Einführung in die Geometrische Invariantentheorie

Alexander H.W. Schmitt

UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

2004

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Der vorliegende Text ist eine Ausarbeitung und Ergänzung der Vorlesung „Algebraische Geometrie“, die ich im Wintersemester 1996/97 an der Universität Zürich gehalten habe. Das Ziel dieser Vorlesung war eine Einführung in die „Geometrische Invariantentheorie (GIT)“. Der Ursprung dieses Teilgebiets der Algebraischen Geometrie liegt im neunzehnten Jahrhundert, in der Untersuchung der algebraischen Formen. Die Invariantentheorie wurde durch Arbeiten von Hilbert zu einem vorläufigen Abschluss gebracht. Eine Einführung in diese „klassische“ Invariantentheorie gibt das Buch [**16**]. Die Invariantentheorie wurde von Mumford wieder belebt. Das Buch [**19**] enthält das, was man heute unter „Geometrischer Invariantentheorie“ versteht. Mumford hat erkannt, dass man die Ideen, die in Hilberts Arbeiten stecken, wesentlich verallgemeinern kann und sie auf viele Klassifikationsprobleme der Algebraischen Geometrie, sogenannte Modulprobleme, anwenden kann. Dadurch ist die Geometrische Invariantentheorie zu einem unverzichtbaren Hilfsmittel der modernen Algebraischen Geometrie geworden.

In der Vorlesung wurde dieses Skript bis auf Kapitel II.2, Kapitel III.2 und Kapitel III.3 behandelt. Der Text bietet eine recht vollständige Einführung, er enthält alle grundlegenden und für die Anwendung wichtigen Sätze. Allerdings wird im Rahmen der algebraischen Varietäten gearbeitet. Dies dient vor allem der technischen Vereinfachung und der grösseren Anschaulichkeit. In der Praxis wird man die Theorie der Schemata jedoch kaum vermeiden können. Eine sehr wichtige Konstruktion kann man jedoch im Rahmen der Varietäten durchführen, nämlich die Konstruktion des Modulraumes der Vektorbündel über einer glatten, projektiven Kurve (s. [**21**], Chapter 5). Für das Verständnis dieses Skriptes genügen solide Kenntnisse der Grundlagen der Algebraischen Geometrie. Mir scheint für diese Vorlesung [**18**], Chapter I, besonders geeignet. In den ersten beiden Kapiteln kommt man jedoch mit wesentlich weniger aus.

In der ursprünglichen Fassung des Textes wurden leichtere und schwerere Fehler korrigiert. Darüber hinaus wurden einige mathematische Ergänzungen vorgenommen. Die wichtigsten sind dabei elementare Beweise für die Sätze über die Variation von Quotienten.

Ich gebe nun eine kurze Beschreibung des Inhalts. Das erste Kapitel stellt die notwendigen Grundlagen aus der Theorie der affinen algebraischen Gruppen und ihrer Darstellungen bereit. Nach Einführung der allgemeinen Begriffe werden die Darstellungen der multiplikativen Gruppe $\mathbb{C}^*$ und der Tori beschrieben. Anschliessend wird gezeigt, dass sich jede affine algebraische Gruppe als Untergruppe einer allgemeinen linearen Gruppe realisieren lässt. Danach wird der Begriff der reduktiven Gruppe eingeführt und das Problem der Quotientenbildung zum ersten Mal angerissen. Wir betrachten dabei den Fall der Operation einer reduktiven algebraischen Gruppe auf einem Vektorraum. Alle wichtigen Sätze, deren Beweise einen Grossteil von Kapitel III ausmachen, werden für diesen Spezialfall formuliert. Der Anhang zu Kapitel I enthält einen rein algebraischen Beweis für die Reduktivität der allgemeinen linearen Gruppen. Er stammt aus dem Buch [**7**]. Die Teile über affine algebraische Gruppen haben wir dem Buch [**4**] entnommen.

Kapitel II stellt die Verbindung zwischen der klassischen Invariantentheorie und der „GIT“ von Mumford her. Es werden vor allem algebraische Formen unter verschiedenen Gesichtspunkten untersucht. Zudem wird kurz auf die Invariantentheorie der Matrizen eingegangen, ein weiteres anschauliches Beispiel, das auch in der aktuellen Forschung eine grosse Rolle spielt. Dieses Kapitel dient der Illustration der Sätze, die im ersten Kapitel formuliert wurden.

Kapitel III bildet den Kern des Textes und behandelt die allgemeine Theorie. Zunächst werden die Begriffe des guten und des geometrischen Quotienten eingeführt. Danach wird die Existenz guter Quotienten affiner Varietäten nachgewiesen. Den wichtigsten Bestandteil bildet dabei der Endlichkeitssatz von Nagata. Dessen Beweis haben wir dem Buch [**7**] entnommen. Es folgt die Behandlung des allgemeinen Problems. An einem Beispiel werden dabei die Schwierigkeiten erläutert. Dann werden Linearisierungen eingeführt und diskutiert. Der allgemeine Satz über Quotientenbildung wird formuliert und bewiesen. Zur Illustration wird $\mathbb{P}_n$ als Quotient konstruiert. Ein weiteres instruktives Beispiel, das ausführlich vorgestellt wird, sind Quotienten nach $\mathbb{C}^*$. Dieses Beispiel zeigt, dass der Quotient von der Wahl der Linearisierung abhängt und wie verschiedene Quotienten zusammenhängen. Es schliessen sich eine Erläuterung und ein Beweis des zentralen Hilbert-Mumford-Kriteriums an. Wir haben uns für den „elementaren“ Beweis von Richardson aus der Arbeit [**3**] entschieden. Es folgen weitere, neue Semistabilitätskriterien aus der Arbeit [**22**]. Das Kapitel schliesst mit Resultaten zu der Abhängigkeit der Quotienten von der Wahl der Linearisierung. Der entsprechende Abschnitt sollte eine nützliche Ergänzung zu den existierenden Lehrbüchern sein. Er enthält nicht nur wichtige Resultate aus der neueren Forschung, sondern präsentiert diese auch in einer wesentlich einfacheren Form als die entsprechenden Originalarbeiten. Bei der Darstellung in Kapitel III haben wir uns oft an das Buch [**21**] angelehnt.

Abschliessend möchte ich allen Hörerinnen und Hörern der Vorlesung für ihr Interesse danken.

Alexander Schmitt
Essen, im April 2001

Bei der erneuten Durchsicht wurden weitere Tippfehler behoben und die fehlerhafte Charakterisierung der „Polystabilität“ berichtigt.

Alexander Schmitt
Essen, im September 2004

KAPITEL 1

Grundlagen

1. Algebraische Gruppen und Grundbegriffe der Darstellungstheorie

In diesem Abschnitt diskutieren wir die wichtigsten Begriffe aus der Theorie der affinen algebraischen Gruppen. Als Referenz empfehlen wir das Buch [**4**]. Wir besprechen auch einige fundamentale Sätze zu Darstellungen affiner algebraischer Gruppen. Dabei stützen wir uns auf den algebraischen und elementaren Zugang aus dem Buch [**7**].

1.1. Affine algebraische Gruppen I – Definitionen. Eine *affine* (oder *lineare*) *algebraische Gruppe* ist ein Gruppenobjekt G in der Kategorie der affinen algebraischen Varietäten. Weniger gelehrt ausgedrückt heisst das, dass G eine affine algebraische Varietät ist und dass ein Element $e \in G$, das *Neutralelement*, eine reguläre Abbildung $\mu\colon G \times G \longrightarrow G$, die *Multiplikationsabbildung*, und eine reguläre Abbildung $\mathrm{inv}\colon G \longrightarrow G$, die *Inversenabbildung*, existieren, so dass $(G, e, \mu, \mathrm{inv})$ die Axiome einer Gruppe erfüllt.

BEMERKUNG 1.1.1. Eine affine algebraische Gruppe G ist als algebraische Varietät nichtsingulär. Dazu sei $g \in G$ ein nichtsingulärer Punkt und $h \in G$ ein beliebiger anderer Punkt. Die Linksmultiplikation mit hg^{-1} definiert einen Isomorphismus von G auf sich, der g auf h abbildet. Damit ist h ebenfalls ein nichtsingulärer Punkt.

ÜBUNG 1.1.2. Es sei G eine affine algebraische Gruppe. Beschreiben Sie die Struktur der Koordinatenalgebra $\mathbb{C}[G]$!

Ein *Homomorphismus zwischen affinen algebraischen Gruppen* ist eine reguläre Abbildung, die gleichzeitig ein Gruppenhomomorphismus ist. Eine *(abgeschlossene) Untergruppe H* einer algebraischen Gruppe G ist eine abgeschlossene Untervarietät, die gleichzeitig eine Untergruppe ist. Der Kern eines Gruppenhomomorphismus $\chi\colon G \longrightarrow G'$ ist z.B. eine Untergruppe von G.

BEISPIEL 1.1.3. i) Das (für uns vorerst) wichtigste Beispiel einer affinen algebraischen Gruppe ist die *allgemeine lineare Gruppe* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ (vgl. Bem. 1.1.4): Das Neutralelement ist hier die Einheitsmatrix, die Multiplikation ist die Matrizenmultiplikation, die offensichtlich eine reguläre Abbildung ist, und die Inversenabbildung ist die Bildung der inversen Matrix, die nach der Cramerschen Regel eine reguläre Abbildung ist. Weiterhin kennen Sie einige abgeschlossene Untergruppen von $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Eine davon ist die *spezielle lineare Gruppe* $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$, die durch die polynomiale Gleichung $\det = 1$ beschrieben wird. $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ ist der Kern des Gruppenhomomorphismus $\det\colon\ \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}^*$.

ii) Ein Homomorphismus $\chi\colon G \longrightarrow \mathbb{C}^*$ heisst *Charakter* von G. Die Charaktere von G bilden eine abelsche Gruppe, die mit $X(G)$ notiert wird.

Für $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ und $r \in \mathbb{Z}$ ist $g \longmapsto \det(g)^r$ ein Charakter. Umgekehrt ist jeder Charakter von $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ von dieser Form. Dies folgt leicht aus der Tatsache, dass die Koordinatenalgebra von $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ isomorph zu dem Ring $\mathbb{C}[x_{ij},\ i,j = 1,\dots,n;\ \det^{-1}]$ ist.

iii) Eine affine algebraische Gruppe T, die isomorph zu $\mathbb{C}^{*n}$ ist, wird (*algebraischer*) *Torus* genannt. Es gilt $X(\mathbb{C}^{*n}) \cong \mathbb{Z}^n$. Dabei entspricht einem Vektor $\underline{\alpha} = (\alpha_1,\dots,\alpha_n) \in \mathbb{Z}^n$ der Charakter $(z_1,\dots,z_n) \longmapsto z_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot z_n^{\alpha_n}$.

BEMERKUNG 1.1.4. Fasst man $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ und $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ als Teilmengen von $M_n(\mathbb{C})$ auf, so ist $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ die *offene* Untervarietät $\det \neq 0$ und $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ die abgeschlossene Untervarietät $\det = 1$. Man kann $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ als abgeschlossene Untervarietät einer affinen Varietät beschreiben, indem man z.B. den Morphismus

$$\begin{array}{rccc} \alpha\colon & \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) & \longrightarrow & M_n(\mathbb{C})\times\mathbb{C} \\ & g & \longmapsto & (g,\det(g)^{-1}) \end{array}$$

benutzt. Es gilt dann $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) = \{\,(g,t)\in M_n(\mathbb{C})\times\mathbb{C} \mid \det(g)\cdot t = 1\,\}$.

1.2. Der Begriff der Darstellung. Es seien V ein endlich dimensionaler komplexer Vektorraum und G eine affine algebraische Gruppe. Wir fassen V als affine algebraische Varietät auf. Eine *(Links-)Operation der Gruppe G auf V* ist eine reguläre Abbildung

$$\sigma\colon G\times V \longrightarrow V,$$

die den folgenden Axiomen genügt:

(1) Für jedes $g\in G$ ist die Abbildung $\sigma_g\colon V\longrightarrow V$, $v\longmapsto\sigma(g,v)$, ein linearer Isomorphismus; $\sigma_e = \mathrm{id}_V$.
(2) Für alle $g_1,g_2\in G$ gilt $\sigma_{g_1g_2} = \sigma_{g_1}\circ\sigma_{g_2}$.

Die Angabe einer Operation σ ist äquivalent zu der Angabe des Homomorphismus (affiner algebraischer Gruppen)

$$\begin{array}{rccc} \rho\colon & G & \longrightarrow & \mathrm{GL}(V) \\ & g & \longmapsto & \sigma_g. \end{array}$$

Ist umgekehrt ein Homomorphismus ρ gegeben, so definieren wir die folgende Operation

$$\begin{array}{rccc} \sigma\colon & G\times V & \longrightarrow & V \\ & (g,v) & \longmapsto & \rho(g)(v). \end{array}$$

Haben wir eine Operation $\sigma\colon G\times V\longrightarrow V$ gegeben, dann schreiben wir für $\sigma(g,v)$, $g\in G$, $v\in V$, kurz $g\cdot v$. Wir nennen V auch einen *G-(Links-)Modul* und den Homomorphismus ρ eine *(rationale) Darstellung*. Es seien V und W zwei G-Moduln. Eine lineare Abbildung $l\colon V\longrightarrow W$ heisst *G-äquivariant* oder *G-Modul-Homomorphismus*, wenn für alle $g\in G$ und alle $v\in V$ gilt: $l(g\cdot v) = g\cdot l(v)$. Zwei Darstellungen $\rho_i\colon G\longrightarrow \mathrm{GL}(V_i)$, $i=1,2$, heissen *äquivalent*, wenn es einen G-Modul-Isomorphismus zwischen V_1 und V_2 gibt.

Zu Darstellungen $\rho_i\colon G\longrightarrow\mathrm{GL}(V_i)$, $i=1,2,\dots,n$, können wir mittels Konstruktionen der linearen Algebra weitere Darstellungen konstruieren, z.B.

$$\rho_1\otimes\cdots\otimes\rho_n\colon G\longrightarrow \mathrm{GL}(V_1\otimes\cdots\otimes V_n),$$

indem wir für $g\in G$ und $v_i\in V_i$, $i=1,\dots,n$,

$$(\rho_1\otimes\cdots\otimes\rho_n)(g)(v_1\otimes\cdots\otimes v_n) := \rho_1(g)(v_1)\otimes\cdots\otimes\rho_n(g)(v_n)$$

setzen.

ÜBUNG 1.2.1. Überlegen Sie sich, wie man andere Darstellungen wie direkte Summen $\rho_1\oplus\cdots\oplus\rho_n$, symmetrische Potenzen $S^r\rho$ oder äussere Potenzen $\bigwedge^r\rho$ konstruieren muss!

Weiterhin können wir zu einer Darstellung $\rho\colon G\longrightarrow\mathrm{GL}(V)$ die *duale* oder *kontragrediente Darstellung* $\rho^\vee\colon G\longrightarrow\mathrm{GL}(V^\vee)$ auf dem Dualraum $V^\vee$ definieren, indem wir $\rho^\vee(g)(l)\colon v\longmapsto l(\rho(g)^{-1}\cdot v)$ setzen.

ÜBUNG 1.2.2. Was passierte, wenn man $\rho^\vee(g)(l)\colon v\longmapsto l(\rho(g)\cdot v)$ setzte?

Dies induziert weitere Darstellungen

$$\rho_d^\vee := S^d\rho^\vee\colon G\longrightarrow \mathrm{GL}\big(S^d(V^\vee)\big).$$

Die Bedeutung dieser Darstellungen werden wir in Abschnitt 1.5 kennenlernen.

BEISPIEL 1.2.3 (Darstellungen von $\mathbb{C}^*$, vgl. [**7**], S.11f.). Wir betrachten eine Darstellung $\rho\colon\mathbb{C}^*\longrightarrow\mathrm{GL}(V)$ von $\mathbb{C}^*$. Wir behaupten, dass es eine Basis $v_1,\dots,v_n$ von V gibt und ganze Zahlen $\gamma_1\ge\cdots\ge\gamma_n$, so dass für jedes $z\in\mathbb{C}^*$ gilt:

$$\rho(z)\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i\right) = \sum_{i=1}^n z^{\gamma_i}\alpha_i v_i.$$

Wir wählen eine Basis von V, so dass wir $\mathrm{GL}(V)$ mit $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ identifizieren können. Es gibt eine ganze Zahl r und Polynome m_{ij}, $i, j = 1, ..., n$, mit

$$\rho(z) = z^r \cdot \big(m_{ij}(z)\big)_{i,j} \qquad \forall z \in \mathbb{C}^*.$$

Es sei $m := (m_{ij})_{i,j}$ und m' die Matrix der ersten Ableitungen der m_{ij}. Wählen wir die Basis von V geschickt, dann können wir erreichen, dass die Matrix $p := m'(1)$ sich in Jordanscher Normalform befindet. D.h., p ist eine Blockmatrix mit Blöcken der Gestalt

$$\begin{pmatrix} \widetilde{\gamma}_i & 1 & & & \\ & \widetilde{\gamma}_i & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \widetilde{\gamma}_i \end{pmatrix}.$$

Der grösste Block stehe links oben. Wir zeigen nun, dass es sich dabei um einen (1×1)-Block handelt. Wir bemerken, dass der Ausdruck $m(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$ definiert ist, und aus der Tatsache, dass ρ eine Darstellung ist, folgt $m(z + w \cdot z) = m(z)m(1 + w)$ für alle $w, z \in \mathbb{C}$. Führen wir nun die Taylorentwicklung an der Stelle z bzw. an der Stelle 1 durch, so lautet diese Gleichung

$$m(z) + w \cdot z \cdot m'(z) + \cdots = m(z) \cdot (E_n + w \cdot m'(1) + \cdots),$$

so dass wir $z \cdot m'(z) = m(z) \cdot p$ schliessen. Wenn p keine Diagonalmatrix ist, dann gelten folgende Gleichungen

$$\begin{aligned} z \cdot m'_{11}(z) &= \widetilde{\gamma}_1 \cdot m_{11}(z) \\ z \cdot m'_{12}(z) &= m_{11}(z) + \widetilde{\gamma}_1 \cdot m_{12}(z). \end{aligned}$$

Aus der ersten Gleichung folgt, dass m_{11} ein homogenes Polynom vom Grad $\widetilde{\gamma}_1$ ist, genauer $m_{11}(z) = z^{\widetilde{\gamma}_1}$, da $m_{11}(1) = 1$. Weiterhin sei $m_{12}(z) = b \cdot z^k + \cdots$. Die zweite Gleichung liefert dann $z^{\widetilde{\gamma}_1} = -\widetilde{\gamma}_1 b \cdot z^k + kb \cdot z^k$, eine Unmöglichkeit. Damit muss p also eine Diagonalmatrix sein. Nach einer Umnumerierung der Basis gilt

$$p = \begin{pmatrix} \gamma'_1 E_{n_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \gamma'_s E_{n_s} \end{pmatrix}$$

mit $\gamma'_1 > \cdots > \gamma'_s$. Die Tatsache $m(z) \cdot p = z \cdot m'(z)$, $z \in \mathbb{C}$, beinhaltet

$$m(z) = \begin{pmatrix} z^{\gamma'_1} \cdot E_{n_1} & & \\ & \ddots & \\ & & z^{\gamma'_s} \cdot E_{n_s} \end{pmatrix}.$$

Unsere Behauptung ist nun gezeigt. □

ÜBUNG 1.2.4. Es seien $T = \mathbb{C}^{*n}$ und $\rho \colon T \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$ eine Darstellung von T auf dem Vektorraum V. Zeigen Sie, dass diese Darstellung diagonalisierbar ist. Genauer gesagt ist der T-Modul V isomorph zu $\bigoplus_{\chi \in X(T)} V_\chi$ mit

$$V_\chi \quad := \quad \big\{\, v \in V \,|\, \rho(t)(v) = \chi(t) \cdot v \quad \forall t \in T \,\big\}.$$

ANLEITUNG: Schreiben Sie $T = \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^{*n-1}$! Nach Voraussetzung ist V als $\mathbb{C}^{*n-1}$-Modul isomorph zu $\bigoplus_{\chi \in X(\mathbb{C}^{*n-1})} V_\chi$. Zeigen Sie, dass V_χ für jeden Charakter von $\mathbb{C}^{*n-1}$ auch invariant unter der Operation des ersten Faktors ist und schliessen Sie mit Beispiel 1.2.3!

1.3. Affine algebraische Gruppen II – Affine algebraische Gruppen als Untergruppen von allgemeinen linearen Gruppen. Ziel dieses Abschnittes ist es zu zeigen, dass jede affine Gruppe als Untergruppe einer allgemeinen linearen Untergruppe realisiert werden kann. Dieses Resultat gehört zu den ersten Sätzen, die man in der Theorie der affinen algebraischen Gruppen lernt. Die im Beweis verwendeten Techniken fügen sich schön in den bereits besprochenen Rahmen und werden in Kapitel III immer wieder aufgegriffen werden.

Es sei also G eine affine algebraische Gruppe, $\mu\colon G\times G\longrightarrow G$ sei die Multiplikationsabbildung. Zu μ gehört die Komultiplikation $\mu^*\colon \mathbb{C}[G]\longrightarrow\mathbb{C}[G]\otimes\mathbb{C}[G]$ der Koordinatenalgebra. Wir definieren nun eine Linksoperation $\rho^l\colon G\times\mathbb{C}[G]\longrightarrow\mathbb{C}[G]$ sowie eine Rechtsoperation $\rho^r\colon \mathbb{C}[G]\times G\longrightarrow\mathbb{C}[G]$ der Gruppe G auf ihrer Koordinatenalgebra durch

$$\begin{aligned}\rho^l(g,f) &:= \rho^l_g(f)\colon h\longmapsto f(g^{-1}h), \quad \forall g,h\in G, f\in\mathbb{C}[G];\\ \rho^r(f,g) &:= \rho^r_g(f)\colon h\longmapsto f(hg), \quad \forall g,h\in G, f\in\mathbb{C}[G].\end{aligned}$$

Diese beiden Operationen kommutieren miteinander, d.h. für alle $g_1,g_2\in G$ gilt $\rho^l_{g_1}\circ\rho^r_{g_2}=\rho^r_{g_2}\circ\rho^l_{g_1}$.

SATZ 1.3.1. *Es sei $V\subset\mathbb{C}[G]$ ein endlich dimensionaler Unterraum. Dann gibt es einen endlich dimensionalen Unterraum $W\subset\mathbb{C}[G]$ mit $V\subset W$, der invariant unter ρ^l und ρ^r ist, d.h. $\rho^l(G,W)\subset W$ und $\rho^r(W,G)\subset W$.*

BEWEIS. Wir können sicherlich o.B.d.A. annehmen, dass V durch ein einziges Element $f\in\mathbb{C}[G]$ erzeugt wird. Es sei U der Unterraum, der von allen Elementen der Form $\rho^l_g(f)$, $\rho^r_g(f)$, $g\in G$, erzeugt wird. Dieser Raum ist sicher invariant unter den Operationen ρ^l und ρ^r, und es bleibt z.z., dass U endlich dimensional ist, d.h., dass alle $\rho^l_g(f)$ und $\rho^r_g(f)$ in einem endlich dimensionalen Unterraum von $\mathbb{C}[G]$ enthalten sind. Dazu betrachten wir die Operation

$$\begin{aligned}\Gamma\colon\quad (G\times G)\times G &\longrightarrow G\\ (g_1,g_2;h) &\longmapsto g_1hg_2^{-1}.\end{aligned}$$

Wir schreiben $\Gamma(f)=\sum_{i=1}^n f_i\otimes\widetilde{f}_i$ für geeignete $f_i\in\mathbb{C}[G\times G]$ und $\widetilde{f}_i\in\mathbb{C}[G]$, $i=1,\dots,n$. Nun gilt für alle $g_1,g_2,h\in G$

$$\left(\rho^l_{g_1}\circ\rho^r_{g_2}\right)(f)(h)=f(g_1^{-1}hg_2)=\Gamma^*(f)(g_1^{-1},g_2;h)=\sum_{i=1}^n f_i(g_1^{-1},g_2)\widetilde{f}_i(h),$$

also $\left(\rho^l_{g_1}\circ\rho^r_{g_2}\right)(f)=\sum_{i=1}^n f_i(g_1^{-1},g_2)\widetilde{f}_i$. □

Ferner benötigen wir die folgende Aussage:

LEMMA 1.3.2. *Es sei $V\subset\mathbb{C}[G]$ ein endlich dimensionaler Teilraum. Dann ist V genau dann ρ^r-invariant, wenn $\mu^*(V)\subset V\otimes\mathbb{C}[G]$ gilt.*

BEWEIS. Wir wählen eine Basis $f_1,\dots,f_n$ von V und ergänzen sie durch Elemente $\widetilde{f}_1,\dots,\widetilde{f}_m$ ($\notin V$) zu einer Basis eines endlich dimensionalen Teilraumes $H\subset\mathbb{C}[G]$, für den $\mu^*(V)\subset H\otimes\mathbb{C}[G]$ gilt. Es sei $f\in V$. Wir schreiben $\mu^*(f)=\sum_{i=1}^n f_i\otimes r_i+\sum_{i=1}^m\widetilde{f}_i\otimes s_i$, so dass

$$\rho^r_g(f)=\sum_{i=1}^n r_i(g)f_i+\sum_{i=1}^m s_i(g)\widetilde{f}_i.$$

Also liegt $\rho^r_g(f)$ genau dann in V, wenn $s_1(g)=\cdots=s_m(g)=0$ gilt. Dies impliziert sofort die Behauptung. □

Wir können nun das gewünschte Resultat beweisen.

SATZ 1.3.3. *Es sei G eine affine algebraische Gruppe. Dann existiert ein n, so dass G isomorph zu einer abgeschlossenen Untergruppe von $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ ist.*

BEWEIS. Wir schreiben $\mathbb{C}[G] = \mathbb{C}[f_1, ..., f_n]$. Wir nehmen an, dass $f_1, ..., f_n$ linear unabhängig sind und einen ρ^r-invarianten Teilraum V aufspannen. Dies ist nach Satz 1.3.1 möglich. Nach Lemma 1.3.2 gibt es Elemente $m_{ij} \in \mathbb{C}[G]$, $i, j = 1, ..., n$, mit

$$\mu^*(f_j) = \sum_{i=1}^n f_i \otimes m_{ij}, \quad j = 1, ..., n.$$

Wir definieren folglich

$$\begin{array}{rcl} \alpha\colon G & \longrightarrow & \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \\ g & \longmapsto & \big(m_{ij}(g)\big)_{i,j}. \end{array}$$

Dies ist offenbar ein Morphismus zwischen affinen Varietäten.

ÜBUNG 1.3.4 ([**4**], 1.10). 1) Zeigen Sie, dass α ein Homomorphismus ist, d.h., dass $(m_{ij}(g_1g_2))_{i,j} = (m_{ij}(g_1))_{i,j}(m_{ij}(g_2))_{i,j}$ gilt.

2) Zeigen Sie, dass α eine abgeschlossene Einbettung ist, indem Sie beweisen, dass $\alpha^*\colon \mathbb{C}[\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})] \longrightarrow \mathbb{C}[G]$ surjektiv ist.

□

1.4. Reduktive affine algebraische Gruppen. In diesem Abschnitt führen wir den zentralen Begriff der reduktiven affinen algebraischen Gruppe ein. Grob gesagt sind reduktive Gruppen genau die Gruppen, für die die Invariantentheorie funktioniert. Im Anhang werden wir dann sehen, dass die allgemeine lineare Gruppe $\mathrm{GL}(V)$ und die spezielle lineare Gruppe $\mathrm{SL}(V)$ reduktiv sind.

Es seien G eine affine algebraische Gruppe, V ein endlich dimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum und $\rho\colon G \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$ eine Darstellung. Ein Unterraum $W \subset V$ heisst *ρ-invariant*, falls $\rho(g)(W) \subset W$ für alle $g \in G$ gilt. D.h. G operiert auf W, und durch Einschränkung erhalten wir eine Darstellung $\rho_{|W}\colon G \longrightarrow \mathrm{GL}(W)$. Eine Darstellung ρ heisst *irreduzibel*, wenn V keinen echten nicht trivialen, ρ-invarianten Unterraum besitzt. Eine Darstellung ρ heisst *vollständig reduzibel*, wenn ρ in eine direkte Summe von irreduziblen Darstellungen zerfällt. Letzteres soll heissen, dass es ρ-invariante Teilräume $V_1, ..., V_n$ gibt, so dass 1) $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_n$, 2) $\rho_{|V_i}$ für $i = 1, ..., n$ irreduzibel ist und so dass 3) $\rho = \rho_{|V_1} \oplus \cdots \oplus \rho_{|V_n}$. Eine affine algebraische Gruppe G heisst *reduktiv*, wenn jede Darstellung von G vollständig reduzibel ist.

BEMERKUNG 1.4.1. Der Begriff „reduktiv" sagt im wesentlichen aus, dass man sich bei der Untersuchung von Darstellungen von G auf die Betrachtung von „einfachen" Bausteinen, d.h. auf die Betrachtung von irreduziblen Darstellungen, beschränken kann.

ÜBUNG 1.4.2 (vgl. [**17**], Satz, S.69). Beweisen Sie die folgende Aussage:

SATZ 1.4.3. *Es seien G eine affine algebraische Gruppe, V ein endlich dimensionaler Vektorraum und $\rho\colon G \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$ eine Darstellung. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(1) *Die Darstellung ρ ist vollständig reduzibel.*
(2) *Zu jedem ρ-invarianten Untermodul U von V gibt es einen ρ-invarianten Untermodul W, so dass $V = U \oplus W$ als G-Modul.*

Jede endliche Gruppe kann in natürlicher Weise zu einer affinen algebraischen Gruppe gemacht werden, und es gilt:

SATZ 1.4.4 (Maschke). *Jede endliche Gruppe ist reduktiv.*

BEWEIS. Es sei $\rho\colon G \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$ eine Darstellung von G. Weiterhin sei $W \subset V$ ein nichttrivialer G-invarianter Teilraum. Nach Satz 1.4.3 genügt es zu zeigen, dass ein G-invarianter Teilraum U existiert, so dass $V = U \oplus W$ als G-Modul. Zunächst sei $\widetilde{U}$ ein zu W komplementärer Unterraum, d.h. $V = \widetilde{U} \oplus W$ als Vektorraum. Diese Zerlegung liefert eine Projektionsabbildung $\widetilde{\pi}\colon V \longrightarrow W$. Wir definieren nun $\pi\colon V \longrightarrow W$ durch $\pi(v) :=$

$\sum_{g\in G} g(\widetilde{\pi}(g^{-1}v))$. Man überprüft sofort, dass π eine lineare, G-äquivariante und surjektive Abbildung ist (In der Tat ist $\pi(w) = |G|w$ für $w \in W$). Wir setzen $U := \ker(\pi)$. U hat dann die gewünschten Eigenschaften. □

1.5. Der kategorielle Quotient eines Vektorraums nach einer Darstellung. Wir betrachten wieder eine Darstellung ρ einer affinen algebraischen Gruppe G auf einem endlich dimensionalen $\mathbb{C}$-Vektorraum V. Dies induziert die Äquivalenzrelation

$$v_1 \sim v_2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists g \in G: \quad v_1 = \rho(g)(v_2).$$

Es sei $V/_\rho G$ die Menge der Äquivalenzklassen. Wir fassen V als affine algebraische Varietät auf.

