0} \frac{|\langle \phi, x \rangle|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} |\langle \phi, x \rangle|, \tag{2.1.4}$$

V' ist also ein normierter Raum. Es gilt als Folgerung aus Satz 1.2.4:

2.1.2 Satz. *Der Dualraum V' eines normierten Raumes V ist ein Banachraum.*

2.1.3 Beispiel. Wir wollen ein erstes Beispiel betrachten, den Folgenraum ℓ^1. Sei dazu $(x_n) \in \ell^1$ und $(y_n) \in \ell^\infty$. Dann kann durch

$$\langle \phi, (x_n) \rangle = \langle (y_n), (x_n) \rangle = \sum_n x_n y_n \tag{2.1.5}$$

eine Linearform $\phi \in (\ell^1)'$ mit

$$|\langle \phi, (x_n) \rangle| \leq \|(x_n)\|_1 \, \|(y_n)\|_\infty, \qquad \|\phi\| \leq \|(y_n)\|_\infty \tag{2.1.6}$$

definiert werden. Sei umgekehrt $\phi \in (\ell^1)'$ und bezeichne e_k die Folge $(0, 0, \ldots, 1, 0, \ldots)$ die genau an der k-ten Stelle eine 1 besitzt. Dann kann man die Folge (y_n) mit

$$y_n = \langle \phi, e_n \rangle, \qquad |y_n| \leq \|\phi\|, \qquad (y_n) \in \ell^\infty \tag{2.1.7}$$

betrachten. Wegen der Linearität und Stetigkeit von ϕ folgt $\langle \phi, (x_n) \rangle = \langle (y_n), (x_n) \rangle$ und wir haben eine Isometrie zwischen ℓ^∞ und $(\ell^1)'$ konstruiert, wir identifizieren beide Räume und schreiben kurz

$$(\ell^1)' = \ell^\infty. \tag{2.1.8}$$

2.1.4 Beispiele. In vollkommener Analogie kann man mit Ausnutzung der Hölderschen[2] Ungleichung

$$\sum_n |x_n y_n| \leq \left(\sum_n |x_n|^p \right)^{1/p} \left(\sum_n |y_n|^{p'} \right)^{1/p'} \tag{2.1.9}$$

für $pp' = p + p'$ zeigen, daß $(\ell^p)' = \ell^{p'}$ für alle $p \in [1, \infty)$ gilt. (vgl. Werner, Funktionalanalysis, Satz II.2.3)

2.1.5 Beispiele. Es gilt sowohl $\mathfrak{c}_0' = \ell^1$ als auch $\mathfrak{c}' = \ell^1$ (im Sinne einer isometrisch-isomorphen Identifikation).

Der Fortsetzungssatz von Hahn-Banach

Ist $\phi \in V'$, so bestimmt ϕ durch die Gleichung $\langle \phi, x \rangle = 0$ den abgeschlossenen Unterraum $N(\phi)$. Da $\phi : V \to \mathbb{K}$ abbildet, hat dieser (rein algebraisch) die Codimension 1, ist also eine Hyperebene. Daß sich jeder abgeschlossene Unterraum als Durchschnitt von (abgeschlossenen) Hyperebenen schreiben läßt, daß es also hinreichend viele Linearformen gibt, ist eine Folgerung des Fortsetzungssatzes von Hahn[3]-Banach.

[2] Otto Hölder, 1859-1937
[3] Hans Hahn, 1879-1934

2.1.6 Satz (Hahn-Banach). *Sei U abgeschlossener Teilraum von V und $\phi_0 \in U'$ beschränkte Linearform auf U. Dann existiert eine Fortsetzung $\phi \in V'$ von ϕ_0 mit $\langle \phi, y\rangle = \langle \phi_0, y\rangle$ für $y \in U$ und $\|\phi\| = \|\phi_0\|$.*

Beweisskizze. Die Fortsetzung auf eine Dimension mehr ist einfach, für $x \in V \setminus U$, $\|x\| = 1$, setzt man

$$\langle \phi, y + cx\rangle = \langle \phi_0, y\rangle + c\|\phi_0\|. \tag{2.1.10}$$

In einem zweiten Schritt wendet man in der Menge aller möglichen Fortsetzungen dieser Struktur das Zornsche Lemma an um eine maximale Fortsetzung zu erhalten. □

Insbesondere besagt diese Aussage, daß die Einschränkung der Funktionale aus V' auf Abbildungen der Form $U \to \mathbb{K}$ surjektiv auf U' abbildet. Eine weitere Folgerung ist, daß beschränkte lineare Funktionale Punkte trennen.

2.1.7 Korollar. *Sei V normierter Raum und $x, y \in V$, $x \neq y$ seien verschiedene Punkte. Dann gibt es ein $\phi \in V'$ mit $\langle \phi, x\rangle \neq \langle \phi, y\rangle$.*

Äquivalent zeigen wir, daß es zu $x \neq 0$ ein $\phi \in V'$ mit $\langle \phi, x\rangle \neq 0$ gibt.

2.1.8 Korollar. *Sei V normierter Raum und $0 \neq x \in V$. Dann existiert ein $\phi \in V'$ mit $\langle \phi, x\rangle = \|x\|$ und $\|\phi\| = 1$.*

Beweis. Sei $U = \operatorname{span}\{x\}$. Dann definieren wir $\langle \phi, \alpha x\rangle = \alpha\|x\|$ auf U. Es gilt $\|\phi\| = 1$. Das gesuchte Funktional ergibt sich durch Fortsetzung nach dem Satz von Hahn-Banach. □

2.1.9 Korollar. *Gilt $\langle \phi, x\rangle = 0$ für ein $x \in V$ und alle $\phi \in V'$, so folgt $x = 0$.*

Transponierte Operatoren

Eine wichtige Anwendung der letzten Folgerung ist die Definition des transponierten Operators.

2.1.10 Satz. *Sei $A \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$. Dann existiert genau ein $A^T \in \mathcal{L}(V_2', V_1')$, für welches*

$$\langle Ax, \phi\rangle = \langle x, A^T\phi\rangle \tag{2.1.11}$$

für alle $x \in V_1$ und $\phi \in V_2'$ gilt. Dieser Operator ist beschränkt, $\|A^T\| = \|A\|$, und wird als zu A transponierter Operator *bezeichnet.*

Beweis. Angenommen es gäbe zwei solcher Operatoren, B_1 und B_2. Dann würde für deren Differenz und jedes $\phi \in V_2'$ sowie alle $x \in V_1$ die Beziehung $0 = \langle x, (B_1 - B_2)\phi\rangle$ gelten, also $(B_1 - B_2)\phi = 0$ sein. Dies bedeutet aber $B_1 = B_2$.

Die Existenz ist offensichtlich, es gilt

$$A^T : x \mapsto \langle Ax, \phi\rangle. \tag{2.1.12}$$

Die Linearität kann man unmittelbar nachrechnen. Wegen $|\langle Ax, \phi\rangle| \leq \|A\|\,\|x\|\,\|\phi\|$ folgt $\|A^T\| \leq \|A\|$.

Für die Gleichheit nutzen wir den Satz von Hahn-Banach in der Form von Folgerung 2.1.8. □

2.1.11 Proposition. *Es gelten die Rechenregeln*

$$(A+B)^T = A^T + B^T, \qquad (\alpha A)^T) = \alpha A^T, \qquad (AB)^T = B^T A^T \tag{2.1.13}$$

und, falls A invertierbar war, gilt dies auch für A^T

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T. \tag{2.1.14}$$

2.1.12 Beispiel. Sei V ein normierter Raum und U ein Unterraum. Dann ist die Einbettung in $U \to V$ ein beschränkter Operator (mit Norm 1). Sein Transponierter ist die Einschränkung $V' \to U'$ eines lineare Funktionals auf V zu einem auf U. Nach dem Satz von Hahn-Banach ist diese surjektiv.

2.1.13 Beispiel. Auf dem Folgenraum ℓ^1 betrachten wir zu gegebenem $(\mu_n) \in \ell^\infty$ den Multiplikationsoperator

$$M : (x_n) \mapsto (x_n \mu_n), \qquad M : \ell^1 \to \ell^1, \qquad \|M\| = \|(\mu_n)\|_\infty. \tag{2.1.15}$$

Wir fragen, wie $M^T : \ell^\infty \to \ell^\infty$ agiert. Dazu sei $(y_n) \in \ell^\infty$ und $(z_n) = M^T(y_n)$. Wegen

$$z_k = \langle M^T(y_n), e_k \rangle = \langle (y_n), Me_k \rangle = \mu_k y_k \tag{2.1.16}$$

gilt $M^T : (y_n) \to (y_n \mu_n)$.

2.1.14 Beispiel. Auf dem ℓ^1 kann man weiterhin den Shift-Operator

$$S : \ell^1 \ni (x_1, x_2, \ldots) \mapsto (x_2, \ldots) \in \ell^1 \tag{2.1.17}$$

betrachten. Sein Transponierter ist durch

$$S^T : \ell^\infty \ni (y_1, y_2, \ldots) \mapsto (0, y_1, y_2, \ldots) \in \ell^\infty \tag{2.1.18}$$

gegeben. (Übung!)

Für weitere Beispiele fehlen uns noch konkrete Darstellungen der Dualräume.

2.2 Die Sätze von Fréchet-Riesz

Sei nun H ein Innenproduktraum. Dann kann man das Innenprodukt nutzen, um lineare Funktionale darzustellen. Zu festem $y \in H$ ist die Abbildung

$$H \ni x \mapsto (x, y) \in \mathbb{K} \tag{2.2.1}$$

linear und nach der Schwarzschen Ungleichung beschränkt.

Wenn man weiß, daß H vollständig ist, dann ist *jedes* lineare Funktional von dieser Form. Dies manifestiert sich in den Sätzen von Fréchet[4]-Riesz[5].

[4] René Maurice Fréchet, 1878-1973
[5] Fritz Riesz, 1880-1956

2.2.1 Satz (FRÉCHET-RIESZ)**.** *Sei H Hilbertraum und $\phi \in H'$ ein beschränktes lineares Funktional. Dann existiert ein eindeutig bestimmtes Element $y \in H$, so daß für alle $x \in H$*

$$\langle \phi, x\rangle = (x, y) \tag{2.2.2}$$

gilt.

Beweis. Sei $U = N(\phi)$. Dann existiert eine eindeutige Zerlegung $x = x_1 + x_2$ mit $x_1 \in U$ und $x_2 \in U^\perp$. Da ϕ auf $U^\perp$ injektiv sein muß, folgt $\dim U^\perp \le \dim \mathbb{K} = 1$, $\phi : U^\perp \to \mathbb{K}$ ist also bijektiv. Es existiert also genau ein $y \in U^\perp$ mit $\langle \phi, y_\phi\rangle = \|\phi\|^2$. Für dieses gilt aber $\|y_\phi\| = \|\phi\|$ und

$$(x, y_\phi) = (x_2, y_\phi) = \alpha\|y_\phi\|^2 = \alpha\langle \phi, y_\phi\rangle = \langle \phi, x_2\rangle = \langle \phi, x\rangle \tag{2.2.3}$$

mit $x_2 = \alpha y_\phi$. □

2.2.2 Korollar (FÉCHET-RIESZ)**.** *Die Zuordnung $\phi \mapsto y_\phi$ ist ein antilinearer isometrischer Operator $H' \to H$. Antilinear heisst dabei*

$$\alpha\phi \mapsto \overline{\alpha} y_\phi, \qquad (\phi + \psi) \mapsto y_\phi + y_\psi. \tag{2.2.4}$$

Beweis. Es genügt die Isometrie zu zeigen. Einerseits folgt

$$\|y_\phi\| = |\langle \phi, y_\phi\rangle| \le \|\phi\|\,\|y_\phi\|, \tag{2.2.5}$$

also $\|y_\phi\| \le \|\phi\|$. Weiter gilt mit der Schwarzschen Ungleichung

$$|\langle \phi, x\rangle| = |(x, y_\phi)| \le \|x\|\,\|y_\phi\| \tag{2.2.6}$$

und damit $\|\phi\| \le \|y_\phi\|$. □

Für Hilberträume nutzt man diese Isometrie um sie mit ihrem Dual zu identifizieren. In diesem Sinne ergeben sich also folgende Beispiele.

2.2.3 Beispiel. Es gilt $(\ell^2)' = \ell^2$.

2.2.4 Beispiel. Es gilt $(L^2(G))' = L^2(G)$ für jedes Gebiet $G \subseteq \mathbb{R}^n$. Das heißt, zu jedem linearen Funktional $\phi \in (L^2(G))'$ existiert eine Funktion $g \in L^2(G)$, so daß

$$\langle \phi, f\rangle = (f, g) = \int_G f(x)\overline{g(x)}\mathrm{d}x \tag{2.2.7}$$

für alle $f \in L^2(G)$ gilt.

Insbesondere haben wir damit lineare Funktionale auf dem Raum $L^2(G)$ analytisch dargestellt. Vergleichbare Darstellungen gibt es in allen L^p-Räumen, $p \in [1, \infty)$. Wir geben das Resultat nur an, ohne es zu beweisen.

2.2.5 Satz. *Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, $p \in [1, \infty)$ und q so, daß $pq = p + q$. Dann gilt*

$$(L^p(G))' = L^q(G), \tag{2.2.8}$$

speziell existiert zu jedem $\phi \in (L^p(G))'$ ein $g \in L^q(G)$, so daß für alle $f \in L^p(G)$.

$$\langle \phi, f\rangle = (f, g) = \int_G f(x)\overline{g(x)}\mathrm{d}x \tag{2.2.9}$$

gilt.

Für $p = \infty$ ist die Aussage falsch. Es existieren also Linearformen auf $L^\infty(G)$, die nicht durch eine Funktion aus $L^1(G)$ dargestellt werden können.

2.2.6 Beispiel. Nun können wir ein weiteres Beispiel zum transponierten Operator nachliefern. Sei $k(x,y) \in L^2(G_1 \times G_2)$ für zwei Gebiete G_1 und G_2. Dann ist der Integraloperator

$$K : L^2(G_1) \ni f \mapsto \int_{G_1} f(x)k(x,y)\mathrm{d}x \in L^2(G_2) \tag{2.2.10}$$

beschränkt, unter Nutzung der Hölderschen Ungleichung gilt

$$\|Kf\|_2^2 = \int_{G_2} \left| \int_{G_1} f(x)k(x,y)\mathrm{d}x \right|^2 \mathrm{d}y \le \|f\|_2 \int_{G_2} \|k(\cdot,y)\|_2^2 \mathrm{d}y = \|f\|_2 \|k\|_2. \tag{2.2.11}$$

Weiterhin ist sein Transponierter durch

$$K^T : L^2(G_2) \ni g \mapsto \int_{G_2} g(y)k(x,y)\mathrm{d}y \in L^2(G_1) \tag{2.2.12}$$

gegeben.

2.2.7 Beispiel. Ähnliche Resultate gelten auch für L^p-Räume. Wir wollen zeigen, wie man dies ausnutzen kann um die Beschränktheit eines Operators zu zeigen. Setzt man $k \in L^p(G_1, L^{q'}(G_2))$, d.h.

$$\int_{G_1} \left| \int_{G_2} |k(x,y)|^{q'} \mathrm{d}y \right|^{p/q'} \mathrm{d}x < \infty, \tag{2.2.13}$$

mit $p, q \in (1,\infty)$ und p', q' dazugehörenden dualen Indizes voraus, so ist

$$K : L^{p'}(G_1) \ni f \mapsto \int_{G_1} f(x)k(x,y)\mathrm{d}x \in L^{q'}(G_2) \tag{2.2.14}$$

beschränkt, da der transponierte Operator

$$K^T : L^q(G_2) \ni g \mapsto \int_{G_2} g(y)k(x,y)\mathrm{d}y \in L^p(G_1) \tag{2.2.15}$$

beschränkt ist. Letzteres folgt direkt mit der Hölderschen Ungleichung

$$\begin{aligned}
\|K^T g\|_{L^p(G_1)}^p &= \int_{G_1} \left| \int_{G_2} g(y)k(x,y)\mathrm{d}y \right|^p \mathrm{d}x \le \int_{G_1} \left(\int_{G_2} |g(y)k(x,y)|\mathrm{d}y \right)^p \mathrm{d}x \\
&\le \|g\|_{L^q(G_2)}^p \int_{G_1} \|k(x,\cdot)\|_{L^{q'}(G_2)}^p \mathrm{d}x = \|g\|_{L^q(G_2)}^p \|k\|_{L^p(G_1, L^{q'}(G_2))}^p.
\end{aligned}$$

Speziell für $p = q$ erhält man daraus für einen Integraloperator $K : L^p(G) \to L^p(G)$, daß dieser beschränkt ist, falls

$$\int_G \left| \int_G |k(x,y)|^{p'} \mathrm{d}y \right|^{p/p'} \mathrm{d}x < \infty \qquad \text{oder} \qquad \int_G \left| \int_G |k(x,y)|^p \mathrm{d}x \right|^{p'/p} \mathrm{d}y < \infty \tag{2.2.16}$$

gilt.

