

VORLESUNG DARSTELLUNGSTHEORIE
(SOMMERSEMESTER 2006)

DIRK KUSSIN

INHALTSVERZEICHNIS

0. Einleitung	1
1. Graphen und quadratische Formen	3
2. Wurzeln und Spiegelungen	13
3. Köcher und Orientierungen	17
4. Darstellungen von Köchern	19
5. Unendlicher Darstellungstyp	27
6. Spiegelungsfunktoren	30
7. Der Beweis des Satzes von Gabriel	34
8. Die Anzahl unzerlegbarer Darstellungen	36
9. Darstellungen und Moduln	39
10. Anhang: Ausblick	43
Literatur	45

0. EINLEITUNG

Im folgenden werden kurz die Hauptergebnisse geschildert, die in dieser Vorlesung ausführlich behandelt werden. Der Titel “Darstellungstheorie” ist sehr unpräzise, da es Darstellungen von verschiedenen mathematischen Objekten gibt, z. B. Darstellungen von Gruppen, Darstellungen (= Moduln) von Algebren, u.s.w. In dieser Vorlesung werden nur Darstellungen von sogenannten Köchern, das sind gerichtete Graphen, behandelt. Wir konzentrieren uns dabei im wesentlichen auf ein grundlegendes Klassifizierungsergebnis von Peter Gabriel. Dies beschreiben wir in den folgenden Zeilen ganz kurz.

Ein *Graph* Γ besteht aus einer endlichen Anzahl von Punkten (auch *Knoten* genannt), und einer endlichen Anzahl von Verbindungslinien (auch *Kanten* genannt) zwischen Knoten.

Jedem Graphen Γ mit n Knoten kann man auf einfache Weise eine quadratische Form Q_Γ in den Variablen x_1, \dots, x_n zuordnen, indem man für jeden Knoten i die Terme x_i^2 aufsummiert und für jede Kante zwischen Knoten i und j die Terme $x_i x_j$ abzieht. In der Linearen Algebra lernt man, dass eine wichtige Eigenschaft die positive Definitheit ist. Man kann sich also fragen, für welche Graphen Γ die quadratische Form Q_Γ positiv definit ist.

Satz 0.1. Q_Γ ist positiv definit genau dann, wenn Γ eine disjunkte Vereinigung von Graphen des folgenden Typs ist:

$$\mathbb{A}_n : \quad \circ \text{ --- } \circ \text{ --- } \circ \text{ --- } \dots \text{ --- } \circ \text{ --- } \circ \quad (n \geq 1)$$

$$\mathbb{D}_n : \quad \begin{array}{c} \circ \\ \diagdown \\ \circ \text{ --- } \circ \text{ --- } \dots \text{ --- } \circ \text{ --- } \circ \\ \diagup \\ \circ \end{array} \quad (n \geq 4)$$

$$\mathbb{E}_6 : \quad \begin{array}{c} \circ \\ | \\ \circ \text{ --- } \circ \text{ --- } \circ \text{ --- } \circ \text{ --- } \circ \end{array}$$

$$\mathbb{E}_7 : \quad \begin{array}{c} \circ \\ | \\ \circ \text{ --- } \circ \text{ --- } \circ \text{ --- } \circ \text{ --- } \circ \end{array}$$

$$\mathbb{E}_8 : \quad \begin{array}{c} \circ \\ | \\ \circ \text{ --- } \circ \text{ --- } \circ \text{ --- } \circ \text{ --- } \circ \end{array}$$

Bei diesen Graphen handelt es sich um die *Dynkin-Graphen*, die in vielen verschiedenen Gebieten der Mathematik eine wichtige Rolle spielen. (Der Index n bezeichnet die Anzahl der Knoten.)

Es hat etwa der Dynkin-Graph $\Gamma = A_2$ die quadratische Form

$$Q_\Gamma(x_1, x_2) \stackrel{Def}{=} x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 = \left(x_1 - \frac{1}{2}x_2\right)^2 + \frac{3}{4}x_2^2 > 0$$

(sofern $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$), die deshalb positiv definit ist.

Bei einem *Köcher* handelt es sich um einen *orientierten* Graphen, d. h. jede Kante wird mit einer ausgezeichneten Richtung versehen, d. h. aus Kanten werden *Pfeile*. Ist nun K ein Körper (etwa $K = \mathbb{R}$ oder \mathbb{C}), so besteht eine *K-lineare Darstellung* $V = (V_i, f_\alpha)$ eines Köchers Γ aus folgenden Daten:

- Für jeden Knoten i in Γ ist V_i ein endlichdimensionaler K -Vektorraum.
- Für jeden Pfeil $i \xrightarrow{\alpha} j$ ist $f_\alpha : V_i \longrightarrow V_j$ eine K -lineare Abbildung.

In der Darstellungstheorie möchte man alle K -linearen Darstellungen eines Köchers klassifizieren. Man kann jede Darstellung auf eindeutige Art und Weise in eine direkte Summe (wird später erklärt) von Darstellungen zerlegen, so dass die dabei entstehenden Summanden nicht weiter zerlegbar, sprich *unzerlegbar*, sind. Daher konzentriert man sich bei der Klassifikation auf unzerlegbare Darstellungen. Im allgemeinen hat ein Köcher unendliche viele unzerlegbare Darstellungen (bis auf Isomorphie). Es stellt sich heraus, dass ein Köcher genau dann nur endlich viele unzerlegbare Darstellungen (bis auf Isomorphie) besitzt, wenn obige Situation vorliegt.

Theorem 0.2 (P. Gabriel, 1972). *Sei Γ ein Köcher und $|\Gamma|$ der zugehörige Graph (indem man die Pfeilspitzen entfernt). Genau dann besitzt Γ nur endlich viele Isomorphieklassen unzerlegbarer K -linearer Darstellungen, wenn $|\Gamma|$ eine disjunkte Vereinigung von Dynkin-Graphen ist.*

Der Zusammenhang zu der oben betrachteten quadratischen Form kann weiter präzisiert werden:

Sei Γ ein Köcher. Ist $V = (V_i, f_\alpha)$ eine K -lineare Darstellung, so heißt das Tupel $\underline{\dim}(V)$ bestehend aus den Dimensionen $\dim V_i$ (für alle Knoten i) der *Dimensionsvektor* von V . Ein ganzzahliger Vektor $x \in \mathbb{Z}^n$ heißt *Wurzel* von $Q_{|\Gamma|}$, falls $Q_{|\Gamma|}(x) = 1$ gilt; ist hierbei $x_i \geq 0$ für jedes i , so heißt x eine *positive Wurzel*.

