Differentialformen

Angela Pasquale

Das vorliegende Skriptum ist eine Ausarbeitung der Vorlesung *Differentialformen* im Sommersemester 2000. Der Kurs ist eine Fortsetzung der Analysis III. Die zentralen Themen sind die Integralsätze der Vektoranalysis, die wir in der Sprache der Differentialformen formulieren. Diese Sätze spielen eine wichtige Rolle in der Analysis, der Differentialgeometrie und der theoretischen Physik.

Ich bedanke mich bei Herrn W. Dombrowski, der freundlicherweise mein Deutschenglitalienisch in diesem Text behob. Für Korrekturen und Verbesserungsvorschläge bin ich dankbar.

Clausthal, den 29.10.2000 A. Pasquale

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Ziel dieses Kurses ist die Entwicklung des Differentialformenkalküls und damit die Formulierung der Integralsätze der Vektoranalysis.

Es gibt 3 klassische Integralsätze in der Vektoranalysis: den Greenschen Satz, den Gaußschen Satz (auch Divergenzsatz genannt) und den Stokesschen Satz. Alle diese Sätze sind im Kontext physikalischer Untersuchungen entwickelt worden. Zum Beispiel wurde der Gaußsche Satz in Zusammenhang mit der Elektrostatik formuliert. Er gibt eine Methode, um Ladungen, die in einem geschlossenen Bereich enthalten sind, zu entdecken. Der klassische Satz von Gauß sagt folgendes:

$A \subset \mathbb{R}^3$ *sei ein kompakter Bereich mit glattem Rand (=Oberfläche)* ∂A *und* F *sei ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf* $\mathbb{R}^3$ *(oder, allgemeiner auf einer offenen Teilmenge* $U \subset \mathbb{R}^3$*, die* A *enthält).* – Zum Beispiel könnte F ein elektrische Feld sein.– *Dann ist der Fluß von* F *durch den Rand* ∂A *gleich dem Integral der Quellendichte von* F *über* A.

Der Fluß von F durch ∂A ist durch

$$\int_{\partial A} \langle F|\nu\rangle \, dS$$

darstellt, wobei ν das äußere Normalenfeld von A und dS das Flächenelement von ∂A ist. Die Divergenz $\operatorname{div} F$ von F stellt die Quellendichte von F dar. Also gibt der Gaußsche Satz die Beziehung:

$$\int_A (\operatorname{div} F)(x) \, dx = \int_{\partial A} \langle F|\nu\rangle \, dS.$$

Wenn F das elektrische Feld ist und der Fluß von F durch ∂A nicht Null ist, dann muß auch die linke Seite von Null verschieden sein, d.h. A muß Ladungen enthalten.

Der klassische Integralsatz von Gauß hat mit den klassischen Integralsätzen von Stokes und Green gemein, daß eine Beziehung zwischen dem Integral über eine geschlossene geometrische Struktur (eine geschlossene Fläche bzw. eine geschlossene Kurve) und dem Integral über den eingeschlossenen Bereich (Volumen bzw. Fläche) herstellt.

In der klassischen Formulierung der Vektoranalysis sind diese Integralsätze durch Integrale des Gradienten einer Funktion oder der Divergenz und der Rotation eines Vektorfeldes gegeben. Es ist nicht so einfach, eine tiefere Beziehung zwischen den 3 Sätzen zu entdecken.

Mit der Sprache der Differentialformen kann man einfach zeigen, daß die 3 Sätze nur ein spezieller Fall eines einzigen allegemeinen Satzes sind. Dieser Satz ist heute bekannt als *der (allgemeine) Stokessche Integralsatz.*

Der einfachste Spezialfall des allgemeinen Stokesschen Integralsatz ist der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung. Er besagt, daß für eine stetig differenzierbare Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ gilt

$$\int_a^b df(t) = f(b) - f(a),$$

wobei $df(t) = f'(t)\,dt$ das Differential von f ist. Die Formel kann folgendermaßen interpretiert werden: $[a,b]$ ist ein Kompaktum mit glattem Rand. Der Rand $\partial[a,b]$ von $[a,b]$ besteht aus den zwei Endpunkten $\{a,b\}$.

Wenn wir das Intervall $[a,b]$ in die Richtung von a nach b orientieren, dann ist $\int_a^b df(t)$ genau das Integral der Differentialform df auf dem orientierten Kompaktum $[a,b]$. Die Orientierung von $[a,b]$ von a nach b fixiert auch eine Orientierung des Randes $\partial[a,b] = \{a,b\}$ (zuerst a, dann b). Dann kann $f(b) - f(a)$ als das Integral von f über den orientierten Rand interpretiert werden.

Also können wir den Hauptsatz so formulieren:

Für zusammenhängende Orientierungen des Kompaktums mit Rand $[a,b] \subset \mathbb{R}$ *und ihres Randes* $\partial[a,b] = \{a,b\}$ *gilt*

$$\int_{[a,b]} df = \int_{\partial[a,b]} f.$$

Der allgemeine Satz von Stokes ist die höher-dimensionale Version dieser Gleichung:

Für ein zusammenhängendes orientiertes Kompaktum $A \subset \mathbb{R}^n$ *mit glattem Rand* ∂A *gilt*

$$\int_A d\omega = \int_{\partial A} \omega.$$

Was ist ω? ω ist eine Differentialform auf $\mathbb{R}^n$ (oder, allgemeiner, auf einer offenen Umgebung von A in $\mathbb{R}^n$).

Das erste Teil dieser Vorlesung wird verwendet, um Differentialformen zu definieren.

Genauer, besteht die Vorlesung aus 3 Teilen:

(1) Eine Einführung in den Kalkül von Differentialformen

(und in diesem Teil werden wir auch über Mannigfaltigkeiten und Orientierungen sprechen)

(2) Die Formulierung des allgemeinen Integralsatzes von Stokes

(und daraus werden wir die klassische Sätze von Green, Gauß und Stokes erhalten)

(3) Anwendungen des Integralsatzes.

Kapitel 1

Multilineare Algebra

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit den alternierenden Multilinearformen auf endlich dimensionalen Vektorräumen über $\mathbb{R}$. In späteren Kapiteln wird dieser Vektorraum der Tangentialvektorraum in einem Punkt einer Mannigfaltigkeit sein.

1.1 Multilinearformen auf Vektorräumen

Seien V und W endlich-dimensionale Vektorräume über $\mathbb{R}$. Wir erinnern uns, daß eine Abbildung $F : V \to W$ *linear* heißt, wenn gilt

$$F(au + bv) = aF(u) + bF(v)$$

für $a, b \in \mathbb{R}$ und $u, v \in V$. Die Menge der linearen Abbildungen von V in W wird mit $\mathrm{Hom}(V;W)$ bezeichnet. Falls $W = V$, schreibt man $\mathrm{Hom}(V;V) =: \mathrm{End}(V)$. Falls $W = \mathbb{R}$, schreibt man $\mathrm{Hom}(V;\mathbb{R}) =: V^*$. Man nennt $\mathrm{End}(V)$ die Menge der *Endomorphismen von* V und V^* den *Dualraum* von V.

Weitergehend definieren wir:

Definition 1.1.1 Sei $k \in \mathbb{N}$ und seien $V_1, \ldots, V_k$ und W endlich-dimensionale Vektorräume über $\mathbb{R}$. Eine Abbildung $F : V_1 \times \cdots \times V_k \longrightarrow W$ heißt *multilinear*, wenn F in jedem Argument linear ist, d.h. wenn für alle $j = 1, \ldots, k$ gilt

$$F(\ldots, au_j + bv_j, \ldots) = aF(\ldots, u_j, \ldots) + bF(\ldots, v_j, \ldots)$$

für beliebige $a, b \in \mathbb{R}$ und $u_j, v_j \in V_j$. Speziell im Fall $k = 2$ heißt die Abbildung F *bilinear*.

Die Menge der multilinearen Abbildungen von $V_1 \times \cdots \times V_k$ nach W wird mit $\mathrm{Hom}(V_1, \ldots, V_k; W)$ bezeichnet.

Bemerkung 1.1.2 $\mathrm{Hom}(V_1, \ldots, V_k; W)$ ist ein Vektorraum:
- Die Summe $F + G$ von $F, G \in \mathrm{Hom}(V_1, \ldots, V_k; W)$ ist definiert durch

$$(F + G)(v_1, \ldots, v_r) := F(v_1, \ldots, v_r) + G(v_1, \ldots, v_r),$$

wobei das Symbol "+" auf der rechten Seite für die Addition in W steht.

- Das Produkt von $F \in \mathrm{Hom}(V_1, \dots, V_r; W)$ und $a \in \mathbb{R}$ ist definiert durch

$$(aF)(v_1, \dots, v_r) := a \cdot F(v_1, \dots, v_r),$$

wobei das Symbol "$\cdot$" auf der rechten Seite das Produkt eines Elements in W mit der reellen Zahl a ist.

Wichtig ist vor allem der Fall $V_1 = \cdots = V_k$ und $W = \mathbb{R}$. Eine multilineare Abbildung $\omega \in \mathrm{Hom}(\underbrace{V, \dots, V}_{k-\mathrm{mal}}; \mathbb{R})$ heißt eine *Multilinearform der Ordnung* k oder eine *k-Linearform auf V* (oder kurz eine *k-Form auf V*). Speziell im Fall $k = 2$ heißt F eine *Bilinearform auf V*. In der Literatur findet man oft auch für ω den folgenden Namen: *k-fach kovarianter Tensor (über V)*, und *Kovektor (über V)* wenn $k = 1$.

Zur Abkürzung bezeichnet man die Menge $\mathrm{Hom}(\underbrace{V, \dots, V}_{k-\mathrm{mal}}; \mathbb{R})$ der k-Linearformen auf V mit $\otimes^k V^*$.

Es ist offenbar $\otimes^1 V^* = V^*$ und man setzt $\otimes^0 V^* := \mathbb{R}$.

Beispiel 1.1.3 Die Abbildung $\omega : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch
(a) $F\big((x_1, x_2), (y_1, y_2)\big) = x_1 + y_2$ ist bilinear;
(b) $F\big((x_1, x_2), (y_1, y_2)\big) = x_1 y_2 - x_2 y_1$ ist bilinear;
(c) $F\big((x_1, x_2), (y_1, y_2)\big) = x_1 x_2 - y_1 y_2$ ist nicht bilinear.

1.2 Das Tensorprodukt von Multilinearformen

Sind $\omega \in \otimes^k V^*$ und $\mu \in \otimes^l V^*$, dann definieren wir das *Tensorprodukt* $\omega \otimes \mu$ von ω und μ wie folgt: Falls $k \neq 0$ und $l \neq 0$, dann

$$\omega \otimes \mu : \underbrace{V \times \cdots \times V}_{(k+l)-\mathrm{mal}} \to \mathbb{R}$$

is gegeben durch

$$(\omega \otimes \mu)(v_1, \dots, v_{k+l}) := \omega(v_1, \dots, v_k)\mu(v_{k+1}, \dots, v_{k+l}), \qquad \text{für } v_1, \dots, v_{k+l} \in V.$$

Falls $k = 0$ oder $l = 0$, dann ist

$$\omega \otimes \mu := \omega\mu$$

das gewöhnliche Produkt einer reellen Zahl und einer Multilinearform. Allgemein gilt $\omega \otimes \mu \in \otimes^{k+l} V^*$.

Lemma 1.2.1 (a) *$\otimes$ ist assoziativ: für $\omega \in \otimes^k V^*, \mu \in \otimes^l V^*, \nu \in \otimes^m V^*$*

$$(\omega \otimes \mu) \otimes \nu = \omega \otimes (\mu \otimes \nu) \in \otimes^{k+l+m} V^*.$$

(b) $\otimes : \big(\otimes^k V^*\big) \times \big(\otimes^l V^*\big) \to \big(\otimes^{k+l} V^*\big)$ *ist bilinear.*

Bemerkung 1.2.2 Wegen Lemma 1(a) können wir einfach $\omega \otimes \mu \otimes \nu$ (ohne Klammern) schreiben.

1.3 Basen für $\otimes^k V^*$

Es sei $\{e_1,\dots,e_n\}$ eine Basis von V und sei $\{\omega_1,\dots,\omega_n\}$ die duale Basis von V^*, d.h. $\langle\omega_i,e_j\rangle=\delta_{ij}:=\begin{cases}0, & \text{falls } i\neq j\\ 1, & \text{falls } i=j\end{cases}.$

Für $i_1,\dots,i_k\in\{1,\dots,n\}$ betrachten wir $\omega_{i_1}\otimes\dots\otimes\omega_{i_k}\in\otimes^k V^*$.

Nach der Definition des Tensorprodukts operiert $\omega_{i_1}\otimes\dots\otimes\omega_{i_k}$ auf Vektoren $v_1,\dots,v_k$ wie folgt:

$$(\omega_{i_1}\otimes\dots\otimes\omega_{i_k})(v_1,\dots v_k)=\langle\omega_{i_1},v_1\rangle\dots\langle\omega_{i_k},v_k\rangle=v_{1i_1}\dots v_{ki_k},$$

wenn

$$v_j=\sum_{h=1}^n v_{jh}e_h$$

(mit $v_{jh}\in\mathbb{R}$) die Darstellung von v_j $(j=1,\dots,k)$ bezüglich der Basis $\{e_1,\dots,e_n\}$ ist.

Proposition 1.3.1 *Die Menge* $\mathcal{B}:=\{\omega_{i_1}\otimes\dots\otimes\omega_{i_k}:1\leq i_1,\dots,i_k\leq n\}$ *ist eine Basis von* $\otimes^k V^*$*. Also gilt* $\dim\otimes^k V^*=n^k$*.*

Beweis. Übung. □

1.4 Der Rücktransport von Multilinearformen

Seien V, W Vektorräumen über $\mathbb{R}$, $F\in\mathrm{Hom}(V;W)$. Die *mittels* F *aus* $\omega\in\otimes^k W^*$ *rücktransportierte* k*-Linearform* auf V ist

$$F^*\omega:\underbrace{V\times\dots\times V}_{k-\mathrm{mal}}\to\mathbb{R}$$

definiert durch

$$(F^*\omega)(v_1,\dots,v_k):=\omega(\overbrace{Fv_1}^{\in W},\dots,\overbrace{Fv_k}^{\in W})$$

für $v_1,\dots,v_k\in V$. Dann gilt $F^*\omega\in\otimes^k V^*$. Also: Für alle $k\in\mathbb{N}$ induziert $F\in\mathrm{Hom}(V;W)$ eine Abbildung

$$\begin{aligned}F^*:\otimes^k W^* &\to \otimes^k V^*\\ \omega &\mapsto F^*\omega.\end{aligned}$$

Lemma 1.4.1

(a) F^* ist linear.

(b) $F^*(\omega\otimes\mu)=(F^*\omega)\otimes(F^*\mu)$.

Beweis. Übung. □

1.5 Permutationen

Definition 1.5.1 Eine *Permutation* einer Menge X ist eine bijektive Abbildung $\pi : X \to X$.

Die Menge aller Permutationen von X bildet bezüglich der Komposition von Abbildungen eine Gruppe.

Die Gruppe aller Permutationen der Menge $\{1, \ldots, k\}$ wird mit $\mathcal{P}_k$ bezeichnet. $\mathcal{P}_k$ besteht aus $k!$ Elementen.

$\tau \in \mathcal{P}_k$ heißt eine *Transposition*, falls es $i, j \in \{1, \ldots, k\}$ mit $i \neq j$ gibt, so daß

$$\begin{aligned} \tau(i) &= j \\ \tau(j) &= i \\ \tau(l) &= l \qquad \text{für alle } l \in \{1, \ldots, k\} \setminus \{i, j\} \end{aligned}$$

Notation:
$\binom{1\ 2\ \ldots\ k}{i_1\ i_2\ \ldots\ i_k}$ bezeichnet die Permutation von $\{1, 2, \ldots, k\}$ gegeben durch:

$$1 \mapsto i_1, 2 \mapsto i_2, \ldots, k \mapsto i_k.$$

Z.B., $\binom{1\ 2\ 3}{3\ 1\ 2}$ bildet $1 \mapsto 3$, $3 \mapsto 2$, $2 \mapsto 1$.

Wenn k fest liegt, schreiben wir (ij) für die Transposition in $\mathcal{P}_k$, die i und j vertauscht.
Z.B., in $\mathcal{P}_3$, ist $(12) = \binom{1\ 2\ 3}{2\ 1\ 3}$.

Beispiel 1.5.2
$\mathcal{P}_2 = \left\{ \mathrm{id} \equiv \binom{1\ 2}{1\ 2}, \binom{1\ 2}{2\ 1} \right\}$.
$\mathcal{P}_3 = \left\{ \mathrm{id} \equiv \binom{1\ 2\ 3}{1\ 2\ 3}, \binom{1\ 2\ 3}{2\ 3\ 1}, \binom{1\ 2\ 3}{3\ 1\ 2}, \binom{1\ 2\ 3}{2\ 1\ 3} \equiv (12), \binom{1\ 2\ 3}{1\ 3\ 2} \equiv (23), \binom{1\ 2\ 3}{3\ 2\ 1} \equiv (13) \right\}$.

Proposition 1.5.3 *Jede Permutation $\pi \in \mathcal{P}_k$ besitzt eine Darstellung als Produkt von Transpositionen. Die Darstellung ist nicht eindeutig bestimmt, aber, wenn*

$$\begin{aligned} \pi &= \tau_1 \circ \cdots \circ \tau_r \\ &= \tau'_1 \circ \cdots \circ \tau'_s \end{aligned}$$

zwei solche Darstellungen sind, dann haben r und s dieselbe Parität (gerade bzw. ungerade). Die Zahl $(-1)^r$ ist deshalb nur von π abhängig.

Definition 1.5.4 Die Zahl $(-1)^r$ der Proposition heißt das *Signum von* π:

$$\mathrm{sign}(\pi) := (-1)^r \quad (\in \{\pm 1\}).$$

π heißt *gerade*, wenn $\mathrm{sign}(\pi) = 1$ und *ungerade*, wenn $\mathrm{sign}(\pi) = -1$.

Beispiel 1.5.5
$\binom{1\ 2\ 3}{1\ 3\ 2} = (23) = (12) \circ (12) \circ (23)$ ist ungerade.
$\binom{1\ 2\ 3}{3\ 1\ 2} = (13) \circ (23) = (12) \circ (12) \circ (13) \circ (23)$ ist gerade.

Lemma 1.5.6 *Sei $k \in \mathbb{N}$. Für Permutationen $\sigma, \rho \in \mathcal{P}_k$ gilt:*

(a) $\{\rho \circ \pi : \pi \in \mathcal{P}_k\} = \mathcal{P}_k = \{\pi \circ \ \rho : \pi \in \mathcal{P}_k\}$.

(b) $\operatorname{sign}(\rho \circ \pi) = \operatorname{sign}(\rho)\operatorname{sign}(\pi)$,
$\operatorname{sign}(\mathrm{id}) = 1$,
$\operatorname{sign}(\rho^{-1}) = \operatorname{sign}(\rho)$.

Beweis. Übung. □

1.6 Symmetrische und alternierende Multilinearformen

Eine k-Linearform $\omega \in \otimes^k V^*$ heißt

symmetrisch, falls $\omega(\ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots) = \omega(\ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots)$ für alle $i \neq j$, $i, j \in \{1, \ldots, k\}$ und alle $v_i, v_j \in V$ (das Vertauschen von zwei Argumenten ändert nicht den Wert von ω),

alternierend, falls $\omega(\ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots) = -\omega(\ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots)$ für alle $i \neq j$, $i, j \in \{1, \ldots, k\}$ und alle $v_i, v_j \in V$ (das Vertauschen von zwei Argumenten ändert das Vorzeichen).

Diese Bedingungen sind leer wenn $k < 2$. Wenn $k = 0$ und $k = 1$, fixieren wir: jede $r \in \mathbb{R}$ und jede $\omega \in V^*$ ist symmetrisch und alternierend.

Die Menge $S^k V^*$ aller symmetrischen k-Formen auf V und die Menge $\wedge^k V^*$ aller alternierenden k-Formen auf V bilden Vektorräume, die Unterräume von $\otimes^k V^*$ sind. Nach Definition, ist $S^0 V^* = \wedge^0 V^* = \mathbb{R}$ und $S^1 V^* = \wedge^1 V^* = V^*$.

Für uns werden die alternierenden k-Formen am wichtigsten sein: Differentialformen auf einer Mannigfaltigkeit M sind (stetig differenzierbare) Abbildungen auf M, die jedem Punkt von M eine alternierende k-Form zuordnen.

Lemma 1.6.1 *Folgende Bedingungen sind für $\omega \in \otimes^k V^*$ äquivalent:*

(a) *ω ist alternierend;*

(b) *$\omega(v_1, \ldots, v_k) = 0$, falls es ein Paar $i \neq j$ gibt mit $v_i = v_j$;*

(c) *$\omega(v_1, \ldots, v_k) = 0$, falls $v_1, \ldots, v_k$ linear abhängig sind;*

(d) *für jede Permutation $\pi \in \mathcal{P}_k$ gilt*

$$\omega(v_{\pi(1)}, \ldots, v_{\pi(k)}) = \operatorname{sign}(\pi)\omega(v_1, \ldots, v_k).$$

Beweis. (a)$\Rightarrow$ (b) ist klar, und (b)$\Rightarrow$(a): wegen Multilinearität:

$$\begin{aligned}
0 &= \omega(\ldots, v_i + v_j, \ldots, v_i + v_j, \ldots) \\
&= \omega(\ldots, v_i, \ldots, v_i, \ldots) + \omega(\ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots) + \\
&\qquad \omega(\ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots) + \omega(\ldots, v_j, \ldots, v_j, \ldots) \\
&= \omega(\ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots) + \omega(\ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots).
\end{aligned}$$

(d) ist (a), wenn π die Transposition von i und j ist. Das Wiederholen der Gleichung in (a) impliziert (d), wenn die Permutation π als Komposition von Transpositionen geschrieben wird. $\square$

Korollar 1.6.2 $\wedge^k V^* = \{0\}$ *für* $k > n := \dim V$.

Beweis. Wenn $k > n := \dim V$, sind je k Vektoren immer linear abhängig. Das Korollar folgt dann sofort aus Lemma 1.6.1 (c) $\square$

Beispiel 1.6.3 (Die Determinante) $A = [a_{ij}]_{i,j=1}^n$ sei eine $n \times n$-Matrix über dem Körper $\mathbb{K}$ (meistens für uns $\mathbb{K} = \mathbb{R}$). Wir erinnern uns, die Determinante $\det A$ von A ist die Zahl

$$\det A := \sum_{\pi \in \mathcal{P}_n} \operatorname{sign}(\pi) a_{1\pi(1)} a_{2\pi(2)} \dots a_{n\pi(n)}.$$

Sei $\{e_1, \dots, e_n\}$ eine Basis für V und definiere

$$\begin{aligned} \det : & \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \\ & (X_1, \dots, X_n) \longmapsto \det \begin{bmatrix} x_{11} & \dots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \dots & x_{nn} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Hier sind die Koordinaten von $X_j = (x_{1j}, \dots, x_{nj})$ in der j-ten Spalte der Matrix für alle $j = 1, \dots, n$. Dann ist det eine alternierende n-Form auf $\mathbb{R}^n$.

1.7 Die Alternierung einer Multilinearform

Die *Alternierung* $\operatorname{Alt} \omega$ einer k-Linearform $\omega \in \otimes^k V^*$ ist die k-Linearform definiert durch

$$\operatorname{Alt} \omega(v_1, \dots, v_k) := \frac{1}{k!} \sum_{\pi \in \mathcal{P}_k} \operatorname{sign}(\pi)\, \omega(v_{\pi(1)}, \dots, v_{\pi(k)}).$$

Beispiel 1.7.1
$k = 2$: $\big(\operatorname{Alt} \omega\big)(v_1, v_2) := \frac{1}{2}\big[\omega(v_1, v_2) - \omega(v_2, v_1)\big]$
$k = 3$: $\big(\operatorname{Alt} \omega\big)(v_1, v_2, v_3) := \frac{1}{6}\big[\omega(v_1, v_2, v_3) + \omega(v_2, v_3, v_1) + \omega(v_3, v_1, v_2) - \omega(v_2, v_1, v_3) - \omega(v_1, v_3, v_2) - \omega(v_3, v_2, v_1)\big]$

Lemma 1.7.2 (a) $\operatorname{Alt} \omega \in \wedge^k V^*$ *für jedes* $\omega \in \otimes^k V^*$.

(b) $\omega \in \wedge^k V^* \iff \operatorname{Alt} \omega = \omega$.

(c) $\operatorname{Alt} : \otimes^k V^* \to \wedge^k V^*$ *ist linear und surjektiv.*

Beweis. Übung.

1.8 Das äußere Produkt (oder Dachprodukt) von Linearformen

Seien $\mu_1, \dots, \mu_k \in V^*$ Linearformen. Das *äußere Produkt* (oder *Dachprodukt*) von $\mu_1, \dots, \mu_k$ ist die alternierende k-Linearform $\mu_1 \wedge \dots \wedge \mu_k$ definiert durch

$$\mu_1 \wedge \dots \wedge \mu_k(v_1, \dots, v_k) := \det \begin{bmatrix} \langle \mu_1, v_1 \rangle & \dots & \langle \mu_1, v_k \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \mu_k, v_1 \rangle & \dots & \langle \mu_k, v_k \rangle \end{bmatrix}.$$

Bemerkung 1.8.1 Wenn $\mu_i = \mu_j$ für $i \neq j$, dann ist $\mu_1 \wedge \dots \wedge \mu_i \wedge \dots \wedge \mu_j \wedge \dots \wedge \mu_k = 0$, weil zwei Reihe der Matrix immer gleich für jede $(v_1, \dots, v_k)$ sind (also ist die Determinante gleich 0).