Für den nachfolgenden Satz benötigen wir noch einige Bezeichnungen. In einem metrischen Raum (X,d) bezeichnen wir mit $C_b(X) = C(X) \cap L^\infty(X)$ die beschränkten stetigen Funktionen. Weiter bezeichnen wir mit $\mathbb{M}_b(X)$ die Menge der beschränkten ($\mathbb{K}$-wertigen) Radon[6]-Maße versehen mit der Norm

$$\|\mu\| = \int_X \mathrm{d}|\mu|. \tag{2.2.17}$$

2.2.8 Satz (Rieszscher Darstellungssatz). *Sei (X,d) metrischer Raum. Dann gilt $(C_b(X))' = \mathbb{M}_b(X)$.*

2.3 Reflexivität

Im letzten Abschnitt haben wir gesehen, daß jeder Hilbertraum H isometrisch anti-isomorph zu seinem Dual H' ist, insbesondere also H und H'' kanonisch isomorph sind,

$$\langle \phi, x\rangle = (x, y_\phi) = \langle x, \phi\rangle. \tag{2.3.1}$$

Andererseits kann man für beliebige normierte Räume vermittels $\langle \phi, x\rangle = \langle x, \phi\rangle$ eine Einbettung von V in sein doppeltes Dual V'' definieren. Dabei ist offenbar $\|x\|_{V''} \le \|x\|$ und mit dem Satz von Hahn-Banach $\|x\|_{V''} = \|x\|$.

2.3.1 Definition. Ein Banachraum V heißt *reflexiv*, falls die Einbettung $V \hookrightarrow V''$ ein (isometrischer) Isomorphismus ist.

Die Voraussetzung der Vollständigkeit folgt aus der Darstellung als Dualraum. Die Bedingung die wirklich notwendig ist, ist die Surjektivität der Einbettung.

2.3.2 Beispiel. Jeder endlichdimensionale Raum ist reflexiv, da die Dimension von V und V' übereinstimmt, die Einbettung $V \hookrightarrow V''$ also surjektiv sein muß.

2.3.3 Beispiel. Jeder Hilbertraum H ist reflexiv.

2.3.4 Beispiel. Die Räume $L^p(G)$ sind für $p \in (1,\infty)$ reflexiv.

2.3.5 Satz.

1. *Jeder abgeschlossene Teilraum eines reflexiven Raumes ist reflexiv.*
2. *Entweder ist der Banachraum V reflexiv, oder jeder der Räume*

$$V, \quad V'', \quad V^{(4)}, \quad \dots \tag{2.3.2}$$

ist ein echter Teilraum des nachfolgenden.

3. *Ein Banachraum V ist reflexiv genau dann, wen sein Dual V' reflexiv ist.*

Beweis. [1.] Sei V reflexiv und $U \subseteq V$ abgeschlossener Teilraum. Sei $u'' \in U''$. Dann ist die Abbildung $V' \ni \phi \mapsto \langle u'', \phi|_U\rangle$ wegen

$$|\langle u'', \phi|_U\rangle| \le \|u''\|\,\|\phi|_U\| \le \|u''\|\,\|\phi\|$$

[6] Johann Radon, 1887-1956

ein Element von V''. Es existiert also ein $x \in V$ mit

$$\langle \phi, x \rangle = \langle u'', \phi|_U \rangle, \qquad \forall \phi \in V'.$$

Wäre $x \notin U$, so gäbe es nach dem Satz von Hahn-Banach ein Funktional $\psi \in V'$ mit $\langle \psi, x \rangle = 1$ und $\psi|_U = 0$. Widerspruch!

Sei nun $u' \in U'$ und $\phi \in V'$ eine Fortsetzung von u' auf V. Dann gilt

$$\langle u'', u' \rangle = \langle u'', \phi|_U \rangle = \langle \phi, x \rangle = \langle u', x \rangle$$

und damit ist u'' das Bild von x unter der Einbettung $U \hookrightarrow U''$.

[2.] folgt direkt aus Aussage 1.

[3.] folgt aus Aussage 2. □

2.3.6 Beispiel. Der Raum ℓ^1 kann nicht reflexiv sein, da er sowohl Dual von $\mathfrak{c}$ als auch von seinem abgeschlossenen Teilraum $\mathfrak{c}_0$ ist, beide aber nicht isometrisch isomorph sind.

2.4 Schwache Konvergenz

Wir haben gesehen, daß die Elemente aus V' punktetrennend in V sind. Damit kann man durch die Seminormen

$$p_\phi(x) = |\langle \phi, x \rangle|, \qquad \phi \in V' \tag{2.4.1}$$

auf V eine lokalkonvexe Topologie definieren. Diese wird als *Topologie der schwachen Konvergenz* bezeichnet.

2.4.1 Definition. Sei $x_n \in V$ eine Folge aus V. Dann heißt (x_n) schwach konvergent gegen $x \in V$, i.Z. $x_n \rightharpoonup x$, falls für alle $\phi \in V'$

$$\langle \phi, x_n \rangle \to \langle \phi, x \rangle \tag{2.4.2}$$

konvergiert.

2.4.2 Proposition.

1. *$x_n \rightharpoonup x$ und $y_n \rightharpoonup y$ impliziert $x_n + y_n \rightharpoonup x + y$.*
2. *$x_n \rightharpoonup x$ und $\alpha_n \to \alpha$ impliziert $\alpha_n x_n \rightharpoonup \alpha x$.*
3. *$x_n \to x$ impliziert $x_n \rightharpoonup x$.*

2.4.3 Beispiel. Sei $V = \ell^2$. Dann gilt für $e_n = (0, 0, \dots, 1, 0 \dots)$ und $\phi \in (\ell^2)'$, dargestellt durch (y_n)

$$\langle \phi, e_n \rangle = y_n \to 0 \tag{2.4.3}$$

für $n \to \infty$. Also gilt $e_n \rightharpoonup 0$, obwohl $\|e_n\| = 1$.

2.4.4 Satz. *Sei H Hilbertraum und konvergiere $x_n \rightharpoonup x$ schwach. Gilt dann $\|x_n\| \to \|x\|$, so folgt $x_n \to x$.*

Beweis. Es gilt

$$\|x_n - x\|^2 = (x_n - x, x_n - x) = \|x\|^2 + \|x_n\|^2 - 2\mathrm{Re}\,(x_n, x) \to \|x\|^2 + \|x\|^2 - 2\|x\|^2 = 0. \quad (2.4.4)$$

□

2.4.5 Satz. *Sei V normierter Raum. Dann ist jede schwach konvergente Folge in der Norm beschränkt.*

Beweis. Wir betrachten die Operatorfolge $A_n\phi = \langle \phi, x_n\rangle$. Diese ist nach Voraussetzung in $\mathcal{L}(V', \mathbb{K})$ stark konvergent, nach dem Prinzip von der gleichmäßigen Beschränktheit also normbeschränkt. Es gilt aber $\|A_n\| = \|x_n\|$. □

(Starke) Stetigkeit von linearen Operatoren impliziert schwache Stetigkeit.

2.4.6 Proposition. *Sei $A \in L(V, W)$ und $x_n \rightharpoonup x$ in V. Dann gilt $Ax_n \rightharpoonup Ax$ in W.*

Beweis. Es gilt für $\phi \in W'$

$$|\langle \phi, Ax - Ax_n\rangle| = |\langle A^T\phi, x - x_n\rangle| \to 0. \quad (2.4.5)$$

□

2.5 Schwach-*-Konvergenz

Fortsetzen wollen wir unsere Untersuchungen mit der Betrachtung in V'. Ist V ein normierter Raum, so ist V' Banachraum und in V' durch die Elemente von V eine schwächere lokalkonvexe Topologie definiert, die sogenannte *schwach-*-Topologie*.

2.5.1 Definition. Sei $\phi_n \in V'$ eine Folge von Funktionalen. Man sagt ϕ_n konvergiere schwach-* gegen $\phi \in V'$, i.Z. $\phi_n \overset{*}{\rightharpoonup} \phi$, falls für alle $x \in V$

$$\langle \phi_n - \phi, x\rangle \to 0 \quad (2.5.1)$$

gilt.

Die schwach-* Topologie entspricht der starken Konvergenz im Operatorraum $\mathcal{L}(V, \mathbb{K})$. Insbesondere gilt also (als Folgerung des Prinzips der gleichmäßigen Beschränktheit)

2.5.2 Satz. *Der Raum V' ist schwach-* vollständig, d.h. zu jeder Folge (ϕ_n), die die schwache Cauchy-Bedingung*

$$\langle \phi_n - \phi_m, x\rangle \to 0, \qquad m, n \to \infty \quad (2.5.2)$$

für jedes $x \in V$ erfüllt, existiert genau ein $\phi \in V'$ mit $\phi_n \overset{*}{\rightharpoonup} \phi$.

2.5.3 Beispiel. Sei (X, d) metrischer Raum. Dann hat $C_b(X)$ den Dualraum $\mathbb{M}_b(X)$ der beschränkten $\mathbb{K}$-wertigen Radon-Maße auf X. Sei nun f_n eine Folge beschränkter stetiger Funktionen. Diese konvergiert schwach gegen ein $f \in C_b(X)$, falls für jedes beschränkte Maß $\mu \in \mathbb{M}_b(X)$

$$\int f_n(x) - f(x)\mathrm{d}\mu \to 0, \qquad n \to \infty \tag{2.5.3}$$

gilt. Aus der Cauchyfolgeneigenschaft

$$\int f_n(x) - f_m(x)\mathrm{d}\mu \to 0, \qquad m, n \to \infty \tag{2.5.4}$$

folgt nicht zwingend die Existenz eines $f \in C_b(X)$ mit $f_n \rightharpoonup f$. Setzt man für μ allerdings die Punktmaße δ_x zu $x \in X$, so folgt die Existenz eines $f : X \to \mathbb{K}$ mit $f_n(x) \to f(x)$ punktweise für jedes $x \in X$.

2.5.4 Beispiel. Sei diesmal μ_n eine Folge aus $\mathbb{M}_b(X)$, so daß für alle $f \in C_b(X)$

$$\int f(x)\mathrm{d}(\mu_n - \mu_m) \to 0, \qquad m, n \to \infty \tag{2.5.5}$$

gilt, so folgt die Existenz eines Maßes $\mu \in \mathbb{M}_b(X)$ mit $\mu_n \overset{*}{\rightharpoonup} \mu$, d.h.

$$\int f(x)\mathrm{d}\mu_n \to \int f(x)\mathrm{d}\mu, \qquad n \to \infty \tag{2.5.6}$$

für alle $f \in C_b(X)$. In der Maßtheorie / Stochastik sagt man μ_n ist gegen μ *verteilungskonvergent*.

2.5.5 Beispiel. Sei $x_n \in X$ eine Folge von Punkten aus X und gelte $x_n \to x$ in X. Dann konvergieren die Punktmaße δ_{x_n} schwach-* gegen δ_x,

$$\delta_{x_n} \overset{*}{\rightharpoonup} \delta_x. \tag{2.5.7}$$

Diese Folge konvergiert aber nicht schwach, da sonst für jede beschränkte Borel-Menge A

$$\delta_{x_n}(A) \to \delta_x(A) \tag{2.5.8}$$

gelten müßte (warum?), was aber für $A = \{x\}$ offenbar falsch ist.

2.5.6 Beispiel. Für ein weiteres Beispiel betrachten wir die Räume $\mathfrak{c}_0$, ℓ^1 und ℓ^∞. Für Folgen $x_k \in \ell^1$ mit Gliedern $x_k = (x_{k,l})_{l=1,\ldots}$ kann man nun neben der Normkonvergenz in ℓ^1 sowohl schwache als auch Schwach-*-Konvergenz untersuchen.

- Es gilt $x_k \to x_\infty$, $x_\infty = (x_{\infty,l})$, falls

$$\|x_k - x_\infty\| = \sum_{l=1}^{\infty} |x_{k,l} - x_{\infty,l}| \to 0, \qquad k \to \infty. \tag{2.5.9}$$

- Es gilt $x_k \overset{*}{\rightharpoonup} x_\infty$ falls für jede *Nullfolge* $(\xi_l) \in \mathfrak{c}_0$

$$\langle x_k - x_\infty, (\xi_l)\rangle = \sum_{l=1}^{\infty} (x_{k,l} - x_{\infty,l})\xi_l \to 0, \qquad k \to \infty. \tag{2.5.10}$$

- Andererseits gilt $x_k \rightharpoonup x_\infty$, falls für jede *beschränkte Folge* $(\mu_l) \in \ell^\infty$

$$\langle (\mu_l), x_k - x_\infty \rangle = \sum_{l=1}^{\infty} (x_{k,l} - x_{\infty,l})\mu_l \to 0, \qquad k \to \infty. \tag{2.5.11}$$

2.5.7 Beispiel. Die Folge der Basisfolgen $e_k \in \ell^1$, wie vorher $e_k = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ mit der 1 an der $k$ten Stelle, erfüllt $\|e_k\| = 1$. Also kann e_k nicht in der Norm gegen Null konvergieren. Allerdings gilt für jede Nullfolge $(\xi_l) \in \mathfrak{c}_0$

$$\langle e_k, (\xi_l) \rangle = \xi_k \to 0, \qquad k \to \infty, \tag{2.5.12}$$

also $e_k \overset{*}{\rightharpoonup} 0$. Die Folge ist nicht schwach konvergent, da

$$\langle e_k, (1) \rangle = 1 \tag{2.5.13}$$

nicht gegen Null strebt, obwohl $(1) \in \ell^\infty$ gilt.

Auf reflexiven Räumen stimmen schwache Topologie und schwach-*-Topologie überein. Insbesondere folgt damit

2.5.8 Korollar. *Jeder reflexive Raum V ist schwach vollständig.*

2.5.9 Beispiel. Sei x_n eine Folge aus einem Hilbertraum H. Gilt für jedes $y \in H$ die schwache Cauchy-Bedingung

$$(x_n - x_m, y) \to 0, \qquad m, n \to \infty, \tag{2.5.14}$$

so existiert existiert damit ein $x \in H$ mit $x_n \rightharpoonup x$.

Die Cauchy-Bedingung ist essentiell um Konvergenzkriterien für Reihen zu beweisen. Damit gilt in jedem Hilbertraum H folgendes schwache Konvergenzkriterium

Die Reihe $\sum_{k=1}^\infty x_k$ ist schwach konvergent genau dann, wenn für jedes $y \in H$ die Zahlenreihe $\sum_{k=1}^\infty (x_k, y)$ konvergiert.

2.6 Schwache Kompaktheit

Kompaktheitssätze

Für das nachfolgende sei an die Definition der Kompaktheit einer Menge erinnert. Ebenso daran, daß es zwei verschiedene Kompaktheitsbegriffe gibt.

2.6.1 Definition. Eine Teilmenge M eines topologischen Raumes $(X, \mathcal{T})$ heißt

1. *überdeckungskompakt*, falls jede offen Überdeckung $M \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$, U_i offen in X, eine endliche Teilüberdeckung $M \subseteq \bigcup_{k=1,\dots n} U_{i_k}$ besitzt,
2. *folgenkompakt*, falls jede Folge (x_n) aus M eine in M konvergente Teilfolge (x_{n_k}) besitzt.