PROBLEM. *Trägt $V/_\rho G$ die Struktur einer affinen algebraischen Varietät?*

Leider ist die Frage mit „Nein“ zu beantworten. Nehmen wir einmal an, $V/_\rho G$ wäre eine affine algebraische Varietät mit Koordinatenalgebra A und $\pi_\rho\colon V \longrightarrow V/_\rho G$ die Projektionsabbildung, die natürlich regulär sein sollte. Die Elemente aus A sind die regulären Funktionen auf $V/_\rho G$. Wir können sie auch als reguläre Funktionen auf V auffassen. Als solche sind sie sicher konstant auf jedem G-Orbit in V. Umgekehrt sollte jede reguläre Funktion auf V, die auf allen Orbiten konstant ist, ein Element von A sein. Bezeichnen wir die Unteralgebra von $\mathbb{C}[V]$ der Funktionen, die auf allen G-Orbiten konstant sind, mit $\mathbb{C}[V]^\rho$, so sollte also

$$V/_\rho G = \operatorname{Specmax}\mathbb{C}[V]^\rho \tag{1}$$

gelten. Das nächste Beispiel zeigt die Probleme auf.

BEISPIEL 1.5.1. Wir betrachten die folgende Operation

$$\begin{array}{rccc} \sigma\colon & \mathbb{C}^*\times\mathbb{C}^n & \longrightarrow & \mathbb{C}^n \\ & (z,v) & \longmapsto & z\cdot v, \end{array}$$

die zu der Darstellung $\rho\colon \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, $z \longmapsto z\cdot E_n$, gehört. Als Menge gilt $V/_\rho G = \mathbb{P}_{n-1}\cup\{0\}$. Eine Funktion auf $\mathbb{C}^n$, die konstant auf jeder Geraden ist, muss aber konstant sein, d.h. $\mathbb{C}[\mathbb{C}^n]^\rho = \mathbb{C}$ und $\operatorname{Specmax}\mathbb{C} = \{*\}$.

Wir können uns den wesentlichen Punkt sofort klar machen: Eine Funktion aus $\mathbb{C}[V]^\rho$ ist als stetige Funktion nicht nur auf jedem Orbit O konstant, sondern auch auf dem Abschluss $\overline{O}$ eines jeden Orbits. In obigem Beispiel ist aber der Orbit $\mathbb{C}^*\cdot v$ nur dann abgeschlossen, wenn $v = 0$ ist. Wir können also bestenfalls hoffen, die Menge der abgeschlossenen Orbiten mit der Struktur einer affinen algebraischen Varietät zu versehen. In obigem Beispiel funktioniert das. Wir behalten den durch (1) nahegelegten Ansatz bei und definieren als Quotienten

$$V/\!\!/_\rho G := \operatorname{Specmax}\mathbb{C}[V]^\rho.$$

Jetzt haben wir aber eines völlig übersehen:

PROBLEM. *Ist $\mathbb{C}[V]^\rho$ eine endlich erzeugte $\mathbb{C}$-Algebra?*

Die Antwort ist auch hier i.a. nein. Für reduktive Gruppen gilt jedoch:

SATZ 1.5.2 (Hilbert). *Ist G eine reduktive algebraische Gruppe, so ist $\mathbb{C}[V]^\rho$ eine endlich erzeugte $\mathbb{C}$-Algebra.*

Wir wollen nun die Algebra $\mathbb{C}[V]^\rho$ noch etwas expliziter beschreiben: Für die affine Varietät V gilt $V = \operatorname{Specmax}\operatorname{Sym}^*(V^\vee) = \operatorname{Specmax}\bigoplus_{d\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} S^d(V^\vee)$. Also gilt $\mathbb{C}[V] = \bigoplus_{d\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} S^d(V^\vee)$. Wie in Abschnitt 1.3 induziert die Operation von G auf V eine Linksoperation $\rho^l\colon G\times\mathbb{C}[V] \longrightarrow \mathbb{C}[V]$. Es gilt $\rho^l(G,S^d(V^\vee)) \subset S^d(V^\vee)$. Damit liefert ρ^l eine Familie von Darstellungen

$$\rho^l_d\colon G \longrightarrow \mathrm{GL}\big(S^d(V^\vee)\big), \quad d\in\mathbb{Z}_{\geq 0},$$

und man überzeugt sich leicht, dass ρ_d^l mit der in Abschnitt 1.2 eingeführten Darstellung $\rho_d^\vee$ übereinstimmt. Setzt man also

$$S^d(V^\vee)^\rho := \{ f \in S^d(V^\vee) \,|\, \rho_d^\vee(g)(f) = f \quad \forall g \in G \},$$

dann gilt

$$\mathbb{C}[V]^\rho = \bigoplus_{d \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} S^d(V^\vee)^\rho.$$

Wir nehmen ab jetzt an, dass G reduktiv ist. $V/\!\!/_\rho G$ ist damit eine wohldefinierte affine algebraische Varietät, und die Inklusion $\mathbb{C}[V]^\rho \subset \mathbb{C}[V]$ induziert die Projektionsabbildung $\pi_\rho : V \longrightarrow V/\!\!/_\rho G$.

LEMMA 1.5.3. *Die Punkte in $V/\!\!/_\rho G$ stehen in Bijektion zu den abgeschlossenen Orbiten in V. Genauer gesagt gilt die folgende Aussage:*

Es seien W_1 und W_2 zwei disjunkte, abgeschlossene, G-invariante Teilmengen von V. Dann gibt es eine Funktion $f \in \mathbb{C}[V]^\rho$ mit $f_{|W_1} \equiv 0$ und $f_{|W_2} \equiv 1$.

BEMERKUNG 1.5.4. Die im Lemma beschriebene Eigenschaft nennt man *geometrisch reduktiv*. Das Lemma sagt dann also, dass reduktive Gruppen geometrisch reduktiv sind.

Wir unterscheiden nun verschiedene Typen von Punkten in V nach der Struktur ihrer Orbiten: Ein Element $v \in V$ heisst *ρ-stabil*, wenn der Orbit von v abgeschlossen ist und die Dimension von G hat; *ρ-semistabil*, wenn 0 nicht im Abschluss des Orbits von v liegt; *nicht ρ-semistabil*, wenn 0 im Abschluss des Orbits von v liegt. Liegt die Darstellung ρ fest, so sprechen wir auch einfach von *stabilen* usw. Punkten.

BEMERKUNG 1.5.5. Stabile Punkte sind offenbar semistabil. Ein Punkt $v \in V$ ist genau dann semistabil, wenn nicht alle homogenen Elemente aus $\mathbb{C}[V]^\rho$ in v verschwinden, also genau dann nicht semistabil, wenn alle homogenen ρ-invarianten Funktionen in v verschwinden.

Das wichtigste Hilfsmittel zur Bestimmung der stabilen, semistabilen und nicht semistabilen Punkte ist der nächste Satz. Eine *Einparameteruntergruppe von G* ist dabei einfach ein Gruppenhomomorphismus $\lambda : \mathbb{C}^* \longrightarrow G$.

SATZ 1.5.6 (Hilbertkriterium). *Ein Punkt $v \in V$ ist genau dann nicht stabil (nicht semistabil), wenn es eine nicht konstante Einparameteruntergruppe $\lambda : \mathbb{C}^* \longrightarrow G$ gibt, so dass*

$$\lim_{z \longrightarrow \infty} \lambda(z) \cdot v = w \quad (= 0)$$

für einen geeigneten Punkt $w \in W$.

Schliesslich wollen wir noch ein Resultat von Hilbert anfügen, das bei der expliziten Bestimmung des Ringes $\mathbb{C}[V]^\rho$ hilft:

SATZ 1.5.7. *Sind $I_1, \ldots, I_s \in \mathbb{C}[V]^\rho$ invariante reguläre Funktionen, deren gemeinsame Nullstellenmenge in V mit der Menge der nicht semistabilen Punkte übereinstimmt, dann ist $\mathbb{C}[V]^\rho$ der ganze Abschluss von $\mathbb{C}[I_1, \ldots, I_s]$ im Körper $\mathbb{C}(V)$.*

BEWEIS. [**30**], Th.4.6.1 & Cor.4.6.2. □

Die Sätze 1.5.2, 1.5.6 und Lemma 1.5.3 werden im Kapitel über die geometrische Invariantentheorie in einem allgemeineren Rahmen bewiesen werden. Um schon vorher eine gewisse Vetrautheit mit diesen Resultaten zu gewinnen, werden wir diese Sätze im folgenden Kapitel über algebraische Formen in zahlreichen Beispielen anwenden.

2. Anhang – Die Reduktivität der allgemeinen linearen Gruppe

In diesem Abschnitt soll gezeigt werden, dass die allgemeine lineare Gruppe reduktiv ist. Der Beweis gestaltet sich recht umfangreich. Wir folgen in unserer Darstellung dem Buch [**7**].

2.1. Halbeinfache Algebren. Um die Reduktivität der allgemeinen linearen Gruppe zu zeigen, benötigen wir noch einige weitere Hilfsmittel aus der Darstellungstheorie der endlich dimensionalen $\mathbb{C}$-Algebren. Diese Begriffe führen uns zwar etwas vom Weg ab, wir wollen aber der Vollständigkeit halber trotzdem kurz darauf eingehen.

Es sei V ein endlich dimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum und A eine nicht notwendigerweise kommutative, endlich dimensionale $\mathbb{C}$-Algebra mit 1. Eine *Darstellung von A in V* ist ein $\mathbb{C}$-Algebra-Homomorphismus

$$\rho : A \longrightarrow \mathrm{End}(V).$$

Wie für Darstellungen affiner algebraischer Gruppen definiert man die Begriffe *invarianter Teilraum*, *irreduzible Darstellung*, *vollständig reduzible Darstellung*. Ist ρ eine irreduzible (vollständig reduzible) Darstellung, so heisst V ein *(halb)einfacher Modul*. Eine Algebra A, für die jede Darstellung vollständige reduzibel ist, heisst *halbeinfach*. In dem Beweis der Reduktivität von $\mathrm{GL}(V)$ wird ausgenutzt, dass eine gewisse Algebra halbeinfach ist. Nun mag es auf den ersten Blick so aussehen, als sei es genauso schwierig, die Halbeinfachheit einer Algebra nachzuweisen wie die Reduktivität einer affinen algebraischen Gruppe. In der Tat kann man unter Benutzung der Algebra-Struktur das folgende Kriterium für Halbeinfachheit formulieren:

SATZ 2.1.1. *Es sei A eine endlich dimensionale $\mathbb{C}$-Algebra. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(1) *A ist halbeinfach.*
(2) *A ist als A-Linksmodul halbeinfach.*

BEWEIS. [**7**], S.75. □

Die erste wichtige Anwendung ist:

SATZ 2.1.2. *Für jedes n ist die Algebra $M_n(\mathbb{C})$ halbeinfach.*

BEWEIS. Es sei e_{ij}, $i, j = 1, ..., n$, die Standardbasis für $M_n(\mathbb{C})$. Wir definieren $\mathscr{I}_i := \mathbb{C} \cdot e_{1i} \oplus \cdots \oplus \mathbb{C} \cdot e_{ni}$, $i = 1, ..., n$. Offenbar ist $\mathscr{I}_i$, $i = 1, ..., n$, ein einfacher $M_n(\mathbb{C})$-Modul, und $M_n(\mathbb{C})$ ist als $M_n(\mathbb{C})$-Modul isomorph zu $\mathscr{I}_1 \oplus \cdots \oplus \mathscr{I}_n$, so dass die Behauptung aus Satz 2.1.1 folgt. □

Weitere Beispiele für halbeinfache Algebren erhält man über endliche Gruppen. Es sei G eine endliche Gruppe. Dann ist die *Gruppenalgebra* $\mathbb{C}[G]$ wie folgt definiert: Als $\mathbb{C}$-Vektorraum $\mathbb{C}[G] = \bigoplus_{g \in G} \mathbb{C} \cdot e_g$, und die Multiplikation ist durch

$$\Big(\sum_{g \in G} \alpha_g e_g\Big)\Big(\sum_{h \in G} \beta_h e_h\Big) := \Big(\sum_{g,h \in G} \alpha_g \beta_h e_{g \cdot h}\Big)$$

gegeben. Es gilt:

SATZ 2.1.3 (Maschke). *Es sei G eine endliche Gruppe. Dann ist $\mathbb{C}[G]$ eine halbeinfache Algebra.*

BEWEIS. Dies wird genauso wie Satz 1.4.4 bewiesen. □

Schliesslich wird noch die folgende Konstruktion benötigt: Es sei $A \subset M_n(\mathbb{C})$ eine halbeinfache Unteralgebra. Dann ist die *Kommutante von A* die folgende Unteralgebra von $M_n(\mathbb{C})$:

$$K(A) := \big\{ k \in M_n(\mathbb{C}) \,|\, mk = km \quad \forall m \in A \big\}.$$

SATZ 2.1.4 (Schur). *Die Algebra $K(A)$ ist ebenfalls halbeinfach.*

BEWEIS. [**7**], Seite 78ff. □

2.2. Beweis der Reduktivität von $\mathrm{GL}(V)$. In Schritt 1 und 2 führen wir zwei einfache Reduktionen durch, in Schritt 3 wird dann die Reduktivität von $\mathrm{GL}(V)$ auf die Halbeinfachheit einer gewissen Algebra zurückgeführt.

Schritt 1. Wir betrachten eine Darstellung

$$\begin{array}{rccc} \rho\colon & \mathrm{GL}(V) & \longrightarrow & \mathrm{GL}_m(\mathbb{C}) \subset M_m(\mathbb{C}) \\ & g & \longmapsto & \big(f_{ij}(g)\big)_{i,j=1,\ldots,m}, \end{array}$$

wobei die f_{ij} Elemente der Koordinatenalgebra $\mathbb{C}[\mathrm{GL}(V)]$ sind. Nach Wahl einer Basis von V können wir die f_{ij} als rationale Funktionen auffassen, d.h., wir können Polynome $\varphi_{ij}, \psi_{ij} \in \mathbb{C}[x_{ij};\ i,j = 1,\ldots,n]$, $n := \dim V$, finden mit $f_{ij} = \varphi_{ij}/\psi_{ij}$, $i,j = 1,\ldots,m$. Wir wissen, dass als Nenner nur Potenzen der Determinante vorkommen können, d.h., es gibt eine ganz Zahl t und Polynome $r_{ij} \in \mathbb{C}[x_{ij};\ i,j = 1,\ldots,n]$ mit

$$f_{ij} = \det^t \cdot r_{ij} \qquad i,j = 1,\ldots,n.$$

Wir schreiben kurz r für die Matrix $(r_{ij})_{i,j}$. Da ρ eine Darstellung ist, ist auch die Abbildung $\rho'\colon\ \mathrm{GL}(V) \longrightarrow \mathrm{GL}_m(\mathbb{C})$, $g \longmapsto r(g)$, eine Darstellung.

Um die vollständige Reduzibilität von ρ zu zeigen, genügt es offenbar, die vollständige Reduzibilität von ρ' zu zeigen. Dies ist unsere erste Reduktion.

Schritt 2. Die Darstellung ρ' wird jetzt der Einfachheit halber wieder ρ genannt. Wir schränken zunächst die Darstellung ρ auf $\mathbb{C}^* \cdot \mathrm{id}_V$ ein. Wir erhalten also eine Einparameteruntergruppe

$$\lambda\colon\ \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathrm{GL}_m(\mathbb{C}).$$

Wie wir in Beispiel 1.2.3 gesehen haben, ist λ diagonalisierbar, so dass wir o.E.

$$\lambda(z) = \begin{pmatrix} z^{\gamma_1} E_{\mu_1} & & \\ & \ddots & \\ & & z^{\gamma_r} E_{\mu_r} \end{pmatrix}$$

mit $\gamma_1 > \cdots > \gamma_r$ annehmen können. Wir schreiben nun

$$\rho(x) := \begin{pmatrix} \rho_{11}(x) & \ldots & \rho_{1r}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \rho_{r1}(x) & \ldots & \rho_{rr}(x) \end{pmatrix}.$$

Dabei ist $\rho_{ij}(x)$ eine $(\mu_i \times \mu_j)$-Matrix, $i,j = 1,\ldots,m$. Für $i \neq j$ folgt aus $\lambda(z)\rho(x) = \rho(zx) = \rho(xz) = \rho(x)\lambda(z)$

$$z^{\gamma_i}\rho_{ij}(x) = z^{\gamma_j}\rho_{ij}(x)$$

und damit $\rho_{ij}(x) = 0$. Für $i = j$ gilt $\rho_{ii}(zx) = z^{\gamma_i}\rho_{ii}(x)$. Damit sind die Einträge von ρ_{ii} homogene Polynome vom Grad γ_i. Wir brauchen jetzt also nur noch Darstellungen zu betrachten, die durch homogene Polynome definiert werden, die alle denselben Grad haben.

Schritt 3. Nach Schritt 1 und Schritt 2 haben wir nur noch spezielle homogene polynomiale Darstellungen zu untersuchen. Einer solchen Darstellung können wir den Grad der homogenen Polynome zuordnen. Es sei V ein endlich dimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum und $\rho\colon\ \mathrm{GL}(V) \longrightarrow \mathrm{GL}_m(\mathbb{C})$ eine Darstellung vom Grad d. Wir definieren zunächst eine Darstellung der symmetrischen Gruppe $\mathfrak{S}^d$ auf dem Vektorraum $\mathrm{End}(V^{\otimes d})$. Wir wählen eine Basis $e_1,\ldots,e_n$ von V. Zu einem Multi-Index $\underline{\iota} = (\iota_1,\ldots,\iota_d) \in \{1,\ldots,n\}^d$ definieren wir $e_{\underline{\iota}} := e_{\iota_1} \otimes \cdots \otimes e_{\iota_d} \in V^{\otimes d}$. Ordnen wir die Multiindizes lexikographisch an, so bilden die $e_{\underline{\iota}}$, $\underline{\iota} \in \{1,\ldots,n\}^d$, eine angeordnete Basis von $V^{\otimes d}$. Zu einer Permutation σ und einem Multi-Index $\underline{\iota}$ definieren wir den Multi-Index $\sigma \cdot \underline{\iota} := (\sigma^{-1}(\iota_1),\ldots,\sigma^{-1}(\iota_d))$ und setzen $\sigma \cdot e_{\underline{\iota}} := e_{\sigma\cdot\underline{\iota}}$. Dies induziert eine Darstellung von $\mathfrak{S}^d$ auf $V^{\otimes d}$ und eine Darstellung $\tau\colon\ \mathbb{C}[\mathfrak{S}^d] \longrightarrow \mathrm{End}(V^{\otimes d})$ der Gruppenalgebra. Wir setzen $A_\rho := K(\mathrm{Im}(\tau))$. Nach Satz 2.1.3 und Satz 2.1.4 ist A_ρ eine halbeinfache Algebra. Wir betrachten weiterhin die Darstellung

$$.^{\otimes d}\colon\ \mathrm{GL}(V) \longrightarrow \mathrm{GL}(V^{\otimes d}).$$

BEMERKUNG 2.2.1. Analog zur Definition der Darstellung $.^{\otimes d}$ können wir einem Endomorphismus $h \in \mathrm{End}(V)$ ein Element in $\mathrm{End}(V^{\otimes d})$ zuordnen, das wir der Einfachheit halber mit $h^{\otimes d}$ bezeichnen. Wird h bzgl. der Basis $e_1, \dots, e_n$ durch die Matrix $(h_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ dargestellt, so wird $h^{\otimes d}$ bzgl. der Basis $(e_{\underline{\iota}})_{\underline{\iota} \in \{1,\dots,n\}^d}$ durch die Matrix $(H_{\underline{\iota},\underline{\nu}})_{\underline{\iota},\underline{\nu} \in \{1,\dots,n\}^d}$ mit $H_{\underline{\iota},\underline{\nu}} = h_{\iota_1 \nu_1} \cdot \ldots \cdot h_{\iota_n \nu_n}$ dargestellt.

Die Algebra A_ρ enthält offensichtlich das Bild von $.^{\otimes d}$. Die Reduktivität der Gruppe $\mathrm{GL}(V)$ folgt nun aus dem folgenden Satz und Lemma 2.2.5.

SATZ 2.2.2. i) *Es existiert genau eine Darstellung* $\widetilde{\rho}\colon \mathrm{GL}(V^{\otimes d}) \longrightarrow \mathrm{GL}_m(\mathbb{C})$*, so dass* $\rho = \widetilde{\rho} \circ .^{\otimes d}$.

ii) *Die Darstellung* $\widetilde{\rho}$ *lässt sich zu einer eindeutig bestimmten Darstellung*

$$\widehat{\rho}\colon A_\rho \longrightarrow M_m(\mathbb{C})$$

fortsetzen.

Der Rest dieses Abschnittes ist dem Beweis von Satz 2.2.2 gewidmet. Zunächst wollen wir die Elemente der Algebra A_ρ weiter charakterisieren:

LEMMA 2.2.3. *Ein Element* $H \in \mathrm{End}(V^{\otimes d})$*, das bzgl. der Basis* $(e_{\underline{\iota}})_{\underline{\iota} \in \{1,\dots,n\}^d}$ *durch die Matrix* $(H_{\underline{\iota},\underline{\nu}})_{\underline{\iota},\underline{\nu} \in \{1,\dots,n\}^d}$ *dargestellt wird, liegt genau dann in* A_ρ*, wenn für jede Permutation* $\sigma \in \mathfrak{S}^d$ *und jedes Paar* $\underline{\iota}, \underline{\nu}$ *gilt:* $H_{\underline{\iota},\underline{\nu}} = H_{\sigma\cdot\underline{\iota},\sigma\cdot\underline{\nu}}$.

BEWEIS. Nach Definition liegt H genau dann in der Algebra A_ρ, wenn für jedes $\underline{\iota} \in \{1,\dots,n\}^d$ und jedes $\sigma \in \mathfrak{S}^d$ gilt: $H(e_{\underline{\iota}}) = \sigma^{-1} H(e_{\sigma\cdot\underline{\iota}})$. Mit $H(e_{\underline{\iota}}) = \sum_{\underline{\nu}} H_{\underline{\iota},\underline{\nu}} e_{\underline{\nu}}$ und

$$\sigma^{-1} H(e_{\sigma\cdot\underline{\iota}}) = \sigma^{-1}\big(\sum_{\underline{\nu}} H_{\sigma\cdot\underline{\iota},\underline{\nu}} e_{\underline{\nu}}\big) = \sigma^{-1}\big(\sum_{\underline{\nu}} H_{\sigma\cdot\underline{\iota},\sigma\cdot\underline{\nu}} e_{\sigma\cdot\underline{\nu}}\big) = \sum_{\underline{\nu}} H_{\sigma\cdot\underline{\iota},\sigma\cdot\underline{\nu}} e_{\underline{\nu}}$$

folgt sofort die Behauptung. □

Es seien nun x_{ij}, $i,j = 1,\dots,n$, algebraisch unabhängige Unbestimmte über $\mathbb{C}$. Zu $\underline{\iota}, \underline{\nu} \in \{1,\dots,n\}^d$ setzen wir $X_{\underline{\iota},\underline{\nu}} := x_{\iota_1 \nu_1} \cdot \ldots \cdot x_{\iota_n \nu_n}$. Es gilt dann offensichtlich:

LEMMA 2.2.4. $X_{\underline{\iota},\underline{\nu}} = X_{\underline{\kappa},\underline{\lambda}} \quad \Longleftrightarrow \quad \exists \sigma \in \mathfrak{S}^d: \quad \sigma\cdot\underline{\iota} = \underline{\kappa} \quad \wedge \quad \sigma\cdot\underline{\nu} = \underline{\lambda}.$

Wir können nun mit dem eigentlichen Beweis beginnen. Es sei $\rho\colon \mathrm{GL}(V) \longrightarrow \mathrm{GL}_m(\mathbb{C})$ die vorgegebene homogene polynomiale Darstellung vom Grad d. Der Homomorphismus ρ wird also durch homogene Polynome r_{kl}, $k,l = 1,\dots,m$, vom Grad d beschrieben. Wir schreiben $r_{kl} = \sum_{\underline{\iota},\underline{\nu} \in \{1,\dots,n\}^d} a_{kl,\underline{\iota},\underline{\nu}} X_{\underline{\iota},\underline{\nu}}$. Fordern wir $a_{kl,\underline{\iota},\underline{\nu}} = a_{kl,\sigma\cdot\underline{\iota},\sigma\cdot\underline{\nu}}$ für alle $k,l = 1,\dots,m$ und $\sigma \in \mathfrak{S}^d$, so sind die Koeffizienten $a_{kl,\underline{\iota},\underline{\nu}}$ nach Lemma 2.2.4 eindeutig bestimmt. Wir definieren nun – unter Benutzung von Lemma 2.2.3 – $\widehat{\rho}\colon A_\rho \longrightarrow M_m(\mathbb{C})$, indem wir $H = (H_{\underline{\iota},\underline{\nu}})$ auf $R := (R_{kl})_{k,l=1,\dots,m}$ mit $R_{kl} = \sum_{\underline{\iota},\underline{\nu} \in \{1,\dots,n\}^d} a_{kl,\underline{\iota},\underline{\nu}} H_{\underline{\iota},\underline{\nu}}$ abbilden. Die Abbildung $\widehat{\rho}$ ist offenbar linear. Wir müssen also noch zeigen, dass $\widehat{\rho}$ auch ein Homomorphismus ist. Wir beginnen mit:

LEMMA 2.2.5. *Die Algebra* A_ρ *wird von den Elementen der Form* $h^{\otimes d}$*,* $h \in \mathrm{End}(V)$*, erzeugt.*

BEWEIS. Es seien $V \subset W$ komplexe Unterräume des $\mathbb{C}^N$, und es sei $q\big((z_1,\dots,z_N),(z'_1,\dots,z'_N)\big) := \sum_{i=1}^N z_1 z'_1$ die Standardform. Mit dem Gram-Schmidt-Verfahren sieht man, dass im Falle einer echten Inklusion $V \subsetneq W$ ein $w \in W \setminus \{0\}$ existiert, dass auf V orthogonal steht. Dies wenden wir nun auf $B \subset A_\rho$ an mit B dem von den $h^{\otimes d}$, $h \in \mathrm{End}(V)$, erzeugten Untervektorraum. Wir wählen ein Element $(H_{\underline{\iota},\underline{\nu}})_{\underline{\iota},\underline{\nu} \in \{1,\dots,n\}^d} \in A_\rho$ im orthogonalen Komplement von B, d.h. $\sum_{\underline{\iota},\underline{\nu} \in \{1,\dots,n\}^d} H_{\underline{\iota},\underline{\nu}} X_{\underline{\iota},\underline{\nu}} = 0$. Aus Lemma 2.2.3 und Lemma 2.2.4 folgt sofort $H_{\underline{\iota},\underline{\nu}} = 0$ für alle $\underline{\iota}, \underline{\nu} \in \{1,\dots,n\}^d$ und damit $B = A_\rho$. □

Da $\mathrm{GL}(V)$ offen in $\mathrm{End}(V)$ ist und da ρ eine Darstellung ist, gilt für alle $h_1, h_2 \in \mathrm{End}(V)$, dass $r(h_1 h_2) = r(h_1) r(h_2)$ ist, wobei $r := (r_{kl})_{k,l=1,\ldots,m}$. Ebenso folgt $(h_1 h_2)^{\otimes d} = h_1^{\otimes d} h_2^{\otimes d}$. Also:

$$\widehat{\rho}(h_1^{\otimes d} h_2^{\otimes d}) = \widehat{\rho}\big((h_1 h_2)^{\otimes d}\big) = r(h_1 h_2) = r(h_1) r(h_2) = \widehat{\rho}(h_1^{\otimes d}) \widehat{\rho}(h_2^{\otimes d}).$$

Auf Grund von Lemma 2.2.5 ist $\widehat{\rho}$ ein Homomorphismus. Satz 2.2.2 ist nun bewiesen. $\square$

BEMERKUNG 2.2.6 (Zur Reduktivität von $\mathrm{SL}(V)$). Der Homomorphismus algebraischer Gruppen $\mu \colon \mathbb{C}^* \times \mathrm{SL}(V) \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$, $(z, g) \longmapsto z \cdot \mathrm{id}_V \circ g$, ist surjektiv. Es sei $r := \dim(V)$. Dann ist $\ker(\mu) = \{\, (\zeta, \zeta^{-1} \circ \mathrm{id}_V) \mid \zeta \text{ } r\text{-te Einheitswurzel} \,\}$ isomorph zur Gruppe C_r der r-ten Einheitswurzeln. Weiterhin gilt, dass eine Darstellung $\rho \colon \mathbb{C}^* \times \mathrm{SL}(V) \longrightarrow \mathrm{GL}(W)$ genau dann durch $\mathrm{GL}(V)$ faktorisiert, wenn $\ker(\mu) \subset \ker(\rho)$ gilt. Für eine beliebige Darstellung $\widetilde{\rho} \colon \mathrm{SL}(V) \longrightarrow \mathrm{GL}(W)$ können wir o.E. (vgl. Beispiel 1.2.3) annehmen, dass $\zeta \cdot \mathrm{id}_V$ für jede r-te Einheitswurzel ζ diagonal operiert. Man kann nun eine Darstellung $\lambda \colon \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathrm{GL}(W)$ angeben, so dass $\ker(\mu) \subset \ker(\rho := (\lambda, \widetilde{\rho}))$ gilt. Damit kann man nun die Reduktivität von $\mathrm{SL}(V)$ auf die von $\mathrm{GL}(V)$ zurückführen. Die Detailüberlegungen bleiben dem Leser überlassen.

KAPITEL 2

Zur Invariantentheorie der algebraischen Formen und der Matrizen

1. Definitionen

1.1. Der Begriff der algebraischen Form. Eine *algebraische Form vom Grad d auf* $\mathbb{C}^n$ ist eine symmetrische d-Multi-Linearform

$$\underbrace{\mathbb{C}\times\cdots\times\mathbb{C}}_{d-\text{mal}}\longrightarrow\mathbb{C},$$

also dasselbe wie eine lineare Abbildung

$$\varphi\colon S^d(\mathbb{C}^n)\longrightarrow\mathbb{C}.$$

Die algebraischen Formen vom Grad d auf $\mathbb{C}^n$ bilden den Vektorraum $S^d(\mathbb{C}^n)^\vee$. Für $d = 2,3,4,\ldots$ spricht man von *quadratischen, kubischen, quartischen Formen* usw. und für $n = 2,3,4$ von *binären, ternären und quaternären Formen*.

Es sei $(e_1,\ldots,e_n)$ die Standardbasis von $\mathbb{C}^n$ und $(x_1,\ldots,x_n)$ die dazu duale Basis von $\mathbb{C}^{n\vee}$. Wir erhalten einen Isomorphismus

$$\begin{array}{ccc} S^d(\mathbb{C}^n)^\vee & \longrightarrow & S^d(\mathbb{C}^{n\vee}) \\ \varphi & \longmapsto & \sum_{\substack{\underline{\nu}=(\nu_1,\ldots,\nu_n):\\ \nu_1+\cdots+\nu_n=d}} \varphi(e_{\nu_1}\otimes\cdots\otimes e_{\nu_n})x_{\nu_1}\otimes\cdots\otimes x_{\nu_n}. \end{array}$$

Den Vektorraum $S^d(\mathbb{C}^{n\vee})$ identifizieren wir in der üblichen Weise mit dem Vektorraum der homogenen Polynome vom Grad d in den Variablen $x_1,\ldots,x_n$, indem wir $x_{\nu_1}\otimes\cdots\otimes x_{\nu_n}$ mit $x_{\nu_1}\cdot\ldots\cdot x_{\nu_n}$ identifizieren. Mit $\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]_d$ bezeichnen wir den Vektorraum der homogenen Polynome vom Grad d. Es sei φ eine algebraische Form vom Grad d auf $\mathbb{C}^n$ und f das zugehörige Polynom. Für $\underline{\alpha} := (\alpha_1,\ldots,\alpha_n)^t \in \mathbb{C}^n$ gilt dann:

$$f(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \quad = \quad \varphi(\underline{\alpha}\otimes\cdots\otimes\underline{\alpha}).$$

1.2. Die Operation von $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ durch Variablensubstitution. Wir wollen in diesem Kapitel die Operation ν_n von $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ auf $\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]_d$ durch Variablensubstitution untersuchen:

$$\begin{array}{rccc} \nu_n\colon & \mathrm{SL}_n(\mathbb{C})\times\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]_d & \longrightarrow & \mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]_d \\ & (g,f) & \longmapsto & g\cdot f\colon \underline{\alpha}\longmapsto f(g^t\cdot\underline{\alpha}). \end{array}$$

In der Notation von Abschnitt I.1.2 gilt $\nu_n = (\iota_d^\vee)^{-1^t}$. Dabei ist $\iota\colon\ \mathrm{SL}_n(\mathbb{C})\subset\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ die Inklusionsabbildung. Es ergeben sich nun folgende Fragestellungen:

(1) Man beschreibe die Menge $\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]_d/_{\nu_n}\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$, d.h., man finde in jedem Orbit einen möglichst „guten“ Repräsentanten, eine sogenannte *Normalform*.

