Funktionalanalysis

R. Lemmert

WS 97/98

Inhaltsverzeichnis

1 Quellen

Als hauptsächliche Vorlagen dienten

> Rudin, W.: *Functional Analysis*, Tata McGraw-Hill Publishing Company Ltd. New Dehli 1974.
>
> Taylor, A. E., und Lay, D. C.: *Introduction to Functional Analysis*, Second Edition, John Wiley & Sons New York, Chichester, Brisbane, Toronto 1980.
>
> Heuser, H.: *Funktionalanalysis*, B. G. Teubner, Stuttgart 1986.

sowie das Manuskript einer Vorlesung 'Funktionalanalysis', die ich 1982 an der Universität Karlsruhe gehalten habe. Außerdem habe ich von vielen Gesprächen mit C. Schmoeger und G. Herzog profitiert. J. Lahmann hat bei der Zusammenstellung der Übungsaufgaben geholfen.

2 Bezeichnungen

Mit großen Buchstaben $E, F, X, Y, \ldots$ bezeichnen wir stets Mengen, mit $a, b, x, y, \ldots$ deren Elemente; mit großen Scriptbuchstaben werden Systeme von Teilmengen der jeweils betrachteten Mengen bezeichnet. So ist

$$\mathcal{P}(X) = \{A : A \subseteq X\}$$

die *Potenzmenge* von X.
$\mathbb{R}$ beziehungsweise $\mathbb{C}$ bezeichnet den Körper der reellen beziehungsweise der komplexen Zahlen, $\mathbb{N}$ bezeichnet die Menge der natürlichen Zahlen.
Eine *Relation* R in X ist eine Beziehung zwischen Elementen von X; besteht diese Beziehung zwischen x und y, so schreiben wir xRy. Man kann sich R auch als Teilmenge von $X \times X$ (dem kartesischen Produkt von X mit sich selbst) vorstellen gemäß

$$(x, y) \in R \Longleftrightarrow xRy$$

So ist etwa Gleichheit eine Relation; sie entspricht der Diagonalen in $X \times X$.
Eine Relation $\leq$ (*kleiner oder gleich*) in X mit

1. $x \leq x \quad (x \in X)$
2. $x \leq y,\, y \leq x \Longrightarrow x = y \quad (x, y \in X)$

3. $x \leq y, y \leq z \Longrightarrow x \leq z \quad (x, y, z \in X)$

heißt *Teilordnung* auf X und X bezüglich $\leq$ *teilgeordnet*. Für $x \leq y$ schreiben wir auch $y \geq x$. Gilt zusätzlich

4. $x \leq y$ oder $y \leq x \quad (x, y \in X)$,

so heißt X *linear geordnet* (oder einfach nur *geordnet*).
Ist $M \subseteq X$ eine Teilmenge von X und $x \in X$ mit

$$m \leq x \text{ für alle } m \in M,$$

so heißt x eine *obere Schranke* von M. Besitzen je zwei Elemente von X eine obere Schranke, so heißt X *gerichtet* . Besitzt jede linear geordnete Teilmenge von X eine obere Schranke, so heißt X *induktiv* geordnet . Ein Element $x_0 \in X$ heißt *maximal* , wenn es kein von x_0 verschiedenes Element gibt, das größer oder gleich x_0 ist:

$$x \geq x_0 \Longrightarrow x = x_0.$$

Als Hilfmittel für später wird benötigt:

Lemma von Zorn. *Ist $X \neq \emptyset$ induktiv geordnet, so besitzt X wenigstens ein maximales Element.*

Jede Abbildung $x : M \longrightarrow X$ einer gerichteten Menge M in eine Menge X heißt ein *Netz* in X. In Anlehnung an den Spezialfall $M = \mathbb{N}$ einer Folge schreibt man hierfür gelegentlich $x = (x_m)_{m \in M}$.
Eine Relation $\sim$ in X mit

1. $x \sim x \quad (x \in X)$
2. $x \sim y \Longrightarrow y \sim x \quad (x, y \in X)$
3. $x \sim y, y \sim z \Longrightarrow x \sim z \quad (x, y, z \in X)$

heißt *Äquivalenzrelation* in X.

$$\widetilde{x} = \{y \in X : y \sim x\}$$

heißt die durch x bestimmte *Äquivalenzklasse* . Es gilt

$$\widetilde{x} = \widetilde{y} \Longleftrightarrow x \sim y \Longleftrightarrow \widetilde{x} \cap \widetilde{y} \neq \emptyset,$$

sodaß X durch die Äquivalenzklassen disjunkt zerlegt wird: $X = \bigcup \widetilde{x}$.
Die Menge der Äquivalenzklassen nennt man $X/_\sim$.

Ein Teilmengensystem $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$ in X mit

1. $\emptyset \in \mathcal{T}, X \in \mathcal{T}$
2. $A, B \in \mathcal{T} \Longrightarrow A \cap B \in \mathcal{T}$
3. $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T} \Longrightarrow \bigcup\limits_{A \in \mathcal{S}} A \in \mathcal{T}$

heißt eine *Topologie* in X. Die Elemente von $\mathcal{T}$ heißen *offen* . Ist $X \setminus A$ offen, so heißt A *abgeschlossen* . Offenbar sind $\emptyset$ und X abgeschlossen, und mit Hilfe der de Morganschen Regeln zeigt man leicht, daß die Vereinigung zweier und der Durchschnitt beliebig vieler abgeschlossener Mengen abgeschlossen ist. Ist $M \subseteq X$ und $\mathcal{O}(M)$ das System aller offenen Teilmengen beziehungsweise $\mathcal{A}(M)$ das System aller abgeschlossenen Obermengen von M, so bezeichnen

$$\mathrm{int}(M) = \bigcup_{O \in \mathcal{O}(M)} O, \;\; \mathrm{cl}(M) = \bigcap_{A \in \mathcal{A}(M)} A$$

das *Innere* beziehungsweise die *abgeschlossene Hülle* von M.
Gilt $\mathrm{cl}(M) = X$, so heißt M *dicht* in X.
Für $x \in X$ setzen wir

$$\mathcal{T}_x = \{A | A \in \mathcal{T}, \;\; x \in A\}.$$

Die Elemente von $\mathcal{T}_x$ heißen auch *offene Umgebungen* von x.
Existieren zu je zwei verschiedenen Punkten x, y in X offene Umgebungen A von x und B von y mit $A \cap B = \emptyset$, so heißt die Topologie $\mathcal{T}$ *Hausdorffsch* .
Ist $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $x = (x_m)_{m \in M}$ ein Netz in X, so heißt x *konvergent gegen* $\overline{x}$, wenn zu jeder offenen Umgebung A von x ein $m_A \in M$ existiert mit

$$x_m \in A \;\; (m \geq m_A).$$

Man schreibt dann

$$\overline{x} = \lim_m x_m.$$

Im Fall, daß $\mathcal{T}$ Hausdorffsch ist besitzt jedes Netz höchstens einen solchen Grenzwert $\overline{x}$.
Sind $(X_1, \mathcal{T}_1)$ und $(X_2, \mathcal{T}_2)$ topologische Räume, $A \subseteq X_1$ und

$$f : A \longrightarrow X_2$$

eine Abbildung, so heißt f im Punkt $x \in A$ *stetig* , wenn zu jeder offenen Umgebung U von $f(x)$ eine offene Umgebung V von x existiert mit $f(V \cap A) \subseteq U$, d.h. mit

$$y \in V \cap A \Longrightarrow f(y) \in U.$$

3 Halbmetrische, metrische und polymetrische Räume

Ist $X \neq \emptyset$ eine Menge und $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Abbildung mit

1. $d(x,x) = 0, \ \ (x \in X)$,
2. $d(x,y) = d(y,x), \ \ (x,y \in X)$,
3. $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z), \ \ (x,y,z \in X)$,

so heißt (X,d) *halbmetrischer Raum* . Gilt zusätzlich

4. $d(x,y) = 0 \Longrightarrow x = y$,

so heißt (X,d) *metrischer Raum* .

Satz("Vierecksungleichung"). *Aus* (2) *und* (3) *folgt*

$$|d(x,y) - d(u,v)| \leq d(x,u) + d(y,v)$$

für alle $x,y,u,v \in X$*; insbesondere ist stets* $d(x,y) \geq 0$.

Beweis. Es ist (wiederholte Anwendung von (2) und (3))

$$d(x,y) \leq d(x,u) + d(u,v) + d(v,y), \qquad d(u,v) \leq d(u,x) + d(x,y) + d(y,v),$$

also

$$d(x,y) - d(u,v) \leq d(x,u) + d(y,v), \qquad d(u,v) - d(x,y) \leq d(u,x) + d(y,v),$$

und hieraus folgt die Behauptung. qed
Wie üblich heißt auch im halbmetrischen Raum (X,d)

$$K(x,r) = \{y \in X : d(y,x) < r\} \text{ bzw } \overline{K}(x,r) = \{y \in X : d(y,x) \leq r\}$$

offene bzw *abgeschlossene Kugel* um x mit Radius r. Das System $\mathcal{T}_d$ aller Teilmengen von X, die mit jedem Punkt x sogar eine gewisse offene Kugel $K(x,r)$ enthalten, ist eine Topologie; sie heißt die von d *erzeugte* Topologie . Offene Kugeln gehören zu dieser Topologie, sind also offen. Abgeschlossene Kugeln sind abgeschlossen und enthalten die abgeschlossene Hülle der zugehörigen offenen Kugel. Ist d sogar eine Metrik, so ist die erzeugte Topologie Hausdorffsch.
Im halbmetrischen Raum (X,d) wird durch

$$x \sim y \Longleftrightarrow d(x,y) = 0$$

eine Äquivalenzrelation definiert. Auf $X/_\sim$ ist dann durch

$$\widetilde{d}(\widetilde{x}, \widetilde{y}) = d(x, y)$$

eine Metrik $\widetilde{d}$ gegeben. Daß die Definition von $\widetilde{d}$ sinnvoll ist erkennt man mit Hilfe der Viereckesungleichung.
Ist auf einer Menge X ein System $(d_\alpha)_{\alpha \in J}$ ($J \neq \emptyset$ Indexmenge) von Halbmetriken gegeben mit

$$d_\alpha(x, y) = 0 \text{ für alle } \alpha \in J \Longrightarrow x = y,$$

so heißt $(X, (d_\alpha)_{\alpha \in J})$ *polymetrischer* Raum. Als natürliche Topologie eines polymetrischen Raumes bezeichnen wir das System aller Teilmengen von X, die mit jedem x den Durchschnitt endlich vieler offener Kugeln

$$\bigcap_{i=1}^{n} \{y \in X : d_{\alpha_i}(y, x) < r_i\}$$

enthalten. Diese Topologie ist Hausdorffsch. Besitzt J nur ein Element, so ergibt sich speziell ein metrischer Raum. Besitzt J nur endlich viele Elemente, so kann diese Topologie durch eine einzige Metrik erzeugt werden, etwa durch

$$d(x, y) := \max_{\alpha \in J} d_\alpha(x, y)$$

Ist schließlich J abzählbar unendlich, also o.B.d.A. $J = \mathbb{N}$, so ist

$$d(x, y) := \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{d_n(x, y)}{1 + d_n(x, y)}$$

eine Metrik, die (keineswegs offensichtlich) die natürliche Topologie erzeugt.

Beispiel.

$$X = \omega := \{x = (x_1, x_2, \dots) : x_n \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}\},$$
$$d_n(x, y) = |x_n - y_n|, \ n \in \mathbb{N}.$$

$(X, (d_n)_{n \in \mathbb{N}})$ ist ein polymetrischer Raum. Die oben definierte Metrik lautet hier

$$d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|x_n - y_n|}{1 + |x_n - y_n|}.$$

Sind $(X_1, (d_{1,\alpha})_{\alpha \in J_1})$ und $(X_2, (d_{2,\beta})_{\beta \in J_2})$ polymetrische Räume, $A \subseteq X_1$ und

$$f : A \longrightarrow X_2$$

eine Abbildung, so ist f im Punkt $x \in A$ stetig genau dann, wenn zu jedem $\beta \in J_2$ und jedem $\varepsilon > 0$ endlich viele $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in J_1$ und ein $\delta > 0$ existieren mit

$$y \in A, d_{\alpha_j}(y,x) < \delta \quad (j = 1, \ldots, k) \Longrightarrow d_\beta(f(y), f(x)) < \varepsilon,$$

oder genau dann, wenn für jedes gegen x konvergente Netz $(x_m)_{m \in M}$ das Netz $f(x_m)_{m \in M}$ gegen $f(x)$ konvergiert.
Man überlegt sich leicht, daß eine Teilmenge A des metrischen Raumes X abgeschlossen ist genau dann, wenn jede konvergente Folge von Elementen aus A ihren Grenzwert in A hat. Hieraus folgt dann

$$\mathrm{cl}A = \{x | \text{Esgibt } (a_n)_{n \in \mathbb{N}},\ a_n \in A,\ \lim_{n \to \infty} a_n = x\}$$

4 Vollständige Räume

Eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in einem polymetrischen Raum $(X, (d_\alpha)_{\alpha \in J}))$ ist konvergent gegen x, wenn gilt

Zu jedem $\alpha \in J$ und jedem $\varepsilon > 0$ gibt es $n_0(\varepsilon, \alpha)$ mit

$$n \geq n_0(\varepsilon, \alpha) \implies d_\alpha(x_n, x) < \varepsilon,$$

wenn also $(d_\alpha(x_n, x))_{n \in \mathbb{N}}$ für jedes $\alpha \in J$ eine reelle Nullfolge ist. Wegen

$$d_\alpha(x, \widetilde{x}) \leq d_\alpha(x, x_n) + d_\alpha(\widetilde{x}, x_n) \ (n \in \mathbb{N})$$

(oder weil die natürliche Topologie Hausdorffsch ist) kann eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nur gegen *ein* $x \in X$ konvergieren, und man schreibt in diesem Fall

$$x = \lim_{n \to \infty} x_n.$$

Eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in einem polymetrischen Raum $(X, (d_\alpha)_{\alpha \in J}))$ heißt *Cauchyfolge* in X, wenn gilt:

Zu jedem $\alpha \in J$ und jedem $\varepsilon > 0$ gibt es $n_0(\varepsilon, \alpha)$ mit

$$n, m \geq n_0(\varepsilon, \alpha) \implies d_\alpha(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Jede konvergente Folge ist eine Cauchyfolge. Ist umgekehrt auch jede Cauchyfolge konvergent, so nennt man $(X, (d_\alpha)_{\alpha \in J}))$ *(folgen-) vollständig* . Eine Teilmenge A von X heißt folgenvollständig, wenn jede Cauchy-Folge von Elementen von A gegen ein Element von A konvergiert.
Obige Definitionen hätte man gleich allgemeiner in naheliegender Weise für

Netze formulieren können, und für metrische Räume stimmen dann die Begriffe Vollständigkeit und Folgenvollständigkeit überein, für polymetrische Räume im allgemeinen aber nicht.
Man überlegt sich leicht, daß eine Teilmenge A des metrischen Raumes X abgeschlossen ist genau dann, wenn jede konvergente Folge von Elementen aus A ihren Grenzwert in A hat.

5 Vollständige metrische Räume

Ist (X,d) ein metrischer Raum und $A \subseteq X$ nicht leer, so heißt

$$\mathrm{diam} A := \sup\{d(x,y) : x, y \in A\}$$

der *Durchmesser* von A (∞ ist zugelassen).

Cantorscher Durchschnittssatz. *Ist $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von nichtleeren abgeschlossenen Teilmengen des vollständigen metrischen Raumes (X,d) mit*

$$A_{n+1} \subseteq A_n, (n \in \mathbb{N}), \lim_{n\to\infty} \mathrm{diam} A_n = 0,$$

so enthält $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ genau einen Punkt.

Beweis. Wir wählen aus jeder Menge A_n ein x_n aus und zeigen zunächst, daß (x_n) eine Cauchyfolge ist: zu $\varepsilon > 0$ wählen wir n_0 so groß, daß diam $A_n < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$ gilt. Dann ist für $n \geq m \geq n_0$

$$x_n \in A_n \subseteq A_m, x_m \in A_m,$$

folglich $d(x_n, x_m) \leq$ diam $A_m < \varepsilon$. X ist vollständig, also existiert $x = \lim_{n\to\infty} x_n$; für jedes fest gewählte n_1 gilt $x_n \in A_{n_1}$ für $n \geq n_1$, also $x \in A_{n_1}$ (weil diese Menge abgeschlossen ist) und somit $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Gäbe es schließlich noch $y \neq x$ in diesem Durchschnitt, so wäre $\mathrm{diam} A_n \geq d(x,y) > 0$ im Widerspruch zur Voraussetzung. qed
Sind $(X_1, d_1), (X_2, d_2)$ zwei metrische Räume, $A \subseteq X_1$ und

$$f : A \longrightarrow X_2$$

eine Abbildung, so ist f stetig im Punkt $x \in A$ genau dann, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert mit:

$$y \in A, d_1(y,x) < \delta \implies d_2(f(y), f(x)) < \varepsilon,$$

oder genau dann, wenn

$$x_n \in A, \lim_{n\to\infty} x_n = x \implies \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$$

gilt. f heißt auf A *gleichmäßig stetig* , wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert mit:

$$x, y \in A, d_1(x,y) < \delta \implies d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

f ist gleichmäßig stetig auf A genau dann, wenn

$$x_n, y_n \in A, \lim_{n\to\infty} d_1(x_n, y_n) = 0 \implies \lim_{n\to\infty} d_2(f(x_n), f(y_n)) = 0$$

gilt.

Satz. (Fortsetzungssatz für gleichmäßig stetige Funktionen.) *Ist* (X_1, d_1) *ein metrischer,* (X_2, d_2) *ein vollständiger metrischer Raum,* $A \subseteq X_1$ *und* $f : A \longrightarrow X_2$ *gleichmäßig stetig, so gibt es genau eine auf* $\mathrm{cl}(A)$ *stetige Funktion* $F : \mathrm{cl}(A) \longrightarrow X_2$ *mit* $f(x) = F(x)$ *für alle* $x \in A$. F *ist auf* $\mathrm{cl}(A)$ *gleichmäßig stetig.*
Beweisskizze. Für $x \in \mathrm{cl}(A)$ setzen wir

$$F(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) \text{ für } \lim_{n\to\infty} x_n = x,\ x_n \in A,\ (n \in \mathbb{N});$$

hierzu muß nur beachtet werden, daß mit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch $(f(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyfolge in X_2, als konvergent ist und der Grenzwert nicht von der speziell gewählten Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ abhängt. Dies gelingt in einfacher Weise mit Hilfe der Vierecksungleichung. Daß es nur eine solche Funktion F geben kann ist offensichtlich; zum Nachweis der gleichmäßigen Stetigkeit von F kann man zu gegebenem ε das δ zu f wählen wegen

$$d_2(F(x), F(y)) = \lim_{n\to\infty} d_2(f(x_n), f(y_n))$$

für entsprechend gewählte Folgen $(x_n), (y_n)$.
Zwei metrische Räume (X_1, d_1), (X_2, d_2) heißen *isometrisch*, wenn es eine surjektive Abbildung $f : X_1 \longrightarrow X_2$ gibt mit

$$d_2(f(x), f(y)) = d_1(x,y) \text{ für alle } x, y \in X_1.$$

Satz. (Vervollständigung metrischer Räume). *Zu jedem metrischen Raum* (X, d) *gibt es einen bis auf Isometrie eindeutig bestimmten vollständigen metrischen Raum* $(\widetilde{X}, \widetilde{d})$ *und eine Abbildung* $E : X \longrightarrow \widetilde{X}$ *mit:*

1. $(E(X), \widetilde{d})$ *ist isometrisch zu* (X, d),

2. *$E(X)$ ist dicht in $\widetilde{X}$.*

Beweis. Wir betrachten zunächst

$$\Xi = \{\xi = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} | \ \xi \text{ ist Cauchyfolge in } X\}$$

und setzen

$$D(\xi, \eta) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n).$$

(Daß letzterer Limes existiert folgt aus der Vierecksungleichung: nach dieser ist $(d(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}})$ eine reelle Cauchyfolge).
D ist eine Halbmetrik auf Ξ. Nun sei (wie oben)

$$\widetilde{X} = \Xi/_\sim, \ \ \widetilde{d}(\widetilde{\xi}, \widetilde{\eta}) = D(\xi, \eta).$$

$(\widetilde{X}, \widetilde{d})$ ist ein metrischer Raum, und $E : X \longrightarrow \widetilde{X}$ mit

$$E(x) = \widetilde{\xi}, \quad \xi = (x, x, x, \dots)$$

(Das Bild von x ist also diejenige Klasse, in der die konstante Folge $(x, x, x, \dots)$ liegt), ist trivialerweise eine Isometrie:

$$\widetilde{d}(E(x), E(y)) = \lim_{n\to\infty} d(x, y) = d(x, y).$$

$E(X)$ **ist dicht in** $(\widetilde{X}, \widetilde{d})$: dazu sei $\widetilde{\eta}$ eine Klasse und $(y_1, y_2, y_3, \dots)$ ein Element dieser Klasse. Für $n \in \mathbb{N}$ folgt

$$\widetilde{d}(E(y_n), \widetilde{\eta}) = \lim_{k\to\infty} d(y_n, y_k) \longrightarrow 0 \ \ (n \to \infty),$$

da (y_k) eine Cauchyfolge ist.
$(\widetilde{X}, \widetilde{d})$ **ist vollständig**: Ist $(\widetilde{\xi}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $\widetilde{X}$, so wählen wir zunächst zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in X$, sodaß

$$\lim_{n\to\infty} \widetilde{d}(E(x_n), \widetilde{\xi}_n) = 0$$

gilt. Dies ist möglich weil $E(X)$ dicht in $\widetilde{X}$ ist. Wegen

$$d(x_n, x_m) = \widetilde{d}(E(x_n), E(x_m)) \le \widetilde{d}(E(x_n), \widetilde{\xi}_n) + \widetilde{d}(\widetilde{\xi}_n, \widetilde{\xi}_m) + \widetilde{d}(\widetilde{\xi}_m, E(x_m))$$

ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in X, liegt also in einer Klasse $\widetilde{\xi}$. Wegen

$$\widetilde{d}(\widetilde{\xi}_n, \widetilde{\xi}) \le \widetilde{d}(\widetilde{\xi}_n, E(x_n)) + \widetilde{d}(E(x_n), \widetilde{\xi})$$

folgt dann $\lim\limits_{n\to\infty} \widetilde{\xi}_n = \widetilde{\xi}$.
Ist schließlich (X_1, d_1) ein weiterer vollständiger metrischer Raum mit den angegebenen Eigenschaften und zugehöriger Isometrie

$$E_1 : X \longrightarrow X_1,\ E_1(X) \text{ dicht in } X_1,$$

so betrachten wir $G = E \circ E_1^{-1} : E_1(X) \longleftrightarrow E(X)$. G ist eine Isometrie, also gleichmäßig stetig und kann deshalb in eindeutiger Weise stetig auf X_1 fortgesetzt werden; diese Fortsetzung ist eine Isometrie von X_1 auf $\widetilde{X}$.

6 Der Banachsche Fixpunktsatz

Eine Abbildung f zwischen zwei metrischen Räumen $(X_0, d_0), (X_1, d_1)$ heißt *Lipschitzstetig*, wenn eine Zahl L existiert mit

$$d_1(f(x), f(y)) \leq L d_0(x, y) \text{ für alle } x, y \in X_0.$$

Eine derartige Funktion ist offenbar gleichmäßig stetig. Ist $X_0 = X_1, d_0 = d_1$ und $L < 1$ möglich, so heißt f eine *Kontraktion*.

Satz. (Banachscher Fixpunktsatz). *Ist (X, d) ein vollständiger metrischer Raum, $X \neq \emptyset$, und $f : X \longrightarrow X$ eine Kontraktion mit Konstante $L < 1$, so gibt es in X genau ein x_0 mit $f(x_0) = x_0$. (x_0 heißt Fixpunkt von f).*
Es ist

$$x_0 = \lim_{n\to\infty} f^n(x),\ (x \in X),$$

und es gelten die 'Fehlerabschätzungen'

$$d(f^n(x), x_0) \leq \frac{1}{1-L} d(f^{n+1}(x), f^n(x)) \leq \frac{L^n}{1-L} d(f(x), x).$$

Bemerkung. Die Folge $(f^n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ heißt Folge der *sukzessiven Approximationen* zum Startwert x; sie ist definiert durch

$$f^1(x) = f(x),\ f^{n+1}(x) = f(f^n(x)),\ n \in \mathbb{N}.$$

Von zahlreichen Verallgemeinerungen des Banachschen Fixpunktsatzes sei die folgende erwähnt:

Ist $f : X \longrightarrow X$ stetig und gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, sodaß f^N eine Kontraktion mit Konstante L ist, so ist D, gegeben durch (O.B.d.A. sei $L > 0$)

$$D(x, y) = d(x, y) + \frac{1}{l} d(f(x), f(y)) + \cdots + \frac{1}{l^{N-1}} d(f^{N-1}(x), f^{N-1}(y)),\ l = \sqrt[N]{L}$$

eine zu d äquivalente Metrik, bezüglich der f eine Kontraktion mit Konstante l ist. Die sukzessiven Approximationen konvergieren bezüglich beider Metriken.

Äquivalenz von Metriken bedeutet dabei, daß sie dieselbe Topologie erzeugen.

7 Der Bairesche Kategoriensatz

Eine Teilmenge eines topologischen Raumes X heißt *nirgends dicht*, wenn das Innere ihrer abgeschlossenen Hülle leer ist. Jede Teilmenge einer nirgends dichten Menge ist nirgends dicht. Eine Teilmenge A heißt von *erster Kategorie*, wenn sie abzählbare Vereinigung von nirgends dichten Mengen ist, anderenfalls von *zweiter Kategorie*. Die abzählbare Vereinigung von Mengen erster Kategorie ist von erster Kategorie, und Teilmengen solcher Mengen sind von erster Kategorie.

Satz. (Baire). *Ist (X, d) ein vollständiger metrischer Raum, $X \neq \emptyset$, so enthält keine Menge von erster Kategorie einen inneren Punkt. Insbesondere ist jede nichtleere offene Menge von zweiter Kategorie.*
Beweis. Angenommen, es sei $A = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k$ eine Menge von erster Kategorie, $x_0 \in A$ sei innerer Punkt und $\operatorname{int}\operatorname{cl} A_k$ sei leer für alle $k \in \mathbb{N}$. Für $r_0 > 0$ mit $K(x_0, r_0) \subseteq A$ ist dann $K(x_0, r_0) \nsubseteq \mathrm{cl}A_1$, also

$$K(x_0, r_0) \cap (X \setminus \mathrm{cl}A_1) \neq \emptyset,$$

und da diese Menge offen ist gibt es x_1 und $0 < r_1 < \frac{1}{2}$ mit

$$\overline{K}(x_1, r_1) \subseteq K(x_0, r_0) \cap (X \setminus \mathrm{cl}A_1).$$

Da nun $K(x_1, r_1)$ nicht in $\mathrm{cl}A_2$ liegt, ist

$$K(x_1, r_1) \cap (X \setminus \mathrm{cl}A_2) \neq \emptyset,$$

und wir erhalten x_2 und $0 < r_2 < \frac{1}{2^2}$ mit

$$\overline{K}(x_2, r_2) \subseteq K(x_1, r_1) \cap (X \setminus \mathrm{cl}A_2).$$

So fortfahrend erhalten wir eine Folge $(\overline{K}(x_n, r_n))_{n\in\mathbb{N}}$ von Kugeln mit $r_n \longrightarrow 0$ und

$$\overline{K}(x_{n+1}, r_{n+1}) \subseteq \overline{K}(x_n, r_n).$$

Nach dem Cantorschen Durchschnittssatz gibt es genau ein $\overline{x}$ mit

$$\overline{x} \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{K}(x_n, r_n) \subseteq K(x_0, r_0) \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n,$$

und wegen

$$\overline{x} \in \bigcap_{n=1}^{\infty} (X \setminus \mathrm{cl} A_n) \;=\; X \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{cl} A_n \;\subseteq\; X \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

ist dies nicht möglich.

Bemerkungen. Ist (X, d) vollständig und $A \subseteq X$ von erster Kategorie, so ist $X \setminus A$ dicht in X und von zweiter Kategorie: wäre $X \setminus A$ nicht dicht, so enthielte A eine offene Kugel, wäre also nicht von erster Kategorie. Wäre $X \setminus A$ von erster Kategorie, so auch X.
Der Satz von Baire wird in der Analysis oft zum Nachweis der Existenz 'merkwürdiger' Objekte benutzt: so kann man zeigen, daß im Raum aller auf $[0, 1]$ stetigen Funktionen die Menge der nirgends differenzierbaren Funktionen von zweiter Kategorie und dicht ist.

8 Der Satz von Osgood

Satz. (Osgood) *Es sei (X, d) vollständig und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine punktweise beschränkte Folge stetiger Funktionen von X nach $\mathbb{R}$. Dann gibt es eine Kugel K, auf der $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig beschränkt ist.*
Beweis. Wir setzen für $k \in \mathbb{N}$

$$A_k = \{x : |f_n(x)| \leq k \text{ für alle } n \in \mathbb{N}\}.$$

Die A_k sind abgeschlossen, und es ist $X = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$. Nach dem Satz von Baire enthält wenigstens ein A_k eine Kugel K, und auf dieser gilt $|f_n(x)| \leq k$. Diese Ungleichung gilt dann sogar auf $\mathrm{cl}K$.

Eine ähnliche weitere Anwendung ist der sogenannte 2. Satz von Baire:

Satz. *Ist (X, d) vollständig und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine punktweise konvergente Folge stetiger Funktionen von X nach $\mathbb{R}$, so ist die Menge der Unstetigkeitspunkte der Grenzfunktion f von erster Kategorie, die Menge ihrer Stetigkeitspunkte also insbesondere dicht und von zweiter Kategorie.*
Beweis. Für jedes $x \in X$ definieren wir die *Oszillation von f in x* durch

$$\omega_f(x) = \lim_{r\to 0} \{ \sup_{y\in K(x,r)} f(y) - \inf_{y\in K(x,r)} f(y) \}.$$

($\omega_f(x) = \infty$ ist zugelassen; man beachte, daß der Limes ein Infimum ist). f ist stetig im Punkt x genau dann wenn $\omega_f(x) = 0$ ist. Es genügt zu zeigen, daß für jedes $\varepsilon > 0$ die Menge

$$E_\varepsilon = \{x : \omega_f(x) \geq \varepsilon\}$$

nirgends dicht ist: dann ist nämlich die Menge der Unstetigkeitspunkte von f gleich

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{x : \omega_f(x) \geq \frac{1}{n}\},$$

also von erster Kategorie.
$X \setminus E_\varepsilon$ ist offen: gilt nämlich $\omega_f(x_0) < \varepsilon$, so existiert $r > 0$ mit

$$\sup_{y\in K(x_0,r)} f(y) - \inf_{y\in K(x_0,r)} f(y) < \varepsilon,$$

und für $d(x, x_0) < \frac{r}{2}$ ist dann erst recht

$$\sup_{y\in K(x,\frac{r}{2})} f(y) - \inf_{y\in K(x,\frac{r}{2})} f(y) < \varepsilon,$$

also $\omega_f(x) < \varepsilon$ für alle $x \in K(x_0, \frac{r}{2})$.
E_ε ist also abgeschlossen, und es genügt zu zeigen, daß E_ε keinen inneren Punkt enthält. Es sei also $\overline{K}(x_0, r) \subseteq E_\varepsilon$. Wir setzen für $n \in \mathbb{N}$

$$A_n = \bigcap_{j\geq n} \{x : |f_n(x) - f_j(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3}\}.$$

Wegen der Stetigkeit der f_k ist A_n abgeschlossen und $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Da $\overline{K}(x_0, r)$ nicht von erster Kategorie ist, enthält eine der (abgeschlossenen!) Mengen $\overline{K}(x_0, r) \cap A_n$ einen inneren Punkt, also eine Kugel $K(x_1, \rho)$ mit

$$|f_n(x) - f_j(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3},\ (j \geq n,\ x \in K(x_1, \rho)).$$

Grenzübergang $j \to \infty$ liefert

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3},\ (x \in K(x_1, \rho)),$$

also für $x \in K(x_1, \rho)$ und hinreichend kleine $s > 0$

$$\sup_{y\in K(x,s)} f(y) - \inf_{y\in K(x,s)} f(y)$$

$$\leq \sup_{y\in K(x,s)} (f(y) - f_n(y)) + \sup_{y\in K(x,s)} f_n(y) - \inf_{y\in K(x,s)} (f(y) - f_n(y)) - \inf_{y\in K(x,s)} f_n(y)$$

$$\leq \frac{2\varepsilon}{3} + \sup_{y \in K(x,s)} f_n(y) - \inf_{y \in K(x,s)} f_n(y)$$

und damit für $s \to 0$

$$\omega_f(x) \leq \frac{2\varepsilon}{3}, \ (x \in K(x_1, \rho) \subseteq \overline{K}(x_0, r))$$

im Widerspruch zu $\omega_f(x) \geq \varepsilon$ auf $K(x_0, r)$.

9 Kompaktheit

Das Teilmengensystem $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$ des topologischen Raumes $(X, \mathcal{T})$ heißt *(offene) Überdeckung* von $A \subseteq X$, wenn $A \subseteq \bigcup_{S \in \mathcal{S}} S$ gilt. Besitzt jede offene Überdeckung von A ein endliches Teilsystem, das A schon überdeckt, so heißt A *kompakt* . A heißt *relativ kompakt*, wenn cl$A$ kompakt ist. A heißt *folgenkompakt* , wenn jede Folge von Elementen von A eine konvergente Teilfolge besitzt, deren Grenzwert in A liegt. A heißt *Fréchet-kompakt* , wenn jede unendliche Teilmenge von A einen Häufungspunkt in A hat. Jede kompakte Teilmenge eines Hausdorffraumes ist Fréchet-kompakt und abgeschlossen, im allgemeinen aber nicht folgenkompakt.

Satz. *Ist (X, d) ein metrischer Raum und $A \subseteq X$, so sind äquivalent:*

1. A *ist kompakt.*
2. A *ist folgenkompakt.*
3. A *ist Fréchet-kompakt.*

Satz. *Ist (X, d) ein metrischer Raum und $A \subseteq X$ kompakt, so ist A separabel und vollständig.*

Beweis. Mit Hilfe des Zornschen Lemmas beweist man ohne große Mühe, daß zu jedem hinreichend großem $n \in \mathbb{N}$ eine bezüglich Inklusion maximale Teilmenge D_n von A existiert mit

$$d(a, \overline{a}) \geq \frac{1}{n} \text{ für } a, \overline{a} \in D_n, a \neq \overline{a},$$

und es gilt

$$A \subseteq \bigcup_{a \in D_n} K(a, \frac{1}{n}).$$

(sonst wäre D_n nicht maximal!).

Da A kompakt ist, ist jede der Mengen D_n endlich; $D = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} D_n$ ist dann abzählbar und es gilt $\mathrm{cl}D = A$: wegen $D \subseteq A$ gilt offenbar $\mathrm{cl}D \subseteq A$, und wäre diese Inklusion echt so gäbe es $a \in A$ und $r > 0$ mit $K(a,r) \cap \mathrm{cl}D = \emptyset$, andererseits zu $n > \frac{1}{r}$ ein $\overline{a} \in D_n$ mit $d(a,\overline{a}) < \frac{1}{n} < r$ was nicht möglich ist. Ist weiter $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in A, so besitzt diese wegen der Kompaktheit von A eine konvergente Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit Limes a, und wegen

$$d(a_n,a) \leq d(a_n,a_{n_k}) \ + \ d(a_{n_k},a)$$

ist dieser auch Limes von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Die im Beweis des obigen Satzes betrachteten Mengen D_n geben Anlaß zu folgender Sprechweise: $A \subseteq X$ heißt *totalbeschränkt* , wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ endlich viele $a_1, a_2, \ldots, a_k \in A$ existieren mit

$$A \subseteq \bigcup_{j=1}^{k} K(a_j, \varepsilon).$$

Jede totalbeschränkte ist beschränkt; die Umkehrung hiervon ist im allgemeinen falsch.

Satz. *Die Teilmenge A des metrischen Raumes (X,d) ist kompakt genau dann, wenn sie vollständig und totalbeschränkt ist.*

Der Begriff 'totalbeschränkt' wiederum führt zu folgender Definition für beschränkte Mengen A:

$$\gamma(A) = \inf\{\varepsilon > 0 : \text{es gibt } a_1, a_2, \ldots, a_k \in A \text{ mit } A \subseteq \bigcup_{j=1}^{k} K(a_j,\varepsilon)\}$$

heißt das *Hausdorffsche Nichtkompaktheitsmaß von A*. Offenbar ist die Menge A totalbeschränkt genau dann, wenn sie beschränkt ist und $\gamma(A) = 0$ gilt.

10 Lineare Räume

Mit E bezeichnen wir einen Vektorraum (linearen Raum) über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Je nachdem sprechen wir dann von einem reellen oder komplexen Vektorraum. Eine nichtleere Teilmenge B von E heißt *linear unabhängig* , wenn jede endliche Teilmenge von B linear unabhängig ist. Die linear unabhängige

Teilmenge B von E heißt *Hamel-Basis von E*, wenn jedes Element von E als endliche Linearkombination von Elementen aus B dargestellt werden kann. Diese Darstellung ist dann eindeutig.