Proposition 1.8.2

$$\mu_1 \wedge \dots \wedge \mu_k = k!\mathrm{Alt}\,(\mu_1 \otimes \dots \otimes \mu_k).$$

Beweis.

$$\begin{aligned} & k!\mathrm{Alt}\,(\mu_1 \otimes \dots \otimes \mu_k) = \\ & = k! \frac{1}{k!} \sum_{\pi \in \mathcal{P}_k} \mathrm{sign}(\pi)\ (\mu_1 \otimes \dots \otimes \mu_k)(v_{\pi(1)}, \dots, v_{\pi(k)}) \\ & = \sum_{\pi \in \mathcal{P}_k} \mathrm{sign}(\pi)\ \langle \mu_1, v_{\pi(1)} \rangle \dots \langle \mu_k, v_{\pi(k)} \rangle = \det \begin{bmatrix} \langle \mu_1, v_1 \rangle & \dots & \langle \mu_1, v_k \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \mu_k, v_1 \rangle & \dots & \langle \mu_k, v_k \rangle \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Aus den Eigenschaften der Determinante einer Matrix folgt sofort:

Fakt 1.8.3 1. *Die Abbildung*

$$\begin{aligned} \wedge^k : \underbrace{V^* \times \dots \times V^*}_{k-\mathrm{mal}} & \to \wedge^k V^* \\ (\mu_1, \dots, \mu_k) & \mapsto \mu_1 \wedge \dots \wedge \mu_k \end{aligned}$$

ist multilinear.

2. *Für alle $\pi \in \mathcal{P}_k$*

$$\mu_{\pi(1)} \wedge \dots \wedge \mu_{\pi(k)} = \mathrm{sign}(\pi)[\mu_1 \wedge \dots \wedge \mu_k]. \tag{1.1}$$

Satz 1.8.4 *Seien $\mu_1, \dots, \mu_k, \psi_1, \dots, \psi_k \in V^*$ mit $\psi_i = \sum_{j=1}^k a_{ij}\mu_j$ für $i = 1, \dots, k$. Dann gilt*

$$\psi_1 \wedge \dots \wedge \psi_k = (\det A)\ \mu_1 \wedge \dots \wedge \mu_k,$$

wobei $A := [a_{ij}]_{i,j=1}^k$.

Beweis. Seien $j_1, \ldots, j_k \in \{1, \ldots, k\}$. Dann gilt

$$\mu_{j_1} \wedge \cdots \wedge \mu_{j_k} = \begin{cases} 0 & \text{falls } j_r = j_s \text{ für } r \neq s \\ & (\text{d.h } \{j_1, \ldots, j_k\} \subsetneq \{1, \ldots, k\}) \\ \operatorname{sign}(\pi)(\mu_1 \wedge \cdots \wedge \mu_k) & \text{falls } \{j_1, \ldots, j_k\} = \{1, \ldots, k\} \text{ und} \\ & \pi = \binom{1 \ldots k}{j_1 \ldots j_k} \end{cases}.$$

Also:

$$\begin{aligned} \psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_k &= \sum_{j_1, \ldots, j_k = 1}^{k} a_{1 j_1} \mu_{j_1} \wedge \cdots \wedge a_{k j_k} \mu_{j_k} \\ &= \sum_{j_1, \ldots, j_k = 1}^{k} a_{1 j_1} \ldots a_{k j_k} \mu_{j_1} \wedge \cdots \wedge \mu_{j_k} \\ &= \left[\sum_{\pi \in \mathcal{P}_k} \operatorname{sign}(\pi) a_{1\pi(1)} \ldots a_{k\pi(k)} \right] \mu_1 \wedge \cdots \wedge \mu_k. \end{aligned}$$

□

1.9 Basen für $\wedge^k V^*$

Es sei $\{e_1, \ldots, e_n\}$ eine Basis für V und $\{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ die duale Basis für V^*.

Satz 1.9.1 *$\mathcal{B}^k_\wedge := \{\omega_{i_1} \wedge \cdots \wedge \omega_{i_k} : 1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n\}$ ist eine Basis für $\wedge^k V^*$. Also: $\dim \wedge^k V^* = \binom{n}{k}$ für $k = 0, 1, \ldots, n$ (und $\dim \wedge^k V^* = 0$ für $k > n$).*

Beweis. Wir müssen zeigen:

1. $\wedge^k V^* = \operatorname{span} \mathcal{B}^k_\wedge$ (die *lineare Hülle* von $\mathcal{B}^k_\wedge$), d.h. jedes Element von $\wedge^k V^*$ ist eine Linearkombination von Elementen aus $B^k_\wedge$;

2. $\mathcal{B}^k_\wedge$ ist linear unabhängig.

Zu 1:
Aus der Definition des Dachprodukts folgt dann für zwei k-Tupel $i_1 < \cdots < i_k$ und $j_1 < \cdots < j_k$ mit aufsteigenden Indizes

$$(\omega_{i_1} \wedge \cdots \wedge \omega_{i_k})(e_{j_1}, \ldots, e_{j_k}) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \{i_1, \ldots, i_k\} = \{j_1, \ldots, j_k\} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \tag{1.2}$$

Es sei $\omega \in \wedge^k V^*$ und setze

$$c_{i_1 \ldots i_k} := \omega(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}) \qquad \text{für } i_1 < \cdots < i_k \tag{1.3}$$

Wir prüfen, daß

$$\omega = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} c_{i_1 \ldots i_k} \omega_{i_1} \wedge \cdots \wedge \omega_{i_k}.$$

Dies ist eine Gleichung von alternierenden k-Linearformen, d.h. von alternierenden Abbildungen auf $\underbrace{V \times \cdots \times V}_{k-\text{mal}}$. Die Abbildungen sind gleich, wenn sie auf jedem k-Tupel $(v_1, \ldots, v_k) \in V \times \cdots \times V$ die gleichen Werte haben. Wegen Linearität genügt es, k-Tupel $(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k})$ von Basiselementen zu betrachten. Wegen Alternierung genügt es, k-Tupel mit aufsteigenden Indizes $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$ zu betrachten. Die Gleichung auf diesen k-Tupel folgt sofort, weil für $1 \leq j_1 < \cdots < j_k \leq n$

$$\left(\sum_{i_1 < \cdots < i_k} c_{i_1 \ldots i_k} \omega_{i_1} \wedge \cdots \wedge \omega_{i_k} \right) (e_{j_1}, \ldots, e_{j_k}) = c_{j_1 \ldots j_k} = \omega(e_{j_1}, \ldots, e_{j_k}).$$

Zu 2: Es sei

$$\sum_{i_1 < \cdots < i_k} c_{i_1 \ldots i_k} \omega_{i_1} \wedge \cdots \wedge \omega_{i_k} = 0$$

eine Linearkombination der Elementen aus $\mathcal{B}_\wedge^k$, die gleich 0 ist. Es folgt sofort, daß $c_{i_1 \ldots i_k} = 0$ für alle $i_1 < \cdots < i_k$, weil

$$\Big(\sum_{j_1 < \cdots < j_k} c_{j_1 \ldots j_k} \omega_{j_1} \wedge \cdots \wedge \omega_{j_k} \Big) (e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}) = 0(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}) = 0.$$

Die Abzählaufgabe $\binom{n}{k}$ ist als Übung gelassen. □

1.10 Das äußere Produkt von Multilinearformen

Satz 1.10.1 *Es gibt genau eine Abbildung*

$$\begin{aligned} \wedge : (\wedge^k V^*) \times (\wedge^l V^*) &\to \wedge^{k+l} V^* \\ (\omega, \sigma) &\mapsto \omega \wedge \sigma \end{aligned}$$

mit folgenden Eigenschaften:

(1) $\wedge$ *ist bilinear;*

(2) *das äußere Produkt von* $\sigma_1 \wedge \cdots \wedge \sigma_k$ *und* $\mu_1 \wedge \cdots \wedge \mu_l$ *mit* $\sigma_1, \ldots, \sigma_k, \mu_1, \ldots, \mu_l \in V^*$ *ist das äußere Produkt der Linearformen* $\sigma_1, \ldots, \sigma_k, \mu_1, \ldots, \mu_l \in V^*$ *(wie vorher definiert), d.h.*

$$(\sigma_1 \wedge \cdots \wedge \sigma_k) \wedge (\mu_1 \wedge \cdots \wedge \mu_l) = \sigma_1 \wedge \cdots \wedge \sigma_k \wedge \mu_1 \wedge \cdots \wedge \mu_l.$$

Für alle $\omega \in \wedge^k V^*$ *und* $\sigma \in \wedge^l V^*$ *haben wir*

$$\omega \wedge \sigma = \frac{(k+l)!}{k!l!} \text{Alt } (\omega \otimes \sigma). \tag{1.4}$$

Beweis. Wenn $k = 0$ oder $l = 0$ ist $\omega \otimes \sigma = \omega\sigma$ (=das gewöhnliche Produkt einer reellen Zahl und einer Multilinearform) schon alternierend. Also ist

$$\omega \wedge \sigma = \mathrm{Alt}\,(\omega \otimes \sigma) = \omega\sigma,$$

und (1) und (2) sind erfüllt. Wir nehmen dann an, daß $k > 0$ und $l > 0$. Es sei $\{e_1, \ldots, e_n\}$ eine Basis von V und $\{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ die zu $\{e_1, \ldots, e_n\}$ duale Basis von V^*. Wir schreiben $\omega = \sum_{i_1<\cdots<i_k} a_{i_1\ldots i_k}\, \omega_{i_1}\wedge\cdots\wedge\omega_{i_k}$ und $\mu = \sum_{j_1<\cdots<j_l} b_{j_1\ldots j_l}\, \omega_{j_1}\wedge\cdots\wedge\omega_{j_l}$ und definieren

$$\omega\tilde{\wedge}\sigma := \sum_{\substack{i_1<\cdots<i_k\\ j_1<\cdots<j_l}} a_{i_1\ldots i_k}\, b_{j_1\ldots j_l}\omega_{i_1} \wedge \cdots \wedge \omega_{i_k} \wedge \omega_{j_1} \wedge \cdots \wedge \omega_{j_l}.$$

Die rechte Seite ist eine Linearkombination von Dachprodukten von $k+l$ Linearformen, also ein Element von $\wedge^{k+l}V^*$. Es ist einfach zu prüfen, daß das oben definierte Produkt $\tilde{\wedge}$ bilinear ist.

Wir zeigen, daß

$$\omega\tilde{\wedge}\sigma = \frac{(k+l)!}{k!l!}\mathrm{Alt}\,(\omega \otimes \sigma). \tag{1.5}$$

Da beide Seiten von (1.5) bilinear sind, ist es genug zu prüfen, daß

$$\omega_I\tilde{\wedge}\omega_J = \frac{(k+l)!}{k!l!}\mathrm{Alt}\,(\omega_I \otimes \omega_J), \tag{1.6}$$

wobei

$$\begin{aligned} \omega_I &= \omega_{i_1} \wedge \cdots \wedge \omega_{i_k} \qquad \text{mit } i_1 < \cdots < i_k \\ \omega_J &= \omega_{j_1} \wedge \cdots \wedge \omega_{j_l} \qquad \text{mit } j_1 < \cdots < j_l \end{aligned}$$

(d.h. Elemente aus der Basis von $\wedge^k V^*$ und $\wedge^l V^*$). Jetzt sind beide Seiten von (1.5) alternierende $(k+l)$-Linearformen, also sind sie gleich, wenn ihre Werte an jedem $(k+l)$-Tupel von Basisvektoren $e_{h_1}, \ldots, e_{h_{k+l}}$ mit $1 \leq h_1 < \cdots < h_{k+1} \leq n$ gleich sind.

1. Fall: $\{i_1, \ldots, i_k, j_1, \ldots, j_l\} \neq \{h_1, \ldots, h_{k+l}\}$.

Dann ist

$$(\omega_I\tilde{\wedge}\omega_J)(e_{h_1}, \ldots e_{h_{k+l}}) = (\omega_{i_1} \wedge \cdots \wedge \omega_{i_k} \wedge \omega_{j_1} \wedge \cdots \wedge \omega_{j_l})(e_{h_1}, \ldots e_{h_{k+l}}) = 0$$

und

$$\begin{aligned} &\mathrm{Alt}\,(\omega_I \otimes \omega_J)(e_{h_1}, \ldots e_{h_{k+l}}) \\ &\quad= \frac{1}{(k+l)!} \sum_{\pi\in\mathcal{P}_{k+l}} \mathrm{sign}(\pi)(\omega_I \otimes \omega_J)(e_{h_{\pi(1)}}, \ldots e_{h_{\pi(k+l)}}) \\ &\quad= \frac{1}{(k+l)!} \sum_{\pi\in\mathcal{P}_{k+l}} \mathrm{sign}(\pi)(\omega_{i_1} \wedge \cdots \wedge \omega_{i_k})(e_{h_{\pi(1)}}, \ldots, e_{h_{\pi(k)}}) \\ &\qquad\qquad \times (\omega_{j_1} \wedge \cdots \wedge \omega_{j_l})(e_{h_{\pi(k+1)}}, \ldots, e_{h_{\pi(k+l)}}) = 0, \end{aligned}$$

weil $\{i_1, \dots, i_k\} \neq \{h_{\pi(1)}, \dots, h_{\pi(k)}\}$ oder $\{j_1, \dots, j_l\} \neq \{h_{\pi(k+1)}, \dots, h_{\pi(k+l)}\}$ für jedes $\pi \in \mathcal{P}_{k+l}$ sein muß.

2. Fall: $\{i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_l\} = \{h_1, \dots, h_{k+l}\}$ und $\pi = \binom{i_1 \dots i_k\, j_1 \dots j_l}{h_1 \dots \dots \dots h_{k+l}}$. Dann

$$(\omega_I \tilde{\wedge} \omega_J)(e_{h_1}, \dots e_{h_{k+l}}) = \operatorname{sign}(\pi)(\omega_{h_1} \wedge \dots \wedge \omega_{h_{k+l}})(e_{h_1}, \dots e_{h_{k+l}}) = \operatorname{sign}(\pi)$$

und

$$\begin{aligned}
\frac{(k+l)!}{k!l!} &\operatorname{Alt}\,(\omega_I \otimes \omega_J)(e_{h_1}, \dots e_{h_{k+l}}) \\
&= \frac{(k+l)!}{k!l!}\operatorname{sign}(\pi)\operatorname{Alt}\,\big((\omega_{h_1} \wedge \dots \wedge \omega_{h_k}) \otimes (\omega_{h_{k+1}} \wedge \dots \wedge \omega_{h_{k+l}})\big) \\
&\qquad\qquad (e_{h_{\pi(1)}}, \dots e_{h_{\pi(k+l)}}) \\
&= \frac{1}{k!l!}\operatorname{sign}(\pi) \sum_{\sigma \in \mathcal{P}_{k+l}} \operatorname{sign}(\sigma)(\omega_{h_1} \wedge \dots \wedge \omega_{h_k})(e_{h_{\pi(1)}}, \dots e_{h_{\pi(k)}}) \\
&\qquad\qquad \cdot (\omega_{h_{k+1}} \wedge \dots \wedge \omega_{h_{k+l}})(e_{h_{\pi(k+1)}}, \dots e_{h_{\pi(k+l)}})
\end{aligned}$$

Wir betrachten

$$I_\sigma := \operatorname{sign}(\sigma)(\omega_{h_1} \wedge \dots \wedge \omega_{h_k})(e_{h_{\pi(1)}}, \dots e_{h_{\pi(k)}})(\omega_{h_{k+1}} \wedge \dots \wedge \omega_{h_{k+l}})(e_{h_{\pi(k+1)}}, \dots e_{h_{\pi(k+l)}}).$$

I_σ ist nur $\neq 0$, wenn

$$\sigma(\{1, \dots, k\}) \subset \{1, \dots, k\} \qquad \text{und} \qquad \sigma(\{k+1, \dots, k+l\}) \subset \{k+1, \dots, k+l\}.$$

In diesem Fall, haben wir $\sigma = \sigma_1 \circ \sigma_2$ mit

$$\sigma_1(j) = \begin{cases} \sigma(j) & j = 1, \dots, k \\ j & j = k+1, \dots, k+l \end{cases} \qquad \text{und} \qquad \sigma_2(j) = \begin{cases} j & j = 1, \dots, k \\ \sigma(j) & j = k+1, \dots, k+l \end{cases}$$

σ_1 (beziehungsweise σ_2) wird mit einem Element von $\mathcal{P}_k$ (beziehungsweise $\mathcal{P}_l$) identifiziert. Dann gilt $I_\sigma = \operatorname{sign}(\sigma)\operatorname{sign}(\sigma_1)\operatorname{sign}(\sigma_2) = 1$. Umgekehrt können wir $\sigma \in \mathcal{P}_{k+l}$ aus $\sigma_1 \in \mathcal{P}_k$ und $\sigma_2 \in \mathcal{P}_l$ wie oben konstruieren, für die $I_\sigma = 1$ ist. Also

$$\begin{aligned}
\frac{(k+l)!}{k!l!}\operatorname{Alt}\,(\omega_I \otimes \omega_J)(e_{h_1}, \dots e_{h_{k+l}}) &= \frac{1}{k!l!}\operatorname{sign}(\pi) \sum_{\sigma \in \mathcal{P}_{k+l}} I_\sigma \\
&= \frac{1}{k!l!}\operatorname{sign}(\pi)(\#\mathcal{P}_k)(\#\mathcal{P}_l) = \operatorname{sign}(\pi),
\end{aligned}$$

wobei $\#\mathcal{P}_k$ die Anzahl von Elementen in $\mathcal{P}_k$ bezeichnet. Wir haben damit bewiesen, daß

$$\omega \wedge \sigma = \sum_{\substack{i_1 < \dots < i_k \\ j_1 < \dots < j_l}} a_{i_1 \dots i_k}\, b_{j_1 \dots j_l} \omega_{i_1} \wedge \dots \wedge \omega_{i_k} \wedge \omega_{j_1} \wedge \dots \wedge \omega_{j_l}. \tag{1.7}$$

Mit der rechten Seite kann man einfach sehen, daß $\omega \wedge \sigma$ (1) und (2) erfüllt. Die Eindeutigkeit ist durch die Formel (1.4) garantiert. $\square$

Bemerkung 1.10.2 Der Beweis gibt die Formel (1.7), mit der das Dachprodukt in Koordinaten berechnet werden kann.

Definition 1.10.3 Eine alternierenden k-Form $\omega \in \wedge^k V^*$ heißt *zerlegbar*, wenn man $\mu_1, \dots, \mu_k \in V^*$ finden kann, so daß $\omega = \mu_1 \wedge \cdots \wedge \mu_k$ (vgl. Übung 1).

Lemma 1.10.4 (weitere Rechenregeln)
(a) $\wedge$ *ist assoziativ: für* $\omega \in \wedge^k V^*$, $\sigma \in \wedge^l V^*$, $\mu \in \wedge^m V^*$ *gilt*

$$(\omega \wedge \sigma) \wedge \mu = \omega \wedge (\sigma \wedge \mu).$$

(b) *Für* $\omega \in \wedge^k V^*$, $\sigma \in \wedge^* V^*$ *ist*

$$\omega \wedge \sigma = (-1)^{kl} \sigma \wedge \omega.$$

(c) *Es ist* $\omega \wedge \omega = 0$ *für alle zerlegbaren alternierenden Multilinearform* ω.

Beweis. (a) Wegen der Bilinearität des äußeren Produkts, wird die Assoziativität bewiesen, wenn wir zeigen, daß

$$(\omega_I \wedge \omega_J) \wedge \omega_H = \omega_I \wedge (\omega_J \wedge \omega_H)$$

ist, wenn

$$\begin{aligned}
\omega_I &:= \omega_{i_1} \wedge \cdots \wedge \omega_{i_k} \text{ mit } i_1 < \cdots < i_k \\
\omega_J &:= \omega_{j_1} \wedge \cdots \wedge \omega_{j_l} \text{ mit } j_1 < \cdots < j_l \\
\omega_H &:= \omega_{h_1} \wedge \cdots \wedge \omega_{h_m} \text{mit } h_1 < \cdots < h_m,
\end{aligned}$$

und $\{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ eine Basis von V^* ist. Das folgt sofort aus Satz 1.10.1 (2), weil beide Seiten das Dachprodukt der Linearformen $\omega_{i_1}, \dots, \omega_{i_k}, \omega_{j_1}, \dots, \omega_{j_l}, \omega_{h_1}, \dots, \omega_{h_m}$ (in dieser Ordnung) sind.

(b) Die Permutation $\{1, \dots, k, k+1, k+l\} \mapsto \{k+1, \dots, k+l, 1, \dots, k\}$ hat Signum $(-1)^{kl}$.

(c) Übung. ☐

Proposition 1.10.5 *Seien* V, W *Vektorräume über* $\mathbb{R}$, $F \in \mathrm{Hom}(V;W)$. *Für jedes* $\omega \in \wedge^k W^* \subset \otimes^k W^*$ *ist der Rücktransport* $F^*\omega$ *alternierend. Also induziert der Rücktransport von k-Linearformen eine lineare Abbildung* $F^* : \wedge^k W^* \to \wedge^k V^*$. *Für* $\omega \in \wedge^k W^*$ *und* $\sigma \in \wedge^l W^*$ *gilt*

$$F^*(\omega \wedge \sigma) = (F^*\omega) \wedge (F^*\sigma).$$

Beweis.

$$\begin{aligned}
F^*\omega(\dots, v_i, \dots, v_j, \dots) &:= \omega(\dots, Fv_i, \dots, Fv_j, \dots) \\
&= -\omega(\dots, Fv_j, \dots, Fv_i, \dots) \\
&= -F^*\omega(\dots, v_j, \dots, v_i, \dots),
\end{aligned}$$

also ist $F^*\omega$ alternierend. Nach Definition ist $F^* \circ \mathrm{Alt} = \mathrm{Alt} \circ F^*$. Also:

$$\begin{aligned}
F^*(\omega \wedge \sigma) &= F^*\Big(\frac{(k+l)!}{k!l!} \mathrm{Alt}\,(\omega \otimes \sigma)\Big) \\
&= \frac{(k+l)!}{k!l!} \mathrm{Alt}\,(F^*(\omega \otimes \sigma)) \\
&= \frac{(k+l)!}{k!l!} \mathrm{Alt}\,(F^*(\omega) \otimes F^*(\sigma)) \\
&= (F^*\omega) \wedge (F^*\sigma).
\end{aligned}$$

☐

Kapitel 2

Untermannigfaltigkeiten in $\mathbb{R}^n$

Ziel dieses Kapitels ist es, einige wichige Definitionen über Untermannigfaltigkeiten von $\mathbb{R}^n$ in Erinnerung zu bringen. Diese sind k-dimensionale "Flächen" in n-dimensionalen Räumen. Alle Sätze werden ohne Beweis angegeben. Referenz sind die Kapitel 14 und 15 in [For99].

2.1 Differenzierbare Abbildungen

Definition 2.1.1 Es seien U, V offene Mengen in $\mathbb{R}^n$ und $h \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$, wobei $\mathbb{N}_0 := \{0, 1, \dots\}$. Eine Abbildung $F : U \to V$ heißt *C^h-Diffeomorphismus* (oder *Diffeomorphismus der Klasse C^h*) , falls F bijektiv ist und sowohl F als auch F^{-1} h-mal stetig differenzierbar sind. Wenn $h = 0$, sind F und F^{-1} stetig und F heißt ein *Homoömorphismus.*

Definition 2.1.2 Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und $F : U \to \mathbb{R}^m$ eine stetig differenzierbare Abbildung. Schreibe $F = (F_1, \dots, F_m)$, wobei die Koordinatenfunktionen $F_j : U \to \mathbb{R}$ $(j = 1, \dots, m)$ von F durch die Gleichungen $F(x) = (F_1(x), \dots, F_n(x))$ gegeben sind. Für alle $x \in U$ ist $F'(x) \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ die lineare Abbildung mit Matrix

$$DF(x) := \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial x_n}(x) \end{bmatrix}$$

bezüglich der kanonischen Basen in $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^m$. $DF(x)$ heißt die *Jacobi-Matrix* von F an der Stelle x. Der Rang von $F'(x)$ ist der Rang von $DF(x)$, geschrieben Rang $F'(x)$.

Es sei $n \le m$. Die Abbildung F heißt eine *Immersion*, wenn $F'(x)$ in jedem Punkt $x \in U$ injektiv ist (d.h. Rang $F'(x) = n$ für alle $x \in U$).

Es sei $n \ge m$. Die Abbildung F heißt eine *Submersion*, wenn $F'(x)$ in jedem Punkt $x \in U$ surjektiv ist (d.h. Rang $F'(x) = m$ für alle $x \in U$).

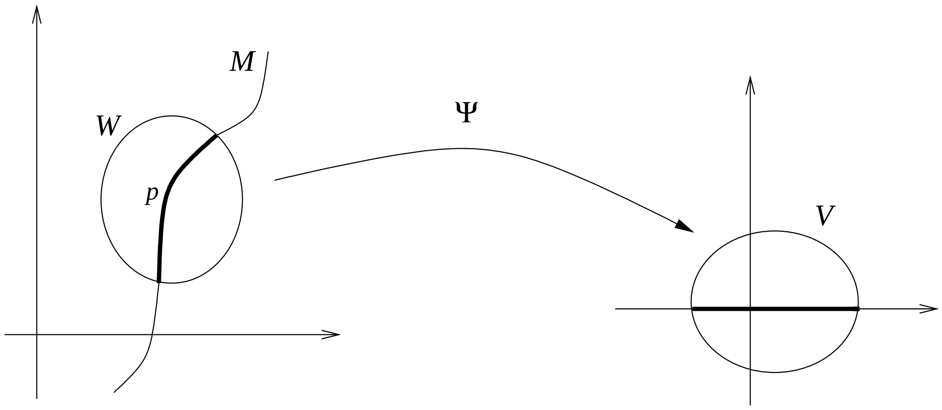
Es sei $n \le m$. Eine injektive Immersion $F : U \to \mathbb{R}^m$ heißt eine *Einbettung*, wenn $F : U \to F(U)$ ein Homoömorphismus bezüglich der von $\mathbb{R}^n$ auf $F(U)$ induzierten Metrik ist.