(2) Die Beschreibung von $\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]_d/\!\!/_{\nu_n}\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$. Dazu muss man explizite Erzeuger des Invariantenringes ermitteln.

(3) Die Bestimmung der (semi)stabilen Formen und der Nullformen. Nach Kapitel I, Satz 1.5.7, kann dies bei der Lösung von Problem (2) hilfreich sein.

BEMERKUNG 1.2.1. Analog kann man natürlich eine Operation von $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ auf $\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]_d$ definieren. Man beachte, dass dann alle Elemente Nullformen sind.

BEMERKUNG 1.2.2. Die obigen Probleme kann man auch als Klassikationsprobleme der algebraischen Geometrie auffassen. Es sei $H \subset \mathbb{P}_{n-1}$ eine Hyperfläche vom Grad d. Es gibt dann ein Polynom $f \in \mathbb{C}[x_1,...,x_n]_d$ mit $H = \{ f = 0 \}$. Zwei Hyperflächen $H_1 = \{ f_1 = 0 \}$ und $H_2 = \{ f_2 = 0 \}$ heissen *projektiv äquivalent*, wenn es eine Matrix $g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ gibt, so dass $f_1 = g \cdot f_2$, d.h., wenn es einen Automorphismus des $\mathbb{P}_{n-1}$ gibt, der H_2 in H_1 überführt. $\mathbb{C}[x_1,...,x_n]_d/_{v_n}\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ ist also die Menge der projektiven Äquivalenzklassen von Hyperflächen. Zwei projektiv äquivalente Hyperflächen sind sicher isomorph. Umgekehrt kann man zeigen, dass zwei isomorphe *glatte* Hyperflächen der Dimension mindestens drei auch projektiv äquivalent sind . In Dimension zwei gilt dieselbe Aussage für Hyperflächen vom Grad $d \neq 4$. Einen Beweis findet man im Buch [**11**], wobei man die dortige Ausnahme $d \neq \dim +1$ in Dimensionen größer als zwei durch Verwendung des Kohomologieringes umgehen kann.

2. Beispiele

2.1. Quadratische Formen. Zu einem homogenen Polynom q vom Grad 2 gibt es eine eindeutig bestimmte, symmetrische $(n \times n)$-Matrix S_q, so dass für alle $\underline{\alpha} = (\alpha_1,...,\alpha_n)^t \in \mathbb{C}^n$ gilt:

$$q(\alpha_1,...,\alpha_n) = \underline{\alpha}^t S_q \underline{\alpha}.$$

Man rechnet sofort nach, dass

$$S_{g\cdot q} = g \cdot S_q \cdot g^t \qquad \forall g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}).$$

Wie aus der linearen Algebra bekannt ist, gibt es zu jeder symmetrischen Matrix $S \in M_n(\mathbb{C})$ eine Matrix $g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, so dass gSg^t eine Diagonalmatrix mit Einsen und Nullen auf der Diagonalen ist. Es folgt:

LEMMA 2.1.1. *Es sei $q \in \mathbb{C}[x_1,...,x_n]_2$, dann gibt es eine Matrix $g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ und eine natürliche Zahl $m \in \{ 0,...,n \}$ mit*

$$g \cdot q = x_1^2 + \cdots + x_m^2.$$

Dabei ist der rechte Ausdruck für $m = 0$ als 0 zu interpretieren.

Wir betrachten nun die Operation von $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ auf $\mathbb{C}[x_1,...,x_n]_2$. Die *Diskriminante einer quadratischen Form q* ist die Zahl $\Delta(q) := \det(S_q)$. Die Diskriminante ist offenbar invariant unter der Operation von $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$. Aus Lemma 2.1.1 ergibt sich:

KOROLLAR 2.1.2. *Es sei $q \in \mathbb{C}[x_1,...,x_n]_2$ und $\delta := \Delta(q)$. Gilt $\delta \neq 0$, so ist q äquivalent zu der Form $q_\delta := \delta x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$. Andernfalls gibt es ein $m \in \{ 0,...,n-1 \}$, so dass q äquivalent zu $x_1^2 + \cdots + x_m^2$ ist.*

Es gilt sogar:

SATZ 2.1.3. $W := \mathbb{C}[x_1,...,x_n]_2/\!\!/_{v_n}\mathrm{SL}_n(\mathbb{C}) = \mathrm{Specmax}\,\mathbb{C}[\Delta]$.

BEWEIS. Es sei $I \in \mathbb{C}[W]$. Schreiben wir das „allgemeine“ quadratische Polynom als $\sum_{i\leq j;\, i,j=1,...,n} \kappa_{ij}x_ix_j$, so ist die Koordinatenalgebra von $\mathbb{C}[x_1,...,x_n]_2$ durch $\mathbb{C}[\kappa_{ij};\ i \leq j;\ i,j = 1,...,n]$ gegeben und I ist ein Polynom in den κ_{ij}. Wir definieren $I_\Delta \in \mathbb{C}[\Delta]$, indem wir κ_{11} durch Δ, κ_{ii}, $i = 2,...,n$, durch 1 und die restlichen Unbestimmten durch 0 ersetzen. Das Polynom $I - I_\Delta$ nimmt dann auf jedem q_δ den Wert 0 an. Da aber $I - I_\Delta \in \mathbb{C}[W]$ gilt, folgt aus Korollar 2.1.2 $I - I_\Delta = 0$. □

ÜBUNG 2.1.4. Zeigen Sie, dass q genau dann Nullform ist, wenn $\Delta(q) = 0$ gilt! Berechnen Sie die Dimension des Stabilisators einer Form q! Benutzen Sie dabei die Matrizenbeschreibung! Welches sind die (semi)stabilen Punkte in $\mathbb{C}[x_1,...,x_n]_2$?

2.2. Binäre Formen. Wir brauchen nur Formen vom Grad ≥ 3 in Betracht zu ziehen. Wir schreiben eine binäre Form f vom Grad d als

$$f = a_1 x_1^d + a_2 x_1^{d-1} x_2 + \cdots + a_d x_1 x_2^{d-1} + a_{d+1} x_2^d.$$

Aus der Tatsache, dass $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ dreifach transitiv auf der projektiven Geraden $\mathbb{P}_1$ operiert ([**10**], Kapitel IX, §3) schliesst man sofort, dass f äquivalent zu einer Form der Gestalt

$$\begin{array}{ll} \lambda x_1^{d-i} x_2^i, \quad 2i \leq d,\ \lambda \in \mathbb{C}, \quad \text{oder} & \\ \lambda x_1 x_2 (x_1 - x_2) \prod_{i=4}^d (x_1 - \beta_i x_2), & \lambda \in \mathbb{C}^*, \beta_i \in \mathbb{C}, \end{array}$$

ist. Wir bestimmen zunächst die stabilen und semistabilen Formen und die Nullformen. Da die Eigenschaft, stabil, semistabil bzw. eine Nullform zu sein, invariant unter der Operation von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ ist und da Einparameteruntergruppen nach I.1.2.3 diagonalisiert werden können, haben wir nach dem Hilbertkriterium (I.1.5.6) nur zu untersuchen, für welche Formen $f = a_1 x_1^d + \cdots$

$$\lim_{z \longrightarrow \infty} \begin{pmatrix} z & \\ & z^{-1} \end{pmatrix} \cdot f$$

existiert bzw. $= 0$ ist. Wir erhalten:

i) Der Limes existiert genau dann, wenn $a_1 = \cdots = a_{\lceil \frac{d}{2} \rceil} = 0$ gilt.

ii) Der Limes ist $= 0$ genau dann, wenn $a_1 = \cdots = a_{\lceil \frac{d+1}{2} \rceil} = 0$ gilt.

LEMMA 2.2.1. i) *Eine binäre Form vom Grad d ist genau dann stabil, wenn sie keine Nullstellen der Multiplizität $\geq \frac{d}{2}$ hat.*

ii) *Eine binäre Form vom Grad d ist genau dann semistabil, wenn sie keine Nullstellen der Multiplizität $> \frac{d}{2}$ hat.*

Ist d ungerade, dann stimmen also die Begriffe „stabil" und „semistabil" überein.

Zum Abschluss dieser Einleitung wollen wir noch eine Invariante binärer Formen diskutieren, die man für jeden Grad zur Verfügung hat, die sogenannte Diskriminante. Wir betrachten zunächst zwei binäre Formen $f = a_1 x_1^d + \cdots + a_{d+1} x_2^d$ und $h = b_1 x_1^e + \cdots + b_{e+1} x_2^e$. Die *Resultante von f und h* ist gegeben durch:

$$R(f,h) := \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{d+1} & & & \\ & a_1 & a_2 & \cdots & a_{d+1} & & \\ & & \ddots & \cdots & \cdots & \ddots & \\ & & & a_1 & a_2 & \cdots & a_{d+1} \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_{e+1} & & & \\ & b_1 & b_2 & \cdots & b_{e+1} & & \\ & & \ddots & \cdots & \cdots & \ddots & \\ & & & b_1 & b_2 & \cdots & b_{e+1} \end{vmatrix},$$

wobei die angegebene Matrix $e+d$ Zeilen hat. Bekanntlich gilt $R(f,h) = 0$ dann und nur dann, wenn f und h einen gemeinsamen Faktor haben. Weiterhin gilt $R(g \cdot f, g \cdot h) = R(f,g)$ für alle $g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$. Die *Diskriminante von f* ist dann definiert durch

$$a_1 \Delta(f) := R(f, f').$$

Nach Konstruktion ist Δ ein invariantes Polynom, dass genau dann in f verschwindet, wenn f mehrfache Nullstellen hat. Für Details zu Resultante und Diskriminante verweisen wir auf [**33**], §§33 - 35.

2.2.1. *Binäre kubische Formen.* Gemäss Lemma 2.2.1 ist eine binäre kubische Form k entweder Nullform oder stabil. Ersteres tritt genau dann ein, wenn k eine doppelte oder eine dreifache Nullstelle hat, d.h., wenn $\Delta(k) = 0$ ist. Für $k = a_1 x_1^3 + a_2 x_1^2 x_2 + a_3 x_1 x_2^2 + a_4 x_2^3$ ist die Diskriminante gegeben durch

$$\Delta(k) = 27 a_1^2 a_4^2 - a_2^2 a_3^2 - 18 a_1 a_2 a_3 a_4 + 4 a_1 a_3^3 + 4 a_2^3 a_4.$$

Ist k eine Nullform, so ist k äquivalent zu 0, x_1^3 oder $x_1^2x_2$. Für $\Delta(k) \neq 0$ ist k äquivalent zu einer der Formen

$$k_\delta := \delta x_1 x_2 (x_1 - x_2), \qquad \delta^4 = \Delta(k).$$

Es gilt genau dann $\Delta(k_{\delta_1}) = \Delta(k_{\delta_2})$, wenn eine vierte Einheitswurzel ζ existiert mit $\zeta\delta_1 = \delta_2$.

ÜBUNG 2.2.2. Zeigen Sie, dass für jede vierte Einheitswurzel ζ die Form k_δ unter $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ in die Form $k_{\zeta\delta}$ überführt werden kann!

SATZ 2.2.3. *Jede Invariante binärer kubischer Formen ist ein Polynom in der Diskriminante.*

BEWEIS. Es sei $I \in \mathbb{C}[a_1, a_2, a_3, a_4]$ ein invariantes Polynom. Wir definieren $\widetilde{I} \in \mathbb{C}[a]$, indem wir $a_2 = -a_3 = a$ und $a_1 = 0 = a_4$ setzen. Aufgrund von Übung 2.2.2 muss $\widetilde{I}$ ein Polynom in a^4 sein, d.h., es gibt ein Polynom $\widehat{I}$ mit $\widetilde{I}(a) = \widehat{I}(a^4)$. Wir setzen $I_\Delta := \widehat{I}(\Delta) \in \mathbb{C}[\Delta]$. Wiederum folgt $I = I_\Delta$ aus der Tatsache, dass I und I_Δ in den Formen k_δ übereinstimmen. □

2.2.2. *Binäre quartische Formen.* Wir fassen hier nur kurz die bestehenden Ergebnisse zusammen. Eine binäre quartische Form q schreiben wir als

$$q := a_1x_1^4 + 4a_2x_1^3x_2 + 6a_3x_1^2x_2^2 + 4a_4x_1x_2^3 + a_5x_2^3.$$

Zunächst konstruiert man die folgenden zwei Invarianten

$$\begin{aligned} I &= a_1a_5 - 4a_2a_4 + 3a_3^2 \\ J &= a_1a_3a_5 + 2a_2a_3a_4 - a_1a_4^2 - a_2^2a_5 - a_3^3. \end{aligned}$$

Wir wollen hier nicht darauf eingehen, wie man diese Invarianten findet. Dies wird z.B. in den Büchern [**7**], [**16**], [**28**], [**30**] getan. Die Diskriminante für binäre quartische Formen lässt sich mit diesen Invarianten als $D = I^3 - 27J^2$ schreiben.

BEHAUPTUNG. *Eine binäre Quartik q ist genau dann eine Nullform, wenn $I(q) = J(q) = 0$ gilt.*

BEWEIS. Ist q eine Nullform, so ist q äquivalent zu $x_1^3x_2$, x_1^4 oder zu 0. Es gilt immer $I(q) = J(q) = 0$. Wenn q keine Nullform ist, dann hat q entweder zwei doppelte Nullstellen oder es gibt eine einfache Nullstelle. Im ersten Fall ist q äquivalent zu $\lambda x_1^2x_2^2$, $\lambda \in \mathbb{C}^*$, und es gilt $I(q) = 3\lambda^2 \neq 0$. Im zweiten Fall können wir q in eine Form der Gestalt $\lambda x_1^4 + \mu x_1^3x_2 + x_1x_2^3$ überführen. Es gilt also $I(q) = -\mu/4$ und $J(q) = -\lambda/16$, so dass eine dieser beiden Invarianten nicht verschwindet, da q keine dreifache Nullstelle hat. Ausserdem folgt sofort, dass I und J algebraisch unabhängig sind. □

SATZ 2.2.4. *Der Ring der Invarianten binärer quartischer Formen wird durch die beiden algebraisch unabhängigen Invarianten I und J erzeugt.*

BEWEIS: Die Invarianten I und J sind algebraisch unahängig, so dass $\mathbb{C}[I,J]$ insbesondere normal ist und $\operatorname{Specmax}\mathbb{C}[I,J] \cong \mathbb{A}^2$. Die Inklusion $\mathbb{C}[I,J] \subset \mathbb{C}[V]^\rho$ induziert einen endlichen, surjektiven Morphismus

$$\varphi\colon\ \operatorname{Specmax}\mathbb{C}[V]^\rho \longrightarrow \operatorname{Specmax}\mathbb{C}[I,J] \cong \mathbb{A}^2$$

zwischen normalen affinen Varietäten. Wir wollen zeigen, dass φ ein Isomorphismus ist. Nach Zariskis Hauptsatz in der Formulierung [**4**], S. 43, hat man zu beweisen, dass es eine nicht leere offene Menge $U \subset \operatorname{Specmax}\mathbb{C}[I,J]$ gibt, so dass $\varphi^{-1}(U) \longrightarrow U$ bijektiv ist. Wir wählen $U := \{D = I^3 - 27J^2 \neq 0\}$. Es sei f eine quartische Form mit $D(f) \neq 0$. Dann zerfällt f in ein Produkt von paarweise verschiedenen Linearformen. In geeigneten Koordinaten können wir also $f = \lambda x_1^4 + \mu x_1^3x_2 + x_1x_2^3$ schreiben. Es gilt somit $I(f) = -\mu/4$ und $J(f) = -\lambda/16$, und die Aussage ist klar. □

Für einen anderen Beweis, der auf die geometrische Bedeutung der beiden Invarianten und auf ihre Beziehung zum Doppelverhältnis von vier Punkten eingeht, verweisen wir auf [**21**], S.96ff.

2.2.3. *Paare, bestehend aus einer kubischen Form und einer Linearform.* In diesem Abschnitt untersuchen wir die Operation von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ auf $S^3\mathbb{C}^{2^\vee} \oplus \mathbb{C}^{2^\vee}$. Ziel dieses Abschnitts ist es, den Ring der Invarianten, den wir mit A bezeichnen, zu bestimmen. Wir konstruieren zunächst einige Invarianten aus A. Die bilineare Abbildung

$$\begin{array}{rccc} \mu\colon & S^3(\mathbb{C}^{2^\vee}) \oplus \mathbb{C}^{2^\vee} & \longrightarrow & S^4(\mathbb{C}^{2^\vee}) \\ & (k,l) & \longmapsto & k \cdot l \end{array}$$

ist offensichtlich äquivariant und surjektiv. Sie induziert die Inklusion des Rings der Invarianten binärer Quartiken in A. Nach Satz 2.2.4 sind alle Invarianten binärer Quartiken Polynome in den Invarianten I und J. Weiterhin sind natürlich die Invarianten binärer Kubiken Elemente des Ringes A. Alle Invarianten binärer Kubiken sind Polynome in der Diskriminante Δ (Satz 2.2.3). Als vierte Invariante betrachten wir die Resultante R. Auf dem Paar (k,l) mit $k = a_1x_1^3 + a_2x_1^2x_2 + a_3x_1x_2^2 + a_4x_2^3$ und $l = b_1x_1 + b_2x_2$ nimmt R den Wert

$$R(k,l) = a_1b_2^3 - a_2b_1b_2^2 + a_3b_1^2b_2 - a_4b_1^3$$

an.

SATZ 2.2.5. *Es gilt: $A = \mathbb{C}[I,J,\Delta,R]$. Dabei sind die Elemente I, Δ und R algebraisch unabhängig, und es besteht die Relation*

$$27J^2 = \frac{1}{256}\Delta R^2 + I^3. \tag{$*$}$$

BEWEIS. Wir nehmen zunächst einmal an, dass I, Δ und R algebraisch unabhängig sind und dass die Relation $(*)$ gilt. Da $(1/256)\Delta R^2 + I^3$ offenbar ein irreduzibles Polynom ist, können wir [**14**], II, ex. 6.4, anwenden und schliessen, dass $\mathbb{C}[I,J,\Delta,R]$ ganz abgeschlossen in $\mathbb{C}(I,J,\Delta,R)$ ist. Analog zum Beweis von Satz 2.2.4 zeigen wir, dass

$$\varphi\colon \operatorname{Specmax}\mathbb{C}[S^3\mathbb{C}^{2^\vee} \oplus \mathbb{C}^{2^\vee}]^{\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})} \longrightarrow \operatorname{Specmax}\mathbb{C}[I,J,\Delta,R]$$

über einer nicht leeren offenen Menge bijektiv ist. Dazu sei U die offene Menge der Paare (f,p), in denen keine der Invarianten I, J, Δ und R verschwindet, so dass wir $f = \lambda x_1^3 + \mu x_1^2x_2 + (1/\nu)x_2^3$ und $p = \nu x_1$ annehmen dürfen. Dann gilt $I(f,p) = -\mu\nu/4$, $J(f,p) = -\lambda\nu/16$ und $R(f,p) = -\nu^2$. Damit sind λ, μ und ν bis auf ein gemeinsames Vorzeichen bestimmt. Mit $x_1 \longmapsto -x_1$ und $x_2 \longmapsto -x_2$ führt man (f,p) in $(-f,-p)$ über, und wir sind fertig.

Wir haben jetzt noch folgende Behauptung zu zeigen:

BEHAUPTUNG. *Ein Element (k,l) ist genau dann nicht semistabil, wenn die Invarianten I,J,Δ,R sämtlich in (k,l) verschwinden.*

BEWEIS. Wir müssen zunächst die Nullformen mit dem Hilbertkriterium bestimmen:

ÜBUNG 2.2.6. Zeigen Sie: Ein Paar (k,l) ist genau dann eine Nullform, wenn l^2 die kubische Form k teilt bzw. wenn $l = 0$ gilt und k einen quadratischen Faktor hat.

Diese Bedingung ist äquivalent zu den folgenden drei Bedingungen

(1) k hat einen doppelten Faktor
(2) l teilt k
(3) $k \cdot l$ hat einen dreifachen Faktor.

Bedingung (1) ist ihrerseits äquivalent zu $\Delta(k) = 0$; Bedingung (2) zu $R(k,l) = 0$; und Bedingung (3) zu $I(k\cdot l) = 0 = J(k\cdot l)$, denn eine binäre Quartik ist genau dann Nullform, wenn sie eine (mindestens) dreifache Nullstelle besitzt. Die Behauptung ist somit verifiziert. □

Wir prüfen nun die algebraische Unabhängigkeit von I, Δ und R nach. Da eine Gleichung der Form $c_0\Delta^n + c_1\Delta^{n-1}I + \cdots + c_nI^n = 0$ mit $c_0 \neq 0$ und $c_n \neq 0$, insbesondere bedeuten würde, dass das Verschwinden der Invariante I das Verschwinden der Invariante Δ nach sich zöge, kann eine solche Gleichung nicht bestehen. Dazu betrachte man z.B. das

Paar $(x_1^3+x_2^3,x_2)$. Für dieses Paar gilt $I(x_1^3+x_2^3,x_2)=0$ und $\Delta(x_1^3+x_2^3,x_2)=27$. Ausserdem hängt R nicht algebraisch von I und Δ ab. Wir nehmen an, es gäbe Polynome $h_1,\dots,h_n$ mit $h_n\neq 0$, so dass $R^n h_1(I,\Delta)+\cdots+h_n(I,\Delta)=0$. Betrachten wir speziell Paare der Form $P_{ab}:=(x_1^3+ax_1x_2^2,bx_1)$, so gilt $R\left(P_{ab}\right)=0$, $\Delta\left(P_{ab}\right)=4a^3$ und $I\left(P_{ab}\right)=a^2b^2/12$. Aus der obigen Gleichung folgte $h_n(4a^3,a^2b^2/12)=0$ für alle a, b und somit $h_n=0$, im Widerspruch zu der Annahme $h_n\neq 0$. Damit sind I, Δ und R als algebraisch unabhängig nachgewiesen.

Die Diskriminante binärer quartischer Formen ist durch $D=I^3-27J^2$ gegeben. Da $D(k\cdot l)$ genau dann verschwindet, wenn entweder $l|k$ oder $\Delta(k)=0$ gilt, folgt, dass D in dem von $R\cdot\Delta$ erzeugten Ideal liegt. Es besteht also eine Relation der Form

$$I^3-27J^2=(c_1I+c_2\Delta+c_3R)R\Delta,\ c_1,c_2,c_3\in\mathbb{C}.$$

Zur Bestimmung dieser Koeffizienten ziehen wir die Paare $Q_{ab}:=(x_1^3+ax_1x_2^2,bx_2)$ heran. Wir erhalten $\Delta\left(Q_{ab}\right)=4a^3$, $R\left(Q_{ab}\right)=b^3$, $I\left(Q_{ab}\right)=-(ab^2/4)$ und $J\left(Q_{ab}\right)=0$. Es folgt $c_1=c_2=0$ und $c_3=-(1/256)$ und somit die Relation $(*)$. $\square$

2.3. Ternäre kubische Formen. In diesem Abschnitt wollen wir ternäre kubische Formen in Hinblick auf die möglichen Entartungen der verschiedenen Orbiten ineinander untersuchen. Die Berechnung der Normalformen ternärer Kubiken wird in [**17**], S.42ff., durchgeführt. Das Ergebnis lautet:

SATZ 2.3.1. *Jede ternäre kubische Form $k\neq 0$ kann unter der Operation von $\mathrm{SL}_3(\mathbb{C})$ in eine der folgenden Formen überführt werden:*

Gestalt der Kurve $k=0$	*Normalformen*
Nichtsinguläre Kubik	$\lambda(x_1^3+x_2^3+x_3^3)+tx_1x_2x_3,\quad \lambda\in\mathbb{C}^*,t\in\mathbb{C}$
Kubik mit gewöhnl. Doppelpunkt	$\lambda(x_1^3+x_1^2x_3-x_2^2x_3),\quad \lambda\in\mathbb{C}^*$
Kubik mit einer Spitze	$x_1^3-x_2^2x_3$
Glatte Konik m. transvers. Gerade	$\lambda x_1(x_1^2-x_2x_3),\quad \lambda\in\mathbb{C}^*$
Glatte Konik mit Tangente	$x_2(x_1^2-x_2x_3)$
Drei linear unabhängige Geraden	$\lambda x_1x_2x_3,\quad \lambda\in\mathbb{C}^*$
Drei Geraden aus einem Büschel	$x_1x_2(x_1+x_2)$
Doppelgerade und einfache Gerade	$x_1^2x_2$
Dreifache Gerade	x_1^3

Dabei sind die Formen, die eine nichtsinguläre Kubik definieren, stabil und die Formen, die eine nodale Kubik, eine Konik mit transversaler Gerade oder drei verschiedene, linear unabhängige Geraden definieren, semistabil. Alle anderen Formen sind Nullformen (Dies sei dem Leser als Übungsaufgabe empfohlen).

Für Informationen zu Invarianten ternärer kubischer Formen verweisen wir auf das Buch [**30**].

Kommen wir nun auf die Entartungen der verschiedenen Orbiten zu sprechen. Es sei k eine ternäre kubische Form. Ist die Kurve $\{k=0\}$ nichtsingulär, so ist k stabil, und folglich ist der Orbit von k abgeschlossen und achtdimensional.

Wir betrachten nun Entartungen zwischen den Orbiten semistabiler Formen.

BEHAUPTUNG. i) *Es sei k eine ternäre kubische Form, die eine nodale Kubik beschreibt. Dann liegt im Abschluss des Orbits von k eine Form, die die Vereinigung einer Konik mit einer transversal schneidenden Gerade beschreibt.*

ii) *Es sei k' eine ternäre kubische Form, die die Vereinigung einer Konik mit einer transversal schneidenden Gerade beschreibt. Dann existiert in $\overline{\mathrm{SL}_3(\mathbb{C})\cdot k}$ ein Produkt von drei linear unabhängigen Linearformen.*

BEWEIS. i) Wir können o.E. $k=\lambda(x_1^3+x_1^2x_3-x_2^2x_3)$, $\lambda\in\mathbb{C}^*$, annehmen. Wir führen folgende Substitution durch: $x_1\longmapsto\sqrt[3]{2}x_1, x_2\longmapsto -zx_2-\sqrt[3]{2}x_1, x_3\longmapsto-(\sqrt[3]{2}/2z)x_3$. Dies überführt k in die Form $k_z = 2\lambda x_1(x_1^2 - x_2x_3) - z\sqrt[3]{2}^2 x_1^2 x_2$. Es folgt $2\lambda x_1(x_1^2 - x_2x_3) \in \overline{\mathrm{SL}_3(\mathbb{C}) \cdot k}$.

ii) Es sei $k' = 2\lambda x_1(x_1^2 - x_2x_3)$. Hier ersetzt man einfach x_1 durch $-zx_1$ und x_2 durch $-(1/z)x_2$. Dabei geht k' in $k'_z := -2\lambda z^3 x_1^3 + 2\lambda x_1x_2x_3$ über. □

Schliesslich bemerken wir, dass der Orbit einer Form $\lambda x_1x_2x_3$, $\lambda \in \mathbb{C}^*$, abgeschlossen ist. Dies ergibt sich aus der Tatsache, dass $O(\lambda x_1x_2x_3)$ immer sechsdimensional ist. Wir veranschaulichen das Ergebnis in folgendem Diagramm. Dabei schreiben wir $O(k)$ für den Orbit von k:

$$\underset{\bullet}{O(\lambda(x_1^3 + x_1^2x_3 - x_2^2x_3))} \longrightarrow \underset{\bullet}{O(2\lambda x_1(x_1^2 - x_2x_3))} \longrightarrow \underset{\bullet}{O(2\lambda x_1x_2x_3)} .$$

BEHAUPTUNG. *Für die Orbiten ternärer kubischer Nullformen ergeben sich die folgenden möglichen Entartungen:*

$$\underset{\bullet}{O(x_1^3 - x_2^2x_3)} \longrightarrow \underset{\bullet}{O(x_2(x_1^2 - x_2x_3))} \longrightarrow \underset{\bullet}{O(x_1x_2(x_1 + x_2))} \longrightarrow \underset{\bullet}{O(x_1^2x_2)} \longrightarrow \underset{\bullet}{O(x_1^3)} \longrightarrow \underset{\bullet}{0} .$$

BEWEIS. Wir betrachten $k_z := x_2(x_1^2 - x_2x_3) + zx_1^3$, $z \in \mathbb{C}^*$. Man rechnet sofort nach, dass $\{k_z = 0\}$ eine irreduzible kubische Kurve mit einer Spitze in $[0:0:1]$ ist. Nach Satz 2.3.1 liegen somit alle k_z in $O(x_1^3 - x_2^2x_3)$, und es folgt $x_2(x_1^2 - x_2x_3) \in \overline{O(x_1^3 - x_2^2x_3)}$.

Wir betrachten $k'_z := x_1(x_1(x_2 + zx_3) + x_2^2)$, $z \in \mathbb{C}^*$. Das Nullstellengebilde von k'_z ist Vereinigung einer glatten Konik mit einer Tangente. Wie eben folgt $x_1x_2(x_1 + x_2) \in \overline{O(x_2(x_1^2 - x_2x_3))}$. Alle anderen Entartungen sind offensichtlich. □

2.4. Weitere Ergebnisse. Mit zunehmender Anzahl der Variablen und zunehmendem Grad werden explizite Berechnungen wesentlich schwieriger. Es seien noch zwei weitere Fälle erwähnt, in denen die obigen Betrachtungen durchgeführt wurden: Der Fall der ternären quartischen Formen [**5**] und der Fall der quaternären kubischen Formen. Der Ergebnisse über quaternäre kubische Formen sind in der Literatur von mehr als hundert Jahren verstreut. Eine Zusammenfassung findet sich etwa in [**25**].

3. Die Invariantentheorie der Matrizen

Wir fassen (ohne Beweis) die Hauptergebnisse über die Invarianten von Matrizen unter der Operation der allgemeinen linearen Gruppe via Konjugation zusammen.

3.1. Die Jordansche Normalform. Wir betrachten die Operation von $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ auf $M_n(\mathbb{C})$ via Konjugation, i.e, $g \cdot m := g \cdot m \cdot g^{-1}$, $g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, $m \in M_n(\mathbb{C})$. Die induzierte Äquivalenzrelation ist die Ähnlichkeit von Matrizen. Aus der Linearen Algebra weiß man, dass jede Matrix einer Matrix der Form

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & & & & & & & \\ & \ddots & \ddots & & & & & & \\ & & \ddots & 1 & & & & & \\ & & & \lambda_1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & \lambda_k & 1 & & \\ & & & & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & & & & \ddots & 1 \\ & & & & & & & & \lambda_k \end{pmatrix}$$

ähnlich ist. Ferner sind die Invarianten einer $(n \times n)$-Matrix m mit Eigenwerten $\lambda_1,...,\lambda_n$ durch $\sigma_1(\lambda_1,...,\lambda_n) = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n,...,\ \sigma_n(\lambda_1,...,\lambda_n) = \lambda_1 \cdot ... \cdot \lambda_n$ gegeben. Auf der anderen Seite kann man anstatt der elementarsymmetrischen Funktionen $\sigma_1,...,\sigma_n$ auch die *symmetrischen Newtonfunktionen* $s_1,...,s_n$ mit $s_i(\lambda_1,...,\lambda_n) := \lambda_1^i + \cdots + \lambda_n^i$, $i = 1,...,n$, betrachten. Es gilt:

SATZ 3.1.1.

$$\mathbb{C}[s_1,\dots,s_n] = \mathbb{C}[\sigma_1,\dots,\sigma_n] = \mathbb{C}[\lambda_1,\dots,\lambda_n]^{S_n}.$$

Dabei ist $\mathbb{C}[\lambda_1,\dots,\lambda_n]^{S_n}$ der Invariantenring der Operation der symmetrischen Gruppe S_n auf $\mathbb{A}^n$ vermöge Vertauschung der Koordinaten (s. [**33**]).