Satz. *Jede linear unabhängige Teilmenge von E läßt sich zu einer Hamel-Basis erweitern. Je zwei Hamel-Basen von E haben die gleiche Mächtigkeit.*

Die in obigem Satz genannte Mächtigkeit heißt auch die Dimension von E.
Ist $A \subseteq E$, so heißt der Durchschnitt aller Untervektorräume, die A enthalten die *lineare Hülle* $\mathrm{span} A$. Sie ist ein Untervektorraum und gleich der Menge aller (endlichen) Linearkombinationen von Elementen aus A.
Sind E und F zwei Vektorräume über demselben Skalarkörper, so heißt die Abbildung $L : E \longrightarrow F$ *linear*, wenn für $x, y \in E$ und skalares λ stets

$$L(x + \lambda y) = L(x) + \lambda L(y)$$

gilt. Ist speziell F gleich dem Skalarkörper von E, so heißt L auch *lineares Funktional*. Die Menge aller linearen Abbildungen von E nach F wird mit $\mathcal{L}(E, F)$ bezeichnet, und im Spezialfall $F = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ nennen wir diese Menge den *algebraischen Dualraum* E' von E. $\mathcal{L}(E, F)$ ist bezüglich der punktweisen Addition und skalaren Multiplikation selbst ein Vektorraum.
Ist $L \in \mathcal{L}(E, F)$ bijektiv, so heißt L ein *(algebraischer) Isomorphismus* und E zu F *algebraisch isomorph*. Dies ist genau dann der Fall, wenn E und F die gleiche Dimension haben. Ist B eine Hamel-Basis von E, so ist E isomorph zu (mit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$)

$$F_0(B) = \{f : B \longrightarrow \mathbb{K} : f(b) \neq 0 \text{ für höchstens endlich viele } b \in B\}.$$

Die Teilmenge C des reellen Vektorraumes E heißt *konvex*, wenn mit $x, y \in C$ und $\lambda \in [0, 1]$ stets $\lambda x + (1 - \lambda)y \in C$ gilt. Für Teilmengen M, N und Skalare λ ist

$$M + N = \{m + n : m \in M, n \in N\}, \ \lambda M = \{\lambda m : m \in M\}.$$

11 Der Fortsetzungssatz von Hahn-Banach

Ist E ein reeller Vektorraum, so heißt $p : E \longrightarrow \mathbb{R}$ *sublineares Funktional*, wenn

1. $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$, $(x, y \in E)$,

2. $p(\lambda x) = \lambda p(x)$, $(\lambda \geq 0, \ x \in E)$

gilt. Offenbar folgt $p(0) = 0$,

$$p((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)p(x) + \lambda p(y), \ (0 \leq \lambda \leq 1, \ x, y \in E),$$

und

$$|p(x) - p(y)| \leq \max\{p(x-y), p(y-x)\}.$$

Satz. (Hahn-Banach). *Ist E ein reeller Vektorraum, p sublinear, $M \subseteq E$ ein Untervektorraum von E und $\varphi : M \longrightarrow \mathbb{R}$ ein lineares Funktional mit*

$$\varphi(x) \leq p(x), \ (x \in M),$$

so gibt es ein lineares Funktional $\overline{\varphi} : E \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\overline{\varphi}(x) = \varphi(x), \ (x \in M),$$

$$\overline{\varphi}(x) \leq p(x), \ (x \in E).$$

Beweis. Im Fall $M = E$ ist nichts zu beweisen. Ist $M \neq E$ und $x_0 \notin M$, so besitzt jedes x in der linearen Hülle $\mathrm{span}(M \cup \{x_0\})$ eine eindeutige Darstellung

$$x = m + \alpha x_0$$

mit $m \in M, \alpha \in \mathbb{R}$. Es soll zunächst φ auf $\mathrm{span}(M \cup \{x_0\})$ in der gewünschten Art fortgesetzt werden. Dazu sei

$$C = \inf\{p(x + x_0) - \varphi(x) : \ x \in M\},$$

$$c = \sup\{-p(x - x_0) + \varphi(x) : \ x \in M\}.$$

Wegen

$$\varphi(x_1) + \varphi(x_2) = \varphi(x_1 + x_2) \leq p(x_1 + x_2) \leq p(x_1 - x_0) + p(x_2 + x_0)$$

für alle $x_1, x_2 \in M$ gilt

$$\varphi(x_1) - p(x_1 - x_0) \leq p(x_2 + x_0) - \varphi(x_2),$$

sodaß C und c endlich sind und $c \leq C$ gilt. Wählt man $\xi_0 \in [c, C]$ und setzt

$$\overline{\varphi}(x) = \varphi(m) + \alpha\xi_0 \text{ für } x = m + \alpha x_0,$$

so ist $\overline{\varphi}$ linear auf $\mathrm{span}(M \cup \{x_0\})$, und es gilt $\overline{\varphi}(x) = \varphi(x)$ auf M sowie für $x = m + \alpha x_0$ im Fall $\alpha > 0$

$$\overline{\varphi}(x) = \varphi(m) + \alpha\xi_0 \leq \varphi(m) + \alpha(p(\frac{1}{\alpha}m + x_0) - \varphi(\frac{1}{\alpha}m)) = p(m + \alpha x_0) = p(x).$$

Im Fall $\alpha < 0$ schließt man ähnlich und für $\alpha = 0$ ist nichts zu beweisen.
Der Rest des Beweises wird nun mit Hilfe des Zornschen Lemmas geführt: Dazu sei Ψ die Menge derjenigen linearen Funktionale ψ, deren Definitionsbereich $D(\psi)$ den Untervektorraum M enthält, die auf M mit φ übereinstimmen und für die $\psi(x) \leq p(x)$ für alle $x \in D(\psi)$ gilt. Ψ ist halbgeordnet durch die Festsetzung

$$\psi_1 \leq \psi_2 \iff D(\psi_1) \subseteq D(\psi_2),\ \psi_1 = \psi_2 \text{ auf } D(\psi_1)$$

('ψ_2 ist Fortsetzung von ψ_1').
Ist Ψ_0 eine linear geordnete Teilmenge von Ψ, so ist

$$D = \bigcup_{\psi \in \Psi_0} D(\psi)$$

ein Untervektorraum und auf D durch

$$\overline{\psi}(x) = \psi(x) \text{ für } x \in D(\psi)$$

ein lineares Funktional erklärt mit $\overline{\psi}(x) \leq p(x)$ auf D. Ψ_0 besitzt also eine obere Schranke in Ψ, also hat nach dem Zornschen Lemma letztere Menge maximale Elemente. Ist $\overline{\psi}$ ein solches mit Definitionsbereich $D(\overline{\psi})$, so ist notwendigerweise $D(\overline{\psi}) = E$, da sonst der erste Beweisschritt (mit $D(\overline{\psi})$ anstelle von M) angewendet werden könnte.

12 Kegel und sublineare Funktionale

Die Teilmenge $K \neq \emptyset$ des reellen Vektorraumes E heißt *Keil* , wenn gilt:

1. $x, y \in K \implies x + y \in K$,
2. $x \in K, \lambda \geq 0 \implies \lambda x \in K$.

Jeder Keil ist konvex und enthält die Null. Ist p ein sublineares Funktional auf E, so ist

$$K = \{x \in E : p(x) \leq 0\}$$

ein Keil. Gilt für p zusätzlich $\max\{p(x), p(-x)\} > 0$ für $x \neq 0$, so hat K die Eigenschaft

3. $K \cap (-K) = \{0\}$.

Mengen mit den Eigenschaften 1. bis 3. nennt man *Kegel* . Ist K ein solcher Kegel, so wird durch

$$x \leq y \iff y - x \in K$$

auf E eine Halbordnung erklärt mit den zusätzlichen Eigenschaften

4. $x \leq y, z \in E \implies x + z \leq y + z$,
5. $x \leq y, \lambda \geq 0 \implies \lambda x \leq \lambda y$.

E versehen mit einer derartigen Halbordnung heißt *geordneter Vektorraum* . Ist M eine (beliebige) Teilmenge von E, so heißt $x \in M$ *interner Punkt* von M, wenn für jedes $y \neq 0$ aus E ein $\varepsilon > 0$ existiert mit

$$x + \alpha y \ \in M \text{ für } |\alpha| < \varepsilon.$$

Ist $C \subseteq E$ konvex, $x, y \in C$, x interner Punkt von C und $\lambda \in [0, 1)$, so ist $(1-\lambda)x + \lambda y$ interner Punkt von C: es ist nämlich

$$(1-\lambda)x + \lambda y + \mu z = (1-\lambda)(x + \frac{\mu}{1-\lambda} z) + \lambda y,$$

und $x + \frac{\mu}{1-\lambda} z$ liegt in C für hinreichend kleine μ. Insbesondere ist die Menge der internen Punkte einer konvexen Menge konvex.
Ist 0 interner Punkt eines Keils K, so folgt leicht $K = E$.
$M \subseteq E$ heißt *linear abgeschlossen* , wenn für alle $x, y \in E$

$$\{\lambda \in \mathbb{R} : x + \lambda y \in M\}$$

in $\mathbb{R}$ abgeschlossen ist.

Satz. *Ist $K \subseteq E$, $K \neq E$ ein Keil mit wenigstens einem internen Punkt x_0, so existiert ein sublineares Funktional p mit*

1. $x \in K \implies p(x) \leq 0$,
2. *x ist interner Punkt von K genau dann wenn $p(x) < 0$ ist.*

Ist K sogar ein linear abgeschlossener Kegel, so hat p zusätzlich die Eigenschaft

3. $\max\{p(x), p(-x)\} > 0$ für alle $x \neq 0$,

und von 1. gilt auch die Umkehrung.
Beweis. Offenbar ist $x_0 \neq 0$. Wir setzen für $x \in E$

$$\Lambda(x) = \{\lambda \in \mathbb{R} : x + \lambda x_0 \in K\},\ p(x) = \inf \Lambda(x).$$

$\Lambda(x)$ ist nichtleer, und aus $\lambda \in \Lambda(x), \overline{\lambda} \geq \lambda$ folgt $\overline{\lambda} \in \Lambda(x)$. Also ist

$$\Lambda(x) = \mathbb{R} \text{ oder } \mathrm{cl}\Lambda(x) = [p(x), \infty).$$

Ist $\Lambda(x) = \mathbb{R}$, so ist $x \neq 0$ und für alle $\lambda < 0$

$$-\frac{1}{\lambda}x - x_0 \in K,$$

und, da x_0 interner Punkt von K ist, für $|\lambda|$ hinreichend groß auch

$$x_0 + \frac{1}{\lambda}x \in K.$$

Wählen wir λ noch so, daß $x_0 + \frac{1}{\lambda}x \neq 0$ ist, so ist zunächst $x_0 + \frac{1}{2\lambda}x$ interner Punkt von K und damit auch $0 = \frac{1}{2}(x_0 + \frac{1}{2\lambda}x + (-x_0 - \frac{1}{2\lambda}x))$ interner Punkt von K, was $K \neq E$ widerspricht. $p(x)$ ist also stets endlich.
p ist sublinear: Aus $x + \lambda x_0 \in K, y + \mu x_0 \in K$ folgt $x + y + (\lambda + \mu)x_0 \in K$ und hieraus leicht $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$.
p ist positiv homogen: Trivialerweise ist $p(0) \leq 0$, und wäre $p(0) < 0$, so wäre $-\alpha x_0 \in K$ für gewisse $\alpha > 0$ was nicht möglich ist. Also ist $p(0) = 0$. Für $\alpha > 0$ ist $\Lambda(\alpha x) = \alpha\Lambda(x)$, also $p(\alpha x) = \alpha p(x)$.
Ist $x \in K$, so ist $0 \in \Lambda(x)$, also $p(x) \leq 0$.
Ist x interner Punkt von K, so ist $x + \lambda x_0 \in K$ für gewisse negative λ, also $p(x) < 0$. Umgekehrt betrachten wir für beliebiges $y \in E$ die reelle Funktion h, definiert durch $h(t) = p(x + ty)$. h ist auf $\mathbb{R}$ konvex, also stetig, und $p(x) < 0$ liefert $p(x + ty) < 0$ für $|t| < \varepsilon$, also $0 \in \Lambda(x + ty)$ und damit $x + ty \in K$.
Ist K ein linear abgeschlossener Kegel, so ist $\Lambda(x) = [p(x), \infty)$ und $p(x) \leq 0$ bedeutet $0 \in \Lambda(x)$, also $x \in K$. Gäbe es endlich $x \neq 0$ mit $\max\{p(x), p(-x)\} \leq 0$, so wäre wegen $0 = p(0) \leq p(x) + p(-x)$ sogar $p(x) = p(-x) = 0$ und folglich x und $-x$ in K im Widerspruch zur Voraussetzung.

13 Die geometrische Form des Satzes von Hahn-Banach

Ist E ein reeller Vektorraum und $C \subseteq E$ konvex, so ist

$$K(C) = \{\lambda c : c \in C, \lambda \geq 0\}$$

der kleinste Keil, der C enthält. Im Fall $K(C) = E$ ist 0 interner Punkt von C: für $y \neq 0$ ist nämlich $y = \lambda_1 c_1, -y = \lambda_2 c_2$ mit $\lambda_1, \lambda_2 > 0, 0 \neq c_1, c_2 \in C$, also $0 = \frac{1}{\lambda_1+\lambda_2}(y-y) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}c_1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}c_2 \in C$, und damit $\mu c_1, \mu c_2 \in C$ für $\mu \in [0,1]$. Für $|\alpha| \leq \min\{\frac{1}{\lambda_1}, \frac{1}{\lambda_2}\}$ ist dann $\alpha y \in C$.
Für $x_0 \in E$ ist $C - x_0 = \{c - x_0 : c \in C\}$ konvex, und ist c_0 interner Punkt von C, x_0 nicht, so ist $c_0 - x_0$ interner Punkt von $C - x_0$, die Null aber nicht. Folglich ist $K(C - x_0) \neq E$. Nach dem vorhergehenden Abschnitt existiert ein sublineares Funktional p mit $p(x) \leq 0$ für alle $x \in K(C - x_0)$ und $p(x) < 0$ für alle internen Punkte von $K(C - x_0)$. Nach dem Satz von Hahn-Banach (mit $M = \{0\}$) gibt es hierzu ein lineares Funktional φ mit $\varphi(x) \leq p(x), x \in E$, also insbesondere $\varphi(x) \leq 0$ für $x \in C - x_0$ und somit

$$\varphi(c) \leq \varphi(x_0), \ (c \in C),$$

wobei für interne Punkte von C das echte Ungleichungszeichen gilt.
Wir fassen zusammen:

Satz. *Ist E reeller Vektorraum, $C \subseteq E$ konvex mit wenigstens einem internen Punkt c_0, und ist x_0 nicht interner Punkt von C, so existiert ein lineares Funktional $\varphi \neq 0$ mit*

$$\varphi(c) \leq \varphi(x_0) \text{ für alle } c \in C, \ \varphi(c) < \varphi(x_0) \text{ für alle internen Punkte von } C.$$

Allgemein nennt man für ein lineares Funktional $\varphi \neq 0$ und $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\{x : \varphi(x) = \alpha\}$$

die durch φ und α bestimmte *Hyperebene* . $\{x : \varphi(x) \leq \alpha\}$ heißt ein durch φ und α bestimmter *Halbraum* .
Der letzte Satz läßt folgende Verallgemeinerung zu:

Satz. (Trennungssatz von Hahn-Banach.) *Sind C und D konvexe Teilmengen des reellen Vektorraumes E, enthält C interne Punkte und liegt kein interner Punkt von C in D, so gibt es eine Hyperebene, die C und D trennt, d.h. ein lineares Funktional $\varphi \neq 0$ und ein $\alpha \in \mathbb{R}$ mit*

$$\varphi(c) \leq \alpha \leq \varphi(d) \text{ für alle } c \in C, \ d \in D,$$

und für interne Punkte von C ist das erste Ungleichungszeichen echt.
Beweis. $M = C - D := \{c - d : c \in C, c \in D\}$ ist konvex, und für jeden internen Punkt $c \in C$ und jedes $d \in D$ ist $c - d$ interner Punkt von M. Die Null ist kein interner Punkt von M: sonst gibt es $c_1 = d_1 \in C \cap D$, und zu

$y = c_1 - c_0$ (hierbei sei c_0 ein beliebiger, aber fest gewählter interner Punkt von C) gibt es geeignetes $\alpha > 0$ mit $\alpha y \in M$, also $\alpha(c_1 - c_0) = c - d$ mit $c \in C$, $d \in D$. Hieraus folgt

$$\frac{c + \alpha c_0}{1 + \alpha} = \frac{\alpha d_1 + d}{1 + \alpha} \in D,$$

und $\frac{c+\alpha c_0}{1+\alpha}$ ist als echte Konvexkombination von c und c_0 interner Punkt von C, was der Voraussetzung widerspricht. Nach obigem Satz gibt es ein lineares Funktional φ mit $\varphi(m) \leq 0$ für alle $m \in M$, wobei für interne Punkte von M das echte Ungleichungszeichen gilt. Setzen wir noch

$$\alpha = \inf_{d \in D} \varphi(d),$$

so gilt der erste Teil der Behauptung. Ist schließlich c interner Punkt von C und $d \in D$, so ist $\varphi(d - c) > 0$ und für hinreichend kleine $\lambda > 0$

$$c + \lambda(d - c) \in C,$$

also

$$\varphi(c) + \lambda\varphi(d - c) \leq \alpha,$$

also $\varphi(c) < \alpha$.

Ist E ein komplexer Vektorraum, $M \subseteq E$ ein Untervektorraum, und schränkt man die Skalare auf $\mathbb{R}$ ein, so entstehen reelle Vektorräume $E_{\mathbb{R}}$ bzw. $M_{\mathbb{R}}$. Ist dann Φ ein lineares Funktional auf M, so sind $\Re\Phi$ und $\Im\Phi$ lineare Funktionale auf $M_{\mathbb{R}}$, und wegen

$$\Phi(ix) = \Re\Phi(ix) + i\Im\Phi(ix) = i\Phi(x) = -\Im\Phi(x) + i\Re\Phi(x)$$

ist insbesondere

$$\Im\Phi(x) = -\Re\Phi(ix),$$

also $\Im\Phi$ durch $\Re\Phi$ bestimmt. Ist deshalb umgekehrt φ ein lineares Funktional auf $M_{\mathbb{R}}$, so ist

$$\Phi(x) = \varphi(x) - i\varphi(ix)$$

ein lineares Funktional auf M mit $\Re\Phi = \varphi$.
Der Satz von Hahn-Banach für komplexe Vektorräume lautet dann:

Satz. *Ist E ein komplexer Vektorraum, p sublinear und $\Phi_0 : M \to \mathbb{C}$ linear mit*

$$\Re\Phi_0(x) \leq p(x) \text{ für alle } x \in M,$$

so gibt es eine Fortsetzung $\Phi : E \to \mathbb{C}$ von Φ_0 mit

$$\Re\Phi(x) \leq p(x) \text{ für alle } x \in E.$$

Die Fassungen der Trennungssätze lauten entsprechend.

14 Polynormierte Räume

Ist E ein (reeller oder komplexer) Vektorraum, so heißt $p : E \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

1. $p(x + y) \leq p(x) + p(y), \; x, y \in E,$
2. $p(\lambda x) = |\lambda| p(x), \; x \in E, \lambda$ skalar

eine *Halbnorm* . Wegen $0 = p(0) \leq p(x) + p(-x) = 2p(x)$ ist $p(x) \geq 0$ für alle $x \in E$. Gilt zusätzlich

3. $p(x) = 0 \Longrightarrow x = 0,$

so heißt p eine *Norm* . In diesem Fall schreiben wir meistens $p(x) = \|x\|$.
Ist p eine Halbnorm (Norm), so ist d, definiert durch $d(x, y) = p(x - y)$ eine Halbmetrik (Metrik). Ist auf E ein System $(p_\alpha)_{\alpha \in J}$ von Halbnormen gegeben mit

$$p_\alpha(x) = 0 \text{ für alle } \alpha \in J \implies x = 0,$$

so heißt $(E, (p_\alpha)_{\alpha \in J})$ ein *polynormierter* oder *lokalkonvexer topologischer* Vektorraum. Als natürliche Topologie eines polynormierten Raumes wird immer die von den zugehörigen Halbmetriken erzeugte bezeichnet; sie ist Hausdorffsch. Eine Teilmenge M von E ist offen, wenn zu jedem $x_0 \in M$ endlich viele $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in J$ und ein $\varepsilon > 0$ existieren mit

$$U = \bigcap_{j=1}^{k} \{x \in E : p_{\alpha_j}(x - x_0) < \varepsilon\} \subseteq M.$$

Alle diese U sind konvex, was die Namensgebung 'lokalkonvexe Topologie' erklärt, und die Addition bzw. skalare Multiplikation sind als Abbildungen von $E \times E$ bzw. $\mathbb{K} \times E$ nach E stetig.
Besteht J nur aus einem Element, so ist dieses notwendigerweise eine Norm, und wir sprechen von einem *normierten* Raum $(E, \| \cdot \|)$. Alle für polymetrische bzw. metrische Räume eingeführten Begriffe und Aussagen stehen auch hier zur Verfügung. So ist etwa für $r > 0$

$$K_p(x, r) = \{y : p(y - x) < r\}$$

die offene Kugel bezüglich der Halbnorm p um x mit Radius r. Im Falle eines normierten Raumes lassen wir den Index an K weg.
Das die Topologie erzeugende Halbnormensystem wird *saturiert* genannt, wenn für je endlich viele $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in J$ die Halbnorm

$$p(x) = \max_{1 \leq j \leq k} p_{\alpha_j}(x)$$

zu $(p_\alpha)_{\alpha\in J}$ gehört. Wegen

$$K_p(x,r) = \bigcap_{j=1}^{k} K_{p_{\alpha_j}}(x,r)$$

gibt es in jedem polynormierten Raum ein saturiertes Halbnormensystem, das dieselbe Topologie erzeugt und dessen Indexmenge dieselbe Mächtigkeit besitzt wie das vorgegebene.
Ist J endlich, etwa $J = \{1, 2, \dots, k\}$, so ist durch

$$\|x\| = \max_{1\leq j\leq k} p_j(x)$$

eine Norm definiert, die die zugehörige Topologie erzeugt.
Ist ein normierter Raum als metrischer Raum vollständig, so wird er *Banachraum* genannt. Es sei insbesondere darauf hingewiesen, daß die Vervollständigung eines normierten Raumes einen Banachraum ergibt, wenn man die Verknüpfungen der seinerzeit betrachteten Klassen mit Hilfe von Vertretern definiert.
Wird die Topologie des polymetrischen Raumes E (auch) durch ein abzählbares Halbnormensystem, etwa $(p_j)_{j\in\mathbb{N}}$ erzeugt, so ist durch

$$d(x,y) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \frac{p_j(x-y)}{1+p_j(x-y)}$$

eine translationsinvariante Metrik auf E erklärt, die die zugehörige Topologie erzeugt. Ist dann E (Folgen-)vollständig (bezüglich d oder der Topologie, was auf dasselbe herausläuft), so wird er *Fréchetraum* genannt. E ist dann auch vollständig bezüglich jeder translationsinvarianten Metrik, die dieselbe Topologie erzeugt.-

Beispiele.

1. Es sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $C(\Omega)$ der Vektorraum aller auf Ω stetigen reellwertigen Funktionen. Für jede kompakte Teilmenge K von Ω ist

   $$p_K(f) = \max_{x\in K} |f(x)|$$

   eine Halbnorm, und das System aller solcher Halbnormen macht $C(\Omega)$ zu einem lokalkonvexen topologischen Vektorraum. Konvergenz in der zugehörigen Topologie bedeutet gleichmäßige Konvergenz auf jeder kompakten Teilmenge von Ω. $C(\Omega)$ ist unter dieser Topologie Folgen-vollständig und metrisierbar.

2. Derselbe Raum wie oben wird auch durch das System
$$p_x(f) = |f(x)|, \;\; x \in \Omega$$
zu einem lokalkonvexen Raum. Die zugehörige Topologie ist gröber als die oben betrachtete (d.h. sie ist in ihr enthalten). Konvergenz heißt punktweise Konvergenz, und $C(\Omega)$ ist bezüglich dieser Topologie nicht Folgen-vollständig.

3. $H(\mathbb{C}) = \{f : f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \text{ ist ganz}\}$ ist ein komplexer Vektorraum, und für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist
$$p_n(f) = \max_{|z|\leq n} |f(z)|$$
eine Norm. $H(\mathbb{C})$ ist bezüglich keiner dieser Normen vollständig, wohl aber als (metrisierbarer) polynormierter Raum.

4. Ist X ein kompakter metrischer Raum (z.B. eine kompakte Teilmenge des $\mathbb{R}^n$), so ist $C(X)$ unter
$$\|f\| = \max_{x\in X} |f(x)|$$
ein Banachraum.

5. Ist X ein metrischer Raum und $C_b(X)$ der Vektorraum aller stetigen und beschränkten reellwertigen (oder komplexwertigen) Funktionen, so ist durch
$$\|f\| = \sup_{x\in X} |f(x)|$$
eine Norm erklärt, die diesen zu einem Banachraum macht.

6. Ist E ein Vektorraum und p eine Halbnorm, so ist $N = \{x : p(x) = 0\}$ ein Untervektorraum, und auf $E/_N$ wird durch
$$\|\widetilde{x}\| = p(x) \text{ für } x \in \widetilde{x}$$
eine Norm definiert. Nun sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ Lebesgue-meßbar, $1 \leq p < \infty$, E^p der Vektorraum aller meßbaren Funktionen $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, sodaß $|f|^p$ integrierbar ist, und
$$P(f) = (\int_\Omega |f(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}}.$$
P ist eine Halbnorm auf E^p, und obige Konstruktion ergibt den Banachraum $L^p(\Omega)$.
Im Fall $p = \infty$ ist
$$E^\infty = \{f : \text{es gibt ein } s \in \mathbb{R} \text{ mit } |f(x)| \leq s \text{ für fast alle } x \in \Omega\}$$

und

$$P(f) = \text{ess sup}_\Omega |f(x)| = \inf\{s \in \mathbb{R} : |f(x)| \leq s \text{ für fast alle } x \in \Omega\}.$$

Hier ergibt sich der Banachraum $L^\infty(\Omega)$. Die jeweiligen Normen werden mit $\|\cdot\|_p$ bzw. mit $\|\cdot\|_\infty$ bezeichnet.

15 Minkowski-Funktionale

Es sei p ein sublineares Funktional auf dem (reellen oder komplexen) Vektorraum E. Dann ist $K_p(0,1)$ konvex, und zu jedem $x \in E$ gibt es ein $t > 0$ mit $\frac{1}{t}x \in K_p(0,1)$. Mengen mit dieser Eigenschaft nennt man *absorbierend* . Ist umgekehrt $B \subseteq E$ konvex und absorbierend so ist das zugehörige *Minkowski-Funktional* μ_B, definiert durch

$$\mu_B(x) = \inf\{t > 0 | \frac{1}{t}x \in B\} \; (x \in E)$$

ein sublineares Funktional. Im Fall $B = K_p(0,1)$ ist $\mu_B = p$. Ist p eine Halbnorm, so besitzt $B = K_p(0,1)$ die Eigenschaft

$$x \in B, \; |\lambda| \leq 1 \implies \lambda x \in B;$$

solche Mengen nennt man *ausgeglichen* . Ist $B \subseteq E$ konvex, absorbierend und ausgeglichen, so ist μ_b auch eine Halbnorm.
Man kann zeigen, daß in jedem Hausdorffschen lokalkonvexen topologischen Vektorraum ein System von Halbnormen existiert, sodaß dieses die Topologie erzeugt, vgl. etwa das angegebene Buch von Rudin, Chapter 1.

16 Der topologische Dualraum

Satz. *Ist $(E, (p_\alpha)_{\alpha \in J})$ ein polynormierter Raum und $p : E \longrightarrow \mathbb{R}$ sublinear, so sind äquivalent:*

1. *p ist stetig.*
2. *p ist im Nullpunkt stetig.*
3. *p ist auf einer offenen nichtleeren Menge nach oben beschränkt.*
4. *p ist auf einer offenen Nullumgebung nach oben beschränkt.*

Beweis. 1. $\Longrightarrow$ 2.: trivial.
2. $\Longrightarrow$ 3.: Ist p im Nullpunkt stetig, so gibt es zu $\varepsilon = 1$ eine offene Nullumgebung U mit $|p(x) - p(0)| = |p(x)| < 1$ für alle $x \in U$. also ist p auf U sogar beschränkt.
3. $\Longrightarrow$ 4.: Aus der Voraussetzung folgt insbesondere, daß ein $x_0 \in E$, Halbnormen $p_{\alpha_1}, \ldots, p_{\alpha_k}$, ein $\varepsilon > 0$ und eine reelle Zahl C existieren mit

$$p(x) < C \text{ auf } \bigcap_{j=1}^{k} K_{p_{\alpha_j}}(x_0, \varepsilon).$$

Für $y \in \bigcap_{j=1}^{k} K_{p_{\alpha_j}}(0, \varepsilon)$ gilt dann

$$p(y) \leq p(y+x_0)+p(-x_0) \leq C+|p(-x_0)|, \; -p(y) \leq p(-y) \leq p(-y+x_0)+|p(-x_0)|,$$

also $|p(y)| \leq C + |p(-x_0)|$.
4. $\Longrightarrow$ 1.: Es gelte

$$p(x) < C \text{ für } x \in \bigcap_{j=1}^{k} K_{p_{\alpha_j}}(0, r).$$

und oBdA. sei $C > 0$. Für beliebiges, aber fest gewähltes x_0 und $\varepsilon > 0$ folgt dann aus

$$y \in \bigcap_{j=1}^{k} K_{p_{\alpha_j}}(x_0, \frac{r}{C}\varepsilon),$$

also

$$p_{\alpha_j}(\pm\frac{C}{\varepsilon}(y - x_0)) < r, \; j = 1, \ldots, k$$

wegen

$$|p(y) - p(x_0)| \leq \max\{p(x_0 - y), p(y - x_0)\}$$

auch

$$|p(y) - p(x_0)| < \varepsilon.$$

Also ist p stetig im Punkt x_0.

Satz. *Die Menge der auf einem polynormierten Raum $(E, (p_\alpha)_{\alpha\in J})$ stetigen linearen Funktionale ist bezüglich punktweiser Addition und skalarer Multiplikation ein Vektorraum E^*, der sogenannte topologische Dualraum.*

Man beachte, daß ein lineares Funktional φ stetig ist genau dann, wenn $\Re\varphi$ stetig ist, und dieses wiederum genau dann, wenn es auf einer Umgebung der Null nach oben beschränkt ist, also genau dann, wenn $C, r > 0$ und Indizes $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ existieren mit

$$\Re\varphi(x) \leq C \text{ falls } p_{\alpha_j}(x) \leq r, \; j = 1, \ldots, k.$$

Dies gilt genau dann, wenn

$$|\varphi(x)| \leq \frac{C}{r} p_{\alpha_j}(x), \ x \in E, \ j = 1, \ldots, k$$

erfüllt ist. (Die eine Richtung ist trivial; ist $p_{\alpha_j}(x) = 0$, so ist für beliebiges $\lambda \in \mathbb{C}$ auch $p_{\alpha_j}(\lambda x) = 0$, also $\Re\varphi(\lambda x) \leq C$ und damit $\varphi(x) = 0$. Im Fall $p_{\alpha_j}(x) \neq 0$ betrachte man $\frac{\alpha r}{p_{\alpha_j}(x)} x$ mit einer geigneten Zahl vom Betrag 1).
Wir nennen die Teilmenge B des polynormierten Raumes $(E, (p_\alpha)_{\alpha \in J})$ *beschränkt* , wenn jede der Halbnormen p_α auf B beschränkt ist. So ist z.B. jede relativ kompakte Menge beschränkt. Nach dem, was gerade festgestellt wurde, ist jedes $\varphi \in E^*$ auf jeder beschränkten Menge beschränkt, und, wie man leicht bestätigt, durch

$$p_B(\varphi) = \sup_{x \in B} |\varphi(x)|$$

eine Halbnorm auf E^* erklärt. Bezeichnet $\mathcal{B}$ das System aller beschränkten Teilmengen von E, so ist $(E^*, (p_B)_{B \in \mathcal{B}})$ ein polynormierter Raum, der sogenannte *starke Dualraum* von E, und die zugehörige Topologie heißt *starke Topologie von* E^*.
Ähnlich ist für jedes $x \in E$

$$p_x(\varphi) = |\varphi(x)|$$

eine Halbnorm auf E^*, und $(E^*, (p_x)_{x \in E})$ ist ebenfalls ein polynormierter Raum. Die zugehörige Topologie wird *schwach*-Topologie* auf E^* genannt. Sie ist gröber oder gleich der starken Topologie.

Satz. *Ist* $(E, \|\cdot\|)$ *ein normierter Raum, so ist durch*

$$\|\varphi\|^* = \sup_{\|x\| \leq 1} |\varphi(x)|$$

eine Norm auf E^* *erklärt, die die starke Topologie erzeugt.* $(E^*, \|\cdot\|^*)$ *ist ein Banachraum.*
Beweis. Es ist leicht zu beweisen, daß $\|\cdot\|^*$ eine Norm ist. Da $\overline{K}(0,1)$ beschränkt ist, ist $\|\cdot\|^*$ eine der die starke Topologie erzeugenden Halbnormen, die von dieser erzeugte Topologie also gröber als die starke. Ist umgekehrt B eine beschränkte Teilmenge von E und gilt etwa $\|x\| \leq m$ für alle $x \in B$, so folgt leicht

$$p_B(\varphi) \leq \sup_{\|x\| \leq m} |\varphi(x)| \leq m\|\varphi\|^*.$$

Ist dann φ_0 innerer Punkt einer Menge S bezüglich der starken Topologie, so existieren endlich viele beschränkte Mengen B_j (mit Schranken $m_j > 0$)

und $r > 0$ mit
$$\bigcap_j K_{p_{B_j}}(\varphi_0, r) \subseteq S.$$
Dann ist aber
$$K_{\|\cdot\|^*}(\varphi_0, \min_j \frac{r}{m_j}) \subseteq S:$$
aus $\|\varphi - \varphi_0\|^* < \frac{r}{m_j}$ für alle j folgt
$$p_{B_j}(\varphi - \varphi_0) \leq m_j \|\varphi - \varphi_0\|^* < r \text{ für alle } j,$$
also
$$K_{\|\cdot\|^*}(\varphi_0, \min_j \frac{r}{m_j}) \subseteq \bigcap_j K_{p_{B_j}}(\varphi_0, r) \subseteq S.$$
Ist schließlich $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in E^*, so gilt wegen $|\varphi(x)| \leq \|\varphi\|^* \|x\|$
$$|\varphi_n(x) - \varphi_m(x)| \leq \|\varphi_n - \varphi_m\|^* \|x\|,$$
sodaß $(\varphi_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ für jedes x eine Cauchyfolge (in $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ ist. Es existiert also
$$\varphi(x) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x),$$
und φ ist linear. Für $\|x\| \leq 1$ ist
$$|\varphi_n(x) - \varphi(x)| \leq \|\varphi_n - \varphi_m\|^* \|x\| + |\varphi_m(x) - \varphi(x)|,$$
und nach Voraussetzung gibt es zu $\varepsilon > 0$ ein $N_0(\varepsilon)$ mit
$$n, m \geq N_0(\varepsilon) \implies \|\varphi_n - \varphi_m\|^* < \varepsilon.$$
Für diese n, m gilt also
$$|\varphi_n(x) - \varphi(x)| < \varepsilon + |\varphi_m(x) - \varphi(x)|,$$
und $m \to \infty$ liefert $|\varphi_n(x) - \varphi(x)| \leq \varepsilon$ für alle x mit $\|x\| \leq 1$, woraus $\|\varphi_n - \varphi\|^* \leq \varepsilon$ für $n \geq N_0(\varepsilon)$ folgt.

Wir kehren zur Untersuchung allgemeiner polynormierter Räume zurück und betrachten den Dualraum $(E^*)'$ von E^*. Fixieren wir $x \in E$, so ist das *Auswertungsfunktional* ϕ_x auf E^* definiert durch
$$\phi_x(\varphi) = \varphi(x), \ \varphi \in E^*.$$
Wegen
$$|\phi_x(\varphi)| < 1 \text{ auf } K_{p_x}(0, 1) \subseteq E^*$$

ist ϕ_x sogar stetig in der schwach*-Topologie, also auch stetig in der starken.

Satz. *Ist $(E, (p_\alpha)_{\alpha \in J})$ polynormiert, so sind die Auswertungsfunktionale genau die schwach*-stetigen linearen Funktionale.*
Beweis. Ist ϕ linear und schwach*-stetig, so gibt es endlich viele Punkte $x_1, \ldots, x_k \in E$ und $r > 0$ mit

$$\varphi \in E^*, |\varphi(x_j)| < r \ (j = 1, \ldots, k) \implies |\phi(\varphi)| \leq 1.$$

Aus $\varphi(x_j) = 0$ für $1 \leq j \leq k$ folgt dann $\phi(\varphi) = 0$. Ordnen wir nun jedem φ das k-Tupel $(\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_k))$ zu, so ist dadurch eine lineare Abbildung $H : E^* \to \mathbb{R}^k$ erklärt, und weiter auf $H(E^*)$ durch $\psi(H(\varphi)) = \phi(\varphi)$ ein lineares Funktional. Dieses ist aber von der Form

$$\psi(\xi_1, \ldots, \xi_k) = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \xi_j,$$

sodaß

$$\phi(\varphi) = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \varphi(x_j) = \varphi(x), \ (\varphi \in E^*)$$

mit

$$x = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j x_j$$

gilt.