Es sei $n = m$. Wenn $F'(x)$ bijektiv ist, dann ist F ein *lokaler Diffeomorphismus*, d.h. es gibt Umgebungen U_x von x und $V_{F(x)}$ von $F(x)$ so daß $F : U_x \to V_{F(x)}$ ein Diffeomorphismus ist (Satz über die lokale Umkehrbarkeit)

2.2 Untermannigfaltigkeiten

Definition 2.2.1 Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt k-dimensionale *C^h-Untermannigfaltigkeit*, wenn es zu jedem Punkt $p \in M$ eine offene Umgebung $W \subset \mathbb{R}^n$, eine offene Teilmenge $V \subset \mathbb{R}^n$ und ein C^h-Diffeomorphismus $\Psi : W \to V$ gibt, so daß

$$\Psi(W \cap M) = \{y = (y_1, \dots, y_n) \in V : y_{k+1} = \dots = y_n = 0\}$$



Beispiel 2.2.2 Es sei $S^1 := \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^2$ der Einheitskreis in $\mathbb{R}^2$. In Polarkoordinaten (ρ, θ) (mit $x_1 = \rho \cos\theta$, $x_2 = \rho \sin\theta$) ist S^1 durch die Gleichung $\rho = 1$ gegeben.

Für jedes $x \in S^1 \setminus \{(-1, 0)\}$ wählen wir

$$W_1 := \mathbb{R}^2 \setminus]-\infty, 0] \quad \text{und} \quad V_1 =]-\pi, \pi[\times]-1, +\infty[$$

und definieren den C^∞-Diffeomorphismus $\Psi_{(1)} : W_1 \to V_1$ durch

$$\Psi_{(1)}(x_1, x_2) := (y_1, y_2) \quad \text{mit} \quad \begin{cases} y_1 & := \theta \\ y_2 & := \rho^2 - 1 \end{cases}$$

Dann ist

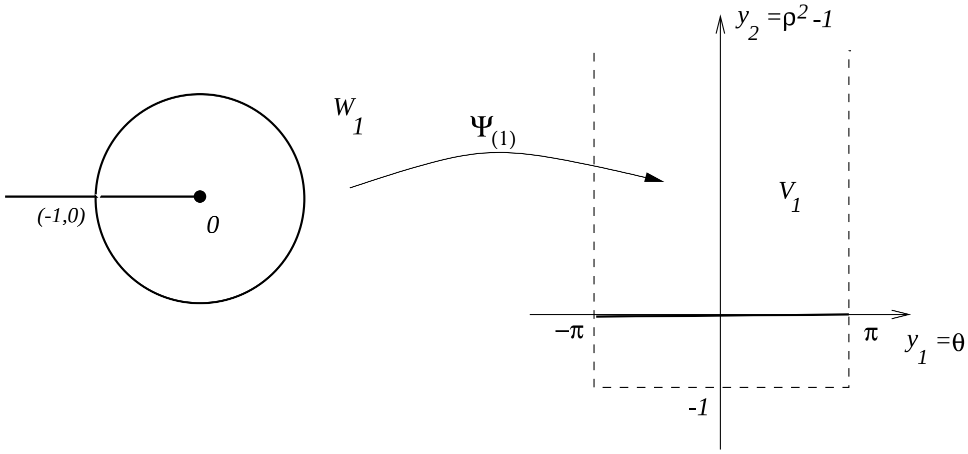
$$\Psi_{(1))}(W_1 \cap S^1) = \{(y_1, y_2) \in V_1 : y_2 = 0\}$$

Für $(-1, 0)$ (und das gilt allgemeiner für alle Punkte in $S^1 \setminus \{(1, 0)\}$) können wir

$$W_2 := \mathbb{R}^2 \setminus [0, +\infty[\quad \text{und} \quad V_1 =]0, 2\pi[\times]-1, +\infty[$$

wählen. Dann definieren wir den Diffeomorphismus $\Psi_{(2)} : W_2 \to V_2$ durch

$$\Psi_{(2)}(x_1, x_2) := (y_1, y_2) \quad \text{mit} \quad \begin{cases} y_1 & := \theta \\ y_2 & := \rho^2 - 1 \end{cases}$$



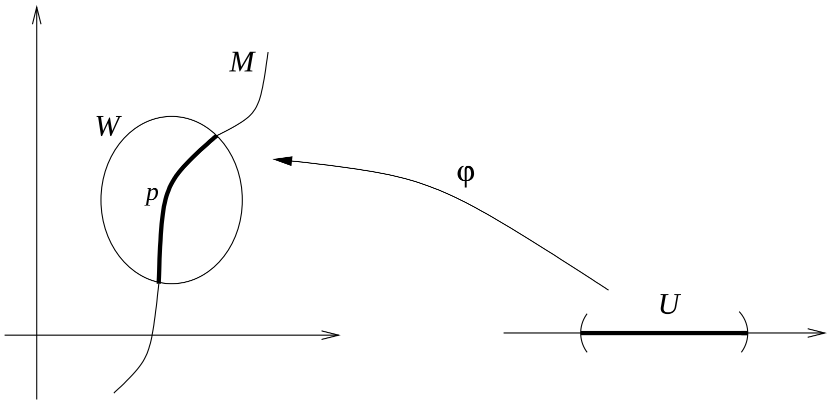
Wir erhalten $\Psi_{(1))}(W_2 \cap S^1) = \{(y_1, y_2) \in V_1 : y_2 = 0\}$.

Also ist S^1 eine 1-dimensionale C^∞-Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^2$.

2.3 Äquivalente Definitionen

2.3.1 Parametrisierungssatz

Satz 2.3.1 (Parametrisierungssatz) *Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann eine k-dimensionale C^h-Untermannigaltigkeit, wenn es zu jedem Punkt $p \in M$ eine offene Umgebung $W \subset \mathbb{R}^n$, eine offene Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^k$ und eine C^h-Immersion $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ mit $\varphi(U) = M \cap W$ gibt, die eine Einbettung ist.*



Die Einbettungen ϕ des Parametrisierungssatz heißen *Parametrisierungen* oder *Karten* (*der Klasse* C^h).

Eine Kart $\varphi : U \to \varphi(U) \subset M$ wird mit (U, φ) bezeichnet. Für alle $p \in U$ ist $p = \varphi(y_1, \ldots, y_k)$. Dann heißen $(y_1, \ldots, y_k)$ die *Koordinate von* p bezüglich (U, φ).

Satz 2.3.2 (Parameter Transformationen) *Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale C^h-*

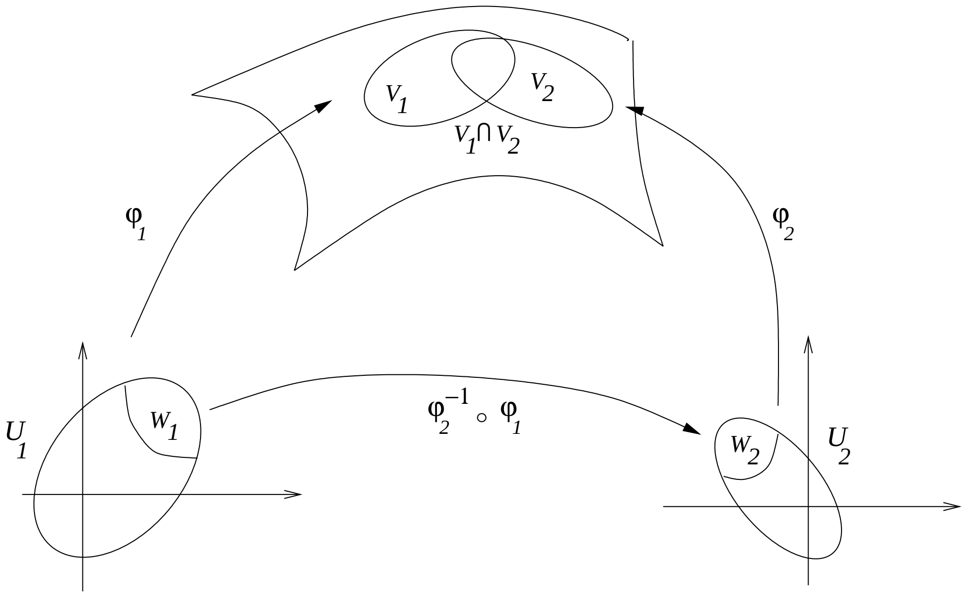
Untermannigfaltigkeit und

$$\varphi_j : U_j \to V_j := \varphi_j(U_j) \subset M \quad (j = 1, 2)$$

Karten der Klasse C^h mit $V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$. Dann ist $W_j := \varphi_j^{-1}(V_1 \cap V_2)$ offen in $\mathbb{R}^n$ und

$$\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1 : W_1 \to W_2$$

*ist ein C^h-Diffeomorphismus (*Kompatibilitätsbedingung*).*



Bemerkung 2.3.3 Der Parametrisierungssatz ist die Verbindung zwischen der Theorie von Untermannifaltigkeiten von $\mathbb{R}^n$ und der Theorie der (abstrakten) Mannigfaltigkeiten. Abstrakte Mannigfaltigkeiten sind topologische Räume zusammen mit einer Überdeckung von Karten, die die Kompatibilitätsbedingungen erfüllen.

Achtung: In der Theorie der (abstrakten) Mannigfaltigkeiten sind Karten auf offenen Mengen in M definiert. Karten auf einer k-dimensionalen (abstrakten) C^h-Mannigfaltigkeit sind Homoömorphismen $\phi : U \to \mathbb{R}^k$, die die C^h Kompatibilitätsbedingungen erfüllen. Mit dieser Notation sollten wir unsere Karten nicht als (U, φ) sondern als $(\varphi(U), \varphi^{-1}|_{\varphi(U)})$ schreiben.

Beispiel 2.3.4 Wir betrachten

$$\begin{array}{rcl} \varphi_1 : U_1 :=]-\pi, \pi[& \to & W_1 := \mathbb{R}^2 \setminus]-\infty, 0] \\ \theta & \mapsto & (\cos\theta, \sin\theta) \end{array}$$

φ_1 ist C^∞ und eine Einbettung. Sie ist nämlich injektiv, $D\varphi_1(\theta) = [-\sin\theta \cos\theta]$ hat Rang 1 und man kann einfach sehen, daß $\varphi_1 :]-\pi, \pi[\to \varphi_1(]-\pi, \pi[) = S^1 \setminus \{(-1, 0)\}$ ein Homoörphismus ist.

2.3.2 Nullstellenmengen von differenzierbaren Abbildungen

Zurück zur Definition von Untermannigfaltigkeiten: Wir schreiben $\Psi = (\Psi_1, \ldots, \Psi_n)$ mit $\Psi_j : W \to \mathbb{R}$ für alle $j = 1, \ldots, n$. Dann ist

$$\Psi(W \cap M) = \{y = (y_1, \ldots, y_n) \in V : y_{k+1} = \cdots = y_n = 0\}$$

genau dann, wenn

$$W \cap M = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in W : \Psi_{k+1}(x) = \cdots = \Psi_n(x) = 0\}.$$

Setze

$$F = (F_1, \ldots, F_{n-k}) : W \to \mathbb{R}^{n-k} \quad \text{mit} \quad F_1 := \Psi_{k+1}, \ldots F_{n-k} := \Psi_n.$$

Dann ist F der Klasse C^h mit Rang $F'(x) = n - k$, für alle $x \in W$ (d.h. F ist eine Submersion) und $W \cap M = \{x \in W : F(x) = 0\} = F^{-1}(0)$. Diese Bemerkung gibt in der Tat eine äquivalente Definition von Untermannigfaltigkeiten.

Satz 2.3.5 *Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann eine k-dimensionale C^h-Untermannigfaltigkeit, wenn es zu jedem Punkt $p \in M$ eine offene Umgebung W und eine C^h-Submersion $F : W \to \mathbb{R}^{n-k}$ gibt, so daß $M \cap W = \{x \in W : F(x) = 0\} = F^{-1}(0)$.*

Beispiel 2.3.6 $S^1 = F^{-1}(0)$ mit $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch $F(x) = x_1^2 + x_2^2 - 1$. Dann ist F eine Submersion: F ist C^∞ und $F'(x) = [2x_1 \; 2x_2]$ hat Rang 1 auf S^1.

Bemerkung 2.3.7

① Die Bedingung, daß $F = (F_1, \ldots, F_{n-k}) : W \to \mathbb{R}^{n-k}$ eine Submersion sein muß, läßt sich wie folgt unformulieren: Die Gradienten

$$\Big\{\operatorname{grad} F_j =: \Big(\frac{\partial F_j}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial F_j}{\partial x_n}\Big)\Big\}_{j=1}^{n-k}$$

sind in jedem Punkt $x \in W$ linear unabhängig.

② Wenn $F'(p)$ eine $(n-k) \times n$-Matrix mit maximalem Rang $n - k$ ist, dann gibt es eine Ungebung U von p, so daß Rang $F'(x) = n - k$ für alle $x \in U$. Rang $F'(p) = (n-k)$ bedeutet nämlich, daß es eine $(n-k) \times (n-k)$-Untermatrix mit Determinante ungleich Null gibt. Da die Determinante eine stetige Funktion ist und die Dimension $(n - k)$ maximal ist, erhalten wir die Behauptung.

2.4 Tangentialvektoren

(Referenz: [For99], S. 148-149)

Es sei M eine k-dimensionale C^h-Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ $(h \in \mathbb{N} \cap \{\infty\})$ und sei $p \in M$ ein Punkt. Ein Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ heißt *Tangentialvektor an M im Punkt p*, wenn es eine stetig differenzierbare Kurve $\psi :]-\varepsilon, \varepsilon[\to M \subset \mathbb{R}^n$ gibt, so daß $\psi(0) = p$ und $\psi'(0) = v$.

Wir bezeichnen die Menge aller Tangentialvektoren an M in p mit T_pM.

Bemerkung 2.4.1 Wenn $M = U$ offen in $\mathbb{R}^n$ ist, dann ist $T_xU = \mathbb{R}^n$ für alle $x \in U$. Jedes $v \in \mathbb{R}^n$ ist nämlich der Tangentialvektor der Kurve $t \mapsto x + tv$ in U ($|t| < \varepsilon$ mit $\varepsilon > 0$ klein genug).

Satz 2.4.2 (vgl. [For99], §15 Satz 1)

(a) *T_pM ist ein k-dimensionaler Untervektorraum von $\mathbb{R}^n$.*

(b) *Es seien (U, φ) eine Karte von M und $p = \varphi(c) \in M$ mit $c \in U$. Dann ist $T_pM = \varphi'(c)(\mathbb{R}^k)$.*

Wir erinnern uns, daß $\varphi'(c) \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^n)$ injektiv ist. Insbesondere: die kanonische Basis von $\mathbb{R}^k$ sei $\{e_1, \ldots, e_k\}$. Dann ist $\{\varphi'(c)e_j\}_{j=1}^k$ eine Basis von T_pM.

Explizit: Wenn $(t_1, \ldots, t_k)$ die Koordinaten in $\mathbb{R}^k$ und $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ die Koordinatenfunktionen von φ sind, dann gilt

$$\varphi'(c)e_j = \frac{\partial \varphi}{\partial t_j}(c) := \Big(\frac{\partial \varphi_1}{\partial t_j}(c), \ldots, \frac{\partial \varphi_n}{\partial t_j}(c)\Big).$$

(c) *Es sei $W \subset \mathbb{R}^n$ offen und $F : W \to \mathbb{R}^{n-k}$ eine Submersion der Klasse C^h mit $M \cap W = \{x \in W : F(x) = 0\}$. Dann gilt*

$$T_pM = \operatorname{Ker} F'(p) = \{v \in \mathbb{R}^n : \langle v | \operatorname{grad} F_j(p)\rangle = 0 \;\forall j = 1, \ldots, n-k\},$$

wobei $\langle \cdot | \cdot \rangle$ das Euklidische Skalarprodukt in $\mathbb{R}^n$ ist.

Beispiel 2.4.3 (Tangentialvektorräume des Einheitskreises $S^1 \subset \mathbb{R}^2$)

① $(U, \varphi) = (]0, 2\pi[, \theta \mapsto (\cos\theta, \sin\theta))$ ist eine Karte mit $D\varphi(\theta) = [-\sin\theta, \cos\theta]$. Es sei $p = (\cos\theta, \sin\theta)$ und $e_1 = 1$ (die Basis von $\mathbb{R}$). Dann gilt $T_pS^1 = \mathbb{R}(\varphi'(\theta)e_1) = \mathbb{R}(-\sin\theta, \cos\theta)$.

② $S^1 = F^{-1}(0)$ mit $F(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 1$. Es sei $p = (x_1, x_2) \in S^1$. Dann gilt $\operatorname{grad} F(p) = (2x_1, 2x_2)$ und $T_pS^1 = \mathbb{R}(-x_2, x_1)$.

2.4.1 Algebraische Definition des Tangentialraums (C^∞-Umfk)

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $p \in U$. Zwei C^∞-differenzierbare Funktionen $f : V_1 \to \mathbb{R}$ und $g : V_2 \to \mathbb{R}$ mit offenen Definitionsbereichen $V_1 \subset U$ und $V_2 \subset U$ heißen *äquivalent* (geschrieben $f \cong g$), wenn eine Umgebung V von p gibt, so daß $V \subset V_1 \cap V_2$ und $f|_V = g|_V$.

"$\cong$" ist eine Äquivalenzrelation, deren Äquivalenzklassen die *Keime differenzierbarer Funktionen auf U bei p* heißen. Die Menge dieser Keime wird mit $\mathcal{C}_p^\infty(U)$ bezeichnet.

$\mathcal{C}_p^\infty(U)$ ist eine Algebra: schreibe $[f]$ für die Keime in $\mathcal{C}_p^\infty(U)$ mit Repräsentant f. Dann definieren wir für alle $[f], [g] \in \mathcal{C}_p^\infty(U)$ und alle $a \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
[f] + [g] &:= [f + g] \\
a[f] &:= [af] \\
[f][g] &:= [fg].
\end{aligned}$$

Man kann leicht zeigen, daß diese Operationen wohl definiert sind. Normalerweise schreibt man aber einfach f statt $[f]$.

Definition 2.4.4 Es seien X eine Menge, p ein Punkt in X und $\mathcal{A}$ eine Algebra von Funktionen, deren Definitionsbereich den Punkt p enthält. Eine *Derivation* von $\mathcal{A}$ ist eine lineare Abbildung $v : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$, die die Produktregel erfüllt: für alle $f, g \in \mathcal{A}$ ist

$$v(fg) = v(f)\, g(p) + f(p)\, v(g).$$

Beispiel 2.4.5 Die Abbildung $v : \mathcal{C}_p^\infty(U) \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$v(f) := \text{Richtungsableitung von } f \text{ in } p \text{ in der Richtung von } v := \frac{t}{dt} f(p + tv)\,|_{t=0}$$

ist eine Derivation von $\mathcal{C}_p^\infty(U)$.

Definition 2.4.6 Die Menge aller Derivationen von $\mathcal{C}_p^\infty(U)$ bezeichnen wir mit $T_p^{\mathrm{alg}}U$. Sie ist ein Vektorraum. Für alle $v_1, v_2 \in T_p^{\mathrm{alg}}U$ und alle $a, b \in \mathbb{R}$ definieren wir $av_1 + bv_2$ durch

$$(av_1 + bv_2)(f) = av_1(f) + bv_2(f), \qquad f \in \mathcal{C}_p^\infty(U).$$

Satz 2.4.7 *Die Abbildung*

$$v \mapsto \textit{Richtungsableitung in } p \textit{ in der Richtung von } v$$

ist ein Isomorphismus von T_pM nach $T_p^{\mathrm{alg}}U$.

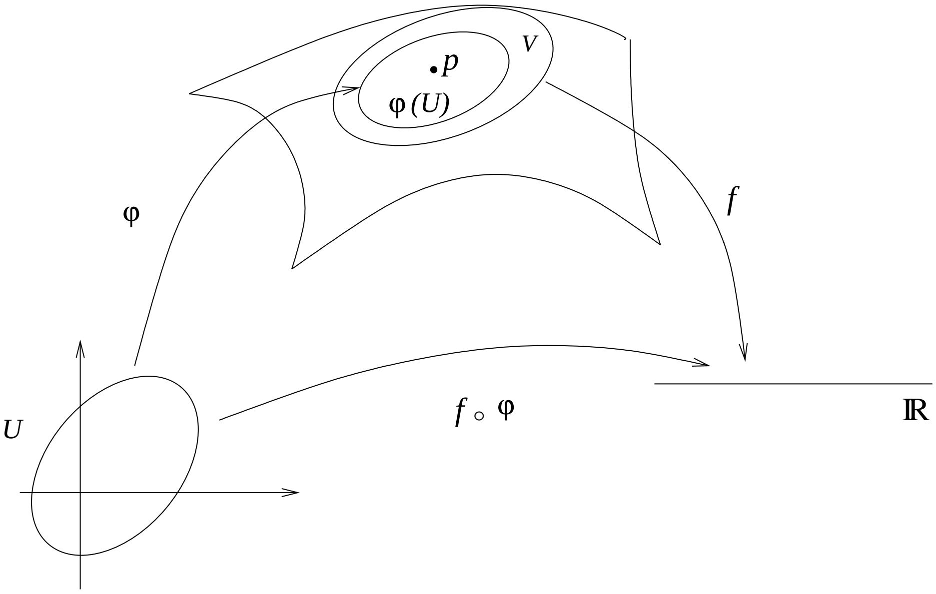
Wenn wir $T_p^{\mathrm{alg}}M$ für eine Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$ definieren möchten, werden wir mit folgendem Problem konfrontiert: was bedeutet, daß $f : M \to \mathbb{R}$ in $p \in M$ differenzierbar ist?

Die Karten machen die Definition von Differenzierbarkeit einer Funktion auf M möglich. Wegen der Karten wissen wir, daß eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ *lokal* mit einer offenen Menge in $\mathbb{R}^k$ identifiziert werden kann, und wir wissen, was Differenzierbarkeit auf einer offenen Menge von $\mathbb{R}^k$ bedeutet.

Wir erinnern uns, daß eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ immer mit der von $\mathbb{R}^n$ induzierten Topologie betrachtet wird. Obwohl wir $T_p^{\mathrm{alg}}M$ nur für C^∞-Untermannigfaltigkeiten von $\mathbb{R}^n$ definiert haben, gilt folgende Definition allgemein.

Definition 2.4.8 M sei eine k-dimensionale C^h-Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ ($h \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, wobei $\mathbb{N} := \{1, 2, \dots\}$). Weiter sei $V \subset M$ offen, $f : V \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $r \in \{1, \dots, h\}$. Wir sagen, f ist *r-mal stetig differenzierbar in $p \in V$*, wenn es eine Karte (U, φ) mit $p \in \varphi(U) \subset V$ gibt, so daß $f \circ \varphi : U \to \mathbb{R}$ r-mal stetig differenzierbar ist.

Bemerkung 2.4.9 Die Kompatibilitätsbedingungen für Karten implizieren, daß die Definition von der Wahl der Karte (U, φ) mit $p \in \varphi(U)$ unabhängig ist.



Jetzt können wir $T_p^{\text{alg}}M$ für eine C^∞-Untermannigfaltigkeit definieren.

$M \subset \mathbb{R}^n$ sei eine k-dimensionale C^∞-Untermannigfalitigkeit von $\mathbb{R}^n$. Genauso wie im Fall $M = U$, defineren wir die Algebra $\mathcal{C}_p^\infty(M)$ der *Keime differenzierbarer Funktionen auf M in p* und den Vektorraum $T_p^{\text{alg}}M$ der Derivationen von $\mathcal{C}_p^\infty(M)$.

Außerdem sind T_pM und $T_p^{\text{alg}}M$ isomorphe Vektorräume.

Bemerkung 2.4.10

① Viele Differentialgeometriebücher betrachten nur den Fall von C^∞-Mannigfaltigkeiten M und *definieren* den Tangentialraum T_pM als $T_p^{\text{alg}}M$. Untermannigfaltigkeiten der Klasse C^h mit $h < \infty$ spielen aber eine wichtige Rolle in der Analysis von partiellen Differenzialgleichungen.

② Leider kann man die obige algebraische Definition des Tangentialraums durch Derivationen nicht auf C^h-Untermannigfaltigkeiten mit $h < \infty$ ausdehnen. Interessierte können mehr darüber in [War71], 1.14 und 1.21, finden.

2.5 Normalenvektoren

(Referenz: [For99], S. 149)

Definition 2.5.1 Ein Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ heißt *Normalenvektor* einer k-dimensionalen C^h-Untermannigfaltigkeit M von $\mathbb{R}^n$ $(h \in \mathbb{N} \cup \{\infty\})$ im Punkt p, wenn

$$\langle v|w\rangle = 0 \qquad \text{für alle } w \in T_pM,$$

wobei $\langle\cdot|\cdot\rangle$ das Euklidische Skalarprodukt in $\mathbb{R}^n$ bezeichnet.

Wir schreiben N_pM für die Menge aller Normalenvektoren von M in p. Dann gilt für alle $p \in M$

(1) N_pM ist eine $(n-k)$-dimensionaler Untervektorraum von $\mathbb{R}^n$.
(2) $T_pM \oplus N_pM = \mathbb{R}^n$.

2.6 Kotangentialvektoren

(Referenz: [For99], S. 192)

Definition 2.6.1 Ein *Kotangentialvektor* an einer k-dimensionalen C^h-Untermannigfaltigkeit M von $\mathbb{R}^n$ $(h \in \mathbb{N} \cup \{\infty\})$ im Punkt p ist eine Linearfom $\mu : T_pM \to \mathbb{R}$. Die Menge aller Kotangentialvektoren an M in p bezeichnen wir mit T_p^*M.

Insbesondere: Wir können den Fall $M = U$ betrachten. Dann ist $T_pU = T_p\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n$ und $T_p^*U = T_p\mathbb{R}^n\,(\cong \mathbb{R}^n)$ der Vektorraum der Linearformen auf $\mathbb{R}^n$.

