Contents

1 Der Satz von Baire **3**
1.1 Topologische Räume und stetige Abbildungen 3
1.2 Metrische Räume 9

2 Banachräume und lineare Abbildungen **15**
2.1 Beispiele 16
2.2 Lineare Abbildungen 28
2.3 Der Satz von der offenen Abbildung 33
2.4 Der Satz vom abgeschlossenen Graphen 38
2.5 Der Satz von der gleichmässigen Beschränktheit 41
2.6 Der Satz von Banach-Steinhaus 44

3 Das Zornsche Lemma und der Satz von Hahn-Banach **47**

4 Das Spektrum **57**
4.1 Das Funktionenkalkül für Polynome 64
4.2 Holomorphe Abbildungen 66
4.3 Der Spektralradius 69

5 Kompakte Operatoren **71**
5.1 Der Satz von Arzela-Ascoli 76
5.2 Der Satz von Schauder 79
5.3 Spektraltheorie kompakter Operatoren 82
5.4 Fredholm-Operatoren 86

6 Die schwachen Topologien **100**
6.1 Die σ-Topologie 100
6.2 Die σ^*-Topologie 104
6.3 Der Satz von Tychonov 107
6.4 Der Satz von Banach-Alaoglu 111
6.5 Der Satz von Goldstine 114

7 Der Satz von Eberlein-Shmulyan **120**
7.1 Separable Räume 120
7.2 Schauderbasen 126
7.3 Trennungssatz und schwacher Abschluss 137
7.4 Der Vorbereitungssatz 143
7.5 Reflexive Räume und der Satz von Eberlein-Shmulyan 147

8 Die Laplace Transformation **152**

9 Abstrakte Cauchy-Probleme **166**
9.1 Verallgemeinerung des Satzes vom abgeschlossenen Graphen . . . 169
9.2 Gefaltete Halbgruppen 171
9.3 Der Satz von Ljubic 177
9.4 Beispiele 187

1 Topologische und metrische Räume und der Satz von Baire

1.1 Topologische Räume und stetige Abbildungen

Definition 1 *Sei X eine Menge und $\mathcal{T}$ eine Menge von Teilmengen von X, das heisst also $\mathcal{T} \subset Pot(X)$.*

$\mathcal{T}$ heisst Topologie auf X, falls gelten:

1) $\emptyset \in \mathcal{T}$ und $X \in \mathcal{T}$

2) Ist $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ eine beliebige Familie[1] in $\mathcal{T}$, so gilt

$$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda \in \mathcal{T}$$

3) Sind $U_1, U_2, \ldots, U_N \in \mathcal{T}$, so gilt

$$\bigcap_{n=1}^{N} U_n \in \mathcal{T}.$$

In diesem Fall heisst $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum.

Die Elemente von $\mathcal{T}$ heissen offene Mengen in X.

Eine Teilmenge $A \subset X$ heisst abgeschlossen in X, falls $X \backslash A \in \mathcal{T}$.

Eine Menge $B \subset X$ heisst Umgebung eines Punktes $b \in X$, falls B eine offene Menge enthält, die b enthält.

Definition 2 *Sei X ein topologischer Raum, und $Y \subset X$ eine Teilmenge. Die Topologie auf X induziert eine Topologie auf Y, die sogenannte Teilraumtopologie auf Y, durch folgende Vorschrift:*

$V \subset Y$ offen $:\Leftrightarrow$ Es gibt ein offenes $U \subset X$ mit $V = Y \cap U$.

Redet man von offenen (oder abgeschlossenen) Mengen, so muss man dazu sagen, in welchem Raum man arbeitet. Versieht man zum Beispiel $\mathbb{R}$ mit der Normtopologie (siehe unten), so ist $[0, 1]$ nicht offen in $\mathbb{R}$, aber offen in $[0, 1]$.

Beispiel 3 1) Ist X eine Menge, so heisst $\mathcal{T} := \{\emptyset, X\}$ die gröbste Topologie auf X, und $\mathcal{T} := Pot(X)$ (Potenzmenge von X) die feinste (oder diskrete) Topologie auf X.

2) Mit $\mathbb{K}$ bezeichnen wir den Raum $\mathbb{R}$ der reellen oder den Raum $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen.

Ist $X = \mathbb{K}^n$ mit der euklidischen Norm $\|\cdot\|$, so ist durch

$$U \subset \mathbb{K}^n \text{ offen} :\Leftrightarrow \quad \text{zu jedem } x \in U \text{ gibt es ein } \varepsilon > 0 \text{ mit } \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|y - x\| < \varepsilon\} \subset U$$

[1] Eine Familie in $\mathcal{T}$ besteht aus einer Indexmenge Λ und einer Abbildung $\Lambda \to \mathcal{T}$, die einem $\lambda \in \Lambda$ die Menge $U_\lambda \in \mathcal{T}$ zuordnet.

eine Topologie auf $\mathbb{K}^n$ erklärt, die sogenannte Normtopologie auf $\mathbb{K}^n$. Falls nichts anderes gesagt wird versehen wir $\mathbb{K}^n$ stets mit dieser Topologie.

3) Seien $a < b$ reelle Zahlen, und

$$X := \{f : [a,b] \to \mathbb{R} \,|\, f \text{ ist Riemann-integrierbar}\}.$$

Für $f \in X$, $\varepsilon > 0$ und $t \in [a,b]$ definiere

$$U_{t,\varepsilon}(f) := \{g \in X \,|\, |g(t) - f(t)| < \varepsilon\}.$$

Eine Menge $V \subset X$ heisse offen, falls es zu jedem $v \in V$ ein $\varepsilon > 0$ und endlich viele $t_1 < t_2 < \ldots < t_N \in [a,b]$ gibt mit

$$\bigcap_{j=1}^{N} U_{t_j,\varepsilon}(v) \subset V.$$

Das definiert tatsächlich eine Topologie auf X. Ausserdem sind die Mengen $U_{t,\varepsilon}(f)$ offen in X: Denn sei $v \in U_{t,\varepsilon}(f)$, also $|f(t) - v(t)| < \varepsilon$.
Setze $\delta = \varepsilon - |f(t) - v(t)|$, dann ist $U_{t,\delta}(v) \subset U_{t,\varepsilon}(f)$.

Eine "typische" Nullumgebung in X ist ein Menge der Gestalt

$$\{g \in X \,|\, |g(t_j)| < \varepsilon \text{ für alle } 1 \leq j \leq N\}$$

mit beliebigen $\varepsilon > 0$ und $t_1 < t_2 < \ldots < t_N \in [a,b]$, das heisst also dass jede Nullumgebung in X eine Menge dieser Gestalt enthält. Die Mengen dieser Gestalt bilden also eine Umgebungsbasis der Null in X (also eine Nullumgebungsbasis):

Definition 4 *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $t \in X$.*

Eine Familie von (nicht unbedingt offenen) Umgebungen von t heisst Umgebungsbasis von t, falls jede Umgebung von t Obermenge einer Menge der Familie ist.

Man sagt, dass X das erste Abzählbarkeitsaxiom erfüllt, falls jeder Punkt in X eine abzählbare Umgebungsbasis besitzt.

Definition 5 *Seien X, Y topologische Räume, und $f : X \to Y$ eine Abbildung.*

1) *Sei $x \in X$. f heisst stetig in x, falls gilt:*

   Ist $V \in Y$ eine Umgebung von $f(x)$, so ist $f^{-1}(V) \subset X$ eine Umgebung von x.

2) *f heisst stetig, falls f stetig in jedem Punkt ist.*

f ist genau dann stetig, falls das Urbild jeder offenen Menge wieder offen ist.

Trägt Y die gröbste Topologie, so ist f immer stetig.

Ist X zusammenhängend und trägt Y die feinste Topologie, so ist f genau dann stetig, falls f konstant ist. (Ein topologischer Raum heisst zusammenhängend, falls er sich nicht als disjunkte Vereinigung zweier nichtleerer offener Mengen darstellen lässt).

Definition 6 *Sei X ein topologischer Raum, und $M \subset X$ eine Teilmenge.*

1) *Ein Punkt $x \in X$ heisst Berührungspunkt von M, falls in jeder Umgebung von x ein Punkt aus M liegt. Der Abschluss $\overline{M}$ von M besteht aus allen Berührungspunkten von M.*

2) *Ein Punkt $x \in X$ heisst Häufungspunkt von M, falls in jeder Umgebung von x ein von x verschiedener Punkt aus M liegt.*

3) *Ein Punkt $x \in M$ heisst innerer Punkt von M, falls es eine ganz in M liegende Umgebung von x gibt. Das Innere M^0 von M besteht aus allen Inneren Punkten von M.*

Definition 7 *Sei X ein topologischer Raum, $x \in X$ und $(x_n)_n$ eine Folge in X.*

1) *x heisst Häufungspunkt der Folge, falls in jeder Umgebung von x unendlich viele Folgenglieder liegen.*

2) *x heisst Grenzwert (oder Limes) der Folge, falls in jeder Umgebung von x fast alle Folgenglieder liegen (d.h. alle bis auf endlich viele Ausnahmen).*

Die Begriffe "Häufungspunkt einer Folge" und "Häufungspunkt einer Menge" gehören wohlunterschieden : Ein Häufungspunkt einer Folge muss nicht Häufungspunkt der Menge der Folgenglieder sein. Die Folge $(0, 1, 1, 1, 1, \ldots)$ in $\mathbb{R}$ hat 1 als Häufungspunkt, aber die Menge der Folgenglieder nicht.

In beliebigen topologischen Räumen kann es Folgen mit mehreren Grenzwerten geben : Im Raum $\mathbb{R}$ mit der gröbsten Topologie konvergiert jede Folge gegen jeden Grenzwert. Wir betrachten in Zukunft meistens Hausdorffräume, in denen der Grenzwert einer Folge im Falle der Existenz eindeutig bestimmt ist.

Definition 8 *Sei X ein topologischer Raum. Er heisst Hausdorffraum (oder separiert), falls gilt: Sind $x, y \in X$ zwei verschiedene Punkte aus X, so gibt es disjunkte Umgebungen von x und y.*

Ist $(x_n)_n$ eine Folge im Hausdorffraum X mit Grenzwert $x \in X$, so schreibe

$$\lim_n x_n = x.$$

Wir geben ein Beispiel, dass das Folgenkriterium für Stetigkeit nicht immer gilt:

Beispiel 9 Sei X der Raum aus Beispiel $3_{3)}$. X ist hausdorffsch : Denn seien $f, g \in X$ mit $f \neq g$. Also gibt es ein $t_0 \in [a,b]$ mit

$$\varepsilon := \frac{|f(t_0) - g(t_0)|}{2} > 0.$$

Dann sind die Umgebungen $U_{t_0,\varepsilon}(f)$ von f und $U_{t_0,\varepsilon}(g)$ von g disjunkt.

Wir betrachten die Abbildung

$$\begin{aligned} F : X &\to \mathbb{R} \\ F(f) &= \frac{1}{\max\{\|f\|_\infty, 1\}} \int_a^b f(s)\,ds, \end{aligned}$$

wobei $\|f\|_\infty := \sup_{a \leq t \leq b} |f(t)|$ die Supremumsnorm bedeutet.

Ist dann $(f_n)_n$ eine Nullfolge in X, so gilt $\lim_n F(f_n) = 0$, aber F ist unstetig in 0.

Aus dem folgenden Satz schliessen wir, dass X das erste Abzählbarkeitsaxiom nicht erfüllt.

Wir zeigen zuerst, dass F unstetig in 0 ist. Sei $\varepsilon \in (0, b-a)$, und sei F stetig in 0. Dann ist $F^{-1}(-\varepsilon, \varepsilon)$ eine Nullumgebung in X, also gibt es ein $\delta > 0$ und Zahlen $t_1 < t_2 < \ldots < t_N \in [a,b]$ mit

$$\{h \in X \mid |h(t_j)| < \delta \text{ für } 1 \leq j \leq N\} \subset F^{-1}(-\varepsilon, \varepsilon).$$

Die Funktion

$$h(t) = \begin{cases} 0 & \text{falls } t = t_j \text{ für ein } j \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

zeigt aber, dass obige Inklusion nicht wahr sein kann, denn $|F(h)| = b - a > \varepsilon$. Also ist F unstetig in 0.

Ist nun $(f_n)_n$ eine Nullfolge in X, so konvergiert $(f_n)_n$ punktweise gegen 0 (warum?). Der Satz von der dominierten Konvergenz, angewendet auf die Funktionenfolge

$$g_n := \frac{f_n}{\max\{\|f_n\|_\infty, 1\}}$$

zeigt $\lim_n F(f_n) = 0$.

Satz 10 *Seien X, Y Hausdorffräume, $x \in X$ und $f : X \to Y$ eine Abbildung. X erfülle das erste Abzählbarkeitsaxiom.*

Es sind äquivalent:

1) f ist stetig in x.

2) Ist $(x_n)_n$ eine Folge in X mit Grenzwert x, so ist $(f(x_n))_n$ eine Folge mit Grenzwert $f(x)$.

Beweis

Übrigens gilt dieser Satz auch in Räumen, die nicht hausdorffsch sind.

1)⇒2) Sei $(x_n)_n$ eine Folge in X mit $\lim_n x_n = x$, und sei $U \subset Y$ eine Umgebung von $f(x)$.

Dann ist $f^{-1}(U) \subset X$ eine Umgebung von x, also gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $x_n \in f^{-1}(U)$ für alle $k > N$. Für diese k gilt dann $f(x_n) \in U$, also gilt $\lim_n f(x_n) = f(x)$.

2)⇒1) Sei f unstetig in x. Wir konstruieren eine Folge $(x_n)_n$ in X mit $\lim_n x_n = x$, so dass $(f(x_n))_n$ nicht gegen $f(x)$ konvergiert.

Sei $(U_n)_n$ eine abzählbare Umgebungsbasis von x mit $U_{n+1} \subset U_n$ für alle n, und sei $V \subset Y$ eine Umgebung von $f(x)$, so dass $f^{-1}(V)$ keine Umgebung von x ist. Also ist kein U_n in $f^{-1}(V)$ enthalten, das heisst es gibt Punkte $x_n \in U_n \cap \big(X \backslash f^{-1}(V)\big)$.

Es gilt $\lim_n x_n = x$: Denn ist $A \subset X$ eine Umgebung von x, so ist $U_k \subset A$ für ein k, und wegen $U_{n+1} \subset U_n$ gilt dann $x_n \in A$ für alle $n \geq k$.

Die Folge $(f(x_n))_n$ konvergiert aber nicht gegen $f(x)$, weil die Umgebung V von $f(x)$ keinen der Punkte $f(x_n)$ enthält : Tatsächlich ist

$$f(x_n) \in f(U_n \cap \big(X \backslash f^{-1}(V)\big)) = f(U_n \cap \big(f^{-1}(Y \backslash V)\big)) \subset f(U_n) \cap (Y \backslash V)\,.$$

≡

Wie in Satz 10 gelten die Folgenkriterien für "Häufungspunkt einer Folge" und "Berührungspunkt einer Menge" nur in Räumen, die das erste Abzählbarkeitsaxiom erfüllen.

Genauer gilt der

Satz 11 *Sei X ein topologischer Raum, der das erste Abzählbarkeitsaxiom erfüllt. Dann gelten*

1) *Ist $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ eine Folge in X, so ist $x \in X$ genau dann ein Häufungspunkt der Folge, falls sie eine gegen x konvergente Teilfolge enthält.*

2) *Ist $M \subset X$ eine Teilmenge, so ist $x \in X$ genau dann ein Berührungspunkt von M, falls es eine Folge in M gibt, die gegen x konvergiert.*

≡

Definition 12 *Sei X ein topologischer Raum und $M \subset X$ eine Teilmenge.*

1) *M heisst nirgends dicht (in X), falls $\overline{M}^o = \emptyset$, d.h. falls der Abschluss von M keine inneren Punkte enthält.*

2) *M heisst mager (in X), falls M die abzählbare Vereinigung nirgends dichter Mengen ist. Solche Mengen heissen auch von erster Kategorie (in X).*

3) *M heisst von zweiter Kategorie (in X), falls M nicht mager ist.*

4) *M heisst dicht (in X), falls $\overline{M} = X$.*

Die Bezeichnung "nirgends dicht" kommt daher, dass eine nirgends dichte Menge in keiner offenen Menge dicht ist. Genauer gilt

Lemma 13 *Sei X ein topologischer Raum und $M \subset X$ eine Teilmenge. Dann sind äquivalent*

1) M ist nirgends dicht in X.

2) Jede offene, nichtleere Menge $U \subset X$ enthält eine nichtleere, offene Menge $V \subset U$ mit $V \cap M = \emptyset$.

Beweis 1)⇒2) Sei $\emptyset \neq U \subset X$ offen. Dann ist $V := U \backslash \overline{M}$ offen in U (oder in X), und $V \cap M = \emptyset$.

Zeige noch $V \neq \emptyset$: Wäre $V = \emptyset$, so wäre $U \subset \overline{M}$, also $U = U^0 \subset (\overline{M})^0 = \emptyset$, also $U = \emptyset$, Widerspruch.

2)⇒1) Sei $U := (\overline{M})^0$ nicht leer. Nach Voraussetzung gibt es ein eine offene, nicht leere Menge $V \subset U$ mit $V \cap M = \emptyset$.

Aus $V \subset \overline{M} \backslash M$ folgt $V = V^0 \subset (\overline{M} \backslash M)^0$, es ist aber $(\overline{M} \backslash M)^0 = \emptyset$ (letzteres gilt sogar für beliebige Teilmengen $M \subset X$). Also $V = \emptyset$, Widerspruch.

$\equiv$

Wie bei der Bezeichnung "offen" ist es wichtig, in welchem Raum eine Menge "mager" (oder "nirgends dicht"...) ist. Zum Beispiel ist $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ mager ($\mathbb{C}$ mit der Normtopologie), aber $\mathbb{R} \subset \mathbb{R}$ nicht. Die letzte Aussage ist eine Folgerung aus dem Satz von Baire (siehe unten).

Lemma 14 *Sei X ein topologischer Raum, und $M \subset X$ eine Teilmenge. Dann gelten*

1) M nirgends dicht in $X \Rightarrow X \backslash M$ dicht in X.

2) M offen und dicht in $X \Rightarrow X \backslash M$ nirgends dicht in X.

Beweis 1) Zeige $\overline{X \backslash M} = X$. Sei also $x \in X$ und $U \subset X$ eine offene Umgebung von x. Zu zeigen ist $U \cap (X \backslash M) \neq \emptyset$. Wäre aber $U \cap (X \backslash M) = \emptyset$, so wäre $U \subset M$ und daher

$$\emptyset \neq U = U^0 \subset \overline{U}^0 \subset \overline{M}^0,$$

also $\overline{M}^0 \neq \emptyset$, Widerspruch.

2) Es gilt

$$\overline{X \backslash M}^0 = (X \backslash M)^0 = X \backslash \overline{M} = \emptyset,$$

also ist $X \backslash M$ nirgends dicht in X.

$\equiv$

Lemma 15 *Sei X ein topologischer Raum. Dann gelten*

1) Ist M von zweiter Kategorie in X und N eine Obermenge von M, so ist auch N von zweiter Kategorie in X.

2) Ist M mager [nirgends dicht] in X und P eine Teilmenge von M, so ist auch P mager [nirgends dicht] in X.

3) Die abzählbare Vereinigung von in X mageren Mengen ist wieder mager in X.

Beweis 2) Sei zunächst M nirgends dicht in X, und $P \subset M$. Dann $\overline{P}^0 \subset \overline{M}^0 = \emptyset$.

Jetzt sei M mager in X, und $P \subset M$. Also $M = \cup_n A_n$ mit nirgends dichten Teilmengen $A_n \subset X$. Wegen

$$P = P \cap M = \bigcup_n P \cap A_n$$

und

$$\overline{P \cap A_n}^0 \subset \overline{A_n}^0 = \emptyset$$

ist dann auch P mager in X.

1) Wäre N mager, so auch M.

3) ist klar.

$\equiv$

1.2 Metrische Räume

Metrische Räume sind Mengen mit einem Abstandbegriff. Die Metrik erzeugt dann eine Topologie, so dass metrische Räume immer auch topologische Räume sind.

Definition 16 *Sei X eine Menge. Eine Abbildung $d : X \times X \to [0, \infty)$ heisst Metrik auf X, falls für alle $x, y, z \in X$ gelten:*

1) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

2) $d(x, y) = d(y, x)$

3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (Dreiecksungleichung)

In diesem Fall heisst (X, d) ein metrischer Raum.

Ist (X, d) ein metrischer Raum, so erklärt man eine Topologie auf X folgendermassen:

Eine Menge $U \subset X$ heisst offen, falls es zu jedem $x \in U$ ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass die Kugel

$$U_\varepsilon(x) := \{y \in X \mid d(x, y) < \varepsilon\}$$

ganz in U liegt.

Diese Topologie ist immer hausdorffsch und erfüllt das erste Abzählbarkeitsaxiom.

Die Mengen $U_\varepsilon(x)$ sind für $\varepsilon > 0$ und $x \in X$ selbst offen.
Man beachte : Im allgemeinen gilt

$$\overline{U_\varepsilon(x)} \subset D_\varepsilon(x) := \{y \in X \,|\, d(x,y) \leq \varepsilon\}.$$

So wird zum Beispiel die diskrete Topologie auf einer Menge X durch die Metrik

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x = y \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

induziert. Ist nun $x \in X$ und $\varepsilon > 0$, so gilt stets $\overline{U_\varepsilon(x)} = U_\varepsilon(x)$. Insbesondere ist $\overline{U_1(x)} = \{x\}$ und $D_1(x) = X$.

Mengen der Form $D_\varepsilon(x)$ mit $\varepsilon \geq 0$ und $x \in X$ heissen abgeschlossene Kugeln in X. Diese Mengen sind tatsächlich abgeschlossen, das heisst $X \backslash D_\varepsilon(x)$ ist offen in X.

Das folgende Lemma ist leicht zu beweisen.

Lemma 17 *Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume.*
Dann gelten

1) *Eine Folge $(x_n)_n$ konvergiert genau dann gegen $x \in X$, falls $\lim_n d_X(x, x_n) = 0$.*

2) *Eine Funktion $f : X \to Y$ ist genau dann stetig in $x \in X$, falls gilt: Ist $(x_n)_n$ eine Folge in X mit Grenzwert x, so ist $(f(x_n))_n$ eine Folge mit Grenzwert $f(x)$.*

$\equiv$

Lemma 18 *Sei (X, d) ein metrischer Raum, und $M \subset X$ eine Teilmenge.*
Dann sind äquivalent

1) *M ist nirgends dicht in X.*

2) *Jede offene Kugel $U_\varepsilon(x)$ mit $\varepsilon > 0$ und $x \in X$ enthält eine abgeschlossene Kugel $D_\delta(y)$ mit geeigneten $\delta > 0$ und $y \in X$ so dass $D_\delta(y) \cap M = \emptyset$.*

Beweis 1)$\Rightarrow$2) Nach lemma 13 enthält $U_\varepsilon(x)$ eine nichtleere, offene Menge $V \subset U_\varepsilon(x)$ mit $V \cap M = \emptyset$.

Nach der Definition von "offen" in metrischen Räumen enthält V eine Kugel $U_\mu(y)$ mit geeigneten $\mu > 0$ and $y \in X$. Wähle $\delta := \mu/2$.

2)$\Rightarrow$1) Benutze Lemma 13. Sei also $U \subset X$ offen und nichtleer. U enthält eine Kugel $U_\varepsilon(x)$ mit geeigneten $\varepsilon > 0$ und $x \in X$. Nach Voraussetzung enthält $U_\varepsilon(x)$ eine Kugel $D_\delta(y)$ mit geeigneten $\delta > 0$ und $y \in X$ so dass $D_\delta(y) \cap M = \emptyset$. Wähle $V := U_\delta(y)$ und wende Lemma 13 an.

$\equiv$

Definition 19 *Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Folge $(x_n)_n$ heisst Cauchyfolge, falls gilt:*

Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ für alle $n, m > N$.

X heisst vollständig, falls jede Cauchyfolge einen Grenzwert in X besitzt.

Bemerkung 20 Wenn man nachweisen will, dass ein gegebener metrischer Raum (X, d) vollständig ist, muss man folgende Schritte durchfüren:

1) Wähle eine Cauchyfolge $(x_n)_n$ in X.

2) Finde einen Kandidaten $x \in X$, der für den Limes von $(x_n)_n$ in Frage kommt.

3) Zeige $\lim_n d(x, x_n) = 0$.

Ein oft gemachter Fehler ist, dass man den dritten Schritt vergisst!

Lemma 21 *Sei X ein metrischer Raum, und $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ eine Cauchyfolge in X, die eine gegen $x \in X$ konvergierende Teilfolge besitzt.*

Dann $\lim_n x_n = x$.

Beweis Es gibt also eine Teilfolge $(x_{k_n})_n$, die gegen x konvergiert. Ist $\varepsilon > 0$, so gibt es ein N_0 mit $d(x_{k_n}, x) < \varepsilon/2$ für alle $n > N_0$.

Da $(x_n)_n$ eine Cauchyfolge ist, gibt es ein N_1 mit $d(x_l, x_m) < \varepsilon/2$ für alle $l, m > N_1$.

Ist nun $l > N_1$, so wähle $n > N_0$ so dass $k_n > N_1$.

Dann
$$d(x_l, x) \leq d(x_l, x_{k_n}) + d(x_{k_n}, x) < \varepsilon.$$

$\equiv$

Bemerkung Wir betrachten $\mathbb{R}$ mit zwei Metriken

$$\begin{aligned} d : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ d(x, y) &= |\arctan x - \arctan y| \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} d_2 : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ d(x, y) &= |x - y|. \end{aligned}$$

Diese Metriken erzeugen dieselbe Topologie auf $\mathbb{R}$, nämlich die Normtopologie. Topologisch sind $(\mathbb{R}, d)$ und $(\mathbb{R}, d_2)$ also ununterscheidbar.

Aber $(\mathbb{R}, d_2)$ ist vollständig nach Bolzano-Weierstrass, $(\mathbb{R}, d)$ hingegen nicht. Vollständigkeit ist also kein topologischer Begriff.

Beispiel 22 Wir bringen ein interessantes Beispiel einer mageren Menge im Raum

$$X := \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \,|\, f \text{ ist stetig , und } f(t) = 0 \text{ für } t \in (-\infty, 0] \cup [1, \infty)\}$$

mit der Metrik
$$d(f,g) := \sup_{0\le t\le 1} |f(t)-g(t)|.$$

Zunächst zeigen wir, dass X vollständig ist (obwohl wir das für das eigentliche Beispiel nicht brauchen).

Sei nämlich $(f_n)_n$ eine Cauchyfolge in X. Nach Definition der Metrik d bedeutet das, dass die Folge gleichmässig konvergiert, nach Analysis I konvergiert die Folge also gleichmässig gegen eine stetige Funktion $f \in X$ (das ist der Kandidat für den Grenzwert).

Schliesslich gilt $\lim_n d(f_n, f) = 0$, also ist X vollständig.

Nun zum eigentlichen Beispiel, das von Banach (1931) stammt und zeigt, dass Mathematik und Anschauung oft weit auseinanderklaffen.

Wir betrachten die Teilmenge

$$M := \{f \in X \mid \text{Es gibt ein } t \in [0,1], \text{ so dass } f \text{ in } t \text{ differenzierbar ist.}\}$$

Sie werden Schwierigkeiten haben eine Funktion $f \in X$ zu finden, die nicht in M liegt. Rein anschaulich ist die Menge M also "gross".

Seltsamerweise ist die Menge M aber mager in X, das heisst es gibt nirgends dichte Mengen A_n in X mit $M \subset \bigcup_n A_n$:

Für $n \in \mathbb{N}^+$ definieren wir

$$A_n := \{f \in X \mid \text{Es gibt ein } t \in [0,1] \text{ mit } \sup_{h\neq 0} \left|\frac{f(t+h)-f(t)}{h}\right| \le n\}.$$

Dann gilt $M \subset \bigcup_{n\ge 1} A_n$ (wieso?).

Zuerst bemerken wir, dass es zu jedem $f \in X$, jedem $n \in \mathbb{N}^+$ und jedem $\varepsilon > 0$ einen Polygonzug $p : [0,1] \to \mathbb{R}$ gibt mit

i) $p(0) = p(1) = 0$

ii) $\sup_{0\le t\le 1} |p(t) - f(t)| < \varepsilon$

iii) Der Betrag der Steigung jeder Teilstrecke des Polygonzuges ist grösser als n.

(Das beweisen wir nicht.)

Jetzt zeigen wir, dass jedes A_n abgeschlossen in X ist.

Dazu sei $n \in \mathbb{N}^+$, und $(f_k)_{k=1}^\infty$ eine Folge in A_n, die gegen ein $f \in X$ konvergiert. Wir zeigen $f \in A_n$.

Es gibt Zahlen $t_k \in [0,1]$ mit

$$|f_k(t_k+h) - f_k(t_k)| \le n|h| \quad \text{für alle } h \in \mathbb{R}.$$

Nach Bolzano-Weierstrass hat $(t_k)_{k=1}^\infty$ eine konvergente Teilfolge. Sei etwa $\lim_{j\to\infty} t_{k_j} = s \in [0,1]$.

Sei $\delta > 0$ und $h \in \mathbb{R}$. Dann gilt für alle $j \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} |f(s+h) - f(s)| &\leq |f(s+h) - f(t_{k_j} + h)| && (1)\\ &+ |f(t_{k_j} + h) - f_{k_j}(t_{k_j} + h)| && (2)\\ &+ |f_{k_j}(t_{k_j} + h) - f_{k_j}(t_{k_j})| && (3)\\ &+ |f_{k_j}(t_{k_j}) - f(t_{k_j})| && (4)\\ &+ |f(t_{k_j}) - f(s)|. && (5) \end{aligned}$$

Für genügend grosse j ist (1)$\leq \delta/4$, da f gleichmässig stetig ist.

Für genügend grosse j ist (2)+(4)$\leq \delta/2$, da $(f_k)_k$ gleichmässig gegen f konvergiert.

Für genügend grosse j ist (5)$\leq \delta/4$, da f stetig ist.

Ausserdem ist (3)$\leq n|h|$ nach Voraussetzung.

Insgesamt haben wir also $|f(s+h) - f(s)| \leq n|h| + \delta$, und da $\delta > 0$ beliebig war

$$|f(s+h) - f(s)| \leq n|h|.$$

Daher ist $f \in A_n$, also ist A_n abgeschlossen.

Kein A_n hat einen Inneren Punkt, denn wäre $f \in A_n$ und $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(f) \subset A_n$, so wähle einen Polygonzug wie oben, der dann nicht in A_n liegt.

Fazit : $\overline{A_n}^0 = A_n^0 = \emptyset$, das heisst alle A_n sind nirgends dicht in X.

Satz 23 *(Schachtelsatz) Sei X ein vollständiger metrischer Raum, $\varepsilon_n \geq 0$, $x_n \in X$, und $(D_{\varepsilon_n}(x_n))_n$ eine Folge von Kugeln mit $D_{\varepsilon_{n+1}}(x_{n+1}) \subset D_{\varepsilon_n}(x_n)$ und $\lim_n \varepsilon_n = 0$.*

Dann besteht $\bigcap_{n=1}^\infty D_{\varepsilon_n}(x_n)$ aus genau einem Punkt.

Beweis Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\varepsilon_n < \varepsilon$ für alle $n > N$. Für $k \in \mathbb{N}_0$ und $n > N$ gilt daher

$$x_{n+k} \in D_{\varepsilon_{n+k}}(x_{n+k}) \subset D_{\varepsilon_n}(x_n),$$

also $d(x_{n+k}, x_n) \leq \varepsilon$.

Daher bilden die Mittelpunkte $(x_n)_n$ eine Cauchyfolge, die wegen der Vollständigkeit von X gegen ein $x \in X$ konvergiert.

Gäbe es ein $n \geq 1$ mit $x \notin D_{\varepsilon_n}(x_n)$, so wäre $\delta := d(x, x_n) - \varepsilon_n > 0$.

Dann also $x_k \notin U_\delta(x)$ für alle $k \geq n$, denn

$$d(x, x_k) \geq d(x, x_n) - d(x_n, x_k) = \delta + \varepsilon_n - d(x_n, x_k) \geq \delta.$$

Also würde $(x_n)_n$ nicht gegen x konvergieren.

Daher

$$x \in \bigcap_{n=1}^\infty D_{\varepsilon_n}(x_n).$$

Schliesslich sei $y \in \bigcap_{n=1}^\infty D_{\varepsilon_n}(x_n)$. Wir zeigen $x = y$.

Es gilt für alle $n \geq 1$

$$d(x,y) \leq d(x,x_n) + d(x_n,y) \leq \varepsilon_n + \varepsilon_n \xrightarrow{n} 0,$$

also $d(x,y) = 0$.

$\equiv$

Bemerkung 24 Der Schachtelsatz gilt nicht falls man "$D_{\varepsilon_n}(x_n)$" durch "$U_{\varepsilon_n}(x_n)$" ersetzt, denn dann muss δ nicht grösser als 0 sein (siehe Beweis des Schachtelsatzes).

Auch die Vollständigkeit von X ist wichtig : Als Gegenbeispiel betrachte $\mathbb{R}$ mit der Metrik $d(x,y) = |\arctan x - \arctan y|$, wähle $x_n = n$ und $\varepsilon_n = \pi/2 - \arctan n$.

Dann $D_{\varepsilon_n}(x_n) = [\tan(2\arctan n - \pi/2), \infty)$.

Satz 25 *(Satz von Baire) Sei X ein vollständiger metrischer Raum, und $U \subset X$ eine Teilmenge mit nicht leerem Inneren.*

Dann ist U von zweiter Kategorie in X.

Beweis Sei U mager in X, also $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$ mit nirgends dichten Mengen $C_n \subset X$.

Wir konstruieren Folgen $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ in X und $(\varepsilon_n)_{n=0}^{\infty}$ in $\mathbb{R}$ auf folgende Weise:

Wähle $x_0 \in U$ und $\varepsilon_0 \in (0,1)$ so klein, dass $U_{\varepsilon_0}(x_0) \subset U$.

Nach Lemma 18 gibt es $\varepsilon_1 \in (0, 2^{-1})$ und $x_1 \in U_{\varepsilon_0}(x_0)$ mit

$$D_{\varepsilon_1}(x_1) \subset U_{\varepsilon_0}(x_0)$$

und

$$D_{\varepsilon_1}(x_1) \cap C_1 = \emptyset.$$

Wir setzen die Folgen induktiv fort:

Sei $k \geq 1$, und seien $\varepsilon_k \in (0, 2^{-k})$ und $x_k \in U_{\varepsilon_{k-1}}(x_{k-1})$ mit

$$D_{\varepsilon_k}(x_k) \subset U_{\varepsilon_{k-1}}(x_{k-1})$$

und

$$D_{\varepsilon_k}(x_k) \cap C_k = \emptyset.$$

Nach Lemma 18 gibt es dann ein $\varepsilon_{k+1} \in (0, 2^{-(k+1)})$ und ein $x_{k+1} \in U_{\varepsilon_k}(x_k)$ mit

$$D_{\varepsilon_{k+1}} \subset U_{\varepsilon_k}(x_k)$$

und

$$D_{\varepsilon_{k+1}} \cap C_{k+1} = \emptyset.$$

Nach dem Schachtelsatz gibt es ein $y \in \bigcap_{k=1}^{\infty} D_{\varepsilon_k}(x_k)$, insbesondere ist $y \in U$.

Es ist aber $y \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n = U$, Widerspruch.

$\equiv$

Bemerkung 26 Umgekehrt gibt es Mengen zweiter Kategorie mit leerem Inneren: Aus $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})$ folgt, dass die irrationalen Zahlen von zweiter Kategorie in $\mathbb{R}$ sind. Denn wären sie mager in $\mathbb{R}$, so wäre $\mathbb{R}$ als Vereinigung zweier magerer Mengen selber mager, was nach dem Satz von Baire nicht sein kann.

(Übrigens folgt aus dieser Überlegung, dass es "mehr" irrationale als rationale Zahlen gibt.)

Wendet man dasselbe Argument auf den Raum X aus Beispiel 22 an, so erhält man die verblüffende Aussage, dass es "mehr" stetige Funktionen gibt, die nirgends differenzierbar sind, als stetige Funktionen, die in wenigstens einem Punkt differenzierbar sind.

Corollar 27 *(vergleiche Lemma 14).*
Sei X ein vollständiger metrischer Raum, und $M \subset X$ mager in X.
Dann ist $X\backslash M$ dicht in X.

Beweis Aus $X = M \cup (X\backslash M)$ folgt mit dem Satz von Baire, dass $X\backslash M$ von zweiter Kategorie in X ist.

Wäre $\overline{X\backslash M} \neq X$, so wäre $B := X\backslash\overline{X\backslash M}$ offen in X und nicht leer, also von zweiter Kategorie in X nach dem Satz von Baire. Es ist aber $B \subset M$, also M von zweiter Kategorie, Widerspruch.

$\equiv$

Corollar 28 *Sei X ein vollständiger metrischer Raum, seien $M_n \subset X$ magere Mengen, und $B_n := X\backslash M_n$.*
Dann ist $\bigcap_n B_n$ dicht in X.

Beweis Es gilt
$$\bigcap_n B_n = \bigcap_n X\backslash M_n = X\backslash \bigcup_n M_n,$$
und $\bigcup_n M_n$ ist mager in X. Die Behauptung folgt mit Corollar 27.

$\equiv$

2 Banachräume und lineare Abbildungen

Erinnerung : $\mathbb{K}$ steht für $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.

Definition 29 *Sei X ein $\mathbb{K}$-Vektorraum.*
Eine Abbildung $\|\cdot\| : X \to [0,\infty)$ heisst Norm auf X, falls für alle $x, y \in X$ und alle $\lambda \in \mathbb{K}$ gelten:

1) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$

3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ *(Dreiecksungleichung)*

In diesem Fall heisst $(X, \|\cdot\|)$ *ein normierter Raum.*
Gilt statt 1) das schwächere

1') $\|x\| \geq 0$, *und* $x = 0 \Rightarrow \|x\| = 0$

so heisst $\|\cdot\|$ *eine Halbnorm auf* X.

Im Gegensatz zu metrischen Räumen ist ein normierter Raum stets ein Vektorraum.

Jeder normierte Raum ist ein metrischer Raum mit der Metrik

$$d(x, y) := \|x - y\|$$

und trägt daher eine natürliche Topologie.

Begriffe wie "offene Menge" oder "Cauchyfolge" in normierten Räumen sind also bereits erklärt.

Lemma 30 *Sei* $(X, \|\cdot\|)$ *ein normierter Raum. Dann ist die Norm stetig.*

Beweis Sei $x \in X$, und $(x_n)_n \subset X$ konvergiere gegen x.

Dann gilt $\big|\|x\| - \|x_n\|\big| \leq \|x - x_n\|$ wegen der Dreiecksungleichung, also $\lim_n \|x_n\| = \|x\|$.

$\equiv$

Definition 31 *Ein vollständiger normierter Raum heisst Banachraum.*

2.1 Beispiele

Beispiel 32 Sei X ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit einer Halbnorm $\|\cdot\|_H$.

Dann ist $N := \{x \in X \,|\, \|x\|_H = 0\}$ ein Untervektorraum von X.

Betrachte den Quotientenraum

$$X/N := \{x + N \,|\, x \in X\}.$$

Die Abbildung

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : X/N &\rightarrow \mathbb{R} \\ \|x + N\| &= \|x\|_H \end{aligned}$$

ist eine Norm auf X/N.

Beweis Tatsächlich ist X/Y ein Vektorraum für jeden Untervektorraum $Y \subset X$, und zwar mit der Addition

$$\begin{aligned} + : X/Y \times X/Y &\rightarrow X/Y \\ (x_1 + Y) + (x_2 + Y) &:= (x_1 + x_2) + Y \end{aligned}$$

und der Skalarmultiplikation

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{K} \times X/Y &\to X/Y \\ \lambda \cdot (x+Y) &:= (\lambda x) + Y. \end{aligned}$$

Man muss hier die Wohldefiniertheit von $+$ und $\cdot$ nachrechnen. Hierzu braucht man, dass Y selber ein Vektorraum ist.

Es gilt $x_1 + Y = x_2 + Y \Leftrightarrow x_1 - x_2 \in Y$.

Jetzt sei $\|\cdot\|_H$ und N wie angegeben. Klar ist, dass N ein Untervektorraum von X ist, also ist X/N ein Vektorraum. Die Wohldefiniertheit und die Normeigenschaften von $\|\cdot\|$ sind leicht nachzuprüfen.

$\equiv$

Beispiel 33 Sei X normiert, und $Y \subset X$ ein abgeschlossener Untervektorraum.

Dann wird der Quotientenraum

$$X/Y := \{x + Y \mid x \in X\}$$

durch

$$\|x + Y\| := \inf\{\|x - y\| \mid y \in Y\}$$

normiert.

Ist ausserdem X vollständig, so auch X/Y.

Die Zahl $\inf\{\|x - y\| \mid y \in Y\}$ heisst Distanz von x zu Y und wird mit $dist(x, Y)$ bezeichnet.

Beweis Zuerst zeigen wir, dass

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : X/Y &\to \mathbb{R} \\ \|x + Y\| &= \inf_{y \in Y} \|x - y\| \end{aligned}$$

wohldefiniert ist.

Ist nämlich $x_1 + Y = x_2 + Y$, so gilt $x_1 - x_2 \in Y$, also

$$\|x_1 + Y\| = \inf_{y \in Y} \|x_1 - y\| = \inf_{y \in Y} \|x_1 - (x_1 - x_2) - y\| = \inf_{y \in Y} \|x_2 - y\| = \|x_2 + Y\|.$$

Jetzt zeige $\|x + Y\| = 0 \Leftrightarrow x + Y = 0$.

Ist $\|x + Y\| = 0$, so gibt es eine Folge $(y_n)_n \subset Y$ mit $\|x - y_n\| \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Da Y abgeschlossen ist, gilt $x \in Y$, also $x + Y = 0$.

Ist umgekehrt $x+Y = 0$, so gilt $x \in Y$, und also $\|x+Y\| = \inf_{y\in Y} \|x-y\| = 0$.

Jetzt zeige $\|\alpha(x + Y)\| = |\alpha| \cdot \|x + Y\|$ für alle $\alpha \in \mathbb{K}$ und alle $x \in X$.

Ohne Einschränkung ist $\alpha \neq 0$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \|\alpha(x + Y)\| &= \|\alpha x + Y\| \\ &= \inf_{y \in Y} \|\alpha x - y\| \\ &= \inf_{y \in Y} \|\alpha x - \alpha y\| \\ &= |\alpha| \cdot \inf_{y \in Y} \|x - y\| \\ &= |\alpha| \cdot \|x + Y\|. \end{aligned}$$

Jetzt zeige die Dreiecksungleichung. Sind $x, w \in X$, so gilt

$$\begin{aligned}
\|(x+Y)+(w+Y)\| &= \|x+w+Y\| \\
&= \inf_{y\in Y} \|x+w-y\| \\
&= \inf_{y,y'\in Y} \|x-y'+w-y\| \\
&\leq \inf_{y,y'\in Y} \|x-y'\|+\|w-y\| \\
&= \inf_{y'\in Y} \|x-y'\| + \inf_{y\in Y} \|w-y\| \\
&= \|x+Y\|+\|w+Y\|.
\end{aligned}$$

Also ist X/Y tatsächlich ein normierter Raum.

Jetzt sei X vollständig. Wir zeigen, dass dann auch X/Y vollständig ist.

Sei also $(x_n+Y)_{n=1}^{\infty}$ eine Cauchyfolge in X/Y.

Dann gibt es eine Folge $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$ natürlicher Zahlen mit

$$\|x_{n_{k+1}} - x_{n_k} + Y\| < \frac{1}{2^k} \quad \text{für alle } k > 0,$$

nach Definition der Norm in X/Y gibt es eine Folge $(y_k)_{k=1}^{\infty} \subset Y$ mit

$$\|x_{n_{k+1}} - x_{n_k} + y_k\| < \frac{1}{2^k} \quad \text{für alle } k > 0.$$

Die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_{n_{k+1}} - x_{n_k} + y_k$$

ist absolut konvergent, also konvergent, da X vollständig ist. Sei $z \in X$ der Wert dieser Reihe, dann gilt also

$$\begin{aligned}
z &= \sum_{k=1}^{\infty} x_{n_{k+1}} - x_{n_k} + y_k \\
&= \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} x_{n_{k+1}} - x_{n_k} + y_k \\
&= \lim_{m\to\infty} \left(x_{n_{m+1}} - x_{n_1} + \sum_{k=1}^{m} y_k \right).
\end{aligned}$$

Daher, nach der Definition der Norm in X/Y,

$$\left\| x_{n_{m+1}} - x_{n_1} - z + Y \right\| \leq \left\| x_{n_{m+1}} - x_{n_1} - z + \sum_{k=1}^{m} y_k \right\| \xrightarrow{m\to\infty} 0.$$

Das bedeudet

$$x_{n_{m+1}} + Y \xrightarrow{m\to\infty} x_{n_1} + z + Y \quad \text{in } X/Y,$$

also hat $(x_n+Y)_n$ eine konvergente Teilfolge. Die Konvergenz der gesamten Folge folgt aus lemma 21.

$\equiv$

Beispiel 34 $\mathbb{R}$ (oder $\mathbb{R}^n$ oder $\mathbb{C}^n$) ist vollständig mit der euklidischen Norm $\|x\| := |x|$, das heisst mit der Metrik $d(x, y) = |x - y|$..

Beweis Sei $(x_n)_n$ eine Cauchyfolge in $\mathbb{R}$. Dann gibt es ein N_0 mit $|x_n - x_m| < 1$ für alle $n, m \geq N_0$, also $|x_n| \leq 1 + |x_{N_0}|$ für alle $n \geq N_0$. Das heisst also $(x_n)_n$ ist beschränkt.

Nach Bolzano-Weierstrass besitzt $(x_n)_n$ eine konvergente Teilfolge. Jetzt Lemma 21 anwenden.

$\equiv$

Beispiel 35 Der metrische Raum (X, d) aus Beispiel 22 ist normierbar, das heisst es gibt eine Norm $\|\cdot\|$ auf X, die die Metrik d erzeugt.

Tatsächlich tut's $\|f\| = \sup_{0 \leq t \leq 1} |f(t)|$.

Es ist leicht zu zeigen, dass das eine Norm ist.

In Beispiel 22 haben wir schon gezeigt, dass X mit dieser Norm vollständig ist.

Ebenso zeigt man, dass der Vektorraum

$$C([a, b], \mathbb{K}) := \{f : [a, b] \to \mathbb{K} \,|\, f \text{ ist stetig}\}$$

mit der Supremumsnorm

$$\|f\|_\infty := \sup_{a \leq t \leq b} |f(t)|$$

ein Banachraum ist.

Beispiel 36 Mit der Supremumsnorm sind folgende Räume vollständig:

1) $C([a, b], \mathbb{K})$

2) Der Raum der beschränkten, gleichmässig stetigen Funktionen

$$BUC([0, \infty), \mathbb{K}) = \{f : [0, \infty) \to \mathbb{K} \,|\, f \text{ ist beschränkt und gleichmässig stetig}\}$$

"BUC" heisst übrigens "bounded and uniformly contiunuous".

3) Der Raum der beschränkten, stetigen Funktionen

$$BC([0, \infty), \mathbb{K}) = \{f : [0, \infty) \to \mathbb{K} \,|\, f \text{ ist beschränkt und stetig}\}$$

4) Der Raum der stetigen Funktionen, die im Unendlichen verschwinden

$$C_0([0, \infty), \mathbb{K}) = \{f : [0, \infty) \to \mathbb{K} \,|\, f \text{ ist stetig, und } \lim_{t \to \infty} f(t) = 0\}$$

oder auch

$$C_0(\mathbb{R}, \mathbb{K}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{K} \,|\, f \text{ ist stetig, und } \lim_{|t| \to \infty} f(t) = 0\}$$

5) Der Raum der beschränkten, holomorphen Funktionen auf dem offenen Einheitskreis in $\mathbb{C}$

$$H_\infty = \{f : U_1(0) \to \mathbb{C} \,|\, f \text{ ist holomorph und beschränkt}\}$$

Beispiel 37 Der Vektorraum

$$C^1([0,1],\mathbb{R}) := \{f : [0,1] \to \mathbb{R} \,|\, f \text{ ist stetig differenzierbar}\}$$

ist mit der Supremumsnorm nicht vollständig, aber mit der Norm

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : C^1([0,1],\mathbb{R}) &\to \mathbb{R} \\ \|f\| &= \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty \end{aligned}$$

ist er vollständig.

Zum Beweis benutzt man einen bekannten Satz aus Analysis I.

Beispiel 38 Sei $1 \leq p < \infty$, und

$$\ell_p := \left\{ (x_n)_{n=1}^\infty \subset \mathbb{K} \,\middle|\, \sum_{n=1}^\infty |x_n|^p < \infty \right\}$$

der Vektorraum der p-summierbaren Folgen in $\mathbb{K}$.

Mit der Norm

$$\|(x_n)_{n=1}^\infty\| = \left(\sum_{n=1}^\infty |x_n|^p \right)^{1/p}$$

ist ℓ_p ein Banachraum.

Um das zu beweisen braucht man den

Satz 39 *1) (Höldersche Ungleichung) Sei $1 < p < \infty$ und $1/p + 1/q = 1$. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}^+$ und $x, y \in \mathbb{C}^n$*

$$\sum_{k=1}^n |x_k y_k| \leq \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{k=1}^n |y_k|^q \right)^{1/q}.$$

2) (Minkowskische Ungleichung) Sei $1 \leq p < \infty$. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}^+$ und $x, y \in \mathbb{C}^n$

$$\left(\sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^n |y_k|^p \right)^{1/p}.$$

Beweis Höldersche Ungleichung.

1.Schritt : Zeige $x^{1/p} \cdot y^{1/q} \leq x/p + y/q$ für alle $x, y \in [0, \infty)$.

Das ist klar falls $x = 0$ oder $y = 0$. Sei jetzt also $x > 0$ und $y > 0$.

Die Funktion $\ln : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ ist konkav nach Analysis I, denn $\ln''(x) = -1/x^2 < 0$.

Daher gilt für $t \in (0,1)$

$$\ln\big((1-t)x + ty\big) \leq (1-t)\ln x - t\ln y.$$

Setzt man $t := 1/q$, so erhält man

$$\ln(x/p + y/q) \geq \frac{\ln x}{p} + \frac{\ln y}{q},$$

also

$$x/p + y/q \geq e^{\frac{\ln x}{p}} \cdot e^{\frac{\ln y}{q}} = x^{1/p} \cdot y^{1/q}.$$

2.Schritt : Seien $x, y \in \mathbb{C}^n$ mit $x \neq 0$ und $y \neq 0$.

Definiere

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p\right)^{1/p},$$

$$\|y\|_p = \left(\sum_{k=1}^n |y_k|^p\right)^{1/p},$$

$$\alpha_k = \frac{|x_k|^p}{\|x\|_p^p},$$

$$\beta_k = \frac{|y_k|^p}{\|y\|_p^p}.$$

Nach Obigem gilt

$$\frac{|x_k \cdot y_k|}{\|x\|_p \cdot \|y\|_q} = \alpha_k^{1/p} \cdot \beta_k^{1/q} \leq \alpha/p + \beta/q,$$

also

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\|x\|_p \cdot \|y\|_q} \sum_{k=1}^n |x_k y_k| &\leq 1/p \cdot \sum_{k=1}^n \alpha_k + 1/q \cdot \sum_{k=1}^n \beta_k \\
&= 1/p \cdot \frac{1}{\|x\|_p^p} \cdot \sum_{k=1}^n |x_k|^p + 1/q \cdot \frac{1}{\|y\|_q^q} \cdot \sum_{k=1}^n |y_k|^q \\
&= 1/p + 1/q \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Minkowskische Ungleichung.

ObdA ist $1 < p < \infty$. Wähle $q \in (1,\infty)$ mit $1/p + 1/q = 1$. Definiere $z_k = |x_k + y_k|^{p-1}$.

Dann

$$\|z\|_q = \left(\sum_{k=1}^n |z_k|^q\right)^{1/q} = \left(\sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^{q(p-1)}\right)^{1/q} = \|x + y\|_p^{p/q},$$

denn $q(p-1)=p$.

Also

$$\begin{aligned}
\|x+y\|_p^p &= \sum_{k=1}^n |x_k+y_k|^p \\
&= \sum_{k=1}^n |x_k+y_k|\cdot|z_k| \\
&\le \sum_{k=1}^n |x_k z_k| + \sum_{k=1}^n |y_k z_k| \quad \text{nach der Dreiecksungleichung in } \mathbb{R} \\
&\le \|x\|_p\cdot\|z\|_q + \|y\|_p\cdot\|z\|_q \quad \text{wegen der Hölderschen Ungleichung} \\
&= (\|x\|_p+\|y\|_p)\cdot\|x+y\|_p^{p/q}.
\end{aligned}$$

Daher $\|x+y\|_p^{p-p/q} \le \|x\|_p+\|y\|_p$, und wegen $p-p/q=1$ folgt die Behauptung.

$\equiv$

Zurück zu Beispiel 38. Durch Grenzübergang $n\to\infty$ folgt aus der Minkowskischen Ungleichung, dass ℓ_p ein Vektorraum ist, und es folgt die Dreiecksungleichung. Die anderen beiden Normeigenschaften sind leicht zu zeigen.

Jetzt zeigen wir, dass $(\ell_p, \|\cdot\|)$ ein Banachraum ist.

Dazu sei $(x^{(k)})_{k=1}^\infty$ eine Cauchyfolge in ℓ_p. Zu jedem $\varepsilon>0$ gibt es also ein $N_0\in\mathbb{N}$ mit

$$\sum_{k=1}^\infty \left|x_n^{(k)}-x_m^{(k)}\right|^p < \varepsilon$$

für alle $k,m>N_0$.

Insbesondere ist $\left|x_n^{(k)}-x_m^{(k)}\right| < \varepsilon^{1/p}$, für jedes $n\in\mathbb{N}^+$ ist also $(x_n^{(k)})_k$ eine reelle Cauchyfolge, die daher gegen eine Zahl $y_n\in\mathbb{R}$ konvergiert.

Die Folge $y:=(y_1,y_2,\ldots)$ ist in ℓ_p :

Denn die Folge $(x^{(k)})_k$ ist - wie jede Cauchyfolge - beschränkt, es gibt also ein $C>0$ mit

$$\sup_{k\ge1}\sum_{n=1}^\infty \left|x_n^{(k)}\right|^p = C<\infty.$$

Ist nun $N\in\mathbb{N}$, so gilt

$$\sum_{n=1}^N |y_n|^p = \lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^N \left|x_n^{(k)}\right|^p \le \sup_{k\ge1}\sum_{n=1}^N \left|x_n^{(k)}\right|^p = C,$$

also

$$\sum_{n=1}^\infty |y_n|^p \le C,$$

das heisst $y\in\ell_p$.

Die Folge $y \in \ell_p$ ist der Kandidat für den Grenzwert der Folge $(x^{(k)})_k$. Es bleibt zu zeigen, dass $\|y - x^{(k)}\|_p \xrightarrow{k\to\infty} 0$.

Sei $\varepsilon > 0$. Es gibt ein N_0 mit $\|x^{(m)} - x^{(k)}\|_p^p \leq \varepsilon$ für alle $m, k \geq N_0$, insbesondere ist für $k \geq N_0$

$$\sup_{m \geq N_0} \sum_{k=1}^{\infty} \left| x_n^{(m)} - x_n^{(k)} \right|^p \leq \varepsilon.$$

Ist also $k \geq N_0$, so gilt für alle $N \in \mathbb{N}^+$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{N} \left| y_n - x_n^{(k)} \right|^p &= \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \left| x_n^{(m)} - x_n^{(k)} \right|^p \\ &\leq \sup_{m \geq N_0} \sum_{k=1}^{\infty} \left| x_n^{(m)} - x_n^{(k)} \right|^p \\ &\leq \varepsilon, \end{aligned}$$

also

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| y_n - x_n^{(k)} \right|^p \leq \varepsilon \quad \text{für alle } k \geq N_0,$$

das heisst $\|y - x^{(k)}\|_p \xrightarrow{k\to\infty} 0$.

Beispiel 40 Integration in einer Nussschale

Von hier an bis Satz 45 fassen wir die wichtigsten Definitionen und Sätze der Integrationstheorie zusammen. Das ist als Wiederholung gedacht und wird in der Vorlesung nicht mehr besprochen.

Sei $(M, \mathcal{M}, \mu)$ ein Massraum, das heisst M ist eine Menge mit einer Sigma-Algebra $\mathcal{M}$ und einem Mass $\mu : \mathcal{M} \to [0, \infty]$.

(Man stelle sich etwa das Lebesgue-Mass auf $\mathbb{R}$ vor.)

Die Elemente von $\mathcal{M}$ heissen messbare Mengen.

Ist $A \subset M$ eine Teilmenge, so heisst

$$\begin{aligned} \mathbf{1}_A : M &\to \mathbb{R} \\ \mathbf{1}_A(t) &= \begin{cases} 1 \text{ falls } t \in A \\ 0 \text{ sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

die charakteristische Funktion von A.

Sind $M_1, M_2, \ldots, M_n$ paarweis disjunkte messbare Mengen mit $\mu(M_j) < \infty$ für alle j und sind $a_1, a_2, \ldots, a_n$ reelle Zahlen, so heisst die Funktion

$$\begin{aligned} M &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot \mathbf{1}_{M_k}(t) \end{aligned}$$

eine Treppenfunktion.

Die Menge $T(M,\mathbb{R})$ aller Treppenfunktionen ist ein Vektorraum (mit dem üblichen $+$ und $\cdot$ in Funktionenräumen).

Das Integral einer Treppenfunktion $f = \sum_{k=1}^n a_k \cdot \mathbf{1}_{M_k} \in T(M,\mathbb{R})$ ist durch

$$\int_M f\,d\mu := \sum_{k=1}^n a_k \cdot \mu(M_k) \in \mathbb{R}$$

definiert.

Ist $f \in T(M,\mathbb{R})$ und $1 \leq p < \infty$, so ist auch $|f|^p \in T(M,\mathbb{R})$.

Die Abbildung

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_{H,p} : T(M,\mathbb{R}) &\to \mathbb{R} \\ \|f\|_{H,p} &:= \left(\int_M |f|^p\,d\mu\right)^{1/p} \end{aligned}$$

ist eine Halbnorm (aber im allgemeinen keine Norm, deshalb das "H").

Ist $1 \leq p < \infty$, so heisst eine Folge $(f_n)_n \subset T(M,\mathbb{R})$ von Treppenfunktionen eine L_p-Cauchyfolge, falls gilt:

Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein N_0 mit $\|f_n - f_m\|_{H,p} < \varepsilon$ für alle $n, m > N_0$.

Eine Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ heisst p-integrierbar, falls es eine L_p-Cauchyfolge $(f_n)_n$ von Treppenfunktionen gibt, die punktweise fast überall[2] gegen f konvergiert.

In diesem Fall definieren wir

$$\int_M |f|^p\,d\mu := \lim_{n\to\infty} \int_M |f_n|^p\,d\mu \in \mathbb{R}.$$

Man beachte, dass $|f_n|^p$ eine Treppenfunktion ist.

Der Limes existiert und ist unabhängig von der speziellen Wahl der Folge $(f_n)_n$.

Eine 1-integrierbare Funktion heisst auch kurz integrierbar. Ist $f : M \to \mathbb{R}$ integrierbar, so ist neben $\int_M |f|\,d\mu$ auch $\int_M f\,d\mu$ definiert, und zwar durch

$$\int_M f\,d\mu := \lim_{n\to\infty} \int_M f_n\,d\mu \in \mathbb{R},$$

wobei $(f_n)_n \subset T(M,\mathbb{R})$ eine L_1-Cauchyfolge ist, die punktweise fast überall gegen f konvergiert.

Die Menge $\overline{L_p}(M,\mathbb{R})$ aller p-integrierbaren Funktionen ist ein Vektorraum, und

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_{H,p} : \overline{L_p}(M,\mathbb{R}) &\to \mathbb{R} \\ \|f\|_{H,p} &= \left(\int_M |f|^p\,d\mu\right)^{1/p} \end{aligned}$$

[2]das heisst $\mu\{t \in M \mid \lim_{n\to\infty} f_n(t) \neq f(t)\} = 0$.

ist eine Halbnorm auf $\overline{L_p}(M,\mathbb{R})$, aber im allgemeinen keine Norm (hier braucht man die Minkowskische Ungleichung für Integrale, die wir weiter unten angeben).

Definiert man

$$N := \{f \in \overline{L_p}(M,\mathbb{R}) \mid \|f\|_{H,p} = 0\},$$

so ist $L_p(M,\mathbb{R}) := \overline{L_p}(M,\mathbb{R})/N$ also ein Vektorraum, der durch

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_p : L_p(M,\mathbb{R}) &\to \mathbb{R} \\ \|f+N\|_p &:= \left(\int_M |f|^p \, d\mu\right)^{1/p} \end{aligned}$$

normiert wird, siehe Beispiel 32.

Statt $f+N$ schreibt man kurz f. Eine Funktion $f \in L_p(M,\mathbb{R})$ ist also eine Menge, die aus Funktionen besteht, die sich jeweils höchstens auf einer Nullmenge unterscheiden. Die Funktion $f \in \overline{L_p}(M,\mathbb{R})$ heisst Repräsentant von $f+N = f \in L_p(M,\mathbb{R})$.

Wir erinnern an die wichtigsten Sätze in $L_p(M,\mathbb{R})$: Der Satz von der monotonen Konvergenz (Satz von Beppo Levi), der Satz von der dominierten Konvergenz (Satz von Lebesgue), der Satz von der Normkonvergenz sowie die Höldersche und die Minkowskische Ungleichung, die wir nochmals explizit hinschreiben.

Satz 41 *(Satz von der monotonen Konvergenz, oder Satz von Beppo-Levi)*

Sei $(M,\mathcal{M},\mu)$ ein Massraum, und $f_n : M \to \mathbb{R}$ sei eine beschränkte Folge in $L_1(M,\mathbb{R})$ mit $f_n \le f_{n+1}$ fast überall für alle n.

Dann konvergiert $(f_n)_n$ fast überall gegen eine integrierbare Funktion f, und

$$\|f - f_n\|_{L_1} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

$\equiv$

Satz 42 *(Satz von der dominierten Konvergenz, oder Satz von Lebesgue)*

Sei $(M,\mathcal{M},\mu)$ ein Massraum, $1 \le p < \infty$, $(f_n)_n$ eine Folge in $L_p(M,\mathbb{R})$, die fast überall gegen eine Funktion f konvergiert.

Es gebe eine L_p-Funktion $g : M \to \mathbb{R}$ mit $|f_n| \le g$ fast überall für alle n.

Dann ist $f \in L_p(M,\mathbb{R})$, und

$$\|f - f_n\|_{L_p} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

$\equiv$

Satz 43 *(Normkonvergenzsatz)*

Sei $(M,\mathcal{M},\mu)$ ein Massraum, $1 \le p < \infty$, $(f_n)_n$ eine Cauchyfolge in $L_p(M,\mathbb{R})$.

Dann gelten

1) *Es gibt eine Teilfolge von* $(f_n)_n$*, die fast überall konvergiert, und ausserhalb einer Menge beliebig kleinen, positiven Masses sogar gleichmässig.*

2) *Sind* $(f_{k_n})_n$ *und* $(f_{l_n})_n$ *zwei Teilfolgen, die fast überall auf* M *gegen* f *beziehungsweise* g *konvergieren, so stimmen* f *und* g *fast überall überein.*

3) *Ist* $(f_{k_n})_n$ *eine Teilfolge, die fast überall gegen eine Funktion* f *konvergiert, dann ist* f *eine* L_p*-Funktion, und*

$$\|f - f_n\|_{L_p} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

$\equiv$

Satz 44 *Sei* $(M, \mathcal{M}, \mu)$ *ein Massraum.*

1) *(Höldersche Ungleichung) Sei* $1 < p < \infty$ *und* $1/p + 1/q = 1$*,* $f \in L_p(M, \mathbb{R})$ *und* $g \in L_q(M, \mathbb{R})$*.*

   Dann gilt $f \cdot g \in L_1(M, \mathbb{R})$*, und*

$$\int_M |f \cdot g| \, d\mu \leq \left(\int_M |f|^p \, d\mu \right)^{1/p} \cdot \left(\int_M |g|^q \, d\mu \right)^{1/q},$$

   oder kurz

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q.$$

2) *(Minkowskische Ungleichung) Sei* $1 \leq p < \infty$*. Dann gilt für* $f, g \in L_p(M, \mathbb{R})$

$$\left(\int_M |f+g|^p \, d\mu \right)^{1/p} \leq \left(\int_M |f|^p \, d\mu \right)^{1/p} + \left(\int_M |g|^p \, d\mu \right)^{1/p},$$

   oder kurz

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

$\equiv$

Aus dem Satz von der Normkonvergenz folgt sofort der

Satz 45 *Sei* $(M, \mathcal{M}, \mu)$ *ein Massraum und* $1 \leq p < \infty$*. Dann ist* $L_p(M, \mathbb{R})$ *mit der Norm*

$$\|f\|_p = \left(\int_M |f|^p \, d\mu \right)^{1/p}$$

ein Banachraum.

$\equiv$

Definition 46 *Seien* X *und* Y *normiert, und* $T : X \to Y$ *eine lineare Abbildung.*

1) *T heisst isometrisch, falls $\|Tx\| = \|x\|$ für alle $x \in X$.*

2) *T heisst isometrisch isomorph, falls T isometrisch und surjektiv ist.*

Eine Isometrie ist immer injektiv, also eine surjektive Isometrie immer bijektiv.

Gibt es eine surjektive Isometrie zwischen normierten Räumen, so heissen die beiden Räume isometrisch isomorph. In disem Fall entsteht der eine Raum einfach durch Umbenennung der Vektoren des anderen Raumes, sie sind also ununterscheidbar.

