Fixpunktsätze
Kiel, SS 2000
Hauke Klein

Revision 1

Mon Aug 21 13:03:09 CEST 2000, printed 25. August 2000

```
$Id: Makefile,v 1.12 2000/08/07 07:55:37 hk Exp$
$Id: titel.tex,v 1.2 2000/08/16 14:20:38 hk Exp $
$Id: seite.tex,v 1.2 2000/06/09 17:45:47 hauke Exp $
$Id: standard.tex,v 1.17 2000/08/15 07:50:57 hk Exp $
$Id: h.tex,v 1.7 2000/08/08 08:34:44 hk Exp $
$Id: vorwort.tex,v 1.3 2000/08/21 11:01:37 hk Exp $
$Id: banach.tex,v 1.5 2000/08/21 08:13:50 hk Exp $
$Id: expand.tex,v 1.5 2000/08/21 08:19:17 hk Exp $
$Id: smulian.tex,v 1.5 2000/08/21 08:26:01 hk Exp $
$Id: brouwer.tex,v 1.4 2000/08/21 09:17:10 hk Exp $
$Id: formen.tex,v 1.4 2000/08/21 09:19:55 hk Exp $
$Id: schauder.tex,v 1.6 2000/08/23 09:21:13 hk Exp $
$Id: index.tex,v 1.4 2000/08/23 10:43:53 hk Exp $
$Id: verzweig.tex,v 1.6 2000/08/23 12:47:58 hk Exp $
$Id: zush.tex,v 1.3 2000/08/21 10:56:37 hk Exp $
$Id: sturm.tex,v 1.3 2000/08/23 12:52:36 hk Exp $
```

Vorwort

Die Vorlesung “Fixpunktsätze“ wurde im Sommersemester 2000 vierstündig an der Christian-Albrechts Universität Kiel gehalten. Als Grundlagen werden nur der Inhalt des Grundstudiums und die Anfänge der Funktionalanalysis als bekannt vorausgesetzt. Einige speziellere Kenntnisse werden im Verlauf des Scripts bei Bedarf vorgestellt. Zusätzlich habe ich noch einige Anhänge zu einzelnen Abschnitten aufgenommen, die in der Vorlesung so nicht vorkamen.

Wir wollen noch kurz ein paar Kleinigkeiten zur Notation festhalten. Ist E ein Raum reellwertiger Funktionen, so schreiben wir einfach $\|\ \|$ für die Supremumsnorm. Manchmal wird hierzu auch der Index “∞“ hinzugefügt, also $\|\ \|_\infty$. Für $E = \mathbb{R}^n$ ist mit $\|\ \|$ stets die euklidische Norm gemeint. Produkträume werden in der Regel mit der Maximumsnorm versehen.

Literaturangaben werden immer am Ende eines Abschnitts aufgelistet. Dabei wird jeder Titel innerhalb des gesamten Scripts nur einmal genannt werden.

Inhaltsverzeichnis

§1 Der Fixpunktsatz von Banach und einige Varianten

Der erste Fixpunktsatz der uns üblicherweise im Grundstudium begegnet ist der Fixpunktsatz von Banach. Dieser wird zum Beispiel in gängigen Beweisen des Satzes über implizite Funktionen oder in der Herleitung des Satzes von Picard-Lindelöf verwendet. Das letztere Beispiel werden wir in diesem Kapitel auch noch diskutieren.

Zur Einstimmung wollen wir den Satz von Banach hier noch einmal formulieren und beweisen. Dieser Satz handelt von sogenannten kontrahierenden Abbildungen, d.h. Selbstabbildungen $T : M \to M$ eines metrischen Raums M mit $d(Tx, Ty) \leq ld(x, y)$ für eine Konstante $l < 1$. Eine solche Abbildung ist offenbar stetig, sogar gleichmäßig stetig. Außerdem erhalten wir durch iterierte Anwendung der Kontraktionsbedingung auch $d(T^n x, T^n y) \leq l^n d(x, y)$ für alle $x, y \in M$ und $n \geq 0$.

Satz 1: *Seien (M, d) ein nicht-leerer, vollständiger metrischer Raum und $T : M \to M$ eine Abbildung. Es gebe eine Konstante $0 \leq l < 1$ so, dass $d(Tx, Ty) \leq ld(x, y)$ für alle $x, y \in M$ gilt. Dann hat T genau einen Fixpunkt $z \in M$ und für jedes $x \in M$ gilt $\lim_{n\to\infty} T^n x = z$.*

Beweis: Sei $x \in M$ gegeben. Wir wollen zeigen, daß der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} T^n x$ in M existiert. Da der metrische Raum M vollständig ist, reicht es hierfür einzusehen, dass die Folge $(T^n x)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge ist.

Seien $n, k \in \mathbb{N}$ gegeben. Dann haben wir die folgende Abschätzung

$$d(T^n x, T^{n+k} x) \leq \sum_{i=n}^{n+k-1} d(T^i x, T^{i+1} x) \leq \sum_{i=n}^{n+k-1} l^i d(x, Tx) \leq \frac{l^n}{1-l} d(x, Tx),$$

da $0 \leq l < 1$ ist. Wegen $l^n \to 0$ für $n \to \infty$ zeigt dies, dass $(T^n x)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge ist. Sei $z := \lim_{n\to\infty} T^n x$ ihr Grenzwert. Da die Abbildung T stetig ist, folgt $T(z) = \lim_{n\to\infty} T^{n+1}x = z$, d.h. z ist ein Fixpunkt von T.

Es verbleibt nur noch einzusehen, dass T höchstens einen Fixpunkt hat. Sind $z, z' \in M$ zwei Fixpunkte von T, so ist $d(z, z') = d(Tz, Tz') \leq l d(z, z')$, d.h. $d(z, z') = 0$ und $z = z'$ da $l < 1$ ist.

■

Es liegt nahe zu fragen, ob sich die Bedingung $l < 1$ abschwächen läßt? Fordern wir nur $d(Tx, Ty) \leq d(x, y)$, so muß es offenbar keine Fixpunkte mehr geben, bereits die Abbildung $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; x \mapsto x + 1$ ist ein Gegenbeispiel. Dieses Beispiel nutzt allerdings aus, dass ganz $\mathbb{R}$ nicht beschränkt ist, wir könnten versuchen nur Selbstabbildungen kompakter metrischer Räume zu betrachten. Leider nützt auch dies nicht, sei zum Beispiel M der Kreisring

$$M := \{x \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq ||x|| \leq 2\}$$

im $\mathbb{R}^2$. Dann ist M ein zusammenhängender, kompakter metrischer Raum und die Abbildung $T : M \to M; x \mapsto -x$ erfüllt $d(Tx, Ty) = d(x, y)$ für alle $x, y \in M$ und hat wieder keinen Fixpunkt. Trotzdem werden wir in §2 einsehen, dass es bei geeigneten geometrischen Voraussetzungen an M wieder Fixpunkte geben muss.

Wie sieht es aus wenn wir etwas mehr, nämlich $d(Tx, Ty) < d(x, y)$ für $x, y \in M$ mit $x \neq y$ fordern? Leider reicht auch dies im Allgemeinen nicht aus. Sei M der folgende Teilraum des Raums $C[0, 1]$ der stetigen, reellwertigen Funktionen auf $[0, 1]$

$$M := \{x \in C[0, 1] | \forall (t \in [0, 1]) : 0 = x(0) \leq x(t) \leq x(1) = 1\}.$$

Offenbar ist M eine abgeschlossene, beschränkte und konvexe Menge in $C[0, 1]$, also insbesondere ein vollständiger metrischer Raum. Wir betrachten die Abbildung

$$T : M \to M; x \mapsto Tx : [0, 1] \to \mathbb{R}; t \mapsto tx(t),$$

d.h. $Tx(t) = tx(t)$ für $x \in M$, $0 \leq t \leq 1$. Seien $x, y \in M$ mit $x \neq y$. Dann ist auch $Tx \neq Ty$ und es gibt ein $0 \leq t \leq 1$ mit $|Tx(t) - Ty(t)| = ||Tx - Ty|| > 0$. Offenbar ist $0 < t < 1$ und

$$||Tx - Ty|| = |Tx(t) - Ty(t)| = t|x(t) - y(t)| \leq t||x - y|| < ||x - y||.$$

Aber T hat keinen Fixpunkt in M, denn gäbe es ein $x \in M$ mit $Tx = x$, so wäre $tx(t) = Tx(t) = x(t)$ für alle $t \in [0, 1]$, d.h. $x(t) = 0$ für $0 \leq t < 1$ und somit auch $x(1) = 0$ im Widerspruch zu $x \in M$.

Allerdings reicht die Forderung $d(Tx, Ty) < d(x, y)$ $(x \neq y)$ aus, wenn M zusätzlich kompakt ist.

Satz 2: *Seien M ein nicht-leerer, kompakter metrischer Raum und $T : M \to M$ eine Abbildung mit $d(Tx, Ty) < d(x, y)$ für alle $x, y \in M$ mit $x \neq y$. Dann hat T genau einen Fixpunkt $z \in M$ und für jedes $x \in M$ gilt $\lim_{n\to\infty} T^n x = z$.*

Beweis: Dass es höchstens einen Fixpunkt gibt, ist wieder sehr einfach. Wären $x, y \in M$ zwei verschiedene Fixpunkte von T, so hätten wir sofort den Widerspruch $d(x,y) = d(Tx,Ty) < d(x,y)$. Auch die Existenz eines Fixpunkts ist leicht einzusehen. Denn die stetige Funktion

$$f : M \to \mathbb{R}_{\geq 0}; x \mapsto d(Tx, x)$$

nimmt ihr Infinum in einem Punkt $z \in M$ an, da M ja als kompakt vorausgesetzt ist. Wäre $Tz \neq z$, so hätten wir $f(z) \leq f(Tz) = d(T^2z, Tz) < d(Tz, z) = f(z)$, d.h. $Tz = z$. Also gibt es tatsächlich genau einen Fixpunkt z von T.

Wir kommen zur zweiten Aussage. Sei $x \in M$ gegeben. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ definiere $a_n := d(T^n x, z)$. Für $n \geq 1$ haben wir

$$a_{n+1} = d(T^{n+1}x, z) = d(T^{n+1}x, Tz) \leq d(T^n x, z) = a_n,$$

d.h.

$$a := \inf\{a_n : n \geq 1\} = \lim_{n\to\infty} a_n.$$

Sei $n : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine Teilfolge für die $u := \lim_{k\to\infty} T^{n_k}x$ existiert. Dann ist $d(u,z) = \lim_{k\to\infty} d(T^{n_k}x, z) = \lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a$. Ebenso ist

$$d(Tu, Tz) = d(Tu, z) = \lim_{k\to\infty} d(T^{n_k+1}x, z) = a = d(u, z),$$

d.h. $u = z$. Also ist z der einzige Häufungspunkt der Folge $(T^n x)_{n\in\mathbb{N}}$, und da M kompakt ist folgt $\lim_{n\to\infty} T^n x = z$.

■

Wir kehren jetzt zur allgemeinen Situation zurück, und versuchen weiter unseren Fixpunktsatz zu verbessern. Sind M ein metrischer Raum und $T : M \to M$ eine Abbildung, so definieren wir die Lipschitz-Zahl von T als

$$l(T) := \inf\{l \geq 0 | \forall (x, y \in M) : d(Tx, Ty) \leq l d(x, y)\},$$

wobei das Infinum der leeren Menge als ∞ interpretiert wird. Offenbar gilt $d(Tx, Ty) \leq l(T)d(x, y)$ für alle $x, y \in M$, d.h. $l(T)$ ist die beste Lipschitz-Konstante für T.

Sind $T, R : M \to M$ zwei Abbildungen, so gilt für $x, y \in M$ stets $d(TRx, TRy) \leq l(T)d(Rx, Ry) \leq l(T)l(R)d(x, y)$, d.h.

$$l(TR) \leq l(T)l(R).$$

Insbesondere ist $l(T^n) \leq l(T)^n$ für $n \geq 1$. Mit dieser Notation haben wir in der entscheidenden Abschätzung im Beweis von Satz 1

$$\begin{aligned} d(T^n x, T^{n+k}x) &\leq \sum_{i=0}^{k-1} d(T^{n+i}x, T^{n+i+1}x) \\ &\leq \sum_{i=0}^{k-1} l(T^{n+i}) d(x, Tx) \\ &= \left(\sum_{i=n}^{n+k-1} l(T^i) \right) d(x, Tx). \end{aligned}$$

Der Term $\sum_{i=n}^{n+k-1} l(T^i)$ geht genau dann für $n \to \infty$ gegen Null, wenn $\sum_{n=1}^{\infty} l(T^n) < \infty$ ist. Also erhalten wir eine Variante des Banachschen Fixpunktsatzes indem wir die Bedingung $l < 1$ durch $\sum_{n=1}^{\infty} l(T^n) < \infty$ ersetzen. Dies ist formal etwas schwächer, denn im Original wird $l(T) \le l$ gefordert, also $\sum_{n=1}^{\infty} l(T^n) \le \sum_{n=1}^{\infty} l(T)^n \le \sum_{n=1}^{\infty} l^n < \infty$. Allerdings ist diese Reihenbedingung etwas unhandlich. Um eine etwas schönere Bedingung zu erhalten, beachte $l(T^{n+m}) = l(T^n T^m) \le l(T^n) l(T^m)$ für $n, m \ge 0$. Wir haben das folgende elementare Lemma.

Lemma 3: *Sei $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_{\ge 0}$ eine Folge mit $a_{n+m} \le a_n a_m$ für alle $n, m \ge 1$. Dann gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \inf\{\sqrt[n]{a_n} | n \ge 1\}.$$

Weiter ist genau dann $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$, wenn $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$ ist.

Beweis: Setze $c := \inf\{\sqrt[n]{a_n} | n \ge 1\}$. Sei $\epsilon > 0$. Es gibt ein $b \ge 1$ mit $\sqrt[b]{a_b} < c + \epsilon$. Weiter existieren $\delta > 0$ und $\beta > 1$ mit $(\sqrt[b]{a_b} + \delta)\beta < c + \epsilon$. Für $0 \le i < b$ ist bekanntlich $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_i} \in \{0, 1\}$, also existiert $n_1 \in \mathbb{N}$ mit $\sqrt[n]{a_i} \le \beta$ für alle $0 \le i < b$ und $n \ge n_1$. Für $0 \le i < b$ ist weiter

$$\lim_{n\to\infty} (\sqrt[b]{a_b})^{1-\frac{i}{n}} = \sqrt[b]{a_b},$$

d.h. es existiert $n_0 \ge n_1$ mit $(\sqrt[b]{a_b})^{1-i/n} \le \sqrt[b]{a_b} + \delta$ für $0 \le i < b$, $n \ge n_0$. Sei jetzt $n \ge n_0$ gegeben. Wähle $k \ge 0$, $0 \le i < b$ mit $n = kb + i$. Dann ist

$$a_n = a_{kb+i} \le a_b^k a_i$$

also

$$\sqrt[n]{a_n} \le a_b^{\frac{k}{n}} \sqrt[n]{a_i} \le (\sqrt[b]{a_b})^{\frac{kb}{n}} \beta = (\sqrt[b]{a_b})^{1-\frac{i}{n}} \beta \le (\sqrt[b]{a_b} + \delta)\beta < c + \epsilon.$$

Dies zeigt $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = c$.

Nun kommen wir zur zweiten Aussage. Ist $c = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$, so wähle ein $c < u < 1$. Dann ist $\sqrt[n]{a_n} \le u$ für alle $n \ge n_0$ für ein geeignetes $n_0 \in \mathbb{N}$, und das Wurzelkriterium liefert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$. Ist andererseits $c \ge 1$, so ist wegen $c = \inf\{\sqrt[n]{a_n} | n \ge 1\}$ auch $\sqrt[n]{a_n} \ge 1$ und somit $a_n \ge 1$ für jedes $n \ge 1$. Damit ist insbesondere $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$.

■

Ist jetzt M ein metrischer Raum und $T : M \to M$ eine Abbildung mit $l(T) < \infty$, so definieren wir

$$l_\infty(T) := \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{l(T^n)}.$$

Dieser Grenzwert existiert nach Lemma 3. Ist dagegen $l(T) = \infty$, so setzen wir $l_\infty(T) = \infty$. Nach der zweiten Aussage in Lemma 3 können wir dann im Banachschen Fixpunktsatz Satz 1 die Voraussetzung $l(T) < 1$ durch $l_\infty(T) < 1$ ersetzen. Wegen $l_\infty(T) \le l(T)$ ist dies formal etwas stärker als die ursprüngliche Fassung. Offenbar ist genau dann $l_\infty(T) < 1$, wenn $l(T^n) < 1$ für ein $n \ge 1$ ist, d.h. wir könnten auch fordern, dass eine Iterierte von T kontrahierend ist.

Welche Bedeutung hat jetzt die Zahl $l_\infty(T)$? Um diese Frage zu klären, benötigen wir den folgenden Begriff:

Definition 1: Seien M eine Menge und α, β zwei Metriken auf M. Wir nennen α und β äquivalent, falls es Konstanten $a, b > 0$ mit $a\alpha(x,y) \le \beta(x,y) \le b\alpha(x,y)$ für alle $x, y \in M$ gibt.

Seien α, β zwei äquivalente Metriken auf der Menge M, mit zugehörigen Konstanten $a, b > 0$. Sei $T : M \to M$ eine Abbildung. Für $x, y \in M$ können wir abschätzen

$$\alpha(Tx, Ty) \le \frac{1}{a}\beta(Tx, Ty) \le \frac{1}{a} l_\beta(T)\beta(x,y) \le \frac{b}{a} l_\beta(T)\alpha(x,y),$$

d.h. es ist

$$l_\alpha(T) \le \frac{b}{a} l_\beta(T).$$

Analog folgt $l_\beta(T) \le (b/a)l_\alpha(T)$ und wir haben

$$\frac{a}{b} l_\alpha(T) \le l_\beta(T) \le \frac{b}{a} l_\alpha(T).$$

Für jedes $n \ge 1$ folgt

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} l_\alpha(T^n)^{1/n} \le l_\beta(T^n)^{1/n} \le \sqrt[n]{\frac{b}{a}} l_\alpha(T^n)^{1/n}$$

und mit $n \to \infty$ haben wir

$$l_{\alpha,\infty}(T) = l_{\beta,\infty}(T).$$

Also ist $l_\infty(T)$ invariant beim Übergang zu äquivalenten Metriken. Insbesondere gilt $l_\infty(T) \le l_\alpha(T)$ für jede äquivalente Metrik α. Bevor wir diese Überlegung fortführen, wollen wir ein Beispiel diskutieren.

Seien $a > 0$ und eine stetige Funktion $f : [0,a] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben. Sei $x_0 \in \mathbb{R}$. Wir suchen Lösungen des Anfangswertproblems $x' = f(t,x)$, $x(0) = x_0$, d.h. gesucht sind differenzierbare Abbildungen $x : [0,a] \to \mathbb{R}$ mit $x'(t) = f(t, x(t))$ für jedes $t \in [0,a]$ und $x(0) = x_0$. Schon in den Grundvorlesungen haben wir gesehen, dass die Lösungen dieses Problems genau die stetigen Abbildungen $x : [0,a] \to \mathbb{R}$ mit

$$x(t) = x_0 + \int_0^t f(s, x(s))\, ds$$

für $0 \le t \le a$ sind. Definieren wir also die Abbildung

$$T : C[0,a] \to C[0,a]; Tx(t) = x_0 + \int_0^t f(s, x(s))\, ds,$$

so sind die Lösungen des Anfangswertproblems genau die Fixpunkte von T. Leider läßt sich der Banachsche Fixpunktsatz nicht bei beliebigem stetigen f auf T anwenden, da T im Allgemeinen keine Kontraktion ist.

Eine Bedingung an f, die erzwingt das T kontrahierend ist, haben wir ebenfalls bereits in den Grundvorlesungen kennengelernt. Es gebe eine Konstante $l > 0$ so, dass die Lipschitzbedingung

$$|f(t,x) - f(t,y)| \leq l|x-y|$$

für alle $0 \leq t \leq a$, $x, y \in \mathbb{R}$ gilt. Dann haben wir

$$\begin{aligned} |Tx(t) - Ty(t)| &= \left| \int_0^t (f(s,x(s)) - f(s,y(s)))\, ds \right| \\ &\leq \int_0^t |f(s,x(s)) - f(s,y(s))|\, ds \\ &\leq l \int_0^t |x(s) - y(s)|\, ds \\ &\leq lt||x-y|| \\ &\leq la||x-y||, \end{aligned}$$

also $||Tx - Ty|| \leq la||x-y||$. Ist $al < 1$, so ist T eine Kontraktion. Falls $la \geq 1$ ist, so kann Satz 1 nicht direkt benutzt werden, sondern wir unterteilen das Intervall $[0,a]$ und setzen die Lösung x stückchenweise zusammen.

Es gibt allerdings einen Trick um dieses kleine Problem zu vermeiden. Dieser geht auf Bielecki zurück. Für $\theta > 0$ und $x \in C[0,a]$ definiere

$$||x||_\theta := \sup_{0 \leq t \leq a} e^{-\theta l t}|x(t)|.$$

Offenbar ist dies eine Norm auf $C[0,a]$. Für jedes $x \in C[0,a]$ ist $e^{-\theta l a}||x|| \leq ||x||_\theta \leq ||x||$, d.h. $||\ ||_\theta$ ist eine zur Supremumsnorm äquivalente Norm auf $C[0,a]$. Für $x, y \in C[0,a]$, $t \in [0,a]$ haben wir

$$\begin{aligned} |Tx(t) - Ty(t)| &\leq l \int_0^t |x(s) - y(s)|\, ds \\ &= l \int_0^t e^{\theta l s} e^{-\theta l s} |x(s) - y(s)|\, ds \\ &\leq l||x-y||_\theta \int_0^t e^{\theta l s} ds \\ &= \frac{1}{\theta}\left(e^{\theta l t} - 1\right) ||x-y||_\theta \\ &\leq \frac{1}{\theta} e^{\theta l t} ||x-y||_\theta, \end{aligned}$$

also

$$e^{-\theta l t}|Tx(t) - Ty(t)| \leq \frac{1}{\theta}||x-y||_\theta$$

und somit

$$||Tx - Ty||_\theta \leq \frac{1}{\theta}||x-y||_\theta.$$

Es folgt $l_\infty(T) \leq l_\theta(T) \leq 1/\theta$. Insbesondere ist $l_\infty(T) = 0$ und wir können unsere Variante des Banachschen Fixpunktsatzes direkt auf T anwenden. Andererseits könnten wir auch den gewöhnlichen Satz 1 auf $|| \ ||_2$ anwenden.

In diesem Beispiel war die Bedingung $l_\infty(T) < 1$ also formal etwas stärker als $l(T) < 1$, aber durch Übergang zu einer äquivalenten Metrik liess sich doch Satz 1 verwenden. Tatsächlich ist dies immer so.

Lemma 4: *Seien (M,d) ein metrischer Raum und $T : M \to M$ eine Abbildung. Dann gilt*

$$l_\infty(T) = \inf\{l_\alpha(T) : \alpha \textit{ ist eine zu } d \textit{ äquivalente Metrik auf } M\}.$$

Beweis: Ist $l(T) = \infty$, so ist $l_\alpha(T) = \infty$ für jede zu d äquivalente Metrik α, d.h. wir können $l(T) < \infty$ annehmen. Zunächst gilt $l_\infty(T) \leq l_\alpha(T)$ für jede zu d äquivalente Metrik α. Sei $\epsilon > 0$. Setzen wir $\lambda := 1/(l_\infty(T) + \epsilon)$, so ist $\lambda > 0$ und $\lambda l_\infty(T) < 1$. Sind $x, y \in M$, so gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$\sqrt[n]{\lambda^n d(T^n x, T^n y)} \leq \lambda l(T^n)^{1/n} \sqrt[n]{d(x,y)} \to \lambda l_\infty(T)\delta_{xy}$$

wobei $\delta_{xy} = 1$ falls $x \neq y$ und $\delta_{xy} = 0$ falls $x = y$. Auf jeden Fall konvergiert die Reihe

$$\alpha(x,y) := \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n d(T^n x, T^n y).$$

Offenbar ist α eine Metrik auf M mit $d(x,y) \leq \alpha(x,y)$ für $x, y \in M$. Da auch $\sqrt[n]{\lambda^n l(T^n)} \to \lambda l_\infty(T) < 1$ gilt ist $a := \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n l(T^n) < \infty$ und für $x, y \in M$ gilt

$$\alpha(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n d(T^n, T^n y) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n l(T^n) d(x,y) = a d(x,y),$$

d.h. α ist eine zu d äquivalente Metrik auf M. Für $x, y \in M$ haben wir

$$\begin{aligned}
\alpha(Tx, Ty) &= \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n d(T^{n+1}x, T^{n+1}y) \\
&= \frac{1}{\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n d(T^n x, T^n y) \\
&= \frac{1}{\lambda}(\alpha(x,y) - d(x,y)) \\
&\leq \frac{1}{\lambda}\alpha(x,y),
\end{aligned}$$

und somit ist

$$l_\alpha(T) \leq \frac{1}{\lambda} = l_\infty(T) + \epsilon.$$

Dies ergibt die Behauptung.

■

Damit haben wir die Bedeutung von $l_\infty(T)$ geklärt, die Zahl $l_\infty(T)$ ist so etwas wie die bestmögliche Lipschitz-Konstante für T. Insbesondere impliziert $l_\infty(T) < 1$ stets, dass wir den gewöhnlichen Banachschen Fixpunktsatz auf eine äquivalente Metrik anwenden können. Auf diesem Weg erhalten wir also keine weiteren Fixpunktsätze.

Kehren wir noch einmal zum Beweis von Satz 1 zurück. Gegeben ist unsere Abbildung $T : M \to M$ mit $l := l(T) < 1$. Definieren wir die stetige Funktion

$$\varphi : M \to \mathbb{R}_{\geq 0}; x \mapsto \frac{1}{1-l} d(Tx, x),$$

so haben wir für jedes $x \in M$ die Ungleichung $d(Tx, T^2x) \leq l d(x, Tx)$, d.h.

$$(1-l)d(x, Tx) = d(x, Tx) - l d(x, Tx) \leq d(x, Tx) - d(Tx, T^2x)$$

und somit

$$d(x, Tx) \leq \frac{1}{1-l} d(x, Tx) - \frac{1}{1-l} d(Tx, T^2x) = \varphi(x) - \varphi(Tx).$$

Dies können wir verwenden einen alternativen Beweis von Satz 1 anzugeben.

Lemma 5: *Seien M ein vollständiger metrischer Raum und $T : M \to M$ eine stetige Abbildung. Es gebe eine nach unten beschränkte Abbildung $\varphi : M \to \mathbb{R}$ mit $d(x, Tx) \leq \varphi(x) - \varphi(Tx)$ für alle $x \in M$. Dann hat T einen Fixpunkt in M.*

Beweis: Sei $x \in M$. Wie im Beweis von Satz 1 ist nur zu zeigen, dass $(T^n x)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge ist. Für $n \in \mathbb{N}$ gilt $\varphi(T^{n+1}x) \leq \varphi(T^n x) - d(T^n x, T^{n+1}x) \leq \varphi(T^n x)$. Insbesondere ist $(\varphi(T^n x))_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend, und somit konvergent, da die Folge nach Voraussetzung nach unten beschränkt ist. Ist $\epsilon > 0$, so existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\varphi(T^n x) - \varphi(T^m x) < \epsilon$ für $m \geq n \geq n_0$. Sind jetzt $m > n \geq n_0$, so gilt

$$\begin{aligned} d(T^n x, T^m x) &\leq \sum_{k=n}^{m-1} d(T^k x, T^{k+1}x) \\ &\leq \sum_{k=n}^{m-1} \left(\varphi(T^k x) - \varphi(T^{k+1}x)\right) = \varphi(T^n x) - \varphi(T^m x) < \epsilon. \end{aligned}$$

■

Wie gesehen ist dieses Lemma nur eine kleine Modifikation des Beweises von Satz 1. Wir steuern jetzt eine weitreichende Verallgemeinerung von Lemma 5 an, die auf Caristi zurückgeht. Wir folgen dem Beweis von Brezis und Browder.

Lemma 6: *Seien $(X, \leq)$ eine partiell geordnete Menge und $\psi : X \to \mathbb{R}$ eine Abbildung. Für jedes $x \in X$ schreibe*

$$\Gamma(x) := \{y \in X : y \geq x\}.$$

Es gelte

(a) *Die Abbildung ψ ist streng monoton.*

(b) *Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton steigende Folge in X, so ist $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \Gamma(x_n) \neq \emptyset$, d.h. die Folge besitzt eine obere Schranke in X.*

(c) *Für jedes $x \in X$ ist $\psi(\Gamma(x))$ nach oben beschränkt.*

Dann enthält $\Gamma(x)$ für jedes $x \in X$ ein maximales Element.

Beweis: Für jedes $x \in X$ können wir nach (c) $\varrho(x) := \sup \psi(\Gamma(x))$ setzen. Angenommen die Behauptung ist falsch. Dann existiert ein $x_1 \in X$ so, dass $\Gamma(x_1)$ kein maximales Element enthält. Ist $n \geq 1$ und ist x_n schon konstruiert, so ist $\varrho(x_n) - 1/n < \sup \psi(\Gamma(x_n))$, also existiert ein $x_{n+1} \in \Gamma(x_n)$ mit $\psi(x_{n+1}) \geq \varrho(x_n) - 1/n$. Dann ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton steigende Folge in X, und nach (b) existiert ein $y \in X$ mit $x_n \leq y$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Wegen $y \in \Gamma(x_1)$ kann y kein maximales Element von X sein, d.h. es existiert $z \in X$ mit $y < z$, also auch $\psi(y) < \psi(z)$ nach (a). Ist $n \in \mathbb{N}$, so gilt $x_n \leq y < z$, d.h. $z \in \Gamma(x_n)$ und $\psi(z) \leq \varrho(x_n)$. Nun ist $x_{n+1} \leq y$ und (a) ergibt $\psi(z) \leq \varrho(x_n) \leq \psi(x_{n+1}) + 1/n \leq \psi(y) + 1/n$. Also ist $\psi(z) \leq \psi(y)$; ein Widerspruch. ∎

Satz 7: *Seien M ein vollständiger metrischer Raum und $T : M \to M$ eine Abbildung. Es gebe eine unterhalb stetige, nach unten beschränkte Abbildung $\varphi : M \to \mathbb{R}$ mit*

$$d(x, Tx) \leq \varphi(x) - \varphi(Tx)$$

für alle $x \in M$. Dann hat T einen Fixpunkt.

Beweis: Für $x, y \in M$ definieren wir

$$x \leq y :\Longleftrightarrow d(x, y) \leq \varphi(x) - \varphi(y).$$

Dann ist $(M, \leq)$ eine partiell geordnete Menge. Für $x \in M$ ist offenbar $x \leq x$. Sind $x, y \in M$ mit $x \leq y$ und $y \leq x$, so folgt wegen $d(x, y) = d(y, x)$ auch $d(x, y) = 0$, d.h. $x = y$. Sind schliesslich $x, y, z \in M$ mit $x \leq y$ und $y \leq z$, so ist $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \leq \varphi(x) - \varphi(y) + \varphi(y) - \varphi(z) = \varphi(x) - \varphi(z)$, d.h. $x \leq z$.

Die Abbildung $\psi := -\varphi : M \to \mathbb{R}$ ist nach Voraussetzung nach oben beschränkt. Wir zeigen, dass ψ die Bedingungen (a, b, c) aus Lemma 6 erfüllt. Dabei ist (c) klar. Sind $x, y \in M$ mit $x < y$, so ist insbesondere $x \neq y$ und $0 < d(x, y) \leq \varphi(x) - \varphi(y)$, d.h. $\varphi(y) < \varphi(x)$ und $\psi(x) < \psi(y)$. Damit haben wir (a). Schliesslich sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton steigende Folge in M. Ist $m \geq n$, so gilt $x_m \geq x_n$, also $d(x_n, x_m) \leq \varphi(x_n) - \varphi(x_m)$, d.h. $\varphi(x_m) \leq \varphi(x_n)$. Also existiert der Grenzwert $a := \lim_{n\to\infty} \varphi(x_n)$. Ist $\epsilon > 0$, so existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|\varphi(x_n) - \varphi(x_m)| \leq \epsilon$ für $n, m \geq N$. Für $m \geq n \geq N$ folgt $d(x_n, x_m) \leq \varphi(x_n) - \varphi(x_m) \leq \epsilon$. Also ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge, und es existiert $x := \lim_{n\to\infty} x_n$. Wäre $a < \varphi(x)$, so existiert $\theta \in \mathbb{R}$ mit $a < \theta < \varphi(x)$, und da φ unterhalb stetig ist, existiert ein $\epsilon > 0$ mit $\varphi(y) > \theta$ für alle $y \in B_\epsilon(x)$. Sei $N \in \mathbb{N}$ mit $d(x_n, x) < \epsilon$ für $n \geq N$. Dann ist auch $\varphi(x_n) > \theta$ für $n \geq N$, also $a = \lim_{n\to\infty} \varphi(x_n) \geq \theta$; ein Widerspruch. Dies zeigt $\varphi(x) \leq a$. Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} d(x_n, x) = \lim_{m\to\infty} d(x_n, x_m) &\leq \varphi(x_n) - \lim_{m\to\infty} \varphi(x_m) \\ &= \varphi(x_n) - a \\ &\leq \varphi(x_n) - \varphi(x), \end{aligned}$$

d.h. $x_n \leq x$. Dies zeigt $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \Gamma(x_n)$ und (b) ist bewiesen.

Nach Lemma 6 existiert ein maximales Element x von M. Andererseits ist $d(x, Tx) \leq \varphi(x) - \varphi(Tx)$, d.h. $x \leq Tx$, und somit ist $Tx = x$.

■

Als Anwendung dieses Satzes wollen wir jetzt einen klassischen Satz von Menger beweisen. Sei hierzu M ein metrischer Raum. Sind x, y, z drei Punkte aus M, so sagen wir das y zwischen x und z liegt, wenn

$$d(x, z) = d(x, y) + d(y, z)$$

gilt. Wir schreiben (xyz), wenn y zwischen x und z liegt und $y \neq x, z$ gilt. Offenbar muss dann auch $x \neq z$ gelten. Im $\mathbb{R}^n$ versehen mit der euklidischen Metrik liegt y genau dann zwischen x und z, wenn y in dem Intervall $[x, z]$ ist. Etwas allgemeiner, ist $[a, b]$ ein Intervall in $\mathbb{R}$ und $\gamma : [a, b] \to M$ ist eine Isometrie, so liegt $\gamma(t)$ für jedes $a \leq t \leq b$ zwischen $\gamma(a)$ und $\gamma(b)$. Eine solche Abbildung γ heißt eine Geodätische in M. Sind $x, z \in M$ mit $x \neq z$, so schreiben wir

$$(x, z) := \{y \in M : (xyz)\}.$$

Weiter heißt M metrisch konvex, wenn es für je zwei Punkte $x, z \in M$ mit $x \neq z$ stets einen Punkt $y \neq x, z$ zwischen x und z gibt. Offenbar ist dies der Fall, wenn je zwei Punkte von M auf einer Geodätischen in M liegen. Der Satz von Menger besagt, dass in vollständigen Räumen auch die Umkehrung dieser Aussage gilt.

Zunächst zeigen wir ein kleines Hilfslemma.

Lemma 8: *Seien M ein metrischer Raum und $x, y, u, v \in M$. Dann gilt*

$$(xuy) \text{ und } (xyv) \iff (xuv) \text{ und } (uyv).$$

Beweis: "'$\Longrightarrow$"' Es ist

$$\begin{aligned} d(x, u) + d(u, v) &\leq d(x, u) + d(u, y) + d(y, v) \\ &= d(x, y) + d(y, v) \\ &= d(x, v) \\ &\leq d(x, u) + d(u, v), \end{aligned}$$

also $d(x,v) = d(x,u) + d(u,v) = d(x,u) + d(u,y) + d(y,v)$. Es ist $u \neq x$ und wäre $u = v$, so $d(u,y) + d(y,v) = 0$ also $y = v$; ein Widerspruch. Also ist auch $u \neq v$, und somit ist (xuv). Weiter gilt $d(u,y) + d(y,v) = d(u,v)$ und $y \neq u, v$, d.h. (uyv).
"'$\Longleftarrow$"' Offenbar haben wir auch (vyu) und (vux) und die schon bewiesene Implikation ergibt (vyx) und (yux), d.h. (xuy) und (xyv).

■

Satz 9: *Sei M ein vollständiger, metrisch konvexer metrischer Raum und seien $x, y \in M$ mit $x \neq y$. Dann gibt es eine isometrische Einbettung $\gamma : [0, d(x,y)] \to M$ mit $\gamma(0) = x$ und $\gamma(d(x,y)) = y$.*

Beweis: (a) Seien $x, y \in M$ mit $x \neq y$ und sei $0 < \lambda < d(x,y)$. Setze

$$N := \{z \in (x,y) : d(x,z) \leq \lambda\}.$$

Dann ist entweder $N = \emptyset$ oder es gibt $z \in N$ mit

$$\forall (u \in (x,y)) : (xzu) \Longrightarrow d(x,u) > \lambda.$$

Sei $N \neq \emptyset$. Gibt es ein $z \in N$ mit $d(x,z) < \lambda$ so, dass für alle $u \in (x,y)$ mit (xzu) stets $u \notin N$ gilt, so können wir dieses z verwenden.

Andernfalls existiert für jedes $z \in N$ mit $d(x,z) < \lambda$ stets ein $Tz \in N$ mit $(xz(Tz))$. Dann ist $Tz \neq z$ und $d(x,Tz) \leq \lambda$. Für $z \in N$ mit $d(x,z) = \lambda$ setzen wir $Tz := z \in N$. Wegen $N \neq \emptyset$ können wir außerdem ein $Tx \in N$ wählen. Insbesondere ist $Tx \neq x$. Wir behaupten jetzt, dass $L := N \cup \{x\}$ abgeschlossen ist. Sei dazu $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in L mit $z_n \to z \in M$. Ist $z_n = x$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$, so ist $z = x \in N$. Sonst können wir $z_n \in N$ für alle $n \in \mathbb{N}$ annehmen. Ist $n \in \mathbb{N}$, so gilt $d(x,z_n) \leq \lambda$ und $d(x,y) = d(x,z_n) + d(z_n,y)$. Es folgt $d(x,z) \leq \lambda < d(x,y)$ und $d(x,y) = d(x,z) + d(z,y)$, also insbesondere $z \neq y$. Ist $z = x$, so $z \in L$. Ist $z \neq x$, so folgt (xzy), d.h. $z \in (x,y)$ und $z \in N \subseteq L$.

Also ist $L \subseteq M$ abgeschlossen. Die Abbildung

$$\varphi : L \to \mathbb{R}_{\geq 0}; z \mapsto \lambda - d(x,z)$$

ist stetig. Sei $z \in L$. Ist $z \in N$ und $d(x,z) < \lambda$, so ist $(xz(Tz))$, also $d(x,Tz) = d(x,z) + d(z,Tz)$ und somit

$$d(z,Tz) = d(x,Tz) - d(x,z) = \varphi(z) - \varphi(Tz).$$

Ist $z \in N$ mit $d(x,z) = \lambda$, so $Tz = z$ und $d(z,Tz) = 0 = \varphi(z) - \varphi(Tz)$. Schließlich ist für $z = x$,

$$\varphi(x) - \varphi(Tx) = \lambda - (\lambda - d(x,Tx)) = d(x,Tx),$$

d.h. $T : L \to L$ und φ erfüllen die Voraussetzungen von Satz 7. Damit existiert ein $z \in L$ mit $Tz = z$. Nach Konstruktion ist $z \in (x,y)$ und $d(x,z) = \lambda$. Ist jetzt $u \in (x,y)$ mit (xzu), so gilt $d(x,u) = d(x,z) + d(z,u) = \lambda + d(z,u) > \lambda$ da $z \neq u$ ist.

(b) Seien x, y, λ und N wie in (a), und setze $\mu := d(x,y) - \lambda$. Dann ist auch $0 < \mu < d(x,y)$ und ist $N' := \{z \in (y,x) = (x,y) : d(y,z) \leq \mu\}$, so gilt

$$(x,y) = N \cup N'.$$

Dies ist klar, denn ist $z \in (x,y)$, so gilt $d(x,y) = d(x,z) + d(z,y)$, d.h. es ist $d(x,z) \leq \lambda$ oder $d(z,y) \leq \mu$.

(c) Seien x, y, λ und N wie in (a). Dann ist $N \neq \emptyset$.

Seien μ und N' wie in (b) definiert. Angenommen es wäre $N = \emptyset$. Da M metrisch konvex ist, folgt mit (b) jetzt $N' = (x,y) \neq \emptyset$, und eine Anwendung von (a) auf N' liefert ein $z \in (x,y)$ so, daß für alle $u \in (x,y)$ aus (uzy) schon $d(y,u) > \mu$ folgt. Wieder da M metrisch konvex ist, existiert ein $u \in (x,z)$. Damit haben wir (xuz) und (xzy), also nach Lemma 8 auch (xuy) und (uzy). Insbesondere ist $u \in (x,y)$ und damit $d(y,u) > d(x,y) - \lambda$. Es folgt $d(x,u) = d(x,y) - d(y,u) < \lambda$, d.h. $u \in N$; ein Widerspruch.

(d) Seien $x, y \in M$ mit $x \neq y$ und $0 < \lambda < d(x,y)$. Dann existiert ein $z \in (x,y)$ mit $d(x,z) = \lambda$.

Setze $N_1 := \{z \in (x,y) : d(x,y) \leq \lambda\}$. Nach (c) ist $N_1 \neq \emptyset$ und nach (a) existiert $z_1 \in N_1$ mit

$$\forall (u \in (x,y)) : (xz_1u) \Longrightarrow d(x,u) > \lambda.$$

Angenommen es wäre $d(x,z_1) < \lambda$. Dann ist $d(z_1,y) = d(x,y) - d(x,z_1) > d(x,y) - \lambda > 0$, und wieder nach (c) ist

$$N_2 := \{z \in (z_1,y) : d(y,z) \leq d(x,y) - \lambda\} \neq \emptyset.$$

Nach (a) existiert ein $z_2 \in (z_1,y)$ mit $d(y,u) > d(x,y) - \lambda$ für alle $u \in (z_1,y)$ mit (uz_2y). Da M metrisch konvex ist, existiert ein $u \in (z_1,z_2)$. Dann ist (z_1uz_2) und (z_1z_2y), also auch (z_1uy) und (uz_2y) nach Lemma 8. Weiter ist auch (xz_1y) und (z_1uy) und wir erhalten analog (xz_1u) und (xuy). Also ist $u \in (x,y)$ mit (xz_1u), d.h. $d(x,u) > \lambda$. Außerdem ist $u \in (z_1,y_1)$ und (uz_2y), d.h. $d(y,u) > d(x,y) - \lambda$. Es folgt

$$d(x,y) = d(x,u) + d(u,y) > \lambda + d(x,y) - \lambda = d(x,y);$$

ein Widerspruch. Also ist $d(x,z_1) = \lambda$.

(e) Seien jetzt $x, y \in M$ mit $x \neq y$. Setze $d := d(x,y)$, und für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei

$$D_n := \left\{ \frac{k}{2^n} d : 0 \leq k \leq 2^n \right\} \subseteq [0,d].$$

Definiere die Isometrie $\phi_0 : D_0 = \{0,d\} \to M$ durch $\phi(0) = x$ und $\phi(d) = y$.

(f) Sei $n \in \mathbb{N}$ und es sei schon eine Isometrie $\phi_n : D_n \to M$ definiert. Sei $0 \leq k < 2^n$. Dann ist

$$d\left(\phi_n\left(\frac{k}{2^n}d\right), \phi_n\left(\frac{k+1}{2^n}d\right)\right) = \frac{d}{2^n},$$

und nach (d) existiert ein

$$\phi_{n+1}\left(\frac{2k+1}{2^{n+1}}d\right) \in \left(\phi_n\left(\frac{k}{2^n}d\right), \phi_n\left(\frac{k+1}{2^n}d\right)\right)$$

mit

$$d\left(\phi_n\left(\frac{k}{2^n}d\right), \phi_{n+1}\left(\frac{2k+1}{2^{n+1}}d\right)\right) = \frac{d}{2^{n+1}}.$$

Für $u \in D_n$ setzen wir $\phi_{n+1}(u) := \phi_n(u)$. Damit haben wir eine Abbildung $\phi_{n+1} : D_{n+1} \to M$ mit $\phi_{n+1}|D_n = \phi_n$. Wir behaupten, dass ϕ_{n+1} wieder eine Isometrie ist.

Seien dazu $0 \leq k < l \leq 2^{n+1}$ gegeben. Zu zeigen ist die Gleichung

$$d\left(\phi_{n+1}\left(\frac{k}{2^{n+1}}d\right), \phi_{n+1}\left(\frac{l}{2^{n+1}}d\right)\right) = \frac{l-k}{2^{n+1}}d.$$

Ist $k, l \equiv 0 \ (2)$, so ist dies klar, da ϕ_n eine Isometrie ist. Ist $k \equiv 0 \ (2)$ und $l \equiv 1 \ (2)$, so schreiben wir $k = 2k'$ und $l = 2l' + 1$ mit $0 \leq k' \leq l' < 2^n$. Für $k' = l'$ gilt die Behauptung nach Konstruktion. Jetzt sei $k' < l'$. Dann gelten

$$\left(\phi_n\left(\frac{k'}{2^n}d\right) \phi_n\left(\frac{l'}{2^n}d\right) \phi_n\left(\frac{l'+1}{2^n}d\right)\right), \quad \left(\phi_n\left(\frac{l'}{2^n}d\right) \phi_{n+1}\left(\frac{2l'+1}{2^{n+1}}d\right) \phi_n\left(\frac{l'+1}{2^n}d\right)\right)$$

und mit Lemma 8 folgen

$$\left(\phi_n\left(\frac{k'}{2^n}d\right) \phi_n\left(\frac{l'}{2^n}d\right) \phi_{n+1}\left(\frac{2l'+1}{2^{n+1}}d\right)\right)$$

und

$$\left(\phi_n\left(\frac{k'}{2^n}d\right) \phi_{n+1}\left(\frac{2l'+1}{2^{n+1}}d\right) \phi_n\left(\frac{l'+1}{2^n}d\right)\right)$$

Dies ergibt

$$\begin{aligned}
d\left(\phi_{n+1}\left(\frac{k}{2^{n+1}}d\right), \phi_{n+1}\left(\frac{l}{2^{n+1}}d\right)\right) &= d\left(\phi_n\left(\frac{k'}{2^n}d\right), \phi_{n+1}\left(\frac{2l'+1}{2^{n+1}}d\right)\right) \\
&= d\left(\phi_n\left(\frac{k'}{2^n}d\right), \phi_n\left(\frac{l'}{2^n}d\right)\right) \\
&\quad + d\left(\phi_n\left(\frac{l'}{2^n}d\right), \phi_{n+1}\left(\frac{2l'+1}{2^{n+1}}d\right)\right) \\
&= \frac{l'-k'}{2^n}d + \frac{d}{2^{n+1}} \\
&= \frac{2l'-2k'+1}{2^{n+1}}d \\
&= \frac{l-k}{2^{n+1}}d.
\end{aligned}$$

Die restlichen beiden Fälle folgen analog.

(g) Nun können wir den Beweis abschliessen. Setzen wir

$$D := \bigcup_{n=0}^{\infty} D_n,$$

so erhalten wir über (f) eine Isometrie $\phi : D \to M$ mit $\phi(0) = x$ und $\phi(d) = y$. Da D dicht in $[0, d]$ ist und M vollständig ist, setzt sich ϕ zu einer isometrischen Einbettung $\psi : [0, d] \to M$ mit $\psi(0) = x$, $\psi(d) = y$ fort.

∎

Bevor wir diesen Paragraphen beenden, wollen wir noch einmal kurz zum Anfangswertproblem für gewöhnliche Differentialgleichungen zurückkehren. Wir hatten dieses als ein Fixpunktproblem für die Abbildung $T : C[0, a] \to C[0, a]$

$$Tx(t) = x_0 + \int_0^t f(s, x(s))\, ds$$

umformuliert, und zwar bereits wenn f nur stetig ist. Im allgemeinen muss T keine Kontraktion sein, und wir können Satz 1 nicht anwenden. Tatsächlich kann es nicht möglich sein den Banachschen Fixpunktsatz für beliebiges f auf T anzuwenden, denn dieser ergibt stets Existenz und Eindeutigkeit eines Fixpunkts, d.h. einen Existenz und Eindeutigkeitssatz für unser Anfangswertproblem.

Aber das Problem $x'(t) = f(t, x(t))$, $x(0) = x_0$ ist im allgemeinen nicht eindeutig lösbar. Betrachte zum Beispiel die Funktion $f(t, x) := \sqrt{|x|}$ und den Anfangswert $x_0 = 0$. Ist $\epsilon > 0$ beliebig, so ist die Funktion

$$x_\epsilon(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t \le \epsilon, \\ \frac{1}{4}(t-\epsilon)^2, & t \ge \epsilon \end{cases}$$

differenzierbar mit $x_\epsilon'(t) = \sqrt{|x_\epsilon(t)|}$ und $x_\epsilon(0) = 0$. Auf dieses f werden wir den Banachschen Fixpunktsatz nicht anwenden können. In §4 werden wir einen Fixpunktsatz kennenlernen, der bei stetigen f die Existenz von Fixpunkten von T gewährleistet.

Wie bemerkt kann Satz 1 nur in Situationen funktionieren in denen eine Abbildung $T : M \to M$ genau einen Fixpunkt hat. Weiterhin ist auch jede Iterierte T^n von T kontrahierend, d.h. auch die Iterierten haben genau einen Fixpunkt und dieser ist offenbar genau der Fixpunkt von T. Falls dies vorliegt, so ist der Banachsche Fixpunktsatz allerdings auch der einzige Satz. Konkret haben wir den folgenden Satz von Bessaga.

Satz 10: *Seien X eine Menge und $T : X \to X$ eine Abbildung. Für jedes $n \ge 1$ habe T^n genau einen Fixpunkt. Weiter sei $0 < c < 1$ gegeben. Dann existiert eine vollständige Metrik d auf X so, daß $d(Tx, Ty) \le cd(x, y)$ für alle $x, y \in X$ gilt.*

Beweis: Sei u der Fixpunkt von T. Offenbar ist dann u auch der Fixpunkt von T^n für jedes $n \ge 1$. Wir definieren jetzt die folgende Relation auf X

$$x \sim y :\Longleftrightarrow \exists (k, l \ge 0) : T^k x = T^l y \quad (x, y \in X).$$

Seien $x, y, z \in X$. Offenbar ist $x \sim x$, und aus $x \sim y$ folgt $y \sim x$. Ist $x \sim y$ und $y \sim z$, so gibt es $k, l, p, q \in \mathbb{N}$ mit $T^k x = T^l y$ und $T^p y = T^q z$, und es folgt $T^{k+p} x = T^p T^k x = T^p T^l y = T^l T^p y = T^l T^q z = T^{l+q} z$, d.h. $x \sim z$. Damit ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X. Sind $x, y \in X$ mit $x \sim y$ und sind $n, m \in \mathbb{N}$, so ist offenbar auch $T^n x \sim T^m y$.

Für jedes $x \in X$ bezeichne $[x]$ die Äquivalenzklasse von x modulo $\sim$. Da u ein Fixpunkt von T ist, gilt

$$[u] = \{x \in X : \exists (n \in \mathbb{N}) : T^n x = u\},$$

und wir können für jedes $x \in [u]$ definieren

$$\tilde{f}(x) := \min\{n \in \mathbb{N} | T^n x = u\}.$$

Dann ist $\tilde{f}(u) = 0$ und sind $x \in [u]$ und $k \in \mathbb{N}$ mit $k \leq \tilde{f}(x)$, so ist $\tilde{f}(T^k x) = \tilde{f}(x) - k$. Weiter definieren wir $f(x) := -\tilde{f}(x)$ für $x \in [u]$ und haben $f(u) = 0$ und $f(Tx) = f(x) + 1$ für $x \in [u] \backslash \{u\}$.

Wir wollen f jetzt auf ganz X fortsetzen. Sei hierzu $\overline{X} := X/\sim$, und für jedes $A \in \overline{X} \backslash \{[u]\}$ wähle ein $z_A \in A$. Sei $A \in \overline{X} \backslash \{[u]\}$. Sind $x \in A$ und $n, m \in \mathbb{N}$ mit $T^n x = T^m x$ und $m \geq n$, so gilt $T^n x = T^m x = T^{m-n} T^n x$, aber $T^n x \neq u$ da $x \in A \neq [u]$, also $m - n = 0$ und $m = n$ nach unserer Voraussetzung an T. Ist $x \in A = [z_A]$, so ist $x \sim z_A$ und es gibt $k, l \in \mathbb{N}$ mit $T^k x = T^l z_A$. Sind auch $p, q \in \mathbb{N}$ mit $T^p x = T^q z_A$ und etwa $p \geq k$, so gilt

$$T^q z_A = T^p x = T^{p-k} T^k x = T^{p-k} T^l z_A = T^{p-k+l} z_A.$$

Es folgt $q = p - k + l$, d.h. $q - p = l - k$. Also können wir $f(x) := l - k$ definieren. Weiter können wir $k \geq 1$ annehmen (sonst ersetzen wir k durch $k + 1$ und l durch $l + 1$), und haben $T^{k-1} T x = T^l z_A$, d.h. $f(Tx) = l - (k - 1) = l - k + 1 = f(x) + 1$. Damit ist $f : X \to \mathbb{Z}$ auf ganz X definiert.

Jetzt setzen wir $\Omega := \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ versehen mit der natürlichen Anordnung, und schreiben $T^\infty x := u$ für jedes $x \in X$. Dann können wir für $x, y \in X$ definieren

$$\begin{aligned} p(x, y) &:= \min\{p \in \Omega | \exists (q \in \Omega) : T^p x = T^q y\} \in \Omega, \\ q(x, y) &:= \min\{q \in \Omega | \exists (p \in \Omega) : T^p x = T^q y\} \in \Omega. \end{aligned}$$

Seien $x, y \in X$. Offenbar ist $q(x, y) = p(y, x)$. Wir behaupten weiter, daß

$$q(x, y) = \min\{q \in \Omega | T^{p(x,y)} x = T^q y\}$$

ist. Setze dazu $p := p(x, y)$ und $q := \min\{l \in \Omega | T^p x = T^l y\}$. Nach Definition von $q(x, y)$ ist $q(x, y) \leq q$. Angenommen es wäre $q(x, y) < q$, also insbesondere $q(x, y) \in \mathbb{N}$. Dann wähle $k \in \Omega$ minimal mit $T^k x = T^{q(x,y)} y$. Dann ist $k \geq p$. Wir zeigen jetzt, daß $T^{q(x,y)} y = u$ ist. Ist $k = \infty$, so ist $T^{q(x,y)} y = T^k x = u$. Nun sei $k \in \mathbb{N}$, also auch $p \in \mathbb{N}$. Ist auch $q \in \mathbb{N}$, so gilt

$$T^{q(x,y)} y = T^k x = T^{k-p} T^p x = T^{k-p} T^q y = T^{k-p+q-q(x,y)} T^{q(x,y)} y$$

mit $k - p + q - q(x,y) \geq 1$, d.h. $T^{q(x,y)}y = u$. Im verbleibenden Fall ist $q = \infty$ und $T^p x = T^q y = u$, also auch $T^{q(x,y)}y = T^k x = u$ da $k \geq p$ ist. Also ist stets $T^{q(x,y)}y = u$ und somit wegen $q > q(x,y)$ auch $T^q y = u$, also $T^p x = T^q y = u = T^{q(x,y)}y$ im Widerspruch zur Minimalität von q. Damit haben wir $q = q(x,y)$ eingesehen. Weiter folgt

$$\begin{aligned} p(x,y) = q(y,x) &= \min\{p \in \Omega | T^{p(y,x)}y = T^p x\} \\ &= \min\{p \in \Omega | T^p x = T^{q(x,y)}y\}. \end{aligned}$$

Damit können wir nun die gesuchte Metrik d definieren durch

$$d(x,y) := \sum_{i=1}^{p(x,y)} c^{f(x)+i} + \sum_{i=1}^{q(x,y)} c^{f(y)+i}.$$

Offenbar ist $d(x,y) \geq 0$ und $d(x,y) = d(y,x)$ für $x, y \in X$. Weiter ist für jedes $x \in X$ auch $p(x,x) = q(x,x) = 0$, d.h. $d(x,x) = 0$. Sind umgekehrt $x, y \in X$ mit $d(x,y) = 0$, so darf unsere Summe keinen Summanden enthalten, d.h. $p(x,y) = q(x,y) = 0$ und somit $x = T^{p(x,y)}x = T^{q(x,y)}y = y$. Um einzusehen, dass d eine Metrik ist, ist also nur noch die Dreiecksungleichung zu zeigen. Dies erfordert leider einige Fallunterscheidungen. Seien also $x, y, z \in X$ gegeben. Wir schreiben

$$\begin{aligned} p &= p(x,z), & q &= q(x,z), & k &= p(x,y), \\ l &= q(x,y), & r &= p(z,y), & s &= q(z,y). \end{aligned}$$

Fall 1: Sei $x \sim y \sim z$. Ist $x, y, z \sim u$, so haben wir offenbar $p, k \leq \tilde{f}(x)$, $q, r \leq \tilde{f}(z)$ und $l, s \leq \tilde{f}(y)$. Wir setzen $f := f(y)$. Dann gelten

$$\begin{aligned} f(x) + p &= f(T^p x) = f(T^q z) = f(z) + q, \\ f(x) + k &= f + l, \\ f + s &= f(z) + r, \end{aligned}$$

d.h. $f(x) = f + l - k$, $f(z) = f + s - r$ und $l + p + r = k + q + s$. Schreiben wir $c^\infty := 0$, so haben wir für $t \in \mathbb{Z}$, $m \in \Omega$

$$\sum_{i=1}^{m} c^{t+i} = c^{t+1} \sum_{i=0}^{m-1} c^i = c^{t+1} \frac{1 - c^m}{1 - c}.$$

Unter Verwendung von $s - r + q = l - k + p$ folgt

$$\begin{aligned} d(x,z) &= c^{f+l-k+1} \frac{1 - c^p}{1 - c} + c^{f+s-r+1} \frac{1 - c^q}{1 - c} \\ &= \frac{c^{f+1}}{1 - c} \left(c^{l-k} - c^{p+l-k} + c^{s-r} - c^{q+s-r} \right) \\ &= \frac{c^{f+1}}{1 - c} \left(c^{l-k} - 2c^{p+l-k} + c^{s-r} \right), \end{aligned}$$

und analog ergibt sich

$$d(x,y)+d(y,z)=\frac{c^{f+1}}{1-c}\left(c^{l-k}-2c^{l}+2-2c^{s}+c^{s-r}\right),$$

d.h. es ist $c^{p+l-k} \geq c^l + c^s - 1$ zu zeigen.

Fall 1A: Sei $k \leq p$. Dann ist $T^q z = T^p x = T^{p-k-l} y$, d.h. $r \leq q$ und $s \leq p-k+l$. Ist sogar $r < q$, so $s < l$ also $T^k x = T^l y = T^{l-s+r} z$ und somit $p \leq k$, d.h. $p = k$. Es folgt $c^{p+l-k} = c^l \geq c^l + c^s - 1$. Ist dagegen $r = q$, so $l + p = k + s$, d.h. $p + l - k = s$ und $c^{p+l-k} = c^s \geq c^l + c^s - 1$.

Fall 1B: Sei $r \leq q$. Dies ist analog zu Fall 1A.

Fall 1C: Sei $k > p$ und $r > q$. In diesem Fall ist direkt

$$\begin{aligned} d(x,y)+d(y,z) &= \sum_{i=1}^{k} c^{f(x)+i} + \sum_{i=1}^{l} c^{f(y)+i} + \sum_{i=1}^{s} c^{f(y)+i} + \sum_{i=1}^{r} c^{f(z)+i} \\ &\geq \sum_{i=1}^{p} c^{f(x)+i} + \sum_{i=1}^{q} c^{f(z)+i} \\ &= d(x,y). \end{aligned}$$

Fall 2: Sei $x \sim z$ und $y \not\sim x, z$. Wegen $T^a x \neq T^b y$ für $a, b \in \mathbb{N}$ ist

$$p(x,y)=\begin{cases}\infty, & x \not\sim u,\\ f(x), & x \sim u\end{cases} \quad \text{und analog} \quad q(y,z)=\begin{cases}\infty, & x \not\sim u\\ f(z), & x \sim u.\end{cases}$$

Insbesondere ist $p(x,y) \geq p$ und $q(y,z) \geq q$, und somit

$$\begin{aligned} d(x,y)+d(y,z) &= \sum_{i=1}^{p(x,y)} c^{f(x)+i} + \sum_{i=1}^{q(x,y)} c^{f(y)+i} + \sum_{i=1}^{p(y,z)} c^{f(y)+i} + \sum_{i=1}^{q(y,z)} c^{f(z)+i} \\ &\geq \sum_{i=1}^{p} c^{f(x)+i} + \sum_{i=1}^{q} c^{f(z)+i} \\ &= d(x,z). \end{aligned}$$

Fall 3: Sei $x \sim y \not\sim z$. Es gilt wegen $f(x) + k = f(y) + l$

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^{p} c^{f(x)+i} + \sum_{i=1}^{l} c^{f(y)+i} + \sum_{i=1}^{p(y,z)} c^{f(y)+i} \\
= \; & c^{f(x)+1}\frac{1-c^k}{1-c} + c^{f(y)+1}\frac{1-c^l}{1-c} + c^{f(y)+1}\frac{1-c^{p(y,z)}}{1-c} \\
= \; & \frac{c^{f(x)+1}}{1-c}\left(1 - c^k + c^{l-k} - c^k + c^{l-k} - c^{k-l+p(y,z)}\right) \\
\geq \; & \frac{1-c^{f(x)+1}}{1-c}\left(1 - 2c^k + 2c^{k-l}\right) \\
\geq \; & \frac{1-c^{f(x)+1}}{1-c} \\
= \; & \sum_{i=1}^{\infty} c^{f(x)+i} \\
\geq \; & \sum_{i=1}^{p(x,z)} c^{f(x)+i},
\end{aligned}$$

d.h. es ist

$$\begin{aligned}
d(x,z) &= \sum_{i=1}^{p(x,z)} c^{f(x)+i} + \sum_{i=1}^{q(x,z)} c^{f(z)+i} \\
&\leq \sum_{i=1}^{p} c^{f(x)+i} + \sum_{i=1}^{l} c^{f(y)+i} + \sum_{i=1}^{p(y,z)} c^{f(y)+i} + \sum_{i=1}^{q(y,z)} c^{f(z)+i} \\
&= d(x,y) + d(y,z),
\end{aligned}$$

da $q(x,z) = q(y,z)$ gilt.
Fall 4: Der Fall $x \not\sim y \sim z$ ist analog zu Fall 3.
Fall 5: Sei $x \not\sim y \not\sim z \not\sim x$. Dann ist $p(x,z) = p(x,y)$ und $q(x,z) = q(y,z)$, also

$$\begin{aligned}
d(x,y) + d(y,z) &= \sum_{i=1}^{p(x,y)} c^{f(x)+i} + \sum_{i=1}^{q(x,y)} c^{f(y)+i} + \sum_{i=1}^{p(y,z)} c^{f(y)+i} + \sum_{i=1}^{q(y,z)} c^{f(z)+i} \\
&\geq \sum_{i=1}^{p(x,z)} c^{f(x)+i} + \sum_{i=1}^{q(x,z)} c^{f(z)+i} \\
&= d(x,z).
\end{aligned}$$

Damit haben wir die Dreiecksungleichung in allen Fällen eingesehen, und d ist tatsächlich eine Metrik. Wir wollen jetzt auch zeigen, dass unsere Abbildung T bezüglich d kontrahierend mit Konstante c ist. Seien dazu $x, y \in X$ gegeben. Auch hier unterscheiden wir einige Fälle. Setze zuvor $p := p(x,y)$, $q := q(x,y)$, $k := p(Tx,Ty)$ und $l := q(Tx,Ty)$.

Fall 1: Sei $x \not\sim y$ und $x, y \not\sim u$. Dann ist $p = q = \infty$ und $k = l = \infty$ sowie $f(Tx) = f(x) + 1$ und $f(Ty) = f(y) + 1$, d.h.

$$d(Tx, Ty) = \sum_{i=1}^{\infty} c^{f(Tx)+1} + \sum_{i=1}^{\infty} c^{f(Ty)+1} = c\left(\sum_{i=1}^{\infty} c^{f(x)+1} + \sum_{i=1}^{\infty} c^{f(y)+1}\right) = cd(x, y).$$

Fall 2: Sei $x \not\sim y$ aber $x \sim u$. Dann ist $q = l = \infty$, und $f(Ty) = f(y) + 1$. Ist $x \neq u$, so ist weiter $p = -f(x)$ und $k = -f(Tx) = -f(x) - 1 = p - 1$, und somit

$$d(Tx, Ty) = \sum_{i=1}^{k} c^{f(Tx)+i} + \sum_{i=1}^{\infty} c^{f(Ty)+i} \leq c\left(\sum_{i=1}^{p} c^{f(x)+i} + \sum_{i=1}^{\infty} c^{f(y)+i}\right) = cd(x, y).$$

Ist dagegen $x = u$, so ist auch $Tx = u$ und $p = k = 0$, d.h.

$$d(Tx, Ty) = \sum_{i=1}^{\infty} c^{f(Ty)+i} = c\sum_{i=1}^{\infty} c^{f(y)+i} = cd(x, y).$$

Fall 3: Ist $x \not\sim y$ aber $y \sim u$, so folgt wieder alles analog zu Fall 2.
Fall 4: Sei $x \sim y$ und $p, q \geq 1$. Insbesondere ist $x, y \neq u$. Es ist $f(Tx) = f(x) + 1$, $f(Ty) = f(y) + 1$, und $T^{k+1}x = T^{l+1}y$ also $p \leq k + 1$, $q \leq l + 1$. Andererseits $T^{p-1}Tx = T^{q-1}Ty$, d.h. $k \leq p - 1$ und $l \leq q - 1$, also $k = p - 1$ und $l = q - 1$. Es folgt

$$d(Tx, Ty) = c\left(\sum_{i=1}^{p-1} c^{f(x)+i} + \sum_{i=1}^{q-1} c^{f(y)+i}\right) \leq cd(x, y).$$

Fall 5: Sei $x \sim y$ und $p = 0$ oder $q = 0$. Zunächst sei $q = 0$, d.h. $y = T^p x$. Ist auch $p = 0$, so $x = y$ und die Behauptung ist klar. Ist $p \geq 1$, so $l = 0$, $k = q - 1$, $f(Tx) = f(x) + 1$ da $x \neq u$, also

$$d(Tx, Ty) = \sum_{i=1}^{p-1} c^{f(Tx)+i} \leq cd(x, y).$$

Ist dagegen $q \geq 1$, $p = 0$, so folgt alles analog.

Also ist T eine Kontraktion von (X, d). Es bleibt nur noch zu zeigen, dass die Metrik d auch vollständig ist. Sei also $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in (X, d). Es reicht zu zeigen, dass die Folge eine konvergente Teilfolge besitzt. Enthält $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konstante Teilfolge, so ist dies offenbar der Fall. Also können wir im folgenden $u \neq x_n \neq x_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ annehmen. Damit ist $p(x_n, x_{n+1}) \geq 1$ oder $q(x_n, x_{n+1}) \geq 1$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Es folgt

$$d(x_n, x_{n+1}) \geq \min\left\{c^{f(x_n)+1}, c^{f(x_{n+1})+1}\right\} = c^{1+\max\{f(x_n), f(x_{n+1})\}},$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$. Wegen $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x_{n+1}) = 0$ ist somit die Menge $\{f(x_n) : n \in \mathbb{N}\}$ unbeschränkt. Durch Übergang zu einer Teilfolge können wir also $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \infty$ annehmen. Aber für $n \in \mathbb{N}$ gilt auch

$$d(x_n, u) = \sum_{i=1}^{p(x_n, u)} c^{f(x_n)+i} \leq \sum_{i=1}^{\infty} c^{f(x_n)+i} = \frac{c^{f(x_n)+1}}{1 - c} \to 0,$$

d.h. wir haben eine gegen u konvergente Teilfolge.

■

Literatur zu §1

C. Bessaga: *On the converse of the Banach Fixed Point Principle*, Colloq. Math. 7 (1969), 41–43.

A. Bielecki: *Une remarque sur la methode de Banach–Cacciopoli–Tikhonov dans la theorie des equations differentielles ordinaries*, Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III 4 (1956), 261–264.

H. Brezis, F. Browder: *A general principle on ordered sets in nonlinear functional analysis*, Adv. in Math. 21 (1976), 355–364.

J. Caristi: *Fixed point theorems for mappings satisfying inwardness conditions*, Trans. AMS 215 (1976), 241–251.

K. Goebel, W.A. Kirk: *Topics in metric fixed point theory*, Cambridge studies in advanced mathematics 28 (1990).

K. Menger: *Untersuchungen über allgemeine Metrik*, Math. Ann. 100 (1928), 75–163.

§2 Nicht–expandierende Abbildungen

In §1 hatten wir an Beispielen gesehen, dass die Bedingung $d(Tx, Ty) \leq d(x, y)$ nicht ausreicht, die Existenz von Fixpunkten zu beweisen. Wir hatten zum Beispiel auf dem Raum

$$M = \{x \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq ||x|| \leq 2\}$$

die fixpunktfreie Isometrie $Tx = -x$. Diese erfüllt sogar $||Tx - x|| = 2||x|| \geq 2$ für jedes $x \in M$. Trotzdem ist die Situation nicht so schlimm, wie es dieses Beispiel erwarten läßt. Es lassen sich auch unter der Bedingung $d(Tx, Ty) \leq d(x, y)$ noch allgemeine Fixpunktsätze beweisen, im Gegensatz zum Banachschen Fixpunktsatz benötigen wir allerdings geometrische Voraussetzungen an den Raum M. So wird M bei uns kein allgemeiner vollständiger metrischer Raum sein, sondern stets eine abgeschlossene, konvexe Teilmenge eines Banachraums. Dies schliesst bereits die schlimmsten Effekte aus.

Definition 1: Seien E ein Banachraum und $X \subseteq E$ eine abgeschlossene, konvexe Teilmenge von E. Eine Abbildung $T : X \to X$ heißt nicht–expandierend, wenn $||Tx - Ty|| \leq ||x - y||$ für alle $x, y \in X$ gilt. Insbesondere ist T dann stetig.

Satz 1: *Seien E ein Banachraum und $X \subseteq E$ eine nicht–leere, konvexe, abgeschlossene, beschränkte Teilmenge. Weiter sei $T : X \to X$ nicht–expandierend. Dann gilt*

$$\inf\{||Tx - x|| : x \in X\} = 0.$$

Beweis: Wähle ein $z \in X$ und sei $\epsilon > 0$. Da X beschränkt ist, gibt es ein $0 < t < 1$ mit $td(X) \leq \epsilon$. Da X konvex ist, haben wir die Abbildung

$$S : X \to X; x \mapsto tz + (1-t)Tx.$$

Weiter ist X eine abgeschlossene Teilmenge von E, also selbst ein vollständiger metrischer Raum. Für $x, y \in X$ gilt

$$||Sx - Sy|| = (1-t)||Tx - Ty|| \leq (1-t)||x - y||,$$

da T nicht–expandierend ist. Der Banachsche Fixpunktsatz §1.Satz 1 liefert ein $y \in X$ mit $Sy = y$. Für dieses y gilt

$$||Ty - y|| = ||Ty - Sy|| = ||Ty - tz - Ty + tTy|| = t||Ty - z|| \leq td(X) \leq \epsilon.$$

Dies ergibt die Behauptung.

■

Also gibt es zumindest approximative Fixpunkte, d.h. Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X mit $||Tx_n - x_n|| \to 0$. Konvergiert eine solche Folge gegen ein $x \in X$, so ergibt die Stetigkeit von T sofort $||Tx - x|| = 0$, d.h. $Tx = x$ und x ist ein Fixpunkt von T. Dies funktioniert bereits, wenn die Folge nur eine konvergente Teilfolge enthält, d.h. wir haben das folgende Korollar:

Korollar 2: *Seien E ein Banchraum und $X \subseteq E$ eine nicht–leere, kompakte konvexe Teilmenge. Dann hat jede nicht–expandierende Abbildung $T : X \to X$ einen Fixpunkt in X.*

Allerdings werden wir in §4 einsehen, dass für die Gültigkeit dieses Korollars bereits die Stetigkeit von T ausreicht.

Die Bedingungen von Satz 1 reichen allerdings nicht aus, die Existenz eines Fixpunkts zu zeigen. Tatsächlich haben wir bereits in §1 ein Gegenbeispiel kennengelernt. Im Banachraum $E = C[0,1]$ haben wir dort die nicht–leere, abgeschlossene, beschränkte konvexe Menge

$$X = \{x \in C[0,1] | \forall (t \in [0,1]) : 0 = x(0) \leq x(t) \leq x(1) = 1\}$$

betrachtet und gesehen, dass die Abbildung

$$T : X \to X; Tx(t) = tx(t)$$

nicht–expandierend und fixpunktfrei ist. Wir werden also noch zusätzliche geometrische Bedingungen an X brauchen, die aber deutlich schwächer als Kompaktheit sein sollen. Trotzdem wollen wir uns dieses Beispiel noch etwas näher anschauen. Für $x, y \in X$ gilt offenbar $||x - y|| \leq 1$. Für jedes $0 < a < 1$ sind die Funktionen

$$x_a : [0,1] \to \mathbb{R}; t \mapsto \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq a, \\ \frac{t-a}{1-a}, & a \leq t \leq 1, \end{cases},$$

und

$$y_a : [0,1] \to \mathbb{R}; t \mapsto \begin{cases} \frac{t}{a}, & 0 \leq t \leq a, \\ 1, & a \leq t \leq 1 \end{cases}$$

in X, und es gilt $||x_a - y_a|| = 1$, d.h. $d(X) = 1$. Weiter gilt

$$(Tx_a - x_a)(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq a, \\ \frac{(t-1)(t-a)}{1-a}, & a \leq t \leq 1, \end{cases}$$

für alle $0 \leq t \leq 1$, und eine direkte Rechnung zeigt

$$||Tx_a - x_a|| = \frac{1-a}{4}.$$

Für $a \to 1$ wird dies beliebig klein, aber es gibt keinen Grenzwert $\lim_{a \to 1} x_a$ in $C[0,1]$.

Im Vergleich zum Banachschen Fixpunktsatz stellt sich eine weitere Frage. Angenommen wir starten mit einem $x \in X$ und bilden die Folge $(T^n x)_{n \in \mathbb{N}}$. Hat diese einen Grenzwert? Für $n \in \mathbb{N}$, $t \in [0,1]$ gilt offenbar

$$T^n x(t) = t^n x(t),$$

und insbesondere divergiert $(T^n x)_{n \in \mathbb{N}}$ in $C[0,1]$. Aber für $0 \leq t \leq 1$, $n \in \mathbb{N}$ ist

$$|T^n x(t) - T^{n+1} x(t)| = t^n (1-t)|x(t)|,$$

und ist $\epsilon > 0$ gegeben, so existiert $0 < \delta < 1$ mit $(1-t)|x(t)| \leq \epsilon$ für $1 - \delta \leq t \leq 1$, und weiter existiert $N \in \mathbb{N}$ mit $(1-\delta)^n ||x|| \leq \epsilon$ für $n \geq N$. Dann ist offenbar $||T^n x - T^{n+1} x|| \leq \epsilon$ für $n \geq N$, d.h. es ist

$$\lim_{n \to \infty} ||T^n x - T^{n+1} x|| = 0,$$

und wir haben eine approximierende Fixpunktfolge, die allerdings nicht konvergiert.

Die Folge $(T^n x)_{n \in \mathbb{N}}$ hat noch eine weitere interessante Eigenschaft. Sei dazu ein weiteres $z \in X$ gegeben. Sei $0 < \epsilon < 1/2$. Es gibt ein $0 < \delta < 1$ mit $z(t) > 1 - \epsilon$ für $1 - \delta \leq t \leq 1$. Sei $1 - \delta < t < 1$. Dann gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $t^n x(t) < \epsilon$ für $n \geq N$, d.h. für $n \geq N$ ist $z(t) - T^n x(t) = z(t) - t^n x(t) > 1 - 2\epsilon$, d.h. $||z - T^n x|| > 1 - 2\epsilon$. Dies ergibt

$$\lim_{n \to \infty} ||z - T^n x|| = 1 = d(X),$$

und insbesondere ist
$$\sup\{||z-u|| : u \in X\} = d(X),$$
und zwar für jedes $z \in X$. Dies ist eine geometrische Anomalie, die im folgenden eine gewisse Rolle spielen wird. Daher definieren wir

Definition 2: Sei $K \subseteq E$ eine beschränkte, nicht–leere, abgeschlossene, konvexe Teilmenge eines Banachraums E. Dann heißt K diametral, wenn für jeden Punkt $z \in K$
$$\sup\{||z-x|| : x \in K\} = d(K)$$
gilt.

Unsere Menge X ist ein Beispiel für eine nicht–triviale diametrale Menge. Die trivialen diametralen Mengen sind dabei die einelementigen Teilmengen von E. Nicht–triviale diametrale Mengen sind in gewissem Sinne ein unendlichdimensionales Phänomen. Eine nicht–leere, beschränke, abgeschlossene, konvexe Menge in einem endlichdimensionalen Banachraum ist insbesondere kompakt, und wir werden jetzt sehen, dass kompakte diametrale Mengen stets trivial sind.

Satz 3: *Seien E ein Banachraum und $K \subseteq E$ eine kompakte, diametrale Teilmenge von E. Dann ist $|K| = 1$.*

Beweis: Wähle ein $x_1 \in K$. Ist $n \geq 1$ und sind $x_1, \ldots, x_n \in K$ schon gewählt, so ist $(1/n)\sum_{i=1}^n x_i \in K$, da K konvex ist. Da K diametral ist, liefern die Stetigkeit der Norm und die Kompaktheit von K ein $x_{n+1} \in K$ mit
$$\left|\left|x_{n+1} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i\right|\right| = d(K).$$
Damit erhalten wir induktiv eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in K. Für $n \geq 1$ haben wir
$$d(K) = \left|\left|x_{n+1} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i\right|\right| = \frac{1}{n}\left|\left|\sum_{i=1}^n (x_{n+1} - x_i)\right|\right| \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n ||x_{n+1} - x_i|| \leq d(K),$$
d.h. es ist $||x_{n+1} - x_i|| = d(K)$ für alle $1 \leq i \leq n$. Da K kompakt ist, besitzt $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge, und dies ergibt $d(K) = 0$, d.h. $|K| = 1$.

