

Kapitel 1

Gruppentheorie und Quantenmechanik

1.1 Transformationsgruppen

Die Thematik des Graduiertenkollegs gehört in das allgemeine Gebiet der Elementarteilchenphysik. Das Graduiertenkolleg hat diesen allgemeinen Rahmen eingeschränkt auf drei Schwerpunkte: *Flavorphysik*, *Astroteilchenphysik/Kosmologie* und *harte Prozesse*. In der gegenwärtigen Besetzung können die Hochschullehrer den Forschungsschwerpunkten wie folgt zugeordnet werden: ätschß

Wir haben in der klassischen Physik und in der Quantenmechanik bereits eine Reihe von Symmetrietransformationen, kennengelernt, die physikalische Vorgänge invariant lassen. So ist in der Mechanik ein abgeschlossenes System, d. h. ein System, auf das keine äußeren Kräfte wirken, translationsinvariant. Physikalische Vorgänge in diesem System und Meßergebnisse an diesem System hängen nicht davon ab, an welchem Ort sich der Schwerpunkt dieses Systems befindet. Ein um einen festen Vektor \vec{A} verschobenes System ist dem ursprünglichen System äquivalent. Symmetrietransformationen vermitteln damit Äquivalenzrelationen. Andere Symmetrietransformationen eines abgeschlossenen Systems sind die Rotationsinvarianz, die Invarianz unter Zeittranslationen und die Galilei-Invarianz. In relativistischen Theorien spielt die Lorentzinvarianz eine zentrale Rolle. In der Festkörperphysik spielen die Symmetriegruppen von Kristallen von großem Interesse. In der Quantenmechanik kennen wir bereits die Invarianz unter Phasentransformationen $\psi \rightarrow \exp(i\alpha)\psi$.

Es sei T_1 eine Symmetrietransformation, die das System S_1 in das äquivalente System S_2 überführt, also

$$S_2 = T_1 S_1 \simeq S_1 \quad (1.1.1)$$

oder kurz

$$S_2 \stackrel{T_1}{\simeq} S_1 \quad (1.1.2)$$

Weiter führe die Transformation T_2 das System S_2 in das äquivalente System S_3 über.

$$S_1 \xrightarrow{T_1} S_2 \xrightarrow{T_2} S_3 \quad (1.1.3)$$

Das Hintereinanderausführen von Transformationen können wir als Produkt definieren:

$$S_3 = T_2 S_2 = T_2(T_1 S_1) \equiv (T_2 T_1) S_1 . \quad (1.1.4)$$

Die Inverse einer Transformation existiert auch; sie ist definiert durch die Rücktransformation von S_2 nach S_1

$$S_1 = (T_1)^{-1} S_2 . \quad (1.1.5)$$

Schließlich gibt es auch eine Einheitstransformation T_0 , die darin besteht, daß man das System gar nicht transformiert.

$$S_i = T_0 S_i \quad (1.1.6)$$

Damit bilden die Transformationen zwischen äquivalenten physikalischen Systemen auf natürliche Weise eine Gruppe. Das Gruppenprodukt ist im allgemeinen nicht kommutativ. Z. B. ist es nicht gleichgültig, in welcher Weise man mehrere Drehungen hintereinander ausführt.

Man unterscheidet zwischen diskreten Symmetrien, wie z. B. Spiegelungen oder Translationen um einen festen Gittervektor und kontinuierliche Symmetrien wie z. B. Translationen eines Kontinuums oder allgemeine Drehungen. Solche kontinuierlichen Symmetrien bilden sog. Lie-Gruppen.

Die Gruppentheorie hat sich für die Quantenmechanik als sehr fruchtbar erwiesen. In diesem Kapitel werden wir allerdings, was die technische Handhabung der Quantenmechanik anbelangt, nichts neues lernen. Alles wird uns bekannt vorkommen und auch sein. Was hier entwickelt werden soll, ist eine neue Betrachtungsweise; wir werden versuchen, altbekanntes in neuem Licht zu sehen. Es handelt sich aber nicht darum, hier nur banales in einer hochgestochenen mathematischen Sprache zu formulieren; die gruppentheoretische Formulierung gestattet es, den Formalismus der Quantenmechanik durchsichtiger zu machen und systematischer zu verstehen.

1.2 Wirkung von Symmetriegruppen in der Quantenmechanik

1.2.1 Transformation von Zuständen

Es sei $|\psi\rangle$ ein normierter Zustand des Hilbertraums

$$|\psi\rangle \in \mathcal{H} \quad ; \quad \langle \psi | \psi \rangle = 1 \quad (1.2.1)$$

Eine Symmetrieoperation g aus der Symmetriegruppe G führt diesen Zustand wieder einen möglichen Zustand des Systems über.

$$g \in G \quad |\psi\rangle \xrightarrow{g} |\psi'\rangle = U(g)|\psi\rangle . \quad (1.2.2)$$

Hier haben wir einen Operator $U(g)$ eingeführt, der den Zustand $|\psi\rangle$ in den Zustand $|\psi'\rangle$ überführt, sozusagen die dem Element $g \in G$ zugeordnete “Matrix” im Hilbertraum. Es muß offensichtlich gelten

$$\langle \psi' | \psi' \rangle = \langle \psi | U^\dagger(g) U(g) | \psi \rangle = 1 \quad (1.2.3)$$

Da dies für alle Zustände des Hilbertraums gelten muß, gilt

$$U^\dagger(g) U(g) = \mathbf{I} , \quad (1.2.4)$$

$U(g)$ muß ein *unitärer* Operator sein. Die Zuordnung von Matrizen oder linearen Operatoren $U(g)$ im Hilbertraum zu den Elementen g einer Gruppe nennt man eine *Darstellung* der Gruppe, wenn gilt

$$U(g_1 g_2) = U(g_1) U(g_2) \quad (1.2.5)$$

$$U(g^{-1}) = U^{-1}(g) \quad (1.2.6)$$

$$U(g_0) = \mathbf{I} . \quad (1.2.7)$$

Hier ist g_0 das neutrale Element der Gruppe. Die Operatoren $U(g)$ realisieren offensichtlich alle Gruppenelemente so, daß auch alle Verknüpfungen konsistent abgebildet werden. Man nennt solche Darstellungen durch lineare Operatoren auch *lineare* Darstellungen. Darstellungen durch unitäre Operatoren heißen *unitäre* Darstellungen. Solche Darstellungen sind auch in der Mathematik wohlbekannt und oft vollständig klassifiziert.

1.2.2 Zeitliche Entwicklung eines physikalischen Systems

Zu den Eigenschaften von Symmetrieoperationen gehört es offensichtlich, daß auch die zeitliche Entwicklung aller möglichen Zustände des Systems invariant ist. Es ist also gleichgültig, ob ich eine Symmetrietransformation zur Zeit t_0 ausführe und die Entwicklung des transformierten Systems berechne oder ob ich die zeitliche Entwicklung des ursprünglichen Systems berechne und die Symmetrietransformation erst zur Zeit t ausführe:

$$|\psi_0\rangle \rightarrow e^{-iHt} |\psi_0\rangle = |\psi(t)\rangle \quad (1.2.8)$$

$$U(g)|\psi_0\rangle = |\psi'_0\rangle \rightarrow e^{-iHt} |\psi'_0\rangle = |\psi'(t)\rangle = U(g)|\psi(t)\rangle . \quad (1.2.9)$$

Es folgt

$$e^{-iHt} U(g) |\psi_0\rangle = U(g) |\psi(t)\rangle = U(g) e^{-iHt} |\psi_0\rangle . \quad (1.2.10)$$

Auch dies muß wieder für alle möglichen Zustände des Systems gelten. Es folgt

$$e^{-iHt}U(g) = U(g)e^{-iHt} \quad \Rightarrow \quad [H, U(g)] = 0. \quad (1.2.11)$$

Die Darstellungen von Symmetriepoperatoren im Hilbertraum kommutieren mit dem Hamiltonoperator. Sie sind damit zeitunabhängig und können zur Bildung eines “vollständigen Systems kommutierender Observabler” und damit zur Orthogonalisierung des Hamiltonoperators verwandt werden. Natürlich muß man dazu unter den Symmetriepoperatoren solche auswählen, die auch untereinander kommutieren.

1.2.3 Spektrum des Hamiltonoperators

Die Existenz von Operatoren, die mit dem Hamiltonoperatoren kommutieren, hat unmittelbare Auswirkungen auf das Spektrum des Hamiltonoperators. Ist $|\psi_\alpha\rangle$ ein Eigenzustand des Hamiltonoperators

$$H|\psi_\alpha\rangle = E_\alpha|\psi_\alpha\rangle, \quad (1.2.12)$$

so ist auch $U(g)|\psi_\alpha\rangle$ ein Eigenzustand von H , denn es gilt

$$HU(g)|\psi_\alpha\rangle = U(g)H|\psi_\alpha\rangle = U(g)E_\alpha|\psi_\alpha\rangle = E_\alpha U(g)|\psi_\alpha\rangle. \quad (1.2.13)$$

Es gibt nun zwei Möglichkeiten: entweder

$$U(g)|\psi_\alpha\rangle = \exp(i\lambda)|\psi_\alpha\rangle \simeq |\psi_\alpha\rangle, \quad (1.2.14)$$

d. h. die transformierte Wellenfunktion unterscheidet sich von der ursprünglichen nur durch einen Phasenfaktor und ist damit *äquivalent* zu dieser oder $|\psi_\alpha\rangle$ und $U(g)|\psi_\alpha\rangle$ sind *nicht zueinander äquivalent*. Im letzteren Falle bilden die beiden Zustände ein Dublett von entarteten Zuständen. Werden alle Operatoren $U(g), g \in G$ auf $|\psi_\alpha\rangle$ angewandt, so ergibt sich ein mehrfach entartetes Multiplet, innerhalb dessen alle Gruppenelemente transformieren. Ist das Multiplett n -fach entartet und bezeichnen wir die entarteten Zustände mit $|\psi_{\alpha 1}\rangle, \dots, |\psi_{\alpha n}\rangle$ so bilden die Matrizen

$$M_{ij}(g) = \langle \psi_{\alpha i} | U(g) | \psi_{\alpha j} \rangle \quad (1.2.15)$$

offensichtlich eine n dimensionale Darstellung der Gruppe durch unitäre Matrizen.

1.3 Einfache Beispiele

1.3.1 Der harmonische Oszillator, Spiegelung

Der Hamiltonoperator des harmonischen Oszillators

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m}{2}\hat{x}^2 \quad (1.3.1)$$

ist offensichtlich invariant unter Spiegelungen, die in der Schrödingerdarstellung durch

$$\hat{P}\psi(x) = \psi(-x) \quad \forall \psi(x) \quad (1.3.2)$$

vermittelt werden. Offensichtlich ist

$$\hat{H}\hat{P}\psi(x) = \hat{H}\psi(-x) = \hat{P}(\hat{H}\psi(x)) . \quad (1.3.3)$$

Der Paritätsoperator \hat{P} vertauscht mit \hat{H} . Die Spiegelungen selbst bilden eine Gruppe mit den Eigenschaften

$$\mathbf{I}P = P\mathbf{I} = P \quad ; \quad P^2 = \mathbf{I} \quad ; \quad P^{-1} = P \quad (1.3.4)$$

Liegt keine Entartung vor, so muß für jeden Eigenzustand gelten

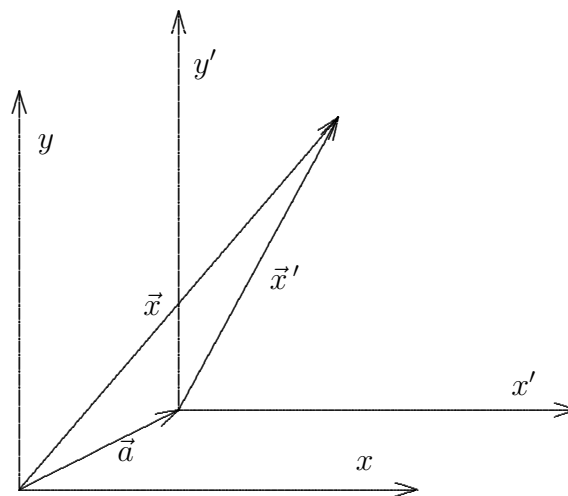
$$P\psi_\alpha(x) = \exp(i\lambda)\psi_\alpha(x) . \quad (1.3.5)$$

Wegen $P^2 = \mathbf{I}$ muß gelten

$$(e^{i\lambda})^2 = 1 \quad \rightarrow \quad e^{2i\lambda} = e^{2in\pi} \quad (1.3.6)$$

Ist $\lambda = 0, 2, 4, 6, \dots$ so ist offensichtlich $P\psi_\alpha(x) = \psi_\alpha(-x) = \psi_\alpha(x)$, die Wellenfunktionen sind symmetrisch, ist $\lambda = 1, 3, 5, \dots$, so sind die Wellenfunktionen antisymmetrisch. Diese Symmetrieeigenschaften der Wellenfunktionen des harmonischen Oszillators sind natürlich bereits von den expliziten Lösungen her bekannt.

1.3.2 Freies Teilchen, Translationen



Ein besonders einfaches System ist das eines kräftefreien Massepunkts mit dem Hamiltonoperator

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \vec{\nabla}^2 . \quad (1.3.7)$$

Dieses physikalische System ist offensichtlich invariant unter Translationen. Es gibt zwei verschiedene Betrachtungsweisen für diese Invarianz. Der von Physikern meist angenommene Standpunkt ist der, daß die zeitliche Entwicklung zweier Zustände des Systems völlig identisch abläuft, wenn sich diese Zustände zu einem festen Zeitpunkt nur um eine Translation unterscheiden. Hier wird also die Wellenfunktion verschoben, das Koordinatensystem bleibt fest (aktive Transformation). Die mathematische Betrachtungsweise ist die, daß die Bewegungsgleichungen unabhängig von der Wahl des Koordinatenursprungs sind, daß es also nichts ausmacht, wenn man diesen verschiebt. Hier wird also das Koordinatensystem verschoben, die Wellenfunktion bleibt physikalisch ortsfest (passive Transformation). Beide Betrachtungsweisen sind äquivalent, unterscheiden sich aber in der mathematischen Formulierung. Man muß darauf bei der Darstellung in der Literatur achten, sonst ergeben sich unangenehme Vorzeichenfehler. Hier soll die mathematische Betrachtungsweise zugrundegelegt werden.

Wir bezeichnen im folgenden die Translation des Koordinatenursprungs um einen festen Vektor \vec{a} mit $T(\vec{a})$. Für den Ortsvektor (das Koordinaten-n-tupel) eines Punktes im ursprünglichen Koordinatensystem \vec{x} und im verschobenen Koordinatensystem \vec{x}' gilt dann

$$\vec{x} = \vec{a} + \vec{x}' . \quad (1.3.8)$$

Da die Wellenfunktion an diesem Punkt nicht geändert wird, gilt für die Wellenfunktionen in beiden Koordinatensystemen

$$\psi(\vec{x}) = \psi'(\vec{x}') = \psi(\vec{x}' - \vec{a}) \quad (1.3.9)$$

$$\Rightarrow \psi'(\vec{x}) = \psi(\vec{x} + \vec{a}) \quad (1.3.10)$$

oder für den der Translation zugeordneten Operator

$$U(\vec{a})\psi(\vec{x}) = \psi'(\vec{x}) = \psi(\vec{x} + \vec{a}) \quad (1.3.11)$$

Der Parameterraum der Translationen ist der \mathbf{R}_3 , d. h. $\vec{a} \in \mathbf{R}_3$. Es handelt sich damit um eine kontinuierliche Gruppe. Weiterhin gilt offensichtlich

$$T(\vec{a})T(\vec{b}) = T(\vec{a} + \vec{b}) = T(\vec{b})T(\vec{a}) , \quad (1.3.12)$$

die Element der Gruppe kommutieren, die Gruppe heißt *abelsch*. Da man offensichtlich endliche Transformationen aus “vielen unendliche kleinen” erhalten kann, ist es zweckmäßig, zunächst infinitesimale Transformationen zu betrachten. Dann ist

$$\psi'(\vec{x}) = U(\delta\vec{a})\psi(\vec{x}) = \psi(\vec{x} + \delta\vec{a}) = \psi(\vec{x}) + \delta\vec{a} \cdot \vec{\nabla} \psi(\vec{x}) = (1 + \delta\vec{a} \cdot \vec{\nabla})\psi(\vec{x}) , \quad (1.3.13)$$

was man im Hinblick auf die Quantenmechanik auch als

$$\psi(\vec{a}) + \frac{i}{\hbar} \delta \vec{a} \vec{p} \psi(\vec{x}) \quad (1.3.14)$$

schreiben kann. Endliche Transformationen können wir nun aus einer Verallgemeinerung der bekannten Formel

$$e^z = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n \quad (1.3.15)$$

auf operatorwertige z erhalten. Der Operator z ist hier durch $\vec{a} \vec{\nabla}$ gegeben, so daß $\delta \vec{a} = \vec{a}/n$. Wir erhalten

$$U(\vec{a})\psi(\vec{x}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(U\left(\frac{\vec{a}}{n}\right) \right)^n \psi(\vec{x}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\vec{a}}{n} \vec{\nabla}\right)^n \psi(\vec{x}) = e^{\vec{a} \vec{\nabla}} \psi(\vec{x}) . \quad (1.3.16)$$

Entwickelt man die Exponentialfunktion in eine Potenzreihe, so ergibt sich gerade die Taylorreihe

$$\psi(\vec{x} + \vec{a}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\vec{a} \vec{\nabla})^n}{n!} \psi(\vec{x}) , \quad (1.3.17)$$

woraus man ersehen kann, daß die Exponentialfunktion des Operators $\vec{a} \vec{\nabla}$ nur für unendlich oft gleichmäßig beschränkt differenzierbare Funktionen definiert ist. Die Definition der Translationen unterliegt nicht dieser Beschränkung auf diese Klasse von Funktionen, man kann z. B. auch unstetige Funktionen verschieben. Allerdings liegen die Funktionen, für die man Translationen durch den Operator $e^{\vec{a} \vec{\nabla}}$ darstellen kann, im Hilbertraum dicht.

Die ‘physikalische’ Version der Gleichung (1.3.16) ist

$$U(\vec{a})\psi(\vec{x}) = e^{i\vec{a}\vec{p}/\hbar} \psi(\vec{x}) . \quad (1.3.18)$$

Man nennt den Impuls auch *infinitesimale Erzeugende* von Translationen. Die infinitesimalen Erzeugenden einer Lie-Gruppe¹ bilden die *Lie-Algebra* der Gruppe. Sie wird gebildet aus allen Linearkombinationen einer Basis von Operatoren, hier der $\vec{p}_i, i = 1, 2, 3$. Die ‘multiplikative’ Verknüpfung der Algebra ist durch den Kommutator der infinitesimalen Erzeugenden definiert. Hier gilt

$$[p_i, p_j] = 0 . \quad (1.3.19)$$

Kommutieren die infinitesimalen Erzeugenden, so tun dies auch alle endlichen Transformationen, die Gruppe ist abelsch. Das haben wir bereits oben bemerkt.

¹Die Mathematiker definieren die infinitesimalen Erzeugenden ohne den Faktor i . Für unitäre Gruppen oder unitäre Darstellungen sind sie dann *antihermitesch*. In der Physik sind die infinitesimalen Erzeugenden von unitären Transformationen häufig physikalische Observable, man weicht daher von der mathematischen Definition um einen Faktor i ab, und macht sie damit hermitesch.

Die Tatsache, daß die Translationsgruppe eine Symmetriegruppe ist, kann man auch bereits mithilfe der infinitesimalen Erzeugenden feststellen. Es gilt offensichtlich

$$[H, p_i] = 0 \quad \rightarrow \quad [\vec{a}\vec{p}, H] = 0 \quad (1.3.20)$$

und damit (z. B. unter Benutzung der Baker-Hausdorff-Formel)

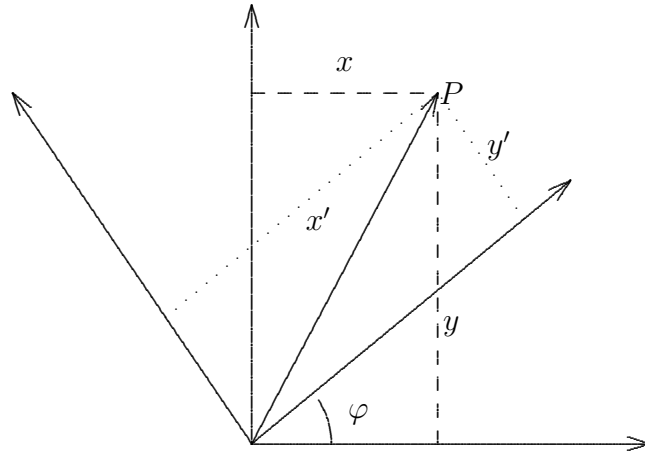
$$U^{-1}(\vec{a}) H U(\vec{a}) = e^{-i\vec{a}\vec{p}/\hbar} H e^{i\vec{a}\vec{p}/\hbar} = H \quad (1.3.21)$$

Aus der Tatsache, daß die Operatoren p_i unter sich und mit H vertauschen, folgt, daß man diese Operatoren gleichzeitig diagonalisieren kann. Die Eigenzustände sind natürlich gerade die ebenen Wellen $\psi_{\vec{k}}(\vec{x}) = \exp(i\vec{k}\vec{x})$ mit dem Impulseigenwert $\hbar\vec{k}$. Die Wirkung von Translationen auf diese Zustände ist gegeben durch

$$U(\vec{a})\psi_{\vec{k}}(\vec{x}) = e^{i\vec{a}\vec{p}/\hbar} = e^{i\vec{a}\vec{k}}\psi_{\vec{k}}(\vec{x}) , \quad (1.3.22)$$

das heißt, durch einen einfachen Phasenfaktor. Dies ist für alle unitären Darstellungen von abelschen Liegruppen der Fall. Man kann daher eine abelsche Gruppe auch als äquivalent zur Gruppe $U(1)$ betrachten. Das ist die Gruppe der ‘eindimensionalen unitären Matrizen’, d.h. der komplexen Zahlen mit Betrag 1. Offensichtlich lässt sich jede solche Zahl in der Form $\exp(i\alpha)$ schreiben, Multiplikation von Gruppenelementen ist isomorph der Addition der Phasen.

1.3.3 Drehungen in einer Ebene, die Gruppe $SO(2)$



Die Drehungen in einer Ebene schließen sich eng an die Translationen an. Sie bilden eine abelsche Gruppe, deren Parameter, der Drehwinkel, wieder einfach

additiv ist. Es lohnt sich aber, die Geometrie dieser Drehungen zu betrachten, bevor man zu Drehungen im dreidimensionalen Raum übergeht.

Wir betrachten wieder eine passive Transformation, d.h. eine Drehung des Koordinatensystems um einen im mathematischen Sinne positiven Winkel φ . Die Transformationsformeln für die Koordinaten lauten

$$\begin{aligned}x' &= \cos \varphi x + \sin \varphi y \\y' &= -\sin \varphi x + \cos \varphi y\end{aligned}\tag{1.3.23}$$

oder in Matrixform

$$\vec{x}' = \mathbf{R}(\varphi)\vec{x} .\tag{1.3.24}$$

Wie bei den Translationen betrachten wir eine infinitesimale Transformation

$$\mathbf{R}(\delta\varphi) = \mathbf{I} + i\delta\varphi\mathbf{M}_z .\tag{1.3.25}$$

explizit erhält man

$$\mathbf{R}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & \delta\varphi \\ \delta\varphi & 1 \end{pmatrix} + O(\delta\varphi^2) = \mathbf{I} + i\delta\varphi \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} + O(\delta\varphi^2) ,\tag{1.3.26}$$

so daß

$$\mathbf{M}_z = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} .\tag{1.3.27}$$

Umgekehrt gilt wieder

$$\mathbf{R}(\varphi) = e^{i\varphi\mathbf{M}_z} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}\tag{1.3.28}$$

Die Wirkung infinitesimaler Transformationen im Hilbertraum, d. h. auf Wellenfunktionen, ergibt sich aus

$$\psi'(\vec{x}') = \psi(\vec{x}) \Rightarrow \psi'(\vec{x}) = \psi(\mathbf{R}^{-1}\vec{x}) .\tag{1.3.29}$$

Für die infinitesimalen Transformationen gilt

$$\begin{aligned}\psi'(x, y) &= \psi(x - \delta\varphi y, y + \delta\varphi x) \\&= \psi(x, y) - \frac{\partial\psi}{\partial x}\delta\varphi y + \frac{\partial\psi}{\partial y}\delta\varphi x\end{aligned}\tag{1.3.30}$$

$$\begin{aligned}&= \psi(x, y) + \delta\varphi\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi(x, y) \\&= \left(\mathbf{I} + i\frac{\delta\varphi}{\hbar}\frac{\hbar}{i}\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right)\right)\psi(x, y) .\end{aligned}\tag{1.3.31}$$

Im Hilbertraum entspricht der infinitesimalen Erzeugenden \mathbf{M} also bis auf einen Faktor der bekannte Drehimpulsoperator

$$L_z = \frac{\hbar}{i}\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right) .\tag{1.3.32}$$

1.4 Drehungen in R_3 , die Drehgruppe $SO(3)$

Wir führen die Drehungen um eine Achse $\hat{\omega}$ um den Winkel $|\vec{\omega}|$ die Drehmatrix im dreidimensionalen Raum als $\mathbf{R}(\vec{\omega})$ ein. Eine Drehung um die z -Achse nimmt die Form

$$\mathbf{R}(\varphi \vec{e}_z) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.4.1)$$

an. Die durch

$$\mathbf{R}(\delta\varphi \vec{e}_z) = (\mathbf{I} + i\delta\varphi \mathbf{M}_z) \quad (1.4.2)$$

definierte infinitesimale Erzeugende ergibt sich analog zum vorigen Abschnitt als

$$\mathbf{M}_z = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.4.3)$$

Die Erzeugenden für die entsprechenden Drehungen um die x - und y -Achse sind durch

$$\mathbf{M}_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{M}_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.4.4)$$

gegeben. Die Matrizen \mathbf{M}_i erfüllen die Vertauschungsrelationen

$$[\mathbf{M}_i, \mathbf{M}_j] = i\epsilon_{ijk}\mathbf{M}_k \quad (1.4.5)$$

Diese Relationen sind die multiplikative Verknüpfung der Lie-Algebra. Sie ist ganz analog zu der der Paulimatrizen. Endliche Drehungen können wir wieder durch Exponenzieren der Erzeugenden als

$$\mathbf{R}(\vec{\omega}) = e^{i\vec{\omega}\vec{\mathbf{M}}} = e^{i\omega_j \mathbf{M}_j} \quad (1.4.6)$$

erhalten.

Man kann diese Matrizen durch den antisymmetrischen Tensor ϵ_{ijk} darstellen, und das wird für das folgende zweckmäßig sein. Man überprüft leicht, daß

$$\begin{aligned} (M_k)_{ij} &= -i\epsilon_{kij} \quad \text{z.B.} \\ (M_1)_{23} &= -i\epsilon_{123} = -i. \end{aligned} \quad (1.4.7)$$

Mithilfe der Regel (bac-cab)

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{lmk} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl} \quad (1.4.8)$$

kann man auch leicht die Vertauschungsregeln (1.4.5) nachrechnen. So ist

$$(M_1 M_2)_{ac} = (M_1)_{ab}(M_2)_{bc} = (-i\epsilon_{1ab})(-i\epsilon_{2bc}) = \dots \quad (1.4.9)$$

Wir betrachten wieder die Wirkung von Drehungen auf Wellenfunktionen und damit die Realisierung der Drehgruppe im Hilbertraum. Es gilt

$$\psi'(\vec{x}') = \psi(\vec{x}) \Rightarrow \quad (1.4.10)$$

$$\psi'(\vec{x}) = \psi(\mathbf{R}^{-1}(\vec{\omega})\vec{x}) . \quad (1.4.11)$$

Für infinitesimale Drehungen erhält man

$$\psi'(\vec{x}) = \psi((\mathbf{I} - i\delta\vec{\omega}\vec{\mathbf{M}})\vec{x}) . \quad (1.4.12)$$

Schreiben wir die Vektoren als Koordinatentripel $\{x_i\}$ aus, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \psi'(\{x_i\}) &= \psi(\{x_i - i\delta\omega_k(M_k)_{ij}x_j\}) \\ &= \psi(\{x_i - i\delta\omega_k(-i\epsilon_{kij})x_j\}) \\ &= \psi(x_i) + \frac{\partial\psi(\{x_i\})}{\partial x_l}(-i\delta\omega_k(-i)\epsilon_{klj}x_j) \\ &= \psi(x_i) - i\delta\omega_k \frac{1}{i}\epsilon_{klj}x_j \nabla_l \psi(\{x_i\}) \\ &= \psi(\{x_i\}) + i\delta\omega_k \frac{1}{i}(\vec{x} \times \vec{\nabla})_k \psi(\{x_i\}) \\ &= \psi(\{x_i\}) + \frac{i}{\hbar}\delta\omega_k \mathbf{L}_k \psi(\{x_i\}) . \end{aligned} \quad (1.4.13)$$

Wir haben also die Zuordnung (Darstellung)

$$\mathbf{M}_k \quad \text{im } \mathbb{R}^3 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\hbar}\mathbf{L}_k \quad \text{in } \mathcal{H} \quad (1.4.14)$$

oder für endliche Drehungen

$$\mathbf{R}(\vec{\omega}) = e^{i\vec{\omega}\vec{\mathbf{M}}} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{U}(\vec{\omega}) = e^{i\vec{\omega}\vec{\mathbf{L}}/\hbar} \quad (1.4.15)$$

Die Vertauschungsregeln für die Drehimpulsoperatoren \mathbf{L} sind bis auf Faktoren \hbar wieder analog zu denen der Matrizen \mathbf{M}_k . Wir haben mit den Drehimpulsoperatoren eine Darstellung der Lie-Algebra der Drehgruppe. Damit haben wir aber bereits auch eine Darstellung für alle Gruppenelemente gewonnen. Eine andere bekannte Darstellung ist die durch die Pauli-Matrizen

$$[\frac{1}{2}\sigma_i, \frac{1}{2}\sigma_j] = i\epsilon_{ijk}\frac{1}{2}\sigma_k \quad (1.4.16)$$

für die Lie-Algebra. Für endliche Drehungen hat man

$$\mathbf{R}(\vec{\omega}) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{U}(\vec{\omega}) = e^{i\vec{\omega}\vec{\sigma}/2} . \quad (1.4.17)$$

Diese letztere Zuordnung kann man auch anders auffassen: die so definierten 2×2 -Matrizen $U(\vec{\omega})$ transformieren 2er-Spinoren χ , die bekannten Spinoren des Elektrons.

$$\chi' = \mathbf{U}(\vec{\omega})\chi \quad (1.4.18)$$

Die Matrizen \mathbf{U} sind unitär, $\mathbf{U}^\dagger \mathbf{U} = \mathbf{I}$ d.h. sie erhalten die komplexe Norm $\chi^\dagger \chi$. Sie haben weiterhin die Determinante 1. Diese Matrizen bilden die Gruppe $SU(2)$. Die Zuordnung (1.4.17) kann man daher als Äquivalenz der Drehgruppe $SO(3)$ mit der speziell unitären Gruppe $SU(2)$ der unitären 2×2 -Matrizen mit Determinante 1 verstehen. Die Gruppen unterscheiden sich allerdings “im Großen”, bei der Drehgruppe führt eine Drehung mit $|\vec{\omega}| = 2\pi$ auf die Einheitsmatrix, für die $SU(2)$ wird die Einheitsmatrix erst nach einer Drehung um 4π erreicht.