Ist $T : X \to Y$ isometrisch, so ist

$$\begin{array}{rcl} \widetilde{T} : X & \to & Im\, T \\ \widetilde{T}x & = & Tx \end{array}$$

isometrisch isomorph, udn ebenso die Umkehrabbildung $\widetilde{T}^{-1}$.

Beispiel 47 *Wir betrachten $M = [1, \infty)$ mit der Sigma-Algebra $\mathcal{M} := Pot\,(M)$ und dem Mass $\mu(A)$:=Anzahl natürlicher Zahlen in A.*

Beachte, dass $\mu(A) = \infty$ möglich ist.

Dann gilt $L_p(M, \mathbb{R}) = \ell_p$ für alle $1 \leq p < \infty$.

Genauer gilt : Die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} T : L_p(M, \mathbb{R}) & \to & \ell_p \\ (Tf)_k & = & f(k) \end{array}$$

ist linear, bijektiv und isometrisch.

Insbesondere folgt Satz 39 aus Satz 44.

Definition 48 *Sei $(M, \mathcal{M}, \mu)$ ein Massraum, und $f : M \to \mathbb{R}$ eine Funktion.*

1) *f heisst messbar, falls es eine Folge $(f_n)_n \subset T(M, \mathbb{R})$ von Treppenfunktionen gibt, die punktweise fast überall[3] gegen f konvergiert.*

2) *Das essentielle Supremum von f ist*

$$\|f\|_\infty := \inf\{C \geq 0 \,|\, \textit{Es gibt eine Nullmenge } N \in \mathcal{M} \textit{ mit } |f(t)| \leq C \textit{ für alle } t \in M \backslash N\}.$$

Man beachte, dass $\|f\|_\infty = \infty$ möglich ist.

Zum Beispiel ist für $1 \leq p < \infty$ jede Funktion $f \in L_p(M, \mathbb{R})$ messbar (genauer ist jeder Repräsentant von f messbar).

Definition 49 *Sei $(M, \mathcal{M}, \mu)$ ein Massraum. Definiere*

$$\overline{L_\infty}(M, \mathbb{R}) := \{f : M \to \mathbb{R} \,|\, f \textit{ ist messbar, und } \|f\|_\infty < \infty\}.$$

Dann ist $\|\cdot\|_\infty$ eine Halbnorm auf $\overline{L_\infty}(M, \mathbb{R})$.

[3]das heisst also ausserhalb einer Nullmenge.

Ist also $N := \{f \in \overline{L_\infty}(M,\mathbb{R}) \mid \|f\|_\infty = 0\}$, *so ist* $L_\infty(M,\mathbb{R}) := \overline{L_\infty}(M,\mathbb{R})/N$ *ein Vektorraum, der durch*

$$\begin{array}{rcl} \|\cdot\|_\infty : L_\infty(M,\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ \|f+N\| & = & \|f\|_\infty \end{array}$$

normiert wird, siehe Beispiel 32.

Statt $f+N$ *schreibt man kurz* f. *Eine Funktion* $f \in L_\infty(M,\mathbb{R})$ *ist also eine Menge, die aus Funktionen besteht, die sich jeweils höchstens auf einer Nullmenge unterscheiden. Die Funktion* $f \in \overline{L_\infty}(M,\mathbb{R})$ *heisst Repräsentant von* $f+N = f \in L_\infty(M,\mathbb{R})$.

Satz 50 *Sei* $(M,\mathcal{M},\mu)$ *ein Massraum. Dann ist* $L_\infty(M,\mathbb{R})$ *mit* $\|\cdot\|_\infty$ *ein Banachraum.*

BEWEIS Wir benutzen einige bekannte Tatsachen aus der Masstheorie.

Sei $(f_n)_n$ eine Cauchyfolge in $L_\infty(M,\mathbb{R})$. Also gibt es zu jedem $l \in \mathbb{N}^+$ ein $k_l \in \mathbb{N}$ und eine Nullmenge $M_l \in \mathcal{M}$ mit

$$|f_n(t) - f_m(t)| \leq l \quad \text{für alle } t \in M \backslash M_l \text{ und alle } n, m \geq k_l.$$

(Hier braucht man, dass die abzählbare Vereinigung von Nullmengen wieder eine Nullmenge ist.)

Definiere $N = \bigcup_{l=1}^\infty M_l$, und $f : M \to \mathbb{R}$ durch

$$f(t) = \begin{cases} \lim_{n\to\infty} f_n(t) & \text{falls } t \in M\backslash N \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Der Limes existiert, da $(f_n(t))_n$ für jedes $t \in M\backslash N$ eine reelle Cauchyfolge ist.

Aus der Masstheorie folgt die Messbarkeit von f, und für $t \in M\backslash N$ und $n \geq k_l$ ist $|f_n(t) - f(t)| \leq 1/l$, also $f \in L_\infty(M,\mathbb{R})$ und $\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

$\equiv$

Bemerkung Mit dem Massraum aus Beispiel 47 sieht man wie dort, dass ℓ_∞ und $L_\infty(M,\mathbb{R})$ isometrisch isomorph sind.

2.2 Lineare Abbildungen

Definition 51 *Seien* X *und* Y *normierte Räume (über demselben Körper* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R},\mathbb{C}\}$*),* $X \neq \{0\}$, *und* $T : X \to Y$ *linear. In diesem Fall nennen wir* T *auch einen (linearen) Operator.*

Dann heisst

$$\|T\| = \sup_{\substack{x\in X\\ x\neq 0}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \sup_{\substack{x\in X\\ \|x\|=1}} \|Tx\| = \sup_{\substack{x\in X\\ \|x\|\leq 1}} \|Tx\| \in [0,\infty]$$

die Operatornorm von T.

Ist $X = \{0\}$, *so setze* $\|T\| = 0$.

T *heisst beschränkt, falls* $\|T\| < \infty$.

Lemma 52 *Seien X und Y normiert, $X \neq \{0\}$, und $T : X \to Y$ linear.*
Dann gilt

$$\sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|=1}} \|Tx\| = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\| \leq 1}} \|Tx\| \in [0, \infty].$$

Beweis Wende die Definition von "Supremum" an.

$\equiv$

Satz 53 *Seien X und Y normiert, und $T : X \to Y$ linear.*
Dann sind äquivalent

1) T ist beschränkt

2) T ist stetig

3) T ist stetig in 0.

Beweis 3)$\Rightarrow$2) Sei $x \in X$, und $(x_n)_n$ eine Folge in X mit Grenzwert x.
Dann

$$Tx_n = T(x_n - x) + Tx \xrightarrow{n \to \infty} Tx,$$

da T stetig in 0 ist.

1)$\Rightarrow$3) Es gilt also $\|Tx\| \leq \|x\| \cdot \|T\| < \infty$ für alle $x \in X$.
Ist nun $(x_n)_n \subset X$ eine Nullfolge, so gilt

$$\|Tx_n\| \leq \|x_n\| \cdot \|T\| \xrightarrow{n \to \infty} 0,$$

also ist T stetig in 0.

2)$\Rightarrow$1) Sei T nicht beschränkt. Dann gibt es eine Folge $(x_n)_n \subset X$ mit $\|x_n\| = 1$ und $\|Tx_n\| \xrightarrow{n \to \infty} \infty$.
Definiere

$$y_n = \frac{x_n}{\sqrt{\|Tx_n\|}}.$$

Dann $\lim_n y_n = 0$, aber

$$\|Ty_n\| = \left\| \frac{Tx_n}{\sqrt{\|Tx_n\|}} \right\| = \sqrt{\|Tx_n\|} \xrightarrow{n \to \infty} \infty.$$

Daher ist T unstetig in 0.

$\equiv$

Beispiel 54 Sei $k : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ stetig, und $X := C([0,1], \mathbb{R})$.
Dann heisst die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} T : X & \to & X \\ (Tx)(t) & = & \displaystyle\int_0^t k(t,\tau)x(\tau)\, d\tau \end{array}$$

ein Volterrascher Integraloperator.

Es ist leicht zu zeigen, dass die Funktion $Tx : [0,1] \to \mathbb{R}$ tatsächlich stetig ist, also ist T wohldefiniert. Ausserdem ist T linear, und

$$\|T\| \leq \max_{0 \leq t \leq 1} \int_0^t |k(t,\tau)| \, d\tau.$$

Beweis : Aufgabe.

Beispiel 55 : Eine unstetige lineare Abbildung.

Wähle $X := C^1([0,1],\mathbb{R})$ und $Y := C([0,1],\mathbb{R})$ beide mit der Supremumsnorm, und definiere

$$\begin{array}{rcl} T : X & \to & Y \\ Tf & = & f' \end{array}$$

Dann ist T unstetig in 0.

Versieht man aber $C^1([0,1]\mathbb{R})$ mit der "richtigen" Norm aus Beispiel 37, so ist T stetig.

Beweis : Aufgabe.

Definition 56 *Seien X und Y normiert. Den Vektorraum aller beschränkten linearen Abbildungen von X nach Y bezeichnen wir mit $\mathcal{L}(X,Y)$.*

Satz 57 *Seien X und Y normiert. Dann ist die Operatornorm*

$$\begin{array}{rcl} \|\cdot\| : \mathcal{L}(X,Y) & \to & \mathbb{R} \\ T & \mapsto & \|T\| \end{array}$$

eine Norm auf $\mathcal{L}(X,Y)$.

Ist Y vollständig, so auch $\mathcal{L}(X,Y)$.

Beweis Die Normeigenschaften sind leicht zu zeigen.

Jetzt sei Y vollständig, und $(T_n)_n$ eine Cauchyfolge in $\mathcal{L}(X,Y)$.

Also gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein N_0 mit $\|T_n - T_m\| \leq \varepsilon$ für alle $m,n > N_0$. Nach Definition der Operatornorm gilt daher

$$\|T_n x - T_m x\| \leq \varepsilon \|x\| \tag{6}$$

für alle $x \in X$ und alle $m,n > N_0$, also ist $(T_n x)_n$ eine Cauchyfolge in Y.

Wir definieren $T : X \to Y$ durch $Tx := \lim_n T_n x$. Das ist eine wohldefinierte und lineare Abbildung.

T ist beschränkt, denn für $x \in X$ gilt

$$\|Tx\| \leq \sup_n \|T_n x\| \leq \|x\| \cdot \sup_n \|T_n\|,$$

also

$$\|T\| \leq \sup_n \|T_n\| < \infty.$$

(beachte, dass $(T_n)_n$ als Cauchyfolge beschränkt ist, also $\sup_n \|T_n\| < \infty$).

T ist der Kandidat für den Grenzwert von $(T_n)_n$. Zeige noch $\|T_n - T\| \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

Wegen der Ungleichung (6) und der Stetigkeit der Norm (Lemma 30) folgt durch Grenzübergang $m \to \infty$

$$\|T_n x - Tx\| \le \varepsilon \|x\|$$

für alle $x \in X$ und alle $n > N_0$,

das heisst $\|T_n - T\| \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

$\equiv$

Beispiel 58 Die Fourier-Transformation

$$\begin{aligned}\mathcal{F} : L_1(\mathbb{R}, \mathbb{C}) &\to BC(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \\ \mathcal{F}f(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ist} f(t)\, dt\end{aligned}$$

ist wohldefiniert, linear, und $\|\mathcal{F}\| \le 1$.

Natürlich sind $L_1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ und $BC(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ mit den Normen $\|\cdot\|_{L_1}$ beziehungsweise $\|\cdot\|_\infty$ versehen.

Beweis Man kann sogar zeigen, dass $\mathcal{F}f \in C_0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ (wir beweisen das jetzt aber nicht.)

Zunächst sehen wir, dass das Integral $\int_{\mathbb{R}} e^{-ist} f(t)\, dt$ für alle $f \in L_1(M, \mathbb{C})$ und alle $s \in \mathbb{R}$ existiert, denn

$$\int_{-\infty}^{\infty} |e^{-ist} f(t)|\, dt = \|f\|_{L_1} < \infty.$$

Weiterhin ist $\mathcal{F}f$ stetig in $s \in \mathbb{R}$. Denn sei $(s_n)_n$ eine Folge in $\mathbb{R}$, die gegen s konvergiert. Dann

$$\mathcal{F}f(s) - \mathcal{F}f(s_n) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{-ist} - e^{-is_n t}\right) f(t)\, dt,$$

und das konvergiert gegen 0 für n gegen ∞ nach dem Satz von der dominierten Konvergenz.

Schliesslich ist $\mathcal{F}f$ beschränkt, denn

$$|\mathcal{F}f(s)| \le \int_{-\infty}^{\infty} \left|e^{-ist} f(t)\right|\, dt = \|f\|_{L_1}$$

für alle $s \in \mathbb{R}$.

Also ist $\mathcal{F}$ ein wohldefinierter, linearer Operator, und $\|\mathcal{F}\| \le 1$ folgt aus

$$\|\mathcal{F}f\| = \sup_{s\in\mathbb{R}} \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ist} f(t)\, dt \right| \le \|f\|_{L_1}.$$

$\equiv$

Beispiel 59 : Die Faltung.

Seien $f, g \in L_1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, wobei $\mathbb{R}$ mit dem Lebesgue-Mass versehen ist.

Dann ist auch die Faltung

$$(f * g)(t) := \int_{-\infty}^{\infty} f(s)g(t-s)\,ds$$

in $L_1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, und $\|f * g\|_{L_1} \leq \|f\|_{L_1} \cdot \|g\|_{L_1}$.

Ist also $f \in L_1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ fest gewählt, so ist

$$\begin{aligned} T_f : L_1(\mathbb{R}, \mathbb{C}) &\rightarrow L_1(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \\ T_f g &= f * g \end{aligned}$$

ein (wohldefinierter, linearer und) beschränkter Operator mit $\|T_f\| \leq \|f\|_{L_1}$.

Ausserdem gilt für alle $f, g \in L_1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$

$$\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}f \cdot \mathcal{F}g.$$

Beweis Sind $f, g \in L_1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, so auch $f * g$, denn

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |f * g(t)|\,dt &\leq \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |f(s)| \cdot |g(t-s)|\,ds\,dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} |f(s)| \cdot \int_{\mathbb{R}} |g(t-s)|\,dt\,ds \quad \text{nach dem Satz von Fubini} \\ &= \int_{\mathbb{R}} |f(s)| \cdot \int_{\mathbb{R}} |g(w)|\,dw\,ds \quad \text{lineare Substitution} \\ &= \int_{\mathbb{R}} |f(s)|\,ds \cdot \int_{\mathbb{R}} |g(w)|\,dw \\ &= \|f\|_{L_1} \cdot \|g\|_{L_1} < \infty. \end{aligned}$$

Also $f * g \in L_1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, und $\|f * g\|_{L_1} \leq \|f\|_{L_1} \cdot \|g\|_{L_1}$.

Daraus folgt sofort $\|T_f\| \leq \|f\|_{L_1}$.

Zeige noch $\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}f * \mathcal{F}g$.

Für $s \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f * g)(s) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-ist}(f * g)(t)\,dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{-ist} \int_{\mathbb{R}} f(w)g(t-w)\,dw\,dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(w) \cdot \int_{\mathbb{R}} e^{-ist} g(t-w)\,dt\,dw \quad \text{nach dem Satz von Fubini} \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(w) \cdot \int_{\mathbb{R}} e^{-is(r+w)} g(r)\,dr\,dw \quad \text{lineare Substitution } r = t - w, dr = dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{-isw} f(w) \cdot \int_{\mathbb{R}} e^{-isr} g(r)\,dr\,dw \\ &= \mathcal{F}f(s) \cdot \mathcal{F}g(s) \end{aligned}$$

$\equiv$

2.3 Der Satz von der offenen Abbildung

Wir erinnern daran, dass eine Abbildung zwischen topologischen Räumen offen heisst, wenn sie offene Mengen auf offene Mengen abbildet.

Definition 60 *Sei X normiert, und $M, N \subset X$ Teilmengen.*

1) Ist $\alpha \in \mathbb{K}$, so $\alpha M := \{\alpha x \,|\, x \in M\}$.

2) Ist $w \in X$, so $w + M := \{w + x \,|\, x \in M\}$.

3) $M + N := \{x_1 + x_2 \,|\, x_1 \in M, x_2 \in N\}$.

4) Ist Y ein weiterer normierter Raum und $T : X \to Y$ eine Abbildung, so $TM := T(M) = \{Tx \,|\, x \in M\}$.

Lemma 61 *Seien X, Y normiert, $T : X \to Y$ linear, und $M \subset X$.*
Dann gelten

1) Falls $m_1, m_2 \in M \Rightarrow \frac{m_1+m_2}{2} \in M$, so gilt

$$\overline{TM} + \overline{TM} \subset 2\overline{TM}.$$

2) $\overline{T(\alpha M)} = \alpha\overline{TM}$ für alle $\alpha \in \mathbb{K}$.

3) $T(\alpha M) = \alpha TM$.

Beweis 1) Seien $x, y \in \overline{TM}$, also gibt es Folgen $(m_k)_k$ und $(n_k)_k$ in M mit $\lim_k Tm_k = x$ und $\lim_k Tn_k = y$.
Dann

$$x + y = 2 \cdot \lim_k T\left(\frac{m_k + n_k}{2}\right) \in 2\overline{TM}.$$

2) Ohne Einschränkung ist $\alpha \neq 0$. Sei $x \in \overline{T(\alpha M)}$, also gibt es eine Folge $(m_k)_k$ in M mit $x = \lim_k T(\alpha m_k)$.
Daher

$$x = \alpha \lim_k T(m_k) \in \alpha\overline{TM};$$

beachten Sie, dass

$$lim_k T(m_k) = \frac{1}{\alpha} \lim_k T(\alpha m_k)$$

existert wegen $\alpha \neq 0$.
3) Ist klar.

$\equiv$

Mit diesen Vorbereitungen beweisen wir jetzt den

Satz 62 *(Satz von der offenen Abbildung)*
Seien X, Y Banachräume, und $T \in \mathcal{L}(X, Y)$.
Dann gelten

1) Ist T surjektiv, so ist T offen.

2) Ist T bijektiv, so ist T^{-1} (linear und) beschränkt.

Beweis Seien U und V die offenen Einheitskugeln in X beziehungsweise Y.

1)

1.Schritt : Finde ein $k \in \mathbb{N}$ und ein $s > 0$ mit $sV \subset \overline{kTU}$.

Aus $X = \cup_{n=1}^{\infty} nU$ folgt $Im\,T = \cup_{n=1}^{\infty} nTU$. Da $Im\,T$ von zweiter Kategorie in Y ist (Satz von Baire!) gibt es ein $k \in \mathbb{N}^+$, so dass kTU nicht mager in Y ist, also nicht nirgends dicht in Y, also $\overline{kTU}^0 \neq \emptyset$.

Daher gibt es ein $y \in Y$ und ein $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(y) \subset \overline{kTU}$.

Wähle $s \in (0, \varepsilon/2)$. Dann $y + 2sV \subset U_\varepsilon(y)$

(denn ist $z \in y + 2sV$, so ist $z = y + 2sv$ für ein $v \in V$, also $\|z - y\| = \|2sv\| = 2s < \varepsilon$).

Also

$$2sV \subset -y + U_\varepsilon(y) \subset -\overline{kTU} + U_\varepsilon(y) \subset -\overline{kTU} + \overline{kTU}.$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned} -\overline{kTU} + \overline{kTU} &= \overline{kT(-U)} + \overline{kTU} \quad \text{nach Lemma 61} \\ &= \overline{kTU} + \overline{kTU} \quad \text{denn } U = -U \\ &= \overline{T(kU)} + \overline{T(kU)} \quad \text{nach Lemma 61} \\ &\subset 2\overline{T(kU)} \quad \text{wieder nach Lemma 61,} \end{aligned}$$

Also $2sV \subset 2\overline{T(kU)}$, das heisst $sV \subset \overline{TkU}$.

Das war der erste Schritt.

2.Schritt : Zeige $sV \subset 3kTU$.

Sei $y_0 \in sV \subset \overline{kTU} = \overline{T(kU)}$.

Das heisst also y_0 ist ein Berührungspunkt von TkU, also gibt es ein $x_1 \in kU$ mit

$$\|y_0 - Tx_1\| < \frac{1}{2}s,$$

das heisst

$$2(y_0 - Tx_1) \in sV.$$

Wegen $sV \subset \overline{TkU}$ ist $2(y_0 - Tx_1)$ ein Berührungspunkt von TkU, also gibt es ein $x_2 \in kU$ mit

$$\|2(y_0 - Tx_1) - Tx_2\| < \frac{1}{2}s,$$

das heisst

$$4(y_0 - Tx_1 - \frac{1}{2}Tx_2) \in sV.$$

Wegen $sV \subset \overline{TkU}$ ist $4(y_0 - Tx_1 - \frac{1}{2}Tx_2)$ ein Berührungspunkt von TkU, also gibt es ein $x_3 \in kU$ mit

$$\|4(y_0 - Tx_1 - \frac{1}{2}Tx_2) - Tx_3\| < \frac{1}{2}s,$$

das heisst

$$8(y_0 - Tx_1 - \frac{1}{2}Tx_2 - \frac{1}{4}Tx_3) \in sV.$$

Ist nun $n \in \mathbb{N}^+$ und sind $x_1, x_2, \ldots, x_n \in kU$ gefunden mit

$$2^j \left(y_o - \sum_{l=1}^{j} \frac{1}{2^{l-1}} Tx_l \right) \in sV \quad \text{für alle } 1 \leq j \leq n,$$

so gibt es ein $x_{n+1} \in kU$ mit

$$\left\| 2^n \left(y_0 - \sum_{l=1}^{j} \frac{1}{2^{l-1}} Tx_l \right) - Tx_{n+1} \right\| < \frac{1}{2} s,$$

das heisst

$$2^{n+1} \left(y_0 - \sum_{l=1}^{n+1} \frac{1}{2^{l-1}} Tx_l \right) \in sV.$$

Wir haben jetzt also eine Folge $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in kU$ mit

$$\left\| y_0 - \sum_{l=1}^{j} \frac{Tx_l}{2^{l-1}} \right\| \leq \frac{s}{2^j} \quad \text{für alle } j \geq 1.$$

Also

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{Tx_l}{2^{l-1}} = \lim_{M \to \infty} \sum_{l=1}^{M} \frac{Tx_l}{2^{l-1}} = y_0.$$

Ausserdem konvergiert die Reihe $x_0 := \sum_l \frac{x_l}{2^{l-1}}$ in X, denn wegen

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{\|x_l\|}{2^{l-1}} \leq \sum_{l=1}^{\infty} \frac{k}{2^{l-1}} \leq 2k$$

konvergiert die Reihe absolut, also ist sie konvergent, da X vollständig ist.

Daraus folgt

$$\|x_0\| \leq \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\|x_l\|}{2^{l-1}} \leq \sum_{l=1}^{\infty} \frac{k}{2^{l-1}} = 2k,$$

also $x \in 2k\overline{U} \subset 3kU$.

Da T stetig und linear ist, gilt

$$Tx_0 = T\left(\lim_{M \to \infty} \sum_{l=1}^{M} \frac{x_l}{2^{l-1}} \right) = \lim_{M \to \infty} \sum_{l=1}^{M} \frac{Tx_l}{2^{l-1}} = y_0,$$

daher $y_0 \in T(3kU) = 3kTU$.

Das war der zweite Schritt.

<u>3.Schriitt :</u> Jetzt zeige, dass TW offen ist in Y ist für jede offene Menge $W \subset X$.

Sei $y \in TW$, etwa $y = Tw$ für ein $w \in W$. Wir zeigen dass y innerer Punkt von TW ist.

Es gibt ein $\delta > 0$ mit $U_\delta(w) \subset W$, da W offen in X ist.

Also

$$U_{\frac{s\delta}{3k}}(y) = y + \frac{s\delta}{3k} V \subset Tw + \delta TU = T(w + \delta U) = TU_\delta(w) \subset TW.$$

das heisst Y ist innerer Punkt von TW. Daher ist TW offen.

Also ist T offen.

2)

Jetzt sei T bijektiv. T^{-1} ist linear (klar), und das Urbild einer offenen Menge in Y unter T^{-1} ist offen in X nach 1). Daher ist T^{-1} stetig.

$\equiv$

Corollar 63 *Sei X ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit zwei Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$, so dass sowohl $(X, \|\cdot\|_1)$ als auch $(X, \|\cdot\|_2)$ Banachräume sind.*

Es gebe ein $\gamma > 0$ mit $\|x\|_1 \leq \gamma \|x\|_2$ für alle $x \in X$.

Dann sind die beiden Normen äquivalent[4]*.*

Beweis Betrachte die lineare Bijektion

$$\begin{aligned} T : (X, \|\cdot\|_2) &\rightarrow (X, \|\cdot\|_1) \\ Tx &= x. \end{aligned}$$

T ist beschränkt, denn für $x \in X$ gilt

$$\|Tx\|_1 \leq \gamma \|Tx\|_2 = \gamma \|x\|_2,$$

also $\|T\| \leq \gamma$.

Nach dem Satz von der offenen Abbildung ist T^{-1} beschränkt, also

$$\|T^{-1}\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|T^{-1}x\|_2}{\|x\|_1} < \infty.$$

Also

$$\|x\|_2 = \|T^{-1}x\|_2 \leq \|T^{-1}\| \cdot \|x\|_1.$$

$\equiv$

Corollar 64 *Sei X ein Banachraum, und seien X_1, X_2 zwei abgeschlossene Unterräume von X mit $X = X_1 \oplus X_2$.*

Dann sind die Projektionen

$$\begin{aligned} P_1 : X &\rightarrow X_1 \\ P_1(x_1 + x_2) &= x_1 \end{aligned}$$

[4] d.h. es gibt ein $\beta > 0$ mit $\frac{1}{\beta}\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \beta \|x\|_2$ für alle $x \in X$.

und

$$\begin{aligned} P_2 : X &\to X_2 \\ P_2(x_1 + x_2) &= x_2 \end{aligned}$$

(linear und) beschränkt.

Beweis Die Linearität ist klar. Zeige die Besachränktheit.

Definiere den Produktraum $Y := X_1 \times X_2$, der mit

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) := (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$$

und

$$\alpha \times (x_1, x_2) := (\alpha \cdot x_1, \alpha \cdot x_2)$$

ein Vektorraum ist.

Eine Norm auf Y ist $\|(x_1, x_2)\| := \|x_1\| + \|x_2\|$.

Da X_1 und X_2 Banachräume sind (sie sind abgeschlossen in einem Banachraum!), ist auch Y ein Banachraum (leicht zu zeigen).

Betrachte den Operator

$$\begin{aligned} T : Y &\to X \\ T(x_1, x_2) &= x_1 + x_2. \end{aligned}$$

T ist linear(?) und bijektiv wegen $X = X_1 \oplus X_2$.

T ist beschränkt, denn für $(x_1, x_2) \in Y$ gilt

$$\|T(x_1, x_2)\| = \|x_1 + x_2\| \leq \|x_1\| + \|x_2\| = \|(x_1, x_2)\|,$$

also $\|T\| \leq 1$.

Nach dem Satz von der offenen Abbildung ist T^{-1} beschränkt, das heisst

$$\begin{aligned} T^{-1} : X = X_1 \oplus X_2 &\to Y \\ x = x_1 + x_2 &\mapsto (x_1, x_2) = (P_1 x, P_2 x) \end{aligned}$$

ist beschränkt.

Also gilt für alle $x \in X$

$$\|P_1 x\| \leq \|P_1 x\| + \|P_2 x\| = \|(P_1 x, P_2 x)\| = \|T^{-1} x\| \leq \|T^{-1}\| \cdot \|x\|,$$

daher $\|P_1\| \leq \|T^{-1}\|$, und analog zeigt man $\|P_2\| \leq \|T^{-1}\|$.

$\equiv$

2.4 Der Satz vom abgeschlossenen Graphen

Betrachten wir nochmals Beispiel 55. Dort war $X = C^1([0,1],\mathbb{R})$ und $Y = C([0,1],\mathbb{R})$ beide mit $\|\cdot\|_\infty$, und der lineare Operator

$$\begin{aligned} T : X &\to Y \\ Tf &= f' \end{aligned}$$

war unstetig, d.h. unbeschränkt.

Die Aussage

"Ist $(x_n)_n$ eine Folge in X mit Grenzwert $x \in X$, so konvergiert $(Tx_n)_n$ gegen Tx"

ist also **falsch**.

Es gilt aber eine schwächere Aussage, nämlich:

Ist $(x_n)_n$ eine Folge in X mit Grenzwert $x \in X$, so dass $(Tx_n)_n$ einen Grenzwert, etwa $y \in Y$, hat, so gilt $Tx = y$. (Beweis : Analysis I)

Man könnte also sagen, dass der Operator "fast stetig" ist. Das hat sich aber nicht eingebürgert; man spricht von abgeschlossenen Operatoren.

Definition 65 *Seien X, Y normiert, $D(A) \subset X$ sei ein Unterraum von X, und $A : D(A) \to Y$ sei linear.*

1) *Die Menge*

$$G(A) := \{(x, Ax) \in X \times Y \,|\, x \in D(A)\} \subset X \times Y$$

heisst der Graph von A.

2) *Der Operator A heisst abgeschlossen, falls $G(A)$ abgeschlossen in $X \times Y$ ist.*

Dabei wird $X \times Y$ mit der Norm $\|(x,y)\|_{X\times Y} := \|x\|_X + \|y\|_Y$ versehen.

Vorsicht Abgeschlossene Operatoren sind also anders definiert als offene Operatoren. Mit anderen Worten : Ein abgeschlossener Operator muss abgeschlossene Mengen **nicht** auf abgeschlossene Mengen abbilden.

Was hat das nun mit dem Operator aus Beispiel 55 zu tun? Die Antwort liefert der

Satz 66 *Seien X, Y normiert, $D(A) \subset X$ ein Unterraum, und $A : D(A) \to X$ linear.*

Dann sind äquivalent

1) *A ist abgeschlossen.*

2) *Ist $(x_n)_n$ eine Folge in $D(A)$ mit Grenzwert $x \in X$ und konvergiert $(Ax_n)_n$ gegen $y \in Y$, so gelten*

   i) $x \in D(A)$

   ii) $Ax = y$.

Beweis 1)$\Rightarrow$2) Nach Voraussetzung ist $G(A)$ also abgeschlossen in $X \times Y$. Mit anderen Worten : Ist $(x_n, Ax_n)_n \subset G(A)$ eine Folge, die gegen ein $(x,y) \in X \times Y$ konvergiert, so gilt $(x,y) \in G(A)$.

Daraus folgt nun 2), denn sei $(x_n)_n$ eine Folge in $D(A)$, $x \in X$ und $y \in Y$ mit $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x$ und $Ax_n \xrightarrow{n\to\infty} y$.

Dann ist $(x_n, Ax_n)_n$ eine Folge in $G(A)$, die in $X \times Y$ gegen (x,y) konvergiert. Also ist $(x,y) \in G(A)$, also $x \in D(A)$ und $y = Ax$.

2)$\Rightarrow$1)Sei $(x_n, Ax_n)_n$ eine Folge in $G(A)$, die gegen ein $(x,y) \in X \times Y$ konvergiert. Zu zeigen ist $(x,y) \in G(A)$.

Wir haben also $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x$ und $Ax_n \xrightarrow{n\to\infty} y$, beachten Sie die Definition der Norm auf $X \times Y$.

Nach Voraussetzung gilt also $x \in D(A)$ und $Ax = y$, also $(x,y) \in G(A)$.

$\equiv$

Lemma 67 *Seien X, Y normiert, und $A : X \to Y$ sei linear und beschränkt.*

Dann ist A abgeschlossen.

$\equiv$

Bemerkung 68 Wenn man von einem angeschlossenen Operator spricht, so ist die Angabe der drei Räume X, Y und $D(A)$ wichtig.

Betrachten Sie zum Beispiel $X = Y = \ell_1$ und die beiden Operatoren

$$\begin{aligned} D(B) &:= X \\ B : D(B) &\to Y \\ Bx &= x \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} D(A) &:= \{x \in \ell_1 \,|\, x \text{ ist eine endliche Folge}\} \\ A : D(A) &\to Y \\ Ax &= x. \end{aligned}$$

Beide Operatoren sind stetig, aber nur B ist abgeschlossen, A nicht. Das ist kein Widerspruch zu Lemma 67. Stetige Operatoren sind im allgemeinen eben nur dann abgeschlossen, wenn ihr Definitionsgebiet der ganze Raum ist.

Der folgende Satz zeigt, dass Beschränktheit eines Operators zwischen Banachräumen schon aus der Abgeschlossenheit folgt. Wenn man also die Steigkeit eines Operators zwischen Banachräumen nachrechnen will darf man mehr Input-Information benutzen.

Satz 69 *(Satz vom abgeschlossenen Graphen)*

Seien X, Y Banachräume, und $A : X \to Y$ sei ein abgeschlossener (linearer) Operator.

Dann ist A beschränkt.

Beweis $X \times Y$ ist mit $\|(x,y)\| := \|x\| + \|y\|$ ein Banachraum, und $G(A)$ ist abgeschlossen in $X \times Y$, also auch ein Banachraum, mit der Norm $\|(x,Ax)\| = \|x\| + \|Ax\|$.

Die Projektion

$$\begin{aligned} P : X \times Y &\to X \\ P(x,y) &= x \end{aligned}$$

ist beschränkt mit $\|P\| \leq 1$, denn

$$\|P(x,y)\| = \|x\| \leq \|(x,y)\|.$$

Daher ist auch die Einschränkung

$$\begin{aligned} R := P|G(A) : G(A) &\to X \\ Rx &= Px \end{aligned}$$

(linear und) beschränkt.

R ist injektiv, denn aus $R(x,Ax) = 0$ folgt $x = 0$ und $Ax = A0 = 0$.

R ist surjektiv, denn ist $x \in X$, so ist $x = R(x,Ax)$.

Nach dem Satz von der offenen Abbildung ist R^{-1} beschränkt.

Schliesslich ist auch der Operator

$$\begin{aligned} Q : X \times Y &\to Y \\ Q(x,y) &= y \end{aligned}$$

beschränkt mit $\|Q\| \leq 1$, denn

$$\|Q(x,y)\| = \|y\| \leq \|(x,y)\|,$$

und es gilt $A = QR^{-1}$, denn für $x \in X$ ist

$$QR^{-1}x = Q(x,Ax) = Ax.$$

Also ist A als Komposition stetiger Abbildungen selber stetig.

$\equiv$

Corollar 70 *Seien X, Y, Z Banachräume, $T : X \to Y$ linear, und $S \in \mathcal{L}(Y,Z)$ sei injektiv. Ausserdem sei ST stetig.*

Dann ist T stetig.

Beweis Als Aufgabe.

$\equiv$

2.5 Der Satz von der gleichmässigen Beschränktheit

Definition 71 *Seien X, Y normiert mit offenen Einheitskugeln U bzw. V, und $\mathcal{G} \subset \mathcal{L}(X, Y)$ sei eine Teilmenge der beschränkten linearen Operatoren von X nach Y.*

$\mathcal{G}$ heisst gleichstetig, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass $T(\delta U) \subset \varepsilon V$ für alle $T \in \mathcal{G}$.

Eine Teilmenge $\mathcal{G} \subset \mathcal{L}(X, Y)$ ist genau dann gleichstetig, wenn sie beschränkt ist. Genauer gilt

Lemma 72 *Seien X, Y normiert mit offenen Einheitskugeln U bzw. V, und $\mathcal{G} \subset \mathcal{L}(X, Y)$ sei eine Teilmenge.*

Dann sind äquivalent

1) *$\mathcal{G}$ ist gleichstetig*

2) *$\mathcal{G}$ ist beschränkt in $\mathcal{L}(X, Y)$, das heisst also*

$$\sup_{T \in \mathcal{G}} \|T\| < \infty.$$

Beweis 1)$\Rightarrow$2) Es gibt ein $\delta > 0$ mit $T(\delta U) \subset V$ für alle $T \in \mathcal{G}$, also

$$\|Tx\| < \frac{1}{\delta} \quad \text{für alle } x \in U \text{ und alle } T \in \mathcal{G},$$

das heisst

$$\sup_{T \in \mathcal{G}} \|T\| \leq \frac{1}{\delta}.$$

2)$\Rightarrow$1) Setze $M := \sup_{T \in \mathcal{G}} \|T\|$. Dann gilt also $TU \subset M\overline{V} \subset (M+1)V$ für alle $T \in \mathcal{G}$.

Ist nun $\varepsilon > 0$, so setze $\delta := \varepsilon/(M+1)$.

Dann gilt für alle $T \in \mathcal{G}$

$$T(\delta U) \subset \delta(M+1)V = \varepsilon V.$$

$\equiv$

Satz 73 *(Satz von der gleichmässigen Beschränktheit)*

Seien X, Y normiert, $\mathcal{G} \subset \mathcal{L}(X, Y)$ eine Teilmenge, und $Z \subset X$ sei eine Teilmenge zweiter Kategorie.

Dann sind äquivalent

1) *$\mathcal{G}$ ist gleichstetig, also $\sup_{T \in \mathcal{G}} \|T\| < \infty$.*

2) *$\mathcal{G}$ ist auf Z punktweise beschränkt, das heisst*

$$\sup_{T \in \mathcal{G}} \|Tz\| < \infty \quad \text{für alle } z \in Z.$$

Beweis 1)⇒2) Ist $T \in \mathcal{G}$ und $z \in Z$ mit $\|z\| \leq 1$, so gilt

$$\|Tz\| \leq \sup_{S \in \mathcal{G}} \|S\|.$$

Ist also $z \in z$ beliebig, so

$$\|Tz\| \leq \|z\| \cdot \sup_{S \in \mathcal{G}} \|S\|,$$

also

$$\sup_{T \in \mathcal{G}} \|Tz\| < \infty \quad \text{für alle } z \in Z.$$

2)⇒1) Seien U und V die offenen Einheitskugeln in X bzw. Y.

Die Menge

$$M := \bigcap_{T \in \mathcal{G}} T^{-1}(\overline{V})$$

ist abgeschlossen in X, denn da jedes $T \in \mathcal{G}$ stetig ist, ist das Urbild $T^{-1}(\overline{V})$ der abgeschlossenen Menge $\overline{V}$ auch abgeschlossen, und der beliebige Durchschnitt abgeschlossener Mengen eines topologischen Raumes ist wieder abgeschlossen.

Ausserdem gilt

$$Z \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} nM,$$

denn ist $z \in Z$, so gibt es nach Voraussetzung ein $n \in \mathbb{N}^+$ mit $\sup_{T \in \mathcal{G}} \|Tz\| < n$. Für alle $T \in \mathcal{G}$ gilt also $\frac{z}{n} \in T^{-1}(V)$, also $\frac{z}{n} \in M$, also $z \in nM$.

Nach Lemma 15 ist also $\bigcup_{n=1}^{\infty} nM$ von zweiter Kategorie in X, also gibt es ein $k \in \mathbb{N}^+$, so dass kM von zweiter Kategorie in X ist (ansonsten wäre $\bigcup_{n=1}^{\infty} nM$ mager in X).

Also

$$\emptyset \neq \overline{kM}^0 = (kM)^0 = k \cdot M^0,$$

beachten Sie, dass M abgeschlossen ist, also $\overline{M} = M$, und auch kM ist abgeschlossen (leicht), also $\overline{kM} = kM$. Die Gleichung $(kM)^0 = k \cdot M^0$ ist ebenfalls sehr leicht zu zeigen.

Wir haben also $M^0 \neq \emptyset$, also gibt es ein $x \in M^0$ und ein $\delta > 0$ mit $U_\delta(x) \subset M^0$.

Jetzt zeige $T(\delta U) \subset 2\overline{V}$ für alle $T \in \mathcal{G}$:

Ist nämlich $T \in \mathcal{G}$ und $w \in \delta U$, so gilt

$$m := x - w \in U_\delta(x) \subset M,$$

also

$$\|Tw\| = \|Tx - Tm\| \leq \|Tx\| + \|Tm\| \leq 1 + 1 = 2,$$

denn aus $w, m \in M$ folgt $\|Tw\| \leq 1$ und $\|Tm\| \leq 1$, siehe Definition der Menge M.

Jetzt zeige, dass $\mathcal{G}$ gleichstetig ist.

Sei also $\varepsilon > 0$. Setze $\sigma := \delta \cdot \varepsilon$. Dann gilt für alle $T \in \mathcal{G}$

$$T(\sigma U) = \varepsilon T(\delta U) \subset 2\varepsilon\overline{V} \subset 3\varepsilon V.$$

$\equiv$

Bemerkung 74 Es kann vorkommen, dass X überhaupt keine Teilmenge von zweiter Kategorie enthält. In diesem Fall kann man den Satz von der gleichmässigen Beschränktheit nicht anwenden.

Betrachten Sie zum Beispiel den Unterraum X der endlichen Folgen in ℓ_1. Dann ist X mager in sich selbst:

Dazu definiere für jedes $n \in \mathbb{N}^+$ die Menge

$$M_n := \{x \in \ell_1 \mid x_k = 0 \text{ für alle } k > n\} \subset X.$$

M_n ist abgeschlossen in X, denn der Grenzwert jeder Folge in M_n, die in X konvergiert, liegt in M_n.

Ausserdem enthält M_n keinen inneren Punkt: Denn sei $x \in M_n$ und $\varepsilon > 0$ mit[5] $U_\varepsilon(x) \subset M_n$.

Dann liegt die Folge

$$y_k := \begin{cases} x_k & \text{falls} \quad k \le n \\ \varepsilon/2 & \text{falls} \quad k = n+1 \\ 0 & \text{falls} \quad k > n+1 \end{cases}.$$

in $U_\varepsilon(x)$, aber nicht in M_n.

Wir haben gezeigt, dass jedes M_n nirgends dicht in X ist.

Also ist X mager in X, denn

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n.$$

Das kann natürlich nicht passieren, wenn X vollständig ist:

Corollar 75 *Sei X ein Banachraum, Y normiert, $\mathcal{G} \subset \mathcal{L}(X,Y)$ eine Teilmenge.*

Dann sind äquivalent

1) *$\mathcal{G}$ ist gleichstetig, das heisst $\sup_{T\in\mathcal{G}} \|T\| < \infty$.*

2) *$\mathcal{G}$ ist punktweise beschränkt, das heisst*

$$\sup_{T\in\mathcal{G}} \|Tx\| < \infty \quad \textit{für alle } x \in X.$$

Beweis 1)$\Rightarrow$2) beweist man genau so wie im Beweis des Satzes von der gleichmässigen Beschränktheit.

2)$\Rightarrow$1) Folgt aus dem Satz von der gleichmässigen Beschränktheit (setze dort $Z := X$) und dem Satz von Baire, der besagt, dass X von zweiter Kategorie in X ist.

[5] beachten Sie $U_\varepsilon(x) = \{y \in X \mid \|y - x\|_1 < \varepsilon\}$, und **nicht** $U_\varepsilon(x) = \{y \in \ell_1 \mid \|y - x\|_1 < \varepsilon\}$.

$\equiv$

Vielleicht noch prägnanter kann man den Satz von der gleichmässigen Beschränktheit so formulieren:

Satz 76 *Sei X ein Banachraum, Y normiert, $\mathcal{G} \subset \mathcal{L}(X,Y)$ eine Teilmenge.*
Dann sind äquivalent

1) $\sup_{\|x\|\leq 1} \sup_{T\in\mathcal{G}} \|Tx\| < \infty$

2) $\sup_{T\in\mathcal{G}} \|Tx\| < \infty$ *für alle* $x \in X$

$\equiv$

2.6 Der Satz von Banach-Steinhaus

Definition 77 *Sei X normiert, und $M \subset X$ eine Teilmenge.*

1) Die Menge Span M aller **endlichen** *Linearkombinationen von Vektoren aus M heisst die lineare Hülle von M..*

Es gilt also

$$\mathit{Span}\, M = \left\{ \sum_{n=1}^{N} \alpha_n \cdot m_n \,\middle|\, N \in \mathbb{N}^+, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N \in K, m_1, m_2, \ldots, m_n \in M \right\}.$$

2) Die Menge M heisst total in X, falls Span M dicht in X liegt, das heisst falls $\overline{\mathit{Span}\, M} = X$.

Bisher haben wir nur von gleichstetigen Teilmengen von $\mathcal{L}(X,Y)$ gesprochen. Wir erweitern diesen Begriff auf Familien (insbsondere auf Folgen) in $\mathcal{L}(X,Y)$:

Definition 78 *Seien X, Y normiert, und $(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \subset \mathcal{L}(X,Y)$ eine Familie im Raum der beschränkten Operatoren.*
Die Familie $(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ heisst gleichstetig, falls die Menge

$$\mathcal{G} = \{A_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$$

gleichstetig ist, das heisst also falls $\sup_{\lambda\in\Lambda} \|A_\lambda\| < \infty$.

Lemma 79 *Seien X, Y normiert, und $(A_n)_{n=1}^\infty \subset \mathcal{L}(X,Y)$ gleichstetig.*

1) Sei $M \subset X$ total, und für jedes $m \in M$ sei $(A_n m)_n$ eine Cauchyfolge in Y.

Dann ist $(A_n x)_n$ für jedes $x \in X$ eine Cauchyfolge in Y.

2) Falls der Grenzwert $Ax := \lim_{n\to\infty} A_n x$ *für jedes $x \in X$ existiert, so ist $A \in \mathcal{L}(X,Y)$, und es gilt* $\|A\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|A_n\|$.

Beweis

1) Setze $S := Span\, M$. Dann ist $(A_n s)_n$ für jedes $s \in S$ eine Cauchyfolge in Y:

Denn sei $s = \sum_{k=1}^N \alpha_k \cdot m_k \in S$. Ohne Einschränkung sind nicht alle α_k gleich 0 (sonst ist die Behauptung klar).

Sei $\varepsilon > 0$. Setze $\delta := \varepsilon \cdot \left(\sum_{q=1}^N |\alpha_q|\right)^{-1}$.

Nach Voraussetzung gibt es zu jedem $k \in \{1, \dots, N\}$ ein $L_k \in \mathbb{N}^+$ mit

$$\|A_n m_k - A_l m_k\| \leq \delta \quad \text{für alle } n, l > L_k.$$

Setzt man $L_0 := \max_{1 \leq k \leq N} L_k$, so hat man also

$$\|A_n m_k - A_l m_k\| \leq \delta \quad \text{für alle } n, l > L_0 \text{ und alle } k \in \{1, \dots, N\}.$$

Für $n, l > L_0$ gilt also

$$\begin{aligned}
\|A_n s - A_l s\| &= \left\| \sum_{k=1}^N \alpha_k (A_n m_k - A_l m_k) \right\| \\
&\leq \sum_{k=1}^N |\alpha_k| \cdot \|A_n m_k - A_l m_k\| \\
&\leq \sum_{k=1}^N |\alpha_k| \cdot \delta \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

Daher ist $(A_n s)_n$ eine Cauchyfolge in Y.

Jetzt sei $x \in X$. Wir zeigen, dass $(A_n x)_n$ eine Cauchyfolge in Y ist.

Setze $\gamma := \sup_n \|A_n\| < \infty$. Ohne Einschränkung ist $\gamma > 0$ (ansonsten ist $A_n = 0$ für alle n, und dann ist die Behauptung klar).

Sei $\varepsilon > 0$. Da S dicht in X liegt gibt es ein $s \in S$ mit $\|x - s\| < \varepsilon/(3\gamma)$.

Da $(A_n s)_n$ eine Cauchyfolge ist gibt es ein $L \in \mathbb{N}^+$ mit $\|A_n s - A_l s\| < \varepsilon/3$ für alle $n, l > L$.

Für $n, l > L$ gilt also

$$\begin{aligned}
\|A_n x - A_l x\| &\leq \|A_n x - A_n s\| + \|A_n s - A_l s\| + \|A_l s - A_l x\| \\
&\leq \|A_n\| \cdot \|x - s\| + \varepsilon/3 + \|A_l\| \cdot \|s - x\| \\
&\leq \gamma \cdot \varepsilon/(3\gamma) + \varepsilon/3 + \gamma \cdot \varepsilon/(3\gamma) \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

2) Klar(?) ist, dass A linear ist.

Nach der Definition[6] von "lim inf" und wegen Satz 11 gibt es eine Teilfolge $(A_{k_n})_n$ von $(A_n)_n$ mit

$$\liminf_{n\to\infty} \|A_n\| = \lim_{n\to\infty} \|A_{k_n}\|.$$

[6] $\liminf_n \|A_n\|$ ist nach Definition der kleinste Häufungspunkt der Folge $(\|A_n\|)_n$, siehe Definition 7. Zur Existenz des kleinsten Häufungspunktes einer beschränkten Folge reeller Zahlen siehe Analysis I.

Wegen der stetigkeit der Norm, siehe Lemma 30, gilt für alle $x \in X$

$$\|Ax\| = \lim_{n\to\infty} \|A_{k_n}x\| \leq \|x\| \cdot \lim_{n\to\infty} \|A_{k_n}\| = \|x\| \cdot \liminf_{n\to\infty} \|A_n\|,$$

also

$$\|A\| \leq \liminf_n \|A_n\|.$$

$\equiv$

Satz 80 *(Satz von Banach-Steinhaus)*

Sei X normiert, Y ein Banachraum, $M \subset X$ eine totale Teilmenge, $Z \subset X$ eine Teilmenge zweiter Kategorie.

Sei $(A_n)_n \subset \mathcal{L}(X,Y)$ eine Teilmenge mit

$$\sup_n \|A_n z\| < \infty \quad \textit{für alle } z \in Z$$

und

$$\lim_{n\to\infty} A_n m \quad \textit{existiere für alle } m \in M.$$

Dann ist die Abbildung

$$\begin{aligned} A : X &\to Y \\ Ax &= \lim_{n\to\infty} A_n x \end{aligned}$$

wohldefiniert, linear, beschränkt, und

$$\|A\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|A_n\|.$$

Beweis Nach dem Satz von der gleichmässigen Beschränktheit ist $(A_n)_n$ gleichstetig. Nach Lemma 79 ist $(A_n x)_n$ für alle $x \in X$ eine Cauchyfolge in Y. Da Y vollständig ist hat diese Folge also einen Grenzwert, daher ist

$$\begin{aligned} A : X &\to Y \\ Ax &= \lim_n A_n x \end{aligned}$$

wohldefiniert.

Wieder nach Lemma 79 ist A (linear und) beschränkt, und

$$\|A\| \leq \liminf_n \|A_n\|.$$

$\equiv$

Bemerkung 81 Ist X ein Banachraum, so kann man im Satz von Banach-Steinhaus $Z := X$ nehmen, denn nach dem Satz von Baire ist dann X von zweiter Kategorie in sich selbst.

3 Das Zornsche Lemma und der Satz von Hahn-Banach

Trotz des Namens "Lemma" ist das Zornsche Lemma für uns ein Axiom, das also nicht bewiesen wird. Tatsächlich kann man das Zornsche Lemma nur beweisen, wenn man ein anderes Axiom zu Hilfe nimmt, nämlich das Auswahlaxiom (hier tritt das "Axiom" auch im Namen auf). Oder man muss das dazu äquivalente Wohlordnungsaxiom benutzen.

Vor der Formulierung des Zornschen Lemmas klären wir einige Begriffe.

Definition 82 *Sei A eine Menge, und $\leq$ sei eine Teilmenge von $A \times A$.*
Dann heisst $\leq$ auch eine Relation auf A.
Statt $(a,b) \in \leq$ schreibt man $a \leq b$.

Definition 83 *Sei A eine Menge, und $\leq$ eine Relation auf A.*
$\leq$ heisst Ordnung auf A, falls gelten:

1) *$x \leq x$ für alle $x \in A$, das heisst $\leq$ ist reflexiv*

2) *Sind $x, y, z \in A$ mit $x \leq y$ und $y \leq z$, so gilt $x \leq z$, das heisst $\leq$ ist transitiv*

3) *Sind $x, y \in A$ mit $x \leq y$ und $y \leq x$, so gilt $x = y$, dass heisst $\leq$ ist antisymmetrisch*

In diesem Fall heisst $(A, \leq)$ eine geordnete Menge.

Definition 84 *Sei $(A, \leq)$ eine geordnete Menge.*

1) *Gibt es ein $m \in A$ so dass*

$$x \in A \text{ und } x \leq m \Rightarrow x = m,$$

so heisst m ein minimales Element in A.

2) *Gibt es ein $M \in A$ so dass*

$$x \in A \text{ und } M \leq x \Rightarrow M = x,$$

so heisst M ein maximales Element in A.

Definition 85 *Sei $(A, \leq)$ eine geordnete Menge, und $B \subset A$ eine Teilmenge.*

1) *B heisst nach unten beschränkt in A, falls es ein $a \in A$ gibt mit $a \leq b$ für alle $b \in B$.*

   In diesem Fall heisst a eine untere Schranke von B in A.

2 *B heisst nach oben beschränkt in A, falls es ein $a \in A$ gibt mit $b \leq a$ für alle $b \in B$.*

   In diesem Fall heisst a eine obere Schranke von B in A.

Definition 86 *Sei $(A, \leq)$ eine geordnete Menge.*

Die Ordnung $\leq$ heisst Totalordnung, und A eine total geordnete Menge, falls gilt:

Sind $x, y \in A$, so gilt $x \leq y$ oder $y \leq x$.

Das heisst also, dass je zwei Elemente vergleichbar sind.

Satz 87 *(Lemma von Zorn)*[7]

Sei $A \neq 0$ eine geordnete Menge, so dass jede total geordnete Teilmenge von A in A nach oben beschränkt ist.

Dann gibt es ein maximales Element in A.

$\equiv$

Corollar 88 *Sei X ein Vektorraum über einem Köper K.*

Dann kann jede Menge $B_0 \subset X$ von linear unabhängigen Vektoren[8] *aus X zu einer Basis von X erweitert werden.*

Insbesondere besitzt X eine Basis.

Beweis Nach Definition hat $X = \{0\}$ die leere Menge als Basis. Sei jetzt also $X \neq \{0\}$, und $B_0 \subset X$ eine Menge linear unabhängiger Vektoren.

Definiere

$$B := \{A \subset X \mid B_0 \subset A, \text{ und } A \text{ ist eine Menge linear unabhängiger Vektoren aus } X\}$$

und führe die Ordnung

$$B_1 \leq B_2 :\Leftrightarrow B_1 \subset B_2$$

auf B ein. Man sagt auch, dass B durch Inklusion geordnet ist.

Jetzt zeige, dass jede total geordnete Teilmenge $L \subset B$ nach oben beschränkt ist.

Tatsächlich ist

$$M := \bigcup_{A \in L} A$$

eine obere Schranke von L in B. Dazu bleibt zu zeigen dass $M \in B$:

Seien also $x_1, \ldots, x_n \in M$ paarweis verschiedene Elemente aus M. Zu zeigen ist, dass $x_1, \ldots, x_n$ linear unabhängig sind.

Zu jedem $j \in \{1, \ldots, n\}$ gibt es ein $B_j \in L$ mit $x_j \in B_j$. Da L total geordnet ist, gibt es ein $m \in \{1, \ldots, n\}$ mit $B_j \leq B_m$ für alle j, also $B_j \subset B_m$ für alle j.

Das heisst $x_j \in B_m \in L$ für alle j. Nach Definition von L sind $x_1, \ldots, x_n$ also linear unabhängig.

Also ist jede total geordnete Teilmenge von B in B nach oben beschränkt.

[7] Wie bereits erwähnt kann man das Zornsche Lemma mit Hilfe des Auswahlaxioms beweisen (was wir hier nicht tun).

Zur Erinnerung das Auswahlaxiom : Sei S eine Menge von nichtleeren, paarweis disjunkten Mengen. Dann existiert eine Menge Z, die nur Elemente der Mengen aus S enthält und mit jeder Menge aus S genau ein Element gemeinsam hat.

[8] d.h. je endlich viele Vektoren aus B_0 sind linear unabhängig

Nach dem Lemma von Zorn gibt es ein maximales Element $C \in B$. Die Vektoren aus C bilden nun eine Basis von X:

Wegen $C \in B$ sind die Vektoren aus C linear unabhängig.

Wäre nun $Span\, C \neq X$, so gäbe es ein $y \in X \setminus Span\, C$.

Die Menge $C' := C \cup \{y\}$ liegt also in B. Daher kann C nicht maximal sein, denn es gilt $C \subset C'$, aber $C \neq C'$, siehe Definition 84.

Also $Span\, C = X$.

$\equiv$

Definition 89 *Sei H ein Hilbertraum mit Skalarprodukt $(\cdot\,,\cdot)$, und sei $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ eine Familie von Vektoren aus H.*

1) Die Familie heisst orthonormal (oder ein Orthonoramlsystem),falls

$$(x_\lambda, x_\mu) = \delta_{\lambda\mu}.$$

Dabei bedeutet δ das Kronecker-Delta.

2) Die Familie heisst vollständiges Orthonormalsystem, falls sie orthonormal ist und $\overline{Span\,(x_\lambda)_\lambda} = H$.

Statt von orthonormalen Familien kann man auch von orthonormalen Mengen sprechen. Eine Teilmenge $M \subset H$ heisst Orthonormalsystem, wenn die Familie ihrer Elemente orthonormal ist.

Analog spricht man auch von Teilmengen von H, die ein vollständiges Orthonormalsystem bilden.

Corollar 90 *Jedes Orthonormalsystem in einem Hilbertraum lässt sich zu einem vollständigen Orthonormalsystem erweitern.*

Insbesondere enthält jeder Hilbertraum $H \neq \{0\}$ ein vollständiges Orthonormalsystem.

Beweis Sei H ein Hilbertraum mit Skalarprodukt $(\cdot\,,\cdot)$, und sei $S_0 \subset H$ ein Orthonormalsystem in H. Definiere

$$B := \{A \subset H \mid S_0 \subset A,\ \text{und } A \text{ ist Orthonormalsystem}\}$$

und führe die Ordnung

$$B_1 \leq B_2 :\Leftrightarrow B_1 \subset B_2$$

auf B ein.

Jetzt zeige, dass jede total geordnete Teilmenge $L \subset B$ nach oben beschränkt ist.

Tatsächlich ist

$$M := \bigcup_{A\in L} A$$

eine obere Schranke von L in B. Dazu bleibt zu zeigen dass $M \in B$: Das geht wie im Beweis von Corollar 88.

Nach dem Lemma von Zorn gibt es ein maximales Element $C \in B$. Es bleibt zu zeigen, dass $\overline{Span\, C} = H$.

Sei nämlich $y \in H \setminus \overline{Span\, C}$. Betrachte die Orthogonalprojektion

$$P : H \quad \to \quad \overline{Span\, C}.$$

Dann gilt $y - Py \perp \overline{Span\, C}$, das heisst $y - Py$ steht senkrecht auf jedem Vektor in $\overline{Span\, C}$. Das folgt aus der Zerlegung $H = \overline{Span\, C} \oplus (Span\, C)^{\perp}$.

Insbesondere gilt $y - Py \perp C$. Ausserdem ist $y \neq Py$, da $y \notin \overline{Span\, C}$. Also ist $\alpha := \|y - Py\| \neq 0$.

Betrachtet man nun die Menge $C' := C \cup \{\frac{y-Py}{\alpha}\} \in B$, so ergibt sich ein Widerspruch: Es gilt nämlich $C \subset C'$, aber $C \neq C'$. Also ist C nicht maximal in B, siehe Definition 84.

$\equiv$

Definition 91 *Sei X ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Eine lineare Abbildung $u : X \to \mathbb{K}$ heisst auch Linearform auf X.*

Eine Linearform muss nicht unbedingt beschränkt sein.

Definition 92 *Sei X ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, und $q : X \to \mathbb{R}$ eine Abbildung.*

q heisst sublinear, falls $q(x + y) \leq q(x) + q(y)$ und $q(\alpha x) = \alpha q(x)$ für alle $x, y \in X$ und alle $\alpha \geq 0$.

Zum Beispiel ist eine Halbnorm sublinear.

Satz 93 *(Erster Satz von Hahn-Banach)*

Sei X ein reeller Vektorraum, $Y \subset X$ ein Unterraum, $q : X \to \mathbb{R}$ sublinear und $u : Y \to \mathbb{R}$ linear mit $u(y) \leq q(y)$ für alle $y \in Y$.

Dann gibt es eine Linearform $v : X \to \mathbb{R}$ mit $v|Y = u$ und $v(x) \leq q(x)$ für alle $x \in X$.

Beweis Ohne Einschränkung ist $Y \neq X$.

1

Sei $x_0 \in X \setminus Y$. Setze $Y_2 := Span\, x_0 \oplus Y$.

Zeige : Es gibt eine Linearform $v_2 : Y_2 \to \mathbb{R}$ mit $v_2|Y = u$ und $v_2(y) \leq q(y)$ für alle $y \in Y_2$.

1.1

Zeige

$$\sup_{y \in Y} \big(-q(-y - x_0) - u(y)\big) \leq \inf_{y \in Y} \big(q(y + x_0) - u(y)\big).$$

Sind $y_1, y_2 \in Y$, so gilt

$$\begin{aligned} u(y_1) - u(y_2) &= u(y_1 - y_2) \\ &\leq q(y_1 - y_2) \\ &= q(y_1 + x_0 + (-y_2 - x_0)) \\ &\leq q(y_1 + x_0) + q(-y_2 - x_0). \end{aligned}$$

Daher $-q(-y_2-x_0)-u(y_2) \leq q(y_1+x_0)-u(y_1)$, woraus die Behauptung folgt.

1.2

Wähle $\gamma \in \mathbb{R}$ mit $\sup_{y\in Y}\big(-q(-y-x_0)-u(y)\big) \leq \gamma \leq \inf_{y\in Y}\big(q(y+x_0)-u(y)\big)$ und betrachte die Linearform

$$\begin{array}{rcl} v_2 : Y_2 & \to & \mathbb{R} \\ v_2(\alpha x + y) & := & \alpha \cdot \gamma + u(y). \end{array}$$

Dann $v_2|Y = u$ klar. Zeige $v_2(y) \leq q(y)$ für alle $\alpha x_0 + y \in Y_2$:

Das ist klar falls $\alpha = 0$.

Jetzt sei $\alpha > 0$.

Nach Definition von γ gilt

$$\gamma \leq \inf_{y\in Y}\big(q(y/\alpha + x_0) - u(y/\alpha)\big),$$

also

$$\begin{array}{rcl} v_2(\alpha x_0 + y) & = & \alpha\gamma + u(y) \\ & \leq & \alpha q(y/\alpha + x_0) \\ & = & q(\alpha x_0 + y). \end{array}$$

Jetzt sei $\alpha < 0$.

Nach Definition von γ gilt

$$\gamma \geq \sup_{y\in Y}\big(- q(-y/\alpha - x_0) - u(y/\alpha)\big),$$

also

$$\begin{array}{rcl} v_2(\alpha x_0 + y) & = & \alpha\gamma + u(y) \\ & \leq & -\alpha q(-y/\alpha - x_0) \\ & = & q(\alpha x_0 + y). \end{array}$$

2

Definiere

$$\Psi := \left\{ (Z,v) \;\middle|\; \begin{array}{l} Z \subset X \text{ ist ein Unterraum von } X \text{ mit } Y \subset Z, \\ \text{und } v : Z \to \mathbb{R} \text{ ist eine Linearform mit } v|Y = u \text{ und} \\ \text{mit } v(w) \leq q(w) \text{ für alle } w \in Z \end{array} \right\}.$$

Es gilt $\Psi \neq \emptyset$, denn $(Y,u) \in \Psi$.

2.1

Führe eine Ordnung auf Ψ ein:

$$(Z_1, v_1) \leq (Z_2, v_2) :\Leftrightarrow Z_1 \subset Z_2, \text{ und } v_2|Z_1 = v_1.$$

Das ist tatsächlich eine Ordnung auf Ψ:

- $(Z, v) \leq (Z, v)$ ist klar.
- Sei $(Z_1, v_1) \leq (Z_2, v_2)$ und $(Z_2, v_2) \leq (Z_3, v_3)$.
  Also $Z_1 \subset Z_2 \subset Z_3$, $v_2|Z_1 = v_1$ und $v_3|Z_2 = v_2$.
  Daher $Z_1 \subset Z_3$ und $v_3|Z_1 = v_1$, das heisst $(Z_1, v_1) \leq (Z_3, v_3)$.
- Sei $(Z_1, v_1) \leq (Z_2, v_2)$ und $(Z_2, v_2) \leq (Z_1, v_1)$.
  Also $Z_1 \subset Z_2$, $v_2|Z_1 = v_1$, $Z_2 \subset Z_1$ und $v_1|Z_2 = v_2$.
  Daher $(Z_1, v_1) = (Z_2, v_2)$.

Also ist $\leq$ tatsächlich eine Ordnung auf Ψ.

2.2

Sei $K = \{(Z_\lambda, v_\lambda) \mid \lambda \in \Lambda\}$ eine total geordnete Teilmenge von Ψ.
Zeige, dass K nach oben beschränkt in Ψ ist :
Definiere

$$Z := \bigcup_{\lambda \in \Lambda} Z_\lambda$$

und

$$\begin{array}{rcl} \varphi : Z & \to & \mathbb{R} \\ \varphi(x) & = & v_\lambda(x) \quad \text{falls } x \in Z_\lambda. \end{array}$$

2.2.1

φ ist wohldefiniert:
Sei $x \in Z_\lambda \cap Z_\mu$. Zu zeigen ist $v_\lambda(x) = v_\mu(x)$.
K ist total geordnet, also gilt $(Z_\lambda, v_\lambda) \leq (Z_\mu, v_\mu)$ oder $(Z_\mu, v_\mu) \leq (Z_\lambda, v_\lambda)$.
Wir betrachten den Fall $(Z_\lambda, v_\lambda) \leq (Z_\mu, v_\mu)$. Der andere Fall geht analog.
Also gilt $Z_\lambda \subset Z_\mu$ und $v_\mu|Z_\lambda = v_\lambda$. Insbesondere gilt $v_\lambda(x) = v_\mu(x)$.