In metrischen Räumen sind beide Begriffe äquivalent. Wenn wir über lokalkonvexe Topologien sprechen, müssen wir sie unterscheiden. Besitzt der Raum eine abzählbare Umgebungsbasis, so folgt aus der Überdeckungskompaktheit die Folgenkompaktheit. Dies gilt zum Beispiel in separablen Räumen.

2.6.2 Satz (Alaoglu[7])**.** *Die Einheitskugel in V' ist schwach-* kompakt.*

[7] Leonidas Alaoglu

Wir beweisen nur die folgende Aussage, führen sie also nicht auf den Satz von Alaoglu zurück.

2.6.3 Satz. *Ist V separabel, so besitzt jede Folge $\phi_n \in V'$ mit $\|\phi_n\| \leq 1$ eine schwach-* konvergente Teilfolge.*

Beweis. Sei dazu $\{x_1, x_2, \ldots\}$ dicht in V. Die Folge der Zahlen $\langle \phi_n, x_1 \rangle$ ist beschränkt. Nach dem Satz von Heine-Borel existiert eine konvergent Teilfolge $\langle \phi_{n_{k,1}}, x_1 \rangle$. Aus demselben Grund besitzt $\langle \phi_{n_{k,1}}, x_2 \rangle$ wiederum eine konvergente Teilfolge $\langle \phi_{n_{k,2}}, x_2 \rangle$. So fährt man fort. Die Diagonalfolge $\phi_{n_{k,k}}$ liefert nach Konstruktion konvergente Folgen $\langle \phi_{n_{k,k}}, x_i \rangle$ für jedes x_i.

Nach dem Satz von Banach-Steinhaus ist aber nun $\phi_{n_{k,k}}$ schwach-* konvergent, es existiert also ein ϕ mit $\phi_{n_{k,k}} \overset{*}{\rightharpoonup} \phi$. □

Für reflexive Räume ergibt sich die schwache Kompaktheit der Einheitskugel. Es gilt sogar noch mehr:

2.6.4 Satz (Mackey). *Ein normierter Raum V ist reflexiv genau dann, wenn die Einheitskugel schwach kompakt ist.*

Es sei an dieser Stelle an ein Resultat aus dem ersten Kapitel erinnert: Ein Banachraum ist genau dann *endlichdimensional*, wenn seine Einheitskugel normkompakt ist. Der Satz von Mackey hilft, in reflexiven Räumen endlichdimensionale Methoden anzuwenden. Insbesondere ersetzt er den im Endlichdimensionalen unverzichtbaren Satz von Heine-Borel.

Bestapproximationsaufgaben

Eine Anwendung ist der folgende Existenzsatz für Bestapproximationen. Um die Eindeutigkeit zu garantieren, benötigt man stärkere Voraussetzungen.

2.6.5 Satz. *Sei V reflexiv und $U \subseteq V$ ein abgeschlossener, separabler Teilraum von V. Sei weiter $x \in V$. Dann gibt es ein $y_0 \in U$, für welches*

$$\|x - y_0\| = \operatorname{dist}(x, U) = \inf_{y \in U} \|x - y\|. \tag{2.6.1}$$

Beweis. Ist $x \in U$ so folgt $y_0 = x$ und Existenz und Eindeutigkeit sind klar. Sei also im folgenden $x \in V \setminus U$. Sei weiter y_n eine Minimalfolge. Diese ist wegen

$$\|y_n\| \leq \|x - y_n\| + \|x\| \leq \operatorname{dist}(x, U) + \epsilon + \|x\|, \qquad n \geq n_0(\epsilon) \tag{2.6.2}$$

beschränkt und damit nach Satz 2.6.3 relativ folgenkompakt. Es existiert also eine schwach konvergente Teilfolge y_{n_k}, die wegen der schwachen Vollständigkeit von U gegen ein $y_0 \in U$ konvergiert. Dieses y_0 löst die Bestapproximationsaufgabe. □

Einfacher werden Bestapproximationsaufgaben, wenn der Unterraum U aus dem approximiert wird, endlichdimensional ist. Dann ist die Einheitskugel in U kompakt und wir können (ganz ohne Nutzung des Satzes von Alaoglu) aus jeder Minimalfolge eine konvergente Teilfolge auswählen.

2.6.6 Satz. *Sei V normierter Raum und U endlichdimensionaler Teilraum von V. Dann existiert zu jedem $x \in V$ eine Bestapproximation an x aus U.*

Derartige Approximationsprobleme bezeichnet man als Tschebyscheff-Approximation. Das Standardbeispiel dazu ist Funktionen aus $C_{\mathbb{R}}[a,b]$ durch Polynome vom Grad n zu approximieren. In diesem Falle kann man sogar zeigen, daß die Bestapproximation eindeutig bestimmt ist (der *Haarsche Eindeutigkeitssatz*, ein Beweis findet sich im Buch von Heuser).

2.7 Konvexität und schwache Konvergenz

Bis jetzt haben wir den Satz von Hahn-Banach genutzt um Punkte in einem Banachraum V zu trennen. Ähnliche Resultate gelten für allgemeine konvexe Mengen.

2.7.1 Satz (Trennungssatz von Hahn-Banach). *Seien $K, L \subseteq V$ nichtleere, abgeschlossene[8] und konvexe Teilmengen des Banachraumes V. Gilt $K \cap L = \emptyset$, so existiert ein lineares Funktional $\phi \in V'$ und eine Zahl $\gamma \in \mathbb{R}$ mit*

$$\sup_{x\in K} \operatorname{Re}\langle \phi, x\rangle < \gamma < \inf_{y\in L} \operatorname{Re}\langle \phi, y\rangle. \tag{2.7.1}$$

Da wir dieses Resultat nur einmal verwenden wollen, verzichten wir auf den Beweis und verweisen auf die Literatur. Konsequenz des Trennungssatzes ist, daß für konvexe Teilmengen eines Banachraumes der Abschluß in der Normtopologie mit dem schwachen Folgenabschluß übereinstimmt. (Für schwach-* Konvergenz im Dualraum ist das Resultat im Allgemeinen falsch.)

2.7.2 Satz. *Sei $K \subseteq V$ eine abgeschlossene und konvexe Teilmenge des Banachraumes V. Sei weiter $x_n \in K$ eine schwach konvergente Folge mit Grenzwert $x \in V$, $x_n \rightharpoonup x$. Dann gilt $x \in K$.*

Beweis. Angenommen, x ist kein Element von K. Da K konvex ist existiert nach dem Hahn-Banachschen Trennungssatz ein Funktional $\phi \in V'$ mit $\operatorname{Re}\langle\phi, x\rangle < \gamma < \inf_{y\in K} \operatorname{Re}\langle \phi, y\rangle$. Setzt man speziell als y die Folgenglieder x_n, so ergibt sich ein Widerspruch zur schwachen Konvergenz. □

2.7.3 Korollar (Satz von Mazur). *Sei V Banachraum und konvergiere $x_n \rightharpoonup x$ schwach. Dann existiert eine Folge y_n bestehend aus (endlichen) Konvexkombinationen der Glieder x_n, so daß $y_n \to x$ in der Norm konvergiert.*

Beweis. Man setzt K den Abschluß der konvexen Hülle der Menge $\{x_n\}$ und wendet obigen Satz an. □

[8] abgeschlossen bezüglich der Normtopologie

3 Operatorgleichungen mit kompakten Operatoren

Lineare Gleichungssysteme, abstrahiert.

3.1 Kompakte Operatoren

Definition

3.1.1 Definition. Seien V_1 und V_2 zwei normierte Räume. Ein Operator $A \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$ wird als *kompakt* bezeichnet, falls er die Einheitskugel $B_1 = \{x \in V_1 \mid \|x\| \leq 1\} \subseteq V_1$ auf eine relativ kompakte[1] Teilmenge des V_2 abbildet. Die Menge aller kompakten Operatoren aus $\mathcal{L}(V_1, V_2)$ wird mit $\mathcal{K}(V_1, V_2)$ bezeichnet.

3.1.2 Proposition.
1. *Kompakte Operatoren bilden beschränkte Teilmengen von V_1 auf relativ kompakte Teilmengen aus V_2 ab.*
2. *Sind $A, B \in \mathcal{K}(V_1, V_2)$ und $\alpha \in \mathbb{K}$, so folgt*
$$A + B \in \mathcal{K}(V_1, V_2), \qquad \alpha A \in \mathcal{K}(V_1, V_2). \tag{3.1.1}$$
3. *Ist $A \in \mathcal{K}(V_1, V_2)$, $B \in \mathcal{L}(V_2, V_3)$ und $C \in \mathcal{K}(V_3, V_4)$. Dann folgt $BA \in \mathcal{K}(V_1, V_3)$ und $CB \in \mathcal{K}(V_2, V_4)$.*

3.1.3 Satz. *Sei V_2 Banachraum. Dann ist $\mathcal{K}(V_1, V_2)$ ein abgeschlossener Teilraum des Banachraumes $\mathcal{L}(V_1, V_2)$.*

Beweis. Sei A_k eine Folge kompakter Operatoren, die in $\mathcal{L}(V_1, V_2)$ gegen A konvergiert. Sei weiter (x_ℓ) eine beschränkte Folge aus V_1. Nun ist $(A_1 x_\ell)$ relativ kompakt, besitzt also eine konvergente Teilfolge $(A_1 x_{\ell_{1,j}})$. Die Folge $(A_2 x_{\ell_{1,j}})$ besitzt eine konvergente Teilfolge $(A_2 x_{\ell_{2,j}})$. Dies kann man fortführen bis man unendlich viele Teilfolgen $(A_k x_{\ell_{k,j}})$ konstruiert hat. Die Diagonalfolge $(x_{\ell_{j,j}})$ besitzt nun auf Grund des Auswahlverfahrens die Eigenschaft, daß *alle* Folgen $(A_k x_{\ell_{j,j}})$ konvergent sind.

Bezeichne $C = \sup_\ell \|x_\ell\|_1$. Dann gibt zu $\epsilon > 0$ ein n, so daß $4C\|A_n - A\| < \epsilon$. Zu diesem n bestimmen wir N_0, so daß für $j, k > N_0$ stets $\|A_n(x_{\ell_{j,j}} - x_{\ell_{k,k}})\|_2 < \epsilon/2$ gilt. Dann folgt

$$\|A(x_{\ell_{j,j}} - x_{\ell_{k,k}})\|_2 = \|A_n(x_{\ell_{j,j}} - x_{\ell_{k,k}})\|_2 + \|(A - A_n)(x_{\ell_{j,j}} - x_{\ell_{k,k}})\|_2 < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{4C} 2C = \epsilon$$

die Folge $(Ax_{\ell_{j,j}})$ ist in V_2 konvergent. □

[1] d.h. der Abschluss der Menge ist kompakt

Einige Bemerkungen zu Operatoren in einem Raum. Sei V Banachraum. Dann bezeichnet man $\mathcal{K}(V, V)$ kurz als $\mathcal{K}(V)$ und man sieht aus Propostion 3.1.2, daß es sich bei $\mathcal{K}(V)$ um ein abgeschlossenes Ideal der Banachalgebra $\mathcal{L}(V)$ handelt.

3.1.4 Satz. *Sei $A \in \mathcal{K}(V_1, V_2)$ kompakt. Konvergiert dann $x_n \rightharpoonup x$ schwach in V_1, so konvergiert die Folge der Bilder $Ax_n \to Ax$ in der Norm von V_2.*

Beweis. Die Folge (x_n) ist nach Satz 2.4.5 beschränkt, die Bildfolge (Ax_n) also relativ kompakt. Sei y ein Häufungspunkt[2] von (Ax_n). Dann existiert eine Teilfolge $Ax_{n,1}$ die in der Norm gegen y konvergiert, also auch schwach $Ax_{n,1} \rightharpoonup y$.

Wegen Proposition 2.4.6 folgt aber auch $Ax_n \rightharpoonup Ax$. Da Grenzwerte eindeutig bestimmt sind, folgt somit $y = Ax$ und (Ax_n) besitzt nur einen Häufungspunkt. Also gilt $Ax_n \to Ax$. $\square$

Kompaktheitskriterien in C und L^p

Für Beispiele benötigen wir Kompaktheitskriterien in verschiedenen Räumen. Bekannt sein sollte aus der Grundvorlesung der Satz von Arzela[3]-Ascoli[4]. Wir wollen ihn in einer etwas allgemeineren Fassung angeben.

3.1.5 Satz (Arzela-Ascoli). *Sei X kompakter metrischer Raum und Y Banachraum. Sei weiter $C(X;Y)$ der Raum der stetigen Funktionen auf X mit Werten in Y versehen mit der Supremumsnorm*

$$\|f\| = \sup_{x \in X} \|f(x)\|_Y. \tag{3.1.2}$$

Dann ist eine Teilmenge $F \subseteq C(X, Y)$ relativ kompakt genau dann, wenn sie

1. *gleichmäßig beschränkt ist, d.h.*
$$\sup_{f \in F} \|f\| < \infty, \tag{3.1.3}$$

2. *gleichgradig stetig ist, d.h.*
$$\forall x \in X, \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall f \in F : \quad d_X(x, x') \le \delta \Rightarrow \|f(x) - f(x')\|_Y \le \varepsilon \tag{3.1.4}$$

3. *und für jedes $x \in X$ die Menge $\{f(x) \,|\, f \in F\}$ relativ kompakt in Y ist.*

Beweisskizze. Wir beweisen nur das Kompaktheitskriterium (den Satz von Arzela), die Rückrichtung (nach Ascoli) verbleibt als Übungsaufgabe.

Sei $\{f_n\} \subset F$ eine beliebige Folge aus F. Zu zeigen ist, daß diese eine in $C(X, Y)$ konvergente Teilfolge enthält.

Dazu wählen wir eine aufsteigende Folge von endlichen Teilmengen $A_N \subset A_{N+1} \subset X$, welche eine in der kompakten Menge X dichte Teilmenge $A_\infty := \bigcup_{N=1}^{\infty} A_N$ ausschöpft. Die Funktionenfolge, eingeschränkt auf eine solche Teilmenge $\{f_n|_{A_k}\}$, enthält nach Voraussetzung eine auf

[2] in der Normtopologie
[3] Cesare Arzelà,1847-1912
[4] Giulio Ascoli, 1843-1896

A_k konvergente Teilfolge, denn ein endliches kartesisches Produkt relativ kompakter Mengen ist wieder relativ kompakt.

Sei $f_{k,0} = f_k$. Dann kann man rekursiv, beginnend mit $l = 1, 2, \ldots$, in $(f_{k,l-1})$ eine Teilfolge $(f_{k,l})$ auswählen, die auf A_l konvergiert. Dann konvergiert nach dem Cantorschen Diagonalverfahren die Diagonalfolge $(f_{k,k})$ auf der dichten Teilmenge $A_\infty \subset X$ gegen eine Funktion $f : A_\infty \to Y$.

Aus der gleichgradigen Stetigkeit folgt nun, daß die so erhaltene Grenzfunktion auf A_∞ gleichmäßig stetig ist und somit auf ganz X stetig und beschränkt fortgesetzt werden kann zu $\bar{f} : X \to Y$. Weiter folgt, daß die Diagonalfolge auch in der Supremumsnorm gegen die so konstruierte Funktion konvergiert, $\lim_{k\to\infty} f_{k,k} = \bar{f}$ in $C(X, Y)$. □

3.1.6 Beispiel. Seien X, Y Abschluß beschränkter Gebiete und $k \in C(X \times Y)$. Dann ist der assoziierte Integraloperator

$$K : C(X) \ni f(x) \mapsto Kf(y) = \int_X k(x, y) f(x) \mathrm{d}x \in C(Y) \tag{3.1.5}$$

kompakt.

Beweis. Anwendung des Satzes von Arzela-Ascoli. □

3.1.7 Beispiel. Sei X Abschluß eines beschränkten Gebietes im $\mathbb{R}^n$. Sei weiter $k \in C(X \times X) \setminus \Delta_X$ mit $\Delta_X = \{(x, x) | x \in X\}$ und gelte

$$|k(x, y)| \leq C|x - y|^{-\alpha} \tag{3.1.6}$$

für ein $\alpha < n$. Dann heißt die Kernfunktion $k(x, y)$ *schwach singulär* und der Operator

$$K : C(X) \ni f(x) \mapsto Kf(y) = \int_X k(x, y) f(x) \mathrm{d}x \in C(X) \tag{3.1.7}$$

(definiert im Sinne eines uneigentlichen Riemann-Integrals) ist kompakt.

