Distributionen

André Noll

Version 23 (26.10.2004)

Vorwort

Diese Einführung in die Theorie der Distributionen ist aus der gleichnamigen Vorlesung vom Wintersemester 2002/2003 an der TU Darmstadt entstanden und ist hauptsächlich bestimmt für Studierende der Mathematik und der Physik ab dem vierten Semester.

Die Distributionen bilden ein Teilgebiet der Funktionalanalysis und liefern eine Verallgemeinerung des klassischen Funktionsbegriffs. Für die Theorie der Differentialgleichungen sind Distributionen ein unentbehrliches Hilfsmittel. Beispielsweise erhält die Diracsche Delta-Funktion der Quantentheorie erst im Rahmen der Distributionen einen exakten mathematischen Sinn.

Die zum Aufbau der Theorie der Distributionen notwendigen funktionalanalytischen Grundlagen werden an den entsprechenden Stellen entwickelt, insb. werden die topologischen Vektorräume in einem eigenen Kapitel ausführlich behandelt.

Viele Beispiele und Übungsaufgaben, zum Teil mit ausführlichen Lösungen, sollen dem Leser die Bewältigung des Stoffes erleichtern.

Ich danke allen, die an der Erstellung dieser Ausarbeitung mitgearbeitet haben, insb. Thomas Forell, Matthias Heß, Claus Kirchner und Céline Schwarz, die Teile des Manuskripts getippt und Korrektur gelesen haben und Boris Walter, der die Lösungen zu fast allen Übungsaufgaben beigesteuert hat.

Schließlich möchte ich noch Eva Dintelmann danken, die das gesamte Manuskript nochmals Korrektur gelesen hat.

Darmstadt, im März 2003 André Noll

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

The resulting mathematical structure [of distributions], based on the duality of certain topological vector spaces, is as striking in its power and sweep as it is in its simplicity and beauty.

M.A. Al-Gwaiz

1.1 Historisches

Die in Abschnitt 1.3 (vereinfacht) dargestellten Beobachtungen führten um die Jahrhundertwende zum sog. Heavyside „Operationskalkül", der von angewandten Mathematikern, Physikern und Ingenieuren benutzt wurde, weil er plausible Ergebnisse lieferte, obwohl niemand diese rigoros rechtfertigen konnte. Speziell die „Delta-Funktion" war ein unentbehrliches Hilfsmittel. Diese „Funktion" wurde abgeleitet und (Fourier-)transformiert nach den üblichen Rechenregeln. Was zu dieser Zeit fehlte, war der mathematische Rahmen, um diese formalen Rechnungen zu rechtfertigen. Erst später, etwa 1930 begann S.L. Sobolev in seinen Arbeiten zum Cauchy-Problem den langen Weg, eine mathematische Theorie für diese „verallgemeinerten Funktionen" zu konstruieren. Er erkannte, dass man die verallgemeinerten Funktionen als lineare Funktionale auf einem gewissen Raum von Testfunktionen auffassen kann. Dieser funktionalanalytische Zugang wurde um 1950 von L. Schwartz weiter entwickelt und führte zu den grundlegenden Arbeiten *Théorie des Distributions Tome 1/2* [Sch50], [Sch51], in der die gerade entstandene Funktionalanalysis weitere konkrete Anwendungen fand. Die mathematische Theorie der Distributionen basiert auf der Dualität gewisser topologischer Vektorräume und besticht durch ihre Einfachheit und Schönheit.

1.2 Die Delta-Funktion

Die von P.A.M. Dirac 1927 zur Beschreibung gewisser Effekte in der Quantentheorie eingeführte Delta-Funktion gab einen wesentlichen Anstoß zur Entstehung der Distributionen. Dirac forderte von der Delta-Funktion $\delta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die zwei Eigenschaften

(a) Es ist $\delta(x) = 0$ für $x \neq 0$.

(b) Es gilt $\int_{\mathbb{R}} \delta \mathrm{d}x = 1$.

Leider sieht man sofort ein (vgl. Übungsaufgabe 1.1), dass keine solche Funktion existiert. Obwohl das natürlich auch Dirac wusste, untersuchte er die Delta-Funktion weiter und fand dabei heraus, dass man mit δ weitgehend so rechnen kann, als ob δ eine Funktion im klassischen Sinn wäre, und dass man auf diese Weise zu sinnvollen Resultaten kommt. Daher ist es wünschenswert, den klassischen Funktionsbegriff so zu modifizieren, dass δ eine präzise mathematische Deutung erhält. Die Idee, wie dies bewerkstelligt werden könnte, kommt aus der Physik: Ist auf $\mathbb{R}$ eine elektrische Ladung mit der Dichte ρ verteilt, so ist $\int_{\mathbb{R}} \rho \, \mathrm{d}x$ die Gesamtladung. Die Delta-Funktion modelliert den Fall einer sog. *Punktladung*, von der man spricht, wenn z.B. in $x = 0$ eine Einheitsladung konzentriert ist, während alle anderen Punkte ladungsfrei sind. Stellt man sich nun eine Störung dieser idealen Situation vor, so wird die Ladung auf eine kleine ε-Umgebung der Null „verschmiert" sein. Es ist daher naheliegend, sich diese gestörte Ladungsverteilung als eine Glockenkurve ρ_ε vorzustellen, die um so steiler wird, je kleiner die Störung ist. In jedem Fall sollte aber $\int_{\mathbb{R}} \rho_\varepsilon \, \mathrm{d}x = 1$ gelten. Es ist nun naheliegend, einen Konvergenzbegriff für Funktionen so zu definieren, dass die Folge ρ_ε für $\varepsilon \to 0$ konvergiert und das Grenzobjekt δ zu nennen.

1.3 Heuristische Betrachtungen

Die Theorie der Distributionen befreit die Differentialrechnung von gewissen Komplikationen, die nicht-differenzierbare Funktionen hervorrufen. Dies wird bewerkstelligt durch die Erweiterung der Klasse der Funktionen zur größeren Klasse von Objekten, genannt *Distributionen*, oder *verallgemeinerte Funktionen*. Damit eine solche Erweiterung vernünftig ist, sollte die Klasse der Distributionen (auf einer offenen Teilmenge von $\mathbb{R}^n$) folgende Eigenschaften besitzen:

- Jede stetige Funktion sollte eine Distribution sein.
- Jede Distribution sollte partielle Ableitungen besitzen, die wieder Distributionen sind. Für differenzierbare Funktionen sollte „Distributionenableitung" und „gewöhnliche Ableitung" übereinstimmen.
- Die „üblichen" Rechenregeln für das Differenzieren sollten auch für Distributionen gelten.
- Es sollten „Grenzwertsätze" gelten, die es erlauben, Limiten von Distributionen zu handhaben.

Um die Definitionen in den folgenden Kapiteln zu motivieren, betrachten wir den Fall $n = 1$. Alle auftretenden Integrale sind im Lebesgueschen Sinne zu verstehen. Eine messbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ heißt *lokal integrierbar*, falls f über jedem Kompaktum $K \subset \mathbb{R}$ integrierbar ist, d.h. wenn $\int_K |f| \mathrm{d}x < \infty$, siehe Übungsaufgabe 1.2 für die Rechtfertigung dieser Begriffsbildung. Den Vektorraum aller lokal integrierbaren Funktionen auf $\mathbb{R}$ bezeichnen wir mit $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$.

Die Idee besteht nun darin, $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ aufzufassen als eine Abbildung T_f, die jeder „geeigneten Testfunktion" $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ die Zahl $\int_{\mathbb{R}} f\phi \, \mathrm{d}x$ zuordnet. Als Testfunktionen bietet sich der Vektorraum $\mathcal{D} = \mathcal{D}(\mathbb{R})$ der beliebig oft differenzierbaren Funktionen auf $\mathbb{R}$ mit kompaktem Träger an, denn $\int_{\mathbb{R}} f\phi \, \mathrm{d}x$ existiert für jedes $\phi \in \mathcal{D}$ und jedes lokal integrierbare f. Also ist das *zu f assoziierte lineare Funktional*

$$T_f : \mathcal{D} \to \mathbb{C}, \quad \phi \mapsto \int_{\mathbb{R}} f\phi \,\mathrm{d}x$$

wohldefiniert. Die *Distributionen* werden definiert als die Menge aller linearen Funktionale auf $\mathcal{D}$, die bzgl. einer gewissen Topologie auf $\mathcal{D}$ stetig sind (natürlich wird man diese Topologie so wählen, dass zumindest T_f stetig ist für jedes $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$). Falls f nicht nur lokal integrierbar, sondern sogar stetig differenzierbar ist, so erhält man durch partielle Integration

$$\int_{\mathbb{R}} f'\phi \mathrm{d}x = -\int_{\mathbb{R}} f\phi' \mathrm{d}x, \quad (\phi \in \mathcal{D}).$$

Für $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, gilt sogar

$$\int_{\mathbb{R}} f^{(k)}\phi \mathrm{d}x = (-1)^k \int_{\mathbb{R}} f\phi^{(k)} \mathrm{d}x, \quad (\phi \in \mathcal{D}, k \in \mathbb{N}). \tag{1}$$

Beachte, dass die rechte Seite von Gleichung (1) selbst dann definiert ist, wenn f nicht differenzierbar ist. Wir können daher die k-te Ableitung einer lokal integrierbaren Funktion f definieren als das lineare Funktional auf $\mathcal{D}$, das ϕ auf $(-1)^k \int_{\mathbb{R}} f\phi^{(k)} \mathrm{d}x$ abbildet. Allgemein definiert man die k-te Ableitung $T^{(k)}$ einer beliebigen Distribution $T : \mathcal{D} \to \mathbb{K}$ durch

$$T^{(k)}(\phi) := (-1)^k T(\phi^{(k)}), \quad (\phi \in \mathcal{D}),$$

und es wird sich zeigen, dass diese Definition all die wünschenswerten Eigenschaften besitzt, die eingangs erwähnt wurden.

1.4 Übungsaufgaben

Übungsaufgabe 1.1 Zeige, dass es keine Funktion $\delta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gibt, die die Eigenschaften (a) und (b) aus Abschnitt 1.2 erfüllt.

Übungsaufgabe 1.2 Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ messbar. Zeige, dass f genau dann lokal integrierbar ist, wenn es für jedes $x \in \mathbb{R}$ eine Umgebung U von x gibt, so dass f auf U integrierbar ist (dies rechtfertigt den Namen „lokal integrierbar“).

Übungsaufgabe 1.3 Aus dem Identitätssatz für holomorphe Funktionen folgt sofort, dass es keine von Null verschiedene holomorphe Funktion in $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ gibt. Zeige, dass $\mathcal{D}(\mathbb{R}) \neq \{0\}$.

2 Grundlagen

The beginner... should not be discouraged if ... he finds that he does not have the prerequisites for reading the prerequisites.

P. Halmos

Dieses Kapitel enthält grundlegende Begriffsbildungen aus der linearen Algebra und der Topologie, die für den Aufbau der Distributionentheorie benötigt werden. Dabei setzen wir elementare Grundlagen der Linearen Algebra, wie man sie z.B. in [Fis00] findet, voraus. Natürlich können auch die topologischen Grundlagen an dieser Stelle nur angestreift werden. Für eine detaillierte Behandlung sei auf die Lehrbücher [Gro69] und [Sch75] verwiesen.

2.1 Lineare Räume

Sei X ein Vektorraum über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, und sei $E \subset X$.

Definition 2.1 (a) E heißt *konvex*, falls für alle $x, y \in E$ und alle $\lambda \in [0, 1]$ gilt, dass $\lambda x + (1 - \lambda)y \in E$.

(b) E heißt *kreisförmig* $:\Leftrightarrow x \in E, \lambda \in \mathbb{K}, |\lambda| \leq 1 \Rightarrow \lambda x \in E$. Offenbar gilt $0 \in E$ für jede kreisförmige Menge E.

(c) E heißt *absorbierend* $:\Leftrightarrow \forall x \in X$ existiert $\varepsilon > 0$ mit $\lambda x \in E$ für alle $|\lambda| \leq \varepsilon$.

(d) E heißt *absolut konvex*, falls für alle $x_1, x_2 \in E$ und alle $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$ mit $|\lambda_1| + |\lambda_2| \leq 1$ gilt $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in E$.

Übungsaufgabe 2.2 Sei X ein Vektorraum über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $A, B \subset X$ und $\lambda \in \mathbb{K}$. Man definiert

$$A + B := \{x + y : x \in A, y \in B\}, \quad \lambda A := \{\lambda x : x \in A\}.$$

Zeige:

(a) $2A \subset A + A$. I.a. gilt $2A \neq A + A$.

(b) A ist genau dann konvex, wenn $(s + t)A = sA + tA$ für alle $s, t > 0$.

(c) Die Vereinigung und der Schnitt beliebig vieler kreisförmiger Mengen ist kreisförmig.

(d) Der Schnitt beliebig vieler konvexer Mengen ist konvex.

(e) Sind A und B konvex, so auch $A + B$.

(f) Sind A und B kreisförmig, so auch $A + B$.

Übungsaufgabe 2.3 Sei X ein Vektorraum über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, und sei $E \subset X$. Zeige, dass E genau dann absolut konvex ist, wenn E konvex und kreisförmig ist.

Übungsaufgabe 2.4 Sei $X = \mathbb{R}^n$ und $|\cdot|$ die euklidische Norm auf X. Dann ist für $r > 0$ die Kugel

$$\{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq r\}$$

konvex, absorbierend und kreisförmig.

Übungsaufgabe 2.5 Die *konvexe Hülle* $\operatorname{conv}(A)$ einer Teilmenge A eines Vektorraums X ist per Definition die Menge aller Konvexkombinationen von Elementen aus A, d.h. die Menge aller Summen

$$t_1x_1 + \ldots + t_nx_n,$$

für die $x_j \in A$, $t_j \geq 0$ und $\sum_{j=1}^n t_j = 1$. Zeige:

(a) Für jedes $A \subset X$ ist $\operatorname{conv}(A)$ eine konvexe Menge.

(b) Es gilt

$$\operatorname{conv}(A) = \bigcap_{B \supset A \text{ und } B \text{ konvex}} B.$$

2.2 Topologische Räume

Im Folgenden sei X eine beliebige nichtleere Menge und $\operatorname{Pot}(X)$ die Potenzmenge von X, d.h. $\operatorname{Pot}(X)$ ist das System aller Teilmengen von X.

Definition 2.6 Ein System von Mengen $\tau \subset \operatorname{Pot}(X)$ heißt *Topologie* auf X, falls

(a) $\emptyset \in \tau, X \in \tau$,

(b) $E_1, \ldots, E_n \in \tau \Rightarrow \bigcap_{j=1}^n E_j \in \tau$,

(c) $E_\alpha \in \tau, \alpha \in A, \Rightarrow \bigcup_{\alpha \in A} E_\alpha \in \tau$.

Die Elemente von τ heißen *offene Mengen*.

Auf jeder nichtleeren Menge X gibt es zwei triviale Topologien:

Beispiel 2.7 (a) $\tau = \{\emptyset, X\}$ ist eine Topologie, die *indiskrete Topologie*.

(b) $\tau = \mathrm{Pot}(X)$ ist eine Topologie, die *diskrete Topologie*.

In der folgenden Definition werden die grundlegenden topologischen Begriffe erklärt, die für die systematische Behandlung von Distributionen notwendig sind.

Definition 2.8 Sei (X, τ) ein topologischer Raum.

(a) $E \subset X$ heißt *Umgebung von* $x \in X$, falls es ein $U \in \tau$ mit $x \in U \subset E$ gibt. Die Gesamtheit aller Umgebungen von x bezeichnen wir mit $\mathfrak{U}(x)$.

(b) (X, τ) heißt *Hausdorffraum* (oder *hausdorffsch*), falls zu $x_1, x_2 \in X$ mit $x_1 \neq x_2$ Umgebungen U_1 von x_1 und U_2 von x_2 existieren mit $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.

(c) Sind τ und σ Topologien auf X, so heißt τ *feiner* als σ (bzw. σ *gröber* als τ), falls $\tau \supset \sigma$. Wir werden später sehen, dass dies genau dann der Fall ist, wenn die identische Abbildung $\mathrm{id} : (X, \tau) \to (X, \sigma)$ stetig ist.

(d) Sei τ Topologie auf X und $\sigma \subset \tau$ beliebig. Man sagt, σ ist eine *Basis der Topologie* τ, wenn sich jede offene Menge als (beliebige) Vereinigung von Mengen aus σ darstellen läßt, d.h. wenn für jedes $U \in \tau$ eine Indexmenge A und Mengen U_α, $\alpha \in A$, existieren mit $U = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$. Nicht jedes Mengensystem ist Basis einer Topologie, vgl. Übungsaufgabe 2.9.

(e) Seien $(X_1, \tau_1), (X_2, \tau_2)$ topologische Räume $\sigma := \{U_1 \times U_2 : U_1 \in \tau_1, U_2 \in \tau_2\}$. Dann ist σ Basis einer Topologie auf $X_1 \times X_2$. Diese heißt *Produkttopologie* und wird mit $\tau_1 \times \tau_2$ bezeichnet.

(f) Sei (X, τ) topologischer Raum, $x \in X$. Ein System σ von Umgebungen von x heißt *Umgebungsbasis* von x, falls für jede Umgebung U von x ein $V \in \sigma$ existiert mit $x \in V \subset U$.

(g) Sei (X, τ) topologischer Raum, $(x_n)_{n\geq 1}$ eine Folge in X, und sei $x \in X$. Man sagt, x_n *konvergiert gegen* x, falls in jeder Umgebung von x alle bis auf endlich viele Folgenglieder liegen. Schreibweise: $x = \lim_{n\to\infty} x_n$. Trivialerweise besitzt in einem Hausdorffraum jede Folge höchstens einen Grenzwert.

Man nennt $x \in X$ einen *Häufungspunkt* von $(x_n)_{n\geq 1}$, falls in jeder Umgebung von x mindestens ein von x verschiedenes Folgenglied liegt.

(h) Sei (X, τ) ein topologischer Raum, $E \subset X$. Die Menge

$$E^\circ := \bigcup_{U \in \tau, U \subset E} U$$

heißt *Inneres* von E.

(i) $A \subset X$ heißt *abgeschlossen*, falls $X \backslash A \in \tau$. Für $E \subset X$ heißt

$$\overline{E} := \bigcap_{A \text{abg.}, E \subset A} A$$

Abschluss von E.

(j) $E \subset X$ heißt *dicht* in X, falls $\overline{E} = X$.

(k) Für $E \subset X$ heißt $\partial E := \overline{E} \backslash E^\circ$ *Rand* von E.

(l) $E \subset X$ heißt *kompakt*, falls jede offene Überdeckung von E eine endliche Teilüberdeckung enthält. Mit anderen Worten: E ist kompakt, wenn folgendes gilt:

$$U_\alpha \in \tau, \alpha \in A, \text{ mit } \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \supset E \Rightarrow \exists \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in A \text{ mit } \bigcup_{j=1}^{n} U_{\alpha_j} \supset E.$$

(m) Sei (X, τ) topologischer Raum und $E \subset X$. Definiere

$$\tau_E := \{E \cap U : U \in \tau\}.$$

Dann ist τ_E eine Topologie auf E, die *Spurtopologie* auf E.

Übungsaufgabe 2.9 Sei $X \neq \emptyset$, $\sigma \subset \text{Pot}(X)$ mit $\bigcup_{B \in \sigma} B = X$. Zeige die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(a) σ ist Basis einer Topologie.

(b) Für alle $B_1, B_2 \in \sigma$ und jedes $x \in B_1 \cap B_2$ existiert $B_3 \in \sigma$ mit $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

Übungsaufgabe 2.10 Sei τ eine Topologie auf X. Zeige:

(a) Ist X ein Hausdorffraum, so sind alle endlichen Mengen abgeschlossen.

(b) X ist genau dann ein Hausdorffraum, wenn jeder Punkt gleich dem Durchschnitt seiner abgeschlossenen Umgebungen ist.

2.3 Abbildungen

2.3.1 Abbildungen zwischen beliebigen Mengen

Seien $X, Y \neq \emptyset$ und $T : X \to Y$ eine Abbildung.

Definition 2.11 Für $x \in X$ heißt $T(x)$ das *Bild von x unter T*. Für $A \subset X$ heißt $T(A) := \{T(x) : x \in A\}$ das *Bild von A unter T*. Für $B \subset Y$ heißt $T^{-1}(B) := \{x \in X : T(x) \in B\}$ das *Urbild von B unter T*. T heißt *injektiv*, falls $T(x_1) = T(x_2)$ impliziert, dass $x_1 = x_2$. T heißt *surjektiv*, falls $T(X) = Y$ und *bijektiv*, falls T injektiv und surjektiv ist. In diesem Fall ist $T^{-1} : Y \to X$ wohldefiniert.

2.3.2 Abbildungen zwischen Vektorräumen

Seien X, Y Vektorräume über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Eine Abbildung $T : X \to Y$ heißt *linear*, falls

$$T(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha T(x_1) + \beta T(x_2)$$

für alle $x_1, x_2 \in X$ und alle $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Falls $Y = \mathbb{K}$, d.h. $T : X \to \mathbb{K}$, so heißt T *lineares Funktional* auf X. Für lineares $T : X \to Y$ gilt:

(a) $T(0) = 0$.

(b) Ist A ein Untervektorraum von X, so ist $T(A)$ ein Untervektorraum von Y. Insbesondere ist das Bild $T(X)$ von X unter T ein Untervektorraum von Y.

(c) Ist B ein Untervektorraum von Y, so ist $T^{-1}(B)$ ein Untervektorraum von X. Insbesondere ist $\mathrm{kern}(T) := T^{-1}(\{0\})$ ein Untervektorraum von X, der sog. *Kern* oder *Nullraum* von T.

2.3.3 Abbildungen zwischen topologischen Räumen

Seien X, Y topologische Räume und $T : X \to Y$ eine Abbildung. T heißt *stetig in* $x \in X$, falls für alle Umgebungen V von $T(x)$ das Urbild $T^{-1}(V)$ eine Umgebung von x ist. T heißt *stetig*, falls T in jedem $x \in X$ stetig ist. Die folgenden Charakterisierungen der Stetigkeit sind offensichtlich:

(a) T ist genau dann stetig, falls $V \subset Y$ offen impliziert, dass $T^{-1}(V)$ offen in X ist.

(b) T ist genau dann stetig, wenn für jedes abgeschlossene $B \subset Y$ das Urbild $T^{-1}(B)$ abgeschlossen in X ist.

Beispiel 2.12 (a) Sei $X = Y = \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 42$. Dann ist f zwar stetig, aber f bildet *nicht* offene Mengen auf offene Mengen ab. Die Eigenschaft „f bildet offene Mengen auf offene Mengen ab“ ist also *nicht* äquivalent zur Stetigkeit.

(b) Sei X ein topologischer Raum und $E \subset X$. Dann ist $\mathrm{id} : (E, \tau_E) \to X$ stetig.

Definition 2.13 Eine bijektive Abbildung $T : X \to Y$ heißt *Homöomorphismus*, falls T und T^{-1} stetig sind. Zwei topologische Räume heißen *homöomorph*, falls es einen Homöomorphismus von X nach Y gibt.

Beispiel 2.14 Die Abbildung

$$\mathrm{id} : (\{0,1\}, \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}\}) \to (\{0,1\}, \{\emptyset, \{0,1\}\})$$

ist bijektiv und stetig, aber kein Homöomorphismus.

2.4 Metrische Räume

Definition 2.15 Sei X eine nichtleere Menge. Unter einer *Metrik* auf X versteht man eine Abbildung

$$d : X \times X \to [0, \infty), \quad (x, y) \mapsto d(x, y)$$

mit den folgenden Eigenschaften:

(a) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,

(b) $d(x, y) = d(y, x) \quad \forall x, y \in X$,

(c) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \quad \forall x, y, z \in X$.

Das Paar (X, d) bezeichnet man als *metrischen Raum*.

In jedem metrischen Raum ist der Begriff der Kugel wohldefiniert, und mit Hilfe von Kugeln ist es leicht, eine Topologie zu erklären:

Definition 2.16 Sei (X, d) ein metrischer Raum.

(a) Sei $a \in X$ ein Punkt und $r > 0$. Dann heißt

$$B(a, r) := \{x \in X : d(a, x) < r\}$$

die *offene Kugel* mit Mittelpunkt a und Radius r bezüglich der Metrik d.

(b) Sei $E \subset X$. E heißt *offen*, falls es zu jedem $x \in E$ ein $r > 0$ gibt mit $B(x, r) \subset E$.

Bemerkung 2.17 Für $B(a, r)$ schreiben wir auch $B_r(a)$.

Man überlegt sich sofort, dass das so definierte System von offenen Mengen eine Topologie ist, die man die *von der Metrik d induzierte Topologie* nennt. Offenbar ist jeder metrische Raum ein Hausdorff-Raum. Ist (X, d) ein metrischer Raum, so ist

$$\{B(x, \frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N}\}$$

eine Umgebungsbasis von x, die offensichtlich aus abzählbar vielen Mengen besteht. Dies hat zur Folge, dass in metrischen Räumen die Stetigkeit einer Funktion mit Hilfe von Folgen charakterisiert werden kann:

Übungsaufgabe 2.18 Sei (X, τ) ein topologischer Raum derart, dass jedes $x \in X$ eine abzählbare Umgebungsbasis besitzt. Sei (Y, σ) ein beliebiger topologischer Raum und $f : X \to Y$ eine Abbildung. Dann sind äquivalent:

(a) f ist stetig,

(b) f ist folgenstetig, d.h. aus $x_n \to x$ folgt $f(x_n) \to f(x)$.

Im Allgemeinen folgt zwar aus der Stetigkeit die Folgenstetigkeit, aber die Umkehrung gilt nicht.

Ist (X, τ) ein topologischer Raum, so stellt sich die natürliche Frage, unter welchen Voraussetzungen an τ es eine Metrik auf X gibt, die die gegebene Topologie induziert. Solche Räume nennt man *metrisierbar*, und die Frage nach notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Metrisierbarkeit bezeichnet man als das *Metrisierbarkeitsproblem*. Aus den obigen Überlegungen folgt, dass ein metrisierbarer topologischer Raum X stets hausdorffsch ist, und dass jedes $x \in X$ eine abzählbare Umgebungsbasis besitzt. Es zeigt sich aber, dass diese Eigenschaften nicht ausreichen, um die Metrisierbarkeit zu gewährleisten. In der Tat ist das Metrisierbarkeitsproblem äußerst schwierig und wurde erst 1951 von Bing, Smirnow, Nagata gelöst. Umso überraschender erscheint es in diesem Zusammenhang, dass die Frage nach der Metrisierbarkeit eines (lokalkonvexen) topologischen *Vektor*raums (siehe Definition 3.1 und Definition 3.11) beinahe trivial ist und in einfacher Weise durch Halbnormen charakterisiert werden kann.

Zum Abschluss dieses Kapitels führen wir noch einige grundlegende Begriffsbildungen ein.

Definition 2.19 Sei (X, d) ein metrischer Raum, und sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X.

(a) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *Cauchy-Folge*, falls zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass für alle $n, m > N$ gilt:

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

(b) X heißt *vollständig*, wenn jede Cauchy-Folge in X konvergiert.

Bemerkung 2.20 Vollständigkeit ist *keine* topologische Eigenschaft: Betrachte $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ und $(\mathbb{R}, d)$, wobei $d(x, y) := |\arctan x - \arctan y|$. Dann erzeugen $|\cdot|$ und d die gleiche Topologie auf $\mathbb{R}$. $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ ist vollständig, aber $(\mathbb{R}, d)$ nicht, denn $x_n = n$ ist eine Cauchy-Folge in $(\mathbb{R}, d)$, die nicht konvergiert.

Definition 2.21 Seien (X_1, d_1) und (X_2, d_2) metrische Räume, und sei $f : X_1 \to X_2$ eine beliebige Abbildung.

(a) f heißt *isometrisch* (oder *Isometrie*), falls f abstandserhaltend ist, d.h. falls für alle $x, y \in X_1$ gilt:

$$d_2(f(x), f(y)) = d_1(x, y).$$

Offenbar ist jede Isometrie injektiv.

(b) Sei speziell $X_1 = X_2$. Man sagt, die Metriken d_1, d_2 sind *äquivalent*, wenn die identische Abbildung $\mathrm{id} : (X_1, d_1) \to (X_2, d_2)$ ein Homöomorphismus ist.

Übungsaufgabe 2.22 Sei (X, d) ein kompakter metrischer Raum und $f : X \to X$ eine Isometrie. Zeige, dass f bijektiv ist.

Übungsaufgabe 2.23 Zeige, dass ein metrischer Raum (X, d) genau endlich ist (d.h. endlich viele Elemente enthält), falls er kompakt ist, und die von d induzierte Topologie die diskrete Topologie ist.

3 Topologische Vektorräume

Mathematicians are like Frenchmen: Whatever you say to them they translate into their own language and forwith it is something completely different.

J. W. Goethe

In diesem Kapitel untersuchen wir Vektorräume, in denen eine Topologie erklärt ist, bzgl. der die Operationen des Vektorraums stetige Abbildungen sind. Diese Klasse von Vektorräumen umfasst insbesondere die klassischen Banach- und Fréchet-Räume. Für die systematische Behandlung von Distributionen sind diese klassischen Räume allerdings zu speziell, so dass ein gutes Verständnis der Theorie der topologischen Vektorräume, insbesondere der lokalkonvexen Räume, unumgänglich ist. Dem interessierten Leser empfehlen wir [RR80, RS80] als weiterführende Literatur, sowie die zweibändige Monographie [Köt66], die weit über die hier behandelten und für die Theorie der Distributionen notwendigen Grundlagen hinausgeht.

3.1 Definitionen, einfache Eigenschaften

Definition 3.1 Ein *topologischer Vektorraum* ist ein Vektorraum X, ausgestattet mit einer Topologie τ, so dass die Abbildungen

$$\begin{array}{lcccccclcl} A & : & X & \times & X & \to & X & \qquad (x,y) & \mapsto & x+y, \\ M & : & \mathbb{K} & \times & X & \to & X & \qquad (\lambda,x) & \mapsto & \lambda\cdot x \end{array}$$

stetig sind. In diesem Fall nennt man τ eine *Vektorraumtopologie.*

Übungsaufgabe 3.2 Ist (X,τ) ein topologischer Vektorraum, $x_0\in X$, $\lambda\in\mathbb{K}$, so sind auch die Abbildungen

$$\begin{array}{lcccclcl} A_{x_0} & : & X & \to & X & \qquad x & \mapsto & x+x_0, \\ M_\lambda & : & X & \to & X & \qquad x & \mapsto & \lambda\cdot x, \\ M_{x_0} & : & \mathbb{K} & \to & X & \qquad \mu & \mapsto & \mu\cdot x_0, \end{array}$$

stetig.

Die Klasse der topologischen Vektorräume enthält insbesondere alle normierten Räume:

Beispiel 3.3 Sei $(X,\|\cdot\|)$ ein normierter Raum. Dann wird X via

$$d(x,y) := \|x-y\|$$

zu einem metrischen, und damit auch zu einem topologischen Raum. Wir zeigen, dass die auf diese Weise aus der Norm erzeugte Topologie stets eine Vektorraumtopologie ist, d.h. dass die Vektoraddition und Skalarmultiplikation stetige Abbildungen sind.

Gemäß Übungsaufgabe 2.18 ist die Stetigkeit von A und M äquivalent zur Folgenstetigkeit von A und M. Sei also eine Folge $(x_n, y_n) \in X \times X$ gegeben, die gegen einen Punkt $(x, y) \in X \times X$ konvergiere. Dann folgt, dass x_n gegen x und y_n gegen y konvergiert. Somit erhält man

$$\begin{aligned} \|A(x_n, y_n) - A(x, y)\| &= \|(x_n + y_n) - (x + y)\| \\ &= \|x_n - x + y_n - y\| \\ &\leq \|x_n - x\| + \|y_n - y\|, \end{aligned}$$

und damit $A(x_n, y_n) \to A(x, y)$ für $(x_n, y_n) \to (x, y)$.