■

Da in Zukunft häufig von nicht–leeren, abgeschlossenen, konvexen Teilmengen die Rede ist, führen wir hierfür eine Bezeichnung ein:

Definition 3: Seien E ein Banachraum und $X \subseteq E$. Dann schreiben wir
$$\mathfrak{K}(X) := \{K \subseteq X : K \text{ ist eine nicht–leere, abgeschlossene, konvexe Teilmenge von } E\},$$
und
$$\mathfrak{K}^b(X) := \{K \in \mathfrak{K}(X) : K \text{ ist beschränkt}\}.$$

Ist zusätzlich $T : X \to X$ eine Abbildung, so setzen wir

$$\mathfrak{K}_T(X) := \{K \in \mathfrak{K}(X) : TK \subseteq K\},$$

und

$$\mathfrak{K}_T^b(X) := \mathfrak{K}_T(X) \cap \mathfrak{K}^b(X).$$

Unser Ziel ist es für eine Menge $X \in \mathfrak{K}^b(E)$ und eine nicht–expandierende Abbildung $T : X \to X$ eine Bedingung an X zu finden, die die Existenz von Fixpunkten von T garantiert. Die entscheidende Idee ist es, das Problem der Existenz von Fixpunkten in zwei Teilprobleme aufzuteilen. Diese Aufteilung geschieht über den Begriff der Minimalmenge:

Definition 4: Seien E ein Banachraum und $X \in \mathfrak{K}(E)$, sowie $T : X \to X$ eine nicht–expandierende Abbildung. Eine Minimalmenge für T ist ein bezüglich Inklusion minimales Element der Menge $\mathfrak{K}_T(X)$. Ausführlich heißt dies: Eine Minimalmenge M für T ist eine nicht–leere, abgeschlossene, konvexe Teilmenge $M \subseteq X$ mit $TM \subseteq M$ so, daß für jede andere nicht–leere, abgeschlossene, konvexe Teilmenge $N \subseteq X$ mit $TN \subseteq N$ aus $N \subseteq M$ bereits $M = N$ folgt.

Ist zum Beispiel x ein Fixpunkt von T, so ist $\{x\}$ offenbar eine Minimalmenge für T, und umgekehrt besteht eine einelementige Minimalmenge aus einem Fixpunkt. Wir teilen das Existenzproblem für Fixpunkte jetzt in die beiden folgenden Teile auf:

- Zeige die Existenz einer Minimalmenge M für T.
- Zeige das Minimalmengen für T einelementig sind.

Zusammengenommen liefert dies die Existenz von Fixpunkten. Der folgende Hauptsatz über Minimalmengen zeigt uns, dass es für den zweiten Punkt durchaus berechtigte Hoffnungen auf eine Lösung gibt.

Satz 4: *Seien E ein Banachraum, $X \in \mathfrak{K}^b(E)$ und $T : X \to X$ eine nicht–expandierende Abbildung. Sei M eine Minimalmenge für T. Dann gelten:*

(a) *Es ist $\overline{\text{co}}(TM) = M$.*

(b) *Ist $f : M \to \mathbb{R}$ unterhalb stetig und konvex mit $f(Tx) \leq f(x)$ für alle $x \in M$, so ist f konstant.*

(c) *Die Menge M ist diametral.*

Beweis: **(a)** Es ist $N := \overline{\text{co}}(TM) \in \mathfrak{K}(E)$. Wegen $TM \subseteq M$ und da M konvex und abgeschlossen ist, gilt $N \subseteq M \subseteq X$. Weiter ist $TN \subseteq TM \subseteq \overline{\text{co}}(TM) = N$, d.h. $N \in \mathfrak{K}_T(X)$. Da M eine Minimalmenge ist, folgt jetzt $N = M$.

(b) Sei $z \in M$ und setze $N := \{x \in M : f(x) \leq f(z)\}$. Offenbar ist $z \in N$, also $N \neq \emptyset$. Da f konvex ist, ist die Menge N konvex und da f unterhalb stetig ist, ist N auch abgeschlossen. Für $x \in N$, haben wir weiter $Tx \in TM \subseteq M$ und $f(Tx) \leq f(x) \leq f(z)$, d.h. $Tx \in N$. Also ist $TN \subseteq N$, und wir haben $N \in \mathfrak{K}_T(X)$. Die Minimalität von M liefert jetzt $N = M$, d.h. $f(x) \leq f(z)$ für alle $x \in M$.

Also gilt für beliebige $x, y \in M$ stets $f(x) \leq f(y)$, und somit ist f konstant.

(c) Da $M \subseteq K$ beschränkt ist, können wir definieren

$$f : M \to \mathbb{R}; x \mapsto \sup\{||y - x|| : y \in M\}.$$

Als punktweises Supremum stetiger, konvexer Funktionen ist auch f unterhalb stetig und konvex. Sei $x \in M$ und setze $r := f(x)$. Für jedes $y \in M$ gilt $||Ty - Tx|| \leq ||y - x|| \leq f(x) = r$, da T nicht–expandierend ist, d.h. wir haben $TM \subseteq \overline{B}_r(Tx)$. Da die Kugel $\overline{B}_r(Tx)$ konvex und abgeschlossen ist, folgt mit Teil (a)

$$M = \overline{\text{co}}(TM) \subseteq \overline{B}_r(Tx),$$

d.h. $||y - Tx|| \leq r$ für alle $y \in M$. Dies zeigt $f(Tx) \leq r = f(x)$.

Nach Teil (b) existiert ein $r \geq 0$ mit $f(x) = r$ für alle $x \in M$. Es folgt $d(M) = \sup\{||x - y|| : x, y \in M\} = \sup\{f(x) : x \in M\} = r$, und somit ist M diametral.

■

Was können wir jetzt über die Existenz von Minimalmengen sagen? Nach Definition sind Minimalmengen die minimalen Elemente der partiell geordneten Menge $(\mathfrak{K}_T(X), \subseteq)$, und somit bietet es sich an, das Lemma von Zorn zu verwenden. Der Durchschnitt einer Menge abgeschlossener, konvexer, unter T invarianter Teilmengen von X ist offenbar wieder unter T invariant, konvex und abgeschlossen. Ist also $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{K}_T(X)$ eine total geordnete Teilmenge, so ist $\bigcap \mathfrak{M}$ der natürliche Kandidat für eine untere Schranke von $\mathfrak{M}$ in $\mathfrak{K}_T(X)$. Ist dieser Durchschnitt nicht leer, so ist er auch ein Element von $\mathfrak{K}_T(X)$, und wir haben eine untere Schranke gefunden. Leider kann es sehr wohl vorkommen, dass $\bigcap \mathfrak{M} = \emptyset$ ist.

Ein Beispiel ist wieder der Raum

$$X = \{x \in C[0,1] | \forall (t \in [0,1]) : 0 = x(0) \leq x(t) \leq x(1) = 1\}$$

mit der Abbildung

$$T : X \to X; Tx(t) = tx(t).$$

Wir wollen einmal einsehen, dass T keine Minimalmenge besitzt. Hierzu definieren wir für jedes $n \geq 0$ die Teilmenge

$$X_n := \{x \in X | \forall (t \in [0,1]) : x(t) \leq t^n\}.$$

Offenbar ist X_n eine abgeschlossene, konvexe Teilmenge von X, und es gilt $X_0 = X$. Weiter ist $X_{n+1} \subseteq X_n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Außerdem gilt $\bigcap_{n=0}^{\infty} X_n = \emptyset$, denn wäre $x \in \bigcap_{n=0}^{\infty} X_n$, so hätten wir für jedes $0 \leq t < 1$ die Ungleichung $x(t) \leq \lim_{n \to \infty} t^n = 0$, d.h. $x(t) = 0$. Damit ist aber auch $x(1) = 0$ im Widerspruch zu $x \in X$. Ist letztlich $n \in \mathbb{N}$, $x \in X_n$, so haben wir für $0 \le t \le 1$ stets $Tx(t) = tx(t) \le t^{n+1}$, d.h. $Tx \in X_{n+1}$. Also ist $TX_n \subseteq X_{n+1}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$.

Angenommen $M \subseteq X$ wäre eine Minimalmenge für T. Dann ist $M \subseteq X = X_0$. Ist $n \in \mathbb{N}$ und wissen wir bereits $M \subseteq X_n$, so folgt mit Satz 4.(a) auch

$$M = \overline{\mathrm{co}}(TM) \subseteq \overline{\mathrm{co}}(TX_n) \subseteq \overline{\mathrm{co}}(X_{n+1}) = X_{n+1}.$$

Damit ist $M \subseteq \bigcap_{n=0}^{\infty} X_n = \emptyset$; ein Widerspruch.

Wir benötigen also, dass der Durchschnitt einer Kette nicht–leerer, abgeschlossener, konvexer Teilmengen von X niemals leer sein kann. Glücklicherweise wird dies bereits durch einen Standardbegriff erreicht. Auf dem Banachraum E haben wir auch die sogenannte schwache Topologie, d.h. die kleinste Topologie auf E, die alle Linearformen aus E^* stetig macht. Diese ist eine Teilmenge der Topologie von E, und macht E wieder zu einem lokalkonvexen, topologischen Vektorraum, den wir mit E_w bezeichnen. Nach Konstruktion ist $E_w^* = E^*$. Die schwache Topologie verträgt sich sehr gut mit Konvexitätsbegriffen, d.h. ist $K \subseteq E$ eine konvexe Teilmenge von E, so stimmen der Abschluß von K in E_w und in E überein. Insbesondere ist eine konvexe Teilmenge $K \subseteq E$ genau dann abgeschlossen (in E), wenn sie schwach abgeschlossen ist.

Angenommen $K \subseteq E$ ist eine schwach kompakte, konvexe, nicht–leere Teilmenge von E, wobei wir unter "schwach kompakt" kompakt in der schwachen Topologie verstehen. Ist dann $\mathfrak{M}$ eine total geordnete Menge nicht–leerer, abgeschlossener, konvexer Teilmengen von K, so sind die Elemente von $\mathfrak{M}$ auch schwach abgeschlossen, und die schwache Kompaktheit von K liefert $\bigcap \mathfrak{M} \neq \emptyset$. Dieses Argument liefert unmittelbar das folgende Lemma:

Lemma 5: *Seien E ein Banachraum und $\emptyset \neq X \subseteq E$ eine schwach kompakte, konvexe Teilmenge. Sei $T : X \to X$ nicht–expandierend. Dann gibt es eine Minimalmenge für T.*

Dass wir mit der schwachen Kompaktheit nicht zuviel voraussetzen, sagt uns der Satz von Smulian. Dieser besagt, dass eine konvexe Teilmenge K eines Banachraums genau dann schwach kompakt ist, wenn jede absteigende Folge nicht–leerer, abgeschlossener, konvexer Teilmengen von K nicht–leeren Durchschnitt hat.

Das zweite Problem, d.h. wann sind Minimalmengen einelementig, lösen wir nicht wirklich, sondern führen einen neuen Begriff ein:

Definition 5: Seien E ein Banachraum und $K \subseteq E$ konvex. Wir sagen, dass K normale Struktur hat, wenn K keine nicht–triviale, diametrale Teilmenge besitzt. Insbesondere ist damit definiert wann E selbst normale Struktur hat.

Wir erhalten:

Satz 6: *Seien E ein Banachraum und $X \in \mathfrak{K}(E)$ schwach kompakt, mit normaler Struktur. Dann hat jede nicht–expandierende Abbildung $T : X \to X$ einen Fixpunkt.*

Beweis: Klar nach Lemma 5 und Satz 4.(c).

■

Wie einschränkend sind jetzt die Voraussetzungen von Satz 6? Zunächst ist beispielsweise jedes kompakte $X \in \mathfrak{K}(E)$ auch schwach kompakt und hat nach Satz 3 auch normale Struktur, d.h. wir erhalten einen neuen, komplizierteren, Beweis für Korollar 2. Für hinreichend gutartiges E läßt sich die schwache Kompaktheit von K durch "abgeschlossen und beschränkt" ersetzen. Indem wir jedes $x \in E$ durch

$$\hat{x}\phi := \phi(x) \quad (\phi \in E^*)$$

auf E^* wirken lassen, können wir E^* mit einer weiteren Topologie ausstatten, und dies ist die sogenannte schwach*–Topologie von E^*. Im allgemeinen ist dies nicht die schwache Topologie von E^*. Sie hat allerdings einen Vorteil gegenüber der schwachen Topologie, die Einheitskugel

$$B^* := \{\phi \in E^* : ||\phi|| \leq 1\}$$

ist immer schwach* kompakt. Dies können wir auf E übertragen. Die Abbildung $\widehat{\ } : E \to E^{**}$ ist eine isometrische Einbettung von E auf einen abgeschlossenen Teilraum von E^{**}. Das Bild besteht offenbar genau aus den schwach* stetigen Linearformen auf E^*. Hiermit fassen wir E als Teilraum von E^{**} auf $E \subseteq E^{**}$. Nun ist auch E^{**} ein Dualraum und trägt eine schwach* Topologie, und in dieser Topologie ist E ein dichter Teilraum von E^{**}, und die schwach* Topologie von E^{**} induziert auf E genau die schwache Topologie von E. Die Einheitskugel in E ist der Durchschnitt der Einheitskugel von E^{**} mit E, und letztere ist, wie gesagt, schwach* kompakt. Hiermit läßt sich jetzt einsehen, dass die Einheitskugel von E genau dann schwach kompakt ist, wenn E schwach* abgeschlossen in E^{**} ist, d.h. wenn $E^{**} = E$ ist. Einen solchen Banachraum nennt man reflexiv.

Damit haben wir eingesehen, oder zumindest skizziert, dass die Einheitskugel von E genau dann schwach kompakt ist, wenn E reflexiv ist. In einem reflexiven Raum ist damit eine konvexe Menge genau dann schwach kompakt, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist. Wir erhalten den folgenden Spezialfall von Satz 6:

Satz 7: *Seien E ein reflexiver Banachraum und $X \in \mathfrak{K}^b(E)$ von normaler Struktur. Dann hat jede nicht–expandierende Abbildung $T : X \to X$ einen Fixpunkt.*

Wir wollen jetzt noch einsehen, dass relativ viele natürlich auftretende Banachräume normale Struktur haben. Der Begriff der Normalstruktur selbst ist leider unter den üblicherweise betrachteten Eigenschaften von Banachräumen etwas isoliert. Es gibt allerdings eine Verschärfung des Begriffs der Normalstruktur, die sich dann sehr gut in den Rahmen der Banachraumtheorie einfügt.

Definition 6: Seien E ein Banachraum und $M \in \mathfrak{K}^b(E)$. Für jedes $u \in M$ definieren wir

$$r_u(M) := \sup\{||x - u|| : x \in M\} \leq d(M).$$

Offenbar ist M genau dann diametral, wenn $r_u(M) = d(M)$ für jedes $u \in M$ gilt. Weiter setze

$$r(M) := \inf\{r_u(M) : u \in M\}.$$

Die Zahl $r(M)$ heißt der Radius von M. Es gilt $r(M) \leq d(M)$, und genau dann ist M diametral wenn $r(M) = d(M)$ ist.

Definition 7: Seien E ein Banachraum und $K \in \mathfrak{K}(E)$. Die Menge K hat gleichmäßige Normalstruktur, wenn es ein $0 < c < 1$ mit $r(M) \leq cd(M)$ für jedes $M \in \mathfrak{K}^b(K)$ gibt. Ist $M \in \mathfrak{K}^b(K)$ mit $|M| > 1$ also $d(M) > 0$, so folgt $r(M) < d(M)$, d.h. M ist nicht diametral und K hat Normalstruktur.

Wie angekündigt fügt sich der Begriff der gleichmäßigen Normalstruktur sehr gut in unser bisheriges Konzept ein, es gilt zum Beispiel:

Satz 8: *Seien E ein Banachraum und $K \in \mathfrak{K}^b(E)$ habe gleichmäßige Normalstruktur. Dann ist K schwach kompakt.*

Beweis: Nach dem Satz von Smulian ist zu zeigen, dass jede absteigende Folge nicht–leerer, abgeschlossener konvexer Teilmengen von K nicht–leeren Durchschnitt hat. Wähle eine Konstante $0 < c_0 < 1$ mit $r(M) \leq c_0 d(M)$ für jedes $M \in \mathfrak{K}^b(K) = \mathfrak{K}(K)$. Wähle außerdem ein $c_0 < c < 1$. Ist $M \in \mathfrak{K}(K)$, so definiere

$$\begin{aligned} A(M) &:= \{x \in M | \forall (y \in M) : ||x - y|| \leq cd(M)\} \\ &= \{x \in M | r_x(M) \leq cd(M)\}. \end{aligned}$$

Wegen

$$A(M) = M \cap \bigcap \{\overline{B}_{cd(M)}(y) : y \in M\}$$

ist $A(M) \subseteq E$ eine abgeschlossene, konvexe Teilmenge von E mit $A(M) \subseteq M \subseteq K$. Ist $|M| = 1$, so ist offenbar $A(M) = M$ und ist $|M| > 1$, so $d(M) > 0$ und $r(M) \leq c_0 d(M) < cd(M)$, d.h. es existiert $x \in M$ mit $r_x(M) \leq cd(M)$, also $x \in A(M)$. Also ist stets $A(M) \neq \emptyset$ und somit $A(M) \in \mathfrak{K}(K)$.

Seien jetzt $K_n \in \mathfrak{K}(K)$ mit $K_{n+1} \subseteq K_n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ gegeben. Setze $K_n^0 := K_n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Ist $m \geq 0$ und haben wir K_n^m für $n \in \mathbb{N}$ schon konstruiert, mit $K_{n+1}^m \subseteq K_n^m$ für jedes $n \in \mathbb{N}$, so definieren wir

$$K_n^{m+1} := \overline{\text{co}} \left(\bigcup_{i=n}^{\infty} A(K_i^m) \right)$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$. Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann ist K_n^{m+1} eine nicht–leere, abgeschlossene, konvexe Teilmenge von E. Für jedes $i \geq n$ gilt $A(K_i^m) \subseteq K_i^m \subseteq K_n^m$, d.h. $K_n^{m+1} \subseteq K_n^m \subseteq K$, da K_n^m abgeschlossen und konvex ist. Insbesondere ist $K_n^{m+1} \in \mathfrak{K}(K)$. Wegen $\bigcup\{A(K_i^m) : i \geq n+1\} \subseteq \bigcup\{A(K_i^m) : i \geq n\}$ ist auch $K_{n+1}^{m+1} \subseteq K_n^{m+1}$, und wir können mit unserer induktiven Konstruktion fortfahren.

Wir erhalten für jedes Paar $n, m \in \mathbb{N}$ ein $K_n^m \in \mathfrak{K}(K)$ mit $K_n^{m+1} \subseteq K_n^m$ und $K_{n+1}^m \subseteq K_n^m$. Seien $n, m \in \mathbb{N}$ gegeben. Wir wollen

$$d(K_n^{m+1}) \leq cd(K_n^m)$$

einsehen. Dies ist offenbar gleichwertig zu

$$d\left(\bigcup_{i=n}^{\infty} A(K_i^m)\right) \le cd(K_n^m).$$

Seien also $i, j \ge n$ und $u \in A(K_i^m)$, $v \in A(K_j^m)$ gegeben, und ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $i \le j$. Dann ist $v \in A(K_j^m) \subseteq K_j^m \subseteq K_i^m$, also $||u - v|| \le cd(K_i^m)$ da $u \in A(K_i^m)$. Dies ergibt unsere Zwischenbehauptung.

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ haben wir jetzt $K_n^n \subseteq K_n^0 = K_n$ und $K_{n+1}^{n+1} \subseteq K_{n+1}^n \subseteq K_n^n$, sowie $d(K_{n+1}^{n+1}) \le cd(K_{n+1}^n) \le cd(K_n^n)$. Insbesondere ist $d(K_n^n) \le c^n d(K_0)$ und wegen $c < 1$ folgt $\lim_{n\to\infty} d(K_n^n) = 0$. Die Vollständigkeit von E ergibt jetzt

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n \supseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n^n \ne \emptyset,$$

und der Satz ist bewiesen.

■

Da E genau dann reflexiv ist, wenn die Einheitskugel von E schwach kompakt ist folgt sofort:

Korollar 9: *Hat der Banachraum E gleichmäßige Normalstruktur, so ist E reflexiv.*

Satz 10: *Seien E ein Banachraum und $K \in \mathfrak{K}^b(E)$ habe gleichmäßige Normalstruktur. Dann hat jede nicht–expandierende Abbildung $T : K \to K$ einen Fixpunkt.*

Beweis: K hat normale Struktur und nach Satz 8 ist K schwach kompakt. Die Behauptung folgt mit Satz 6.

■

Welche Banachräume haben jetzt gleichmäßige Normalstruktur? Wir werden zum Beispiel sehen, dass dies für Hilberträume stets der Fall ist, und allgemeiner haben gleichmäßig konvexe Räume die gewünschte Eigenschaft. Wir bringen zunächst ein kleines Lemma über strikt konvexe Banachräume.

Definition 8: Ein Banachraum E heißt strikt konvex, wenn für alle $x, y \in E$ mit $x \ne y$ und $||x||, ||y|| \le 1$ stets $||(x + y)/2|| < 1$ gilt.

Lemma 11: *Sei E ein strikt konvexer Banachraum.*

(a) *Sind $x, y \in E$ mit $x \ne y$ und $||x||, ||y|| \le 1$ und ist $0 < t < 1$, so gilt $||(1 - t)x + ty|| < 1$.*

(b) *Sind $x, y \in E$ mit $y \ne 0$ und $||x + y|| = ||x|| + ||y||$, so existiert ein $t \ge 0$ mit $x = ty$.*

(c) *Sind $x, y, z \in E$ mit $||x - z|| = ||x - y|| + ||y - z||$, so existiert ein $0 \le t \le 1$ mit $y = (1 - t)x + tz$.*

(d) *Ist $X \subseteq E$ abgeschlossen und konvex, und ist $T : X \to X$ nicht–expandierend, so ist* $\mathrm{Fix}(T)$ *wieder abgeschlossen und konvex.*

Beweis: **(a)** Setze
$$I := \{t \in (0,1) : ||(1-t)x + ty|| < 1\}.$$
Dann ist $I \subseteq (0,1)$ offen und $1/2 \in I$. Sind $t, s \in I$ und $0 \le \lambda \le 1$, so gilt

$$\begin{aligned} & ||(1-((1-\lambda)t+\lambda s))x + ((1-\lambda)t+\lambda s)y|| \\ = \; & ||(1-\lambda)(1-t)x + \lambda(1-s)x + (1-\lambda)ty + \lambda sy|| \\ \le \; & (1-\lambda)||(1-t)x+ty|| + \lambda||(1-s)x+sy|| < 1, \end{aligned}$$

d.h. $(1-\lambda)t + \lambda s \in I$ und I ist konvex. Also existieren $0 \le a < 1/2 < b \le 1$ mit $I = (a,b)$. Setze $z := (1-a)x + ay$. Dann ist $||z|| \le 1$ und

$$\left|\left|\left(1-\frac{1}{2}a\right)x + \frac{1}{2}ay\right|\right| = \left|\left|\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}((1-a)x+ay)\right|\right| = \left|\left|\frac{1}{2}(x+z)\right|\right| < 1,$$

sowie $0 \le (1/2)a < 1$, d.h. $a = 0$ nach unserer Definition von a. Analog folgt $b = 1$.
(b) Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $x \ne 0$. Nach eventuellen Vertauschen von x und y können wir weiter $||y|| \ge ||x||$ annehmen. Dann sind $x/||x||$ und $y/||y||$ zwei Einheitsvektoren und es gilt

$$\begin{aligned} \left|\left|\frac{1}{2}\left(\frac{x}{||x||} + \frac{y}{||y||}\right)\right|\right| &= \frac{1}{2}\left|\left|\frac{x}{||x||} + \frac{y}{||x||} - \left(\frac{y}{||x||} - \frac{y}{||y||}\right)\right|\right| \\ &\ge \frac{1}{2}\left|\left|\frac{x}{||x||} + \frac{y}{||x||}\right|\right| - \frac{1}{2}\left|\left|\frac{y}{||x||} - \frac{y}{||y||}\right|\right| \\ &= \frac{||x+y||}{2||x||} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{||x||} - \frac{1}{||y||}\right)||y|| \\ &= \frac{||x|| + ||y||}{2||x||} - \frac{1}{2}\frac{||y||}{||x||} + \frac{1}{2} \\ &= 1, \end{aligned}$$

d.h. $x/||x|| = y/||y||$ da E strikt konvex ist. Also ist $x = (||x||/||y||)y$.
(c) Es ist $(x-y) + (y-z) = x - z$. Ist $y - z = 0$, so ist $y = z$, und die Behauptung ist klar. Andernfalls existiert nach (b) ein $t \ge 0$ mit $x - y = t(y-z)$, d.h. $(1+t)y = x + tz$, und somit
$$y = \frac{1}{1+t}x + \frac{t}{1+t}z = \left(1 - \frac{t}{1+t}\right)x + \frac{t}{1+t}z$$
mit $0 \le t/(1+t) \le 1$.
(d) Dass $\mathrm{Fix}(T)$ abgeschlossen ist, ist klar da T stetig ist. Seien $x, y \in \mathrm{Fix}(T)$ mit $x \ne y$ und $0 \le t \le 1$. Setze $z := (1-t)x + ty \in X$. Zu zeigen ist $Tz = z$. Es

gilt $||x - Tz|| + ||Tz - y|| = ||Tx - Tz|| + ||Tz - Ty|| \leq ||x - z|| + ||z - y|| = t||x - y|| + (1 - t)||x - y|| = ||x - y|| \leq ||x - Tz|| + ||Tz - y||$. Nach (c) existiert ein $0 \leq s \leq 1$ mit $Tz = (1 - s)x + sy$. Wir haben somit

$$s||x - y|| = ||x - Tz|| = ||Tx - Tz|| \leq ||x - z|| = t||x - y||,$$

und

$$(1 - s)||x - y|| = ||Tz - y|| = ||Tz - Ty|| \leq ||z - y|| = (1 - t)||x - y||.$$

Also ist $s \leq t$ und $1 - s \leq 1 - t$, d.h. $t = s$ und somit $Tz = (1 - t)x + ty = z$.

■

Im allgemeinen muss die Fixpunktmenge einer nicht–expandierenden Abbildung nicht konvex sein. Betrachte zum Beispiel $E = \mathbb{R}^2$ versehen mit der Maximumsnorm. Sei

$$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2; (x, y) \mapsto (x, |x|).$$

Für $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2$ haben wir

$$\begin{aligned} ||T(x, y) - T(x', y')|| = ||(x - x', |x| - |x'|)|| &= \max\{|x - x'|, ||x| - |x'||\} \\ &= |x - x'| \leq ||(x, y) - (x', y')||, \end{aligned}$$

d.h. T ist nicht–expandierend. Andererseits ist

$$\mathrm{Fix}(T) = \{(x, |x|) : x \in \mathbb{R}\}$$

nicht konvex.

Um gleichmäßige Normalstruktur zu erhalten, benötigen wir eine gleichmäßige Version der strikten Konvexität.

Definition 9: Ein Banachraum E heißt gleichmäßig konvex, wenn es für jedes $0 < \epsilon \leq 2$ ein $\delta > 0$ mit

$$\forall (x, y \in E) : ||x||, ||y|| \leq 1,\ ||x - y|| \geq \epsilon \Longrightarrow \left\|\frac{x + y}{2}\right\| \leq 1 - \delta$$

gibt. Offenbar ist E dann auch strikt konvex.

Lemma 12: *Jeder Hilbertraum ist gleichmäßig konvex.*

Beweis: Sei E ein Hilbertraum. Sei $0 < \epsilon \leq 2$ gegeben. Setze

$$\delta := 1 - \sqrt{1 - \frac{\epsilon^2}{4}} > 0.$$

Seien $x, y \in E$ mit $||x||, ||y|| \leq 1$ und $||x-y|| \geq \epsilon$. Die Parallelogramgleichung ergibt dann
$$||x+y||^2 = 2||x||^2 + 2||y||^2 - ||x-y||^2 \leq 4 - \epsilon^2,$$
und somit ist
$$\left|\left|\frac{x+y}{2}\right|\right| \leq \sqrt{1-\frac{\epsilon^2}{4}} = 1-\delta.$$

■

Jetzt zeigen wir, dass gleichmäßige Konvexität tatsächlich auch gleichmäßige Normalstruktur impliziert.

Satz 13: *Jeder gleichmäßig konvexe Banachraum hat auch gleichmäßige Normalstruktur.*

Beweis: Sei E ein gleichmäßig konvexer Banachraum. Dann gibt es ein $\delta > 0$ so, dass für alle $x, y \in E$ mit $||x||, ||y|| \leq 1$ aus $||x-y|| \geq 1/2$ schon $||(x+y)/2|| \leq 1-\delta$ folgt. Wir können offenbar $\delta < 1$ annehmen. Setze $c := 1-\delta \in (0,1)$. Sei $M \in \mathfrak{K}^b(E)$ gegeben. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $|M| > 1$, also $d(M) > 0$. Dann ist $d(M)/2 < d(M)$, und es gibt $x, y \in M$ mit $||x-y|| \geq d(M)/2$. Wir setzen $z := (x+y)/2 \in M$. Für jedes $u \in M$ gilt jetzt
$$\left|\left|\frac{x}{d(M)} - \frac{u}{d(M)}\right|\right| = \frac{1}{d(M)}||x-u|| \leq 1,$$
und analog
$$\left|\left|\frac{y}{d(M)} - \frac{u}{d(M)}\right|\right| \leq 1,$$
sowie
$$\left|\left|\left(\frac{x}{d(M)} - \frac{u}{d(M)}\right) - \left(\frac{y}{d(M)} - \frac{u}{d(M)}\right)\right|\right| = \frac{1}{d(M)}||x-y|| \geq \frac{1}{2},$$
d.h. wir erhalten nach Wahl von δ
$$\begin{aligned} ||z-u|| &= d(M)\left|\left|\frac{1}{2d(M)}(x+y) - \frac{u}{d(M)}\right|\right| \\ &= d(M)\left|\left|\frac{1}{2}\left(\left(\frac{x}{d(M)} - \frac{u}{d(M)}\right) + \left(\frac{y}{d(M)} - \frac{u}{d(M)}\right)\right)\right|\right| \\ &\leq (1-\delta)d(M) \\ &= cd(M). \end{aligned}$$
Dies zeigt $r_z(M) \leq cd(M)$, und somit ist $r(M) \leq cd(M)$.

■

Dies ergibt den folgenden Fixpunktsatz für gleichmäßig konvexe Banachräume.

Satz 14: *Seien E ein gleichmäßig konvexer Banachraum und $X \in \mathfrak{K}^b(E)$ eine nicht–leere, beschränkte, abgeschlossene, konvexe Teilmenge von E. Weiter sei $T : X \to X$ nicht–expandierend. Dann ist $\mathrm{Fix}(T)$ eine nicht–leere, abgeschlossene, konvexe Teilmenge von X.*

Beweis: Da E strikt konvex ist, ist $\mathrm{Fix}(T)$ nach Lemma 11.(d) abgeschlossen und konvex. Nach Satz 13 hat E gleichmäßige Normalstruktur, und mit Satz 10 folgt $\mathrm{Fix}(T) \neq \emptyset$.

■

Bisher kennen wir nur Hilberträume als Beispiele gleichmäßig konvexer Banachräume. Wir wollen im folgenden einsehen, dass auch alle L^p–Räume gleichmäßig konvex sind, solange $1 < p < \infty$ ist. Wenn man so will, fällt mit $p = 2$ auch der Hilbertraumfall unter diese Beobachtung. Zum Beweis das ein Hilbertraum gleichmäßig konvex ist, haben wir in Lemma 12 die Parallelogrammidentität benutzt, um einen Zusammenhang zwischen $||x - y||$ und $||x + y||$ im Fall $||x||, ||y|| \leq 1$ herzustellen. Im Fall der L^p-Räume wollen wir weitgehend analog vorgehen, und zunächst eine entsprechende Parallelogramm-Ungleichung herleiten. Dies ist technisch etwas aufwendig, und benötigt einige einleitende Lemmata.

Lemma 15: *Sei $p \in \mathbb{R}$ mit $p > 1$, und sei $q \in \mathbb{R}$ definiert durch $1/p + 1/q = 1$.*

(a) *Ist $2 \leq p$, so gilt*
$$|x + y|^p + |x - y|^p \leq 2^{p-1} \left(|x|^p + |y|^p\right)$$
für alle $x, y \in \mathbb{R}$.

(b) *Ist $p < 2$, so gilt*
$$(1 + x^q)^{p-1} \leq \frac{1}{2} \left((1 + x)^p + (1 - x)^p\right)$$
für jedes $0 \leq x \leq 1$.

(c) *Ist $p < 2$, so gilt*
$$(1 + x)^q + (1 - x)^q \leq 2 \left(1 + x^p\right)^{\frac{1}{p-1}}$$
für alle $0 \leq x \leq 1$.

(d) *Ist $p < 2$, so gilt*
$$|x + y|^q + |x - y|^q \leq 2 \left(|x|^p + |y|^p\right)^{\frac{1}{p-1}}$$
für alle $x, y \in \mathbb{R}$.

Beweis: **(a)** Definiere für $0 \leq x \leq 1$
$$f(x) := (1 + x)^p + (1 - x)^p - 2^{p-1}(1 + x^p).$$

Es ist $f(1) = 2^p - 2^{p-1}2 = 0$, und für $0 < x < 1$ gilt

$$f'(x) = p(1+x)^{p-1} - p(1-x)^{p-1} - 2^{p-1}px^{p-1}.$$

Außerdem setzen wir für $x \geq 1$

$$g(x) := (x+1)^{p-1} - (x-1)^{p-1}.$$

Dann ist $g(1) = 2^{p-1}$ und für $x > 1$ gilt

$$g'(x) = (p-1)\left((x+1)^{p-2} - (x-1)^{p-2}\right) \geq 0,$$

d.h. die Funktion g ist monoton steigend und es gilt $g(x) \geq 2^{p-1}$ für $x \geq 1$. Für $0 < x < 1$ folgt

$$f'(x) = px^{p-1}\left(\left(\frac{1}{x}+1\right)^{p-1} - \left(\frac{1}{x}-1\right)^{p-1} - 2^{p-1}\right) \geq 0,$$

d.h. auch f ist monoton steigend, und für $0 \leq x \leq 1$ folgt $(1+x)^p + (1-x)^p - 2^{p-1}(1+x^p) \leq f(1) = 0$, d.h.

$$(1+x)^p + (1-x)^p \leq 2^{p-1}(1+x^p).$$

Jetzt seien $x, y \in \mathbb{R}$ gegeben. Für $x = 0$ haben wir $|y|^p + |-y|^p = 2|y|^p \leq 2^{p-1}|y|^p$, d.h. wir können $x \neq 0$ annehmen. Analog sei auch $y \neq 0$. Ist $0 < y \leq x$, so haben wir $0 < y/x \leq 1$, und somit

$$\begin{aligned}
|x+y|^p + |x-y|^p &= x^p\left(\left(1+\frac{y}{x}\right)^p + \left(1-\frac{y}{x}\right)^p\right) \\
&\leq 2^{p-1}x^p\left(1+\left(\frac{y}{x}\right)^p\right) \\
&= 2^{p-1}(|x|^p + |y|^p).
\end{aligned}$$

Ist nur $x, y > 0$, so folgt die Behauptung mit eventuellem Vertauschen von x und y. Ist nur $x > 0$ vorausgesetzt, so können wir y durch $-y$ ersetzen und erhalten wieder unsere Behauptung. Durch eventuelles Vertauschen gilt die Behauptung schon wenn $x > 0$ oder $y > 0$ ist. Ist letztlich $x, y < 0$, so können wir x durch $-x$ und y durch $-y$ ersetzen und sind auch in diesem Fall fertig.

(b) Für $|x| < 1$ gilt

$$(1+x)^p = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p(p-1)\cdot\ldots\cdot(p-n+1)}{n!}x^n =: \sum_{n=0}^{\infty}\binom{p}{n}x^n.$$

Dies ist einfach die Taylorentwicklung, und diese muß für $|x| < 1$ konvergieren, da $(1+x)^p = \exp(p\log(1+x))$ dort holomorph ist. Ebenso ist für $|x| < 1$ auch

$$(1+x)^{p-1} = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{p-1}{n}x^n.$$

Für $0 < x < 1$ folgt

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{2}\left((1+x)^p + (1-x)^p\right) - (1+x^q)^{p-1} \\
= \; & \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{p}{n}x^n + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\binom{p}{n}x^n - \sum_{n=0}^{\infty}\binom{p-1}{n}x^{qn} \\
= \; & \sum_{n=0}^{\infty}\binom{p}{2n}x^{2n} - \sum_{n=0}^{\infty}\binom{p-1}{n}x^{qn} \\
= \; & \sum_{n=0}^{\infty}\binom{p}{2n}x^{2n} - \sum_{n=0}^{\infty}\binom{p-1}{2n-1}x^{q(2n-1)} - \sum_{n=0}^{\infty}\binom{p-1}{2n}x^{2nq} \\
= \; & \sum_{n=0}^{\infty}\left[\binom{p}{2n}x^{2n} - \binom{p-1}{2n-1}x^{q(2n-1)} - \binom{p-1}{2n}x^{2nq}\right].
\end{aligned}
$$

Wir zeigen jetzt, dass alle Summanden in dieser Reihe nicht negativ sind. Für $n = 0$ ist der Summand $1 - 0 - 1 = 0$. Jetzt sei $n \geq 1$. Wir versuchen unseren Summanden als ein Produkt zu schreiben.

$$
\begin{aligned}
A \; := \; & \binom{p}{2n}x^{2n} - \binom{p-1}{2n-1}x^{q(2n-1)} - \binom{p-1}{2n}x^{2nq} \\
= \; & \frac{p\cdot\ldots\cdot(p-2n+1)}{(2n)!}x^{2n} - \frac{(p-1)\cdot\ldots\cdot(p-1-2n+1+1)}{(2n-1)!}x^{q(2n-1)} \\
& - \frac{(p-1)\cdot\ldots\cdot(p-1-2n+1)}{(2n)!}x^{2nq} \\
= \; & \frac{(p-2)\cdot\ldots\cdot(p-2n)}{(2n-1)!}x^{2n}\left[\frac{p(p-1)}{2n(p-2n)} - \frac{p-1}{p-2n}x^{q(2n-1)-2n} - \frac{p-1}{2n}x^{2nq-2n}\right].
\end{aligned}
$$

Es ist $1/p + 1/q = 1$, also $p + q = pq$ und somit $(p-1)(q-1) = 1$. Es folgt $2nq - 2n = 2n(q-1) = 2n/(p-1)$ und $q(2n-1) - 2n = 2nq - 2n - q = 2n/(p-1) - q = 2n/(p-1) - p/(p-1) = (2n-p)/(p-1)$ da $q = 1 + 1/(p-1) = p/(p-1)$. Verwenden wir noch

$$
\frac{p(p-1)}{2n(p-2n)} = \frac{p-1}{2n} + \frac{p-1}{p-2n},
$$

so ergibt sich

$$
\begin{aligned}
A \; = \; & \frac{(p-2)\cdot\ldots\cdot(p-2n)}{(2n-1)!}x^{2n}\left[\frac{p-1}{2n}\left(1 - x^{\frac{2n}{p-1}}\right) + \frac{p-1}{p-2n}\left(1 - x^{\frac{2n-p}{p-1}}\right)\right] \\
= \; & -\frac{(2-p)\cdot\ldots\cdot(2n-p)}{(2n-1)!}x^{2n}\left[\frac{p-1}{2n}\left(1 - x^{\frac{2n}{p-1}}\right) - \frac{p-1}{2n-p}\left(1 - x^{\frac{2n-p}{p-1}}\right)\right].
\end{aligned}
$$

Für $t \in [0,1]$ sei

$$
f(t) := \frac{1}{2n}\left(1 - t^{\frac{2n}{p-1}}\right) - \frac{1}{2n-p}\left(1 - t^{\frac{2n-p}{p-1}}\right).
$$

Dann ist $f(1) = 0$ und für $0 \leq t \leq 1$ gilt

$$f'(t) = -\frac{1}{p-1} t^{\frac{2n}{p-1}-1} + \frac{1}{p-1} t^{\frac{2n-p}{p-1}-1} \geq 0,$$

d.h. f ist monoton steigend und somit $f(t) \leq f(1) = 0$ für alle $0 \leq t \leq 1$. Damit folgt

$$A = -\frac{(2-p)\cdot\ldots\cdot(2n-p)}{(2n-1)!} x^{2n} \left[\frac{p-1}{2n}\left(1 - x^{\frac{2n}{p-1}}\right) - \frac{p-1}{2n-p}\left(1 - x^{\frac{2n-p}{p-1}}\right)\right] \geq 0,$$

und (b) ist gezeigt.
(c) Sei $0 \leq x \leq 1$ gegeben. Wir setzen

$$y := \frac{1-x}{1+x} \in [0,1].$$

Es ist $1 + y = 2/(1+x)$ und $1 - y = 2x/(1+x)$, d.h. $(1-y)/(1+y) = x$. Nach (b) haben wir

$$(1+y)^p + (1-y)^p \geq 2(1+y^q)^{p-1},$$

und mit $1/(p-1) = q-1$ folgt weiter

$$2\left((1+y)^p + (1-y)^p\right)^{\frac{1}{p-1}} \geq 2^q(1+y^q).$$

Mit $p/(p-1) = q$ ergibt sich

$$2^q(1+y^q) \leq 2(1+y)^q \left[1 + \left(\frac{1-y}{1+y}\right)^p\right]^{\frac{1}{p-1}}.$$

Damit ist schließlich

$$\begin{aligned}
(1+x)^q + (1-x)^q &= \left(1 + \frac{1-y}{1+y}\right)^q + \left(1 - \frac{1-y}{1+y}\right)^q \\
&= \frac{2^q}{(1+y)^q} + \frac{2^q y^q}{(1+y)^q} \\
&= 2^q \frac{1+y^q}{(1+y)^q} \\
&\leq 2\left[1 + \left(\frac{1-y}{1+y}\right)^p\right]^{\frac{1}{p-1}} \\
&= 2\left(1 + x^p\right)^{\frac{1}{p-1}},
\end{aligned}$$

d.h. (c) gilt.
(d) Dies folgt aus (c) genauso wie wir am Ende des Beweises von (a) geschlossen haben.

■

Wir benötigen jetzt ein weiteres technisches Lemma. Zuvor wollen wir uns noch an die folgende kleine Tatsache erinnern: Sind $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, so gilt

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{1/p} = \max\left\{\sum_{i=1}^{n} z_i x_i : z \in \mathbb{R}^n_{\geq 0}, \sum_{i=1}^{n} z_i^q = 1\right\},$$

wobei wie üblich $1/p + 1/q = 1$ ist. Dies folgt zum Beispiel indem wir den Dualraum von l_p^n mit l_q^n identifizieren. Da die $x_i \geq 0$ sind, können wir uns im Maximum offenbar auf $z_i \geq 0$ beschränken. Die Tatsache läßt sich aber auch leicht direkt aus der Hölder-Ungleichung herleiten. Hiermit zeigen wir:

Lemma 16: *Seien (Ω, Σ, μ) ein Maßraum, $0 < p < 1$ und $x, y \in L^p(\mu)$ mit $x, y \geq 0$. Dann gilt*

$$\left(\int_\Omega x^p \, d\mu\right)^{1/p} + \left(\int_\Omega y^p \, d\mu\right)^{1/p} \leq \left(\int_\Omega (x+y)^p \, d\mu\right)^{1/p}.$$

Beweis: Es ist $1/p > 1$ und $q := 1/(1-p)$ erfüllt $p + 1/q = 1$. Es folgt

$$\begin{aligned}
\left[\left(\int_\Omega x^p \, d\mu\right)^{1/p} + \left(\int_\Omega y^p \, d\mu\right)^{1/p}\right]^p &= \max_{\substack{z_1, z_2 \geq 0 \\ z_1^q + z_2^q = 1}} \left(z_1 \int_\Omega x^p \, d\mu + z_2 \int_\Omega y^p \, d\mu\right) \\
&\leq \int_\Omega \max_{\substack{z_1, z_2 \geq 0 \\ z_1^q + z_2^q = 1}} \left(z_1 x(\omega)^p + z_2 y(\omega)^p\right) d\mu(\omega) \\
&= \int_\Omega (x(\omega) + y(\omega))^p \, d\mu(\omega) \\
&= \int_\Omega (x+y)^p \, d\mu,
\end{aligned}$$

d.h.

$$\left(\int_\Omega x^p \, d\mu\right)^{1/p} + \left(\int_\Omega y^p \, d\mu\right)^{1/p} \leq \left(\int_\Omega (x+y)^p \, d\mu\right)^{1/p}.$$

■

Jetzt können wir die Parallelogramungleichungen für L^p–Räume beweisen, die sich bereits bei Clarkson finden.

Lemma 17: *Seien (Ω, Σ, μ) ein Maßraum und $1 < p < \infty$. Sei q definiert durch $1/p + 1/q = 1$. Seien $x, y \in L^p(\mu)$.*

(a) *Ist $p \geq 2$, so gilt*

$$||x+y||_p^p + ||x-y||_p^p \leq 2^{p-1}\left(||x||_p^p + ||y||_p^p\right).$$

(b) *Ist $p < 2$, so gilt*

$$||x+y||_p^q + ||x-y||_p^q \le 2\left(||x||_p^p + ||y||_p^p\right)^{\frac{1}{p-1}}.$$

Beweis: **(a)** Nach Lemma 15.(a) gilt

$$\begin{aligned} ||x+y||_p^p + ||x-y||_p^p &= \int_\Omega (|x+y|^p + |x-y|^p)\,d\mu \\ &\le 2^{p-1}\int_\Omega (|x|^p + |y|^p)\,d\mu \\ &= 2^{p-1}(||x||_p^p + ||y||_p^p). \end{aligned}$$

(b) Wir haben $p/q = p-1 \in (0,1)$ und wegen $x+y, x-y \in L^p(\mu)$ ist $|x+y|^q, |x-y|^q \in L^{p/q}(\mu)$. Mit Lemma 15.(d) und Lemma 16 folgt

$$\begin{aligned} ||x+y||_p^q + ||x-y||_p^q &= \left(\int_\Omega |x+y|^p\,d\mu\right)^{q/p} + \left(\int_\Omega |x-y|^p\,d\mu\right)^{q/p} \\ &= \left(\int_\Omega (|x+y|^q)^{p/q}\,d\mu\right)^{q/p} + \left(\int_\Omega (|x-y|^q)^{p/q}\,d\mu\right)^{q/p} \\ &\le \left(\int_\Omega (|x+y|^q + |x-y|^q)^{p/q}\,d\mu\right)^{q/p} \\ &\le 2\left(\int_\Omega \left((|x|^p + |y|^p)^{\frac{1}{p-1}}\right)^{p/q}\,d\mu\right)^{q/p} \\ &= 2\left(\int_\Omega (|x|^p + |y|^p)\,d\mu\right)^{q/p} \\ &= 2\left(||x||_p^p + ||y||_p^p\right)^{\frac{1}{p-1}}. \end{aligned}$$

■

Jetzt können wir zeigen:

Satz 18: *Sind (Ω, Σ, μ) ein Maßraum und $1 < p < \infty$, so ist $L^p(\mu)$ gleichmäßig konvex.*

Beweis: Zunächst sei $p \ge 2$. Sei $0 < \epsilon \le 2$ gegeben. Dann setzen wir

$$\delta := 1 - \left(1 - \left(\frac{\epsilon}{2}\right)^p\right)^{1/p} > 0.$$

Seien $x, y \in L^p(\mu)$ mit $||x||_p, ||y||_p \le 1$ und $||x-y||_p \ge \epsilon$. Mit Lemma 17.(a) folgt

$$||x+y||_p^p \le 2^{p-1}(||x||_p^p + ||y||_p^p) - ||x-y||_p^p \le 2^p - \epsilon^p,$$

d.h.

$$\left|\left|\frac{x+y}{2}\right|\right|_p \le \frac{1}{2}\left(2^p - \epsilon^p\right)^{1/p} = \left(1 - \left(\frac{\epsilon}{2}\right)^p\right)^{1/p} = 1 - \delta.$$

Es verbleibt der Fall $p < 2$. Sei wieder q mit $1/p + 1/q = 1$ und sei $0 < \epsilon \le 2$. Diesmal setzen wir

$$\delta := 1 - \left(1 - \left(\frac{\epsilon}{2}\right)^q\right)^{1/q} > 0.$$

Seien $x, y \in L^p(\mu)$ mit $||x||_p, ||y||_p \le 1$ und $||x - y||_p \ge \epsilon$. Mit Lemma 17.(b) folgt

$$||x + y||_p^q \le 2\left(||x||_p^p + ||y||_p^p\right)^{\frac{1}{p-1}} - ||x - y||_p^q \le 2^q - \epsilon^q,$$

da $1/(p-1) = q - 1$ ist. Wie im Fall $p \ge 2$ ergibt dies $||(x+y)/2||_p \le 1 - \delta$.

■

Wie wollen diesen Paragraphen mit einer Anwendung abschließen.

Satz 19: *Seien E ein Hilbertraum und $f : [0,\infty) \times E \to E$ eine stetige Funktion. Seien $p > 0$ und $R > 0$ zwei Konstanten. Es gelte:*

(a) $\forall (t \ge 0) \forall (x \in E) : f(t+p, x) = f(t, x)$.

(b) $\forall (t \ge 0) \forall (x, y \in E) : < f(t,x) - f(t,y), x - y > \le 0$.

(c) $\forall (0 \le t \le p) \forall (x \in E) : ||x|| = R \Longrightarrow < f(t,x), x > < 0$.

(d) *Für jedes $x_0 \in E$ mit $||x_0|| \le R$ gebe es eine differenzierbare Abbildung $x : [0,\infty) \to E$ mit $x(0) = x_0$ und $x'(t) = f(t, x(t))$ für alle $t \ge 0$.*

Dann gibt es eine differenzierbare Abbildung $x : [0,\infty) \to E$ mit $||x(0)|| \le R$, $x'(t) = f(t, x(t))$ und $x(t+p) = x(t)$ für alle $t \ge 0$.

Beweis: Sei $\mathfrak{L}$ die Menge aller Lösungen unserer Differentialgleichung, d.h. die Menge aller differenzierbaren Abbildungen $x : [0,\infty) \to E$ mit $x'(t) = f(t, x(t))$ für alle $t \ge 0$ und $||x(0)|| \le R$. Seien $x, y \in \mathfrak{L}$. Dann haben wir für $t \ge 0$

$$\begin{aligned} \left.\frac{d}{ds}\right|_t ||x(s) - y(s)||^2 &= 2 < x'(t) - y'(t), x(t) - y(t) > \\ &= 2 < f(t, x(t)) - f(t, y(t)), x(t) - y(t) > \\ &\le 0 \end{aligned}$$

nach (b), d.h. es gilt

$$||x(t) - y(t)|| \le ||x(0) - y(0)||$$

für alle $x, y \in \mathfrak{L}$, $t \ge 0$. Sind insbesondere $x, y \in \mathfrak{L}$ mit $x(0) = y(0)$, so ist $x = y$. Nach Bedingung (d) gibt es damit für jedes $y \in \overline{B}_R(0)$ genau ein $Ly \in \mathfrak{L}$ mit $Ly(0) = y$.

Sei $x \in \mathfrak{L}$. Wir behaupten, dass dann $||x(t)|| \leq R$ für alle $0 \leq t \leq p$ gilt. Sonst existiert ein $0 \leq t_0 \leq p$ mit $||x(t_0)|| > R$. Es ist $t_0 > 0$. Setzen wir $t_1 := \sup\{0 \leq t \leq t_0 : ||x(t)|| \leq R\}$, so gelten $||x(t_1)|| = R$ und $t_1 < t_0$. Nun ist

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t_1} ||x(t)||^2 = 2 < x'(t_1), x(t_1) >= 2 < f(t_1, x(t_1)), x(t_1) >< 0$$

nach Bedingung (c), also existiert ein $\epsilon > 0$ mit $||x(t)|| < ||x(t_1)|| = R$ für $t_1 < t < t_1 + \epsilon$ im Widerspruch zur Wahl von t_1. Dies zeigt unsere Behauptung, und insbesondere ist $||x(p)|| \leq R$. Also können wir definieren

$$T : \overline{B}_R(0) \to \overline{B}_R(0); x \mapsto Lx(p).$$

Für $x, y \in \overline{B}_R(0)$ gilt, wie eingangs festgestellt,

$$||Tx - Ty|| = ||Lx(p) - Ly(p)|| \leq ||Lx(0) - Ly(0)|| = ||x - y||,$$

d.h. T ist nicht–expandierend. Nach Satz 14 und Lemma 12 hat T einen Fixpunkt, d.h. es gibt $a \in E$ mit $||a|| \leq R$ und $Ta = a$. Dann ist $x := La \in \mathfrak{L}$ eine Lösung unserer Differentialgleichung mit $x(0) = a$, also $||x(0)|| \leq R$ und $x(p) = Ta = a = x(0)$. Weiter ist auch

$$y : [0, \infty) \to E; t \mapsto x(t + p)$$

differenzierbar mit $y(0) = x(p) = a$ und für alle $t \geq 0$ gilt

$$y'(t) = x'(t + p) = f(t + p, x(t + p)) = f(t, y(t))$$

nach Voraussetzung (a). Also ist auch $y \in \mathfrak{L}$ und somit $y = x$, d.h. $x(t + p) = x(t)$ für alle $t \geq 0$.

■

Literatur zu §2

A.G. Aksoy, M.A. Khamsi: *Nonstandard methods in fixed point theory*, Springer 1990.

E.F. Beckenbach, R. Bellman: *Inequalities*, Springer 1965.

J.A. Clarkson: *Uniformly convex spaces*, Transactions AMS 40 (1936), 396–414.

V.I. Istratescu: *Fixed point theory*, D. Reidel Publishing Company 1981.

G. Köthe: *Topological vector spaces I*, Springer 1969.

J. Lindenstrauss, L. Tzafriri: *Classical Banach spaces II*, Springer 1979.

W. Rudin: *Functional Analysis*, Mc Graw Hill 1991

§2A Anhang: Die schwache Topologie

In diesem kleinen Anhang wollen wir im wesentlichen den im Haupttext verwendeten Satz von Smulian beweisen. Dabei soll der übliche Stoff einer einführenden Vorlesung über Funktionalanalysis vorausgesetzt sein, konkret seien die ersten vier Kapitel des Buches von Rudin als bekannt angenommen. Wir beginnen mit einigen Kleinigkeiten, die zwar bei Rudin stehen aber nur als Aufgaben.

Lemma 1: *Seien E ein Banachraum und $\widehat{\ } : E \to E^{**}$ die natürliche isometrische Einbettung. Versehe E mit der schwachen Topologie und E^{**} mit der schwach* Topologie. Dann ist $\widehat{\ }$ eine topologische Einbettung mit dichtem Bild.*

Beweis: Wir identifizieren $E \subseteq E^{**}$, und zeigen zunächst das E dicht in E^{**} ist. Sei also $\emptyset \neq U \subseteq E^{**}$ offen in der schwach* Topologie. Dann gibt es ein $f \in E^{**}$, ein $\epsilon > 0$ und linear unabhängige $\psi_1, \ldots, \psi_n \in E^*$ mit

$$V := \{\theta \in E^{**} | \forall (1 \leq i \leq n) : |\theta(\psi_i) - f(\psi_i)| < \epsilon\} \subseteq U.$$

Ist $1 \leq i \leq n$, so ist $\bigcap\{\mathrm{Kern}\,\psi_j : 1 \leq j \leq n, j \neq i\} \not\subseteq \mathrm{Kern}\,\psi_i$, da $\psi_1, \ldots, \psi_n \in E^*$ linear unabhängig sind. Also existiert ein $x_i \in E$ mit $\psi_j x_i = 0$ für alle $1 \leq j \leq n$ mit $j \neq i$ und $\psi_i x_i = f(\psi_i)$. Setze $x := \sum_{i=1}^n x_i \in E$. Dann gilt für jedes $1 \leq i \leq n$

$$\widehat{x}(\psi_i) = \psi_i x = \psi_i x_i = f(\psi_i),$$

d.h. $x \in E \cap V \subseteq E \cap U$, und somit ist $E \cap U \neq \emptyset$.

Ist $\psi \in E^*$ und $\epsilon > 0$, so gilt

$$\begin{aligned} \{f \in E^{**} : |f(\psi)| < \epsilon\} \cap E &= \{\widehat{x} : x \in E, |\widehat{x}\psi| < \epsilon\} \\ &= \{x \in E : |\psi x| < \epsilon\}, \end{aligned}$$

d.h. die schwach* Topologie von E^{**} induziert die schwache Topologie auf E.

■

Lemma 2: *Sei c_0 der Banachraum der reellen Nullfolgen in der Supremumsnorm. Dann gelten:*

(a) *Ist $a \in l^1$, so ist*

$$\psi_a : c_0 \to \mathbb{R}; x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$$

eine stetige Linearform auf c_0 mit $||\psi_a|| = ||a||_1$.

(b) *Ist $\psi \in c_0^*$, so existiert ein $a \in l^1$ mit $\psi = \psi_a$.*

Beweis: **(a)** Ist $x \in c_0$, so gilt $\sum_{n=1}^\infty |a_n x_n| \leq ||x|| \sum_{n=1}^\infty |a_n| = ||a||_1 ||x||$, d.h. die Reihe $\psi_a x = \sum_{n=1}^\infty a_n x_n$ konvergiert absolut mit $|\psi_a x| \leq \sum_{n=1}^\infty |a_n x_n|$. Also ist $\psi_a \in c_0^*$ mit $||\psi_a|| \leq ||a||_1$.

Sei $N \in \mathbb{N}$. Definiere $x_n := \operatorname{sign} a_n$ für $n \leq N$ und $x_n := 0$ für $n > N$. Dann ist $x \in c_0$ mit $||x|| \leq 1$, und somit ist $||\psi_a|| \geq |\psi_a x| = \sum_{n=1}^N |a_n|$. Es folgt

$$||a||_1 = \lim_{N \to \infty} \sum_{n=1}^N |a_n| \leq ||\psi_a|| \leq ||a||_1,$$

d.h. es ist $||\psi_a|| = ||a||_1$.

(b) Sei $\psi \in c_0^*$. Für jedes $i \in \mathbb{N}$ definiere $e_i \in c_0$ durch $(e_i)_n = \delta_{in}$ für $n \in \mathbb{N}$. Sei $x \in c_0$. Ist dann $\epsilon > 0$, so existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|x_n| \leq \epsilon$ für $n \geq N$. Für $n \geq N$ ist damit

$$\left|\left| x - \sum_{i=1}^n x_i e_i \right|\right| = \sup\{|x_i| : i > n\} \leq \epsilon.$$

Dies zeigt $x = \sum_{n=1}^\infty x_n e_n$ in c_0. Definiere für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Zahl $a_n := \psi e_n \in \mathbb{R}$. Für $x \in c_0$ folgt

$$\psi x = \psi\left(\sum_{n=1}^\infty x_n e_n\right) = \sum_{n=1}^\infty x_n \psi e_n = \sum_{n=1}^\infty a_n x_n.$$

Also müssen wir nur noch $a \in l^1$ einsehen, und dann ist $\psi = \psi_a$. Angenommen $\sum_{n=1}^\infty a_n$ ist nicht absolut konvergent. Die Verneinung der Cauchybedingung liefert ein $\epsilon > 0$ und zwei Teilfolgen $n, m : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $n_k \leq m_k < n_{k+1}$ und $\sum_{i=n_k}^{m_k} |a_i| \geq \epsilon$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Definiere die Folge $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ durch $x_i = \operatorname{sign}(a_i)/k$ für $k \in \mathbb{N}$, $n_k \leq i \leq m_k$ und $x_i = 0$ für alle anderen $i \in \mathbb{N}$. Dann ist offenbar $x \in c_0$ und für jedes $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{i=1}^{m_k} a_i x_i = \sum_{i=1}^k \sum_{j=n_i}^{m_i} \frac{|a_j|}{i} \geq \epsilon \sum_{i=1}^k \frac{1}{i},$$

d.h. die Reihe $\sum_{n=1}^\infty a_n x_n$ konvergiert nicht; ein Widerspruch.

∎

Hiermit können wir jetzt das folgende wichtige Lemma beweisen.

Lemma 3: *Seien E ein Banachraum und setze $B := \{\phi \in E^* : ||\phi|| \leq 1\}$. Sei $f \in E^{**}$. Dann ist genau dann $f \in E \subseteq E^{**}$, wenn* $\operatorname{Kern}(f) \cap B$ *schwach***–abgeschlossen ist.*

Beweis: "'$\Longrightarrow$"' Die Menge $B \subseteq E^*$ ist schwach* abgeschlossen. Ist $f \in E$, so ist f stetig bezüglich der schwach* Topologie von E^*, und damit ist auch $\operatorname{Kern}(f)$ schwach* abgeschlossen.

"'$\Longleftarrow$"' Für $f = 0$ ist die Behauptung klar, also können wir $f \neq 0$ annehmen. Wähle ein $\psi \in E^*$ mit $f(\psi) = 1$. Setze $F := \operatorname{Kern}(f) \leq E^*$ und $U := (E^* \backslash F) - \psi \subseteq E^*$. Für jedes $t > 0$ ist $tB \cap F = t(B \cap F)$ schwach* abgeschlossen, da E^* in der schwach* Topologie ein topologischer Vektorraum ist.

Sei $t > 0$. Wir wollen zeigen, dass dann $tB \cap U$ in der schwach* Topologie von tB offen ist. Setze dazu $s := t + ||\psi|| > 0$. Dann ist $sB \cap F$ schwach* abgeschlossen, also ist $sB \cap (E^* \backslash F)$ offen in der schwach* Topologie von sB. Sei $\rho \in tB \cap U$, d.h. $||\rho|| \leq t$ und es existiert $\phi \in E^* \backslash F$ mit $\rho = \phi - \psi$. Insbesondere ist $||\phi|| = ||\rho + \psi|| \leq t + ||\psi|| = s$, d.h. $\phi \in sB \cap (E^* \backslash F)$. Also gibt es $x_1, \ldots, x_n \in E$ mit

$$\{\theta \in sB | \forall (1 \leq i \leq n) : |\theta x_i - \phi x_i| \leq 1\} \subseteq E^* \backslash F.$$

Nun ist

$$V := \{\theta \in tB | \forall (1 \leq i \leq n) : |\theta x_i - \rho x_i| \leq 1\}$$

eine Umgebung von ρ in der schwach* Topologie von tB. Wir zeigen $V \subseteq U$. Sei also $\theta \in V$. Dann ist $||\theta + \psi|| \leq t + ||\psi|| = s$, d.h. $\theta + \psi \in sB$ und für alle $1 \leq i \leq n$ gilt

$$|(\theta + \psi)x_i - \phi x_i| = |\theta x_i - (\phi - \psi)x_i| = |\theta x_i - \rho x_i| \leq 1,$$

d.h. wir haben $\theta + \psi \in E^* \backslash F$ und somit $\theta \in (E^* \backslash F) - \psi = U$. Dies zeigt unsere Zwischenbehauptung.

Da $B \cap U$ schwach* offen in B ist, existiert eine endliche Teilmenge $M_1 \subseteq E$ mit $B \cap M_1^t \subseteq U$, wobei $M^t := \{\phi \in E^* | \forall (x \in M) : |\phi x| \leq 1\}$ für $M \subseteq E$ gesetzt ist. Jetzt sei $n \in \mathbb{N}$ und M_n sei schon konstruiert mit $nB \cap M_n^t \subseteq U$. Nun ist $(n+1)B \cap U$ schwach* offen in $(n+1)B$, d.h. $(n+1)B \cap (E^* \backslash U)$ ist schwach* abgeschlossen in E^*. Nach dem Satz von Banach-Alaoglu ist die Menge $(n+1)B$ schwach* kompakt, also ist für jedes $x \in \overline{B}_{1/n}(0) \subseteq E$ die Menge

$$K(x) := (M_n \cup \{x\})^t \cap (n+1)B \cap (E^* \backslash U)$$

schwach* kompakt, als schwach* abgeschlossene Teilmenge von $(n+1)B$. Es gilt

$$\begin{aligned}
\bigcap \{K(x) : x \in \overline{B}_{1/n}(0)\} &\subseteq (E^* \backslash U) \cap M_n^t \cap \{\phi \in E^* | \forall (x \in \overline{B}_{1/n}(0)) : |\phi x| \leq 1\} \\
&= (E^* \backslash U) \cap M_n^t \cap nB \\
&\subseteq (E^* \backslash U) \cap U \\
&= \emptyset.
\end{aligned}$$

Also existiert eine endliche Teilmenge $N_n \subseteq \overline{B}_{1/n}(0)$, so dass $\bigcap \{K(x) : x \in N_n\} = \emptyset$ ist. Es folgt

$$(M_n \cup N_n)^t \cap (n+1)B \subseteq E^* \backslash (E^* \backslash U) = U,$$

und wir setzen $M_{n+1} := M_n \cup N_n$. Per Induktion sind damit die Mengen M_n für jedes $n \in \mathbb{N}$ konstruiert.

Setze $M := \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n \subseteq E$. Dann ist M höchstens abzählbar und für jedes $n \in \mathbb{N}$, $x \in M \backslash M_n$ gilt $x \in N_m$ für ein $m \geq n$, d.h. $||x|| \leq 1/m \leq 1/n$. Also existiert eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in E mit $\lim_{n \to \infty} x_n = 0$ und $M \cup \{0\} = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Setze

$$V := \{\phi \in E^* | \forall (n \in \mathbb{N}) : |\phi x_n| \leq 1\} \subseteq E^*.$$

Wir behaupten das dann $V \subseteq U$ ist. Sei hierzu $\phi \in V$ gegeben. Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $||\phi|| \leq n$, d.h. $\phi \in nB$. Ist $x \in M_n$, so existiert ein $k \in \mathbb{N}$ mit $x = x_k$, und damit ist $|\phi x| = |\phi x_k| \leq 1$, d.h. es ist $\phi \in M_n^t \cap nB \subseteq U$.

Sei $\phi \in V$. Wir wollen zeigen, dass $|f(\phi)| \leq 1$ ist. Angenommen es wäre $|f(\phi)| > 1$. Dann ist $t := -1/f(\phi) \in \mathbb{R}$ mit $|t| < 1$, und für jedes $n \in \mathbb{N}$ folgt $|t\phi x_n| = |t| \cdot |\phi x_n| \leq |t| < 1$, d.h. es ist auch $t\phi \in V \subseteq U = (E^* \backslash F) - \psi$. Also ist $t\phi + \psi \in E^* \backslash F$, d.h. $f(t\phi + \psi) \neq 0$. Andererseits ist $f(t\phi + \psi) = 1 + tf(\phi) = 0$ da $f(\psi) = 1$ ist; ein Widerspruch. Dieser Widerspruch zeigt $|f(\phi)| \leq 1$.

Ist $\phi \in E^*$, so ist $\lim_{n\to\infty} \phi(x_n) = 0$ da $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ ist. Wir erhalten eine lineare Abbildung
$$T : E^* \to c_0; \phi \mapsto (\phi x_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$
Sei $\phi \in \mathrm{Kern}(T)$. Ist $t > 0$ gegeben, so ist $|t\phi x_n| = t|\phi x_n| = 0$ für jedes $n \in \mathbb{N}$, d.h. $t\phi \in V$ und $t|f(\phi)| = |f(t\phi)| \leq 1$. Es folgt $f(\phi) = 0$, d.h. $\mathrm{Kern}(T) \subseteq \mathrm{Kern}(f)$. Wir erhalten eine lineare Abbildung $\overline{f} : \mathrm{Bild}(T) \to \mathbb{R}$ mit $\overline{f}(T\phi) = f(\phi)$ für jedes $\phi \in E^*$. Ist $\phi \in E^*$ mit $||T\phi|| \leq 1$, so folgt $|\phi x_n| \leq 1$ für jedes $n \in \mathbb{N}$, d.h. $\phi \in V$ und somit $|\overline{f}(T\phi)| = |f(\phi)| \leq 1$. Also ist $\overline{f}$ stetig mit $||\overline{f}|| \leq 1$. Nach dem Satz von Hahn–Banach setzt sich $\overline{f}$ zu einer stetigen Linearform auf c_0 fort, und nach Lemma 2 gibt es ein $a \in l^1$ mit $\psi_a|\,\mathrm{Bild}(T) = \overline{f}$.

Da die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist, existiert $x := \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \in E$. Für jedes $\phi \in E^*$ folgt jetzt
$$f(\phi) = \overline{f}(T\phi) = \psi_a(T\phi) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \phi(x_n) = \phi\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n\right) = \phi(x) = \widehat{x}\phi.$$
Dies zeigt $f = \widehat{x} \in E$.

■

Zum Beweis des nächsten Satzes benötigen wir noch zwei weitere Lemmata.

Lemma 4: *Sei E ein separabler Banachraum. Dann ist auch E^* in der schwach* Topologie separabel.*

Beweis: Nach dem Satz von Banach–Alaoglu ist die Kugel $B := \{\phi \in E^* : ||\phi|| \leq 1\}$ schwach* kompakt. Da E separabel ist, ist B metrisierbar in der schwach* Topologie, und als kompakter metrischer Raum insbesondere separabel. Also gibt es eine abzählbare Menge $D_0 \subseteq B$, die in B schwach* dicht ist. Damit ist auch die Menge
$$D := \bigcup_{n=1}^{\infty} nD_0 \subseteq E^*$$
abzählbar. Sei $\emptyset \neq U \subseteq E^*$ schwach* offen. Wähle $\phi \in U$ und $n \in \mathbb{N}$ mit $||\phi|| \leq n$. Dann ist $(1/n)U \cap B$ offen in B und $(1/n)\phi \in (1/n)U \cap B$, d.h. $(1/n)U \cap B \neq \emptyset$. Also ist $(1/n)U \cap B \cap D_0 \neq \emptyset$, und somit auch $U \cap D \supseteq U \cap nD_0 \neq \emptyset$. Also ist D schwach* dicht in E^*.

■

Lemma 5: *Seien E ein Banachraum und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge in E.*

(a) *Ist $\Phi \subseteq E^*$ mit $|\Phi| \leq \aleph_0$, so existiert eine Teilfolge $n : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ so, dass für jedes $\phi \in \Phi$ der Grenzwert $\lim_{k\to\infty} \phi x_{n_k}$ existiert.*

(b) *Für jede abzählbare Teilmenge $\Phi \subseteq E^*$ und jede Teilfolge $n : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ für die $(\phi x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ für jedes $\phi \in \Phi$ konvergiert, gebe es ein $x \in \overline{\langle\{x_n : n \in \mathbb{N}\}\rangle}$ mit $\lim_{k\to\infty} \phi x_{n_k} = \phi x$ für jedes $\phi \in \Phi$. Dann besitzt $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine schwach konvergente Teilfolge.*

Beweis: **(a)** Sei $c > 0$ mit $||x_n|| \leq c$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Dann ist der Raum

$$X := \prod_{\phi\in\Phi} [-c||\phi||, c||\phi||]$$

als Produkt kompakter Räume selbst kompakt. Wegen $|\Phi| \leq \aleph_0$ ist X auch metrisierbar. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ definiere $u_n := (\phi x_n)_{\phi\in\Phi} \in \mathbb{R}^\Phi$. Für $n \in \mathbb{N}$, $\phi \in \Phi$ gilt $|\phi x_n| \leq ||\phi|| \cdot ||x_n|| \leq c||\phi||$, d.h. $u_n \in X$. Also existiert eine in X konvergente Teilfolge $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$. Ist $\phi \in \Phi$, so ist ϕx_{n_k} die ϕ–Komponente von u_{n_k}, und somit konvergent für $k \to \infty$.
(b) Sei F der von der Menge $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ erzeugte abgeschlossene Teilraum von E. Dann ist F ein separabler Banachraum, und ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $F \neq 0$. Nach Lemma 4 gibt es eine Teilmenge $\Phi \subseteq F^*$ mit $|\Phi| = \aleph_0$, die in F^* schwach* dicht ist. Nach dem Satz von Hahn-Banach gibt es eine Abbildung $f : \Phi \to E^*$ mit $f(\phi)|F = \phi$ für jedes $\phi \in \Phi$. Dann ist auch $|f(\Phi)| = \aleph_0$, und nach (a) existiert eine Teilfolge $n : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ so, dass $\lim_{k\to\infty} \phi x_{n_k}$ für jedes $\phi \in \Phi$ existiert.

Nach Voraussetzung gibt es ein $x \in F$ mit $\phi x = \lim_{k\to\infty} \phi x_{n_k}$ für jedes $\phi \in \Phi$. Sei jetzt $\psi \in E^*$ beliebig, und setze $\phi := \psi|F \in F^*$. Da die Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist, ist auch $(\phi x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge in $\mathbb{R}$. Sei $a \in \mathbb{R}$ ein Häufungspunkt dieser Folge. Dann gibt es eine Teilfolge $k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $\lim_{l\to\infty} \phi x_{n_{k_l}} = a$. Wenden wir die Voraussetzung auf die Teilfolge $(x_{n_{k_l}})_{l\in\mathbb{N}}$ von $(x_l)_{l\in\mathbb{N}}$ und die abzählbare Teilmenge $f(\Phi) \cup \{\psi\} \subseteq E^*$ an, so erhalten wir ein $y \in F$ mit $\lim_{l\to\infty} \theta x_{n_{k_l}} = \theta y$ für jedes $\theta \in \Phi \cup \{\phi\}$. Für $\theta \in \Phi$ folgt

$$\widehat{y}\theta = \theta y = \lim_{l\to\infty} \theta x_{n_{k_l}} = \lim_{l\to\infty} \theta x_{n_l} = \theta x = \widehat{x}\theta.$$

Da $\widehat{x}, \widehat{y} \in F^{**}$ stetig bezüglich der schwach* Topologie von F^* sind, und Φ schwach* dicht in F^* gewählt war, folgt $\widehat{x} = \widehat{y}$, d.h. es ist $x = y$. Insbesondere ist $a = \lim_{l\to\infty} \phi x_{n_{k_l}} = \phi y = \phi x$.

Also ist ϕx der einzige Häufungspunkt der Folge $(\phi x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, und es folgt $\lim_{k\to\infty} \phi x_{n_k} = \phi x$. Damit konvergiert $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ schwach gegen x.

∎

Wir kommen zum Satz von Eberlein und Smulian.

Satz 6: *Seien E ein Banachraum und $M \subseteq E$ eine Teilmenge. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(a) *Die Menge M ist relativ folgenkompakt in der schwachen Topologie.*

(b) *Die Menge M ist relativ kompakt in der schwachen Topologie.*

(c) *Ist $N \subseteq M$ eine Teilmenge mit $|N| = \aleph_0$, so existiert ein $x \in E$ so, dass für jede schwache Umgebung U von x in E stets $N \cap (U \backslash \{x\}) \neq \emptyset$ gilt.*

Beweis: (a)$\Longrightarrow$(b): Sei N der Abschluß von M in der schwachen Topologie. Zu zeigen ist, dass N in der schwachen Topologie kompakt ist. Da schwach konvergente Folgen beschränkt sind, muss die Menge M in E beschränkt sein, und damit ist auch N beschränkt. Nach Lemma 1 induziert E^{**} in der schwach* Topologie die schwache Topologie auf E, d.h. es ist zu zeigen, dass N in der schwach* Topologie von E^{**} kompakt ist. Da E isometrisch in E^{**} eingebettet ist, ist N in E^{**} zumindest beschränkt. Nach dem Satz von Banach–Alaoglu ist nur noch zu zeigen, dass N in E^{**} auch abgeschlossen ist. Ist $\overline{M}$ der Abschluß von M in der schwach* Topologie, so gilt $N = E \cap \overline{M}$, also reicht es $\overline{M} \subseteq E$ zu zeigen.

Sei also $f \in \overline{M}$ gegeben. Zu zeigen ist $f \in E$. Wir beginnen mit einer kleinen Hilfsaussage. Seien $\psi_1, \ldots, \psi_n \in E^*$. Wir behaupten das ein $x \in N$ mit $f\psi_i = \psi_i x$ für alle $1 \leq i \leq n$ existiert. Beweisen wir dies einmal. Ist $m \in \mathbb{N}$, so ist

$$\left\{ \theta \in E^{**} \middle| \forall (1 \leq i \leq n) : |\theta(\psi_i) - f(\psi_i)| < \frac{1}{m} \right\}$$

eine Umgebung von f in E^{**}, und wegen $f \in \overline{M}$ existiert ein $x_m \in M$ mit $|f(\psi_i) - \psi_i x_m| < 1/m$ für alle $1 \leq i \leq m$. Wir haben dann $\lim_{m\to\infty} \psi_i x_m = f(\psi_i)$ für jedes $1 \leq i \leq m$. Da M relativ folgenkompakt in der schwachen Topologie ist, gibt es ein $x \in N$ und eine Teilfolge $m : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ so, dass x_{m_k} für $k \to \infty$ gegen x konvergiert in der schwachen Topologie. Ist $1 \leq i \leq m$, so folgt $\lim_{k\to\infty} \psi_i x_{m_k} = \psi_i x$, d.h. $f(\psi_i) = \psi_i x$. Damit ist unsere Hilfsbehauptung bewiesen.

Wir müssen $f \in E$ einsehen. Setzen wir $K := \mathrm{Kern}(f) \leq E^*$ und $B := \{\phi \in E^* : ||\phi|| \leq 1\}$, so reicht es nach Lemma 3 zu zeigen, dass $K \cap B$ schwach* abgeschlossen in E^* ist. Sei also $\psi \in E^*$ im schwach* Abschluss von $K \cap B$ gegeben. Da B selbst schwach* abgeschlossen ist, ist $\psi \in B$, d.h. $||\psi|| \leq 1$. Zu zeigen ist $\psi \in K$, d.h. $f(\psi) = 0$.