Kapitel 3

Differentialformen

3.1 Definitionen und Rechenregeln

Sei M eine m-dimensionale C^h-Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$. Da T_p^*M der duale Vektorraum von T_pM ist, können wir den Raum $\wedge^k T_p^*M$ der alternierenden k-Linearformen auf T_pM betrachten.

Definition 3.1.1 Eine *Differentialform der Ordnung* k (oder kurz eine k*-Form*) *auf* M ist eine Abbildung

$$\omega : M \to \bigcup_{p \in M} \wedge^k T_p^*M,$$

so daß $\omega(p) \in \wedge^k T_p^*M$ für alle $p \in M$.

Wenn $k = 0$, dann $\wedge^0 T_p^*M = \mathbb{R}$, also ist eine 0-Form nichts anderes als eine Funktion auf M.

Wenn $k = 1$, dann $\wedge^1 T_p^*M = T_p^*M$. Eine 1-Form heißt auch eine *Pfaffsche Form.*

Wenn $k > m = \dim M$ ist jede k-Form null.

Insbesondere gelten diese Definitionen, wenn $M = U$ eine offene Menge in $\mathbb{R}^n$ ist.

Definition 3.1.2 Es seien $\omega, \widetilde{\omega}$ zwei k-Formen auf M und $f : M \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann sind die k-Formen $\omega + \widetilde{\omega}$ und $f\omega$ definiert durch

$$\begin{aligned} (\omega + \widetilde{\omega})(p) &:= \omega(p) + \tilde{\omega}(p) \\ (f\omega)(p) &:= f(p)\omega(p) \end{aligned}$$

für alle $p \in M$. Außerdem, wenn σ eine l-Form auf M ist, dann ist $\omega \wedge \sigma$ die $(k+l)$-Form definiert durch

$$(\omega \wedge \sigma)(p) := \omega(p) \wedge \sigma(p).$$

Da eine Differentialform ω auf M punktweise definiert ist und $\omega(p)$ eine alternierende Multilinearform auf T_pM für alle $p \in M$ ist, gelten alle Rechenregeln der alternierenden Multilinearformen auch für k-Formen auf M. Zum Beispiel: für jede k-Form ω, l-Form σ und m-Form μ auf M gilt

$$(\omega \wedge \sigma) \wedge \mu = \omega \wedge (\sigma \wedge \mu)$$

(und deshalb schreiben wir einfach $\omega \wedge \sigma \wedge \mu$) und

$$\omega \wedge \sigma = (-1)^{kl} \sigma \wedge \omega.$$

3.2 Pfaffsche Formen

(Referenz: [For99], §18, S. 193)

M sei eine m-dimensionale C^h-Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$. Eine Pfaffsche Form ω auf M ist eine 1-Form: für jedes $p \in M$ ist $\omega(p) \in T_p^* M$, d.h. $\omega(p) : T_p M \to \mathbb{R}$ ist eine Linearform.

Wir schreiben $\langle \omega(p), v \rangle$ statt $[\omega(p)](v)$ für den Wert von $\omega(p)$ in $v \in T_p M$.

Definition 3.2.1 Die Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ sei in der offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar. Das *totale Differential* df von f ist die 1-Form auf U, die wie folgt definiert ist: für jedes $p \in U$ ist $df(p) : T_p M \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$\langle df(p), v \rangle = \langle \mathrm{grad}\, f(p) | v \rangle = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(p) v_j$$

für alle $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$.

Bemerkung 3.2.2 Aus der Kettenregel folgt

$$\langle df(p), v \rangle = \frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(t) \mid_{t=0}$$

für jede stetig differenzierbare Kurve $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\to U \subset \mathbb{R}^n$ mit $\gamma(0) = p$ und $\gamma'(0) = v$.

Insbesondere können wir die totalen Differentiale $dx_1, \ldots, dx_n$ der kanonischen Koordinatenfunktionen $x_1, \ldots, x_n$ von $\mathbb{R}^n$ betrachten. Wir erinnern uns, daß

$$\begin{aligned} x_i : \quad & \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ & p = (p_1, \ldots, p_n) \mapsto p_i \end{aligned}$$

Lemma 3.2.3 *Für alle $p \in \mathbb{R}^n$ ist $\{dx_1(p), \ldots, dx_n(p)\}$ die Basis von $T_p^* \mathbb{R}^n$, die dual zur kanonischen Basis $\{e_1, \ldots, e_n\}$ von $T_p \mathbb{R}^n \equiv \mathbb{R}^n$ ist.*

Beweis. Für die stetig differenzierbare Kurve $\gamma(t) := p + te_j$ gilt $\gamma(0) = p$ und $\gamma'(0) = e_j$. Da

$$(x_i \circ \gamma)(t) = x_i(p + te_j) = p_i + t\delta_{ij},$$

erhalten wir aus Bemerkung 3.2.2

$$\langle dx_i(p), e_j \rangle = \frac{d}{dt}(x_i \circ \gamma)(t) \mid_{t=0} = \delta_{ij}.$$

□

Folgerung 3.2.4
Für alle $p \in M$ und alle $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n \equiv T_p\mathbb{R}^n$

$$\langle dx_i(p), v\rangle = v_i \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

3.3 Differenzierbare Differentialformen in $U \subset \mathbb{R}^n$ offen

Nach Lemma 3.2.3 ist $\{dx_1(p), \ldots, dx_n(p)\}$ die zu $\{e_1, \ldots, e_n\}$ duale Basis von $T_p^*U \equiv T_p^*\mathbb{R}^n$ für jeden Punkt $p \in U$.

Korollar 3.3.1 *Für alle $p \in U$ ist $\{dx_{i_1}(p) \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}(p) : 1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n\}$ eine Basis von $\wedge^k T_pU$. Also: jede k-Form $\omega \in U$ läßt sich darstellen als*

$$\omega = \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} f_{i_1 \ldots i_k} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \tag{3.1}$$

mit eindeutig bestimmten Funktionen

$$f_{i_1 \ldots i_k} : U \to \mathbb{R}.$$

Für jedes $p \in U$ gilt nämlich

$$\omega(p) = \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} f_{i_1 \ldots i_k}(p)\; dx_{i_1}(p) \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}(p)$$

mit eindeutig bestimmten reellen Zahlen $f_{i_1 \ldots i_k}(p)$.

Definition 3.3.2 Die Differentialform ω heißt *r-mal stetig differenzierbar*, wenn alle Koeffizienten $f_{i_1 \ldots i_k}$ r-mal stetig differenzierbar sind. Wenn $r = 0$, heißt ω *stetig*.

"Stetig differenzierbar" wird immer r-mal stetig differenzierbar mit $r \ge 1$ bedeuten.
Die Menge aller r-mal stetig differenzierbaren k-Formen in U wird mit $\Omega_r^k(U)$ bezeichnet. Wir schreiben $\Omega^k(U)$ statt $\Omega_\infty^k(U)$.

3.4 Der Rücktransport von Differentialformen

Formel (3.1) gibt die Darstellung einer k-Form in U bezüglich der kanonischen Koordinaten $(x_1, \ldots, x_n)$ von $\mathbb{R}^n$. Wir definieren jetzt eine Operation zwischen k-Formen, die unter anderem die Darstellung von ω bezüglich anderer Koordinaten erlaubt.

Definition 3.4.1 $U \subset \mathbb{R}^n$ sei offen und

$$\omega = \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} f_{i_1 \ldots i_k} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$$

sei die Koordinatendarstellung der k-Form ω in U $(k \ge 1)$. Weiter seien $V \subset \mathbb{R}^m$ offen und $\varphi : V \to U \subset \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Abbildung (keine andere Regularitätsbedingungen –z.B. surjektiv, injektiv,... – werden für ω gefordert).

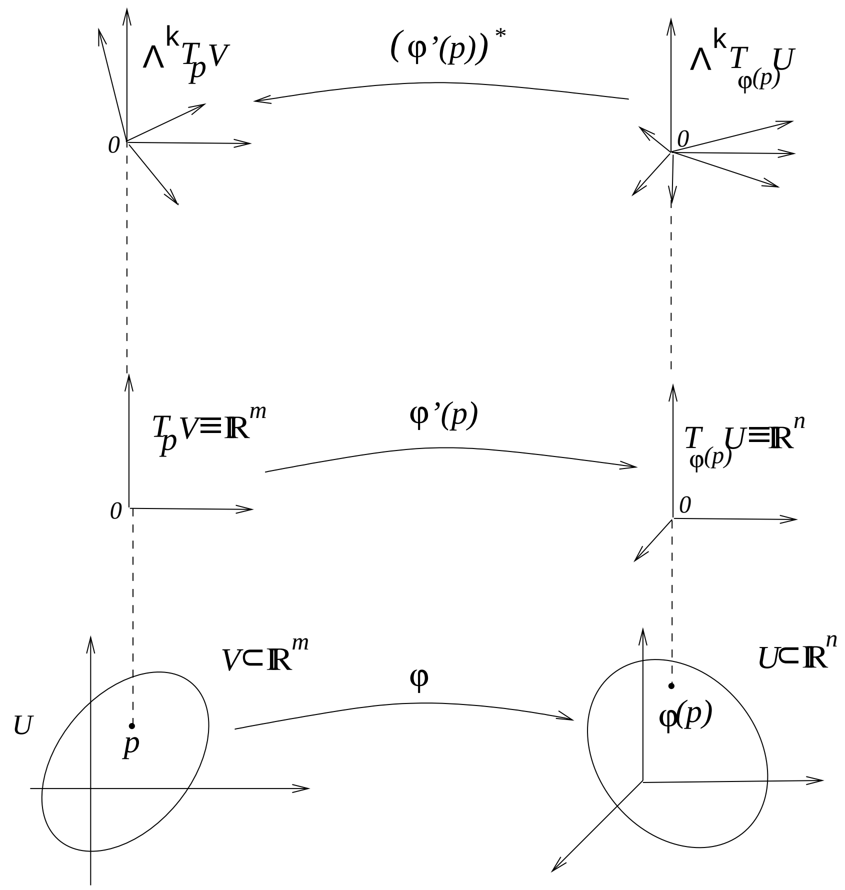
Die *mittels* φ *rücktransportierte* $k - Form$ ist die k-Form $\varphi^*\omega$ in V, die durch

$$\big(\varphi^*\omega\big)(p) = \big(\varphi'(p)\big)^*\omega(\varphi(p))$$

definiert ist, wobei

$$\big(\varphi'(p)\big)^* \in \mathrm{Hom}(\wedge^k T^*_{\varphi(p)}U, \wedge^k T^*_p V)$$

der von $\varphi'(p) \in \mathrm{Hom}(T_pV \equiv \mathbb{R}^m, T_{\varphi(p)}U \equiv \mathbb{R}^n)$ induzierte Rücktransport von alternierenden k-Formen auf Vektorräumen ist.



Aus der punktweisen Definition des Rücktransports folgt sofort:

Proposition 3.4.2 (Eigenschaften des Rücktransports) *Für alle* k*-Formen* ω*,* ω_1 *und* ω_2 *in* U*, alle* l*-Form* σ *in* U *und alle* $a, b \in \mathbb{R}$ *gilt*

$$\varphi^*(a\omega_1 + b\omega_2) = a\varphi^*(\omega_1) + b\varphi^*(\omega_2)$$
$$\varphi^*(\omega \wedge \sigma) = (\varphi^*\omega) \wedge (\varphi^*\sigma)$$

Satz 3.4.3 (Koordinatendarstellung von $\varphi^*\omega$) *Es seien* $V \subset \mathbb{R}^m$ *und* $U \subset \mathbb{R}^n$

offene Mengen, und $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n) : V \to U$ *stetig differenzierbar. Ferner seien*

$$\begin{aligned} &(t_1, \ldots, t_m) \text{ die kanonischen Koordinaten in } \mathbb{R}^m, \\ &(x_1, \ldots, x_n) \text{ die kanonischen Koordinaten in } \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Wenn

$$\omega = \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} f_{i_1 \ldots i_k} \, dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$$

eine k*-Form in* U *ist, dann ist*

$$\varphi^* \omega = \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} (f_{i_1 \ldots i_k} \circ \varphi) \, d\varphi_{i_1} \wedge \cdots \wedge d\varphi_{i_k}, \tag{3.2}$$

wobei für $i = 1, \ldots, n$

$$d\varphi_i = \varphi^*(dx_i) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial \varphi_i}{\partial t_j} \, dt_j$$

das totale Differential von φ_i *ist.*

Beweis. Für alle $p \in U$

$$\begin{aligned} &\big(\varphi^* \omega\big)(p) \\ &\quad = \big(\varphi'(p)\big)^* (\omega(\varphi(p)) \\ &\quad = \big(\varphi'(p)\big)^* \Big(\sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} f_{i_1 \ldots i_k}(\varphi(p)) dx_{i_1}(\varphi(p)) \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}(\varphi(p)) \Big) \\ &\quad = \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} f_{i_1 \ldots i_k}(\varphi(p)) \left[\Big(\varphi'(p)\Big)^* \big(dx_{i_1}(\varphi(p))\big) \right] \wedge \cdots \wedge \left[\Big(\varphi'(p)\Big)^* \big(dx_{i_k}(\varphi(p))\big) \right] \\ &\quad = \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} \big(f_{i_1 \ldots i_k} \circ \varphi\big)(p) \; \big(\varphi^* dx_{i_1}\big)(p) \wedge \cdots \wedge \big(\varphi^* dx_{i_k}\big)(p). \end{aligned}$$

Wir müssen $\varphi^* dx_i$ berechnen.

Jedes $\mu \in T_p^* V$ ist von der Form $\mu = \sum_{i=1}^m b_i \, dt_i(p)$ mit $b_i := \langle \mu, e_i^{(m)} \rangle$, wobei

$$e_i^{(m)} := \underbrace{(0, \ldots, 0, \overbrace{\;1\;}^{i-\text{te}}, 0, \ldots, 0)}_{m-\text{Koordinaten}}$$

Insbesondere:

$$(\varphi_j^* dx_j)(p) = \sum_{i=1}^m b_i \, dt_i(p)$$

mit

$$\begin{aligned}
b_i &= \langle (\varphi^* dx_j)(p), e_i^{(m)} \rangle \\
&= \langle \big(\varphi'(p)\big)^* \big(dx_j(\varphi(p))\big), e_i^{(m)} \rangle \\
&= \langle dx_j(\varphi(p)), \varphi'(p) e_i^{(m)} \rangle \\
&\qquad \text{nach der Definition des Rücktransports von alternierenden Multilinearformen} \\
&= \langle dx_j(\varphi(p)), \big(\frac{\partial \varphi_1}{\partial t_i}(p), \ldots, \frac{\partial \varphi_n}{\partial t_i}(p)\big) \rangle \\
&= \frac{\partial \varphi_j}{\partial t_i}(p) \\
&\qquad \text{nach der Folgerung 3.2.4 in §3.2}
\end{aligned}$$

d.h.

$$(\varphi^* dx_j)(p) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \varphi_j}{\partial t_i}(p)\; dt_i(p) \; (= d\varphi_j(p)).$$

$\square$

Bemerkung 3.4.4 Formel (3.2) ist nicht ganz explizit, weil wir die Form $\varphi^*\omega$ in $V \subset \mathbb{R}^n$ schreiben möchten als

$$\varphi^*\omega = \sum_{1 \le j_1 < \cdots < j_k \le m} g_{j_1 \ldots j_k}\; dt_{j_1} \wedge \cdots \wedge dt_{j_k}.$$

Wir betrachten nur verschiedene wichtige Sonderfälle.

1. Fall: ω ist eine Pfaffsche Form auf U, d.h.

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} f_i \, dx_i.$$

Der Satz gibt

$$\begin{aligned}
\varphi^*\omega &= \sum_{i=1}^{n} (f_i \circ \varphi)\, d\varphi_i \\
&= \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} \big(f \circ \varphi\big) \frac{\partial \varphi_i}{\partial t_j} \right) dt_j \\
&= \sum_{j=1}^{m} g_j \, dt_j
\end{aligned}$$

mit

$$g_j = \sum_{i=1}^{n} \big(f \circ \varphi\big) \frac{\partial \varphi_i}{\partial t_j} : V \to \mathbb{R}.$$

Wir bemerken, daß

$$(g_1, \ldots, g_m) = (f_1 \circ \varphi, \ldots, f_n \circ \varphi) D\varphi,$$

wobei

$$D\varphi = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial t_m} \end{bmatrix}$$

die Jacobi-Matrix ist.

Beispiel 3.4.5 Die Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi : V =]0,\infty[\times]0,2\pi[&\to U = \mathbb{R}^3 \\ (\rho,\theta) &\mapsto (x,y,z) \end{aligned}$$

sei definiert durch

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ z = 0. \end{cases}$$

In der Notation des Satzes:

$$\begin{aligned} m = 2, &\qquad (\rho,\theta) = (t_1,t_2) \\ n = 3, &\qquad (x,y,z) = (x_1,x_2,x_3). \end{aligned}$$

Die Jacobi-Matrix von φ ist

$$D\varphi = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

① Es sei $\omega = -y\,dx + x\,dy$. Dann

$$\begin{aligned} (f_1,f_2,f_3) &= (-y,x,0) \\ (f_1\circ\varphi, f_2\circ\varphi, f_3\circ\varphi) &= (-\rho\sin\theta, \rho\cos\theta, 0) \\ (g_1,g_2) &= (-\rho\sin\theta,\rho\cos\theta,0)\begin{bmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = (0,\rho^2) \end{aligned}$$

Also $\varphi^*\omega = \rho^2\,d\theta$.
② Wenn $\omega = dz$, dann

$$\begin{aligned} (f_1,f_2,f_3) &= (0,0,1) \\ (f_1\circ\varphi, f_2\circ\varphi, f_3\circ\varphi) &= (0,0,1) \\ (g_1,g_2) &= (0,0), \end{aligned}$$

also $\varphi^*\omega = 0$.
[Dies zeigt, daß φ^* für allgemeine φ nicht injektiv sein muß]

2. Fall: ω ist eine k-Form auf U und $k = m = n$. Wenn $\omega = f\ dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$, dann

$$\varphi^*\omega = g\ dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_n$$

mit

$$g = (f \circ \varphi)\ \det(D\varphi)$$

(vgl. Übung 5).

Definition 3.4.6 Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ und $V \subset \mathbb{R}^m$ offen und $\varphi : V \to U$ stetig differenzierbar. Die Funktion (0-Form) $f : U \to \mathbb{R}$ sei gegeben. Die *mittels φ rücktransportierte 0-Form $\varphi^* f$* ist die Funktion $\varphi^* f = f \circ \varphi : V \to \mathbb{R}$.

Proposition 3.4.7 *Seien $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$ und $W \subset \mathbb{R}^p$ offene Teilmengen, und $\varphi : V \to U$ und $\psi : W \to V$ stetig differenzierbare Abbildungen. Dann gilt für jede k-Form ω in U $(k \geq 0)$*

$$(\varphi \circ \psi)^*\omega = \psi^*(\varphi^*\omega). \tag{3.3}$$

Außerdem, wenn $\mathrm{id} : U \to U$, $x \mapsto x$ *die identische Abbildung bezeichnet, dann ist* $\mathrm{id}^*\omega = \omega$. *Daraus folgt: wenn $m = n$ und $\varphi : V \to U$ ein Diffeomorphismus ist, dann ist φ^* invertierbar mit*

$$(\varphi^*)^{-1} = (\varphi^{-1})^*. \tag{3.4}$$

Beweis. Den Beweis von (3.3) kann man in [For99], Satz 5.iv, S. 227, finden. Die Gleichung $\mathrm{id}^*\omega = \omega$ folgt sofort aus der Definition des Rücktransports. Daraus folgt auch (3.4), weil

$$\begin{aligned}
\mathrm{id} = \mathrm{id}^* = (\varphi \circ \varphi^{-1})^* = (\varphi^{-1})^* \circ \varphi^*, \\
\mathrm{id} = \mathrm{id}^* = (\varphi^{-1} \circ \varphi)^* = \varphi^* \circ (\varphi^{-1})^*.
\end{aligned}$$

□

3.5 Ableitung von Differentialformen in $U \subset \mathbb{R}^n$ offen

Es gibt eine natürliche Ableitung von Differentialformen. Damit kann man auch topologische Informationen über die Mannigfaltigkeit erhalten.

Definition 3.5.1 Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} f_{i_1 \ldots i_k}\ dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$$

eine r-mal stetig differenzierbare k-Form in U $(k \geq 1,\ r \geq 1)$. Die *äußere Ableitung* (oder *Differential*) von ω ist die $(r-1)$-mal stetig differenzierbare $(k+1)$-Form $d\omega$ in U definiert durch

$$d\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} df_{i_1 \dots i_k} \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k},$$

wobei

$$df_{i_1 \dots i_k} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_{i_1 \dots i_k}}{\partial x_j}\, dx_j$$

das totale Differential von $f_{i_1 \dots i_k}$ ist.

Die äußere Ableitung einer r-mal stetig differenzierbaren 0-Form (d.h. einer C^r Funktion) $f : U \to \mathbb{R}$) ist definiert als das totale Differential df von f (eine $(r-1)$-mal stetig differenzierbare Pfaffsche Form).

Beispiel 3.5.2

① **Pfaffsche Formen.** Sei $\omega = \sum_{i=1}^{n} f_i\ dx_i$ eine stetig differenzierbare Pfaffsche Form. Dann ist

$$\begin{aligned} d\omega &= \sum_{i=1}^{n} df_i \wedge dx_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} \Big(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}\, dx_j \Big) \wedge dx_i \\ &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}\, dx_j \wedge dx_i + \sum_{1 \leq j < i \leq n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}\, dx_j \wedge dx_i \\ &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} \Big(\frac{\partial f_j}{\partial x_i} - \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \Big)\, dx_i \wedge dx_j. \end{aligned}$$

② **Differentialformen der Ordnung** $n-1$. Wir erinnern uns, daß $\dim \wedge^{n-1} T_p^* U = n$ und, daß eine Basis von $\wedge^{n-1} T_p^* U$

$$\big\{ (-1)^{i-1} dx_1(p) \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i(p)} \wedge \cdots \wedge dx_n(p) \big\}_{i=1}^{n}$$

ist, wobei das Dach über $dx_i(p)$ bedeutet, daß dieser Faktor wegzulassen ist.

(Das ist die Basis von $\wedge^{n-1} T_p^* U$, die aus dem Isomophismus $\iota_{\omega(p)} : T_p U \to \wedge^{n-1} T_p^* U$ mit $\omega = dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$ kommt. Vgl. Übung 2)

Also kann jede $(n-1)$-Form ω in U geschrieben werden als

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} f_i\ dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_n$$

mit $f_i : U \to \mathbb{R}$, und deshalb

$$\begin{aligned}
d\omega &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} df_i \wedge dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_n \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i-1} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_n \\
&= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} (-1)^{i-1} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \right) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n.
\end{aligned}$$

③ **Differentialformen der Ordnung n.** Wenn ω eine n-Form in $U \subset \mathbb{R}^n$ ist, dann ist $d\omega$ eine $(n+1)$-Form, also $d\omega = 0$.

Beispiel 3.5.3 (Vektoranalysis in $\mathbb{R}^3$) Der Ursprung des Differentialformenkalküls ist die Vektoranalysis in $\mathbb{R}^3$. Es seien $U \subset \mathbb{R}^3$ eine offene Menge, $f : U \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion und $a = (a_1, a_2, a_3) : U \to \mathbb{R}^3$ eine stetig differenzierbare Abbildung [a ist ein *Vektorfeld in U*]. Der *Gradient* $\operatorname{grad} f$ der Funktion f, die *Rotation* $\operatorname{rot} a$ des Vektorfelds a und die *Divergenz* $\operatorname{div} a$ des Vektorfelds a werden definiert durch

$$\begin{aligned}
\operatorname{grad} f &:= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3}\right), \\
\operatorname{rot} a &:= \left(\frac{\partial a_3}{\partial x_2} - \frac{\partial a_2}{\partial x_3}, \frac{\partial a_1}{\partial x_3} - \frac{\partial a_3}{\partial x_1}, \frac{\partial a_2}{\partial x_1} - \frac{\partial a_1}{\partial x_2}\right), \\
\operatorname{div} a &:= \left(\frac{\partial a_1}{\partial x_1} + \frac{\partial a_2}{\partial x_2} + \frac{\partial a_3}{\partial x_3}\right).
\end{aligned}$$

Diese drei Operatoren können wir in natürlicher Weise durch äußere Ableitungen von Differentialformen schreiben. Dazu betrachten wir:

- das *vektorielle Streckenelement* $d\vec{s} = (dx_1, dx_2, dx_3)$
- das *vektorielle Flächenelement* $d\vec{S} = (dx_2 \wedge dx_3, dx_3 \wedge dx_1, dx_1 \wedge dx_2)$,
- das *Volumenelement* $dV = dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$.

In offenen Mengen $U \subset \mathbb{R}^3$ sind alle k-Formen mit $k > 3$ gleich Null.

- 0-Formen sind Funktionen $f : U \to \mathbb{R}$;
- 1-Formen schreibt man als $\omega_1 = a_1\, dx_1 + a_2\, dx_2 + a_3\, dx_3 = a \cdot d\vec{s}$;

  Hier haben wir die klassische Notation des Skalarprodukts in $\mathbb{R}^3$ benutzt: $u \cdot v = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$, wenn $u = (u_1, u_2, u_3)$ und $v = (v_1, v_2, v_3)$.
- 2-Formen schreibt man als $\omega_2 = b_1\, dx_2 \wedge dx_3 + b_2\, dx_3 \wedge dx_1 + b_3\, dx_1 \wedge dx_2 = b \cdot d\vec{S}$;

- 3-Formen schreibt man als $\omega_3 = f\ dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$;

In dieser Notation ist die äußere Ableitung

- $df = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial f}{\partial x_j}\ dx_j = \operatorname{grad} f \cdot d\vec{s}$.
- $d\omega_1 = d(a \cdot d\vec{s})$

$$= \Big(\frac{\partial a_2}{\partial x_1} - \frac{\partial a_1}{\partial x_2}\Big) dx_1 \wedge dx_2 - \Big(\frac{\partial a_1}{\partial x_3} - \frac{\partial a_3}{\partial x_1}\Big) dx_3 \wedge dx_1 + \Big(\frac{\partial a_3}{\partial x_2} - \frac{\partial a_2}{\partial x_3}\Big) dx_2 \wedge dx_3.$$

$$= \operatorname{rot} a \cdot d\vec{S}.$$

- $d\omega_2 = d(b \cdot d\vec{S}) = \Big(\frac{\partial b_1}{\partial x_1} + \frac{\partial b_2}{\partial x_2} + \frac{\partial b_3}{\partial x_3}\Big)\ dV = \operatorname{div} b\ dV.$
- $d\omega_3 = 0.$

Also kann man die Operatoren grad , rot und div mit dem äußeren Produkt zusammen beschreiben.