Die Drehungen spielen in der Physik eine bedeutende Rolle. Wir erkennen bereits ihre Lie-Algebra als die Algebra der Drehimpulsoperatoren wieder, die in der Quantenmechanik zentralsymmetrischer Systeme auftritt. Elementarteilchen werden u. a. nach ihren Eigendrehimpulsen klassifiziert. Weiterhin führt der Isospin als (schwach gebrochene) Symmetriegruppe der starken Wechselwirkung zu einer Klassifikation der Eigenzustände des Hamiltonoperators in der Kern- und Elementarteilchenphysik.

Während wir die Quantenmechanik offensichtlich bis jetzt auch ohne Gruppentheorie betreiben konnten, wird dies bei weiterführenden Anwendungen zunehmend schwieriger, und man beharrt auf einem Niveau der Anwendung unverstandener Rezepte, wenn man die gruppentheoretischen Grundlagen nicht versteht. Das klassische Anwendungsgebiet der Gruppentheorie ist die Atom- und Kernspektroskopie, zu der insbesondere Wigner große Beiträge geleistet hat. Eine empfehlenswerte Einführung ist das Buch von Edmonds [?].

In der Elementarteilchenphysik wurde eine vertiefte Beschäftigung mit der Gruppentheorie im Zusammenhang mit der $SU(3)$ -Symmetrie und der höheren Gruppen der “Grand unification” unumgänglich. So entstanden in den 70’er und 80’er Jahren eine Reihe von Lehrbüchern [Geo82, Gil74, Cah84, Tun85, Wyb74]. Dieser Bücher behandeln verschiedene Aspekte mehr oder weniger gründlich; am besten auf die aktuellen Anwendungenzugeschnitten ist das Buch von Georgi [Geo82]. Die Beschränkung auf die Lie-Algebren (im Gegensatz zu den Gruppen) folgt daraus, daß diese für die Klassifikation ausreichend sind. Die endlichen Transformationen spielen dagegen bei der Drehgruppe für die räumlichen Wellenfunktionen und Zerfallsverteilungen eine wichtige Rolle, was für die inneren Symmetrien in den Hintergrund tritt.

Kapitel 2

Grundbegriffe der Gruppentheorie

2.1 Definition einer Gruppe

Eine Gruppe G ist eine Menge $\{g_i\}$ von Elementen g_j zwischen denen eine assoziative Verknüpfung (Produkt) definiert, die je zwei Elementen g_i, g_k ein Element $g_k \in G$ zuordnet. Es gelten die folgenden Axiome:

$$\mathbf{G1} : \quad g_i \in G, g_j \in G \Rightarrow g_i g_j \in G \quad (2.1.1)$$

$$\mathbf{G2} : \quad g_i(g_j g_k) = (g_i g_j) g_k \quad (2.1.2)$$

$$\mathbf{G3} : \quad \exists e : g_i e = e g_i = g_i \quad \forall g_i \in G \quad (2.1.3)$$

$$\mathbf{G4} : \quad g_i \in G \Rightarrow \exists g_i^{-1} \in G : g_i g_i^{-1} = g_i^{-1} g_i = e \quad (2.1.4)$$

Das Element e heißt Einheitsselement oder neutrales Element, wir werden es gelegentlich auch als 1 notieren. Das Produkt ist im allgemeinen nicht kommutativ. Ist es kommutativ, dann heißt die Gruppe *abelsch*.

Mit g_i sind auch die n te Potenzen g_i^n , $n = 0, 1 \dots$ Elemente der Gruppe. Es ist dabei wie üblich $g_i^0 = e$. Bricht die Folge dieser Potenzen in dem Sinne ab, daß wieder das Einheitsselement erreicht wird, also $g_i^m = e$ ist, so heißt die Gruppe *von der Ordnung m*. Bildet man beispielsweise eine Gruppe aus dem Einheitsselement, der Drehung um 30° und ihren Potenzen, dann ist diese Gruppe von der Ordnung 12.

2.2 Einfache Beispiele diskreter Gruppen

2.2.1 Die Gruppen C_n

Für diskrete Gruppen kann man die Gruppenoperation in Form einer Multiplikationstabelle angegeben werden. Für die Gruppe C_2 ist diese gegeben durch

	e	a
e	e	a
a	a	e

Man erkennt leicht die Gruppe wieder, die wir als Spiegelung oder Parität eingeführt haben.

Die Gruppe C_3 hat die Multiplikationstabelle

	e	a	b
e	e	a	b
a	a	b	e
b	b	e	a

Offensichtlich ist $b = a^2 = a^{-1}$. Die Gruppe kann realisiert werden als Gruppe der diskreten Drehungen um $0, 2\pi/3, 4\pi/3$ oder durch die komplexen Zahlen $1, \exp i2\pi/3, \exp -i2\pi/3$.

Die Serie setzt sich fort als die Serie der zyklischen Gruppen C_n , mit den Elementen $\{e, a, a^2, a^3, a^n = e\}$. Sie sind offensichtlich von der Ordnung n .

2.2.2 Die Dieder-Gruppe D_2

Die einfachste nicht-zyklische Gruppe ist von Ordnung 4, es ist die Dieder-Gruppe D_2 mit der Multiplikationstabelle

	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

Sie kann aufgefaßt werden als Symmetriegruppe eines Rechtecks mit den Operationen a : Spiegelung an der vertikalen Achse; b : Spiegelung and der horizontalen Achse; c : Drehung um π .

2.2.3 Die Diedergruppe $D_3 \simeq S_3$; Untergruppen

Die kleinste nichtabelsche Gruppe ist von Ordnung 6. Sie wird gebildet als Symmetriegruppe eines gleichseitigen Dreiecks mit den Spiegelungen an den drei Symmetrieachsen und den Drehungen um $0, 2\pi/3, 4\pi/3$. Diese Gruppe ist isomorph zur Permutationsgruppe S_3 .

Dabei bedeutet die *Isomorphie* zwischen zwei Gruppen G und G' mit den Elementen g_j und g'_j , daß jedem Element g_j ein Element g'_j zugeordnet wird (gleiche Indizes o.B.d.A.), so daß gilt

$$g_j g_k = g_l \Rightarrow g'_j g'_k = g'_l . \quad (2.2.1)$$

Die Spiegelungen sind die Transpositionen (12), (23) und (31), die Drehungen sind die *Zyklen* (123) und (321), die als $(1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 3, 3 \rightarrow 1)$ bzw. $(3 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 1, 1 \rightarrow 3)$ zu verstehen sind. Es gilt die Multiplikationstabelle

	e	(12)	(23)	(31)	(123)	(321)
e	e	(12)	(23)	(31)	(123)	(321)
(12)	(12)	e	(123)	(321)	(23)	(31)
(23)	(23)	(321)	e	(123)	(31)	(12)
(31)	(31)	(123)	(321)	e	(12)	(23)
(123)	(123)	(31)	(12)	(23)	(321)	e
(321)	(321)	(23)	(31)	(12)	e	(123)

Diese Gruppe ist isomorph zur *Permutationsgruppe* oder *symmetrischen Gruppe* S_3 . Die Äquivalenz ist die Zuordnung

$$\begin{aligned}
 e &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} & (12) &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \\
 (23) &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} & (31) &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\
 (123) &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} & (321) &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

2.2.4 Die Permutationsgruppe oder symmetrische Gruppe S_n

Die allgemeine Permutationsgruppe S_n ist definiert als Gruppe der Umordnungen von n Objekten. Sie hat $n!$ Elemente. Ihre Elemente werden in der Form

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ p_1 & p_2 & p_3 & \dots & p_n \end{pmatrix}. \quad (2.2.2)$$

Das Produkt wird folgendermaßen definiert:

$$\begin{aligned}
 &\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ p_1 & p_2 & p_3 & \dots & p_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ q_1 & q_2 & q_3 & \dots & q_n \end{pmatrix} \\
 = &\begin{pmatrix} q_1 & q_2 & q_3 & \dots & q_n \\ p_{q_1} & p_{q_2} & p_{q_3} & \dots & p_{q_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ q_1 & q_2 & q_3 & \dots & q_n \end{pmatrix} \\
 = &\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ p_{q_1} & p_{q_2} & p_{q_3} & \dots & p_{q_n} \end{pmatrix} \quad (2.2.3)
 \end{aligned}$$

zum Beispiel ist

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad (2.2.4)$$

Die Permutationen kann man auch verkürzt schreiben mithilfe der bereits eingeführten *Zyklen*. Zum Beispiel wird

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix} = (134)(25)[(6)] \quad (2.2.5)$$

Eine Permutation, die genau zwei Zahlen vertauscht, heißt *Transposition*. Man kann z.B. schreiben

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 1 & 5 & 6 & 4 \end{pmatrix} = (46)(45)(13) = (13)(45)(46) \quad (2.2.6)$$

Die Multiplikation von Permutationen ist i.a. nicht kommutativ; Zyklen, die kein gemeinsames Element haben, vertauschen.

Läßt sich eine Permutation p in k Zyklen zerlegen, dann heißt die Zahl

$$\text{sign}(p) = (-1)^k \quad (2.2.7)$$

das Signum von p . Ist $\text{sign} p = 1$, so spricht man von einer *geraden* Permutation, ist $\text{sign}(p) = -1$, so nennt man die Permutation ungerade.

2.3 Beispiele kontinuierlicher Gruppen

Wir haben bereits drei kontinuierliche Gruppen kennengelernt, die Gruppe der Translationen, die Drehungen um eine Achse und die Drehungen im dreidimensionalen Raum. Andere Beispiele sind

- die *allgemeine komplexe lineare Gruppe* $GL(n, \mathbb{C})$, die aus allen invertierbaren $n \times n$ -Matrizen besteht;
- die *unitäre Gruppe* $U(n)$, die aus allen unitären Matrizen besteht, d.h., komplexen $n \times n$ -Matrizen U , die die Bedingung $UU^\dagger = 1$ erfüllen;
- die *speziellen unitären Gruppen* $SU(n)$, für die zusätzlich gilt $\det U = 1$;
- die *orthogonalen Gruppen* $O(n)$, die aus allen reellen orthogonalen Matrizen besteht, für die gilt $OO^\top = 1$.
- die *speziellen orthogonalen Gruppen* $SO(n)$, für die zusätzlich gilt $\det O = 1$.

Während die Drehgruppen die triviale Metrik $g = \text{diag}\{1, 1, \dots, 1\}$ invariant lassen, läßt die Lorentzgruppe die Metrik $g = \text{diag}\{1, -1, -1, -1\}$ invariant. Man bezeichnet sie auch als $O(1, 3)$ oder $O(3, 1)$. Es gilt für die Matrizen der Lorentzgruppe $\Lambda g \Lambda^\top = g$.

Die jeweiligen Bedingungen an die Matrizen können als Gleichungen für die Matrixelemente geschrieben werden. Dadurch werden *Mannigfaltigkeiten* definiert, die in $n \times n$ -dimensionalen komplexen oder reellen Räumen eingebettet

sind. Die verbleibenden Freiheitsgrade können als Koordinaten auf diesen Mannigfaltigkeiten aufgefaßt werden. Diese bilden den Parameterraum der Gruppe. Für die Gruppen $O(n)$ lauten die Bedingungen

$$O_{ik}O_{jk} = \delta_{ij} . \quad (2.3.1)$$

Dies sind $n \times n$ Bedingungen. Allerdings sind die Bedingungen für die Indizes ij mit denen zu ji identisch. Also verbleiben $n^2 - n(n+1)/2 = n(n-1)/2$ freie Koordinaten, die zum Beispiel als Drehungen in den $n(n-1)/2$ möglichen Ebenen aufgefaßt werden können.

2.4 Weitere Grundbegriffe

Nachdem wir einige Beispiele kennegelernt haben, führen wir weitere Grundbegriffe ein.

2.4.1 Untergruppen

Eine Untermenge H einer Gruppe G , die mit demselben Multiplikationsgesetz selbst eine Gruppe bildet, heißt *Untergruppe* von G .

Beispiele:

- Die Gruppe D_2 hat die Untergruppen $\{e, a\}$, $\{e, b\}$ und $\{e, c\}$, die alle mit C_2 isomorph sind;
- Die Gruppe $D_3 \simeq S_3$ hat vier Untergruppen: $\{e, (12)\}$, $\{e, (23)\}$, $\{e, (31)\}$ und $\{e, (123), (321)\}$. Die ersten drei sind isomorph zu C_2 , die vierte zu C_3 ;
- Die Drehungen in einer festen Ebene bilden eine Untergruppe der orthogonalen Transformationen;
- Die Gruppen $SU(n)$ und $O(n)$ sind Untergruppen von $U(n)$; diese ist eine Untergruppe von $GL(n, \mathbb{C})$.

2.4.2 Isomorphie

Zwei Gruppen G, G' heißen isomorph, wenn es eine eindeutige Zuordnung zwischen ihren Elementen gibt:

$$g_i \in G \leftrightarrow g'_i \in G' \quad (2.4.1)$$

, die das Gesetz der Gruppenmultiplikation erhält:

$$g_i g_j = g_k \leftrightarrow g'_i g'_j = g'_k . \quad (2.4.2)$$

Vergleiche die Beispiel für C_2 und C_3 . In letzterem Falle: zyklische Permutationen, Multiplikation von komplexen Zahlen, Drehungen eines Dreiecks. Die Dieder-Gruppe D_3 und S_3 .

2.4.3 Das Umordnungs-Theorem (rearrangement theorem) und die symmetrische Gruppe

Es gilt zunächst daß für beliebige $p, b, c \in G$ gilt:

$$pb = pc \Rightarrow b = c. \quad (2.4.3)$$

Betrachten wir jetzt die Elemente einer endlichen Gruppe $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ und bilden mit einem beliebigen Element $h \in G$ die Menge $\{hg_1, hg_2, \dots, hg_n\}$. Dann erhalten wir wieder n Elemente, die nach dem zuvor formulierten Lemma alle verschieden sind. Damit stehen die Elemente hg_j nichts anderes dar als eine Permutation der ursprünglichen Elemente, $hg_j = g_{h_j}$, so daß wir zuordnen können

$$h \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ h_1 & h_2 & h_3 & \dots & h_n \end{pmatrix}. \quad (2.4.4)$$

Damit folgt, daß jede endliche Gruppe isomorph einer Untergruppe der Permutationsgruppe ist, die aus dem Elementen

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ p_1 & p_2 & p_3 & \dots & p_n \end{pmatrix} \quad (2.4.5)$$

besteht. Genauer gesagt ist jede Gruppe der Ordnung n isomorph einer Untergruppe von S_n . Da ist das *Theorem von Cayley*.

Die zyklische Gruppe $C_3 : \{e, aa, b = a^2\}$ ist isomorph zur Untergruppe $\{e, (123), (321)\}$ von S_3 .

Die Diedergruppe $D_2 : \{e, a, b, c\}$ ist isomorph zur Untergruppe von S_4 , die aus den Elementen $\{e, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$ besteht.

2.4.4 Klassen und invariante Untergruppen

Wir definieren ein Element $b \in G$ als *konjugiertes Element* zu einem Element a wenn gilt

$$\exists p \in G \Rightarrow b = pap^{-1} \Rightarrow b \sim a. \quad (2.4.6)$$

Beispiel:

In S_3 ist $(12) \sim (31)$, da $(23)(12)(23)^{-1} = (31)$. Ebenso ist $(12)(123)(12)^{-1} = (321)$.

Die Konjugation ist eine Äquivalenzrelation. Das bedeutet:

A1: $a \sim a$;

A2: aus $a \sim b$ folgt $b \sim a$;

A3: aus $a \sim b$ und $b \sim c$ folgt $a \sim c$.

Zueinander konjugierte Elemente einer Gruppe bilden eine *Klasse*. Jedes Element einer Gruppe gehört genau zu einer Klasse.

Beispiele:

- Die Elemente der Permutationsgruppe können in drei Klassen geteilt werden: das Einselement $\{e\}$, die 2-Zyklen $\{(12), (23), (31)\}$ und die 3-Zyklen $\{(123)(312)\}$.
- Betrachte die Gruppe $SO(3)$: es sei $R_{\vec{n}}(\psi)$ eine Drehung um die Achse \vec{n} um den Winkel ψ . Dann gilt $RR_{\vec{n}}(\psi)R^{-1} = R_{\vec{n}'}(\psi)$, wo $\vec{n}' = R\vec{n}$. Das heißt, daß alle Drehungen um einen festen Winkel eine konjugierte Klasse bilden.
- Ergänzt man die Drehgruppe um die Translationen $T_{\vec{n}}(a)$, dann gilt auch, daß alle Translationen um einen festen Betrag a eine Klasse bilden.

Ist H eine Untergruppe von G und $a \in G$, dann bildet $H' = aHa^{-1} : \{aha^{-1}, h \in H\}$ auch eine, zu H konjugierte Untergruppe. Diese Untergruppen sind entweder isomorph zueinander, oder sie haben nur das Einheitsselement gemeinsam.

Invariante Untergruppe: Eine invariante Untergruppe ist eine Untergruppe, die identisch mit all ihren konjugierten Untergruppen ist: $aHa_{-1} = H, a \in G$.

Beispiel: Für S_3 bilden die 3-Zyklen $\{e, (123), (321)\}$ eine invariante Untergruppe. Dagegen ist $\{e, (12)\}$ nicht invariant. $(23)\{e, (12)\}(23)^{-1} = \{e, (31)\}$. Dagegen bilden die 2-Zyklen $(12), (23), (31)$ zwar eine konjugierte Klasse, sind aber keine Untergruppe, auch nicht, wenn man das neutrale Element dazunimmt.

Jede Gruppe hat das neutrale Element und sich selbst als (triviale) invariante Untergruppen.

Einfache und halb-einfache Gruppen: Eine Gruppe ist einfach, wenn sie keine nichttriviale invariante Untergruppe enthält. Eine Gruppe ist *halb-einfach*, wenn sie keine abelschen invarianten Untergruppen enthält. Beispiele:

- Die Drehgruppe $SO(3)$ ist einfach, aber die Gruppe $SO(2)$ nicht. Die Gruppe $SO(2)$ hat unendlich viele abelsche Untergruppen, Drehungen um einen Winkel $2\pi m/N$ mit festem N .
- Die zyklische Gruppe C_n ist einfach, wenn n eine Primzahl ist.
- Die zyklischen Gruppen mit n nicht-prim sind weder einfach noch halbeinfach. zB enthält $C_4 : \{e_a^4, a, a^2, a^3\}$ die abelsche Untergruppe $\{e, a^2\}$.
- Die Gruppe S_3 ist weder einfach noch halb-einfach, weil $\{e, (123), (321)\}$ eine invariante abelsche Untergruppe bildet.

2.4.5 Nebenklassen (cosets) und Faktor-Gruppen

Nebenklasse: Es sei H eine Untergruppe von G und $p \in G$. Dann heißt $pH = \{ph_1, ph_2, \dots\}$ eine links-Nebenklasse von H ; entsprechend Hp eine rechts-Nebenklasse.

Zwei links-Nebenklassen sind entweder identisch oder haben kein gemeinsames Element.

Beweis: Es sei $ph_i = qh_j$ für einige Elemente von H . Dann ist $qp^{-1} = h_jh_i^{-1} \in H$. Daher ist $qp^{-1}H = H$, da H eine Untergruppe bildet. Damit ist $qH = pH$. Wenn es keine solchen Elemente gibt, dann sind qH und pH disjunkt.

Ist H eine Untergruppe von G von der Ordnung n_H , dann erzeugen die disjunkten Nebenklassen von Ordnung n_H eine Teilung der Gruppe. Daher ist die Ordnung einer endlichen Gruppe ein ganzzahliges Vielfaches der Ordnung aller ihrer Untergruppen.

Beispiel S_3 : Die Untergruppen $\{e, (12)\}$ etc sind von Ordnung 2, die Untergruppe $\{e, (123), (321)\}$ ist von Ordnung 3; die Gruppe S_3 ist von Ordnung 6.

Ist H eine invariante Untergruppe, dann sind ihre linken Nebenklassen auch ihre rechten Nebenklassen:

$$pH = pHp^{-1}p = Hp \quad (2.4.7)$$

Die Partitionierung der Gruppe wird eindeutig.

Die Nebenklassen einer invarianten Untergruppe kann man als neue Gruppe auffassen mit dem Produkt

$$pHqH = pqH^2 = pqH . \quad (2.4.8)$$

wobei die rechte Seite wieder eine Nebenklasse ist, also Element dieser neuen Gruppe. Das neutrale Element ist $eH = H$ und das inverse zu pH ist $p^{-1}H$ mit $pHp^{-1}H = H^2 = H$. Diese Gruppe heißt die *Faktorgruppe* von H in G und wird auch als G/H bezeichnet.

Beispiele:

- $H = \{e, a^2\}$ ist invariante Untergruppe der zyklischen Gruppe C_4 . Sie hat eine Nebenklasse $aH = \{a, a^3\}$. H und aH bilden die Faktorgruppe $C_4/H = C_2$. Auch die Untergruppe H ist isomorph zu C_2 .
- Die Translationengruppe ist eine invariante Untergruppe der Euklidischen Gruppe. Die Faktorgruppe ist $E(3)/T(3) = SO(3)$.

2.4.6 Homomorphismen

Eine nicht notwendig eindeutige Abbildung einer Gruppe in eine andere:

$$g_j \in G \rightarrow g'_j \in G' , \quad (2.4.9)$$

die die Gruppenmultiplikation erhält,

$$g_i g_j = g_k \rightarrow g'_i g'_j = g'_k , \quad (2.4.10)$$

heißt ein *Homomorphismus*.

Es sei f ein Homomorphismus von G in G' . Der *Kern* K von f sind alle Elemente von G , die auf das Einheitsselement e' von G' abgebildet werden. K ist

invariante Untergruppe von G . Außerdem ist die Faktorgruppe G/K isomorph zu G' .

Beweis: Sind $a, b \in K$ dann auch ihr Produkt: $ab \rightarrow e'e' = e'$. Auch a^{-1} ist in K , denn wegen des Homomorphismus gilt $e \rightarrow e'$ und $a^{-1} \rightarrow e'^{-1} = e'$. Damit ist K Untergruppe. Sie ist invariant, denn alle Elemente pKp^{-1} werden auf $p'e'p^{-1} = e'$ abgebildet. Die Elemente der Faktorgruppe sind $pK \rightarrow p', p \notin K$.

2.4.7 Direkte Produkte:

Es seien H_1 und H_2 zwei Untergruppen so daß (i) jedes Element von H_1 mit jedem Element von H_2 kommutiert; (ii) jedes Element $g \in G$ geschrieben werden kann als $g = h_1h_2$ mit $h_1 \in H_1$ und $h_2 \in H_2$. Dann bezeichnet man G als das *direkte Produkt* $G = H_1 \otimes H_2$.

Beispiele:

- Die Orthogonale Gruppe $SO(3)$ ist das direkte Produkt aus Drehgruppe $SO(3)$ und der Raumspiegelungsgruppe $\{e, P\}$.
- Die zyklische Gruppe C_6 ist das direkte Produkt aus $H_1 = \{e, a^3\} \simeq C_2$ und $H_2 = \{e, a^2, a^4\} \simeq C_3$, $C_6 \simeq C_2 \otimes C_3$.

Es gilt $G/H_2 \simeq H_1$ und $G/H_1 \simeq H_2$. Aber aus $H' = G/H$ folgt im allgemeinen *nicht*, daß $G = H \otimes H'$.

Kapitel 3

Darstellungen von Gruppen

3.1 Definition von Darstellungen

Es sei G eine Gruppe und V ein Vektorraum. Jeder Gruppenhomomorphismus $\rho : G \rightarrow GL(V)$ heißt eine (lineare) *Darstellung von G in V* . Der Grad der Darstellung ist gleich der Dimension des Vektorraumes $\dim V$. V heißt der Darstellungsraum. Wenn ρ ein Isomorphismus ist, dann heißt die Darstellung *treu*. Eine Darstellung, die nicht treu ist, heißt entartet.

$$g \in G \rightarrow U(g) \quad (3.1.1)$$

$$U(g_1)U(g_2) = U(g_1g_2) \quad (3.1.2)$$

Führt man eine Basis $|e_i\rangle$ im Vektorraum ein, dann ist

$$U(g)|e_i\rangle = |e_j\rangle D(g)^j_i \quad g \in G \quad (3.1.3)$$

bzw.

$$\langle e_j|U(g)|e_i\rangle = D(g)^j_i, \quad (3.1.4)$$

und die D^j_i sind $n \times n$ -Matrizen.

Es gilt

$$U(g_1)U(g_2)|e_i\rangle = U(g_1)|e_j\rangle D(g_2)^j_i = |e_k\rangle D(g_1)^k_j D(g_2)^j_i \quad (3.1.5)$$

also

$$D(g_1g_2) = D(g_1)D(g_2). \quad (3.1.6)$$

Man spricht auch von Matrix-Darstellung einer Gruppe.

Der Darstellungsraum kann auch die Dimension 1 haben. Eine mögliche Darstellung ist die *triviale* Darstellung $U(g) = 1$, eine andere ist $U(g) = \det(g)$. Beide sind nicht treu.

Beispiele:

- Die Dieder-Gruppe D_2 besteht aus den Reflektionen h an der horizontalen Symmetrieachse, v an der vertikalen Symmetrieachse und an der Drehung r um π eines Rechtecks. Eine Darstellung ist

$$D(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad D(h) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.1.7)$$

$$D(v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad D(h) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (3.1.8)$$

- Die Diedergruppe D_3 kann man ebenfalls durch 2-dimensionale Matrizen darstellen, die die entsprechenden Transformationen eines um den Ursprung zentrierten gleichseitigen Dreiecks beschreiben. Da diese Gruppe zu S_3 isomorph ist, erhält man so auch eine Darstellung von S_3 .
- Die definierende Darstellung der Drehgruppe; die zwei-dimensionale komplexe Darstellung

Wenn die Gruppe G eine invariante Untergruppe H hat, dann bildet jede Darstellung der Faktorgruppe G/H auch eine Darstellung von G . Diese Darstellung ist entartet. Ist umgekehrt eine Darstellung entartet, dann besitzt G mindestens eine invariante Untergruppe H und $U(G)$ ist eine treue Darstellung von G/H .

Beweis: Bilde $g \in G$ ab auf $k = gH \in K$, der Faktorgruppe, und dann k auf $U(k)$. Das ist eine Darstellung. Sie ist nicht treu. Umgekehrt ist $g \rightarrow U(g)$ ein Homomorphismus, der einen Kern hat, da die Darstellung entartet ist. Dieser bildet eine invariante Untergruppe von G ; das ist H .

Es folgt, daß *alle Darstellung von einfachen Gruppen treu sind, mit Ausnahme der trivialen Darstellung.*

3.2 Irreduzible Darstellungen, Inäquivalente Darstellungen

Äquivalente Darstellungen: Zwei Darstellungen heißen *äquivalent*, wenn sie durch eine Ähnlichkeitstransformation S nach $D'(g) = SD(g)S^{-1}$ verbunden sind.

Der *Charakter* einer Matrix $U(g)$ in einer Darstellung ist definiert als $\chi(g) = \text{Tr}U(g)$. Alle Elemente in einer adjungierten Klasse von G haben den gleichen Charakter, da $\text{Tr}U(h)U(g)U^{-1}(h) = \text{Tr}U(g)$. Das bedeutet, daß die Charaktere von Klassen in einer Darstellung auch invariant unter Ähnlichkeitstrafos sind. Sind also diese Charaktere in zwei Darstellungen verschieden, dann sind diese nicht zueinander äquivalent.

Ein *invarianter Unterraum* V_1 des Vektorraumes V einer Darstellung von G heißt invariant, wenn $U(g)V_1 = V_1$. Ein *eigentlicher* oder *minimaler* invarianter Unterraum ist ein invarianter Unterraum, der selbst keine weiteren invarianten Unterräume besitzt.

Irreduzible Darstellungen: Eine Darstellung heißt *irreduzibel*, wenn es in dem Darstellungsraum V keinen unter G invarianten Unterraum gibt. Sonst heißt die Darstellung *reduzibel*. Ist der komplementäre Unterraum zu einem inv. Unterraum V_1 ebenfalls invariant, dann heißt die Darstellung *voll reduzibel* oder *zerlegbar*.

Unitäre Darstellungen: Sind die Darstellungsmatrizen unitär, dann heißt die Darstellung unitär. Für unitäre Darstellungen gilt: wenn sie reduzibel sind, sind auch voll reduzibel.

Für endliche Gruppen ist jede Darstellung äquivalent zu einer unitären.

Beweis: Die Darstellung sei $D(g)$, das Skalarprodukt $\langle x|y \rangle$. Dann definiert man eine Basistransformation S so, daß das neue Skalarprodukt durch

$$(x, y) = \langle Sx|Sy \rangle = \sum_g \langle D(g)x|D(g)y \rangle \quad \forall x, y \in V \quad (3.2.1)$$

gegeben ist. Daß es sich wieder um ein Skalarprodukt handelt, kann man nachprüfen. Die Darstellung $U(g) = SD(g)S^{-1}$ ist dann unitär:

$$\begin{aligned} \langle U(g)x|U(g)y \rangle &= \langle SD(g)S^{-1}x|SD(g)S^{-1}y \rangle = \\ &= \langle D(g)S^{-1}x, D(g)S^{-1}y \rangle = \sum_{g'} \langle D(g')D(g)S^{-1}x|D(g')D(g)S^{-1}y \rangle \\ &= \sum_{g''} \langle D(g'')S^{-1}x|D(g'')S^{-1}y \rangle = \langle S^{-1}x|S^{-1}y \rangle = \\ &= \langle x|y \rangle \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

Für die kontinuierliche Gruppen $O(N)$, $U(N)$ und $SU(N)$ gilt das auch, allerdings muß man dazu die Summe über die Gruppe geeignet definieren.

Damit ist jede Darstellung einer endlichen Gruppe voll reduzibel. Die Darstellung zerfällt in Block-Matrizen, man nennt das die direkte Summe

$$U(G) = U^1(G) \oplus \dots \oplus U^1(G) \oplus U^2(G) \oplus \dots \oplus U^3(G) \oplus \dots \quad (3.2.3)$$

3.3 Schur's Lemmas

Schur's Lemma 1: Es sei $U(g)$ eine irreduzible Darstellung von G in einem Vektorraum V und A ein beliebiger Operator in V (i.a. kein Gruppenelement). Wenn A mit allen Operatoren $\{U(g), g \in G\}$ kommutiert, dann muß A ein Vielfaches des Einheitsoperators sein.