Wir schließen:

KOROLLAR 3.1.2. *Es seien x_{ij}, $i,j = 1,\dots,n$, die Koordinatenfunktionen auf $M_n(\mathbb{C})$ und $\mathbf{x} := (x_{ij})_{i,j}$. Dann gilt*

$$\mathbb{C}[M_n]^{\mathrm{GL}_n} = \mathbb{C}[x_{ij},\ i,j = 1,\dots,n]^{\mathrm{GL}_n} = \mathbb{C}[\mathrm{Spur}(\mathbf{x}),\dots,\mathrm{Spur}(\mathbf{x}^n)].$$

3.2. Der Satz von Gurevich, Procesi und Siberskii. Wir betrachten nun die Operation von $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ auf $M_n(\mathbb{C})^{\oplus s}$, die durch

$$g\cdot(m_1,\dots,m_s) := \left(g\cdot m_1\cdot g^{-1},\dots,g\cdot m_s\cdot g^{-1}\right)$$

$g\in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, $(m_1,\dots,m_s)\in M_n(\mathbb{C})^{\oplus s}$ gegeben ist.

SATZ 3.2.1. *Es seien x^i_{jk}, $i = 1,\dots,s$, $j,k = 1,\dots,n$, die Koordinatenfunktionen auf $M_n^{\oplus s}$, sowie $\mathbf{x}_i := (x^i_{jk})_{j,k}$, $i = 1,\dots,s$. Dann wird der Ring $\mathbb{C}[M_n^{\oplus s}]^{\mathrm{GL}_n}$ von den Invarianten*

$$\mathrm{Spur}\left(\mathbf{x}_{i_1}\cdot\ldots\cdot\mathbf{x}_{i_l}\right)$$

erzeugt. Dabei genügt es ferner die Invarianten mit $l \le n^2+1$ zu betrachten.

Für den Beweis verweisen wir auf [**24**]. Dort wird auch diskutiert, in welchem Sinne alle Relationen zwischen diesen Invarianten aus dem Satz von Cayley-Hamilton folgen.

ÜBUNG 3.2.2. Untersuchen Sie den Fall $n = s = 2$! Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{C}[M_2(\mathbb{C})^{\oplus 2}]^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})} = \mathbb{C}[\widetilde{T}_1,\dots,\widetilde{T}_5].$$

Dabei sind die Invarianten für $(m_1,m_2)\in M_2(\mathbb{C})\oplus M_2(\mathbb{C})$ wie folgt erklärt

$$\begin{array}{rrcllcl} & \widetilde{T}_1(m_1,m_2) & := & \mathrm{Spur}(m_1), & \widetilde{T}_2(m_1,m_2) & := & \det(m_1),\\ & \widetilde{T}_3(m_1,m_2) & := & \mathrm{Spur}(m_2), & \widetilde{T}_4(m_1,m_2) & := & \det(m_2),\\ \text{und} & \widetilde{T}_5(m_1,m_2) & := & \mathrm{Spur}(m_1m_2). & & & \end{array}$$

Beweisen Sie auch, dass $T_1,\dots,T_5$ algebraisch unabhängig sind!

ÜBUNG 3.2.3. Zeigen Sie, dass $(m_1,\dots,m_s)\in M_n(\mathbb{C})^{\oplus s}$ genau dann eine Nullform ist, wenn $m_1,\dots,m_s$ simultan auf obere Dreiecksgestalt mit Nullen auf den Diagonalen gebracht werden können! Verwenden Sie dazu Satz I.1.5.6!

KAPITEL 3

Mumfords geometrische Invariantentheorie

1. Quotienten nach Gruppenoperationen

Dieses Kapitel ist das zentrale der vorliegenden Notizen. Hier wird die allgemeine Theorie besprochen.

1.1. Gute und geometrische Quotienten. Es seien V eine beliebige algebraische Varietät und G eine affine algebraische Gruppe. Es sei $\overline{\sigma}\colon G \times V \longrightarrow V$ eine Operation von G auf V. Dabei ist der Begriff der *Operation* natürlich analog zu Abschnitt I.1.2 zu definieren. Wir benötigen wiederum ein vernünftiges Konzept für den Begriff des Quotienten: Ein *guter Quotient bzgl. der Operation* $\overline{\sigma}$ ist ein Paar (Y,π), bestehend aus einer algebraischen Varietät Y und einem affinen, surjektiven Morphismus $\pi\colon V \longrightarrow Y$, so dass folgende Bedingungen erfüllt sind:

(1) π ist $\overline{\sigma}$-invariant, d.h. $\pi \circ \pi_V = \pi \circ \overline{\sigma}$. Hierbei ist $\pi_V\colon G \times V \longrightarrow V$ die Projektion auf den zweiten Faktor.
(2) Für jede offene Teilmenge $U \subset Y$ bildet $\pi^{\#}\colon \mathscr{O}_Y(U) \longrightarrow \mathscr{O}_V(\pi^{-1}(U))$ die Algebra $\mathscr{O}_Y(U)$ isomorph auf $\mathscr{O}_V(\pi^{-1}(U))^{\overline{\sigma}}$, die Algebra der $\overline{\sigma}$-invarianten Funktionen auf $\pi^{-1}(U)$, ab.
(3) Für jede $\overline{\sigma}$-invariante, abgeschlossene Teilmenge $Z \subset V$ ist $\pi(Z)$ abgeschlossen.
(4) Sind Z_1 und Z_2 zwei disjunkte, $\overline{\sigma}$-invariante, abgeschlossene Teilmengen von V, so sind auch ihre Bilder $\pi(Z_1)$ und $\pi(Z_2)$ disjunkt.

Ein *geometrischer Quotient* ist ein guter Quotient, für den die Faser $\pi^{-1}(y)$ für jeden Punkt $y \in Y$ aus genau einem Orbit besteht.

LEMMA 1.1.1. *Es sei $\overline{\sigma}\colon G \times V \longrightarrow V$ eine Operation der affinen algebraischen Gruppe G auf der Varietät V, und (Y,π) sei ein guter Quotient. Dann hat das Paar (Y,π) die folgende universelle Eigenschaft: Für jede Varietät X und jeden $\overline{\sigma}$-invarianten Morphismus $\varphi\colon V \longrightarrow X$ gibt es einen eindeutig bestimmten Morphismus $\overline{\varphi}\colon Y \longrightarrow X$ mit $\varphi = \overline{\varphi} \circ \pi$. Insbesondere ist (Y,π) bis auf eindeutige Isomorphie eindeutig bestimmt.*

BEWEIS. Wir überlegen uns zuerst die Eindeutigkeit. Dazu haben wir z.z., dass für zwei Punkte $v_1, v_2 \in V$ aus $\varphi(v_1) \neq \varphi(v_2)$ auch $\pi(v_1) \neq \pi(v_2)$ folgt. Da aber dann die Fasern $\varphi^{-1}(\varphi(v_1))$ und $\varphi^{-1}(\varphi(v_2))$ zwei disjunkte, $\overline{\sigma}$-invariante, abgeschlossene Teilmengen von V sind, folgt dies aus Eigenschaft (4) eines guten Quotienten. Weiterhin können wir $\overline{\varphi}$ als mengentheoretische Abbildung konstruieren. Es sei nun $U \subset X$ eine offene Teilmenge. $\varphi^{-1}(U) = \pi^{-1}(\overline{\varphi}^{-1}(U))$ ist dann offen in V. Auf Grund von Eigenschaft (3) muss $\overline{\varphi}^{-1}(U)$ offen in Y sein, d.h. $\overline{\varphi}$ ist stetig. Da der Morphismus φ nach Voraussetzung $\overline{\sigma}$-invariant ist, liegt für jede offene Teilmenge $U \subset X$ das Bild des Homomorphismus $\mathscr{O}_X(U) \longrightarrow \mathscr{O}_V(\varphi^{-1}(U))$ in $\mathscr{O}_V(\varphi^{-1}(U))^{\overline{\sigma}}$. Damit erhalten wir einen Algebra-Homomorphismus

$$\mathscr{O}_X(U) \longrightarrow \overline{\varphi}_*(\pi_*\mathscr{O}_V)^{\overline{\sigma}}(U) \stackrel{(2)}{=} \overline{\varphi}_*(\mathscr{O}_Y)(U) = \mathscr{O}_Y(\overline{\varphi}^{-1}(U)).$$

Wählen wir U affin, so definiert dies einen Morphismus $\psi_U\colon \overline{\varphi}^{-1}(U) \longrightarrow U$, für den nach Konstruktion $\varphi_{|U} = \psi_U \circ \pi$ gilt. Aus unseren Eindeutigkeitsüberlegungen zu Beginn folgt somit $\psi_U = \overline{\varphi}_{|U}$, und $\overline{\varphi}$ ist somit eine reguläre Abbildung. □

Ein Paar (Y,π) mit den in Lemma 1.1.1 genannten Eigenschaften heisst *kategorieller Quotient*. Wie im Fall, dass V ein Vektorraum ist, werden wir uns auf die Betrachtung von Operationen von reduktiven affinen algebraischen Gruppen beschränken. Wir werden zunächst sehen, dass der gute Quotient immer existiert, wenn V eine affine Varietät ist. Im Abschnitt über Linearisierungen werden wir dann diskutieren, was im allgemeinen Fall zu tun ist. Dort besteht nur die Möglichkeit, $\overline{\sigma}$-invariante, offene Teilmengen von V auszuzeichnen, für die ein guter Quotient existiert. I.a. gibt es viele solche offene Teilmengen, und es ist ein weiteres Problem, die verschiedenen entstehenden Quotienten miteinander zu vergleichen.

1.2. Quotienten affiner Varietäten. Die Quotienten affiner Varietäten sind die Bausteine für die allgemeinen Quotienten, die durch Verkleben von affinen Quotienten entstehen.

1.2.1. *Existenz guter Quotienten für affine Varietäten.* Es sei $\overline{\sigma}\colon G\times V\longrightarrow V$ eine Operation der reduktiven affinen algebraischen Gruppe G auf der affinen Varietät V. Wie in Abschnitt I.1.3 definieren wir eine Linksoperation ρ von G auf der Koordinatenalgebra $\mathbb{C}[V]$ von V durch

$$\rho(g,f) := v\longmapsto f(g^{-1}\cdot v),\ \forall g\in G,\ f\in\mathbb{C}[V],\ v\in V.$$

Analog zum Beweis von I.1.3.1 sieht man ein, dass jedes Element $f\in\mathbb{C}[V]$ in einem endlich dimensionalen, G-invarianten Untervektorraum $W\subset\mathbb{C}[V]$ enthalten ist, auf dem G durch eine rationale Darstellung operiert. Wir definieren allgemeiner: Es sei A eine endlich erzeugte $\mathbb{C}$-Algebra und G eine affine algebraische Gruppe. Eine *rationale Darstellung von G auf A* ist eine Abbildung

$$\tau\colon G\times A\longrightarrow A,$$

die folgenden Bedingungen genügt:

(1) Für jedes $g\in G$ ist die Abbildung $\tau_g\colon f\longmapsto g\cdot f := \tau(g,f)$ ein $\mathbb{C}$-Algebra-Automorphismus von A; $\tau_e = \mathrm{id}_A$.
(2) Für alle $g_1,g_2\in G$ gilt $\tau_{g_1}\circ\tau_{g_2} = \tau_{g_1g_2}$.
(3) Jedes Element $f\in A$ ist in einem endlich dimensionalen Untervektorraum $W\subset A$ enthalten, auf dem G durch eine rationale Darstellung operiert.

Das zentrale Resultat lautet nun:

SATZ 1.2.1 (Nagata). *Es seien G eine reduktive algebraische Gruppe, A eine endlich erzeugte $\mathbb{C}$-Algebra und $\tau\colon G\times A\longrightarrow A$ eine rationale Darstellung von G auf A. Dann ist die Algebra*

$$A^{\tau} := \{f\in A\,|\,\tau_g(f)=f\ \forall g\in G\}$$

endlich erzeugt.

BEMERKUNG 1.2.2. Es gilt ebenfalls die Umkehrung des Satzes von Nagata: Zunächst hat Nagata ([**20**], s.a. [**7**]) eine Darstellung einer nicht reduktiven affinen algebraischen Gruppe G auf einer endlich erzeugten $\mathbb{C}$-Algebra V angegeben, so dass der entsprechende Invariantenring nicht endlich erzeugt ist. Später hat Popov [**23**] gezeigt, dass jede nicht reduktive affine algebraische Gruppe eine Darstellung auf einer endlich erzeugten $\mathbb{C}$-Algebra besitzt, so dass der entsprechende Invariantenring nicht endlich erzeugt ist.

Wir können Satz 1.2.1 auf unsere ursprüngliche Situation anwenden: Es seien G eine reduktive affine algebraische Gruppe, V eine affine algebraische Varietät und $\overline{\sigma}\colon G\times V\longrightarrow V$ eine Operation von G auf V. Dann ist $\rho\colon G\times\mathbb{C}[V]\longrightarrow\mathbb{C}[V]$ eine rationale Darstellung von G auf $\mathbb{C}[V]$. Die Algebra $\mathbb{C}[V]^{\rho}$ ist nach dem Satz von Nagata endlich erzeugt. Wir setzen $V/\!/G := \mathrm{Specmax}\,\mathbb{C}[V]^{\rho}$. Die Inklusion $\mathbb{C}[V]^{\rho}\subset\mathbb{C}[V]$ induziert einen Morphismus $\pi\colon V\longrightarrow V/\!/G$.

SATZ 1.2.3. *Das Paar $(V/\!/G,\pi)$ ist ein guter Quotient für V bzgl. der Operation $\overline{\sigma}$.*

1.2.2. *Beweis der Sätze 1.2.1 und 1.2.3.* Wir beweisen zunächst den Endlichkeitssatz von Nagata. Wir folgen der Darstellung aus [**7**], Kapitel 3, §1.

BEWEIS DES SATZES VON NAGATA. Es sei $f \in A$. Dann bezeichne M_f den (endlich dimensionalen) Untervektorraum von A, der von allen Elementen der Form $g \cdot f$, $g \in G$, erzeugt wird, und $N_f \subset M_f$ den Vektorraum, der von den Elementen der Form $g_1 \cdot f - g_2 \cdot f$, $g_1, g_2 \in G$, erzeugt wird.

LEMMA 1.2.4. *Es sei $f \in A$. Dann existiert ein Element $f' \in N_f$, so dass $f^* := f + f' \in M_f \cap A^\tau$.*

BEWEIS. Gilt $f \in N_f$, so können wir $f' = -f$ wählen. Andernfalls folgt $N_f \cap \mathbb{C}f = \{0\}$. Für jedes $g \in G$ gilt $g \cdot f = f + (g \cdot f - f)$. Der erste Summand liegt in $\mathbb{C}f$ und der zweite in N_f, d.h. $M_f = \mathbb{C}f \oplus N_f$. Also ist N_f ein G-Untermodul von M_f der Kodimension 1. Da wir G als reduktiv vorausgesetzt haben, besitzt N_f ein τ-invariantes Komplement, d.h., es gibt ein $\widetilde{f} \in A^\tau$, so dass $M_f = \mathbb{C}\widetilde{f} \oplus N_f$ als G-Modul. Hierbei muss man beachten, dass aus der Tatsache, dass $\widetilde{f}$ einen Untermodul erzeugt, lediglich folgt, dass es einen Charakter χ von G gibt, so dass $g \cdot \widetilde{f} = \chi(g) \cdot \widetilde{f}$. Wäre χ jedoch nicht trivial, so gäbe es ein $g_0 \in G$ mit $\widetilde{f} = \big(1/(\chi(g_0) - 1)\big)(g_0 \cdot \widetilde{f} - \widetilde{f})$, d.h. $\widetilde{f} \in N_f$. □

LEMMA 1.2.5. *Es seien $f_1, \ldots, f_r \in A^\tau$. Dann gilt $A^\tau \cap \sum_{i=1}^r A f_i = \sum_{i=1}^r A^\tau f_i$.*

BEWEIS. Wir beweisen die Aussage durch Induktion über r. Für $r = 0$ ist nichts zu zeigen. Es sei $f = \sum_{i=1}^r h_i f_i \in A^\tau \cap \sum_{i=1}^r A f_i$. Wir wählen gemäss Lemma 1.2.4 ein $h_r' \in N_{h_r}$ mit $h_r + h_r' \in A^\tau$. Aus $f \in A^\tau$ folgt $0 = g_1 f - g_2 f = \sum_{i=1}^r (g_1 h_i - g_2 h_i) f_i$ für alle $g_1, g_2 \in G$, also $(g_1 h_r - g_2 h_r) f_r = -\sum_{i=1}^{r-1} (g_1 h_i - g_2 h_i) f_i$. Da $h_r' \in N_{h_r}$, impliziert diese Beobachtung, dass es Elemente $\widetilde{h}_i \in A$, $i = 1, \ldots, r-1$, gibt mit $h_r' f_r = \sum_{i=1}^{r-1} \widetilde{h}_i f_i$. Aus der Induktionsvoraussetzung und $(h_r + h_r') \in A^\tau$ ergibt sich nun, dass $f - (h_r + h_r') f_r = \sum_{i=1}^{r-1} (h_i - \widetilde{h}_i) f_i$ in $\sum_{i=1}^{r-1} A^\tau f_i$ liegt. Damit ist die Behauptung gezeigt. □

Wir betrachten nun den Fall, dass $A = \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ ein Polynomring ist, und nehmen an, dass G graderhaltend operiert, d.h. für jedes $g \in G$ und jedes homogene Polynom f vom Grad d ist $g \cdot f$ wieder ein homogenes Polynom vom Grad d. Es sei $f \in A^\tau$ ein invariantes Polynom. In A schreiben wir $f = f_1 + \cdots + f_k$, wobei f_i homogen vom Grad d_i ist, $i = 1, \ldots, k$, und $d_i \neq d_j$ für $i \neq j$. Für jedes $g \in G$ gilt $g \cdot f - f = 0$, und $g \cdot f_i$ ist homogen vom Grad d_i, so dass $g \cdot f_i - f_i = 0$, $i = 1, \ldots, k$, gelten muss. Daher erbt die Algebra A^τ die Graduierung von A. Es sei A_+^τ das irrelevante Ideal. In A gilt $A_+^\tau = (A \cdot A_+^\tau) \cap A^\tau$. Wir schreiben $A \cdot A_+^\tau = \langle f_1, \ldots, f_r \rangle$, $f_i \in A_+^\tau$. Aus Lemma 1.2.5 folgt somit $A_+^\tau = \sum_{i=1}^r A^\tau f_i$. Die folgende Behauptung zeigt, dass A^τ eine endlich erzeugte $\mathbb{C}$-Algebra ist.

BEHAUPTUNG. *Es sei $B = \bigoplus_{i \geq 0} B_i$ eine graduierte $\mathbb{C}$-Algebra mit $B_0 = \mathbb{C}$. Das irrelevante Ideal B_+ werde von den Elementen $b_1, \ldots, b_r$ erzeugt. Dann gilt $B = \mathbb{C}[b_1, \ldots, b_r]$, d.h., B ist eine endlich erzeugte $\mathbb{C}$-Algebra.*

BEWEIS. Wir nehmen an, die b_i seien homogen vom Grad mindestens 1. Es sei $b \in B$ homogen. Wir führen Induktion über $\deg(b)$. Gilt $\deg(b) = 0$, also $b \in \mathbb{C}$, so ist die Aussage klar. Es sei nun $\deg(b) = d > 0$. Wir schreiben $b = \sum_{i=1}^r h_i b_i$. Dabei gilt $\deg(h_i) = \deg(b) - \deg(b_i) < d$, so dass $h_i \in \mathbb{C}[b_1, \ldots, b_r]$, $i = 1, \ldots, r$, nach Induktionsannahme. □

Wir gehen wieder zum allgemeinen Fall über. Wir schreiben $A = \mathbb{C}[a_1, \ldots, a_r]$. Dabei nehmen wir an, dass die a_i eine Basis für einen G-invarianten Vektorraum bilden (vgl. Beweis von I.1.3.3). Für jedes $g \in G$ schreiben wir $g \cdot a_i = \sum_{j=1}^r \tau_{ij}(g) a_j$, $i = 1, \ldots, r$. Wir definieren nun wie folgt eine rationale und graderhaltende Operation τ' von G auf dem Polynomring $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_r]$: Für $g \in G$ setzen wir $\tau'(g, x_i) = \sum_{j=1}^r \tau_{ij}(g) x_j$. Die Projektionabbildung $p\colon \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_r] \longrightarrow A$, $x_i \longmapsto a_i$, $i = 1, \ldots, r$, ist dann G-äquivariant. Nagatas Satz folgt nun aus der Tatsache

$$p\big(\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_r]^{\tau'}\big) = A^\tau.$$

Die Inklusion $\subset$ ist klar. Es sei $f = p(\widetilde{f}) \in A^\tau$. Nach Lemma 1.2.4 gibt es ein Element $f^* \in \mathbb{C}[x_1,...,x_r]^{\tau'}$, so dass $\widetilde{f} - f^* \in \sum_{g_1,g_2\in G}\mathbb{C}(g_1\widetilde{f} - g_2\widetilde{f})$. Aus der G-Äquivarianz von p folgt $p(\widetilde{f} - f^*) \in \sum_{g_1,g_2\in G}\mathbb{C}(g_1 p(\widetilde{f}) - g_2 p(\widetilde{f})) = \{0\}$. Also gilt $f = p(f^*) \in p\big(\mathbb{C}[x_1,...,x_r]^{\tau'}\big)$. $\square$

Wir müssen nun noch die behaupteten Eigenschaften der Varietät $\operatorname{Specmax} A^\tau$ nachweisen.

BEWEIS VON SATZ 1.2.3. Der Morphismus π ist offenbar affin. Es sei nun $w \in V/\!\!/G$ und $\mathfrak{m}_w = \langle f_1,...,f_r\rangle$, $f_1,...,f_r \in \mathbb{C}[V]^\rho$, das zugehörige maximale Ideal. Nach Lemma 1.2.5 ist $\mathfrak{I} := \sum_{i=1}^r \mathbb{C}[V]\cdot f_i \subset \mathbb{C}[V]$ ein echtes Ideal. Es sei $\mathfrak{n} \subset \mathbb{C}[V]$ ein maximales Ideal, das $\mathfrak{I}$ enthält, und $v \in V$ der entsprechende Punkt. Dann gilt $\mathfrak{n} \cap \mathbb{C}[V]^\rho = \mathfrak{m}_w$, also $\pi(v) = w$. Somit ist π surjektiv. Die G-Invarianz folgt direkt aus der Konstruktion.

Als nächstes prüfen wir Eigenschaft (2) nach. Es genügt, diese Eigenschaften für offene Mengen der Form $(V/\!\!/G)_f$, $f \in \mathbb{C}[V]^\rho$, nachzuweisen. In diesem Fall sagt die Behauptung $(\mathbb{C}[V]^\rho)_f = (\mathbb{C}[V]_f)^\rho$. Da f aber G-invariant ist, ist dies offensichtlich.

Für den Nachweis der Eigenschaften (3) und (4) benötigen wir die folgende

BEHAUPTUNG. *Es seien Z_1 und Z_2 disjunkte, abgeschlossene, G-invariante Teilmengen von V. Dann gibt es eine Funktion $f \in \mathbb{C}[V]^\rho$ mit $f_{|Z_1} \equiv 0$ und $f_{|Z_2} \equiv 1$.*

Wir nehmen diese Behauptung zunächst als wahr an. Es seien Z_1 und Z_2 und f wie oben. Fassen wir f als Funktion auf $V/\!\!/G$ auf, so gilt $f_{|\pi(Z_1)} \equiv 0$ und $f_{|\pi(Z_2)} \equiv 1$. Insbesondere folgt $\overline{\pi(Z_1)} \cap \overline{\pi(Z_2)} = \varnothing$. Es sei nun Z eine G-invariante, abgeschlossene Teilmenge von V. Für jeden Punkt $w \in V/\!\!/G$ und $w \notin \pi(Z)$ sind Z und $\pi^{-1}(w)$ disjunkte, abgeschlossene, G-invariante Teilmengen. Es gilt folglich $w \notin \overline{\pi(Z)}$, d.h. $\pi(Z)$ ist abgeschlossen. Eigenschaft (4) ergibt sich schliesslich aus Eigenschaft (3) und der obigen Behauptung. $\square$

BEWEIS DER BEHAUPTUNG. Es seien $\mathfrak{I}_1$ und $\mathfrak{I}_2$ die zu Z_1 und Z_2 gehörigen Ideale. Da Z_1 und Z_2 disjunkt sind, gilt $\mathfrak{I}_1 + \mathfrak{I}_2 = \mathbb{C}[V]$. Wir wählen $f_1 \in \mathfrak{I}_1$ und $f_2 \in \mathfrak{I}_2$ mit $f_1 + f_2 = 1$. Für alle $g_1, g_2 \in G$ gilt $g_1\cdot f_1 - g_2\cdot f_1 = -(g_1\cdot f_2 - g_2\cdot f_2)$. Es folgt

$$\sum_{g_1,g_2\in G}\mathbb{C}(g_1\cdot f_1 - g_2\cdot f_1) \subset \mathfrak{I}_2 \cap \Big(\sum_{g\in G}\mathbb{C}g\cdot f_1\Big) \subset \mathfrak{I}_2 \cap \mathfrak{I}_1.$$

Man wähle nun gemäss Lemma 1.2.4 eine Funktion $f_1^* \in \mathbb{C}[V]^\rho \cap (\sum_{g\in G}\mathbb{C}g\cdot f_1)$ mit $f_1 - f_1^* \in \sum_{g_1,g_2\in G}\mathbb{C}(g_1\cdot f_1 - g_2\cdot f_1) \subset \mathfrak{I}_1\cap\mathfrak{I}_2$ (s.o.). Aus $f_1^* \in \mathfrak{I}_1$ folgt natürlich $f^*_{1|Z_1} \equiv 0$. Da nun $f_1 - f_1^* \in \mathfrak{I}_2$, gilt $(f_1 - f_1^*)_{|Z_2} \equiv 0$. Schliesslich folgt $f_{1|Z_2} \equiv 1$ aus $f_1 + f_2 = 1$, so dass $f^*_{1|Z_2} \equiv 1$. $\square$

1.3. Linearisierungen. Es seien V eine algebraische Varietät und $\overline{\sigma}\colon G\times V \longrightarrow V$ eine Operation der reduktiven affinen algebraischen Gruppe G. Wir wollen möglichst grosse, $\overline{\sigma}$-invariante, offene Teilmengen V_0 und V_1 auszeichnen, so dass der gute Quotient $V_0/\!\!/G$ und der geometrische Quotient $V_1/\!\!/G$ existieren. Zu diesem Zweck sucht man natürlich gewisse $\overline{\sigma}$-invariante, offene und affine Teilmengen $U_i \subset V$ und bildet die Quotienten $U_i/\!\!/G$. Diese Quotienten existieren nach Abschnitt 1.2. Die $U_i/\!\!/G$ wird man dann zu einem „grossen" Quotienten verkleben. Man könnte z.B. V_1 als Vereinigung aller $\overline{\sigma}$-invarianten, offenen, affinen Teilmengen definieren, für die der Quotient ein geometrischer ist. Das Objekt, dass man dann erhält, ist aber i.a. nicht separiert, also keine Varietät (s. Bsp. 1.3.1). Wir müssen also bei der Auswahl der offenen, affinen, invarianten Teilmengen etwas vorsichtiger sein. Zu diesem Zweck führt man die Linearisierungen ein.

BEISPIEL 1.3.1. Die Automorphismengruppe von $\mathbb{P}_1$ ist die affine algebraische Gruppe PGL_2. Für $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 3$, betrachten wir die Operation von PGL_2 auf ${\mathbb{P}_1}^N$, die durch $g\cdot(x_1,...,x_N) := (g\cdot x_1,...,g\cdot x_N)$ gegeben ist. Wir definieren

$$U_{ijk} := \big\{\,(x_1,...,x_N) \in {\mathbb{P}_1}^N \,|\, x_i,\, x_j \text{ und } x_k \text{ sind paarweise verschieden}\big\}.$$

Dabei sind i, j und k drei paarweise verschiedene natürliche Zahlen zwischen 1 und N und $i < j < k$. Benutzen wir die Tatsache, dass die Abbildung $\mathrm{PGL}_2 \longrightarrow U_{123} \subset \mathbb{P}_1{}^3$, $g \longmapsto (g\cdot 0, g\cdot 1, g\cdot\infty)$, ein Isomorphismus von Varietäten ist ([**4**], Abschnitt 10.8), so können wir Isomorphismen

$$\Phi_{ijk}\colon\ \mathrm{PGL}_2 \times \mathbb{P}_1{}^{N-3} \longrightarrow U_{ijk}$$

konstruieren, indem wir z.B. $\Phi_{123}(g,(x_4,\ldots,x_N)) := g\cdot(0,1,\infty,x_4,\ldots,x_N)$ setzen. Lassen wir PGL_2 auf $\mathrm{PGL}_2 \times \mathbb{P}_1{}^{N-3}$ durch Linksmultiplikation auf dem ersten Faktor operieren, so sind die Abbildungen Φ_{ijk} äquivariant. Es folgt, dass der geometrische Quotient $P_{ijk} := U_{ijk} /\!\!/ \mathrm{PGL}_2$ existiert und isomorph zu $\mathbb{P}_1{}^{N-3}$ ist. Für zwei Tripel i,j,k und l,m,n ist die Menge $U_{ijk} \cap U_{lmn}$ invariant. Die Bilder dieser Menge in P_{ijk} und P_{lmn} sind kanonisch isomorph. Wir können somit die P_{ijk} zu einer Prävarietät P verkleben. P erfüllt alle Eigenschaften eines geometrischen Quotienten, ist aber nicht separiert: Wir betrachten z.B. die Kurven $C_1 := \{\,[0,1,t,\infty,0,\ldots,0] \in P_{124} \,|\, t \in \mathbb{P}_1\,\}$ und $C_2 := \{\,[0,1/t,1,\infty,0,\ldots,0] \in P_{134} \,|\, t \in \mathbb{P}_1\,\}$. Für $t \in \mathbb{C}^*$ liefern beide Kurven dieselbe Kurve $C \subset P$. Der Punkt $[0,1,\infty,\infty,0,\ldots,0] \in C_1$ liegt nicht auf der Kurve C_2, so dass die Kurve C mehrere Fortsetzungen in P zulässt.

1.3.1. *Die allgemeine Theorie.* Es sei $p\colon L \longrightarrow V$ ein Geradenbündel (im geometrischen Sinne). Eine *Linearisierung der Operation $\overline{\sigma}$ in L* ist eine Operation σ von G auf dem Geradenbündel L, so dass folgende Bedingungen erfüllt sind:

(1) Die Projektion p ist G-äquivariant, also $p \circ \sigma = \overline{\sigma} \circ (p \times \mathrm{id}_V)$.
(2) Für jedes $g \in G$ und $v \in V$ ist die induzierte Abbildung $L_v \longrightarrow L_{g\cdot v}$, $w \longmapsto g\cdot w$, linear.