Sei nun (λ_n, x_n) eine Folge in $\mathbb{K} \times X$, die gegen einen Punkt $(\lambda, x) \in \mathbb{K} \times X$ konvergiert. Dann folgt $\lambda_n \to \lambda$ und $x_n \to x$. Somit erhält man

$$\begin{aligned} \|M(\lambda_n, x_n) - M(\lambda, x)\| &= \|\lambda_n \cdot x_n - \lambda \cdot x\| \\ &\leq \|\lambda_n \cdot x_n - \lambda_n \cdot x\| + \|\lambda_n \cdot x - \lambda \cdot x\| \\ &= |\lambda_n|\|x_n - x\| + |\lambda_n - \lambda|\|x\|. \end{aligned}$$

Da nun $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ als konvergente Folge beschränkt ist, gilt für $(\lambda_n, x_n) \to (\lambda, x)$ auch $M(\lambda_n, x_n) \to M(\lambda, x)$, und damit ist alles gezeigt.

Beispiel 3.4 (a) Der euklidische Raum $\mathbb{R}^n$, ausgestattet mit irgendeiner Norm, ist ein topologischer Vektorraum.

(b) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ messbar. Dann ist $L^p(\Omega)$ ein topologischer Vektorraum.

(c) Sei K ein kompakter Hausdorff-Raum. Dann ist $(C(K), \|\cdot\|_\infty)$ ein topologischer Vektorraum.

Der Begriff der beschränkten Menge eines normierten Raums läßt sich ohne weiteres auf topologische Vektorräume übertragen.

Definition 3.5 Sei (X, τ) topologischer Vektorraum. $E \subset X$ heißt *beschränkt*, falls für jede Nullumgebung $U \subset X$ ein $\lambda > 0$ existiert mit $E \subset \lambda U$.

Übungsaufgabe 3.6 Sei X ein topologischer Vektorraum. Zeige:

(a) Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

  (i) E ist beschränkt,

  (ii) $x_n \in E$, $\lambda_n \in \mathbb{K}$ mit $\lambda_n \to 0$ impliziert $\lambda_n x_n \to 0$.

(b) Jede kompakte Menge ist beschränkt.

Die nächte Proposition zeigt insbesondere, dass die Topologie eines topologischen Vektorraums schon durch das System aller Nullumgebungen eindeutig bestimmt ist. Da die Gesamtheit aller Nullumgebungen schon durch die Angabe einer Nullumgebungsbasis festgelegt ist, genügt es also, eine beliebige Nullumgebungsbasis anzugeben um die Topologie zu definieren.

Proposition 3.7 *Sei (X, τ) ein topologischer Vektorraum*

(a) Für $x_0 \in X$ ist

$$A_{x_0} : X \ni x \mapsto x + x_0 \in X$$

ein Homöomorphismus.

(b) $V \subset X$ ist genau dann offen, wenn für jedes $x_0 \in V$ eine Nullumgebung U existiert mit $x_0 + U \subset V$. Insbesondere ist τ durch Angabe einer Nullumgebungsbasis eindeutig festgelegt.

(c) Sei $\lambda \in \mathbb{K}\backslash\{0\}$. Dann ist

$$M_\lambda : X \ni x \mapsto \lambda x \in X$$

ein Homöomorphismus.

(d) Jede Nullumgebung ist absorbierend.

(e) Für jede Nullumgebung $U \subset X$ existiert eine kreisförmige Nullumgebung V mit $V \subset U$.

(f) Zu jeder Nullumgebung $U \subset X$ existiert eine Nullumgebung V mit $V + V \subset U$.

(g) Der Abschluss einer kreisförmigen Menge ist kreisförmig.

(h) Für jede Nullumgebung $U \subset X$ existiert eine abgeschlossene Nullumgebung V mit $V \subset U$. Außerdem kann V als kreisförmig angenommen werden.

Beweis.

(a) Die Bijektivität ist klar, und die Stetigkeit von A_{x_0} und $A_{x_0}^{-1} = A_{-x_0}$ folgen aus Übungsaufgabe 3.2.

(b) $\Rightarrow$: Sei $V \subset X$ offen, $x_0 \in V$, $U := -x_0 + V = A_{x_0}^{-1}(V)$. Dann hat U alle behaupteten Eigenschaften.

$\Leftarrow$: Für jedes $x_0 \in V$ existiere eine (o.B.d.A. offene) Nullumgebung U_{x_0} mit $W_{x_0} := x_0 + U_{x_0} \subset V$. Dann gilt $V = \bigcup_{x_0 \in V} W_{x_0}$. Also ist V als Vereinigung offener Mengen offen.

(c) Die Bijektivität ist klar, die Stetigkeit folgt wieder aus Übungsaufgabe 3.2. Da $M_\lambda^{-1} = M_{\frac{1}{\lambda}}$, folgt auch, dass M_λ^{-1} stetig ist.

(d) Sei U eine Nullumgebung. Aus Übungsaufgabe 3.2 folgt, dass

$$\mathbb{K} \ni \lambda \mapsto M_{x_0}(\lambda) := \lambda x_0 \in X$$

stetig ist. Da U Umgebung von $0 = M_{x_0}(0)$ ist, gibt es $\varepsilon > 0$ mit $M_{x_0}(B_\varepsilon(0)) \subset U$, d.h. $\lambda x_0 \in U$ für alle $\lambda \in \mathbb{K}$ mit $|\lambda| < \varepsilon$.

(e) Sei U Nullumgebung. Da $M : \mathbb{K} \times X \ni (\lambda, x) \mapsto \lambda x \in X$ stetig in $(0,0)$ ist, und U Umgebung von $M(0,0)$ ist, gibt es $\varepsilon > 0$ und eine Nullumgebung $W \subset X$ mit $M(B_\varepsilon(0) \times W) \subset U$, d.h. $\lambda x \in U$ für alle $\lambda \in \mathbb{K}$ mit $|\lambda| < \varepsilon$ und alle $x \in W$. Setze

$$V := \bigcup_{|\lambda|<\varepsilon} \lambda W$$

Dann gilt $V \subset U$, und offenbar ist V kreisförmig.

(f) Sei U Nullumgebung. Wegen der Stetigkeit der Addition existieren Nullumgebung V_1, V_2 mit $V_1 + V_2 \subset U$. $V := V_1 \cap V_2$ ist eine Nullumgebung mit $V + V \subset U$.

(g) Sei also V kreisförmig und $v \in \overline{V}$. Weiter sei $\lambda \in \mathbb{K}$ mit $|\lambda| \leq 1$. Ist $\lambda = 0$, so ist $\lambda v \in V \subset \overline{V}$.
Sei also $\lambda \neq 0$ und $U \in \mathfrak{U}(\lambda v)$. Dann ist $M_{\frac{1}{\lambda}}(U) \in \mathfrak{U}(v)$ und damit ist $M_{\frac{1}{\lambda}}(U) \cap V \neq \emptyset$. Sei also $w \in M_{\frac{1}{\lambda}}(U) \cap V$. Dann ist trivialerweise $\lambda w \in U$ und auf Grund der Kreisförmigkeit von V gilt auch $\lambda w \in V$. Insbesondere ist also $U \cap V \neq \emptyset$. Damit ist bewiesen, dass $\lambda v \in \overline{V}$ gilt.

(h) Aus den oberen Aussagen folgt, dass zu U eine kreisförmige Nullumgebung W mit $W + W \subset U$ existiert. Wir zeigen, dass $\overline{W} \subset U$ gilt.

Sei also $w \in \overline{W}$. Dann ist insbesondere $w + W \cap W \neq \emptyset$, es existieren also $x, y \in W$ mit $y = w + x$. Aus der Kreisförmigkeit von W folgt $-x \in W$, was $w = y + (-x) \in U$ zur Folge hat.

Also ist $V := \overline{W}$ eine abgeschlossene Nullumgebung mit $V \subset U$, die außerdem kreisförmig ist (siehe oben). ■

Corollar 3.8 *Jeder topologische Vektorraum besitzt eine Nullumgebungsbasis aus kreisförmigen, absorbierenden, abgeschlossenen Mengen.*

Als weitere Beispiele dafür, dass die Eigenschaften von Vektorraumtopologien völlig durch die Eigenschaften der Nullumgebungen bestimmt sind, dienen die folgenden Aussagen:

Satz 3.9 *Sei X ein topologischer Vektorraum. Dann sind äquivalent:*

(a) X ist hausdorffsch.

(b) $\{0\}$ ist abgeschlossen.

(c) $\{0\} = \bigcap\{U \subset X : U$ ist abgeschlossene Nullumgebung$\}$.

Beweis. (a) $\Rightarrow$ (b) und (c) $\Rightarrow$ (a) sind wegen Übungsaufgabe 2.10 und der Struktur der offenen Mengen klar. Es bleibt noch (b) $\Rightarrow$ (c) zu zeigen.

Sei also $x \in \bigcap\{U \subset X : U$ ist abgeschlossene Nullumgebung$\}$ mit $x \neq 0$. Sei weiter $U \in \mathfrak{U}(x)$. Dann existiert wegen Corollar 3.8 eine abgeschlossene, kreisförmige Nullumgebung V mit $x + V \subset U$. Da nach Voraussetzung $x \in V$ ist, ist auch $-x \in V$ und damit $0 \in U$.

Insgesamt folgt also $x \in \overline{\{0\}}$, Widerspruch! ■

Übungsaufgabe 3.10 Sei X ein topologischer Vektorraum und seien τ_1, τ_2 Vektorraumtopologien auf X mit den Nullumgebungssystemen $\mathfrak{U}_1, \mathfrak{U}_2$. Dann gilt:

$$\tau_1 \subset \tau_2 \Leftrightarrow \forall U \in \mathfrak{U}_1 \, \exists V \in \mathfrak{U}_2 \text{ mit } V \subset U.$$

Es ist naheliegend, die sehr allgemeine Klasse der topologischen Vektorräume durch zusätzliche Eigenschaften der Nullumgebungsbasen zu klassifizieren.

Definition 3.11 Ein topologischer Vektorraum (X, τ) heißt

(a) *lokal konvex*, falls es eine Nullumgebungsbasis aus absolut konvexen Mengen gibt,

(b) *lokal beschränkt*, falls es eine Nullumgebungsbasis aus beschränkten Mengen gibt,

(c) *Fréchet-Raum* (auch vollständig metrisierbar), falls es eine Metrik d auf X gibt mit

   (i) τ ist die von d erzeugte Topologie,

   (ii) (X, d) ist vollständig,

(d) *normierbar*, falls es eine Norm auf X gibt, die τ erzeugt,

(e) *Banachraum*, falls er normierbar und vollständig ist.

Wir untersuchen im Folgenden genauer das Zusammenspiel von topologischen und algebraischen Strukturen in topologischen Vektorräumen anhand von Quotientenräumen.

Satz 3.12 *Sei X ein topologischer Vektorraum und A ein Unterraum von X. Dann ist X/A, ausgestattet mit der Topologie*

$$\{U \subset X/A : p^{-1}(U) \text{ offen in } X\},$$

wobei p die kanonische Projektion $p : X \to X/A$ sei, ein topologischer Vektorraum. X/A ist genau dann ein Hausdorff-Raum, wenn A abgeschlossen ist.

Beweis.

Wir zeigen zuerst die Stetigkeit der Addition auf X/A:

Sei $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in X/A \times X/A$. Sei weiter $U \in \mathfrak{U}(\tilde{x} + \tilde{y})$. Aus der Surjektivität von p folgt die Existenz von $x, y \in X$ mit $p(x) = \tilde{x},\ p(y) = \tilde{y}$. Da p stetig und linear ist, ist $p^{-1}(U) \in \mathfrak{U}(x + y)$. Aus der Stetigkeit von A_X folgt die Existenz von $U_x \in \mathfrak{U}(x),\ U_y \in \mathfrak{U}(y)$ mit $U_x + U_y \subset p^{-1}(U)$. Aus der Definition der Topologie auf X/A folgt, dass $p(U_x) \in \mathfrak{U}(\tilde{x})$ und $p(U_y) \in \mathfrak{U}(\tilde{y})$ ist. Dann ist $p(U_x) \times p(U_y) \in \mathfrak{U}(\tilde{x}, \tilde{y})$ und aus der Linearität von p folgt

$$p(U_x) + p(U_y) = p(U_x + U_y) \subset U.$$

Also ist $A^{-1}_{X/A}(U) \in \mathfrak{U}(\tilde{x}, \tilde{y})$. Damit ist $A_{X/A}$ stetig in $(\tilde{x}, \tilde{y})$.

Die Stetigkeit der Skalarmultiplikation sieht man so ein:

Sei $(\lambda, \tilde{x}) \in \mathbb{K} \times X/A$, $U \in \mathfrak{U}(\lambda\tilde{x})$ und $x \in X$ mit $p(x) = \tilde{x}$. Aus der Stetigkeit und Linearität von p folgt, dass $p^{-1}(U) \in \mathfrak{U}(\lambda x)$ ist. Dann gibt es wegen der Stetigkeit der Skalarmultiplikation in X ein $U_\lambda \in \mathfrak{U}(\lambda)$ und ein $U_x \in \mathfrak{U}(x)$ mit $U_\lambda \cdot U_x \subset p^{-1}(U)$. Dann ist $U_\lambda \times p(U_x) \in \mathfrak{U}(\lambda, \tilde{x})$ und $U_\lambda \cdot p(U_x) = p(U_\lambda \cdot U_x) \subset U$. Damit ist die Stetigkeit der Skalarmultiplikation in $(\lambda, \tilde{x})$ gezeigt.

Ist X/A ein Hausdorff-Raum, so ist $A = p^{-1}(\{0\})$ wegen Satz 3.9 abgeschlossen. Ist A abgeschlossen, so ist $X \setminus A$ und damit auch $p(X \setminus A) = X/A \setminus \{0\}$ offen. Da damit $\{0\}$ abgeschlossen in X/A ist, folgt wieder mit Satz 3.9, dass X/A hausdorffsch ist. ■

Wir geben noch das folgende Resultat über endlichdimensionale topologische Vektorräume an:

Übungsaufgabe 3.13 Sei X ein endlichdimensionaler Vektorraum über $\mathbb{K}$. Dann existiert genau eine Topologie, bezüglich der X ein topologischer Vektorraum und in der X hausdorffsch ist. X ist - ausgestattet mit dieser Topologie - normierbar.

Die Begriffe „Cauchy-Folge“ und „beschränkte lineare Abbildung“ lassen sich ohne Weiteres auf den Kontext der topologischen Vektorräume verallgemeinern.

Definition 3.14 Sei X topologischer Vektorraum.

(a) Eine Folge $(x_n)_{n\geq 1}$ heißt *Cauchy-Folge*, falls für jede Nullumgebung U ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $x_n - x_m \in U$ für alle $n, m > n_0$.

(b) Seien (X, τ_1), (Y, τ_2) topologische Vektorräume. Eine lineare Abbildung $T : X \to Y$ heißt *beschränkt*, falls T beschränkte Mengen auf beschränkte Mengen abbildet.

Übungsaufgabe 3.15 Zeige:

(a) In jedem topologischen Vektorraum ist jede Cauchy-Folge beschränkt (d.h. die Menge der Folgenglieder ist eine beschränkte Menge). Insbesondere ist jede konvergente Folge beschränkt.

(b) Seien $(X, \|\cdot\|_1), (Y, \|\cdot\|_2)$ normierte Räume, $T : X \to Y$ linear. Dann sind äquivalent:

   (i) T ist beschränkt,

   (ii) Es existiert eine Nullumgebung U so, dass $T(U)$ beschränkt ist.

Der nächste Satz zeigt, dass eine lineare Abbildung entweder in jedem Punkt stetig oder in jedem Punkt unstetig ist.

Satz 3.16 *Seien X, Y topologische Vektorräume, $T : X \to Y$ linear. Äquivalent sind:*

(a) T ist stetig,

(b) T ist in 0 stetig.

Beweis.

Es ist nur die Implikation (b)⇒(a) zu beweisen. Sei $x \in X$ und V Umgebung von Tx. Dann ist $W := -Tx + V$ eine Nullumgebung in Y. Da T stetig in 0 ist, muss $U := T^{-1}(W)$ eine Nullumgebung in X sein. Daher ist $x + U$ eine Umgebung von x, und für alle $y \in x + U$, $y = x + z$ mit $z \in U$ gilt $Ty = Tx + Tz \in Tx + W = V$. ■

Die Stetigkeit einer linearen Abbildung hängt eng zusammen mit ihrer Beschränktheit. Der folgende Satz stellt einige Beziehungen zwischen diesen Begriffen her.

Satz 3.17 *Seien X, Y topologische Vektorräume und $T : X \to Y$ linear. Wir betrachten die folgenden Aussagen:*

(a) T ist stetig.

(b) T ist beschränkt.

(c) Für jede Nullfolge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X ist die Bildfolge $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt in Y.

(d) $x_n \to 0 \Rightarrow Tx_n \to 0$.

Dann gilt (a) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (c).

Falls X metrisierbar mit translationsinvarianter Metrik (d.h. $d(x,y) = d(x+z, y+z)$ $\forall x,y,z \in X$), so sind alle Aussagen äquivalent.

Beweis.

(a) $\Rightarrow$ (b): Sei $E \subset X$ beschränkt und W eine Nullumgebung in Y. Dann existiert eine Nullumgebung V in X mit $T(V) \subset W$. Da E beschränkt ist, gibt es $\lambda_0 > 0$ mit $E \subset \lambda_0 V$. Also gilt $T(E) \subset T(\lambda_0 V) = \lambda_0 T(V) \subset \lambda_0 W$.

(b) $\Rightarrow$ (c): Das ist klar, weil konvergente Folgen beschränkt sind.

Sei jetzt X metrisierbar mit translationsinvarianter Metrik. Aus der Translationsinvarianz folgt

$$d(nx, 0) \leq nd(x, 0), \quad (x \in X, n \in \mathbb{N}_0),$$

wie man problemlos durch Induktion bestätigt.

(c) $\Rightarrow$ (d): Sei $x_n \to 0$. Wähle zu jedem $k \in \mathbb{N}$ ein $n_k \in \mathbb{N}$ mit $d(x_n, 0) < \frac{1}{k^2}$ für $n \geq n_k$. O.B.d.A. kann $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ streng monoton wachsend angenommen werden. Definiere $\gamma_n > 0$ durch $\gamma_n := k$ für $n_k \leq n < n_{k+1}$. Dann gilt $\gamma_n \to \infty$ und

$$d(\gamma_n x_n, 0) = d(kx_n, 0) \leq kd(x_n, 0) \leq k\frac{1}{k^2} \to 0,$$

d.h. wir haben $\gamma_n x_n \to 0$. Also folgt aus (c), dass $\{T(\gamma_n x_n) : n \in \mathbb{N}\}$ beschränkt ist. Aus Übungsaufgabe 3.6 folgt, dass $Tx_n = \gamma_n^{-1} T(\gamma_n x_n) \to 0$, denn Tx_n ist das Produkt einer beschränkten Folge und einer Nullfolge.

(d) $\Rightarrow$ (a): Da nach Übungsaufgabe 2.18 für metrisierbare Räume Stetigkeit und Folgenstetigkeit äquivalente Begriffe sind, folgt die Behauptung sofort aus Satz 3.16. ∎

Im Folgenden untersuchen wir die Stetigkeit einer linearen Abbildung mit Werten im eindimensionalen Vektorraum $\mathbb{K}$. Doch zunächst eine grundlegende Definition:

Definition 3.18 (a) Sei X topologischer Vektorraum. Die Räume

$$X^* := \{T : X \to \mathbb{K} \text{ linear}\}$$

und

$$X' := \{T : X \to \mathbb{K} \text{ linear und stetig}\}$$

heißen der *Dualraum* von X bzw. der *stetige Dualraum* von X.

(b) Ein Untervektorraum $H \subset X$ heißt *Hyperebene*, falls es ein $x_0 \in X \setminus H$ gibt mit folgender Eigenschaft:

$$\forall x \in X \exists! h_x \in H, \exists \lambda_x \in \mathbb{K} \text{ mit } x = h_x + \lambda_x x_0.$$

Hyperebenen sind also Untervektorräume mit Codimension eins.

Für endlichdimensionale Vektorräume stimmen Dualraum und stetiger Dualraum überein:

Übungsaufgabe 3.19 Sei X ein endlichdimensionaler und Y ein beliebiger topologischer Vektorraum, jeweils ausgestattet mit Hausdorff-Topologien. Dann ist jede lineare Abbildung von X nach Y stetig.

Lineare Funktionale stehen in engem Zusammenhang mit Hyperebenen, denn der Kern eines linearen Funktionals ist stets eine Hyperebene. Wir zeigen, dass die Stetigkeit des Funktionals durch die Abgeschlossenheit seines Kerns charakterisiert werden kann.

Satz 3.20 *Sei X ein topologischer Vektorraum, $T \in X^* \setminus \{0\}$. Dann gilt:*

(a) $\operatorname{kern}(T)$ *ist Hyperebene.*

(b) Zu jeder Hyperebene $H \subset X$ existiert $T \in X^* \setminus \{0\}$ mit $\operatorname{kern}(T) = H$.

(c) T ist genau dann stetig, wenn $\operatorname{kern}(T)$ *abgeschlossen ist.*

(d) Jede Hyperebene, die nicht abgeschlossen ist, ist dicht.

Beweis.
(a) Wähle $x_0 \in X$ mit $Tx_0 = 1$. Setze für $x \in X$

$$h_x := x - (Tx)x_0, \quad \lambda_x := Tx.$$

Dann folgt $x = h_x + \lambda_x x_0, h_x \in \operatorname{kern}(T)$. Ist $x = \tilde{h}_x + \tilde{\lambda}_x x_0$ weitere Darstellung von x, so folgt $(\lambda_x - \tilde{\lambda}_x)x_0 = h_x - \tilde{h}_x \in \operatorname{kern}(T)$, also $\lambda_x = \tilde{\lambda}_x \Rightarrow h_x = \tilde{h}_x$.

(b) Es existiere $x_0 \in X$, so dass sich jedes $x \in X$ eindeutig darstellen lässt als $x = h_x + \lambda_x x_0$ mit $h_x \in H, \lambda_x \in \mathbb{K}$. Setze $Tx := \lambda_x$. Dann ist T linear und es gilt $\operatorname{kern}(T) = H$.

(c) $\Rightarrow$: Das ist klar, weil das Urbild abgeschlossener Mengen unter stetigen Abbildungen stets abgeschlossen ist und $\{0\}$ ein abgeschlossener Teilraum von $\mathbb{K}$ ist.

$\Leftarrow$: Aus Satz 3.12 folgt, dass $X/\operatorname{kern}(T)$ ein Hausdorffraum ist. Weiterhin ist $X/\operatorname{kern}(T)$ endlichdimensional. Aus Übungsaufgabe 3.19 folgt somit, dass $\tilde{T} : X/\operatorname{kern}(T) \to \mathbb{K} : x + \operatorname{kern}(T) \mapsto T(x)$ als Homomorphismus zwischen endlichdimensionalen Vektorräumen stetig ist. Da auch die kanonische Projektion $p : X \to X/\operatorname{kern}(T)$ wegen Satz 3.12 stetig ist, ist somit $T = \tilde{T} \circ p$ stetig.

(d) Sei H Hyperebene mit $H \neq \overline{H}$. Dann gilt

$$1 \leq \dim \overline{H}/H \leq \dim X/H = 1,$$

also $\dim \overline{H}/H = 1$. Daraus folgt $\overline{H} = H \oplus \operatorname{span}(\{x_0\})$. Andererseits gilt nach Voraussetzung $X = H \oplus \operatorname{span}(\{x_1\})$. Wären x_0, x_1 linear unabhängig, so wäre $X \supset H \oplus \operatorname{span}(\{x_0\}) \oplus \operatorname{span}(\{x_1\}) \supsetneqq H \oplus \operatorname{span}(\{x_1\}) = X$. ∎

Corollar 3.21 *Sei $T \in X^*$. Wir betrachten die Aussagen*

(a) $T \in X'$.

(b) T *ist in* 0 *stetig.*

(c) $\operatorname{kern}(T)$ *ist abgeschlossen.*

(d) T *ist beschränkt.*

Dann gilt: (a) $\Leftrightarrow$ *(b)* $\Leftrightarrow$ *(c)* $\Rightarrow$ *(d)*
Ist X *metrisierbar mit translationsinvarianter Metrik, so sind alle Aussagen äquivalent.*

Beweis.
Aus Satz 3.16 und Satz 3.20 folgt die Äquivalenz von (a), (b) und (c). Satz 3.17 enthält die Implikation (a) $\Rightarrow$ (d) im allgemeinen Fall und (d) $\Rightarrow$ (a), falls X metrisierbar mit translationsionvarianter Metrik. ■

3.2 Halbnormen und lokalkonvexe Räume

Das Ziel dieses Abschnitts ist es, Vektorraumtopologien zu konstruieren. Wir werden sehen, dass man aus jeder Familie von Halbnormen stets eine Vektorraumtopologie erklären kann, bzgl. der der gegebene Vektorraum zu einem lokalkonvexen topologischen Vektorraum wird, und dass umgekehrt jede lokalkonvexe Vektorraumtopologie auf diese Weise entsteht.

Definition 3.22 Sei X Vektorraum. Eine Abbildung $p : X \to \mathbb{R}$ heißt *Halbnorm*, falls

(a) $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$ für alle $\lambda \in \mathbb{K}$ und alle $x \in X$,

(b) $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ für alle $x, y \in X$.

Übungsaufgabe 3.23 Sei p eine Halbnorm auf X. Zeige, dass für alle $x, y \in X$ gilt:

(a) $|p(x) - p(y)| \leq p(x - y)$,

(b) $p(x) \geq 0$,

(c) $p(0) = 0$.

Beispiel 3.24 (a) Sei X beliebiger Vektorraum und $T \in X^*$. Dann ist $p(x) := |Tx|$ eine Halbnorm.

(b) Sei $X = C(\Omega)$, wobei Ω ein topologischer Raum ist. Für jedes $x \in \Omega$ ist $p_x(f) := |f(x)|$ eine Halbnorm.

(c) Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $X = \mathrm{Hol}(G)$ bzw. $X = C(G)$. Für kompaktes $K \subset G$ definiert $p_K(f) := \sup_{z \in K} |f(z)|$ eine Halbnorm.

Satz 3.25 *Sei X ein Vektorraum und p eine Halbnorm auf X. Dann ist für $r > 0$ die „Kugel“ $B_r(0) := \{x \in X : p(x) < r\}$ konvex, kreisförmig und absorbierend.*

Beweis.

(a) $B_r(0)$ ist konvex: Sei $\lambda \in [0, 1]$ und $x, y \in B_r(0)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} p(\lambda x + (1-\lambda)y) &\leq p(\lambda x) + p((1-\lambda)y) \\ &= \lambda p(x) + (1-\lambda)p(y) \\ &< \lambda r + (1-\lambda)r \\ &= r. \end{aligned}$$

(b) $B_r(0)$ ist kreisförmig: Sei $x \in B_r(0)$, $\lambda \in \mathbb{K}$ mit $|\lambda| \leq 1$. Dann gilt

$$p(\lambda x) = |\lambda| p(x) \leq p(x) < r.$$

Also ist $\lambda x \in B_r(0)$.

(c) $B_r(0)$ ist absorbierend: Sei $x \in X$. OBdA $p(x) \neq 0$. Setze $\varepsilon := r/p(x)$. Dann gilt $\varepsilon > 0$, und aus $|\lambda| \leq \varepsilon$ folgt, dass $p(\lambda x) = |\lambda| p(x) < r$. ■

Definition 3.26 Sei X Vektorraum, $E \subset X$ absorbierend. Dann ist

$$\mu_E : X \ni x \mapsto \inf\{\lambda > 0 : x \in \lambda E\} \in [0, \infty)$$

wohldefiniert und heißt *Minkowski-Funktional* von E.

Satz 3.27 *Sei $E \subset X$ konvex, absorbierend und kreisförmig. Dann ist μ_E eine Halbnorm auf X.*

Beweis. Aus der Definition von μ_E und der Kreisförmigkeit von E folgt, dass für $z \in X$ und $\lambda > \mu_E(z)$ stets $z \in \lambda E$ gilt. Für $x, y \in X$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ mit $\lambda > \mu_E(x)$ und $\mu > \mu_E(y)$ gilt also $x \in \lambda E$ und $y \in \mu E$. Es folgt

$$\frac{1}{\lambda + \mu}(x + y) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \frac{1}{\lambda} x + \frac{\mu}{\lambda + \mu} \frac{1}{\mu} y \in E,$$

da E konvex. Aber das bedeutet gerade, dass $\mu_E(x + y) \leq \lambda + \mu$. Also haben wir

$$\mu_E(x + y) \leq \inf_{\lambda > \mu_E(x),\, \mu > \mu_E(y)} \lambda + \mu = \mu_E(x) + \mu_E(y),$$

d.h. μ_E erfüllt die Dreiecksungleichung. Zum Nachweis der Homogenität sei zunächst $c > 0$. Dann gilt:

$$\mu_E(cx) = \inf\{\lambda > 0 : \frac{1}{\lambda}cx \in E\} \overset{\alpha:=\frac{\lambda}{c}}{=} \inf\{c\alpha > 0 : \frac{1}{\alpha}x \in E\} = c\mu_E(x).$$

Sei jetzt $c \in \mathbb{K}$ mit $|c| = 1$. Da E kreisförmig ist, gilt $E = \frac{1}{c}E$. Es folgt

$$\begin{aligned}
\mu_E(cx) &= \inf\{\lambda > 0 : \frac{1}{\lambda}cx \in E\} = \inf\{\lambda > 0 : \frac{1}{\lambda}x \in \frac{1}{c}E\} \\
&= \inf\{\lambda > 0 : \frac{1}{\lambda}x \in E\} \\
&= \mu_E(x) \\
&= |c|\mu_E(x).
\end{aligned}$$

Da sich jedes Element aus $\mathbb{K}$ schreiben lässt als Produkt einer positiven Zahl und einer Zahl mit Betrag eins, folgt die Behauptung. ■

Übungsaufgabe 3.28 Sei X ein Vektorraum und $E \subset X$ absorbierend, konvex und kreisförmig. Zeige:

(a) $\{x \in X : \mu_E(x) < 1\} \subset E \subset \{x \in X : \mu_E(x) \leq 1\}$.

(b) μ_E ist genau dann eine Norm, wenn E keinen nichttrivialen Unterraum von X enthält.

Übungsaufgabe 3.29 Sei X ein topologischer Vektorraum. Zeige:

(a) μ_E ist genau dann stetig, wenn μ_E in 0 stetig ist,

(b) μ_E ist genau dann stetig, wenn E eine Nullumgebung ist.

Der nächste Satz zeigt, dass man mittels einer beliebigen Familie von Halbnormen eine lokalkonvexe Vektorraumtopologie definieren kann.

Satz 3.30 *Sei X ein Vektorraum und $(p_i)_{i\in I}$ eine Familie von Halbnormen auf X. Dann existiert genau eine gröbste Vektorraumtopologie τ, bzgl. der alle p_i stetig sind. Der topologische Vektorraum (X, τ) ist lokalkonvex.*

Beweis.

Für $i \in I$ und $r > 0$ sei $B_i(r) := \{x \in X : p_i(x) < r\}$. Aus Satz 3.25 folgt, dass $B_i(r)$ konvex, absorbierend und kreisförmig ist. Für endliches $I' \subset I$ setze

$$B_{I'} := \bigcap_{i \in I'} B_i(1).$$

Aus Übungsaufgabe 2.2 wissen wir, dass $B_{I'}$ konvex und kreisförmig ist. Da I' endlich ist, ist $B_{I'}$ absorbierend. Sei

$$\mathcal{B} := \{rB_{I'} : r > 0,\ I' \subset I \text{ endlich}\}.$$

Es ist klar, dass $\mathcal{B}$ Nullumgebungsbasis einer lokalkonvexen Topologie τ auf X ist und dass τ die gröbste Topologie ist, bzgl. der alle p_i stetig sind. Wir zeigen, dass τ eine Vektorraumtopologie ist.