Theorem 0.3 (P. Gabriel, 1972). *Sei Γ ein Köcher, so dass $|\Gamma|$ ein Dynkin-Graph ist. Dann induziert die Zuordnung*

$$V \mapsto \underline{\dim}(V)$$

eine bijektive Abbildung zwischen der Menge der Isomorphieklassen der unzerlegbaren K -linearen Darstellungen von Γ und der Menge der positiven Wurzeln von $Q_{|\Gamma|}$.

1. GRAPHEN UND QUADRATISCHE FORMEN

In diesem (und dem nächsten) Abschnitt wird es noch nicht um Darstellungen gehen. Hier werden Graphen und deren zugehörigen ganzzahligen quadratischen Formen behandelt. Eines der Ziele wird das in der Einleitung vorgestellte Ergebnis sein, das die Graphen charakterisiert, deren quadratischen Formen positiv definit sind. Es werden auch grundlegende Eigenschaften der Wurzeln einer solchen quadratischen Form behandelt.

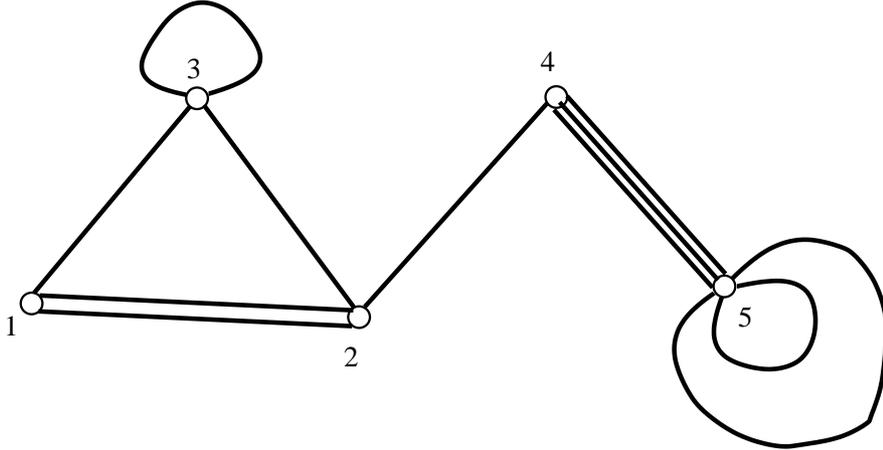
Definition 1.1 (Graph). Ein *Graph* $\Gamma = (V, E)$ besteht aus einer Menge von *Knoten* (oder *Ecken* oder *Punkten*) und einer Menge E von *Kanten*, die zwei Knoten i und j miteinander verbinden (wobei auch $i = j$ gelten kann; indem Fall nennt man eine solche Kante eine *Schleufe*). Zwischen zwei Knoten kann es mehrfache Kanten geben. Wir betrachten nur endliche Graphen, d. h. die Mengen V und E sind endlich.

Die Knotenmenge V eines Graphen werden wir meist mit $\{1, 2, \dots, n\}$ bezeichnen. Eine Kante in E , die einen Knoten i mit einem Knoten j verbindet

bezeichnen wir auch mit \overline{ij} ($= \overline{ji}$). Es heißen dann i und j *adjazent*, und die Kante *inzident* zu i und j . Wie gesagt, es kann $i = j$ gelten (Schleufe), und es kann mehrere Kanten \overline{ij} geben (Mehrfachkanten).

Die Anzahl der Kanten, die zu einem Knoten i inzident sind, heißt auch der *Grad* (oder die *Ordnung*) von i . (Bei einer einzelnen Schleufe ist der Grad 2.)

Beispiel 1.2. Das folgende Bild beschreibt einen Graphen Γ .



Definition 1.3 (Zugehörige quadratische Form). Sei $\Gamma = (V, E)$ ein Graph. Definiere eine zugehörige quadratische Form $Q_\Gamma : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ durch

$$Q_\Gamma(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i^2 - \sum_{\overline{ij} \in E} x_i x_j.$$

Hierbei ist die erste Summe $\sum_{i=1}^n$ gleichbedeutend mit $\sum_{i \in V}$, und bei der zweiten wird über *alle* Kanten aus E summiert, also insbesondere werden Mehrfachkanten entsprechend oft gezählt. Offenbar kann man Γ aus Q_Γ rekonstruieren (sofern die Anzahl der Knoten bekannt ist (Schleifen!)).

Beispiel 1.4. Im obigen Beispiel gilt

$$\begin{aligned} Q_\Gamma(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 \\ &\quad - x_1x_2 - x_1x_2 - x_1x_3 - x_3x_3 - x_2x_3 - x_2x_4 \\ &\quad - x_4x_5 - x_4x_5 - x_4x_5 - x_5x_5 - x_5x_5 \\ &= x_1^2 + x_2^2 + x_4^2 - x_5^2 \\ &\quad - 2x_1x_2 - x_1x_3 - x_2x_3 - x_2x_4 - 3x_4x_5 \end{aligned}$$

Definition 1.5. (1) Seien i_1, i_2, \dots, i_t Knoten in einem Graphen $\Gamma = (V, E)$, so dass es Kanten $\overline{i_j i_{j+1}}$ gibt ($j = 1, \dots, t-1$). Diese Kanten bilden dann einen (ungerichteten) *Weg* von i_1 nach i_t (bzw. von i_t nach i_1).

(2) Ein Graph $\Gamma = (V, E)$ heißt *zusammenhängend*, wenn je zwei verschiedene Knoten $i, j \in V$ durch einen Weg verbunden sind.