Beweis. Anwendung des Satzes von Arzela-Ascoli. □

Als weitere wichtige Klasse von Räumen sind uns die L^p-Räume begegnet. Ein Kompaktheitskriterium in diesen Räumen läßt sich mit dem Satz von Arzela-Ascoli beweisen.

3.1.8 Satz (Fréchet-Kolmogorov[5]). *Eine Teilmenge $F \subseteq L^p(\mathbb{R}^n)$, $p \in [1, \infty)$, ist relativ kompakt genau dann, wenn sie*

1. *gleichmäßig beschränkt ist, d.h.*

$$\sup_{f \in F} \|f\|_p < \infty, \tag{3.1.8}$$

[5] Andrey Kolmogorov, 1903-1987

2. gleichgradig integrierbar ist, d.h.

$$\lim_{h\to 0}\sup_{f\in F}\int_{\mathbb{R}^n}|f(x+h)-f(x)|^p\mathrm{d}x=0 \tag{3.1.9}$$

und

$$\lim_{R\to\infty}\sup_{f\in F}\int_{|x|>R}|f(x)|^p\mathrm{d}x=0 \tag{3.1.10}$$

gilt.

Beweis. vgl. z.B. Yosida, Kap. X.1 □

Banachräume mit Basis

Als dritte Klasse wollen wir Banachräume mit Basis betrachten.

3.1.9 Definition. Sei V ein unendlichdimensionaler Banachraum und (x_k) eine Folge von Elementen aus V. Die Folge (x_k) heißt *Schauderbasis*[6] von V, falls zu jedem $x\in V$ eine eindeutig bestimmte Folge von Skalaren $\alpha_k\in\mathbb{K}$ existiert, so daß

$$x=\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k x_k \tag{3.1.11}$$

gilt. Die Schauderbasis heißt normalisiert, falls $\|x_k\|=1$ für alle k gilt.

3.1.10 Beispiel. Für die Räume $\mathfrak{c}_0$ und ℓ^p mit $p\in[1,\infty)$ ist durch die Basisfolgen $e_k=(0,\ldots,0,1,0,\ldots)$ (mit der 1 an k-ter Stelle) eine normalisierte Schauderbasis gegeben. Diese ist keine Schauderbasis für ℓ^∞. (Warum?)

Sei im folgenden also V ein Banachraum mit normalisierter Schauderbasis (x_k). Dann kann man jedem $x\in V$ bijektiv eine Koeffizientenfolge (α_k) zuordnen. Die Menge der Koeffizientenfolgen bildet offensichtlich einen Vektorraum, nennen wir ihn W. Auf diesem definieren wir durch

$$|||(\alpha_k)|||=\sup_m\left\|\sum_{k=1}^{m}\alpha_k x_k\right\|=\sup_m\|P_m x\| \tag{3.1.12}$$

eine Norm. (Übung: Man weise die Normeigenschaften nach!) Wie man sofort an der Definition sieht, gilt $\|x\|\le|||(\alpha_k)|||$. Versehen mit dieser Norm ist W vollständig (Übung) und nach dem Satz über den inversen Operator sind die Räume V und W isomorph.

Als Nebeneffekt haben wir gezeigt, daß sämtliche der Projektionen P_m beschränkte Operatoren sind und $\sup_m\|P_m\|<\infty$ gilt.

Für Banachräume mit Basis gilt das folgende Kompaktheitskriterium. Man fordert, daß die Koordinaten α_k 'gleichmäßig' gegen Null streben.

[6] nach Julius Schauder, 1899-1943

3.1.11 Satz. *Sei V Banachraum mit normalisierter Schauderbasis (x_k). Eine Teilmenge $F \subseteq V$ ist relativ kompakt genau dann, wenn F beschränkt ist und*

$$\sup_{x \in F} \|x - P_n x\| \to 0, \qquad n \to \infty \tag{3.1.13}$$

gilt.

3.1.12 Beispiel. Der Raum $C[a, b]$ besitzt eine Schauderbasis. Das klassische Beispiel einer solchen Basis für den $C[0, 1]$ geht auf Schauder zurück und besteht aus linearen Splines.

3.1.13 Beispiele. Die Räume $L^p[a, b]$, $p \in [1, \infty)$ besitzen eine Schauderbasis. Beispiele dazu sind die sogenannten Waveletbasen, etwa die Haar-Basis.

3.1.14 Beispiel. Jeder separable Hilbertraum besitzt eine Orthonormalbasis, also damit auch eine Schauderbasis.

3.2 Endlichdimensionale Operatoren und die Approximationseigenschaft

Wir wollen einen Operator $A \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$ als *endlichdimensional* bezeichnen, wenn sein Bild $A(V_1)$ ein endlichdimensionaler Teilraum von V_2 ist. Offenbar ist jeder endlichdimensionale Operator kompakt (da in endlichdimensionalen Räumen der Satz von Heine-Borel gilt).

3.2.1 Satz. *Sei V Banachraum. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

1. *Für jeden Banachraum W ist die Menge der endlichdimensionalen Operatoren ist dicht in $\mathcal{K}(W, V)$*
2. *Für jede kompakte Teilmenge $K \subseteq V$ und jede Zahl $\epsilon > 0$ existiert ein endlichdimensionaler Operator $T_{K,\epsilon} \in \mathcal{K}(V)$ mit*

$$\sup_{x \in K} \|T_{K,\epsilon} x - x\| \leq \epsilon. \tag{3.2.1}$$

Gelten diese Aussagen, so sagt man, V besitzt die Approximationseigenschaft.

Beweisskizze. Wir zeigen nur die Richtung [2 → 1], für den Schritt [1 → 2] verweisen wir auf die Literatur.

Sei $T \in \mathcal{K}(V_1, V_2)$ ein kompakter Operator. Dann ist das Bild der Einheitskugel $K = T(B_1)$ aus V_1 kompakt in V_2. Für $\epsilon > 0$ sei $P_\epsilon := T_{K,\epsilon} \in \mathcal{L}(V_2)$ der nach Voraussetzung existierende endlichdimensionale Operator. Dann erfüllt $T_\epsilon = P_\epsilon T$ nach Konstruktion $\|T - T_\epsilon\| \leq \epsilon$ und ist offensichtlich auch endlichdimensional. □

3.2.2 Beispiel. Alle Hilberträume besitzen die Approximationseigenschaft.

Beweis. Wir zeigen die zweite der Eigenschaften und konstruieren den Operator $T_{K,\epsilon}$. Sei dazu N_ϵ ein endliches ϵ-Netz von K und $U_\epsilon = \operatorname{span} N_\epsilon$. Zu jedem $x \in K$ kann man nun eine Bestapproximation aus U_ϵ an x wählen. Nach dem Projektionssatz ist diese durch $P_{U_\epsilon} x$ gegeben. Nach Konstruktion gilt $\|P_{U_\epsilon} x - x\| \leq \epsilon$. □

3.2.3 Beispiel. Sei V Banachraum mit Schauderbasis. Dann besitzt V die Approximationseigenschaft.

Beweis. Folgt direkt aus dem Kompaktheitskriterium für Banachräume mit Basis, der gesuchte Operator ist durch P_n für hinreichend großes n gegeben. □

3.2.4 Beispiele. Die Räume $\mathfrak{c}_0$ und ℓ^p, $p \in [1, \infty)$, besitzen die Approximationseigenschaft.

Die Approximationseigenschaft von Banachräumen ist nützlich, da sie Kompaktheitskriterien ersetzt. Eine Anwendung skizziert folgendes Beispiel.

3.2.5 Beispiel. Auf dem ℓ^p, $p \in [1, \infty)$ (bzw. auf $\mathfrak{c}_0$ oder $\mathfrak{c}$) sei zu $(m_n) \in \ell^\infty$ der Multiplikationsoperator T

$$T : (x_n) \mapsto (m_n x_n) \tag{3.2.2}$$

gegeben. Dann ist T kompakt genau dann, wenn die Folge (m_n) eine Nullfolge darstellt.

Beweis. Angenommen, T ist kompakt. Sei nun e_k die Folge $(0, \ldots, 0, 1, 0 \ldots)$ mit einer 1 an der k-ten Stelle. Dann ist $\|e_k\| = 1$ und Te_k kann nur konvergent sein, wenn $\|Te_k - Te_\ell\|^p = |m_k|^p + |m_\ell|^p$ Nullfolge in k, ℓ ist. Also folgt $(m_n) \in \mathfrak{c}_0$.

Die Operatornorm des Operators T stimmt mit der Supremumsnorm der Folge (m_n) überein. Da die Folgen endlicher Länge endlichdimensionalen Operatoren entsprechen und dicht in $\mathfrak{c}_0$ sind, definiert nach Satz 3.2.1 jede Folge aus $\mathfrak{c}_0$ einen kompakten Operator. □

3.3 Riesz-Theorie

Sei $K \in \mathcal{K}(V)$ kompakter Operator. Gegenstand dieses Abschnittes soll es sein, eine Lösungstheorie für Gleichungen der Form

$$Lx = (I - K)x = y, \qquad y \in V, \tag{3.3.1}$$

in einem Banachraum zu entwickeln. Behandelt werden sollen dabei die Fragen nach der Existenz von Lösungen, deren Anzahl/Dimension, und deren Eindeutigkeit.

Als Beispiel kann man Integralgleichungen zweiter Art,

$$f(y) - \int_X k(x, y) f(y) \mathrm{d}y = g(y) \tag{3.3.2}$$

zu vorgegebenem Kern $k \in C(X \times X)$ und rechter Seite $g \in C(X)$, im Hinterkopf behalten.

Ein erster Schritt besteht in der Lösung des homogenen Problems. Die Kompaktheit von K impliziert sofort

3.3.1 Satz (Riesz)**.** *Der Nullraum $N(L)$ ist endlichdimensional.*

Beweis. Eingeschränkt auf den (abgeschlossenen!) Nullraum stimmt K mit der Identität überein. Die identische Abbildung ist aber nur in endlichdimensionalen Räumen kompakt. □

3.3.2 Satz (Riesz). *$R(L)$ ist abgeschlossen in V.*

Beweis. Sei $y \in \overline{R(L)}$ ein Element des Abschlusses von $R(L)$. Dann existiert eine Folge $x_n \in V$ mit $Lx_n \to y$. Da $N(L)$ endlichdimensional ist, existiert zu jedem x_n eine Bestapproximation $\chi_n \in N(L)$, $\|x_n - \chi_n\| = \inf_{\chi \in N(L)} \|x_n - \chi\|$.

Schritt 1: Die Folge $x_n - \chi_n$ ist beschränkt. Wäre sie es nicht, gäbe es eine Teilfolge $x_{n_k} - \chi_{n_k}$ mit $\|x_{n_k} - \chi_{n_k}\| \geq k$. Normiert man

$$\tilde{x}_k = \frac{x_{n_k} - \chi_{n_k}}{\|x_{n_k} - \chi_{n_k}\|}, \tag{3.3.3}$$

so existiert wegen der Kompaktheit von K eine Teilfolge $\tilde{x}_{k_j}$ mit $K\tilde{x}_{k_j} \to \tilde{y}$ für $j \to \infty$. Weiter ist

$$\|L\tilde{x}_k\| = \|Lx_{n_k}\| / \|x_{n_k} - \chi_{n_k}\| \leq \|Lx_{n_k}\|/k \to 0, \tag{3.3.4}$$

da Lx_n konvergent ist. Insbesondere ist also

$$\tilde{x}_{k_j} = L\tilde{x}_{k_j} + K\tilde{x}_{k_j} \to \tilde{y}, \tag{3.3.5}$$

also $L\tilde{y} = 0$, $\tilde{y} \in N(L)$. Das impliziert aber

$$\|\tilde{x}_{k_j} - \tilde{y}\| = \frac{1}{\|x_{n_{k_j}} - \chi_{n_{k_j}}\|} \|x_{n_{k_j}} - \underbrace{\chi_{n_{k_j}} - \|x_{n_{k_j}} - \chi_{n_{k_j}}\| \, \tilde{y}}_{\in N(L)} \| \geq \frac{1}{\|x_{n_k} - \chi_{n_k}\|} \|x_{n_k} - \chi_{n_k}\| = 1 \tag{3.3.6}$$

im Widerspruch zur Konvergenz. Also ist $x_n - \chi_n$ beschränkt.

Schritt 2: Wegen der Kompaktheit von K besitzt $K(x_n - \chi_n)$ eine konvergente Teilfolge. Dies impliziert aber die Existenz einer konvergenten Teilfolge von $x_n - \chi_n$, da

$$K(x_{n_k} - \chi_{n_k}) = (x_{n_k} - \chi_{n_k}) - \underbrace{L(x_{n_k} - \chi_{n_k})}_{\to y} \to x - y. \tag{3.3.7}$$

Also existiert $x \in V$ mit $x_{n_k} - \chi_{n_k} \to x$ und $Lx = y$. □

Da Potenzen von L die Form

$$L^n = (I - K)^n = I - \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} K^k \tag{3.3.8}$$

haben, gelten die ersten beiden Rieszschen Sätze auch für diese Operatoren. Insbesondere sind die Nullräume $N(L^k)$ alle endlichdimensional und die Bildräume $R(L^k)$ alle abgeschlossen. Beide hängen eng zusammen.

3.3.3 Satz (Riesz). *Es existiert ein $\ell \in \mathbb{N}$, so daß*

$$\begin{aligned} \{0\} \subset N(L) \subset N(L^2) \subset \ldots \subset N(L^\ell) = N(L^{\ell+1}) = \ldots \\ V \supset R(L) \supset R(L^2) \supset \ldots \supset R(L^\ell) = R(L^{\ell+1}) = \ldots \end{aligned} \tag{3.3.9}$$

Weiter gilt mit dieser Zahl ℓ

$$V = N(L^\ell) \oplus R(L^\ell). \tag{3.3.10}$$

Man sagt, der Operator L ist kettenendlich *mit* Kettenlänge[7] *ℓ.*

[7] Für ℓ ist ebenso die Bezeichnung Riesz-Index oder Riesz-Zahl gebräuchlich.

3.3.4 Beispiel. Bevor wir zum Beweis dieses Satzes kommen, ein Beispiel. Sei $K \in \mathbb{C}^{n\times n}$ eine komplexe $n \times n$-Matrix und sei 1 Eigenwert von K. Dann entspricht die Kettenlänge des Operators $L = I - K$ der Dimension des größten Jordanblocks zum Eigenwert 1. Zum Beweis betrachte man die Darstellung von L in Jordan-Normalform.

Beweis zu Satz 3.3.3. Schritt 1: Aus $L^n x = 0$ folgt $L^{n+1}x = LL^n x = 0$ und damit gilt $N(L^n) \subseteq N(L^{n+1})$. Angenommen alle diese Inklusionen sind echte Inklusionen. Dann existiert nach dem Rieszschen Lemma von der Fastsenkrechten zu jedem n ein $x_n \in N(L^{n+1})$ mit $\|x_n\| = 1$ und dist $(x_n, N(L^n)) \geq \frac{1}{2}$. Wir untersuchen die Folge (x_n). Wegen

$$L^n(x_m + Lx_n - Lx_m) = (L^{n-m-1} - L^{n-m})L^{m+1}x_m + L^{n+1}x_n = 0 \tag{3.3.11}$$

für $n > m$ ist $\|Kx_n - Kx_m\| = \|x_n - (x_m + Lx_n - Lx_m)\| \geq \frac{1}{2}$. Damit kann (Kx_n) keine konvergente Teilfolge enthalten, im Widerspruch zur Kompaktheit von K und der Beschränktheit von (x_n).