Ist $(E, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum, $(E^*, \|\cdot\|^*)$ sein Dualraum, so kann man dessen Dualraum, den sogenannten *Bidual E^{**} von E* betrachten. In diesem sind die Auswertungsfunktionale $\phi_x, x \in E$ enthalten. Sie bilden einen Untervektorraum, und es gilt sogar:

Satz. *Ist $(E, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum, so ist der Raum der schwach*-stetigen linearen Funktionale auf E^* linear isometrisch zu E.*
Beweis. Wir ordnen jedem $x \in E$ das Auswertungsfunktional ϕ_x zu. Diese Zuordnung ist linear, und es ist

$$\|\phi_x\|^{**} = \sup_{\|\varphi\|^* \leq 1} |\phi_x(\varphi)| = \sup_{\|\varphi\|^* \leq 1} |\varphi(x)| \leq \|x\|.$$

Nach dem Satz von Hahn-Banach gibt es zu jedem $x \in E$ ein $\varphi \in E^*$ mit $\|\varphi\|^* = 1$ und $\varphi(x) = \|x\|$. Also gilt sogar $\|\phi_x\|^{**} = \|x\|$.

In Zukunft lassen wir die Sterne an den dualen Normen weg.
Wenn nun die im Satz betrachtete Zuordnung $x \longrightarrow \phi_x$ surjektiv ist, wenn

also jedes auf E^* stetige lineare Funktional auch schwach*-stetig ist, so heißt $(E, \|\cdot\|)$ *reflexiv* . Jeder reflexive normierte Raum ist als isometrisches Bild des vollständigen Raumes E^{**} notwendigerweise vollständig. Jeder endlichdimensionale normierte Raum ist reflexiv.
Ist allgemeiner in einem polynormierten Raum E jedes stark stetige lineare Funktional auf E^* auch schwach*-stetig, so heißt E semireflexiv; ist zusätzlich die Zuordnung $x \to \Phi_x$ ein topologischer Isomorphismus (wobei in E^{**} die starke Topologie verwendet wird), so heißt E reflexiv.

17 Der Satz von Alaoglu-Bourbaki

Satz. *Ist $(E, (p_\alpha)_{\alpha\in J})$ ein polynormierter Raum und U eine offene Nullumgebung, so ist die* Polare

$$U^\circ = \{\varphi \in E^* : |\varphi(x)| \leq 1 \text{ für alle } x \in U\}$$

von U schwach*-kompakt.
Beweis. Zu jedem $x \in E$ gibt es eine Zahl $\gamma(x) > 0$ mit $\frac{1}{\gamma(x)}x \in U$. Für $\varphi \in U^\circ$ ist dann

$$|\varphi(\frac{x}{\gamma(x)})| \leq 1, \text{ also } |\varphi(x)| \leq \gamma(x) \text{ für alle } \varphi \in U^\circ.$$

Nun sei

$$P = \prod_{x\in E}[-\gamma(x), \gamma(x)]$$

das kartesische Produkt aller dieser Intervalle, d.h. gleich der Menge *aller* skalarwertigen Funktionen f auf E mit $|f(x)| \leq \gamma(x)$. P ist in der Produkttopologie $\mathcal{T}_P$ nach dem Satz von Tychonoff kompakt. Nach Konstruktion ist $U^\circ \subseteq E^* \cap P$, und wir zeigen zunächst, daß die Spurtopologien aus E^* und P auf U° übereinstimmen.
Für festes $\varphi_0 \in U^\circ$ ist für $x_1, \dots, x_k \in E, r > 0$

$$V_1 = \{\varphi \in E^* : |\varphi(x_j) - \varphi_0(x_j)| < r, \ j = 1, \dots, k\}$$

bzw.

$$V_2 = \{f \in P : |f(x_j) - \varphi_0(x_j)| < r, \ j = 1, \dots, k\}$$

ein Element der Umgebungsbasis von φ_0 bezüglich der schwach*- Topologie in E^* bzw. der Produkttopologie in P, und es ist offenbar $U^\circ \cap V_1 = U^\circ \cap V_2$.
U° ist abgeschlossen in P bzgl. $\mathcal{T}_P$:
Dazu sei f_0 ein Berührungspunkt von U° in P. Für $x, y \in E$ und Skalare

α, β ist die Menge der $f \in P$, die sich in $x, y, \alpha x + \beta y$ um höchstens $\varepsilon > 0$ unterscheiden, eine Umgebung von f_0, enthält also ein $\varphi \in U^\circ$ mit

$$|\varphi(x) - f_0(x)| < \varepsilon,\ |\varphi(y) - f_0(y)| < \varepsilon,\ |\varphi(\alpha x + \beta y) - f_0(\alpha x + \beta y)| < \varepsilon.$$

Dann ist aber

$$|\alpha f_0(x) + \beta f_0(y) - f_0(\alpha x + \beta y)| \leq |\alpha\varphi(x) + \beta\varphi(y) - \varphi(\alpha x + \beta y)| + \varepsilon(\alpha + \beta + 1),$$

und da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt die Linearität von f_0. Ebenso schließt man auf die Existenz von $\varphi \in U^\circ$ mit $|\varphi(x) - f_0(x)| < \varepsilon$, was wegen $|\varphi(x)| \leq 1$ auf U auch $|f_0(x)| \leq 1$ auf U nach sich zieht. Also ist f_0 in U°, und damit diese Menge als abgeschlossene Teilmenge von P kompakt, also nach dem eingangs Gesagten auch schwach*-kompakt.

18 Der Satz von Krein-Milman

Es sei M eine Teilmenge eines Vektorraumes E. Jede Teilmenge S von M mit

$$x, y \in M, (1-\lambda)x + \lambda y \in S \text{ für ein } \lambda \in (0,1) \Longrightarrow x, y \in S$$

heißt *extremale* Teilmenge von M. Ein Punkt $m \in M$ heißt extremal, wenn $\{m\}$ extremal ist. Die extremalen Punkte einer konvexen Menge sind gerade diejenigen, die weggelassen werden können ohne die Konvexität zu zerstören bzw. gerade diejenigen, die sich nicht als echte Konvexkombination zweier verschiedener Punkte der Menge darstellen lassen. Der Durchschnitt eines beliebigen Systems extremaler Mengen ist extremal.

Satz. (Krein-Milman.) *Ist $(E, (p_\alpha)_{\alpha \in J})$ ein (reeller oder komplexer) polynormierter Raum und $\emptyset \neq C \subseteq E$ kompakt und konvex, so ist C gleich der abgeschlossenen konvexen Hülle der Menge ihrer Extremalpunkte.*
Beweis. Wir betrachten

$$\mathcal{C} = \{K \subseteq C : \emptyset \neq K \text{ ist kompakt und extremal in } C\}.$$

Wegen $C \in \mathcal{C}$ ist $\mathcal{C} \neq \emptyset$. Ist $\mathcal{C}_0$ ein Teilsystem von $\mathcal{C}$ mit nichtleerem Durchschnitt, so gehört dieser zu $\mathcal{C}$. Ist weiter $K \in \mathcal{C}$, $\varphi \in E^*$ und $m = \max_{x \in K} \Re\varphi(x)$, so ist

$$K_\varphi = \{x \in K : \Re\varphi(x) = m\}$$

in $\mathcal{C}$: K_φ ist nicht leer und als abgeschlossene Teilmenge von K kompakt. Für $(1-\lambda)x + \lambda y \in K_\varphi \subseteq K, x, y \in C, 0 < \lambda < 1$ folgt zunächst $x, y \in K$, da K extremal ist, und damit $\Re\varphi(x) \leq m, \Re\varphi(y) \leq m$, also

$$m = \Re\varphi((1-\lambda)x + \lambda y) = (1-\lambda)\Re\varphi(x) + \lambda\Re\varphi(y),$$

was $\Re\varphi(x) = \Re\varphi(y) = m$ nach sich zieht. Also gilt $x, y \in K_\varphi$.
Hieraus schließt man mit Hilfe des Satzes von Hahn-Banach, daß bezüglich Inklusion minimale extremale Mengen einpunktig sein müssen, und wir werden als nächstes nachweisen, daß jedes $K \in \mathcal{C}$ eine solche enthält.
Dazu sei ein solches K gewählt und

$$\mathcal{M} = \{M \in \mathcal{C} : M \subseteq K\}.$$

$\mathcal{M}$ ist nicht leer und durch Inklusion teilgeordnet. Ist $\mathcal{M}_0$ eine linear geordnete Teilmenge von $\mathcal{M}$, so ist

$$M_0 = \bigcap_{M \in \mathcal{M}_0} M$$

abgeschlossen, also kompakt und nicht leer: anderenfalls wäre wegen

$$E = \bigcup_{M \in \mathcal{M}_0} (E \setminus M)$$

das System dieser Komplemente eine offene Überdeckung von K, und weil K kompakt ist müßte es endlich viele $M_1, \ldots, M_k$ geben mit

$$K \subseteq \bigcup_{j=1}^{k} (E \setminus M_j) = E \setminus \bigcap_{j=1}^{k} M_j.$$

Dies ist wegen $\emptyset \neq \bigcap_{j=1}^{k} M_j \subseteq K$ nicht möglich. Nach dem Zornschen Lemma enthält $\mathcal{M}$ minimale Elemente, also K extremale Punkte.
Nun sei H die konvexe Hülle der Menge aller Extremalpunkte von C. Da C konvex ist, gilt $H \subseteq C$, und weil C abgeschlossen ist sogar $\mathrm{cl}(H) \subseteq C$. Insbesondere ist $\mathrm{cl}(H)$ kompakt. Gibt es $x_0 \in C \setminus \mathrm{cl}(H)$, so auch eine offene, konvexe Umgebung U von x_0, die $\mathrm{cl}(H)$ nicht trifft, und damit nach der geometrischen Form des Satzes von Hahn-Banach ein lineares Funktional φ mit

$$\Re\varphi(x) < \Re\varphi(u) \text{ für alle } x \in \mathrm{cl}(H),\ u \in U.$$

Hieraus folgt die Stetigkeit von φ und die Existenz eines extremalen Punktes $\overline{x}$ mit $\varphi(\overline{x}) \geq \varphi(x_0)$, der also nicht in $\mathrm{cl}(H)$ liegt im Widerspruch zu Definition von H.

Im Beweis wurde stillschweigend von der Tatsache Gebrauch gemacht, daß in polynormierten Räumen die abgeschlossene Hülle konvexer Mengen konvex ist. Es sei noch bemerkt, daß die Menge der Extremalpunkte selbst kompakter konvexer Mengen im allgemeinen nicht abgeschlossen ist. (Es gibt Beispiele im $\mathbb{R}^3$).

19 Das Lemma von Riesz

Lemma. (Riesz) *Es sei F ein abgeschlossener echter Teilraum des normierten Raumes $(E, \|\cdot\|)$. Dann ist*

$$\sup_{\|x\|=1} \operatorname{dist}(x, F) = 1.$$

Beweis. Ist $\|x\| = 1$, so ist dist $(x, F) \leq \|x - 0\| = 1$, also obiges Supremum höchstens 1.
Nun sei $x_0 \notin F$. Da F abgeschlossen ist gibt es $r > 0$ mit $K(x_0, r) \cap F = \emptyset$, also

$$d_0 = \operatorname{dist}(x_0, F) \geq r > 0.$$

Zu beliebigem $1 > \varepsilon > 0$ wählen wir $y_\varepsilon \in F$ mit $d_0 \leq \|x_0 - y_\varepsilon\| \leq d_0(1 + \varepsilon)$ und setzen $x_\varepsilon = \frac{x_0 - y_\varepsilon}{\|x_0 - y_\varepsilon\|}$. Dann ist für jedes $y \in F$

$$\|y - x_\varepsilon\| = \|y - \frac{x_0 - y_\varepsilon}{\|x_0 - y_\varepsilon\|}\| \geq \frac{1}{\|x_0 - y_\varepsilon\|} d_0 \geq \frac{1}{1 + \varepsilon} > 1 - \varepsilon.$$

Es ist also dist$(x_\varepsilon, F) \geq 1 - \varepsilon$, und Grenzübergang $\varepsilon \longrightarrow 0$ liefert die Behauptung.

Ist F endlichdimensional, so gibt es unter den Voraussetzungen des Satzes ein x mit $\|x\| = 1$ und dist$(x, F) = 1$. (Anwendung des Satzes auf $F \oplus [x_0]$ mit einem $x_0 \notin F$). Für unendlichdimensionales F ist dies i.a. falsch.
Insbesondere gibt es in jedem unendlichdimensionalen normierten Raum E eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $\|x_n\| = 1, \|x_n - x_m\| \geq 1, (n \neq m)$. Eine derartige Folge kann offenbar keine Cauchysche Teilfolge enthalten; insbesondere ist in keinem unendlichdimensionalen normierten Raum die Einheitskugel totalbeschränkt, geschweige denn kompakt.

20 Die schwache Topologie

Ist $(E, (p_\alpha)_{\alpha \in J})$ polynormiert und E^* der topologische Dualraum, so ist für jedes $\varphi \in E^*$ durch

$$p_\varphi(x) = |\varphi(x)|$$

eine Halbnorm auf E gegeben. Zu jedem $x \neq 0$ gibt es nach dem Satz von Hahn-Banach ein $\varphi \in E^*$ mit $|\varphi(x)| > 0$, sodaß $(E, (p_\varphi)_{\varphi \in E^*})$ ein polynormierter Raum ist. Die zugehörige Topologie heißt *schwache* Topologie von

E; sie ist gröber als die ursprüngliche Topologie von E: eine Nullumgebungsbasis der schwachen Topologie ist nämlich gegeben durch alle Mengen der Form

$$\bigcap_{j=1}^{k} K_{\varphi_j}(0,r) = \bigcap_{j=1}^{k} \{x : |\varphi_j(x)| < r\},$$

und letztere Mengen sind offen in der Topologie von E.

Satz. *Der topologische Dualraum von $(E, (p_\varphi)_{\varphi \in E^*})$ ist gleich E^*.*
Beweis. Offenbar ist jedes schwach stetige lineare Funktional auch stetig. Ist umgekehrt $\varphi \in E^*$, so ist $\{x : |\varphi(x)| < 1\}$ offen in der schwachen Topologie und φ dort beschränkt, also schwach stetig.

Satz. *Ist $(E, (p_\alpha)_{\alpha \in J})$ polynormiert und $C \subseteq E$ konvex, so ist die schwach abgeschlossene Hülle* s-cl(C) *von C gleich* cl(C).
Beweis. s-cl(C) ist schwach abgeschlossen, also abgeschlossen und damit ist cl$(C) \subseteq$s-cl(C). Ist nun $x_0 \notin$cl(C), so gibt es eine offene konvexe Menge U, die x_0 enthält und cl(C) nicht trifft, also nach dem Trennungssatz ein lineares Funktional φ und ein $\alpha \in \mathbb{R}$ mit

$$\varphi(x) < \alpha \leq \varphi(c) \text{ für alle } x \in U, \quad c \in \mathrm{cl}(C),$$

sodaß φ stetig und $\{x : \varphi(x) < \alpha\}$ eine schwach offene Umgebung von x_0 ist, die cl(C) nicht trifft. Damit ist $x_0 \notin$ s-cl(C), also s-cl$(C) \subseteq$ cl(C).

Insbesondere ist eine Teilraum von E abgeschlossen genau dann, wenn er schwach abgeschlossen ist und dicht in E genau dann, wenn er schwach dicht ist.

Folgerung. *Ist $(E, (p_\alpha)_{\alpha \in J})$ polynormiert, J höchstens abzählbar und konvergiert $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ schwach gegen x, so gibt es eine Folge von Konvexkombinationen der x_n, die gegen x konvergiert.*
Beweis. Es sei C die konvexe Hülle der x_n. Dann ist $x \in$ s-cl(C), also auch in cl(C), woraus die Behauptung folgt.

Dem nächsten Satz, der den Zusammenhang zwischen Beschränktheit und schwacher Beschränktheit klärt, stellen wir zwei Hilfssätze voran.

Hilfssatz 1. *Ist $K = K_{p_\alpha}(0,1)$ und*

$$K^\circ = \{\varphi \in E^* : |\varphi(x)| \leq 1 \text{ für alle } x \in K\}$$

die Polare von K, so ist

$$\mathrm{cl}(K) = \{x \in E : |\varphi(x)| \leq 1 \text{ für alle } \varphi \in K^\circ\}.$$

Beweis. Die Menge R auf der rechten Seite der behaupteten Gleichung enthält offenbar K und ist abgeschlossen. Es genügt also zu zeigen, daß sie in $\mathrm{cl}(K)$ enthalten ist. Ist aber $x_0 \notin \mathrm{cl}(K)$, so gibt es nach dem Trennungsatz ein $\varphi \in E^*$ mit $|\varphi(x)| \le 1$ auf K und $\varphi(x_0) > 1$, also liegt x_0 nicht in R.

Dem zweiten Hilfssatz liegt der Satz von Baire für kompakte Hausdorffräume zugrunde der besagt, daß solche Räume von zweiter Kategorie sind. Ein Beweis dieser Aussage kann ähnlich wie in Abschnitt 7 geführt werden.

Hilfssatz 2. *Ist C eine kompakte konvexe Teilmenge eines polynormierten Raumes $(E, (p_\alpha)_{\alpha \in J})$ und Φ eine auf C punktweise beschränkte Familie von stetigen linearen Funktionalen, so ist Φ auf C gleichmäßig beschränkt.*
Beweis. Es sei für $n \in \mathbb{N}$

$$C_n = \{x \in C : |\varphi(x)| \le n \text{ für alle } \varphi \in \Phi\}.$$

C_n ist abgeschlossen und es ist

$$C = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n.$$

C ist bezüglich der Spurtopologie ein kompakter Hausdorffraum, also gibt es nach dem Satz von Baire ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodaß C_{n_0} eine Menge der Form

$$C \cap U \text{ mit } U = \bigcap_{j=1}^{k} K_{p_{\alpha_j}}(x_0, r) \ (x_0 \in C, r > 0)$$

enthält. Da C kompakt, also beschränkt ist existiert $m > 1$ mit

$$C \subseteq x_0 + m(U - x_0).$$

Für beliebiges $x \in C$ ist dann

$$y = (1 - \frac{1}{m})x_0 + \frac{1}{m}x \in C$$

sowie

$$y - x_0 = \frac{1}{m}(x - x_0) \in U - x_0,$$

also

$$|\varphi(y)| \le n_0 \text{ für alle } \varphi \in \Phi,$$

und damit

$$|\varphi(x)| = |\varphi(my + (1-m)x_0)| \le (m-1)|\varphi(x_0)| + m|\varphi(y)| \le (m-1)K(x_0) + mn_0,$$

wobei $K(x_0)$ eine Schranke von Φ an der Stelle x_0 ist.

Satz. *Ist $(E, (p_\alpha)_{\alpha \in J})$ polynormiert, so ist $M \subseteq E$ beschränkt genau dann, wenn M schwach beschränkt ist.*
Beweis. Es sei M beschränkt und $\varphi \in E^*$. Wir wollen zeigen, daß $|\varphi|$ auf M beschränkt ist: zunächst gibt es endlich viele $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in J$ und $r > 0$ mit

$$|\varphi(x)| \leq 1 \text{ auf } \bigcap_{j=1}^{k} K_{p_{\alpha_j}}(0, r).$$

Nun sind die Halbnormen p_{α_j} auf M beschränkt, etwa durch $m > 0$, und für $x \in M$ folgt damit

$$p_{\alpha_j}(\frac{r}{m}x) \leq r \text{ für } j = 1, \ldots, k,$$

also

$$|\varphi(\frac{r}{m}x)| \leq 1$$

und damit

$$|\varphi(x)| \leq \frac{m}{r}.$$

Da $\varphi \in E^*$ beliebig war ist M schwach beschränkt.
Nun sei M schwach beschränkt, p_α eine der Halbnormen und K° die Polare von

$$K = K_{p_\alpha}(0, 1).$$

Nach dem Satz von Alaoglu-Bourbaki ist $K^\circ \subseteq E^*$ schwach*- kompakt (und konvex), und die Auswertungsfunktionale $\phi_x,\ x \in M$ sind schwach*-stetig sowie auf E^* punktweise beschränkt:

$$|\phi_x(\varphi)| = |\varphi(x)| \leq \gamma_\varphi \text{ für alle } x \in M.$$

Hilfssatz 2 (mit $C = K^\circ \subseteq E^*$, versehen mit der schwach*- Topologie) liefert ein $\gamma > 0$ mit

$$|\phi_x(\varphi)| = |\varphi(x)| \leq \gamma \text{ für alle } x \in M, \varphi \in K^\circ.$$

Damit ist für $x \in M$ dann $\frac{x}{\gamma} \in \mathrm{cl}(K)$ (Hilfssatz 1), also $p_\alpha(x) \leq \gamma$.

Von Banach stammt das folgende Kriterium für Beschränktheit:

$M \subseteq E$ ist beschränkt genau dann wenn gilt:
Aus $x_n \in M, \lambda_n \longrightarrow 0$ folgt $\lambda_n x_n \longrightarrow 0$.

Abschließend sei noch bemerkt, daß jeder unendlichdimensionale normierte Raum in seiner schwachen Topologie von erster Kategorie ist: es ist nämlich

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{K}_{\|\cdot\|}(0, n),$$

und die abgeschlossenen Kugeln bezüglich der Norm sind schwach abgeschlossen und besitzen keine bezüglich der schwachen Topologie inneren Punkte.

21 Innenprodukträume und Hilberträume

Ist E ein komplexer Vektorraum so heißt $B : E \times E \longrightarrow \mathbb{C}$ eine *Sesquilinearform* , wenn sie in der ersten Variablen linear ist und wenn $B(x,y) = \overline{B(y,x)}$ für alle $x, y \in E$ gilt. Die Sesquilinearform B heißt *positiv semidefinit* , wenn $B(x,x)$ nichtnegativ für alle $x \in E$ ist; *positiv definit* , wenn sogar $B(x,x) > 0$ für alle $x \neq 0$ gilt.
Ist E reell, so wird B als reellwertig vorausgesetzt; eine Sesquilinearform ist in diesem Fall bilinear und symmetrisch. In jedem Fall heißt eine positiv semidefinite Sesquilinearform ein *Semi-Innenprodukt* , eine positiv definite Sesquilinearform *Innenprodukt* . Wenn keine Verwechslung zu befürchten ist lassen wir den Buchstaben B weg, schreiben also

$$B(x,y) = (x,y).$$

Satz. (Cauchy-Schwarzsche Ungleichung) *Ist $(\cdot,\cdot)$ ein Semi-Innenprodukt auf E, so gilt*

$$|(x,y)| \leq \sqrt{(x,x)}\sqrt{(y,y)}, \ \ (x,y \in E).$$

Das Gleichheitszeichen steht genau dann, wenn Skalare λ_0, μ_0 mit $|\lambda_0|+|\mu_0| > 0$ existieren mit $(\lambda_0 x + \mu_0 y, \lambda_0 x + \mu_0 y) = 0$.
Beweis. Für fest gewählte $(x, y$ und für beliebige Skalare λ, μ ist

$$0 \leq (\lambda x + \mu y, \lambda x + \mu y) = \overline{\lambda}\lambda(x,x) + \mu\overline{\lambda}(y,x) + \overline{\mu}\lambda(x,y) + \mu\overline{\mu}(y,y).$$

Den rechts stehenden Ausdruck fassen wir als Sesquilinearform in $\mathbb{C}^2$ (bzw. als Bilinearform im reellen Fall) mit zugehöriger (2×2)-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} (x,x) & (y,x) \\ (x,y) & (y,y) \end{pmatrix},$$

auf. Diese besitzt die Eigenwerte

$$\frac{(x,x) + (y,y) \pm \sqrt{((x,x)+(y,y))^2 + 4((x,y)(y,x) - (x,x)(y,y))}}{2}.$$

Ist die behauptete Ungleichung falsch, so sind diese reell und der eine positiv, der andere negativ. Wählt man einen zum negativen Eigenwert λ_- gehörigen Eigenvektor v von A in $\mathbb{C}^2$ aus und setzt dessen Koordinaten für λ und μ in obige Ungleichung ein, so erhält man

$$(\lambda x + \mu y, \lambda x + \mu y) = \overline{\lambda}\lambda(x,x) + \mu\overline{\lambda}(y,x) + \overline{\mu}\lambda(x,y) + \mu\overline{\mu}(y,y) = \lambda_- \overline{v}^\top v < 0,$$

also einen Widerspruch.
Das Gleichheitszeichen in der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung steht genau dann, wenn A den Eigenwert 0 hat, wenn also $\lambda_- = 0$ ist. Ein zugehöriger Eigenvektor liefert dann λ und μ und umgekehrt.

Satz. *Ist* $(\cdot,\cdot)$ *ein Semi-Innenprodukt auf dem Vektorraum* E*, so ist durch*

$$\|x\| = \sqrt{(x,x)}$$

eine Halbnorm definiert. Ist $(\cdot,\cdot)$ *ein Innenprodukt, so ist* $\|\cdot\|$ *eine Norm.*
Beweis. Außer der Dreiecksungleichung ist alles offensichtlich. Diese folgt aus

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 = (x+y,x+y) &= \|x\|^2 + 2\Re(x,y) + \|y\||^2 \\ &\le \|x\|^2 + 2|(x,y)| + \|y\||^2 \\ &\le \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\||^2 \\ &= (\|x\| + \|y\|)^2.\end{aligned}$$

Das Gleichheitszeichen in der Dreiecksungleichung steht offenbar genau dann, wenn (x,y) reell und gleich $\|x\|\|y\|$ ist. Im Fall des Innenprodukts sind dann x und y linear abhängig, und wegen

$$(\|y\|x - \|x\|y, \|y\|x - \|x\|y) = 0$$

ist x ein nichtnegatives Vielfaches von y oder umgekehrt. Andererseits hat diese Bedingung das Gleichheitszeichen in der Dreiecksungleichung zur Folge.
Wird in einem Vektorraum E ein festes (Semi-)Innenprodukt betrachtet, so sprechen wir von einem (Semi-)Innenproduktraum . Die oben definierte (Halb-)Norm heißt die von dem betrachteten (Semi-) Innenprodukt erzeugte (Halb-)Norm.
Im Falle eines Innenproduktraumes folgt aus der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung

$$|(x_1,y_1) - (x_2,y_2)| \le \|x_1 - x_2\|\|y_1\| + \|y_1 - y_2\|\|x_2\|,$$

(alle Argumente in E), also die (simultane) Stetigkeit des Innenprodukts auf $E \times E$.
x und y heißen zueinander *senkrecht* oder *orthogonal* , wenn $(x,y) = 0$ gilt. Man schreibt $x \perp y$. Entsprechend bedeutet $X \perp Y$ für Teilmengen X, Y, daß $x \perp y$ gilt für alle $x \in X, y \in Y$. Es gelten

Satz des Pythagoras. *Ist* $(\cdot,\cdot)$ *ein Semi-Innenprodukt auf dem Vektorraum* E, *so gilt*

$$x \perp y \implies \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Satz. *Ist* $(\cdot,\cdot)$ *ein Semi-Innenprodukt auf dem Vektorraum* E,*so gelten*

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) \text{ 'Parallelogrammgleichung'}$$

$$\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 = 4\Re(x,y)$$
$$\|x+\imath y\|^2 + \|x-\imath y\|^2 = 4\Im(x,y).$$

Alle Aussagen bestätigt man durch Ausrechnen.
Der nächste Satz gibt Auskunft über die Existenz von 'Lotfußpunkten' oder 'Bestapproximationen'in gewissen Teilmengen eines Innenproduktraumes:
Satz. *Ist* $(E,(\cdot,\cdot))$ *ein Innenproduktraum und* $C \subseteq E$ *konvex und vollständig (bzgl. der erzeugten Norm), so gibt es zu jedem* $x_0 \in E$ *genau ein* $c_0 \in C$ *mit*

$$\|x_0 - c_0\| = \text{dist}(x_0, C);$$

Es gilt

$$\Re(x_0 - c_0, c - c_0) \leq 0$$

für alle $c \in C$. Ist C sogar ein Untervektorraum von E, so gilt $(x_0 - c_0, c - c_0) = 0$ für alle $c \in C$.
Beweis. Wir setzen $d = \text{dist}(x_0, C) \geq 0$, und wählen eine 'Minimalfolge' $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in C, also eine Folge mit

$$\|c_n - c_0\| \to d \quad (n \to \infty).$$

Dann folgt mit Hilfe der Parallelogrammgleichung (für $c_n - x_0,\ c_m - x_0$)

$$\|c_n + c_m - 2x_0\|^2 + \|c_n - c_m\|^2 = 2(\|c_n - x_0\|^2 + \|c_m - x_0\|^2),$$

woraus

$$0 \leq \|c_n - c_m\|^2 = 2(\|c_n - x_0\|^2 + \|c_m - x_0\|^2) - 4\|\frac{c_n + c_m}{2} - x_0\|^2$$

folgt. Wählt man zu $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ so, daß

$$\|c_k - x_0\|^2 < d^2 + \frac{\varepsilon^2}{4} \text{ für alle } k \geq n_0$$

gilt, so ist für $n, m \geq n_0$

$$\|c_n - c_m\|^2 \leq 4d^2 + \varepsilon^2 - 4d^2$$

wegen $\frac{c_n+c_m}{2} \in C$. Also ist $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in C, also konvergent, etwa gegen $c_0 \in C$, und es gilt $\|c_0 - x_0\| = d$. Ist c_0' eine weiterer Punkt mit $\|c_0' - x_0\| = d$, so ist $(c_0, c_0', c_0, c_0', \dots)$ eine Minimalfolge, also konvergent und damit $c_0 = c_0'$.
Weiter ist für $t \in [0,1]$ und $c \in C$

$$\|c_0 + t(c - c_0) - x_0\|^2 \geq d^2 = \|c_0 - x_0\|^2,$$

also für $t > 0$

$$\frac{d^2 + 2t\Re(c - c_0, c_0 - x_0) + t^2\|c - c_0\|^2 - d^2}{t} \geq 0,$$

woraus für $t \longrightarrow 0$ die behauptete Ungleichung folgt. Ist C Untervektorraum, so kann in dieser Überlegung $t \in \mathbb{R}$ zugelassen werden und man erhält $\Re(c - c_0, c_0 - x_0) = 0$. Ersetzt man schließlich t durch $\imath t$, so ergibt sich auch $\Im(c - c_0, c_0 - x_0) = 0$.

Ist der Innenproduktraum E bezüglich der vom Innenprodukt erzeugten Norm vollständig, so heißt E *Hilbertraum* . Man prüft leicht nach, daß, falls E nicht vollständig ist, die Prozedur aus Abschnitt 5 einen Hilbertraum ergibt, wenn man ein Innenprodukt in naheliegender Weise mit Hilfe von Vertretern definiert.

Satz. *Ist F ein abgeschlossener Teilraum des Hilbertraumes E, so existiert ein abgeschlossener Teilraum $F^\perp$ von E mit $F^\perp \perp F$ und $E = F \oplus F^\perp$.*
Beweis. Wir setzen

$$F^\perp = \{x \in E : (x, f) = 0 \text{ für alle } f \in F\}.$$

$F^\perp$ ist ein abgeschlossener Untervektorraum von E. Da mit E auch F vollständig ist, existiert nach obigem Satz zu jedem $x \in E$ genau ein Lotfußpunkt $P(x) \in F$, und nach dem letzten Teil dieses Satzes ist zunächst $(x-P(x), P(x)) = 0$ und dann $(x - P(x), f) = 0$ für alle $f \in F$, also $x - P(x) \in F^\perp$. Damit ist

$$x = P(x) + x - P(x)$$

mit $P(x) \in F$ und $x - P(x) \in F^\perp$, und aus $F \perp F^\perp$ folgt schließlich $F \cap F^\perp = \{0\}$, d.h. E ist direkte Summe von F und $F^\perp$.

Die im Beweis betrachtete Abbildung P nennt man auch die *Orthogonalprojektion* von E auf F. Mit Hilfe von

$$y \in F,\ (x - y) \perp F \Longrightarrow y = P(x)$$

(folgt aus $\|x - P(x)\|^2 = \|x - y\|^2 + \|y - P(x)\|^2$)
zeigt man leicht, daß P linear ist. Außerdem gilt $P(E) = F$, $\mathrm{Kern}(P) = F^\perp$ und wegen $\|x\|^2 = \|P(x)\|^2 + \|x - P(x)\|^2 \geq \|P(x)\|^2$ auch

$$\|P(x) - P(y)\| \ \leq \|x - y\| \text{ für alle } x, y \in E.$$

Satz. (Riesz) *Ist E ein Hilbertraum und $\varphi \in E^*$, so gibt es genau ein $y \in E$ mit*

$$\varphi(x) = (x, y) \text{ für alle } x \in E.$$

Weiter ist $\|\varphi\| = \|y\|$.

Beweis. Für $\varphi = 0$ setze man $y = 0$. Ist $\varphi \neq 0$, so ist $F = \mathrm{Kern}(\varphi)$ ein abgeschlossener echter Teilraum von E, und es gibt $x_0 \notin F$ mit $n_0 = x_0 - P(x_0) \perp F$. ($P$ sei die Orthogonalprojektion auf F).
Wir erhalten für beliebiges $x \in E$

$$\varphi(x)n_0 - \varphi(n_0)x \in F,$$

also

$$(\varphi(x)n_0 - \varphi(n_0)x, n_0) = 0$$

und damit

$$\varphi(x) = (x, \frac{\overline{\varphi}(n_0)}{\|n_0\|^2} n_0).$$

$$y = \frac{\overline{\varphi}(n_0)}{\|n_0\|^2} n_0$$

leistet das Gewünschte, und daß es nur ein solches y gibt ist klar. Schließlich ist damit

$$|\varphi(x)| = |(x, y)| \leq \|x\|\|y\|,$$

also $\|\varphi\| \leq \|y\|$ und $|\varphi(y)| = \|y\|^2$, also $\|\varphi\| = \|y\|$.

Die Zuordnung $S : \varphi \longrightarrow y$ ist isometrisch, additiv und es gilt $S(\lambda\varphi) = \overline{\lambda} S(\varphi)$. Im reellen Fall ist also der Dualraum E^* linear isometrisch zu E, also insbesondere selbst wieder ein Hilbertraum. Im komplexen Fall erzeugt

$$(\varphi, \psi) = (S(\psi), S(\varphi))$$

die Norm im Dualraum; er ist also ebenfalls ein Hilbertraum.
Jeder Hilbertraum ist reflexiv: zunächst ist E^{**} ein Hilbertraum, und zu $\Phi_0 \in E^{**}$ gibt es $\phi_0 \in E^*$ mit $\Phi_0(\varphi) = (\varphi, \phi_0)$ für alle $\varphi \in E^*$. Zu ϕ_0 gibt es $y_0 \in E$ mit $\phi_0(x) = (x, y_0)$ für alle $x \in E$. Damit ist

$$\Phi_0(\varphi) = (\varphi, \phi_0) = (y_0, S(\varphi)) = \varphi(y_0)$$

für alle $\varphi \in E^\star$, also die kanonische Einbettung von E in $E^{\star\star}$ surjektiv.
In Innenprodukträumen gilt das Rieszsche Lemma in der folgenden schärferen Form:
Ist F ein vollständiger echter Teilraum des Innenproduktraumes E, so gibt es $x \in E$ mit $\|x\| = 1$ und $\operatorname{dist}(x, F) = 1$.
Wählt man nämlich zu $y \notin F$ den zugehörigen Lotfußpunkt $P(y) \in F$ und setzt

$$x = \frac{y - P(y)}{\|y - P(y)\|},$$

so gilt wegen $y - P(y) \perp F$ nach dem Satz von Pythagoras

$$\|x - f\|^2 = \|x\|^2 + \|f\|^2 \geq 1$$

für alle $f \in F$, also $\operatorname{dist}(x, F) \geq 1$ und wegen $0 \in F$ gilt hierbei sogar das Gleichheitszeichen.
In diesem Zusammenhang sei das *Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren* erwähnt: ausgehend von einer linear unabhängigen, abzählbaren Teilmenge $\{x_1, x_2, \dots\}$ eines Innenproduktraumes E setze man $z_1 = \frac{x_1}{\|x_1\|}$, wähle dann in der linearen Hülle von $\{x_1, x_2\}$ ein $z_2 \perp z_1$ mit $\|z_2\| = 1$, dann in der linearen Hülle von $\{x_1, x_2, x_3\}$ ein $z_3 \perp \{z_1, z_2\}$ mit $\|z_3\| = 1$ usw. Dadurch erhält man eine Menge von paarweise aufeinander senkrecht stehenden, normierten Elementen $\{z_1, z_2, z_3, \dots\}$ mit derselben linearen Hülle wie die der $\{x_1, x_2, x_3, \dots\}$.

Definition. *Eine Teilmenge $B \subseteq E$ des Innenproduktraumes E heißt* orthonormiert *oder ein* Orthonormalsystem *, wenn*

$$(b, b') = \begin{cases} 1 & \textit{falls } b = b' \\ 0 & \textit{falls } b \neq b' \end{cases}$$

gilt. Ein Orthonormalsystem B heißt Basis (genauer Orthonormalbasis) von E, wenn die abgeschlossene lineare Hülle von B gleich E ist.

Satz. (Besselsche Ungleichung). *Ist E ein Innenproduktraum, $B \subseteq E$ orthonormal und $x \in E$, so gilt für je endlich viele $b_1, b_2, \dots, b_k \in B$*

$$\sum_{j=1}^{k} |(x, b_j)|^2 \leq \|x\|^2.$$

Insbesondere ist $(x, b) \neq 0$ für höchstens abzählbar viele $b \in B$.
Beweis. Der von den b_j aufgespannte Teilraum F ist endlichdimensional, also vollständig, und zu $x \in E$ gibt es den Lotfußpunkt $P(x) \in F$ mit

$x - P(x) \perp F$, also $x - P(x) \perp b_j$ für alle $j = 1, \dots, k$. Damit wird mit geeignet gewählten c_j

$$x = P(x) + x - P(x) = \sum_{j=1}^{k} c_j b_j + x - P(x).$$

Multiplikation mit b_j liefert $c_j = (x, b_j)$, und quadrieren ergibt

$$(x, x) = \sum_{j=1}^{k} |c_j|^2 + (x - P(x), x - P(x)) \geq \sum_{j=1}^{k} |c_j|^2.$$

(Gleichheit gilt genau für $x = P(x)$, also $x \in F$).
Damit gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ höchstens endlich viele $b \in B$ mit $|(x, b)| \geq \frac{1}{n}$, also insgesamt höchstens abzählbar viele $b \in B$ mit $|(x, b)| > 0$.