2.2.2

Z ist ein Unterraum von X:
Seien $x, y \in Z$ und $\alpha \in \mathbb{R}$. Zu zeigen ist $\alpha x + y \in Z$.
Sei etwa $x \in Z_\lambda$ und $y \in Z_\mu$. Da K total geordnet ist gilt $Z_\lambda \subset Z_\mu$ oder $Z_\mu \subset Z_\lambda$.
Wir betrachten den Fall $Z_\lambda \subset Z_\mu$. Der andere Fall geht analog.
Also gilt $x, y \in Z_\mu$, also $\alpha x + y \in Z_\mu \subset Z$, da Z_μ ein Unterraum von X ist.

2.2.3

φ ist linear:
Seien $x, y \in Z$ und $\alpha \in \mathbb{R}$. Wie in Schritt 2.2.2 sieht man dass es ein $\mu \in \Lambda$ gibt mit $\alpha x + y \in Z_\mu$.
Daher

$$\varphi(\alpha x + y) = v_\mu(\alpha x + y) = \alpha v_\mu(x) + v_\mu(y) = \alpha \varphi(x) + \varphi(y).$$

2.2.4

Zeige $(Z, \varphi) \in \Psi$:

- Z ist ein Unterraum von X, siehe Schritt 2.2.2.
- $Y \subset Z$, denn $Y \subset Z_\lambda$ für alle $\lambda \in \Lambda$.
- $\varphi : Z \to \mathbb{R}$ ist linear, siehe Schritt 2.2.3.
- $\varphi|Y = u$, denn sei $y \in Y$. Dann $y \in Z_\lambda$ für alle $\lambda \in \Lambda$, also gilt für alle λ

$$\varphi(y) = v_\lambda(y) = u(y).$$

  Das letzte Gleichheitszeichen gilt wegen $(Z_\lambda, v_\lambda) \in \Psi$ und der Definition von Ψ.

- $\varphi(w) \leq q(w)$ für alle $w \in Z$, denn sei $w \in Z$, etwa $w \in Z_\lambda$.
  Dann

$$\varphi(w) = v_\lambda(w) \leq q(w).$$

  Wieder gilt das letzte Gleichheitszeichen wegen $(Z_\lambda, v_\lambda) \in \Psi$ und der Definition von Ψ.

Also gilt $(Z, \varphi) \in \Psi$.

2.2.5

(Z, φ) ist eine obere Schranke von K, das heisst es gilt $(Z_\lambda, v_\lambda) \leq (Z, \varphi)$ für alle $\lambda \in \Lambda$.

Das ist klar.

3

Wir haben gezeigt, dass jede total geordnete Teilmenge von Ψ nach oben beschränkt ist. Nach dem Lemma von Zorn enthält Ψ ein maximales Element $(W, v) \in \Psi$.

Es gilt $W = X$: Denn sei $x_0 \in X \backslash W$. Setze $Y_2 := \mathit{Span}\, x_0 \oplus W$ und wende Schritt 1 an (dort $Y := W$ und $u := v$ setzen). Also gibt es eine Linearform $v_2 : Y_2 \to \mathbb{R}$ mit $v_2|W = v$ und $v_2(s) \leq q(s)$ für alle $s \in Y_2$.

Es gilt $(Y_2, v_2) \in \Psi$:

- $Y_2 \subset X$ ist Unterraum mit $Y \subset Y_2$, denn $Y \subset W \subset Y_2$.
- $v_2 : Y_2 \to \mathbb{R}$ ist linear mit $v_2|Y = u$, denn $v_2|Y = v|Y = u$ (beachte $v_2|W = v$, $Y \subset W$ und $v|Y = u$).
- $v_2(s) \leq q(s)$ für alle $s \in Y_2$ ok.

Also gilt $(Y_2, v_2) \in \Psi$.

Schliesslich gilt $(W, v) \leq (Y_2, v_2)$. Da (W, v) maximal ist, ist $(W, v) = (Y_2, v_2)$, es ist aber $W \neq Y_2$, Widerspruch.

Also gilt $W = X$.

$\equiv$

Wenn man an die Funktion q etwas stärkere Voraussetzungen stellt, kann man den ersten Satz von Hahn-Banach auch im komplexen formulieren:

Satz 94 *(Satz von Bohnenblust und Sobczyk)*

Sei X ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, $Y \subset X$ ein Unterraum, $q : X \to \mathbb{R}$ eine Halbnorm und $u : Y \to \mathbb{K}$ linear mit $|u(y)| \leq q(y)$ für alle $y \in Y$.

Dann gibt es eine Linearform $v : X \to \mathbb{K}$ mit $v|Y = u$ und $|v(x)| \leq q(x)$ für alle $x \in X$.

Beweis Sei erst $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Nach dem ersten Satz von Hahn-Banach gibt es eine Linearform $v : X \to \mathbb{R}$ mit $v|Y = u$ und $v(x) \leq q(x)$ für alle $x \in X$.

Dann gilt sogar $|v(x)| \leq q(x)$ für alle $x \in X$. Das ist klar falls $v(x) \geq 0$.

Jetzt sei $v(x) < 0$. Dann

$$|v(x)| = -v(x) = v(-x) \leq q(-x) = q(x).$$

Jetzt sei $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Wir schreiben $Y_{\mathbb{R}}$ für den Raum Y als reellen Vektorraum aufgefasst. Dasselbe mit $X_{\mathbb{R}}$.

Die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} u_{\mathbb{R}} : Y_{\mathbb{R}} & \to & \mathbb{R} \\ u_{\mathbb{R}}(y) & = & Re\, u(y) \end{array}$$

ist $\mathbb{R}$-linear mit $u_{\mathbb{R}} \leq q(y)$ für alle $y \in Y$. Nach dem erasten Satz von Hahn-Banach gibt es eine Linearform $\widetilde{v} : X_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ mit $\widetilde{v}|Y = u_{\mathbb{R}}$ und $\widetilde{v}(x) \leq q(x)$ für alle $x \in X$.

Definiere

$$\begin{array}{rcl} v : X & \to & \mathbb{C} \\ v(x) & = & \widetilde{v}(x) - i\widetilde{v}(ix). \end{array}$$

Es ist nicht schwer nachzurechnen, dass v eine ($\mathbb{C}$-)lineare Abbildung ist.

Ausserdem gilt $v|Y = u$, denn für $y \in Y$ gilt

$$\begin{array}{rcl} v(y) & = & \widetilde{v}(y) - i\widetilde{v}(iy) \\ & = & u_{\mathbb{R}}(y) - iu_{\mathbb{R}}(iy) \\ & = & Re\, u(y) - iRe\, u(iy) \\ & = & Re\, u(y) + iIm\, u(y) \\ & = & u(y). \end{array}$$

Schliesslich gilt $|v(x)| \leq q(x)$ für alle $x \in X$:

Dazu stelle $v(x) = \rho \cdot e^{i\varphi}$ in Polarkoordinaten dar.

Dann

$$|v(x)| = e^{-i\varphi} v(x) = v(e^{-i\varphi}x) = \widetilde{v}(e^{-i\varphi}x).$$

Das letzte Gleichheitszeichen gilt, weil alle Terme reell sind, also $\widetilde{v}(ie^{-i\varphi}x) = 0$.

Also

$$|v(x)| = \widetilde{v}(e^{-i\varphi}x) \leq q(e^{-i\varphi}x) = q(x).$$

$\equiv$

Bemerkung 95 Seien X, Z normiert, $Y \subset X$ ein Unterraum und $T \in \mathcal{L}(Y, Z)$.
Gibt es ein $S \in \mathcal{L}(X, Z)$ mit $S|Y = T$?
Antwort : Fast nie.
Ausnahmen :

1) Falls es eine stetige (lineare) Projektion $P : X \to Y$ gibt, so setze $S := TP$.
   Das geht zum Beispiel, falls X ein Hilbertraum ist und $Y \subset X$ abgeschlossen.

2) Falls $Z = \mathbb{K}$. Das liefert der folgende

Satz 96 *(Zweiter Satz von Hahn-Banach)*
Sei X normiert, $Y \subset X$ ein Unterraum, und $u : Y \to \mathbb{K}$ sei linear und beschränkt.
Dann gibt es eine beschränkte Linearform $v : X \to \mathbb{K}$ mit $v|Y = u$ und $\|v\| = \|u\|$.

Beweis Ohne Einschränkung ist $u \neq 0$ und $Y \neq \{0\}$.
Definiere die Norm

$$\begin{array}{rcl} q : X & \to & \mathbb{R} \\ q(x) & = & \|u\| \cdot \|x\|. \end{array}$$

Für $y \in Y$ mit $y \neq 0$ gilt

$$q(y) = \|u\| \cdot \|y\| = \|y\| \cdot \sup_{\substack{z \in Y \\ z \neq 0}} \frac{|u(z)|}{\|z\|} \geq \|y\| \cdot \frac{|u(y)|}{\|y\|} = |u(y)|.$$

Nach dem Satz von Bohnenblust und Sobczyk gibt es eine Linearform $v : X \to \mathbb{K}$ mit $v|Y = u$ und $|v(x)| \leq q(x)$ für alle $x \in X$.
Also $|v(x)| \leq \|u\| \cdot \|x\|$, also $\|v\| \leq \|u\|$.
Schliesslich gilt

$$\|v\| = \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{|v(x)|}{\|x\|} \geq \sup_{\substack{y \in Y \\ y \neq 0}} \frac{|v(y)|}{\|y\|} = \sup_{\substack{y \in Y \\ y \neq 0}} \frac{|u(y)|}{\|y\|} = \|u\|.$$

$\equiv$

Definition 97 *Sei X normiert. Dann heisst*

$$X^* := \mathcal{L}(X, \mathbb{K}) = \{x^* : X \to \mathbb{K} \,|\, x^* \text{ ist beschränkte Linearform auf } X\}$$

der Dualraum von X.

Der Dualraum eines normierten Raumes ist immer vollständig nach Satz 57.

Corollar 98 *Sei X normiert, und $x \in X$, $x \neq 0$.*
Dann gibt es ein $x^* \in X^*$ mit $\|x^*\| = 1$ und $x^*(x) = \|x\|$.

BEWEIS
Als Aufgabe.

≡

Corollar 99 *Sei X normiert, $x \in X$, und $x^*(x) = 0$ für alle $x^* \in X^*$.
Dann gilt $x = 0$.*

BEWEIS
Als Aufgabe.

≡

Corollar 100 *Sei X normiert, $Y \subset X$ ein Unterraum mit $Y \neq X$, $x \in X \backslash Y$, und es gelte[9] $dist\,(x, Y) > 0$.
Dann gelten*

1) Es gibt ein $x^* \in X^*$ mit

- $\|x^*\| = \frac{1}{dist\,(x,Y)}$
- $x^*(x) = 1$
- $x^*|Y = 0$.

2) Es gibt ein $x^* \in X^*$ mit

- $\|x^*\| = 1$
- $x^*(x) = dist\,(x, Y)$
- $x^*|Y = 0$.

BEWEIS 1)
Definiere $Z := Span\, x \oplus Y$, und die lineare Abbildung

$$\begin{aligned} z^* : Z &\rightarrow \mathbb{K} \\ z^*(\alpha x + y) &= \alpha. \end{aligned}$$

Definiere $d := dist\,(x, Y) > 0$. Dann gilt für $\alpha \neq 0$

$$\|\alpha x + y\| = |\alpha| \cdot \|x + y/\alpha\| \geq |\alpha| \cdot d.$$

Das gilt auch für $\alpha = 0$.
Daher

$$\|z^*\| = \sup_{\substack{z \in Z \\ z \neq 0}} \frac{|z^*(z)|}{\|z\|} = \sup_{(\alpha,y) \neq (0,0)} \frac{|\alpha|}{\|\alpha x + y\|} \leq 1/d.$$

Es bleibt $\|z^*\| = 1/d$ zu zeigen.
Nach Definition von "dist" gibt es eine Folge $(y_n)_n \subset Y$ mit $\lim_{n\to\infty} \|x - y_n\| = d$.

[9] Das ist zum Beispiel erfüllt, falls $Y \neq X$ abgeschlossen in X ist.

Also

$$\|z^*\| = \sup_{(\alpha,y)\neq(0,0)} \frac{|\alpha|}{\|\alpha x + y\|} \geq \lim_n \frac{1}{\|x - y_n\|} = 1/d.$$

Jetzt den zweiten Satz von Hahn-Banach anwenden.

2)

Sei x^* wie in 1) gewählt, und $d := dist\,(x, Y)$.

Definiere $z^* := d \cdot x^*$.

$\equiv$

Das folgende Corollar besagt, dass es genügend beschränkte Linearformen gibt, um die Punkte des Raumes zu trennen:

Corollar 101 *Sei X normiert, $x, y \in X$ mit $x \neq y$.*

Dann gibt es ein $x^* \in X^*$ mit $\|x^*\| = 1$ und $x^*(x) - x^*(y) = \|x - y\|$.

Insbesondere ist $x^*(x) \neq x^*(y)$.

Beweis

Setze $Y := \{0\}$. Dann gilt $Y \neq X$, und $dist(x - y, Y) = \|x - y\| > 0$.

Nach Corollar 100 gibt es ein $x^* \in X^*$ mit $\|x^*\| = 1$ und $x^*(x-y) = \|x-y\|$.

$\equiv$

Corollar 102 *Sei X normiert, und $Y \subset X$ ein Unterraum.*

Dann sind äquivalent

1) Y ist dicht in X, das heisst $\overline{Y} = X$

2) Ist $x^* \in X^*$ mit $x^*|_Y = 0$, so gilt $x^* = 0$.

Beweis 1)$\Rightarrow$2)

Sei $x \in X$. Zu zeigen ist $x^*(x) = 0$.

Es gibt eine Folge $(y_n)n \subset Y$ mit $\lim_n y_n = X$. Daher $x^*(x) = \lim_n x^*(y_n) = 0$ nach Voraussetzung.

2)$\Rightarrow$1)

Sei $\overline{Y} \neq X$. Dann gibt es ein $x \in X$ mit $dist\,(x.Y) > 0$, denn die offene Menge $X \backslash \overline{Y}$ enthält einen inneren Punkt (nämlich x).

Nach Corollar 100 gibt es ein $x^* \in X^*$ mit $x^*|_Y = 0$ und $x^*(x) = 1$. Das ist ein Widerspruch.

$\equiv$

4 Das Spektrum

Definition 103 *Sei X normiert, $D(A) \subset X$ ein Unterraum, und $A : D(A) \to X$ linear.*

$\lambda \in \mathbb{K}$ heisst regulärer Wert von A, falls die Abbildung $\lambda \cdot id - A : D(A) \to X$ eine stetige Inverse besitzt.

Die Menge $\rho(A)$ aller regulären Werte von A heisst die Resolventenmenge von A.

Ist $\lambda \in \rho(A)$, so heisst $R(\lambda, A) := (\lambda \cdot id - A)^{-1} : X \to D(A)$ die Resolvente von A bei λ.

Die Menge $\sigma(A) := \mathbb{K} \backslash \rho(A)$ heisst das Spektrum von A.

Statt $\lambda \cdot id - A$ schreibt man auch $\lambda - A$.

Lemma 104 *Sei X ein Banachraum, und $T \in \mathcal{L}(X)$ mit $\|T\| < 1$,*

Dann ist $id - T$ stetig invertierbar, und $(id - T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T^n$.

Beweis Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} T^n$ konvergiert absolut im Banachraum $\mathcal{L}(X)$, und es gilt

$$(id - T) \sum_{n=0}^{\infty} T^n = id = \left(\sum_{n=0}^{\infty} T^n \right) (id - T).$$

$\equiv$

Die Reihe $\sum_n T^n$ spielt eine wichtige Rolle in der Spektraltheorie (falls $\|T\| < 1$). Deshalb hat sie einen Namen : Man nennt sie die von Neumannsche Reihe.

Satz 105 *Sei X ein Banachraum, $D(A) \subset X$ ein Unterraum, und $A : D(A) \to X$ linear. Dann gelten*

1) $\rho(A) \subset \mathbb{K}$ ist offen.

2) Ist $\sigma(A) \neq \emptyset$, so gilt

$$dist(\lambda, \sigma(A)) \geq \frac{1}{\|R(\lambda, A)\|} \quad \text{für alle } \lambda \in \rho(A).$$

3) Sei $\lambda \in \rho(A)$, $\mu \in \mathbb{K}$ und $q \in (0, 1)$ mit $|\lambda - \mu| < q / \|R(\lambda, A)\|$.
Dann gilt $\mu \in \rho(A)$, und

$$\|R(\mu, A)\| \leq \frac{1}{1 - q} \cdot \|R(\lambda, A)\|.$$

Beweis 1)

Sei $\lambda \in \rho(A)$, und $\mu \in \mathbb{K}$ mit $|\lambda - \mu| < 1/\|R(\lambda, A)\|$.

(Ohne Einschränkung ist $R(\lambda, A) \neq 0$, sonst wäre $X = \{0\}$ und also $\rho(A) = \mathbb{K}$).

Dann

$$\mu - A = (\lambda - A)\big(id - (\lambda - \mu) R(\lambda, A)\big),$$

und der Operator $id - (\lambda - \mu) R(\lambda, A)$ ist stetig invertierbar nach Lemma 104.

Also $\mu \in \rho(A)$, und

$$R(\mu, A) = \big(id - (\lambda - \mu) R(\lambda, A)\big)^{-1} R(\lambda, A).$$

2)
Sei $\lambda \in \rho(A)$ und $\mu \in \mathbb{K}$ mit $|\mu| < 1/\|R(\lambda, A)\|$.
Nach 1) gilt $\lambda + \mu \in \rho(A)$, also $dist(\lambda, \sigma(A)) \geq 1/\|R(\lambda, A)\|$.
3)
Wie in 1) gilt $\mu \in \rho(A)$, und

$$\begin{aligned} R(\mu, A) &= \big(id - (\lambda - \mu)R(\lambda, A)\big)^{-1} R(\lambda, A) \\ &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \mu)^n R(\lambda, A)^n\right) R(\lambda, A) \end{aligned}$$

nach Lemma 104.
Also

$$\begin{aligned} \|R(\mu, A)\| &\leq \|R(\lambda, A)\| \cdot \sum_{n=0}^{\infty} |\lambda - \mu|^n \|R(\lambda, A)\|^n \\ &\leq \|R(\lambda, A)\| \cdot \sum_{n=0}^{\infty} q^n \\ &= \frac{1}{1-q} \cdot \|R(\lambda, A)\|. \end{aligned}$$

≡

Lemma 106 *Sei X normiert, $D(A) \subset X$ ein Unterraum, und $A : D(A) \to X$ sei linear.*
Seien $\lambda, \mu \in \rho(A)$.
Dann gelten

1) *$AR(\lambda, A)x = R(\lambda, A)Ax$ für alle $x \in D(A)$,*
   und $AR(\lambda, A)x = \lambda R(\lambda, A)x - x$ für alle $x \in X$.
2) *$R(\lambda, A)R(\mu, A) = R(\mu, A)R(\lambda, A)$*
3) *$R(\lambda, A) = R(\mu, A)\big(id + (\mu - \lambda)R(\lambda, A)\big)$*

Man nennt 3) auch Resolventengleichung.

Beweis 1)
Es gilt

$$x = (\lambda - A)R(\lambda, A)x = \lambda R(\lambda, A)x - AR(\lambda, A)x \quad \text{für alle } x \in X$$

und

$$x = R(\lambda, A)(\lambda - A)x = \lambda R(\lambda, A)x - R(\lambda, A)Ax \quad \text{für alle } x \in D(A).$$

2)

Für alle $x \in X$ gilt

$$R(\mu, A)x = R(\mu, A)(\lambda - A)R(\lambda, A)x = (\lambda - A)R(\mu, A)R(\lambda, A)x,$$

woraus die Behauptung folgt.

3)

Es gilt

$$(\lambda - A)R(\mu, A)\big(id + (\mu - \lambda)R(\lambda, A)\big) = (\lambda - A)R(\lambda, A) + (\mu - \lambda)R(\mu, A) = (\mu - A)R(\mu, A) = id,$$

woraus die Behauptung folgt.

$\equiv$

Definition 107 *Sei X ein Banachraum, $U \subset \mathbb{K}$ offen, $u \in U$, und $F : U \to X$ eine Abbildung.*

F heisst differenzierbar im Punkt $u \in U$, falls

$$F'(u) := \lim_{v \to u} \frac{F(u) - F(v)}{u - v}$$

in X existiert. F heisst differenzierbar, falls F in jedem Punkt aus U differenzierbar ist.

Ist $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, so heisst eine differenzierbare Abbildung $F : U \to X$ auch holomorph.

Satz 108 *Sei X ein Banachraum, und $A : D(A) \to X$ ein linearer Operator in X.*

Dann ist die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \rho(A) & \to & \mathcal{L}(X) \\ \lambda & \mapsto & R(\lambda, A) \end{array}$$

beliebig oft differenzierbar. Im Falle $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ist sie holomorph.

Ausserdem gilt für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$\frac{d^n R(\lambda, A)}{d\lambda^n} = (-1)^n \cdot n! \cdot R(\lambda, A)^{n+1}.$$

Beweis Sei $\lambda \in \rho(A)$. Zuerst zeigen wir, dass die Resolvente stetig in λ ist:

Sei $\mu \in \mathbb{K}$ mit $|\lambda - \mu| < \frac{1}{2\|R(\lambda,A)\|}$. Nach Satz 105 ist dann $\mu \in \rho(A)$, und $\|R(\mu, A)\| \leq 2 \cdot \|R(\lambda, A)\|$.

Daher, wegen der Resolventengleichung,

$$\|R(\lambda, A) - R(\mu, A)\| = |\mu - \lambda| \cdot \|R(\mu, A)R(\lambda, A)\| \leq |\mu - \lambda| \cdot 2 \cdot \|R(\lambda, A)\|^2,$$

und das konvergiert gegen 0 falls $\mu \longrightarrow \lambda$. Also ist die Resolvente stetig.

Jetzt seien $\lambda, \mu \in \rho(A)$ mit $\lambda \neq \mu$. Dann

$$\begin{aligned} \frac{R(\lambda,A)-R(\mu,A)}{\lambda-\mu} &= -R(\lambda,A)R(\mu,A) \quad \text{wegen der Resolventengleichung} \\ &\xrightarrow{\mu\to\lambda} -R(\lambda,A)^2. \end{aligned}$$

Jetzt sei $n \in \mathbb{N}_0$, $w \mapsto R(w,A)$ sei n-mal differenzierbar in λ, und

$$\frac{d^n R(\lambda,A)}{d\lambda^n} = (-1)^n \cdot n! \cdot R(\lambda,A)^{n+1}.$$

Das ist richtig für $n = 0$ und $n = 1$.

Jetzt der Induktionsschritt von n nach $n+1$:

$$\begin{aligned} \frac{\frac{d^n R(\lambda,A)}{d\lambda^n} - \frac{d^n R(\mu,A)}{d\mu^n}}{\lambda-\mu} &= \frac{(-1)^n n! R(\lambda,A)^{n+1} - (-1)^n n! R(\mu,A)^{n+1}}{\lambda-\mu} \\ &= (-1)^n n! \frac{R(\lambda,A)-R(\mu,A)}{\lambda-\mu} \sum_{k=0}^{n} R(\mu,A)^k R(\lambda,A)^{n-k} \\ &\xrightarrow{\mu\to\lambda} (-1)^n n! (-1) R(\lambda,A)^2 \sum_{k=0}^{n} R(\lambda,A)^n \\ &= (-1)^{n+1}(n+1)! R(\lambda,A)^{n+2}. \end{aligned}$$

$\equiv$

Satz 109 *Sei X ein Banachraum, $A : D(A) \to X$ ein abgeschlossener linearer Operator in X, und $\lambda \in \mathbb{K}$.*

Dann gelten

1) $\lambda - A$ ist auch abgeschlossen.

2) $\lambda - A : D(A) \to X$ bijektiv $\Leftrightarrow \lambda \in \rho(A)$.

Beweis 1)

Sei $(x_n)_n \subset D(A)$ eine Folge mit $\lim_n x_n = x \in X$, und sei $y = \lim_n(\lambda - A)x_n$. Zu zeigen ist $x \in D(A)$ und $(\lambda - A)x = y$:

Es gilt $Ax_n = -(\lambda - A)x_n + \lambda x_n \xrightarrow{n\to\infty} -y + \lambda x$. Da A abgeschlossen ist, gilt $x \in D(A)$ und $Ax = -y + \lambda x$, also $(\lambda - A)x = y$.

2)

$\Leftarrow$ ist klar. Zeige noch $\Rightarrow$.

Wir zeigen, dass $(\lambda - A)^{-1} : X \to X$ abgeschlossen ist. Sei also $(x_n)_n \subset X$ mit $\lim_n = x \in X$ und $\lim_n(\lambda - A)^{-1}x_n = y \in X$.

Zu zeigen ist $(\lambda - A)^{-1}x = y$.

Es gilt

$$(\lambda - A)^{-1}x_n \xrightarrow{n\to\infty} y$$

und

$$(\lambda - A)(\lambda - A)^{-1}x_n = x_n \xrightarrow{n\to\infty} x.$$

Da $\lambda - A$ abgeschlossen ist, gilt $y \in D(A)$ und $(\lambda - A)y = x$, also $y = (\lambda - A)^{-1}x$.

$\equiv$

Lemma 110 *Sei X normiert, $A : D(A) \to X$ ein linearer Operator in X, und $\rho(A) \neq \emptyset$.*

Dann ist A abgeschlossen.

Beweis

Aufgabenblatt 8.

$\equiv$

Bemerkung 111 Sei X ein Banachraum, $A : D(A) \to X$ ein abgeschlossener Operator in X, und $\lambda \in \mathbb{K}$.

Dann sind äquivalent

1) $\lambda \in \rho(A)$

2) Die Gleichung $(\lambda - A)x = y$ hat für jedes $y \in X$ eine eindeutige Lösung $x \in D(A)$.

Wie bestimmt man also die Resolventenmenge $\rho(A)$?

1.Schritt : Ist A abgeschlossen? Wenn nein, so ist $\rho(A) = \emptyset$ nach Lemma 110. Wenn ja, so gehe zum 2. Schritt.

2.Schritt : Fixiere $\lambda \in \mathbb{K}$ und löse die Gleichung $(\lambda - A)x = y$. Wenn das für alle $y \in X$ eindeutig möglich ist, so ist $\lambda \in \rho(A)$ nach Satz 109, ansonsten ist $\lambda \in \sigma(A)$.

Satz 112 *Sei X ein Banachraum, und $T \in \mathcal{L}(X)$.*

Dann ist $\sigma(T)$ kompakt in $\mathbb{K}$.

Genauer gilt $\sigma(T) \subset D_{\|T\|}(0) \subset \mathbb{K}$, und für $\lambda \in \mathbb{K}$ mit $|\lambda| > \|T\|$ gilt $\lambda \in \rho(T)$ und

$$R(\lambda, T) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n}{\lambda^{n+1}}$$

sowie

$$\|R(\lambda, T)\| \leq \frac{1}{|\lambda| - \|T\|}.$$

Beweis Sei $|\lambda| > \|T\|$. Dann

$$(\lambda - T) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n}{\lambda^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n}{\lambda^n} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^{n+1}}{\lambda^{n+1}} = id.$$

Alle Reihen konvergieren (absolut) in $\mathcal{L}(X)$ wegen $\|T\| < \lambda$.

Analog gilt

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n}{\lambda^{n+1}} \right) (\lambda - T) = id.$$

Also ist $\lambda - T$ bijektiv, also $\lambda \in \rho(A)$ nach Satz 109, und

$$R(\lambda, T) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n}{\lambda^{n+1}}.$$

Schliesslich

$$\|R(\lambda, T)\| \leq \frac{1}{|\lambda|} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\|T\|}{|\lambda|}\right)^n = \frac{1}{|\lambda| - \|T\|}.$$

$\equiv$

Lemma 113 *Sei $X \neq \{0\}$ ein $\mathbb{C}$-Banachraum, und $T \in \mathcal{L}(X)$.*
Dann ist $\sigma(T) \neq \emptyset$.

Beweis Sei $\rho(T) = \mathbb{C}$. Dann ist die Abbildung

$$\begin{aligned} f_{x^*} : \mathbb{C} &\to \mathbb{C} \\ \lambda &\mapsto x^* R(\lambda, T) \end{aligned}$$

für jedes $x^* \in \mathcal{L}(X)^*$ holomorph. Wegen Satz 112 gilt

$$|f_{x^*}(\lambda)| \leq \frac{\|x^*\|}{|\lambda| - \|T\|} \quad \text{für alle } |\lambda| > \|T\|.$$

Nach dem Satz von Liouville ist $f_{x^*} = 0$, nach Corollar 99 gilt $R(\lambda, T) = 0$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}$, also $X = \{0\}$, Widerspruch.

$\equiv$

Der nächste Satz gibt Auskunft über das Spektrum der Resolvente:

Satz 114 *Sei X ein Banachraum, $A : D(A) \to X$ ein abgeschlossener Operator in X, und $\lambda \in \rho(A)$.*
Dann ist die Abbildung

$$\begin{aligned} h : \sigma(A) &\to \sigma(R(\lambda, A)) \setminus \{0\} \\ h(\mu) &= \frac{1}{\lambda - \mu} \end{aligned}$$

bijektiv. Die Umkehrabbildung ist

$$\begin{aligned} h^{-1} : \sigma(R(\lambda, A)) \setminus \{0\} &\to \sigma(A) \\ h^{-1}(w) &= \lambda - \frac{1}{w}. \end{aligned}$$

Ausserdem gilt
$0 \in \rho(R(\lambda, A)) \Leftrightarrow A \in \mathcal{L}(X)$.

Beweis
Aufgabenblatt 9.

$\equiv$

Corollar 115 *Sei X ein Banachraum, $A : D(A) \to X$ ein abgeschlossener Operator in X, und $\lambda \in \rho(A)$.*

Dann

$\sigma(A)$ ist kompakt $\Leftrightarrow$ 0 ist kein Häufungspunkt der Menge $\sigma(R(\lambda, A))$

Beweis

Aufgabenblatt 9.

$\equiv$

4.1 Das Funktionenkalkül für Polynome

Definition 116 *Sei X normiert, $T \in \mathcal{L}(X)$ und*

$$\begin{aligned} p : \mathbb{K} &\to \mathbb{K} \\ p(t) &= \sum_{k=0}^{N} a_k t^k \end{aligned}$$

ein Polynom mit Koeffizienten $a_k \in \mathbb{K}$.

Definiere

$$p(T) := \sum_{k=0}^{N} a_k T^k \in \mathcal{L}(X).$$

Beachten Sie $T^0 = id$.

Zum Beweis des nächsten Satzes brauchen wir das

Lemma 117 *Sei X normiert, und $S_1, S_2, \ldots, S_r \in \mathcal{L}(X)$ stetige Operatoren mit $S_i S_j = S_j S_i$ für alle i, j.*

Dann sind äquivalent

1) Der Operator $S_1 \cdot S_2 \cdot \ldots \cdot S_r \in \mathcal{L}(X)$ ist stetig invertierbar.

2) Jedes S_j ist stetig invertierbar.

Beweis Es genügt den Induktionsanfang $r = 2$ zu betrachten.

2)$\Rightarrow$1) Die Inverse von $S_1 S_2$ ist $S_2^{-1} S_1^{-1}$, denn

$$S_1 S_2 S_2^{-1} S_1^{-1} = id$$

und

$$S_2^{-1} S_1^{-1} S_1 S_2 = id.$$

1)$\Rightarrow$2) Die Inverse von S_1 ist $S_2(S_1 S_2)^{-1}$: Klar ist

$$S_1 S_2 (S_1 S_2)^{-1} = id.$$

Jetzt zeigen wir erst $S_1(S_1S_2)^{-1} = (S_1S_2)^{-1}S_1$. Das folgt aus der Gleichung $S_1S_2S_1 = S_1S_1S_2$ durch Multiplikation mit $(S_1S_2)^{-1}$ von links und von rechts.

Daher gilt

$$S_2(S_1S_2)^{-1}S_1 = S_2S_1(S_1S_2)^{-1} = S_1S_2(S_1S_2)^{-1} = id.$$

Analog zeigt man $S_2^{-1} = S_1(S_2S_1)^{-1}$.

$\equiv$

Im nächsten Satz geht **wesentlich** ein, dass der zugrunde liegende Raum komplex ist.

Satz 118 *Sei X ein normierter $\mathbb{C}$-Vektorraum, $T \in \mathcal{L}(X)$ mit $\sigma(T) \neq \emptyset$, und $p(z) = \sum_{k=0}^{N} a_k z^k$ ein Polynom mit Koeffizienten $a_k \in \mathbb{C}$.*

Dann gilt

$$\sigma(p(T)) = p(\sigma(T)).$$

Beweis Sei zunächst $p(z) = c \in \mathbb{C}$ ein konstantes Polynom.

Dann $\sigma(p(T)) = \sigma(c \cdot id) = \{c\}$, und $p(\sigma(T)) = \{c\}$. Beachten Sie $\sigma(T) \neq \emptyset$ und $X \neq \{0\}$.

Jetzt sei der Grad r von p grösser als 0.

Wähle ein $\mu \in \sigma(p(T))$. Zeige $\mu \in p(\sigma(T))$.

Nach dem Fundamentalsatz der Algebra gibt es Zahlen $\alpha, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r \in \mathbb{C}$ mit $\alpha \neq 0$ und

$$\mu - p(z) = \alpha \cdot (\beta_1 - z) \cdot (\beta_2 - z) \cdot \ldots \cdot (\beta_r - z) \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}.$$

Dann

$$\mu - p(T) = \alpha \cdot (\beta_1 - T) \cdot (\beta_2 - T) \cdot \ldots \cdot (\beta_r - T).$$

(Erinnern Sie sich daran, dass $\mu - p(T)$ eine Abkürzung für $\mu \cdot id - p(T)$ ist.)

Der Operator $\mu - p(T)$ ist nach Voraussetzung nicht stetig invertierbar. Nach Lemma 117 gibt es ein $j \in \{1, 2, \ldots, r\}$ so dass $\beta_j - T : X \to X$ nicht stetig invertierbar ist, das heisst es gilt $\beta_j \in \sigma(T)$.

Schliesslich ist

$$\mu = p(\beta_j) \in p(\sigma(T)).$$

Umgekehrt sei $w \in p(\sigma(T))$. Also gibt es ein $\lambda \in \sigma(T)$ mit $w = p(\lambda)$.

Wie oben gibt es Zahlen $\gamma, \delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_r \in \mathbb{C}$ mit $\gamma \neq 0$ und

$$w - p(z) = \gamma \cdot (\delta_1 - z) \cdot \ldots (\delta_r - z) \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C},$$

also

$$w - p(T) = \gamma \cdot (\delta_1 - T) \cdot \ldots (\delta_r - T).$$

Insbesondere gilt $\lambda \in \{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_r\}$.

Wäre nun w ein regulärer Wert von $p(T)$, so wäre nach Lemma 117 jedes $\delta_j - T$ stetig invertierbar, also $\{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_r\} \subset \rho(T)$.

Daraus folgt $\lambda \in \rho(T)$, ein Widerspruch. Daher gilt $w \in \sigma(p(T))$.

$\equiv$

4.2 Holomorphe Abbildungen

Wir wissen schon, was eine holomorphe Abbildung $F : U \to X$ von einer offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{C}$ in einen komplexen Banachraum X ist, siehe Definition 107.

Wir zeigen jetzt, dass die wichtigen Sätze aus der Funktionentheorie ihre Gültigkeit behalten. Insbesondere ist jede holomorphe Funktion analytisch (siehe unten).

Um die gewohnte Schreibweise von Potenzreihen beibehalten zu können definieren wir $x \cdot \alpha := \alpha \cdot x$, falls x Element eines normierten Raumes und $\alpha \in \mathbb{K}$ ist.

Im folgenden Satz tauchen zum ersten mal vektorwertige integrierbare Funktionen $g : I \to X$ auf. Sie sind wie in Beispiel 40 definiert, nur muss man dort $\mathbb{R}$ durch den Banachraum X ersetzen.

Satz 119 *Seien X, Y Banachräume, $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall (mit Lebesgue-Mass), und $f : I \to X$ integrierbar.*

Dann ist $Tf : I \to Y$ integrierbar, und es gilt

$$T \int_I f(s)\,ds = \int_I Tf(s)\,ds.$$

Beweis Sei $f_n = \sum_{j=1}^{k_n} a_{j,n} \cdot \mathbf{1}_{M_{j,n}} \in T(I, X)$ eine L_1-Cauchyfolge von Treppenfunktionen, die punktweise fast überall gegen f konvergiert, siehe Beispiel 40. Dabei sind $a_{j,n} \in X$ und $M_{j,n} \subset I$ Lebesgue-messbare Mengen mit $\mu(M_{j,n}) < \infty$.

Dann ist

$$Tf_n = \sum_{j=1}^{k_n} Ta_{j,n} \cdot \mathbf{1}_{M_{j,n}} \in T(I, Y)$$

eine Folge von Treppenfunktionen, die wegen

$$\int_I \|Tf_n(s) - Tf(s)\|\,ds \le \|T\| \cdot \int_I \|f_n(s) - f(s)\|\,ds \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

in L_1 gegen Tf konvergiert.

Nun gilt

$$\begin{aligned} T \int_I f(s)\,ds &= T\left(\lim_n \int_I f_n(s)\,ds\right) \\ &= \lim_n T\left(\sum_{j=1}^{k_n} a_{j,n} \cdot \mu(M_{j,n})\right) \\ &= \lim_n \sum_{j=1}^{k_n} Ta_{j,n} \cdot \mu(M_{j,n}) \\ &= \lim_n \int_I Tf_n(s)\,ds \\ &= \int_I Tf(s)\,ds. \end{aligned}$$

$\equiv$

Definition 120 *Sei X ein Banachraum, $\lambda \in \mathbb{K}$, und $(a_k)_{k=0}^{\infty} \subset X$ eine Folge in X.*

Dann heisst[10]

$$\mu \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (\mu - \lambda)^k$$

eine (vektorwertige) Potenzreihe um λ.

$$r := \sup \left\{ s \geq 0 \,\Big|\, \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot s^k \text{ existiert in } X \right\}$$

heisst der Radius der Potenzreihe.

Lemma 121 *Sei X ein Banachraum, und $(a_k)_{k=0}^{\infty} \subset X$ eine Folge in X.*

Dann ist

$$r = \sup \left\{ t \geq 0 \,\Big|\, \sum_{k=0}^{\infty} \|a_k\| \cdot t^k < \infty \right\} \tag{7}$$

der Radius der Reihe.

Beweis Wir zeigen nur "$\leq$". Sei also $s \geq 0$ so dass $\sum_k a_k s^k$ in X konvergiert. Ist $s = 0$, so ist $s \leq$ rechte Seite von (7). Jetzt sei also $s > 0$.

Da $\sum_k a_k s^k$ konvergiert gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein N_0 mit

$$\left\| \sum_{k=n}^{\infty} a_k s^k \right\| < \varepsilon/2 \quad \text{für alle } n > N_0.$$

Also gilt für $n > N_0$

$$\|a_{n+1} s^{n+1}\| = \left\| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k s^k - \sum_{k=n}^{\infty} a_k s^k \right\| < \varepsilon,$$

das heisst $(a_n s^n)_n$ ist eine Nullfolge in X. Insbesondere gibt es ein $C > 0$ mit $\|a_n s^n\| \leq C$ für alle $n \geq 0$.

Ist nun $\alpha \in (0, s)$, so gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|a_k\| \alpha^k = \sum_{k=0}^{\infty} \|a_k s^k\| (|\alpha|/|s|)^k < \infty.$$

Daher gilt auch jetzt dass $s \leq$ rechte Seite von (7).

$\equiv$

[10] Erinnern Sie sich an $x \cdot \alpha = \alpha \cdot x$.

Corollar 122 *(Formel von Cauchy-Hadamard)*
Sei X ein Banachraum, $(a_k)_{k=}^{\infty} \subset X$ eine Folge in X, und r der Radius von $s \mapsto \sum_k a_k s^k$.
Dann gilt

$$r = \frac{1}{\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{\|a_k\|}}.$$

Beweis Das folgt aus Lemma 121 und der bekannten Formel für skalarwertige Potenzreihen aus Analysis I.

≡

Lemma 123 *Sei X ein Banachraum, $(a_k)_{k=0}^{\infty} \subset X$ eine Folge in X, $s > 0$, und für alle $x^* \in X^*$ sei die Reihe*

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^*(a_k) \cdot s^k \in \mathbb{K}$$

konvergent.
Dann ist die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot t^k \in X$$

für alle $|t| < s$ konvergent, und es gilt

$$x^* \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot t^k = \sum_{k=0}^{\infty} x^*(a_k) \cdot t^k \quad \text{für alle } x^* \in X^* \text{ und alle } |t| < s. \tag{8}$$

Beweis Insbesondere gilt $\lim_k x^*(a_k)s^k = 0$ für alle $x^* \in X^*$. Nach Aufgabe 7.3 ist die Folge $(a_k s^k)_k \subset X$ beschränkt.
Ist nun $|t| < s$, so gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|a_k\| \cdot |t|^k \le \sum_{k=0}^{\infty} \|a_k s^k\| \cdot (|t|/s)^k < \infty.$$

Gleichung (8) folgt aus der Stetigkeit von x^*.

≡

Satz 124 *Sei X ein komplexer Banachraum, $U \subset \mathbb{C}$ offen, $F : U \to X$ holomorph, und $\lambda \in U$.*
Dann gibt es ein $d > 0$ und eine Folge $(a_k)_{k=0}^{\infty} \subset X$ mit

$$F(\mu) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (\mu - \lambda)^k \quad \text{für alle } \mu \in \mathbb{C} \text{ mit } |\mu - \lambda| < d.$$

Tatsächlich kann man $d = dist(\lambda, \mathbb{C}\backslash U)$ wählen.

Es gilt

$$a_k = \frac{1}{k!} \cdot \frac{d^k F(\lambda)}{d\lambda^k} = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{F(w)}{(w-\lambda)^{k+1}}\, dw$$

für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Dabei ist γ der Rand einer Kreisscheibe um λ mit Radius in $(0,d)$.

Beweis Setze $d := dist(\lambda, \mathbb{C}\backslash U) > 0$. Für jedes $x^* \in X^*$ ist die Funktion $x^*F : U \to \mathbb{C}$ holomorph, nach Funktionentheorie I gibt es also eine Folge $(\alpha_k(x^*))_k$ in $\mathbb{C}$ mit

$$x^*F(\mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k(x^*) \cdot (\mu-\lambda)^k \quad \text{für alle } \mu \in \mathbb{K} \text{ mit } |\mu-\lambda| < d,$$

und es gilt

$$\alpha_k(x^*) = \frac{1}{k!} \cdot \frac{d^k x^* F(\lambda)}{d\lambda^k} = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{x^*F(w)}{(w-\lambda)^{k+1}}\, dw.$$

Die Behauptung folgt aus Satz 119 und Lemma 123.

≡

4.3 Der Spektralradius

Definition 125 *Sei X ein Banachraum, und $T \in \mathcal{L}(X)$mit $\sigma(T) \neq \emptyset$.*
Dann heisst

$$r(T) := \sup_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda|$$

der Spektralradius von T.

Wegen Satz 112 kann man das "sup" durch "max" ersetzen, und es gilt $r(T) \in [0, \infty)$.

Satz 126 *Sei $X \neq \{0\}$ ein $\mathbb{C}$-Banachraum, und $T \in \mathcal{L}(X)$.*
Dann gilt

$$r(T) = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\|T^k\|} \leq \|T\|.$$

Beweis Es gilt $\sigma(T) \neq \emptyset$ nach Lemma 113.
Das Ungleichheitszeichen ist klar wegen $\|T^k\| \leq \|T\|^k$.
Zu zeigen bleibt $r(T) = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\|T^k\|}$.
Zuerst zeigen wir $r(T) \geq \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{\|T^k\|}$:
Nach Satz 108 ist die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \rho(T) & \mapsto & \mathcal{L}(X) \\ \lambda & \to & R(\lambda, A) \end{array}$$

holomorph. Insbesondere ist sie auf der gelochten Ebene $\mathbb{C}\backslash D_{r(T)}(0) \subset \rho(T)$ holomorph, wird also dort durch eine Laurentreihe dargestellt.[11]

Es gibt also eine Folge $(S_k)_{k=-\infty}^{\infty} \subset \mathcal{L}(X)$ mit

$$R(\lambda, T) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} S_k \cdot \lambda^k \quad \text{für alle } |\lambda| > r(T).$$

Nach Satz 112 gilt für $|\lambda| > \|T\|$

$$R(\lambda, T) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{T^k}{\lambda^{k+1}}. \tag{9}$$

Diese beiden Laurentreihen stimmen überein[12], also konvergiert die Reihe (9) für alle $|\lambda| > r(T)$.

Daher ist der Radius der Reihe $\mu \mapsto \sum_k T^k \mu^k$ grösser oder gleich $1/r(T) \in (0, \infty]$. Nach der Formel von Cauchy-Hadamard (Corollar 122) gilt

$$\frac{1}{\limsup_k \sqrt[k]{\|T^k\|}} \geq \frac{1}{r(T)},$$

also

$$r(T) \geq \limsup_k \sqrt[k]{\|T^k\|}.$$

Schliesslich zeigen wir $r(T) \leq \liminf_{k\to\infty} \sqrt[k]{\|T^k\|}$:

Sei $\lambda \in \sigma(T)$. Nach Satz 118 ist $\lambda^n \in \sigma(T^n)$ für alle $n \in \mathbb{N}^+$, also gilt $|\lambda^n| \leq r(T^n) \leq \|T^n\|$.

Daraus folgt $|\lambda| \leq \sqrt[n]{\|T^n\|}$, und daher $r(T) \leq \sqrt[n]{\|T^n\|}$ für alle $n \in \mathbb{N}^+$.

Daher $r(T) \leq \liminf_{k\to\infty} \sqrt[k]{\|T^k\|}$, und zusammen mit $r(T) \geq \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{\|T^k\|}$ ergibt das

$$r(T) = \lim_k \sqrt[k]{\|T^k\|}.$$

$\equiv$

Definition 127 *Sei X normiert und $T \in \mathcal{L}(X)$.*
T heisst quasi-nilpotent, falls $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\|T^k\|} = 0$.

Corollar 128 *Sei $X \neq \{0\}$ ein $\mathbb{C}$-Banachraum, und $T \in \mathcal{L}(X)$.*
Dann gilt
T ist quasi-nilpotent $\Leftrightarrow r(T) = 0$.

$\equiv$

[11] Dass diese Entwicklung in eine Laurentreihe möglich ist beweist man wie Satz 124 unter Benutzung des entsprechenden Satzes in Funktionentheorie I.

[12] Beweis wieder mit derselben Idee wie in Satz 124 unter Benutzung des Identitätssatzes für Laurentreihen aus Funktionentheorie I.

Beispiel 129 Sei $X := C([0,1], \mathbb{C})$, und

$$\begin{aligned} T : X &\to X \\ Tf(t) &= \int_0^t f(s)\, ds. \end{aligned}$$

(Vergleiche Aufgabe 8.2.)

Dann gilt $0 = r(T) < \|T\| = 1$.

5 Kompakte Operatoren

Erinnern Sie sich hier an Aufgabe 9.3.

Definition 130 *Sei X normiert, und $M \subset X$ eine Teilmenge.*

M heisst relativ kompakt, falls $\overline{M}$ eine kompakte Menge ist.

Lemma 131 *Sei X normiert, und $M \subset X$ eine Teilmenge.*

Dann sind äquivalent

1) M ist relativ kompakt.

2) Jede Folge in M enthält eine Teilfolge, die in X konvergiert.

Ist ausserdem X vollständig, so ist weiter äquivalent

3) M ist total beschränkt.

Beweis 2)⇒1) Sei $(x_n)_n \subset \overline{M}$ eine Folge. Zu zeigen ist, dass diese Folge eine in X (also in $\overline{M}$) konvergente Teilfolge besitzt.

Nach Definition des Abschlusses gibt es zu jedem n ein $z_n \in M \cap U_{1/n}(x_n)$. Nach Voraussetzung gibt es eine Teilfolge $(z_{k_n})_n$ mit Grenzwert $z \in X$.

Es gilt

$$\|x_{k_n} - z\| \le \|x_{k_n} - z_{k_n}\| + \|z_{k_n} - z\| \xrightarrow{n} 0.$$

1)⇒2) Sei $(m_n)_n \subset M$ eine Folge in $M \subset \overline{M}$. Da $\overline{M}$ kompakt ist, gibt es eine Teilfolge mit Grenzwert in $\overline{M} \subset X$.

2)⇒3) Wir nehmen an, dass M nicht total beschränkt ist. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit folgender Eigenschaft : Ist $n \in \mathbb{N}^+$ und sind $x_1, x_2, \ldots, x_n \in M$ irgendwelche Vektoren, so gilt

$$M \not\subset \bigcup_{j=1}^n U_\varepsilon(x_j).$$

Also gibt es eine Folge $(x_n)_{n=1}^\infty \subset M$ mit

$$x_1 \in M$$

und

$$x_2 \in M \backslash \bigcup_{j=1}^{1} U_\varepsilon(x_j)$$

und ...

$$x_{n+1} \in M \backslash \bigcup_{j=1}^{n} U_\varepsilon(x_j)...$$

Die Folge $(x_n)_n$ enthält keine konvergente Teilfolge, denn für $n \neq m$ gilt $\|x_n - x_m\| \geq \varepsilon$, also kann keine Teilfolge von $(x_n)_n$ eine Cauchyfolge sein. Das ist ein Widerspruch.

Jetzt sei X zusätzlich vollständig.

3)$\Rightarrow$2) Wir zeigen, dass $\overline{M}$ total beschränkt ist. Sei $\varepsilon > 0$.

Nach Voraussetzung gibt es Vektoren $x_1, x_2, \ldots, x_n \in M$ mit $M \subset \bigcup_{j=1}^{n} U_{\varepsilon/2}(x_j)$.

Wir zeigen $\overline{M} \subset \bigcup_{j=1}^{n} U_\varepsilon(x_j)$: Sei also $m \in \overline{M}$.

Nach Definition des Abschlusses gibt es ein $z \in M \cap U_{\varepsilon/2}(m)$. Wegen $z \in M$ gibt es ein j_0 mit $z \in U_{\varepsilon/2}(x_{j_0})$.

Also

$$\|m - x_{j_0}\| \leq \|m - z\| + \|z - x_{j_0}\| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon,$$

daher $m \in \bigcup_{j=1}^{n} U_\varepsilon(x_j)$.

Also ist $\overline{M}$ total beschränkt, und ausserdem vollständig, da X vollständig und $\overline{M}$ abgesachlossen in X ist.

Nach Aufgabe 9.3 ist $\overline{M}$ kompakt.

$\equiv$

Definition 132 *Seien X, Y normiert mit offener Einheitskugel $U \subset X$, und $T : X \to Y$ linear.*

T heisst kompakt, falls $TU \subset Y$ relativ kompakt ist.

Die Menge aller kompakten linearen Operatoren von X nach Y wird mit $\mathcal{K}(X, Y)$ bezeichnet.

Beachten Sie, dass ein kompakter Operator T stetig ist, denn in diesem Fall ist TU beschränkt.

Lemma 133 *Seien X, Y normiert, $T : X \to Y$ linear, $U \subset X$ die offene Einheitskugel.*

Dann sind äquivalent

1) *T ist kompakt.*

2) *Ist $B \subset X$ eine beschränkte Teilmenge, so ist $\overline{TB} \subset Y$ kompakt.*

3) *Ist $(x_n)_n \subset X$ eine beschränkte Folge, so enthält $(Tx_n)_n \subset Y$ eine konvergente Teilfolge.*

Ist ausserdem Y vollständig, so ist weiter äquivalent

4) $TU \subset Y$ ist total beschränkt.

BEWEIS 1)⇒2) Es gibt ein $r > 0$ mit $B \subset rU$, also gilt $\overline{TB} \subset r \cdot \overline{TU}$. Mit $\overline{TU}$ ist auch $r \cdot \overline{TU}$ kompakt (klar!?), also ist $\overline{TB}$ kompakt, da $\overline{TB}$ eine abgeschlossene Teilmenge einer kompakten Menge ist.

2)⇒3) Sei $(x_n)_{n=0}^{\infty} \subset X$ beschränkt. Setze $B := \{x_n \mid n \in \mathbb{N}^+\} \subset X$. Nach Voraussetzung ist $\overline{TB} = \overline{\{Tx_n \mid n \in \mathbb{N}^+\}} \subset Y$ kompakt, nach Aufgabe 9.3. enthält $(Tx_n)_n \subset \overline{TB}$ eine konvergente Teilfolge (mit Grenzwert in $\overline{TB}$).

3)⇒1) Zeige, dass TU relativ kompakt ist. Benutze Lemma 131. Sei also $(y_n)_n \subset TU \subset Y$ eine Folge. Zu zeigen ist, dass sie eine in Y konvergente Teilfolge enthält.

Es gibt eine Folge $(x_n)_n \subset U$ mit $y_n = Tx_n$ für alle n. Nach Voraussetzung gibt es eine Teilfolge $(x_{k_n})_n$ und ein $y \in Y$ mit $\lim_n Tx_{k_n} = y$.

Also gilt $\lim_n y_{k_n} = y$.

1)⇒4) Siehe Beweis von Lemma 131. Hier braucht man die Vollständigkeit von Y noch nicht.

Jetzt sei Y vollständig.

4)⇒1) Da TU total beschränkt ist, ist auch $\overline{TU}$ total beschränkt. Das haben wir im Beweis von Lemma 131 gezeigt.

Da Y vollständig ist, ist auch $\overline{TU}$ vollständig, da abgeschlossen in Y. Nach Aufgabe 9.3. ist $\overline{TU}$ kompakt, also ist T kompakt.

≡

Lemma 134 *Seien X, Y normiert, und $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ mit endlichdimensionalem Bild.*

Dann ist T kompakt.

BEWEIS Sei $U \subset X$ die offene Einheitskugel in X. Dann gilt $TU \subset Im\,T$, und $Im\,T$ ist abgeschlossen in X nach Aufgabe 3.2.

Also gilt $\overline{TU} \subset \overline{Im\,T} = Im\,T$. Ausserdem ist $\overline{TU}$ beschränkt in Y da T stetig ist.

Daher ist $\overline{TU}$ abgeschlossen und beschränkt im endlichdimensionalen Raum $Im\,T$, also kompakt nach dem Satz von Heine-Borel aus Analysis I (oder II).

≡

Satz 135 *Seien X, Y normiert.*

Dann ist $\mathcal{K}(X, Y) \subset \mathcal{L}(X, Y)$ ein Unterverktorraum.

Ist ausserdem Y vollständig, so ist $\mathcal{K}(X, Y)$ abgeschlossen in $\mathcal{L}(X, Y)$.

BEWEIS Seien $K, R \in \mathcal{K}(X, Y)$ und $\alpha \in \mathbb{K}$.

Dann gilt $K + R \in \mathcal{K}(X, Y)$: Denn sei $(x_n)_n \subset X$ eine beschränkte Folge. Dann enthält $(Kx_n)_n$ eine in Y konvergente Teilfolge $(Kx_{l_n})_n$, und die Folge $(Rx_{l_n})_n$ enthält eine in Y konvergente Teilfolge $(Rx_{m_n})_n$.

Also konvergiert die Folge $((K+R)x_{m_n})_n$ in Y, das heisst $K+R$ ist kompakt.

Weiter gilt $\alpha \cdot K \in \mathcal{K}(X,Y)$. Denn sei wieder $(x_n)_n \subset X$ eine beschränkte Folge. Dann enthält $(Kx_n)_n$ eine in Y konvergente Teilfolge $(Kx_{l_n})_n$, also konvergiert $(\alpha K x_{l_n})_n$ in Y, das heisst αK ist kompakt.

Jetzt sei Y vollständig, und $(K_n)_n \subset \mathcal{K}(X,Y)$ eine Folge kompakter Operatoren, die bezüglich der Operatornorm gegen ein $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ konvergiert.

Zu zeigen ist $T \in \mathcal{K}(X,Y)$.

Sei $U \subset X$ die offene Einheitskugel in X. Wir zeigen, dass TU total beschränkt ist (dann ist T kompakt nach Lemma 133).

Sei also $\varepsilon > 0$. Es gibt ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\|T - K_n\| < \varepsilon/2$ für alle $n \geq N$, und da $K_N U$ total beschränkt ist gibt es $x_1, x_2, \ldots, x_m \in K_N U$ mit $K_N U \subset \bigcup_{j=1}^m U_{\varepsilon/2}(x_j)$.

Nun gilt $TU \subset \bigcup_{j=1}^m U_\varepsilon(x_j)$:

Denn sei $x \in U$, dann $\|Tx - K_N x\| < \varepsilon/2$, und es gibt ein j_0 mit $K_N x \in U_{\varepsilon/2}(x_{j_0})$, also $\|Tx - x_{j_0}\| \leq \|Tx - K_N x\| + \|K_N x - x_{j_0}\| < \varepsilon$.

Daher ist $TU \subset Y$ präkompakt, nach Lemma 133 ist T kompakt.

$\equiv$

Satz 136 *Seien W, X, Y, Z normiert, $T \in \mathcal{L}(W,X)$, $K \in \mathcal{K}(X,Y)$ und $R \in \mathcal{L}(Y,Z)$.*

Dann ist $RKT \in \mathcal{K}(W,Z)$ kompakt.

Beweis Sei $(w_n)_n \subset W$ eine beschränkte Folge. Dann ist auch $(Tw_n)_n \subset X$ beschränkt. Also enthält $(KTx_n)_n \subset Y$ eine konvergente Teilfolge $(KTx_{l_n})_n$, also konvergiert $(RKTx_{l_n})_n$.

$\equiv$

Beispiel 137 Wenn man nachweisen will,dass ein linearer Operator $T : X \to Y$ kompakt ist, geht man oft so vor : Man sucht eine Folge $K_n : X \to Y$ linearer Operatoren mit endlichdimensionalem Bild und $\|T - K_n\| \xrightarrow{n} 0$.

Betrachten Sie zum Beispiel den Operator

$$\begin{aligned} T : \ell_p &\to \ell_p \\ T(x_0, x_1, \ldots) &= (y_0 x_o, y_1 x_1, \ldots), \end{aligned}$$

wobei $1 \leq p < \infty$ und $(y_n)_n \in c_0$ eine Nullfolge.

T ist kompakt : Denn sei

$$\begin{aligned} K_n : \ell_p &\to \ell_p \\ K_n(x_0, x_1, \ldots) &= (y_0 x_0, y_1 x_1, \ldots, y_n x_n, 0, 0, \ldots). \end{aligned}$$

K_n ist kompakt nach Lemma 134, und es gilt $\|T - K_n\| \xrightarrow{n} 0$:

Denn sei $\varepsilon > 0$. Es gibt ein N mit $|y_n| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$. Ist $x \in \ell_p$, so gilt

$$\|Tx - K_n x\| = \left(\sum_{j=n+1}^{\infty} |y_j x_j|^p \right)^{1/p} \leq \varepsilon \cdot \left(\sum_{j=n+1}^{\infty} |x_j|^p \right)^{1/p} \leq \varepsilon \cdot \|x\|,$$

also $\|T - K_n\| \leq \varepsilon$ für alle $n \leq N$.

Beispiel 138 Sei $1 \leq p \leq \infty$. Dann ist der Operator

$$\begin{array}{rcl} T : \ell_p & \to & \ell_p \\ Tx & = & x \end{array}$$

nicht kompakt :

Denn betrachte die beschränkte Folge der Einheitsvektoren in ℓ_p. Die Bildfolge enthält keine konvergente Teilfolge.

Satz 139 *(Satz von Riesz)*

Sei X normiert, und $U \subset X$ die offene Einheitskugel.
Es sind äquivalent

1) *U ist total beschränkt*

2) *$\overline{U}$ ist total beschränkt*

3) *$\dim X < \infty$*

4) *$\overline{U}$ ist kompakt*

Beweis 1)$\Leftrightarrow$2) klar.
3)$\Rightarrow$1) und 4)$\Rightarrow$2) klar.
2)$\Rightarrow$3) Es gibt $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \overline{U}$ mit $\overline{U} \subset \bigcup_{j=1}^n U_{1/2}(x_j)$.
Setze $Y = Span\,\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ und zeige $X = Y$:
Sei nämlich $X \neq Y$, etwa $x \in X \backslash Y$.
Y ist abgeschlossen, da endlichdimensional, siehe Aufgabe 3.2.
Also ist $\alpha := dist(x, Y) > 0$.
Es gibt ein $y \in Y$ mit $\|x - y\| \leq 1,5 \cdot \alpha$ nach der Definition von $dist$.
Setze $z = \frac{x-y}{\|x-y\|} \in \overline{U}$. Es gibt ein j_0 mit $\|z - x_{j_0}\| < 1/2$, ausserdem gilt

$$x = y + \|x - y\| \cdot z = y + \|x - y\| \cdot x_{j_0} + \|x - y\| \cdot (z - x_{j_0}),$$

daher

$$\|x - y\| \cdot \|z - x_{j_0}\| = \|x - (y + \|x - y\| \cdot x_{j_0}\| \geq \alpha,$$

weil $y + \|x - y\| \cdot x_{j_0} \in Y$.

Also

$$1,5 \cdot \alpha \geq \|x - y\| \geq \frac{\alpha}{\|z - x_{j_0}\|} > 2 \cdot \alpha,$$

ein Widerspruch.

2)$\Rightarrow$4) Also gilt $dim\,X < \infty$. Daher ist $\overline{U}$ eine beschränkte abgeschlossene Teilmenge eines endlichdimensionalen Raumes, also kompakt nach dem Satz von Heine-Borel aus Analysis II.

$\equiv$

Corollar 140 *Sei X normiert.*

Dann sind äquivalent

1) *Die Identität $id : X \to X$ ist kompakt*

2) *$\dim X < \infty$.*

$\equiv$

5.1 Der Satz von Arzela-Ascoli

Definition 141 *Sei (X,d) ein metrischer Raum, $K \subset X$ kompakt, und $A \subset C(K,\mathbb{K})$ eine Teilmenge des Banachraumes $C(K,\mathbb{K})$ der stetigen Abbildungen von K nach $\mathbb{K}$.*

1) *Sei $x \in K$. Die Menge A heisst gleichstetig in x, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass für alle $w \in K$ mit $d(w,x) \leq \delta$ und für alle $f \in A$ gilt : $|f(x) - f(w)| \leq \varepsilon$.*

2) *A heisst gleichstetig, falls A gleichstetig in jedem Punkt aus K ist.*

Satz 142 *(Satz von Arzela-Ascoli)*
Sei (X,d) ein metrischer Raum, $K \subset X$ kompakt, und $A \subset C(K,\mathbb{K})$ eine Teilmenge.
Dann sind äquivalent

1) *A ist relativ kompakt*

2) *A ist gleichstetig, und für alle $x \in K$ ist $\sup_{f\in A} |f(x)| < \infty$.*

Beweis 1)⇒2)
Sei $x \in K$. Zeige, dass A gleichstetig in x ist.
Sei also $\varepsilon > 0$. Da A total beschränkt ist, gibt es $f_1, f_2, \ldots, f_n \in A$ mit $A \subset \bigcup_{j=1}^n U_{\varepsilon/3}(f_j)$.
Da $f_1, f_2, \ldots, f_n$ alle stetig sind, gibt es Zahlen $\delta_j > 0$ mit $|f_j(v) - f_j(x)| < \varepsilon/3$ für alle $v \in \mathbb{K}$ mit $d(v,x) \leq \delta_j$.
Setze $\delta := \min_{1\leq j\leq n} \delta_j$.
Ist nun $w \in K$ mit $d(w,x) \leq \delta$ und $f \in A$, so gibt es ein j_0 mit $\|f - f_{j_0}\| < \varepsilon/3$, also

$$\begin{aligned} |f(w) - f(x)| &\leq |f(w) - f_{j_0}(w)| + |f_{j_0}(w) - f_{j_0}(x)| + |f_{j_0}(x) - f(x)| \\ &< \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon. \end{aligned}$$

Jetzt zeige : Ist $x \in K$, so ist $\sup_{f\in A} |f(x)| < \infty$.
Es gibt $g_1, g_2, \ldots, g_m \in A$ mit $A \subset \bigcup_{j=1}^m U_1(g_j)$. Setze $c := 1 + \max_{1\leq j\leq m} |g_j(x)|$.
Ist $f \in A$, so gibt es ein j_0 mit $f \in U_1(g_{j_0})$, also

$$1 > \max_{w\in K} |f(w) - g_{j_0}(w)| \geq |f(x) - g_{j_0}(x)| \geq |f(x)| - |g_{j_0}(x)|.$$

Daher $|f(x)| \leq c$.
2)⇒1)
Zeige, dass A total beschränkt ist.
Sei $\varepsilon > 0$. Zu jedem $x \in K$ gibt es eine offene Ungebung $U_x \subset X$ von x mit

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon/4 \quad \text{für alle } y \in U_x \text{ und alle } f \in A \tag{10}$$

(das gilt weil A gleichstetig in x ist).

Weil K kompakt ist gibt es eine endliche Teilfamilie $(U_{x_j})_{j=1}^n$ der Familie $(U_x)_{x\in K}$ mit

$$K \subset \bigcup_{j=1}^{n} U_{x_j} \subset X. \tag{11}$$

Die Menge

$$B := \bigcup_{j=1}^{n} \{f(x_j) \mid f \in A\} \subset \mathbb{K}$$

ist nach Voraussetzung beschränkt in $\mathbb{K}$, nach dem Satz von Heine-Borel also total beschränkt. Daher gibt es $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{K}$ mit

$$B \subset \bigcup_{i=1}^{k} U_{\varepsilon/4}(\alpha_i) \subset \mathbb{K}. \tag{12}$$

Sei ϕ die Menge aller Abbildungen $\varphi : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, k\}$. Die Menge ϕ enthält k^n Elemente, ist also endlich.