Sei $\epsilon > 0$ gegeben. Setze $\psi_0 := \psi$. Sei jetzt $n \in \mathbb{N}$, und $\psi_k \in E^*$ für $0 \leq k < n$ sowie $x_k \in M$ für $1 \leq k < n$ seien schon konstruiert. Unsere Hilfsaussage liefert ein $z_n \in N$ mit $f(\psi_k) = \psi_k z_n$ für alle $0 \leq k < n$. Da N der Abschluss von M in der schwachen Topologie von E ist, gibt es ein $x_n \in M$ mit $|\psi_k x_n - \psi_k z_n| < \epsilon/4$ für alle $0 \leq k < n$. Weiter ist $\psi = \psi_0$ im schwach* Abschluss von $K \cap B$, also gibt es ein $\psi_n \in K \cap B$ mit

$|\psi_n x_k - \psi x_k| < \epsilon/4$ für alle $1 \leq k \leq n$. Per Induktion erhalten wir damit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in N, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in M und $(\psi_n)_{n\geq 0}$ in E^*. Es ist $\psi_n \in K \cap B$ für $n \geq 1$.

Für $n \geq 1$ gilt $\psi_n \in K = \mathrm{Kern}(f)$, also gilt für $k > n$ auch $\psi_n z_k = f(\psi_n) = 0$. Ist $1 \leq k \leq n$, so folgt

$$|f(\psi) - \psi_n x_k| = |\psi_0 z_k - \psi_n x_k| \leq |\psi_0 x_k - \psi_n x_k| + |\psi_0 z_k - \psi_0 x_k| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Sind $1 \leq n < k$, so haben wir auch

$$|\psi_n x_k| = |\psi_n x_k - \psi_n z_k| < \frac{\epsilon}{4}.$$

Da die Menge M schwach relativ folgenkompakt ist, finden wir ein $x \in N$ und eine Teilfolge $n : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ so, dass $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ in der schwachen Topologie gegen x konvergiert. Ist $m \geq 1$, so haben wir für $k > m$ bereits $|\psi_m x_k| < \epsilon/4$ eingesehen, und es folgt $|\psi_m x| \leq \epsilon/4$. Weiter existieren ein $m \in \mathbb{N}$ und $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $\sum_{i=1}^m a_i = 1$ so, dass

$$\left|\left| x - \sum_{i=1}^m a_i x_i \right|\right| < \frac{\epsilon}{4}$$

gilt. Setze $u := \sum_{i=1}^m a_i x_i \in E$. Es folgt

$$|f(\psi) - \psi_m u| = \left| \sum_{i=1}^m a_i (f(\psi) - \psi_m x_i) \right| \leq \sum_{i=1}^m a_i |f(\psi) - \psi_m x_i| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Setzen wir jetzt alles zusammen, so erhalten wir

$$\begin{aligned} |f(\psi)| &\leq |f(\psi) - \psi_m u| + |\psi_m u - \psi_m x| + |\psi_m x| \\ &< \frac{\epsilon}{2} + ||\psi_m|| \cdot ||x - u|| + \frac{\epsilon}{4} \\ &\leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} = \epsilon. \end{aligned}$$

Da $\epsilon > 0$ beliebig war, zeigt dies $f(\psi) = 0$, d.h. $\psi \in K$, und dies war noch zu zeigen.
(b)$\Longrightarrow$(c): In einem kompakten topologischen Raum hat jede unendliche Teilmenge einen Häufungspunkt.
(c)$\Longrightarrow$(a): Wir zeigen zuerst, dass $M \subseteq E$ beschränkt ist. Angenommen M wäre nicht beschränkt. Dann ist M auch nicht beschränkt in der schwachen Topologie, d.h. es existiert ein $\phi \in E^*$ so, dass die Menge $\{\phi x : x \in M\}$ unbeschränkt ist. Insbesondere existiert eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in M mit $|\phi x_n| \geq n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Setze $N := \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Dann ist $|N| = \aleph_0$, also existiert $x \in E$ mit $N \cap (U \backslash \{x\}) \neq \emptyset$ für jede schwach offene Umgebung U von x. Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $|\phi x| < n$. Dann ist

$$U := \{y \in E : |\phi y| < n\} \backslash (\{x_1, \ldots, x_{n-1}\} \backslash \{x\})$$

eine offene Umgebung von x in der schwachen Topologie. Es folgt $N \cap (U \backslash \{x\}) \neq \emptyset$, d.h. es existiert $k \in \mathbb{N}$ mit $x_k \in U \backslash \{x\}$. Dann ist $k \leq |\phi x_k| < n$, also $x_k \in \{x_1, \ldots, x_{n-1}\} \backslash \{x\}$; ein Widerspruch. Also ist M tatsächlich beschränkt.

Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in M. Sei $F \leq E$ der von $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ erzeugte abgeschlossene Teilraum von E. Da M beschränkt ist, ist auch die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt. Enthält unsere Folge eine konstante Teilfolge, so sind wir fertig, also nehmen wir im folgenden an, dass dies nicht der Fall ist.

Seien $n : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine Teilfolge und $\Phi \subseteq E^*$ mit $|\Phi| = \aleph_0$ so, dass $\lim_{k\to\infty} \phi x_{n_k}$ für jedes $\phi \in \Phi$ existiert. Setze $N := \{x_{n_k} : k \in \mathbb{N}\}$. Da $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ keine konstante Teilfolge enthält, ist $|N| = \aleph_0$. Also existiert ein $x \in E$ mit $N \cap (U \backslash \{x\}) \neq \emptyset$ für jede schwache Umgebung U von x in E. Wegen $N \subseteq F$ ist insbesondere $F \cap U \neq \emptyset$ für jede schwache Umgebung U von x in E, d.h. x liegt im schwachen Abschluß von F in E. Aber als abgeschlossener Teilraum ist F insbesondere schwach abgeschlossen, d.h. $x \in F$. Sei $\phi \in \Phi$. Dann konvergiert die Folge $(\phi x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$. Angenommen es wäre $a := \lim_{k\to\infty} \phi x_{n_k} \neq \phi x$. Dann gibt es $U, V \subseteq \mathbb{R}$ offen mit $a \in U$, $\phi x \in V$ und $U \cap V = \emptyset$. Weiter existiert ein $m \in \mathbb{N}$ mit $\phi x_{n_k} \in U$ für alle $k \geq m$. Weiter ist

$$W := \phi^{-1}(V) \backslash (\{x_{n_1}, \ldots, x_{n_{m-1}}\} \backslash \{x\})$$

eine schwach offene Umgebung von x in E, also $N \cap (W \backslash \{x\}) \neq \emptyset$, und es existiert $k \in \mathbb{N}$ mit $x_{n_k} \in W \backslash \{x\}$. Dann ist $x_{n_k} \notin \{x_{n_1}, \ldots, x_{n_{m-1}}\}$, also $k \geq m$ und somit $\phi x_{n_k} \in V \cap U = \emptyset$; ein Widerspruch. Also ist $\lim_{k\to\infty} \phi x_{n_k} = \phi x$.

Nach Lemma 5.(b) besitzt die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine schwach konvergente Teilfolge.

■

Nun können wir den Satz von Smulian beweisen.

Satz 7: *Sei K eine konvexe Teilmenge eines Banachraums E. Dann ist K genau dann schwach kompakt, wenn für jede Folge nicht–leerer, in K abgeschlossener, konvexer Mengen $K_n \subseteq K$ mit $K_{n+1} \subseteq K_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ auch $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n \neq \emptyset$ gilt.*

Beweis: "'$\Longrightarrow$"' Dies ist klar, da abgeschlossene, konvexe Teilmengen von E auch schwach abgeschlossen sind.
"'$\Longleftarrow$"' Wir zeigen zuerst, dass K zumindest beschränkt und abgeschlossen in E ist. Sei also $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in K mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x \in E$. Zu zeigen ist $x \in K$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist

$$K_n := K \cap \overline{\text{co}}\{x_k : k \geq n\}$$

eine nicht–leere, in K abgeschlossene konvexe Menge. Also existiert ein $y \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n$. Wäre $y \neq x$, so wähle $0 < \epsilon < ||x - y||$. Es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ mit $||x_k - x|| < \epsilon$ für alle $k \geq n$. Da $\overline{B}_\epsilon(x)$ ein konvexe, abgeschlossene Menge ist, folgt $y \in K_n \subseteq \overline{\text{co}}\{x_k : k \geq n\} \subseteq \overline{B}_\epsilon(x)$; Widerspruch. Also ist $x = y \in K$. Damit ist $K \subseteq E$ abgeschlossen. Angenommen K wäre nicht beschränkt. Dann ist K aber auch in der schwachen Topologie nicht beschränkt, und somit existiert ein $\phi \in E^*$ so, dass $\phi(K) \subseteq \mathbb{R}$ nicht beschränkt ist. Da K konvex ist, ist auch $\phi(K)$ konvex, d.h. wir finden ein $\psi \in \{\phi, -\phi\}$ und ein $N \in \mathbb{N}$ mit $[N, \infty) \subseteq \psi(K)$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist jetzt

$$K_n := \{x \in K : \psi(x) \geq N + n\},$$

offenbar konvex und auch abgeschlossen da $K \subseteq E$ abgeschlossen ist. Weiter gibt es $x \in K$ mit $\psi(x) \geq N + n$, also $x \in K_n$ und $K_n \neq \emptyset$. Aber es ist offenbar $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n = \emptyset$; ein Widerspruch. Also ist K tatsächlich beschränkt.

Sei jetzt $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in K. Sei F der von $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ erzeugte abgeschlossene Teilraum von E. Da K beschränkt ist, ist auch die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt. Seien $n : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine Teilfolge und $\Phi \subseteq E^*$ so, dass $\lim_{k\to\infty} \phi x_{n_k}$ für jedes $\phi \in \Phi$ existiert. Da K abgeschlossen und konvex ist, ist für jedes $m \in \mathbb{N}$ die Menge

$$K_m := \overline{\mathrm{co}}\{x_{n_k} : k \geq m\} \subseteq K$$

eine abgeschlossene, konvexe Teilmenge von K und es gilt $K_{m+1} \subseteq K_m$. Nach Voraussetzung existiert ein $x \in \bigcap_{m\in\mathbb{N}} K_m$. Es ist $x \in K_1 \subseteq F$. Wir zeigen jetzt $\lim_{k\to\infty} \phi x_{n_k} = \phi x$ für jedes $\phi \in \Phi$. Sei also $\phi \in \Phi$ gegeben. Angenommen es wäre $y := \lim_{k\to\infty} \phi x_{n_k} \neq \phi x$. Dann gibt es ein abgeschlossenes Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ mit $y \in I^\circ$ und $\phi x \notin I$. Nun ist $\phi^{-1}(I) \subseteq E$ eine abgeschlossene konvexe Teilmenge von E, und es gibt ein $m \in \mathbb{N}$ mit $\phi x_{n_k} \in I$ für $k \geq m$. Für $k \geq m$ ist dann $x_{n_k} \in \phi^{-1}(I)$, also auch $K_m \subseteq \phi^{-1}(I)$. Wegen $x \in K_m$ ergibt dies den Widerspruch $\phi x \in I$. Damit ist tatsächlich $\lim_{k\to\infty} \phi x_{n_k} = \phi x$.

Nach Lemma 5.(b) besitzt die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine schwach konvergente Teilfolge. Damit ist gezeigt, dass die Menge K relativ schwach folgenkompakt ist. Nach Satz 6 ist K relativ schwach kompakt. Da K abgeschlossen und konvex ist, ist K auch schwach abgeschlossen und somit schwach kompakt.

■

Literatur zu §2A

Dunford, Schwartz: *Linear Operators I*, Wiley Interscience 1988.

§3 Der Brouwersche Fixpunktsatz

In diesem Abschnitt schreiben wir für $n \geq 1$

$$B^n := \{x \in \mathbb{R}^n : ||x|| \leq 1\}$$

und

$$S^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n : ||x|| = 1\} = \partial B^n.$$

Der Brouwersche Fixpunktsatz besagt, dass jede stetige Abbildung $f : B^n \to B^n$ einen Fixpunkt besitzt. Für $n = 1$ ist dies sehr einfach. Es ist $B^1 = [-1, 1]$ und ist $f : B^1 \to B^1$ stetig, so betrachten wir die Funktion $F : B^1 \to \mathbb{R}; x \mapsto x - f(x)$. Es ist $F(-1) = -1 - f(-1) \leq 0$ sowie $F(1) = 1 - f(1) \geq 0$, und der Zwischenwertsatz liefert ein $x \in B^1$ mit $F(x) = 0$, d.h. $f(x) = x$. Aber schon der nächste Fall $n = 2$ ist nicht mehr so einfach. Es ist nützlich die beiden folgenden Begriffe einzuführen:

Definition 1: Ein topologischer Raum X hat die Fixpunkteigenschaft (FP), wenn jede stetige Abbildung $f : X \to X$ einen Fixpunkt besitzt.

Mit dieser Sprechweise besagt der Brouwersche Fixpunktsatz, dass B^n die (FP) hat.

Definition 2: Sei X ein topologischer Raum. Ein Teilraum $A \subseteq X$ von X heißt ein Retrakt von X, wenn es eine stetige Abbildung $r : X \to A$ mit $r|A = \mathrm{id}_A$ gibt. Jede solche Abbildung heißt eine Retraktion von X auf A.

Wir haben das folgende elementare Lemma:

Lemma 1: *Sei X ein topologischer Raum mit (FP).*

(a) *Ist Y ein zu X homöomorpher topologischer Raum, so hat auch Y die (FP).*

(b) *Ist A ein Retrakt von X, so hat auch A die (FP).*

Beweis: **(a)** Sei $\varphi : X \to Y$ ein Homöomorphismus. Sei $f : Y \to Y$ stetig. Dann ist auch $\varphi^{-1} f \varphi : X \to X$ stetig, und es gibt ein $x \in X$ mit $\varphi^{-1} f \varphi(x) = x$. Damit ist $\varphi(x) \in Y$ mit $f(\varphi(x)) = \varphi(x)$.
(b) Seien $r : X \to A$ eine Retraktion und $i : A \subseteq X$ die Inklusion. Sei $f : A \to A$ stetig. Wir erhalten die stetige Abbildung $g := ifr : X \to X$, und es existiert ein $x \in X$ mit $g(x) = x$. Damit ist $x = g(x) = i(f(r(x))) \in A$ und $x = f(r(x)) = f(x)$.

■

Grundlegend für unseren Zugang ist die folgende einfache Beobachtung.

Lemma 2: *Sei $n \geq 1$. Genau dann hat B^n die (FP), wenn S^{n-1} kein Retrakt von B^n ist.*

Beweis: "'$\Longrightarrow$"' Angenommen B^n hat die (FP). Wäre S^{n-1} ein Retrakt von B^n, so hätte S^{n-1} nach Lemma 1.(b) ebenfalls die (FP), aber $\sigma : S^{n-1} \to S^{n-1}; x \mapsto -x$ ist eine fixpunktfreie stetige Abbildung.
"'$\Longleftarrow$"' Sei $f : B^n \to B^n$ stetig und fixpunktfrei. Zu zeigen ist, dass S^{n-1} ein Retrakt von B^n ist. Für jedes $x \in B^n$ sei $r(x)$ der Schnittpunkt der Halbgeraden von $f(x)$ nach x mit S^{n-1}. Dies ist eine stetige Funktion, denn schreiben wir $r(x) = f(x) + t(x - f(x))$, so ist $||f(x) + t(x - f(x))||^2 = 1$ eine quadratische Gleichung für t, die genau zwei Lösungen hat, eine der Lösungen ist ≤ 0 und die andere ≥ 1, d.h. $t = t(x)$ hat die Form $t(x) = p(x)/2 + \sqrt{\Delta(x)}$ mit stetigen $p(x)$ und $\Delta(x) > 0$. Also ist $t(x)$ und damit auch $r(x)$ stetig in x. Für $x \in S^{n-1}$ ist offenbar $r(x) = x$, d.h. r ist eine Retraktion.

■

Damit ist der Brouwersche Fixpunktsatz zumindest anschaulich sehr naheliegend, denn das S^{n-1} kein Retrakt von B^n ist, scheint klar zu sein. Ein wirklicher Beweis kostet allerdings doch noch einige Mühe. Wir werden zunächst zwei Beweismethoden kurz diskutieren, und dann einen ausführlichen elementaren Beweis geben.

Als Motivation für den ersten Zugang betrachten wir noch einmal den Fall $n = 1$. Dass B^1 die (FP) hat, bedeutet das S^0 kein Retrakt von B^1 ist, und dies ist klar, denn $S^0 = \{-1, 1\}$ ist nicht zusammenhängend aber $B^1 = [-1, 1]$ ist zusammenhängend. Leider funktioniert dieses Argument schon für $n = 2$ nicht mehr, denn die Kreislinie S^1 ist zusammenhängend. Allerdings ist B^2 in einem gewissen Sinne stärker zusammenhängend als S^1. Den Begriff, der dieser Bemerkung Sinn gibt, kennen wir schon aus den Grundvorlesungen; es handelt sich um den sogenannten einfachen Zusammenhang.

Seien X ein topologischer Raum und $* \in X$ ein ausgezeichneter Basispunkt. Eine Schleife an $*$ ist eine stetige Abbildung $w : [0, 1] \to X$ mit $w(0) = w(1) = *$. Wir nennen zwei Schleifen w_1, w_2 an $*$ homotop, wenn es eine stetige Abbildung $H : [0, 1]^2 \to X$ mit $H_0 = w_1$, $H_1 = w_2$ und $H(0, t) = H(1, t) = *$ für alle $t \in [0, 1]$ gibt. Dabei ist für $s, t \in [0, 1]$ gesetzt $H_t(s) := H(s, t)$. Homotopie bedeutet also einfach, dass sich w_1 durch eine stetige Familie von Schleifen an $*$ in w_2 deformieren läßt. Es ist einfach einzusehen, dass die Homotopie von Schleifen eine Äquivalenzrelation ist. Die Menge aller Äquivalenzklassen dieser Relation wird mit $\pi_1(X, *)$ bezeichnet.

Dies ist die sogenannte Fundamentalgruppe von X zum Basispunkt $*$. Tatsächlich besitzt $\pi_1(X, *)$ eine natürliche Gruppenstruktur, diese ist gegeben durch das Aneinandersetzen von Schleifen, d.h. sind w_1, w_2 zwei Schleifen, so definieren wir eine neue Schleife $w = w_1 w_2$ durch

$$w(t) = \begin{cases} w_1(2t), & 0 \le t \le \frac{1}{2}, \\ w_2(2t - 1), & \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

für $0 \le t \le 1$. Dann ist nachzurechnen, dass dies tatsächlich eine Multiplikation von Homotopieklassen von Schleifen liefert, die $\pi_1(X, *)$ zu einer Gruppe macht, aber all dies ist einfach.

Der punktierte Raum $(X, *)$ heißt einfach zusammenhängend, wenn $\pi_1(X, *) = 1$ ist, d.h. wenn es zu jeder Schleife w an $*$ eine stetige Abbildung $H : [0, 1]^2 \to X$ mit $H(s, 0) = w(s)$ und $H(0, t) = H(1, t) = H(t, 1) = *$ für alle $s, t \in [0, 1]$ gibt. Ist $*' \in X$ ein weiterer mit $*$ durch einen Weg verbindbarer Punkt, so ist leicht zu zeigen, dass $\pi_1(X, *) \simeq \pi_1(X, *')$ ist, man konjugiert einfach mit einem Weg von $*$ nach $*'$. Insbesondere können wir bei wegzusammenhängenden X davon sprechen, dass X einfach zusammenhängend ist.

Was hat das alles mit unseren Retrakten zu tun? Ist $A \subseteq X$ ein Retrakt von X und $* \in A$, $\pi_1(X, *) = 1$, so ist auch $\pi_1(A, *) = 1$. Denn ist $w : [0, 1] \to A$ stetig mit $w(0) = w(1) = *$, so gibt es eine stetige Abbildung $H : [0, 1]^2 \to X$ wie oben. Ist dann r eine Retraktion auf A, so ist $rH : [0, 1]^2 \to A$ eine Homotopie von w in A. Also ist ein Retrakt eines wegzusammenhängenden, einfach zusammenhängenden Raums selbst wieder einfach zusammenhängend. Insbesondere kann ein nicht einfach zusammenhängender Teilraum kein Retrakt eines einfach zusammenhängenden Raums sein.

Um zu zeigen das S^1 kein Retrakt von B^2 ist, reicht es also zu zeigen das B^2 einfach zusammenhängend ist, und S^1 dies nicht ist. Dass B^2 einfach zusammenhängend ist folgt schon aus der Konvexität dieser Menge. Wählen wir den Basispunkt $* \in S^1$, und ist $w : [0,1] \to B^2$ stetig mit $w(0) = w(1) = *$, so ist $H(s,t) = (1-t)w(s) + t*$ eine Homotopie von w zur trivialen Schleife. Also ist $\pi_1(B^2, *) = 1$. Man kann zeigen das $\pi_1(S^1, *) \neq 1$ ist, tatsächlich ist sogar $\pi_1(S^1, *) \simeq \mathbb{Z}$. Unter diesem Isomorphismus entspricht $n \in \mathbb{Z}$ der Homotopieklasse des Weges $w(t) = e^{2\pi i t}*$. Also ist S^1 kein Retrakt von B^2 und der Brouwersche Fixpunktsatz gilt für $n = 2$.

Aber schon für $n = 3$ funktioniert auch dieses Argument nicht mehr. Es ist zwar genau wie für $n = 2$ wieder $\pi_1(B^3, *) = 1$, aber auch S^2 ist einfach zusammenhängend. Dies ist nahezu offensichtlich, ist eine Schleife $w : [0,1] \to S^2$ nicht surjektiv, so liegt ihr Bild in $S^2 \backslash \{x\} \simeq \mathbb{R}^2$ für einen Punkt x und läßt sich analog zu oben auf einen Punkt zusammenziehen. Leider gibt es auch surjektive Schleifen $w : [0,1] \to S^2$, aber jede solche ist homotop zu einer nicht surjektiven Schleife; wie zum Beispiel aus dem simplizialen Approximationssatz Satz 17 folgen wird. Trotzdem ist B^3 stärker zusammenhängend als S^2, der Raum B^3 ist auch zweifach zusammenhängend, die 2-Sphäre S^2 aber nicht. Dies setzt sich für jedes n so fort.

Um diese Zusammenhangsbegriffe einzuführen, definieren wir die höheren Homotopiegruppen. Seien wieder X ein topologischer Raum und $* \in X$. Setze $I := [0,1]$ und sei $q \geq 1$. Wir betrachten stetige Abbildungen $w : I^q \to X$ mit $w(x) = *$ für alle $x \in \partial I^q = \{y \in I^q | \exists (1 \leq i \leq q) : y_i \in \{0,1\}\}$. Für $q = 1$ sind dies genau unsere Schleifen bei $*$. Zwei solche q-Schleifen w_1, w_2 nennen wir homotop, wenn es eine stetige Abbildung $H : I^q \times I \to X$ mit $H_0 = w_1$, $H_1 = w_2$ und $H(x,t) = *$ für alle $0 \leq t \leq 1$, $x \in \partial I^q$ gibt. Dies definiert wieder eine Äquivalenzrelation und die Menge aller Äquivalenzklassen ist die q-te Homotopiegruppe, geschrieben als $\pi_q(X, *)$. Die Gruppenstruktur wird analog zu oben eingeführt, sind $w_1, w_2 : I^q = I^{q-1} \times I \to X$ zwei q-Schleifen an $*$, so wird ihr Produkt $w = w_1 w_2$ durch

$$w(x,t) = \begin{cases} w_1(x, 2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ w_2(x, 2t-1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

definiert. Es läßt sich wieder leicht nachrechnen, dass diese Konstruktion eine Gruppenstruktur auf $\pi_q(X, *)$ liefert. Für $q = 1$ stimmt diese mit der Fundamentalgruppe überein. Ist A ein Retrakt von X mit $* \in A$, so können wir genau wie im Fall $q = 1$ einsehen, dass $\pi_q(X, *) = 1$ auch $\pi_q(A, *) = 1$ impliziert.

Genau wie oben ist $\pi_q(B^n, *) = 1$ für alle $n, q \geq 1$. Ähnlich wie wir $\pi_1(S^2, *) = 1$ eingesehen haben, läßt sich auch $\pi_q(S^n, *) = 1$ für $1 \leq q < n$ zeigen. Was ist nun $\pi_n(S^n, *)$? Um diese Gruppe zu beschreiben, ist es günstig, eine andere Beschreibung von $\pi_q(X, *)$ zu verwenden. Die q-Schleifen bei $*$ entsprechen genau den stetigen Abbildungen $I^q / \partial I^q \to X$, die den Punkt ∂I^q von $I^q / \partial I^q$ auf $*$ abbilden. Der Raum $I^q / \partial I^q$ ist eine Einpunktkompaktifizierung von $I^q \backslash \partial I^q \simeq \mathbb{R}^q$, d.h. er ist homöomorph zu S^q. Also können wir die Elemente von $\pi_q(X, *)$ als Homotopieklassen von Abbildungen $S^q \to X$, die einen ausgezeichneten Basispunkt von S^q auf $*$ abbilden, auffassen.

Sei $* \in S^{n-1} \subseteq S^n$. Wir denken uns S^{n-1} als den Äquator der S^n. Ist $w : S^{n-1} \to S^{n-1}$ stetig mit $w(*) = *$, so definieren wir folgendermassen eine stetige Abbildung

$Sw : S^n \to S^n$. Zunächst fixiert Sw den Nord- und Südpol der S^n. Ist x ein anderer Punkt auf S^n, so liegt x auf einem eindeutigen halben Großkreis H durch Nord- und Südpol, und dieser schneide den Äquator S^{n-1} in x'. Dann ist $w(x')$ ein weiterer Punkt auf S^{n-1} und es bezeichne H' den halben Großkreis durch $w(x')$ (wieder durch Nord- und Südpol). Sei letztlich $(Sw)(x)$ der Punkt auf H' mit gleicher $(n+1)$-ter Koordinate wie x. Dann ist leicht zu zeigen, das $Sw : S^n \to S^n$ stetig mit $Sw|S^{n-1} = w$ ist. Insbesondere ist $(Sw)(*) = *$.

Sind $w_1, w_2 : S^{n-1} \to S^{n-1}$ homotop, unter Festhalten von $*$, so läßt sich aus einer Homotopie $H : S^{n-1} \times I \to S^{n-1}$ eine Homotopie $SH : S^n \times I \to S^n$ definieren, und zwar einfach durch $(SH)_t = SH_t$ für $0 \leq t \leq 1$. Also sind auch Sw_1 und Sw_2 homotop. Dies liefert uns also eine Abbildung

$$S : \pi_{n-1}(S^{n-1}, *) \to \pi_n(S^n, *).$$

Es läßt sich einsehen, dass die Abbildung S ein Gruppenisomorphismus ist, d.h. es ist $\pi_n(S^n, *) \simeq \pi_{n-1}(S^{n-1}, *)$. Da wir schon $\pi_1(S^1, *) \simeq \mathbb{Z}$ wissen, folgt somit $\pi_n(S^n, *) \simeq \mathbb{Z}$ für jedes $n \geq 1$. Insbesondere kann S^{n-1} für kein $n \geq 1$ ein Retrakt von B^n sein, und der Brouwersche Fixpunktsatz gilt.

Damit haben wir einen ersten Zugang zum Brouwerschen Fixpunktsatz skizziert. Tatsächlich alle Details auszuarbeiten, erfordert allerdings einige Arbeit. Sie können diesen Zugang in Büchern über algebraische Topologie nachlesen. Dort wird häufig mit sogenannten Homologiegruppen $H_q(X)$ anstelle unserer $\pi_q(X, *)$ gearbeitet, diese sind zwar in ihrer Definition deutlich aufwendiger, allerdings lassen sie sich dann leichter berechnen.

Wir wollen jetzt einen analytischen Zugang zum Brouwerschen Fixpunktsatz schildern. Dieser Zugang ist nicht mehr so elegant; wir zeigen zuerst das jede C^∞-Abbildung $f : B^n \to B^n$ einen Fixpunkt hat. Dabei meint C^∞ wie üblich, dass sich f auf eine offene Umgebung von B^n zu einer C^∞-Abbildung fortsetzen läßt. Gäbe es eine fixpunktfreie, C^∞-Abbildung $f : B^n \to B^n$, so konstruieren wir wie im Beweis von Lemma 2 eine Retraktion $r : B^n \to S^{n-1}$ und diese ist offenbar wieder C^∞. Betrachte nun die Differentialform

$$\alpha := x_1 dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_n.$$

Ist $i : S^{n-1} \to B^n$ die Inklusion, so haben wir wegen $ri = \mathrm{id}_{S^{n-1}}$ auch $r^*\alpha|S^{n-1} = \alpha|S^{n-1}$. Es ist $d\alpha = dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$ die übliche Volumenform auf dem $\mathbb{R}^n$. Ist $x \in B^n$, so bildet $r'(x)$ den $\mathbb{R}^n$ auf den Tangentialraum von S^{n-1} an $r(x)$ ab, ist also insbesondere nicht surjektiv und $\det r'(x) = 0$. Es folgt

$$r^*(d\alpha)_x = r^*(dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n)_x = \det r'(x)(dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n)_x = 0$$

für alle $x \in B^n$, und somit ist $r^*(d\alpha) = 0$ und

$$\int_{S^{n-1}} \alpha = \int_{S^{n-1}} r^*\alpha = \int_{B^n} dr^*\alpha = \int_{B^n} r^*(d\alpha) = 0.$$

Andererseits ist

$$\int_{S^{n-1}} \alpha = \int_{B^n} d\alpha = \lambda_n(B^n) > 0,$$

wobei λ_n das Lebesguemaß auf dem $\mathbb{R}^n$ ist. Dies ist ein Widerspruch und wir haben den Brouwerschen Fixpunktsatz für C^∞-Abbildungen.

Jetzt müssen wir den Satz auf stetige Abbildungen ausdehnen. Sind $K \subseteq \mathbb{R}^n$ eine kompakte Menge, $\epsilon > 0$ und $f : K \to \mathbb{R}^n$ stetig, so gibt es eine C^∞-Abbildung $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit $||g(x) - f(x)|| \leq \epsilon$ für alle $x \in K$. Man kann g sogar als polynomiale Abbildung wählen, dies ist einfach der Approximationssatz von Weierstraß, der ja bereits aus dem Grundstudium bekannt ist. Jetzt können wir zeigen:

Lemma 3: *Seien $n \geq 1$ und $0 < \epsilon < 1$.*

(a) *Es gibt eine C^∞-Abbildung $r : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit $r(\overline{B}_{1+\epsilon}(0)) \subseteq B^n$ und $||r(x) - x|| \leq 2\epsilon$ für alle $x \in \overline{B}_{1+\epsilon}(0)$.*

(b) *Ist $f : B^n \to B^n$ stetig, so existiert eine C^∞-Abbildung $g : B^n \to B^n$ mit $||g - f||_\infty \leq \epsilon$.*

Beweis: **(a)** Es gibt eine C^∞-Funktion $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\operatorname{supp} \varphi \subseteq [1-\epsilon, 1]$, $0 \leq \varphi(t) \leq 1$ für alle $t \in \mathbb{R}$ und $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\, dt = \epsilon$. Damit ist auch $\psi(x) := \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\, dt$ eine C^∞-Funktion mit $\psi(x) = 0$ für $x \leq 1 - \epsilon$, $0 \leq \psi(x) \leq \epsilon$ für $1 - \epsilon \leq x \leq 1$ und $\psi(x) = \epsilon$ für $x \geq 1$. Also erfüllt die C^∞-Funktion $\lambda := 1 - \psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Bedingungen $\lambda(t) = 1$ für $t \leq 1 - \epsilon$, $1 - \epsilon \leq \lambda(t) \leq 1$ für $1 - \epsilon \leq t \leq 1$ und $\lambda(t) = 1 - \epsilon$ für $t \geq 1$.

Jetzt definieren wir

$$r : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n; x \mapsto \lambda(||x||)x.$$

Auf $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ ist r offenbar C^∞. Außerdem ist für $x \in B_{1-\epsilon}(0)$ stets $\lambda(||x||) = 1$, also $r(x) = x$, d.h. r ist auf $B_{1-\epsilon}(0)$ die Identität. Insgesamt ist r damit eine C^∞-Abbildung.

Sei $x \in \overline{B}_{1+\epsilon}(0)$, d.h. $||x|| \leq 1 + \epsilon$. Zu zeigen ist $r(x) \in B^n$ und $||r(x) - x|| \leq 2\epsilon$. Für $||x|| \leq 1 - \epsilon$ ist $r(x) = x$ und die Behauptungen sind klar. Jetzt sei $||x|| > 1 - \epsilon$. Ist $||x|| \leq 1$, so gilt $||r(x)|| = \lambda(||x||)||x|| \leq 1$, und ist $||x|| > 1$, so haben wir $||r(x)|| = \lambda(||x||)||x|| \leq (1 - \epsilon)(1 + \epsilon) = 1 - \epsilon^2 < 1$. Damit haben wir $r(x) \in B^n$ eingesehen. Weiter ist

$$||x - r(x)|| = (1 - \lambda(||x||))||x|| \leq \epsilon(1 + \epsilon) \leq 2\epsilon.$$

(b) Nach dem Approximationssatz von Weierstrass gibt es eine polynomiale Abbildung $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit $||f(x) - p(x)|| \leq \epsilon/4$ für alle $x \in B^n$. Für $x \in B^n$ ist damit

$$||p(x)|| \leq ||f(x)|| + ||p(x) - f(x)|| \leq 1 + \frac{\epsilon}{4},$$

d.h. $p(B^n) \subseteq \overline{B}_{1+\epsilon/4}(0)$. Nach (a) gibt es eine C^∞-Abbildung $r : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit $r(\overline{B}_{1+\epsilon/4}(0)) \subseteq B^n$ und $||x - r(x)|| \leq \epsilon/2$ für alle $x \in \overline{B}_{1+\epsilon/4}(0)$. Damit ist $g := rp :$

$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine C^∞–Abbildung mit $g(B^n) = rp(B^n) \subseteq r(\overline{B}_{1+\epsilon/4}(0)) \subseteq B^n$, und für jedes $x \in B^n$ gilt

$$||f(x) - g(x)|| \leq ||f(x) - p(x)|| + ||p(x) - r(p(x))|| \leq \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{2} < \epsilon.$$

∎

Nach Lemma 3.(b) liegen die C^∞–Funktionen dicht im Raum $C(B^n, B^n)$ der stetigen Selbstabbildungen von B^n versehen mit der Maximumsnorm. Alle diese Abbildungen haben einen Fixpunkt. Der Brouwersche Fixpunktsatz ergibt sich jetzt aus dem folgenden Lemma:

Lemma 4: *Sei M ein kompakter metrischer Raum. Dann ist die Menge*

$$F := \{f \in C(M, M) : \mathrm{Fix}(f) \neq \emptyset\}$$

abgeschlossen in $C(M, M)$.

Beweis: Wir zeigen das $U := C(M, M)\backslash F$ offen ist. Sei also $f \in U$, d.h. $f : M \to M$ ist stetig und fixpunktfrei. Da M kompakt ist, gibt es ein $\epsilon > 0$ mit $d(f(x), x) \geq \epsilon$ für alle $x \in M$. Ist $g \in B_\epsilon(f) \subseteq C(M, M)$, so gilt für jedes $x \in M$ stets

$$\epsilon \leq d(f(x), x) \leq d(f(x), g(x)) + d(g(x), x) < \epsilon + d(g(x), x),$$

d.h. $d(g(x), x) > 0$ und insbesondere $g(x) \neq x$. Also ist $g \in U$, und wir haben $B_\epsilon(f) \subseteq U$ gezeigt.

∎

Falls der Kalkül der Differentialformen bekannt ist, war dies sogar ein vollständiger Beweis unseres Fixpunktsatzes. Wir wollen jetzt noch einen dritten, vollständig elementaren, Beweis angeben. Dieser Beweis beruht auf dem Begriff eines Simplizialkomplexes, den wir zunächst einführen.

Definition 3: Sind $x_0, x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{R}^n$ affin unabhängig, so heissen die Mengen

$$\sigma(x_0, \ldots, x_k) := \left\{ \sum_{i=0}^{k} \lambda_i x_i : \lambda_0, \ldots, \lambda_k > 0 \text{ mit } \sum_{i=0}^{k} \lambda_i = 1 \right\}$$

und

$$\overline{\sigma}(x_0, \ldots, x_k) := \left\{ \sum_{i=0}^{k} \lambda_i x_i : \lambda_0, \ldots, \lambda_k \geq 0 \text{ mit } \sum_{i=0}^{k} \lambda_i = 1 \right\}$$

das offene, beziehungsweise abgeschlossene, von $x_0, \ldots, x_k$ aufgespannte Simplex.

Sind $x_0, \ldots, x_k \in \mathbb{R}^n$ affin unabhängig, d.h. $x_1 - x_0, \ldots, x_k - x_0$ sind linear unabhängig, so hat jedes x in dem von $x_0, \ldots, x_k$ erzeugten affinen Teilraum des $\mathbb{R}^n$ eine eindeutige Darstellung der Form $x = \sum_{i=0}^{k} \lambda_i x_i$ mit $\lambda_0, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ und $\sum_{i=0}^{k} \lambda_i = 1$. Die Zahlen $\lambda_0, \ldots, \lambda_k$ heissen die baryzentrischen Koordinaten von x. Wir beginnen mit einem einfachen Lemma:

Lemma 5: *Seien $x_0, \ldots, x_k \in \mathbb{R}^n$ affin unabhängig.*

(a) *Die Mengen $\sigma(x_0,\ldots,x_k)$ und $\overline{\sigma}(x_0,\ldots,x_k)$ sind konvex.*

(b) *Es ist*

$$\overline{\sigma(x_0,\ldots,x_k)} = \overline{\sigma}(x_0,\ldots,x_k) = \overline{\mathrm{co}}\{x_0,\ldots,x_k\},$$

und diese Menge ist kompakt.

(c) *Es ist*

$$d(\overline{\sigma}(x_0,\ldots,x_k)) = \max_{0\le i,j\le k} ||x_i - x_j||.$$

(d) *Die Menge $\{x_0,\ldots,x_k\}$ ist die Menge der Extremalpunkte von $\overline{\sigma}(x_0,\ldots,x_k)$.*

(e) *Ist $k = n$, so ist $\overline{\sigma}(x_0,\ldots,x_k)^\circ = \sigma(x_0,\ldots,x_k)$ offen.*

Beweis: (a,b) Wir zeigen zuerst, dass $\sigma(x_0,\ldots,x_k)$ konvex ist. Seien also $x, y \in \sigma(x_0,\ldots,x_k)$ und $0 \le t \le 1$. Es gibt $\lambda_i, \mu_i > 0$ $(0 \le i \le k)$ mit $\sum_{i=0}^k \lambda_i = \sum_{i=0}^k \mu_i = 1$ und $x = \sum_{i=0}^k \lambda_i x_i$, $y = \sum_{i=0}^k \mu_i x_i$. Damit ist $(1-t)\lambda_i + t\mu_i > 0$ für jedes $0 \le i \le k$, $\sum_{i=0}^k((1-t)\lambda_i + t\mu_i) = (1-t)\sum_{i=0}^k \lambda_i + t\sum_{i=0}^k \mu_i = 1 - t + t = 1$ und es ist $(1-t)x + ty = \sum_{i=0}^k((1-t)\lambda_i + t\mu_i)x_i$, d.h. $(1-t)x + ty \in \sigma(x_0,\ldots,x_k)$.

Ist $x \in \overline{\sigma(x_0,\ldots,x_k)}$, so existieren $y_m \in \sigma(x_0,\ldots,x_k)$ $(m \in \mathbb{N})$ mit $\lim_{m\to\infty} y_m = x$. Für jedes $m \in \mathbb{N}$ gibt es für $0 \le i \le k$ Zahlen $\lambda_i^m > 0$ mit $\sum_{i=0}^k \lambda_i^m = 1$ und $y_m = \sum_{i=0}^k \lambda_i^m x_i$. Für $m \in \mathbb{N}$, $0 \le i \le k$ ist $\lambda_i^m \le 1$, also kann durch Übergang zu einer Teilfolge die Existenz von $\lambda_i := \lim_{m\to\infty} \lambda_i^m$ für jedes $0 \le i \le m$ erreicht werden. Dann ist $\lambda_0,\ldots,\lambda_k \ge 0$, $\sum_{i=0}^k \lambda_i = 1$ und $\sum_{i=0}^k \lambda_i x_i = \lim_{m\to\infty}\sum_{i=0}^k \lambda_i^m x_i = \lim_{m\to\infty} y_m = x$, d.h. es ist $x \in \overline{\sigma}(x_0,\ldots,x_k)$.

Sei umgekehrt $x \in \overline{\sigma}(x_0,\ldots,x_k)$. Seien $\lambda_0,\ldots,\lambda_k \ge 0$ mit $\sum_{i=0}^k \lambda_i = 1$ und $x = \sum_{i=0}^k \lambda_i x_i$. Sei $\epsilon > 0$. Wähle $\delta > 0$ mit $(k+2)M\delta < \epsilon$ wobei $M := \sum_{i=0}^k ||x_i||$ ist. Für $0 \le i \le k$ ist $\mu_i := (\lambda_i + \delta)/(1 + (k+1)\delta) > 0$ und es gilt

$$\sum_{i=0}^k \mu_i = \frac{1}{1+(k+1)\delta}\left(\sum_{i=0}^k \lambda_i + (k+1)\delta\right) = 1.$$

Also ist $y := \sum_{i=0}^k \mu_i x_i \in \sigma(x_0,\ldots,x_k)$ und es gilt

$$||y - x|| = \frac{1}{1+(k+1)\delta}\left|\left|\sum_{i=0}^k(\lambda_i + \delta - (1+(k+1)\delta)\lambda_i)x_i\right|\right| \le (k+2)M\delta < \epsilon,$$

da $|\lambda_i + \delta - (1+(k+1)\delta)\lambda_i| = |1-(k+1)\lambda_i|\delta \le (k+2)\delta$ für jedes $0 \le i \le k$ ist. Dies zeigt $x \in \overline{\sigma(x_0,\ldots,x_k)}$.

Als Abschluss einer konvexen Mengen ist somit auch $\overline{\sigma}(x_0,\ldots,x_k)$ konvex. Für jedes $x \in \overline{\sigma}(x_0,\ldots,x_k)$ ist offenbar $||x|| \le M$, und somit ist das abgeschlossene Simplex beschränkt also auch kompakt. Wegen $x_0,\ldots,x_k \in \overline{\sigma}(x_0,\ldots,x_k)$ ist auch

$\overline{\text{co}}\{x_0,\dots,x_k\} \subseteq \overline{\sigma}(x_0,\dots,x_k)$. Da jedes Element von $\overline{\sigma}(x_0,\dots,x_k)$ eine Konvexkombination der $x_0,\dots,x_k$ ist, gilt auch $\overline{\sigma}(x_0,\dots,x_k) \subseteq \text{co}(x_0,\dots,x_k)$.
(c) Nach (b) ist $d(\overline{\sigma}(x_0,\dots,x_k)) = d(\overline{\text{co}}\{x_0,\dots,x_k\}) = d(\{x_0,\dots,x_k\})$.
(d) Sei $0 \le i \le k$. Seien $x, y \in \overline{\sigma}(x_0,\dots,x_k)$ und $0 < t < 1$ mit $x_i = (1-t)x+ty$. Seien $\lambda_j, \mu_j \ge 0$ $(0 \le j \le k)$ mit $\sum_{j=0}^k \lambda_j = \sum_{j=0}^k \mu_j = 1$ und $x = \sum_{j=0}^k \lambda_j x_j$, $y = \sum_{j=0}^k \mu_j x_j$. Dann ist $x_i = (1-t)x + ty = \sum_{j=0}^k((1-t)\lambda_j + t\mu_j)x_j$ mit $\sum_{j=0}^k((1-t)\lambda_j + t\mu_j) = 1$. Die affine Unabhängigkeit von $x_0,\dots,x_k$ liefert $(1-t)\lambda_j + t\mu_j = 0$ für $0 \le j \le k$ mit $j \ne i$. Also gilt $\lambda_j = \mu_j = 0$ für diese j und $\lambda_i = \mu_i = 1$, d.h. $x = y = x_i$. Dies zeigt das x_i ein Extremalpunkt ist.

Sei umgekehrt $z \in \overline{\sigma}(x_0,\dots,x_k)$ ein Extremalpunkt. Seien $\lambda_0,\dots,\lambda_k \ge 0$ mit $\sum_{i=0}^k \lambda_i = 1$ und $z = \sum_{i=0}^k \lambda_i x_i$. Sei $0 \le i \le k$. Angenommen es wäre $0 < \lambda_i < 1$. Insbesondere ist dann $k \ge 1$ und es gibt ein $0 \le j \le k$ mit $j \ne i$ und $0 < \lambda_j < 1$. Wähle $\epsilon > 0$ mit $\epsilon < \lambda_i, \lambda_j$. Für $0 \le l \le k$ mit $l \ne i, j$ setzen wir $\lambda_l' := \lambda_l'' := \lambda_l$ und $\lambda_i' := \lambda_i - \epsilon > 0$, $\lambda_j' := \lambda_j + \epsilon > 0$, $\lambda_i'' := \lambda_i + \epsilon > 0$ und $\lambda_j'' := \lambda_j - \epsilon > 0$. Dann sind $x := \sum_{l=0}^k \lambda_l' x_l$, $y := \sum_{l=0}^k \lambda_l'' x_l$ in $\overline{\sigma}(x_0,\dots,x_k)$ mit $x \ne y$ und $(x+y)/2 = z$. Aber dies ist ein Widerspruch, da z ein Extremalpunkt ist. Also ist $\lambda_i \in \{0,1\}$ für jedes $0 \le i \le k$. Es folgt $z \in \{x_0,\dots,x_k\}$.
(e) Die Menge

$$U := \{\lambda \in \mathbb{R}^n : \forall(1 \le i \le n) : \lambda_i > 0 \text{ und } \sum_{i=1}^n \lambda_i < 1\}$$

ist offenbar offen im $\mathbb{R}^n$. Sei $T \in \text{GL}_n\mathbb{R}$ definiert durch $Te_i = x_i - x_0$ für $1 \le i \le n$. Dann ist

$$\begin{aligned} \sigma(x_0,\dots,x_n) &= \left\{\sum_{i=0}^n \lambda_i x_i : \lambda_0,\dots,\lambda_n > 0 \text{ und } \sum_{i=0}^n \lambda_i = 1\right\} \\ &= \left\{x_0 + \sum_{i=1}^n \lambda_i(x_i - x_0) : \lambda_1,\dots,\lambda_n > 0 \text{ und } 1 - \sum_{i=1}^n \lambda_i > 0\right\} \\ &= x_0 + T(U) \end{aligned}$$

offen im $\mathbb{R}^n$. Insbesondere ist $\sigma(x_0,\dots,x_n) \subseteq \overline{\sigma}(x_0,\dots,x_n)^\circ$. Sei umgekehrt $x \in \overline{\sigma}(x_0,\dots,x_n)^\circ \subseteq \overline{\sigma}(x_0,\dots,x_n)$. Seien $\lambda_0,\dots,\lambda_n \ge 0$ mit $\sum_{i=0}^n \lambda_i = 1$ und $x = \sum_{i=0}^n \lambda_i x_i$. Es gibt ein $\epsilon > 0$ mit $B_\epsilon(x) \subseteq \overline{\sigma}(x_0,\dots,x_n)$. Angenommen es gibt ein $0 \le i \le n$ mit $\lambda_i = 0$. Wähle ein $0 \le j \le n$ mit $\lambda_j > 0$, also insbesondere $j \ne i$. Wähle $\delta > 0$ mit $\delta||x_j - x_i|| < \epsilon$. Setze $\mu_l := \lambda_l$ für $1 \le l \le n$ mit $l \ne i, j$, $\mu_i := -\delta < 0$ und $\mu_j := \lambda_j + \delta$. Dann ist $y := \sum_{l=0}^n \mu_l x_l \in \mathbb{R}^n$ mit $y \notin \overline{\sigma}(x_0,\dots,x_n)$. Andererseits ist

$$||y - x|| = || - \delta x_i + \delta x_j|| = \delta||x_j - x_i|| < \epsilon,$$

d.h. $y \in B_\epsilon(x)$; ein Widerspruch.

■

Definition 4: Eine Teilmenge $S \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt ein offenes (abgeschlossenes) k-Simplex im $\mathbb{R}^n$, wenn es affin unabhängige $x_0, \ldots, x_k \in \mathbb{R}^n$ mit $S = \sigma(x_0, \ldots, x_k)$ ($S = \overline{\sigma}(x_0, \ldots, x_k)$) gibt.

Nach Lemma 5.(b,d) ist die Menge $\{x_0, \ldots, x_k\}$ eindeutig durch S bestimmt, und wir nennen sie die Menge der Ecken von S, geschrieben als $E(S)$. Damit ist auch die Zahl $k = |E(S)| - 1$ eindeutig bestimmt, und heißt die Dimension von S.

Definition 5: Sind A, B zwei abgeschlossene Simplizes im $\mathbb{R}^n$, so schreiben wir $A \leq B$, und nennen A eine Seite von B, wenn $E(A) \subseteq E(B)$ ist.

Ist A ein k-Simplex im $\mathbb{R}^n$, so entsprechen die Seiten von A bijektiv den nichtleeren Teilmengen der Eckenmenge von A. Insbesondere hat A genau $2^k - 1$ Seiten. Weiter ist die Relation $\leq$ offenbar eine partielle Ordnung auf der Menge aller Simplizes im $\mathbb{R}^n$. Jetzt können wir die endlichen Simplizialkomplexe im $\mathbb{R}^n$ definieren.

Definition 6: Ein Simplizialkomplex Σ im $\mathbb{R}^n$ ist eine endliche Menge von abgeschlossenen Simplizes im $\mathbb{R}^n$, die die beiden folgenden Bedingungen erfüllt:

(a) Ist $B \in \Sigma$ und ist A eine Seite von B, so gilt auch $A \in \Sigma$.

(b) Sind $A, B \in \Sigma$, so ist entweder $A \cap B = \emptyset$, oder $A \cap B$ ist eine gemeinsame Seite von A und B.

Ist Σ ein solcher Simplizialkomplex, so ist die Menge

$$|\Sigma| := \bigcup \Sigma$$

als endliche Vereinigung kompakter Mengen selbst kompakt. Weiter definieren wir den Durchmesser von Σ als

$$d(\Sigma) := \max\{d(A) : A \in \Sigma\}.$$

Schließlich sei

$$E(\Sigma) := \bigcup \{E(A) : A \in \Sigma\}$$

die Eckenmenge von Σ. Diese ist offenbar endlich.

Das für uns wichtigste Beispiel eines Simplizialkomplexes ist sehr einfach.

Lemma 6: *Sei $n \geq 0$ ein sei $\Delta \subseteq \mathbb{R}^n$ ein abgeschlossenes n–Simplex im $\mathbb{R}^n$. Dann ist*

$$T_\Delta := \{A : A \text{ ist abgeschlossenes Simplex im } \mathbb{R}^n \text{ mit } A \leq \Delta\}$$

ein Simplizialkomplex im $\mathbb{R}^n$ mit $|T_\Delta| = \Delta$. Weiter ist

$$\Lambda_\Delta := T_\Delta \backslash \{\Delta\}$$

ein Simplizialkomplex im $\mathbb{R}^n$ mit $|\Lambda_\Delta| = \partial\Delta$.

Beweis: Seien $x_0, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^n$ affin unabhängig mit $\Delta = \overline{\sigma}(x_0, \ldots, x_n)$. Trivialerweise ist T_Δ eine endliche Menge von Simplizes im $\mathbb{R}^n$ mit $\bigcup T_\Delta = \Delta$, die mit jedem Simplex auch alle Seiten des Simplex enthält. Seien jetzt $A, B \in T_\Delta$. Dann sind $E(A), E(B) \subseteq E(\Delta) = \{x_0, \ldots, x_n\}$. Schreibe $R := \{i \in \{0, \ldots, n\} : x_i \in E(A)\}$ und $S := \{i \in \{0, \ldots, n\} : x_i \in E(B)\}$. Ist $x \in \mathbb{R}^n$, so seien $\lambda_0, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ die baryzentrischen Koordinaten von x, d.h. $\sum_{i=0}^n \lambda_i = 1$ und $x = \sum_{i=0}^n \lambda_i x_i$. Die Eindeutigkeit der Darstellung in baryzentrischen Koordinaten ergibt

$$x \in A \Longleftrightarrow \forall(i \in R) : \lambda_i \geq 0 \text{ und } \forall(i \in \{0, \ldots, n\} \backslash R) : \lambda_i = 0,$$

und eine analoge Formel gilt für B. Also ist genau dann $x \in A \cap B$, wenn $\lambda_i \geq 0$ für alle $0 \leq i \leq n$ und $\lambda_i = 0$ für alle $i \in (\{0, \ldots, n\} \backslash R) \cup (\{0, \ldots, n\} \backslash S) = \{0, \ldots, n\} \backslash (R \cap S)$ gilt.

Ist also $R \cap S = \emptyset$, so ist $A \cap B = \emptyset$, und ist $R \cap S \neq \emptyset$, so ist $A \cap B$ ein Simplex mit $E(A \cap B) = \{x_i : i \in R \cap S\} = E(A) \cap E(B)$. Insbesondere ist $A \cap B$ eine gemeinsame Seite von A und B.

Also ist T_Δ ein Simplizialkomplex mit $|T_\Delta| = \Delta$. Da $\Lambda_\Delta \subseteq T_\Delta$ mit jedem Simplex auch alle Seiten des Simplex enthält, ist auch Λ_Δ ein Simplizialkomplex. Ist $A \in \Lambda_\Delta$, so gilt $E(A) \subsetneqq E(\Delta)$, also existiert ein $0 \leq i \leq n$ mit $E(A) \subseteq \{x_0, \ldots, \widehat{x_i}, \ldots, x_n\}$. Es folgt

$$\begin{aligned}
|\Lambda_\Delta| &= \bigcup_{i=0}^n \overline{\sigma}(x_0, \ldots, \widehat{x_i}, \ldots, x_n) \\
&= \left\{ \sum_{i=0}^n \lambda_i x_i : (\lambda_0, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}_{\geq 0}^{n+1}, \sum_{i=0}^n \lambda_i = 1, \exists(0 \leq i \leq n) : \lambda_i = 0 \right\} \\
&= \overline{\sigma}(x_0, \ldots, x_n) \backslash \sigma(x_0, \ldots, x_n) \\
&= \Delta \backslash \Delta^\circ \\
&= \partial \Delta
\end{aligned}$$

nach Lemma 5.(e).

■

Korollar 7: *Sei Δ ein Simplex im $\mathbb{R}^n$. Dann ist die Menge T_Δ der Seiten von Δ ein Simplizialkomplex im $\mathbb{R}^n$ mit $|T_\Delta| = \Delta$.*

Beweis: Sei $k := \dim \Delta$ und sei $V \leq \mathbb{R}^n$ der von Δ erzeugte affine Teilraum. Dann ist $V \simeq \mathbb{R}^k$ und Δ ist ein k-Simplex in V. Jetzt ergibt Lemma 6 die Behauptung.

■

Wir benötigen noch einen kleinen kombinatorischen Begriff.

Lemma 8: *Sei Σ ein Simplizialkomplex im $\mathbb{R}^n$, und sei $x \in |\Delta|$. Dann gibt es ein minimales Simplex $\sigma \in \Sigma$ mit $x \in \sigma$.*

Beweis: Wegen $x \in |\Delta|$ gibt es ein $\tau \in \Sigma$ mit $x \in \tau$. Sei $E(\tau) = \{x_0, \ldots, x_k\}$ und seien $\lambda_0, \ldots, \lambda_k \geq 0$ mit $\sum_{i=0}^k \lambda_i = 1$ und $x = \sum_{i=0}^k \lambda_i x_i$. Dann ist $F := \{x_i : i \in \{0, \ldots, k\}, \lambda_i > 0\} \neq \emptyset$ und $\sigma := \overline{\text{co}}(F)$ ist ein Simplex mit $E(\sigma) = F$ und $x \in \sigma$. Insbesondere ist $\sigma \leq \tau \in \Sigma$, also auch $\sigma \in \Sigma$.

Sei jetzt $\delta \in \Sigma$ beliebig mit $x \in \delta$. Dann ist $x \in \sigma \cap \delta$, und wegen $\sigma, \delta \in \Sigma$ ist $\sigma \cap \delta$ eine gemeinsame Seite von σ und δ. Insbesondere ist $E(\sigma \cap \delta) \subseteq E(\sigma) = F$. Wäre $E(\sigma \cap \delta) \subsetneqq F$, so existierte ein $0 \leq i \leq k$ mit $x_i \notin E(\sigma \cap \delta)$, und wegen $x \in \sigma \cap \delta$ folgt $\lambda_i = 0$; ein Widerspruch. Also ist $E(\sigma \cap \delta) = F = E(\sigma)$, d.h. $E(\sigma) \subseteq E(\delta)$ und somit $\sigma \leq \delta$.

■

Definition 7: Sei Σ ein Simplizialkomplex im $\mathbb{R}^n$. Ist $x \in |\Sigma|$, so gibt es nach Lemma 8 ein minimales Simplex in Σ das x enthält, und dieses ist offenbar eindeutig und heißt der Träger $\text{tr}(x)$ von x.

Ist $p \in E(\Sigma)$, so definieren wir den Stern von p in Σ beziehungsweise in $|\Sigma|$ durch

$$\text{st}(p) := \{\sigma \in \Sigma : p \in E(\sigma)\}$$

beziehungsweise

$$\text{St}(p) := \{x \in |\Sigma| : \text{tr}(x) \in \text{st}(p)\}.$$

Lemma 9: *Sei Σ ein Simplizialkomplex im $\mathbb{R}^n$. Dann ist $\{\text{St}(p) : p \in E(\Sigma)\}$ eine offene Überdeckung von $|\Sigma|$ und für jedes $p \in E(\Sigma)$ gilt $d(\text{St}(p)) \leq 2d(\Sigma)$.*

Beweis: Ist $x \in |\Sigma|$, so ist $\text{tr}(x) \in \Sigma$ und wählen wir ein $p \in E(\text{tr}(x)) \subseteq E(\Sigma)$, so ist $\text{tr}(x) \in \text{st}(p)$, also $x \in \text{St}(p)$. Damit ist $\{\text{St}(p) : p \in E(\Sigma)\}$ ein Überdeckung von $|\Sigma|$.

Sei $p \in E(\Sigma)$. Zu zeigen ist, dass $\text{St}(p) \subseteq |\Sigma|$ offen ist und $d(\text{St}(p)) \leq 2d(\Sigma)$ gilt. Um ersteres einzusehen, zeigen wir das $|\Sigma| \setminus \text{St}(p)$ abgeschlossen im $\mathbb{R}^n$ ist. Wir behaupten $|\Sigma| \setminus \text{St}(p) = \bigcup(\Sigma \setminus \text{st}(p))$. Ist $x \in |\Sigma| \setminus \text{St}(p)$, so ist $\text{tr}(x) \notin \text{st}(p)$, also $x \in \text{tr}(x) \in \Sigma \setminus \text{st}(p)$. Seien umgekehrt $\sigma \in \Sigma \setminus \text{st}(p)$ und $x \in \sigma$ gegeben. Dann ist $\text{tr}(x) \leq \sigma$, also $E(\text{tr}(x)) \subseteq E(\sigma)$. Wegen $p \notin E(\sigma)$ ist damit auch $p \notin E(\text{tr}(x))$ also $\text{tr}(x) \notin \text{st}(p)$ und $x \in |\Sigma| \setminus \text{St}(p)$. Insbesondere ist $|\Sigma| \setminus \text{St}(p)$ eine endliche Vereinigung abgeschlossener Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ und damit selbst abgeschlossen.

Nun kommen wir zum Durchmesser. Seien also $x, y \in \text{St}(p)$. Zu zeigen ist $||x - y|| \leq 2d(\Sigma)$. Es ist $\text{tr}(x), \text{tr}(y) \in \Sigma$ und $p \in E(\text{tr}(x)) \cap E(\text{tr}(y))$. Insbesondere ist $p \in \text{tr}(x) \cap \text{tr}(y)$ und somit ist $||x - y|| \leq ||x - p|| + ||p - y|| \leq d(\text{tr}(x)) + d(\text{tr}(y)) \leq 2d(\Sigma)$.

■

Bevor wir zu den uns eigentlich interessierenden simplizialen Abbildungen kommen, führen wir noch zwei weitere Begriffe ein.

Definition 8: Seien $x_0, \ldots, x_k \in \mathbb{R}^n$ affin unabhängig. Dann ist offenbar

$$\widehat{\sigma}(x_0, \ldots, x_k) := \frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^{k} x_i \in \sigma(x_0, \ldots, x_k).$$

Da die Menge $\{x_0, \ldots, x_k\}$ durch $\overline{\sigma}(x_0, \ldots, x_k)$ eindeutig festgelegt ist, können wir weiter

$$\overline{\sigma}(\widehat{x_0, \ldots}, x_k) := \widehat{\sigma}(x_0, \ldots, x_k)$$

definieren, da $\widehat{\sigma}(x_0, \ldots, x_k)$ offenbar unter Permutationen der Menge $\{x_0, \ldots, x_k\}$ unverändert bleibt.

Lemma 10: *Sei σ ein abgeschlossenes Simplex im $\mathbb{R}^n$. Dann liegt $\widehat{\sigma}$ in keiner echten Seite von σ.*

Beweis: Sei $E(\sigma) = \{x_0, \ldots, x_k\}$. Ist $\tau < \sigma$, so gilt $E(\tau) \subsetneqq E(\sigma)$, also existiert ein $0 \leq i \leq k$ mit $x_i \notin E(\tau)$. Da die i–te baryzentrische Koordinate von $\widehat{\sigma}$ gleich $1/(k+1) > 0$ ist, ist sicher $\widehat{\sigma} \notin \tau$.

■

Definition 9: Seien Σ ein Simplizialkomplex und $E \subseteq E(\Sigma)$. Wir sagen, dass E ein Simplex von Σ aufspannt, wenn es ein $\sigma \in \Sigma$ mit $E(\sigma) = E$ gibt. Dann ist offenbar die Menge E affin unabhängig und es gilt $\sigma = \overline{\mathrm{co}}(E)$.

Lemma 11: *Sei Σ ein Simplizialkomplex im $\mathbb{R}^n$.*

(a) *Ist $\sigma \in \Sigma$, so gilt $\widehat{\sigma} \in |\Sigma|$ und $\mathrm{tr}(\widehat{\sigma}) = \sigma$.*

(b) *Sei $\emptyset \neq E \subseteq E(\Sigma)$. Genau dann spannt E ein Simplex in Σ auf, wenn $\bigcap_{p \in E} \mathrm{St}(p) \neq \emptyset$ gilt.*

Beweis: **(a)** Es ist $\widehat{\sigma} \in \sigma \subseteq |\Sigma|$. Wegen $\widehat{\sigma} \in \sigma$ folgt $\mathrm{tr}(\widehat{\sigma}) \leq \sigma$ und nach Lemma 10 gilt damit $\mathrm{tr}(\widehat{\sigma}) = \sigma$.
(b) "'$\Longrightarrow$"' Sei $\sigma \in \Sigma$ mit $E(\sigma) = E$. Ist dann $p \in E = E(\sigma)$ so gilt $\sigma \in \mathrm{st}(p)$ und mit (a) folgt $\widehat{\sigma} \in \mathrm{St}(p)$. Also ist $\widehat{\sigma} \in \bigcap_{p \in E} \mathrm{St}(p)$.
"'$\Longleftarrow$"' Sei $x \in \bigcap_{p \in E} \mathrm{St}(p) \subseteq |\Sigma|$. Setze $\sigma := \mathrm{tr}(x) \in \Sigma$. Ist $p \in E$, so gilt $x \in \mathrm{St}(p)$, also $\sigma \in \mathrm{st}(p)$, d.h. $p \in E(\sigma)$. Es folgt $E \subseteq E(\sigma)$. Damit existert eine Seite τ von σ mit $E(\tau) = E$, und es ist $\tau \in \Sigma$ da Σ ein Simplizialkomplex ist.

■

Was hat das alles mit dem Brouwerschen Fixpunktsatz zu tun? Nach Lemma 2 müssen wir zeigen, dass S^{n-1} kein Retrakt von B^n ist. Anstelle dessen zeigen wir zunächst das $\partial\Delta$ kein Retrakt von Δ ist, wenn Δ ein abgeschlossenes n–Simplex im $\mathbb{R}^n$. Wir müssen also die Nichtexistenz einer Retraktion $r : |T_\Delta| = \Delta \to \partial\Delta = |\Lambda_\Delta|$ beweisen. Wir wollen dies auf eine kombinatorische Aussage zurückführen indem wir stetige Abbildungen durch sogenannte simpliziale Approximationen ersetzen.

Es gibt verschiedene Möglichkeiten, simpliziale Abbildungen zu definieren. Sind Σ, Λ zwei Simplizialkomplexe so können wir Abbildungen $\varphi : |\Sigma| \to |\Lambda|$ betrachten, die für jeden Simplex $\sigma \in \Sigma$ die Teilmenge $\sigma \subseteq |\Sigma|$ affin auf ein Simplex $f(\sigma) \in \Lambda$ abbilden. Eine solche Abbildung ist durch ihre Werte auf den Ecken von Σ bereits festgelegt. Für unsere Zwecke ist nur diese Abbildung der Ecken von Interesse, und daher definieren wir:

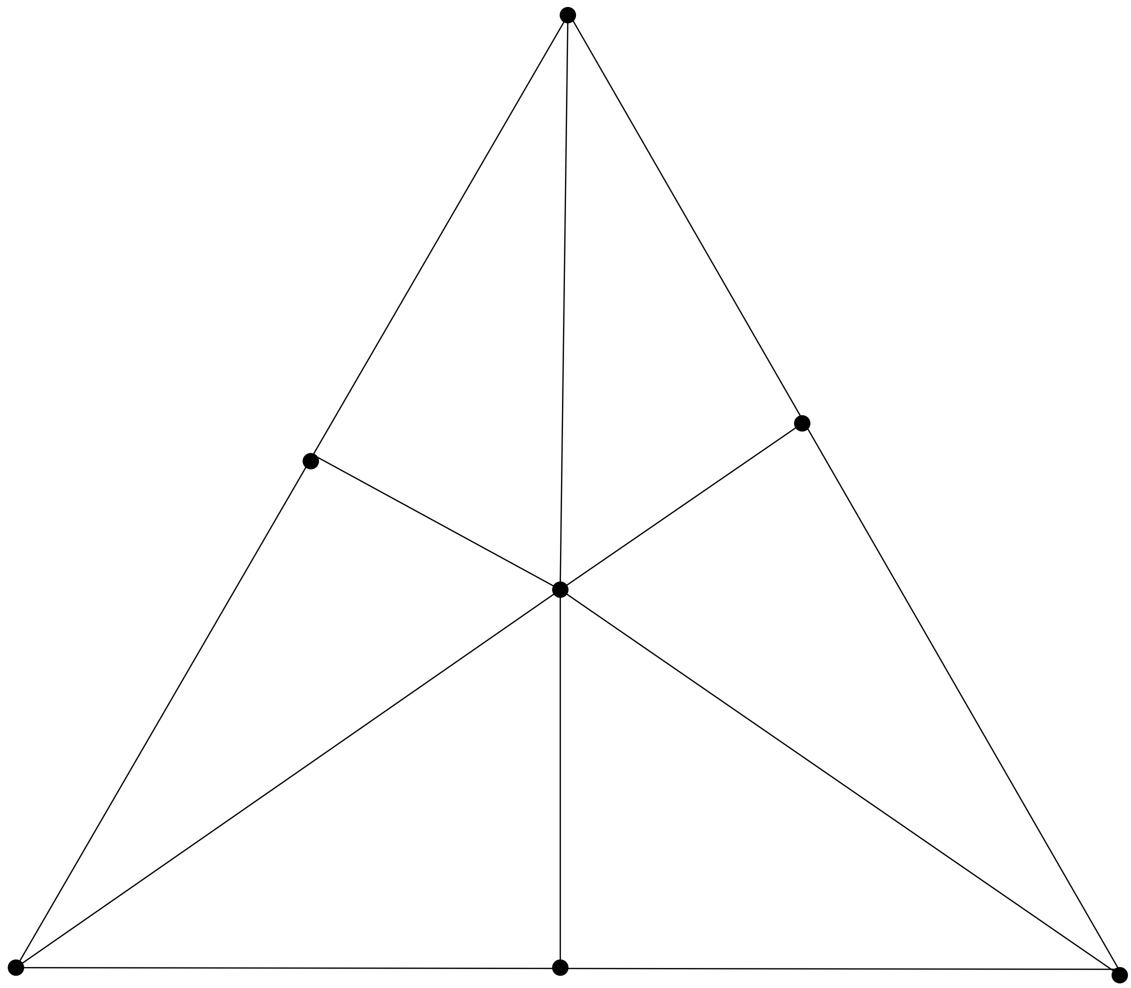
Definition 10: Sei Σ, Λ zwei Simplizialkomplexe. Eine simpliziale Abbildung $\varphi : \Sigma \to \Lambda$ ist eine Abbildung $\varphi : E(\Sigma) \to E(\Lambda)$ so, dass für jeden Simplex $\sigma \in \Sigma$ die Menge $f(E(\sigma)) \subseteq E(\Lambda)$ einen Simplex von Λ aufspannt.

Schliesslich definieren wir simpliziale Approximationen stetiger Abbildungen.

Definition 11: Seien Σ, Λ zwei Simplizialkomplexe und $f : |\Sigma| \to |\Lambda|$ eine stetige Abbildung. Eine simpliziale Approximation von f ist eine simpliziale Abbildung $\varphi : \Sigma \to \Lambda$ mit $f(\mathrm{St}(p)) \subseteq \mathrm{St}(\varphi(p))$ für jede Ecke $p \in E(\Sigma)$.

Im Allgemeinen muss eine stetige Abbildung $f : |\Sigma| \to |\Lambda|$ leider keine simpliziale Approximation besitzen. Anschaulich ist klar, dass die Zerlegung von $|\Sigma|$ in Simplizes fein genug sein muss, damit es eine simpliziale Approximation gibt. Tatsächlich läßt sich Σ so verfeinern, dass es zumindest eine simpliziale Approximation von f auf einer Verfeinerung gibt.

Die Konstruktion von Verfeinerungen ist leider etwas aufwendig. Beginnen wir zum Beispiel einmal mit der Zerlegung eines Dreiecks, d.h. eines 2-Simplex.



Die sieben Simplizes des Simplizialkomplexes T_Δ werden in 25 neue Simplizes zerlegt. Die Ecken all dieser neuen Simplizes sind Schwerpunkte unserer ursprünglichen Simplizes. Wenn wir uns die Figur anschauen sehen wir, dass die Schwerpunkte $\widehat{\sigma}_0, \ldots, \widehat{\sigma}_k$ genau dann einen Simplex im neuen Komplex bilden, wenn die zugehörigen Simplizes sich in der Form $\sigma_0 < \ldots < \sigma_k$ anordnen lassen. Diese Beobachtung gibt Anlass zu folgender Definition:

Definition 12: Sei Σ ein Simplizialkomplex. Ein Tupel $(\sigma_0, \ldots, \sigma_k) \in \Sigma^{k+1}$ von Simplizes aus Σ heißt eine Fahne von Σ, wenn $\sigma_0 < \sigma_1 < \ldots < \sigma_k$ gilt. Die Menge aller Fahnen von Σ werde mit $F(\Sigma)$ bezeichnet.

Wir zeigen jetzt das die Schwerpunkte einer Fahne stets einen Simplex aufspannen.

Lemma 12: *Seien Σ ein Simplizialkomplex und $(\sigma_0, \ldots, \sigma_k) \in F(\Sigma)$ eine Fahne von Σ. Dann sind $\widehat{\sigma}_0, \ldots, \widehat{\sigma}_k$ affin unabhängig.*

Beweis: Wegen $E(\sigma_0) \subsetneqq E(\sigma_1) \subsetneqq \ldots \subsetneqq E(\sigma_k)$ gibt es affin unabhängige Punkte $x_0, \ldots, x_n$ und Zahlen $0 \leq i_0 < i_1 < \ldots < i_k = n$ mit $E(\sigma_j) = \{x_0, \ldots, x_{i_j}\}$ für jedes

$0 \leq j \leq k$. Für $0 \leq j \leq k$ ist damit

$$\widehat{\sigma}_j = \frac{1}{1+i_j} \sum_{t=0}^{i_j} x_t.$$

Zu zeigen ist, dass $\widehat{\sigma}_1 - \widehat{\sigma}_0, \ldots, \widehat{\sigma}_k - \widehat{\sigma}_0$ linear unabhängig sind. Nun gilt für $1 \leq j \leq k$ die Gleichung

$$\begin{aligned}
\widehat{\sigma}_j - \widehat{\sigma}_0 &= \frac{1}{1+i_j} \sum_{t=0}^{i_j} x_t - \frac{1}{1+i_0} \sum_{t=0}^{i_0} x_t \\
&= \frac{1}{1+i_j} x_0 + \frac{1}{1+i_j} \sum_{t=1}^{i_j} (x_t - x_0) + \frac{i_j}{1+i_j} x_0 \\
&\quad - \frac{1}{1+i_0} x_0 - \frac{1}{1+i_0} \sum_{t=1}^{i_0} (x_t - x_0) - \frac{i_0}{1+i_0} x_0 \\
&= \sum_{t=1}^{i_0} \left(\frac{1}{1+i_j} - \frac{1}{1+i_0} \right) (x_t - x_0) + \frac{1}{1+i_j} \sum_{t=i_0+1}^{i_j} (x_t - x_0).
\end{aligned}$$

Wegen $i_0 < i_1 < \ldots < i_k$ und da $x_1 - x_0, \ldots, x_n - x_0$ linear unabhängig sind, folgt die Behauptung.

■

Damit können wir jeder Fahne in Σ einen Simplex zuordnen. Wir wollen einsehen, dass die Menge aller dieser Simplizes einen neuen Simplizialkomplex bildet. Dieser ist die sogenannte baryzentrische Zerlegung von Σ.

Definition 13: Sei Σ ein Simplizialkomplex. Dann heißt

$$\Sigma' := \{\overline{\sigma}(\widehat{\sigma}_0, \ldots, \widehat{\sigma}_k) : (\sigma_0, \ldots, \sigma_k) \in F(\Sigma)\}$$

die baryzentrische Zerlegung von Σ.

Nach Lemma 12 besteht Σ' zumindest aus abgeschlossenen Simplizes. Weiter sind Σ und damit auch $F(\Sigma)$ endlich, d.h. auch Σ' ist endlich. Streichen wir aus einer Fahne einige aber nicht alle Einträge, so erhalten wir offenbar wieder eine Fahne, und somit enthält Σ' mit jedem Simplex auch sämtliche Seiten des Simplex. Um zu zeigen, dass Σ' ein Simplizialkomplex ist, fehlt nur noch die Schnittbedingung. Wir beginnen mit einem Spezialfall.

Lemma 13: *Sei Δ ein abgeschlossener Simplex im $\mathbb{R}^n$. Dann gelten:*

(a) *T'_Δ ist ein Simplizialkomplex mit $|T'_\Delta| = \Delta$.*

(b) *$d(T'_\Delta) \leq \frac{n}{n+1} d(\Delta)$.*

(c) *Sind $\tau \le \Delta$ eine Seite von Δ und $(\sigma_0, \ldots, \sigma_l) \in F(T_\Delta)$ eine Fahne in T_Δ, so liegt genau einer der beiden folgenden Fälle vor:*

(i) *Es ist $\sigma_j \not\le \tau$ für jedes $0 \le j \le l$ und es gilt $\overline{\sigma}(\widehat{\sigma}_0, \ldots, \widehat{\sigma}_l) \cap \tau = \emptyset$.*

(ii) *Es gibt ein $0 \le i \le l+1$ mit $\sigma_j \le \tau$ für alle $0 \le j \le i$ und $\sigma_j \not\le \tau$ für alle $0 \le j \le l$ mit $j > i$. Weiter gilt $\overline{\sigma}(\widehat{\sigma}_0, \ldots, \widehat{\sigma}_l) \cap \tau = \overline{\sigma}(\widehat{\sigma}_0, \ldots, \widehat{\sigma}_i)$.*

Beweis: Sei $E(\Delta) = \{x_0, \ldots, x_k\}$. Ist $(\sigma_0, \ldots, \sigma_t) \in F(T_\Delta)$, so ist $\widehat{\sigma}_i \in \sigma_i \subseteq \Delta$ für jedes $0 \le i \le t$, und da Δ konvex ist, ist auch $\overline{\sigma}(\widehat{\sigma}_0, \ldots, \widehat{\sigma}_t) \subseteq \Delta$. Also sind alle Elemente von T'_Δ zumindest Teilmengen von Δ.

Für $x \in \Delta$ schreiben wir $x = \sum_{i=0}^k \lambda_i(x) x_i$ mit $\lambda_0(x), \ldots, \lambda_k(x) \ge 0$ und $\sum_{i=0}^k \lambda_i(x) = 1$. Wir wollen die Elemente von T'_Δ in baryzentrischen Koordinaten beschreiben. Setze $E := \{0, \ldots, k\}$. Es bezeichne Ω die Menge aller Tupel $\omega = (J_0, \ldots, J_t)$ wobei $t(\omega) := t \ge 0$ ist und $J_0, \ldots, J_t$ nicht-leere, paarweise disjunkte Teilmengen von E sind.

Sei $\omega = (J_0, \ldots, J_t) \in \Omega$. Wir setzen $R_\omega := E \backslash \bigcup_{i=0}^t J_i \subseteq E$ und definieren

$$j_\omega : E \to \{0, \ldots, t+1\}; s \mapsto \begin{cases} i, & \text{falls } 0 \le i \le t \text{ und } s \in J_i, \\ t+1, & s \in R_\omega. \end{cases}$$

Weiter setzen wir für $0 \le i \le t$ noch $I_i^\omega := \bigcup_{j=0}^i J_j$. Dann ist $\emptyset \ne I_0^\omega \subsetneqq I_1^\omega \subsetneqq I_2^\omega \subsetneqq \ldots \subsetneqq I_t^\omega \subseteq E$. Schließlich betrachten wir die folgende Teilmenge von Δ

$$\sigma_\omega := \left\{ x \in \Delta \,\middle|\, \begin{array}{l} \forall (s, s' \in E \backslash R_\omega) : j_\omega(s) \le j_\omega(s') \Longrightarrow \lambda_{s'}(x) \le \lambda_s(x) \\ \text{und } \forall (s \in R_\omega) : \lambda_s(x) = 0 \end{array} \right\}.$$

Wir behaupten das dann

$$T'_\Delta = \{\sigma_\omega : \omega \in \Omega\}$$

ist.

