Modulare Darstellungstheorie

WS 2006/07
Prof. Dr. G. Nebe, Dr. M. Künzer

Inhaltsverzeichnis

1 Das Radikal. **3**

2 Lokale Ringe. **5**

3 Diskrete Bewertungsringe und Vervollständigungen. **7**

4 Algebren über vollständigen diskreten Bewertungsringen. **15**

5 Zerlegungszahlen. **20**

6 Der Zentrierungsalgorithmus. **23**

7 Dualität. **26**

8 Relativ projektive Moduln. **27**

9 Brauercharaktere. **30**

10 Charaktere in Blöcken. **35**

11 Anzahl der Blöcke von maximalem Defekt. **38**

12 Vertices. **42**

13 Die Green Korrespondenz. **45**

13.1 Ein Beispiel: $\mathrm{SL}_2(p)$. 49

14 Defektgruppen. **50**

15 Brauerkorrespondenz. **54**

16 Der 2. Hauptsatz von Brauer. **58**

17 Der 3. Hauptsatz von Brauer. **61**

18 Brauer-Baum Algebren. **65**

19 Die Struktur von b_1. **66**

20 Projektive Homomorphismen und der Heller Operator. **72**

21 Die Struktur von B. **74**

Literatur:

J.L. Alperin, Local representation theory.
Curtis Reiner, Methods in Representation theory.
W. Feit, Representation theory of finite groups.
Nagao, Tsushima, Representations of finite groups.
Navarro, Characters and Blocks of Finite Groups.
Serre, Linear representations of finite groups.
H. Pahlings, Vorlesungsmanuskript

I Grundlagen

Motivation Sei R ein kommutativer Ring mit 1, G eine endliche Gruppe. Eine R-Darstellung ist ein Gruppenhomomorphismus $\Delta : G \to \mathrm{GL}(V)$ für einen R-Modul V. V ist dann ein Modul des Gruppenrings

$$RG = \{\sum_{g\in G} a_g g \mid a_g \in R\}.$$

Als R-Modul ist RG frei auf der Basis $(g \mid g \in G)$ und die Multiplikation ist gegeben durch Fortsetzung der Gruppenmultiplikation.

Nach dem Satz von Maschke ist für einen Körper K die Gruppenalgebra genau dann halbeinfach, wenn die Charakteristik von K nicht die Gruppenordnung teilt.

Die modulare Darstellungstheorie beschäftigt sich mit dem Fall Charakteristik von K teilt $|G|$.

Als Bindeglied zwischen der Charakteristik 0 und der Charakteristik p-Theorie dient ein lokaler Integritätsbereich R, mit $K := \mathrm{Quot}(R)$ von Charakteristik 0 und $k := R/\pi R$ von Charakteristik $p > 0$.

Beispiel: $G = S_3$, $R := \mathbb{Z}_{(3)} := \{\frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \mid 3 \nmid b\}$, $\mathrm{Quot}(R) = \mathbb{Q}$, $k := R/3R \cong \mathbb{F}_3$ hat Charakteristik 3.

1 Das Radikal.

Sei A ein Ring (mit 1).

Definition 1.1 *(i) Sei M ein A-Rechtsmodul.*

$$\mathrm{Ann}(M) := \{a \in A \mid ma = 0 \textit{ für alle } m \in M\}$$

heißt der Annihilator *von M.*

(ii)
$$J(A) := \bigcap_{M \ einf. A-Modul} \mathrm{Ann}(M)$$

heißt das Jacobson Radikal *von A.*

Bemerkung 1.2 *(a) Jeder einfache A-Modul ist isomorph zu A/I für ein maximales Rechtsideal I von A.*
($0 \neq m \in M$, $\varphi_m : A \to M, a \mapsto ma$ ist Epimorphismus, da ungleich 0, also $M \cong A/\ker(\varphi_m)$.)
(b) $\mathrm{Ann}(M)$ *ist ein 2-seitiges Ideal von A.*
($a, b \in A, m \in M, c \in \mathrm{Ann}(M)$. Dann $m(acb) = ((ma)c)b = 0b = 0$.)
(c) Ist M ein einfacher A-Modul, so ist $\mathrm{Ann}(M)$ *der Schnitt aller maximalen Rechtsideale*

I von A mit $M \cong A/I$.
($\mathrm{Ann}(M) = \bigcap \ker(\varphi_m)$ *mit φ_m wie in (a))*
(d) Ist $I \trianglelefteq A$ ein zweiseitiges Ideal mit $I \subset J(A)$, so ist $J(A/I) = (J(A)+I)/I$.
(Klar nach Homomorphiesatz.)

Satz 1.3 *(i) Ist $a \in J(A)$, so ist $1-a \in A^*$.*
(ii) Jedes Rechtsideal I, mit der Eigenschaft $a \in I \Rightarrow (1-a) \in A^*$ liegt in $J(A)$.
(iii) $J(A)$ ist das größte Ideal $I \trianglelefteq A$ für das $(1-a) \in A^*$ für alle $a \in I$.
(iv) $J(A)$ ist der Schnitt aller maximalen Linksideale von A.

Beweis. (i) Für $a \in J(A)$ ist

$$A = aA + (1-a)A \subseteq J(A) + (1-a)A.$$

Ist nun $(1-a)A \neq A$, so gibt es ein maximales Rechtsideal I mit $(1-a)A \subseteq I$. Nach Definition liegt $J(A)$ aber auch in I, also $A \subseteq J(A) + (1-a)A \subseteq I$ ein Widerspruch. Also gibt es ein Element $c \in A$ mit $(1-a)c = 1$. Setze $c =: 1-b$. Dann ist

$$1 = (1-a)(1-b) = 1 - (a+b) + ab$$

also $a+b = ab$ und damit auch $b \in J(A)$. Wie eben hat $c = (1-b)$ dann ein Rechtsinverses woraus leicht $c(1-a) = 1$ folgt.
(ii) Angenommen $I \not\subseteq J(A)$. Dann gibt es ein maximales Rechtsideal R mit $I \not\subseteq R$. Damit ist $I + R = A$ also gibt es $a \in I$, $b \in R$ mit $1 = a+b$. Nach Voraussetzung hat dann aber $b = 1-a$ ein Inverses in A also ist $R = A$ ein Widerspruch.
(iii) folgt aus (i) + (ii).
(iv) Folgt aus der Charakterisierung von $J(A)$ in (iii) welche unabhängig von Rechts-Links ist. □

Definition 1.4 *Ein Rechtsideal I von A heißt* Nilideal, *falls ein $n \in \mathbb{N}$ exisitiert mit*

$$I^n = \langle x_1 \ldots x_n \mid x_j \in I \rangle = \{0\}.$$

I heißt nilpotent, *falls es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt, mit $a^n = 0$ für alle $a \in I$.*

Folgerung 1.5 *Jedes nilpotente Rechtsideal von A liegt in $J(A)$.*

Beweis. $a^n = -0 \Rightarrow (1-a)(1+a+\ldots+a^{n-1}) = 1$ □

Definition 1.6 *Sei A ein Ring und M ein A-Rechtsmodul.*
M heißt noethersch, *wenn jede aufsteigende Kette von A-Teilmoduln abbricht.*
M heißt artinsch, *wenn jede absteigende Kette von A-Teilmoduln abbricht.*
A heißt noethersch bzw. artinsch, wenn A_A noethersch bzw. artinsch ist.

Beispiel: Endlich dimensionale Algebren über Körpern sind artinsch und noethersch.
$\mathbb{Z}$ ist noethersch aber nicht artinsch.

Satz 1.7 *Ist A artinsch, so ist $J(A)$ nilpotent, sogar ein Nilideal.*

Beweis. Da A artinsch ist, gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $I := J(A)^n = J(A)^{n+k}$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Angenommen $I \neq 0$. Da $I \cdot I = I$ ist, gibt es auch ein minimales Rechtsideal M von A mit $MI \neq 0$. Also gibt es $a \in M$, mit $aI \neq 0$. Minimalität von M impliziert jetzt $aI = M$, d.h. es gibt $b \in I$ mit $ab = a$, also $a(1-b) = 0$. Da $b \in J(A)$ ist, hat $(1-b)$ ein Inverses, also folgt $a = 0$ ein Widerspruch. □

Satz 1.8 *Ist A artinsch, so ist*
(a) $A/J(A)$ halbeinfach.
(b) A hat eine Kompositionsreihe und ist somit auch noethersch.

Beweis. (a) Wegen Bemerkung 1.2 (d) können wir annehmen, daß $J(A) = 0$. Wir zeigen, daß A_A ein halbeinfacher Rechtsmodul ist. Da A artinsch ist, ist $J(A)$ der Durchschnit von endlich vielen Rechtsidealen, $J(A) = 0 = \bigcap_{i=1}^m I_i$. Damit ist A ein Teilmodul $A \hookrightarrow \bigoplus_{i=1}^m A/I_i$ eines halbeinfachen A-Rechtsmoduls also auch halbeinfach.
(b) Wegen Satz 1.7 gibt es $n \in \mathbb{N}$ mit

$$A \supset J(A) \supset J(A)^2 \supset \ldots \supset J(A)^n = \{0\}.$$

Die einzelnen Quotienten $J(A)^i/J(A)^{i+1}$ sind $A/J(A)$-Moduln also halbeinfach und daher direkte Summe von einfachen A-Moduln. Da A artinsch ist, ist diese Summe endlich, woraus man nun leicht eine endliche Kompositionsreihe von A zusammenbaut. Jede echt aufsteigende Kette von Rechtsidealen lässt sich aber zu einer Kompositionsreihe von A verfeinern, die nach Jordan-Hölder die gleichen (also endlich viele) Faktoren hat. Daher ist solch eine Kette auch endlich und somit A noethersch. □

2 Lokale Ringe.

Definition 2.1 *Ein Ring A (mit 1) heißt* lokal, *wenn die Nichteinheiten von A ein Ideal bilden.*

Satz 2.2 *Äquivalent sind für einen Ring A:*
(a) A lokal
(b) $J(A)$ ist einziges maximales Rechtsideal.
(c) $J(A)$ enthält alle Nichteinheiten.
(d) $A/J(A)$ ist ein Schiefkörper.

Beweis. (a) $\Rightarrow$ (b): $I := A - A^*$. Dann ist jedes echte Rechtsideal in I enthalten, also ist I einziges maximales Rechtsideal und damit $I = J(A)$.
(b) $\Rightarrow$ (c): Klar, da jede Nichteinheit entweder in einem echten Links- oder Rechtsideal liegt und wegen (b) somit in $J(A)$.
(c) $\Rightarrow$ (d): $a \notin J(A) \Rightarrow$ es gibt $b \in A$ mit $ab = ba = 1$. Also hat $\overline{a} := a + J(A)$ das Inverse

$\overline{b} = b + J(A)$.
(d) $\Rightarrow$ (a): Ebenso: Ist $a \notin J(A)$, so gibt es ein $b \in A$ mit $ab \in 1 + J(A)$. Also gibt es $c \in J(A)$ mit $ab = 1 - c$. Also ist ab invertierbar (wegen Satz 1.3 (i)) und damit auch a. Also ist $J(A) = A - A^*$ ein Ideal in A. $\square$

Folgerung 2.3 *(a) Die Idempotente in einem lokalen Ring sind nur 0 oder 1.*
(b) Ist M ein A-Modul, mit $\operatorname{End}_A(M)$ lokal, so ist M unzerlegbar.

Beweis. (a) $e^2 = e \in A \Rightarrow A = eA \oplus (1-e)A$. Jedes echte Rechtsideal von A liegt in $J(A)$ also $eA = A$ oder $(1-e)A = A$. Œ $eA = A$. Dann gibt es $a \in A$ mit $ea = 1$. Also ist $0 = (1-e)e = 0a = (1-e)ea = (1-e)$.
(b) Ist $M = M_1 \oplus M_2$, so liefern die beiden Projektionen π_1 und π_2 Idempotente in $\operatorname{End}_A(M)$. $\square$

Satz 2.4 *(Fitting) Sei M ein A-Modul, $\varphi \in \operatorname{End}_A(M)$.*
(a) $0 \leq \ker(\varphi) \leq \ker(\varphi^2) \leq \dots$
$M \geq \operatorname{Bild}(\varphi) \geq \operatorname{Bild}(\varphi^2) \geq \dots$
(b) Ist M artinsch, so gibt es ein $r \in \mathbb{N}$ mit $\operatorname{Bild}(\varphi^r) = \operatorname{Bild}(\varphi^{r+i})$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Für dieses r ist dann $M = \operatorname{Bild}(\varphi^r) + \ker(\varphi^r)$.
(c) Ist M noethersch, so gibt es ein $s \in \mathbb{N}$ mit $\ker(\varphi^s) = \ker(\varphi^{s+i})$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Für dieses s ist dann $0 = \operatorname{Bild}(\varphi^s) \cap \ker(\varphi^s)$.
(d) Ist M artinsch und noethersch, so ist

$$M = \operatorname{Bild}(\varphi^n) \oplus \ker(\varphi^n), \; n := \max\{r, s\}$$

Weiter ist dann M unzerlegbar genau dann wenn $\operatorname{End}_A(M)$ lokal ist.

Beweis. (a) ist klar.
(b) Kette aus (a) bricht ab, d.h. es gibt solch ein r. Zu $v \in M$ gibt es ein $w \in M$ mit $\varphi^r(v) = \varphi^{2r}(w)$. Dann ist

$$v = \varphi^r(w) + (v - \varphi^r(w)) \in \operatorname{Bild}(\varphi^r) + \ker(\varphi^r).$$

(c) Ist $v = \varphi^s(w) \in \ker(\varphi^s) \cap \operatorname{Bild}(\varphi^s)$ so gilt

$$0 = \varphi^s(v) = \varphi^{2s}(w) \Rightarrow w \in \ker(\varphi^{2s}) = \ker(\varphi^s) \Rightarrow v = \varphi^s(w) = 0.$$

(d) Die erste Aussage ergibt sich aus (b) und (c). Sei zunächst M unzerlegbar und $\varphi \in \operatorname{End}_A(M)$ eine Nichteinheit. Dann gibt es $n \in \mathbb{N}$ mit $M = \operatorname{Bild}(\varphi^n) \oplus \ker(\varphi^n)$. Da beides Teilmoduln sind, folgt $\varphi^n = 0$. Also sind alle Nichteinheiten in $\operatorname{End}_A(M)$ nilpotent. Ist $\phi \in \operatorname{End}_A(M)$ eine Nichteinheit und $\psi \in \operatorname{End}_A(M)$ beliebig, so ist auch $\phi\psi$ keine Einheit und damit nilpotent. Seien nun φ_1 und φ_2 Nichteinheiten. Zu zeigen ist, dass die Summe $\tau := \varphi_1 + \varphi_2$ eine Nichteinheit ist. Angenommen τ ist einen Einheit. Dann ist

$$\tau^{-1}\varphi_1 = 1 - \tau^{-1}\varphi_2$$

zum einen eine Einheit, da $\tau^{-1}\varphi_2$ nilpotent ist, zum anderen keine Einheit, da φ_1 keine Einheit ist. Widerspruch! Insgesamt bilden die Nichteinheiten ein Ideal in $\operatorname{End}_A(M)$ und damit ist $\operatorname{End}_A(M)$ lokal. Die Umkehrung $\operatorname{End}_A(M)$ lokal $\Rightarrow M$ unzerlegbar gilt allgemeiner nach Folgerung 2.3. $\square$

Satz 2.5 *Sei* $V = \bigoplus_{i=1}^m V_i = \bigoplus_{j=1}^n W_j$ *als* A*-Modul mit* $\mathrm{End}_A(V_i)$, $\mathrm{End}_A(W_j)$ *lokal. Dann gilt* $m = n$ *und bei passender Anordnung* $V_i \cong W_i$ *für alle* $i = 1, \ldots, n$.

Beweis. Induktion nach $\min(m, n)$. Œ $m \leq n$.
Ist $m = 1$ dann ist $V = V_1$ unzerlegbar (Folg. 2.3) und daher $V = V_1 = W_1$.
Sei nun $m > 1$ und $\mathrm{id}_V = \epsilon_1 + \ldots + \epsilon_m = \psi_1 + \ldots + \psi_n$ die Zerlegung von id_V in orthogonale Projektionen $\psi_j, \epsilon_i \in \mathrm{End}_A(V)$. Es ist

$$\mathrm{id}_{V_1} = (\epsilon_1)_{|V_1} = \sum_{j=1}^n (\psi_j \epsilon_1)_{|V_1} \in \mathrm{End}(V_1).$$

Nicht alle Summanden können in dem maximalen Ideal von $\mathrm{End}_A(V_1)$ liegen, also gibt es ein j so dass $(\psi_j \epsilon_1)_{|V_1}$ eine Einheit ist. Œ $j = 1$.
Beh: $V = V_1\psi_1 \oplus \sum_{i=2}^m V_i$.
$\cap = 0$: Sei $u \in V_1\psi_1 \cap \sum_{i=2}^m V_i$. Dann ist $u = v_1\psi_1$ mit $v_1 \in V_1$ und außerdem $u\epsilon_1 = 0$. Also $0 = u\epsilon_1 = v_1\psi_1\epsilon_1$ und damit $v_1 \in \ker(\psi_1\epsilon_1)$ also $v_1 = 0$.
$+ = V$: Sei $v \in V$. Da $(\psi_1\epsilon_1)_{|V_1}$ eine Einheit in $\mathrm{End}(V_1)$ ist, gibt es ein $v_1 \in V_1$ mit $v\epsilon_1 = v_1(\phi_1\epsilon_1)$. Dann ist $v = v_1\psi_1 + (v - v_1\psi_1) \in V_1\psi_1 + \ker(\epsilon_1)$. □

Bemerkung 2.6 *(a) Ist* A *artinsch und* M *ein e.e.* A*-Modul, so ist* M *artinsch und noethersch.*
(b) Ist M *ein e.e.* A*-Modul über einem artinschen Ring* A*, so ist* M *unzerlegbar genau dann wenn* $\mathrm{End}_A(M)$ *lokal ist.*

Damit ergibt sich aus Satz 2.5 der folgende Satz von Krull-Schmidt.

Folgerung 2.7 *Ist* A *ein artinscher Ring, so ist jeder e.e.* A*-Modul eine direkte Summe endlich vieler unzerlegbarer Moduln. Die unzerlegbaren direkten Summanden sind bis auf Isomorphie und Reihenfolge eindeutig bestimmt.*

3 Diskrete Bewertungsringe und Vervollständigungen.

Definition 3.1 *Sei* K *ein Körper. Eine* Bewertung *von* K *ist eine Abbildung*
$| \ | : K \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ *mit den Eigenschaften:*
(0) $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$.
(i) $|ab| = |a||b|$ *für alle* $a, b \in K$.
(ii) $|a + b| \leq |a| + |b|$ *für alle* $a, b \in K$.
Die Bewertung heißt archimedisch*, falls* $\{|n \cdot 1| \mid n \in \mathbb{N}\}$ *nicht beschränkt ist und andernfalls* nichtarchimedisch.

Beispiel: Der übliche Absolutbetrag auf $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ bzw. $\mathbb{Q}$ liefert eine archimedische Bewertung.
$K = \mathbb{Q}$, p Primzahl:
$| \ |_p : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}, |\frac{a}{b}| = p^{-\alpha}$ falls $\frac{a}{b} = p^\alpha \frac{a'}{b'}$ mit nicht durch p teilbaren Zahlen a', b' ist eine nichtarchimedische Bewertung von $\mathbb{Q}$. Der zugehörige Bewertungsring ist

$$\mathbb{Z}_{(p)} := \{\frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \mid p \not| b\}.$$

Bemerkung 3.2 *Ist $x \in K$ mit $x^n = 1$ für ein $n \in \mathbb{N}$, so ist $|x| = 1$, da dies eine Einheitswurzel in $\mathbb{R}_{>0}$ sein muss.*

Satz 3.3 *Ist $|\ |$ eine nichtarchimedische Bewertung, so gilt die verschärfte Dreiecksungleichung:*

$$|a+b| \leq \max\{|a|, |b|\} \text{ für alle } a, b \in K.$$

<u>Beweis.</u> Da $|\ |$ nichtarchimedisch ist, gibt es ein $c \in \mathbb{R}$ mit $|n| \leq c$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Für $n \in \mathbb{N}$ und $a, b \in K$ gilt

$$|a+b|^n = |(a+b)^n| = |\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}| \leq c \sum_{k=0}^{n} |a|^k |b|^{n-k} \leq c(n+1) \max\{|a|^n, |b|^n\}.$$

Zieht man die n-te Wurzel, so ergibt sich

$$|a+b| \leq \sqrt[n]{c}\sqrt[n]{n+1} \max\{|a|, |b|\}$$

woraus sich im Grenzwert $n \to \infty$ die Behauptung ergibt. □

Satz 3.4 *Sei $|\ |$ eine nichtarchimedische Bewertung eines Körpers K. Setze $R := \{a \in K \mid |a| \leq 1\}$. Dann ist R ein lokaler Ring mit einzigen maximalem Ideal $P := \{a \in K \mid |a| < 1\}$. Weiter gilt $K = R \cup (R - \{0\})^{-1}$. Ein solcher Integritätsring R heißt* Bewertungsring.

<u>Beweis.</u> R Ring und $P \trianglelefteq R$ folgt aus der verschärften Dreiecksungleichung. $R^* = \{a \in R \mid |a| = 1\}$, also ist $P = R - R^*$ und somit R lokal mit maximalem Ideal P. Ist $a \in K$, so ist entweder $|a| \leq 1$ und somit $a \in R$ oder $|a| \geq 1$ und daher $|a^{-1}| = |a|^{-1} \leq 1$, d.h. $a^{-1} \in R$. □

Definition 3.5 *Ein Bewertungsring R heißt* diskreter Bewertungsring, *falls das maximale Ideal ein Hauptideal ist, also ein $\pi \in R$ existiert mit $P = \pi R$. π nennt man dann auch ein* Primelement.

Satz 3.6 *Sei R ein diskreter Bewertungsring in $K = \mathrm{Quot}(R)$ und Primelement $\pi \neq 0$. Setze $c := |\pi|$. Dann gilt*
(a) Die Ideale $\neq \{0\}$ von R sind alle von der Form $\pi^j R$ mit $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Insbesondere ist R ein Hauptidealbereich. Weiter ist R die disjunkte Vereinigung

$$R = \bigcup_{j \in \mathbb{N} \cup \{0\}} \pi^j R^* \cup \{0\}.$$

(b) $K = \bigcup_{z \in \mathbb{Z}} \pi^z R^* \cup \{0\}$.
(c) $|K^*| = \{c^z \mid z \in \mathbb{Z}\}$ ist eine diskrete Untergruppe von $\mathbb{R}_{>0}$.
(d) Die Abbildung $v : K \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ definiert durch $|a| =: c^{v(a)}$, $v(0) := \infty$ ist eine Exponentenbewertung, d.h. ein Homomorphismus $v : K^* \to \mathbb{Z}$, mit $v(a+b) \geq \min\{v(a), v(b)\}$ für alle $a, b \in K^*$. Es ist $R := \{a \in K \mid v(a) \geq 0\}$ und $v(\pi) = 1$.

Beweis. Es genügt (a) zu zeigen, das übrige folgt sehr einfach. Die Ideale von R sind genau die R-Teilmoduln von R. Die Multiplikation mit π definiert einen R-Modul-Isomorphismus von R nach πR. Insbesondere hat auch πR genau einen maximalen Teilmodul, nämlich das Bild von πR unter diesem Isomorphismus, also $\pi^2 R$. Führt man dies weiter, so erhält man, dass alle Ideale von R von den Potenzen von π erzeugt werden. Weiter gilt:

$$aR = \pi^j R \Leftrightarrow |a| = |\pi^j| \Leftrightarrow a \in \pi^j R^*.$$

□

Zum Vervollständigen: Die Bewertung definiert eine Topologie auf K bezüglich derer es einen Konvergenzbegriff gibt. Entsprechend heißt eine Folge $(a_n) \in K^{\mathbb{N}}$ Cauchy-Folge, falls es zu jedem $\epsilon > 0$ eine Zahl $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass

$$|a_n - a_m| < \epsilon \text{ für alle } n, m > N.$$

Die Folge heißt konvergent mit Grenzwert $a \in K$, falls es zu jedem $\epsilon > 0$ eine Zahl $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass

$$|a_n - a| < \epsilon \text{ für alle } n > N.$$

Jede konvergente Folge ist eine Cauchy-Folge und die Menge der Nullfolgen bildet ein Ideal $I_0 \trianglelefteq CF$ in dem Ring der Cauchy-Folgen (bzgl. punktweiser Addition und Multiplikation). Die Vervollständigung $\hat{K}$ von K bezüglich $|\ |$ ist dann definiert als

$$\hat{K} = CF/I_0.$$

K ist eingebettet in $\hat{K}$ durch $a \mapsto (a, a, a, a, a, \dots) + I_0$.

Die Bewertung kann auf $\hat{K}$ fortgesetzt werden. Ist nämlich $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in K, so ist wegen der Dreiecksungleichung die Folge der Beträge $(|a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$ und damit konvergent. Die Definition

$$|(a_n)_{n\in\mathbb{N}} + I_0| := \lim |a_n|$$

ist unabhängig von der Wahl des Vertreters (a_n) und definiert eine Bewertung auf $\hat{K}$.

Satz 3.7 *Sei $|\ |$ eine diskrete nichtarchimedische Bewertung auf K mit Bewertungsring R und Primelement π. Sei $\hat{K}$ die Vervollständigung mit Bewertungsring $\hat{R}$. Dann ist die Wertegruppe $|K^*| = |\hat{K}^*|$. Weiter ist π auch ein Primelement von $\hat{R}$ und die Einbettung $R \hookrightarrow \hat{R}$ induziert einen Isomorphismus $R/\pi R \cong \hat{R}/\pi\hat{R}$.*

Beweis. $|K^*| \leq \mathbb{R}_{<0}$ ist diskret mit einzigem Häufungspunkt 0. Da $|K^*|$ dicht in $|\hat{K}^*|$ liegt (nach Definition) und beide nicht die 0 enthalten folgt die Behauptung. Damit ist $|\pi| = \max\{|a| \mid a \in \hat{R}, |a| < 1\}$ und somit π ein Primelement von $\hat{R}$ und $\pi R = R \cap \pi\hat{R}$. Daher ist $R/\pi R \to \hat{R}/\pi\hat{R}$ injektiv. Zur Surjektivität: Sei $a = \lim_{n\to\infty} a_n \in \hat{R}$ mit $a_n \in R$. Dann gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < 1$ für alle $n > N$. Für diese n ist dann $a_n - a \in \pi\hat{R}$ und $a + \pi\hat{R} = a_n + \pi\hat{R}$. □

Beispiel. Die p-adischen Zahlen. Sei $|\ |$ die diskrete Bewertung von $\mathbb{Q}$ mit Bewertungsring $\mathbb{Z}_{(p)}$. Die Vervollständigung $\mathbb{Q}_p := \hat{\mathbb{Q}}$ nennt man den Körper der p-adischen Zahlen, seinen Bewertungsring $\mathbb{Z}_p$ den Ring der ganzen p-adischen Zahlen.

Bemerkung 3.8 *Sei $v : K \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ eine Exponentenbewertung von $K = \bigcup \pi^z R^* \cup \{0\}$, d.h. $v(\pi^z \epsilon) = z$ für alle $\epsilon \in R^*$. Dann gilt $v(a+b) = \min\{v(a), v(b)\}$ für $a, b \in K$ mit $v(a) \neq v(b)$.*

Beweis. Ist $a = \pi^z \epsilon$ und $b = \pi^t u$ mit $u, \epsilon \in R^*$, $t = v(b) > z = v(a)$, so gilt

$$a + b = \pi^z(\epsilon + \pi^{t-z} u) \in \pi^z R^*.$$

$\square$

Satz 3.9 *(Hensel'sches Lemma) Sei R ein vollständiger diskreter Bewertungsring mit zugehöriger Exponentenbewertung $v : R \to \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$. Sei $f(x) \in R[x]$ und $a_0 \in R$ mit*

$$v(f(a_0)) > 2v(f'(a_0)).$$

Dann konvergiert die durch

$$a_n := a_{n-1} - f(a_{n-1})/f'(a_{n-1}) \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$

definierte Folge gegen ein $a \in R$ mit $f(a) = 0$.

Beweis. Es ist $f(x) = \sum_{i=0}^m f_i x^i$ und $f'(x) = \sum_{i=1}^m i f_i x^{i-1}$. Mit der Taylorentwicklung hat man:

$$f(x + a_0) = f(a_0) + f'(a_0)x + \frac{f''(a_0)}{2}x^2 + \ldots$$

Ist nun $f(x) \in R[x]$, so ist auch $\frac{f^{(n)}}{n!} \in R[x]$ für alle $n \in \mathbb{N}$, denn es ist

$$\frac{f^{(n)}}{n!}(x) = \sum_{i=n}^{m} \frac{i(i-1)\ldots(i-n+1)}{n!} f_i x^{i-n} = \sum_{i=n}^{m} \binom{i}{n} f_i x^{i-n}.$$

Die Taylorentwicklung liefert also ein Polynom in $R[x]$. Sei $b_n := a_n - a_{n-1} = -f(a_{n-1})/f'(a_{n-1})$. Dann ist

$$v(b_1) = v(f(a_0)) - v(f'(a_0)) > v(f'(a_0)) \geq 0 \text{ und } v(b_1) > \frac{1}{2}v(f(a_0)) \geq 0.$$

Insbesondere gilt $b_1 \in R$ und somit $a_1 = a_0 + b_1 \in R$. Weiter ist

$$v(f(a_1)) = v(f(a_0 + b_1)) = v(f(a_0) + f'(a_0)b_1 + b_1^2(\frac{f''(a_0)}{2} + b_1 \ldots) \geq 2v(b_1) > v(f(a_0)).$$

Entwickelt man die Ableitung f' mit der Taylorentwicklung um a_0, so erhält man

$$\begin{aligned} &v(f'(a_1)) = v(f'(a_0 + b_1)) = v(f'(a_0) + b_1(f''(a_0) + \tfrac{f'''(a_0)}{2}b_1 + \ldots)) = \\ &\min\{v(f'(a_0)), v(b_1) + v(f''(a_0) + \tfrac{f'''(a_0)}{2}b_1 + \ldots)\} = v(f'(a_0)) \end{aligned}$$

da $v(b_1) > v(f'(a_0))$. Also erfüllt $a_1 = a_0 + b_1$ die Voraussetzung des Satzes und das Verfahren konstruiert eine Folge von Zahlen $a_0, a_1, \ldots$ mit

$$v(f(a_0)) < v(f(a_1)) < \ldots$$

d.h. $f(a_i) \to 0$ mit $i \to \infty$.

Zeigen noch, dass (a_n) eine Cauchy-Folge in R ist. Dazu genügt es, wegen der verschärften Dreiecksungleichung, zu zeigen, dass $v(b_n) = v(a_n - a_{n-1}) \to \infty$ mit $n \to \infty$. Dies gilt aber, da $v(b_{n+1}) > \frac{1}{2}v(f(a_n)) \to \infty$. Wegen der Vollständigkeit von R ist dann $a := \lim_{n\to\infty}(a_n) \in R$ eine Nullstelle von f. $\square$

Beispiel: $f(x) = x^3 - 1$, $R = \mathbb{Z}_7$. Die Henseliteration

$$x := 2; x := x - (x^3 - 1)/(3 * x^2) mod 7^{10};$$

mit maple liefert

$$x = 2, 164777230, 180551751, 152272773, 146507972, 146507972, \ldots$$

wobei $146507972^3 = 1$ modulo 7^{10} ist.

Satz 3.10 *Sei R ein diskreter Bewertungsring mit Primelement π und zugehöriger Exponentenbewertung $v : R \to \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$. Sei V ein e.e. R-Modul. Dann definiert die Abbildung*

$$\nu : V \to \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}, \nu(u) := i \text{ falls } u \in \pi^i V - \pi^{i+1} V, \nu(0) := \infty$$

eine v-Exponentennorm auf V, d.h. es ist

$$\nu(u) = \infty \Leftrightarrow u = 0,\ \ \nu(ru) \geq v(r) + \nu(u),\ \ \nu(u_1 + u_2) \geq \min\{\nu(u_1), \nu(u_2)\}$$

für alle $u, u_1, u_2 \in V$ und $r \in R$. Durch Wahl eines $0 < c < 1$ erhält man eine Metrik d auf V definiert durch

$$d(u_1, u_2) := c^{\nu(u_1 - u_2)}$$

bezüglich welcher V vollständig ist, falls R vollständig (bzgl. $|r| = c^{v(r)}$) ist.

<u>Beweis.</u> Die Eigenschaften von ν sind klar. Ebenso, dass d eine Metrik definiert. Zum Beweis der Vollständigkeit schreiben wir $V = Ru_1 \oplus \ldots \oplus Ru_n$. Ist $v_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} u_j \in V$ so dass $(v_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in V ist, dann bilden die einzelnen Koeffizienten $(a_{ij})_{i\in\mathbb{N}}$ für $j = 1, \ldots, n$ Cauchy-Folgen in R, die wegen der Vollständigkeit gegen ein $a_j \in R$ konvergieren. Dann ist $\lim_{i\to\infty} v_i = \sum_{j=1}^n a_j u_j$. $\square$

Satz 3.11 *(Hensel allgemein) Sei R ein vollständiger diskreter Bewertungsring, $f \in R[x]$ und $^- : R[x] \to R/\pi R[x]$ der natürliche Epimorphismus. Ist $\overline{f} = g_0 h_0$ mit $g_0, h_0 \in R/\pi R[x]$ teilerfremd, so gibt es $g, h \in R[x]$ mit $f = gh$ und $g_0 = \overline{g}$, $h_0 = \overline{h}$.*

<u>Beweis.</u> Sei $F := R/\pi R$. Nach dem chinesischen Restsatz ist

$$F[x]/(\overline{f}) = F[x]/g_0 \oplus F[x]/h_0$$

d.h. es gibt ein Idempotent $e^2 \equiv_f e \in F[x]$ mit $e \equiv_{h_0} 1$ und $e \equiv_{g_0} 0$. Sei $e_0 \in R[x]/(f) =: \Lambda$ ein Element mit $\overline{e_0} = e$. Liften e_0 zu einem Idempotent e_∞ von Λ durch Newton-Hensel-Iteration mit dem Polynom $p(x) = x^2 - x$. Es ist $p(e_0) \equiv 0 \bmod \pi\Lambda$ und $p'(e_0) = 2e_0 - 1 \notin \pi\Lambda$. Es ist

$$(2e_0 - 1)^2 \equiv (2e - 1)^2 \equiv 4e^2 - 4e + 1 \equiv 1 \pmod{\pi\Lambda}.$$

Behauptung: Ist $e_i \in \Lambda$ mit $e_i^2 \equiv e_i \pmod{\pi^{2^i}\Lambda}$, so erfüllt

$$e_{i+1} := e_i - (e_i^2 - e_i)(2e_i - 1) = e_i + k_i = 3e_i^2 - 2e_i^3$$

mit $k_i = (e_i^2 - e_i)(1 - 2e_i)$ die Gleichung $e_{i+1}^2 \equiv e_{i+1} \pmod{\pi^{2^{i+1}}\Lambda}$.
Denn:

$$\begin{aligned} & e_{i+1}^2 - e_{i+1} = (e_i + k_i)^2 - e_i - k_i = e_i^2 + 2e_ik_i + k_i^2 - e_i - k_i \\ & = (e_i^2 - e_i)(1 - (1 - 2e_i) + (2e_i - 4e_i^2) + (1 - 2e_i)^2(e_i^2 - e_i)) \\ & = (e_i^2 - e_i)^2((1 - 2e_i)^2 - 4) \equiv 0 \pmod{\pi^{2^{i+1}}\Lambda} \end{aligned}$$

Also gilt $f(e_i) \to 0$ für $i \to \infty$. Die Folge (e_i) ist eine Cauchy-Folge, da $k_i = e_{i+1} - e_i \in \pi^{2^i}\Lambda$. Da $\dim_R(\Lambda) < \infty$ und R vollständig war, ist auch Λ vollständig und die Folge (e_i) konvergiert gegen $e_\infty \in \Lambda$ mit $e_\infty^2 = e_\infty$. Die Zerlegung $\Lambda = e_\infty\Lambda \oplus (1 - e_\infty)\Lambda$ liefert die gewünschte Faktorisierung. □

Fortsetzen von Bewertungen.

Definition 3.12 *Ein Tripel (K, R, F) heißt* p-modulares System, *falls R ein vollständiger diskreter Bewertungsring ist mit $K = \mathrm{Quot}(R)$ und $F = R/\pi R$ (π Primelement von R) so dass* $\mathrm{char}(K) = 0$ *und* $\mathrm{char}(F) = p$.
(K, R, F) *heißt* p-modulares Zerfällungssystem *für die endliche Gruppe G, falls zusätzlich K und F Zerfällungskörper für G sind.*

Lemma 3.13 *Sei K vollständig bezüglich einer diskreten Exponentenbewertung v mit Bewertungsring R. Ist*

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n \in K[x]$$

irreduzibel, so gilt

$$v(a_i) \geq \min\{v(a_0), v(a_n)\} \text{ für alle } 1 \leq i \leq n - 1.$$

Beweis. Sei $t := \min\{v(a_i) \mid 0 \leq i \leq n\}$. Angenommen $t < \min\{v(a_0), v(a_n)\}$. Sei r maximal mit $t = v(a_r)$. Dann ist $r \neq 0, n$ und

$$g(x) := a_r^{-1}f(x) = b_0x^n + b_1x^{n-1} + \ldots + b_{n-1}x + b_n \in R[x]$$

mit $b_r = 1$ und $b_{r+1}, \ldots, b_n \in \pi R$. Also ist

$$\overline{g}(x) = x^{n-r}(1 + \overline{b_{r-1}}x + \ldots + \overline{b_0}x^r) = g_0h_0 \in \mathbb{R}/\pi R[x]$$

mit $g_0 = x^{n-r}$ und $h_0 = (1 + \overline{b_{r-1}}x + \ldots + \overline{b_0}x^r)$. Da $\mathrm{ggT}(g_0, h_0) = 1$ gilt, folgt mit Satz 3.11, dass f reduzibel ist, ein Widerspruch. □

Satz 3.14 *Sei K vollständig bezüglich einer Bewertung $|\cdot|_K$ und L/K eine algebraische Erweiterung. Dann gibt es genau eine Bewertung $|\cdot|_L : L \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, die $|\cdot|_K$ fortsetzt. Diese ist durch*

$$|\alpha|_L := \sqrt[n]{|N_{K[\alpha]/K}(\alpha)|}, \quad n := [K[\alpha] : K]$$

gegeben. Ist $d := [L : K] < \infty$, so ist K wieder vollständig. Ist dann auch noch $|\cdot|_K$ diskret mit Exponentenbewertung $v : K \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$, so ist die Fortsetzung w von v auf L gegeben durch $w(\alpha) = \frac{1}{d}v(N_{L/K}(\alpha)) \in \frac{1}{d}\mathbb{Z} \cup \{\infty\}$.