Zu jedem $\varphi \in \phi$ definiere die Menge

$$M_\varphi := \{f \in A \,\big|\, |f(x_j) - \alpha_{\varphi(j)}| < \varepsilon/4 \text{ für alle } 1 \le j \le n\}.$$

Dann gilt

$$A \subset \bigcup_{\varphi\in\phi} M_\varphi,$$

denn sei $f \in A$. Dann gibt es zu jedem $1 \le j \le n$ eine Zahl $\varphi(j) \in \{1, 2, \ldots, k\}$ mit $|f(x_j) - \alpha_{\varphi(j)}| < \varepsilon/4$. Das folgt aus $f(x_j) \in B$ und aus (12).

Also $f \in M_\varphi$.

Jetzt sei $\varphi \in \phi$ und $f \in M_\varphi$. Zu zeigen ist $M_\varphi \subset U_\varepsilon(f) \subset C(K, \mathbb{K})$:

Denn sei $g \in M_\varphi$, also $|g(x_j) - \alpha_{\varphi(j)}| < \varepsilon/4$ für alle $1 \le j \le n$.

Zu zeigen ist $\|g - f\|_\infty < \varepsilon$.

Sei also $y \in K$. Wegen (11) gibt es ein j_0 mit $y \in U_{x_{j_0}}$. Also gilt

$$|f(y) - f(x_{j_0})| < \varepsilon/4 \quad \text{wegen (10)}$$

und

$$|g(y) - g(x_{j_0})| < \varepsilon/4 \quad \text{wieder wegen (10).}$$

Daher

$$\begin{aligned} |g(y) - f(y)| &\le |g(y) - g(x_{j_0})| + |g(x_{j_0}) - \alpha_{\varphi(j_0)}| \\ &\quad + |\alpha_{\varphi(j_0)} - f(x_{j_0})| + |f(x_{j_0}) - f(y)| \\ &< \varepsilon/4 + \varepsilon/4 + \varepsilon/4 + \varepsilon/4 \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Fazit : Zu jedem $\varphi \in \phi$ mit $M_\varphi \neq \emptyset$ gibt es ein $f_\varphi \in M_\varphi$ mit

$$M_\varphi \subset U_\varepsilon(f_\varphi) \subset C(K, \mathbb{K}),$$

also
$$A \subset \bigcup_{\varphi\in\phi, M_\varphi\neq\emptyset} U_\varepsilon(f_\varphi),$$
also ist A total beschränkt. Da $C(K,\mathbb{K})$ ein Banachraum ist, ist A relativ kompakt.

$\equiv$

Corollar 143 *Vergleiche mit Beispiel 54.*
Sei $L : [0,1]\times[0,1] \to \mathbb{K}$ *stetig,* $Y := C([0,1],\mathbb{K})$ *und*
$$\begin{aligned} T : Y &\to Y \\ Tf(t) &= \int_0^t L(t,\tau)f(\tau)\,d\tau \end{aligned}$$
ein Volterrascher Integraloperator.
Dann ist T *ist kompakt.*

Beweis Sei $V \subset Y$ die offene Einheitskugel. Im Satz von Arzela-Ascoli setze $X := [0,1]$, $d(t,s) := |t-s|$, $K := [0,1]$ und $A := TV$.
Zeige erst : Ist $t \in [0,1]$, so gilt $\sup_{g\in V}|Tg(t)| < \infty$.
Sei also $t \in [0,1]$ und $g \in V$.
Dann
$$\begin{aligned} |Tg(t)| &\leq \int_0^t |L(t,\tau)|\cdot|g(\tau)|\,d\tau \\ &\leq \|g\|_\infty \cdot \int_0^t |L(t,\tau)|\,d\tau \\ &\leq \int_0^t |L(t,\tau)|\,d\tau. \end{aligned}$$
Also gilt
$$sup_{g\in V}|Tg(t)| \leq \int_0^t |L(t,\tau)|\,d\tau < \infty.$$
Jetzt sei $t \in [0,1]$. Zeige, dass TV gleichstetig in t ist:
Sei also $\varepsilon > 0$. Da L gleichmässig stetig ist gibt es ein $\delta \in \big(0, \varepsilon/(2\|L\|_\infty + 1)\big)$ mit
$$|L(t,\tau) - L(s,\tau)| \leq \varepsilon/2 \quad \text{für alle } s,\tau \in [0,1] \text{ mit } |s-t| \leq \delta.$$
Jetzt sei $s \in [0,1]$ mit $|s-t| \leq \delta$, und sei $g \in V$.
Zu zeigen ist $|Tg(t) - Tg(s)| \leq \varepsilon$:
Ohne Einschränkung ist $s \leq t$. Dann gilt
$$\begin{aligned} |Tg(t) - Tg(s)| &= \left| \int_0^t L(t,\tau)g(\tau)\,d\tau - \int_0^s L(s,\tau)g(\tau)\,d\tau \right| \\ &\leq \int_0^s |L(t,\tau) - L(s,\tau)|\cdot|g(\tau)|\,d\tau + \int_s^t |L(t,\tau)|\cdot|g(\tau)|\,d\tau \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \|g\|_\infty \cdot \int_0^s \varepsilon/2\, d\tau + \|g\|_\infty \cdot \|L\|_\infty \cdot (t-s) \\
&\leq \varepsilon s/2 + \|L\|_\infty \delta \\
&\leq \varepsilon.
\end{aligned}$$

Also ist TV gleichstetig. Nach dem Satz von Arzela-Ascoli ist TV also relativ kompakt, also ist T kompakt.

$\equiv$

Corollar 144 *Sei* $L : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{K}$ *stetig,* $Y := C([0,1], \mathbb{K})$ *und*

$$\begin{aligned}
T : Y &\to Y \\
Tf(t) &= \int_0^1 L(t,\tau) f(\tau)\, d\tau
\end{aligned}$$

ein Fredholmscher Integraloperator.

Dann ist T *kompakt.*

Beweis Das beweist man wie corollar 143.

$\equiv$

5.2 Der Satz von Schauder

Definition 145 *Seien* X, Y *normiert und* $T \in \mathcal{L}(X, Y)$.

Dann heisst

$$\begin{aligned}
T^t : Y^* &\to X^* \\
T^t x^* &= x^* \circ T
\end{aligned}$$

der zu T *duale Operator.*

Bemerkung 146 Neben $T : X \to Y$ und $T^t : Y^* \to X^*$ ist also auch

$$\begin{aligned}
T^{tt} : X^{**} &\to Y^{**} \\
T^{tt}(x^{**}) &= x^{**} \circ T^t
\end{aligned}$$

definiert.

Ist $y^* \in Y^*$, so gilt $T^{tt}(x^{**})(y^*) = x^{**}(y^* \circ T)$.

Ausserdem gilt:

Sind $j : X \to X^{**}$ und $i : Y \to Y^{**}$ die kanonischen Injektionen von Aufgabe 7.3, so haben wir

$$T^{tt} \circ j = i \circ T.$$

Beweis siehe Aufgabenblatt 11.

Lemma 147 *Seien* X, Y *normiert und* $T \in \mathcal{L}(X, Y)$.

Dann ist T^t *linear, und* $\|T^t\| = \|T\|$.

Beweis Zeige zuerst $\|T^t\| \leq \|T\|$.

Sei $y^* \in Y^*$ mit $\|y^*\| \leq 1$. Dann gilt $\|T^t y^*\| = \|y^* T\| \leq \|y^*\| \cdot \|T\| \leq \|T\|$.

Also $\|T^t\| \leq \|T\|$.

Jetzt zeige $\|T\| \leq \|T^t\|$.

Sei $x \in X$ mit $Tx \neq 0$. Nach Corollar 98 gibt es ein $y^* \in Y^*$ mit $\|y^*\| = 1$ und $y^*(Tx) = \|Tx\|$.

Daher

$$\|Tx\| = |T^t y^*(x)| \leq \|T^t\| \cdot \|y^*\| \cdot \|x\| \leq \|T^t\| \cdot \|x\|.$$

Die Ungleichung $\|Tx\| \leq \|T^t\| \cdot \|x\|$ gilt auch falls $Tx = 0$.

Also $\|T\| \leq \|T^t\|$.

$\equiv$

Bemerkung 148 Ein Ausflug in die Lineare Algebra der zeigt, dass "dual" eine Verallgemeinerung von "transponiert" ist:

Sei speziell $X = \mathbb{K}^n$ und $Y = \mathbb{K}^m$ mit kanonischen Basen $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ von X und $(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ von Y. Das heisst x_i und y_k sind die Einheitsvektoren.

Wir betrachten die zu diesen Basen dualen Basen $(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ und $(y_1^*, y_2^*, \ldots, y_m^*)$ von X^* und Y^*, das heisst also

$$\begin{array}{rcl} x_i^* : X & \to & \mathbb{K} \\ x_i^*(x_j) & = & \delta_{i,j} \end{array}$$

für $1 \leq i, j \leq n$, und

$$\begin{array}{rcl} y_k^* : Y & \to & \mathbb{K} \\ y_k^*(y_l) & = & \delta_{k,l} \end{array}$$

für $1 \leq k, l \leq m$.

x_i^* und y_k^* sind linear und durch obige Gleichungen wohlbestimmt.

Sei $T \in \mathcal{L}(X, Y) = Mat(m, n)$ in kanonischen und $T^t \in \mathcal{L}(Y^*, X^*) = Mat(n, m)$ in dazu dualen Basen. Dabei bezeichnet $Mat(a, b)$ die Menge aller Matrizen mit a Zeilen und b Spalten und Einträgen in $\mathbb{K}$.

Dann ist T^t die transponierte von T.

Beweis Zu zeigen ist $T^t y_k^* = \sum_{i=1}^n T_{k,i} x_i^*$ für alle $1 \leq k \leq m$. (Die Zahl $T_{k,i} \in \mathbb{K}$ ist der Eintrag der Matrix T in der k-ten Zeile und der i-ten Spalte.)

Sei $\alpha \in \mathbb{K}^n$, dann $\alpha = \sum_{j=1}^n \alpha_j x_j$.

Es gilt $Tx_j = j$-te Spalte von $T = \sum_{l=1}^m T_{l,j} y_l$.

Also

$$\begin{array}{rcl} T^t y_k^*(\alpha) & = & y_k^*(T\alpha) \\ & = & y_k^* \left(T \sum_{j=1}^n \alpha_j x_j \right) \end{array}$$

$$\begin{aligned}
&= y_k^*\left(\sum_{j=1}^n \alpha_j \sum_{l=1}^m T_{l,j} y_l\right) \\
&= \sum_{j=1}^n \alpha_j T_{k,j} \quad (\text{beachte } y_k^*(y_l) = \delta_{kl}) \\
&= \sum_{j=1}^n T_{k,j} x_j^*(\alpha).
\end{aligned}$$

$\equiv$

Satz 149 *(Satz von Schauder)*
Seien X, Y normiert, und $T \in \mathcal{L}(X, Y)$.

1) *Ist T kompakt, so auch T^t,*

2) *Ist Y vollständig und T^t kompakt, so ist auch T kompakt.*

Beweis 1)
Seien $U \subset X$ und $V^* \subset Y^*$ die offenen Einheitskugeln.
Sei $(y_n^*)_n \subset V^*$ eine Folge, das heisst jedes $y_n^* : Y \to \mathbb{K}$ ist linear mit $\|y_n^*\| < 1$.
Wir wollen eine konvergente Teilfolge von $(T^t y_n^*)_n \subset X^*$ finden.
Definiere

$$A := \{y^*|_{\overline{TU}} : \overline{TU} \to \mathbb{K} \,\big|\, y^* \in Y^* \text{ und } \|y^*\| \le 1\} \subset C(\overline{TU}, \mathbb{K}).$$

Wir zeigen mit dem Satz von Arzela-Ascoli, dass A relativ kompakt ist (beachte, dass $\overline{TU}$ nach Voraussetzung kompakt ist):
Sei also $y \in \overline{TU}$ und $\varepsilon > 0$. Setze $\delta := \varepsilon$.
Sind dann $\widetilde{y} \in \overline{TU}$ mit $\|y - \widetilde{y}\| \le \delta$ und $y^*|_{\overline{TU}} \in A$, so gilt

$$|y^*|_{\overline{TU}}(y) - y^*|_{\overline{TU}}(\widetilde{y})| = |y^*(y - \widetilde{y})| \le \|y^*\| \cdot \|y - \widetilde{y}\| \le \varepsilon.$$

Also ist A gleichstetig in $C(\overline{TU}, \mathbb{K})$.
Jetzt sei $y \in \overline{TU}$. Zu zeigen ist $\sup_{f \in A} |f(y)| < \infty$.
Ist $y^*|_{\overline{TU}} \in A$, so gilt

$$|y^*|_{\overline{TU}}(y)| = |y^*(y)| \le \|y^*\| \cdot \|y\| \le \|y\|.$$

Also ist A relativ kompakt nach dem Satz von Arzela-Ascoli.
Nach Aufgabe 9.3 hat die Folge $(y_n^*|_{\overline{TU}})_n \subset A$ eine konvergente Teilfolge $(y_{k_n}^*|_{\overline{TU}})_n$ bezüglich der Supremumsnorm, mit anderen Worten konvergiert die Folge $(y_{k_n}^*)_n$ gleichmässig auf $\overline{TU}$.
Wir zeigen jetzt, dass $(T^t y_{k_n}^*)_n$ in X^* konvergiert.
Nach Satz 57 ist $X^* = \mathcal{L}(X, \mathbb{K})$ vollständig, also genügt es zu zeigen, dass $(T^t y_{k_n}^*)_n$ eine Cauchyfolge ist.

Sei $\varepsilon > 0$. Da $(y^*_{k_n})_n$ auf $\overline{TU}$ gleichmässig konvergiert gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$|(y^*_{k_n} - y^*_{k_m})(y)| < \varepsilon \quad \text{für alle } n, m \geq N \text{ und alle } y \in \overline{TU}.$$

Insbesondere gilt

$$|(y^*_{k_n} - y^*_{k_m})Tx| < \varepsilon \quad \text{für alle } n, m \geq N \text{ und alle } x \in U.$$

Daher

$$|T^t y^*_{k_n}(x) - T^t y_{k_m}(x)| = |y^*_{k_n}(Tx) - y^*_{k_m}(Tx)| < \varepsilon$$

für alle $n, m \geq N$ und alle $x \in U$, das heisst

$$\|T^t y^*_{k_n} - T^t y^*_{k_m}\| < \varepsilon \quad \text{für alle } n, m \geq N.$$

Also ist T^t kompakt.

2)

Jetzt sei Y vollständig und T^t kompakt.

Betrachte die kanonischen Isometrien $j : X \to X^{**}$ und $i : Y \to Y^{**}$ aus Aufgabe 7.3.

Nach 1) ist $T^{tt} : X^{**} \to Y^{**}$ kompakt.

Sei $(x_n)_n \subset X$ eine beschränkte Folge. Dann ist die Folge $(j(x_n))_n \subset X^{**}$ beschränkt (weil j Isometrie), also hat die Folge $(T^{tt}(j(x_n)))_n \subset Y^{**}$ eine konvergente Teilfolge $(T^{tt}(j(x_{k_n})))_n$, etwa mit Grenzwert $y^{**} \in Y^{**}$.

Wegen $T^{tt}(j(x_n)) = iTx_n$ (Bemerkung 146) gilt also

$$\lim_{n\to\infty} iTx_{k_n} = y^{**}.$$

Da i isometrisch ist, ist $(Tx_{k_n})_n \subset Y$ eine Cauchyfolge, also konvergent, da Y vollständig ist. Also ist T kompakt.

$\equiv$

5.3 Spektraltheorie kompakter Operatoren

Zum Beweis des folgenden Satzes 152 brauchen wir einige Vorbereitungen.

Lemma 150 *Sei X normiert und $Y \subset X$ ein endlichdimensionaler Teilraum.*

1) *Es gibt eine*[13] *beschränkte lineare Abbildung $P \in \mathcal{L}(X, Y)$ mit $Py = y$ für alle $y \in Y$.*

2) *Es gibt einen abgeschlossenen Unterraum $Z \subset X$ mit $X = Y \oplus Z$.*

[13] Übrigens heisst eine solche Abbildung auch eine 'stetige Projektion auf Y'. Das Wort 'auf' bedeutet, dass P surjektiv ist.

Beweis 1)

Sei $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ eine Basis von Y, und $(y_j^*)_{j=1}^n \subset Y^*$ die dazu duale Basis, siehe Bemerkung 148. Nach dem Satz von Hahn-Banach besitzt jede Linearform $y_j^* : Y \to \mathbb{K}$ eine Fortsetzung $\widetilde{y}_j^* \in X^*$.

Wir definieren

$$\begin{aligned} P : X &\to Y \\ Px &= \sum_{j=1}^n \widetilde{y}_j^*(x) \cdot y_j. \end{aligned}$$

P ist linear. Ausserdem ist P stetig (d.h. beschränkt), denn ist $(x_n)_n \subset X$ eine Folge mit Grenzwert $x \in X$, so gilt $\lim_n Px_n = Px$, da jedes $\widetilde{y}_j^*$ stetig und die Summe in der Definition von P endlich ist.

Ist schliesslich $y \in Y$, so gilt $y = \sum_{k=1}^n \alpha_k y_k$ für gewisse $\alpha_k \in \mathbb{K}$, also

$$Py = \sum_{k=1}^n \alpha_k P y_k = \sum_{k=1}^n \alpha_k y_k = y.$$

Beachte $Py_k = y_k$.

2)

Wähle P wie in 1) und setze $Z := Ker\, P$. Z ist abeschlossen in X, da P stetig und $Z = P^{-1}(0)$.

Zuerst zeige $Y \cap Z = \{0\}$.

Sei also $y \in Y \cap Z$. Also $y = Py = 0$.

Jetzt zeige $Y + Z = X$. Zeige nur $X \subset Y + Z$.

Sei also $x \in X$. Dann $x = Px + (x - Px)$, wobei $Px \in Y$ und $x - Px \in Z$.

($x - Px \in Z$ folgt aus $P(x - Px) = Px - P(Px) = Px - Px = 0$, beachte $Px \in Y$.)

$\equiv$

Lemma 151 *Seien X, Y normiert, und $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ habe abgeschlossenes Bild. Dann ist*

$$\begin{aligned} H : Ker\, T^t &\to (Y/Im\, T)^* \\ Hy^*(y + Im\, T) &= y^*(y) \end{aligned}$$

ein isometrischer Isomorphismus.

Beweis Erinnerung : Die Norm auf dem Quotientenraum $Y/Im\, T = \{y + Im\, T \mid y \in Y\}$ ist $\|y + Im\, T\| = dist(y, Im\, T)$, siehe Beispiel 33.

Wir zeigen zuerst, dass H wohldefiniert ist, das heisst dass $Hy^* : Y/Im\, T \to \mathbb{K}$ für jedes $y^* \in Ker\, T^t$ wohldefiniert, linear und stetig ist.

a) Hy^* ist wohldefiniert :

Denn sei $y_1 + Im\, T = y_2 + Im\, T$. Dann $y_1 - y_2 \in Im\, T$, also gibt es ein $x \in X$ mit $y_1 - y_2 = Tx$.

Daher

$$Hy^*(y_1 + Im\,T) = y^*(y_1) = y^*(y_2 + Tx) = y^*(y_2) + 0 = Hy^*(y_2 + Im\,T).$$

b) Hy^* ist linear : klar.

c) Zeige $\|Hy^*\| \le \|y^*\|$:

Ist $y \in Y$ mit $\|y + Im\,T\| < 1$, so gibt es ein $x \in X$ mit $\|y - Tx\| < 1$.

Also

$$|Hy^*(y + Im\,T)| = |y^*(y)| = |y^*(y - Tx)| \le \|y^*\|.$$

Daher

$$\|Hy^*\| = \sup_{\|y+Im\,T\|<1} |Hy^*(y + Im\,T)| \le \|y^*\|.$$

Also ist H wohldefiniert.

Weiter ist H linear, klar.

Jetzt zeige $\|Hy^*\| \ge \|y^*\|$ für alle $y^* \in Ker\,T^t$:

Rechne

$$\|y^*\| = \sup_{\|y\|\le 1} |y^*(y)| \le \sup_{\|y+Im\,T\|\le 1} |y^*(y)| = \|Hy^*\|,$$

denn aus $\|y\| \le 1$ folgt $\|y + Im\,T\| = \inf_{x\in X} \|y - Tx\| \le \|y\| \le 1$.

Also ist H eine Isometrie.

Schliesslich zeige, dass H surjektiv ist.

Sei $z^* \in (Y/Im\,T)^*$. Definiere $y^* : Y \to \mathbb{K}$ durch $y^*(y) := z^*(y + Im\,T)$.

Dann ist y^* eine wohldefinierte, lineare Abbildung, klar.

Ausserdem

$$\|y^*\| = \sup_{\|y\|\le 1} |y^*(y)| \le \sup_{\|y+Im\,T\|\le 1} |z^*(y + Im\,T)| = \|z^*\|,$$

also ist $y^* \in Y^*$.

Es gilt sogar $y^* \in Ker\,T^t$, denn für $x \in X$ ist $T^t y^*(x) = y^*(Tx) = z^*(Tx + Im\,T) = z^*(0) = 0$.

Schliesslich $Hy^* = z^*$ klar.

$\equiv$

Satz 152 *Sei X ein Banachraum, $T \in \mathcal{K}(X)$ kompakt, $\lambda \in \mathbb{K}\backslash\{0\}$ und $S := \lambda - T$.*

Dann gelten

1) *$Ker\,S$ ist endlichdimensional.*

2) *$Im\,S$ ist abgeschlossen in X.*

3) *$X/Im\,S$ ist endlichdimensional.*

Beweis 1)

Seien $U \subset X$ und $U_K \subset Ker\, S$ die offenen Einheitskugeln.

Dann $U_K = U \cap Ker\, S$, und

$$TU_K = T(U \cap Ker\, S) \subset TU \cap TKer\, S.$$

Nun gilt $TKer\, S = Ker\, S$:

Denn sei $x = Ty \in TKer\, S$ mit $y \in Ker\, S$. Dann $Sx = STy = TSy = T0 = 0$, also $x \in Ker\, S$.

Sei umgekehrt $x \in Ker\, S$, dann also $Tx = \lambda x$, also $x = T(x/\lambda) \in TKer\, S$.

Also gilt $TU_K \subset TU \cap Ker\, S$.

Der Operator

$$\begin{aligned} T|Ker\, S : Ker\, S &\rightarrow Ker\, S \\ x &\mapsto Tx \end{aligned}$$

ist also (wohldefiniert und) kompakt, denn

$$\overline{TU_k} \subset \overline{TU \cap Ker\, S} \subset \overline{TU} \cap Ker\, S.$$

(beachte, dass $Ker\, S = S^{-1}(0)$ abgeschlossen ist.)

Die Menge $\overline{TU}$ ist kompakt nach Voraussetzung, also ist $\overline{TU} \cap Ker\, S$ kompakt, also ist $\overline{TU_K}$ kompakt.

Ausserdem gilt $T|Ker\, S = \lambda \cdot id_{Ker\, S}$, denn für $x \in Ker\, S$ ist $Tx = \lambda x$.

Also ist $id : Ker\, S \rightarrow Ker\, S$ kompakt, nach dem Satz von Riesz ist $Ker\, S$ endlichdimensional.

2)

Nach Lemma 150 gibt es einen abgeschlossenen Unterraum $W \subset X$ mit $X = Ker\, S \oplus W$.

Betrachte den Operator

$$\begin{aligned} Q : W &\rightarrow Im\, S \\ Qw &= Sw. \end{aligned}$$

Wir zeigen, dass Qund Q^{-1} beschränkt und bijektiv sind.

Q ist surjektiv : Sei $x = Sy \in Im\, S$. Es gibt $u \in Ker\, S$ und $w \in W$ mit $y = u + w$.

Dann $Qw = S(u + w) = Sy = x$. Also ist Q surjektiv.

Q ist injektiv : Sei $Qw = 0$. Dann $w \in W \cap Ker\, S = \{0\}$, also ist Q injektiv.

Jetzt zeige, dass der Operator $Q^{-1} : Im\, S \rightarrow W$ stetig ist.

Dazu zeige $\inf_{w \in W, \|w\|=1} \|Qw\| > 0$.

Wir nehmen an es gibt eine Folge $(w_n)_n \subset W$ mit $\|w_n\| = 1$ und $\|Qw_n\| < 1/n$.

Da T kompakt ist enthält $(Tw_n)_n$ eine konvergente Teilfolge $(Tw_{k_n})_n$, etwa mit Grenzwert $x \in X$.

Wegen $Tw_{k_n} = \lambda w_{k_n} - Qw_{k_n} \xrightarrow{n} x$ konvergiert die Folge $(w_{k_n})_n$ gegen x/λ.

Da W abgeschlossen ist gilt $x/\lambda \in W$, also $x \in W$.

Wegen $\frac{1}{\lambda}Sx = \lim_n Sw_{k_n} = \lim_n Qw_{k_n} = 0$ gilt also $x \in W \cap Ker\, S = \{0\}$, also $x = 0$.

Aber aus $w_{k_n} \xrightarrow{n} x$ folgt $\|x\| = 1$, Widerspruch.

Also gilt

$$\alpha := \inf_{w \in W, \|w\|=1} \|Qw\| > 0.$$

Daraus folgt $\|Qw\| \geq \alpha \cdot \|w\|$ für alle $w \in W$, also

$$\|Q(Q^{-1})x\| \geq \alpha \cdot \|Q^{-1}x\| \quad \text{für alle } x \in Im\, S,$$

daher

$$\|Q^{-1}\| \leq 1/\alpha.$$

Jetzt zeige, dass $Im\, S$ abgeschlossen ist : Sei $(x_n)_n \subset Im\, S$ eine Folge mit Grenzwert $y \in X$. Dann ist $w_n := Q^{-1}x_n$ eine Cauchfolge in W, denn

$$\|w_n - w_m\| \leq \|Q^{-1}\| \cdot \|x_n - x_m\|.$$

Da W vollständig ist (beachte : X vollständig und W abgeschlossen) gibt es ein $w \in W$ mit $w_n \xrightarrow{n} w$.

Dann

$$Qw = \lim_n Qw_n = \lim_n x_n = y,$$

also $y \in Im\, Q = Im\, S$.

3)

Nach Lemma 151 gilt $Ker\,(\lambda - T^t) = Ker\, S^t = (X/Im\, S)^*$. Nach dem Satz von Schauder ist T^t kompakt, nach dem gerade bewiesenen Punkt 1) ist $Ker\,(\lambda - T^t) \subset X^*$ endlichdimensional, also ist auch $(X/Im\, S)^*$ endlichdimensional, also auch $X/Im\, S$.

(Allgemein : Ist Z normiert, so $dim\, Z \leq dim\, Z^* \leq \infty$, Beweis mit dualer Basis, siehe Bemerkung 148. Tatsächlich gilt sogar $dim\, Z = dim\, Z^* \leq \infty$, was wir hier aber nicht brauchen.)

$\equiv$

5.4 Fredholm-Operatoren

Lemma 153 *(vergleiche mit Lemma 150).*

Sei X ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, und $Y \subset X$ ein Unterraum.

Dann sind äquivalent

1) $dim\, X/Y < \infty$

2) Es gibt einen edlichdimensionalen Unterraum $W \subset X$ mit $X = W \oplus Y$

Gilt 2), so ist die Dimension von W wohlbestimmt, und es gilt $dim\, W = dim\, X/Y$.

Beweis 2)⇒1)

Betrachte die Projektion

$$\begin{aligned} P_W : X = W \oplus Y &\to W \\ P(w+y) &= w \end{aligned}$$

und den Operator

$$\begin{aligned} S : X/Y &\to W \\ S(x+Y) &= P_W x. \end{aligned}$$

S ist wohldefiniert, denn aus $x \in Y$ folgt $P_W x = 0$. Weiter ist S linear, klar.

Betrachte ausserdem den Operator

$$\begin{aligned} T : W &\to X/Y \\ Tw &= w + Y. \end{aligned}$$

Ist nun $w \in W$, so gilt $STw = S(w+Y) = P_W w = w$.

Ist $x + Y \in X + Y$, so gilt $TS(x+Y) = TP_W x = P_W x + Y = x + (P_W x - x) + Y = x + Y$, denn es gilt $P_W x - x \in Ker\, P_W = Y$.

Also sind T und S beide bijektiv (und linear), also $dim\, X/Y = dim\, W$.

1)⇒2)

Sei $\{x_1+Y, x_2+Y, \ldots, x_n+Y\}$ eine Basis von X/Y. Setze $W := Span\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.

Es gilt $W \cap Y = \{0\}$: Denn sei $x \in W \cap Y$. Also gibt es Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ mit $x = \sum_{j=1}^n \alpha_j \cdot x_j$. Da die Vektoren $(x_1 + Y, \ldots, x_n + Y)$ linear unabhängig in X/Y sind, folgt aus der Gleichung $\sum_{j=1}^n \beta_j \cdot x_j \in Y$ dass alle β_j gleich Null sind. Also gilt $\alpha_j = 0$ für alle j, also $x = 0$.

Jetzt zeige $X \subset W + Y$. Sei $x \in X$. Dann gibt es (eindeutig bestimmte) Zahlen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ mit

$$x + Y = \sum_{j=1}^n \alpha_j \cdot x_j + Y,$$

also $x - \sum_{j=1}^n \alpha_j \cdot x_j \in Y$.

Dann

$$x = \sum_{j=1}^n \alpha_j \cdot x_j + \left(x - \sum_{j=1}^n \alpha_j \cdot x_j \right) \in W + Y.$$

≡

Definition 154 *Sei X ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, und $Y \subset X$ ein Unterraum.*

Dann heisst $codim\, Y := dim\, X/Y \leq \infty$ die Kodimension von Y (in X).

Definition 155 *Seien X, Y Banachräume, und $T \in (X, Y)$.*

T heisst Fredholm-Operator, falls $Ker\, T$ und $Y/Im\, T$ beide endlichdimensional sind.

Die Menge aller Fredholm-Operatoren wird mit $\mathcal{F}(X, Y)$ bezeichnet.

Die Zahl $ind\,(T) := dim\, Ker\, T - dim\, Y/Im\, T \in \mathbb{Z}$ heisst der Index von T.

Satz 156 *Seien X, Y Banachräume, $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, und $Y/Im\,T$ sei endlichdimensional.*

Dann ist $Im\,T$ abgeschlossen in Y.

Beweis Sei $\{y_1 + Im\,T, \ldots, y_n + Im\,T\}$ eine Basis von $Y/Im\,T$ mit $\|y_j\| = 1$ für alle j.

Erst sei T injektiv.

Betrachte den Operator

$$\begin{aligned} \widehat{T} : \mathbb{K}^n \times X &\to Y \\ \widehat{T}(\lambda, x) &= Tx + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \cdot y_j. \end{aligned}$$

Dabei ist die Norm auf dem Banachraum $\mathbb{K}^n \times X$ durch $\|(\lambda, x)\| := \|x\| + \sum_{j=1}^n |\lambda_j|$ gegeben.

$\widehat{T}$ ist linear,klar.

$\widehat{T}$ ist injektiv: Denn sei $Tx + \sum_{j=1}^n \lambda_j \cdot y_j = 0$. Inbesondere gilt

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \cdot y_j + Im\,T = 0 \in Y/Im\,T.$$

Da $\{y_1 + Im\,T, \ldots, y_n + Im\,T\}$ eine Basis von $Y/Im\,T$ ist, folgt $\lambda_j = 0$ für alle j. Daraus folgt weiter $Tx = 0$, also $x = 0$, da T injektiv ist.

$\widehat{T}$ ist surjektiv: Sei $y \in Y$. Dann gibt es (eindeutig bestimmte) Zahlen $\beta_1, \ldots, \beta_n$ mit

$$y + Im\,T = \sum_{j=1}^{n} \beta_j \cdot y_j + Im\,T.$$

Also gibt es ein $x \in X$ mit $y - \sum_{j=1}^n \beta_j \cdot y_j = Tx$, daher gilt

$$\widehat{T}(\beta, x) = y.$$

$\widehat{T}$ ist beschränkt:

$$\begin{aligned} \|\widehat{T}(\lambda, x)\| &\leq \|Tx\| + \sum_{j=1}^{n} |\lambda_j| \cdot \|y_j\| \\ &\leq \|T\| \cdot \|x\| + \sum_{j=1}^{n} |\lambda_j| \\ &= \left(\|x\| + \sum_{j=1}^{n} |\lambda_j| \right) \|T\| - (\|T\| - 1) \sum_{j=1}^{n} |\lambda_j| \\ &\leq \|(\lambda, x)\| \cdot \|T\| + \big| \|T\| - 1 \big| \cdot \|(\lambda, x)\|. \end{aligned}$$

Also gilt $\|\widehat{T}\| \leq \|T\| + \big| \|T\| - 1 \big| < \infty$.

Nach dem Satz von der offenen Abbildung ist $\widehat{T}^{-1}$ stetig, also ist $\widehat{T}(\{0\} \times X) = Im\, T$ abgeschlossen in Y.

Jetzt sei T beliebig (also nicht unbedingt injektiv).

Betrachte den Operator

$$\begin{array}{rcl} \widetilde{T} : X/Ker\, T & \to & Y \\ \widetilde{T}(x + Ker\, T) & = & Tx. \end{array}$$

T ist linear, injektiv, und $\|\widetilde{T}\| = \|T\|$ (Aufgabenblatt 12).

Es gilt $Im\, \widetilde{T} = Im\, T$, also ist $Y/Im\, \widetilde{T}$ endlichdimensional. Nach dem bereits Bewiesenen ist $Im\, T = Im\, \widetilde{T}$ abgeschlossen in Y.

$\equiv$

Bemerkung 157 Seien X, Y Banachräume.

1) Ist $T \in \mathcal{F}(X, Y)$, so ist $Y/Im\, T$ mit der Norm $\|y + Im\, T\| = dist\,(y, Im\, T)$ ein Banachraum.

2) Ist $T \in \mathcal{K}(X)$, $\lambda \in \mathbb{K}\backslash\{0\}$ und $S = \lambda - T$, so ist S ein Fredholm-Operator.

Lemma 158 *Sei X normiert, und $U \subset V \subset X$ abgeschlossene Unterräume.*

Es gelte $\dim V < \infty$ oder $codim\, V < \infty$.

Dann gibt es eine lineare, bijektive, beschränkte Abbildung von X/U nach $X/V \times V/U$.

Bemerkung 159 1) Die Norm auf $X/V \times V/U$ ist $\|(x + V, v + U)\| = \|x + V\| + \|v + U\|$.

2) Ist X vollständig, so gibt es einen Isomorphismus von X/U nach $X/V \times V/U$. Das folgt aus dem Satz der offenen Abbildung.

Beweis Aufgabenblatt12.

$\equiv$

Satz 160 *Seien X, Y Banachräume.*

Dann gelten

1) $\mathcal{F}(X, Y)$ ist eine offene Teilmenge von $\mathcal{L}(X, Y)$.

2) Die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} ind : \mathcal{F}(X, Y) & \to & \mathbb{Z} \\ T & \mapsto & ind(T) \end{array}$$

ist stetig.

Die Topologie auf Z ist die feinste Topologie, das heisst jede Teilmenge von $\mathbb{Z}$ ist offen in $\mathbb{Z}$.

Beweis 1)

Sei $T \in \mathcal{F}(X,Y)$. Nach Lemmata 150 und 153 gibt es einen abgeschlossenen Unterraum $V \subset X$ und einen endlichdimesnionalen Unterraum $W \subset Y$ mit $X = Ker\,T \oplus V$ und $Y = Im\,T \oplus W$.

Der Raum $V \times W$ ist mit der Norm $\|(v,w)\| = \|v\| + \|w\|$ vollständig.

Betrachte die (nicht lineare!) Abbildung

$$\begin{aligned} H : \mathcal{L}(X,Y) &\to \mathcal{L}(V \times W, Y) \\ H(S)(v,w) &= Sv + w. \end{aligned}$$

H ist wohldefiniert : Sei $S \in \mathcal{L}(X,Y)$. Zu zeigen ist, dass $H(S) : V \times W \to Y$ linear und beschränkt ist.

$H(S)$ ist linear, klar.

Weiter

$$\|H(S)\| = \sup_{\|(v,w)\| \leq 1} \|Sv + w\| \leq \sup_{\|(v,w)\| \leq 1} \|Sv\| + \sup_{\|(v,w)\| \leq 1} \|w\| \leq \|S\| + 1.$$

Also ist H wohldefiniert. Ausserdem ist H selbst stetig:

Denn seien $S, L \in \mathcal{L}(X,Y)$. Dann

$$\begin{aligned} \|H(S) - H(L)\| &= \sup_{\|(v,w)\| \leq 1} \|H(S)(v,w) - H(L)(v,w)\| \\ &= \sup_{\|(v,w)\| \leq 1} \|Sv - Lv\| \\ &\leq \sup_{\|(v,w)\| \leq 1} \|S - L\| \cdot \|v\| \\ &\leq \|S - L\|. \end{aligned}$$

Jetzt zeige, dass $H(T) : V \times W \to Y$ bijektiv ist.

$H(T)$ ist injektiv, denn seien $v \in V$ und $w \in W$ mit $Tv + w = 0$. Dann $w \in W \cap Im\,T = \{0\}$, also $w = 0$. Daher $v \in Ker\,T$, also $v \in V \cap Ker\,T = \{0\}$, also auch $v = 0$.

$H(T)$ ist surjektiv, denn sei $y \in Y$. Dann gibt es ein $x \in X$ und ein $w \in W$ mit $y = Tx + w$.

Ist $P_V : X = Ker\,T \oplus V \to V$ die Projektion, so gilt

$$H(T)(P_V x, w) = TP_V x + w = Tx + w + T(P_V x - x) = Tx + w,$$

denn $P_V x - x \in Ker\,P_V = Ker\,T$.

Nach Aufgabenblatt 12 ist die Menge der stetig invertierbaren Operatoren von $V \times W$ nach Y offen in $\mathcal{L}(V \times W, Y)$, also gibt es eine offene Umgebung $\mathcal{A} \subset \mathcal{L}(V \times W, Y)$ von $H(T)$, so dass jedes $R \in \mathcal{A}$ stetig invertierbar ist.

Da H stetig ist, ist $H^{-1}(\mathcal{A})$ eine offene Umgebung von T. Ist also $S \in H^{-1}(\mathcal{A})$, so ist $H(S) : V \times W \to Y$ stetig invertierbar.

Jetzt sei $S \in H^{-1}(\mathcal{A})$. Wir zeigen $S \in \mathcal{F}(X,Y)$:

Zunächst ist $dim\, Ker\, S \leq dim\, Ker\, T$:

Dazu betrachte die Projektion $P_{Ker\,T} : X = Ker\, T \oplus V \to Ker\, T$ und den (linearen) Operator

$$\begin{aligned} M : Ker\, S &\to Ker\, T \\ Mx &= P_{Ker\,T}x. \end{aligned}$$

M ist injektiv, denn sei $x \in Ker\, S$ mit $P_{Ker\,T}x = 0$. Dann $x \in V$, und

$$H(S)(x, Sx) = Sx + Sx = 0.$$

Da $H(S)$ bijektiv ist, ist $x = 0$. Also ist M injektiv, und also gilt

$$dim\, Ker\, S \leq dim\, Ker\, T.$$

Jetzt zeige $dim\, Y/Im\, S \leq dim\, Y/Im\, T$:

Dazu betrachte die Projektion $P_W : X = Im\, T \oplus W \to W$ und den Operator

$$\begin{aligned} A : Y/Im\, T &\to Y/Im\, S \\ A(y + Im\, T) &\to P_W y + Im\, S. \end{aligned}$$

A ist wohldefiniert, denn aus $y \in Im\, T = Ker\, P_W$ folgt $P_W y = 0 \in Im\, S$.

A ist linear, klar.

A ist surjektiv: Sei $y + Im\, S \in Y/Im\, S$. Es gibt (eindeutig bestimmte) $v \in V$ und $w \in W$ mit $H(S)(v,w) = y$.

Dann

$$A(w + Im\, T) = w + Im\, S = y + (w - y) + Im\, S = y + Im\, S,$$

denn $w - y = w - H(S)(v,w) = w - (Sv + w) = -Sv \in Im\, S$.

Also ist A surjektiv, und daher

$$dim\, Y/Im\, S \leq dim\, Y/Im\, T.$$

Also ist S ein Fredholm-Operator, also ist $\mathcal{F}(X,Y)$ offen in $\mathcal{L}(X,Y)$.

2)

Sei $k \in \mathbb{Z}$. Zeige, dass $ind^{-1}(k)$ offen in $\mathcal{F}(X,Y)$ ist.

Sei also $T \in ind^{-1}(k)$.

Wähle V, W, H und die offene Umgebung $\mathcal{A} \subset \mathcal{L}(V \times W, Y)$ von $H(T)$ wie in 1).

Dann ist $H^{-1}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{L}(X,Y)$ eine offene Umgebung von T.

Sei $S \in H^{-1}(\mathcal{A})$. Zeige $ind(S) = ind(T)$:

Die Summe $V \oplus Ker\, S$ ist direkt, denn aus $x \in V \cap Ker\, S$ folgt $H(S)(x, Sx) = 0$, also $x = 0$, da $H(S)$ bijektiv.

Betrachte die Projektion $P_{Ker\,S} : V \oplus Ker\, S \to Ker\, S$ und den Operator

$$\begin{aligned} B : (Ker\, S \oplus V)/V &\to Ker\, S \\ B(x + V) &= P_{Ker\,S}x. \end{aligned}$$

B ist wohldefiniert, denn ist $x \in Ker\, S \oplus V$ mit $x \in V$, so ist $P_{Ker\, S}x = 0$.

B ist linear,klar.

B ist injektiv, denn ist $x \in Ker\, S \oplus V$ mit $P_{Ker\, S}x = 0$, so $x \in Ker\, P_{Ker\, S} = V$, also $x + V = 0$.

B ist surjektiv, denn sei $y \in Ker\, S$, dann $B(y + V) = y$.

Also ist B bijektiv.

Weiter ist die Kodimension von $Ker\, S \oplus V$ in X endlich, denn der Operator

$$\begin{aligned} L : X/V &\rightarrow X/(Ker\, S \oplus V) \\ L(x + V) &= x + Ker\, S \oplus V \end{aligned}$$

ist wohldefiniert, linear und surjektiv (leicht), also

$$dim\, X/(Ker\, S \oplus V) \leq dim\, X/V = dim\, Ker\, T < \infty.$$

Nach Lemma 158 ist

$$\begin{aligned} dim\, X/V &= dim\left(X/(Ker\, S \oplus V) \times (Ker\, S \oplus V)/V\right) \\ &= dim\, X/(Ker\, S \oplus V) + dim\,(Ker\, S \oplus V)/V. \end{aligned}$$

Also

$$dim\, Ker\, T = dim\, X/(Ker\, S \oplus V) + dim\, Ker\, S.$$

Jetzt zeigen wir

a) dim (Y/SV) = dim (Y/SX) + dim (SX/SV)

b) Der Operator

$$\begin{aligned} M : X/(Ker\, S \oplus V) &\rightarrow SX/SV \\ M(x + Ker\, S \oplus V) &\rightarrow Sx + SV \end{aligned}$$

ist linear und bijektiv.

c) Der Operator

$$\begin{aligned} K : W &\rightarrow Y/SV \\ Kw &= w + SV \end{aligned}$$

ist linear und bijektiv.

a)

Nach 1) ist S ein Fredholm-Operator, also ist $dim\, Y/SX$ endlichdimensional. Nach Lemma 158 folgt die Behauptung.

b)

M ist wohldefiniert, denn aus $x \in Ker\, S \oplus V$ folgt $Sx \in SV$.

M ist linear, klar.

M ist injektiv, denn sei $x \in X$ mit $Sx \in SV$. Dann gibt es ein $v \in V$ mit $Sx = Sv$, also $x - v \in Ker\, S$, also $x \in Ker\, S \oplus V$.

M ist surjektiv, klar.

c)

K ist wohldefiniert und linear, klar.

K ist injektiv, denn sei $w \in W$ mit $w \in SV$. Dann gibt es ein $v \in V$ mit $w = Sv$. Es gilt $H(S)(v, -w) = Sv - w = 0$. Da $H(S)$ bijektiv ist, ist $v = w = 0$.

K ist surjektiv, denn sei $y \in Y$. Es gibt (eindeutig bestimmte) $v \in V$ und $w \in W$ mit $H(S)(v, w) = y$. Dann $Kw = w + SV = y + (w - y) + SV = y + SV$, denn wegen $Sv + w = y$ gilt $w - y \in SV$.

Daher

$$\begin{aligned} dim\, Ker\, T &= dim\, X/(Ker\, S \oplus V) + dim\, Ker\, S \\ &= dim\, SX/SV + dim\, Ker\, S \quad \text{wegen b)} \\ &= dim\, Y/SV - dim\, Y/SX + dim\, Ker\, S \quad \text{wegen a)} \\ &= dim\, W - dim\, Y/SX + dim\, Ker\, S \quad \text{wegen c)} \\ &= dim\, Y/Im\, T - dim\, Y/SX + dim\, Ker\, S \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung gilt wegen $dim\, W = dim\, Y/Im\, T$.

Das bedeutet $ind(T) = ind(S)$.

$\equiv$

Corollar 161 *Seien X, Y Banachräume, und $F : [a, b] \to \mathcal{F}(X, Y)$ stetig. Dann*

$$ind(F(a)) = ind(F(b)).$$

Beweis Die Abbildung

$$H := ind \circ F : [a, b] \to \mathbb{Z}$$

ist stetig. Sei $H(a) \neq H(b)$.

Die Mengen $U_1 = H^{-1}(H(a))$ und $U_2 = [a, b] \backslash U_1$ sind beide offen[14] in $[a, b]$ und wegen $H(a) \neq H(b)$ nicht leer. Ihre (disjunkte!) Vereinigung ist $[a, b]$.

Das heisst also, dass $[a, b]$ nicht zusammenhängend ist. Das kann aber nicht sein, denn betrachte die die Funktion

$$\begin{aligned} f : [a, b] &\to \mathbb{R} \\ f(t) &= \begin{cases} 0 & \text{falls} \quad t \in U_1 \\ 1 & \text{falls} \quad t \in U_2 \end{cases} . \end{aligned}$$

f ist stetig, da das Urbild jeder offenen Menge offen ist. Das ist ein Widerspruch zum Zwischenwertsatz.

Also gilt $H(a) = H(b)$.

$\equiv$

[14] übrigens sind beide Mengen auch abgeschlossen in $[a, b]$.

Satz 162 *Sei X ein Banachraum, $T \in \mathcal{K}(X)$, $\lambda \in \mathbb{K}\backslash\{0\}$, und $S := \lambda - T$.*

1) Es gilt $ind(S) = 0$.

2) Es sind äquivalent

a) S ist stetig invertierbar, das heisst $\lambda \in \rho(T)$
b) S ist injektiv
c) S ist surjektiv

3) Es gilt

$$\sigma_p(T) \subset \sigma(T) \subset \big(\sigma_p(T) \cup \{0\}\big),$$

mit anderen Worten : Jeder Spektralwert $\neq 0$ von T ist Eigenwert von T.

Beweis 1)
Betrachte die Funktion

$$\begin{aligned} F : [0,1] &\to \mathcal{F}(X) \\ F(t) &= \lambda - tT. \end{aligned}$$

F ist wohldefiniert wegen Satz 152.
F ist stetig, denn für $s, t \in [0,1]$ gilt

$$\|F(t) - F(s)\|_{\mathcal{L}(X)} = \| - tT + sT\| = |s - t| \cdot \|T\|.$$

Nach Corollar 161 gilt $ind(\lambda \cdot id) = ind(S)$.
Wegen $dim\, Ker\, (\lambda \cdot id) = 0$ und $dim\, X/Im(\lambda \cdot id) = 0$ gilt also

$$ind(S) = ind(\lambda \cdot id) = 0.$$

2)
a)⇒c) ist klar.
c)⇒b) Es gilt $0 = ind(S) = dim\, Ker\, S - dim\, X/Im\, S$, also $Ker\, S = \{0\}$.
b)⇒a) Es gilt $0 = ind(S) = dim\, Ker\, S - dim\, X/Im\, S$, also $X/Im\, S = \{0\}$. Das heisst $Im\, S = X$.
3)
$\sigma_p(T) \subset \sigma(T)$ gilt immer.
Jetzt sei $\lambda \in \sigma(T)$ mit $\lambda \neq 0$. Zu zeigen ist, dass λ Eigenwert von T ist, das heisst, dass $\lambda - T$ nicht injektiv ist. Das folgt aus 2).

≡

Lemma 163 *(Lemma von Riesz)*
Sei X normiert, $T \in \mathcal{L}(X)$, $\lambda \in \mathbb{K}$, $Y \subset Z \subset X$ abgeschlossene Unterräume mit $Y \neq Z$ und $(\lambda - T)Z \subset Y$.
Dann gibt es zu jedem $\varepsilon \in (0,1)$ ein $x_\varepsilon \in Z\backslash Y$ mit

$$\|x_\varepsilon\| = 1$$

und

$$\inf_{y \in Y} \|Ty - Tx_\varepsilon\| \geq \varepsilon \cdot |\lambda|.$$

Beweis Da Y abgeschlossen ist und $Y \subset Z$, $Y \neq Z$, gibt es ein $z \in Z$ mit

$$\alpha := dist(z, Y) > 0.$$

Wegen $dist(z, Y) = \inf_{y \in Y} \|z - y\|$ und $0 < \varepsilon < 1$ gibt es ein $y' \in Y$ mit

$$\|z - y'\| \leq \frac{\alpha}{\varepsilon}.$$

Wegen $z \notin Y$ ist $\|z - y'\| > 0$.

Setze

$$x_\varepsilon := \frac{z - y'}{\|z - y'\|}.$$

Für alle $y \in Y$ gilt

$$\|x_\varepsilon - y\| = \frac{\big\|z - \big(y' + \|z - y'\| \cdot y\big)\big\|}{\|z - y'\|} \geq \frac{\alpha}{\|z - y'\|} \geq \varepsilon. \tag{13}$$

Das erste $\geq$ von links gesehen folgt aus $\|z - y''\| \geq \alpha$ für alle $y'' \in Y$.

Weiterhin gilt für alle $y \in Y$

$$\|Tx_\varepsilon - Ty\| = \left\| \left[y - \frac{1}{\lambda}(\lambda - T)y + \frac{1}{\lambda}(\lambda - T)x_\varepsilon\right] - x_\varepsilon \right\| \cdot |\lambda|. \tag{14}$$

Nach Voraussetzung ist $(\lambda - T)x_\varepsilon \in Y$, also ist $[\ldots] \in Y$, wegen (13) ist der rechte Ausdruck in (14) grösser oder gleich $\varepsilon \cdot |\lambda|$, also

$$\inf_{y \in Y} \|Ty - Tx_\varepsilon\| \geq \varepsilon \cdot |\lambda|.$$

$\equiv$

Satz 164 *Sei X ein Banachraum, $T \in \mathcal{K}(X)$, $\lambda \in \mathbb{K} \backslash \{0\}$, und $S = \lambda - T$.*

Für $k \in \mathbb{N}_0$ setze $N_k := Ker\, S^k$ und $R_k := Im\, S^k$.

Dann gelten

1) *N_k und R_k sind abgeschlossene Unterräume von X, und $codim\, R_k = dim\, N_k < \infty$.*

   Mit anderen Worten : S^k ist Fredholmsch mit $ind(S^k) = 0$.

2) *Es gelten*
   $$\{0\} = N_0 \subset N_1 \subset N_2 \subset \ldots$$
   und
   $$\ldots R_2 \subset R_1 \subset R_0 = X.$$

3) *Es gibt eine kleinste Zahl $n(\lambda) \in \mathbb{N}_0$ mit $N_{n(\lambda)+1} = N_{n(\lambda)}$. Diese Zahl heisst die Ordnung von λ.*

   Es gilt $N_{k+1} = N_k$ für alle $k \geq n(\lambda)$.

4) Es gilt für alle $k \in \mathbb{N}_0$

$$N_{k+1} = N_k \Leftrightarrow R_{k+1} = R_k.$$

5) Es gilt

$$X = N_{n(\lambda)} \oplus R_{n(\lambda)}.$$

6) Der Operator

$$\begin{aligned} S : R_{n(\lambda)} &\to R_{n(\lambda)} \\ x &\mapsto Sx \end{aligned}$$

ist ein Isomorphismus (d.h. bijektiv).

BEWEIS 1)
Es gilt

$$\lambda^k - S^k = \lambda^k - \sum_{n=0}^{k} \binom{k}{n} \lambda^n (-T)^{k-n} = -\sum_{n=0}^{k-1} \binom{k}{n} \lambda^n (-T)^{k-n},$$

also ist $\lambda^k - S^k$ kompakt.

Nach Satz 152 ist $\lambda^k - (\lambda^k - S^k) = S^k$ ein Fredholm-Operator, und $ind(S^k) = 0$ folgt aus Satz 162.

2)
ist klar.

3)
Sei $N_k \neq N_{k+1}$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$.

Fixiere $k \in \mathbb{N}_0$ und wende das Lemma von Riesz an (setze dort $Y := N_k$ und $Z := N_{k+1}$. Dann gilt $SZ \subset Y$, denn ist $z \in Z = Ker\, S^{k+1}$, so ist $Sz \in Ker\, S^k = Y$).

Es gibt also ein $x_k \in N_{k+1} \backslash N_k$ mit $\|x_k\| = 1$ und $\inf_{y \in N_k} \|Ty - Tx_k\| \geq |\lambda|/2$.

Die Folge $(Tx_k)_{k=0}^{\infty}$ enthält keine konvergente Teilfolge, denn für $0 \leq l < k$ gilt

$$\|Tx_j - Tx_k\| \geq \inf_{y \in N_{j+1}} \|Ty - Tx_k\| \geq \inf_{y \in N_k} \|Ty - Tx_k\| \geq |\lambda|/2.$$

Das kann aber nicht sein, da T kompakt ist.

Jetzt zeige $N_{k+1} = N_k$ für alle $k \geq n(\lambda)$:

Sei nämlich $k \in \mathbb{N}_0$ mit $N_{k+1} = N_k$. Dann gilt $N_{k+2} = N_{k+1}$:

Zeige nur $N_{k+2} \subset N_{k+1}$. Sei also $x \in N_{k+2}$, also $S^{k+2}x = 0$.

Dann gilt $Sx \in N_{k+1} = N_k$, also $S^k(Sx) = 0$, also $x \in N_{k+1}$.

4)
$\Leftarrow$ Also gilt $codim\, R_{k+1} = codim\, R_k$, also

$$dim\, N_k = codim\, R_k = codim\, R_{k+1} = dim\, N_{k+1} < \infty.$$

Wegen $N_k \subset N_{k+1}$ gilt also $N_k = N_{k+1}$.
$\Rightarrow$ Es gilt

$$codim\, R_k = dim\, N_k = dim\, N_{k+1} = codim\, R_{k+1} < \infty.$$

Der Operator

$$\begin{array}{rcl} X/R_{k+1} & \to & X/R_k \\ x + R_{k+1} & \mapsto & x + R_k \end{array}$$

wohldefiniert, linear und surjektiv, also bijektiv. Insbesondere gilt $x + R_k = 0 \Rightarrow x + R_{k+1} = 0$, das heisst $R_k \subset R_{k+1}$.

5)

Zeige $N_{n(\lambda)} \cap R_{n(\lambda)} = \{0\}$.

Sei $y \in N_{n(\lambda)} \cap R_{n(\lambda)}$. Dann $S^{n(\lambda)}y = 0$, und es gibt ein $x \in X$ mit $y = S^{n(\lambda)}x$.

Also gilt $x \in N_{2n(\lambda)} = N_{n(\lambda)}$ (beachte 3)), daher $y = S^{n(\lambda)}x = 0$.

Jetzt zeige $X \subset N_{n(\lambda)} \oplus R_{n(\lambda)}$:

Sei $x \in X$. Dann $S^{n(\lambda)}x \in R_{n(\lambda)} = R_{2n(\lambda)}$ (beachte 3) und 4)). Also gibt es ein $y \in R_{n(\lambda)}$ mit $S^n x = S^n y$, das heisst $x - y \in N_{n(\lambda)}$.

Daher

$$x = (x - y) + y \in N_{n(\lambda)} \oplus R_{n(\lambda)}.$$

6)

Die angegebene Abbildung ist wohldefiniert und linear, klar.

Sie ist surjektiv, denn sei $x \in R_{n(\lambda)}$. Dann $x \in R_{n(\lambda)+1}$, also gibt es ein $y \in X$ mit $x = S^{n+1}y$, also $x = S(S^{n(\lambda)}y)$.

Sie ist injektiv, denn sei $x \in R_{n(\lambda)}$ mit $Sx = 0$.

Ohne Einschränkung ist $n(\lambda) \geq 1$, denn ist $n(\lambda) = 0$, so ist S injektiv.

Es gilt

$$x \in R_{n(\lambda)} \cap N_1 \subset R_{n(\lambda)} \cap N_{n(\lambda)} = \{0\},$$

also $x = 0$.

Nach dem open mapping theorem ist S stetig invertierbar, also ein Isomorphismus.

$\equiv$

Satz 165 *(Spektralsatz)*

Sei X ein Banachraum, und $T \in \mathcal{K}(X)$.

Dann gelten

1) *$\sigma(T)$ ist endlich oder abzählbar unendlich.*

   Ist $\sigma(T)$ abzählbar unendlich, so ist 0 einziger Häufungspunkt von $\sigma(T)$.

2) *$\sigma(T) \subset (\sigma_p(T) \cup \{0\})$.*

   Ist $dim\, X = \infty$, so ist $0 \in \sigma(T)$.

3) Sei $\lambda \in \sigma(T)\backslash\{0\}$.

Dann gibt es ein eindeutig bestimmtes Tripel $(N(\lambda), R(\lambda), r)$ aus Unterräumen $N(\lambda) \subset X$, $R(\lambda) \subset X$ und einer Zahl $r \in \mathbb{N}_0$ mit

a) $X = R(\lambda) \oplus N(\lambda)$.

b) $R(\lambda)$ ist abgeschlossen, und $N(\lambda)$ ist endlichdimensional.

c) $TR(\lambda) \subset R(\lambda)$,
und $\lambda - T : R(\lambda) \to R(\lambda)$ ist ein Isomorphismus.

d) $TN(\lambda) \subset N(\lambda)$,
und r ist die kleinste Zahl mit $(\lambda - T)^r N(\lambda) = \{0\}$.

(Es gilt $r = n(\lambda)$, $N(\lambda) = N_{n(\lambda)}$ und $R(\lambda) = R_{n(\lambda)}$, siehe Satz 164).

4) Ist $\lambda \in \sigma(T)\backslash\{0\}$,
so ist $Eig(\lambda, T) = \{x \in X \mid Tx = \lambda x\} \subset N(\lambda)$ endlichdimensional.

5) Sind $\lambda, \mu \in \sigma\backslash\{0\}$ mit $\lambda \neq \mu$,
so gilt $N(\mu) \subset R(\lambda)$.

Beweis 2)

Haben wir schon bewiesen (Satz 162 und Aufgabe 10.4.)

3)

Sei $S = \lambda - T$, und $n(\lambda)$ die Ordnung von λ, siehe Satz 164. Setze $N(\lambda) := N_{n(\lambda)} = Ker\, S^{n(\lambda)}$, $R(\lambda) = R_{n(\lambda)} = Im\, S^{n(\lambda)}$ und $r = n(\lambda)$.

Dann gelten a),b) und c), und $S^r N(\lambda) = \{0\}$.

Zeige noch : $n(\lambda)$ ist die kleinste Zahl mit $S^{n(\lambda)} N(\lambda) = \{0\}$.

Ist $0 \leq k < n(\lambda)$, so gilt also $N_k \subset N(\lambda)$ und $N_k \neq N(\lambda)$. (beachte $n(\lambda) > 0$, da λ nach 2) Eigenwert von T ist).

Wähle $x \in N(\lambda)\backslash N_k$.

Dann $S^k x \neq 0$.

Jetzt zeige die Eindeutigkeit. Seien also $N, R \subset X$ und $r \in \mathbb{N}_0$ mit a),b),c) und d).

Zeige $N \subset N_{n(\lambda)}$:

Sei $x \in N$. Dann $x = y + z \in R_{n(\lambda)} \oplus N_{n(\lambda)}$. Zu zeigen ist $y = 0$.

Ist $r \geq n(\lambda)$, so gilt wegen $S^r N = \{0\}$

$$0 = S^r x = S^r y + S^r z = S^r y,$$

beachte $S^r z = 0$ wegen $S^{n(\lambda)} N_{n(\lambda)} = \{0\}$ und $r \geq n(\lambda)$.

Ist $r \leq n(\lambda)$, so gilt

$$0 = S^{n(\lambda)} x = S^{n(\lambda)} y.$$

Mit $S : R_{n(\lambda)} \to R_{n(\lambda)}$ sind auch $S^r : R_{n(\lambda)} \to R_{n(\lambda)}$ und $S^{n(\lambda)} : R_{n(\lambda)} \to R_{n(\lambda)}$ bijektiv (Satz 164), also injektiv, daher gilt $y = 0$.

Also $N \subset N_{n(\lambda)}$.

Zeige $N_{n(\lambda)} \subset N$:

Sei $x \in N_{n(\lambda)}$. Dann $x = y + z \in R \oplus N$.
Ist $r \geq n(\lambda)$, so

$$0 = S^r x = S^r y + S^r z = S^r y \quad \text{wegen } d).$$

Ist $r \leq n(\lambda)$, so

$$0 = S^{n(\lambda)} x = S^{n(\lambda)} y \quad \text{wieder wegen 2)}.$$

Da $S^r : R \to R$ und $S^{n(\lambda)} : R \to R$ beide bijektiv sind, gilt $y = 0$.
Also $N_{n(\lambda)} \subset N$.
Zeige $R \subset R_{n(\lambda)}$:
Es gilt

$$R = S^{n(\lambda)} R \subset S^{n(\lambda)} X = R_{n(\lambda)}.$$

Zeige $R_{n(\lambda)} \subset R$:
Sei $x \in R_{n(\lambda)}$. Dann $x = y + z \in R \oplus N$, und $S^r x = S^r y$ wegen d).
$S^r : R_{n(\lambda)} \to R_{n(\lambda)}$ ist bijektiv, und $x, y \in R_{n(\lambda)}$. Aus $S^r(x - y) = 0$ folgt $x = y$.

Schliesslich ist $r = n(\lambda)$ klar, da beide Zahlen durch die Bedingung "kleinste Zahl mit $S^l N = \{0\}$" definiert sind.

4)
$Eig(\lambda, T) = N_1 \subset N(\lambda) = N_{n(\lambda)}$ ist klar, da $n(\lambda) > 0$.
1)
Sei $\lambda \in \sigma(T) \backslash \{0\}$, und $\mu \in \mathbb{K} \backslash \{\lambda\}$.
Die Abbildung $\lambda - T : N(\lambda) \to N(\lambda)$ erfüllt $(\lambda - T)^{n(\lambda)} = 0$. Daher ist $\mu - T : N(\lambda) \to N(\lambda)$ bijektiv:

Da $N(\lambda)$ endlichdimensional ist genügt es zu zeigen, dass $\mu - T : N(\lambda) \to N(\lambda)$ injektiv ist. Sei also $x \in N_{n(\lambda)}$ mit $(\mu - T)x = 0$.

Dann $(\lambda - T)x = (\lambda - \mu)x$, also $0 = (\lambda - T)^{n(\lambda)} x = (\lambda - \mu)^{n(\lambda)} x$, also $x = 0$.

Nach Satz 164 ist $\lambda - T : R_{n(\lambda)} \to R_{n(\lambda)}$ stetig invertierbar, nach Satz 105 gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass auch $\mu - T : R_{n(\lambda)} \to R_{n(\lambda)}$ stetig invertierbar ist für alle $\mu \in \mathbb{K}$ mit $|\mu - \lambda| < \varepsilon$.

Für diese μ ist $\mu - T : X \to X$ bijektiv:
$\mu - T$ ist injektiv. Denn sei $x \in X$ mit $(\mu - T)x = 0$.
Dann $x = y + z \in R(\lambda) \oplus N(\lambda)$, also

$$0 = (\mu - T)x = (\mu - T)y + (\mu - T)z \in R(\lambda) \oplus N(\lambda),$$

also $(\mu - T)y = 0 = (\mu - T)z$. Nach Obigem gilt $x = y = 0$.
$\mu - T$ ist surjektiv. Denn sei $x \in X$. Dann $x = y + z \in R(\lambda) \oplus N(\lambda)$.
Nach Obigem gibt es $y' \in R(\lambda)$ und $z' \in N(\lambda)$ mit $y = (\mu - T)y'$ und $z = (\mu - T)z'$.
Dann $(\mu - T)(y' + z') = y + z = x$.
Nach dem open mapping theorem ist $\mu - T : X \to X$ stetig invertierbar, das heisst $\mu \in \rho(T)$.

Also ist λ kein Häufungspunkt der Menge $\sigma(T)$, das heisst $\sigma(T)$ hat keinen Häufungspunkt oder 0 ist einziger Häufungspunkt.

Wegen

$$\sigma(T)\backslash\{0\} \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} \Big(\sigma(T) \cap (\mathbb{K}\backslash U_{1/j}(0))\Big)$$

ist $\sigma(T)$ höchstens abzählbar unendlich, da jede Menge $\sigma(T) \cap (\mathbb{K}\backslash U_{1/j}(0))$ endlich ist (ansonsten hätte $\sigma(T)$ nämlich einen Häufungspunkt $\neq 0$).

5)

Nach Obigem ist $\lambda - T : N(\mu) \to N(\mu)$ bijektiv, also auch $(\lambda - T)^{n(\lambda)} : N(\mu) \to N(\mu)$.

Ist also $x \in N(\mu)$, so gibt es ein $x' \in N(\mu)$ mit $x = (\lambda - T)^{n(\lambda)} x' \in R(\lambda)$.

$\equiv$

6 Die schwachen Topologien

Definition 166 *Sei X ein topologischer Raum, und $\mathcal{B} \subset Pot(X)$ eine Teilmenge der Potenzmenge von X.*

$\mathcal{B}$ heisst Basis der Topologie auf X, falls gelten

1) *Jedes $B \subset \mathcal{B}$ ist offen in X.*

2) *Jede in X offene Menge ist Vereinigung einer Familie von Mengen aus $\mathcal{B}$.*

Gibt es eine Basis $\mathcal{B}$, die aus höchstens abzählbar vielen Mengen besteht, so sagt man, dass X das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt.