Sei also $(\sigma_0, \ldots, \sigma_t) \in F(T_\Delta)$ eine Fahne. Wegen $E(\sigma_0) \subsetneqq \ldots \subsetneqq E(\sigma_t) \subseteq E(\Delta)$ finden wir Teilmengen $\emptyset \ne I_0 \subsetneqq I_1 \subsetneqq \ldots \subsetneqq I_t \subseteq E$ mit $E(\sigma_j) = \{x_s : s \in I_j\}$ für jedes $0 \le j \le t$. Setzen wir für jedes $0 \le j \le t$ jetzt $J_j := I_j \backslash I_{j-1}$, wobei $I_{-1} := \emptyset$ gesetzt ist, so ist $\omega := (J_0, \ldots, J_t) \in \Omega$ und es gilt $I_j = I_j^\omega$ für jedes $0 \le j \le t$. Weiter ist $R_\omega = E \backslash \bigcup_{j=0}^t I_j$. Ist $s \in E$ und $j \in \{0, \ldots, t\}$, so gilt genau dann $s \in I_j$ wenn $j \ge j_\omega(s)$ ist. Sind $\lambda_0, \ldots, \lambda_t \ge 0$ mit $\sum_{j=0}^t \lambda_j = 1$, so haben wir

$$\sum_{j=0}^t \lambda_j \widehat{\sigma}_j = \sum_{j=0}^t \frac{\lambda_j}{|I_j|} \sum_{s \in I_j} x_s = \sum_{s=0}^k \left(\sum_{\substack{0 \le j \le t \\ j \ge j_\omega(s)}} \frac{\lambda_j}{|I_j|} \right) x_s.$$

Setzen wir also $x := \sum_{j=0}^t \lambda_j \widehat{\sigma}_j$, so gilt wegen

$$\sum_{s=0}^k \sum_{\substack{0 \le j \le t \\ j \ge j_\omega(s)}} \frac{\lambda_j}{|I_j|} = \sum_{j=0}^t \sum_{s \in I_j} \frac{\lambda_j}{|I_j|} = \sum_{j=0}^t \lambda_j = 1$$

die Gleichung

$$\lambda_s(x) = \sum_{\substack{0\le j\le t\\ j\ge j_\omega(s)}} \frac{\lambda_j}{|I_j|}$$

für jedes $s \in E$. Ist $s \in R_\omega$, so gilt $j_\omega(s) = t+1$, also $\lambda_s(x) = 0$. Sind $s, s' \in E\backslash R_\omega$ mit $j_\omega(s) \le j_\omega(s')$, so zeigt unsere Formel $\lambda_{s'}(x) \le \lambda_s(x)$. Damit haben wir

$$\overline{\sigma}(\widehat{\sigma}_0, \dots, \widehat{\sigma}_t) \subseteq \sigma_\omega$$

eingesehen. Sei umgekehrt $x \in \sigma_\omega$ gegeben. Sei $0 \le j \le t$. Sind dann $s, s' \in J_j$, so gilt $j_\omega(s) = j = j_\omega(s')$, und es folgt $\lambda_s(x) = \lambda_{s'}(x)$. Wegen $J_j \ne \emptyset$ erhalten wir ein eindeutiges $\mu_j \ge 0$ mit $\lambda_s(x) = \mu_j$ für jedes $s \in J_j$. Dann ist $\lambda_t := |I_t|\mu_t \ge 0$ und für $0 \le j < t$ wähle $s \in J_j$, $s' \in J_{j+1}$ und erhalte wegen $j_\omega(s) = j \le j+1 = j_\omega(s')$ auch $\mu_{j+1} = \lambda_{s'}(x) \le \lambda_s(x) = \mu_j$, d.h. $\lambda_j := |I_j|(\mu_j - \mu_{j+1}) \ge 0$. Da für $s \in R_\omega$ ja $\lambda_s(x) = 0$ gilt, haben wir

$$\begin{aligned} 1 = \sum_{s=0}^{k} \lambda_s(x) &= \sum_{j=0}^{t}\sum_{s\in J_j} \lambda_s(x) = \sum_{j=0}^{t} |J_j|\mu_j \\ &= |I_0|\mu_0 + \sum_{j=1}^{t}(|I_j| - |I_{j-1}|)\mu_j = |I_0|\mu_0 + |I_t|\mu_t + \sum_{j=1}^{t-1}|I_j|(\mu_j - \mu_{j+1}) - |I_0|\mu_1 \\ &= \sum_{j=0}^{t-1}|I_j|(\mu_j - \mu_{j+1}) + |I_t|\mu_t = \sum_{j=0}^{t}\lambda_j \end{aligned}$$

und wir erhalten $y := \sum_{j=0}^{t} \lambda_j\widehat{\sigma}_j \in \overline{\sigma}(\widehat{\sigma}_0, \dots, \widehat{\sigma}_t)$. Wenden wir auf y unsere obigen Formeln an, so erhalten wir für $s \in R_\omega$ stets $\lambda_s(y) = 0 = \lambda_s(x)$ und für $s \in E\backslash R_\omega$ ist mit $\mu_{t+1} := 0$

$$\lambda_s(y) = \sum_{\substack{0\le j\le t\\ j\ge j_\omega(s)}} \frac{\lambda_j}{|I_j|} = \sum_{\substack{0\le j\le t\\ j\ge j_\omega(s)}} (\mu_j - \mu_{j+1}) = \mu_{j_\omega(s)} = \lambda_s(x).$$

Es folgt $x = y \in \overline{\sigma}(\widehat{\sigma}_0, \dots, \widehat{\sigma}_t)$. Damit ist $\overline{\sigma}(\widehat{\sigma}_0, \dots, \widehat{\sigma}_t) = \sigma_\omega$ bewiesen.

Insbesondere haben wir somit $T'_\Delta \subseteq \{\sigma_\omega : \omega \in \Omega\}$ eingesehen. Sei jetzt umgekehrt $\omega \in \Omega$ gegeben. Sei $\omega = (J_0, \dots, J_t)$ und setze $I_i := I_i^\omega$ für $0 \le i \le t$. Wegen $\emptyset \ne I_0 \subsetneqq \dots \subsetneqq I_t \subseteq E$ erhalten wir eine Fahne $(\sigma_0, \dots, \sigma_t) \in F(T_\Delta)$ mit $E(\sigma_i) = \{x_j : j \in I_i\}$ für jedes $0 \le i \le t$. Da $J_0 = I_0$ und $J_i = I_i\backslash I_{i-1}$ für $1 \le i \le t$ gelten, liefert unsere eben durchgeführte Rechnung

$$\sigma_\omega = \overline{\sigma}(\widehat{\sigma}_0, \dots, \widehat{\sigma}_t) \in T'_\Delta,$$

und damit haben wir unsere Zwischenbehauptung eingesehen.

(a) Wir zeigen zunächst das $\Delta = \bigcup T'_\Delta$ ist. Sei $x \in \Delta$ gegeben. Schreibe $E = \{s_0, \ldots, s_k\}$ mit
$$\lambda_{s_0}(x) \geq \lambda_{s_1}(x) \geq \ldots \geq \lambda_{s_k}(x).$$
Dann ist $\omega := (\{s_0\}, \{s_1\}, \ldots, \{s_k\}) \in \Omega$ mit $R_\omega = \emptyset$ und es gilt $j_\omega(s_i) = i$ für jedes $0 \leq i \leq k$, und nach Definition von σ_ω ist
$$x \in \sigma_\omega \in T'_\Delta.$$
Wir kommen zum Hauptproblem; dem Nachweis der Durchschnittsbedingung. Seien $\omega', \omega'' \in \Omega$. Wir definieren folgendermaßen eine Relation $\lhd$ auf der Menge E. Sind $s, s' \in E$, so ist genau dann $s \lhd s'$, wenn es $r \in \mathbb{N}$ und $s_1, \ldots, s_r \in E$ mit $s_1 = s$, $s_r = s'$ gibt so, dass für jedes $i \in \mathbb{N}$ gilt $j_{\omega'}(s_{2i-i}) \leq j_{\omega'}(s_{2i})$ falls $2i \leq r$ und $j_{\omega''}(s_{2i}) \leq j_{\omega''}(s_{2i+1})$ falls $2i+1 \leq r$. Es soll also $j_{\omega'}(s_1) \leq j_{\omega'}(s_2)$, $j_{\omega''}(s_2) \leq j_{\omega''}(s_3)$, $j_{\omega'}(s_3) \leq j_{\omega'}(s_4)$ und so weiter gelten. Mit $r = 1$, $s_1 = s$ sehen wir $s \lhd s$ für jedes $s \in E$. Sind $s, s', s'' \in E$ mit $s \lhd s'$ und $s' \lhd s''$ so folgt durch Aneinandersetzen sofort $s \lhd s''$ (falls die erste Sequenz mit einer $j_{\omega'}$ Ungleichung endet, so fügen wir zusätzlich eine triviale $j_{\omega''}$ Ungleichung hinzu). Also ist $\lhd$ eine reflexive und transitive Relation. Sind $s, s' \in E$, so ist $j_{\omega'}(s) \leq j_{\omega'}(s')$ oder $j_{\omega'}(s') \leq j_{\omega'}(s)$, also auch $s \lhd s'$ oder $s' \lhd s$. Es wird durch
$$s \sim s' :\Longleftrightarrow s \lhd s' \text{ und } s' \lhd s \quad (s, s' \in E)$$
eine Äquivalenzrelation auf E definiert. Weiter ist
$$A < B :\Longleftrightarrow \forall (a \in A) \forall (b \in B) : a \lhd b \quad (A, B \in E/\sim)$$
eine totale Ordnung auf der Menge $E/\sim$ der Äquivalenzklassen. Ist $s \in R_{\omega'} \cup R_{\omega''}$, so gilt offenbar $s' \lhd s$ für jedes $s' \in E$, und insbesondere ist $s \sim s'$ für $s, s' \in R_{\omega'} \cup R_{\omega''}$. Ist $R_{\omega'} = R_{\omega''} = \emptyset$, so setzen wir $R := \emptyset$, und andernfalls sei R die Äquivalenzklasse von $\sim$ mit $R_{\omega'} \cup R_{\omega''} \subseteq R$. In jedem Fall ist $E \backslash R$ eine Vereinigung von Äquivalenzklassen von $\sim$. Sei M die Menge der in $E \backslash R$ enthaltenen Äquivalenzklassen von $\sim$.

Wir zeigen jetzt, dass für $s \in R$, $x \in \sigma_{\omega'} \cap \sigma_{\omega''}$ stets $\lambda_s(x) = 0$ ist. Seien also $x \in \sigma_{\omega'} \cap \sigma_{\omega''}$ und $s \in R$ gegeben. Dann ist $s \sim u$ für ein $u \in R_{\omega'} \cup R_{\omega''}$. Wir betrachten hier den Fall $u \in R_{\omega'}$; der andere Fall ist analog. Wir haben $u \lhd s$, also existieren $s_1, \ldots, s_r \in E$ mit $s_1 = u$, $s_r = s$ und $j_{\omega'}(s_{2i-1}) \leq j_{\omega'}(s_{2i})$ für $i \in \mathbb{N}$ mit $2i \leq r$ sowie $j_{\omega''}(s_{2i}) \leq j_{\omega''}(s_{2i+1})$ für $i \in \mathbb{N}$ mit $2i+1 \leq r$. Wegen $s_1 = u \in R_{\omega'}$ und $x \in \sigma_{\omega'}$ ist $\lambda_{s_1}(x) = 0$. Sei jetzt $1 \leq j < r$ mit $\lambda_{s_j}(x) = 0$. Ist j ungerade, so schreiben wir $2i = j+1 \leq r$ und haben $2i - 1 = j$, also $j_{\omega'}(s_j) \leq j_{\omega'}(s_{j+1})$, und wegen $x \in \sigma_{\omega'}$ folgt $0 \leq \lambda_{s_{j+1}}(x) \leq \lambda_{s_j}(x) = 0$, d.h. $\lambda_{s_{j+1}}(x) = 0$. Ist j gerade, so schreiben wir $j = 2i$ und haben $2i+1 = j+1 \leq r$. Wegen $x \in \sigma_{\omega''}$ und $j_{\omega''}(s_j) \leq j_{\omega''}(s_{j+1})$ ist dann $0 \leq \lambda_{s_{j+1}}(x) \leq \lambda_{s_j}(x) = 0$, d.h. $\lambda_{s_{j+1}}(x) = 0$. Per Induktion folgt jetzt $\lambda_{s_j}(x) = 0$ für alle $1 \leq j \leq r$ und insbesondere ist $\lambda_s(x) = \lambda_{s_r}(x) = 0$.

Wir unterscheiden zwei verschiedene Fälle.

Fall $R = E$: Dann haben wir eben $\lambda_s(x) = 0$ für alle $s \in E$, $x \in \sigma_{\omega'} \cap \sigma_{\omega''}$ gesehen, d.h. es ist $\sigma_{\omega'} \cap \sigma_{\omega''} = \emptyset$.

Fall $R \neq E$: Dann ist $M \neq \emptyset$, und wir setzen $t := |M| - 1 \geq 0$ und schreiben $M = \{J_0, \ldots, J_t\}$ mit $J_0 < J_1 < \ldots < J_t$. Wegen $\bigcup_{i=0}^t J_i = E \backslash R$ ist dann $\omega := (J_0, \ldots, J_t) \in \Omega$ mit $R_\omega = R$. Wir wollen jetzt $\sigma_{\omega'} \cap \sigma_{\omega''} = \sigma_\omega$ zeigen.
"'$\subseteq$"' Sei $x \in \sigma_{\omega'} \cap \sigma_{\omega''}$ gegeben. Für $s \in R_\omega = R$ wissen wir bereits $\lambda_s(x) = 0$. Jetzt seien $s, s' \in E \backslash R$ mit $j_\omega(s) \leq j_\omega(s')$. Nach Konstruktion gilt dann $s \lhd s'$, also existieren $s_1, \ldots, s_r \in E$ mit $s_1 = s$, $s_r = s'$ und $j_{\omega'}(s_{2i-1}) \leq j_{\omega'}(s_{2i})$ für $i \in \mathbb{N}$ mit $2i \leq r$ und $j_{\omega''}(s_{2i}) \leq j_{\omega''}(s_{2i+1})$ für $i \in \mathbb{N}$ mit $2i + 1 \leq r$. Dann ist sicherlich $\lambda_{s_1}(x) \leq \lambda_s(x)$, da $s = s_1$ ist. Jetzt sei $1 \leq j < r$ und es gelte $\lambda_{s_j}(x) \leq \lambda_s(x)$. Ist dann j ungerade, so schreibe $2i = j + 1 \leq r$ also $2i - 1 = j$ und $j_{\omega'}(s_j) \leq j_{\omega'}(s_{j+1})$ sowie $x \in \sigma_{\omega'}$ implizieren $\lambda_{s_{j+1}}(x) \leq \lambda_{s_j}(x) \leq \lambda_s(x)$. Ist j gerade, so schreibe $j = 2i$ und es ist $2i + 1 = j + 1 \leq r$ also $j_{\omega''}(s_j) \leq j_{\omega''}(s_{j+1})$ und wegen $x \in \sigma_{\omega''}$ folgt $\lambda_{s_{j+1}}(x) \leq \lambda_{s_j}(x) \leq \lambda_s(x)$. Per Induktion folgt $\lambda_{s_j}(x) \leq \lambda_s(x)$ für jedes $1 \leq j \leq r$ und insbesondere ist $\lambda_{s'}(x) = \lambda_{s_r}(x) \leq \lambda_s(x)$. Damit haben wir $x \in \sigma_\omega$ eingesehen.
"'$\supseteq$"' Jetzt sei umgekehrt $x \in \sigma_\omega$ vorausgesetzt. Ist $s \in R_{\omega'} \subseteq R$, so gilt $\lambda_s(x) = 0$. Nun seien $s, s' \in E \backslash R_{\omega'}$ mit $j_{\omega'}(s) \leq j_{\omega'}(s')$ gegeben. Dann gilt insbesondere $s \lhd s'$. Ist $\lambda_{s'}(x) = 0$, so gilt offenbar $\lambda_{s'}(x) \leq \lambda_s(x)$. Nun nehmen wir $\lambda_{s'}(x) > 0$ an. Insbesondere ist damit $s' \notin R$. Wäre $s \in R$, so existiert $s'' \in R_{\omega'} \cup R_{\omega''}$ mit $s \sim s''$. Wir wissen bereits das auch $s' \lhd s''$ ist und $s \sim s''$ besagt insbesondere $s'' \lhd s$. Also ist auch $s' \lhd s$ und somit $s \sim s'$, d.h. $s' \in R$ und $\lambda_{s'}(x) = 0$; ein Widerspruch. Also ist $s \notin R$. Es folgt $j_\omega(s) \leq j_\omega(s')$, und $x \in \sigma_\omega$ impliziert $\lambda_{s'}(x) \leq \lambda_s(x)$. Damit haben wir $x \in \sigma_{\omega'}$ gezeigt. Analog folgt auch $x \in \sigma_{\omega''}$.

Also ist tatsächlich $\sigma_{\omega'} \cap \sigma_{\omega''} = \sigma_\omega$. Es bleibt zum Nachweis der Durchschnittsbedingung also nur noch einzusehen, dass σ_ω eine Seite von $\sigma_{\omega'}$ und $\sigma_{\omega''}$ ist. Sei $\omega' = (J'_0, \ldots, J'_{t'})$. Sei $0 \leq i \leq t'$. Sind $s, s' \in J'_i$, so gilt $j_{\omega'}(s) = j_{\omega'}(s') = i$, also auch $s \sim s'$. Also gilt $J'_i \subseteq R$ oder $J'_i \subseteq J_{q(i)}$ für ein $0 \leq q(i) \leq t$. Seien $0 \leq i \leq j \leq t'$ und $A, B \in E/\sim$ mit $J'_i \subseteq A$, $J'_j \subseteq B$. Wähle $s \in J'_i$, $s' \in J'_j$. Dann ist $j_{\omega'}(s) = i \leq j = j_{\omega'}(s')$, also insbesondere $s \lhd s'$ und $A \leq B$. Ist $R \neq \emptyset$, so ist R wie gesehen maximal in $E/\sim$, also existiert ein $0 \leq p \leq t'+1$ mit $J'_i \subseteq R$ für $0 \leq j \leq t'$ mit $j \geq p$ und für $0 \leq i \leq j < p$ ist $J'_i, J'_j \not\subseteq R$ und $q(i) \leq q(j)$. Wegen $R \neq E$ und $R_{\omega'} \subseteq R$ ist $p \geq 1$. Ist für $0 \leq j \leq t'$ die Seite σ_j von Δ definiert durch $E(\sigma_j) = \{x_i : i \in I_j^{\omega'}\}$, so ist $(\sigma_0, \ldots, \sigma_{t'}) \in F(T_\Delta)$ mit $\sigma_{\omega'} = \overline{\sigma}(\widehat{\sigma}_0, \ldots, \widehat{\sigma}_{t'})$. Ist $0 \leq j \leq t$, so wähle ein $s \in J_j$. Wegen $s \notin R$ ist $s \notin R_{\omega'}$, also existiert ein $0 \leq i \leq t'$ mit $s \in J'_i$. Es folgt $i < p$ und $q(i) = j$. Also ist $q(\{0, \ldots, p-1\}) = \{0, \ldots, t\}$. Definieren wir also für $0 \leq j \leq t$ die Zahl

$$w(j) := \max q^{-1}(j),$$

so gilt $q(w(j)) = j$, und da q monoton ist folgt $w(j) < w(j+1)$ für $0 \leq j < t$. Damit folgt für $0 \leq j \leq t$ stets $I_j^\omega = I_{w(j)}^{\omega'}$ und dies ergibt

$$E(\sigma_\omega) = \{\widehat{\sigma}_{w(j)} : 0 \leq j \leq t\} \subseteq E(\sigma_{\omega'}),$$

d.h. $\sigma_\omega \leq \sigma_{\omega'}$. Analog ergibt sich $\sigma_\omega \leq \sigma_{\omega''}$. Dies beendet den Fall $R \neq E$.
(b) Nach Lemma 5.(c) müssen wir für je zwei Seiten $\sigma, \tau \leq \Delta$ mit $\tau \leq \sigma$ zeigen, dass $||\widehat{\sigma} - \widehat{\tau}|| \leq (n/(n+1))d(\Delta)$ ist. Seien also $\tau \leq \sigma \leq \Delta$ gegeben. Wir schreiben $E(\Delta) =$

$\{x_0, \ldots, x_k\}$ mit $E(\tau) = \{x_0, \ldots, x_p\}$ und $E(\sigma) = \{x_0, \ldots, x_q\}$ mit $0 \leq p \leq q \leq k$. Dann haben wir

$$\begin{aligned}
||\widehat{\sigma} - \widehat{\tau}|| &= \left|\left|\frac{1}{q+1}\sum_{i=0}^{q} x_i - \frac{1}{p+1}\sum_{i=0}^{p} x_i\right|\right| \\
&= \frac{1}{(p+1)(q+1)}\left|\left|(p+1)\sum_{i=0}^{q} x_i - (q+1)\sum_{i=0}^{p} x_i\right|\right| \\
&= \frac{1}{(p+1)(q+1)}\left|\left|\sum_{i=p+1}^{q}(p+1)x_i - \sum_{i=0}^{p}(q-p)x_i\right|\right| \\
&= \frac{1}{(p+1)(q+1)}\left|\left|\sum_{j=0}^{p}\sum_{i=p+1}^{q} x_i - \sum_{i=0}^{p}\sum_{j=p+1}^{q} x_i\right|\right| \\
&= \frac{1}{(p+1)(q+1)}\left|\left|\sum_{j=0}^{p}\sum_{i=p+1}^{q} (x_i - x_j)\right|\right| \\
&\leq \frac{1}{(p+1)(q+1)}\sum_{i=0}^{p}\sum_{j=p+1}^{q} ||x_i - x_j|| \\
&\leq \frac{(p+1)(q-p)}{(p+1)(q+1)} d(\Delta) \\
&\leq \frac{q}{q+1} d(\Delta) \\
&\leq \frac{n}{n+1} d(\Delta).
\end{aligned}$$

(c) Es ist $E(\tau) \subseteq E(\Delta)$, und wir definieren $T \subseteq E$ durch $E(\tau) = \{x_s : s \in T\}$. Sei wieder $\omega \in \Omega$ mit $E(\sigma_j) = \{x_s : s \in I_j^\omega\}$ für jedes $0 \leq j \leq l = t(\omega)$. Dann ist $\overline{\sigma}(\widehat{\sigma}_0, \ldots, \widehat{\sigma}_l) = \sigma_\omega$. Weiter ist $\tau = \{x \in \Delta | \forall (s \in E \backslash T) : \lambda_s(x) = 0\}$. Ist $0 \leq i \leq l$ mit $\sigma_i \leq \tau$, so gilt auch $\sigma_j \leq \tau$ für jedes $0 \leq j \leq i$. Also existiert ein $-1 \leq i \leq l$ mit $\sigma_j \leq \tau$ für $0 \leq j \leq l$ mit $j \leq i$ und $\sigma_j \not\leq \tau$ für $0 \leq j \leq l$ mit $j > i$. Schreibe $\omega = (J_0, \ldots, J_l)$ und setze $J^* := \bigcup\{J_j : 0 \leq j \leq l, j > i\} \subseteq E \backslash R_\omega$. Wir zeigen jetzt

$$\overline{\sigma}(\widehat{\sigma}_0, \ldots, \widehat{\sigma}_l) \cap \tau = \{x \in \sigma_\omega | \forall (s \in J^*) : \lambda_s(x) = 0\}.$$

Sei also $x \in \overline{\sigma}(\widehat{\sigma}_0, \ldots, \widehat{\sigma}_l) \cap \tau$ gegeben. Dann ist $x \in \sigma_\omega$. Sei $s \in J^*$. Dann existiert ein $0 \leq j \leq l$ mit $j > i$ und $s \in J_j$. Wegen $j > i$ ist $\sigma_j \not\leq \tau$, also $E(\sigma_j) \not\subseteq E(\tau)$ und somit $I_j^\omega \not\subseteq T$. Also existieren ein $0 \leq w \leq j$ und ein $s' \in J_w$ mit $s' \notin T$. Wegen $x \in \tau$ folgt $\lambda_{s'}(x) = 0$ und $j_\omega(s') = w \leq j = j_\omega(s)$ ergibt $0 \leq \lambda_s(x) \leq \lambda_{s'}(x) = 0$, d.h. es ist tatsächlich $\lambda_s(x) = 0$.

Jetzt sei umgekehrt $x \in \sigma_\omega = \overline{\sigma}(\widehat{\sigma}_0, \ldots, \widehat{\sigma}_l)$ mit $\lambda_s(x) = 0$ für alle $s \in J^*$. Zu zeigen ist $x \in \tau$. Sei also $s \in E \backslash T$. Dann müssen wir $\lambda_s(x) = 0$ einsehen. Ist $s \in R_\omega$, so gilt $\lambda_s(x) = 0$ wegen $x \in \sigma_\omega$. Jetzt sei $s \notin R_\omega$, also $s \in J_j$ für ein $0 \leq j \leq l$. Wäre $j \leq i$, so $\sigma_j \leq \tau$, also $E(\sigma_j) \subseteq E(\tau)$ und $s \in J_j \subseteq I_j^\omega \subseteq T$; ein Widerspruch. Also ist $j > i$ und

somit $s \in J^*$ und $\lambda_s(x) = 0$. Damit ist diese Identität bewiesen. Jetzt unterscheiden wir zwei Fälle.
Fall $i = -1$: Zunächst ist $\sigma_j \not\leq \tau$ für jedes $0 \leq j \leq l$. Weiter ist $J^* = E\backslash R_\omega$, und es folgt sofort $\overline{\sigma}(\widehat{\sigma}_0, \ldots, \widehat{\sigma}_l) \cap \tau = \{x \in \sigma_\omega | \forall (s \in J^*) : \lambda_s(x)\} = \emptyset$.
Fall $i \geq 0$: Ist $\omega' := (J_0, \ldots, J_i)$, so gilt $\omega' \in \Omega$ und $\overline{\sigma}(\widehat{\sigma}_0, \ldots, \widehat{\sigma}_i) = \sigma_{\omega'}$. Nun ist $R_{\omega'} = R_\omega \cup J^*$ und $j_{\omega'}(s) = j_\omega(s)$ für $s \in E\backslash R_{\omega'}$, und somit folgt

$$\begin{aligned}
\overline{\sigma}(\widehat{\sigma}_0, \ldots, \widehat{\sigma}_l) \cap \tau &= \{x \in \sigma_\omega | \forall (s \in J^*) : \lambda_s(x) = 0\} \\
&= \sigma_{\omega'} \\
&= \overline{\sigma}(\widehat{\sigma}_0, \ldots, \widehat{\sigma}_i).
\end{aligned}$$

■

Damit ist der wesentliche Schritt zum Beweis das Σ' stets ein Simplizialkomplex ist erledigt. Bevor wir diesen Satz beweisen formulieren wir noch ein weiteres Hilfslemma, das die Aussage (c) unseres eben bewiesenen Lemmas etwas verallgemeinert.

Lemma 14: *Seien Σ ein Simplizialkomplex, $\tau \in \Sigma$ und $(\sigma_0, \ldots, \sigma_t) \in F(\Sigma)$. Dann tritt genau einer der beiden folgenden Fälle auf:*

(a) *Es ist $\sigma_j \not\leq \tau$ für jedes $0 \leq j \leq t$ und $\overline{\sigma}(\widehat{\sigma}_0, \ldots, \widehat{\sigma}_t) \cap \tau = \emptyset$.*

(b) *Es gibt ein $0 \leq i \leq t$ so, dass $\sigma_j \leq \tau$ für $0 \leq j \leq i$ und $\sigma_j \not\leq \tau$ für $i < j \leq t$ gilt. Weiter ist*

$$\overline{\sigma}(\widehat{\sigma}_0, \ldots, \widehat{\sigma}_t) \cap \tau = \overline{\sigma}(\widehat{\sigma}_0, \ldots, \widehat{\sigma}_i).$$

Beweis: Für jedes $0 \leq j \leq t$ gilt $\widehat{\sigma}_j \in \sigma_j \subseteq \sigma_t$, und somit ist auch $\overline{\sigma}(\widehat{\sigma}_0, \ldots, \widehat{\sigma}_t) \subseteq \sigma_t$. Ist $\sigma_t \cap \tau = \emptyset$, so folgt $\sigma_j \not\leq \tau$ für jedes $0 \leq j \leq t$ und $\overline{\sigma}(\widehat{\sigma}_0, \ldots, \widehat{\sigma}_t) \cap \tau = \emptyset$.

Jetzt gelte $\sigma_t \cap \tau \neq \emptyset$. Da Σ ein Simplizialkomplex ist, ist $\sigma_t \cap \tau$ eine Seite von σ_t. Ist $0 \leq j \leq t$, so ist

$$\sigma_j \leq \tau \iff \sigma_j \subseteq \tau \iff \sigma_j \subseteq \sigma_t \cap \tau \iff \sigma_j \leq \sigma_t \cap \tau$$

und

$$\overline{\sigma}(\widehat{\sigma}_0, \ldots, \widehat{\sigma}_t) \cap \tau = \overline{\sigma}(\widehat{\sigma}_0, \ldots, \widehat{\sigma}_t) \cap (\sigma_t \cap \tau),$$

da Σ ein Simplizialkomplex ist. Wegen $(\sigma_0, \ldots, \sigma_t) \in F(T_{\sigma_t})$ ergibt Lemma 13.(c) die Behauptung.

■

Jetzt können wir den Hauptsatz über die baryzentrische Zerlegung beweisen.

Satz 15: *Sei Σ ein Simplizialkomplex im $\mathbb{R}^n$. Dann ist Σ' ein Simplizialkomplex mit $|\Sigma'| = |\Sigma|$ und*

$$d(\Sigma') \leq \frac{n}{n+1} d(\Sigma).$$

Beweis: Wir wissen bereits das Σ' eine endliche Menge abgeschlossener Simplizes im $\mathbb{R}^n$ ist, die mit jedem Simplex auch dessen Seiten entält. Seien $\eta, \eta' \in \Sigma'$ gegeben. Es gibt Fahnen $(\sigma_0, \dots, \sigma_t)$, $(\sigma'_0, \dots, \sigma'_{t'}) \in F(\Sigma)$ mit $\eta = \overline{\sigma}(\widehat{\sigma}_0, \dots, \widehat{\sigma}_t)$ und $\eta' = \overline{\sigma}(\widehat{\sigma}'_0, \dots, \widehat{\sigma}'_{t'})$. Nach Lemma 13.(a) ist $\eta \subseteq \sigma_t$ und $\eta' \subseteq \sigma'_{t'}$. Ist also $\sigma_t \cap \sigma'_{t'} = \emptyset$, so ist auch $\eta \cap \eta' = \emptyset$. Jetzt sei $\sigma_t \cap \sigma'_{t'} \neq \emptyset$ vorausgesetzt. Da Σ ein Simplizialkomplex ist, ist $\tau := \sigma_t \cap \sigma'_{t'}$ eine Seite von σ_t und $\sigma'_{t'}$. Wegen $\eta \cap \eta' \subseteq \sigma_t \cap \sigma'_{t'} = \tau$ folgt

$$\eta \cap \eta' = (\eta \cap \tau) \cap (\eta' \cap \tau).$$

Ist $\eta \cap \tau = \emptyset$ oder $\eta' \cap \tau = \emptyset$, so folgt damit $\eta \cap \eta' = \emptyset$. Andernfalls existieren nach Lemma 14 Indizes $0 \le i \le t$ und $0 \le i' \le t'$ mit $\sigma_j \le \tau$ für $0 \le j \le i$, $\sigma_j \not\le \tau$ für $i < j \le t$, $\sigma'_j \le \tau$ für $0 \le j \le i'$ und $\sigma'_j \not\le \tau$ für $i' < j \le t'$, und es gelten

$$\begin{aligned} \eta \cap \tau &= \overline{\sigma}(\widehat{\sigma}_0, \dots, \widehat{\sigma}_i), \\ \eta' \cap \tau &= \overline{\sigma}(\widehat{\sigma}'_0, \dots, \widehat{\sigma}'_{i'}). \end{aligned}$$

Insbesondere ist

$$\eta \cap \eta' = \overline{\sigma}(\widehat{\sigma}_0, \dots, \widehat{\sigma}_i) \cap \overline{\sigma}(\widehat{\sigma}'_0, \dots, \widehat{\sigma}'_{i'}).$$

Nun ist $(\sigma_0, \dots, \sigma_i), (\sigma'_0, \dots, \sigma'_{i'}) \in F(T_\tau)$ also, $\overline{\sigma}(\widehat{\sigma}_0, \dots, \widehat{\sigma}_i)$, $\overline{\sigma}(\widehat{\sigma}'_0, \dots, \widehat{\sigma}'_{i'}) \in T'_\tau$, und nach Lemma 13.(a) ist T'_τ ein Simplizialkomplex, also ist $\eta \cap \eta' = \emptyset$ oder $\eta \cap \eta'$ ist eine Seite von $\overline{\sigma}(\widehat{\sigma}_0, \dots, \widehat{\sigma}_i)$ und $\overline{\sigma}(\widehat{\sigma}'_0, \dots, \widehat{\sigma}'_{i'})$. Wegen $\overline{\sigma}(\widehat{\sigma}_0, \dots, \widehat{\sigma}_i) \le \eta$ und $\overline{\sigma}(\widehat{\sigma}'_0, \dots, \widehat{\sigma}'_{i'}) \le \eta'$ ist somit $\eta \cap \eta' = \emptyset$ oder $\eta \cap \eta'$ ist eine Seite von η und η'. Also ist Σ' tatsächlich ein Simplizialkomplex.

Ist $\eta \in \Sigma'$, so existiert $(\sigma_0, \dots, \sigma_t) \in F(\Sigma)$ mit $\eta = \overline{\sigma}(\widehat{\sigma}_0, \dots, \widehat{\sigma}_t)$, also ist auch $\eta \in T'_{\sigma_t}$ und Lemma 13.(a) ergibt $\eta \subseteq \sigma_t \subseteq |\Sigma|$. Weiter folgt mit Lemma 13.(b)

$$d(\eta) \le d(T'_{\sigma_t}) \le \frac{n}{n+1} d(\sigma_t) \le \frac{n}{n+1} d(\Sigma).$$

Damit haben wir $|\Sigma'| \subseteq |\Sigma|$ und $d(\Sigma') \le (n/(n+1)) d(\Sigma)$.

Sei jetzt $x \in |\Sigma|$. Es existiert $\sigma \in \Sigma$ mit $x \in \sigma$. Nach Lemma 13.(a) existiert $\eta \in T'_\sigma$ mit $x \in \eta$. Wegen $T_\sigma \subseteq \Sigma$ ist auch $F(T_\sigma) \subseteq F(\Sigma)$ und somit auch $T'_\sigma \subseteq \Sigma'$. Also ist $\eta \in \Sigma'$ und $x \in |\Sigma'|$. Damit haben wir auch $|\Sigma| \subseteq |\Sigma'|$ und $|\Sigma| = |\Sigma'|$ ist gezeigt.

∎

Wir wollen jetzt noch einsehen, dass die Bildung der baryzentrischen Zerlegung sich gut mit Unterkomplexen verträgt.

Definition 14: Sei Σ ein Simplizialkomplex. Ein Simplizialkomplex Λ heißt Unterkomplex von Σ wenn $\Lambda \subseteq \Sigma$ gilt. Offenbar ist eine Teilmenge von Σ genau dann ein Unterkomplex, wenn sie mit jedem Simplex auch alle Seiten des Simplex enthält.

Zum Beispiel ist der Komplex Λ_Δ aus Lemma 6 ein Unterkomplex des Komplexes T_Δ, wenn Δ ein n-Simplex im $\mathbb{R}^n$ ist. Ist Σ ein Simplizialkomplex und $\Delta \in \Sigma$, so ist auch $T_\Delta \subseteq \Sigma$ ein Unterkomplex von Σ.

Sind Σ ein Simplizialkomplex und Λ ein Unterkomplex von Σ, so gilt offenbar $\mathrm{tr}_\Lambda(x) = \mathrm{tr}_\Sigma(x)$ für jedes $x \in |\Lambda|$, denn ist $x \in |\Lambda|$ so existiert ein $\lambda \in \Lambda$ mit $x \in \lambda$ und die Minimalität des Trägers ergibt $\mathrm{tr}_\Sigma(x) \leq \lambda$, also ist $\mathrm{tr}_\Sigma(x) \in \Lambda$ und damit auch $\mathrm{tr}_\Lambda(x) = \mathrm{tr}_\Sigma(x)$.

Lemma 16: *Seien Σ ein Simplizialkomplex und Λ ein Unterkomplex von Σ. Dann ist auch Λ' ein Unterkomplex von Σ', und es gilt*

$$\Lambda' = \{\sigma \in \Sigma' : \sigma \subseteq |\Lambda|\}.$$

Beweis: Wegen $\Lambda \subseteq \Sigma$ ist auch $F(\Lambda) \subseteq F(\Sigma)$, und dies ergibt $\Lambda' \subseteq \Sigma'$. Ist $\sigma \in \Lambda'$, so gilt damit $\sigma \in \Sigma'$ und $\sigma \subseteq |\Lambda'| = |\Lambda|$.

Jetzt sei umgekehrt $\sigma \in \Sigma'$ mit $\sigma \subseteq |\Lambda|$ gegeben. Dann ist $\widehat{\sigma} \in \sigma \subseteq |\Lambda| = |\Lambda'|$, also existiert ein $\lambda \in \Lambda' \subseteq \Sigma'$ mit $\widehat{\sigma} \in \lambda$. Insbesondere ist $\sigma \cap \lambda \neq \emptyset$, und da Σ' ein Simplizialkomplex ist, ist $\sigma \cap \lambda$ eine gemeinsame Seite von σ und λ. Wegen $\widehat{\sigma} \in \sigma \cap \lambda \leq \sigma$ ergibt Lemma 10 die Identität $\sigma = \sigma \cap \lambda \leq \lambda \in \Lambda'$, und damit ist auch $\sigma \in \Lambda'$.

■

Wir hatten bereits festgehalten, dass die baryzentrische Zerlegung benutzt werden soll, um stetige Abbildungen durch simpliziale Abbildungen zu approximieren. Anschaulich ist klar, dass wir hierfür die Konstruktion der baryzentrischen Zerlegung iterieren müssen. Wir werden gleich zeigen, dass dies dann tatsächlich zum Erfolg führt.

Definition 15: Sei Σ ein Simplizialkomplex. Wir definieren $\Sigma^{(0)} := \Sigma$ und für $r \geq 0$ setzen wir $\Sigma^{(r+1)} := (\Sigma^{(r)})'$.

Ist Σ ein Simplizialkomplex im $\mathbb{R}^n$, so folgt durch Induktion aus Satz 15 sofort, dass für jedes $r \geq 0$ die Menge $\Sigma^{(r)}$ ein Simplizialkomplex mit $|\Sigma^{(r)}| = |\Sigma|$ und

$$d\left(\Sigma^{(r)}\right) \leq \left(\frac{n}{n+1}\right)^r d(\Sigma)$$

ist. Ist Λ ein Unterkomplex von Σ, so ergibt Lemma 16 durch Induktion das $\Lambda^{(r)}$ ein Unterkomplex von $\Sigma^{(r)}$ ist, und das

$$\Lambda^{(r)} = \{\sigma \in \Sigma^{(r)} : \sigma \subseteq |\Lambda|\}$$

gilt. Weiter ist jedes Simplex von Σ' in einem Simplex von Σ enthalten, und per Induktion folgt sofort, das auch jedes Simplex aus $\Sigma^{(r)}$ in einem Simplex aus Σ enthalten ist. Wir kommen jetzt zur Existenz simplizialer Approximationen.

Satz 17: *Seien Σ ein Simplizialkomplex im $\mathbb{R}^n$ und Λ ein weiterer Simplizialkomplex. Sei $f : |\Sigma| \to |\Lambda|$ eine stetige Abbildung. Dann existiert ein $R \in \mathbb{N}$ so, dass für jedes $r \geq R$ eine simpliziale Approximation $\varphi : \Sigma^{(r)} \to \Lambda$ von $f : |\Sigma^{(r)}| = |\Sigma| \to |\Lambda|$ existiert.*

Beweis: Nach Lemma 9 ist die Menge $\{\mathrm{St}_\Lambda(p) : p \in E(\Lambda)\}$ eine offene Überdeckung von $|\Lambda|$. Da die Abbildung f stetig ist, ist

$$\left\{f^{-1}\left(\mathrm{St}_\Lambda(p)\right) : p \in E(\Lambda)\right\}$$

eine offene Überdeckung von $|\Sigma|$. Nun ist $|\Sigma|$ mit der vom $\mathbb{R}^n$ induzierten Metrik ein kompakter metrischer Raum, und nach dem Lebesgue-Lemma existiert ein $\epsilon > 0$ so, dass für jede Teilmenge $A \subseteq |\Sigma|$ mit $d(A) < \epsilon$ ein $p \in E(\Lambda)$ mit $A \subseteq f^{-1}(\mathrm{St}_\Lambda(p))$ existiert. Wähle $R \in \mathbb{N}$ mit

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^R d(\Sigma) < \frac{\epsilon}{2}.$$

Sei jetzt $r \geq R$ gegeben. Sei $p \in E(\Sigma^{(r)})$. Nach Lemma 9 gilt

$$d\left(\mathrm{St}_{\Sigma^{(r)}}(p)\right) \leq 2d\left(\Sigma^{(r)}\right) \leq 2\left(\frac{n}{n+1}\right)^r d(\Sigma) < \epsilon,$$

und somit existiert ein $\varphi(p) \in E(\Lambda)$ mit

$$\mathrm{St}_{\Sigma^{(r)}}(p) \subseteq f^{-1}\left(\mathrm{St}_\Lambda(\varphi(p))\right), \quad \text{d.h.} \quad f\left(\mathrm{St}_{\Sigma^{(r)}}(p)\right) \subseteq \mathrm{St}_\Lambda(\varphi(p)).$$

Damit haben wir eine Abbildung $\varphi : E(\Sigma^{(r)}) \to E(\Lambda)$ definiert. Wir zeigen jetzt, dass $\varphi : \Sigma^{(r)} \to \Lambda$ eine simpliziale Abbildung ist. Sei also $\sigma \in \Sigma^{(r)}$ gegeben. Nach Lemma 11.(b) ist $\bigcap_{p\in E(\sigma)} \mathrm{St}_{\Sigma^{(r)}}(p) \neq \emptyset$, und es folgt

$$\bigcap_{q\in\varphi(E(\sigma))} \mathrm{St}_\Lambda(q) = \bigcap_{p\in E(\sigma)} \mathrm{St}_\Lambda(\varphi(p)) \supseteq \bigcap_{p\in E(\sigma)} f\left(\mathrm{St}_{\Sigma^{(r)}}(p)\right) \supseteq f\left(\bigcap_{p\in E(\sigma)} \mathrm{St}_{\Sigma^{(r)}}(p)\right) \neq \emptyset.$$

Nach Lemma 11.(b) spannt $\varphi(E(\sigma))$ ein Simplex in Λ auf. Also ist φ tatsächlich eine simpliziale Abbildung. Dass φ eine simpliziale Approximation von f ist, ist nach der Definition von φ klar.

■

Nun können wir uns unserem Ziel nähern, d.h. zu zeigen das $\partial\Delta$ kein Retrakt von Δ ist, wenn Δ ein n-Simplex im $\mathbb{R}^n$ ist. Wir zeigen zunächst eine Eigenschaft von Zerlegungen des Komplexes T_Δ. Um diese zu beweisen, benötigen wir noch ein kleines Lemma.

Lemma 18: *Seien Σ ein Simplizialkomplex und $(\sigma_0, \ldots, \sigma_t)$, $(\sigma'_0, \ldots, \sigma'_{t'}) \in F(\Sigma)$ zwei Fahnen. Dann gilt*

$$\overline{\sigma}(\widehat{\sigma}_0, \ldots, \widehat{\sigma}_t) \leq \overline{\sigma}(\widehat{\sigma}'_0, \ldots, \widehat{\sigma}'_{t'}) \Longleftrightarrow \{\sigma_0, \ldots, \sigma_t\} \subseteq \{\sigma'_0, \ldots, \sigma'_{t'}\}.$$

Beweis: "‘$\Longleftarrow$"’ Klar.

"'$\Longrightarrow$"' Sei $0 \leq j \leq t$. Dann ist $\widehat{\sigma}_j \in E(\overline{\sigma}(\widehat{\sigma}_0, \ldots, \widehat{\sigma}_t)) \subseteq E(\overline{\sigma}(\widehat{\sigma}'_0, \ldots, \widehat{\sigma}'_{t'}))$, d.h. es existiert ein $0 \leq i \leq t'$ mit $\widehat{\sigma}_j = \widehat{\sigma}'_i \in \sigma_j \cap \sigma'_i$. Da Σ ein Simplizialkomplex ist, ist $\sigma_j \cap \sigma'_i$ eine gemeinsame Seite von σ_j und σ'_i, und mit Lemma 10 folgt $\sigma_j = \sigma_j \cap \sigma'_i = \sigma'_i$.

■

Lemma 19: *Seien $n \geq 1$, $r \geq 0$ und sei Δ ein abgeschlossenes n-Simplex im $\mathbb{R}^n$. Sei $\tau \in T_\Delta^{(r)}$ ein $(n-1)$-Simplex. Dann gelten:*

(a) *Ist $\tau \subseteq \partial\Delta$, so existiert genau ein n-Simplex $\sigma \in T_\Delta^{(r)}$ mit $\tau \leq \sigma$.*

(b) *Ist $\tau \nsubseteq \partial\Delta$, so existieren genau zwei n-Simplizes in $T_\Delta^{(r)}$, die τ als Seite haben.*

Beweis: Wir beweisen dies durch Induktion nach r. Für $r = 0$ hat T_Δ genau einen n-Simplex, nämlich Δ und jedes andere Simplex in T_Δ ist eine Seite von Δ. Nach Lemma 6 ist jedes $(n-1)$-Simplex aus T_Δ in $\partial\Delta$ enthalten.

Jetzt sei $r \geq 1$, und die Behauptung gelte für $r-1$. Sei $\tau \in T_\Delta^{(r)} = (T_\Delta^{(r-1)})'$ ein $(n-1)$-Simplex. Dann gibt es eine Fahne $(\sigma_0, \ldots, \sigma_{n-1}) \in F(T_\Delta^{(r-1)})$ mit $\tau = \overline{\sigma}(\widehat{\sigma}_0, \ldots, \widehat{\sigma}_{n-1})$. Wegen $0 \leq \dim\sigma_0 < \dim\sigma_1 < \ldots < \dim\sigma_{n-1} \leq n$ gibt es ein $0 \leq i \leq n$ mit $\dim\sigma_j = j$ für alle $0 \leq j < i$ und $\dim\sigma_j = j+1$ für alle $i \leq j \leq n-1$. Nach Lemma 18 gilt

$$\begin{aligned}&\{\sigma \in T_\Delta^{(r)} : \dim\sigma = n \text{ und } \tau \leq \sigma\} = \\ &\{\overline{\sigma}(\widehat{\sigma}_0, \ldots, \widehat{\sigma}_{n-1}, \widehat{\sigma}) : \sigma \in T_\Delta^{(r-1)}, \dim\sigma = i, (\sigma_0, \ldots, \sigma_{i-1}, \sigma, \ldots, \sigma_{n-1}) \in F(T_\Delta^{(r-1)})\}.\end{aligned}$$

Wir unterscheiden drei Fälle.
Fall 1: Es gelte $i = n$ und $\sigma_{n-1} \subseteq \partial\Delta$. Dann ist $\dim\sigma_j = j$ für alle $0 \leq j \leq n-1$ und insbesondere ist σ_{n-1} ein $(n-1)$-Simplex. Nach Induktionsvoraussetzung existiert genau ein n-Simplex $\sigma_n \in T_\Delta^{(r-1)}$ mit $\sigma_{n-1} \leq \sigma_n$, und damit gibt es in $T_\Delta^{(r)}$ genau einen n-Simplex, der τ als Seite hat. Außerdem gilt $\tau \subseteq \sigma_{n-1} \subseteq \partial\Delta$.
Fall 2: Es gelte $i = n$ und $\sigma_{n-1} \nsubseteq \partial\Delta$. Analog zu Fall 1 folgt, dass es in $T_\Delta^{(r)}$ genau zwei n-Simplizes gibt, die τ als Seite haben. Angenommen es wäre $\tau \subseteq \partial\Delta$. Nach Lemma 6 ist dann $\tau \subseteq |\Lambda_\Delta| = |\Lambda_\Delta^{(r)}|$, und mit Lemma 16 folgt $\tau \in \Lambda_\Delta^{(r)}$, d.h. es existiert eine Fahne $(\lambda_0, \ldots, \lambda_{n-1}) \in F(\Lambda_\Delta^{(r-1)}) \subseteq F(T_\Delta^{(r-1)})$ mit $\tau = \overline{\sigma}(\widehat{\lambda}_0, \ldots, \widehat{\lambda}_{n-1})$. Mit Lemma 18 ergibt dies $\sigma_{n-1} \in \{\lambda_0, \ldots, \lambda_{n-1}\} \subseteq \Lambda_\Delta^{(r)}$ und insbesondere $\sigma_{n-1} \subseteq |\Lambda_\Delta^{(r)}| = \partial\Delta$; ein Widerspruch. Also ist tatsächlich $\tau \nsubseteq \partial\Delta$.
Fall 3: Es gelte $i < n$. Ist $i \geq 1$, so ist $|E(\sigma_i) \backslash E(\sigma_{i-1})| = i + 1 - (i-1) = 2$, und es gibt genau zwei Simplizes σ mit $E(\sigma_{i-1}) \subsetneqq E(\sigma) \subsetneqq E(\sigma_i)$, d.h. genau zwei Simplizes σ mit $\sigma_{i-1} < \sigma < \sigma_i$. Ist dagegen $i = 0$, so ist $E(\sigma_0) = 2$ und es genau zwei Simplizes σ mit $\sigma < \sigma_0$. In beiden Fällen gibt es genau zwei n-Simplizes in $T_\Delta^{(r)}$, die τ als Seite haben. Wegen $i < n$ ist $\dim\sigma_{n-1} = n$, d.h. σ_{n-1} ist ein abgeschlossenes n-Simplex im $\mathbb{R}^n$. Nach Lemma 10 liegt $\widehat{\sigma}_{n-1}$ in keiner echten Seite von σ_{n-1} und mit Lemma

6 folgt $\widehat{\sigma}_{n-1} \in \sigma_{n-1}^{\circ}$. Aus $\sigma_{n-1} \subseteq |T_{\Delta}^{(r-1)}| = |T_{\Delta}| = \Delta$ folgt $\widehat{\sigma}_{n-1} \in \sigma_{n-1}^{\circ} \subseteq \Delta^{\circ}$ und insbesondere ist $\widehat{\sigma}_{n-1} \notin \partial\Delta$. Andererseits ist $\widehat{\sigma}_{n-1} \in \tau$ und damit auch $\tau \not\subseteq \partial\Delta$.

■

Nun beweisen wir das sogenannte Lemma von Sperner.

Satz 20: *Seien $n, r \geq 0$ und sei Δ ein abgeschlossener n-Simplex im $\mathbb{R}^n$. Weiter sei $\varphi : T_{\Delta}^{(r)} \to T_{\Delta}$ eine simpliziale Abbildung mit $p \in \mathrm{St}_{T_{\Delta}}(\varphi(p))$ für jede Ecke $p \in E(T_{\Delta}^{(r)})$. Dann gibt es einen n-Simplex $\sigma \in T_{\Delta}^{(r)}$ mit $\varphi(E(\sigma)) = E(\Delta)$.*

Beweis: Sei E die Menge aller $n \geq 0$ so, dass für jedes abgeschlossene n-Simplex $\Delta \subseteq \mathbb{R}^n$, jedes $r \geq 0$ und jede simpliziale Abbildung $\varphi : T_{\Delta}^{(r)} \to T_{\Delta}$ mit $p \in \mathrm{St}_{T_{\Delta}}(\varphi(p))$ für jedes $p \in E(T_{\Delta}^{(r)})$, die Zahl

$$|\{\sigma \in T_{\Delta}^{(r)} : \dim\sigma = n \text{ und } \varphi(E(\sigma)) = E(\Delta)\}|$$

ungerade ist. Dann reicht es $E = \mathbb{N}$ zu zeigen, um unseren Satz zu beweisen. Dies tun wir durch Induktion nach n. Es ist offenbar $0 \in E$.

Jetzt sei $n \geq 1$ mit $n - 1 \in E$ gegeben. Seien Δ ein n-Simplex im $\mathbb{R}^n$, $r \geq 0$ und $\varphi : T_{\Delta}^{(r)} \to T_{\Delta}$ sei eine simpliziale Abbildung mit $p \in \mathrm{St}_{T_{\Delta}}(\varphi(p))$ für jedes $p \in E(T_{\Delta}^{(r)})$. Sei $\{\Delta_1, \ldots, \Delta_q\}$ die Menge der n-Simplizes in $T_{\Delta}^{(r)}$ und setze

$$M := \{1 \leq i \leq q : \varphi(E(\Delta_i)) = E(\Delta)\},$$

sowie $p := |M|$. Zu zeigen ist $p \equiv 1 \ (2)$. Schreibe $E(\Delta) = \{x_0, \ldots, x_n\}$ und setze

$$\widetilde{\Delta} := \overline{\sigma}(x_0, \ldots, x_{n-1}) \leq \Delta.$$

Wir können $\widetilde{\Delta}$ als einen $(n-1)$-Simplex im $\mathbb{R}^{n-1}$ auffassen. Für jedes $1 \leq i \leq q$ setze

$$S_i := \{\tau \leq \Delta_i : \dim\tau = n - 1 \text{ und } \varphi(E(\tau)) = E(\widetilde{\Delta})\}$$

und $s_i := |S_i|$. Betrachte

$$S := \{(\sigma, \tau) \in T_{\Delta}^{(r)} \times T_{\Delta}^{(r)} : \dim\sigma = n, \dim\tau = n - 1, \tau \leq \sigma \text{ und } \varphi(E(\tau)) = E(\widetilde{\Delta})\}.$$

Zählen wir zuerst nach der ersten Komponente durch, so gilt

$$|S| = \sum_{i=1}^{q} |S_i| = \sum_{i=1}^{q} s_i.$$

Nun sei

$$P := \{\tau \in T_{\Delta}^{(r)} : \dim\tau = n - 1 \text{ und } \varphi(E(\tau)) = E(\widetilde{\Delta})\}.$$

Dann folgt mit Lemma 19 offenbar

$$\sum_{i=1}^{q} s_i = |S| = \sum_{\substack{\tau \in P \\ \tau \subseteq \partial\Delta}} 1 + \sum_{\substack{\tau \in P \\ \tau \not\subseteq \partial\Delta}} 2 \equiv |\{\tau \in P : \tau \subseteq \partial\Delta\}| \quad (2).$$

Diesen Term wollen wir jetzt über unsere Induktionsannahme auswerten. Wir fassen wie gesagt $\widetilde{\Delta}$ als einen abgeschlossenen $(n-1)$-Simplex im $\mathbb{R}^{n-1}$ auf. Da $\widetilde{\Delta}$ eine Seite von Δ ist, ist offenbar $T_{\widetilde{\Delta}}$ ein Unterkomplex von T_Δ, und nach Lemma 16 ist auch $T^{(r)}_{\widetilde{\Delta}}$ ein Unterkomplex von $T^{(r)}_\Delta$. Ist $p \in E(T^{(r)}_{\widetilde{\Delta}}) \subseteq E(T^{(r)}_\Delta) \cap \widetilde{\Delta}$, so ist $p \in \mathrm{St}_{T_\Delta}(\varphi(p))$. Es ist $p \in \widetilde{\Delta} \in T_\Delta$, also $\mathrm{tr}(p) \leq \widetilde{\Delta}$ und insbesondere ist $x_n \notin \mathrm{tr}(p)$ also $x_n \notin E(\mathrm{tr}(p))$ und somit $\mathrm{tr}(p) \notin \mathrm{st}_{T_\Delta}(x_n)$ und $p \notin \mathrm{St}_{T_\Delta}(x_n)$. Also ist $\varphi(p) \neq x_n$ und somit $\varphi(p) \in \{x_0, \ldots, x_{n-1}\} = E(\widetilde{\Delta})$. Weiter stimmen der Träger von p in T_Δ und in $T_{\widetilde{\Delta}}$ überein, also ist $p \in \mathrm{St}_{T_{\widetilde{\Delta}}}(\varphi(p))$. Da jede nicht-leere Teilmenge der Eckenmenge von $\widetilde{\Delta}$ einen Simplex in $T_{\widetilde{\Delta}}$ aufspannt, ist somit $\varphi' := \varphi | E(T^{(r)}_{\widetilde{\Delta}}) : T^{(r)}_{\widetilde{\Delta}} \to T_{\widetilde{\Delta}}$ eine simpliziale Abbildung, und es gilt $p \in \mathrm{St}_{T_{\widetilde{\Delta}}}(\varphi'(p))$ für jedes $p \in E(T^{(r)}_{\widetilde{\Delta}})$. Ist also

$$M' := \{\tau \in T^{(r)}_{\widetilde{\Delta}} : \dim \tau = n-1 \text{ und } \varphi'(E(\tau)) = E(\widetilde{\Delta})\},$$

so ist $|M'| \equiv 1 \ (2)$ nach unserer Induktionsvoraussetzung $n-1 \in E$. Wir behaupten jetzt

$$M' = \{\tau \in P : \tau \subseteq \partial\Delta\}.$$

Trivialerweise ist $M' \subseteq P$. Weiter ist $\widetilde{\Delta}$ eine echte Seite von Δ und mit Lemma 6 folgt für $\tau \in M'$ auch $\tau \subseteq |T^{(r)}_{\widetilde{\Delta}}| = |T_{\widetilde{\Delta}}| = \widetilde{\Delta} \subseteq \partial\Delta$. Jetzt sei umgekehrt $\tau \in P$ mit $\tau \subseteq \partial\Delta$ gegeben. Wegen $\dim\tau = n-1$, $\varphi(E(\tau)) = E(\widetilde{\Delta})$ ist nur $\tau \in T^{(r)}_{\widetilde{\Delta}}$ zu zeigen. Nach Lemma 16 müssen wir dazu $\tau \subseteq |T_{\widetilde{\Delta}}| = \widetilde{\Delta}$ zeigen. Es ist $\tau \subseteq \partial\Delta = |\Lambda_\Delta|$, also $\tau \in \Lambda^{(r)}_\Delta$ nach Lemma 16. Insbesondere ist $\tau \leq \eta$ für eine echte Seite $\eta < \Delta$. Es folgt $n-1 = \dim\tau \leq \dim\eta < \dim\Delta = n$, d.h. $\dim\eta = n-1$, und somit existiert ein $0 \leq i \leq n$ mit $E(\eta) = \{x_0, \ldots, \widehat{x_i}, \ldots, x_n\}$. Ist $e \in E(\tau)$, so ist $e \in \tau \leq \eta$, also $\mathrm{tr}(e) \leq \eta$ und somit $x_i \notin E(\mathrm{tr}(e))$, d.h. $e \notin \mathrm{St}_{T_\Delta}(x_i)$ und somit $\varphi(e) \neq x_i$. Also ist $x_i \notin \varphi(E(\tau)) = E(\widetilde{\Delta}) = \{x_0, \ldots, x_{n-1}\}$, d.h. $i = n$ und $\tau \leq \eta = \widetilde{\Delta}$, und damit auch $\tau \subseteq \widetilde{\Delta}$.

Damit haben wir jetzt

$$\sum_{i=1}^{q} s_i \equiv |\{\tau \in P : \tau \subseteq \partial\Delta\}| = |M'| \equiv 1 \quad (2).$$

Jetzt müssen wir nur noch die Verbindung zur Menge M selbst herstellen. Sei $i \in M$, d.h. $1 \leq i \leq q$ und $\varphi(E(\Delta_i)) = E(\Delta)$. Wegen $|E(\Delta_i)| = n+1 = |E(\Delta)|$ ist die Einschränkung $\varphi|E(\Delta_i) : E(\Delta_i) \to E(\Delta)$ bijektiv, und damit existiert genau eine Seite τ von Δ_i mit $\dim\tau = n-1$ und $\varphi(E(\tau)) = E(\widetilde{\Delta})$. Also ist $S_i = \{\tau\}$ und $s_i = 1$.

Jetzt sei $1 \leq i \leq q$ mit $i \notin M$ gegeben. Dann ist $|\varphi(E(\Delta_i))| < |E(\Delta)| = n+1$. Ist sogar $|\varphi(E(\Delta_i))| < n = |E(\widetilde{\Delta})|$, so gilt offenbar für jede $(n-1)$-dimensionale Seite τ von Δ_i auch $|\varphi(E(\tau))| \leq |\varphi(E(\Delta_i))| < |E(\widetilde{\Delta})|$, d.h. insbesondere $\varphi(E(\tau)) \neq E(\widetilde{\Delta})$. Damit ist in diesem Fall $S_i = \emptyset$ und $s_i = 0$. Es verbleibt der Fall $|\varphi(E(\Delta_i))| = n = |E(\Delta_i)| - 1$. Dann existieren $a, b \in E(\Delta)$ mit $\varphi(E(\Delta_i)) = E(\Delta)\backslash\{a\}$, $|(\varphi|E(\Delta_i))^{-1}(b)| = 2$

und $|(\varphi|E(\Delta_i))^{-1}(x)| = 1$ für alle $x \in E(\Delta)\backslash\{a,b\}$. Ist $a \neq x_n$, so ist $E(\widetilde{\Delta}) = \{x_0,\ldots,x_{n-1}\}$ keine Teilmenge von $\varphi(E(\Delta_i))$, und es folgt wieder $S_i = \emptyset$ und $s_i = 0$. Ist dagegen $a = x_n$, so ist $\varphi(E(\Delta_i)) = E(\widetilde{\Delta})$, und folglich ist

$$S_i = \{\tau \leq \Delta_i : E(\tau) = (E(\Delta)\backslash(\varphi|E(\Delta_i))^{-1}(b)) \cup \{x\}, x \in (\varphi|E(\Delta_i))^{-1}(b)\},$$

d.h. $s_i = 2$. Also gilt stets $s_i \in \{0,2\}$ im Fall $i \notin M$.

Damit folgt letztlich

$$p = |M| \equiv \sum_{i=1}^{q} s_i \equiv 1 \quad (2),$$

und wir haben auch $n \in E$. Per Induktion folgt der Satz.

■

Damit können wir schließlich unseren angestrebten Satz beweisen, dass $\partial\Delta$ kein Retrakt von Δ ist.

Satz 21: *Sei $n \geq 1$ und sei Δ ein abgeschlossenes n-Simplex im $\mathbb{R}^n$. Dann ist $\partial\Delta$ kein Retrakt von Δ.*

Beweis: Angenommen die Behauptung wäre falsch. Dann gibt es eine stetige Abbildung $r : \Delta \to \partial\Delta$ mit $r|\partial\Delta = \mathrm{id}_{\partial\Delta}$. Nach Lemma 6 ist T_Δ ein Simplizialkomplex mit $|T_\Delta| = \Delta$ und Λ_Δ ist ein Unterkomplex von T_Δ mit $|\Lambda_\Delta| = \partial\Delta$. Nach Satz 17 existieren ein $m \geq 0$ und eine simpliziale Approximation $\varphi : T_\Delta^{(m)} \to \Lambda_\Delta \leq T_\Delta$ von r.

Wir zeigen jetzt, dass φ die Voraussetzung von Satz 20 erfüllt. Sei also $p \in E(T_\Delta^{(m)})$ eine Ecke. Ist $p \notin \partial\Delta$, so ist $p \notin |\Lambda_\Delta|$, d.h. p liegt in keiner echten Seite von Δ und somit $\mathrm{tr}_{T_\Delta}(p) = \Delta$. Insbesondere ist $\varphi(p) \in E(\Delta) = E(\mathrm{tr}(p))$, d.h. $p \in \mathrm{St}_{T_\Delta}(\varphi(p))$. Andernfalls ist $p \in \partial\Delta$. Dann ist $r(p) = p$, und da φ eine simpliziale Approximation von r ist, folgt

$$p = r(p) \in r\left(\mathrm{St}_{T_\Delta^{(m)}}(p)\right) \subseteq \mathrm{St}_{T_\Delta}(\varphi(p)).$$

Nach Satz 20 existiert ein n-Simplex $\sigma \in T_\Delta^{(m)}$ mit $\varphi(E(\sigma)) = E(\Delta)$, aber $\varphi(E(\sigma))$ spannt ein Simplex in Λ_Δ auf; ein Widerspruch.

■

Eigentlich müssen wir einsehen, dass S^{n-1} kein Retrakt von B^n ist. Aber es wird sich gleich zeigen, das dies durch Satz 21 bereits im Wesentlichen geschehen ist. Wir brauchen nur noch ein kleines Lemma, um den Zusammenhang herzustellen.

Lemma 22: *Sei $n \geq 1$ und sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt und konvex mit $K^\circ \neq \emptyset$. Dann gibt es einen Homöomorphismus $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit $\psi(K) = B^n$.*

Beweis: Durch Anwendung einer Translation können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $0 \in K^\circ$ ein innerer Punkt von K ist. Dann existiert ein $\alpha > 0$ mit $B_\alpha(0) \subseteq K$. Da K kompakt ist, gibt es ein $M > 0$ mit $K \subseteq \overline{B}_M(0)$.

Offenbar ist $\alpha \leq M$. Ist $x \in S^{n-1}$, so ist der Durchschnitt $\mathbb{R}_{\geq 0}x \cap K$ kompakt und konvex mit $0 \in \mathbb{R}_{\geq 0}x \cap K$. Also existiert eine Zahl $l(x) \geq 0$ mit

$$\{t \geq 0 : tx \in K\} = [0, l(x)].$$

Offenbar gilt $0 < \alpha \leq l(x) \leq M$. Wir zeigen jetzt, dass die Abbildung $l : S^{n-1} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ stetig ist. Da $l(S^{n-1})$ in der kompakten Menge $[\alpha, M]$ liegt, ist hierfür zu zeigen, dass für jede Folge $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ in S^{n-1} mit $x_m \to x \in S^{n-1}$ und $l(x_m) \to t \in [\alpha, M]$ stets $l(x) = t$ gilt.

Seien also $x \in S^{n-1}$, $t \in [\alpha, M]$ und $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine Folge in S^{n-1} mit $x_m \to x$ und $l(x_m) \to t$. Für jedes $m \in \mathbb{N}$ gilt $l(x_m)x_m \in K$, also ist $tx = \lim_{m\to\infty} l(x_m)x_m \in K$, d.h. $l(x) \geq t$. Angenommen es wäre $l(x) > t$. Setze $z := l(x)x \in K$ und wähle ein $\epsilon > 0$ mit $t + \epsilon < l(x)$, $\epsilon \leq \alpha \leq t$ und

$$\epsilon \leq \frac{\alpha}{2}\left(1 - \frac{t}{l(x)}\right).$$

Wir zeigen jetzt, dass $B_\epsilon(tx) \subseteq K$ ist. Sei also $y \in \mathbb{R}^n$ mit $||y - tx|| < \epsilon$ gegeben. Seien $s \in \mathbb{R}$ und $u \in x^\perp = z^\perp$ mit $y = u + sz$. Dann gilt

$$||u||^2 + |sl(x) - t|^2 = ||u + (sl(x) - t)x||^2 = ||y - tx||^2 < \epsilon^2,$$

also insbesondere $||u|| < \epsilon$ und $|sl(x) - t| < \epsilon$. Wäre $s < 0$, so auch $sl(x) - t < 0$, also $t - sl(x) = |sl(x) - t| < \epsilon$, und somit $0 \leq t - \epsilon < sl(x) < 0$; ein Widerspruch, d.h. $s \geq 0$. Weiter haben wir

$$s = \frac{1}{l(x)} sl(x) < \frac{1}{l(x)}(\epsilon + t) < 1,$$

und

$$\epsilon\left(\frac{\alpha}{l(x)} + 1\right) \leq 2\epsilon \leq \alpha\left(1 - \frac{t}{l(x)}\right),$$

also auch

$$0 \leq \alpha\left(1 - \frac{t}{l(x)}\right) - \epsilon\left(\frac{\alpha}{l(x)} + 1\right) = \alpha - \frac{\alpha}{l(x)}(t + \epsilon) - \epsilon,$$

und somit

$$||u|| < \epsilon \leq \alpha\left(1 - \frac{t + \epsilon}{l(x)}\right) < \alpha(1 - s).$$

Damit haben wir

$$\left|\left|\frac{u}{1-s}\right|\right| < \alpha, \quad \text{und folglich auch} \quad \frac{u}{1-s} \in B_\alpha(0) \subseteq K.$$

Die Konvexität von K und $0 \leq s < 1$ liefern jetzt

$$y = (1 - s)\frac{u}{1 - s} + sz \in K,$$

und $B_\epsilon(tx) \subseteq K$ ist gezeigt. Wegen $\lim_{m\to\infty} l(x_m)x_m = tx$ gibt es ein $m \in \mathbb{N}$ mit $l(x_m)x_m \in B_\epsilon(tx)$. Da die Menge $B_\epsilon(tx)$ offen ist, gibt es ein $s > l(x_m)$ mit $sx_m \in B_\epsilon(tx) \subseteq K$; ein Widerspruch zur Definition von $l(x_m)$.

Also ist tatsächlich $l(x) = t$, und die Abbildung l ist stetig. Wegen $l(x) \geq \alpha > 0$ für alle $x \in S^{n-1}$, können wir die folgenden beiden Abbildungen definieren

$$\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n; x \mapsto \begin{cases} \dfrac{x}{l\left(\dfrac{x}{||x||}\right)}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

und

$$\psi' : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n; x \mapsto \begin{cases} l\left(\dfrac{x}{||x||}\right) x, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Auf $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ sind ψ und ψ' offenbar stetig. Für $x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ sind außerdem

$$||\psi(x)|| = \frac{1}{l\left(\dfrac{x}{||x||}\right)}||x|| \leq \frac{1}{\alpha}||x|| \quad \text{und} \quad ||\psi'(x)|| = l\left(\frac{x}{||x||}\right)||x|| \leq M||x||,$$

und dies ergibt sofort die Stetigkeit von ψ und ψ' in 0. Sei $x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$. Dann ist

$$\frac{\psi(x)}{||\psi(x)||} = \frac{l\left(\dfrac{x}{||x||}\right)}{||x||} \frac{x}{l\left(\frac{x}{||x||}\right)} = \frac{x}{||x||},$$

und es folgt

$$\psi'(\psi(x)) = l\left(\frac{x}{||x||}\right) \frac{x}{l\left(\dfrac{x}{||x||}\right)} = x.$$

Also ist $\psi'\psi = \mathrm{id}$ und analog ergibt sich $\psi\psi' = \mathrm{id}$. Damit ist ψ bijektiv mit $\psi^{-1} = \psi'$, und insbesondere ist ψ ein Homöomorphismus.

Es verbleibt nur noch $\psi(K) = B^n$ zu zeigen. Sei also $x \in K$. Ist $x = 0$, so $\psi(x) = 0 \in B^n$. Nun sei $x \neq 0$. Dann ist $||x||(x/||x||) = x \in K$, also $l(x/||x||) \geq ||x||$ und somit gilt $||\psi(x)|| = ||x||/l(x/||x||) \leq 1$, d.h. $\psi(x) \in B^n$. Jetzt sei umgekehrt $x \in B^n$ gegeben. Ist $x = 0$, so ist $x = \psi(0) \in \psi(K)$. Jetzt sei $x \neq 0$ und setze $y := \psi'(x)$. Es ist $||y|| = l(x/||x||)||x||$ und $y/||y|| = x/||x||$, d.h. $||y|| \leq l(x/||x||) = l(y/||y||)$ da $||x|| \leq 1$ ist, und somit $y = ||y||(y/||y||) \in K$, also $x = \psi(y) \in \psi(K)$.

■

Satz 23: *Jede stetige Abbildung $f : B^n \to B^n$ hat einen Fixpunkt.*

Beweis: Sei $r : B^n \to S^{n-1}$ eine stetige Abbildung. Ist $e_1, \dots, e_n$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^n$, so ist $\Delta := \overline{\sigma}(0, e_1, \dots, e_n)$ ein abgeschlossenes n-Simplex im $\mathbb{R}^n$. Dann ist Δ kompakt und konvex, und nach Lemma 5.(e) ist $\Delta^\circ \neq \emptyset$. Nach Lemma 22 existiert ein Homöomorphismus $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit $\psi(\Delta) = B^n$. Insbesondere ist $\psi(\partial\Delta) = \partial B^n = S^{n-1}$, d.h. wir haben eine stetige Abbildung $\psi^{-1} r \psi : \Delta \to \partial\Delta$. Nach Satz 21 ist diese keine Retraktion, d.h. es existiert ein $x \in \partial\Delta$ mit $\psi^{-1}(r(\psi(x))) \neq x$. Dann ist $\psi(x) \in S^{n-1}$ mit $r(\psi(x)) \neq \psi(x)$, d.h. auch r ist keine Retraktion. Also ist S^{n-1} kein Retrakt von B^n. Nach Lemma 2 hat B^n die (FP).

■

Korollar 24: *Sei $\emptyset \neq K \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt und konvex. Dann hat K die (FP).*

Beweis: Sei V der von K erzeugte affine Teilraum des $\mathbb{R}^n$ und setze $k := \dim V$. Dann ist K eine kompakte, konvexe Teilmenge von V. Jedes affine Erzeugendensystem enthält eine affine Basis, also existieren affin unabhängige $x_0, \dots, x_k \in K$. Da K konvex ist, gilt $\overline{\sigma}(x_0, \dots, x_k) \subseteq K$, und nach Lemma 5.(e) hat diese Menge nicht-leeres Inneres in V. Mit Lemma 22 folgt $K \simeq B^k$. Nach Satz 23 und Lemma 1.(a) hat K die (FP).

■

Ist also $f : B^n \to B^n$ eine stetige Abbildung, so ist $\mathrm{Fix}(f) \neq \emptyset$, und $\mathrm{Fix}(f)$ ist auch abgeschlossen in B^n, da f stetig ist. Der nächste Satz zeigt uns, dass wir keine besseren Aussagen über die Fixpunktmenge allgemeiner stetiger Selbstabbildungen von B^n finden können.

Satz 25: *Sei $n \geq 1$ und sei $\emptyset \neq F \subseteq B^n$ abgeschlossen. Dann existiert eine stetige Abbildung $f : B^n \to B^n$ mit $\mathrm{Fix}(f) = F$.*

Beweis: Wähle ein $z \in F$. Für jedes $x \in B^n$ gilt $0 \leq d(x, F) \leq d(B^n) \leq 2$, und da B^n konvex ist, erhalten wir eine stetige Abbildung

$$f : B^n \to B^n; x \mapsto \left(1 - \frac{1}{2} d(x, F)\right) x + \frac{1}{2} d(x, F) z.$$

Für jedes $x \in B^n$ gilt

$$f(x) - x = \frac{1}{2} d(x, F)(z - x),$$

und die Abgeschlossenheit von F liefert

$$\mathrm{Fix}(f) = \{x \in B^n : d(x, F) = 0\} \cup \{z\} = F \cup \{z\} = F.$$

■

Wir wollen diesen Paragraphen jetzt mit zwei einfachen Anwendungen abschliessen. Dies dient hauptsächlich zur Illustration.

Satz 26: *Seien $n \geq 1$, $|| \ ||$ eine Norm auf dem $\mathbb{R}^n$, $R > 0$ und $g_1, \ldots, g_n : \overline{B}_R(0) \to \mathbb{R}$ stetig. Es gelte $\sum_{i=1}^n g_i(x)x_i \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ mit $||x|| = R$. Dann gibt es ein $x \in \overline{B}_R(0)$ mit $g_i(x) = 0$ für alle $1 \leq i \leq n$.*

Beweis: Wir betrachten die stetige Abbildung

$$g := (g_1, \ldots, g_n) : \overline{B}_R(0) \to \mathbb{R}^n.$$

Zu zeigen ist, dass g eine Nullstelle besitzt. Angenommen dies wäre nicht so, d.h. $g(x) \neq 0$ für jedes $x \in \overline{B}_R(0)$. Dann können wir die folgende stetige Abbildung definieren

$$f : \overline{B}_R(0) \to \overline{B}_R(0); x \mapsto -R\frac{g(x)}{||g(x)||}.$$

Nach Korollar 24 existiert ein $x \in \mathbb{R}^n$ mit $||x|| \leq R$ und $f(x) = x$. Insbesondere ist $||x|| = ||f(x)|| = R$. Andererseits gilt

$$\sum_{i=1}^n g_i(x)x_i = -\frac{1}{R}||g(x)||\sum_{i=1}^n f_i(x)x_i = -\frac{1}{R}||g(x)||\sum_{i=1}^n x_i^2 < 0;$$

ein Widerspruch.

■

Als letzte Anwendung betrachten wir das folgende, sehr schlichte, ökonomische Modell. Wir betrachten ein Modell mit $n \geq 1$ Produzenten $P_1, \ldots, P_n$. Jeder dieser Produzenten stellt etwas her, und kauft andererseits der Erzeugnisse der anderen Produzenten. Sind $1 \leq i, j \leq n$, so gebe der Produzent P_i bei gegebenen Einkommen $x \geq 0$ den Anteil $f_{ij}(x) \geq 0$ für die Waren von P_j aus. Wir nehmen an, dass die Funktionen f_{ij} alle stetig sind. Weiterhin normieren wir so, dass P_i kein Geld für seine eigenen Waren aufwendet, d.h. $f_{ii}(x) = 0$ für alle $1 \leq i \leq n$, $x \geq 0$. Weiter nehmen wir an, dass P_i sein gesamtes Einkommen wieder ausgibt, d.h.

$$\sum_{j=1}^n f_{ij}(x) = x$$

für alle $1 \leq i \leq n$, $x \geq 0$. Zu gegebenen Funktionen f_{ij}, die all diese Bedingungen erfüllen, möchten wir die Existenz eines Gleichgewichts beweisen, d.h. wir suchen eine Einkommensverteilung $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n_{\geq 0}$ so, dass das Einkommen des Produzenten P_j genau von den anderen Produzenten aufgebracht wird, es soll also

$$x_j = \sum_{i=1}^n f_{ij}(x_i)$$

für jedes $1 \leq j \leq n$ gelten. Dies ist tatsächlich immer möglich:

Satz 27: *Seien $n \geq 1$ und $f_{ij} : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ $(1 \leq i, j \leq n)$ seien stetige Funktionen. Es gelte $f_{ii}(x) = 0$ und $\sum_{j=1}^n f_{ij}(x) = x$ für alle $1 \leq i \leq n$, $x \geq 0$. Dann existiert ein $x \in \mathbb{R}^n_{\geq 0}$ mit $x_j = \sum_{i=1}^n f_{ij}(x_i)$ für alle $1 \leq j \leq n$.*

Beweis: Wir betrachten die folgende nicht-leere, kompakte konvexe Teilmenge des $\mathbb{R}^n$:

$$K := \{x \in \mathbb{R}^n_{\geq 0} : \sum_{i=1}^n x_i = 1\} = \overline{\sigma}(e_1, \ldots, e_n).$$

Ist $x \in K$, so ist für jedes $1 \leq j \leq n$ offenbar $\sum_{i=1}^n f_{ij}(x_i) \geq 0$ und es gilt

$$\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n f_{ij}(x_i) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f_{ij}(x_i) = \sum_{i=1}^n x_i = 1.$$

Damit erhalten wir eine stetige Abbildung

$$g : K \to K; x \mapsto \left(\sum_{i=1}^n f_{ij}(x_i) \right)_{1 \leq j \leq n}.$$

Jetzt liefert Korollar 24 ein $x \in K$ mit $g(x) = x$, und dieses erfüllt die Behauptung des Satzes.