Notation 3.5.4 Wir benutzten manchmal eine kürzere Notationen für Differentialformen. Wir schreiben eine k-Form ω in U als

$$\omega = {\sum}'_{|I|=k}\ f_I\ dx_I$$

mit folgender Bedeutung:

$I = (i_1, \ldots, i_k)$ (mit $i_h \in \{1, \ldots, n\}$ für alle h) ist ein Multiindex; $f_I = f_{i_1 \ldots i_k} : U \to \mathbb{R}$; $dx_I = dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$; ${\sum}'_{|I|=k}$ bezeichnet die Summe über alle Multiindizes $I = (i_1, \ldots, i_k)$ mit *aufsteigenden* Indizes $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$.

Dann ist

$$d\omega = {\sum}'_{|I|=k}\ df_I \wedge dx_I.$$

Die Summe über *alle* Multiindizes $I = (i_1, \ldots, i_k)$ werden wir mit $\sum_{|I|=k}$ bezeichnen.

Bemerkung 3.5.5 Es ist manchmal bequemer, ohne aufsteigenden Multiindizes zu arbeiten (vgl. den Beweis von Satz 3.5.6, (b)). Es sei

$$\omega = \sum_{|I|=k} g_I\ dx_I \qquad \text{(Summe über \textit{alle} Multiindizen).}$$

Dann ist

$$d\omega = \sum_{|I|=k} dg_I \wedge dx_I.$$

Dazu: wir bemerken, daß für alle J mit $|J| = k$

$$dx_J = \begin{cases} 0, & \text{wenn } J = (j_1, \ldots, j_k) \text{ und } j_r = j_s \text{ für } r \neq s \\ \operatorname{sign}\sigma\, dx_I & \text{wenn } J = \sigma(I) \text{ und } I = (i_1, \ldots, i_k) \text{ mit } 1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n. \end{cases}$$

Also

$$\omega = {\sum}'_{|I|=k} \left(\sum_{\sigma \in \mathcal{P}_k} \operatorname{sign}\sigma \; g_{\sigma(I)} \right) dx_I$$

und

$$\begin{aligned} d\omega &= {\sum}'_{|I|=k} d \left(\sum_{\sigma \in \mathcal{P}_k} \operatorname{sign}\sigma \; g_{\sigma(I)} \right) \wedge dx_I \\ &= {\sum}'_{|I|=k} \sum_{\sigma \in \mathcal{P}_k} \operatorname{sign}\sigma \; dg_{\sigma(I)} \wedge dx_I \\ &= \sum_{|I|=k} dg_I \wedge dx_I. \end{aligned}$$

Satz 3.5.6 (Eigenschaften des äußeren Ableitung) *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge. Dann*

(a) *d ist linear: für alle stetig differenzierbare k-Formen ω_1 und ω_2 in U und alle $a, b \in \mathbb{R}$*

$$d(a\omega_1 + b\omega_2) = a\; d\omega_1 + b\; d\omega_2.$$

(b) *Es seien ω (bzw. σ) eine stetig differenzierbare k-Form (bzw. l-Form) in U. Dann gilt*

$$d(\omega \wedge \sigma) = d\omega \wedge \sigma + (-1)^k \omega \wedge d\sigma.$$

(c) *$d \circ d = 0$, d.h. $d(d\omega) = 0$ für jede zweimal stetig differenzierbare Differentialform ω.*

(d) *Eine stetig differenzierbare Abbildung $\varphi : V \to U \subset \mathbb{R}^n$ sei auf der offenen Menge $V \subset \mathbb{R}^m$ gegeben. Dann gilt für jede stetig differenzierbare k-Form in U*

$$d(\varphi^*\omega) = \varphi^*(d\omega).$$

Beweis.

(a) ist klar.

(b) Seien $\omega = {\sum}'_{|I|=k} \; f_I \; dx_I$ und $\sigma = {\sum}'_{|I|=k} \; g_I \; dx_I$. Wegen der Produktregel der

Ableitung von Funktionen gilt $d(f_I g_J) = g_J df_I + f_I dg_J$. Dann rechnet man

$$\begin{aligned}
d(\omega \wedge \sigma) &= \sum\nolimits'_{|I|=k,|J|=l} d(f_I g_J) \wedge dx_I \wedge dx_J \\
&= \sum\nolimits'_{|I|=k,|J|=l} (g_J df_I + f_I dg_J) \wedge dx_I \wedge dx_J \\
&= \sum\nolimits'_{|I|=k,|J|=l} (g_J df_I \wedge dx_I \wedge dx_J + f_I dg_J \wedge dx_I \wedge dx_J) \\
&= \sum\nolimits'_{|I|=k,|J|=l} (g_J df_I \wedge dx_I \wedge dx_J + (-1)^k f_I dx_I \wedge dg_J \wedge dx_J) \\
&= \left(\sum\nolimits'_{|I|=k} df_I \wedge dx_I\right) \wedge \left(\sum\nolimits'_{|J|=l} g_J dx_J\right) \\
&\qquad + (-1)^k \left(\sum\nolimits'_{|I|=k} f_I dx_I\right) \wedge \left(\sum\nolimits'_{|J|=l} dg_J \wedge dx_J\right)
\end{aligned}$$

(c) *1. Fall:* $\omega = f : U \to \mathbb{R}$ ist eine Funktion. Dann

$$\begin{aligned}
d(df) &= d\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} d\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) dx_j \\
&= \sum_{1 \le i < j \le n} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}\right) dx_i \wedge dx_j \\
&= 0,
\end{aligned}$$

weil

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

für f, das zweimal stetig differenzierbar ist.

Allgemeiner Fall: Schreibe $\omega = \sum'_{|I|=k} \omega_I dx_I$. Dann

$$\begin{aligned}
d(d\omega) &= d\left(\sum\nolimits'_{|I|=k} d\omega_I \wedge dx_I\right) \\
&= \sum\nolimits'_{|I|=k} d(d\omega_I \wedge dx_I) \qquad \text{(nach (a))} \\
&= \sum\nolimits'_{|I|=k} [d(d\omega_I) \wedge dx_I - d\omega_I \wedge d(dx_I)] \qquad \text{(nach (b))} \\
&= 0,
\end{aligned}$$

wegen des 1. Falls und weil

$$d(dx_I) = d(1\, dx_I) := d(1) \wedge dx_I = 0 \wedge dx_I = 0.$$

(d) Vgl. S. 227-228 in [For99].

□

Die Eigenschaften (a)-(c) charakterisieren die äußere Ableitung:

Satz 3.5.7 *Ist $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $r \in \mathbb{N}$, so gibt genau eine Möglichkeit, einen Operator*

$$d : \Omega_r^k(U) \to \Omega_{r-1}^{k+1}(U)$$

($k = 0, 1, \ldots, n-1$) so einzuführen, daß (a), (b) und (c) erfüllt sind und außerdem df das totale Differential einer r-mal stetig differenzierbaren Funktion f ist.

Definition 3.5.8 Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen.

Eine stetig differenzierbare k-Form ω in U heißt *geschlossen*, wenn $d\omega = 0$.

Eine stetige k-Form ω in U (mit $k \geq 1$) heißt *exakt* (oder *total*), wenn es eine stetig differenzierbare $(k-1)$-Form η in U gibt mit $\omega = d\eta$.

Proposition 3.5.9 (a) *Jede stetig differenzierbare n-Form ω in $U \subset \mathbb{R}^n$ ist geschlossen.*

(b) *Eine stetig differenzierbare Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ (0-Form) ist dann genau geschlossen, wenn f konstant ist.*

(c) *Jede stetig differenzierbare exakte Differentialform ist geschlossen.*

Beweis.

(a) Eine $(n+1)$-Form in einer offenen Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ ist immer 0.

(b) $0 = df = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i}\, dx_i \iff \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0\ \forall i \iff f$ is konstant.

(c) Wenn $\omega = d\eta$, dann $d\omega = d(d\eta) = 0$.

□

Beispiel 3.5.10

① Die Form $\omega = y\,dx$ in $\mathbb{R}^2$ ist nicht geschlossen, weil $d\omega = dy \wedge dx \neq 0$.

② Die Form $\omega = x\ dy + y\ dx$ ist geschlossen in $\mathbb{R}^2$, weil $d\omega = dx \wedge dy + dy \wedge dx = dx \wedge dy - dx \wedge dy = 0$. Sie ist auch exakt: wir müssen zeigen, daß es eine Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gibt, so daß

$$x\ dy + y\ dx = \omega = df = \frac{\partial f}{\partial x}\, dx + \frac{\partial f}{\partial y}\, dy,$$

d.h.

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = y \\ \frac{\partial f}{\partial y} = x. \end{cases}$$

Die Lösungen dieses Systems sind die Funktionen $f(x, y) = xy + C$ (C eine beliebige Konstante).

Um ein Beispiel einer geschlossenen nicht exakten Differentialform zu konstruieren, erinnern wir uns an den Begriff des Kurvenintegrals von Pfaffschen Formen (vgl. [For99], S. 195).

Sei $\omega = \sum_{i=1}^n f_i \, dx_i$ eine stetige Pfaffsche Form in einer offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$ und $\alpha : [a,b] \to U$ sei eine stetig differenzierbare Kurve in U. Das *Integral von ω über α* ist

$$\int_\alpha \omega := \int_a^b \langle \omega\big(\alpha(t)\big), \alpha'(t)\rangle \, dt = \int_a^b \left(\sum_{i=1}^n f_i(\alpha(t))\alpha_i'(t) \right) dt,$$

wobei $\alpha'(t) = (\alpha_1'(t), \ldots, \alpha_n'(t))$.

Lemma 3.5.11 *Ist $f : U \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, so ist*

$$\int_\alpha df = f\big(\alpha(b)\big) - f\big(\alpha(a)\big).$$

Insbesondere: wenn α geschlossen ist (d.h. wenn $\alpha(a) = \alpha(b)$), dann

$$\int_\alpha df = 0.$$

Beweis. Nach der Kettenregel und dem Hauptsatz der Integralrechnung

$$\int_\alpha df = \int_a^b \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}\big(\alpha(t)\big)\alpha_i'(t) \, dt = \int_a^b \frac{d(f \circ \alpha)}{dt} \, dt = f\big(\alpha(b)\big) - f\big(\alpha(a)\big).$$

□

Beispiel 3.5.12 (Eine geschlossene nicht exakte Form) In $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ sei

$$\omega = -\frac{y}{x^2+y^2} \, dx + \frac{x}{x^2+y^2} \, dy.$$

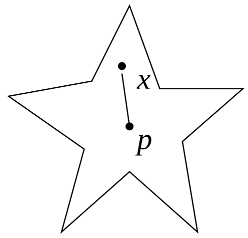
Dann ist ω geschlossen (Übung), aber nicht exakt. Es sei $\alpha : [0, 2\pi] \to U$ die geschlossene stetig differenzierbare Kurve gegeben durch $\alpha(t) = (\cos t, \sin t)$. Dann

$$\begin{aligned} \omega(\alpha(t)) &= -\sin t \, dx(\alpha(t)) + \cos t \, dy(\alpha(t)) \\ \alpha'(t) &= (-\sin t, \cos t) \end{aligned}$$

und deshalb

$$\int_\alpha \omega = \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t) \, dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi \neq 0.$$

Definition 3.5.13 Eine Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$ heißt *sternförmig* bezüglich eines Punktes $p \in U$, wenn für jeden Punkt $x \in U$ die ganze Verbindungsstrecke von p nach x in U liegt.



Satz 3.5.14 (Poincarésches Lemma) *Jede stetig differenzierbare geschlossene k-Form ($k \geq 1$) in einer sternförmigen offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ ist exakt.*

Beweis. S. 229 in [For99]. □

Wir möchten Kriterien aufstellen, um zu messen, "wieviele" geschlossene Formen in U auch exakt sind.

Jetzt arbeiten wir nur mit beliebig oft stetig differenzierbaren Differentialformen.

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Der *de Rham Komplex* ist die Vektorraumsequenz

$$0 \xrightarrow{d} \Omega^0(U) \xrightarrow{d} \Omega^1(U) \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} \Omega^{n-1}(U) \xrightarrow{d} \Omega^n(U) \xrightarrow{d} 0$$

Wir definieren

$$Z_k(U) := \operatorname{Ker}\left(\Omega^k(U) \xrightarrow{d} \Omega^{k+1}(U)\right) = \{\omega \in \Omega^k(U) : d\omega = 0\}$$

$$B_k(U) := \operatorname{Im}\left(\Omega^{k-1}(U) \xrightarrow{d} \Omega^k(U)\right) = \{\omega \in \Omega^k(U) : \omega = d\eta, \eta \in \Omega^{k-1}(U)\}.$$

Dann sind $Z_k(U)$ und $B_k(U)$ Untervektorräume von $\Omega^k(U)$, und $B_k(U) \subset Z_k(U)$. Außerdem gilt dann genau $B_k(U) = Z_k(U)$, wenn jede geschlossene k-Form in U exakt ist. Der Quotientenvektorraum

$$H^k_{dR}(U) := Z_k(U)/B_k(U) \qquad (k \geq 1)$$

heißt die *k-te de Rhamsche Kohomologiegruppe* von U. Damit kann man sagen, "wieviele" geschlossene Formen exakt sind. z.B. $H^k_{dR}(U) = 0$ für jedes $k \geq 1$, wenn U sternförmig ist.

Der *Satz von de Rham* besagt, daß $H^k_{dR}(U)$ nur von der Topologie von U abhängt: wenn U und V homöomorph sind, dann sind $H^k_{dR}(U)$ und $H^k_{dR}(V)$ isomorph. Eine Grundfrage der Topologie ist:

Wann sind zwei Topologische Räume M_1 und M_2 homöomorph?

Diese Frage ist zu schwierig. Eine mögliche Antwort hat die Frage:

Wann sind zwei topologische Räume M_1 und M_2 *nicht* homöomorph?

Die de Rhamschen Kohomologiegruppen sind algebraische Objekte, mit denen man diese Frage antworten kann.

Z.B. $H^1_{dR}(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}) \neq 0$, weil wir eine geschlossene Pfaffsche Form in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ gefunden haben, die nicht exakt ist. Nach dem Poincaréschen Lemma ist $H^1_{dR}(\mathbb{R}^2) = 0$. Also sind $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ und $\mathbb{R}^2$ nicht homöomorph.

Kapitel 4

Integration von Differentialformen

Ziel dieses Kapitels ist es, die Integration von Differentialformen einzuführen. In den letzten Kapiteln haben wir schon über das Integral von Pfaffschen Formen über Kurven gesprochen. Im allgemeinen werden wir immer nur k-Formen über k-dimensionale Untermannigfaltigkeiten integrieren.

Eine wichtige Rolle in der Integrationstheorie spielt die Orientierung einer Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$. Um diese Rolle zu erklären, betrachten wir eine Eigenschaft des gewöhnlichen Integrals von Funktionen über Intervalle in $\mathbb{R}$.

$$\int_a^b f(t)\,dt$$

ist das Integral von $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ über die Untermannigfaltigkeit (a,b) mit Orientierung von a nach b. Wir können auch die Orientierung unkehren und uns von b nach a bewegen. Dann ist das Integral von f über (a,b) mit der umgekehrten Orientierung

$$\int_b^a f(t)\,dt = -\int_a^b f(t)\,dt.$$

Also ändert die Umkehrung der Orientierung das Vorzeichnen des Integrals.

4.1 Orientierung einer Untermannigfaltigkeit

Eine Orientierung einer Untermannigfaltigkeit M von $\mathbb{R}^n$ ist eine "zusammenhängende" Wahl von positiv orientierten Basen in T_pM für alle $p \in M$. Die genaue Definition erfordert den Begriff der Karten.

Zuerst geben wir folgende Definitionen.

Definition 4.1.1 Seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offene Mengen und $\varphi : U \to V$ ein Diffeomorphismus der Klasse C^1. Man nennt φ *orientierungstreu*, wenn $\det D\varphi(x) > 0$ für alle $x \in U$, und *orientierungsumkehrend*, wenn $\det D\varphi(x) < 0$ für alle $x \in U$.

Bemerkung 4.1.2 Da φ ein Diffeomorphismus ist, gilt $\det D\varphi(x) \neq 0$ für alle $x \in U$. Das Vorzeichen muß aber nicht immer konstant sein, d.h. ein Diffeomorphismus muß nicht orientierungstreu oder orientierungsumkehrend sein. Wenn aber U zusammenhängend ist, dann gilt entweder $\det D\varphi(x) > 0$ für alle $x \in U$, oder $\det D\varphi(x) < 0$ für alle $x \in U$.

Dazu: Die Abbildung $x \mapsto \det D\varphi(x)$ ist stetig, also ist $D\varphi(U)$ zusammenhängend, wenn U zusammenhängend ist. Außerdem gilt $D\varphi(U) \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale C^m-Untermannigfaltigkeit ($k \geq 1$, $m \geq 1$). Dann gibt es für jedes $p \in M$ eine Karte (U, φ) mit $\varphi(U) \ni p$. Genauer: es gibt eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}^n$, eine offene Menge $V \subset M$ mit $p \in V$ und eine stetig differenzierbare Einbettung $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ mit $\varphi(U) = V$. Die Karten von M erfüllen die Kompatibilitätsbedingung: wenn (U_1, φ_1) und (U_2, φ_2) zwei Karten mit $V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$ sind (wobei $V_j =: \varphi_j(U)$ für $j = 1, 2$), dann ist

$$\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1 : \varphi_1^{-1}(V_1 \cap V_2) \to \varphi_2^{-1}(V_1 \cap V_2)$$

ein Diffeomorphismus.

Man nennt die Karten (U_1, φ_1) und (U_2, φ_2) *gleich orientiert*, wenn $\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1$ orientierungstreu ist.

Definition 4.1.3 Ein *Atlas* vom M ist eine Menge $\mathcal{A} := \{(U_j, \varphi_j)\}_{(j \in J)}$ von Karten in M, so daß $\cup_{j \in J} \varphi_j(U_j) = M$.

Ein Altas heißt *orientiert*, wenn je zwei Karten von $\mathcal{A}$ gleich orientiert sind.

Die Untermannigfaltigkeit M heißt *orientierbar*, wenn M einen orientierten Atlas besitzt.

Bemerkung 4.1.4 Ein Atlas, der nur aus einer einzigen Karte besteht, ist immer orientiert (die Bedingung ist leer). Zum Beispiel, ist jede offene Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ eine n-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$, für die die identische Abbildung $\mathrm{id}_U : U \to U$, $x \mapsto x$, eine Karte ist. Der Atlas $\mathcal{A} := \{(U, \mathrm{id}_U)\}$ ist orientiert, und deshalb ist U eine orientierbare Untermannigfaltigkeit.

Eine *Orientierung von M* wird durch die Wahl eines orientierten Atlases gegeben. Genauer: wir sagen, daß zwei Atlanten $\mathcal{A}$ und $\mathcal{A}'$ *dieselbe Orientierung definieren*, geschrieben $\mathcal{A} \approx \mathcal{A}'$, wenn je zwei Karten $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$ und $(U', \varphi') \in \mathcal{A}'$ mit $\varphi(U) \cap \varphi'(U') \neq \emptyset$ gleich orientiert sind. “$\approx$” ist eine Äquivalenzrelation, deren Äquivalenzklassen σ die Orientierungen von M sind.

Beispiel 4.1.5 Der Wahl des Atlases $\mathcal{A} = \{(U, \mathrm{id}_U)\}$ für die offene Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ definiert eine Orientierung von U, die die *kanonische Orientierung* von U heißt.

Definition 4.1.6 Eine *orientierte Untermannigfaltigkeit* von $\mathbb{R}^n$ ist eine Paar (M, σ), wobei M eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ und σ eine Orientierung von M ist.

Sei (M, σ) eine orientierte Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ und $\mathcal{A}$ ein zu σ gehöriger orientierter Atlas. Eine Karte (U, φ) von M heißt *positiv orientiert (bzgl. σ)*, wenn (U, φ) mit jeder Karte von $\mathcal{A}$ gleich orientiert ist. In diesem Fall ist auch $\mathcal{A}' := \{(U, \varphi)\} \cup \mathcal{A}$ ein orientierter Atlas von M und $\mathcal{A}' \in \sigma$.

Wir werden jetzt sehen, wie eine Orientierung einer Untermannigfaltigkeit M eine Orientierung der Tangentialvektorräume induziert.

Notation 4.1.7 Wir schreiben $(v_1, \ldots, v_k)$ für die geordnete Menge, die aus den Vektoren $v_1, \ldots, v_k$ (in dieser Ordnung) besteht.

Definition 4.1.8 Eine Basis $(v_1, \ldots, v_k)$ von $\mathbb{R}^k$ heißt *positiv orientiert* (bezüglich der kanonischen Orientierung von $\mathbb{R}^n$), wenn

$$\det[v_1 \ \ldots \ v_k] > 0,$$

wobei $[v_1 \ \ldots \ v_k]$ die Matrix mit den Komponenten von v_j in der j-ten Spalte bezeichnet.

Sei (M, σ) eine orientierte Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$. Sei (U, φ) eine positiv orientierte (bzgl. σ) Karte von M mit Koordinaten $(t_1, \ldots, t_k)$. Für jedes $p = \varphi(c)$ mit $c \in U$ ist

$$T_pM = \operatorname{span}\left\{\frac{\partial \varphi}{\partial t_1}(c), \ldots, \frac{\partial \varphi}{\partial t_k}(c)\right\}$$

(vgl. Satz 2.4.2, (b)) und $D\varphi(c) : \mathbb{R}^k \to T_pM$ ist ein Isomorphismus.

Definition 4.1.9 Eine Basis $(v_1, \ldots, v_k)$ von T_pM heißt *positiv orientiert (bzgl. σ)*, falls es eine positiv orientierte Basis $(w_1, \ldots, w_k)$ von $\mathbb{R}^k$ gibt, so daß $w_j = D\varphi(c)v_j$ für alle $j = 1, \ldots, k$.

Die Definition einer positiv orientierten (bzgl. σ) Basis von T_pM ist von der Wahl der positiv orientierten Karte unabhängig: wenn (U', φ') eine positiv orientierte Karte ist, so daß $p = \varphi'(c')$, dann ist $\varphi^{-1} \circ \varphi'$ orientierungstreu, also $\det D(\varphi^{-1} \circ \varphi')(c') > 0$. Wegen der Kettenregel gilt

$$D\varphi'(c') = D(\varphi \circ \varphi^{-1} \circ \varphi')(c') = D(\varphi)(c) D(\varphi^{-1} \circ \varphi')(c').$$

Also sind $\det D\varphi'(c')$ und $\det D(\varphi)(c)$ beide positiv oder negativ.

Beispiel 4.1.10 Die Basis $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t_1}(c), \ldots, \frac{\partial \varphi}{\partial t_k}(c)\right)$ von T_pM der Definition 4.1.8 ist positiv orientiert (bzgl. σ), weil $\frac{\partial \varphi}{\partial t_j}(c) = D\varphi(c)(e_j)$ für alle j, wobei $(e_1, \ldots, e_k)$ die kanonische Basis von $\mathbb{R}^k$ ist.

Beispiel 4.1.11 Die Karten

$$\varphi_1 :]-\pi, \pi[\to S^1 \setminus \{(-1, 0)\}$$
$$\varphi_2 :]0, 2\pi[\to S^1 \setminus \{(0, 1)\}$$

gegeben durch

$$\varphi_j(t) = (\cos t, \sin t),$$

bilden ein Atlas für S^1.

$$\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1 :]-\pi, 0[\cup]0, \pi[\to]0, \pi[\cup]\pi, 2\pi[$$

ist gegeben durch

$$\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1(t) = \begin{cases} t + 2\pi, & \text{wenn } t \in]-\pi, 0[\\ t, & \text{wenn } t \in]0, \pi[. \end{cases}$$

Also ist $D(\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1)(t) = 1 > 0$ für alle t, und $\mathcal{A} = \{(]-\pi, \pi[, \varphi_1), (]0, 2\pi[, \varphi_2)\}$ ein orientierter Atlas von S^1 (also definiert $\mathcal{A}$ eine Orientierung σ von S^1).

Wenn $p = (\cos t, \sin t)$, so ist $\{\frac{\partial \varphi_j}{\partial t}(t) = (-\sin t, \cos t)\}$ eine orientierte Basis von T_pS^1.

4.2 Orientierung einer Hyperfläche

Eine *Hyperfläche* $M \subset \mathbb{R}^n$ ist eine $(n-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit. Wir erinnern uns, daß für jedes $p \in M$ der Vektorraum N_pM der Normalenvektoren an M in p 1-dimensional und senkrecht auf T_pM ist (vgl. §2.5). Aus der allgemeinen Theorie von §2.3.2 folgt, daß eine C^m Hyperfläche lokal die Nullenstellenmenge einer C^m Submersion ist: für alle $p \in M$ gibt es eine offene Umgebung W von p in $\mathbb{R}^n$ und eine m-mal stetig differenzierbare Abbildung $F : W \to \mathbb{R}^{n-1}$, so daß $M \cap W = \{x \in W : F(x) = 0\}$ und F eine Submersion in W ist, d.h.

$$\operatorname{grad} F(x) = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}(x), \ldots, \frac{\partial F}{\partial x_n}(x)\right) \neq 0 \qquad \text{für alle } x \in W.$$

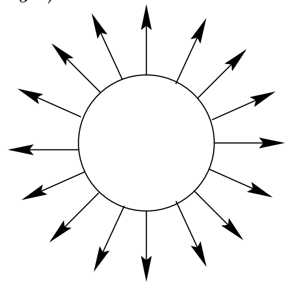
Außerdem ist $N_xM = \mathbb{R} \cdot \operatorname{grad} F(x)$ für alle $x \in M \cap W$.