Schritt 2: Wir zeigen, daß aus $N(L^k) = N(L^{k+1})$ schon $N(L^{k+2}) \subseteq N(L^{k+1})$ folgt. Sei $x \in N(L^{k+2})$. Dann gilt $L^{k+1}Lx = 0$, also $Lx \in N(L^{k+1}) = N(L^k)$. Das heißt $L^{k+1}x = L^k Lx = 0$ und damit $x \in N(L^{k+1})$. Mit ℓ dem ersten Index, für den $N(L^\ell) = N(L^{\ell+1})$ gilt, folgt somit die erste Inklusionskette per vollständiger Induktion.

Schritt 3: Die Inklusionskette $R(L^n) \supseteq R(L^{n+1})$ ist trivial. Angenommen, alle Inklusionen sind echt. Dann kann man wieder mit dem Rieszschen Lemma eine Folge $y_n \in R(L^n)$, $\|y_n\| = 1$ mit $\mathrm{dist}(y_n, R(L^{n+1})) \geq \frac{1}{2}$ konstruieren. Setzt man nun $y_n = L^n x_n$, so folgt ganz analog für $m > n$ daß $Ky_n - Ky_m = y_n - (y_m + Ly_n - Ly_m)$ mit

$$y_m + Ly_n - Ly_m = L^{n+1}(L^{m-n-1}x_m + x_n - L^{m-n}x_m) \in R(L^{n+1}) \tag{3.3.12}$$

und damit $\|Ky_n - Ky_m\| \geq \frac{1}{2}$. Aber das widerspricht der Kompaktheit von K. Also ist auch diese Inklusionskette endlich und es gibt ein k mit $R(L^k) = R(L^{k+1})$. Wir folgern daraus wieder $R(L^k) \subseteq R(L^{k+2})$. Sei dazu $y \in R(L^k) = R(L^{k+1})$. Dann gibt es ein $x \in V$ mit $y = L^{k+1}x = L(L^k x)$ und wiederum ein $\tilde{x}$ mit $L^k x = L^{k+1}\tilde{x}$. Also folgt $y = L^{k+2}\tilde{x}$ und damit $y \in R(L^{k+2})$. Damit ist mit einem neuen $\tilde{\ell}$ die zweite Inklusionskette gezeigt.

Schritt 4: Wir zeigen $\ell = \tilde{\ell}$. Angenommen, $\ell > \tilde{\ell}$. Dann gilt für $x \in N(L^\ell) \setminus N(L^{\ell-1})$ wegen $R(L^{\ell-1}) = R(L^\ell)$, für ein $\tilde{x}$ die Beziehung $0 \neq L^{\ell-1}x = L^\ell\tilde{x}$. Andererseits ist $L^{\ell+1}\tilde{x} = L^\ell x = 0$. Da $N(L^{\ell+1}) = N(L^\ell)$, folgt damit aber $L^\ell\tilde{x} = 0$. Widerspruch!

Sei andererseits $\tilde{\ell} > \ell$ und $y \in R(L^{\tilde{\ell}-1})$. Dann gibt es ein x mit $Ly = L^{\tilde{\ell}}x = L^{\tilde{\ell}+1}\tilde{x}$, also $0 = L(y - L^{\tilde{\ell}}\tilde{x}) = L^{\tilde{\ell}}(Lx - \tilde{x})$. Da $N(L^{\tilde{\ell}}) = N(L^{\tilde{\ell}-1})$, folgt $L^{\tilde{\ell}-1}(Lx - \tilde{x}) = 0$ also $y = L^{\tilde{\ell}}\tilde{x}$ und damit $R(L^{\tilde{\ell}-1}) = R(L^{\tilde{\ell}})$ im Widerspruch zur Definition von $\tilde{\ell}$.

Schritt 5: Bleibt die direkte Summe nachzuweisen. Sei $y \in N(L^\ell) \cap R(L^\ell)$. Dann existiert $x \in V$ mit $y = L^\ell x$ und damit $L^{2\ell}x = 0$. Da aber $N(L^{2\ell}) = N(L^\ell)$ gilt, muß damit $x \in N(L^\ell)$ sein, also $y = 0$ gelten.

Sei nun $x \in V$ beliebig. Dann folgt mit $y = L^\ell x \in R(L^\ell)$ die Existenz eines $\tilde{x}$ mit $L^\ell x = L^{2\ell}\tilde{x}$ und damit $L^\ell(x - L^\ell\tilde{x}) = 0$. Also folgt $x - L^\ell\tilde{x} \in N(L^\ell)$ und $x = L^\ell\tilde{x} + (x - L^\ell\tilde{x})$ ist die gesuchte Zerlegung von x. □

Nun können wir die soeben konstruierte Lösungstheorie in einem Satz zusammenfassen. Wir unterscheiden die Fälle $\ell = 0$ und $\ell > 0$.

3.3.5 Satz. *Sei V Banachraum*[8] *und $K \in \mathcal{K}(V)$.*

1. *Ist $I - K$ injektiv, so ist $I - K$ invertierbar.*
2. *Ist $L = I - K$ nicht injektiv, so ist der Projektionsoperator $P : V \to N(I-K)^\ell$, der durch die Zerlegung $V = N(L^\ell) \oplus R(L^\ell)$ bestimmt wird, kompakt und $L - P = I - K - P$ invertierbar.*

Beweis. [1.] Ist $I - K$ injektiv, so folgt $\ell = 0$ und damit $R(I-K) = V$. Nach dem Satz über den inversen Operator existiert $(I-K)^{-1} \in \mathcal{L}(V)$.

[2.] Auf $N(L^\ell)$ definiert

$$\|x\|_\ell = \inf_{y \in R(L^\ell)} \|x + y\| \tag{3.3.13}$$

eine Norm. Da $N(L^\ell)$ endlichdimensional ist, ist diese auf $N(L^\ell)$ zu $\|\cdot\|$ äquivalent. Es gibt also ein C mit $\|x\| \le C\|x\|_\ell$ und damit für $z \in V$

$$\|Pz\| \le C \inf_{y \in R(L^\ell)} \|Pz + y\| \le C\|z\|, \qquad z - Pz \in R(L^\ell). \tag{3.3.14}$$

Damit ist P beschränkt und endlichdimensional, also kompakt.

Damit kann man nun auf $L-P = I-K-P$ die Riesz-Theorie anwenden. Da aus $x \in N(L-P)$,

$$Lx - Px = 0, \tag{3.3.15}$$

und damit $L^{\ell+1}x = 0$ folgt, gilt $x \in N(L^\ell) = N(L^{\ell+1})$ und damit $Px = x$, also $Lx = x$. Damit folgt aber per Induktion $L^\ell x = x$, also $x = 0$. Durch Anwenden von Teil 1 ist der Satz bewiesen. □

3.3.6 Beispiel. Wendet man die Aussagen konkret auf Integralgleichungen zweiter Art

$$f(y) - \int_X k(x,y) f(y) \mathrm{d}y = g(y) \tag{3.3.16}$$

im Raum $C(X)$ an, so hat man also zuerst die homogene Gleichung ($g(y) \equiv 0$) zu untersuchen. Besitzt diese nur die triviale Lösung in $C(X)$, so existiert zu jedem $g \in C(X)$ genau eine Lösung $f \in C(X)$ und der Operator $g \mapsto f$ ist beschränkt.

Hat das homogene Problem nichttriviale Lösungen, so muß die rechte Seite g Bedingungen erfüllen, so daß das Problem lösbar ist. Diese sind durch den Projektor P darstellbar. Es muß $PL^{\ell-1}g = 0$ gelten. Nimmt man nun eine Lösung f, so kann man diese in einen Anteil f_1 aus $N(L^\ell)$ und einen Anteil f_2 aus $R(L^\ell)$ zerlegen. Wegen $(L-P)^{-1}g = (L-P)^{-1}Lf = f + (L-P)^{-1}Pf$ efüllt $f_1 = Pf$ das lineare Gleichungssystem (endlicher Dimension)

$$(I + P(L-P)^{-1}) f_1 = P(L-P)^{-1} g \tag{3.3.17}$$

in $N(L^\ell)$. Die Bedingung $PL^{\ell-1}g = 0$ garantiert seine Lösbarkeit, sei f_1 eine der Lösungen. Dann folgt

$$f = (L-P)^{-1}(g - f_1). \tag{3.3.18}$$

[8] Man kann den Satz auf allgemeine normierte Räume verallgemeinern, muß dann aber im Beweis auf den Satz über den inversen Operator verzichten und die Kompaktheit von K direkt ausnutzen.

3.4 Fredholm-Theorie

Bis jetzt haben wir nur den Operator K und die Gleichung $x - Kx = y$ in V betrachtet. Jetzt wollen wir das Ganze mit Dualitätstheorie verbinden. Ist der transponierte Operator $K^T : V' \to V'$ ebenfalls kompakt, so können wir vollkommen analog die Gleichung $\phi - K^T\phi = \psi$ in V' behandeln und die Sätze der Rieszschen Theorie gelten. Wir wollen nun beide Gleichungen gleichzeitig betrachten.

Vorerst ein erster Satz zum Falle eines Hilbertraumes H. In diesem Falle (und bei korrekter Identifikation der beiden Räume) sprechen wir von adjungierten Operatoren A und A^*, falls

$$(Ax, y) = (x, A^*y) \tag{3.4.1}$$

gilt. Existenz, Eindeutigkeit und Eigenschaften folgen direkt aus den entsprechenen Aussagen über transponierte Operatoren.

3.4.1 Satz. *Seien H_1, H_2 Hilberträume und sei $K \in \mathcal{K}(H_1, H_2)$ kompakt. Dann ist auch der adjungierte Operator K^* kompakt.*

Beweis. Da K kompakt ist, ist auch KK^* kompakt. Insbesondere existiert zu jeder Folge (x_n) aus H, $\|x_n\| \le C$, eine Teilfolge (x_{n_k}) für die $KK^*x_{n_k}$ konvergiert. Aber dann folgt

$$\|K^*(x_{n_k} - x_{n_l})\|^2 = (KK^*(x_{n_k} - x_{n_l}), (x_{n_k} - x_{n_l})) \le 2C\|KK^*(x_{n_k} - x_{n_l})\| \to 0. \tag{3.4.2}$$

Damit haben wir eine konvergente Teilfolge konstruiert und K^* ist kompakt. □

Es gilt die folgende Verallgemeinerung:

3.4.2 Satz (Schauder)**.** *Seien V_1 und V_2 Banachräume. Es gilt $K \in \mathcal{K}(V_1, V_2)$ genau dann, wenn $K^T \in \mathcal{K}(V_2', V_1')$.*

Beweisskizze. Wir beweisen nur eine Richtung[9] und zeigen, daß K^T kompakt ist. Sei M der Abschluß von $K(B_1)$ in V_2. Dann ist M kompakt. Sei weiter $B \subseteq V_2'$ beschränkt. Dann ist wegen

$$|\langle\phi, y_1 - y_2\rangle| \le \|y_1 - y_2\|_2 \sup_{\psi\in B} \|\psi\| \tag{3.4.3}$$

für $y_1, y_2 \in M$ und $\phi \in B$ die Menge B in $C(M, \mathbb{K})$ beschränkt und gleichgradig stetig. Nach dem Satz von Arzela-Ascoli also relativ kompakt.

Sei (ϕ_n) eine Folge aus B. Dann existiert also eine Teilfolge $(\phi_{n,1})$, die in $C(M, \mathbb{K})$ Cauchyfolge ist. Damit ist aber $(\phi_{n,1} \circ K)$ Cauchyfolge in $C(B_1, \mathbb{K})$, also konvergent. Da $K^T\phi_{n,1} = \phi_{n,1} \circ K$ gilt, ist damit K^T kompakt. □

Für den folgenden Satz benötigen wir einen Zusammenhang zwischen Unterräumen aus V und Unterräumen aus V'. Dazu führen wir den *Annihilator*

$$U^\perp = \{\phi \in V' \,|\, \forall x \in U \,:\, \langle\phi, x\rangle = 0\} \tag{3.4.4}$$

[9] Für die Rückrichtung nutzt man, daß $(K^T)^T$ kompakt ist und verbinded dies mit der kanonischen Einbettung $V \hookrightarrow V''$.

eines Unterraumes U von V ein. Durch Dualisieren erhält man

$$^{\perp}W = \{x \in V \,|\, \forall \phi \in W \,:\, \langle \phi, x \rangle = 0\}, \tag{3.4.5}$$

in nichtreflexiven Räumen ist zwischen $^{\perp}W$ und $W^{\perp}$ zu unterscheiden. Allerdings gilt (als Folgerung des Satzes von Hahn-Banach)

3.4.3 Proposition. *Sei W abgeschlossener Unterraum von V'. Dann gilt*

$$^{\perp}(W^{\perp}) = W = (^{\perp}W)^{\perp}. \tag{3.4.6}$$

Der Begriff des Annihilators verallgemeinert das orthogonale Komplement.

3.4.4 Satz (Fredholm[10]). *Sei $K \in \mathcal{K}(V)$ kompakt. Dann gilt*

$$N(I-K) = {}^{\perp}R(I-K^T) \qquad \textit{und} \qquad N(I-K^T) = R(I-K)^{\perp}. \tag{3.4.7}$$

Beweis. Sei $x \in N(I-K)$. Dann gilt für alle $\phi \in V'$

$$\langle \phi, x \rangle = \langle \phi, Kx \rangle = \langle K^T\phi, x \rangle,$$

also $x \in {}^{\perp}R(I-K^T)$. Damit folgt die Inklusion $N(I-K) \subseteq {}^{\perp}R(I-K^T)$, analog folgt die dazu duale Aussage $N(I-K^T) \subseteq R(I-K)^{\perp}$.

Sei $x \in {}^{\perp}R(I-K^T)$. Dann gilt für alle $\psi \in V'$ die Beziehung $0 = \langle \psi - K^T\psi, x \rangle$. Also auch $\langle \psi, x - Kx \rangle = 0$. Damit folgt aber $x \in N(I-K)$. Die duale Aussage ist wiederum analog. □

Aus dem Fredholmschen Satz ergibt sich ein wichtiges Lösbarkeitskriterium für Fredholmsche Integralgleichungen, die *Fredholmsche Alternative*. Entweder ist die adjungierte Gleichung

$$\phi - K^T\phi = 0 \tag{3.4.8}$$

eindeutig (und damit nur trivial) lösbar. Dann ist für jede rechte Seite g die Gleichung

$$f - Kf = g \tag{3.4.9}$$

eindeutig lösbar. Oder die adjungierte Gleichung (3.4.8) besitzt nichttriviale Lösungen. Dann ist (3.4.9) genau dann lösbar, wenn für jede Lösung ϕ von (3.4.8)

$$\langle \phi, g \rangle = 0 \tag{3.4.10}$$

gilt. Die Lösung von (3.4.9) ist nicht eindeutig.

Den ersten Fredholmschen Satz kann man ebenso auf die Potenzen von $L = I - K$ anwenden. Es gilt

$$N(L^k) = {}^{\perp}R((L^T)^k), \qquad R(L^k) = {}^{\perp}N((L^T)^k) \tag{3.4.11}$$

für alle k. Insbesondere ergibt sich als Folgerung:

3.4.5 Korollar. *Die Kettenlänge der Operatoren L und L^T stimmt überein.*

[10] Ivar Fredholm, 1866-1927

Zwischen $N(L)$ und $N(L^T)$ besteht ein tieferer Zusammenhang. Sie sind zueinander dual.

3.4.6 Satz (Fredholm). *Sei $K \in \mathcal{K}(V)$ kompakt und ℓ die Kettenlänge von $L = I - K$. Dann gilt*

$$N((L^T)^\ell)|_{N(L^\ell)} = (N(L^\ell))'. \tag{3.4.12}$$

Beweis. Mit dem ersten Rieszschen Satz folgt die Endlichdimensionalität beider Unterräume.

Wir zeigen zuerst, daß die Einschränkung injektiv ist. Seien dazu $\phi, \psi \in N((L^T)^\ell)$, $\phi \neq \psi$. Dann existiert ein $x \in V$ mit $\langle \phi, x\rangle \neq \langle \psi, x\rangle$. Dieses x kann man nach dem dritten Rieszschen Satz in seine Komponenten $x_1 \in N(L^\ell)$ und $x_2 \in R(L^\ell)$ zerlegen. Da $x_2 \in R(L^\ell) = {}^\perp N((L^T)^\ell)$ gilt, folgt $\langle \phi, x_2\rangle = \langle \psi, x_2\rangle = 0$ und damit $\langle \phi, x_1\rangle \neq \langle \psi, x_1\rangle$. Damit ist die Einschränkung $\cdot|_{N(L^\ell)} : N((L^T)^\ell) \to (N(L^\ell))'$ injektiv.