Daraus folgt unmittelbar, daß jede irreduzible Darstellung einer abelschen Gruppe eindimensional sein muß. Zum Beweis wähle man $A = U(p)$, $p \in G$. Dieses vertauscht mit allen Darstellungsmatrizen von anderen Elementen der Gruppe $U(g)$, im Widerspruch zu Schur's Lemma 1.

Beweis des 1. Schur'schen Lemmas: Wähle die Darstellung unitär und A hermitesch. Ist A nicht hermitesch, dann zerlege in hermitesche Operatoren ($A +$

$A^\dagger)/2$ und $(A - A^\dagger)/2i$. Betrachte eine orthonormale Basis aus den Eigenvektoren von A .

$$A|u_{\alpha,i}\rangle = |u_{\alpha,i}\rangle \lambda_i, \quad (3.3.1)$$

wo α die entarteten Zustände numeriert. Betrachte die entarteten Unterräume V_i . Sie sind invariante Unterräume von $U(G)$:

$$AU(g)|u_{\alpha,i}\rangle = U(g)A|u_{\alpha,i}\rangle = U(g)|u_{\alpha,i}\rangle \lambda_i, \quad (3.3.2)$$

das heißt, daß $U(g)|u_{\alpha,i}\rangle$ auch zu diesem Unterraum gehört. Aber $U(g)$ ist irreduzibel. Damit muß der invariante Unterraum gleich V sein, und damit A im gesamten V nur einen Eigenwert hat. Damit ist $A = \lambda E$.

Schur's Lemma 2: Es seien $U(G)$ und $U'(G)$ zwei irreduzible Darstellungen von G in den Vektorräumen V und V' . Weiter sei A eine lineare Abbildung von V' in V , die $AU'(g) = U(g)A$ erfüllt. Dann ist entweder $A = 0$ oder V und V' sind isomorph und $U'(g)$ ist äquivalent zu $U(g)$.

Die Operationen $AU'(G)$ und $U(G)A$ sind beides Transformationen von V' in V .

Beweis: Es sei R die Bildmenge von V' in V : $R = \{x \in V; x = Ax', x' \in V'\}$. R ist invarianter Unterraum von V bezgl. $U(g)$. Denn $U(G)R = U(G)AV' = AU'(G)V' = AV' = R$. Wenn $U(G)$ irreduzible Darstellung ist, dann ist entweder $R = 0$ und damit $A = 0$ oder $R = V$. Im letzteren Fall ist die Abbildung eine Abbildung auf V . Betrachte jetzt den Nullraum oder Kern $N' \in V'$ von A , das ist der Unterraum von V' der auf den Nullvektor $|0\rangle$ in V abgebildet wird. N' ist invarianter Unterraum bzgl. $U'(G)$ in V' . Denn $AU'(G)N' = U(G)AN' = U(G)|0\rangle$. Da $U'(G)$ irreduzibel ist muß gelten: $N' = 0$ oder $N' = V'$. Damit ist entweder $A = 0$ oder V und V' sind isomorph. Im letzteren Falle gilt $U(g) = AU'(g)A^{-1} \forall g \in G$.

3.4 Die reguläre Darstellung

Es sei die Multiplikationstabelle $g_i g_j = g_k$ durch

$$g_i g_j = g_m \Delta_{ij}^m \quad (3.4.1)$$

definiert, wobei Δ_{ij}^m gleich 1 oder 0 ist. Dann bilden die Matrizen

$$g_i \rightarrow (\Delta_i)^k_j = \Delta_{ij}^k \quad (3.4.2)$$

eine Darstellung der Gruppe, die reguläre Darstellung. Aus $ab = c$ folgt

$$abg_j = ag_m \Delta^m b_j = g_k \Delta_{am}^k \Delta_{bj}^m = g_k \Delta_{cj}^k \quad (3.4.3)$$

oder

$$\Delta_{am}^k \Delta_{bj}^m = \Delta_{cj}^k. \quad (3.4.4)$$

3.5 Direkte Produkte, Tensordarstellungen

Wir hatten gesehen, daß Darstellungen “ausreduziert” werden können und dann in eine *direkte Summe* von Darstellungen zerfallen. Eine von der direkten Summe zu unterscheidende Darstellung ist das *direkte Produkt*. Es seien U und V zwei lineare Vektorräume mit innerem Produkt und den Basen $\{|i, u \rangle, i = 1, \dots, m\}$ und $\{|v, j \rangle, j = 1, \dots, n\}$. Dann wird das direkte Produkt dieser Vektorräume $W = U \times V$ gebildet aus den Basisvektoren $\{|i, j, w \rangle, (i, j) = (1, 1), \dots, (m, n)\}$. Dabei ist $|i, j, w \rangle = |i, u \rangle |j, v \rangle$ und es gilt

$$\langle K, w | I, w \rangle = \langle k, l, w | i, j, w \rangle = \langle k, u | i, u \rangle \langle l, v | j, v \rangle = \delta_{ik} \delta_{jl} = \delta_{KI} . \quad (3.5.1)$$

Der Raum ist also wieder ein normierter Vektorraum. Die Dimension ist $m \cdot n$. Jedes Paar von Darstellungen einer Gruppe G : $U^\mu(g)$ in U und $U^\nu(g)$ in V induziert eine Darstellung $U_{\mu \times \nu}(g)$ in W mit den Matrixelementen

$$\begin{aligned} \langle K, w | U^{\mu \times \nu}(g) | I, w \rangle &= D^{\mu \times \nu, K}_I(g) = \langle kl, w | U^{\mu \times \nu}(g) | ij, w \rangle \\ &= \langle k, u | U^\mu(g) | i, u \rangle \langle l, v | U^\nu(g) | j, v \rangle \\ &= D^{\mu, k}_i(g) D^{\nu, l}_j(g) . \end{aligned} \quad (3.5.2)$$

Diese Darstellung ist im allgemeinen reduzibel, der Raum W zerfällt in irreduzible Unterräume mit den irreduziblen Darstellungen $U^{\alpha\lambda}$. Dabei charakterisiert λ die Darstellung, der Index α dient dazu, isomorphe irreduzible Darstellungen zu indizieren, die bei dieser Zerlegung auftreten. Die Transformation von der Basis $|i, j \rangle$ in W zu den Basen $|\alpha, \lambda, k \rangle$ dieser invarianten Unterräume sind die *Clebsch-Gordan-Koeffizienten*

$$\langle i, j; \mu\nu | \alpha, \lambda, k \rangle . \quad (3.5.3)$$

Für sie gelten die Relationen

$$\sum_{\alpha, \lambda, j} \langle i, j; \mu\nu | \alpha, \lambda, k \rangle \langle \alpha, \lambda, k | l, m; \mu\nu \rangle = \delta_{il} \delta_{jm} \quad (3.5.4)$$

$$\sum_{ij} \langle \alpha', \lambda', l | i, j; \mu\nu \rangle \langle i, j; \mu\nu | \alpha, \lambda, k \rangle = \delta_{\alpha\alpha'} \delta_{\lambda\lambda'} \delta_{kl} . \quad (3.5.5)$$

Kapitel 4

Die Drehgruppe $SO(3)$

4.1 Definition der Gruppe $SO(3)$

Die Drehgruppe $SO(3)$ beschreibt Drehungen von Vektoren in drei Raumdimensionen.

$$\mathbf{e}'_i = \mathbf{e}_j R^j_i \quad (4.1.1)$$

so daß

$$x'^i = R^i_j x^j . \quad (4.1.2)$$

Da das Skalarprodukt $x_i x^i$ invariant bleibt, muß gelten

$$RR^\top = R^\top R = E . \quad (4.1.3)$$

Die Matrizen R sind reell, daher ist ihre Determinante gleich ± 1 . Da alle Drehungen kontinuierlich aus der Einheit hervorgehen, muß gelten

$$\det R = 1 . \quad (4.1.4)$$

Die beiden definierenden Gleichungen kann man auch schreiben als

$$R^i_k R^j_l \delta^{kl} = \delta^{ij} \quad (4.1.5)$$

und

$$R^i_l R^j_m R^k_n \epsilon^{lmn} = \epsilon^{ijk} , \quad (4.1.6)$$

das bedeutet, daß δ^{ij} und ϵ^{ijk} invariante Tensoren sind.

Die Matrizen R sind nicht singulär, die Determinante erfüllt $\det RR^\top = (\det R)^2 = 1$, daher existiert für alle Gruppenelemente die Inverse und es gilt $R^{-1} = R^\top$. Betrachten wir das Produkt $R_3 = R_2 R_1$ zweier Transformationen, dann gilt

$$R_3^\top = (R_2 R_1)^\top = R_1^\top R_2^\top = R_1^{-1} R_2^{-1} = (R_2 R_1)^{-1} = R_3^{-1} \quad (4.1.7)$$

und damit ist auch R_3 ein Gruppenelement.

4.2 Parametrisierung der Gruppenelemente

Zwei Parametrisierungen der Gruppenelemente sind üblich:

4.2.1 Die Parametrisierung durch Drehachse \vec{n} und den Drehwinkel ω

, bzw. durch den Drehvektor $\vec{\omega} = \omega \vec{n}$. Da eine Drehung um π einer Drehung um die gleiche Achse um $-\pi$ äquivalent ist, erstreckt sich der Parameterraum auf einen 3-Ball mit dem Radius π , wobei gegenüberliegende Punkte zu identifizieren sind. Der Vektor \vec{n} kann durch zwei Kugelkoordinaten Θ und ϕ festgelegt werden. Wie wir bereits gesehen hatten, bilden alle Drehungen um einen festen Winkel eine Klasse.

4.2.2 Die Eulerwinkel

Die Eulerwinkel α, β, γ werden so eingeführt, daß ein Koordinatensystem mit einem gedrehten Koordinatensystem zur Deckung gebracht wird. Dazu wird zunächst die ursprüngliche x -Achse in die Schnittlinie N der beiden xy und $x'y'$ Ebenen gedreht. Dann wird durch eine Drehung um die intermediäre x -Achse die alte z -Achse in die neue gedreht, und schließlich die intermediäre x -Achse in die x' -Achse. Die Konventionen sind durchaus uneinheitlich. Ich benutze hier die aus dem Buch von Wu Ki Tung [Tun85].

Damit wird

$$R(\alpha, \beta, \gamma) = R'_3(\gamma) R_N(\beta) R_1(\alpha) . \quad (4.2.1)$$

Diese kann durch Rotationen um die festen Achsen als

$$R(\alpha, \beta, \gamma) = R_3(\alpha) R_2(\beta) R_1(\gamma) \quad (4.2.2)$$

ausgedrückt werden. Wir haben dann

$$R_3(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.2.3)$$

entsprechend für $R_3(\gamma)$. Weiterhin ist

$$R_2(\beta) = \begin{pmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{pmatrix} \quad (4.2.4)$$

Die Eulerwinkel variieren in den Bereichen $0 < \alpha < 2\pi$, $0 < \beta < \pi$ und $0 < \gamma < 2\pi$. Die hier angegebenen Transformationen waren aktiv, es wurde ein Objekt gedreht. Die negativen Winkel gelten für passive Transformationen.

4.3 Einparametrische Untergruppen und die Lie-Algebra

Die Darstellung durch Drehachse und Winkel kann man benutzen, um alle Drehungen auf einparametrische Untergruppen zurückzuführen. Dazu betrachten wir die Drehung $R_{\vec{n}}(\omega)$ und legen die z -Achse in Richtung \vec{n} . Wie in Kapitel 1 bereits beschrieben, läßt sich die Matrix $R_3(-\omega)$ für eine aktive Drehung schreiben als

$$R_3(\omega) = \begin{pmatrix} \cos \omega & \sin \omega & 0 \\ -\sin \omega & \cos \omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = e^{i\omega J_3} \quad (4.3.1)$$

mit

$$J_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.3.2)$$

Die entsprechenden anderen Matrizen folgen aus einer Umnumerierung der Achsen:

$$J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.3.3)$$

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.3.4)$$

Allgemeiner kann man aus $R = \exp(iX)$ und

$$R^\top = (e^{iX})^\top = e^{iX^\top} = R^{-1} = e^{-iX} \quad (4.3.5)$$

folgern, daß $X^\top = -X$ ist. Für die *Generatoren* der Drehgruppe muß daher, auch in anderen Dimensionen als $D = 3$ gelten, daß sie antisymmetrische Matrizen sind. Außerdem müssen die Matrizen reell sein, woraus $X = -X^*$ folgt. Damit gilt $X^\top = X^*$ oder $X = X^\dagger$. Die Erzeugenden der Drehgruppen in D Dimensionen sind also antisymmetrische hermitesche $D \times D$ Matrizen. Davon gibt es gerade $D(D-1)/2$, also in drei Dimensionen drei und in $D = 2$ eine. In der Mathematik definiert man die Generatoren durch $R = \exp X$ (so auch in dem Buch von Wybourne [Wyb74]), in der Physik wählt man im allgemeinen die Konvention $\exp(iX)$, weil die X dann hermitesch sind und häufig Observablen (Drehimpuls, Eichfelder..) entsprechen.

Für den Fall von $SO(3)$ haben wir also $X_i = J_i, i = 1, 2, 3$. Mithilfe dieser Generatoren läßt sich jede endliche Drehung darstellen. Allgemein läßt sich natürlich jede antisymmetrische hermitesche Matrix darstellen durch eine Basis von Matrizen, die wir hier als J_1, J_2, J_3 gewählt haben, allgemein: $X = \sum \alpha_a X_a$

Betrachten wir Transformationen in der Nähe des Einselements, dann lassen sie sich approximieren durch

$$e^{i\lambda X_a} \simeq 1 + i\lambda X_a + O(\lambda^2) \quad \lambda \rightarrow 0 . \quad (4.3.6)$$

Das muß auch für ein Produkt solcher Transformationen gelten. Daher muß auch

$$e^{i\lambda X_b} e^{i\lambda X_a} e^{-i\lambda X_b} e^{-i\lambda X_a} = 1 + \lambda^2 [X_a, X_b] + O(\lambda^4) \quad (4.3.7)$$

für hinreichend kleine λ ein Element der Gruppe in der Umgebung von 1 sein. Also muß sich der Kommutator als Element der Lie-Algebra, also eine Linearkombination der als Basis gewählten Generatoren darstellen lassen:

$$[X_a, X_b] = i f_{abc} X_c . \quad (4.3.8)$$

Dabei sind die f_{abc} reell, der Faktor i ergibt sich aus der Konsistenz mit der Form der linearen Approximation (4.3.6). Dies gilt für alle Lie-Gruppen. Die Konstanten f_{abc} heißen Strukturkonstanten.

Für Kommutatoren gilt die bekannte Jacobi-Identität, die man leicht durch Nachrechnen überprüft:

$$[X_a, [X_b, X_c]] + [X_b, [X_c, X_a]] + [X_c, [X_a, X_b]] = 0 . \quad (4.3.9)$$

Damit folgt für die Strukturkonstanten jeder Lie-Gruppe

$$f_{bcd} f_{ade} + f_{cad} f_{bde} + f_{abd} f_{cde} = 0 . \quad (4.3.10)$$

Daraus ergibt sich sofort eine Darstellung der Lie-Algebra: definiert man

$$(T_a)_{bc} = -i f_{abc} , \quad (4.3.11)$$

dann folgt

$$-(iT_a iT_b)_{ce} + (iT_b iT_a)_{ce} - f_{abd} (iT_d)_{ce} = 0 , \quad (4.3.12)$$

wobei benutzt wurde, daß die Strukturkonstanten antisymmetrisch unter der Vertauschung der ersten beiden Indizes sind. Diese Relation lautet in Matrixschreibweise

$$\mathbf{M}_a \mathbf{M}_b - \mathbf{M}_b \mathbf{M}_a = i f_{abd} \mathbf{M}_b , \quad (4.3.13)$$

die so definierten Matrizen bilden also eine Darstellung der Lie-Algebra. Diese Darstellung heißt auch die *adjungierte Darstellung*. Damit hat jede Lie-Algebra, die durch ihre Strukturkonstanten definiert ist, auch mindestens eine Darstellung. Natürlich gibt es auch immer die triviale Darstellung $X_a \rightarrow 0$.

Die Strukturkonstanten hängen offensichtlich von der Basis ab. Um eine geeignete Basis zu definieren, benützen wir die adjungierte Darstellung und betrachten die Spur

$$\text{Tr}(T_a T_b) , \quad (4.3.14)$$

die eine reelle symmetrische Matrix bildet. Diese läßt sich diagonalisieren. Wenn dies getan ist, dann erhält man eine Basis von Generatoren, die

$$\text{Tr}(T_a T_b) = k_a \delta_{ab} \quad (4.3.15)$$

erfüllt. Unsere Generatoren J_i bilden offensichtlich die adjungierte Darstellung, denn es gilt

$$(J_a)_{ij} = -i\epsilon_{aij} = -if_{aij} . \quad (4.3.16)$$

Für sie gilt

$$\text{Tr} J_a J_b = 2\delta_{ab} . \quad (4.3.17)$$

4.4 Irreduzible Darstellungen der Lie-Algebra von $SO(3)$

Es wurde bereits erwähnt, daß man die Darstellungen der Drehgruppe vollständig aus denen der Lie-Algebra konstruieren kann. Das Verfahren zur Konstruktion der irreduziblen Darstellungen der Lie-Algebra kennen wir aus der Quantenmechanik-Vorlesung. Die Drehimpulse, über die die Lie-Algebra dort eingeführt wird:

$$J_i \rightarrow L_i = \epsilon_{ijk} x_j p_k \quad (4.4.1)$$

erfüllen zwar die Lie-Algebra, und der Hilbertraum ist ein linearer normierter Vektorraum, aber diese Darstellung ist nicht irreduzibel.

Da wir unitäre Darstellungen suchen, müssen die Generatoren durch hermitesche Matrizen dargestellt werden. Der Einfachheit halber benennen wir die Darstellungsmatrizen der Generatoren so wie die Generatoren selbst. Diese hermiteschen Matrizen kann man durch einen Basiswechsel diagonalisieren, aber nicht alle gleichzeitig. Wir wählen eine Basis, in der J_3 diagonal ist:

$$J_3 |m, \alpha\rangle = m |m, \alpha\rangle , \quad (4.4.2)$$

wobei α die mögliche Nicht-Eindeutigkeit der Darstellung charakterisiert. Wir definieren weiterhin die Matrizen

$$J_{\pm} = J_1 \pm iJ_2 , \quad (4.4.3)$$

die

$$[J_3, J_{\pm}] = \pm J_{\pm} , \quad (4.4.4)$$

$$[J_+, J_-] = 2J_3 \quad (4.4.5)$$

und $J_+^\dagger = J_-$ erfüllen. Es gilt allgemein

$$J_3 (J_{\pm} |m, \alpha\rangle) = J_{\pm} (J_3 |m, \alpha\rangle) \pm J_{\pm} |j, \alpha\rangle = (m \pm 1) (J_{\pm} |j, \alpha\rangle) . \quad (4.4.6)$$

Wir beginnen bei den Zuständen mit dem höchsten Wert von $m = j$. Es muß gelten

$$J_+|j, \alpha \rangle = 0. \quad (4.4.7)$$

Wenn es mehrere solche Zustände gibt, d.h., wenn dieser Zustand entartet ist, dann orthogonalisieren wir, so daß

$$\langle j, \alpha | j, \beta \rangle = \delta_{\alpha\beta}. \quad (4.4.8)$$

Wir verwenden nun die Operatoren J_{\pm} um weitere Zustände zu erhalten. Die Zustände

$$J_-|j, \alpha \rangle = N_j(\alpha)|j, \alpha \rangle \quad (4.4.9)$$

sind Eigenzustände zu J_3 mit Eigenwert $m = j - 1$. Sie sind orthogonal bezüglich α, β :

$$\langle j, \alpha | J_+ J_- | j, \beta \rangle = \langle j, \alpha | [J_+, J_-] | j, \beta \rangle = 2j \langle j, \alpha | j, \beta \rangle = 2m \delta_{\alpha\beta}. \quad (4.4.10)$$

Wir finden gleichzeitig, daß

$$N_j(\alpha) = \sqrt{2j}. \quad (4.4.11)$$

Das Verfahren setzt sich fort mit

$$J_-|j-1, \alpha \rangle = N_{j-1}|j-2, \alpha \rangle \quad (4.4.12)$$

$$J_+|j-2, \alpha \rangle = N_{j-1}|j-1, \alpha \rangle \quad (4.4.13)$$

wobei wieder Orthogonalität bezüglich der Indizes α gilt. Die Normierungskonstante bei der zweiten Relation folgt aus

$$\langle j-2, \alpha | J_- | j-1, \alpha \rangle = N_{j-1} = \langle j-1, \alpha | J_+ | j-2, \alpha \rangle^* \quad (4.4.14)$$

und der Wahl von N_{j-1} als reelle positive Zahl. Diese *Konvention* heißt *Condon-Shortley-Phasenkonvention*. Allgemein erhält man

$$J_-|j-k, \alpha \rangle = N_{j-k}|j-2, \alpha \rangle \quad (4.4.15)$$

$$J_+|j-k-1, \alpha \rangle = N_{j-k}|j-1, \alpha \rangle \quad (4.4.16)$$

und die Rekursion

$$\begin{aligned} N_{j-k}^2 &= \langle j-k, \alpha | J_+ J_- | j-k, \alpha \rangle \\ &= \langle j-k, \alpha | [J_+, J_-] | j-k, \alpha \rangle \\ &\quad + \langle j-k, \alpha | J_- J_+ | j-k, \alpha \rangle = 2(j-k) + N_{j-k+1}^2. \end{aligned} \quad (4.4.17)$$

Aus den Relationen

$$\begin{aligned} N_j^2 &= 2j \\ N_{j-1}^2 - N_j^2 &= 2(j-1) \\ &\vdots \\ N_{j-k}^2 - N_{j-k+1}^2 &= 2(j-k) \end{aligned} \quad (4.4.18)$$

erhält man durch Summation

$$N_{j-k}^2 = 2(k+1)j - k(k+1) \quad (4.4.19)$$

oder, mit $j - k = m$

$$N_m = \sqrt{(j+m)(j-m+1)} = \sqrt{j(j+1) - m(m-1)} . \quad (4.4.20)$$

Damit gilt

$$J_- | -j, \alpha \rangle = 0 \quad (4.4.21)$$

und die Folge der Zustände bricht ab. Der Index k läuft dabei von 0 bis $2j$. Da k eine ganze Zahl ist, gilt das auch für $2j$. j ist also ganz- oder halbzahlig, und die Anzahl der Zustände ist $2j+1$. Da der Index α bei der Rekursion nicht geändert wurde, gab es innerhalb des Multipletts keine Entartung, die Multipletts $|m, \alpha \rangle$ und $|m, \beta \rangle$ bilden also isomorphe Darstellung, und es gibt bis auf diese Äquivalenz genau eine irreduzible Darstellung zu jedem Wert von j . Wir benennen diese Zustände als $|m, j \rangle$.

Zur allgemeinen Bezeichnungsweise: Die Eigenwerte von m nennt man die *Gewichte*, und j das *höchste Gewicht*. Die Werte von ρ in der Gleichung

$$[J_3, J_{\pm}] = \rho_{\pm} J_{\pm} , \quad (4.4.22)$$

nämlich $\rho_{\pm} = \pm 1$ nennt man die *Wurzeln* der Lie-Algebra. Offensichtlich unterscheiden sich verschiedene Gewichte um Vielfache der Wurzeln. Schließlich kann man in dieser Lie-Algebra nur jeweils eine Matrix gleichzeitig diagonalisieren, es ist eine Lie-Algebra vom *Rang 1*.

Wir führen schließlich noch die Matrix

$$\vec{J}^2 = J_1^2 + J_2^2 + J_3^2 = \frac{1}{2} (J_+ J_- + J_- J_+) + J_3^2 = J_- J_+ J_3 (J_3 + 1) = J_+ J_- + J_3 (J_3 - 1) \quad (4.4.23)$$

ein. Da dieser Operator mit allen Generatoren der Lie-Algebra und damit auch mit allen endlichen Gruppenelementen vertauscht, muß er nach dem ersten Schur'schen Lemma ein Vielfaches des Einheitsoperators sein. Das läßt sich hier explizit verifizieren, da

$$\langle m', j | \vec{J}^2 | m, j \rangle = \delta_{mm'} N_m^2 + m(m-1) = j(j+1) \delta_{mm'} . \quad (4.4.24)$$

4.5 Produktdarstellungen, Clebsch-Gordan-Koeffizienten

Da wir bereits alle irreduziblen Darstellungen kennen, müssen die Darstellungsräume aller anderen linearen Darstellungen in direkte Summen von irreduziblen Unterräumen zerfallen. Wir betrachten hier speziell die Darstellungen, die als direkte Produkte aus irreduziblen Darstellungen hervorgehen. Der lineare Raum wird von Produktzuständen

$$|m_1, j_1; m_2, j_2 \rangle = |m_1, j_1 \rangle |m_2, j_2 \rangle \quad (4.5.1)$$

aufgespannt, ist also $(2j_1 + 1)(2j_2 + 1)$ -dimensional. Ein Element der Gruppe wirkt als

$$U(g)|m_1, j_1; m_2, j_2 \rangle = U_{j_1}(g)|m_1, j_1 \rangle U_{j_2}(g)|m_2, j_2 \rangle . \quad (4.5.2)$$

Eine infinitesimale Transformation nimmt als die Gestalt

$$\begin{aligned} U(\delta\vec{\omega})|m_1, j_1; m_2, j_2 \rangle &= (\mathbf{1} + i\delta\vec{\omega}\vec{J}_1)|m_1, j_1 \rangle (\mathbf{1} + i\delta\vec{\omega}\vec{J}_2)|m_2, j_2 \rangle \\ &\equiv (\mathbf{1} + i\delta\vec{\omega}\vec{J})|m_1, j_1; m_2, j_2 \rangle \end{aligned} \quad (4.5.3)$$

an, wo \vec{J}_1 und \vec{J}_2 aus den jeweils drei Darstellungsmatrizen in der j_1 bzw. der j_2 -Darstellung gebildet werden. Es gilt also

$$\vec{J} = \vec{J}_1 \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes \vec{J}_2 \quad (4.5.4)$$

Die Generatoren der Lie-Algebra “addieren” sich also. Diese Produktdarstellung zerfällt, wie schon gesagt, in irreduzible Darstellungen. Die Basistransformation wird vermittelt durch die Clebsch-Gordan-Koeffizienten.

Es gilt

$$|m_1, j_1; m_2, j_2 \rangle = \sum_{j, m} \langle m, j; j_1, j_2 | m_1, j_1; m_2, j_2 \rangle |m, j; j_1, j_2 \rangle \quad (4.5.5)$$

und umgekehrt

$$|m, j; j_1, j_2 \rangle = \sum_{m_1, m_2} \langle m_1, j_1; m_2, j_2 | m, j; j_1, j_2 \rangle |m_1, j_1; m_2, j_2 \rangle . \quad (4.5.6)$$

Die Clebsch-Gordan-Koeffizienten erfüllen eine Reihe von Relationen, die sich im wesentlichen aus ihrer Definition ergeben. Man kann die relativen Phasen so wählen, daß alle Clebsch-Gordan-Koeffizienten reell sind. Dann gilt

$$\langle m_1, j_1; m_2, j_2 | m, j; j_1, j_2 \rangle = \langle m, j; j_1, j_2 | m_1, j_1; m_2, j_2 \rangle \quad (4.5.7)$$

und man kann sich mit einer der Schreibweisen begnügen. Insbesondere ergeben sich aus der Unitarität die Relationen

$$\begin{aligned} \sum_{jm} \langle m'_1, j_1; m'_2, j_2 | m, j; j_1, j_2 \rangle \langle m_1, j_1; m_2, j_2 | m, j; j_1, j_2 \rangle \\ = \delta_{m_1 m'_1} \delta_{m_2 m'_2} \end{aligned} \quad (4.5.8)$$

$$\begin{aligned} \sum_{m_1 m_2} \langle m_1, j_1; m_2, j_2 | m, j; j_1, j_2 \rangle \langle m_1, j_1; m_2, j_2 | m', j'; j_1, j_2 \rangle \\ = \delta_{jj'} \delta_{mm'} \delta(j_1 j_2 j) \end{aligned} \quad (4.5.9)$$

wo $\delta(j_1 j_2 j_3)$ gleich 1 ist, wenn die Dreiecksungleichung $-|j_1 - j_2| \leq j \leq j_1 + j_2$ erfüllt ist, und 0 sonst.

Eine mögliche Konstruktion ergibt sich als Analogie der Konstruktion der irreduziblen Darstellungen, mithilfe der Auf- und Absteige-Operatoren

$$J_{\pm} = \vec{J}_{1\pm} \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes \vec{J}_{2\pm} . \quad (4.5.10)$$

Eine wichtige Relation ist die zu den sog. *Wigner'schen 3j-Symbolen*

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} = (-1)^{j_1-j_2-m_3} (2j_3 + 1)^{-1/2} \langle m_1, j_1; m_2, j_2 | -m_3, j_3; j_1, j_2 \rangle \quad (4.5.11)$$

Diese erfüllen eine Reihe von Symmetrierelationen. So bleiben die 3j-Symbole unverändert bei zyklischen Permutationen der Spalten, während sie bei ungeraden Permutationen mit $(-1)^{j_1+j_2+j_3}$ multipliziert werden. Außerdem gilt

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} = (-1)^{j_1+j_2+j_3} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ -m_1 & -m_2 & -m_3 \end{pmatrix} . \quad (4.5.12)$$

4.6 Darstellung endlicher Drehungen

Die endlichen Drehungen ergeben sich aus der Exponentenzierung der Lie-Algebra. Am einfachsten, und am verbreitetsten, ist die Darstellung durch die Eulerwinkel in der Form

$$R(\alpha, \beta, \gamma) = R_3(\alpha) R_2(\beta) R_3(\gamma) , \quad (4.6.1)$$

wofür sich die Darstellungsmatrix

$$\langle m', j | R(\alpha, \beta, \gamma) | m, j \rangle = \mathcal{D}_{m'm}^{(j)}(\alpha, \beta, \gamma) = e^{i\alpha m' + i\gamma m} d_{m'm}^{(j)}(\beta) \quad (4.6.2)$$

ergibt. Die Berechnung reduziert sich also auf die Berechnung der Funktionen

$$d_{m'm}^{(j)}(\beta) = \langle m', j | R_2(\beta) | m, j \rangle . \quad (4.6.3)$$

Der einfachste Fall ist natürlich $j = 1/2$, wofür sich die Matrix

$$d_{m'm}^{(1/2)}(\beta) \rightarrow \begin{pmatrix} \cos \beta/2 & \sin \beta/2 \\ -\sin \beta/2 & \cos \beta/2 \end{pmatrix} \quad (4.6.4)$$

ergibt. Eine allgemeine Darstellung ist die durch die Jacobi-Polynome

$$d_{m'm}^{(j)}(\beta) = \left[\frac{(j+m')!(j-m')!}{(j+m)!(j-m)!} \right]^{1/2} \left(\cos \frac{\beta}{2} \right)^{m+m'} \left(\sin \frac{\beta}{2} \right)^{m'-m} P_{j-m}^{(m'-m, m'+m)}(\cos \beta) . \quad (4.6.5)$$

Spezialfälle sind

$$\mathcal{D}_{0m}^{(l)}(\alpha, \beta, \gamma) = \left(\frac{4\pi}{2l+1} \right)^{1/2} Y_{lm}(\beta, \gamma) \quad (4.6.6)$$

und noch spezieller

$$\mathcal{D}_{00}^{(l)}(\alpha, \beta, \gamma) = P_l(\cos \beta) . \quad (4.6.7)$$

Die Darstellungen endlicher Drehungen werden beispielsweise benötigt, um Polarisierungen von Spinzuständen bezüglich einer definierten z -Achse umzurechnen auf Helizitätszustände.