Stetigkeit der Vektoraddition $A : X \times X \ni (x, y) \mapsto x + y \in X$: Seien $x, y \in X$ beliebig und $B \in \mathcal{B}$. Setze $U := (x + \frac{1}{2}B) \times (y + \frac{1}{2}B)$. Dann ist U Umgebung von (x, y), und für $(x', y') = (x + \frac{1}{2}b_x, y + \frac{1}{2}b_y) \in U$ gilt $\frac{1}{2}b_x + \frac{1}{2}b_y \in B$, also

$$A(x', y') = x' + y' = x + y + \frac{1}{2}b_x + \frac{1}{2}b_y \in x + y + B.$$

Stetigkeit der Skalarmultiplikation $M : \mathbb{K} \times X \ni (\lambda, x) \mapsto \lambda x \in X$: Seien $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in X$, $B \in \mathcal{B}$. Da $\frac{1}{2}B$ absorbierend ist, gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $\mu x \in \frac{1}{2}B$ für alle $\mu \in \mathbb{K}$ mit $|\mu| \leq \varepsilon$. Setze

$$V := B_\varepsilon(\lambda) \times (x + \frac{1}{2(|\lambda| + \varepsilon)}B).$$

Dann ist V eine Umgebung von $(\lambda, x) \in \mathbb{K} \times V$, und für $(\lambda', x') = (\lambda', x + \frac{1}{2(|\lambda|+\varepsilon)}b) \in V$ gilt

$$\begin{aligned} M((\lambda', x')) &= \lambda' x' = \lambda x + \lambda'(x' - x) + (\lambda' - \lambda)x \\ &= \lambda x + \frac{\lambda'}{2(|\lambda| + \varepsilon)}b + (\lambda' - \lambda)x \\ &\in \lambda x + \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}B = \lambda x + B. \end{aligned}$$

■

In lokalkonvexen Räumen können Folgenkonvergenz, beschränkte Teilmengen und Stetigkeit linearer Abbildungen in einfacher Weise durch Halbnormen charakterisiert werden.

Satz 3.31 *Sei $(p_i)_{i \in I}$ eine Familie von Halbnormen auf dem Vektorraum X, und X trage die zugehörige lokalkonvexe Topologie. Dann gilt:*

(a) Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X konvergiert genau dann gegen $x \in X$, wenn für jedes $i \in I$ gilt: $\lim_{n\to\infty} p_i(x_n - x) = 0$.

(b) $E \subset X$ ist genau dann beschränkt, wenn für jedes $i \in I$ die Menge $p_i(E)$ beschränkt in $\mathbb{R}$ ist.

Beweis. Es werden im Folgenden die Bezeichnungen aus Satz 3.30 benutzt.

(a) $\Rightarrow$: Das folgt sofort aus Satz 3.30.

$\Leftarrow$: Sei $U \in \mathfrak{U}(x)$. Dann existiert per Konstruktion eine endliche Menge $I' \subset I$ und ein $r > 0$ mit $x + rB_{I'} \subset U$. Da nach Voraussetzung $p_i(x_n - x)$ für jedes $i \in I'$ gegen 0 konvergiert, existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $p_i(x_n - x) < r$ für alle $n > N$ und alle $i \in I'$. Damit ist dann

$$x_n \in x + rB_{I'} \subset U$$

für alle $n > N$. Also konvergiert $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen x.

(b) $\Rightarrow$: Sei $i \in I$ und $I' := \{i\}$. Da E beschränkt und $B_{I'}$ eine Nullumgebung ist, existiert ein $r > 0$ mit $E \subset rB_{I'} = B_i(r)$, was äquivalent zu $p_i(E) \subset [0, r)$ ist.

$\Leftarrow$: Sei $U \in \mathfrak{U}(0)$. Dann existiert per Konstruktion eine endliche Menge $I' \subset I$ und ein $r > 0$ mit $rB_{I'} \subset U$. Da $p_i(E)$ für alle $i \in I'$ beschränkt ist, existiert ein $s > 0$ mit $p_i(E) \subset [0, s]$ für alle $i \in I'$. Dann ist $E \subset sB_{I'} \subset \frac{s}{r}U$, womit die Beschränktheit von E gezeigt ist. ∎

Satz 3.32 *Seien X und Y lokalkonvexe Räume und $T : X \to Y$ eine lineare Abbildung. Die Topologie auf Y werde von der Halbnormfamilie $(q_j)_{j\in J}$ erzeugt. Dann sind äquivalent:*

(a) T ist stetig.

(b) Für jedes $j \in J$ ist $q_j \circ T$ eine stetige Halbnorm auf X.

Beweis. $\Rightarrow$: Das ist trivial.

$\Leftarrow$: Da eine lineare Abbildung wegen Satz 3.16 schon dann stetig ist, wenn sie stetig in 0 ist, und wegen Satz 3.30 eine Nullumgebungsbasis eines lokalkonvexen Raumes durch Schnitte und skalare Vielfache von Mengen der Form $B_j := \{y \in Y : q_j(y) < 1\}$ gegeben ist, reicht es aus zu zeigen, dass $T^{-1}(B_j)$ eine Nullumgebung in X ist. Es ist aber

$$T^{-1}(B_j) = T^{-1}(q_j^{-1}([0,1)) = (q_j \circ T)^{-1}([0,1))$$

und dies ist nach Voraussetzung eine Nullumgebung in X. ∎

Bemerkung 3.33 Ist X ein lokalkonvexer Vektorraum mit den erzeugenden Halbnormen $(p_i)_{i\in I}$, so überlegt man sich leicht, dass eine Halbnorm q auf X genau dann stetig ist, wenn eine endliche Teilmenge $I' \subset I$ und ein $C > 0$ existieren, so dass für alle $x \in X$ die Ungleichung

$$q(x) \leq C \max_{i\in I'} p_i(x)$$

erfüllt ist (benutze dazu Satz 3.30).

Es folgt mit dem oberen Satz und den dort angegebenen Bezeichnungen, dass $T : X \to Y$ genau dann stetig ist, wenn für jedes $j \in J$ ein $C_j > 0$ und endliches $I_j \subset I$ mit

$$(q_j \circ T)(x) \leq C_j \max_{i\in I_j} p_i(x)$$

für jedes $x \in X$ existieren.

Insbesondere ist $T \in X^*$ genau dann stetig, wenn ein $C > 0$ und endliches $I' \subset I$ existieren, so dass

$$|T(x)| \leq C \max_{i\in I'} p_i(x)$$

für jedes $x \in X$ ist. ■

Satz 3.30 macht keine Aussage darüber, ob die aus der Familie der Halbnormen konstruierte Topologie hausdorffsch ist. Für die Klärung dieser Frage benötigen wir eine weitere Definition.

Definition 3.34 Eine Familie $(p_i)_{i\in I}$ von Halbnormen auf X heißt *separierend*, falls es zu jedem $x \in X\backslash\{0\}$ ein $i \in I$ gibt mit $p_i(x) \neq 0$.

Übungsaufgabe 3.35 Sei $(p_i)_{i\in I}$ eine Familie von Halbnormen auf X und τ die gemäß Satz 3.30 definierte lokalkonvexe Topologie auf X. Zeige, dass $(p_i)_{i\in I}$ genau dann separierend ist, wenn τ hausdorffsch ist.

Corollar 3.36 *(a) Ist $(p_i)_{i\in I}$ eine separierende Familie von Halbnormen, so gibt es genau eine gröbste lokalkonvexe hausdorffsche Vektorraum-Topologie, bzgl. der alle p_i stetig sind.*

(b) Ist τ eine lokalkonvexe hausdorffsche Vektorraum-Topologie, so gibt es eine separierende Familie von stetigen Halbnormen, die τ erzeugt.

Beweis.

(a) Das folgt sofort aus Satz 3.30 und Übungsaufgabe 3.35.

(b) Wähle eine Nullumgebungsbasis aus absolut konvexen, absorbierenden Mengen und betrachte die zugehörige Familie der Minkowski-Funktionale. Aus Übungsaufgabe 3.29 folgt, dass diese stetig sind. Da τ hausdorffsch ist, gibt es zu jedem $x \neq 0$ eine absolut konvexe, absorbierende Nullumgebung U mit $x \notin U$. Daraus folgt sofort $\mu_U(x) \neq 0$. Es ist klar, dass die von diesem Minkowski-Funktional erzeugte Topologie mit τ übereinstimmt. ■

Damit sind wir in der Lage, das Metrisierbarkeitsproblem für lokalkonvexe topologische Vektorräume zu lösen.

Satz 3.37 *Für einen lokalkonvexen topologischen Verktorraum (X, τ) sind äquivalent:*

(a) τ ist metrisierbar.

(b) X ist hausdorffsch und besitzt eine abzählbare Nullumgebungsbasis.

(c) τ kann durch abzählbare separierende Familie stetiger Halbnormen erzeugt werden.

In diesem Fall kann die Metrik translationsinvariant gewählt werden.

Beweis.

(a) $\Rightarrow$ (b): Das ist klar, denn jeder metrische Raum ist hausdorffsch und besitzt eine abzählbare Nullumgebungsbasis.

(b) $\Rightarrow$ (c): Sei $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullumgebungsbasis aus absolut konvexen, absorbierenden Mengen. Dann sind die zugehörigen Minkowski-Funktionale μ_{B_n} Halbnormen, die τ erzeugen. Da X hausdorffsch ist, gibt es für jedes $x \neq 0$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $x \notin B_n$. Daraus folgt $\mu_{B_n}(x) \neq 0$. Also ist $(\mu_{B_n})_{n\in\mathbb{N}}$ separierend. Da jedes B_n eine Nullumgebung ist, folgt aus Übungsaufgabe 3.29, dass jedes μ_{B_n} stetig ist.

(c) $\Rightarrow$ (a): Sei τ durch $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ erzeugt. Definiere

$$d(x,y) := \sum_{n\in\mathbb{N}} 2^{-n} \frac{p_n(x-y)}{1+p_n(x-y)}. \tag{2}$$

Da $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ separierend ist, folgt aus $d(x,y) = 0$ sofort, dass $x = y$. Die Symmetrie $d(x,y) = d(y,x)$ ist offensichtlich. Beachte, dass für $0 \leq a \leq b$ gilt:

$$\frac{a}{1+a} \leq \frac{b}{1+b}.$$

Daraus folgt:

$$\frac{p_n(x-y)}{1+p_n(x-y)} \leq \frac{p_n(x-z)+p_n(z-y)}{1+p_n(x-z)+p_n(z-y)} \leq \frac{p_n(x-z)}{1+p_n(x-z)} + \frac{p_n(z-y)}{1+p_n(z-y)}.$$

Also ist d eine translationsinvariante Metrik, und es bleibt zu zeigen, dass d die Topologie τ erzeugt. Da jedes p_n stetig ist, ist auch die Abbildung

$$X \times X \ni (x,y) \mapsto p_n(x-y) \in [0, \infty)$$

stetig bzgl. der Produkttopologie $\tau \otimes \tau$. Die gleichmäßige Konvergenz der Reihe (2) impliziert, dass d stetig auf $(X \times X, \tau \otimes \tau)$ ist. Insbesondere ist $X \ni x \mapsto d(x, 0) \in [0, \infty)$ stetig auf (X, τ). Also ist

$$U_n := \{x \in X : d(x, 0) < \frac{2^{-n}}{n+1}\}$$

offen bzgl. τ. Daher ist jede Nullumgebung bzgl. d auch Nullumgebung bzgl. τ. Für die Umkehrung reicht es zu zeigen, dass

$$U_{\max(n,m)} \subset \{x \in X : p_m(x) < \frac{1}{n}\} =: B_{n,m},$$

denn die Mengen $(B_{n,m})_{n,m \in \mathbb{N}}$ sind eine Nullumgebungsbasis von τ. Sei $x \notin B_{n,m}$, d.h. es gilt $p_m(x) \geq \frac{1}{n}$. Dann folgt

$$\begin{aligned} d(0, x) &\geq 2^{-m} \frac{p_m(x)}{1 + p_m(x)} \\ &\geq 2^{-m} \frac{\frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n}} \\ &= 2^{-m} \frac{1}{n+1} \\ &\geq 2^{-\max(n,m)} \frac{1}{\max(n, m) + 1}, \end{aligned}$$

d.h. $x \notin U_{\max(n,m)}$. ■

Im nächsten Satz geben wir eine topologische Charakterisierung der normierbaren Räume.

Satz 3.38 *Sei (X, τ) ein topologischer Vektorraum. Dann sind äquivalent:*

(a) X ist normierbar.

(b) X ist lokal beschränkt, lokalkonvex und hausdorffsch.

Beweis.

$(a) \Rightarrow (b)$ ist klar, da die Mengen

$$B_r(0) = \{x \in X : \|x\| < r\}$$

eine Nullumgebungsbasis bilden und beschränkt und absolut konvex sind.

$(b) \Rightarrow (a)$ Sei U beschränkte Nullumgebung. Da X lokalkonvex ist, gibt es eine absolut konvexe, absorbierende Nullumgebung $V \subset U$.

Wir zeigen, dass das zu V gehörige Minkowski-Funktional eine Norm auf X ist. Aus Satz 3.27 wissen wir bereits, dass μ_V eine Halbnorm ist. Also bleibt zu zeigen, dass aus $\mu_V(x) = 0$ folgt, dass $x = 0$ ist. Sei also $x \in X$ mit $0 = \mu_V(x) = \inf\{\lambda > 0 : x \in \lambda V\}$. Dann gilt sicher $x \in \lambda V$ für alle $\lambda > 0$. Da V beschränkt ist, gibt es zu jeder Nullumgebung W ein λ, so dass $\lambda V \subset W$ ist, also insbesondere $x \in W$. Da nun X ein Hausdorff-Raum ist, muss schon $x = 0$ gelten, da 0 ebenfalls in jeder Nullumgebung W liegt. Damit ist die Behauptung gezeigt.

Es bleibt zu zeigen, dass die Topologie τ mit der von der Norm μ_V erzeugten Topologie τ_μ auf X übereinstimmt.

Das ist aber klar, denn in beiden Topologien bildet das System $\{\lambda V : \lambda > 0\}$ eine Nullumgebungsbasis, in τ wegen der Beschränktheit von V, in τ_μ per Konstruktion (siehe auch Übungsaufgabe 3.29). Dann folgt mit Übungsaufgabe 3.10, dass die Topologien übereinstimmen. ■

3.3 Beispiele lokalkonvexer Räume

In diesem Abschnitt werden metrisierbare lokalkonvexe Topologien auf Räumen stetiger und differenzierbarer Funktionen definiert. Wir werden im nächsten Kapitel weitere Räume kennenlernen, die nicht metrisierbar sind. Insbesondere der für die Distributionen grundlegende Raum der Testfunktionen wird sich als nicht-metrisierbar erweisen.

Allgemeine Voraussetzungen: $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sei offen, $K_1 \subset K_2 \subset \ldots$ sei eine aufsteigende Folge von Kompakta in $\mathbb{R}^n$ mit $K_i \subset K_{i+1}^\circ$ und

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i.$$

Beachte, dass es zu jedem Kompaktum $K \subset \Omega$ ein $i \in \mathbb{N}$ gibt mit $K \subset K_i$.

3.3.1 Der Raum $C(\Omega)$ der stetigen Funktionen

Sei

$$C(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{C} : f \text{ ist stetig}\}.$$

Wir definieren eine abzählbare Familie von Halbnormen auf $C(\Omega)$ durch

$$p_i(f) := \sup\{|f(x)| : x \in K_i\}, \quad i \in \mathbb{N}.$$

Offenbar ist diese Familie separierend, erzeugt also eine metrisierbare, lokalkonvexe Vektorraumtopologie auf $C(\Omega)$. Eine Folge konvergiert genau dann in diesem Raum, wenn sie lokal gleichmäßig konvergiert. Sei

$$B_i(r) := \{f \in C(\Omega) : p_i(f) < r\}. \tag{3}$$

Dann ist $\{B_i(1/j) : i, j \in \mathbb{N}\}$ eine abzählbare Nullumgebungsbasis dieser Topologie.

Behauptung 3.39 Der metrische Raum $C(\Omega)$ ist ein Fréchet-Raum (vgl. Definition 3.11.(c)).

Beweis. Ist $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $C(\Omega)$, so ist $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ für jedes $x \in \Omega$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{K}$, also ist der punktweise Limes $f(x) = \lim_{n\to\infty}(f_n(x))$ wohldefiniert, und wir haben oben bereits gesehen, dass Konvergenz in $C(\Omega)$ bedeutet, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sogar lokal gleichmäßig konvergiert. Da der lokal gleichmäßige Limes stetiger Funktionen wieder stetig ist, gilt $f \in C(\Omega)$ und $f_n \to f$ in $C(\Omega)$. ■

Allerdings ist $C(\Omega)$ *nicht* normierbar, denn kein $B_i(r)$ ist beschränkt. Andernfalls gäbe es ein $\lambda > 0$ mit $p_{i+1}(B_i(r)) \subset [0, \lambda]$, d.h. wenn $f \in C(\Omega)$ auf K_i durch r beschränkt ist, so ist f auf K_{i+1} durch λ beschränkt. Das ist absurd, denn man kann stets ein $f \in C(\Omega)$ finden mit $f \equiv 0$ auf K_i und $|f(x_0)| > \lambda$ für ein $x_0 \in K_{i+1} \setminus K_i$. Für ein solches f gilt $p_i(f) = 0$, aber $p_{i+1}(f) > \lambda$.

3.3.2 Der Raum $C^m(\Omega)$ der m-mal stetig differenzierbaren Funktionen

Sei

$$C^m(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{C} : f \text{ ist } m\text{-mal stetig differenzierbar}\}.$$

Wir definieren eine abzählbare, separierende Familie von Halbnormen durch

$$p_{i,m}(f) := \sup\{|\partial^\alpha f(x)| : x \in K_i, |\alpha| \le m\}.$$

Somit wird $C^m(\Omega)$ zu einem metrisierbaren, lokalkonvexen Raum. Setzt man

$$B_{i,m}(r) := \{f \in C^m(\Omega) : p_{i,m}(f) < r\}, \tag{4}$$

so ist eine abzählbare Nullumgebungsbasis von $C^m(\Omega)$ gegeben durch

$$\{B_{i,m}(\frac{1}{j}) : i, j \in \mathbb{N}\}.$$

Ferner konvergiert eine Folge $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ aus $C^m(\Omega)$ genau dann gegen ein f in $C^m(\Omega)$, falls für jeden Multiindex α mit $|\alpha| \le m$ die Folge $(\partial^\alpha f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ lokal gleichmäßig gegen $\partial^\alpha f$ konvergiert.

Die so definierte Topologie auf $C^m(\Omega)$ ist feiner als die Spurtopologie bzgl. $C(\Omega)$, denn $f_j \to f$ in $C(\Omega)$ impliziert im Allgemeinen nicht $f_j \to f$ in $C^m(\Omega)$.

Behauptung 3.40 Für jeden Multiindex α mit $|\alpha| \leq m$ ist die lineare Abbildung

$$\partial^\alpha : C^m(\Omega) \to C(\Omega), \quad f \mapsto \partial^\alpha f$$

stetig.

Beweis.
Für $f \in C^m(\Omega)$ gilt

$$p_i(\partial^\alpha f) = \sup\{|\partial^\alpha f(x)| : x \in K_i\} \leq p_{i,m}(f).$$

Da i beliebig war, folgt aus Bemerkung 3.33 sofort die Stetigkeit von ∂^α. ∎

Übungsaufgabe 3.41 Zeige, dass $C^m(\Omega)$ bzgl. der in Abschnitt 3.3.2 definierten Topologie ein Fréchet-Raum ist.

3.3.3 Der Raum $C^\infty(\Omega)$ der beliebig oft differenzierbaren Funktionen

Sei

$$C^\infty(\Omega) = \bigcap_{m=0}^{\infty} C^m(\Omega).$$

Wir definieren eine Familie von Halbnormen durch

$$p_i^\infty(f) := \sup\{|\partial^\alpha f(x)| : x \in K_i, |\alpha| \leq i\}, \quad i \in \mathbb{N}.$$

Wie in Abschnitt 3.3.2 sieht man, dass $C^\infty(\Omega)$ ein nicht normierbarer Fréchet-Raum ist, und dass $\partial^\alpha : C^\infty(\Omega) \to C^\infty(\Omega)$ für jedes $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ stetig ist.

Satz 3.42 *Für $E \subset C^\infty(\Omega)$ sind äquivalent:*

(a) E ist beschränkt.

(b) Für jedes $i \in \mathbb{N}$ ist $\{p_i^\infty(f) : f \in E\}$ eine beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$.

(c) $\forall m \in \mathbb{N}$, $K \subset \Omega$ kompakt $\exists M \geq 0$ $\forall |\alpha| \leq m$ $\forall x \in K$ $\forall f \in E$:

$$|\partial^\alpha f(x)| \leq M.$$

Beweis. Wegen Satz 3.31 sind (a) und (b) äquivalent.
(b)⇒(c): Zu $m \in \mathbb{N}$ und kompaktem $K \subset \Omega$ wähle $i \in \mathbb{N}$ so groß, dass $i \geq m$ und $K_i \supset K$. Sei $M := \sup\{p_i^\infty(f) : f \in E\}$. Dann gilt für $|\alpha| \leq m$, $x \in K$, $f \in E$:

$$|\partial^\alpha f(x)| \leq p_i^\infty(f) \leq M.$$

(c)⇒(b): Sei $i \in \mathbb{N}$. Da K_i kompakt ist, gibt es nach Voraussetzung ein $M \geq 0$ mit $|\partial^\alpha f(x)| \leq M$ für alle $x \in K_i$, $|\alpha| \leq i$, $f \in E$. Das ist äquivalent zu $p_i^\infty(E) \subset [0, M]$ für alle $i \in \mathbb{N}$. ∎

3.3.4 Die Räume $C_K^m(\Omega)$ und $C_K^\infty(\Omega)$ der differenzierbaren Funktionen mit Träger in einem festen Kompaktum

Sei $m \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ und $K \subset \Omega$ kompakt. Dann setzen wir

$$C_K^m(\Omega) = \{f \in C^m(\Omega) : \operatorname{supp}(f) \subset K\}.$$

Für $j \in \mathbb{N}_0$ und $f \in C_K^j(\Omega)$ sei

$$p_{j,K}(f) := \sup\{|\partial^\alpha f(x)| : x \in K, |\alpha| \leq j\}. \tag{5}$$

Wir topologisieren $C_K^m(\Omega)$ durch die Halbnormen $(p_{j,K})_{j \leq m}$ im Fall $m \neq \infty$ und $(p_{j,K})_{j \in \mathbb{N}_0}$ andernfalls.

Übungsaufgabe 3.43 Zeige:

(a) $C_K^m(\Omega) \subset C^m(\Omega)$ ist abgeschlossen.

(b) Für $m \in \mathbb{N}$ ist jedes $p_{i,K}$, $i \leq m$, eine Norm auf $C_K^m(\Omega)$.

(c) Ist $m < \infty$, so ist $C_K^m(\Omega)$ ein Banachraum.

(d) Die Topologie auf $C_K^\infty(\Omega)$ ist nicht normierbar.

(e) Für $\ell \geq m \geq 0$ ist die identische Abbildung von $C^\ell(\Omega)$ nach $C^m(\Omega)$ stetig.

4 Testfunktionen und Distributionen

Mathematical proofs, like diamonds, are hard as well as clear, and will be touched with nothing but strict reasoning.

John Locke in **Second reply to the Bishop of Worcester**

Eine Distribution ist per Definition ein stetiges lineares Funktional auf dem Raum $C_c^\infty(\Omega)$ der Testfunktionen, wobei die Stetigkeit sich auf die sog. strikte induktive Limes-Topologie bezieht, die im Abschnitt 4.1 eingeführt wird. Wir werden in Abschnitt 4.2 sehen, dass Stetigkeit und Beschränktheit bzgl. dieser Topologie durch entsprechende Eigenschaften der bereits in Abschnitt 3.3 betrachteten Topologien charakterisiert werden können. Die Formel über partielle Integration liefert die Motivation für die Definition der Ableitung einer Distribution (Abschnitt 4.3), und es zeigt sich, dass sich die üblichen Rechenregeln für Ableitungen von Funktionen auf Distributionen übertragen. Den Raum der Distributionen, d.h. den Dualraum von $C_c^\infty(\Omega)$, topologisieren wir in Abschnitt 4.4 durch die sog. schwach-*-Topologie. Damit kann Konvergenz von Distributionen auf einfache Weise durch Funktionen aus $C_c^\infty(\Omega)$ „getestet“ werden. In Abschnitt 4.5 erklären wir das Produkt aus einer glatten Funktion und einer Distribution, das es uns später (siehe Definition 5.18) erlaubt, Differentialoperatoren mit glatten Koeffizientenfunktionen als Abbildungen im Raum der Distributionen aufzufassen. Schließlich verallgemeinern wir in Abschnitt 4.6 den Begriff des Trägers einer Funktion auf Distributionen, um in Kapitel 5 den Raum der Distributionen mit kompaktem Träger zu untersuchen.

Im gesamten Kapitel bezeichnet Ω eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$. Wir schreiben im Folgenden $K \Subset \Omega$, falls $K \subset \Omega$ und K kompakt ist.

4.1 Der Raum $\mathcal{D}(\Omega)$ der Testfunktionen

In Abschnitt 3.3 wurden bereits einige Räume stetiger und differenzierbarer Funktionen durch abzählbare Familien von Halbnormen topologisiert. Der wichtigste Raum

$$C_c^\infty(\Omega) = \bigcup_{K \Subset \Omega} C_K^\infty(\Omega)$$

aller beliebig oft differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger kann allerdings nicht auf vernünftige Weise mittels einer *abzählbaren* Familie von Halbnormen topologisiert werden, vgl. Übungsaufgabe 4.2. Es ist daher eine zusätzliche topologische Konstruktion, die der *strikten induktiven Limes-Topologie*, notwendig, um auf $C_c^\infty(\Omega)$ eine geeignete Topologie zu erklären. Der Nachteil dieser Topologie liegt darin, dass sie nicht metrisierbar ist, was in Übungsaufgabe 4.6 gezeigt werden soll. Dieses Manko ist allerdings verschmerzbar, denn wir werden sehen, dass die Stetigkeit und die Beschränktheit in $C_c^\infty(\Omega)$ in einfacher Weise durch die entsprechenden Eigenschaften in $C_K^\infty(\Omega)$ charakterisiert werden können.

Obwohl induktive Limes-Topologien in größerer Allgemeinheit erklärt werden könnten, beschränken wir uns hier auf den für die Distributionen ausreichenden Spezialfall.

In Abschnitt 3.3.4 haben wir die Topologie τ_K auf $C_K^\infty(\Omega)$ erklärt durch die Halbnormen

$$p_{m,K}(\phi) := \sup\{|\partial^\alpha \phi(x)| : x \in K, |\alpha| \leq m\}, \quad m \in \mathbb{N}_0.$$

Damit definieren wir ein Mengensystem $\mathcal{B} \subset \operatorname{Pot}(C_c^\infty(\Omega))$ wie folgt: $U \in \mathcal{B}$, falls U absolut konvex ist, und $U \cap C_K^\infty(\Omega)$ für jedes $K \Subset \Omega$ eine Nullumgebung in $C_K^\infty(\Omega)$ ist. Es folgt:

- $\mathcal{B}$ ist Nullumgebungsbasis einer lokalkonvexen Topologie τ auf $C_c^\infty(\Omega)$.
- τ ist die feinste lokal konvexe Topologie auf $C_c^\infty(\Omega)$, so dass für jedes $K \Subset \Omega$ die identische Abbildung $\mathrm{id} : C_K^\infty(\Omega) \to C_c^\infty(\Omega)$ stetig ist.
- Die Spurtopologie auf $C_K^\infty(\Omega)$ bezüglich $C_c^\infty(\Omega)$ ist τ_K.
- Für $K \Subset \Omega$ und $r > 0$ ist $U := \{\phi \in C_c^\infty(\Omega) : p_{m,K}(\phi) < r\}$ Nullumgebung in $C_c^\infty(\Omega)$, denn für $K' \Subset \Omega$ gilt $\{\phi \in C_{K'}^\infty(\Omega) : p_{m,K'}(\phi) < r\} \subset U \cap C_{K'}^\infty(\Omega)$.

Definition 4.1 (a) τ heißt *strikte induktive Limes-Topologie* der $(\tau_K)_{K \Subset \Omega}$.

(b) $\mathcal{D}(\Omega) := C_c^\infty(\Omega)$, ausgestattet mit der Topologie τ heißt der *Raum der Testfunktionen auf* Ω.

(c) Statt $C_K^\infty(\Omega)$ schreiben wir im Folgenden $\mathcal{D}_K(\Omega)$ oder $\mathcal{D}_K$.

Übungsaufgabe 4.2 Definiere für $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$

$$|\phi|_m := \max\{|\partial^\alpha \phi(x)| : x \in \Omega, |\alpha| \leq m\}, \quad m \in \mathbb{N}_0.$$

Dann ist $(|\cdot|_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ eine abzählbare separierende Familie von Normen und erzeugt somit eine lokalkonvexe, metrisierbare Topologie auf $\mathcal{D}(\Omega)$. Zeige, dass der so erklärte metrische Raum nicht vollständig ist.

Satz 4.3 *Sei Y ein lokalkonvexer topologischer Vektorraum. Eine lineare Abbildung $T : \mathcal{D}(\Omega) \to Y$ ist genau dann stetig, wenn $T_{\restriction \mathcal{D}_K(\Omega)}$ für jedes $K \Subset \Omega$ stetig auf $\mathcal{D}_K(\Omega)$ ist.*

Beweis.

Für $K \Subset \Omega$ sei $T_K := T_{\restriction \mathcal{D}_K(\Omega)}$. Offenbar gilt für $V \subset Y$

$$T_K^{-1}(V) = \{\phi \in \mathcal{D}_K : T(\phi) \in V\} = T^{-1}(V) \cap \mathcal{D}_K. \tag{6}$$

$\Rightarrow$: Es genügt zu zeigen, dass T_K in 0 stetig ist. Sei V eine absolut konvexe Nullumgebung in Y. Da T stetig in 0 ist, ist $T^{-1}(V)$ eine Nullumgebung von $\mathcal{D}(\Omega)$. Also ist (per

Definition) $T^{-1}(V) \cap \mathcal{D}_K(\Omega)$ eine Nullumgebung in $\mathcal{D}_K(\Omega)$. Wegen (6) ist $T_K^{-1}(V)$ eine Nullumgebung in $\mathcal{D}_K(\Omega)$ und T_K somit stetig.

$\Leftarrow$: Es sei jedes T_K stetig auf $\mathcal{D}_K(\Omega)$, und $V \subset Y$ sei eine absolut konvexe Nullumgebung in Y. Dann ist $T_K^{-1}(V)$ für jedes $K \Subset \Omega$ eine Nullumgebung in $\mathcal{D}_K(\Omega)$. Aber wegen (6) bedeutet das gerade, dass $T^{-1}(V)$ eine Nullumgebung in $\mathcal{D}(\Omega)$ ist. ∎

Auch die Beschränktheit einer Teilmenge von $\mathcal{D}(\Omega)$ lässt sich in einfacher Weise auf Beschränktheit in $\mathcal{D}_K$ zurückspielen.

Satz 4.4 *$E \subset \mathcal{D}(\Omega)$ ist genau dann beschränkt, wenn folgende beiden Bedingungen erfüllt sind:*

(a) Es gibt ein $K \Subset \Omega$ mit $E \subset \mathcal{D}_K$.

(b) E ist in $\mathcal{D}_K$ beschränkt.