Jeder topologische Raum, der das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt, erfüllt auch das erste Abzählbarkeitsaxiom.

Erfüllt X das erste/das zweite Abzählbarkeitsaxiom und ist $M \subset X$ eine Teilmenge, so erfüllt auch M (mit der Teilraumtopologie) das erste/das zweite Abzählbarkeitsaxiom. (Aufgabe)

Wir kommen später auf diesen Begriff zurück.

6.1 Die σ-Topologie

Definition 167 *Sei X normiert. Wir definieren*[15]

$$\mathcal{B} := \left\{ \bigcap_{\lambda \in \Lambda} x_\lambda^{*-1}(U_\lambda) \,\middle|\, \Lambda \textit{ ist eine endliche Menge, } x_\lambda^* \in X^*, \textit{ und } U_\lambda \subset \mathbb{K} \textit{ ist offen} \right\}.$$

Eine Teilmenge $U \subset X$ heisse schwach offen (σ-offen), falls U die Vereinigung einer Familie von Mengen aus $\mathcal{B}$ ist.

Das definiert eine Topologie auf X, gennant die schwache Topologie (σ-Topologie) auf X.

Sie wird mit $\sigma(X, X^*)$ bezeichnet.

$\mathcal{B}$ ist eine Basis von $\sigma(X, X^*)$.

[15] $x_\lambda^{*-1}(U_\lambda) \subset X$ ist das Urbild von U_λ unter x_λ^*.

Beweis Zu zeigen ist, dass obige Definition von "schwach offen" tatsächlich eine Topologie auf X definiert.

$\emptyset \in \sigma(X, X^*)$, denn ist $x_0^* = 0 \in X^*$, so gilt $\emptyset = x_0^{*-1}(U_1(2))$.

$X \in \sigma(X, X^*)$, denn $X = x_0^{*-1}(U_1(0))$.

Sei $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ eine Familie schwach offener Mengen.

Sei $\alpha \in A$. Dann gibt es eine Menge M_α und zu jedem $m \in M_\alpha$ eine endliche Menge $\Lambda_{m,\alpha}$ und $x^*_{m,\alpha,\lambda} \in X^*$ und offene $U_{m,\alpha,\lambda} \subset \mathbb{K}$ mit

$$U_\alpha = \bigcup_{m \in M_\alpha} \bigcap_{\lambda \in \Lambda_{m,\alpha}} x^{*-1}_{m,\alpha,\lambda}(U_{m,\alpha,\lambda}).$$

Also ist $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$ die Vereinigung von Mengen aus $\mathcal{B}$, also schwach offen.

Schliesslich seien $U, V \subset X$ schwach offen.

Dann gibt es zu jedem $x \in U \cap V$ Mengen $C_x, D_x \in \mathcal{B}$ mit $x \in C_x \subset U$ und $x \in D_x \subset V$.

Nach Definition von $\mathcal{B}$ ist $B_x := C_x \cap D_x$ auch in $\mathcal{B}$, und es gilt

$$U \cap V = \bigcup_{x \in U \cap V} B_x.$$

$\equiv$

Lemma 168 *Sei X normiert. Dann ist $\sigma(X, X^*)$ die kleinste Topologie auf X, bezüglich der alle $x^* \in X^*$ stetig sind.*

Mit anderen Worten : Ist $\mathcal{T} \subset Pot(X)$ eine Topologie mit $x^{*-1}(U) \in \mathcal{T}$ für alle $x^* \in X^*$ und alle offenen $U \subset \mathbb{K}$, so gilt $\sigma(X, X^*) \subset \mathcal{T}$.

Beweis Sei $U \in \sigma(X, X^*)$ schwach offen. Dann gibt es eine Menge M und zu jedem $m \in M$ eine endliche Menge Λ_m und $x^*_{\lambda,m} \in X^*$ und offene $U_{\lambda,m} \subset \mathbb{K}$ mit

$$A = \bigcup_{m \in M} \bigcap_{\lambda \in \Lambda_m} x^{*-1}_{\lambda,m}(U_{\lambda,m}).$$

Wegen $x^{*-1}_{\lambda,m}(U_{\lambda,m}) \in \mathcal{T}$ und der Definition einer Topologie gilt $A \in \mathcal{T}$.

$\equiv$

Satz 169 *Sei X normiert.*

Dann gelten

1) *$\sigma(X, X^*)$ ist hausdorffsch.*

2) *Jede schwach offene Menge ist offen, das heisst die schwache Topologie ist kleiner (oder gleich) der Normtopolgie.*

3) *Sei $x \in X$, und $W \subset X$ eine Teilmenge.*

   Dann sind äquivalent

   a) *W ist eine schwache Umgebung von 0.*

b) $x + W$ ist eine schwache Umgebung von x.

Also ist der Operator

$$\begin{aligned} T : X &\to X \\ Ty &= x + y \end{aligned}$$

stetig und stetig invertierbar, wenn man X mit der schwachen Topologie versieht.[16]

Beweis 1)

Seien $x, y \in X$ mit $x \neq y$. Nach corollar 101 gibt es ein $x^* \in X^*$ mit $\|x^*\| = 1$ und $x^*(x - y) = \|x - y\|$.

Setze $\varepsilon = \|x - y\|/2$ und betrachte die schwach offenen Mengen

$$A := x^{*-1}(U_\varepsilon(x^*(x)))$$

und

$$B := x^{*-1}(U_\varepsilon(x^*(y))).$$

Dann $x \in A$ und $y \in B$. Ausserdem $A \cap B = \emptyset$: Denn sei $z \in A \cap B$, dann gilt $|x^*(z) - x^*(x)| < \varepsilon$ und $|x^*(z) - x^*(y)| < \varepsilon$, also

$$2\varepsilon = |x^*(x - y)| \leq |x^*(x) - x^*(z)| + |x^*(z) - x^*(y)| < 2\varepsilon,$$

ein Widerspruch.

2)

ist klar nach lemma 168.

3)

Als Aufgabe.

$\equiv$

Corollar 170 *Sei $(x_n)_n \subset X$ und $x \in X$.*

Dann sind äquivalent

1) $\sigma - \lim_{n\to\infty} x_n = x$, das heisst $(x_n)_n$ konvergiert schwach gegen x.

2) Für alle $x^* \in X^*$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} x^*(x_n) = x^*(x).$$

Beweis 1)⇒2)

Sei $x^* \in X^*$ und $\varepsilon > 0$. Dann ist $x + x^{*-1}(U_\varepsilon(0))$ eine schwache Umgebung von x, nach Voraussetzung gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$x_n \in x + x^{*-1}(U_\varepsilon(0)) \quad \text{für alle } n > N.$$

[16] das heisst, T ist ein schwacher Homöomorphismus. Tatsächlich ist der Operator $Ty = x + \alpha y$ für jedes $\alpha \in \mathbb{K}$ ein schwacher Homöomorphismus.

Das heisst
$$|x^*(x_n) - x^*(x)| < \varepsilon \quad \text{für alle } n > N,$$
also $\lim_n x^*(x_n) = x^*(x)$.

2)⇒1)

Sei $U \subset X$ eine schwache Umgebung von x. Nach Satz 169 ist $-x + U$ eine schwache Nullumgebung, nach Definition der schwachen Topologie gibt es endlich viele $x_1^*, x_2^*, \dots, x_k^* \in X^*$ und offene $U_1, U_2, \dots, U_k \subset \mathbb{K}$ mit

$$0 \in \bigcap_{j=1}^{k} x_j^{*-1}(U_j) \subset -x + U.$$

Insbesondere gilt $0 \in U_j$ für alle j, das heisst jedes U_j ist eine Nullumgebung in $\mathbb{K}$. Nach Voraussetzung gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$x_j^*(x_n) - x_j^*(x) \in U_j \quad \text{für alle } j \in \{1, 2, \dots, k\} \text{ und alle } n > N.$$

Also
$$x_n - x \in \bigcap_{j=1}^{k} x_j^{*-1}(U_j) \subset -x + U \quad \text{für alle } n > N,$$

das heisst $x_n \in U$ für alle $n > N$. Nach Definition 7 konvergiert $(x_n)_n$ schwach gegen x.

≡

Satz 171 *Seien X, Y normiert.*

1) *Ist $T : X \to Y$ linear und gilt $y^* \circ T \in X^*$ für alle $y^* \in Y^*$, so ist T beschränkt.*

2) *Ist $M \subset X$ eine Teilmenge mit $\sup_{x \in M} |x^*(x)| < \infty$ für alle $x^* \in X^*$, so ist M beschränkt.*

Beweis 2)

Betrachte die kanonische Injektion $i : X \hookrightarrow X^{**}$, und die Menge $iM \subset X^{**}$. Dann gilt für alle $x^* \in X^*$

$$\sup_{x^{**} \in iM} |x^{**}(x^*)| = \sup_{m \in M} |i(m)(x^*)| = \sup_{m \in M} |x^*(m)| < \infty.$$

Nach dem Satz von der gleichmässigen Beschränktheit gilt

$$\sup_{x^{**} \in iM} \|x^{**}\| < \infty,$$

also
$$\sup_{m \in M} \|im\| < \infty,$$

also, da i eine Isometrie ist,

$$\sup_{m\in M} \|m\| < \infty.$$

1)
Sei $U \subset X$ die offene Einheitskugel, und sei T unstetig. Dann ist $TU \subset Y$ also nicht beschränkt, nach 2) gibt es also ein $y^* \in Y^*$ mit

$$\sup_{y\in TU} |y^*(y)| = \infty.$$

Das heisst $\sup_{x\in U} |y^*Tx| = \infty$, das heisst y^*T ist unstetig, Widerspruch.

$\equiv$

6.2 Die σ^*-Topologie

Definition 172 *Sei X normiert, und $i : X \hookrightarrow X^{**}$ die kanonische Inklusion.*
Wir definieren[17]

$$\mathcal{B}_* := \left\{ \bigcap_{\lambda\in\Lambda} (i(x_\lambda))^{-1}(U_\lambda) \,\middle|\, \Lambda \textit{ ist eine endliche Menge, } x_\lambda \in X, \textit{ und } U_\lambda \subset \mathbb{K} \textit{ ist offen} \right\}.$$

Eine Teilmenge $U^* \subset X^*$ heisse schwach offen (σ^*-offen), falls U^* die Vereinigung einer Familie von Mengen aus $\mathcal{B}_*$ ist.*

Das definiert eine Topologie auf X^*, genannt die schwach Topologie (σ^*-Topologie) auf X^*.*

Sie wird mit $\sigma(X^*, X)$ bezeichnet.

$\mathcal{B}_*$ ist eine Basis von $\sigma(X^*, X)$.

Der Beweis verläuft wie im Fall der schwachen Topologie.

Auf X haben wir also zwei Topologien, nämlich die Normtopologie und die schwache Topologie. Sie stimmen genau dann überein, falls $dim\, X < \infty$, siehe Übungsblatt 14.

Auf einem Dualraum haben wir drei Topologien, nämlich die Normtopologie, die schwache Topologie und die schwach* Topologie.

Satz 173 *Sei X normiert.*

1) *$\sigma(X^*, X)$ ist die kleinste Topolgie auf X^* bezüglich der alle $ix : X^* \to \mathbb{K}$ stetig sind ($x \in X$, $i : X \to X^{**}$ die kanonische Inklusion).*

2) *$\sigma(X^*, X)$ ist hausdorffsch.*

3) *Jede schwach* offene Menge ist schwach offen, das heisst $\sigma(X^*, X) \subset \sigma(X^*, X^{**})$.*

[17] jedes Element von $\mathcal{B}_*$ ist also eine Teilmenge von X^*.

4) *Für jedes $y^* \in X^*$ und jedes $\alpha \in \mathbb{K}$ ist der Operator*

$$\begin{aligned} T : X^* &\to X^* \\ x^* &\mapsto \alpha x^* + y^* \end{aligned}$$

ein Homöomorhismus[18]*, falls man X^* mit der schwach* Topologie versieht.*

5) *Ist X vollständig und $M^* \subset X^*$ mit $\sup_{x^* \in M^*} |x^*(x)| < \infty$ für alle $x \in X$, so ist M^* beschränkt.*

6) *Sei Y ein Banachraum, und $T : X \to Y^*$ linear so dass*[19] *$jy \circ T$ für jedes $y \in Y$ beschränkt ist.*

Dann ist T beschränkt.

7) *Sei $(x_n^*)_n \subset X^*$ eine Folge, und $x^* \in X^*$.*

Dann sind äquivalent

a) *$\sigma^* - \lim_{n\to\infty} x_n^* = x^*$,*
dass heisst $(x_n^*)_n$ konvergiert schwach gegen x^**

b) *Für alle $x \in X$ gilt*
$$\lim_{n\to\infty} x_n^*(x) = x^*(x)$$

Beweis 1)

Sei $\mathcal{T}$ eine Topolgie auf X^* mit $(ix)^{-1}(U) \in \mathcal{T}$ für alle $x \in X$ und alle offenen $U \subset \mathbb{K}$. Zu zeigen ist $\sigma(X^*, X) \subset \mathcal{T}$.

Sei also $U^* \subset X^*$ schwach* offen. Dann gibt es eine Menge M und zu jedem $m \in M$ eine endliche Menge Λ_m und $x_{\lambda,m} \in X$ und offene $U_{\lambda,m} \subset \mathbb{K}$ mit

$$U^* = \bigcup_{m\in M} \bigcap_{\lambda\in\Lambda_m} (ix_{\lambda,m})^{-1}(U_{\lambda,m}).$$

Also ist $U^* \in \mathcal{T}$.

2)

Seien $x^*, y^* \in X^*$ mit $x^* \neq y^*$. Also gibt es ein $x \in X$ mit $x^*(x) \neq y^*(x)$. Setze $x^{**} := ix \in X^{**}$ und

$$\varepsilon := \frac{|x^*(x) - y^*(x)|}{2}.$$

Definiere die beiden schwach* offenen Mengen

$$U_1^* = (ix)^{-1}(U_\varepsilon(x^{**}(x^*)))$$

und

$$U_2^* = (ix)^{-1}(U_\varepsilon(x^{**}(y^*))).$$

[18]das heisst T ist stetig und bijektiv, und T^{-1} ist stetig.
[19]$j : Y \hookrightarrow Y^{**}$ ist die kanonische Inklusion.

Es gilt $x^* \in U_1^*$, denn $|(ix)(x^*) - x^{**}(x^*)| = 0 < \varepsilon$. Ebenso gilt $y^* \in U_2^*$.

Es bleibt zu zeigen dass $U_1^* \cap U_2^* = \emptyset$:

Sei $z^* \in U_1^* \cap U_2^*$, also $|(ix)(z^*) - x^{**}(x^*)| < \varepsilon$ und $|(ix)(z^*) - x^{**}(y^*)| < \varepsilon$.

Das heisst $|z^*(x) - x^*(x)| < \varepsilon$ und $|z^*(x) - y^*(x)| < \varepsilon$.

Also

$$2\varepsilon = |x^*(x) - y^*(x)| \leq |x^*(x) - z^*(x)| + |z^*(x) - y^*(x)| < 2\varepsilon,$$

ein Widerspruch.

3)

Folgt sofort aus der Definition.

4)

Es genügt zu zeigen, dass T stetig ist (wieso?). Sei also

$$U^* = \bigcup_{m \in M} \bigcap_{\lambda \in \Lambda_m} (ix_{\lambda,m})^{-1}(U_{\lambda,m})$$

eine schwach* offene Teilmenge von X^*.

Dann

$$T^{-1}(U^*) = \bigcup_{m \in M} \bigcap_{\lambda \in \Lambda_m} T^{-1}\Big((ix_{\lambda,m})^{-1}(U_{\lambda,m})\Big),$$

also genügt es zu zeigen, dass $T^{-1}\Big((ix_{\lambda,m})^{-1}(U_{\lambda,m})\Big)$ schwach* offen ist für alle $m \in M$ und $\lambda \in \Lambda_m$.

Das folgt aber sofort wegen

$$\begin{aligned} T^{-1}\Big((ix_{\lambda,m})^{-1}(U_{\lambda,m})\Big) &= \{x^* \in X^* \mid (\alpha x^* + y^*)(x_{\lambda,m}) \in U_{\lambda,m}\} \\ &= (i(\alpha x_{\lambda,m}))^{-1}\Big(- y^*(x_{\lambda,m}) + U_{\lambda,m}\Big). \end{aligned}$$

5)

Klar mit dem Satz von der gleichmässigen Beschränktheit. Da X vollständig ist, ist X von zweiter Kategorie, also ist der Satz anwendbar.

6)

Sei $U \subset X$ die offene Einheitskugel, und sei T unstetig. Dann ist $TU \subset Y^*$ nicht beschränkt, nach 5) gibt es ein $y \in Y$ mit

$$\sup_{y^* \in TU} |y^*(y)| = \infty.$$

Das heisst

$$\sup_{x \in U} |jy(Tx)| = \sup_{x \in U} |(Tx)(y)| = \sup_{y^* \in TU} |y^*(y)| = \infty,$$

ein Widerspruch, da $jy \circ T$ beschränkt ist.

7)

a)$\Rightarrow$b) Sei $x \in X$ und $\varepsilon > 0$. Nach Voraussetzung gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$x_n^* \in x^* + i(x)^{-1}(U_\varepsilon(0)) \quad \text{für alle } n > N,$$

da $x^* + i(x)^{-1}(U_\varepsilon(0))$ eine schwach* offene Umgebung von x^* ist (siehe 4)).

Für $n > N$ gilt also

$$|x_n^*(x) - x^*(x)| = |i(x)(x_n^* - x^*)| < \varepsilon,$$

also gilt b).

b)$\Rightarrow$a)

Sei $U^* \subset X^*$ eine schwach* offene Umgebung von x^*. Dann ist $-x^* + U^*$ eine schwach* offene Nullumgebung (siehe 4)), also gibt es endlich viele $x_1, x_2, \ldots, x_k \in X$ und offene $U_1, U_2, \ldots, U_k \subset \mathbb{K}$ mit

$$0 \in \bigcap_{j=1}^{k} i(x_j)^{-1}(U_j) \subset -x^* + U^*.$$

Insbesondere ist jedes U_j eine offene Nullumgebung in $\mathbb{K}$. Nach Voraussetzung gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$x_n^*(x_j) - x^*(x_j) \in U_j \quad \text{für alle } n > N \text{ und alle } j \in \{1, 2, \ldots, k\}.$$

Das heisst

$$x_n^* - x^* \in \bigcap_{j=1}^{k} i(x_j)^{-1}(U_j) \subset -x^* + U^* \quad \text{für alle } n > N,$$

also

$$x_n^* \in U^* \quad \text{für alle } n > N.$$

$\equiv$

6.3 Der Satz von Tychonov

Definition 174 *Sei A eine beliebige Menge, und $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$ eine Familie topologischer Räume.*

Definiere

$$\prod_{\alpha \in A} X_\alpha := \{(x_\alpha)_{\alpha \in A} \mid x_\alpha \in X_\alpha\}$$

und

$$\mathcal{B} := \left\{ \prod_{\alpha \in A} O_\alpha \,\middle|\, O_\alpha \subset X_\alpha \text{ ist offen, und es gilt } O_\alpha \neq X_\alpha \text{ für nur endlich viele } \alpha \right\}.$$

Eine Teilmenge $U \subset \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ heisse offen, falls sie Vereinigung einer Familie von Mengen aus $\mathcal{B}$ ist.

Das definiert eine Topologie auf $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$, genannt die Produkttopologie.

$\mathcal{B}$ ist eine Basis dieser Topologie.

Definition 175 *Sei X ein topologischer Raum, und $(B_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ eine Familie von Teilengen von X.*

Man sagt, die Familie $(B_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ habe die endliche Durchschnittseigenschaft (EDE), falls je endlich viele Mengen der Familie einen nicht leeren Durschnitt haben.

Lemma 176 *Sei X ein topologischer Raum.*

Dann sind äquivalent

1) *X ist kompakt*

2) *Ist $(B_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ eine Familie abgeschlossener Teilmengen von X mit EDE, so gilt*

$$\bigcap_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda \neq \emptyset.$$

Beweis Als Aufgabe.

$\equiv$

Satz 177 *(Satz von Tychonov)*

Sei $(X_r)_{r\in R}$ eine Familie kompakter topologischer Räume.

Dann ist auch $X := \prod_{r\in R} X_r$ kompakt.

Beweis Benutze Lemma 176. Sei also $(S_\gamma)_{\gamma\in C}$ eine Familie abgeschlossener Teilmengen von X mit EDE.

<u>1.Schritt</u>

Es gibt eine Familie $(N_\alpha)_{\alpha\in A}$ von Teilmengen von X mit den Eigenschaften

a) $(N_\alpha)_{\alpha\in A}$ hat die EDE

b) $\{S_\gamma \mid \gamma\in C\} \subset \{N_\alpha \mid \alpha \in A\}$

c) Ist $(M_\beta)_{\beta\in B}$ eine Familie von Teilmengen von X mit EDE und mit $\{N_\alpha \mid \alpha \in A\} \subset \{M_\beta \mid \beta\in B\}$,

so gilt $\{N_\alpha \mid \alpha\in A\} = \{M_\beta \mid \beta \in B\}$.

Wir beweisen das mit dem Lemma von Zorn.

Betrachte die Menge

$$\mathcal{M} := \left\{ (R_\delta)_{\delta\in D} \;\middle|\; \begin{array}{l} D \text{ beliebige Menge, } (R_\delta)_{\delta\in D} \text{ ist eine Familie von Teilmengen} \\ \text{von } X \text{ mit EDE, und } \{S_\gamma \mid \gamma\in C\} \subset \{R_\delta \mid \delta\in D\} \end{array} \right\}.$$

Definiere eine Ordnung auf $\mathcal{M}$ durch

$$(R_\delta)_{\delta\in D} \le (T_\varepsilon)_{\varepsilon\in E} :\Leftrightarrow \{R_\delta \mid \delta\in D\} \subset \{T_\varepsilon \mid \varepsilon\in E\}.$$

Das ist eine Ordnung, und $\mathcal{M}\neq\emptyset$ klar.

Sei $\mathcal{N}\subset\mathcal{M}$ total geordnet. Wir wollen ein $m\in\mathcal{M}$ finden mit $r\le m$ für alle $r\in\mathcal{N}$.

Es gibt eine Menge Q und Elemente $m_q \in \mathcal{M}$ mit $\mathcal{N} = \{m_q \,|\, q \in Q\}$.
Zu jedem $q \in Q$ gibt es eine Menge B_q und Mengen $R_{\beta,q} \subset X$ mit

$$m_q = (R_{\beta,q})_{\beta \in B_q}.$$

Wir definieren

$$m := (R_{\beta,q})_{q \in Q, \beta \in B_q}.$$

Dann gilt $m_q \leq m$ für alle $q \in Q$. Zu zeigen bleibt $m \in \mathcal{M}$:
$(S_\gamma)_{\gamma \in C} \leq m$ ist klar, da $(S_\gamma)_{\gamma \in C} \leq m_q$ für alle $q \in Q$.
Zeige noch, dass m die EDE hat:
Seien also $q_1, q_2, \ldots, q_n \in Q$ und $\beta_j \in B_{q_j}$ für $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.
Zu zeigen ist

$$\bigcap_{j=1}^{n} R_{\beta_j, q_j} \neq \emptyset.$$

Da $\mathcal{N}$ total geordnet ist gibt es ein $\widetilde{q} \in \{q_1, q_2, \ldots, q_n\}$ mit

$$m_{q_j} \leq m_{\widetilde{q}} \quad \text{für alle } j \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Also gibt es zu jedem $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ ein $\widetilde{\beta}_j \in B_{\widetilde{q}}$ mit

$$R_{\beta_j, q_j} = R_{\widetilde{\beta}_j, \widetilde{q}}.$$

Daher

$$\bigcap_{j=1}^{n} R_{\beta_j, q_j} = \bigcap_{j=1}^{n} R_{\widetilde{\beta}_j, \widetilde{q}}.$$

Die Menge auf der rechten Seite ist $\neq \emptyset$, weil $m_{\widetilde{q}}$ die EDE hat.
Also ist das Lemma von Zorn anwendbar.
Also gibt es eine Familie $(N_\alpha)_{\alpha \in A}$ mit den geforderten Eigenschaften a),b) und c).
Das war der erste Schritt.
<u>2.Schritt</u>
Für $r \in R$ betrachte die Projektion

$$\begin{aligned} p_r : X &\rightarrow X_r \\ p_r((x_s)_{s \in R}) &= x_r. \end{aligned}$$

Die Familie $(p_r(N_\alpha))_{\alpha \in A}$ von Teilmengen von X_r hat die EDE : Denn sind $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in A$, so gilt

$$\emptyset \neq p_r\left(\bigcap_{j=1}^{n} N_{\alpha_j}\right) \subset \bigcap_{j=1}^{n} p_r(N_{\alpha_j}),$$

weil $(N_\alpha)_{\alpha \in A}$ die EDE hat.

Also hat auch $\left(\overline{p_r(N_\alpha)}\right)_{\alpha\in A}$ die EDE (der Strich bedeutet den Abschluss in X_r).

Nach Lemma 176 gibt es ein y_r mit

$$y_r \in X_r \cap \bigcap_{\alpha\in A} \overline{p_r(N_\alpha)}. \tag{15}$$

<u>3.Schritt</u>

Seien $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in A$.

Dann gilt

$$\bigcap_{j=1}^{n} N_{\alpha_j} \in \{N_\alpha \,|\, \alpha \in A\}.$$

Es genügt, die Behauptung für $n = 2$ zu beweisen (Induktion!).

Die Familie $\{N_\alpha \,|\, \alpha \in A\} \cup \{N_{\alpha_1} \cap N_{\alpha_2}\}$ hat die EDE (klar). Wegen c) folgt die Behauptung.

<u>4.Schritt</u>

Sei $r \in R$ und $L \subset X_r$ eine offene Umgebung von $y_r \in X_r$.

Definiere die offene(!) Menge

$$\widetilde{L} := \{(x_s)_{s\in R} \in X \,|\, x_r \in L\} \subset X.$$

Dann hat die Familie $\{N_\alpha \,|\, \alpha \in A\} \cup \{\widetilde{L}\}$ die EDE (also ist $\widetilde{L} \in \{N_\alpha \,|\, \alpha \in A\}$ wegen c)):

Wegen dem 3.Schritt genügt es zu zeigen, dass $\widetilde{L} \cap N_\alpha \neq \emptyset$ für alle $\alpha \in A$.

Sei $\alpha \in A$.

Wegen (15) und der Definition von "Abschluss" gibt es ein $l \in L \cap p_r(N_\alpha)$.

Wegen $l \in p_r(N_\alpha)$ gibt es ein $(z_s)_{s\in R} \in N_\alpha$ mit $z_r = l$.

Es gilt $(z_s)_{s\in R} \in \widetilde{L} \cap N_\alpha$ (klar). <u>5.Schritt</u>

Seien $r_1, r_2, \ldots, r_n \in R$, und sei $L_j \subset X_{r_j}$ eine offene Umgebung von y_{r_j} $(1 \leq j \leq n)$.

Definiere $\widetilde{L_j}$ wie im 4.Schritt, das heisst also

$$\widetilde{L_j} = \{(x_s)_{s\in R} \,|\, x_{r_j} \in L_j\} \subset X.$$

Dann hat die Familie

$$\{N_\alpha \,|\, \alpha \in A\} \cup \{\widetilde{L_j} \,|\, 1 \leq j \leq n\}$$

die EDE.

Das ist klar mit dem 4.Schritt, denn $\widetilde{L_j} \in \{N_\alpha \,|\, \alpha \in A\}$, und $\{N_\alpha \,|\, \alpha \in A\}$ hat die EDE.

<u>6.Schritt</u>

Sei $H \subset X$ eine offene Umgebung von $(y_r)_{r\in R} \in X$.

Zu zeigen ist $H \cap N_\alpha \neq \emptyset$ für alle $\alpha \in A$.

(denn dann gilt $(y_r)_{r\in R} \in \bigcap_{\alpha\in A} \overline{N_\alpha} \subset \bigcap_{\gamma\in C} \overline{S_\gamma} = \bigcap_{\gamma\in C} S_\gamma$, und der Satz ist bewiesen nach Lemma 176).

Nach der Definition der Prdukttopologie gibt es endlich viele $r_1, r_2, \ldots, r_n \in R$ und offene Mengen $L_j \subset X_{r_j}$ $(1 \leq j \leq n)$ mit

$$(y_r)_{r\in R} \in G := \{(x_r)_{r\in R} \,|\, x_{r_j} \in L_j \text{ für alle } j \in \{1, 2, \ldots, r_n\}\} \subset H.$$

Wir zeigen $G \cap N_\alpha \neq \emptyset$ für alle $\alpha \in A$:

Das folgt mit dem 5.Schritt und aus $G = \bigcap_{j=1}^n \widetilde{L_j}$. Beachte, dass L_j eine offene Umgebung von y_{r_j} ist.

Also gilt $H \cap N_\alpha \neq \emptyset$ für alle $\alpha \in A$.

$\equiv$

6.4 Der Satz von Banach-Alaoglu

Satz 178 *(Satz von Banach-Alaoglu)*

Sei X normiert, und $U^* \subset X^*$ die abgeschlossene Einheitskugel in X^*.

Dann ist U^* schwach kompakt.*

Da die schwach*-Topologie hausdorffsch ist, ist U^* also insbesondere schwach* abgeschlossen.

Beweis Für $x \in X$ setze $Y_x := \mathbb{K}$ und betrachte die Abbildung

$$\begin{aligned} \xi : X^* &\to \prod_{x\in X} Y_x \\ \xi(x^*) &= (x^*(x))_{x\in X}. \end{aligned}$$

Mit den Operationen

$$(a_x)_{x\in X} + (b_x)_{x\in X} = (a_x + b_x)_{x\in X}$$

und

$$\lambda \cdot (a_x)_{x\in X} = (\lambda a_x)_{xy\in X}$$

ist $\prod_{x\in X}$ ein Vektorraum, und ξ ist linear.

Wir versehen X^* mit der schwach* Topologie, und $\prod_{x\in X} Y_x$ mit der Produkttopologie.

ξ ist stetig, denn sei $\prod_{x\in X} O_x \subset \prod_{x\in X} Y_x$ eine offene Teilmenge, also $O_x \subset \mathbb{K}$ offen, und $O_{x_j} \neq \mathbb{K}$ für nur endlich viele $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$.

Dann

$$\begin{aligned} \xi^{-1}\left(\prod_{x\in X} O_x\right) &= \{x^* \in X^* \,|\, x^*(x) \in O_x \text{ für alle } x \in X\} \\ &= \{x^* \in X^* \,|\, x^*(x_j) \in O_{x_j} \text{ für alle } j \in \{1, 2, \ldots, n\}\} \\ &= \bigcap_{j=1}^n i(x_j)^{-1}(O_{x_j}). \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass $\xi^{-1}(W) \subset X^*$ schwach* offen ist für jedes offene $W \subset \prod_{x\in X} Y_x$.

Also ist ξ stetig.
Die Abbildung

$$\begin{aligned}\widetilde{\xi} : X^* &\to \xi(X^*)\\ \widetilde{\xi}(x^*) &= \xi(x^*)\end{aligned}$$

ist bijektiv und stetig.
$\widetilde{\xi}$ ist offen:
Sei $y \in X$ und $V \subset \mathbb{K}$ offen. Dann

$$\begin{aligned}\widetilde{\xi}\left(i(y)^{-1}(V)\right) &= \{(x^*(x))_{x\in X} \,|\, x^* \in i(y)^{-1}(V)\}\\ &= \{(x^*(x))_{x\in X} \,|\, x^*(y) \in V\}\\ &= \left(\prod_{x\in X} O_x\right) \cap \xi(X^*),\end{aligned}$$

wobei

$$O_x = \begin{cases} \mathbb{K} & \text{falls} \quad x \neq y\\ V & \text{falls} \quad x = y\end{cases}.$$

Dei Menge $\left(\prod_{x\in X} O_x\right) \cap \xi(X^*)$ ist offen in $\xi(X^*)$, beachte Definition 2.
Daraus folgt, dass $\widetilde{\xi}(S) \subset \xi(X^*)$ für jedes schwach* offene $S \subset X^*$ offen ist.
Also ist $\widetilde{\xi}$ ein Homöomorphismus, das heisst $\widetilde{\xi}^{-1}$ ist stetig.
Wir zeigen, dass $\widetilde{\xi}(U^*)$ kompakt ist:
Es gilt

$$\widetilde{\xi}(U^*) = \{(x^*(x))_{x\in X} \,|\, \|x^*\| \le 1\} \subset \prod_{x\in X}\{t \in \mathbb{K} |\, |t| \le \|x\|\} \subset \prod_{x\in X} Y_x.$$

Die Menge $B_x := \{t \in \mathbb{K} |\, |t| \le \|x\|\}$ ist kompakt, nach dem Satz von Tychonov ist $\prod_{x\in X} B_x$ kompakt.
Es bleibt zu zeigen, dass $\widetilde{\xi}(U^*)$ abgeschlossen in $\prod_{x\in X} Y_x$ ist (denn eine abgeschlossene Teilmenge einer kompakten Menge ist kompakt).
Sei also $(a_x)_{x\in X} \in \overline{\xi(U^*)}$.
Definiere die Abbildung $x^* : X \to \mathbb{K}$ durch $x^*(x) := a_x$.
Zu zeigen ist $x^* \in X^*$ und $\|x^*\| \le 1$.
Zeige erst, dass x^* linear ist:
Für $u, v \in X$, $\lambda \in \mathbb{K}$ und $\varepsilon > 0$ definiere die offene Menge

$$W(u, v, \lambda, \varepsilon) := \left\{ (b_x)_{x\in X} \;\middle|\; \begin{array}{l} |b_u - a_u| < \varepsilon, |b_v - a_v| < \varepsilon,\\ |b_{u+v} - a_{u+v}| < \varepsilon, |b_{\lambda u} - a_{\lambda u}| < \varepsilon \end{array} \right\} \subset \prod_{x\in X} Y_x.$$

$W(u, v, \lambda, \varepsilon)$ ist eine offene Umgebung von $(a_x)_{x\in X}$, also gibt es ein $(b_x)_{x\in X} \in W(u, v, \lambda, \varepsilon) \cap \xi(U^*)$.
Es ist $(b_x)_{x\in X} = \xi(y^*)$ für ein $y^* \in X^*$, das heisst $b_x = y^*(x)$ für alle $x \in X$.
Daher $b_{u+v} = b_u + b_v$ und $b_{\lambda u} = \lambda b_u$.

Also

$$\begin{aligned}|x^*(u+v)-x^*(u)-x^*(v)| &= |x^*(u+v)-x^*(u)-x^*(v)-\big(b_{u+v}-b_u-b_v\big)|\\ &\leq |a_{u+v}-b_{u+v}|+|a_u-b_u|+|a_v-b_v|\\ &\leq 3\varepsilon.\end{aligned}$$

Da $\varepsilon >$ beliebig gewählt werden kann, gilt $x^*(u+v)=x^*(u)+x^*(v)$ für alle $u,v\in X$.

Ausserdem

$$\begin{aligned}|x^*(\lambda u)-\lambda x^*(u)| &= |x^*(\lambda u)-\lambda x^*(u)-\big(b_{\lambda u}-\lambda b_u\big)|\\ &\leq |a_{\lambda u}-b_{\lambda u}|+|\lambda|\cdot|a_u-b_u|\\ &\leq \varepsilon\cdot(1+|\lambda|).\end{aligned}$$

Also ist x^* linear.

Zeige $\|x*\|\leq 1$:

Es gilt

$$(a_x)_{x\in X}\in\overline{\xi(U^*)}\subset\overline{\prod_{x\in X}B_x}=\prod_{x\in X}B_x,$$

also $|a_x|\leq\|x\|$ für alle $x\in X$.

Daher

$$\|x^*\|=\sup_{x\in X}\frac{|x^*(x)|}{\|x\|}\leq 1.$$

$\equiv$

Corollar 179 *Sei X ein Banachraum, und $B\subset X^*$ eine Teilmenge.*

Dann sind äquivalent

1) B ist σ^*-kompakt.

2) B ist beschränkt und σ^*-abgeschlossen.

In der σ^*-Topologie gilt also der Satz von Heine-Borel.

BEWEIS 2)⇒1) Sei $U^*\subset X^*$ die abgeschlossene Einheitskugel. Dann gibt es ein $n\in\mathbb{N}$ mit $B\subset nU^*$, und nU^* ist σ^*-kompakt nach dem Satz von Banach-Alaoglu. Also ist B als σ^*-abgeschlossene Teilmenge einer σ^*-kompakten Menge selber σ^*-kompakt.

1)⇒2) Zu zeigen ist, dass B beschränkt ist.

Für jedes $x\in X$ ist der Operator $H=i(x)$

$$\begin{aligned}H:X^* &\to \mathbb{K}\\ Hx^* &= x^*(x)\end{aligned}$$

stetig, wenn man X^* mit der σ^*-Topologie versieht:

Denn ist $W\subset\mathbb{K}$ offen, so ist $H^{-1}(W)=i(x)^{-1}(W)$ schwach*-offen.

Also ist auch

$$\begin{array}{rcl} B & \to & \mathbb{K} \\ x^* & \mapsto & x^*(x) \end{array}$$

stetig, also beschränkt, da B kompakt.

Also

$$\sup_{x^* \in B} |x^*(x)| < \infty \quad \text{für alle } x \in X.$$

Nach Satz 173 ist B beschränkt.

$\equiv$

6.5 Der Satz von Goldstine

Wir benötigen zwei lemmata.

Lemma 180 *Sei X normiert, und $x^* \in X^*$.*

Dann[20]

$$\|x^*\| = \sup_{x \in X, \|x\| < 1} |x^*(x)| = \sup_{x \in X, \|x\| < 1} \mathit{Re}\, x^*(x).$$

Beweis Zu zeigen ist $|x^*(x)| \leq \sup_{z \in X, \|z\| < 1} \mathit{Re}\, x^*(z)$ für alle $x \in X$ mit $\|x\| < 1$.

Sei also $x \in X$ mit $\|x\| < 1$. Dann gibt es ein $\varphi \in [0, 2\pi)$ mit $x^*(x) = |x^*(x)| \cdot e^{i\varphi}$.

Setze $z := e^{-i\varphi} x$. Dann $\|z\| < 1$, und

$$\mathit{Re}\, x^*(z) = \mathit{Re}\, |x^*(x)| = |x^*(x)|.$$

$\equiv$

Lemma 181 *Sei X normiert mit σ-Topologie, und $f, g : X \to \mathbb{K}$ stetig.*

Dann sind auch $f + g$ und $f \cdot g$ stetig.

Beweis Die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} H : X & \to & \mathbb{K}^2 \\ H(x) & = & (f(x), g(x)) \end{array}$$

ist stetig (X mit der σ-Topologie):

Denn sei $U \subset \mathbb{K}^2$ offen. Nach Definition 174 der Produkttopologie gibt es Familien $(A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ und $(B_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ offener Teilmengen von $\mathbb{K}$ mit

$$U = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \times B_\lambda.$$

[20] $\mathit{Re}\, z$ ist der Realteil der komplexen Zahl $z \in \mathbb{C}$.

Dann $H^{-1}(U) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} H^{-1}(A_\lambda \times B_\lambda)$, also genügt es zu zeigen, dass $H^{-1}(A_\lambda \times B_\lambda)$ für jedes $\lambda \in \Lambda$ schwach offen in X ist.

Es gilt

$$H^{-1}(A_\lambda \times B_\lambda) = \{x \in X \mid f(x) \in A_\lambda \text{ und } g(x) \in B_\lambda\} = f^{-1}(A_\lambda) \cap g^{-1}(B_\lambda).$$

Da f und g stetig sind, ist $f^{-1}(A_\lambda) \cap g^{-1}(B_\lambda)$ schwach offen in X.

Also ist H stetig (X mit σ-Topologie).

Weiter sind die Abbildungen

$$\begin{aligned} add : \mathbb{K}^2 &\to \mathbb{K} \\ add(a,b) &= a+b \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} mult : \mathbb{K}^2 &\to \mathbb{K} \\ mult(a,b) &= ab \end{aligned}$$

stetig.

Aus $f + g = add \circ H$ und $fg = mult \circ H$ folgt die Behauptung.

$\equiv$

Aus dem folgenden Lemma folgt der Satz von Goldstine in wenigen Zeilen.

Lemma 182 *Sei X normiert, und $U \subset X$, $U^{**} \subset X^{**}$ die offenen Einheitskugeln.*[21]

Sei weiter $x^{**} \in U^{**}$, und $x_1^*, x_2^*, \dots, x_N^* \in X^*$.

Betrachte die Abbildung

$$\begin{aligned} h : X &\to \mathbb{R} \\ h(x) &= \sum_{i=1}^{N} |x^{**}(x_i^*) - x_i^*(x)|^2. \end{aligned}$$

Dann gelten

1) $\inf_{x\in U} h(x) = 0$.

2) h ist stetig, wenn man X mit der schwachen Topologie versieht.

Beweis 1)

1.Schritt

Setze $I := \inf_{x\in U} h(x)$.

Also gibt es eine Folge $(a_n)_n \subset U$ mit $\lim_{n\to\infty} h(a_n) = I$.

Die Folgen $(x_1^*(a_n))_n, (x_2^*(a_n))_n, \dots, (x_N^*(a_n))_n$ sind alle beschränkt in $\mathbb{K}$. N-maliges Anwenden des Satzes von Bolzano-Weierstrass liefert eine Teilfolge $(a_{m_n})_n$, so dass $\xi_i := \lim_{n\to\infty} x_i^*(a_{m_n})$ für alle $i \in \{1, 2, \dots, N\}$ existiert.

[21] das lemma stimmt auch, falls U und/oder U^{**} die abgeschlossenen Einheitskugeln sind.

Setze $b_n := a_{m_n}$. Dann also $\xi_i = \lim_n x_i^*(b_n)$.
Für $1 \leq i \leq N$ setze $\delta_i := x^{**}(x_i^*) - \xi_i$.
Dann gilt

$$\sum_{i=1}^{N} |\delta_i|^2 = \lim_n \sum_{i=1}^{N} |x^{**}(x_i^*) - x_i^*(b_n)|^2 = \lim_n h(b_n) = I.$$

<u>2.Schritt</u>
Wir zeigen

$$Re\left(\sum_{i=1}^{N}(x_i^*(x) - \xi_i) \cdot \overline{\delta_i}\right) \leq 0 \quad \text{für alle } x \in U.$$

Sei $x \in U$, und $t \in [0,1]$.
Dann gilt für alle n

$$\begin{aligned}
I &\leq h\big((1-t)b_n + tx\big) \quad \text{denn } U \text{ ist eine konvexe Menge} \\
&= \sum_{i=1}^{N} \left|x^{**}(x_i^*) - x_i^*\big((1-t)b_n + tx\big)\right|^2 \\
&= \sum_{i=1}^{N} \left|\Big[x^{**}(x_i^*) - x_i^*(b_n)\Big] - \Big[t\big(x_i^*(x) - x_i^*(b_n)\big)\Big]\right|^2 \\
&= \sum_{i=1}^{N} |x^{**}(x_i^*) - x_i^*(b_n)|^2 - 2t \cdot Re\left(\sum_{i=1}^{N} \overline{x^{**}(x_i^*) - x_i^*(b_n)} \cdot (x_i^*(x) - x_i^*(b_n))\right) \\
&\quad + t^2 \cdot \sum_{i=1}^{N} |x_i^*(x) - x_i^*(b_n)|^2
\end{aligned}$$

denn für $u, v \in \mathbb{C}$ gilt $|u-v|^2 = |u|^2 - 2\,Re\,(\overline{v}u) + |v|^2$.

$n \to \infty$ liefert

$$I \leq \sum_{i=1}^{N} |\delta_i|^2 - 2t\,Re\left(\sum_{i=1}^{N} \overline{\delta_i} \cdot (x_i^*(x) - \xi_i)\right) + t^2 \cdot \sum_{i=1}^{N} |x_i^*(x) - \xi_i|^2,$$

also

$$2\,Re\left(\sum_{i=1}^{N}(x_i^*(x) - \xi_i) \cdot \overline{\delta_i}\right) \leq t \cdot \sum_{i=1}^{N} |x_i^*(x) - \xi_i|^2 \quad \text{für alle } t \in (0,1].$$

$t \downarrow 0$ liefert die Behauptung.

<u>3.Schritt</u>
Setze $x^* := \sum_{i=1}^{N} \overline{\delta_i} \cdot x_i^* \in X^*$.
Dann gilt

$$\|x^*\| = \sum_{i=1}^{N} \overline{\delta_i} \cdot \xi_i\ :$$

Denn für alle $x \in U$ gilt

$$\begin{aligned}
Re\,(x^*(x)) &= Re\left(\sum_{i=1}^N \overline{\delta_i}\cdot x_i^*(x)\right)\\
&\leq Re\left(\sum_{i=1}^N \overline{\delta_i}\cdot x_i^*(x) - \sum_{i=1}^N (x_i^*(x)-\xi_i)\cdot\overline{\delta_i}\right) \quad \text{nach 2.Schritt}\\
&= Re\left(\sum_{i=1}^N \overline{\delta_i}\cdot \xi_i\right).
\end{aligned}$$

Also, nach lemma 180,

$$\|x^*\| = \sup_{x\in U} Re\,(x^*(x)) \leq Re\left(\sum_{i=1}^N \overline{\delta_i}\cdot\xi_i\right).$$

Ausserdem

$$x^*(b_n) = \sum_{i=1}^N \overline{\delta_i}\cdot x_i^*(b_n) \xrightarrow{n\to\infty} \sum_{i=1}^N \overline{\delta_i}\cdot\xi_i,$$

also

$$\left|\sum_{i=1}^N \overline{\delta_i}\cdot\xi_i\right| = \lim_n |x^*(b_n)| \leq \|x^*\|\cdot\sup_n \|b_n\| \leq \|x^*\| \leq Re\left(\sum_{i=1}^N \overline{\delta_i}\cdot\xi_i\right). \quad (16)$$

Ist $u \in \mathbb{C}$ mit $|u| \leq Re\,u$, so gilt $u = |u| = Re\,u$, also gilt in (16) überall "=", und

$$\|x^*\| = \sum_{i=1}^N \overline{\delta_i}\cdot\xi_i.$$

<u>4.Schritt</u>

Rechne

$$\begin{aligned}
I &= \sum_{i=1}^N |\delta_i|^2 \quad \text{nach 1.Schritt}\\
&= \sum_{i=1}^N \overline{\delta_i}\cdot\delta_i\\
&= \sum_{i=1}^N \overline{\delta_i}\cdot(x^{**}(x_i^*)-\xi_i)\\
&= \sum_{i=1}^N \overline{\delta_i}x^{**}(x_i^*) - \|x^*\| \quad \text{nach 3.Schritt}\\
&= x^{**}(x^*) - \|x^*\|\\
&\leq |x^{**}(x^*)| - \|x^*\|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\le \|x^{**}\| \cdot \|x^*\| - \|x^*\| \\ &\le \|x^*\| - \|x^*\| \quad \text{denn } \|x^{**}\| \le 1 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Also $I = 0$.

2)

Beachte : X trägt hier die schwache Topologie.

Nach lemma 181 genügt es zu zeigen, dass die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} X & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & |x^{**}(x_1) - x_1^*(x)| \end{array}$$

stetig ist.

Da $|\cdot| : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ stetig ist, genügt es zu zeigen, dass die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} X & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^{**}(x_1) - x_1^*(x) \end{array}$$

stetig ist.

Da die konstante Abbildung

$$\begin{array}{rcl} X & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & x^{**}(x_1) \end{array}$$

stetig ist, genügt es zu zeigen, dass $-x_1^* : X \to \mathbb{K}$ stetig ist. Das ist aber klar nach Definition der schwachen Topologie.

$\equiv$

Satz 183 *(Satz von Goldstine)*

Sei X normiert, $i : X \hookrightarrow X^{**}$ die kanonische Injektion, $U \subset X$ und $U^{**} \subset X^{**}$ die abgeschlossenen Einheitskugeln.

Dann ist $i(U)$ schwach-dicht in U^{**}.*

Ist also $\overline{}$ der Abschluss in X^{**} bezüglich der schwach*-Topologie, so gilt

$$\overline{i(U)} = U^{**}.$$

Beachte, dass U^{**} schwach*-abgeschlossen in X^{**} ist nach dem Satz von Banach-Alaoglu.

Der Satz stimmt auch, wenn U die offene Einheitskugel in X ist.

Beweis Zu zeigen ist $U^{**} \subset \overline{i(U)}$, wobei $\overline{}$ der Abschluss in X^{**} bezüglich der schwach*-Topologie ist.

Sei also $x^{**} \in U^{**}$ und $V^{**} \subset X^{**}$ eine schwach* offene Umgebung von x^{**}. Zu zeigen ist $V^{**} \cap i(U) \neq \emptyset$.

$-x^{**} + V^{**}$ ist eine schwach* offene Nullumgebung in X^{**}, nach Definition der schwach*-Topologie auf X^{**} gibt es ein $\varepsilon > 0$ und $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_N^* \in X^*$ mit

$$0 \in \bigcap_{k=1}^{N} j(x_k^*)^{-1}(U_\varepsilon(0)) \subset -x^{**} + V^{**} \subset X^{**},$$

wobei $j : X^* \hookrightarrow X^{***}$ die kanonische Injektion ist.

Nach lemma 182 gibt es ein $x \in U$ mit

$$|x^{**}(x_k^*) - x_k^*(x)| < \varepsilon \quad \text{für alle } k \in \{1, 2, \ldots, N\}.$$

Das heisst

$$\left| j(x_k^*)\Big(i(x) - x^{**}\Big) \right| < \varepsilon \quad \text{für alle } k \in \{1, 2, \ldots, N\},$$

also

$$i(x) - x^{**} \in \bigcap_{k=1}^{N} j(x_k^*)^{-1}(U_\varepsilon(0)).$$

Daher

$$i(x) \in V^{**} \cap i(U).$$

$\equiv$

Corollar 184 *Sei X normiert, und die abgeschlossene Einheitskugel $U \subset X$ sei schwach kompakt (d.h. kompakt bezüglich der σ-Toplogie).*

Seien $x_1^*, \ldots, x_n^* \in X^*$ und $x^{**} \in X^{**}$.

Dann gibt es ein $x \in X$ mit $\|x\| \le \|x^{**}\|$ und

$$x^{**}(x_j^*) = x_j^*(x) \quad \textit{für alle } j \in \{1, 2, \ldots n\}.$$

Beweis Ohne Einschränkung ist $x^{**} \neq 0$.

Betrachte die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} h : X & \to & \mathbb{R} \\ h(x) & = & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \left| \frac{x^{**}}{\|x^{**}\|}(x_j^*) - x_j^*(x) \right|. \end{array}$$

Nach Lemma 182 gilt $\inf_{x \in U} h(x) = 0$, und da h stetig ist wenn man X mit der schwachen Topologie versieht, nimmt h auf der schwach kompakten Menge U ihr Minimum an.

Also gibt es ein $y \in U$ mit $h(y) = 0$, also

$$x^{**}(x_j^*) = x_j^*(\|x^{**}\| \cdot y) \quad \text{für alle } j \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

$\equiv$

7 Der Satz von Eberlein-Shmulyan

7.1 Separable Räume

Definition 185 *Sei (X, d) ein metrischer Raum.*

Er heisst separabel, falls er eine abzählbare Teilmenge enthält, die dicht in X ist.

Beispiel 186 1) Jeder endlichdimensionale Raum ist separabel (wieso?).

2) Der Raum c_0 aller Nullfolgen in $\mathbb{K}$ ist separabel, denn die abzählbare Teilmenge

$$\left\{(x_n)_n \in c_0 \,\middle|\, x_n \in \mathbb{Q} \text{ für alle } n, \text{ und } x_n \neq 0 \text{ für nur endlich viele n}\right\}$$

liegt dicht in c_0.

3) Ist $1 \leq p < \infty$, so ist ℓ_p separabel (Beweis wie in 2)). Wir werden unten sehen, dass ℓ_∞ nicht separabel ist.

4) $C([0,1], \mathbb{K})$ ist separabel nach dem Approximationssatz von Weierstrass, nach dem jede stetige Funktion auf $[0,1]$ gleichmässig durch Polynome mit rationalen Koeffizienten approximiert werden kann.

5) Ist $1 \leq p < \infty$, so ist $L_p(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ separabel (ohne Beweis).

Lemma 187 *Sei (X, d) ein metrischer Raum.*

Dann sind äquivalent

1) X ist separabel.

2) X erfüllt das zweite Abzählbarkeitsaxiom.

Beweis 2)⇒1)

Sei $\{U_n \,|\, n \in \mathbb{N}^+\}$ eine abzählbare Basis der Topologie von X. Das heisst $U_n \subset X$ ist offen, und jede offene Teilmenge von X ist die Vereinigung gewisser U_n.

Zu jedem $n \in \mathbb{N}^+$ wählen wir ein $u_n \in U_n$, und wir setzen

$$G := \{u_n \,|\, n \in \mathbb{N}^+\} \subset X.$$

Zeige, dass G dicht in X liegt:

Sei also $x \in X$ ein Berürhungspunkt von G, und $U \subset X$ eine offene Umgebung von x.

Zu zeigen ist $U \cap G \neq \emptyset$.

Es gibt eine Teilfolge $(k_n)_n$ von $\mathbb{N}^+$ mit $U = \bigcup_{n=1}^\infty U_{k_n}$. Also $u_{k_n} \in U$ für alle n, inbesondere $u_{k_1} \in U \cap G$.

1)⇒2)

Sei $\{x_n \,|\, n \in \mathbb{N}^+\}$ eine abzählbare dichte Teilmenge von X.

Wir zeigen, dass die abzählbare(!) Menge

$$\{U_r(x_n) \,|\, n \in \mathbb{N}^+, r \in \mathbb{Q}^+\}$$

eine Basis der Topologie von X ist.

Sei also $V \subset X$ offen und $v \in V$.

Zeige : Es gibt ein $r \in \mathbb{Q}^+$ und ein $n \in \mathbb{N}^+$ mit $v \in U_r(x_n) \subset V$.

Sei $\delta \in \mathbb{Q}^+$ mit $U_\delta(v) \subset V$.

Es gibt ein x_n mit $d(x_n, v) < \delta/2$. Setze $r := \delta/2$. Dann gilt $v \in U_r(x_n)$.

Schliesslich gilt $U_r(x_n) \subset V$, denn sei $x \in U_r(x_n)$.

Dann

$$d(x,v) \leq d(x,x_n) + d(x_n,v) < r + \delta/2 = \delta,$$

also $x \in U_\delta(v) \subset V$.

$\equiv$

Satz 188 *Sei (X,d) separabel, und $M \subset X$ eine Teilmenge.*
Dann ist auch (M,d) separabel.

Beweis Nach Lemma 187 erfüllt X das zweite Abzählbarkeitsaxiom. Also erfüllt auch (M,d) das zweite Abzählbarkeitsaxiom, siehe die Bemerkung zu Definition 166.

Nach Lemma 187 ist also auch (M,d) separabel.

$\equiv$

Lemma 189 *Sei X normiert, und $U \subset X$ die (offene oder abgeschlossene) Einheitskugel.*
Dann sind äquivalent

1) X ist separabel.

2) Der metrische Raum U ist separabel.

3) Es gibt eine Folge $(x_n)_n \subset X$ mit

$$X = \overline{Span\,\{x_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}}.$$

Beweis 1)⇒3) ist klar.

3)⇒1)

Die Menge

$$N := \left\{ \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \cdot x_j \,\middle|\, k \in \mathbb{N}, \alpha_j \in \mathbb{K}, Re\,\alpha_j \in \mathbb{Q}, Im\,\alpha_j \in \mathbb{Q} \right\}$$

ist abzählbar(klar?).

Wir zeigen $\overline{N} = X$:

Denn sei $x \in X$ und $\varepsilon > 0$.

Nach Voraussetzung gibt es Zahlen $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_N \in \mathbb{K}$ mit

$$\left\| x - \sum_{j=1}^{N} \beta_j x_j \right\| < \varepsilon/2.$$

Wähle $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N \in \mathbb{K}$ mit $Re\, \alpha_j \in \mathbb{Q}$ und $Im\, \alpha_j \in \mathbb{Q}$ und mit

$$|\beta_j - \alpha_j| < \frac{\varepsilon}{2 \cdot \left(1 + \sum_{j=1}^{N} \|x_j\|\right)} \quad \text{für alle } j \in \{1, 2, \ldots, N\}.$$

Dann

$$\begin{aligned} \left\| x - \sum_{j=1}^{N} \alpha_j x_j \right\| &\leq \left\| x - \sum_{j=1}^{N} \beta_j x_j \right\| + \left\| \sum_{j=1}^{N} (\beta_j - \alpha_j) x_j \right\| \\ &\leq \varepsilon/2 + \max_{1 \leq j \leq N} |\beta_j - \alpha_j| \cdot \sum_{j=1}^{N} \|x_j\| \\ &\leq \varepsilon. \end{aligned}$$

1)$\Rightarrow$2) Wegen Satz 188.

2)$\Rightarrow$1)

Sei $\{y_1, y_2, \ldots\} \subset U$ dicht in U. Wir zeigen, dass die (abzählbare!) Menge

$$M := \{r \cdot y_k \mid k \in \mathbb{N}^+, r \in \mathbb{Q}\}$$

dicht in X liegt.

Sei also $x \in X$ und $\varepsilon > 0$. Ohne Einschränkung ist $x \neq 0$ (wieso?).

Dann $\frac{x}{2\|x\|} \in U$, also gibt es ein $j \in \mathbb{N}$ mit

$$\left\| y_j - \frac{x}{2\|x\|} \right\| < \frac{\varepsilon}{4\|x\|}.$$

Es gibt ein $r \in \mathbb{Q}$ mit $|r - 2\|x\|| < \varepsilon/2$.

Dann

$$\begin{aligned} \|ry_j - x\| &\leq \big\|ry_j - 2\|x\|y_j\big\| + \big\|2\|x\|y_j - x\big\| \\ &\leq \big|r - 2\|x\|\big| + 2\|x\| \cdot \left\| y_j - \frac{x}{2\|x\|} \right\| \\ &\leq \varepsilon. \end{aligned}$$

$\equiv$

Satz 190 *Sei X normiert, und es gebe eine überabzählbare Menge*[22] $\{x_\alpha \mid \alpha \in A\} \subset X$ *mit*

$$\inf_{\substack{\alpha, \beta \in A \\ \alpha \neq \beta}} \|x_\alpha - x_\beta\| > 0.$$

Dann ist X nicht separabel.

[22] das heisst eine Menge, die nicht abzählbar ist.

Beweis Setze

$$\delta := \inf_{\substack{\alpha,\beta\in A\\ \alpha\neq\beta}} \|x_\alpha - x_\beta\|.$$

Sei $M \subset X$ eine abzählbare Teilmenge. Wir zeigen, dass M nicht dicht ist.

Es gibt eine Folge $(m_n)_{n\geq 1} \subset M$ mit $M = \{m_n \,|\, n \in \mathbb{N}^+\}$.

Es gibt ein $\alpha \in A$ mit $m_n \notin U_{\delta/2}(x_\alpha)$ (die Annahme des Gegenteils führt auf einen Widerspruch zur Abzählbarkeit von M, denn für $\beta, \gamma \in A$ mit $\gamma \neq \beta$ gilt $U_{\delta/2}(x_\gamma) \cap U_{\delta/2}(x_\beta) = \emptyset$).

Also gilt $M \cap U_{\delta/2}(x_\alpha) = \emptyset$, daher ist M nicht dicht.

≡

Corollar 191 *ℓ_∞ ist nicht separabel.*

Beweis Definiere die Menge

$$M = \left\{ (x_n)_{n\geq 1} \,\middle|\, x_n \in \{0,1\} \right\} \subset \ell_\infty.$$

M ist überabzählbar, denn die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} M & \to & [0,1] \\ (x_n)_n & \mapsto & \displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} \frac{x_j}{2^j} \end{array}$$

ist surjektiv (beachten Sie, dass sich jede reelle Zahl in $[0,1]$ im Dualsystem schreiben lässt).

Sind nun $m_1, m_2 \in M$ mit $m_1 \neq m_2$, so gilt $\|m_1 - m_2\| = 1$, nach Satz 190 ist ℓ_∞ nicht separabel.

≡

Lemma 192 *Sei X ein kompakter topologischer Raum, der das erste Azählbarkeitsaxiom erfüllt.*

Dann ist X folgenkompakt.

Beweis Sei $(x_n)_n \subset X$ eine Folge. Wir nehmen an, dass $(x_n)_n$ keinen Häufungspunkt hat.

Dann gibt es zu jedem $x \in X$ eine offene Umgebung $U_x \subset X$ von x, so dass nur endlich viele Folgenglieder in U_x liegen.

Die Überdeckung $\bigcup_{x\in X} U_x$ von X enthält eine endliche Teilüberdeckung

$$X = \bigcup_{x\in X'} U_x,$$

wobei $X' \subset X$ eine endliche Teilmenge ist.

Also enthält die Folge $(x_n)_n$ nur endlich viele Folgenglieder, Widerspruch.

Also besitzt $(x_n)_n$ einen Häufungspunkt. Aus Satz 11 folgt die Behauptung.

≡

Satz 193 *Sei X normiert, und $U^* \subset X^*$ die (offene oder abgeschlossene) Einheistkugel.*

Dann sind äquivalent

1) X ist separabel.

2) U^* mit der schwach--Teilraumtopologie erfüllt das erste Abzählbarkeitsaxiom.*

Beweis 2)⇒1)

Sei

$$B := \left\{ U^* \cap \bigcap_{\lambda \in \Lambda_k} i(x_{\lambda,k})^{-1}(U_{\lambda,k}) \;\middle|\; \begin{array}{l} k \in \mathbb{N}, \Lambda_k \text{ endlich }, x_{\lambda,k} \in X, \\ U_{\lambda,k} \subset \mathbb{K} \text{ offene Nullumgebung} \end{array} \right\}$$

eine abzählbare Umgebungsbasis von $0 \in X^*$ bezüglich der schwach-*-Topologie.

Wir zeigen, dass der Span der (abzählbaren!) Menge

$$N := \{x_{\lambda,k} \,|\, k \in \mathbb{N}, \lambda \in \Lambda_k\}$$

dicht in X liegt.

Sei nämlich $x_0 \in X \backslash \overline{Span\, N}$.

Setze $\delta := 1/2 \cdot dist(x_0, \overline{Span\, N}) > 0$.

Da $U^* \cap i(x_0)^{-1}(U_\delta(0))$ eine schwach-*-offene Umgebung von x_0 in U^* ist (Teilraumtopologie!), gibt es ein $k \in \mathbb{N}$ mit

$$\left[U^* \cap \bigcap_{\lambda \in \Lambda_k} i(x_{\lambda,k})^{-1}(U_{\lambda,k}) \right] \subset \left[U^* \cap i(x_0)^{-1}(U_\delta(0)) \right].$$

Ist also $y^* \in U^*$ mit $y^*(x_{\lambda,k}) \in U_{\lambda,k}$ für alle $\lambda \in \Lambda_k$, so gilt $|y^*(x_0)| < \delta$.

Nach Korollar 100 gibt es ein $z^* \in X^*$ mit $z^*|\overline{Span\, N} = 0$, mit $\|z^*\| = 1$ und mit $z^*(x_0) = dist(x_0, \overline{Span\, N})$.

Setze $y^* := 3z^*/4$.

Dann $y^* \in U^*$, $y^*(x_{\lambda,k}) = 0 \in U_{\lambda,k}$ für alle $\lambda \in \Lambda_k$, und $|y^*(x_0)| = 3/4 \cdot dist(x_0, \overline{Span\, N}) > \delta$, Widerspruch.

1)⇒2)

Sei $\{x_1, x_2, \ldots\} \subset X$ eine abzählbare dichte Teilmenge, und $z^* \in U^*$.

Definiere

$$B := \left\{ z^* + U^* \cap \bigcap_{k \in M} i(x_k)^{-1}(U_{1/l}(0)) \;\middle|\; l \in \mathbb{N}, M \subset \mathbb{N} \text{ endlich} \right\}.$$

B ist abzählbar.

Denn die Menge $S := \{M \in \mathbb{N} \,|\, M \text{ endlich}\}$ ist abzählbar, da die Abbildung

$$\begin{aligned} f : S &\to \mathbb{Q} \\ f(M) &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_j}{2^j} \quad \text{mit } a_j = \begin{cases} 1 & \text{falls } j \in M \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

injektiv ist.

Wir zeigen, dass B eine schwach-*-Umgebungsbasis von z^* in U^* ist.

Zunächst ist jede Menge aus B eine schwach-*-Umgebung von z^*, klar.

Jetzt sei

$$z^* + U^* \cap \bigcap_{j=1}^{N} i(y_j)^{-1}(U_{\varepsilon_j}(0))$$

eine schwach-*-offene Umgebung von z^* in U^*.

Setze $\delta := 1/2 \cdot \min_{1\le j\le N} \varepsilon_j > 0$. Zu jedem $j \in \{1, 2, \ldots, N\}$ gibt es ein $k_j \in \mathbb{N}$ mit

$$\|y_j - x_{k_j}\| < \delta.$$

Weiter gibt es ein $l \in \mathbb{N}$ mit

$$1/l < \delta.$$

Dann gilt

$$\left[U^* \cap \bigcap_{j=1}^{N} i(x_{k_j})^{-1}(U_{1/l}(0))\right] \subset \left[U^* \cap \bigcap_{j=1}^{N} i(y_j)^{-1}(U_{\varepsilon_j}(0))\right] :$$

Denn ist $x^* \in U^*$ mit $|x^*(x_{k_j})| < 1/l$ für alle $j \in \{1, 2, \ldots, N\}$, so gilt

$$|x^*(y_j)| \le |x^*(y_j) - x^*(x_{k_j})| + |x^*(x_{k_j})| \le \|x^*\| \cdot \|y_j - x_{k_j}\| + 1/l < \min_{1\le m\le N} \varepsilon_m.$$

$\equiv$

Corollar 194 *Sei X normiert und separabel, und $(x_n^*)_n \subset X^*$ eine beschränkte Folge.*

Dann gibt es eine schwach--konvergente Teilfolge von $(x_n^*)_n$.*

Es gilt sogar : Die abgeschlossene Einheitskugel in X^* ist schwach--folgenkompakt.*

Die Umkehrung ist übrigens falsch: Es gibt einen Banachraum X mit schwach-*-folgenkompakter abgeschlossener Einheitskugel $U^* \subset X^*$, der nicht separabel ist.