(3) Seien $\Gamma_1 = (V_1, E_1)$ und $\Gamma_2 = (V_2, E_2)$ Graphen. Wir definieren die *Summe* $\Gamma_1 + \Gamma_2$ als disjunkte Vereinigung $(V_1 \uplus V_2, E_1 \uplus E_2)$.

(4) Es ist klar, was eine Zusammenhangskomponente ist, und das sich jeder Graph in seine Zusammenhangskomponenten zerlegt.

Definition 1.6 (Ganzzahlige quadratische Form). Allgemein ist eine *ganzzahlige quadratische Form* $Q : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ gegeben durch

$$Q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n q_i x_i^2 + \sum_{i < j} q_{ij} x_i x_j,$$

wobei die q_i und q_{ij} ganze Zahlen sind. (Es ist oft nützlich, zusätzlich $q_{ij} = q_{ji}$ für $i > j$ zu definieren.)

Gilt zusätzlich $q_1 = q_2 = \dots = q_n = 1$, so heißt Q eine *Einheitsform*. Ist Γ ein Graph ohne Schleifen, so ist etwa Q_Γ eine Einheitsform.

Sind $Q_1 : \mathbb{Z}^m \rightarrow \mathbb{Z}$ und $Q_2 : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ ganzzahlige quadratische Formen (bzw. Einheitsformen), so gilt dies auch für $Q_1 \oplus Q_2 : \mathbb{Z}^{m+n} \rightarrow \mathbb{Z}$, wobei

$$(Q_1 \oplus Q_2)(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n) = Q_1(x_1, \dots, x_m) + Q_2(y_1, \dots, y_n)$$

gilt.

Übung 1.7. Es gilt

$$Q_{\Gamma_1 + \Gamma_2} = Q_{\Gamma_1} \oplus Q_{\Gamma_2}.$$

Definition 1.8 (Zugehörige symmetrische Bilinearform). Sei $Q : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ eine ganzzahlige quadratische Form. Definiere

$$(x | y) = \frac{1}{2} \left(Q(x + y) - Q(x) - Q(y) \right)$$

für $x, y \in \mathbb{Z}^n$. (Manchmal wird der Faktor $\frac{1}{2}$ auch weggelassen.) Offenbar gilt $(x | y) = (y | x)$.

Ist Q gegeben durch

$$Q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n q_i x_i^2 + \sum_{i < j} q_{ij} x_i x_j,$$

so ergibt eine kleine Rechnung

$$(1.1) \quad (x | y) = \sum_{i=1}^n q_i x_i y_i + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} q_{ij} x_i y_j,$$

mit der Konvention $q_{ij} = q_{ji}$ für $i > j$.

Übung 1.9. Man zeige die Formeln

(a) $(x | x) = Q(x)$ und $(x | y) = (y | x)$.

(b) $(x + y | z) = (x | z) + (y | z)$.

Definition 1.10 (Zugehörige symmetrische Matrix). Sei die ganzzahlige quadratische Form $Q : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ gegeben durch

$$Q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n q_i x_i^2 + \sum_{i < j} q_{ij} x_i x_j.$$

Mit $q_{ij} := q_{ji}$ für $i > j$ setze

$$a_{ij} = \begin{cases} q_i & i = j, \\ \frac{1}{2}q_{ij} & i \neq j. \end{cases}$$

Die Matrix $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{Q})$ ist symmetrisch und hat halbzahlige Einträge, also $A \in M_n(\frac{1}{2}\mathbb{Z})$. Offenbar folgt aus (1.1)

$$(x | y) = x^{tr} A y, \quad Q(x) = x^{tr} A x.$$

Definition 1.11. Sei $Q : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ eine ganzzahlige quadratische Form.

- (1) Q heißt *positiv definit*, falls $Q(x) > 0$ gilt für alle $x \in \mathbb{Z}^n$ mit $x \neq 0$.
- (2) Q heißt *positiv semidefinit*, falls $Q(x) \geq 0$ gilt für alle $x \in \mathbb{Z}^n$.
- (3) Ein Element $x \in \mathbb{Z}^n$ heißt *Wurzel* von Q , falls $Q(x) = 1$ gilt.
- (4) Ein Element $x \in \mathbb{Z}^n$ heißt *Radikalvektor*, falls $(x | y) = 0$ gilt für alle $y \in \mathbb{Z}^n$.
- (5) Ein Element $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}^n$, $x \neq 0$, heißt *positiv*, falls $x_i \geq 0$ gilt für alle $i = 1, \dots, n$. Es heißt *negativ*, falls $-x$ positiv ist.

Beispiel 1.12. Sei $Q : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ eine Einheitsform. Die Standardvektoren e_1, e_2, \dots, e_n sind Wurzeln von Q .

Übung 1.13. Sei $Q : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ eine positiv semidefinite ganzzahlige quadratische Form. Dann gilt

$$x \text{ ist Radikalvektor} \Leftrightarrow Q(x) = 0$$

(Hinweis: Betrachte $\alpha x + y$ für alle $\alpha \in \mathbb{Z}$.) Man folgere: Gilt $Q(y) = 0$, und ist x eine Wurzel von Q , so ist auch $x + y$ eine Wurzel von Q .

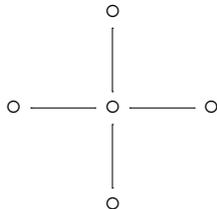
Übung 1.14. Seien $Q_1, \dots, Q_s : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ ganzzahlige quadratische Formen. Dann ist $Q_1 \oplus Q_2 \oplus \dots \oplus Q_s$ positiv definit (semidefinit) genau dann, wenn alle Q_1, \dots, Q_s positiv definit (semidefinit) sind.

Übung 1.15. Sei K_i der Graph, der zwei Punkte 1 und 2 mit einer i -fachen Kante verbindet.

(a) Man zeige: Q_{K_1} ist positiv definit, Q_{K_2} ist positiv semidefinit, aber nicht positiv definit, Q_{K_3} ist nicht positiv semidefinit.

(b) Man bestimme alle Wurzeln und alle Radikalvektoren von Q_{K_1} und Q_{K_2} .