Die zweite Beweisrichtung folgt durch Dualisieren. Sei $x, y \in N(L^\ell)$, $x \neq y$. Dann gibt es ein $\phi \in V'$ mit $\langle \phi, x\rangle \neq \langle \phi, y\rangle$. Wendet man in V' den dritten Rieszschen Satz an und zerlegt $\phi = \phi_1 + \phi_2$ in seine Komponenten aus $N((L^T)^\ell)$ und $R((L^T)^\ell$, so folgt wieder $\langle \phi_2, x\rangle = \langle \phi_2, y\rangle = 0$ und damit $\langle \phi_1, x\rangle \neq \langle \phi_1, y\rangle$. Also ist $N((L^T)^\ell)$ punktetrennend auf $N(L^\ell)$ und damit

$$\dim N((L^T)^\ell) \geq \dim N(L^\ell) \tag{3.4.13}$$

und obige Einschränkung ist auch surjektiv. □

Eine Folgerung heben wir dabei hervor. Es gilt $\dim N(L^\ell) = \dim N((L^T)^\ell)$. Dasselbe gilt auch für die niedrigeren Potenzen von L, hier ist es allerdings reine lineare Algebra.

3.4.7 Satz (Fredholm). *Sei $K \in \mathcal{K}(V)$ kompakt. Dann gilt*

$$\dim N(I - K) = \dim N(I - K^T). \tag{3.4.14}$$

Beweis. Wir nutzen die Dualitätsaussage des letzten Satzes zum Beweis. Sei also wieder ℓ die Kettenlänge des Operators $L = I - K$. Dann folgt mit dem dritten Rieszschen Satz $L : R(L^\ell) \to R(L^\ell)$ und $L : N(L^\ell) \to N(L^\ell)$, ebenso $L^T : N((L^T)^\ell) \to N((L^T)^\ell)$. Wir schränken unsere Betrachtung auf den (endlichdimensionalen) Raum $U = N(L^\ell)$ und sein kanonisches Dual $U' = N((L^T)^\ell)$ ein. Dann gilt $L : U \to U$ und die Bestimmung von $N(L)$ entspricht der Lösung eines linearen Gleichungssystems, die zu beweisende Aussage folgt direkt aus einem Satz der linearen Algebra:

$$\dim N(L) = \operatorname{rank} L = \operatorname{rank} L^T = \dim N(L^T). \tag{3.4.15}$$

□

Bemerkung. Statt mit dem vollen Dualraum kann man die Fredholmtheorie auch mit sogenannten Dualsystemen aufbauen. Ein Paar (V, W) von Banachräumen V und W heißt dabei ein Dualsystem, falls eine separat stetige bilineare Abbildung

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times W \to \mathbb{K}, \qquad |\langle x, y\rangle| \leq C\|x\|_V \, \|y\|_W \tag{3.4.16}$$

gegeben ist, und diese die Trennungseigenschaften

$$\forall x \in V : \langle x, y\rangle = 0 \quad \Longrightarrow \quad y = 0 \tag{3.4.17a}$$
$$\forall y \in W : \langle x, y\rangle = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = 0 \tag{3.4.17b}$$

besitzt. Für zwei Dualsysteme (V_1, W_2) und (V_2, W_2) und einen Operator $A \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$ kann man dann analog den transponierten Operator $A^T \in \mathcal{L}(W_2, W_1)$ definieren und die obigen Sätze übertragen sich im wesentlichen. Einzige Ausnahme ist, daß der transponierte Operator eines kompakten Operators nicht mehr automatisch kompakt sein muß, man dies also als Voraussetzung zu den Sätzen hinzuzufügen hat. Mitunter werden transponierte Operatoren in einem Dualsystem als zueindander *konjugiert* bezeichnet.

Beispiele gibt es viele, als zu V dualen Raum W kann man jeden dicht in V' eingebetteten Banachraum verwenden. Standardbeispiel ist das Dualsystem $(C(X), C(X))$ für den Abschluß X eines beschränkten Gebietes mit der bilinearen Abbildung

$$\langle f, g\rangle = \int_X f(x)g(x)\mathrm{d}x. \tag{3.4.18}$$

In diesem Dualsystem besitzen beide zu untersuchenden Gleichungen dieselbe Struktur.

3.4.8 Beispiel. Wir betrachten die Integralgleichung

$$\phi(x) - \int_a^b e^{x-y}\phi(y)\mathrm{d}y = f(x). \tag{3.4.19}$$

Offensichtlich muß jede ihrer Lösungen die Form

$$\phi(x) = f(x) + ce^x \tag{3.4.20}$$

mit einer Konstanten c haben. Eingesetzt in die Gleichung ergibt dies

$$c(1 - (b-a)) = \int_a^b e^{-y} f(y)\mathrm{d}y. \tag{3.4.21}$$

Entweder ist $b - a \neq 1$ oder $b - a = 1$. Im ersten Fall ist c durch diese Gleichung eindeutig bestimmt, die Integralgleichung besitzt die eindeutige Lösung

$$\phi(x) = f(x) + \frac{\int_a^b e^{-y} f(y)\mathrm{d}y}{1-(b-a)} e^x. \tag{3.4.22}$$

Im zweiten Fall ist c beliebig, vorausgesetzt

$$\int_a^b e^{-y} f(y)\mathrm{d}y = 0. \tag{3.4.23}$$

Dies entspricht aber gerade dem Lösbarkeitskriterium der Fredholmschen Alternative, da für $b - a = 1$ die homogene adjungierte Gleichung

$$\psi(x) - \int_a^b e^{y-x}\psi(y)\mathrm{d}y = 0 \tag{3.4.24}$$

die Lösung $\psi(x) = e^{-x}$ besitzt.

3.4.9 Beispiel. Als zweites Beispiel betrachten wir unendliche lineare Gleichungssysteme in ℓ^p, $p \in [1, \infty)$. Zu lösen sei

$$x_k - \sum_\ell a_{k,\ell} x_\ell = y_k \tag{3.4.25}$$

zu vorgegebenem $(y_k) \in \ell^p$ und Koeffizienten $a_{k,\ell}$. Diese sind von der Form $(I - A)x = y$ mit dem Operator A

$$(Ax) = \left(\sum_\ell a_{k,\ell} x_\ell \right). \tag{3.4.26}$$

Analog zu Beispiel 1.2.6 wissen wir, daß dabei

$$\|A\| \leq \left(\sum_k \left(\sum_\ell |a_{k,\ell}|^{p'} \right)^{p/p'} \right)^{1/p} \tag{3.4.27}$$

gilt. Aus dem Kompaktheitskriterium für Banachräume mit Basis folgt, daß A kompakt ist, falls

$$\left(\sum_{k>N} \left(\sum_{\ell>N} |a_{k,\ell}|^{p'} \right)^{p/p'} \right)^{1/p} \to 0, \qquad N \to \infty \tag{3.4.28}$$

gilt. Auf das Gleichungssystem läßt sich unter dieser Voraussetzung also die oben entwickelte Theorie anwenden.

Eine mögliche Konsequenz ist folgende Aussage. Setzt man zusätzlich Dreiecksform voraus,

$$a_{k,\ell} = 0, \quad \ell > k, \qquad (\text{oder } k > \ell) \tag{3.4.29}$$

so ist $I - A$ genau dann in ℓ^p stetig invertierbar, wenn $a_{k,k} \neq 1$ für alle k gilt.

Zum Beweis nutzen wir, daß entweder A oder A^T untere Dreiecksform besitzt. Das homogene Problem $(I - A)x = 0$ bzw. $(I - A^T)x = 0$ ist dann unter obiger Voraussetzung aber nur trivial lösbar. In beiden Fällen besitzt $I - A$ also Kettenlänge 0, ist also stetig invertierbar.

3.4.10 Beispiel. Eine klassische Anwendung der Fredholmschen Alternative sind Randwertprobleme für gewöhnliche Differentialgleichungen. Wir wollen nur ein (allerdings recht allgemeines) Beispiel betrachten. Zu lösen sei[11]

$$(a_1(x)u')' + a_2(x)u = v(x), \qquad u(0) = u_0, \quad u(1) = u_1 \tag{3.4.30}$$

zu vorgegebenen Randwerten $u_0, u_1 \in \mathbb{C}$, Koeffizienten $a_1 \in C^1[0,1]$, $a_2 \in C[0,1]$ und rechter Seite $v \in C[0,1]$. Dabei sei vorausgesetzt, daß $a_1(x) \neq 0$ für $x \in [0,1]$ gilt. Zum Lösen transformiert man das Problem in eine Integralgleichung.

Sei also $u \in C^2[0,1]$. Dann gilt für $\phi = -u''$ (wie man sofort mittels partieller Integration sieht)

$$\begin{aligned} u(x) &= u(0) + u'(0)x - \int_0^x (x-y)\phi(y)\mathrm{d}y \\ &= u(1) - u'(1)(1-x) + \int_x^1 (x-y)\phi(y)\mathrm{d}y. \end{aligned}$$

[11] Man sagt, die Gleichung sei in selbstadjungierter Form gegeben. Wie man nachfolgend sieht, stimmt sie so mit der konjugierten Gleichung überein.

Weiterhin gilt

$$0 = \int_0^1 \phi(y)\mathrm{d}y + u'(1) - u'(0).$$

Multiplikation mit $(1-x)$, x bzw. $x(1-x)$ liefert nach Addition eine Darstellung für $u(x)$

$$u(x) = u(0)(1-x) + u(1)x + \int_0^x (1-x)y\phi(y)\mathrm{d}y + \int_x^1 x(1-y)\phi(y)\mathrm{d}y, \tag{3.4.31}$$

also auch

$$u'(x) = u(1) - u(0) - \int_0^x y\phi(y)\mathrm{d}y + \int_x^1 (1-y)\phi(y)\mathrm{d}y. \tag{3.4.32}$$

Ist nun $u(x)$ Lösung des Randwertproblems, so folgt mit $(a_1u')' + a_2u = v$ die Integralgleichung

$$\begin{aligned} a_1'(x)(u_1-u_0) - \int_0^x a_1'(x)y\phi(y)\mathrm{d}y - a_1(x)x\phi(x) + \int_x^1 a_1'(x)(1-y)\phi(y)\mathrm{d}y - a_1(x)(1-x)\phi(x) \\ + a_2(x)(u_0(1-x)+u_1x) + \int_0^x a_2(x)(1-x)y\phi(y)\mathrm{d}y + \int_x^1 a_2(x)x(1-y)\phi(y)\mathrm{d}y = v(x) \end{aligned}$$

für ϕ. Zusammenfassen aller Ausdrücke liefert

$$a_1(x)\phi(x) - \int_0^1 a_1^{-1}(y)K(x,y)a_1(y)\phi(y)\mathrm{d}y = f(x) \tag{3.4.33}$$

mit

$$K(x,y) = \begin{cases} -a_1'(x)y + a_2(x)(1-x)y, & y < x, \\ a_1'(x)(1-y) + a_2(x)x(1-y), & x < y \end{cases} \tag{3.4.34}$$

und

$$f(x) = -v(x) + a_1'(x)(u_1-u_0) + a_2(x)(u_0(1-x)+u_1x). \tag{3.4.35}$$

Ist umgekehrt $a_1\phi \in C[0,1]$ eine Lösung der Integralgleichung, so definiert (3.4.31) eine Lösung des Randwertproblems. Beide Aufgaben sind also äquivalent.

Für die Integralgleichung (3.4.33) läßt sich die Fredholmsche Alternative formulieren. Sei dazu ψ eine Lösung des homogenen konjugierten Problems

$$\psi(x) - \int_0^1 a_1^{-1}(x)K(y,x)\psi(y)\mathrm{d}y = 0. \tag{3.4.36}$$

Dann impliziert $K(y,0) = K(y,1) = 0$ daß $\psi(0) = \psi(1) = 0$ gilt. Weiter folgt $\psi \in C^1[0,1]$

$$\begin{aligned} a_1(x)\psi'(x) &= \int_x^1 (-a_1'(y) + a_2(y)(1-y))\psi(y)\mathrm{d}y + \int_0^x (-a_1'(y) - a_2(y)y)\psi(y)\mathrm{d}y \\ &= \int_0^1 (-a_1'(y) - a_2(y)y)\psi(y)\mathrm{d}y + \int_x^1 a_2(y)\psi(y)\mathrm{d}y \end{aligned}$$

und damit

$$(a_1(x)\psi')' + a_2(x)\psi = 0, \qquad \psi(0) = \psi(1) = 0. \tag{3.4.37}$$

Es existiert höchstens ein eindimensionaler Lösungsraum dieses (konjugierten) Problems. Ist $\psi = 0$ einzige Lösung, so existiert für jedes v und alle Randdaten u_0, u_1 eine eindeutige Lösung des Ausgangsproblems. Existiert eine nichttriviale Lösung ψ, so müssen die Daten v und u_0, u_1 Bedingungen erfüllen. Diese sind durch

$$\begin{aligned}0 = \langle \psi, f\rangle = \int_0^1 \psi(x)f(x)\mathrm{d}x = -\int_0^1 \psi(x)v(x)\mathrm{d}x + (u_1 - u_0)\int_0^1 a_1'(x)\psi(x)\mathrm{d}x \\ + u_0\int_0^1 (1-x)a_2(x)\psi(x)\mathrm{d}x + u_1\int_0^1 xa_2(x)\psi(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

gegeben. Die Gleichung für $\psi(x)$ liefert daraus mittels partieller Integration

$$\begin{aligned}\int_0^1 \psi(x)v(x)\mathrm{d}x &= (u_1 - u_0)\int_0^1 (a_1'(x)\psi(x) - x(a_1(x)\psi'(x))')\mathrm{d}x + u_0[a_1(0)\psi'(0) - a_1(1)\psi'(1)] \\ &= u_0a_1(0)\psi'(0) - u_1a_1(1)\psi'(1). \qquad (3.4.38)\end{aligned}$$

Erfüllen die rechte Seite $v(x)$ und die Randdaten $u_0, u_1 \in \mathbb{C}$ diese Bedingung, so existiert für unser Ausgangsproblem eine Lösung. Diese ist nicht eindeutig bestimmt.

4 Spektraltheorie

Operatoren sind auch nur Zahlen.

4.1 Der Spektralsatz von Riesz-Schauder

Wir wollen die Resultate des letzten Kapitels noch einmal, allerdings aus einer anderen Blickrichtung, zusammenfassen. Sei dazu V ein komplexer Banachraum und $K \in \mathcal{K}(V)$ ein kompakter Operator. Dann ist die Gleichung

$$\lambda x - Kx = 0 \tag{4.1.1}$$

für ein komplexes $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ entweder eindeutig (und damit trivial) lösbar, der Operator $\lambda I - K$ in $\mathcal{L}(V)$ (stetig) invertierbar, oder es existiert ein nichttrivialer endlichdimensionaler Lösungsraum $N(\lambda I - K)$. Im zweiten Falle wollen wir λ als *Eigenwert* des Operators K und den Lösungsraum

$$E_\lambda = N(\lambda I - K) \tag{4.1.2}$$

als zugehörigen *Eigenunterraum* bezeichnen. Die Menge der Eigenwerte sei mit $\sigma_P(K)$ bezeichnet.

Quintessenz des letzten Kapitels können wir nun im folgenden Satz zusammenfassen.