Tatsächlich gibt es nämlich einen nicht separablen Hilbertraum H (ohne Beweis). Dieser Raum ist das gesuchte Gegenbeispiel - auch wenn wir das erst in Beispiel 219 bringen können.

Beweis Sei $U^* \subset X^*$ die abgeschlossene Einheitskugel.

Es gibt ein $r > 0$ mit $x_n^* \in r \cdot U^*$ für alle n.

$r \cdot U^*$ ist schwach-*-kompakt nach dem Satz von Banach-Alaoglu und erfüllt das erste Abzählbarkeitsaxiom nach Satz 193, ist also schwach-*-folgenkompakt nach Lemma 192.

$\equiv$

Beispiel 195 In Corollar 194 kann auf die Voraussetzung "separabel" nicht verzichtet werden:

Wir betrachten $X = \ell_\infty$, und definieren $x_n^* \in \ell_\infty^*$ durch

$$x_n^*((x_k)_k) := x_n.$$

Dann $\|x_n^*\| \leq 1$. Die Annahme, es gebe eine Teilfolge $(x_{k_n}^*)_n$, die schwach-*-konvergiert, führt auf einen Widerspruch:

Definiere nämlich $(x_k)_k \in \ell_\infty$ durch

$$x_k = \begin{cases} (-1)^n & \text{falls} \quad k = k_n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Dann $x_{k_n}^*((x_k)_k) = (-1)^n$, also ist $(x_{k_n}^*)_n$ nicht schwach-*-konvergent.

In ℓ_∞^* ist die abgeschlossene Einheitskugel also schwach-*-kompakt (Banach-Alaoglu), aber nicht schwach-*-folgenkompakt!

Wir werden noch sehen, dass die abgeschlossene Einheitskugel in ℓ_∞ nicht schwach-kompakt ist (Folgerung aus dem Satz von Eberlein-Shmulyan).

Satz 196 *Sei X normiert und X^* separabel.*
Dann ist auch X separabel.

Die Umkehrung ist falsch : Ist X separabel, so muss X^* nicht separabel sein, betrachte zum Beispiel $X := \ell_1$.

Beweis Sei $S := \{x^* \in X^* \mid \|x^*\| = 1\}$ der Rand der abgeschlossenen Einheitskugel in X^*.

Nach Satz 188 ist S ein separabler metrischer Raum, also gibt es eine abzählbare Teilmenge $\{s_1^*, s_2^*, \ldots\} \subset S$ die dicht in S liegt.

Wegen $\|s_n^*\| = 1$ gibt es zu jedem n ein $x_n \in X$ mit $\|x_n\| = 1$ und $s_n^*(x_n) \geq 1/2$.

Wir zeigen, dass $W := Span\{x_1, x_2, \ldots\}$ dicht in X liegt:

Sei nämlich $x_0 \in X \setminus \overline{W}$. Nach Korollar 100 gibt es ein $x^* \in S$ mit $x^*|W = 0$. Dann gilt für alle n

$$1/2 \leq |s_n^*(x_n)| = |s_n^*(x_n) - x^*(x_n)| = |(s_n^* - x^*)(x_n)| \leq \|s_n^* - x^*\|.$$

Das ist ein Widerspruch dazu, dass $\{s_1^*, s_2^*, \ldots\} \subset S$ dicht in S liegt.

$\equiv$

7.2 Schauderbasen

Definition 197 *Sei X normiert, und $(x_n)_{n=1}^\infty \subset X$ eine Folge.*

1) *$(x_n)_n$ heisst Schauderbasis von X, falls es zu jedem $x \in X$ eine eindeutig bestimmte Folge $(\alpha_n)_n \subset \mathbb{K}$ gibt mit*

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cdot x_n.$$

(Insbesondere muss die Reihe in X konvergieren.)

2) $(x_n)_n$ heisst Basisfolge in X, falls $(x_n)_n$ eine Schauderbasis für $\overline{Span\,\{x_1, x_2, \ldots\}}$ ist.[23]

Beispiel 198 1) Jeder normierte Raum X, der eine Schauderbasis $(x_n)_n$ besitzt, ist unendlichdimensional, denn je endlich viele der x_k sind linear unabhängig.[24]

2) Für $1 \leq p < \infty$ bilden die Einheitsvektoren in ℓ_p eine Schauderbasis. Ebenso im Raum c_0 der Nullfolgen.

3) Man kann zeigen, dass $C([0,1], \mathbb{K})$ und $L_p(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ für $1 \leq p < \infty$ Schauderbasen besitzen. Stichworte : HAARsches System, SCHAUDERsches System, RADEMACHERsches System. (siehe Literatur.)

4) Ist X normiert mit Schauderbasis $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, so ist X separabel. Ausserdem gilt $x_n \neq 0$ für alle n:

$x_n \neq 0$ für alle n ist leicht. X ist separabel nach lemma 189.

Ohne Beweis : Es gibt separable Banachräume ohne Schauderbasis.

5) Ist X normiert und $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ eine Basisfolge in X, so gilt

$$\overline{Span\,\{x_n \,|\, n \geq 1\}} = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cdot x_n \,\middle|\, (\alpha_n)_n \subset \mathbb{K}, \text{ und } \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n \text{ existiert in } X \right\}.$$

Zu zeigen ist nur $\supset$.

Sei also $(\alpha)_n \subset \mathbb{K}$, so dass $z := \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n$ in X existiert.

Die Folge $\left(\sum_{n=1}^{N} \alpha_n x_n\right)_N \subset Span\,\{x_n \,|\, n \geq 1\}$ konvergiert also gegen z, also

$$z \in \overline{Span\,\{x_n \,|\, n \geq 1\}}.$$

6) Es ist interessant, dass die Monome $p_n(t) = t^n$ keine Schauderbasis in $C([0,1], \mathbb{K})$ sind, **obwohl** $Span\,\{p_n \,|\, n \geq 0\}$ **dicht liegt** und die p_n **linear unabhängig** sind.

Denn wäre $(p_n)_{n \geq 0}$ eine Schauderbasis in $C([0,1], \mathbb{K})$, so wäre jede stetige Funktion als Potenzreihe darstellbar, insbesondere wäre jede stetige Funktion differenzierbar, Widerspruch.

$\equiv$

<u>Problem</u> : Sei X ein Banachraum mit Schauderbasis $(x_n)_{n=1}^{\infty}$.

Sei weiter $(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^{(j)} \cdot x_n)_j$ eine Folge konvergenter Reihen in X, die für j gegen Unendlich gegen 0 konvergiert.

Gilt dann $\lim_j \alpha_n^{(j)} = 0$ für alle n ???

Die (positive) Antwort gibt der folgende Satz.

[23]Erinnerung : Ist $M \subset X$, so ist $Span\,M$ die Menge aller <u>endlichen</u> Linearkombinationen aus Elementen von M.

[24]manche Autoren lassen auch endliche Schauderbasen zu.

Satz 199 *Sei X ein Banachraum mit Schauderbasis $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, und sei $k \in \mathbb{N}^+$.*
Dann ist die Abbildung

$$\begin{aligned} e_k^* : X &\to \mathbb{K} \\ e_k^*\left(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n\right) &= \alpha_k \end{aligned}$$

wohldefiniert, linear und beschränkt, das heisst $e_k^* \in X^*$.
Es gilt

$$e_k^*(x_n) = \delta_{k,n} \quad \textit{für alle } k, n \in \mathbb{N}^+.$$

Beweis

Es ist nur zu zeigen, dass e_k^* beschränkt ist.
Wir definieren den Vektorraum

$$Y := \left\{ (\alpha_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{K} \,\middle|\, \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n \text{ existiert in } X \right\}.$$

(Die Vektoren in Y sind also gewisse skalare Folgen.)
Betrachte die Abbildung

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_Y : Y &\to [0, \infty) \\ \|(\alpha_k)_k\|_Y &:= \sup_{n \geq 1} \left\| \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j \right\|. \end{aligned}$$

Das ist eine Norm auf Y (Aufgabe).
Betrachte weiter die Abbildung

$$\begin{aligned} T : Y &\to X \\ T((\alpha_k)_k) &:= \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j x_j. \end{aligned}$$

T ist wohldefiniert und linear, klar.
T ist bijektiv, da $(x_n)_n$ eine Schauderbasis von X ist.
T ist beschränkt, denn wegen der Stetigkeit der Norm gilt

$$\|T((\alpha_k)_k)\| = \left\| \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j x_j \right\| = \lim_{n \to \infty} \left\| \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j \right\| \leq \|(\alpha_k)_k\|_Y,$$

also $\|T\| \leq 1$.
Für jedes $m \in \mathbb{N}^+$ betrachte schliesslich die Abbildung

$$\begin{aligned} f_m^* : Y &\to \mathbb{K} \\ f_m^*((\alpha_n)_n) &:= \alpha_m. \end{aligned}$$

f_m^* ist (wohldefiniert und) linear, klar.

f_m^* ist beschränkt, denn

$$\begin{aligned}|f_m^*((\alpha_n)_n)| &= |\alpha_m| \\ &= \|\alpha_m x_m\| \cdot \frac{1}{\|x_m\|} \quad \text{(beachte } x_m \neq 0\text{, da } (x_n)_n \text{ Schauderbasis)} \\ &= \frac{1}{\|x_m\|} \cdot \left\| \sum_{j=1}^{m} \alpha_j x_j - \sum_{j=1}^{m-1} \alpha_j x_j \right\| \\ &\leq \frac{2}{\|x_m\|} \cdot \|(\alpha_n)_n\|_Y.\end{aligned}$$

Also $\|f_m^*\| \leq \frac{2}{\|x_m\|}$.

Jetzt zeigen wir, dass Y vollständig ist.

Sei also $(\alpha^{(i)})_{i=1}^\infty \subset Y$ eine Cauchyfolge in Y.

Wegen

$$\|T\alpha^{(i)} - T\alpha^{(j)}\| \leq \|T\| \cdot \|\alpha^{(i)} - \alpha^{(j)}\|_Y$$

ist $(T\alpha^{(i)})_i$ eine Cauchyfolge in X, also existiert

$$x := \lim_{i\to\infty} (T\alpha^{(i)}) \in X. \tag{17}$$

Für jedes $i, j, m \in \mathbb{N}^+$ gilt weiter

$$|\alpha_m^{(i)} - \alpha_m^{(j)}| = |f_m^*(\alpha^{(i)} - \alpha^{(j)})| \leq \frac{2}{\|x_m\|} \cdot \|\alpha^{(i)} - \alpha^{(j)}\|_Y,$$

also ist $(\alpha_m^{(i)})_i$ eine Cauchyfolge in $\mathbb{K}$, daher existert

$$\alpha_m := \lim_{i\to\infty} \alpha_m^{(i)} \in \mathbb{K}.$$

Die Folge $(\alpha_m)_{m=1}^\infty$ ist unser Kandidat für den Grenzwert von $(\alpha^{(i)})_i$ in Y.

Zeige erst, dass $(\alpha_m)_m \in Y$:

Sei $\varepsilon > 0$. Wir finden ein N_0, so dass $\|x - \sum_{k=1}^n \alpha_k x_k\| \leq \varepsilon$ für alle $n > N_0$:

Es gilt für $i, j, n \in \mathbb{N}^+$

$$\begin{aligned}\left\| x - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k \right\| \leq\ & \|x - T(\alpha^{(i)})\| + \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^{(i)} x_k - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^{(i)} x_k \right\| \\ &+ \left\| \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^{(i)} x_k - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^{(j)} x_k \right\| + \left\| \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^{(j)} x_k - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k \right\|.\end{aligned}$$

Wegen (17) gibt ein i_0, so dass der 1.Summand kleiner gleich $\varepsilon/4$ ist für alle $i \geq i_0$.

Der 3.Summand ist kleiner oder gleich $\|\alpha^{(i)} - \alpha^{(j)}\|_Y$, also gibt es ein $l \geq i_0$, so dass der 3.Summand kleiner oder gleich $\varepsilon/4$ ist für alle $i, j \geq l$ und alle n.

Es gibt ein N_0 mit

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^{(l)} x_k - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^{(l)} x_k \right\| \leq \varepsilon/4$$

für alle $n \geq N_0$ (klar).

Schliesslich gibt es zu jedem $n \geq N_0$ ein $j_n \geq l$, so dass der 4.Summand kleiner oder gleich $\varepsilon/4$ ist für alle $j \geq j_n$.

Jetzt alles zusammensetzen : Zu $\varepsilon > 0$ wähle (i_0 und l und) N_0 wie eben.

Ist nun $n \geq N_0$, so setze in obiger Abschätzung $i := l$ und $j := j_n$.

Fazit : Es gilt $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k x_k = x$, also $(\alpha_k)_k \in Y$.

Jetzt zeige $\lim_{i\to\infty} \alpha^{(i)} = (\alpha_k)_k$ in Y:

Für alle $i, j, n \in \mathbb{N}^+$ gilt

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k^{(i)} - \alpha_k) x_k \right\| &\leq \left\| \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k^{(i)} - \alpha_k^{(j)}) x_k \right\| + \left\| \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k^{(j)} - \alpha_k) x_k \right\| \\ &\leq \|\alpha^{(i)} - \alpha^{(j)}\|_Y + \left\| \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k^{(j)} - \alpha_k) x_k \right\|. \end{aligned}$$

Also gilt für alle i, n

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k^{(i)} - \alpha_k) x_k \right\| \leq \limsup_{j\to\infty} \|\alpha^{(i)} - \alpha^{(j)}\|_Y + 0.$$

Ist nun $\varepsilon > 0$, so gibt es ein i_1 mit

$$\limsup_{j\to\infty} \|\alpha^{(i)} - \alpha^{(j)}\|_Y \leq \varepsilon \quad \text{für alle } i \geq i_1.$$

Also $\|\alpha^{(i)} - (\alpha_k)_k\|_Y \leq \varepsilon$ für alle $i \geq i_1$.

Wir haben gezeigt, dass Y vollständig ist.

Nach dem Satz von der offenen Abbildung ist T stetig invertierbar. Schliesslich gilt $e_k^* = f_k^* \circ T^{-1}$, also ist e_k^* stetig.

$\equiv$

Jetzt lässt sich das vorher gestellte Problem positiv beantworten:

Ist X ein Banachraum mit Schauderbasis $(x_n)_n$ und $(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^{(j)} \cdot x_n)_j$ eine Folge in X, die für j gegen Unendlich gegen 0 konvergiert, so gilt

$$\lim_{j\to\infty} \alpha_k^{(j)} = 0 \in \mathbb{K} \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Das folgt durch Anwenden der stetigen Linearform e_k^*.

Corollar 200 *Sei X ein Banachraum, $(x_n)_{n=1}^\infty$ eine Basisfolge in X, und sei $k \in \mathbb{N}^+$.*

Setze $Y_k := \overline{Span\,\{x_n \,|\, n \in \mathbb{N}^+, n \neq k\}}$.

Dann gilt

$$dist(x_k, Y_k) > 0.$$

Beweis $(x_n)_n$ ist eine Schauderbasis in $Y := \overline{Span\,\{x_n \,|\, n \geq 1\}}$.

Sei $e_k^* \in Y^*$ die Linearform aus Satz 199. Dann gilt $e_k^*(x_k) = 1$ und $e_k^*(z) = 0$ für alle $z \in Span\,\{x_n \,|\, n \in \mathbb{N}^+, n \neq k\}$.

Da e_k^* stetig ist, gilt sogar $e_k(z) = 0$ für alle $z \in Y_k$.

Wäre $dist\,(x_k, Y_k) = 0$, so wäre $x_k \in Y_k$ (da Y_k abgeschlossen ist), also wäre $e_k^*(x_k) = 0$, Widerspruch.

$\equiv$

Corollar 201 *Sei X ein Banachraum, und $(x_n)_{n=1}^\infty$ eine Basisfolge in X.*

Dann gelten

1) Jede Teilfolge $(x_{k_n})_n$ ist eine Basisfolge in X.

2)

$$\bigcap_{k=1}^\infty \overline{Span\,\{x_n \,|\, n \geq k\}} = \{0\}.$$

Beweis $(x_n)_n$ ist eine Schauderbasis von $Z := \overline{Span\,\{x_n \,|\, n \geq 1\}}$.

1)

Definiere $Y := Span\{x_{k_n} \,|\, n \geq 1\}$, und sei $y \in \overline{Y}$.

Wegen $y \in Z$ gibt es genau eine Folge $(\alpha_n)_n \subset \mathbb{K}$ mit $y = \sum_{n=1}^\infty \alpha_n x_n$.

Sei $l \notin \{k_1, k_2, \ldots\}$, und sei $e_l^* \in Z^*$ die Linearform aus Satz 199. Dann $e_l^* | Y = 0$, und wegen der Stetigkeit von e_l^* gilt sogar $e_l^* | \overline{Y} = 0$.

Daher $0 = e_l^*(y) = \alpha_l$.

Also $y = \sum_{n=1}^\infty \alpha_{k_n} x_{k_n}$, und die Eindeutigkeit der Darstellung ist klar.

Also ist $(x_{k_n})_{n=1}^\infty$ eine Schauderbasis von $\overline{Y}$, insbesondere also Basisfolge in X.

2)

Sei $y \in \bigcap_{k=1}^\infty \overline{Span\,\{x_n \,|\, n \geq k\}}$.

Wegen $y \in Z$ gibt es genau eine Folge $(\alpha_n)_n \subset \mathbb{K}$ mit $y = \sum_{n=1}^\infty \alpha_n x_n$.

Sei $y \neq 0$.

Setze $m := \min\{n \geq 1 \,|\, \alpha_n \neq 0\}$. Dann gilt also

$$y = \alpha_m x_m + \sum_{n=m+1}^\infty \alpha_n x_n.$$

Setze $W := \overline{Span\,\{x_n \,|\, n \geq m+1\}}$. Dann

$$\alpha_m x_m = y - \sum_{n=m+1}^\infty \alpha_n x_n \in W,$$

also $x_m \in W$.

Nach corollary 200 gilt aber $dist(x_m, W) > 0$, Widerspruch.

$\equiv$

Lemma 202 *Seien X, Y normiert, $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ bijektiv, und T^{-1} beschränkt.*

Ist $(x_n)_n$ eine Schauderbasis von X, so ist $(Tx_n)_n$ eine Schauderbasis von Y.

Beweis Sei $y \in Y$. Dann gibt es eine Folge $(\alpha_n)_n \subset \mathbb{K}$ mit

$$T^{-1}y = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n.$$

Weil T stetig ist folgt daraus

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n.$$

Es ist noch die Eindeutigkeit zu zeigen.

Sei also $(\beta_n)_n \subset \mathbb{K}$ mit $0 = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n T x_n$.

Weil T^{-1} stetig ist folgt daraus

$$0 = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n x_n,$$

also $\beta_n = 0$ für alle n.

$\equiv$

Das ist eine gute Stelle für das folgende lemma:

Lemma 203 *Sei X normiert, $V, W \subset X$ Unterräume mit $\dim W < \infty$ und $\overline{V} \cap W = \{0\}$.*

Dann gelten

1) $\overline{V \oplus W} = \overline{V} \oplus W$

2) Ist V abgeschlossen, so auch $V \oplus W$.

Beweis 2)

Definiere

$$d := \inf \big\{ \|w + v\| \,\big|\, w \in W, v \in V, \|w\| = 1 \big\}.$$

Wir zeigen $d > 0$:

Denn sei $w_n \in W$ mit $\|w_n\| = 1$ und $v_n \in V$ mit $\lim_n \|w_n + v_n\| = 0$.

Wegen $dim\, W < \infty$ enthält $(w_n)_n$ eine konvergente Teilfolge, etwa $\lim_n w_{k_n} = w \in W$ mit $\|w\| = 1$.

Also $\lim_n v_{k_n} = -w \in V$, da V abgeschlossen ist.

Daher $-w \in V \cap W$, also $w = 0$, Widerspruch.
Also gilt $d > 0$.
Jetzt sei $(v_n + w_n)_n \subset V \oplus W$ eine Folge mit $\lim_n v_n + w_n = x \in X$.
Zu zeigen ist $x \in V \oplus W$.
Es gilt $\sup_n \|w_n\| < \infty$: Denn sei $(w_{k_n})_n$ eine Teilfolge mit $\lim_n \|w_{k_n}\| = \infty$.
Dann

$$\lim_n \left\| \frac{v_{k_n}}{\|w_{k_n}\|} + \frac{w_{k_n}}{\|w_{k_n}\|} \right\| = 0,$$

also $d = 0$, Widerspruch.

Wegen $dim\, W < \infty$ enthält $(w_n)_n$ eine konvergente Teilfolge $(w_{m_n})_n$, etwa

$$\lim_n w_{m_n} = y \in W.$$

Daher

$$\lim_n v_{k_n} = x - y \in V \quad \text{da } V \text{ abgeschlossen ist},$$

und

$$x = (x - y) + y \in V \oplus W.$$

1)
Aus $V \oplus W \subset \overline{V} \oplus W$ folgt wegen 2)

$$\overline{V \oplus W} \subset \overline{\overline{V} \oplus W} = \overline{V} \oplus W.$$

Zeige noch $\overline{V} \oplus W \subset \overline{V \oplus W}$:

Sei $x = v + w \in \overline{V} \oplus W$. Dann gibt es eine Folge $(v_n)_n \in V$ mit $\lim_n v_n = v$, und aus

$$\lim_n (v_n + w) = x$$

folgt $x \in \overline{V \oplus W}$.

$\equiv$

Corollar 204 *Sei X ein Banachraum, $(x_n)_{n\geq 1}$ eine Basisfolge in X, und $y \in X$ mit*

$$y \notin \overline{Span\,\{x_n \,|\, n \geq 1\}}$$

und

$$y \notin \overline{Span\,\{x_n - y \,|\, n \geq 1\}}.$$

Dann ist $(x_n - y)_{n\geq 1}$ eine Basisfolge in X.

Beweis Wir definieren folgende Teilräume von X

$$X_1 := \overline{Span\,\{x_n \,|\, n \geq 1\}}$$

$$Z := X_1 \oplus Span\, y$$

und

$$X_2 := \overline{Span\,\{y - x_n \,|\, n \geq 1\}}.$$

Wegen

$$Span\,\{x_n\,|\,n \geq 1\} \oplus Span\,y = Span\,\{y - x_n\,|\,n \geq 1\} \oplus Span\,y$$

und Lemma 203 gilt

$$Z = X_2 \oplus Span\,y.$$

Nach Corollar 64 sind die Projektionen

$$\begin{aligned} P_1 : Z &\to X_1 \\ P_1(y_1 + \alpha y) &= y_1 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} P_2 : Z &\to X_2 \\ P_2(y_2 + \alpha y) &= y_2 \end{aligned}$$

beschränkt.

Wir zeigen, dass $P_1|X_2 : X_2 \to X_1$ bijektiv ist:

$P_1|X_2$ ist injektiv, denn für $y_2 \in X_2$ gilt

$$y_2 = P_2 y_2 = P_2(P_1 y_2 + (id - P_1)y_2) = P_2 P_1 y_2,$$

beachte $(id - P_1)y_2 \in Span\,y \subset Ker\,P_2$, denn ist $y_2 = y_1 + \alpha y \in X_1 \oplus Span\,y$, so gilt $(id - P_1)y_2 = \alpha y$.

$P_1|X_2$ ist surjektiv, denn für $y_1 \in X_1$ gilt

$$y_1 = P_1 y_1 = P_1(P_2 y_1 + (id - P_2)y_1) = P_1 P_2 y_1.$$

Nach dem Satz von der offenen Abbildung ist $(P_1|X_2)^{-1} : X_1 \to X_2$ beschränkt.

Wegen $P_1|X_2(x_n - y) = x_n$ für alle n und lemma 202 folgt die Behauptung.

$\equiv$

Satz 205 *(Satz von Nikolski)*

Sei X ein Banachraum, und $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset X$ eine Folge mit $x_n \neq 0$ für alle n. Dann sind äquivalent

1) *$(x_n)_n$ ist eine Basisfolge in X.*

2) *Es gibt ein $\gamma > 0$ mit*

$$\left\| \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \cdot x_j \right\| \leq \gamma \cdot \left\| \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \cdot x_j \right\|$$

für alle $1 \leq n \leq m$ und alle Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{K}$.

Beweis

2)⇒1)

Definiere $Y := Span\,\{x_1, x_2, \ldots\}$.

Je endlich viele x_n sind linear unabhängig:

Denn sei $\sum_{n=1}^{N} \alpha_n \cdot x_n = 0$ und nicht alle α_n seien gleich 0, also existiert $k := \min\{n \,|\, \alpha_n \neq 0\}$.

Dann

$$\|\alpha_k x_k\| = \left\| \sum_{j=1}^{k} \alpha_j x_j \right\| \leq \gamma \cdot \left\| \sum_{j=1}^{N} \alpha_j x_j \right\| = 0,$$

also $\alpha_k = 0$ wegen $x_k \neq 0$, Widerspruch.

Jetzt definiere für $n \geq 1$

$$Y_n := Span\,\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subset Y,$$

und die Abbildung

$$\begin{aligned} \widetilde{P}_n : Y &\to Y_n \\ \widetilde{P}_n \left(\sum_{j=1}^{m} \alpha_j \cdot x_j \right) &:= \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \cdot x_j \quad \text{falls } m \geq n. \end{aligned}$$

$\widetilde{P}_n$ ist wohldefiniert, denn ist $y \in Y$ und $m \geq n$, so hat y eine eindeutige Darstellung $y = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j x_j$.

$\widetilde{P}_n$ ist linear, klar.

$\widetilde{P}_n$ ist beschränkt: Sei $y \in Y$ und $m \geq n$ beliebig mit $y = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j x_j$, dann

$$\|\widetilde{P}_n y\| = \left\| \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j \right\| \leq \gamma \cdot \left\| \sum_{j=1}^{m} \alpha_j x_j \right\| = \gamma \cdot \|y\|,$$

also $\|\widetilde{P}_n\| \leq \gamma$ für alle n.

$\widetilde{P}_n$ besitzt eine stetige Fortsetzung $P_n : \overline{Y} \to Y_n$ mit $\|P_n\| = \|\widetilde{P}_n\| \leq \gamma$.

Wir zeigen $\lim_n P_n y = y$ für alle $y \in \overline{Y}$:

Denn sei $y \in \overline{Y}$ und $\varepsilon > 0$.

Dann gibt es ein $m \geq 1$ und ein $z \in Y_m$ mit $\|y - z\| < \frac{\varepsilon}{\gamma+1}$.

Ist nun $n \geq m$, so gilt

$$\begin{aligned} \|P_n y - y\| &\leq \|P_n y - z\| + \|z - y\| \\ &= \|P_n(y - z)\| + \|z - y\| \quad \text{denn } P_n z = z \\ &\leq (\gamma + 1)\|z - y\| \\ &\leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Jetzt setze $P_0 := 0$. Für jedes $n \geq 1$ und jedes $y \in \overline{Y}$ ist $P_n y - P_{n-1} y \in Span\{x_n\}$:

Sei erst $y \in Y$. Dann gibt es ein $m \geq n$ mit $y = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j x_j$, also

$$(P_n - P_{n-1})y = \widetilde{P}_n y - \widetilde{P}_{n-1} y = \alpha_n x_n \in \mathit{Span}\,\{x_n\}.$$

Da $P_n - P_{n-1} : Y \to \mathit{Span}\{x_n\}$ stetig ist und $\mathit{Span}\,\{x_n\}$ abgeschlossen, bildet $P_n - P_{n-1}$ den Raum $\overline{Y}$ nach $\mathit{Span}\,\{x_n\}$ ab (leicht).

Wegen $x_n \neq 0$ ist die Abbildung $x_n^* : \overline{Y} \to \mathbb{K}$ durch die Gleichung

$$x_n^*(y) \cdot x_n := P_n y - P_{n-1} y$$

wohldefiniert.

x_n^* ist linear, klar.

x_n^* ist beschränkt, denn

$$|x_n^*(y)| = \frac{1}{\|x_n\|} \cdot \|x_n^*(y) \cdot x_n\| \leq \frac{\|P_n y\| + \|P_{n-1} y\|}{\|x_n\|} \leq \frac{2\gamma}{\|x_n\|} \cdot \|y\|,$$

also

$$\|x_n^*\| \leq \frac{2\gamma}{\|x_n\|}.$$

Ausserdem gilt (leicht)

$$x_k^*(x_n) = \delta_{k,n} \quad \text{für alle } k, n \geq 1.$$

Schliesslich zeigen wir, dass $(x_n)_n$ eine Schauderbasis in $\overline{Y}$ ist.

Sei also $y \in \overline{Y}$.

Dann

$$\sum_{n=1}^{N} x_n^*(y) \cdot x_n = \sum_{n=1}^{N} \big(P_n y - P_{n-1} y\big) = P_N y \xrightarrow{N \to \infty} y,$$

also

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(y) \cdot x_n.$$

Es bleibt zu zeigen, dass diese Darstellung eindeutig ist.

Sei also $y = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n$. Zu zeigen ist $\alpha_k = x_k^*(y)$ für alle k.

Es gilt wegen der Stetigkeit von x_k^*

$$x_k^*(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cdot x_k^*(x_n) = \alpha_k.$$

1)$\Rightarrow$2)

Definiere wieder $Y := \mathit{Span}\,\{x_1, x_2, \ldots\}$.

Für $n \in \mathbb{N}^+$ betrachte

$$\begin{aligned} P_n : \overline{Y} &\to X \\ P_n\left(\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j x_j\right) &= \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j. \end{aligned}$$

P_n ist linear, und beschränkt nach Satz 199. Ausserdem gilt $\lim_n P_n x = x$ für alle $x \in X$. Nach dem Satz von der gleichmässigen Beschränktheit gilt

$$\gamma := \sup_n \|P_n\| \in (0, \infty).$$

Ist nun $1 \leq n \leq m$ und $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{K}$, so

$$\left\| \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j \right\| = \left\| P_n \left(\sum_{j=1}^{m} \alpha_j x_j \right) \right\| \leq \gamma \cdot \left\| \sum_{j=1}^{m} \alpha_j x_j \right\|.$$

≡

7.3 Trennungssatz und schwacher Abschluss

Bisher haben wir den ersten Satz von Hahn-Banach "nur" zum Beweis des zweiten benötigt. Das wird sich jetzt ändern:

Lemma 206 *Sei X ein reeller Vektrorraum, $K \subset X$ eine konvexe, nichtleere Teilmenge, und sei $p : X \to \mathbb{R}$ sublinear.*
Dann gibt es eine lineare Abbildung $f : X \to \mathbb{R}$ mit

1) $f \leq p$, *das heisst* $f(x) \leq p(x)$ *für alle* $x \in X$

2) $\inf_{x \in K} p(x) = \inf_{x \in K} f(x) \in [-\infty, \infty)$.

Ist p eine Halbnorm, so kann man 1) ersetzen durch

1') $|f| \leq p$.

Beweis Ist $I := \inf_{x \in K} p(x) = -\infty$, so setze $Y := \{0\}$ im ersten Satz von Hahn-Banach, und das Lemma ist bewiesen.
Jetzt sei $I > -\infty$.
Definiere

$$\begin{array}{rcl} \widetilde{p} : X & \to & \mathbb{R} \\ \widetilde{p}(x) & = & \inf\{p(x + ty) - tI \mid y \in K, t \geq 0\}. \end{array}$$

$\widetilde{p}$ ist wohldefiniert, d.h. $\widetilde{p}(x) > -\infty$ für alle $x \in X$:
Denn für $y \in K$ und $t \geq 0$ gilt, weil p sublinear,

$$p(x + ty) - tI + p(-x) \geq p(ty) - tI = t(p(y) - I) \geq 0,$$

also $\widetilde{p}(x) \geq -p(-x) > -\infty$.
$\widetilde{p}$ ist sublinear:
Sei $x, z \in X$. Zeige $\widetilde{p}(x + z) \leq \widetilde{p}(x) + \widetilde{p}(y)$:
Zu $\varepsilon > 0$ gibt es $y_1, y_2 \in K$ und $t_1, t_2 \geq 0$ mit

$$\widetilde{p}(x) \geq p(x + t_1 y_1) - t_1 I - \varepsilon$$

und
$$\widetilde{p}(z) \geq p(z + t_2 y_2) - t_2 I - \varepsilon.$$
Addition ergibt, falls $t_1 + t_2 > 0$,
$$\begin{aligned}
\widetilde{p}(x) + \widetilde{p}(z) &\geq p(x + t_1 y_1) + p(z + t_2 y_2) - (t_1 + t_2) I - 2\varepsilon \\
&\geq p(x + z + t_1 y_1 + t_2 y_2) - (t_1 + t_2) I - 2\varepsilon \\
&= p(x + z + (t_1 + t_2)\widehat{y}) - (t_1 + t_2) I - 2\varepsilon \\
&\geq \widetilde{p}(x + z) - 2\varepsilon,
\end{aligned}$$
wobei
$$\widehat{y} = \frac{t_1}{t_1 + t_2} y_1 + \frac{t_2}{t_1 + t_2} y_2.$$
Beachte $\widehat{y} \in K$, da K konvex.

Ist $t_1 + t_2 = 0$, so gilt
$$\begin{aligned}
\widetilde{p}(x) + \widetilde{p}(z) &\geq p(x) + p(z) - 2\varepsilon \geq p(x + z) - 2\varepsilon \\
&= p(x + z + 0 \cdot y_1) - 0 \cdot I - 2\varepsilon \\
&\geq \widetilde{p}(x + z) - 2\varepsilon.
\end{aligned}$$

In jedem Fall ergibt sich $\widetilde{p}(x) + \widetilde{p}(z) \geq \widetilde{p}(x + z)$.

Jetzt zeige $\widetilde{p}(\lambda x) = \lambda \widetilde{p}(x)$ falls $x \in X$ und $\lambda \geq 0$:

Sei erst $\lambda > 0$.

Dann
$$\begin{aligned}
\widetilde{p}(\lambda x) &= \inf\{p(\lambda x + t y) - t I \mid y \in K, t \geq 0\} \\
&= \inf\{p(\lambda x + \lambda t y) - \lambda t I \mid y \in K, t \geq 0\} \\
&= \lambda \inf\{p(x + t y) - t I \mid y \in K, t \geq 0\} \quad \text{weil } p \text{ sublinear} \\
&= \lambda \widetilde{p}(x).
\end{aligned}$$
Ist $\lambda = 0$, so gilt
$$\begin{aligned}
\widetilde{p}(0) &= \inf\{p(t y) - t I \mid y \in K, t \geq 0\} \\
&= \inf\{t(p(y) - I) \mid y \in K, t \geq 0\} \\
&= 0,
\end{aligned}$$
beachte $p(y) - I \geq 0$ für alle $y \in K$.

Also ist $\widetilde{p}$ sublinear.

Im ersten Satz von Hahn-Banach setze $Y = \{0\}$ und $u : Y \to \mathbb{R}$, $u(y) = 0$.

Also gibt es ein lineares $f : X \to \mathbb{R}$ mit $f(x) \leq \widetilde{p}(x)$ für alle $x \in X$.

Also
$$f(x) \leq \inf\{p(x + t y) - t I \mid y \in K, t \geq 0\} \leq p(x) \quad (t = 0 \text{ setzen}).$$
Zeige noch $\inf_{x \in K} p(x) \leq \inf_{x \in K} f(x)$:

Für $x \in K$ gilt

$$\begin{aligned} f(-x) &\leq \widetilde{p}(-x) \\ &= \inf\{p(-x+ty) - tI \mid y \in K, t \geq 0\} \\ &\leq p(-x+x) - I \quad (y := x \text{ und } t := 1 \text{ setzen}) \\ &= -I, \end{aligned}$$

also $I \leq -f(-x) = f(x)$.

Jetzt sei p eine Halbnorm, und $x \in X$. Zeige $|f(x)| \leq p(x)$:

$f(x) \leq p(x)$ schon gezeigt, und

$$-f(x) = f(-x) \leq p(-x) = p(x) \quad \text{weil } p \text{ Halbnorm},$$

also

$$|f(x)| = \max\{f(x), -f(x)\} \leq p(x).$$

$\equiv$

Lemma 207 *Sei X ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, $K \subset X$ eine konvexe, nichtleere Teilmenge, und sei $p : X \to \mathbb{R}$ eine Halbnorm.*

Dann gibt es eine lineare Abbildung $f : X \to \mathbb{K}$ mit

1) $|f| \leq p$, *das heisst* $|f(x)| \leq p(x)$ *für alle* $x \in X$

2) $\inf_{x \in K} p(x) = \inf_{x \in K} |f(x)|$

Beweis Nach Lemma 206 gibt es eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $g : X \to \mathbb{R}$ mit $|g| \leq p$ und mit

$$I := \inf_{x \in K} p(x) = \inf_{x \in K} g(x).$$

Das beweist das Lemma falls $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Jetzt sei $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Die Abbildung

$$\begin{aligned} f : X &\to \mathbb{C} \\ f(x) &= g(x) - ig(ix) \end{aligned}$$

ist linear, vergleiche mit dem Beweis des Satzes von Bohnenblust und Sobczyk.

Ausserdem gilt $I \leq g(x) \leq |f(x)|$ für alle $x \in K$.

Zeige noch $|f(x)| \leq p(x)$ für alle $x \in X$:

Sei $x \in X$. Schreibe $f(x) = \rho e^{i\varphi}$ in Polarkoordinaten.

Dann

$$\begin{aligned} |f(x)| &= e^{-i\varphi} f(x) \\ &= f(e^{-i\varphi} x) \\ &= g(e^{-i\varphi} x) \quad (\text{weil alles reell ist, gilt } g(ie^{-i\varphi} x) = 0.) \\ &\leq p(e^{i\varphi} x) \\ &= p(x) \quad (\text{weil } p \text{ Halbnorm}). \end{aligned}$$

$\equiv$

Satz 208 *(Trennungssatz)*

Sei X ein reeller normierter Vektorraum, und $A, B \subset X$ zwei konvexe, nichtleere Teilmengen mit

$$dist\,(A,B) = \inf\left\{\|a-b\| \,\middle|\, a \in A, b \in B\right\} > 0.$$

Dann gibt es ein $v^* \in X^*$ mit $\|v^*\| = 1$ und mit

$$\inf_{a\in A} v^*(a) - \sup_{b\in B} v^*(b) = dist\,(A,B).$$

Vor dem Beweis des Trennungssatzes erst die

Bemerkung 209 Insbesondere gilt

$$\alpha := \inf_{a\in A} v^*(a) \in \mathbb{R}$$

und

$$\beta := \sup_{b\in B} v^*(b) \in \mathbb{R}.$$

Wähle $\gamma \in (\beta, \alpha)$, und betrachte die sogenannte affine Hyperebene

$$H := \{x \in X \,|\, v^*(x) = \gamma\}.$$

Man sagt, dass H die Mengen A und B trennt.

Das heisst : Sind $a \in A$ und $b \in B$ und ist $\varphi : [0,1] \to X$ stetig mit $\varphi(0) = a$ und $\varphi(1) = b$, so gilt

$$(Im\,\varphi) \cap H \neq \emptyset.$$

In Worten : Jede Verbindungslinie von A nach B schneidet H.

Beweis dieser Bemerkung :

Betrachte die stetige Funktion

$$\begin{aligned} F : [0,1] &\to \mathbb{R} \\ F(s) &= v^*(\varphi(s)). \end{aligned}$$

Dann

$$F(1) = v^*(b) \leq \beta < \gamma < \alpha \leq v^*(a) = F(0),$$

nach dem Mittelwertsatz (Analysis I) gibt es ein $s_0 \in [0,1]$ mit $F(s_0) = \gamma$, also

$$\varphi(s_0) \in (Im\,\varphi) \cap H.$$

Beweis des Trennungssatzes :

Beweis Zeige erst, dass

$$A - B := \{a - b \,|\, a \in A, b \in B\}$$

konvex ist. Denn sei $\lambda \in [0,1]$, $a \in A$, $b \in B$.

Dann

$$\lambda(a-b)+(1-\lambda)(a-b)=[\lambda a+(1-\lambda)a]-[\lambda b+(1-\lambda)b]\in A-B.$$

Also ist $A-B$ konvex.

Wende Lemma 206 auf $K := A-B$ und $p(x) := \|x\|$ an. Es gibt also ein lineares $v^* : X \to \mathbb{R}$ mit

$$v^*(x) \le \|x\| \quad \text{für alle } x \in X$$

und

$$\inf\{\|a-b\| \,|\, a \in A, b \in B\} = \inf\{v^*(a-b) \,|\, a \in A, b \in B\}.$$

Also

$$\begin{aligned} dist(A,B) &= \inf\{v^*(a-b) \,|\, a \in A, b \in B\} \\ &= \inf\{v^*(a) \,|\, a \in A\} - \sup\{v^*(b) \,|\, b \in B\}. \end{aligned}$$

v^* ist beschränkt, denn für $x \in X$ gilt

$$|v^*(x)| = \max\{v^*(x), v^*(-x)\} \le \|x\|,$$

also $\|v^*\| \le 1$.

Zeige noch $\|v^*\| \ge 1$:

Wähle Folgen $(a_n)_n \subset A$ und $(b_n)_n \subset B$ mit $\lim_n \|a_n - b_n\| = dist(A,B)$.

Dann (siehe oben)

$$\frac{|v^*(a_n-b_n)|}{\|a_n-b_n\|} \ge \frac{dist(A,B)}{\|a_n-b_n\|},$$

also

$$\sup_n \frac{|v^*(a_n-b_n)|}{\|a_n-b_n\|} \ge \sup_n \frac{dist(A,B)}{\|a_n-b_n\|} = 1,$$

also $\|v^*\| \ge 1$.

$\equiv$

Corollar 210 *Sei X normiert, und $A, B \subset X$ zwei konvexe, nichtleere Teilmengen mit*

$$dist(A,B) > 0.$$

Dann gibt es ein $v^* \in X^*$ mit $\|v^*\| = 1$ und mit

$$dist(A,B) = \inf\{|v^*(a) - v^*(b)| \,\big|\, a \in A, b \in B\}.$$

Beweis $A-B$ ist konvex, siehe Beweis des Trennungssatzes.

Wende Lemma 207 auf $K := A-B$ und $p(x) := \|x\|$ an. Also gibt es ein lineares $v^* : X \to \mathbb{K}$ mit $|v^*(x)| \le \|x\|$ für alle $x \in X$ und mit

$$dist(A,B) = \inf\{|v^*(a) - v^*(b)| \,\big|\, a \in A, b \in B\}.$$

$\|v^*\| \ge 1$ zeigt man wie im Beweis des Trennungssatzes, also $\|v^*\| = 1$.

$\equiv$

Corollar 211 *Sei X normiert und $K \subset X$ eine konvexe Teilmenge.*
Dann ist auch $\overline{K}$ konvex, und es gilt

$$\overline{K} = \overline{K}^{\sigma}.$$

$\overline{K}^{\sigma}$ bedeutet wie gewohnt den Abschluss von K bezüglich der schwachen Topologie, und $\overline{K}$ den Abschluss von K bezüglich der Normtopologie.

Beweis

$\overline{K}$ ist konvex : Leichte Aufgabe (wir brauchen das übrigens für den Beweis nicht).

Ohne Einschränkung ist $K \neq \emptyset$.

$\overline{K} \subset \overline{K}^{\sigma}$ ist einfach: Denn ist $x \in X$ ein Berürhungspunkt von K, so liegt in jeder offenen Umgebung von x ein Punkt aus K, also auch in jeder schwach offenen Umgebung.

Jetzt sei $x_0 \in \overline{K}^{\sigma} \setminus \overline{K}$. Finde einen Widerspruch:

Wende Corollar 210 auf $A := \{x_0\}$ und $B := K$ an.

Also gibt es ein $v^* \in X^*$ mit $\|v^*\| = 1$ und mit

$$d := \inf\{|v^*(x_0) - v^*(x)| \mid x \in K\} > 0.$$

Wähle $\gamma \in (0, d)$ und betrachte die schwach offene x_0-Umgebung

$$W := x_0 + v^{*-1}(U_\gamma(0)).$$

Dann gilt $W \cap K = \emptyset$: Denn ist $x \in W \cap K$, so gilt $|v^*(x) - v^*(x_0)| < \gamma$ und $|v^*(x_0) - v^*(x)| \geq d > \gamma$.

Also $W \cap K = \emptyset$, im Widerspruch zu $x \in \overline{K}^{\sigma}$.

$\equiv$

Corollar 212 *Sei X normiert mit abgeschlossener Einheitskugel $U \subset X$, und sei $Y \subset X$ ein abgeschlossener Unterraum.*
Dann sind U und Y schwach abgeschlossen.

$\equiv$

Lemma 213 *Sei X normiert, $(x_n)_{n\geq 1}$ eine Basisfolge in X und $y \in X$ ein schwacher Häufungspunkt von $(x_n)_n$.*
Dann ist $y = 0$.

Beweis Definiere $Y := \overline{Span\{x_n \mid n \geq 1\}}$, und betrachte die beschränkten Linearformen $e_k^* \in Y^*$

$$\begin{aligned} e_k^* : Y &\to \mathbb{K} \\ e_k^*\left(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n\right) &= \alpha_k, \end{aligned}$$

siehe Satz 199. Nach Hahn-Banach besitzt jedes e_k^* eine beschränkte Fortsetzung $\widetilde{e_k}^* \in X^*$.

Y ist schwach abgeschlossen nach Corollar 212, und in jeder schwachen Umgebung von y liegt ein Folgenglied der Folge $(x_n)_{n\geq 1}$, insbesondere liegt in jeder schwachen Umgebung von y ein Punkt aus Y.

Also $y \in \overline{Y}^\sigma = Y$.

Weil $(x_n)_n$ eine Schauderbasis in Y ist, besitzt y eine Darstellung

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n$$

mit geeigneter Folge $(\alpha_n)_n \subset \mathbb{K}$.

Sei $y^* \in X^*$. Für jedes n ist $W_n := y + y^{*-1}(U_{1/n}(0))$ eine schwach offene Umgebung von y, nach Voraussetzung gibt es ein $x_{k_n} \in W_n$.

Also gibt es eine Teilfolge $(x_{k_n})_n$ mit

$$\lim_n y^*(x_{k_n}) = y^*(y).$$

Sei $m \in \mathbb{N}^+$. Dann gibt es also eine Teilfolge $(x_{k_n})_n$ - die von m abhängt - mit

$$\lim_n \widetilde{e_m}^*(x_{k_n}) = \widetilde{e_m}^*(y),$$

also

$$\lim_n e_m^*(x_{k_n}) = e_m^*(y).$$

Wegen $\lim_n e_m^*(x_{k_n}) = 0$ gilt also

$$0 = e_m^*(y) = \alpha_m,$$

also $y = 0$.

$\equiv$

7.4 Der Vorbereitungssatz

Satz 214 *Sei X ein Banachraum, $j : X \hookrightarrow X^{**}$ die kanonische Inklusion, und $B \subset X$ eine beschränkte Teilmenge.*

Sei weiter $x_0^{**} \in X^{**}$ ein schwach--Häufungspunkt der Menge $jB \subset X^{**}$ mit*

$$\inf_{x^{**}\in jB} \|x_0^{**} - x^{**}\| > 0.$$

Dann gibt es ein $x_0^* \in X^*$ mit $\|x_0^*\| = 1$ und eine Folge $(x_n)_{n=1}^\infty \subset B$ mit

1) $\lim_n x_0^*(x_n) = x_0^{**}(x_0^*) \geq \frac{\|x_0^{**}\|}{2}$

2) $(jx_n - x_0^{**})_n$ *ist eine Basisfolge in X^{**}*

3) Ist $x_0^{**} \neq 0$, so gilt

$$x_0^{**} \notin \overline{Span\,\{jx_n - x_0^{**} \mid n \geq 1\}}.$$

4) Ist $x_0^{**} \notin jX$, so ist $(x_n)_n$ eine Basisfolge in X ohne schwachen Häufungspunkt.

Beweis Setze $d := \inf_{x^{**} \in jB} \|x_0^{**} - x^{**}\| > 0$.

Wegen $\|x_0^{**}\| = \sup_{\|x^*\| \leq 1} |x_0^{**}(x^*)|$ gibt es ein $y_0^* \in X^*$ mit $\|y_0^*\| = 1$ und $|x_0^{**}(y_0^*)| \geq \|x_0^{**}\|/2$.

Es gibt ein $\varphi \in [0, 2\pi)$ mit $x_0^{**}(y_0^*) = |x_0^{**}(y_0^*)| \cdot e^{i\varphi}$.

Setze

$$x_0^* := e^{-i\varphi} \cdot y_0^*.$$

Dann

$$x_0^{**}(x_0^*) = e^{-i\varphi} \cdot x_0^{**}(y_0^*) = |x_0^{**}(y_0^*)| \geq \|x_0^{**}\|/2. \tag{18}$$

Jetzt wähle eine Folge $(\gamma_n)_{n=1}^{\infty} \subset (0,1)$ mit $c := \sum_{m=1}^{\infty} -\ln(1-\gamma_m) < \infty$.

Dann $c > 0$ klar, und

$$\lim_{N \to \infty} \prod_{m=1}^{N} \frac{1}{1-\gamma_m} = \lim_{N} \left[exp \left(\sum_{m=1}^{N} -\ln(1-\gamma_m) \right) \right] = e^c$$

wegen der Stetigkeit der Exponentialfunktion.

Wir konstruieren induktiv eine Folge $x_1, x_2, \ldots$ in B mit

$$|x_0^*(x_k) - x_0^{**}(x_0^*)| < 1/k \quad \text{für alle } k \geq 1 \tag{19}$$

und

$$\left\| \sum_{m=1}^{p} t_m (jx_m - x_0^{**}) \right\|_{X^{**}} \leq \left(\prod_{m=p}^{q-1} \frac{1}{1-\gamma_m} \right) \cdot \left\| \sum_{m=1}^{q} t_m (jx_m - x_0^{**}) \right\|_{X^{**}} \tag{20}$$

für alle $1 \leq p \leq q$ und alle Zahlen $t_1, t_2, \ldots, t_q \in \mathbb{K}$.

Dazu betrachte die von n abhängigen Aussagen

$$(4_n) \quad |x_0^*(x_k) - x_0^{**}(x_0^*)| < 1/k \quad \text{für alle } 1 \leq k \leq n$$

und

$$(5_n) \quad \left\| \sum_{m=1}^{p} t_m (jx_m - x_0^{**}) \right\|_{X^{**}} \leq \left(\prod_{m=p}^{q-1} \frac{1}{1-\gamma_m} \right) \cdot \left\| \sum_{m=1}^{q} t_m (jx_m - x_0^{**}) \right\|_{X^{**}}$$

für alle $1 \leq p \leq q \leq n$ und alle Zahlen $t_1, t_2, \ldots, t_q \in \mathbb{K}$.

Es gibt ein x_1 mit (4_1) und (5_1) (Induktionsanfang) :

Denn sei $i : X^* \hookrightarrow X^{***}$ die kanonische Inklusion.

Da x_0^{**} ein schwach-*-Häufungspunkt von jB und $x_0^{**} + i(x_0^*)^{-1}(U_1(0))$ eine schwach-*-offene Umgebung von x_0^{**} ist, gibt es ein $x_1 \in B$ mit

$$jx_1 \in x_0^{**} + i(x_0^*)^{-1}(U_1(0)).$$

Das bedeutet genau $|x_0^*(x_1) - x_0^{**}(x_0^*)| < 1$, also gilt (4_1).

(5_1) ist klar $(p = q = 1)$.

Jetzt sei $n \geq 1$, und seien $x_1, x_2, \ldots, x_n \in B$ mit (4_n) und (5_n).

Im Folgenden konstruieren wir ein $x_{n+1} \in B$, so dass die Folge $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ die Aussagen (4_{n+1}) und (5_{n+1}) erfüllt.

Dazu definiere den (endlichdimensionalen) Unterraum

$$X_n := Span\,\{jx_1 - x_0^{**}, \ldots, jx_n - x_0^{**}\} \subset X^{**}.$$

Der Rand

$$S_n := \{x^{**} \in X_n \mid \|x^{**}\| = 1\}$$

der Einheitskugel in X_n ist kompakt, also gibt es endlich viele $e_1^{**}, \ldots, e_{k_n}^{**} \in S_n$ mit

$$S_n \subset \bigcup_{m=1}^{k_n} \left(e_m^{**} + \frac{\gamma_n}{3} U^{**}\right), \tag{21}$$

wobei U^{**} die (offene oder abgeschlossene) Einheitskugel in X^{**} bedeutet.

Wegen $\|e_l^{**}\| = 1$ gibt es $x_1^*, \ldots, x_{k_n}^* \in X^*$ mit $\|x_l^*\| = 1$ und mit

$$|e_l^{**}(x_l^*)| > 1 - \gamma_n/3 \quad \text{für alle } 1 \leq l \leq k_n. \tag{22}$$

Definiere $\varepsilon_0 := \frac{1}{n+1}$ und $\varepsilon_l := d \cdot \gamma_n/6$ für $1 \leq l \leq k_n$.

x_0^{**} ist schwach-*-Häufungspunkt von jB, und $x_0^{**} + \bigcap_{l=0}^{k_n} i(x_l^*)^{-1}(U_{\varepsilon_l}(0)) \subset X^{**}$ ist eine schwach-*-offene Umgebung von x_0^{**}, also gibt es ein $x_{n+1} \in B$ mit

$$jx_{n+1} \in x_0^{**} + \bigcap_{l=0}^{k_n} i(x_l^*)^{-1}(U_{\varepsilon_l}(0)),$$

also

$$|x_l^*(x_{n+1}) - x_0^{**}(x_l^*)| < \varepsilon_l \quad \text{für alle } 0 \leq l \leq k_n. \tag{23}$$

Jetzt zeigen wir

$$\|e^{**} + t(jx_{n+1} - x_0^{**})\| \geq (1 - \gamma_n) \cdot \|e^{**}\| \tag{24}$$

für alle $e^{**} \in X_n$ und alle $t \in \mathbb{K}$:

Ohne Einschränkung ist $\|e^{**}\| = 1$.

Sei erst $|t| > 2/d$.

Dann

$$\begin{aligned}
\|e^{**} + t(jx_{n+1} - x_0^{**})\| &\geq |t| \cdot \|jx_{n+1} - x_0^{**}\| - \|e^{**}\| \\
&> \frac{2}{d} \cdot \|jx_{n+1} - x_0^{**}\| - 1 \\
&\geq 1 \quad \text{denn } \|jx_{n+1} - x_0^{**}\| \geq d > 0 \text{ nach Voraussetzung} \\
&\geq (1 - \gamma_n) \cdot \|e^{**}\|.
\end{aligned}$$

Jetzt sei $|t| \leq 2/d$.

Wegen (21) gibt es ein $j \in \{1, 2, \ldots, k_n\}$ mit

$$\|e^{**} - e_j^{**}\| \le \gamma_n/3.$$

Dann

$$\begin{aligned}
\|e^{**} + t(jx_{n+1} - x_0^{**})\| &\ge |e^{**}(x_j^*) + t(jx_{n+1} - x_0^{**})(x_j^*)| \\
&\ge |(e^{**} - e_j^{**})(x_j^*) + e_j^{**}(x_j^*)| - |t| \cdot |x_j^*(x_{n+1}) - x_0^{**}(x_j^*)| \\
&\ge |e_j^{**}(x_j^*)| - |(e^{**} - e_j^{**})(x_j^*)| - \frac{2\varepsilon_j}{d} \\
&\ge 1 - \frac{\gamma_n}{3} - \|e^{**} - e_j^{**}\| \cdot \|x_j^*\| - \frac{\gamma_n}{3} \quad \text{beachte (22)} \\
&\ge 1 - \frac{\gamma_n}{3} - \frac{\gamma_n}{3} - \frac{\gamma_n}{3} \\
&= 1 - \gamma_n.
\end{aligned}$$

Also gilt (24).

Nun gilt (5_{n+1}) für alle $1 \le p < q \le n+1$ und alle Zahlen $t_1, \ldots, t_{n+1} \in \mathbb{K}$: Das ist nur für $q = n+1$ zu zeigen (für $q < n+1$ folgt das aus der Induktionsannahme).

In (24) setze $t := t_{n+1}$ und $e^{**} := \sum_{m=1}^{n} t_m(jx_m - x_0^{**})$.

Dann also

$$\|e^{**}\| \le \frac{1}{1-\gamma_n} \cdot \|e^{**} + t_{n+1}(jx_{n+1} - x_0^{**})\|,$$

daher gilt (5_{n+1}) für $p = n$ und $q = n+1$.

Ist nun $q = n+1$ und $1 \le p < n$, so gilt

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{m=1}^{p} t_m(jx_m - x_0^{**}) \right\| &\le \prod_{m=p}^{n-1} \frac{1}{1-\gamma_m} \cdot \|e^{**}\| \quad \text{Induktionsannahme!} \\
&\le \prod_{m=p}^{n} \frac{1}{1-\gamma_m} \cdot \left\| \sum_{m=1}^{n+1} t_m(jx_m - x_0^{**}) \right\|.
\end{aligned}$$

Jetzt zeige, dass (4_{n+1}) gilt. Das folgt sofort aus der Induktionsannahme und aus (23), beachte $\varepsilon_0 = \frac{1}{n+1}$.

Also gelten (19) und (20).

Wegen

$$\prod_{m=p}^{q-1} \frac{1}{1-\gamma_m} \le \prod_{m=1}^{\infty} \frac{1}{1-\gamma_m} = e^c$$

und dem Satz von Nikolski folgt, dass $(jx_n - x_0^{**})_{n=1}^{\infty}$ eine Basisfolge in X^{**} ist, beachte $jx_n - x_0^{**} \ne 0$ für alle n wegen $d > 0$.

Aus (19) folgt

$$\lim_n x_0^*(x_n) = x_0^{**}(x_0^*),$$

und aus (18) folgt

$$x_0^{**} \geq \frac{\|x_0^{**}\|}{2}.$$

Damit ist der Satz bewiesen, falls $x_0^{**} = 0$.

Jetzt sei $x_0^{**} \neq 0$. Nach corollar 201 gilt

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{Span\,\{jx_n - x_0^{**} \,|\, n \geq k\}} = \{0\},$$

also gibt es ein $k_0 \geq 1$ mit

$$x_0^{**} \notin \overline{Span\,\{jx_n - x_0^{**} \,|\, n \geq k_0\}}.$$

Ersetze die Folge $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ durch $(x_{n+k_0})_{n=1}^{\infty}$. Dann sind 1),2) und 3) erfüllt, beachte nochmals corollar 201.

Schliesslich sei $x_0^{**} \notin jX$.

Dann gilt

$$x_0^{**} \notin \overline{Span\,\{jx_n \,|\, n \geq 1\}},$$

wegen 3) und corollar 204 (dort $y := -x_0^{**}$ setzen) ist $(jx_n)_{n=1}^{\infty}$ eine Basisfolge in X^{**}, also auch in jX, nach lemma 202 ist $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ eine Basisfolge in X.

Sei nun $y \in X$ ein schwacher Häufungspunkt der Folge $(x_n)_n$.

Nach lemma 213 gilt $y = 0$.

Setze $r := \frac{\|x_0^{**}\|}{3} > 0$.

In der schwachen Umgebung $(x_0^*)^{-1}(U_r(0))$ von $y = 0$ liegen unendlich viele x_n, also gibt es eine Teilfolge $(k_n)_n \subset \mathbb{N}^+$ mit

$$x_{k_n} \in (x_0^*)^{-1}(U_r(0)) \quad \text{für alle } n \geq 1.$$

Daher $|x_0^*(x_{k_n})| < r$ für alle n,

also wegen 1)

$$r \geq \lim_n |x_0^*(x_{k_n})| \geq \frac{\|x_0^{**}\|}{2} = 3r/2,$$

Widerspruch.

$\equiv$

7.5 Reflexive Räume und der Satz von Eberlein-Shmulyan

Definition 215 *Sei X normiert.*

X heisst reflexiv, falls die kanonische Injektion $i : X \hookrightarrow X^{**}$ surjektiv ist.

Ist X reflexiv, so ist i ein isometrischer Isomorphismus. Insbesondere ist jeder reflexive Raum vollständig.

Beispiel 216 1) Jeder endlichdimensionale normierte Raum ist reflexiv (wieso?).

2) Jeder Hilbertraum ist reflexiv (folgt aus einem Satz von Riesz, der in dieser Vorlesung nicht besprochen wurde).

3) Für $1 < p < \infty$ ist ℓ_p reflexiv, denn mit $1/p + 1/q = 1$ gilt $\ell_p^{**} = \ell_q^* = \ell_p$. ℓ_1 und ℓ_∞ sind nicht reflexiv.

4) Der Raum c_0 aller Nullfolgen in $\mathbb{K}$ ist nicht reflexiv, denn $c_0^{**} = \ell_\infty \neq c_0$.

4) Ist $(M, \mathcal{M}, \mu)$ ein Massraum und $1 < p < \infty$, so ist $L_p(M, \mathbb{R})$ reflexiv, und mit $1/p + 1/q = 1$ gilt $L_p(M, \mathbb{R})^{**} = L_q(M, \mathbb{R})^* = L_p(M, \mathbb{R})$.

(Wir beweisen das nicht).

Satz 217 *Sei X reflexiv, und $Y \subset X$ ein abgeschlossener Unterraum. Dann ist Y reflexiv.*

Beweis Mit $j : Y \hookrightarrow X$, $i_Y : Y \hookrightarrow Y^{**}$ und $i_X : X \to X^{**}$ bezeichnen wir die Inklusionen.

Für die biduale Abbildung $j^{tt} : Y^{**} \to X^{**}$ gilt dann

$$j^{tt} \circ i_Y = i_X \circ j$$

nach Aufgabenblatt 11, siehe auch Bemerkung 146.

Zeige, dass i_Y surjektiv ist. Sei also $y^{**} \in Y^{**}$.

Da X reflexiv ist gibt es ein $x \in X$ mit

$$j^{tt}(y^{**}) = i_X(x). \tag{25}$$

Wir zeigen $x \in Y$.

Für alle $x^* \in X^*$ gilt

$$x^*(x) = i_X(x)(x^*) = j^{tt}(y^{**})(x^*) = y^{**}(j^t(x^*)) = y^{**}(x^* \circ j).$$

Sei $x \notin Y$. Das ergibt einen Widerspruch, denn nach dem Satz von Hahn-Banach gibt es dann ein $x^* \in X^*$ mit $x^*(x) = 1$ und $x^*|Y = 0$ (hier ist wichtig, dass Y abgeschlossen ist). Also gilt $x^* \circ j = x^*|Y = 0$.

Daraus folgt $1 = x^*(x) = y^{**}(x^* \circ j) = 0$, Widerspruch.

Also gilt $x \in Y$.

Jetzt zeige $i_Y(x) = y^{**}$.

Sei also $y^* \in Y^*$. Zu zeigen ist $y^*(x) = y^{**}(y^*)$.

Nach dem Satz von Hahn-Banach besitzt $y^* \in Y^*$ eine beschränkte, lineare Fortsetzung $\widetilde{y}^* \in X^*$. Es gilt also $\widetilde{y}^* \circ j = y^*$.

Wegen Gleichung (25) gilt

$$j^{tt}(y^{**})(\widetilde{y}^*) = i_X(x)(\widetilde{y}^*),$$

also

$$y^{**}(\widetilde{y}^* \circ j) = \widetilde{y}^*(x),$$

also

$$y^{**}(y^*) = y^*(x) \quad \text{wegen } x \in Y.$$

≡

Satz 218 *(Satz von Eberlein-Shmulyan)*
Sei X ein Banachraum, und $U \subset X$ die abgeschlossene Einheitskugel. Dann sind äquivalent

1) *X ist reflexiv*

2) *X^* ist reflexiv*

3) *U ist schwach kompakt*

4) *U ist schwach folgenkompakt*[25]

5) *U ist schwach abzählbar kompakt*[26]

6) *Jede beschränkte Folge in X enthält eine schwach-konvergente Teilfolge.*

7) *$\sigma(X^*, X) = \sigma(X^*, X^{**})$, das heisst die schwache Topologie und die schwach-*-Topologie auf X^* stimmen überein.*

Beweis 1)⇒2)
Betrachte die Inklusionen $i_X : X \to X^{**}$ und $i_{X^*} : X^* \to X^{***}$.
Da i_X bijektiv ist, ist auch $i_X^t : X^{***} \to X^*$ bijektiv (leicht).
Ausserdem gilt

$$i_X^t \circ i_{X^*} = id_{X^*},$$

denn für $x^* \in X^*$ und $x \in X$ gilt

$$\left[i_X^t (i_{X^*}(x^*)) \right](x) = i_{X^*}(x^*)(i_X(x)) = i_X(x)(x^*) = x^*(x).$$

Also ist auch i_{X^*} bijektiv.

2)⇒1)

Nach Obigem ist X^{**} reflexiv, also auch $i(X)$ nach Satz 217, da $i(X)$ ein abgeschlossener Unterraum von X^{**} ist.

Also ist auch X reflexiv, da X und $i(X)$ isometrisch isomorph sind.

1)⇒6)

Sei $(x_n)_n \subset X$ eine beschränkte Folge. Wir zeigen, dass sie eine schwach konvergente Teilfolge besitzt:

Definiere $W := Span\{x_1, x_2, \ldots\}$, und betrachte die kanonische Inklusion $i : \overline{W} \to \overline{W}^{**}$.

Dann ist $\overline{W} \subset X$ separabel (klar) und reflexiv nach Satz 217. Also ist auch $\overline{W}^{**} = i(\overline{W})$ separabel, da i ein isometrischer Isomorphismus ist.