Übung 1.16. Man zeige, dass die zugehörige quadratische Form des Graphen \mathbb{D}_4



positiv semidefinit, aber nicht positiv definit ist. Man gebe unendlich viele Wurzeln an.

Übung 1.17. Sei Γ ein Graph mit Schleifen. Man zeige, dass Q_Γ nicht positiv definit sein kann.

Satz 1.18. Sei $Q : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ eine ganzzahlige quadratische Form. Ist Q positiv definit, so hat Q nur endlich viele Wurzeln.

Beweis. Sei Q gegeben durch

$$Q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n q_i x_i^2 + \sum_{i < j} q_{ij} x_i x_j.$$

Man setzt Q in naheliegender Weise auf \mathbb{Q}^n und \mathbb{R}^n fort: Definiere $Q_{\mathbb{Q}} : \mathbb{Q}^n \rightarrow \mathbb{Q}$ und $Q_{\mathbb{R}} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$Q_{\mathbb{Q}}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n q_i x_i^2 + \sum_{i < j} q_{ij} x_i x_j$$

für alle $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{Q}^n$ und

$$Q_{\mathbb{R}}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n q_i x_i^2 + \sum_{i < j} q_{ij} x_i x_j$$

für alle $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Sei $0 \neq x = (a_1/b_1, \dots, a_n/b_n) \in \mathbb{Q}^n$, mit ganzzahligen a_i und $b_i \neq 0$. Bringt man die Brüche $a_1/b_1, \dots, a_n/b_n$ auf einen gemeinsamen Hauptnenner b , so ist $x = \frac{1}{b}y$ mit $0 \neq y \in \mathbb{Z}^n$. Es folgt

$$Q_{\mathbb{Q}}(x) = Q_{\mathbb{Q}}\left(\frac{1}{b}y\right) = \frac{1}{b^2}Q(y) > 0,$$

also ist auch $Q_{\mathbb{Q}} : \mathbb{Q}^n \rightarrow \mathbb{Q}$ positiv definit.

Aus Stetigkeitsgründen folgt, dass $Q_{\mathbb{R}} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ positiv semidefinit ist. Wir zeigen positive Definitheit: Angenommen es gibt $0 \neq x \in \mathbb{R}^n$ mit $Q(x) = 0$. Dann ist x ein globales und lokales Minimum von Q , und daher ist der Gradient (Ableitung) $\text{grad } Q(x) = 0$. Ist A die zugehörige symmetrische Matrix, so gilt $Q(x) = x^{\text{tr}}Ax$, und

$$\text{grad } Q(x) = \left(\frac{\partial Q(x)}{\partial x_i} \right)_{i=1, \dots, n} = \left(2q_i x_i + \sum_{j \neq i} q_{ij} x_j \right)_{i=1, \dots, n} = 2Ax,$$

also folgt $Ax = 0$. Also ist $A \in M_n(\mathbb{Q}) \subset M_n(\mathbb{R})$ eine Matrix vom Rang $\leq n-1$, und daher gibt es einen Vektor $0 \neq y \in \mathbb{Q}^n$ mit $Ay = 0$, und folglich mit $Q(y) = 0$, Widerspruch.

Also ist $Q_{\mathbb{R}} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ positiv definit, und daher ist $1/Q_{\mathbb{R}}$ wohldefiniert auf der kompakten Menge $S \subset \mathbb{R}^n$, definiert als $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$, und nimmt auf S ein globales Minimum m an. Sei $x \in \mathbb{R}^n$ mit $Q(x)_{\mathbb{R}} = 1$. Dann gilt

$$\frac{1}{\|x\|^2} = Q_{\mathbb{R}}\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \geq m,$$

also $\|x\| \leq \sqrt{1/m}$. Insbesondere liegt also die diskrete Menge der Wurzeln von Q in der kompakten $1/m$ -Kugel um den Nullpunkt, und daher kann es nur endlich viele Wurzeln geben. \square

Satz 1.19. *Sei Γ ein Graph. Dann gilt: Q_{Γ} ist genau dann positiv definit, wenn Γ eine Summe von Dynkin-Graphen aus der folgenden Liste ist.*

$$\mathbb{A}_n : \quad \circ \text{ --- } \circ \text{ --- } \circ \text{ --- } \dots \text{ --- } \circ \text{ --- } \circ \quad (n \geq 1)$$

$$\mathbb{D}_n : \quad \begin{array}{c} \circ \\ \diagdown \\ \circ \text{ --- } \circ \text{ --- } \dots \text{ --- } \circ \text{ --- } \circ \\ \diagup \\ \circ \end{array} \quad (n \geq 4)$$

$$\mathbb{E}_6 : \quad \begin{array}{c} \circ \\ | \\ \circ \text{ --- } \circ \text{ --- } \circ \text{ --- } \circ \text{ --- } \circ \end{array}$$

$$\mathbb{E}_7 : \quad \begin{array}{c} \circ \\ | \\ \circ \text{ --- } \circ \text{ --- } \circ \text{ --- } \circ \text{ --- } \circ \end{array}$$

$$\mathbb{E}_8 : \quad \begin{array}{c} \circ \\ | \\ \circ \text{ --- } \circ \text{ --- } \circ \text{ --- } \circ \text{ --- } \circ \end{array}$$

Im folgenden wird der Beweis dieses Satzes geführt.

Lemma 1.20. *Sei Q eine positiv definite Einheitsform. Dann gilt $|q_{ij}| \leq 1$ für alle $i < j$.*

Beweis. Es ist

$$0 < Q(e_i - e_j) = Q(e_i) + Q(e_j) - 2(e_i | e_j) = 2 - q_{ij}.$$

Es folgt $q_{ij} < 2$. Ebenso,

$$0 < Q(e_i + e_j) = Q(e_i) + Q(e_j) + 2(e_i | e_j) = 2 + q_{ij},$$

und es folgt $q_{ij} > -2$. □

Folgerung 1.21. *Sei Γ ein Graph ohne Schleifen und Q_Γ positiv definit. Dann gibt es zwischen zwei verschiedenen Knoten in Γ höchstens eine (einfache) Kante.*

Lemma 1.22. *Sei Γ ein Graph und Q_Γ positiv definit. Dann gibt es keine Schleifen in Γ . (Also ist Q_Γ eine Einheitsform.)*

Beweis. Sei i eine k -fache Schlaufe $k \geq 1$. Dann ist $Q(e_i) = (1-k)e_i \leq 0$. □

Definition 1.23. Sei $\Gamma = (V, E)$ ein Graph. Ein *Teilgraph* Γ' von Γ ist gegeben durch (V', E') mit $V' \subseteq V$ und $E' \subseteq E$. Kommt dabei in E' jede Kante aus E zwischen Knoten in V' vor, so spricht man von einem *vollen* Teilgraphen.