Ist B ein Orthonormalsystem in einem Innenproduktraum E und $x \in E$, und setzen wir $B_x = \{b \in B : (x, b) \neq 0\}$, so ist also B_x höchstens abzählbar. Für eine fest gewählte Abzählung $B_x = \{b_1, b_2, \dots\}$ heißt

$$\sum_{j=1}^{\infty} (x, b_j) b_j$$

die zu dieser Abzählung von B_x gehörige *Fourierreihe* von x. Nach der Besselschen Ungleichung ist

$$\sum_{j=1}^{\infty} |(x, b_j)|^2 \leq \|x\|^2,$$

die links stehende Reihe also konvergent, und, wenn $S_k = \sum_{j=1}^{k} (x, b_j) b_j$ die Teilsumme der Fourierreihe bezeichnet,

$$\|S_m - S_n\|^2 = \sum_{j=n+1}^{m} |(x, b_j)|^2.$$

Die Folge dieser Teilsummen ist also eine Cauchyfolge. Betrachtet man eine weitere Abzählung von B_x mit zugehöriger Teilsummenfolge $(T_k)_{k \in \mathbb{N}}$, so beweist man leicht, daß $(T_k - S_k)_{k \in \mathbb{N}}$ gegen Null strebt. Ist also die Fourierreihe für eine Abzählung von B_x konvergent, so für jede mit demselben Wert. Diesen bezeichnen wir dann als

$$S(x) = \sum_{b \in B} (x, b) b.$$

(Allgemeiner könnte man $S(x)$ als Element der Vervollständigung der linearen Hülle von B auffassen).
Ist nun B eine Orthonormalbasis und $x \perp B$, so ist auch $x \perp \operatorname{span}(B)$ und wegen der Stetigkeit des Innenprodukts sogar $x \perp \overline{\operatorname{span}}(B)$, also $x \perp E$ und damit $x = 0$. Wenn E vollständig ist gilt hiervon auch die Umkehrung:
Satz. *Ist E ein Hilbertraum, B ein Orthonormalsystem, $F := \overline{\operatorname{span}}(B)$, P die Orthogonalprojektion auf F und $x \in E$, so gilt*

$$P(x) = \sum_{b \in B} (x, b) b$$

und

$$\|P(x)\|^2 = \sum_{b \in B} |(x, b)|^2 \text{ 'Parsevalsche Gleichung'.}$$

Ist insbesondere $B^\perp = \{0\}$, so ist $P(x) = x$, also B Orthonormalbasis.
Beweis. Zu $x \in E$ und für eine fest gewählte Abzählung von B_x ist mit

$$S(x) = \sum_{j=1}^{\infty} (x, b_j) b_j, \;\; S_k(x) = \sum_{j=1}^{k} (x, b_j) b_j$$

und festes $b_{k_0} \in B_x$

$$(x - S(x), b_{k_0}) = \lim_{k \to \infty} (x - S_k(x), b_{k_0}) = 0$$

wegen $(x - S_k(x), b_{k_0}) = 0$ für $k \geq k_0$. Für $b \in B \setminus B_x$ gilt diese Gleichung trivialerweise. Also ist $x - S(x) \perp B$ und damit $x - S(x) \perp F$. Weil $S(x)$ in F liegt, ist nach einer früher gemachten Bemerkung $S(x) = P(x)$ sowie

$$(P(x), P(x)) = \lim_{k \to \infty} (S_k(x), S_k(x)) = \lim_{k \to \infty} \sum_{j=1}^{k} |(x, b_j)|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |(x, b_j)|^2.$$

Ist schließlich $B^\perp = \{0\}$, so auch $F^\perp = \{0\}$, also $x = P(x)$ und damit B Orthonormalbasis.

Satz. *Jedes Orthonormalsystem eines Hilbertraumes H läßt sich zu einer Orthonormalbasis ergänzen.*
Beweis. Mit Hilfe des Zornschen Lemmas weist man ein bezüglich Inklusion maximales Orthonormalsystem nach, das das vorgegebene enthält; dies ist nach obigem Satz Orthonormalbasis.

Mit ähnlicher Rechnung wie beim Nachweis der Parsevalschen Gleichung beweist man

$$(P(x), P(y)) = \sum_{b \in B} (x, b) \overline{(y, b)},$$

sowie im Fall, daß B Basis ist,

$$(x,y) = \sum_{b \in B} (x,b)\overline{(y,b)}.$$

Wir schließen mit einer Bemerkung zum Fortsetzungssatz von Hahn-Banach. Ist $F \subseteq H$ ein Untervektorraum des Hilbertraumes H und φ ein stetiges lineares Funktional auf F, so ist die stetige lineare Fortsetzung ϕ mit gleicher Norm eindeutig bestimmt und von der Form

$$\phi(x) = (x,y) = \varphi(P(x))$$

mit $y \in \overline{F}$; P ist die Orthogonalprojektion auf $\overline{F}$, und φ kann zunächst in eindeutiger Weise stetig und linear auf $\overline{F}$ fortgesetzt werden. Der Beweis kann dann mit Hilfe des Rieszschen Darstellungssatzes in $\overline{F}$ beendet werden.

22 Stetige lineare Abbildungen

Sind E, F Vektorräume über demselben Skalarkörper, so heißt $T : E \longrightarrow F$ linear, wenn

$$T(\lambda x + \mu y) = \lambda T(x) + \mu T(y)$$

für alle $x, y \in E$ und alle Skalare λ, μ gilt. Offensichtlich gelten

1. $T(0) = 0$.
2. Ist $M \subseteq E$ ein Untervektorraum bzw. konvex, so ist $T(M)$ ein Untervektorraum bzw. konvex.
3. Ist $N \subseteq F$ ein Untervektorraum bzw. konvex, so ist $T^{-1}(N)$ ein Untervektorraum bzw. konvex.
4. Speziell ist $T(E)$ ein Untervektorraum von F und $T^{-1}(0) = \text{Kern}(T)$ ein Untervektorraum von E.

Satz. *Es seien $(E, (p_\alpha)_{\alpha \in I})$ und $(F, (q_\beta)_{\beta \in J})$ polynormiert und $T : E \longrightarrow F$ linear. Dann ist T entweder in jedem Punkt stetig oder nirgends. Ist T stetig, so auch gleichmäßig stetig im Sinne von:*
Zu jeder Nullumgebung V in F gibt es eine Nullumgebung U in E mit:

$$x - y \in U \implies T(x) - T(y) \in V.$$

Beweis. Es sei T in $x_0 \in E$ stetig, $x_1 \in E$ ein beliebiger anderer Punkt und V eine Umgebung von $T(x_1)$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit ist diese von der Form

$$V = K_{q_\beta}(T(x_1), \varepsilon).$$

mit $\varepsilon > 0$, $\beta \in J$. Zu $V_0 = K_{q_\beta}(T(x_0), \varepsilon)$ gibt es endlich viele $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ und $\delta > 0$ mit

$$x \in \bigcap_{j=1}^{k} K_{p_{\alpha_j}}(x_0, \delta) \implies T(x) \in K_{q_\beta}(T(x_0), \varepsilon).$$

Für $x \in \bigcap_{j=1}^{k} K_{p_{\alpha_j}}(x_1, \delta)$ ist dann aber $x + x_0 - x_1$ in $\bigcap_{j=1}^{k} K_{p_{\alpha_j}}(x_0, \delta)$, also

$$q_\beta(T(x + x_0 - x_1) - T(x_0)) = q_\beta(T(x) - T(x_1)) < \varepsilon.$$

Damit ist T im Punkt x_1 stetig, und der Beweis zeigt, daß wenn eine Umgebung U zu einer Umgebung V in einem Stetigkeitspunkt gewählt wird, diese für alle Punkte zum Nachweis der Stetigkeit taugt.

Satz. *Unter den Voraussetzungen des obigen Satzes ist T stetig genau dann, wenn für jedes $\beta \in J$ die Halbnorm q, definiert durch*

$$q(x) = q_\beta(T(x))$$

auf E stetig ist.

Beweis. Ist T stetig, so auch q als Schachtelung stetiger Funktionen. Umgekehrt genügt es zu zeigen, daß T im Nullpunkt stetig ist. Ist aber wie im Beweis des obigen Satzes ohne Beschränkung der Allgemeinheit V von der Form $K_{q_\beta}(0, \varepsilon)$ (beachte $T(0) = 0$), so gibt es wegen $q(0) = 0$ eine Umgebung U der Null in E mit

$$x \in U \implies q(x) \leq \varepsilon,$$

also $T(x) \in K_{q_\beta}(0, \varepsilon)$.

Aus obigem Satz folgt leicht:

Satz. *T ist genau dann stetig, wenn zu jedem $\beta \in J$ endlich viele $\alpha_1, \ldots, \alpha_h \in I$ und nichtnegative reelle Zahlen $c_1, \ldots, c_k$ existieren mit*

$$q_\beta(T(x)) \leq \sum_{j=1}^{k} c_j p_{\alpha_j}(x) \text{ für alle } x \in E.$$

Bemerkungen.

1. Für den Fall $F = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ ist obiger Satz die früher bewiesene Aussage über lineare Funktionale.

2. T ist sicher dann stetig, wenn eine offene nichtleere Teilmenge von E existiert, deren Bild unter T in F beschränkt ist. Diese Bedingung ist im allgemeinen nicht notwendig: in einem nicht normierbaren Raum ist die Identität sicher stetig, aber keine offene nichtleere Menge beschränkt. Ist F jedoch normiert und T stetig, so ist das Urbild der Einheitskugel von F offen.

3. Sind E und F beide normiert, so ist die lineare Abbildung stetig genau dann, wenn eine nichtnegative Konstante c existiert mit

$$\|T(x)\| \leq c\|x\| \text{ für alle } x \in E.$$

Die kleinste derartige Konstante heißt die *(Operator-) Norm* $\|T\|$ von T.

Nennt man eine lineare Abbildung T *beschränkt* , wenn das Bild jeder beschränkten Teilmenge von E beschränkt ist, so gilt:

Satz. *Es seien $(E, (p_\alpha)_{\alpha\in I})$ und $(F, (q_\beta)_{\beta\in J})$ polynormiert und $T : E \longrightarrow F$ linear und stetig. Dann ist T beschränkt.*
Beweis. Wählt man nach dem letzten Satz zu beliebigem $\beta \in J$ Indizes α_j und Konstanten c_j, so erhält man sofort eine Schranke für $q_\beta(T(x))$ für alle x aus einer beschränkten Menge M.

Allerdings reicht i.a. die Beschränktheit für die Stetigkeit nicht hin: Ist etwa F ein unendlichdimensionaler normierter Raum und wählt man für E denselben Raum F mit der schwachen Topologie, so ist die Identität beschränkt, aber nicht stetig.

Satz. *Ist $(E, (p_\alpha)_{\alpha\in I})$ polynormiert mit abzählbarem I, $(F, (q_\beta)_{\beta\in J})$ polynormiert und $T : E \longrightarrow F$ linear, so ist T stetig genau dann, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:*

1. *T ist beschränkt.*

2. *Aus $x_n \longrightarrow 0$ folgt $(T(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt.*

3. *Aus $x_n \longrightarrow 0$ folgt $T(x_n) \longrightarrow 0$.*

Beweis. Aus der Stetigkeit folgt 1., und aus 1. folgt 2.. Es gelte 2. und es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge. Wir wählen eine die Topologie von E erzeugende translationsinvariante Metrik d und setzen

$$\gamma_n = \begin{cases} [\frac{1}{\sqrt{d(x_n,0)}}] & \text{falls } x_n \neq 0 \\ n & \text{falls } x_n = 0 \end{cases}$$

Es gilt $\gamma_n \longrightarrow \infty$ für $n \longrightarrow \infty$ und wegen

$$d(jx,0) \leq d(jx,(j-1)x) + d((j-1)x,(j-2)x) + \cdots + d(x,0) \leq jd(x,0)$$

für $j \in \mathbb{N}$ dann

$$d(\gamma_n x_n, 0) \leq \gamma_n d(x_n, 0) \leq \begin{cases} \sqrt{d(x_n,0)} & x_n \neq 0 \\ 0 & x_n = 0. \end{cases}$$

Es gilt also $d(\gamma_n x_n, 0) \longrightarrow 0$, also $\gamma_n x_n \longrightarrow 0$ für $n \to \infty$. Dann ist aber $(T(\gamma_n x_n)_{n\in\mathbb{N}})$ beschränkt, und zu jedem $\beta \in J$ gibt es $c_\beta \geq 0$ mit

$$q_\beta(\gamma_n T(x_n)) \leq c_\beta,$$

also

$$q_\beta(T(x_n)) \leq \frac{c_\beta}{\gamma_n} \longrightarrow 0 \ (n \to \infty),$$

mithin $T(x_n) \longrightarrow 0$ $(n \to \infty)$. Also gilt 3..
Ist schließlich T nicht stetig, so gibt es ein $\beta \in J$ und ein $\varepsilon > 0$, sodaß für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in E$ existiert mit

$$d(x_n, 0) < \frac{1}{n} \text{ und } q_\beta(T(x_n)) \geq \varepsilon.$$

Also gilt $x_n \longrightarrow 0$ aber nicht $q_\beta(T(x_n)) \longrightarrow 0$ und damit gilt 3. nicht.

Die im Beweis benutzte Tatsache, daß in E zu jeder Nullfolge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge $\gamma_n \longrightarrow \infty$ existiert, sodaß immer noch $\gamma_n x_n \longrightarrow 0$ gilt, ist für nicht abzählbares I i.a falsch.
Beispiel. Es sei E der Vektorraum aller reellwertigen Funktionen auf $[0,1]$, versehen mit der von den Halbnormen

$$p_x(f) = |f(x)|, \ x \in [0,1]$$

erzeugten Topologie. Eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist dann eine Nullfolge genau dann, wenn sie punktweise gegen Null konvergiert. Nun ist die Menge aller Nullfolgen rationaler Zahlen gleichmächtig zu $[0,1]$, es gibt also eine bijektive Abbildung ϕ, die jeder Zahl $x \in [0,1]$ genau eine Nullfolge rationaler Zahlen zuordnet, und jede solche Folge kommt als Bild vor. Setzt man dann

$$f_n(x) = (\phi(x))_n, \ x \in [0,1], \ n \in \mathbb{N},$$

so konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen Null. Ist schließlich $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen mit $\gamma_n \to \infty$ und wählt man eine Folge $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rationaler Zahlen mit $r_n \leq \gamma_n$, $r_n \to \infty$, so gibt es $x \in [0,1]$ mit $\phi(x) = ((\frac{1}{r_n})_{n\in\mathbb{N}})$, also

$$|\gamma_n f_n(x)| = |\gamma_n||\frac{1}{r_n}| \geq 1 \text{ für alle } n \in \mathbb{N},$$

und somit konvergiert $(\gamma_n f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht gegen Null.

23 Der Satz von Banach-Steinhaus

In diesem Abschnitt werden, wenn nichts anderes gesagt wird, Familien $(T_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ von stetigen linearen Abbildungen eines polynormierten Raumes $(E, (p_\alpha)_{\alpha\in I})$ in einen polynormierten Raum $(F, (q_\beta)_{\beta\in J})$ über demselben Körper betrachtet. Eine solche Familie heißt *gleichgradig stetig* , wenn zu jeder Nullumgebung $V \subseteq F$ eine Nullumgebung $U \subseteq E$ existiert mit

$$T_\gamma(U) \subseteq V \text{ für alle } \gamma \in \Gamma.$$

Wie früher genügt es, für V Kugeln bezüglich der Halbnormen q_β zu wählen. Jede gleichgradig stetige Familie linearer Abbildungen ist *gleichmäßig beschränkt* in folgendem Sinn:
Zu jeder beschränkten Menge $M \subseteq E$ gibt es eine beschränkte Menge $N \subseteq F$ mit

$$T_\gamma(M) \subseteq N \text{ für alle } \gamma \in \Gamma.$$

Beweis. Es sei $M \subseteq E$ beschränkt und

$$N = \bigcup_{\gamma\in\Gamma} T_\gamma(M) \subseteq F.$$

sowie $\beta \in J$. Dann gibt es zu $V = K_{q_\beta}(0,1)$ eine Umgebung U der Form

$$U = \bigcap_{j=1}^{k} K_{p_{\alpha_j}}(0,\delta) \ (\delta > 0)$$

mit

$$T_\gamma(U) \subseteq V \text{ für alle } \gamma \in \Gamma,\ x \in M.$$

Da M beschränkt ist existiert $C > 0$ mit $p_{\alpha_j}(x) \leq C$ für $j = 1, \ldots, k$ und alle $x \in M$. Für $x \in M$ und $\gamma \in \Gamma$ folgt dann $\frac{\delta}{C}x \in U$, also $T_\gamma(\frac{\delta}{C}x) \in V$ und hieraus

$$q_\beta(T_\gamma(x)) < \frac{C}{\delta} \text{ für alle } \gamma \in \Gamma.$$

Also ist N beschränkt.

Jede gleichmäßig beschränkte Familie ist *punktweise beschränkt*, d.h. $\{T_\gamma(x) : \gamma \in \Gamma\}$ ist beschränkt für jedes $x \in E$.
Der folgende Satz wird oft auch 'Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit' genannt.

Satz.(Banach-Steinhaus) *Ist $(T_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ eine auf einer Menge $M \subseteq E$ von zweiter Kategorie punktweise beschränkte Familie stetiger linearer Abbildungen, so ist diese auf E punktweise beschränkt und gleichgradig stetig, also insbesondere gleichmäßig beschränkt.*

Beweis. Es sei $\beta \in J$ beliebig, aber fest und $\varepsilon > 0$. Dann ist

$$G = \bigcap_{\gamma\in\Gamma} \{x : q_\beta(T_\gamma(x)) \leq \frac{\varepsilon}{3}\}$$

abgeschlossen. Für jedes $x \in M$ ist $\{T_\gamma(x) : \gamma \in \Gamma\}$ beschränkt, also $q_\beta(T_\gamma(x)) \leq n\frac{\varepsilon}{3}$ für alle γ für geeignet gewähltes $n \in \mathbb{N}$. Damit ist $\frac{1}{n}x \in G$ und somit

$$M \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} nG.$$

Da M von zweiter Kategorie ist, ist auch $\bigcup_{n=1}^{\infty} nG$ von zweiter Kategorie und somit enthält einer der Summanden einen inneren Punkt, also G einen inneren Punkt x_0. Dann ist $U = G - x_0$ eine Nullumgebung, und für $x = g - x_0 \in U$, $\gamma \in \Gamma$ folgt

$$q_\beta(T_\gamma(x)) = q_\beta(T_\gamma(g - x_0)) \leq q_\beta(T_\gamma(g)) + q_\beta(T_\gamma(x_0)) \leq \frac{2}{3}\varepsilon < \varepsilon.$$

Damit ist $(T_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ gleichgradig stetig.

Die Voraussetzungen des obigen Satzes sind z.B. erfüllt, wenn E vollständig metrisierbar und $M \subseteq E$ eine Menge mit nichtleerem Inneren ist. Ist speziell E ein Banachraum und F normiert, so folgt aus

$$\sup_{\gamma\in\Gamma} \|T_\gamma(x)\| < \infty \text{ für } \|x\| \leq 1,$$

daß eine Konstante C existiert mit

$$\|T_\gamma\| \leq C \text{ für alle } \gamma \in \Gamma.$$

Satz. *Es seien $(E, (p_\alpha)_{\alpha\in I})$,$(F, (q_\beta)_{\beta\in J})$ polynormierte Räume und $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge stetiger linearer Abbildungen von E nach F. Dann gilt:*

1. *Ist $C = \{x \in E : (T_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ ist Cauchyfolge$\}$ von zweiter Kategorie in E, so ist $C = E$.*

2. *Ist F vollständig metrisierbar und $K = \{x \in E : (T_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent$\}$ von zweiter Kategorie in E, so existiert*

$$T(x) = \lim_{n\to\infty} T_n(x)$$

für alle $x \in E$ und T ist linear und stetig.

Beweis. 1. Da jede Cauchyfolge beschränkt ist, ist nach dem Satz von Banach-Steinhaus $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichgradig stetig. Weiter ist C offensichtlich ein Untervektorraum von E. Da mit C auch cl$C$ Untervektorraum und von zweiter Kategorie ist gilt cl$C = E$; also ist C dicht in E.
Nun sei $x_0 \in E$ beliebig, aber fest. Wir wollen zeigen, daß $(T_n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyfolge ist. Zu beliebigem $\beta \in J$ und $\varepsilon > 0$ wählen wir eine Umgebung U von x_0 mit

$$x \in U \Longrightarrow q_\beta(T_n(x) - T_n(x_0)) < \frac{\varepsilon}{3} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Da C dicht ist, gibt es ein $c \in C \bigcap U$, also $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$q_\beta(T_n(c) - T_m(c)) < \frac{\varepsilon}{3} \text{ für } m > n > n_0,$$

und damit wird für diese m, n

$$\begin{aligned} q_\beta(T_n(x_0) - T_m(x_0)) &\leq q_\beta(T_n(x_0 - c)) + q_\beta(T_n(c) - T_m(c)) + q_\beta(T_m(c - x_0)) \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

2. Unter den gegebenen Voraussetzungen existiert der angegebene Limes und T ist linear. Wählt man zu $\beta \in J$ und $\varepsilon > 0$ eine Nullumgebung U mit

$$x \in U \Longrightarrow q_\beta(T_n(x))) < \varepsilon \text{ für alle } n \in \mathbb{N},$$

so folgt für $x \in U$ und $n \to \infty$

$$q_\beta(T(x)) \leq \varepsilon.$$

Also ist T stetig.

Wir halten fest:
Folgerung. *Ist $(E, (p_\alpha)_{\alpha\in I})$ vollständig metrisierbar und existiert $T(x) = \lim_{n\to\infty} T_n(x)$ für alle x aus einer Menge zweiter Kategorie, so existiert dieser Limes überall und T ist linear und stetig.*
Diese Folgerung wird gelegentlich in der nachstehenden Form benutzt:
Ist $(E, (p_\alpha)_{\alpha\in I})$ vollständig metrisierbar und $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht gleichgradig stetig, so ist die Menge der $x \in E$, für die $(T_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent ist, von erster

Kategorie

Beispiel. Die Menge derjenigen auf $[-\pi, \pi]$ stetigen Funktionen, deren Fourierreihe für $t = 0$ konvergiert, ist in $C([-\pi, \pi])$ von erster Kategorie. Bezüglich des Standardorthonormalsystems in $L^2([-\pi, \pi])$

$$\varphi_0 = \tilde{\varphi}_0 \equiv \frac{1}{2\sqrt{\pi}}, \ \varphi_k(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos kt, \ \tilde{\varphi}_k(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin kt$$

lautet die $n-$te Teilsumme der Fourierreihe für die Funktion x an der Stelle $t = 0$

$$\begin{aligned} T_n(x) &= \sum_{k=0}^{n} \{(x, \varphi_k)\varphi_k(0) + (x, \tilde{\varphi}_k)\tilde{\varphi}_k(0)\} \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} x(t)\{\sum_{k=0}^{n}(\varphi_k(t)\varphi_k(0) + \tilde{\varphi}_k(t)\tilde{\varphi}_k(0))\}dt \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} x(t)\frac{\sin \frac{2n+1}{2}t}{2\pi \sin \frac{t}{2}}dt. \end{aligned}$$

Jedes T_n ist ein stetiges lineares Funktional auf $E = C([-\pi, \pi])$ (wir setzen also $F = \mathbb{R}$), und es gilt

$$\|T_n\| = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\frac{\sin \frac{2n+1}{2}t}{\sin \frac{t}{2}}|dt.$$

Nach einiger Rechnung erhält man

$$\|T_n\| \geq \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \longrightarrow \infty$$

für $n \to \infty$. Also ist $\{x : (T_n(x))_{n\in\mathbb{N}} \text{ ist konvergent}\}$ in E von erster Kategorie.

24 Der Satz von der offenen Abbildung

Sind $(E, (p_\alpha)_{\alpha\in I})$ und $(F, (q_\beta)_{\beta\in J})$ polynormiert über demselben Körper und ist $T : E \to F$ linear, so heißt T *offen*, wenn das Bild $T(M)$ offen in F ist für jede offene Teilmenge M von E. Allgemeiner nennt man gelegentlich T offen, wenn $T(M)$ offen in $T(E)$ in der Spurtopologie ist; dies bedeutet jedoch nichts anderes, als daß T offen als Abbildung von E nach $(T(E), (q_\beta)_{\beta\in J})$ ist.

Die Offenheit einer Abbildung ist äquivalent zu Stetigkeit der Umkehrabbildung, falls diese existiert.
Beispiel. Es sei $E = C([0,1])$ versehen mit der Maximumnorm, $F = \{x \in E : x(0) = 0,\ x \text{ ist stetig differenzierbar}\}$, ebenfalls versehen mit der Maximumnorm. (Man beachte, daß F nicht vollständig ist). Die Abbildung $T : E \to F$, definiert durch

$$T(x)(t) = \int_0^t x(s)ds$$

ist linear, stetig und bijektiv, aber nicht offen: z.B. ist $0 \in T(K(0,1))$ kein innerer Punkt dieser Menge, da mit $x_n(t) = 2t^n$ zwar

$$\lim_{n\to\infty} T(x_n) = 0$$

gilt, aber keine der Funktionen $T(x_n)$ ein Urbild in $K(0,1)$ hat.
Nun gehört zu jeder linearen Abbildung in natürlicher Weise eine injektive, welche jetzt eingeführt werden soll. Ist dazu N ein Untervektorraum des Vektorraums E (N wird später der Kern der linearen Abbildung sein), so wird durch

$$x \sim y \iff y - x \in N$$

eine Äquivalenzrelation auf E erklärt. Die Menge $E/_N$ der Äquivalenzklassen wird durch

$$\widetilde{x+y} := \widetilde{x} + \widetilde{y},\ \lambda\widetilde{x} := \widetilde{\lambda x}$$

zu einem Vektorraum mit N als Nullelement, und $\pi : E \to E/_N$ mit

$$\pi(x) = \widetilde{x}$$

ist linear und surjektiv; sie heißt die zugehörige *Quotientenabbildung*. Wegen $\pi(N+M) = \pi(M)$ gilt

$$\pi^{-1}(\pi(M)) = N + M \text{ für alle } M \subseteq E.$$

Ist p eine Halbnorm auf E, so ist $\widetilde{p}$, definiert durch

$$\widetilde{p}(\widetilde{x}) = \inf_{z\in N} p(x-z)$$

eine Halbnorm auf $E/_N$; sie kann als Abstand von x zu N bezüglich p aufgefaßt werden. Es ist

$$\pi(K_p(x,r)) = K_{\widetilde{p}}(\widetilde{x},r).$$

Allgemeiner ist für eine translationsinvariante Halbmetrik d auf E mit $d(x,y) = d(-x,-y)$ durch

$$\widetilde{d}(\widetilde{x},\widetilde{y}) = \inf_{z\in N} d(x-y,z)$$

eine Halbmetrik $\widetilde{d}$ mit denselben Eigenschaften erklärt. Wie oben gilt für Kugeln

$$\pi(K_d(x,r)) = K_{\widetilde{d}}(\widetilde{x},r)$$

und

$$\widetilde{d}(\widetilde{x},\widetilde{y}) \le d(x,y),\ (x,y\in E).$$

Ist d eine Metrik und N abgeschlossen, so ist auch $\widetilde{d}$ eine Metrik. Mit diesen Eigenschaften von d gilt:

Satz. *Ist $(E,(p_\alpha)_{\alpha\in I})$ vollständig metrisierbar und $N\subseteq E$ abgeschlossen, so ist auch $E/_N$ bezüglich $\widetilde{d}$ vollständig.*
Beweis. Es sei $(\widetilde{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $E/_N$. Wir wählen eine Teilfolge $(\widetilde{x}_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit

$$\widetilde{d}(\widetilde{x}_{n_k},\widetilde{x}_{n_{k+1}}) < \frac{1}{2^k},\ k\in\mathbb{N},$$

dann induktiv $\xi_k\in E$ mit $\pi(\xi_k) = \widetilde{x}_{n_k}$ und $d(\xi_k,\xi_{k+1}) < \frac{1}{2^k}$. Dann ist aber $(\xi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in E, also konvergent gegen ein $\xi\in E$. Wegen $\widetilde{d}(\widetilde{x},\widetilde{y}) \le d(x,y)$ konvergiert dann $(\widetilde{x}_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ gegen $\widetilde{\xi}$ und somit auch die ganze Folge gegen $\widetilde{\xi}$.

Satz. *Ist $(E,(p_\alpha)_{\alpha\in I})$ polynormiert mit saturiertem Halbnormensystem und $N\subseteq E$ ein abgeschlossener Untervektorraum, so ist $(E/_N,(\widetilde{p}_\alpha)_{\alpha\in I})$ polynormiert und $\pi: E\to E/_N$ stetig, surjektiv und offen. Ist I abzählbar und E vollständig, so auch $E/_N$.*
Beweis. Wir zeigen zunächst, daß zu $\widetilde{x}\neq N$ ein $\alpha\in I$ existiert mit $\widetilde{p}_\alpha(\widetilde{x}) > 0$. $\widetilde{x}\neq N$ bedeutet $x\notin N$, und, da N abgeschlossen und das Halbnormensystem saturiert ist, existiert $\alpha\in I$ und $\varepsilon>0$ mit

$$K_{p_\alpha}(x,\varepsilon)\cap N = \emptyset.$$

Also ist $p_\alpha(x-z)\ge\varepsilon$ für alle $z\in N$ und somit $\widetilde{p}_\alpha(\widetilde{x})\ge\varepsilon$. (Insbesondere ist $\widetilde{p}$ eine Norm, wenn p eine solche ist). Damit ist $(E/_N,(\widetilde{p}_\alpha)_{\alpha\in I})$ polynormiert. Daß π stetig ist folgt aus $\widetilde{p}(\widetilde{x}) = \inf_{z\in N} p(x-z) \le p(x)$, und die Offenheit von π folgt aus der Tatsache, daß das Bild jeder offenen Kugel unter π eine

offene Kugel ist.
Die letzte Aussage folgt aus dem vorhergehenden Satz.

Ist $T : E \to F$ linear, und wählt man $N = \mathrm{Kern}(T)$, so ist $\widetilde{T} : E/_N \to F$, gegeben durch

$$\widetilde{T}(\widetilde{x}) = T(x)\ (\widetilde{x} \in E/_N),$$

sinnvoll definiert, linear und injektiv: $\widetilde{T}(\widetilde{x}) = 0$ bedeutet ja gerade $T(x) = 0$, also $x \in \mathrm{Kern}(T)$, also $\widetilde{x} = N$. $\widetilde{T}$ heißt die zu T gehörige *kanonische Injektion.*

Satz von der offenen Abbildung. *Sind $(E, (p_\alpha)_{\alpha\in I})$ und $(F, (q_\beta)_{\beta\in J})$ polynormiert mit abzählbarem I, E folgenvollständig, und ist $T : E \to F$ linear und stetig sowie $T(E)$ von zweiter Kategorie, so ist T surjektiv, offen und F folgenvollständig.*
Beweis. Wir wählen für I eine Abzählung $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots\}$ und setzen wie üblich

$$d(x, y) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \frac{p_{\alpha_j}(x - y)}{1 + p_{\alpha_j}(x - y)},$$

und für beliebiges, aber festes $r > 0$ und $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ sei

$$V_n = K_d(0, \frac{r}{2^n}).$$

Wir beweisen zunächst, daß $T(V_0)$ eine Umgebung der 0 in F enthält.
Für jedes n ist

$$T(E) = \bigcup_{k=1}^{\infty} kT(V_n),$$

also, da $T(E)$ von zweiter Kategorie ist, wenigstens eine der Mengen $kT(V_n)$ von zweiter Kategorie; dann ist aber auch $T(V_n)$ von zweiter Kategorie, und folglich besitzt $\mathrm{cl}(T(V_n))$ nichtleeres Inneres. Wegen

$$V_{n+1} - V_{n+1} \subseteq V_n,\ \mathrm{cl}(A) - \mathrm{cl}(B) \subseteq \mathrm{cl}(A - B)$$

folgt

$$\mathrm{cl}(T(V_{n+1})) - \mathrm{cl}(T(V_{n+1})) \subseteq \mathrm{cl}(T(V_{n+1} - V_{n+1})) \subseteq \mathrm{cl}(T(V_n)),$$

und da $\mathrm{cl}(T(V_{n+1})) - \mathrm{cl}(T(V_{n+1}))$ eine Nullumgebung enthält, gilt dies auch für $\mathrm{cl}(T(V_n))$ für jedes $n \geq 0$.
Um zu beweisen, daß $T(V_0)$ eine Nullumgebung enthält, genügt es demnach,

$\mathrm{cl}(T(V_1)) \subseteq T(V_0)$ nachzuweisen. Dazu sei $y_1 \in \mathrm{cl}(T(V_1))$ beliebig und die Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch Induktion folgendermaßen erklärt: ist $y_n \in \mathrm{cl}(T(V_n))$ gewählt, so trifft $y_n - \mathrm{cl}(T(V_{n+1}))$ die Menge $T(V_n)$ ($\mathrm{cl}(T(V_{n+1}))$ ist Nullumgebung!). Es existiert also $x_n \in V_n$ mit

$$T(x_n) \in y_n - \mathrm{cl}(T(V_{n+1})),$$

also ein $y_{n+1} \in \mathrm{cl}(T(V_{n+1}))$ mit

$$y_{n+1} = y_n - T(x_n).$$

Gleichzeitig ist hiermit eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert mit $d(x_n, 0) < \frac{r}{2^n}$. Wegen der Vollständigkeit von E konvergiert

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n =: x \in V_0,$$

und es ist

$$T(x) = \lim_{n\to\infty} T(\sum_{k=1}^{n} x_k) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (y_k - y_{k+1}) = y_1$$

wegen $y_n \to 0$ für $n \to \infty$. (Zunächst ist $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent, etwa gegen z; wäre $z \neq 0$, so gäbe es eine abgeschlossene Nullumgebung W, die z nicht enthält, und zu W ein $n \in \mathbb{N}$ mit $T(V_n) \subseteq W$, also $z \notin \mathrm{cl}(T(V_n))$. z liegt aber im Durchschnitt all dieser Mengen).

Damit ist $\mathrm{cl}(T(V_1)) \subseteq T(V_0)$, also $T(V_0)$ eine Nullumgebung.

Hieraus folgt zunächst leicht, daß T surjektiv ist, und da $r > 0$ beliebig war auch, daß T offen ist.

Ist schließlich $N = \mathrm{Kern}(T)$ und $\widetilde{T}$ die zu T gehörige kanonische Injektion, so ist $E/_N$ vollständig bezüglich der Metrik $\widetilde{d}$ und

$$T(x) = \widetilde{T}(\pi(x)),\ x \in E,$$

(π die ist die kanonische Projektion). Für jede offene Teilmenge U von F ist dann

$$\widetilde{T}^{-1}(U) = \pi(T^{-1}(U))$$

offen, weil T stetig und π offen ist. Also ist $\widetilde{T}$ stetig. Weiter ist für jede offene Teilmenge M von $E/_N$ wegen

$$\widetilde{T}(M) = T(\pi^{-1}(M))$$

offen in F, weil π stetig und T offen ist. Damit ist

$$\widetilde{T} : E/_N \to F$$

stetig und bijektiv mit stetiger Inversen. Hieraus folgt die Folgenvollständigkeit von F.

Folgerungen.

1. Ist zusätzlich J abzählbar und F vollständig sowie T surjektiv, so ist T offen. Ist T bijektiv, so ist die Inverse stetig (und linear). Diese Aussage nennt man *Homöomorphiesatz von Banach*.

2. Sind E und F Banachräume und $T : E \to F$ stetig, linear und bijektiv, so existieren Konstanten $a, b > 0$ mit

$$a\|x\| \leq \|T(x)\| \leq b\|x\|, \ (x \in E)$$

3. Ist E ein Vektorraum und sind $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ zwei Normen, bezüglich denen E vollständig ist und gilt

$$\|x\|_1 \leq b\|x\|_2$$

für alle $x \in E$, so existiert $a > 0$ mit

$$a\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq b\|x\|_2$$

für alle $x \in E$.