Beweis. $\Rightarrow$: Sei $E \subset \mathcal{D}(\Omega)$ beschränkt. Angenommen, es gilt $E \not\subset \mathcal{D}_K$ für alle $K \Subset \Omega$. Wir wählen eine aufsteigende Folge $K_j \Subset \Omega$ mit $K_j \subset K_{j+1}^\circ$ und $\bigcup_{j=1}^\infty K_j = \Omega$. Dann gibt es für jedes $j \in \mathbb{N}$ ein $\phi_j \in E$ mit $\operatorname{supp}(\phi_j) \not\subset K_j$. Also gibt es $x_j \in \Omega \setminus K_j$ mit $\alpha_j := \phi_j(x_j) \neq 0$, und nach Konstruktion besitzt die Folge $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ keinen Häufungspunkt in Ω. Setze

$$U := \{\phi \in \mathcal{D}(\Omega) : |\phi(x_j)| < \frac{|\alpha_j|}{j} \forall j \in \mathbb{N}\}.$$

Ist nun $K \Subset \Omega$, so gibt es ein $n_K \in \mathbb{N}$ mit $x_j \notin K$ für alle $j > n_K$. Mit $\varepsilon_K := \min_{1\le j\le n_K} |\alpha_j|/n_K$ folgt trivialerweise

$$U \cap \mathcal{D}_K \supset \{\phi \in \mathcal{D}_K : \sup_{x\in K} |\phi(x)| \le \varepsilon_K\} = \{\phi \in \mathcal{D}_K : p_{0,K}(\phi) < \varepsilon_K\}.$$

Also ist $U \cap \mathcal{D}_K$ für jedes $K \Subset \Omega$ eine Nullumgebung in $\mathcal{D}_K$, d.h. U ist Nullumgebung in $\mathcal{D}(\Omega)$. Wegen $|\phi_j(x_j)|/j = |\alpha_j|/j$ gilt $\phi_j/j \notin U$, d.h. wir haben $E \not\subset jU$. Daher kann E nicht beschränkt sein, im Widerspruch zur Voraussetzung. Also gilt doch $E \subset \mathcal{D}_K$ für ein $K \Subset \Omega$, und (a) ist gezeigt.

Zum Nachweis von (b) sei V eine Nullumgebung in $\mathcal{D}_K$. Dann gibt es $m \in \mathbb{N}_0$ und $r > 0$ mit $V \supset \{\phi \in \mathcal{D}_K : p_{m,K}(\phi) < r\}$. Da $U := \{\phi \in \mathcal{D}(\Omega) : p_{m,K}(\phi) < r\}$ eine Nullumgebung in $\mathcal{D}(\Omega)$ ist, und E beschränkt in $\mathcal{D}(\Omega)$ ist, gibt es $\lambda > 0$ mit $E \subset \lambda U$. Wegen $U \cap \mathcal{D}_K \subset V$ folgt

$$E = E \cap \mathcal{D}_K \subset \lambda U \cap \mathcal{D}_K = \lambda(U \cap \mathcal{D}_K) \subset \lambda V.$$

Also ist E auch in $\mathcal{D}_K(\Omega)$ beschränkt.

$\Leftarrow$: Sei U Nullumgebung in $\mathcal{D}(\Omega)$ und wähle $K \Subset \Omega$ so, dass E in $\mathcal{D}_K$ enthalten und dort beschränkt ist. Da $U \cap \mathcal{D}_K$ eine Nullumgebung in $\mathcal{D}_K$ ist, gibt es $\lambda > 0$ mit $E \subset \lambda(U \cap \mathcal{D}_K) \subset \lambda U$. ∎

Satz 4.5 *Eine Folge $(\phi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{D}(\Omega)$ ist genau dann Nullfolge, wenn die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind:*

(a) Es gibt $K \Subset \Omega$ mit $\operatorname{supp}(\phi_j) \subset K$ für alle $j \in \mathbb{N}$ (d.h. es gilt $\{\phi_j : j \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{D}_K$).

(b) Für jedes $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ konvergiert $(\partial^\alpha \phi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ lokal gleichmäßig gegen Null (d.h. es gilt $\phi_j \to 0$ in $\mathcal{D}_K$).

Beweis.

$\Rightarrow$: Sei $(\phi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge in $\mathcal{D}(\Omega)$. Dann ist $\{\phi_j : j \in \mathbb{N}\}$ beschränkt nach Übungsaufgabe 3.15, und aus Satz 4.4 folgt (a). Da die Spurtopologie auf $\mathcal{D}_K$ bezüglich $\mathcal{D}(\Omega)$ mit τ_K übereinstimmt, folgt $\phi_j \to 0$ in $\mathcal{D}_K$, d.h. (b) ist gezeigt.

$\Leftarrow$: (a) und (b) besagen, dass $\phi_j \in \mathcal{D}_K$ für alle $j \in \mathbb{N}$ und $\phi_j \to 0$ in $\mathcal{D}_K$. Da $\mathrm{id} : \mathcal{D}_K \to \mathcal{D}(\Omega)$ stetig ist, folgt die Behauptung. ■

Übungsaufgabe 4.6 Zeige, dass die Topologie auf $\mathcal{D}(\Omega)$ nicht metrisierbar ist.

Bemerkung 4.7 Völlig analog zur Konstruktion der strikten induktiven Limes-Topologie auf $\mathcal{D}(\Omega)$ kann man vorgehen, um für $m \in \mathbb{N}_0$ den Raum

$$\mathcal{D}^m(\Omega) := C_c^m(\Omega) = \bigcup_{K \Subset \Omega} C_K^m(\Omega)$$

zu topologisieren. Dies führt zur strikten induktiven Limes-Topologie auf $\mathcal{D}^m(\Omega)$ als die feinste lokalkonvexe Topologie, bezüglich der für jedes $K \Subset \Omega$ die Abbildung $\mathrm{id} : \mathcal{D}_K^m \mapsto \mathcal{D}^m(\Omega)$ stetig ist. Satz 4.3, Satz 4.4 und Satz 4.5 übertragen sich sinngemäß. Auch diese Topologie erweist sich als nicht metrisierbar.

Beispiel 4.8 Wir definieren $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ durch

$$\phi(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-|x|^2}}, & |x| < 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Offenbar gilt $\operatorname{supp}(\phi) = \overline{B_1(0)}$.

(a) Sei $\phi_j(x) := \phi(x)/j$. Dann gilt $\phi_j \to 0$ in $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, denn die Bedingungen (a) und (b) aus Satz 4.5 sind offensichtlich erfüllt.

(b) Sei $\phi_j(x) := \phi(x/j)/j$. Dann gilt $\operatorname{supp}(\phi_j) = \overline{B_j(0)}$. Also gibt es kein $K \Subset \mathbb{R}^n$ mit $\operatorname{supp}(\phi_j) \subset K$ für alle $j \in \mathbb{N}$. Die Folge $(\phi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ konvergiert daher nicht in $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

(c) Sei $\phi_j(x) := \frac{1}{j}\phi(jx)$ konvergiert nicht gegen 0, da die partiellen Ableitungen nicht punktweise gegen 0 konvergieren, also erst recht nicht lokal gleichmäßig.

4.2 Distributionen

Definition 4.9 Ein stetiges lineares Funktional auf $\mathcal{D}(\Omega)$ heißt *Distribution.*

Die Distributionen sind also genau der Vektorraum $\mathcal{D}'(\Omega)$. Der folgende Satz charakterisiert die Stetigkeit eines Funktionals $T \in \mathcal{D}^*(\Omega)$ u.a. durch die Normen

$$|\phi|_m := \sup\{|\partial^\alpha \phi(x)| : x \in \Omega, |\alpha| \leq m\}, \quad m \in \mathbb{N}_0,$$

auf $\mathcal{D}(\Omega)$ und wird später dazu verwendet werden, um konkrete Funktionale als Distributionen zu erkennen.

Satz 4.10 *Für $T \in \mathcal{D}^*(\Omega)$ sind äquivalent*

(a) T ist eine Distribution.

(b) Für jedes $K \Subset \Omega$ existiert ein $m_K \in \mathbb{N}$ und ein $C_K \geq 0$, so dass für alle $\phi \in \mathcal{D}_K(\Omega)$ gilt

$$|T(\phi)| \leq C_K |\phi|_{m_K}. \tag{7}$$

(c) Für jede Folge $(\phi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{D}(\Omega)$ mit $\phi_j \to 0$ in $\mathcal{D}(\Omega)$ gilt $T(\phi_j) \to 0$ in $\mathbb{K}$.

Beweis.

Wegen Satz 4.3 und Bemerkung 3.33 sind (a) und (b) äquivalent. Da (a) trivialerweise (c) impliziert, ist noch zu zeigen:

(c)⇒(a): Wegen Satz 4.3 ist T genau dann stetig, wenn für jedes $K \Subset \Omega$ die Einschränkung $T_{\restriction \mathcal{D}_K}$ stetig ist. Da $\mathcal{D}_K(\Omega)$ ein Fréchet-Raum und T linear ist, reicht es aus zu zeigen, dass $T_{\restriction \mathcal{D}_K}$ Nullfolgen in Nullfolgen überführt. Sei also $(\phi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge in $\mathcal{D}_K(\Omega)$. Dann ist $T_{\restriction \mathcal{D}_K}(\phi_j) = T(\phi_j) \to 0$. Damit ist die Stetigkeit von T gezeigt. ■

Übungsaufgabe 4.11 Zeige, dass für jedes $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ die Abbildung $\partial^\alpha : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathcal{D}(\Omega)$ stetig ist.

Definition 4.12 Falls es ein $m \in \mathbb{N}_0$ gibt, so dass für jedes $K \Subset \Omega$ ein $C_K \geq 0$ existiert mit $|T(\phi)| \leq C_K|\phi|_m$ für alle $\phi \in \mathcal{D}_K(\Omega)$, so sagt man, dass T *von endlicher Ordnung* ist. Das kleinste solche m heißt die *Ordnung der Distribution.* Andernfalls heißt T *von unendlicher Ordnung.*

Beispiel 4.13 Für $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ sei

$$T_f : \mathcal{D}(\Omega) \ni \phi \mapsto \int\limits_\Omega \phi f \,\mathrm{d}x \in \mathbb{K}.$$

Dann gilt sicher $T \in \mathcal{D}^*(\Omega)$. Für $K \Subset \Omega$ sei $C_K := \int_K |f| \, \mathrm{d}x$. Damit erhalten wir für $\phi \in \mathcal{D}_K(\Omega)$ die Abschätzung

$$|T_f(\phi)| \leq \int\limits_K |\phi f| \mathrm{d}x \leq \sup\{|\phi(x)| : x \in \Omega\} \int_K |f| \, \mathrm{d}x = C_K |\phi|_0.$$

Daher ist T_f eine Distribution der Ordnung 0. Somit umfasst die Menge der Distributionen alle lokal integrierbaren Funktionen. Wir werden in Satz 4.45 sehen, dass verschiedene L^1_{loc} Funktionen verschiedene Distributionen erzeugen.

Definition 4.14 (a) $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ heißt *regulär*, falls es ein $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ gibt mit $T = T_f$.

(b) Statt $T(\phi)$ schreiben wir im Folgenden $\langle T, \phi \rangle$ und falls $T = T_f$ mit $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ auch $\langle f, \phi \rangle$ statt $T_f(\phi)$.

Beispiel 4.15 Für $\xi \in \Omega$ sei

$$T_\xi : \mathcal{D}(\Omega) \ni \phi \mapsto \phi(\xi) \in \mathbb{K}.$$

Dann ist T_ξ offenbar linear. Weil $\phi_j \to 0$ in $\mathcal{D}(\Omega)$ insbesondere die punktweise Konvergenz impliziert, gilt $T_\xi \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Trivialerweise gilt $|T_\xi(\phi)| \leq |\phi|_0$. Also ist T_ξ eine Distribution der Ordnung 0. Man nennt sie die *Diracsche Delta-Distribution bei* ξ und schreibt δ_ξ statt T_ξ und δ statt δ_0. Aus Übungsaufgabe 1.1 folgt, dass δ_ξ nicht regulär ist.

Die Diracsche Delta-Distribution ist ein Spezialfall der Klasse der Distributionen, die von regulären Radonmaßen erzeugt werden:

Beispiel 4.16 Sei μ ein reguläres Radonmaß auf Ω, d.h. μ ist ein Borelmaß mit den beiden Eigenschaften

(a) Für jedes $K \Subset \Omega$ gilt $\mu(K) < \infty$.

(b) Für jede Borelmenge $E \subset \Omega$ gilt

$$\begin{aligned} \mu(E) &= \sup\{\mu(K) : K \subset E, K \text{ kompakt}\} \\ &= \inf\{\mu(U) : U \supset E, U \text{ offen}\}. \end{aligned}$$

Dann definiert

$$T_\mu : \mathcal{D}(\Omega) \ni \phi \mapsto \int_\Omega \phi \, \mathrm{d}\mu \in \mathbb{K}$$

eine Distribution der Ordnung 0, die *positivitätserhaltend* in dem Sinn ist, dass aus $\phi \geq 0$ stets $T(\phi) \geq 0$ folgt. Man kann allgemein zeigen, dass jedes positivitätserhaltende Funktional auf $C_c(\Omega)$ von einem regulären Radonmaß erzeugt wird. Dies ist Aussage des Rieszschen Darstellungssatzes. Einen Beweis findet man z.B. in [Rud66] oder in [RS80].

Beispiel 4.17 Setzt man für $\xi \in \Omega$ und $E \subset \Omega$ Borel-messbar

$$\mu_\xi(E) := \begin{cases} 1, & \text{falls } \xi \in E, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

so ist μ_ξ ein reguläres Radonmaß, und es gilt $T_{\mu_\xi} = \delta_\xi$. Deshalb heißt μ_ξ das *Diracmaß bei* ξ.

Als nächstes sehen wir eine Distribution, die weder positivitätserhaltend noch regulär ist.

Beispiel 4.18 Sei $T : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \ni \phi \mapsto \phi'(0) \in \mathbb{K}$. Dann gilt

$$|T(\phi)| = |\phi'(0)| \leq |\phi|_1,$$

und man sieht leicht ein, dass eine analoge Ungleichung mit $|\cdot|_0$ statt $|\cdot|_1$ nicht gelten kann. Also ist T eine Distribution der Ordnung eins. Offenbar ist T *nicht* positivitätserhaltend. Daher kann es kein reguläres Radonmaß μ geben mit $T = T_\mu$.

Etwas allgemeiner definiert für $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ die Abbildung

$$T : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \ni \phi \mapsto (\partial^\alpha \phi)(0) \in \mathbb{K}$$

eine singuläre Distribution der Ordnung $|\alpha|$.

Beim Umgang mit Distributionen muss man immer die zu Grunde liegende Menge Ω beachten:

Beispiel 4.19 Sei

$$f : \mathbb{R} \ni x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases} \in \mathbb{R}.$$

Dann definiert f *keine* Distribution, weil f auf keiner Umgebung von 0 integrierbar ist. Wir werden in Beispiel 4.24 sehen, wie man trotzdem f als Element von $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ auffassen kann.

Andererseits gilt für $g := f_{\restriction(0,\infty)}$ sogar $g \in C^\infty(0,\infty) \subset L^1_{\text{loc}}(0,\infty)$, d.h. g definiert eine reguläre Distribution der Ordnung 0 auf $(0,\infty)$.

4.3 Ableitungen von Distributionen

Motivation: Sei $f \in C^1(\mathbb{R})$, $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Dann gilt:

$$\langle f', \phi\rangle = \int\limits_{\mathbb{R}} f'\phi \mathrm{d}x = -\int\limits_{\mathbb{R}} f\phi' \mathrm{d}x = -\langle f, \phi'\rangle.$$

Dies gibt Anlass zur folgenden Definition:

Definition 4.20 Für $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ und $1 \leq k \leq n$ definiert man $\partial_k T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ durch

$$\langle \partial_k T, \phi\rangle := -\langle T, \partial_k \phi\rangle, \quad \phi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

sowie für $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$:

$$\langle \partial^\alpha T, \phi\rangle := (-1)^{|\alpha|}\langle T, \partial^\alpha \phi\rangle, \quad \phi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Im Gegensatz zu klassischen Ableitungen ist bei Distributionenableitungen die Differentiationsreihenfolge immer gleichgültig, denn für $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$, $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ und $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ gilt

$$\begin{aligned} \langle \partial^\alpha(\partial^\beta T), \phi\rangle &= (-1)^{|\alpha|}\langle \partial^\beta T, \partial^\alpha \phi\rangle \\ &= (-1)^{|\beta|}(-1)^{|\alpha|}\langle T, \partial^\beta(\partial^\alpha \phi)\rangle \\ &= (-1)^{|\alpha|}(-1)^{|\beta|}\langle T, \partial^\alpha(\partial^\beta \phi)\rangle \\ &= (-1)^{|\beta|}\langle \partial^\alpha T, \partial^\beta \phi\rangle \\ &= \langle \partial^\beta(\partial^\alpha T), \phi\rangle. \end{aligned}$$

Also ist $\partial^\alpha(\partial^\beta T) = \partial^\beta(\partial^\alpha T)$.

Außerdem zeigt es sich, dass für $|\alpha|$-mal stetig differenzierbare Funktionen klassische Ableitung $\partial^\alpha f$ und Distributionenableitung $\partial^\alpha T_f$ übereinstimmt:

Übungsaufgabe 4.21 Sei $f \in C^m(\Omega)$. Dann gilt für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\alpha| \leq m$

$$\partial^\alpha T_f = T_{\partial^\alpha f}.$$

Beispiel 4.22 Sei

$$f : \mathbb{R} \ni x \mapsto \begin{cases} x, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

Da $f \in C(\mathbb{R}) \subset L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, kann T_f im Distributionensinn beliebig oft differenziert werden. Es gilt für $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$

$$\begin{aligned}\langle T_f', \phi\rangle &= -\langle T_f, \phi'\rangle = -\int_{\mathbb{R}} f\phi' \mathrm{d}x = -\int_0^\infty x\phi'(x)\mathrm{d}x \\ &= -x\phi(x)|_0^\infty + \int_0^\infty \phi(x)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \phi(x)H(x)\mathrm{d}x \\ &= \langle T_H, \phi\rangle,\end{aligned}$$

wobei

$$H(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases}$$

die sog. *Heavyside-Funktion* bezeichnet. Es gilt also $T_f' = T_H$. Die zweite Ableitung von f kann analog bestimmt werden:

$$\langle T_f'', \phi\rangle = -\langle T_f', \phi'\rangle = -\langle H, \phi'\rangle = -\int_0^\infty \phi'(x)\mathrm{d}x = \phi(0) = \langle \delta, \phi\rangle,$$

d.h. es gilt $T_f'' = \delta$.

Bemerkung 4.23 Die Schreibweise $f'' = \delta$ ist irreführend, denn die Funktion f ist fast überall zweimal differenzierbar mit $f'' = 0$ fast überall, d.h. f'' ist das Nullelement in $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$. Also haben wir

$$T_{f''} = 0 \neq \delta = (T_f)''.$$

Das ist kein Widerspruch zu Übungsaufgabe 4.21, denn f ist nicht überall zweimal stetig differenzierbar.

Im nächsten Beispiel sehen wir eine weitere prominente singuläre Distribution.

Beispiel 4.24 (Cauchy-Hauptwert) Sei

$$f : \mathbb{R} \ni x \mapsto \begin{cases} \log|x|, & x \neq 0, \\ 42, & x = 0. \end{cases}$$

Dann gilt $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Also ist T_f' wohldefiniert, aber es kann nicht $T_f'(x) = T_{1/x}$ gelten, weil die Funktion $\mathbb{R} \ni x \mapsto 1/x \in \mathbb{K}$ nicht lokal integrierbar ist, also keine Distribution definiert. Es gilt:

$$\begin{aligned}
\langle T_f', \phi \rangle &= -\langle T_f, \phi' \rangle = -\int\limits_{\mathbb{R}} \log|x|\phi'(x)\mathrm{d}x \\
&= -\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \int\limits_{|x|\geq\varepsilon} \log|x|\phi'(x)\mathrm{d}x \qquad \text{(dominierte Konvergenz)} \\
&= -\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \left(\phi(-\varepsilon)\log|-\varepsilon| - \phi(\varepsilon)\log|\varepsilon| - \int\limits_{|x|\geq\varepsilon} \phi(x)\frac{1}{x}\mathrm{d}x \right) \\
&= \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \left(2\varepsilon\log(\varepsilon)\frac{\phi(\varepsilon)-\phi(-\varepsilon)}{2\varepsilon} + \int\limits_{|x|\geq\varepsilon} \frac{\phi(x)}{x}\mathrm{d}x \right) \\
&= \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \int\limits_{|x|\geq\varepsilon} \frac{\phi(x)}{x}\mathrm{d}x,
\end{aligned}$$

denn der erste Summand verschwindet im Limes $\varepsilon \downarrow 0$, was unmittelbar aus dem Mittelwertsatz folgt. Man nennt die Distribution

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}) \ni \phi \mapsto \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \int\limits_{|x|\geq\varepsilon} \frac{\phi(x)}{x}\mathrm{d}x \in \mathbb{K}$$

den *Cauchy-Hauptwert* von $\frac{1}{x}$, kurz $\mathrm{pv}(\frac{1}{x})$ (von engl. „principal value"). Damit schreibt sich obige Rechnung kurz als

$$T'_{\log|x|} = \mathrm{pv}\left(\frac{1}{x}\right).$$

Als nächstes wollen wir die Distributionenableitung von Funktionen mehrerer Veränderlicher berechnen. Die Rechnungen verlaufen ähnlich, allerdings treten statt den Randtermen nun Oberflächenintegrale auf. Um diese geeignet umzuformen, benötigen wir die Greenschen Formeln, die in einfacher Weise aus dem Gaußschen Divergenzsatz hervorgehen.

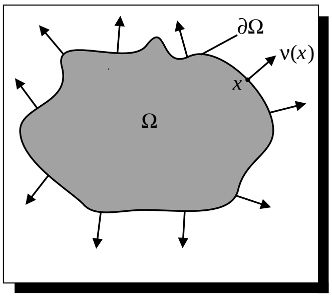

Abbildung 1: Das äußere Normalenfeld der glattberandeten Menge Ω

Proposition 4.25 (Greensche Formeln)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt mit glattem Rand $\partial\Omega$. Weiter seien $u, v \in C^2(\overline{\Omega})$. Dann gilt

(a) (1. Greensche Formel)

$$\int_\Omega (u\Delta v + \nabla u \cdot \nabla v)\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} u\partial_\nu v \mathrm{d}\sigma_{\partial\Omega},$$

(b) (2. Greensche Formel)

$$\int_\Omega (u\Delta v - v\Delta u)\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} (u\partial_\nu v - v\partial_\nu u)\mathrm{d}\sigma_{\partial\Omega},$$

wobei $\nu : \partial\Omega \to \mathbb{R}^n$ das äußere Normalenfeld, ∂_ν die Richtungsableitung in Richtung ν und $\sigma_{\partial\Omega}$ das Oberflächenmaß von $\partial\Omega$ bezeichnet (vgl. Abbildung 1).

Beweis.
(a): Für ein stetig differenzierbares Vektorfeld $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ gilt nach dem Gaußschen Satz

$$\int_\Omega \mathrm{div} f \mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} \nu(x) \cdot f(x) \mathrm{d}\sigma_{\partial\Omega}(x),$$

wobei $\mathrm{div} f = \sum_{j=1}^n \partial_j f_j$ die *Divergenz* von f und $\nu(x) \cdot f(x)$ das Standard-Skalarprodukt der Vektoren $\nu(x)$ und $f(x)$ in $\mathbb{R}^n$ bezeichnet. Speziell für $f = u\nabla v$ erhalten wir wegen $(\partial_\nu v)(x) = \nu(x) \cdot \nabla v(x)$

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\Omega} u\partial_\nu v \mathrm{d}\sigma_{\partial\Omega} &= \int_{\partial\Omega} u(\nu \cdot \nabla v)\mathrm{d}\sigma_{\partial\Omega} \\
&= \int_{\partial\Omega} \nu \cdot f \mathrm{d}\sigma_{\partial\Omega} \\
&= \int_\Omega \mathrm{div} f \mathrm{d}x \\
&= \int_\Omega \sum_{j=1}^n \partial_j(u\partial_j v)\mathrm{d}x \\
&= \int_\Omega (\sum_{j=1}^n \partial_j u \partial_j v + u\partial_j^2 v)\mathrm{d}x \\
&= \int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla v + u\Delta v)\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

(b) folgt direkt aus (a). ■

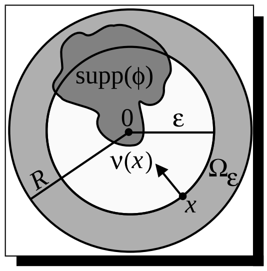

Abbildung 2: Zum Beweis der Identität $\Delta \log|\cdot| = 2\pi\delta$ in $\mathbb{R}^2$

Beispiel 4.26 Sei $f(x) := \log(|x|)$ für $x \in \mathbb{R}^2\backslash\{0\}$ und $f(0) := 42$. Dann ist f lokal integrierbar, denn Transformation auf Poloarkoordinaten führt auf das endliche Integral $\int_0^1 r\log(r)\mathrm{d}r$. Also kann T_f beliebig oft differenziert werden. Wir zeigen, dass $\Delta T_f = 2\pi\delta$. Sei dazu $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$. Wähle $R > 0$ so, dass $\mathrm{supp}(\phi) \subset B_R$ und setze $\Omega_\varepsilon := B_R\backslash B_\varepsilon$, $\varepsilon \in (0, R)$, siehe Abbildung 2. Dann gilt wegen Proposition 4.25 (b)

$$\begin{aligned}\int_{|x|\geq\varepsilon} \log|x|\Delta\phi(x)\mathrm{d}x &= \int_{\Omega_\varepsilon} \log|x|\Delta\phi(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_{\Omega_\varepsilon} \phi(x)\Delta(\log|x|)\mathrm{d}x \\ &\quad + \int_{\partial\Omega_\varepsilon} (\log|x|\partial_\nu\phi(x) - \phi(x)\partial_\nu \log|x|)\mathrm{d}\sigma_{\partial\Omega_\varepsilon}.\end{aligned}$$

Das erste Integral verschwindet, weil $\log|\cdot|$ harmonisch in $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ist, wie man durch einfaches Nachrechnen bestätigt. Wegen $\mathrm{supp}(\phi) \subset B_R$ erhalten wir

$$\int_{|x|\geq\varepsilon} \log|x|\Delta\phi(x)\mathrm{d}x = \int_{|x|=\varepsilon} (\log|x|\partial_\nu\phi(x) - \phi(x)\nu(x)\cdot\nabla\log|x|)\mathrm{d}\sigma_{\partial B_\varepsilon}.$$

Auf $\{x \in \mathbb{R}^2 : |x| = \varepsilon\}$ gilt

$$\nu(x) = -x/|x| = -x/\varepsilon \;\text{ und }\; \nabla\log|x| = x/|x|^2 = x/\varepsilon^2.$$

Damit ergibt sich

$$\int_{|x|\geq\varepsilon} \log|x|\Delta\phi(x)\mathrm{d}x = \int_{|x|=\varepsilon} (\log\varepsilon\partial_\nu\phi(x) + \frac{1}{\varepsilon}\phi(x))\mathrm{d}\sigma_{\partial B_\varepsilon}.$$

Es folgt

$$|\int_{|x|=\varepsilon} \log(\varepsilon)\partial_\nu\phi(x)\mathrm{d}\sigma_{\partial B_\varepsilon}| \leq |\log(\varepsilon)|2\pi\varepsilon||\nabla\phi||_\infty \to 0$$

für $\varepsilon \to 0$, und für den zweiten Summanden erhalten wir

$$\begin{aligned}\int\limits_{|x|=\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon}\phi \mathrm{d}\sigma_{\partial B_\varepsilon} &= \int\limits_{|x|=\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon}(\phi(x)-\phi(0))\mathrm{d}\sigma_{\partial B_\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{|x|=\varepsilon} \phi(0)\mathrm{d}\sigma_{\partial B_\varepsilon} \\ &= \int\limits_{|x|=\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon}(\phi(x)-\phi(0))\mathrm{d}\sigma_{\partial B_\varepsilon} + 2\pi\phi(0).\end{aligned}$$

Aus dem Mittelwertsatz folgt, dass der erste Summand für $\varepsilon \to 0$ verschwindet. Also haben wir

$$\begin{aligned}\langle \Delta T_f, \phi\rangle &= \langle T_f, \Delta\phi\rangle = \int\limits_{\mathbb{R}^2} \log|x|\Delta\phi(x)\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int\limits_{|x|\geq\varepsilon} \log|x|\Delta\phi(x)\mathrm{d}x \\ &= 2\pi\phi(0) = \langle 2\pi\delta, \phi\rangle.\end{aligned}$$

Übungsaufgabe 4.27 Zeige, dass

$$f : \mathbb{R}^3 \ni x \to \begin{cases} \frac{1}{|x|}, & x \neq 0, \\ 42, & x = 0 \end{cases}$$

lokal integrierbar ist und dass $\Delta T_f = -4\pi\delta$.

4.4 Konvergenz von Distributionen

Ziel dieses Abschnitts ist es, auf dem Raum $\mathcal{D}'(\Omega)$ eine Topologie einzuführen, so dass z.B. die Konvergenz einer Folge von Distributionen erklärt ist. Wir betrachten dazu die sog. schwach-*-Topologie, die allgemein auf jedem Dualraum X' eines lokalkonvexen Hausdorffraums X eingeführt werden kann. Einzelheiten dazu findet man in [RS80], [Heu92] und natürlich in [Köt66].

Definition 4.28 Für $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ sei

$$p_\phi : \mathcal{D}'(\Omega) \to [0,\infty), \quad p_\phi(T) := |\langle T, \phi\rangle|.$$

Offenbar ist p_ϕ eine Halbnorm auf $\mathcal{D}'(\Omega)$. Die *schwach-*-Topologie* auf $\mathcal{D}'(\Omega)$ ist die von den Halbnormen $(p_\phi)_{\phi\in\mathcal{D}(\Omega)}$ erzeugte lokalkonvexe Topologie auf $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Nach Konstruktion ist dies die schwächste Topologie, bzgl. der alle *Auswertungsfunktionale*

$$\mathcal{D}'(\Omega) \to \mathbb{C}, \quad T \mapsto \langle T, \phi\rangle, \quad \phi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

stetig sind. Die Konvergenz in $\mathcal{D}'(\Omega)$ kann mittels Funktionen aus $\mathcal{D}(\Omega)$ „getestet“ werden:

Bemerkung 4.29 Sei $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{D}'(\Omega)$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(a) $T_k \to 0$ in $\mathcal{D}'(\Omega)$,

(b) $\langle T_k, \phi\rangle \to 0$ für alle $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Das ist lediglich ein Spezialfall von Satz 3.31.

In Definition 3.14 wurde der Begriff einer Cauchy-Folge in einem metrischen Raum auf beliebige topologische Vektorräume übertragen. Man nennt einen (nicht notwendigerweise metrisierbaren) topologischen Vektorraum *folgenvollständig*, wenn jede Cauchy-Folge konvergiert.

Satz 4.30 $\mathcal{D}'(\Omega)$ *ist folgenvollständig.*

Beweis.

Sei $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\mathcal{D}'(\Omega)$. Wir zeigen zunächst, dass für jedes $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ die Zahlenfolge $(\langle T_k, \phi\rangle)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{K}$ ist. Sei dazu $\varepsilon > 0$. Da für jedes $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ die Menge

$$U_{\phi,\varepsilon} := \{T \in \mathcal{D}'(\Omega) : p_\phi(T) < \varepsilon\}$$

eine Nullumgebung in $\mathcal{D}'(\Omega)$ ist, gibt es ein $k_0 \in \mathbb{N}$ mit $T_k - T_\ell \in U_{\phi,\varepsilon}$ für alle $k, \ell \geq k_0$, d.h.

$$|\langle T_k, \phi\rangle - \langle T_\ell, \phi\rangle| < \varepsilon.$$

Somit ist $(\langle T_k, \phi\rangle)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{K}$. Daher ist

$$T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{K}, \qquad \phi \mapsto \lim_{k\to\infty} \langle T_k, \phi\rangle$$

wohldefiniert. Offenbar ist T ein lineares Funktional, d.h. es gilt $T \in \mathcal{D}^*(\Omega)$. Sei nun $K \Subset \Omega$. Da für jedes $\phi \in \mathcal{D}_K(\Omega)$ die Folge $(\langle T_k, \phi\rangle)_{k\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist (denn sie konvergiert), und $\mathcal{D}_K(\Omega)$ ein Fréchet-Raum ist, folgt aus dem Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit, dass $\{T_{k\restriction\mathcal{D}_K(\Omega)} : k \in \mathbb{N}\}$ gleichgradig stetig ist, d.h. für alle $\varepsilon > 0$ existiert eine Nullumgebung $U \subset \mathcal{D}_K(\Omega)$ mit $T_k(U) \subset B_\varepsilon(0)$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Damit gilt aber $T(U) \subset \overline{B_\varepsilon(0)}$, also ist T stetig auf $\mathcal{D}_K(\Omega)$ für alle $K \Subset \Omega$. Damit ist nach Satz 4.10 T stetig auf $\mathcal{D}(\Omega)$, also $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Es bleibt noch zu zeigen, dass $T_k \to T$ in $\mathcal{D}'(\Omega)$, aber das folgt aus Bemerkung 4.29. ■

Übungsaufgabe 4.31

(a) Für jedes $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ ist $\partial^\alpha : \mathcal{D}'(\Omega) \to \mathcal{D}'(\Omega)$ stetig.