■

§3A Anhang: Differentialformen

Im zweiten Beweis des Brouwerschen Fixpunktsatzes in §3 haben wir den Begriff einer Differentialform verwendet. In diesem kleinen Anhang wollen wir eine kurze Einführung in den Kalkül der Differentialformen geben. Auf Beweise wird dabei weitgehend verzichtet. Diese lassen sich zum Beispiel in den Büchern von Warner oder tom Dieck finden.

Wir beginnen mit linearer Algebra. Sind V ein endlichdimensionaler (reeller) Vektorraum und $p \geq 1$, so versteht man unter einer alternierenden p-Form eine in allen Komponenten lineare Abbildung

$$\omega : V^p \to \mathbb{R}$$

mit

$$\omega(v_{\pi(1)}, \ldots, v_{\pi(p)}) = (-1)^\pi \omega(v_1, \ldots, v_p)$$

für alle $v_1, \ldots, v_p \in V$, $\pi \in S_p$. Dabei bezeichnet $(-1)^\pi$ das Vorzeichen der Permutation π. Da die nebeneinanderstehenden Transpositionen die symmetrische Gruppe erzeugen, reicht es offenbar

$$\omega(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, v_i, v_{i+2}, \ldots, v_p) = -\omega(v_1, \ldots, v_p)$$

für $v_1, \ldots, v_p \in V$, $1 \leq i < p$ zu fordern. Unter einer alternierenden 0-Form verstehen wir einfach eine reelle Zahl. Das bekannteste Beispiel ist natürlich die Determinante, ist $V = \mathbb{R}^n$, so können wir $\det : V^n \to \mathbb{R}$ als eine alternierende n-Form auffassen.

Offenbar bilden die alternierenden p-Formen einen reellen Vektorraum $\Lambda_p^* V$. In der linearen Algebra zeigt man, dass $\Lambda_p^* V = 0$ für $p > \dim V$ ist, und das

$$\dim \Lambda_p^* V = \binom{\dim V}{p}$$

für $0 \leq p \leq \dim V$ gilt. Eine wichtige Konstruktion ist die sogenannte Antisymmetrisierung. Sind $p \geq 1$ und $\omega : V^p \to \mathbb{R}$ eine in allen Komponenten lineare Abbildung, so definiert

$$(A\omega)(v_1, \ldots, v_p) := \frac{1}{p!} \sum_{\pi \in S_p} (-1)^\pi \omega(v_{\pi(1)}, \ldots, v_{\pi(p)})$$

offenbar eine alternierende p-Form auf V und ω ist genau dann alternierend, wenn $A\omega = \omega$ gilt.

Die alternierenden Formen bilden sogar eine reelle Algebra. Hierzu führen wir das sogenannte äußere Produkt zweier alternierender Formen ein. Sind α eine alternierende p-Form auf V und β eine alternierende q-Form auf V, so erhalten wir eine alternierende $(p+q)$-Form auf V durch

$$\alpha \wedge \beta(v_1, \ldots, v_{p+q}) := \frac{1}{p!q!} \sum_{\pi \in S_{p+q}} (-1)^\pi \alpha(v_{\pi(1)}, \ldots, v_{\pi(p)}) \beta(v_{\pi(p+1)}, \ldots, v_{\pi(p+q)}).$$

Dies ist einfach das schiefsymmetrisierte Produkt, bis auf einen Normierungsfaktor. Setzen wir linear fort, so erhalten wir ein Produkt auf

$$\Lambda^* V := \oplus_{p=0}^{\dim V} \Lambda_p^* V.$$

Hierdurch wird $\Lambda^* V$ zu einer assoziativen Algebra über $\mathbb{R}$ mit $\dim \Lambda^* V = 2^{\dim V}$. Dies ist die äußere Algebra des Dualraums V^*. Das äußere Produkt ist nicht kommutativ, für $\alpha \in \Lambda_p^* V$, $\beta \in \Lambda_q^* V$ gilt

$$\alpha \wedge \beta = (-1)^{pq} \beta \wedge \alpha.$$

Ist $e_1, \ldots, e_n$ eine Basis von V, so sei $\phi_1, \ldots, \phi_n$ die zugehörige duale Basis von V^*. Offenbar ist $V^* = \Lambda_1^* V$. Man kann zeigen, dass die Familie

$$(\phi_{i_1} \wedge \ldots \wedge \phi_{i_p} | 1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_p \leq n)$$

eine Basis von $\Lambda^* V$ ist.

Nun kommen wir zu Differentialformen. Seien $p \geq 0$ und sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Unter einer p-Form auf U, beziehungsweise einer Differentialform vom Grad p auf U, verstehen wir eine differenzierbare Abbildung

$$\omega : U \to \Lambda_p^* \mathbb{R}^n,$$

d.h. jedem Punkt $x \in U$ wird differenzierbar eine alternierende p-Form zugeordnet. Die Menge aller p-Formen auf U werde mit $\Omega_p(U)$ bezeichnet. Offenbar ist $\Omega_p(U)$ ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ und sogar ein Modul über dem Ring $C^\infty(U)$. Eine 0-Form ist offenbar einfach eine Funktion, d.h.

$$\Omega_0(U) = C^\infty(U).$$

Das äußere Produkt liefert ein äußeres Produkt von Differentialformen

$$\wedge : \Omega_p(U) \times \Omega_q(U) \to \Omega_{p+q}(U).$$

Grundlegend ist jetzt der Begriff der äußeren Ableitung. Sei hierzu $\omega \in \Omega_p(U)$ gegeben. Dann ist $\omega : U \to \Lambda_p^* \mathbb{R}^n$ eine differenzierbare Abbildung, und für jedes $x \in U$ ist die Ableitung

$$(D\omega)_x : \mathbb{R}^n \to \Lambda_p^* \mathbb{R}^n$$

eine lineare Abbildung. Also ist

$$(D\omega)_x(v_0, v_1, \ldots, v_p) := (D\omega)_x(v_0)(v_1, \ldots, v_p)$$

eine $(p+1)$-fach lineare Abbildung. Antisymmetrisieren wir diese, so erhalten wir die äußere Ableitung

$$\begin{aligned}(d\omega)_x(v_0, \ldots, v_p) &:= \frac{1}{p!} \sum_{\pi \in S_{p+1}} (-1)^\pi (D\omega)_x(v_{\pi(0)}, \ldots, v_{\pi(p)}) \\ &= \sum_{i=0}^{p} (-1)^i (D\omega)_x(v_i)(v_0, \ldots, \widehat{v_i}, \ldots, v_p).\end{aligned}$$

Einige wichtige Eigenschaften dieser Abbildung sind:

Lemma 1: *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen.*

(a) *Für jedes $p \geq 0$ ist $d : \Omega_p(U) \to \Omega_{p+1}(U)$ linear.*

(b) *Sind $p, q \geq 0$, $\alpha \in \Omega_p(U)$, $\beta \in \Omega_q(U)$, so gilt $d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge d\beta$.*

(c) *Sind $p \geq 0$, $\alpha \in \Omega_p(U)$, so ist $d(d\omega) = 0$.*

Wie sieht dies in unseren Basen aus? Wir identifizieren $(\mathbb{R}^n)^*$ mit $\mathbb{R}^n$ und schreiben die Standardbasis als $e_1, \ldots, e_n$. Ist $p \geq 0$, so hat ein $\omega \in \Omega_p(U)$ die Form

$$\omega(x) = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_p \leq n} f_{i_1 \ldots i_p}(x) e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_p}$$

mit differenzierbaren Funktionen $f_{i_1 \ldots i_p} \in C^\infty(U)$. Rechnen wir einmal die äußere Ableitung einer 0-Form, d.h. einer Funktion $f \in C^\infty(U)$ aus. Nach Definition ist $\Lambda_0^* \mathbb{R}^n = \mathbb{R}$, also $(df)_x(v) = (Df)_x(v)$ für $x \in U$, $v \in \mathbb{R}^n$. Insbesondere ist

$$(df)_x(e_i) = \left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_x$$

für $1 \leq i \leq n$, $x \in U$, d.h.

$$(df)_x = \sum_{i=1}^n \left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_x e_i$$

für jedes $x \in U$. Ist insbesondere $x_i : U \to \mathbb{R}$ die i-te Koordinatenfunktion, so ist $(dx_i)_x = e_i$ für jedes $x \in U$. Damit können wir eine p-Form ω auch in der üblichen Form

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_p \leq n} f_{i_1 \ldots i_p} dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p}$$

schreiben.

Es bleibt noch zu klären, was das Integral einer n-Form ist. Ist $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, und hat $\omega \in \Omega_n(U)$ kompakten Träger, so können wir schreiben

$$\omega = f\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$$

mit einer Funktion $f \in C^\infty(U)$ mit kompakten Träger, und definieren

$$\int_U \omega := \int_U f(x)\, dx.$$

Für diesen Integralbegriff wollen wir nun den Satz von Stokes formulieren. Hierzu benötigen wir zunächst den Begriff einer berandeten Untermannigfaltigkeit. Dieser ist folgendermaßen definiert.

Definition 1: Eine Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt berandete Untermannigfaltigkeit, wenn es zu jedem $x \in \partial D$ eine offene Umgebung U von x in $\mathbb{R}^n$ und einen Diffeomorphismus $\psi : U \to \mathbb{R}^n$ mit $\psi(x) = 0$ und

$$\psi(U \cap D) = \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_{\geq 0}$$

gibt. Ist ψ solch ein Diffeomorphismus, so kann man

$$\psi(U \cap \partial D) = \mathbb{R}^{n-1} = \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$$

zeigen.

Eine wichtige Klasse von Beispielen wird durch den folgenden Satz geliefert:

Satz 2: *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ und sei $f \in C^\infty(U)$. Sei $a \in \mathbb{R}$ so, dass für jedes $x \in f^{-1}(a)$ die Ableitung $Df(x) \neq 0$ ist. Dann ist*

$$D := \{x \in U : f(x) \leq a\}$$

eine berandete Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ *mit*

$$\partial D = f^{-1}(a).$$

Ein $a \in \mathbb{R}$ wie in diesem Satz nennt man auch einen regulären Wert von f. Dieser Satz ist in der Regel sehr gut anwendbar, da reguläre Werte in gewissem Sinne der Normalfall sind. Der folgende Satz ist das sogenannte Morse-Sard Theorem, ein Beweis findet sich beispielsweise im Buch von Hirsch.

Satz 3: *Seien* $n, m \in \mathbb{N}$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ *offen und* $f : U \to \mathbb{R}^m$ *eine* C^∞*-Abbildung. Sei*

$$\Sigma_f := \{x \in U | (Df)(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \text{ ist nicht surjektiv}\}.$$

Dann ist die Menge $f(\Sigma_f) \subseteq \mathbb{R}^m$ *eine Nullmenge.*

Wir kommen jetzt zum Satz von Stokes. Dieser besagt im wesentlichen $\int_D d\omega = \int_{\partial D} \omega$ wobei D eine berandete Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ und ω eine $(n-1)$-Form sind. Allerdings fehlt noch eine wesentliche Definition um diesen Satz auszusprechen, bisher haben wir den Ausdruck $\int_{\partial D} \omega$ noch nicht eingeführt.

Eine differenzierbare Mannigfaltigkeit M besteht aus einem Hausdorffschen topologischen Raum mit abzählbarer Basis versehen mit einer offenen Überdeckung $\{U_i : i \in I\}$ und Homöomorphismen $\varphi_i : U_i \to V_i$ auf offene Teilmengen $V_i \subseteq \mathbb{R}^n$. Die Zahl n ist dabei fixiert und wird als die Dimension von M bezeichnet, beziehungsweise sie ist die Dimension von M im Sinne der topologischen Dimensionstheorie. Es wird gefordert, dass für jedes Paar $i, j \in I$ die Abbildung

$$\varphi_j \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \to \varphi_j(U_i \cap U_j)$$

eine C^∞-Abbildung ist. Dies macht Sinn, da es sich um eine Abbildung zwischen offenen Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ handelt. Die Abbildungen φ_i werden auch als Karten bezeichnet. Zum Beispiel ist trivialerweise jede offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, wenn wir die Identität id_U als Karte verwenden.

Jedem Punkt $m \in M$ einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit wird ein sogenannter Tangentialraum $T_m M$ zugeordnet, und dies ist ein n-dimensionaler reeller Vektorraum. Damit können wir Differentialformen auf M definieren, und alles bisher gesagte überträgt sich auf diese. Problematisch ist nur der Integralbegriff. Ein solchen definieren wir nur, wenn die topologische Mannigfaltigkeit M orientierbar ist. Man kann zeigen, das dies gleichwertig zur Existenz einer Volumenform auf M ist. Eine Volumenform ist dabei eine n-Form $\omega \in \Omega_n(M)$ mit $\omega(x) \neq 0$ für alle $x \in M$.

Unter einer Orientierung von M verstehen wir der Einfachheit halber, dass wir eine Volumenform ω vorgegeben haben. Ist dann $\alpha \in \Omega_n(M)$ eine weitere n-Form, so können wir $\alpha = f\omega$ mit einer eindeutigen Funktion $f \in C^\infty(M)$ schreiben. Ist der Träger von α in einer Karte $\varphi : U \to V \subseteq \mathbb{R}^n$ enthalten, so schreiben wir ω in Koordinaten

$$\omega = g\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n,$$

wobei $x_1, \ldots, x_n$ die Komponenten von φ sind, und definieren

$$\int_M \alpha := \int_V f(\varphi^{-1}(x)) g(\varphi^{-1}(x))\, dx.$$

Dies setzt sich fort zu einem Integral $\int_M \alpha$ für jedes $\alpha \in \Omega_n(M)$ mit kompakten Träger.

Sind nun M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und $D \subseteq M$ eine berandete Untermannigfaltigkeit, so können wir ∂D offenbar wieder als differenzierbare Mannigfaltigkeit auffassen, ∂D ist eine eingebettete Untermannigfaltigkeit. Ist M orientierbar, so ist auch ∂D orientierbar, und eine gegebene Orientierung von M induziert eine Orientierung von ∂D. Diese hängt von D ab, und nicht nur von ∂D. Zum Beispiel ist auch $M \backslash D^\circ$ eine berandete Untermannigfaltigkeit von M mit $\partial(M \backslash D^\circ) = \partial D$, und diese induziert auf ∂D genau die entgegengesetzte Orientierung. Nun können wir den Satz von Stokes formulieren.

Satz 4: *Seien M eine n-dimensionale orientierte, differenzierbare Mannigfaltigkeit, $D \subseteq M$ eine berandete Untermannigfaltigkeit und $\omega \in \Omega_{n-1}(M)$. Sei* $\operatorname{supp} \omega \cap D$ *kompakt. Dann gilt*

$$\int_D d\omega = \int_{\partial D} \omega.$$

Wir wollen das jetzt nicht beweisen, aber zumindest einen Spezialfall vorführen, um einzusehen das der Satz in Wahrheit sehr einfach ist. Wir betrachten den speziellen Fall $M = \mathbb{R}^n$ und $D = \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_{\geq 0}$. Dann ist $\partial D = \mathbb{R}^{n-1}$. Als $(n-1)$-Form verwenden wir

$$\omega = f\, dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \ldots \wedge dx_n,$$

wobei $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ und $1 \leq i \leq n$ sind. Dann ist

$$\begin{aligned} d\omega &= (df) \wedge dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \ldots \wedge dx_n \\ &= \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j \right) \wedge dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \ldots \wedge dx_n \\ &= (-1)^{i-1} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n. \end{aligned}$$

Ist $i < n$, so folgt da $\operatorname{supp} f \cap D$ kompakt ist

$$\int_D d\omega = (-1)^{i-1} \int_{\mathbb{R}^{n-2} \times \mathbb{R}_{\geq 0}} \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\, dx_i dx_1 \ldots \widehat{dx_i} \ldots dx_n = 0$$

nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung. Ebenso ist $\omega | \mathbb{R}^{n-1} = 0$, also $\int_{\partial D} \omega = 0$.

Nun sei $i = n$. Rechnen wir wieder mit Fubini, so erhalten wir

$$\int_D d\omega = (-1)^{n-1} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f(x, 0)\, dx.$$

Dies ist gleich dem erwarteten Ergebnis, das $(-1)^{n-1}$ kommt daher das D auf $\partial D = \mathbb{R}^{n-1}$ gerade $(-1)^{n-1}$ mal die Standardorientierung des $\mathbb{R}^{n-1}$ induziert.

Eine beliebige $(n-1)$-Form können wir als Summe von Formen der behandelten Art schreiben, und haben damit den Fall $M = \mathbb{R}^n$, $D = \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_{\geq 0}$ geklärt. Analog läßt sich der Fall $M = D = \mathbb{R}^n$ nachrechnen. Dies sind zwar nur spezielle Fälle, aber aus diesen läßt sich der allgemeine Satz durch Zerlegung mittels einer Partition der Eins beweisen.

Damit sollte der Satz von Stokes zumindest glaubwürdig wirken. Alles was wir in §3 verwendet haben, ist damit zumindest kurz beschrieben worden. Wir wollen noch etwas weitermachen, da in §5 noch einmal Differntialformen auftauchen werden. Das folgende Lemma ist eine kleine Anwendung des Satzes von Stokes.

Lemma 5: *Sei $n \geq 1$ und sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Sei $\omega \in \Omega_{n-1}(U)$ und $\operatorname{supp} \omega$ sei kompakt (der Träger ist im Teilraum U des $\mathbb{R}^n$ gebildet). Dann gelten:*

(a) *Es gibt eine berandete Untermannigfaltigkeit $D \subseteq U$ mit $\operatorname{supp} \omega \subseteq D^\circ$.*

(b) *Es ist $\int_U d\omega = 0$.*

Beweis: **(a)** Die Mengen $K := \operatorname{supp} \omega$ und $\mathbb{R}^n \backslash U$ sind abgeschlossen im $\mathbb{R}^n$ mit $K \cap (\mathbb{R}^n \backslash U) = \emptyset$. Also existiert ein $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $0 \leq f(x) \leq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und $f|K = 0$, $f|\mathbb{R}^n \backslash U = 1$. Nach Satz 3 existiert ein regulärer Wert $a \in (0,1)$ von f. Nun ist

$$D := \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \leq a\}$$

nach Satz 2 eine berandete Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$. Offenbar gelten $D \subseteq U$ und $K \subseteq D^\circ$.

(b) Nach (a) gibt es eine berandete Untermannigfaltigkeit $D \subseteq U$ mit $\operatorname{supp} \omega \subseteq D^\circ$. Dann ist ω auf ∂D identisch Null, und Satz 4 ergibt $\int_U d\omega = \int_D d\omega = \int_{\partial D} \omega = 0$, da $\operatorname{supp} \omega \subseteq D$ ist.

■

Wir werden noch das Konzept des Pullbacks von Differentialformen brauchen. Seien $m, n \geq 1$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $V \subseteq \mathbb{R}^m$ seien offene Mengen und $f : U \to V$ eine C^∞-Abbildung. Sei $\omega \in \Omega_p(M)$ mit $p \geq 1$. Dann wird durch

$$(f^*\omega)_x(v_1, \ldots, v_p) := \omega_{f(x)}(Df_x(v_1), \ldots, Df_x(v_p))$$

für $x \in U$, $v_1, \ldots, v_p \in \mathbb{R}^n$ eine p-Form $f^*\omega \in \Omega_p(U)$ definiert. Für $\omega \in \Omega_0(V) = C^\infty(V)$ sei einfach $f^*\omega := \omega f \in C^\infty(U) = \Omega_0(U)$. Sind dann $\alpha \in \Omega_p(V)$, $\beta \in \Omega_q(V)$, $p, q \geq 0$, so gelten

$$f^*(\alpha \wedge \beta) = (f^*\alpha) \wedge (f^*\beta)$$

und

$$f^*(d\alpha) = d(f^*\alpha).$$

Der allerletzte Satz in diesem Abschnitt ist das sogenannte Poincare-Lemma.

Satz 6: *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und sternförmig, $p \geq 1$.*

(a) *Ist $\omega \in \Omega_p(U)$ mit $d\omega = 0$, so existiert ein $\alpha \in \Omega_{p-1}(U)$ mit $\omega = d\alpha$.*

(b) *Ist $\omega \in \Omega_n(U)$ mit kompakten Träger und $\int_U \omega = 0$, so existiert ein $\alpha \in \Omega_{n-1}(U)$ mit kompakten Träger und $\omega = d\alpha$.*

Da jede offene, sternförmige Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ diffeomorph zum $\mathbb{R}^n$ ist, kann man ohne Beschränkung der Allgemeinheit $U = (-1,1)^n$ annehmen. Wir wollen zur Illustration einmal (b) im Fall $n = 1$ betrachten. Dann ist $\omega = f\,dx$ und $\operatorname{supp} f \subseteq [a,b]$ mit $-1 < a < b < 1$. Es ist $\omega = dg$ mit der Funktion $g(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$. Offenbar ist $g(x) = 0$ für $x < a$. Ist $x > b$, so haben wir $g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\,dt = \int_{\mathbb{R}} \omega = 0$, d.h. es ist auch $\operatorname{supp} g \subseteq [a,b]$. Dies kann man als Beginn eines Induktionsbeweises für (b) verwenden. Es gibt allerdings auch deutlich elegantere Beweismethoden.

Literatur zu §3A

R. Bott, L.W. Tu: *Differential forms in algebraic topology*, Springer 1982

M.W. Hirsch: *Differential Topology*, Springer 1976

Warner: *Foundations of differentiable manifolds*, Springer

§4 Der Fixpunktsatz von Schauder

Wir haben in §3 bewiesen, dass jede nicht-leere, kompakte, konvexe Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ die Fixpunkteigenschaft hat. Der Satz von Schauder besagt, dass dies wahr bleibt wenn der $\mathbb{R}^n$ durch einen beliebigen Banachraum ersetzt wird. Tatsächlich ist dies eine Folge des endlichdimensionalen Satzes, denn kompakte Teilmengen eines Banachraums liegen bis auf eine kleine Störung immer in einem endlichdimensionalen Teilraum. Diese Aussage wird präzisiert und bewiesen durch das folgende Lemma über die Existenz von Schauder-Projektionen.

Lemma 1: *Seien E ein Banachraum und $\emptyset \neq K \subseteq E$ eine kompakte Teilmenge. Sei $\epsilon > 0$ gegeben. Dann existieren eine endliche Teilmenge $F \subseteq K$ und eine stetige Abbildung $P : K \to \operatorname{co}(F)$ mit $||Px - x|| \leq \epsilon$ für jedes $x \in K$.*

Beweis: Da K kompakt ist, gibt es $x_1, \ldots, x_n \in K$ mit

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B_\epsilon(x_i).$$

Wir setzen $F := \{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq K$. Für jedes $1 \leq i \leq n$ ist die Abbildung

$$\phi_i : E \to \mathbb{R}_{\geq 0}; x \mapsto \begin{cases} \epsilon - ||x - x_i||, & x \in \overline{B}_\epsilon(x_i), \\ 0, & x \in E \backslash B_\epsilon(x_i) \end{cases}$$

stetig. Damit ist auch

$$\phi : E \to \mathbb{R}_{\geq 0}; x \mapsto \sum_{i=1}^{n} \phi_i(x)$$

stetig. Sei $x \in K$. Dann existiert $1 \leq i \leq n$ mit $x \in B_\epsilon(x_i)$, also $\phi(x) \geq \phi_i(x) = \epsilon - ||x - x_i|| > 0$. Also können wir die stetige Abbildung

$$P : K \to \mathrm{co}(F); x \mapsto \sum_{i=1}^{n} \frac{\phi_i(x)}{\phi(x)} x_i$$

definieren. Sei $x \in K$ gegeben. Sei $1 \leq i \leq n$. Ist $||x - x_i|| > \epsilon$, so ist $\phi_i(x) = 0$ und $(\phi_i(x)/\phi(x))||x - x_i|| = 0 \leq (\phi_i(x)/\phi(x))\epsilon$. Ist dagegen $||x - x_i|| \leq \epsilon$, so gilt trivialerweise ebenfalls $(\phi_i(x)/\phi(x))||x - x_i|| \leq (\phi_i(x)/\phi(x))\epsilon$. Es folgt

$$||Px - x|| = \left|\left| \sum_{i=1}^{n} \frac{\phi_i(x)}{\phi(x)} x_i - x \right|\right| = \left|\left| \sum_{i=1}^{n} \frac{\phi_i(x)}{\phi(x)} (x_i - x) \right|\right| \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{\phi_i(x)}{\phi(x)} \epsilon = \epsilon.$$

■

Damit können wir bereits den Fixpunktsatz von Schauder beweisen. Wir geben zunächst eine etwas andere als die eingangs erwähnte Formulierung des Satzes an.

Satz 2: *Seien E ein Banachraum und $\emptyset \neq X \subseteq E$ abgeschlossen und konvex. Sei $T : X \to X$ stetig mit relativ kompakten Bild $T(X)$. Dann hat T einen Fixpunkt.*

Beweis: Nach Voraussetzung ist die Menge $K := \overline{T(X)} \subseteq E$ kompakt. Da $X \subseteq E$ abgeschlossen ist, gilt $K \subseteq X$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es nach Lemma 1 eine endliche Teilmenge $F_n \subseteq K$ und eine stetige Abbildung $P_n : K \to \mathrm{co}(F_n)$ mit $||P_n x - x|| \leq 1/n$ für alle $x \in K$. Sei $n \in \mathbb{N}$. Wegen $F_n \subseteq K \subseteq X$ ergibt die Konvexität von X auch $\mathrm{co}(F_n) \subseteq X$. Damit erhalten wir eine stetige Abbildung

$$T_n : \mathrm{co}(F_n) \subseteq X \xrightarrow{T} T(X) \subseteq K \xrightarrow{P_n} \mathrm{co}(F_n),$$

und da $\mathrm{co}(F_n)$ eine nicht-leere, kompakte, konvexe Teilmenge eines endlichdimensionalen Teilraums von E ist, existiert nach §3.Korollar 24 ein $x_n \in \mathrm{co}(F_n)$ mit $T_n x_n = x_n$.

Da die Menge K kompakt ist, existieren eine Teilfolge $n : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ und ein $x \in K$ mit $\lim_{k\to\infty} T x_{n_k} = x$. Nun gilt für jedes $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} ||x_{n_k} - x|| &= ||T_{n_k} x_{n_k} - x|| = ||P_{n_k} T x_{n_k} - x|| \\ &\leq ||P_{n_k} T x_{n_k} - T x_{n_k}|| + ||T x_{n_k} - x|| \leq \frac{1}{n_k} + ||T x_{n_k} - x||, \end{aligned}$$

d.h. es ist auch $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x$. Die Stetigkeit von T ergibt jetzt

$$Tx = \lim_{k\to\infty} T x_{n_k} = x.$$

■

Als unmittelbares Korollar erhalten wir:

Korollar 3: *Jede nicht-leere, kompakte, konvexe Teilmenge K eines Banachraums hat die Fixpunkteigenschaft (FP).*

Wir wollen jetzt noch eine weitere Variante des Schauderschen Fixpunktsatzes angeben. Hierzu zunächst eine Definition.

Definition 1: Seien E, F zwei Banachräume und $U \subseteq E$ eine offene Teilmenge. Eine stetige Abbildung $T : U \to F$ heißt kompakt, wenn für jede beschränkte Teilmenge $B \subseteq U$ das Bild $T(B) \subseteq F$ relativ kompakt ist.

Sind also insbesondere E, F zwei Banachräume und $U \subseteq E$ offen und beschränkt, so ist eine Abbildung $T : U \to F$ genau dann kompakt, wenn sie stetig ist und ihr Bild $T(U)$ in einer kompakten Teilmenge von F liegt.

Satz 4: *Seien E ein Banachraum und $T : E \to E$ eine kompakte Abbildung. Es gebe ein $r > 0$ mit $Tx \neq \lambda x$ für alle $\lambda > 1$ und $x \in E$ mit $||x|| = r$. Dann existiert ein $x \in E$ mit $||x|| \leq r$ und $Tx = x$.*

Beweis: Die Abbildung

$$\varrho : E \to \overline{B}_r(0); x \mapsto \begin{cases} x, & ||x|| \leq r, \\ r\frac{x}{||x||}, & ||x|| \geq r \end{cases}$$

ist offenbar stetig mit $\varrho(E) = \overline{B}_r(0)$. Da die Abbildung T kompakt ist, ist die Menge $T(\overline{B}_r(0))$ relativ kompakt, und somit ist auch $\varrho(T(\overline{B}_r(0)))$ relativ kompakt. Also ist $\varrho T : \overline{B}_r(0) \to \overline{B}_r(0)$ stetig mit relativ kompakten Bild. Nach Satz 2 gibt es ein $x \in \overline{B}_r(0)$ mit $\varrho(Tx) = x$.

Angenommen es wäre $||Tx|| > r$. Dann ist

$$x = \varrho(Tx) = \frac{r}{||Tx||}Tx, \quad \text{d.h.} \quad Tx = \frac{||Tx||}{r}x$$

mit $||Tx||/r > 1$. Nach unserer Voraussetzung folgt $||x|| < r$ aber es ist auch $||x|| = (r/||Tx||)||Tx|| = r$; ein Widerspruch. Also ist $||Tx|| \leq r$, und somit ist $x = \varrho(Tx) = Tx$.

■

Wir werden diesen Satz in §5.Satz 17 noch einmal deutlich verbessern. Die Bedingung $||x|| = r \Longrightarrow Tx \neq \lambda x$ für $\lambda > 1$ wird als die Randbedingung von Leray und Schauder bezeichnet. Meist wird sie in der folgenden Form verifiziert

$$\exists(r > 0)\forall(\lambda > 1)\forall(x \in E) : Tx = \lambda x \Longrightarrow ||x|| < r.$$

In dieser Formulierung sehen wir das es sich um eine a-priori Abschätzung für die Fixpunktgleichung $(1/\lambda)Tx = x$ handelt. Damit können wir Satz 4 als ein Beispiel für das folgende informelle Prinzip verwenden: „Die Existenz von a-priori Abschätzungen impliziert die Existenz von Lösungen“. Dies ist natürlich kein Satz, sondern nur eine Art Leitmotiv.

Wir wollen als eine erste Anwendung von Satz 2 den Existenzsatz von Peano über die Existenz von Lösungen gewöhnlicher Differentialgleichungen beweisen. Um die Bedingung das das Bild relativ kompakt ist, überprüfen zu können, benötigen wir offenbar ein geeignetes Kompaktheitskriterium. Dieses leiten wir zunächst her, auch wenn es vielleicht schon aus dem Grundstudium bekannt ist.

Definition 2: Seien X ein topologischer Raum und M ein metrischer Raum. Sei $F \subseteq C(X, M)$ eine Menge stetiger Funktionen von X nach M. Dann heißt F gleichgradig stetig in einem Punkt $x \in X$, wenn

$$\forall(\epsilon > 0)\exists(\text{Umgebung } U \text{ von } x \text{ in } X)\forall(y \in U)\forall(f \in F) : d(f(x), f(y)) \leq \epsilon.$$

Die Menge F heißt gleichgradig stetig, wenn sie in jedem $x \in X$ gleichgradig stetig ist.

Sind X ein kompakter Raum und M ein metrischer Raum, so statten wir $C(X, M)$ mit der Metrik

$$d(f, g) := \sup_{x \in X} d(f(x), g(x)) \quad (f, g \in C(X, M))$$

aus.

Lemma 5: *Seien X ein kompakter topologischer Raum und M ein metrischer Raum. Sei $F \subseteq C(X, M)$ gleichgradig stetig.*

(a) *Die Menge $\overline{F}$ ist wieder gleichgradig stetig.*

(b) *Ist X ein metrischer Raum, so gilt*

$$\forall(\epsilon > 0)\exists(\delta > 0)\forall(x, y \in X)\forall(f \in F) : d(x, y) \leq \delta \Longrightarrow d(f(x), f(y)) \leq \epsilon.$$

Beweis: **(a)** Seien $x \in X$ und $\epsilon > 0$ gegeben. Dann existiert eine Umgebung U von x in X so, dass für alle $y \in U$, $f \in F$ stets $d(f(x), f(y)) \leq \epsilon/3$ ist. Seien jetzt $y \in U$ und $f \in \overline{F}$. Dann existiert ein $g \in F$ mit $d(f, g) \leq \epsilon/3$. Es folgt $d(f(x), f(y)) \leq d(f(x), g(x)) + d(g(x), g(y)) + d(g(y), f(y)) \leq \epsilon$.
(b) Sei $\epsilon > 0$. Für jedes $x \in X$ gibt es dann ein $\delta_x > 0$ mit $d(f(x), f(y)) \leq \epsilon/2$ für alle $f \in F$, $y \in B_{\delta_x}(x)$. Da X kompakt ist, existiert eine endliche Menge $E \subseteq X$ mit $X = \bigcup_{x \in E} B_{\delta_x/2}(x)$. Wir setzen $\delta := (1/2)\min\{\delta_x : x \in E\} > 0$. Seien $x, y \in X$ mit $d(x, y) \leq \delta$ und $f \in F$. Dann existiert ein $z \in E$ mit $d(x, z) < \delta_z/2$. Es folgt $d(y, z) \leq d(x, y) + d(x, z) < \delta + \delta_z/2 \leq \delta_z$. Also ist $d(f(x), f(y)) \leq d(f(z), f(x)) + d(f(z), f(y)) \leq \epsilon$.

■

Jetzt beweisen wir den Satz von Arzela-Ascoli, beziehungsweise eine seiner vielen Varianten:

Satz 6: *Seien X ein kompakter metrischer Raum und M ein vollständiger metrischer Raum. Sei $F \subseteq C(X, M)$ eine Menge stetiger Funktionen von X nach M. Dann ist F genau dann relativ kompakt in $C(X, M)$, wenn F gleichgradig stetig ist und für jedes $x \in X$ die Menge $F(x) := \{f(x) : f \in F\} \subseteq M$ relativ kompakt ist.*

Beweis: "‘$\Longrightarrow$"’ Seien $\epsilon > 0$ und $x \in X$. Da $\overline{F}$ kompakt ist, gibt es $f_1, \dots, f_n \in F$ mit $F \subseteq \bigcup_{i=1}^n B_{\epsilon/3}(f_i)$. Ist $1 \leq i \leq n$, so liefert die Stetigkeit von f_i ein $\delta_i > 0$ mit $d(f_i(x), f_i(y)) \leq \epsilon/3$ für alle $y \in X$ mit $d(x, y) \leq \delta_i$. Setze $\delta := \min\{\delta_i : 1 \leq i \leq n\} > 0$. Seien $y \in X$ mit $d(x, y) \leq \delta$ und $f \in F$ gegeben. Es gibt ein $1 \leq i \leq n$ mit $d(f, f_i) < \epsilon/3$. Es folgt $d(f(x), f(y)) \leq d(f(x), f_i(x)) + d(f_i(x), f_i(y)) + d(f_i(y), f(y)) \leq \epsilon$. Also ist F gleichgradig stetig in x, und damit insgesamt gleichgradig stetig.

Sei $x \in X$. Wir müssen zeigen, dass $F(x) \subseteq M$ relativ kompakt ist. Die Abbildung $\omega : C(X, M) \to M; f \mapsto f(x)$ erfüllt $d(\omega(f), \omega(g)) \leq d(f, g)$ für alle $f, g \in C(X, M)$, und ist somit gleichmäßig stetig. Da F relativ kompakt ist, ist somit auch $F(x) = \omega(F)$ relativ kompakt.

"‘$\Longleftarrow$"’ Da M vollständig ist, ist auch $C(X, M)$ vollständig. Also ist nur zu zeigen, dass F präkompakt ist. Sei $\epsilon > 0$. Nach Lemma 5.(b) existiert ein $\delta > 0$ mit $d(f(x), f(y)) \leq \epsilon/4$ für alle $x, y \in X$, $f \in F$ mit $d(x, y) \leq \delta$. Da X kompakt ist, gibt es $x_1, \dots, x_n \in X$ mit $X = \bigcup_{i=1}^n B_\delta(x_i)$. Für jedes $1 \leq i \leq n$ ist die Menge $F(x_i) \subseteq M$ relativ kompakt, und somit ist

$$Y := \prod_{i=1}^n \overline{F(x_i)} \subseteq M^n$$

kompakt. Ist $\varphi : F \to M^n; f \mapsto (f(x_i))_{1 \leq i \leq n}$, so ist $\varphi(F) \subseteq Y$ relativ kompakt, also existieren $f_1, \dots, f_m \in F$ mit $\varphi(F) \subseteq \bigcup_{i=1}^m B_{\epsilon/4}(\varphi(f_i))$, wobei M^n mit der Maximumsmetrik ausgestattet ist.

Sei $f \in F$. Dann existiert ein $1 \leq i \leq m$ mit $d(\varphi(f), \varphi(f_i)) < \epsilon/4$. Sei $x \in X$. Dann existiert ein $1 \leq j \leq n$ mit $d(x, x_j) < \delta$. Es folgt $d(f(x_j), f_i(x_j)) = d(\varphi(f)_j, \varphi(f_i)_j) \leq d(\varphi(f), \varphi(f_i)) < \epsilon/4$, also auch $d(f(x), f_i(x)) \leq d(f(x), f(x_j)) + d(f(x_j), f_i(x_j)) + d(f_i(x_j), f_i(x)) < 3\epsilon/4$. Es folgt $d(f, f_i) \leq 3\epsilon/4 < \epsilon$. Also ist F präkompakt, und somit relativ kompakt.

■

Im speziellen Fall reellwertiger Abbildungen können wir verwenden, dass die relativ kompakten Teilmengen von $\mathbb{R}$ genau die beschränkten Mengen sind, und erhalten:

Korollar 7: *Seien X ein kompakter metrischer Raum und $F \subseteq C(X)$.*

(a) *Die Menge F ist genau dann relativ kompakt, wenn F beschränkt und gleichgradig stetig ist.*

(b) *Die Menge F ist genau dann kompakt, wenn F beschränkt, abgeschlossen und gleichgradig stetig ist.*

Damit können wir jetzt den Satz von Peano behandeln.

Satz 8: *Seien $a, b > 0$ und $x_0 \in \mathbb{R}$. Setze $Q := [-a, a] \times [x_0 - b, x_0 + b]$ und sei $f : Q \to \mathbb{R}$ stetig. Setze $M := \sup_{x \in Q} |f(x)|$ und $c := \min\{a, b/M\}$. Dann existiert eine differenzierbare Abbildung $x : [-c, c] \to \mathbb{R}$ mit $x(0) = x_0$ und $|x(t) - x_0| \leq b$ sowie $x'(t) = f(t, x(t))$ für alle $t \in [-c, c]$.*

Beweis: Wir wollen wieder das schon in §1 behandelte Fixpunktproblem verwenden. Wir betrachten den Banachraum $E := C[-c, c]$ und die Kugel $X := \overline{B}_b(x_0) \subseteq E$, wobei x_0 auch für die entsprechende konstante Funktion steht. Sei $x \in X$. Für jedes $s \in [-c, c] \subseteq [-a, a]$ gilt dann $|x(s) - x_0| \leq b$, also $(s, x(s)) \in Q$, und wir erhalten die stetige Funktion

$$Tx : [-c, c] \to \mathbb{R}; t \mapsto x_0 + \int_0^t f(s, x(s))\, ds.$$

Für jedes $t \in [-c, c]$ gilt

$$|Tx(t) - x_0| = \left| \int_0^t f(s, x(s))\, ds \right| \leq \int_0^t |f(s, x(s))|\, ds \leq M|t| \leq Mc \leq b,$$

d.h. es ist $Tx \in X$. Damit haben wir eine Abbildung $T : X \to X$, und wie in §1 ist zu zeigen das T einen Fixpunkt hat.

Wir zeigen zuerst das T stetig ist. Sei $\epsilon > 0$ gegeben. Da Q kompakt und f stetig sind, gibt es ein $\delta > 0$ mit $|f(t, u) - f(t, v)| \leq \epsilon/c$ für alle $t \in [-a, a]$, $u, v \in [x_0 - b, x_0 + b]$ mit $|u - v| \leq \delta$. Seien $x, y \in X$ mit $||x - y|| \leq \delta$. Dann gilt $|x(s) - y(s)| \leq \delta$ für jedes $s \in [-c, c]$ und für jedes $t \in [-c, c]$ folgt

$$|Tx(t) - Ty(t)| = \left| \int_0^t (f(s, x(s)) - f(s, y(s)))\, ds \right| \leq \frac{|t|}{c} \epsilon \leq \epsilon,$$

d.h. $||Tx - Ty|| \leq \epsilon$. Also ist T sogar gleichmäßig stetig.

Jetzt zeigen wir, dass das Bild $T(X)$ relativ kompakt ist. Da X beschränkt ist, ist $T(X)$ ebenfalls beschränkt. Sei $\epsilon > 0$. Seien $t, s \in [-c, c]$, $x \in X$ mit $|t - s| \leq \epsilon/M$. Dann gilt

$$|Tx(t) - Tx(s)| = \left| \int_s^t f(u, x(u))\, du \right| \leq M|t - s| \leq \epsilon.$$

Also ist die Menge $T(X) \subseteq E$ gleichgradig stetig.

Nach Korollar 7.(a) ist $T(X)$ damit relativ kompakt. Da $X \subseteq E$ abgeschlossen und konvex ist, hat T nach Satz 2 einen Fixpunkt.

∎

Wir wollen jetzt ein weiteres Beispiel einer Differentialgleichung behandeln, diesmal zur Illustration der Leray-Schauder Randbedingung aus Satz 4. Damit dieses nicht noch willkürlicher wirkt, als es schon jetzt ist, beginnen wir mit einer kleinen Beschreibung einer physikalischen Situation, die dann auf unsere Gleichung führt.

Wir denken uns einen Faden der gleichmäßig erwärmt wird. Dabei soll die umgebende Hitze unabhängig von der Zeit sein. Dann wird die Temperatur des Fadens nach einiger Zeit konstant sein, zumindest asympthotisch ist dies so. Parametrisieren wir unseren Faden durch das Intervall $[0,1]$, so bezeichne $y:[0,1]\to\mathbb{R}$ diese konstante Endtemperatur, d.h. $y(s)$ ist die Temperatur an Position s des Fadens.

Wir nehmen weiter an, dass die beiden Endpunkte des Fadens in ihrer Temperatur konstant gehalten werden. Nach einer geeigneten Normierung bedeutet dies insbesondere $y(0)=y(1)=0$. Unter geeigneten idealisierenden Voraussetzungen läßt sich zeigen, dass die Funktion y eine Gleichung der Form

$$(k(y)y')'+q(s,y)=0$$

erfüllt, wobei $k:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_{>0}$ eine differenzierbare Funktion ist und q eine Funktion der Form $q(s,y)=R(s)y+S(s)$ mit stetigen Funktionen $R,S:[0,1]\to\mathbb{R}$ mit $R(s)<0$ und $S(s)>0$ für alle $s\in[0,1]$ sind. Unter Verwendung der Produktregel ist unsere Gleichung gerade $k(y)y''+k'(y)(y')^2+q(s,y)=0$, d.h.

$$y''(s)=-\frac{1}{k(y(s))}\Big(k'(y(s))\,(y'(s))^2+R(s)y(s)+S(s)\Big)=f(s,y(s),y'(s))$$

für alle $s\in[0,1]$ mit

$$f(s,u,p):=-\frac{1}{k(u)}\left(k'(u)p^2+R(s)u+S(s)\right).$$

Wir wollen einen Satz des folgenden Typs beweisen: Gegeben die Funktionen $k:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_{>0}$, $R:[0,1]\to\mathbb{R}_{<0}$ und $S:[0,1]\to\mathbb{R}_{>0}$, so existiert eine zweifach differenzierbare Funktion $y:[0,1]\to\mathbb{R}$ mit $y''(s)=f(s,y(s),y'(s))$ und $y(0)=y(1)=0$. Als Differentialgleichung ist dies eine gewöhnliche Differentialgleichung, aber es ist kein Anfangswertproblem. Bei einem solchen müssten wir Bedingungen an $y(0)$ und $y'(0)$ stellen, aber wir fordern $y(0)=y(1)=0$. Dies ist ein sogenanntes Randwertproblem.

Tatsächlich werden wir eine etwas allgemeinere Aufgabe behandeln. Wir werden nicht Funktionen k,R,S sondern eine Funktion f vorgeben. Wir wollen an f nur Voraussetzungen stellen, die von unserem speziellen f erfüllt werden. Diese wollen wir jetzt herleiten.

Ist $s\in[0,1]$ und $u\in\mathbb{R}$, so gilt

$$uf(s,u,0)=-\frac{1}{k(u)}\left(R(s)u^2+S(s)u\right).$$

Setze $a:=\min\{-R(s):s\in[0,1]\}>0$ und $b:=\max\{S(s):s\in[0,1]\}>0$. Dies ist möglich da R,S stetig sind. Wähle dann $M>b/a$. Ist dann $u\in\mathbb{R}$ mit $|u|\geq M$, so gilt $-(R(s)u^2+S(s)u)=-R(s)u^2-S(s)u\geq au^2-S(s)u=a(u^2-(S(s)/a)u)$. Wegen $|S(s)/a|=S(s)/a\leq b/a<M\leq|u|$ ist damit $u^2-(S(s)/a)u>0$, also $uf(s,u,0)>0$ da $k(u)>0$ ist. Setze weiter

$$A:=\sup_{|u|\leq M}\frac{|k'(u)|}{k(u)},\quad B:=\sup_{\substack{|u|\leq M,\\ 0\leq s\leq 1}}\frac{|q(s,u)|}{k(u)}.$$

Sind dann $u, p \in \mathbb{R}$, $s \in [0,1]$ mit $|u| \leq M$, so gilt

$$|f(s,u,p)| \leq \frac{|k'(u)|}{k(u)} p^2 + \frac{|q(s,u)|}{k(u)} \leq Ap^2 + B.$$

Dies werden unsere beiden Bedingungen an f sein, es soll also Konstanten $A, B, M > 0$ mit $uf(s,u,0) > 0$ für $s \in [0,1]$, $|u| \geq M$ und $|f(s,u,p)| \leq Ap^2 + B$ für $s \in [0,1]$, $|u| \leq M$, $p \in \mathbb{R}$ geben. Wir wollen das Randwertproblem $y''(s) = f(s, y(s), y'(s))$, $y(0) = y(1) = 0$ als ein Fixpunktproblem auffassen. Dafür benötigen wir zunächst einen geeigneten Banachraum in dem unsere Abbildung dann definiert werden soll. Hierzu definieren wir:

Definition 3: Seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall und $p \geq 0$. Dann ist

$$C^p(I) := \{x : I \to \mathbb{R} : x \text{ ist } p\text{-fach stetig differenzierbar}\}$$

offenbar ein reeller Vektorraum, und

$$||x||_p := \sum_{k=0}^{p} ||x^{(k)}||_\infty \quad (x \in C^p(I))$$

ist eine Norm auf $C^p(I)$.

Um einzusehen das $C^p(I)$ ein Banachraum ist, verwenden wir das folgende Lemma.

Lemma 9: *Seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall und $p \geq 0$. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $C^p(I)$. Dann ist die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann konvergent in $C^p(I)$, wenn die Folge $(x_n^{(p)})_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig auf I konvergiert und es ein $t_0 \in I$ gibt so, dass für jedes $0 \leq k < p$ die Folge $(x_n(t_0))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.*

Beweis: Sei $I = [a,b]$. Ist $x \in C^p(I)$, so gilt offenbar genau dann $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ in $C^p(I)$, wenn für jedes $0 \leq k \leq p$ die Folge $(x_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}}$ auf I gleichmäßig gegen $x^{(k)}$ konvergiert.
"‘$\Longrightarrow$"’ Dies ist klar.
"‘$\Longleftarrow$"’ Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit $p = 1$ annehmen. Denn der Fall $p = 0$ ist klar, und der allgemeine Fall folgt durch eine offensichtliche Induktion in der $p = 1$ als Induktionsschritt verwendet wird. Sei also $y : I \to \mathbb{R}$ der gleichmäßige Grenzwert der Folge $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Da alle x'_n $(n \in \mathbb{N})$ stetig sind, ist auch y stetig. Weiter seien $t_0 \in I$ und $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n(t_0) = x_0$. Dann ist

$$x : I \to \mathbb{R}; t \mapsto x_0 + \int_{t_0}^{t} y(s)\, ds$$

eine stetig differenzierbare Funktion mit $x' = y$. Es ist also nur noch zu zeigen, dass die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf I gleichmäßig gegen x konvergiert. Sei $n \in \mathbb{N}$. Für jedes $t \in I$ gilt

$$|x(t) - x_n(t)| = \left| x_0 - x_n(t_0) + \int_{t_0}^{t} (y(s) - x'_n(s))\, ds \right| \leq |x_0 - x_n(t_0)| + |t - t_0| \cdot ||y - x'_n||_\infty,$$

d.h.

$$||x - x_n||_\infty \leq |x_0 - x_n(t_0)| + (b-a)||y - x_n'||_\infty \to 0.$$

■

Damit folgen sofort:

Lemma 10: *Seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall und $p \geq 0$. Dann gelten:*

(a) *Der Raum $C^p(I)$ ist ein Banachraum.*

(b) *Ist $q \geq p$, so ist $C^q(I) \subseteq C^p(I)$ und es gilt $||x||_p \leq ||x||_q$ für alle $x \in C^q(I)$.*

(c) *Eine Teilmenge $M \subseteq C^p(I)$ ist genau dann relativ kompakt, wenn sie beschränkt ist und die Menge $\{x^{(p)} : x \in M\}$ gleichgradig stetig ist.*

(d) *Ist $q > p$, so ist die Inklusionabbildung $C^q(I) \subseteq C^p(I)$ ein kompakter linearer Operator.*

Beweis: **(a)** Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $C^p(I)$. Ist $0 \leq k \leq p$, so gilt $||x_n^{(k)} - x_m^{(k)}||_\infty \leq ||x_n - x_m||_p$ für alle $n, m \in \mathbb{N}$, d.h. $(x_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchyfolge in $C(I)$. Also existiert für jedes $0 \leq k \leq p$ eine stetige Funktion $y_k \in C(I)$ so, dass die Folge $(x_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}}$ auf I gleichmäßig gegen y_k konvergiert. Nach Lemma 9 konvergiert die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $C^p(I)$.
(b) Klar.
(c) "'$\Longrightarrow$"' Dass M in $C^p(I)$ beschränkt ist, ist klar. Weiter ist $\{x^{(p)} : x \in M\}$ ein stetiges Bild der Menge M in $C(I)$, d.h. diese Menge ist ebenfalls relativ kompakt und nach Korollar 7.(a) auch gleichgradig stetig.
"'$\Longleftarrow$"' Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in M. Nach Voraussetzung und (b) ist die Menge $\{x^{(p)} : x \in M\}$ in $C(I)$ beschränkt und gleichgradig stetig, also relativ kompakt nach Korollar 7.(a). Daher existiert eine Teilfolge $n : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ so, dass $(x_{n_k}^{(p)})_{k\in\mathbb{N}}$ auf I gleichmäßig konvergiert. Wähle ein $t_0 \in I$. Dann ist die Menge $\{x^{(k)}(t_0) : x \in M, 0 \leq k < p\}$ nach Voraussetzung beschränkt in $\mathbb{R}$, also kann durch Übergang zu einer weiteren Teilfolge angenommen werden, dass $(x_{n_k}^{(i)}(t_0))_{k\in\mathbb{N}}$ für jedes $0 \leq i < p$ konvergiert. Nach Lemma 9 konvergiert die Folge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ in $C^p(I)$.

Also hat jede Folge in M eine konvergente Teilfolge, d.h. M ist relativ folgenkompakt und somit auch relativ kompakt.
(d) Zu zeigen ist, dass die Menge

$$M := \{x \in C^q(I) : ||x||_q \leq 1\}$$

in $C^p(I)$ relativ kompakt ist. Nach (b) gilt $||x||_p \leq 1$ für jedes $x \in M$, d.h. M ist beschränkt in $C^p(I)$. Es ist $p+1 \leq q$. Seien $t, s \in I$. Dann folgt für jedes $x \in M$

$$|x^{(p)}(t) - x^{(p)}(s)| = \left| \int_s^t x^{(p+1)}(u)\, du \right| \leq ||x^{(p+1)}||_\infty |t-s| \leq ||x||_q |t-s| \leq |t-s|.$$

Insbesondere ist die Menge $\{x^{(p)} : x \in M\}$ gleichgradig stetig. Nach (c) ist M in $C^p(I)$ relativ kompakt.

■

Damit haben wir die uns interessierenden Räume im wesentlichen konstruiert. Wir müssen noch unsere Gleichung $y'' = f(s, y, y')$ als Fixpunktgleichung schreiben. Die rechte Seite definiert eine Funktion in y, und wir zeigen das diese stetig ist. Wir erlauben sogar das die Funktion zusätzlich noch von einem Parameter abhängt, dies werden wir in diesem Abschnitt nicht brauchen aber in §6 benötigen wir diese allgemeinere Form.

Lemma 11: *Seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall, Λ ein lokalkompakter metrischer Raum und $p \geq 0$. Sei $f : I \times \mathbb{R}^{p+1} \times \Lambda \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann ist auch die Funktion*

$$F : C^p(I) \times \Lambda \to C(I); (x, \lambda) \mapsto F_\lambda x : I \to \mathbb{R}; t \mapsto f(t, y(t), y'(t), \ldots, y^{(p)}(t), \lambda)$$

stetig.

Beweis: Zunächst ist F offenbar tatsächlich eine Abbildung von $C^p(I) \times \Lambda$ nach $C(I)$. Seien $z \in C^p(I)$ und $\mu \in \Lambda$ gegeben. Wir wollen die Stetigkeit von F in (z, μ) zeigen. Sei also $\epsilon > 0$. Setze $M := 1 + ||z||_p$ und wähle eine kompakte Umgebung K von μ in Λ. Dann ist die Funktion f stetig auf der kompakten Menge $I \times [-M, M]^{p+1} \times K$, also existiert ein $0 < \delta < 1$ so, dass für alle $t \in I$, $u, v \in [-M, M]^{p+1}$, $\lambda \in K$ mit $|u_i - v_i| \leq \delta$ für alle $0 \leq i \leq p$ stets $|f(t, u, \lambda) - f(t, v, \lambda)| \leq \epsilon/2$ gilt.

Weiter ist die Funktion

$$g : I \times K \to \mathbb{R}; (t, \lambda) \mapsto f(t, z(t), \ldots, z^{(p)}(t), \lambda)$$

stetig, also existiert eine Umgebung U von μ in Λ mit $U \subseteq K$ so, dass $|g(t, \lambda) - g(t, \mu)| \leq \epsilon/2$ für alle $\lambda \in U$, $t \in I$ gilt.

Seien jetzt $x \in C^p(I)$ und $\lambda \in U$ mit $||x - z||_p \leq \delta$. Sei $t \in I$. Ist $0 \leq k \leq n$, so gelten $|z^{(k)}(t)| \leq ||z^{(k)}||_\infty \leq ||z||_p \leq M$, $|z^{(k)}(t) - x^{(k)}(t)| \leq ||z - x||_p \leq \delta$ und $|x^{(k)}(t)| \leq |z^{(k)}(t)| + |x^{(k)}(t) - z^{(k)}(t)| \leq ||z||_p + \delta \leq ||z||_p + 1 = M$. Also ist

$$\begin{aligned} |F_\lambda x(t) - F_\mu z(t)| &= |f(t, x(t), \ldots, x^{(p)}(t), \lambda) - f(t, z(t), \ldots, z^{(p)}(t), \mu)| \\ &\leq |f(t, x(t), \ldots, x^{(p)}(t), \lambda) - f(t, z(t), \ldots, z^{(p)}(t), \lambda)| \\ &\qquad + |f(t, z(t), \ldots, z^{(p)}(t), \lambda) - f(t, z(t), \ldots, z^{(p)}(t), \mu)| \leq \epsilon, \end{aligned}$$

d.h. $||F_\lambda x - F_\mu z|| \leq \epsilon$. Also ist F in (z, μ) stetig.

■

Ist speziell Λ einelementig, so haben wir eine Version des Lemmas ohne den Parameter. Jetzt tragen wir alles zusammen und beweisen die Existenz von Lösungen unseres Randwertproblems.

Satz 12: *Sei $f : [0, 1] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Es gebe Konstanten $M, A, B > 0$ mit*

(a) $\forall(s \in [0,1])\forall(u \in \mathbb{R}) : |u| \geq M \Longrightarrow uf(s,u,0) > 0.$

(b) $\forall(s \in [0,1])\forall(u,p \in \mathbb{R}) : |u| \leq M \Longrightarrow |f(s,u,p)| \leq Ap^2 + B.$

Dann existiert eine zweifach stetig differenzierbare Funktion $y : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $y(0) = y(1) = 0$ und $y''(s) = f(s,y(s),y'(s))$ für alle $s \in [0,1]$.

Beweis: Die Menge

$$E := \{x \in C^2[0,1] : x(0) = x(1) = 0\}$$

ist ein abgeschlossener Teilraum von $C^2[0,1]$ und nach Lemma 10.(a) auch ein Banachraum. Die Abbildung

$$L : E \to C[0,1]; y \mapsto y''$$

ist offenbar stetig und linear mit $||L|| \leq 1$. Wir behaupten, dass L invertierbar ist. Ist $y \in \operatorname{Kern} L$, so ist $y'' = 0$, also existieren $a, b \in \mathbb{R}$ mit $y(s) = as + b$ für alle $s \in [0,1]$. Wegen $y(0) = y(1) = 0$ ist $b = a + b = 0$, d.h. $a = b = 0$ und $y = 0$. Also ist L zumindest injektiv. Sei jetzt $x \in C[0,1]$ gegeben. Wir wollen zeigen das x im Bild von L liegt. Da x stetig ist, ist die Funktion

$$y : [0,1] \to \mathbb{R}; t \mapsto (t-1)\int_0^t sx(s)\,ds + t\int_t^1 (s-1)x(s)\,ds$$

offenbar stetig differenzierbar. Es ist $y(0) = 0$ und $y(1) = 0$. Weiter gilt für jedes $t \in [0,1]$

$$\begin{aligned} y'(t) &= \int_0^t sx(s)\,ds + (t-1)tx(t) + \int_t^1 (s-1)x(s)\,ds - t(t-1)x(t) \\ &= \int_0^t sx(s)\,ds + \int_t^1 (s-1)x(s)\,ds. \end{aligned}$$

Insbesondere ist auch y' stetig differenzierbar, d.h. $y \in C^2[0,1]$ und somit $y \in E$, und für $t \in [0,1]$ ist

$$y''(t) = tx(t) - (t-1)x(t) = x(t),$$

d.h. $x = Ly$. Also ist L bijektiv und somit invertierbar. Unsere explizite Formel für $L^{-1}x$ liefert übrigens $||L^{-1}|| \leq 13/8$.

Nach Lemma 10.(d) ist die Inklusion $j : E \subseteq C^1[0,1]$ ein kompakter linearer Operator. Nach Lemma 11 ist die Abbildung

$$F : C^1[0,1] \to C[0,1]; y \mapsto Fy : [0,1] \to \mathbb{R}; t \mapsto f(t,y(t),y'(t))$$

stetig. Damit erhalten wir die stetige Abbildung

$$T : E \xrightarrow{j} C^1[0,1] \xrightarrow{F} C[0,1] \xrightarrow{L^{-1}} E.$$

Ist $B \subseteq E$ beschränkt, so ist $j(B) \subseteq C^1[0,1]$ relativ kompakt, und damit ist auch $T(B) \subseteq E$ relativ kompakt, d.h. die Abbildung $T : E \to E$ ist kompakt.

Wir wollen jetzt die Leray-Schauder Randbedingung aus Satz 4 nachweisen. Wir haben bereits bemerkt, dass wir hierfür eine a-priori Abschätzung herleiten müssen. Die Konstanten $A, B, M > 0$ seien wie in der Voraussetzung des Satzes. Wir definieren

$$\begin{aligned} M_1 &:= \sqrt{\frac{B}{A}\,(e^{4AM}-1)}, \\ M_2 &:= \sup\{|f(s,u,p)| : s\in[0,1], u\in[-M,M], p\in[-M_1,M_1]\}, \\ r &:= M+M_1+M_2 > 0. \end{aligned}$$

Seien $y \in E$ und $\lambda > 1$ mit $Ty = \lambda y$. Zu zeigen ist $||y|| < r$. Nach Definition von T gilt

$$Ly = \frac{1}{\lambda}F(jy),$$

d.h. für jedes $s \in [0,1]$ ist

$$y''(s) = \frac{1}{\lambda}f(s, y(s), y'(s)).$$

Wir zeigen jetzt der Reihe nach (a) $||y||_\infty < M$, (b) $||y'||_\infty \le M_1$ und (c) $||y''||_\infty \le M_2$. Insgesamt haben wir dann $||y||_2 < M + M_1 + M_2 = r$.

$\mathbf{(}||y||_\infty < M\mathbf{)}$ Ist y konstant, so $y = 0$ wegen $y(0) = 0$, und die Behauptung ist wegen $M > 0$ trivial. Also sei y im folgenden als nicht konstant vorausgesetzt. Wegen $y(0) = y(1) = 0$ nimmt $|y|$ sein Maximum dann in $(0,1)$ an, d.h. es existiert ein $0 < s_0 < 1$ mit $|y(s_0)| = ||y||_\infty$. Dann hat auch die Funktion y^2 in s_0 ein absolutes Maximum und es folgen

$$0 = \left.\frac{d}{ds}\right|_{s_0} y^2(s) = 2y(s_0)y'(s_0), \quad \text{d.h. } y'(s_0) = 0,$$

sowie

$$\begin{aligned} 0 \ge \left.\frac{d^2}{ds^2}\right|_{s_0} y^2(s) &= 2y'(s_0)^2 + 2y(s_0)y''(s_0) \\ &= \frac{2y(s_0)}{\lambda}f(s_0, y(s_0), y'(s_0)) \\ &= \frac{2y(s_0)}{\lambda}f(s_0, y(s_0), 0), \end{aligned}$$

d.h. $y(s_0)f(s_0, y(s_0), 0) \le 0$, und mit Voraussetzung (a) folgt $||y||_\infty = |y(s_0)| < M$.

$\mathbf{(}||y'||_\infty \le M_1\mathbf{)}$ Offenbar können wir wieder annehmen das y nicht konstant ist. Dann nimmt y sein Maximum oder Minimum in $(0,1)$ an, und insbesondere hat y' eine Nullstelle in $(0,1)$. Sei $s_0 \in [0,1]$ gegeben. Wir müssen $|y'(s_0)| \le M_1$ einsehen. Ist $y'(s_0) = 0$, so ist dies klar, d.h. wir können im weiteren $y'(s_0) \ne 0$ voraussetzen. Definiere die Zahlen

$$\begin{aligned} \mu &:= \sup\{0 \le s \le s_0 : y'(s) = 0\}, \\ \nu &:= \inf\{s_0 \le s \le 1 : y'(s) = 0\}, \end{aligned}$$

wobei $\sup\emptyset := 0$ und $\inf\emptyset := 1$ gesetzt ist. Dann ist $0 \le \mu < s_0 < \nu \le 1$ und $y'(s) \ne 0$ für alle $s \in (\mu,\nu)$. Da y' eine Nullstelle in $(0,1)$ hat, ist sicher $\mu > 0$ und $y'(\mu) = 0$ oder $\nu < 1$ und $y'(\nu) = 0$. Weiter hat y' auf (μ,ν) konstantes Vorzeichen. Es gibt jetzt vier verschiedene Fälle, je nachdem ob das Vorzeichen von y' auf (μ,ν) positiv oder negativ ist, und ob $\mu > 0$ oder $\nu < 1$. Alle diese Fälle sind völlig analog, und wir führen hier nur den Fall $y'(s) > 0$ für $s \in (\mu,\nu)$ und $y'(\nu) = 0$ vor.

Sei dies also vorausgesetzt. Ist $s \in [\mu,\nu]$, so gilt

$$-y''(s) \le |y''(s)| = \frac{1}{\lambda}|f(s,y(s),y'(s))| \le Ay'(s)^2 + B$$

nach Bedingung (b), da $\lambda > 1$ ist und wir bereits $||y||_\infty < M$ eingesehen haben. Es folgt

$$-\frac{y''(s)}{Ay'(s)^2 + B} \le 1,$$

und da $y'(s) \ge 0$ ist, folgt weiter

$$-\frac{2Ay'(s)y''(s)}{Ay'(s)^2 + B} \le 2Ay'(s).$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
\log\left(\frac{Ay'(s)^2 + B}{B}\right) &= \log(Ay'(s)^2 + B) - \log(B) \\
&= -\int_s^\nu \frac{2Ay'(t)y''(t)}{Ay'(t)^2 + B}\,dt \\
&\le 2A\int_s^\nu y'(t)\,dt \\
&= 2A(y(\nu) - y(s)) \\
&\le 4AM,
\end{aligned}$$

da $||y||_\infty \le M$ und $y'(\nu) = 0$ ist. Es folgt

$$y'(s)^2 \le \frac{Be^{4AM} - B}{A} = \frac{B}{A}\left(e^{4AM} - 1\right),$$

d.h. $|y'(s)| \le M_1$.

($||y''||_\infty \le M_2$) Ist $s \in [0,1]$, so wissen wir bereits $|y(s)| \le M$ und $|y'(s)| \le M_1$, also $|y''(s)| = |f(s,y(s),y'(s))| \le M_2$.

Damit ist unsere Randbedingung nachgerechnet. Nach Satz 4 gibt es jetzt ein $y \in E$ mit $Ty = y$, d.h. y ist zweifach stetig differenzierbar mit $y(0) = y(1) = 0$ und $Ly = Fy$, also $y''(s) = f(s,y(s),y'(s))$ für alle $s \in [0,1]$.

■

Literatur zu §4

J. Dugundji: *Topology*, Allyn and Bacon 1966

§5 Der Fixpunktindex

In diesem Kapitel wollen wir den sogenannten Fixpunktindex konstruieren, und seine wesentlichen Eigenschaften nachweisen. Unser Fixpunktindex wird auf Mengen des folgenden Typs definiert werden.

Definition 1: Seien E ein Banachraum und $U \subseteq E$ eine offene, beschränkte Teilmenge von E. Dann setzen wir

$$F(U) := \left\{T : \overline{U} \to E \,|T \text{ ist kompakt mit } \mathrm{Fix}(T) \cap \partial U = \emptyset \right\}.$$

Wir wollen jedem $T \in F(U)$ eine ganze Zahl $i(T,U) \in \mathbb{Z}$ zuordnen. Dabei soll die Aussage $i(T,U) \neq 0$ implizieren, dass T einen Fixpunkt hat, und der Index $i(T,U)$ sollte rechnerisch möglichst gut zugänglich sein. Für letzteres wird hauptsächlich die Homotopieinvarianz des Index verantwortlich sein, und um diese zu formulieren definieren wir:

Definition 2: Seien E ein Banachraum und $U \subseteq E$ offen und beschränkt. Zwei Abbildungen $T, T' \in F(U)$ heißen homotop in $F(U)$, in Zeichen $T \cong_c T'$, wenn es eine kompakte Abbildung $H : \overline{U} \times [0,1] \to E$ mit $H_0 = T$, $H_1 = T'$ und $H(x,t) \neq x$ für alle $x \in \partial U$, $0 \leq t \leq 1$ gibt. Wir schreiben dann auch $H : T \cong_c T'$. Dabei ist wie üblich $H_t : \overline{U} \to E; x \mapsto H(x,t)$ für jedes $0 \leq t \leq 1$. Offenbar haben wir $H_t \in F(U)$ für jedes $t \in [0,1]$.

Ist ein Ausdruck unter Homotopie invariant, so eröffnet dies die Möglichkeit ihn für ein kompliziertes f auszuwerten, indem f durch ein einfacheres zu f homotopes g ersetzt wird. Im Rahmen des Grundstudiums kommt solch ein Vorgehen zum Beispiel beim Satz von Rouche in der Funktionentheorie vor. Wir stellen einige elementare Eigenschaften unserer Begriffe zusammen:

Lemma 1: *Seien E ein Banachraum, $U \subseteq E$ offen und beschränkt und $T, T' \in F(U)$. Dann gelten:*

(a) *Es ist*

$$a(T) := \inf_{x \in \partial U} ||Tx - x|| > 0.$$

(b) *Die Fixpunktmenge* $\mathrm{Fix}(T)$ *ist kompakt und* $\mathrm{Fix}(T) \subseteq U$.

(c) *Die Homotopie in $F(U)$ ist eine Äquivalenzrelation auf $F(U)$.*

(d) *Gilt*

$$\sup_{x \in \partial U} ||Tx - T'x|| < a(T),$$

so ist $T \cong_c T'$.

(e) *Ist $H : T \cong_c T'$, so gilt*

$$a(H) := \inf_{\substack{x\in\partial U\\ 0\le t\le 1}} ||H(x,t)-x|| > 0.$$

Beweis: **(a)** Andernfalls existiert eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in ∂U mit $\lim_{n\to\infty} ||Tx_n - x_n|| = 0$. Da $T(\overline{U})$ relativ kompakt ist, gibt es eine Teilfolge $n : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ und ein $x \in E$ mit $\lim_{k\to\infty} Tx_{n_k} = x$. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ gilt $||x - x_{n_k}|| \le ||x - Tx_{n_k}|| + ||Tx_{n_k} - x_{n_k}|| \to 0$, d.h. es ist auch $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x$. Insbesondere ist $x \in \partial U$ und $Tx = \lim_{k\to\infty} Tx_{n_k} = x$; im Widerspruch zu $T \in F(U)$.
(b) $\mathrm{Fix}(T) \subseteq U$ gilt nach Definition und $\mathrm{Fix}(T)$ ist abgeschlossen in $\overline{U}$, und damit auch in E, da T stetig ist. Letztlich ist $\mathrm{Fix}(T) = T(\mathrm{Fix}(T))$ relativ kompakt, und somit ist $\mathrm{Fix}(T)$ sogar kompakt.
(c) Offenbar definiert $H(x,t) := Tx$ eine Homotopie $H : T \cong_c T$. Ist $H : T \cong_c T'$ eine Homotopie, so ist $H'(x,t) := H(x, 1-t)$ offenbar eine Homotopie $H' : T' \cong_c T$. Es verbleibt nur noch die Transitivität einzusehen. Sei also noch $T'' \in F(U)$, und seien $H' : T \cong_c T'$, $H'' : T' \cong_c T''$. Dann ist

$$H : \overline{U} \times [0,1] \to E; (x,t) \mapsto \begin{cases} H'(x,2t), & 0 \le t \le \frac{1}{2}, \\ H''(x, 2t-1), & \frac{1}{2} \le t \le 1, \end{cases}$$

offenbar eine Homotopie $H : T \cong_c T''$ (H ist kompakt, da $H(\overline{U} \times [0,1]) \subseteq H'(\overline{U} \times [0,1]) \cup H''(\overline{U} \times [0,1])$ gilt).
(d) Setze $M := \sup_{x\in\partial U} ||Tx - T'x||$. Die Abbildung

$$H : \overline{U} \times [0,1] \to E; (x,t) \mapsto (1-t)Tx + tT'x$$

ist offenbar stetig. Wegen

$$H\left(\overline{U} \times [0,1]\right) \subseteq \mathrm{co}\left(\overline{T(\overline{U})} \cup \overline{T'(\overline{U})}\right)$$

ist H kompakt, da die konvexe Hülle einer kompakten Teilmenge eines Banachraums relativ kompakt ist. Offenbar gelten $H_0 = T$ und $H_1 = T'$. Letztlich seien $x \in \partial U$, $0 \le t \le 1$. Dann gilt

$$||H(x,t) - x|| = ||Tx - x - t(Tx - T'x)|| \ge ||Tx - x|| - t||Tx - T'x|| \ge a(T) - M > 0,$$

d.h. $H(x,t) \ne x$.
(e) Wäre die Behauptung falsch, so gäbe es eine Folge $(x_n, t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\partial U \times [0,1]$ mit $\lim_{n\to\infty} ||H(x_n, t_n) - x_n|| = 0$. Da H eine kompakte Abbildung ist, und $[0,1]$ kompakt ist, existieren eine Teilfolge $n : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ und $x \in E$, $t \in [0,1]$ mit $\lim_{k\to\infty} H(x_{n_k}, t_{n_k}) = x$ und $\lim_{k\to\infty} t_{n_k} = t$. Wie im Beweis von (a) folgt auch $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x$, uns dies ergibt den Widerspruch $H(x,t) = x$.

■

Wie schon beim Satz von Schauder in §4 liegt das eigentliche Problem bei der Konstruktion des Fixpunktindex im Endlichdimensionalen. Der allgemeine Fall folgt dann mittels desselben Lemmas, das wir schon verwendet haben, um den Fixpunktsatz von Schauder aus dem Satz von Brouwer zu gewinnen.

Ist $E = \mathbb{R}^n$ und $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, so ist $\overline{U}$ kompakt, d.h. unsere Voraussetzung $T \in F(U)$ besagt nur das $T : \overline{U} \to \mathbb{R}^n$ stetig und ohne Fixpunkt auf ∂U ist. Analoges gilt für unsere Homotopien. Wie schon beim Beweis des Satzes von Brouwer in §3, gibt es wieder verschiedene Möglichkeiten wie wir weiter vorgehen können. Der natürlichste Zugang arbeitet mit Hilfsmitteln aus der algebraischen Topologie. Allerdings benötigen wir hierzu nicht die in §3 kurz diskutierten Homotopiegruppen, sondern die sogenannten Homologiegruppen eines topologischen Raums, und daher wollen wir diesen Zugang hier nicht weiter beschreiben. Um überhaupt einen Eindruck zu kriegen, wie Homotopie- und Homologiegruppen verwendet werden können, um numerische Invarianten stetiger Abbildungen zu konstruieren, wollen wir hier kurz den Abbildungsgrad von stetigen Abbildungen $f : S^n \to S^n$ besprechen. Dieser hängt in Wahrheit auch eng mit unserem Fixpunktindex zusammen.

Für jedes $q \geq 1$ hatten wir die Homotopiegruppe $\pi_q(X, *)$ eines topologischen Raums X versehen mit einem Basispunkt $* \in X$ eingeführt. Sind nun X, Y zwei topologische Räume mit Basispunkten $* \in X$, $*' \in Y$ und ist $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung mit $f(*) = *'$, so können wir jeder q-Schleife $w : [0,1]^q \to X$ die stetige Abbildung $fw : [0,1]^q \to Y$ zuordnen. Wegen $f(*) = *'$ und $w|\partial[0,1]^q = *$ ist auch $fw|\partial[0,1]^q = *'$. Es ist leicht zu zeigen, dass f auf diese Weise einen Gruppenhomomorphismus

$$f_* : \pi_q(X, *) \to \pi_q(Y, *')$$

induziert. Nun sei speziell $X = Y = S^n$ und $* = *'$. Dann wissen wir bereits $\pi_n(S^n, *) \simeq \mathbb{Z}$, also induziert f einen Gruppenhomomorphismus $f_* : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$. Aber jeder solche Homomorphismus ist durch Multiplikation mit einer ganzen Zahl gegeben, und diese nennen wir den Abbildungsgrad von f. Der Abbildungsgrad $d(f) \in \mathbb{Z}$ ist damit durch

$$f_* u = d(f) u$$

für alle $u \in \pi_n(S^n, *)$ gekennzeichnet. Es ist leicht einzusehen, dass wir $d(f)$ auch definieren können, wenn f den Basispunkt nicht fixiert.

Nach diesem kleinen Ausflug kommen wir zum Fixpunktindex, und wollen den analytischen Zugang im Detail beschreiben. Wir definieren unseren Fixpunktindex nicht sofort auf der ganzen Menge $F(U)$, sondern nur auf einer echten Teilmenge:

Definition 3: Ist $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, so setzen wir

$$F_1(U) := \{f \in F(U) : f|U \in C^\infty\}.$$

Wir werden das folgende Lemma benötigen, um die Eindeutigkeit des zu definierenden Index einzusehen.