Sei Γ ein Graph, so dass Q_Γ positiv definit ist. Zerlegt man Γ in seine Zusammenhangskomponenten $\Gamma = \Gamma_1 + \dots + \Gamma_s$, so ist jedes Q_{Γ_i} positiv definit. (Und umgekehrt.) Mit den vorherigen Aussagen ist für die eine Richtung des Satzes 1.19 noch folgendes zu zeigen.

Proposition 1.24. *Sei Γ ein zusammenhängender Graph ohne Schleifen und ohne mehrfache Kanten. Ist Q_Γ positiv definit, so ist Γ ein Dynkin-Graph \mathbb{A}_n ($n \geq 1$), \mathbb{D}_n ($n \geq 4$) oder \mathbb{E}_n ($n = 6, 7, 8$).*

Beweis. Man zeigt der Reihe nach:

(1) *Für jeden vollen Teilgraphen Γ' von Γ ist $Q_{\Gamma'}$ positiv definit.*

Beweis. Seien die Knoten $\{1, \dots, n\}$ von Γ ohne Einschränkung so nummeriert, dass die Knoten von Γ' durch $\{1, \dots, m\}$ (mit $m \leq n$) gegeben sind. Sei $0 \neq x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{Z}^m$. Dann ist $\bar{x} = (x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0) \in \mathbb{Z}^n$ verschieden von 0, und $Q_{\Gamma'}(x) = Q_\Gamma(\bar{x}) > 0$, denn für alle Kanten \overline{ij} , die nicht in Γ'_1 liegen (d. h. $i \notin \Gamma'_0$ oder $j \notin \Gamma'_0$ (oder beide)) gilt $x_i x_j = 0$. □

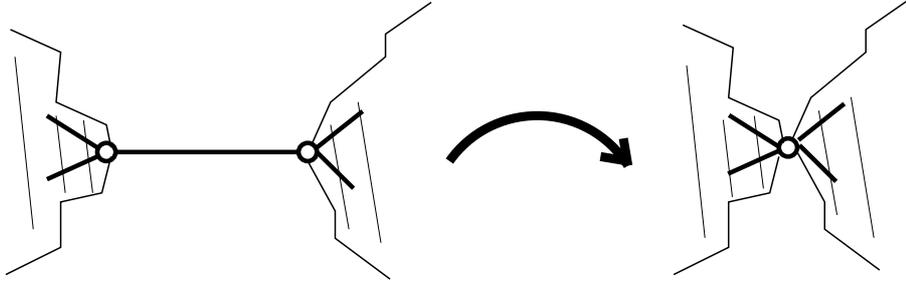
(2) *Γ enthält keine Zyklen.*

Beweis. Gibt es einen Zykel, dann gibt es offenbar auch einen Zykel, der ein voller Teilgraph Γ' von Γ ist, gegeben durch Kanten $\overline{i_1 i_2}, \overline{i_2 i_3}, \dots, \overline{i_{s-1} i_s}, \overline{i_s i_1}$. Also ist einerseits nach Teil (1) $Q_{\Gamma'}$ positiv definit, andererseits ist

$$Q_{\Gamma'}(x_{i_1}, \dots, x_{i_s}) = \sum_{k=1}^s x_{i_k}^2 - \sum_{k=1}^{s-1} x_{i_k} x_{i_{k+1}} - x_{i_s} x_{i_1}.$$

Setzt man den Vektor $x = (1, 1, \dots, 1) \in \mathbb{Z}^s$ ein, so erhält man $Q_{\Gamma'}(x) = s - s = 0$, Widerspruch. \square

(3) *Entsteht Γ' aus Γ durch Schrumpfen einer Kante, so ist $Q_{\Gamma'}$ positiv definit.*



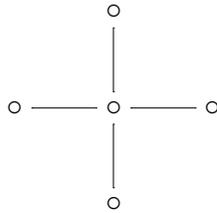
Beweis. Seien i und j die Knoten, die beim Schrumpfen der Kante \overline{ij} zu einem Punkt $i' = j'$ verschmolzen werden. Ist nun $0 \neq x = (x_k)_{k \in \Gamma'_0}$ ein ganzzahliger Vektor, so definiere $\bar{x} = (\bar{x}_k)_{k \in \Gamma_0}$ durch

$$\bar{x}_k = \begin{cases} x_k & k \neq i, j \\ x_{i'} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann folgt $Q_{\Gamma'}(x) = Q_{\Gamma}(\bar{x}) > 0$, denn bei $Q_{\Gamma}(\bar{x})$ kommt ein x_i^2 hinzu, wird aber als $x_i x_j$ wieder abgezogen. \square

(4) Γ enthält keinen Knoten vom Grad ≥ 4 .