(b) Seien $f_k, f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ mit $\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x)$ für fast alle $x \in \Omega$. Ferner existiere ein $g \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ mit $|f_k(x)| \leq g(x)$ für fast alle $x \in \Omega$. Dann gilt $T_{f_k} \to T_f$ in $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Beispiel 4.32 (a) Seien $f_k, f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Aus $f_k \to f$ fast überall folgt im Allgemeinen *nicht* $T_{f_k} \to T_f$ in $\mathcal{D}'(\Omega)$: Denn wählt man

$$f_k(x) = \begin{cases} k^2, & |x| \leq \frac{1}{k}, \\ 0, & \text{sonst}, \end{cases}$$

so gilt $f_k \to 0$ fast überall. Für $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ mit $\phi(x) = 1$ für $|x| \leq 1$ folgt

$$\langle T_{f_k}, \phi\rangle = \int_{\mathbb{R}} f_k \phi \,\mathrm{d}x = \int_{-1/k}^{1/k} k^2 \,\mathrm{d}x = 2k.$$

Damit ist $(T_{f_k})_{k\in\mathbb{N}}$ nicht konvergent.

(b) Aus $T_{f_k} \to T_f$ in $\mathcal{D}'(\Omega)$ folgt im Allgemeinen *nicht* $f_k \to f$ fast überall. Denn wählt man speziell $f_k(x) = \sin kx$, $x \in \mathbb{R}$, so gilt für $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

$$|\langle T_{f_k}, \phi\rangle| = \left|\int_{\mathbb{R}} \sin kx \phi(x)\,\mathrm{d}x\right| = \left|-\frac{1}{k}\int_{\mathbb{R}} \cos kx \phi'(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq C\frac{1}{k}\|\phi'\|_\infty.$$

Damit gilt $T_{f_k} \to 0$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, aber die Funktionenfolge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert sicherlich nicht fast überall.

(c) Aus $f_k \to f$ fast überall, $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ und $T_{f_k} \to T$ in $\mathcal{D}'(\Omega)$ folgt im Allgemeinen *nicht* $T = T_f$: Denn wählt man

$$f_k(x) = \begin{cases} k, & |x| \leq \frac{1}{2k}, \\ 0, & \text{sonst}, \end{cases}, \quad (x \in \mathbb{R}),$$

so gilt $f_k \to 0$ fast überall. Ferner gilt

$$\int_{\mathbb{R}} f_k(x)\, dx = 1$$

für alle $k \in \mathbb{N}$. Es ist nun aber für $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

$$\langle T_{f_k}, \phi\rangle = k\int_{-1/2k}^{1/2k} \phi(x)\,\mathrm{d}x = \phi(0) + k\int_{-1/2k}^{1/2k} (\phi(x) - \phi(0))\,\mathrm{d}x.$$

Da ϕ stetig in 0 ist, konvergiert $\langle T_{f_k}, \phi\rangle$ gegen $\phi(0)$. Also haben wir

$$\lim_{k\to\infty} T_{f_k} = \delta \neq 0 = T_{\lim_{k\to\infty} f_k}.$$

Das letzte Beispiel ist ein Spezialfall des folgenden Satzes, der es erlaubt, auf einfache Weise aus einer geeigneten Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ durch Skalierung eine Funktionenfolge $(f_\lambda)_{\lambda>0}$ zu konstruieren, für die $\lim_{\lambda\to 0} T_{f_\lambda} \to \delta$ in $\mathcal{D}'(\Omega)$ gilt. Man nennt $(f_\lambda)_{\lambda>0}$ eine *Delta-Approximation* oder *Delta-Folge*.

Satz 4.33 *Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ mit $f \geq 0$ fast überall und $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx = 1$. Für $\lambda > 0$ sei $f_\lambda(x) = \lambda^{-n} f(x/\lambda)$. Dann gilt*

$$T_{f_\lambda} \to \delta$$

in $\mathcal{D}'(\Omega)$ für $\lambda \to 0$.

Beweis.

Sei $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Es ist zu zeigen, dass $\langle f_\lambda, \phi\rangle \to \phi(0)$ für $\lambda \to 0$. Wegen

$$\langle f_\lambda, \phi\rangle = \phi(0) + \int_{\mathbb{R}^n} f_\lambda(x)(\phi(x) - \phi(0))\mathrm{d}x$$

genügt es zu zeigen, dass das Integral für $\lambda \to 0$ verschwindet. Für $r > 0$ gilt

$$\begin{aligned} \left|\int_{\mathbb{R}^n} f_\lambda(x)(\phi(x) - \phi(0))\,\mathrm{d}x\right| &\leq \int_{|x|\leq r} f_\lambda(x)|\phi(x) - \phi(0)|\,\mathrm{d}x \\ &\quad + \int_{|x|\geq r} f_\lambda(x)|\phi(x) - \phi(0)|\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Mit $M_r := \sup_{|x|\leq r} |\phi(x) - \phi(0)|$ und $C := \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |\phi(x) - \phi(0)|$ gilt nun

$$\begin{aligned} \left|\int_{\mathbb{R}^n} f_\lambda(x)(\phi(x) - \phi(0))\,dx\right| &\leq M_r + C\int_{|x|\geq r} f_\lambda(x)\,\mathrm{d}x \\ &= M_r + C\int_{|x|\geq r} \lambda^{-n} f(x/\lambda)\,\mathrm{d}x \\ &= M_r + C\int_{|y|\geq r/\lambda} f(y)\,\mathrm{d}y, \end{aligned}$$

wobei die Substitution $y = \frac{x}{\lambda}$ verwendet wurde. Sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig. Wähle zunächst $r = r(\varepsilon) > 0$ so klein, dass $M_r < \frac{\varepsilon}{2}$. Dann wähle $\lambda > 0$ so klein, dass $\int_{|y|\geq r/\lambda} f(y)\,\mathrm{d}y < \frac{\varepsilon}{2}$. ■

Im Folgenden geben wir zwei prominente Beispiele für Funktionen, die die Voraussetzungen von Satz 4.33 erfüllen.

Beispiel 4.34 (a) (Cauchy-Kern) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}.$$

Dann gilt

$$f_\lambda(x) = \frac{1}{\lambda\pi(1+(x/\lambda)^2)} = \frac{\lambda}{\pi(x^2+\lambda^2)},$$

und aus Satz 4.33 folgt

$$\lim_{\lambda\downarrow 0} \frac{\lambda}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{\phi(x)}{x^2+\lambda^2}\mathrm{d}x = \phi(0), \quad \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

(b) (Gauß-Kern). Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \pi^{-n/2}e^{-|x|^2}.$$

Dann gilt

$$f_\lambda(x) = \pi^{-n/2}\lambda^{-n}e^{-|x|^2/\lambda^2} = (\pi\sigma)^{-n/2}e^{-|x|^2/\sigma}$$

mit $\sigma = \lambda^2$, und aus Satz 4.33 folgt

$$\lim_{\sigma\downarrow 0}(\pi\sigma)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)e^{-|x|^2/\sigma}\mathrm{d}x = \phi(0), \quad \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

4.5 Multiplikation mit C^∞- Funktionen

Während es im Allgemeinen unmöglich ist, das Produkt zweier Distributionen zu erklären, kann man auf einfache Weise das Produkt aus einer C^∞-Funktion und einer Distribution definieren. Es zeigt sich, dass sich die „üblichen“ Rechenregeln für Produkte von Funktionen auf Distributionen übertragen.

Definition 4.35 Sei $f \in C^\infty(\Omega)$ und $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Definiere für $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$

$$\langle fT, \phi\rangle := \langle T, f\phi\rangle.$$

Diese Definition ist sinnvoll, denn es gilt $f\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Außerdem ist klar, dass $fT \in \mathcal{D}^*(\Omega)$. Beachte, dass im Spezialfall $f \in \mathcal{D}(\Omega)$ sowohl fT, als auch $T(f)$ definiert ist, und fT eine Distribution, aber $T(f)$ eine Zahl bezeichnet.

Satz 4.36 *Für $f \in C^\infty(\Omega)$ und $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ gilt*

(a) $fT \in \mathcal{D}'(\Omega)$,

(b) Aus $T = T_g$ mit $g \in L^1_{\mathrm{loc}}$ folgt $fT_g = T_{fg}$,

(c) Für $1 \leq k \leq n$ gilt $\partial_k(fT) = (\partial_k f)T + f(\partial_k T)$.

Beweis.

(a) Sei $(\phi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge in $\mathcal{D}(\Omega)$ Dann gibt es nach Satz 4.5 ein $K \Subset \Omega$ mit $\mathrm{supp}(\phi_k) \subset K$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und $\partial^\alpha \phi_k \to 0$ gleichmäßig für jedes $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$. Da $f \in C^\infty(\Omega)$, folgt $\mathrm{supp}(f\phi_k) \subset K$ und $\partial^\alpha(f\phi_k) \to 0$ gleichmäßig, d.h. wir haben $f\phi_k \to 0$ in $\mathcal{D}(\Omega)$. Also gilt

$$\langle fT, \phi_k\rangle = \langle T, f\phi_k\rangle \to 0,$$

d.h. fT ist stetig.

(b) Das ist trivial.

(c) Für $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ gilt

$$\begin{aligned}
\langle \partial_k(fT), \phi\rangle &= -\langle fT, \partial_k\phi\rangle = -\langle T, (f\partial_k\phi)\rangle \\
&= -\langle T, \partial_k(f\phi)\rangle + \langle T, \phi(\partial_k f)\rangle \\
&= \langle \partial_k T, f\phi\rangle + \langle(\partial_k f)T, \phi\rangle \\
&= \langle f\partial_k T + (\partial_k f)T, \phi\rangle.
\end{aligned}$$

■

Bemerkung 4.37 Analog beweist man die *Leibniz-Formel für Distributionen*: Für $f \in C^\infty(\Omega)$ und $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ gilt

$$\partial^\alpha(fT) = \sum_{\beta\leq\alpha} \binom{\alpha}{\beta} (\partial^\beta f)(\partial^{\alpha-\beta}T).$$

Beispiel 4.38 Sei $\Omega = \mathbb{R}$ und $f(x) = \sin x$.

(a) $T = \delta$. Dann gilt

$$\langle fT, \phi\rangle = \langle \delta, f\phi\rangle = f(0)\phi(0) = 0.$$

Das erscheint zunächst offensichtlich, denn f verschwindet im Ursprung, und $T = \delta$ „verschwindet“ überall, außer im Ursprung. Das folgende Beispiel zeigt, dass man so nicht argumentieren darf.

(b) $T = \delta'$. Hier gilt

$$\langle fT, \phi\rangle = \langle \delta', f\phi\rangle = -\langle \delta, (f\phi)'\rangle = -\langle \delta, f'\phi + f\phi'\rangle = -\phi(0) = \langle -\delta, \phi\rangle,$$

d.h. wir haben $fT = -\delta \neq 0$.

4.6 Lokale Eigenschaften von Distributionen

Ziel dieses Abschnitts ist es, den Träger einer Distribution zu definieren. Von besonderem Interesse sind die Distributionen mit kompaktem Träger, denn es zeigt sich, dass der Dualraum von $C^\infty(\Omega)$ gerade alle Distributionen mit kompaktem Träger sind, wenn $C^\infty(\Omega)$ geeignet topologisiert wird. Wir erinnern zunächst an die Faltung zweier Funktionen und zitieren ohne Beweis einige Eigenschaften des Faltungsprodukts.

Definition 4.39 Für $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ und $g \in C_c(\mathbb{R}^n)$ definiert man die *Faltung* $f * g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{K}$ von f und g durch

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)\mathrm{d}y.$$

Satz 4.40 *Für $\lambda > 0$ sei $\beta_\lambda \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ mit $\mathrm{supp}(\beta_\lambda) \subset B_\lambda(0)$ und $\int_{\mathbb{R}^n} \beta_\lambda dx = 1$ für jedes $\lambda > 0$. Dann gilt:*

(a) Aus $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ folgt $f * \beta_\lambda \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

(b) Ist $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und $K := \mathrm{supp} f$ kompakt, so gilt $f * \beta_\lambda \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ mit $\mathrm{supp}(f * \beta_\lambda) \subset K + \overline{B_\lambda(0)}$.

(c) Sei $k \in \mathbb{N}_0$, $f \in C^k(\mathbb{R}^n)$ und $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\alpha| \le k$. Dann konvergiert $(\partial^\alpha f) * \beta_\lambda$ lokal gleichmäßig gegen $\partial^\alpha f$ für $\lambda \downarrow 0$.

(d) Für $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ mit $1 \le p < \infty$ gilt

  (i) Aus $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ folgt $f * g \in L^p(\mathbb{R}^n)$, und es gilt die Young'sche Ungleichung

$$\|f * g\|_p \le \|g\|_1 \|f\|_p.$$

  (ii) $f * \beta_\lambda \to f$ in $L^p(\mathbb{R}^n)$ für $\lambda \downarrow 0$.

Die Aussage (d) kann man auch so formulieren: Die beschränkten linearen Operatoren

$$J_\lambda : L^p(\mathbb{R}^n) \ni f \mapsto \beta_\lambda * f \in L^p(\mathbb{R}^n)$$

konvergieren für $\lambda \downarrow 0$ im Sinne der starken Operatortopologie gegen die Identität.

Übungsaufgabe 4.41 Zeige:

(a) Zu $K \Subset \Omega$ gibt es $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ mit $\phi \equiv 1$ auf K.

(b) $\mathcal{D}(\Omega)$ ist dicht in $L^p(\Omega)$ für $1 \le p < \infty$.

Als nächstes definieren wir den Träger einer Distribution $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ als das Komplement der Vereinigung aller offenen Teilmengen von Ω auf denen T verschwindet.

Definition 4.42 Sei $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

(a) Man sagt, T *verschwindet auf der offenen Menge* $G \subset \Omega$ (Schreibweise: $T = 0$ auf G), falls $\langle T, \phi \rangle = 0$ für jedes $\phi \in \mathcal{D}(G)$.

(b) $\operatorname{supp}(T) := \Omega \setminus (\bigcup G)$, wobei die Vereinigung über alle offenen Teilmengen G von Ω zu erstrecken ist, auf denen T verschwindet. Beachte, dass $\operatorname{supp}(T)$ abgeschlossen ist.

Beispielsweise gilt $\operatorname{supp}(\delta) = \{0\}$. Außerdem folgt aus Übungsaufgabe 4.41 (a) leicht, dass für $f \in C(\Omega)$ stets $\operatorname{supp}(T_f) = \operatorname{supp}(f)$ gilt. Nichttrivial ist dagegen die Tatsache, dass jede Distribution auf dem (offenen) Komplement ihres Trägers verschwindet.

Satz 4.43 *Es gilt:* $T = 0$ *auf* $\Omega \setminus \operatorname{supp}(T)$.

Beweis. Sei $\mathcal{G} = (G_\alpha)_{\alpha \in A}$ das System aller offenen Mengen von Ω, auf denen T verschwindet. Es ist zu zeigen, dass $T = 0$ auf $G := \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$. Sei dazu $\phi \in \mathcal{D}(G)$. Da $(G_\alpha)_{\alpha \in A}$ eine offene Überdeckung von $K := \operatorname{supp}(\phi)$ ist, gibt es $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in A$ mit $K \subset \bigcup_{j=1}^m G_{\alpha_j}$. Wähle $K_1, \ldots, K_m \subset \Omega$ mit $K_j \Subset G_{\alpha_j}$ und $K \subset \bigcup_{j=1}^m K_j^\circ$. Nach Übungsaufgabe 4.41 (a) gibt es $\phi_j \in \mathcal{D}(G_{\alpha_j})$ mit $\phi_j \equiv 1$ auf K_j. Setze

$$\psi_1 := \phi_1, \quad \psi_j := \phi_j \prod_{\ell=1}^{j-1} (1 - \phi_\ell), \;\; j \geq 2.$$

Dann gilt $\psi_j \in \mathcal{D}(G_{\alpha_j})$, und durch Induktion sieht man problemlos ein, dass

$$\sum_{\ell=1}^{j} \psi_\ell = 1 - \prod_{\ell=1}^{j} (1 - \phi_\ell), \quad j = 1, \ldots, m.$$

Daraus folgt, dass $\psi := \sum_{\ell=1}^m \psi_\ell \equiv 1$ auf der Umgebung $\bigcup_{j=1}^m K_j^\circ$ von K. Also gilt

$$\langle T, \phi \rangle = \langle T, \psi\phi \rangle = \sum_{\ell=1}^{m} \langle T, \psi_\ell \phi \rangle = 0. \qquad \blacksquare$$

Offensichtlich gibt es Distributionen beliebiger Ordnung, die keinen kompakten Träger besitzen. Es gilt aber:

Satz 4.44 *Jede Distribution mit kompaktem Träger ist von endlicher Ordnung.*

Beweis.

$T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ habe kompakten Träger. Dann gibt es ein $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$ mit $\psi \equiv 1$ auf einer Umgebung von $\mathrm{supp}(T)$, vgl. Abbildung 3. Nach Satz 4.10 gibt es zu $K := \mathrm{supp}(\psi)$ ein $m \in \mathbb{N}_0$ und ein $C \geq 0$ mit

$$|\langle T, \phi \rangle| \leq C|\phi|_m$$

für alle $\phi \in \mathcal{D}_K(\Omega)$. Für beliebiges $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ gilt offenbar $\psi\phi \in \mathcal{D}_K(\Omega)$. Es folgt daher mit Satz 4.43

$$|\langle T, \phi \rangle| = |\langle T, \phi\psi \rangle| \leq C|\psi\phi|_m \leq C'|\phi|_m. \qquad \blacksquare$$

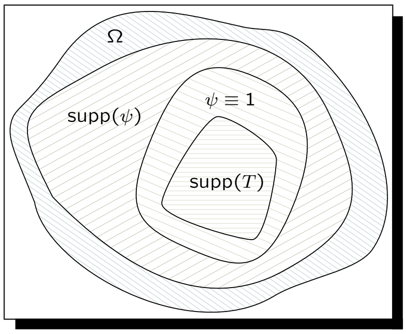

Abbildung 3: Zur Konstruktion der Testfunktion ψ

Als letztes Resultat in diesem Abschnitt zeigen wir, dass verschiedene lokal integrierbare Funktionen verschiedene reguläre Distributionen erzeugen.

Satz 4.45 *Die Abbildung*

$$J : L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega) \ni f \mapsto T_f \in \mathcal{D}'(\Omega),$$

die jeder lokal integrierbaren Funktion ihre reguläre Distribution zuordnet, ist injektiv, d.h. aus $T_f = 0$ folgt $f = 0$ fast überall.

Beweis. Sei $Jf = 0$, d.h. es gilt $\langle f, \phi \rangle = 0$ für jedes $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Sei $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{K}$ die triviale Fortsetzung von f auf ganz $\mathbb{R}^n$, d.h.

$$g(x) := \begin{cases} f(x), & x \in \Omega, \\ 0, & x \notin \Omega. \end{cases}$$

Es genügt zu zeigen, dass $g = 0$ fast überall auf jedem $K \Subset \Omega$. Wähle $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ mit $\psi \equiv 1$ auf K und $\mathrm{supp}(\psi) \subset \Omega$. Dann gilt $\psi g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, und nach Voraussetzung haben wir

$$\begin{aligned} (\psi g * \beta_\lambda)(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \psi(y) g(y) \beta_\lambda(x-y) \mathrm{d}y \\ &= \langle T_g, \psi\beta_\lambda(x - \cdot) \rangle \\ &= \langle T_f, \psi\beta_\lambda(x - \cdot) \rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

Aus Satz 4.40 folgt $\psi g = \lim_{\lambda \downarrow 0}(\psi g * \beta_\lambda) = 0$ in $L^1(\mathbb{R}^n)$, d.h. $\psi g = 0$ fast überall auf K. Da $\psi \equiv 1$ auf K folgt $f = g = 0$ fast überall auf K. $\blacksquare$

5 Distributionen mit kompaktem Träger und Faltung

A mathematician is a blind man in a dark room looking for a black cat which isn't there.

Charles R. Darwin

Auch in diesem Kapitel bezeichnet Ω stets eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$. Sind X und Y topologische Vektorräume mit $X \subset Y$ derart, dass die Identität von X nach Y stetig ist, so schreiben wir $X \hookrightarrow Y$. In diesem Fall definiert $T_{\restriction X}$ für $T \in Y'$ ein Element aus X'. Ist darüber hinaus X ein dichter Teilraum von Y, so ist die Restriktion $r : Y' \to X'$, $T \mapsto T_{\restriction X}$ injektiv, man kann also Y' mit dem Teilraum $r(Y')$ von X' identifizieren. Man macht sich sofort klar, dass sogar $Y' \hookrightarrow X'$ gilt, wobei wir stillschweigend voraussetzen, dass X' und Y' die schwach-*-Topologie tragen.

5.1 Der Dualraum von $C^\infty(\Omega)$

Sei $\mathcal{E}(\Omega) := C^\infty(\Omega)$ der Vektorraum aller beliebig oft differenzierbaren Funktionen. Wir topologisieren $\mathcal{E}(\Omega)$ durch das System $(p_{m,K})_{m\in\mathbb{N}_0, K\Subset\Omega}$ von Halbnormen, wobei

$$p_{m,K}(\phi) := \sup\{|\partial^\alpha \phi(x)| : x \in K, |\alpha| \le m\}, \quad \phi \in \mathcal{E}(\Omega),$$

vgl. Abschnitt 3.3.3. Folgende Eigenschaften sind leicht nachzuprüfen:

Übungsaufgabe 5.1

(a) $\mathcal{D}(\Omega)$ ist ein dichter Teilraum von $\mathcal{E}(\Omega)$,

(b) $\mathcal{D}_K(\Omega)$ ist ein abgeschlossener Teilraum von $\mathcal{E}(\Omega)$,

(c) Die Topologie auf $\mathcal{D}_K(\Omega)$ ist die Spurtopologie bezüglich $\mathcal{E}(\Omega)$.

Also ist die identische Abbildung von $\mathcal{D}_K(\Omega)$ nach $\mathcal{E}(\Omega)$ stetig, d.h. wir haben $\mathcal{D}_K(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{E}(\Omega)$. Da $K \Subset \Omega$ beliebig ist, folgt mit Satz 4.3, dass $\mathcal{D}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{E}(\Omega)$. Übergang zu den stetigen Dualräumen liefert $\mathcal{E}'(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$.

Es stellt sich daher die Frage, welche zusätzlichen Eigenschaften eine Distribution $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ erfüllen muss, um zu $\mathcal{E}'(\Omega)$ zu gehören. Diese Frage wird durch den folgenden Satz beantwortet.

Satz 5.2 *$\mathcal{E}'(\Omega)$ sind genau die Distributionen mit kompaktem Träger. Genauer: Ist $T \in \mathcal{E}'(\Omega)$, so ist $T_{\restriction \mathcal{D}(\Omega)}$ eine Distribution mit kompaktem Träger. Umgekehrt besitzt jedes $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ mit kompaktem Träger eine eindeutige Fortsetzung auf $\mathcal{E}(\Omega)$, und diese ist stetig bzgl. der Topologie von $\mathcal{E}(\Omega)$, definiert also ein Element von $\mathcal{E}'(\Omega)$.*

Beweis.
Sei $T \in \mathcal{E}'(\Omega)$. Dann gibt es wegen Bemerkung 3.33 $m \in \mathbb{N}_0$ und $K \Subset \Omega$, so dass für jedes $\phi \in \mathcal{E}(\Omega)$ die Ungleichung $|T(\phi)| \leq p_{m,K}(\phi)$ gilt. Für $\phi \in \mathcal{D}(\Omega \backslash K)$ gilt trivialerweise $p_{m,K}(\phi) = 0$, also ist $\langle T, \phi \rangle = 0$. Da $\phi \in \mathcal{D}(\Omega \backslash K)$ beliebig war, folgt $\operatorname{supp}(T) \subset K$.

Der Nachweis der restlichen Eigenschaften ist einfach und sei dem Leser zur Übung empfohlen. ■

5.2 Faltung von Distributionen

In diesem Abschnitt verallgemeinern wir das Faltungsprodukt, das in Definition 4.39 für geeignete Funktionen eingeführt wurde, auf Distributionen. Dazu benötigen wir ein vorbereitendes Lemma und eine Aussage über die Summe einer abgeschlossenen mit einer kompakten Menge.

Übungsaufgabe 5.3 Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen und $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt. Dann ist $K + A$ abgeschlossen.

Lemma 5.4 *Sei $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ und $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Dann ist die Abbildung*

$$\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{K}, \quad x \mapsto \langle T, \phi(x + \cdot) \rangle$$

in $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ mit

$$\operatorname{supp}(\psi) \subset \operatorname{supp}(\phi) - \operatorname{supp}(T).$$

Beweis. Die Wohldefiniertheit von ψ ist klar. Es ist

$$\frac{1}{h}(\psi(x + he_j) - \psi(x)) \quad = \quad \langle T, \frac{1}{h}(\phi(x + he_j + \cdot) - \phi(x + \cdot)) \rangle$$

Man sieht leicht ein, dass für beschränktes h die Träger der Abbildungen $\{\phi(x + he_j + \cdot)\}$ in einem Kompaktum liegen. Es folgt zusammen mit dem Mittelwertsatz, dass

$$\frac{1}{h}(\phi(x + he_j + \cdot) - \phi(x + \cdot))$$

in $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ für $h \to 0$ gegen $\partial_j \phi(x + \cdot)$ konvergiert. Also ist

$$\partial_j \psi(x) = \langle T, \partial_j \phi(x + \cdot) \rangle = (-1) \langle \partial_j T, \phi(x + \cdot) \rangle,$$

woraus induktiv $\psi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ folgt.

Bezüglich $\operatorname{supp}(\psi)$ gilt:

$$\begin{aligned}
\psi(x) \neq 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \langle T, \phi(x + \cdot) \rangle \neq 0 \\
&\Rightarrow \quad \operatorname{supp}(T) \cap \operatorname{supp}(\phi(x + \cdot)) \neq \emptyset \\
&\Leftrightarrow \quad \operatorname{supp}(T) \cap \operatorname{supp}(\phi) - \{x\} \neq \emptyset \\
&\Leftrightarrow \quad \exists y \in \operatorname{supp}(T) : y + x \in \operatorname{supp}(\phi) \\
&\Rightarrow \quad x \in \operatorname{supp}(\phi) - \operatorname{supp}(T),
\end{aligned}$$

also mit Übungsaufgabe 5.3 $\operatorname{supp}(\psi) \subset \operatorname{supp}(\phi) - \operatorname{supp}(T)$. ■

Übungsaufgabe 5.5 Sei $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ (bzw. $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$). Dann induziert T gemäß Lemma 5.4 eine lineare Abbildung $J_T : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ (bzw. $J_T : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$) via

$$(J_T\phi)(x) := \langle T, \phi(x+\cdot)\rangle.$$

Zeige, dass J_T stetig ist.

Definition 5.6 Seien $T_1, T_2 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, eine davon in $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$. Die *Faltung* $T_1 * T_2 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ ist definiert durch $\langle T_1 * T_2, \phi\rangle := \langle T_1, \psi\rangle$, wobei

$$\psi : \mathbb{R}^n \ni x \mapsto \langle T_2, \phi(x+\cdot)\rangle \in \mathbb{K}.$$

Aus Lemma 5.4 und Übungsaufgabe 5.5 folgt die Wohldefiniertheit des Faltungsprodukts.

Beispiel 5.7 (a) Sei $T_1 = T_{f_1}$, $T_2 = T_{f_2}$ mit lokal integrierbaren Funktionen f_1, f_2 auf $\mathbb{R}^n$, von denen eine kompakten Träger besitze. Mit der Bezeichnung aus Definition 5.6 gilt

$$\psi(x) = \langle f_2, \phi(x+\cdot)\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f_2(y)\phi(x+y)\mathrm{d}y.$$

Es folgt

$$\begin{aligned}\langle T_{f_1} * T_{f_2}, \phi\rangle &= \langle T_1, \psi\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f_1(x) \int_{\mathbb{R}^n} f_2(y)\phi(x+y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f_1(z-y) \int_{\mathbb{R}^n} f_2(y)\phi(z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\ &= \langle f_1 * f_2, \phi\rangle,\end{aligned}$$

d.h. es ist $T_{f_1} * T_{f_2} = T_{f_1 * f_2}$.

(b) Sei $T_1 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ beliebig und $T_2 = \partial^\alpha\delta$ mit $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$. Dann gilt für $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$

$$\psi(x) = \langle \partial^\alpha\delta, \phi(x+\cdot)\rangle = (-1)^{|\alpha|}(\partial^\alpha\phi)(x).$$

Es folgt

$$\langle T_1 * \partial^\alpha\delta, \phi\rangle = \langle T_1, \psi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle T_1, \partial^\alpha\phi\rangle = \langle \partial^\alpha T_1, \phi\rangle.$$

Also haben wir $T_1 * (\partial^\alpha\delta) = \partial^\alpha T_1$. Speziell für $\alpha = 0$ ergibt sich $T_1 * \delta = T_1$.

Weitere Eigenschaften der Faltung sind in der nächsten Proposition zusammengestellt.

Proposition 5.8 *Seien $T_1, T_2 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, eine davon in $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt:*

(a) $\operatorname{supp}(T_1 * T_2) \subset \operatorname{supp}(T_1) + \operatorname{supp}(T_2)$. *Insbesondere gilt $T_1 * T_2 \in \mathcal{E}'(\Omega)$, falls $T_1, T_2 \in \mathcal{E}'(\Omega)$.*

(b) $(T_1 * T_2) * T_3 = T_1 * (T_2 * T_3)$, *falls zwei der drei Distributionen T_1, T_2, T_3 kompakten Träger besitzen.*

(c) $T_1 * T_2 * (\partial^\alpha \delta) = \partial^\alpha (T_1 * T_2) = (\partial^\alpha T_1) * T_2 = T_1 * (\partial^\alpha T_2)$.

Beweis.

(a) Sei $x \in \operatorname{supp}(T_1 * T_2)$. Dann ist für jedes offene $U \in \mathfrak{U}(x)$

$$U \cap \operatorname{supp}(T_1 * T_2) \neq \emptyset,$$

denn der Träger einer Distribution ist stets abgeschlossen. Nach Definition des Trägers existiert ein $\phi \in \mathcal{D}(U)$ mit $\langle T_1 * T_2, \phi \rangle \neq 0$. Daraus folgt mit Lemma 5.4 und der Definition der Faltung, dass

$$\operatorname{supp}(T_1) \cap \operatorname{supp}(\phi) - \operatorname{supp}(T_2) \neq \emptyset$$

was wegen $U \supset \operatorname{supp}(\phi)$

$$U \cap \operatorname{supp}(T_1) + \operatorname{supp}(T_2) \neq \emptyset$$

impliziert. Da $\operatorname{supp}(T_1) + \operatorname{supp}(T_2)$ wegen Übungsaufgabe 5.3 abgeschlossen ist, folgt

$$x \in \operatorname{supp}(T_1) + \operatorname{supp}(T_2)$$

und damit die Behauptung.

(b) Ausrechnen!