Lemma 2: *Seien $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ ein abgeschlossener Quader und $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $\operatorname{supp} \varphi \subseteq Q^\circ$ und $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\, dx = 0$. Seien weiter $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $f \in F_1(U)$ und für $F := \mathrm{id} - f$ gelte $F(\partial U) \cap Q = \emptyset$. Dann ist*

$$\int_U \varphi(F(x)) \cdot \det\left(F'(x)\right)\, dx = 0.$$

Beweis: Wir betrachten die Differentialform

$$\omega := \varphi\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n \in \Omega_n(\mathbb{R}^n).$$

Wir haben die C^∞-Abbildung $F : U \to \mathbb{R}^n$, und erhalten eine Differentialform $F^*\omega \in \Omega_n(U)$. Für jedes $x \in U$ gilt

$$\begin{aligned}
(F^*\omega)(x) &= \varphi(F(x))\,(dF_1)_x \wedge \ldots \wedge (dF_n)_x \\
&= \varphi(F(x)) \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial F_1}{\partial x_i} dx_i\right)_x \wedge \ldots \wedge \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial F_n}{\partial x_i} dx_i\right)_x \\
&= \varphi(F(x)) \sum_{\pi \in S_n} (-1)^\pi \left.\frac{\partial F_1}{\partial x_{\pi(1)}}\right|_x \cdots \left.\frac{\partial F_n}{\partial x_{\pi(n)}}\right|_x (dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n)_x \\
&= \varphi(F(x)) \cdot \det\left(F'(x)\right)(dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n)_x.
\end{aligned}$$

Der Träger $\operatorname{supp} \omega = \operatorname{supp} \varphi \subseteq Q^\circ$ ist kompakt, und es gilt $\int_Q \omega = \int_Q \varphi(x)\, dx = 0$. Nach dem Poincare-Lemma (§3A.Satz 6) gibt es eine $(n-1)$-Form $\alpha \in \Omega_{n-1}(\mathbb{R}^n)$ mit kompakten Träger in Q° und $d\alpha = \omega$. Die Menge $A := F^{-1}(\operatorname{supp} \alpha)$ ist abgeschlossen in $\overline{U}$, also kompakt, und wegen $F(\partial U) \cap Q = \emptyset$, $\operatorname{supp} \alpha \subseteq Q$ ist $A \subseteq U$. Ist $x \in U$ mit $(F^*\alpha)(x) \neq 0$, so ist $x \in F^{-1}(\operatorname{supp} \alpha) = A$, d.h. der Träger von $F^*\alpha$ in U ist in A enthalten, und somit kompakt. Mit §3A.Lemma 5 folgt

$$\int_U \varphi(F(x)) \cdot \det\left(F'(x)\right)\, dx = \int_U F^*\omega = \int_U F^*(d\alpha) = \int_U d(F^*\alpha) = 0.$$

∎

Nun können wir den Fixpunktindex für $f \in F_1(U)$ definieren.

Lemma 3: *Seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt und $f \in F_1(U)$. Dann existiert genau eine reelle Zahl $i(f, U) \in \mathbb{R}$ so, dass mit $F := \mathrm{id} - f$ für jeden bei Null zentrierten, abgeschlossenen Würfel $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $F(\partial U) \cap Q = \emptyset$, und jedes $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $\operatorname{supp} \psi \subseteq Q^\circ$ und $\int_{\mathbb{R}^n} \psi(x)\, dx = 1$ stets*

$$\int_U \psi(F(x)) \cdot \det\left(F'(x)\right)\, dx = i(f, U)$$

gilt.

Beweis: Wegen $\mathrm{Fix}(f) \cap \partial U = \emptyset$ ist $0 \notin F(\partial U)$, also existiert ein abgeschlossener, bei Null zentrierter Würfel Q mit $Q \cap F(\partial U) = \emptyset$. Weiter existiert ein $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $\operatorname{supp}\psi \subseteq Q^\circ$ und $\int_{\mathbb{R}^n} \psi(x)\,dx = 1$. Damit ist die Eindeutigkeitsaussage klar, und wir müssen nur zeigen, dass $\int_U \psi(F(x)) \det(F'(x))\,dx$ unabhängig vom speziellen Q und ψ ist.

Seien also für $i = 1, 2$ die Menge Q_i ein bei 0 zentrierter, abgeschlossener Würfel mit $F(\partial U) \cap Q_i = \emptyset$ und $\psi_i \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $\int_{\mathbb{R}^n} \psi_i(x)\,dx = 1$ und $\operatorname{supp}\psi_i \subseteq Q_i^\circ$. Da Q_1, Q_2 zwei bei Null zentrierte, abgeschlossene Würfel sind, gilt $Q_1 \subseteq Q_2$ oder $Q_2 \subseteq Q_1$. Wir erhalten also $Q \in \{Q_1, Q_2\}$ mit $Q_1, Q_2 \subseteq Q$. Es ist $F(\partial U) \cap Q = \emptyset$. Weiter ist $\varphi := \psi_1 - \psi_2 \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $\operatorname{supp}\varphi \subseteq \operatorname{supp}\psi_1 \cup \operatorname{supp}\psi_2 \subseteq Q_1^\circ \cup Q_2^\circ = Q^\circ$ und $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} \psi_1(x)\,dx - \int_{\mathbb{R}^n} \psi_2(x)\,dx = 1 - 1 = 0$. Mit Lemma 2 folgt

$$\int_U \psi_1(F(x)) \det\left(F'(x)\right)\,dx - \int_U \psi_2(F(x)) \det\left(F'(x)\right)\,dx = \int_U \varphi(F(x)) \det\left(F'(x)\right)\,dx = 0.$$

■

Damit haben wir jedem $f \in F_1(U)$ einen Fixpunktindex $i(f, U) \in \mathbb{R}$ zugeordnet. Bevor wir fortfahren, wollen wir eine kleine Notation vereinbaren. Ist $f \in F(U)$ und $V \subseteq U$ offen mit $\mathrm{Fix}(f) \cap \partial V = \emptyset$, so ist auch $f|\overline{V} \in F(V)$. Ist sogar $f \in F_1(U)$, so folgt $f|\overline{V} \in F_1(V)$. Wir schreiben einfach

$$i(f, V) := i(f|\overline{V}, V).$$

Zur Zeit ist dies nur für $f \in F_1(U)$ definiert, aber wenn wir den Fixpunktindex auf ganz $F(U)$ erweitert haben, werden wir diese Schreibweise ebenfalls verwenden, ohne es noch einmal gesondert festzuhalten.

Wir hatten angekündigt, dass der Fixpunktindex $i(f, U)$ eine ganze Zahl ist, aber dies kann man der Definition in Lemma 3 nicht unmittelbar enthehmen. Ausserdem ist der Zusammenhang von $i(f, U)$ mit $\mathrm{Fix}(f)$ momentan nur sehr lose, es taucht nur die Bedingung $\mathrm{Fix}(f) \cap \partial U = \emptyset$ in der Definition auf. Wir werden diese beiden Punkte noch aufklären, allerdings schränken wir uns dazu zunächst auf eine echte Teilmenge von $F_1(U)$ ein. Diese Teilklasse ist folgendermassen definiert:

Definition 4: Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Dann setzen wir

$$F_0(U) := \left\{ f \in F_1(U) \;\middle|\; \begin{array}{l} f \text{ hat nur endlich viele Fixpunkte und für jeden} \\ \text{Fixpunkt } x \in \mathrm{Fix}(f) \text{ ist } \mathrm{id} - f'(x) \text{ invertierbar} \end{array} \right\}.$$

Für Elemente dieser Funktionsklasse haben wir die folgende Formel für den Fixpunktindex:

Satz 4: *Seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $f \in F_0(U)$ und $F := \mathrm{id} - f$. Dann gilt*

$$i(f,U) = \sum_{x \in \mathrm{Fix}(f)} \mathrm{sign}\,(\det F'(x))\,.$$

Beweis: Schreibe $\mathrm{Fix}(f) = \{x_1, \ldots, x_m\} \subseteq U$. Ist $1 \le i \le m$ gegeben, so ist $F'(x_i) = \mathrm{id} - f'(x_i)$ invertierbar, und nach dem Umkehrsatz existieren offene Mengen $U_i \subseteq U$, $V_i \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $x_i \in U_i$, $0 = F(x_i) \in V_i$ so, dass $F : U_i \to V_i$ ein Diffeomorphismus ist. Weiter wählen wir offene Kugeln W_i mit Mittelpunkt x_i und $\overline{W_i} \subseteq U_i$ $(1 \le i \le m)$ so, dass $\overline{W_i} \cap \overline{W_j} = \emptyset$ für alle $1 \le i, j \le m$ mit $i \ne j$ ist.

Sei $1 \le i \le m$. Dann ist $\det F'(x) \ne 0$ für jedes $x \in W_i \subseteq U_i$, und da W_i zusammenhängend ist, folgt $\mathrm{sign}(\det F'(x)) = \mathrm{sign}(\det F'(x_i))$ für alle $x \in W_i$. Weiter ist $F(W_i) \subseteq V_i$ offen, d.h. $F(W_i)$ ist offen im $\mathbb{R}^n$ mit $0 \in F(W_i)$. Damit ist auch $0 \in \bigcap_{i=1}^m F(W_i)$ und diese Menge ist offen im $\mathbb{R}^n$. Weiter ist $K := \overline{U} \setminus \bigcup_{i=1}^m W_i$ eine abgeschlossene Teilmenge von $\overline{U}$, also kompakt. Es ist $\mathrm{Fix}(f) = \{x_1, \ldots, x_m\} \subseteq \bigcup_{i=1}^m W_i$, d.h. $\mathrm{Fix}(f) \cap K = \emptyset$, und somit ist $F(K) \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt mit $0 \notin F(K)$. Also existiert ein abgeschlossener, bei Null zentrierter Würfel $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ mit

$$Q \subseteq \bigcap_{i=1}^m F(W_i) \cap (\mathbb{R}^n \setminus F(K)).$$

Wegen $\bigcup_{i=1}^m W_i \subseteq \bigcup_{i=1}^m U_i \subseteq U$ ist $\partial U \subseteq K$, also auch $Q \cap F(\partial U) = \emptyset$. Wähle $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $\mathrm{supp}\,\psi \subseteq Q^\circ$ und $\int_{\mathbb{R}^n} \psi(x)\,dx = 1$. Für jedes $1 \le i \le m$ ist $Q^\circ \subseteq F(W_i)$, und somit ist $M_i := (F|W_i)^{-1}(Q^\circ) \subseteq W_i$ offen mit $x_i \in M_i$, da $F(x_i) = 0 \in Q^\circ$ ist.

Sei $x \in U \setminus \bigcup_{i=1}^m M_i$. Ist sogar $x \notin \bigcup_{i=1}^m W_i$, so gilt $x \in K$, also $F(x) \notin Q$ und insbesondere $\psi(F(x)) = 0$. Sonst existiert ein $1 \le i \le m$ mit $x \in W_i$. Wegen $x \notin M_i$ ist $F(x) \notin Q^\circ$, und wieder ist $\psi(F(x)) = 0$. Mit der Transformationsformel für das gewöhnliche Lebesgue-Integral im $\mathbb{R}^n$ folgt jetzt:

$$\begin{aligned}
i(f,U) &= \int_U \psi(F(x)) \cdot \det\,(F'(x))\;dx \\
&= \sum_{i=1}^m \int_{M_i} \psi(F(x)) \cdot \det\,(F'(x))\;dx \\
&= \sum_{i=1}^m \mathrm{sign}\,(\det F'(x_i)) \int_{M_i} \psi(F(x))\,|\det\,(F'(x))|\;dx \\
&= \sum_{i=1}^m \mathrm{sign}\,(\det F'(x_i)) \int_{Q^\circ} \psi(x)\,dx \\
&= \sum_{i=1}^m \mathrm{sign}\,(\det F'(x_i))\,.
\end{aligned}$$

■

Als unmittelbares Korollar ergibt sich:

Korollar 5: *Seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt und $f \in F_0(U)$. Dann gelten:*

(a) *Es ist $i(f,U) \in \mathbb{Z}$.*

(b) *Es gilt $|i(f,U)| \leq |\operatorname{Fix}(f)|$.*

(c) *Ist $i(f,U) \neq 0$, so ist $\operatorname{Fix}(f) \neq \emptyset$.*

Wir haben jetzt drei verschiedene Funktionsklassen $F_0(U) \subseteq F_1(U) \subseteq F(U)$, der Fixpunktindex ist auf $F_1(U)$ definiert, und auf $F_0(U)$ kennen wir einige seiner Eigenschaften. Um von $F_0(U)$ auf ganz $F_1(U)$ zu kommen, und um später auf $F(U)$ fortsetzen zu können, benötigen wir eine Möglichkeit Elemente von $F_1(U)$ durch Elemente von $F_0(U)$ zu approximieren, und später müssen wir auch $F(U)$ durch $F_1(U)$ approximieren. Letzteres ist dank des Approximationssatzes von Weierstrass leicht, auf der kompakten Menge $\overline{U}$ können wir jede stetige Funktion sogar durch Polynome approximieren. Glücklicherweise stellt es sich heraus, dass wir zu einem gegebenen $f \in F_1(U)$ nur eine kleine Konstante hinzuaddieren müssen, um eine Funktion aus $F_0(U)$ zu erhalten.

Lemma 6: *Seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $F : \overline{U} \to \mathbb{R}^n$ stetig und $\epsilon > 0$. Es gelte $F|U \in C^\infty$ und $0 \notin F(\partial U)$. Dann existiert ein $z \in \mathbb{R}^n$ mit $||z|| \leq \epsilon$ so, dass die Menge $M := F^{-1}(z) \subseteq \overline{U}$ endlich ist, $M \cap \partial U = \emptyset$ gilt, und $F'(x)$ für jedes $x \in M$ invertierbar ist.*

Beweis: Die Menge ∂U ist kompakt, also ist auch $F(\partial U)$ kompakt, und damit ist $V := F^{-1}(\mathbb{R}^n \backslash F(\partial U))$ eine offene Teilmenge von $\overline{U}$. Es is $V \subseteq U$, also ist V auch in U, und damit auch im $\mathbb{R}^n$, offen. Nach dem Morse-Sard Lemma (§3A.Satz 3) existiert ein $z \in \mathbb{R}^n \backslash F(\partial U)$ mit $||z|| \leq \epsilon$ so, dass für jedes $x \in (F|V)^{-1}(z) = F^{-1}(z) \cap V$ die Ableitung $F'(x)$ surjektiv, also auch invertierbar ist.

Setze $M := F^{-1}(z) \subseteq \overline{U}$. Da F stetig ist, ist $M \subseteq \overline{U}$ abgeschlossen, und somit ist M kompakt. Ist $x \in M$, so gilt $F(x) = z \notin F(\partial U)$, also $x \in F^{-1}(\mathbb{R}^n \backslash F(\partial U)) = V$. Also ist $M \subseteq V \subseteq U$, und insbesondere $M \cap \partial U = \emptyset$. Sei $x \in M = M \cap V = (F|V)^{-1}(z)$. Dann ist die Ableitung $F'(x)$ invertierbar. Nach dem Umkehrsatz existiert eine offene Menge $W \subseteq V$ mit $M \cap W = \{x\}$. Also ist M diskret und kompakt, und damit endlich. ∎

Lemma 7: *Seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt und $\epsilon > 0$.*

(a) *Ist $f \in F_1(U)$, so existiert ein $z \in \mathbb{R}^n$ mit $||z|| \leq \epsilon$ und $f + z \in F_0(U)$.*

(b) *Ist $f \in F(U)$, so existiert ein $g \in F_0(U)$ mit $||g - f|| \leq \epsilon$.*

Beweis: **(a)** Die Abbildung $F := \mathrm{id} - f : \overline{U} \to \mathbb{R}^n$ ist stetig mit $F|U \in C^\infty$ und $0 \notin F(\partial U)$. Nach Lemma 6 existiert ein $z \in \mathbb{R}^n$ mit $||z|| \leq \epsilon$ so, dass $M := F^{-1}(z)$

endlich ist, $M \cap \partial U = \emptyset$ gilt und $F'(x)$ für jedes $x \in M$ invertierbar ist. Es ist $f + z : \overline{U} \to \mathbb{R}^n$ stetig, $(f+z)|U \in C^\infty$ und

$$\mathrm{Fix}(f+z) = \{x \in \overline{U} : f(x) + z = x\} = \{x \in \overline{U} : F(x) = z\} = M.$$

Damit ist $f + z \in F_0(U)$, da für jedes $x \in M$ die Abbildung $\mathrm{id} - (f+z)'(x) = F'(x)$ invertierbar ist.

(b) Nach dem Approximationssatz von Weierstrass gibt es eine polynomiale Abbildung $g \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ mit

$$||g(x) - f(x)|| \le \frac{1}{2} \min\{\epsilon, a(f)\}$$

für jedes $x \in \overline{U}$. Für $x \in \partial U$ folgt $||g(x) - x|| = ||f(x) - x - (f(x) - g(x))|| \ge ||f(x) - x|| - ||f(x) - g(x)|| \ge a(f) - (1/2)a(f) = a(f)/2 > 0$, d.h. $g(x) \ne x$, und somit ist $g \in F_1(U)$. Nach (a) existiert ein $z \in \mathbb{R}^n$ mit $||z|| \le \epsilon/2$ und $h := g + z \in F_0(U)$. Für jedes $x \in \overline{U}$ ist $||h(x) - f(x)|| \le ||g(x) - f(x)|| + ||z|| \le \epsilon$.

■

Jetzt sind wir in der Lage einzusehen das der Fixpunktindex immer eine ganze Zahl ist.

Lemma 8: *Seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt und $f \in F_1(U)$. Dann ist $i(f, U) \in \mathbb{Z}$.*

Beweis: Setze wieder $F := \mathrm{id} - f$. Die Menge $F(\partial U) \subseteq \mathbb{R}^n$ ist kompakt mit $0 \notin F(\partial U)$, also existieren ein abgeschlossener, bei Null zentrierter Würfel $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ und ein $a > 0$ mit $(Q + \overline{B}_a(0)) \cap F(\partial U) = \emptyset$. Insbesondere ist $Q \cap F(\partial U) = \emptyset$. Wähle ein $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $\mathrm{supp}\,\psi \subseteq Q^\circ$ und $\int_{\mathbb{R}^n} \psi(x)\,dx = 1$.

Die Menge $Q + \overline{B}_a(0)$ ist als Summe zweier kompakter Mengen abgeschlossen im $\mathbb{R}^n$, also ist $K := F^{-1}(Q + \overline{B}_a(0))$ in $\overline{U}$ abgeschlossen. Damit ist K kompakt mit $K \cap \partial U = \emptyset$, d.h. $K \subseteq U$. Also ist

$$M := \sup_{x \in K} |\det F'(x)| < \infty.$$

Nach Lemma 7.(a) existiert eine Folge $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ im $\mathbb{R}^n$ mit $\lim_{k\to\infty} z_k = 0$ so, dass $||z_k|| \le a$ und $f + z_k \in F_0(U)$ für jedes $k \in \mathbb{N}$ gelten.

Wir zeigen jetzt $\lim_{k\to\infty} i(f + z_k, U) = i(f, U)$. Sei $\epsilon > 0$. Dann existiert ein $\delta > 0$ mit $\delta M \lambda_n(\overline{U}) \le \epsilon$, wobei λ_n das Lebesguemaß auf dem $\mathbb{R}^n$ ist. Da der Träger von ψ kompakt ist, ist ψ gleichmäßig stetig und es existiert ein $\tau > 0$ mit $|\psi(x) - \psi(y)| \le \delta$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ mit $||x - y|| \le \tau$. Schließlich gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $||z_k|| \le \tau$ für $k \ge N$. Sei $k \ge N$ gegeben. Sei $x \in U$. Ist $\psi(F(x)) \ne 0$, so ist $F(x) \in \mathrm{supp}\,\psi \subseteq Q^\circ \subseteq Q + \overline{B}_a(0)$, d.h. $x \in K$. Ist $\psi(F(x) - z_k) \ne 0$, so folgt $F(x) - z_k \in \mathrm{supp}\,\psi \subseteq Q$ und wegen $||z_k|| \le a$ ist $F(x) \in Q + z_k \subseteq Q + \overline{B}_a(0)$, d.h. wieder $x \in K$. Also gilt $\psi(F(x)) = \psi(F(x) - z_k) = 0$ für jedes $x \in \overline{U} \backslash K$. Ist $x \in K$, so gilt $||(F(x) - z_k) - F(x)|| = ||z_k|| \le \tau$, also $|\psi(F(x) - z_k) - \psi(F(x))| \le \delta$ und $|(\psi(F(x) - z_k) - \psi(F(x))) \det F'(x)| \le \delta M$. Insgesamt ist damit

$$|(\psi(F(x) - z_k) - \psi(F(x))) \det F'(x)| \le \delta M$$

für alle $x \in \overline{U}$. Es ist $\mathrm{id} - (f + z_k) = F - z_k$ und $(F - z_k)(\partial U) = F(\partial U) - z_k$ ist disjunkt zu Q, da $(Q + \overline{B}_a(0)) \cap F(\partial U) = \emptyset$ und $||z_k|| \leq a$ ist. Außerdem ist $(F - z_k)'(x) = F'(x)$ für jedes $x \in U$. Damit haben wir jetzt

$$|i(f + z_k, U) - i(f, U)| = \\ \left| \int_U (\psi(F(x) - z_k) - \psi(F(x))) \cdot \det(F'(x))\, dx \right| \leq \delta M \lambda_n(\overline{U}) \leq \epsilon.$$

Dies zeigt $i(f, U) = \lim_{k\to\infty} i(f + z_k, U)$. Nach Korollar 5.(a) ist $i(f + z_k, U) \in \mathbb{Z}$ für jedes $k \in \mathbb{N}$, und damit ist auch $i(f, U) \in \mathbb{Z}$.

■

Wie angekündigt ist unser Fixpunktindex invariant unter Homotopie.

Lemma 9: *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt.*

(a) *Sind $f, g \in F_1(U)$ mit $f \cong_c g$, so existiert eine stetige Abbildung $H : \overline{U} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ mit $H_0 = f$, $H_1 = g$, $H|U \times \mathbb{R} \in C^\infty$ und $H(x, t) \neq x$ für alle $x \in \partial U$, $0 \leq t \leq 1$.*

(b) *Sind $f, g \in F_1(U)$ mit $f \cong_c g$, so gilt $i(f, U) = i(g, U)$.*

Beweis: **(a)** Für $f, g \in F_1(U)$ sei $f \sim g$ dann und nur dann, wenn es eine stetige Abbildung $H : \overline{U} \times \mathbb{R}$ mit $H_0 = f$, $H_1 = g$, $H|U \times \mathbb{R} \in C^\infty$ und $H(x, t) \neq x$ für alle $x \in \partial U$, $0 \leq t \leq 1$ gibt. Wir zeigen zunächst, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf $F_1(U)$ ist. Reflexivität und Symmetrie sind dabei wieder klar. Zu zeigen bleibt die Transitivität. Seien also $f, g, h \in F_1(U)$ mit $f \sim g$ und $g \sim h$. Seien H^1 beziehungsweise H^2 mit den angegebenen Eigenschaften für $f \sim g$ und $g \sim h$ gewählt. Wir haben

$$a := \frac{1}{2} \inf\{||H^1(x, t) - x|| : x \in \partial U, t \in [0, 1]\} > 0.$$

Da H^1 stetig ist, ist die Menge

$$W_1 := \{(x, t) \in \partial U \times \mathbb{R} : ||H^1(x, t) - x|| > a\}$$

in $\partial U \times \mathbb{R}$ offen mit $\partial U \times [0, 1] \subseteq W_1$. Da ∂U kompakt ist, gibt es ein $\delta_1 > 0$ mit

$$\partial U \times [0, 1 + \delta_1] \subseteq W_1.$$

Die Stetigkeit von H^1 und H^2 impliziert, dass die Menge

$$W_2 := \{(x, t) \in \partial U \times \mathbb{R} : ||H^1(x, 2t) - H^2(x, 2t - 1)|| < a\}$$

in $\partial U \times \mathbb{R}$ offen ist. Für jedes $x \in \partial U$ gilt

$$H^1\left(x, 2 \cdot \frac{1}{2}\right) = H^1(x, 1) = g(x) = H^2(x, 0) = H^2\left(x, 2 \cdot \frac{1}{2} - 1\right),$$

d.h. $\partial U \times \{1/2\} \subseteq W_2$. Die Kompaktheit von ∂U liefert ein $\delta_2 > 0$ mit

$$\partial U \times \left[\frac{1}{2} - \delta_2, \frac{1}{2} + \delta_2\right] \subseteq W_2.$$

Wähle ein $0 < \delta < 1/2$ mit $\delta \leq \delta_2$ und $\delta \leq \delta_1/2$. Es existiert eine Funktion $\lambda \in C^\infty(\mathbb{R})$ mit $0 \leq \lambda(t) \leq 1$ für alle $t \in \mathbb{R}$ so, dass $\lambda(t) = 0$ für $t \leq 1/2 - \delta$ und $\lambda(t) = 1$ für $t \geq 1/2 + \delta$ gilt. Definiere

$$H : \overline{U} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n; (x,t) \mapsto (1 - \lambda(t))H^1(x, 2t) + \lambda(t)H^2(x, 2t - 1).$$

Offenbar ist H stetig und $H|U \times \mathbb{R} \in C^\infty$. Wegen $\lambda(0) = 0$ und $\lambda(1) = 1$ (da $\delta < 1/2$) ist auch $H_0 = H_0^1 = f$ und $H_1 = H_1^2 = h$. Es verbleibt nur $H(x,t) \neq x$ für $x \in \partial U$, $t \in [0,1]$ zu zeigen. Seien also $x \in \partial U$ und $0 \leq t \leq 1$. Ist $t \leq 1/2 - \delta$, so gilt $\lambda(t) = 0$ und $H(x,t) = H^1(x, 2t) \neq x$. Ist $t \geq 1/2 + \delta$, so ist $\lambda(t) = 1$ und $H(x,t) = H^2(x, 2t-1) \neq x$. Schließlich sei $1/2 - \delta < t < 1/2 + \delta$. Wegen $\delta \leq \delta_2$ ist dann $(x,t) \in W_2$, und wegen $0 \leq 2t \leq 1 + 2\delta \leq 1 + \delta_1$ ist auch $(x, 2t) \in W_1$. Es folgt

$$\begin{aligned}
||H(x,t) - x|| &= ||H^1(x,2t) - x - \lambda(t)(H^1(x,2t) - H^2(x,2t-1))|| \\
&\geq ||H^1(x,2t) - x|| - \lambda(t)||H^1(x,2t) - H^2(x,2t-1)|| \\
&> a - \lambda(t)a \\
&\geq 0,
\end{aligned}$$

also ist wieder $H(x,t) \neq x$. Damit haben wir $f \sim h$ bewiesen, und unsere Hilfsbehauptung ist gezeigt. Wir kommen jetzt zur eigentlichen Behauptung.

Es ist zu zeigen, dass $f \cong_c g$ stets $f \sim g$ impliziert. Seien also $f, g \in F_1(U)$ mit $f \cong_c g$. Wähle ein $H : f \cong_c g$. Nach dem Approximationssatz von Weierstrass gibt es eine polynomiale Abbildung $\Phi : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ mit $||\Phi(x) - H(x)|| \leq a(H)/2$ für alle $x \in \overline{U} \times [0,1]$. Für $x \in \partial U$, $0 \leq t \leq 1$ gilt $||\Phi(x,t) - x|| \geq ||H(x,t) - x|| - ||H(x,t) - \Phi(x,t)|| \geq a(H) - a(H)/2 = a(H)/2 > 0$, d.h. $\Phi(x,t) \neq x$. Damit sind $f_1 := \Phi_0 \in F_1(U)$, $g_1 := \Phi_1 \in F_1(U)$ mit $f_1 \sim g_1$.

Betrachte jetzt

$$G : \overline{U} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n; (x,t) \mapsto (1-t)f(x) + tf_1(x).$$

Dann ist G stetig, $G|U \times \mathbb{R} \in C^\infty$, $G_0 = f$ und $G_1 = f_1$. Für $x \in \partial U$, $0 \leq t \leq 1$ gilt $||G(x,t) - x|| = ||f(x) - x - t(f(x) - f_1(x))|| \geq ||f(x) - x|| - t||f(x) - f_1(x)|| \geq ||H(x,0) - x|| - ||H(x,0) - \Phi(x,0)|| \geq a(H) - a(H)/2 = a(H)/2 > 0$, d.h. $G(x,t) \neq x$. Dies zeigt $f \sim f_1$, und analog folgt $g \sim g_1$. Da $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist, zeigt dies $f \sim g$.

(b) Nach (a) existiert eine stetige Abbildung $H : \overline{U} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ mit $H|U \times \mathbb{R} \in C^\infty$, $H_0 = f$, $H_1 = g$ und $H(x,t) \neq x$ für alle $x \in \partial U$, $t \in [0,1]$. Insbesondere ist $H_t \in F_1(U)$ für jedes $0 \leq t \leq 1$, und wir erhalten die Abbildung

$$h : [0,1] \to \mathbb{Z}; t \mapsto i(H_t, U)$$

mit $h(0) = i(f, U)$ und $h(1) = i(g, U)$. Also reicht es zu zeigen, dass h stetig ist, denn dann ist h konstant und wir sind fertig.

Die Abbildung $F : \overline{U} \times [0,1] \to \mathbb{R}^n; (x,t) \mapsto x - H(x,t)$ ist stetig mit $0 \notin F(\partial U \times [0,1])$, also existieren ein abgeschlossener, bei Null zentrierter Würfel $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $Q \cap F(\partial U \times [0,1]) = \emptyset$, und ein $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $\operatorname{supp}\psi \subseteq Q^\circ$ und $\int_{\mathbb{R}^n} \psi(x)\,dx = 1$. Für jedes $0 \le t \le 1$ ist $\mathrm{id} - H_t = F_t$, also $Q \cap F_t(\partial U) = \emptyset$ und $F_t'(x) = D_1F(x,t)$ für $x \in U$. Es folgt

$$h(t) = \int_U \psi(F(x,t)) \det(D_1F(x,t))\,dx$$

für jedes $t \in [0,1]$. Weiter ist $F^{-1}(Q)$ abgeschlossen in $\overline{U} \times [0,1]$ mit $F^{-1}(Q) \cap (\partial U \times [0,1]) = \emptyset$, d.h. $F^{-1}(Q) \subseteq U \times [0,1]$. Damit ist $K := \mathrm{Pr}_1(F^{-1}(Q)) \subseteq U$ kompakt, und für jedes $t \in [0,1]$ gilt $\operatorname{supp}(\psi F_t) \subseteq K$. Dies zeigt

$$h(t) = \int_K \psi(F(x,t)) \det(D_1F(x,t))\,dx$$

für alle $t \in [0,1]$, und insbesondere ist h stetig.

■

Damit können wir jetzt den Fixpunktindex für alle $f \in F(U)$ definieren.

Lemma 10: *Seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt und $f \in F(U)$. Dann existiert genau ein $k \in \mathbb{Z}$ mit $i(g, U) = k$ für alle $g \in F_1(U)$ mit $||g - f|| < a(f)$.*

Beweis: Nach Lemma 7.(b) existiert überhaupt ein $g \in F_1(U)$ mit $||g - f|| < a(f)$. Sind $g_1, g_2 \in F_1(U)$ mit $||f - g_1||, ||f - g_2|| < a(f)$, so gelten $f \cong_c g_1$ und $f \cong_c g_2$ nach Lemma 1.(d). Nach Lemma 1.(c) ist damit auch $g_1 \cong_c g_2$ und Lemma 9.(b) ergibt $i(g_1, U) = i(g_2, U)$.

■

Definition 5: Seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt und $f \in F(U)$. Definiere $i(f, U) \in \mathbb{Z}$ durch $i(g, U) = i(f, U)$ für alle $g \in F_1(U)$ mit $||g - f|| < a(f)$. Nach Lemma 10 ist dies wohldefiniert, und stimmt für $f \in F_1(U)$ mit der alten Definition überein, da wir einfach $g = f$ setzen können.

Wir fassen nun die Haupteigenschaften des Fixpunktindex in einem Satz zusammen.

Satz 11: *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt.*

(a) *Ist $y \in U$, so ist die Funktion $f : \overline{U} \to \mathbb{R}^n; x \mapsto y$ in $F(U)$, und es gilt $i(f, U) = 1$.*

(b) *Ist $f \in F(U)$ mit $i(f, U) \neq 0$, so existiert ein $x \in U$ mit $f(x) = x$.*

(c) *Ist $f \in F(U)$, und sind $V_1, \ldots, V_m \subseteq U$ offen und paarweise disjunkt mit $\mathrm{Fix}(f) \subseteq \bigcup_{j=1}^m V_j$, so gilt $f \in F(V_j)$ für jedes $1 \le j \le m$ und es ist*

$$i(f, U) = \sum_{j=1}^m i(f, V_j).$$

(d) *Ist $V \subseteq U$ offen mit* $\mathrm{Fix}(f) \subseteq V$*, so gilt* $f \in F(V)$ *und* $i(f,U) = i(f,V)$.

(e) *Sind* $f, g \in F(U)$ *mit* $f \cong_c g$*, so gilt* $i(f,U) = i(g,U)$.

Beweis: **(a)** Es ist $\mathrm{Fix}(f) = \{y\}$, und offenbar $f \in F_0(U)$. Wegen $(\mathrm{id} - f)'(y) = \mathrm{id}$ ergibt Satz 4 sofort $i(f,U) = 1$.
(b) Wir zeigen die Kontraposition, sei also $f \in F(U)$ mit $\mathrm{Fix}(f) = \emptyset$. Da $\overline{U}$ kompakt ist, ist $a := \inf\{||f(x) - x|| : x \in \overline{U}\} > 0$, und es gilt $a \leq a(f)$. Nach Lemma 7.(b) existiert ein $g \in F_0(U)$ mit $||g - f|| < a$. Ist $x \in \overline{U}$, so folgt $||g(x) - x|| \geq ||f(x) - x|| - ||f(x) - g(x)|| > a - a = 0$, d.h. $g(x) \neq x$ und somit $\mathrm{Fix}(g) = \emptyset$. Wegen $||f - g|| < a(f)$, $g \in F_1(U)$ folgt mit Korollar 5.(c) die Gleichung $i(f,U) = i(g,U) = 0$.
(c) Sei $1 \leq j \leq m$. Wäre $\mathrm{Fix}(f) \cap \partial V_j \neq \emptyset$, so gibt es wegen $\mathrm{Fix}(f) \subseteq \bigcup_{k=1}^m V_k$ ein $1 \leq k \leq m$ mit $\partial V_j \cap V_k \neq \emptyset$. Dann ist $k \neq j$ und $V_j \cap V_k \neq \emptyset$; ein Widerspruch. Also ist $\mathrm{Fix}(f) \cap \partial V_j = \emptyset$ und somit $f \in F(V_j)$. Die Menge

$$K := \overline{U} \backslash \bigcup_{j=1}^m V_j$$

ist kompakt mit $\mathrm{Fix}(f) \cap K = \emptyset$, also ist

$$a := \inf_{x \in K} ||f(x) - x|| > 0.$$

Da $V_1, \ldots, V_m$ in U liegen und paarweise disjunkt sind, ist $\partial U \subseteq K$ und $\partial V_j \subseteq K$ für jedes $1 \leq j \leq m$. Nach Lemma 7.(b) existiert ein $g \in F_0(U)$ mit $||g - f|| < a$. Für $x \in K$ ist wieder $||g(x) - x|| > 0$, also $\mathrm{Fix}(g) \cap K = \emptyset$. Also ist $g \in F(V_j)$ für jedes $1 \leq j \leq m$ und $\mathrm{Fix}(g) \subseteq \bigcup_{j=1}^m V_j$. Weiter ist $||g - f|| < a(f)$ und $||g - f|| < a(f|\overline{V_j})$ für jedes $1 \leq j \leq m$. Da $V_1, \ldots, V_m$ paarweise disjunkt sind, folgt mit Satz 4

$$\begin{aligned}
i(f,U) &= i(g,U) \\
&= \sum_{x \in \mathrm{Fix}(g)} \mathrm{sign}(\det(\mathrm{id} - g'(x))) \\
&= \sum_{j=1}^m \sum_{x \in \mathrm{Fix}(g) \cap V_j} \mathrm{sign}(\det(\mathrm{id} - g'(x))) \\
&= \sum_{j=1}^m \sum_{x \in \mathrm{Fix}(g|\overline{V_j})} \mathrm{sign}(\det(\mathrm{id} - g'(x))) \\
&= \sum_{j=1}^m i(g, V_j) \\
&= \sum_{j=1}^m i(f, V_j).
\end{aligned}$$

(d) Klar nach (c).
(e) Seien $f_1, g_1 \in F_1(U)$ mit $||f - f_1|| < a(f)$ und $||g - g_1|| < a(g)$. Mit Lemma 1.(d,c) folgen $f \cong_c f_1$, $g \cong_c g_1$ und $f_1 \cong_c g_1$. Mit Lemma 9.(b) folgt $i(f, U) = i(f_1, U) = i(g_1, U) = i(g, U)$.

■

Als ein erstes Beispiel wollen wir jetzt einen weiteren Beweis des Brouwerschen Fixpunktsatzes angeben. Hierzu verwenden wir als $U := B_1(0)$ die offene Einheitskugel im $\mathbb{R}^n$. Es ist $\overline{U} = B^n$ und $\partial U = S^{n-1}$. Sei $f : B^n \to B^n$ eine stetige Abbildung. Wir wollen zeigen, dass f einen Fixpunkt hat. Hat f einen Fixpunkt auf dem Rand S^{n-1}, so sind wir sofort fertig. Andernfalls gilt $f(x) \neq x$ für alle $x \in S^{n-1}$. Wir betrachten die stetige Abbildung

$$H : B^n \times [0, 1] \to B^n; (x, t) \mapsto tf(x).$$

Es ist $H_1 = f$ und $H_0(x) = 0 \in U$ für alle $x \in B^n$. Für $0 \leq t < 1$, $x \in S^{n-1}$ ist $||H(x, t)|| = t||f(x)|| \leq t < 1 = ||x||$, also insbesondere $H(x, t) \neq x$. Dies zeigt $H : 0 \cong_c f$, und mit Satz 11.(e,a) folgt

$$i(f, U) = i(0, U) = 1 \neq 0,$$

und f hat nach Satz 11.(b) einen Fixpunkt.

Unser nächstes Lemma klärt das Verhalten des Fixpunktindex unter Produktbildung und bei Übergang zu einem Teilraum.

Lemma 12: *Seien $p, q \geq 0$ und $n = p + q \geq 1$. Wir identifizieren $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ und $\mathbb{R}^p = \mathbb{R}^p \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^n$.*

(a) *Sind $U \subseteq \mathbb{R}^p$, $V \subseteq \mathbb{R}^q$ offen und beschränkt und $f \in F(U)$, $g \in F(V)$, so ist auch $f \times g \in F(U \times V)$, und es gilt*

$$i(f \times g, U \times V) = i(f, U) \cdot i(g, V).$$

(b) *Seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt und $f \in F(U)$ mit $f(\overline{U}) \subseteq \mathbb{R}^p$. Dann ist $f|\overline{U \cap \mathbb{R}^p} \in F(U \cap \mathbb{R}^p)$, und es gilt $i(f, U \cap \mathbb{R}^p) = i(f, U)$.*

Beweis: **(a)** Wegen $\partial(U \times V) = \partial U \times \overline{V} \cup \overline{U} \times \partial V$ und $\mathrm{Fix}(f \times g) = \mathrm{Fix}(f) \times \mathrm{Fix}(g)$ ist $f \times g \in F(U \times V)$ klar. Zunächst seien $f \in F_1(U)$ und $g \in F_1(V)$. Dann ist auch $f \times g \in F_1(U \times V)$. Wähle bei Null zentrierte, abgeschlossene Würfel $Q_1 \subseteq \mathbb{R}^p$, $Q_2 \subseteq \mathbb{R}^q$ gleichen Durchmessers mit $F(\partial U) \cap Q_1 = \emptyset$ und $G(\partial V) \cap Q_2 = \emptyset$, wobei $F := \mathrm{id} - f$ und $G := \mathrm{id} - g$. Weiter wählen wir $\psi_1 \in C^\infty(\mathbb{R}^p)$, $\psi_2 \in C^\infty(\mathbb{R}^q)$ mit $\mathrm{supp}\,\psi_1 \subseteq Q_1^\circ$, $\mathrm{supp}\,\psi_2 \subseteq Q_2^\circ$ und $\int_{\mathbb{R}^p} \psi_1(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^q} \psi_2(x)\,dx = 1$.

Dann ist $Q := Q_1 \times Q_2$ ein bei Null zentrierter, abgeschlossener Würfel im $\mathbb{R}^n$ mit $F \times G(\partial(U \times V)) \cap Q = \emptyset$, und $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}; (x, y) \mapsto \psi_1(x)\psi_2(y)$ ist in $C^\infty(\mathbb{R}^n)$

mit $\operatorname{supp}\psi \subseteq \operatorname{supp}(\psi_1) \times \operatorname{supp}(\psi_2) \subseteq Q_1^\circ \times Q_2^\circ = Q^\circ$ und $\int_{\mathbb{R}^n} \psi(x)\,dx = 1$. Wegen $\mathrm{id} - f \times g = F \times G$ folgt:

$$\begin{aligned} i(f \times g, U \times V) &= \int_{U\times V} \psi(x,y)\det((F\times G)'(x,y))\,d(x,y) \\ &= \int_U\int_V \psi_1(x)\psi_2(y)\det(F'(x))\det(G'(y))\,dy\,dx \\ &= \left(\int_U \psi_1(x)\det(F'(x))\,dx\right)\cdot\left(\int_V \psi_2(y)\det(G'(y))\,dy\right) \\ &= i(f,U)\cdot i(g,V). \end{aligned}$$

Jetzt kommen wir zum allgemeinen Fall. Wähle $f_1 \in F_1(U)$, $g_1 \in F_1(V)$ mit $||f - f_1|| < a(f)$ und $||g - g_1|| < a(g)$. Nach Lemma 1.(d) ist $f \cong_c f_1$ und $g \cong_c g_1$. Wählen wir Homotopien $H^1 : f \cong_c f_1$, $H^2 : g \cong_c g_1$, so ist $H : \overline{U \times V} \times [0,1] \to \mathbb{R}^n; (x,y,t) \mapsto (H^1(x,t), H^2(y,t))$ offenbar eine Homotopie $H : f \times g \cong_c f_1 \times g_1$. Mit Satz 11.(e) folgt

$$i(f \times g, U \times V) = i(f_1 \times g_1, U \times V) = i(f_1, U)\cdot i(g_1, V) = i(f,U)\cdot i(g,V).$$

(b) Ist $x \in \operatorname{Fix}(f)$, so gilt $x = f(x) \in \mathbb{R}^p$, d.h. es ist $\operatorname{Fix}(f) \subseteq \mathbb{R}^p$. Wir haben $\overline{U \cap \mathbb{R}^p} \subseteq \overline{U} \cap \mathbb{R}^p$, und damit ist $\overline{f} := f|\overline{U \cap \mathbb{R}^p} : \overline{U \cap \mathbb{R}^p} \to \mathbb{R}^p$ überhaupt eine wohldefinierte stetige Abbildung. Weiter ist $\partial_{\mathbb{R}^p}(U \cap \mathbb{R}^p) = \overline{U \cap \mathbb{R}^p}\backslash(U \cap \mathbb{R}^p) \subseteq \partial U \cap \mathbb{R}^p$, und $\operatorname{Fix}(f|\overline{U \cap \mathbb{R}^p}) = \operatorname{Fix}(f) \cap \overline{U \cap \mathbb{R}^p} = \operatorname{Fix}(f)$, da $\operatorname{Fix}(f) \subseteq U \cap \mathbb{R}^p$ ist. Also ist tatsächlich $\overline{f} \in F(U \cap \mathbb{R}^p)$.

Da $\operatorname{Fix}(f)$ kompakt ist, gibt es eine offene Menge $V \subseteq U \cap \mathbb{R}^p$, und ein $a > 0$ mit $\operatorname{Fix}(f) \subseteq V$ und $W := V \times B_a(0) \subseteq U$. Wegen $\operatorname{Fix}(f) \subseteq W$ gilt $i(f,U) = i(f,W)$ nach Satz 11.(d), und ebenso ist $i(\overline{f}, U \cap \mathbb{R}^p) = i(\overline{f}, V)$. Wegen $\overline{W} = \overline{V} \times \overline{B}_a(0)$, haben wir die stetige Abbildung

$$H : \overline{W} \times [0,1] \to \mathbb{R}^n; (x,y,t) \mapsto f(x,ty)$$

mit $H_1 = f|\overline{W}$ und $H_0 = (\overline{f}|\overline{V}) \times 0$, wobei 0 für die konstante Abbildung $\overline{B}_a(0) \to \mathbb{R}^q; y \mapsto 0$ steht. Mit Satz 11.(e,a) und Teil (a) dieses Lemmas folgt

$$i(f,W) = i(\overline{f} \times 0, V \times B_a(0)) = i(\overline{f}, V)\cdot i(0, B_a(0)) = i(\overline{f}, V),$$

und dies ergibt $i(f,U) = i(\overline{f}, U \cap \mathbb{R}^p) = i(f, U \cap \mathbb{R}^p)$.

■

Damit ist die Konstruktion und der Nachweis der Grundeigenschaften des Fixpunktindex im Fall $E = \mathbb{R}^n$ abgeschlossen. Wir wollen nun zur Ausdehnung des Indexbegriffs auf allgemeine Banachräume kommen. Zunächst behandeln wir dabei den endlichdimensionalen Fall. Dieser ist durch $E = \mathbb{R}^n$ noch nicht ganz abgedeckt, zwar ist ein endlichdimensionaler Banachraum isomorph zu einem $\mathbb{R}^n$, aber unsere Definition des Fixpunktindex verwendet nicht nur die Banachraumstruktur des $\mathbb{R}^n$, sondern auch einige metrische Eigenschaften. Wir verwenden das Konzept eines Würfels und das gewöhnliche Lebesgue-Integral. Dieses Problem läßt sich allerdings sehr leicht behandeln:

Lemma 13: *Seien $n \geq 1$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $f \in F(U)$ und $T \in \mathrm{GL}_n\mathbb{R}$. Dann ist auch $TfT^{-1} \in F(T(U))$, und es gilt $i(TfT^{-1}, T(U)) = i(f, U)$.*

Beweis: Die Menge $T(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ ist offen und beschränkt mit $\overline{T(U)} = T(\overline{U})$ und $\partial T(U) = T(\partial U)$. Weiter ist $\mathrm{Fix}(TfT^{-1}) = T(\mathrm{Fix}(f))$, und damit folgt $TfT^{-1} \in F(T(U))$.

Nach Lemma 7.(b) und Satz 1.(d) existiert ein $g \in F_0(U)$ mit $f \cong_c g$. Es ist $TgT^{-1}|T(U) \in C^\infty$, und ist $x \in \mathrm{Fix}(g)$, so ist $\mathrm{id} - (TgT^{-1})'(Tx) = \mathrm{id} - Tg'(x)T^{-1} = T(\mathrm{id} - g'(x))T^{-1}$ invertierbar. Dies zeigt $TgT^{-1} \in F_0(U)$. Ist $H : f \cong_c g$, so ist $\overline{H}(x,t) := T(H(T^{-1}x, t))$ offenbar eine Homotopie $TfT^{-1} \cong_c TgT^{-1}$. Mit Satz 11.(e) und Satz 4 folgt

$$\begin{aligned} i(TfT^{-1}, T(U)) = i(TgT^{-1}, T(U)) &= \sum_{x \in \mathrm{Fix}(g)} \mathrm{sign}(\det(T(\mathrm{id} - g'(x))T^{-1})) \\ &= \sum_{x \in \mathrm{Fix}(g)} \mathrm{sign}(\det(\mathrm{id} - g'(x))) = i(g, U) = i(f, U). \end{aligned}$$

∎

Tatsächlich ist der Fixpunktindex nicht nur unter Konjugation mit linearen Abbildungen invariant, sondern auch unter Konjugation mit beliebigen Homöomorphismen des $\mathbb{R}^n$. Dies werden wir aber erst etwas später diskutieren, und wir benötigen es auch nicht.

Wie angekündigt dehnen wir die Definition des Fixpunktindex jetzt auf endlichdimensionale Banachräume aus.

Lemma 14: *Seien E ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum und $U \subseteq E$ offen und beschränkt.*

(a) *Ist $f \in F(U)$, so gibt es einen Isomorphismus $T : E \to \mathbb{R}^n$, und wir können $i(f, U) := i(TfT^{-1}, T(U))$ definieren.*

(b) *Ist $y \in U$, so ist die Funktion $f : \overline{U} \to E; x \mapsto y$ in $F(U)$, und es gilt $i(f, U) = 1$.*

(c) *Ist $f \in F(U)$ mit $i(f, U) \neq 0$, so existiert ein $x \in U$ mit $f(x) = x$.*

(d) *Ist $f \in F(U)$, und sind $V_1, \ldots, V_m \subseteq U$ offen und paarweise disjunkt mit $\mathrm{Fix}(f) \subseteq \bigcup_{j=1}^m V_j$, so gilt $f \in F(V_j)$ für jedes $1 \leq j \leq m$ und es ist*

$$i(f, U) = \sum_{j=1}^m i(f, V_j).$$

(e) *Ist $V \subseteq U$ offen mit $\mathrm{Fix}(f) \subseteq V$, so gilt $f \in F(V)$ und $i(f, U) = i(f, V)$.*

(f) *Sind $f, g \in F(U)$ mit $f \cong_c g$, so gilt $i(f, U) = i(g, U)$.*

(g) *Sind F ein weiterer endlichdimensionaler Vektorraum, $V \subseteq F$ offen und beschränkt, $f \in F(U)$, $g \in F(V)$, so ist $f \times g \in F(U \times V)$ und $i(f \times g, U \times V) = i(f, U) \cdot i(g, V)$.*

(h) *Ist $F \leq E$ ein Teilraum und $f \in F(U)$ mit $f(\overline{U}) \subseteq F$, so gilt $f|\overline{U \cap F} \in F(U \cap F)$ und $i(f, U \cap F) = i(f, U)$.*

Beweis: (a) Die Existenz von T ist klar. Weiter ist $T(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, und es ist $TfT^{-1} \in F(T(U))$ mit $\mathrm{Fix}(TfT^{-1}) = T(\mathrm{Fix}(f))$. Ist $S : E \to \mathbb{R}^n$ ein weiterer Isomorphismus, so haben wir $ST^{-1} \in \mathrm{GL}_n\mathbb{R}$ und wegen $ST^{-1}TfT^{-1}(ST^{-1})^{-1} = SfS^{-1}$, $ST^{-1}(T(U)) = S(U)$ liefert Lemma 13 die Gleichung

$$i(TfT^{-1}, T(U)) = i(SfS^{-1}, S(U)).$$

Also ist $i(f, U)$ wohldefiniert. Im Fall $E = \mathbb{R}^n$ können wir $T = \mathrm{id}$ wählen, und daher stimmt $i(f, U)$ mit dem Fixpunktindex im $\mathbb{R}^n$ überein.
(b,c,d,e,f) All diese Aussagen folgen sofort aus den entsprechenden Aussagen aus Satz 11.
(g) Ist $S : F \to \mathbb{R}^m$ ein Isomorphismus, so ist auch $T \times S : E \times F \to \mathbb{R}^{n+m}$ ein Isomorphismus mit $(T \times S)(f \times g)(T \times S)^{-1} = (TfT^{-1}) \times (SgS^{-1})$. Also folgt die Behauptung mit Lemma 12.(a).
(h) Setze $p := \dim F$, $q := n - p$, und wähle einen Isomorphismus $T : E \to \mathbb{R}^n$ mit $T(F) = \mathbb{R}^p \times \{0\} = \mathbb{R}^p$. Dann ist die Einschränkung $T|F : F \to \mathbb{R}^p$ ein Isomorphismus, und Lemma 12.(b) ergibt unsere Behauptung.

■

Seien jetzt E ein beliebiger Banachraum, $U \subseteq E$ offen und beschränkt und $T \in F(U)$. Nach Lemma 1.(a) ist $a(T) = \inf\{||Tx - x|| : x \in \partial U\} > 0$. Also gibt es ein $0 < \epsilon \leq a(T)/2$. Da T eine kompakte Abbildung ist, gibt es eine kompakte Menge $K \subseteq E$ mit $T(\overline{U}) \subseteq K$. Nach §4.Lemma 1 gibt es einen endlichdimensionalen Teilraum $F \leq E$ und eine stetige Abbildung $P : K \to F$ mit $||Px - x|| \leq \epsilon$ für alle $x \in K$. Wir wollen den Fixpunktindex $i(T, U)$ mit Hilfe dieser vier Objekte ϵ, K, F, P definieren. Da wir ein solches Tupel im folgenden häufig wählen müssen, führen wir eine kleine Bezeichnung ein:

Definition 6: Seien E ein Banachraum, $U \subseteq E$ offen und beschränkt und $T \in F(U)$. Ein Schauder-Tupel für T ist ein Quadrupel (ϵ, K, F, P) bestehend aus einer reellen Zahl $\epsilon \in (0, a(T)/2]$, einer kompakten Menge $K \subseteq E$ mit $T(\overline{U}) \subseteq K$, einem endlichdimensionalen Teilraum $F \leq E$ und einer stetigen Abbildung $P : K \to F$ mit $||Px - x|| \leq \epsilon$ für alle $x \in K$.

Die Existenz von Schauder-Tupeln haben wir bereits eingesehen. Ist $\dim E < \infty$, so können wir einfach $\epsilon = a(T)/2$, $K = \overline{T(U)}$, $F = E$ und $P = \mathrm{id}$ verwenden.

Lemma 15: *Seien E ein Banachraum, $U \subseteq E$ offen und beschränkt und $T \in F(U)$. Ist (ϵ, K, F, P) ein Schauder-Tupel für T, so ist*

$$\widetilde{T} : \overline{U \cap F} \xrightarrow{T} T(\overline{U}) \subseteq K \xrightarrow{P} F$$

ein Element von $F(U \cap F)$. Weiter hängt $i(T, U) := i(\widetilde{T}, U \cap F)$ nur von T ab.

Ist $\dim E < \infty$, so stimmt dieser Fixpunktindex mit dem früher definierten Index überein.

Beweis: Offenbar ist $\widetilde{T}$ stetig. Für $x \in \partial_F(U \cap F) \subseteq \partial U \cap F$ gilt

$$\begin{aligned} ||\widetilde{T}x - x|| = ||PTx - x|| &= ||Tx - x - (Tx - PTx)|| \\ &\geq ||Tx - x|| - ||PTx - Tx|| \geq a(T) - \epsilon \geq \frac{1}{2}a(T) > 0, \end{aligned}$$

also insbesondere $\widetilde{T}x \neq x$, und wir haben $\widetilde{T} \in F(U \cap F)$ eingesehen. Damit haben wir den Index $i(\widetilde{T}, U \cap F)$, und müssen die Unabhängigkeit vom speziellen Schauder-Tupel zeigen.

Seien also $(\epsilon_i, K_i, F_i, P_i)$ $(i = 1, 2)$ zwei Schauder-Tupel für T, und seien $T_i : \overline{U \cap F_i} \to F_i$ für $i = 1, 2$ wie oben definiert. Nun ist auch $F := F_1 + F_2 \leq E$ ein endlichdimensionaler Teilraum von E. Sei $i \in \{1, 2\}$. Wir betrachten die stetige Abbildung

$$f_i : \overline{U \cap F} \xrightarrow{T} K_i \xrightarrow{P_i} F_i \subseteq F,$$

und wie oben folgt $f_i \in F(U \cap F)$. Es gelten $f_i(\overline{U \cap F}) \subseteq F_i \leq F$ und $f_i|\overline{(U \cap F) \cap F_i} = f_i|\overline{U \cap F_i} = T_i$. Mit Lemma 14.(h) folgt $i(f_i, U \cap F) = i(T_i, U \cap F_i)$.

Wir definieren jetzt die folgende Homotopie

$$H : \overline{F \cap U} \times [0, 1] \to F; (x, t) \mapsto (1 - t)f_1(x) + tf_2(x).$$

Die Abbildung H ist offenbar stetig mit $H_0 = f_1$ und $H_1 = f_2$. Für $x \in \partial_F(U \cap F) \subseteq \partial U \cap F$, $t \in [0, 1]$ gilt

$$\begin{aligned} ||H(x,t) - x|| &= ||Tx - x - (Tx - H(x,t))|| \\ &\geq ||Tx - x|| - ||Tx - H(x,t)|| \\ &\geq a(T) - ||Tx - (1-t)f_1(x) - tf_2(x) - x|| \\ &\geq a(T) - (1-t)||Tx - f_1(x)|| - t||Tx - f_2(x)|| \\ &= a(T) - (1-t)||Tx - P_1Tx|| - t||Tx - P_2Tx|| \\ &\geq a(T) - (1-t)\epsilon_1 - t\epsilon_2 \\ &\geq a(T) - \frac{1}{2}a(T) \\ &= \frac{1}{2}a(T) > 0, \end{aligned}$$

d.h. $H : f_1 \cong_c f_2$. Mit Lemma 14.(f) folgt

$$i(T_1, U \cap F_1) = i(f_1, U \cap F) = i(f_2, U \cap F) = i(T_2, U \cap F_2),$$

und die Eindeutigkeit von $i(T,U)$ ist bewiesen.

Es bleibt zu zeigen das der alte Fixpunktindex fortgesetzt wird. Sei also $\dim E < \infty$. Als Schauder-Tupel verwenden wir $(a(T)/2, \overline{T(U)}, E, \mathrm{id})$, und haben $\widetilde{T} = T$.

∎

Satz 16: *Seien E ein Banachraum und $U \subseteq E$ offen und beschränkt.*

(a) *Ist $y \in U$, so ist die Funktion $T : \overline{U} \to E; x \mapsto y$ in $F(U)$, und es gilt $i(T,U) = 1$.*

(b) *Ist $T \in F(U)$ mit $i(T,U) \neq 0$, so existiert ein $x \in U$ mit $Tx = x$.*

(c) *Ist $T \in F(U)$, und sind $V_1, \ldots, V_n \subseteq U$ offen und paarweise disjunkt mit $\mathrm{Fix}(T) \subseteq \bigcup_{j=1}^n V_j$, so gilt $T \in F(V_j)$ für jedes $1 \leq j \leq n$ und es ist*

$$i(T,U) = \sum_{j=1}^{n} i(T, V_j).$$

(d) *Ist $V \subseteq U$ offen mit $\mathrm{Fix}(T) \subseteq V$, so gilt $T \in F(V)$ und $i(T,U) = i(T,V)$.*

(e) *Sind $T, S \in F(U)$ mit $T \cong_c S$, so gilt $i(T,U) = i(S,U)$.*

(f) *Sind F ein weiterer Banachraum, $V \subseteq F$ offen und beschränkt, $T \in F(U)$, $S \in F(V)$, so ist $T \times S \in F(U \times V)$ und $i(T \times S, U \times V) = i(T,U) \cdot i(S,V)$.*

(g) *Ist $F \leq E$ ein abgeschlossener Teilraum und $T \in F(U)$ mit $T(\overline{U}) \subseteq F$, so gilt $T|\overline{U \cap F} \in F(U \cap F)$ und $i(T, U \cap F) = i(T,U)$.*

Beweis: **(a)** Setze $\epsilon := a(T)/2 = d(y, \partial U)/2$, $K := \{y\}$, $F := \langle y \rangle \leq E$ und $Py := y$. Dies definiert ein Schauder-Tupel mit $\widetilde{T}x = y$ für alle $x \in \overline{U \cap F}$, und Lemma 14.(b) ergibt $i(T,U) = i(\widetilde{T}, U \cap F) = 1$.

(b) Wähle eine kompakte Menge $K \subseteq E$ mit $T(\overline{U}) \subseteq K$. Für jedes $n \geq 1$ wähle einen endlichdimensionalen Teilraum $F_n \leq E$ und eine stetige Abbildung $P_n : K \to F_n$ mit $||P_n x - x|| \leq a(T)/(2n)$ für alle $x \in K$. Dann ist $(a(T)/(2n), K, F_n, P_n)$ ein Schauder-Tupel zu T, und es sei $T_n = P_n T : \overline{U \cap F_n} \to F_n$. Dann ist $i(T_n, U \cap F_n) = i(T,U) \neq 0$, und nach Lemma 14.(c) existiert ein $x_n \in U \cap F_n$ mit $P_n T x_n = x_n$. Da K kompakt ist, gibt es ein $x \in K$ und eine Teilfolge $n : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $\lim_{k\to\infty} T x_{n_k} = x$. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$||x_{n_k} - x|| = ||P_{n_k} T x_{n_k} - x|| \leq ||P_{n_k} T x_{n_k} - T x_{n_k}|| + ||T x_{n_k} - x|| \leq \frac{a(T)}{2n_k} + ||T x_{n_k} - x|| \to 0,$$

d.h. es ist $x = \lim_{k\to\infty} x_{n_k}$. Insbesondere ist $x \in \overline{U}$ und $Tx = \lim_{k\to\infty} Tx_{n_k} = x$. Wegen $T \in F(U)$ ist damit sogar $x \in U$.
(c) Offenbar ist $T|\overline{V_j} \in F(V_j)$ für jedes $1 \le j \le n$. Definiere

$$\epsilon := \frac{1}{2} \inf \left\{ ||Tx - x|| : x \in \overline{U} \setminus \bigcup_{j=1}^{n} V_j \right\}.$$

Wäre $\epsilon = 0$, so hätten wir eine Folge $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ in $\overline{U}\setminus\bigcup_{j=1}^n V_j$ mit $||Tx_m - x_m|| \to 0$. Da $T(\overline{U})$ relativ kompakt ist, können wir durch Übergang zu einer Teilfolge $Tx_m \to x \in E$ annehmen, und es folgt auch $x_m \to x$ und $Tx = x$. Also ist $x \in \mathrm{Fix}(T) \subseteq \bigcup_{j=1}^n V_j$; ein Widerspruch zu $x \in \overline{U}\setminus\bigcup_{j=1}^n V_j$. Also ist $\epsilon > 0$. Weiter ist $\partial V_j \subseteq \overline{U}\setminus\bigcup_{k=1}^n V_k$ für jedes $1 \le j \le n$ und $\partial U \subseteq \overline{U}\setminus\bigcup_{j=1}^n V_j$, d.h. $\epsilon \le a(T)/2$ und $\epsilon \le a(T|\overline{V_j})/2$ für jedes $1 \le j \le n$.

Wähle $K \subseteq E$ kompakt mit $T(\overline{U}) \subseteq K$. Dann ist auch $T(\overline{V_j}) \subseteq K$ für jedes $1 \le j \le n$. Wähle weiter einen endlichdimensionalen Teilraum $F \le E$ und eine stetige Abbildung $P : K \to F$ mit $||Px - x|| \le \epsilon$ für alle $x \in K$. Dann ist (ϵ, K, F, P) ein Schauder-Tupel für T und für alle $T|\overline{V_j}$ $(1 \le j \le n)$. Nun sind auch die Mengen $V_1 \cap F, \ldots, V_n \cap F$ offen in $U \cap F$ und paarweise disjunkt. Ist $x \in \overline{U\cap F}\setminus\bigcup_{j=1}^n (V_j \cap F)$, so gilt $x \in \overline{U}\setminus\bigcup_{j=1}^n V_j$, also $||PTx - x|| \ge ||Tx - x|| - ||Tx - PTx|| \ge 2\epsilon - \epsilon = \epsilon > 0$, d.h. $PTx \ne x$. Dies zeigt $\mathrm{Fix}(PT|\overline{U\cap F}) \subseteq \bigcup_{j=1}^n (V_j \cap F)$. Mit Lemma 14.(d) folgt

$$i(T,U) = i(PT, U\cap F) = \sum_{j=1}^{n} i(PT, V_j \cap F) = \sum_{j=1}^{n} i(T, V_j).$$

(d) Dies ist klar nach (c).
(e) Sei $H : T \cong_c S$ gegeben. Wähle eine kompakte Menge $K \subseteq E$ mit $H(\overline{U} \times [0,1]) \subseteq K$, und einen endlichdimensionalen Teilraum $F \le E$ sowie eine stetige Abbildung $P : K \to F$ mit $||Px - x|| \le a(H)/2$ für alle $x \in K$.

Ist $0 \le t \le 1$, so gelten $a(H) \le a(H_t)$ und $H_t(\overline{U}) \subseteq H(\overline{U} \times [0,1]) \subseteq K$, d.h. $(a(H)/2, K, F, P)$ ist ein Schauder-Tupel für H_t. Weiter haben wir die stetige Abbildung

$$G : \overline{U\cap F} \times [0,1] \to F; (x,t) \mapsto P(H(x,t))$$

mit $G_0 = PT$, $G_1 = PS$. Mit Lemma 14.(f) folgt

$$i(T,U) = i(PT, U\cap F) = i(PS, U\cap F) = i(S,U).$$

(f) Wegen $\mathrm{Fix}(T \times S) = \mathrm{Fix}(T) \times \mathrm{Fix}(S)$ ist $T \times S \in F(U \times V)$. Wähle $c > 1$ mit $||(x,y)|| \le c\max\{||x||, ||y||\}$ für alle $x \in E$, $y \in F$. Weiter setze

$$\epsilon := \frac{1}{2}\min\{a(T), a(S), a(T\times S)\}.$$

Weiter wählen wir kompakte Mengen $K_1 \subseteq E$, $K_2 \subseteq F$ mit $T(\overline{U}) \subseteq K_1$ und $S(\overline{V}) \subseteq K_2$. Dann ist $K_1 \times K_2 \subseteq E \times F$ kompakt mit $T \times S(\overline{U \times V}) = T(\overline{U}) \times S(\overline{V}) \subseteq K_1 \times K_2$.

Seien $F_1 \leq E$, $F_2 \leq F$ endlichdimensionale Teilräume und $P_i : K_i \to F_i$ stetige Abbildungen mit $||P_i x - x|| \leq \epsilon/c$ für alle $x \in K_i$ $(i = 1, 2)$. Dann ist $F_1 \times F_2 \leq E \times F$ ein endlichdimensionaler Teilraum, und $P_1 \times P_2 : K_1 \times K_2 \to F_1 \times F_2$ ist stetig mit $||P_1 \times P_2(x, y) - (x, y)|| \leq c \max\{||P_1 x - x||, ||P_2 y - y||\} \leq \epsilon$ für alle $(x, y) \in K_1 \times K_2$. Wegen $(U \times V) \cap (F_1 \times F_2) = (U \cap F_1) \times (V \cap F_2)$ und $(P_1 \times P_2)(T \times S) = (P_1 T) \times (P_2 S)$ folgt mit Lemma 14.(g) die Identität

$$\begin{aligned} i(T \times S, U \times V) &= i((P_1 T) \times (P_2 S), (U \cap F_1) \times (V \cap F_2)) \\ &= i(P_1 T, U \cap F_1) \cdot i(P_2 S, V \cap F_2) = i(T, U) \cdot i(S, V). \end{aligned}$$

(g) Wähle eine kompakte Menge $L \subseteq E$ mit $T(\overline{U}) \subseteq L$. Da F abgeschlossen ist, ist auch $K := L \cap F$ kompakt mit $T(\overline{U}) \subseteq K$. Insbesondere ist $T|\overline{U \cap F}$ eine kompakte Abbildung. Wegen $\mathrm{Fix}(T) \subseteq F$ ist $\mathrm{Fix}(T|\overline{U \cap F}) = \mathrm{Fix}(T) \subseteq U \cap F$, d.h. $T|\overline{U \cap F} \in F(U \cap F)$. Weiter impliziert $\partial_F(U \cap F) \subseteq \partial U \cap F$ auch $a(T) \leq a(T|\overline{U \cap F})$. Setze $\epsilon := a(T)/2$. Wähle einen endlichdimensionalen Teilraum $W \leq F$ und eine stetige Abbildung $P : K \to W$ mit $||Px - x|| \leq \epsilon$ für alle $x \in K$. Dann ist W auch ein endlichdimensionaler Teilraum von E, und $U \cap W = (U \cap F) \cap W$. Mit Lemma 14.(h) folgt

$$i(T, U) = i(T, U \cap W) = i(T, U \cap F).$$

■

Beachte das in Teil (f) der Banachraum $E \times F$ mit irgendeiner Norm versehen ist die die Produkttopologie erzeugt. Dies macht es möglich die Aussage im Fall $E = E_1 \oplus E_2$ mit abgeschlossenen Teilräumen $E_1, E_2 \leq E$ anzuwenden, indem E mit $E_1 \times E_2$ identifiziert wird. Wir haben den Fixpunktindex in allgemeinen Banachräumen konstruiert, und seine Haupteigenschaften bewiesen. Als eine allererste Anwendung können wir jetzt den Satz über die Leray-Schauder Randbedingung (§4.Satz 4) verbessern.

Satz 17: *Seien E ein Banachraum und $U \subseteq E$ eine offene und beschränkte Menge. Sei $T : \overline{U} \to E$ eine kompakte Abbildung. Es gebe ein $x_0 \in U$ mit $Tx \neq x_0 + t(x - x_0)$ für alle $t > 1$, $x \in \partial U$. Dann hat T einen Fixpunkt.*

Beweis: Besitzt T einen Fixpunkt in ∂U, so sind wir fertig. Sonst können wir $Tx \neq x$ für alle $x \in \partial U$ annehmen, und haben $T \in F(U)$. Wir betrachten die stetige Abbildung

$$H : \overline{U} \times [0, 1] \to E; (x, t) \mapsto (1 - t)x_0 + tTx.$$

Da T kompakt ist, liegt das Bild von H in der konvexen Hülle einer kompakten Menge, und ist somit relativ kompakt. Also ist H eine kompakte Abbildung mit $H_1 = T$ und $H(x, 0) = x_0$ für alle $x \in \overline{U}$. Gäbe es $0 \leq t \leq 1$, $x \in \partial U$ mit $H(x, t) = x$, so folgen $0 < t < 1$ und $x = (1 - t)x_0 + tTx$, d.h.

$$Tx = \frac{1}{t}(x - (1 - t)x_0) = x_0 + \frac{1}{t}(x - x_0)$$

aber $1/t > 1$; ein Widerspruch. Also ist $H(x,T) \neq x$ für alle $x \in \partial U$, $0 \leq t \leq 1$, und mit Satz 16.(e,a) folgt

$$i(T,U) = i(x_0,U) = 1 \neq 0,$$

und nach Satz 16.(b) hat T einen Fixpunkt.

∎

Bevor wir mit der allgemeinen Theorie des Fixpunktindex fortfahren, wollen wir noch eine Anwendung auf die Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen diskutieren. Angeommen wir haben ein $a > 0$ und eine stetige Abbildung $f : [0,a] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Uns interessiert das Anfangswertproblem $x'(t) = f(t,x(t))$, $x(0) = 0$. Wir wissen das es immer Lösungen gibt, aber diese müssen nicht eindeutig sein. Schon in §1, haben wir die Funktion $f(t,x) := \sqrt{|x|}$ betrachtet, und gesehen das die Funktionen

$$x_\epsilon(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq \epsilon, \\ \frac{1}{4}(t-\epsilon)^2, & t \geq \epsilon \end{cases}$$

für jedes $\epsilon > 0$ unser Anfangswertproblem lösen. Tatsächlich sind diese Funktionen zusammen mit der Nullfunktion alle Lösungen des Problems. Insbesondere ist der Raum aller Lösungen zusammenhängend, und wir wollen zeigen, dass dies immer der Fall ist.

Satz 18: *Seien E ein Banachraum und $U \subseteq E$ offen und beschränkt. Sei $T \in F(U)$ mit $i(T,U) \neq 0$. Für jedes $r > 0$ gebe es $0 < \epsilon \leq r$ und eine kompakte Abbildung $G : \overline{U} \to E$ mit $||T - G|| < \epsilon$ und*

$$|(\mathrm{id} - G)^{-1}(y)| \leq 1$$

für alle $y \in B_\epsilon(0)$. Dann ist die Fixpunktmenge $\mathrm{Fix}(T)$ *nicht-leer, kompakt und zusammenhängend.*

Beweis: Nach Lemma 1.(b) ist $\mathrm{Fix}(T) \subseteq U$ kompakt. Nach Satz 16.(b) ist $\mathrm{Fix}(T) \neq \emptyset$. Angenommen $\mathrm{Fix}(T)$ wäre nicht zusammenhängend. Dann gibt es kompakte Mengen $K_1, K_2 \subseteq E$ mit $K_1, K_2 \neq \emptyset$, $K_1 \cap K_2 = \emptyset$ und $\mathrm{Fix}(T) = K_1 \cup K_2$. Da U normal ist, gibt es offene Mengen $V_1, V_2 \subseteq U$ mit $K_i \subseteq V_i \subseteq \overline{V_i} \subseteq U$ für $i = 1,2$ mit $\overline{V_1} \cap \overline{V_2} = \emptyset$. Insbesondere ist $\mathrm{Fix}(T) \subseteq V_1 \cup V_2$. Nach Satz 16.(c) ist $T \in F(V_1)$ und $T \in F(V_2)$ sowie $i(T,U) = i(T,V_1) + i(T,V_2)$.

Wegen $K_2 \neq \emptyset$ können wir ein $z \in K_2 \subseteq \mathrm{Fix}(T)$ wählen. Es existieren $0 < \epsilon \leq a(T|\overline{V_1})/2$ und eine kompakte Abbildung $G : \overline{U} \to E$ mit $||T - G|| < \epsilon$ und $|(\mathrm{id} - G)^{-1}(y)| \leq 1$ für alle $y \in B_\epsilon(0)$. Setzen wir $y := z - Gz \in E$, so gilt $||y|| = ||z - Gz|| = ||Tz - Gz|| < \epsilon$. Weiter ist $H := G + y : \overline{U} \to E$ eine kompakte Abbildung, und für alle $x \in \overline{U}$ gilt $||Tx - Hx|| = ||Tx - Gx - y|| \leq ||Tx - Gx|| + ||y|| < 2\epsilon \leq a(T|\overline{V_1})$. Nun ist

$$\mathrm{Fix}(H) = (\mathrm{id} - G)^{-1}(y) = \{z\},$$

da diese Menge nach Voraussetzung höchstens ein Element hat, und $Hz = Gz + z - Gz = z$ gilt. Insbesondere ist $\mathrm{Fix}(H|\overline{V_1}) = \emptyset$, und es folgen $H \in F(V_1)$ sowie

$i(H, V_1) = 0$ nach Lemma 16.(b). Andererseits gilt $T \cong_c H$ in $F(V_1)$ nach Lemma 1.(d), und mit Satz 16.(e) haben wir $i(T, V_1) = i(H, V_1) = 0$.

Analog erhalten wir $i(T, V_2) = 0$, und insgesamt ist $i(T, U) = i(T, V_1) + i(T, V_2) = 0$; ein Widerspruch.

■

Als Anwendung dieses Satzes erhalten wir die folgende verbesserte Form des Satzes von Peano.

Satz 19: *Seien $a, b > 0$ und $x_0 \in \mathbb{R}$. Setze $Q := [-a, a] \times [x_0 - b, x_0 + b]$ und sei $f : Q \to \mathbb{R}$ stetig. Setze $M := \sup_{x \in Q} |f(x)|$ und sei $0 < c < \min\{a, b/M\}$. Sei*

$$L := \left\{ x \in C^1[-c, c] \;\middle|\; \begin{array}{l} x(0) = x_0 \textit{ und } |x(t) - x_0| \leq b, \\ x'(t) = f(t, x(t)) \textit{ für jedes } t \in [-c, c] \end{array} \right\}.$$

Dann ist $L \neq \emptyset$ kompakt und zusammenhängend in der Topologie von $C[-c, c]$. Für jedes $t \in [-c, c]$ ist die Menge

$$L(t) := \{x(t) : x \in L\}$$

ein kompaktes Intervall.

Beweis: Wir betrachten den Banachraum $E := C[-c, c]$ und die Abbildung

$$T : \overline{B}_b(x_0) \to E; x \mapsto Tx : [-c, c] \to \mathbb{R}; t \mapsto x_0 + \int_0^t f(s, x(s))\, ds.$$

Wie im Beweis von §4.Satz 8 ist T eine kompakte Abbildung und es gilt $||Tx - x_0|| \leq Mc < b$ für alle $x \in \overline{B}_b(x_0)$, d.h. $T(\overline{B}_b(x_0)) \subseteq B_b(x_0)$. Insbesondere ist $T \in F(B_b(x_0))$. Da die konvexe Hülle einer kompakten Menge relativ kompakt ist, ist

$$H : \overline{B}_b(x_0) \times [0, 1]; (x, t) \mapsto (1 - t)x_0 + tTx$$

eine kompakte Abbildung mit $H_0 = x_0$, $H_1 = T$ und für jedes $x \in \overline{B}_b(x_0)$, $0 \leq t \leq 1$ ist

$$||H(x, t) - x_0|| = t||Tx - x_0|| \leq ||Tx - x_0|| < b.$$

Damit gilt $T \cong_c x_0$ und es folgt

$$i(T, B_b(x_0)) = i(x_0, B_b(x_0)) = 1.$$

Wir zeigen jetzt die Gültigkeit der Störungsbedingung aus Satz 18. Sei $r > 0$ gegeben. Wähle $\epsilon > 0$ mit $cM + \epsilon < b$. Weiter wähle $\delta > 0$ mit $c\delta < \epsilon$ und $c(M + \delta) + \epsilon < b$. Nach dem Approximationssatz von Weierstrass gibt es ein Polynom $g \in \mathbb{R}[x, y]$ mit $|f(x) - g(x)| \leq \delta$ für alle $x \in [-c, c] \times [x_0 - b, x_0 + b]$. Dann gilt $|g(x)| \leq |f(x)| + |g(x) - f(x)| \leq M + \delta$ für alle $x \in [-c, c] \times [x_0 - b, x_0 + b]$, und somit ist auch

$G : \overline{B}_b(x_0) \to E$ definiert durch $Gx(t) = x_0 + \int_0^t g(s, x(s))\, ds$ für $x \in \overline{B}_b(x_0)$, $t \in [-c, c]$ eine kompakte Abbildung. Ist $x \in \overline{B}_b(x_0)$, so gilt

$$|Tx(t) - Gx(t)| = \left| \int_0^t (f(s, x(s)) - g(s, x(s))\, ds \right| \leq \delta |t| \leq \delta c$$

für jedes $t \in [-c, c]$, d.h. $||Tx - Gx|| \leq \delta c$ und somit $||T - G|| \leq \delta c < \epsilon$. Sei $y \in B_\epsilon(0)$. Dann ist

$$(\mathrm{id} - G)^{-1}(y) = \{x \in \overline{B}_b(x_0) : x = Gx + y\}.$$

Ist $x \in \overline{B}_b(x_0)$, so gilt $||Gx + y - x_0|| \leq ||Gx - x_0|| + ||y|| \leq (M + \delta)c + \epsilon < b$, d.h. wir haben die Abbildung

$$H : \overline{B}_b(x_0) \to \overline{B}_b(x_0); x \mapsto Gx + y,$$

und es ist $(\mathrm{id} - G)^{-1}(y) = \mathrm{Fix}(H)$. Da g ein Polynom ist, gibt es ein $l > 0$ mit

$$|g(s, x) - g(s, z)| \leq l|x - z|$$

für alle $s \in [-c, c]$, $x, z \in [x_0 - b, x_0 + b]$. Benutzen wir auf $C[-c, c]$ die äquivalente Norm

$$||x||_2 := \sup_{|t| \leq c} e^{-2lt} |x(t)| \quad (x \in C[-c, c]),$$

so folgt wie in §1 die Abschätzung $||Hx - Hz||_2 \leq (1/2)||x - z||_2$ für alle $x, z \in \overline{B}_b(x_0)$. Der Banachsche Fixpunktsatz §1.Satz 1 liefert

$$|(\mathrm{id} - G)^{-1}(y)| = |\operatorname{Fix}(H)| = 1.$$

Aus Satz 18 folgt das $L \neq \emptyset$ kompakt und zusammenhängend ist.