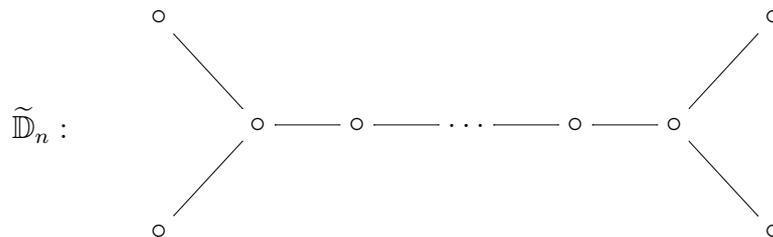
Beweis. Sonst würde Γ den vollen Teilgraphen $\tilde{\mathbb{D}}_4$



enthalten, dessen quadratische Form nach obiger Übung nicht positiv definit ist, im Widerspruch zu (1). \square

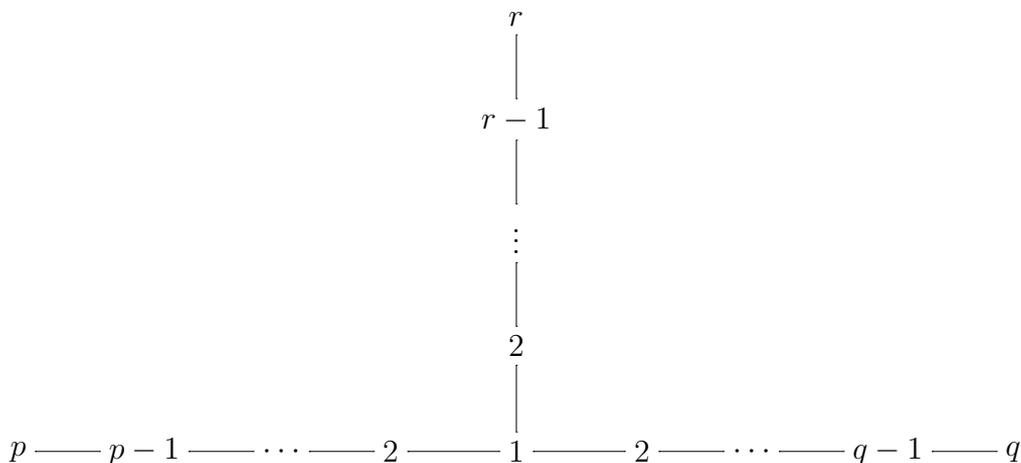
(5) Γ enthält höchstens einen Knoten vom Grad 3.

Beweis. Andernfalls enthält Γ einen vollen Teilgraphen der Form $\tilde{\mathbb{D}}_n$ ($n \geq 4$, $n + 1$ Knoten)



Nach Schrumpfen von Kanten erhält man $\widetilde{\mathbb{D}}_4$, im Widerspruch zu (4). \square

Damit ist Γ ein Stern vom Typ $[p, q, r]$:



Setze

$$\Psi_m(x_1, \dots, x_m) = \sum_{k=1}^{m-1} \frac{k(k+1)}{2} \left(\frac{1}{k+1} x_{k+1} - \frac{1}{k} x_k \right)^2.$$

Offenbar ist Ψ_m positiv semidefinit, und es gilt

$$(1.2) \quad \Psi_m(x_1, \dots, x_m) = 0 \Leftrightarrow x_1 = \frac{1}{2}x_2 = \frac{1}{3}x_3 = \dots = \frac{1}{m}x_m.$$

Man sieht (ÜBUNG)

$$Q_{\mathbb{A}_m}(x_1, \dots, x_m) = \Psi_m(x_1, \dots, x_m) + \frac{m+1}{2m} x_m^2,$$

wobei in \mathbb{A}_m die Knoten linear von 1 bis m durchnummeriert wurden.

Ordne im obigen Stern vom Typ $[p, q, r]$ den Knoten nun Variablen x_i , y_i bzw. z_i zu, allerdings umgekehrt, von den Enden beginnend, so dass der Verzweigungspunkt die gemeinsame Variable $a = x_p = y_q = z_r$ erhält. Es ist dann

$$\begin{aligned} Q_{[p,q,r]} &= Q_{\mathbb{A}_p}(x_1, \dots, x_{p-1}, a) + Q_{\mathbb{A}_q}(y_1, \dots, y_{q-1}, a) + Q_{\mathbb{A}_r}(z_1, \dots, z_{r-1}, a) - 2a^2 \\ &= \Psi_p(x_1, \dots, x_{p-1}, a) + \Psi_q(y_1, \dots, y_{q-1}, a) \\ &\quad + \Psi_r(z_1, \dots, z_{r-1}, a) + \left(\frac{p+1}{2p} + \frac{q+1}{2q} + \frac{r+1}{2r} - 2 \right) a^2 \\ &= \Psi_p(x_1, \dots, x_{p-1}, a) + \Psi_q(y_1, \dots, y_{q-1}, a) \\ &\quad + \Psi_r(z_1, \dots, z_{r-1}, a) + \left(\frac{1}{2} \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} \right) - \frac{1}{2} \right) a^2. \end{aligned}$$

Nun ist der Ausdruck in der letzten großen Klammer ≥ 0 genau dann, wenn $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} \geq 1$ gilt, und er ist > 0 genau dann, wenn $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} > 1$ gilt. Also ist $Q_{[p,q,r]}$ positiv semidefinit, genau dann, wenn $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} \geq 1$. Aus (1.2) folgt, dass $Q_{[p,q,r]}$ im Fall $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1$ nicht positiv definit sein kann, denn

man findet einen positiven Vektor x mit $Q(x) = 0$. (ÜBUNG). Aber im Fall $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} > 1$ ist $Q_{[p,q,r]}$ positiv definit, denn aus $Q_{[p,q,r]}(x) = 0$, wobei

$$x = (x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_q, z_1, \dots, z_r) \quad x_p = y_q = z_r = a$$

ist, folgt zunächst $a = 0$, und dann aus (1.2) sukzessive $x_1 = 0, x_2 = 0$, u.s.w., und ähnlich für die y_i und z_i , also insgesamt $x = 0$. Nun ist $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} > 1$ genau in den Fällen (bis auf Permutation)

$$(p, q, r) = \begin{cases} (p, q, 1) & \mathbb{A}_{p+q-1} \quad (p, q \geq 1) \\ (2, 2, r) & \mathbb{D}_{r+2} \quad (r \geq 2) \\ (2, 3, 3) & \mathbb{E}_6 \\ (2, 3, 4) & \mathbb{E}_7 \\ (2, 3, 5) & \mathbb{E}_8. \end{cases}$$

□

Das Ende des vorherigen Beweises hat auch die andere Richtung gezeigt:

Proposition 1.25. *Sei Γ ein Dynkin-Graph \mathbb{A}_n ($n \geq 1$), \mathbb{D}_n ($n \geq 4$) oder \mathbb{E}_n ($n = 6, 7, 8$). Dann ist Q_Γ positiv definit.* □

Wir schreiben der Vollständigkeit halber nochmal obige Zerlegungen explizit hin. Setze wie oben

$$\Psi_m(x_1, \dots, x_m) = \sum_{k=1}^{m-1} \frac{k(k+1)}{2} \left(\frac{1}{k+1} x_{k+1} - \frac{1}{k} x_k \right)^2.$$

Damit ist

$$Q_{\mathbb{A}_n}(x_1, \dots, x_n) = \Psi_n(x_1, \dots, x_n) + \frac{n+1}{2n} x_n^2$$

positiv definit. Ebenso sind (bei geeigneter Nummerierung der Knoten (welcher?))

$$Q_{\mathbb{D}_n}(x_1, \dots, x_n) = \Psi_{n-2}(x_1, \dots, x_{n-2}) + \Psi_2(x_{n-1}, x_{n-2}) + \Psi_2(x_n, x_{n-2}) + \frac{1}{2(n-2)} x_{n-2}^2$$

und

$$Q_{\mathbb{E}_n}(x_1, \dots, x_n) = \Psi_{n-3}(x_1, \dots, x_{n-3}) + \Psi_2(x_{n-2}, x_{n-3}) + \Psi_3(x_n, x_{n-1}, x_{n-3}) + \frac{9-n}{12(n-3)} x_{n-3}^2$$

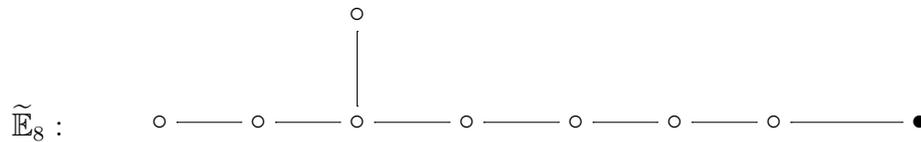
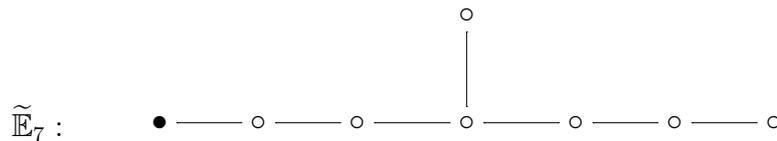
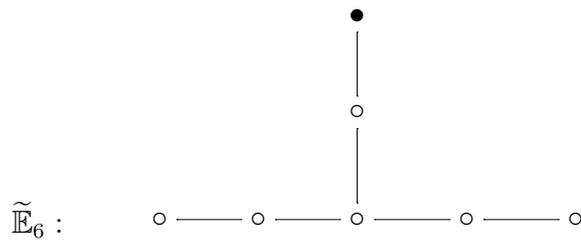
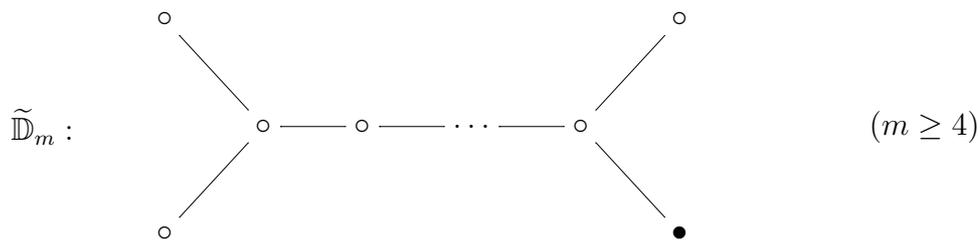
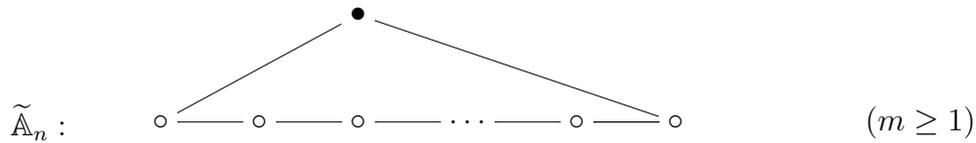
positiv definit.

Damit ist Satz 1.19 bewiesen.

Bemerkung 1.26. Sei $Q : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ eine positiv definite Einheitsform. Man kann zeigen: Es gibt einen Graphen Γ (notwendig Summe von Dynkin-Graphen), so dass Q äquivalent zu Q_Γ ist, $Q \sim Q_\Gamma$.

Hierbei heißen zwei ganzzahlige quadratische Formen Q und Q' äquivalent, $Q \sim Q'$, falls es eine bijektive lineare Abbildung $T : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^n$ gibt, so dass $Q' = Q \circ T$ gilt.

Übung 1.27. Sei Γ ein zusammenhängender Graph. Es ist Q_Γ positiv semi-definit aber nicht positiv definit genau dann, wenn Γ ein *erweiterter Dynkin-Graph* des Typs \tilde{A}_m ($m \geq 1$), \tilde{D}_m ($m \geq 4$) oder \tilde{E}_m ($m = 6, 7, 8$) ist:



(Jeweils $n = m+1$ Knoten; formal nehmen wir für $n = 1$ noch den Graphen \tilde{A}_0 hinzu, der aus einem Knoten mit einer Schlaufe besteht.) Man gebe in jedem der Fälle einen positiven Radikalvektor an.

2. WURZELN UND SPIEGELUNGEN

In diesem Abschnitt studieren wir positiv definite Einheitsformen und deren Wurzeln.

2.1. Sei hier stets $Q : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ eine Einheitsform, und $(- | -)$ die zugehörige Bilinearform. Die Einheitsvektoren e_1, \dots, e_n werden auch *einfache Wurzeln* genannt. Für $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{Z}^n$ schreiben wir $x \leq y$, falls $x_i \leq y_i$ für alle i gilt, und $x < y$, falls zusätzlich $x \neq y$ ist.

Satz 2.2. Sei $Q = Q_\Gamma$ eine positiv definite Einheitsform. Dann ist jede Wurzel positiv oder negativ.