Beweis. (für diskret bewertete Körper). Sei O der ganze Abschluss von R in L, also $O := \{a \in L \mid \mu_a \in R[x]\}$. Dann ist

$$O = \{a \in L \mid N_{K[a]/K}(a) \in R\}$$

denn nach Lemma 3.13 ist das Minimalpolynom

$$\mu_a \in R[x] \Leftrightarrow \text{ letzter Koeff. von } \mu_a \in R \Leftrightarrow N_{K[a]/K}(a) \in R.$$

Setzte $|\alpha|_L := \sqrt[n]{N_{K[\alpha]/K}(\alpha)}, \quad n := [K[\alpha] : K]$. Dann gilt $|\alpha|_L = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$ und $|\alpha\beta|_L = |\alpha|_L|\beta|_L$ wegen der Multiplikativität der Normen.
Die verschärfte Dreiecksungleichung ergibt sich daraus, dass $O = \{\alpha \in L \mid |\alpha|_L \leq 1\}$ ein Ring ist:
Sind $\alpha, \beta \in L - \{0\}$ mit $|\beta| \geq |\alpha|$ so ist

$$|\alpha + \beta| \leq \max\{|\alpha|, |\beta|\} \Leftrightarrow |\alpha\beta^{-1} + 1| \leq 1 \Leftrightarrow \alpha\beta^{-1} + 1 \in O$$

Da $|\alpha\beta^{-1}| \leq 1$ ist und somit $\alpha\beta^{-1} \in O$ folgt dies, da O ein Ring ist.
Die letzte Aussage folgt aus Satz 3.10.
Zur Eindeutigkeit brauchen wir folgendes kleine Lemma

Lemma 3.15 *Sei K vollständig bzgl. der diskreten Exponentenbewertung v und sei*

$$f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n \in K[x]$$

irreduzibel. Dann ist

$$v(a_i) \geq \frac{i}{n}v(a_n) \quad \text{für} \quad \text{alle } 1 \leq i \leq n-1.$$

Beweis. Sei L der Zerfällungskörper von f und w die in Satz 3.14 definierte Fortsetzung von v auf L. Seien $\beta_1, \ldots, \beta_n \in L$ die Nullstellen von f. Dann ist $\mu_{\beta_i} = f$ für alle i also $w(\beta_i) = \frac{1}{n}v(a_n)$. Die Koeffizienten a_k sind bis auf ein Vorzeichen die elementar symmetrischen Polynome in den β_i. Also ist

$$v(a_k) = w(a_k) \geq \min\{w(\beta_{i1} \ldots \beta_{ik})\} = \frac{k}{n}v(a_n).$$

□

Weiter mit dem Beweis von Satz 3.14:
Sei $|\cdot|'$ eine weitere Fortsetzung von $|\cdot|_K$ auf L und sei $\alpha \in L$ mit $|\alpha|' \neq |\alpha|_L$. Œ $|\alpha|' < |\alpha|_L$, sonst Übergang zu $\frac{1}{\alpha}$. Es ist

$$\mu_\alpha = x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n \in K[x]$$

irreduzibel mit $\mu_\alpha(\alpha) = 0$. Nach Lemma 3.15 ist

$$|a_i|_K \leq |a_n|_K^{i/n} = |\alpha|_L^i > (|\alpha|')^i$$

und somit

$$|a_j\alpha^{n-j}|' = |a_j|_K(|\alpha|')^{n-j} < |a_n|_K^{j/n}|\alpha|_L^{n-j} = |a_n|_k.$$

Es ist aber

$$a_n = -a_{n-1}\alpha - \ldots - a_1\alpha^{n-1} - \alpha^n$$

und daher

$$|a_n|_K = |a_n|' \leq \max\{|a_{n-1}\alpha|', \ldots |a_1\alpha^{n-1}|', |\alpha^n|\} < |a_n|_K$$

ein Widerspruch. $\square$

Bemerkung 3.16 *Ist in Satz 3.14 $|\cdot|_K$ diskret, R der zugehörige Bewertungsring mit Primelement π und $[L : K] =: n < \infty$, so ist $O := \{a \in L \mid N_{K/L}(a) \in R\}$ der zugehörige diskrete Bewertungsring in L. Ist Π ein Primelement von O, so ist $\pi O = \Pi^e O$ und $\pi R = \Pi O \cap R$. Für die Restklassenkörper gilt $R/\pi R \hookrightarrow O/\Pi O$ und $O/\Pi O$ ist eine Körpererweiterung von $R/\pi R$ vom Grad $f = \frac{n}{e}$.*

Beweis. Da πO ein Ideal von O ist, gibt es $e \in \mathbb{N}$ mit $\pi O = \Pi^e O$. Es ist auch klar, dass $O/\Pi O$ über $R/\pi R$ eine Körpererweiterung ist. Sei $f := [O/\Pi O : R/\pi R]$ der Körpergrad und $\omega_1, \ldots, \omega_f \in O$ so dass die Restklassen $(\omega_1 + \Pi O, \ldots, \omega_f + \Pi O)$ eine $R/\pi R$-Basis von $O/\Pi O$ bilden.
Behauptung: Die ef-Elemente $(\omega_i \Pi^j \mid 1 \leq i \leq f, 0 \leq j \leq e-1)$ bilden eine R-Basis von O (und damit eine K-Basis von L).
1) Die Elemente sind linear unabhängig über K: Seien $a_{ij} \in K$ nicht alle gleich 0 mit

$$\sum_{i=1}^{f} \sum_{j=0}^{e-1} a_{ij}\omega_i \Pi^j = 0$$

Setze $s_j := \sum_{i=1}^f a_{ij}\omega_i$.
Beh: Nicht alle s_j sind gleich 0 und wenn $s_j \neq 0$, dann ist $v(s_j) \in v(K^*) = \mathbb{Z}$.
Denn: Sei $v(a_{ij})$ minimal unter den $v(a_{lj})$, $l = 1, \ldots f$. Teile durch a_{ij}. Dann ist $\tilde{s_j} = s_j/a_{ij} \in O - \Pi O$ also eine Einheit und damit $w(\tilde{s_j}) = 0$, also $w(s_j) = v(a_{ij}) \in v(K^*) = \mathbb{Z}$. Somit ist für $s_j \neq 0$ die Bewertung

$$w(s_j\Pi^j) = w(s_j) + \frac{j}{e} \in \mathbb{Z} + \frac{j}{e}.$$

Die Bewertungen der $s_j\Pi^j \neq 0$ sind also alle verschieden und damit nach Bemerkung 3.8

$$w(\sum_{j=0}^{e-1} s_j\Pi^j) = \min\{w(s_j) + \frac{j}{e} \mid 0 \leq j \leq e-1\} \neq \infty.$$

2) Erzeugendensystem: Sei

$$M := \langle \omega_i \Pi^j \mid 1 \leq i \leq f, 0 \leq j \leq e-1 \rangle_R$$

Dann ist $M + \pi O = O$ also

$$O = M + \pi(M + \pi O) = M + \pi^2 O = \ldots = M + \pi^m O$$

für beliebig große $m \in \mathbb{N}$. Also liegt M dicht in O. Da R abgeschlossen ist und M als e.e. R-Modul ebenfalls folgt daraus $M = O$. $\square$

4 Algebren über vollständigen diskreten Bewertungsringen.

Mit Blatt 1 Aufgabe 2 ergibt sich insbesondere

Bemerkung 4.1 *Sei A eine endliche erzeugte (als R-Modul) R-Algebra über dem diskreten Bewertungsring R mit Primelement π. Dann ist $\pi R \subset J(A)$ und es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ mit $J(A)^n \subset \pi A$. ($J(A)$ ist pro-nilpotent.)*
Das Jacobson-Radikal von A ist das größte Ideal I mit dieser Eigenschaft, dass $I^n \subset \pi A$ für ein $n \in \mathbb{N}$.

Satz 4.2 *Sei A eine endlich erzeugte R-Algebra über dem vollständigen diskreten Bewertungsring R. Sei $I \subset J(A)$ ein Ideal in A und setze $\overline{A} := A/I$.*
(a) Ist $\overline{c} = \sum_{i=1}^n \overline{c_i}$ eine Zerlegung des Idempotents $\overline{c} \in \overline{A}$ in orthogonale Idempotente $\overline{c_i}$ mit $\overline{cc_i} = \overline{c_i}$, dann gibt es eine Idempotentzerlegung $e = \sum_{i=1}^n e_i$ in A mit $e + I = \overline{c}$ und $e_i + I = \overline{c_i}$ für alle i.
(b) Ein Idempotent $e \in A$ ist primitiv genau dann wenn $\overline{e} \in \overline{A}$ primitiv ist.

Beweis. (a) Nach Satz 3.10 ist A vollständig. Also kann man wie im Beweis von Satz 3.11 das Idempotent c von A/I liften zu einem Idempotent e von A liften. Nach Übergang zu eAe können wir Œ annehmen, dass $e = 1$ ist. Nun liften wir das Idempotent c_1 zu einem Idempotent e_1 von A und ersetzen dann A durch $A' := (1 - e_1)A(1 - e_1)$. Da $\overline{c_1 c_j} = \overline{c_j c_1} = 0$ für alle $j = 2, \dots, n$ sind die $c'_j := (1 - e_1)c_j(1 - e_1)$ orthogonale Idempotente modulo $(1 - e_1)I(1 - e_1)$ die wir sukzessive zu orthogonalen Idempotenten e_i liften.
(b) folgt aus (a) □

Satz 4.3 *Sei R ein vollständiger diskreter Bewertungsring, A eine e.e. R-Algebra und V ein e.e. A-Modul. Dann gilt: V ist unzerlegbar $\Leftrightarrow$ $\mathrm{End}_A(V)$ lokal.*

Beweis. Da A eine e.e. R-Algebra und V e.e. A-Modul ist V auch ein e.e. R-Modul und damit $\mathrm{End}_A(V)$ e.e. R-Algebra. Also ist $\mathrm{End}_A(V)$ wieder vollständig und Idempotente von $\mathrm{End}_A(V)/J(\mathrm{End}_A(V))$ liften.
$\Leftarrow$ ist Folgerung 2.3.
$\Rightarrow$: Sei V unzerlegbar. Dann sind 1 und 0 die einzigen Idempotente in $\mathrm{End}_A(V)$. Da Idempotente von $\mathrm{End}_A(V)/J(\mathrm{End}_A(V))$ zu Idempotenten von $\mathrm{End}_A(V)$ liften, hat die halbeinfache artinsche Algebra nur die trivialen Idempotente

$$\mathrm{End}_A(V)/J(\mathrm{End}_A(V)) \cong \bigoplus_{i=1}^n D_i^{n_i \times n_i}$$

also $n = 1 = n_1$. D.h. $\mathrm{End}_A(V)/J(\mathrm{End}_A(V)) \cong D$ ist ein Schiefkörper und daher $\mathrm{End}_A(V)$ lokal. □

Folgerung 4.4 *(Krull-Schmidt) Für e.e. Algebren A über einem vollständigen diskreten Bewertungsring R gilt der Satz von Krull-Schmidt: Jeder e.e. A-Modul eine direkte Summe endlich vieler unzerlegbarer Moduln. Die unzerlegbaren direkten Summanden sind bis auf Isomorphie und Reihenfolge eindeutig bestimmt.*

Definition 4.5 *Sei A ein Ring. Ein A-Modul P heißt* projektiv*, wenn zu jedem Epimorphismus $\varphi : V \to W$ und Homomorphismus $\psi : P \to W$ von A-Moduln ein A-Modulhomomorphismus $\psi' : P \to V$ existiert mit $\psi'\varphi = \psi$.*

Bemerkung 4.6 *Ist P ein freier A-Modul, so ist P projektiv, denn ist $(b_1, \dots, b_n)$ eine A-Basis von P, $w_i = \psi(b_i)$ und $v_i = \varphi^{-1}(w_i)$ so definiere $\psi' : P \to V$ durch $\psi'(b_i) = v_i$.*

Bemerkung 4.7 *Ist der projektive Modul P epimorphes Bild eines A-Moduls V, so ist P isomorph zu einem direkten Summanden von V. (Wähle in der Definition $W = P$, φ der Epimorphismus, $\psi = \mathrm{id}$. Dann ist $\psi' : P \to V$ ein Monomorphismus und daher $P \cong \mathrm{Bild}(\psi')$.)*

Lemma 4.8 *(a) Direkte Summanden von projektiven Moduln sind projektiv.*
(b) Ein A-Modul ist genau dann projektiv, wenn er direkter Summand eines freien A-Moduls ist.

Beweis. (a) Sei $P = P_1 \oplus P_2$ ein projektiver Modul und $\psi : P_1 \to W$ ein Modulhom, sowie $\varphi : V \to W$ ein Epimorphismus. Da P_1 ein direkter Summand von P ist, gibt es eine Abbildung $\iota : P_1 \to P$ und $\epsilon : P \to P_1$ mit $\iota\epsilon = \mathrm{id}_{P_1}$. Da P projektiv ist, gibt es eine Abbildung $\psi' : P \to V$ mit $\psi'\varphi = \epsilon\psi$. Setze $\psi'' := \iota\psi' : P_1 \to V$. Dann ist

$$\psi''\varphi = \iota\psi'\varphi = \iota\epsilon\psi = \psi.$$

(b) Direkte Summanden von freien Moduln sind projektiv wegen (a) und Bemerkung 4.6. Jeder A-Modul P ist aber epimorphes Bild eines freien Moduls. Ist P projektiv, so ist P nach Bemerkung 4.7 auch direkter Summand. □

Lemma 4.9 *A sei e.e. R-Algebra, R vollständiger diskreter Bewertungsring oder Körper. $e^2 = e \in A$.*
(a) $\mathrm{End}_A(eA) \cong (eAe)^{op}$ als Ring.
(b) V sei ein A-Modul. Dann ist $\mathrm{Hom}_A(eA, V) \cong Ve$ als R-Modul.

Beweis. (b) $\varphi \in \mathrm{Hom}_A(eA, V) \mapsto e\varphi$ ist der gewünschte R-Modulisomorphismus. Denn $e\varphi \in Ve$, da $e\varphi e = e^2\varphi = e\varphi$.
Die Abbildung ist offensichtlich ein Homomorphismus.
Injektivität: Sei $e\varphi = 0$. Dann ist $ea\varphi = e\varphi a = 0$ für alle $a \in A$ und daher $\varphi = 0$.
Surjektivität: Sei $ve \in Ve$. Definieren $\varphi_{ve} : eA \to V$ als $\varphi_{ve} : ea \mapsto va$. Dann ist $\varphi_{ve} \in \mathrm{Hom}_A(eA, V)$ ein Urbild von ve.

(a) Als R-Moduln sind die beiden Ringe isomorph nach (b). Es genügt also die Multiplikativität der Abbildung aus (b) zu beweisen. Für $\varphi, \psi \in \mathrm{End}_A(eA)$ sei $v = e\varphi \in eAe$. Dann ist

$$e(\varphi\psi) = (e\varphi)\psi = v\psi = (ev)\psi = e\psi v = (e\psi)(e\varphi)$$

□

Lemma 4.10 *A sei e.e. R-Algebra, R vollständiger diskreter Bewertungsring oder Körper. Jeder e.e. unzerlegbare projektive A-Modul P (PIM) ist direkter Summand von A_A, also von der Form eA mit einem primitiven Idempotent $e \in A$.*
$e^2 = e \in A$ primitiv $\Leftrightarrow$ eAe lokal.

Beweis. Unter den Voraussetzungen gilt der Satz von Krull-Schmidt für die Algebra A. Insbesondere ist

$$A_A \cong \bigoplus_{i=1}^{d} V_i$$

mit V_i unzerlegbar. Die V_i sind projektiv als Summanden eines freien Moduls.
Sei P ein e.e. projektiver A-Modul. Dann ist P ein direkter Summand eines e.e. freien A-Moduls. Nach Krull-Schmidt sind diese direkten Summanden aber gerade Summen von geeigneten V_i. Ist P also unzerlegbar, dann ist P isomorph zu einem der V_i.
Weiter ist P unzerlegbar $\Leftrightarrow$ $P = eA$ mit einem primitiven Idempotent e $\Leftrightarrow$ $\mathrm{End}_A(P)$ lokal $\Leftrightarrow$ eAe lokal. □

Satz 4.11 *A sei e.e. R-Algebra, R vollständiger diskreter Bewertungsring oder Körper. $e^2 = e \in A$ primitiv.*
(a) Dann hat eA genau einen maximalen Teilmodul $eJ(A)$. Der Kopf *von eA ist $Y := eA/eJ(A)$ ein einfacher A-Modul.*
(b) Weiter ist

$$eA \cong e'A \Leftrightarrow eA/eJ(A) \cong e'A/e'J(A).$$

Beweis. (a) Seien M_1, M_2 maximale Teilmoduln von eA, also $eA = M_1 + M_2$. Wähle $v_i \in M_i$ mit $e = v_1 + v_2$ und definiere $\varphi_i \in \mathrm{End}_A(eA)$ durch $(ea)\varphi_i := v_i a$ $(i = 1, 2)$. Dann ist $\varphi_1 + \varphi_2 = \mathrm{id}_{eA}$. Da $\mathrm{End}_A(eA)$ lokal ist, bilden die Nichteinheiten ein Ideal, also ist ein φ_i eine Einheit. Damit ist aber $\varphi_i : eA \to M_i$ ein Isomorphismus, also auch M_i projektiv und damit ein direkter Summand von $eA = M_i \oplus M$. Dies ist ein Widerspruch zur Unzerlegbarkeit von eA.
Ist M ein A-Modul, so ist $M/MJ(A)$ ein $A/J(A)$-Modul, also halbeinfach, der größte halbeinfache Faktormodul von M. Also ist $MJ(A)$ der Schnitt aller maximalen Teilmoduln von M.
In unserer Situation hat eA nur einen maximalen Teilmodul, dieser ist also $eAJ(A) = eJ(A)$.
(b) $\Rightarrow$ ist klar.
$\Leftarrow$: Sei $\varphi : eA/eJ(A) \to e'A/e'J(A)$ ein Isomorphismus und $\psi : eA \to eA/eJ(A)$ und $\psi' : e'A \to e'A/e'J(A)$ die natürlichen Epimorphismen. Da $e'A$ projektiv ist, gibt es einen A-Modulhomomorphismus, $\phi : e'A \to eA$ mit

$$\phi\psi\varphi = \psi'.$$

Da Bild$(\phi) \not\subseteq eJ(A)$ und dies der einzige maximale Teilmodul von eA ist, ist also ϕ ein Epimorphismus. Damit ist eA ein epimorphes Bild von $e'A$ und da eA projektiv ist auch ein direkter Summand von $e'A$. Der Kopf von $e'A$ ist unzerlegbar, daher auch $e'A$. Also ergibt sich $eA \cong e'A$. □

Satz 4.12 *A sei e.e. R-Algebra, R vollständiger diskreter Bewertungsring oder Körper. Sei Y ein einfacher A-Modul. Dann gibt es einen projektiv unzerlegbaren A-Modul eA mit $Y \cong eA/eJ(A)$. Dieser PIM ist bis auf Isomorphie nach Satz 4.11 eindeutig bestimmt und heißt die* projektive Decke *von Y.*
Für einen e.e. A-Modul V gilt

$$Ve \neq 0 \Leftrightarrow V \textit{ hat einen zu } Y \textit{ isomorphen Kompositionsfaktor.}$$

Beweis. Y einfach, also gibt es Epimorphismus

$$\varphi : \bigoplus e_i A = A \to Y.$$

Ist i so dass $e_i A\varphi \neq 0$ ist, dann ist Y ein epimorphes Bild von $e_i A$ also $Y \cong e_i A/e_i J(A)$.
Sei jetzt V ein e.e. A-Modul. Ist $Ve \cong \mathrm{Hom}_A(eA, V) \neq 0$, so gibt es einen Homomorphismus $\varphi : eA \to V$ mit $\varphi \neq 0$. Also hat V den Kompositionsfaktor $(eA)\varphi/(eJ(A))\varphi \cong Y$. Umgekehrt sei Y ein Kompositionsfaktor von V, d.h. es gibt Teilmoduln $V_2 < V_1 \leq V$ mit $Y \cong V_1/V_2$. Die Epimorphismen $V_1 \to Y$ und $eA \to Y$ lassen sich zu einem kommutativen Dreieck ergänzen, da eA projektiv ist. D.h. es gibt einen Homomorphismus $0 \neq \varphi : eA \to V_1 \leq V$ und daher $\mathrm{Hom}_A(eA, V) \neq 0$. □

Ist (K, R, F) ein p-modulares System und A eine R-Algebra, $\overline{A} = A/\pi A$ eine F-Algebra, so stehen die folgenden Mengen in Bijektion:

{ Isomorphieklassen projektiv unzerlegbarer A-Moduln (eA)}
{ Isomorphieklassen einfacher A-Moduln $(eA/eJ(A))$}
{ Isomorphieklassen einfacher $\overline{A}$-Moduln $(eA/eJ(A))$}
{ Isomorphieklassen projektiv unzerlegbarer $\overline{A}$-Moduln $(\bar{e}\overline{A} = eA/\pi eA)$}

Definition 4.13 *Seien $\{U_1, \ldots, U_s\}$ Vertreter der Isomorphieklassen der projektiv unzerlegbaren $\overline{A}$-Moduln, und $\{Y_1, \ldots, Y_s\}$ Vertreter der Isomorphieklassen der einfachen $\overline{A}$-Moduln, Sei $c_{ij} :=$ die Vielfachheit von Y_j als Kompositionsfaktor von U_i. Dann heißt*

$$C := (c_{ij}) \in \mathbb{Z}^{s\times s}$$

die Cartanmatrix *von $\overline{A}$ (oder auch von A).*

Beispiel: Cartanmatrix von $\mathbb{F}_3 S_3$, $\mathbb{F}_2 C_2$, $\mathbb{F}_2 S_3$

Definition 4.14 *Die zentral primitiven Idempotente $b_1, \ldots, b_m$ von A heißen auch* Blockidempotente *und die ringdirekten Summanden Ab_i* Blöcke*.*

Ist V ein unzerlegbarer A-Modul, so gibt es genau ein Blockidempotent b mit $bV = V$. Wir sagen dann dass V zu dem Block b gehört. Insbesondere gehört ein primitives Idempotent $e \in A$ genau dann zum Block b wenn $eb = e$ ist.

Satz 4.15 *A sei e.e. R-Algebra, R vollständiger diskreter Bewertungsring oder Körper. Zwei primitive Idempotente $e, e' \in A$ heißen* verbunden*, falls es primitive Idempotente $e = e_1, \ldots, e_n = e'$ in A gibt, so dass e_iA und $e_{i+1}A$ $(i = 0, \ldots, n-1)$ einen gemeinsamen Kompositionsfaktor haben.*
Dann gilt: e, e' verbunden, $\Leftrightarrow$ eA und $e'A$ gehören zum gleichen Block.

Beweis. Sei b ein Blockidempotent von A mit $beA \neq 0$ (dann ist $be = e$).
$\Rightarrow$: Seien e und e' verbunden über die Idempotente $e = e_1, \ldots, e_n = e'$ in A. Dann haben e_iA und $e_{i+1}A$ einen gemeinsamen Kompositionsfaktor. Also kann nicht $be_iA \neq 0$ also $be_iA = e_iA$ sein und $be_{i+1}A = 0$.
$\Leftarrow$: Sei $be' = e'$, Sind e und e' nicht orthogonal, so ist $ee' \neq 0$ also auch $eAe' \cong \mathrm{Hom}(eA, e'A) \neq 0$ und $e'A$ hat einen Kompositionsfaktor $\cong eA/eJ(A)$. Also sind e und e' verbunden. Seien jetzt e, e' orthogonal, d.h. $ee' = e'e = 0$. Schreibe dann $b = e_0 + \ldots + e_n$ als Summe orthogonaler primitiver Idempotente mit $e = e_0$ und $e' = e_n$. Ändere die Reihenfolge so, dass e verbunden mit $e_0, \ldots, e_j$, aber nicht mit $e_{j+1}, \ldots, e_n$ und setze $b_1 := e_0 + \ldots + e_j$, $b_2 := e_{j+1} + \ldots + e_n$. Dann gilt

$$e_iAe_k = 0, \text{ falls } i \leq j < k.$$

(sonst $e_iAe_k \neq 0$ und e_iA und e_kA haben einen gemeinsamen Kompositionsfaktor). Also ist $b_1Ab_2 = b_2Ab_1 = 0$. Zeigen, dass b_1A ein zweiseitiges Ideal ist. Es ist

$$Ab_1A = Ab_1bA = (b_1 + b_2)Ab_1A = b_1Ab_1A \subset b_1A$$

also b_1A auch Linksideal und damit zweitseitiges Ideal. Ebenso ist $b_2A = Ab_2$ zweiseitiges Ideal und daher

$$Ab = Ab_1 \oplus Ab_2 \text{ direkte Summe von zwei Idealen.}$$

Also läßt sich jedes $a \in Ab$ eindeutig schreiben als

$$a = a(b_1 + b_2) = (b_1 + b_2)a = ab_1 + ab_2 = b_1a + b_2a$$

Mit ab_1 ist aber auch b_1a in Ab_1 und ebenso b_2a in Ab_2. Da die Zerlegung direkt ist, ist daher $ab_1 = b_1a$. Also ist b_1 zentral und, da b zentral primitiv war, gilt dann $b_1 = b$, $b_2 = 0$ und e und e' sind verbunden. □

Folgerung 4.16 *Ordnet man die projektiv unzerlegbaren A-Moduln geeignet (nach Blöcken), so ist die Cartanmatrix von A eine Blockdiagonalmatrix*

$$C = \mathrm{diag}(C_1, \ldots, C_m)$$

falls $b_1, \ldots, b_m$ die Blockidempotente von A sind und in C_i durch die PIMs bzw. die einfachen Moduln indiziert ist, auf denen b_i wie Eins operiert. Weiter gibt es keine Anordnung, für die C_i eine echte Blockdiagonalmatrix ist.

5 Zerlegungszahlen.

Definition 5.1 *Sei R ein HIB mit $K = \mathrm{Quot}(R)$. Eine R-*Ordnung *A ist eine R-Algebra die e.e. freier R-Modul ist.*
*Ein A-Modul M heißt R-*Gitter*, falls M ein e.e. freier R-Modul ist.*

Sei (K, R, F) ein p-modulares System und A eine R-Ordnung. Dann ist $A \subset K \otimes_R A =: A_K$, A_K ist eine K-Algebra und $\overline{A} = A/\pi A = F \otimes A = A_F$ ist eine F-Algebra. Jede R-Basis von A ist K-Basis von A_K und bildet auf eine F-Basis von A_F ab.

Ist V ein e.e. A_K-Modul, so heißt ein A-Teilmodul M von V ein A-Gitter in V, falls M ein R-Gitter ist und $K \otimes_R M = V$. Ist $(v_1, \ldots, v_n)$ eine R-Basis von M, so ist

$$D : A \to R^{n\times n}, D(a) := (\gamma_{ij}(a)), \quad \text{wenn } v_i a = \sum_{j=1}^{n} \gamma_{ij}(a) v_j$$

ein R-Algebrenhomomorphismus, welcher sich zu einer Darstellung

$$D_K : A_K \to K^{n\times n} \cong \mathrm{End}_K(V)$$

fortsetzt und auch eine Matrixdarstellung

$$\overline{D} : \overline{A} \to F^{n\times n}, \overline{D}(a) := (\overline{\gamma_{ij}(a)})$$

bezüglich der F-Basis $(\overline{v_1}, \ldots, \overline{v_n})$ von $M/\pi M$ definiert.

Satz 5.2 *Sei R ein HIB mit Quotientenkörper K und A eine R-Ordnung. In jedem e.e. A_K-Modul V gibt es ein A-Gitter.*

Beweis. Sei $(v_1, \ldots, v_n)$ eine K-Basis von V, $a_1, \ldots a_m$ ein R-Erzeugendensystem von A. Dann ist

$$M := \langle v_i a_j \mid 1 \le i \le n, 1 \le j \le m \rangle_R$$

ein e.e. R-Teilmodul von V, also ein R-Gitter, das ausserdem ein A-Teilmodul von V ist.
□

Bemerkung 5.3 *Ein A_K-Modul V kann nichtisomorphe A-Gitter enthalten.*

Beispiel: Sei $A = \mathbb{Z}_2 C_2$ der Gruppenring von $C_2 = \langle g \rangle$ und $V = \mathbb{Q}_2 C_2$ der reguläre A_K-Modul $(K = \mathbb{Q}_2)$. Dann sind

$$M_1 := \mathbb{Z}_2 C_2 = \langle 1, g \rangle_{\mathbb{Z}_2} \text{ und } M_2 := \langle \frac{1}{2}(1+g), \frac{1}{2}(1-g) \rangle_{\mathbb{Z}_2}$$

beides A-Gitter in V. Für die zugehörigen Darstellungen gilt

$$D_1(g) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ D_2(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Insbesondere ist M_1 unzerlegbar und M_2 die direkte Summe von zwei eindimensionalen A-Gittern.

$$\mathrm{End}_A(M_1) \cong \{\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z}_2\} \text{ ist unzerlegbar und } \mathrm{End}_A(M_2) \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2.$$

Satz 5.4 *(Brauer) Sei (K, R, F) ein p-modulares System und A eine R-Ordnung. Sei V ein A_K-Modul, M_1, M_2 zwei A-Gitter in V. Sie Y ein einfacher $\overline{A}$-Modul und $d(\overline{M_i}, Y)$ die Vielfachheit von Y als Kompositionsfaktor von $M_i/\pi M_i = \overline{M_i}$ $(i = 1, 2)$. Dann gilt*

$$d(\overline{M_1}, Y) = d(\overline{M_2}, Y) =: d(V, Y).$$

Beweis. Sei M einer der beiden Moduln M_1 oder M_2 und $\overline{M} = N_0 > N_1 > \ldots > N_r = 0$ eine Kompositionsreihe von $\overline{M}$. Sei $P = eA$ die projektive Decke von Y. Da $\overline{P}$ ein projektiver Modul ist, liefert die kurze exakte Sequenz

$$0 \to N_i \to N_{i-1} \to N_{i-1}/N_i \to 0$$

eine kurze exakte Sequenz

$$0 \to \mathrm{Hom}_A(\overline{P}, N_i) \to \mathrm{Hom}_A(\overline{P}, N_{i-1}) \to \mathrm{Hom}_A(\overline{P}, N_{i-1}/N_i) \to 0.$$

Insbesondere ist

$$\dim_F(\mathrm{Hom}_A(\overline{P}, N_{i-1})) = \dim_F(\mathrm{Hom}_A(\overline{P}, N_i)) + \dim_F(\mathrm{Hom}_A(\overline{P}, N_{i-1}/N_i)).$$

Also

$$\begin{aligned} &\dim_F(\mathrm{Hom}_A(\overline{P}, \overline{M})) = \textstyle\sum_{i=1}^r \dim_F(\mathrm{Hom}_A(\overline{P}, N_{i-1}/N_i)) \\ &= \dim_F(\mathrm{End}_A(Y))|\{i \mid N_{i-1}/N_i \cong Y\}| = \dim_F(\mathrm{End}_A(Y)) d(\overline{M}, Y). \end{aligned}$$

Nun ist

$$\dim_F(\mathrm{Hom}_A(\overline{P}, \overline{M})) = \dim_F(\overline{M}\overline{e}) = \dim_R(Me) = \dim_K(M_K e) = \dim_K(Ve)$$

unabhängig von der Wahl des A-Gitters in V. □

Definition 5.5 *Seien $X_1, \ldots, X_h$ die einfachen A_K-Moduln, $Y_1, \ldots, Y_s$ die einfachen $\overline{A}$-Moduln. Dann heißt*

$$D := (d_{ij}) := (d(X_i, Y_j)) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{h \times s}$$

die Zerlegungsmatrix *der R-Ordnung A.*

Beispiele. Zerlegungsmatrix von $\mathbb{Z}_3 S_3$, $\mathbb{Z}_2 S_3$, $\mathbb{Z}_2 C_2$.

Satz 5.6 *(Brauersches Reziprozitätsgesetz) Sei (K, R, F) ein p-modulares System und A eine R-Ordnung so dass A_K eine halbeinfache K-Algebra ist. Seien $e_1, \ldots, e_s$ Vertreter der Konjugiertenklassen primitiver Idempotente in A, so dass $Y_i = e_i A / e_i J(A)$ ist. Schreibe*

$$e_j A_K = \bigoplus_{i=1}^h \Delta_{ij} X_i$$

Dann gilt

$$\Delta_{ij} \dim_K(\mathrm{End}_{A_K}(X_i)) = d_{ij} \dim_F(\mathrm{End}_{\overline{A}}(Y_j)).$$

Beweis. Sei M_i ein A-Gitter in X_i. Dann ist

$$\Delta_{ij} \dim_K(\mathrm{End}_{A_K}(X_i)) = \dim_K(\mathrm{Hom}_{A_K}(e_j A_K, X_i)) = \dim_K(X_i e_j) = \dim_R(M_i e_j) = \dim_F(\overline{M_i}\overline{e_j}) = \dim_F(\mathrm{Hom}_{\overline{A}}(\overline{e_j}\overline{A}, \overline{M_i})) = d_{ij} \dim_F(\mathrm{End}_{\overline{A}}(Y_j)).$$

□

Folgerung 5.7 *Sind K und F Zerfällungskörper für A_K bzw. $\overline{A}$, so ist $\Delta_{ij} = d_{ij}$ und für die Cartanmatrix gilt*

$$C = D^{tr} D.$$

Beweis. c_{ij} ist die Anzahl der Kompositionsfaktoren von $\overline{e_i}\overline{A}$, die isomorph zu $Y_j \cong e_j A / e_j J(A)$ sind. Da diese Anzahl unabhängig von der Wahl des A-Gitters ist, ist sie die Anzahl der Kompositionsfaktoren Y_j in $\bigoplus_{l=1}^h \Delta_{li} \overline{M_l}$, wo M_l ein A-Gitter in X_l bezeichnet, also gleich

$$\bigoplus_{l=1}^{h} \Delta_{li} d_{lj} = \sum_{l=1}^{h} d_{li} d_{lj} = (D^{tr} D)_{i,j}$$

nach dem Brauerschen Reziprozitätsgesetz und da die Endomorphismenringe alle eindimensional sind. □

Ende am 3.11.2006

Lemma 5.8 *Seien K und F Zerfällungskörper für A_K bzw. $\overline{A}$. Ordnet man die einfachen A_K-Moduln X_i und die einfachen $\overline{A}$-Moduln Y_j nach Blöcken, dann ist*

$$D = \begin{pmatrix} D_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & D_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & D_m \end{pmatrix}$$

eine Blockmatrix für die $C_i = D_i^{tr} D_i$ gilt. Weiter gibt es keine Anordnung, für die D_i in noch kleinere Blöcke zerfällt

Beweis. Sei b ein zentral primitives Idempotent in A (Blockidempotent). Dann gilt für die einfachen A_K-Moduln X_i, dass X_i zum Block b gehört genau dann wenn b wie die Identität auf X_i operiert. Dann ist b aber auch die Identität auf allen Kompositionsfaktoren von $M_i/\pi M_i$ (für ein beliebiges A-Gitter M_i in X_i), d.h. alle Kompositionsfaktoren Y_j von $\overline{M}_i$ gehören auch zum Block b. Daher hat D die gewünschte Blockgestalt. □

Bemerkung 5.9 *Sei $\overline{A}$ eine e.e. F-Algebra, $\epsilon_1, \dots, \epsilon_s$ Vertreter der Konjugiertenklassen primitiver Idempotente in $\overline{A}$ so dass $\epsilon_i \overline{A}$ die projektive Decke von Y_i ist. Dann ist die Anzahl n_i der direkten Summanden in $\overline{A}$ die isomorph zu $\epsilon_i \overline{A}$ sind gleich*

$$n_i = \dim_F(Y_i) / \dim_F(\mathrm{End}_{\overline{A}}(Y_i)).$$

Beweis. $\overline{A} \cong \bigoplus_{i=1}^{s} n_i \epsilon_i \overline{A}$ als A-Rechtsmodul. Also ist

$$\overline{A}/J(\overline{A}) \cong \bigoplus_{i=1}^{s} n_i \epsilon_i \overline{A}/\epsilon_i J(\overline{A}) = \bigoplus_{i=1}^{s} n_i Y_i.$$

Auf der anderen Seite ist nach Artin-Wedderburn

$$\overline{A}/J(\overline{A}) \cong \bigoplus_{i=1}^{s} \mathrm{End}_{\overline{A}}(Y_i)^{n_i \times n_i}.$$

Also ist $n_i \dim_F(\mathrm{End}_{\overline{A}}(Y_i)) = \dim_F(Y_i)$. □

6 Der Zentrierungsalgorithmus.

Sei (K, R, F) ein p-modulares System, A eine freie R-Algebra, (sogenannte R-Ordnung) und V ein einfacher A_K-Modul (endlich dimensional).

Definition 6.1 *$\mathcal{Z}(V) := \{M \subset V \mid M$ ist A-Gitter in $V\}$ bezeichne die Menge der A-Gitter in V und*

$$\mathcal{Z}(V)/\sim := \{[M] \mid M \in \mathcal{Z}(V)\}$$

wo $M \sim N$ genau dann wenn es ein $n \in \mathbb{Z}$ gibt mit $M = \pi^n N$ die Menge der Äquivalenzklassen von A-Gittern in V.

Ziel: Bestimme $\mathcal{Z}(V)/\sim$.

Strategie: (A) Bestimme ein A-Gitter M in V durch ganzzahliges spinning: Ist $(v_1, \ldots, v_n)$ eine K-Basis von V und $a_1, \ldots, a_s$ eine R-Algebren Erzeugendensystem (als Ring) von A, so setze
$M_0 := \langle v_1, \ldots, v_n \rangle$
(1) $M_1 := M_0 + M_0 a_1 + \ldots + M_0 a_s$
(2) $M_0 = M_1$ dann ist M_0 ein A-Gitter in V.
(3) $M_0 \neq M_1$, dann setze $M_0 := M_1$ und mache weiter bei (1).
Der Algorithmus terminiert, da irgendwann die Produkte $a_{i_1} \ldots a_{i_k}$ ein R-Modul Erzeugendensystem von A bilden.
(B) Bestimme alle A-Teilgitter von M.

Satz 6.2 *Sind M und N zwei A-Gitter in V, so gibt es ein $m \in \mathbb{N}$ mit $\pi^m N \subset M$.*

Beweis. Ist $B := (b_1, \ldots, b_n)$ eine R-Basis von M und $C := (c_1, \ldots, c_n)$ eine R-Basis von N so hat die $n \times n$-Matrix ${}_C \mathrm{id}_B$ einen Hauptnenner, d.h. es gibt $m \in \mathbb{N}$ mit $\pi^m \, {}_C \mathrm{id}_B \in R^{n \times n}$. Für dieses m liegt dann $\pi^m N \subset M$. □

Bemerkung 6.3 *(a) $M/\pi^m N$ hat eine A-Kompositionsreihe*

$$N_0 = M > N_1 > N_2 > \ldots > N_s = \pi^m N$$

so dass $N_{i-1}/N_i \cong Y_{j_i}$ einfache A-Moduln.
(b) Y_j kommt nur dann in (a) vor, wenn $d(V, Y_j) > 0$.
(c) Es gibt einen A-Modulepimorphismus $\varphi : N_{i-1} \to Y_{j_i}$, so dass $N_i = \ker(\varphi)$.
(d) Die maximalen A-Teilgitter von M sind gegeben als $\ker(\varphi_j)$ wo $\langle\varphi_j\rangle$ die eindimensionalen $\mathrm{End}_A(Y_j)$-Teilräume von $\mathrm{Hom}_A(M, Y_j)$ durchläuft und Y_j die einfachen A-Moduln mit $d(V, Y_j) > 0$.

Satz 6.4 *(Jordan-Zassenhaus) $\mathcal{Z}(V)/\sim$ ist eine endliche Menge.*

Beweisskizze. Das Bild von A_K in $\mathrm{End}_K(V)$ ist eine einfache K-Algebra also von der Form $D^{m\times m}$ für eine K-Divisionsalgebra D und ein $m \in \mathbb{N}$. Ersetze A_K durch sein Bild, also Œ $A_K \cong D^{m\times m}$. Es gibt eine R-Maximalordnung $\Lambda \cong O^{m\times m}$ (O die R-Maximalordnung in D, wieder vollständiger diskreter Bewertungsring), die A enthält, sowie ein $a \in \mathbb{N}$ mit

$$\pi^a \Lambda \subset A \subset \Lambda.$$

Ist L ein Λ-Gitter in V, so sind $\mathcal{Z}(\Lambda) = \{\Pi^j L \mid j \in \mathbb{Z}\}$ alle Λ-Gitter in V, wobie Π ein Primelement von O ist. Es gibt $e \in \mathbb{N}$ mit $\pi O = \Pi^e O$, d.h. $\mathcal{Z}(\Lambda)/\sim$ enthält genau e Elemente. Ist N ein A-Gitter in V, so gibt es ein $j \in \mathbb{Z}$ mit

$$\pi^a \Pi^j L \subset N \subset N\Lambda = \Pi^j L$$

d.h. ein Gitter in $[N]$ liegt zwischen $\pi^{a+e}L$ und L. Da $L/\pi^{a+e}L$ aber nur endlich viele R-Teilmoduln enthält, gibt es auch nur endlich viele A-Gitter. □

Algorithmus 6.5 *(Zentrierungsalgorithmus) Gegeben ein A-Gitter M in V durch Matrizen $\Delta_M(a_1), \ldots \Delta_M(a_s) \in R^{n\times n}$ ($a_1, \ldots, a_s$ R-Algebren Erzeuger von A).*
Gesucht: $\mathcal{Z}(V)/\sim$.
Algorithmus:
(0) Bestimme zunächst alle Kompositionsfaktoren von $M/\pi M$: $\{Y_1, \ldots, Y_m\}$ sowie die Divisionsalgebren (im Fall F endlich, Körper) $E_i := \mathrm{End}_A(Y_i)$ mit der meataxe (s. Darst. I). Y_i ist gegeben durch Matrizen $d_i(a_1), \ldots, d_i(a_s) \in F^{x_i\times x_i}$.
(1) Bestimme die maximalen Teilgitter von M: Bestimme für alle i die E_i-Vektorräume $\mathrm{Hom}_A(M, Y_i)$ durch Lösen des linearen Gleichungssystems

$$\overline{\Delta_M}(a_j)X = Xd_i(a_j) \quad \textit{für alle } j = 1, \ldots, s$$

sowie alle 1-dimensionalen E_i-Teilräume $\langle\varphi_{ij}\rangle$ von $\mathrm{Hom}_A(M, Y_i)$. Die maximalen Teilgitter von M ergeben sich als $M_{ij} := \ker(\varphi_{ij})$. Bestimme R-Basen dieser Gitter M_{ij} und transformiere die Darstellung Δ_M auf diese Basen zu $\Delta_{M_{ij}} : A \to R^{n\times n}$.
Mache weiter mit M_{ij} anstelle von M in (1) für alle M_{ij}, die nicht von der Form $\pi^m M'$ sind für ein schon gefundenes M' (Basen vergleichen).

Beispiel: $A = \mathbb{Z}_3 S_3$ und V der 2-dimensionale A_K-Modul. Auf einem $\mathbb{Z}_3 S_3$-Gitter M ist die Darstellung gegeben durch

$$\Delta_M((1,2)) := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \Delta_M((2,3)) := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

A hat 2 einfache Moduln gegeben durch

$$\delta_1((1,2)) = \delta_1((2,3)) = (1), \quad \delta_2((1,2)) = \delta_2((2,3)) = (-1)$$

Das GLS

$$\Delta_M((1,2)) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \delta_j((1,2)),\ \Delta_M((2,3)) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \delta_j((2,3))$$

hat für $j = 2$ nur Null und für $j = 1$ den Raum $\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \leq \mathbb{F}_3^{1\times 2}$ als Lösungsmenge. Also hat M genau ein maximales A-Teilgitter,

$$M' := \{(a,b) \in M \mid a + b \equiv_3 0\}$$

mit Basiswechselmatrix $T := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Es ist

$$\Delta_{M'}((1,2)) = T\Delta_M((1,2))T^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix},\ \ \Delta_{M'}((2,3)) = T\Delta_M((2,3))T^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Das GLS

$$\Delta_{M'}((1,2)) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \delta_j((1,2)),\ \Delta_{M'}((2,3)) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \delta_j((2,3))$$

hat für $j = 2$ nur Null und für $j = 1$ den Raum $\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle \leq \mathbb{F}_3^{1\times 2}$ als Lösungsmenge. Also hat M' genau ein maximales A-Teilgitter,

$$M'' := \{(a,b) \in M \mid a + b \equiv_3 0, a \equiv_3 0\} = 3M.$$

Ende am 7.11.2006

II. Gruppenringe und Brauercharaktere.

7 Dualität.

Sei G eine endliche Gruppe, R ein HIB, F ein Körper.

Bemerkung 7.1 *(a) Sind M_1 und M_2 zwei RG-Gitter, so ist auch* $\mathrm{Hom}_R(M_1, M_2)$ *ein RG-Gitter mit $fg : m_1 \mapsto (m_1 g^{-1})fg$ für alle $f \in \mathrm{Hom}_R(M_1, M_2)$ und alle $g \in G$. Insbesondere ist $M^* := \mathrm{Hom}_R(M, R)$ wieder ein RG-Gitter $(m)(fg) = (mg^{-1})f$ für $m \in M, g \in G, f \in M^*$.*
(b) Ist M ein FG-Modul, so ist

$$^\perp : \{U \leq_{FG} M\} \to \{V \leq_{FG} M^*\},\ U \mapsto U^\perp := \{f \in M^* \mid uf = 0 \text{ für alle } u \in U\}$$

ein Verbandsantiisomorphismus zwischen der Menge der FG-Teilmoduln von M und M^*.
(c) Ist M ein RG-Gitter und W ein RG-Modul, so ist $\mathrm{Hom}_R(M, W) \cong M^* \otimes_R W$ als RG-Modul. Genauer ist die Abbildung $\varphi : M^* \otimes W \to \mathrm{Hom}_R(M, W),\ f \otimes w \mapsto (m \mapsto (mf)w)$ ein RG-Modulisomorphismus.