Hat man eine Linearisierung σ in L gegeben, so induziert diese Linearisierung auch Linearisierungen der Operation $\overline{\sigma}$ in den Tensorpotenzen $L^{\otimes r}$, $r \in \mathbb{N}$, dem Geradenbündel $L^\vee$ usw. Es sei $s\colon V \longrightarrow L$ ein G-äquivarianter Schnitt des Geradenbündels L. Dann ist $V_s := \{\, v \in V \,|\, s(v) \neq 0\,\}$ eine $\overline{\sigma}$-invariante, offene Teilmenge von V. Ein Punkt $v \in V$ heisst *σ-semistabil*, wenn es für eine positive ganze Zahl r einen G-äquivarianten Schnitt s von $L^{\otimes r}$ gibt, so dass V_s affin ist und den Punkt v enthält; v heisst *σ-polystabil*, wenn zusätzlich $G\cdot v$ abgeschlossen in V_s ist. Ein Punkt $v \in V$ heisst *σ-stabil*, wenn ein $r \in \mathbb{Z}_{>0}$ und ein G-äquivarianter Schnitt $s \in H^0(V, L^{\otimes r})$ existieren, so dass V_s affin ist, $v \in V_s$, $\dim(G\cdot z) = \dim(G)$ und so dass alle Orbiten der Operation von G auf V_s (in V_s) abgeschlossen sind. Wir sagen dann, dass die Operation von G auf V_s *abgeschlossen* ist. Wie gewöhnlich werden wir auch einfach von *stabilen Punkten* usw. reden. Die Menge der σ-semistabilen Punkte bezeichnen wir mit V^{ss}_σ, die der σ-stabilen mit V^s_σ. Man beachte, dass diese Mengen offen in V sind (für V^s_σ vgl. Lemma 1.3.4).

BEMERKUNG 1.3.2. i) Wir haben in Abschnitt I.1.5 bereits stabile und semistabile Punkte für die Operation einer reduktiven affinen algebraischen Gruppe G auf einem Vektorraum V definiert. Wenn man die induzierte Operation $\overline{\sigma}$ auf $\mathbb{P}(V^\vee)$ mit der induzierten Linearisierung σ in $\mathscr{O}_{\mathbb{P}(V^\vee)}(1)$ (s.u.) betrachtet, dann ist $[v] \in \mathbb{P}(V^\vee)$ genau dann σ-(semi)stabil, wenn v im in Kapitel I definierten Sinne (semi)stabil ist (vgl. Bem. I.1.5.5).

ii) Die Varietät V^{ss}_σ ist immer quasi-projektiv. In der Tat folgt die Ampleness von $L_{|V^{ss}_\sigma}$ direkt aus

SATZ 1.3.3 ([**13**] II, 4.5.2 & 4.5.10). *Es seien V eine* Prä-*Varietät und L ein Geradenbündel auf V. Dann ist L genau dann ampel, wenn es zu jedem Punkt $v \in V$ ein $r \in \mathbb{N}$ und einen Schnitt $s \in H^0(V, L^{\otimes r})$ gibt, so dass $s(v) \neq 0$ und V_s affin ist.*

Wir geben nun noch eine weitere Charakterisierung für stabile Punkte:

LEMMA 1.3.4. *Es seien $v \in V$ ein Punkt und $s \in H^0(V, L^{\otimes r})$ ein G-invarianter Schnitt mit $s(v) \neq 0$, so dass V_s affin ist,* $\dim(G\cdot v) = \dim G$ *und so dass $G\cdot v$ in V_s abgeschlossen ist. Dann ist v stabil.*

BEMERKUNG 1.3.5. Stabile Punkte können also als polystabile Punkte mit endlichem Stabilisator charakterisiert werden.

BEWEIS. Aus allgemeinen Eigenschaften der Faserdimension folgt, dass die Menge

$$Z := \left\{ w \in V_s \,|\, \dim G \cdot w < \dim G \right\}$$

abgeschlossen in V_s ist. Da V_s affin ist und da Z und $G \cdot v$ disjunkte, G-invariante, abgeschlossene Mengen sind, existiert eine G-invariante Funktion $f \in \mathbb{C}[V_s]$ mit $f(v) = 1$ und $f_{|Z} \equiv 0$. Wir wählen nun μ gross genug, so dass $s^\mu \cdot f \in H^0(V, L^{\otimes \mu \cdot r})$. Dann ist $V_{s^\mu \cdot f}$ eine affine, G-invariante Menge, die v enthält, und die induzierte G-Operation ist abgeschlossen, da $Z \cap V_{s^\mu \cdot f} = \varnothing$. □

Wir können uns Linearisierungen auch noch etwas geometrischer vorstellen (Details hierzu bei [**19**] und [**32**]). Wir betrachten zunächst einen projektiven Raum $\mathbb{P}(W)$, wobei W ein $\mathbb{C}$-Vektorraum ist. Es sei G eine affine algebraische Gruppe und $\overline{\sigma}\colon G \times \mathbb{P}(W) \longrightarrow \mathbb{P}(W)$ eine Operation von G auf $\mathbb{P}(W)$. Weiterhin sei σ eine Linearisierung dieser Operation in $\mathscr{O}_{\mathbb{P}(W)}(1)$. Es wird damit eine lineare Operation von G auf dem Vektorraum $W = H^0(\mathbb{P}(W), \mathscr{O}_{\mathbb{P}(W)}(1))$ induziert: $g \cdot s\colon V \longrightarrow L$, $v \longmapsto g \cdot s(g^{-1} \cdot v)$. Schliesslich sei $\tau\colon G \times W^\vee \longrightarrow W^\vee$ die dazu duale Operation. Es ist leicht zu sehen, dass die Operation τ die Operation $\overline{\sigma}$ hochhebt. Das soll folgendes heissen: Ist $\pi\colon W^\vee \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}(W)$ die kanonische Projektion, so gilt $\pi(\tau(g,w)) = \overline{\sigma}(g, \pi(w))$ für alle $g \in G$ und $w \in W^\vee \setminus \{0\}$. Umgekehrt induziert eine solche Hochhebung τ eine Linearisierung der gegebenen Operation in $\mathscr{O}_{\mathbb{P}(W)}(-1)$ und damit eine Linearisierung in $\mathscr{O}_{\mathbb{P}(W)}(1)$. (Dazu benutze man die Beschreibung

$$\mathscr{O}_{\mathbb{P}(W)}(-1) = \left\{ (l,w) \in \mathbb{P}(W) \times W^\vee \,|\, w \in l \right\}.)$$

Dabei sind die beiden beschriebenen Prozesse „invers“ zueinander.

ÜBUNG 1.3.6. (Semi)stabile und polystabile Punkte lassen sich dann wie folgt charakterisieren: Ein Punkt $v \in \mathbb{P}(W)$ ist genau dann semistabil, wenn $0 \notin \overline{G \cdot w}$ (Abschluss in $W^\vee$) für jede Hochhebung $w \in W^\vee \setminus \{0\}$ von v. Ein Punkt $v \in \mathbb{P}(W)$ ist genau dann polystabil (stabil), wenn für jede Hochhebung $w \in W^\vee \setminus \{0\}$ von w der Orbit $G \cdot w$ in $W^\vee$ abgeschlossen ist (und die Dimension $\dim G$ hat).

Nun seien V irgendeine quasi-projektive Varietät und $\overline{\sigma}\colon G \times V \longrightarrow V$ eine Operation der affinen algebraischen Gruppe G auf V. Ferner seien L ein amples Geradenbündel auf V und $\sigma\colon G \times L \longrightarrow L$ eine Linearisierung der Operation $\overline{\sigma}$. Für $r \in \mathbb{N}$ hinreichend gross existiert ein endlich dimensionaler Unterraum $W \subset H^0(V, L^{\otimes r})$, so dass die rationale Abbildung $\alpha\colon V \dashrightarrow \mathbb{P}(W)$ eine Einbettung ist. Wie üblich können wir annehmen, dass W ein G-invarianter Unterraum ist. Wie oben definieren wir eine Operation τ von G auf $W^\vee$. Dies induziert eine Operation $\overline{\tau}$ von G auf $\mathbb{P}(W)$. Der Morphismus α ist dann äquivariant bzgl. dieser Operationen, und die Einschränkung der von τ in $\mathscr{O}_{\mathbb{P}(W)}(1)$ induzierten Linearisierung auf $G \times L^{\otimes r}$ liefert gerade die Linearisierung $\sigma^{\otimes r}$.

SATZ 1.3.7. *Für r hinreichend gross existiert ein endlich dimensionaler Unterraum $W \subset H^0(X, L^{\otimes r})$, so dass für die induzierte Einbettung $\alpha\colon V \hookrightarrow \mathbb{P}(W)$ gilt:*

(1) *Ein Punkt $v \in V$ ist genau dann σ-(poly)stabil, wenn $\alpha(v)$ (poly)stabil ist.*
(2) *Ein Punkt $v \in V$ ist genau dann σ-semistabil, wenn $\alpha(v)$ semistabil ist und $\overline{G \cdot \alpha(v)} \cap \mathbb{P}(W)^{ss} \subset V$.*

BEWEIS (vgl. [**19**], Amplification 1.8, S.36, [**32**], Prop. 3.37). Zu (1): Wir wählen zunächst Schnitte $s_i \in H^0(V, L^{\otimes r})$, $i = 1, \ldots, t$, so dass $V_\sigma^{ss} = \bigcup_{i=1}^t V_{s_i}$. Es sei $\mathscr{O}_V(V_{s_i}) = \mathbb{C}[f_1^i, \ldots, f_{m_i}^i]$, $i = 1, \ldots, t$. Wir können r und W so wählen, dass $s_i \in W$ und $s_i \cdot f_\mu^i \in W$ für $i = 1, \ldots, t$ und $\mu = 1, \ldots, m_i$. Dabei müssen wir die s_i ggfs. durch geeignete Potenzen ersetzen. Gilt $v \in V_{s_i}$, so folgt $\alpha(v) \in U_{s_i}$, also ist $\alpha(v)$ semistabil. Nach Voraussetzung ist der Orbit von v abgeschlosssen in V_{s_i}. Nun wird aber V_{s_i} auf eine abgeschlossene Untervarietät von U_{s_i} abgebildet. Dies folgt aus der Annahme über die $s_i \cdot f_\mu^i$, die gerade besagt, dass die induzierte Abbildung $\mathbb{C}[U_{s_i}] \longrightarrow \mathbb{C}[V_{s_i}]$ surjektiv ist. Der Orbit von $\alpha(v)$ ist daher abgeschlossen in U_{s_i}, d.h., $\alpha(v)$ ist polystabil. Wenn $v \in V_\sigma^s$, also v stabil ist, dann gilt offenbar $\dim G \cdot \alpha(v) = \dim G$. Da der Punkt $\alpha(v)$ polystabil ist, ist er nach Lemma 1.3.4 stabil.

Wir zeigen nun die Umkehrung. Es sei $v \in V$ ein Punkt, s.d. $\alpha(v)$ polystabil ist. Wir wählen einen G-invarianten Schnitt $s \in H^0(\mathbb{P}(W), \mathscr{O}_{\mathbb{P}(W)}(\rho))$, so dass $v \in U_s$. Es sei $\widetilde{U} := V \cap U_s$ und $\overline{U}$ der Abschluss von $\widetilde{U}$ in U_s. Die Mengen $G \cdot v$ und $\overline{U} \setminus \widetilde{U}$ sind G-invariante, abgeschlossene Teilmengen von U_s. Es existiert eine invariante Funktion $f \in \mathbb{C}[U_s]$ mit $f(v) = 1$ und $f_{|\overline{U}\setminus\widetilde{U}} \equiv 0$. Nach Wahl von f gilt dann

$$V \cap (U_s)_f = \widetilde{U} \cap (U_s)_f = \overline{U} \cap (U_s)_f.$$

Für $\mu \in \mathbb{N}$ hinreichend gross ist $s^\mu \cdot f =: s' \in H^0(\mathbb{P}(W), \mathscr{O}_{\mathbb{P}(W)}(\mu \cdot \rho))$. Es gilt $U_{s'} = U_s \cap U_f$ und $V_{s'} = V \cap U_{s'} = \overline{U} \cap U_{s'}$. Also ist $V_{s'}$ affin. Nach Konstruktion ist $v \in V_{s'}$, so dass $v \in V_\sigma^{ss}$. Ist $\alpha(v)$ sogar stabil, so wählen wir zu Beginn einen Schnitt s, so dass die Orbiten der G-Operation auf U_s abgeschlossen sind, und gehen sonst genauso wie eben vor. Trivialerweise gilt $\dim G \cdot v = \dim G$, und die Operation auf $V_{s'}$ ist abgeschlossen, da sie auf $U_s (\supset V_{s'})$ abgeschlossen ist.

Zu (2): Die angegebene Bedingung garantiert, dass $\overline{G \cdot \alpha(v)} \cap U_s$ und $\overline{U} \setminus U$ disjunkt sind, so dass wir wie in (1) argumentieren können. Wenn umgekehrt v σ-semistabil ist, dann ist $\alpha(v)$ nach Konstruktion ebenfalls semistabil. Nach (1) ist der eindeutig bestimmte abgeschlossene Orbit in $\overline{G \cdot v} \cap V_\sigma^{ss}$ auch in $\mathbb{P}(W)^{ss}$ abgeschlossen. Daraus folgt sofort die Behauptung. □

Wir kommen nun zu dem Hauptsatz über die Existenz von Quotienten.

SATZ 1.3.8. *Es sei G eine reduktive affine algebraische Gruppe, und V, $\overline{\sigma}$ und L seien wie oben. Es sei $\sigma \colon G \times L \longrightarrow L$ eine Linearisierung der Operation $\overline{\sigma}$.*

i) *Der gute Quotient von V_σ^{ss} bzgl. der induzierten Operation von G existiert und ist quasi-projektiv. Wir bezeichnen ihn mit $(V /\!\!/_\sigma G, \pi)$. Ist V projektiv, so auch der Quotient $V /\!\!/_\sigma G$.*

ii) *In $V /\!\!/_\sigma G$ existiert eine offene Teilmenge U^s mit $\pi^{-1}(U^s) = V_\sigma^s$, so dass $(U^s, \pi_{|V_\sigma^s})$ ein geometrischer Quotient von V_σ^s bzgl. der induzierten Operation von G ist.*

BEWEIS. Wählen wir $r \in \mathbb{N}$ hinreichend gross, dann existieren invariante Schnitte $s_1, ..., s_n \in H^0(V, L^{\otimes r})$, so dass die Mengen $U_i := V_{s_i}$, $i = 1, ..., n$, affin sind und die Varietät V_σ^{ss} überdecken. Die U_i sind affine Varietäten, und die Operation von G auf V induziert Operationen von G auf den U_i. Nach Satz 1.2.3 existieren die guten Quotienten (W_i, π_i) der U_i nach diesen Operationen. Die Funktionen $s_{ij} := s_j / s_i$ sind G-invariant und regulär auf U_i. Wir können sie auch als Elemente von $\mathbb{C}[W_i]$ auffassen. Wir setzen $W_{ij} := \{ w \in W_i \mid s_{ij}(w) \neq 0 \}$. Offenbar gilt $\pi_i^{-1}(W_{ij}) = U_i \cap U_j = \pi_j^{-1}(W_{ji})$. Nun sind aber $(W_{ij}, \pi_{i|W_{ij}})$ und $(W_{ji}, \pi_{j|W_{ji}})$ beides gute Quotienten für $U_i \cap U_j$ bzgl. der induzierten G-Operation, so dass es einen (eindeutig bestimmten) Isomorphismus $\psi_{ij} \colon W_{ij} \longrightarrow W_{ji}$ geben muss, für den $\psi_{ij} \circ \pi_i = \pi_j$ gilt. Da die ψ_{ij} eindeutig bestimmt sind, erfüllen sie die Kozykelbedingung $\psi_{ij} \circ \psi_{jk} = \psi_{ik}$. Damit können wir die W_i zu einer Prä-Varietät W zusammenkleben. Auf Grund der Verträglichkeitsbedingungen für die π_i existiert ein Morphismus $\pi \colon V_\sigma^{ss} \longrightarrow W$ mit $\pi_{|U_i} = \pi_i$. Wir müssen noch zeigen, dass W quasi-projektiv (und damit insbesondere eine Varietät) ist. Die W_i bilden eine affine Überdeckung von W, und die $s_{ij} \in \mathscr{O}_W(W_i \cap W_j)$ erfüllen die Kozykelbedingung. Sie definieren somit ein Geradenbündel M über W mit $\pi^* M = L^{\otimes r}$. Weiterhin ist klar, dass die Schnitte $s_i \in H^0(V, L^{\otimes r})$ zu Schnitten $\widetilde{s}_i \in H^0(W, M)$ absteigen, d.h. $\pi^*(\widetilde{s}_i) = s_i$, $i = 1, ..., n$. Es gilt dann $W_{\widetilde{s}_i} = W_i$, $i = 1, ..., n$. Das Geradenbündel M ist folglich nach Satz 1.3.3 ampel. Man verifiziert sofort, dass (W, π) ein guter Quotient ist. Ist V eine projektive Varietät mit homogenem Koordinatenring R, so induziert eine Linearisierung eine graderhaltende Operation ρ von G auf R. Der Quotient $V /\!\!/_\sigma G$ ist dann die projektive Varietät $\operatorname{Proj} R^\rho$. Der erste Teil des Satzes ist somit gezeigt.

Die zweite Aussage wird analog bewiesen: Hier wählen wir zu Beginn Schnitte $s_i \in H^0(V, L^{\otimes r})$, $i = 1,..,n$, so dass die Mengen $U_i := V_{s_i}$ affin sind und so dass alle Orbiten der induzierten G-Operation in U_i abgeschlossen sind. □

BEMERKUNG 1.3.9. Wie der obige Beweis zeigt, liefert die Konstruktion eine Varietät $V/\!\!/_\sigma G$, einen Morphismus $\pi\colon V \longrightarrow V/\!\!/_\sigma G$ und ein amples Geradenbündel M auf $V/\!\!/_\sigma G$. Zunächst bemerken wir, dass dieses Geradenbündel nur von der Zahl r abhängt. Wenn wir zwei Sätze von Schnitten $s_1,\dots,s_n$ und $s'_1,\dots,s'_m$ wie im Beweis wählen, dann setzen wir $W := \langle s_1,\dots,s_n\rangle$ und $W' := \langle s'_1,\dots,s'_m\rangle$. Es genügt den Fall $W' \subset W$ zu betrachten. Die Auswertungsabbildung $W \otimes \mathscr{O}_V \longrightarrow L$ definiert den Morphismus

$$V \dashrightarrow V/\!\!/_\sigma G \overset{\iota}{\hookrightarrow} \mathbb{P}(W).$$

Dabei ist $M = \iota^* \mathscr{O}_{\mathbb{P}(W)}(1)$. Schalten wir noch die Projektion $\mathbb{P}(W) \dashrightarrow \mathbb{P}(W')$ dahinter, dann erhalten wir offenbar den Morphismus zu der Auswertungsabbildung $W' \otimes \mathscr{O}_V \longrightarrow L$, so dass auch diesmal dasselbe Geradenbündel M auf $V/\!\!/_\sigma G$ induziert wird.

Wir behaupten ferner, dass es zu Geradenbündeln M und M', die zu r und r' konstruiert wurden, positive ganze Zahlen μ und μ' gibt, so dass

$$M^{\otimes \mu} \cong M'^{\otimes \mu'}.$$

Wir können annehmen, dass $r' = t \cdot r$ für ein gewisses $t > 0$. Wenn wir M mit den Schnitten $s_1,\dots,s_n \in H^0(V, L^{\otimes r})$ konstruieren, dann ergeben die Schnitte $s_1^t,\dots,s_n^t \in H^0(V, L^{\otimes r'})$ das Geradenbündel $M^{\otimes t}$, welches nach dem eben Gesagten mit M' übereinstimmt.

Zwei Geradenbündel L und L' auf einer Varietät V heissen *äquivalent*, wenn es positive ganze Zahlen μ und μ' gibt mit $L^{\otimes \mu} = L'^{\otimes \mu'}$. Eine *Polarisierung* ist die Äquivalenzklasse $[L]$ eines amplen Geradenbündels L.

Zusammenfassend können wir festhalten, dass die im Beweis von Satz 1.3.8 durchgeführte Konstruktion eine quasi-projektive Varietät $V/\!\!/_\sigma G$ zusammen mit einer Polarisierung $[M]$ liefert.

BEISPIEL 1.3.10 ($\mathbb{P}_n$ als GIT-Quotient). In der Topologie lernt man $\mathbb{P}_n$ als Quotienten $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}/\mathbb{C}^*$ kennen. Wir wollen nun zeigen, dass man $\mathbb{P}_n$ auch in der algebraischen Geometrie so einführen kann. Wir betrachten die folgenden Linearisierungen der gegebenen $\mathbb{C}^*$-Operation auf $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ in dem trivialen Geradenbündel:

$$\begin{array}{rccc} \sigma_d\colon & \mathbb{C}^* \times (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}) \times \mathbb{C} & \longrightarrow & (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}) \times \mathbb{C} \\ & (z, v, t) & \longmapsto & (z \cdot v, z^d \cdot t). \end{array}$$

Dabei ist $d \in \mathbb{Z}$. Es gilt $H^0(\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}, \mathscr{O}_{\mathbb{C}^{n+1}\setminus\{0\}}) = \mathbb{C}[x_0,\dots,x_n]$, und man sieht sofort ein, dass die σ_d-invarianten Schnitte gerade die homogenen Polynome vom Grad d sind. Für $d < 0$ gibt es also keine invarianten Schnitte und für $d = 0$ nur die konstanten. In diesen Fällen gibt es keine semistabilen Punkte. Für $d > 0$ wählen wir $s_i := x_i^d$, $i = 0,\dots,n$. Führt man die Konstruktion aus dem Beweis von Satz 1.3.8 mit diesen Schnitten durch, so erhält man $\mathbb{P}_n$. Das Geradenbündel M, das dabei entsteht, ist $\mathscr{O}_{\mathbb{P}_n}(d)$.

Gegeben seien eine Varietät V, eine affine algebraische Gruppe G, eine Operation $\overline{\sigma}\colon G \times V \longrightarrow V$ von G auf V und ein Geradenbündel L auf V. Es stellt sich nun die Frage, auf wieviele Weisen man die Operation $\overline{\sigma}$ in L linearisieren kann. Eine Möglichkeit, eine gegebene Linearisierung $\sigma\colon G \times L \longrightarrow L$ zu modifzieren, ist die Multiplikation mit einem Charakter: Ist $\chi\colon G \longrightarrow \mathbb{C}^*$ ein Charakter, so definieren wir die Linearisierung $\chi \cdot \sigma$, indem wir $G \times L_v \longrightarrow L_{g\cdot v}$, $(g, w) \longmapsto \chi(g) \cdot \sigma(g, w)$ für jeden Punkt $v \in V$ setzen. Dies ist schon die einzige Möglichkeit der Modifikation. Wir beweisen dies für projektive Varietäten:

LEMMA 1.3.11. *Es liege die obige Situation vor, wobei wir annehmen, dass V projektiv ist. Dann unterscheiden sich zwei G-Linearisierungen $\sigma_{1,2}\colon G \times L \longrightarrow L$ nur um einen Charakter von G.*

BEWEIS. Die gegebenen Linearisierungen liefern eine Linearisierung

$$\sigma_1 \otimes \sigma_2^\vee : G \times V \times \mathbb{C} \longrightarrow V \times \mathbb{C}$$

der Operation in dem trivialen Geradenbündel. Diese Linearisierung ist von der Form $(g,v,z) \longmapsto (g\cdot v, \widetilde{\sigma}(g,v)\cdot z)$. Dabei ist $\widetilde{\sigma}\colon G\times V \longrightarrow \mathbb{C}^*$ eine nirgends verschwindende Funktion. Da V projektiv ist, gilt $H^0(G\times V, \mathscr{O}_{G\times V}) = H^0(G,\mathscr{O}_G)$. Also $\widetilde{\sigma} \in H^0(G,\mathscr{O}_G^*)$, und da $\sigma_1 \otimes \sigma_2^\vee$ eine Operation ist, muss $\widetilde{\sigma}$ ein Charakter sein. □

Für die Existenz von Linearisierungen benötigt man einige tiefer liegende Eigenschaften reduktiver Gruppen und algebraischer Varietäten, auf die wir hier nicht eingehen wollen. Es gilt (s. [**19**], Cor. 1.6):

SATZ 1.3.12. *Es seien G eine reduktive affine algebraische Gruppe, X eine normale Varietät, $\overline{\sigma}\colon G\times X \longrightarrow X$ eine Operation von G auf X und L ein Geradenbündel auf X. Dann existieren eine Zahl $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ und eine Linearisierung $\sigma\colon G\times L^{\otimes n} \longrightarrow L^{\otimes n}$ der Operation $\overline{\sigma}$ in $L^{\otimes n}$.*

ÜBUNG 1.3.13. Geben Sie ein Beispiel für $G, X, \overline{\sigma}, L$ wie im Satz an, so dass *keine* Linearisierung von $\overline{\sigma}$ in L existiert!

1.3.2. *Polarisierte $\mathbb{C}^*$-Quotienten.* Wir wollen in diesem Abschnitt den Fall einer Operation $\overline{\lambda}\colon \mathbb{C}^*\times \mathbb{P}(W) \longrightarrow \mathbb{P}(W)$ genau untersuchen. Insbesondere wollen wir auch klären, wie die Mengen der (semi)stabilen und polystabilen Punkte für verschiedene Linearisierungen aussehen. Es sei $\lambda\colon \mathbb{C}^*\times W^\vee \longrightarrow W^\vee$ eine Hochhebung der Operation $\overline{\lambda}$. Wir können λ als Linearisierung von $\overline{\lambda}$ in $\mathscr{O}_{\mathbb{P}(W)}(1)$ auffassen. Wie aus Beispiel I.1.2.3 folgt, besitzt $W^\vee$ eine Zerlegung

$$W^\vee = \bigoplus_{i=1}^m W_i^\vee.$$

Dabei sei $W_i^\vee$ der Eigenraum zu dem Charakter $\chi_{d_i}\colon \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}^*, z \longmapsto z^{d_i}$, und wir nehmen $d_1 < \cdots < d_m$ an. Es sei $v \in \mathbb{P}(W)$ und $w \in W^\vee\setminus\{0\}$ eine Hochhebung von v. Wir setzen

$$\begin{aligned} d^\lambda_{\min}(v) &:= \min\{\, d_i \,|\, w \text{ hat eine nicht verschwindende Komponente in } W_i^\vee \,\} \\ d^\lambda_{\max}(v) &:= \max\{\, d_i \,|\, w \text{ hat eine nicht verschwindende Komponente in } W_i^\vee \,\}. \end{aligned}$$

SATZ 1.3.14. i) *Der Punkt $v \in \mathbb{P}(W)$ ist genau dann λ-semistabil, wenn gilt: $d^\lambda_{\min}(v) \le 0 \le d^\lambda_{\max}(v)$.*

ii) *Ein Punkt $v \in \mathbb{P}(W)$ ist genau dann λ-polystabil, wenn entweder $d^\lambda_{\min}(v) = 0 = d^\lambda_{\max}(v)$ oder $d^\lambda_{\min}(v) < 0 < d^\lambda_{\max}(v)$ gilt.*

BEWEIS. Bzgl. einer Basis von Eigenvektoren für $W^\vee$ habe eine Hochhebung w von v die Koordinaten $(w_1,\dots,w_n)$. Für $z\in\mathbb{C}^*$ erhalten wir

$$z\cdot(w_1,\dots,w_n) = (0,\dots,0,z^{d^\lambda_{\min}(v)}\cdot w_{i_0},\dots,z^{d^\lambda_{\max}(v)}\cdot w_{i_r},0,\dots,0).$$

Mit Übung 1.3.6 ist die Aussage nun offensichtlich. □

ÜBUNG 1.3.15. Welches sind die stabilen Punkte?

Nun wollen wir alle möglichen Linearisierungen (in amplen Geradenbündeln) der Operation $\overline{\lambda}$ konstruieren. Die gegebene Linearisierung λ induziert eine Linearisierung der gegebenen Operation in $\mathscr{O}_{\mathbb{P}(W)}(1)$. Wir betrachten nun die k-te symmetrische Potenz $\lambda^k\colon \mathbb{C}^*\times S^kW^\vee \longrightarrow S^kW^\vee$ von λ. Unter Benutzung der Identifikation von $S^k(W^\vee)$ mit $S^k(W)^\vee$ (vgl. Abschnitt II.1.1) liefert λ^k eine Operation von $\mathbb{C}^*$ auf $\mathbb{P}(S^kW)$. Die Veronese-Einbettung $v_k\colon \mathbb{P}(W) \longrightarrow \mathbb{P}(S^k(W))$ ist dann $\mathbb{C}^*$-äquivariant, so dass λ^k eine Linearisierung der Operation $\overline{\lambda}$ in $\mathscr{O}_{\mathbb{P}(W)}(k)$ liefert. Somit haben wir eine Linearisierung der Operation $\overline{\lambda}$ in jedem der Geradenbündel $\mathscr{O}_{\mathbb{P}(W)}(k)$, $k\in\mathbb{Z}_{>0}$, konstruiert. Nach Lemma 1.3.11 erhalten wir dann alle Linearisierungen, indem wir die gegebenen mit Charakteren von

$\mathbb{C}^*$ multiplizieren. Es sei $\lambda_d^k\colon \mathbb{C}^* \times S^kW^\vee \longrightarrow S^kW^\vee$, $(z,w) \longmapsto z^{-d}\cdot\lambda^k(z,w)$, $k\in\mathbb{Z}_{>0}$, $d\in\mathbb{Z}$. Die entsprechende Linearisierung von $\overline{\lambda}$ in $\mathscr{O}_{\mathbb{P}(W)}(k)$ bezeichnen wir ebenfalls mit λ_d^k. Die möglichen Linearisierungen der gegebenen Operation $\overline{\lambda}$ sind also durch die Familie λ_d^k, $k\in\mathbb{Z}_{>0}$, $d\in\mathbb{Z}$, gegeben. Jede dieser Linearisierungen liefert als Quotienten eine polarisierte Varietät $(Q_d^k,[M_d^k])$. Gilt $d/k = d'/k'$, so sind $(Q_d^k,[M_d^k])$ und $(Q_{d'}^{k'},[M_{d'}^{k'}])$ als polarisierte Varietäten isomorph. Dies folgt, da $\lambda_{t\cdot d}^{t\cdot k}$ für jede positive ganze Zahl t gerade die t-te symmetrische Potenz von λ_d^k ist.