Nach Satz 196 ist $\overline{W}^*$ separabel.

Nach Corollar 194 enthält die Folge $(i(x_n))_n \subset \overline{W}^{**}$ eine schwach-*-konvergente Teilfolge $(i(x_{k_n}))_n$, etwa mit Grenzwert $i(x) \in \overline{W}^{**} = i(\overline{W})$, ein $x \in \overline{W}$.

[25] d.h. jede Folge in U enthält eine schwach konvergente Teilfolge mit schwachem Grenzwert in U.

[26] d.h. jede unendliche Teilmenge von U hat einen schwachen Häufungspunkt, der in U liegt.

Sei nun $x^* \in X^*$. Zu zeigen ist $\lim_n x^*(x_{k_n}) = x^*(x)$:

Es gilt $\lim_n i(x_{k_n})(x^*|\overline{W}) = i(x)(x^*|\overline{W})$, da $(i(x_{k_n}))_n \subset \overline{W}^{**}$ schwach-* gegen $i(x)$ konvergiert. Das ist schon die Behauptung.

6)$\Rightarrow$4)

Sei $(x_n)_n \subset U$ eine Folge, und $(x_{k_n})_n$ eine gegen $x \in X$ schwach-konvergente Teilfolge.

Zu zeigen ist $x \in U$.

Sei $j : X \hookrightarrow X^{**}$ die kanonische Inklusion. Dann gilt also

$$\lim_n j(x_{k_n})(x^*) = j(x)(x^*) \quad \text{für alle } x^* \in X^*,$$

nach dem Satz von Banach-Steinhaus gilt $\|j(x)\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|j(x_{k_n})\|$, also $\|x\| \leq 1$.

4)$\Rightarrow$5) ist klar.

5)$\Rightarrow$3)

Wir nehmen an, dass U nicht schwach-kompakt ist.

Ziel : Finde eine Folge $(x_n)_n \subset U$ mit $x_n \neq x_m$ für $n \neq m$, so dass $M := \{x_1, x_2, \ldots\}$ keinen schwachen Häufungspunkt hat. Das ist dann ein Widerspruch, da U schwach abzählbar kompakt ist.

<u>1.Schritt</u>

Ist $j : X \to X^{**}$ die kanonische Inklusion, so ist

$$j : X_\sigma \to (jX)_{\sigma^*}$$

stetig invertierbar (X_σ ist X mit der schwachen Topologie, und $(jX)_{\sigma^*}$ ist jX mit der schwach-*-Teilraumtopologie).

Sei nämlich $W \subset X_\sigma$ offen. Zu zeigen ist, dass jW bezüglich der schwach-*-Teilraumtopologie offen in jX ist.

Da $j : X \to jX$ bijektiv ist hat W ohne Einschränkung der Allgemeinheit die Gestalt

$$W = (x^*)^{-1}(V)$$

mit $x^* \in X^*$ und $V \in \mathbb{K}$ offen.

Nun gilt, wobei $i : X^* \to X^{***}$ die kanonische Inklusion,

$$jW = jX \cap \left[(ix^*)^{-1}(V)\right] :$$

$\subset$: Sei $x^{**} = jx \in jW$. Dann $ix^*(x^{**}) = x^*(x) \in V$ wegen $x \in W$, also $x^{**} \in jX \cap \left[(ix^*)^{-1}(V)\right]$.

$\supset$: Sei $x^{**} \in jX \cap \left[(ix^*)^{-1}(V)\right]$. Dann gibt es ein $x \in X$ mit $x^{**} = jx$, und es gilt $x^*(x) = ix^*(x^{**}) \in V$.

Das bedeutet $x \in W$, also $x^{**} \in jW$.

<u>2.Schritt</u> :

Da eine stetige Abbildung kompakte Mengen auf kompakte Mengen abbildet, ist jU nicht schwach-*-kompakt (sonst wäre nämlich U schwach kompakt nach 1.Schritt).

Der schwach-*-Abschluss $\overline{jU}^{\sigma^*}$ von jU ist aber schwach-*-kompakt nach corollar 179, denn $\overline{jU}^{\sigma^*}$ ist beschränkt wegen[27]

$$\overline{jU}^{\sigma^*} \subset \overline{U^{**}}^{\sigma^*} = U^{**}.$$

Also gilt

$$\overline{jU}^{\sigma^*} \setminus jU \neq \emptyset. \tag{26}$$

Jetzt zeigen wir $\overline{jU}^{\sigma^*} \setminus jX \neq \emptyset$:

Sei nämlich $\overline{jU}^{\sigma^*} \setminus jX = \emptyset$, das heisst $\overline{jU}^{\sigma^*} \subset jX$.

Dann gilt $\overline{jU}^{\sigma^*} \subset jU$: Denn sei $y^{**} \in \overline{jU}^{\sigma^*}$. Wegen $y^{**} \in jX$ gibt es ein $y \in X$ mit $y^{**} = jy$.

Wegen $\overline{jU}^{\sigma^*} \subset U^{**}$ (siehe oben) gilt $\|y^{**}\| \leq 1$, also $\|y\| \leq 1$, da j isometrisch ist.

Daher $y^{**} \in jU$, also $\overline{jU}^{\sigma^*} \subset jU$, Widerspruch zu (26).

Also

$$\overline{jU}^{\sigma^*} \setminus jX \neq \emptyset.$$

<u>3.Schritt</u>

Wähle $x_0^{**} \in \overline{jU}^{\sigma^*} \setminus jX$.

Wegen $x_0^{**} \notin jU$ ist x_0^{**} also ein schwach-*-Häufungspunkt von jU, und

$$\inf_{x^{**} \in jU} \|x_0^{**} - x^{**}\| = dist(x_0^{**}, jU) \geq dist(x_0^{**}, jX) > 0,$$

da jX abgeschlossen in X^{**} ist und $x_0^{**} \notin jX$.

Nach Satz 214 (dort $B := U$ setzen) gibt es ein $x_0^* \in X^*$ mit $\|x_0^*\| = 1$ und eine Folge $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset U$ mit 1),2),3) und 4).

Wegen 4) hat die Folge $(x_n)_n$ keinen schwachen Häufungspunkt, daher hat die Menge $\{x_1, x_2, \ldots\}$ keinen schwachen Häufungspunkt, im Widerspruch zur Annahme dass U schwach abzählbar kompakt ist.

Also ist U schwach-kompakt, also gilt 5)$\Rightarrow$3).

3)$\Rightarrow$1)

Sei $U^{**} \subset X^{**}$ die abgeschlossene Einheitskugel.

Zeige : Die kanonische Inklusion $j : X \hookrightarrow X^{**}$ ist surjektiv.

Weil j linear ist genügt es zu zeigen, dass es zu jedem $x^{**} \in U^{**}$ ein $z \in X$ gibt mit $jz = x^{**}$.

Sei also $x^{**} \in U^{**}$.

Für $x^* \in X^*$ definiere die Menge

$$M(x^*) := \{x \in U \,|\, x^*(x) = x^{**}(x^*)\}.$$

Wegen $M(x^*) = x^{*-1}\big(x^{**}(x^*)\big) \cap U$ ist $M(x^*)$ für jedes $x^* \in X^*$ schwach abgeschlossen (denn x^* ist schwach stetig, das Urbild einer abgeschlossenen

[27] beachte dass die abgeschlossene Einheitskugel $U^{**} \subset X^{**}$ nach Banach-Alaoglu schwach-*-abgeschlossen ist.

Menge ist also schwach abgeschlossen. Ausserdem ist U schwach abgeschlossen nach Corollar 212).

Die Familie $(M(x^*))_{x^* \in X^*}$ von Teilmengen von U besitzt die endliche Durchschnittseigenschaft EDE (siehe Definition 175), denn seien $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^* \in X^*$.

Nach Corollar 184 gibt es ein $y \in X$ mit $\|y\| \leq 1$ und $x^{**}(x_j^*) = x_j^*(y)$ für alle $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Also

$$y \in \bigcap_{j=1}^{n} M(x_j^*).$$

Nach Lemma 176 (dort $X := U$ setzen) gilt

$$\bigcap_{x^* \in X^*} M(x^*) \neq \emptyset.$$

Sei etwa $z \in \bigcap_{x^* \in X^*} M(x^*)$.

Dann also $x^*(z) = x^{**}(x^*)$ für alle $x^* \in X^*$, das heisst $j(z) = x^{**}$.

1)$\Rightarrow$7) ist klar nach der Definition der Basen der σ und $\sigma*$-Topologien.

7)$\Rightarrow$1) Nach dem Satz von Banach-Alaoglu ist die abgeschlossene Einheitskugel U^* in X^* also σ-kompakt. Nach dem schon bewiesenen ist X reflexiv.

$\equiv$

Beispiel 219 Sei H ein nicht separabler Hilbertraum,[28] und $U^* \subset H^*$ die abgeschlossene Einheitskugel.

Dann ist U^* schwach-folgenkompakt, da H^* reflexiv ist, also schwach-*-folgenkompakt, da schwache Topologie und schwach-*-Topologie identisch sind.

Das ist das angekündigte Gegenbeispiel zur Umkehrung von Korollar 194:Es gibt einen Banachraum mit schwach-*-folgenkompakter Einheitskugel, der nicht separabel ist.

Corollar 220 *Sei* $1 < p < \infty$, $1/p + 1/q = 1$, *und sei* $(f_n)_n \subset L_p(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *eine Folge mit* $\sup_n \|f_n\|_{L_p} < \infty$.

Dann gibt es eine Teilfolge $(f_{k_n})_n$ *und ein* $g \in L_p(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *mit*

$$\lim_{n \to \infty} \int_{\mathbb{R}} f_{k_n}(t) \cdot h(t)\, dt = \int_{\mathbb{R}} g(t) \cdot h(t)\, dt \quad \textit{für alle } h \in L_q(\mathbb{R}, \mathbb{R}).$$

$\equiv$

8 Die Laplace Transformation

Definition 221 *Sei* X *ein Banachraum, und* $1 \leq p \leq \infty$.

[28] wir bweisen die Existenz eines solchen Hilbertraumes nicht.

Der Vektorraum

$$L_p^{loc}([0,\infty),X) := \left\{ f:[0,\infty)\to X \;\middle|\; \begin{array}{l} f|_{[0,R]} \text{ ist in } L_p([0,R],X) \\ \text{für jedes } R>0 \end{array} \right\}$$

heisst der Raum der lokal p-integrierbaren Funktionen auf $[0,\infty)$.

$L_1^{loc}([0,\infty),X)$ *heisst auch der Raum der lokal integrierbaren Funktionen auf* $[0,\infty)$.

Definition 222 *Sei X ein Banachraum, und $f \in L_1^{loc}([0,\infty),X)$.*

Es gebe Zahlen $M, t_0 > 0$ und $\omega \in \mathbb{R}$ mit

$$\|f(t)\| \leq Me^{\omega t} \quad \text{für fast alle } t \geq t_0.$$

Dann heisst f asymptotisch exponentiell beschränkt[29]*, und*

$$\omega_{as}(f) := \inf\left\{\omega\in\mathbb{R} \;\middle|\; \text{Es gibt } M,t_0>0 \text{ mit } \|f(t)\| \leq Me^{\omega t} \text{ für fast alle } t\geq t_0\right\}$$

heisst die asymptotische exponentielle Wachstumsschranke von f.[30]

Beispiel 223 1) Sei $X = \mathbb{K}$, $r > 0$, und

$$\begin{array}{rcl} f:[0,\infty) & \to & \mathbb{K} \\ f(t) & = & \begin{cases} 0 & t \leq r \\ \frac{1}{\sqrt{t-r}} & t > r \end{cases} . \end{array}$$

Dann $\omega_{as}(f) = 0$.

2) Sei $X = \mathbb{C}$, $q \in C$, und

$$\begin{array}{rcl} f:[0,\infty) & \to & \mathbb{C} \\ f(t) & = & e^{qt}. \end{array}$$

Dann $\omega_{as}(f) = Re\, q$.

Lemma 224 *Sei X ein Banachraum.*

1) *Sei $\alpha \in \mathbb{K}$, und seien $f, g \in L_1^{loc}([0,\infty),X)$ und $h \in L_1^{loc}([0,\infty),\mathbb{K})$ alle asymptotisch exponentiell beschränkt, so sind auch $h \cdot g$, $f+g$ und αf asymptotisch exponentiell beschränkt, und es gelten*

$$\omega_{as}(h\cdot g) \leq \omega_{as}(h) + \omega_{as}(g),$$

$$\omega_{as}(f+g) \leq \max\{\omega_{as}(f), \omega_{as}(g)\},$$

und

$$\omega_{as}(\alpha f) \leq \omega_{as}(f).$$

[29] in English : asymptotically exponentially bounded

[30] in English : asymptotical exponential growth bound of f

2) Sei $f \in L_1^{loc}([0,\infty), X)$ asymptotisch exponentiell beschränkt, und $\alpha \geq 0$. Dann gilt

$$\omega_{as}\big(t \mapsto t^\alpha \cdot f(t)\big) = \omega_{as}(f).$$

3) Sei $f \in L_1^{loc}([0,\infty), X)$ asymptotisch exponentiell beschränkt mit $\omega_{as}(f) \geq 0$.

Dann ist auch die Stammfunktion

$$\begin{array}{rcl} f^{[1]} : [0,\infty) & \to & X \\ f^{[1]}(t) & = & \displaystyle\int_0^t f(s)\,ds \end{array}$$

asymptotisch exponentiell beschränkt, und es gilt

$$\omega_{as}(f^{[1]}) \leq \omega_{as}(f).$$

BEWEIS 1)
Zeige $\omega_{as}(h \cdot g) \leq \omega_{as}(h) + \omega_{as}(g)$:
Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es $M, t_0 > 0$ mit

$$|h(t)| \leq M e^{(\omega_{as}(h)+\varepsilon)t} \quad \text{für fast alle } t \geq t_0$$

und

$$\|g(t)\| \leq M e^{(\omega_{as}(g)+\varepsilon)t} \quad \text{für fast alle } t \geq t_0.$$

Also

$$\|h(t)g(t)\| \leq M^2 e^{(\omega_{as}(h)+\omega_{as}(g)+2\varepsilon)t} \quad \text{für fast alle } t \geq t_0,$$

also $\omega_{as}(hg) \leq \omega_{as}(h) + \omega_{as}(g) + 2\varepsilon$.

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt die Behauptung.

Übrigens ist im allgemeinen $\omega_{as}(hg) \neq \omega_{as}(h) + \omega_{as}(g)$. Als Beispiel betrachte $X = \mathbb{R}$ und

$$\begin{array}{rcl} h : [0,\infty) & \to & \mathbb{R} \\ h(t) & = & \begin{cases} e^t & \text{falls } t \in [2n, 2n+1] \text{ für ein } n \in \mathbb{N}_0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{array}$$

und

$$\begin{array}{rcl} g : [0,\infty) & \to & \mathbb{R} \\ g(t) & = & \begin{cases} e^t & \text{falls } t \in [2n+1, 2n] \text{ für ein } n \in \mathbb{N}_0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{array}.$$

Dann $\omega_{as}(hg) = -\infty \neq \omega_{as}(h) + \omega_{as}(g) = 2$.
Zeige $\omega_{as}(f+g) \leq \max\{\omega_{as}(f), \omega_{as}(g)\} =: m$:
Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es $M, t_0 > 0$ mit

$$\|f(t)\| \leq M e^{(\omega_{as}(f)+\varepsilon)t} \quad \text{für fast alle } t \geq t_0$$

und

$$\|g(t)\| \leq Me^{(\omega_{as}(g)+\varepsilon)t} \quad \text{für fast alle } t \geq t_0.$$

Also für fast alle $t \geq t_0$

$$\|f(t)+g(t)\| \leq M\left(e^{(\omega_{as}(f)+\varepsilon)t} + e^{(\omega_{as}(g)+\varepsilon)t}\right) \leq 2Me^{(m+\varepsilon)t}.$$

Daher $\omega_{as}(f+g) \leq m+\varepsilon$, also $\omega_{as}(f+g) \leq m$.

Zeige $\omega_{as}(\alpha f) \leq \omega_{as}(f)$:
Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es $M, t_0 > 0$ mit

$$\|f(t)\| \leq Me^{(\omega_{as}(f)+\varepsilon)t} \quad \text{für fast alle } t \geq t_0.$$

Also $\|\alpha f(t)\| \leq |\alpha| Me^{(\omega_{as}(f)+\varepsilon)t}$ für fast alle $t \geq t_0$, daher $\omega_{as}(\alpha f) \leq \omega_{as}(f)$.
(Ist $\alpha \neq 0$, so gilt sogar $\omega_{as}(\alpha f) = \omega_{as}(f)$.)
2)
ist klar.
3)
Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es $M, t_0 > 0$ mit

$$\|f(t)\| \leq Me^{(\omega_{as}+\varepsilon)t} \quad \text{für fast alle } t \geq t_0.$$

Für $t \geq t_0$ gilt

$$\begin{aligned}
\left\|\int_0^t f(s)\,ds\right\| &\leq \int_0^{t_0} \|f(s)\|\,ds + \int_{t_0}^t Me^{(\omega_{as}(f)+\varepsilon)s}\,ds \\
&= \int_0^{t_0} \|f(s)\|\,ds + \frac{M}{\omega_{as}(f)+\varepsilon}\left(e^{(\omega_{as}(f)+\varepsilon)t} - e^{(\omega_{as}(f)+\varepsilon)t_0}\right) \\
&\leq \int_0^{t_0} \|f(s)\|\,ds + \frac{M}{\omega_{as}(f)+\varepsilon} \cdot e^{(\omega_{as}(f)+\varepsilon)t} \\
&\leq \left(\int_0^{t_0} \|f(s)\|\,ds + \frac{M}{\omega_{as}(f)+\varepsilon}\right) \cdot e^{(\omega_{as}(f)+\varepsilon)t}.
\end{aligned}$$

Also $\omega_{as}(f^{[1]}) \leq \omega_{as}(f)$.

Die Voraussetzung $\omega_{as}(f) \geq 0$ ist wichtig. Als Beispiel betrachte $X = \mathbb{R}$ und

$$\begin{aligned}
f : [0,\infty) &\rightarrow \mathbb{R} \\
f(t) &= \mathbf{1}_{[0,1]}(t).
\end{aligned}$$

Dann $\omega_{as}(f) = -\infty$, und $\omega_{as}(f^{[1]}) = 0$.

$\equiv$

Definition 225 *Sei X ein $\mathbb{C}$-Banachraum und $f \in L_1^{loc}([0,\infty), X)$ asymptotisch exponentiell beschränkt.*

Dann heisst

$$\begin{aligned}\widehat{f}:\{z\in\mathbb{C}\,|\,Re\,z>\omega_{as}(f)\} &\to X\\ \widehat{f}(z) &= \int_0^\infty e^{-tz}f(t)\,dt\end{aligned}$$

die Laplace Transformierte von f.

Das Definitionsgebiet von $\widehat{f}$ ist also eine offene Halbebene in $\mathbb{C}$.
Die Formeln

$$(f+g)^\wedge(\lambda)=\widehat{f}(\lambda)+\widehat{f}(\lambda)\quad \text{für } Re\,\lambda>\max\{\omega_{as}(f),\omega_{as}(g)\}$$

und

$$(\alpha\cdot f)^\wedge(\lambda)=\alpha\cdot\widehat{f}(\lambda)\quad \text{für } \alpha\in\mathbb{C}, Re\,\lambda>\omega_{as}(f)$$

sind klar.

Satz 226 *Sei X ein $\mathbb{C}$-Banachraum, und sei $f\in L_1^{loc}([0,\infty),X)$ asymptotisch exponentiell beschränkt.*
Dann ist $\widehat{f}$ holomorph, und für die n-ten Ableitungen gilt

$$\left(\widehat{f}\right)^{(n)}(z)=\int_0^\infty(-1)^n t^n e^{-tz}f(t)\,dt\quad \textit{für alle } Re\,z>\omega_{as}(f).$$

Beweis Sei $Re\,z>\omega_{as}(f)$. Wähle $\gamma\in(\omega_{as}(f),Re\,z)$. Es gibt $M,t_0>0$ mit $\|f(t)\|\le Me^{\gamma t}$ für fast alle $t\ge t_0$.
Also

$$\int_0^\infty\left\|e^{-tz}f(t)\right\|\,dt\le\int_0^{t_0}\left\|e^{-tz}f(t)\right\|\,dt+\int_{t_0}^\infty e^{-tRe\,z}Me^{\gamma t}\,dt<\infty.$$

Daher ist $\widehat{f}$ wohldefiniert.
Jetzt sei $\tau>0$. Wir zeigen, dass die finite Laplace-Transformierte

$$\begin{aligned}\widehat{f}_\tau:\mathbb{C} &\to \mathbb{C}\\ \widehat{f}_\tau(z) &= \int_0^\tau e^{-tz}f(t)\,dt\end{aligned}$$

holomorph ist, und für die n-ten Ableitungen gilt

$$(\widehat{f}_\tau)^{(n)}(z)=\int_0^\tau(-1)^n t^n e^{-tz}f(t)\,dt.$$

Beweis mit Induktion; wir zeigen nur den Induktionsanfang ($n=1$):
Für alle $z\in\mathbb{C}$ und $h\in\mathbb{C}$, $h\ne0$ gilt

$$\begin{aligned}\frac{\widehat{f}_\tau(z+h)-\widehat{f}_\tau(z)}{h} &= \frac{1}{h}\int_0^\tau\left(e^{-(z+h)t}-e^{-zt}\right)f(t)\,dt\\ &= \int_0^\tau\frac{e^{-ht}-1}{ht}\cdot te^{-zt}f(t)\,dt.\end{aligned}$$

Da die Funktion $z \mapsto \frac{e^{-z}-1}{z}$ ganz ist (d.h. holomorph auf $\mathbb{C}$), ist

$$\sup_{0<|h|\leq 1, t\in(0,\tau]} \left| \frac{e^{-ht}-1}{ht} \right| < \infty,$$

nach dem Satz von der dominierten Konvergenz gilt also

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0} \frac{\widehat{f}_\tau(z+h) - \widehat{f}_\tau(z)}{h} &= \int_0^\tau \lim_{h\to 0} \frac{e^{-ht}-1}{ht} te^{-zt} f(t)\, dt \\ &= \int_0^\tau -te^{-tz} f(t)\, dt. \end{aligned}$$

Jetzt zeigen wir, dass $\lim_{\tau\to\infty} \widehat{f}_\tau = \widehat{f}$ lokal gleichmässig auf $\{z \in \mathbb{C} \,|\, Re\, z > \omega_{as}(f)\}$. (Nach einem bekannten Satz aus der Funktionentheorie folgt dann die Behauptung).

Sei also $y \in \mathbb{C}$ mit $Re\, y > \omega_{as}(f)$. Zu zeigen ist, dass es eine abgeschlossene Kreisscheibe $D_r(y) \subset \{z \in \mathbb{C} \,|\, Re\, z > \omega_{as}(f)\}$ gibt, in der $\widehat{f}_\tau$ für $\tau \to \infty$ gleichmässig gegen $\widehat{f}$ konvergiert.

Es gibt ein $R > 0$ mit $D_{2R}(y) \subset \{z \in \mathbb{C} \,|\, Re\, z > \omega_{as}(f)\}$.

Wegen $Re\, y - R > \omega_{as}(f)$ gibt es $M, t_0 > 0$ mit $\|f(t)\| \leq Me^{(Re\, y - R)t}$ für fast alle $t \geq t_0$.

Zeige, dass $\lim_{\tau\to\infty} \widehat{f}_\tau = \widehat{f}$ gleichmässig in $D_{R/2}(y)$: Sei also $z \in D_{R/2}(y)$.

Dann gilt für $\tau > t_0$

$$\begin{aligned} \|\widehat{f}_\tau(z) - \widehat{f}(z)\| &= \left\| \int_\tau^\infty e^{-zt} e^{(Re\, y - R)t} e^{-(Re\, y - R)t} f(t)\, dt \right\| \\ &\leq M \cdot \int_\tau^\infty e^{-t(Re\, z - Re\, y + R)}\, dt \\ &\leq M \cdot \int_\tau^\infty e^{-tR/2}\, dt \quad \text{wegen } Re\, z \geq Re\, y - R/2 \\ &= \frac{2M}{R} e^{-\tau R/2}. \end{aligned}$$

$\equiv$

Definition 227 *Sei X ein Banachraum, $f \in L_1^{loc}([0,\infty), X)$.*

f heisst exponentiell beschränkt, falls es $M > 0$ und $\omega \in \mathbb{R}$ gibt mit

$$\|f(t)\| \leq Me^{\omega t} \quad \textit{für fast alle } t \geq 0.$$

Ist f exponentiell beschränkt, so heisst

$$\omega(f) := \inf\{\omega \in \mathbb{R} \,|\, \textit{Es gibt ein } M > 0 \textit{ mit } \|f(t)\| \leq Me^{\omega t} \textit{ für fast alle } t \geq 0\}$$

die exponentielle Wachstumsschranke von f. [31]

[31] Englisch : Exponential growth bound of f

Für ω gelten analoge Aussagen wie in Lemma 224 für ω_{as}.
Stets gilt $\omega_{as}(f) \leq \omega(f)$.

Satz 228 *Sei X ein Banachraum, und $f \in L_1^{loc}([0,\infty),\mathbb{K})$ und $g \in L_1^{loc}([0,\infty),X)$ beide exponentiell beschränkt.*

Dann ist die Faltung

$$\begin{aligned} f * g : [0,\infty) &\rightarrow X \\ f * g(t) &:= \int_0^t f(t-s)g(s)\,ds = \int_0^t f(s)g(t-s)\,ds \end{aligned}$$

in $L_1^{loc}([0,\infty),X)$ und exponentiell beschränkt, und

$$\omega(f*g) \leq \max\{\omega(f),\omega(g)\}.$$

Weiterhin gilt

$$(f*g)^\wedge(\lambda) = \widehat{f}(\lambda)\cdot\widehat{g}(\lambda)$$

für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $Re\lambda > \max\{\omega(f),\omega(g)\}$.

Bemerkung 229 Betrachte Beispiel 59. Verschwinden die dortigen Funktionen f und g auf $(-\infty,0)$, so erhält man

$$f*g(t) = \int_{\mathbb{R}} f(s)g(t-s)\,ds = \int_0^t f(s)g(t-s)\,ds.$$

Beweis $f*g \in L_1^{loc}([0,\infty,X)$ beweist man wie in Beispiel 59.

Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein $M > 0$ mit

$$\|f(t)\| \leq Me^{(\omega(f)+\varepsilon)t} \quad \text{für fast alle } t \geq 0$$

und

$$\|g(t)\| \leq Me^{(\omega(g)+\varepsilon)t} \quad \text{für fast alle } t \geq 0.$$

Also

$$\begin{aligned} \|f*g(t)\| &= \left\|\int_0^t f(t-s)g(s)\,ds\right\| \\ &\leq \int_0^t Me^{(\omega(f)+\varepsilon)(t-s)}Me^{(\omega(g)+\varepsilon)s}\,ds \\ &= M^2e^{(\omega(f)+\varepsilon)t}\cdot\int_0^t e^{s(\omega(g)-\omega(f))}\,ds. \end{aligned}$$

Ist $\omega(f) \neq \omega(g)$, so gilt also

$$\begin{aligned} \|f*g(t)\| &\leq \frac{M^2e^{(\omega(f)+\varepsilon)t}}{\omega(g)-\omega(f)}\cdot\left(e^{t(\omega(g)-\omega(f))}-1\right) \\ &= \left|\frac{M^2}{\omega(g)-\omega(f)}\cdot\left(e^{t(\omega(g)+\varepsilon)}-e^{t(\omega(f)+\varepsilon)}\right)\right| \\ &\leq \frac{M^2}{|\omega(g)-\omega(f)|}\cdot\left(e^{t(\omega(g)+\varepsilon)}+e^{t(\omega(f)+\varepsilon)}\right) \end{aligned}$$

Ist $\omega(g) = \omega(f)$, so gilt für fast alle $t \geq 0$

$$\|f * g(t)\| \;\leq\; M^2 t e^{t(\omega(f)+\varepsilon)} \leq C e^{t(\omega(f)+2\varepsilon)}$$

für ein geeignetes $C > 0$.

In jedem Fall gilt $\omega(f * g) \leq \max\{\omega(f), \omega(g)\}$.

Schliesslich gilt für $Re\,\lambda > \max\{\omega(f), \omega(g)\}$

$$\begin{aligned}
(f * g)^\wedge(\lambda) &= \int_0^\infty e^{-\lambda t}(f * g)(t)\,dt \\
&= \int_0^\infty e^{-\lambda t} \int_0^t f(t-s)g(s)\,ds\,dt \\
&= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\lambda t} f(t-s)g(s)\mathbf{1}_{[0,t)}(s)\,ds\,dt \\
&= \int_0^\infty \int_s^\infty e^{-\lambda t} f(t-s)g(s)\,dt\,ds \quad \text{(Fubini)} \\
&= \int_0^\infty g(s) \int_0^\infty e^{-\lambda(w+s)} f(w)\,dw\,ds \quad \text{(Substitution } w = t-s, dw = dt) \\
&= \int_0^\infty e^{-\lambda s} g(s) \int_0^\infty e^{-\lambda w} f(w)\,dw\,ds \\
&= \widehat{g}(\lambda) \cdot \widehat{f}(\lambda).
\end{aligned}$$

$\equiv$

Lemma 230 *(und Definition)*

Für $\alpha \in \mathbb{C}$ definiere

$$\begin{aligned}
e_\alpha : \mathbb{R} &\to \mathbb{C} \\
e_\alpha(z) &= e^{\alpha z}.
\end{aligned}$$

Für $r \geq 0$ definiere wie gewohnt die charakteristische Funktion

$$\begin{aligned}
\mathbf{1}_{[0,r)} : [0,\infty) &\to \mathbb{R} \\
\mathbf{1}_{[0,r)}(s) &= \begin{cases} 1 & \textit{falls} \quad 0 \leq s < r \\ 0 & \textit{falls} \quad s \geq r \end{cases} .
\end{aligned}$$

1) Für $Re\,\lambda > Re\,\alpha$ gilt

$$\widehat{e_\alpha}(\lambda) = \frac{1}{\lambda - \alpha}.$$

2) Für $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ gilt

$$(\mathbf{1}_{[0,r)})^\wedge(\lambda) = \frac{1 - e^{-\lambda r}}{\lambda}.$$

Beweis Ist klar.

$\equiv$

Beispiel 231 Sei X ein Banachraum, $x_0 \in X$, $\alpha \in \mathbb{K}$, und $f \in C([0,\infty),X)$ exponentiell beschränkt.

Problem : Finde ein $g \in C^1([0,\infty),X)$, so dass g' exponentiell beschränkt ist, und mit

$$\begin{cases} \alpha \cdot g(t) - g'(t) = f(t) \text{ für alle } t \geq 0 \\ g(0) = x_0 \end{cases}.$$

Anwenden der Laplace Transformation ergibt

$$\alpha\widehat{g}(\lambda) - \int_0^\infty e^{-\lambda t} g'(t)\,dt = \widehat{f}(\lambda)$$

für alle $\lambda \in C$ mit genügend grossem Realteil.

Partielle Integration liefert

$$\alpha\widehat{g}(\lambda) + x_0 - \lambda\widehat{g}(\lambda) = \widehat{f}(\lambda),$$

also, falls $Re\,\lambda$ gross,

$$\widehat{g}(\lambda) = \frac{x_0 - \widehat{f}(\lambda)}{\lambda - \alpha}.$$

Also

$$\begin{aligned} \widehat{g}(\lambda) &= x_0 \cdot \widehat{e_\alpha}(\lambda) - \widehat{f}(\lambda) \cdot \widehat{e_\alpha}(\lambda) \\ &= (x_0 \cdot e_\alpha - f * e_\alpha)^\wedge(\lambda). \end{aligned}$$

Falls die Laplace-Transformation injektiv ist, folgt daraus

$$g = x_0 \cdot e_\alpha - f * e_\alpha,$$

also

$$g(t) = x_0 e^{\alpha t} - \int_0^t f(t-s) e^{\alpha s}\,ds = e^{\alpha t}\left(x_0 - \int_0^t e^{-\alpha s} f(s)\,ds\right). \tag{27}$$

Fazit : <u>Falls</u> das Problem eine Lösung hat und <u>falls</u> die Laplace-Transformation injektiv ist, so hat das Problem nur eine Lösung, die durch Gleichung (27) gegeben ist.

Die Funktion (27) löst tatsächlich das Problem - einfach nachrechnen.

Wir zeigen, dass die Laplace-Transformation injektiv ist:

Satz 232 *(Phragmen-Doetsch-Inversion)*

Sei X ein Banachraum, $1 < p \leq \infty$, $1/p + 1/q = 1$, und $f \in L_p([0,\infty),X)$. Dann existiert

$$\widehat{f}(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} f(t)\,dt$$

für alle $Re\,\lambda > 0$, und für alle $n \in \mathbb{N}^+$ und alle $t \geq 0$ gilt

$$\left\| f^{[1]}(t) - \sum_{j=1}^\infty \frac{(-1)^{j+1}}{j!} \cdot e^{tnj} \cdot \widehat{f}(nj) \right\| \leq \frac{\|f\|_{L_p}}{n^{1/q}} \cdot (1.02)^{1/q}.$$

Bemerkung 233 Diese Inversionsformel ist sehr interessant: Um $f^{[1]}$ aus $\widehat{f}$ rekonstruieren zu können, braucht man nur die Werte $\widehat{f}(nj)$ für $j \in \mathbb{N}$ und grosse $n \in \mathbb{N}$.

Je grösser n, desto grösser sind die Lücken zwischen nj und $(n+1)j$, aber die Formel wird genauer!

Beweis $\widehat{f}(\lambda)$ existiert für $Re\,\lambda > 0$:

Ist $p = \infty$, so

$$\int_0^\infty \|e^{-\lambda t} f(t)\|\,dt \le \|f\|_{L_\infty} \cdot \int_0^\infty e^{-tRe\,\lambda}\,dt < \infty.$$

Ist $1 < p < \infty$ und $1/p + 1/q = 1$, so gilt wgen der Hölderschen Ungleichung

$$\int_0^\infty \|e^{-\lambda t} f(t)\|\,dt \le \|f\|_{L_p} \cdot \left(\int_0^\infty e^{-qtRe\,\lambda}\,dt\right)^{1/q} < \infty.$$

1.Schritt

Wir zeigen, dass die Folge von Funktionen

$$\left(\sum_{j=1}^N \frac{(-1)^{j+1}}{j!} e^{tnj} e_{-nj}\right)_{N\ge 1}$$

für jedes $n \in \mathbb{N}^+$ und jedes $t \ge 0$ in $L_q([0,\infty),\mathbb{R})$ liegt und dort konvergiert.

Sei $\varepsilon > 0$. Dann gilt

$$\sum_{j=0}^\infty \frac{e^{tnj}}{j!} = e^{(e^{nt})} < \infty,$$

also gibt es ein N_0 mit

$$\frac{1}{(nq)^{1/q}} \cdot \sum_{j=M}^N \frac{e^{ntj}}{j!} < \varepsilon \quad \text{für alle } N \ge M \ge N_0.$$

Dann

$$\begin{aligned}
\left\|\sum_{j=M}^N \frac{(-1)^{j+1}}{j!} e^{tnj} e_{-nj}\right\|_{L_q} &\le \sum_{j=M}^N \left\|\frac{e^{tnj}}{j!} e_{-nj}\right\|_{L_q} \\
&= \sum_{j=M}^N \left(\int_0^\infty \left(\frac{e^{nj(t-s)}}{j!}\right)^q ds\right)^{1/q} \\
&= \sum_{j=M}^N \frac{1}{j!} \left(\int_0^\infty e^{njq(t-s)}\,ds\right)^{1/q} \\
&= \sum_{j=M}^N \frac{1}{j!} \cdot \frac{1}{(njq)^{1/q}} \cdot e^{njt}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\le \frac{1}{(nq)^{1/q}} \sum_{j=M}^{N} \frac{e^{njt}}{j!} \\
&\le \varepsilon .
\end{aligned}
$$

Ausserdem

$$
\begin{aligned}
p_{n,t}(s) &:= \left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{j!} e^{tnj} e_{-nj} \right)(s) \\
&= -\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-e^{n(t-s)})^j}{j!} \\
&= 1 - exp\left(-e^{n(t-s)} \right).
\end{aligned}
$$

2.Schritt
Betrachte den linearen Operator

$$
\begin{aligned}
T : L_q([0,\infty),\mathbb{K}) &\to X \\
Th &= \int_0^\infty h(t) f(t)\, dt.
\end{aligned}
$$

T ist besachränkt, denn

$$
\|Th\| \le \int_0^\infty |h(t)| \cdot \|f(t)\|\, dt \le \|h\|_{L_q} \cdot \|f\|_{L_p},
$$

also $\|T\| \le \|f\|_{L_p}$.

Ausserdem gilt

$$
T\mathbf{1}_{[0,t)} = f^{[1]}(t)
$$

und

$$
Te_{-\lambda} = \widehat{f}(\lambda) \quad \text{für } Re\,\lambda > 0.
$$

Also

$$
\begin{aligned}
\left\| f^{[1]}(t) - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{j!} e^{tnj} \widehat{f}(nj) \right\| &= \left\| f^{[1]}(t) - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{j!} e^{tnj} T e_{-nj} \right\| \\
&= \left\| T\left(\mathbf{1}_{[0,t)} - p_{n,t} \right) \right\| \\
&\le \|T\| \cdot \left\| \mathbf{1}_{[0,t)} - p_{n,t} \right\|_{L_q} \\
&= \|T\| \cdot \left(\int_0^t exp(-qe^{n(t-s)}) + \int_t^\infty \left(1 - exp(-e^{n(t-s)} \right)^q ds \right)^{1/q} \\
&= \|T\| \cdot \left(\int_1^{e^{nt}} e^{-qu} \frac{du}{nu} + \int_0^1 (1-e^{-u})^q \frac{du}{nu} \right)^{1/q} \quad \text{Substitution} \quad \begin{array}{l} u = e^{n(t-s)} \\ du = -nu\, ds \end{array}
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{\|f\|_{L_p}}{n^{1/q}} \cdot \left(\int_1^\infty \frac{e^{-qu}}{u}\,du + \int_0^1 \frac{(1-e^{-u})^q}{u}\,du\right)^{1/q} \\
&\leq \frac{\|f\|_{L_p}}{n^{1/q}} \cdot \left(\int_1^\infty \frac{e^{-u}}{u}\,du + \int_0^1 \frac{1-e^{-u}}{u}\,du\right)^{1/q} \\
&\leq \frac{\|f\|_{L_p}}{n^{1/q}} \cdot (1.02)^{1/q}. \quad \text{(nach Tabelle)}
\end{aligned}$$

$\equiv$

Daraus folgt die Injektivität der Laplace-Transformation:

Satz 234 *Sei X ein Banachraum, $1 \leq r \leq \infty$, und $f \in L_r([0,\infty), X)$ <u>oder</u> $f \in L_1^{loc}([0,\infty), X$ asymptotisch exponentiell beschränkt.*

Gibt es ein $N_0 \in \mathbb{N}$ mit $\widehat{f}(n) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n > N_0$, so ist $f = 0$.

Beweis Das ist klar nach Phragmen-Doetsch falls $f \in L_r([0,\infty, X)$ und $1 < r \leq \infty$, denn dann ist $f^{[1]} = 0$, also $f = 0$ fast überall.

Jetzt sei $f \in L_1^{loc}([0,\infty), X)$ asymptotisch exponentiell beschränkt. Dann gibt es $c \in \mathbb{N}^+$ und $M, t_0 > 0$ mit

$$\|f(t)\| \leq Me^{ct} \quad \text{für fast alle } t \geq t_0.$$

Es gilt $\lim_{t\to\infty} e^{-2ct} f^{[1]}(t) = 0$ (leicht; brauchen wir unten).

Die Funktion

$$\begin{aligned}
g : [0,\infty) &\rightarrow X \\
g(t) &= e^{-2ct} f^{[1]}(t)
\end{aligned}$$

ist stetig und beschränkt. Für $\lambda \in \mathbb{N}^+$ mit $\lambda > N_0$ gilt

$$\begin{aligned}
\widehat{g}(\lambda) &= \int_0^\infty e^{-\lambda t} e^{-2ct} f^{[1]}(t)\,dt \\
&= \int_0^\infty e^{-(\lambda+2c)t} f^{[1]}(t)\,dt \\
&= -\frac{1}{\lambda+2c} e^{-(\lambda+2c)t} f^{[1]}(t)\Big|_{t=0}^\infty + \frac{1}{\lambda+2c} \cdot \int_0^\infty e^{-(\lambda+2c)t} f(t)\,dt \\
&= \frac{1}{\lambda+2c} \cdot \widehat{f}(\lambda+2c) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Nach Phragmen-Doetsch gilt $g^{[1]} = 0$, also $g = 0$, also $f = 0$ fast überall.

Letzter Fall : $f \in L_1([0,\infty), X)$.

Dann $\omega(f^{[1]}) \leq 0$, insbesondere ist $f^{[1]}$ asymptotisch exponentiell beschränkt, und für $\lambda \in \mathbb{N}$ mit $\lambda > N_0$ gilt

$$0 = \widehat{f}(\lambda)$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^\infty e^{-\lambda t} f(t)\, dt \\
&= e^{-\lambda t} f^{[1]}(t)\Big|_{t=0}^{\infty} + \lambda \cdot \int_0^\infty e^{-\lambda t} f^{[1]}(t)\, dt \\
&= \lambda (f^{[1]})^\wedge(\lambda).
\end{aligned}
$$

Nach dem bisher bewiesenen ist $f = 0$.

$\equiv$

Corollar 235 *Sei X ein Banachraum, und $f \in L_\infty^{loc}([0,\infty), X)$ exponentiell beschränkt, insbesondere gibt es $M, \omega > 0$ mit $\|f(t)\| \leq Me^{\omega t}$ für fast alle $t \geq 0$.*

Dann gilt für alle $t \geq 0$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^\infty \frac{(-1)^{j+1}}{j!} e^{tnj} \widehat{f}(nj+\omega) = \int_0^t e^{-\omega s} f(s)\, ds.$$

Beweis Die Funktion $g(t) := e^{-\omega t} f(t)$ liegt in $L_\infty([0,\infty), X)$, und es gilt $\widehat{g}(nj) = \widehat{f}(nj+\omega)$. Die Behauptung folgt nach Phragmen-Doetsch. (Die Konvergenz für n gegen ∞ ist sogar gleichmässig in $t \in [0,\infty)$.)

$\equiv$

Corollar 236 *Sei $N_0 \in \mathbb{N}^+$ und $1 \leq p < \infty$.*

Dann liegt die Folge $(e_{-n})_{n \geq N_0}$ total in $L_p([0,\infty), \mathbb{K})$.

Beweis Definiere $Y := Span\,\{e_{-n} \,|\, n \geq N_0\} \subset L_p([0,\infty, \mathbb{K})$. Zu zeigen ist $\overline{Y} = L_p([0,\infty), \mathbb{K})$. Benutze Corollar 102:

Sei $x^* \in (L_p([0,\infty), \mathbb{K})^*$ mit $x^*(e_{-n}) = 0$ für alle $n \geq N_0$. Sei $q \in (1,\infty]$ mit $1/p + 1/q = 1$.

Wegen $L_p^* = L_q$ gibt es ein $h \in L_q([0,\infty), \mathbb{K}$ mit

$$x^*(f) = \int_0^\infty f(t) h(t)\, dt \quad \text{für alle } f \in L_p([0,\infty), \mathbb{K}).$$

Wegen $0 = x^*(e_{-n}) = \widehat{h}(n)$ folgt $h = 0$, also $x^* = 0$.

$\equiv$

Lemma 237 *Sei X ein Banachraum, $f \in L_1^{loc}([0,\infty), \mathbb{K})$ und $h \in L_1^{loc}([0,\infty, X)$.*

1) Ist f oder h stetig, so ist auch $f * h$ stetig.

2) Es gelten

i) $f * h^{[1]} = (f * h)^{[1]}$

ii) $(f * h^{[1]})'(t) = f * h(t)$ für fast alle $t \geq 0$

3) Ist f oder h stetig, so gilt $(f*h^{[1]})'(t) = f*h(t)$ für alle $t \geq 0$.

Beweis 2i) Es gilt für $t \geq 0$

$$\begin{aligned}
(f*h)^{[1]}(t) &= \int_0^t f*h(s)\,ds \\
&= \int_0^t \int_0^s f(s-r)h(r)\,dr\,ds \\
&= \int_0^t \int_r^t f(s-r)h(r)\,ds\,dr \\
&= \int_0^t h(r)\left(\int_0^{t-r} f(w)\,dw\right)\,dr \\
&= (h*f^{[1]})(t).
\end{aligned}$$

2ii)

Ohne Beweis : Ist f integrierbar, so ist $f^{[1]}$ fast überall differenzierbar, und $(f^{[1]})'(t) = f(t)$ für fast alle t.

(siehe zum Beispiel: Rudin, Real and Complex Analysis).

1)

Sei etwa f stetig (der Bewis geht analog, falls h stetig), $t \geq 0$, $h \in \mathbb{R}$ mit $t+h \geq 0$.

Dann

$$\begin{aligned}
f*h(t+h) - f*h(t) &= \int_0^{t+h} f(t+h-s)h(s)\,ds - \int_0^t f(t-s)h(s)\,ds \\
&= \int_0^t \big(f(t+h-s) - f(t-s)\big)h(s)\,ds + \int_t^{t+h} f(t+h-s)h(s)\,ds.
\end{aligned}$$

Da f auf kompakten Intervallen gleichmässig stetig ist, konvergiert der erste Summand für h gegen 0 gegen 0 nach dem Satz von der dominierten Konvergenz.

Ist $0 < h < 1$, so gilt

$$\int_t^{t+h} f(t+h-s)h(s)\,ds = \int_t^{t+1} f(t+h-s)\mathbf{1}_{[t,t+h]}(s)h(s)\,ds,$$

und auch das konvergiert für h gegen 0 gegen 0 nach dem Satz von der dominierten Konvergenz. Analog für $-1 < h < 0$.

3)

folgt sofort aus 1) und 2i).

$\equiv$

Wir benötigen einen wichtigen Satz, der Integrationstheorie und die Theorie linearer Operatoren verknüpft. Der Beweis würde tiefergehende Kenntnisse in Integrationstheorie erfordern, wir lassen ihn deshalb weg (siehe zum Beispiel : Diestel,Uhl : Vector Measures).

Satz 238 *Sei X ein Banachraum, $D(A) \subset X$ ein Untervektorraum, $A : D(A) \to X$ ein abgeschlossener (linearer) Operator, $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, und $f \in L_1(I, X)$.*

Weiter gelte $f(t) \in D(A)$ für fast alle $t \in I$, und die Funktion $t \mapsto Af(t)$ sei integrierbar (also in $L_1(I, X)$).

Dann ist $\int_I f(t)\, dt \in D(A)$, und

$$A \int_I f(t)\, dt = \int_I Af(t)\, dt.$$

$\equiv$

9 Abstrakte Cauchy-Probleme

Definition 239 *Sei X ein Banachraum, $D(A) \subset X$ ein Untervektorraum, $A : D(A) \to X$ abgeschlossen (und linear).*

Sei $F \in C([0, \infty), X)$ und $y \in D(A)$.

Problem : Finde eine Lösung

$$u : [0, \infty) \to D(A)$$

des inhomogenen Cauchy-Problems

$$\begin{cases} Au(t) + F(t) = u'(t) \text{ für alle } t \geq 0 \\ u(0) = y \\ u \in C^1([0, \infty), X) \text{ und } u(t) \in D(A) \text{ für alle } t \geq 0 \end{cases}.$$

Bemerkung 240 1) Die Bedingung "$u(t) \in D(A)$" schreiben wir in Zukunft nicht mehr hin, da sich diese automatisch aus der Problemstellung ergibt.

2) Das obige Problem ist äquivalent zum inhomogenen Cauchy-Problem

$$\begin{cases} Av(t) + G(t) = v'(t) \quad \text{für alle } t \geq 0 \\ v(0) = 0 \\ v \in C^1([0, \infty, X) \end{cases}$$

via Substitution $v(t) = u(t) - y$ und $G(t) = F(t) + Ay$.

Man kann also immer $y = 0$ annehmen.

3) Wir betrachten meistens Probleme wie in 2), in denen G die Gestalt $G(t) = f(t) \cdot x$ hat, wobei $f \in C([0, \infty), \mathbb{K})$ und $x \in X$. Das folgende Fundamentallemma formulieren wir noch allgemein.

Satz 241 *(Fundamentallemma) Sei X ein Banachraum, $A : D(A) \to X$ ein abgeschlossener Operator, $F : [0, \infty) \to X$ stetig und exponentiell beschränkt, und $y \in D(A)$.*

Dann sind äquivalent

1) Das Problem

$$\begin{cases} Au(t) + F(t) = u'(t) & \textit{für alle } t \geq 0 \\ u(0) = y \\ u \in C^1([0,\infty, X) \\ u' \textit{ exponentiell beschränkt} \end{cases}$$

hat eine Lösung.

2) Es gibt eine Funktion $u \in C^1([0,\infty, X)$ mit

i) u' ist exponentiell beschränkt

ii) $\widehat{u}(n) = \int_0^\infty e^{-nt}u(t)\,dt$ ist in $D(A)$ für alle grossen $n \in \mathbb{N}$[32]

iii) Es gilt

$$(n - A)\widehat{u}(n) = y + \widehat{F}(n) \quad \textit{für alle grossen } n \in \mathbb{N}.$$

3) Es gibt eine Funktion $u \in C^1([0,\infty), X)$ mit

i) u' ist exponentiell beschränkt

ii) $\widehat{u}(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t}u(t)\,dt$ ist in $D(A)$ für alle $\lambda \in \mathbb{K}$ mit grossem $Re\,\lambda$

iii) Es gilt

$$(\lambda - A)\widehat{u}(\lambda) = y + \widehat{F}(\lambda) \quad \textit{für alle } \lambda \in \mathbb{K} \textit{ mit grossem } Re\,\lambda$$

Beweis 1)⇒3)

Für alle $\lambda \in \mathbb{K}$ mit grossem $Re\,\lambda$ gilt

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t}Au(t)\,dt + \widehat{F}(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t}u'(t)\,dt,$$

also nach Satz 238 und mit partieller Integration

$$A\widehat{u}(\lambda) + \widehat{F}(\lambda) = -y + \lambda\widehat{u}(\lambda).$$

3)⇒2) ist klar.

2)⇒1)

Definiere die Funktion

$$\begin{array}{rcl} h : [0,\infty) & \to & X \\ h & = & u - y - F^{[1]}, \end{array}$$

Also $h(t) = u(t) - y - \int_0^t F(s)\,ds$.

Aus

$$A\left(\frac{1}{n}\widehat{u}(n)\right) = \widehat{u}(n) - \int_0^\infty e^{-nt}y\,dt - \frac{1}{n}\widehat{F}(n)$$

[32] d.h. es gibt ein $N_0 \in \mathbb{N}$ mit $\widehat{u}(n) \in D(A)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n > N_0$.

folgt durch partielle Integration

$$A\left((u^{[1]})^\wedge(n)\right) = \widehat{u}(n) - \int_0^\infty e^{-nt} y\, dt - (F^{[1]})^\wedge(n),$$

also

$$A\left((u^{[1]})^\wedge(n)\right) = \widehat{h}(n).$$

Es gibt Zahlen $M > 0$ und $m \in \mathbb{N}^+$ mit

$$\|h(t)\| \leq Me^{mt}$$

und

$$\|u^{[1]}(t)\| \leq Me^{mt}$$

für alle $t \geq 0$(wieso?).

Aus

$$\sum_{j=1}^{N} \frac{(-1)^{j+1}}{j!} e^{tnj} \left(u^{[1]}\right)^\wedge (nj+m) \xrightarrow{N\to\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{j!} e^{tnj} \left(u^{[1]}\right)^\wedge (nj+m)$$

und

$$\begin{aligned} A\left(\sum_{j=1}^{N} \frac{(-1)^{j+1}}{j!} e^{tnj} \left(u^{[1]}\right)^\wedge (nj+m)\right) &= \sum_{j=1}^{N} \frac{(-1)^{j+1}}{j!} e^{tnj} \widehat{h}(nj+m) \\ &\xrightarrow{N\to\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{j!} e^{tnj} \widehat{h}(nj+m) \end{aligned}$$

und der Abgeschlossenheit von A folgt

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{j!} e^{tnj} \left(u^{[1]}\right)^\wedge (nj+m) \in D(A)$$

und

$$A\left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{j!} e^{tnj} \left(u^{[1]}\right)^\wedge (nj+m)\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{j!} e^{tnj} \widehat{h}(nj+m). \tag{28}$$

Nach Corollar 235 gilt

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{j!} e^{tnj} \left(u^{[1]}\right)^\wedge (nj+m) \xrightarrow{n\to\infty} \int_0^t e^{-ms} u^{[1]}(s)\, ds,$$

und nach Gleichung (28) und nochmaliger Anwendung von Corollar 235

$$A\left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{j!} e^{tnj} \left(u^{[1]}\right)^\wedge (nj+m)\right) \xrightarrow{n\to\infty} \int_0^t e^{-ms} h(s)\, ds.$$

Wieder wegen der Abgeschlossenheit von A folgt daraus

$$\int_0^t e^{-ms} u^{[1]}(s)\, ds \in D(A)$$

und

$$A\left(\int_0^t e^{-ms} u^{[1]}(s)\, ds\right) = \int_0^t e^{-ms} h(s)\, ds. \tag{29}$$

Für die Funktion

$$\begin{aligned} k : [0,\infty) &\rightarrow X \\ k(t) &= \int_0^t e^{-ms} u^{[1]}(s)\, ds \end{aligned}$$

gilt

$$\frac{k(t+h)-k(t)}{h} \xrightarrow{h\to 0} k'(t) = e^{-mt} u^{[1]}(t)$$

und - wegen Gleichung (29) und dem Fundamentalsatz der Integral-und Differentialrechnung -

$$A\left(\frac{k(t+h)-k(t)}{h}\right) \xrightarrow{h\to 0} e^{-mt} h(t).$$

Wieder wegen der Abgeschlossenheit von A folgt daraus

$$e^{-mt} u^{[1]}(t) \in D(A)$$

und

$$A\left(e^{-mt} u^{[1]}(t)\right) = e^{-mt} h(t),$$

also

$$A\left(u^{[1]}(t)\right) = h(t). \tag{30}$$

Nochmal dasselbe Argument mit dem Differentialquotienten liefert

$$u(t) \in D(A)$$

und

$$Au(t) = h'(t) = u'(t) - F(t).$$

Schliesslich folgt $u(0) = y$ aus Gleichung (30).

$\equiv$

9.1 Verallgemeinerung des Satzes vom abgeschlossenen Graphen

Vier der Hauptsätze der Funktionalanalysis, die wir in normierten Räumen bewiesen haben, lassen sich auf spezielle metrische Räume erweitern.

Es sind dies der Satz von der offenen Abbildung, der Satz vom abgeschlossenen Graphen, der Satz von der gleichmässigen Beschränktheit und der Satz von Banach-Steinhaus.

Wir kümmern uns hier nur um die Verallgemeinerung des Satzes vom abgeschlossenen Graphen.

Definition 242 *Sei X ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit einer Metrik $d : X \times X \to \mathbb{R}$ und mit*

1) (X, d) ist vollständig

2) Für alle $x, y, z \in X$ gilt $d(x, y) = d(x + z, y + z)$

3) Die Skalarmultiplikation

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{K} \times X & \to & X \\ (\alpha, x) & \mapsto & \alpha \cdot x \end{array}$$

ist stetig.[33]

Dann heisst X ein F-Raum.

Jeder Banachraum ist ein F-Raum.

Satz 243 *(Satz vom abgeschlossenen Graphen)*
Seien X, Y beides F-Räume, $A : X \to Y$ sei linear, und der Graph

$$G(A) = \{(x, Ax) \mid x \in X\} \subset X \times Y$$

von A sei abgeschlossen in $X \times Y$.
Dann ist A stetig.

Beweis Versuchen Sie, den "alten" Beweis von Satz 69 so umzuschreiben, dass er auch im allgemeineren Fall greift. Gute Aufgabe! (man muss sich nämlich erst um den Satz von der offenen Abbildung kümmern...)
Buch : Rudin, Functional Analysis.

$\equiv$

Lemma 244 *Sei X ein Banachraum. Auf dem $\mathbb{K}$-Vektorraum $Y := C([0, \infty), X)$ definieren wir die Metrik*

$$\begin{array}{rcl} d : Y \times Y & \to & \mathbb{R} \\ d(f, g) & = & \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{\|f - g\|_{L_\infty[0,n]}}{1 + \|f - g\|_{L_\infty[0,n]}}. \end{array}$$

(Dabei ist $\|h\|_{L_\infty[0,n]} = \max_{0 \le t \le n} \|h(t)\|$.)
Mit dieser Metrik ist Y ein F-Raum.
Ausserdem : Ist $(h_n)_n \subset Y$ eine Folge und $h \in Y$, so gilt

$$\lim_n h_n = h \Leftrightarrow \lim_{n \to \infty} \|h_n - h\|_{L_\infty[0,k]} = 0 \quad \textit{for all } k \in \mathbb{N}^+$$

Beweis Als Aufgabe.

$\equiv$

[33] $\mathbb{K} \times X$ trägt die Metrik $\big((\alpha, x), (\beta, y)\big) \mapsto |\alpha - \beta| + d(x, y)$. Aufgabe : Man überzeuge sich davon, dass diese Metrik dieselbe Topologie erzeugt wie in Definition 174 gefordert.

9.2 Gefaltete Halbgruppen

Satz 245 *Sei X ein Banachraum, $A : D(A) \to X$ abgeschlossen, $f \in C([0,\infty), \mathbb{K})$, und das abstrakte Cauchy Problem (ACP)*

$$\begin{cases} Au_x(t) + f(t)x = u_x'(t) & \text{für alle } t \geq 0 \\ u_x(0) = 0 \\ u_x \in C^1([0,\infty), X) \end{cases}$$

habe für jedes $x \in X$ eine eindeutige Lösung u_x.

Dann ist die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} T : X & \to & C([0,\infty), X) \\ Tx & = & u_x' \end{array}$$

linear und stetig.[34]

Beweis Setze $Y := C([0,\infty), X)$.

1.Schritt T ist linear.

Sei $\alpha \in \mathbb{K}$ und $x, y \in X$. Dann gilt

$$Au_x(t) + f(t)x = u_x'(t) \quad \text{für alle } t \geq 0$$

und

$$Au_y(t) + f(t)y = u_y'(t) \quad \text{für alle } t \geq 0.$$

Daraus folgt

$$A(\alpha u_x(t) + u_y(t)) + f(t)(\alpha x + y) = \alpha u_x'(t) + u_y'(t).$$

Wegen der Eindeutigkeit der Lösung folgt

$$\alpha u_x(t) + u_y(t) = u_{\alpha x + y}(t) \quad \text{für alle } t \geq 0,$$

also

$$T(\alpha x + y) = \alpha Tx + Ty.$$

2.Schritt $G(T)$ ist abgeschlossen in $X \times Y$.

Sei $(x_n)_n \subset X$ eine Folge in X mit $\lim_n x_n = x \in X$ und $\lim_n Tx_n = g \in Y$. Zu zeigen ist $Tx = g$.

Sei $t \geq 0$. Da $(Tx_n)_n \subset Y$ lokal gleichmässig gegen g konvergiert (siehe Lemma 244), gilt

$$u_{x_n}(t) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} g^{[1]}(t).$$

Ausserdem

$$\lim_n Au_{x_n}(t) = u_{x_n}'(t) - f(t)x_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} g(t) - f(t)x.$$

Weil A abgeschlossen ist, folgt $g^{[1]}(t) \in D(A)$, und

$$Ag^{[1]}(t) = g(t) - f(t)x \quad \text{für alle } t \geq 0.$$

Wegen der Eindeutigkeit der Lösung folgt $g^{[1]}(t) = u_x(t)$, also $Tx = g$.

[34] $C([0,\infty), X)$ trägt die Metrik aus Lemma 244.

$\equiv$

Definition 246 *Die Voraussetzungen von Satz 245 seien erfüllt.*
Dann heisst die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} S:[0,\infty) & \to & \mathcal{L}(X) \\ S(t)x & = & u'_x(t) \end{array}$$

eine f-gefaltete Halbgruppe (in X), und A heisst ein Erzeuger von S.

Satz 247 *Die Abbildung S in Definition 246 ist wohldefiniert.*
Ausserdem

$$\sup_{0\le s\le t} \|S(s)\| < \infty.$$

BEWEIS $S(t) : X \to X$ ist für jedes $t \geq 0$ linear wegen Satz 245.

$S(t)$ ist stetig : Sei $(x_n)_n \subset X$ eine Nullfolge, und T der Operator aus Satz 245.

Dann gilt $Tx_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ in Y, insbesondere konvergiert $(Tx_n)_n$ auf $[0,t]$ gleichmässig gegen 0.

Also

$$S(t)x_n = (Tx_n)(t) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

das heisst $S(t)$ ist stetig (=beschränkt).

Schliesslich gilt für jedes $x \in X$

$$\sup_{0\le s\le t} \|S(s)x\| = \|Tx\|_{L_\infty[0,t]} < \infty,$$

also nach dem Satz von der gleichmässigen Beschränktheit

$$\sup_{0\le s\le t} \|S(s)\| < \infty.$$

$\equiv$

Lemma 248 *Die Voraussetzungen von Satz 245 seien erfüllt, das heisst A erzeuge die f-gefaltete Halbgruppe S.*
Dann gelten

1)
$$Au_x = u_{Ax} \quad \text{für alle } x \in D(A).$$

2) Ist $B \in \mathcal{L}(X)$ mit $ABx = BAx$ für alle $x \in D(A)$, so gilt

$$Bu_x = u_{Bx}.$$

Beweis 1)

Definiere die Abbildung

$$\begin{aligned} p : [0,\infty) &\to X \\ p(t) &= \int_0^t u_{Ax}(s) - Au_x(s)\,ds. \end{aligned}$$

Es gilt

$$\begin{aligned} p(t) &= \int_0^t u_{Ax}(s) + f(s)x - u_x'(s)\,ds \\ &= \int_0^t u_{Ax}(s)\,ds + f^{[1]}(t)x - u_x(t). \end{aligned}$$

Wegen $Au_{Ax}(s) = u'_{Ax}(s) - f(s)Ax$ und Satz 238 ist $\int_0^t u_{Ax}(s)\,ds \in D(A)$, also

$$\begin{aligned} Ap(t) &= \int_0^t Au_{Ax}(s)\,ds + f^{[1]}(t)Ax - Au_x(t) \\ &= \int_0^t u'_{Ax}(s) - f(s)Ax\,ds + f^{[1]}(t)Ax - Au_x(t) \\ &= u_{Ax}(t) - Au_x(t) \\ &= p'(t). \end{aligned}$$

Wegen $p(0) = 0$ und der Eindeutigkeit der Lösung gilt $p = 0$.

2)

Für alle $x \in X$ gilt $(Bu_x)'(t) = B(u_x'(t))$, denn

$$\begin{aligned} (Bu_x)'(t) &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \cdot \Big(Bu_x(t+h) - Bu_x(t)\Big) \\ &= \lim_{h\to 0} B\Big(\frac{u_x(t+h) - u_x(t)}{h}\Big) \\ &= B(u_x'(t)). \end{aligned}$$

Aus

$$Au_x(t) + f(t)x = u_x'(t)$$

folgt

$$A\big(Bu_x(t)\big) + f(t)Bx = (Bu_x)'(t),$$

wegen der Eindeutigkeit der Lösung also $Bu_x = u_{Bx}$.

$\equiv$

Satz 249 *Die Voraussetzungen von Satz 245 seien erfüllt, das heisst A erzeuge die f-gefaltete Halbgruppe S.*

Sei $M \subset \mathbb{K}$ eine nach rechts unbeschränkte Teilmenge von $\mathbb{K}$.

Ausserdem gebe es ein $\tau > 0$ mit

$$\lim_{Re\,\lambda\to\infty,\lambda\in M} \left| e^{\lambda\tau} \widehat{f}_\tau(\lambda) \right| = \infty. \tag{31}$$

Dann gibt es ein $\omega > 0$ mit

$$\big(M \cap \{\lambda \in \mathbb{C} \,|\, Re\,\lambda > \omega\}\big) \subset \rho(A),$$

und es gilt für alle $\lambda \in M$ mit $Re\,\lambda > \omega$ und für alle $x \in X$

$$\widehat{f}_\tau(\lambda) R(\lambda, A)x = \int_0^\tau e^{-\lambda t} u_x(t)\, dt + e^{-\lambda\tau} R(\lambda, A) u_x(\tau)$$

sowie

$$\|R(\lambda, A)\| \leq 2\tau \cdot \frac{e^{\tau Re\,\lambda} - 1}{Re\,\lambda} \cdot \sup_{0\leq t\leq\tau} \|S(t)\|.$$

Bemerkung 250 1) Gilt Bedingung (31), so gilt

$$\lim_{Re\,\lambda\to\infty,\lambda\in M} \left| e^{\lambda\sigma} \widehat{f}_\sigma(\lambda) \right| = \infty \quad \text{für alle } \sigma \geq \tau.$$

Erinnerung : $\widehat{f}_\tau(\lambda) = \int_0^\tau e^{-\lambda t} f(t)\, dt$ ist die finite Laplace-Transformierte von f auf $[0, \tau]$.

2) Ist f exponentiell beschränkt, so folgt aus dem Beweis des Satzes und 1), dass sogar

$$\widehat{f}_\sigma(\lambda) R(\lambda, A)x = \int_0^\sigma e^{-\lambda t} u_x(t)\, dt + e^{-\lambda\sigma} R(\lambda, A) u_x(\sigma)$$

für alle $\lambda \in M$ mit $Re\,\lambda > \omega$, für alle $x \in X$ und für alle $\sigma \geq \tau$.