Die Drehung von Produktzuständen $|m_1, j_1; m_2, j_2\rangle$ erfolgt nach $\mathcal{D}_{m'_1 m_1}^{(j_1)}(\alpha, \beta, \gamma) \mathcal{D}_{m'_2 m_2}^{(j_2)}(\alpha, \beta, \gamma)$. Da man die Produktzustände nach irreduziblen Darstellungen zerlegen kann, gilt dies auch für endliche Drehungen:

$$\begin{aligned} & \mathcal{D}_{m'_1 m_1}^{(j_1)}(\alpha, \beta, \gamma) \mathcal{D}_{m'_2 m_2}^{(j_2)}(\alpha, \beta, \gamma) \\ &= \sum_j \langle m'_1, j_1; m'_2, j_2 | m', j; j_1, j_2 \rangle \mathcal{D}_{m' m}^{(j)}(\alpha, \beta, \gamma) \langle m, j; j_1, j_2 | m_1, j_1; m_2, j_2 \rangle \\ &= \sum_j (2j+1) \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m'_1 & m'_2 & m' \end{pmatrix} \mathcal{D}_{m' m}^{(j)*}(\alpha, \beta, \gamma) \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.6.8)$$

mit $m = m_1 + m_2$ und $m' = m'_1 + m'_2$.

Daraus ergeben sich eine Reihe von nützlichen Beziehungen zwischen den Kugelfunktionen, insbesondere die Relation für das Produkt

$$\begin{aligned} & Y_{l_1 m_1}(\theta, \phi) Y_{l_2 m_2}(\theta, \phi) \\ &= \sum_{lm} \left[\frac{(2l_1+1)(2l_2+1)(2l+1)}{4\pi} \right]^{1/2} \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l \\ m_1 & m_2 & m \end{pmatrix} Y_{lm}^*(\theta, \phi) \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.6.9)$$

und das Additionstheorem

$$P_l(\cos \omega) = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_m Y_{lm}^*(\theta, \phi) Y_{lm}(\theta', \phi') , \quad (4.6.10)$$

wo ω der Winkel zwischen den aus den Einheitsvektoren durch den Kugelkoordinaten θ, ϕ und θ', ϕ' definierten Einheitsvektoren ist.

4.7 Sphärische Tensoren und Tensoroperatoren

Mit der Drehgruppe sind wir besonders vertraut, da wir in einem dreidimensionalen Raum leben. Insbesondere kennen wir die Vektoren, die sich offensichtlich unter Drehungen verändern und damit wohl eine nichttriviale Darstellung der Drehgruppe bilden. Es muß sich um eine dreidimensionale Darstellung handeln, für die wir das Multipllett $|1, 1\rangle, |0, 1\rangle, |-1, 1\rangle$ kennen. Was ist der Zusammenhang mit unseren vertrauten Vektoren? Ein Schlüssel ergibt sich aus den

räumlichen Eigenfunktionen zu Drehimpuls 1, den $Y_{1m}(\theta, \phi)$: Es gilt

$$Y_{11}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \frac{1}{r} \frac{-1}{\sqrt{2}} (x + iy) \quad (4.7.1)$$

$$Y_{1-1}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \frac{1}{r} \frac{1}{\sqrt{2}} (x - iy) \quad (4.7.2)$$

$$Y_{10}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \frac{1}{r} z \quad (4.7.3)$$

Wir definieren die *sphärischen Komponenten* des Vektors \vec{r} als

$$r_0 = z \quad (4.7.4)$$

$$r_{\pm 1} = \frac{\mp 1}{\sqrt{2}} (x \pm iy) . \quad (4.7.5)$$

Diese transformieren offensichtlich wie die räumlichen “Wellenfunktionen” zum Drehimpuls 1.

Man definiert auch allgemein die *harmonischen Polynome* oder räumlichen Harmonischen als

$$\mathcal{Y}_{lm}(\vec{r}) = r^l Y_{lm}(\theta, \phi) . \quad (4.7.6)$$

Sie erfüllen die Laplace-Gleichung

$$\Delta \mathcal{Y}(\vec{r}) = 0 \quad (4.7.7)$$

und sind zum Beispiel die Basis für die Multipolentwicklung. Sie sind regulär in den Variablen x, y, z , während r und die Polarwinkel für $r \rightarrow 0$ nicht analytisch bzw. nicht definiert sind.

Wir können in dieser Basis aus mehreren Vektoren (Ortsvektoren, Geschwindigkeiten, Vektorfeldern) Tensoren bilden, bzw. solche Tensoren ergeben sich in wichtigen physikalischen Zusammenhängen (Energie-Impulstensor..).

Für die Tensorprodukte gilt die Clebsch-Gordan-Zerlegung

$$\begin{aligned} & \mathcal{Y}_{l_1, m_1}(\vec{r}) \mathcal{Y}_{l_2, m_2}(\vec{r}) \quad (4.7.8) \\ &= \sum_{lm} \left[\frac{(2l_1 + 1)(2l_2 + 1)}{4\pi(2l + 1)} \right]^{1/2} \langle m_1, l_1; m_2, l_2 | l_2, l_2, l, m \rangle \\ & \langle 0, l_1; 0, l_2 | l_2, l_2, l, 0 \rangle r^{l_1 + l_2 - l} \mathcal{Y}_{lm}(\vec{r}) \end{aligned}$$

Daneben kann man auch aus Tensoren in kartesischer Darstellung direkte Produkte bilden:

$$T_{ij\dots k} = x_j y_j \dots z_k , \quad (4.7.9)$$

wobei \vec{x}, \vec{y} und \vec{z} irgendwelche Vektoren sind. Diese Darstellung ist natürlich reduzibel. Zum Beispiel zerfällt ein kartesischer Tensor zweiter Stufe in einen

symmetrischen spurlosen Anteil zu $j = 2$, einen antisymmetrischen Anteil zu $j = 1$ und die Spur, die nach $j = 0$ transformiert. Diese Art, direkte Produkte durch symmetrisieren, antisymmetrisieren und Spurbildung auszureduzieren, entspricht einem allgemeinen Verfahren, auf das wir noch zurückkommen werden.

In der Quantenmechanik sind \vec{x} und \vec{p} Operatoren. In der Quantenfeldtheorie sind alle Felder Operatoren. Wie verhalten sich solche Operatoren bezüglich der Drehgruppe? Bei einer Basistransformation werden die Zustände transformiert. Für die Matrixelemente $T(jm)$ eines Tensoroperators gilt dann

$$D(\omega)T_{m,j}D^{-1}(\omega) = \sum_m T_{m',j} \mathcal{D}_{m'm}^{(j)}(\omega) . \quad (4.7.10)$$

Umgekehrt ist ein Objekt, das sich so transformiert, ein Tensoroperator in der Darstellung j . Diese Gleichung definiert also einen Tensoroperator.

Man kann diese Relation auch infinitesimal schreiben als

$$[J_{\pm}, T_{m,j}] = \sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)} T_{m \pm 1, j} \quad (4.7.11)$$

$$[J_3, T_{m,j}] = m T_{m,j} . \quad (4.7.12)$$

In kartesischen Komponenten eines Vektoroperators V ($j = 1$) drückt sich das aus als

$$[J_i, V_j] = i\epsilon_{ijk} V_k . \quad (4.7.13)$$

Es gilt also, wie aus der Quantenmechanik bekannt

$$[J_i, x_j] = i\epsilon_{ijk} x_k \quad (4.7.14)$$

$$[J_i, p_j] = i\epsilon_{ijk} p_k \quad (4.7.15)$$

und, last not least,

$$[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk} J_k , \quad (4.7.16)$$

das heißt: auch der Drehimpuls ist ein Vektoroperator, was eigentlich trivial ist, da der Drehimpuls in der klassischen Mechanik ein (Pseudo)Vektor ist. Für kartesische Tensorprodukte gilt

$$[J_k, T_{ab\dots c}] = i\epsilon_{kaa'} T_{a'b\dots c} + i\epsilon_{kbb'} T_{ab'\dots c} + \dots i\epsilon_{kcc'} T_{ab\dots c'} , \quad (4.7.17)$$

Diese entsprechen allerdings im allgemeinen nicht irreduziblen Darstellungen.

Schließlich sei noch ein Beispiel eines Vektoroperators erwähnt, das aus der Quantenmechanik bekannt ist, die Pauli-Matrizen. Diese werden üblicherweise in Vektorform geschrieben und man bildet beispielsweise das Skalarprodukt $\vec{B}\vec{\sigma}$. Da in der Darstellung zu $j = 1/2$ die Paulimatrizen, geteilt durch 2, den Drehimpuls darstellen, folgen ihre Transformationseigenschaften bereits aus den Vertauschungsrelationen

$$[\frac{\sigma_k}{2}, \frac{\sigma_l}{2}] = i\epsilon_{klm} \frac{\sigma_m}{2} , \quad (4.7.18)$$

so, wie das auch für den Bahndrehimpuls der Fall ist. Man kann aber auch für endliche Drehungen sehen, daß sie sich wie Vektoren verhalten. Eine Drehung um die y -Achse wird dargestellt durch

$$D(0, \beta, 0) \rightarrow e^{i\beta\sigma_2/2} . \quad (4.7.19)$$

Für die Paulimatrix σ_3 ergibt sich

$$e^{i\beta\sigma_2/2}\sigma_3e^{-i\beta\sigma_2/2} = \sigma_3 \cos \beta - \sigma_1 \sin \beta \quad (4.7.20)$$

Das heißt, daß σ_3 so in eine Kombination von σ_1 und σ_3 gedreht wird, wie dies auch beider z -Komponente eines Ortsvektors der Fall ist. Diese Gleichung ist für eine spezielle Drehung das kartesische Äquivalent zu Gl. (4.7.10).

4.8 Das Wigner-Eckart-Theorem

Das Wigner-Eckart-Theorem begegnet uns allenthalben, wenn es darum geht, *Verhältnisse von Matrixelementen* eines Vektoroperators zu berechnen. Es stellt manchmal die wesentliche physikalische Konsequenz einer Symmetrie dar.

Wir betrachten die Drehung eines Zustands $T_{M,J}|m, j >$:

$$\begin{aligned} D(\omega)[T_{M,J}|m, j, \gamma >] &= [D(\omega)T_{M,J}D^{-1}(\omega)]D(\omega)|m, j, \gamma > \\ &= T_{M',J}|m', j, \gamma > \mathcal{D}_{M'M}^{(J)}(\omega)\mathcal{D}_{m'm}^{(j)}(\omega) \end{aligned} \quad (4.8.1)$$

Der betrachtete Zustand transformiert also wie ein Tensorprodukt. Wir können ihn daher zerlegen nach

$$T_{M,J}|m, j, \gamma > = \sum_{j'} < M, J; j, m | m', j'; J, j > \Phi_{m',j'} , \quad (4.8.2)$$

wobei die $\Phi_{m',j'}$ Objekte sind die nach der Darstellung j' transformieren. Vice versa gilt

$$\Phi_{m',j'} = \sum_M T_{M,J}|m, j, \gamma > < M, J; m, j | m', j'; J, j > . \quad (4.8.3)$$

Für die Matrixelemente von T bezüglich von Zuständen $|m, j, \gamma >$ ergibt sich

$$< m_2, j_2, \gamma' | T_{M,J} | m, j, \gamma > = < m_2, j_2, \gamma' | m', j', \Phi > < M, J; m, j | m', j'; J, j > . \quad (4.8.4)$$

Nun transformieren $|m_2, j_2, \gamma' >$ und $|m', j', \Phi > = \Phi_{m',j'}$ nach irreduziblen Darstellungen. Es muß daher gelten $j' = j_2$ und $m' = m_2$, also

$$\begin{aligned} &< m_2, j_2, \gamma' | T_{M,J} | m, j, \gamma > \\ &= \delta_{m'm_2} \delta_{j'j_2} < m', j', \gamma' | m', j', \Phi > < M, J; m, j | m', j'; J, j > . \end{aligned} \quad (4.8.5)$$

Weiterhin gilt, daß die Matrixelemente $\langle m', j', \gamma' | m', j', \Phi \rangle$ von m' unabhängig sind:

$$\begin{aligned}
& \langle m' + 1, j', \gamma' | m' + 1, j', \Phi \rangle \\
&= \frac{1}{(j' - m')(j' + m' + 1)} \langle m', j', \gamma' | J_- J_+ | m', j', \Phi \rangle \\
&= \frac{1}{(j' - m')(j' + m' + 1)} \langle m', j', \gamma' | \vec{J}^2 - J_3(J_3 + 1) | m', j', \Phi \rangle \\
&= \frac{j'(j' + 1) - m'(m' + 1)}{(j' - m')(j' + m' + 1)} \langle m', j', \gamma' | m', j', \Phi \rangle \\
&= \langle m', j', \gamma' | m', j', \Phi \rangle .
\end{aligned} \tag{4.8.6}$$

Damit sind die Matrixelemente $\langle m'_2, j'_2, \gamma' | T_{m,j} | m_2, j_2, \gamma \rangle$ bis auf einen gemeinsamen Faktor durch die Clebsch-Gordan-Koeffizienten bestimmt. Das ist bereits die wesentliche Aussage des Wigner-Eckart-Theorems. Man definiert nun *reduzierte Matrixelemente* durch

$$\langle m', j', \gamma' | T_{M,J} | m, j, \gamma \rangle = \tag{4.8.7}$$

$$= (-1)^{j-m} \frac{\langle m', j'; -m, j | M, J; j', j \rangle}{\sqrt{2j+1}} (j', \gamma' || T_J || j, \gamma) \tag{4.8.8}$$

$$= (-1)^{j'-m'} \begin{pmatrix} j' & J & j \\ -m' & M & m \end{pmatrix} (j', \gamma' || T_J || j, \gamma) \tag{4.8.9}$$

$$= (-1)^{J-j+j'} \frac{\langle M, J, m, j | m', j'; J, j \rangle}{\sqrt{2j'+1}} (j', \gamma' || T_J || j, \gamma) .$$

in dieser Form wird das Wigner-Eckart-Theorem oft angegeben. Die reduzierten Matrixelemente sind nicht durch eine spezifische Rechenvorschrift definiert, sondern als Reduktion der normalen Matrixelemente. Insofern geht man bei ihrer Berechnung so vor, daß man eines der normalen Matrixelemente, zum Beispiel für $m = m' = M = 0$, berechnet und dann durch den Vorfaktor des reduzierten Matrixelements dividiert, also zum Beispiel

$$(j' || T_j || j) = (-1)^{J-j+j'} \sqrt{2j'+1} \frac{\langle 0, j', \gamma' | T_{0,J} | 0, j, \gamma \rangle}{\langle 0, J, 0, j | 0, j'; J, j \rangle} . \tag{4.8.10}$$

Eine andere, recht häufige Möglichkeit besteht darin, ein Matrixelement der Tensoroperators experimentellen Daten zu entnehmen.

Am einfachsten benutzt man das Theorem, um *Verhältnisse* von Matrixelementen zu berechnen. In der letzten der oben angegebenen Formen ergibt sich

$$\frac{\langle m'_2, j', \gamma' | T_{M_2,J} | m_2, j, \gamma \rangle}{\langle m'_1, j', \gamma' | T_{M_1,J} | m_1, j, \gamma \rangle} = \frac{\langle M_2, J, m_2, j | m'_2, j'; J, j \rangle}{\langle M_1, J, m_1, j | m'_1, j'; J, j \rangle} . \tag{4.8.11}$$

Diese Art von Relation nennt man auch Verzweungsverhältnisse (branching ratios).

Aus dem Verschwinden von Clebsch-Gordan-Koeffizienten ergeben sich auch die bekannten Auswahlregeln: $|j - j'| \leq J \leq j + j'$ und $m' = M + m$. Aber selbst wenn die Clebsch-Gordan-Koeffizienten nicht verschwinden, können Matrixelemente Null sein. So gilt für den Dipoloperator, der proportional zu x ist, daß er ein Operator zur Darstellung $j = 1$ ist. Aus $|j - j'| \leq 1 \leq j + j'$ folgt $j - j' = 1, -1, 0$. Aber das Matrixelement $\langle m, l | z | m, l \rangle$, verschwindet wegen der Paritätssymmetrie. Damit verschwinden auch das reduzierte Matrixelement $(l || x || l)$ und damit alle anderen Matrixelemente mit $\Delta l = 0$. Durch die zusätzliche Paritätssymmetrie wird die Auswahl also auf $\Delta l = \pm 1$ eingeschränkt.

Kapitel 5

Allgemeine Struktur von Lie-Algebren

5.1 Cartan'sche Subalgebra und Cartan'sche Basis

Eine Basis der Generatoren einer Lie-Algebra in einer linearen Darstellung D sei durch die Matrizen $X_i, i = 1, \dots, N$ gegeben. Wir hatten schon gezeigt, daß es eine spezielle Darstellung immer gibt: die adjungierte. Die Anzahl N der unabhängigen Generatoren hängt von der Gruppe ab, z.B. $N = n(n-1)/2$ für die $SO(n)$.

Wir versuchen, eine möglichst große Zahl von miteinander kommutierenden Generatoren zu finden. Dazu bilden wir Linearkombinationen

$$H_i = C_{ia} X_a \quad (5.1.1)$$

mit reellen C_{ia} , so daß

$$[H_i, H_j] = 0 \quad i, j = 1, \dots, m. \quad (5.1.2)$$

Die H_i sind hermitesch, da es die X_a waren. Weiter normieren wir

$$\text{Tr}(H_i H_j) = k_D \delta_{ij}. \quad (5.1.3)$$

Diese kommutierende Subalgebra heißt *Cartan'sche Subalgebra*. Die maximal mögliche Zahl von kommutierenden Generatoren m heißt der *Rang* der Algebra. Kommutieren diese Operatoren in einer Darstellung, dann kommutieren sie in allen. In der Tat überträgt sich die hier beschriebene Struktur auf alle Darstellungen.

Die H_i kann man simultan diagonalisieren. Man erhält eine Basis von Zuständen $|\mu, D\rangle$, für die gilt

$$H_i |\mu, D\rangle = \mu_i |\mu, D\rangle. \quad (5.1.4)$$

Das Symbol μ bezeichnet damit ein m -tupel von Zahlen, die man *Gewichte* nennt. Das m -tupel μ nennt man den *Gewichtsvektor*¹. Für die Drehgruppe ist $m = 1$, und μ ist einfach eine Zahl, die magnetische Quantenzahl. Die Zahlen μ_i müssen reell, sein, da die H_i hermitesch sind.

5.2 Wurzeln

Wir betrachten jetzt speziell die adjungierte Darstellung. In dieser Darstellung wird jedem Generator ein Zustand zugeordnet

$$X_a \rightarrow |X_a \rangle \quad (5.2.1)$$

mit dem Skalarprodukt

$$\langle X_b | X_a \rangle = \lambda^{-1} \text{Tr}(X_a X_b^\dagger) . \quad (5.2.2)$$

Dieses Skalarprodukt heißt auch *Killing-Form*. Wir können die Killing-Form auch als eine Metrik darstellen:

$$g_{ab} = \text{Tr}(X_a X_b^\dagger) = -f_{acd} f_{bdc} . \quad (5.2.3)$$

Für die $SO(3)$ ergibt sich

$$g_{ab} = -\epsilon_{acd} \epsilon_{bdc} = -\epsilon_{cda} \epsilon_{cbd} = -(\delta_{bd} \delta_{da} - \delta_{da} \delta_{ab}) = 2\delta_{ab} . \quad (5.2.4)$$

Die Killing-Form ist positiv-definit für *kompakte Gruppen*. Das sind alle “klassischen” Lie-Algebren. Die Lorentz-Gruppe, die man auch als $SO(3, 1)$ schreibt ist ein Beispiel einer nicht-kompakten Gruppe. Die Killing-Form definiert ein Skalarprodukt im Raum aller *reellen* Linearkombinationen der Basiselemente X_i . Von ausgearteten Killing-Formen ist in Abschnitt 5.3 die Rede.

Die Wirkung der X_a auf die Zustände ist

$$X_a |X_b \rangle = i f_{abc} |X_c \rangle = [X_a, X_b] |X_b \rangle . \quad (5.2.5)$$

Da die H_i kommutieren, gilt

$$H_i |H_j \rangle = 0 . \quad (5.2.6)$$

damit haben alle H_i den Wurzelvektor $\mu = 0$, und diese Zustände sind m -fach entartet.

Die übrigen Zustände wählen wir so, daß

$$H_i |E_\alpha \rangle = \alpha_i |E_\alpha \rangle , \quad (5.2.7)$$

¹ μ ist kein Vektor in dem Sinne, daß er irgendwelche Transformationseigenschaften bezüglich der Gruppe hätte, die Bezeichnung “ m -tupel” ist daher eigentlich sinnvoller

nachdem die weitere Basis des Zustandraumes so gewählt ist, Daß die H_i diagonal sind. Die Werte α_i sind reell. Den $|E_\alpha >$ entsprechen Operatoren E_α . Diese sind nicht hermitesch; es gilt

$$[H_i, E_\alpha^\dagger] = -[H_i, E_\alpha]^\dagger = -\alpha^* E_\alpha^\dagger = -\alpha E_\alpha^\dagger, \quad (5.2.8)$$

wobei benutzt wurde, daß die α_i reell sind. Es gilt also

$$H_i E_\alpha^\dagger = -\alpha_i E_\alpha^\dagger \quad (5.2.9)$$

und damit

$$E_\alpha^\dagger = E_{-\alpha}. \quad (5.2.10)$$

Schließlich normieren wir noch ²

$$< E_\alpha | E_\beta > = \lambda^{-1} \text{tr} (E_\dagger \alpha E_\beta) = \delta_{\alpha\beta} \quad (5.2.11)$$

$$< H_i | H_j > = \lambda^{-1} \text{tr} (H_i H_j) = \delta_{ij}. \quad (5.2.12)$$

Die Gewichte der adjungierten Darstellung heißen *Wurzeln*.

Weitere wichtige Relationen ergeben sich aus

$$H_i E_\alpha | E_\beta > = [H_i, E_\alpha] | E_\beta > + E_\alpha \beta_i | E_\beta > = (\alpha_i + \beta_i) | \beta_i >. \quad (5.2.13)$$

Ist zunächst $\beta = -\alpha$, dann wird

$$H_i E_\alpha | E_{-\alpha} > = 0 \quad (5.2.14)$$

und damit

$$E_\alpha | E_{-\alpha} > = \sum c_i | H_i >. \quad (5.2.15)$$

Die c_i ergeben sich aus

$$\begin{aligned} < H_j | E_\alpha | E_{-\alpha} > &= \lambda^{-1} \text{tr} (H_j, [E_\alpha, E_{-\alpha}]) \\ &= \lambda^{-1} \text{tr} (E_{-\alpha} [H_j, E_\alpha]) \\ &= \alpha_j \lambda^{-1} \text{tr} (E_{-\alpha} E_\alpha) = \alpha_j \end{aligned} \quad (5.2.16)$$

und damit

$$[E_\alpha, E_{-\alpha}] = \sum_i \alpha_i H_i. \quad (5.2.17)$$

Weiterhin können wir aus Gl. (5.2.13) folgern, daß $E_\alpha | E_\beta >$ das Gewicht $\alpha + \beta$ hat. Damit ist dieser Zustand eine Linearkombination aus möglichen Zuständen mit diesem Gewicht. Nach einem Theorem von Cartan sind die *Eigenzustände*

²Diese Skalarprodukt bezieht sich auf den komplexen Vektorraum, der durch komplexe Linearkombinationen der Basis X_a entsteht; es ergibt sich auch über die Isomorphie der Linearkombinationen Operatoren mit dem Darstellungsraum der adjungierten Darstellung. Es ist wiederum positiv-definit für kompakte halbeinfache Lie-Gruppen.

zu den von Null verschiedenen Wurzeln nicht entartet, während die zu $\alpha = 0$, d.h. die Zustände $|H_i\rangle$, m -fach entartet sind. Die Nichtentartung der von Null verschiedenen Wurzeln werden wir später beweisen (s. Abschnitt 5.5). Da die Wurzel $\alpha + \beta$ für $\beta \neq -\alpha$ nicht entartet ist, erhalten wir

$$E_\alpha |E_\beta\rangle = N_{\alpha\beta} |E_{\alpha+\beta}\rangle, \quad (5.2.18)$$

wobei $N_{\alpha\beta}$ ein Normierungsfaktor ist. Wir können dann zusammenfassen:

$$[H_i, H_j] = 0 \quad i, j = 1, m \quad (5.2.19)$$

$$[H_i, E_\alpha] = \alpha_i E_\alpha \quad (5.2.20)$$

$$[E_\alpha, E_{-\alpha}] = \alpha_i H_i \quad (5.2.21)$$

$$[E_\alpha, E_\beta] = N_{\alpha\beta} E_{\alpha+\beta} \quad \alpha + \beta \neq 0 \quad (5.2.22)$$

Die hier benutzten Generatoren bilden die *Cartan-Weyl-Basis* der Lie-Algebra; es ist die von Physikern bevorzugt benutzte Formulierung.

Wir haben für diese Konstruktion die adjungierte Darstellung benutzt, in der man durch das “Umdenken” zwischen Operatoren und Zuständen wesentliche Elemente der Theorie normierter Vektorräume benutzen konnte. Diese Formulierung der Lie-Algebra gilt aber (natürlich) für alle Darstellungen und ist so spezifisch für die Gruppe und nicht für die adjungierte Darstellung. Im Prinzip baut die gesamte Konstruktion auf den Strukturkonstanten auf. Die Koeffizienten $N_{\alpha\beta}$ müssen wir noch bestimmen. Das geht analog zum Formalismus der Auf- und Absteigeoperatoren für beliebige Darstellungen im übernächsten Abschnitt.

Zunächst aber noch ein Einschub zum Stichwort “normierte Vektorräume”.

5.3 Einfache und halb-einfache Liealgebren

Wir hatten im vorigen Abschnitt die Killing-Form definiert, ohne noch genau zu analysieren, welches ihre allgemeinen Eigenschaften sind. Es ist in Tat nötig, hier die Struktur der Gruppe selbst zu betrachten. Wir hatten in Abschnitt 2.4.4 das Konzept von einfachen und halb-einfachen Gruppen eingeführt. Eine einfache Gruppe war eine Gruppe, die keine invarianten Untergruppen enthält, eine halb-einfache Gruppe enthält keine abelschen (trivialen) invarianten Untergruppen. Diese Begriffe übertragen sich auf die Lie-Algebren und die Killing-Form.

Eine invariante Untergruppe A war dadurch definiert, daß $gAg^{-1} = A$ für alle $g \in G$. Wenn die Lie-Gruppe eine solche invariante Untergruppe hat, und die Untergruppe selbst eine kontinuierliche Gruppe ist, dann wird diese von Generatoren $A_i, i = 1 \dots k$ erzeugt, die Linearkombinationen der X_a sind. Wir führen eine Basiswechsel $X_a \rightarrow A_i$ so durch, daß die zur Untergruppe gehörenden Generatoren gerade die ersten L der insgesamt N Generatoren der Basis sind. Es gilt dann mit modifizierten Strukturkonstanten

$$[A_i, A_j] = ic_{ijk} A_k \quad i, j, k = 1, \dots, N. \quad (5.3.1)$$

Die Untergruppe wird unter Konjugation auf sich selbst abgebildet, damit erhält man

$$\begin{aligned} c_{ijk} &= 0 \quad i = 1, \dots, N; j \leq L; k > L \\ c_{ijk} &= 0 \quad i = 1, \dots, N; j > L; k \leq L. \end{aligned} \quad (5.3.2)$$

Ist die Untergruppe abelsch, dann gilt auch

$$c_{ijk} = 0 \quad i, j, k \leq L \quad (5.3.3)$$

Es sei jetzt $k \leq L$ und i beliebig. Dann gilt in der Basis A_i

$$\begin{aligned} g_{il}^A &= - \sum_{k=1, N; j=1, N} c_{ijk} c_{lkj} \\ &= \sum_{k=1, N; j=1, N} c_{ijk} c_{klj} \\ &= \sum_{k=1, N; j=1, L} c_{ijk} c_{klj} \quad \text{aus } l \leq L \text{ folgt } j \leq l \\ &= \sum_{k=1, L; j=1, L} c_{ijk} c_{klj} \quad \text{aus } j \leq l \text{ folgt } k \leq l \\ &= 0. \end{aligned} \quad (5.3.4)$$

Damit ist in der Metrik g_{ij}^A die gesamte L -te Spalte gleich Null und es gilt

$$\det\{g_{ij}\} = \det\{g_{ij}^A\} = 0. \quad (5.3.5)$$

Da die Determinante invariant unter Basiswechsel ist, erhält man auch für die ursprüngliche Killing-Form, daß ihre Determinante verschwindet. Ist eine Lie-Gruppe also weder einfach noch halb-einfach, dann ist ihre Killing-Form entartet. Im folgenden werden wir uns auf halb-einfache Lie-Gruppen beschränken, wozu natürlich auch die einfachen zählen. Eine Gruppe wie $SU(2) \times U(1)$ ist weder einfach noch halb-einfach; eine Gruppe wie $SU(3) \times SU(2)$ ist halb-einfach. Das kann man aber nicht direkt an der Lie-Algebra sehen. Zum Beispiel ist die Lie-Algebra von $SO(4)$ isomorph zu der von $SU(2) \times SU(2)$; um das zu erkennen, muß man die Generatoren geeignet kombinieren. Die Determinante ist von Null verschieden, und einfach gleich dem Produkt der Einzeldeterminanten. Wir sehen, daß eine Einschränkung auf einfache Lie-Gruppen nicht nützlich wäre, weil wir das erst nach näherer Analyse der Lie-Algebra feststellen könnten. Die Beschränkung auf einfache und halb-einfache Lie-Gruppen ist dagegen notwendig, weil sonst die Metrik entartet und die Konstruktionen des vorhergehenden Abschnitts zum Teil hinfällig wären.