Für einen Punkt $v\in\mathbb{P}(W)$ gilt offenbar

$$d_{\min}^{\lambda_d^k}\big(v_k(v)\big) = k\cdot d_{\min}^{\lambda}(v) - d, \qquad d_{\max}^{\lambda_d^k}\big(v_k(v)\big) = k\cdot d_{\max}^{\lambda}(v) - d.$$

Wir schliessen:

SATZ 1.3.16. i) *Ein Punkt $v\in\mathbb{P}(W)$ ist genau dann λ_d^k-semistabil, wenn $d_{\min}^{\lambda}(v)\le (d/k)\le d_{\max}^{\lambda}(v)$ gilt.*

ii) *Ein Punkt $v\in\mathbb{P}(W)$ ist genau dann λ_d^k-polystabil, wenn entweder $d_{\min}^{\lambda}(v)=(d/k)=d_{\max}^{\lambda}(v)$ oder $d_{\min}^{\lambda}(v)<(d/k)<d_{\max}^{\lambda}(v)$ gilt. Insbesondere ist jeder Punkt $v\in\mathbb{P}(W)$ für eine geeignete Wahl von $d\in\mathbb{Z}$ und $k\in\mathbb{Z}_{>0}$ polystabil bzgl. der Linearisierung λ_d^k.*

Jeder ganzen Zahl i mit $1\le i\le 2m$ ordnen wir nun ein Intervall in $\mathbb{P}_1(\mathbb{Q}) := \mathbb{Q}^2/\mathbb{Q}^*$ zu:

$$I_i := \begin{cases} \mathbb{P}_1(\mathbb{Q})\setminus[d_m,d_1] & \text{falls } i=2m \\ \{d_{\frac{i+1}{2}}\} & \text{falls } i \text{ ungerade} \\ (d_{\frac{i}{2}}, d_{\frac{i}{2}+1}) & \text{falls } i\neq 2m \text{ gerade.} \end{cases}$$

KOROLLAR 1.3.17. *Es gilt $\mathbb{P}(W)^{ss}_{\lambda_d^k} = \mathbb{P}(W)^{ss}_{\lambda_{d'}^{k'}}$ dann und nur dann, wenn es ein $i\in\{1,\dots,2m\}$ gibt, so dass I_i sowohl d/k als auch d'/k' enthält.*

Ferner gilt für gerades i, d, k mit $d/k\in I_i$ und $d_i^\pm$, $k_i^\pm$ mit $d_i^-/k_i^- = d_{i/2}$ und $d_i^+/k_i^+ = d_{i/2+1}$

$$\mathbb{P}(W)^{ss}_{\lambda_d^k} \subset \mathbb{P}(W)^{ss}_{\lambda_{d^-}^{k^-}} \qquad \textit{und} \qquad \mathbb{P}(W)^{ss}_{\lambda_d^k} \subset \mathbb{P}(W)^{ss}_{\lambda_{d^+}^{k^+}}.$$

Es gibt also $2m$ Semistabilitätsbegriffe für die gegebene Operation $\overline{\lambda}$. Den entsprechenden unpolarisierten Quotienten bezeichnen wir mit Q_i, $i=1,\dots,2m$. Dabei gilt $Q_{2m}=\varnothing$. Man beachte schliesslich, dass es zu jedem $i=1,\dots,2m$ ein $k>0$ gibt mit $Q_i = Q_2^j$. Dem Zusatz in 1.3.17 entnehmen wir, dass wir Abbildungen

$$\begin{array}{ccccccccc} & Q_2 & & & \cdots & & Q_{2m-2} & & \\ & \swarrow & \searrow & & & \swarrow & & \searrow & \\ Q_1 & & & Q_3 & \cdots\ Q_{2m-3} & & & & Q_{2m-1} \end{array} \tag{2}$$

zwischen diesen Quotienten haben.

Für einen gegebenen ungeraden Index $i\in\{3,\dots,2m-3\}$ setzen wir $Q_i^\pm := Q_{i\pm1}$. Die Morphismen $\pi_i^\pm\colon Q_i^\pm \longrightarrow Q_i$ sind Isomorphismen ausserhalb der abgeschlossenen Teilmenge $\mathbb{P}(W_i)\subset Q_i$. Der exzeptionelle Ort von π_i^+ bzw. π_i^- ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_i^+ &:= \big\{ v\in\mathbb{P}(W) \,|\, \lim_{z\to0} z\cdot v\in\mathbb{P}(W_i)\big\}/\!\!/\mathbb{C}^* \\ &= \big\{ v=[w_i,\dots,w_m]\in\mathbb{P}(W_i\oplus\cdots\oplus W_m)\,|\, w_i\neq 0\big\}/\!\!/\mathbb{C}^* \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_i^- &:= \big\{ v\in\mathbb{P}(W) \,|\, \lim_{z\to\infty} z\cdot v\in\mathbb{P}(W_i)\big\}/\!\!/\mathbb{C}^* \\ &= \big\{ v=[w_1,\dots,w_i]\in\mathbb{P}(W_1\oplus\cdots\oplus W_i)\,|\, w_i\neq 0\big\}/\!\!/\mathbb{C}^*. \end{aligned}$$

Man beachte, dass $\mathbb{P}_i^+$ und $\mathbb{P}_i^-$ gewichtet projektive Bündel über $\mathbb{P}(W_i)$ sind. Die Quotienten Q_i^- und Q_i^+ sind also birational äquivalent, und die birationale Transformation

$Q_i^- \dashrightarrow Q_i^+$ ist eine gewichtet projektive Niederblasung gefolgt von einer gewichtet projektiven Aufblasung.

ÜBUNG 1.3.18. Formulieren Sie die entsprechenden Resultate für beliebige projektive Varietäten mit $\mathbb{C}^*$-Operation!

BEMERKUNG 1.3.19. In den Arbeiten [**2**] und [**12**] wurde eine intrinsische Beschreibung der Mengen der semistabilen Punkte für $\mathbb{C}^*$-Operationen in Termen der Fixpunktmengen gegeben. Diese Beschreibung werden wir in Abschnitt 3.1 benötigen.

In der obigen Situation hat die Fixpunktmenge der $\mathbb{C}^*$-Operation auf $\mathbb{P}(W)$ die Zusammenhangskomponenten $F_i := \mathbb{P}(W_i)$, $i = 1, \dots, m$. Wir definieren für $i = 1, \dots, m$

$$\begin{aligned} X_i^+ &:= \left\{ v \in \mathbb{P}(W) \mid \lim_{z \to 0} z \cdot v \in F_i \right\} \\ &= \mathbb{P}(W_i \oplus \cdots \oplus W_m) \setminus \mathbb{P}(W_{i+1} \oplus \cdots \oplus W_m) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_i^- &:= \left\{ v \in \mathbb{P}(W) \mid \lim_{z \to \infty} z \cdot v \in F_i \right\} \\ &= \mathbb{P}(W_1 \oplus \cdots \oplus W_i) \setminus \mathbb{P}(W_1 \oplus \cdots \oplus W_{i-1}) \end{aligned}$$

und für $i < j$

$$\begin{aligned} C_{ij} &:= (X_i^+ \setminus F_i) \cap (X_j^- \setminus F_j) \\ &= \mathbb{P}(W_i \oplus \cdots \oplus W_j) \setminus \big(\mathbb{P}(W_{i+1} \oplus \cdots \oplus W_j) \cup \mathbb{P}(W_i \oplus \cdots \oplus W_{j-1}) \big). \end{aligned}$$

Wir schliessen

KOROLLAR 1.3.20. i) *Falls $k \cdot d_i - d \neq 0$ für $i = 1, \dots, m$, setze man $i_0 := \max\{ k \cdot d_i - d < 0 \}$. Es folgt*

$$\mathbb{P}(W)^{\mathrm{ss}}_{\lambda_d^k} = \bigcup_{\substack{1 \le i \le i_0 \\ i_0 + 1 \le j \le m}} C_{ij}.$$

ii) *Falls $k \cdot d_{i_0} - d = 0$, dann gilt*

$$\mathbb{P}(W)^{\mathrm{ss}}_{\lambda_d^k} = X_{i_0}^- \cup X_{i_0}^+ \cup \bigcup_{\substack{1 \le i \le i_0 - 1 \\ i_0 + 1 \le j \le m}} C_{ij}.$$

BEISPIEL 1.3.21 (Induzierte Polarisierungen). Es sei W ein endlich dimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum. Wir betrachten eine Darstellung λ von $\mathbb{C}^*$ auf dem Dualraum, so dass eine Zerlegung $W^\vee = W_1^\vee \oplus W_2^\vee$ besteht. Dabei sei $W_i^\vee$ der Eigenraum zum Gewicht $z \longmapsto z^{d_i}$, $i = 1, 2$, und $d_1 < d_2$. Wir wollen nun die Quotienten $(\mathbb{P}(W) /\!\!/_{\lambda_d^k} \mathbb{C}^*, [M_d^k])$ bestimmen. Gilt $d/k = d_i$, $i = 1$ oder $i = 2$, so ist der Quotient $(\mathbb{P}(W_i), [\mathscr{O}_{\mathbb{P}(W_i)}(1)])$. Gilt $d_1 < d/k < d_2$, so ist der unpolarisierte Quotient einfach $\mathbb{P}(W_1) \times \mathbb{P}(W_2)$, und die Projektionsabbildung

$$\pi_d^k \colon \mathbb{P}(W) \setminus \big(\mathbb{P}(W_1) \cup \mathbb{P}(W_2) \big) \longrightarrow \mathbb{P}(W_1) \times \mathbb{P}(W_2)$$

ist die kanonische.

BEHAUPTUNG. *Es gilt $[M_k^d] = [\mathscr{O}_{\mathbb{P}(W_1) \times \mathbb{P}(W_2)}(kd_2 - d, -kd_1 + d)]$. Zu je zwei positiven ganzen Zahlen m, n gibt es geeignete Zahlen $d \in \mathbb{Z}$ und $k \in \mathbb{Z}_{>0}$, so dass $[M_k^d] = [\mathscr{O}_{\mathbb{P}(W_1) \times \mathbb{P}(W_2)}(m, n)]$.*

BEWEIS. Es sei $M = \mathscr{O}_{\mathbb{P}(W_1) \times \mathbb{P}(W_2)}(m, n)$ ein Repräsentant der induzierten Polarisierung. Auf Grund der Beschreibung von π_d^k folgt $(\pi_d^k)^* H^0(M) = S^{m_1} W_1 \otimes S^{m_2} W_2$. Falls aber der Unterraum $S^{m_1} W_1 \otimes S^{m_2} W_2$ als Eigenraum auftritt, dann als Eigenraum zu dem Charakter $\chi_{-(md_1 + nd_2) + ((m+n)/k)d}$. Schliesslich muss noch $-(md_1 + nd_2) + ((m+n)/k)d = 0$ also $m(kd_1 - d) + n(kd_2 - d) = 0$ gelten. Daraus folgt die erste Behauptung.

Um die zweite Behauptung zu verifizieren, muss man zu den gegebenen Zahlen m und n positive ganze Zahlen k und r und eine ganze Zahl d finden, so dass die Gleichungen

$$\begin{aligned} kd_2 - d &= rm \\ -kd_1 + d &= rn \end{aligned}$$

erfüllt sind. Dies ist eine leichte Übungsaufgabe. □

2. (Semi-)Stabilitätskriterien

Für konkrete Anwendungen müssen wir auf einer Varietät V mit linearisierter G-Operation die Menge der (semi)stabilen Punkte explizit bestimmen. Die Definition von „(semi)stabil" ist dabei aber wenig hilfreich.

Falls V projektiv ist, wird die Bestimmung der (semi)stabilen Punkte durch das sogenannte Hilbert-Mumford-Kriterium ermöglicht. Es gibt jedoch Fälle, in denen auch die Berechnungen mit dem Hilbert-Mumford-Kriterium zu schwierig werden. Solche Fälle liegen bei direkten Summen von Darstellungen und Operationen von Produkten von Gruppen vor. Die entsprechenden Semistabilitätskriterien sind durch Anwendungen in der Arbeit [**22**] motiviert. Wir werden sie in diesem Kapitel formulieren und beweisen.

2.1. Das Hilbert-Mumford-Kriterium. Das Hilbert-Mumford-Kriterium wurde bereits in Satz I.1.5.6 angegeben. Wir werden es jetzt aber etwas allgemeiner formulieren. Dazu betrachten wir eine projektive Varietät V, eine algebraische Gruppe G, eine Operation $\overline{\sigma}\colon G \times V \longrightarrow V$ von G auf V und eine Linearisierung $\sigma\colon G \times L \longrightarrow L$ dieser Operation in dem Geradenbündel L. Es sei $\lambda\colon \mathbb{C}^* \longrightarrow G$ eine Einparameteruntergruppe von G. Da V projektiv ist, können wir zu jedem Punkt $v \in V$ den Punkt $v_\infty := \lim_{z\to\infty} \lambda(z)\cdot v$ definieren. Der Punkt v_∞ ist dann offenbar ein Fixpunkt der durch λ induzierten $\mathbb{C}^*$-Operation auf V. Die Linearisierung σ liefert eine Operation von $\mathbb{C}^*$ auf dem eindimensionalen Vektorraum L_{v_∞}. Es sei l ein Erzeuger für L_{v_∞}. Die eben beschriebene Operation ist dann von der Form $z\cdot l = z^\gamma l$ für eine bestimmte ganze Zahl γ, die nicht von der Auswahl von l abhängt. Wir setzen nun

$$\mu(x,\lambda) := -\gamma.$$

ÜBUNG 2.1.1. Es sei $\rho\colon G \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$ eine Darstellung von G. Wir betrachten die induzierte Operation auf $\mathbb{P}(V)$ mit der induzierten Linearisierung in $\mathscr{O}_{\mathbb{P}(V)}(1)$. Gegeben sei die Einparameteruntergruppe $\lambda\colon \mathbb{C}^* \longrightarrow G$. Man wähle eine Basis $v_1,\ldots,v_n$ von V mit $\rho(\lambda(z))(\sum c_i v_i) = \sum_{i=1}^n z^{\gamma_i} c_i v_i$ für alle $z \in \mathbb{C}^*$ und alle Tupel $(c_1,\ldots,c_n)$ von komplexen Zahlen. Dann gilt für eine nicht triviale Linearform $l = \sum_{i=1}^n c_i v_i^\vee$

$$\mu([l],\lambda) = -\min\{\,\gamma_i \,|\, l(v_i) \neq 0\,\}.$$

Leiten Sie daraus die folgenden Rechenregeln ab!

i) Für jeden Punkt $x \in \mathbb{P}(V)$, jedes Element $g \in G$ und jede Einparameteruntergruppe λ von G gilt

$$\mu(x,\lambda) = \mu\big(g\cdot x, g\cdot\lambda\cdot g^{-1}\big).$$

Dabei ist $(g\cdot\lambda\cdot g^{-1})(z) := g\cdot\lambda(z)\cdot g^{-1}$ für alle $z \in \mathbb{C}^*$.

ii) Für jeden Punkt $x \in \mathbb{P}(V)$ und jede Einparameteruntergruppe λ von G gilt

$$\mu(x,\lambda) = \mu\big(\lim_{z\longrightarrow\infty} \lambda(z)\cdot x, \lambda\big).$$

SATZ 2.1.2. *Unter den zusätzlichen Annahmen, dass G reduktiv ist und dass L ampel ist, gilt: Der Punkt $v \in V$ ist genau dann (semi)stabil, wenn für jede nicht triviale Einparameteruntergruppe λ von G die Ungleichung*

$$\mu(x,\lambda) \;>(\geq)\; 0$$

erfüllt ist.

ÜBUNG 2.1.3. Führen sie Satz 2.1.2 unter Verwendung der Übungen 1.3.6 und 2.1.1 auf Satz I.1.5.6 zurück!

Der Satz 2.1.2 ergibt sich damit insbesondere aus der folgenden Aussage:

SATZ 2.1.4. *Es seien G eine reduktive, affine algebraische Gruppe und $\rho\colon G \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$ eine Darstellung von G auf dem endlich dimensionalen Vektorraum V. Es seien $v \in V$ und W eine nichtleere ρ-invariante Teilmenge von $\overline{G\cdot v}\setminus G\cdot v$. Dann existieren ein Punkt $w \in W$ und eine Einparameteruntergruppe $\lambda\colon \mathbb{C}^* \longrightarrow G$, so dass $w = \lim_{z\to\infty}\lambda(z)\cdot v$.*

ÜBUNG 2.1.5. Beweisen Sie, dass ein Punkt x genau dann polystabil ist, wenn für jede nicht triviale Einparameteruntergruppe λ von G die Ungleichung

$$\mu(x,\lambda) \geq 0$$

erfüllt ist und zudem für jede Einparameteruntergruppe λ mit $\mu(x,\lambda)=0$ ein $g \in G$ mit

$$\lim_{z\to\infty}\lambda(z)\cdot x = g\cdot x$$

existiert.

Wir werden den Beweis nach R. Richardson führen, der in [**3**], §4, zu finden ist. Dieser Beweis benutzt Eigenschaften von komplexen Liegruppen. Wir erinnern daran, dass man jede nichtsinguläre Varietät X auf natürliche Weise mit der Struktur einer komplexen Mannigfaltigkeit versehen kann. Die entsprechende Topologie auf X heisst *starke Topologie* [**18**].

Auf X stehen uns also zwei Topologien zur Verfügung. Für eine Teilmenge $Z \subset X$ bezeichne $\overline{Z}$ wie bisher den Abschluss in der Zariski-Topologie und $\overline{Z}^s$ den Abschluss in der starken Topologie. Wenn Z eine *konstruierbare* Teilmenge ist, dann gilt $\overline{Z} = \overline{Z}^s$ ([**18**], S.84). Wir erläutern jetzt nicht, was konstruierbare Mengen sind, sondern bemerken lediglich, dass Bilder von Morphismen nach einem Satz von Chevalley konstruierbar sind. Falls X zusätzlich die Struktur einer algebraischen Gruppe trägt, dann können wir X mit der Struktur einer komplexen Liegruppe versehen. Dabei ändert sich an dem Gruppengesetz natürlich nichts.

Es sei G eine algebraische Gruppe. Ein *maximaler Torus von G* ist eine Untergruppe T, die bzgl. Inklusion maximal unter allen Untergruppen ist, die algebraische Tori sind. Man kann zeigen ([**4**], Cor. 11.3), dass zwei maximale Tori T und T' konjugiert sind, d.h., es existiert ein $g \in G$ mit $T' = g\cdot T\cdot g^{-1}$. Insbesondere haben T und T' dieselbe Dimension.

SATZ 2.1.6 (Cartan-Zerlegung). *Es seien G eine reduktive algebraische Gruppe und T ein maximaler Torus. Dann existiert eine kompakte Lieuntergruppe $H \subset G$, so dass $G = H\cdot T\cdot H$.*

BEWEIS. [**15**], Thm. 1.1, S. 402. □

BEISPIEL 2.1.7. Für $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ ist die Gruppe D der Diagonalmatrizen ein maximaler Torus, und es gilt $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) = U_n(\mathbb{C})\cdot D\cdot U_n(\mathbb{C})$ ([**17**], Satz 4, S. 289). Dabei ist $U_n(\mathbb{C})$ die Gruppe der unitären $(n\times n)$-Matrizen.

BEWEIS VON SATZ 2.1.4. Zunächst überlegen wir uns in Schritt 1, dass der Satz gilt, falls G ein algebraischer Torus ist.

Wir hatten bereits in Übung I.1.2.4 gezeigt, dass die Darstellung ρ diagonalisiert werden kann. Für die folgenden Überlegungen wählen wir eine Basis, bzgl. derer die Operation durch Diagonalmatrizen gegeben ist.

Schritt 1. Wir bemerken zunächst, dass W den abgeschlossenen Orbit in $\overline{G\cdot v}\setminus G\cdot v$ enthalten muss. Wir können also o.B.d.A. annehmen, dass es sich bei W schon um diesen Orbit handelt.

Es sei $(v_1,\dots,v_n)$ die Koordinatendarstellung von v bzgl. der gewählten Basis. Nach evtl. Umnummerierung können wir annehmen, dass $v_i \neq 0$, $i = 1,\dots,r$, und $v_i = 0$, $i = r+1,\dots,n$, gilt. Nun betrachten wir den Untermodul $Y := \{\,(y_1,\dots,y_n) \in V \,|\, y_{r+1} = \cdots = y_n = 0\,\}$. Wir können V durch Y ersetzen, so dass wir o.B.d.A. annehmen können, dass $r = n$ gilt, d.h., alle Koordinaten von v sind ungleich 0. Die Orbitabbildung $\mathrm{orb}(\overline{D},v)\colon \overline{D} \longrightarrow V$,

$\mathrm{diag}(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\longmapsto(\alpha_1 v_1,\ldots,\alpha_n v_n)$, ist dann ein Isomorphismus. Wenn also der Orbit $G\cdot v$ nicht abgeschlossen ist (das nehmen wir ja an), dann ist auch $\rho(G)\subset\overline{D}$ nicht abgeschlossen.

Die Charaktergruppe $X(D)$ ist isomorph zu $\mathbb{Z}^{\oplus n}$ und wird von den Charakteren χ_i mit $\chi_i(\mathrm{diag}(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)):=\alpha_i$, $i=1,\ldots,n$, erzeugt. Es sei $X_*(D)$ die Gruppe der Einparameteruntergruppen von D. Es seien $\lambda\in X_*(D)$ und $\chi\in X(D)$. Die Abbildung $\chi\circ\lambda\colon\mathbb{C}^*\longrightarrow\mathbb{C}^*$ ist von der Form $z\longmapsto z^\gamma$ für ein geeignetes $\gamma\in\mathbb{Z}$. Wir setzen $\langle\lambda,\chi\rangle:=\gamma$. Dies definiert eine Paarung $\langle\,.\,,.\,\rangle\colon X_*(D)\times X(D)\longrightarrow\mathbb{Z}$. Dieses Produkt ist eine *perfekte Paarung* ([**4**], 8.6), d.h., es induziert einen Isomorphismus $X_*(D)\longrightarrow X(D)^\vee$. Wir definieren folgende Untergruppen von $X(D)$:

$$\begin{aligned} X' &:= \{\chi\,|\,\chi_{|\rho(G)}\equiv 1\}\\ &= \{\chi\,|\,\langle\rho\circ\lambda,\chi\rangle=0 \quad \text{für alle Einparameteruntergruppen } \lambda \text{ von } G\}\end{aligned}$$

und

$$P:=\Big\{\sum_{i=1}^n\gamma_i\chi_i\in X'\,|\,\gamma_i\geq 0,\ i=1,\ldots,n\Big\}.$$

Ferner setzen wir $J:=\{j\,|\,\exists\ p=\gamma_1\chi_1+\cdots+\gamma_n\chi_n\in P \text{ mit } \gamma_j>0\}$. Bei geeigneter Nummerierung gilt $J=\{k,\ldots,n\}$ für ein $k\in\{1,\ldots,n+1\}$. Wir bezeichnen den Abschluss von $\rho(G)$ in $\overline{D}$ mit $R(G)$. Für jedes Element $g\in R(G)$ und jeden Index $i\in J$ gilt dann $\chi_i(g)\neq 0$. Wäre nun $J=\{1,\ldots,n\}$, so läge $R(G)$ in D. Da aber das Bild eines Gruppenhomomorphismus immer abgeschlossen ist ([**4**], 1.4.(a)), folgt $R(G)=\rho(G)$, im Widerspruch zu unseren Annahmen. Daher gilt $k>1$.

Es sei X die Charaktergruppe von G und X_* die Gruppe der Einparameteruntergruppen. Wie vorher hat man eine bilineare Abbildung $\langle\,.\,,.\,\rangle\colon X_*\times X\longrightarrow\mathbb{Z}$. Wir definieren $X_{\mathbb{Q}}:=X\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$, $X_{*,\mathbb{Q}}:=X_*\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$ und $x_i:=\langle\rho\circ\,.\,,\chi_i\rangle\colon X_{*,\mathbb{Q}}\longrightarrow\mathbb{Q}$. Auf Grund der obigen Überlegungen können wir x_i als Element von $X_{\mathbb{Q}}$ auffassen. Es folgt $X'\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}=\{\sum_{i=1}^n\gamma_i\chi_i\,|\,\gamma_1x_1+\cdots+\gamma_nx_n=0\}$. Wir benötigen folgende Aussage:

BEHAUPTUNG. *Es seien U ein endlich dimensionaler $\mathbb{Q}$-Vektorraum und $u_1,\ldots,u_k$, $u_{k+1},\ldots,u_m$ Elemente aus U, so dass gilt*

(1) *Wenn für $r_i\in\mathbb{Q}_{\geq 0}$, $i=1,\ldots,m$, die Gleichung $\sum_{i=1}^m r_iu_i=0$ gilt, dann folgt $r_i=0$ für $i=1,\ldots,k$.*
(2) *Es gibt $s_i\in\mathbb{Q}_{>0}$, $i=k+1,\ldots,m$, so dass $\sum_{i=k+1}^m s_iu_i=0$.*

Dann gibt es ein Element $l\in U^\vee$ mit $l(u_i)<0$ für $i=1,\ldots,k$ und $l(u_i)=0$ für $i=k+1,\ldots,m$.

Aus dieser Behauptung folgt, dass es ein Element $l\in X_{*,\mathbb{Q}}$ gibt, so dass $l(x_i)<0$ für $i=1,\ldots,k$ und $l(x_i)=0$ für $i=k+1,\ldots,n$. Für ein hinreichend grosses $\kappa\in\mathbb{Z}_{>0}$ ist $\lambda:=\kappa l$ eine Einparameteruntergruppe, für die $\lim_{z\to\infty}\lambda(z)\cdot v=(0,\ldots,0,v_{k+1},\ldots,v_n)=:v_\infty$ gilt.

Wir müssen nun noch $v_\infty\in W$ zeigen, d.h., wir müssen verifizieren, dass der Orbit $G\cdot v_\infty$ abgeschlossen ist. Falls dieser Orbit nicht abgeschlossen ist, können wir unsere Betrachtungen auf v_∞ anstatt auf v anwenden und erhalten eine Einparameteruntergruppe λ' mit $\lim_{z\to\infty}\lambda'(z)\cdot v_\infty=v'=(0,\ldots,0,v'_{k+1},\ldots,v'_n)$. Dabei gilt für $i=k+1,\ldots,n$ entweder $v'_i=0$ oder $v'_i=v_i$. Nun liegt aber $\mathrm{orb}(\overline{D},v)^{-1}(v')$ in $R(G)$, so dass für $i\in J$ gilt $\chi_i(\mathrm{orb}(\overline{D},v)^{-1}(v'))\neq 0$, also insbesondere $v'_i\neq 0$. Es folgt $v'=v_\infty$, ein Widerspruch.

Wir haben noch die ausstehende Behauptung zu beweisen. Es sei $U_{\mathbb{R}}:=U\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{R}$, $Z=U/\langle u_{k+1},\ldots,u_m\rangle$ und $Z_{\mathbb{R}}:=Z\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{R}$. Wir zeigen zunächst, dass die konvexe Hülle C der Restklassen $\overline{u}_1,\ldots,\overline{u}_k$ in $Z_{\mathbb{R}}$ nicht den Nullpunkt enthält. In der Tat, wenn es $r_i\in\mathbb{R}_{\geq 0}$ gibt, so dass $r_1\overline{u}_1+\cdots+r_k\overline{u}_k=0$, dann gibt es auch $r_i\in\mathbb{Q}_{\geq 0}$, für die das zutrifft. Das bedeutet aber, dass es $t_{k+1},\ldots,t_m\in\mathbb{Q}$ gibt, so dass $r_1u_1+\cdots+r_ku_k+t_{k+1}u_{k+1}+\cdots+t_mu_m=0$. Auf Grund von Bedingung (2) können wir die t_i positiv wählen. Dann impliziert (1), dass $r_1=\cdots=r_k=0$.

Da $0\notin C$, folgt, dass es eine über $\mathbb{Q}$ definierte Hyperebene durch den Nullpunkt gibt, die C nicht trifft. M.a.W., es gibt eine lineare Abbildung $\overline{l}\colon Z\longrightarrow\mathbb{Q}$, so dass $C\subset\{\overline{u}\in$

$Z_{\mathbb{R}} \,|\, (\bar{l} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathrm{id}_{\mathbb{R}})(\overline{u}) > 0 \}$. Wir definieren l als Komposition von $-\bar{l}$ und der Projektionsabbildung $U \longrightarrow Z$.

Schritt 2. Auf Grund von Schritt 1 ist es ausreichend zu zeigen, dass es einen Torus $T \subset G$ gibt, für den $W \cap \overline{T \cdot v} \neq \varnothing$ gilt. Nehmen wir also an, das sei nicht der Fall. Wir wählen einen maximalen Torus $T \subset G$. Es sei z ein beliebiger Punkt im G-Orbit von v. Aus unserer Annahme folgt, dass W und $\overline{T \cdot z}$ disjunkte, abgeschlossene, T-invariante Teilmengen sind. In der Tat gilt ($z = g \cdot v$): $\overline{T \cdot z} = \overline{T \cdot g \cdot v} = g \cdot \overline{(g^{-1} \cdot T \cdot g) \cdot v}$ und $W \cap g \cdot \overline{(g^{-1} \cdot T \cdot g) \cdot v} = g \cdot (W \cap \overline{(g^{-1} \cdot T \cdot g) \cdot v}) = \varnothing$, denn $g^{-1} \cdot T \cdot g$ ist auch ein maximaler Torus. Es gibt somit nach Lemma 1.5.3 eine T-invariante Funktion f_z, die auf W identisch verschwindet und auf $\overline{T \cdot z}$ konstant $= 1$ ist. Wir setzen $U_z := \{ y \in V \,|\, f_z(y) \neq 0 \}$. Wir wählen jetzt eine kompakte Lieuntergruppe $H \subset G$, so dass $G = H \cdot T \cdot H$. Der Orbit $H \cdot v$ ist kompakt, so dass wir Punkte $z_1, \ldots, z_n$ finden mit $H \cdot v \subset U_{z_1} \cup \cdots \cup U_{z_n}$. Die Funktion $f \colon V \longrightarrow \mathbb{R}$, $y \longmapsto |f_{z_1}(y)| + \cdots + |f_{z_n}(y)|$, ist stetig bzgl. der starken Topologie auf V. Sie nimmt ein positives Minimum auf der kompakten Menge $H \cdot v$ an und, da sie T-invariant ist, auch auf $(T \cdot H) \cdot v$ und daher auf $\overline{(T \cdot H) \cdot v}^{s}$. Die Mengen W und $\overline{(T \cdot H) \cdot v}^{s}$ sind disjunkt, weil f auf W verschwindet. Da W invariant unter der Operation von G ist, sind auch W und $H \cdot \overline{(T \cdot H) \cdot v}^{s}$ disjunkt. Die Menge $H \cdot \overline{(T \cdot H) \cdot v}^{s}$ ist in der starken Topologie abgeschlossen, weil H kompakt ist. Sie enthält $G \cdot v$ und ist in $\overline{G \cdot v}^{s}$ enthalten, d.h. es gilt

$$H \cdot \overline{(T \cdot H) \cdot v}^{s} = \overline{G \cdot v}^{s} = \overline{G \cdot v}. \tag{3}$$

Bei der letzten Gleichheit haben wir benutzt, dass $G \cdot v$ als Bild eines Morphismus konstruierbar ist. Gleichung (3) führt aber zum Widerspruch, denn $W \subset \overline{G \cdot v}$ und $W \cap H \cdot \overline{(T \cdot H) \cdot v}^{s} = \varnothing$. □

BEISPIEL 2.1.8 (Einparameteruntergruppen von $\mathrm{SL}(r)$). Es sei $\lambda \colon \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathrm{SL}(r)$ eine Einparameteruntergruppe der speziellen linearen Gruppe. Nach Satz I.1.2.3 können wir eine Basis $\underline{w} = (w_1, \ldots, w_r)$ von $\mathbb{C}^r$ und einen Gewichtsvektor $\underline{\gamma} = (\gamma_1, \ldots, \gamma_r)$ finden, so dass

- $\gamma_1 \leq \cdots \leq \gamma_r$ und $\sum_{i=1}^{r} \gamma_i = 0$,
- $\lambda(z) \cdot \sum c_i w_i = \sum z^{\gamma_i} c_i w_i$ für alle Tupel $(c_1, \ldots, c_r) \in \mathbb{C}^r$ und alle $z \in \mathbb{C}^*$.

Umgekehrt definieren die Daten $\underline{w}$ und $\underline{\gamma}$ mit der obigen Eigenschaft über die im zweiten Punkt angegebene Formel eine Einparameteruntergruppe $\lambda(\underline{w}, \underline{\gamma})$ von $\mathrm{SL}(r)$.