25 Der Satz vom abgeschlossenen Graph

Sind X, Y Hausdorffräume und $f : X \to Y$ stetig, so ist der *Graph*

$$\text{graph}(f) = \{(x, f(x)) : x \in X\}$$

von f in $X \times Y$ bezüglich der Produkttopologie abgeschlossen:
Ist nämlich $(x_0, y_0) \notin \text{graph}(f)$, also $y_0 \neq f(x_0)$, so gibt es in Y offene disjunkte Mengen U, V mit $y_0 \in U, f(x_0) \in V$, und zu V ein offene Menge $W \subseteq X$ mit $x_0 \in W, f(W) \subseteq V$. Dann ist $W \times U$ offen, $(x_0, y_0) \in W \times U$ und $(W \times U) \cap \text{graph}(f) = \emptyset$: andernfalls gäbe es x_1 mit $(x_1, f(x_1)) \in W \times U$, also $f(x_1) \in U \cap V$.
Sind X, Y metrische Räume, so ist die Abgeschlossenheit von graph(f) äquivalent zu:

Existieren $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ *und* $y = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$, *so ist* $y = f(x)$.
Beweis. Ist (x, y) ein Häufungspunkt von graph(f), so gibt es $((x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}})$, $(x_n, y_n) \in$ graph(f) mit

$$x_n \to x,\ y_n \to y,\ y_n = f(x_n).$$

Also ist $y = f(x)$ und damit $(x, y) \in$ graph(f).
Ist umgekehrt graph(f) abgeschlossen, so folgt aus der angegebenen Bedingung $(x, y) \in$ graph(f), also $y = f(x)$.
Für den Fall, daß f linear ist, gilt der

Satz vom abgeschlossenen Graph. *Sind* $(E, (p_\alpha)_{\alpha\in I})$ *und* $(F, (q_\beta)_{\beta\in J})$ *polynormiert,* I, J *abzählbar und* E, F *vollständig, so ist die lineare Abbildung* $T : E \longrightarrow F$ *stetig genau dann, wenn* graph(T) *abgeschlossen ist.*
Beweis. Daß graph(T) abgeschlossen wenn T stetig ist wurde oben gezeigt. Nun sei graph(T) abgeschlossen. Wir definieren auf E eine zweite polynormierte Topologie mit Hilfe des Systems der *Graphenhalbnormen*

$$P_{\alpha\beta}(x) = p_\alpha(x) + q_\beta(T(x)),\ (\alpha \in I,\ \beta \in J).$$

Dieses ist abzählbar, und $(E, (P_{\alpha\beta})_{\alpha\in I,\beta\in J})$ ist vollständig: Ist nämlich $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge bezüglich der $P_{\alpha\beta}$, so ist diese eine Cauchyfolge in $(E, (p_\alpha)_{\alpha\in I})$ und $(T(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ eine solche in $(F, (q_\beta)_{\beta\in J})$, also beide konvergent, etwa gegen x bzw. y. Nach Voraussetzung ist $y = T(x)$ und folglich konvergiert $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bezüglich der $P_{\alpha\beta}$ gegen x. Nun ist die Identität

$$Id : (E, (P_{\alpha\beta})_{\alpha\in I,\beta\in J}) \longrightarrow (E, (p_\alpha)_{\alpha\in I})$$

stetig und bijektiv, also nach dem Satz von der offenen Abbildung auch stetig in der anderen Richtung. Zu $\beta \in J$ wählt man dann (irgend) ein $\alpha \in I$ und erhält $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in I$ und reelle Konstanten $c_1, \ldots, c_k$ mit

$$p_\alpha(x) + q_\beta(T(x)) \leq c_1 p_{\alpha_1}(x) + \cdots + c_k p_{\alpha_k}(x),\ (x \in E),$$

woraus die Stetigkeit von T folgt.

Bemerkung. Die im Beweis verwendete Topologie ist die Spurtopologie der Produkttopologie von $E \times F$ im Untervektorraum graph(T), die in den zu graph(T) linear isomorphen Raum E übertragen wird. Sind speziell E und F Banachräume und graph(T) abgeschlossen, so ist also E auch bezüglich der 'Graphennorm' $\|x\| + \|T(x)\|$ vollständig.

Satz von Hellinger-Töplitz. *Ist* E *ein Hilbertraum und* $T : E \longrightarrow E$ *symmetrisch, d.h. ist*

$$(T(x), y) = (x, T(y)) \text{ für alle } x, y \in E,$$

so ist T stetig.

Beweis. Es genügt zu beweisen, daß graph(T) abgeschlossen ist. Ist also hierzu

$$x = \lim_{k\to\infty} x_k,\ y = \lim_{k\to\infty} T(x_k),$$

so folgt für beliebiges $z \in E$

$$(y,z) = \lim_{k\to\infty}(T(x_k),z) = \lim_{k\to\infty}(x_k,T(z)) = (x,T(z)) = (T(x),z),$$

also ist $y = T(x)$.

Eigentlich wurde bewiesen, daß symmetrische Operatoren stetig von der starken in die schwache Topologie sind, was für die Abgeschlossenheit des Graph hinreicht:

Satz *Sind E, F Banachräume und ist $T : E \longrightarrow F$ linear mit*

$$\textit{Aus } \lim_{k\to\infty} x_k = x \textit{ folgt } \lim_{k\to\infty} T(x_k) = T(x) \textit{ (schwach)},$$

so ist T stetig.

Zum Beweis zeigt man wie oben, daß graph(T) abgeschlossen ist.

26 Dualität in polynormierten Räumen

Für die folgeneden Überlegungen erweist es sich als nützlich, Elemente des Dualraumes E^* eines Raumes E als x^* zu bezeichnen und anstelle von $x^*(x)$ die Schreibweise $\langle x, x^*\rangle$ zu benutzen. (Man beachte die Analogie zum Falle eines Hilbertraumes!) Die Definition der dualen Norm schreibt sich dann

$$\|x^*\| = \sup\{|\langle x, x^*\rangle| : x \in E, \|x\| \le 1\},$$

und die Formel für $\|\cdot\|$ (vgl. Abschnitt 15.) lautet

$$\|x\| = \sup\{|\langle x, x^*\rangle| : x^* \in E^*, \|x^*\| \le 1\}.$$

Ist $M \subseteq E$, so heißt

$$M^\perp = \{x^* \in E^* : \langle x, x^*\rangle = 0 \text{ für alle } x \in M\} \subseteq E^*$$

Annihilator oder *Orthogonalraum* von M. Entsprechend ist für $N \subseteq E^*$

$${}^\perp N = \{x \in E : \langle x, x^*\rangle = 0 \text{ für alle } x^* \in N\} \subseteq E$$

erklärt. Sowohl $M^\perp$ als auch ${}^\perp N$ sind Untervektorräume von E^* bzw. E, und wegen

$$M^\perp = \{\mathrm{span}(M)\}^\perp, \ {}^\perp N = {}^\perp\{\mathrm{span}(N)\}$$

werden M und N als Untervektorräume vorausgesetzt.
Ist $x \in E$ fest, so ist $\{x^* : \langle x, x^*\rangle = 0\}$ als Nullraum des Auswertungsfunktionals $\langle x, \cdot\rangle$ schwach*-abgeschlossen, also $M^\perp$ als Durchschnitt solcher Nullräume ebenfalls schwach*- abgeschlossen. Entsprechend ist ${}^\perp N$ abgeschlossen in E, und schließlich gilt

$$(\overline{M})^\perp = M^\perp, \ {}^\perp N = {}^\perp(\overline{N}^*) .$$

Satz. *Ist $(E, (p_\alpha)_{\alpha\in I})$ polynormiert, M Untervektorraum von E, N Untervektorraum von E^*, so gilt*

1. ${}^\perp(M^\perp) = \overline{M}$.
2. $({}^\perp N)^\perp = \overline{N}^*$.

Beweis. 1. Ist $x \in M$, so ist $\langle x, x^*\rangle = 0$ für alle $x^* \in M^\perp$, also $x \in {}^\perp(M^\perp)$. Diese Menge ist abgeschlossen, also gilt $\overline{M} \subseteq {}^\perp(M^\perp)$.
Ist dagegen $x \notin \overline{M}$, so existiert nach dem Satz von Hahn-Banach ein $x^* \in E^*$ das auf M verschwindet mit $\langle x, x^*\rangle \neq 0$. Also ist $x^* \in M^\perp$, aber $x \notin {}^\perp(M^\perp)$.
2. läßt sich genauso beweisen: Ist $x^* \in N$, so ist $\langle x, x^*\rangle = 0$ für alle $x \in {}^\perp N$, also $x^* \in ({}^\perp N)^\perp$. Diese Menge ist schwach-*abgeschlossen, also gilt $\overline{N}^* \subseteq ({}^\perp N)^\perp$.
Ist dagegen $x^* \notin \overline{N}^*$, so existiert nach dem Satz von Hahn-Banach, angewandt auf E^* mit der schwach-*Topologie, ein $x \in E$ das (als Auswertungsfunktional betrachtet) auf N verschwindet mit $\langle x, x^*\rangle \neq 0$. Also ist $x^* \notin ({}^\perp N)^\perp$.

27 Der adjungierte Operator

Sind $(E, (p_\alpha)_{\alpha\in I})$ und $(F, (q_\beta)_{\beta\in J})$ polynormiert und $T : E \longrightarrow F$ linear, so ist für $y^* \in F^*$ die Funktion z^*, definiert durch

$$z^*(x) = \langle T(x), y^*\rangle, \ x \in E,$$

linear. Gilt sogar $z^* \in E^*$, ist also z^* stetig, so heißt z^* das zu y^* *adjungierte* Element, und wir können

$$\langle T(x), y^* \rangle = \langle x, z^* \rangle$$

schreiben. Jedes $y^* \in F^*$ besitzt höchstens ein adjungiertes Element; die Menge D^* derjenigen y^*, die ein solches besitzen, ist ein Untervektorraum von F^*, und die Zuordnung

$$y^* \longrightarrow z^* =: T^*(y^*)$$

ist linear. $T^* : D^* \longrightarrow E^*$ heißt der zu T *adjungierte Operator*. Im Fall, daß T stetig ist gilt $D^* = F^*$ und

$$T^*(y^*) = y^* \circ T.$$

Eine teilweise Umkehrung ist

Satz. *Sind* $(E, (p_\alpha)_{\alpha \in I}), (F, (q_\beta)_{\beta \in J})$ *polynormiert,* $T : E \longrightarrow F$ *linear und ist* $D^* = F^*$*, so ist* T *beschränkt. Sind speziell* E, F *normiert, so sind* T *und* T^* *stetig und es gilt* $\|T\| = \|T^*\|$.
Beweis. Nach Voraussetzung gilt für alle $x \in E, y^* \in F^*$

$$\langle T(x), y^* \rangle = \langle x, T^*(y^*) \rangle,$$

sodaß $|\langle T(x), y^* \rangle|$ beschränkt ist wenn x durch eine beschränkte Menge M läuft. Also ist $T(M)$ schwach beschränkt, also beschränkt.
Im normierten Fall ist damit T stetig, und wegen

$$\begin{aligned}\|T\| = \sup_{\|x\| \le 1} \|T(x)\| &= \sup_{\|x\| \le 1} \sup_{\|y^*\| \le 1} |\langle T(x), y^* \rangle| \\ &= \sup_{\|x\| \le 1} \sup_{\|y^*\| \le 1} |\langle x, T^*(y^*) \rangle| = \|T^*\|\end{aligned}$$

folgt die zweite Behauptung des Satzes.

Satz. *Sind* $(E, (p_\alpha)_{\alpha \in I}), (F, (q_\beta)_{\beta \in J})$ *polynormiert und* $T : E \longrightarrow F$ *linear und stetig, so gilt*

$$\begin{aligned}\mathrm{Kern}(T^*) &= T(E)^\perp \subseteq F^*, \\ \mathrm{Kern}(T) &= {}^\perp(T^*(F^*)) \subseteq E.\end{aligned}$$

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned}y^* \in \mathrm{Kern}(T^*) &\iff T^*(y^*) = 0 \\ &\iff \langle x, T^*(y^*) \rangle = 0 \text{ für alle } x \in E \\ &\iff \langle T(x), y^* \rangle = 0 \text{ für alle } x \in E \\ &\iff y^* \in T(E)^\perp.\end{aligned}$$

Ebenso ist

$$\begin{aligned} x \in \mathrm{Kern}(T) &\iff T(x) = 0 \\ &\iff \langle T(x), y^* \rangle = 0 \text{ für alle } y^* \in F^* \\ &\iff \langle x, T^*(y^*) \rangle = 0 \text{ für alle } y^* \in F^* \\ &\iff x \in {}^\perp(T^*(F)^*))\,. \end{aligned}$$

Bemerkungen. $\mathrm{Kern}(T^*) \subseteq F^*$ ist wegen der Stetigkeit von T^* abgeschlossen in F^*. Er ist nach obigem Satz sogar schwach*-abgeschlossen in F^*. Wegen

$$\mathrm{Kern}(T)^\perp = \left({}^\perp T^*(F^*)\right)^\perp$$

ist $\mathrm{Kern}(T)^\perp$ der schwach*-Abschluß von $T^*(F^*)$. Ebenso ist ${}^\perp\mathrm{Kern}(T^*)$ die abgeschlossene Hülle von $T(E)$ (bzgl. der Norm).

Folgerung. a) *$T(E)$ ist dicht in F genau dann wenn T^* injektiv ist.*
b) *T ist injektiv genau dann wenn $T^*(F^*)$ schwach*- dicht in E^* ist.*
Beweis. a) T^* ist injektiv genau dann wenn $\mathrm{Kern}(T^*) = \{0\}$, also $T(E)^\perp = \{0\}$ gilt. Diese Gleichung charakterisiert dichte Untervektorräume: Ist $M \subseteq F$ dicht und $y^* \in M^\perp$, also $y^*(y) = 0$ auf M, so ist $y^* = 0$.
Ist umgekehrt $\overline{M} \neq F$, so existiert nach dem Trennungssatz ein y^* mit $y^* = 0$ auf $\overline{M}$, $y^* \neq 0$. Also ist $M^\perp \neq \{0\}$.
b) T ist injektiv genau dann wenn ${}^\perp T^*(F^*) = \{0\}$ gilt. Dies ist genau dann der Fall wenn $T^*(F^*)$ schwach*-dicht in E^* ist: Ist nämlich $N \subseteq E^*$ schwach*-dicht und $x \in {}^\perp N$, so ist $\langle x, x^* \rangle = 0$ sogar für alle $x^* \in E^*$, also $x = 0$.
Ist umgekehrt $\overline{N}^* \neq E^*$, so existiert nach dem Trennungssatz, angewandt in E^* versehen mit der schwach*-Topologie, ein $x \in E$ mit $\langle x, \cdot \rangle = 0$ auf $\overline{N}^*$, $x \neq 0$. Also ist ${}^\perp N \neq \{0\}$.

Diese Folgerung ist beinahe das aus der linearen Algebra bekannte Lösungskriterium für lineare Gleichungssysteme: a) bedeutet, daß $T(x) = y$ genau dann für jedes $y \in F$ approximativ (bzgl. der Norm) lösbar ist, wenn die adjungierte homogene Gleichung $T^*(y^*) = 0$ nur trivial lösbar ist. Entsprechend bedeutet b), daß $T^*(y^*) = x^*$ genau dann für jedes $x^* \in E^*$ approximativ (bzgl. der schwach*-Topologie) lösbar ist wenn $T(x) = 0$ nur die triviale Lösung besitzt.
Ist weiter $T(E)$ abgeschlossen, so ist T surjektiv genau dann wenn T^* injektiv ist. Analog ist im Fall, daß $T^*(F^*)$ schwach*-abgeschlossen ist, T^* surjektiv genau dann wenn T injektiv ist.
Für den Beweis des nächsten Satzes, der der die Abgeschlossenheit der eben erwähnten Bildräume behandelt, wird das folgende Lemma benötigt.

Lemma. Es seien E und F Banachräume und $T : E \longrightarrow F$ stetig und linear.

K_E bzw. K_F sei die offene Einheitskugel in E bzw. F. Dann gilt:
a) *Aus* $K_F \subseteq \overline{T(K_E)}$ *folgt* $K_F \subseteq T(K_E)$.
b) *Aus* $\|T^*(y^*)\| \geq \|y^*\|$ *folgt* $K_F \subseteq T(K_E)$.

Beweis. a) Es ist dann $\overline{K_F} \subseteq \overline{T(K_E)}$, und für jedes $y \neq 0$ gilt

$$\frac{y}{\|y\|} \in \overline{K_F} \subseteq \overline{T(K_E)},$$

sodaß zu $\frac{\varepsilon}{\|y\|} > 0$ ein $x \in K_E$ existiert mit

$$\|T(x) - \frac{y}{\|y\|}\| < \frac{\varepsilon}{\|y\|},$$

also

$$\|T(\|y\|x) - y\| < \varepsilon.$$

Schreibt man $x_\varepsilon = \|y\|x$, so gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein x_ε mit $\|x_\varepsilon\| \leq \|y\|$ und $\|T(x_\varepsilon) - y\| < \varepsilon$.
Nun sei $0 \neq y_1 \in K_F$ gegeben: wir suchen $x \in K_E$ mit $y_1 = T(x)$. Hierzu sei $(\varepsilon_n)_{n=1}^\infty$ eine Folge positiver Zahlen mit

$$\sum_{n=1}^\infty \varepsilon_n < 1 - \|y_1\|.$$

Ist y_n schon gewählt, so bestimmen wir $x_n := x_{\varepsilon_n}$ nach der Vorüberlegung und setzen $y_{n+1} = y_n - T(x_n)$. Es gilt

$$\|x_{n+1}\| \leq \|y_{n+1}\| = \|y_n - T(x_n)\| < \varepsilon_n,$$

also

$$\sum_{n=1}^\infty \|x_n\| \leq \|x_1\| + \sum_{n=1}^\infty \varepsilon_n \leq \|y_1\| + \sum_{n=1}^\infty \varepsilon_n < 1,$$

und damit ist

$$x = \sum_{n=1}^\infty x_n$$

konvergent und in K_E. Wegen $y_n \longrightarrow 0$ wird

$$T(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n T(x_k) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n (y_k - y_{k+1}) = y_1,$$

also ist $y_1 \in T(K_E)$.
b) Wegen a) muß nur $K_F \subseteq \overline{T(K_E)}$ nachgewiesen werden.
Dazu sei $y_0 \notin \overline{T(K_E)}$. Da $\overline{T(K_E)}$ abgeschlossen, konvex und symmetrisch zum Nullpunkt ist gibt es nach dem Trennungssatz ein $y^* \in F^*$ mit

$$|\langle y, y^* \rangle| \leq 1 < |\langle y_0, y^* \rangle| \text{ für alle } y \in \overline{T(K_E)}.$$

Für $x \in K_E$ wird damit

$$|\langle x, T^*(y^*) \rangle| = |\langle T(x), y^* \rangle| \leq 1,$$

also $\|T^*(y^*)\| \leq 1$. Somit ist nach Voraussetzung auch $\|y^*\| \leq 1$. Also wird

$$1 < |\langle y_0, y^* \rangle| \leq \|y_0\| \|y^*\| \leq \|y_0\|,$$

also $y_0 \notin K_F$, was zu beweisen war.
(Bemerkung: Es wurde nur die Vollständigkeit von E benutzt.)

Satz. *Sind E,F Banachräume und ist $T : E \longrightarrow F$ stetig und linear, so sind folgende Bedingungen äquivalent:*
a) *$T(E)$ ist (norm-)abgeschlossen in F.*
b) *$T^*(F^*)$ ist schwach*-abgeschlossen in E^*.*
c) *$T^*(F^*)$ ist (norm)-abgeschlossen in E^*.*
Beweis. Es gelte a). Um b) zu beweisen genügt es,

$$(\text{Kern}(T))^\perp \subseteq T^*(F^*)$$

nachzuweisen. Dazu sei $x^* \in (\text{Kern}(T))^\perp$. Durch

$$\varphi(y) = \langle x, x^* \rangle \text{ für } y = T(x)$$

ist ein lineares Funktional auf $T(E)$ erklärt, von dem wir die Stetigkeit nachweisen wollen: Zunächst ist auf $T : E \longrightarrow T(E)$ der Satz von der offenen Abbildung anwendbar, es gibt also $r > 0$ mit

$$T(E) \cap K(0, r) \subseteq T(K_E).$$

Dann gibt es zu jedem $0 \neq y \in T(E)$ ein x mit $\|x\| < 1$ und

$$T(x) = \frac{y}{\|y\|} \frac{r}{2},$$

also ein $\overline{x} = \frac{2\|y\|}{r} x$ mit $y = T(\overline{x})$ und

$$\|\overline{x}\| \leq \frac{2}{r} \|y\|.$$

Damit ist schließlich für $y \in T(E)$

$$|\varphi(y)| = |\langle \overline{x}, x^* \rangle| \leq \|\overline{x}\| \|x^*\| \leq \frac{2}{r} \|y\| \|x^*\|,$$

sodaß φ stetig auf $T(E)$ ist. Nach dem Fortsetzungsatz von Hahn-Banach kann φ stetig auf F zu y^* fortgesetzt werden, und es gilt

$$\langle x, x^* \rangle = \langle T(x), y^* \rangle = \langle x, T^*(y^*) \rangle$$

für alle $x \in E$, also $x^* = T^*(y^*) \in T^*(F^*)$.
Daß aus b) c) folgt ist einfach.
Nun gelte c). Es sei $Z = \overline{T(E)}$ und $S : E \longrightarrow Z$ gegeben durch $S(x) = T(x)$, $x \in E$. Da $S(E)$ dicht in Z ist, ist

$$S^* : Z^* \longrightarrow E^*$$

injektiv. Zu jedem $z^* \in Z^*$ gibt es eine Fortsetzung $y^* \in F^*$, und für alle $x \in E$ ist

$$\langle x, T^*(y^*) \rangle = \langle T(x), y^* \rangle = \langle S(x), z^* \rangle 0 \langle x, S^*(z^*) \rangle.$$

Also ist $T^* = S^*$, und folglich haben T^* und S^* denselben Bildraum; dieser ist als abgeschlossener Teilraum von E^* vollständig, und $(S^*)^{-1}$ nach dem Satz von der offenen Abbildung stetig. Es existiert also $c > 0$ mit $c\|z^*\| \leq \|S^*(z^*)\|$, und das vorstehende Lemma, Teil b), angewandt auf $\frac{1}{c}S^*$ liefert die Offenheit von $\frac{1}{c}S$, also die von S. Insbesondere ist $S(E) = Z = T(E)$, also ist $T(E)$ abgeschlossen in F.

Folgerung. *Sind E,F Banachräume und ist $T : E \longrightarrow F$ stetig und linear, so sind äquivalent:*
a) $T(E) = F$.
b) *Es existiert $c > 0$ mit $\|T^*(y^*)\| \geq c\|y^*\|$ für alle $y^* \in F^*$.*
Beweis. a) gilt genau dann wenn $T(E)$ abgeschlossen und T^* injektiv ist, also genau dann wenn $T^*(F^*)$ abgeschlossen und T^* injektiv ist. Dann liefert der Satz von der offenen Abbildung die Stetigkeit von $(T^*)^{-1}$, also b).
Gilt umgekehrt b), so ist offensichtlich $T^*(F^*)$ vollständig, also abgeschlossen in E^*, also ist $T(E)$ abgeschlossen. Da T^* injektiv ist, ist $T(E)$ auch dicht in F.

28 Der Minimalmodul

Es seien E und F Banachräume und $T : E \longrightarrow F$ stetig und linear. Wie im Abschnitt über den Satz von der offenen Abbildung bilden wir

$$\widetilde{E} = E/_{\mathrm{Kern}(T)}, \ \|\widetilde{x}\| = \mathrm{dist}(x, \mathrm{Kern}(T)), \ \widetilde{T}(\widetilde{x}) = T(x).$$

$\widetilde{E}$ ist ein Banachraum und $\widetilde{T} : \widetilde{E} \longrightarrow T(E)$ ist linear, stetig und injektiv; wegen

$$\|\widetilde{T}(\widetilde{x})\| = \|T(x-z)\| \leq \|T\|\|x-z\| \text{ für alle } z \in \mathrm{Kern}(T)$$

gilt $\|\widetilde{T}\| \leq \|T\|$. Ist nun $T(E)$ abgeschlossen, so ist $(\widetilde{T})^{-1}$ stetig nach dem Satz von der offenen Abbildung, es existiert also $c > 0$ mit

$$\|T(x)\| \geq c\|\widetilde{x}\|.$$

Existiert umgekehrt ein solches c, so ist $T(E)$ vollständig, also in F abgeschlossen. Das größtmögliche c mit der genannten Eigenschaft, also

$$\gamma(T) := \inf\{\frac{\|T(x)\|}{\mathrm{dist}(x, \mathrm{Kern}(T))} : \ x \in E, \ x \notin \mathrm{Kern}(T)\}$$

heißt *Minimalmodul* von T, und es gilt:

Satz. *Unter den gegebenen Voraussetzungen ist $T(E)$ abgeschlossen genau dann wenn $\gamma(T) > 0$ gilt.*

Satz. *Sind E und F Banachräume, ist $T : E \longrightarrow F$ stetig und linear und existiert ein abgeschlossener Teilraum von G von F sodaß $T(E) \cap G = \{0\}$ und $T(E) \oplus G$ abgeschlossen ist, so ist $T(E)$ abgeschlossen.*
Beweis. $E \times G$ ist unter

$$\|(x,y)\| := \|x\| + \|y\|$$

ein Banachraum und $S : E \times G \longrightarrow F$, definiert durch

$$S(x,y) = T(x) + y$$

ist stetig. $S(E \times G) = T(E) \oplus G$ ist abgeschlossen, also $\gamma(S) > 0$. Für $x \notin \mathrm{Kern}(T)$ ist $(x,0) \notin \mathrm{Kern}(S)$, also

$$\|T(x)\| = \|S(x,0)\| \geq \gamma(s)\mathrm{dist}((x,0), \mathrm{Kern}(S)) = \gamma(S)\mathrm{dist}(x, \mathrm{Kern}(T)),$$

(beachte $\mathrm{Kern}(S) = \mathrm{Kern}(T) \times \{0\}$.) Es ist demnach $\gamma(T) \geq \gamma(S) > 0$, also $T(E)$ abgeschlossen.

Folgerung. *Besitzt $T(E)$ endliche Kodimension, so ist $T(E)$ abgeschlossen.*
Beweis. Hier genügt es zu bemerken, daß, wenn $\{\widetilde{b_1}, \cdots, \widetilde{b_k}\}$ eine Basis von $F/_{T(E)}$ ist, F direkte Summe von $T(E)$ und $\text{span}\{b_1, \cdots, b_k\}$ ist, und letztere ist abgeschlossen.

29 Fredholmoperatoren

Sind E und F Banachräume und $T : E \longrightarrow F$ linear und stetig, so heißt T *Fredholmoperator*, wenn

$$\begin{aligned} \dim \text{Kern}(T) &< \infty, \\ \text{codim } T(E) = \dim F/_{T(E)} &< \infty \end{aligned}$$

gilt. Die Zahl

$$\text{ind}(T) := \dim \text{Kern}(T) - \text{codim } T(E)$$

heißt *Index* von T.
Nach dem bisher bewiesenen besitzt jeder Fredholmoperator einen abgeschlossenen Bildraum und ist offen als Abbildung von E nach $T(E)$.

Hilfssatz. *Ist X ein Banachraum, M abgeschlossener Teilraum von X, N schwach***-abgeschlossener Teilraum von $X^\star$, so gilt*

$$\begin{aligned} M^\perp &\cong (X/_M)^\star, \\ ({}^\perp N)^\star &\cong X^\star/_N, \end{aligned}$$

wobei $\cong$ linear isometrisch bedeutet.
Beweis. Zum Nachweis der ersten Behauptung definieren wir $L : (X/_M)^\star \longrightarrow M^\perp$ durch

$$L(\widetilde{x}^\star) = \widetilde{x}^\star \circ \pi,$$

wobei $\pi(x) = \widetilde{x}$ die Quotientenabbildung von X nach $X/_M$ ist. $\widetilde{x}^\star \circ \pi$ ist als Komposition linearer Abbildungen linear, und für $x \in M$ ist $\pi(x) = \widetilde{0}$, also $\widetilde{x}^\star(\pi(x)) = 0$ und damit $L(\widetilde{x}^\star) \in M^\perp$. L ist, wie man leicht sieht, linear und surjektiv: für $x^\star \in M^\perp$ setze man

$$\widetilde{x}^\star(\widetilde{x}) = x^\star(x) \text{ für ein } x \in \widetilde{x}.$$

Wegen $M \subseteq \text{Kern}(x^\star)$ ist $\widetilde{x}^\star$ wohldefiniert und linear, und aus $\text{Kern}(\widetilde{x}^\star) = \pi(\text{Kern}(x^\star))$ und der Offenheit von π folgt die Abgeschlossenheit von $\text{Kern}(\widetilde{x}^\star)$, also die Stetigkeit von $\widetilde{x}^\star$. Außerdem ist gerade $L(\widetilde{x}^\star) = x^\star$. Weiter ist

$$|(L(\widetilde{x}^\star))(x)| = |\widetilde{x}^\star(\pi(x))| \leq \|\widetilde{x}^\star\|\|\pi(x)\| \leq \|\widetilde{x}^\star\|\|x\|,$$

also $\|L(\widetilde{x}^\star)\| \leq \|\widetilde{x}^\star\|$. Ist umgekehrt $\|\widetilde{x}\| = 1$, so existiert nach Definition von $\|\widetilde{x}\|$ zu $\varepsilon > 0$ ein $x_\varepsilon \in \widetilde{x}$ mit $\|x_\varepsilon\| < 1 + \varepsilon$, und damit wird

$$|\widetilde{x}^\star(\widetilde{x})| = |\widetilde{x}^\star(\pi(x_\varepsilon))| = |L(\widetilde{x}^\star)(x_\varepsilon)| \leq \|L(\widetilde{x}^\star)\|\|x_\varepsilon\| < (1+\varepsilon)\|L(\widetilde{x}^\star)\|,$$

woraus

$$\|\widetilde{x}^\star\| \leq \|L(\widetilde{x}^\star)\|$$

folgt. Also ist L eine Isometrie.
Zur zweiten Behauptung: ${}^\perp N$ ist ein abgeschlossener Teilraum von X. Jedes Element $n^\star \in ({}^\perp N)^\star$ läßt sich nach dem Satz von Hahn-Banach unter Erhaltung der Norm zu einem Element $x^\star$ fortsetzen, und diese wiederum liegt in einer wohlbestimmten Restklasse $\widetilde{x^\star}$ von $X^\star/_N$. Ist ${x_1}^\star$ eine weitere Fortsetzung von $n^\star$, so ist $x^\star - {x_1}^\star = 0$ auf ${}^\perp N$, also in $({}^\perp N)^\perp = \overline{N}^\star = N$, und somit ist $\widetilde{x^\star} = \widetilde{{x_1}^\star}$. Also ist durch die genannte Zuordnung eine lineare Abbildung

$$K : ({}^\perp N)^\star \longrightarrow X^\star/_N$$

definiert. Sie ist surjektiv: Ist $\widetilde{x^\star} \in X^\star/N$, so wähle man $x^\star \in \widetilde{x^\star}$, und die Einschränkung von $x^\star$ auf ${}^\perp N$ ergibt ein $n^\star$, das auf $\widetilde{x^\star}$ abgebildet wird. K ist eine Isometrie: denn einerseits ist

$$\|\widetilde{x}^\star\| \leq \|x^\star\| = \|n^\star\|,$$

(so kann $x^\star$ gewählt werden!), und umgekehrt wähle man zu $\widetilde{x}^\star$ und $\varepsilon > 0$ ein $x^\star$ mit

$$\|n^\star\| \leq \|x^\star\| \leq (1+\varepsilon)\|\widetilde{x}^\star\|.$$

Grenzübergang $\varepsilon \to 0$ ergibt die noch fehlende Ungleichung.

Satz. *Sind E,F Banachräume und ist T:E$\longrightarrow$ F linear und stetig, so ist T ein Fredholmoperator genau dann, wenn $T^\star$ ein solcher ist, und in diesem Fall gilt*

$$\text{ind}(T) = -\text{ind}(T^\star).$$

Beweis. Es ist

$$\begin{array}{rcccl} [\mathrm{Kern}(T)]^\star & = & [\,^\perp(T^\star(F^\star))]^\star & \cong & E^\star/_{T^\star(F^\star)} \\ \mathrm{Kern}(T^\star) & = & (T(E))^\perp & \cong & (F/_{T(E)})^\star \end{array}$$

nach dem Hilfssatz und den Nummern 24 und 25. Hieraus können alle Behauptungen abgelesen werden.

Satz. (Die Fredholmsche Alternative.) *Unter den Voraussetzungen des obigen Satzes ist*

$$T(x) = y$$

lösbar genau dann, wenn

$$y \in \,^\perp(\mathrm{Kern}(T^\star))$$

gilt, also genau dann, wenn

$$\langle y, y^\star \rangle = 0 \text{ für alle Lösungen von } T^\star(y^\star) = 0$$

ist. Ist x_0 *eine Lösung, so ist die Gesamtheit der Lösungen gleich* $x_0 +$ Kern(T)*, also ein affiner Teilraum endlicher Dimension.*
Entsprechend ist

$$T^\star(y^\star) = x^\star$$

lösbar genau dann, wenn

$$\langle x, x^\star \rangle = 0 \text{ für alle } x \in \mathrm{Kern}(T)$$

ist, und die Gesamtheit der Lösungen ist ein affiner Teilraum von $F^\star$ *endlicher Dimension. Der Index von* T *ist die Differenz der Dimensionen dieser Lösungsmannigfaltigkeiten.*
Beweis. Da $T(E)$ abgeschlossen ist, gilt

$$^\perp(\mathrm{Kern}(T^\star)) = \,^\perp(T(E)^\perp) = T(E),$$

und da $T^\star(F^\star)$ schwach*-abgeschlossen ist, analog

$$(\mathrm{Kern}(T))^\perp = (\,^\perp(T^\star(F^\star)))^\perp = T^\star(F^\star)).$$

Hieraus ergeben sich die Lösbarkeitsaussagen. Die restlichen Behauptungen sind trivial.

Sind E, F normiert, so ist der Raum $\mathcal{LC}(E, F)$ aller stetigen linearen Abbildungen von E nach F durch

$$\|T\| := \sup_{\|x\| \leq 1} \|T(x)\|$$

normiert (Addition und skalare Multiplikation punktweise erklärt). Ist F vollständig, so ist $(\mathcal{LC}(E, F), \|\cdot\|)$ ein Banachraum. Der folgende Satz besagt, daß die Menge der bijektiven Elemente von $\mathcal{LC}(E, F)$ offen ist, falls E (und damit F) vollständig ist:

Satz. *Sind E und F Banachräume, ist $T \in \mathcal{LC}(E, F)$ bijektiv und $S \in \mathcal{LC}(E, F)$ so, daß $\|T^{-1} \circ S\| < 1$ gilt, so ist $T + S$ bijektiv.*

Beweis. Wegen $\|T^{-1} \circ S\| < 1$ besitzt für jedes $y \in F$ die Gleichung

$$x + T^{-1}(S(x)) = T^{-1}(y)$$

nach dem Banachschen Fixpunktsatz genau eine Lösung, also auch

$$T(x) + S(x) = y$$

genau eine.

Man beachte, daß die Voraussetzung des Satzes erfüllt ist, falls $\|S\| < \|T^{-1}\|^{-1}$ gilt.

Satz. *Die Menge $\Phi(E, F) \subseteq \mathcal{L}(E, F)$ der Fredholmoperatoren ist offen, und die Abbildung $\operatorname{ind} : \Phi(E, F) \longrightarrow \mathbb{Z}$ ist stetig, also konstant auf den Zusammenhangskomponenten der Menge der Fredholmoperatoren.*

Beweis. Es sei T_0 ein Fredholmoperator. Dann gibt es abgeschlossene Untervektorräume G und H von E bzw. F mit

$$\begin{aligned} E &= \mathrm{Kern} T_0 \oplus G, \\ F &= T_0(E) \oplus H, \end{aligned}$$

$\dim H < \infty$ und $T_0(E) = T_0(G)$. Wir setzen $X = G \times H$, $\|x\| = \|g\| + \|h\|$ für $x = (g, h)$ und ordnen jedem $T \in \mathcal{L}(E, F)$ einen Operator $\overline{T} \in \mathcal{L}(X, F)$ gemäß

$$\overline{T}(g, h) = T(g) + h$$

zu. Für $T_1, T_2 \in \mathcal{L}(E, F)$ folgt leicht

$$\|\overline{T_1} - \overline{T_2}\| \leq \|T_1 - T_2\|.$$

$\overline{T_0}$ bildet X bijektiv auf F ab: jedes $f \in F$ ist von der Form $T_0(g) + h = \overline{T_0}(g, h)$, und aus $\overline{T_0}(g, h) = 0$ folgt $T_0(g) = 0$ und $h = 0$, also $g \in G \cap \mathrm{Kern}(T_0)$

und somit auch $g = 0$.
Nun existiert nach dem obigen Satz eine Umgebung von $\overline{T_0}$ in $\mathcal{L}(X, F)$ (etwa $K(\overline{T_0}, \|\overline{T_0}^{-1}\|^{-1})$), in der nur Bijektionen von X auf F liegen, also (nach der letzten Ungleichung) eine Umgebung von T_0 in $\mathcal{L}(E, F)$, deren sämtliche Bilder $\overline{T}$ Bijektionen sind.
Es sei nun T aus dieser Umgebung gewählt, daß also $\overline{T}$ bijektiv ist. Zunächst ist $G \times \{0\}$ abgeschlossen in X, also

$$T(G) = \overline{T}(G \times \{0\})$$

abgeschlossen in F. Aus der Surjektivität von $\overline{T}$ folgt leicht $F = T(G) + H$, und ist $z \in T(G) \cap H$, also $z = T(g) \in H$, so ist $\overline{T}(g, -z) = T(g) - z = 0$, also $g = 0$ und $z = 0$; die Summe ist also direkt, und aus $F = T(G) \oplus H = T_0(G) \oplus H$ schließt man

$$\mathrm{codim} T(G) = \mathrm{codim} T_0(G) = \mathrm{codim} T_0(E), \ \mathrm{codim} T(E) \leq \mathrm{codim} T(G),$$

also

$$\mathrm{codim} T(E) \leq \mathrm{codim} T_0(E) < \infty.$$

Ist $g \in G \cap \mathrm{Kern}(T)$, so folgt $\overline{T}(g, 0) = 0$, also $g = 0$ und damit $G \cap \mathrm{Kern}(T) = \{0\}$, woraus sich

$$\dim \mathrm{Kern}(T) \leq \dim \mathrm{Kern}(T_0) < \infty$$

ergibt. T ist also ein Fredholmoperator.
Schließlich ist $G \oplus \mathrm{Kern}(T)$ ein abgeschlossener Teilraum von E mit endlicher Kodimension, es gibt also einen endlichdimensionalen Teilraum Z mit

$$E = G \oplus \mathrm{Kern}(T) \oplus Z,$$

und es ist

$$\dim \mathrm{Kern}(T_0) = \dim \mathrm{Kern}(T) + \dim Z,$$

$$T(G) \subseteq T(E) = T(G \oplus Z).$$

Zusammenfassend erhält man

$$\mathrm{codim} T_0(E) = \mathrm{codim} T(G) = \mathrm{codim} T(E) + \dim T(E)/_{T(G)},$$

$$\dim T(E)/_{T(G)} = \dim T(Z \oplus G)/_{T(G)} = \dim Z,$$

$$\mathrm{ind}(T_0) = \mathrm{dimKern}(T) + \mathrm{dim}Z - (\mathrm{codim}T(E) + \mathrm{dim}Z) = \mathrm{ind}(T).$$

Im Beweis wurden folgende Beziehungen benutzt:
a)

$$\mathrm{dim}X/_M = \mathrm{dim}H \text{ falls } M \oplus H = X.$$

b) Ist $M \subseteq L \subseteq X$, so ist

$$\mathrm{dim}X/_M = \mathrm{dim}X/_L + \mathrm{dim}L/_M.$$

c) Ist $T : X \longrightarrow Y$ linear, stetig, injektiv und offen und $M \subseteq X$ abgeschlossen, so ist

$$\mathrm{dim}(T(X)/_{T(M)}) = \mathrm{dim}X/_M.$$

(Es sind alle vorkommenden Dimensionen als endlich vorausgesetzt.)