Lemma 7.2 *Seien M, M_1, M_2, M_3 RG-Gitter.*
(a) $\mathrm{Hom}_R(M_1 \oplus M_2, M_3) \cong \mathrm{Hom}_R(M_1, M_3) \oplus \mathrm{Hom}_R(M_2, M_3)$ als RG-Gitter.
(b) $RG \cong RG^*$ vermöge $1 \mapsto \alpha$, wobei $(\sum_{g \in G} a_g g)\alpha = a_1$ (Augmentation).
(c) M e.e. projektiv $\Leftrightarrow$ M^* e.e. projektiv.
(d) M projektiv unzerlegbar $\Leftrightarrow$ M^* projektiv unzerlegbar.

Beweis. (a) ist klar.
(b) Für $h \in G$ bildet der Homomorphismus αh das Element $\sum_{g \in G} a_g g$ auf a_h ab. Also ist $(\alpha g \mid g \in G)$ die zu $(g \mid g \in G)$ duale Basis von RG^*.
(c) M projektiv genau dann, wenn M direkter Summand eine freien RG-Gitters, also von $\bigoplus^n RG$. Dann ist aber M^* direkter Summand des dualen Gitter $\bigoplus^n RG^* \cong \bigoplus^n RG$.
(d) Die unzerlegbaren direkten Summanden von RG und $RG^* \cong RG$ stehen in Bijektion.
□

Satz 7.3 *Sei Y ein einfacher FG-Modul mit projektiver Hülle $P(Y)$. Dann ist der duale Modul $P(Y)^* \cong P(Y^*)$ die projektive Hülle von Y^*. Insbesondere hat $P(Y)$ auch genau einen minimalen Teilmodul und dieser ist isomorph zu Y.*

Beweis. $P(Y)^*$ ist auch projektiv unzerlegbar und hat genau einen minimalen Teilmodul, nämlich $X^\perp$ mit $X \leq P(Y)$ der maximale Teilmodul. Es ist $X^\perp \cong (P(Y)/X)^* \cong Y^*$. Ist Y' der einfache Faktormodul von $P(Y)^*$, so hat auch $P(Y) = P(Y)^{**}$ genau einen minimalen Teilmodul und dieser ist isomorph zu $(Y')^*$. Wollen zeigen: $Y' \cong Y^*$.
Es ist $P(Y) = eFG$ mit einem primitiven Idempotent $e \in FG$. Also gilt auch für den minimalen Teilmodul $Z \leq P(Y)$, dass $eZ \neq 0$ ist.

Behauptung: Es ist auch $Ze \neq 0$. Sei dazu $x \in Z$ mit $ex = \sum_{g \in G} a_g g^{-1} \neq 0$ und $h \in G$ mit $(exh)\alpha = a_h \neq 0$. Da $(ab)\alpha = (ba)\alpha$ für beliebige $a, b \in FG$ gilt dann auch $(xhe)\alpha \neq 0$. Also ist

$$Ze \cong \mathrm{Hom}_{FG}(P(Y), Z) \neq 0$$

und daher $Z \cong Y$. $\square$

8 Relativ projektive Moduln.

Sei R ein HIB, G eine endliche Gruppe, $H \leq G$. Für einen RG-Modul M (immer e.e.) sei $M_{|H}$ der RH-Modul M mit Einschränkung der Operation. Ist M ein RH-Modul, so bezeichnet M^G den induzierten RG-Modul.

Definition 8.1 *Ein RG-Modul P heißt H-projektiv, falls für alle RG-Modulepimorphismen $\varphi : V \to W$ und alle RG-Homomorphismen $\psi : P \to W$ für die ein RH-Modulhomomorphismus $\tau' : P \to V$ existiert, der das Diagram kommutativ macht ($\tau'\varphi = \psi$) auch ein RG-Modulhomomorphismus $\tau : P \to V$ mit dieser Eigenschaft existiert.*

Bemerkung 8.2 *(a) Jeder RG-Modul ist G-projektiv.*
(b) P ist ein projektiver RG-Modul, genau dann wenn es eine Untergruppe $H \leq G$ gibt, so dass $P_{|H}$ projektiver RH-Modul ist und gleichzeitig P H-projektiv ist.
(c) Ist P ein freier R-Modul, so ist P projektiver RG-Modul $\Leftrightarrow$ P ist $\{1\}$-projektiv.

Satz 8.3 *Für einen RG-Modul P sind äquivalent:*
(a) P ist H-projektiv.
(b) Jede exakte Sequenz

$$0 \to V \xrightarrow{\varphi} W \xrightarrow{\psi} P \to 0$$

von RG-Moduln die als Sequenz von RH-Moduln

$$0 \to V_H \xrightarrow{\varphi} W_H \xrightarrow{\psi} P_H \to 0$$

zerfällt, zerfällt auch als Sequenz von RG-Moduln, d.h. es gibt einen RG-Modulmonomorphismus $\mu : P \to W$ so dass $W = V\varphi \oplus P\mu = \ker(\psi) \oplus \mathrm{Bild}(\mu)$ ist.
(c) P ist ein direkter Summand von $(P_H)^G$.
(d) Es gibt einen RH-Modul V für den P ein direkter Summand von V^G ist.

Beweis. (a) $\Rightarrow$ (b): direkt aus Definition
(b) $\Rightarrow$ (c): Sei $G = \dot\bigcup_{i=1}^{n} Hg_i$, $g_1 = 1$. Dann ist

$$W := (P_H)^G = P \otimes_{RH} RG = \bigoplus_{i=1}^{n} P \otimes g_i$$

als R-Modul. $\psi : W \to P, \sum_{i=1}^n v_i \otimes g_i \mapsto \sum_{i=1}^n v_i g_i$ ist ein RG-Epimorphismus. Sei $V := \ker(\psi)$ und $\varphi : V \to W$ die Inklusion. Dann ist $\mu : P \to W$, $v \mapsto v \otimes 1$ ein RH-Monomorphismus mit $\mu\psi = \mathrm{id}_P$. Nach Voraussetzung zerfällt damit auch die exakte Sequenz

$$0 \to V \to (P_H)^G = W \to P \to 0$$

von RG-Moduln, d.h. P ist direkter Summand von W.
(c) $\Rightarrow$ (d): klar
(d) $\Rightarrow$ (a): Sei P ein direkter Summand von V^G und ι, π zugehörige RG-Homomorphismen mit $\iota\pi = \mathrm{id}_P$. Seien $\psi : V' \to W$ ein RG-Epimorphismus und $\varphi : P \to W$ ein RG-Homomorphismus. Sei $\tau' : P \to V'$ ein RH-Homomorphismus mit $\tau'\psi = \varphi$. Definieren einen RG-Homomorphismus

$$\sigma : V^G \to V', \ \sum_{i=1}^n v_i \otimes g_i \mapsto \sum_{i=1}^n ((v_i \otimes 1)\pi\tau')g_i$$

(nachrechnen, dass σ G-invariant ist). Dann gilt $\sigma\psi = \pi\varphi$ denn $\sum (v_i \otimes g_i)\sigma\psi = \sum_{i=1}^n ((v_i \otimes 1)\pi\tau')g_i\psi = \sum_{i=1}^n ((v_i \otimes 1)\pi\varphi)g_i = \sum_{i=1}^n (v_i \otimes g_i)\pi\varphi$. Daher macht der RG-Homomorphismus $\tau := \iota\sigma$ das Diagramm kommutativ. $\square$

Folgerung 8.4 *Sei $Q \leq H \leq G$.*
(a) Ist P ein Q-projektiver RH-Modul, so ist P^G ebenfalls Q-projektiv.
(b) Ist P ein Q-projektiver RG-Modul und $Q \trianglelefteq G$, so ist P_H ebenfalls Q-projektiv.

<u>Beweis.</u> (a) $P \mid V^H = P \oplus S \Rightarrow P^G \mid V^G = P^G \oplus S^G$.
(b) Ist P ein direkter Summand von V^G (V ein RQ-Modul), so ist P_H ein direkter Summand von $(V^G)_H$. Dieser ist nach Mackey

$$(V^G)_H = \bigoplus_{G = \dot\bigcup HxQ} ((V \otimes x)_{H \cap Q^x})^H = (\bigoplus V \otimes x)^H$$

ein von Q nach H induzierter Modul, da $Q \trianglelefteq G$. $\square$

Folgerung 8.5 *Setzt man $Q = 1$ in Folgerung 8.4 so erhält man (wegen projektiv = 1-projektiv + R-frei):*
(a) Ist P ein projektiver RH-Modul, so ist P^G wieder projektiv.
(b) Ist P ein projektiver RG-Modul, so ist P_H projektiv.

Folgerung 8.6 *Sei (K, R, F) ein p-modulares System, P ein projektives RG-Gitter, $S \in \mathrm{Syl}_p(G)$. Dann ist die Einschränkung P_S ein freier RS-Modul. Insbesondere ist*

$$\dim_R(P) = \dim_F(\overline{P}) = m|S|$$

für ein $m \in \mathbb{N}$.

Beweis. S hat nur einen einfachen FS-Modul, den trivialen Modul F. Weiter ist $RS/J(RS) \cong F$, also RS die projektive Hülle von F und als solcher der einzige projektiv unzerlegbare RS-Modul. Da P_S projektiv ist, ist er direkte Summe von Moduln $\cong RS$ also frei. $\square$

Übung: Direkte Summanden von H-projektiven Moduln sind wieder H-projektiv.

Ende am 10.11.06

Definition 8.7 *Sei* $G = \dot\bigcup_{i=1}^n Hg_i$ *und* V *ein* RG*-Modul.*
$\mathrm{Inv}_H(V) := \{v \in V \mid vh = v \text{ für alle } h \in H\}$.
$\mathrm{Tr}_H^G : \mathrm{Inv}_H(V) \to \mathrm{Inv}_G(V), v \mapsto \sum_{i=1}^n vg_i$ *heißt die* Spur.

Bemerkung 8.8 *(a)* Tr_H^G *ist unabhängig von der Wahl der Vertreter* g_i.
(b) $\mathrm{Tr}_U^H \mathrm{Tr}_H^G = \mathrm{Tr}_U^G$ *für alle* $U \leq H \leq G$.
(c) Tr_H^G *ist* R*-linear.*
(d) Sind V *und* W *zwei* RG*-Moduln, so ist* $\mathrm{Inv}_H(\mathrm{Hom}_R(V,W)) = \mathrm{Hom}_{RH}(V,W)$.
(e) $\mathrm{Tr}_H^G : \mathrm{Hom}_{RH}(V,W) \to \mathrm{Hom}_{RG}(V,W)$ *ist* R*-Modulhomomorphismus.*

Lemma 8.9 *Seien* P *und* W RG*-Moduln.*
(a) Für $\tau \in \mathrm{End}_{RG}(P)$, $\varphi \in \mathrm{Hom}_{RH}(P,W)$, $\psi \in \mathrm{Hom}_{RH}(W,P)$ *ist*

$$\begin{aligned}(\tau\varphi)\,\mathrm{Tr}_H^G &= \tau(\varphi\,\mathrm{Tr}_H^G)\\ (\psi\tau)\,\mathrm{Tr}_H^G &= (\psi\,\mathrm{Tr}_H^G)\tau\end{aligned}$$

(b) $(\mathrm{End}_{RH}(P))\,\mathrm{Tr}_H^G \trianglelefteq \mathrm{End}_{RG}(P)$.
(c) $\tau \in \mathrm{End}_{RG}(P) \Rightarrow (\tau)\,\mathrm{Tr}_H^G = [G:H]\tau$.

Satz 8.10 *(Higman, Gaschütz) Der* RG*-Modul* P *ist* H*-projektiv* $\Leftrightarrow$ $(\mathrm{End}_{RH}(P))\,\mathrm{Tr}_H^G = \mathrm{End}_{RG}(P)$ $\Leftrightarrow$ *es gibt* $\tau \in \mathrm{End}_{RH}(P)$ *mit* $(\tau)\,\mathrm{Tr}_H^G = \mathrm{id}_P$.

Beweis. Die zweite Äquivalenz ist klar, da das Bild von Tr_H^G ein Ideal in $\mathrm{End}_{RG}(P)$ ist. Zur ersten Äquivalenz: Sei P ein H-projektiver RG-Modul und $\mu : P \to (P_H)^G$, $\pi : (P_H)^G \to P$ zwei RG-Homomorphismen mit $\mu\pi = \mathrm{id}_P$. Für $v \in P$ ist $v\mu = \sum_{i=1}^n v_i \otimes g_i$. Setze dann

$$v\tau := (v_1 \otimes 1)\pi.$$

Dann ist $(vh)\tau = (v_1h \otimes 1)\pi = (v_1 \otimes 1)\pi h = v\tau h$ für alle $h \in H$. Weiter ist

$$(v)(\tau\,\mathrm{Tr}_H^G) = \sum_{i=1}^n (vg_i^{-1})\tau g_i = \sum_{i=1}^n (v_i \otimes 1)\pi g_i = \sum_{i=1}^n (v_i \otimes g_i)\pi = v\iota\pi = v$$

also ist $\tau\,\mathrm{Tr}_H^G = \mathrm{id}_P$ und damit Tr_H^G surjektiv.
Sei umgekehrt die Spurabbildung surjektiv und $\tau \in \mathrm{End}_{RH}(P)$ mit $\tau\,\mathrm{Tr}_H^G = \mathrm{id}_P$. Sei $\pi : P_H^G \to P, \sum_{i=1}^n v_i \otimes g_i \mapsto \sum_{i=1}^n v_i g_i$ der RG-Epimorphismus und $\varphi' : P \to P_H^G$ ein dazu linksinverser RH-Homomorphismus (dieser exisitiert immer, da P_H immer direkter Summand von $(P_H^G)_H$ ist). Setze $\varphi := (\tau\varphi')\,\mathrm{Tr}_H^G : P \to P_H^G$. Dann ist

$$\varphi\pi = (\tau\varphi')\,\mathrm{Tr}_H^G\,\pi = (\tau\varphi'\pi)\,\mathrm{Tr}_H^G = (\tau)\,\mathrm{Tr}_H^G = \mathrm{id}_P\,.$$

$\square$

Folgerung 8.11 *(Maschke) Ist $[G : H]$ eine Einheit in R, so ist jeder RG-Modul H-projektiv.*

Folgerung 8.12 *Jeder RG-Modul ist S-projektiv, falls $S \in \mathrm{Syl}_p(G)$ und (K, R, F) ein p-modulares System.*

Folgerung 8.13 *Sei (K, R, F) ein p-modulares System und $p \not| |G|$. Dann ist jedes RG-Gitter projektiv und ebenso jeder FG-Modul projektiv. Die Abbildungen $V \mapsto \overline{V} = V/\pi V$ und $V \mapsto V_K$ induzieren Bijektionen zwischen den Isomorphieklassen von RG-Gittern und den der FG-Moduln bzw. KG-Modul. Es ist V unzerlegbar $\Leftrightarrow \overline{V}$ einfach $\Leftrightarrow V_K$ einfach.*

9 Brauercharaktere.

Sei (K, R, F) ein p-modulares System, G eine endliche Gruppe.

Definition 9.1 *Sei V ein RG-Modul. Der* Brauercharakter von *V ist eine Abbildung*

$$\beta_V : G_{p'} := \{g \in G \mid p \not| o(g)\} \to R$$

definiert wie folgt: Ist $g \in G_{p'}$ so gibt es bis auf Isomorphie genau ein $R\langle g\rangle$-Gitter M mit $M/\pi M \cong V/\pi V$ (als $R\langle g\rangle$-Moduln). Setze $\beta_V(g) := \mathrm{Spur}(\Delta_M(g))$.

Bemerkung 9.2 *(a) $\beta_V = \beta_{\overline{V}}$ und $\beta_V(1) = \dim_F(\overline{V})$.*
(b) Ist $g \in G_{p'}$ von Ordnung m, so ist $\beta_V(g)$ eine Summe von m-ten Einheitswurzeln in K.
(c) $\beta_{\overline{V}^*}(g) = \beta_{\overline{V}}(g^{-1})$ und $\beta_{\overline{V}_1 \otimes_F \overline{V}_2} = \beta_{\overline{V}_1}\beta_{\overline{V}_2}$
(d) β_V ist Klassenfunktion auf $G_{p'}$.
(e) Ist V ein RG-Gitter mit Charakter $\psi : G \to R, g \mapsto \mathrm{Spur}(\Delta_V(g))$, so ist $\beta_V = \psi_{|G_{p'}}$.
(f) $V \cong V' \Rightarrow \beta_V = \beta_{V'}$.
(g) $0 \le V \le W$ RG-Moduln $\Rightarrow \beta_W = \beta_V + \beta_{W/V}$.

Beweis. Zu (d): Sei $g_1 := hgh^{-1} \in G_{p'}$ und M_1 ein $R\langle g_1\rangle$-Gitter mit $\varphi : \overline{M_1} \to \overline{V}_{\langle g_1\rangle}$ ein $R\langle g_1\rangle$-Ismomorphismus. Dann wird M_1 zu einem $R\langle g\rangle$-Gitter vermöge $m_1 g^j := m_1 g_1^j$ für alle $j \in \mathbb{N}$. Es ist $\varphi' : \overline{M_1} \to \overline{V}$, $m_1 \mapsto m_1 \varphi h$ ein $R\langle g\rangle$-Modulisomorphismus. Also ist

$$\beta_V(g) = \mathrm{Spur}(\Delta_{M_1}(g)) = \mathrm{Spur}(\Delta_{M_1}(g_1)) = \beta_V(g_1).$$

□

Satz 9.3 *Sei P ein projektives RG-Gitter mit Charakter $\eta : G \to R, g \mapsto \mathrm{Spur}(\Delta_P(g))$. Dann ist $\eta(g) = 0$ für alle $g \in G - G_{p'}$ und $\eta(1)$ ist durch die Ordnung der p-Sylowgruppe von G teilbar.*

Beweis. Sei $S \in \mathrm{Syl}_p(G)$. Dann ist $P_{|S}$ frei, also isomorph zur direkten Summe von regulären RS-Gittern. Ist also $1 \neq s \in S$, so ist $\eta(s) = m\,\mathrm{Spur}_{reg}(s) = 0$. Sei nun $g \in G - G_{p'}$. Dann gibt es eindeutige $g_1, g_2 \in G$ mit $g = g_1 g_2 = g_2 g_1$ und $g_1 \in G_{p'}$, $g_2 \neq 1$ und $o(g_2) = p$-Potenz. Weiter ist $\langle g \rangle = \langle g_1 \rangle \times \langle g_2 \rangle$ und $P_{|\langle g \rangle} = V_1 \otimes V_2$ für $R\langle g_i \rangle$-Moduln V_i. Es ist $\Delta_P(g) = \Delta_{V_1}(g_1) \otimes \Delta_{V_2}(g_2)$. Da P ein projektiver RG-Modul war, ist $P_{\langle g_2 \rangle} \cong V_2^{\dim(V_1)}$ ein projektiver $R\langle g_2 \rangle$-Modul und also frei. Damit gilt $\mathrm{Spur}(\Delta_{V_2}(g_2)) = 0$ und also

$$\eta(g) = \mathrm{Spur}(\Delta_P(g)) = \mathrm{Spur}(\Delta_{V_1}(g_1))\,\mathrm{Spur}(\Delta_{V_2}(g_2)) = 0.$$

□

Definition 9.4 *Seien $Y_1, \ldots, Y_s$ Vertreter der Isomorphieklassen einfacher RG-Moduln und*

$$\mathrm{IBr}(G) := \{\varphi_1, \ldots, \varphi_s\}$$

die zugehörigen Brauercharaktere. Bezeichne U_i das projektive RG-Gitter mit Kopf Y_i und sei Φ_i der Charakter von U_i $(i = 1, \ldots, s)$. Weiter sei

$$\mathrm{Irr}(G) := \{\chi_1, \ldots, \chi_h\}$$

die Menge der Charaktere irreduzibler KG-Moduln $X_1, \ldots, X_h$. Auf dem Raum der Klassenfunktionen $f : G_{p'} \to K$ definieren wir ein K-wertiges Skalarprodukt

$$(\varphi, \psi)_{G_{p'}} := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G_{p'}} \varphi(g)\psi(g^{-1}).$$

Satz 9.5 *(Orthogonalitätsrelationen)*
(a) $(\Phi_i, \varphi_j)_{G_{p'}} = \delta_{ij} \dim_F(\mathrm{End}_{FG}(Y_j))$.
(b) Sind K und F Zerfällungskörper für G so ist für $g_1, g_2 \in G_{p'}$

$$\sum_{i=1}^{s} \varphi_i(g_1)\Phi_i(g_2^{-1}) = \begin{cases} 0 & \textit{falls } g_1 \not\sim g_2 \\ |C_G(g_1)| & \textit{falls } g_1 \sim g_2 \end{cases}$$

Beweis. (a) Ist P ein projektiver FG-Modul und Y ein beliebiger FG-Modul, so ist $P \otimes_F Y$ wieder ein projektiver FG-Modul, denn:
P projektiv $\Leftrightarrow$ P ist 1-projektiv $\Leftrightarrow$ P ist direkter Summand eines Moduls V_1^G $\Leftrightarrow$ $P \otimes_F Y$ direkter Summand von $(V \otimes_F Y)_1^G \cong Y \otimes_F (V_1^G)$.
Insbesondere ist $\overline{U} := \overline{U_i} \otimes Y_j^*$ ein projektiver FG-Modul. Sei U das zugehörige projektive RG-Gitter mit $U/\pi U \cong \overline{U}$ und θ der Charakter von U. Dann ist für $g \in G_{p'}$ $\theta(g) = \Phi_i(g)\varphi_j(g^{-1})$ und $\theta(h) = 0$ falls $h \in G - G_{p'}$. Also ist

$(\Phi_i, \varphi_j)_{G_{p'}} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \theta(g) = (\theta, \chi_1)_G = \dim_K(\mathrm{Hom}_{KG}(U_K, K)) \overset{*}{=} \dim_F(\mathrm{Hom}_{FG}(\overline{U}, F)) \overset{**}{=}$
$\dim_F(\mathrm{Hom}_{FG}(F, \overline{U})) = \dim_F(\mathrm{Inv}_{FG}(\overline{U})) = \dim_F(\mathrm{Inv}_{FG}(\overline{U_i} \otimes_F Y_j^*)) =$
$\dim_F(\mathrm{Inv}_{FG}(\mathrm{Hom}_F(\overline{U_i}, Y_j))) = \dim_F(\mathrm{Hom}_{FG}(\overline{U_i}, Y_j)) = \delta_{ij} \dim_F(\mathrm{End}_{FG}(Y_j))$.

wobei die Gleichheit $*$ folgt, da U projektiv ist und daher Epimorphismen $\overline{U} \to F = R/\pi R$ zu Epimorphismen $U \to R$ (und damit $U_K \to K$) liftbar sind, und die Gleichheit $**$ daraus,

dass beide Dimensionen die Vielfachheit der projektiven Hülle $P(F)$ in U zählen (vgl. Satz 7.3).
Ende am 14.11.2006
(b) Sei Δ_{ij} die Vielfachheit von X_i in $U_j \otimes_R K$. Dann ist $\Phi_j = \sum_{i=1}^{h} \Delta_{ij} X_i$ und also für $g \in G_{p'}$:

$$\sum_{j=1}^{s} \varphi_j(g_1)\Phi_j(g_2^{-1}) = \sum_{j=1}^{s}\sum_{i=1}^{h} \Delta_{ij}\varphi_j(g_1)\chi_i(g_2^{-1}).$$

Da K und F Zerfällungskörper für G sind, ist $\Delta_{ij} = d_{ij}$ und

$$\sum_{j=1}^{s} \Delta_{ij}\varphi_j(g_1) = \chi_i(g_1).$$

Also ergibt sich insgesamt

$$\sum_{j=1}^{s} \varphi_j(g_1)\Phi_j(g_2^{-1}) = \sum_{i=1}^{h} \chi_i(g_1)\chi_i(g_2^{-1})$$

und daraus die Behauptung nach Darstellungstheorie I. □

Ab jetzt seien K und F Zerfällungskörper für G.

Bemerkung 9.6 *In Matrizen lesen sich die Orthogonalitätsrelationen wie folgt: Seien $\{g_1, \ldots, g_{s'}\}$ Vertreter der G-Konjugiertenklassen in $G_{p'}$ und*

$$\mathbf{P} := (\Phi_i(g_j^{-1})),\ \mathbf{S} := (\varphi_i(g_j)) \in R^{s\times s'},\ d := \mathrm{diag}(|C_G(g_1)|, \ldots, |C_G(g_{s'})|).$$

Dann liest sich 9.5 (b) als $\mathbf{S}^{tr}\mathbf{P} = d$. Wegen

$$(\Phi_i, \varphi_j)_{G_{p'}} = \frac{1}{|G|}\sum_{l=1}^{s'} \frac{|G|}{|C_G(g_l)|}\Phi_i(g_l^{-1})\varphi_j(g_l)$$

ergibt sich 9.5 (a) im Zerfällungskörperfall als $\mathbf{P}d^{-1}\mathbf{S}^{tr} = I_s$.

Folgerung 9.7 *(a) Die Anzahl s der irreduziblen Brauercharaktere von G ist die Anzahl der p'-Klassen in G.*
(b) $\mathrm{IBr}(G)$ und auch $(\Phi_1, \ldots, \Phi_s)$ sind Basen des Raums der Klassenfunktionen auf $G_{p'}$.
(c) Ist V ein FG-Modul mit Brauercharakter

$$\beta_V = \sum_{i=1}^{s} a_i\varphi_i,$$

so ist a_i die Vielfachheit von Y_i als Kompositionsfaktor von V.

Beweis. Wegen der Orthogonalitätsrelationen (Satz 9.5 (a)) sind $(\varphi_1, \ldots, \varphi_s)$ und auch $(\Phi_1, \ldots, \Phi_s)$ K-linear unabhängige Klassenfunktionen auf $G_{p'}$. Also ist $s \leq s' :=$ Anzahl

der p'-Klassen in G.
Seien $g_1, \ldots, g_{s'}$ Vertreter der p'-Klassen in G. Wegen Satz 9.5 (b) gilt für die $s \times s'$-Matrizen $\mathbf{S} := (\varphi_i(g_j))$ und $\mathbf{P} := (\Phi_i(g_j^{-1}))$

$$\mathbf{S}^{tr}\mathbf{P} = \mathrm{diag}(|C_G(g_1)|, \ldots, |C_G(g_{s'})|) = d.$$

Damit ist der Rang von $\mathbf{S}$ und $\mathbf{P}$ größer oder gleich s' und daher $s \geq s'$. $\square$

Beispiel: $\mathbb{Z}_2\mathcal{S}_3$.

Satz 9.8 *(a)* $(\Phi_i, \Phi_j)_{G_{p'}} = (\Phi_i, \Phi_j)_G = c_{ij}$, *wo* $C = (c_{ij})$ *die Cartanmatrix ist.*
(b) $(\varphi_i, \varphi_j)_{G_{p'}} = \gamma_{ij}$, *wo* $(\gamma_{ij}) = C^{-1}$ *die Inverse der Cartanmatrix ist.*

Beweis. (a) ist klar nach Folgerung 5.7.
(b) Es ist

$$\sum_{j=1}^{s} c_{ij}\gamma_{jk} = \sum_{j=1}^{s} c_{ij}(\varphi_j, \varphi_k)_{G_{p'}} = (\sum_{j=1}^{s} c_{ij}\varphi_j, \varphi_k)_{G_{p'}} = (\Phi_i, \varphi_k)_{G_{p'}} = \delta_{ik}.$$

$\square$

Lemma 9.9 *Sei* $S \in \mathrm{Syl}_p(G)$, $|S| = p^a$ *und* $\alpha : G_{p'} \to K$ *eine Klassenfunktion. Definiere*

$$\eta_\alpha : G \to K, g \mapsto \begin{cases} p^a\alpha(g) & \text{falls } g \in G_{p'} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Ist für jede p'*-Untergruppe* $H \leq G$ *die Einschränkung von* α *auf* H *ein verallgemeinerter Charakter (*$\mathbb{Z}$*-Linearkombination von Charakteren), so ist auch* η_α *ein verallgemeinerter Charakter von* G*.*

Beweis. Wir benutzen den Brauerschen Hauptsatz über verallgemeinerte Charaktere aus dem letzten Semester. Dieser besagt dass eine Klassenfunktion ein verallgemeinerter Charakter ist, falls ihre Einschränkung auf alle elementaren Untergruppen von G ein verallgemeinerter Charakter ist. Sei also $E = Q \times A$ eine elementare Untergruppe, Q eine p-Gruppe und A eine p'-Gruppe und bezeichne ρ den regulären Charakter von Q, d.h. $\rho(g) = 0$ falls $g \neq 1$ und $\rho(1) = |Q| = p^b$. Dann ist die Einschränkung von η_α auf E gleich $p^{a-b}(\rho \otimes \alpha_{|A})$ ein verallgemeinerter Charakter von E. $\square$

Folgerung 9.10 $\det(C)$ *ist eine* p*-Potenz.*

Beweis. Sei $p^a = |S|$ mit $S \in \mathrm{Syl}_p(G)$. Dann ist

$$p^{2a}(\gamma_{ij}) = p^{2a}(\varphi_i, \varphi_j)_{G_{p'}} = (\eta_{\varphi_i}, \eta_{\varphi_j})_G \in \mathbb{Z}$$

da die Einschränkung von φ_i auf jede p'-Untergruppe von G ein Charakter ist und daher nach dem Lemma η_{φ_i} ein verallgemeinerter Charakter. $\square$

Ende 17.11.

Lemma 9.11 *Es erzeugen die Zeilen von $H := (\chi_i(g_j))_{i\in[1,h],j\in[1,s]}$ den R-Modul aller Zeilen $R^{1\times s}$.*

Beweis. Es genügt, eine Matrix $A \in R^{s\times h}$ mit $AH \in \mathrm{GL}_s(R)$ zu finden. Dafür wiederum genügt es, $\bar{A}\bar{H} \in \mathrm{GL}_s(F)$ zu wissen.

Sei $i \in [1, s]$. Es genügt, eine R-Linearkombination ψ von Charakteren von G zu finden mit $\psi(g_i) \not\equiv_\pi 0$ und mit $\psi(g_j) \equiv_\pi 0$ für $j \neq i$.

Sei Q eine p-Sylowgruppe von $\mathrm{C}_G(g_i)$. Sei $\delta : \langle g_j\rangle \to R$ durch $\delta(g_i) = 1$ und $\delta(x) = 0$ für $x \neq g_i$ definiert. Dies ist eine R-Linearkombination von Charakteren, da die Charaktertafel von $\langle g_i\rangle$ Determinantenquadrat $\pm|\langle g_i\rangle|^{|\langle g_i\rangle|} \in R^*$ hat.

Sei $\psi := (1 \otimes \delta)\uparrow^G_{Q\times\langle g_i\rangle}$. Es ist $\psi(g_j) = |Q \times \langle g_i\rangle|^{-1} \sum_{x\in G,\ xg_jx^{-1} \in Q\times\langle g_i\rangle} (1 \otimes \delta)(xg_jx^{-1})$. Ist $xg_jx^{-1} \neq g_i$, so ist $xg_jx^{-1} \notin Q \times \{g_i\}$, da alle Elemente in $(Q \setminus \{1\}) \times \{g_i\}$ keine p'-Elemente sind. Ist also $j \neq i$, so ist $\psi(g_j) = 0$. Hingegen ist $\psi(g_i) = |Q \times \langle g_i\rangle|^{-1} \sum_{x\in\mathrm{C}_G(g_i)}(1\otimes\delta)(g_i) = |Q \times \langle g_i\rangle|^{-1}|\mathrm{C}_G(g_i)| \in R^*$. □

Satz 9.12 *Sei $g_1, \ldots, g_s$ ein Vertretersystem der p'-Klassen von G.*
(a) Es gibt $\tilde{d}_{ij} \in \mathbb{Z}$ so dass $\varphi_j = \sum_{i=1}^h \tilde{d}_{ij}(\chi_i)_{|G_{p'}}$. Die Elementarteiler der Zerlegungsmatrix D sind alle gleich 1.
(b) $p \nmid \det(\varphi_i(g_j))^2 \in \mathbb{Z} \subset R$
(c) Sei v die Bewertung zu R mit $v(p) = 1$ und $d_i := v(|C_G(g_i)|)$. Dann sind die Elementarteiler von C gleich $(p^{d_1}, \ldots, p^{d_s})$.
(d) $v(\Phi_i(g_j)) \geq d_j$ und für jedes i gibt es ein j mit $v(\Phi_i(g_j)) = d_j$.

Beweis. (a) Sei $g \in G$. Dann hat g eine eindeutige Darstellung der Form $g = g_1g_2 = g_2g_1$ mit $g_2 \in G_{p'}$ und $o(g_1) = p$-Potenz. Setze $\tilde{\varphi}(g) := \varphi_j(g_2)$. Dann ist $\tilde{\varphi}$ ein verallgemeinerter Charakter von G, denn für alle p-elementaren Untergruppen $E = Q \times A$ ist $\tilde{\varphi}_E = 1_Q \otimes (\varphi_j)_A$ ein verallgemeinerter Charakter. Also ist $\varphi_j = \sum_{i=1}^h \tilde{d}_{ij}(\chi_i)_{|G_{p'}}$. Für die Zerlegungszahlen d_{ij} gilt

$$(\chi_i)_{G_{p'}} = \sum_{j=1}^s d_{ij}\varphi_j = \sum_{j=1}^s \sum_{l=1}^h d_{ij}\tilde{d}_{lj}(\chi_l)_{G_{p'}}$$

und ebenso

$$\varphi_j = \sum_{i=1}^h \sum_{l=1}^s \tilde{d}_{ij}d_{il}\varphi_l.$$

Da $(\varphi_1, \ldots, \varphi_s)$ eine Basis ist, folgt daraus $\sum_{i=1}^h \tilde{d}_{ij}d_{ik} = \delta_{jk}$ und die Elementarteiler von D sind alle gleich 1.
(b) Mit vorangegangenem Lemma erzeugen die Zeilen von H den R-Modul $R^{1\times s}$. Da sich H als Produkt aus Zerlegungsmatrix und $\mathbf{S}$ schreiben läßt, gilt dies auch $\mathbf{S}$. Also ist $\det(\varphi_i(g_j)) \in R^*$. Weiter ist

$$\mathrm{diag}(|C_G(g_1)|, \ldots, |C_G(g_s)|) = (\Phi_i(g_j))^{tr}(\varphi_i(g_j^{-1})) = (\varphi_i(g_j))^{tr}C(\varphi_i(g_j^{-1}))$$

Also ist $\det(\varphi(g_j))^2 \in \mathbb{Z}$.
(c) In $R^{s\times s}$ ist C äquivalent zu einer Matrix $\mathrm{diag}(p^{d_1},\dots,p^{d_s})$ (s.o.). Da die Determinante von C eine p-Potenz ist, sind also auch die Elementarteiler von C über $\mathbb{Z}$ gleich $(p^{d_1},\dots,p^{d_s})$.
$\square$

10 Charaktere in Blöcken.

Generalvoraussetzung für diesen Abschnitt:
(K,R,F) ein p-modulares System, so dass K und F Zerfällungskörper, v die Bewertung von K mit $v(p)=1$.
$RG = \bigoplus_{j=1}^m RGb_j$ (Blockzerlegung), $B_i := RGb_i$.
$KG = \bigoplus_{j=1}^h RGc_j$ mit $c_j = \frac{\chi_j(1)}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_j(g^{-1})g$.
$\mathrm{Irr}(B_i) := \{\chi_j \mid 1\le j\le h, c_jb_i = c_j\}$ die Menge der irreduziblen gewöhnlichen Charaktere im Block B_i und $\mathrm{IBr}(B_i)\subset\{\varphi_1,\dots,\varphi_s\}$ die Menge der irreduziblen Brauercharaktere im Block B_i.

Satz 10.1 *(Osima)* $b_i = \sum_{\chi_j\in\mathrm{Irr}(B_i)} c_j = \sum_{g\in G} r_g g$ *mit* $r_g = 0$, *falls* $g\notin G_{p'}$.

Beweis. Es ist $b_i = \sum_{\chi_j\in\mathrm{Irr}(B_i)} c_j = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\sum_{\chi_j\in\mathrm{Irr}(B_i)}\chi_j(1)\chi_j(g^{-1})g$. Die Klassenfunktion $g\mapsto\sum_{\chi_j\in\mathrm{Irr}(B_i)}\chi_j(1)\chi_j(g^{-1})$ ist der Charakter des projektiven RG-Moduls B_i, nimmt also nach Satz 9.3 auf $G-G_{p'}$ nur den Wert 0 an. $\square$

Definition 10.2 $d(\chi_j) := v(|G|) - v(\chi_j(1))$ *heißt der* Defekt *des Charakters* χ_j.
$d(B_i) := \max\{d(\chi_j)\mid\chi_j\in\mathrm{Irr}(B_i)\}$ *heißt der* Defekt *des Blocks* B_i.
Für $\chi_j\in\mathrm{Irr}(B_i)$ *heißt* $h(\chi_j) := d(B_i) - d(\chi_j)$ *die* Höhe *von* χ_j.

Ende 21.11.

Lemma 10.3 *Sei* $\chi\in\mathrm{Irr}(B)$, $\varphi\in\mathrm{IBr}(B)$.
(a) $v(\chi(g)) \ge v(|C_G(g)|) - d(\chi) \ge v(|C_G(g)|) - d(B)$ *für alle* $g\in G$.
(b) Für $g\in G_{p'}$ *ist*

$$\min\{v(\chi(g))\mid\chi\in\mathrm{Irr}(B)\} = \min\{v(\varphi(g))\mid\varphi\in\mathrm{IBr}(B)\}$$

(c) $v(\varphi(g)) \ge v(|C_G(g)|) - d(B)$ *für alle* $g\in G_{p'}$.
(d) Ist $v(|G|) = a$ *so gilt*

$$\begin{array}{ll} p^{a-d(B)} \mid \chi(1) & \textit{für alle } \chi\in\mathrm{Irr}(B) \\ p^{a-d(B)} \mid \varphi(1) & \textit{für alle } \varphi\in\mathrm{IBr}(B) \end{array}$$

und es gibt $\chi\in\mathrm{Irr}(B), \varphi\in\mathrm{IBr}(B)$ *mit*

$$p^{a-d(B)+1}\nmid\chi(1),\ p^{a-d(B)+1}\nmid\varphi(1).$$

Beweis. (a) $\frac{|G|}{|C_G(g)|}\frac{\chi(g)}{\chi(1)}$ ganz algebraisch, also in R. Also ist

$$v(\chi(g)) + v(\frac{|G|}{\chi(1)}) - v(|C_G(g)|) = v(\chi(g)) + d(\chi) - v(|C_G(g)|) \geq 0.$$

(b) Sei D_B die Zerlegungsmatrix des Blocks B, $\mathrm{Irr}(B) := \{\chi_1, \dots, \chi_k\}$, $\mathrm{IBr}(B) := \{\varphi_1, \dots, \varphi_{e_B}\}$, $g_1, \dots, g_s$ Vertreter der p'-Klassen in G. Dann ist

$$(\chi_i(g_j)) = D_B(\varphi_i(g_j)) = A_1 \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} A_2(\varphi_i(g_j))$$

wobei A_1, A_2 ganzzahlig invertierbare Matrizen sind da D_B Elementarteiler 1 hat, und $\chi_{i|G_{p'}} = \sum_{l=1}^{e_B} d_{il}\varphi_l$. Die j-te Spalte dieses Produkts ist teilbar durch $p^{\min\{v(\varphi(g_j))|\varphi\in\mathrm{IBr}(B)\}}$, also ist auch die j-te Spalte von $(\chi_i(g_j))$ durch diese p-Potenz teilbar. Damit ist

$$l_j := \min\{v(\varphi(g_j)) \mid \varphi \in \mathrm{IBr}(B)\} \leq \min\{v(\chi(g_j)) \mid \chi \in \mathrm{Irr}(B)\} =: r_j$$

Die j-te Spalte von $(\chi_i(g_j))$ ist durch p^{r_j} teilbar, also auch die j-te Spalte von $A_1^{-1}(\chi_i(g_j))$ und damit folgt $l_j = r_j$. □

Achtung: Für Brauercharaktere $\varphi \in \mathrm{IBr}(G)$ gilt nicht immer $\varphi(1) \mid |G|$. Beispiel: $G = McL$, $|G| = 2^7 3^6 5^3 \cdot 7 \cdot 11$. $\varphi \in \mathrm{IBr}(\mathbb{Z}_2 G)$ mit $\varphi(1) = 230$.

Satz 10.4 *Äquivalent sind für einen Block $B = RGb$ und $\chi \in \mathrm{Irr}(B)$.*
(a) $d(\chi) = 0$.
(b) $\chi(g) = 0$ für alle $1 \neq g \in G$ von p-Potenzordnung.
(c) $\chi(g) = 0$ für alle $g \in G - G_{p'}$.
(d) $c = \frac{\chi(1)}{|G|}\sum_{g\in G}\chi(g^{-1})g \in RG$ (ist damit ein Blockidempotent).
(e) $\{\chi\} = \mathrm{Irr}(B)$.
(f) $d(B) = 0$.
(g) $D_B = (1)$ (Zerlegungsmatrix von B).
(g') $C_B = (1)$ (Cartanmatrix von B).
(h) χ ist Charakter eines projektiven RG-Gitters.
(i) FGb einfacher Ring.

Beweis. (a) ⇒ (d) klar, da dann $\chi(1)/|G| \in R$.
(d) ⇒ (e) klar nach Satz 10.1
(a) ⇔ (f) ebenfalls nach Satz 10.1
(e) ⇔ (g) klar.
(g) ⇔ (g') klar, da $C_B = D_B^{tr} D_B$ und D_B nur Einträge in $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ hat.
(g) ⇒ (h) folgt aus Brauerreziprozität.
(h) ⇒ (c) ist Satz 9.3.