5.4 Auf- und Absteigeoperatoren

Die Operatoren E_α wirken auch in einer beliebigen Darstellung, als Auf- und Absteigeoperatoren. Es gilt analog zu Gl. 5.2.13

$$H_i E_\alpha |\mu, D\rangle = [H_i, E_\alpha] |\mu, D\rangle + E_\alpha \mu_i |\mu, D\rangle = (\alpha_i + \mu_i) |\mu, D\rangle . \quad (5.4.1)$$

Damit ist $E_\alpha |\mu, D\rangle$ ein Eigenzustand mit Gewicht $\mu + \alpha$. Aber die Zustände zu einer gegebenen Wurzel sind im allgemeinen entartet, Cartan's Theorem bezieht sich nur auf die adjungierte Darstellung.

Wir beginnen mit einem Zustand $|\mu, j, D\rangle$, einen der entarteten Zustände zum Gewicht μ . j numeriert die entarteten Zustände. Wir definieren dann

$$E_\alpha |\mu, j, D\rangle = N_{\alpha, \mu}^j |\mu + \alpha, j, D\rangle \quad (5.4.2)$$

$$E_{-\alpha} |\mu, j, D\rangle = N_{-\alpha, \mu}^j |\mu - \alpha, j, D\rangle \quad (5.4.3)$$

wobei alle Zustände auf 1 normiert seien. Es gilt dann wegen Gl. 5.2.10

$$\begin{aligned} N_{-\alpha, \mu}^j &= \langle \mu - \alpha, j, D | E_{-\alpha} | \mu, j, D \rangle \\ &= \langle \mu - \alpha, j, D | E_\alpha^\dagger | \mu, j, D \rangle \\ &= \langle \mu, j, D | E_\alpha | \mu - \alpha, j, D \rangle^* \\ &= N_{\alpha, \mu - \alpha}^j \end{aligned} \quad (5.4.4)$$

Um eine Rekursion für die $N_{\alpha, \mu}^j$ zu erhalten, betrachten wir

$$\begin{aligned} &\langle \mu, j, D | [E_\alpha, E_{-\alpha}] | \mu, j, D \rangle \\ &= \langle \mu, j, D | \alpha_i H_i | \mu, j, D \rangle = \mu \cdot \alpha , \end{aligned} \quad (5.4.5)$$

andererseits

$$\begin{aligned} &\langle \mu, j, D | [E_\alpha, E_{-\alpha}] | \mu, j, D \rangle \\ &= |N_{-\alpha, \mu}^j|^2 - |N_{\alpha, \mu}^j|^2 \\ &= |N_{\alpha, \mu - \alpha}^j|^2 - |N_{\alpha, \mu}^j|^2 \end{aligned} \quad (5.4.6)$$

und damit

$$|N_{\alpha, \mu - \alpha}^j|^2 - |N_{\alpha, \mu}^j|^2 = \mu \cdot \alpha . \quad (5.4.7)$$

Wenn wir darauf mehrfach E_α und $E_{-\alpha}$ anwenden und wir voraussetzen, daß die Darstellung endlich ist bzw. nur endliche Darstellungen suchen, dann muß gelten

$$(E_\alpha)^p |\mu, j, D\rangle = 0 \quad (5.4.8)$$

$$(E_{-\alpha})^q |\mu, j, D\rangle = 0 \quad (5.4.9)$$

für irgendwelche p und q . Wir erhalten dann die Rekursionsgleichungen

$$\begin{aligned}
|N_{\alpha, \mu+(p-1)\alpha}|^2 - 0 &= \alpha \cdot (\mu + p\alpha) \\
|N_{\alpha, \mu+(p-2)\alpha}|^2 - |N_{\alpha, \mu+(p-1)\alpha}|^2 &= \alpha \cdot (\mu + (p-1)\alpha) \\
&\vdots \\
|N_{\alpha, \mu+\alpha}|^2 - |N_{\alpha, \mu}|^2 &= \alpha \cdot (\mu + \alpha) \\
&\vdots \\
|N_{\alpha, \mu-q\alpha}|^2 - |N_{\alpha, \mu-(q-1)\alpha}|^2 &= \alpha \cdot (\mu - (q-1)\alpha) \\
0 - |N_{\alpha, \mu-q\alpha}|^2 &= \alpha \cdot (\mu - q\alpha)
\end{aligned}$$

Die linken Seiten summieren sich zu Null. Auf der rechten Seite benutzt man

$$\sum_{n=-q}^p n = \frac{1}{2}(p+q+1)(p-q) \quad (5.4.10)$$

und erhält

$$(p+q+1) [2\mu \cdot \alpha + (p-q)\alpha^2] = 0 \quad (5.4.11)$$

Daraus folgt

$$\frac{\alpha \cdot \mu}{\alpha^2} = -\frac{1}{2}(p-q) \quad (5.4.12)$$

Weiterhin können wir alle $N_{\alpha, \mu+k\alpha}^j$ ausrechnen.

Wenn wir zur adjungierten Darstellung zurückkehren, dann sind die Zustände zu $\mu \neq 0$ nicht entartet, außerdem sind Gewichte und Wurzeln identisch. In diesem Falle entfällt der Index j bei den $N_{\alpha\beta}^j$.

5.5 Geometrische Struktur der Wurzeln einer Lie-Algebra

Da für die adjungierte Darstellung Wurzeln und Gewichte identisch sind, folgt, daß für je zwei beliebige Wurzeln gelten muß

$$\frac{\alpha \cdot \beta}{\alpha^2} = -\frac{1}{2}(p-q) = -\frac{m}{2} \quad (5.5.1)$$

und bei Vertauschung der Rollen von α und β

$$\frac{\beta \cdot \alpha}{\beta^2} = -\frac{1}{2}(p'-q') = -\frac{m'}{2} \quad (5.5.2)$$

Bei der einen Relation beginnt man mit der Wurzel β und bewegt sich in Richtung α , bei der zweiten mit der Wurzel α und bewegt sich in Richtung β . Multipliziert man beide Relationen, so erhält man

$$\frac{(\alpha \cdot \beta)^2}{\alpha^2 \beta^2} = \frac{mm'}{4} \quad (5.5.3)$$

Die linke Seite ist aber gerade das Quadrat des Kosinus zwischen den beiden Wurzeln und damit gilt

$$|\cos \theta| = \frac{\sqrt{mm'}}{2} \quad (5.5.4)$$

Damit folgen die Möglichkeiten

mm'	θ
0	90°
1	$60^\circ, 120^\circ$
2	$45^\circ, 135^\circ$
3	$30^\circ, 150^\circ$
4	$0^\circ, 180^\circ$

Die Winkel zwischen je zwei Wurzeln einer Lie-Algebra können also nur wenige Werte annehmen.

Wir können weiter zeigen, daß mit α und β auch $\beta - 2\alpha(\alpha \cdot \beta)/(\alpha \cdot \alpha)$ eine Wurzel ist. Wir haben gesehen, daß die Wurzeln Leitern bilden, die dadurch entstehen, daß man Vielfache einer festen Wurzel zu anderen Wurzeln addiert, bis man auf einen maximalen oder minimalen Wert der ganzzahligen Vielfachen stößt. Zu dieser Kette gehören alle Vektoren $\beta + k\alpha$ mit $-q < k < p$ und damit auch $\beta + (p - q)\alpha$. Denn $-q < p - q < p$, weil sowohl $p \geq$ als auch $q \geq 0$. Aber

$$\beta + (p - q)\alpha = \beta - 2\alpha \frac{\alpha \cdot \beta}{\alpha \cdot \alpha} . \quad (5.5.5)$$

Dieser neue Wurzelvektor wird aus β gebildet, indem man es *an der Hyperebene senkrecht zu α reflektiert*. Diese Reflektionssymmetrie von Wurzelendiagrammen bezüglich aller Hyperebenen senkrecht zu irgendeiner Wurzel vereinfacht die Konstruktion der Diagramme sehr.

Wir können nun auch das Theorem von Cartan beweisen. Es seien $E_{\alpha,1}$ und $E_{\alpha,2}$ zwei Generatoren mit der gleichen Wurzel. Dann können wir sie orthogonal wählen

$$\langle E_{\alpha,1} | E_{\alpha,2} \rangle = \lambda^{-1} \text{tr} (E_{\alpha,1}^\dagger E_{\alpha,2}) = 0 \quad (5.5.6)$$

Außerdem gilt für diese beiden entarteten Wurzeln

$$\frac{\alpha \cdot \alpha}{\alpha^2} = 1 = -\frac{p - q}{2} \quad (5.5.7)$$

Weiterhin ist $q = 0$ denn

$$E_{-\alpha,1} | E_{\alpha,2} \rangle = \beta_i | H_i \rangle , \quad (5.5.8)$$

da dieser Zustand das Gewicht Null hat. Damit wird

$$\begin{aligned} \beta_i &= \langle H_i | E_{-\alpha,1} | E_{\alpha,2} \rangle = \lambda^{-1} \text{tr} (H_i [E_{-\alpha,1}, E_{\alpha,2}]) \\ &= \lambda^{-1} \text{tr} (E_{\alpha,2} [H_i, E_{-\alpha,1}]) = -\lambda^{-1} \alpha_i \text{tr} (E_{\alpha,2} E_{-\alpha,1}) = 0 \end{aligned} \quad (5.5.9)$$

Damit ist in der Tat $q = 0$ und man erhält den Widerspruch

$$1 = -\frac{p}{2} < 0 . \quad (5.5.10)$$

5.6 Zum Beispiel SU(3)

Die einfachste halbeinfache Lie-Algebra kennen wir schon, die SU(2). Sie hat den Rang 1, das Wurzelendiagramm kann man in einer Dimension auftragen, das es nur eine H_i gibt. In der allgemeinen Notation haben wir

$$H \rightarrow J_3 \quad (5.6.1)$$

$$E_{\pm 1} \rightarrow J_{\pm} , \quad (5.6.2)$$

Für eine Gruppe vom Rang 2 braucht man zwei Dimensionen für die Darstellung der Eigenwerte von H_1 und H_2 . Es gibt mehrere Lie-Gruppen vom Rang 2. Wir besprechen hier als Beispiel die $SU(3)$, die physikalisch besonders relevant ist. Die Generatoren sind $T_a = \frac{1}{2}\lambda_a$ mit

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Die Generatoren sind normiert nach

$$\text{tr } T_a T_b = \frac{1}{2} \delta_{ab} . \quad (5.6.3)$$

Diese Darstellung ist *nicht* die adjungierte Darstellung. Der Darstellungsraum hat die Dimension 3, während die adjungierte Darstellung die Dimension 8 hat (die Anzahl der Generatoren). Trotzdem können wir aus den Vertauschungsregeln die Wurzeln α bestimmen. Wir definieren analog zur $SU(2)$

$$\lambda_{1\pm i2} = \lambda_1 \pm i\lambda_2 \quad (5.6.4)$$

$$\lambda_{4\pm i5} = \lambda_4 \pm i\lambda_5 \quad (5.6.5)$$

$$\lambda_{6\pm i7} = \lambda_6 \pm i\lambda_7 \quad (5.6.6)$$

Ihre Vertauschungsregeln mit λ_3 sind

$$[\lambda_3, \lambda_{1\pm i2}] = \pm 2\lambda_{1\pm i2} \quad (5.6.7)$$

$$[\lambda_3, \lambda_{4\pm i5}] = \pm \lambda_{4\pm i5} \quad (5.6.8)$$

$$[\lambda_3, \lambda_{6\pm i7}] = \mp \lambda_{6\pm i7} , \quad (5.6.9)$$

die Vertauschungsregeln mit λ_8 sind

$$[\lambda_8, \lambda_{1\pm i2}] = 0 \quad (5.6.10)$$

$$[\lambda_8, \lambda_{4\pm i5}] = \pm\sqrt{3}\lambda_{4\pm i5} \quad (5.6.11)$$

$$[\lambda_8, \lambda_{6\pm i7}] = \pm\sqrt{3}\lambda_{6\pm i7} , \quad (5.6.12)$$

Beachten wir, daß $T_{1\pm i2} = \lambda_{1\pm i2}/2$, so haben wir die Wurzeln

$$\alpha_{1\pm i2} = (\pm 1, 0) \quad (5.6.13)$$

$$\alpha_{4\pm i5} = \left(\pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}\sqrt{3}\right) \quad (5.6.14)$$

$$\alpha_{6\pm i7} = \left(\mp \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}\sqrt{3}\right) \quad (5.6.15)$$

und wir können das Wurzeldiagramm der $SU(3)$ zeichnen: Wir sehen, daß alle

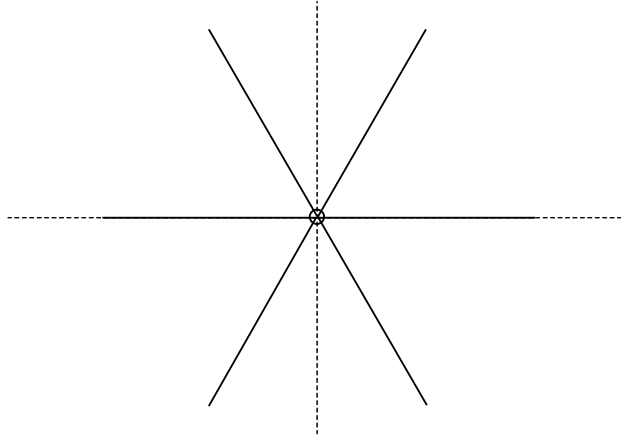


Abbildung 5.1: Wurzeldiagramm der Gruppe $A_2 \simeq SU(3)$

Winkel 60° oder 120° betragen. Wir sehen weiter, daß das Diagramm der Reflektionssymmetrie bezueglich aller Senkrechten auf Wurzelvektoren genügt. Mit Winkeln von 60° sind alle Konstanten $m = p - q$ gleich 1, die Leitern von zwei von Null verschiedenen Wurzeln brechen nach einem Schritt ab. Die Reflektionssymmetrie verbindet jeweils genau zwei Wurzeln.

5.7 Andere Lie-Gruppen vom Rang 2

Zur Konstruktion der anderen möglichen Wurzeldiagramme benutzen wir wieder die Relationen

$$\frac{\alpha \cdot \beta}{\alpha^2} = \frac{m}{2} \quad m \geq 0 \quad (5.7.1)$$

$$\frac{\alpha \cdot \beta}{\beta^2} = \frac{m'}{2} \quad m' \geq 0 \quad (5.7.2)$$

woraus folgt

$$\cos \theta = \frac{mm'}{2} \quad (5.7.3)$$

$$\frac{\alpha^2}{\beta^2} = \frac{m}{m'}. \quad (5.7.4)$$

5.7.1 $\theta = 60^\circ$

Für die $SU(3)$ war $\theta = 60^\circ, 120^\circ$, damit $mm' = 1$ und damit weiter $m = m' = 1$. Daraus folgte für das Längenverhältnis zweier Wurzeln mit 60° oder 120° die Gleichheit $|\alpha| = |\beta|$. Für zwei Wurzeln mit $\theta = 180^\circ$ folgt $mm' = 4$ und damit entweder $m = m' = 1$ oder $m = 1, m' = 4$ bzw. $m = 4, m' = 1$. Das Längenverhältnis ist also entweder 1 oder $1/2$ bzw. 2. Für die $SU(3)$ folgt aus der Reflexionssymmetrie, daß das Längenverhältnis der Wurzeln mit $\theta = 180^\circ$ gleich 1 ist. Damit sind alle nichttrivialen Wurzeln gleich lang. Diese Gruppe heißt in der Cartan-Klassifizierung A_2 . Die $SU(n)$ -Gruppen bilden eine Serie: Es gilt $A_n \simeq SU(n+1)$.

5.7.2 $\theta = 45^\circ$

Bei einem Längenverhältnis von 45° ist $mm' = 2$ und damit $m = 1, m' = 2$ oder umgekehrt. Das Längenverhältnis ist also $\sqrt{2}$ oder $1/\sqrt{2}$. Beginnen wir mit einer Wurzel $(1, 0)$, so ist die nächste $(1/2, 1/2)$. Die anderen Wurzeln folgen aus der Reflexionssymmetrie: $(0, 1), (-1/2, \pm 1/2), (1/2, -1/2), (-1, 0), (0, -1)$. Es ergibt sich das Wurzeldiagramm von, nach Cartan'scher Klassifikation C_2 . Dreht man das Diagramm um 45° , so erhält man das Diagramm von $B_2 \simeq SO(5)$. Allgemein gilt $B_n \simeq SO(2n+1)$. Die Gruppen C_n sind die *symplektischen Gruppen* $C_n \simeq sp(2n)$.

5.7.3 $\theta = 30^\circ$

Bei einem Längenverhältnis von 30° ist $mm' = 3$; also $m = 1, m' = 3$ oder $m = 3, m' = 1$. Beginnen wir mit einer Wurzel der Länge 1, dann folgt eine mit der Länge $\sqrt{3}$, die nächste bildet mit der ersten den Winkel 60° hat also wieder die Länge 1 usw.. Es entsteht das Wurzeldiagramm der Gruppe G_2 . Dies ist eine

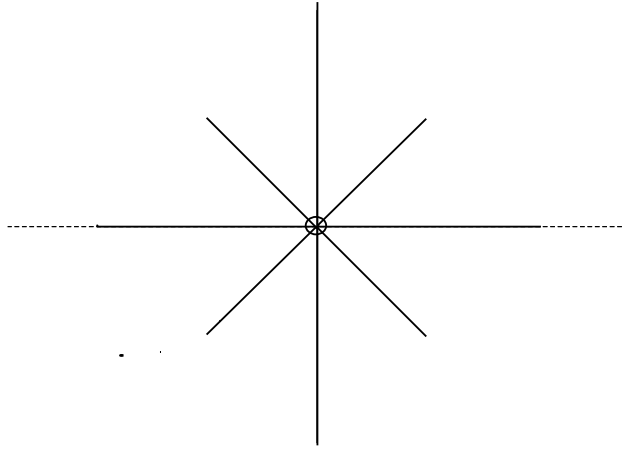


Abbildung 5.2: Wurzelendiagramm der Gruppe $C_2 \simeq B_2$

der “exzeptionellen Gruppen”: sie gehört nicht in eine Reihe wie die Gruppen A_n, B_n, C_n und D_n .

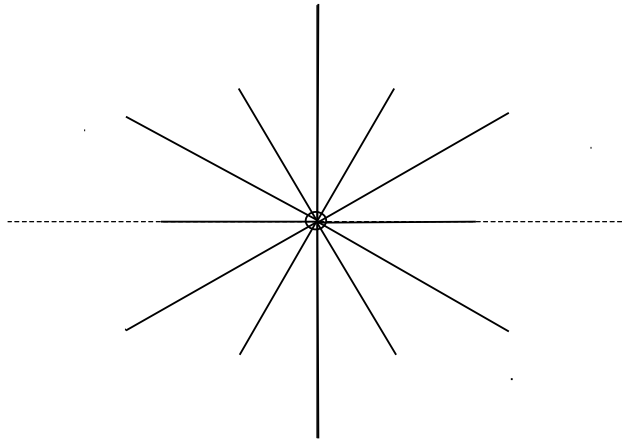


Abbildung 5.3: Wurzelendiagramm der Gruppe G_2

5.7.4 $\theta = 90^\circ$

In diesem Fall erhalten wir keine Auskunft über die Längenverhältnisse, da die Gleichungen für die Skalarprodukte die Form $0 = 0$ annehmen. dagegen sind gegenüberliegende Wurzeln, also mit dem Winkel 180° gleich lang. Diese Gruppe

ist in der Cartan-Klassifikation die Gruppe $D_2 \simeq SO(4)$. Sie zerfällt in zwei unabhängige Lie-Algebren, es gilt $SO(4) \simeq SU(2) \times SU(2)$. Allgemein gilt $D_n \simeq SO(2n)$.

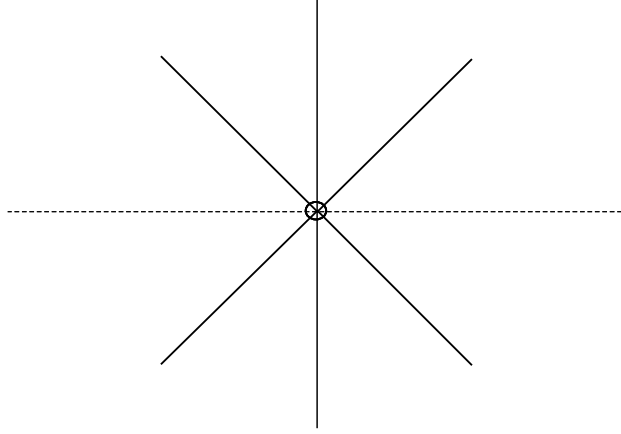


Abbildung 5.4: Wurzeldiagramm der Gruppe $D_2 \simeq SO(4) \simeq SU(2) \times SU(2)$

5.8 Einfache Wurzeln

Wir führen jetzt ein Konzept ein, das es uns erlaubt, die Konstruktion von Darstellungen und von Auf- und Absteigeoperatoren konkret zu formulieren. Wir ordnen unsere Cartan-Algebra durch eine feste Numerierung H_1, H_2, \dots, H_m . Dann definieren wir einen *positiven Gewichtsvektor* $\mu > 0$ als einen Gewichtsvektor $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_m)$ für den die erste nichtverschwindende Komponente positiv ist. Für die adjungierte Darstellung der $SU(3)$ sind das die Gewichte $(1, 0)$, $(1/2, \sqrt{3}/2)$ und $(1/2, -\sqrt{3}/2)$. Für einen negativen Gewichtsvektor ist die erste nicht-verschwindende Komponente negativ, und bei Null-Vektoren haben alle Komponenten den Wert Null. Für zwei Gewichte μ, ν gilt $\mu > \nu$, wenn $\mu - \nu > 0$.

Das *höchste* Gewicht $\bar{\mu}$ in einer Darstellung ist dasjenige, das größer ist als alle anderen $\bar{\mu} > \mu', \mu \neq \bar{\mu}$.

Eine *einfache Wurzel* ist eine Wurzel, die nicht als Summe zweier positiver Wurzeln geschrieben werden kann. So ist für die $SU(3)$ die positive Wurzel $(1, 0)$ nicht einfach, weil sie geschrieben werden kann als $(1/2, \sqrt{3}/2) + (1/2, -\sqrt{3}/2)$. Die anderen beiden Wurzeln positiven Wurzeln sind einfach.

Wenn α und β einfache Wurzeln sind, dann ist $\beta - \alpha$ keine Wurzel. In der Tat ist $(1/2, \sqrt{3}/2) - (1/2, -\sqrt{3}/2) = (\sqrt{3}, 0)$ keine Wurzel. Allgemein geht der

Beweis folgendermaßen: Es sei $\beta - \alpha > 0$ eine Wurzel, dann ist $\beta = \alpha + (\beta - \alpha)$ eine Summe zweier positiver Wurzeln und damit nicht einfach. Ist $\beta - \alpha < 0$ dann ist $\beta + (\alpha - \beta)$ Summe zweier positiver Wurzeln und damit nicht einfach.

Damit folgt

$$E_{-\alpha} |E_{\beta} > \alpha |E_{\beta-\alpha} > = 0 , \quad (5.8.1)$$

da der Zustand auf der rechten Seite keiner existierenden Wurzel entspricht. Das gilt auch für $\alpha \leftrightarrow \beta$. Damit folgt

$$2 \frac{\alpha \cdot \beta}{\alpha^2} = -\frac{1}{2}(p - q) = -\frac{p}{2} \quad (5.8.2)$$

$$2 \frac{\alpha \cdot \beta}{\alpha^2} = -\frac{1}{2}(p' - q') = -\frac{p'}{2} \quad (5.8.3)$$

$$\frac{\alpha^2}{\beta^2} = \frac{p'}{p} . \quad (5.8.4)$$

und schließlich

$$\cos \theta = -\sqrt{mm'} < 0 \quad (5.8.5)$$

$$\frac{\pi}{2} \leq \theta < \pi . \quad (5.8.6)$$

Aus den Eigenschaften der einfachen Wurzeln ergibt sich, daß sie *linear unabhängig* sind und damit eine Basis bilden.

Beweis: Angenommen, es gebe Koeffizienten x_{α} so, daß

$$\sum_{\alpha} x_{\alpha} \alpha = 0 , \quad (5.8.7)$$

nicht alle x_{α} gleich Null. Teile die Wurzeln in zwei Untermengen: Γ_+ für $x_{\alpha} \geq 0$ und Γ_- für $\alpha < 0$. Dann ist

$$y \equiv \sum_{\alpha \in \Gamma_+} x_{\alpha} = \sum_{\alpha \in \Gamma_-} (-x_{\alpha}) \alpha \equiv z . \quad (5.8.8)$$

Hier sind jetzt alle Konstanten größer Null. Damit sind y und z beide positive Wurzeln. Aber es ist

$$y^2 = y \cdot z = \sum_{\alpha \in \Gamma_+} \sum_{\beta \in \Gamma_-} x_{\alpha} x_{\beta} \alpha \cdot \beta \leq 0 , \quad (5.8.9)$$

da alle Vorfaktoren positiv sind und wegen ihrer Eigenschaft als einfache Wurzeln alle $\alpha \cdot \beta \leq 0$. $y^2 \leq 0$ ist offensichtlich ein Widerspruch.

Ebenso zeigt man leicht, daß jede positive Wurzel geschrieben werden kann als

$$\beta = \sum x_{\alpha} \alpha \quad (5.8.10)$$

mit den einfachen Wurzeln α und positiven Koeffizienten x_α .

Die positiven Wurzeln bilden eine Basis von genau m Vektoren, die den gesamten m -dimensionalen Raum der Wurzelvektoren aufspannt, wo m der Rang der Gruppe ist. Da die einfachen Wurzeln selbst m -Vektoren sind, wären sie linear abhängig, wenn es mehr als m gäbe. Weniger als m kann es aber auch nicht geben. Wäre das der Fall, seien also nur $m - 1$, dann könnte man eine Basis aus den einfachen Wurzeln plus weiteren Wurzeln bilden. Zunächst könnte man das Koordinatensystem so wählen, daß alle ersten Komponenten der $(m - 1)$ einfachen Wurzeln verschwinden. In der 1. Dimension kann es keine positive Wurzel geben, denn jede positive Wurzel kann man als Linearkombination der einfachen Wurzeln darstellen; eine Wurzel mit negativer erster Komponente wegen der Reflektionsymmetrie auch nicht. Daher muß die erste Komponente aller Wurzeln verschwinden. Daraus folgt

$$[H_1, E_\phi] = 0 \quad \forall \phi \quad (5.8.11)$$

und damit, daß H_1 mit allen Generatoren der Lie-Algebra kommutiert. Damit gibt es eine abelsche Unterálgebra und die Gruppe ist nicht einfach oder halbeinfach.

5.9 Fundamentale Gewichte und fundamentale Darstellung

Die einfachen Wurzeln seien $\alpha^i, i = 1, \dots, m$. Betrachte eine Darstellung D der Gruppe. $\bar{\mu}$ sei das höchste Gewicht. Es ist dadurch definiert, daß $\bar{\mu} + \phi$ kein Gewicht ist, für alle positiven Wurzeln ϕ , das heißt, daß die Reihe der Gewichte in jeder positiven Richtung abbricht: $E_\alpha | \bar{\mu} \rangle = 0$ für $\alpha > 0$. Da man alle positiven Wurzeln als Linearkombination der einfachen Wurzeln schreiben kann, genügt es zu fordern, daß $\bar{\mu} + \alpha_i$ kein Gewicht ist, für alle einfachen Wurzeln. Das bedeutet, daß

$$2 \frac{\alpha_i \cdot \bar{\mu}}{\alpha^i \cdot \alpha^i} = -(-p^i - q^i) = q^i, \quad (5.9.1)$$

da $p^i = 0$. Da die α^i linear unabhängig sind, bestimmen die q_i das höchste Gewicht $\bar{\mu}$ eindeutig. *Jedes n -tupel von Zahlen $q^i: (q_1, \dots, q_m)$ bestimmt also eine Darstellung D eindeutig.* Die anderen Gewichte können durch Absteigeoperatoren $E_{-\alpha^i}$ ermittelt werden.

Die einfachste Möglichkeit ist, daß nur ein q^i gleich 1 ist und die anderen verschwinden. Also $q^j = \delta^{ij}$. Dann gilt

$$2 \frac{\alpha^j \cdot \bar{\mu}^i}{\alpha^j \cdot \alpha^j} = \delta^{ij}. \quad (5.9.2)$$

Diese Gleichungen, für alle i , definieren einen Satz von Gewichten μ^i , die die höchsten Gewichte in einer der möglichen *fundamentalen Darstellungen* D^i der

Lie-Algebra sind. Alle möglichen höchsten Gewichte irgendwelcher Darstellungen lassen sich als Linearkombination dieser m *fundamentalen Gewichte* darstellen.