(c) Für $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ ist

$$\begin{aligned}
\langle \partial^\alpha (T_1 * T_2), \phi \rangle &= (-1)^{|\alpha|} \langle T_1 * T_2, \partial^\alpha \phi \rangle \\
&= (-1)^{|\alpha|} \langle T_1, x \mapsto \langle T_2, \partial^\alpha \phi(x + \cdot) \rangle \rangle \\
&= (-1)^{|\alpha|} \langle T_1, (-1)^{|\alpha|} (x \mapsto \langle \partial^\alpha T_2, \phi(x + \cdot) \rangle) \rangle \\
&= \langle T_1 * (\partial^\alpha T_2), \phi \rangle.
\end{aligned}$$

Also ist $\partial^\alpha (T_1 * T_2) = T_1 * (\partial^\alpha T_2)$. Die Identität $\partial^\alpha (T_1 * T_2) = (\partial^\alpha T_1) * T_2$ kann man ebenfalls mit der in Definition 5.6 gegebenen Darstellung der Faltung beweisen (Übung!), sie folgt aber viel einfacher aus dem schon hier gezeigten und der später in Corollar 5.17 nachgewiesenen Kommutativität der Faltung. ∎

Beispiel 5.9 Sei $\mathbf{1}$ die konstante 1-Funktion auf $\mathbb{R}$ und H die Heavyside-Funktion, vgl. Beispiel 4.22. Dann gilt

$$(H * \delta') * \mathbf{1} = (H' * \delta) * \mathbf{1} = (\delta * \delta) * \mathbf{1} = \delta * \mathbf{1} = \mathbf{1},$$

aber

$$H * (\delta' * \mathbf{1}) = H * (\delta * \mathbf{1}') = H * (\delta * 0) = H * 0 = 0.$$

Das ist kein Widerspruch zu Proposition 5.8 (c), denn weder $\mathbf{1}$, noch H besitzen kompakten Träger.

5.3 Regularisierung von Distributionen

Wir zeigen in diesem Abschnitt, dass sich jede Distribution durch glatte Funktionen approximieren lässt. Insbesondere gibt es eine Folge glatter Funktionen, die in der Topologie von $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ gegen δ konvergiert. Dazu benötigen wir das folgende Lemma, das es erlaubt, die Faltung $f * g$ für $f, g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ durch die Testfunktionen

$$x \mapsto \varepsilon^n \sum_{z \in \mathbb{Z}^n} f(x - \varepsilon z) g(\varepsilon z) = \varepsilon^n \sum_{z \in \mathbb{Z}^n, g(\varepsilon z) \neq 0} f(x - \varepsilon z) g(\varepsilon z) \tag{8}$$

zu approximieren. Da g kompakten Träger besitzt, ist die Summe in (8) endlich und definiert somit eine Testfunktion auf $\mathbb{R}^n$.

Lemma 5.10 *(a) Seien $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$ und $\varepsilon > 0$. Dann ist $\varepsilon^n \sum_{z \in \mathbb{Z}^n} f(\varepsilon z)$ definiert. Für $\varepsilon \to 0$ konvergiert diese Summe gegen $\int_{\mathbb{R}^n} f \mathrm{d}x$.*

(b) Sind $f, g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, so konvergiert $x \mapsto \varepsilon^n \sum_{z \in \mathbb{Z}^n} f(x - \varepsilon z) g(\varepsilon z)$ in $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ gegen $f * g$.

Beweis.

(a) $\varepsilon^n \sum_{z \in \mathbb{Z}^n} f(\varepsilon z)$ ist eine zur Zerlegung $([\varepsilon z, \varepsilon(z + \mathbf{1})[)_{z \in \mathbb{Z}^n}$ gehörende Riemann-Summe. Da f Riemann-integrierbar ist, folgt sofort die Aussage.

(b) Das als Übung. ∎

Für $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und $y \in \mathbb{R}^n$ sei $\check{f}(x) := f(-x)$ und $(\tau_y f)(x) := f(x - y)$. Wir erweitern diese Definition auf Distributionen $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ via

$$\langle \check{T}, \phi \rangle := \langle T, \check{\phi} \rangle, \quad \langle \tau_y T, \phi \rangle := \langle T, \tau_{-y} \phi \rangle.$$

Satz 5.11 *Sei $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt:*

(a) $T * T_\psi$ ist eine reguläre Distribution. Sie wird von $x \mapsto \langle T, \tau_x \check{\psi} \rangle$ erzeugt.

(b) $T * T_\psi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$.

Insbesondere erhält man für $x = 0$ die Identität $\langle T, \check{\psi} \rangle = (T * \psi)(0)$. Falls außerdem ψ gerade ist, so gilt $\langle T, \psi \rangle = (T * \psi)(0)$.

Beweis.
(a) Sei $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Wir setzen für $\varepsilon > 0$ und $z \in \mathbb{Z}^n$

$$h_{\varepsilon,z}(x) := \check{\psi}(x - \varepsilon z)\phi(\varepsilon z), \quad \mathcal{Z}_\varepsilon(\phi) := \{z \in \mathbb{Z}^n : \phi(\varepsilon z) \neq 0\}.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}
\langle T * T_\psi, \phi \rangle &= \langle T, x \mapsto \langle T_\psi, \phi(x + \cdot) \rangle \rangle \\
&= \langle T, x \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} \psi(y)\phi(x+y)\mathrm{d}y \rangle \\
&= \langle T, x \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} \psi(y-x)\phi(y)\mathrm{d}y \rangle \\
&= \langle T, \check{\psi} * \phi \rangle \\
&= \langle T, \lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^n \sum_{z \in \mathcal{Z}_\varepsilon(\phi)} h_{\varepsilon,z} \rangle && (9) \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^n \sum_{z \in \mathcal{Z}_\varepsilon(\phi)} \langle T, x \mapsto \check{\psi}(x - \varepsilon z)\phi(\varepsilon z) \rangle && (10) \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^n \sum_{z \in \mathcal{Z}_\varepsilon(\phi)} \phi(\varepsilon z) \langle T, x \mapsto \check{\psi}(x - \varepsilon z) \rangle && (11) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \langle T, \tau_y \check{\psi} \rangle \phi(y)\mathrm{d}y, && (12)
\end{aligned}$$

was zu beweisen war. Dabei folgt Gleichung (9) aus Lemma 5.10(b), Gleichung (10) benutzt Lemma 5.10(b), die Linearität von T und die obige Definition von $h_{\varepsilon,z}$; Gleichung (11) folgt ebenfalls aus der Linearität von T; und Gleichung (12) folgt einfach aus Lemma 5.10(a).

(b) Folgt aus Lemma 5.4. ■

Satz 5.12 *Sei $(\beta_\lambda)_{\lambda > 0}$ wie in Satz 4.40 eine Delta-Folge in $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, und sei $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt $\lim_{\lambda \downarrow 0} T * \beta_\lambda = T$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Ist $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, so konvergiert $T * \beta_\lambda$ sogar in $\mathcal{E}'$ gegen T.*

Beweis. Aus Satz 5.11 folgt für $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$

$$\langle T * \beta_\lambda, \phi \rangle = \left((T * \beta_\lambda) * \check{\phi} \right)(0) = \left(T * (\beta_\lambda * \check{\phi}) \right)(0) = \langle T, (\beta_\lambda * \check{\phi})\check{} \rangle.$$

Satz 4.40 impliziert $(\beta_\lambda * \check{\phi})\check{} \to \phi$ für $\lambda \downarrow 0$ in $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Daraus folgt

$$\lim_{\lambda \downarrow 0} \langle T * \beta_\lambda, \phi \rangle = \lim_{\lambda \downarrow 0} \langle T, (\beta_\lambda * \check{\phi})\check{} \rangle = \langle T, \phi \rangle.$$

Ist zusätzlich $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, so ist wegen Proposition 5.8 $T * \beta_\lambda \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, und die obigen Rechnungen gelten dann auch für $\phi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$. ■

Wir werden nun die Kommutativität des Faltungsprodukts für Distributionen nachweisen. Dazu betrachten wir zunächst den Spezialfall der Faltung zwischen einer Testfunktion und einer Distribution.

Lemma 5.13 *Seien $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n), T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Dann ist $T * \psi = \psi * T$.*

Beweis. Sei $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Analog zum Beweis von Satz 5.11(a) setzen wir für $\varepsilon > 0$ und $z \in \mathbb{Z}^n$

$$h_{\varepsilon,z}(x) := \phi(x + \varepsilon z)\psi(\varepsilon z).$$

Dann ist:

$$\begin{aligned}
\langle T * \psi, \phi \rangle &= \langle T, x \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} \psi(y)\phi(x+y)\mathrm{d}y \rangle \\
&= \langle T, \lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^n \sum_{z \in \mathcal{Z}_\varepsilon(\psi)} h_{\varepsilon,z} \rangle \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^n \sum_{z \in \mathcal{Z}_\varepsilon(\psi)} \psi(\varepsilon z) \langle T, x \mapsto \phi(x + \varepsilon z)) \rangle \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \psi(y) \langle T, x \mapsto \phi(x+y) \rangle \\
&= \langle \psi * T, \phi \rangle
\end{aligned}$$

und also $T * \psi = \psi * T$. Die Begründungen für die einzelnen Umformungen sind genau wie in Satz 5.11. ■

Man erhält so auch einen neuen Beweis für einen Spezialfall von Satz 4.33:

Corollar 5.14 *In der Situation von Satz 5.12 gilt $\beta_\lambda \to \delta$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.*

Beweis.

$$\delta = \lim_{\lambda \downarrow 0} \delta * \beta_\lambda = \lim_{\lambda \downarrow 0} \beta_\lambda * \delta = \lim_{\lambda \downarrow 0} \beta_\lambda.$$ ■

Der Beweis der Kommutativität des Faltungsprodukts wird mittels Approximation durch Testfunktionen und Lemma 5.13 geführt. Als weiteres Hilfsmittel benötigen wir das folgende Lemma über Stetigkeitseigenschaften der Faltung.

Lemma 5.15 *Seien $S_k, S, T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Es gelte entweder $S_k, S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ und $S_k \to S$ in $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ oder $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ und $S_k \to S$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Dann konvergiert $(S_k * T)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, und es gilt*

$$\lim_{k\to\infty} S_k * T = S * T.$$

Beweis. Sei $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Es ist

$$\begin{aligned} \lim_{k\to\infty} \langle S_k * T, \phi\rangle &= \lim_{k\to\infty} \langle S_k, x \mapsto \langle T, \phi(x+\cdot)\rangle\rangle \\ &= \langle S, x \mapsto \langle T, \phi(x+\cdot)\rangle\rangle \\ &= \langle S * T, \phi\rangle, \end{aligned}$$

also $S_k * T \to S * T$. ∎

Übungsaufgabe 5.16

Seien $S_k, S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$. Zeige, dass aus $S_k \to S$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ im Allgemeinen *nicht* $S_k \to S$ in $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ folgt.

Aus Lemma 5.15 folgt leicht die Kommutativität des Faltungsprodukts.

Corollar 5.17 *Seien $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Es ist*

$$S * T = T * S$$

Beweis. Sei im folgenden $(\beta_\lambda)_{\lambda>0}$ wie in Satz 5.12. Dann ist

$$\begin{aligned} S * T &= (\lim_{\lambda\downarrow 0} S * \beta_\lambda) * T && (13) \\ &= \lim_{\lambda\downarrow 0}((S * \beta_\lambda) * T) && (14) \\ &= \lim_{\lambda\downarrow 0}(T * (S * \beta_\lambda)) && (15) \\ &= \lim_{\lambda\downarrow 0}(T * (\beta_\lambda * S)) && (16) \\ &= \lim_{\lambda\downarrow 0}((T * \beta_\lambda) * S)) && (17) \\ &= (\lim_{\lambda\downarrow 0} T * \beta_\lambda) * S) && (18) \\ &= T * S && (19) \end{aligned}$$

Dabei folgen (13) und (14) aus Satz 5.12 und aus Lemma 5.15 (die Konvergenz $S * \beta_\lambda \to S$ findet in $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ statt, was Voraussetzung für Lemma 5.15 ist), (15) und (16) aus Lemma 5.13 (beachte dabei, dass wegen Lemma 5.4 $S * \beta_\lambda \in \mathcal{D}$ ist), (17) aus Proposition 5.8, (18) wieder aus Lemma 5.15, und schließlich (19) aus Satz 5.12. ∎

5.4 Anwendungen auf partielle Differentialgleichungen

In diesem Abschnitt werden lineare Differentialoperatoren eingeführt als Abbildungen in $\mathcal{D}'(\Omega)$. Als Beispiele betrachten wir insbesondere Operatoren, die in der theoretischen Physik eine wichtige Rolle spielen. Außerdem werden starke und schwache Lösungen definiert, und es wird gezeigt, wie man mittels einer Fundamentallösung eine Darstellung für die Lösung zu allgemeiner rechter Seite gewinnt. Allerdings kann das komplexe Thema der partiellen Differentialgleichungen hier nur gestreift werden. Für weitere Informationen darüber verweisen wir auf die Lehrbücher [Joh71], [Miz73] und [Wei00], sowie die beiden Reihen [Tay96a], [Tay96c], [Tay96b] und [RS80], [RS75], [RS79], [RS78].

Definition 5.18 Sei $m \in \mathbb{N}_0$, $c_\alpha \in C^\infty(\Omega)$ und $|\alpha| \le m$. Ferner existiere ein $\alpha_0 \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\alpha_0| = m$, so dass c_{α_0} nicht überall verschwindet. Dann heißt

$$L : \mathcal{D}'(\Omega) \ni T \mapsto \sum_{|\alpha| \le m} c_\alpha \partial^\alpha T \in \mathcal{D}'(\Omega)$$

linearer partieller Differentialoperator der Ordnung m. Für $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ heißt

$$Lu = f$$

die zugehörige Differentialgleichung. Falls alle c_α konstante Funktionen sind, so sagt man, L habe *konstante Koeffizienten.*

Beispiel 5.19 (a) Sei $L = \Delta = \sum_{j=1}^n \partial_j^2$. Die zugehörige partielle Differentialgleichung

$$\Delta u = f$$

heißt *Laplace-, Potential-* oder auch *Poisson-Gleichung.*

(b) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ und $L = \partial_t - \Delta_x = \partial_t - \sum_{j=1}^n \partial_j^2$. Die zugehörige partielle Differentialgleichung

$$\partial_t u - \sum_{j=1}^n \partial_j^2 u = f$$

heißt *Wärmeleitungsgleichung* oder *Diffusionsgleichung.*

(c) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ und $L = \partial_t^2 - \Delta_x = \partial_t^2 - \sum_{j=1}^n \partial_j^2$. Die zugehörige partielle Differentialgleichung

$$\partial_t^2 u - \sum_{j=1}^n \partial_j^2 u = f$$

heißt *Wellengleichung.*

(d) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ und $L = i\partial_t - \Delta_x = i\partial_t - \sum_{j=1}^n \partial_j^2$. Die zugehörige partielle Differentialgleichung

$$i\partial_t u - \sum_{j=1}^n \partial_j^2 u = 0$$

heißt *Schrödingergleichung* und ist von fundamentaler Bedeutung in der Quantenmechanik.

Mittels Distributionen kann man den Begriff der Lösung einer Differentialgleichung auf verschiedene Weisen verallgemeinern. Wir betrachten neben den klassischen Lösungen lediglich schwache Lösungen:

Definition 5.20 (a) Eine *starke Lösung* (auch *klassische Lösung*) von $Lu = f$ ist eine Funktion $u \in C^m(\Omega)$ mit $Lu = f$.

(b) Eine *schwache Lösung* oder auch *Distributionenlösung* von $Lu = f$ ist eine Distribution $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, für die $Lu = f$ im Sinne von Distributionen gilt, das heißt

$$\sum_{|\alpha|\leq m} (-1)^{|\alpha|}\langle u, \partial^\alpha c_\alpha \phi\rangle = \langle f, \phi\rangle, \quad \phi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Offenbar ist jede starke Lösung auch eine schwache Lösung. Es gibt allerdings schwache Lösungen, die keine starken Lösungen sind, wie das folgende Beispiel zeigt.

Beispiel 5.21 Sei $\Omega = \mathbb{R}$, $m = 1$, $c_0 \equiv 0$, $c_1(x) = x$. Dann ist L gegeben durch $(Lu)(x) = xu'(x)$. Die gewöhnliche lineare Differentialgleichung $xu' = 0$ hat die starken Lösungen $u = \text{const}$, und da die Gesamtheit aller (starken) Lösungen einen eindimensionalen Vektorraum bilden, gibt es keine weiteren starken Lösungen von $Lu = 0$. Andererseits gilt für $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$

$$\langle LH, \phi\rangle = \langle xH', \phi\rangle = \langle H', x\phi\rangle = \langle \delta, x\phi\rangle = 0\phi(0) = 0 = \langle 0, \phi\rangle.$$

Also erfüllt die Heavyside-Funktion die Differentialgleichung im schwachen Sinn, aber nicht im starken.

Von besonderem Interesse sind die Lösungen der Gleichung $Lu = \delta$:

Definition 5.22 Eine Distribution $E \in \mathcal{D}'(\Omega)$ heißt *Fundamentallösung* von L auf Ω, falls $LE = \delta$.

Die Bedeutung der Fundamentallösungen wird klar durch den nächsten Satz. Er besagt, dass man eine Lösung der allgemeinen Gleichung $Lu = f$ erhält, indem man f mit einer Fundamentallösung faltet. Da a priori eine Fundamentallösung lediglich in $\mathcal{D}'(\Omega)$ liegt, müssen wir fordern, dass f kompakten Träger besitzt.

Satz 5.23 *Sei L ein Differentialoperator mit konstanten Koeffizienten und E eine Fundamentallösung von L auf $\mathbb{R}^n$. Weiter sei $f \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$. Dann ist $u := f * E$ eine schwache Lösung von $Lu = f$.*

Beweis.

$$Lu = L(f * E) = f * (LE) = f * \delta = f.$$ ∎

Beispiel 5.24 (a) In $\mathbb{R}^2$ ist $E(x) = \frac{1}{2\pi}\log(|x|)$ eine Fundamentallösung von $L = \Delta$, wie in Beispiel 4.26 gezeigt wurde. Ist nun $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$ mit kompaktem Träger, so ist eine Lösung von $\Delta u = f$ gegeben durch

$$u(x) = (f * E)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} \log(|x - y|)f(y)\mathrm{d}y.$$

(b) In $\mathbb{R}^3$ ist $E(x) = -\frac{1}{4\pi|x|}$ eine Fundamentallösung von $L = \Delta$, vgl. Übungsaufgabe 4.27. Ist nun $f \in L^1(\mathbb{R}^3)$ mit kompaktem Träger, so ist eine Lösung von $\delta u = f$ gegeben durch

$$u(x) = (f * E)(x) = -\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3} \frac{f(y)}{|x - y|}\mathrm{d}y$$

Stellt man sich f als Massenverteilung in $\mathbb{R}^3$ vor, so beschreibt u das von f erzeugte *Newtonsche Gravitationspotential.*

6 Fouriertransformation, temperierte Distributionen

God not only plays dice. He also sometimes throws the dice where they cannot be seen.

Stephen Williams Hawking

In Abschnitt 5.2 wurde das Faltungsprodukt von Funktionen durch Dualität auf Distributionen verallgemeinert. Wir gehen in diesem Abschnitt ähnlich vor, um die Fouriertransformierte einer Distribution zu erklären. Dazu erinnern wir in Abschnitt 6.1 zunächst an einige elementare Eigenschaften der klassischen Fouriertransformation in $L^1(\mathbb{R}^n)$ und untersuchen dann die Fouriertransformation im Raum $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ der schnellfallenden Funktionen, der zuvor auf natürliche Weise topologisiert wird. Es zeigt sich, dass die Fouriertransformation in diesem Raum ein topologischer Isomorphismus ist. Durch Dualität übertragen sich diese Eigenschaften auf den Dualraum $S'(\mathbb{R}^n)$ der sog. temperierten Distributionen, siehe Definition 6.4. Da insbesondere die Diracsche Delta-Distribution in $S'(\mathbb{R}^n)$ liegt, ist ihre Fouriertransformierte wohldefiniert. Dies gestattet es, Fundamentallösungen für viele lineare Differentialoperatoren mit konstanten Koeffizienten zu konstruieren. Als einfaches Beispiel dafür betrachten wir in Abschnitt 6.6 die Wärmeleitungsgleichung.

Alle in diesem Abschnitt betrachteten Vektorräume sind als komplexe Vektorräume aufzufassen.

6.1 Die klassische Fouriertransformation in $L^1(\mathbb{R}^n)$

Die klassische Fouriertransformierte $\hat{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ einer Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ ist gegeben durch

$$\hat{f}(\xi) := (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-ix\xi} f(x) \mathrm{d}x, \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Zunächst scheint $L^1(\mathbb{R}^n)$ ein geeigneter Raum für die Fouriertransformation zu sein, denn offenbar konvergiert für $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ dieses Integral absolut, und es gilt $\hat{f} \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit

$$\|\hat{f}\|_\infty \leq (2\pi)^{-n/2} \|f\|_1.$$

Das *Lemma von Riemann-Lebesgue* sagt aus, dass in diesem Fall sogar $\hat{f} \in C_0(\mathbb{R}^n)$, d.h. $\hat{f}$ ist stetig, und es gilt $\lim_{\xi\to\infty} \hat{f}(\xi) \to 0$. Mit anderen Worten: Die Fouriertransformation $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}^n) \ni f \mapsto \hat{f} \in C_0(\mathbb{R}^n)$ ist ein beschränkter linearer Operator.

Allerdings sieht man z.B. durch Berechnung der Fouriertransformierten der charakteristischen Funktion von $[-1, 1]$ in einer Dimension, dass im Allgemeinen $\hat{f} \notin L^1(\mathbb{R}^n)$. Nicht so einfach zu sehen ist dagegen die Tatsache, dass nicht jedes $g \in C_0(\mathbb{R}^n)$ Fouriertransformierte einer Funktion aus $L^1(\mathbb{R}^n)$ ist, d.h. dass $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}^n) \to C_0(\mathbb{R}^n)$ nicht surjektiv ist. Daher führen wir im nächsten Abschnitt den Raum der schnellfallenden Funktionen ein.

6.2 Schnellfallende Funktionen und temperierte Distributionen

Der nach L. Schwartz benannte Raum $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ der schnellfallenden Funktionen besteht aus allen beliebig oft differenzierbaren Funktionen, die samt ihren Ableitungen schneller als jedes Polynom fallen. Genauer:

Definition 6.1 Eine Funktion $\phi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ heißt *schnellfallend*, falls für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$ gilt:

$$p_{\alpha,\beta}(\phi) := \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left|x^\alpha \partial^\beta \phi(x)\right| < \infty. \tag{20}$$

Offenbar bilden die schnellfallenden Funktionen einen Vektorraum, den wir mit $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ bezeichnen.

Da jedes $p_{\alpha,\beta}$ eine Halbnorm auf $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ist, ist $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, ausgestattet mit der durch die Halbnormen $(p_{\alpha,\beta})_{(\alpha,\beta)\in\mathbb{N}_0^{2n}}$ erzeugten Topologie, ein metrisierbarer lokalkonvexer Raum.

Aus Satz 3.31 folgt sofort, dass $(\phi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ genau dann eine Nullfolge in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ist, wenn $x^\alpha\partial^\beta\phi_j(x) \to 0$ gleichmäßig auf $\mathbb{R}^n$ für jedes $(\alpha,\beta) \in \mathbb{N}_0^{2n}$. Die nachstehenden Eigenschaften folgen unmittelbar aus der Definition von $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Proposition 6.2 *(a) Ist $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, so folgt $x^\alpha\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ und $\partial^\beta\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ für $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$.*

(b) $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$.

(c) $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n)$ für $1 \leq p \leq \infty$.

Übungsaufgabe 6.3 Zeige:

(a) $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ist ein Fréchet-Raum.

(b) Es gilt $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$.

(c) $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ist dicht in $L^p(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ist dicht in $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ und $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ ist dicht in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Definition 6.4 Der stetige Dualraum $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ von $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ heißt Raum der *temperierten Distributionen*. Wir topologisieren $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ durch die schwach-*-Topologie, also durch die vom System

$$p_\phi(T) := |\langle T, \phi\rangle|, \quad \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n),$$

erzeugte lokalkonvexe Topologie.

Aus $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ folgt $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, d.h. jede Distribution mit kompaktem Träger ist temperiert, und die temperierten Distributionen sind ein Teilraum aller Distributionen.

Analog folgt aus $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^n)$, dass $L^p(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, d.h. jede p-integrierbare Funktion erzeugt eine reguläre und temperierte Distribution.

Beispiel 6.5 (a) Jede durch ein Polynom erzeugte reguläre Distribution ist temperiert.

(b) Sei $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit polynomialem Wachstum, d.h. es existiert ein $m \in \mathbb{N}$, so dass

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} \big((1+|x|)^{-m}\partial^\alpha f(x)\big) < \infty$$

für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$. Ist $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, so definiert $\phi \mapsto \langle T, f\phi\rangle$ ein Element in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, welches man mit fT bezeichnet. Insbesondere gilt $pT \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ für jedes Polynom p.

Übungsaufgabe 6.6 Zeige, dass jede temperierte Distribution von endlicher Ordnung ist.

6.3 Fouriertransformation in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

Da $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n)$, existiert für jedes $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ die Fouriertransformierte

$$\hat{\phi}(\xi) := (\mathcal{F}\phi)(\xi) := (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi}\phi(x)\mathrm{d}x.$$

Die folgenden Rechenregeln sind leicht nachzuweisen:

Proposition 6.7 *Seien $\phi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$, $1 \le k \le n$.*

(a) Es gilt $(\partial_k\phi)\widehat{}(\xi) = i\xi_k\hat{\phi}(\xi)$.

(b) Mit $D_k := -i\partial_k$ gilt

$$(D_k\phi)\widehat{}(\xi) = \xi_k\hat{\phi}(\xi), \quad \textit{sowie} \quad (x_k\phi)\widehat{}(\xi) = -D_k\hat{\phi}(\xi).$$

Etwas allgemeiner: Setzt man $D^\alpha := (-i)^{|\alpha|}\partial^\alpha$, so gilt

$$(D^\alpha\phi)\widehat{}(\xi) = \xi^\alpha\hat{\phi}(\xi) \quad \textit{sowie} \quad (x^\alpha\phi)\widehat{}(\xi) = (-1)^{|\alpha|}D^\alpha\hat{\phi}(\xi).$$

(c) Die Gauß-Glocke *$\phi(x) = e^{-|x|^2/2}$, $x \in \mathbb{R}^n$, ist ihre eigene Fouriertransformierte.*

(d) *Es gilt die* Fourier-Inversionsformel

$$\phi(x) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} \hat{\phi}(\xi) \mathrm{d}\xi.$$

(e) *Es gilt*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{\phi} \psi \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} \phi \hat{\psi} \mathrm{d}x.$$

(f) *Die Fouriertransformation ist* isometrisch *bzgl. der Norm in* $L^2(\mathbb{R}^n)$*, d.h. es gilt* $\|\hat{\phi}\|_2 = \|\phi\|_2$.

(g) *Es gilt der* Faltungssatz*:* $(\phi * \psi)\widehat{\ } = (2\pi)^{n/2} \hat{\phi} \hat{\psi}$.

Wir wissen bereits, dass $\hat{\phi} \in C_0(\mathbb{R}^n)$, falls $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Der folgende Satz verschärft diese Aussage.

Satz 6.8 *Aus* $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ *folgt* $\hat{\phi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$*, und die Fouriertransformation* $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ *ist stetig.*

Beweis.

Sei $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$. Dann gilt

$$\xi^\alpha D^\beta \hat{\phi}(\xi) = \xi^\alpha (-1)^{|\beta|} (x^\beta \phi)\widehat{\ }(\xi) = (D^\alpha (-x)^\beta \phi)\widehat{\ }(\xi).$$

Daraus folgt für $m > n/2$

$$\begin{aligned} |\xi^\alpha D^\beta \hat{\phi}(\xi)| &= (2\pi)^{-n/2} \left| \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} D^\alpha (-x)^\beta \phi(x) \mathrm{d}x \right| \\ &\leq (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |x|^2)^{-m} (1 + |x|^2)^m |D^\alpha x^\beta \phi(x)| \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Wähle $\gamma \in \mathbb{N}_0^n$ mit

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1 + |x|^2)^m |D^\alpha x^\beta \phi(x)| \leq p_{\gamma,\alpha}(\phi).$$

Da $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, ist $p_{\gamma,\alpha}(\phi) < \infty$. Andererseits gilt wegen $m > n/2$

$$c_m := (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |x|^2)^{-m} \mathrm{d}x < \infty.$$

Es folgt

$$p_{\alpha,\beta}(\hat{\phi}) \leq c_m p_{\gamma,\alpha}(\phi).$$

Also gilt $\hat{\phi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, und aus $\phi_j \to 0$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ folgt $\hat{\phi}_j \to 0$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, d.h. $\mathcal{F}$ ist stetig. ■

Mittels der Fourier-Inversionsformel erhält man daraus

Corollar 6.9 *Die Fouriertransformation $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ist ein topologischer Isomorphismus. Ihre Inverse $\mathcal{F}^{-1}$ ist gegeben durch*

$$(\mathcal{F}^{-1}\phi)(x) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi}\phi(\xi)\mathrm{d}\xi, \quad \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Weiter gilt

$$(\mathcal{F}^2\phi)(x) = \phi(-x), \quad \mathcal{F}^4 = \mathrm{id}.$$

6.4 Fouriertransformation in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$

In diesem Abschnitt erweitern wir die Fouriertransformation auf den Raum der temperierten Distributionen durch Dualität: Für $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ ist die Fouriertransformierte $\hat{T} = \mathcal{F}T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ von T definiert durch

$$\langle \hat{T}, \phi \rangle = \langle T, \hat{\phi} \rangle, \quad \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n),$$

d.h. die Fouriertransformation auf $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ ist die *Adjungierte* der Fouriertransformation auf $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Diese Definition ist konsistent, denn für $T = T_\psi$ mit $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ gilt

$$\langle \hat{T}_\psi, \phi \rangle = \langle \psi, \hat{\phi} \rangle = \langle \hat{\psi}, \phi \rangle = \langle T_{\hat{\psi}}, \phi \rangle, \quad \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Also haben wir $\hat{T}_\psi = T_{\hat{\psi}}$.

Da $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ein topologischer Isomorphismus ist, und die Dualräume schwach-$*$ topologisiert sind, überträgt sich dies auf die Adjungierten, und wir erhalten den folgenden wichtigen Satz.

Satz 6.10 *Die Fouriertransformation $\mathcal{F} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ ist ein topologischer Isomorphismus.*

Beispiel 6.11 (a) Da δ kompakten Träger besitzt, gilt $\delta \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Man erhält

$$\langle \hat{\delta}, \phi \rangle = \langle \delta, \hat{\phi} \rangle = \hat{\phi}(0) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix0} \phi(x) \mathrm{d}x = (2\pi)^{-n/2} \langle \mathbf{1}, \phi \rangle,$$

d.h. es ist $\hat{\delta} = (2\pi)^{-n/2} \mathbf{1}$.

(b) Da $\mathbf{1}$ ein Polynom ist, gilt $\mathbf{1} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, und als Fouriertransformierte ergibt sich

$$\langle \hat{\mathbf{1}}, \phi \rangle = \langle \mathbf{1}, \hat{\phi} \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\phi}(\xi) \mathrm{d}\xi = (2\pi)^{n/2} \hat{\hat{\phi}}(0) = (2\pi)^{n/2} \phi(0),$$

d.h. es gilt $\hat{\mathbf{1}} = (2\pi)^{n/2} \delta$.

Übungsaufgabe 6.12 Zeige, dass $\mathcal{F}^{-1}(H) = C_1 \delta + C_2 \mathrm{pv}(\frac{1}{x})$.

6.5 Fouriertransformation in $L^2(\mathbb{R}^n)$

Da $L^2(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, ist $\mathcal{F}$ auf $L^2(\mathbb{R}^n)$ wohldefiniert. Da $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dicht in $L^2(\mathbb{R}^n)$ liegt, übertragen sich die Eigenschaften von $\mathcal{F}$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ auf $L^2(\mathbb{R}^n)$. Damit erhalten wir

Satz 6.13 *Aus $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ folgt $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Die Fouriertransformation ist ein* unitärer Operator *in $L^2(\mathbb{R}^n)$, d.h. $\mathcal{F}$ ist isometrisch und bijektiv.*

Als erste Anwendung zeigen wir, wie man mittels Fouriertransformation Regularität der Lösungen einer partiellen Differentialgleichung beweisen kann.