(c) $\Rightarrow$ (b) klar.
(f) $\Rightarrow$ (a) klar.
(b) $\Rightarrow$ (a) Sei $S \in \mathrm{Syl}_p(G)$. Dann ist $(\chi_S, 1_S)_S = \frac{1}{|S|} \sum_{g \in S} \chi(g) = \frac{\chi(1)}{|S|} \in \mathbb{Z}$ also ergibt sich (a).
(g') $\Leftrightarrow$ (i): Übung. $\square$

Bemerkung 10.5 *Zu $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ gehört ein K-Algebrenhomomorphismus $\omega : Z(KG) \to K$ definiert auf den Klassensummen $\sigma(g_j)$ durch*

$$\omega(\sigma(g_j)) := \frac{|g_j^G| \chi(g_j)}{\chi(1)} \in R, \textit{ da ganz algebraisch.}$$

Die Einschränkung von ω auf $Z(RG)$ liefert einen R-Algebrenhomomorphismus $\omega : Z(RG) \to R$ und somit einen F-Algebrenhomomorphismus $\overline{\omega} : Z(FG) \to F$. (Beachte: die Klassensummen bilden auch eine Basis von $Z(FG)$.)
Für $\chi_i, \chi_j \in \mathrm{Irr}(KG)$ mit zugehörigen zentralen Charakteren ω_i, ω_j und zentral primitiven Idempotenten $c_i = \frac{\chi_i(1)}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_i(g^{-1}) g \in KG$ gilt $\omega_j(c_i) = \delta_{ij}$. Wegen Satz 10.1 folgt somit $\omega(b) = \begin{cases} 1 & \chi \in \mathrm{Irr}(RGb) \\ 0 & \textit{sonst} \end{cases}$ und daher $\overline{\omega_i} \neq \overline{\omega_j}$ falls χ_i und χ_j in verschiedenen Blöcken liegen.

Satz 10.6 *Äquivalent sind für $\chi_i, \chi_j \in \mathrm{Irr}(G)$.*
(a) χ_i und χ_j liegen im gleichen Block.
(b) $\overline{\omega_i} = \overline{\omega_j}$.
(c) $\omega_i(\sigma(g_l)) \equiv_{\pi R} \omega_j(\sigma(g_l))$ für alle $l = 1, \ldots, s$, wobei $\sigma(g_l)$ die Summe über die G-Konjugiertenklasse von $g_l \in G_{p'}$ bezeichne.
(d) $\omega_i(\sigma(g_l)) \equiv_{pR} \omega_j(\sigma(g_l))$ für alle $l = 1, \ldots, s$.

Beweis. Für ein Blockidempotent b ist $\omega(b) = \begin{cases} 1 & \chi \in \mathrm{Irr}(RGb) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ und daher $\overline{\omega_i} \neq \overline{\omega_j}$ falls χ_i und χ_j in verschiedenen Blöcken liegen. Weiter ist $\overline{\omega_i} : Z(FG) \to F$ ein F-Algebrenhomomorphismus. Für jeden Algebrenhom. $0 \neq \lambda : Z(FG) \to F$ ist $\ker(\lambda)$ ein Ideal in $Z(FG)$. Es ist

$$Z(FG) = Z(FG)\overline{b_1} \oplus \ldots \oplus Z(FG)\overline{b_m}$$

und $Z(FG)\overline{b_i} =: B_i$ hat genau ein maximales Ideal $R_i := J(Z(FG))\overline{b_i}$. Es ist $B_i/R_i \cong F$ (da F Zerfällungskörper). Also gibt es genau m maximale Ideale in $Z(FG)$ und damit auch genau m Algebrenhom. $\lambda : Z(FG) \to F$ und diese sind dann $\{\overline{\omega_1}, \ldots, \overline{\omega_h}\}$
(b) $\Rightarrow$ (c): klar.
(c) $\Rightarrow$ (b): Folgt aus Satz 10.1, da die zentral primitiven Idempotente R-Linearkombinationen der p'-Klassensummen $\sigma(g_l)$ sind.
(c) $\Rightarrow$ (d): Sei $\omega_i(\sigma(g_l)) \equiv_{\pi R} \omega_j(\sigma(g_l))$ für alle $l = 1, \ldots, s$. Da $\omega_i(\sigma(g_l))$ eine Summe von p'-Einheitswurzeln ist, liegt $\omega_i(\sigma(g_l)) \in \mathbb{Z}_p[\zeta]$ für eine primitive n-te Einheitswurzel ζ mit $p \nmid n$. Also liegt $\omega_i(\sigma(g_l)) - \omega_j(\sigma(g_l)) \in \mathbb{Z}_p[\zeta] \cap \pi R \subset p\mathbb{Z}_p[\zeta]$. (Unverzweigtheit z.B. mit Hensel zeigen, $x^n - 1$ hat mod p n verschiedene Nullstellen. Daraus ergibt sich $[\mathbb{Q}_p[\zeta] : \mathbb{Q}_p] = [\mathbb{F}_p[\zeta] : \mathbb{F}_p] =: f$ und $e = 1$.)
(d) $\Rightarrow$ (c) ist klar. $\square$

Satz 10.7 *(Schwache Blockorthogonalität) Ist $g \in G_{p'}$, $h \in G - G_{p'}$, B ein Block von RG, so ist*

$$\sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(B)} \chi(g)\chi(h) = 0.$$

Beweis. Sei $\mathrm{IBr}(B) = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_l\}$ und Φ_i der Charakter der projektiven Hülle des einfachen Moduls mit Brauercharakter φ_i. Dann ist $\Phi_i(h) = 0$. Sei $\mathrm{Irr}(B) = \{\chi_1, \ldots, \chi_k\}$. Es ist

$$\begin{array}{l} 0 = \sum_{i=1}^l \varphi_i(g)\Phi_i(h) = \sum_{i=1}^l \varphi_i(g) \sum_{j=1}^k d_{ji}\chi_j(h) = \\ \sum_{j=1}^k (\sum_{i=1}^l d_{ji}\varphi_i(g))\chi_j(h) = \sum_{j=1}^k \chi_j(g)\chi_j(h). \end{array}$$

□

Ende 24.11.

11 Anzahl der Blöcke von maximalem Defekt.

Sei G eine endliche Gruppe, (K, R, F) ein p-modulares System, K und F Zerfällungskörper für G. Sei B ein Block von RG, $k_B = |\mathrm{Irr}(B)|$ und $\ell_B := |\mathrm{IBr}(B)|$.

Lemma 11.1 *Ist $\psi \in \mathrm{IBr}(B)$ oder $\psi \in \mathrm{Irr}(B)$ so sei*

$$\eta_\psi : G \to K, g \mapsto \begin{cases} p^{d(B)}\psi(g) & \textit{falls } g \in G_{p'} \\ 0 & \textit{sonst.} \end{cases}$$

Dann ist η_ψ ein verallgemeinerter Charakter von G.

Beweis. Wir benutzen den Brauerschen Hauptsatz über verallgemeinerte Charaktere aus dem letzten Semester. Dieser besagt dass eine Klassenfunktion ein verallgemeinerter Charakter ist, falls ihre Einschränkung auf alle elementaren Untergruppen von G ein verallgemeinerter Charakter ist. Sei also $E = Q \times A$ eine elementare Untergruppe, $|Q| = p^b$ und A eine p'-Gruppe. Dann ist $v(|C_G(g)|) \geq b$ für alle $g \in A$. Sei $\xi \in \mathrm{Irr}(E)$. Zu zeigen: $(\eta_\psi, \xi)_E \in \mathbb{Z}$. Es ist

$$(\eta_\psi, \xi)_E = \frac{1}{|E|} \sum_{g \in A} \eta_\psi(g)\xi(g^{-1}) =: \frac{1}{|E|}\alpha$$

wo $\alpha = |A|(\eta_\psi, \xi)_A$. Nach Lemma 10.3 (a) ist für $g \in A$

$$v(\psi(g)) \geq v(|C_G(g)|) - d(B) \geq b - d(B)$$

und daher $v(\eta_\psi(g)) \geq b$. Da $|A|$ eine Einheit in R ist, ist auch $v((\eta_\psi, \xi)_A) \geq b$ und damit $\alpha \in |A|p^b\mathbb{Z}_{\geq 0}$, d.h. $(\eta_\psi, \xi)_E \in \mathbb{Z}$.
Dann ist die Einschränkung von η_ψ auf E ein verallgemeinerter Charakter von E und nach dem Brauerschen Hauptsatz daher auch η_ψ. □

Lemma 11.2 *Bezeichnet C_B die Cartanmatrix von B, dann ist $p^{d(B)}C_B^{-1} \in \mathbb{Z}^{\ell_B \times \ell_B}$. Die Elementarteiler von C_B sind Teiler von $p^{d(B)}$ und mindestens ein Elementarteiler ist gleich $p^{d(B)}$.*
Ist $d(B) \neq 0$, dann ist

$$k_B = |\operatorname{Irr}(B)| > |\operatorname{IBr}(B)| = \ell_B.$$

Beweis. Sei $\varphi \in \operatorname{IBr}(B)$. Dann gibt es nach Satz 9.12 $\tilde{d}_{\varphi,\chi} \in \mathbb{Z}$ mit $\varphi = \sum_{\chi \in \operatorname{Irr}(B)} \tilde{d}_{\varphi,\chi} \chi_{|G_{p'}}$. Setze

$$\hat{\varphi} := \sum_{\chi \in \operatorname{Irr}(B)} \tilde{d}_{\varphi,\chi} \chi.$$

Dann ist $\hat{\varphi}$ ein verallgemeinerter Charakter von G. Für $\varphi' \in \operatorname{IBr}(B)$ ist

$$(\hat{\varphi}, \eta_{\varphi'})_G = \frac{1}{|G|} p^{d(B)} \sum_{g \in G_{p'}} \hat{\varphi}(g)\varphi'(g^{-1}) = p^{d(B)}(\varphi, \varphi')_{G_{p'}} = p^{d(B)} \gamma_{\varphi,\varphi'}$$

wobei $(\gamma_{ij}) = C_B^{-1}$ wie in Satz 9.8 die Inverse der Cartanmatrix bezeichnet. Also ist $p^{d(B)}C_B^{-1}$ ganzzahlig und daher teilen die Elementarteiler von C_B alle $p^{d(B)}$.
Es ist

$$C_B \begin{pmatrix} \varphi_1(1) \\ \vdots \\ \varphi_\ell(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi_1(1) \\ \vdots \\ \Phi_\ell(1) \end{pmatrix} \in p^a \mathbb{Z}^\ell$$

Nach Lemma 10.3 gibt es ein i mit $p^{a-d(B)+1} \nmid \varphi_i(1)$. Wäre schon $p^{d(B)-1}C_B^{-1} \in \mathbb{Z}^{\ell_B \times \ell_B}$, so würde schon $\varphi(1) \in p^{a-d(B)+1}\mathbb{Z}$ liegen für alle $\varphi \in \operatorname{IBr}(B)$, ein Widerspruch zu Lemma 10.3.
Aus $k_B = \ell_B$ folgt, dass die Zerlegungsmatrix D_B quadratisch ist. Da die Elementarteiler von D_B alle gleich 1 sind, ist damit $\det(D_B) = 1$ und also auch $\det(C_B) = \det(D_B^{tr} D_B) = 1$, ein Widerspruch zu $d(B) > 0$. □

Lemma 11.3 *Für $\chi_i, \chi_j \in \operatorname{Irr}(B)$ sei $a_{ij} := (\chi_i, \eta_{\chi_j})_G = p^{d(B)}(\chi_i, \chi_j)_{G_{p'}}$ und $A_B := (a_{ij}) \in \mathbb{Z}^{k_B \times k_B}$. Dann gilt*
(a) $A_B = p^{d(B)} D_B C_B^{-1} D_B^{tr}$, insbesondere ist $A_B = A_B^{tr}$.
(b) $A_B^2 = p^{d(B)} A_B$. Insbesondere ist die Spur von A_B gleich $\operatorname{Spur}(A_B) = p^{d(B)} \ell_B$.
(c) A_B und $p^{d(B)}C_B^{-1}$ haben die gleichen Elementarteiler $\neq 0$. Insbesondere gibt es ein Paar i, j mit $p \nmid a_{ij}$.
(d) Sei $h_i := h(\chi_i) := d(B) - v(\frac{|G|}{\chi_i(1)})$ die Höhe von $\chi_i \in \operatorname{Irr}(B)$. Dann ist

$$a_{ij} \equiv_{p^{h_i+1}} \frac{\chi_i(1)}{\chi_k(1)} a_{kj}.$$

Beweis. (a)

$$\begin{aligned} a_{ij} &= \tfrac{1}{|G|} p^{d(B)} \textstyle\sum_{g \in G_{p'}} \chi_i(g)\chi_j(g^{-1}) \\ &= \tfrac{p^{d(B)}}{|G|} \textstyle\sum_{g \in G_{p'}} \sum_{k,l=1}^{\ell_B} d_{ik}\varphi_k(g) d_{jl}\varphi_l(g^{-1}) \\ &= p^{d(B)} \textstyle\sum_{k,l=1}^{\ell_B} d_{ik} d_{jl} \gamma_{kl}. \end{aligned}$$

Also ist $A_B = p^{d(B)} D_B C_B^{-1} D_B^{tr}$.
(b) $A_B^2 = p^{2d(B)} D_B C_B^{-1} (D_B^{tr} D_B) C_B^{-1} D_B^{tr} = p^{2d(B)} D_B C_B^{-1} D_B^{tr} = p^{d(B)} A_B$. Der Rang von A_B ist gleich ℓ_B, da $C_B = D_B^{tr} D_B$ und damit auch C_B^{-1} positiv definit sind und der Rang von D_B gleich ℓ_B ist. A_B ist diagonalisierbar mit Eigenwerten 0 und $p^{d(B)}$ mit Vielfachheiten $k_B - \ell_B$ bzw. ℓ_B. Also ist $\operatorname{Spur}(A_B) = \ell_B p^{d(B)}$.
(c) Folgt, da die Elementarteiler von D_B alle gleich 1 sind: Durch Hinzufügen geeigneter Spalten zu D_B erhält man eine Matrix $\hat{D}_B \in \mathrm{GL}(k_B, \mathbb{Z})$ mit

$$A_B = \hat{D}_B \begin{pmatrix} p^{d(B)} C_B^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \hat{D}_B^{tr}.$$

Nach Lemma 11.2 hat C_B einen Elementarteiler $p^{d(B)}$, also hat A_B einen Elementarteiler 1.
(d) Es ist

$$a_{ij} = \frac{p^{d(B)}}{|G|} \sum_{k=1}^{\ell_B} |g_k^G| \chi_i(g_k) \chi_j(g_k^{-1}).$$

Für den zentralen Charakter ω_i gilt

$$\omega_i(\sigma(g_j)) = \frac{|g_j^G| \chi_i(g_j)}{\chi_i(1)}.$$

Weiter ist

$$\frac{|G|}{p^{d(B)} \chi_i(1)} a_{ij} = \sum_{m=1}^{\ell_B} \omega_i(\sigma(g_m)) \chi_j(g_m^{-1}) \equiv_p \sum_{m=1}^{\ell_B} \omega_k(\sigma(g_m)) \chi_j(g_m^{-1}) = \frac{|G|}{p^{d(B)} \chi_k(1)} a_{kj}$$

da $\omega_i \equiv_p \omega_k$. Insbesondere gilt $v(a_{ij}) \geq v(\chi_i(1)) + d(B) - v(|G|) = h(\chi_i) = h_i$. Setze $a'_{ij} := \frac{a_{ij}}{p^{h_i}} \in R$ und schreibe $|G| = p^a q$ mit $p \nmid q \in \mathbb{Z}$. Dann ist $\chi_i(1) = p^{a-d(B)+h_i} f_i$ mit $p \nmid f_i \in \mathbb{Z}$. Dann liest sich das oben gezeigte als $\frac{qa'_{ij}}{f_i} \equiv_p \frac{qa'_{kj}}{f_k}$ und daher $a'_{ij} \equiv_p \frac{f_i}{f_k} a'_{kj} \Rightarrow a_{ij} \equiv_{p^{h_i+1}} \frac{\chi_i(1)}{\chi_k(1)} a_{kj}$. □

Satz 11.4 *(a) C_B hat genau einen Elementarteiler $p^{d(B)}$.*
(b) $k_B = |\operatorname{Irr}(B)| \leq \frac{1}{4} p^{2d(B)} + 1$ (Vermutung von Brauer: $k_B \leq p^{d(B)}$).
(c) Gibt es ein $\chi \in \operatorname{Irr}(B)$ mit $d(\chi) = 1$, so ist auch $d(B) = 1$.

Beweis. Sei $\operatorname{Irr}(B) = \{\chi_1, \ldots, \chi_{k_B}\}$ mit $h_1 = h(\chi_1) = 0$. Nach Lemma 11.3 ist

$$\begin{array}{ll} \star & a_{j1} \equiv \frac{\chi_j(1)}{\chi_1(1)} a_{11} \pmod{p^{h_j+1}} \\ \star\star & a_{ij} \equiv \frac{\chi_i(1)}{\chi_1(1)} a_{1j} \pmod{p^{h_i+1}} \end{array}$$

da $a_{j1} = a_{1j}$. Also ist

$$a_{ij} \equiv \frac{\chi_i(1)\chi_j(1)}{\chi_1(1)^2} a_{11} \pmod{p^{\min(h_i,h_j)+1}}$$

Nach Lemma 11.3 (c) gibt es ein a_{ij} das nicht durch p teilbar ist. Also ist a_{11} nicht durch p teilbar und modulo p hat A_B den Rang 1. Da alle Elementarteiler von A_B p-Potenzen sind, folgt daraus, dass A_B genau einen Elementarteiler gleich 1 hat und damit mit Lemma 11.3

(c) hat C_B genau einen Elementarteiler $p^{d(B)}$.
Weiter ist $v(a_{11}) = 0$ und daher $v(a_{j1}) = h_j$ für alle j. Insbesondere ist $a_{j1} \neq 0$. Mit Lemma 11.3 (b) ist

$$p^{d(B)} a_{11} = \sum_{j=1}^{k_B} a_{1j} a_{j1} \geq a_{11}^2 + k_B - 1$$

also ist $a_{11}^2 - p^{d(B)} a_{11} + (k_B - 1) \leq 0$. Nun ist $x^2 - ax + b \leq 0$ lösbar (mit $x \in \mathbb{R}$) nur dann, wenn das Polynom eine reelle Nullstelle hat, also $a^2 - 4b \geq 0$ ist. Also ergibt sich $p^{2d(B)} - 4(k_B - 1) \geq 0$, woraus (b) folgt.
zu (c) zeigen wir: $d(\chi) = 1 \Rightarrow h(\chi) = 0$ (woraus dann $d(\chi) = d(B) = 1$ folgt). Sei $\chi = \chi_j$ mit $d(\chi_j) = 1$ und angenommen $h_j > 0$. Nach $\star\star$ ergibt sich $a_{jj} \equiv \frac{\chi_j(1)}{\chi_1(1)} a_{1j} \pmod{p^{h_j+1}}$ und wegen $v(a_{1j}) = h_j$ folgt daraus $v(a_{jj}) \geq h_j + 1$. Nach Lemma 11.3 (b) ergibt sich

$$0 \neq p^{d(B)} a_{jj} = \sum_{i=1}^{k_B} a_{ij}^2 \geq a_{jj}^2 + a_{1j}^2 > a_{jj}^2$$

also $p^{d(B)} > a_{jj} \geq p^{h_j+1}$. Dies ist unmöglich, falls $d(\chi_j) = 1$, da dann $h_j + 1 = h_j + d(\chi_j) = d(B)$. □

Ende 28.11.

Folgerung 11.5 *(a) Die Anzahl der Blöcke von maximalem Defekt $a = v(|G|)$ ist gleich der Anzahl der p'-Klassen g_j^G mit $v(|C_G(g_j)|) = a$. $v(|C_G(g_j)|)$ heißt auch der* Defekt *der Klasse g_j^G.*
(b) Ist $S \in \mathrm{Syl}_p(G)$, so ist die Anzahl der Blöcke von G mit maximalem Defekt $a = v(|G|) = v(|S|)$ gleich der Anzahl der p'-Klassen von $N_G(S)$, die in $C_G(S)$ liegen. Insbesondere ist diese Anzahl gleich der Anzahl der Blöcke von maximalem Defekt von jeder Untergruppe $H \leq G$, die $N_G(S)$ enthält.

Beweis. Nach Satz 9.12 (c) hat die Cartanmatrix von G die Elementarteiler $p^{d_1}, \ldots, p^{d_s}$ mit $d_i = v(|C_G(g_i)|)$. Da der maximale Elementarteiler der Cartanmatrix C_B von jedem Block mit Vielfachheit 1 auftritt, ist die Anzahl der Elementarteiler p^a von C gleich der Anzahl der Blöcke mit maximalem Defekt. Also ergibt sich (a).
(b) ist nur eine Umformulierung: Ist $d_i = a$, so enthält $C_G(g_i)$ eine p-Sylowgruppe von G, d.h. $S^g \leq C_G(g_i)$ für ein $g \in G$. Also ist die Anzahl der Blöcke von maximalem Defekt genau die Anzahl der p'-Klassen g_j^G von G mit $g_j^G \cap C_G(S) \neq \emptyset$. Sind nun $x, y \in C_G(S)$ konjugiert in G, z.B. $y = x^g$, so liegt S und S^g in $C_G(y)$. Nach Sylow gibt es ein $c \in C_G(y)$, mit $S = (S^g)^c$. Dann ist $gc \in N_G(S)$ und $y = x^{gc}$, d.h. x und y sind schon im Normalisator von S konjugiert. Also ist die Anzahl der Blöcke von maximalem Defekt genau die Anzahl der p'-Klassen von $N_G(S)$ die in $C_G(S)$ liegen. □

III. Die Brauerschen Hauptsätze.

Wiederholung, relativ projektive Moduln.

12 Vertices.

Generalvoraussetzung: (K, R, F) ein p-modulares System, G endliche Gruppe.

Lemma 12.1 *Seien $Q, H \leq G$ und sei S ein RQ-Modul. Sei weiter V ein unzerlegbarer direkter Summand von S^G, der H-projektiv ist. Dann gibt es ein $g \in G$, so dass V ein direkter Summand von $((S \otimes g)_{|Q^g \cap H})^G$ ist.*

Beweis. Direkte Summe und Induktion vertauschen. Also gilt

$$V \mid (V_{|H})^G \mid ((S^G)_{|H})^G = \bigoplus_{g \in Q \backslash G / H} ((S \otimes g)_{|Q^g \cap H})^G.$$

Da V unzerlegbar ist, ist er direkter Summand eines der direkten Summanden. $\square$

Satz 12.2 *Sei V ein unzerlegbarer RG-Modul. Dann gibt es bis auf Konjugation in G eine endeutige kleinste Untergruppe Q für die V relativ Q-projektiv ist, d.h. für jede Untergruppe $H \leq G$ gilt:*
V ist H-projektiv $\Leftrightarrow Q \leq_G H$, d.h. es gibt ein $g \in G$ mit $Q^g \leq H$.
Q ist eine p-Gruppe.

Beweis. Sei

$$\mathcal{M} := \{U \leq G \mid V \text{ ist } U - \text{projektiv } \}.$$

Sei weiter $Q \in \mathcal{M}$ minimal bezüglich Inklusion. Dann gilt:
(a) $P \in \mathrm{Syl}_p(G) \Rightarrow P \in \mathcal{M}$, nach Satz von Maschke.
(b) $U \in \mathcal{M}$ und $U \leq H \leq G \Rightarrow H \in \mathcal{M}$.
(c) Sei $H \in \mathcal{M}$ und S ein RH-Modul mit $V \mid S^G$. Da V aber auch RQ-projektiv ist, gibt es nach Lemma 12.1 ein $g \in G$ für das V ein direkter Summand von $((S \otimes g)_{|H^g \cap Q})^G$ ist und somit ein $Q \cap H^g$-projektiver Modul. Wegen der Minimalität von Q folgt $Q \leq H^g$ also $Q \leq_G H$. Damit sind die minimalen Elemente in $\mathcal{M}$ alle in G konjugiert. Da die p-Sylowgruppen von G in $\mathcal{M}$ liegen, ist jedes minimale Element von $\mathcal{M}$ eine p-Gruppe.
$\square$

Bemerkung 12.3 *Ist V ein unzerlegbarer RG-Modul, $H \leq G$, W ein RH-Modul mit $V \mid W^G$, so gibt es einen unzerlegbaren direkten Summanden S von W, mit $V \mid S^G$.*

Definition 12.4 *Die (bis auf Konjugation eindeutig bestimmte) p-Untergruppe $Q =: vx(V)$ aus Satz 12.2 heisst* Vertex *des unzerlegbaren RG-Moduls V.*
Jeder unzerlegbare RQ-Modul S mit $V \mid S^G$ heisst Quelle *von V.*

Bemerkung 12.5 *Für einen unzerlegbaren RG-Modul V und eine Untergruppe $H \leq G$ gilt: V ist H-projektiv genau dann wenn $vx(V) \leq_G H$.*

Lemma 12.6 *Sei $H \leq G$, V ein unzerlegbarer RG-Modul und W ein unzerlegbarer RH-Modul. Dann gilt:*
(a) $V \mid W^G \Rightarrow vx(V) \leq_G vx(W)$.
(b) $V \mid V_H \Rightarrow vx(W) \leq_G vx(V)$.

<u>Beweis.</u> Sei $P := vx(V)$, $Q = vx(W)$, S ein RP-Modul mit $V \mid S^G$ und T ein RQ-Modul mit $W \mid T^H$.
(a) $V \mid W^G \mid T^G$ also ist V ein Q-projektiver RG-Modul und daher $vx(V) \leq_G Q = vx(W)$.
(b) $W \mid V_H \mid (S^G)_H$. Also ist W ein direkter Summand von $(S^g_{P^g \cap H})^H$ für ein $g \in G$, also ist W ein $P^g \cap H$ projektiver RH-Modul und daher $vx(W) \leq_H P^g \cap H \leq_G P = vx(V)$. □

Lemma 12.7 *(i) Sei $H \leq G$ und W ein unzerlegbarer RH-Modul. Dann gibt es einen unzerlegbaren RG-Modul V mit*
(a) $V \mid W^G$, (b) $W \mid V_{|H}$, (c) $vx(V) =_G vx(W)$.
(ii) Ist V ein unzerlegbarer H-projektiver RG-Modul, so gibt es einen unzerlegbaren RH-Modul W, der (a),(b),(c) erfüllt.

<u>Beweis.</u> Vorbemerkung: Nach Lemma 12.6 gilt (a) + (b) $\Rightarrow$ (c).
(i) Es ist nach Mackey, $W \mid (W^G)_{|H}$. Sei V ein unzerlegbarer direkter Summand von W^G mit $W \mid V_{|H}$. Dann erfüllt V die beiden Eigenschaften (a) und (b).
(ii) Da $V \mid (V_H)^G$ gibt es auch einen unzerlegbaren Summanden W von V_H mit $V \mid W^G$.
□

Satz 12.8 *Sei V ein unzerlegbarer RG-Modul und Q sein Vertex. Dann gibt es einen unzerlegbaren RQ-Modul S mit*
(a) $V \mid S^G$, (b) $S \mid V_{|Q}$, (c) Q ist der Vertex von S.
Ist T ein weiterer unzerlegbarer RQ-Modul mit $V \mid T^G$, so gibt es ein $g \in N_G(Q)$ mit $T^g = S$. In diesem Sinn sind die Quellen eine unzerlegbaren RG-Moduls alle konjugiert.

<u>Beweis.</u> Die Existenz von S folgt aus Lemma 12.7 (ii).
Es ist $S \mid V_{|Q} \mid (T^G)_{|Q}$, also ist mit Mackey S ein direkter Summand von $((T \otimes g)_{Q^g \cap Q})^Q$. Da der Vertex von S gleich Q ist, folgt $Q^g \cap Q = Q$ und $S = T^g$. □

Lemma 12.9 *Ist P eine p-Gruppe und $Q \leq P$, so ist $(R_Q)^P$ ein unzerlegbarer RP-Modul.*

<u>Beweis.</u> P hat nur einen einfachen RP-Modul, nämlich den trivialen Modul F_P. Es ist nach Frobenius Nakayama Reziprozität

$$\mathrm{Hom}_{RP}(R_Q^P, F_P) \cong \mathrm{Hom}_{RQ}(R_Q, F_Q) \cong F_Q.$$

Also ist der Kopf $R_Q^P / R_Q^P J(RP)$ einfach und daher R_Q^P unzerlegbar. □

Folgerung 12.10 *(a) $vx(F_G) = vx(R_G) = P \in \mathrm{Syl}_p(G)$.*
(b) Jede p-Untergruppe Q von G kommt als Vertex eines unzerlegbaren RG-Moduls vor.

Ende 1.12.2006

Beweis. (a) Zeigen zunächst dass $vx(R_P) = P$ ist. Angenommen $vx(R_P) = Q < P$. Dann ist R_P ein direkter Summand von $(R_Q)^P$. Letzterer ist aber unzerlegbar nach Lemma 12.9.
Sei $V := R_G$. Dann ist R_P ein direkter Summand von V_P und also nach Lemma 12.6 $P = vx(R_P) \leq_G vx(V) = vx(R_G)$. Da $vx(R_G)$ aber eine p-Gruppe ist, folgt $P = vx(R_G)$.
(b) Sei $W := R_Q$. Dann gibt es nach Lemma 12.7 einen unzerlegbaren RG-Modul V mit $vx(V) = vx(W) = Q$. □

Satz 12.11 *(Green's indecomposability theorem, ohne Beweis, s.z.B. Nagao/Tsushima: Satz (4.7.2) S. 291, Korollar (4,7,3) S. 292)*
(a) Ist F algebraisch abgeschlossen, P endliche p-Gruppe, $Q \leq P$ und W ein unzerlegbarer RQ-Modul, so ist W^P unzerlegbar.
(b) Sei $H \trianglelefteq G$ ein Normalteiler und G/H eine p-Gruppe. Ist F algebraisch abgeschlossen und W ein unzerlegbarer RH-Modul, so ist W^G unzerlegbar.

Folgerung 12.12 *Sei V unzerlegbares RG-Gitter mit Charakter χ, $vx(V) = Q \leq P \in \mathrm{Syl}_p(G)$.*
(a) $[P : Q] \mid \chi(1)$.
(b) Ist $g = g_p g_{p'} = g_{p'} g_p \in G$ mit $g_p \notin_G Q$, so ist $\chi(g) = 0$.

Beweis. Œ sei F algebraisch abgeschlossen.
(a) $(V_P) \mid (V_Q^G)_P = \bigoplus (V_Q \otimes g)^P_{g^{-1}Qg \cap P} = \bigoplus_{g,i} Y_{i,g}^P$ wobei die $Y_{i,g}$ die unzerlegbaren Summanden von $(V_Q \otimes g)_{g^{-1}Qg\cap P}$ bezeichnen. Nach Satz 12.11 ist dann $Y_{i,g}^P$ unzerlegbar und die Dimension durch $[P : g^{-1}Qg \cap P]$ teilbar. Also ist auch $\chi(1)$ durch $[P : Q]$ teilbar.
(b) Sei $H := \langle g \rangle$, $M := \langle g^p \rangle$. Da V Q-projektiv ist, gilt $V \mid (V_Q)^G$. Es ist

$$(V_Q^G)_H = \bigoplus_{t \in Q\backslash G/H} ((V \otimes t)_{Q^t \cap H})^H$$

nach Mackey. Da $g_p \notin Q$ ist auch $g_p \notin Q^t \cap H$ für alle t. Also $Q^t \cap H \leq M$. Bezeichnen Y_i die unzerlegbaren direkten Summanden von $\bigoplus_{t\in Q\backslash G/H}((V \otimes t)_{Q^t\cap H})^M$ so ist $(V_Q^G)_H = \bigoplus Y_i^H$ und Y_i^H unzerlegbar nach Satz 12.11. Also ist V_H eine direkte Summe von solchen von M induzierten Moduln Y_i^H. Da $g \notin M$ ist die Spur von g auf Y_i^H gleich Null und daher auch auf V. □

Satz 12.13 *(a) Ist $P = \langle g \rangle$ eine zyklische p-Gruppe, $|P| = p^n$, so ist*

$$FP > (1-g)FP > (1-g)^2 FP > \ldots > (1-g)^{p^n-1} FP > 0$$

die einzige Kompositionsreihe von FP.
FP hat genau p^n unzerlegbare Moduln.
(b) Ist $P = \langle a \rangle \times \langle b \rangle \cong C_p \times C_p$, so gibt es unzerlegbare FP-Moduln beliebig grosser Dimension.

Beweis. (a) Sei $B := (1, (1-g), (1-g)^2, \ldots, (1-g)^{p^n-1})$. Dann ist B eine F-Basis von FP und es ist $M_B(1-g)$ ein Jordanblock $J_{p^n}(0)$. Also ist das Minimalpolynom von $(1-g)$ auf FP gleich X^{p^n} und $FP \cong F[X]/(X^{p^n})$ als Ring. Die FP-Teilmoduln von FP entsprechen genau den Idealen in diesem Ring und dies sind nur die Potenzen von (X). Daraus ergibt sich die erste Behauptung.
Sei nun V ein unzerlegbarer FP-Modul. Dann ist das Minimalpolynom von $(1-g)$ auf V ein Teiler von X^{p^n}. Da V unzerlegbar ist, operiert g und damit auch $1-g$ als einziger Jordanblock, also ist dies auch gleichzeitig das Minimalpolynom von $(1-g)$ auf V. Also hat V eine F-Basis, bezüglich der $(1-g)$ gleich $J_{\dim(V)}(0)$ ist. D.h. P hat zu jeder Dimension $1, \ldots, p^n$ genau einen unzerlegbaren FP-Modul.
(b) Übung. $\square$

Folgerung 12.14 *(Higman) Sei $D \leq G$ eine p-Gruppe.*
Ist D zyklisch, so gibt es bis auf Isomorphie höchstens $|G|$ unzerlegbare FG-Moduln mit Vertex in D.
Ist D nicht zyklisch, so gibt es unzerlegbare FG-Moduln beliebig grosser Dimension mit Vertex in D.

Beweis. Sei D zyklisch, V ein unzerlegbarer FG-Modul mit $vx(V) \leq D$. Dann ist V ein D-projektiver FG-Modul. Also gilt $V \mid (V_D)^G$. Weiter ist $V_D = \bigoplus_{i=1}^{|D|} n_i U_i$ mit dem unzerlegbaren FD-Modul U_i der Dimension i. Also gibt es ein i mit $V \mid U_i^G$. U_i^G hat maximal $[G:D]$ direkte Summanden, (vgl. Übungsaufgabe 29) also insgesamt maximal $|D|[G:D] = |G|$ unzerlegbare FG-Moduln.
Ist D nicht zyklisch, so gibt es unzerlegbare FD-Moduln U_i der Dimension $\geq i$ (für alle $i \in \mathbb{N}$). Nach Lemma 12.7 gibt es auch einen unzerlegbaren FG-Modul V_i mit $vx(V_i) = vx(U_i)$ und $U_i \mid (V_i)_D$. Also auch $\dim(V_i) \geq i$. $\square$

13 Die Green Korrespondenz.

Lemma 13.1 *Sei V ein unzerlegbarer RG-Modul mit Vertex P und $P \leq H \leq G$. Für je zwei der folgenden drei Bedingungen gibt es einen unzerlegbaren RH-Modul W, der diese zwei Bedingungen erfüllt:*
(a) $V \mid W^G$, (b) $W \mid V_H$, (c) $vx(W) =_H P$.

Beweis. (a) + (b) ist Lemma 12.7 (ii) welches die Existenz eines solchen Moduls W zusichert, wenn man in (c) Konjugation in ganz G zulässt.
Sei S eine Quelle von V, also ein unzerlegbarer RP-Modul, der nach Satz 12.8 (a),(b),(c) für $H = P$ $(W = S)$ erfüllt.
(a)+(c): Da $V \mid S^G = (S^H)^G$ gibt es einen unzerlegbaren RH-Modul W mit $V \mid W^G$, $W \mid S^H$. Also ist $vx(V) = P \leq_G vx(W) \leq_H vx(S) = P$ und damit $vx(W) =_H P$.
(b)+(c): Da $S \mid V_P = (V_H)_P$ gibt es einen unzerlegbaren RH-Modul W mit $S \mid W_P$ und $W \mid V_H$. Also $vx(S) = P \leq_H vx(W) \leq_G vx(V) = P$ woraus wieder $vx(W) =_H P$ folgt. $\square$

Definition 13.2 *Sei $\mathcal{X}$ eine Menge von Untergruppen von G.*
(a) $H \in_G \mathcal{X}$ bedeutet, es gibt $g \in G$ mit $H^g \in \mathcal{X}$.
(b) Für einen RG-Modul V schreiben wir $V = U \oplus O(\mathcal{X})$, falls $V = U \oplus L$, so dass es für jeden unzerlegbaren direkten Summanden L_i von L ein $H_i \in \mathcal{X}$ gibt für welches L_i ein H_i-projektiver RG-Modul ist.
(c) $\mathrm{Ind}(RG, \mathcal{X}) := \{V \text{ unzerlegbarer } RG-\text{Modul} \mid vx(V) \in_G \mathcal{X}\}$.

Generalvoraussetzung: $P \leq H \leq G$.

$$\begin{array}{lll} \mathcal{X} & = \mathcal{X}(G,P,H) & = \{Q \leq G \mid Q \leq P^g \cap P \text{ für ein } g \in G - H\} \\ \mathcal{Y} & = \mathcal{Y}(G,P,H) & = \{Q \leq G \mid Q \leq P^g \cap H \text{ für ein } g \in G - H\} \\ \mathcal{A} & = \mathcal{A}(G,P,H) & = \{Q \leq G \mid Q \leq P \text{ aber } Q \notin_G \mathcal{X}\} \end{array}$$

Lemma 13.3 *Sei $|P| = p^b$, $N_G(P) \leq H$.*
(i) Für Q und Q' in $\mathcal{A}$ sind äquivalent:
(a) Q und Q' sind konjugiert in H.
(b) Q und Q' sind konjugiert in G.
(ii) Sei $Q \leq P$. Äquivalent sind:
(a) $Q \in_G \mathcal{X}$.
(b) $Q \in \mathcal{X}$.
(c) $Q \in \mathcal{Y}$.
(d) $Q \in_H \mathcal{Y}$.

Beweis. (i) (a) $\Rightarrow$ (b) ist klar. (b) $\Rightarrow$ (a):
Sei $g \in G$, $Q, Q' \in \mathcal{A}$ mit $Q^g = Q'$. Dann ist $Q' \leq P \cap P^g$ und also $Q' \in \mathcal{X}$ falls $g \notin H$.
(ii) (a) $\Rightarrow$ (b): Sei $t \in G$ mit $Q^t \leq P^g \cap P$ für ein $g \in G - H$. Dann ist $Q \leq P^{gt^{-1}} \cap P^{t^{-1}} \cap P$ und entweder gt^{-1} oder t^{-1} liegt nicht in H. Also ist $Q \in \mathcal{X}$.
(b) $\Rightarrow$ (c) und (c) $\Rightarrow$ (d) sind klar.
(d) $\Rightarrow$ (a): Sei $h \in H$ mit $Q^h \leq P^g \cap H$ für ein $g \in G - H$. Dann ist auch $Q \leq P^{gh^{-1}} \cap H$ und $gh^{-1} \in G - H$, also $Q \in \mathcal{Y}$. Da $Q \leq P$ gilt auch $Q \leq P \cap P^{gh^{-1}}$ und damit $Q \in \mathcal{X}$. $\square$

Ende am 5.12.2006

Lemma 13.4 *(i) Sei $G \geq H \geq P$ und W ein P-projektiver RH-Modul. Dann gilt $(W^G)_H = W \oplus O(\mathcal{Y})$.*
(ii) Sei $|P| = p^b$, $N_G(P) \leq H$. Ist $W \in \mathrm{Ind}(RH, \mathcal{A})$, so ist W der eindeutige unzerlegbare direkte Summand von $(W^G)_H$ mit Vertex in $\mathcal{A}$.
(iii) Sei $|P| = p^b$, $N_G(P) \leq H$. Ist V ein P-projektiver RG-Modul, so ist $V = O(\mathcal{X}) \Leftrightarrow V_H = O(\mathcal{Y})$.