Kapitel 6

Die Gruppe SU(3)

6.1 Die fundamentalen Darstellungen von SU(3)

Für die $SU(3)$ haben wir die einfachen Wurzeln

$$\alpha^1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3} \right), \quad \alpha^2 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{3} \right). \quad (6.1.1)$$

Für die fundamentalen Gewichte muß gelten

$$2\bar{\mu}^1 \cdot \alpha^1 = 1, \quad 2\bar{\mu}^1 \cdot \alpha^2 = 0 \quad (6.1.2)$$

$$2\bar{\mu}^2 \cdot \alpha^1 = 0, \quad 2\bar{\mu}^2 \cdot \alpha^2 = 1, \quad (6.1.3)$$

das ist für

$$\bar{\mu}^1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt{3}} \right), \quad \bar{\mu}^2 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2\sqrt{3}} \right). \quad (6.1.4)$$

erfüllt. Die durch das fundamentale Gewicht $\bar{\mu}^1$ definierte Darstellung D^1 ist gerade die *definierende Darstellung* der Gruppe, also die, mit der wir die Gruppe in Abschnitt 5.6 eingeführt hatten. Dieses höchste Gewicht entspricht

$$\frac{1}{2}\lambda_3|\bar{\mu}^1\rangle = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} |\bar{\mu}^1\rangle = \frac{1}{2}|\bar{\mu}^1\rangle \quad (6.1.5)$$

$$\frac{1}{2}\lambda_8|\bar{\mu}^1\rangle = \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} |\bar{\mu}^1\rangle = \frac{1}{2\sqrt{3}}|\bar{\mu}^1\rangle \quad (6.1.6)$$

und damit

$$|u\rangle = |\bar{\mu}^1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (6.1.7)$$

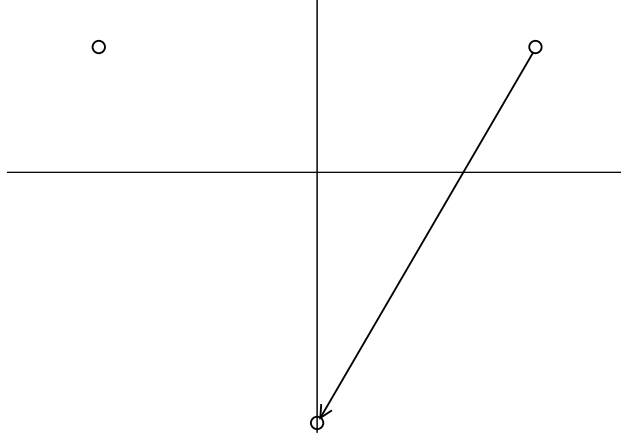


Abbildung 6.1: Gewichtsdiagramm der $3 = (1, 0)$

Im Quark-Modell ist der Eigenwert von $\frac{1}{2}\lambda_3$ die 3-Komponente des Isospins und $\sqrt{3}\lambda_8$ die Hyperladung. Der Zustand entspricht damit dem up-Quark. Wenden wir $E_{-\alpha^1}$ an, so erhalten wir ein Gewicht

$$|s\rangle = \bar{\mu}^1 - \alpha^1 = \left(0, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right). \quad (6.1.8)$$

Da $q^1 = 1$ ist, ist das ein Gewicht, aber $\bar{\mu}^i - 2\alpha$ nicht mehr. Wir können aber E_{α^2} darauf anwenden. Es gilt

$$2 \frac{\alpha^2 \cdot (\bar{\mu}^1 - \alpha^1)}{\alpha^1 \cdot \alpha^1} = 2(\alpha^2 \cdot \mu^1 - \alpha^1 \alpha^2) = -2\alpha^1 \alpha^2 = 1 = q - p. \quad (6.1.9)$$

Aber $p = 0$, weil $\mu - \alpha^1 + \alpha^2$ keine Gewicht ist, da $\alpha^1 - \alpha^2$ keine Wurzel ist. Damit ist $q = 1$ und wir erhalten das weitere Gewicht

$$|d\rangle = \bar{\mu}^1 - \alpha^1 - \alpha^2 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt{3}}\right). \quad (6.1.10)$$

Damit haben wir die gesamte Darstellung D^1 konstruiert, sie wird üblicherweise als die 3-Darstellung bezeichnet. Man kann auch das 2-tupel (q_1, q_2) angeben, was für die Berechnung der Dimension später praktisch ist ¹; dann wäre es die Darstellung $(1, 0)$.

¹Es gilt $N = (q_1 + 1)(q_1 + q_2 + 2)(q_2 + 1)/2$; siehe [Lic70], dort heißen die q_i allerdings p_i

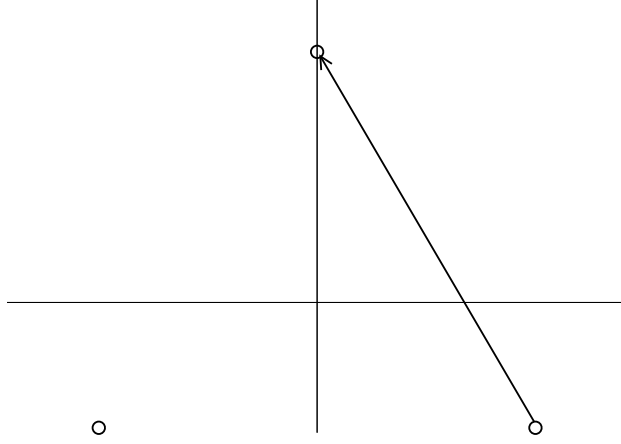


Abbildung 6.2: Gewichtsdiagramm der $\bar{3} = (0, 1)$

Die Darstellung D^2 ist die “Antiquark”-Darstellung. Sie hat die Gewichte:

$$|\bar{\mu}^2 \rangle = |\bar{u} \rangle \rightarrow \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2\sqrt{3}} \right) \quad (6.1.11)$$

$$|\bar{\mu}^2 - \alpha^2 \rangle = |\bar{s} \rangle \rightarrow \left(0, \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \quad (6.1.12)$$

$$|\bar{\mu}^2 - \alpha^2 - \alpha^1 \rangle = |\bar{d} \rangle \rightarrow \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2\sqrt{3}} \right) \quad (6.1.13)$$

Man bezeichnet sie entweder nach ihrer Dimension als $\bar{3}$, oder nach dem höchsten Gewicht als $(0, 1)$.

Die physikalische Bedeutung der sog. Flavor-SU(3) liegt natürlich in dieser Identifikation von Basiszuständen der fundamentalen Darstellungen der Liealgebra mit den Quark- und Antiquarkzuständen. Der Operator $T_3 = \frac{1}{2}\lambda_3$ ist die z-Komponente des Isospins, $T_8 = \frac{1}{2}\lambda_8$ hängt mit der Hyperladung über

$$Y = B + S = \frac{2}{\sqrt{3}}T_8 \quad (6.1.14)$$

zusammen. Die Hyperladung selbst ist definiert durch

$$Q = T_3 + \frac{1}{2}Y. \quad (6.1.15)$$

Für das u Quark hat T_3 den Eigenwert $1/2$ und T_8 den Eigenwert $1/3$, also ist $Q_u = 1/2 + 1/6 = 2/3$, entsprechend ist $Q_d = -1/2 + 1/6 = -1/3$ und $Q_s = 0 - 1/3 = -1/3$. Da u und d die Strangeness 0 haben, haben die Quarks die Baryonenzahl $Y = B = 1/3$.

6.2 Höhere Darstellungen der $SU(3)$

Bei der Konstruktion höherer Darstellungen gehen wir vom höchsten Gewicht aus, das wir als

$$\bar{\mu} = q_1 \bar{\mu}^1 + q_2 \bar{\mu}^2 \quad (6.2.1)$$

durch die fundamentalen Gewichte ausdrücken können. Für die adjungierte Darstellung ist $p = q = 1$. Wir können weiter eine Symmetrie der Wurzeldiagramme auf allgemeine Gewichtsdiagramme übertragen:

Ist μ ein beliebiges Gewicht, dann ist auch

$$\mu - 2\alpha \frac{\alpha \cdot \mu}{\alpha \cdot \alpha} \quad (6.2.2)$$

ein Gewicht, für jede Wurzel α .

Mit μ gehören auch $\mu + k\alpha$ zu den Gewichten, mit $-q \leq k \leq p$. Da p und q positiv sind, ist $-q \leq p - q \leq p$. Aber

$$-(p - q) = 2 \frac{\alpha \cdot \mu}{\alpha \cdot \alpha} . \quad (6.2.3)$$

Daher ist mit $\bar{k} = p - q$ auch

$$\mu + \bar{k}\alpha = \mu - 2\alpha \frac{\alpha \cdot \mu}{\alpha \cdot \alpha} \quad (6.2.4)$$

ein Gewicht. Damit erfüllen die Gewichtsdiagramme die gleiche Reflektionssymmetrie bezüglich der Hyperebenen senkrecht zu den Wurzeln wie die Wurzeldiagramme. Im Fall der $SU(3)$ ist das die Reflektion an der y -Achse und an den Geraden mit Steigungswinkel 150° und 210° . Diese Gruppe von Reflektionen heißt auch die *Weyl-Gruppe der Lie-Algebra*.

Geben wir uns q_1 und q_2 vor, so haben wir nicht nur das höchste Gewicht, sondern wir wissen auch, daß wir höchstens q_1 mal $E_{-\alpha^1}$ und $E_{-\alpha^2}$ darauf anwenden können. Dies bestimmt einen Teil der Berandung des Gewichtsdiagramms, den Rest können wir mithilfe der Weyl-Gruppe konstruieren. Eine weitere wichtige Eigenschaft ist der Umstand, daß alle Zustände, die wir konstruieren können, die Form $E_{-\alpha^1} \dots E_{-\alpha^2} \dots |\bar{\mu} >$ haben, d.h., es kommen nur die $E_{-\alpha^i}$ vor. Einen Operator E_{α^i} könnten wir nach rechts tauschen, bis er, auf $|\bar{\mu} >$ angewandt, Null ergibt. Damit kann es auch keine "Zick-Zack"-Ränder geben und die Gewichtsdiagramme werden konvex.

Betrachten wir die Darstellung $(2, 0)$. Dann ist das höchste Gewicht $\bar{\mu} = (1, 1/\sqrt{3})$. Wir können $E_{-\alpha^2}$ Null mal darauf anwenden. Das heißt, daß das Diagramm vom höchsten Gewicht nach "links oben" keine Fortsetzung hat. Wenn wir $E_{-\alpha^1}$ darauf anwenden, dann erhalten wir die Gewichte $(1/2, -1/(2\sqrt{3}))$ und $(0, -2/\sqrt{3})$. Dies terminiert die Kette nach links unten. Mithilfe der Weylgruppe entsteht ein gleichseitiges Dreieck. Da wir die Punkte jeweils nur durch eine Kombination von $E_{-\alpha^i}$ erreichen können, sind die Zustände nicht entartet. Die

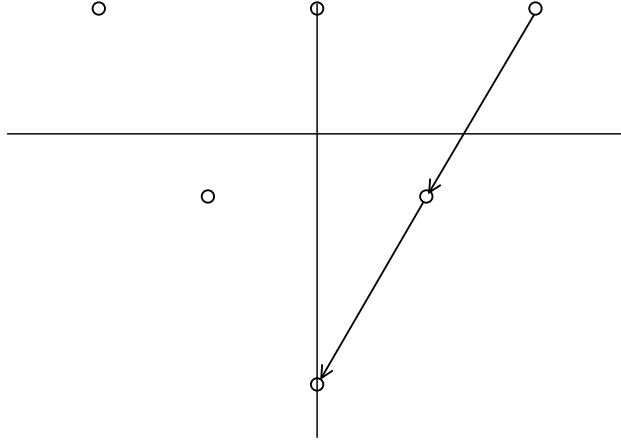


Abbildung 6.3: Gewichtsdiagramm der $6 = (2, 0)$

Darstellung hat 6 Zustände und wird auch als $\bar{6}$ bezeichnet. Analog verfahren wir mit der Darstellung $(0, 2)$, deren Gewichtsdiagramm sich als Spiegelbild an der x -Achse aus der $(2, 0)$ Darstellung ergibt, sie heißt $\bar{6}$.

Bei der Darstellung $(1, 1)$ ist das höchste Gewicht $\bar{\mu} = (1, 0)$. Da $q^1 = q^2 = 1$ können wir die Operatoren $E_{-\alpha^i}, i = 1, 2$ jeweils genau einmal anwenden, bevor die Kette abbricht. Wir erreichen damit die Gewichte $(1/2, \mp 1/2\sqrt{3})$ und mit den Weyl-Reflektionen eine gleichseitiges Sechseck. Das ist offensichtlich die äußere Kontur der adjungierten Darstellung. Einen Zustand mit Gewicht $(0, 0)$ können wir auf zwei verschiedene Arten erreichen: $E_{-\alpha^1} E_{-\alpha^2} |\bar{\mu} >$ und $E_{-\alpha^1} E_{-\alpha^2} |\bar{\mu} >$. Man kann leicht zeigen, daß beide linear unabhängig sind. Das Gewicht $(0, 0)$ ist also zweifach entartet.

Die allgemeine Regel für die Entartung ist, ohne Beweis:

Die Entartung nimmt mit jeder "Schicht" nach innen jeweils um eine Einheit zu, solange die Kontur hexagonal ist. Wird sie trigonal, dann ändert sich die Entartung nach innen nicht mehr

Wir geben noch einige weitere Beispiele an:

Die Darstellung $(3, 0)$ hat das höchste Gewicht $(3/2, \sqrt{3}/2)$ und hat von dort aus wie bei der $(2, 0)$ keine Fortsetzung nach "links oben". Nach rechts unten ergeben sich die Gewichte $(1, 0)$, $(1/2, -\sqrt{3}/2)$ und $(0, -\sqrt{3})$. Mit der Weyl-Symmetrie ergibt sich für die äußere Kontur ein gleichseitiges Dreieck. Nach Innen gibt es das Gewicht $(0, 0)$, das einfach entartet ist, da die äußere Kontur bereits trigonal ist. Die Darstellung hat damit die Dimension 10 Diese Darstellung ist diejenige, die im Quarkmodell die Resonanzen $\Omega(I = 0), \Xi^*(I = 1/2), \Sigma^*(I = 1)$ und $\Delta(I = 3/2)$ mit den Massen

Eine Darstellung, die im direkten Produkt 8×8 auftaucht ist die $27 = (2, 2)$.

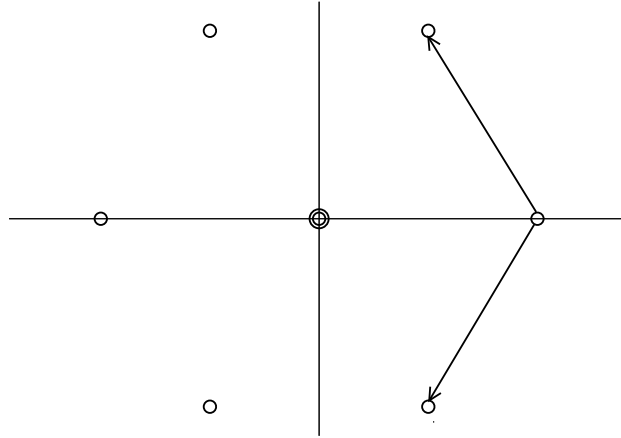


Abbildung 6.4: Gewichtsdiagramm der $8 = (1, 1)$

6.3 Reelle und komplexe Darstellungen

Wir haben eine Reihe von Darstellungen kennengelernt und gesehen, daß manche Darstellungen in Multiplizitätspaares 3 und $\bar{3}$, 6 und $\bar{6}$ auftreten, andere aber nicht, so gibt es keine $\bar{8}$. Die ersteren hängen miteinander zusammen, daß man (q^1, q^2) durch (q^2, q^1) ersetzt. Es ist zu klären, was es damit auf sich hat.

Wir stellen zunächst fest: sind T_a die Generatoren der Lie-Algebra in einer gegebenen Darstellung, erfüllen sie also

$$[T_a, T_b] = if_{abc}T_c, \quad (6.3.1)$$

dann erfüllen auch die Matrizen $-T_a^*$ diese Vertauschungsrelationen. Hier bezeichnet der Stern die komplexe Konjugation, *nicht* die hermitesche Konjugation. Man nennt diese Darstellung die *konjugierte Darstellung*.

Ein einfaches Beispiel sind die Pauli-Matrizen, $-\sigma_x, \sigma_y, -\sigma_z$ erfüllen die gleichen Vertauschungsrelationen wie $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$. Diese beiden Darstellungen sind allerdings unitär äquivalent. Die Basistransformation ist $|\uparrow\rangle \rightarrow -|\downarrow\rangle$ und $|\downarrow\rangle \rightarrow |\uparrow\rangle$ und wird durch $i\sigma_y$ vermittelt. Diese Konjugation tritt beim Übergang von Teilchen zu Antiteilchen auf und impliziert gewisse Änderungen in den Phasenkonventionen. So hat der Zustand $(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle)/\sqrt{2}$ den Spin Null, aber der Quark-Antiquarkzustand mit Isospin Null ist $(|u\bar{u}\rangle + |d\bar{d}\rangle)/\sqrt{2}$.

Im Falle der $SU(3)$ und ganz allgemein sind die entsprechenden Darstellungen nicht mehr äquivalent. Allgemein bezeichnen wir eine Darstellung als *reell*, wenn sie zu ihrer konjugierten äquivalent ist, andernfalls als *komplexe Darstellung*.

Die Cartan-Generatoren H_i gehen in $-H_i^*$ über. Die Eigenwerte der H_i sind die Gewichte, und die sind reell. Also gibt es zu jedem Gewicht μ , Eigentupel der

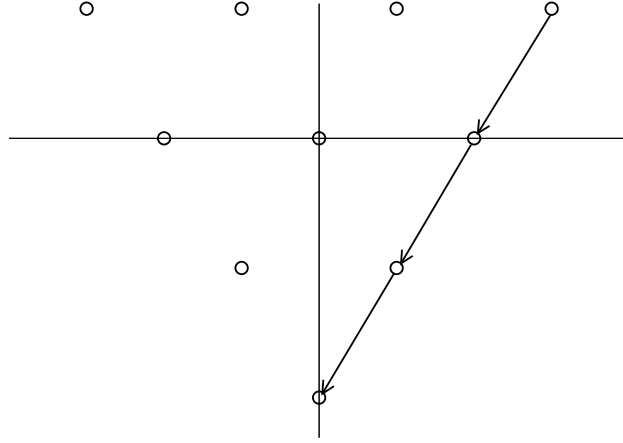


Abbildung 6.5: Gewichtsdiagramm der $10 = (2, 0)$

H_i , in der konjugierten Darstellung das Gewicht $-\mu$ als Eigentupel von $-H_i^*$. Das Gewichtsdiagramm der konjugierten Darstellung ist also das Spiegelbild an der x -Achse der ursprünglichen Darstellung. Ist das Gewichtsdiagramm bereits symmetrisch zur x -Achse, so sind die Darstellungen reell. Das gilt für die adjungierte Darstellung $8 = \bar{8} = (1, 1)$. Dagegen sind die Darstellungen $3 = (1, 0)$, $\bar{3} = (0, 1)$, $6 = (2, 0)$ und $\bar{6} = (0, 2)$ komplexe Darstellungen.

Auch im Fall der $SU(3)$ ist der Übergang zur konjugierten Darstellung verknüpft mit dem Übergang von Teilchen zu Antiteilchen. Um alle Ladungen umzukehren, müssen wir allerdings nicht nur an der x -Achse, sondern auch an der y -Achse spiegeln. Das ist aber eine Weyl-Konjugation und man bleibt damit innerhalb der Darstellung.

6.4 Direkte Produkte I: Auswahlregeln

Wie bei der Drehgruppe können wir auch bei der $SU(3)$ direkte Produkte von Darstellungen bilden. Diese Notwendigkeit tritt insbesondere auf, wenn man z.B. zwei Baryonen aus dem Baryon-Oktett an Vektor- oder Pseudoskalare Mesonen aus den jeweiligen Oktetts koppeln will, oder wenn man Quarks mit ihrer Farbladung an Gluonen koppeln will. Hierzu gibt es verschiedene Ansätze, über Clebsch-Gordan-Koeffizienten, aber auch über Spurbildung von Matrizen und pragmatische Überlegungen. Welchen Zugang man wählt, hängt von der genauen Aufgabe ab.

Eine zweite Konstruktion von direkten Produkten ist prinzipieller Art: man versucht, Mehrteilchenzustände aus den fundamentalen identischen Bausteinen

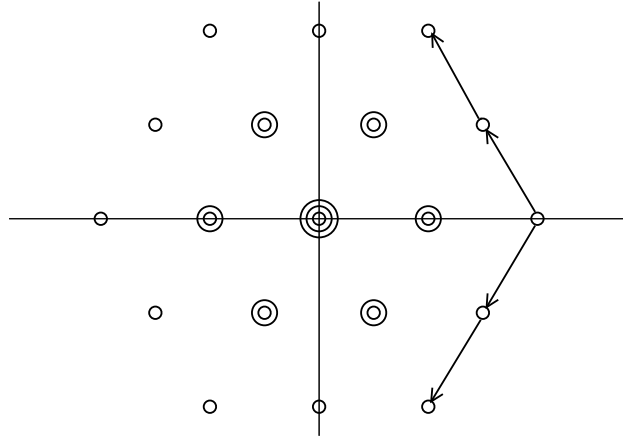


Abbildung 6.6: Gewichtsdiagramm der $27 = (2, 2)$

zu bilden. Hier spielt die Symmetrisierung bzw. Antisymmetrisierung eine besondere Rolle.

Betrachten wir zunächst den einfachsten Zugang: Bei der $SU(2)$ konnte man ja schon einige Schlüsse aus der Tatsache ziehen, daß sich eine Darstellung $j_1 \times j_2$ ausreduzieren ließ in irreduzible Darstellungen $-|j_1 - j_2| \leq j_3 \leq j_1 + j_2$. Daraus ergaben sich bereits wichtige Auswahlregeln. Wenn man dann ins Detail gehen will, muß man natürlich die Clebsch-Gordan-Koeffizienten ausrechnen. Diese gibt es auch für die $SU(3)$.

Die möglichen Zustände der Produktdarstellung ergeben sich aus der Addition der Gewichte der Einzeldarstellungen. Tritt ein Gewicht μ der Produktdarstellung $D_1 \times D_2$ als Summe zweier Gewichte $\mu_1 + \mu_2$ der einzelnen Darstellungen D_1 und D_2 mehrfach auf, so entspricht seine Entartung der Summe aller Entartungen in den Einzeldarstellungen, die auf dieselbe Summe führen. Auf diese Weise erhält man zunächst ein Gewichts- und Entartungsdiagramm der Produktdarstellung.

Will man herausfinden, was in einer Produkt-Darstellung “steckt”, dann kann man zunächst mit dem höchsten Gewicht beginnen, das die Darstellung maximaler Dimension bestimmt. Entfernt man diese, wobei man sich vorstellt, man hätte für die innen gelegenen, mehrfach entarteten Zustände bereits geeignete Basis gewählt, dann bleiben i.a. einige Zustände übrig. Deren höchstes Gewicht bestimmt dann die nächsthöheren Darstellungen im direkten Produkt. Ist diese verbleibende höchste Gewicht mehrfach entartet, so tritt auch die entsprechende Darstellung mehrfach auf. Diese wird/werden wiederum entfernt und man führt dieses Schema weiter fort. Bei der Anwendung des Schemas ist es zwachmäßig, wenn man die zu erwartenden irreduzibeln Darstellungen schon kennt.

Beispiele:

3×3

Es ergeben sich die Gewichte $(1, 1/\sqrt{3})$, $(0, 1/\sqrt{3})$, $(-1, 1/\sqrt{3})$, $(1/2, -1/2\sqrt{3})$, $(-1/2, -1/2\sqrt{3})$ und $(0, -2/\sqrt{3})$. Die Gewichte $(0, 1/\sqrt{3})$, $(1/2, -1/2\sqrt{3})$ und $(-1/2, -1/2\sqrt{3})$ sind zweifach entartet, da sie sich auf zweifache Weise kombinieren lassen. Das höchste Gewicht ist offensichtlich $(1, 1/\sqrt{3})$. Das ist das höchste Gewicht der Darstellung $6 = (2, 0)$. Die Gewichte der 6-Darstellung sind alle einfach entartet. Nach Entfernung dieser Gewichte verbleiben je ein Gewicht $(0, 1/\sqrt{3})$, $(1/2, -1/2\sqrt{3})$ und $(-1/2, -1/2\sqrt{3})$. Das sind gerade die Gewichte der $\bar{3}$ Darstellung. Es ist also

$$3 \times 3 = 6 + \bar{3} . \quad (6.4.1)$$

Um die Clebsch-Gordan-Koeffizienten zu erhalten, müssten wir wie bei der Dreh-

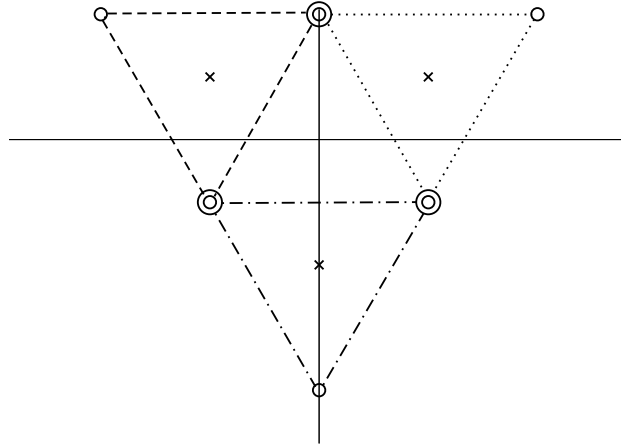


Abbildung 6.7: Das Produkt 3×3 . Die verschiedenen Linien markieren das “zweite” Triplet in drei Positionen, die sich durch Verschiebung jeweils um die Gewichte des “ersten” Triplets ergeben, die als Kreuze markiert sind.

gruppe vorgehen, Leiter-Operatoren auf die Produktzustände anwenden und entartete Zustände geeignet orthogonalisieren.

$3 \times \bar{3}$

Das höchste Gewicht ist $(1, 0)$ und wir stellen leicht fest, daß sich alle Zustände der 8-Darstellung ergeben. Allerdings ist der Zustand $(0, 0)$ dreifach entartet, da alle drei Gewichte der 3 sich mit den konjugierten Gewichten zu 0 addieren. Nach “Entnahme” des Oktetts verbleibt also ein Gewicht $(0, 0)$. Das ist gerade die triviale Darstellung. Also ist

$$3 \times \bar{3} = 8 + 1 . \quad (6.4.2)$$

Das bedeutet, daß sich Quark und Antiquark an das Gluon-Oktett koppeln lassen, aber auch daß sie an ein Farbsinglett koppeln können; solche Singletts sind die Lagrangefunktion $\bar{q}(-i\gamma \cdot \partial + m)q$, das Higgsteilchen etc..

$$3 \times 6$$

Die 6-Darstellung tritt zwar im Quarkmodell nicht in offensichtlicher Weise auf, aber zwei Quarks treten als Untereinheit in einem 3-Quark-Zustand auf und können, wie oben gesehen, in einem 6-Zustand sein. Das höchste Gewicht ist $(3/2, \sqrt{3}/2)$, und das ist das höchste Gewicht der 10-Darstellung. Abzählen der Entartungen ergibt, daß nach Entfernen der 10 ein Oktett verbleibt. Damit ist

$$3 \times 6 = 10 + 8 \quad (6.4.3)$$

und außerdem

$$3 \times 3 \times 3 = 3 \times (6 + \bar{3}) = 10 + 8 + 8' + 1. \quad (6.4.4)$$

Wir wissen, daß die bekannten Baryonen als Dekuplett und als Oktett auftreten, eine der Oktett-Darstellungen und die Singlett-Darstellung sind offensichtlich nicht realisiert; das hängt mit der Fermi-Dirac-Statistik zusammen.

$$8 \times 8$$

Das direkte Produkt 8×8 tritt bei Meson-Baryon-Kopplungen auf, auch bei Gluon-Kopplungen. Da wir zwei $(1, 1)$ Kopplungen kombinieren, ist das höchste Gewicht in der Produktdarstellung $(2, 2)$. Das entspricht der 27-Darstellung. Die weitere Reduktion ergibt

$$8 \times 8 = 27 + 10 + \bar{10} + 8 + 8' + 1 \quad (6.4.5)$$

6.5 Direkte Produkte II: Oktett-Oktett-Kopplungen

In der Flavor-SU(3) spielen naturgemäß neben den Quarks die Mesonen und Baryonen eine besondere Rolle. Diese treten in Oktetts und Dekupletts auf. Die niedrigsten Mesonen und Baryon-Zustände sind das $J^P = 0^-$ Meson-Oktett, das 1^- Vektormeson-Oktett und das $\frac{1}{2}^+$ Baryonoktett.

Man kann die Zuordnung von Generatoren und Zuständen in der adjungierten Darstellung benutzen, um die Baryonen in der Form

$$\mathbf{B} = \sum B_i \lambda^i \quad (6.5.1)$$

darzustellen, und ebenso die anderen genannten Teilchen. Explizit sieht das dann so aus:

$$\mathbf{B} = \left\{ \begin{array}{ccc} \frac{1}{\sqrt{2}}\Sigma^0 + \frac{1}{\sqrt{6}}\Lambda^0 & \Sigma^+ & p \\ \Sigma^- & -\Sigma^0 + \frac{1}{\sqrt{6}}\Lambda^0 & n \\ \Xi^- & \Xi^0 & -\frac{2}{\sqrt{6}}\Lambda^0 \end{array} \right\}, \quad (6.5.2)$$

ebenso

$$\mathbf{P} = \left\{ \begin{array}{ccc} \frac{1}{\sqrt{2}}\pi^0 + \frac{1}{\sqrt{6}}\eta_8^0 & \pi^+ & K^+ \\ \pi^- & -\frac{1}{\sqrt{2}}\pi^0 + \frac{1}{\sqrt{6}}\eta^0 & K^0 \\ K^- & \bar{K}^0 & -\frac{2}{\sqrt{6}}\eta_8^0 \end{array} \right\}, \quad (6.5.3)$$

wobei der Index 8 bei η_8^0 andeutet, daß dies nicht das physikalische η -Teilchen ist, welches mit einem Singlett η_1^0 zu dem physikalischen η und einem Teilchen höherer Masse, dem η' mischt.

Der Massenterm (hier ohne elektromagnetische Brechung) kann im Prinzip Anteile aller in $8 \times 8 = 27 + 10 + \bar{10} + 8 + 8' + 1$ vorkommenden Darstellungen haben, solange diese einen Zustand mit $I = Y = 0$ haben. Das ist für die 27, die beiden 8 und die 1 der Fall. *Kommt die 27 nicht vor* (das ist eine Hypothese, die von den Fakten bestätigt wird und sich im eigentlichen Quarkmodell direkt ergibt), dann kann der Massenterm aus einem trivialen Teil bestehen, der $SU(3)$ -symmetrisch ist (die 1) und zwei mögliche Oktettanteile.

Man kann dann auf zwei Arten die beiden Baryofelder mit einem Oktett-Massenoperator verbinden

$$\mathcal{H}_1 = \Delta M_1 \text{tr} B^\dagger B \frac{1}{2} \lambda_8 \quad (6.5.4)$$

$$\mathcal{H}_2 = \Delta M_2 \text{tr} B^\dagger \frac{1}{2} \lambda_8 B. \quad (6.5.5)$$

Zusätzlich gib es den Singletterm

$$\mathcal{H}_I = M_0 \text{tr} B^\dagger B. \quad (6.5.6)$$

Wir erhalten

$$M_N = M_0 - \frac{1}{6}\Delta M_1 + \frac{1}{12}\Delta M_2 \quad (6.5.7)$$

$$M_\Sigma = M_0 + \frac{1}{12}\Delta M_1 + \frac{1}{12}\Delta M_2 \quad (6.5.8)$$

$$M_\Lambda = M_0 - \frac{1}{12}\Delta M_1 - \frac{1}{12}\Delta M_2 \quad (6.5.9)$$

$$M_\Xi = M_0 + \frac{1}{12}\Delta M_1 - \frac{1}{6}\Delta M_2 \quad (6.5.10)$$

Man erhält daraus

$$2(M_N + M_\Xi) = 3M_\Lambda + M_\Sigma, \quad (6.5.11)$$

die Gell-Mann-Okubo-Massenformel.

6.6 Direkte Produkte III: zwei- und drei-Quark-Zustände

Eine prinzipiellere Herangehensweise an die Darstellungen ist deren Konstruktion aus den fundamentalen Darstellungen als n -faches direktes Produkt. Dabei

werden die Darstellungen ausreduziert, indem man ihre Symmetrieeigenschaften benutzt. Für die $SU(N)$ -Gruppen reduziert man so die Darstellungen völlig aus.