Definition 4.2.1 Ein *Einheits-Normalenfeld* von M ist eine stetige Abbildung $\nu : M \to \mathbb{R}^n$, so daß $\nu(p) \in N_pM$ und $\|\nu(p)\| = 1$ für alle $p \in M$. Hier bezeichnet $\|\cdot\|$ die Euklidische Norm in $\mathbb{R}^n$.

Beispiel 4.2.2 Sei $M = S^1 = F^{-1}(0)$ mit $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$. Für alle $p = (x, y) \in S^1$ hat $\operatorname{grad} F(p) = (2x, 2y)$ die Norm gleich $\|\operatorname{grad} F\| = 2(x^2 + y^2) = 2$. Dann ist

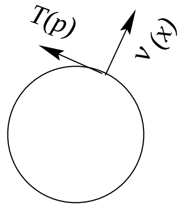
$$\nu(x, y) = \frac{\operatorname{grad} F(p)}{\|\operatorname{grad} F(p)\|} = (x, y)$$

ein Einheits-Normalenfeld von M (das äußere Normalenfeld).



Sei (M, σ) eine orientierte Hyperflache in $\mathbb{R}^n$. Ein Einheits-Normalenfeld heißt *positiv orientiert bzgl* σ, wenn für jedes $p \in M$ folgendes gilt: $(\nu(p), v_1, \ldots, v_{n-1})$ ist eine positiv orientierte Basis von $\mathbb{R}^n$ für jede Basis $(v_1, \ldots, v_{n-1})$ von T_pM, die positiv orientiert bzgl σ ist.

Beispiel 4.2.3 Seien σ die Orientierung von S^1 aus dem Atlas $\mathcal{A}$ in Beispiel 4.1.11 und ν das Einheits-Normalenfeld aus Beispiel 4.2.2. Dann ist ν positiv orientiert bzgl σ, weil $(\nu(p), T(p))$ eine positiv orientierte Basis von $\mathbb{R}^2$ ist. Hier $T(p) := \frac{\partial \varphi_j}{\partial t}(t_p)$, wenn $p = \varphi_j(t_p)$ für $j = 1$ oder $j = 2$.



Der folgende Satz gibt die Relation zwischen der Existenz von Einheits-Normalenfeldern und der Orientierung der Hyperfläche.

Satz 4.2.4 *Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Hyperfläche ($n \geq 2$).*

(a) *Wenn M eine Orientierung σ besitzt, dann gibt es genau ein Einheits-Normalenfeld ν, das positiv orientiert bzgl. σ ist.*

(b) *Wenn M eine Einheits-Normalenfeld ν besitzt, dann existiert genau eine Orientierung σ von M, so daß ν positiv orientiert bzgl σ ist.*

Beweis. Vgl. S. 242 in [For99].

Mit Satz 1 können wir zeigen, daß nicht alle Untermannigfaltigkeiten von $\mathbb{R}^n$ orientierbar sind. Das folgende Beispiel ist klassisch.

Beispiel 4.2.5 Das Möbiusband M ist die Hyperfläche von $\mathbb{R}^3$, die wir aus der Rechtecke $]-\pi, \pi[\times]-1, 1[$ bekommen, wenn wir die Seiten $\{-\pi\}\times]-1, 1[$ und $\{\pi\}\times]-1, 1[$ durch $(-\pi, -t) \equiv (\pi, t)$ identifizieren. Man kann zeigen, daß kein Einheits-Normalenfeld aus M gewählt weden kann.(Vgl. S. 244 in [For99] für eine präzise mathematische Beschreibung)

4.3 Umkehrung der Orientierung

Auf jedem Intervall (a, b) hat man die Orientierung von a nach b oder die entgegengesetzte Orientierung von b nach a. Ähnlich gibt es für jede Orientierung einer Untermannigfaltigkeit in $\mathbb{R}^n$ eine entgegengesetzte Orientierung.

Sei (M, σ) eine orientierte k-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ und

$$\mathcal{A} = \{(U_j, \varphi_j)\}_{(j \in J)}$$

ein zu σ gehörender orientierter Atlas von M. Die *orientierungsumkehrende Abbildung* $\iota : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ ist definiert durch

$$\iota(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k) = (x_1, \ldots, x_{k-1}, -x_k).$$

Dann ist ι linear und die assoziierte Matrix bezüglich der kanonischen Basen von $\mathbb{R}^k$ ist

$$\mathbf{J} := \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Außerdem ist $\iota^2 = \mathrm{id}$.

Wir setzen

$$\begin{aligned} \widetilde{U}_j &:= \iota(U_j) \\ \widetilde{\varphi}_j &= \varphi_j \circ \iota : \widetilde{U}_j \xrightarrow{\sim} \varphi_j(U_j) \subset \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Dann ist

$$\widetilde{\mathcal{A}} = \{(\widetilde{U}_j, \widetilde{\varphi}_j)\}_{(j\in J)}$$

ein orientierter Atlas von M, weil

$$\widetilde{\varphi_j}^{-1} \circ \widetilde{\varphi_h} = \iota \circ \varphi_j^{-1} \circ \varphi_h \circ \iota$$

und deshalb

$$\det D(\widetilde{\varphi_j}^{-1} \circ \widetilde{\varphi_h}) = \det(\mathbf{J} D(\varphi_j^{-1} \circ \varphi_h)\mathbf{J}) = \det D(\varphi_j^{-1} \circ \varphi_h) > 0.$$

$\mathcal{A}$ und $\widetilde{\mathcal{A}}$ definieren verschiedene Orientierungen von M, weil

$$\widetilde{\varphi_j}^{-1} \circ \varphi_j = \iota \circ \varphi_j^{-1} \circ \varphi_j = \iota,$$

also ist $\det D(\widetilde{\varphi_j}^{-1} \circ \varphi_j) = \det \mathbf{J} = -1 < 0$.

Definition 4.3.1 Die von $\widetilde{\mathcal{A}}$ definierte Orientierung von M heißt die *zu σ entgegengesetze Orientierung* und wird mit $-\sigma$ bezeichnet. Eine Karte (U, φ), die positiv orientiert bzgl. $-\sigma$ ist, heißt *negativ orientiert bzgl. σ*.

4.4 Integration von n-Formen

Definition 4.4.1 Sei $\omega = f\ dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ eine n-Form in der offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ (also ist $f : U \to \mathbb{R}$). Sei $A \subset U$ eine Teilmenge. Die n-Form ω heißt *integrierbar über A*, wenn $f|_A$ integrierbar ist. Dann ist das *Integral von ω über A* definiert durch

$$\int_A \omega := \int_A f(x)\ d^n x,$$

wobei $d^n x$ das Lebesgue-Maß in $\mathbb{R}^n$ bezeichnet.

Bemerkung 4.4.2

① Jede stetige n-Form ist integrierbar über jedem kompakten Teilmenge $A \subset U$. Das ist der Fall, für den wir uns meistens interessieren werden.

② A sei eine kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ und $\omega = dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$ eine n-Form in einer offenen Teilmenge $U \supset A$. Dann ist

$$\int_A \omega = \int_A d^n x = \mathrm{Vol}\,(A).$$

Das erklärt, warum wir die Form $dV = dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$ als "das Volumenelement von $\mathbb{R}^3$" genannt haben.

Satz 4.4.3 (Transformationformel) *Seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen und zusammenhängende, und $\varphi : U \to V$ ein Diffeomorphismus. Weiter sei ω eine stetige n-Form auf V und $A \subset U$ eine kompakte Teilmenge. Dann gilt*

$$\int_{\varphi(A)} \omega = \int_A \varphi^* \omega \qquad \textit{falls } \varphi \textit{ orientierungstreu ist,}$$
$$\int_{\varphi(A)} \omega = -\int_A \varphi^* \omega \quad \textit{falls } \varphi \textit{ orientierungsumkehrend ist,}$$

Beweis. Sei $\omega = f\ dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$. Die Transfomationsformel für das Integral von f impliziert

$$\begin{aligned}\int_{\varphi(A)} \omega &:= \int_{\varphi(A)} f(x)\ d^n x \\ &= \int_A f(\varphi(x)) |\det D\varphi(x)|\ d^n x,\end{aligned}$$

und

$$|\det D\varphi(x)| = \begin{cases} \det D\varphi(x) & \text{falls } \varphi \text{ orientierungstreu ist,} \\ -\det D\varphi(x) & \text{falls } \varphi \text{ orientierungsumkehrend ist.} \end{cases}$$

Der Satz folgt, weil $\varphi^*\omega = (f \circ \varphi)(\det D\varphi)\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$. □

4.5 Integration von k-Formen auf k-dimensionalen Umfk

Sei $W \subset \mathbb{R}^n$ offen und ω eine stetige k-Form in W. Sei $M \subset W$ eine orientierbare k-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ und σ eine Orientierung von M. Wir definieren das *Integral von ω über einer kompakten Teilmenge $A \subset M$*,

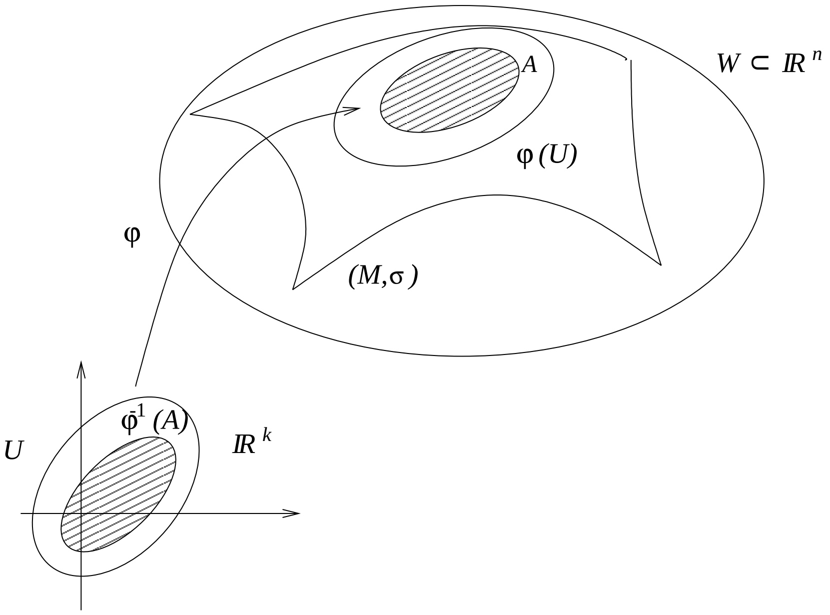
$$\int_{(A,\sigma)} \omega$$

wie folgt.

1. Fall: Es gibt eine positiv orientierte Karte (φ, U) von (M, σ), so daß $\varphi(U) \supset A$. Dann setzt man

$$\int_{(A,\sigma)} \omega := \int_{\varphi^{-1}(A)} \varphi^* \omega.$$

Die rechte Seite wurde in §4.4 definiert, weil $\varphi^*\omega$ eine k-Form in der offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^k$ und $\varphi^{-1}(A)$ eine kompakte Teilmenge von U ist.



Bemerkung 4.5.1 Die Definition ist von der Wahl der positiv orientierten Karte (U,φ) von (M,σ) mit $\varphi(U)\supset A$ unabhängig: wenn (U',φ') eine zweite positiv orientierte Karte von (M,σ) mit $\varphi'(U')\supset A$ ist, dann

$$(\varphi')^*\omega = (\varphi\circ\varphi^{-1}\circ\varphi')^*\omega = (\varphi^{-1}\circ\varphi')^*\varphi^*\omega.$$

Nach Satz 4.4.3 (mit $\varphi^{-1}\circ\varphi'$ orientierungstreu) gilt

$$\int_{(\varphi')^{-1}(A)} (\varphi')^*\omega = \int_{(\varphi')^{-1}(A)} (\varphi^{-1}\circ\varphi')^*\varphi^*\omega = \int_{\varphi^{-1}(A)} \varphi^*\omega,$$

da $(\varphi^{-1}\circ\varphi')((\varphi')^{-1}A) = \varphi^{-1}(A)$ ist.

Beispiel 4.5.2 Seien $M = S^1$ und σ die Orientierung von S^1 wie in Beispiel 4.1.11. Die 1-Form $\omega = f_1(x,y)\,dx + f_2(x,y)\,dy$ mit

$$f_1(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2} \quad \text{and} \quad f_2(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$$

sei in $W = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ gegeben. Die Teilmenge $A := \{(x,y)\in S^1 : x\geq 0\}$ von S^1 ist kompakt, und in $\varphi_2(]-\pi,\pi[) = S^1\setminus\{(-1,0)\}$ enthalten. Hier $\varphi_2(t) = (\cos t,\sin t)$. Da

$$\begin{aligned}
\varphi_2^* dx &= d\varphi_2^* x = d(x\circ\varphi_2) = d(\cos t) = -\sin t\,dt\\
\varphi_2^* dy &= d\varphi_2^* y = d(y\circ\varphi_2) = d(\sin t) = \cos t\,dt
\end{aligned}$$

rechnet man

$$\begin{aligned}
\varphi_2^*\omega &= (f_1\circ\varphi_2)\,\varphi_2^*(dx) + (f_2\circ\varphi_2)\,\varphi_2^*(dy)\\
&= (-\sin t)(-\sin t)\,dt + \cos t\cos t\,dt\\
&= (\sin^2 t + \cos^2 t)\,dt\\
&= dt
\end{aligned}$$

und

$$\int_{(A,\sigma)} \omega = \int_{\varphi_2^{-1}(A)} \varphi_2^* \omega = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} dt = \pi.$$

Wir bemerken, das obige Integral der 1-Form ω und das im Beispiel 3.5.12 definierte Integral von ω über die Kurve $t \in]-\pi/2, \pi/2[\mapsto (\cos t, \sin t) \in A$ sind gleich.

Allgemeiner Fall: Wir brauchen eine Teilung der Eins, die auf den 1. Fall zurückführt. Folgendes Lemma sichert die Existenz einer Teilung der Eins.

Lemma 4.5.3 *Sei (M, σ) eine k-dimensionale orientierte Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ und $A \subset M$ eine kompakte Teilmenge. Dann gibt es eine endliche Familie $\{\alpha_j\}_{j=1}^m$ stetiger Funktionen $\alpha_j : M \to \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften:*

(a) $\sum_{j=1}^m \alpha_j(x) = 1$ *für alle* $x \in A$.

(b) *Für jedes j existiert eine positiv orientierte Karte*

$$\varphi_j : U_j \xrightarrow{\sim} \varphi_j(U_j) =: V_j \subset M,$$

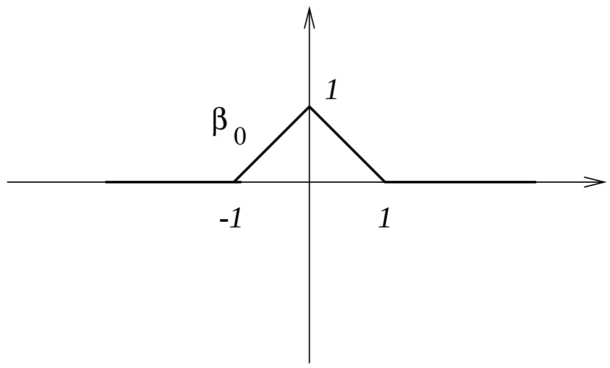
so daß $A_j = A \cap (\operatorname{Supp} \alpha_j) \subset V_j$.

Definition 4.5.4 Die Familie $\{\alpha_j\}_{j=1}^m$ in Lemma 4.5.3 heißt eine *Teilung* (oder *Z*erlegung) *der Eins für M relativ zu A*.

Beispiel 4.5.5 Eine Teilung der Eins für $M = \mathbb{R}$ relativ zu $[-\pi, \pi]$ ist z.B. $\{\beta_j\}_{j=-3}^3$, wobei

$$\beta_0(t) = \begin{cases} 1 - |t|, & \text{falls } |t| < 1, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\beta_j(t) = \beta_0(t - j), \quad \text{für } j \neq 0.$$



Seien $\{\alpha_j\}_{j=1}^m$ eine Teilung der Eins und $\{(U_j, \varphi_j)\}_{j=1}^m$ eine Familie von positiv orientierten Karten von (M, σ) wie in Lemma 4.5.3. Dann gilt für alle $x \in A$

$$\omega(x) = \underbrace{\left(\sum_{j=1}^m \alpha_j(x) \right)}_{=1} \omega(x) = \sum_{j=1}^m \alpha_j(x) \omega(x) = \sum_{j=1}^m (\alpha_j \omega)(x)$$

und für $x \notin A$

$$(\alpha_j \omega)(x) = \alpha_j(x)\omega(x) = 0,$$

weil $\alpha_j(x) = 0$ für $x \notin \operatorname{Supp} \alpha_j$. Also gilt $\omega = \sum_{j=1}^m \alpha_j \omega$ auf A, und $\alpha_j \omega \equiv 0$ in $A \setminus A_j$. Wenn das Integral linear sein soll, müssen wir haben

$$\begin{aligned} \int_{(A,\sigma)} \omega &= \sum_{j=1}^n \int_{(A,\sigma)} \alpha_j \omega \\ &= \sum_{j=1}^n \int_{(A_j,\sigma)} \alpha_j \omega. \end{aligned}$$

Da $A_j \subset \varphi_j(U_j)$, sind wir jetzt in den 1. Fall zurückgeführt:

$$\begin{aligned} &= \sum_{j=1}^m \int_{\varphi_j^{-1}(A_j)} \varphi_j^*(\alpha_j \omega) \\ &= \sum_{j=1}^m \int_{\varphi_j^{-1}(A_j)} (\alpha_j \circ \varphi_j)\varphi_j^* \omega. \end{aligned}$$

Wir definieren dann

$$\int_{(A,\sigma)} \omega := \sum_{j=1}^m \int_{\varphi_j^{-1}(A_j)} (\alpha_j \circ \varphi_j)\varphi_j^* \omega.$$

Man kann zeigen, daß $\int_{(A,\sigma)} \omega$ wohldefiniert (d.h. es ist unabhängig von der Wahl der Teilung der Eins), und das auf diese Weise definierte Integral eine lineare Abbildung ist: für alle $a, b \in \mathbb{R}$ und alle k-Formen ω_1, ω_2 in W gilt

$$\int_{(A,\sigma)} a\omega_1 + b\omega_2 = a \int_{(A,\sigma)} \omega_1 + b \int_{(A,\sigma)} \omega_2.$$

Notation: Wenn es klar ist, welche Orientierung von M gewählt wird, schreibt man einfach $\int_A \omega$ statt $\int_{(A,\sigma)} \omega$.

4.6 Integrale und Umkehrung der Orientierung

Die orientierungsumkehrende Abbildung

$$\iota : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k, \quad (x_1, \dots, x_{k-1}, x_k) \mapsto (x_1, \dots, x_{k-1}, -x_k)$$

ist orientierungsumkehrend, weil $\det D\iota = \det \mathbf{J} = -1$.

Seien $W \subset \mathbb{R}^n$ offen, ω eine stetige k-Form in W und $M \subset W$ eine k-dimensionale orientierte Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ mit Orientierung σ. Dann gilt für jede kompakte Teilmenge $A \subset M$

$$\int_{(A,\sigma)} \omega = -\int_{(A,-\sigma)} \omega.$$

Kapitel 5

Der Stokessche Integralsatz

5.1 Kompakta mit glattem Rand

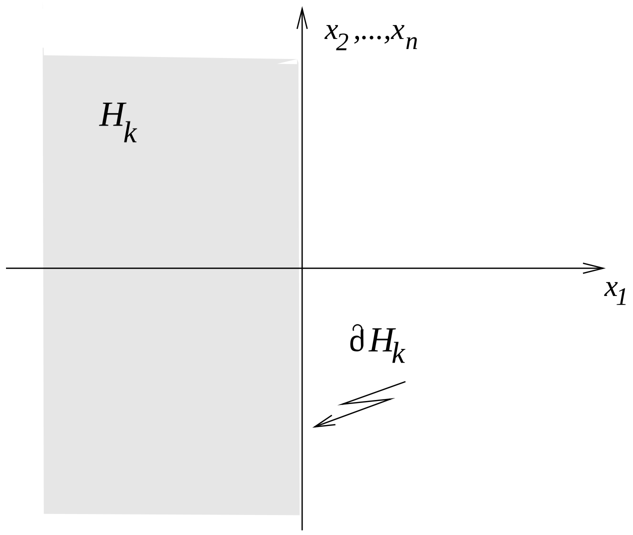
Um den Satz von Stokes in voller Allgemeinheit formulieren zu können, brauchen wir noch den Begriff von Kompakta mit glattem Rand auf Untermannigfaltigkeiten. Das lokale Modell für die Kompakta mit glattem Rand ist ein abgeschlossener Halbraum in $\mathbb{R}^k$, so wie $\mathbb{R}^k$ das lokale Modell für eine Untermannigfaltigkeit ist.

Definition 5.1.1 Der *Standard-Halbraum* in $\mathbb{R}^k$ ist

$$H_k := \{(x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k : x_1 \leq 0\}.$$

Der *Rand von H_k* ist

$$\partial H_k := \{(x_1, x_2, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k : x_1 = 0\}.$$



∂H_k ist eine Hyperebene, also eine $(k-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^k$, und ∂H_k besitzt eine globale Karte

$$\begin{aligned}\beta : \quad \mathbb{R}^{k-1} \qquad &\longrightarrow \quad \partial H_k \\ (t_1, \ldots, t_{k-1}) &\longmapsto (0, t_1, \ldots, t_{k-1}).\end{aligned}$$

Wir orientieren ∂H_k mit Hilfe des Atlasses $\mathcal{A} = \{(\mathbb{R}^{k-1}, \beta)\}$. Also ist für jedes $x = (0, t_1, \ldots .t_{k-1}) \in \partial H_k$

$$\left(\frac{\partial \beta}{\partial t_1}, \ldots, \frac{\partial \beta}{\partial t_k}\right) = (e_2, \ldots, e_k)$$

eine positiv orientierte Basis von $T_x \partial H_k$ (hier ist e_j das j-te Element der kanonischen Basis von $\mathbb{R}^k$). Das äußere Normalenfeld wird gegeben durch

$$\nu(x) = e_1 = (1, 0, \ldots, 0) \qquad \text{für alle } x \in \partial H_k.$$

Dann ist ν positiv orientiert.

Definition 5.1.2 Sei M ein topologischer Raum und $A \subset M$ eine Teilmenge. Das *Innere* $\overset{\circ}{A}$, die *abgeschlossene Hülle* $\overline{A}$ und der *Rand* ∂A von A in M sind definiert wie folgt:

$$\begin{aligned}\overset{\circ}{A} &:= \{p \in M : \exists \text{ offene Umgebung } W_p \text{ von } p \text{ in } M \text{ mit } W_p \subset A\}, \\ \overline{A} &:= \{p \in M : \forall \text{ offene Umgebung } W_p \text{ von } p \text{ in } M \text{ gilt } W_p \cap A \neq \emptyset\}, \\ \partial A &:= \{p \in M : \forall \text{ offene Umgebung } W_p \text{ von } p \text{ in } M \text{ gilt} \\ &\qquad\qquad W_p \cap A \neq \emptyset \text{ und } W_p \cap (M \setminus A) \neq \emptyset\}.\end{aligned}$$

Bemerkung 5.1.3 Aus den Definitionen folgen sofort die Gleichungen

$$M \setminus \overline{A} = (M \setminus A)^\circ, \tag{5.1}$$

$$\partial A = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}, \tag{5.2}$$

$$\partial A = \partial(M \setminus A). \tag{5.3}$$

Das Innere $\overset{\circ}{A}$ ist die größte offene Menge, die in A enthalten ist (In der Tat ist $\overset{\circ}{A} = \cup_{p \in \overset{\circ}{A}} W_p$ ist offen. Außerdem, wenn $B \subset A$ offen ist, dann gilt $B \subset \overset{\circ}{A}$, weil wir $W_p = B$ für jeden Punkt $p \in B$ wählen können). Dieses und Gleichung (5.1) implizieren, daß $\overline{A}$ die kleinste abgeschlossene Menge, die A enthält, ist. Insbesondere: Die Teilmenge A ist genau dann offen, wenn $A = \overset{\circ}{A}$; die Teilmenge A ist genau dann abgeschlossen, wenn $A = \overline{A}$.

Lemma 5.1.4 *Für jede Teilmenge A einer topologischen Raum M gilt*

(a) ∂A *abgeschlossen.*

(b) *Ist A abgeschlossen, so gilt $\partial A \subset A$.*

(c) *Ist A kompakt, so ist auch ∂A kompakt.*

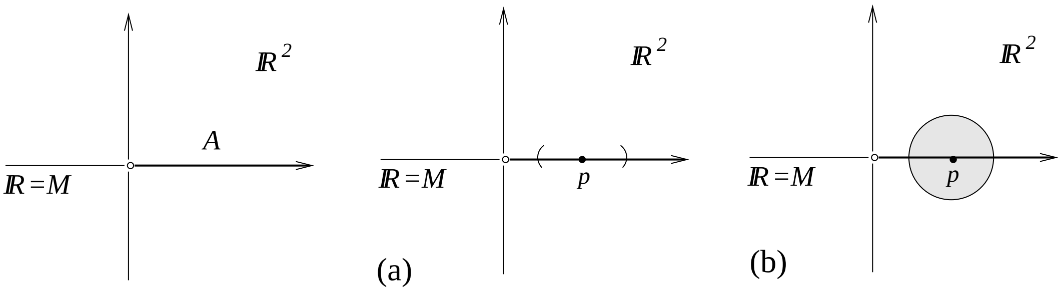
Beweis. Alles folgt sofort aus der Gleichung (5.2). $\square$

Beispiel 5.1.5 Seien $M = \mathbb{R}^k$ und $A = H_k$. Dann ist der Rand von H_k in $\mathbb{R}^k$ genau ∂H_k (und $\partial H_k \subset H_k$, da H_k abgeschlossen ist).