Beweis. (i) Sei M ein RP-Modul mit $M^H = W \oplus W_1$. Setze $(W^G)_H =: W \oplus W'$, $(W_1^G)_H = W_1 \oplus W_1'$ dann ist

$$(M^G)_H = (W^G)_H \oplus (W_1^G)_H = M^H \oplus W' \oplus W_1'.$$

Nach Mackey ist

$$(M^G)_H = M^H \oplus \bigoplus_{t \in P\backslash G/H, t \notin H} (M^t_{P^t \cap H})^H.$$

Zerlegt man $W' = \oplus_i X_i$ in unzerlegbare RH-Moduln, so ist jedes der X_i ein direkter Summand von einem Modul $(M^t_{P^t \cap H})^H$ mit $t \notin H$. Also ist jedes X_i ein $P^t \cap H$-projekiver RH-Modul und daher $W' = O(\mathcal{Y})$.
(ii) Wie in (i) gilt $(W^G)_H = W \oplus W'$ wobei alle unzerlegbaren Summanden von W' einen Vertex in $\mathcal{Y}$ haben. Angenommen einer der direkten Summanden X_i von W' hat einen Vertex $vx(X_i) \in \mathcal{A}$. Dann ist $vx(X_i) \leq_H P$ und $vx(X_i) \notin \mathcal{X}$. Dann aber nach Lemma 13.3 $vx(X_i) \notin \mathcal{Y}$ ein Widerspruch.
(iii) Œ sei V unzerlegbar und $Q := vx(V) \leq P$.
$\Rightarrow$: Nach Lemma 13.1 gibt es einen unzerlegbaren RH-Modul W mit $V \mid W^G$ und $vx(W) =_H Q$. Ist $Q \in_G \mathcal{X}$, so ist auch $vx(W) \in_G \mathcal{X}$. Mit Lemma 13.3 (ii) ist auch $vx(W) \in \mathcal{Y}$. Also ist $V_H \mid (W^G)_H = W \oplus O(\mathcal{Y})$ (nach Teil (i)) und $W = O(\mathcal{Y})$ und daher $V_H = O(\mathcal{Y})$.
$\Leftarrow$: Nach Lemma 13.1 gibt es einen unzerlegbaren RH-Modul W mit der $W \mid V_H$ und $vx(W) =_H Q$. Nach Annahme ist $V_H = O(\mathcal{Y})$, d.h. jeder direkte Summand von V_H hat einen Vertex in $\mathcal{Y}$. Damit gilt $Q \in_H \mathcal{Y}$ und wegen Lemma 13.3 auch $Q \in_G \mathcal{X}$. □

Satz 13.5 *Sei $|P| = p^b$, $N_G(P) \leq H$.*
(i) Es gibt eine Bijektion $f = f(G,H,P) : \mathrm{Ind}(RG,\mathcal{A}) \to \mathrm{Ind}(RH,\mathcal{A})$ mit folgenden Eigenschaften:
(a) Für $V \in \mathrm{Ind}(RG,\mathcal{A})$ ist $V_H = f(V) \oplus O(\mathcal{Y})$.
(b) Für $W \in \mathrm{Ind}(RH,\mathcal{A})$ ist $W^G = f^{-1}(W) \oplus O(\mathcal{X})$.
(c) Ist $V \in \mathrm{Ind}(RG,\mathcal{A})$ und $vx(V) \in \mathcal{A}$, so ist $vx(f(V)) =_H vx(V)$.
(ii) Für $V \in \mathrm{Ind}(RG,\mathcal{A})$ und $W \in \mathrm{Ind}(RH,\mathcal{A})$ gilt

$$W \mid V_H \Leftrightarrow W = f(V) \Leftrightarrow V \mid W^G.$$

Beweis. (i) Sei $V \in \mathrm{Ind}(RG,\mathcal{A})$ mit $vx(V) = Q \in \mathcal{A}$. Dann gibt es nach Lemma 13.1 einen unzerlegbaren RH-Modul W mit $V \mid W^G$ und $vx(W) =_H Q$. Also ist $W \in \mathrm{Ind}(RH,\mathcal{A})$. Wegen Lemma 13.4 (i) ist $(W^G)_H = W \oplus O(\mathcal{Y})$. Ist W kein direkter Summand von V_H, so ist $V_H = O(\mathcal{Y})$ und damit wegen Lemma 13.4 (iii) $V = O(\mathcal{X})$ ein Widerspruch zu $vx(V) \in \mathcal{A}$. Also ist auch $V_H = W \oplus O(\mathcal{Y})$ Definiere

$$f = f(G,H,P) : \mathrm{Ind}(RG,\mathcal{A}) \to \mathrm{Ind}(RH,\mathcal{A}) \text{ durch } f(V) := W.$$

Dann hat f die Eigenschaften (a) und (c).
Zeigen noch (b): Sei dazu $W = f(V)$ und $W^G = V \oplus U$. Dann ist

$$(W^G)_H = V_H \oplus U_H = W \oplus U_H \oplus O(\mathcal{Y}).$$

Andererseits ist W ein P-projektiver RH-Modul und daher $(W^G)_H = W \oplus O(\mathcal{Y})$ nach Lemma 13.4 (i). Also $U_H = O(\mathcal{Y})$ und mit Lemma 13.4 (iii) auch $U = O(\mathcal{X})$, da U ein P-projektiver RG-Modul ist. Insbesondere ist f injektiv und (b) folgt auch.
Zeigen jetzt, dass f auch surjektiv ist: Sei $W \in \mathrm{Ind}(RH,\mathcal{A})$ beliebig. Nach Lemma 12.7 gibt es einen unzerlegbaren RG-Modul V mit $V \mid W^G$, $W \mid V_H$ und $vx(V) =_G vx(W)$. Dann ist

$V \in \mathrm{Ind}(RG, \mathcal{A})$ und daher $V_H = f(V) \oplus O(\mathcal{Y})$. Also gilt $W = f(V)$.
(ii) folgt aus (i): Die erste Äquivalenz folgt aus Eigenschaft (a) der Green Korrespondenz und die zweite aus (b). $\square$

Definition 13.6 *Die Abbildung $f = f(G, H, P)$ heißt* Green-Korrespondenz.

Satz 13.7 *Sei $|P| = p^b$, $N_G(P) \leq H$. $f(G, H, P)$ liefert eine Bijektion zwischen $\mathrm{Ind}(RH, \{P\})$ und $\mathrm{Ind}(RG, \{P\})$. also zwischen den unzerlegbaren RH-Moduln mit Vertex P und den unzerlegbaren RG-Moduln mit Vertex P.*

Beweis. Sezialfall von Satz 13.5 (c). $\square$

Zum Abschluß: TI-Gruppen, d.h. $P \cap P^g = \{1\}$ für alle $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$ und $g \in G - N_G(P)$.

Folgerung 13.8 *Sei $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$, $H := N_G(P)$ und $P \cap P^g = \{1\}$ für alle $g \in G - H$. Dann ist $\mathcal{X} = \mathcal{Y} = \{\{1\}\}$.*
Ist V ein unzerlegbarer RG-Modul, so ist $V_H = f(V) \oplus M$ mit einem projektiven RH-Modul M.
Ist U ein unzerlegbarer RH-Modul, so ist $U^G = f^{-1}(U) \oplus N$ mit einem projektiven RG-Modul N.

Folgerung 13.9 *Sei $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$, $H := N_G(P)$ und $P \cap P^g = \{1\}$ für alle $g \in G - H$. Seien V_1, V_2 nicht projektive unzerlegbare FG-Moduln mit Green Korrespondenten $U_1 = f(V_1)$ und $U_2 = f(V_2)$. Dann gilt:*
Genau dann gibt es eine nicht zerfallende kurze exakte Sequenz von FG-Moduln $0 \to V_1 \to V \to V_2 \to 0$, wenn es eine nicht zerfallende kurze exakte Sequenz von FH-Moduln $0 \to U_1 \to U \to U_2 \to 0$ gibt.

Beweis. Sei zunächst $0 \to U_1 \to U \to U_2 \to 0$ eine nicht zerfallende k.e.S. von FH-Moduln. Dann ist auch die induzierte k.e.S. $0 \to U_1^G \to U^G \to U_2^G \to 0$ nicht zerfallend (Übung). Schreiben $U_i^G = V_i \oplus R_i$ mit projektiven FG-Moduln R_i. Œ sei $U_1 \leq U$. Dann gibt es einen Teilmodul W von U^G, der U_1^G enthält, so dass $U^G/W \cong R_2$, $W/U_1^G \cong V_2$. Dies liefert die k.e.S.

$$0 \to V_1 \to W/R_1 \to V_2 \to 0.$$

Behauptung: Diese zerfällt nicht. Angenommen es gibt ein splitting, also einen Teilmodul $X \leq W$ mit $W = X + U_1^G$, $R_1 = X \cap U_1^G$. R_1 projektiver FG-Modul $\Rightarrow$ nach Dualisieren R_1 ist auch injektiver FG-Modul, d.h. auch $X = Y \oplus R_1$ ist direkte Summe und daher $W = Y \oplus U_1^G$. Da R_2 projektiv ist zerfällt $0 \to W/Y \to U^G/Y \to R_2 \to 0$ und es gibt ein $Z \leq U^G$ mit $U^G = Z + W$, $Z \cap W = Y$. Also ist $U^G = Z \oplus U_1^G$, ein Widerspruch.

Ist nun $0 \to V_1 \to V \to V_2 \to 0$ eine nicht zerfallende k.e.S. von FG-Moduln. Dann ist auch die Einschränkung $0 \to (V_1)_H \to V_H \to (V_2)_H \to 0$ nicht zerfallend, da alle FG-Moduln FH-projektiv sind, da H eine p-Sylowgruppe von G enthält. Da $(V_i)_H = U_i \oplus Q_i$ mit projektiven FH-Moduln Q_i ist, konstruiert man wie eben eine k.e.S. $0 \to U_1 \to U \to U_2 \to 0$ von FH-Moduln (Übung). $\square$

13.1 Ein Beispiel: $\mathrm{SL}_2(p)$.

Sei $p \geq 3$ eine Primzahl und $G = \mathrm{SL}_2(p) = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_p^{2\times 2} \mid ad - bc = 1\}$. Dann operiert G auf $F[X,Y]$ und der Raum der homogenen Polynome vom Grad $n-1$ bildet einen FG-Modul V_n der Dimension n.

Satz 13.10 *$V_1, \ldots, V_p$ ist ein Vertretersystem der einfachen FG-Moduln.*

Beweis. Sei $\langle a \rangle = \mathbb{F}_p^*$, $b \in \mathbb{F}_{p^2}$ mit $b^{p+1} = 1$ und $\mu_b = X^2 - cX + 1$ sein Minimalpolynom. Sei weiter $\epsilon \in \mathbb{F}_p^* - (\mathbb{F}_p^*)^2$. Die Konjugiertenklassen in G sind vertreten durch

g	1	-1	$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}^d$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & c \end{pmatrix}^t$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & \epsilon \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & \epsilon \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
Anz.	1	1	$1 \leq d \leq \frac{p-3}{2}$	$1 \leq t \leq \frac{p-1}{2}$	1	1	1	1
$\lvert g^G \rvert$	1	1	$p(p+1)$	$p(p-1)$	$(p^2-1)/2$	$(p^2-1)/2$	$(p^2-1)/2$	$(p^2-1)/2$

Also hat G genau p p'-Klassen. Es genügt daher zu zeigen, dass V_n ein einfacher FG-Modul ist.

Ende 12.12.2006

Dazu sei $g := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $h := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ zwei Elemente der Ordnung p in G. Sei $W_{i+1} := \langle X^i Y^{n-i}, \ldots, Y^n \rangle \leq V_{n+1}$. Dann ist $W_{i+1} \leq V_{n+1}$ ein $F\langle g \rangle$-Teilmodul und

$$V_{n+1} = W_{n+1} > W_n > \ldots > W_1 > W_0 = \{0\}$$

eine $F < g >$-Kompositionsreihe von V_{n+1} mit Faktoren der Dimension 1.
Mit Induktion über i zeigen wir: Jedes Element von $W_i - W_{i-1}$ erzeugt W_i als $F\langle g \rangle$-Modul.
$i = 1$: Klar. $i \Rightarrow i+1$:

$$(X^i Y^{n-i})g = (X+Y)^i Y^{n-i} = X^i Y^{n-i} + \binom{i}{2} X^{i-1} Y^{n-i+1} + u$$

mit einem $u \in W_{i-1}$. Da $i < p$ ist, ist $\binom{i}{2} \neq 0$. Also ist für $a, b \in F$, $a \neq 0$ und $v \in W_{i-1}$

$$(aX^i Y^{n-i} + bX^{i-1} Y^{n-i+1} + v)g = aX^i Y^{n-i} + (b + a\binom{i}{2})X^{i-1} Y^{n-i+1} + w$$

mit $w \in W_{i-1}$. Die Differenz $(aX^i Y^{n-i} + bX^{i-1} Y^{n-i+1} + v)g - (aX^i Y^{n-i} + bX^{i-1} Y^{n-i+1} + v)$ erzeugt mit Indukionsvoraussetzung damit W_i.
Insbesondere hat $(V_n)_{\langle g \rangle}$ den Sockel $\langle Y^n \rangle$ und $(V_n)_{\langle h \rangle}$ wird von Y^n erzeugt. Ist nun $0 \neq W \leq V_n$ ein FG-Teilmodul, so enthält dieser als $F\langle g \rangle$-Teilmodul das Element Y^n und damit als $F\langle h \rangle$-Teilmodul auch den ganzen Modul V_n. $\square$

Folgerung 13.11 *(aus Beweis) (a) $(V_n)_{\langle g \rangle}$ ist unzerlegbarer $F\langle g \rangle$-Modul $(1 \leq n \leq p)$.*
(b) $(V_p)_{\langle g \rangle}$ ist freier $F\langle g \rangle$-Modul.
(c) V_p ist projektiver $F\,\mathrm{SL}_2(p)$-Modul.

Lemma 13.12 *Es gibt nicht zerfallende kurze exakte Sequenzen von $F\,\mathrm{SL}_2(p)$-Moduln:*

$$0 \to V_{p-1-i} \to V \to V_i \to 0 \ (1 \le i \le p-1)$$

$$0 \to V_{p+1-i} \to V \to V_i \to 0 \ (2 \le i \le p-1)$$

Beweis. Übung, zeigen Sie, dass solche k.e.S. für die eingeschränkten $F\langle g\rangle$-Moduln existieren und benutzen Sie Folgerung 13.9. Beachten Sie, die unzerlegbaren $F\langle g\rangle$-Moduln sind isomorph zu $F[X]/(X^n)$ $n = 1, \dots, p$ von Dimension n. In der ersten k.e.S. kann man den Modul $F[X]/(X^{p-1})$ als V wählen, in der zweiten k.e.S. muss dieser zerlegbar (als $F\langle g\rangle$-Modul) sein. □

Satz 13.13 *Die projektiv unzerlegbaren $F\,\mathrm{SL}_2(p)$ Moduln $P_1, \dots, P_p$ haben folgende Radikalquotienten:*

$$P_i/J(P_i) \cong V_i \cong J^2(P_i)(1 \le i \le p-1)$$

$J(P_1)/J^2(P_1) \cong V_{p-1},\ J(P_i)/J^2(P_i) \cong V_{p+1-i} \oplus V_{p-1-i}(2 \le i \le p-2)\ J(P_{p-1})/J^2(P_{p-1}) \cong V_2$

sowie $P_p = V_p$.

Beweis. Der Isomorphietyp vom Kopf $P_i/J(P_i)$ ist klar. Ebenso der Sockel nach allgemeiner Theorie. Wegen Lemma 13.12 gibt es Epimorphismen von P_i auf die dort beschriebenen Moduln V. Daraus ergibt sich $J(P_i)/J^2(P_i)$. Also gilt

$$\dim(P_p) = p, \dim(P_1) \ge p, \dim(P_i) \ge 2p \ (2 \le i \le p-1).$$

Insgesamt ergibt sich $|G| = p(p^2-1) = \sum_{i=1}^{p} \dim(V_i)\dim(P_i) \ge p+p^2+2p\sum_{i=2}^{p-1} i = p(p^2-1)$. □

14 Defektgruppen.

Lemma 14.1 *RG ist ein $R(G\times G)$-Modul mit der Operation $x(g_1, g_2) := g_1^{-1}xg_2$. Die Blockzerlegung*

$$RG = B_1 \oplus \dots \oplus B_m$$

ist die Zerlegung von RG in unzerlegbare direkte Summanden (als $R(G\times G)$-Modul). Es gilt für alle i

$$vx(B_i) \le \Delta(G) := \{(g,g) \mid g \in G\} \le G \times G.$$

Beweis. $G \times G$ operiert transitiv auf der Basis $(g \mid g \in G)$ von RG, mit $\mathrm{Stab}_{G\times G}(1) = \Delta(G)$. Also ist

$$RG = R_{\Delta(G)}^{G\times G}$$

und somit jeder Block ein direkter Summand eines von $\Delta(G)$-induzierten Moduls und damit $\Delta(G)$-projektiv. Daraus folgt $vx(B_i) \le \Delta(G)$ für alle i. □

Definition 14.2 *Sei $vx(B) = \Delta(D) = \{(g,g) \mid g \in D\} \leq \Delta(G)$. Dann heisst $D = \delta(B) \leq G$ die* Defektgruppe *des Blocks B.*

Lemma 14.3 *Ist $H \leq G$ und $g \in G$, so ist*

$$R(HgH) \cong R_{H(g)}^{H\times H} \text{ als } R(H\times H)\text{-Modul}$$

wo $H(g) := \Delta(H \cap {}^gH)^{(1,g)} = \{(h, g^{-1}hg) \mid h \in H \cap {}^gH\} \leq \Delta(H)$.

Beweis. $H \times H$ operiert transitiv auf HgH.

$$\mathrm{Stab}_{H\times H}(g) = \{(h_1,h_2) \in H\times H \mid h_1^{-1}gh_2 = g\} = \{(h_1,h_2) \in H\times H \mid h_2 = g^{-1}h_1g\}$$

□

Satz 14.4 *(Green) Ist $D = \delta(B)$ Defektgruppe eines Blocks B, so gibt es ein $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$ und ein $g \in G$ mit $D = P \cap P^g$. Insbesondere enthält D jeden p-Normalteiler von G.*

Beweis. Sei $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$ mit $D \leq P$. Es ist

$$B_{P\times P} \mid RG_{P\times P} = \bigoplus_{g\in P\backslash G/P} R(PgP) = \bigoplus_{g\in P\backslash G/P} R_{P(g)}^{P\times P}.$$

Da $P \times P$ eine p-Gruppe ist, sind die Moduln $R_{P(g)}^{P\times P}$ nach Lemma 12.9 unzerlegbar. Da $vx(R_{P(g)}) = P(g)$ ist, ist also $vx(R_{P(g)}^{P\times P}) = P(g)$. Weiter ist $vx(B) = \Delta(D)$, also gibt es einen direkten Summanden mit Vertex $\Delta(D)$. Also ist $\Delta(D)$ in $P \times P$ konjugiert zu einem der $P(g)$ und damit D konjugiert zu $P \cap P^g$ für ein $g \in G$. □

Satz 14.5 *Sei $D = \delta(B)$, $B = RGe$ Block. Für eine Untergruppe $H \leq G$ sind äquivalent:*
(a) $D \leq_G H$.
(b) $\mathrm{Tr}_{\Delta(H)}^{\Delta(G)}(\mathrm{Inv}_{\Delta(H)}(B)) = \mathrm{Inv}_{\Delta(G)}(B)$
(c) $e \in \mathrm{Tr}_{\Delta(H)}^{\Delta(G)}(\mathrm{Inv}_{\Delta(H)}(B))$.

Beweis. $(b) \Leftrightarrow (c)$ liegt daran, dass $\mathrm{Tr}_{\Delta(H)}^{\Delta(G)}(\mathrm{Inv}_{\Delta(H)}(B))$ ein Ideal in $\mathrm{Inv}_{\Delta(G)}(B)$ ist.
Die G-Operation auf B ist gegeben durch Konjugation, $(b,g) \mapsto g^{-1}bg$. Also ist

$$\mathrm{Inv}_{\Delta(G)}(B) = \{b \in B \mid g^{-1}bg = b \text{ für alle } g \in G\} = Z(B).$$

Weiter wissen wir schon, dass $D = vx(B)$ für den $R(G\times G)$-Modul B ist.
$(a) \Rightarrow (b)$: Dazu sei $D \leq_G H \leq G$ und $G = \dot\bigcup_{i=1}^n Hg_i$ und $G \times G = \dot\bigcup_{i=1,g\in G}^n \Delta(H)(g,g_i)$. Als $G \times G$-Modul ist B dann H-projektiv, also existiert nach dem Higman Kriterium Satz 8.10 ein $\theta \in \mathrm{End}_{\Delta(H)}(B)$ mit $\mathrm{id}_B = \mathrm{Tr}_{\Delta(H)}^{G\times G}(\theta)$. Dann ist für alle $x \in B$

$$x = \sum_{g\in G, i=1}^n g^{-1}(gxg_i^{-1})\theta g_i = \sum_{i=1}^n g_i^{-1}(\sum_{g\in G} g_i g^{-1}(gxg_i^{-1})\theta)g_i$$

Insbesondere gilt dies für $x = e \in Z(RG)$. Setzt man also $z := \sum_{g \in G} g^{-1}(eg)\theta$, so ist $z \in \mathrm{Inv}_{\Delta(H)}(B)$, denn für $h \in H$ ist

$$h^{-1}zh = h^{-1}\sum_{g\in G} g^{-1}(eg)\theta h = \sum_{g\in G} h^{-1}g^{-1}(egh)\theta = z$$

da θ ein RH-Endomorphismus ist und mit g auch gh die ganze Gruppe durchläuft. Weiter gilt

$$\mathrm{Tr}_{\Delta(H)}^{\Delta(G)}(z) = \sum_{i=1}^{n} g_i^{-1}zg_i = \sum_{i=1}^{n} g_i^{-1}\sum_{g\in G} g^{-1}(eg)\theta g_i = \sum_{i=1}^{n} g_i^{-1}\sum_{g\in G}(g_ig^{-1})(e(g_ig^{-1})^{-1})\theta g_i$$

da mit g auch gg_i^{-1} die gesamte Gruppe durchläuft. Da e zentral ist, gilt

$$\mathrm{Tr}_{\Delta(H)}^{\Delta(G)}(z) = \sum_{i=1}^{n} g_i^{-1}\sum_{g\in G} g_ig^{-1}(geg_i^{-1})\theta g_i = e.$$

$(c) \Rightarrow (a)$ Sei $H \leq G$ so dass es ein $z \in \mathrm{Inv}_{\Delta(H)}(B)$ gibt mit $e = \mathrm{Tr}_{\Delta(H)}^{\Delta(G)}(z)$. Definieren $\theta \in \mathrm{End}_{RG\times H}(B)$ durch $(x)\theta := xz$. Dann ist für $h \in H$, $g \in G$:

$$(g^{-1}xh)\theta = g^{-1}xhz = g^{-1}xhz = x(g,h)z = (x)\theta(g,h)$$

also $\theta \in \mathrm{End}_{RG\times H}(B)$. Weiter ist

$$\mathrm{Tr}_{G\times H}^{G\times G}(\theta) : x \mapsto \sum_{i=1}^{n}(x(1,g_i^{-1}))\theta(1,g_i) = \sum_{i=1}^{n}(xg_i^{-1})\theta g_i = \sum_{i=1}^{n} xg_i^{-1}zg_i = xe = x.$$

Also ist B ein $G \times H$-projektiver $G \times G$-Modul und damit $\Delta(D) \leq_{G\times G} G \times H$ woraus $D \leq_G H$ folgt. □

Bemerkung 14.6 *$B \hookrightarrow \mathrm{End}_R(B)$, $b \mapsto (x \mapsto xb)$. Dabei wird $e \in B = RGe$ auf die Identität abgebildet. Die G-Operation auf $B \leq \mathrm{End}_R(B)$ ist dieselbe wie die $\Delta(G)$-Operation auf B. Insbesondere ist der $\Delta(G)$-Modul B wegen Satz 14.5 (c) und dem Higman Kriterium Satz 8.10 ein $D = \delta(B)$-projektiver RG-Modul.*

Satz 14.7 *Ist V ein unzerlegbarer RG-Modul im Block B, so ist $vx(V) \leq_G \delta(B)$.*

Beweis. Sei $D := \delta(B)$ die Defektgruppe von B. Wir müssen zeigen, dass V ein D-projektiver RG-Modul ist.
$V \otimes_R B$ ist ein RG-Modul mit $(v \otimes b)g := vg \otimes (g^{-1}bg)$. Sei e das Blockidempotent von $B = RGe$ und definiere $\varphi : V \to V \otimes_R B, v \mapsto v \otimes e$ und $\psi : V \otimes_R B \to V, v \otimes a \mapsto va$. Dann sind φ und ψ beides RG-Modulhomomorphismen mit $\varphi\psi = \mathrm{id}_V$. Also ist V ein direkter Summand von $V \otimes_R B$ und es genügt zu zeigen, dass $V \otimes_R B$ ein D-projektiver RG-Modul ist. Da Induktion und Tensorprodukt vertauschen, folgt dies daraus dass der RG-Modul B ein D-projektiver Modul ist (Bemerkung 14.6). □

Definition 14.8 *Sei $C = g^G$ eine Konjugiertenklasse von G. Dann heißt jede p-Sylowgruppe $P \in \mathrm{Syl}_p(C_G(g))$ eine* Defektgruppe *von C, $P =: \delta(C)$.*

Satz 14.9 *Für eine Konjugiertenklasse $C \subset G$ bezeichnet $C^+ = \sum_{g\in C} g \in FG$ die Klassensumme. Ist D eine p-Untergruppe von G so sei*

$$J_D := \{ \sum_{\delta(C)\leq_G D} \alpha_C C^+ \mid \alpha_C \in F\} \leq Z(FG).$$

Dann ist $J_D = \mathrm{Tr}_{\Delta(D)}^{\Delta(G)}(\mathrm{Inv}_{\Delta(D)}(FG))$.

Beweis. Die D-Konjugiertenklassensummen bilden eine F-Basis von $\mathrm{Inv}_{\Delta(D)}(FG) = \{x \in FG \mid d^{-1}xd = x$ für alle $d \in D\}$. Sei also $G = \dot\bigcup_{j=1}^m C_j$ mit $C_j := \{hxh^{-1} \mid h \in D\}$ und $z = \sum_{j=1}^m \alpha_j C_j^+ \in \mathrm{Inv}_{\Delta(D)}(FG)$, $\alpha_j \in F$. Dann ist

$$\mathrm{Tr}_{\Delta(D)}^{\Delta(G)}(z) = \sum_{j=1}^m \alpha_j \mathrm{Tr}_{\Delta(D)}^{\Delta(G)}(C_j^+).$$

Ist nun $x \in C_j$ und $D = \dot\bigcup_k C_D(x)h_k$, $G = \dot\bigcup_i Dg_i$, so ist

$$\mathrm{Tr}_{\Delta(D)}^{\Delta(G)}(C_j^+) = \sum_{i,k} g_i^{-1}h_k^{-1}xh_kg_i = [C_G(x) : C_D(x)] \sum_{y\in x^G} y.$$

Ist nun $\delta(C) \not\leq_G D$, so ist $[C_G(x) : C_D(x)] \equiv_p 0$, und somit $\mathrm{Tr}_{\Delta(D)}^{\Delta(G)}(C_j^+) = 0$. Also gilt $\mathrm{Tr}_{\Delta(D)}^{\Delta(G)} \mathrm{Inv}_{\Delta(D)}(FG) \subset J_D$.
Für die Umkehrung sei $\delta(C) \leq_G D$ und $x \in C = x^G$ mit $C_G(x) \cap D \geq_G \delta(C)$. Dann ist

$$C^+ = \frac{1}{[C_G(x) : C_D(x)]} \sum_{G=\dot\bigcup C_D(x)g} g^{-1}xg = \frac{1}{[C_G(x) : C_D(x)]} \mathrm{Tr}_{\Delta(D)}^{\Delta(G)} \sum_{y\in x^D} y \in J_D.$$

□

Folgerung 14.10 *Ist $B = RGe$ ein Block mit Defektgruppe D, so ist $\overline{e} = \sum_{\delta(C_i)\leq_G D} \alpha_i C_i^+$ mit $\alpha_i \in F$. Es gibt ein i_0 mit $\alpha_{i_0} \neq 0$ und $\delta(C_{i_0}) =_G D$.*

Beweis. Da B ein D-projektiver RG-Modul ist, ist $\overline{e} \in \mathrm{Tr}_{\Delta(D)}^{\Delta(G)}(\mathrm{Inv}_{\Delta(D)}(FG)) = J_D$. Gäbe es kein solches i_0, so wäre $\overline{e} \in \sum_{Q<_G D} J_Q$. Die Mengen J_Q sind als Bilder der Spurabbildung Ideale in $Z(FG)$. $\mathrm{Inv}_{\Delta(G)}(\overline{B}) = Z(\overline{B}) = Z(FG)\overline{e}$ ist ein lokaler Ring, also gibt es ein $Q <_G D$ mit $\overline{e} \in J_Q$. Dann ist aber nach Satz 14.5 $D \leq_G Q$, ein Widerspruch. □

Folgerung 14.11 *Sei F Zerfällungskörper für FG, $\overline{B} = FG\overline{e}$ ein Block mit Defektgruppe $D = \delta(B)$ und $\overline{\omega} : Z(FG) \to Z(\overline{B}) \to F$ zugehöriger zentraler Charakter.*
(a) Ist $I \trianglelefteq Z(FG)$ mit $\overline{\omega}(I) \neq 0$, dann ist $\overline{e} \in I$.
(b) Ist C eine Konjugiertenklasse in G, so ist $\overline{\omega}(C^+) = 0$ falls $D \not\leq_G \delta(C)$.
(c) Ist $\overline{e} = \sum \alpha_i C_i^+$ so gibt es ein i_0 mit $\delta(C_{i_0}) =_G D$, $\alpha_{i_0} \neq 0$ und $\overline{\omega}(C_{i_0}^+) \neq 0$.

Beweis. (a) $\overline{\omega}(I) \neq 0 \Rightarrow \overline{\omega}(I) = F$ (als Ideal in F). D.h. es gibt $u \in I$ mit $\overline{\omega}(u) = \overline{\omega}(\overline{e})$ und damit $u - \overline{e} \in \ker(\overline{\omega}) = Z(FG)(1-\overline{e}) + J(Z(FG)\overline{e})$. Also ist $u - \overline{e} = z(1-\overline{e}) + r\overline{e}$ mit $r \in J(Z(FG))$. Damit folgt $\overline{e} = u\overline{e} - r\overline{e}$ und $\overline{e}(1-u) \in J(Z(FG))$ ist nilpotent. Also gibt es ein $s \in \mathbb{N}$ mit

$$0 = (\overline{e} - \overline{e}u)^{p^s} = \overline{e} - \overline{e}u^{p^s} \in \overline{e} + I.$$

(b) Ist $\overline{\omega}(C^+) \neq 0$, so ist $\overline{\omega}(J_{\delta(C)}) \neq 0$ und damit $\overline{e} \in J_{\delta(C)}$ (wegen (a)), denn $J_{\delta(C)} \trianglelefteq Z(FG)$.
(c) Denn $1 = \overline{\omega}(\overline{e})$. Benutze (b) und Folgerung 14.10. $\square$

Satz 14.12 *Ist B ein Block von Defekt $d = d(B)$ und $D = \delta(B)$ eine Defektgruppe, so gilt $|D| = p^d$.*

Beweis. Sei $\overline{e} = \sum_{\delta(C_i) \geq_G D} \alpha_i C_i$ und i_0 wie in Folgerung 14.11. Sei weiter $\chi \in Irr(B)$. Dann ist für $g \in C_{i_0}$ und den zu χ gehörenden zentralen Charakter ω

$$\omega(C_{i_0}^+) = \frac{|G|}{|C_G(g)|\chi(1)}\chi(g) \not\equiv_\pi 0.$$

Nach Satz 10.1 teilt p dann nicht die Ordnung von g. Schreibe $|D| = p^d$ und $|C| = \frac{|G|}{|C_G(g)|} = p^{a-d}q$ mit $p \nmid q$. Dann gilt $p^{a-d} \mid \chi(1)$ (da $\chi(g) \in R$). Angenommen $p^{a-d+1} \mid \chi(1)$ für alle $\chi \in \mathrm{Irr}(B)$. Dann gilt $p \mid \chi(g)$ für alle $\chi \in \mathrm{Irr}(B)$. Der Koeffizient von $C_{i_0}^+$ in e ist dann

$$\frac{1}{|G|}\sum_{\chi\in\mathrm{Irr}(B)} \chi(1)\chi(g^{-1}) = \frac{1}{|G|}\sum_{\chi\in\mathrm{Irr}(B)} \chi(1) \sum_{\varphi\in\mathrm{IBr}(B)} d_{\chi,\varphi}\varphi(g^{-1}) = \frac{1}{|G|}\sum_{\varphi\in\mathrm{IBr}(B)} \Phi_\varphi(1)\varphi(g^{-1})$$

nach der Brauerreziprozität. Nun ist Φ_φ der zu dem irreduziblen Brauercharakter φ gehörige projektive Charakter und daher teilt p^a den Grad $\Phi_\varphi(1)$. Ausserdem ist $\varphi(g^{-1}) \in \langle \chi(g^{-1}) \mid \chi \in \mathrm{Irr}(B)\rangle_{\mathbb{Z}}$ wegen Satz 9.12. Da $\chi(g)$ genau dann durch p teilbar ist, wenn $\chi(g^{-1})$ durch p teilbar ist, folgt aus der Annahme, dass der Koeffizient von $C_{i_0}^+$ in e durch p teilbar ist, ein Widerspruch. Also ist $a - d = \min\{v(\chi(1)) \mid \chi \in \mathrm{Irr}(B)\}$ und damit $d = d(B)$ der Defekt von B. $\square$

Ende am 19.12.2006

15 Brauerkorrespondenz.

Ziel: Vergleiche Blöcke von RG mit denen von RH, $H \leq G$. Ist $RG = B_1 \oplus \ldots \oplus B_m$, so ist

$$RG_{H\times H} = \bigoplus_{G=\dot\cup HgH} RHgH = RH \oplus \bigoplus_{G=\dot\cup HgH, g\notin H} RHgH = (b_1 \oplus \ldots \oplus b_n) \oplus M$$

wo $b_1, \ldots, b_n$ die Blöcke von RH sind und $M = \bigoplus_{G=\dot\cup HgH, g\notin H} RHgH$.

Definition 15.1 *Ist b_i kein direkter Summand von M, so gibt es genau ein B_j mit $b_i \mid (B_j)_{H\times H}$. In diesem Fall ist b_i^G* definiert *und wir setzen $b_i^G := B_j$. Die Abbildung $b_i \mapsto b_i^G$ von der Menge der Blöcke von RH für die b_i^G definiert ist in die Menge der Blöcke von RG heißt die* Brauerkorrespondenz.

Beispiel: $\mathrm{SL}_2(p)$ und $H = C_p : C_{p-1}$ (mit $Z(H) = C_2$).

Lemma 15.2 *(a) Ist b^G definiert, so ist $\delta(b) \leq_G \delta(b^G)$.*
(b) $H_1 \leq H_2 \leq G$, b_i Block von H_i, $b_1^{H_2} = b_2$ definiert, $b_2^G = B$ definiert, dann ist $b_1^G = B$.

Beweis. (a) Sei $B := b^G$, $D := \delta(B)$. Dann ist B ein $\Delta(D)$-projektiver $G \times G$-Modul, also gibt es einen $\Delta(D)$-Modul V mit $B \mid V_{\Delta(D)}^{G\times G}$. Nun ist b ein direkter Summand von $B_{H\times H} = b \oplus \ldots$, also auch von

$$(V_{\Delta(D)}^{G\times G})_{H\times H} = \bigoplus (V^{(g_1,g_2)}_{\Delta(D)^{(g_1,g_2)} \cap (H\times H)})^{H\times H}$$

nach Mackey. Also ist b ein direkter Summand von einem $(V^{(g_1,g_2)}_{\Delta(D)^{(g_1,g_2)} \cap (H\times H)})^{H\times H}$ und somit $\Delta(D)^{(g_1,g_2)} \cap (H \times H)$-projektiv.
(b) ist klar. $\square$

Lemma 15.3 *Sei $RG_{H\times H} = RH \oplus M$ und sei D eine p-Gruppe mit $DC_G(D) \leq H$. Dann gilt für jeden unzerlegbaren direkten Summanden U von M dass $\Delta(D) \not\leq_{H\times H} vx(U)$.*

Beweis. Nach Lemma 14.3 ist jeder direkte Summand von $RHgH$ ein $H(g)$-projektiver $H\times H$-Modul wo $H(g) := \Delta(H \cap {}^gH)^{(1,g)} = \{(h, g^{-1}hg) \mid h \in H \cap {}^gH\} \leq H \times H$. Sei $U \mid M$. Angenommen $\Delta(D) \leq_{H\times H} vx(U)$. Da $M = \bigoplus_{g\notin H} R(HgH)$ gibt es ein $g \notin H$ mit $U \mid R(HgH)$. Dann ist aber $vx(U) \leq_{H\times H} H(g)$. Also gibt es $h_1, h_2 \in H$ mit $(h_1^{-1}xh_1, h_2^{-1}xh_2) \in H(g)$ für alle $x \in D$. Dann muss gelten $g^{-1}h_1^{-1}xh_1g = h_2^{-1}xh_2$ für alle $x \in D$ und also $h_1gh_2^{-1} \in C_G(D) \leq H$ ein Widerspruch da $g \notin H$. $\square$

Folgerung 15.4 *Ist b ein Block von RH mit $DC_G(D) \leq H$, $D = \delta(b)$, so ist b^G definiert.*

Satz 15.5 *Sei b ein Block von RH mit zentralem Charakter $\omega : Z(b) \to R$ (modulo π eindeutig bestimmt nach Satz 10.6) und definiere*

$$\overline{\omega}^G : Z(FG) \to F \text{ durch } (C^+)\overline{\omega}^G := (\sum_{h\in C\cap H} h)\overline{\omega}.$$

Dann gilt: Ist b^G ist definiert und gleich B, so ist $\overline{\omega}^G$ der zentrale Charakter zum Block B.

Beweis. Sei $FG_{H\times H} = \overline{b} \oplus U$ mit $\overline{b} \nmid U$ und π_1, π_2 die zugehörigen Projektionen auf $\overline{b}$ bzw. U, μ_1, μ_2 die Einbettungen. Dann ist $\mathrm{id}_{FG} = \pi_1\mu_1 + \pi_2\mu_2$. Für $f, g \in \mathrm{End}_{F(G\times G)}(FG)$ ist

$$\mu_1 fg\pi_1 = \mu_1 f(\pi_1\mu_1 + \pi_2\mu_2)g\pi_1 = \mu_1 f\pi_1\mu_1 g\pi_1 + \mu_1 f\pi_2\mu_2 g\pi_1 = \mu_1 f\pi_1\mu_1 g\pi_1 + f_1g_2$$

mit $f_1 = \mu_1 f\pi_2 \in \mathrm{Hom}_{F(H\times H)}(\overline{b}, U)$ und $g_2 = \mu_2 g\pi_1 \in \mathrm{Hom}_{F(H\times H)}(U, \overline{b})$. Da $\overline{b}$ kein direkter Summand von U ist, ist $f_1g_1 \in \mathrm{End}_{F(H\times H)}(\overline{b})$ keine Einheit und damit $f_1g_1 \in J(\mathrm{End}_{F(H\times H)}(\overline{b})) = J(Z(\overline{b})) = \ker(\overline{\omega}) \cap \overline{b}$, da b unzerlegbarer $F(H \times H)$-Modul und daher $\mathrm{End}_{F(H\times H)}(\overline{b})$ lokal ist. Die Abbildung $z \mapsto f_z : (x \mapsto xz) \in \mathrm{End}(FG)$ liefert einen

Isomorphismus $Z(FG) \cong \mathrm{End}_{G\times G}(FG)$ mit Umkehrung = Auswertung bei 1. Also liefert die Zusammensetzung

$$z \mapsto (\overline{e}(\pi_1 f_z \mu_1))\overline{\omega}$$

einen Algebrenhomomorphismus $Z(FG) \to F$ also einen zentralen Charakter.

Die Abbildung $\pi_1 : FG \to b$ faktorisiert über die offensichtliche Projektion $FG \to FH$, $\sum_{g\in G} a_g g \mapsto \sum_{h\in H} a_h h$. Also gilt $(C^+)\pi_1 = \sum_{h\in C\cap H} h\overline{e}$ und damit $(C^+)\pi_1\overline{\omega} = (C^+)\overline{\omega}^G$. $\square$

Übung: Sei $\xi \in \mathrm{Irr}(b)$, so daß $\chi := \xi^G$ irreduzibel. Dann ist $\overline{\omega_\chi} = \overline{\omega_\xi}^G$.

Bemerkung: Brauer's Originaldefinition der Brauerkorrespondenz benutzt $\overline{\omega_b}^G$. Nach Brauer ist für einen Block b von RH der Brauerkorrespondent $b^G = B$, genau dann wenn $\overline{\omega_b}^G = \overline{\omega}_B$ ist. Ist in unserem Sinn $b^G = B$ definiert, so auch im Brauerschen Sinn und die beiden Definitionen stimmen überein. Die Umkehrung ist i.a. falsch, d.h. es gibt Situationen in denen $\overline{\omega_b}^G = \overline{\omega}_B$ ist aber b mehrfach als direkter Summand von $FG_{H\times H}$ vorkommt. Beispiel: $H = Z(G)$, G nichabelsche p-Gruppe (s.Übung).

Satz 15.6 *Sei D eine p-Untergruppe von G und $C_G(D) \trianglelefteq H \leq G$. Dann ist die lineare Abbildung*

$$Br_{D,H} : Z(FG) \to Z(FH),\ C^+ \mapsto (C \cap C_G(D))^+$$

einen F-Algebrenhomomorphismus. Ist B ein Block von RG, $B = RGe_B$, dann ist

$$Br_D(\overline{e_B}) \neq 0 \Leftrightarrow D \leq_G \delta(B).$$

Br_D heißt der Brauerhomomorphismus.

Beweis. $C_G(D) \trianglelefteq H$, also ist $C \cap C_G(D)$ eine Vereinigung von H-Konjugiertenklassen. Insbesondere ist die lineare Abbildung $Br_{D,H}$ wohldefiniert. Sei $C_i = g_i^G$, $C_i^0 = C_i \cap C_G(D)$ so daß $g_i \in C_G(D)$ liegt, falls $C_i^0 \neq \emptyset$. Dann ist

$$C_i^+ C_j^+ = \sum_k \alpha_{ijk} C_k^+, \text{ wo } \alpha_{ijk} = |\{(x,y) \in C_i \times C_j \mid xy = g_k\}|.$$

Sei

$$\alpha_{ijk}^0 := |\{(x,y) \in C_i^0 \times C_j^0 \mid xy = g_k\}|.$$

Zu zeigen: $\alpha_{ijk}^0 \equiv_p \alpha_{ijk}$ falls $C_k^0 \neq \emptyset$. Schreibe jede G-Konjugiertenklasse C als $C = C^0 \,\dot\cup\, C'$. Dann ist

$$(C_i \times C_j) = (C_i^0 \times C_j^0) \,\dot\cup\, (C_i^0 \times C_j') \,\dot\cup\, (C_i' \times C_j^0) \,\dot\cup\, (C_i' \times C_j')$$

also $\alpha_{ijk} = \alpha_{ijk}^0 + \alpha_{ijk}'$ wo $\alpha_{ijk}' = |\{(x,y) \in C_i' \times C_j' \mid xy = g_k\}|$ (beachte: $x \in C_G(D), y \notin C_G(D) \Rightarrow xy \notin C_G(D)$). Die Gruppe D operiert auf $\{(x,y) \in C_i' \times C_j' \mid xy = g_k\}$ durch Konjugation: $((x,y),d) \mapsto (x^d, y^d)$. Da $x, y \notin C_G(D)$ liegen, gibt es dabei keine Bahnen der Länge 1. Also sind alle Bahnlängen durch p teilbar und daher $\alpha_{ijk}' \equiv_p 0$.
Ist nun $C_i^0 = \{x_1, \ldots, x_n\}$, $C_j^0 = \{y_1, \ldots, y_m\}$, so ist

$$(C_i^0)^+(C_j^0)^+ = \sum_{t,s} x_t y_s = \sum_l b_{i,j,l}(C_l^0)^+ \in FH$$

wo $b_{i,j,l} = \{(t,s) \mid x_t y_s = \text{ ein festes Element in } C_l^0\}$ ist, da diese Anzahl (mod p) unabhängig von der Wahl dieses Elements in C_l^0 ist. Aus dem obigen ergibt sich $b_{i,j,l} \equiv_p \alpha_{i,j,l}$.