4.1.1 Satz (Spektralsatz von Riesz-Schauder). *Sei V Banachraum und $K \in \mathcal{K}(V)$ kompakt. Dann gelten die folgenden Aussagen*

1. *Ist $\tilde{\lambda}$ ein Häufungspunkt von $\sigma_P(K)$, so gilt $\tilde{\lambda} = 0$. Insbesondere ist $\sigma_P(K)$ abzählbar.*

2. *Für jedes $\lambda \in \sigma_P(K) \setminus \{0\}$ ist E_λ endlichdimensional.*

3. *Sei $\lambda \in \sigma_P(K) \setminus \{0\}$. Dann besitzt der Operator $L = \lambda I - K$ die endliche Kettenlänge $\ell(\lambda) > 0$ und es gilt*
$$V = N(\lambda I - K)^{\ell(\lambda)} \oplus R(\lambda I - K)^{\ell(\lambda)}.$$
Bezeichnet man mit P_λ die Projektion auf die erste Komponente, so gilt $P_\lambda \in \mathcal{K}(V)$.

4. *Es gilt $\sigma_P(K) \setminus \{0\} = \sigma_P(K^T) \setminus \{0\}$.[1] Weiterhin folgt für $\lambda \in \sigma_P(K) \setminus \{0\}$*
$$E_\lambda = N(\lambda I - K) = {}^\perp R(\lambda I - K^T), \qquad N(\lambda I - K^T) = R(\lambda I - K)^\perp.$$

[1] Transponiert, nicht adjungiert!

Beweis. [1.] Angenommen $\tilde{\lambda}$ wäre Häufungspunkt von $\sigma_P(K)\setminus\{0\}$ und $\tilde{\lambda}\neq 0$. Dann gäbe es eine Folge von Eigenwerten λ_n mit $\lambda_n \to \tilde{\lambda}$ und eine Folge von normalisierten Eigenvektoren x_n, $\|x_n\| = 1$ und $Kx_n = \lambda_n x_n$. Dann folgt

$$(\tilde{\lambda}I - K)x_n = (\lambda_n I - K)x_n + (\tilde{\lambda} - \lambda_n)x_n = (\tilde{\lambda} - \lambda_n)x_n \to 0.$$

Nun gibt es nach der Riesz-Theorie zwei Möglichkeiten. Entweder ist $\tilde{\lambda}I-K$ stetig invertierbar. Dann folgt aber $x_n = (\tilde{\lambda}I-K)^{-1}(\tilde{\lambda}-\lambda_n)x_n \to 0$ im Widerspruch zu $\|x_n\| = 1$. Andererseits muß $\tilde{\lambda}\in\sigma_P(K)\setminus\{0\}$ gelten. Sei $\ell(\tilde{\lambda})$ die Kettenlänge von $\tilde{\lambda}I-K$. Dann folgt $(\tilde{\lambda}I-K)^{\ell(\tilde{\lambda})}x_n = (\tilde{\lambda}-\lambda_n)^{\ell(\tilde{\lambda})}x_n \to 0$. Damit muß aber nach dem dritten Rieszschen Satz $x_n \in R(\tilde{\lambda}I-K)^{\ell(\tilde{\lambda})}$ gelten. Da aber $(\tilde{\lambda}I-K)^{\ell(\tilde{\lambda})}$ auf diesem Unterraum stetig invertierbar ist, folgt wiederum $x_n \to 0$. Widerspruch!

[3.] Die Kettenendlichkeit folgt mit dem dritten Rieszschen Satz. Für P_λ geben wir noch eine Darstellung an. Sei dazu $\{x_1,\dots,x_n\}$ Basis von $N(\lambda I-K)^{\ell(\lambda)}$ und $\{\phi_1,\dots,\phi_n\}$ Basis von $N(\lambda I-K^T)^{\ell(\lambda)}$. Da man $N(\lambda I-K^T)^{\ell(\lambda)}$ nach dem zweiten Fredholmschen Satz mit dem Dual von $N(\lambda I-K)^{\ell(\lambda)}$ identifizieren kann, können die ϕ_i biorthogonal zu x_k gewählt werden, d.h.

$$\langle\phi_i, x_k\rangle = \delta_{ki}. \tag{4.1.3}$$

Weiter ist $N(\lambda I-K^T)^{\ell(\lambda)}$ Annihilator von $R(\lambda I-K)^{\ell(\lambda)}$, der Projektionsoperator also durch

$$P_\lambda x = \sum_{k=1}^{n}\langle\phi_k, x\rangle x_k \tag{4.1.4}$$

gegeben. Also gilt $\|P_\lambda\| \leq \sum_{k=1}^n \|\phi_k\|\,\|x_k\|$. □

Wendet man sich speziell Hilberträumen zu, so kann man die Aussage des Spektralsatzes für besondere Operatoren noch wesentlich verschärfen. Sei also H Hilbertraum und $K\in\mathcal{K}(H)$ kompakt. Der Operator wird als *selbstadjungiert* bezeichnet, falls $K^* = K$ gilt.

4.1.2 Satz (Spektralsatz für selbstadjungierte Operatoren). *Sei $K\in\mathcal{K}(H)$ selbstadjungiert. Dann gilt*

1. *$\sigma_P(K)\subseteq\mathbb{R}$.*
2. *Ist $K\neq 0$, so existiert ein Eigenwert $\lambda\in\sigma_P(K)$ mit $|\lambda| = \|K\|$.*
3. *Sei $\lambda\in\sigma_P(K)\setminus\{0\}$. Dann gilt $\ell(\lambda) = 1$.*
4. *Gilt $\lambda\neq\mu$ für $\lambda,\mu\in\sigma_P(K)$, so sind die Eigenunterräume E_λ und E_μ orthogonal.*
5. *Sei zu $\lambda\in\sigma_P(K)\setminus\{0\}$ durch $\{e_{\lambda,1},\dots,e_{\lambda,n(\lambda)}\}$ eine Orthogonalbasis von E_λ gegeben. Dann besitzt der Operator K die (in der Operatornorm konvergente) Darstellung*

$$K = \sum_{\lambda\in\sigma_P(K)\setminus\{0\}} \lambda P_\lambda = \sum_{\lambda\in\sigma_P(K)\setminus\{0\}} \lambda \sum_{k=1}^{n(\lambda)} e_{\lambda,k}\otimes e_{\lambda,k}. \tag{4.1.5}$$

Insbesondere gilt für alle $x\in H$

$$Kx = \sum_{\lambda\in\sigma_P(K)\setminus\{0\}} \lambda \sum_{k=1}^{n(\lambda)} (x, e_{\lambda,k})e_{\lambda,k}. \tag{4.1.6}$$

6. *Es gilt*

$$H = N(K) \oplus \bigoplus_{\lambda \in \sigma_P(K) \setminus \{0\}} E_\lambda \tag{4.1.7}$$

als orthogonale direkte Summe.

Beweis. [1.] Sei $\lambda \in \sigma_P(K)$ und $x \neq 0$ ein zugehöriger Eigenvektor. Dann gilt

$$\lambda(x,x) = (\lambda x, x) = (Kx, x) = (x, Kx) = (x, \lambda x) = \overline{\lambda}(x,x)$$

und damit $\lambda = \overline{\lambda}$.

[2.] Da

$$\|K\| = \sup_{\|x\|=1} \|Kx\|$$

existiert eine Folge $x_n \in V$ mit $\|x_n\| = 1$ und $\|Kx_n\| \to \|K\|$. Da die Einheitskugel im Hilbertraum schwach kompakt ist, existiert eine schwach konvergente Teilfolge x_{n_j}, $x_{n_j} \rightharpoonup x$. Da K kompakt ist, konvergiert $Kx_{n_j} \to Kx$, also muß $\|Kx\| = \|K\|$ gelten. Damit folgt aber $\|x\| = 1$. Weiter gilt (da einer der Faktoren in der Norm konvergiert!)

$$(Kx_n, x_n) \to (Kx, x) =: \lambda.$$

Weiter gilt

$$0 \leq \|Kx_n - \lambda x_n\|^2 = \|Kx_n\|^2 - 2\lambda(Kx_n, x_n) + \lambda^2 \leq 2\lambda^2 - 2\lambda(Kx_n, x_n) \to 0,$$

also auch $Kx = \lambda x$ und damit wegen $\|Kx\| = \|K\|$ und $\|x\| = 1$ auch $|\lambda| = \|K\|$.

[3.] Sei $\lambda \in \sigma_P(K) \setminus \{0\}$. Dann ist der endlichdimensionale Unterraum $N(\lambda I - K)^{\ell(\lambda)}$ unter K invariant. Die Einschränkung von K auf diesen Unterraum wird in jeder Orthogonalbasis dieses Unterraums als selbstadjungierte Matrix dargestellt, diese sind aber bekanntlich diagonalisierbar und haben damit Kettenlänge 1.

[4.] Sei $x \in E_\lambda$ und $y \in E_\mu$. Dann gilt (λ und μ sind reell)

$$(\lambda - \mu)(x,y) = (\lambda x, y) - (x, \mu y) = (Kx, y) - (x, Ky) = 0.$$

Aus $\lambda \neq \mu$ folgt die Orthogonalität $E_\lambda \perp E_\mu$.

[5.] Es ist nur etwas zu zeigen, wenn es abzählbar unendlich viele Eigenwerte gibt (der Operator also nicht endlichdimensional ist). Seien die Eigenwerte $\sigma_P(K) \setminus \{0\}$ betragsmäßig geordnet, $|\lambda|_1 \geq |\lambda_2| \geq \ldots$. Zu jedem Eigenwert λ_j ist durch

$$P_j : x \mapsto \sum_{k=1}^{n(\lambda_j)} (x, e_{\lambda_j,k}) e_{\lambda_j,k}$$

die Orthogonalprojektion auf den Unterraum E_λ gegeben. Weiter hat nach Konstruktion und Schritt 2. der Operator $(I - P_1)K : E_1^\perp \to E_1^\perp$ die Norm $\|(I-P_1)K\| = |\lambda_2|$ und es gilt $P_k K = K P_k = \lambda_k P_k$. Per Induktion folgt nun für alle k daß $\|(I-P_1)(I-P_2)\cdots(I-P_k)K\| = |\lambda_{k+1}|$ und damit

$$\left\| K - \sum_{j=1}^{k} \lambda_j P_j \right\| = |\lambda_{k+1}|.$$

Das aber ist die Behauptung. (Die Reihe konvergiert auch in jeder Umordnung. Warum?)

[6.] Sei $x \in H$ orthogonal zu allen Eigenunterräumen, $x \perp E_\lambda$ für $\lambda \in \sigma_P(K) \setminus \{0\}$. Sei weiter $\|x\| = 1$. Da dann $x \perp H_k = \oplus_{j=1,\dots k} E_j$ folgt $\|Kx\| \leq \|K|_{H_k^\perp}\| = |\lambda_{k+1}|$. Für $k \to \infty$ folgt $Kx = 0$ und damit $x \in N(K)$. □

4.2 Das analytisches Spektralkalkül

Banachalgebren

Wir wollen die Aussagen etwas abstrakter fassen und uns nicht auf die Banachalgebra $\mathcal{L}(V)$ der beschränkten Operatoren eines Banachraumes V beschränken. Sei dazu für das folgende $\mathcal{A}$ eine komplexe Banachalgebra mit Eins. Das Einselement wollen wir mit 1 bezeichnent. Durch

$$\mathbb{C} \ni \lambda \mapsto \lambda 1 \in \mathcal{A}, \qquad \|\lambda 1\| = |\lambda| \tag{4.2.1}$$

wird der Körper $\mathbb{C}$ kanonisch in die Algebra $\mathcal{A}$ eingebettet.

4.2.1 Definition. Sei $x \in \mathcal{A}$. Dann bezeichnet man die Menge

$$\rho(x) = \{\lambda \in \mathbb{C} \,|\, (\lambda - x)^{-1} \in \mathcal{A}\} \tag{4.2.2}$$

als *Resolventenmenge* von x und ihr Komplement $\sigma(x) = \mathbb{C} \setminus \rho(x)$ als *Spektrum* von x. Auf der Resolventenmenge definiert man die Funktion

$$R_x : \rho(x) \ni \lambda \mapsto (\lambda - x)^{-1} \in \mathcal{A}, \tag{4.2.3}$$

die *Resolvente* von x.

4.2.2 Beispiel. Speziell für die Banachalgebra $\mathcal{A} = \mathcal{L}(V)$ ergibt sich als Resolventenmenge $\rho(A)$ für ein $A \in \mathcal{L}(V)$ die Menge aller $\lambda \in \mathbb{C}$, für die $\lambda I - A$ stetig invertierbar ist. Das Spektrum $\sigma(A)$ kann man in diesem Falle in Teile untergliedern. Entweder ist $\lambda I - A$ nicht injektiv, dann ist λ *Eigenwert*. Die Menge $\sigma_P(A)$ der Eigenwerte wird als *Punktspektrum* bezeichnet. Oder, $\lambda I - A$ ist injektiv. Dann kann $\lambda I - A$ nicht surjektiv sein (da es ja sonst nach dem Satz von Banach über den inversen Operator stetig invertierbar wäre). Also ist entweder $R(\lambda I - A)$ dichter Teilraum von V oder der Abschluß von $R(\lambda I - A)$ ist ein echter Teilraum. Im ersten Falle gehört λ zum *kontinuierlichen Spektrum* $\sigma_c(A)$, im zweiten Falle zum *residualen Spektrum* $\sigma_r(A)$.

4.2.3 Beispiel. Wählt man als Banachalgebra die Calkin-Algebra $\mathcal{A} = \mathcal{L}(V)/\mathcal{K}(V)$, so erhält man für einen Operator A (bzw. seine Äquivalenzklasse $[A]_\mathcal{K}$) als Resolventenmenge den sogenannten *Fredholmbereich* von A und als Spektrum das *essentielle Spektrum*

$$\sigma_e(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \,|\, [\lambda I - A]_\mathcal{K} \text{ invertierbar in } \mathcal{L}(V)/\mathcal{K}(V)\,\}. \tag{4.2.4}$$

Es gilt $\sigma_e(A) \subseteq \sigma(A)$. Betrachtet man speziell nur kompakte Operatoren $K \in \mathcal{K}(V)$, V unendlichdimensional, so ist $\sigma_e(K) = \sigma_e(0) = \{0\}$.

4.2.4 Beispiel. Setzt man für $\mathcal{A}$ die Banachalgebra $C(X)$ der stetigen Funktionen auf dem Kompaktum X, so ergibt sich für das Spektrum des Elementes $f \in C(X)$ genau der Wertebereich der Funktion, $\sigma(f) = f[X]$.

4.2.5 Lemma. *Es gilt* $\sigma(x) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| \leq \|x\|\}$. *Weiterhin gilt für* $|\lambda| > \|x\|$

$$R_x(\lambda) = \lambda^{-1}(1 - \lambda^{-1}x)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{-k-1} x^k. \tag{4.2.5}$$

(Dabei sei $x^0 = 1$ *gesetzt.)*

Beweis. Neumannreihe. □

Eine Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathcal{A}$ die sich lokal durch eine in $\mathcal{A}$ konvergente Potenzreihe

$$f(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k (\lambda - \lambda_0)^k, \qquad |\lambda - \lambda_0| < r \tag{4.2.6}$$

mit Koeffizienten $x_k \in \mathcal{A}$ schreiben läßt, wollen wir als *analytisch* bezeichnen. Das Majorantenkriterium (Satz 1.1.15) liefert für den Konvergenzradius r die Darstellung

$$\frac{1}{r} = \limsup_{k \to \infty} \|x_k\|^{1/k}. \tag{4.2.7}$$

4.2.6 Satz. *Sei* $x \in \mathcal{A}$. *Dann gelten die folgenden Aussagen:*

1. *Die Resolventenmenge* $\rho(x)$ *ist offen und die Resolvente* R_x *ist analytisch.*
2. *Das Spektrum* $\sigma(x)$ *ist nichtleer und kompakt.*
3. *Es gilt*

$$\sup_{\lambda \in \sigma(x)} |\lambda| = r_x = \liminf_{n \to \infty} \|x^n\|^{1/n}. \tag{4.2.8}$$

   Die Zahl r_x *wird als* Spektralradius *von* x *bezeichnet.*

Beweis. [1.] Sei $\lambda_0 \in \rho(x)$ und λ so, daß $|\lambda - \lambda_0| \, ||R_x(\lambda_0)|| < 1$. Dann gilt

$$R_x(\lambda) = R_x(\lambda_0) \sum_{k=0}^{\infty} ((\lambda_0 - \lambda) R_x(\lambda_0))^k, \tag{4.2.9}$$

da wegen $(\lambda - x) = (\lambda_0 - x) + (\lambda - \lambda_0)$

$$\begin{aligned}
(\lambda - x) R_x(\lambda) &= (\lambda - x) R_x(\lambda_0) \sum_{k=0}^{\infty} ((\lambda_0 - \lambda) R_x(\lambda_0))^k \\
&= (\lambda_0 - x) R_x(\lambda_0) \sum_{k=0}^{\infty} ((\lambda_0 - \lambda) R_x(\lambda_0))^k + (\lambda - \lambda_0) R_x(\lambda_0) \sum_{k=0}^{\infty} ((\lambda_0 - \lambda) R_x(\lambda_0))^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} ((\lambda_0 - \lambda) R_x(\lambda_0))^k - R_x(\lambda_0) \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda_0 - \lambda)^{k+1} R_x(\lambda_0)^k = 1
\end{aligned}$$

gilt. Also ist R_x in λ_0 analytisch. Weiter sieht man, daß $\rho(x)$ offen ist.