Beispiel 6.14 Sei $c > 0$, $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$, $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ schwache Lösung von

$$(c - \Delta)u = g.$$

Dann gilt $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

Beweis. Es gilt:

$$(c + |\xi|^2)\hat{u} = ((c - \Delta)u)\widehat{\ } = \hat{g} \in L^2(\mathbb{R}^n).$$

Daraus folgt

$$\hat{u} = \frac{\hat{g}}{c + |\xi|^2} \in L^2(\mathbb{R}^n),$$

also $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$. ■

6.6 Anwendungen auf partielle Differentialgleichungen

Wir werden nun die Resultate aus den vorigen Abschnitten auf partielle Differentialgleichungen anwenden, um zu zeigen, dass Fundamentallösungen unter geeigneten Voraussetzungen bis auf ein additives Polynom eindeutig bestimmt sind. Außerdem zeigen wir am Beispiel der Wärmeleitungsgleichung, wie man mittels Fouriertransformation eine Fundamentallösung bestimmen kann.

Beispiel 6.15 Sei $L = \sum_{|\alpha| \leq m} c_\alpha \partial^\alpha$, $c_\alpha \in \mathbb{C}$, ein Differentialoperator mit konstanten Koeffizienten. Es gelte

$$P_L(\xi) := \sum_{|\alpha| \leq m} c_\alpha \xi^\alpha \neq 0$$

für alle $\xi \neq 0$ (das ist z.B. für $L = \Delta$ erfüllt). Dann folgt für jede schwache Lösung u von $Lu = 0$

$$0 = \hat{0} = \widehat{(Lu)} = (\sum_{|\alpha| \leq m} c_\alpha \xi^\alpha) \hat{u}.$$

Also gilt $\operatorname{supp}(\hat{u}) \subset \{0\}$, insbesondere besitzt $\hat{u}$ kompakten Träger und ist daher nach Satz 4.44 von endlicher Ordnung k. Daraus folgt mit der Taylor-Formel, dass $\hat{u}$ notwendigerweise eine endliche Linearkombination aus Ableitungen der Delta-Distribution sein muss:

$$\hat{u} = \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha \partial^\alpha \delta$$

mit geeigneten $a_\alpha \in \mathbb{C}$. Daraus folgt

$$u = \sum_{|\alpha| \leq k} b_\alpha x^\alpha$$

mit $b_\alpha \in \mathbb{C}$, d.h. u ist ein Polynom. Insbesondere ist jede Fundamentallösung von L eindeutig bestimmt bis auf Addition eines Polynoms.

Beispiel 6.16 (Wärmeleitungsgleichung) Sei $\alpha \in \mathbb{C}$. Dann gilt für

$$E_\alpha(x) = e^{-\alpha x} H(x)$$

die Identität

$$E_\alpha' + \alpha E_\alpha = \delta, \tag{21}$$

wie man unmittelbar verifiziert. Also ist E_α eine Fundamentallösung von $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + \alpha$ in einer Dimension. Wir betrachten jetzt die Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichung in $\mathbb{R}^2$:

$$(\partial_t - \frac{\partial^2}{\partial x^2})E = \delta.$$

Fouriertransformation bzgl. der x-Koordinate führt zu

$$(\partial_t + \xi^2)\hat{E} = (2\pi)^{-1/2}\delta_t,$$

wobei δ_t die eindimensionale Delta-Distribution bzgl. der t-Koordinate bezeichnet. Dies ist bis auf eine Konstante die Gleichung (21) mit $\alpha = \xi^2$. Eine Lösung ist daher gegeben durch

$$\hat{E}(t,x) = (2\pi)^{-1/2} e^{-\xi^2 t} H(t).$$

Es ist nun elementar, die inverse Fouriertransformierte zu berechnen. Man erhält

$$E(t,x) = \mathcal{F}^{-1}\hat{E}(t,x) = (4\pi t)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{x^2}{4t}}.$$

A Lösungen zu ausgewählten Übungsaufgaben

The search for truth is more precious than its possession.

Albert Einstein (1879-1955)

Lösung zu Übungsaufgabe 1.1:

Da $\{0\}$ eine λ-Nullmenge ist, folgt aus $\delta_{\restriction \mathbb{R}\setminus\{0\}} \equiv 0$:

$$\int_{\mathbb{R}} \delta \, \mathrm{d}\lambda = \int_{\mathbb{R}} 0 \, \mathrm{d}\lambda(x) = 0 \neq 1.$$

Also kann keine Funktion δ mit den gewünschten Eigenschaften existieren. ■

Lösung zu Übungsaufgabe 1.2:

$\Rightarrow$: Sei f lokal integrierbar und $x \in \mathbb{R}$. Da $\mathbb{R}$ lokalkompakt ist ($\Leftrightarrow$ jeder Punkt besitzt eine Umgebungsbasis, die aus kompakten Mengen besteht), existiert eine kompakte Umgebung U von x. Es folgt aus der Voraussetzung sofort die Integrierbarkeit von f auf U.

$\Leftarrow$: Existiere umgekehrt zu jedem $x \in \mathbb{R}$ ein $U \in \mathfrak{U}(x)$, so dass f auf U integrierbar sei. Wegen der Monotonie des Integrals dürfen wir o.B.d.A. U als offen annehmen, denn U enthält eine offene Menge $O \in \mathfrak{U}(x)$, und es ist

$$\int_O |f| \, \mathrm{d}\lambda \leq \int_U |f| \, \mathrm{d}\lambda < \infty,$$

f ist also auch auf O integrierbar.

Sei dann K ein Kompaktum. Wir finden dann für jedes $k \in K$ eine offene Menge $U_k \in \mathfrak{U}(k)$, auf der f integrierbar ist. Wegen der Kompaktheit von K existieren dann $k_1, \ldots, k_n \in K$ mit $K \subset \bigcup_{i=1}^n U_{k_i}$. Dann ist

$$\int_K |f| \, \mathrm{d}\lambda \leq \int_{\bigcup_{i=1}^n U_{k_i}} |f| \, \mathrm{d}\lambda \leq \sum_{i=1}^n \int_{U_i} |f| \, \mathrm{d}\lambda < \infty,$$

also ist f lokal integrierbar. ■

Lösung zu Übungsaufgabe 1.3:

Wir betrachten die folgendermaßen definierten Funktionen f_a $(a \in \mathbb{R})$:

$$f_a(x) = \begin{cases} \exp(-\frac{1}{x-a}), & \text{falls } x > a, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wir zeigen durch vollständige Induktion, dass diese Funktionen beliebig oft stetig differenzierbar sind mit der n-ten Ableitung

$$f_a^{(n)}(x) = \begin{cases} p_n(\frac{1}{x-a})\exp(-\frac{1}{x-a}), & \text{falls } x > a, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

mit einem geeigneten Polynom p_n. Wir dürfen dazu o.B.d.A. $a = 0$ annehmen und schreiben im Folgenden kurz f für f_0.

Induktionsanfang ($n = 0$): Wir setzen $p_0 \equiv 1$. Dann ist $f = f^{(0)}$ und $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$. f ist also überall stetig.

Induktionsschritt ($n \to n + 1$): Es ist für $x > 0$

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(p_n(\frac{1}{x})\exp(-\frac{1}{x})) = (-p_n'(\frac{1}{x}) + p_n(\frac{1}{x}))\frac{1}{x^2}\exp(-\frac{1}{x})).$$

Setze $p_{n+1}(t) = (p_n(t) - p_n'(t))t^2$. Dann ist für $x > 0$ $f^{(n+1)}(x) = p_{n+1}(\frac{1}{x})\exp(-\frac{1}{x})$, und es folgt durch Grenzübergang $x \to 0$, dass $f^{(n+1)}$ existiert und stetig ist. Ganz analog kann man zeigen, dass die Funktion g mit

$$g_a(x) = \begin{cases} \exp(\frac{1}{x-a}), & \text{falls } x < a, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

beliebig oft stetig differenzierbar ist.

Wir setzen dann $h(x) = g_b(x)f_a(x)$ mit $a < b$. Es folgt sofort, dass h beliebig oft differenzierbar ist und den Träger $[a, b] \neq \emptyset$ hat. ■

Lösung zu Übungsaufgabe 2.2:

(a) Wir setzen in $X = \mathbb{R}^n$ $A = \{e_1, e_2\}$. Dann ist

$$2A = \{2e_1, 2e_2\}, \qquad A + A = \{2e_1, 2e_2, e_1 + e_2\}.$$

(b) $\Rightarrow$: Da $(s + t)A \subset sA + tA$ trivialerweise stets richtig ist, ist noch die Umkehrung zu zeigen. Sei also A konvex und $a \in sA + tA$. Dann existieren $a_1, a_2 \in A$ mit $a = sa_1 + ta_2$. Es folgt:

$$a = sa_1 + ta_2 = (s + t)(\frac{s}{s+t}a_1 + \frac{t}{s+t}a_2).$$

Da $\frac{s}{s+t} + \frac{t}{s+t} = 1$ ist, ist $\frac{s}{s+t}a_1 + \frac{t}{s+t}a_2 \in A$ und somit $a \in (s + t)A$.

$\Leftarrow$: Seien $a, b \in A$ und $\lambda \in (0, 1)$. Dann ist

$$\lambda a + (1 - \lambda)b \in \lambda A + (1 - \lambda)A = (\lambda + (1 - \lambda))A = A.$$

(c) Sei $(K_i)_{i\in I}$ eine Familie kreisförmiger Mengen.
Sei $x \in \bigcup_{i\in I} K_i$. Dann $\exists i_0 \in I : x \in K_{i_0}$. Dann ist $\lambda x \in K_{i_0}$ für alle λ mit $|\lambda| \leq 1$, also ist dann auch $\lambda x \in \bigcup_{i\in I} K_i$.
Sei $x \in \bigcap_{i\in I} K_i$. Dann ist $\forall i \in I, \lambda \in \mathbb{K}$ mit $|\lambda| \leq 1$ $\lambda x \in K_i$.

(d) Sei $(K_i)_{i\in I}$ eine Familie konvexer Mengen. Ist $K := \bigcap_{i\in I} K_i = \emptyset$, stimmt die Aussage. Sei dies also nicht der Fall. Seien $x, y \in K$. Dann ist für alle $\lambda \in [0,1]$, $i \in I$, $\lambda x + (1-\lambda)y \in K_i$ und damit ist $\lambda x + (1-\lambda)y \in K$.

(e) Seien $x, y \in A + B$ und $\lambda \in [0,1]$. Dann existieren, $x_a, y_a \in A, x_b, y_b \in B$ mit $x = x_a + x_b, y = y_a + y_b$. Es ist dann:

$$\begin{aligned} \lambda x + (1-\lambda)y &= \lambda(x_a + x_b) + (1-\lambda)(y_a + y_b) \\ &= \lambda x_a + (1-\lambda)y_a + \lambda x_b + (1-\lambda)y_b \\ &\in A + B. \end{aligned}$$

(f) Sei $x \in A + B$. Dann ist $x = x_a + x_b$ mit $x_a \in A, x_b \in B$. Sei $\lambda \in \mathbb{K}$ mit $|\lambda| \leq 1$. Daraus folgt:

$$\lambda x = \lambda x_a + \lambda x_b \in A + B.$$

■

Lösung zu Übungsaufgabe 2.3:

Dass aus der absoluten Konvexität von E die Konvexität und die Kreisförmigkeit von E folgt, ist trivial. Sei also E kreisförmig und konvex. Seien weiter $x, y \in E$ und $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$ mit $|\lambda_1| + |\lambda_2| \leq 1$. Wir können dann schreiben:

$$\lambda_1 = |\lambda_1| \exp(i\arg(\lambda_1)), \qquad \lambda_2 = |\lambda_2| \exp(i\arg(\lambda_2)).$$

Dann ist

$$\lambda_1 x + \lambda_2 y = |\lambda_1| \exp(i\arg(\lambda_1))x + \lambda_2 = |\lambda_2| \exp(i\arg(\lambda_2))y.$$

Aus der Kreisförmigkeit folgt $\exp(i\arg(\lambda_1))x, \exp(i\arg(\lambda_2))y \in E$ und $0 \in E$. Aus der Konvexität folgt dann $\lambda_1 x + \lambda_2 y \in E$. ■

Lösung zu Übungsaufgabe 2.4:

Wir setzen $K := B(0,r) := \{x \in X : \|x\| < r\}$.

- K ist konvex: Seien $x, y \in K$ und $\lambda \in [0,1]$. Dann ist

$$\|\lambda x + (1-\lambda)y\| \leq \lambda\|x\| + (1-\lambda)\|y\| < r.$$

- K ist kreisförmig: Sei $x \in K$ und $\lambda \in [-1, 1]$. Dann gilt

$$\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\| < r.$$

- K ist absorbierend: Sei $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Setze $\varepsilon := \frac{r}{2\|x\|}$. Dann gilt für $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $|\lambda| \leq \varepsilon$

$$\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\| \leq \frac{r}{2\|x\|}\|x\| < r. \qquad \blacksquare$$

Lösung zu Übungsaufgabe 2.5:

Falls $A = \emptyset$ ist, sind die Aussagen trivial. Sei dies im Folgenden also nicht der Fall.

(a) Seien x, $y \in \operatorname{conv}(A)$. Dann ist $x = \sum_{i=1}^n s_i x_i$, $y = \sum_{i=1}^m t_i y_i$ mit $t_1, \ldots, t_m$, $s_1, \ldots, s_n \geq 0$, $\sum_{i=1}^n t_i = \sum_{i=1}^m s_i = 1$ und $x_1, \ldots, x_n$, $y_1, \ldots, y_m \in A$. Wir dürfen o.B.d.A. $n = m$ und $x_i = y_i$ für $i = 1, \ldots, n$ annehmen. Sei dann $\lambda \in [0, 1]$. Dann ist

$$\lambda x + (1-\lambda)y = \lambda \sum_{i=1}^n s_i x_i + (1-\lambda) \sum_{i=1}^n t_i x_i = \sum_{i=1}^n (\lambda s_i + (1-\lambda) t_i) x_i.$$

Da $\sum_{i=1}^n \lambda s_i + (1-\lambda) t_i = 1$ ist, ist $\lambda x + (1-\lambda)x \in \operatorname{conv}(A)$.

(b) $\bigcap\{B \in \operatorname{Pot}(X) | B \subset A, B \text{ konvex}\} \subset \operatorname{conv}(A)$ ist wegen (a) trivial. Sei also umgekehrt B eine konvexe, A enthaltende Menge. Wir zeigen durch vollständige Induktion, dass B jede Konvexkombination von Elementen aus A als Element hat, also:

$$x_1, \ldots, x_n \in A, \ \sum_{i=1}^n t_i = 1, \ t_1, \ldots, t_n \geq 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^n t_i x_i \in B.$$

Induktionsanfang ($n = 1$): Das ist trivialerweise richtig.
Induktionsschritt ($n \to n+1$):

$$\sum_{i=1}^{n+1} t_i x_i = \sum_{i=1}^n t_i x_i + t_{n+1} x_{n+1}$$

Ist $t_{n+1} = 1$, so sind wir fertig. Ansonsten ist $s_n := \sum_{j=1}^n t_j = 1 - t_{n+1} > 0$, und nach Voraussetzung gilt

$$\frac{1}{1-t_{n+1}} \sum_{i=1}^n t_i x_i = \sum_{i=1}^n \frac{t_i}{s_n} x_i \in B.$$

Daraus folgt

$$\sum_{i=1}^{n+1} t_i x_i = (1 - t_{n+1}) \sum_{i=1}^{n} \frac{t_i}{s_n} x_i + t_{n+1} x_{n+1} \in B. \qquad \blacksquare$$

Lösung zu Übungsaufgabe 2.9:

$(a) \Rightarrow (b)$: Sei σ eine Basis der Topologie τ und seien weiter $B_1, B_2 \in \sigma$. Dann ist $B_1 \cap B_2 \in \tau$ und damit muss gelten:

$$B_1 \cap B_2 = \bigcup \{B \in \sigma | B \subset B_1 \cap B_2\}.$$

Dann ist auch jedes $x \in B_1 \cap B_2$ in einem geeigneten $B_x \in \sigma$ mit $B_x \subset B_1 \cap B_2$ enthalten.

$(b) \Leftarrow (a)$: Wir betrachten das System τ aller Vereinigungen von Mengen aus σ, oder formaler:

$$\tau := \{M \in \mathrm{Pot}(X) | M = \bigcup_{s \in S} s, S \in \mathrm{Pot}(\sigma)\}.$$

Wir weisen nach, dass τ eine Topologie ist, und per Konstruktion ist dann σ eine Basis dieser Topologie.

- $X \in \tau$ folgt aus der Aufgabenstellung, und es ist $\emptyset = \bigcup_{i \in \emptyset} A_i$.
- Seien $A, B \in \tau$. Dann existieren Indexmengen I, J und Familien $(A_i)_{i \in I}, (B_j)_{j \in J}$ in σ mit $A = \bigcup_{i \in I} A_i, B = \bigcup_{j \in J} B_j$. Es ist dann:

  $$A \cap B = \bigcup_{i \in I} A_i \cap \bigcup_{j \in J} B_j = \bigcup_{(i,j) \in I \times J} A_i \cap B_j.$$

  Wir zeigen, dass jede Menge der Form $A_i \cap B_j$ in σ ist, woraus dann $A \cap B \in \tau$ folgt. Es gilt nämlich

  $$A_i \cap B_j = \bigcup \{B \in \sigma | B \subset A_i \cap B_j\}.$$

  „$\supset$“ ist trivial, und da nach Voraussetzung zu jedem $x \in A_i \cap B_j$ ein $B \in \sigma$ mit $x \in B \subset A_i \cap B_j$ existiert, gilt auch „$\subset$“.
- Dass die Vereinigung beliebig vieler Mengen aus τ in τ liegt, ist trivial. $\blacksquare$

Lösung zu Übungsaufgabe 2.10:

(a) Es reicht zu zeigen, dass einelementige Mengen abgeschlossen sind. Sei also $x \in X$. Sei weiter $y \in X \setminus \{x\}$. Nach Voraussetzung existiert ein $U_y \in \mathfrak{U}(y)$ mit $x \notin U_y$. Wir dürfen o.B.d.A. U_y als offen annehmen und erhalten so:

$$X \setminus \{x\} = \bigcup_{y \in X \setminus \{x\}} U_y.$$

$X \setminus \{x\}$ ist also offen und somit ist $\{x\}$ abgeschlossen.

(b) $\Rightarrow$: Sei $x \in X$ und $y \in X \setminus \{x\}$. Nach Voraussetzung existieren $U_x \in \mathfrak{U}(x), U_y \in \mathfrak{U}(y)$ mit $U_x \cap U_y = \emptyset$. Wir dürfen o.B.d.A. U_y als offen annehmen. Dann ist $X \setminus U_y \in \mathfrak{U}(x)$ und abgeschlossen (denn $U_x \subset X \setminus U_y$). Also ist

$$\bigcap_{y \in X \setminus \{x\}} (X \setminus U_y) \subset \{x\}.$$

Damit ist aber schon alles gezeigt, denn x ist Element all seiner Umgebungen.

$\Leftarrow$: Sei $x \in X$ und $y \in X \setminus \{x\}$. Nach Voraussetzung existiert dann eine abgeschlossene Umgebung U_y von x, für die $y \notin U_y$ ist, denn ansonsten wäre y Element des Schnittes der abgeschlossenen Umgebungen von x. Dann ist $X \setminus U_y$ offen und damit Umgebung von y. Damit haben wir aber schon disjunkte Umgebungen von x und y gefunden, X ist also hausdorffsch. ■

Lösung zu Übungsaufgabe 2.18:

Wir benutzen folgende Darstellung von $\overline{A}$:

$$\overline{A} = \{x \in X : \forall\, U \in \mathfrak{U}(x)\ U \cap A \neq \emptyset\}.$$

$\Rightarrow$: Sei $f : X \to Y$ stetig und sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine in X gegen x konvergente Folge. Weiter sei $U \in \mathfrak{U}(f(x))$. Dann ist nach Voraussetzung $f^{-1}(U) \in \mathfrak{U}(x)$, und damit existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $x_n \in f^{-1}(U)$ für $n > N$. Aus $f(f^{-1}(U)) \subset U$ folgt dann sofort, dass $f(x_n) \in U$ für $n > N$. Die Folge $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert also gegen $f(x)$.

Bemerkung: Dieser Beweis gilt für beliebige topologische Räume, eine stetige Funktion ist also immer auch folgenstetig.

$\Leftarrow$: Zuerst eine Definition:

$A \subset X$ heißt *folgenabgeschlossen*, wenn für jede konvergente Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in A die Menge der Grenzwerte in A enthalten ist.

Wir zeigen, dass in einem topologischen Raum, in dem jeder Punkt eine abzählbare Umgebungsbasis besitzt, die Begriffe abgeschlossen und folgenabgeschlossen zusammenfallen:

Sei A abgeschlossen und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in A, die gegen $x \in X$ konvergiere. Sei $U \in \mathfrak{U}(x)$. Dann ist $U \cap A \neq \emptyset$. Also ist $x \in \overline{A} = A$.

Auch dieser Beweis gilt in jedem beliebigen topologischen Raum.

Sei umgekehrt A folgenabgeschlossen. Sei $x \in \overline{A}$. Nach Voraussetzung hat x eine abzählbare Umgebungsbasis $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Da $(\bigcap_{k\leq n} U_k)_{n\in\mathbb{N}}$ dann ebenfalls eine Umgebungsbasis ist, dürfen wir o.B.d.A. $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ als absteigend voraussetzen (d.h. $U_1 \supset U_2 \supset \dots$). Wir definieren eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch die Eigenschaft $x_n \in (U_n \cap A)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in A und konvergiert gegen x. Also ist $x \in A$. Daraus folgt $\overline{A} \subset A$. Also ist A abgeschlossen.

Sei nun $f : X \to Y$ folgenstetig und habe jeder Punkt eine abzählbare Umgebungsbasis. Dann ist f schon stetig. Wir zeigen dazu, dass Urbilder abgeschlossener Mengen unter f abgeschlossen sind.
Sei also $A \subset Y$ abgeschlossen. Ist $f^{-1}(A) = \emptyset$, sind wir fertig. Sei dies also im Folgenden nicht der Fall. Sei dann $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $f^{-1}(A)$, die gegen ein $x \in X$ konvergiere. Nach Voraussetzung konvergiert dann $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $f(x)$. Da A abgeschlossen ist, folgt $f(x) \in A$. Dann ist aber $x \in f^{-1}(A)$. Also ist $f^{-1}(A)$ abgeschlossen. ■

Lösung zu Übungsaufgabe 2.22:

Wir zeigen, dass $f(X)$ dicht in X ist. Da $f(K)$ kompakt und damit abgeschlossen ist, folgt daraus die Surjektivität von f, und damit, da f trivialerweise injektiv ist, die Bijektivität.

Sei also $x \in X$. Wir betrachten die Folge $(f^n(x))_{n\in\mathbb{N}_0}$. Da X kompakt ist, hat diese eine Teilfolge $(f^{n_k}(x))_{k\in\mathbb{N}_0}$, die eine Cauchyfolge ist. Für $\varepsilon > 0$ existiert also ein $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit $d(f^{n_{k_1}}(x), f^{n_{k_2}}(x)) < \varepsilon$, falls $k_1, k_2 > N_\varepsilon$. Wir wählen $k_2 > k_1 > N_\varepsilon$. Wegen der Isometrie von f ist dann $d(f^{n_{k_2}-n_{k_1}}(x), x) = d(f^{n_{k_2}}(x), f^{n_{k_1}}(x)) < \varepsilon$, und da $f^{n_{k_2}-n_{k_1}}(x) \in f(X)$ liegt und ε beliebig war, ist $x \in \overline{f(X)}$, also ist $f(X)$ dicht. ■

Lösung zu Übungsaufgabe 2.23:

Ist X endlich, so ist $\mathrm{Pot}(X)$ endlich, also existieren nur endlich viele offene Mengen, also muss X kompakt sein. Da X als metrischer Raum hausdorffsch ist, existiert zu $x, y \in X$ ein offenes $U_{x,y} \in \mathfrak{U}(x)$ mit $y \notin U_{x,y}$. Also ist $\{x\} = \cap_{y\neq x} U_{x,y}$ offen und damit X diskret.

Ist X diskret, so ist $\{x\}_{x\in X}$ eine offene Überdeckung von X. Ist X kompakt, so hat diese eine endliche Teilüberdeckung. Da aber jede Teilfamilie von $\{x\}_{x\in X}$ offenbar keine Überdeckung ist, muss die Familie selbst endlich sein. Also ist X endlich. ■

Lösung zu Übungsaufgabe 3.2:

Seien X, Y, Z topologische Räume und $f : X \times Y \to Z$ stetig. Wir zeigen, dass dann die Abbildungen

$$f_y : X \to Z : x \mapsto f(x, y), \quad f_x : Y \to Z : y \mapsto f(x, y)$$

für alle $x \in X, y \in Y$ stetig sind. Seien dazu $x_0 \in X, y_0 \in Y$ und $U \in \mathfrak{U}(f_{x_0}(y_0))$. Aus der Stetigkeit von f folgt $f^{-1}(U) \in \mathfrak{U}(x_0, y_0)$. Es folgt die Existenz von $U_{x_0} \in \mathfrak{U}(x_0), U_{y_0} \in$

$\mathfrak{U}(y_0)$ mit $U_{x_0} \times U_{y_0} \subset f^{-1}(U)$. Dann ist erst recht $\{x_0\} \times U_{y_0} \subset f^{-1}(U)$, und damit ist dann

$$f_{x_0}(U_{y_0}) = \{f(x_0, y) : y \in U_{y_0}\} \subset \{f(x, y) : x \in U_{x_0}, y \in U_{y_0}\} \subset U,$$

woraus $f_{x_0}^{-1}(U) \in \mathfrak{U}(y_0)$ folgt.

Alternativbeweis: Wir benutzen das folgende allgemeine Resultat:

Seien X, Y topologische Räume. Dann sind die Abbildungen

$$h_y : X \to X \times \{y\} : x \mapsto (x, y), \quad h_x : Y \to \{x\} \times Y : y \mapsto (x, y)$$

für jedes $y \in Y$ und jedes $x \in X$ stetig, wobei wir $X \times \{y\}$ beziehungsweise $\{x\} \times Y$ mit der Spurtopologie der Produkttopologie von $X \times Y$ ausstatten. Den Beweis führen wir hier nicht, sondern beschränken uns auf einige Andeutungen:

- Um Stetigkeit nachzuweisen, kann man sich auf basisoffene Mengen zurückziehen, das heißt, eine Abbildung ist schon dann stetig, wenn Urbilder basisoffener Mengen offen sind.
- Ist $\mathcal{B}$ eine Basis einer Topologie auf X und $A \subset X$, so ist eine Basis der Spurtopologie auf A gegeben durch das System $\{B \cap A | B \in \mathcal{B}\}$. Insbesondere ist $\{U \times \{y\} | U$ offen in $X\}$ eine Basis der Topologie des oben angegebenen Raums $X \times \{y\}$.
- Die angegebene Abbildung ist sogar ein Homöomorphismus. Das spielt unter anderem bei Hausdorff- oder Zusammenhangseigenschaften von Produkttopologien eine Rolle.

Die Aufgabe läßt sich damit elegant lösen, denn für die Abbildung $A_{x_0} : X \to X : x \mapsto x + x_0$ gilt:

$$A_{x_0} = A \circ i_{x_0} \circ h_{x_0},$$

wobei i_{x_0} die kanonische Inklusion von $\{x_0\} \times X$ nach $X \times X$ sei. Da alle Funktionen auf der rechten Seite stetig sind, ist damit auch A_{x_0} stetig.

Die Stetigkeit der anderen Funktionen kann analog gezeigt werden. ■

Lösung zu Übungsaufgabe 3.6:

(a) (i) ⇒ (ii): Sei $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge in $\mathbb{K}$ und $U \in \mathfrak{U}(0)$. Wegen Corollar 3.8 dürfen wir U als kreisförmig annehmen. Es existiert ein $\lambda > 0$ mit $E \subset \lambda U$. Dann gilt wegen der Kreisförmigkeit von U für jedes $\mu \in \mathbb{K}$ mit $|\mu| \leq \frac{1}{\lambda}$ die Inklusion

$$\mu E = (\lambda\mu)\frac{1}{\lambda}E \subset (\lambda\mu)U \subset U.$$

Daher gibt es für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in E ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\lambda_n x_n \in U$ für $n \geq N$, womit die Konvergenz von $(\lambda_n x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bewiesen ist.

(i) $\Leftarrow$ (ii): Sei E nicht beschränkt. Dann existiert ein $U \in \mathfrak{U}(0)$, so dass es für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in E \setminus nU$ gibt. Die Folge $(\frac{1}{n}x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert daher nicht gegen 0, denn $\frac{1}{n}x_n \notin U$ per Konstruktion.

(b) Sei K kompakt und $U \in \mathfrak{U}(0)$ kreisförmig. Es existiert dann ein kreisförmiges $V \in \mathfrak{U}(0)$ mit $V + V \subset U$. Da $(k + V^\circ)_{k\in K}$ eine offene Überdeckung von K ist, existieren $k_1, \ldots, k_n \in K$ mit $K \subset \bigcup_{i=1}^n k_i + V$. Da V absorbierend und kreisförmig ist, existiert ein $\lambda \geq 1$ mit $k_1, \ldots, k_n \in \lambda V$. Daraus folgt:

$$K \subset \bigcup_{i=1}^n k_i + V \subset \lambda V + V \subset \lambda V + \lambda V \subset \lambda U.$$

Also ist K beschränkt. ■

Lösung zu Übungsaufgabe 3.10:

Um die Aufgabe elegant lösen zu können, verwenden wir Satz 3.16; die dortigen Resultate sind völlig unabhängig von der hier bewiesenen Aussage.

Nach Definition 2.8 ist $\tau_1 \subset \tau_2$ genau dann, wenn $\mathrm{id} : (X, \tau_2) \to (X, \tau_1)$ stetig ist. Wegen Satz 3.16 ist das genau dann der Fall, wenn id stetig in 0 ist, also jede Nullumgebung bezüglich τ_1 eine Nullumgebung bezüglich τ_2 umfasst (Abschnitt 2.3.3). Das war aber zu beweisen. ■

Lösung zu Übungsaufgabe 3.13:

Sei X ein n-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum mit der hausdorffschen Vektorraumtopologie τ_H. Wir dürfen dann o.B.d.A. $X = \mathbb{K}^n$ annehmen, denn wir können die Topologie auf X durch eine Bijektion auf $\mathbb{K}^n$ übertragen (formaler sind X und $\mathbb{K}^n$ homöo- und isomorph, wenn wir $\mathbb{K}^n$ mit der Topologie $\{f(U) : U \in \tau_H\}$, $f : X \to \mathbb{K}^n$ ein Isomorphismus, ausstatten). Wir betrachten auf X die gegebene Topologie τ_H und die von der Maximumsnorm erzeugte *euklidische Topologie* τ_E mit den Nullumgebungssystemen $\mathfrak{U}_H$ und $\mathfrak{U}_E$. Es ist $\tau_H = \tau_E$ zu zeigen, was wegen Übungsaufgabe 3.10 gleichbedeutend mit $U_H = U_E$ ist.

- $\mathfrak{U}_H \subset \mathfrak{U}_E$:

  Sei $U \in \mathfrak{U}_H$. Es folgt mit Proposition 3.7 induktiv die Existenz einer kreisförmigen Menge $V \in \mathfrak{U}_H$ mit

$$\sum_{j=1}^n V \subset U.$$

Da V absorbierend ist (Proposition 3.7), gibt es ein $k > 0$, so dass für die kanonischen Basisvektoren $e_1, \dots, e_n \in \frac{1}{k}V$ gilt. Dann ist

$$k \sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j \in U,$$

falls $|\alpha_j| \leq 1$ für $j = 1, \dots, n$ ist. Also ist

$$\mathfrak{U}_E \ni B(0, k) \subset U,$$

also $U \in \mathfrak{U}_E$.