Ende am 9.1.07

Zur 2. Behauptung sei $\overline{e_B} = \sum_{\delta(C)\leq\delta(B)} \alpha_C C^+$ wie in Satz 14.10.

$\Rightarrow$: Ist $D \not\leq_G \delta(B)$ so gilt für alle C mit $\alpha_C \neq 0$, daß $D \not\leq_G \delta(C)$. Dies bedeutet aber $C \cap C_G(D) = \emptyset$ und daher $Br_D(\overline{e_B}) = 0$.

$\Leftarrow$: Nach Satz 14.10 gibt es ein C mit $\alpha_C \neq 0$ und $\delta(C) = \delta(B)$. Dann ist $D \leq_G \delta(C) = \delta(B)$ und also $C \cap C_G(D) \neq \emptyset$ woraus $Br_D(\overline{e_B}) \neq 0$ folgt. □

Bemerkung 15.7 *Sei B ein Block von FG, $D \leq_G \delta(B)$ und $DC_G(D) \leq H \leq N_G(D)$. Dann ist $\mathrm{Br}_{D,H}(\overline{e_B}) = \sum_i \overline{e_{b_i}}$ als Idempotent in $Z(FH)$ eine Summe von Blockidempotenten. Für alle vorkommenden b_i ist $b_i^G = B$.*

Beweis. b_i komme in der Summe vor. Da $D \trianglelefteq H$ ist, gilt $D \leq \delta(b_i) =: D_i$ und daher $D_i C_G(D_i) \leq D_i C_G(D) \leq H$. Also ist nach Folgerung 15.4 b_i^G definiert. Weiter ist

$$\overline{\omega_{b_i}} \circ Br_{D,H} = \overline{\omega_B}$$

als zentraler Charakter mit Wert 1 bei e_B. Insbesondere gilt für jede G-Konjugiertenklasse C, dass

$$\overline{\omega_B}(C^+) = \overline{\omega_{b_i}}((C \cap C_G(D))^+) \overset{\star}{=} \overline{\omega_{b_i}}((C \cap H)^+) = \overline{\omega_{b_i}}^G(C^+).$$

Die Gleichheit $\star$ gilt, da für $g \in C - C_G(D)$ die Gruppe $D \not\leq \delta(g^H)$. Aber $D \trianglelefteq H$ also $D \leq \delta(b_i)$ und somit $\delta(b_i) \not\leq \delta(g^H)$ also $\overline{\omega_{b_i}}((g^H)^+) = 0$ (Lemma 14.11 (b)). Also ist $\overline{\omega_B} = \overline{\omega_{b_i}}^G$ und daher $B = b_i^G$. □

Satz 15.8 *(1. Hauptsatz von Brauer) Sei D eine p-Untergruppe von G, $N_G(D) \leq H \leq G$. Dann ist $b \mapsto b^G$ eine bijektive Abbildung zwischen $\{b$ Block von RH mit Defektgruppe $=_H D\}$ und $\{B$ Block von RG mit Defektgruppe $=_G D\}$. Die Umkehrabbildung ist für $H = N_G(D)$ gegeben durch $B \mapsto b$ wo $\mathrm{Br}_D(\overline{e_B}) = \overline{e_b}$.*

Als Übung zeigen Sie: Ist $C_G(D) \trianglelefteq H$, so ist $\mathrm{Br}_{D,H}(\overline{e_B}) = \overline{e_b} + \sum_i e_{b_i}$ mit b_i Blöcken von RH mit $\delta(b_i) \leq_G D$ aber $\delta(b_i) \neq_H D$.

Beweis. Œ sei $H = N_G(D)$. (Sonst Korrespondenz $N_H(D) = N_G(D) \to H$ und $N_G(D) \to G$ und Zusammensetzen). Wir benutzen die Greenkorrespondenz in der Form von Satz 13.7. Sei dazu $f = f(G \times G, \Delta(D), H \times H)$ die Greenkorrespondenz. Es ist $N_{G\times G}(\Delta(D)) \leq N_G(D) \times N_G(D) = H \times H$ und

$$\begin{aligned}
\mathcal{X} &= \mathcal{X}(G \times G, \Delta(D), H \times H) \\
&= \{Q \leq G \times G \mid Q \leq \Delta(D)^{(g_1,g_2)} \cap \Delta(D) \text{ für ein } (g_1,g_2) \in G \times G - H \times H\} \\
\mathcal{Y} &= \mathcal{Y}(G \times G, \Delta(D), H \times H) \\
&= \{Q \leq G \mid Q \leq \Delta(D)^{(g_1,g_2)} \cap H \times H \text{ für ein } (g_1,g_2) \in G \times G - H \times H\}
\end{aligned}$$

Ist V ein unzerlegbarer $R(G\times G)$-Modul mit vertex $\Delta(D)$, so ist $V_{|(H\times H)} = f(V) \oplus O(\mathcal{Y})$ wo $f(V)$ unzerlegbarer $R(G \times G)$-Modul mit vertex $\Delta(D)$. Ist W ein unzerlegbarer $R(H \times H)$-Modul mit vertex $\Delta(D)$, so ist $W^{(G\times G)} = f^{-1}(W) \oplus O(\mathcal{X})$, wo $f^{-1}(W)$ ein unzerlegbarer

$R(G\times G)$-Modul mit $vx(f^{-1}(W)) =_{(G\times G)} \Delta(D)$ ist.
a) Sei B ein Block von RG mit $\delta(B) = D$. Dann ist $\Delta(D) = vx(B)$ als $R(G \times G)$-Modul und $B_{H\times H} = f(B)\oplus O(\mathcal{Y})$. Es ist $f(B)$ ein unzerlegbarer direkter Summand von $RG_{H\times H} = RH \oplus M$, wobei die vertices der unzerlegbaren direkten Summanden von M nicht $\Delta(D)$ enthalten. Da $vx(f(B)) = \Delta(D)$ gilt, ist $f(B)$ ein unzerlegbarer direkter Summand von RH und daher ein Block $f(B) = b$ und $b^G = B$. Ausserdem ist $f(B)$ der einzige Summand von $B_{H\times H}$ mit vertex $\Delta(D)$, und somit b der einzige solche Block.
b) Sei b ein Block von RH mit $\delta(b) = D$. Dann ist $B := b^G$ definiert (nach Folgerung 15.4) und $\delta(B) \geq_G \delta(b) = D$ wegen Lemma 15.2 (a). Zu zeigen: $\delta(B) =_G D$.
Sei $\overline{\omega} = \overline{\omega_b}$ der zentrale Charakter zum Block b und $C_1 = h^H$ eine Klasse von H mit $\delta(C_1) = D$ und $\overline{\omega}(C_1^+) \neq 0$. Dann ist $h \in C_G(D) \trianglelefteq H$, also $C_1 \subseteq C_G(D)$. Setze $C := h^G$.
1) $\delta(C) = D$. Angenommen $D < \delta(C) =: Q \in \mathrm{Syl}_p(C_G(h))$. Wähle $D\trianglelefteq D_1 \leq Q$, $[D_1 : D] = p$. Dann ist $D_1 \leq N_G(D) = H$ aber $D_1 \notin \mathrm{Syl}_p(C_H(h))$, ein Widerspruch.
2) $C \cap C_G(D) = C_1$. Seien $h = h_1, h_2 \in C \cap C_G(D)$, $h_2^g = h_1$ für ein $g \in G$. Es ist $D \in \mathrm{Syl}_p(C_G(h))$ und $D \leq C_G(h_2)$. Dann also auch $D^g \leq C_G(h)$, also gibt es ein $y \in C_G(h)$ mit $D = D^{gy}$. Dann aber $gy \in N_G(D) = H$ und $h_2^{gy} = h_1^y = h_1$.
3) Also ist $\overline{\omega}^G(C^+) = \overline{\omega}((C \cap H)^+) = \overline{\omega}(C_1^+) \neq 0$ (da $C \cap H = C \cap C_G(D) = C_1$, wegen $C_G(D) \trianglelefteq H$) und somit $D = \delta(C) \geq_G \delta(B)$, also folgt die Gleichheit.
c) Wollen zeigen: $\mathrm{Br}_D(\overline{e_B}) = \overline{e_b}$. Wissen schon, $\mathrm{Br}_D(\overline{e_B}) \neq 0$. Ausserdem ist das Idempotent $\mathrm{Br}_D(\overline{e_B}) = \sum \overline{e_{b_i}}$ eine Summe von gewissen primitiven Idempotenten e_{b_i} mit $b_i^G = B$ (nach Bemerkung 15.7). Da $D \trianglelefteq H = N_G(D)$ ist, gilt $\delta(b_i) \geq D$. Weiter ist aber $b_i^G = B$ definiert und daher mit Lemma 15.2 $\delta(b_i) \leq_G \delta(B) = D$. Also insgesamt $\delta(b_i) = D$. Nun ist b der einzige Block von RH mit $b^G = B$ und $\delta(b) = D$, also ist $\mathrm{Br}_D(e_B) = e_b$. □

16 Der 2. Hauptsatz von Brauer.

In diesem Abschnitt sei (K, R, F) ein p-modulares Zerfällungssystem für G und alle ihre Untergruppen.

Lemma 16.1 *Sei h ein p-Element von G und $H := C_G(h)$, $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$. Dann gibt es $d^h_{\chi,\varphi} \in \mathbb{Z}$ so dass für alle $y \in H_{p'}$*

$$\chi(hy) = \sum_{\varphi\in IBr(H)} d^h_{\chi,\varphi}\varphi(y).$$

Die Zahlen $d^h_{\chi,\varphi}$ heissen verallgemeinerte Zerlegungszahlen.

Beweis. Bei jeder irreduziblen Darstellung von $C_G(h)$ wird h als Skalarmatrix $\lambda(h)I$ dargestellt. Es ist $\chi_H = \sum_{\chi_i\in\mathrm{Irr}(H)} a_i\chi_i$. Also ist

$$\chi(hy) = \sum a_i\lambda_i(h)\chi_i(y) = \sum_i a_i\lambda_i(h) \sum_{\varphi\in\mathrm{IBr}(H)} d_{\chi_i,\varphi}\varphi(y) == \sum_{\varphi\in\mathrm{IBr}(H)} (\sum_i a_i\lambda_i(h)d_{\chi_i,\varphi})\varphi(y).$$

Also ergibt sich die Behauptung mit

$$d^h_{\chi,\varphi} = \sum_i a_i\lambda_i(h)d_{\chi_i,\varphi}.$$

$\square$

Lemma 16.2 *Für $H \leq G$ und $g \in G$ sei $\delta_H(g^H) :\in \mathrm{Syl}_p(C_H(g))$ die H-Defektgruppe von g. Etwas allgemeiner als in Abschnitt 14 sei für eine p-Untergruppe $D \leq H$*

$$J_{D,H} := \{ \sum_{g \in G, \delta_H(g^H) \leq_H D} \alpha_{g^H}(g^H)^+ \mid \alpha_{g^H} \in F\} \leq \mathrm{Inv}_{\Delta(H)}(FG).$$

Dann ist $J_{D,H} = \mathrm{Tr}_{\Delta(D)}^{\Delta(H)}(\mathrm{Inv}_{\Delta(D)}(FG)) \trianglelefteq \mathrm{Inv}_{\Delta(H)}(FG)$.

Beweis. Wie in Abschnitt 14. $\square$

Sei nun D eine p-Untergruppe von G und $C_G(D) \leq H \leq N_G(D)$. Bezeichne $\mathrm{Br}_D : Z(FG) \to Z(FH)$ den Brauerhomomorphismus und sei $\overline{e} \in Z(FG)$ ein Blockidempotent von FG.

Lemma 16.3 *(a) $\overline{f} := \overline{e} - \mathrm{Br}_D(\overline{e})\overline{e} \in \sum_{D \not\leq Q \leq H} J_{Q,H}$.*
(b) $\overline{f}^2 = \overline{f} \in \overline{A} := \mathrm{Inv}_{\Delta(H)}(FG)$.
(c) Sei $A := \mathrm{Inv}_{\Delta(H)}(RG)$, f der Lift von $\overline{f}$ in A und f_i primitive Idempotente in A mit $f = \sum f_i$. Dann gibt es für jedes i eine p-Untergruppe $D \not\leq Q_i \leq H$ mit $\overline{f_i} \in J_{Q_i,H}$.
(d) Es gibt ein $y_i \in \mathrm{Inv}_{\Delta(Q_i)}(RG)$ mit $\mathrm{Tr}_{\Delta(Q_i)}^{\Delta(H)}(y_i) = f_i$.
(e) Ist W ein RH-Modul, f_i, Q_i wie in (c), dann ist Wf_i ein Q_i-projektiver RH-Modul.

Beweis. (a) Es ist

$$\overline{e} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (g_i^G)^+ = \sum_{j=1}^{l} \alpha_j (g_j^H)^+.$$

Nach Definition des Brauerhomomorphismus ergibt sich $\mathrm{Br}_D(\overline{e}) = \sum_{g_j \in C_G(D)} \alpha_j (g_j^H)^+$. Da $g_j \in C_G(D) \Leftrightarrow D \leq \delta_H(g_j)$ ergibt sich

$$\overline{e} - \mathrm{Br}_D(\overline{e}) = \sum_{D \not\leq \delta_H(g_j)} \alpha_j (g_j^H)^+ \in \sum_{D \not\leq Q \leq H} J_{Q,H}.$$

Also auch $\overline{f} = (\overline{e} - \mathrm{Br}_D(\overline{e}))\overline{e} \in \sum_{D \not\leq Q \leq H} J_{Q,H}$. (b) $\overline{f}^2 = \overline{e} - 2\,\mathrm{Br}_D(\overline{e})\overline{e} + (\mathrm{Br}(\overline{e})\overline{e})^2 = \overline{e} - \mathrm{Br}_D(\overline{e})\overline{e} = \overline{f}$ ist ein Idempotent.
Ende am 12.1.07
(c) Wegen a) gibt es $\overline{f}_Q \in J_{Q,H}$ mit $\overline{f}_i = \sum \overline{f}_Q = \sum \overline{f}_i \overline{f}_Q \overline{f}_i$. Nicht alle $\overline{f}_i \overline{f}_Q \overline{f}_i$ liegen in $J(\overline{f}_i \overline{A} \overline{f_i})$, da f_i ein Idempotent ist. $\overline{f}_i \overline{A} \overline{f_i}$ ist lokal also gibt es ein Q für das $x := \overline{f}_i \overline{f}_Q \overline{f}_i \in (\overline{f}_i \overline{A} \overline{f_i})^*$ eine Einheit ist. Dann ist aber $\overline{f}_i = \overline{f}_i \overline{f}_Q \overline{f}_i x^{-1} \in J_{Q,H}$.
(d) Nach Lemma 16.2 gibt es ein $z_i \in \mathrm{Inv}_{\Delta(Q_i)}(RG)$ mit $\mathrm{Tr}_{\Delta(Q_i)}^{\Delta(H)}(z_i) = f_i + u_i$ mit $u_i \in \pi RG$. Dann ist $x := \mathrm{Tr}_{\Delta(Q_i)}^{\Delta(H)}(f_i z_i f_i) = f_i + f_i u_i f_i$ mit $f_i u_i f_i \in \pi f_i A f_i \subset J(f_i A f_i)$. Also ist $x \in f_i A f_i$ eine Einheit. Setze $y_i := x^{-1} f_i z_i f_i \in \mathrm{Inv}_{\Delta(Q_i)}(RG)$. Dann ist

$$\mathrm{Tr}_{\Delta(Q_i)}^{\Delta(H)}(y_i) = x^{-1} f_i (f_i + u_i) f_i = f_i.$$

(e) Sei $\theta \in \mathrm{End}_{RQ_i}(Wf_i)$ definiert durch $(w)\theta = wy_i$ mit y_i wie in (d). Dann ist θ ein Q_i-Endomorphismus, da $y_i \in \mathrm{End}_{Q_i}(RG)$. Weiter ist für $w \in Wf_i$

$$w(\mathrm{Tr}_{Q_i}^H \theta) = \sum_{H=\dot\cup h_j Q_i} w(\theta h_j) = \sum_j w h_j^{-1} y_i h_j = w(\mathrm{Tr}_{\Delta(Q_i)}^{\Delta(H)} y_i) = wf_i = w.$$

Also ist Wf_i nach dem Higman Kriterium ein Q_i-projektiver RH-Modul. □

Satz 16.4 *(Nagao) Sei $B = RGe$ ein Block, V ein RG-Modul mit $Ve = V$. Sei D eine p-Untergruppe von G, $C_G(D) \leq H \leq N_G(D)$, $\mathrm{Br}_D : Z(FG) \to Z(FH)$ und $\beta(e) \in Z(RH)$ ein Idempotent mit $\mathrm{Br}_D(\overline{e}) = \overline{\beta(e)}$. Dann ist $V_H = V_H\beta(e) \oplus W$, wo alle unzerlegbaren Summanden von W Q_i-projektiv sind für geeignete $Q_i \leq H$ mit $D \not\leq Q_i$.*

Beweis. Sei $e = e\beta(e) + f$. Dann ist $V_H = V_H e = V_H\beta(e) \oplus V_H f$ und $V_H f = \bigoplus V_H f_i$ wie in Lemma 16.3 eine direkte Summe von relativ Q_i-projektiven Moduln, für geeignete Q_i mit $D \not\leq Q_i$. □

Satz 16.5 *(2. Hauptsatz von Brauer) Sei h ein p-Element von G, $H := C_G(h)$. Ist $d^h_{\chi,\varphi} \neq 0$ für ein $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$, $\varphi \in \mathrm{IBr}(H)$ und ist $\chi \in \mathrm{Irr}(B)$, $\varphi \in \mathrm{IBr}(b)$, so ist $b^G = B$.*

Beweis. Sei $D := \langle h \rangle$. Dann ist $H = DC_G(D)$, $D \trianglelefteq H$, also $D \leq \delta(b)$ und b^G definiert nach Folgerung 15.4. Sei $B = RGe$ ein Block von RG und $\chi \in \mathrm{Irr}(B)$. Sei V ein RG-Gitter mit Charakter χ. Dann ist $V = Ve$ und mit Satz 16.4 ist $V_H = V_H\beta(e) \oplus \bigoplus W_i$ mit relativ Q_i-projektiven RH-Gittern W_i wo $D \not\leq Q_i$. Ist ξ_i der Charakter von W_i, so ist $\xi_i(hy) = 0$ für alle $y \in (C_G(h))_{p'}$ wegen Folgerung 12.12. Also gilt für den Charakter θ von $V_H\beta(e)$ dass

$$\chi(hy) = \theta(hy) \text{ für alle } y \in C_G(h)_{p'} = H_{p'}.$$

In der Zerlegung von $\theta = \sum_i a_i\theta_i$ in irreduzible KH-Charaktere kommen nur solche θ_i vor, die zu Blöcken b_i von RH gehören, mit $b_i^G = B$. Daher

$$\theta(hy) = \sum_i a_i\theta_i(hy) = \sum_i a_i\lambda_i'(h)\theta_i(y) =$$
$$\sum_i a_i\lambda_i'(h)\sum_{\varphi\in\mathrm{IBr}(b_i)} d_{\theta_i,\varphi}\varphi(y) = \sum_{\varphi\in\mathrm{IBr}(\mathrm{Br}_D(\overline{e}))}(\sum_i a_i\lambda_i'(h)d_{\theta_i,\varphi})\varphi(y) = \sum_{\varphi\in\mathrm{IBr}(\mathrm{Br}_D(\overline{e}))} d^h_{\theta,\varphi}\varphi(y).$$

Da die Brauercharaktertafel invertierbar ist, folgt $d^h_{\chi,\varphi} = d^h_{\theta,\varphi} \neq 0$ nur falls $\varphi \in \mathrm{IBr}(\mathrm{Br}_D(\overline{e}))$. Ist also $d^h_{\chi,\varphi} \neq 0$ für $\chi \in \mathrm{Irr}(B)$, $\varphi \in \mathrm{IBr}(b)$ dann ist $\mathrm{Br}_D(\overline{e_B}) = \overline{e}_b + \ldots$ und daher $b^G = B$. □

Bemerkung: Es gilt in dem Fall $D = \langle h \rangle \leq \delta(b) \leq \delta(B)$.

Satz 16.6 *Für $\theta = \sum_{\chi\in\mathrm{Irr}(G)} a_\chi\chi$ $a_\chi \in K$ und einen Block B von RG setzen wir $\theta_B := \sum_{\chi\in\mathrm{Irr}(B)} a_\chi\chi$.*
(a) Ist für ein festes p-Element $h \in G$ der Charakterwert $\theta(g) = 0$ für alle $g \in G$ mit $g_p \sim_G h$ so ist auch $\theta_B(g) = 0$ für alle diese g.
(b) (Block-Orthogonalitätsrelationen) Ist $g_p \not\sim_G g'_p$, so ist

$$\sum_{\chi\in\mathrm{Irr}(B)} \chi(g')\chi(g^{-1}) = 0.$$

Beweis. (a) Es ist $\theta(hy) = 0$ für alle $y \in C_G(h)_{p'}$. Setze $H := C_G(h)$. Dann ist

$$\begin{aligned} 0 = \theta(hy) &= \sum_{\chi\in\mathrm{Irr}(G)} a_\chi \chi(hy) = \sum_{\chi\in\mathrm{Irr}(G)} a_\chi \sum_{\varphi\in IBr(H)} d^h_{\chi,\varphi}\varphi(y) \\ &= \sum_{b,Block\ von\ RH} \sum_{\varphi\in IBr(b)} (\sum_{\chi\in\mathrm{Irr}(b^G)} a_\chi d^h_{\chi,\varphi})\varphi(y). \end{aligned}$$

Da die Brauercharaktere φ linear unabhängig sind, gilt für alle Blöcke b von RH und alle $\varphi \in \mathrm{IBr}(b)$ dass $\sum_{\chi\in\mathrm{Irr}(b^G)} a_\chi d^h_{\chi,\varphi} = 0$ ist. Also ist

$$\theta_B(hy) = \sum_{\chi\in\mathrm{Irr}(B)} \sum_{b,b^G=B} \sum_{\varphi\in\mathrm{IBr}(b)} a_\chi d^h_{\chi,\varphi}\varphi(y) = 0,$$

(b) Setze $\theta := \sum_{\chi\in\mathrm{Irr}(G)} \chi(g^{-1})\chi$. Nach den Orthogonalitätsrelationen ist dann $\theta(g') = 0$ falls $g \not\sim g'$. Mit (a) ergibt sich die Behauptung. □

17 Der 3. Hauptsatz von Brauer.

Sei $H \trianglelefteq G$, b ein Block von RH mit Blockidempotent e_b. G operiert per Konjugation auf den Blockidempotenten von RH, $f_b := \sum\{e_b^g \mid g \in G\}$ sei die zugehörige Bahnensumme, $f_b^2 = f_b \in Z(RH)$, $1 = f_{b_1} + \ldots + f_{b_r}$ orthogonale Zerlegung in primitive Idempotente in $\mathrm{Inv}(\Delta(G))(RH) = Z(RG) \cap RH$. Dann ist f_{b_i} eine Summe von Blockidempotenten von RG.

Definition 17.1 *Ein Block B von RG* überdeckt *den Block b_i von RH, falls $e_B f_{b_i} \neq 0$ ($\Leftrightarrow e_B e_{b_i} \neq 0 \Leftrightarrow f_{b_i} = e_B + \ldots$).*

Bemerkung 17.2 *a) Jeder Block von RG überdeckt genau eine G-Konjugiertenklasse von Blöcken von RH.*
b) Der Hauptblock B_0 von RG überdeckt nur den Hauptblock b_0 von RH (da $e_{b_0}^g = e_{b_0}$ für alle $g \in G$).
c) f_b ist ein Idempotent in $RH \cap Z(RG)$. Als solches ist f_b eine Summe von zentral primitiven Idempotenten in RG und ebenso eine Summe von zentral primitiven Idempotenten in RH.

Lemma 17.3 *B überdeckt b genau dann wenn $\overline{\omega}_B(C^+) = \overline{\omega}_b(C^+)$ für alle Konjugiertenklassen C von G, die in H liegen.*

Beweis. Sei $A := Z(FG) \cap FH = \langle f_{b_i}\rangle = \langle C^+ \mid C$ ist G-Konjugiertenklasse in $H\rangle_F$. Dann sind $\overline{\omega_B}_A$ und $\overline{\omega_b}_A$ Algebrenhomomorphismen $A \to F$. Diese sind gleich genau dann wenn sie auf der Basis f_{b_i} übereinstimmen. □

Bemerkung 17.4 *Es ist $\overline{\omega_b}^G(C^+) = \overline{\omega_b}((C \cap H)^+) = \begin{cases} \overline{\omega_b}(C^+) & C \subset H \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$. Also gilt: Wenn $b^G = B$ existiert, dann überdeckt B den Block b.*

Satz 17.5 *(3. Hauptsatz von Brauer) Ist $H \leq G$, b ein Block von RH mit $\delta(b) = D$ so daß $C_G(D) \leq H$. Dann ist $b^G = B_0(G)$ der Hauptblock von G genau dann wenn $b = B_0(H)$ der Hauptblock von H ist.*

Beweis. $\Leftarrow$: Es ist $\overline{\omega_{B_0(G)}}(C^+) = |C| \in F$ und $\overline{\omega_{B_0(H)}}^G(C^+) = |C \cap H| \equiv_p |C|$, denn für $g \in C - C_G(D)$ ist $|g^D|$ durch p teilbar. Also ist $\overline{\omega_{B_0(G)}} = \overline{\omega_{B_0(H)}}^G$ und somit $B_0(H)^G = B_0(G)$ (da der Zentralisator in G der Defektgruppe von $B_0(H)$ in H liegt).
$\Rightarrow$: Sei also $b^G = B_0(G)$, $D = \delta(b) \leq P \in \mathrm{Syl}_p(G)$, $N := N_G(D)$. Wir beweisen die Richtung $\Rightarrow$ des Satzes durch Induktion nach $[P : D]$.
Wähle mittels Brauerhomomorphismus einen Block $\tilde{b}$ von $RDC_G(D)$ mit $\tilde{b}^H = b$ (siehe Bemerkung 15.7, da $DC_H(D) \leq DC_G(D) \leq N_H(D)$). Setze $\tilde{B} := \tilde{b}^N$. Dann ist $\delta(\tilde{b}) \geq D$ und $\delta(\tilde{B}) \geq D$, da D beidemale Normalteiler ist. Weiter ist $\delta(\tilde{b}) \leq_H \delta(\tilde{b}^H) = D$, also $\delta(\tilde{b}) = D$.
Beh. $\tilde{B} = B_0(N)$.
Ist $P = D$, dann ist $D = \delta(\tilde{B}) = \delta(B_0(N))$ und $B_0(N)^G = B_0(G)$ (nach $\Leftarrow$). Weiter ist

$$\tilde{B}^G = (\tilde{b}^N)^G = \tilde{b}^G = (\tilde{b}^H)^G = b^G = B_0(G).$$

Wegen des 1. Hauptsatzes von Brauer ist dann $B_0(N) = \tilde{B}$.
Sei nun $D < P$. Dann ist $D < \delta(\tilde{B})$ denn aus $D = \delta(\tilde{B})$ würde mit dem 1. HS von Brauer folgen, dass $D = \delta(\tilde{B}^G) = \delta(B_0(G)) = P$ (Defektgruppe von Hauptblock = Sylowgruppe), ein Widerspruch zu $D \neq P$. Also ist $[P : \delta(\tilde{B})] < [P : D]$ und mit Induktion (angewandt auf $H = N$, $D = \delta(\tilde{B})$, $b = \tilde{B}$) folgt dann $\tilde{B} = B_0(N)$. Nun ist $DC_G(D) \trianglelefteq N$, $\tilde{b}^N = B_0(N)$ der Hauptblock, also auch $\tilde{b} = B_0(DC_G(D))$, da $B_0(N)$ nur den Hauptblock von $DC_G(D)$ überdeckt. Mit $\Leftarrow$ ist dann auch $\tilde{b}^H = b = B_0(H)$. $\square$

Ende am 16.1.07

Sei nun wieder $H \trianglelefteq G$ und F Zerfällungskörper für G und alle ihre Untergruppen. Für einen Block b von FH sei $\mathrm{Stab}(b) := \{g \in G \mid gbg^{-1} = b\}$ und $X(b) := \Delta(\mathrm{Stab}(b))H \times H \leq G \times G$. Dann ist $b \leq FG_{G \times G}$ ein $X(b)$ Teilmodul $b_{X(b)}$.

Lemma 17.6 *(a) $FG = \bigoplus F(Gb_iG)$ als $F(G \times G)$-Modul, wo die b_i Vertreter der G-Konjugiertenklassen von Blöcken von FH durchlaufen.*
(b) $F(GbG)_{H \times H} = f_bFG$ ist die Summe aller unzerlegbaren FH-Teilmoduln von FG, die zu einem zu b konjugierten Block gehören.
(c) $F(GbG)_{H \times H} = \bigoplus_{t \in (G \times G)/X(b)} bt$.
(d) $F(GbG) = (b_{X(b)})^{G \times G}$.

Beweis. (a) $FG = \sum F(Gb_iG)$, da die rechte Seite FH und damit auch die 1 enthält und abgeschlossen ist unter Multiplikation mit G. Die Direktheit folgt aus (b).
(b) $b = e_bFH$ also ist $F(GbG) = \sum_{g \in G}(ge_bg^{-1})FG = f_bFG$.
(c) Die Moduln bt sind $F(H \times H)$-Teilmoduln, da $H \trianglelefteq G$. Weiter ist $\sum bt = F(GbG)$ (nach Definition von $X(b)$). Es genügt also die Direktheit der Summe zu zeigen, d.h. wir müssen zeigen, dass $b \cap \sum_{(g_1,g_2) \notin X(b)} g_1^{-1}bg_2 = 0$. Dazu genügt es zu zeigen, dass für $(g_1, g_2) \notin X(b)$ entweder $g_1^{-1}bg_2 \subset F(G - H)$ oder $g_1^{-1}bg_2 \subset g^{-1}bg$ für ein $g \notin \mathrm{Stab}(b)$. Nun ist $g_1^{-1}bg_2 = g_1^{-1}bg_1(g_1^{-1}g_2) \subset F(G - H)$, falls $g_1^{-1}g_2 \notin H$. Liegt $g_1^{-1}g_2 = y \in H$, so ist $g_1^{-1}bg_2 = g_1^{-1}bg_1$ mit $g_1 \notin \mathrm{Stab}(b)$, da $(g_1, g_2) \notin X(b)$.
(d) folgt nun direkt aus (c). $\square$

Lemma 17.7 *Sei $H \trianglelefteq G$, B ein Block von FG, b ein Block von FH. Dann sind äquivalent:*
(0) B überdeckt b.
(1) $b \mid B_{H\times H}$.
(2) $e_b e_B \neq 0$.
(3) $B \mid F(GbG)$.
(4) Ist U ein FG-Modul in B, so ist U_H die direkte Summe von Moduln in zu b konjugierten Blöcken.

Beweis. Es gilt B überdeckt $b \Leftrightarrow B \mid FGbG$. Also ist (0) $\Leftrightarrow$ (3).
(1) $\Rightarrow$ (2): Ist $b \mid B_{H\times H}$, so ist $e_b e_B FG \neq 0$ also auch $e_b e_B \neq 0$.
(2) $\Leftrightarrow$ (3): Da $FG = \bigoplus Gb_iG$ gibt es genau ein i mit $B \mid F(Gb_iG)$. Dies ist äquivalent zu $e_B(Gb_iG) \neq 0$. also zu $e_B(Gb_iG) = Ge_Bb_iG \neq 0$ also $(e_BFG)(e_{b_i}FH) = FGe_Be_{b_i}FH \neq 0$ und damit $e_{b_i}e_B \neq 0$. Also ist $e_be_B \neq 0$, genau dann wenn b konjugiert zu b_i und damit $GbG = Gb_iG$ ist.
(3) $\Rightarrow$ (1): Sei $B \mid GbG$. Nun ist $GbG_{H\times H} = \bigoplus bt$ (direkte Summe von zu b konjugierten $H\times H$-Moduln bt nach Lemma 17.6) Also gibt es ein $t \in G\times G$ mit $bt \mid B_{H\times H}$. Dann aber $b \mid Bt^{-1}_{H\times H} = B_{H\times H}$.
(3) $\Leftrightarrow$ (4): Übung. □

Das folgende Lemma folgt aus dem Green'schen Unzerlegbarkeitssatz:

Lemma 17.8 *Sei U ein FG-Modul, so dass U_H unzerlegbar ist. Ist $Q = vx(U)$, dann ist $QH/H \in \mathrm{Syl}_p(G/H)$.*

Beweis. Sei $Q \leq S \in \mathrm{Syl}_p(G)$. Dann ist $vx(U_{SH}) = vx(U) = Q$. Also ist U_{SH} ein QH-projektiver SH-Modul und daher $U_{SH} \mid U_{QH}^{SH}$. Wählt man eine Subnormalreihe $QH = N_0 \trianglelefteq N_1 \trianglelefteq \ldots \trianglelefteq N_d = SH$ und wendet Green's Unzerlegbarkeitssatz sukzessive auf $U_{N_i}^{N_{i+1}}$ an, so sieht man, dass $U_{QH}^{SH} = (\ldots(U_{N_0})^{N_1})\ldots)^{N_d}$ unzerlegbar ist, also $U_{SH} = U_{QH}^{SH}$ und damit $SH = QH$. □

Lemma 17.9 *Sei V ein unzerlegbarer FG-Modul mit vertex Q und trivialer Quelle. Ist $U \leq G$ so hat V_U einen unzerlegbaren Summanden mit vertex $\supset Q \cap U$.*

Beweis. Es ist $1_Q \mid V_Q$ also auch $1_{Q\cap U} \mid V_{Q\cap U}$. Also gibt es einen unzerlegbaren Summanden $W \mid V_U$ mid $1_{Q\cap U} \mid W_{Q\cap U}$. Sei $S = vx(W)$. Wir zeigen, dass $Q\cap U \leq_U S$. Nun ist W relativ S-projektiv, also ist jeder Summand von $W_{Q\cap U}$ relativ projektiv für eine Untergruppe der Form $Q \cap U \cap u^{-1}Su$ für ein $u \in U$. Andererseits ist der vertex von $1_{Q\cap U} = Q\cap U$ also gibt es ein u mit $Q\cap U \subset Q\cap U\cap u^{-1}Su$ also $Q \cap U \leq_U S$. □

Satz 17.10 *Sei B ein Block von RG, der den Block b von RH überdeckt.*
(i) Es gibt eine Defektgruppe D von B, die in $\mathrm{Stab}(b)$ enthalten ist.
(ii) Es gibt einen Block B' von FG, der b überdeckt, dessen Defektgruppe $D' := \delta(B')$ maximal ist, in dem Sinn: Ist $\tilde{B}$ ein Block von FG, der b überdeckt, so ist $\delta(\tilde{B}) \leq_G D'$. Für D' gilt $[D' : (D'\cap H)] = [\mathrm{Stab}(b) : H]_p$.
(iii) Ist $C_G(\delta(b)) \leq H$, so ist $B = b^G$ und B ist der einzige Block von RG, der b überdeckt.
(iv) Ist $D = \delta(b)$, so gibt es eine Defektgruppe $D' = \delta(B)$ mit $D = D' \cap H$.

Beweis. (i) $F(GbG)$ ist $X(b)$-projektiv nach Lemma 17.6 (d) und daher auch B als direkter Summand von $F(GbG)$. Also ist $vx(B) \leq_{G\times G} X(b) \leq \mathrm{Stab}(b) \times \mathrm{Stab}(b)$ und damit $\delta(B) \leq_G \mathrm{Stab}(b)$.
(ii) Ist B' ein Block, der b überdeckt, so ist $B' \mid F(GbG) = (b_{X(b)})^{G\times G}$ ein $X(b)$-projektiver $G \times G$-Modul. Also hat jeder Block B' einen vertex, der in $vx(b_{X(b)})$-enthalten ist. Andererseits ist $b_{X(b)}$ ein direkter Summand von $(b_{X(b)})^{G\times G}_{|X(b)} = F(GbG)_{|X(b)}$ d.h. es gibt einen Block $B' \mid F(GbG)$ der $b_{X(b)}$ als direkten Summanden hat $(b_{X(b)} \mid B'_{X(b)})$. Also ist nach Mackey $vx(b_{X(b)}) \leq_{G\times G} vx(B')$ und damit $vx(b_{X(b)}) =_G vx(B') =: \Delta(D')$ wobei $D' = \delta(B')$. Œ sei $D' \leq \mathrm{Stab}(b)$. Also ist $b_{X(b)}$ ein $X(b)$-Modul, so dass $(b_{X(b)})_{|H\times H}$ unzerlegbar ist. Nach Lemma 17.8 ist dann $\Delta(D')(H \times H)/H \times H \in \mathrm{Syl}_p(X(b)/(H \times H))$, d.h. $[D' : (D' \cap H)] = [\mathrm{Stab}(b) : H]_p$.
(iii) Nach Voraussetzung ist $b^G =: B'$ dann definiert, und dies ist der einzige Block B' von RG, mit $b \mid B'_{H\times H}$. Da B den Block b überdeckt und daher $b \mid B_{H\times H}$ nach Lemma 17.7 gilt, ist $B = B'$ der einzige Block, der b überdeckt.
(iv) Es ist $B \mid FG_{G\times G} = (1_{\Delta(G)})^{G\times G}$. Also (Übung) hat der $G \times G$-Modul triviale Quelle, d.h. $B \mid (1_Q)^{G\times G}$ mit $Q = vx(B)$. Also gibt es nach Lemma 17.9 einen direkten Summanden von $B_{H\times H}$ mit vertex, der $Q \cap (H \times H)$ enthält. Nun ist $B_{H\times H} \mid GbG_{H\times H} = \bigoplus bt$, d.h. die unzerlegbaren Summanden von $B_{H\times H}$ sind alle von der Form bt und $vx(bt) = vx(b)^t$. Also enhält der vertex von b eine Untergruppe $Q^t \cap (H \times H)$. Nun ist aber $vx(b) \leq vx(B) = Q$ also ist $vx(b) = Q^t \cap (H \times H)$ und $\delta(b) = D' \cap H$ für geeignetes $D' = \delta(B)$. □

Satz 17.11 *Sei D eine p-Untergruppe von G. Dann liefert die Brauerkorrespondenz $\beta \mapsto \beta^G$ eine Bijektion zwischen den $N_G(D)$-Konjugiertenklassen von Blöcken β von $DC_G(D)$ mit Defektgruppe D so dass $[\mathrm{Stab}_{N_G(D)}(\beta) : DC_G(D)]$ nicht durch p teilbar ist und den Blöcken $B = \beta^G$ von G mit Defektgruppe D.*

Beweis. Wir benutzen den 1. Hauptsatz von Brauer, der uns eine Bijektion zwischen den Blöcken b von $N_G(D)$ mit Defektgruppe D und den Blöcken $B = b^G$ von G mit Defektgruppe D liefert. Wegen der Transitivität der Induktion, genügt es also zu zeigen, dass die $N_G(D)$-Konjugiertenklassen von Blöcken von $DC_G(D)$ mit Defektgruppe D und $[\mathrm{Stab}_{N_G(D)}(\beta) : DC_G(D)]_p = 1$ in Bijektion stehen zu den Blöcken von $N_G(D)$ mit Defektgruppe D.
Beachte, dass wegen Bemerkung 17.2 jeder Block von $N_G(D)$ genau eine $N_G(D)$-Konjugiertenklasse von Blöcken von $DC_G(D)$ überdeckt.
Sei b ein Block von $N_G(D)$ mit Defektgruppe D und β ein Block von $DC_G(D)$, der von b überdeckt wird. Dann ist $D \leq \delta(\beta) \leq \delta(b)$ also $D = \delta(\beta)$ und $\beta^{N_G(D)}$ ist definiert. Nach Satz 17.10(iii) gilt dann aber $b = \beta^{N_G(D)}$ und b ist der einzige Block, der β überdeckt. Satz 17.10(ii) liefert dann, dass $[\mathrm{Stab}_{N_G(D)}(\beta) : DC_G(D)]_p = 1$.
Sei umgekehrt β ein Block von $DC_G(D)$ mit Defektgruppe D so dass $[\mathrm{Stab}_{N_G(D)}(\beta) : DC_G(D)]$ nicht durch p teilbar ist. Dann ist $b := \beta^{N_G(D)}$ definiert und nach Satz 17.10(iii) der einzige Block von $N_G(D)$, der β überdeckt. Weiter gilt mit 17.10(ii) und (iv), dass $[\delta(b) : D] = [\mathrm{Stab}_{N_G(D)}(\beta) : DC_G(D)]_p = 1$, also $\delta(b) = D$. □

IV. Blöcke mit zyklischer Defektgruppe.

Generalvoraussetzung: G endliche Gruppe, (K, R, F) ein p-modulares Zerfällungssystem für alle Untergruppen von G.

18 Brauer-Baum Algebren.

Definition 18.1 *Ein* Brauer-Baum T *besteht aus einem zusammenhängenden endlichen ungerichteten kreisfreien planar eingebetteten Graphen* T*, bei dem einer Ecke* v_{ex}*, dem sogenannten* Ausnahmevertex*, eine Vielfachheit* $m(v_{ex}) \in \mathbb{N}$ *zugeordnet ist.*

Interpretation: Kanten entsprechen den einfachen FG-Moduln in einem Block B von RG, Ecken den einfachen KG-Moduln in B (der Ausnahmevertex entspricht dabei $m(v_{ex})$ vielen einfachen KG-Moduln). Die von einer Ecke V ausgehenden Kanten geben die Kompositionsfaktoren von $L/\pi L$ an, L ein Gitter in V. Jeder Kompositionsfaktor kommt mit Vielfachheit (0 oder) 1 in $L/\pi L$ vor. Die Zerlegungszahlen sind also alle 0 oder 1.