Schließlich sei $t \in [-c, c]$ gegeben. Dann ist die Abbildung

$$\omega : C[-c, c] \to \mathbb{R}; x \mapsto x(t)$$

stetig, d.h. auch $L(t) = \omega(L)$ ist nicht-leer, kompakt und zusammenhängend. Also ist $L(t)$ tatsächlich ein kompaktes Intervall.

■

Zum Abschluss dieses Paragraphen wollen wir noch die Homotopieinvarianz des Fixpunktindex etwas verallgemeinern.

Lemma 20: *Seien E ein Banachraum und $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Für $L \subseteq E \times [a, b]$, $t \in [a, b]$ setzen wir*

$$L_t := \{x \in E : (x, t) \in L\}.$$

Seien $W \subseteq E \times [a, b]$ offen und beschränkt und $H : \overline{W} \to E$ eine kompakte Abbildung. Sei

$$\Phi := \{(x, t) \in \overline{W} : H(x, t) = x\},$$

und für jedes $t \in [a, b]$ gelte $\Phi_t \subseteq W_t$. Dann ist $H_t \in F(W_t)$ für jedes $t \in [a, b]$, und es gilt $i(H_a, W_a) = i(H_b, W_b)$.

Beweis: Ist $t \in [a,b]$, so ist $W_t \subseteq E$ offen und beschränkt, mit $\overline{W_t} \times \{t\} \subseteq \overline{W}$. Insbesondere ist $H_t : \overline{W_t} \to E$ eine kompakte Abbildung. Ist $x \in \text{Fix}(H_t)$, so gilt $(x,t) \in \overline{W}$ und $H(x,t) = H_t(x) = x$, d.h. $(x,t) \in \Phi$ und $x \in \Phi_t$. Ist umgekehrt $x \in \Phi_t \subseteq W_t \subseteq \overline{W_t}$, so gilt $H_t(x) = H(x,t) = x$, d.h. $x \in \text{Fix}(H_t)$. Also ist $\text{Fix}(H_t) = \Phi_t \subseteq W_t$ und insbesondere $H_t \in F(W_t)$.

Es gibt eine kompakte Menge $K \subseteq E$ mit $H(\overline{W}) \subseteq K$. Es folgt $\text{Pr}_1(\Phi) = H(\Phi) \subseteq K$, also $\Phi \subseteq K \times [a,b]$. Da H stetig ist, ist Φ in $\overline{W}$, und damit auch in $E \times [a,b]$ abgeschlossen. Also ist Φ eine kompakte Teilmenge von $E \times [a,b]$.

Sei wieder $t \in [a,b]$ gegeben. Da $\Phi_t = \text{Fix}(H_t)$ nach Lemma 1.(b) kompakt ist, existieren eine offene Menge $V \subseteq E$ mit $\Phi_t \subseteq V \subseteq W_t$, und ein $\delta > 0$ mit

$$V \times ([t-\delta, t+\delta] \cap [a,b]) \subseteq W.$$

Die Menge $A := (E \backslash V) \times \{t\}$ ist abgeschlossen in $E \times [a,b]$ mit $A \cap \Phi = \emptyset$, da $\Phi_t \subseteq V$ ist. Da Φ kompakt ist, folgt $d(A, \Phi) > 0$, und wir definieren

$$\epsilon := \min\left\{\delta, \frac{1}{2} d(A,\Phi)\right\}.$$

Definiere $u, v \in \mathbb{R}$ durch

$$[t-\epsilon, t+\epsilon] \cap [a,b] = [u,v].$$

Wegen $\epsilon \leq \delta$ ist $\overline{V} \times [u,v] \subseteq \overline{V} \times ([t-\delta, t+\delta] \cap [a,b]) \subseteq \overline{W}$, und damit ist

$$G : \overline{V} \times [0,1] \to E; (x,s) \mapsto H(x, (1-s)u + sv)$$

eine kompakte Abbildung. Sei $s \in [u,v]$. Sei $x \in \Phi_s$. Wäre $x \notin V$, so $x \in E \backslash V$, also

$$d(A,\Phi) \leq d((x,t),(x,s)) = |t-s| \leq \epsilon < d(A,\Phi);$$

ein Widerspruch, d.h. $x \in V$, und somit $\text{Fix}(H_s) = \Phi_s \subseteq V$. Mit Satz 16.(d,e) folgt

$$i(H_s, W_s) = i(H_s, V) = i(H_t, V) = i(H_t, W_t),$$

da $t \in [u,v]$.

Also ist die Abbildung

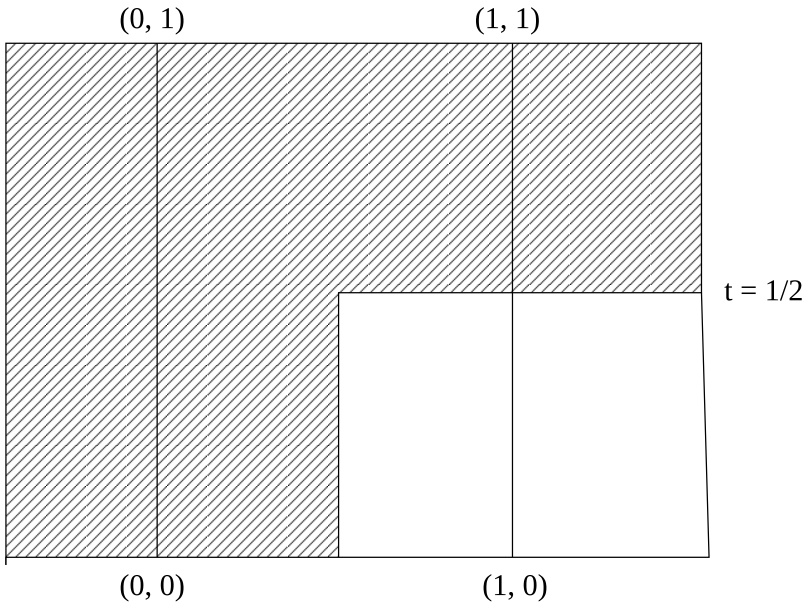
$$h : [a,b] \to \mathbb{Z}; t \mapsto i(H_t, W_t)$$

lokal konstant. Da $[a,b]$ zusammenhängend ist, ist h konstant und insbesondere gilt $i(H_a, W_a) = h(a) = h(b) = i(H_b, W_b)$.

■

Eine einfache Möglichkeit die Bedingung von Lemma 20 nachzuweisen, ist es $\Phi \cap \partial W = \emptyset$ zu zeigen. Denn ist $t \in [a,b]$, $x \in \Phi_t$, so ist $(x,t) \in \Phi$, also $(x,t) \notin \partial W$ und somit $(x,t) \in W$, d.h. $x \in W_t$.

In der Literatur findet man gelegentlich auch die Bedingung $H(x,t) \neq x$ für $x \in \partial W_t$ ($t \in [a,b]$). Dies reicht aber leider nicht aus. Als einfaches Gegenbeispiel betrachten wir $E = \mathbb{R}$, $a = 0$, $b = 1$ und die folgende Menge W:



Als Formel bedeutet dies

$$W = \left(-1, \frac{1}{2}\right) \times [0,1] \cup (-1,2) \times \left(\frac{1}{2}, 1\right].$$

Die Menge W ist offen in $\mathbb{R} \times [0,1]$ mit

$$W_t = \begin{cases} (-1, 1/2), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ (-1, 2), & \frac{1}{2} < t \leq 1, \end{cases}$$

für $0 \leq t \leq 1$. Als Funktion verwenden wir

$$H(x,t) := x^2.$$

Dann ist

$$i(H_t, W_t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ 0, & \frac{1}{2} < t \leq 1. \end{cases}$$

Wir werden das Lemma hauptsächlich im nächsten Paragraphen verwenden, und wollen hier nur eine kurze Anwendung vorführen. In Lemma 13 hatten wir die Invarianz des Fixpunktindex im $\mathbb{R}^n$ unter der Gruppe $\mathrm{GL}_n\mathbb{R}$ gezeigt. Wir wollen dies jetzt auf beliebige Diffeomorphismen ausdehnen. Sei also $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein Diffeomorphismus. Wir wollen zeigen, dass ψ zu einer linearen Abbildung isotop ist. Durch

$$H(x,t) := \psi(x) - t\psi(0),$$

sehen wir, dass wir bis auf eine Isotopie $\psi(0) = 0$ annehmen können. Definieren wir für $1 \leq i \leq n$ die C^∞-Funktion

$$\theta_i(x) := \int_0^1 \frac{\partial \psi}{\partial x_i}(tx)\, dt,$$

so gilt

$$\psi(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i \theta_i(x),$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Wir betrachten die Abbildung $H : \mathbb{R}^n \times [0,1] \to \mathbb{R}^n$ gegeben durch

$$H(x,t) := \begin{cases} \dfrac{\psi(tx)}{t}, & t > 0, \\ \psi'(0)x, & t = 0. \end{cases}$$

Auf $\mathbb{R}^n \times (0,1]$ ist diese Funktion offenbar stetig, und für $0 < t \leq 1$ ist H_t ein Diffeomorphismus, mit $H_1 = \psi$. Weiter ist $H_0 = \psi'(0) \in \mathrm{GL}_n\mathbb{R}$. Wir wollen einsehen das H insgesamt stetig ist. Für $0 < t \leq 1$, $x \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$H(x,t) = \frac{\psi(tx)}{t} = \sum_{i=1}^{n} x_i \theta_i(tx),$$

also

$$\psi'(0)x = \sum_{i=1}^{n} x_i \theta_i(0)$$

und dies ergibt unmittelbar die Stetigkeit von H.

Also existiert eine stetige Abbildung $G : \mathbb{R}^n \times [0,1] \to \mathbb{R}^n$ mit $G_1 = \psi$, $G_0 \in \mathrm{GL}_n\mathbb{R}$ so, dass G_t für jedes $t \in [0,1]$ ein Homöomorphismus ist. Sei Γ die Gruppe aller Homöomorphismen des $\mathbb{R}^n$. Versehen mit der kompakt-offenen Topologie, d.h. der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf Kompakta, ist Γ eine topologische Gruppe, und die Abbildung

$$\widehat{G} : [0,1] \to \Gamma; t \mapsto G_t$$

ist stetig.

Jetzt seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt und $f \in F(U)$. Die Abbildung

$$\overline{G} : \mathbb{R}^n \times [0,1] \to \mathbb{R}^n \times [0,1]; (x,t) \mapsto (G(x,t),t)$$

ist ein Homöomorphismus, also ist $W := \overline{G}(U \times [0,1]) \subseteq \mathbb{R}^n \times [0,1]$ offen und beschränkt. Weiter ist

$$H : \overline{W} = \overline{G}(\overline{U} \times [0,1]) \to \mathbb{R}^n; (x,t) \mapsto G_t(f(G_t^{-1}(x)))$$

eine stetige Abbildung. Es ist

$$\Phi := \{(x,t) \in \overline{W} : H(x,t) = x\} = \bigcup_{t \in [0,1]} G_t(\mathrm{Fix}(f)) \times \{t\},$$

also $\Phi_t = G_t(\mathrm{Fix}(f)) \subseteq G_t(U) = W_t$ für jedes $t \in [0,1]$. Mit Lemma 20 und Lemma 13 folgt

$$i(\psi f \psi^{-1}, \psi(U)) = i(H_1, W_1) = i(H_0, W_0) = i(G_0 f G_0^{-1}, G_0(U)) = i(f,U).$$

Literatur zu §5

R. Arens: *A topology for spaces of transformations*, Ann. of Math. 47 (1946), 480–495.

E. Zeidler: *Nonlinear functional analysis and its applications I*, Springer 1986

§6 Der Verzweigungssatz von Krasnoselskii und Rabinowitz

In diesem Paragraphen werden wir als Anwendung des in §5 konstruierten Fixpunktindex den sogenannten Verzweigungssatz von Krasnoselskii und Rabinowitz formulieren und beweisen. Als zusätzliches Hilfsmittel werden wir auch den Begriff der Differenzierbarkeit verwenden. Wie aus den Grundvorlesungen bekannt ist, ist die Ableitung einer Funktion eine lineare Approximation dieser Funktion, und daher ist zu erwarten das sich alle hinreichend stabilen Eigenschaften von einer Funktion auf ihre Ableitung übertragen. Konkret haben wir das folgende Lemma.

Lemma 1: *Seien E ein Banachraum und $T : E \to E$ eine kompakte Abbildung mit $T(0) = 0$. Die Abbildung T sei in 0 differenzierbar mit $A := T'(0)$. Dann gelten:*

(a) *A ist ein kompakter linearer Operator.*

(b) *Ist $1 \notin \sigma(A)$, so existiert ein $r_0 > 0$ so, dass für jedes $0 < r \leq r_0$ stets $T \in F(B_r(0))$ und $A \in F(B_r(0))$ sowie*

$$i(T, B_r(0)) = i(A, B_r(0))$$

gelten.

Beweis: (a) Wir müssen zeigen das $A(\overline{B}_1(0))$ relativ kompakt ist. Da E ein vollständiger metrischer Raum ist, reicht es einzusehen das diese Menge präkompakt ist. Sei also $\epsilon > 0$ gegeben. Wegen $A = T'(0)$ existiert ein $\delta > 0$ mit

$$\forall(x \in \overline{B}_\delta(0)) : ||Tx - Ax|| \leq \frac{\epsilon}{6}||x||.$$

Da T kompakt ist, ist die Menge $T(\overline{B}_\delta(0))$ relativ kompakt, und somit existiert eine endliche Menge $F \subseteq \overline{B}_\delta(0)$ mit

$$\forall(x \in \overline{B}_\delta(0))\exists(y \in F) : ||Tx - Ty|| \leq \frac{\delta\epsilon}{6}.$$

Wähle $n \in \mathbb{N}$ mit
$$n \geq \frac{2||A||}{\epsilon},$$
und setze
$$M := \left\{ \frac{k}{n\delta} z : 0 \leq k \leq n, z \in F \right\}.$$
Für $0 \leq k \leq n$, $z \in F$ gilt $||(k/(n\delta))z|| \leq k/n \leq 1$, d.h. M ist eine endliche Teilmenge von $\overline{B}_1(0)$.

Sei $x \in \overline{B}_1(0)$. Wir zeigen das ein $z \in M$ mit $||Ax - Az|| \leq \epsilon$ existiert. Wegen $0 \in M$ können wir $x \neq 0$ annehmen. Setze $y := (\delta/||x||)x$. Dann ist $||y|| = \delta$, d.h. $y \in \overline{B}_\delta(0)$ und es existiert $w \in F$ mit $||Ty - Tw|| \leq \delta\epsilon/6$. Es folgt
$$||Ay - Aw|| \leq ||Ay - Ty|| + ||Ty - Tw|| + ||Tw - Aw|| \leq \frac{\epsilon}{6}||y|| + \frac{\delta\epsilon}{6} + \frac{\epsilon}{6}||w|| \leq \frac{\epsilon\delta}{2}.$$
Weiter ist $0 \leq ||x||/\delta \leq 1/\delta$, also existiert ein $0 \leq k \leq n$ mit
$$\left| \frac{k}{n\delta} - \frac{||x||}{\delta} \right| \leq \frac{1}{n\delta}.$$
Wir setzen
$$z := \frac{k}{\delta n} w \in M.$$
Dann gilt
$$\begin{aligned}
||Ax - Az|| &\leq \left|\left| Ax - A\left(\frac{||x||}{\delta} w\right) \right|\right| + \left|\left| A\left(\frac{||x||}{\delta} w\right) - A\left(\frac{k}{\delta n} w\right) \right|\right| \\
&\leq \frac{||x||}{\delta}||Ay - Aw|| + \left| \frac{||x||}{\delta} - \frac{k}{n\delta} \right| \cdot ||Aw|| \\
&\leq \frac{1}{\delta} \cdot \frac{\epsilon\delta}{2} + \frac{1}{n\delta}||A||\delta \\
&= \frac{\epsilon}{2} + \frac{||A||}{n} \\
&\leq \epsilon.
\end{aligned}$$

(b) Wegen $1 \notin \sigma(A)$ ist $1 - A$ invertierbar, und es existiert ein $c > 0$ mit $||x - Ax|| \geq c||x||$ für alle $x \in E$. Wegen $T'(0) = A$ existiert ein $\epsilon > 0$ mit
$$\forall (x \in \overline{B}_\epsilon(0)) : ||Tx - Ax|| \leq \frac{c}{2}||x||.$$
Sei $0 < r \leq \epsilon$. Da T und A kompakt sind, und die konvexe Hülle einer kompakten Menge relativ kompakt ist, ist die Abbildung
$$H : \overline{B}_r(0) \times [0,1] \to E; (x,t) \mapsto (1-t)Ax + tTx$$

kompakt. Sind $0 \leq t \leq 1$ und $x \in E$ mit $||x|| = r$, so gilt

$$\begin{aligned} ||H(x,t) - x|| &= ||(1-t)Ax + tTx - x|| \\ &\geq ||Ax - x|| - t||Ax - Tx|| \\ &\geq c||x|| - \frac{c}{2}||x|| \\ &= \frac{cr}{2} > 0, \end{aligned}$$

also auch $H(x,t) \neq x$. Wegen $H_0 = A$, $H_1 = T$ folgen $A, T \in F(B_r(0))$ und $A \cong_c T$, also auch

$$i(T, B_r(0)) = i(A, B_r(0))$$

nach §5.Satz 16.(e).

■

Um dieses Lemma wirklich ausnutzen zu können, brauchen wir eine Möglichkeit den Fixpunktindex kompakter linearer Operatoren zu bestimmen. Um den entsprechenden Satz aussprechen zu können, müssen wir uns an einige Grundtatsachen über kompakte lineare Operatoren erinnern, die üblicherweise auch im Rahmen einer einführenden Vorlesung über Funktionalanalysis behandelt werden. Damit wir uns an all diese Dinge leicher erinnern können und um die Notation festzulegen, fassen wir jetzt kurz die benötigten Resultate zusammen.

Seien also E ein Banachraum und $T \in L(E)$ ein linearer Operator auf E. Wie überall in diesem Skript betrachten wir übrigens reelle Banachräume. Sei T als kompakt vorausgesetzt.

- Das (reelle) Spektrum

  $$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{R} : \lambda - T \text{ ist nicht invertierbar}\}$$

  ist entweder endlich oder läßt sich als eine Nullfolge anordnen.

- Ist E unendlichdimensional, so ist $0 \in \sigma(T)$.

- Jedes $\lambda \in \sigma(T)\backslash\{0\}$ ist ein Eigenwert von T.

- Ist $\lambda \in \sigma(T)\backslash\{0\}$, so ist $\dim \mathrm{Kern}(\lambda - T) < \infty$.

- Ist $\lambda \in \sigma(T)\backslash\{0\}$, so ist $\mathrm{Bild}(\lambda - T)$ in E abgeschlossen.

- Ist $\lambda \in \sigma(T)\backslash\{0\}$, so existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit

  $$\begin{aligned} N_\lambda(T) &:= \mathrm{Kern}(\lambda - T)^n = \mathrm{Kern}(\lambda - T)^{n+1} \neq \mathrm{Kern}(\lambda - T)^{n-1}, \\ R_\lambda(T) &:= \mathrm{Bild}(\lambda - T)^n = \mathrm{Bild}(\lambda - T)^{n+1} \neq \mathrm{Bild}(\lambda - T)^{n-1}. \end{aligned}$$

- Ist $\lambda \in \sigma(T)\backslash\{0\}$, so sind $N_\lambda(T)$ und $R_\lambda(T)$ zwei unter T invariante, abgeschlossene Teilräume von E mit $E = N_\lambda(T) \oplus R_\lambda(T)$, und es gelten

$$\begin{aligned} \sigma\left(T\,|N_\lambda(T)\right) &= \{\lambda\}, \\ \sigma\left(T\,|R_\lambda(T)\right) &= \sigma(T)\backslash\{\lambda\}. \end{aligned}$$

Zur Einstimmung wollen wir eine kleine Folgerung beweisen, die allerdings auch wohlbekannt ist, sogar in stärkeren Formen.

Lemma 2: *Seien E ein Banachraum, $T \in L(E)$ ein kompakter linearer Operator und $H \subseteq \sigma(T)\backslash\{0\}$ eine endliche Teilmenge. Dann existiert ein abgeschlossener, unter T invarianter Teilraum $R \leq E$ mit $\sigma(T|R) = \sigma(T)\backslash H$ und*

$$E = \oplus_{\lambda \in H} N_\lambda(T) \oplus R.$$

Beweis: Wir beweisen dies durch Induktion nach $|H|$. Für $|H| = 0$, also $H = \emptyset$, können wir $R := E$ verwenden. Nun sei $n \geq 1$ und das Lemma gelte im Fall $|H| = n-1$. Sei $H \subseteq \sigma(T)\backslash\{0\}$ mit $|H| = n$. Wähle ein $\mu \in H$ und setze $H' := H\backslash\{\mu\}$. Nach Induktion existiert ein abgeschlossener, unter T invarianter Teilraum $R \leq E$ mit $\sigma(T|R) = \sigma(T)\backslash H'$ und

$$E = \oplus_{\lambda \in H'} N_{\lambda(T)} \oplus R.$$

Insbesondere ist $\mu \in \sigma(T|R)$, also ist $R' := R_\mu(T|R)$ ein unter $T|R$ invarianter, abgeschlossener Teilraum von R mit $\sigma(T|R') = \sigma(T|R)\backslash\{\mu\} = \sigma(T)\backslash H$. Damit ist R' auch ein abgeschlossener, unter T invarianter Teilraum von E, und es gilt

$$R = N_\mu(T|R) \oplus R' = (N_\mu(T) \cap R) \oplus R'.$$

Also müssen wir nur noch $N_\mu(T) \subseteq R$ einsehen. Sei also $x \in N_\mu(T)$ gegeben. Dann existieren $u_\lambda \in N_\lambda(T)$ für $\lambda \in H'$ und $v \in R$ mit

$$x = \sum_{\lambda \in H'} u_\lambda + v.$$

Es gibt ein $n \geq 1$ mit $(\mu - T)^n x = 0$, und somit folgt

$$\sum_{\lambda \in H'} (\mu - T)^n u_\lambda + (\mu - T)^n v = 0.$$

Sei $\lambda \in H'$. Da unsere Zerlegung von E direkt ist, und alle Summanden unter $\mu - T$ invariant sind, folgt $(\mu - T)^n u_\lambda = 0$. Wäre $u_\lambda \neq 0$, so hätten wir den Widerspruch $\mu \in \sigma(T|N_\lambda(T)) = \{\lambda\}$, d.h. $u_\lambda = 0$. Also ist $x = v \in R$.

■

Definition 1: Seien E ein Banachraum, $T \in L(E)$ ein kompakter linearer Operator und $\mu \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ mit $1/\mu \notin \sigma(T)$. Dann ist die Menge

$$H_\mu(T) := \left\{\lambda \in \sigma(T) : \lambda\mu > 0 \text{ und } |\lambda| > \frac{1}{|\mu|}\right\}$$

offenbar endlich, und wir setzen

$$\beta(\mu, T) := \sum_{\lambda \in H_\mu(T)} \dim N_\lambda(T).$$

Mit dieser Notation können wir unseren Fixpunktindex angeben:

Satz 3: *Seien E ein Banachraum, $T \in L(E)$ ein kompakter linearer Operator, $\mu \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ mit $1/\mu \notin \sigma(T)$ und $r > 0$. Dann ist $\mu T \in F(B_r(0))$, und es gilt*

$$i(\mu T, B_r(0)) = (-1)^{\beta(\mu,T)}.$$

Beweis: Da $\frac{1}{\mu} - T$ invertierbar ist, ist $\mathrm{Kern}((1/\mu) - T) = 0$, und somit $\mathrm{Fix}(\mu T) = \{0\}$. Insbesondere ist $\mu T \in F(B_r(0))$. Nach Lemma 2 gibt es einen unter T invarianten, abgeschlossenen Teilraum $R \leq E$ mit

$$E = \oplus_{\lambda \in H_\mu(T)} N_\lambda(T) \oplus R$$

und $\sigma(T|R) = \sigma(T)\backslash H_\mu(T)$. Also ist auch

$$N := \oplus_{\lambda \in H_\mu(T)} N_\lambda(T)$$

ein unter T invarianter, abgeschlossener Teilraum von E mit $E = N \oplus R$ und

$$\dim N = \sum_{\lambda \in H_\mu(T)} \dim N_\lambda(T) = \beta(\mu, T).$$

Setze

$$W_1 := B_{r/2}(0) \cap N, \quad \text{und} \quad W_2 := B_{r/2}(0) \cap R.$$

Dann ist $W_1 + W_2 \subseteq B_r(0)$, und mit §5.Satz 16.(d,f) erhalten wir

$$i(\mu T, B_r(0)) = i(\mu T, W_1 + W_2) = i(\mu T, W_1) \cdot i(\mu T, W_2).$$

Da T kompakt ist, ist

$$H : \overline{W_2} \times [0,1] \to R; (x,t) \mapsto t\mu T x$$

eine kompakte Abbildung mit $H_1 = (\mu T)|\overline{W_2}$ und $H_0 = 0$. Seien $x \in \overline{W_2}$, $0 \leq t \leq 1$ mit $H(x,t) = x$, also $t\mu Tx = x$. Ist $t = 0$, so folgt $x = 0$. Jetzt sei $t > 0$. Dann ist

$$\left(\frac{1}{t\mu} - T\right) x = 0.$$

Es ist $\mu/(t\mu) = 1/t > 0$ und $|1/(t\mu)| = (1/t)(1/|\mu|)$, $1/t \geq 1$. Wäre $x \neq 0$, so $1/(t\mu) \in \sigma(T|R) = \sigma(T)\backslash H_\mu(T)$, also $t = 1$ und $1/\mu \in \sigma(T)$; ein Widerspruch. Also ist wieder $x = 0$. Dies zeigt $\mu T|\overline{W_2} \cong_c 0$, und §5.Satz 16.(e,a) liefern

$$i(\mu T, W_2) = i(0, W_2) = 1.$$

Nun kommen wir zu $\mu T|N$. Die Abbildung

$$H : \overline{W_1} \times [0,1] \to N; (x,t) \mapsto 2(1-t)x + t\mu Tx$$

ist stetig mit $H_1 = \mu T|\overline{W_1}$ und $H_0 = 2\mathrm{id}$. Seien wieder $0 \leq t \leq 1$, $x \in \overline{W_1}$ mit $H(x,t) = x$. Wir zeigen $x = 0$. Angenommen es wäre $x \neq 0$. Es ist

$$t\mu Tx = x - 2(1-t)x = (2t-1)x,$$

und insbesondere $t > 0$. Weiter folgt

$$\left(\frac{2t-1}{t\mu} - T\right) x = 0,$$

d.h.

$$\frac{2t-1}{t\mu} \in \sigma(T|N) = H_\mu(T).$$

Damit ist

$$\frac{2t-1}{t} = \mu\frac{2t-1}{t\mu} > 0,$$

also $2t-1 > 0$ und

$$\frac{2t-1}{t|\mu|} = \left|\frac{2t-1}{t\mu}\right| > \frac{1}{|\mu|},$$

d.h. $2t - 1 > t$ und somit $t > 1$; ein Widerspruch. Also ist tatsächlich $x = 0$.

Damit gilt $\mu T|\overline{W_1} \cong_c 2\mathrm{id}$. Mit §5.Satz 16.(e) und §5.Satz 4 erhalten wir

$$i(\mu T, W_1) = i(2\mathrm{id}, W_1) = \operatorname{sign}\det(-\mathrm{id}_N) = (-1)^{\dim N} = (-1)^{\beta(\mu,T)}.$$

Insgesamt ist damit

$$i(\mu T, B_r(0)) = i(\mu T, W_1) \cdot i(\mu T, W_2) = (-1)^{\beta(\mu,T)}.$$

■

Wir kommen zum eigentlichen Thema dieses Paragraphen.

Definition 2: Sei E ein Banachraum. Ein Verzweigungsproblem in E ist ein Paar (G,T) bestehend aus einer kompakten Abbildung $G : E \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und einem linearen Operator $T \in L(E)$, das die beiden folgenden Bedingungen erfüllt:

(a) Es ist $G(0,t) = 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

(b) Es gilt $D_1G(0,t) = tT$ gleichmäßig auf kompakten Intervallen, d.h.

$$\forall(\epsilon > 0)\forall(a < b)\exists(\delta > 0)\forall(t \in [a,b])\forall(x \in B_\delta(0)) : ||G(x,t) - tTx|| \leq \epsilon||x||.$$

Ist (G,T) ein Verzweigungsproblem in E so heißt

$$L := \{(x,t) \in E \times (\mathbb{R}\backslash\{0\}) : G(x,t) = x\}$$

die Menge der nicht-trivialen Lösungen des Problems. Eine reelle Zahl $\mu \in \mathbb{R}$ heißt Verzweigungspunkt, wenn

$$(0,\mu) \in \overline{L}$$

gilt.

Die Paare $(0,t)$ $(t \in \mathbb{R})$ sind die trivialen Lösungen des Verzweigungsproblems. Eine solche triviale Lösung ist ein Verzweigungspunkt, wenn von ihr ein Zweig nicht-trivialer Lösungen startet; so sollte man sich die Situation zumindest vorstellen. Es gibt immer nur wenige Verzweigungspunkte, wie uns der nächste Satz zeigen wird.

Satz 4: *Sei (G,T) ein Verzweigungsproblem in einem Banachraum E. Dann ist T ein kompakter linearer Operator. Ist $\mu \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ ein Verzweigungspunkt so gilt $1/\mu \in \sigma(T)$. Insbesondere ist die Menge aller Verzweigungspunkte diskret und abgeschlossen in $\mathbb{R}$.*

Beweis: $G_1 : E \to E$ ist eine kompakte Abbildung mit $G_1'(0) = D_1G(0,1) = T$, also ist T nach Lemma 1.(a) kompakt. Sei L die Menge der nicht-trivialen Lösungen.

Sei $\mu \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ mit $1/\mu \notin \sigma(T)$. Wir zeigen das μ kein Verzweigungspunkt ist. Die lineare Abbildung $1 - \mu T = \mu((1/\mu) - T)$ ist nach Voraussetzung invertierbar, also können wir definieren

$$\epsilon_1 := \frac{1}{3||T|| \cdot ||(1-\mu T)^{-1}||}$$

und

$$\epsilon := \min\{\epsilon_1, |\mu|\}.$$

Es gibt ein $\delta > 0$ mit

$$||G(x,t) - tTx|| \leq \frac{1}{3||(1-\mu T)^{-1}||}||x||$$

für alle $t \in [\mu - \epsilon, \mu + \epsilon]$, $x \in \overline{B}_\delta(0)$. Wir zeigen jetzt

$$(B_\delta(0) \times (\mu - \epsilon, \mu + \epsilon)) \cap L = \emptyset.$$

Damit haben wir $(0, \mu) \notin \overline{L}$ und μ ist kein Verzweigungspunkt. Sei also $(x, t) \in B_\delta(0) \times (\mu - \epsilon, \mu + \epsilon)$ mit $G(x, t) = x$. Zu zeigen ist $x = 0$. Es gilt

$$\begin{aligned} ||x|| &\leq ||(1 - \mu T)^{-1}|| \cdot ||x - \mu Tx|| \\ &= ||(1 - \mu T)^{-1}|| \cdot ||G(x, t) - \mu Tx|| \\ &\leq ||(1 - \mu T)^{-1}|| \cdot ||G(x, t) - tTx|| + ||(1 - \mu T)^{-1}|| \cdot ||(t - \mu)Tx|| \\ &\leq ||(1 - \mu T)^{-1}|| \frac{||x||}{3||(1 - \mu T)^{-1}||} + ||(1 - \mu T)^{-1}|| \epsilon ||T|| \cdot ||x|| \\ &\leq \frac{2}{3}||x||, \end{aligned}$$

d.h. $||x|| = 0$ und $x = 0$.

Da das Spektrum von T endlich ist, oder eine Nullfolge bildet, ist die letzte Aussage klar.

■

Jetzt kommen wir zum Hauptergebnis dieses Paragraphen, dem Verzweigungssatz von Krasnoselskii und Rabinowitz.

Satz 5: *Sei (G, T) ein Verzweigungsproblem in einem Banachraum E. Es bezeichne L die Menge der nicht-trivialen Lösungen. Sei $\mu \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ mit $1/\mu \in \sigma(T)$, und die Dimension $\dim N_{1/\mu}(T)$ sei ungerade. Dann ist μ ein Verzweigungspunkt. Ist C die Zusammenhangskomponente von $\overline{L}$ mit $(0, \mu) \in C$, so ist C unbeschränkt oder es gibt einen weiteren Verzweigungspunkt $\mu' \neq \mu$ mit $(0, \mu') \in C$.*

Beweis: Wir zeigen die Kontraposition. Sei also $\mu \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ mit $1/\mu \in \sigma(T)$, und entweder sei μ kein Verzweigungspunkt oder μ ist ein Verzweigungspunkt und die Zusammenhangskomponente C von $\overline{L}$ mit $(0, \mu) \in C$ ist beschränkt und $(0, \mu') \notin C$ für jeden weiteren Verzweigungspunkt $\mu' \neq \mu$. Unter dieser Voraussetzung wollen wir zeigen das $\dim N_{1/\mu}(T)$ gerade ist. Der Beweis ist in mehrere Schritte aufgeteilt.

(a) Es gibt eine offene, beschränkte Menge $U \subseteq E \times \mathbb{R}$ und ein $\epsilon > 0$ mit

(a) $(0, \mu) \in U$ und $\partial U \cap \overline{L} = \emptyset$.

(b) $0 \notin [\mu - \epsilon, \mu + \epsilon]$ und $1/t \notin \sigma(T)$ für alle $t \in [\mu - \epsilon, \mu + \epsilon]\backslash\{\mu\}$.

(c) $(\{0\} \times \mathbb{R}) \cap \overline{U} \subseteq \{0\} \times \left[\mu - \frac{\epsilon}{2}, \mu + \frac{\epsilon}{2}\right]$.

(d) $(\{0\} \times [\mu - \epsilon, \mu + \epsilon]) \cap \overline{L} \subseteq \{(0, \mu)\}$.

Dies ist tatsächlich der einzige Schritt in dem wir unsere Fallunterscheidung beachten müssen. Wir beginnen mit dem einfachen Fall.

Fall 1: Sei μ kein Verzweigungspunkt. Dann ist $(0, \mu) \notin \overline{L}$, also existiert ein $\epsilon > 0$ mit $\epsilon < |\mu|$, $1/t \notin \sigma(T)$ für $t \in [\mu - \epsilon, \mu + \epsilon]\backslash\{\mu\}$, und es existiert ein $r > 0$ mit $(\overline{B}_r(0) \times [\mu - \epsilon, \mu + \epsilon]) \cap \overline{L} = \emptyset$. Dann erfüllt

$$U := B_r(0) \times \left(\mu - \frac{\epsilon}{2}, \mu + \frac{\epsilon}{2}\right)$$

offenbar alle Bedingungen.
Fall 2: Jetzt sei μ ein Verzweigungspunkt. Sei C die Zusammenhangskomponente von $\overline{L}$ mit $(0,\mu) \in C$. Nach unserer Voraussetzung ist C beschränkt und $(0,\mu') \notin C$ für jeden Verzweigungspunkt $\mu' \neq \mu$. Wegen $C \subseteq \overline{L}$ folgen $(\{0\} \times \mathbb{R}) \cap C = \{(0,\mu)\}$ und $G(x,t) = x$ für alle $(x,t) \in C$. Da C beschränkt ist, ist folglich $\mathrm{Pr}_1(C) = G(C)$ relativ kompakt, d.h. es gibt eine kompakte Menge $C_1 \subseteq E$ mit $\mathrm{Pr}_1(C) \subseteq C_1$. Die Beschränktheit von C liefert außerdem ein kompaktes Intervall $C_2 \subseteq \mathbb{R}$ mit $\mathrm{Pr}_2(C) \subseteq C_2$. Insgesamt ist damit $C \subseteq C_1 \times C_2$, und da C als Zusammenhangskomponente eine abgeschlossene Teilmenge von $\overline{L}$ ist, ist C kompakt.

Da T kompakt ist, ist die Menge

$$V_1 := \{0\} \cup \left\{ t \in \mathbb{R}\backslash\{0,\mu\} : \frac{1}{t} \in \sigma(T) \right\}$$

abgeschlossen in $\mathbb{R}$, und ist μ' ein Verzweigungspunkt mit $\mu' \neq \mu$, so ist $\mu' \in V_1$ nach Satz 4. Weiter ist auch

$$V := \{0\} \times V_1 \subseteq E \times \mathbb{R}$$

abgeschlossen mit $V \cap C = \emptyset$, da $(\{0\} \times \mathbb{R}) \cap C = \{(0,\mu)\}$ ist. Also ist $d(C,V) > 0$, und wir wählen $\delta \in \mathbb{R}$ mit

$$0 < \delta < \frac{1}{3} d(C,V).$$

Weiter sind auch die Mengen

$$\begin{aligned} J_1 &:= \mathbb{R}\backslash(\mu - \delta, \mu + \delta) \subseteq \mathbb{R}, \\ J &:= \{0\} \times J_1 \subseteq E \times \mathbb{R} \end{aligned}$$

abgeschlossen. Ist $t \in V_1$, so ist $(0,\mu) \in C$, $(0,t) \in V$, also $|t-\mu| = d((0,\mu),(0,t)) \geq d(C,V) > \delta$, d.h. $t \in J_1$. Also ist $V_1 \subseteq J_1$, $V \subseteq J$ und somit auch $d(J,C) \leq d(V,C)$. Wegen $\mu \notin J_1$ ist wieder $J \cap C = \emptyset$, also auch $d(J,C) > 0$. Ausserdem sind $(0,\mu) \in C$, $(0,\mu+\delta) \in J$, d.h. $d(J,C) \leq d((0,\mu),(0,\mu+\delta)) = \delta$. Setze

$$r := \frac{1}{2} d(J,C) \quad \text{und} \quad \epsilon := 2(\delta + r).$$

Es ist

$$\epsilon = 2\delta + d(J,C) \leq 3\delta < d(V,C).$$

Ist $t \in \mathbb{R}$ mit $t = 0$ oder $t \neq 0, \mu$ und $1/t \in \sigma(T)$, so ist $t \in V_1$, also $|t - \mu| = d((0,\mu),(0,t)) \geq d(C,V) > \epsilon$, d.h. $t \notin [\mu - \epsilon, \mu + \epsilon]$. Damit erfüllt ϵ unsere Bedingung (b). Ist $t \in [\mu - \epsilon, \mu + \epsilon]$ mit $(0,t) \in \overline{L}$, so ist $t \neq 0$ ein Verzweigungspunkt, also $1/t \in \sigma(T)$ nach Satz 4, und somit ist $t = \mu$. Also ist auch Bedingung (d) wahr.

Wir kommen zur Konstruktion von U. Die Menge

$$K := \overline{C + B_r(0)} \cap \overline{L}$$

ist abgeschlossen und beschränkt mit $G(x,t) = x$ für alle $(x,t) \in K$. Wie wir oben für C geschlossen haben, liefert die Kompaktheit von G das auch K kompakt ist. Außerdem ist nach Definition $C \subseteq K$. Weiter betrachten wir die abgeschlossene Teilmenge

$$D := \left\{ x \in K : d(x, C) \geq \frac{r}{2} \right\}$$

von K. Es ist $C \cap D = \emptyset$. Wegen $C \subseteq K \subseteq \overline{L}$ ist C auch eine Zusammenhangskomponente von K, und somit existieren abgeschlossene Teilmengen $A, B \subseteq K$ mit $A \cap B = \emptyset$, $K = A \cup B$ und $C \subseteq A$, $D \subseteq B$. Dies ist allgemeiner Satz über kompakte Räume, den wir der Vollständigkeit halber im Anhang zu diesem Paragraphen beweisen (siehe §6A.Satz 6). Da A, B kompakt sind gilt $d(A, B) > 0$ (wobei wir $d(A, B) = \infty$ setzen, falls $B = \emptyset$ ist), und wir wählen eine Zahl $\gamma > 0$ mit

$$\gamma < r \quad \text{und} \quad \gamma < \frac{1}{2} d(A, B).$$

Da A beschränkt ist, ist die Menge

$$U := A + B_{\gamma/2}(0)$$

offen und beschränkt. Es ist $C \subseteq A \subseteq U$, also insbesondere $(0, \mu) \in U$. Ist $x \in K \backslash D$, so gilt $d(x, C) < r/2$, d.h. $x \in C + B_{r/2}(0)$. Also haben wir

$$A \subseteq K \backslash D \subseteq C + B_{r/2}(0),$$

und somit ist auch

$$U = A + B_{\gamma/2}(0) \subseteq A + B_{r/2}(0) \subseteq C + B_r(0)$$

da $\gamma < r$ ist. Es folgt

$$\overline{U} \cap \overline{L} \subseteq \overline{C + B_r(0)} \cap \overline{L} = K = A \cup B.$$

Da A kompakt ist, ist die Menge $A + \overline{B}_{\gamma/2}(0)$ abgeschlossen, und somit ist

$$\overline{U} \cap B \subseteq (A + \overline{B}_{\gamma/2}(0)) \cap B = \emptyset,$$

da $d(A, B) > \gamma/2$ gilt. Damit haben wir insgesamt

$$\overline{U} \cap \overline{L} \subseteq (A \cup B) \cap \overline{U} = A \cap \overline{U} \subseteq A \subseteq U,$$

und dies impliziert $\partial U \cap \overline{L} = \emptyset$, d.h. unsere Bedingung (a) ist verifiziert.

Es verbleibt nur noch Bedingung (c) zu zeigen. Sei also $t \in \mathbb{R}$ mit $(0, t) \in \overline{U}$. Da C kompakt ist, ist $C + \overline{B}_r(0)$ abgeschlossen, und somit ist $(0, t) \in \overline{U} \subseteq C + \overline{B}_r(0)$, d.h. es existiert ein $(y, s) \in C$ mit $\max\{|t - s|, ||y||\} = d((0, t), (y, s)) \leq r$. Insbesondere ist $||y|| \leq r < d(J, C)$. Sei $u \in \mathbb{R}$ mit $|u| \geq \delta$. Dann ist $\mu + u \in J_1$, also

$$\max\{|\mu + u - s|, ||y||\} = d((0, \mu + u), (y, s)) \geq d(J, C),$$

und es folgen $||y|| < |\mu + u - s|$ und $|\mu + u - s| \geq d(C, J)$. Damit haben wir

$$\inf_{|u|\geq\delta} |\mu - s + u| \geq d(C, J) > 0.$$

Es folgt zuerst $|\mu - s| < \delta$, und wählen wir $\alpha \in \{-1, 1\}$ mit $\alpha(\mu - s) \geq 0$ und $u := -\alpha\delta$, so ist $|u| = \delta$ und $|\mu - s + u| = |\mu - s - \alpha\delta| = |\alpha(\mu - s) - \delta| = ||\mu - s| - \delta| = \delta - |\mu - s|$, d.h. $\delta - |\mu - s| \geq d(C, J)$. Also ist $|\mu - s| \leq \delta - d(C, J)$ und

$$|t - \mu| \leq |t - s| + |s - \mu| \leq r + \delta - d(C, J) = \delta - r < \delta + r = \frac{\epsilon}{2}.$$

Damit haben wir auch Bedingung (c).
(b) Wir fixieren im folgenden eine offene, beschränkte Menge $U \subseteq E \times \mathbb{R}$ und ein $\epsilon > 0$ mit den in (a) aufgelisteten Eigenschaften. Sei $t \in \mathbb{R} \backslash \{\mu\}$. Ist $(0, t) \notin \overline{U}$, so wähle $r(t) > 0$ mit $r(t) < d((0, t), \overline{U})$. Dann ist $\overline{B}_{r(t)}(0) \times \{t\} \cap \overline{U} = \emptyset$. Ist $(0, t) \in \overline{U}$, so gilt $|t - \mu| \leq \epsilon/2$ und wegen $t \neq \mu$ ist $(0, t) \notin \overline{L}$ und $1/t \notin \sigma(T)$, d.h. $1 \notin \sigma(tT)$, und nach Lemma 1 existiert ein $r(t) > 0$ mit $r(t) < d((0, t), \overline{L})$, $tT, G_t \in F(B_{r(t)}(0))$ und

$$i(G_t, B_{r(t)}(0)) = i(tT, B_{r(t)}(0)).$$

Diese $r(t)$ werden im folgenden fixiert.
(c) Wir zeigen jetzt, dass für jedes $t \in \mathbb{R}$ mit $|t - \mu| > \epsilon/2$ stets $G_t \in F(U_t)$ und $i(G_t, U_t) = 0$ gelten.

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $\mu + \epsilon/2 < a < b$ und setze $I := [a, b]$. Es ist $(\{0\} \times I) \cap \overline{U} = \emptyset$, also $(\overline{B}_{r(t)}(0) \times \{t\}) \cap \overline{U} = \emptyset$ für jedes $t \in I$. Die Menge

$$W := U \cap (E \times I)$$

ist offen und beschränkt in $E \times I$. Es gilt $\partial_{E\times I} W \subseteq \partial U \cap \overline{W}$, also auch $\partial_{E\times I} W \cap \overline{L} = \emptyset$. Ist also $(x, t) \in \partial_{E\times I} W$ mit $G(x, t) = x$, so ist $(x, t) \notin L$ und damit $x = 0$. Es folgt $(0, t) \in (\{0\} \times I) \cap \overline{U} = \emptyset$; ein Widerspruch. Damit ist $G(x, t) \neq x$ für $(x, t) \in \partial_{E\times I} W$. Nach §5.Lemma 20 existiert ein $n \in \mathbb{Z}$ mit $G_t \in F(W_t)$ und $i(G_t, W_t) = n$ für alle $t \in I$. Andererseits ist $W_t = U_t$ für alle $t \in I$.

Da $\mu + \epsilon/2 < a < b$ beliebig waren, folgt $G_t \in F(U_t)$ für alle $t > \mu + \epsilon/2$, und $i(G_t, U_t)$ ist für $t > \mu + \epsilon/2$ konstant. Da U beschränkt ist, gibt es ein $t > \mu + \epsilon/2$ mit $U_t = \emptyset$, also auch $i(G_t, U_t) = 0$. Damit ist Schritt (c) im Fall $t > \mu + \epsilon/2$ eingesehen. Der andere Fall $t < \mu - \epsilon/2$ folgt analog.
(d) Wir zeigen als nächstes das für jedes $t \in \mathbb{R} \backslash \{\mu\}$ stets $G_t \in F(U_t \backslash \overline{B}_{r(t)}(0))$ und

$$i(G_t, U_t \backslash \overline{B}_{r(t)}(0)) = 0$$

gelten.

Für $t > \mu + \epsilon/2$ ist $U_t \backslash \overline{B}_{r(t)}(0) = U_t$, und die Behauptung gilt nach Schritt (c). Jetzt sei $a \in \mathbb{R}$ mit $\mu < a \leq \mu + \epsilon/2$. Wähle $\mu + \epsilon/2 < b < \mu + \epsilon$, und setze $I := [a, b]$.

Nach Wahl von ϵ ist $(\{0\} \times I) \cap \overline{L} = \emptyset$. Also existiert ein $r > 0$ mit $r < r(a)$, $r < r(b)$ und $(\overline{B}_r(0) \times I) \cap \overline{L} = \emptyset$. Die Menge

$$W := U \cap ((E \backslash \overline{B}_r(0)) \times I) \subseteq E \times I$$

ist offen und beschränkt. Sei $S := \{x \in E : ||x|| = r\}$. Sei $(x,t) \in \partial_{E\times I} W$. Dann ist $(x,t) \in \overline{W} \subseteq \overline{U} \cap ((E \backslash B_r(0)) \times I)$. Ist $(x,t) \notin U$, so ist $(x,t) \in \partial U$. Jetzt sei $(x,t) \in U$. Wegen $(x,t) \notin W$ ist $x \in \overline{B}_r(0) \backslash B_r(0) = S$. Damit haben wir

$$\partial_{E\times I} W \subseteq \partial U \cup (S \times I) \subseteq \partial U \cup (\overline{B}_r(0) \times I).$$

Sei $(x,t) \in \partial_{E\times I} W$ mit $G(x,t) = x$. Wegen $\partial U \cap \overline{L} = \emptyset$ und $(\overline{B}_r(0) \times I) \cap \overline{L} = \emptyset$, ist dann $(x,t) \notin \overline{L}$, also insbesondere $(x,t) \notin L$ und $x = 0$. Aber $(x,t) \in \overline{W} \subseteq (E \backslash B_r(0)) \times I$ und somit $||x|| \geq r$; ein Widerspruch. Also ist $G(x,t) \neq x$ für $(x,t) \in \partial_{E\times I} W$. Mit §5.Lemma 20 folgt $G_a \in F(U_a \backslash \overline{B}_r(0))$ und

$$i(G_a, U_a \backslash \overline{B}_r(0)) = i(G_b, U_b \backslash \overline{B}_r(0)) = i(G_b, U_b) = 0$$

da wegen $r < r(b)$ ja $\overline{B}_r(0) \cap U_b \subseteq \overline{B}_{r(b)}(0) \cap U_b = \emptyset$ gilt.

Wegen $r < r(a)$ ist $U_b \backslash \overline{B}_{r(a)}(0) \subseteq U_b \backslash \overline{B}_r(0)$, und ist $x \in (U_b \backslash \overline{B}_r(0)) \backslash (U_b \backslash \overline{B}_{r(a)}(0))$, so ist $x \in U_b$ mit $r < ||x|| \leq r(a)$, und wegen $\overline{B}_{r(a)}(0) \times \{a\} \cap \overline{L} = \emptyset$ ist $(x,a) \notin \overline{L}$, und da auch $x \neq 0$ ist folgt $G_a(x) \neq x$. Mit §5.Satz 16.(d) folgt $G_a \in F(U_a \backslash \overline{B}_{r(a)}(0))$ und

$$i(G_a, U_a \backslash \overline{B}_{r(a)}(0)) = i(G_a, U_a \backslash \overline{B}_r(0)) = 0.$$

Damit ist (d) für $t > \mu$ bewiesen, und der Fall $t < \mu$ folgt analog.
(e) Da $U \subseteq E \times \mathbb{R}$ offen ist, und $(0, \mu) \in U$ gilt, existieren $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < \mu < b$ und $\{0\} \times [a,b] \in U$. Insbesondere ist $(0,a), (0,b) \in \overline{U}$, und somit gelten $tT, G_t \in F(B_{r(t)}(0))$ und $i(G_t, B_{r(t)}(0)) = i(tT, B_{r(t)}(0))$ für $t \in \{a,b\}$. Wir behaupten das auch $G_a \in F(U_a)$, $G_b \in F(U_b)$ und

$$i(G_a, U_a) = i(G_b, U_b)$$

gelten.

Setze $I := [a,b]$ und betrachte in $E \times I$ die offene, beschränkte Menge $W := U \cap (E \times I)$. Es ist wieder $\partial_{E\times I} W \subseteq \partial U$. Sei $(x,t) \in \partial_{E\times I} W$ mit $G(x,t) = x$. Wegen $\partial U \cap \overline{L} = \emptyset$ ist $(x,t) \notin \overline{L}$, also $x = 0$ und $(x,t) = (0,t) \in \{0\} \times I \subseteq U$, also auch $(x,t) \in W$; ein Widerspruch. Also ist $G(x,t) \neq x$ für $(x,t) \in \partial_{E\times I} W$, und eine erneute Anwendung von §5.Lemma 20 ergibt $G_a \in F(U_a)$, $G_b \in F(U_b)$ und $i(G_a, U_a) = i(G_b, U_b)$.
(f) Es gilt $i(aT, B_{r(a)}(0)) = i(bT, B_{r(b)}(0))$.

Sei $t \in \{a,b\}$. Sei $x \in U_t$ mit $G(x,t) = x$. Ist $x = 0$, so gilt $x \in B_{r(t)}(0)$. Jetzt sei $x \neq 0$. Dann ist $(x,t) \in L$, und wegen $\overline{B}_{r(t)}(0) \times \{t\} \cap \overline{L} = \emptyset$, folgt $x \in U_t \backslash \overline{B}_{r(t)}(0)$. Nach Wahl von $r(t)$ und Schritt (d) folgt mit §5.Satz 16.(c) die Gleichung

$$i(G_t, U_t) = i(G_t, B_{r(t)}(0)) + i(G_t, U_t \backslash \overline{B}_{r(t)}(0)) = i(G_t, B_{r(t)}(0)) = i(tT, B_{r(t)}(0)).$$

Also folgt mit Schritt (e) sofort

$$i(aT, B_{r(a)}(0)) = i(G_a, U_a) = i(G_b, U_b) = i(bT, B_{r(b)}(0)).$$

(g) Wir kommen zum Ende des Beweises. Wegen $\{0\} \times [a,b] \subseteq U$ ist $[a,b] \subseteq [\mu - \epsilon/2, \mu + \epsilon/2]$, also insbesondere $0 \notin [a,b]$ und

$$\left\{t \in [a,b] : \frac{1}{t} \in \sigma(T)\right\} = \{\mu\},$$

$a\mu, b\mu > 0$. Es gilt $1/b < 1/\mu < 1/a$, d.h.

$$H_b(T) = H_a(T) \cup \left\{\frac{1}{\mu}\right\} \quad \text{und} \quad \frac{1}{\mu} \notin H_a(T).$$

Also ist

$$\beta(b,T) = \beta(a,T) + \dim N_{1/\mu}(T).$$

Mit Satz 3 folgt

$$i(bT, B_{r(b)}(0)) = (-1)^{\beta(b,T)} = (-1)^{\dim N_{1/\mu}(T)}(-1)^{\beta(a,T)} = (-1)^{\dim N_{1/\mu}(T)} i(aT, B_{r(a)}(0)).$$

Nach Schritt (f) ist $i(aT, B_{r(a)}(0)) = i(bT, B_{r(b)}(0))$, d.h.

$$(-1)^{\dim N_{1/\mu}(T)} = 1,$$

und somit ist $\dim N_{1/\mu}(T)$ gerade.

■

Wir wollen den Rest dieses Paragraphen damit verbringen eine Anwendung des eben bewiesenen Satz 5 vorzuführen. Diese taucht bereits in der Originalarbeit von Rabinowitz auf. Wir beschreiben zunächst die Problemstellung.

Gegeben seien ein kompaktes Intervall $I = [\alpha, \beta]$ in $\mathbb{R}$ und eine stetige Funktion

$$f : I \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}.$$

Wir schreiben die Funktion f als $f(t, \zeta, \eta, \lambda)$, und verlangen das f als Funktion von (ζ, η) in $(0,0)$ differenzierbar ist, und die Ableitung in $(0,0)$ bei fixierten $t \in I$, $\lambda \in \mathbb{R}$ sei $\lambda a(t) \operatorname{Pr}_1$, d.h.

$$D_{\zeta,\eta}(t, 0, 0, \lambda)(\zeta, \eta) = \lambda a(t) \zeta$$

wobei $a : I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $a(t) > 0$ für alle $t \in I$ sei. Weiter soll dies gleichmäßig für $t \in I$ und auf kompakten Intervallen für λ gelten. Also explizit gesagt:

Es gebe eine stetige Funktion $a : I \to \mathbb{R}$ mit $a(t) > 0$ für alle $t \in I$ so, dass für jedes kompakte Intervall $\Lambda \subseteq \mathbb{R}$, und jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit

$$\frac{|f(t, \zeta, \eta, \lambda) - \lambda a(t) \zeta|}{||(\zeta, \eta)||} \leq \epsilon$$

für alle $t \in I$, $\lambda \in \Lambda$, $(\zeta, \eta) \in \mathbb{R}^2$ mit $||(\zeta, \eta)|| \leq \delta$ existiert.

Als zweite Ingredienz haben wir einen linearen Differentialoperator zweiter Ordnung der folgenden Form. Seien $p \in C^1(I)$ und $q \in C(I)$ mit $p(t) > 0$ für alle $t \in I$. Wir betrachten den Operator

$$L : C^2(I) \to C(I); x \mapsto -(px')' + qx.$$

Weiter betrachten wir eine Randbedingung der folgenden Gestalt. Seien $a_0, a_1, b_0, b_1 \in \mathbb{R}$ mit $(a_0, b_0), (a_1, b_1) \neq (0, 0)$. Ist $I = [\alpha, \beta]$, so haben wir die folgenden Randwerte, wobei wir zusammenfassend $r := (a_0, a_1, b_0, b_1)$ setzen:

$$\begin{aligned} R_0^r : C^1(I) \to \mathbb{R}; &\quad x \mapsto \quad a_0 x(\alpha) + b_0 p(\alpha) x'(\alpha), \\ R_1^r : C^1(I) \to \mathbb{R}; &\quad x \mapsto \quad a_1 x(\beta) + b_1 p(\beta) x'(\beta). \end{aligned}$$

Die Randbedingung sei im folgenden Sinne regulär: Für alle $(\eta_1, \eta_2) \in \mathbb{R}^2$ gibt es genau ein $x \in C^2(I)$ mit $Lx = 0$ und $R_0^r x = \eta_1$, $R_1^r x = \eta_2$. Dies ist keine große Einschränkung, bei gegebenen $(a_0, b_0) \neq (0, 0)$ ist genau ein eindimensionaler Teilraum des $\mathbb{R}^2$ für (a_1, b_1) ausgeschlossen.

Beim klassischen linearen Sturm-Liouvilleschen Eigenwertproblem suchen wir Zahlen $\mu \in \mathbb{R}$ und Funktionen $x \in C^2(I)$ mit $Lx = \mu a x$, die die Randbedingungen $R_0^r x = R_1^r x = 0$ erfüllen. Die Zahlen μ für die eine Lösung $x \neq 0$ der Gleichung existiert, heißen die Eigenwerte des Randwertproblems. Wir betrachten allgemeiner das folgende nichtlineare Eigenwertproblem vom Sturm-Liouville Typ: Gesucht sind Zahlen $\lambda \in \mathbb{R}$ und Funktionen $x \in C^2(I)$ mit $R_0^r x = R_1^r x = 0$, die die Gleichung

$$Lx(t) = f(t, x(t), x'(t), \lambda)$$

für alle $t \in I$ erfüllen. Das lineare Problem ist ein Spezialfall, die Funktion f ist dort einfach $f(t, \zeta, \eta, \lambda) = \lambda a(t)\zeta$. Wie im linearen Fall wollen wir das $x = 0$ für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ eine Lösung ist, und hierzu fordern wir

$$f(t, 0, 0, \lambda) = 0, \quad \text{für alle } t \in I,\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Wir wollen ähnlich wie im Beweis von §4.Satz 12 vorgehen, und unsere Differentialgleichung als ein Fixpunktproblem bei fixierten Parameter λ formulieren. Hierzu betrachten wir den Raum

$$C_r^1(I) := \{x \in C^1(I) : R_0^r x = R_1^r x = 0\}.$$

Dies ist ein abgeschlossener Teilraum von $C^1(I)$ und damit selbst ein Banachraum. Nach §4.Lemma 11 ist die Funktion

$$\Phi : C^1(I) \times \mathbb{R} \to C(I); (x, \lambda) \mapsto \Phi(x, \lambda) : I \to \mathbb{R}; t \mapsto f(t, x(t), x'(t), \lambda)$$

stetig. Nach unser Forderung an f gilt $\Phi(0, \lambda) = 0$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$. Die Regularität der Randbedingungen impliziert, dass der Operator

$$L : C_r^2(I) \to C(I)$$

invertierbar ist, genauer gibt es eine stetige Funktion $g : I \times I \to \mathbb{R}$ mit

$$L^{-1}y(t) = \int_\alpha^\beta g(t,s)y(s)\,ds$$

für alle $y \in C(I)$, $t \in I$, wobei wir $I = [\alpha, \beta]$ gesetzt hatten. Dies ist ein klassisches Ergebnis, das in diesem Script als §6B.Satz 3 im Anhang §6B zu diesem Paragraphen enthalten ist. Wir müssen also zu gegebenen $\lambda \in \mathbb{R}$ die Fixpunktgleichung

$$L^{-1}(\Phi(x,\lambda)) = x$$

lösen. Dabei sind wir nur an den nichttrivialen Lösungen interessiert, d.h. an $x \neq 0$. Wir betrachten also die folgende stetige Abbildung

$$G : C_r^1(I) \times \mathbb{R} \xrightarrow{\Phi} C(I) \xrightarrow{L^{-1}} C_r^2(I) \subseteq C_r^1(I),$$

wobei $C_r^2(I) := C^2(I) \cap C_r^1(I)$ ist. Sind $\lambda \in \mathbb{R}$, $x \in C_r^1(I)$ mit $G(x,\lambda) = x$, so ist offenbar sogar $x \in C^2(I)$ da x im Bild von L^{-1} liegt, und $Lx = \Phi(x,\lambda)$, d.h. $Lx(t) = f(t,x(t),x'(t),\lambda)$ für alle $t \in I$. Umgekehrt impliziert $x \in C_r^2(I)$, $Lx(t) = f(t,x(t),x'(t),\lambda)$ auch $Lx = \Phi(x,\lambda)$, d.h. $G(x,\lambda) = x$. Also sind die Lösungen von $G(x,\lambda) = x$ genau die Lösungen unseres nichtlinearen Eigenwertproblems. Wir wollen uns jetzt davon überzeugen, dass wir auf G den Verzweigungssatz von Krasnoselsski und Rabinowitz anwenden können.

Lemma 6: *Seien $I = [\alpha,\beta] \subseteq \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall, $p \in C^1(I)$, $q, a \in C(I)$ mit $p(t), a(t) > 0$ für alle $t \in I$. Sei*

$$L : C^2(I) \to C(I); x \mapsto -(px')' + qx.$$

Sei $r = (a_0, a_1, b_0, b_1) \in \mathbb{R}^4$ mit $(a_0, b_0), (a_1, b_1) \neq (0,0)$ und setze

$$\begin{aligned} R_0^r : C^1(I) \to \mathbb{R}; x &\mapsto a_0x(\alpha) + b_0p(\alpha)x'(\alpha), \\ R_1^r : C^1(I) \to \mathbb{R}; x &\mapsto a_1x(\beta) + b_1p(\beta)x'(\beta), \\ C_r^1(I) &:= \{x \in C^1(I) : R_0^rx = R_1^rx = 0\}. \end{aligned}$$

Für $\eta_1, \eta_2 \in \mathbb{R}$ existiere genau ein $x \in C^2(I)$ mit $Lx = 0$ und $R_0^rx = \eta_1$, $R_1^rx = \eta_2$. Weiter sei

$$f : I \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

stetig mit

$$\forall(\lambda_0 < \lambda_1)\forall(\epsilon > 0)\exists(\delta > 0)\forall(\lambda \in [\lambda_0, \lambda_1])\forall(t \in I)\forall(\zeta, \eta \in \mathbb{R}) :$$
$$0 < ||(\zeta,\eta)|| \leq \delta \Longrightarrow \frac{|f(t,\zeta,\eta,\lambda) - \lambda a(t)\zeta|}{||(\zeta,\eta)||} \leq \epsilon,$$

und

$$\forall(t \in I)\forall(\lambda \in \mathbb{R}) : f(t,0,0,\lambda) = 0.$$

Seien

$$\Phi : C^1_r(I) \times \mathbb{R} \to C(I); (x, \lambda) \mapsto \Phi(x, \lambda) : I \to \mathbb{R}; t \mapsto f(t, x(t), x'(t), \lambda)$$

und $G := L^{-1}\Phi : C^1_r(I) \times \mathbb{R} \to C^1_r(I)$. *Dann ist* G *eine kompakte Abbildung mit* $G(0, \lambda) = 0$ *für alle* $\lambda \in \mathbb{R}$. *Weiter ist*

$$T : C^1_r(I) \to C^1_r(I); x \mapsto L^{-1}(ax)$$

ein kompakter linearer Operator mit

$$\begin{aligned} &\forall(\lambda_0 < \lambda_1)\forall(\epsilon > 0)\exists(\delta > 0)\forall(\lambda \in [\lambda_0, \lambda_1])\forall(x \in C^1_r(I)) : \\ &\qquad\qquad ||x||_1 \le \delta \Longrightarrow ||G(x, \lambda) - \lambda Tx|| \le \epsilon ||x||_1. \end{aligned}$$

Beweis: Offenbar ist G zumindest stetig, und es gilt $G(0, \lambda) = 0$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$. Sei $B \subseteq C^1_r(I) \times \mathbb{R}$ beschränkt. Dann gibt es ein $M > 0$ mit $||x||_1 \le M$ und $|\lambda| \le M$ für alle $(x, \lambda) \in B$. Da f stetig ist, ist damit

$$C := \sup\{|f(t, x, y, \lambda)| : t \in I, |x|, |y|, |\lambda| \le M\} < \infty.$$

Ist $(x, \lambda) \in B$, so besteht für jedes $t \in I$ die Abschätzung $|x(t)|, |x'(t)| \le ||x||_1 \le M$, also $|\Phi(x, \lambda)(t)| = |f(t, x(t), x'(t), \lambda)| \le C$. Also ist $||\Phi(x, \lambda)|| \le C$. Damit ist $\Phi(B) \subseteq C(I)$ beschränkt. Da L^{-1} stetig ist, ist somit $L^{-1}(\Phi(B)) \subseteq C^2_r(I)$ beschränkt. Mit §4.Lemma 10.(d) folgt, dass $G(B) \subseteq C^1_r(I)$ relativ kompakt ist.

Damit haben wir die Aussagen über G eingesehen. Wir kommen zu T. Zunächst ist $x \mapsto ax$ ein stetiger linearer Operator $C^1_r(I) \to C(I)$. Die Abbildung T erhalten wir indem anschliessend noch der stetige Operator L^{-1} und die Inklusion $C^2_r(I) \subseteq C^1_r(I)$ angewendet werden, und somit ist T ein kompakter linearer Operator.

Es verbleibt die Differenzierbarkeitsaussage. Seien also $\lambda_0, \lambda_1 \in \mathbb{R}$ mit $\lambda_0 < \lambda_1$ und $\epsilon > 0$ gegeben. Nach unserer Voraussetzung an f gibt es ein $\delta > 0$ mit

$$|f(t, \zeta, \eta, \lambda) - \lambda a(t)\zeta| \le \frac{\epsilon}{||L^{-1}||} ||(\zeta, \eta)||$$

für alle $t \in I$, $\lambda \in [\lambda_0, \lambda_1]$, $(\zeta, \eta) \in \mathbb{R}^2$ mit $||(\zeta, \eta)|| \le \delta$, wobei L^{-1} als Abbildung von $C(I)$ nach $C^1(I)$ aufgefasst wird. Seien jetzt $\lambda \in [\lambda_0, \lambda_1]$ und $x \in C^1_r(I)$ mit $||x||_1 \le \delta$. Sei $t \in I$. Dann gilt $||(x(t), x'(t))|| \le |x(t)| + |x'(t)| \le ||x||_1 \le \delta$, d.h.

$$\begin{aligned} |\Phi(x, \lambda)(t) - \lambda a(t)x(t)| &= |f(t, x(t), x'(t), \lambda) - \lambda a(t)x(t)| \\ &\le \frac{\epsilon}{||L^{-1}||} ||(x(t), x'(t))|| \le \frac{\epsilon}{||L^{-1}||} ||x||_1, \end{aligned}$$

und somit ist $||\Phi(x, \lambda) - \lambda ax|| \le (\epsilon/||L^{-1}||)||x||_1$. Es folgt

$$||G(x, \lambda) - \lambda Tx|| = ||L^{-1}(\Phi(x, \lambda)) - L^{-1}(\lambda ax)|| \le ||L^{-1}|| \cdot ||\Phi(x, \lambda) - \lambda ax|| \le \epsilon ||x||_1.$$

■

Also ist (G, T) ein Verzweigungsproblem im Banachraum $C_r^1(I)$. Die Menge der nichttrivialen Lösungen ist wieder

$$S := \{(x, \lambda) \in C_r^1(I) : G(x, \lambda) = x \neq 0\}.$$

Die Verzweigungspunkte $\lambda \in \mathbb{R}$ nennen wir auch die Eigenwerte unseres nichtlinearen Eigenwertproblems. Nach Satz 4 wissen wir das für jeden Eigenwert $\lambda \neq 0$ stets $1/\lambda \in \sigma(T)$ ist. Es ist genau dann $1/\lambda \in \sigma(T)$, wenn $1/\lambda$ ein Eigenwert von T ist, d.h. wenn es $0 \neq x \in C_r^1(I)$ mit $Tx = (1/\lambda)x$ gibt. Letzteres ist gleichwertig zu $Lx = \lambda ax$, d.h. λ muss ein Eigenwert des linearen Sturm-Liouville Problems sein. Es ist eine klassische Tatsache das das lineare Sturm-Liouville Eigenwertproblem abzählbar viele Eigenwerte $\lambda_0 < \lambda_1 < \ldots$ hat, und das die Eigenfunktionen $x \neq 0$ zum Eigenwert λ_k genau k Nullstellen im Inneren von I haben, und alle Nullstellen sind einfach. Ein Beweis dieser Tatsache wird im Anhang §6B zu diesem Paragraphen gegeben. Die Menge der Funktionen mit diesem Nullstellenverhalten wird im folgenden Beweis eine wichtige Rolle spielen.

Lemma 7: *Seien $I = [\alpha, \beta]$ ein kompaktes Intervall, und $r = (a_0, a_1, b_0, b_1) \in \mathbb{R}^4$ mit $(a_0, b_0), (a_1, b_1) \neq (0, 0)$. Sei $p \in C^1(I)$ mit $p(t) > 0$ für alle $t \in I$ und definiere $C_r^1(I) := \{x \in C^1(I) : R_0^r x = R_1^r x = 0\}$.*

(a) *Ist $k \in \mathbb{N}$, so ist die Menge*

$$U_k := \left\{ x \in C_r^1(I) \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{Alle Nullstellen von } x \text{ sind einfach und} \\ x \text{ hat genau } k \text{ Nullstellen in } (\alpha, \beta) \end{array} \right\}$$

in $C_r^1(I)$ offen.

(b) *Sei $k \in \mathbb{N}$. Für $x \in U_k$ definiere $\alpha < t_1(x) < t_2(x) < \ldots < t_k(x) < \beta$ durch $x(t_i(x)) = 0$ für $1 \leq i \leq k$. Dann sind die Funktionen $t_1, \ldots, t_k : U_k \to I$ stetig.*

(c) *Sind $k \in \mathbb{N}$ und $x \in \partial U_k$, so hat x eine mehrfache Nullstelle.*

(d) *Die Menge*

$$M := \{x \in C_r^1(I) | \exists (t \in I) : x(t) = x'(t) = 0\} \subseteq C_r^1(I)$$

ist abgeschlossen, und ihr Komplement ist eine disjunkte Vereinigung

$$C_r^1(I) \backslash M = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} U_k.$$

Beweis: (a) Sei $x \in U_k$. Seien $N := \{t \in I : x(t) = 0\}$ und $T := N \cap (\alpha, \beta)$. Es ist $T \subseteq N \subseteq T \cup \{\alpha, \beta\}$ und $|T| = k$. Sei $t \in N$. Dann ist $x(t) = 0$ und somit $x'(t) \neq 0$. Also gibt es $\delta_t > 0$ und $a_t > 0$ mit $|x'(s)| \geq a_t$ für alle $s \in I \cap [t - \delta_t, t + \delta_t]$. Setze jetzt

$$\delta := \min \left\{ \delta_t, \frac{1}{3}(\delta_t - \delta_s) : t, s \in N, t \neq s \right\}.$$

Setzen wir für jedes $t \in N$ jetzt $I_t := I \cap [t - \delta, t + \delta] \subseteq I \cap [t - \delta_t, t + \delta_t]$, so ist $I_t \cap I_s = \emptyset$ für $t, s \in N$ mit $t \neq s$. Schreibe $I_t = [\alpha_t, \beta_t]$ für $t \in N$ und $a := \min\{a_t : t \in N\} > 0$. Weiter ist $M := I \backslash \bigcup_{t \in N} I_t^\circ$ abgeschlossen in I mit $x(s) \neq 0$ für alle $s \in M$, also ist $b := \inf\{|x(s)| : s \in M\} > 0$. Setze weiter $\epsilon := \min\{a, b\} > 0$.

Wir behaupten das $B_\epsilon(x) \subseteq U_k$ gilt. Sei also $y \in C_r^1(I)$ mit $||y - x||_1 < \epsilon$ gegeben. Ist $s \in M$, so gilt $|y(s)| = |x(s) - (x(s) - y(s))| \geq |x(s)| - |x(s) - y(s)| \geq b - ||x - y||_1 > b - \epsilon \geq 0$, d.h. $y(s) \neq 0$. Also hat y keine Nullstellen in M. Es ist $I \backslash M = \bigcup_{t \in N} I_t^\circ$ und diese Vereinigung ist disjunkt.

Sei $t \in N$. Ist $t \neq \alpha$, so ist $\alpha_t \in M$ und $|x(\alpha_t)| \geq b$. Ist $x(\alpha_t) > 0$, so ist auch $y(\alpha_t) = x(\alpha_t) - (x(\alpha_t) - y(\alpha_t)) \geq b - ||x - y||_1 > b - \epsilon \geq 0$, und ist $x(\alpha_t) < 0$, so folgt analog $y(\alpha_t) < 0$. Ist $t \neq \beta$, so folgt analog, dass $\beta_t \in M$ ist und $x(\beta_t), y(\beta_t)$ dasselbe Vorzeichen haben. Für $s \in I_t$ ist $|y'(s)| \geq |x'(s)| - |x'(s) - y'(s)| \geq a - ||x - y||_1 > a - \epsilon > 0$, d.h. $y'(s) > 0$ für alle $s \in I_t$ oder $y'(s) < 0$ für alle $s \in I_t$. Also ist y auf I_t streng monoton, und insbesondere gibt es höchstens eine Nullstelle von y in I_t und diese ist einfach.

Zunächst sei $t \in T$. Genau wie y ist auch x auf I_t streng monoton und wegen $\alpha_t < t < \beta_t$ haben $x(\alpha_t), x(\beta_t)$ verschiedenes Vorzeichen. Damit haben auch $y(\alpha_t)$ und $y(\beta_t)$ verschiedenes Vorzeichen und somit hat y eine Nullstelle in I_t, und diese liegt in $I_t^\circ \subseteq I^\circ$. Jetzt sei $t = \alpha$. Dann ist $0 = R_0^r x = b_0 p(\alpha) x'(\alpha)$ und wegen $x'(\alpha) \neq 0$ folgt $b_0 = 0$. Damit ist auch $0 = R_0^r y = a_0 y(\alpha)$ und wegen $b_0 = 0$ ist $a_0 \neq 0$ also $y(\alpha) = 0$. Ist $t = \beta$, so folgt analog $y(\beta) = 0$. Also hat y genausoviele Nullstellen wie x, alle diese Nullstellen sind einfach und genau $|T| = k$ Nullstellen liegen im Inneren von I. Damit ist tatsächlich $y \in U_k$.

(b) Wir zeigen, dass die Abbildung $\phi := (t_1, \ldots, t_k) : U_k \to I^k$ stetig ist. Sei also $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in U_k mit $x_n \to x \in U_k$. Da I^k kompakt ist, reicht es zu zeigen, dass $\phi(x)$ der einzige Häufungspunkt der Folge $(\phi(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ ist. Also können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\phi(x_n) \to t \in I^k$ annehmen, und müssen $t = \phi(x)$ zeigen. Für $1 \leq i < j \leq k$ ist $\phi_i(x_n) < \phi_j(x_n)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$, also auch $t_i \leq t_j$. Weiter ist $x_n(\phi_i(x_n)) = 0$ für alle $1 \leq i \leq k$, $n \in \mathbb{N}$ und wegen $||x_n - x||_\infty \to 0$ ist $x_n(\phi_i(x_n)) \to x(t_i)$, d.h. es gilt $x(t_i) = 0$ für $1 \leq i \leq k$.

Ist $\alpha < t_1 < t_2 < \ldots < t_k < \beta$, so folgt sofort $\phi(x) = t$. Angenommen dies wäre nicht der Fall. Dann gibt es eine Nullstelle $\alpha < s < \beta$ von x mit $s \notin \{t_1, \ldots, t_k\}$. Wegen $x(s) = 0$ ist $x'(s) \neq 0$, also gibt es ein abgeschlossenes Intervall $J = [u, v] \subseteq I^\circ$ mit $s \in J^\circ$, $J \cap \{t_1, \ldots, t_k\} = \emptyset$ so, dass x auf J streng monoton ist. Weiter existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\phi_i(x_n) \notin J$ für alle $1 \leq i \leq k$, $n \geq N$ und $|x_n(u) - x(u)|, |x_n(v) - x(v)| < \min\{|x(u)|, |x(v)|\}$ für $n \geq N$. Dann haben $x_N(u)$ und $x(u)$ sowie $x_N(v)$ und $x(v)$ jeweils dasselbe Vorzeichen. Andererseits haben $x(u)$ und $x(v)$ verschiedene Vorzeichen,

d.h. auch $x_N(u)$ und $x_N(v)$ haben verschiedene Vorzeichen, und somit hat x_N eine Nullstelle in J; ein Widerspruch.
(d) Sind $k, l \in \mathbb{N}$ mit $k \neq l$, so ist offenbar $U_k \cap U_l = \emptyset$. Da U_k nach (a) für jedes $k \in \mathbb{N}$ offen ist, reicht es $C_r^1(I) \backslash M = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} U_k$ zu zeigen. Trivialerweise ist $U_k \subseteq C_r^1(I) \backslash M$ für jedes $k \in \mathbb{N}$. Jetzt sei umgekehrt $x \in C_r^1(I) \backslash M$ gegeben. Dann hat x keine mehrfachen Nullstellen. Ist also $t \in I$ mit $x(t) = 0$, so ist $x'(t) \neq 0$ und es gibt ein in I offenes Intervall J mit $t \in J$ so, dass x auf J streng monoton ist. Insbesondere ist t die einzige Nullstelle von x in J. Damit ist $x^{-1}(0)$ eine diskrete, und auch abgeschlossene, Teilmenge von I. Da I kompakt ist, ist folglich $|x^{-1}(0)| < \infty$, und es existiert ein $k \in \mathbb{N}$ mit $x \in U_k$.
(c) Sei $k \in \mathbb{N}$. Ist $l \in \mathbb{N}$ mit $l \neq k$, so gilt $U_l \cap U_k = \emptyset$, also auch $U_l \cap \overline{U_k} = \emptyset$, da U_l nach (a) offen ist. Mit (d) und (a) folgt

$$\partial U_k = \overline{U_k} \backslash U_k \subseteq C_r^1(I) \backslash \bigcup_{l \in \mathbb{N}} U_l = M.$$

■

Jetzt haben wir alle Hilfsmittel beisammen um unseren Satz über nichtlineare Sturm-Liouville Eigenwertprobleme zu beweisen.