Das Vorgehen soll zunächst pragmatisch für einfache Fälle eingeführt werden, bevor wir es formalisieren. Betrachten wir dazu das Produkt 3×3 . Der höchste Zustand kann als $u(1)u(2)$ geschrieben werden und ist offensichtlich symmetrisch unter der vertauschen $1 \leftrightarrow 2$. Wenden wir darauf irgendwelche Absteigeoperatoren $E_{-\alpha}$ an, so ergibt sich

$$E_{-\alpha}(u(1)u(2)) = (E_{-\alpha}u(1))u(2) + u(1)E_{-\alpha}u(2) \quad (6.6.1)$$

und ist wieder symmetrisch. Es ergeben sich so die normierten Zustände $(u(1)d(2) + d(1)u(2))/\sqrt{2}$, $d(1)d(2)$, $(u(1)s(2) + s(1)u(2))/\sqrt{2}$, $s(1)s(2)$ und $(d(1)s(2) + s(1)d(2))/\sqrt{2}$. Diese bilden gerade die 6-Darstellung. Es verbleiben die Zustände $(u(1)d(2) - d(1)u(2))/\sqrt{2}$, $(u(1)s(2) - s(1)u(2))/\sqrt{2}$ und $(d(1)s(2) - s(1)d(2))/\sqrt{2}$. Wendet man zB $T_{1-i2} = I_-$ auf $(u(1)s(2) - s(1)u(2))/\sqrt{2}$ an, so ergibt sich

$$\begin{aligned} & T_{1-i2}(u(1)s(2) - s(1)u(2))/\sqrt{2} \\ &= (T_{1-i2}u(1))s(2) + u(1)(T_{1-i2}s(2)) - (T_{1-i2}s(1))u(2) - s(1)(T_{1-i2}u(2))/\sqrt{2} \\ &= (d(1)s(2) - s(1)d(2))/\sqrt{2} , \end{aligned} \quad (6.6.2)$$

da $T_{1-i2}s = 0$ und $T_{1-i2}u = d$. Auch diese Zustände bleiben unter der Operation der Auf- und Absteigeoperatoren und insgesamt unter der Anwendung irgendwelcher Generatoren "unter sich". Sie bilden eine $\bar{3}$ -Darstellung. Offensichtlich kann man zuordnen

$$(u(1)d(2) - d(1)u(2))/\sqrt{2} \rightarrow \bar{s} \quad (6.6.3)$$

$$(u(1)s(2) - s(1)u(2))/\sqrt{2} \rightarrow \bar{d} \quad (6.6.4)$$

$$(d(1)s(2) - s(1)d(2))/\sqrt{2} \rightarrow \bar{u} , \quad (6.6.5)$$

was man mit einem Tensor ϵ_{ijk} formalisieren kann.

Wir sehen zwei Dinge:

- Produktzustände, die eine Symmetrie unter der Permutationsgruppe, hier S_2 , realisieren, bilden eine Darstellung der $SU(3)$.
- Die Symmetrisierung bzw. Antisymmetrisierung genügt, um das direkte Produkt vollständig auszureduzieren
- Die zweite fundamentale Darstellung tritt im direkten Produkt von zwei ersten Fundamentaldarstellungen auf.

Diese Eigenschaften übertragen sich mutatis mutandis auf alle Gruppen $SU(N)$ und auf alle höheren Tensorprodukte aus einer der fundamentalen Darstellungen.

Wir führen eine Notation ein, die wir im nächsten Kapitel formalisieren werden: Für die symmetrischen Kombinationen verwenden wir das Symbol

$$\boxed{}\boxed{} \leftrightarrow 6, \quad (6.6.6)$$

für die antisymmetrische Kombination das Symbol

$$\begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array} \leftrightarrow \bar{3} \quad (6.6.7)$$

Legen wir eine Numerierung fest $u \rightarrow 1, d \rightarrow 2, s \rightarrow 3$, dann können wir alle symmetrischen Zustände in der Form

$$\boxed{1}\boxed{1}, \boxed{1}\boxed{2}, \boxed{1}\boxed{3}, \boxed{2}\boxed{2}, \boxed{2}\boxed{3}, \boxed{3}\boxed{3} \quad (6.6.8)$$

angeben, die antisymmetrischen in der Form

$$\begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array}. \quad (6.6.9)$$

Fahren wir fort, indem wir eine weiter fundamentale Darstellung hinzunehmen. Wir können offensichtlich wieder die vollständig symmetrischen Zustände bilden, beginnend mit $u(1)u(2)u(3)$. Da sich alle Operatoren der Liealgebra distributiv verteilen, bleiben diese Zustände wieder unter sich. Wenden wir $I_- = \frac{1}{2}\lambda_{1-i2}$ an, dann erhalten wir $(duu + udu + uud)/\sqrt{3}$ etc., wenden wir $U_- = \frac{1}{2}\lambda_{4-i5}$ an, dann erhalten wir $(suu + usu + uus)/\sqrt{3}$ usw.. Das sind gerade die Zustände der 10 aus $3 \times 3 \times 3$. Wir symbolisieren das als

$$\boxed{}\boxed{}\boxed{} \leftrightarrow 10 \quad (6.6.10)$$

Wir können das allgemeine Vorgehen so schreiben:

$$\boxed{} \times \boxed{} = \boxed{}\boxed{} + \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \\ \hline \end{array} \quad (6.6.11)$$

$$\boxed{} \times \boxed{} \times \boxed{} = (\boxed{}\boxed{} + \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \\ \hline \end{array}) \times \boxed{} \quad (6.6.12)$$

Wir müssen jetzt aber noch eine Regel finden, wie wir $\boxed{}\boxed{}$ und $\begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \\ \hline \end{array}$ mit einer weiteren Darstellung "multiplizieren". Ist ein Zweiteilchenzustand in den beiden Ortsargumenten symmetrisch, dann können wir eine weiteres Teilchen so dazufügen, daß es ebenfalls symmetrisch mit den beiden anderen Ortsargumenten auftritt, oder wir können die antisymmetrische Kombination mit diesen Argumenten bilden. Das sieht dann so aus

$$(\boxed{}\boxed{}) \times \boxed{} = \boxed{}\boxed{}\boxed{} + \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \\ \hline \end{array} \quad (6.6.13)$$

Analog können wir $\begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix}$ mit einem weiteren Zustand symmetrisieren oder antisymmetrisieren und erhalten

$$\begin{pmatrix} \square \\ \square \end{pmatrix} \times \square = \begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \end{smallmatrix} + \begin{smallmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{smallmatrix} . \quad (6.6.14)$$

Vergleichen wir mit der Ausreduktion $3 \times 3 \times 3 = 10 + 8 + 8 + 1$ so haben wir die Zuordnungen

$$\begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \end{smallmatrix} \leftrightarrow 8 \quad (6.6.15)$$

$$\begin{smallmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{smallmatrix} . \quad (6.6.16)$$

Wir machen uns leicht klar, daß sich der vollständig antisymmetrische Zustand nur auf eine Weise realisieren läßt, so daß er das Singlett bildet.

Kapitel 7

Tensormethoden und Young-Tableaux

7.1 Tensoren und Permutationen

Wir betrachten eine Produktdarstellung aus n identischen Darstellungen D , wobei wir insbesondere an eine der fundamentalen Darstellungen einer Gruppe denken. Ein solches n -faches Tensorprodukt können wir als

$$|\nu_1, \dots, \nu_n\rangle = |\nu_1, D\rangle \cdots |\nu_n, D\rangle. \quad (7.1.1)$$

Hier stellen die $\nu_i, i = 1, D$ eine geeignete Numerierung der Zustände dar, wo wir mit D gleichzeitig die Dimension der Darstellung bezeichnen. Dann wirkt ein Element der Lie-Gruppe in der Form

$$g|\nu_1, \dots, \nu_n\rangle = (g|\nu_1, D\rangle)g|\nu_2, D\rangle \cdots g|\nu_n, D\rangle. \quad (7.1.2)$$

Das können wir in der Form

$$g|\nu_1, \dots, \nu_n\rangle = |\nu'_1, D\rangle |\nu'_2, D\rangle \cdots |\nu'_n, D\rangle \prod_i \mathcal{D}^D(g)_{\nu'_i \nu_i} \quad (7.1.3)$$

schreiben. Die Darstellungsmatrix für die Produktdarstellung ist also

$$\mathcal{D}(g)^{D \times D \cdots D}_{\nu'_1 \nu'_2 \dots \nu'_n; \nu_1 \nu_2 \dots \nu_n} = \prod_i \mathcal{D}^D(g)_{\nu'_i \nu_i} \quad (7.1.4)$$

Betrachten wir eine Permutation der Zustände $|\nu_i, D\rangle, i = 1, \dots, n$ mit einem Element $p \in S_n$:

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix} \quad (7.1.5)$$

Dann gilt offensichtlich

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(g)^{D \times D \cdots \times D}_{\nu'_{p_1} \nu'_{p_2} \dots \nu'_{p_n}; \nu_{p_1} \nu_{p_2} \dots \nu_{p_n}} &= \prod_i \mathcal{D}^D(g)_{\nu'_{p_i} \nu_{p_i}} \\ \prod_i \mathcal{D}^D(g)_{\nu'_i \nu_i} &= \mathcal{D}(g)^{D \times D \cdots \times D}_{\nu'_1 \nu'_2 \dots \nu'_n; \nu_1 \nu_2 \dots \nu_n} . \end{aligned} \quad (7.1.6)$$

Das bedeutet, daß die Darstellung $D \times D \cdots \times D$ die Symmetrie unter p erhält. Es hat zur Konsequenz, daß die irreduziblen Anteile des Tensorprodukts gleichzeitig auch irreduzible Darstellungen der symmetrischen Gruppe S_n sind. Für die $SU(N)$ -Gruppen ist es sogar so, daß die irreduziblen Darstellungen der S_n das Tensorprodukt vollständig ausreduziert, d.h., daß es genügt, die irreduziblen Anteile bezüglich S_n zu finden, um die Darstellung vollständig auszuredizieren.

Bezüglich der Gruppe S_n bilden die Tensorzustände ein System von $n!$ Zuständen, die den $n!$ möglichen Anordnungen der Indizes ν_1, \dots, ν_n entsprechen. Dies ist gerade die *reguläre* Darstellung von S_n . Sie ist reduzibel, und ihre Ausreduktion ist es, die wir betrachten müssen. Wir folgen dabei der Darstellung in dem Buch von Wu-Ki Tung [Tun85].

7.2 Symmetrisierer und Antisymmetrisierer

Der *Symmetrisierer* s_n der symmetrischen Gruppe S_n ist definiert als

$$s_n = \frac{1}{n} \sum_{p \in S_n} p , \quad (7.2.1)$$

der *Antisymmetrisierer* a_n von S_n ist definiert als

$$a_n = \frac{1}{n!} \sum_{p \in S_n} \text{sign}(p) p . \quad (7.2.2)$$

Obwohl Summen von Gruppenelementen nicht zur Gruppe gehören, so sind sie doch in den linearen Darstellungen definiert. Hier und im folgenden betrachten wir die Wirkung dieser Summen auf Elemente p der Gruppe, befinden uns also in der regulären Darstellung.

Für alle $p \in S_n$ gilt

$$s_n p = p s_n = s_n \quad (7.2.3)$$

$$a_n p = p a_n = a_n \text{sign}(p) \quad (7.2.4)$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
a_n p &= \frac{1}{n!} \sum_{q \in S_n} \text{sign}(q) qp = \frac{1}{n!} \sum_{q \in S_n} \text{sign}(q) \text{sign}(p) \text{sign}(p) qp & (7.2.5) \\
&= \frac{1}{n!} \text{sign}(p) \sum_{qp \in S_n} \text{sign}(qp) qp = \text{sign}(p) a_n .
\end{aligned}$$

Dabei wurde das Umordnungstheorem benutzt. Entsprechend beweist man die anderen Identitäten.

Es folgt, daß $s_n^2 = s_n$ und $a_n^2 = a_n$.

Beweis:

$$a_n^2 = a_n \frac{1}{n!} \sum_{p \in S_n} \text{sign}(p) p = \frac{1}{n!} \sum_{p \in S_n} a_n \text{sign}^2(p) = \frac{1}{n!} n! a_n = a_n . \quad (7.2.6)$$

Der Symmetrisierer und der Antisymmetrisierer sind also Projektionsoperatoren.

7.3 Young-Tableaux

Young-Diagramm, Partition

Unter der *Zerlegung* λ einer natürlichen Zahl n versteht man die geordnete Menge $[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r]$ mit $\sum_{i=1}^r \lambda_i = n$ und $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_r$. Eine Zerlegung λ wird durch ein *Young-Diagramm* graphisch dargestellt, eine Anordnung von n Kästchen in r Reihen, wobei die i -te Reihe λ_i Kästchen enthält. Beispiele für $n = 3$:

$$\begin{array}{ll}
\lambda = [3] & \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \\
\lambda = [2, 1] & \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \\
\lambda = [1, 1, 1] & \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}
\end{array} \quad (7.3.1)$$

Für $n = 4$:

$$\begin{array}{ll}
 \lambda = [4] & \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & & \\ \hline \end{array} \\
 \lambda = [3, 1] & \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array} \\
 \lambda = [2, 2] & \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} \\
 \lambda = [2, 1, 1] & \begin{array}{|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} \\
 \lambda = [1, 1, 1, 1] & \begin{array}{|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array}
 \end{array} \tag{7.3.2}$$

Young-Tableau, Normal-Tableau, Standardtableau

1. Ein *Young-Tableau* erhält man, indem man die Zahlen $1, \dots, n$ auf die Kästchen eines Young-Diagramms verteilt.
2. Ein *normales Young-Tableau* ist eines, in dem die Zahlen $1, \dots, n$ von links nach rechts und von oben nach unten in der natürlichen Reihenfolge auftreten.
3. Ein *Standard-Tableau* ist ein Tableau, bei dem die Zahlen von in jeder Zeile zunehmen und in jeder Spalte von oben nach unten zunehmen.

Beispiele:

Normal-Tableaus:

1	2	3	1	2
4			3	4

Standard-Tableaus:

1	2	4	1	3
3			2	4

Wir werden ein Normaltableau mit Θ_λ bezeichnen, wo λ die Partition kennzeichnet. Ein beliebiges Tableau Θ_λ^p erhält man dann durch Anwendung einer Permutation p auf das Normaltableau symbolisch $\Theta_\lambda^p = p\Theta_\lambda$.

7.4 Symmetrisierer und Antisymmetrisierer von Young-Tableaus

Horizontale und vertikale Permutationen

Für ein gegebenes Young-Tableau Θ_λ^p definieren wir die horizontalen Permutationen $\{h_\lambda^p\}$ als diejenigen, die die horizontalen Mengen von Zahlen auf sich abbilden, die in der gleichen Zeile von Θ_λ^p erscheinen. Entsprechend definieren wir die vertikalen Permutationen $\{v_\lambda\}$ als diejenigen, die die Zahlen aufeinander abbilden, die in der gleichen Spalte von Θ_λ^p erscheinen.

Symmetrisierer, Antisymmetrisierer, Irreduzible Symmetrisierer

Wir definieren den Symmetrisierer s_λ^p als

$$s_\lambda^p = \sum_h h_\lambda^p, \quad (7.4.1)$$

den Antisymmetrisierer als

$$a_\lambda^p = \sum_v \text{sign} v_\lambda^p v_\lambda^p \quad (7.4.2)$$

und den irreduziblen Symmetrisierer oder Young-Symmetrisierer als

$$e_\lambda^p = \sum_{h,v} \text{sign} v_\lambda^p h_\lambda^p v_\lambda^p. \quad (7.4.3)$$

Betrachten wir die Normaltableaus von S_3 , so haben wir

$\Theta_1 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline \end{array}$: $\{h_\lambda\} = \{p\}$, die Menge aller Permutationen, $\{v_\lambda\} = e$ besteht nur aus dem Einheitsselement. Daher ist $s_1 = \sum_p p = s$, $a = e$ und $e - 1 = a_1 s_1 = s$, wo s der Symmetrisierer der gesamten Gruppe ist.

$\Theta_2 = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array}$: hier ist $\{h_\lambda\} = \{e, (12)\}$, $\{v_\lambda\} = \{e, (23)\}$. Also ist $s_2 = e + (12)$, $a_2 = e - (31)$ und $s_2 = e + (12) - (31) - (321)$.

Um sich diese Aussagen in der normalen Form einer linearen Darstellung klarzumachen, extrahieren wir aus der Multiplikationstabelle in Abschnitt 2.2.3 die entsprechende Matrixdarstellung. Wir ordnen im Sinne der regulären Darstellung den Operatoren Zustände zu, z.B. $(12) \rightarrow |12\rangle$ und schreiben dies in Form

eines Spaltenvektors

$$\begin{aligned}
 e &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |12\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |23\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 |31\rangle &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |123\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |231\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.
 \end{aligned} \tag{7.4.4}$$

Dann werden die Operatoren dargestellt durch die Matrizen

$$\begin{aligned}
 e &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & (21) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 (23) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & (31) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 (123) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & (321) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{7.4.5}$$

Wir haben dann

$$e_1 = \sum |p\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{7.4.6}$$

und

$$e_3 = \sum \text{sign}(p) |p\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (7.4.7)$$

Wir prüfen leicht nach, dass e_1 von allen Matrizen auf sich selbst und s_3 von p auch $\text{sign}(p)$ mal sich selbst abgebildet wird. Sie bilden also eindimensionale invariante Unterräume. s_2 wird von allen Permutationen auf eine Lineare kombination von sich selbst und r_2 abgebildet wo

$$e_2 = |e\rangle + |12\rangle - |31\rangle - |321\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (7.4.8)$$

$$r_3 = |23\rangle + |321\rangle - |123\rangle - |12\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (7.4.9)$$

Diese bilden also einen zweidimensionalen invarianten Unterraum. Schließlich bilden $e_2^{(23)}$ und $r_2^{(23)}$ mit

$$e_2^{(23)} = |e\rangle + |31\rangle - |12\rangle - |123\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (7.4.10)$$

$$r_3^{(23)} = |123\rangle + |23\rangle - |31\rangle - |321\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (7.4.11)$$

einen weiteren zweidimensionalen invarianten Unterraum.

Damit wird jedem Standardtableau ein invarianter Unterraum zugeordnet.

Allgemein kann man zeigen:

- Die verschiedenen irreduziblen Darstellungen der S_n kann man eindeutig Young-Diagrammen zuordnen.
- Jedem Young-Diagramm entspricht eindeutig ein *Normaltableau* Θ_λ , dem ein Young-Symmetrisierer e_λ zugeordnet ist. Dieses e_λ erzeugt eine irreduzible Darstellung von S_n im Raum der Gruppenalgebra $p \rightarrow |p\rangle$, also als irreduzibler Anteil der regulären Darstellung.
- Die Darstellungen zu verschiedenen Θ_λ sind inäquivalent.
- Die Darstellungen zu den Standardtableaus Θ_λ^p sind für alle p zueinander äquivalent.
- Die verschiedenen möglichen *Standardtableaus* erzeugen eine Zerlegung der regulären Darstellung von S_n in invariante Unterräume, reduzieren als die reguläre Darstellung vollständig aus.

7.5 Die irreduziblen 3-Quark- Zustände von $SU(3)$

Wie sieht nun die Wirkung der Young-Symmetrisierer auf die direkten Produkte aus fundamentalen Darstellungen der $SU(3)$ aus.

Für die zwei-Quark-Zustände schreiben wir $u(1)u(2), u(1)d(2), d(1)u(2), d(1)d(2), u(1)s(2), s(1)u(2), d(1)s(2), s(1)d(2)$ und $s(1)s(2)$. Es gibt zwei normale Young-Diagramme und die Young-Symmetrisierer sind $e_1 = e + (12)$ und $e_2 = e - (12)$. Wir haben

$$e_1 u(1)d(2) = u(1)d(2) + u(2)d(1) = (ud + du)(1, 2) \quad (7.5.1)$$

$$e_2 u(1)d(2) = u(1)d(2) - u(2)d(1) = (ud - du)(1, 2) \quad (7.5.2)$$

Für die 3-Quark-Zustände vom Typ uud finden wir

$$\begin{aligned} e_1 u(1)u(2)d(3) &= u(1)u(2)d(3) + u(2)u(1)d(3) + u(1)u(3)d(2) + u(3)u(2)d(1) \\ &\quad + u(2)u(3)d(1) + u(3)u(1)d(2) = 2(uud + udu + duu)(1, 2, 3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e_3 u(1)u(2)d(3) &= u(1)u(2)d(3) - u(2)u(1)d(3) - u(1)u(3)d(2) - u(3)u(2)d(1) \\ &\quad + u(2)u(3)d(1) + u(3)u(1)d(2) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e_2 u(1)u(2)d(3) &= u(1)u(2)d(3) + u(2)u(1)d(3) - u(3)u(2)d(1) - u(3)u(1)d(2) \\ &= (2uud - duu - udu) \end{aligned}$$

$$e_2^{(23)} u(1)d(2)d(3) = u(1)u(2)d(3) + u(3)u(2)d(1) - u(2)u(1)d(3) - u(2)u(3)d(1) = 0$$

und eine dritte Linearkombination wird von

$$\begin{aligned} r_2 u(1)u(2)d(3) &= u(1)u(3)d(2) + u(3)u(1)d(2) - u(2)u(3)d(1) - u(2)u(1)d(3) \\ &= (2udu - duu - uud) \end{aligned}$$

gebildet. Für die Isospin $SU(2)$ entsprechen diese Kombinationen eine Darstellung zu $I = 3/2$ und zwei Darstellungen zu $I = 1/2$, die aus $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = (1 + 0) \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ entstehen. Für die Flavor- $SU(3)$ entsprechen sie der 10 und den zwei 8-Darstellungen. Der Singlettanteil tritt nur in den aus sechs aus uds gebildeten Zuständen auf:

$$\begin{aligned}
e_1 u(1)d(2)s(3) &= u(1)d(2)s(3) + u(2)d(1)s(3) + u(1)d(3)s(2) + u(3)d(2)s(1) \\
&\quad + u(2)d(3)s(1) + u(3)d(1)s(2) \\
&= (uds + dus + usd + sdu + sud + dsu)(1, 2, 3) \\
e_3 u(1)d(2)s(3) &= u(1)d(2)s(3) - u(2)d(1)s(3) - u(1)d(3)s(2) - u(3)d(2)s(1) \\
&\quad + u(2)d(3)s(1) + u(3)d(1)s(2) \\
&= (uds - dus - usd - sdu + sud + dsu) \\
e_2 u(1)d(2)s(3) &= u(1)d(2)s(3) + u(2)d(1)s(3) - u(3)d(2)s(1) - u(3)d(1)s(2) \\
&= (uds + dus - sdu - dsu) \\
e_2^{(23)} u(1)d(2)s(3) &= u(1)d(2)s(3) + u(3)d(2)s(1) - u(2)d(1)s(3) - u(2)d(3)s(1) \\
&= (uds + dsu - dus - sud) \\
r_2 u(1)d(2)s(3) &= u(1)d(3)s(2) + u(3)d(1)s(2) - u(2)d(3)s(1) - u(2)d(1)s(3) \\
&= (usd + dsu - sud - dus) \\
r_2^{(23)} u(1)d(2)s(3) &= u(2)d(3)s(1) + u(1)d(3)s(2) - u(3)d(2)s(1) - u(3)d(1)s(2) \\
&= (sud + usd - sdu - dsu) .
\end{aligned}$$

Davon gehört der erste zur 10, der zweite zur 1 und die vier anderen zu den zwei 8-Darstellungen, in denen der Zustand zu $I_3 = 0, Y = 0$ je zweifach entartet ist.

Allgemein beschreiben wir den Sachverhalt so daß jeder Young-Symmetrisierer Θ_λ^p durch

$$e_\lambda^p i(1)j(2) \cdots k(n) \quad (7.5.3)$$

einen Tensorzustand $|i, j \dots k; \Theta_\lambda^p\rangle$ mit der Symmetrie Θ_λ^p erzeugt. Alle Zustände zu festem λ gehören zur *Symmetrieklasse* λ .

Jedes Young-Tableau zu S_n erzeugt unter den Tensoren mit n Indizes aus einem linearen Vektorraum eine Symmetrieklasse. Tensoren einer bestimmten Symmetrieklasse transformieren unter den Gruppentransformationen in diesem Vektorraum "unter sich", bilden also invariante Unterräume innerhalb der Tensorarstellung einer Gruppe. Für die $SU(n)$ sind diese invarianten Unterräume auch irreduzibel.

7.6 Standardarrangements für SU/N

Wir hatten in Abschnitt 7.3 die sogenannten Standard-Tableaus eingeführt. Die dort eingetragenen Zahlen liefen von 1 bis n , wo sich n auf die Permutationsgruppe S_n bezieht, physikalisch auf die Teilchenzahl von Zuständen. Wir können

die Young-Tableaus noch auf eine andere Art benutzen, nämlich indem wir die Quantenzahlen der Teilchen eintragen; das können $u = 1, d = 2, s = 3, \dots$ sein oder $\uparrow = 1, \downarrow = 2$ sei, wobei wir schon eine Numerierung eingeführt haben, die jetzt von 1 bis N läuft, wo sich N auf die $SU(N)$ bezieht. Dies erlaubt uns, spezifische Wellenfunktionen anzugeben, die Dimension einer irreduziblen Darstellung von $SU(N)$ zu bestimmen und Aussagen über Untergruppen zu machen. Dies werden wir in der Folge tun.

Offensichtlich gibt es drei symmetrische Zustände von $u = 1$ und $d = 1$, die wir aufzählen können als

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 2 \\ \hline \end{array} .$$

Die sind die 3 Zustände zu Isospin 1. Das Tableau $\begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 1 \\ \hline \end{array}$ würde keinen neuen Zustand entsprechen, da die Symmetrisierung bereits inbegriffen ist. Von den Tableaus

$$\begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array}$$

läßt sich das erste dem antisymmetrischen Zustand mit Isospin 0 zuordnen, das zweite liefert nichts neues wegen der implizierten Antisymmetrie, und das dritte hat gar keinen Sinn, einen antisymmetrischen Zustand zweier Teilchen mit identischen Quantenzahlen gibt es nicht. Es ist der Nullvektor.

Analog kann man vorgehen, wenn man das s -Quark dazunimmt. Dann sind die neuen Zustände

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 3 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 3 \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array} .$$

Das kennen wir schon; wir haben insgesamt 9 Zustände, die sich in eine 6 und eine $\bar{3}$ einordnen lassen.

Wir definieren ein *Standardarrangement* eines Young-Tableaus für $SU(N)$ durch die Forderung, daß die in das Tableau eingetragenen Zahlen

- die Werte von 1 bis N annehmen können;
- die Werte in einer Zeile nicht abnehmen dürfen;
- in jeder Spalte zunehmen müssen.

Jedes solche Tableau bezeichnet einen Zustand in dieser Darstellung. Die Abzählung dieser Standardarrangements ergibt die Dimension der Darstellung.

Zum Beispiel ergeben sich für die $SU(3)$ und das Diagramm $\begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \end{smallmatrix}$ die Standardarrangements

$$\begin{array}{cccc}
\begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \end{smallmatrix} \\
\begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \end{smallmatrix} \\
\end{array}
\tag{7.6.1}$$

$$\begin{array}{cccc}
\begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \end{smallmatrix} \\
\begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \end{smallmatrix} \\
\end{array} .$$

Das sind acht Möglichkeiten, wie zu erwarten; allerdings haben wir unter den Dreiteilchenzuständen zwei Oktetts und sollten insgesamt 16 verschiedene Wellenfunktionen finden. Was bei dieser Zählung verloren geht ist die Information über die Position der Teilchen, deren Permutationen ja Gegenstand der S_3 waren. Trotzdem ist die Zählung nach Standardarrangements auch im allgemeinen Fall korrekt.

7.7 Dimension der Darstellungen von $SU(n)$

Die allgemeine Abzählung der Dimension einer Darstellung von $SU(N)$, die von einem bestimmten Young-Symmetrisierer erzeugt wird, kann im Rahmen dieser Vorlesung nur als Rezept angegeben werden. Das Verfahren des vorigen Abschnitts ist zwar ein möglicher Zugang, aber er ist etwas aufwendig. Die Dimension ist natürlich dieselbe für alle Normal-Tableaus mit dem gleichen Young-Diagramm, hängt also nur von letzterem und damit nur von der Partition λ ab, und eben von der betrachteten Gruppe.

Für $SU(2)$, $SU(3)$ und $SU(4)$ gibt es einfache Formeln, diese werden aber mit N immer länger und damit unhandlich. Das hängt damit zusammen, daß es maximal N nichttriviale Reihen gibt und damit N Werte $\lambda_1, \dots, \lambda_N$. Definiert man die Zeilendifferenzen $p_k = \lambda_{N-k} - \lambda_{N-k+1}$, dann gilt

$$N_2(p_1) = p_1 + 1 = \lambda_1 - \lambda_2 + 1 \tag{7.7.1}$$

$$N_3(p_1, p_2) = \frac{1}{2}(p_1 + 1)(p_1 + p_2 + 2)(p_2 + 1) \tag{7.7.2}$$

$$\begin{aligned}
N_4(p_1, p_2, p_3) &= \frac{1}{12}(p_1 + 1)(p_1 + p_2 + 2)(p_1 + p_2 + p_3 + 3) \\
&\quad \times (p_2 + 1)(p_2 + p_3 + 2)(p_3 + 1)
\end{aligned}
\tag{7.7.3}$$

Ein allgemeines Verfahren, um die Dimension zu ermitteln ist das folgende: die Dimension erhält man als Quotient zweier Zahlen

$$D_\lambda = \frac{a_\lambda}{b_\lambda} . \tag{7.7.4}$$

Dabei werden die Zahlen a_λ und b_λ folgendermaßen bestimmt:

a_λ : Man trägt in das linke obere Kästchen des Tableaus die Zahl N entsprechend $SU(N)$ ein. In die Kästchen derselben Reihe trägt man in aufsteigender Ordnung die Zahlen $N+1, N+2, \dots$ ein. In die erste Kästchen der nächsten Zeilen trägt man in absteigender Ordnung $N-1, N-2, \dots$ ein. In die Zeilen werden die Zahlen dann wieder aufsteigend eingetragen. a_λ ist das Produkt aller dieser Zahlen.

b_λ : Man trägt nacheinander in jedes Kästchen eine Punkt ein und zieht davon aus eine Linie nach rechts und eine Linie nach unten, so daß ein "Haken" entsteht. Man zählt, durch wieviele Kästchen dieser Haken läuft. b_λ ist das Produkt aller dieser "Hakenzahlen".

Für das Youngdiagramm

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline \end{array} \quad (7.7.5)$$

ergibt sich in $SU(3)$ aus

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 2 & 3 & & \\ \hline \end{array} \quad (7.7.6)$$

zu $a_\lambda = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6$. Für b_λ findet man die Hakenzahlen der einzelnen Kästchen als

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 5 & 4 & 2 & 1 \\ \hline 2 & 1 & & \\ \hline \end{array} \quad (7.7.7)$$

und damit $b_\lambda = 5 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 2$. Man hat also $a_\lambda/b_\lambda = 27$. Nach Konstruktion ist der Nenner unabhängig von N .