3) Satz 249 lässt sich auch auf lokale Cauchy Probleme anwenden, also im Fall dass es ein $\tau > 0$ gibt so dass

$$\begin{cases} Au_x(t) + f(t)x = u_x'(t) \text{ für } 0 \leq t \leq \tau \\ u_x(0) = 0 \\ u_x \in C^1([0, \tau], X) \end{cases}$$

für alle $x \in X$ eine eindeutige Lösung u_x hat.

In dieser Allgemeinheit liegt aber auch eine Schwäche des Satzes : Setzt man $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ und $f = 1$, so werden wir später sehen, dass eine Halbebene in der Resolventenmenge von A liegt. Das gibt der Satz aber nicht her (Nachrechnen!).

Beweis von 1) der Bemerkung :

Sei $\sigma \geq \tau$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\left|e^{\lambda\sigma}\int_0^{\sigma} e^{-\lambda t} f(t)\,dt\right| &\geq \left|e^{\lambda\tau}\int_0^{\sigma} e^{-\lambda t} f(t)\,dt\right| \\
&= \left|e^{\lambda\tau}\int_0^{\tau} e^{-\lambda t} f(t)\,dt + e^{\lambda\tau}\int_\tau^{\sigma} e^{-\lambda t} f(t)\,dt\right| \\
&= \left|e^{\lambda\tau}\int_0^{\tau} e^{-\lambda t} f(t)\,dt + \int_0^{\sigma-\tau} e^{-\lambda w} f(w+\tau)\,dw\right| \\
&\geq \left|e^{\lambda\tau}\int_0^{\tau} e^{-\lambda t} f(t)\,dt\right| - \left|\int_0^{\sigma-\tau} e^{-\lambda w} f(w+\tau)\,dw\right|
\end{aligned}$$

Wegen $\lim_{Re\,\lambda\to\infty}\left|\int_0^{\sigma-\tau} e^{-\lambda w} f(w+\tau)\,dw\right| = 0$ folgt die Behauptung.

$\equiv$

Beweis (des Satzes) Der lineare Operator

$$\begin{aligned}
H : X &\to X \\
Hx &= Au_x^{[1]}(\tau) = u_x(\tau) - f^{[1]}(\tau)x
\end{aligned}$$

ist beschränkt, denn für $x \in X$ gilt

$$\begin{aligned}
\|Hx\| &\leq \|u_x(\tau)\| + |f^{[1]}(\tau)|\cdot\|x\| \\
&= \left\|\int_0^{\tau} S(t)x\,dt\right\| + |f^{[1]}(\tau)|\cdot\|x\| \\
&\leq \tau\cdot\sup_{0\leq t\leq\tau}\|S(t)x\| + |f^{[1]}(\tau)|\cdot\|x\| \\
&\leq \|x\|\cdot\left(\tau\cdot\sup_{0\leq t\leq\tau}\|S(t)\| + |f^{[1]}(\tau)|\right),
\end{aligned}$$

beachte Satz 247.

Für $\lambda \in \mathbb{K}$ definiere den linearen beschränkten Operator $J_\lambda \in \mathcal{L}(X)$ durch

$$J_\lambda := \lambda\cdot\left(f^{[1]}\right)^{\wedge}_{\tau}\cdot id - e^{-\lambda\tau}H,$$

also mit partieller Integration

$$\begin{aligned}
J_\lambda x &= \lambda\int_0^{\tau} e^{-\lambda\tau} f^{[1]}(t)\,dt\cdot x - e^{-\lambda\tau}\left(u_x(\tau) - f^{[1]}(\tau)x\right) \\
&= -e^{-\lambda t} f^{[1]}(t)x\Big|_0^{\tau} + \int_0^{\tau} e^{-\lambda t} f(t)\,dt\cdot x - e^{-\lambda\tau}u_x(\tau) + e^{-\lambda\tau}f^{[1]}(\tau)x \\
&= \widehat{f}_\tau(\lambda)\cdot x - e^{-\lambda\tau}u_x(\tau).
\end{aligned}$$

Nach Voraussetzung gibt es ein $\omega > 0$ mit

$$\left|e^{\lambda\tau}\widehat{f}_\tau(\lambda)\right| \geq 1 + 2\|H\| + \left|f^{[1]}(\tau)\right| \quad \text{für alle } \lambda\in M \text{ mit } Re\,\lambda > \omega.$$

Dann (partielle Integration)

$$\begin{aligned}\left|\lambda e^{\lambda\tau}\left(f^{[1]}\right)^{\wedge}_{\tau}(\lambda)\right| &= \left|\lambda e^{\lambda\tau}\right|\cdot\left|-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda t}f^{[1]}(t)\Big|_0^{\tau}+\frac{1}{\lambda}\int_0^{\tau}e^{-\lambda t}f(t)\,dt\right| \\ &= \left|-f^{[1]}(\tau)+e^{\lambda\tau}\widehat{f}_{\tau}(\lambda)\right| \\ &\geq \left|e^{\lambda\tau}\widehat{f}_{\tau}(\lambda)\right|-\left|f^{[1]}(\tau)\right| \\ &\geq 1+2\cdot\|H\|.\end{aligned}$$

Es folgt

$$\left\|\frac{H}{\lambda e^{\lambda\tau}\left(f^{[1]}\right)^{\wedge}_{\tau}(\lambda)}\right\|\leq 1/2 \quad \text{für alle } \lambda\in M, Re\,\lambda>\omega.$$

Nach Lemma 104 ist der Operator

$$M_\lambda := id-\frac{H}{\lambda e^{\lambda\tau}\left(f^{[1]}\right)^{\wedge}_{\tau}(\lambda)}=\frac{J_\lambda}{\lambda\left(f^{[1]}\right)^{\wedge}_{\tau}(\lambda)}\in\mathcal{L}(X)$$

für alle $\lambda\in M$ mit $Re\,\lambda>\omega$ stetig invertierbar, und

$$M_\lambda^{-1}=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{H}{\lambda e^{\lambda\tau}\left(f^{[1]}\right)^{\wedge}_{\tau}(\lambda)}\right)^k.$$

Insbesondere gilt $\|M_\lambda^{-1}\|\leq 2$, und

$$J_\lambda^{-1}=\frac{M_\lambda^{-1}}{\lambda\left(f^{[1]}\right)^{\wedge}_{\tau}(\lambda)}$$

Wegen $Au_x(t)+f(t)x=u_x'(t)$ für alle $t\geq 0$ gilt für alle $\lambda\in\mathbb{K}$ und alle $x\in X$

$$\int_0^{\tau}e^{-\lambda t}Au_x(t)\,dt+\widehat{f}_{\tau}(\lambda)x=\int_0^{\tau}e^{-\lambda t}u_x'(t)\,dt,$$

also mit partieller Integration

$$(\lambda-A)\int_0^{\tau}e^{-\lambda t}u_x(t)\,dt=\widehat{f}_{\tau}(\lambda)x-e^{-\lambda t}u_x(\tau)=J_\lambda x.$$

Also ist $\lambda-A$ für alle $\lambda\in M$ mit $Re\,\lambda>\omega$ surjektiv (beachte, dass J_λ surjektiv ist).

Zeige, dass $\lambda-A$ injektiv ist. Sei also $x\in D(A)$ mit $(\lambda-A)x=0$.

Dann

$$\begin{aligned}J_\lambda x &= (\lambda-A)\int_0^{\tau}e^{-\lambda t}u_x(t)\,dt \\ &= \int_0^{\tau}\lambda e^{-\lambda t}u_x(t)\,dt-\int_0^{\tau}e^{-\lambda t}u_{Ax}(t)\,dt\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \text{(benutze Satz 238 und Lemma 248.)} \\
&= \int_0^\tau \lambda e^{-\lambda t} u_x(t)\,dt - \int_0^\tau e^{-\lambda t} u_{\lambda x}(t)\,dt \\
&= \int_0^\tau \lambda e^{-\lambda t} u_x(t)\,dt - \int_0^\tau e^{-\lambda t} \lambda u_x(t)\,dt \\
&= 0,
\end{aligned}$$

also $x = 0$, da J_λ injektiv.

Nach Satz 109 ist $(M \cap \{\lambda \in \mathbb{K} \,|\, Re\,\lambda > \omega\}) \subset \rho(A)$, und

$$R(\lambda, A) J_\lambda x = \int_0^\tau e^{-\lambda t} u_x(t)\,dt \quad \text{für alle } x \in X. \tag{32}$$

Ausserdem gilt für alle $x \in X$

$$\begin{aligned}
J_\lambda R(\lambda, A)x &= (\lambda - A) \int_0^\tau e^{-\lambda t} u_{R(\lambda,A)x}(t)\,dt \\
&= (\lambda - A) \int_0^\tau e^{-\lambda t} R(\lambda, A) u_x(t)\,dt \quad \text{wegen Lemma 248b)} \\
&= (\lambda - A) R(\lambda, A) \int_0^\tau e^{-\lambda t} u_x(t)\,dt \quad \text{wegen Satz 119 oder Satz 238} \\
&= \int_0^\tau e^{-\lambda t} u_x(t)\,dt.
\end{aligned}$$

Also

$$\begin{aligned}
\|R(\lambda, A)x\| &\leq \|J_\lambda^{-1}\| \cdot \left\| \int_0^\tau e^{-\lambda t} u_x(t)\,dt \right\| \\
&\leq 2e^{\tau Re\,\lambda} \cdot \int_0^\tau e^{-t Re\,\lambda}\,dt \cdot \sup_{0 \leq t \leq \tau} \left\| \int_0^t S(s)x\,ds \right\| \\
&\leq 2e^{\tau\,Re\,\lambda} \cdot \frac{1 - e^{-\tau Re\,\lambda}}{Re\,\lambda} \cdot \tau \|x\| \cdot \sup_{0 \leq t \leq \tau} \|S(t)\|.
\end{aligned}$$

Schliesslich folgt aus Gleichung (32)

$$R(\lambda, A)\big(\widehat{f}_\tau(\lambda)x - e^{-\lambda\tau} u_x(\tau)\big) = \int_0^\tau e^{-\lambda t} u_x(t)\,dt,$$

also

$$\widehat{f}_\tau(\lambda) R(\lambda, A)x = \int_0^\tau e^{-\lambda t} u_x(t)\,dt + e^{-\lambda\tau} R(\lambda, A) u_x(\tau).$$

$\equiv$

9.3 Der Satz von Ljubic

Lemma 251 *Sei X ein Banachraum, $\tau > 0$, und $(a_k)_{k=1}^\infty \subset X$ eine Folge.*
Dann sind äquivalent

1)

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{\ln\|a_k\|}{k} \leq -\tau.$$

2)

$$e^{-\delta k} e^{\tau k} \|a_k\| \xrightarrow{k\to\infty} 0 \quad \textit{für alle } \delta > 0.$$

BEWEIS 1)⇒2)
Sei $\delta > 0$. Es gibt ein k_0 mit $\frac{\ln\|a_k\|}{k} \leq -\tau + \delta/2$ für alle $k \geq k_0$, also

$$e^{-\delta k} e^{\tau k} \|a_k\| \leq e^{-\delta k/2}.$$

2)⇒1)
Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein k_0 mit $e^{-k\varepsilon} e^{k\tau} \|a_k\| \leq 1$ für alle $k \geq k_0$, also

$$\ln\|a_k\| \leq \varepsilon k - \tau k$$

oder

$$\frac{\ln\|a_k\|}{k} \leq -\tau + \varepsilon.$$

≡

Lemma 252 *Sei X ein Banachraum, $\tau > 0$, und $(a_k)_{k=1}^\infty \subset X$ eine Folge mit*

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{\ln\|a_k\|}{k} \leq -\tau.$$

Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{j!} e^{tnj} a_{nj} = 0 \quad \textit{für alle } t \in [0, \tau).$$

(Vorsicht : Für $t = \tau$ ist das im allgemeinen falsch!)

BEWEIS Sei $t \in [0, \tau)$ und $\delta \in (0, \tau - t)$. Dann gibt es ein k_0 mit

$$\|a_k\| \leq e^{\delta k} e^{-\tau k} \quad \text{für alle } k \geq k_0,$$

also gilt für $n \geq k_0$

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{j!} e^{tnj} a_{nj} \right\| &\leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j!} e^{tnj} e^{\delta nj} e^{-\tau nj} \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(e^{tn+\delta n-\tau n})^j}{j!} \\
&= exp\left(e^{n(t+\delta-\tau)}\right) - 1 \\
&\xrightarrow{n\to\infty} 0.
\end{aligned}$$

≡

Satz 253 *(Satz von Ljubic)*
Sei X ein Banachraum, $A : D(A) \to X$ abgeschlossen, $\tau > 0$, $F \in C([0,\tau], X)$ stetig, und es gebe ein $k_0 > 0$ mit

$$\mathbb{N} \cap (k_0, \infty) \subset \rho(A)$$

und mit

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{\ln \|R(k,A)x\|}{k} \leq 0 \quad \textit{für alle } x \in X.$$

Dann hat das Cauchy Problem

$$\begin{cases} Av(t) + F(t) = v'(t) \textit{ für alle } t \in [0,\tau] \\ v(0) = 0 \\ v \in C^1([0,\tau], X) \end{cases}$$

höchstens eine Lösung.

Der Satz von Ljubic ist also eine reiner Eindeutigkeitssatz und sagt nichts über die Existenz einer Lösung aus. Seine Stärke liegt darin, dass die Bedingung an die Resolvente recht schwach ist.
BEWEIS Seien $v_1, v_2 \in C^1([0,\tau], X)$ zwei Lösungen des Problems, und $v := v_1 - v_2$. Dann $Av(t) = v'(t)$, also

$$\int_0^\tau e^{-\lambda t} Av(t)\,dt = \int_0^\tau e^{-\lambda t} v'(t)\,dt \quad \text{für alle } \lambda \in \mathbb{K}.$$

Partielle Integration liefert

$$(\lambda - A) \int_0^\tau e^{-\lambda t} v(t)\,dt = -e^{-\lambda\tau} v(\tau),$$

also

$$\widehat{v}_\tau(k) = -e^{-k\tau} R(k,A) v(\tau) \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}, k > k_0.$$

Insbesondere

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{\ln \|\widehat{v}_\tau(k)\|}{k} \leq -\tau.$$

Definiere $v(t) := 0$ für $t > \tau$. Die Phragmen-Doetsch-Formel liefert für $t \in [0,\tau)$

$$\begin{aligned} v^{[1]}(t) &= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{j!} e^{tnj} \widehat{v}(nj) \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{j!} e^{tnj} \widehat{v}_\tau(nj), \end{aligned}$$

und das ist 0 nach Lemma 252.

Also $v = 0$ auf $[0,\tau)$, also wegen der Stetigkeit auf $[0,\tau]$. Also $v_1 = v_2$.

$\equiv$

Definition 254 *Sei X ein Banachraum, $f \in C([0,\infty),\mathbb{K})$, und $A : D(A) \to X$ erzeuge eine f-gefaltete Halbgruppe $S : [0,\infty) \to \mathcal{L}(X)$.*

Ist sowohl f als auch S exponenetiell beschränkt, so heisst S eine exponenetiell beschränkte f-gefaltete Halbgruppe.

Satz 255 *Sei X ein Banachraum, $A : D(A) \to X$ abgeschlossen, $f \in C([0,\infty),\mathbb{K})$ exponenetiell beschränkt mit*

$$\liminf_{\lambda\to\infty} \frac{\ln|\widehat{f}(\lambda)|}{\lambda} \geq 0.$$[35]

Dann sind äquivalent

1) A erzeugt eine exponentiell beschränkte f-gefaltete Halbgruppe S

2) Es gibt eine exponenetiell beschränkte Abbildung $S : [0,\infty) \to \mathcal{L}(X)$ mit

i) Für jedes $x \in X$ ist $t \mapsto S(t)x$ stetig.[36]

ii) Es gibt ein $\eta > 0$ mit $(\eta,\infty) \subset \rho(A)$, und für alle $\lambda > \eta$ und alle $x \in X$ gilt

$$\lambda\widehat{f}(\lambda)R(\lambda,A)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t}S(t)x\,dt.$$

Gibt es ausserdem ein $\sigma > 0$ mit $\widehat{f}(\lambda) \neq 0$ für alle $\lambda \in \mathbb{K}$ mit $Re\,\lambda > \sigma$, so ist weiter äquivalent

3) Es gibt eine exponenetiell beschränkte Abbildung $S : [0,\infty) \to \mathcal{L}(X)$ mit

i) S ist stark stetig

ii) Es gibt ein $\eta' > 0$ mit $\{\lambda \in \mathbb{K} \,|\, Re\,\lambda > \eta'\} \subset \rho(A)$, und für alle $\lambda \in \mathbb{K}$ mit $Re\,\lambda > \eta'$ und alle $x \in X$ gilt

$$\lambda\widehat{f}(\lambda)R(\lambda,A)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t}S(t)x\,dt.$$

Beweis 1)$\Rightarrow$2)

Zeige nur ii). Sei $M > 0$ und $\xi > \omega(f)$ mit $\|S(t)\| \leq Me^{\xi t}$ für alle $t \geq 0$.

Für jedes $x \in X$ ist $u_x(t) := \int_0^t S(s)x\,ds$ die Lösung des Problems

$$\begin{cases} Au_x(t) + f(t)x = u_x'(t) \text{ für alle } t \geq 0 \\ u_x(0) = 0 \\ u_x \in C^1([0,\infty),X) \end{cases}.$$

[35] äquivalent : $\lim_{\lambda\to\infty} e^{\delta\lambda}|\widehat{f}(\lambda)| = \infty$ für alle $\delta > 0$. Da f nach Voraussetzung exponentiell beschränkt ist, gilt insbesondere (31) für alle $\tau > 0$ (Aufgabe).

[36] dazu sagt man auch "S ist stark stetig".

Nach dem Fundamentallemma gilt für alle $\lambda > \xi$ und alle $x \in X$

$$(\lambda - A)\int_0^\infty e^{-\lambda t} u_x(t)\,dt = \widehat{f}(\lambda)x.$$

Nach Voraussetzung gibt es ein $\eta > \xi$ mit $\widehat{f}(\lambda) \neq 0$ für alle $\lambda > \eta$.
Für $\lambda > \eta$ definiere den linearen Operator

$$\begin{aligned} R(\lambda) : X &\to X \\ R(\lambda)x &= \frac{1}{\lambda \widehat{f}(\lambda)} \cdot \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)x\,dt. \end{aligned}$$

Mit partieller Integration folgt

$$R(\lambda)x = \frac{1}{\widehat{f}(\lambda)} \cdot \int_0^\infty e^{-\lambda t} u_x(t)\,dt,$$

also

$$(\lambda - A)R(\lambda)x = x \quad \text{für alle } \lambda > \eta \text{ und alle } x \in X.$$

Ist $x \in D(A)$, so

$$\begin{aligned} R(\lambda)(\lambda - A)x &= \frac{1}{\widehat{f}(\lambda)} \cdot \int_0^\infty e^{-\lambda t} u_{(\lambda - A)x}(t)\,dt \\ &= \frac{1}{\widehat{f}(\lambda)} \cdot \int_0^\infty e^{-\lambda t} (\lambda - A) u_x(t)\,dt \\ &= \frac{1}{\widehat{f}(\lambda)} \cdot (\lambda - A) \int_0^\infty e^{-\lambda t} u_x(t)\,dt \\ &= x. \end{aligned}$$

Also ist $(\lambda - A)$ bijektiv, also stetig invertierbar nach Satz 109, und $R(\lambda, A) = R(\lambda)$.

2)$\Rightarrow$1)

Es gibt $M > 0$ und $\xi > \eta$ mit $\|S(t)\| \leq Me^{\xi t}$ für alle $t \geq 0$.

Für jedes $x \in X$ definiere die exponentiell beschränkte C^1-Funktion

$$\begin{aligned} u_x : [0, \infty) &\to X \\ u_x(t) &= \int_0^t S(s)x\,ds. \end{aligned}$$

Für $\lambda > \xi$ gilt

$$\begin{aligned} \widehat{f}(\lambda)x &= \frac{1}{\lambda}(\lambda - A)\int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)x\,dt \\ &= (\lambda - A)\int_0^\infty e^{-\lambda t} u_x(t)\,dt. \end{aligned}$$

Nach dem Fundamentallemma gilt

$$\left\{\begin{array}{l} Au_x(t) + f(t)x = u_x'(t) \text{ für alle } t \geq 0 \\ u_x(0) = 0 \\ u_x \in C^1([0,\infty), X) \end{array}\right. .$$

Es bleibt noch die Eindeutigkeit zu zeigen. Für $x \in X$, $\delta > 0$ und $\lambda > \xi$ gilt

$$\begin{array}{rcl} e^{-\delta\lambda}\|R(\lambda, A)x\| & = & \dfrac{1}{|\lambda e^{\lambda\delta}\widehat{f}(\lambda)|} \cdot \left\| \displaystyle\int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)x \, dt \right\| \\ & \leq & \dfrac{1}{|\lambda e^{\lambda\delta}\widehat{f}(\lambda)|} \cdot \displaystyle\int_0^\infty e^{-\lambda t} M e^{\xi t} \, dt \\ & = & \dfrac{M}{\lambda(\lambda - \xi)} \cdot \dfrac{1}{e^{\lambda\delta}|\widehat{f}(\lambda)|}, \end{array}$$

und das geht gegen 0 für δ gegen ∞. Aus dem Satz von Ljubic folgt die Eindeutigkeit.

1)⇒3) geht wie 1)⇒2).

3)⇒2) ist klar.

≡

Lemma 256 *Sei X ein Banachraum, $f \in C([0,\infty), X)$, und $A : D(A) \to X$ erzeuge eine $f^{[1]}$-gefaltete Halbgruppe $S : [0,\infty) \to \mathcal{L}(X)$.*

Dann hat das Cauchy Problem

$$\left\{\begin{array}{l} Av_x(t) + f(t)x = v_x'(t) \text{ für alle } t \geq 0 \\ v_x(0) = 0 \\ v_x \in C^1([0,\infty), X) \end{array}\right.$$

für jedes $x \in D(A)$ die eindeutige Lösung $v_x(t) = S(t)x$.[37]

Beweis Für jedes $x \in X$ ist $u_x(t) := \int_0^t S(s)x \, ds$ die Lösung des Cauchy Problems

$$\left\{\begin{array}{l} Au_x(t) + f^{[1]}(t)x = u_x'(t) \text{ für alle } t \geq 0 \\ u_x(0) = 0 \\ u_x \in C^1([0,\infty), X) \end{array}\right. .$$

Jetzt sei $x \in D(A)$.

Definiere

$$\begin{array}{rcl} v_x : [0,\infty) & \to & X \\ v_x(t) & := & u_x'(t). \end{array}$$

Nach Voraussetzung gilt $u_{Ax} \in C^1([0,\infty), X)$, und aus

$$v_x(t) = Au_x(t) + f^{[1]}(t)x = u_{Ax}(t) + f^{[1]}(t)x$$

[37]das bedeutet nicht, dass A eine f-gefaltete Halbgruppe erzeugt.

folgt $v_x \in C^1([0,\infty),X)$, $v_x(t) \in D(A)$ für alle $t \geq 0$, $v_x(0) = 0$, und $v'_x(t) = u'_{Ax}(t) + f(t)x$.

Weiterhin

$$\begin{aligned} Av_x(t) &= Au'_x(t) \\ &= A\Big(u_{Ax}(t) + f^{[1]}(t)x\Big) \\ &= u'_{Ax}(t) - f^{[1]}(t)Ax + A\Big(f^{[1]}(t)x\Big) \\ &= v'_x(t) - f(t)x. \end{aligned}$$

Die Eindeutigkeit der Lösung ist klar.

$\equiv$

Satz 257 *Sei X ein Banachraum, $f \in C([0,\infty),\mathbb{K})$, und $A : D(A) \to X$ erzeuge eine f-gefaltete Halbgruppe $S : [0,\infty) \to \mathcal{L}(X)$.*

Ist $g \in L_1^{loc}([0,\infty),\mathbb{K})$, so erzeugt A eine $(f * g)$-gefaltete Halbgruppe $T : [0,\infty) \to \mathcal{L}(X)$, nämlich

$$T(t)x = \big(g * S(\cdot)\big)(t) = \int_0^t g(t-s)S(s)x\,ds.$$

Sind S und g beide exponentiell beschränkt, so auch T.

Beweis Die Funktion $u_x(t) := \int_0^t S(s)x\,ds$ ist für jedes $x \in X$ die Lösung des Cauchy Problems

$$\left\{ \begin{array}{l} Au_x(t) + f(t)x = u'_x(t) \text{ für alle } t \geq 0 \\ u_x(0) = 0 \\ u_x \in C^1([0,\infty),X) \end{array} \right. .$$

Daraus folgt für alle $t \geq 0$

$$\int_0^t g(t-s)Au_x(s)\,ds + (f*g)(t)x = \int_0^t g(t-s)u'_x(t)\,dt.$$

Definiere für $x \in X$

$$\begin{aligned} v_x : [0,\infty) &\to X \\ v_x(t) &= \int_0^t g(t-s)u_x(s)\,ds. \end{aligned}$$

Nach Lemma 237 gilt

$$v'_x(t) = \int_0^t g(t-s)u'_x(s)\,ds,$$

nochmal nach Lemma 237 ist v_x' stetig, also

$$\begin{cases} Av_x(t) + (f*g)(t)x = v_x'(t) \text{ für alle } t \geq 0 \\ v_x(0) = 0 \\ v_x \in C^1([0,\infty), X) \end{cases} .$$

Die Eindeutigkeit der Lösung ist klar, denn nach Voraussetzung hat

$$\begin{cases} Aw(t) = w'(t) \text{ für alle } t \geq 0 \\ w(0) = 0 \\ w \in C^1([0,\infty), X) \end{cases}$$

genau die Lösung $w = 0$.

Seien schliesslich S und g exponentiell beschränkt. Dann ist T exponentiell beschränkt, siehe Satz 228.

$\equiv$

Bemerkung 258 Satz 257 zeigt, dass die Aussage
"A erzeugt eine f-gefaltete Halbgruppe"
umso "besser" ist, je grösser das Bild des Operators

$$\begin{array}{rcl} T_f : L_1^{loc}([0,\infty), \mathbb{K}) & \to & C([0,\infty), \mathbb{K}) \\ T_f g & = & g * f \end{array}$$

ist.

Setzt man $f_k(t) := t^k$ für $k \in \mathbb{N}_0$, so gilt (nachrechnen z.Bsp. mit Induktion)

$$f_k * g = k! \cdot g^{[k+1]},$$

also

$$Im\, T_{f_k} = \{h \in C([0,\infty), \mathbb{K}) \mid \text{ es gibt ein } g \in L_1^{loc}([0,\infty), \mathbb{K}) \text{ mit } h = g^{[k+1]}\},$$

und

$$T_{f_0} \supset T_{f_1} \supset T_{f_2} \ldots .$$

Besonders schön sind also **1**-gefaltete Halbgruppen. Die heissen auch C_0-Halbgruppen:

Definition 259 *Sei X ein Banachraum, $k \in \mathbb{N}_0$, $f_k(t) = t^k$, und $A : D(A) \to X$ erzeuge eine exponentiell beschränkte f_k-gefaltete Halbgruppe.*
Dann heisst S auch eine k-fach integrierte Halbgruppe.
Eine 0-fach integrierte Halbgruppe heisst auch eine C_0-Halbgruppe.

Eine C_0-Halbgruppe ist also eine exponentiell beschränkte **1**-gefaltete Halbgruppe.

Corollar 260 *Sei X ein Banachraum, und $A : D(A) \to X$ erzeuge eine C_0-Halbgruppe $S : [0,\infty) \to \mathcal{L}(X)$. Sei $h \in L_1^{loc}([0,\infty), \mathbb{K})$.*

Dann erzeugt A eine $h^{[1]}$-gefaltete Halbgruppe $T : [0,\infty) \to \mathcal{L}(X)$.

Das heisst : Das Cauchy Problem

$$\begin{cases} Au_x(t) + h^{[1]}(t)x = u_x'(t) \text{ für alle } t \geq 0 \\ u_x(0) = 0 \\ u_x \in C^1([0,\infty), X) \end{cases}$$

hat für jedes $x \in X$ eine eindeutige Lösung u_x.

Es gilt $u_x'(t) = T(t)x = \int_0^t h(t-s)S(s)x\,ds$.

Ist h exponentiell beschränkt, so auch T.

Beweis Klar mit Satz 257.

$\equiv$

Satz 261 *Sei X ein Banachraum und $A \in \mathcal{L}(X)$.*

Dann erzeugt A die C_0-Halbgruppe

$$\begin{aligned} S : [0,\infty) &\to \mathcal{L}(X) \\ S(t) &= e^{tA} := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k. \end{aligned}$$

S ist nicht nur stark stetig, sondern sogar stetig.[38]

Für jedes $h \in C([0,\infty), \mathbb{K})$ und jedes $x \in X$ hat das Cauchy Problem

$$\begin{cases} Au_x(t) + h(t)x = u_x'(t) \text{ für alle } t \geq 0 \\ u_x(0) = 0 \\ u_x \in C^1([0,\infty), X) \end{cases}$$

die (eindeutige) Lösung

$$u_x(t) = \int_0^t h(t-s)S(s)x\,ds.$$

Beweis Die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k \tag{33}$$

konvergiert für jedes $t \geq 0$ absolut im Banachraum $\mathcal{L}(X)$, also gilt (siehe Aufgabenblatt 3)

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k \in \mathcal{L}(X).$$

[38] eine stetige C_0-Halbgruppe heisst auch "gleichmässig stetig". Wir bentuzen diese Bezeichnung aber nicht.

Ausserdem konvergiert die Reihe (33) lokal gleichmässig (d.h. sie konvergiert in $\mathcal{L}(X)$ gleichmässig auf jedem kompakten Intervall).

S ist stetig: Sei $0 \leq s < t$ (der Fall $0 \leq t < s$ geht analog).

Nach dem Mittelwertsatz gilt für $k \geq 1$

$$t^k - s^k \leq (t-s)kt^{k-1}.$$

Also

$$\begin{aligned} \|S(t) - S(s)\| &= \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k - s^k}{k!} A^k \right\| \\ &\leq (t-s) \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} \|A\|^k \\ &= (t-s) \cdot \|A\| \cdot e^{t\|A\|}. \end{aligned}$$

Also ist S stetig (sogar lokal Lipschitz-stetig[39]).

Für $x \in X$ definiere die Funktion

$$\begin{aligned} u_x : [0,\infty) &\to X \\ u_x(t) &:= \int_0^t S(s)x \, ds = \left(\int_0^t e^{sA} \, ds \right)(x). \end{aligned}$$

Weil (33) lokal gleichmässig konvergiert, gilt für alle $t \geq 0$

$$\begin{aligned} \int_0^t e^{sA} \, ds &= \int_0^t \sum_{k=0}^{\infty} \frac{s^k}{k!} A^k \, ds \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\int_0^t \frac{s^k}{k!} \, ds A^k \right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{k+1}}{(k+1)!} A^k. \end{aligned}$$

Also gilt für alle $x \in X$ und alle $t \geq 0$

$$\begin{aligned} Au_x(t) &= A \int_0^t e^{sA} \, dsx \\ &= A \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{k+1}}{(k+1)!} A^k x \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{k+1}}{(k+1)!} A^{k+1} x \quad (A \text{ ist stetig!}) \\ &= e^{tA}x - x \\ &= u_x'(t) - x. \end{aligned}$$

[39]tatsächlich ist S sogar C^∞, und $\frac{d^k}{dt^k} S(t) = A^k e^{tA}$.

Also hat das Cauchy-Problem

$$\begin{cases} Au_x(t) + x = u_x'(t) \text{ für alle } t \geq 0 \\ u_x(0) = 0 \\ u_x \in C^1([0,\infty), X) \end{cases}$$

für jedes $x \in X$ eine Lösung.

Als nächstes zeigen wir die Eindeutigkeit der Lösung. Aus Satz 112 folgt $(\|A\|, \infty) \subset \rho(A)$ und

$$\|R(\lambda, A)\| \leq \frac{1}{\lambda - \|A\|} \quad \text{für alle } \lambda > \|A\|.$$

Die Eindeutigkeit folgt aus dem Satz von Ljubic.

Zu zeigen bleibt, dass S exponentiell beschränkt ist.

Es gilt

$$\|S(t)\| \quad \leq \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \|A\|^k \leq e^{t\|A\|}.$$

Der Rest des Satzes folgt aus Lemma 256 und Corollar 260.

$\equiv$

9.4 Beispiele

Beispiel 262 Sei X ein Banachraum. Das einfachste Beispiel einer C_0-Halbgruppe ist $\alpha \in \mathbb{K}$, $D(A) = X$ und $Ax := \alpha x$. Nach Satz 261 erzeugt A die C_0-Halbgruppe $S(t) = e^{tA}$, das heisst das Cauchy Problem

$$\begin{cases} \alpha \cdot u_x(t) + h(t)x = u_x'(t) \text{ für alle } t \geq 0 \\ u_x(0) = 0 \\ u_x \in C^1([0,\infty), X) \end{cases}$$

hat für jedes $x \in \mathbb{K}$ und jedes $h \in C([0,\infty), \mathbb{K})$ die eindeutige Lösung

$$u_x(t) = \int_0^t h(t-s) e^{sA}\, ds\, x = \int_0^t h(t-s) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{s^k \alpha^k}{k!} x\, ds = \int_0^t e^{\alpha s} h(t-s)\, ds \cdot x,$$

vergleiche Beispiel 231.

Beispiel 263 Sei $r \in \mathbb{N}^+$. Betrachte das System linearer Differentialgleichungen

$$y_i'(t) = \alpha_{i,1} y_1(t) + \ldots + \alpha_{i,r} y_r(t) + \beta_i \quad t \geq 0, y_i(0) = 0, 1 \leq i \leq r,$$

mit $\alpha_{i,j}, \beta_i \in \mathbb{K}$.

Gesucht sind die Funktionen $y_i \in C^1([0,\infty), \mathbb{K})$.

Definiert man die $r\times r$-Matrix $A := (\alpha_{i,j})_{1\leq i,j\leq r}$ und $u(t) := (y_1(t), \ldots, y_r(t))^T$ und $\beta := (\beta_1, \ldots, \beta_r)^T$, so kann man das das Cauchy Problem

$$\begin{cases} Au(t) + \beta = u'(t) \text{ für } t \geq 0 \\ u(0) = 0 \\ u \in C^1([0,\infty), \mathbb{K}^r) \end{cases}$$

schreiben. Die Lösung ist

$$u(t) = \int_0^t e^{sA}\beta \, ds.$$

Ist speziell $A = S^{-1}DS$ diagonalisierbar mit der Diagonalmatrix D mit Einträgen $\gamma_1, \ldots, \gamma_r$, so lässt sich e^{sA} leicht ausrechnen, denn dann gilt

$$e^{sA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{s^k}{k!} A^k = S^{-1}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{s^k}{k!} D^k\right) S = S^{-1}e^{sD}S,$$

und e^{sD} ist die Diagonalmatrix mit den Einträgen $e^{s\gamma_1}, \ldots, e^{s\gamma_r}$.

Also gilt

$$u(t) = S^{-1}MS,$$

wobei M die Diagonalmatrix mit den Einträgen $\int_0^t e^{s\gamma_1}\, ds, \ldots, \int_0^t e^{s\gamma_r}\, ds$ ist.

Beispiel 264 Sei $T > 0$, $X = C([0,T], \mathbb{K})$, $D(A) := \{f \in C^1([0,T], \mathbb{K}) \,|\, f(0) = 0\}$ und $Af = f'$.

A ist abgeschlossen (benutze Analysis I).

Für jedes $\lambda \in \mathbb{K}$ und $g \in X$ hat die Gleichung $(\lambda - A)f = g$ nach Beispiel 262 genau die Lösung

$$f(t) = -\int_0^t e^{\lambda s} g(t-s)\, ds,$$

also $\rho(A) = \mathbb{K}$ und für $\lambda \in \mathbb{K}$ und $t \in [0,T]$ gilt

$$R(\lambda, A)g(t) = -\int_0^t e^{\lambda s} g(t-s) = -e^{\lambda t}\int_0^t e^{-\lambda s} g(s)\, ds.$$

Sei $f \in C([0,\infty), \mathbb{K})$ exponentiell beschränkt mit $\liminf_{\lambda\to\infty} \frac{\ln|\widehat{f}(\lambda)|}{\lambda} \geq 0$.

Frage : Gibt es eine stark stetige exponentiell beschränkte Abbildung $S : [0,\infty) \to \mathcal{L}(X)$ mit

$$\lambda \widehat{f}(\lambda) R(\lambda, A)x = \int_0^{\infty} e^{-\lambda s} S(s)x\, ds \text{ für alle } x \in X \text{ und grosse } \lambda \text{ ???}$$

Antwort : Nein!

Denn setze $x := \mathbf{1}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \lambda \widehat{f}(\lambda) R(\lambda, A)x(t) &= -\lambda e^{\lambda t} \widehat{f}(\lambda) \int_0^t e^{-\lambda s}\, ds \\ &= \widehat{f}(\lambda)(1 - e^{\lambda t}). \end{aligned}$$

Ist $t \in (0,T]$ und $\delta \in (0,t)$, so gilt also

$$\left|\lambda\widehat{f}(\lambda)R(\lambda,A)x(t)\right| = \left|e^{\delta\lambda}\widehat{f}(\lambda)\right| \cdot \left|e^{-\lambda\delta} - e^{\lambda(t-\delta)}\right| \xrightarrow{\lambda\to\infty} \infty,$$

Widerspruch.

Also erzeugt A für kein $k \in \mathbb{N}$ eine k-fach integrierte Halbgruppe.

Beispiel 265 Vergleiche mit Beispiel 264:

Sei $T > 0$, $X = C([0,T],\mathbb{K})$, $D(A) := \{f \in C^1([0,T],\mathbb{K}) \,|\, f(0) = 0\}$ und $Af = -f'$.

Dann $\rho(A) = \mathbb{K}$, und für $\lambda \in \mathbb{K}$ und $t \in [0,T]$ gilt

$$R(\lambda,A)g(t) = \int_0^t e^{-\lambda s} g(t-s)\,ds.$$

Sei $f \in C([0,\infty),\mathbb{K})$ exponentiell beschränkt und $x \in X$. Dann gilt für $t \in [0,T]$

$$\begin{aligned}
\lambda(f^{[1]})^\wedge(\lambda)R(\lambda,A)x(t) &= \lambda(f^{[1]})^\wedge(\lambda)\int_0^t e^{-\lambda s}x(t-s)\,ds \\
&= \widehat{f}(\lambda)\int_0^t e^{-\lambda s}x(t-s)\,ds.
\end{aligned}$$

Definiert man

$$q_t(s) := \begin{cases} x(t-s) \text{ falls } 0 \le s \le t \\ 0 \text{ falls } s > t \end{cases},$$

so erhält man

$$\begin{aligned}
\lambda(f^{[1]})^\wedge(\lambda)R(\lambda,A)x(t) &= \widehat{f}(\lambda)\cdot\widehat{q_t}(\lambda) \\
&= (f * q_t)^\wedge(\lambda) \\
&= \int_0^\infty e^{-\lambda s}\int_0^s f(s-r)q_t(r)\,dr\,ds \\
&= \int_0^\infty e^{-\lambda s}\int_0^{\min\{s,t\}} f(s-r)x(t-r)\,dr\,ds.
\end{aligned}$$

Die Abbildung

$$\begin{aligned}
S : [0,\infty) &\to \mathcal{L}(X) \\
\big(S(s)x\big)(t) &= \int_0^{\min\{s,t\}} f(s-r)x(t-r)\,dr = f * q_t(s)
\end{aligned}$$

ist wohldefiniert, stark stetig und exponentiell beschränkt (Aufgabe), also löst

$$v(s,t) := u(s)(t) = f^{[1]} * q_t(s) = \int_0^{\min\{s,t\}} f^{[1]}(s-r)x(t-r)\,dr$$

die partielle Differentialgleichung

$$\begin{cases} -\frac{\partial}{\partial t}v(s,t) + f^{[1]}(s)x(t) = \frac{\partial}{\partial s}v(s,t) \text{ für } s \geq 0, t \in [0,T] \\ v(0,\cdot) = 0 \\ s \mapsto v(s,\cdot) \in C^1([0,\infty), X) \\ t \mapsto v(s,t) \in C^1([0,T], \mathbb{K}) \text{ für alle } s \geq 0, \text{ und } v(s,0) = 0 \end{cases}.$$

A erzeugt also eine 1-fach integrierte Halbgruppe, aber keine C_0-Halbgruppe nach dem folgenden Lemma.

Lemma 266 *Sei X ein Banachraum, und $A : D(A) \to X$ erzeuge eine* **1**-*gefaltete Halbgruppe.*

Dann liegt $D(A)$ dicht in X.

Beweis Das Cauchy Problem

$$\begin{cases} Au_x(t) + x = u_x'(t) \text{ für } t \geq 0 \\ u_x(0) = 0 \\ u_x \in C^1([0,\infty), X) \end{cases}$$

hat also für alle $x \in X$ eine eindeutige Lösung u_x.

Ist nun $x \in X$, so ist $\left(\frac{u_x(1/n)}{1/n}\right)_{n\geq 1}$ eine Folge in $D(A)$, die gegen $u_x'(0)$ konvergiert.

Es gilt aber $u_x'(0) = x$.

$\equiv$

Definition 267 *Sei X ein Banachraum, und $A : D(A) \to X$ erzeuge eine C_0-Halbgruppe S.*

S heisst C_0-Kontraktionshalbgruppe, falls $\|S(t)\| \leq 1$ für alle $t \geq 0$.

Beispiel 268 Sei $X = BUC(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ der Raum der beschränkten, gleichmässig stetigen Abbildungen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{K}$ mit $\|\cdot\|_\infty$, $D(A) = \{f \in X \mid f \in C^1, f' \in X\}$ und $Af = f'$. A ist abgeschlossen (klar?).

Ist $\lambda \in \mathbb{K}$ mit $Re\, \lambda > 0$ und $g \in X$, so hat die Gleichung $(\lambda - A)f = g$ nach Beispiel 231 auf den ersten Blick die unendlich vielen Lösungen

$$f(t) = e^{\lambda t}\left(c - \int_0^t e^{-\lambda s} g(s)\, ds\right), \quad c \in \mathbb{K}.$$

Weil aber f beschränkt sein muss gilt

$$\lim_{t\to\infty}\left(c - \int_0^t e^{-\lambda s} g(s)\, ds\right) = 0,$$

also $c = \widehat{g}(\lambda)$.

Daher

$$\begin{aligned} f(t) &= e^{\lambda t}\int_t^\infty e^{-\lambda s}g(s)\,ds \\ &= \int_0^\infty e^{-\lambda w}g(w+t)\,dw \quad \text{Substitution } w = s-t. \end{aligned}$$

Also $f \in X$. Tatsächlich gilt $f \in D(A)$, denn

$$f'(t) = e^{\lambda t}\big(-e^{-\lambda t}g(t)\big)+\lambda e^{\lambda t}\int_t^\infty e^{-\lambda s}g(s)\,ds = -g(t)+\lambda\int_0^\infty e^{-\lambda w}g(w+t)\,dw.$$

Also $\{\lambda \in \mathbb{K} \,|\, Re\,\lambda > 0\} \subset \rho(A)$, und

$$R(\lambda, A)g(t) = \int_0^\infty e^{-\lambda w}g(w+t)\,dw \quad \text{für } Re\,\lambda > 0.$$

Die Abbildung

$$\begin{aligned} S:[0,\infty) &\to \mathcal{L}(X) \\ S(w)g(t) &= g(w+t) \end{aligned}$$

ist wohldefiniert, und aus der gleichmässigen Stetigkeit von g folgt die starke Stetigkeit von S (klar?). Ausserdem gilt $\|S(w)\| \leq 1$ für alle $w \geq 0$.

Setzt man $f = \mathbf{1}$, so gilt also

$$\lambda\widehat{f}(\lambda)R(\lambda, A)g = \int_0^\infty e^{-\lambda w}S(w)g\,dw,$$

daher erzeugt A eine C_0-Kontraktionshalbgruppe, nämlich S.

S heisst auch Translationshalbgruppe.

Ist also $h \in L_1^{loc}([0,\infty), \mathbb{K})$, so ist

$$v(s,t) = u(s)(t) = \int_0^s h^{[1]}(s-w)S(w)x(t)\,dw = \int_0^s h^{[1]}(s-w)x(w+t)\,dw$$

eine Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$\left\{\begin{array}{ll} \frac{\partial}{\partial t}v(s,t) + h^{[1]}(s)x(t) = \frac{\partial}{\partial s}v(s,t) & s \geq 0, t \in \mathbb{R} \\ v(0,\cdot) = 0 & \end{array}\right. .$$

Beispiel 269 In Beispiel 268 kann man auch

1) $X = BUC([0,\infty), \mathbb{K}, D(A) = \{f \in X \,|\, f \in C^1, f' \in X\}$

2) $X = C_0([0,\infty), \mathbb{K}), D(A) = \{f \in X \,|\, f \in C^1, f' \in X\}$

3) $X = L_p([0,\infty), \mathbb{K}), 1 \leq p < \infty$,

$$D(A) = \left\{ f \in X \;\middle|\; \begin{array}{l} f \text{ hat einen fast überall differenzierbaren} \\ \text{Repräsentanten, und } f' \in X \end{array} \right\}$$

nehmen, aber nicht $X = BC([0,\infty),\mathbb{K})$, da dann die starke Stetigkeit nicht mehr gilt.

Beispiel 270 Sei wieder $X = BUC(\mathbb{R},\mathbb{K})$, $D(B) = \{f \in X \mid f \in C^1, f' \in X\}$ und $Bf = -f'$.

Ist $\lambda \in \mathbb{K}$ mit $Re\,\lambda > 0$ und $g \in X$, so hat die Gleichung $(\lambda - B)f = g$ nach Beispiel 231 auf den ersten Blick die unendlich vielen Lösungen

$$f(t) = e^{-\lambda t}\left(c + \int_0^t e^{\lambda s} g(s)\,ds\right), \quad c \in \mathbb{K}.$$

Weil f aber beschränkt sein muss, gilt

$$\lim_{t\to-\infty}\left(c + \int_0^t e^{\lambda s} g(s)\,ds\right) = 0,$$

also $c = \int_{-\infty}^0 e^{\lambda s} g(s)\,ds$.

Daher

$$\begin{aligned} f(t) &= e^{-\lambda t}\int_{-\infty}^t e^{\lambda s} g(s)\,ds \\ &= \int_0^\infty e^{-\lambda w} g(t-w)\,dw \quad \text{Substitution } w = t - s \end{aligned}$$

Also $f \in X$. Tatsächlich gilt $f \in D(B)$, denn

$$f'(t) = e^{-\lambda t}e^{\lambda t}g(t) - \lambda e^{-\lambda t}\int_{-\infty}^t e^{\lambda s} g(s)\,ds = g(t) - \lambda\int_0^\infty e^{-\lambda w} g(t-w)\,dw.$$

Also $\{\lambda \in \mathbb{K} \mid Re\,\lambda > 0\} \subset \rho(B)$, und

$$R(\lambda, B)g(t) = \int_0^\infty e^{-\lambda w} g(t-w)\,dw \quad \text{für } Re\,\lambda > 0.$$

Die Abbildung

$$\begin{aligned} S : [0,\infty) &\to \mathcal{L}(X) \\ S(w)g(t) &= g(t-w) \end{aligned}$$

ist wohldefiniert, und aus der gleichmässigen Stetigkeit von g folgt die starke Stetigkeit von S (klar?). Ausserdem gilt $\|S(w)\| \leq 1$ für alle $w \geq 0$.

Setzt man $f = \mathbf{1}$, so gilt also

$$\lambda\widehat{f}(\lambda)R(\lambda, B)g = \int_0^\infty e^{-\lambda w} S(w)g\,dw,$$

daher erzeugt B eine C_0-Kontaktionshalbgruppe, nämlich S.

Ist also $h \in L_1^{loc}([0,\infty),\mathbb{K})$, so ist

$$v(s,t) = u(s)(t) = \int_0^s h^{[1]}(s-w)S(w)x(t)\,dw = \int_0^s h^{[1]}(s-w)x(t-w)\,dw$$

eine Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$\begin{cases} -\frac{\partial}{\partial t}v(s,t) + h^{[1]}(s)x(t) = \frac{\partial}{\partial s}v(s,t) & s \geq 0, t \in \mathbb{R} \\ v(0,\cdot) = 0 \end{cases}.$$

Definition 271 *Sei X ein Banachraum, und $A : D(A) \to X$ erzeuge eine C_0-Halbgruppe S.*

Falls auch $-A$ eine C_0-Halbgruppe T erzeugt, so heisst die Abbildung

$$\begin{aligned} U : \mathbb{R} &\to \mathcal{L}(X) \\ U(t) &= \begin{cases} S(t) \text{ falls } t \geq 0 \\ T(-t) \text{ falls } t < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

eine C_0-Gruppe, und A heisst ein Erzeuger von U.

Gilt $\sup_{t\geq 0}\|U(t)\| < \infty$, so heisst U eine beschränkte C_0-Gruppe.

Wir bringen den folgenden Satz ohne Beweis.

Satz 272 *Sei X ein Banachraum, und $A : D(A) \to X$ erzeuge eine beschränkte C_0-Gruppe $U : \mathbb{R} \to \mathcal{L}(X)$.*

Definiere

$$D(A^2) = \{x \in D(A) \mid Ax \in D(A)\}$$

und $A^2 : D(A^2) \to X$ durch $A^2x = A(Ax)$.

A^2 erzeugt eine beschränkte C_0-Halbgruppe L, nämlich

$$L(t)x = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-\frac{v^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}} U(v)x\,dv \quad t > 0$$

und $L(0) := id_X$.

$\equiv$

Erzeugt also A die C_0-Kontaktionshalbgruppe S und $-A$ die C_0-Kontaktionshalbgruppe T, so erzeugt A^2 die C_0-Kontraktionshalbgruppe

$$L(t)x = \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{v^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}} \Big(S(v)x + T(v)x\Big)\,dv.$$

Beispiel 273 Die eindimensionale Wärmeleitungsgleichung

Physikalisch : Gegeben ist ein "unendlich langer", "unendlich dünner" und perfekt wärmeisolierter Stab mit spezifischer Wärmekapazität c (Einheit Joule/(Kilogramm·Kelvin)), Dichte ρ (Einheit Kilogramm/Meter^3) und Wärmeleitfähigkeit λ (Einheit Watt/(Meter·Kelvin)). Wir legen den Nullpunkt $r = 0$ des Stabes willkürlich fest.

Zum Zeitpunkt $t = 0$ sei die Temperatur an jeder Stelle $r \in R$ des Stabes durch die Funktion $x : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ gegeben (Die Einheit von $x(r)$ ist Kelvin).

Die Funktion $T : [0, \infty) \times \mathbb{R}$ beschreibe die Temperaturverteilung des Stabes. Der Wert $T(t, r)$ gibt also die Temperatur des Stabes zum Zeitpunkt t and der Stelle r an. Insbesondere gilt $x = T(0, \cdot)$.

Physik-Lehrbuch : Die Funktion T löst die partielle Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \frac{\lambda}{c\rho} \cdot \frac{\partial^2}{\partial r^2} T(t, r) &= \frac{\partial}{\partial t} T(t, r) \\ T(0, \cdot) &= x. \end{aligned}$$

$\xi := \frac{\lambda}{c\rho}$ heisst übrigens Temperaturleitwert, Einheit Meter^2/Sekunde. Wir lassen die Einheiten ab jetzt weg.

Definiere $X := BUC(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $D(A) = \{f \in X \mid f \in C^1, f' \in X\}$ und $Af = \sqrt{\xi} \cdot f'$.

A erzeugt die C_0-Kontraktionshalbgruppe $S(w)g(t) = g(t + \xi w)$, und $-A$ erzeugt die C_0-Kontraktionshalbgruppe $T(w)g(t) = g(t - \xi w)$. (Das ist eine kleine Verallgemeinerung der Beispiele 268 und 270).

Ab jetzt setzen wir $x \in D(A^2)$ voraus.

Das Cauchy Problem

$$\begin{cases} A^2 u(t) = u'(t) \text{ für } t \geq 0 \\ u(0) = x \\ u \in C^1([0, \infty), X) \end{cases}$$

hat die eine eindeutige Lösung u, und es gilt für $t > 0$ und $r \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} T(t, r) = u(t)(r) &= \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{v^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}} \Big(x(r + \xi v) + x(r - \xi v) \Big) \, dv \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-\frac{v^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}} x(r + \xi v) \, dv. \end{aligned}$$

Für dieses Beispiel haben wir unter anderem den folgenden Satz benutzt:

Satz 274 *Sei X ein Banachraum, und $A : D(A) \to X$ ein abgeschlossener Operator.*

Dann sind äquivalent

1) *A erzeugt eine C_0-Halbgruppe S*

2) *A erzeugt eine **1**-gefaltete Halbgruppe S*

3) *Das Cauchy Problem*

$$\begin{cases} Av_x(t) = v_x'(t) \text{ für } t \geq 0 \\ v_x(0) = x \\ v_x \in C^1([0, \infty), X) \end{cases}$$

hat für jedes $x \in D(A)$ die eindeutige Lösung v_x, und es gilt $\rho(A) \neq \emptyset$.

In diesem Fall gelten

$$S(t+s) = S(s)S(t) \quad \textit{für alle } s,t \geq 0$$

und

$$v_x(t) = S(t)x \quad \textit{für alle } x \in D(A), t \geq 0.$$

Beweis 1)⇒2) klar per definition.

2)⇒3)

$\rho(A) \neq \emptyset$ ist klar nach Satz 255.

Das Cauchy Problem

$$\begin{cases} Au_x(t) + x = u_x'(t) \text{ für } t \geq 0 \\ u_x(0) = 0 \\ u_x \in C^1([0,\infty), X) \end{cases}$$

hat für jedes $x \in X$ die eindeutige Lösung $u_x(t) = \int_0^t S(s)x\,ds$.

Für $x \in D(A)$ definiere

$$\begin{array}{rcl} v_x : [0,\infty) & \to & X \\ v_x(t) & = & u_x'(t). \end{array}$$

Wegen $v_x(t) = u_{Ax}(t) + x$ ist $v_x \in C^1$, $v_x(0) = x$ und $v_x(t) \in D(A)$.

Schliesslich gilt

$$Av_x(t) = Au_{Ax}(t) + Ax = u_{Ax}'(t) - Ax + Ax = v_x'(t).$$

Die Eindeutigkeit ist klar.

3)⇒2)

Sei $\lambda \in \rho(A)$, und $x \in X$.

Definiere die Funktion

$$\begin{array}{rcl} w : [0,\infty) & \to & X \\ w(t) & = & (\lambda - A)v_{R(\lambda,A)x}(t). \end{array}$$

Wegen $w(t) = \lambda v_{R(\lambda,A)x}(t) - v_{R(\lambda,A)x}'(t)$ ist w stetig, und wegen

$$\int_0^t w(s)\,ds = \lambda v_{R(\lambda,A)x}^{[1]}(t) - v_{R(\lambda,A)x}(t) + R(\lambda,A)x$$

gilt $\int_0^t w(s)\,ds \in D(A)$, mit

$$\begin{array}{rcl} A\displaystyle\int_0^t w(s)\,ds & = & \lambda \displaystyle\int_0^t Av_{R(\lambda,A)x}(s)\,ds - v_{R(\lambda,A)x}'(t) + \lambda R(\lambda,A)x - x \\ & = & \lambda \displaystyle\int_0^t v_{R(\lambda,A)x}'(s)\,ds - v_{R(\lambda,A)x}'(t) + \lambda R(\lambda,A)x - x \\ & = & \lambda v_{R(\lambda,A)x}(t) - \lambda R(\lambda,A)x - v_{R(\lambda,A)x}'(t) + \lambda R(\lambda,A)x - x \\ & = & w(t) - x. \end{array}$$

Die Funktion $u_x(t) := \int_0^t w(s)\,ds$ löst also das Cauchy Problem

$$\begin{cases} Au_x(t) + x = u_x'(t) \text{ für } t \geq 0 \\ u_x(0) = 0 \\ u_x \in C^1([0,\infty), X) \end{cases}.$$

Die Eindeutigkeit ist klar.

2)$\Rightarrow$1)

Zu zeigen ist, dass S exponentiell beschränkt ist.

Das Cauchy Problem

$$\begin{cases} Au_x(t) + x = u_x'(t) \text{ für } t \geq 0 \\ u_x(0) = 0 \\ u_x \in C^1([0,\infty), X) \end{cases}$$

hat für jedes $x \in X$ die Lösung $u_x(t) = \int_0^t S(s)x\,ds$.

Wir zeigen erst

$$S(t+s) = S(t)S(s) \quad \text{für alle } s,t \geq 0.$$

Zu zeigen ist also $u_x'(t+s) = u_{S(s)x}'(t)$ für alle $x \in X$, $t, s \geq 0$.

Sei $x \in X$ und $s \geq 0$. Definiere die Funktion

$$\begin{aligned} v : [0,\infty) &\rightarrow X \\ v(t) &= u_x(t+s) - u_x(s). \end{aligned}$$

Dann gilt für $t \geq 0$

$$\begin{aligned} Av(t) &= Au_x(t+s) - Au_x(s) \\ &= u_x'(t+s) - x - \big(u_x'(s) - x\big) \\ &= v'(t) - u_x'(s). \end{aligned}$$

Wegen der Eindeutigkeit der Lösung folgt $v(t) = u_{u_x'(s)}(t)$, also

$$u_x(t+s) - u_x(s) = u_{S(s)x}(t),$$

daher

$$u_x'(t+s) = u_{S(s)x}'(t).$$

Jetzt zeigen wir, dass S exponentiell beschränkt ist.

Nach Satz 247 ist $M := 1 + \sup_{0\leq t\leq 1} \|S(t)\| < \infty$. Definiere $\omega := \ln M$.

Ist nun $t \geq 0$, so gibt es ein $n \in \mathbb{N}_0$ und ein $s \in [0,1)$ mit $t = n + s$.

Dann

$$\|S(t)\| = \|S(n)S(s)\| = \|S(1)^n S(s)\| \leq \|S(1)\|^n \cdot M \leq M^n \cdot M = e^{\omega n} M \leq M e^{\omega t}.$$

$\equiv$

Leider haben wir nicht mehr genug Zeit, um den folgenden fundamentalen Satz über C_0-Kontraktionshalbgruppenb zu beweisen:

Satz 275 *(Satz von Hille-Yosida)*
Sei X ein Banachraum, $A : D(A) \to X$ ein linearer Operator.
Dann sind äquivalent

1) *A erzeugt eine C_0-Kontraktionshalbgruppe*

2) *A ist abgeschlossen, $\overline{D(A)} = X$, $(0, \infty) \subset \rho(A)$, und*

$$\|R(\lambda, A)\| \leq \frac{1}{\lambda} \quad \textit{für alle } \lambda > 0.$$

Index

$BC([0,\infty),\mathbb{K})$, 19
$BUC([0,\infty),\mathbb{K})$, 19
$C([a,b],\mathbb{K})$, 19
$C^1([0,1],\mathbb{R})$, 20
C_0-Halbgruppe, 184
$C_0([0,\infty),\mathbb{K})$, 19
$C_0(\mathbb{R},\mathbb{K})$, 19
H_∞, 20
$L_1ploc([0,\infty),X)$, 153
$L_\infty(M,\mathbb{R})$, 28
$L_p(M,\mathbb{R})$, 25, 28
$T(M,\mathbb{R})$, 24
$\mathbb{K}$, 3
ℓ_p, 20
lim inf, 45
$\underline{\omega(f)}$, 157
$\overline{L_\infty}(M,\mathbb{R})$, 27
$\overline{L_p}(M,\mathbb{R})$, 24
σ-Topologie, 100
σ-offen, 100
σ^*-Topologie, 104
σ^*-offen, 104
$f^{[1]}$, 154
$\mathcal{K}(X,Y)$, 72
$\mathcal{L}(X,Y)$, 30

Abgeschlossene Menge, 3
abgeschlossener Operator, 38
Abschluss einer Menge, 5
abstraktes Cauchy-Problem, 166
antisymmetrisch, 47
Approximationssatz von Weierstrass, 120
asymptotisch exponentiell beschränkt, 153
asymptotische exponentielle Wachstumsschranke, 153

Banachraum, 16
Basis der Topologie, 100
Basisfolge, 127, 142
Berührungspunkt einer Menge, 5
beschränkt, nach oben, 47
beschränkt, nach unten, 47
beschränkte lineare Abbildung, 28

Cauchy-Hadamard, 68
Cauchyfolge, 11
    L_p-Cauchyfolge, 24
charakteristische Funktion, 23

dicht, 7
differenzierbar, 60
dist
    $dist(x,Y)$, 17
Distanz, 17
Dreiecksungleichung, 9, 15
duale Basis, 80
dualer Operator, 79
Dualraum, 55

EDE, 108
endliche Durchschnittseigenschaft, 108
Erstes Abzählbarkeitsaxiom, 4, 123
Erzeuger einer Halbgruppe, 172
essentielles Supremum, 27
exponenetiell beschränkte gefaltete Halbgruppe, 180
exponentiell beschränkt, 157
exponentielle Wachstumsschranke, 157

F-Raum, 170
Faltung, 32, 158
Familie, 3
fast überall, 24
Finite Laplace Transformation, 156
folgenkompakt, 123
Formel von Cauchy-Hadamard, 68
Fourier-Transformation, 31
Fredholm-Operator, 87
Fredholmscher Integraloperator, 79
Fundamentallemma, 166
Funktionenkalkül, 64

geordnete Menge, 47
gleichmässig stetige C_0-Halbgruppe, 185

gleichstetig, 41, 44, 76
Graph, 38
Grenzwert einer Folge, 5

Häufungspunkt einer Folge, 5
Häufungspunkt einer Menge, 5
Höldersche Ungleichung, 20, 26
Halbgruppe, 172
Halbnorm, 16
Hausdorffraum, 5
holomorph, 60, 66
Homöomorphismus, 105
Hyperebene, affine, 140

Index eines Fredholm-Operators, 87
Indexmenge, 3
innerer Punkt einer Menge, 5
Inneres einer Menge, 5
Integral einer Treppenfunktion, 24
integrierbar, 24
    p-integrierbar, 24
    p-lokal integrierbar, 152
    lokal, 152
    vektorwertig, 66
integrierte Halbgruppe, 184
isometrisch, 27
isometrisch isomorphe Abbildung, 27
isometrisch isomorphe Räume, 27

Kodimension, 87
kompakter Operator, 72
Kontraktionshalbgruppe, 190
Kugel, offene, 9
Kugel,abgeschlossene, 10

Lemma von Riesz, 94
Lemma von Zorn, 48
Limes einer Folge, 5
linear unabhängig, 48
Lineare Hülle (=Span), 44
Linearform, 50

magere Menge, 7
Mass, 23
Massraum, 23
maximales Element, 47
Menge erster Kategorie, 7
Menge zweiter Kategorie, 7
messbare Funktion, 27
messbare Menge, 23
Metrik, 9
Metrischer Raum, 9
Metrischer Raum, vollständiger, 11
minimales Element, 47
Minkowskische Ungleichung, 20, 26

nirgends dichte Menge, 7
Norm, 15
Norm, äquivalente, 36
Norm,euklidische, 19
normierter Raum, 16
Normkonvergenzsatz, 25

obere Schranke, 47
offene Abbildung, 33
Offene Menge, 3
Operator, 28
Operatornorm, 28
Ordnung, 47, 95
orthonormal, 49
Orthonormalsystem, 49

Phragmen-Doetsch-Inversion, 160
Potenzmenge, 3
Potenzreihe, 67
Produktraum, 37
Produkttopologie, 107
Projektion, 36, 82
punktweise beschränkte Menge von Operatoren, 41

quasi-nilpotent, 70
Quotientenraum, 16

Radius einer Potenzreihe, 67
reflexiv, 47, 147
reguärer Wert, 57
Relation, 47
relativ kompakt, 71
Repräsentant, 25, 28
Resolvente, 58
Resolventengleichung, 59
Resolventenmenge, 58

Satz vom abgeschlossenen Graphen, 39, 169, 170
Satz von Arzela-Ascoli, 76
Satz von Baire, 14
Satz von Banach-Alaoglu, 111
Satz von Banach-Steinhaus, 46, 169
Satz von Beppo-Levi, 25
Satz von Bohnenblust und Sobczyk, 54
Satz von der dominierten Konvergenz, 25
Satz von der gleichmässigen Beschränktheit, 41, 169
Satz von der monotonen Konvergenz, 25
Satz von der offenen Abbildung, 33, 169
Satz von Eberlein-Shmulyan, 149
Satz von Goldstine, 114, 118
Satz von Hahn-Banach, 50, 55
Satz von Heine-Borel, 113
Satz von Lebesgue, 25
Satz von Ljubic, 179
Satz von Nikolski, 134
Satz von Riesz, 75
Satz von Schauder, 81
Satz von Tychonov, 108
Schachtelsatz, 13
Schauderbasis, 126
schwach offen, 100
schwach* offen, 104
schwach* Topologie, 104
schwache Topologie, 100
separabel, 120
Sigma-Algebra, 23
Span (=Lineare Hülle), 44
Spektralradius, 69
Spektralsatz, 97
Spektrum, 58
stetige Abbildung, 4
sublinear, 50
summierbar
    p-summierbar, 20
Supremumsnorm, 6, 19

Teilraumtopologie, 3
Topologie, 3
Topologie, diskrete, 3
Topologie, gröbste, 3
Topologie,feinste, 3
Topologischer Raum, 3
Topologischer Raum, zusammenhängender, 5
topologischer Raum,separierter, 5
total beschränkt, 71
total geordnete Menge, 48
totale Teilmenge, 44
Totalordnung, 48
transitiv, 47
Translationshalbgruppe, 191
Trennungssatz, 140
Treppenfunktion, 24

Umgebung, 3
Umgebungsbasis, 4
untere Schranke, 47

Volterrascher Integraloperator, 30, 78
von Neumannsche Reihe, 58

Zweites Abzählbarkeitsaxiom, 100, 120