Ist S eine Kante und P_S der zu dem einfachen FG-Modul S gehörende projektiv unzerlegbare FG-Modul, so erhält man den Teilmodulverband von P_S wie folgt:

Es ist $J(P_S)/soc(P_S) \cong V \oplus W$ die direkte Summe von zwei einreihigen FG-Moduln V und W, mit eindeutiger Kompositionsreihe deren Faktoren genau den Kanten der beiden Ecken von S entsprechen, gegen den Uhrzeigersinn durchlaufen.
(Brauerbaum lokal, Teilmodulverband).
Ist eine der beiden Ecken von S der Ausnahmevertex mit Vielfachheit m, so muss man die Kanten bei dieser Ecke genau m mal durchlaufen. Insbesondere taucht S in V dann mit Vielfachheit $m - 1$ als Kompositionsfaktor auf.

Definition 18.2 *Eine endlich dimensionale* F*-Algebra* A *ist eine Brauer-Baum Algebra, falls die Teilmodulverbände der projektiv unzerlegbaren* A*-Moduln entsprechend der obigen Vorschrift aus einem Brauer-Baum erhalten werden.*

Beispiel: $\mathrm{SL}_2(p)$.

Situation. Sei B ein Block von FG mit Defektgruppe $D \cong C_{p^n}$. Sei $N := N_G(D)$ und b ein Block von FN mid $b^G = B$. Sei b' ein Block von $DC_G(D)$, der von b überdeckt wird und $I(b') := \mathrm{Stab}_{N_G(D)}(b')$. Dann ist $(b')^G = B$ und daher $\delta(b') = \delta(b) = D$. Nach Satz 17.11 ist dann der Trägheitsindex $e := [I(b') : DC_G(D)]$ von B nicht durch p teilbar. Es gilt aber

$$e \mid [N_G(D) : C_G(D)] \mid |\mathrm{Aut}(D)| = (p-1)p^{n-1}$$

also gilt $e \mid (p-1)$. Sei weiter $D_1 \cong C_p \leq D$ und $N_1 := N_G(D_1) \geq N$ und $b_1 = b^{N_1}$. Dann ist $\delta(b_1) = D$ und $b_1^G = b^G = B$.

In diesem Kapitel wollen wir die folgenden beiden Sätze beweisen:

Satz 18.3 *Der Block b_1 ist eine Brauer-Baum Algebra für einen Stern mit Ausnahmevertex in der Mitte und e davon ausgehende Kanten. Die Vielfachheit $m(v_{ex}) = \frac{p^n-1}{e}$.*

Satz 18.4 *Der Block B (wie oben) ist eine Brauer-Baum Algebra für einen Baum T mit e Kanten und Vielfachheit $m(v_{ex}) = \frac{p^n-1}{e}$.*

Beispiel: $\mathrm{SL}_2(p)$ $n = 1, e = \frac{p-1}{2}, m = 2$. mit Zerlegungsmatrix .
Gleiches für $C_p : C_{p-1}$: Moduln und Zerlegungsmatrix und Brauerbaum.

Satz 18.5 *Die Greenkorrespondenz liefert eine Bijektion zwischen den Isomorphismenklassen von unzerlegbaren nicht projektiven Moduln in B und solchen in b_1. Ist U ein B-Modul, $V = f(U)$ ein b_1-Modul, so ist*

$$U_{N_1} = V \oplus W, \quad V^G = U \oplus Q$$

wo Q ein projektiver FG-Modul ist und W eine direkte Summe von projektiven FN_1-Modul und solchen FN_1-Moduln, die nicht zum Block b_1 gehören.

Beweis. Wir benutzen die Greenkorrespondenz $f = f(G, D, N_1)$ (beachte $N_G(D) \leq N_1$) und müssen dazu die Mengen $\mathcal{X}(G, D, N_1) := \{P \leq D \cap D^g \mid g \in G - N_1\}$ und $\mathcal{Y}(G, D, N_1) := \{P \leq N_1 \cap D^g \mid g \in G - N_1\}$ bestimmen. Ist $g \notin N_1$, so ist $D \cap D^g \leq D$ eine Untergruppe von D, die nicht D_1 enthält. Also $D \cap D^g = \{1\}$ und somit $\mathcal{X} = \{1\}$. Ebenso findet man, dass die Gruppen in $\mathcal{Y}$ Untergruppen von N_1 sind, die entweder $= \{1\}$ oder nicht in N_1 zu einer Untergruppe von D konjugiert sind. Da jeder unzerlegbare Modul in b_1 einen vertex $\leq_{N_1} D$ hat folgt aus der Greenkorrespondenz

$$U_{N_1} = V \oplus O(\mathcal{Y}), \quad V^G = U \oplus O(\{1\})$$

die Behauptung. $\square$

19 Die Struktur von b_1.

Sei β_1 ein Block von $C_1 := C_G(D_1) \trianglelefteq N_1$, der von b_1 überdeckt wird. Dann ist $\beta_1^{N_1} = b_1$ und daher $\delta(\beta_1) \leq D = \delta(b_1)$. Weiter ist $(b_1)_{C_1 \times C_1} = \bigoplus_i \beta_1^{t_i}$ wo t_i eine Transversale von $I_1 := \mathrm{Stab}_{N_1}(\beta_1)$ in N_1 durchläuft.

Lemma 19.1 *Es gibt solch einen Block β_1 mit $\delta(\beta_1) = D = \delta(b_1)$.*

Beweis. Nach Lemma 13.1 angewandt auf den $F(N_1 \times N_1)$-Modul $V = b_1$ gibt es einen unzerlegbaren $F(C_1 \times C_1)$-Modul $W \mid V_{|C_1 \times C_1}$ mit $vx(W) = vx(V) = \Delta(D)$. Da die unzerlegbaren Summanden von $(b_1)_{C_1 \times C_1}$ alle konjugiert sind, haben sie auch alle konjugierte vertices und wir können ein β_1 auswählen mit $\delta(\beta_1) =_{C_1} D$. $\square$

Lemma 19.2 *Für den Trägheitsindex von β_1 gilt $e(\beta_1) = 1$.*

Beweis. Es ist $D = \delta(\beta_1)$. Sei X der Block von $N_{C_1}(D) = N_G(D) \cap C_1$ mit $X^{C_1} = \beta_1$ der Brauerkorrespondent von β_1 und x ein Block von $C_G(D)$, der von X überdeckt wird ($x^{N_{C_1}(D)} = X$, $x^{C_1} = \beta_1$). Dann ist $\delta(x) = \delta(X) = D$, da D in beiden Gruppen normal ist und die Defektgruppen in $\delta(\beta_1) = D$ liegen. Weiter ist $I(\beta_1) = \mathrm{Stab}_{N_{C_1}(D)}(x)$ und $e' := [I(\beta_1) : C_G(D)]$ der Trägheitsindex von β_1. Es ist $e' \mid [N_{C_1}(D) : C_G(D)] \mid p^{n-1}$, da $|\mathrm{Aut}(D)| = p^{n-1}(p-1)$ und der Zentralisator von D_1 in $\mathrm{Aut}(D)$ Ordnung p^{n-1} hat. Nach Satz 17.10 (ii) und 17.11 gilt aber $p \nmid e'$ (da $\delta(B) = D$), also ist $e' = 1$. □

Lemma 19.3 $|\mathrm{IBr}(\beta_1)| = 1$.

Beweis. Wir beweisen Satz 18.4 durch Induktion über die Ordnung von D. Betrachte den Block $\overline{\beta_1}$ von C_1/D_1. Dieser hat Defektgruppe D/D_1, ist also entweder von Defekt 0 und hat daher nur einen einfachen Modul. Im allgemeinen ist $N_{C_1/D_1}(D/D_1) : C_{C_1/D_1}(D/D_1)$ eine p-Potenz und daher $e(\overline{\beta_1}) = 1$. Nach Induktionsvoraussetzung gilt Satz 18.4 für $\overline{\beta_1}$ und daher hat dieser Block nur einen einfachen Modul. Jeder einfache FC_1-Modul hat aber D_1 im Kern, also haben β_1 und $\overline{\beta_1}$ die gleichen einfachen Moduln. □

Satz 19.4 *Sei A eine endlichdimensionale F-Algebra mit F=Zerfällungskörper für A so dass*
(a) A hat nur endlich viele unzerlegbare Moduln.
(b) A hat nur einen einfachen Modul.
Dann ist A eine Brauer-Baum Algebra.

Beweis. Sei S der einfache A-Modul und P der zugehörige PIM. Ist $P = S$ (also $J(P) = 0$), dann ist A halbeinfach, also $A \cong F^{d \times d}$, $d = \dim(S)$ eine Brauerbaumalgebra.
Sei nun $M := J(P) \neq 0$. Dann ist $M/J(A)M \cong \bigoplus^n S$. Ist $n = 1$ so werden wir sehen, dass A eine Brauer-Baum Algebra ist und $n > 1$ zu einem Widerspruch führen.
Sei zunächst $n = 1$. Dann ist M ein epimorphes Bild von P und auch $J(M)/J^2(M)$ ein epimorphes Bild von $J(P)/J^2(P) = M/J(M)$ also entweder 0 oder $\cong S$. Dieses Argument liefert, dass die Teilmoduln von P eine Kette bilden (P ist einreihig). Ist m die Kompositionslänge von P ($\dim(P) = dm$), so ist A eine Brauerbaumalgebra für einen Baum mit einer Kante und Vielfachheit $m - 1$.
Ende am 23.1.
Sei jetzt $n > 1$ und setze $\overline{A} := A/J^2(A)$. Wir wollen zeigen, dass $\overline{A}$ unendlich viele unzerlegbare Moduln hat. (Diese sind dann auch A-Moduln, ein Widerspruch zu Voraussetzung (a).) Sei $Q := P/J^2(P)$ der projektiv unzerlegbare $\overline{A}$-Modul. Dann ist $\overline{A} \cong \bigoplus^d Q$. Sei $E := \mathrm{End}_A(Q)$. Schreibe $J(Q) = S_1 \oplus \ldots \oplus S_n$ und sei φ_i ein A-Endomorphismus von Q mit Bild S_i und Kern $J(Q)$.
Beh.: $(\mathrm{id}_Q, \varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ ist eine F-Basis von E.
E ist lokal, $E = F\,\mathrm{id}_Q \oplus J(E)$. Daher genügt es zu zeigen, dass $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ linear unabhängig sind und $\dim(J(E)) = n$. Die lineare Unabhängigkeit der φ_i folgt aus der Direktheit der Summe ihrer Bilder. Weiter ist

$$\dim(J(E)) = \dim(\mathrm{Hom}_A(Q, J(Q)) = \dim(\mathrm{Hom}_A(S, S_1 \oplus \ldots \oplus S_n)) = n.$$

Wir konstruieren jetzt unzerlegbare E-Moduln beliebig großer Dimension: Sei dazu V_m der $2m$-dimensionale F-Vektorraum mit Basis $(v_1, \ldots, v_m, w_1, \ldots w_m)$ und $X \in \mathrm{End}(V_m) : v_i \mapsto w_i, w_i \mapsto 0$, $Y \in \mathrm{End}(V_m) : v_i \mapsto w_{i+1}, v_m \mapsto 0, w_i \mapsto 0$. Dann gilt $X^2 = Y^2 = XY = YX = 0$ und die Abbildung $\varphi_1 \mapsto X$, $\varphi_2 \mapsto Y$, $\varphi_j \mapsto 0$ $(j \geq 3)$ macht V_m zu einem E-Modul. Es ist

$$\mathrm{End}_E(V_m) = \{ \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & A \end{pmatrix} \mid A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_m \\ 0 & a_1 & a_2 & \ldots & a_{m-1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ldots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & a_1 \end{pmatrix} \}$$

(Übung) ein lokaler Ring und daher V_m unzerlegbar.
Nun ist $\overline{A} \cong \mathrm{End}_{\overline{A}}(\overline{A})^{op}$ und $\mathrm{End}_{\overline{A}}(\overline{A})^{op} \cong E^{d \times d}$, da $\overline{A} \cong Q^d$. Also hat auch $\overline{A}$ unendlich viele unzerlegbare Moduln, ein Widerspruch. $\square$

Satz 19.5 *β_1 ist eine Brauer-Baum Algebra für einen Baum mit einer Kante und Vielfachheit $p^n - 1$.*

Beweis. Da β_1 als Block mit zyklischer Defektgruppe nur endlich viele unzerlegbare Moduln hat (siehe Folgerung 12.14), müssen wir nur noch zeigen, dass der PIM in β_1 die Kompositionslänge $p^n = |D|$ hat. Dies ist klar, falls $n = 0$, also β_1 ein Block vom Defekt 0 ist. Ansonsten argumentieren wir wieder mit Induktion über n. Danach hat der PIM für den Block $\overline{\beta_1}$ von C_1/D_1 mit Defektgruppe D/D_1 die Kompositionslänge p^{n-1}. Dann benutzen wir das nächste Lemma:

Lemma 19.6 *Sei $Q \trianglelefteq G$ ein p-Normalteiler und setze $\overline{G} := G/Q$. Sei S ein einfacher FG-Modul, P der zugehörige PIM von G und $\overline{P}$ der zugehörige PIM von $\overline{G}$ (beachte S ist auch ein einfacher $\overline{G}$-Modul). Sei r die Radikallänge von FQ ($J^r(FQ) = 0$ und r minimal mit dieser Eigenschaft). Dann hat P eine Kette von Teilmoduln*

$$P = P^0 \supset P^1 \supset \ldots \supset P^r = 0$$

so dass $P^i/P^{i+1} \cong \overline{P} \otimes (J^i(FQ)/J^{i+1}(FQ))$ wobei G auf FQ (und auch auf $J^i(FQ)/J^{i+1}(FQ)$) durch Konjugation operiert.

Beweis. als Übung. (s. Alperin, Proposition 18.4) $\square$

Daraus ergibt sich unser Satz, indem wir $Q := D_1 \leq Z(C_1)$ und $C_1 := G$ wählen. Die Radikallänge von FD_1 ist nach Satz 12.13 gleich p und C_1 operiert auf FD_1 trivial. Also ist $(J^i(FD_1)/J^{i+1}(FD_1)) \cong F$ der triviale FC_1-Modul und die Kompositionslänge von P ist gerade die von $\overline{P}$ multipliziert mit der Radikallänge p von FD_1. $\square$

Im Rest dieses Abschnitts beweisen wir Satz 18.3 unter Benutzung der Struktur von β_1. Sei dazu $N_1 := N_G(D_1) \supset N_G(D)$ (da D_1 char D), $C_1 := C_G(D_1) \supset C_G(D)$ und $I_1 := \mathrm{Stab}_{N_1}(\beta_1)$. Dann ist N_1/C_1 isomorph zu einer Untergruppe von $\mathrm{Aut}(D_1) = C_{p-1}$, insbesondere also $[I_1 : C_1] \mid p - 1$. Da $\delta(\beta_1) = D$ und $C_G(D) = C_{I_1}(D) \subset C_1 = C_G(D_1)$, ist $\tilde{\beta}_1 := \beta_1^{I_1}$ definiert.

Zunächst streben wir folgenden Satz an:

Satz 19.7 *$\tilde{\beta}_1$ ist eine Brauer Baum Algebra für einen Stern mit e Kanten und Ausnahmevertex in der Mitte mit Vielfachheit $(p^n-1)/e$.*

Lemma 19.8 *$|I_1 : C_1| = e$.*

Beweis. Sei γ der Block von $N_{C_1}(D) = N \cap C_1$ der in Brauerkorrespondenz zu β_1 steht, d.h. $\gamma^{C_1} = \beta_1$ und $\delta(\gamma) = D$. Ist nun β ein Block von $C_G(D)$ mit $\beta^{N_{C_1}(D)} = \gamma$, so überdeckt γ den Block β und $D \leq \delta(\beta) \leq \delta(\gamma) = D$ also hat auch β die Defektgruppe D. Weiter ist $\beta^G = B$, da $\beta^{N_{C_1}(D)} = \gamma$, $\gamma^{C_1} = \beta_1$, und $\beta_1^G = B$. Ist $I := \mathrm{Stab}_{N_G(D)}(\beta)$, so ist der Trägheitsindex von B definiert als $e := [I : C_G(D)]$ nicht durch p teilbar. Wollen zeigen: $I_1/C_1 \cong I/C_G(D)$. Dazu genügt es nach dem 1. Isomorphiesatz zu zeigen, dass $I \cap C_1 = C_G(D)$ und $IC_1 = I_1$. Denn dann ist

$$I_1/C_1 = IC_1/C_1 \cong I/(I \cap C_1) = I/C_G(D).$$

Nun ist $I \leq N_G(D)$ und $(N_G(D) \cap C_1)/C_G(D)$ eine p-Gruppe. Also ist auch $(I \cap C_1)/C_G(D)$ eine p-Gruppe die auf der anderen Seite eine Untergruppe der p'-Gruppe $I/C_G(D)$ ist. Also ist $I \cap C_1 = C_G(D)$.
Zeigen jetzt $IC_1 = I_1$. Da $\beta_1 = \beta^{C_1}$ folgt $I = \mathrm{Stab}_{N_G(D)}(\beta) \subset I_1 = \mathrm{Stab}_{N_G(D_1)}(\beta_1)$. Also gilt $IC_1 \subset I_1$. Sei nun $x \in I_1$. Dann ist $\beta_1^x = \beta_1$ und daher ist D^x auch eine Defektgruppe von β_1. Die Defektgruppen von β_1 sind aber alle in C_1 konjugiert, also gibt es $z \in C_1$ mit $D^x = D^z$. Also ist $y := xz^{-1} \in N_G(D) \cap I_1$ und es genügt zu zeigen, dass $y \in IC_1$.
Es gilt $D^y = D$, $\beta_1^y = \beta_1$ und daher auch $\gamma^y = \gamma$, da $\gamma^{C_1} = \beta_1$ also γ der Brauerkorrespondent von β_1 ist (beachte: γ ist Block von $N_{C_1}(D)$). Also permutiert $\langle y \rangle$ die Böcke von $C_G(D)$, die von γ überdeckt werden. Diese sind aber genau die zu β in $N_G(D) \cap C_1$ konjugierten Blöcke von $C_G(D)$. $N_G(D) \cap C_1/C_G(D)$ ist aber eine p-Gruppe, also ist die Anzahl der Böcke von $C_G(D)$ die von γ überdeckt werden eine p-Potenz. $I = \mathrm{Stab}_{N_G(D)}(\beta)$ ist aber ein Normalteiler in $N_G(D)$, da $N_G(D)/C_G(D)$ abelsch ist. Also ist I auch der Stabilisator eines jeden Blocks, der von γ überdeckt wird. Aus demselben Grund ist $\langle y, C_G(D) \rangle$ ein Normalteiler in $N_G(D)$ und daher haben die $\langle y \rangle$-Bahnen auf den Blöcken die von γ überdeckt werden alle die gleiche Länge. Diese ist also eine p-Potenz, q und es ist $y^q \in I$. Nun ist $y \in I_1$ und $[I_1 : C_1]$ nicht durch p-teilbar, also ist $y^q C_1 = yC_1$ und $y \in IC_1$. □

Mit Hilfe von Clifford Theorie (beachte I_1/C_1 ist zyklisch und $p \nmid |I_1/C_1|$) erhält man die folgende Bemerkung.

Bemerkung 19.9 *Sei S der einfache C_1-Modul in β_1. Dann hat S genau e verschiedene Fortsetzungen zu einem einfachen I_1 Modul. Diese liegen alle in $\tilde{\beta}_1 = \beta_1^{I_1}$.*

Lemma 19.10 *Ist U ein FI_1-Modul in $\tilde{\beta}_1$, so ist $J(U) = J(U_{C_1})$.*

Beweis. Klar ist $J(U_{C_1}) \subset J(U)$ da Einschränkungen von h.e. Moduln auf Normalteiler wieder h.e. sind. Weiter ist $J(U_{C_1})$ ein I_1-Teilmodul, da I_1 die maxmalen C_1-Teilmoduln von U_{C_1} permutiert. Durch Übergang zu $U/J(U_{C_1})$ können wir annehmen, dass U ein $\tilde{\beta}_1$-Modul ist, für den die Einschränkung U_{C_1} halbeinfach ist. Dann ist $U_{C_1} \cong S \oplus \ldots \oplus S$. Da C_1 die Defektgruppe von $\tilde{\beta}_1$ und damit auch den vertex von U enthält ist $U \mid U_{C_1}^{I_1} = \bigoplus S^{I_1}$. Nun ist $S^{I_1} = S \otimes_{FC_1} FI_1 = S \otimes_F F(I_1/C_1) = S_1 \oplus \ldots \oplus S_e$ halbeinfach, da $p \nmid |I_1/C_1| = e$. Also ist auch $U_{C_1}^{I_1}$ ein halbeinfacher I_1-Modul und damit auch jeder direkte Summand. $\square$

Beweis. (von Satz 19.7) Sei P ein PIM in $\tilde{\beta}_1$. Dann ist P_{C_1} ein projektiver β_1-Modul mit Kopf S, also $P_{C_1} = P_S$ der PIM in β_1. Nach Satz 19.5 ist also P_{C_1} einreihig mit Kompositionslänge p^n, also ist mit Lemma 19.10 auch P ein einreihiger I_1-Modul mit Kompositionslänge p^n, dessen Kompositionsfaktoren einfache Moduln in $\tilde{\beta}_1$ sind. Sei $T = P/J(P)$, $T_1 := J(P)/J^2(P)$. Dann gibt es einen eindimensionalen $F(I_1/C_1)$-Modul W, mit $T_1 \cong T \otimes W$. Also ist $J(P)$ epimorphes Bild von $P_{T_1} \cong P \otimes W$ und daher $J^2(P)/J^3(P) \cong T \otimes W \otimes W$ usw. Dadurch erhält man alle e einfachen Moduln im Block von T, da man so alle Kompositionsfaktoren der zugehörigen PIMs bekommt (alle, die man nicht erhält liegen in einem anderen Block). Ordnet man die einfachen $\tilde{\beta}_1$-Moduln in der Reihenfolge $T =: T_1, T \otimes W =: T_2, T \otimes W \otimes W =: T_3, \ldots$. T_e so ist die Kompositionsreihe von P gerade $(T_1, T_2, T_3, \ldots, T_e, T_1, T_2, \ldots, \ldots, T_e, T_1)$. Da die Kompositionslänge von P genau p^n ist, wird die Folge $(T_1, T_2, T_3, \ldots, T_e)$ dabei $(p^n - 1)/e$ mal wiederholt. Also ist $\tilde{\beta}_1$ eine Brauerbaumalgebra für einen Stern mit Ausnahmevertex in der Mitte und Vielfachheit $(p^n - 1)/e$. $\square$

Lemma 19.11 *Sind V, V_i ($i = 1, 2$) drei $\tilde{\beta}_1$-Moduln, so ist V^{N_1} ein b_1-Modul und jeder b_1-Modul ist von dieser Form. Weiter ist* $\mathrm{Hom}_{I_1}(V_1, V_2) \cong \mathrm{Hom}_{N_1}(V_1^{N_1}, V_2^{N_1})$.

Beweis. Sei $g_1 = 1, g_2, \ldots g_r$ ein Vertretersystem von I_1 in N_1 und setze $\beta_i = \beta_1^{g_i}$. Sei V ein $\tilde{\beta}_1$-Modul. Dann ist V_{C_1} ein β_1-Modul und

$$(V^{N_1})_{C_1} \cong (V \otimes g_1)_{C_1} \oplus \ldots \oplus (V \otimes g_r)_{C_1}$$

wobei $V \otimes g_i$ in β_i liegt. Also liegt jeder unzerlegbare Summand von V^{N_1} in einem Block der eins der β_i überdeckt. Da $C_G(D) \subset C_1$ ist aber b_1 der einzige Block von N_1, der β_1 (und alle konjugierten Blöcke β_i) überdeckt, also liegt V^{N_1} in b_1.
Ist umgekehrt W ein b_1-Modul, so ist

$$W_{C_1} = \bigoplus_{i=1}^{r} We_{\beta_i} = \bigoplus_{i=1}^{r} V^{g_i}$$

wo $V := We_{\beta_1}$. Da I_1 den Block β_1 stabilisiert, ist V ein I_1-Teilmodul von W der in $\tilde{\beta}_1$ liegt (da die Einschränkung auf C_1 in β_1 liegt). Da die Idempotente e_{β_i} alle in N_1 konjugiert sind, ist $\dim(We_{\beta_i}) = \dim(We_{\beta_1})$ für alle i. Insbesondere ist $\dim(W) = \dim(V_{I_1}^{N_1}) = r\dim(V)$ und $W = V_{I_1}^{N_1}$.
Ist $\varphi \in \mathrm{Hom}_{I_1}(V_1, V_2)$, so ist $\varphi^{N_1} \in \mathrm{Hom}_{N_1}(V_1^{N_1}, V_2^{N_1})$ definiert durch $\sum (v_i \otimes g_i)\varphi^{N_1} := \sum (v_i)\varphi g_i$. Die Abbildung $\varphi \mapsto \varphi^{N_1}$ ist injektiv, wie man durch Einschränken auf $V_1 \otimes g_1 = V_1$ sieht. Es genügt also, die Dimensionen der beiden F-Vektorräume zu vergleichen. Nach Frobenius-Nakayama Reziprozität ist

$$\mathrm{Hom}_{N_1}(V_1^{N_1}, V_2^{N_1}) \cong \mathrm{Hom}_{I_1}((V_1^{N_1})_{I_1}, V_2) \cong \mathrm{Hom}_{I_1}((V_1^{N_1})e_{\tilde{\beta}_1}, V_2)$$

da V_2 in $\tilde{\beta}_1$ liegt. Da aber für $i \geq 2$ der C_1-Modul $V_1 \otimes g_i$ in dem Block β_i liegt, der nicht von $\tilde{\beta}_1$ überdeckt wird, gilt $(V_1^{N_1})e_{\tilde{\beta}_1} \cong V_1$. $\square$

Lemma 19.12 *Seien U, V, W, V_1, V_2 fünf $\tilde{\beta}_1$-Moduln, $\varphi \in \mathrm{End}_{I_1}(V)$, $\psi \in \mathrm{Hom}_{I_1}(V_1, V_2)$.*
(1) $\varphi = \mathrm{id} \Leftrightarrow \varphi^{N_1} = \mathrm{id}$.
(2) ψ ist injektiv (surjektiv) genau dann wenn ψ^{N_1} injektiv (surjektiv) ist.
(3) V ist einfach (halbeinfach, projektiv), genau dann wenn V^{N_1} einfach (halbeinfach, projektiv) ist.
(4) Eine Sequenz

$$0 \to U \xrightarrow{\alpha} V \xrightarrow{\gamma} W \to 0$$

von I_1-Moduln in $\tilde{\beta}_1$ ist exakt, genau dann wenn die Sequenz

$$0 \to U^{N_1} \xrightarrow{\alpha^{N_1}} V^{N_1} \xrightarrow{\gamma^{N_1}} W^{N_1} \to 0$$

von N_1-Moduln in b_1 exakt ist.
(5) $J(V^{N_1}) = J(V)^{N_1}$ und $(V/J(V))^{N_1} = V^{N_1}/J(V^{N_1})$.

Beweis. (1) und (2) folgen direkt aus der Konstruktion von ψ^{N_1}.
(3) V ist einfach genau dann, wenn jeder Homomorphismus $\neq 0$ von einem $\tilde{\beta}_1$-Modul nach V surjektiv ist. Also ergibt sich die Korrespondenz der einfachen Moduln mit (2) und Lemma 19.11.
Ist $V = S_1 \oplus \ldots \oplus S_n$ halbeinfach, so gibt es I_1-Homomorphismen $\lambda_i : S_i \to V$ und $\pi_i : V \to S_i$ mit

$$\lambda_i \pi_i = \mathrm{id}_{S_i} \ \text{ und } \sum_i \pi_i \lambda_i = \mathrm{id}_V \,.$$

Dann ist mit (1) auch

$$\lambda_i^{N_1} \pi_i^{N_1} = \mathrm{id}_{S_i^{N_1}} \ \text{ und } \sum_i \pi_i^{N_1} \lambda_i^{N_1} = \mathrm{id}_{V^{N_1}},$$

also $V^{N_1} = S_1^{N_1} \oplus \ldots \oplus S_n^{N_1}$ halbeinfach.
Ist umgekehrt $V^{N_1} = T_1 \oplus \ldots \oplus T_n$ halbeinfach, so sind die T_i von der Form $S_i^{N_1}$ nach Lemma 19.11 wobei die S_i einfache I_1-Moduln sind. Die N_1-Homomorphismen $\lambda_i' : T_i \to V^{N_1}$ und $\pi_i' : V^{N_1} \to T_i = S_i^{N_1}$ sind nach Lemma 19.11 von der Form $\lambda_i^{N_1}$ bzw. $\pi_i^{N_1}$ für I_i-Homomorphismen $\lambda_i : S_i \to V$ und $\pi_i : V \to S_i$. Wegen Teil (1) gilt auch $\lambda_i \pi_i = \mathrm{id}_{S_i}$ und $\sum \pi_i \lambda_i = \mathrm{id}_V$ und daher $V = \bigoplus_i S_i$.
Zu den projektiven Moduln: Sei V^{N_1} ein projektiver N_1-Modul und seien U, W zwei I_1-Moduln, $\delta : U \to W$ ein Epimorphismus, $\gamma : V \to W$ ein Homomorphismus. Müssen $\rho : V \to U$ konstruieren mit $\rho\delta = \gamma$. Es ist aber $\delta^{N_1} : U^{N_1} \to W^{N_1}$ ein Epimorphismus, $\gamma^{N_1} : V^{N_1} \to W^{N_1}$ ein Homomorphismus. Also gibt es nach Voraussetzung einen Homomorphismus $\rho' : V^{N_1} \to U^{N_1}$ mit $\rho'\delta^{N_1} = \gamma^{N_1}$. Nach Lemma 19.11 ist ρ' von der Form ρ^{N_1} und daher $(\rho\delta)^{N_1} = \gamma^{N_1}$. Also auch $\rho\delta = \gamma$ nach Lemma 19.11. Ebenso ist V^{N_1} projektiv, falls V projektiv ist.
(4) Folgt aus (2).
(5) Die k.e.S. $0 \to J(V) \to V \to V/J(V) \to 0$ liefert eine k.e.S. von N_1-Moduln $0 \to J(V)^{N_1} \to V^{N_1} \to (V/J(V))^{N_1} \to 0$. Da nach (3) $(V/J(V))^{N_1}$ h.e. ist, folgt daraus $J(V)^{N_1} \supset J(V^{N_1})$.
Jedes epimorphe Bild von V^{N_1} ist von der Form $(V/U)^{N_1}$ für einen I_1-Teilmodul U von V nach (2) und Lemma 19.11. Insbesondere ist $V^{N_1}/J(V^{N_1}) \cong (V/U)^{N_1}$ für einen I_1-Teilmodul

U von V mit h.e. Faktormodul. Also $U \supset J(V)$ und daher ist die Kompositionslänge von $V^{N_1}/J(V^{N_1})$ kleiner oder gleich der von $V/J(V)$ also der von $V^{N_1}/J(V)^{N_1}$. Da aber $J(V^{N_1}) \subset J(V)^{N_1}$ gilt die Gleichheit $J(V^{N_1}) = J(V)^{N_1}$. □

Beweis. (von Satz 18.3) Seien $T_1, \ldots, T_e$ die einfachen $\tilde{\beta}_1$-Moduln mit zugehörigen PIMs $P_1, \ldots, P_e$. Dann sind $T_1^{N_1}, \ldots, T_e^{N_1}$ die einfachen b_1-Moduln. Weiter ist für $j \in \{1, \ldots, e\}$ der induzierter Modul $P_j^{N_1}$ ein projektiver N_1-Modul mit Kopf T_j also der zugehörige PIM in b_1. Ordnet man die T_i so dass die Kompositionsreihe von P_j die Faktoren $(T_j, T_{j+1}, \ldots)$ hat (Indizes modulo e zu lesen), so hat $P_j^{N_1}$ die Kompositionsreihe $(T_j^{N_1}, T_{j+1}^{N_1}, \ldots)$. Also ist b_1 eine Brauer Baum Algebra für einen Stern wie in Satz 18.3 behauptet. □

Als Übung zeigen Sie:

Satz 19.13 *Ist A eine F-Algebra für die alle projektiv unzerlegbaren und alle injektiv unzerlegbaren Moduln einreihig sind, so ist jeder unzerlegbare A-Modul einreihig (und somit ein epimorphes eine PIMs).*

Zum Beweis vergl. Feit, I.16.14.

Daraus ergibt sich direkt:

Folgerung 19.14 *Der Block b_1 hat genau ep^n Isomorphieklassen unzerlegbarer Moduln.*

20 Projektive Homomorphismen und der Heller Operator.

In diesem Abschnitt sei G eine beliebige endliche Gruppe und F Zerfällungskörper für alle Untergruppen von G.

Definition 20.1 *(i) Ein FG-Homomorphismus $\varphi : U \to V$ heißt* projektiv*, falls es einen projektiven FG-Modul P und Homomorphismen $\psi : U \to P$, $\xi : P \to V$ gibt mit $\psi\xi = \varphi$.*
(ii) Die Menge aller projektiven Homomorphismen von U nach V bildet einen Teilraum T von $\mathrm{Hom}_{FG}(U, V)$. Sei $\overline{\mathrm{Hom}}_{FG}(U, V) := \mathrm{Hom}_{FG}(U, V)/T$.
(iii) Ist U ein FG-Modul und P ein projektiver FG-Modul mit $P/J(P) \cong U/J(U)$, so heißt P eine projektive Decke *von U, $P = P(U)$.*
(iv) Es gibt also einen Epimorphismus $\varphi : P(U) \to U$. Bezeichne $\Omega(U) := \ker(\varphi)$. Dann heißt Ω der Heller Operator.
(v) Ein injektiver (=projektiver) FG-Modul $I = I(U)$ heißt injektive Hülle *von U, falls $soc(I) \cong soc(U)$. Dann gibt es einen Monomorphismus $U \hookrightarrow I$. Sei $\Omega^{-1}(U)$ der Cokern dieser Monomorphismus.*

Bemerkung 20.2 *Wir haben die k.e.S.*

$$0 \to \Omega(U) \to P(U) \to U \to 0$$
$$0 \to U \to I(U) \to \Omega^{-1}(U) \to 0$$

Bemerkung 20.3 *Ist Q eine projektive Decke von V, $\varphi : Q \to V$ ein zugehöriger Epimorphismus und P ein projektiver FG-Modul mit Epimorphismus $\psi : P \to V$, so gibt es einen Homomorphismus $\rho : P \to Q$ mit $\rho\varphi = \psi$. Weiter ist $P = \tilde{Q} \oplus \ker(\rho)$ mit $\tilde{Q} \cong Q$. Insbesondere ist die projektive Decke von V bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt. Ebenso ist auch $\Omega(V)$ bis auf Isomorphie eindeutig und gleiches gilt für $I(V)$ und $\Omega^{-1}(V)$.*

Lemma 20.4 *Sei $\alpha : U \to V$ ein projektiver Homomorphismus. Ist α surjektiv (injektiv), so hat U (V) einen projektiven Summanden $\neq 0$.*

Beweis. Es gibt einen projektiven FG-Modul P mit $\alpha = \rho\pi$ wo $\rho : U \to P, \pi : P \to V$. Sei zunächst α surjektiv. Dann ist π surjektiv und Œ$P = P(V)$. Dann ist aber $P = U\rho + J(P)$ also $P = U\rho$ und U hat einen direkten Summanden $(U\rho)$ isomorph zu P. Die Aussage für injektives α erhält man durch Dualisieren (oder Benutzung der injektiven Hülle). □

Bemerkung 20.5 *Ein FG-Modul U heißt* projektivfrei*, falls U keinen projektiven Summanden $\neq 0$ hat. Jeder FG-Modul U lässt sich bis auf Isomorphie eindeutig schreiben als $U = \Omega^0(U) \oplus P$ mit P projektiv und $\Omega^0(U)$ projektivfrei.*

Lemma 20.6 *Ist U ein FG-Modul, so ist $\Omega(\Omega^{-1}(U)) \cong \Omega^0(U) \cong \Omega^{-1}(\Omega(U))$.*

Beweis. Sei $V := \Omega^0(U)$, also $U = V \oplus P$ mit projektivem P. Dann ist $\Omega(P) = \Omega^{-1}(P) = 0$, also $\Omega(U) = \Omega(V)$ und $\Omega^{-1}(U) = \Omega^{-1}(V)$ und es genügt

$$\Omega(\Omega^{-1}(V)) \cong V \cong \Omega^{-1}(\Omega(V))$$

zu zeigen. Nun ist $I(V)$ projektiv und $I(V) \to \Omega^{-1}(V)$ ein Epimorphismus mit projektivfreiem Kern V. Also ist $V \cong \Omega(\Omega^{-1}(V))$ und ebenso erhält man $V \cong \Omega^{-1}(\Omega(V))$. □

Satz 20.7 *Seien U_1, U_2, V unzerlegbare nicht projektive FG-Moduln.*
(1) $\Omega(V)$ ist unzerlegbar und nicht projektiv.
(2) $\Omega(U_1) \cong \Omega(U_2) \Rightarrow U_1 \cong U_2$.
(3) Es gibt einen unzerlegbaren nicht projektiven FG-Modul U mit $\Omega(U) \cong V$.

Beweis. $\Omega(V)$ ist projektivfrei, da

$$\Omega^0(\Omega(V)) \cong \Omega(\Omega^{-1}(\Omega(V))) \cong \Omega(\Omega(\Omega^{-1}(V))) \cong \Omega(\Omega^0(V)) \cong \Omega(V)$$

da V projektivfrei ist. Ist $\Omega(V) = W_1 \oplus W_2$ zerlegbar, so ist

$$V = \Omega^0(V) \cong \Omega^{-1}(\Omega(V)) \cong \Omega^{-1}(W_1) \oplus \Omega^{-1}(W_2)$$

ein Widerspruch, also folgt (1).
Ist $\Omega(U_1) \cong \Omega(U_2)$, so auch

$$U_1 \cong \Omega^0(U_1) \cong \Omega^{-1}(\Omega(U_1)) \cong \Omega^{-1}(\Omega(U_2)) \cong \Omega^0(U_2) \cong U_2.$$

Also ergibt sich (2).
Wie in (1) folgt auch $\Omega^{-1}(V) =: U$ unzerlegbar und $\Omega(U) \cong \Omega(\Omega^{-1}(V)) \cong \Omega^0(V) \cong V$. □

Lemma 20.8 *Sind U und V zwei FG-Moduln, so ist $\overline{\mathrm{Hom}}_{FG}(U,V) \cong \overline{\mathrm{Hom}}_{FG}(\Omega(U),\Omega(V))$.*

Beweis. Übung. $\square$

Satz 20.9 *Sei U ein nicht projektiver unzerlegbarer FG-Modul.*
(1) $vx(U) = vx(\Omega(U))$.
(2) Ist V ein Greenkorrespondent von U, so ist $\Omega(V)$ ein Greenkorrespondent von $\Omega(U)$.

Beweis. Sei $H \leq G$ so dass U relativ H-projektiv ist und W ein FH-Modul mit $U \mid W^G \cong U \oplus X$. Dann liefert die k.e.S.

$$0 \to \Omega(W) \to P(W) \to W \to 0$$

eine k.e.S.

$$0 \to \Omega(W)^G \to P(W)^G \to W^G \to 0.$$

Da $P(W)^G$ ein projektiver FG-Modul ist und $W = U \oplus X$, folgt $P(W)^G \cong PU \oplus PX \oplus Q$ mit projektivem Q. Also ist $\Omega(U)$ ein direkter Summand von $\Omega(W)^G$ und daher relativ H-porjektiv. Analoges gilt für Ω^{-1} und daher ist U relativ H-projektiv $\Rightarrow \Omega(U)$ relativ H-projektiv $\Rightarrow U = \Omega^{-1}(\Omega(U))$ relativ H-projektiv. Damit folgt (1)
Ende am 30.1.07
(2) Sei $R = vx(U)$, $R \leq Q \leq G$ mit $|Q| = p^*$ und $N_G(Q) \leq H \leq G$. Dann ist $f := f(G,R,H)$ definiert und der Greenkorrespondent $V = f(U)$ ein FH-Modul mit vertex R. Dann sind auch $\Omega(U)$ und $\Omega(V)$ unzerlegbar und haben vertex R. Also genügt es zu zeigen, dass $\Omega(V)$ ein direkter Summand von $\Omega(U)_H$ ist.

$$0 \to \Omega(U) \to P(U) \to U \to 0$$

liefert

$$0 \to \Omega(U)_H \to P(U)_H \to U_H = V \oplus X \to 0.$$

Wie eben folgt dann $P(U)_H = P(V) \oplus P(X) \oplus M$ und daher $\Omega(V) \mid \Omega(U)_H$. $\square$

21 Die Struktur von B.

Zurück zur Situation des zyklischen Defekts.

In Satz 18.5 haben wir gesehen, dass die Greenkorrespondenz eine Bijektion zwischen den Isomorphismenklassen von unzerlegbaren nicht projektiven Moduln in B und solchen in b_1 liefert. Ist U ein B-Modul, $V = f(U)$ ein b_1-Modul, so ist

$$U_{N_1} = V \oplus W, \quad V^G = U \oplus Q$$

wo Q ein projektiver FG-Modul ist und W eine direkte Summe von projektiven FN_1-Modul und solchen FN_1-Moduln, die nicht zum Block b_1 gehören.