Definition 5.1.6 Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit und $A \subset M$ eine Teilmenge. Der *Rand von A relativ M*, geschrieben ∂A, ist der Rand von A als Teilmenge des topologischen Raumes M (insbesondere gilt $\partial A \subset M$). Ein Element von ∂A heißt *Randpunkt von A relativ zu M*.

Bemerkung 5.1.7
Der Rand ∂A ist von M abhängig (und man sollte die Notation $\partial_M A$ benutzten).

In allgemein ist $\partial_{\mathbb{R}^n} A$ größer als $\partial_M A$ für $A \subset M \subset \mathbb{R}^n$. Zum Beispiel: seien $M = \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$ und $A = \{(0,x) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$. Dann $\partial_M A = (0,0)$ und $\partial_{\mathbb{R}^2} A = \{(0,x) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0\}$.



(a) offene Kugel mit Mittelpunkt p in M;
(b) offene Kugel mit Mittelpunkt p in $\mathbb{R}^2$.

Definition 5.1.8 Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit und $A \subset M$ kompakt. Man sagt, daß A einen *glatten Rand* hat, wenn es zu jedem $p \in \partial A$ eine Karte (U, φ) von M mit $p \in \varphi(U) =: V$ gibt, so daß folgendes gilt:

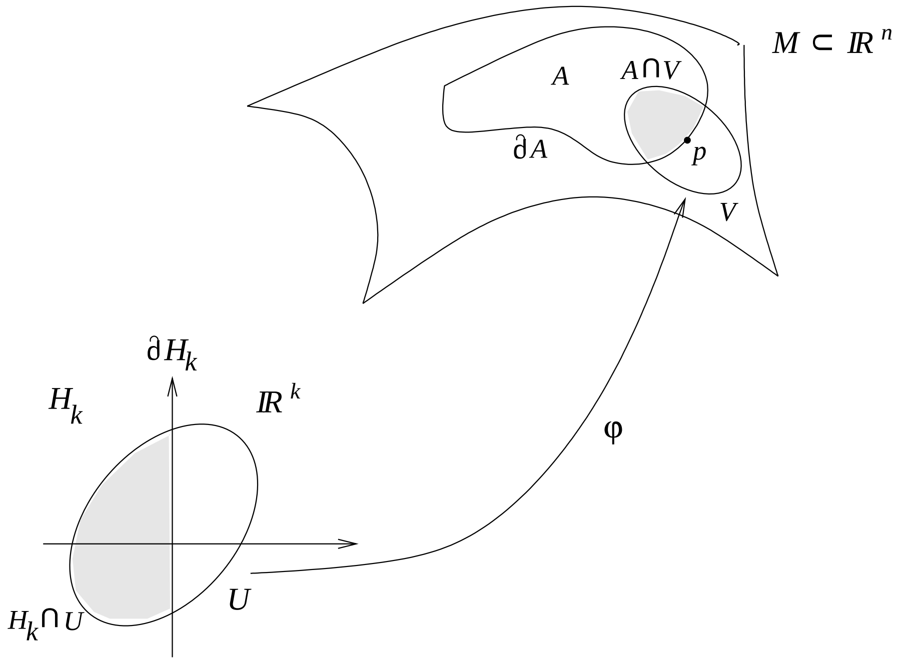
i) $\varphi(H_k \cap U) = A \cap V$;

ii) $\varphi(\partial H_k \cap U) = \partial A \cap V$.

Sei A eine kompakte Teilmenge mit glattem Rand einer k-dimensionalen Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$. Es sei (U, φ) eine Karte von M mit

$$\varphi : U \xrightarrow{\sim} \varphi(U) =: V \subset M.$$

Man nennt (U, φ) *Rand-adaptiert bzgl. A*, falls sie die Bedingungen i) und ii) erfüllt. (Insbesondere: ist $\partial H_k \cap U \neq \emptyset$, so gilt $\partial A \cap V \neq \emptyset$.)



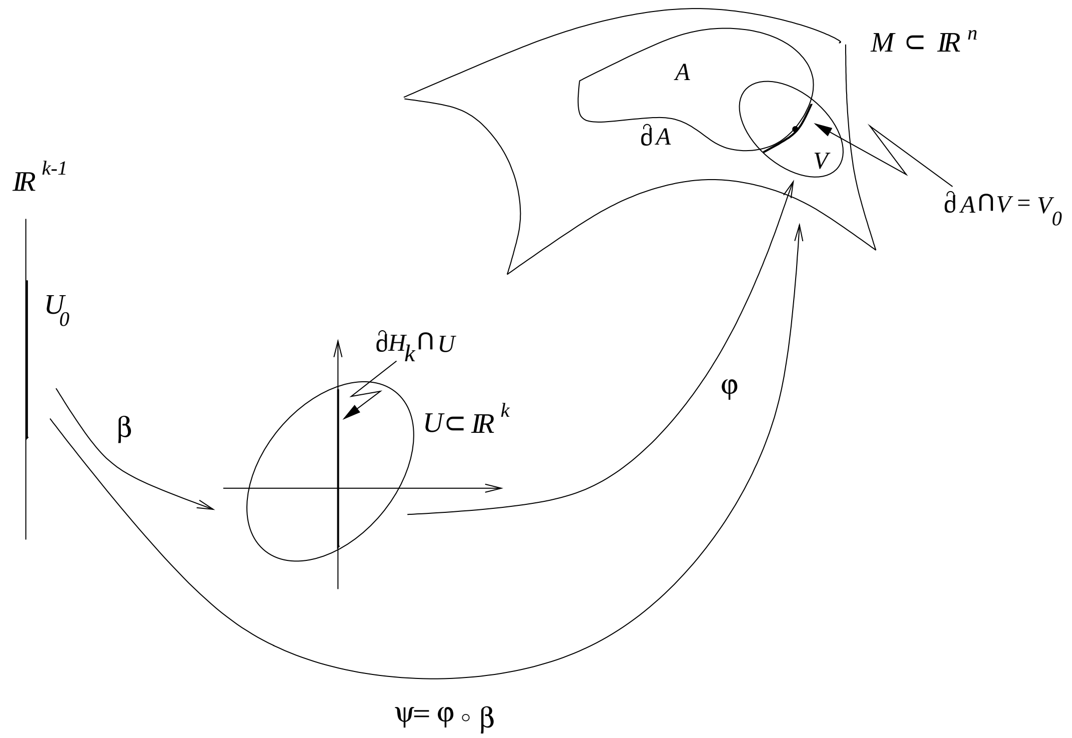
Bemerkung 5.1.9 Wenn A eine kompakte Teilmenge von M mit glattem Rand ist, kann man immer einen Atlanten $\mathcal{A}$ für M wählen, der nur aus bzgl. A Rand-adaptierten Karten besteht.

Satz 5.1.10 *Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit und $A \subset M$ ein Kompaktum mit glattem Rand. Dann ist ∂A eine kompakte $(k-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$.*

Beweis. **(Idee)** Sei $\mathcal{A}$ ein Atlas von M, der Rand-adaptiert bzgl A ist. Aus jeder Karte (U, φ) von M (mit U offen in $\mathbb{R}^k$ und $\varphi : U \xrightarrow{\sim} \varphi(U) =: V \subset M \subset \mathbb{R}^n$) so daß $V \cap \partial A \neq \emptyset$, konstruieren wir eine Karte für ∂A auf folgende Weise: seien

$$\begin{aligned}
&\beta : \mathbb{R}^{k-1} \to \partial H_k, \quad \beta(u_1, \ldots, u_{k-1}) := (0, u_1, \ldots, u_{k-1}),\\
&U_0 := \beta^{-1}(\partial H_k \cap U) \quad \text{ist offen in } \mathbb{R}^{k-1}\\
&V_0 := \partial A \cap V \quad \text{ist offen in } \partial A\\
&\psi := \varphi \circ \beta : U_0 \xrightarrow{\sim} V_0 \subset \partial A \subset \mathbb{R}^n\\
&\qquad (\text{d.h. } \psi(u_1, \ldots, u_{k-1}) = \varphi(0, u_1, \ldots, u_{k-1})).
\end{aligned}$$

Dann ist (U_0, ψ) eine Karte von ∂A. Die Menge $\mathcal{A}_0$ von folgendermaßen konstruierten Karten (U_0, ψ) ist ein Atlas von ∂A.



∎

Jetzt nehmen wir an, daß M eine orientierte Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ mit Orientierung σ ist. Dann könnten wir den bzgl A Rand-adaptierten Atlas $\mathcal{A}$ von M positiv orientiert wählen.

Fakt 5.1.11 *Der aus $\mathcal{A}$ abgeleitete Atlas $\mathcal{A}_0$ ist orientiert.*

Beweis. Vgl. S. 269 in [For99]. ∎

Definition 5.1.12 Man nennt die durch den Atlas $\mathcal{A}_0$ definierte Orientierung die durch die Orientierung von M *induzierte Orientierung von ∂A.*

Beispiel 5.1.13 Sei $k = n$, also sei M eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$. Wir betrachten M mit der kanonischen Orientierung. Die induzierte Orientierung von ∂A entspricht dem äußeren Normalen der Hyperfläche ∂A. Dies folgt daraus, daß die Karte $\beta : \mathbb{R}^{n-1} \to \partial H_n$ positiv orientiert bzgl der äußeren Normalen des Halbraums $H_n \subset \mathbb{R}^n$ ist.

5.2 Der Stokessche Integralsatz

Definition 5.2.1 Sei ω eine k-Form in einer offenen Menge $W \subset \mathbb{R}^n$. Der *Träger* von ω ist $\operatorname{Supp}\omega := \overline{\{x \in W : \omega(x) \neq 0\}}$ (mit in $\mathbb{R}^n$ abgeschlossener Hülle).

Bemerkung 5.2.2

① Sei ω eine k-Form ω in W mit Koordinatendarstellung $\omega = \sum_{|I|=k}{}' f_I \, dx_I$ mit $f_I : W \to \mathbb{R}$. Dann gilt $\operatorname{Supp} f_I \subset \operatorname{Supp}\omega$ für alle Multiindizes I. Insbesondere hat jedes f_I einen kompakten Träger, wenn $\operatorname{Supp}\omega$ kompakt ist.

② Ist φ ein Diffeomorphismus, so gilt $\operatorname{Supp}\varphi^*\omega = \varphi^{-1}(\operatorname{Supp}\omega)$ für jede Differentialform ω.

③ Für jede stetig differenzierbare Differentialform ω gilt $\operatorname{Supp} d\omega \subset \operatorname{Supp}\omega$.

Lemma 5.2.3 *Sei ω eine stetig differenzierbare $(k-1)$-Form in $\mathbb{R}^k$ $(k \geq 2)$ mit kompaktem Träger. Dann gilt*

$$\int_{H_k} d\omega = \int_{\partial H_k} \omega.$$

(*Bemerkung:* ω ist eine $(k-1)$-Form und wird über die $(k-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit ∂H_k integriert; $d\omega$ ist eine k-Form und wird über die k-dimensionale Untermannigfaltigkeit ∂H_k integriert.)

Beweis. **1. Fall:** $k = 1$. In diesem Fall gilt $H_1 = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\} =]-\infty, 0]$ und $\partial H_1 = \{0\}$. Die stetig differenzierbare $(k-1)$-Form ω in $\mathbb{R}$ ist jetzt eine stetig differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit kompaktem Träger und die Aussage wird geschrieben als

$$\int_{-\infty}^{0} df = f(0).$$

Dies folgt sofort aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, weil f einen kompakten Träger hat.

Allgemeiner Fall: Die $(k-1)$-Form ω kann man immer schreiben als

$$\omega = \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1} f_j \; dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \cdots \wedge dx_k$$

(vgl. Beispiel 3.5.2) und $\operatorname{Supp} f_j \subset \operatorname{Supp}\omega := B$ ist kompakt für alles j. Der Rand ∂H_k besitzt die globale Karte $\beta : \mathbb{R}^{k=1} \to \partial H_k$, $(t_1, \ldots, t_{k-1}) \mapsto (0, t_1, \ldots, t_{k-1})$, und für alle $t = (t_1, \ldots, t_{k-1}) \in \mathbb{R}^{k-1}$ gilt

$$\begin{aligned}
(\beta^*\omega)(t) &= \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1} (f_j \circ \beta)(t) \; d\beta_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{d\beta_j} \wedge \cdots \wedge d\beta_k \\
&= (f_1 \circ \beta)(t) \, d\beta_2 \wedge \cdots \wedge d\beta_k \\
&= (f_1 \circ \beta)(t) \, dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_{k-1}
\end{aligned}$$

weil die j-te Koordinatenfunktion β_j von β durch

$$\beta_j(t) = \begin{cases} 0 & \text{für alle } t, \text{ wenn } j = 1 \\ t_{j-1} & \text{für alle } t, \text{ wenn } j > 1 \end{cases}$$

gegeben ist, und deshalb

$$\begin{aligned} d\beta_1 &\equiv 0 \\ d\beta_j &= dt_{j-1} \quad \text{für alle } j = 2, \ldots, k. \end{aligned}$$

Also

$$\begin{aligned} \int_{\partial H_k} \omega = \int_B \omega &:= \int_{\beta^{-1}(B)} \beta^* \omega \\ &= \int_{\beta^{-1}(B)} (f_1 \circ \beta)(t)\ dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_{k-1} \\ &:= \int_{\beta^{-1}(B)} (f_1 \circ \beta)(t)\ dt_1 \ldots dt_{k-1} \\ &= \int_{\mathbb{R}^{k-1}} f_1(0, t_1, \ldots, t_{k-1})\ dt_1 \ldots dt_{k-1}, \end{aligned}$$

weil $\operatorname{Supp} f_1 \subset B$ und $(f_1 \circ \beta)(t) = f_1(0, t_1, \ldots, t_{k-1})$. Jetzt berechnen wir $\int_{H_k} d\omega$:

$$d\omega = \Big(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial x_j} \Big)\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$$

(vgl Beispiel 3.5.2). Wir bemerken, daß $H_k =]-\infty, 0] \times \mathbb{R}^{k-1}$. Da $\frac{\partial f_1}{\partial x_1}$ stetig und $\operatorname{Supp} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \subset \operatorname{Supp} f_1 \subset B$ kompakt ist, können wir den Satz von Fubini anwenden. Dann gilt

$$\begin{aligned} \int_{H_k} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k &= \int_{H_k} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_1, \ldots, x_k)\ d^k x \\ &= \int_{\mathbb{R}^{k-1}} \Big[\int_{-\infty}^{0} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_1, x_2, \ldots, x_k)\ dx_1 \Big]\ dx_2 \ldots dx_k. \end{aligned}$$

Wenn $x_2, \ldots, x_n$ festgelegten sind, gilt

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_1, x_2, \ldots, x_k)\ dx_1 = f_1(0, x_2, \ldots, x_k)$$

nach dem 1. Fall. Also

$$\int_{H_k} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k = \int_{\mathbb{R}^{k-1}} f_1(0, x_2, \ldots, x_k)\ dx_2 \ldots dx_k.$$

Für $j \in \{2, \ldots, k\}$ schreiben wir

$$H_k =]-\infty, 0] \times \mathbb{R}^{k-2} \times \overset{\substack{j\text{-te Koord.} \\ \downarrow}}{\mathbb{R}} \quad .$$

Dann

$$
\begin{aligned}
\int_{H_k} \frac{\partial f_j}{\partial x_j} \, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k &= \int_{H_k} \frac{\partial f_j}{\partial x_j} \, dx_1 \ldots dx_k \\
&= \int_{]-\infty,0] \times \mathbb{R}^{k-2}} \left[\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial f_j}{\partial x_j} \, dx_j \right] dx_1 \ldots \widehat{dx_j} \ldots dx_k \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

In der letzten Gleichung bemerkt man, daß für festgelegte $(x_1, \ldots, \widehat{x_j}, \ldots, x_k)$ die Funktion $x_j \mapsto f_j(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_k)$ kompakten Träger hat (weil f_j kompakten Träger hat). Also gibt es $R > 0$ so daß

$$
\begin{aligned}
f_j(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_k) &= 0 \qquad \text{für } |x_j| \geq R \\
\frac{\partial f_j}{\partial x_j}(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_k) &= 0 \qquad \text{für } |x_j| \geq R
\end{aligned}
$$

und dann

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial f_j}{\partial x_j} \, dx_j &= \int_{-R}^{R} \frac{\partial f_j}{\partial x_j} \, dx_j \\
&= f_j(x_1, \ldots, x_{j-1}, R, x_{j+1}, \ldots, x_k) - f_j(x_1, \ldots, x_{j-1}, R, x_{j+1}, \ldots, x_k) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Insgesamt ergibt sich

$$
\int_{H_k} d\omega = \int_{\mathbb{R}^{k-1}} f_1(0, x_1, \ldots, x_k) \, dx_1 \ldots dx_k = \int_{\partial H_k} \omega.
$$

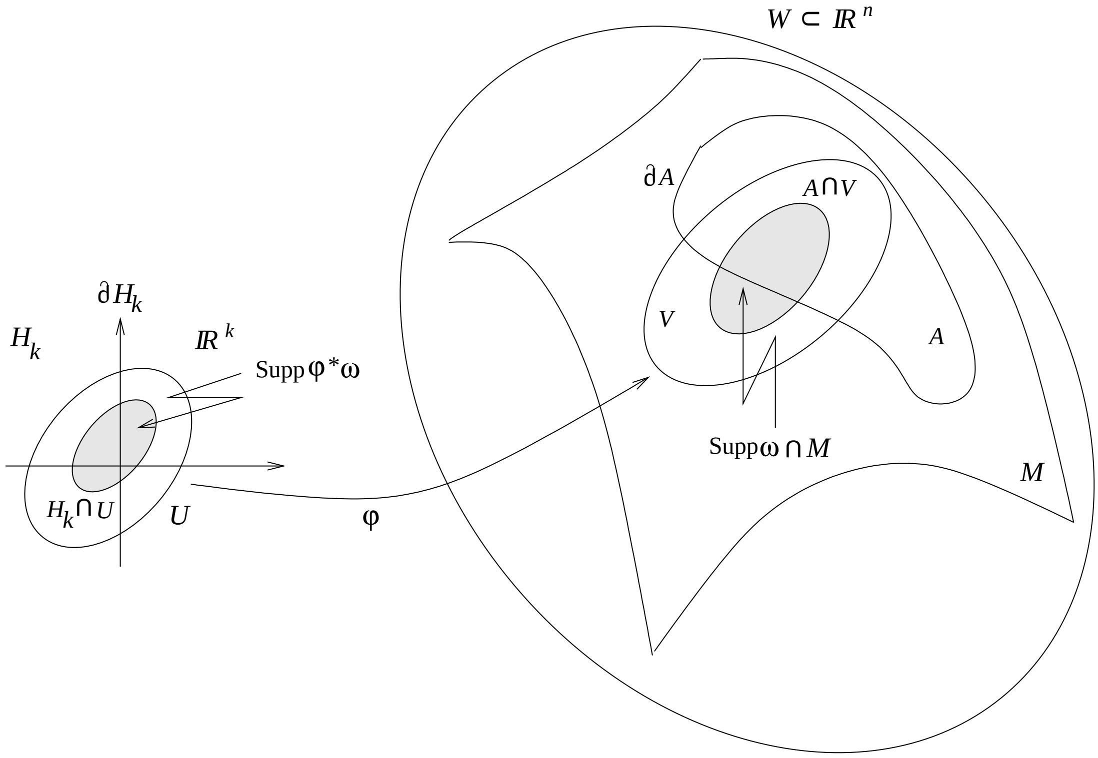
□

Satz 5.2.4 (Stokesscher Integralsatz) *Sei $W \subset \mathbb{R}^n$ offen, $M \subset W$ eine orientierte k-dimensionale Untermannigfaltigkeit $(k \geq 2)$ und ω eine stetig differenzierbare $(k-1)$-Form in W. Dann gilt für jedes Kompaktum $A \subset M$ mit glattem Rand*

$$
\int_A d\omega = \int_{\partial A} \omega,
$$

wobei ∂A die induzierte Orientierung trägt.

Beweis. **(Idee)** Wir führen den Beweis nur für den Fall, daß M und ∂A Untermannigfaltigkeiten der Klasse C^2 sind. Dann können wir einen orientierten, bzgl. A Rand-adaptierten Atlas $\mathcal{A}$ der Klasse C^2 von M wählen. Wir nehmen außerdem an, $M \cap \operatorname{Supp} \omega$ ist kompakt und es gibt eine bzgl. A Rand-adaptierte Karte (U, φ) der Klasse C^2 von M, so daß $M \cap \operatorname{Supp} \omega \subset V := \varphi(U)$.



Da $M \cap \operatorname{Supp}\omega$ kompakt und in $V = \varphi(U)$ enthalten ist, ist $\operatorname{Supp}\varphi^*\omega = \varphi^{-1}(\operatorname{Supp}\omega \cap M)$ kompakt und in U enthalten. Also können wir defineren

$$\widetilde{\omega}(x) := \begin{cases} (\varphi^*\omega)(x) & \text{falls } x \in U \\ 0 & \text{falls } x \notin U \end{cases}$$

und $\widetilde{\omega}$ ist eine stetig differenzierbare $(k-1)$-Form in $\mathbb{R}^k$. Da die Karte (U, φ) bzgl. A Rand-adaptiert ist, gilt $\varphi^{-1}(A) = \varphi^{-1}(A \cap V) = U \cap H_k$. Nach Satz 3.5.6 (d) gilt $\varphi^*(d\omega) = d(\varphi^*\omega) = d\widetilde{\omega}$. Außerdem $d\widetilde{\omega} = 0$ in $H_k \setminus U$. Also

$$\int_A d\omega := \int_{\varphi^{-1}(A)} \varphi^* d\omega = \int_{U \cap H_k} \varphi^* d\omega = \int_{U \cap H_k} d\widetilde{\omega} = \int_{H_k} d\widetilde{\omega}.$$

Es sei (U_0, ψ) die durch φ induzierte Karte von ∂A (vgl. Satz 5.1.10), d.h.

$$\begin{aligned} &U_0 := \beta^{-1}(\partial H_k \cap U) \subset \mathbb{R}^{k-1} \\ &\quad \text{wobei } \beta : \mathbb{R}^{k-1} \to \partial H_k,\ \beta(u_1, \ldots, u_{k-1}) := (0, u_1, \ldots, u_{k-1}) \\ &\psi := \varphi \circ \beta : U_0 \xrightarrow{\sim} V_0 := \psi(U_0) = \partial A \cap V \end{aligned}$$

Dann ist $\operatorname{Supp}\omega \cap \partial A = (\operatorname{Supp}\omega \cap M) \cap \partial A$ kompakt und in V_0 enthalten. Aus $\operatorname{Supp}\widetilde{\omega} \subset U$ folgt $\operatorname{Supp}\beta^*\widetilde{\omega} \subset U_0$. Da $\psi^{-1}(\partial A) = \psi^{-1}(\partial A \cap V) = U_0$, gilt dann

$$\int_{\partial A} \omega = \int_{\psi^{-1}(\partial A)} \psi^*\omega = \int_{U_0} \psi^*\omega = \int_{U_0} \beta^*\varphi^*\omega = \int_{U_0} \beta^*\widetilde{\omega} = \int_{\mathbb{R}^{k-1}} \beta^*\widetilde{\omega} = \int_{\partial H_k} \widetilde{\omega}.$$

Nach Lemma 5.2.3 erhalten wir dann

$$\int_A d\omega = \int_{H_k} d\widetilde{\omega} = \int_{\partial H_k} \widetilde{\omega} = \int_{\partial A} \omega.$$

Der allgemeine Fall folgt aus dem Sonderfall mit Teilung der Eins und durch Approximation mit C^2-Atlanten. □

Wenn M eine *kompakte* Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ ist, können wir $A = M$ im Stokesschen Integralsatz wählen. Dann $\partial M = \overline{M} \setminus \overset{\circ}{M} = M \setminus M = \emptyset$. Wir bemerken, daß $\int_\emptyset \cdots = 0$ (aus Maßtheorie). Daraus folgt:

Korollar 5.2.5 *Sei $W \subset \mathbb{R}^n$ offen und ω eine stetig differenzierbare $(k-1)$-Form in W. Dann gilt für jede orientierte kompakte k-dimensionale Untermannigfaltigkeit $M \subset W$*

$$\int_M d\omega = 0.$$

Anwendung. Wir betrachten die beliebig oft stetig differenzierbare n-Form

$$\omega = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{(-1)^{i-1}}{\|x\|^{n+1}} x_i \, dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_{n+1}$$

in $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$. Dann ist ω geschlossen:

$$d\omega = \left[\sum_{i=1}^{n+1} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{x_i}{\|x\|^{n+1}}\right)\right] dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{n+1} = 0$$

(nachweisen!). Die Differentialform ω ist aber nicht exakt. Dazu wenden wir Korollar 5.2.5 an. Wir bemerken, daß S^n eine n-dimensionale orientierbare Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{n+1}$ ist. (In der Tat ist $S^n = F^{-1}(0)$ mit $F(x) = \sum_{j=1}^{n+1} x_j^2 - 1$, und $\nu(x) = x$ definiert ein Einheits-Normalenfeld in S^n). Außerdem ist S^n kompakt und in $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ enthalten. Wenn ω exakt wäre, hätten wir $\omega = d\eta$ für eine beliebig oft stetig differenzierbare $(n-1)$-Form η in $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ und deshalb

$$\int_{S^n} \omega = \int_{S^n} d\eta = 0.$$

Nach Übung 7(d) gilt aber

$$\int_{S^n} \omega = (n+1)\mathrm{Vol}_{n+1}(\text{Einheitskugel in } \mathbb{R}^{n+1}) \neq 0.$$

ω ist eine beliebig oft stetig differenzierbare geschlossene nicht exakte n-Form in $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$. Deshalb gilt $H^n_{dR}(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}) \neq \{0\}$. Aber $H^n_{dR}(\mathbb{R}^{n+1}) = \{0\}$ nach dem Poincaréschen Lemma. Daraus folgt, daß $\mathbb{R}^{n+1}$ und $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ nicht homöomorph sind.