30 Kompakte Operatoren

Sind E, F normiert, so heißt der lineare Operator $T : E \longrightarrow F$ *kompakt*, wenn $T(K(0,1))$ in F relativ kompakt ist. Da relativ kompakte Mengen beschränkt sind, ist jeder kompakte Operator stetig. Ist $T(E)$ endlichdimensional, so heißt T *endlichdimensional*. Jeder stetige endlichdimensionale Operator ist kompakt. Jede der beiden folgenden Eigenschaften ist äquivalent zur Kompaktheit von T:
a) $T(B)$ ist relativ kompakt für jede beschränkte Teilmenge B von E.
b) Ist $(x_n)_{n=1}^\infty$ eine beschränkte Folge, so enthält $(T(x_n))_{n=1}^\infty$ eine konvergente Teilfolge.

Satz. (Schauder) *Sind E und F normiert und ist $T : E \longrightarrow F$ kompakt, so ist auch $T^\star : F^\star \longrightarrow E^\star$ kompakt. Ist F vollständig, so gilt auch die Umkehrung.*
Beweis. Es sei $(y_n^\star)_{n=1}^\infty$ eine beschränkte Folge in $F^\star$ und $x_n^\star = T^\star(y_n^\star)$. Dann ist für geeignetes $C \geq 0$

$$|\langle y, y_n^* \rangle| \leq C\|y\| \text{ für alle } n \in \mathbb{N},\ y \in E.$$

Ist K eine beliebige kompakte Teilmenge von F, so ist $(y_n^*|_K)_{n=1}^\infty$ gleichgradig stetig und gleichmäßig beschränkt, besitzt also nach dem Satz von Ascoli-Arzelà eine gleichmäßig konvergente Teilfolge. Speziell für $K = \overline{T(K(0,1))}$ erhalten wir für die entsprechende Teilfolge

$$\langle x, x_{n_k}^* \rangle = \langle T(x), y_{n_k}^* \rangle \to\ \varphi(x)\ (k \to \infty)$$

gleichmäßig auf $\overline{K(0,1)}$, und φ ist die Einschränkung eines stetigen linearen Funktionals auf die Einheitskugel. $(x_n^*)_{n=1}^\infty$ enthält also eine konvergente Teilfolge.
Ist für die Umkehrung F vollständig, so ist zunächst mit T^* auch T^{**} kompakt. Bezeichnen J_E bzw. J_F die kanonischen Einbettungen von E bzw. F in den jeweiligen Bidualraum, so ist $J_F(F)$ abgeschlossen in F^{**}, und wegen

$$T^{**}(J_E(x)) = J_F(T(x)) \ (x \in E)$$

ist $T(K(0,1))$ als isometrisches Bild (unter J_F^{-1}) der relativ kompakten Menge $T^{**}(J_E(K(0,1)))$ relativ kompakt.

Im folgenden bezeichnen wir mit Id stets die Identität als Abbildung einer Menge in sich; dabei muß aus dem Zusammenhang abgelesen werden, in welcher Menge diese definiert ist.

Satz. *Ist E ein Banachraum und $K{:}E\to E$ kompakt, so ist* $\mathrm{Id}-K$ *ein Fredholmoperator vom Index Null.*
Beweis. Ist $G = \mathrm{Kern}(\mathrm{Id}-K)$ nicht endlichdimensional, so gibt es nach dem Rieszschen Lemma eine Folge (x_n), $x_n \in G$ mit $\|x_n\| = 1$ und $\|x_n - x_m\| \geq 1$ für $n \neq m$. Wegen $x_n = K(x_n)$ müßte wegen der Kompaktheit von K diese eine konvergente Teilfolge enthalten, was nicht möglich ist. Nach dem Satz von Schauder ist K^* ebenfalls kompakt, sodaß auch $\dim\mathrm{Kern}(\mathrm{Id}-K)^*$ endlich ist. Wegen $\mathrm{Kern}(\mathrm{Id}-K)^* \cong E/_{(\mathrm{Id}-K)(E)}$ ist demnach $\mathrm{codim}(\mathrm{Id}-K)(E) < \infty$. Schließlich ist mit K auch λK kompakt für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$, und wegen der Stetigkeit des Index folgt

$$0 = \mathrm{ind}(\mathrm{Id}) = \mathrm{ind}(\mathrm{Id}-\lambda K) = \mathrm{ind}(\mathrm{Id}-K).$$

Es sei bemerkt, daß nach obigem Satz $\lambda\mathrm{Id}-K$ für jedes $\lambda \neq 0$ Fredholmoperator vom Index Null ist.

31 Eine Charakterisierung von Fredholmoperatoren

Satz. *Sind E und F Banachräume, so ist $T \in \mathcal{LC}(E,F)$ genau dann Fredholmoperator, wenn es $S_1, S_2 \in \mathcal{LC}(F,E)$ gibt, sodaß*

$$S_1T - \mathrm{Id} \text{ und } TS_2 - \mathrm{Id}$$

endlichdimensional (oder kompakt) als Abbildungen von E nach E bzw. von F nach F sind.

Beweis. Existieren Abbildungen mit den genannten Eigenschaften, so ist $S_1T \in \mathcal{LC}(E,E)$ Fredholmoperator (sogar mit Index Null) und Kern$T \subseteq$ KernS_1T, also Kern T endlichdimensional. Weiter ist $TS_2(F)$ endlich kodimensional (in F), also erst recht $T(E) \supseteq TS_2(F)$ und damit T Fredholmoperator.
Nun sei T Fredholmoperator. Wir zerlegen

$$E = \mathrm{Kern}T \oplus G,\ \dim\mathrm{Kern}T < \infty,$$
$$F = T(E) \oplus H,\ \dim H < \infty,$$

wobei alle Summanden abgeschlossen sind. $T : G \to T(E)$ ist bijektiv, also existiert $T^{-1} : T(E) \to G$ und ist stetig. Wir setzen $S : F \to E$ fest durch

$$y = T(x) + h \longrightarrow x \in G.$$

S ist linear und stetig, es ist $S(F) = G, S(H) = \{0\}$ und

$$(\mathrm{Id} - ST)(x) = x - ST(x) = 0 \text{ für } x \in G,$$
$$(\mathrm{Id} - ST)(x) = x \text{ für } x \in \mathrm{Kern}T.$$

Also ist $(\mathrm{Id} - ST)(E) = \mathrm{Kern}T$ und damit $\mathrm{Id} - ST$ endlichdimensional.
Entsprechend ist

$$(\mathrm{Id} - TS)(y) = y \text{ für } y \in H,$$
$$(\mathrm{Id} - TS)(y) = 0 \text{ für } y \in T(E),$$

also $(\mathrm{Id} - TS)(F) = H$ und damit auch dieser Operator endlichdimensional.

Bemerkung. Eigentlich sollte man zwei Sätze formulieren:
1. *Gibt es $S_1, S_2 \in \mathcal{LC}(F,E)$, sodaß S_1T und TS_2 Fredholmoperatoren sind, so ist auch T einer.*
2. *Ist T Fredholmoperator, so gibt es $S \in \mathcal{LC}(F,E)$, sodaß ST und TS beide von der Form* Id+ *endlichdimensional sind.*

Folgerung. *Sind E,F Banachräume, ist $T : E \to F$ Fredholmoperator und $K : E \to F$ kompakt, so ist $T + K$ Fredholmoperator.*
Beweis. Nach obiger Bemerkung gibt es $S \in \mathcal{LC}(E,F)$, sodaß

$$E_1 = ST - \mathrm{Id},\ E_2 = TS - \mathrm{Id}$$

beide endlichdimensional sind. Dann ist aber

$$S(T + K) - \mathrm{Id} = E_1 + SK,$$
$$(T + K)S - \mathrm{Id} = E_2 + KS,$$

und $E_1 + SK$ bzw. $E_2 + KS$ sind kompakt. Also ist $(T + K)$ ein Fredholmoperator.

32 Endomorphismen, Resolvente, Spektrum

Im folgenden wird die Invertierbarkeit von

$$\lambda \mathrm{Id} - A$$

untersucht für $A \in \mathcal{LC}(E) := \mathcal{LC}(E, E)$; dabei sei E stets ein reeller oder komplexer Banachraum.

Definition. Die Menge $\{\lambda : \lambda \mathrm{Id} - A \text{ ist bijektiv}\}$ heißt *Resolventenmenge* $\rho(A)$ von A. $\mathbb{C} \setminus \rho(A)$ (bzw. $\mathbb{R} \setminus \rho(A)$) heißt *Spektrum* $\sigma(A)$ von A.

Nach dem Homöomorphiesatz von Banach folgt aus der Invertierbarkeit die Stetigkeit von

$$R_\lambda = R_\lambda(A) = (\lambda \mathrm{Id} - A)^{-1},$$

der *Resolvente* von A.
Eine feinere Unterteilung von $\sigma(A)$ kann vermittels des Abbildungsverhaltens von $\lambda \mathrm{Id} - A$ vorgenommen werden:
Ist $\lambda \mathrm{Id} - A$ nicht injektiv, so heißt λ *Eigenwert* von A; jedes $x \neq 0$ aus $\mathrm{Kern}(\lambda \mathrm{Id} - A)$ heißt zugehöriges *Eigenelement*. Die Menge der Eigenwerte heißt *Punktspektrum* $\sigma_p(A)$.
Ist $\lambda \mathrm{Id} - A$ injektiv und $(\lambda \mathrm{Id} - A)(E)$ dicht in E, aber von E verschieden, so zählt man λ zum *kontinuierlichen Spektrum* $\sigma_c(A)$.
Den Rest nennt man *Residualspektrum* $\sigma_r(A)$.
Ist $\lambda \mathrm{Id} - A$ Fredholmoperator, so nennt man λ auch *Fredholmpunkt* von A. (Die Menge der Fredholmpunkte ist eine Obermenge der Resolventenmenge).
Im folgenden Satz untersuchen wir unter anderem R_λ als Funktion von λ.

Satz. *Für jedes $A \in \mathcal{LC}(E)$ ist $\sigma(A)$ kompakt. Für $\lambda_0 \in \rho(A)$ und $|\lambda - \lambda_0| < \|R_{\lambda_0}\|^{-1}$ gilt die Potenzreihenentwicklung*

$$R_\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (\lambda - \lambda_0)^n R_{\lambda_0}^{n+1},$$

wobei diese Reihe absolut und lokal gleichmäßig konvergiert.
Für $|\lambda| > \inf\limits_n \sqrt[n]{\|A^n\|}$ gilt $\lambda \notin \sigma(A)$, (sodaß $\sigma(A)$ beschränkt ist), und

$$R_\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{\lambda^{n+1}}.$$

Für $|\lambda| > \|A\|$ gilt schließlich

$$\|R_\lambda\| \leq \frac{1}{|\lambda| - \|A\|}.$$

Beweis. Ist $\lambda_0\mathrm{Id} - A$ invertierbar, so ist nach einem früheren Satz $\lambda\mathrm{Id} - A$ invertierbar, falls

$$\|\lambda\mathrm{Id} - A - (\lambda_0\mathrm{Id} - A)\| = |\lambda - \lambda_0| < \|R_{\lambda_0}\|^{-1}$$

ist. Insbesondere ist $\rho(A)$ offen, also $\sigma(A)$ abgeschlossen. Weiter ist für $|\lambda - \lambda_0| < \|R_{\lambda_0}\|^{-1}$ die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\lambda - \lambda_0|^n \|R_{\lambda_0}\|^{n+1}$$

lokal gleichmäßig in $K(\lambda_0, \|R_{\lambda_0}\|^{-1})$ konvergent, also konvergiert erst recht

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (\lambda - \lambda_0)^n R_{\lambda_0}^{n+1}$$

in $\mathcal{LC}(E)$. Nun ist $y = R_\lambda(x)$ genau dann, wenn

$$y = R_{\lambda_0}(x) - (\lambda - \lambda_0) R_{\lambda_0}(x)$$

gilt, woraus mithilfe der Neumannschen Reihe für $(\lambda - \lambda_0)R_{\lambda_0}$

$$R_\lambda(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (\lambda - \lambda_0)^n R_{\lambda_0}^{n+1}(x), \ x \in E$$

folgt.
Ist $|\lambda| > \inf \sqrt[n]{\|A^n\|}$, so gibt es n_0 mit

$$|\lambda| > \sqrt[n_0]{\|A^{n_0}\|}.$$

Die Gleichung $\lambda x - A(x) = y$ ist äquivalent zu

$$x = \frac{1}{\lambda} A(x) + \frac{1}{\lambda} y =: T(x),$$

und es ist

$$T^{n_0}(x) = \frac{A^{n_0}}{\lambda^{n_0}}(x) + \sum_{k=0}^{n_0 - 1} \frac{A^k}{\lambda^{k+1}}(y).$$

Deshalb ist T^{n_0} eine Kontraktion mit Kontraktionskonstante $\frac{\|A^{n_0}\|}{\lambda^{n_0}}$; nach dem verallgemeinerten Fixpunktsatz von Banach hat obige Gleichung für jedes y genau eine Lösung, also ist $\lambda\mathrm{Id} - A$ invertierbar. Weiter ist

$$R_\lambda(y) = x = \lim_{n\to\infty} T^n(\frac{1}{\lambda} y) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{A^k}{\lambda^{k+1}}(y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{\lambda^{k+1}}(y).$$

Die Darstellung der Resolvente konvergiert sogar absolut in $\mathcal{LC}(E)$:
Mit dem oben gewählten n_0 kann jedes $k \in \mathbb{N}$ geschrieben werden als $k = jn_0 + r$ mit $0 \leq r \leq n_0 - 1$, womit mit einer geeigneten Konstanten $C \geq 0$

$$\frac{\|A^k\|}{|\lambda|^k} \leq \frac{\|A^r\|}{|\lambda|^r} \frac{\|A^{n_0}\|^j}{(|\lambda|^{n_0})^j} \leq C \frac{\|A^{n_0}\|^j}{(|\lambda|^{n_0})^j}$$

folgt. Also wird

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|A^k\|}{|\lambda|^k} \leq \frac{C}{|\lambda|} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{\|A^{n_0}\|}{(|\lambda|^{n_0})} \right)^j = \frac{C}{|\lambda|} \frac{1}{1 - \frac{\|A^{n_0}\|}{|\lambda|^{n_0}}},$$

woraus die Behauptung folgt. Die letzte Ungleichung ist einfach nachzuprüfen.

Aus der gleichen Rechnung wie eben folgt übrigens

$$\limsup_{k \to \infty} \|A^k\|^{\frac{1}{k}} \leq \|A^n\|^{\frac{1}{n}}$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$, also

$$\lim_{k \to \infty} \|A^k\|^{\frac{1}{k}} = \inf_n \|A^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

Satz. *Ist* $E \neq \{0\}$ *ein komplexer Banachraum und* $A \in \mathcal{LC}(E)$, *so ist* $\sigma(A) \neq \emptyset$.
Beweis. Ist $\rho(A) = \mathbb{C}$, so ist für jedes $\varphi \in E^\star$ und jedes $x \in E$ die Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, definiert durch

$$f(z) = \varphi(R_z(x)),$$

eine ganze Funktion, die für $|z| > \|A\|$ wegen

$$|f(z)| \leq \|\varphi\| \|x\| \|R_z\| \leq \frac{\|\varphi\| \|x\|}{|z| - \|A\|}$$

auf $\mathbb{C}$ beschränkt, also nach dem Satz von Liouville konstant ist. Grenzübergang $|z| \to \infty$ liefert $f \equiv 0$. Dann ist aber $R_z = 0$, was nur im Fall $E = \{0\}$ möglich ist.

Bemerkungen. a) Für reelle Banachräume ist der Satz i.a. falsch, wie $E = \mathbb{R}^2$ zeigt. Hier ist für

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\lambda \mathrm{Id} - A$ stets invertierbar.
b) Man nennt $r(A) := \sup_{\lambda\in\sigma(A)} |\lambda|$ den *Spektralradius* von A. Aus dem ersten Satz dieses Abschnitts folgt

$$r(A) \leq \inf_n \|A^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

Da nun f aus dem Beweis des obigen Satzes holomorph auf $\rho(A)$ ist, gilt die Laurententwicklung

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{z^k} \varphi(A^k(x))$$

für alle z mit $|z| > r(A)$. Wäre $r(A) < \inf_n \|A^n\|^{\frac{1}{n}}$, so wäre diese Reihe insbesondere für ein positives z_0 mit $z_0 < \inf_n \|A^n\|^{\frac{1}{n}}$ konvergent, also die Folge

$$\frac{\varphi(A^n(x))}{z_0^n} = \varphi\left(\frac{A^n(x)}{z_0^n}\right)$$

beschränkt für jedes $\varphi \in E^\star$ und jedes $x \in E$. Die Menge

$$\left\{\frac{A^n(x)}{z_0^n} : n \in \mathbb{N}\right\}$$

ist dann schwach, also in der Norm beschränkt und es gibt $\gamma(x) \geq 0$ mit

$$\|A^n(x)\| \leq \gamma(x) z_0^n, \ n \in \mathbb{N}, \ x \in E.$$

Es folgt die punktweise Beschränktheit der Operatorfolge $\left(\frac{A^n}{z_0^n}\right)$, also deren Beschränktheit; es gibt demnach $\gamma \geq 0$ mit

$$\|A^n\| \leq \gamma z_0^n,$$

was

$$\lim_{n\to\infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}} \leq z_0 < \inf_{n\in\mathbb{N}} \|A^n\|^{\frac{1}{n}}$$

nach sich zieht. Dies ist ein Widerspruch, und es folgt

$$r(A) = \lim_{n\to\infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}} = \inf_{n\in\mathbb{N}} \|A^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

c) Es gibt $\lambda \in \sigma(A)$ mit $|\lambda| = r(A)$.

Satz. *Ist E ein Banachraum und $A \in \mathcal{LC}(E)$, so ist $\sigma(A) = \sigma(A^\star)$.*
Beweis. Es ist $\lambda \mathrm{Id} - A$ injektiv (surjektiv) genau dann, wenn $\lambda \mathrm{Id} - A^\star$ surjektiv (injektiv) ist. Also gilt $\rho(A) = \rho(A^\star)$.

d) Ist K kompakt, so ist jedes $\lambda \neq 0$ im Spektrum Eigenwert. Ist K zusätzlich nicht endlichdimensional, so gilt $0 \in \sigma(K)$.

33 Die Rieszsche Theorie kompakter Endomorphismen

Ist E ein Banachraum und $K \in \mathcal{LC}(E)$ kompakt, so ist für jedes $\lambda \neq 0$

$$\lambda \mathrm{Id} - K$$

samt Adjungiertem und sämtlichen Potenzen (auch der des Adjungierten) Fredholmoperator mit Index Null. Jedes $\lambda \neq 0$ aus $\sigma(K)$ ist Eigenwert.
Die Räume ($\lambda \neq 0$ fest)

$$N_n = \mathrm{Kern}(\lambda \mathrm{Id} - K)^n,\ N_n^{(\star)} = \mathrm{Kern}(\lambda \mathrm{Id} - K^\star)^n$$

sind aufsteigend, endlichdimensional und abgeschlossen.
Die Räume

$$B_n = (\lambda \mathrm{Id} - K)^n(E),\ B_n^{(\star)} = (\lambda \mathrm{Id} - K^\star)^n(E^\star)$$

sind absteigend, endlich kodimensional und schwach*-abgeschlossen.
Außerdem gilt

$$N_n^{(\star)} = B_n^\perp \cong (E/_{B_n})^\star\,,$$
$$(N_n)^\perp = (\,^\perp(B_n^{(\star)}))^\perp = B_n^{(\star)},$$

also auch

$$E^\star/_{B_n^{(\star)}} \cong (\,^\perp(B_n^{(\star)}))^\star = (N_n)^\star.$$

Hieraus ergibt sich

$$\mathrm{dim} N_n = \mathrm{codim} B_n = \mathrm{dim} N_n^{(\star)} = \mathrm{codim} B_n^{(\star)}$$

für jedes $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Hilfssatz. *Ist $K \in \mathcal{LC}(E)$ kompakt und $\lambda \neq 0$, so gibt es ein minimales $p = p(K, \lambda) \in \mathbb{N}$ mit*

$$N_{p+1} = N_p.$$

Diese Zahl heißt Nullkettenlänge von $\lambda \mathrm{Id} - K$ Weiter gilt sogar $N_{p+k} = N_p$ für alle $k \in \mathbb{N}$.
Beweis. Gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$N_n \subsetneqq N_{n+1},$$

so existiert nach dem Rieszschen Lemma eine Folge $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ mit $\|x_n\| = 1$, $x_{n+1} \in N_{n+1} \setminus N_n$ und dist $(n_{n+1}, N_n) \geq 1$. Für $m > n$ ist dann

$$K(x_m) - K(x_n) = \lambda x_m - (\lambda x_n - (\lambda x_n - K(x_n) + \lambda x_m - K(x_m),$$

und der Inhalt der Klammer liegt in N_{m-1}. Es folgt $\|K(x_m) - K(x_n)\| \geq |\lambda|$, sodaß $K(x_n))_{n=1}^{\infty}$ keine konvergente Teilfolge enthalten kann. Also gibt es ein kleinstes $p \in \mathbb{N}$ mit $N_{p+1} = N_p$. Für diese p gilt auch $N_{p+2} = N_p$:
$(\lambda \mathrm{Id} - K)^{p+2}(x) = 0$ impliziert $(\lambda \mathrm{Id} - K)^{p+1}(\lambda \mathrm{Id} - K)(x) = 0$, also $(\lambda \mathrm{Id} - K)(x) \in N_{p+1} = N_p$. Dann ist aber $(\lambda \mathrm{Id} - K)^{p+1}(x) = 0$, also $x \in N_{p+1}$. Durch Induktion folgt die Behauptung.

Satz. *Ist E ein Banachraum, $K \in \mathcal{LC}(E)$ kompakt und $\lambda \neq 0$, so gilt für die Nullkettenlänge p von $\lambda \mathrm{Id} - K$*

$$N_{p+k} = N_p, \;\; B_{p+k} = B_p,$$
$$N_{p+k}^{(\star)} = N_p^{(\star)}, \;\; B_{p+k}^{(\star)} = B_p^{(\star)}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$. Weiter ist $E = N_p \oplus B_p$, und $\lambda \mathrm{Id} - K$ bildet B_p bijektiv auf sich und N_p in sich ab. Entsprechendes gilt für $E^\star = N_p^{(\star)} \oplus B_p^{(\star)}$.
Beweis. Da die Folgen der betrachteten Räume ab-bzw. aufsteigend sind und ihre Dimensionen bzw. Kodimensionen übereinstimmen, sind die behaupteten Gleichungen offensichtlich richtig.
Ist $x \in B_p$ also $x = (\lambda \mathrm{Id} - K)(x')$, so ist

$$(\lambda \mathrm{Id} - K)(x) = (\lambda \mathrm{Id} - K)^p(\lambda \mathrm{Id} - K)(x') \in B_p.$$

Ist umgekehrt $y \in B_p$ gegeben, so ist $y \in B_{p+1}$, also

$$y = (\lambda \mathrm{Id} - K)\left[(\lambda \mathrm{Id} - K)^p(x)\right]$$

für ein $x \in E$, also y tatsächlich Bild unter $\lambda \mathrm{Id} - K$ eines Elementes aus B_p. $\lambda \mathrm{Id} - K$ ist also als Abbildung von B_p in sich surjektiv, und als Fredholmoperator vom Index Null auch injektiv.
$x \in N_p$ zieht $x \in N_{p+1}$ nach sich, woraus $(\lambda \mathrm{Id} - K)(x) \in N_p$ folgt.
Ist $x \in N_p \cap B_p$, so ist $x' = (\lambda \mathrm{Id} - K)^p(x)$ in B_p, also $x' = 0$ und damit $x = 0$. Es ist folglich $N_p \cap B_p = \{0\}$.
Jedes $x \in E$ schreiben wir in der Form (mit $L = (\lambda \mathrm{Id} - K)|_{B_p}$)

$$x = x - L^{-p}(\lambda \mathrm{Id} - K)^p(x) + L^{-p}(\lambda \mathrm{Id} - K)^p(x).$$

Der letzte Summand liegt offenbar in B_p (da L^{-p} den Raum B_p auf sich abbildet), und der Rest liegt wegen

$$(\lambda \mathrm{Id} - K)^p\left\{x - L^{-p}(\lambda \mathrm{Id} - K)^p(x)\right\} = 0$$

in N_p.
Die Aussagen über $E^\star$ beweist man genauso.

Bemerkung. Mit Hilfe der eben benutzten Projektion

$$P = L^{-p}(\lambda \mathrm{Id} - K)^p$$

von E auf B_p ('längs N_p') kann K zerlegt werden in der Form

$$K = KP + K(\mathrm{Id} - P),$$

wobei KP kompakt ist und E in B_p abbildet und $K(\mathrm{Id} - P)$ den Raum E in N_p abbildet, also endlichdimensional ist. Weiter ist $\Lambda\mathrm{Id} - KP$ stetig invertierbar mit der Inversen

$$L^{-1}P + \frac{1}{\lambda}(\mathrm{Id} - P),$$

also ist insbesondere λ kein Eigenwert von KP.

34 Holomorphe vektorwertige Funktionen

Es sei $G \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : G \to E$, E ein komplexer (poly-)normierter Raum. f heißt im Punkt $z_0 \in G$ *komplex differenzierbar*, wenn

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} =: f'(z_0)$$

existiert. Ist f in jedem Punkt von G komplex differenzierbar, so heißt f in G *holomorph*. Ist f in z_0 differenzierbar, so ist f dort stetig, und für jedes $\varphi \in E^\star$ ist $\varphi \circ f$ eine komplexwertige holomorphe Funktion, falls f holomorph ist, und es gilt $(\varphi \circ f)'(z) = \varphi(f'(z))$. Hiervon gilt, falls E vollständig ist, auch die Umkehrung:
Satz. *Ist E ein Banachraum, $\varphi \circ f$ in G holomorph für jedes $\varphi \in E^\star$, so ist f in G holomorph.*
Beweis. E sei $z_0 \in G$ fixiert und $r > 0$ so gewählt, daß $\overline{K(z_0, r)} \subseteq G$ gilt. Γ bezeichne den positiv orientierten Rand von $K(z_0, r)$. Da $\varphi \circ f$ auf Γ beschränkt ist für jedes $\varphi \in E^\star$, ist f auf Γ schwach beschränkt, also beschränkt. Es existiert also $C > 0$ mit $\|f(z)\| \leq C$ für alle $z \in \Gamma$. Für $|z - z_0| < r$ und $\varphi \in E^\star$ folgt nach der Cauchyschen Integralformel

$$(\varphi \circ f)(z) = \frac{1}{2\pi\imath} \int_\Gamma \frac{(\varphi \circ f)(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta,$$

Benutzt man diese Formel für z_0, z, w mit $0 < |z - z_0| < \frac{r}{2}$ und $0 < |w - z_0| < \frac{r}{2}$, so erhält man

$$\varphi\left(\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} - \frac{f(w)-f(z_0)}{w-z_0}\right) = \frac{1}{2\pi\imath}\int_\Gamma (\varphi \circ f)(\zeta)\frac{z-w}{(\zeta-z)(\zeta-w)(\zeta-z_0)}d\zeta$$

und hieraus

$$\left|\varphi\left(\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} - \frac{f(w)-f(z_0)}{w-z_0}\right)\right| \leq \frac{4\|\varphi\|C}{r^2}|z-w|$$

für *jedes* $\varphi \in E^\star$. Hieraus folgt

$$\left\|\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} - \frac{f(w)-f(z_0)}{w-z_0}\right\| \leq \frac{4C}{r^2}|z-w|,$$

daß also f im Punkt z_0 komplex differenzierbar ist.

Entsprechend beweist man:

Satz. *Sind E,F komplexe Banachräume, ist $G \subseteq \mathbb{C}$ offen und $A : G \to \mathcal{LC}(E,F)$, so sind äquivalent:*
a) *Für jedes $x \in E, \varphi \in E^\star$ ist $(\varphi \circ A(z))(x)$ in G holomorph (als Funktion nach $\mathbb{C}$).*
b) *Für jedes $x \in E$ ist $A(z)(x)$ holomorph in G (als Funktion nach F).*
c) *$A(z)$ ist holomorph (als Funktion nach $\mathcal{LC}(E,F)$.*

Beispiel. Ist E ein Banachraum und $T \in \mathcal{LC}(E)$, so ist

$$R(z) := R_z = (z\mathrm{Id} - T)^{-1}$$

holomorph auf der Resolventenmenge $\rho(T)$. Dies folgt aus der Potenzreihenentwicklung für R_z oder direkt aus der sogenannten *Resolventengleichung*

$$(z_0 - z)R_z R_{z_0} = R_z - R_{z_0},$$

die aus

$$(z_0 - z)R_z = R_z(z_0\mathrm{Id} - T) - \mathrm{Id}$$

durch Multiplikation mit R_{z_0} von rechts folgt. Es ergibt sich

$$R'(z_0) = -R_{z_0}^2,$$

also speziell im Fall $E = \mathbb{C}$ was zu erwarten war.
Wie im Fall $E = \mathbb{C}$ wird das Kurvenintegral

$$\int_\Gamma f(z)dz$$

erklärt: ist $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ eine Funktion und $f : \gamma([a, b]) \to E$ sowie $\mathcal{Z} = \{a < t_1 \cdots < t_n = b\}$ eine Zerlegung dieses Intervalls mit einem passenden Satz $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_n)$ von Zwischenpunkten, (also $\tau_k \in [t_{k-1}, t_k]$), so heißt

$$\sigma_f(\mathcal{Z}, \tau) = \sum_{k=1}^{n} f(\gamma(\tau_k))(\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1}))$$

eine zugehörige *Zwischensumme*. Gibt es ein $J \in E$ mit:
Zu jedem $\varepsilon > 0$ *gibt es ein* $\delta > 0$ *mit*

$$\|\sigma_f(\mathcal{Z}, \tau) - J\| < \varepsilon \text{ für alle } (\mathcal{Z}, \tau) \text{ mit} |\mathcal{Z}| < \delta,$$

$(|\mathcal{Z}| = \max_k\{t_k - t_{k-1} : 1 \leq k \leq n\})$, so schreiben wir

$$J = \int_a^b f(\gamma(t))d\gamma(t)$$

und nennen f bezüglich γ integrierbar. Ist $\tilde{\gamma} : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ eine weitere Funktion, zu der es eine stetige, monoton wachsende Funktion $h : [a, b] \to [\alpha, \beta]$ gibt mit $\gamma(t) = \tilde{\gamma}(h(t))$ und $h(a) = \alpha, h(b) = \beta$, so gilt

$$\int_a^b f(\gamma(t))d\gamma(t) = \int_\alpha^\beta f(\tilde{\gamma}(t))d\tilde{\gamma}(t).$$

(Falls eines der beiden Integrale existiert, existiert auch das andere). Ist Γ die Klasse aller in obiger Weise miteinander in Beziehung stehenden Funktionen γ, so kann

$$\int_\Gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))d\gamma(t)$$

gesetzt werden; f heißt dann längs Γ integrierbar. Jedes solche Γ heißt eine *Kurve* in $\mathbb{C}$, und ein zugehöriges γ eine *Parameterdarstellung* dieser Kurve. Von der Parameterdarstellung unabhängig sind neben dem Integral auch der *Träger* von Γ, $|\Gamma| := \gamma([a, b])$ sowie *Anfangspunkt* $\gamma(a)$ und *Endpunkt* $\gamma(b)$. Stimmen letztere überein, so heißt Γ geschlossen. Gibt es eine Parameterdarstellung von beschränkter Variation, ist also

$$\sup_{mcZ}\{\sum_{k=1}^{n} |\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1}|\} < \infty,$$

so heißt Γ *rektifizierbar* und dieses Supremum die *Länge* $l(\Gamma)$ dieser Kurve. (Sie ist unabhängig von γ). Das eben definierte Integral hat die ('üblichen')

Eigenschaften:
1)

$$\int_\Gamma (cf(z) + dg(z))dz = c\int_\Gamma f(z)dz + d\int_\Gamma g(z)dz$$

2) *Aus* $\lim_{n\to\infty} f_n(z) = f(z)$ *gleichmäßig auf* $|\Gamma|$ *folgt*

$$\int_\Gamma f(z)dz = \lim_{n\to\infty}\int_\Gamma f_n(z)dz.$$

Die Existenz des Integrals auf der linken Seite ist Teil der Behauptung!
3)

$$\left\|\int_\Gamma f(z)dz\right\| \le \int_\Gamma \|f(z)\|ds \le \sup_{z\in|\Gamma|}\|f(z)\|l(\Gamma).$$

4) *Sind* $a : |\Gamma| \to \mathbb{C}$ *und* $f : |\Gamma| \to E$ *längs* Γ *integrierbar, so auch* af.
5) *Ist* f *längs* Γ *integrierbar und* $A : E \to F$ *in* $\mathcal{LC}(E, F)$, *so ist auch* $A(f(z))$ *längs* Γ *integrierbar, und es gilt*

$$\int_\Gamma A(f(z))dz = A\left(\int_\Gamma f(z)dz\right).$$

Sind $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n$ endlich viele Kurven und $f : \bigcup_k |\Gamma_k| \to E$ längs jeder Kurve Γ_k integrierbar, so setzt man

$$\int_{\bigcup_k |\Gamma_k|} f(z)dz = \sum_{k=1}^n \int_{\Gamma_k} f_k(z)dz.$$

Satz. *Ist* E *ein Banachraum,* Γ *rektifizierbar und* $f : |\Gamma| \to E$ *stetig, so ist* f *längs* Γ *integrierbar.*
Beweis. Man setzt

$$M_\delta = \overline{\{\sigma(\mathcal{Z}, \tau) : |\mathcal{Z}| \le \delta, \tau \text{ passend zu } \mathcal{Z}\}}.$$

Trivialerweise ist $M'_\delta \subseteq M_\delta$ für $\delta' \le \delta$, und es gilt

$$\mathrm{diam} M_\delta \le 2\varepsilon(\delta)l(\Gamma),$$

wobei $\varepsilon(\delta)$ der Stetigkeitsmodul von f ist. Aus dem Cantorschen Durchschnittssatz folgt

$$\bigcap_\delta M_\delta = \{J\},$$

und J ist das gesuchte Integral.

Satz. (Cauchyscher Integralsatz). *Ist $G \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f : G \to E$ holomorph (E Banachraum), und Γ eine stetige, rektifizierbare, geschlossene in G nullhomotope Kurve in G, so gilt*

$$\int_\Gamma f(z)dz = 0.$$

Beweis. Für jedes $\varphi \in E^\star$ gilt

$$\varphi\left(\int_\Gamma f(z)dz\right) = \int_\Gamma \varphi(f(z))dz = 0$$

nach dem klassischen Cauchyschen Integralsatz. Hieraus folgt die Behauptung.

Satz. (Cauchysche Integralformeln). *Unter den Voraussetzungen des letzten Satzes gilt für $z \notin |\Gamma|$*

$$n(\Gamma, z)f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi\imath}\int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}}d\zeta.$$

Dabei bedeutet $n(\Gamma, z)$ die Umlaufzahl von z bezüglich Γ,

$$n(\Gamma, z) = \frac{1}{2\pi\imath}\int_\Gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z}.$$

Beweis. Wie im klassischen Fall gilt die erste Cauchysche Formel

$$n(\Gamma, z)f(z) = \frac{1}{2\pi\imath}\int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z},$$

(Beweis wie oben). Hieraus folgt, daß f beliebig oft differenzierbar ist (mit holomorphen Ableitungen), und durch Differentiation unter dem Integralzeichen auch die restlichen Formeln.

Aus der ersten Cauchyschen Formel folgt
Satz. (Weierstraß). *Sind die Funktionen f_n in G holomorph und gilt*

$$f(z) = \lim_{n\to\infty} f_n(z)$$

lokal gleichmäßig in G, so ist F in G holomorph.