Jeder Gewichtsvektor $\underline{\gamma} = (\gamma_1, \ldots, \gamma_r)$ mit $\gamma_1 \leq \cdots \leq \gamma_r$ und $\sum_{i=1}^{r} \gamma_i = 0$ kann wie folgt zerlegt werden:

$$\underline{\gamma} = \sum_{i=1}^{r-1} \frac{\gamma_{i+1} - \gamma_i}{r} \gamma_r^{(i)} \tag{4}$$

mit

$$\gamma_r^{(i)} := \big(\underbrace{i-r, \ldots, i-r}_{i\times}, \underbrace{i, \ldots, i}_{(r-i)\times}\big), \quad i = 1, \ldots, r-1.$$

BEISPIEL 2.1.9 (Gewichte in Graßmannschen). Es seien $0 < s < r$ und $G := G(s, r)$ die Graßmannvarietät der s-dimensionalen Quotienten von $\mathbb{C}^r$ [**11**]. Auf G operiert $\mathrm{SL}(r)$ vermöge

$$g \cdot \big[k \colon \mathbb{C}^r \longrightarrow \mathbb{C}^s\big] := \big[\mathbb{C}^r \xrightarrow{g^{-1}} \mathbb{C}^r \xrightarrow{k} \mathbb{C}^s\big].$$

Diese Operation ist transitiv, d.h., es gibt nur einen Orbit. Wir führen aber dennoch die Rechnungen durch, da sie für viele Anwendungen nützlich sind (cf. [**21**]), z.B., wenn man die $\mathrm{GL}(r)$-Operation auf Produkten von Graßmannschen betrachtet.

Über G existiert der *universelle Quotient* $k_G \colon \mathbb{C}^r \otimes \mathscr{O}_G \longrightarrow Q_G$, i.e., für $x \in G$ ist $k_{G|\{x\}}$ gerade der durch x parametrisierte Quotient. Wir erhalten die Surjektion

$$\overset{s}{\wedge} k_G \colon \bigwedge^{s} \mathbb{C}^r \otimes \mathscr{O}_G \longrightarrow \mathscr{L}_G := \det Q_G.$$

Diese Surjektion vermittelt die Plücker-Einbettung $\iota\colon G \hookrightarrow \mathbb{P} := \mathbb{P}(\bigwedge^s \mathbb{C}^r)$ mit $\iota^*\mathscr{O}_{\mathbb{P}}(1) = \mathscr{L}_G$, also insbesondere eine Linearisierung der $\mathrm{SL}(r)$-Operation.

Wir betrachten die Einparameteruntergruppe $\lambda(\underline{w},\underline{\gamma})$ von $\mathrm{SL}(r)$ (s. Bsp. 2.1.8). Für $[k\colon \mathbb{C}^r \longrightarrow \mathbb{C}^s]$ erhalten wir eine Filtrierung

$$V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_r = \mathbb{C}^s \quad \text{mit} \quad V_i := k\big(\langle w_1,\dots,w_i\rangle\big), \quad i = 1,\dots,r.$$

ÜBUNG 2.1.10. i) Man setze $i_j := \min\{\, i = 1,\dots,r \mid \dim V_i = j\,\}$, $j = 1,\dots,s$. Zeigen Sie

$$\mu\big([k],\lambda(\underline{w},\underline{\gamma})\big) = -\sum_{j=1}^{s} \gamma_{i_j}!$$

ii) Schliessen Sie

$$\mu\big([k],\lambda(\underline{w},\underline{\gamma})\big) = \sum_{i=1}^{r-1} \frac{\gamma_{i+1}-\gamma_i}{r}\,\mu\big([k],\lambda(\underline{w},\gamma_r^{(i)})\big)!$$

iii) Beweisen Sie

$$\mu\big([k],\lambda(\underline{w},\gamma_r^{(i)})\big) = i\dim\ker k - r\dim\big(\langle w_1,\dots,w_i\rangle \cap \ker k\big)!$$

Aus dieser Übung folgt, dass $[k]$ genau dann (semi)stabil ist, wenn für jeden Unterraum $0 \subsetneq L \subsetneq \mathbb{C}^r$ gilt:

$$\frac{\dim L\cap\ker k}{\dim\ker k} < (\le) \frac{\dim L}{r}.$$

Natürlich ist diese Bedingung für $L = \ker k$ immer verletzt, d.h., es gibt keine semistabilen Punkte.

BEMERKUNG 2.1.11. Für das letzte Beispiel ist die Eigenschaft ii) in 2.1.10 von entscheidender Bedeutung. Wenn sie nicht erfüllt ist, können die Berechnungen sehr kompliziert werden. Dies ist auch der Grund dafür, dass wir die unten aufgeführten, verfeinerten Semistabilitätskriterien benötigen, um in solchen Fällen noch rechnen zu können.

BEISPIEL 2.1.12. Man betrachte die Operation von $\mathrm{SL}(3)$ auf $\mathbb{P}\big(M_3(\mathbb{C})\big)$ durch Konjugation. Es seien $[f]$ die Klasse der Matrix

$$f := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und λ bzw. λ' die Einparameteruntergruppen, die bzgl. der Standardbasis durch die Gewichtsvektoren $(-2,1,1)$ bzw. $(-1,-1,2)$ gegeben sind. Dann berechnet man $\mu([f],\lambda) = 0 = \mu([f],\lambda')$, aber $\mu\big([f],\lambda((e_1,e_2,e_3),(-3,0,3))\big) = -3$.

BEISPIEL 2.1.13. Wir wollen die Einzelbeobachtungen aus den Beispielen 2.1.9 und 2.1.12 formalisieren. Wir setzen $G = \mathrm{SL}(r)$ voraus. Die Argumentation lässt sich aber ohne grosse Anstrengung auf beliebige reduktive Gruppen erweitern. Wir fixieren einen maximalen Torus $T \subset \mathrm{SL}(r)$. Der Einfachheit halber wählen wir T als die Menge der Diagonalmatrizen, so dass das Produkt der Diagonaleinträge eins ergibt. Es sei $\underline{w} = (e_1,\dots,e_r)$ die Standardbasis des $\mathbb{C}^r$. Man setze

$$K := \mathbb{R}_{\ge 0}\gamma_r^{(1)} + \cdots + \mathbb{R}_{\ge 0}\gamma_r^{(r-1)}.$$

Für jede Einparameteruntergruppe λ von $\mathrm{SL}(r)$ existiert ein $g \in \mathrm{SL}(r)$, so dass

$$g\cdot\lambda\cdot g^{-1} = \lambda(\underline{w},\underline{\gamma}) \quad \text{mit} \quad \underline{\gamma} \in K \cap \mathbb{Z}^n.$$

Wir betrachten eine Darstellung $\rho\colon\ \mathrm{SL}(r) \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$. Aus Übung 2.1.1 folgt schon einmal

$$x \in \mathbb{P}(V)^{ss}_{\rho} \iff \mu\big(g\cdot x,\lambda(\underline{w},\underline{\gamma})\big) \ge 0 \quad \text{für alle } \underline{\gamma} \in K\cap\mathbb{Z}^n \text{ und alle } g \in G.$$

Die Einschränkung von ρ auf T liefert eine Zerlegung $V^\vee = \bigoplus_{\chi\in X(T)} V_\chi$, und wir definieren

$$\mathrm{ZST}(\rho) := \{\, \chi \in X(T) \mid V_\chi \ne \{0\}\,\}$$

als die *Menge der Zustände von* ρ. Für $\chi \in \mathrm{ZST}(\rho)$ sei $\pi_\chi \colon V \longrightarrow V_\chi$ die Projektionsabbildung. Es sei $x \in \mathbb{P}(V)$ und $v \in V^\vee$ eine Hochhebung von x. Die Menge

$$\mathrm{ZST}(\rho,x) := \{\, \chi \in \mathrm{ZST}(\rho) \,|\, \pi_\chi(v) \neq 0 \,\}$$

heisst die *Menge der Zustände von* x.

Für eine Teilmenge I von $\mathrm{ZST}(\rho)$ und $\chi \in I$ erklärt man

$$K(I,\chi) := K(\rho,I,\chi) := \{\, \underline{\gamma} \in K \,|\, \langle \lambda(\underline{w},\underline{\gamma}),\chi\rangle \leq \langle \lambda(\underline{w},\underline{\gamma}),\chi'\rangle \ \forall \chi' \in I \,\}.$$

Dabei ist $\langle \lambda(\underline{w},\underline{\gamma}),\chi\rangle$ für $\underline{\gamma} \in K \cap \mathbb{Z}^n$ wie vorhin definiert und für $\underline{\gamma} \in K$ durch lineare Fortsetzung. Es gilt

$$K = \bigcup_{\chi \in I} K(I,\chi). \tag{5}$$

Der Kegel $K(I,\chi)$ ist der Durchschnitt endlich vieler rationaler Halbräume, i.e., ein sogenannter *rationaler Polyederkegel* (s. [**9**]), und (5) ist eine sogenannte *Fächerzerlegung*. Eine *Seite von* $K(I,\chi)$ ist der Durchschnitt von $K(I,\chi)$ mir einem linearen Unterraum. Eindimensionale Seiten heissen *Kanten*. Für jede Kante k wähle man ein Element $\underline{\gamma}_k$ in $k \cap \mathbb{Z}^n$, so dass $(1/m)\underline{\gamma}_k \notin K(I,\chi) \cap \mathbb{Z}^n$ für alle $m \in \mathbb{Z}_{>0}$. Dann gilt [**9**]

$$K(I,\chi) = \sum_k \mathbb{R}_{\geq 0}\underline{\gamma}_k.$$

Wir definieren $\Gamma(I,\chi) = \{\, \underline{\gamma}_k \,|\, k \text{ Kante von } K(I,\chi) \,\}$ und $\Gamma(I) = \bigcup_{\chi \in I} \Gamma(I,\chi)$.

Diese Kegelzerlegung hat die Eigenschaft, dass für $x \in \mathbb{P}(V)$, $\chi \in \mathrm{ZST}(\rho,x)$ und $\underline{\gamma} = \sum l_k \gamma_k \in K(\mathrm{ZST}(\rho,x),\chi)$ mit $l_k \geq 0$ für alle k

$$\mu\big(x,\lambda(\underline{w},\underline{\gamma})\big) = \sum l_k \mu\big(x,\lambda(\underline{w},\underline{\gamma_k})\big) = -\sum l_k \langle \lambda(\underline{w},\underline{\gamma_k}),\chi\rangle$$

gilt. Es ergibt sich folgende Version des Hilbert-Mumford-Kriteriums

$$x \in \mathbb{P}(V)^{ss}_\rho \quad \Longleftrightarrow \quad \mu\big(g\cdot x,\lambda(\underline{w},\underline{\gamma})\big) \geq 0 \quad \text{für alle } \underline{\gamma} \in \Gamma\big(\mathrm{ZST}(\rho,g\cdot x)\big),\ g \in G.$$

Der Vorteil hier ist, dass $\underline{\gamma}$ einer endlichen Menge von Gewichtsvektoren angehört.

Es sei $\Gamma(\rho) := \bigcup_{I \subseteq \mathrm{ZST}(\rho)} \Gamma(I)$. Dies ist immer noch eine endliche Menge von Gewichtsvektoren. Wir schliessen

$$x \in \mathbb{P}(V)^{ss}_\rho \quad \Longleftrightarrow \quad \mu\big(g\cdot x,\lambda(\underline{w},\underline{\gamma})\big) \geq 0 \quad \text{für alle } \underline{\gamma} \in \Gamma(\rho) \text{ und alle } g \in G.$$

Der Vorteil hier ist, dass $\Gamma(\rho)$ nur von ρ nicht aber von x abhängt.

Für eine beliebige reduktive Gruppe G würde man anstatt mit K mit einer *Weylkammer* $W(B,T)$ von G arbeiten (s. [**4**]).

BEISPIEL 2.1.14. Wir betrachten die Darstellung $\rho\colon \mathrm{SL}(2) \longrightarrow \mathrm{GL}(S^2\mathbb{C}^3)$. Es sei $\underline{w} = (e_1,e_2,e_3)$ die Standardbasis von $\mathbb{C}^3$. Dann ist $(e_1\otimes e_1, e_1\otimes e_2, e_1\otimes e_3, e_2\otimes e_2, e_2\otimes e_3, e_3\otimes e_3)$ eine Basis von $S^2\mathbb{C}^3$. Es sei

$$T := \left\{ \begin{pmatrix} z_1 & 0 & 0 \\ 0 & z_2 & 0 \\ 0 & 0 & z_1^{-1}z_2^{-1} \end{pmatrix} \,\middle|\, z_1,z_2 \in \mathbb{C}^* \right\}.$$

Offenbar gilt $\mathrm{ZST}(\rho) = \{\chi_{-2,-2},\chi_{-1,0},\chi_{0,-1},\chi_{0,2},\chi_{1,1},\chi_{2,0}\}$ mit

$$\begin{array}{rccc} \chi_{i_1,i_2}\colon & T & \longrightarrow & \mathbb{C}^* \\ & \begin{pmatrix} z_1 & 0 & 0 \\ 0 & z_2 & 0 \\ 0 & 0 & z_1^{-1}z_2^{-1} \end{pmatrix} & \longmapsto & z_1^{i_1}z_2^{i_2} \end{array}$$

und

$$\langle \lambda(\underline{w},(\gamma_1,\gamma_2,-\gamma_1-\gamma_2)),\chi_{i_1,i_2}\rangle = i_1\gamma_1 + i_2\gamma_2.$$

Man verifiziert, dass $K(I,\chi)$ leer oder ganz K ist, ausser wenn $\chi_{2,0}\notin I$ und $\chi_{1,1}\notin I$ und $\{\chi_{0,-1},\chi_{0,2}\}\subset I$. In diesem Fall gilt $K(I,\chi)=\varnothing$ für $\chi\notin\{\chi_{0,-1},\chi_{0,2}\}$ und

$$\begin{aligned} K(I,\chi_{0,-1}) &= \{\underline{\gamma}\in K\,|\,\gamma_2\geq 0\} &=& \mathbb{R}_{\geq 0}(-1,0,1)+\mathbb{R}_{\geq 0}(-2,1,1)\\ K(I,\chi_{0,2}) &= \{\underline{\gamma}\in K\,|\,\gamma_2\leq 0\} &=& \mathbb{R}_{\geq 0}(-1,0,1)+\mathbb{R}_{\geq 0}(-1,-1,2). \end{aligned}$$

Es sei $[l]\in\mathbb{P}(S^2\mathbb{C}^3)$ die Klasse einer Linearform $l\colon S^2\mathbb{C}^3\longrightarrow\mathbb{C}$. Die zu $\mathrm{ZST}(\rho,[l])$ gehörige Zerlegung von K enthält somit genau dann echte, nicht leere Unterkegel von K, wenn $l(e_1\otimes e_1)=0=l(e_1\otimes e_2)$ und $l(e_1\otimes e_3)\neq 0\neq l(e_2\otimes e_2)$.

2.2. Semistabilität für direkte Summen von Darstellungen. Wir folgen in diesem Abschnitt der Arbeit [**26**]. Dabei wurde ein Fehler bei der Charakterisierung von Polystabilität behoben.

Es seien G eine algebraische Gruppe und $V_1,...,V_s$ endlich dimensionale $\mathbb{C}$-Vektorräume. Wir geben uns Darstellungen $\rho_i\colon G\longrightarrow \mathrm{GL}(V_i)$, $i=1,...,s$, vor. Die direkte Summe $\rho:=\rho_1\oplus\cdots\oplus\rho_s$ dieser Darstellungen liefert eine Operation von G auf $\mathbb{P}(V)$, $V:=V_1\oplus\cdots\oplus V_s$, zusammen mit einer Linearisierung dieser Operation in $\mathscr{O}_{\mathbb{P}(V)}(1)$. Die ρ_i induzieren für jedes Tupel $\underline{\iota}=(\iota_1,...,\iota_t)$ mit $0<t\leq s$, $\iota_i\in\{1,...,s\}$, $i=1,...,t$, und $\iota_1<\cdots<\iota_t$ eine Operation von G auf $\mathbb{P}_{\underline{\iota}}:=\mathbb{P}(V_{\iota_1})\times\cdots\times\mathbb{P}(V_{\iota_t})$ und für jedes Tupel $(k_1,...,k_t)$ von positiven ganzen Zahlen eine Linearisierung dieser Operation in dem sehr amplen Geradenbündel $\mathscr{O}_{\mathbb{P}_{\underline{\iota}}}(k_1,...,k_t)$. Der folgende Satz führt die Bestimmung der semi- und polystabilen Punkte in $\mathbb{P}(V)$ auf die Berechnung der semi- und polystabilen Punkte in den $\mathbb{P}_{\underline{\iota}}$ zurück.

SATZ 2.2.1. *Es sei $v=[v_1,...,v_s]$ ein Punkt in $\mathbb{P}(V)$. Dabei stehe v_i für seine Komponente in $V_i^\vee$, $i=1,...,s$. Dann gilt:*

i) *Der Punkt v ist genau dann ρ-semistabil, wenn es ein Indextupel $\underline{\iota}$ wie oben gibt sowie positive ganze Zahlen $k_1,...,k_t$, so dass $v_{\iota_i}\neq 0$ für $i=1,...,t$, und der Punkt $([v_{\iota_1}],...,[v_{\iota_t}])\in\mathbb{P}_{\underline{\iota}}$ semistabil bzgl. der Linearisierung in $\mathscr{O}_{\mathbb{P}_{\underline{\iota}}}(k_1,...,k_t)$ ist.*

ii) *Der Punkt v ist genau dann ρ-polystabil, wenn es zu dem Indextupel $\underline{\iota}$ mit*

$$v_i\neq 0 \quad\Longleftrightarrow\quad i\in\{\iota_1,...,\iota_t\}$$

positive ganze Zahlen $k_1,...,k_t$ gibt, so dass der Punkt $([v_{\iota_1}],...,[v_{\iota_t}])\in\mathbb{P}_{\underline{\iota}}$ polystabil bzgl. der Linearisierung in $\mathscr{O}_{\mathbb{P}_{\underline{\iota}}}(k_1,...,k_t)$ ist.

BEMERKUNG 2.2.2. Für „stabil" gilt in ii) nur noch die Rückrichtung. Um die stabilen Punkte zu finden, muss man die Charakterisierung „stabil = polystabil mit endlichem Stabilisator" verwenden.

BEWEIS. Zu i): Nach Definition ist der Punkt v genau dann semistabil, wenn ein $k>0$ und ein G-invarianter Schnitt $s\in H^0(\mathbb{P}(V),\mathscr{O}_{\mathbb{P}(V)}(k))$ existieren mit $s(v)\neq 0$. Nun gilt

$$H^0\big(\mathbb{P}(V),\mathscr{O}_{\mathbb{P}(V)}(k)\big)=S^kV=\bigoplus_{k_1+\cdots+k_s=k} S^{k_1}V_1\otimes\cdots\otimes S^{k_s}V_s.$$

Die Darstellung $S^k\rho$ respektiert diese Zerlegung, i.e., es gilt auch

$$H^0\big(\mathbb{P}(V),\mathscr{O}_{\mathbb{P}(V)}(k)\big)^G=S^kV^G=\bigoplus_{k_1+\cdots+k_s=k}\big(S^{k_1}V_1\otimes\cdots\otimes S^{k_s}V_s\big)^G.$$

Ein Schnitt s wie oben existiert also genau dann, wenn es $\underline{\iota}$ wie oben, positive ganze Zahlen $k_1,...,k_t$ und einen Schnitt $s'\in(S^{k_1}V_1\otimes\cdots\otimes S^{k_s}V_s)^G$ mit $s'(v)\neq 0$ gibt. Dies ist aber gerade die Behauptung.

Zu ii): Dies folgt via Induktion aus Teil ii) von

SATZ 2.2.3. *Es sei $v'=\big([v_{\iota_1},v_{\iota_2}],[v_{\iota_3}],...,[v_{\iota_t}]\big)\in\mathbb{P}(V_{\iota_1}\oplus V_{\iota_2})\times\mathbb{P}_{(\iota_3,...,\iota_t)}$. Dann gilt:*

i) *Der Punkt v' ist genau dann semistabil bzgl. der Linearisierung in $\mathscr{O}(k,k_3,...,k_t)$, wenn*

(1) *entweder* $([v_{\iota_i}],[v_{\iota_3}],\ldots,[v_{\iota_t}]) \in \mathbb{P}_{(\iota_i,\iota_3,\ldots,\iota_t)}$ *für* $i=1$ *oder* $i=2$ *semistabil ist bzgl. der Linearisierung in* $\mathcal{O}(k,k_3,\ldots,k_t)$
(2) *oder positive ganze Zahlen* n, k_1 *und* k_2 *mit* $nk = k_1+k_2$ *existieren, so dass* $([v_{\iota_1}],[v_{\iota_2}],[v_{\iota_3}],\ldots,[v_{\iota_t}]) \in \mathbb{P}_{(\iota_1,\iota_2,\iota_3,\ldots,\iota_t)}$ *semistabil ist bzgl. der Linearisierung in* $\mathcal{O}(k_1,k_2,nk_3,\ldots,nk_t)$.

ii) *Der Punkt* v' *ist genau dann polystabil bzgl. der Linearisierung in* $\mathcal{O}(k,k_3,\ldots,k_t)$, *wenn*

(1) *entweder* $([v_{\iota_i}],[v_{\iota_3}],\ldots,[v_{\iota_t}]) \in \mathbb{P}_{(\iota_i,\iota_3,\ldots,\iota_t)}$ *polystabil bzgl. der Linearisierung in* $\mathcal{O}(k,k_3,\ldots,k_t)$ *ist für* $i=1$ *und* $v_{\iota_2}=0$ *oder für* $i=2$ *und* $v_{\iota_1}=0$
(2) *oder positive ganze Zahlen* n, k_1 *und* k_2 *mit* $nk = k_1+k_2$ *existieren, so dass* $([v_{\iota_1}],[v_{\iota_2}],[v_{\iota_3}],\ldots,[v_{\iota_t}]) \in \mathbb{P}_{(\iota_1,\iota_2,\iota_3,\ldots,\iota_t)}$ *polystabil ist bzgl. der Linearisierung in* $\mathcal{O}(k_1,k_2,nk_3,\ldots,nk_t)$.

Punkt i) zeigt man wie vorhin. Für ii) wenden wir Übung 2.1.5 an. Es sei v' zunächst polystabil. Nach i) wissen wir bereits, dass es nicht negative rationale Zahlen κ_1 und κ_2 gibt mit $\kappa_1+\kappa_2=k$ und

$$\kappa_1\mu([v_{\iota_1}],\lambda)+\kappa_2\mu([v_{\iota_2}],\lambda)+\sum_{i=3}^{t}k_i\mu([v_{\iota_i}],\lambda)\geq 0 \tag{6}$$

für jede Einparameteruntergruppe λ von G. Wir müssen nun untersuchen, was passiert, wenn in (6) „=“ gilt. Es gibt zwei Möglichkeiten. Die erste ist, dass es noch weitere nicht negative rationale Zahlen $\kappa_i' \neq \kappa_i$, $i=1,2$, mit $\kappa_1'+\kappa_2'=k$ gibt, so dass (6) auch für κ_1', κ_2' und alle λ gilt. In diesem Fall gilt das auch für $\kappa_i'' := (\kappa_i+\kappa_i')/2$, $i=1,2$. Falls für κ_1'', κ_2'' und λ dann „=“ in (6) gilt, dann muss $\mu([v_{\iota_1}],\lambda)=\mu([v_{\iota_2}],\lambda)$ erfüllt sein, denn sonst würde (6) für λ und (κ_1,κ_2) oder (κ_1',κ_2') negativ. Es sei

$$v'' := ([v_{\iota_1}'',v_{\iota_2}''],[v_{\iota_3}'',\ldots,v_{\iota_t}'']) := \lim_{z\longrightarrow\infty}\lambda(z)\cdot v'.$$

Die Gleichung $\mu([v_{\iota_1}],\lambda)=\mu([v_{\iota_2}],\lambda)$ garantiert dabei, dass $v_{\iota_1}''\neq 0\neq v_{\iota_2}''$. Es folgt

$$\lim_{z\longrightarrow\infty}\lambda(z)\cdot([v_{\iota_1}],[v_{\iota_2}],[v_{\iota_3},\ldots,v_{\iota_t}]) = ([v_{\iota_1}''],[v_{\iota_2}''],[v_{\iota_3}'',\ldots,v_{\iota_t}'']).$$

Dieser Punkt ist immer noch semistabil, so dass v'' nach i) ρ-semistabil ist. Da v' polystabil ist, gibt es ein Element $g\in G$, so dass $v''=g\cdot v'$ und damit

$$([v_{\iota_1}''],[v_{\iota_2}''],[v_{\iota_3}'',\ldots,v_{\iota_t}'']) = g\cdot([v_{\iota_1}],[v_{\iota_2}],[v_{\iota_3},\ldots,v_{\iota_t}]).$$

Die zweite Möglichkeit ist, dass es genau ein Paar (κ_1,κ_2) mit den entsprechenden Eigenschaften gibt. Das bedeutet aber, dass für jedes $\nu>0$ alle G-invarianten Schnitte von $\mathcal{O}(\nu k,\nu k_3,\ldots,\nu k_t)$, die nicht in v' verschwinden, in $S^{\nu\kappa_1}V_{\iota_1}\otimes S^{\nu\kappa_2}V_{\iota_2}\otimes S^{\nu k_3}V_{\iota_3}\otimes\cdots\otimes S^{\nu k_t}V_{\iota_t}$ liegen. Daraus ergibt sich leicht die Behauptung.

Wir kommen nun zur Umkehrung. Wir bemerken zunächst, dass für alle Paare von nicht negativen rationalen Zahlen (κ_1,κ_2) mit $\kappa_1+\kappa_2=k$ und alle Einparameteruntergruppen λ die Ungleichung

$$\mu(v',\lambda)\geq\kappa_1\mu([v_{\iota_1}],\lambda)+\kappa_2\mu([v_{\iota_2}],\lambda)+\sum_{i=3}^{t}k_i\mu([v_{\iota_i}],\lambda) \tag{7}$$

erfüllt ist. Nach Voraussetzung können wir (κ_1,κ_2) so wählen, dass die rechte Seite für alle λ nicht negativ ist. Wir nehmen $\kappa_1\cdot\kappa_2\neq 0$ an, da die übrig bleibenden Fälle einfacher zu behandeln sind. Für eine Einparameteruntergruppe λ mit $\mu(v',\lambda)=0$ folgt demnach

$$\kappa_1\mu([v_{\iota_1}],\lambda)+\kappa_2\mu([v_{\iota_2}],\lambda)+\sum_{i=3}^{t}k_i\mu([v_{\iota_i}],\lambda)=0.$$

Wir dürfen sicherlich v' durch $g\cdot v'$, $g\in G$, ersetzen. Wählen wir $g\in G$ mit

$$\lim_{z\to\infty}\lambda(z)\cdot([v_{\iota_1}],[v_{\iota_2}],[v_{\iota_3}],\ldots,[v_{\iota_t}]) = g\cdot([v_{\iota_1}],[v_{\iota_2}],[v_{\iota_3}],\ldots,[v_{\iota_t}]),$$

so können wir annehmen, dass $([v_{\iota_1}],[v_{\iota_2}],[v_{\iota_3}],...,[v_{\iota_t}])$ von λ fixiert wird. Deshalb gibt es ganze Zahlen γ_1 und γ_2 mit $\lambda(z)\cdot v_{\iota_i} = z^{\gamma_i}v_{\iota_i}$, $i=1,2$. Man beachte $\gamma_i = \mu([v_{\iota_i}],\lambda)$, $i=1,2$. Für $\gamma_1=\gamma_2$ ist v' auch ein Fixpunkt für die von λ vermittelte $\mathbb{C}^*$-Operation. Für $\gamma_1<\gamma_2$ gilt hingegen

$$\begin{aligned} 0 &= \kappa_1\gamma_1+\kappa_2\gamma_2+\sum_{i=3}^{t}k_i\mu\big([v_{\iota_i}],\lambda\big) \\ &< k\gamma_2+\sum_{i=3}^{t}k_i\mu\big([v_{\iota_i}],\lambda\big) \quad \overset{(7)}{\leq} \quad \mu(v',\lambda). \end{aligned}$$

Wir hatten aber $\mu(v',\lambda)=0$ angenommen. □

2.3. Semistabilität für Operationen von Produkten von Gruppen. Wir betrachten nun folgende Situation: Gegeben seien zwei reduktive Gruppen G und H und eine Darstellung $\rho\colon G\times H \longrightarrow \mathrm{GL}(W)$. Dabei sei W ein endlich dimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum. Dies induziert Darstellungen γ bzw. λ von G bzw. H. Diese Darstellungen kommutieren miteinander, d.h., gegeben $g\in G$ und $h\in H$, dann gilt $\gamma(g)\cdot\lambda(h)=\lambda(h)\cdot\gamma(g)$. Sind umgekehrt zwei miteinander kommutierende Darstellungen γ bzw. λ von G bzw. H gegeben, so erhält man eine Darstellung ρ von $G\times H$. Die Idee ist, ρ-Semistabilität durch γ- und λ-Semistabilität auszudrücken. Dies funktioniert nur in einem etwas verfeinerten Sinne. Wir wollen dies nun beschreiben.

Wir setzen $Q_\gamma := \mathbb{P}(W)/\!\!/_\gamma G$, und $\pi_\gamma\colon \mathbb{P}(W)^{ss}_\gamma \longrightarrow Q_\gamma$ sei die Quotientenabbildung. Für hinreichend große n erhalten wir eine Einbettung $j_n\colon Q_\gamma \longrightarrow \mathbb{P}(S^nW^G)$. Da die Darstellungen γ und λ miteinander kommutieren, erhalten wir Operationen von H auf Q_γ, S^nW^G und $\mathbb{P}(S^nW^G)$, so dass j_n bzgl. dieser Operationen H-äquivariant ist. Somit ist die H-Operation auf $\mathbb{P}(S^nW^G)$ bereits linearisiert, und diese Linearisierung induziert eine Linearisierung der H-Operation auf Q_γ in dem Geradenbündel $\mathscr{O}_{\mathbb{P}(S^nW^G)}(1)_{|Q_\gamma}$. Wie wir in Bemerkung 1.3.9 gesehen haben, hängt der zugehörige Semistabilitätsbegriff nicht von n ab. Wir bezeichnen die H-semistabilen bzw. H-polystabilen Punkte mit Q^{ss}_γ bzw. Q^{ps}_γ.

SATZ 2.3.1. i) *Die Menge der ρ-semistabilen Punkte in $\mathbb{P}(W)$ ist die Menge $\mathbb{P}(W)^{ss}_\gamma\cap \pi_\gamma^{-1}(Q^{ss}_\gamma)$. Ferner gilt $\mathbb{P}(W)/\!\!/_\rho(G\times H)\cong Q_\gamma/\!\!/H$. Dabei bilden wir den Quotienten auf der rechten Seite bzgl. der in der oben beschriebenen Weise linearisierten H-Operation.*

ii) *Für die polystabilen Punkte gilt entsprechend: $\mathbb{P}(W)^{ps}_\rho = \mathbb{P}(W)^{ps}_\gamma\cap\pi_\gamma^{-1}(Q^{ps}_\gamma)$.*

BEMERKUNG 2.3.2. Die analoge Aussage für stabile Punkte ist falsch.

BEWEIS VON SATZ 2.3.1. i) Wir nehmen zunächst an, $x\in\mathbb{P}(W)$ sei γ-semistabil und $\pi_\gamma(x)$ liege in Q^{ss}_γ. Für grosse n ist $j_n(\pi_\gamma(x))$ ein H-semistabiler Punkt in $\mathbb{P}(S^nW^G)$. Es existieren also ein $k\geq 1$ und ein H-invarianter Schnitt

$$\overline{s}\in H^0\big(\mathbb{P}(S^nW^G),\mathscr{O}_{\mathbb{P}(S^nW^G)}(k)\big)^H = S^k(S^nW^G)^H,$$

der nicht in $j_n(\pi_\gamma(x))$ verschwindet. Den Schnitt $\overline{s}$ können wir aber auch als Element in $S^{kn}W^{G\times H}$ ansehen. Als solches liefert er einen $(G\times H)$-invarianten Schnitt $s\in\mathscr{O}_{\mathbb{P}(W)}(kn)$, der in x nicht verschwindet. Daher ist x auch ρ-semistabil.