Dies überträgt sich auch auf die Homomorphismenräume modulo projektiven:

Satz 21.1 *Seien U, U_1 nicht projektive unzerlegbare G-Moduln im Block B, $V = f(U)$, $V_1 = f(U_1)$ die Greenkorrespondenten (im Block b_1). Dann gilt*

$$\overline{\mathrm{Hom}}_{FG}(U, U_1) \cong \overline{\mathrm{Hom}}_{FN_1}(V, V_1).$$

Beweis. Es ist

$$V^G = U \oplus Q, \ (U_1)_{N_1} = V_1 \oplus W_1$$

wie in Satz 18.5. Es ist

$$\begin{array}{l} \overline{\mathrm{Hom}}_{FG}(U, U_1) = \overline{\mathrm{Hom}}_{FG}(U \oplus Q, U_1) = \overline{\mathrm{Hom}}_{FG}(V^G, U_1) \overset{!}{\cong} \\ \overline{\mathrm{Hom}}_{FN_1}(V, (U_1)_{N_1}) = \overline{\mathrm{Hom}}_{FN_1}(V, V_1 \oplus W_1) = \overline{\mathrm{Hom}}_{FN_1}(V, V_1) \end{array}$$

da W_1 aus projektiven Moduln und Moduln nicht in b_1 besteht. Bleibt zu zeigen, dass $\overline{\mathrm{Hom}}_{FG}(V^G, U_1) \cong \overline{\mathrm{Hom}}_{FN_1}(V, (U_1)_{N_1})$ Nach Frobenius-Nakayama Reziprozität kennen wir einen expliziten Isomorphismus $\mathrm{Hom}_{FN_1}(V, (U_1)_{N_1}) \cong \mathrm{Hom}_{FG}(V^G, U_1)$ $\varphi \mapsto \tilde{\varphi} : \sum(v_i \otimes g_i) \mapsto \sum v_i \varphi g_i$ dessen Umkehrabbildung die Einschränkung ist. Wir müssen zeigen, dass dabei projektive Homomorphismen auf projektive gehen. Dies ist ganz allgemein richtig: Ist $\psi \in \mathrm{Hom}_{FG}(V^G, U_1)$ projektiv, so faktorisiert auch die Einschränkung $\psi_{|V \otimes 1}$ über denselben projektiven Modul. Sei umgekehrt $\varphi \in \mathrm{Hom}_{FN_1}(V, (U_1)_{N_1})$ mit $\varphi = \alpha\gamma$, $\alpha : V \to Q$, $\gamma : Q \to (U_1)_{N_1}$ und Q ein projektiver FN_1-Modul. Sind $\alpha^G : V^G \to Q^G : \sum(v_i \otimes g_i) \mapsto \sum v_i \alpha \otimes g_i$ und $\tilde{\gamma} : Q^G \to U_1$ die entsprechend fortgesetzten FG-Modul Homomorphismen, dann ist $\alpha^G \tilde{\gamma} = \tilde{\varphi}$. Da auch Q^G ein projektiver FG-Modul ist, ist auch φ^G projektiv. □

Seien $V_0, \ldots, V_{e-1}$ die einfachen b_1-Moduln in der Reihenfolge wie sie im Brauer-Stern von b_1 vorkommen (bis auf zyklische Vertauschung eindeutig bestimmt). Sei V_{ij} der Quotient des PIMs von V_i mit Kompositionslänge j $(1 \leq j \leq q)$, also $V_{i1} = V_i$, V_{iq} projektiv. Dann ist V_{ij} einreihig mit Kompositionsfaktoren $(V_i, V_{i+1}, \ldots, V_{i+j-1})$ wobei die Indizes modulo e zu lesen sind. Die Moduln $\{V_{ij} \mid 0 \leq i \leq e-1, 1 \leq j \leq q\}$ sind genau die eq unzerlegbaren Moduln im Block b_1. Für den Heller-Operator gilt:

$$\Omega(V_{it}) = \ker(V_{iq} \to V_{it}) \cong V_{i+t,q-t}.$$

Satz 21.2 *In B liegen genau e einfache Moduln, $S_0, \ldots, S_{e-1}$. Jeder der einfachen b_1 Moduln V_i ist Quotient des Greenkorrespondenten $T_i := f(S_i)$ von genau einem einfachen B-Modul S_i. Jeder der einfachen b_1 Moduln ist Teilmodul des Greenkorrespondenten von genau einem einfachen B-Modul, d.h. es gibt eine Permutation π mit $V_{\pi(i)} \cong soc(T_i)$.*

Beweis. Sind $T = f(S)$ und $T' = f(S')$ Greenkorrespondenten von zwei verschiedenen einfachen B-Moduln $S \not\cong S'$, so gilt nach Satz 21.1 dass $\overline{\mathrm{Hom}}(T, T') \cong \overline{\mathrm{Hom}}(S, S') = 0$. Angenommen V_i ist Quotient von beiden unzerlegbaren Moduln T und T'. Dann gibt es s, t mit $T \cong V_{is}$ und $T' = V_{it}$. Œ $s \geq t$. Dann ist aber T ein epimorphes Bild von T'. Da T und T' unzerlegbar und nicht projektiv sind darf nach Lemma 20.4 dieser Epimorphismus nicht über einen projektiven faktorisieren, ein Widerspruch zu $\overline{\mathrm{Hom}}(T, T') \cong \overline{\mathrm{Hom}}(S, S') = 0$.
Ebenso zeigt man, dass die Sockel von T und T' nicht isomorph sind.
Sei nun $U_i = f^{-1}(V_i)$ der Greenkorrespondent von V_i. Dann ist U_i ein unzerlegbarer B-Modul. Ist S ein einfacher B-Modul mit $\mathrm{Hom}(S, U_i) \neq 0$, so gilt nach Lemma 20.4 auch

$\overline{\mathrm{Hom}}(S, U_i) \neq 0$, da die nichttrivialen Homomorphismen $S \to U_i$ injektiv sind und U_i nicht projektiver unzerlegbarer B-Modul. Also auch $\overline{\mathrm{Hom}}(f(S), V_i) \neq 0$ und jeder einfache b_1-Modul kommt als Quotient eines Greenkorrespondenten vor. Analoges erhält man für den Sockel. □

Bemerkung 21.3 *Es ist* $\dim(\overline{\mathrm{Hom}}_{FN_1}(T_i, T_j)) = \dim_{FG}(\overline{\mathrm{Hom}}(S_i, S_j)) = \dim(\mathrm{Hom}_{FG}(S_i, S_j)) = \delta_{ij}$.

Lemma 21.4 *Ist $0 \neq \theta \in \mathrm{Hom}_{FN_1}(V_{is}, V_{jt})$, so ist θ genau dann projektiv, wenn die Kompositionslänge $l(V_{is}\theta) \leq s + t - q$.*

Beweis. Sei $Y := V_{is}\theta \leq V_{jt}$ das Bild von θ und $r := l(Y)$ die Kompositionslänge. Die projektive Decke von V_{jt} ist V_{jq}. Sei φ ein Epimorphismus von V_{jq} auf V_{jt} und $X = Y\varphi^{-1}$ das volle Urbild von Y. Dann ist $l(V_{jq}/X) = l(V_{jt}/Y) = t - r$ und daher $l(X) = q - t + r$ und $X/J(X) \cong V_i$, also $X \cong V_{i,q-t+r}$.
Nun ist θ projektiv genau dann wenn es einen Homomorphismus $\rho : V_{is} \to V_{jq}$ gibt, mit $\theta = \rho\varphi$. Dann ist $V_{is}\rho = X$, also θ projektiv, genau dann, wenn X Bild von V_{is} ist, also genau dann wenn $s \geq q - t + r$. (Bildchen !) □

Lemma 21.5 *Ein unzerlegbarer b_1-Modul V heisse* kurz*, falls $l(V) \leq e$ und* lang*, falls $l(V) \geq q-e$. Dann gilt für die Greenkorrespondenten T_i der einfachen B-Moduln S_i, dass T_i entweder lang oder kurz ist.*

Beweis. Œ $q > 2e$. Ist $q/2 \geq l(T_i) > e$, so sind die ersten $e + 1$ Kompositionsfaktoren von T_i gleich $(V_i, V_{i+1}, \ldots, V_{i+e} = V_i)$. Insbesondere hat T_i einen Endomorphismus $\neq 0$, dessen Bild ein echter Teilmodul von T_i ist. Mit Lemma 21.4 ist dies ist ein Widerspruch zu

$$\mathrm{End}_{FN_1}(T_i) \cong \overline{\mathrm{Hom}}_{FN_1}(T_i, T_i) = \overline{\mathrm{Hom}}_{FG}(S_i, S_i) = \mathrm{Hom}_{FG}(S_i, S_i) \cong F.$$

Sei nun $q/2 \leq l(T_i) < q - e$. Dann ist $e < l(\Omega(T_i)) = q - l(T_i) \leq q/2$ und wie eben erhalten wir, dass $\overline{\mathrm{Hom}}(\Omega(T_i), \Omega(T_i))$ Dimension ≥ 2 hat. Wegen Lemma 20.8 ergibt sich dann auch $\dim(\overline{\mathrm{Hom}}(T_i, T_i)) = \dim(\overline{\mathrm{Hom}}(\Omega(T_i), \Omega(T_i))) \geq 2$, ein Widerspruch zu Bemerkung 21.3.
□

Lemma 21.6 *Ist V ein unzerlegbarer b_1-Modul, der entweder kurz oder lang ist, und W ein beliebiger unzerlegbarer b_1-Modul, dann haben die folgenden 4 Vektorräume entweder Dimension 1 oder 0:*

$$\overline{\mathrm{Hom}}_{FN_1}(V, W), \overline{\mathrm{Hom}}_{FN_1}(W, V), \overline{\mathrm{Hom}}_{FN_1}(\Omega(V), W), \overline{\mathrm{Hom}}_{FN_1}(W, \Omega(V))$$

Beweis. Ist V kurz, dann kommt in V jeder einfache b_1-Modul höchstens mit Vielfachheit 1 als Kompositionsfaktor vor. Sei $V/J(V) \cong V_i$. Kommt V_i nicht als Kompositionsfaktor von W vor, dann ist $\mathrm{Hom}_{FN_1}(V, W) = 0$. Sonst hat W genau einen Teilmodul Y mit $Y/J(Y) \cong V_i$ so dass Y kurz ist und $\mathrm{Hom}_{FN_1}(V, W) = \mathrm{Hom}_{FN_1}(V, Y) \cong F$. Ebenso erhält man, dass $\mathrm{Hom}_{FN_1}(W, V)$ Dimension 1 oder 0 hat, da das Bild eines solchen Homomorphismus $\neq 0$ ein Teilmodul von V ist, dessen Kopf $= W/J(W)$ ist.
Ist V lang, so ist $\Omega(V)$ kurz, da $l(\Omega(V)) = q - l(V)$. Also ist $\overline{\mathrm{Hom}}(\Omega(V), \Omega(W)) = \overline{\mathrm{Hom}}(V, W)$ von Dimension 1 oder 0. □

Satz 21.7 *Ist U ein unzerlegbarer B-Modul, dann sind $soc(U)$ und $U/J(U)$ vielfachheitenfrei.*

Beweis. Wir müssen zeigen, dass $\mathrm{Hom}_{FG}(S_i, U)$ und $\mathrm{Hom}_{FG}(U, S_i)$ Dimension 0 oder 1 haben für alle einfachen FG-Moduln S_i.

Die Behauptung ist klar für projektiv unzerlegbare B-Moduln. Sei also Œ U nicht projektiv und V sein Greenkorrespondent im Block b_1. Dann ist mit Lemma 20.4 $\mathrm{Hom}_{FG}(S_i, U) = \overline{\mathrm{Hom}}_{FG}(S_i, U)$ und $\mathrm{Hom}_{FG}(U, S_i) = \overline{\mathrm{Hom}}_{FG}(U, S_i)$. Also gilt mit Satz 21.1 für den Greenkorrespondenten T_i von S_i:

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{FG}(S_i, U) &= \overline{\mathrm{Hom}}_{FG}(S_i, U) \cong \overline{\mathrm{Hom}}_{FN_1}(T_i, V)\\ \mathrm{Hom}_{FG}(U, S_i) &= \overline{\mathrm{Hom}}_{FG}(U, S_i) \cong \overline{\mathrm{Hom}}_{FN_1}(V, T_i).\end{aligned}$$

Die beiden letzten Räume haben aber Dimension 0 oder 1, da T_i entweder kurz oder lang ist. □

Folgerung 21.8 *Ist U ein nicht-projektiver unzerlegbarer B-Modul und S_j ein einfacher B-Modul, so gibt es bis auf Isomorphie höchstens eine nichtzerfallende exakte Sequenz*

$$0 \to S_j \to M \to U \to 0.$$

Diese existiert genau dann wenn

$$\overline{\mathrm{Hom}}_{FN_1}(\Omega(V), T_j) \neq 0$$

ist, wo V und T_j die Greenkorrespondenten von U und S_j sind.

Beweis. Wir haben das folgende kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & \Omega(U) & \stackrel{\lambda_U}{\to} & P(U) & \stackrel{\pi_U}{\to} & U & \to & 0\\ & & \delta\downarrow & & \gamma\downarrow & & \mathrm{id}\downarrow & & \\ 0 & \to & S_j & \stackrel{\lambda}{\to} & M & \stackrel{\pi}{\to} & U & \to & 0\end{array}$$

wobei die untere die gegebene nichtzerfallende k.e.S. sei. Es gilt nämlich $S = \lambda(S_j) \leq J(M)$ da sonst S ein direkter Summand von M wäre. Also liefert π einen Isomorphismus $M/J(M) \cong U/J(U)$ und daher ist γ surjektiv. Die Existenz von δ folgt dann. Wegen Satz 21.7 hat $\Omega(U)/J(\Omega(U))$ genau einen Summanden S_j, also hat $\Omega(U)$ einen eindeutigen Teilmodul $X = \ker(\delta)$ mit $\Omega(U)/X \cong S_j$. Die gegebene nicht zerfallende k.e.S. ist also isomorph zu

$$0 \to \Omega(U)/X \stackrel{\overline{\lambda_U}}{\to} P(U)/X \stackrel{\overline{\pi_U}}{\to} U \to 0$$

woraus die Eindeutigkeit folgt. Weiter gibt es eine solche nichtzerfallende Sequenz genau dann wenn $\mathrm{Hom}(\Omega(U), S_j) \neq 0$ also genau dann wenn

$$\mathrm{Hom}(\Omega(U), S_j) \cong \overline{\mathrm{Hom}}(\Omega(U), S_j) \cong \overline{\mathrm{Hom}}(\Omega(V), T_j) \neq 0.$$

□

Wie in Folgerung 13.9 zeigt man:

Lemma 21.9 *Seien U_1, U_2 nicht projektive unzerlegbare B-Moduln und V_1, V_2 die zugehörigen Green-Korrespondenten. Dann gibt es eine nicht zerfallende k.e.S.*

$$0 \to U_1 \to U \to U_2 \to 0$$

genau dann wenn es eine nicht zerfallende k.e.S.

$$0 \to V_1 \to V \to V_2 \to 0$$

gibt, wo $V = f(U) \oplus P$ für einen projektiven Modul P (oder 0) im Block b_1.

Satz 21.10 *Sei U ein unzerlegbarer nicht projektiver B-Modul mit Green Korrespondenten V_{is}. Es gibt genau dann eine nicht-zerfallende k.e.S.*

$$0 \to S_j \to M \to U \to 0$$

mit unzerlegbarem M wenn entweder

$$\begin{array}{l} i = \pi(j) \text{ und } s + l(T_j) > q \\ \text{ oder} \\ i + s \equiv_e j \text{ und } s + l(T_j) \leq q. \end{array}$$

Für den Greenkorrespondenten $V = f(M)$ gilt dann entsprechend $V = 0$, falls $s + l(T_j) = q$, $V \cong V_{j,s+l(T_j)-q} = V_{\pi^{-1}(i),s+l(T_j)-q}$, falls $s + l(T_j) > q$ und $V \cong V_{i,s+l(T_j)}$, falls $s + l(T_j) < q$.

<u>Beweis.</u> Nach Lemma 21.9 ist

$$0 \to S_j \to M \to U \to 0$$

nicht zerfallend, genau dann wenn

$$0 \to T_j = V_{j,l(T_j)} \to L \to V_{is} \to 0$$

nicht zerfällt. Ist M projektiv, so haben wir das gleiche Resultat, nur dass dann $L = V_{i,q}$ auch projektiv ist. In dem Fall ist $s + l(T_j) = q$ und $j \equiv_e i + s$ wie man an der Kompositionsreihe von $V_{i,q}$ abliest. Ist $l(T_j) + s < q$, so ist $L = f(M)$ nicht projektiv und unzerlegbar. Also $L = V_{i,s+l(T_j)}$ und ebenfalls $j \equiv_e i + s$.
Ende am 2.2.07
Sei jetzt $l(L) = s + l(T_j) > q$, dann ist $L = f(M) \oplus P$ mit projektivem P. Da L eine Erweiterung von zwei Moduln mit Kopf V_i und V_j ist, und $L/J(L)$ nicht einfach ist, gilt $L/J(L) \cong V_i \oplus V_j$ und daher $P = V_{j,q}$ oder $P = V_{i,q}$.
<u>Beh.</u> $P = V_{i,q}$. Angenommen $P = V_{j,q}$ mit $j \neq i$ und $L = L_1 \oplus P$. L hat einen Teilmodul $T \cong T_j \cong V_{j,l(T_j)}$. Das Bild der Projektion von T auf P ist aus Dimensionsgründen nicht gleich P, liegt also in $J(P)$ und daher kann $T/J(T)$ nicht zu $L/J(L)$ beitragen.
Also wissen wir, dass $L = V_{j,s+l(T_j)-q} \oplus V_{i,q}$ und daher $soc(L) \cong V_{j+s+l(T_j)-q-1} \oplus V_i$. Da $soc(T_j) \cong V_{\pi(j)} \leq soc(L)$ ist, genügt es zu zeigen, dass $T \cap P \neq 0$ ist. Angenommen, $T \cap P = 0$, dann ist $l(T) \leq l(L_1)$ und daher $l(V_{is}) \geq l(P) = q$ ein Widerspruch. Daher gilt $\pi(j) = i$.
Ist $s + l(T_j) \leq q$ und $i + s \equiv_e j$, so liefert $L = V_{i,s+l(T_j)}$ eine nichtzerfallende Erweiterung von T_j und V_{is}.

Sei nun $s+l(T_j) > q$ und $i = \pi(j)$. Dann setzen wir $L := V_{i,q} \oplus V_{j,s+l(T_j)-q}$. Dann ist $soc(T_j) \cong V_i$ und $V_{i,q}$ hat genau einen Teilmodul W mit $W \cong T_j$. Nun ist die Kompositionslänge $l(T_j) = l(W) > l(T_j) + s - q$, also gibt es einen Epimorphismus $\varphi : W \to V_{j,s+l(T_j)-q}$. Setze $T := \{(w, w\varphi) \mid w \in W\} \leq L := V_{i,q} \oplus V_{j,s+l(T_j)-q}$. Dann ist $T \cong T_j$ und der Kopf von L/T ist isomorph zu V_i. Da L/T Kompositionslänge s hat, folgt $L/T \cong V_{is}$ und wir haben die geforderte nichtzerfallende Erweiterung konstruiert. □

Setzt man $U = S_i$ in Satz 21.10, so erhält man, da $T_i = V_{i,l(T_i)}$, also $soc(T_i) \cong V_{i+l(T_i)-1}$ und daher $i + l(T_i) - 1 \equiv_e \pi(i)$

Bemerkung 21.11 *Wie eben seien $T_0, \ldots, T_{e-1}$ die Greenkorrespondenten der einfachen B-Moduln $S_0, \ldots, S_{e-1}$ mit Kopf $T_i/J(T_i) \cong V_i$ und $soc(T_i) \cong V_{\pi(i)}$. Definieren die Permutationen $\rho := \pi^{-1}$ und σ durch $\sigma(i) = \pi(i) + 1$. Für $0 \leq i, j \leq e$ gibt es genau dann eine nicht zerfallende k.e.S.*

$$0 \to S_j \to M \to S_i \to 0$$

wenn entweder $j = \rho(i)$ und $l(T_i) + l(T_j) > q$ oder $j = \sigma(i)$ und $l(T_i) + l(T_j) \leq q$. Sei $P_i = P(S_i)$ der PIM in B mit Kopf S_i.

Damit können wir das Hauptergebnis dieses Abschnitts angehen:

Satz 21.12 *$J(P_i)/soc(P_i) \cong W_i^\rho \oplus W_i^\sigma$ ist direkte Summe von zwei einreihigen Moduln (eventuell =0) für die gilt:*
(i) Die Kompositionsreihe von W_i^ρ ist $(S_{\rho(i)}, S_{\rho^2(i)}, \ldots, S_{\rho^a(i)})$ für ein geeignetes a mit $\rho^{a+1}(i) = i$.
(ii) Die Kompositionsreihe von W_i^σ ist $(S_{\sigma(i)}, S_{\sigma^2(i)}, \ldots, S_{\sigma^b(i)})$ für ein geeignetes b mit $\sigma^{b+1}(i) = i$.
(iii) W_i^ρ und W_i^σ haben keine gemeinsamen Kompositionsfaktoren.

Die dritte Aussage folgt aus Satz 21.7, da jeder Quotient von P_i unzerlegbar ist.

Zum Beweis der ersten beiden Aussagen benötigen wir 2 Lemmata:

Lemma 21.13 *Sei M ein B-Modul mit genau 3 Kompositionsfaktoren S_i, S_j, S_k so dass $M/J(M)$ einfach ist. Dann ist M einreihig, falls $l(T_i)+l(T_j)+l(T_k) < q$ oder $l(T_i)+l(T_j)+l(T_k) > 2q$.*

Beweis. Angenommen M ist nicht einreihig. Dann ist $M/J(M) \cong S_i$, $J(M) \cong S_j \oplus S_k$ und M/S_k ist eine nichtzerfallende Erweiterung von S_i und S_j. Im Fall $l(T_i) + l(T_j) + l(T_k) < q$ gilt dann auch $l(T_i)+l(T_j) < q$ und daher mit Bemerkung 21.11 $j = \sigma(i)$. Analog erhält man $k = \sigma(i)$. Da aber die nicht-zerfallende Erweiterung von S_i mit $S_{\sigma(i)}$ eindeutig ist, ergibt sich ein Widerspruch. Eine analoge Argumentation (mit ρ anstelle von σ) ergibt den Beweis im Fall $l(T_i) + l(T_j) + l(T_k) > 2q$. □

Lemma 21.14 *(a) Sei U_i^σ der Green-Korrespondent von $V_{i,q-1}$. Dann ist $l(U_i^\sigma) = b+1$ für ein $b \in \mathbb{N}$ mit $\sigma^{b+1}(i) = i$ und die Kompositionsreihe von U_i^σ ist*

$$S_i, S_{\sigma(i)}, S_{\sigma^2(i)}, \dots, S_{\sigma^b(i)}.$$

(b) Sei U_i^ρ der Green-Korrespondent von $V_{\pi(i)}$. Dann ist $l(U_i^\rho) = a+1$ für ein $a \in \mathbb{N}$ mit $\rho^{a+1}(i) = i$ und die Kompositionsreihe von U_i^ρ ist

$$S_i, S_{\rho(i)}, S_{\rho^2(i)}, \dots, S_{\rho^a(i)}.$$

Beweis. Wir konstruieren zunächst einen solchen Modul U_i^σ bzw. U_i^ρ als sukzessive nichtzerfallende Erweiterung der einfachen Moduln S_i unter Benutzung von Satz 21.10 und der Bemerkung 21.11. Danach gibt es eine nichtzerfallende nicht projektive Erweiterung M_1 mit Kompositionsreihe $(S_i, S_{\sigma(i)})$ genau dann wenn $s_1 := l(T_i) + l(T_{\sigma(i)}) < q$. Der Greenkorrespondent $L_1 = f(M_1)$ von M_1 hat dann Kompositionslänge s_1 ist also isomorph zu V_{i,s_1}. Genau dann gibt es eine nichtzerfallende Erweiterung $0 \to S_{\sigma^2(i)} \to M_2 \to M_1 \to 0$, wenn $s_1 + l(T_{\sigma^2(i)}) < q$. Wenn wir so fortfahren konstruieren wir sukzessive unzerlegbare Moduln $M_1, \dots, M_b =: U_i^\sigma$ wo b maximal ist mit

$$l(T_i) + l(T_{\sigma(i)}) + \ldots + l(T_{\sigma^b(i)}) < q.$$

Analog argumentiert man für ρ: Es gibt eine nichtzerfallende Erweiterung M_1 mit Kompositionsreihe $(S_i, S_{\rho(i)})$ genau dann wenn $s_1 := l(T_i) + l(T_{\rho(i)}) > q$. Der Greenkorrespondent $L_1 = f(M_1)$ von M_1 hat dann Kompositionslänge $s_1 - q$ ist also isomorph zu V_{i,s_1-q}. Genau dann gibt es eine nichtzerfallende Erweiterung $0 \to S_{\sigma^2(i)} \to M_2 \to M_1 \to 0$, wenn $l(T_i) + l(T_{\sigma(i)}) - q + l(T_{\sigma^2(i)}) > q$. Wenn wir so fortfahren konstruieren wir sukzessive unzerlegbare Moduln $M_1, \dots, M_a =: U_i^\rho$ wo a maximal ist mit

$$l(T_i) + l(T_{\sigma(i)}) + \ldots + l(T_{\sigma^a(i)}) - (a-1)q > q.$$

Wir zeigen jetzt, dass die Moduln U_i^σ und U_i^ρ einreihig sind per Induktion über die Kompositionslänge ($b+1$ bzw. $a+1$):
Wir haben eine Kompositionsreihe $U_i^\sigma =: U_i^0 > U_i^1 > \ldots > U_i^b > U_i^{b+1} = 0$ mit $U_i^j/U_i^{j+1} \cong S_{\sigma^j(i)}$. U_i^0/U_i^2 ist einreihig als nichtzerfallende Erweiterung von zwei einfachen Moduln. Per Induktion nehmen wir an, das U_i^0/U_i^j einreihig ist, U_i^0/U_i^{j+1} aber nicht. Faktorisiert man U_i^{j+1} heraus, so können wir der einfacheren Schreibweise halber annehmnen, dass $j = b$. Dann ist $U_i^{b-1} \cong S_{\sigma^{b-1}(i)} \oplus S_{\sigma^b(i)}$. Indem wir Lemma 21.13 auf U_i^{b-2} anwenden, sehen wir, dass $U_i^{b-2}/J(U_i^{b-2})$ nicht einfach sein kann, also U_i^{b-2} auf die direkte Summe von 2 einfachen Moduln abbildet. Mit Lemma 21.13 dann aber auch U_i^{b-3}, usw. liefert dass $U_i^\sigma = S_{\sigma^b(i)} \oplus V$ nicht unzerlegbar ist, ein Widerspruch. Ebenso argumentiert man für U_i^ρ.
Nun zu den Greenkorrespondenten: Der Greenkorrespondent $V = f(U_i^\sigma)$ ist isomorph zu $V_{i,s}$ mit $s = l(V) = \sum_{j=0}^b l(T_{\sigma^j(i)}) < q$, $s + l(T_{\sigma^{b+1}(i)}) > q$. Zu zeigen ist, $s = q-1$. Dazu genügt es zu zeigen, dass $\sigma^{b+1}(i) = i$ ist. Denn dann ist $\sigma^b(i) = \sigma^{-1}(i) = \pi^{-1}(i-1)$ und $soc(V) = soc(T_{\sigma^b(i)}) = V_{i-1}$. Daher $l(V) = q-1-me$ für ein $m \geq 0$. Ist $m > 0$ und T_i kurz, so ist

$$l(V) + l(T_{\sigma^{b+1}(i)}) = l(V) + l(T_i) \leq (q-1-e) + e < q$$

ein Widerspruch. Ist $m > 0$ und T_i lang, so ist

$$l(V) \geq l(T_i) \geq q - e > q - 1 - me = l(V)$$

ebenso ein Widerspruch. Es ist

$$\mathrm{Hom}_{FG}(U_i^\sigma, S_{\sigma^{b+1}(i)}) = \overline{\mathrm{Hom}}_{FG}(U_i^\sigma, S_{\sigma^{b+1}(i)}) \cong \overline{\mathrm{Hom}}_{FN_1}(V, T_{\sigma^{b+1}(i)}) \cong \overline{\mathrm{Hom}}_{FN_1}(\Omega(V), \Omega(T_{\sigma^{b+1}(i)})).$$

Nun ist $l(V) + l(T_{\sigma^{b+1}(i)}) \geq q$ also $l(\Omega(V)) + l(\Omega(T_{\sigma^{b+1}(i)})) \leq q$ und also nach Lemma 21.4

$$\overline{\mathrm{Hom}}_{FN_1}(\Omega(V), \Omega(T_{\sigma^{b+1}(i)})) \cong \mathrm{Hom}_{FN_1}(\Omega(V), \Omega(T_{\sigma^{b+1}(i)})).$$

Es ist

$$\Omega(V)/J(\Omega(V)) \cong V_{\pi(\sigma^b(i))+1} = V_{\sigma^{b+1}(i)}$$

und

$$soc(\Omega(T_{\sigma^{b+1}(i)})) = soc(P(T_{\sigma^{b+1}(i)})) = soc(V_{\sigma^{b+1}(i),q}) = V_{\sigma^{b+1}(i)}.$$

Also ist $\mathrm{Hom}_{FN_1}(\Omega(V), \Omega(T_{\sigma^{b+1}(i)})) \neq 0$ und daher auch $\mathrm{Hom}_{FG}(U_i^\sigma, S_{\sigma^{b+1}(i)}) \neq 0$ und U_i^σ hat $S_{\sigma^{b+1}(i)}$ im Kopf und wegen der Einreihigkeit von U_i^σ ergibt sich $S_{\sigma^{b+1}(i)} \cong U_i^\sigma/J(U_i^\sigma) \cong S_i$.
Sei nun $V = f(U_i^\rho)$ der Greenkorrespondent von U_i^ρ. Wie eben wollen wir zeigen, dass $\rho^{a+1}(i) = i$ ist.

$$\mathrm{Hom}_{FG}(U_i^\rho, S_{\rho^{a+1}(i)}) = \overline{\mathrm{Hom}}_{FG}(U_i^\rho, S_{\rho^{a+1}(i)}) \cong \overline{\mathrm{Hom}}_{FN_1}(V, T_{\rho^{a+1}(i)}) \cong \mathrm{Hom}_{FN_1}(V, T_{\rho^{a+1}(i)})$$

da $l(V) + l(T_{\rho^{a+1}(i)}) \leq q$ nach Wahl von a. Aber $soc(T_{\rho^{a+1}(i)}) = V_{\pi(\rho^{a+1}(i))} = V_{\rho^a(i)}$ und $V/J(V) \cong T_{\rho^a(i)}/J(T_{\rho^a(i)}) \cong V_{\rho^a(i)}$ also $\mathrm{Hom}_{FN_1}(V, T_{\rho^{a+1}(i)}) \neq 0$ und somit $\mathrm{Hom}_{FG}(U_i^\rho, S_{\rho^{a+1}(i)}) \neq 0$ woraus $\rho^{a+1}(i) = i$ folgt.
Ende am 6.2.07
Nun ist

$$soc(V) \cong soc(T_i) \cong V_{\pi(i)} = V_{\rho^{-1}(i)} \text{ und } V/J(V) \cong V_{\rho^a(i)} = V_{\rho^{-1}(i)}.$$

Also ist $l(V) = me + 1$ für ein $m \in \mathbb{Z}$. Ist $m > 0$ und T_i lang, so ist $l(V) + l(T_{\rho^{a+1}(i)}) = l(V) + l(T_i) \geq e + 1 + q - e > q$ ein Widerspruch zur Wahl von a. Ist $m > 0$ und T_i kurz, so ist $e + 1 \leq l(V) < l(T_i) \leq e$ ebenso ein Widerspruch. □

Beweis. (von Satz 21.12) Sei $\varphi : U_i^\sigma/J(U_i^\sigma) \to U_i^\rho/J(U_i^\rho) = S_i$ ein Isomorphismus und

$$U := \{(x, y) \in U_i^\sigma \oplus U_i^\rho \mid \varphi(x + J(U_i^\sigma)) = y + J(U_i^\rho)\} \leq U_i^\sigma \oplus U_i^\rho.$$

Dann hat U einen Teilmodul $M \cong J(U_i^\sigma) \oplus J(U_i^\rho)$ mit der Struktur wie für $J(P_i)/soc(P_i)$ in Satz 21.12 behauptet.
Dann gilt $J(U) = M$: Œ seien beide, U_i^σ und $U_i^\rho \neq S_i$. Setze $\overline{U} := U/J(M)$. Dann $\overline{M} \cong S_{\sigma(i)} \oplus S_{\rho(i)}$ direkte Summe von 2 nichtisomorphen einfachen Moduln (da $l(T_{\rho(i)}) + l(T_i) > q$ und $l(T_{\sigma(i)}) + l(T_i) < q$). Daher sind $0, S_{\sigma(i)}$ und $S_{\rho(i)}$ die einzigen nichttrivialen Teilmoduln von $\overline{M}$. Weiter sind $\overline{U}/S_{\sigma(i)}$ und $\overline{U}/S_{\rho(i)}$ nicht zerfallend und daher auch nicht halbeinfach, d.h. $J(\overline{U}) = \overline{M}$.
Weiter gibt es eine Erweiterung

$$0 \to S_i \to P_i \to U \to 0$$

von S_i mit U zu einem projektiven Modul (der dann notwendigerweise P_i ist, da $U/J(U) \cong P_i/J(P_i) \cong S_i$).
Dazu betrachten wir U als sukzessive nichtzerfallende Erweiterung

$$\begin{array}{l} 0 \to S_{\rho(i)} \to M_1 \to U_i^\sigma = M_0 \to 0 \\ 0 \to S_{\rho^2(i)} \to M_2 \to M_1 \to 0 \\ \dots \\ 0 \to S_{\rho^a(i)} \to M_a = U \to M_{a-1} \to 0 \end{array}$$

Da $U/J(U) \cong S_i$ einfach ist, ist jeder der Moduln M_j unzerlegbar ($1 \leq j \leq a$). Der Green-Korrespondent $f(U_i^\sigma) = V_{i,q-1}$ hat Kompositionslänge $q - 1 \geq l(T_i)$. Da der Sockel von M_j nicht einfach ist, ist M_j nicht projektiv und jede Erweiterung ist vom "ρ"-Typ. Bezeichnet $V = f(U)$ den Green-Korrespondenten von U, so gilt nach Satz 21.10 $f(M_j)/f(J(M_j)) \cong V_{\rho^j(i)}$ also $V/J(V) \cong V_{\rho^a(i)} \cong V_{\pi(i)}$. Weiter ist

$$l(V) \equiv_q l(V_{\pi(i)}) + l(V_{i,q-1}) - l(T_i) \equiv_q q - l(T_i)$$

also $l(V) = q - l(T_i)$ und daher $V = \Omega^{-1}(T_i)$. Mit Folgerung 21.8 gibt es also eine Erweiterung von U mit S_i, die projektiv ist. □

Folgerung 21.15 *B ist eine Brauer-Graph Algebra (also nicht notwendig zu einem Baum und es gibt mehrere Ecken mit Vielfachheiten).*

Beweis. Jede Kante S_i hat 2 Ecken, eine vom Typ ρ und eine vom Typ σ. Wir ordnen jeder dieser beiden Ecken (z.B. der vom Typ ρ) eine Vielfachheit $\frac{a+1}{t}$ ($t = |i\langle\rho\rangle|$, $a+1 = l(U_i^\rho)$) zu. Bleibt zu zeigen, dass diese unabhängig von der adjazenten Kante S_i ist, also $l(U_i^\rho) = l(U_j^\rho)$ für alle $j \in i\langle\rho\rangle$). Aber es ist $J(U_i^\rho)$ ein epimorphes Bild von $P_{\rho(i)}$ also auch von $U_{\rho(i)}^\rho$, da $U_{\rho(i)}^\rho$ und $U_{\rho(i)}^\sigma$ genau einen Kompositionsfaktor (nämlich den ersten, $S_{\rho(i)}$) gemeinsam haben. $l(U_i^\rho) - 1 \leq l(U_{\rho(i)}^\rho)$ woraus $l(U_i^\rho) \leq l(U_{\rho(i)}^\rho)$ folgt, falls $t > 1$ (also $i \neq \rho(i)$) ist, da beide Kompositionslängen durch die Bahnlänge t teilbar sind. Also

$$l(U_i^\rho) \leq l(U_{\rho(i)}^\rho) \leq l(U_{\rho^2(i)}^\rho) \leq \ldots \leq l(U_{\rho^a(i)}^\rho) \leq l(U_i^\rho)$$

woraus überall Gleichheit folgt. □

Bemerkung 21.16 *Da W_i^ρ und W_i^σ keinen gemeinsamen Kompositionsfaktor haben, kommt S_i höchstens in einem der beiden vor. Insbesondere sind die Ecken mit Vielfachheiten ≥ 1 alle vom gleichen Typ (ρ oder σ).*

Satz 21.17 *B ist eine Brauer-Baum Algebra.*

Beweis. vgl. Alperin Abschnitt 23. □

Zum Abschluss zeigen wir noch den folgenden Satz, womit der Beweis von Satz 18.4 abgeschlossen ist.

Satz 21.18 *Die Vielfachheit des Ausnahmevertex ist* $(p^n - 1)/e$.

Lemma 21.19 *Sei* $\mu := (p^n - 1)/e$. *Dann ist die Cartan Matrix von* b_1 *gleich*

$$C(b_1) = \mu J + I_e \text{ wo } \{J\} = \{1\}^{e \times e}$$

von Determinante $e\mu + 1 = p^n$.

Sei $G_0(b_1)$ die Grothendieck Gruppe der b_1-Moduln also die frei abelsche Gruppe auf den Isomorphieklassen $[V_0], \ldots, [V_{e-1}]$ wobei jeder Modul $[V]$ mit $\sum a_i[V_i]$ identifiziert wird, falls a_i die Vielfachheit von V_i als Kompositionsfaktor von V ist. Sei $K_0(b_1)$ die Untergruppe, die von den projektiven b_1-Modul erzeugt wird und $\overline{G_0(b_1)} := G_0(b_1)/K_0(b_1)$.

Lemma 21.20 $|\overline{G_0(b_1)}| = p^n$.

Beweis. Es ist $K_0(b_1) = \langle [V_{i,q}] \mid 0 \leq i \leq e \rangle$ und $[V_{i,q}] = \sum_{j=0}^{e-1} c_{ij}[V_j]$ wo c_{ij} die Einträge in der Cartan-Matrix von b_1 sind. Also nach dem HS über e.e. abelsche Gruppen $|\overline{G_0(b_1)}| = \det(C(b_1)) = p^n$. □

Lemma 21.21 $\overline{G_0(b_1)} \cong \overline{G_0(B)}$ *und folglich ist* $\det(C(B)) = \det(C(b_1)) = p^n$

Beweis. Sei $e_{b_1} \in FN_1 \subset FG$ das Blockidempotent. Dann definiert $U \mapsto Ue_{b_1}$ eine Abbildung $G_0(B) \to G_0(b_1)$. Dies ist ein Gruppenhomomorphismus, da die Multiplikation mit Idempotenten k.e.S. auf k.e.S. abbildet. Ist U projektiv, dann auch Ue_{b_1}, also bekommen wir einen Gruppenhom. $\overline{G_0(B)} \to \overline{G_0(b_1)}$. Umgekehrt liefert $V \mapsto V^G e_B$ einen Gruppenhom. $\overline{G_0(b_1)} \to \overline{G_0(B)}$ und die Greenkorrespondenz (Satz 18.5) zeigt, dass dies die Umkehrabbildung ist. □

Lemma 21.22 *Sei* $M \in K^{t \times t}$ *eine fast-Blockdiagonal-Matrix, d.h. es gibt* $X \in K^{s \times s}$, $Y \in K^{r \times r}$ *mit* $s + r = t + 1$ *und* $M_{ij} = X_{ij}$ $1 \leq i, j \leq s$, $M_{i+s,j+s} = Y_{i+1,j+1}$ $0 \leq i, j \leq r - 1$ *und* $M_{i,j} = 0$ *sonst. Sei* $z := M_{s,s} = X_{s,s} = Y_{1,1}$. *Dann ist*

$$\det(M) = \det(X)\det(Y_0) + \det(X_0)\det(Y) - \det(X_0)z\det(Y_0)$$

wo X_0 *aus den ersten* $s - 1$ *Zeilen und Spalten von* X *und* Y_0 *aus den letzten* $r - 1$ *Zeilen und Spalten von* Y *besteht.*

Beweis. LA I. □

Lemma 21.23 *Für einen Baum* T *mit* e *Kanten und Ausnahmevertex mit Vielfachheit* m *sei die Cartan-Matrix* $C(T)$ *definiert als die Cartan-Matrix der zugehörigen Brauer-Baum Algebra. Dann ist* $\det(C(T)) = em + 1$.

<u>Beweis.</u> Wir beweisen das Lemma zunächst für den Fall, dass T ein Stern ist. Ist der Ausnahmevertex in der Mitte, so ergibt sich das Lemma mit Lemma 21.19. Sonst ist

$$C(T) = \begin{pmatrix} m+1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & & 1 \\ \vdots & & \vdots & \\ 1 & 1 & \dots & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^{e\times e}$$

mit Determinante $em+1$ wie man durch Entwickeln nach der 1. Zeile sieht: Diese liefert $(m+1)\det(I_{e-1}+J)+r = e(m+1)+r$ mit r unabhängig von m. Für $m=1$ ergibt sich aber nach Lemma 21.19 $r = 1-e$ und daher die Behauptung.
Nun machen wir Induktion über die Anzahl e der Kanten in T. Wir können annehmen, dass T kein Stern ist, also gibt es eine Kante E in T, deren Ecken keine Enden sind (Bildchen !). Sei L der Baum rechts der Kante und R der Baum links davon und seien L_0, R_0 die entsprechenden Bäume, die aus L, R durch Weglassen der Kante E entstehen. Dann ist mit Lemma 21.22

$$\det(C(T)) = \det(C(L))\det(C(R_0)) + \det(C(L_0))\det(C(R)) + \det(C(L_0))z\det(C(R_0))$$

wo $z=2$ oder $z=(m+1)$ ist, je nachdem ob keine der Ecken von E oder eine von ihnen der Ausnahmevertex ist. Œ liege der Ausnahmevertex in L_0. Dann ergibt sich für den Fall, dass der Ausnahmvertex nicht in E liegt:

$$\begin{aligned}&\det(C(T)) = (e_Lm+1)e_R + ((e_L-1)m+1)(e_R+1) - 2((e_L-1)m+1)e_R \\ &= e_R(1-m+2m-1) + (e_L-1)m+1 = (e_L+e_R-1)m+1 = em+1\end{aligned}$$

und falls der Ausnahmevertex sowohl in L als auch in R aber nicht in R_0 liegt:

$$\begin{aligned}&\det(C(T)) = (e_Lm+1)e_R + ((e_L-1)m+1)(me_R+1) - (m+1)((e_L-1)m+1)e_R \\ &= e_R(1-m^2-(m+1)(1-m)+m) + (e_L-1)m+1 = (e_L+e_R-1)m+1 = em+1.\end{aligned}$$

□

Also ergibt sich insgesamt $em+1=p^n$ und somit die Vielfachheit der Ausnahmevertex im Brauer Baum von B als $m = \frac{p^n-1}{e}$.