Satz. (Taylorentwicklung). *Ist f in G holomorph und $z_0 \in G$, so gilt für $|z - z_0| < \operatorname{dist}(z_0, \delta G) =: R$*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$$

mit

$$a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}.$$

Die Reihe konvergiert lokal gleichmäßig absolut in G.
Beweis. Für $\varepsilon > 0$ (hinreichend klein), $|z - z_0| < R - \varepsilon$, $|\zeta - z_0| = R - \varepsilon$ gilt

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - z_0)(1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0})} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^k}{(\zeta - z_0)^{k+1}}.$$

Wählt man für Γ den Rand des Kreises um z_0 mit Radius $R - \varepsilon$, einmal in mathematisch positiven Sinn durchlaufen, so folgt

$$f(z) = \frac{1}{2\pi\imath} \int_\Gamma \frac{f(\zeta}{\zeta - z_0} d\zeta = \sum_{k=0}^{\infty} (z - z_0)^k \frac{1}{2\pi\imath} \int_\Gamma \frac{f(\zeta}{\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta.$$

Hieraus folgt unter Verwendung der Cauchyschen Formeln die Behauptung, wenn man noch beachtet, daß aus ihnen

$$\|f^{(k)}(z_0)\| \leq \frac{k!}{(R - \varepsilon)^{k+1}} \max_{\zeta \in |\Gamma|} \|f(\zeta)\|,$$

also

$$\|a_k\| \leq \frac{M_\varepsilon}{(R - \varepsilon)^k}, \;\; M_\varepsilon = \max_{\zeta \in |\Gamma|} \|f(\zeta)\|$$

folgt.

Als teilweise Umkehrung gilt:

Satz. *Ist E ein Banachraum, $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ eine Folge in E und $R \in [0, \infty]$ definiert durch*

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n \to \infty} \|a_n\|^{\frac{1}{n}},$$

so ist

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

in $K(z_0, R)$, lokal gleichmäßig absolut konvergent, und es gilt

$$f^{(n)}(z_0) = n! a_n, \;\; n \geq 0.$$

Die Reihe divergiert für $|z - z_0| > R$.
Beweis. Zu hinreichend kleinem $\varepsilon > 0$ gibt es n_0 mit

$$\|a_n\| < \frac{1}{(R - \frac{\varepsilon}{2})^n} \text{ für } n \geq n_0.$$

Für diese n und $|z - z_0| < r - \varepsilon$ gilt

$$|z - z_0|^n \|a_n\| < \frac{|z - z_0|^n}{(R - \frac{\varepsilon}{2})^n}, \; n \geq n_0,$$

woraus die gleichmäßige Konvergenz von

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|a_n\| |z - z_0|^n$$

auf $\overline{K(z_0, R - \varepsilon)}$ folgt. Für $|z - z_0| > R$ gibt es unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ mit

$$\|a_n\| |z - z_0|^n > 1,$$

sodaß die Folge der Summanden der Potenzreihe keine Nullfolge ist.

Betrachten wir als Beispiel die Resolvente eines Operators $A \in \mathcal{LC}(E)$, E ein komplexer Banachraum. Es ist für $z_0 \in \rho(A) =: G$

$$R_z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z - z_0)^n R_{z_0}^{n+1}$$

nach obigem Satz in $K(z_0, \operatorname{dist}(z_0, \sigma(A)))$ lokal gleichmäßig absolut (in $\mathcal{LC}(E)$) konvergent, und folglich

$$\operatorname{dist}(z_0, \sigma(A)) \leq \frac{1}{\limsup_{n \to \infty} \|R_{z_0}^n\|^{\frac{1}{n}}},$$

woraus

$$\|R_{z_0}\| \geq r(R_{z_0}) \to \infty \text{ für } z_0 \to \sigma(A)$$

folgt.

35 Algebren

Vieles was bisher in $\mathcal{LC}(E)$ für einen normierten Raum E bereitgestellt wurde kann allgemeiner in *Algebren* entwickelt werden. Unter einer Algebra A

versteht man einen (reellen oder komplexen) Vektorraum A mit einer inneren Multiplikation $(x, y) \to x \cdot y = xy$, die die Regeln

$$\begin{aligned} x(yz) &= (xy)z \\ (x+y)z &= xz + yz \\ x(y+z) &= xy + xz \\ \alpha(xy) &= (\alpha x)y = x(\alpha y) \end{aligned}$$

für alle $x, y, z \in A$ und alle $\alpha \in \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ erfüllt. Ist A normiert und gilt stets

$$\|xy\| \leq \|x\|\|y\|,$$

so spricht man von einer *normierten Algebra*. Gibt es $e \in A$ mit

$$ex = xe = x \text{ für alle } x \in A,$$

so heißt A eine normierte Algebra mit Eins. Ist A vollständig, so heißt A *(normierte) Banachalgebra (mit Eins)*. In einer normierten Algebra ist die Multiplikation stetig wegen

$$\|xy - \tilde{x}\tilde{y}\| \leq \|x - \tilde{x}\|\|y\| + \|\tilde{x}\|\|y - \tilde{y}\|.$$

Satz. *Ist A ein Banachraum und eine Algebra mit Eins $e \neq 0$, in der die Multiplikation von links und rechts (an ein jeweils fest gewähltes Element) stetig sind, so gibt es auf A eine äquivalente Norm, bezüglich der A eine Banachalgebra mit Eins wird und für die $\|e\| = 1$ ist.*
Beweis. Jedem $x \in A$ ordnen wir das Element $M_x \in \mathcal{LC}(A)$, gegeben durch

$$M_x(y) = xy, \ y \in A$$

zu. M_x ist stetig, weil die Rechtsmultiplikation stetig ist. Die Zuordnung

$$T : A \longrightarrow \mathcal{LC}(A) \text{ mit } T(x) = M_x$$

ist linear, und es gilt zusätzlich

$$M_x y = M_x M_y, \ \|M_e\| = 1, \ \|x\| = \|M_x(e)\| \leq \|M_x\|\|e\|,$$

wobei die Norm von M_x in $\mathcal{LC}(A)$ gebildet wird. Insbesondere ist T injektiv und T^{-1} ist auf $\widetilde{A} \subseteq \mathcal{LC}(A)$ stetig. Damit T stetig ist, genügt es, die Abgeschlossenheit von $\widetilde{A}$ nachzuweisen. (Satz von der stetigen Inversen).
Gilt aber $M_{x_k} \to M \in \mathcal{LC}(A)$, so ist für beliebiges $y \in A$ wegen der Stetigkeit der Linksmultiplikation

$$M_{x_k}(y) = x_k y = x_k e y = M_{x_k}(e) y \to M(e) y = M(y),$$

also $M = M_x$ mit $x = M(e)$. T ist also stetig, es existiert damit $C \geq 0$ mit

$$\|M_x\| \leq C\|x\|,$$

und $\|x\|^\star = \|M_x\|$ ist die gesuchte äquivalente Norm.

Übrigens kann, wenn die Algebra A keine Eins besitzt, A als Teilalgebra von $A_1 = A \times \mathbb{R}$ (bzw. $= A \times \mathbb{C}$) aufgefaßt werden, wenn

$$(x, \alpha)(y, \beta) = (xy + \alpha y + \beta x, \alpha\beta)$$

gesetzt wird. $e = (0, 1)$ ist eine Eins in A_1.
Beispiele. Ist K ein kompakter Hausdorffraum, so ist $C(K)$ unter der Maximumsnorm eine (sogar kommutative) Banachalgebra mit Eins. Hierunter fallen insbesondere der $\mathbb{R}^n$ (als reelle) und $\mathbb{C}^n$ als komplexe Banachalgebra. Weitere Beispiele liefern die schon erwähnten Räume von linearen Operatoren (sie sind in der Regel nicht kommutativ) oder Folgenräume: c_0 ist mit der elementweisen Multiplikation eine kommutative Banachalgebra ohne Eins.
Das lineare Funktional $\varphi \neq 0$ (um Trivialfälle auszuschließen) heißt *multiplikativ*, wenn für alle $x, y \in A$

$$\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$$

gilt. $x \in A$ (mit Eins) heißt *invertierbar*, wenn ein $x{-}1 \in A$ existiert mit

$$xx^{-1} = x^{-1}x = e.$$

Die Inverse ist eindeutig wegen

$$yx = e = xz \Longrightarrow y = ye = y(xz) = (yx)z = ez = z.$$

Die Menge der invertierbaren Elemente nennen wir $\mathcal{G}(A)$; sie ist unter der gegeben Multiplikation eine Gruppe.

Satz. *Ist φ multiplikativ auf einer Algebra mit Eins, so gilt*

$$\varphi(e) = 1 \text{ und } \varphi(x) \neq 0 \; \textit{für } x \in \mathcal{G}(A).$$

Beweis. Wir wählen $y \in A$ mit $\varphi(y) \neq 0$. Dann ist

$$\varphi(y) = \varphi(ye) = \varphi(y)\varphi(e),$$

also $\varphi(e) = 1$. Hieraus folgt weiter

$$1 = \varphi(e) = \varphi(x)\varphi(x^{-1}),$$

also insbesondere $\varphi(x) \neq 0$.

Satz. *Ist A eine Banachalgebra mit Eins und $x \in A$, sodaß $\sum_{n=0}^{\infty} x^n =: s$ konvergiert, so gilt:*
a) *$e - x$ ist invertierbar, und es ist*

$$(e-x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n,$$

b) $\|(e-x)^{-1} - e - x\| \leq \|x\|^2 \|(e-x)^{-1}\|$,
c) $|\varphi(x)| \leq \|x\|$ *falls φ multiplikativ ist.*
Beweis. a). Setzt man

$$s_n = e + x + x^2 + \cdots + n^n,$$

so gilt

$$s_n(e-x) = e - x^{n+1} = (e-x)s_n,$$

und aus der Stetigkeit der Multiplikation sowie $\lim_{n\to\infty} x^n = 0$ folgt die Behauptung.
b) Es ist

$$\|s - e - x\| = \|\sum_{n=2}^{\infty} x^n\| \leq \|x^2\| \|s\|.$$

c) Für $\lambda \in \mathbb{C}$ (oder $\mathbb{R}$) mit $|\lambda| > \|x\|$ ist $e - \frac{x}{\lambda}$ invertierbar, also

$$0 \neq \varphi(e - \frac{x}{\lambda}) = 1 - \frac{1}{\lambda}\varphi(x)$$

und damit $\varphi(x) \neq \lambda$.

Eine hinreichende Bedingung für die Konvergenz der *Neumannschen Reihe*

$$s = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

ist natürlich die Bedingung $\|x\| < 1$, und in diesem Fall gilt

$$\|s\| \leq \frac{1}{1 - \|x\|}.$$

Andererseits folgt aus dem Satz nach dem Satz über die Taylorentwicklung (Abschnitt 32., $a_n = x^n, z_0 = 0$), daß die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n x^n$$

konvergiert, falls

$$\limsup_{n\to\infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}} =: r(x) < \frac{1}{|z|}$$

ausfällt, und daß sie im Fall $r(x) > \frac{1}{|z|}$ divergiert. Ist nun

$$\gamma(x) := \inf_{n\in\mathbb{N}} \|x^n\|^{\frac{1}{n}},$$

(es ist offenbar $\gamma(x) \leq r(x)$), so ist obige Reihe für $\dfrac{1}{|z|} > \gamma(x)$ absolut konvergent:
wählt man nämlich $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $1 > |z|\|x_{n_0}\|^{\frac{1}{n_0}} = \|(zx)^{n_0}\|^{\frac{1}{n_0}}$, so konvergieren die n_0 Reihen

$$\begin{aligned} e + (zx)^{n_0} + (zx)^{2n_0} + \dots \\ zx + (zx)^{n_0+1} + (zx)^{2n_0+1} + \dots \\ \vdots \\ (zx)^{n_0-1} + (zx)^{n_0+n_0-1} + (zx)^{2n_0+n_0-1} + \dots \end{aligned}$$

alle absolut, und ihre Summe ergibt gerade $\sum_{n=0}^{\infty}(zx)^n$. Also ist für die betrachteten z letztere Reihe absolut konvergent, woraus

$$\gamma(x) = \inf n \in \mathbb{N}\|x^n\|^{\frac{1}{n}} \geq r(x) = \limsup_{n\to\infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}}$$

folgt. Damit ist $(\|x^n\|^{\frac{1}{n}})_{n=1}^{\infty})$ konvergent mit

$$r(x) = \lim_{n\to\infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}} = \inf_{n\in\mathbb{N}} \|x^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \|x\|.$$

Aus Gründen, die erst später klar werden, nennen wir auch hier $r(x)$ den *Spektralradius* des Banachalgebraelements x. Wir haben insbesondere bewiesen:

Folgerung. *Ist A eine Banachalgebra mit Eins und $x \in A$, so konvergiert* *die Neumannsche Reihe im Fall $r(x) < 1$ und sie divergiert im Fall $r(x) > 1$.*

Es sei bemerkt, daß die Neumannsche Reihe für $r(x) = 1$ jedenfalls nicht absolut konvergent sein kann.

Satz. *Ist A eine Banachalgebra, so ist die Gruppe $\mathcal{G}(A)$ der invertierbaren Elemente offen und die Abbildung $x \to x^{-1}$ ein topologischer Homöomorphismus. Genauer gilt:*
Aus $x \in \mathcal{G}(A), h \in A, \|h\| < \|x^{-1}\|^{-1}$ folgt $x + h \in \mathcal{G}(A)$ und

$$\|(x+h)^{-1} - x^{-1} + x^{-1}hx^{-1}\| \leq \frac{\|x^{-1}\|^3\|h\|^2}{1 - \|x^{-1}\|\|h\|}.$$

Beweis. Wegen $x + h = x(e + x^{-1}h)$ und $\|x^{-1}h\| \leq \|x^{-1}\|\|h\| < 1$ ist der Ausdruck in der Klammer in $\mathcal{G}(A)$. Weiter gilt (vgl. den vorhergehenden Satz)

$$\begin{aligned} \|(x+h)^{-1} - x^{-1} + x^{-1}hx^{-1}\| &= \|[(e + x^{-1}h)^{-1} - e + x^{-1}h]x^{-1}\| \\ &\leq \|x^{-1}\|\|(e + x^{-1}h)^{-1} - e + x^{-1}h\| \\ &\leq \|x^{-1}\|\frac{\|x^{-1}h\|^2}{1 - \|x^{-1}h\|}, \end{aligned}$$

woraus die Behauptung folgt. (Man verwende die Monotonie der Funktion $s \to \dfrac{s^2}{1-s}$ auf $[0,1)$).

Insbesondere halten wir

$$K(e,1) \subseteq \mathcal{G}(A)$$

fest. Als (teilweise) Anwendung des bisher bewiesenen betrachten wird den

Satz. (Gleason) *Ist A eine komplexe Banachalgebra mit Eins und $\varphi : A \to \mathbb{C}$ linear mit $\varphi(e) = 1, \varphi(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathcal{G}(A)$, so ist φ stetig und multiplikativ.*
Beweis. Wir beweisen zunächst, daß $N = \mathrm{Kern}\varphi$ eine Unteralgebra von A ist und zu diesem Zweck in einem ersten Schritt, daß mit $a \in N$ auch $a^2 \in N$ gilt:
zunächst ist nach Voraussetzung $N \cap \mathcal{G}(A) = \emptyset$, also N nicht dicht in A und somit φ stetig. Weiter ist $\mathrm{dist}(e, N) \geq 1$. Zerlegt man $x = n + \varphi(x)e$ mit $n \in N$, und ist $\varphi(x) \neq 0$, so folgt

$$\|x\| = |\varphi(x)|\|e + \frac{n}{\varphi(x)}\| \geq |\varphi(x)|,$$

also sogar $\|\varphi\| = 1$ (beachte $\varphi(e) = 1$). O.B.d.A. sei nun $\|a\| = 1$. Für $z \in \mathbb{C}$ sei $E(z) = \exp(za)$ und $f(z) = \varphi(E(z))$. f ist eine ganze Funktion, und da $E(z)$ invertierbar ist für alle $z \in \mathbb{C}$ (es ist $(E(z))^{-1} = E(-z)$) ist $f(z) \neq 0$ auf $\mathbb{C}$. Weiter ist $f(0) = \varphi(e) = 1$, $f'(0) = \varphi(a) = 0$ und

$$|f(z)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\varphi(a^n)|}{n!}|z|^n \leq \exp(|z|).$$

Nach einem bekannten Satz der Funktionentheorie ist $f(z) = az + b$, also $f(z) = 1$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Dann ist aber $f''(0) = 0 = \varphi(a^2)$, also $a^2 \in N$. Unter Zuhilfenahme von $A = N \oplus \mathbb{C}e$ folgert man nun der Reihe nach

$$\begin{aligned}
&\varphi(x^2) = (\varphi(x))^2, \ x \in A,\\
&\varphi(xy + yx) = 2\varphi(x)\varphi(y), \ x \in N, y \in A,\\
&xy + yx \in N, \ x \in N,\\
&(xy - yx)^2 + (xy + yx)^2 = 2(x(yxy) + (yxy)x) \in N, \ x \in N,\\
&(xy + yx)^2 \in N, \ x \in N,\\
&(xy - yx)^2 \in N, \ x \in N,\\
&xy - yx \in N, \ x \in N,\\
&xy \in N,
\end{aligned}$$

und hieraus endlich wegen

$$\varphi(xy) = \varphi(ab) + \varphi(x)\varphi(y)$$

für $x = a + \varphi(x)e, \ y = b + \varphi(y)e, \ a, b \in N$ die Multiplikativität von φ.

Ist A eine Banachalgebra mit Eins und $x \in A$, so heißt

$$\rho(x) := \{\lambda : \lambda e - x \in \mathcal{G}(A)\}$$

die *Resolventenmenge* und $(\lambda e - x)^{-1}$ die *Resolvente* $R_\lambda = R_\lambda(x)$ von x. Das Komplement (bzgl. des zugehörigen Skalarkörpers) von $\rho(x)$ heißt *Spektrum* $\sigma(x)$. Es ist abgeschlossen, da die Resolventenmenge offen ist. Aus $(\lambda - \mu)e = \lambda e - x - (\mu e - x)$ folgt durch Multiplikation mit R_μ von rechts und R_λ von links $(\lambda, \mu \in \rho(x))$ die *Resolventengleichung*

$$R_\mu - R_\lambda = (\lambda - \mu)R_\lambda R_\mu.$$

R_λ ist also als Funktion von λ (komplex) differenzierbar, und es gilt

$$(R_\lambda)' = -R_\lambda^2.$$

Der nächste Satz rechtfertigt die Bezeichnung 'Spektralradius' für $r(x)$:

Satz. *Ist A eine komplexe Banachalgebra mit Eins und $x \in A$, so gilt:*
a) *$\sigma(x)$ ist nichtleer und kompakt.*
b) $r(x) = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(x)\}$.
Beweis. Für $|\lambda| > \|x\|$ ist $\lambda e - x = \lambda(e - \frac{x}{\lambda})$ invertierbar, also ist $\sigma(x) \subseteq \overline{K(0, \|x\|)}$. Mit Hilfe der Neumannschen Reihe folgt

$$R_\lambda = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\lambda^{k+1}}, \;|\lambda| > \|x\|.$$

Wählt man für Γ_r den positiv orientierten Rand von $K(0,r)$ mit $r > \|x\|$, so folgt durch gliedweise Integration $(n \geq 0)$

$$\frac{1}{2\pi\imath} \int_{\Gamma_r} \lambda^n R_\lambda d\lambda = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi\imath} \int_{\Gamma_r} \frac{x^k}{\lambda^{k+1-n}} d\lambda = x^n,$$

und diese Formel gilt wegen der Holomorphie von R_λ sogar für $r > \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(x)\}$. Speziell für $n = 0$ folgt

$$\frac{1}{2\pi\imath} \int_{\Gamma_r} R_\lambda d\lambda = e \neq 0,$$

also $\sigma(x) \neq \emptyset$. Für $n \in \mathbb{N}$ folgt mit $M(r) := \max\{\|R_\lambda\| : |\lambda| = r\}$

$$\|x^n\| \leq r^{n+1} M(r),$$

und hieraus durch Grenzübergang

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|x^n\|} \leq r,$$

also, da $r > \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(x)\}$ beliebig war, auch

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|x^n\|} \leq \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(x)\}.$$

Nun sei $\lambda \in \sigma(x)$. Dann ist wegen

$$\lambda^n e - x^n = (\lambda e - x)(\lambda^{n-1} e + \cdots + x^{n-1}) = (\lambda^{n-1} e + \cdots + x^{n-1})(\lambda e - x)$$

$\lambda^n \in \sigma(x^n)$ (sonst wäre eben $(\lambda e - x)$ doch invertierbar), also $|\lambda^n| \leq \|x^n\|$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und damit

$$|\lambda| \leq \inf_{n\in\mathbb{N}} \sqrt[n]{\|x^n\|}.$$

Damit ist der Satz bewiesen.

Wir bemerken, daß man diesen Satz auch aus dem entsprechenden Satz für lineare Endomorphismen in Banachräumen hätte herleiten können, wenn man die zu Anfang dieses Abschnittes betrachtete Isomorphie von A zu einer Teilalgebra von $\mathcal{LC}(A)$ herangezogen hätte. Diese Vorgehensweise ist besonders nützlich, wenn A endlichdimensional ist, wenn sie also als Algebra von Matrizen betrachtet werden kann.

Satz. (Gelfand-Mazur) *Ist jedes von Null verschiedene Element der komplexen Banachalgebra A invertierbar, so ist A isometrisch isomorph zu $\mathbb{C}$.*
Beweis. Es ist $\sigma(x) \neq \emptyset$ und besteht nur aus einem Punkt, da für $\lambda \neq \mu$ wenigstens eines der beiden Elemente $\lambda e - x$ und $\mu e - x$ ungleich Null, also invertierbar ist. Also ist $\sigma(x) = \{\lambda(x)\}, x = \lambda(x)e$ und die Zuordnung $x \to \lambda(x)$ ist ein Algebraisomorphismus mit $|\lambda(x)| = \|x\|$.

Satz. *Ist A eine Banachalgebra mit Eins und $x_n \in \mathcal{G}(a)$ mit $x_n \to x \in \delta\mathcal{G}(A)$ so gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n^{-1}\| = \infty.$$

Beweis. Wenn nicht gibt es eine Teilfolge $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ und eine Zahl M mit $\|x_{n_k}^{-1}\| < M$, und folglich ein k_0 mit

$$\|x_{n_{k_0}} - x\| < \frac{1}{M}.$$

Dann ist aber

$$\|e - x_{n_{k_0}}^{-1} x\| = \|x_{n_{k_0}}^{-1}(x_{n_{k_0}} - x)\| < 1,$$

also $x_{n_{k_0}}^{-1} x \in \mathcal{G}(A)$ und damit auch $x = x_{n_{k_0}}(x_{n_{k_0}}^{-1} x) \in \mathcal{G}(A)$.

Folgerung. Ist A eine komplexe Banachalgebra mit Eins und gibt es $M > 0$ mit

$$\|x\|\|y\| \leq M\|xy\|, \;\; x, y \in A,$$

so ist A isometrisch isomorph zu $\mathbb{C}$.
Beweis. Ist $y \in \delta\mathcal{G}(A)$, so gibt es $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ mit $y_n \in \mathcal{G}(A)$, $y = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$. Aus dem Satz folgt $\lim\limits_{n\to\infty} \|y_n^{-1}\| = \infty$, also wegen

$$\|y_n\|\|y_n^{-1}\| \leq M\|e\|$$

$y = 0$, d.h. es ist $\delta\mathcal{G}(A) = \{0\}$. Nun folgt für beliebiges $x \in A$ aus $\lambda \in \sigma(x)$ sicher $\lambda e - x \in \delta\mathcal{G}(A)$, also $x = \lambda e$. Damit ist $A = \{\lambda e : \lambda \in \mathbb{C}\}$, und diese Zuordnung ist der gesuchte Isomorphismus.

36 Der Funktionalkalkül

Wir hatten schon früher Elemente x einer Banachalgebra A in holomorphe Funktionen 'eingesetzt', wie etwa in die Exponentialfunktion oder in Polynome oder gar in

$$f(z) = \frac{1}{\alpha - z},$$

was zu

$$f(x) = (\alpha e - x)^{-1} =: R_\alpha(x)$$

führte. Letztere ist definiert für $\alpha \notin \sigma(x)$, oder anders ausgedrückt $\sigma(x) \subseteq \Omega$, Ω der Definitionsbereich von f.
Es sei nun eine beliebige holomorphe Funktion $f : \Omega \to \mathbb{C}$ gegeben mit offenem, nicht notwendig zusammenhängendem Definitionsbereich Ω, und es soll $f(x) \in A$ für gewisse $x \in A$ erklärt werden. Zu diesem Zweck werden zunächst einige Hilfsmittel aus der Funktionentheorie bereitgestellt.
Ein *Zykel* Γ in Ω ist eine endliche Menge $\Gamma_1, \dots, \Gamma_k$ von geschlossenen, rektifizierbaren Kurven in Ω. Das Integral längs Γ ist definiert als

$$\int_\Gamma f(z)dz = \sum_{j=1}^{k} \int_{\Gamma_j} f(z)dz,$$

und die Umlaufzahl eines Punktes $z \notin |\Gamma| := \cup_{j=1}^{k} |\Gamma_j|$ durch

$$n(\Gamma, z) = \sum_{j=1}^{k} n(\Gamma_j, z) = \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{2\pi\imath} \int_{\Gamma_j} \frac{d\zeta}{\zeta - z}.$$

Ein Zykel, für den die Umlaufzahl jedes Punktes außerhalb Ω Null ist heißt in Ω *nullhmolog.*

Satz. (Cauchyscher Integralsatz). *Ist f in Ω holomorph und Γ nullhomolog, so gilt*

$$\int_\Gamma f(z)dz = 0.$$

Hieraus folgt leicht

$$\int_{\Gamma_1} f(z)dz = \int_{\Gamma_2} f(z)dz$$

für zwei Zykel Γ_1, Γ_2, die bezüglich jeden Punktes außerhalb Ω dieselbe Umlaufzahl haben.
Ist $K \subseteq \Omega$ kompakt, so gibt es einen in Ω nullhomologen Zykel Γ mit $|\Gamma| \cap K = \emptyset$, sodaß jeder Punkt in K Umlaufzahl Eins hat, das heißt

$$n(\Gamma, z) = \frac{1}{2\pi\imath} \int_\Gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z} = \begin{cases} 1 & \text{für } z \in K, \\ 0 & \text{für } z \notin \Omega. \end{cases}$$

Wir sagen, daß Γ die Menge K in Ω *umfährt*. Umfährt Γ die Menge K in Ω, so offenbar auch in jeder Obermenge von Ω.
Umfährt Γ die Menge K in Ω, so gilt

$$f(z) = \frac{1}{2\pi\imath} \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \text{ für } z \in K.$$

Für 'einfache' Konstellationen K und Ω ist die Existenz solcher Zykel unmittelbar einsichtig. Das bisher gesagte gilt auch für holomorphe Funktionen mit Werten in A.

Satz. (Approximationssatz von Runge). *Ist f in Ω holomorph und wird aus jeder Zusammenhangskomponente von $\hat{\mathbb{C}} \setminus \Omega$ ein Punkt α gewählt, so gibt es eine Folge von rationalen Funktionen, mit Polen höchstens in diesen Punkten α, die in Ω lokal gleichmäßig gegen f konvergiert.*

Für $x \in A$ mit $\sigma(x) \subseteq \Omega$ wird nun

$$\widetilde{f}(x) := \frac{1}{2\pi\imath} \int_\Gamma f(\zeta)(\zeta e - x)^{-1} d\zeta$$

gesetzt, wobei Γ $\sigma(x)$ in Ω umfährt. Das so definierte Element $\widetilde{f}(x) \in A$ ist offenbar von dem so gewählten Zykel unabhängig.
Ist

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$ und $x \in A$ mit $\sigma(x) \subseteq K(z_0, R) =: \Omega$, so kann z.B. für Γ eine positiv orientierte Kreislinie um z_0 mit Radius $0 < r < R$ gewählt werden, die $\sigma(x)$ umfährt, und es ergibt sich

$$\widetilde{f}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi\imath} \int_\Gamma (\zeta - z_0)^n (\zeta e - x)^{-1} d\zeta.$$

In den Integralen darf Γ durch einen Kreis mit größerem Radius, etwa $r > \|x - z_0 e\|$ ersetzt werden, und für $|\zeta - z_0| = r$ gilt dann absolut und gleichmäßig

$$(\zeta e - x)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x - z_0 e)^k}{(\zeta - z_0)^{k+1}},$$

also

$$\int_\Gamma (\zeta - z_0)^n (\zeta e - x)^{-1} d\zeta = (x - z_0 e)^n.$$

$\widetilde{f}(x)$ liefert also dasselbe Ergebnis wie formales Einsetzen von x in f. Bei den Standardfunktionen wie der Exponentialfunktion lassen wir in Übereinstimmung mit der früheren Schreibweise die Tilde weg. Für rationale Funktionen f erhält man das gleiche Ergebnis aus dem folgenden Satz.

Satz. *Es sei A eine komplexe Banachalgebra mit Eins, $x \in A$, $\alpha \in \mathbb{C}$ mit $\alpha \notin \sigma(x)$, $n \in \mathbb{Z}$, und Γ umfahre $\sigma(x)$ in $\Omega := \mathbb{C} \setminus \{\alpha\}$. Dann gilt*

$$\frac{1}{2\pi\imath} \int_\Gamma (\alpha - \zeta)^n R_\zeta d\zeta = (\alpha e - x)^n, \ n \in \mathbb{Z}.$$

Beweis. Wir betrachten zunächst den Fall $n = 0$: für den positiv orientierten Rand Γ_r von $K(0, r)$ (mit $r > \|x\|$) gilt (vgl. die eben gemachten Betrachtungen)

$$\frac{1}{2\pi\imath} \int_{\Gamma_r} (\zeta e - x)^{-1} d\zeta = e,$$

und diese Gleichung gilt auch, wenn man Γ_r durch Γ ersetzt, weil jeder Punkt in $\sigma(x)$ bezüglich Γ Umlaufzahl Eins besitzt. Nennen wir nun den links stehenden Ausdruck der behaupteten Gleichung I_n, und ersetzt man $R_\zeta = (\zeta e - x)^{-1}$ mit Hilfe der Resolventengleichung durch

$$R_\alpha + (\alpha - \zeta) R_\alpha R_\zeta,$$

so ergibt sich

$$I_n = R_\alpha \frac{1}{2\pi\imath} \int_\Gamma (\alpha - \zeta)^n d\zeta + R_\alpha \frac{1}{2\pi\imath} \int_\Gamma (\alpha - \zeta)^{n+1}.$$

Der erste Ausdruck verschwindet wegen $n(\Gamma, \alpha) = 0$, und das Integral im zweiten Ausdruck ist gerade I_{n+1}. Es gilt also die Rekursionsformel

$$I_n = (\alpha e - x)^{-1} I_{n+1}.$$

Hieraus folgt die Behauptung.

Die bisherigen Überlegungen legen folgende Definitionen nahe:
Ist $H(\Omega)$ die (komplexe) Algebra (mit Eins) aller in Ω holomorphen Funktionen, so sei

$$A_\Omega := \{x \in A : \sigma(x) \subseteq \Omega\},$$

$$\widetilde{H}(A_\Omega) := \{\widetilde{f} : \widetilde{f} : A_\Omega \to A, \widetilde{f}(x) = \frac{1}{2\pi \imath} \int_\Gamma f(\zeta) R_\zeta(x) d\zeta, \Gamma \text{ umfährt } \sigma(x) \text{ in } \Omega\}.$$

Aus der Kompaktheit von $\sigma(x)$ und weil die Menge $\mathcal{G}(A)$ der invertierbaren Elemente offen ist folgt, daß A_Ω offen in A ist. Es gilt $\alpha \in A$ genau dann, wenn $\alpha e \in A_\Omega$ ist, und in diesem Fall folgt

$$\widetilde{f}(\alpha e) = f(\alpha) e.$$

$\widetilde{f}$ ist also eine Fortsetzung der Funktion

$$f : \{ze : z \in \Omega\} \to \mathbb{C}e.$$

Übrigens ist $\widetilde{f}$ auf A_Ω stetig, weil die Inversion stetig auf $\mathcal{G}(A)$ ist.

Satz. *Die Zuordnung $f \to \widetilde{f}$ ist ein surjektiver Algebraisomorphismus von $H(\Omega)$ auf $\widetilde{H}(A_\Omega)$. Gilt*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(z) = f(z) \textit{ lokal gleichmäßig in } \Omega,$$

so folgt

$$\lim_{n\to\infty} \widetilde{f}_n(x) = \widetilde{f}(x) \text{ für jedes } x \in A_\Omega.$$

Beweis. Die Linearität dieser Zuordnung ist leicht zu sehen. Ist $\widetilde{f} = 0$, so ist insbesondere $\widetilde{f}(\alpha e) = f(\alpha)e = 0$ für alle $\alpha \in \Omega$, also $f = 0$. Die Stetigkeitsaussage folgt aus der Darstellung von $\widetilde{f}$, wenn man für alle f_n dasselbe Γ wählt. Die Multiplikativität folgt für rationale Funktionen ohne Pole in Ω direkt aus der Integraldarstellung, und im allgemeinen Fall durch Approximation mit Hilfe des Satzes von Runge.

Satz. *Es sei A eine komplexe Banachalgebra mit Eins, $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, $f \in H(\Omega)$ und $x \in A_\Omega$. Dann gilt:*
a) $\widetilde{f}(x) \in \mathcal{G}(A) \iff f(z) \neq 0$ für alle $z \in \sigma(x)$.
b) $\sigma(\widetilde{f}(x)) = f(\sigma(x)) \qquad$ *'Spektraler Abbildungssatz'*.

Beweis. a). Ist $f \neq 0$ auf $\sigma(x)$, so ist $\Omega_1 := \{z \in \Omega : f(z) \neq 0\}$ offen und enthält $\sigma(x)$. Der vorhergehende Satz (mit Ω_1 anstelle von Ω) liefert mit $g := \frac{1}{f}$

$$\widetilde{f}(x)\widetilde{g}(x) = e = \widetilde{g}(x)\widetilde{f}(x).$$

$f(x)$ ist also invertierbar.
Umgekehrt sei $f(z_0) = 0$ für ein $z_0 \in \sigma(x)$. Dann gibt es $h \in H(\Omega)$ mit

$$(z - z_0)h(z) = f(z) \text{ in } \Omega,$$

also

$$(x - z_0 e)\widetilde{h}(x) = \widetilde{f}(x) = \widetilde{h}(x)(x - z_0 e).$$

Da $x - z_0 e$ nicht invertierbar ist, ist es auch $\widetilde{f}(x)$ nicht.
b) λ ist in $\sigma(\widetilde{f}(x))$ genau dann wenn $\lambda e - \widetilde{f}(x)$ nicht invertierbar ist, also nach a) genau dann wenn $f - \lambda$ eine Nullstelle in $\sigma(x)$ besitzt, was $\lambda \in f(\sigma(x))$ bedeutet.