Nehmen wir jetzt umgekehrt an, x liege in $\mathbb{P}(W)^{ss}_\rho$. Für m hinreichend gross existiert also ein $(G\times H)$-invarianter Schnitt $s\in H^0(\mathscr{O}_{\mathbb{P}(W)}(m))$, der in x nicht verschwindet. Diesen Schnitt können wir als H-invariantes Element aus S^mW^G ansehen. Diese Interpretation sagt aber nichts anderes aus, als dass x in $\mathbb{P}(W)^{ss}_\gamma\cap\pi_\gamma^{-1}(Q^{ss}_\gamma)$ liegt.

Die Aussage über die Gleichheit der Quotienten ist eine direkte Konsequenz der bereits bewiesenen Aussage und der universellen Eigenschaft 1.1.1 des Quotienten.

ii) Der Punkt x liege zunächst in $\mathbb{P}(W)^{ps}_\gamma\cap\pi_\gamma^{-1}(Q^{ps}_\gamma)$. Wie wir in i) gezeigt haben, ist x dann ρ-semistabil. Wir können somit einen ρ-polystabilen Punkt $y\in\overline{(G\times H)\cdot x}\cap\mathbb{P}(W)^{ss}_\rho$ finden. Es folgt $\pi_\gamma(y)\in\overline{H\cdot\pi_\gamma(x)}\cap Q^{ss}_\gamma = H\cdot\pi_\gamma(x)$, denn $\pi_\gamma(x)\in Q^{ps}_\gamma$. Also gibt es ein

$h \in H$ mit $\pi_\gamma(x) = h \cdot \pi_\gamma(y) = \pi_\gamma(h \cdot y)$. Die Abschlüsse der G-Orbiten von x und $h \cdot y$ in $\mathbb{P}(W)^{ss}_\gamma$ schneiden sich, und da x ein γ-polystabiler Punkt ist, folgt $G \cdot x \subset \overline{G \cdot (h \cdot y)} \cap \mathbb{P}(W)^{ss}_\gamma$. Folglich gilt $x \in \overline{(G \times H) \cdot y} \cap \mathbb{P}(W)^{ss}_\rho = (G \times H) \cdot y$. Da y ein ρ-polystabiler Punkt ist, trifft dies auch auf x zu.

Nun sei $x \in \mathbb{P}(W)^{ps}_\rho$. Wir fixieren einen γ-polystabilen Punkt $y \in \overline{G \cdot x} \cap \mathbb{P}(W)^{ss}_\gamma$. Dann gilt offenbar $\pi_\gamma(y) = \pi_\gamma(x)$. Aus i) folgt $\pi_\gamma(x) = \pi_\gamma(y) \in Q^{ss}_\gamma$. Wenden wir jetzt i) in der anderen Richtung an, dann erkennen wir, dass y ein ρ-semistabiler Punkt ist. Nach Voraussetzung ist der Orbit $(G \times H) \cdot x$ in $\mathbb{P}(W)^{ss}_\rho$ abgeschlossen. Folglich existieren $g \in G$ und $h \in H$ mit $y = g \cdot h \cdot x$. Der Punkt $g^{-1} \cdot y$ ist γ-polystabil, und da die Darstellungen γ und λ kommutieren, ist auch $x = h^{-1} \cdot (g^{-1} \cdot y)$ ein γ-polystabiler Punkt. Wir müssen noch beweisen, dass $\pi_\gamma(x)$ in Q^{ps}_γ liegt. Wir wählen dazu einen Punkt $z \in \mathbb{P}(W)^{ps}_\gamma$, so dass $\pi_\gamma(z) \in \overline{H \cdot \pi_\gamma(x)} \cap Q^{ps}_\gamma$. Nach dem bereits Bewiesenen ist z ein ρ-polystabiler Punkt. Die Punkte $\pi_\gamma(z)$ und $\pi_\gamma(x)$ werden dann auf denselben Punkt in $Q_\gamma /\!\!/ H = \mathbb{P}(W) /\!\!/_\rho (G \times H)$ abgebildet. Da $\pi_\rho \colon \mathbb{P}(W)^{ss}_\rho \longrightarrow \mathbb{P}(W) /\!\!/_\rho (G \times H)$ die Punkte von $\mathbb{P}(W) /\!\!/_\rho (G \times H)$ mit den abgeschlossenen Orbiten in $\mathbb{P}(W)^{ss}_\rho$ identifiziert, muss $(G \times H) \cdot x = (G \times H) \cdot z$ gelten, also $H \cdot \pi_\gamma(x) = H \cdot \pi_\gamma(z)$, so dass der Orbit von $\pi_\gamma(x)$ in Q^{ss}_γ abgeschlossen ist. □

2.4. Anwendungen auf $(G \times \mathbb{C}^*)$-Operationen. Gegeben sei eine Darstellung $\rho\colon G \times \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathrm{GL}(W)$. Wir interessieren uns aber vor allem für die induzierte Darstellung $\gamma\colon G \longrightarrow \mathrm{GL}(W)$. Die Bedeutung des Kriteriums, das wir in diesem Abschnitt beweisen werden, liegt darin, dass es einem ermöglicht, die γ-semistabilen Punkte in $\mathbb{P}(W)$ dadurch zu bestimmen, dass man die G-semistabilen Punkte in den $\mathbb{C}^*$-Quotienten von $\mathbb{P}(W)$ (s. Abschnitt 1.3.2) ermittelt. Man könnte dieses Kriterium im Prinzip auch aus Satz 2.2.1 und einer Verallgemeinerung von Beispiel 1.3.21 ableiten. Der interessierte Leser sollte dies als Übungsaufgabe versuchen. Der vorgestellte Beweis folgt dem direkteren, natürlicheren Zugang.

Bevor wir das Resultat formulieren und beweisen, führen wir noch einige Bezeichnungen und Begriffe ein. Es sei $\lambda\colon \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathrm{GL}(W)$ die induzierte Darstellung von $\mathbb{C}^*$ und $\overline{\lambda}$ die induzierte Operation von $\mathbb{C}^*$ auf $\mathbb{P}(W)$. In Abschnitt 1.3.2 haben wir diese Situation genauer untersucht. Insbesondere haben wir Intervalle I_i, $i = 1,...,2m$, eingeführt. Zu jedem Index i gehören Mengen $\mathbb{P}(W)^{ps}_i \subset \mathbb{P}(W)^{ss}_i$ von poly- bzw. semistabilen Punkten und Quotienten Q_i. Es sei $\pi_i\colon \mathbb{P}(W)^{ss}_i \longrightarrow Q_i$ die entsprechende Projektionsabbildung. Ferner gehören zu jedem Paar $d \in \mathbb{Z}$ und $k \in \mathbb{Z}_{>0}$ ein Quotient $Q^k_d = Q_i$ und ein Geradenbündel L^k_d. Dabei ist i durch die Forderung $d/k \in I_i$ festgelegt. Die G-Operation auf $\mathbb{P}(W)$ induziert G-Operationen auf den Varietäten Q^k_d, die auf natürliche Weise in den Geradenbündeln L^k_d linearisiert sind. Die Varietät Q^k_d und das entsprechende Semistabilitätskonzept auf Q^k_d hängen nur von dem Verhältnis $\eta := d/k$ ab. Für $i \in \{1,...,2m\}$ und $\eta \in I_i$ sprechen wir daher von *η-polystabilen* bzw. *η-semistabilen Punkten* in Q_i.

SATZ 2.4.1. *Es sei $x \in \mathbb{P}(W)$. Dann sind äquivalent:*

(1) *Der Punkt x ist γ-semistabil (γ-polystabil).*
(2) *Es gibt einen Index $i \in \{1,...,2m\}$ und einen Parameter $\eta \in I_i$, so dass $x \in \mathbb{P}(W)^{ss}_i$ ($x \in \mathbb{P}(W)^{ps}_i$) und so dass $\pi_i(x)$ ein η-semistabiler (η-polystabiler) Punkt ist.*

BEWEIS. Wir führen den Beweis für „semistabil". Im anderen Fall verlaufen die Argumente analog.

Es sei $x \in \mathbb{P}(W)$ ein γ-semistabiler Punkt. Da λ und γ miteinander kommutieren, induziert $\lambda^n\colon \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathrm{GL}(S^nW)$ eine Darstellung $\lambda'\colon \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathrm{GL}(S^nW^G)$. Wie wir in 1.3.16 gesehen haben, existieren $k \in \mathbb{Z}_{>0}$ und $d \in \mathbb{Z}$, so dass der Punkt $\pi_\gamma(x)$ semistabil bzgl. des durch die Darstellung $(\lambda')^k_d$ auf dem Quotienten Q_γ induzierten Semistabilitätskonzeptes ist. Wir ersetzen n durch kn, so dass wir in der Tat annehmen können, dass $\pi_\gamma(x)$ bzgl. des durch $(\lambda')_d$ induzierten Semistabilitätskonzeptes semistabil ist für eine geeignete ganze

Zahl d. Wir betrachten jetzt die Darstellung

$$(\gamma^n \times \lambda_d^n)\colon G \times \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathrm{GL}(S^n W).$$

Der Punkt x ist nach Voraussetzung γ-semistabil also auch γ^n-semistabil. Sein Bild im Quotienten ist nach der Wahl von d und n ebenfalls semistabil bzgl. des induzierten Semistabilitätskonzeptes. Auf Grund von Satz 2.3.1 ist x also $(\gamma^n \times \lambda_d^n)$-semistabil. Wenden wir den Satz nun „in umgekehrter Reihenfolge“ an, so erkennen wir, dass $x \in \mathbb{P}(W)_i^{ss}$ und dass $\pi_i(x)$ im Quotienten η-semistabil ist. Dabei ist $\eta := d/k$ und $i \in \{1,\dots,2m\}$ der Index, so dass $\eta \in I_i$.

Es gelten die Voraussetzungen von Punkt (2). Es gibt also ganze Zahlen d und $k > 0$, so dass $\eta = d/k$, und der Punkt x ist $(\gamma^k \times \lambda_d^k)$-semistabil, also insbesondere γ^k- und damit γ-semistabil. □

ÜBUNG 2.4.2. Leiten Sie Satz 2.2.1 für $s = 2$ als Folgerung von Satz 2.4.1 und Beispiel 1.3.21 ab!

3. Die Variation der GIT-Quotienten

Mumfords Konstruktion hängt von der Wahl einer Linearisierung ab, und unterschiedliche Linearsierungen führen zu unterschiedlichen Ergebnissen. Dies hatten wir uns für Operationen der Gruppe $\mathbb{C}^*$ bereits veranschaulicht. In diesem Abschnitt werden wir den allgemeinen Fall behandeln. Zunächst werden wir zeigen, dass es immer nur endlich viele verschiedene Quotienten geben kann. Anschliessend beschreiben wir grob den Zusammenhang zwischen Quotienten zu verschiedenen Linearisierungen.

3.1. Die Endlichkeit der GIT-Quotienten. Es seien X eine projektive algebraische Varietät, $\overline{\sigma}\colon G \times X \longrightarrow X$ eine Operation der reduktiven Gruppe G auf X und $\sigma\colon G \times L \longrightarrow L$ eine Linearisierung dieser Operation in dem amplen Geradenbündel L. Das Hauptresultat dieses Abschnittes ist

SATZ 3.1.1. *Es gibt nur endlich viele offene Teilmengen $U \subset X$, die von der Form $U = X_\sigma^{ss}$ für ein σ wie oben sind.*

Dieser Satz wurde in allgemeinerem Rahmen von Białynicki-Birula [**1**] bewiesen. Unabhängig davon wurde er mit Methoden der geometrischen Invariantentheorie von Dolgachev und Hu abgeleitet [**8**]. Wir stellen hier den kurzen Beweis aus [**27**] vor, der die Argumente aus [**1**] in der GIT-Situation vereinfacht.

BEWEIS. Es sei $T \subset G$ ein maximaler Torus. Dann erhalten wir die Operation $\overline{\sigma}_{|T\times X}$ von T auf X mit der Linearisierung $\sigma_{|T\times L}$ in L. Nach dem Hilbert-Mumford-Kriterium ist ein Punkt $x \in X$ genau dann semistabil, wenn für jede Einparameteruntergruppe $\lambda\colon \mathbb{C}^* \longrightarrow G$ die Bedingung $\mu(x,\lambda) \geq 0$ erfüllt ist. Das Bild von λ liegt in einem maximalen Torus T' von G. Nach [**4**], 11.13, gibt es ein $g \in G$ mit $g \cdot T' \cdot g^{-1} = T$, i.e., $g \cdot \lambda \cdot g^{-1}$ ist eine Einparameteruntergruppe von T. Mithin folgt

$$x \in X_\sigma^{ss} \quad \Longleftrightarrow \quad \mu(x, g\cdot\lambda\cdot g^{-1}) \geq 0 \quad \text{für alle } \lambda\colon \mathbb{C}^* \longrightarrow T \text{ und alle } g \in G.$$

Aus Übung 2.1.1 folgt daher

$$x \in X_\sigma^{ss} \quad \Longleftrightarrow \quad \mu(g\cdot x, \lambda) \geq 0 \quad \text{für alle } \lambda\colon \mathbb{C}^* \longrightarrow T \text{ und alle } g \in G$$

d.h.,

$$X_\sigma^{ss} = \bigcap_{g\in G} \bigl(g \cdot X^{ss}_{\sigma_{|T\times L}}\bigr).$$

Wir schliessen

KOROLLAR 3.1.2. *Es genügt, die Aussage für $G = T$ zu beweisen.*

Es sei $T \cong \mathbb{C}^{*n}$. Wir beweisen den Satz durch Induktion über n. Für $n = 1$ betrachten wir eine Operation $\overline{\sigma}\colon \mathbb{C}^* \times X \longrightarrow X$ zusammen mit einer Linearisierung $\sigma\colon \mathbb{C}^* \times L \longrightarrow L$ in dem amplen Geradenbündel L. Mit $F_1,\ldots,F_m$ bezeichnen wir die Zusammenhangskomponenten der Fixpunktmenge von $\overline{\sigma}$. Es sei $\mathscr{P} := (P_1,\ldots,P_s)$ eine Kollektion von paarweise disjunkten Teilmengen von $\{1,\ldots,m\}$ mit der Eigenschaft $P_1 \sqcup \cdots \sqcup P_s = \{1,\ldots,m\}$. Man setze $\Gamma_i := \bigcup_{j\in P_i} F_j$, $i = 1,\ldots,s$. In Analogie zu Bemerkung 1.3.19 definieren wir für $i = 1,\ldots,s$

$$\begin{aligned} X_i^+ &:= \big\{ x \in X \mid \lim_{z\to 0} z\cdot x \in \Gamma_i \big\} \\ X_i^- &:= \big\{ x \in X \mid \lim_{z\to \infty} z\cdot x \in \Gamma_i \big\} \end{aligned}$$

und $C_{ij} := (X_i^+ \setminus \Gamma_i) \cap (X_j^- \setminus \Gamma_j)$ für $i < j$. Schliesslich sei für $\kappa = 1,\ldots,s$

$$\begin{aligned} U(\mathscr{P},\kappa) &:= \bigcup_{\substack{1\le i\le \kappa\\ \kappa+1\le j\le s}} C_{ij} \qquad \text{und} \\ U^0(\mathscr{P},\kappa) &:= X_\kappa^- \cup X_\kappa^+ \cup \bigcup_{\substack{1\le i\le \kappa-1\\ \kappa+1\le j\le s}} C_{ij}. \end{aligned}$$

Es sei $\mathscr{U}$ die endliche Familie von Teilmengen von X, die von der Form $U(\mathscr{P},\kappa)$ oder $U^0(\mathscr{P},\kappa)$ sind. Aus Bemerkung 1.3.19 folgt leicht, dass $X_\sigma^{ss} \in \mathscr{U}$. Damit ist der Induktionsanfang gemacht.

Einen n-dimensionalen Torus T können wir in der Form $T = \mathbb{C}^* \times T'$ schreiben. Dabei ist T' ein $(n-1)$-dimensionaler Torus. Es sei $\sigma_1 := \sigma_{|\mathbb{C}^*\times L}$. Für X_{σ_1} und den kategoriellen Quotienten $\pi\colon X_{\sigma_1}^{ss} \longrightarrow X/\!\!/_{\sigma_1}\mathbb{C}^*$ gibt es – bis auf eindeutige Isomorphie – nur endlich viele Möglichkeiten. Des Weiteren induzieren $\overline{\sigma}$ und σ eine Operation $\overline{\sigma}'$ von T' auf $X/\!\!/_{\sigma_1}\mathbb{C}^*$ und eine Linearisierung σ' dieser Operation in einem amplen Geradenbündel. Da die offene Menge $(X/\!\!/_{\sigma_1}\mathbb{C}^*)_{\sigma'}^{ss}$ nach Induktionsvoraussetzung zu einer endlichen Liste offener Mengen gehört, gilt dies auch für

$$X_\sigma^{ss} \overset{\text{Satz 2.3.1}}{=} \pi^{-1}\big((X/\!\!/_{\sigma_1}\mathbb{C}^*)_{\sigma'}^{ss}\big),$$

und wir sind fertig. □

3.2. Variation der GIT-Quotienten. Es seien X eine projektive algebraische Varietät, G eine reduktive Gruppe und $\overline{\sigma}\colon G\times X \longrightarrow X$ eine Operation von G auf X. Im letzten Abschnitt haben wir gesehen, dass die Freiheit der Wahl einer Linearisierung nur zu endlich vielen kategoriellen Quotienten führt. Jetzt wollen wir zwei Quotienten zu verschiedenen Linearisierungen miteinander vergleichen. Dies haben wir schon für $\mathbb{C}^*$-Operationen getan. Den allgemeinen Fall wollen wir darauf zurückführen.

Wir rufen uns zunächst ins Gedächtnis, was wir schon wissen. Dazu betrachten wir zwei Darstellungen $\rho_1\colon G \longrightarrow \mathrm{GL}(V_1)$ und $\rho_2\colon G \longrightarrow \mathrm{GL}(V_2)$ der reduktiven Gruppe G. Dies liefert uns eine Operation von G auf $\mathbb{P}(V_1)\times\mathbb{P}(V_2)$ und für jedes Paar (m,n) von positiven ganzen Zahlen eine Linearisierung $\sigma_{m,n}$ dieser Operation in $\mathscr{O}(m,n)$. Auf der anderen Seite können wir die Darstellung $\tau := \rho_1\oplus\rho_2\colon G \longrightarrow \mathrm{GL}(V_1\oplus V_2)$ betrachten, die uns eine Operation $\overline{\tau}$ von G auf $\mathbb{P}(V_1\oplus V_2)$ mit einer Linearisierung in $\mathscr{O}(1)$verschafft. Des Weiteren können wir die Darstellung $\lambda\colon \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathrm{GL}(V_1\oplus V_2)$, $z \longmapsto z^{-1}\mathrm{id}_{V_1} \oplus z\,\mathrm{id}_{V_2}$, einführen, die eine $\mathbb{C}^*$-Operation $\overline{\lambda}$ auf $\mathbb{P}(V_1\oplus V_2)$ vermittelt. Die Operation kommutiert mit $\overline{\tau}$, so dass wir die Operation $\overline{\lambda}\times\overline{\tau}$: $(\mathbb{C}^*\times G)\times\mathbb{P}(V_1\oplus V_2)$, $(z,g,x) \longmapsto z\cdot(g\cdot x)$ erhalten. Für $k > 0$ und $d\in\mathbb{Z}$ besitzt diese Operation die Linearisierung $(\lambda_d^k\times\tau^k)$ in $\mathscr{O}(k)$. Nach Beispiel 1.3.21 und Satz 2.3.1 gilt

$$\begin{aligned} \big(\mathbb{P}(V_1)\times\mathbb{P}(V_2)\big)/\!\!/_{\sigma_{m,n}}G &= \big(\mathbb{P}(V_1\oplus V_2)/\!\!/_{\lambda_d^k}\mathbb{C}^*\big)/\!\!/_{\sigma_{m,n}}G \\ &= \mathbb{P}(V_1\oplus V_2)/\!\!/_{(\lambda_d^k\times\tau^k)}(\mathbb{C}^*\times G) \end{aligned}$$

mit $m = k - d$ und $n = k + d$. Eine erneute Anwendung von Satz 2.3.1 zeigt, dass alle Quotienten $\big(\mathbb{P}(V_1) \times \mathbb{P}(V_2)\big) /\!\!/_{\sigma_{m,n}} G$, $m, n \in \mathbb{Z}_{>0}$, $\mathbb{C}^*$-Quotienten von $\mathbb{P}(V_1 \oplus V_2) /\!\!/_{\tau} G$ sind. Die $\mathbb{C}^*$-Operation wird dabei von $\overline{\lambda}$ induziert, und die verwendeten Linearisierungen sind von der Form λ'^k_d, $k > 0$, $d \in \mathbb{Z}$. Dabei ist λ' die von λ induzierte Linearisierung. Alle Strukturaussagen folgen daher aus denen für $\mathbb{C}^*$-Operationen.

Kommen wir jetzt auf den Fall zu Anfang des Abschnitts zurück. Es seien $\sigma_1 \colon G \times L_1 \longrightarrow L_1$ und $\sigma_2 \colon G \times L_2 \longrightarrow L_2$ zwei Linearisierungen von σ. Wir setzen dabei voraus, dass L_1 und L_2 sehr ampel sind. Wir definieren $V_i := H^0(L_i)$, $i = 1, 2$. Die Linearisierungen σ_1 und σ_2 ergeben Darstellungen $\rho_1 \colon G \longrightarrow \mathrm{GL}(V_1)$ und $\rho_2 \colon G \longrightarrow \mathrm{GL}(V_2)$ und äquivariante Einbettungen $\iota_1 \colon X \hookrightarrow \mathbb{P}(V_1)$ und $\iota_2 \colon X \hookrightarrow \mathbb{P}(V_2)$. Schliesslich erhalten wir die äquivariante Einbettung $\iota \colon X \longrightarrow \mathbb{P}(V_1) \times \mathbb{P}(V_2)$, $x \longmapsto (\iota_1(x), \iota_2(x))$. Zurückziehen des linearisierten Geradenbündels $\mathscr{O}(m,n)$ über ι liefert das Geradenbündel $L_{m,n} := L_1^{\otimes m} \otimes L_2^{\otimes n}$ mit der Linearisierung $\sigma_{m,n} := \sigma_1^{\otimes m} \otimes \sigma_2^{\otimes n}$. Für $m > 0$ und $n > 0$ setzen wir $\eta := m/n$. Man beachte $X^{(s)s}_{\sigma_{m,n}} = X^{(s)s}_{\sigma_{m',n'}}$, falls $m/n = m'/n'$. Wir schreiben daher $X^{(s)s}_{\eta}$ anstatt $X^{(s)s}_{\sigma_{m,n}}$. Wir setzen auch $X^{(s)s}_0 := X^{(s)s}_{\sigma_1}$ und $X^{(s)s}_{\infty} := X^{(s)s}_{\sigma_2}$.

Es sei $M := \mathbb{P}(L_1 \oplus L_2)$. Die gegebenen Linearisierungen σ_1 und σ_2 induzieren auf M eine G-Operation und eine äquivariante Einbettung $\kappa \colon M \hookrightarrow \mathbb{P}(V_1 \oplus V_2)$. Wie eben können wir auf M eine linearisierte $\mathbb{C}^*$-Operation einführen und schliessen, dass alle Quotienten $X^{(s)s}_{\eta} \longrightarrow X /\!\!/_{\sigma_{m,n}} G$, $\eta := m/n \in [0, \infty]$, $\mathbb{C}^*$-Quotienten der Varietät $M /\!\!/ G$ sind.

BEMERKUNG 3.2.1. Der Raum $M /\!\!/ G$ wurde in der Arbeit [**31**] eingeführt und dort *Master-Raum* genannt.

Aus den Resultaten von Abschnitt 1.3.2 folgt der

SATZ 3.2.2. *Es gibt endlich viele kritische Werte* $\eta_1, \ldots, \eta_m \in (0, \infty) \cap \mathbb{Q}$, *so dass mit* $\eta_0 := 0$ *und* $\eta_{m+1} := \infty$ *gilt:*

i) *Für* $i = 0, \ldots, m$ *und* $\eta, \eta' \in (\eta_i, \eta_{i+1})$ *gilt*

$$X^{(s)s}_{\eta} = X^{(s)s}_{\eta'}.$$

ii) *Für* $i = 0, \ldots, m$ *und* $\eta \in (\eta_i, \eta_{i+1})$ *gilt*

$$\begin{array}{rcl} X^s_{\eta} & \supset & X^s_{\eta_i} \cup X^s_{\eta_{i+1}} \\ X^{ss}_{\eta} & \subset & X^{ss}_{\eta_i} \cap X^{ss}_{\eta_{i+1}}. \end{array}$$

Wir setzen $Q_i := X^{ss}_{\eta_i} /\!\!/ G$, $i = 0, \ldots, m+1$, und $\widetilde{Q}_i := X^{ss}_{\eta} /\!\!/ G$ für $\eta \in (\eta_i, \eta_{i+1})$, $i = 0, \ldots, m$. Diese Quotienten fügen sich in ein Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc} & \widetilde{Q}_0 & & & \cdots & & \widetilde{Q}_m & & \\ \swarrow & & \searrow & & & \swarrow & & \searrow & \\ Q_0 & & & Q_1 & \cdots & Q_m & & & Q_{m+1}. \end{array}$$

Dabei ist $\widetilde{Q}_i \dashrightarrow \widetilde{Q}_{i+1}$ für jedes $i = 0, \ldots, m-1$ eine birationale Niederblasung eines gewichtet projektiven Bündels gefolgt von einer birationalen gewichtet projektiven Aufblasung.

BEMERKUNG 3.2.3 (Alternativer Beweis von Satz 3.2.2). Wir diskutieren nun einen anderen Beweis, der sich auf das Hilbert-Mumford-Kriterium stützt, genauer gesagt auf das langatmige Beispiel 2.1.13. Wir beschränken uns daher wieder auf den Fall $G = \mathrm{SL}(r)$. Der Durchschnitt zweier rationaler Polyederkegel ist wieder ein rationaler Polyederkegel. Wir betrachten alle Kanten k von Kegeln der Form $K(\rho_1, I, \chi) \cap K(\rho_2, J, \chi^*)$ mit $I \subset \mathrm{ZST}(\rho_1)$, $\chi \in I$, $J \subset \mathrm{ZST}(\rho_2)$ und $\chi^* \in J$ und die zugehörigen Elemente $\underline{\gamma}_k \in K \cap \mathbb{Z}^n$. Es sei Γ die Gesamtheit aller $\underline{\gamma}_k$, die wir auf diese Weise erhalten.

Die kritischen Werte η sind die Lösungen der Gleichungen

$$(*)_{x,\underline{\gamma}}\colon \quad \eta\mu\big(\iota_1(x), \lambda(\underline{w}, \underline{\gamma})\big) + \mu\big(\iota_2(x), \lambda(\underline{w}, \underline{\gamma})\big) = 0, \quad x \in X,\ \underline{\gamma} \in \Gamma,$$

für die $(*)_{x,\underline{\gamma}}$ nur eine Lösung hat. Da $\mu(\iota_i(x), \lambda(\underline{w}, \underline{\gamma}))$ nur von der Menge $\mathrm{ZST}(\rho_i, \iota_i(x))$ abhängt, $i = 1, 2$, und Γ endlich ist, sind dies nur endlich viele Gleichungen. Alle anderen Aussagen folgen dann leicht.

Literaturverzeichnis

[1] A. Białynicki-Birula, *Finiteness of the number of maximal open subsets with good quotients*, Transform. Groups **3** (1998), 301-19

[2] A. Białynicki-Birula, A.J. Sommese, *Quotients by* $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ *actions*, Trans. Amer. Math. Soc. **289** (1985), 519-43

[3] D. Birkes, *Orbits of linear algebraic groups*, Annals of Math. **93** (1971), 459-75

[4] A. Borel, *Linear Algebraic Groups*, second enlarged edition, Springer 1991

[5] G. Brackly, *Über die Geometrie der ternären 4-Formen*, Diplomarbeit, Bonn 1979

[6] D. Daigle, G. Freudenburg, *A counterexample to Hilbert's fourteenth problem in dimension* 5, J. Algebra **221** (1999), 528-35

[7] J.A. Dieudonné, J.B. Carrell, *Invariant Theory — Old and New*, Academic Press 1971

[8] I. Dolgachev, Y. Hu, *Variation of geometric invariant theory quotients*, mit einem Anhang von Nicolas Ressayre, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **87** (1998), 5-56

[9] G. Ewald, *Combinatorial Convexity and Algebraic Geometry*, Springer 1996

[10] W. Fischer, I. Lieb, *Funktionentheorie*, 5. Auflage, Vieweg 1988

[11] Ph. Griffiths, J. Harris, *Principles of Algebraic Geometry*, Wiley-Interscience 1978

[12] D. Gross, *Compact quotients by* $\mathbb{C}^*$*-actions*, Pacific J. Math. **114** (1984), 149-64

[13] A. Grothendieck, J.A. Dieudonné, *Éléments de Géométrie Algébrique*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **4, 8, 11, 17, 20, 24, 28, 32**, 1960-67

[14] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Springer 1977

[15] S. Helgason, *Differential Geometry, Lie Groups, and Symmetric Spaces*, Academic Press 1978

[16] D. Hilbert, *Theory of Algebraic Invariants*, Cambridge University Press 1993

[17] H. Kraft, *Geometrische Methoden in der Invariantentheorie*, 2. Aufl., Vieweg 1985

[18] D. Mumford, *The Red Book of Varieties and Schemes*, Springer 1988

[19] D. Mumford, J. Fogarty, F. Kirwan, *Geometric Invariant Theory*, third enlarged edition, Springer 1995

[20] M. Nagata, *Lectures on Hilbert's Fourteenth Problem*, Springer 1963

[21] P.E. Newstead, *Introduction to Moduli Problems and Orbit Spaces*, Springer 1978

[22] Ch. Okonek, A. Schmitt, A. Teleman, *Master spaces for stable pairs*, Topology **38** (1999), 117-39

[23] V.L. Popov, *Hilbert's theorem on invariants*, Soviet Math. Doklady (Engl. Übersetzung) **20**, 1318-22

[24] C. Procesi, *The invariant theory of* $n \times n$ *matrices*, Advances in Math. **19** (1976), 306-81

[25] A. Schmitt, *Quaternary cubic forms and projective algebraic threefolds*, Enseign. Math. (2) **43** (1997), 253-70

[26] A. Schmitt, *A useful semistability criterion*, Proc. American Math. Soc. **129** (2001), 1923-6

[27] A. Schmitt, *A simple proof for the finiteness of GIT quotients*, Proc. American Math. Soc. **131** (2003), 359-62.

[28] I. Schur, H. Grunsky, *Vorlesungen über Invariantentheorie*, Springer 1968

[29] C.S. Seshadri, *On a theorem of Weitzenböck in invariant theory*, J. Math. Kyoto Univ. **1** (1961/1962), 403-9

[30] B. Sturmfels, *Algorithms in Invariant Theory*, Springer 1993

[31] M. Thaddeus, *Geometric invariant theory and flips*, J. Amer. Math. Soc. **9** (1996), 691-723

[32] E. Viehweg, *Quasi-Projective Moduli for Polarized Manifolds*, Springer 1995

[33] B.L. van der Waerden, *Algebra* I, 8. Auflage, Springer 1971

[34] R. Weitzenböck, *Über die Invarianten von linearen Gruppen*, Acta Math. **58** (1932), 231-93

[35] J. Winkelmann, *Invariant rings and quasiaffine quotients*, Math. Z. **244** (2003), 163-74