Satz 8: *Seien $I = [\alpha, \beta] \subseteq \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall, $p \in C^1(I)$, $q, a \in C(I)$ mit $p(t), a(t) > 0$ für alle $t \in I$. Sei*

$$L : C^2(I) \to C(I); x \mapsto -(px')' + qx.$$

Sei $r = (a_0, a_1, b_0, b_1) \in \mathbb{R}^4$ mit $(a_0, b_0), (a_1, b_1) \neq (0, 0)$ und setze

$$\begin{aligned} R_0^r : C^1(I) \to \mathbb{R}; x &\mapsto a_0 x(\alpha) + b_0 p(\alpha) x'(\alpha), \\ R_1^r : C^1(I) \to \mathbb{R}; x &\mapsto a_1 x(\beta) + b_1 p(\beta) x'(\beta), \\ C_r^1(I) &:= \{x \in C^1(I) : R_0^r x = R_1^r x = 0\} \end{aligned}$$

Für $\eta_1, \eta_2 \in \mathbb{R}$ existiere genau ein $x \in C^2(I)$ mit $Lx = 0$ und $R_0^r x = \eta_1$, $R_1^r x = \eta_2$. Weiter sei

$$f : I \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

stetig mit

$$\forall(\lambda_0 < \lambda_1) \forall(\epsilon > 0) \exists(\delta > 0) \forall(\lambda \in [\lambda_0, \lambda_1]) \forall(t \in I) \forall(\zeta, \eta \in \mathbb{R}) : \\ 0 < ||(\zeta, \eta)|| \leq \delta \Longrightarrow \frac{|f(t, \zeta, \eta, \lambda) - \lambda a(t) \zeta|}{||(\zeta, \eta)||} \leq \epsilon,$$

und

$$\forall(t \in I) \forall(\lambda \in \mathbb{R}) : f(t, 0, 0, \lambda) = 0.$$

Sei

$$S := \{(x, \lambda) \in C_r^1(I) \times \mathbb{R} | x \neq 0, \forall(t \in I) : Lx(t) = f(t, x(t), x'(t), \lambda)\}.$$

Seien $\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots$ die Eigenwerte des linearen Sturm-Liouvilleschen Eigenwertproblems $Lx = \lambda ax$. Dann sind die $\lambda_0, \lambda_1, \ldots$ auch genau die Eigenwerte des nichtlinearen Eigenwertproblems. Sei $k \in \mathbb{N}$. Dann ist die Zusammenhangskomponente C_k von $\overline{S}$ mit $(0, \lambda_k) \in C_k$ unbeschränkt, und ist $(x, \lambda) \in C_k \backslash \{(0, \lambda_k)\}$, so sind alle Nullstellen von x einfach und x hat genau k Nullstellen im Inneren von I.

Beweis: Wir übernehmen die Bezeichnungen aus Lemma 6, und unterteilen den Beweis in mehrere Schritte.
(a) (G, T) ist ein Verzweigungsproblem, S ist die Menge seiner nichttrivialen Lösungen, und die Verzweigungspunkte sind genau die Eigenwerte unserer nichtlinearen Eigenwertaufgabe. Aus der klassischen linearen Theorie wissen wir

$$\sigma(T) = \{0\} \cup \left\{ \frac{1}{\lambda_k} : k \in \mathbb{N} \right\},$$

und für jedes $k \in \mathbb{N}$ ist

$$N_{1/\lambda_k}(T) = \text{Kern}\left(\frac{1}{\lambda_k} - T \right)$$

eindimensional und $N_{1/\lambda_k}(T) \backslash \{0\} \subseteq U_k$, wobei U_k wie in Lemma 7 ist. Nach Satz 4 ist jeder von Null verschiedene Verzweigungspunkt aus der Menge $\{\lambda_k : k \in \mathbb{N}\}$. Umgekehrt ist nach Satz 5 jeder Eigenwert λ_k ($k \in \mathbb{N}$) ein Verzweigungspunkt. Um die Aussage über die Eigenwerte unseres nichtlinearen Problems zu beweisen, müssen wir also nur noch zeigen das 0 kein Verzweigungspunkt ist. Dies werden wir etwas später in diesem Beweis erledigen.
(b) Sei $\lambda \in \mathbb{R}$. Wir behaupten das die Funktion

$$h_\lambda : I \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}; (t, \zeta, \eta) \mapsto \begin{cases} \dfrac{f(t, \zeta, \eta, \lambda) - \lambda a(t)\zeta}{\sqrt{\zeta^2 + \eta^2}}, & (\zeta, \eta) \neq (0, 0), \\ 0, & \zeta = \eta = 0. \end{cases}$$

stetig ist.

Da f und a stetig sind, ist h_λ sicher auf $I \times (\mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\})$ stetig. Sei jetzt $t \in I$, zu zeigen ist die Stetigkeit von h_λ in $(t, 0, 0)$. Sei $\epsilon > 0$. Nach Voraussetzung an f gibt es ein $\delta > 0$ mit $|f(s, \zeta, \eta, \lambda) - \lambda a(s)\zeta| \leq \epsilon\sqrt{\zeta^2 + \eta^2}$ für alle $s \in I$, $\zeta, \eta \in \mathbb{R}$ mit $||(\zeta, \eta)|| \leq \delta$, und ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $\delta \leq 1$. Für $(s, \zeta, \eta) \in I \times \mathbb{R}^2$ mit $||(\zeta, \eta)|| \leq \delta$ folgt $|h_\lambda(s, \zeta, \eta)| \leq \epsilon$. Also ist h_λ stetig.
(c) Jetzt sei $\lambda \in \mathbb{R}$ und $x \in C^1_r(I)$ habe eine mehrfache Nullstelle. Wir wollen zeigen, dass dann $G(x, \lambda) = x$ schon $x = 0$ impliziert.

Es sei also $G(x, \lambda) = x$ vorausgesetzt. Wir betrachten die folgenden beiden Funktionen

$$u : I \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}; (t, \zeta, \eta) \mapsto \begin{cases} \dfrac{(f(t, \zeta, \eta, \lambda) - \lambda a(t)\zeta)\zeta}{\zeta^2 + \eta^2}, & (\zeta, \eta) \neq (0, 0), \\ 0, & \zeta = \eta = 0, \end{cases}$$

und

$$v : I \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}; (t, \zeta, \eta) \mapsto \begin{cases} \dfrac{(f(t,\zeta,\eta,\lambda) - \lambda a(t)\zeta)\eta}{\zeta^2 + \eta^2}, & (\zeta, \eta) \neq (0,0), \\ 0, & \zeta = \eta = 0. \end{cases}$$

Für $(\zeta, \eta) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$, $t \in I$ gilt

$$|u(t,\zeta,\eta)| = |h_\lambda(t,\zeta,\eta)| \cdot \frac{|\zeta|}{\sqrt{\zeta^2 + \eta^2}} \leq |h_\lambda(t,\zeta,\eta)|,$$

und die Stetigkeit von h_λ ergibt somit die Stetigkeit von u. Analog ist auch v stetig.

Wegen $G(x, \lambda) = x$ ist $Lx = \Phi(x, \lambda)$, d.h. für alle $t \in I$ gilt

$$\begin{aligned} Lx(t) &= f(t, x(t), x'(t), \lambda) \\ &= \lambda a(t)x(t) + (f(t, x(t), x'(t), \lambda) - \lambda a(t)x(t)) \\ &= \lambda a(t)x(t) + u(t, x(t), x'(t))x(t) + v(t, x(t), x'(t))x'(t) \\ &= (a(t) + U(t))x(t) + V(t)x'(t) \end{aligned}$$

mit den stetigen Funktionen $U, V : I \to \mathbb{R}$ definiert durch $U(t) := u(t, x(t), x'(t))$, $V(t) := v(t, x(t), x'(t))$ $(t \in I)$. Dies ist eine homogene, lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung für x, und da x nach Voraussetzung eine mehrfache Nullstelle hat, ergibt der Eindeutigkeitssatz für lineare Differentialgleichungen sofort $x = 0$. Damit ist diese Zwischenbehauptung bewiesen.

(d) Seien $(x_n, \mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in S und $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $(x_n, \mu_n) \to (0, \lambda)$ für $n \to \infty$. Dann gibt es ein $k \in \mathbb{N}$ mit $\lambda = \lambda_k$ und $x_n \in U_k$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$.

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ definieren wir

$$r_n : I \to \mathbb{R}; t \mapsto f(t, x_n(t), x_n'(t), \mu_n) - \mu_n a(t)x_n(t).$$

Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $r_n \in C(I)$, und wegen $G(x_n, \mu_n) = x_n$ ist

$$Lx_n = \mu_n a x_n + r_n,$$

also auch

$$\frac{x_n}{||x_n||_1} = \mu_n L^{-1}\left(a\frac{x_n}{||x_n||_1}\right) + \frac{1}{||x_n||_1}L^{-1}r_n = \mu_n T\frac{x_n}{||x_n||_1} + \frac{1}{||x_n||_1}L^{-1}r_n.$$

Für jedes $t \in I$ gilt $x_n(t)^2 + x_n'(t)^2 \leq ||x_n||_\infty^2 + ||x_n'||_\infty^2 \leq (||x_n||_\infty + ||x_n'||_\infty)^2 = ||x||_1^2$.

Ist $\epsilon > 0$, so gibt es ein $N_1 \in \mathbb{N}$ mit $\mu_n \in [\lambda - 1, \lambda + 1]$ für $n \geq N_1$ und ein $\delta > 0$ mit $|f(t,\zeta,\eta,\mu) - \mu a(t)\zeta| \leq \epsilon||(\zeta,\eta)||$ für $t \in I$, $(\zeta,\eta) \in \mathbb{R}^2$ mit $||(\zeta,\eta)|| \leq \delta$ und $\mu \in [\lambda - 1, \lambda + 1]$. Weiter gibt es $N \geq N_1$ mit $||x_n||_1 \leq \delta$ für $n \geq N$. Ist dann $n \geq N$, so folgt $||(x_n(t), x_n'(t))|| \leq ||x_n||_1 \leq \delta$ und $|r_n(t)| \leq \epsilon||x_n||_1$ für jedes

$t \in I$, d.h. $||r_n||_\infty \leq \epsilon ||x_n||_1$ für $n \geq N$. Insbesondere ist damit $(1/||x_n||_1)||L^{-1}r_n||_1 \leq ||L^{-1}|| \cdot ||r_n||_\infty / ||x_n||_1 \leq ||L^{-1}||\epsilon$ für $n \geq N$. Damit haben wir

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{||x_n||_1} L^{-1} r_n = 0$$

in $C_r^1(I)$. Da T kompakt ist, können wir durch Übergang zu einer Teilfolge ohne Beschränkung der Allgemeinheit

$$\lim_{n\to\infty} T\frac{x_n}{||x_n||_1} = x \in C_r^1(I)$$

annehmen. Wegen $\mu_n \to \lambda$ folgt damit

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{||x_n||_1} = \lambda x.$$

Insbesondere ist $|\lambda| \cdot ||x||_1 = 1$, d.h. $\lambda \neq 0$ und $x \neq 0$. Wegen $(0, \lambda) \in \overline{S}$ ist λ somit ein von Null verschiedener Verzweigungspunkt, d.h. es gibt $k \in \mathbb{N}$ mit $\lambda = \lambda_k$. Weiter ist $a(x_n/||x_n||_1) \to \lambda_k a x$ in $C(I)$, und die Stetigkeit von L^{-1} ergibt

$$x = \lim_{n\to\infty} T\frac{x_n}{||x_n||_1} = \lim_{n\to\infty} L^{-1} a \frac{x_n}{||x_n||_1} = \lambda_k L^{-1}(ax).$$

Wegen $\lambda_k \neq 0$ ist insbesondere $x \in C_r^2(I)$ und $Lx = \lambda_k a x$. Also ist x eine von Null verschiedene Lösung des linearen Sturm-Liouville Eigenwertproblems zum Eigenwert λ_k, und es folgt $x \in U_k$, also auch $\lambda_k x \in U_k$. Nach Lemma 7.(a) ist U_k offen in $C_r^1(I)$, also existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $x_n/||x_n||_1 \in U_k$ für $n \geq N$, also auch $x_n \in U_k$ für $n \geq N$.

(e) Die Eigenwerte des nichtlinearen Sturm-Liouville Eigenwertproblems sind genau die λ_k $(k \in \mathbb{N})$.

Nach Schritt (a) ist nur zu zeigen, dass 0 kein Verzweigungspunkt ist, und dies ist klar nach (d).

(f) Sei $k \in \mathbb{N}$. Wir behaupten, dass dann die Menge

$$S_k := ((U_k \times \mathbb{R}) \cap \overline{S}) \cup \{(0, \lambda_k)\} \subseteq \overline{S}$$

in $\overline{S}$ offen ist.

Da λ_k ein Verzweigungspunkt ist, ist zumindest $(0, \lambda_k) \in \overline{S}$, d.h. S_k ist tatsächlich eine Teilmenge von $\overline{S}$. Nach Lemma 7.(a) ist $(U_k \times \mathbb{R}) \cap \overline{S}$ in $\overline{S}$ offen, also ist nur noch zu zeigen, dass $(0, \lambda_k)$ ein innerer Punkt von S_k ist. Wäre $(0, \lambda_k)$ kein innerer Punkt von S_k, so existiert eine Folge $(x_n, \mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\overline{S}$ mit $(x_n, \mu_n) \to (0, \lambda_k)$ und $(x_n, \mu_n) \notin S_k$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $\mu_n \to \lambda_k$ und $x_n \to 0$. Wegen $0 \neq \lambda_n \to \infty$ für $n \to \infty$ können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $0 \neq \mu_n \notin \{\lambda_m : m \in \mathbb{N}\} \backslash \{\lambda_k\}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ annehmen. Wäre dann $n \in \mathbb{N}$ mit $x_n = 0$, so ist μ_n ein Verzweigungspunkt und somit $\mu_n = \lambda_k$ im Widerspruch zu $(x_n, \mu_n) \notin S_k$. Also ist $x_n \neq 0$ für jedes $n \in \mathbb{N}$, d.h. $(x_n, \mu_n) \in S$.

Wegen $\mu_n \to \lambda_k$ für $n \to \infty$ gibt es nach (d) ein $n \in \mathbb{N}$ mit $x_n \in U_k$, also $(x_n, \mu_n) \in S_k$; ein Widerspruch.
(g) Die Menge $\overline{S}$ ist eine disjunkte Vereinigung

$$\overline{S} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} S_k.$$

Wegen $0 \notin U_k$ für jedes $k \in \mathbb{N}$ ist $S_k \cap S_l = \emptyset$ für $k, l \in \mathbb{N}$ mit $k \neq l$. Sei jetzt $(x, \lambda) \in \overline{S}$. Ist $x = 0$, so ist λ ein Verzweigungspunkt also $\lambda = \lambda_k$ und $(x, \lambda) \in S_k$ für ein $k \in \mathbb{N}$. Nun sei $x \neq 0$. Nach Teil (c) hat x nur einfache Nullstellen. Nach Lemma 7.(d) existiert ein $k \in \mathbb{N}$ mit $x \in U_k$, und es folgt $(x, \lambda) \in S_k$.
(h) Sei jetzt $k \in \mathbb{N}$ gegeben. Sei C_k die Zusammenhangskomponente von $\overline{S}$ mit $(0, \lambda_k) \in C_k$. Dann ist $C_k \subseteq S_k$ unbeschränkt.

Da $C_k \subseteq \overline{S}$ zusammenhängend ist, gibt es nach (f,g) ein $k \in \mathbb{N}$ mit $C_k \subseteq S_k$. Ist $\lambda \neq \lambda_k$ ein weiterer Verzweigungspunkt, so ist $(0, \lambda) \notin S_k$, also auch $(0, \lambda) \notin C_k$. Nach Satz 5 ist die Menge C_k unbeschränkt.

■

Literatur zu §6

R. F. Brown: *A topological introduction to nonlinear analysis*, Birkhäuser 1993.

P. Rabinowitz: *Some global results for nonlinear eigenvalue problems*, J. Funct. Analysis 7 (1971), 487–513.

§6A Anhang: Zusammenhangskomponenten lokalkompakter Räume

In diesem kleinen Anhang wollen wir unter anderem den im Beweis von §6.Satz 5 verwendeten Satz über die Zusammenhangskomponenten kompakter Räume beweisen. Wir wollen den Satz allerdings gleich für lokalkompakte Räume nachweisen. Die grundlegende Definition ist das Konzept einer Quasikomponente eines topologischen Raums.

Definition 1: Sei X ein topologischer Raum. Für jedes $x \in X$ bezeichne $C(x)$ die Zusammenhangskomponente von x in X, und $Q(x)$ sei definiert als

$$Q(x) := \bigcap \{U \subseteq X : U \text{ ist offen und abgeschlossen mit } x \in U\}.$$

Die Menge $Q(x)$ heißt die Quasikomponente von X in x, und offenbar ist $C(x) \subseteq Q(x)$. Weiter ist $Q(x)$ als ein Durchschnitt abgeschlossener Mengen selbst abgeschlossen.

Wir haben das folgende grundlegende (triviale) Lemma:

Lemma 1: *Sei X ein topologischer Raum. Dann ist die Relation*

$$x \sim y :\Longleftrightarrow \forall (U \subseteq X \text{ offen und abgeschlossen}) : x \in U \Leftrightarrow y \in U$$

ein Äquivalenzrelation auf X. Für jedes $x \in X$ ist $Q(x)$ die Äquivalenzklasse von x in X.

Beweis: Die Relation $\sim$ ist offenbar reflexiv und symmetrisch. Jetzt seien $x, y, z \in X$ mit $x \sim y$ und $y \sim z$ gegeben. Ist dann $U \subseteq X$ offen und abgeschlossen, so haben wir

$$x \in U \Longleftrightarrow y \in U \Longleftrightarrow z \in U,$$

und somit ist $x \sim z$.

Sei $x \in X$ und bezeichne M die Äquivalenzklasse von x bezüglich $\sim$. Offenbar ist $M \subseteq Q(x)$. Sei umgekehrt $y \in Q(x)$ gegeben. Wäre $y \notin M$, so $x \not\sim y$, und es existiert eine offene und abgeschlossene Menge $U \subseteq X$ mit $x \in U, y \notin U$ oder $x \notin U, y \in U$. Wegen $y \in Q(x)$ kann nicht $x \in U$ und $y \notin U$ gelten. Also ist $y \in U$ und $x \notin U$. Dann ist aber auch $X \backslash U$ offen und abgeschlossen mit $x \in X \backslash U$ und $y \notin X \backslash U$; im Widerspruch zu $y \in Q(x)$. Also ist $y \in M$, und wir haben $Q(x) \subseteq M$.

■

Die Äquivalenzklassen von $\sim$, d.h. die Mengen der Form $Q(x)$ ($x \in X$), nennen wir die Quasikomponenten von X. Wir kommen zum zentralen Hilfslemma für diesen Abschnitt.

Lemma 2: *Seien X ein topologischer Raum, $K \subseteq X$ eine kompakte Teilmenge und $Q \subseteq X$ eine Quasikomponente von X mit $K \cap Q = \emptyset$. Dann existiert eine offene und abgeschlossene Menge $U \subseteq X$ mit $Q \subseteq U$ und $K \cap U = \emptyset$.*

Beweis: Wähle $x \in Q$, d.h. $Q = Q(x)$. Sei $y \in K$. Dann ist $y \notin Q(x)$, also existiert eine offene und abgeschlossene Menge $U_y \subseteq X$ mit $x \in U_y$ und $y \notin U_y$. Damit ist auch $V_y := X \backslash U_y$ offen in X mit $y \in V_y$. Da K kompakt ist, existiert eine endliche Menge $E \subseteq K$ mit $K \subseteq \bigcup_{y \in E} V_y$. Nun ist die Menge $U := \bigcap_{y \in E} U_y$ offen und abgeschlossen mit $x \in U$, also auch $Q = Q(x) \subseteq U$. Weiter ist $K \subseteq \bigcup_{y \in E} V_y = X \backslash \bigcap_{y \in E} U_y = X \backslash U$, d.h. $K \cap U = \emptyset$.

■

Damit können wir bereits den ersten Hauptsatz dieses Anhangs beweisen.

Satz 3: *Seien X ein lokalkompakter Raum und $Q \subseteq X$ eine kompakte Quasikomponente von X. Dann ist Q auch eine Zusammenhangskomponente von X.*

Beweis: Wähle ein $x \in Q$. Dann ist $C(x) \subseteq Q(x) = Q$. Es ist zu zeigen, dass Q zusammenhängend ist, denn dann folgt $Q \subseteq C(x)$ und somit $Q = C(x)$. Seien also $A, B \subseteq Q$ abgeschlossen mit $A \cap B = \emptyset$, $Q = A \cup B$ und $x \in A$. Zu zeigen ist $B = \emptyset$.

Sei $y \in B$. Dann ist $y \notin A$, und da lokalkompakte Räume regulär sind, existieren offene Mengen $U_y, W_y \subseteq X$ mit $A \subseteq U_y$, $y \in W_y$ und $U_y \cap W_y = \emptyset$. Weiter existiert eine kompakte Umgebung V_y von y mit $V_y \subseteq W_y$. Da B als abgeschlossene Teilmenge der kompakten Menge Q selbst kompakt ist, existiert eine endliche Menge $E \subseteq B$ mit $B \subseteq \bigcup_{y \in E} V_y^\circ =: V$.

Dann sind $V \subseteq X$ und $U := \bigcap_{y \in E} U_y \subseteq X$ offene Mengen mit $A \subseteq U$, $B \subseteq V$ und $U \cap V = \emptyset$. Weiter ist $\overline{V} \subseteq \bigcup_{y \in E} V_y$ kompakt mit $U \cap \overline{V} = \emptyset$, und damit ist auch $\partial V = \overline{V} \backslash V$ kompakt mit $U \cap \partial V = \emptyset$. Insbesondere ist $\partial V \cap A = \emptyset$, und wegen $B \subseteq V$ ist auch $\partial V \cap B = \emptyset$. Jetzt ergibt $Q = A \cup B$ auch $\partial V \cap Q = \emptyset$, und nach Lemma 2 gibt es eine offene und abgeschlossene Menge $L \subseteq X$ mit $Q \subseteq L$ und $\partial V \cap L = \emptyset$. Folglich ist die Menge

$$M := L \cap (X \backslash \overline{V}) = L \cap (X \backslash V)$$

offen und abgeschlossen in X. Wegen $x \in A \subseteq U$, $U \cap V = \emptyset$ ist $x \notin V$ und mit $x \in Q \subseteq L$ folgt $x \in M$. Folglich ist $Q = Q(x) \subseteq M$, d.h. $B = B \cap Q \subseteq B \cap M \subseteq V \cap M = \emptyset$, also $B = \emptyset$.

■

Kompakte Quasikomponenten eines lokalkompakten Raums sind also Zusammenhangskomponenten. Eine weitere Eigenschaft kompakter Quasikomponenten ist das die kompakt-offenen Umgebungen eine Umgebungsbasis bilden.

Satz 4: *Seien X ein lokalkompakter Raum, $Q \subseteq X$ eine kompakte Quasikomponente von X und $U \subseteq X$ offen mit $Q \subseteq U$. Dann existiert eine kompakte, offene Menge $K \subseteq X$ mit $Q \subseteq K \subseteq U$.*

Beweis: Da X lokalkompakt und Q kompakt ist, gibt es eine offene Menge $V \subseteq X$ mit $Q \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U$ so, dass $\overline{V}$ kompakt ist. Insbesondere ist $\partial V \subseteq U$ kompakt mit $Q \cap \partial V = \emptyset$. Nach Lemma 2 existiert eine offene und abgeschlossene Menge $W \subseteq X$ mit $Q \subseteq W$ und $W \cap \partial V = \emptyset$. Damit ist die Menge

$$K := W \cap V = W \cap \overline{V}$$

offen und abgeschlossen mit $Q \subseteq K \subseteq V \subseteq U$ und als abgeschlossene Teilmenge der kompakten Menge $\overline{V}$ ist auch K kompakt.

■

Jetzt können wir Satz 3 verbessern, und zeigen das die kompakten Quasikomponenten genau die kompakten Zusammenhangskomponenten von X sind.

Satz 5: *Seien X ein lokalkompakter topologischer Raum und $C \subseteq X$ eine kompakte Zusammenhangskomponente von X. Dann ist C auch eine Quasikomponente von X.*

Beweis: Da C kompakt ist, gibt es eine offene Menge $V \subseteq X$ mit $C \subseteq V$ so, dass $Y := \overline{V}$ kompakt ist. Wegen $C \subseteq Y$ ist C auch eine Zusammenhangskomponente von Y. Wähle ein $x \in C$ und sei $Q_Y(x)$ die Quasikomponente von Y durch x. Da

Y kompakt ist, ist auch $Q_Y(x)$ kompakt, und nach Satz 3 ist $Q_Y(x)$ eine Zusammenhangskomponente von Y, d.h. $Q_Y(x) = C$.

Nach Satz 4 gibt es weiter eine in Y offene und kompakte Menge $W \subseteq Y$ mit $C \subseteq W \subseteq V$. Also ist W auch offen in V, und somit offen in X. Damit ist $W \subseteq X$ offen und abgeschlossen mit $x \in W$, d.h. $Q(x) \subseteq W \subseteq Y = \overline{V}$. Insbesondere ist $Q(x)$ kompakt, und nach Satz 3 eine Zusammenhangskomponente von X. Es folgt $C = Q(x)$.

■

Insbesondere haben wir unser in §6 benötigtes Ergebnis.

Satz 6: *Seien X ein lokalkompakter Raum, $C \subseteq X$ eine kompakte Zusammenhangskomponente von X und $A \subseteq X$ abgeschlossen mit $C \cap A = \emptyset$. Dann gibt es offene Mengen $U, V \subseteq X$ mit $X = U \cup V$, $U \cap V = \emptyset$, $C \subseteq U$ und $A \subseteq V$ so, dass U kompakt ist.*

Beweis: Nach Satz 5 ist C eine Quasikomponente von X, und es gilt $C \subseteq X \backslash A$. Nach Satz 4 gibt es eine kompakte, offene Menge $U \subseteq X$ mit $C \subseteq U \subseteq X \backslash A$. Setzen wir $V := X \backslash U$, so erfüllen U, V alle Bedingungen des Satzes.

■

Ein weiteres wichtiges Korollar ist, dass ein total unzusammenhängender, lokalkompakter Raum nulldimensional ist.

Satz 7: *Sei X ein lokalkompakter topologischer Raum. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(a) *X ist total unzusammenhängend.*

(b) *Alle Quasikomponenten von X sind einelementig.*

(c) *Die offen-abgeschlossenen Mengen bilden eine Basis der Topologie von X.*

Beweis: **(a)$\Longrightarrow$(b):** Klar nach Satz 5.
(b)$\Longrightarrow$(c): Klar nach Satz 4.
(c)$\Longrightarrow$(a): Klar.

■

§6B Anhang: Lineare Sturm–Liouville Theorie

In diesem Anhang wollen wir den in §6 benötigten Teil der klassischen linearen Sturm–Liouville Theorie darstellen. Wir setzen den üblicherweise im Rahmen des

Grundstudiums behandelten Teil der Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen voraus. Wir werden die Theorie nur in dem von uns benötigten Umfang entwickeln, und wollen hier keinerlei Vollständigkeit anstreben. Tatsächlich ist über Sturm–Liouville Probleme deutlich mehr bekannt als der hier behandelte Stoff.

Definition 1: Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall. Sind $p \in C^1(I)$ und $q \in C(I)$ mit $p(t) > 0$ für alle $t \in I$, so betrachten wir den folgenden gewöhnlichen Differentialoperator zweiter Ordnung

$$L := L_{pq} : C^2(I) \to C(I); x \mapsto -(px')' + qx.$$

Ist weiter $r := (a_0, a_1, b_0, b_1) \in \mathbb{R}^4$ gegeben, und ist $I = [a, b]$, so betrachten wir die beiden Randbedingungen

$$\begin{aligned} R_0^r : C^2(I) \to \mathbb{R}; \quad x &\mapsto a_0 x(a) + b_0 p(a) x'(a), \\ R_1^r : C^2(I) \to \mathbb{R}; \quad x &\mapsto a_1 x(b) + b_1 p(b) x'(b). \end{aligned}$$

Weiter definieren wir

$$C_r^2(I) := \{x \in C^2(I) : R_0^r x = R_1^r x = 0\}.$$

Dies ist offenbar ein abgeschlossener Teilraum von $C^2(I)$.

Sind diese Daten gegeben, so betrachtet man die Randwertaufgabe

$$Lx = g, \ R_0^r x = \eta_0, R_1^r x = \eta_1$$

zu gegebener rechter Seite $g \in C(I)$ und Randwerten $\eta_0, \eta_1 \in \mathbb{R}$. Wir haben das folgende wichtige Lemma:

Lemma 1: *Seien $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall, $p \in C^1(I)$ mit $p(t) > 0$ für $t \in I$, und $q \in C(I)$. Setze $L := L_{pq}$.*

(a) *Sind $x, y \in C^2(I)$, so ist $xLy - yLx = (p(x'y - xy'))'$.*

(b) *Ist*

$$r = (a_0, a_1, b_0, b_1) \in \mathfrak{R} := \left\{(x, y, u, v) \in \mathbb{R}^4 : (x, u) \neq (0, 0) \text{ und } (y, v) \neq (0, 0)\right\},$$

und sind $x, y \in C_r^2(I)$, so gilt

$$\int_a^b x(t) Ly(t)\, dt = \int_a^b y(t) Lx(t)\, dt.$$

Beweis: **(a)** Es ist

$$\begin{aligned} xLy - yLx &= -x(py')' + qxy + y(px')' - qxy \\ &= -(xpy')' + x'py' + (ypx')' - y'px' \\ &= (p(-xy' + x'y))'. \end{aligned}$$

(b) Seien also $x, y \in C_r^2(I)$. Ist $b_0 = 0$, so gilt $0 = R_0^r x = a_0 x(a)$, und da $a_0 \neq 0$ ist folgt $x(a) = 0$. Analog folgt $y(a) = 0$, also $x'(a)y(a) - x(a)y'(a) = 0$. Ist dagegen $b_0 \neq 0$, so ist $x'(a) = -a_0/(b_0 p(a))x(a)$ und $y'(a) = -a_0/(b_0 p(a))y(a)$, und somit

$$x'(a)y(a) - x(a)y'(a) = -\frac{a_0}{b_0 p(a)}(x(a)y(a) - x(a)y(a)) = 0.$$

Also gilt stets $x'(a)y(a) - x(a)y'(a) = 0$, und analog folgt $x'(b)y(b) - x(b)y'(b) = 0$.

Mit Teil (a) ergibt sich die Gleichung

$$\int_a^b x(t)Ly(t)\,dt - \int_a^b y(t)Lx(t)\,dt = \int_a^b (p(x'y - xy'))'(t)\,dt = p(x'y - xy')\Big|_a^b = 0.$$

∎

Wir wollen jetzt unter geeigneten Voraussetzungen an die Randbedingung $r \in \mathfrak{R}$ die Invertierbarkeit des Differentialoperators $L : C_r^2(I) \to C(I)$ beweisen. In einem Spezialfall haben wir dies übrigens schon in §4 im Beweis von §4.Satz 12 durchgeführt. Unser Vorgehen beruht im Wesentlichen auf der Konstruktion der sogenannten Greenschen Funktion. Im eben erwähnten Beweis ist auch diese Konstruktion bereits enthalten, sie wurde aber nicht explizit erwähnt. Diesmal wollen wir die Greensche Funktion ausdrücklich einführen, auch wenn dies nicht wirklich nötig ist.

Seien $p \in C^1(I)$ mit $p(t) > 0$ für alle $t \in I$, $q \in C(I)$ und $r = (a_0, b_0, a_1, b_1) \in \mathfrak{R}$ gegeben, wobei $I = [\alpha, \beta]$ ein kompaktes Intervall ist. Die Differentialgleichung $Lx = 0$ können wir in der Form

$$x'' + \frac{p'}{p}x' - \frac{q}{p}x = 0$$

schreiben. Dies ist einfach eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung und besitzt damit ein System x_1, x_2 von Fundamentallösungen. Es bezeichne

$$W(t) := \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) \end{vmatrix} = x_1(t)x_2'(t) - x_1'(t)x_2(t) \quad (t \in I)$$

die Wronski-Determinante der Fundamentallösung. Wir wissen $W(t) \neq 0$ für alle $t \in I$. Das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1(t)b_1(t) + x_2(t)b_2(t) &= 0, \\ x_1'(t)b_1(t) + x_2'b_2(t) &= -\frac{1}{2p(t)} \end{aligned}$$

hat also für jedes $t \in I$ eine eindeutige Lösung $(b_1(t), b_2(t)) \in \mathbb{R}^2$, und die Funktionen $b_1, b_2 : I \to \mathbb{R}$ sind stetig differenzierbar, da x_1, x_2, x_1', x_2' und p dies sind. Wir nennen unsere Randbedingung regulär, wenn für alle $\eta \in \mathbb{R}^2$ das Randwertproblem

$$Lx = 0, \quad R_0^r x = \eta_1,\ R_1^r x = \eta_2$$

eindeutig für $x \in C^2(I)$ lösbar ist. Da jede Lösung von $Lx = 0$ in $C^2(I)$ die Form $x = c_1x_1 + c_2x_2$ hat, ist die Randbedingung genau dann regulär, wenn

$$\begin{vmatrix} R_0^r x_1 & R_0^r x_2 \\ R_1^r x_1 & R_1^r x_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

ist. Wir setzen jetzt voraus, dass die Randbedingung regulär ist. Dann finden wir für jedes $s \in I$ eindeutig bestimmte $a_1(s), a_2(s) \in \mathbb{R}$ mit

$$\begin{aligned} (R_0^r x_1)a_1(s) + (R_0^r x_2)a_2(s) &= (R_0^r x_1)b_1(s) + (R_0^r x_2)b_2(s) \\ (R_1^r x_1)a_1(s) + (R_1^r x_2)a_2(s) &= -(R_1^r x_1)b_1(s) - (R_1^r x_2)b_2(s), \end{aligned}$$

und da $b_1, b_2 \in C^1(I)$ ist, ist auch $a_1, a_2 \in C^1(I)$. Mit diesen Funktionen definieren wir jetzt:

Definition 2: Die Funktion

$$G : I^2 \to \mathbb{R}; (t,s) \mapsto \begin{cases} (a_1(s) + b_1(s))x_1(t) + (a_2(s) + b_2(s))x_2(t), & t \geq s, \\ (a_1(s) - b_1(s))x_1(t) + (a_2(s) - b_2(s))x_2(t), & t \leq s \end{cases}$$

heißt die Greensche Funktion. Für $t \in I$ ist $b_1(t)x_1(t) + b_2(t)x_2(t) = 0$, also ist G wohldefiniert mit

$$G(t,t) = a_1(t)x_1(t) + a_2(t)x_2(t).$$

Die Greensche Funktion hat die folgenden kennzeichnenden Eigenschaften:

Lemma 2: *Es gelten:*

(a) *Die Funktion $G : I^2 \to \mathbb{R}$ ist stetig.*

(b) *Ist $\Delta := \{(t,t) : t \in I\}$, so existieren in $I^2 \backslash \Delta$ die partiellen Ableitungen*

$$\frac{\partial G}{\partial t} \quad \textit{und} \quad \frac{\partial^2 G}{\partial t^2}$$

und sind stetig. Für jedes $t \in I$ existieren die links- und die rechtsseitigen partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial G}{\partial t}(t,t), \quad \frac{\partial^2 G}{\partial t^2}(t,t)$$

und sind stetig auf

$$D_1 := \{(t,s) \in I^2 : s \leq t\},$$

beziehungsweise

$$D_2 := \{(t,s) \in I^2 : s \geq t\}.$$

(c) *Ist $s \in I^\circ$, so ist*

$$G_s : I \backslash \{s\} \to \mathbb{R}; t \mapsto G(t,s)$$

zweifach stetig differenzierbar mit $LG_s = 0$, und es gelten $R_0^r G_s = R_1^r G_s = 0$.

(d) *Sei $s \in I$, und setze*

$$l := \lim_{\substack{t \to s \\ t < s}} \frac{\partial G}{\partial t}(t, s), \quad r := \lim_{\substack{t \to s \\ t > s}} \frac{\partial G}{\partial t}(t, s).$$

Dann ist

$$r - l = -\frac{1}{p(s)}.$$

(e) *Ist $g \in C(I)$, so ist*

$$x : I \to \mathbb{R}; t \mapsto \int_a^b G(t, s) g(s)\, ds$$

in $C^2(I)$ mit $R_0^r x = R_1^r x = 0$ und $Lx = g$.

(f) *G ist symmetrisch, d.h. $G(t, s) = G(s, t)$ für alle $s, t \in I$.*

Beweis: **(a)** Klar.
(b) Wir zeigen zuerst, dass die ersten beiden partiellen Ableitungen von G nach der ersten Variablen in D_1 existieren und stetig sind. Sei $s \in I$ und betrachte $J := [s, b]$. Für $t \in J$ ist $G(t, s) = (a_1(s)+b_1(s))x_1(t)+(a_2(s)+b_2(s))x_2(t)$, und dies ist offenbar in $C^2(J)$, da x_1, x_2 zweifach stetig differenzierbar sind. Die beiden partiellen Ableitungen sind auch stetig auf D_1, da die Ableitungen von x_1, x_2 stetig sind, und die Funktionen a_1, a_2, b_1, b_2 stetig auf I sind. Analoges gilt in D_2.
(c) Wir betrachten zunächst $\gamma := G_s$ auf $J = (s, b]$. Es gilt

$$R_1^r \gamma = (a_1(s) + b_1(s)) R_1^r x_1 + (a_2(s) + b_2(s)) R_1^r x_2 = 0$$

nach der zweiten Gleichung in der Definition von $a_1(s), a_2(s)$. Da L linear mit $Lx_1 = Lx_2 = 0$ ist, ist auch $L\gamma = 0$ auf J. Benutzen wir auch die erste Gleichung in der Definition der $a_1(s), a_2(s)$, so folgt $R_0^r \gamma = 0$ und es ist auch $L\gamma = 0$ auf $[a, s)$.
(d) Es ist

$$l = (a_1(s) - b_1(s)) x_1'(s) + (a_2(s) - b_2(s)) x_2'(s),$$

und

$$r = (a_1(s) + b_1(s)) x_1'(s) + (a_2(s) + b_2(s)) x_2'(s),$$

d.h.

$$r - l = 2b_1(s) x_1'(s) + 2b_2(s) x_2'(s) = -\frac{1}{p(s)}$$

nach der zweiten Gleichung in der Definition von $b_1(s), b_2(s)$.
(e) Da G nach (a) stetig ist, ist $x : I \to \mathbb{R}$ zumindest eine wohldefinierte stetige Funktion. Für jedes $t \in I$ gilt

$$x(t) = \int_a^t G(t, s) g(s)\, ds + \int_t^b G(t, s) g(s)\, ds,$$

und insbesondere ist x differenzierbar mit

$$\begin{aligned} x'(t) &= G(t,t)g(t) + \int_a^t \frac{\partial G}{\partial t}(t,s)g(s)\,ds - G(t,t)g(t) + \int_t^b \frac{\partial G}{\partial t}(t,s)g(s)\,ds \\ &= \int_a^t \frac{\partial G}{\partial t}(t,s)g(s)\,ds + \int_t^b \frac{\partial G}{\partial t}(t,s)g(s)\,ds = \int_a^b \frac{\partial G}{\partial t}(t,s)g(s)\,ds \end{aligned}$$

für $t \in I$. Damit können wir bereits die Randbedingungen auswerten. Es ist

$$R_0^r x = \int_a^b \left(a_0 G(a,s) + b_0 p(a) \frac{\partial G}{\partial t}(a,s) \right) g(s)\,ds = 0$$

nach (c), und ebenso folgt $R_1^r x = 0$. Unsere Formel für x' zeigt, dass auch x' differenzierbar ist mit

$$\begin{aligned} x''(t) &= \lim_{\substack{s \to t \\ s \leq t}} \frac{\partial G}{\partial t}(t,s)g(t) + \int_a^t \frac{\partial^2 G}{\partial t^2}(t,s)g(s)\,ds \\ &\quad - \lim_{\substack{s \to t \\ s \geq t}} \frac{\partial G}{\partial t}(t,s)g(t) + \int_t^b \frac{\partial^2 G}{\partial t^2}(t,s)g(s)\,ds \\ &= -\frac{g(t)}{p(t)} + \int_a^b \frac{\partial^2 G}{\partial t^2}(t,s)g(s)\,ds \end{aligned}$$

nach (b) und (d). Insbesondere ist $x \in C^2(I)$. Ausserdem zeigt unsere Formel für x'' noch

$$\begin{aligned} Lx(t) &= -p(t)x''(t) - p'(t)x'(t) + q(t)x(t) \\ &= g(t) + \int_a^b \left(-p(t)\frac{\partial^2 G}{\partial t^2}(t,s) - p'(t)\frac{\partial G}{\partial t}(t,s) + q(t)G(t,s) \right) g(s)\,ds \\ &= g(t) + \int_a^b LG_s(t)g(s)\,ds \\ &= g(t) \end{aligned}$$

nach (c).

(f) Angenommen g wäre nicht symmetrisch. Dann gibt es $(t_0, s_0) \in I^\circ \times I^\circ$ mit $G(t_0, s_0) \neq G(s_0, t_0)$. Da G nach (a) stetig ist, gibt es offene Intervalle $T, S \subseteq I^\circ$ mit $t_0 \in T$, $s_0 \in S$ und $G(t,s) - G(s,t) \neq 0$ für alle $(t,s) \in T \times S$. Weiter gibt es stetige Funktionen $g, h \in C(I)$ mit $g, h \geq 0$, $g(s_0) = h(t_0) = 1$ und $\operatorname{supp} g \subseteq S$, $\operatorname{supp} h \subseteq T$. Da $G(t,s) - G(s,t)$ für $(t,s) \in T \times S$ konstantes Vorzeichen hat, folgt

$$\int_a^b \int_a^b (G(t,s) - G(s,t))g(s)h(t)\,ds\,dt \neq 0.$$

Definieren wir

$$x : I \to \mathbb{R}; t \mapsto \int_a^b G(t,s)g(s)\,ds, \quad y : I \to \mathbb{R}; t \mapsto \int_a^b G(s,t)h(s)\,ds,$$

so ist nach (e) $x, y \in C_r^2(I)$ und $Lx = g$, $Ly = h$. Mit Lemma 1.(b) folgt

$$\begin{aligned}
\int_a^b \int_a^b G(t,s)g(s)h(t)\,ds\,dt &= \int_a^b h(t) \int_a^b G(t,s)g(s)\,ds\,dt \\
&= \int_a^b h(t)x(t)\,dt \\
&= \int_a^b x(t)Ly(t)\,dt \\
&= \int_a^b y(t)Lx(t)\,dt \\
&= \int_a^b \int_a^b G(t,s)h(s)g(t)\,ds\,dt \\
&= \int_a^b \int_a^b G(s,t)g(s)h(t)\,ds\,dt;
\end{aligned}$$

ein Widerspruch.

■

Eine kleine Modifikation des Beweises zeigt übrigens, das G durch die Aussagen (a,b,c,d) des Lemmas bereits eindeutig festgelegt ist, aber dies spielt für unsere Zwecke keine Rolle. Wir können jetzt unseren angestrebten Satz über die Invertierbarkeit von L einsehen.

Satz 3: *Seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall, $p \in C^1(I)$ mit $p(t) > 0$ für alle $t \in I$, $q \in C(I)$ und $r = (a_0, a_1, b_0, b_1) \in \mathfrak{R}$. Dann ist die lineare Abbildung $L := L_{pq} : C_r^2(I) \to C(I)$ stetig. Weiter ist L genau dann invertierbar, wenn die Randbedingung regulär ist.*

Beweis: Die Stetigkeit von L ist klar. Wir kommen zur zweiten Aussage.
"'$\Longrightarrow$"' Wäre die Randbedingung nicht regulär, so gibt es $x \in C_r^2(I)$ mit $Lx = 0$ und $x \neq 0$; im Widerspruch zur Invertierbarkeit von L.
"'$\Longleftarrow$"' Da die Randbedingung regulär ist, ist L sicher injektiv. Nach Lemma 2.(e) ist L auch surjektiv. Als bijektive, stetige, lineare Abbildung ist L auch invertierbar.

■

Wir wollen jetzt zu dem uns interessierenden kompakten Operator kommen.

Satz 4: *Seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall, $p \in C^1(I)$ mit $p(t) > 0$ für alle $t \in I$, und $q, a \in C(I)$ mit $a(t) > 0$ für alle $t \in I$. Weiter sei $r = (a_0, a_1, b_0, b_1) \in \mathfrak{R}$ so, dass die Randbedingungen zum Operator $L := L_{pq}$ regulär sind. Setze $E := C_r^2(I)$. Dann ist*

$$T : E \to E; x \mapsto L^{-1}(ax)$$

ein kompakter linearer Operator. Es ist $0 \in \sigma(T)$ kein Eigenwert, und T besitzt unendlich viele Eigenwerte. Ist $\lambda \in \sigma(T)$ ein Eigenwert, so ist

$$N_\lambda(T) = \mathrm{Kern}(\lambda - T)$$

eindimensional. Wir können schreiben

$$\sigma(T) = \{0\} \cup \left\{ \frac{1}{\mu_k} : k \in \mathbb{N} \right\}$$

mit $\mu_0 < \mu_1 < \mu_2 < \ldots$, *und es ist* $\mu_k \neq 0$ *für jedes* $k \in \mathbb{N}$. *Weiter existieren ein* $k_0 \in \mathbb{N}$ *und* $c_1, c_2 > 0$ *mit*

$$c_1 k^2 \leq \mu_k \leq c_2 k^2$$

für alle $k \geq k_0$. *Seien* $k \in \mathbb{N}$ *und* $0 \neq x \in \mathrm{Kern}((1/\mu_k) - T)$. *Dann sind alle Nullstellen von* x *einfach und* x *besitzt genau* k *Nullstellen in* I°. *Ist* $I = [\alpha, \beta]$, *so ist genau dann* $x(\alpha) = 0$ *wenn* $b_0 = 0$ *ist. Weiter ist genau dann* $x(\beta) = 0$, *wenn* $b_1 = 0$ *ist.*

Beweis: Nach Satz 3 ist $L^{-1} : C(I) \to E$ eine stetige, lineare Abbildung. Weiter ist der Multiplikationsoperator

$$M : E \to C(I); x \mapsto ax$$

offenbar stetig und linear. Insgesamt ist $T = L^{-1}M$ stetig und linear. Da die Inklusion $C^2(I) \subseteq C(I)$ nach §4.Lemma 10.(d) kompakt ist, folgt das auch M kompakt ist, und damit ist auch T kompakt.

Offenbar ist $\mathrm{Kern}(T) = 0$, und damit ist 0 kein Eigenwert von T. Da E unendlichdimensional ist, gilt aber $0 \in \sigma(T)$. Sei $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Wir wollen $\mathrm{Kern}(\lambda - T)^2 = \mathrm{Kern}(\lambda - T)$ einsehen. Zunächst ist trivialerweise $\mathrm{Kern}(\lambda - T) \subseteq \mathrm{Kern}(\lambda - T)^2$. Wir kommen zur zweiten Inklusion. Zunächst können wir T durch $Tx = L^{-1}(ax)$ zu einer linearen Abbildung $T : C(I) \to E \subseteq C(I)$ fortsetzen. Sind $x, y \in C(I)$, so ergibt Lemma 1.(b) mit $I = [\alpha, \beta]$ die Gleichung

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta a(t)x(t)(Ty)(t)\,dt &= \int_\alpha^\beta (LTx)(t)(Ty)(t)\,dt \\ &= \int_\alpha^\beta (Tx)(t)(LTy)(t)\,dt = \int_\alpha^\beta a(t)(Tx)(t)y(t)\,dt.\end{aligned}$$

Damit folgt weiter

$$\int_\alpha^\beta a(t)x(t)((\lambda - T)y)(t)\,dt = \int_\alpha^\beta a(t)((\lambda - T)x)(t)y(t)\,dt$$

für $x, y \in C(I)$. Sei jetzt $x \in E$ mit $(\lambda - T)^2 x = 0$ gegeben. Dann liefert unsere Formel die Gleichung

$$\int_\alpha^\beta a(t)\left((\lambda - T)x(t)\right)^2\,dt = \int_\alpha^\beta a(t)((\lambda - T)^2 x)(t)x(t)\,dt = 0,$$

d.h. $(\lambda - T)x = 0$ da $a(t) > 0$ für alle $t \in I$ ist. Also ist auch $\mathrm{Kern}(\lambda - T)^2 \subseteq \mathrm{Kern}(\lambda - T)$, und $\mathrm{Kern}(\lambda - T)^2 = \mathrm{Kern}(\lambda - T)$ ist bewiesen. Insbesondere folgt damit die Behauptung

$$N_\lambda(T) = \mathrm{Kern}(\lambda - T).$$

Sei jetzt $\lambda \in \sigma(T)\backslash\{0\}$ ein Eigenwert von T. Dann ist $\mathrm{Kern}(\lambda - T) \neq 0$, und wir wollen zeigen, dass dieser Eigenraum eindimensional ist. Es ist mit $\mu := 1/\lambda$

$$\begin{aligned} \mathrm{Kern}(\lambda - T) &= \{x \in E : ax = \lambda Lx\} \\ &= \{x \in E : -(px')' + (q - \mu a)x = 0\}. \end{aligned}$$

Der Lösungsraum der linearen Differentialgleichung $-(px')' + (q - \mu a)x = 0$ ist zweidimensional, und da $(a_0, b_0) \neq (0,0)$ ist, ist der Lösungsraum nicht ganz in E enthalten. Damit ist $\dim(\lambda - T) \leq 1$, und unsere Behauptung ist klar.

Es verbleibt zu zeigen, dass $\sigma(T)$ unendlich ist und die Aussage über die Nullstellen der Eigenfunktionen. Für jedes $\mu \in \mathbb{R}$ betrachten wir die folgende lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$(px')' + (\mu a - q)x = 0.$$

Wegen $(a_0, b_0) \neq (0,0)$ existiert genau ein $0 \leq \gamma < \pi$ mit

$$a_0 \sin\gamma + b_0 \cos\gamma = 0,$$

und es ist

$$(a_0, b_0)^\perp = \mathbb{R}(\sin\gamma, \cos\gamma).$$

Die Theorie linearer Differentialgleichungen liefert uns eine stetige Funktion

$$x : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}; (t, \mu) \mapsto x(t, \mu)$$

die zweimal stetig partiell nach t differenzierbar ist, einmal stetig partiell nach μ differenzierbar ist, und für die

$$p(t)\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}(t,\mu) + p'(t)\frac{\partial x}{\partial t}(t,\mu) + (\mu a(t) - q(t))x(t,\mu) = 0$$

für alle $(t, \mu) \in I \times \mathbb{R}$ und

$$x(\alpha, \mu) = \sin\gamma, \quad p(\alpha)\frac{\partial x}{\partial t}(\alpha, \mu) = \cos\gamma$$

gelten, wobei $[\alpha, \beta] = I$ gesetzt war. Setze noch

$$\xi : I \times \mathbb{R}; (t, \mu) \mapsto p(t)\frac{\partial x}{\partial t}(t, \mu).$$

Gäbe es ein $t \in I$, $\mu \in \mathbb{R}$ mit

$$x(t, \mu) = \xi(t, \mu) = 0,$$

so folgt wegen $p(t) > 0$ auch $(\partial x/\partial t)(t, \mu) = 0$, und der Eindeutigkeitssatz für lineare Differentialgleichungen ergibt $x(s, \mu) = 0$ für alle $s \in I$. Insbesondere ist $x(\alpha, \mu) = (\partial x/\partial t)(\alpha, \mu) = 0$, also $\sin\gamma = \cos\gamma = 0$; ein Widerspruch. Dieser Widerspruch zeigt

$$(\xi(t,\mu), x(t,\mu)) \in \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$$

für alle $(t,\mu) \in I \times \mathbb{R}$ und wir erhalten zwei stetige Funktionen

$$\begin{aligned} \phi : I \times \mathbb{R} &\to \mathbb{R}, \\ \varrho : I \times \mathbb{R} &\to \mathbb{R}_{>0} \end{aligned}$$

mit

$$\xi(t,\mu) = \varrho(t,\mu)\cos\phi(t,\mu), \quad x(t,\mu) = \varrho(t,\mu)\sin\phi(t,\mu)$$

für alle $(t,\mu) \in I \times \mathbb{R}$ und

$$\phi(\alpha,\mu) = \gamma$$

für alle $\mu \in \mathbb{R}$. Weiter sind ξ, ϕ stetig partiell nach t und μ differenzierbar. Wir wollen im folgenden einige Eigenschaften der Funktion ϕ herleiten, und beginnen mit der Aufstellung einer Differentialgleichung für diese Funktion.

Sei $(t,\mu) \in I \times \mathbb{R}$. Es ist

$$\frac{\partial \xi}{\partial t}(t,\mu) = \frac{\partial \varrho}{\partial t}(t,\mu)\cos\phi(t,\mu) - \varrho(t,\mu)\frac{\partial \phi}{\partial t}(t,\mu)\sin\phi(t,\mu)$$

und

$$\frac{\partial x}{\partial t}(t,\mu) = \frac{\partial \varrho}{\partial t}(t,\mu)\sin\phi(t,\mu) + \varrho(t,\mu)\frac{\partial \phi}{\partial t}(t,\mu)\cos\phi(t,\mu).$$

Damit folgt

$$\frac{\partial x}{\partial t}(t,\mu)\cos\phi(t,\mu) - \frac{\partial \xi}{\partial t}(t,\mu)\sin\phi(t,\mu) = \varrho(t,\mu)\frac{\partial \phi}{\partial t}(t,\mu).$$

Andererseits haben wir

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial t}(t,\mu) = \frac{\partial}{\partial t}\left(p\frac{\partial x}{\partial t}\right)(t,\mu) &= (q(t) - \mu a(t))x(t,\mu) \\ &= (q(t) - \mu a(t))\varrho(t,\mu)\sin\phi(t,\mu) \end{aligned}$$

und

$$\frac{\partial x}{\partial t}(t,\mu) = \frac{1}{p(t)}\xi(t,\mu) = \frac{\varrho(t,\mu)}{p(t)}\cos\phi(t,\mu),$$

d.h.

$$\begin{aligned} &\frac{\partial x}{\partial t}(t,\mu)\cos\phi(t,\mu) - \frac{\partial \xi}{\partial t}(t,\mu)\sin\phi(t,\mu) \\ &\qquad = \frac{\varrho(t,\mu)}{p(t)}\cos^2\phi(t,\mu) + (\mu a(t) - q(t))\varrho(t,\mu)\sin^2\phi(t,\mu), \end{aligned}$$

und mit $\varrho(t,\mu) > 0$ folgt

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}(t,\mu) = \frac{1}{p(t)}\cos^2\phi(t,\mu) + (\mu a(t) - q(t))\sin^2\phi(t,\mu).$$

Nun können wir einen zentralen Schritt in diesem Beweis durchführen. Angenommen es sind $(t, \mu) \in I \times \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{Z}$ mit $\phi(t, \mu) = k\pi$. Dann folgt

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}(t, \mu) = \frac{1}{p(t)} \cos^2 \phi(t, \mu) + (\mu a(t) - q(t)) \sin^2 \phi(t, \mu) = \frac{1}{p(t)} > 0.$$

Weiter behaupten wir, dass $\phi(s, \mu) > k\pi$ für $s \in I$ mit $s > t$ ist. Da unsere Ableitung positiv ist, gibt es auf jeden Fall ein $\epsilon > 0$ mit $\phi(s, \mu) > \phi(t, \mu) = k\pi$ für $s \in I$ mit $t < s < t + \epsilon$. Gäbe es nun ein $s \in I$ mit $s > t$ und $\phi(s, \mu) = k\pi$, so existiert auch ein solches s mit $\phi(r, \mu) > k\pi$ für $t < r < s$. Dann ist aber auch $(\partial \phi / \partial t)(s, \mu) > 0$, also existiert $\delta > 0$ mit $\phi(r, \mu) < \phi(s, \mu) = k\pi$ für $r \in I$ mit $s - \delta < r < s$; ein Widerspruch. Also ist tatsächlich $\phi(s, \mu) > k\pi$ für $s \in I$ mit $s > t$. Analog folgt $\phi(s, \mu) < k\pi$ für $s \in I$ mit $s < t$.

Sei jetzt $\mu \in \mathbb{R}$. Wir behaupten, dass dann $\phi(t, \mu) > 0$ für alle $\alpha < t \le \beta$ gilt. Ist $\gamma = 0$, so ist dies wegen $\phi(\alpha, \mu) = \gamma$ bereits klar. Jetzt sei $\gamma > 0$. Gäbe es ein $t \in I$ mit $\phi(t, \mu) \le 0$, so existiert $\alpha < t \le \beta$ mit $\phi(t, \mu) = 0$ und $\phi(s, \mu) > 0$ für $\alpha \le s < t$. Es ist wieder $(\partial \phi / \partial t)(t, \mu) > 0$ und es existiert $\epsilon > 0$ mit $\phi(s, \mu) < \phi(t, \mu) = 0$ für $s \in I$ mit $t - \epsilon < s < t$; ein Widerspruch. Damit haben wir $\phi(t, \mu) > 0$ für alle $\mu \in \mathbb{R}$, $\alpha < t \le \beta$ eingesehen.

Sei $(t, \mu) \in I \times \mathbb{R}$. Wir schreiben unsere Gleichung für $\partial \phi / \partial t$ jetzt in der Form

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}(t, \mu) = \frac{1}{p(t)} + \left(\mu a(t) - q(t) - \frac{1}{p(t)} \right) \sin^2 \phi(t, \mu),$$

und erhalten

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial \mu}(t, \mu) = {} & a(t) \sin^2 \phi(t, \mu) \\ & + 2 \frac{\partial \phi}{\partial \mu}(t, \mu) \left(\mu a(t) - q(t) - \frac{1}{p(t)} \right) \sin \phi(t, \mu) \cos \phi(t, \mu). \end{aligned}$$

Sei $\mu \in \mathbb{R}$ fixiert und betrachte die Funktion

$$f : I \to \mathbb{R}; t \mapsto \frac{\partial \phi}{\partial \mu}(t, \mu).$$

Dann gilt

$$f'(t) = l(t) f(t) + h(t)$$

für alle $t \in I$ mit

$$\begin{aligned} l(t) &= 2 \left(\mu a(t) - q(t) - \frac{1}{p(t)} \right) \sin \phi(t, \mu) \cos \phi(t, \mu), \\ h(t) &= a(t) \sin^2 \phi(t, \mu). \end{aligned}$$

Da nach Wahl von ϕ ja $\phi(\alpha, \mu') = \gamma$ für alle $\mu' \in \mathbb{R}$ gilt, ist auch $f(\alpha) = (\partial \phi / \partial \mu)(\alpha, \mu) = 0$. Ist also

$$L : I \to \mathbb{R}; t \mapsto \int_\alpha^t l(s)\, ds,$$

so gilt

$$f(t) = \int_\alpha^t e^{L(t)-L(s)} h(s)\, ds$$

für alle $t \in I$. Ist $t \in I$ mit $\sin\phi(t,\mu) = 0$, so ist $\phi(t,\mu) = k\pi$ für ein $k \in \mathbb{Z}$, und es folgt $(\partial\phi/\partial t)(t,\mu) > 0$, also existiert eine Umgebung U von t in I mit $\sin\phi(s,\mu) \neq 0$ für $s \in U\backslash\{t\}$. Da I kompakt ist, gilt somit $\sin\phi(t,\mu) = 0$ nur für endlich viele $t \in I$, und da auch $a(t) > 0$ für alle $t \in I$ ist, folgt $h(t) = a(t)\sin^2\phi(t,\mu) > 0$ für alle bis auf endlich viele $t \in I$, und damit $f(t) > 0$ für $\alpha < t \leq \beta$. Damit haben wir

$$\frac{\partial\phi}{\partial\mu}(t,\mu) > 0$$

für alle $\mu \in \mathbb{R}$, $\alpha < t \leq \beta$ eingesehen.

Sei $\epsilon > 0$. Wir wollen zeigen, dass ein $\mu_0 \in \mathbb{R}$ mit $|\phi(t,\mu)| \leq \epsilon$ für alle $t \in I$, $\mu \leq \mu_0$ existiert. Dabei können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\gamma < \pi - \epsilon$ und $\epsilon < \pi/2$ annehmen. Definiere

$$l : I \to \mathbb{R}; t \mapsto \frac{2\epsilon - \pi}{\beta - \alpha} t + \left(\epsilon - \frac{2\epsilon - \pi}{\beta - \alpha}\beta\right).$$

Es ist $l(\beta) = \epsilon$ und $l(\alpha) = \epsilon - (2\epsilon - \pi) = \pi - \epsilon$. Für jedes $t \in I = [\alpha, \beta]$ gilt $\epsilon = l(\beta) \leq l(t) \leq l(\alpha) = \pi - \epsilon$, also ist auch $\sin l(t) \geq \sin\epsilon$. Setzen wir

$$\begin{aligned}
M_1 &:= \sup\left\{\frac{1}{p(t)} : t \in I\right\}, \\
M_2 &:= \sup\left\{-q(t) - \frac{1}{p(t)} : t \in I\right\}, \\
C &:= \inf\{a(t) : t \in I\} > 0,
\end{aligned}$$

und wählen ein $\mu_0 < 0$ mit

$$M_1 + M_2 + C\sin^2\epsilon\mu_0 < \frac{2\epsilon - \pi}{\beta - \alpha},$$

so gilt für alle $t \in I$, $\mu \leq \mu_0$ stets

$$\frac{1}{p(t)} + \left(\mu a(t) - q(t) - \frac{1}{p(t)}\right)\sin^2 l(t) \leq M_1 + M_2 + C\sin^2\epsilon\mu < \frac{2\epsilon - \pi}{\beta - \alpha} = l'(t).$$

Sei jetzt $\mu \leq \mu_0$ gegeben. Es ist $\phi(\alpha,\mu) = \gamma < \pi - \epsilon = l(\alpha)$. Wäre $\{t \in I : \phi(t,\mu) \geq l(t)\} \neq \emptyset$, so gäbe es ein $t \in I$ mit $t > \alpha$, $\phi(t,\mu) = l(t)$ und $\phi(s,\mu) < l(s)$ für alle $\alpha \leq s < t$. Für $\alpha \leq s < t$ folgt

$$\frac{\phi(s,\mu) - \phi(t,\mu)}{s - t} > \frac{l(s) - l(t)}{s - t} = l'(t),$$

und der Grenzübergang $s \to t$ ergibt

$$\frac{1}{p(t)} + \left(\mu a(t) - q(t) - \frac{1}{p(t)}\right)\sin^2 l(t) =$$
$$\frac{1}{p(t)} + \left(\mu a(t) - q(t) - \frac{1}{p(t)}\right)\sin^2 \phi(t,\mu) = \frac{\partial\phi}{\partial t}(t,\mu) \geq l'(t);$$

ein Widerspruch. Dieser Widerspruch zeigt

$$\phi(t,\mu) < l(t) \leq l(\beta) = \epsilon$$

für alle $t \in I$.

Damit stehen uns Abschätzungen von ϕ für $\mu \to -\infty$ zur Verfügung, und wir wollen uns jetzt um $\mu \to \infty$ kümmern. Zunächst wählen wir $A > 0$ mit $A \geq M_1 + M_2$, und setzen

$$B := \sup\{a(t) : t \in I\} > 0.$$

Für alle $t \in I$, $\mu \geq 0$ gilt dann

$$\frac{1}{p(t)} + \left(\mu a(t) - q(t) - \frac{1}{p(t)}\right)\sin^2 \phi(t,\mu)$$
$$\leq M_1 + M_2 + B\mu\sin^2\phi(t,\mu) \leq A + B\mu\sin^2\phi(t,\mu),$$

und somit folgt

$$\frac{\frac{\partial\phi}{\partial t}(t,\mu)}{A + B\mu\sin^2\phi(t,\mu)} =$$
$$\frac{1}{A + B\mu\sin^2\phi(t,\mu)}\left(\frac{1}{p(t)} + \left(\mu a(t) - q(t) - \frac{1}{p(t)}\right)\sin^2\phi(t,\mu)\right) \leq 1.$$

Setze jetzt

$$E := \int_0^\pi \frac{dt}{A + Bt^2} > 0, \quad D := 1 + \frac{\pi}{E}(\beta - \alpha) > 0.$$

Sei $\mu \geq 4\pi^2 > 1$ gegeben. Wir wissen bereits $\phi(\beta,\mu) > 0$, also existiert ein $k \in \mathbb{N}$ mit $k\pi \leq \phi(\beta,\mu) < (k+1)\pi$. Wir haben jetzt die folgende Abschätzung

$$\beta - \alpha = \int_\alpha^\beta dt \geq \int_\alpha^\beta \frac{\frac{\partial\phi}{\partial t}(t,\mu)}{A + B\mu\sin^2\phi(t,\mu)}\,dt = \int_{\phi(\alpha,\mu)}^{\phi(\beta,\mu} \frac{dt}{A + B\mu\sin^2 t}$$
$$= \int_\gamma^{\phi(\beta,\mu)} \frac{dt}{A + B\mu\sin^2 t} \geq \int_\pi^{k\pi} \frac{dt}{A + B\mu\sin^2 t} = (k-1)\int_0^\pi \frac{dt}{A + B\mu\sin^2 t}$$
$$\geq (k-1)\int_0^\pi \frac{dt}{A + B\mu t^2} = \frac{k-1}{\sqrt{\mu}}\int_0^{\sqrt{\mu}\pi} \frac{dt}{A + Bt^2} \geq \frac{E(k-1)}{\sqrt{\mu}},$$

und somit ist auch

$$\phi(\beta,\mu) < (k+1)\pi = 2\pi + (k-1)\pi \leq \sqrt{\mu} + \frac{\pi}{E}(\beta-\alpha)\sqrt{\mu} = D\sqrt{\mu}.$$

Damit haben wir eine obere Abschätzung von $\phi(\beta,\mu)$, und wir wollen jetzt noch eine Abschätzung nach unten herleiten. Setze

$$M_3 := \inf\left\{-q(t) - \frac{1}{p(t)} : t \in I\right\},$$

und wähle $\mu_1 > (2/C)|M_3|$. Weiter setzen wir

$$A_0 := \inf\left\{\frac{1}{p(t)} : t \in I\right\}, \quad B_0 := \frac{C}{2}.$$

Ist dann $t \in I$, so gilt für $\mu \geq \mu_1$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{p(t)} + \left(\mu a(t) - q(t) - \frac{1}{p(t)}\right)\sin^2\phi(t,\mu) \\
&\qquad \geq A_0 + \left(\frac{\mu C}{2} + M_3\right)\sin^2\phi(t,\mu) + B_0\mu\sin^2\phi(t,\mu) \geq A_0 + B_0\mu\sin^2\phi(t,\mu).
\end{aligned}$$

Setze

$$F := 2\int_0^\infty \frac{dt}{A_0 + \frac{1}{4}B_0t^2}, \quad d := \frac{\beta-\alpha}{2F},$$

und wähle ein $\mu_2 \geq \mu_1$ mit

$$\mu_2 \geq \frac{4F^2}{(\beta-\alpha)^2}\pi^2.$$

Sei $\mu \geq \mu_2$ gegeben. Wir haben bereits $\phi(\beta,\mu) > 0$, also existiert ein $k \in \mathbb{N}$ mit $k\pi \leq \phi(\beta,\mu) < (k+1)\pi$. Für alle $t \in I$ gilt

$$\frac{\frac{\partial\phi}{\partial t}(t,\mu)}{A_0 + B_0\mu\sin^2\phi(t,\mu)} \geq 1,$$

und es folgt

$$\begin{aligned}
\beta - \alpha = \int_\alpha^\beta dt &\leq \int_\alpha^\beta \frac{\frac{\partial\phi}{\partial t}(t,\mu)}{A_0 + B_0\mu\sin^2\phi(t,\mu)}\,dt = \int_\gamma^{\phi(\beta,\mu)} \frac{dt}{A_0 + B_0\mu\sin^2 t} \\
&\leq \int_0^{(k+1)\pi} \frac{dt}{A_0 + B_0\mu\sin^2 t} = (k+1)\int_0^\pi \frac{dt}{A_0 + B_0\mu\sin^2 t} \\
&= 2(k+1)\int_0^{\pi/2} \frac{dt}{A_0 + B_0\mu\sin^2 t} \leq 2(k+1)\int_0^{\pi/2} \frac{dt}{A_0 + \frac{1}{4}B_0\mu t^2} \\
&\qquad = \frac{2(k+1)}{\sqrt{\mu}}\int_0^{\pi\sqrt{\mu}/2} \frac{dt}{A_0 + \frac{1}{4}B_0t^2} \leq \frac{F(k+1)}{\sqrt{\mu}}.
\end{aligned}$$

Weiter schliessen wir hieraus mit

$$\sqrt{\mu} \geq \sqrt{\mu_2} \geq \frac{2F}{\beta - \alpha}\pi$$

das

$$\phi(\beta,\mu) \geq k\pi = (k+1)\pi - \pi \geq \frac{\beta-\alpha}{F}\sqrt{\mu} - \frac{\beta-\alpha}{2F}\sqrt{\mu} = d\sqrt{\mu}$$

gilt. Ist also

$$\mu_0 := \max\{\mu_2, 4\pi^2\},$$

so gilt

$$d\sqrt{\mu} \leq \phi(\beta,\mu) \leq D\sqrt{\mu}$$

für alle $\mu \geq \mu_0$.

Bisher haben wir diverse Eigenschaften der Funktion ϕ hergeleitet, aber was hat das alles mit Eigenwerten unseres Operators T zu tun? Diesen Zusammenhang wollen wir jetzt aufklären. Nach Konstruktion ist für jedes $\mu \in \mathbb{R}$ die Funktion

$$x_\mu : I \to \mathbb{R}; t \mapsto x(t,\mu)$$

die Lösung des Anfangswertproblems

$$(px')' + (\mu a - q)x = 0, \quad x(\alpha) = \sin\gamma,\, x'(\alpha) = \frac{\cos\gamma}{p(\alpha)}.$$

Sei $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Wir hatten bereits

$$\mathrm{Kern}(\lambda - T) = \{x \in E : (px')' + (\mu a - q)x = 0\}$$

eingesehen, wobei $\mu := 1/\lambda$ ist. Sind $\lambda \in \sigma(T)$ und $0 \neq x \in \mathrm{Kern}(\lambda - T)$, so gilt wegen $x \in E$ die Gleichung

$$0 = R_0^r x = a_0 x(\alpha) + b_0 p(\alpha) x'(\alpha).$$

Also existiert ein $s \in \mathbb{R}$ mit $x(\alpha) = s\sin\gamma$, $p(\alpha)x'(\alpha) = s\cos\gamma$. Wäre $s = 0$, so $x(\alpha) = x'(\alpha) = 0$ und somit auch $x = 0$; im Widerspruch zur Wahl von x. Also ist $s \neq 0$ und es folgt $(1/s)x = x_\mu$. Insbesondere ist $x_\mu \in E$ und $R_1^r x_\mu = 0$.

Ist $\mu \in \mathbb{R}$ beliebig, so gilt

$$R_0^r x_\mu = a_0 x(\alpha,\mu) + b_0 p(\alpha)\frac{\partial x}{\partial t}(\alpha,\mu) = a_0 \sin\gamma + b_0\cos\gamma = 0.$$

Ist auch $R_1^r x_\mu = 0$, so ist $x_\mu \in E$ und $0 \neq x_\mu \in \mathrm{Kern}(\lambda - T)$, d.h. $\lambda \in \sigma(T)$. Diese Überlegung zeigt

$$\sigma(T) = \{0\} \cup \left\{ \frac{1}{\mu} \,\middle|\, \mu \in \mathbb{R}\backslash\{0\}, R_1^r x_\mu = 0 \right\}.$$

Wieder da $(a_1, b_1) \neq (0,0)$ ist, existiert genau ein $\gamma' \in (0, \pi]$ mit $a_1 \sin\gamma' + b_1 \cos\gamma' = 0$, und es ist

$$(a_1, b_1)^\perp = \mathbb{R}(\sin\gamma', \cos\gamma').$$

Sei jetzt $\mu \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Es ist

$$R_1^r x_\mu = a_1 x_\mu(\beta) + b_1 p(\beta) x_\mu'(\beta) = a_1 x(\beta, \mu) + b_1 \xi(\beta, \mu).$$

Also ist genau dann $R_1^r x_\mu = 0$, wenn $(x(\beta,\mu), \xi(\beta,\mu)) \in (a_1, b_1)^\perp$ ist, und nach Definition von ϕ ist dies genau dann der Fall wenn

$$\phi(\beta, \mu) - \gamma' \in \mathbb{Z}\pi$$

gilt. Da $\phi(\beta,\mu) > 0$ und $\gamma' \leq \pi$ gelten ist genau dann $\phi(\beta,\mu) - \gamma' \in \mathbb{Z}\pi$, wenn es ein $k \in \mathbb{N}$ mit $\phi(\beta,\mu) = \gamma' + k\pi$ gibt.

Wir wissen bereits $\lim_{\mu\to-\infty} \phi(\beta,\mu) = 0$ und $\lim_{\mu\to\infty} \phi(\beta,\mu) = \infty$, da $\phi(\beta,\mu) \geq d\sqrt{\mu}$ für $\mu \geq \mu_0$ gilt. Außerdem ist $(\partial\phi/\partial\mu)(\beta,\mu) > 0$ für alle $\mu \in \mathbb{R}$, d.h. die Funktion $\mu \mapsto \phi(\beta,\mu)$ ist streng monoton steigend. Also existiert für jedes $k \in \mathbb{N}$ genau ein $\mu_k \in \mathbb{R}$ mit $\phi(\beta,\mu_k) = k\pi$, und es ist $\mu_k < \mu_{k+1}$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Gäbe es ein $k \in \mathbb{N}$ mit $\mu_k = 0$, so wäre $0 \neq x_0 \in E$ mit $Lx_0 = 0$; im Widerspruch zur Invertierbarkeit von L. Also ist $\mu_k \neq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$, und die Aussage über $\sigma(T)$ ist gezeigt.

Wir kommen zur asympthotischen Abschätzung der μ_k. Wir hatten gezeigt, dass es $d, D > 0$ und $M > 0$ mit $d\sqrt{\mu} \leq \phi(\beta,\mu) \leq D\sqrt{\mu}$ für alle $\mu \geq M$ gibt. Wegen $\phi(\beta,\mu_k) = \gamma' + k\pi \to \infty$ für $k \in \mathbb{N}$, ist auch $\mu_k \to \infty$, also existiert ein $k_0 \in \mathbb{N}$ mit $\mu_{k_0} \geq M$ und $k_0 \geq 4$. Sei nun $k \geq k_0$. Dann ist $\mu_k \geq \mu_{k_0} \geq M$, also

$$d\sqrt{\mu_k} \leq \phi(\beta,\mu_k) = \gamma' + k\pi \leq D\sqrt{\mu_k}.$$

Wegen $k \geq k_0 \geq 4 \geq \gamma'$ ist damit $d\sqrt{\mu_k} \leq (\pi+1)k$, d.h.

$$\mu_k \leq \left(\frac{\pi+1}{d}\right)^2 k^2 = c_2 k^2$$

mit $c_2 = ((\pi+1)/d)^2$. Weiter ist $D\sqrt{\mu_k} \geq k\pi$, d.h.

$$\mu_k \geq \left(\frac{\pi}{D}\right)^2 k^2 = c_1 k^2$$

mit $c_1 = (\pi/D)^2$.

Es verbleibt nur noch unsere Behauptung über Nullstellen. Sei also $k \in \mathbb{N}$ gegeben. Da der Eigenraum zum Eigenwert $1/\mu_k$ eindimensional ist und $x := x_{\mu_k} \neq 0$ in diesem liegt, reicht es die Behauptungen über die Nullstellen für x zu zeigen. Da x eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung erfüllt kann x keine mehrfachen Nullstellen haben, d.h. alle Nullstellen von x sind einfach. Für alle $t \in I$ gilt

$$(\xi(t,\mu_k), x(t)) = \varrho(t,\mu_k)(\cos\phi(t,\mu_k), \sin\phi(t,\mu_k)),$$

d.h. es ist genau dann $x(t) = 0$, wenn $\sin\phi(t, \mu_k) = 0$ gilt, d.h. genau dann wenn $\phi(t, \mu_k) \in \mathbb{Z}\pi$ ist. Wir haben

$$\phi(\alpha, \mu_k) = \gamma \in [0, \pi), \quad \text{und} \quad \phi(\beta, \mu_k) = \gamma' + k\pi \in (k\pi, (k+1)\pi].$$

Insbesondere ist genau dann $x(\alpha) = 0$, wenn $\gamma = 0$ ist, und nach Wahl von γ ist dies gleichwertig zu $b_0 = 0$. Ebenso ist $x(\beta) = 0$ gleichwertig zu $\gamma' = \pi$, und dies bedeutet gerade $b_1 = 0$.

Der Zwischenwertsatz ergibt, das $\phi(t, \mu_k)$ jeden der Werte $i\pi$ für $1 \leq i \leq k$ einmal für $t \in (\alpha, \beta)$ annimmt, und die bewiesenen Eigenschaften von ϕ ergeben, dass jeder dieser Werte genau einmal angenommen wird. Weiter ist $\phi(t, \mu_k) > 0$ für alle $t \in (\alpha, \beta)$. Gäbe es $t \in (\alpha, \beta)$ mit $\phi(t, \mu_k) \geq (k+1)\pi$, so gibt es auch $\alpha < s \leq t < \beta$ mit $\phi(s, \mu_k) = (k+1)\pi$, und somit folgt $\gamma' + k\pi = \phi(\beta, \mu_k) > (k+1)\pi$, d.h. $\gamma' > \pi$; ein Widerspruch. Also ist auch $\phi(t, \mu_k) < (k+1)\pi$ für alle $t \in (\alpha, \beta)$.

■

Literatur zu §6B

E. A. Coddington, N. Levinson: *Theory of ordinary differential equations*, Mc Graw Hill, 1955

W. Walter: *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, Springer 1986