In Ergänzung zu dem Satz über die Isomorphie von $H(\Omega)$ und $\widetilde{H}(A_\Omega)$ kann gezeigt werden:

Satz. *Es sei A eine komplexe Banachalgebra mit Eins, $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, $f \in H(\Omega)$ und $x \in A_\Omega$. Ist dann $g \in \widetilde{H}(\Omega_1)$, $f(\sigma(x)) \subseteq \Omega_1$, $\Omega_0 := \{z \in \Omega : f(z) \in \Omega_1\}$, so ist $h = g \circ f \in \widetilde{H}(\Omega_0)$, $\widetilde{f}(x) \in A_{\Omega_1}$ und*

$$\widetilde{g \circ f}(x) = \widetilde{g}(\widetilde{f}(x)).$$

Beweis. Nach dem Spektralen Abbildungssatz ist $\sigma(\widetilde{f}(x)) = f(\sigma(x)) \subseteq \Omega_1$, also $\widetilde{g}(\widetilde{f}(x))$ definiert. Wählt man einen Zykel Γ_1, der $f(\sigma(x))$ in Ω_1 umfährt und dann W (offen) so klein, daß $\sigma(x) \subseteq W \subseteq \Omega_0$ und

$$n(\Gamma_1, f(z)) = 1 \text{ für alle } \ z \in W$$

gilt, so ist

$$\frac{1}{\zeta - f(\cdot)} \in H(W) \text{ für jedes } \zeta \in \Gamma_1.$$

Umfährt nun Γ_0 die Menge $\sigma(x)$ in W, so ist

$$(\zeta e - \widetilde{f}(x))^{-1} = \frac{1}{2\pi \imath} \int_{\Gamma_0} \frac{1}{\zeta - f(\lambda)} (\lambda e - x)^{-1} d\lambda \ (\zeta \in \Gamma_1),$$

also, weil Γ_1 die Menge $\sigma(\widetilde{f}(x))$ in Ω_1 umfährt,

$$\begin{aligned}
\widetilde{g}(\widetilde{f}(x)) &= \frac{1}{2\pi\imath}\int_{\Gamma_1} g(\zeta)(\zeta e - \widetilde{f}(x))^{-1}d\zeta \\
&= \frac{1}{2\pi\imath}\int_{\Gamma_0} \frac{1}{2\pi\imath}\int_{\Gamma_1} \frac{g(\zeta)}{\zeta - f(\lambda)} d\zeta(\lambda e - x)^{-1}d\lambda \\
&= \frac{1}{2\pi\imath}\int_{\Gamma_0} g(f(\lambda))(\lambda e - x)^{-1}d\lambda \\
&= \widetilde{h}(x).
\end{aligned}$$

Der Funktionalkalkül gestattet es nun unter anderem, Wurzeln bzw. Logarithmen von gewissen Banachalgebraelementen zu finden:

Satz. *Ist A eine komplexe Banachalgebra mit Eins und ist $x \in A$ so, daß 0 in der unbeschränkten Zusammenhangskomponente von $\rho(x)$ liegt, so gilt:*
a) *Es gibt $y =: \log(x) \in A$ mit $\exp(y) = x$.*
b) *Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ gibt es ein $y \in A$ mit $y^n = x$.*
c) *Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein (komplexes) Polynom P mit $\|x^{-1} - P(x)\| < \varepsilon$.*
Beweis. Unter den gegebenen Voraussetzungen gibt es eine einfach zusammenhängende Menge Ω, die $\sigma(x)$ enthält und auf der ein holomorpher Logarithmus existiert, also eine holomorphe Funktion f mit $\exp(f(z)) = z$, $z \in \Omega$. Dann ist aber $\widetilde{f}(x)$ das gesuchte y wegen

$$\exp(\widetilde{f}(x)) = \widetilde{\exp(f(\cdot))}(x) = x.$$

b) beweist man genauso oder man setzt $y = \frac{1}{n}\log(x)$.
Um c) zu beweisen wählen wir nach dem Approximationssatz von Runge eine Folge (P_n) von Polynomen, die auf Ω lokal gleichmäßig gegen $\frac{1}{z}$ konvergiert, und beachten

$$\lim_{n\to\infty} P_n(x) = x^{-1}.$$

Wir bemerken, daß durch geeignete Wahl des Logarithmus auf der im Beweis betrachteten Menge Ω z.B. $\log(x)$ so gewählt werden kann, daß

$$\sigma(\log(x)) \subseteq \mathbb{R} \text{ falls } \sigma(x) \subseteq \mathbb{R}$$

gilt. Analoges gilt für die Wurzeln.
In der Banachalgebra $A = \mathcal{LC}(E)$, E ein komplexer Banachraum, erhält man für das Punktspektrum $\sigma_p(T)$ eines Operators T genauer:

Satz. *Ist E ein komplexer Banachraum und $T \in \mathcal{LC}(E)$, $\sigma(T) \subseteq \Omega$ sowie $f \in H(\Omega)$, so gilt:*

a) $f(\sigma_p(T)) \subseteq \sigma_p(\widetilde{f}(T))$.
b) *Ist f auf keiner Zusammenhangskomponente von Ω konstant, so gilt*

$$f(\sigma_p(T)) = \sigma_p(\widetilde{f}(T)).$$

Beweis. Ist α Eigenwert von T mit zugehörigem Eigenelement $x \neq 0$ und ist $g \in H(\Omega)$ definiert durch

$$f(z) - f(\alpha) = g(z)(z - \alpha),$$

so folgt aus dem Isomorphiesatz

$$\widetilde{f}(T) - f(\alpha)\mathrm{Id} = \widetilde{g}(T)(T - \alpha\mathrm{Id}),$$

also $\widetilde{f}(T)x - f(\alpha)x = 0$, also $f(\alpha) \in \sigma_p(\widetilde{f}(T))$ mit Eigenelement x.
Ist umgekehrt $\alpha \in \sigma_p(\widetilde{f}(T)) \subseteq \sigma(\widetilde{f}(T)) = f(\sigma(T))$, so ist

$$f^{-1}(\alpha) \cap \sigma(T) \neq \emptyset$$

und endlich, (sonst wäre f auf der α enthaltenden Komponente von Ω konstant). Bezeichnen $\zeta_1, \ldots, \zeta_k$ die $\alpha -$ *Stellen* von f entsprechend ihren Vielfachheiten aufgeführt, so wird durch

$$f(z) - \alpha = g(z)(z - \zeta_1) \cdots (z - \zeta_k)$$

ein $g \in H(\Omega)$ definiert, das in $\sigma(T)$ keine Nullstellen besitzt. Damit wird

$$\widetilde{f}(T) - \alpha\mathrm{Id} = \widetilde{g}(T)(T - \zeta_1\mathrm{Id}) \cdots (T - \zeta_k\mathrm{Id})$$

mit invertierbarem $\widetilde{g}(T)$ (Spektraler Abbildungssatz). Da $\widetilde{f}(T) - \alpha\mathrm{Id}$ nicht injektiv ist, muß einer der Faktoren nicht injektiv sein. Das zugehörige ζ_j liegt also im Spektrum von T, und es ist $f(\zeta_j) = \alpha$.

37 Ein Beispiel

Ist A eine komplexe Banachalgebra mit Eins und $a \in A$ fest vorgegeben, so soll die Randwertaufgabe

$$\text{(RWP)} \qquad x''(z) = a \cdot x(z),\ x(0) = x_0,\ x(1) = x_1$$

betrachtet werden. Die Funktion $x : G \to A$ heißt Lösung, wenn G ein Gebiet in $\mathbb{C}$ ist mit $0, 1 \in G$, wenn x in G holomorph ist und die obigen Gleichungen erfüllt. Offensichtlich besitzt diese Aufgabe genau dann höchstens eine Lösung, wenn die zugehörige homogene Randwertaufgabe, (d.h. im Fall $x_0 = x_1 = 0$) nur trivial lösbar ist. Wir definieren eine ganze Funktion h durch

$$h(z) = \frac{\sin \sqrt{z}}{\sqrt{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^n$$

(die Nullstellenmenge von h ist $\{k^2\pi^2 : k \in \mathbb{N}\}$ und betrachten

$$y(z) = z \cdot h(z^2 a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} a^n.$$

Es ist $y(0) = 0$, $y'(0) = e$ und (gliedweise Differentiation ist erlaubt!)

$$y''(z) = a \cdot y(z)$$

für $z \in G$. Also ist $x(z) = y(z)x'(0)$ für jede Lösung x der Differentialgleichung mit $x(0) = 0$. Hieraus folgt

$$x(1) = h(a)x'(0) = 0$$

für das homogene Problem, also $x'(0) = 0$ falls $h(a)$ eine Linksinverse besitzt. Besitzt $h(a)$ eine Rechtinverse b, so ist für $x'(0) = bx_1$

$$x(1) = h(a)bx_1 = x_1,$$

das 'halbhomogene' Randwertproblem also lösbar.
Nun ist mit $x(z)$ auch $x(1-z)$ eine Lösung der Differentialgleichung, sodaß das eben gesagte auch im Fall x_0 beliebig, $x_1 = 0$ gilt.

Satz. *Besitzt $h(a)$ eine Linksinverse, so besitzt* (RWP) *höchstens eine Lösung. Besitzt $h(a)$ eine Rechtsinverse, so besitzt* (RWP) *für alle $x_0, x_1 \in A$ eine Lösung. Im Fall $0 \notin \sigma(h(a)) = h(\sigma(a))$, also $\sigma(a) \cap \{k^2\pi^2 : k \in \mathbb{N}\} = \emptyset$ ist* (RWP) *stets eindeutig lösbar, und es ist*

$$x(z) = (1-z)h((1-z)^2 a)h(a)^{-1}x_0 + zh(z^2 a)h(a)^{-1}x_1.$$

Mit Hilfe der oben verwendeten Lösung y der homogenen Differentialgleichung kann mit der Methode der Variation der Konstanten für die inhomogene Differentialgleichung

$$x''(z) = a \cdot x(z) + f(z)$$

eine partikuläre Lösung x_s angegeben werden, falls etwa $f : G \to A$ holomorph ist in dem einfach zusammenhängenden Gebiet G mit $0, 1 \in G$:

$$x_s(z) = -ay'(z) \int_0^z y(\zeta)f(\zeta)d\zeta + ay(z) \int_0^z y'(\zeta)f(\zeta)d\zeta.$$

Integriert wird dabei über einen beliebigen Weg in G, der 0 mit z verbindet. Der Nachweis ist einfach unter Benutzung der Gleichung

$$(y')^2(z) - ay^2(z) = e \text{ für alle } z \in G,$$

($a, y(z)$ und $y'(z)$ sind untereinander vertauschbar), welche durch Ableiten bestätigt werden kann. Schließlich erhält man die eindeutige Lösbarkeit der inhomogenen Randwertaufgabe

$$\begin{aligned} x''(z) &= a \cdot x(z) + f(z) \\ x(0) &= x_0 \\ x(1) &= x_1 \end{aligned}$$

für $\sigma(a) \cap \{k^2\pi^2 : k \in \mathbb{N}\} = \emptyset$ und für f von der genannten Art durch Superposition.
Ähnliche Überlegungen können auch in reellen Banachalgebren durchgeführt werden.

38 Aufgaben

1. Mit Hilfe des Zornschen Lemmas beweise man:

   Jede Halbordnung in einer Menge X läßt sich zu einer linearen Ordnung erweitern.

2. Es sei X die Menge derjenigen abgeschlossenen Kreisscheiben der xy-Ebene, die im Quadrat $-1 \leq x \leq 1$, $-1 \leq y \leq 1$ liegen, und $K_1 \leq K_2$ bedeute $K_1 \subseteq K_2$ für je zwei Kreisscheiben.

   (a) $(X, \leq)$ ist teilgeordnet, aber nicht linear geordnet.

   (b) Man bestimme gegebenenfalls alle maximalen Elemente.

   (c) X besitzt keine obere Schranke.

3. Es sei (X, d) ein halbmetrischer Raum. Man beweise:

   (a) $x \sim y \;\Leftrightarrow\; d(x, y) = 0$ ist eine Äquivalenzrelation.

   (b) $X/_\sim$ ist unter $D((x), (y)) := d(x, y)$ ein metrischer Raum.

4. Es sei $(X,(d_\alpha)_{\alpha\in A})$ ein polymetrischer Raum. Das Netz $(x_l)_{l\in J}$ konvergiert in der von $(d_\alpha)_{\alpha\in A}$ erzeugten Topologie genau dann gegen x, wenn für jedes $\alpha \in A$ gilt

$$\lim_l d_\alpha\,(x_l,x) \;=\; 0\;.$$

5. Es sei $X=\{x=(x_1,x_2,\dots):\ (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist Nullfolge mit $\max\limits_n |x_n|\le 1\}$ und $d(x,y)=\max\limits_n |x_n-y_n|$ (für $x=(x_1,x_2,\dots)$, $y=(y_1,y_2,\dots))$.

   Man zeige:

   (a) (X,d) ist ein vollständiger metrischer Raum.

   (b) Die Abbildung T, definiert durch

   $$(T(x))_1=\frac{1}{2}\,(1+d(x,0))\;,$$
   $$(T(x))_n=x_{n-1}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\quad(n\ge 1)\;,$$

   bildet X in sich ab, und es gilt

   $$d(T(x),T(y))\;<\;d(x,y)\quad\text{für } x\ne y\;.$$

   (c) T besitzt keinen Fixpunkt in X .

6. Ist $(X,(d_\alpha)_{\alpha\in A})$ ein polymetrischer Raum und A abzählbar, so ist seine Topologie metrisierbar (d.h. es existiert eine Metrik in X, die die natürliche Topologie von $(X,(d_\alpha)_{\alpha\in A})$ erzeugt).

7. Es sei $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ stetig, und für jedes $x\in[0,1]$ sei die Folge $(f(n\cdot x))_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt. Dann ist f beschränkt.

8. Man zeige:

   $X=C[0,1]$ mit $d(f,g)=\int\limits_0^1|f(x)-g(x)|dx$ ist ein metrischer Raum. Er ist nicht vollständig.

9. Der metrische Raum (X, d) ist genau dann kompakt, wenn jede stetige Funktion $f: X \to \mathbb{R}$ ein Maximum besitzt.

10. Es sei (X, d) kompakt und $T: X \to X$ eine Abbildung mit

$$(*) \qquad d(Tx, Ty) < d(x, y), \quad x \neq y .$$

Dann besitzt T genau einen Fixpunkt.

Gilt diese Aussage noch, wenn $(*)$ nur für eine Iterierte T^N gefordert wird?

11. Man zeige:

(a) $C[0,1]$, versehen mit

$$d(f,g) = \int_0^1 \frac{|f(x) - g(x)|}{1 + |f(x) - g(x)|} \, dx ,$$

ist ein metrischer Raum.

(b) $(C[0,1], d)$ ist nicht vollständig.

12. Ist (X, d) ein kompakter metrischer Raum, so ist $C(X)$ in der Metrik $d(f,g) = \max_{x \in X} |f(x) - g(x)|$ vollständig und separabel.

Unter welcher Bedingung an X sind abgeschlossene Kugeln in $C(X)$ kompakt?

13. Es sei $m = \{x : \ x = (x_1, x_2, \dots) \text{ ist beschränkte Zahlenfolge}\}$.

(a) m ist ein Vektorraum, und p, definiert durch

$$p(x) = \limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k ,$$

ist ein sublineares Funktional auf m.

(b) $c = \{x \in m : \lim\limits_{n\to\infty} x_n \text{ existiert}\}$ ist ein Untervektorraum von m, und ϕ, definiert durch

$$\phi(x) = \lim_{n\to\infty} x_n$$

ist ein lineares Funktional.

(c) Es gibt "Banach-Limites" Φ auf m, d.h. lineare Fortsetzungen Φ von ϕ mit

1) $\Phi(x) \geq 0$, falls $x_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

2) $\Phi(x) = \Phi(\widetilde{x})$, falls $x_n = \widetilde{x}_n$ für $n \geq n_0$.

14. Es sei (X, d) ein kompakter metrischer Raum.

Zeigen Sie: Ist $f \in C(X)$, so ist f bereits gleichmäßig stetig.

15. (a) Man zeige: $K := \{x \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0 \ (i = 1 \ldots n)\}$ ist ein Kegel, und man bestimme ein sublineares Funktional p mit $K = \{x \in \mathbb{R}^n : p(x) \leq 0\}$.

(b) Es sei $c_0 := \{x = (x_1, x_2, \ldots) : x_i \in \mathbb{R}, \lim x_i = 0\}$ der Vektorraum aller reellen Nullfolgen und $K := \{x \in c_0 : x_i \geq 0 \ (i \in \mathbb{N})\}$.

Man zeige: K ist ein Kegel ohne interne Punkte.

16. Es sei E ein reeller Vektorraum.

(a) Das System $\mathcal{T}$ aller derjenigen Teilmengen von E, die nur aus internen Punkten bestehen, ist eine Hausdorffsche Topologie in E .

(b) Jedes lineare Funktional $\phi : E \to \mathbb{R}$ ist bezüglich $\mathcal{T}$ stetig.

17. Es sei $(E, (p_\alpha)_{\alpha\in A})$ ein reeller polynormierter Raum und $\phi : E \to \mathbb{R}$ ein lineares Funktional. Man zeige, daß zur Stetigkeit von ϕ jede der folgenden Aussagen äquivalent ist:

(a) Es gibt eine nichtleere offene Teilmenge U von E mit $\phi(U) \subsetneqq \mathbb{R}$.

(b) Kern $\phi = \{x : \ \phi(x) = 0\}$ ist abgeschlossen.

18. (a) Ist $(E, (p_\alpha)_{\alpha \in A})$ ein polynormierter Raum, so existiert zu jedem Paar (x, y) von Elementen aus E mit $x \neq y$ ein stetiges lineares Funktional ϕ mit $\phi(x) \neq \phi(y)$.

    (b) Ist $(E, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum, so existiert zu jedem $x_0 \neq 0$ ein stetiges lineares Funktional mit

$$|\phi(x)| \leq \|x\| \,, \quad |\phi(x_0)| = \|x_0\| \,.$$

19. Daß der normierte Raum $(E, \|\cdot\|)$ endlich-dimensional ist, ist jede der folgenden Bedingungen notwendig und hinreichend:

    (a) Jedes lineare Funktional ist stetig.

    (b) Jeder Untervektorraum ist abgeschlossen.

    (c) Jede Norm $\|\cdot\|_1$ ist zu $\|\cdot\|$ äquivalent, d.h. es gibt jeweils $0 < \alpha < \beta$ mit $\alpha\|x\|_1 \leq \|x\| \leq \beta\|x\|_1$ für alle $x \in E$.

    (d) Die Einheitskugel $K = \{x : \ \|x\| \leq 1\}$ ist kompakt.

20. Es sei $(E, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum, $\phi \neq 0$ ein stetiges lineares Funktional, $\alpha \in \mathbb{R}$ und $H = \{x : \ \phi(x) = \alpha\}$ eine Hyperebene. Dann gilt für jedes $x \in E$

$$\text{dist}\,(x, H) = \frac{|\phi(x) - \alpha|}{\|\phi\|} \quad \text{(Hessesche Abstandsformel).}$$

21. Es sei $E = \{f \in C([0,1]) : \ f(0) = (0)\}$, versehen mit der Maximum-Norm, und $F = \{f \in E : \ \int\limits_0^1 f(t)\,dt = 0\}$.

    Man zeige:

    (a) E ist ein Banach-Raum.

    (b) F ist eine abgeschlossene Hyperebene.

(c) Zu $f_0(x) = x$ gibt es kein $g \in F$ mit

$$\|f_0 - g\| = \text{dist}\,(f_0, F)\ .$$

(Es gibt keinen "Lotfußpunkt".)

22. Es sei $(E, (p_\alpha)_{\alpha\in A})$ ein polynormierter Raum. Genau dann gibt es eine Norm auf E, die die Topologie der p_α erzeugt, wenn eine beschränkte konvexe Nullumgebung existiert.

23. Auf der abgeschlossenen Einheitskugel S der auf $[0, 1]$ stetigen komplexwertigen Funktionen (Maximum-Norm) gebe man ein lineares stetiges Funktional ϕ an, so daß $\phi(S)$ in $\mathbb{C}$ offen ist.

24. Es sei $(E, (p_\alpha)_{\alpha\in A})$ polynormierter Raum, E endlich-dimensional.

    Zeigen Sie:

    a) Es gibt eine Norm auf E, die die Topologie von $(E, (p_\alpha)_{\alpha\in A})$ erzeugt.

    b) Jede Norm auf E erzeugt dieselbe Topologie.

    c) Jeder endlich-dimensionale normierte Raum ist reflexiv.

25. Es sei $c_0 = \{x = (\xi_1, \xi_2, \dots) : \xi_n \in \mathbb{R},\ \ \lim \xi_n = 0\}$
    und $\|x\| = \max_{n\in\mathbb{N}} |\xi_n|$.

    Man zeige:

    a) $(c_0, \|\cdot\|)$ ist ein Banachraum.

    b) $c_0^* \cong l_1(\mathbb{N}) := \{y = (\eta_1, \eta_2, \dots) : \eta_i \in \mathbb{R},\ \ \sum\limits_{i=1}^{\infty} |\eta_i| < \infty\}$.

    Man bestimme $\|\cdot\|^*$.

26. Man beweise: Eine Teilmenge M von $(C[0, 1], \|\cdot\|_\infty)$ ist relativ kompakt genau dann, wenn M beschränkt und gleichgradig stetig ist.

27. Es sei $E = l_1(\mathbb{N}) = \{(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}} : \sum\limits_{n=1}^{\infty} |\xi_n| < \infty\}$. Man beweise:

    (a) E ist mit $\|x\| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} |\xi_n|$ (für $x = (\xi_n)$) ein Banachraum.

    (b) E^* ist als normierter Raum isomorph zu $l_\infty(\mathbb{N})$.

    (c) In E konvergiert eine Folge (x_n) genau dann, wenn sie schwach konvergiert.

    (d) Schwache und Norm-Topologie von E sind verschieden.

28. Der normierte Raum $(E, \|\cdot\|)$ ist endlich-dimensional genau dann, wenn schwache Topologie und Norm-Topologie übereinstimmen.

29. Man bestimme die Normen der folgenden stetigen linearen Funktionale auf $C([0,1])$ (Maximum-Norm):

$$
\begin{aligned}
\phi_1(x) &= \int_0^1 x(t)\,dt\ ; \\
\phi_2(x) &= \int_0^1 x(t)y(t)\,dt && (y \in C([0,1]) \text{ fest})\ ; \\
\phi_3(x) &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x(t_i) && (\lambda_i \in \mathbb{R},\ t_i \in [0,1] \text{ fest})\ ; \\
\phi_4(x) &= \int_0^1 x(t)\,dy(t) && (\text{Riemann} - \text{Stieltjes} - \text{Integral}, \\
& && \text{y von beschränkter Variation auf } [0,1])\ .
\end{aligned}
$$

30. Es sei $(E, \|\cdot\|)$ ein normierter linearer Raum und E unendlich–dimensional.

    a) Sind $\varphi_1, \dots \varphi_k \in E^*$, so ist $\dim\{x : \varphi_i(x) = 0\ (\forall i = 1 \dots k)\} = \infty$.

    b) Für $S(0,1) := \{x : \|x\| = 1\} \subset E$ ist $\mathrm{s} - \mathrm{cl}(S(0,1)) = \overline{K_{\|\cdot\|}(0,1)}$.

31. Die Norm $\|\cdot\|$ eines reellen Vektorraumes E wird genau dann von einem Innenprodukt erzeugt, wenn die Parallelogrammgleichung gilt.

32. Es sei E ein Innenproduktraum, $x_1, \ldots, x_n$ Elemente aus E, $a_{ij} = (x_i, x_j)$ und

    $G(x_i, \ldots, x_n) = \det\,((a_{ij}))$ (Gramsche Determinante der $x_1, \ldots, x_n$) .

    Man zeige:

    (a) Es gilt $G(x_1, \ldots, x_n) \geq 0$ und $G = 0$ genau dann, wenn die x_i linear abhängig sind.

    (b) Die x_i seien linear unabhängig und F der von ihnen aufgespannte Teilraum. Dann gilt

    $$\operatorname{dist}\,(x, F) = \sqrt{\frac{G(x_1, \ldots, x_n, x)}{G(x_1, \ldots, x_n)}} \; .$$

33. Die Folge (x_n) im Hilbertraum H ist schwach konvergent genau dann, wenn $((x_n, y))$ konvergent ist für jedes $y \in H$.

    Sie ist konvergent gegen x genau dann, wenn sie schwach gegen x konvergiert und $\|x_n\| \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \|x\|$ gilt.

34. Zu jedem Innenproduktraum $(E, (\cdot, \cdot))$ gibt es einen bis auf Isomorphie eindeutig bestimmten Hilbertraum $(\bar{E}, (\cdot, \cdot)^{-})$ und eine Isometrie $T: \; E \to \bar{E}$ so, daß $T(E)$ in $\bar{E}$ dicht ist.

35. Es sei B eine beliebige Menge und
    $E = \{x : \; B \to \mathbb{C} \;$ mit $\; x(b) \neq 0 \;$ für höchstens abzählbar viele $b \in B$ und $\sum\limits_{b \in B} |x(b)|^2 < \infty\}$.

    Zeigen Sie: E ist unter

    $$(x, y) = \sum_{b \in B} \; x(b)\,\overline{y(b)}$$

    ein Hilbertraum. Geben Sie eine Orthonormalbasis von E an.

36. (a) Der Hilbertraum H ist separabel genau dann, wenn eine (und damit jede) Orthonormalbasis abzählbar ist.

    (b) Ist H separabel und V ein abgeschlossener, unendlich-dimensionaler Teilraum von H, so gibt es eine Isometrie von V auf H.

37. Die Einheitskugel jedes Hilbertraumes H ist schwach kompakt. Ist H separabel, so ist die Einheitskugel schwach folgenkompakt. (Gilt dies auch in nichtseparablen Hilberträumen?)

38. (a) Sind E, F normierte Räume, so ist $L \in \mathcal{L}(E, F)$ stetig genau dann, wenn

$$\sup_{\|x\|=1} \|Lx\| < \infty$$

gilt. L ist stetig invertierbar auf $L(E)$ genau dann, wenn

$$\inf_{\|x\|=1} \|Lx\| > 0$$

gilt.

    (b) Der Vektorraum aller stetigen $L \in \mathcal{L}(E, F)$ wird durch

$$\|L\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|L\|$$

zu einem normierten Raum. Dieser ist vollständig, falls F vollständig ist.

39. Es sei E ein Hilbertraum, F ein Banachraum und $M \subseteq E$ ein Untervektorraum. Jede lineare Abbildung $L: \ M \to F$ mit

$$\|L\|_M = \sup_{\substack{\|x\|\leq 1 \\ x\in M}} \|Lx\| < \infty$$

besitzt eine lineare Fortsetzung $\Lambda: \ E \to F$ mit

$$\|\Lambda\| \ = \ \|L\|_M \ .$$

40. Es sei $T : \omega \to \omega$ stetig.

    Zeigen Sie:

(a) Es gibt eine Matrix $(a_{ij})_{i,j\in\mathbb{N}}$ mit $\{j : a_{ij} \neq 0\}$ ist endlich für jedes $i \in \mathbb{N}$ und

$$T(x) = A \cdot x \quad (x \in \omega)\ ; \tag{1}$$

(b) Umgekehrt ist jede Abbildung $T : \omega \to \omega$ der Form (1) linear und stetig.

41. Es sei $E = \{x : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \ x(t) = \sum\limits_{i=0}^{m} a_i t^i,\ m \in \mathbb{N}\}$ der Vektorraum aller Polynome mit reellen Koeffizienten und $\|x\| = \max_{i=0\ldots m} |a_i|$.

Man zeige:

(a) $(E, \|\cdot\|)$ ist ein normierter Raum.

(b) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist T_n, definiert durch $T_n(x) := \sum\limits_{i=0}^{n-1} a_i$, ein stetiges lineares Funktional auf E .

(c) $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist punktweise beschränkt.

(d) $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist nicht gleichmäßig beschränkt.

42. (a) Es sei E ein vollständig metrisierbarer polynormierter Raum über $\mathbb{C}$ und $A : E \to E$ linear und stetig. Es existiere ein $c > 0$, so daß $\left(\frac{1}{c^k} A^k\right)$ gleichgradig stetig ist. Beweisen Sie, daß dann für jede ganze Funktion $f(z) = \sum\limits_{j=0}^{\infty} a_j z^j$ durch

$$f(A)(x) := \sum_{j=0}^{\infty} a_j A^j(x)$$

ein stetiger linearer Operator erklärt ist.

(b) Sei $E = \omega$ und $A : \omega \to \omega$ definiert durch

$$A(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (x_2, x_3, \ldots)\ .$$

Zeigen Sie, daß es zu $f(z) = e^z$ ein $x \in \omega$ gibt, so daß $\sum\limits_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} A^j(x)$ nicht konvergiert.

43. Es sei $(H, (.,.))$ ein Hilbertraum und N ein abgeschlossener Unterraum.

    Man beweise: $H/_N$ ist isomorph zu $N^\perp$ und

    $$\|\tilde{x}\|^\sim := \inf\{\|x+z\| : z \in N\}$$

    wird durch ein Innenprodukt erzeugt.

44. Sei E ein Vektorraum und $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ linear unabhängige lineare Funktionale auf E sowie $N = \{x : \varphi_j(x) = 0 \ (j = 1 \ldots k)\}$. Dann ist $\dim E/_N = k$.

45. Sei $(E, (p_\alpha)_{\alpha \in A})$ ein polynormierter Raum und d eine translationsinvariante Metrik auf E, die dieselbe Topologie erzeugt.

    Man beweise: Eine Folge (x_n) ist Cauchy–Folge in dem polynormierten Raum genau dann, wenn sie Cauchy–Folge bezüglich der Metrik d ist.

    Bleibt diese Aussage richtig, wenn die Voraussetzung der Translationsinvarianz weggelassen wird?

46. Es sei $E = C[0,1]$, $a \in E$ und $T : E \to E$ definiert durch

    $$(Tx)(t) = a(t)x(t).$$

    Unter welchen Voraussetzungen an a ist T ein Fredholm-Operator? Man bestimme gegebenenfalls den Index von T.

47. Es sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ein beschränktes Gebiet und $a \not\equiv 0$ in einer Umgebung von $\overline{\Omega}$ holomorph. E sei der Raum aller auf $\overline{\Omega}$ stetigen, in Ω holomorphen Funktionen mit der Maximum-Norm.

    Man zeige:

    E ist ein Banach-Raum, und $T : E \to E$ mit $(Tf)(z) = a(z)f(z)$ ist ein Fredholm-Operator. Man bestimme den Index von T.

48. (a) Sind E, F, G Banach-Räume und $T : E \to F$, $S : F \to G$ Fredholm-Operatoren, so ist auch $S \circ T : E \to G$ ein Fredholm-Operator, und es gilt $\operatorname{ind}(S \circ T) = \operatorname{ind} S + \operatorname{ind} T$.

(b) Ist E Banach-Raum und $T: E \to E$ linear und stetig, so ist T Fredholm-Operator genau dann, wenn T^n für ein $n \in \mathbb{N}$ ein solcher ist.

49. Es seien E und F Banachräume.

(a) Die Menge $\mathcal{K}$ der kompakten Operatoren bildet einen abgeschlossenen Untervektorraum des Raumes $\mathcal{L}(E, F)$ der stetigen linearen Operatoren.

(b) Ist F Hilbertraum, so ist der Raum $\mathcal{E}$ der endlichdimensionalen stetigen linearen Operatoren dicht in $\mathcal{K}$.

50. Es seien E und F normierte Räume.

(a) Ist $T: \; E \to F$ kompakt, so gilt $\lim\limits_{n\to\infty} Tx_n = Tx$ für jede schwach gegen x konvergente Folge (x_n).

(b) Ist E reflexiv, so gilt auch die Umkehrung von a).

(c) Anhand eines Beispiels (etwa in l^1) belege man, daß für die Gültigkeit von b) auf die Reflexivität von E nicht verzichtet werden kann.

51. Sei E ein normierter Raum. Eine stetige lineare Abbildung $P: \; E \to E$ heißt Projektor, falls $P^2 = P$ gilt.

(a) Ist $P: \; E \to E$ ein Projektor, so gilt $E = P(E) \oplus \mathrm{Kern}(P)$ und $P(E)$ und $\mathrm{Kern}(P)$ sind abgeschlossen.

(b) Ist $U \subset E$ ein Teilraum, U endlichdimensional oder U abgeschlossen und endlich-kodimensional, so existiert ein stetiger Projektor $P: \; E \to E$ mit $P(E) = U$.

(c) Ist E ein Hilbertraum und U abgeschlossener Unterraum, so gibt es einen stetigen Projektor $P: \; E \to E$ mit $P(E) = U$ und $\mathrm{Kern}(P) = U^\perp$.

52. Es sei X ein normierter Raum, $\overline{X}$ die Vervollständigung von X.
Weiter sei $T \in \mathcal{L}\,\mathcal{C}(X)$ und $\overline{T}$ die (stetige) Fortsetzung von T auf $\overline{X}$.

Man zeige: $\rho(\overline{T}) = \rho(T) \quad$ und $\quad \sigma(\overline{T}) = \sigma(T)$.

53. (a) Sei $K \subset \mathbb{C}$ kompakt, $K \neq \emptyset$. Man gebe einen Banachraum E und $T \in \mathcal{L}\,\mathcal{C}(E)$ an mit $\sigma(T) = K$.

    (b) Sei (λ_n) eine Folge in $\mathbb{C}$ mit $\lim \lambda_n = 0$. Man gebe einen Banachraum E und $T \in \mathcal{K}(E)$ an mit $\sigma(T) = \{\lambda_n :\ n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$.

54. Seien $\alpha_i, \beta_j \in \mathbb{R} \quad (i \in \mathbb{N},\ j \in \{2,3,\dots\})$ mit $\sup |\alpha_k| < \infty$ und $\sum\limits_{k=2}^{\infty} |\beta_k| < \infty$. Definiere $T \in \mathcal{L}(l_1)$ durch $(T\xi)_1 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k \xi_k$, $(T\xi)_k = \beta_k\, \xi_1 \quad (k \geq 2)$.

    Bestimme $\sigma(T)$ und die Resolvente.

55. Es sei E ein komplexer Banachraum, $T \in \mathcal{L}\,\mathcal{C}(X)$ und p ein (komplexes) Polynom.

    Zeige: $\sigma(p(T)) = p(\sigma(T))$.

56. Es sei $E = C[0,1]$, $G = [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$G(t,s) = \begin{cases} -t(1-s) & 0 \leq t \leq s \leq 1 \\ -s(1-t) & 0 \leq s \leq t \leq 1 \end{cases}$$

    und $T:\ E \to E$ definiert durch

$$(Tx)(t) \ = \ \int_0^1 G(t,s)x(s)\, ds$$

    Man zeige:

    (a) T ist linear und kompakt; man bestimme $\|T\|$,

    (b) $\sigma(T) = \{-\frac{1}{k^2\pi^2} \ :\ k \in \mathbb{N}\} \ \cup\ \{0\}$; man bestimme die zugehörigen Eigenräume.

57. Ein Banachraum heißt strikt konvex, wenn jedes Element aus dem Rand der Einheitskugel extremal ist.

(a) Ist E strikt konvex, so nimmt jedes $x' \in E'$ sein Maximum auf der abgeschlossenen Einheitskugel höchstens einmal an, d.h. $x'(x_0) = \|x'\|$ für höchstens ein x_0 aus $\overline{K(0,1)}$.

(b) (Maximum-Prinzip) Sei $\Delta \subset \mathbb{C}$ Gebiet, E strikt konvexer Banachraum, $f: \Delta \to E$ holomorph.
Nimmt $\|f(\lambda)\|$ ein absolutes Maximum in Δ an, so ist f konstant in Δ.

58. Sei E ein Banachraum und $S, T \in \mathcal{L}\,\mathcal{C}(E)$.

(a) Ist $\lambda_0 \in \rho(T)$ und $\|S - T\| < \frac{1}{\|(\lambda_0 - T)^{-1}\|}$, so ist $\lambda_0 \in \rho(S)$.

(b) Sei $\Delta \subset \mathbb{C}$ offen und $\sigma(T) \subset \Delta$. Dann existiert $\epsilon > 0$, so daß $\sigma(S) \subset \Delta$ für alle S mit $\|S - T\| < \epsilon$.

59. Es sei A eine Banachalgebra und $x, y \in A$.

(a) Sind x und xy invertierbar, so auch y.

(b) Sind xy und yx invertierbar, so auch x und y.

(c) Zeigen Sie, daß $xy = e \neq yx$ möglich ist. (Shiftoperatoren!)

(d) Ist $xy = e \neq yx$, so ist yx idempotent.

(e) Ist $\dim A < \infty$, so folgt aus $xy = e$ auch $yx = e$.

60. Es sei A eine Banachalgebra und $x, y \in A$.

(a) Ist $e - xy$ invertierbar, so auch $e - yx$.

(b) Ist $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $0 \neq \lambda \in \sigma(xy)$, so folgt $\lambda \in \sigma(yx)$.

(c) Ist x invertierbar, so gilt $\sigma(xy) = \sigma(yx)$.

61. Es sei A eine Banachalgebra, $\Omega \subset \mathbb{C}$ Gebiet, $f: \Omega \to A$ und $g: \Omega \to \mathbb{C}$, f und G holomorph. Dann ist $g \cdot f: \Omega \to A$ holomorph.

62. Es sei A eine Banachalgebra. $x \in A$ heißt topologischer Nullteiler, wenn es eine Folge (y_n) aus A gibt, mit $\|y_n\| = 1$ und $\lim\limits_{n\to\infty} xy_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n x = 0$.

    Zeigen Sie, daß jeder Randpunkt der Menge der invertierbaren Elemente von A ein topologischer Nullteiler ist.

63. Es sei A eine Banachalgebra mit Eins.

    (a) Für $x, y \in A$ sind die Spektralradien von xy und yx gleich.

    (b) Ist $a \in \mathcal{G}(A)$ und $x \in A$, so sind die Spektralradien von x und $a^{-1}xa$ gleich.

64. Es sei A eine Banachalgebra.

    (a) Gibt es eine Konstante $M < \infty$ mit $\|xy\| \leq M\, \|yx\| \quad \forall x, y \in A$, so ist A kommutativ.

    (b) Gilt $\|x^2\| = \|x\|^2$, so ist A kommutativ.

65. (a) Es sei A die reelle Banachalgebra $M^{2\times 2}(\mathbb{R})$ und $x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in A$.
    Bestimmen Sie $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|x^n\|}$ (für eine beliebige Algebranorm $\|\cdot\|$), $\sigma(x)$, $\varrho(x)$ und $R_\lambda(x)$.

    (b) Es sei A die komplexe Banachalgebra $M^{n\times n}(\mathbb{C})$, und $x \in A$ habe die Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ mit den Vielfachheiten $k_1, \ldots, k_r$.

    Man beweise: $R_\lambda(x)$ ist eine rationale Funktion mit Polen in den λ_j . Bestimmen Sie die Ordnung dieser Pole (Jordansche Normalform!).

66. Es sei $E = l_2\,(\mathbb{C})$ und S_R der Rechtsshift. (c_n) sei eine Folge aus $\mathbb{C}$ mit $\lim c_n = 0$ und $c_n \neq 0$ $(\forall\, n \in \mathbb{N})$. $M \in \mathcal{L}\,\mathcal{C}(E)$ sei gegeben durch

$$(Mx)_n \;=\; c_n\, x_n \;\; (n \geq 0) \quad \text{und} \quad T = M \circ S_R$$

    Man zeige:

(a) $T \in \mathcal{L}\,\mathcal{C}(E)$. Bestimme $\|T^m\|$ $(m \in \mathbb{N})$;

(b) $\sigma(T) = \{0\}$;

(c) T hat keine Eigenwerte;

(d) $(\lambda I - T)^{-1}$ hat keinen Pol in $\lambda = 0$;

(e) T ist ein kompakter Operator.

67. A sei eine komplexe Banachalgebra mit Eins, $x \in A$, $x_n \in A$, $x_n \to x$. Weiter sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und enthalte eine Komponente von $\sigma(x)$.

    Zeigen Sie, daß $\sigma(x_n) \cap \Omega \neq \emptyset$ für hinreichend große n.

68. Ist A komplexe Banachalgebra mit Eins, $a \in A$, $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet mit $0 \in G$, so ist $x(z) = \exp\,(z \cdot a)$ die einzige Lösung von $x'(z) = a \cdot x(z),\ x(0) = e$.

    Gilt $\sigma(a) \subset i\mathbb{R}$, so folgt $\sigma(x(t)) \subset \overline{K(0,1)}$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

Index