[2.] Damit ist $\sigma(x)$ als Komplement der offenen Menge abgeschlossen. Wegen Lemma 4.2.5 ist das Spektrum beschränkt, also kompakt. Um zu zeigen, daß das Spektrum nichtleer ist, wenden wir den Satz von Liouville aus der Funktionentheorie an. Sei dazu $\phi \in \mathcal{A}'$. Dann ist die Funktion

$$\rho(x) \ni \lambda \mapsto \langle \phi, R_x(\lambda) \rangle \in \mathbb{C} \tag{4.2.10}$$

analytisch und wegen $\lambda R_x(\lambda) = \lambda(\lambda - x)^{-1} \to 1$ für $\lambda \to \infty$ in $\lambda = \infty$ regulär. Wäre $\rho(x) = \mathbb{C}$, so müßte $\langle \phi, R_x(\lambda) \rangle$ für jedes ϕ konstant sein. Dann wäre aber auch R_x konstant (Trennungseigenschaften, Hahn-Banach). Widerspruch!

[3.] Durch (4.2.5) ist eine Laurentreihe der Resolvente gegeben. Analog zur Funktionentheorie zeigt man, daß auf dem (inneren) Rand des Konvergenzgebietes ein λ existieren muß, in das R_x nicht analytisch fortgesetzt werden kann. Dieses muß also zu $\sigma(x)$ gehören. □

4.2.7 Proposition. *Die Resolvente R_x erfüllt die Resolventengleichung*

$$R_x(\lambda) - R_x(\mu) = -(\lambda - \mu) R_x(\mu) R_x(\lambda) \tag{4.2.11}$$

für $\lambda, \mu \in \rho(x)$. Insbesondere gilt

$$\partial_\lambda R_x(\lambda) = -R_x(\lambda)^2. \tag{4.2.12}$$

Integrale mit Werten in einer Banachalgebra, Integraldarstellungen

Sei nun Γ eine glatte Kurve endlicher Länge innerhalb von $\mathbb{C}$ und $f : \Gamma \to \mathcal{A}$ stetig. Dann kann man das komplexe $\mathcal{A}$-wertige Kurvenintegral

$$\int_\Gamma f(\lambda) \mathrm{d}\lambda \in \mathcal{A} \tag{4.2.13}$$

in vollkommener Analogie zum $\mathbb{C}$-wertigen Riemann-Integral definieren, die entsprechenden Riemannschen Summen konvergieren in $\mathcal{A}$. Wir skizzieren kurz eine mögliche Konstruktion:[2]

Sei $\phi \in \mathcal{A}'$. Dann ist $\lambda \to \langle \phi, f(\lambda) \rangle$ stetig und es existiert damit das komplexe Kurvenintegral entlang der Kurve Γ. Wie man sofort sieht ist die Zuordnung

$$\Psi : \phi \mapsto \int_\Gamma \langle \phi, f(\lambda) \rangle \mathrm{d}\lambda \tag{4.2.14}$$

linear in ϕ und wegen

$$\left| \int_\Gamma \langle \phi, f(\lambda) \rangle \mathrm{d}\lambda \right| \leq |\Gamma| \, \|\phi\|_{\mathcal{A}'} \max_{\lambda \in \Gamma} \|f(\lambda)\|_{\mathcal{A}}, \tag{4.2.15}$$

$|\Gamma|$ die Länge der Kurve Γ, ist $\Psi \in \mathcal{A}''$. Wir zeigen, daß sogar $\Psi \in \mathcal{A}$ gilt. Das komplexe Kurvenintegral ist Grenzwert seiner Riemannschen Summen,

$$\sum_{\mathfrak{Z}} \langle \phi, f(\lambda_j) \rangle (\lambda_{j+1} - \lambda_j) \to \int_\Gamma \langle \phi, f(\lambda) \rangle \mathrm{d}\lambda \tag{4.2.16}$$

[2] Wir wählen nicht die klassische Definition des Riemann-Integrals sondern wählen den Umweg über Dualitätstheorie und das sogenannte *Dunford-Pettis-Integral* als 'schwachen' Integralbegriff.

für immer feiner werdende Zerlegungen $\mathfrak{Z}$ der Kurve Γ. Also auch

$$\left\langle \phi, \sum_{\mathfrak{Z}} f(\lambda_j)(\lambda_{j+1} - \lambda_j) \right\rangle \to \langle \Psi, \phi \rangle \qquad \forall \phi \in \mathcal{A}' \tag{4.2.17}$$

und damit

$$\sum_{\mathfrak{Z}} f(\lambda_j)(\lambda_{j+1} - \lambda_j) \xrightarrow{*} \Psi \tag{4.2.18}$$

in $\mathcal{A}''$. Sei $c = \lambda|_\Gamma = \lambda_N - \lambda_0$. Dann ist jede der Riemannschen Summen in der konvexen Hülle $\operatorname{conv} cf[\Gamma]$ enthalten. Nutzt man die Hilfsaussage

4.2.8 Lemma (Kompaktheitssatz von Mazur**).** *Sei X Banachraum und $M \subseteq X$ kompakt. Dann ist die konvexe Hülle* $\operatorname{conv} M$ *relativ kompakt.*

so existiert eine in $\mathcal{A}$ normkonvergente Teilfolge von Riemannschen Summen.[3] Die Eindeutigkeit des schwach-* Grenzwertes impliziert, daß diese gegen Ψ konvergiert, insbesondere also $\Psi \in \operatorname{conv} cf[\Gamma] \subseteq \mathcal{A}$ gilt.

4.2.9 Satz (Dunford**).** *Sei Γ glatte Kurve endlicher Länge in $\mathbb{C}$ und $f : \Gamma \to \mathcal{A}$ stetig. Dann existiert genau ein Element $\int_\Gamma f(\lambda)\mathrm{d}\lambda \in \mathcal{A}$, für welches*

$$\left\langle \phi, \int_\Gamma f(\lambda)\mathrm{d}\lambda \right\rangle = \int_\Gamma \langle \phi, f(\lambda) \rangle \mathrm{d}\lambda \tag{4.2.19}$$

für jedes $\phi \in \mathcal{A}'$ gilt.

Da damit alle Integrale auf rein komplexe Kurvenintegrale zurückgeführt worden sind, kann man somit für analytische Funktionen $f : \mathbb{C} \supseteq \Omega \to \mathcal{A}$ Integralsätze der Funktionentheorie anwenden. Der Schritt zurück erfolgt mit den Trennungssätzen nach Hahn-Banach. Als Anwendung der Cauchyschen Integralformeln auf die Laurent-Reihe (4.2.5) ergeben sich für deren Koeffizienten

4.2.10 Proposition. *Sei Γ eine glatte Kurve die $\sigma(x)$ einmal positiv umläuft. Dann gilt*

$$x^k = \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma \lambda^k R_x(\lambda)\mathrm{d}\lambda \tag{4.2.20}$$

für alle $k = 0, 1, 2, \dots$

Beweis. Sei $\phi \in \mathcal{A}'$. Dann gilt

$$\langle \phi, R_x(\lambda) \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{-k-1} \langle \phi, x^k \rangle. \tag{4.2.21}$$

Das ist eine Laurent-Reihe auf $|\lambda| > r_x$. Damit gilt für den Koeffizienten $\langle \phi, x^k \rangle$ vor λ^{-k-1} die Darstellung durch das Cauchy-Integral

$$\langle \phi, x^k \rangle = \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma \lambda^k \langle \phi, R_x(\lambda) \rangle \mathrm{d}\lambda = \frac{1}{2\pi i} \langle \phi, \oint_\Gamma \lambda^k R_x(\lambda)\mathrm{d}\lambda \rangle. \tag{4.2.22}$$

Da lineare Funktionale punktetrennend sind, folgt die Aussage. □

[3] Alternativ kann man die gleichmäßige Stetigkeit von f auf Γ nutzen und die Konvergenz der Riemannschen Summen direkt zeigen. Dies wuerde auf den 'starken' Integralbegriff, das *Bochner-Integral* führen.

Damit haben wir eine Darstellung für Polynome in x. Wir wollen diese auf in einer Umgebung des Spektrums analytische Funktionen ausweiten.

4.2.11 Definition. Sei f in einer Umgebung von $\sigma(x)$ analytisch Γ endliche Vereinigung geschlossener positiv orientierter glatter Kurven um $\sigma(x)$ (innerhalb dieser Umgebung). Dann sei

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma f(\lambda) R_x(\lambda) \mathrm{d}\lambda. \tag{4.2.23}$$

4.2.12 Satz (Dunford). *Sei $x \in \mathcal{A}$. Seien f, g in einer Umgebung von $\sigma(x)$ analytisch, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Dann gilt*

1. $(\alpha f + \beta g)(x) = \alpha f(x) + \beta g(x)$
2. $(fg)(x) = f(x) g(x)$

Sei f_n Folge analytischer Funktionen in einer (gemeinsamen) Umgebung von $\sigma(x)$. Konvergiert f_n in dieser Umgebung gleichmäßig gegen f, so konvergiert $f_n(x)$ gegen $f(x)$ in $\mathcal{A}$.

Beweis. Es ist nur 2. zu zeigen, der Rest ist klar. Dazu nehmen wir an, daß Γ_1 vollständig im Innern von Γ_2 liegt. Dann gilt

$$\begin{aligned}
f(x)g(x) &= -\frac{1}{4\pi^2} \oint_{\Gamma_1} f(\lambda) R_x(\lambda) \mathrm{d}\lambda \cdot \oint_{\Gamma_2} g(\mu) R_x(\mu) \mathrm{d}\mu \\
&= -\frac{1}{4\pi^2} \oint_{\Gamma_1} \oint_{\Gamma_2} f(\lambda) g(\mu) (\mu - \lambda)^{-1} (R_x(\lambda) - R_x(\mu)) \mathrm{d}\lambda \mathrm{d}\mu \\
&= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_1} f(\lambda) R_x(\lambda) \left\{ \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_2} \frac{g(\mu)}{\mu - \lambda} \mathrm{d}\mu \right\} \mathrm{d}\lambda \\
&\quad - \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_2} g(\mu) R_x(\mu) \left\{ \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_1} \frac{f(\lambda)}{\mu - \lambda} \mathrm{d}\lambda \right\} \mathrm{d}\mu \\
&= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_1} f(\lambda) g(\lambda) R_x(\lambda) \mathrm{d}\lambda = (fg)(x).
\end{aligned}$$

Dabei nutzt man aus, daß

$$\oint_{\Gamma_1} \frac{f(\lambda)}{\mu - \lambda} \mathrm{d}\lambda = 0$$

gilt, da μ außerhalb von Γ_1 liegt und der Integrand somit im Innern der Kurve Γ_1 analytisch ist. □

4.2.13 Korollar (Spektraler Abbildungssatz). *Sei f analytisch in einer Umgebung von $\sigma(x)$. Dann ist*

$$\sigma(f(x)) = f[\sigma(x)].$$

Beweis. Sei f analytisch in einer Umgebung von $\sigma(x)$.

Sei $\lambda \in \sigma(x)$. Betrachtet man nun

$$g(\mu) = \frac{f(\lambda) - f(\mu)}{\lambda - \mu},$$

so ist damit g analytisch in einer Umgebung von $\sigma(x)$ (für $\lambda = \mu$ gilt $f(\lambda) = f(\mu)$) und es gilt $f(\lambda) - f(x) = (\lambda - x)g(x)$. Wäre $f(\lambda) - f(x)$ invertierbar, so auch $(\lambda - x)$, Widerspruch. Also ist $f(\lambda) \in \sigma(f(x))$.

Sei $\lambda \in \sigma(f(x))$ und $\lambda \notin f[\sigma(x)]$. Sei nun

$$g(\mu) = \frac{1}{f(\mu) - \lambda},$$

dann ist g analytisch in einer Umgebung von $\sigma(x)$ und somit folgt $g(x)(f(x) - \lambda) = 1$, Widerspruch. $\square$

4.2.14 Beispiel. Ein Grund, warum wir Analytizität nur in der Umgebung von $\sigma(x)$ gefordert haben, ist, daß wir nun Elemente $x \in \mathcal{A}$ nach Zusammenhangskomponenten des Spektrums $\sigma(x)$ zerlegen können. Gilt $\sigma(x) = \sigma_1(x) \cup \sigma_2(x)$ mit disjunkten kompakten Mengen $\sigma_1(x)$ und $\sigma_2(x)$, $\sigma_1(x) \cap \sigma_2(x) = \emptyset$, so ist die Funktion

$$f_i(\lambda) = \begin{cases} 1, & \lambda \in \sigma_i(x), \\ 0, & \lambda \in \sigma(x) \setminus \sigma_i(x) \end{cases} \tag{4.2.24}$$

in eine Umgebung des Spektrums analytisch fortsetzbar. Setzt man nun $p_i = f_i(x)$, so gilt $p_i^2 = p_i$ und $\sigma(p_i x) = \sigma(x p_i) = \sigma_i(x)$. Weiter gilt $p_1 + p_2 = 1$ und $x = p_1 x + p_2 x$ stellt die gesuchte Zerlegung dar.

4.2.15 Beispiel. Sei $K \in \mathcal{K}(V)$ kompakt. Dann besagt der Spektralsatz von Riesz-Schauder, daß $\sigma_P(K) \setminus \{0\}$ aus abzählbar vielen Eigenwerten λ_i besteht. Zu jedem dieser Eigenwerte λ_i gehörte ein Projektionsoperator P_i auf $N((\lambda_i I - K)^\ell)$, ℓ Kettenlänge von $\lambda_i I - K$. Dieser ist durch

$$P_i = \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma R_K(\lambda) \mathrm{d}\lambda \tag{4.2.25}$$

gegeben. Dabei umläuft Γ (nur) den Eigenwert λ_i einmal in positivem Sinn. Das kann man auch anders schreiben,

$$P_i = \mathrm{Res}(R_A, \lambda_i). \tag{4.2.26}$$

4.2.16 Beispiel. Eine Anwendung dieses Spektralkalküls kann es sein, Lösungen von Evolutionsgleichungen zu berechnen. Wir wollen nur ein Beispiel betrachten. Sei V Banachraum und $A \in \mathcal{L}(V)$ beschränkter Operator. Gesucht ist eine (Fréchet-) differenzierbare[4] Funktion $f : \mathbb{R} \to V$, für welche

$$f' - Af = g, \qquad f(0) = f_0 \in V \tag{4.2.27}$$

zu einem vorgegebenen stetigen $g : \mathbb{R} \to V$ gilt. Die Lösung dieser *abstrakten Differentialgleichung* ist dann durch

$$f(t) = e^{tA} f_0 + \int_0^t e^{(t-\tau)A} g(\tau) \mathrm{d}\tau \tag{4.2.28}$$

gegeben.

[4]Da es nur ein Beispiel ist, wollen wir keine eigenständige Definition dazu angeben. Was wir fordern ist, daß $f(t + \tau) - f(t) = f'(t)\tau + \mathcal{O}(|\tau|)$ für ein von t abhängiges $f'(t) \in \mathcal{L}(V)$ gilt. Man bezeichnet $f'(t)$ als Fréchet-Ableitung von f an der Stelle t.

Index