- $\mathfrak{U}_E \subset \mathfrak{U}_H$:

  Um diese Inklusion zu zeigen, genügt es, ein (norm-)beschränktes $U \in \mathfrak{U}_H$ zu finden, denn dann ist die Einheitskugel (und damit jede Kugel) in $\mathfrak{U}_H$. Wir konstruieren eine solche Menge induktiv:

  Basis: Da τ_H hausdorffsch ist, existiert ein $U_1 \in \mathfrak{U}_H \setminus \{X\}$. Insbesondere enthält U_1 höchstens $(n-1)$-dimensionale Unterräume.

  Schritt($k \to k{+}1$): Seien also für $k < n$ $U_1, \dots, U_k \in \mathfrak{U}_H$ derart konstruiert, dass U_j höchstens $(n-j)$-dimensionale Unterräume enthalte. Wegen Proposition 3.7 existiert ein $V \in \mathfrak{U}_H$ mit $V + V \subset U_k$. V kann höchstens einen $(n-k)$-dimensionalen Unterraum H_{n-k} enthalten, da ansonsten U_k einen $(n{-}k{+}1)$-dimensionalen Unterraum enthielte. Ist das der Fall, so wählen wir ein $W \in \mathfrak{U}_H$, dass ein $v \in H_{n-k} \setminus \{0\}$ nicht enthält, was stets möglich ist, da τ_H hausdorffsch ist; ansonsten setzen wir $W = X$.
  Setze dann $U_{k+1} := W \cap V$. Diese Menge enthält höchstens $(n{-}k{-}1)$-dimensionale Unterräume.

  Wir finden so nach n Schritten ein $U_n \in \mathfrak{U}_H$, dass keine nichttrivialen Unterräume enthält. Wegen Corollar 3.8 existiert ein kreisförmiges, τ_H-abgeschlossenes $U \in \mathfrak{U}_H$ mit $U \subset U_n$, das natürlich ebenfalls keine nichttrivialen Unterräume enthält; man beachte ausserdem, dass wegen $\tau_H \subset \tau_E$ U auch bzgl. τ_E abgeschlossen ist.

  Wäre U nicht normbeschränkt, so existierte zu jedem $k \in \mathbb{N}$ ein $x_k \in \frac{1}{k}U$ mit $\|x_k\| \geq 1$, und da U und damit auch $\frac{1}{k}U$ kreisförmig ist, darf man $\|x_k\| = 1$ annehmen.
  Die Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ist normbeschränkt und hat somit einen Häufungspunkt $x \in X$ bzgl. der Topologie τ_E. Da jede Umgebung von x unendlich viele Folgenglieder enthält, die Folge $(\frac{1}{k}U)_{k \in \mathbb{N}}$ wegen der Kreisförmigkeit von U absteigend ist und die Mengen U bzw. $B^{=} := \{y \in X : \|y\| = 1\}$ bzgl. τ_E abgeschlossen sind, folgt

$$x \in \Big(\bigcap_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{k} U \cap B^{=}\Big),$$

also die Existenz eines Elementes $x \neq 0$ mit $kx \in U$ für jedes $k \in \mathbb{N}$. Wegen der Kreisförmigkeit von U wäre also $\operatorname{span}\{x\} \subset U$ im Widerspruch zur Konstruktion von U. ∎

Lösung zu Übungsaufgabe 3.15:

(a) Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge, U eine Nullumgebung und $V \in \mathfrak{U}(0)$ kreisförmig mit $V + V \subset U$. Dann existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $x_n - x_m \in V$ für alle $n, m \geq N$, insbesondere ist also für jedes $n \geq N$ $x_n - x_N \in V$, was äquivalent zu $x_n \in x_N + V$ ist.

Weiter existiert ein $\lambda \geq 1$ mit $x_1, \ldots, x_N \in \lambda V \subset \lambda U$. Da $x_n \in x_N + V \subset \lambda V + \lambda V \subset \lambda U$ für $n > N$ ist, ist somit die Beschränktheit von $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ gezeigt.

(b) (i) $\Rightarrow$ (ii) ist trivial, denn in einem normierten Raum ist jede Kugel beschränkt.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Sei U eine Nullumgebung so, dass $T(U)$ beschränkt ist. Dann ist auch $\lambda T(U)$ beschränkt für jedes $\lambda \in \mathbb{K}$. Sei $M \subset X$ eine beschränkte Menge. Dann existiert ein $\lambda > 0$ mit $M \subset \lambda U$, und es folgt

$$T(M) \subset T(\lambda U) = \lambda T(U).$$

T ist also beschränkt. ∎

Lösung zu Übungsaufgabe 3.19:

Sei $T : X \to Y$ linear. Um nachzuweisen, dass T stetig ist, dürfen wir o.B.d.A. annehmen, dass T surjektiv ist. Wegen Übungsaufgabe 3.13 darf dann ebenfalls angenommen werden, dass $X = \mathbb{K}^n$ und $Y = \mathbb{K}^m$ gilt und die Topologien jeweils von der 1-Norm induziert werden.

Wegen Übungsaufgabe 3.15 und Satz 3.17 muss nur die Existenz einer Nullumgebung gezeigt werden, deren Bild beschränkt ist. Sei also $U \subset X$ die Kugel mit Radius 1 um 0 und seien $e_1, \ldots, e_n$ die kanonischen Basisvektoren von X. Nach Wahl der Norm gilt dann

$$U = \{\sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j : \sum_{j=1}^{n} |\lambda_j| \leq 1\}.$$

Folglich ist für $u \in U$ mit $K := \max_{j=1}^{n} \|T(e_j)\|$

$$\|T(u)\| = \|T(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j)\| = \|\sum_{j=1}^{n} \lambda_j T(e_j)\| \leq \sum_{j=1}^{n} |\lambda_j| \, \|T(e_j)\| \leq K \sum_{j=1}^{n} |\lambda_j| \leq K.$$

Also ist $T(U)$ beschränkt und somit T stetig. ∎

Lösung zu Übungsaufgabe 3.23:

(a) $p(x) = p(x - y + y) \leq p(x - y) + p(y)$ impliziert, da x und y beliebig waren,

$$|p(x) - p(y)| \leq p(x - y).$$

(b) $p(x) = p(x - 0) \geq |p(x) - p(0)| \geq 0$.

(c) $p(0) = p(0 \cdot 0) = 0 \cdot p(0) = 0$. ■

Lösung zu Übungsaufgabe 3.28:

(a)

$$\mu_E(x) < 1 \Rightarrow \exists \lambda < 1 : x \in \lambda E \subset E$$

$$x \in E \Rightarrow x \in 1E \Rightarrow \mu_E(x) \leq 1$$

(b) $\Rightarrow$: Enthalte E einen nichttrivialen Unterraum U. Sei $x \in U \setminus \{0\}$. Dann ist $\lambda x \in U \subset E$ für jedes $\lambda > 0$ und damit ist $\mu_E(x) = 0$, μ_E ist also keine Norm.

$\Leftarrow$: Sei μ_E keine Norm. Dann existiert $x \in X \setminus \{0\}$ mit $\mu_E(x) = 0$. Dann ist $\mu_E(\lambda x) = |\lambda|\mu_E(x) = 0$ für jedes $\lambda \in \mathbb{K}$. Aus (a) folgt, dass $\operatorname{span}(\{x\}) \subset E$ gilt, E enthält also den nichttrivialen Unterraum $\operatorname{span}(\{x\})$. ■

Lösung zu Übungsaufgabe 3.29:

(a) Sei μ_E stetig in 0. Sei $x \in X$ und $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein $U \in \mathfrak{U}(0)$ mit $\mu_E(U) \subset B(0, \varepsilon)$. Aus Satz 3.27 folgt, dass $\mu_E(x + u) \leq \mu_E(x) + \mu_E(u) < \mu_E(x) + \varepsilon$ und $\mu_E(x + u) \geq \mu_E(x) - \mu_E(u) > \mu_E(x) - \varepsilon$ für jedes $u \in U$, woraus insgesamt

$$|\mu_E(x + u) - \mu_E(x)| < \varepsilon$$

folgt. Da $x + U \in \mathfrak{U}(x)$ ist, ist somit die Stetigkeit von μ_E in x gezeigt.

(b) $\Rightarrow$: Sei μ_E stetig. Da $\mu_E(0) = 0$ und $]-\infty, 1[\in \mathfrak{U}(0)$, ist $\mu_E^{-1}(]-\infty, 1[) \in \mathfrak{U}(0)$. Nach (a) gilt aber $E \supset \mu_E^{-1}(]-\infty, 1[)$. Also ist auch E eine Nullumgebung.

$\Leftarrow$: Sei $E \in \mathfrak{U}(0)$ und $\varepsilon > 0$. Setze $U := \varepsilon E$. Dann ist $U \in \mathfrak{U}(0)$ und $\mu_E(U) \leq \varepsilon$, woraus die Stetigkeit von μ_E in 0 folgt. ■

Lösung zu Übungsaufgabe 3.35:

$\Rightarrow$: Sei $(p_i)_{i \in I}$ separierend und $x \in X \setminus \{0\}$. Dann existiert ein $i \in I$ mit $\varepsilon := p_i(x)/2 > 0$. Für die Nullumgebung

$$U := \{y \in X : p_i(y) < \varepsilon\}$$

gilt $U \cap (x+U) = \emptyset$, denn für $y = x + u \in x + U$ gilt

$$p_i(y) = p_i(x+u) \geq p_i(x) - p_i(u) \geq \varepsilon.$$

Also besitzen 0 und x disjunkte Umgebungen.

$\Leftarrow$: Sei τ hausdorffsch und $x \in X \setminus \{0\}$. Dann gibt es ein endliches $I' \subset I$ und ein $\varepsilon > 0$ mit

$$x \notin \bigcap_{i \in I'} \{y \in X : p_i(y) < \varepsilon\}.$$

Also gilt $p_i(x) \geq \varepsilon > 0$ für ein $i \in I'$, d.h. $(p_i)_{i \in I}$ ist separierend. ∎

Lösung zu Übungsaufgabe 3.41:

Sei $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $C^m(\Omega)$. Dann ist insbesondere $(\partial^\alpha f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ für jedes $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\alpha| \leq m$ eine Cauchy-Folge bzgl. der durch die Halbnormen p_i gegebenen lokalkonvexen Vektorraumtopologie aus Abschnitt 3.3.1 und konvergiert damit lokal gleichmäßig gegen ein $f_\alpha \in C(\Omega)$. Das impliziert bekanntlich, dass $f_0 \in C^m(\Omega)$ mit

$$\partial^\alpha f_0 = f_\alpha, \quad |\alpha| \leq m,$$

siehe [Heu01], Satz 104.3. Also ist $C^m(\Omega)$ ein Fréchet-Raum. ∎

Lösung zu Übungsaufgabe 3.43:

(a) Da für $x \in \Omega$ die Diracsche Delta-Distribution

$$\delta_x : C^m(\Omega) \ni f \mapsto f(x) \in \mathbb{K}$$

offensichtlich stetig ist, ist $\mathrm{kern}(\delta_x)$ abgeschlossen in $C^m(\Omega)$. Daher folgt die Behauptung aus der Identität

$$C_K^m(\Omega) = \bigcap_{x \in \Omega \setminus K} \mathrm{kern}(\delta_x).$$

(b) Es ist nur die Eigenschaft $p_{i,K}(f) = 0 \Rightarrow f = 0$ nachzuweisen. Das ist aber trivial.

(c) Da für $i \leq j \leq m$ $p_{i,K}(f) \leq p_{j,K}(f)$ für alle $f \in C_K^m(\Omega)$ ist, wird die Topologie auf $C_K^m(\Omega)$ schon von $p_{m,K}$ erzeugt und ist damit eine Normtopologie. Die Vollständigkeit dieser Vektorraumtopologie folgt daraus, dass die Spurtopologie von $C^m(\Omega)$ auf $C_K^m(\Omega)$ mit der ursprünglichen Topologie auf $C_K^m(\Omega)$ übereinstimmt, was man durch einen Vergleich der erzeugenden Halbnormen leicht nachprüft. Da $C_K^m(\Omega)$ in $C^m(\Omega)$ abgeschlossen und $C^m(\Omega)$ ein Fréchet-Raum ist, folgt damit die Vollständigkeit der Normtopologie auf $C_K^m(\Omega)$.

(d) Wir nehmen an, dass die Topologie von $C_K^\infty(\Omega)$ von einer Norm p erzeugt würde. Wegen Bemerkung 3.33 existierten $i_1, \dots, i_k, C > 0$, so dass für alle $f \in C_K^\infty(\Omega)$ gälte:

$$p(f) \leq C \max_{j=1,\dots,k} p_{i_j,K}(f)$$

Damit wäre p äquivalent zu $p_{\ell,K}$ mit $\ell := \max_{j=1,\dots,k} i_j$; die Topologie auf $C_K^\infty(\Omega)$ würde also von $p_{\ell,K}$ erzeugt. Das würde aber bedeuten, dass alle Ableitungen einer Funktion schon dann gleichmäßig konvergieren, wenn es nur die ersten ℓ tun, was ein Widerspruch ist (Gegenbeispiel?).

(e) Für $i \leq m$ und $f \in C^\ell(\Omega)$ gilt die Ungleichung $p_i(\mathrm{id}(f)) \leq p_i(f)$. Wegen Bemerkung 3.33 ist $\mathrm{id} : C^\ell(\Omega) \to C^m(\Omega)$ stetig. ■

Lösung zu Übungsaufgabe 4.2:

Wähle $K_j \Subset \Omega$ mit $K_j \subset K_{j+1}^\circ$, und $\bigcup_{j=1}^\infty K_j = \Omega$. Dann existiert für jedes $j \in \mathbb{N}$ eine offene Kugel $B_j := B(x_j, r_j) \subset K_{j+1}^\circ \setminus K_j$. O.B.d.A. gelte $r_j \leq 1$. Sei $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ mit $\phi(0) = 1$ und $\mathrm{supp}(\phi) \subset B(0,1)$. Dann definiert

$$\phi_j(x) := r_j^j \phi\left(\frac{x - x_j}{r_j}\right)$$

eine Funktion aus $\mathcal{D}(\Omega)$ mit $\mathrm{supp}(\phi_j) \subset B_j$. Wir zeigen, dass die durch

$$\psi_k := \sum_{j=1}^k \frac{1}{j}\phi_j$$

definierte Funktionenfolge aus $\mathcal{D}(\Omega)$ eine Cauchy-Folge bzgl. $(|\cdot|_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ ist, die nicht konvergiert. Ist U eine Nullumgebung der durch $(|\cdot|_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ erzeugten Topologie, so gibt es $r > 0$ und $m \in \mathbb{N}$ mit

$$\{\phi \in \mathcal{D}(\Omega) : |\phi|_m < r\} \subset U.$$

Also gilt für $k' > k > k_0 := \max\{|\phi|_m / r, m\}$:

$$\begin{aligned}
|\psi_{k'} - \psi_k|_m &= \sup\left\{\left|\sum_{j=k+1}^{k'} \frac{1}{j}\partial^\alpha \phi_j(x)\right| : x \in \Omega, |\alpha| \leq m\right\} \\
&\leq \frac{1}{k+1} \sup\left\{\sum_{j=k+1}^{k'} r_j^{j-|\alpha|} \left|(\partial^\alpha \phi)\left(\frac{x - x_j}{r_j}\right)\right| : x \in \Omega, |\alpha| \leq m\right\} \\
&\leq \frac{r}{|\phi_m|}|\phi|_m = r.
\end{aligned}$$

Daher ist $(\psi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge. Gäbe es $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$ mit $\psi_k \to \psi$, so wäre (da Konvergenz bzgl. $(|\cdot|_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ insb. die punktweise Konvergenz impliziert) $\psi(x) = \lim_{k\to\infty} \psi_k(x)$ für jedes $x \in \Omega$. Nun gilt aber $\psi_k(x_k) = 1/k \neq 0$. Nach Konstruktion der x_k kann ψ keinen kompakten Träger in Ω besitzen. ■

Lösung zu Übungsaufgabe 4.6:

Wir nehmen an, dass $\mathcal{D}(\Omega)$ metrisierbar mit der Metrik d wäre. Sei $K_1 \subset K_2 \subset \ldots$ eine aufsteigende Folge von Kompakta in $\mathbb{R}^n$ mit $K_i \subset K_{i+1}^\circ$ und $\Omega = \bigcup_{i=1}^\infty K_i$.

Es existiert dann eine Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{D}(\Omega)$ mit $\mathrm{supp}(f_k) \not\subset K_k$ für jedes $k \in \mathbb{N}$. Weiter existierte wegen der Stetigkeit der Skalarmultiplikation zu jedem $k \in \mathbb{N}$ ein $\lambda_k > 0$ mit $d(\lambda_k f_k, 0) < \frac{1}{k}$. Daraus würde aber folgen, dass $(\lambda_k f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge in $\mathcal{D}(\Omega)$ wäre, was ein Widerspruch zu Satz 4.5 ist. Also ist $\mathcal{D}(\Omega)$ nicht metrisierbar. ■

Lösung zu Übungsaufgabe 4.11:

Wegen Satz 4.3 reicht es aus, die Stetigkeit von $\partial^\alpha_{\restriction \mathcal{D}_K(\Omega)}$ für jedes $K \Subset \Omega$ zu zeigen. Dazu reicht es aus, Folgenstetigkeit im Ursprung nachzuweisen. Sei also $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge in $\mathcal{D}_K(\Omega)$. Dann konvergiert $(\partial^\beta f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ für alle $\beta \in \mathbb{N}_0^n$ gleichmäßig gegen 0. Insbesondere konvergiert dann auch $(\partial^\beta \partial^\alpha f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ für alle $\beta \in \mathbb{N}_0^n$ gleichmäßig gegen 0, woraus wegen $\partial^\alpha f_k \in \mathcal{D}_K(\Omega)$ die Stetigkeit von $\partial^\alpha_{\restriction \mathcal{D}_K(\Omega)}$ folgt. ■

Lösung zu Übungsaufgabe 4.21:

Für $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ gilt

$$\begin{aligned}
\langle \partial^\alpha T_f, \phi \rangle &= (-1)^{|\alpha|} \langle T_f, \partial^\alpha \phi \rangle \\
&= (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega f(\partial^\alpha \phi) \mathrm{d}x \\
&= (-1)^{2|\alpha|} \int_\Omega (\partial^\alpha f) \phi \mathrm{d}x \\
&= \langle T_{\partial^\alpha f}, \phi \rangle.
\end{aligned}$$

Also ist $\partial^\alpha T_f = T_{\partial^\alpha f}$. ■

Lösung zu Übungsaufgabe 4.27:

NYI. ■

Lösung zu Übungsaufgabe 4.31:

(a) Sei $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Es ist für alle $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$:

$$p_\phi(\partial^\alpha T) = |\langle \partial^\alpha T, \phi \rangle| = |\langle T, \partial^\alpha \phi \rangle| = p_{\partial^\alpha \phi}(T).$$

Mit Bemerkung 3.33 folgt so die Stetigkeit von ∂^α auf $\mathcal{D}'$.

(b) Für $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ gilt

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} \langle T_{f_k}, \phi\rangle &= \lim_{k\to\infty} \int_\Omega f_k \phi \,\mathrm{d}x \\
&= \lim_{k\to\infty} \int_{\operatorname{supp}\phi} f_k \phi \,\mathrm{d}x \\
&= \int_{\operatorname{supp}\phi} \lim_{k\to\infty} (f_k\phi)\mathrm{d}x \quad \text{(dominierte Konvergenz)} \\
&= \int_\Omega f\phi \,\mathrm{d}x \\
&= \langle T_f, \phi\rangle.
\end{aligned}$$

Also gilt $T_{f_k} \to T_f$. ■

Lösung zu Übungsaufgabe 4.41:

Sei in der gesamten Aufgabe $K_1 \subset K_2 \subset \ldots$ eine aufsteigende Folge von Kompakta in $\mathbb{R}^n$ mit $K_i \subset K_{i+1}^\circ$ und $\Omega = \bigcup_{i=1}^\infty K_i$.

(a) Beachte zunächst, dass ein $j \in \mathbb{N}$ existiert mit $\partial K_j \cap K = \emptyset$, denn da $(K_i^\circ)_{i\in\mathbb{N}}$ eine offene Überdeckung von K ist, existiert ein $K_{i'} \supset K$, und $K_{i'+1}$ hat wegen $K \subset K_{i'+1}^\circ$ diese Eigenschaft.

Wähle $\lambda > 0$ dann so, dass $d(K, \partial K_j)$, $d(K_j, \partial\Omega) > \lambda$ sind. Aus Satz 4.40 folgt dann, dass $\operatorname{supp}(\chi_{K_j} * \beta_\lambda) \subset K_j + B(0,\lambda) \subset \Omega$ ist, wobei β_λ die Eigenschaften aus Satz 4.40 habe. Für $x \in K$ ist wegen $B(0,\lambda) \subset -(K_j - \{x\})$ und $\operatorname{supp}(\beta_\lambda) \subset B(0,\lambda)$

$$\begin{aligned}
(\chi_{K_j} * \beta_\lambda)(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{K_j}(y)\beta_\lambda(x-y)\mathrm{d}y \\
&= \int_{K_j} \beta_\lambda(x-y)\mathrm{d}y \\
&= \int_{\{x\}-K_j} \beta_\lambda(y)\mathrm{d}y \\
&= \int_{B(0,\lambda)} \beta_\lambda(y)\mathrm{d}y \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Also hat $\phi := \chi_{K_j} * \beta_\lambda$ die gewünschte Eigenschaft.

(b) Aus dem Satz über die dominierte Konvergenz folgt

$$\|f - f\chi_{K_i}\|_p \to 0.$$

für $i \to \infty$. Also existiert zu $\varepsilon > 0$ ein $i \in \mathbb{N}$ mit $\|f - f\chi_{K_i}\|_p < \frac{\varepsilon}{2}$. Weiter findet man mit Satz 4.40 ein $\lambda > 0$ mit

$$\|f\chi_{K_i} * \beta_\lambda - f\chi_{K_i}\|_p < \frac{\varepsilon}{2}$$

und $\operatorname{supp}(f\chi_{K_i} * \beta_\lambda) \subset \Omega$. Mit der Dreiecksungleichung folgt schließlich

$$\|f - f\chi_{K_i} * \beta_\lambda\|_p < \varepsilon,$$

und da $f\chi_{K_i} * \beta_\lambda \ \in \mathcal{D}(\Omega)$ ist, ist somit alles gezeigt. ■

Lösung zu Übungsaufgabe 5.3:

Sei $x \in \overline{A + K}$. Dann existieren Folgen $(a_m)_{m\in\mathbb{N}} \subset A, (k_m)_{m\in\mathbb{N}} \subset K$ mit $(a_m + k_m)_{m\in\mathbb{N}} \to x$. Da K kompakt ist, hat $(k_m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine gegen $k \in K$ konvergierende Teilfolge $(k_{m_\ell})_{\ell\in\mathbb{N}}$. Dann konvergiert auch $(a_{m_\ell})_{\ell\in\mathbb{N}} = ((a_{m_\ell} + k_{m_\ell}) - k_{m_\ell})_{\ell\in\mathbb{N}}$ gegen ein $a \in \mathbb{R}^n$. Da A abgeschlossen ist, ist $a \in A$ und damit

$$x = \lim_{\ell\to\infty} (a_{m_\ell} + k_{m_\ell}) = a + k \in A + K$$

■

Lösung zu Übungsaufgabe 5.5:

NYI.

Lösung zu Übungsaufgabe 5.16:

Es genügt, den Fall $n = 1$ zu betrachten. Sei $S := 0$ und $S_k := \delta_k$, d.h. $\langle S_k, \phi\rangle = \phi(k)$. Dann gilt $S_k \to S$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, aber $(S_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert sicherlich nicht in $\mathcal{E}'(\mathbb{R})$. ■

Lösung zu Übungsaufgabe 6.3:

(a) Sei $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Dann ist für alle $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}_0^{2n}$ $(x \mapsto x^\alpha \partial^\beta f_k(x))_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge bzgl. der Supremumsnorm und hat damit einen gleichmäßigen Grenzwert $f_{\alpha,\beta}$.

Aus dem Beweis von Übungsaufgabe 3.41 folgt, dass $f := f_{0,0} \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ mit $\partial^\beta f = f_{0,\beta}$ ist. Daraus folgt sofort $f_{\alpha,\beta}(x) = x^\alpha \partial^\beta f(x)$ für jedes $x \in \mathbb{R}^n$, d.h. wir haben $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ und $f_k \to f$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ für $k \to \infty$. Also konvergiert $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ gegen f, d.h. $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ist ein Fréchet-Raum.

(b) Wegen Satz 4.3 genügt es zu zeigen, dass $\mathrm{id} : \mathcal{D}_K(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ für jedes $K \Subset \mathbb{R}^n$ stetig ist. Sei also $K \Subset \mathbb{R}^n$. Mit den Bezeichnungen aus (20) und (5) gilt für $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n, f \in \mathcal{D}_K(\mathbb{R}^n)$ und $C_K := \max\{|x^\alpha| : x \in K\}$

$$p_{\alpha,\beta}(f) = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta f(x)| \le C_K p_{|\beta|,K}(f)$$

woraus mit Bemerkung 3.33 die Stetigkeit von $\mathrm{id} : \mathcal{D}_K(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ folgt.

Sei nun $K \Subset \mathbb{R}^n$ und $m \in \mathbb{N}$. Dann ist für $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$$\begin{aligned} p_{m,K}(f) &= \sup\{|\partial^\beta f(x)| : x \in K, |\beta| \leq m\} \\ &\leq \sup\{|\partial^\beta f(x)| : x \in \mathbb{R}^n, |\beta| \leq m\} \\ &= p_{0,\beta}(f). \end{aligned}$$

Wieder wegen Bemerkung 3.33 ist $\mathrm{id} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ stetig.

(c) Die Dichtheit von $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ in $L^p(\mathbb{R}^n)$ folgt sofort aus Proposition 6.2 (c) und Übungsaufgabe 4.41 (b).

Um $\overline{\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)} = \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ und $\overline{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)} = \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ zu zeigen, ist es hinreichend, $\overline{\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)} = \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ zu beweisen. Nach Abschnitt 3.3.3 wird die Topologie auf $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ durch die Halbnormen $(p_i^\infty)_{i\in\mathbb{N}}$ erzeugt. Um $\overline{\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)} = \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ zu beweisen, ist für jedes $f \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$, jedem $\varepsilon > 0$ und $i \in \mathbb{N}$ ein $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ mit $p_i^\infty(f - g) < \varepsilon$ zu finden. Nach Übungsaufgabe 4.41 existiert ein $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ mit $\phi \equiv 1$ auf K_i. Setze dann $g := \phi f$. Dann ist $p_i^\infty(f - g) = 0$. ■

Lösung zu Übungsaufgabe 6.6:

Sei $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Dann existieren wegen Bemerkung 3.33 $(\alpha_1, \beta_1), \ldots, (\alpha_\ell, \beta_\ell) \in \mathbb{N}_0^{2n}, C \geq 0$ mit, so dass für alle $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$$|T(\phi)| \leq C \max_{j=1,\ldots,\ell} p_{\alpha_j,\beta_j}(\phi) = C \max_{j=1,\ldots,\ell} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^{\alpha_j} \partial^{\beta_j} \phi(x)|$$

gilt. Wir zeigen, dass T höchstens von der Ordnung $m := \max_{j=1,\ldots,\ell} |\beta_j|$ ist, vgl. Definition 4.12. Für $K \Subset \mathbb{R}^n$ sei

$$C_K := \max\{|x^{\alpha_j}| : x \in K, j = 1, \ldots, \ell\}.$$

Dann gilt für $\phi \in \mathcal{D}_K(\mathbb{R}^n)$:

$$\begin{aligned} |T(\phi)| &\leq C \max_{j=1,\ldots,\ell} \sup_{x\in K} |x^{\alpha_j} \partial^{\beta_j} \phi(x)| \\ &\leq CC_K \max_{j=1,\ldots,\ell} \sup_{x\in K} |\partial^{\beta_j} \phi(x)| \\ &\leq CC_K\, p_{K,m}(\phi). \end{aligned}$$

■

Lösung zu Übungsaufgabe 6.12:

NYI. ■

Literatur

[AG92] M. A. Al-Gwaiz. *Theory of distributions.* Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics. Marcel Dekker, Inc., 1992.

[Con74] F. Constantinescu. *Distributionen und ihre Anwendung in der Physik.* Studienbücher, Mathematik. Teubner, 1974.

[Fis00] G. Fischer. *Lineare Algebra. Eine Einführung für Studienanfänger.* Grundkurs Mathematik. Wiesbaden. Vieweg, 2000. 12., verbesserte Aufl.

[For81] O. Forster. *Analysis 3.* Vieweg, 1981. Integralrechnung im $\mathbb{R}^n$ mit Anwendungen.

[Gro69] K. P. Grotemeyer. *Topologie.* B.I.-Hochschulskripten. Bibliographisches Institut, Mannheim, 1969.

[Heu92] H. Heuser. *Funktionalanalysis.* Mathematische Leitfäden. Teubner, 3. edition, 1992.

[Heu01] H. Heuser. *Lehrbuch der Analysis. Teil 1.* Mathematische Leitfäden. Teubner, 14. edition, 2001.

[Jan71] L. Jantscher. *Distributionen.* de Gruyter, 1971.

[Joh71] F. John. *Partial Differential Equations.* Springer-Verlag, 3rd edition, 1971.

[Köt66] G. Köthe. *Topologische lineare Räume I.* Springer, 2. edition, 1966.

[Miz73] Sigeru Mizohata. *The theory of partial differential equations.* Cambridge University Press, 1973.

[RR80] A. P. Robertson and W. Robertson. *Topological vector spaces*, volume 53 of *Cambridge Tracts in Mathematics.* Cambridge University Press, Cambridge, second edition, 1980.

[RS75] M. Reed and B. Simon. *Methods of Modern Mathematical Physics II: Fourier Analysis, Selfadjointness.* Academic Press, New York, 1975.

[RS78] M. Reed and B. Simon. *Methods of Modern Mathematical Physics IV: Analysis of operators.* Academic Press, New York, 1978.

[RS79] M. Reed and B. Simon. *Methods of Modern Mathematical Physics III: Scattering Theory.* Academic Press, New York, 1979.

[RS80] M. Reed and B. Simon. *Methods of Modern Mathematical Physics I: Functional Analysis.* Academic Press, New York, 2nd edition, 1980.

Literatur

[Rud66] W. Rudin. *Real and Complex Analysis*. McGraw-Hill, Series in higher mathematics, 1966.

[Rud73] W. Rudin. *Functional Analysis*. McGraw-Hill, Series in higher mathematics, 1973.

[RY90] I. Richards and H. Youn. *Theory of distributions*. Cambridge University Press, 1990. A nontechnical introduction.

[Sch50] L. Schwartz. *Théorie des distributions. Tome I.* Hermann & Cie., Paris, 1950.

[Sch51] L. Schwartz. *Théorie des distributions. Tome II.* Hermann & Cie., Paris, 1951.

[Sch75] H. Schubert. *Topologie. Eine Einführung.* Mathematische Leitfäden. Teubner, 4. edition, 1975.

[Tay96a] M.E. Taylor. *Partial differential equations. 1: Basic theory.*, volume 115 of *Applied Mathematical Sciences.* Springer, 1996.

[Tay96b] M.E. Taylor. *Partial differential equations. 2: Nonlinear equations.*, volume 117 of *Applied Mathematical Sciences.* Springer, 1996.

[Tay96c] M.E. Taylor. *Partial differential equations. 2: Qualitative studies of linear equations.*, volume 116 of *Applied Mathematical Sciences.* Springer, 1996.

[Wal94] W. Walter. *Einführung in die Theorie der Distributionen.* Bibliographisches Institut, Mannheim, 1994. 3. Aufl.

[Wei00] J. Weidmann. *Lineare Operatoren in Hilberträumen. Teil 1.* Mathematische Leitfäden. Teubner, 2000.

[Yos74] K. Yosida. *Functional analysis.* Springer Verlag, 4. edition, 1974.