□

Wenn wir $M = W$ im Stokesschen Integralsatz wählen, bekommen wir den (allgemeinen) Gaußschen Integralsatz:

Satz 5.2.6 (Gaußscher Integralsatz) *Sei $W \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ offen und ω eine stetig differenzierbare $(n-1)$-Form in W. Dann gilt für jedes Kompaktum $A \subset W$ mit glattem Rand*

$$\int_A d\omega = \int_{\partial A} \omega,$$

wenn ∂A die durch das äußere Normalenfeld induzierte Orientierung trägt.

Bemerkung 5.2.7 Das Analogon des Gaußschen Integralsatzes für $n = 1$ und $A = [a, b]$ (mit $\partial A = \{a, b\}$) ist der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung: für jede stetig differenzierbare Funktion f in einer offenen Teilmenge U von $\mathbb{R}$ mit $U \supset [a, b]$ gilt

$$\int_a^b f'(t)\, dt = f(b) - f(a).$$

5.3 Die klassischen Integralsätze der Vektoranalysis

In Beispiel 3.5.3 haben wir gesehen, daß die äußere Ableitung der Differentialformen in $\mathbb{R}^3$ durch die Operatoren Gradient, Rotation and Divergenz beschreiben werden kann. Wenn wir diese Operatoren in den Stokesschen Satz für $\mathbb{R}^3$ einsetzen, bekommen wir die klassischen Integralsätze der Vektoranalysis.

Um diese Sätze zu formulieren, brauchen wir den Begriff des Flächenelementes. Referenz dazu ist §14, S. 138, in [For99]. Die explizite Bedeutung der Integrale, die in den Sätze erscheinen, wird auch in Bemerkung 5.3.2 bzw Bemerkung 5.3.6 gegeben. Wie erinnern uns, daß “$\cdot$” die klassische Notation für das Skalarprodukt in $\mathbb{R}^3$ ist. Wir benutzen aber die gewöhnliche Notation $\langle\cdot|\cdot\rangle$ überall, wo “$\cdot$” nicht einfach zu lesen sein könnte.

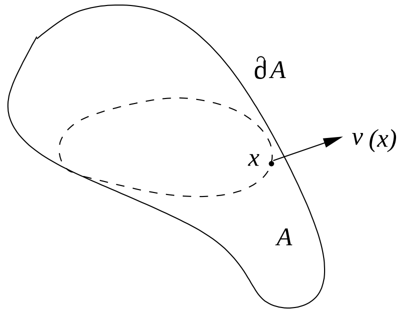
5.3.1 Der klassische Gaußsche Integralsatz

Der klassische Gaußsche Integralsatz gibt eine Beziehung zwischen dem Integral der Divergenz eines Vektorfeldes über ein Kompaktum $A \subset \mathbb{R}^3$ und dem Fluß des Vektorfeldes durch den Rand ∂A.

Satz 5.3.1 (Klassischer Gaußscher Integralsatz) *Seien $W \subset \mathbb{R}^3$ eine offene Teilmenge und $b = (b_1, b_2, b_3) : W \to \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld in W. Weiter sei $A \subset \mathbb{R}^3$ eine kompakte Teilmenge mit glattem Rand und $\nu : \partial A \to \mathbb{R}^3$ das äußere Einheits-Normalenfeld. Wenn ∂A die durch ν induzierte Orientierung trägt, gilt*

$$\int_A (\operatorname{div} b) dV = \int_{\partial A} b \cdot d\vec{S} = \int_{\partial A} \langle b(x)|\nu(x)\rangle\; dS(x),$$

wobei $dS(x)$ das (skalare) Flächenelement der Fläche ∂A ist.

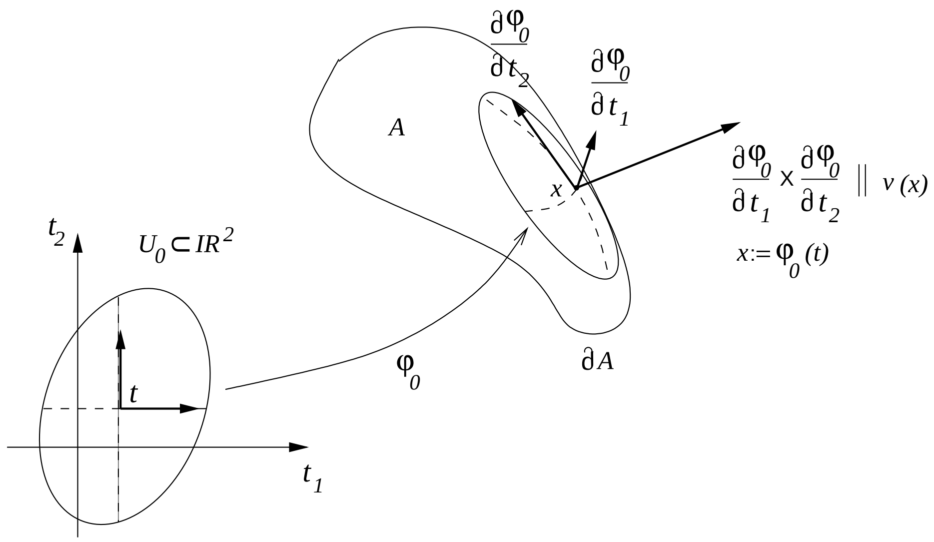


Bemerkung 5.3.2

① Das Integral $\int_{\partial A}\langle b(x)|\nu(x)\rangle\ dS(x)$ ist definiert wie folgt: Wenn es eine Karte (U_0,φ_0) von ∂A gibt mit $\operatorname{Supp}\langle b|\nu\rangle\subset\varphi_0(U_0)$, dann

$$\int_{\partial A}\langle b(x)|\nu(x)\rangle\ dS(x) := \int_{U_0}\langle b(\varphi_0(t))|\nu(\varphi_0(t))\rangle\ \|\frac{\partial\varphi_0}{\partial t_1}(t)\times\frac{\partial\varphi_0}{\partial t_2}(t)\|\ dt,$$

wobei (t_1,t_2) die Koordinaten von (U_0,φ_0) sind, $dt = dt_1\,dt_2$, und $\times$ das Vektorprodukt in $\mathbb{R}^3$ bezeichnet.



In allgemein gibt es eine Teilung der Eins $\{\alpha_j\}_{j=1}^m$ von M relativ ∂A und Karten $\{(U_{0,j},\varphi_{0,j})\}_{j=1}^m$ von ∂A, so daß $\partial A = \cup_{j=1}^m\varphi_{j,0}(U_{j,0})$ und $\operatorname{Supp}\alpha_j\subset\varphi_{0,j}(U_{0,j})$ für alle j. Dann $\sum_{j=1}^m\alpha_j(x)=1$ für alle $x\in\partial A$ und $\operatorname{Supp}(\alpha_j\langle b|\nu\rangle)\subset\operatorname{Supp}\alpha_j\subset\varphi_{0,j}(U_{0,j})$. Wir definieren dann

$$\int_{\partial A}\langle b|\nu\rangle\,dS := \sum_{j=1}^m\int_{\partial A}\alpha_j\langle b|\nu\rangle\ dS,$$

wobei die Integrale in der rechten Seite wie oben definiert sind.

② In der Praxis rechnet man Integrale, ohne Teilungen der Eins zu benutzen (vgl. auch Übung 7): Wir können immer ∂A zerlegen als

$$\partial A = \cup_{j=1}^m\overline{B_j},$$

wobei $B_j = \varphi_{0,j}(U_{0,j})$ für eine orientierte Karte $(U_{0,j}, \varphi_{0,j})$ von ∂A ist und $B_j \cap B_i = \emptyset$ für alle $i, j = 1, \ldots, m$ mit $i \neq j$. Dann

$$\int_{\partial A} \langle a(x)|\tau(x)\rangle\, ds(x) = \sum_{j=1}^{m} \int_{U_{j,0}} \langle b(\varphi_{0,j}(t))|\tau(\varphi_{0,j}(t))\rangle \left\| \frac{\partial \varphi_{0,j}}{\partial t_1}(t) \times \frac{\partial \varphi_{0,j}}{\partial t_2}(t) \right\| dt.$$

Beweis von Satz 5.3.1. Die Gleichung

$$\int_A (\operatorname{div} b) dV = \int_{\partial A} b \cdot d\vec{S}$$

folgt sofort aus dem Stokesschen Integralsatz und Beispiel 3.5.3, weil $\omega_2 := b \cdot \vec{S}$ eine 2-Form mit $d\omega_2 = (\operatorname{div} b)dV$ ist. Um die Gleichung

$$\int_{\partial A} b \cdot d\vec{S} = \int_{\partial A} \langle b(x)|\nu(x)\rangle\, dS(x)$$

zu bewiesen, genügt es, den Fall $\operatorname{Supp} b_i \subset \varphi_0(U_0)$ für alle $i = 1, 2, 3$ zu betrachten, wobei (U_0, φ_0) eine positiv orientierte Karte von ∂A ist (Im allgemeinen Fall verwendet man eine Teilung der Eins.) Dann gilt $\operatorname{Supp}(b \cdot d\vec{S}) \subset \varphi_0(U_0)$ und deshalb

$$\int_{\partial A} b \cdot d\vec{S} = \int_{U_0} \varphi_0^*(b \cdot d\vec{S}).$$

Sei $t \in U_0 \subset \mathbb{R}^2$ und $\{e_1, e_2\}$ die kanonische Basis von $T_t\mathbb{R}^2 \equiv \mathbb{R}^2$. Wir erinnern uns an die Notation

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial t_j}(t) := \varphi_0'(t)e_j \qquad (j = 1, 2).$$

Sei $d\vec{S} = (dS_1, dS_2, dS_3) = (dx_2 \wedge dx_3, dx_3 \wedge dx_1, dx_1 \wedge dx_2)$. Man rechnet

$$\begin{aligned}
\varphi_0^*(dx_i \wedge dx_j) &= d(\varphi_0)_i \wedge d(\varphi_0)_j \\
&= \left(\frac{\partial(\varphi_0)_i}{\partial t_1} \frac{\partial(\varphi_0)_j}{\partial t_2} - \frac{\partial(\varphi_0)_j}{\partial t_1} \frac{\partial(\varphi_0)_i}{\partial t_2} \right) dt_1 \wedge dt_2.
\end{aligned}$$

Deshalb

$$\varphi_0^* dS_i = \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial t_1} \times \frac{\partial \varphi_0}{\partial t_2} \right)_i dt_1 \wedge dt_2$$

und

$$\begin{aligned}
\varphi_0^*(b \cdot d\vec{S}) &= \varphi_0^* \Big(\sum_{i=1}^{3} b_i dS_i \Big) \\
&= \sum_{i=1}^{3} (b_i \circ \varphi_0) \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial t_1} \times \frac{\partial \varphi_0}{\partial t_2} \right)_i dt_1 \wedge dt_2.
\end{aligned}$$

Aus

$$\nu(\varphi_0(t)) = \frac{\frac{\partial \varphi_0}{\partial t_1}(t) \times \frac{\partial \varphi_0}{\partial t_2}(t)}{\| \frac{\partial \varphi_0}{\partial t_1}(t) \times \frac{\partial \varphi_0}{\partial t_2}(t) \|}$$

folgt

$$\begin{aligned}\varphi_0^*(b\cdot d\vec{S})(t) &= \sum_{i=1}^{3} b_i(\varphi_0(t))\,\nu(\varphi_0(t))_i\,\|\frac{\partial\varphi_0}{\partial t_1}(t)\times\frac{\partial\varphi_0}{\partial t_2}(t)\|\,dt_1(t)\wedge dt_2(t)\\ &= \langle b(\varphi_0(t))|\nu(\varphi_0(t))\rangle\,\|\frac{\partial\varphi_0}{\partial t_1}(t)\times\frac{\partial\varphi_0}{\partial t_2}(t)\|\,dt_1(t)\wedge dt_2(t).\end{aligned}$$

Da $\operatorname{Supp}\langle b|\nu\rangle\subset\varphi_0(U_0)$, erhalten wir

$$\begin{aligned}\int_{\partial A} b\cdot d\vec{S} &= \int_{U_0}\varphi_0^*(b\cdot d\vec{S})\\ &= \int_{U_0}\langle b(\varphi_0(t))|\nu(\varphi_0(t))\rangle\,\|\frac{\partial\varphi_0}{\partial t_1}(t)\times\frac{\partial\varphi_0}{\partial t_2}(t)\|\,dt_1\wedge dt_2\\ &:= \int_{U_0}\langle b(\varphi_0(t))|\nu(\varphi_0(t))\rangle\,\|\frac{\partial\varphi_0}{\partial t_1}(t)\times\frac{\partial\varphi_0}{\partial t_2}(t)\|\,dt\\ &= \int_{\partial A}\langle b(x)|\nu(x)\rangle\,dS(x).\end{aligned}$$

□

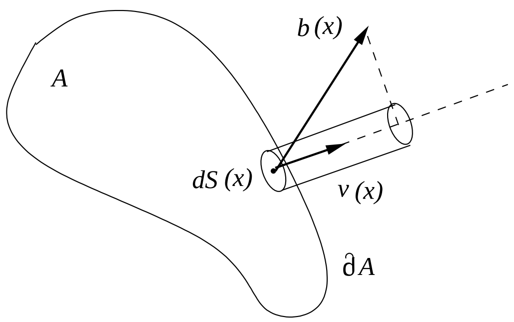
Bemerkung 5.3.3 (Physikalische Interpretation) Der Winkel zwischen den Vektoren $b(x)$ und $\nu(x)$ sei $\alpha(x)$. Das Skalarprodukt

$$\langle b(x)|\nu(x)\rangle = \|b(x)\|\cos\alpha(x)$$

ist die orthogonale Projektion von $b(x)$ auf $\nu(x)$ und $\langle b(x)|\nu(x)\rangle dS(x)$ ist der durch das Oberflächenelement $dS(x)$ austretender Fluß des Vektorfeldes b. Deshalb stellt

$$\int_{\partial A}\langle b|\nu\rangle\,dS$$

der Gesamtfluß des Vektorfeldes b durch die Oberfläche von A dar. Die Divergenz $\operatorname{div} b$ stellt die Quellendichte von b dar. Also gibt der klassische Gaußsche Integralsatz eine Beziehung zwischen der Existenz von Quellen von b in A und dem Fluß von b durch ∂A. Insbesondere impliziert der Satz, daß eine Quelle in A enthalten sein muß, wenn der Fluß durch ∂A nicht null ist.



5.3.2 Die Greensche Formel

Als Anwendung des Gaußschen Integralsatzes betrachten wir die Greensche Formel. Der *Laplace-Operator* Δ in $\mathbb{R}^3$ ist der Differentialoperator

$$\Delta := \operatorname{div}\operatorname{grad} = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}.$$

Nach der Produktregel gilt für zweimal stetig differenzierbare Funktionen f und g auf einer offenen Teilmenge $W \subset \mathbb{R}^3$

$$\operatorname{div}(g \operatorname{grad} f) = \langle \operatorname{grad} f | \operatorname{grad} g \rangle + g\Delta f.$$

Da das Skalarprodukt $\langle \operatorname{grad} f | \operatorname{grad} g \rangle$ symmetrisch in f und g ist, ergibt sich daraus

$$\operatorname{div}(f \operatorname{grad} g - g \operatorname{grad} f) = f\Delta g - g\Delta f.$$

Sei $A \subset R^3$ eine kompakte Teilmenge mit glattem Rand ∂A. Wir bezeichnen mit $\frac{\partial f}{\partial \nu}$ die Richtungsableitung von f in Richtung des äußeren Normalenfeldes ν von ∂A, d.h.

$$\frac{\partial f}{\partial \nu}(x) := \langle \operatorname{grad} f(x) | \nu(x) \rangle$$

für alle $x \in \partial A$. Dann folgt folgender Satz sofort aus dem Gaußschen Integralsatz.

Satz 5.3.4 (Greensche Formel) *Seien $W \subset \mathbb{R}^3$ eine offene Teilmenge und $f, g : W \to \mathbb{R}^3$ zweimal stetig differenzierbare Funktionen in W. Weiter sei $A \subset W$ eine kompakte Teilmenge mit glattem Rand und $\nu : \partial A \to \mathbb{R}^3$ das äußere Einheits-Normalenfeld. Wenn ∂A die durch ν induzierte Orientierung trägt, gilt*

$$\begin{aligned}\int_A (f\Delta g - g\Delta f)\, dV &= \int_{\partial A} \langle f \operatorname{grad} g - g \operatorname{grad} f | \nu \rangle \, dS \\ &= \int_{\partial A} \big(f \frac{\partial g}{\partial n} - g \frac{\partial f}{\partial n}\big)\, dS.\end{aligned}$$

wobei $dS(x)$ das (skalare) Flächenelement der Fläche ∂A ist.

5.3.3 Der klassische Stokessche Integralsatz

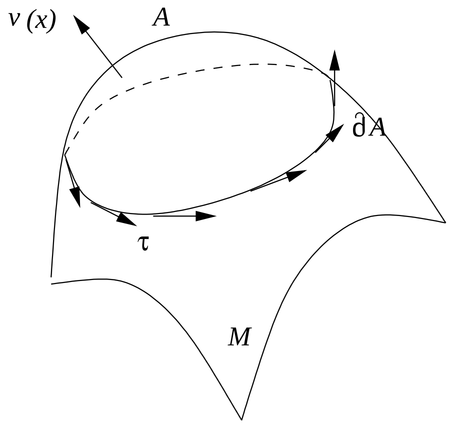
Sei M eine orientierte Fläche in $\mathbb{R}^3$ und $A \subset M$ ein Kompaktum mit glattem Rand ∂A. Der klassische Stokessche Integralsatz gibt eine Beziehung zwischen dem Integral der normalen Komponente der Rotation eines Vektorfeldes über A und dem Linienintegral der tangentialen Komponente des Vektorfeldes über ∂A.

Wir orientieren M durch ein Einheits-Vektorfeld. Der induzierte Orientierung des 1-dimensionalen Randes ∂A definiert ein Einheits-Tangentenfeld $\tau : \partial A \to \mathbb{R}^3$, so daß für alle $p \in \partial A$ der Vektor $\tau(p)$ eine positiv orientierte Basis von $T_p(\partial A)$ bildet.

Satz 5.3.5 (Klassischer Stokesscher Integralsatz) *Sei $W \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge und $a = (a_1, a_2, a_3) : W \to \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld in W. Weiter sei $M \subset W$ eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit, die die durch das Einheits-Normalenfeld $\nu : M \to \mathbb{R}^3$ induzierte Orientierung trägt. Für ein Kompaktum $A \subset M$ mit glattem Rand sei $\tau : \partial A \to \mathbb{R}^3$ das Einheits-Tangentvektorfeld, das die Orientierung von ∂A induziert. Dann gilt*

$$\int_A \langle \operatorname{rot} a(x) | \nu(x) \rangle dS(x) = \int_A \operatorname{rot} a \cdot d\vec{S} = \int_{\partial A} a \cdot d\vec{s} = \int_{\partial A} \langle a(x) | \tau(x) \rangle \, ds(x),$$

wobei $dS(x)$ das (skalare) Flächenelement der Fläche A und ds das (skalare) Linienelement der Kurve ∂A sind.



Bemerkung 5.3.6

① Das Integral $\int_{\partial A} \langle a(t) | \tau(t) \rangle \, ds(t)$ ist definiert wie folgt: Wenn es eine Karte $(U_0 =]b, c[, \varphi_0)$ von ∂A gibt mit $\operatorname{Supp} \langle a | \tau \rangle \subset \varphi_0(U_0)$, dann

$$\int_{\partial A} \langle a(x) | \tau(x) \rangle \, ds(x) := \int_b^c \langle a(\varphi_0(t)) | \tau(\varphi_0(t)) \rangle \, \|\varphi_0'(t)\| \, dt.$$

Im allgemeinen gibt es eine Teilung der Eins $\{\alpha_j\}_{j=1}^m$ relativ ∂A und Karten $(U_{0,j} =]b_j, c_j[, \varphi_{0,j})$ von ∂A, so daß $\operatorname{Supp} \alpha_j \subset \varphi_{0,j}(U_{0,j})$. Dann $\sum_{j=1}^m \alpha_j(x) = 1$ für alle $x \in \partial A$ und $\operatorname{Supp}(\alpha_j \langle a | \tau \rangle) \subset \operatorname{Supp} \alpha_j \subset \varphi_{0,j}(]b_j, c_j[)$. Wir definieren

$$\int_{\partial A} \langle a | \tau \rangle \, dS := \sum_{j=1}^m \int_{\partial A} \alpha_j \langle b | \nu \rangle \, dS,$$

wobei die Integrale auf der rechten Seite wie oben definiert sind.

② In der Praxis berechnet man Integrale, ohne Teilungen der Eins zu benutzen (vgl. auch Übung 7): Wir können immer ∂A zerlegen als

$$A = \cup_{j=1}^m \overline{B_j},$$

wobei $B_j = \varphi_{0,j}(]b_j, c_j[)$ für eine orientierte Karte $(]b_j, c_j[, \varphi_{0,j})$ von ∂A ist und $B_j \cap B_i = \emptyset$ für alle $i, j = 1, \ldots, m$ mit $i \neq j$. Dann

$$\int_{\partial A} \langle a(x) | \tau(x) \rangle \, ds(x) = \sum_{j=1}^{m} \int_{b_j}^{c_j} \langle a(\varphi_0(t)) | \tau(\varphi_0(t)) \rangle \, \|\varphi_0'(t)\| \, dt.$$

Wir bemerken, diese Formel gibt genau das Kurvenintegral von $\langle a(x)|\tau(x)\rangle$ über die (orientierte) Kurve ∂A.

Beweis von Satz 5.3.5. Die Gleichung

$$\int_A \operatorname{rot} a \cdot d\vec{S} = \int_{\partial A} a \cdot d\vec{s}$$

folgt sofort aus dem allgemeinen Stokesschen Integralsatz und Beispiel 3.5.3, weil $\omega_1 := \operatorname{rot} a \cdot \vec{s}$ eine Pfaffsche Form mit $d\omega_1 = \operatorname{rot} a \cdot d\vec{S}$ ist.

Der Beweis der Gleichung

$$\int_A \langle \operatorname{rot} a | \nu \rangle \, dS = \int_A \operatorname{rot} a \cdot d\vec{S}$$

wurde im Beweis des Gaußschen Satz geprüft.

Um die letzte Gleichung

$$\int_{\partial A} a \cdot d\vec{s} = \int_{\partial A} \langle a(x) | \tau(x) \rangle \, ds(x)$$

zu beweisen, brauchen wir nur den Fall $\operatorname{Supp} a_i \subset \varphi_0(]b, c[)$ für alle $i = 1, 2, 3$ zu betrachten, wobei $(]b, c[, \varphi_0)$ eine positiv orientierte Karte von ∂A ist (Im allgemeinen Fall verwendet man eine Teilung der Eins.) Dann gilt $\operatorname{Supp}(a \cdot d\vec{s}) \subset \varphi_0(]b, c[)$ und deshalb

$$\int_{\partial A} a \cdot d\vec{s} = \int_b^c \varphi_0^*(a \cdot d\vec{s}).$$

Sei $t_0 \in]b, c[$ und $\{e_1\}$ die kanonische Basis von $T_{t_0}\mathbb{R} \equiv \mathbb{R}$. Man rechnet für $d\vec{s} = (dx_1, dx_2, dx_3)$

$$\varphi_0^*(dx_i) = d(\varphi_0)_i = \frac{d(\varphi_0)_i}{dt} \, dt,$$

also

$$\begin{aligned} \varphi_0^*(a \cdot d\vec{s}) &= \varphi_0^* \Big(\sum_{i=1}^{3} a_i ds_i \Big) \\ &= \sum_{i=1}^{3} (a_i \circ \varphi_0) \frac{d(\varphi_0)_i}{\partial t} \, dt. \end{aligned}$$

Aus

$$\tau(\varphi_0(t_0)) = \frac{\varphi_0'(t_0)}{\|\varphi_0'(t_0)\|}$$

folgt

$$\begin{aligned}\varphi_0^*(a \cdot d\vec{s})(t_0) &= \sum_{i=1}^{3} a_i(\varphi_0(t))\, \tau(\varphi_0(t_0))_i \, \|\varphi_0'(t_0)\| \; dt(t_0)\\ &= \langle a(\varphi_0(t)) | \tau(\varphi_0(t)) \rangle \, \|\varphi_0'(t_0)\| \; dt(t_0).\end{aligned}$$

Da $\operatorname{Supp}\langle a|\tau\rangle \subset \varphi_0(]a,b[)$, erhalten wir

$$\begin{aligned}\int_{\partial A} a \cdot d\vec{s} &= \int_b^c \varphi_0^*(a \cdot d\vec{s})\\ &:= \int_b^c \langle a(\varphi_0(t)) | \tau(\varphi_0(t)) \rangle \, \|\varphi_0'(t)\| \; dt\\ &= \int_{\partial A} \langle a(x) | \tau(x) \rangle \; ds(x).\end{aligned}$$

$\square$

Literaturverzeichnis

[BG88] M. Berger and B. Gostiaux. *Differential geometry: manifolds, curves, and surfaces.* Springer-Verlag, 1988.

[Boo86] William M. Boothby. *An introduction to differentiable manifolds and Riemannian geometry.* Academic Press, 1986.

[DH62] P. Dombrowski and F. Hirzebruch. *Vektoranalysis.* Mathematisches Institut der Univeristät Bonn, 1962.

[For99] Otto Forster. *Analysis 3.* Vieweg, 1999.

[Jän92] Klaus Jänich. *Vektoranalysis.* Springer-Verlag, 1992.

[Spi79] Mike Spivak. *A comprehensive introduction to differential geometry.* Publish or Perish, 1979.

[War71] Frank Warner. *An introduction to differential manifolds and Lie groups.* Scott, Foresman and Company, 1971.

Index