7.8 Regeln für Produkte höherer Darstellungen

Gegeben zwei Young-Tableaus, die den Darstellungen λ_1 und λ_2 entsprechen. Wie reduziert man das Produkt $D_{\lambda_1} \times D_{\lambda_2}$ aus? Auch dieses wird nur als Rezept angegeben. Es besteht aus den folgenden Schritten:

- Wir tragen in das zweite Tableau in jede Box einer Zeile die Nummer der Zeile ein:

$$\begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} \times \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array} \quad (7.8.1)$$

- Wir bringen auf alle möglichen Weisen die Boxen des zweiten Tableaus am ersten an, wobei folgende Regeln gelten
 1. Jedes Tableau soll ein zulässiges Young-Tableau sein
 2. Keine Spalte ist länger als das N der $SU(N)$.

3. Wir betrachten einen Weg, der zeilenweise jeweils von links nach rechts und spaltenweise von oben nach unten verläuft. Auf diesem Weg muß die Zahl der zuvor angebrachten Zeilennummern i kleiner oder gleich der der Nummern $i - 1$ sein.
4. In jeder Zeile dürfen diese Zeilennummern von links nach rechts höchstens zunehmen.
5. Die Zahlen müssen zunehmen, wenn man in einer Spalte von oben nach unten geht.

- Wir lassen alle überflüssigen Spalten weg.

Also ergibt die Ausreduktion

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & 1 & 1 \\ \hline & & 2 & \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & 1 & 1 \\ \hline & & 2 & \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & 1 \\ \hline & & 2 \\ \hline \end{array} \\
 \\
 \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & 1 \\ \hline & & 2 \\ \hline & & 1 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & 1 \\ \hline & & 1 & 2 \\ \hline & & 1 & 2 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & 1 \\ \hline & 2 \\ \hline \end{array} \\
 \\
 = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} \\
 \\
 + \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \\ \hline \\ \hline \end{array} \\
 \\
 = 27 + 10 + 8 + 8 + \overline{10} + 1
 \end{array}$$

Wir lernen noch, daß in $SU(N)$ eine Darstellung und ihre konjugierte sich zu einem Rechteck mit N Zeilen ergänzen. Man sieht, daß die 8 und die 27 selbstkonjugiert sind, das heißt, sich selbst zu einem solchen Rechteck ergänzen:

$$\begin{array}{|c|c|} \hline x & x \\ \hline x & y \\ \hline y & y \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline x & x & x & x \\ \hline x & x & y & y \\ \hline y & y & y & y \\ \hline \end{array} . \quad (7.8.2)$$

Dagegen ergänzen sich 10 und $\overline{10}$:

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline x & x & x \\ \hline x & x & x \\ \hline y & y & y \\ \hline \end{array} \quad (7.8.3)$$

7.9 Regeln für Untergruppen

Gelegentlich interessiert man sich für den Inhalt einer Darstellung von $SU(N)$ an Multipletts einer niedrigeren $SU(N')$ -Gruppe. Zum Beispiel kann man fragen, welche Isomultipletts die 8 von $SU(3)$ enthält: wir haben zwei Multipletts zu $I = 1/2$ und je eines zu $I = 1$ und $I = 0$. Das uds -Quarkmodell kann man annähernd aus der $SU(6)$ erhalten, wo man auch noch Spinartung annimmt, die durch die spinabhängigen Kräfte gebrochen wird. Hier interessiert man sich dafür, welche $SU(3)$ -Multipletts mit welchen Spin-Quantenzahlen auftreten.

Der erste Schritt kann es sein, von der $SU(N)$ zu der $SU(N-1)$ überzugehen. Es ist dann klar, daß von allen Standardarrangements diejenigen wegfallen, an denen das N -te "Quark" beteiligt ist. Man wird bezüglich dessen Quantenzahlen blind. Natürlich sind noch alle Zustände vorhanden. Wenden wir das auf die Arrangements von (7.6.1) an, dann sieht das so aus:

$$\begin{array}{cccc}
 \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array} &
 \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline & \\ \hline \end{array} &
 \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array} &
 \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline & \\ \hline \end{array} \\
 \end{array}$$

(7.9.1)

$$\begin{array}{cccc}
 \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array} &
 \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & \\ \hline & \\ \hline \end{array} &
 \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 2 \\ \hline & \\ \hline \end{array} &
 \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & \\ \hline & \\ \hline \end{array} .
 \end{array}$$

Entfernen wir alle trivialen vollständigen Spalten und alle leeren Kästchen, dann sieht das so aus:

$$\begin{array}{cccc}
 \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array} &
 \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline \end{array} &
 \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline \end{array} &
 \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array} \\
 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc}
 \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array} &
 \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array} &
 \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 2 \\ \hline \end{array} &
 \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline \end{array} .
 \end{array}$$

Das sind zwei Dubletts $\begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \end{array}$, ein Triplet $\begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline \end{array}$ und ein Singlett $\begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \end{array}$, wie zu erwarten.

Man kann das, ohne alle Standardarrangements aufzuzählen auch so erhalten:

Man schreibt in das Young-Diagramm die Zahl N an alle möglichen Positionen, an denen sie vorkommen kann, inklusive der Möglichkeit, daß sie garnicht vorkommt. Für das Oktett wäre das:

$$\begin{array}{cccc}
 \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} &
 \begin{array}{|c|c|} \hline & 3 \\ \hline & \\ \hline \end{array} &
 \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} &
 \begin{array}{|c|c|} \hline & 3 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} .
 \end{array}$$

(7.9.2)

Dann beseitigt man alle Kästchen mit der N , und alle überflüssigen vollständigen Spalten. Das sieht dann so aus

$$\begin{array}{cccc}
 & \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \end{array} & & \\
 \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \end{array} ,
 \end{array}$$

(7.9.3)

was offensichtlich zum gleichen Ergebnis führt.

Für die 10-Darstellung der $SU(3)$ hat man

$$10 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline \end{array} \Rightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & 3 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|} \hline & 3 & 3 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & 3 & 3 \\ \hline \end{array} = 4 + 3 + 2 + 1, \quad (7.9.4)$$

d.h. Isomultipletts zu $I = 3/2, 1, 1/2$ und 0.

7.10 $SU(6)$ und das Quarkmodell

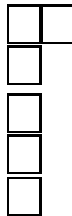
Wir hatten bereits das Quarkmodell im Rahmen der $SU(3)$ angesprochen. Quarks haben aber auch Spin, und die Fermi-Statistik bezieht alle Quantenzahlen ein, Spin und Statistik. Betrachten wir zunächst Spin und innere Quantenzahlen getrennt, dann haben wir die Generatoren

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\lambda_a &\leftrightarrow SU(3) \\ \frac{1}{2}\sigma_i &\leftrightarrow SU(2) \end{aligned}$$

einer Gruppe $SU(3) \times SU(2)$. Nehmen wir noch die Generatoren

$$\frac{1}{2}\sigma_i\lambda_a$$

dazu, dann haben wir insgesamt die 35 Generatoren der adjungierten Darstellung von $SU(6)$ mit dem Young-Diagramm



Wenn die Lagrangefunktion in niedrigster Näherung unabhängig von Spinorientierungen und Flavor-Quantenzahlen ist, dann haben wir die volle $SU(6)$ -Symmetrie. Es ist eine Symmetrie, die innere Quantenzahlen und Quantenzahlen unter Raum-Zeit-Transformationen beinhaltet. Es wurde in den 60'er Jahren von Coleman und Mandula gezeigt, daß es in einer relativistischen Quantenfeldtheorie eine solche Symmetrie nicht geben kann. Die Beschäftigung mit diesem Problem führte Wess und Zumino auf eine neue Art von Symmetrie, die bosonische Felder und fermionische Felder ineinander transformiert, die Supersymmetrie. Diese ergab aber keine Grundlage für die hier betrachtete $SU(6)$, die man als ein "nicht-relativistisches Quarkmodell" ansehen muß. Als solche ist sie recht nützlich zur Klassifikation von Zuständen. Sie ist durch die verschiedenen Quarkmassen und

durch spinabhängige Kräfte gebrochen. Die Brechung ist aber für die Baryonen relativ zu den Massen klein.

Für Zustände von drei Quarks haben wir sechs effektive Spezies:

$$\begin{aligned} |1\rangle &= |u \uparrow\rangle & |2\rangle &= |d \uparrow\rangle & |3\rangle &= |s \uparrow\rangle \\ |4\rangle &= |u \downarrow\rangle & |5\rangle &= |d \downarrow\rangle & |6\rangle &= |s \downarrow\rangle \end{aligned} \quad (7.10.1)$$

Diese bilden die 6 Darstellung \square . Bezüglich der $SU(3) \times SU(2)$ bilden diese die Darstellung $(3, 2)$ Für die Bildung von Baryonen brauchen wir dann drei Quarks, also das Produkt $6 \times 6 \times 6$. Wir erhalten analog zur $SU(3)$

$$\begin{aligned} 6 \times 6 \times 6 &= \square \times \square \times \square = \begin{array}{c} \square \square \square \\ \square \square \square \\ \square \square \square \end{array} + \begin{array}{c} \square \square \\ \square \end{array} + \begin{array}{c} \square \square \\ \square \end{array} + \begin{array}{c} \square \\ \square \\ \square \end{array} \\ &= 56 + 70 + 70 + 20 \end{aligned} \quad (7.10.2)$$

Da die Quarks Fermionen sind, sollten sie die vollkommen antisymmetrische 20- Darstellung bilden, was nicht zur richtigen Phänomenologie führt. Dagegen enthält die vollkommen symmetrische 56-Darstellung gerade die $SU(3) \times SU(2)$ -Darstellungen $(10, 4) + (8, 2)$, also ein Dekuplett mit Spin 3/2 und ein Oktett mit Spin 1/2 mit insgesamt $10 \times 4 + 8 \times 2 = 56$ Zuständen. Die für Fermionen nötige vollkommene Antisymmetrie wird durch die color- $SU(3)$ erzeugt, bezüglich der die Quarks die vollkommen antisymmetrische "farblose" Singlettdarstellung \square bilden.

Die Brechung der Symmetrie kann man bezüglich der Spin-Kräfte durch die Differenz zwischen Δ -Resonanz und dem Nukleon, also etwa 300 MeV, bezüglich der $SU(3)$ durch die Massendifferenzen im Baryon-Oktett und Dekuplett.

Für die Mesonen ergibt sich das Produkt

$$6 \times \bar{6} = \square \times \begin{array}{c} \square \\ \square \\ \square \\ \square \\ \square \end{array} = \begin{array}{c} \square \\ \square \\ \square \\ \square \\ \square \end{array} + \begin{array}{c} \square \square \\ \square \end{array} = 35 + 1 \quad (7.10.3)$$

Dies kann man bezüglich der $SU(3) \times SU(2)$ auch als $(3, 2) \times (3, 2) = (8, 3) + (1, 3) + (8, 1) + (1, 1)$ zerlegen, wobei die ersten drei Multipletts die 35 bilden: ein Oktett von Vektormesonen, eine Oktett von pseudoskalaren Mesonen, und ein Singlett von Vektormesonen, die 1 ist dann ein pseudoskalares Singlett.

Die $SU(6)$ Symmetrie erlaubt es, direkt die Flavor-Spin-Wellenfunktionen mit den korrekten Symmetrien unter Permutationen hinzuschreiben. Diese sind tabelliert.

Eine typische Voraussage des Modells sind die magnetischen Momente, die sich als Erwartungswert des Operators $Q\sigma_3$ in diesen Zuständen ergeben. Man erhält

$$\langle p, \uparrow | Q\sigma_3 | p \uparrow \rangle = 1 \quad (7.10.4)$$

$$\langle n, \uparrow | Q\sigma_3 | n \uparrow \rangle = -\frac{2}{3}. \quad (7.10.5)$$

Experimentell ist das Verhältnis -1.46 . Dies ist eine Voraussage des Quarkmodells, nicht der $SU(3)$.

7.11 $SU(5)$ als Grand Unified Theory (GUT)

Ziel der GUTs ist es, die Gruppen der color- $SU(3)$, der schwachen $SU(2)$ und der elektromagnetischen $U(1)$ als Untergruppen in eine einzige halbeinfache Lie-Gruppe einzubauen, was - bis auf Symmetriebrechungen - neue Beziehungen zwischen Massen und Kopplungen, zumindest aber eine neue Klassifikation der Zustände beinhalten kann. Eine solche Gruppe ist die $SU(5)$. Die definierende Darstellung ist die 5. Physikalisch sind in dieser Darstellung, in der niedrigsten "Familie" die drei Farbkomponenten des linkshändigen \bar{d} -Quarks, also die Antiteilchen der rechtshändigen d -Quark, das linkshändige Elektron und das linkshändige Neutrino.

$$\Psi = \begin{pmatrix} \bar{d}^r \\ \bar{d}^w \\ \bar{d}^b \\ e^- \\ \nu_e \end{pmatrix}_L \quad (7.11.1)$$

Die Indizes r, w, b kennzeichnen die drei Farben red, white, blue, der Index L kennzeichnet die Linkshändigkeit. Diese Darstellung hat das Young-Diagramm

$$5 = \boxed{\text{ph}}. \quad (7.11.2)$$

Die konjugierte Darstellung ist $\bar{5}$ mit dem Diagramm

$$\begin{array}{c} \square \\ \square \\ \square \\ \square \end{array} \quad (7.11.3)$$

In der 5- Darstellung sind die Generatoren 5×5 -Matrizen, mit der color- $SU(3)$

$$T_a = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\lambda_a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (7.11.4)$$

der schwachen $SU(2)$

$$R_i = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sigma_i \end{pmatrix}, \quad (7.11.5)$$

und der $U(1)$

$$S = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad (7.11.6)$$

Der letztere Generator bildet zusammen mit dem Generator R_3 die elektromagnetische Ladung

$$Q = R_3 + S. \quad (7.11.7)$$

Die rechtshändigen d -Quarks transformieren unter $SU(3) \times SU(2)$ als Farb-Triplett und als $SU(2)$ -Singlett $(3, 1)$, und das tun auch ihre linkshändigen Antiteilchen; das linkshändige Elektron und das Neutrino bilden ein $SU(2)$ -Dublett und ein Farb-Singlett $(1, 2)$.

Die verbleibenden Teilchen der Familie sind: Die linkshändigen d -Quarks und die linkshändigen u -Quarks, die jeweils Farbtupletts und gemeinsam die Komponenten eines $SU(2)$ -Dubletts bilden, also nach $3, 2$ transformieren; das rechtshändige Elektron, das wie ein Farb- und $SU(2)$ -Singlett $(1, 1)$ transformiert und schließlich gibt es noch das rechtshändige u -Quark das nach $(3, 1)$ transformiert. Das sind noch insgesamt 10 Teilchen.

Es gibt nun in der Tat eine 10 und eine $\overline{10}$ -Darstellung der $SU(5)$. Die $\overline{10}$ tritt in der Zerlegung $5 \times 5 = \overline{10} + 15$ auf. Sie $\overline{10}$ läßt sich also als antisymmetrischer Teil eines 5×5 Tensors schreiben, also einer entsprechenden 5×5 -Matrix. Das sieht im einzelnen so aus

$$\chi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & \bar{u}^b & -\bar{u}^w & -u^r & -d^r \\ -\bar{u}^b & 0 & \bar{u}^r & -u^w & -d^w \\ \bar{u}^w & -\bar{u}^r & 0 & -u^b & -d^b \\ u^r & u^w & u^b & 0 & -e^+ \\ d^r & d^w & d^b & e^+ & 0 \end{pmatrix}_L, \quad (7.11.8)$$

Neben den Eichbosonen der $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ gibt es jetzt auch solche, die zwischen Quarks und Leptonen vermitteln, die Leptoquarks X und Y .

Die Eichbosonen bilden die 24-dimensionale adjungierte Darstellung mit dem Youngdiagramm

lassen sich in Form einer Matrix darstellen:

$$G = \begin{pmatrix} g & g & g & X^r & Y^r \\ g & g & g & X^w & Y^w \\ g & g & g & X^b & Y^b \\ \bar{X}^r & \bar{X}^w & \bar{X}^b & \gamma & W^+ \\ \bar{Y}^r & \bar{Y}^w & \bar{Y}^b & W^- & Z \end{pmatrix}, \quad (7.11.9)$$

Kapitel 8

Dynkin-Diagramme und Klassifikation der halbeinfachen Liegruppen

8.1 Dynkin-Diagramme

Wir hatten in Kapitel 5 eine Reihe von Eigenschaften der Wurzeln und Gewichte der Lie-Gruppen kennengelernt. Wir hatten gefunden, daß es ausreicht, die einfachen Wurzeln zu kennen. Daraus können wir alle Wurzeln bestimmen und daraus wiederum die $N_{\alpha\beta}$ und damit die ganze Cartanalgebra konstruieren. Wir brauchen also von einer Lie-Gruppe nur die einfachen Wurzeln zu kennen. Alle möglichen Lie-Gruppen können wir klassifizieren, wenn wir alle möglichen konsistenten Sätze von einfachen Wurzeln aufzählen können. Das ist tatsächlich möglich. Der Schlüssel dazu sind die *Dynkin-Diagramme*.

Wir rufen uns einige wichtige Eigenschaften der einfachen Wurzeln ins Gedächtnis zurück; es gilt:

- (A) die einfachen Wurzeln sind linear unabhängig;
- (B) $2\alpha \cdot \beta / \alpha^2$ ist nicht-positive ganze Zahl;





Damit die einfachen Wurzeln einer *einfachen* Lie-Gruppe entsprechen, brauchen wir noch:

- (C) Das System der einfachen Wurzeln ist *unzerlegbar*.

Die letztere Eigenschaft bedeutet, daß das System der Wurzeln nicht in gegenseitig orthogonale Systeme zerlegt werden kann. Ist das Gegenteil der Fall, dann entspricht das Wurzelendiagramm dem direkten Produkt von einfachen Lie-Gruppen. Ein Beispiel haben wir bei $SO(4) \simeq SU(2) \times SU(2)$ gesehen.

Ein System von einfachen Wurzeln, das (A, B, C) erfüllt, heißt nach Dynkin ein Π -System. Die Klassifikation der einfachen Lie-Algebren entspricht der Klassifikation von Π -Systemen, die sich geometrisch durchführen läßt.

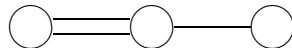
Wir führen folgende Symbole ein:

einfache Wurzel		
Winkel 150°		
Winkel 135°		
Winkel 120°		Wir hatten
Winkel 90°	(keine Linie)	

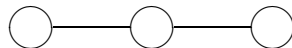
bereits festgestellt, s. Gl. (??), daß der Winkel Θ zwischen zwei einfachen Wurzeln $90^\circ \leq \Theta < 180^\circ$ erfüllt, so daß die angegebenen Winkel die einzig möglichen sind. Die Anzahl der einfachen Wurzeln ist gleich dem Rang der Gruppe. Es gilt der folgende

Satz 1

Für drei Wurzeln sind nur die Verbindungen



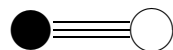
und



erlaubt, da in drei Dimensionen für drei linear unabhängige Vektoren die Winkelsumme kleiner als 360° ist und weil wegen der Nicht-Zerlegbarkeit nur ein Winkel 90° erlaubt ist. Ein Winkel 90° liegt in beiden Diagrammen vor, da die erste und das dritte Wurzel nicht verbunden sind. *Dieser Satz muß auch für je drei Wurzeln aus einem Subsystem gelten eines Π -Systems gelten.*

Das einzige System, das einen Winkel 150° enthalten kann, ist daher ein zweidimensionales. Für ein Dreiersystem könnte der zweite Winkel könnte minimal 90° sein, der nächste müßte dann größer sein, also minimal 120° . Das würde eine Winkelsumme von 360° ergeben, und die Wurzeln wären linear abhängig.

Wir erhalten die *exzeptionellen Gruppe*, G_2 mit dem Dynkin-Diagramm.



Ihr Wurzeldiagramm haben wir

bereits gezeigt, siehe Fig. 5.3. Unter exzeptionellen Gruppen versteht man solche,

die nicht in Serien auftreten wie die $SU(N)$.

Wir zeigen jetzt einen weiteren Satz:

Satz 2 (Schrumpfen)

Sind in einem Π -System zwei Wurzeln nur durch *eine* Linie verbunden, dann erhält man ein neues Π -System, indem man beide Wurzeln vereint.

Beweis:

Die beiden Wurzeln seien α und β , der Winkel ist 120° . Daraus folgt $|\alpha + \beta| = |\alpha| = |\beta|$. Die Gleichheit ergab sich aus $mm' = \cos \Theta = 1$, siehe Gl. 5.7.3, und damit $m = m' = 1$. Dann wird $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + 2|\alpha||\beta|(-1/2) = \alpha^2 = \beta^2$. Es seien nun γ seien alle Wurzeln, die nicht mit β verbunden sind, $\gamma \perp \beta$ und γ' alle Wurzeln, die nicht mit α verbunden sind. Dann gilt für $\gamma \in \Gamma$: $\gamma \cdot (\alpha + \beta) = \gamma \cdot \alpha$ und für $\gamma' \in \Gamma'$: $\gamma' \cdot (\alpha + \beta) = \gamma' \cdot \beta$. Das neue, geschrumpfte System Π -System ist dann $\Gamma \cap (\alpha + \beta) \cap \Gamma'$.

Aus Satz 2 folgen

Corollar 2.1

Kein Π -System enthält mehr als eine Doppellinie:

Wäre das der Fall und würde man alle einfachen Linien einschrumpfen, dann würde letztendlich ein Dreiersystem entstehen, bei dem zwei Doppelbindungen auftreten. Ein solches Dreiersystem ist aber nicht erlaubt.

Corollar 2.2

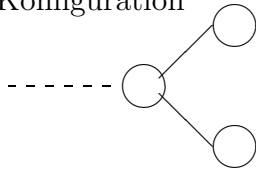
Kein Π -System enthält geschlossenen Loop:

Schrumpft man das Diagramm, das ja höchstens eine Doppellinie enthalten kann, so bleibt zum Schluß ein Dreieck übrig, das nicht erlaubt ist, weil die Winkelsumme der Verbindungen entweder $3 \times 120^\circ$ oder $2 \times 120^\circ + 135^\circ$ ist, also $\geq 360^\circ$, und damit sind die Wurzeln linear abhängig.

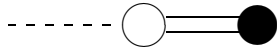
Wir zeigen noch

Satz 3

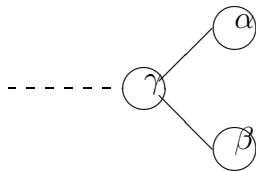
Ist eine Konfiguration



ein Π -System, so ist es auch



Um das zu sehen, bezeichnen wir



Hier ist $\alpha \cdot \beta = 0$ und

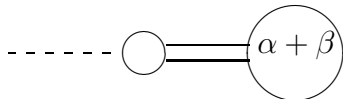
$$2 \frac{\alpha \cdot \gamma}{\alpha^2} = 2 \frac{\alpha \cdot \gamma}{\gamma^2} = 2 \frac{\beta \cdot \gamma}{\beta^2} = 2 \frac{\beta \cdot \gamma}{\gamma^2} = -1 \quad (8.1.1)$$

Daraus folgt

$$2 \frac{(\alpha + \beta) \cdot \gamma}{\gamma^2} = -2 \quad (8.1.2)$$

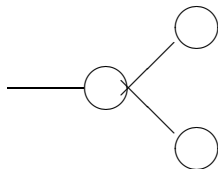
$$2 \frac{(\alpha + \beta) \cdot \gamma}{(\alpha + \beta)^2} = -1. \quad (8.1.3)$$

Das entspricht einer Doppelbindung

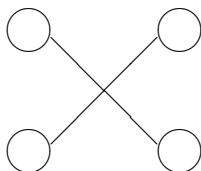


Daraus folgt:

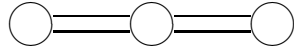
Die einzigen Verzweigungen eines Π -Systems sind Dreier-Verzweigungen



Eine Viererverzweigung



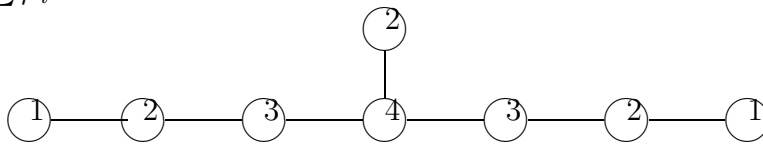
würde sich nach dem eben bewiesenen Satz auf



schrumpfen lassen, und das ist ein unzulässiges Dreierdiagramm.

Zusätzliche Einschränkungen ergeben sich noch für Verzweigungen und für die Doppellinie.

Die folgenden Diagramme ergeben linear abhängige Wurzeln in der Form $\sum \mu_i \alpha^i = 0$:

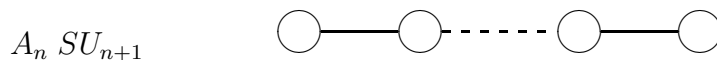


Die Zahlen in den Kreisen sind die Faktoren μ_i . Man verifiziert leicht, daß jeweils $(\sum \mu_i \alpha^i)^2 = 0$. Dabei sind alle Beträge gleich, alle unverbundenen Wurzeln sind orthogonal, und die Skalarprodukte benachbarter Wurzeln sind $-1/2$ mal dem Betragsquadrat.

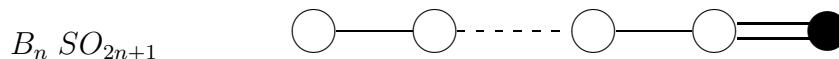
8.2 Klassifikation der Lie-Algebren durch Dynkin-Diagramme

Wir können nun alle möglichen Dynkin-Diagramme zeichnen und erhalten damit eine graphische Darstellung aller möglichen Lie-Algebren.

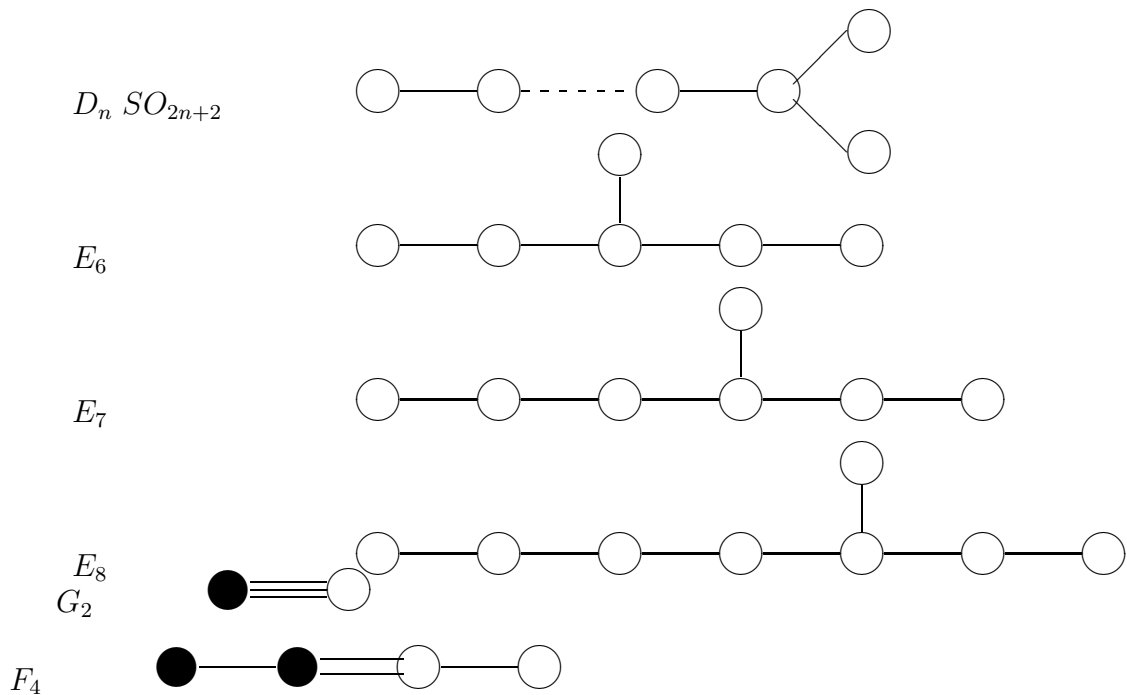
Wir beginnen mit allen Diagrammen ohne Doppellinie und ohne Verzweigung.



Lassen wir eine Doppelbindung zu, dann sind die beiden durch sie verbunden Wurzeln verschieden lang. Damit ergeben sich zwei Möglichkeiten:



Mit einer Verzweigung gibt es die Möglichkeiten



8.3 Beispiele

8.3.1 $A_1 = SU(2)$

Das Dynkin-Diagramm ist

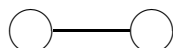


Der Rang der Gruppe ist offensichtlich 1. Es gibt eine einfache Wurzel, die wir mit $\alpha_1 = e_1$ bezeichnen. Damit sind auch $-\alpha_1 = e_{-1}$ und $\alpha_0 = 0$ Wurzeln. Das Wurzeldiagramm ist also

$$\overline{\alpha_{-1}} \quad \alpha_0 \quad \alpha_1$$

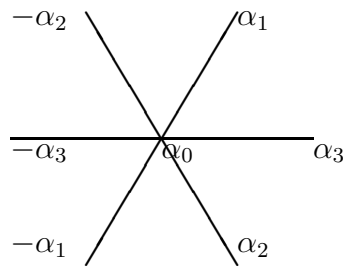
8.3.2 $A_2 = SU(3)$

Das Dynkin-Diagramm ist



Die Gruppe ist vom Rang 2, die einfachen Wurzeln schließen einen Winkel von 120° ein. Wir wählen sie als $\alpha_{1/2} = (1/2)(1, \pm\sqrt{3})$. Dazu erhält man, wie

bereits in Abschnitt konstuiert, $\alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_2 = (1, 0)$, dazu 0 und die negative Wurzeln. Man erhält das Wurzelendiagramm



Literaturverzeichnis

- [Cah84] R. N. Cahn. *Semi-simple Lie Algebras and their representations*. The Benjamin/Cummings Publ. Comp., Reading, Mass., 1984.
- [Geo82] H. Georgi. *Lie-algebras in particle physics*. The Benjamin/Cummings Publ. Comp., Reading, Mass., 1982.
- [Gil74] R. Gilmore. *Lie Groups, Lie Algebras, and some of their representations*. John Wiley & sons, New York, 1974.
- [Lic70] D. B. Lichtenberg. *Unitary symmetry and elementary particles*. Academic Press, New York, 1970.
- [Tun85] Wu-Ki Tung. *Group Theory in Physics*. World Scientific Publ. Comp., Singapore, 1985.
- [Wyb74] B. G. Wybourne. *Classical Groups for Physicists*. John Wiley & sons, New York, 1974.