Beweis. Sei $x \in \mathbb{Z}^n$ eine Wurzel von Q . Schreibe $x = x^+ - x^-$, wobei $x^+, x^- \geq 0$ den positiven bzw. negativen Anteil bezeichnen. Es folgt

$$(2.1) \quad 1 = Q(x) = Q(x^+) + Q(x^-) - 2(x^+ | x^-).$$

Schreibe $x^+ = \sum_{i=1}^n a_i e_i$ und $x^- = \sum_{i=1}^n b_i e_i$, wobei alle $a_i, b_i \geq 0$. Dann gilt

$$(x^+ | x^-) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i b_j (e_i | e_j).$$

Nach Lemma 1.20 (und wegen $Q = Q_\Gamma$) gilt $q_{ij} \in \{0, -1\}$ für alle $i < j$. Daher erhält man

$$(e_i | e_j) = \sum_k \delta_{ik} \delta_{kj} + \frac{1}{2} \sum q_{kl} \delta_{ik} \delta_{lj} \leq 0$$

für $i \neq j$. Es folgt also $(x^+ | x^-) \leq 0$. Da Q positiv definit ist folgt aus (2.1) nun entweder $x^+ = 0$ oder $x^- = 0$, also $x = x^-$ oder $x = x^+$ positiv. \square

2.3 (Spiegelungen). Sei $x \in \mathbb{Z}^n$ eine Wurzel von Q . Definiere

$$\sigma_x : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^n, y \mapsto y - 2(y | x)x$$

für alle $y \in \mathbb{Z}^n$.

Eigenschaften: (ÜBUNG)

- (1) σ_x ist \mathbb{Z} -linear.
- (2) $\sigma_x(x) = -x$.
- (3) $(y | x) = 0 \Rightarrow \sigma_x(y) = y$. Es ist also σ_x die Identität auf der "Hyperebene" $H = \{y \in \mathbb{Z}^n \mid (y | x) = 0\}$. (Es handelt sich also um eine Spiegelung an der zu x orthogonalen Hyperebene.)
- (4) $\sigma_x^2 = 1$.
- (5) $(\sigma_x(y) | \sigma_x(z)) = (y | z)$ für alle $y, z \in \mathbb{Z}^n$. Es ist also σ_x eine "orthogonale" Abbildung.
- (6) $Q(\sigma_x(y)) = Q(y)$ für alle $y \in \mathbb{Z}^n$. Insbesondere überführt σ_x Wurzeln in Wurzeln.

Für die einfachen Wurzeln schreiben wir auch $\sigma_i = \sigma_{e_i}$.

2.4 (Weyl-Gruppe). Sei $\mathcal{W}_Q = \langle \sigma_1, \dots, \sigma_n \rangle \subseteq \text{Aut}(\mathbb{Z}^n) = \text{GL}_n(\mathbb{Z})$ die Weyl-Gruppe von Q . Eine positive Wurzel x heißt *reell*, falls x in der \mathcal{W}_Q -Bahn einer einfachen Wurzel liegt, falls es also ein $\sigma \in \mathcal{W}_Q$ und ein $i \in \{1, \dots, n\}$ gibt mit $x = \sigma(e_i)$.

Übung 2.5. Die Gruppe \mathcal{W}_Q ist endlich, falls Q positiv definit ist.

Wir betrachten nun vorübergehend eine allgemeinere Klasse von Einheitsformen.

2.6. Eine Einheitsform Q heißt *schwach positiv definit*, falls $Q(x) > 0$ gilt für alle *positiven* Vektoren $x \in \mathbb{Z}^n$. Insbesondere sind positiv definite Einheitsformen schwach positiv definit.

Satz 2.7. Sei Q eine schwach positiv definite Einheitsform. Dann ist jede positive Wurzel von Q reell.

Beweis. Es heiße eine positive Wurzel x *korrigierbar*, falls es ein $i \in \{1, \dots, n\}$ gibt mit $0 < \sigma_i(x) < x$. Zu zeigen genigt:

Eine nicht korrigierbare positive Wurzel x ist einfach.

Sei $x = (x_1, \dots, x_n)$ eine nicht korrigierbare positive Wurzel. Es gilt

$$1 = Q(x) = (x | x) = \sum_{i=1}^n x_i(x | e_i).$$

Daher gibt es ein i mit $x_i > 0$ und $(x | e_i) > 0$. Es folgt

$$\sigma_i(x) = x - 2(x | e_i)e_i < x.$$

Da $\sigma_i(x)_j = x_j$ für alle $j \neq i$, und da x nicht korrigierbar ist, folgt $\sigma_i(x)_i = x_i - 2(x | e_i) < 0$.

Andererseits ist

$$0 \leq Q(x - x_i e_i) = Q(x) + x_i^2 - 2x_i(x | e_i) = 1 + x_i(x_i - 2(x | e_i)) = 1 + x_i \sigma_i(x)_i.$$

Es folgt $x_i = 1$, und $Q(x - x_i e_i) = 0$. Da Q schwach positiv ist und $x - x_i e_i \geq 0$, folgt $x = x_i e_i$, und da x eine Wurzel ist, $x = e_i$. \square

Bemerkung 2.8. Der Beweis zeigt, dass man nur Formen Q benötigt, deren Einschränkungen $Q^{(i)}$ auf \mathbb{Z}^{n-1} , indem man die Variable $x_i = 0$ setzt, schwach positiv definit sind (für $i = 1, \dots, n$). Ist Q nicht schon selbst schwach positiv definit, so sind dies die sogenannten *kritischen* Einheitsformen.

Satz 2.9. Sei Q schwach positiv definite Einheitsform. Seien $x < y$ positive Wurzeln. Dann gibt es eine Folge von Zahlen $i_1, \dots, i_r \in \{1, \dots, n\}$ mit

$$\sigma_{i_s} \circ \dots \circ \sigma_{i_1}(y) = y - e_{i_1} - \dots - e_{i_s}$$

für alle s und $\sigma_{i_r} \dots \sigma_{i_1}(y) = x$.

Beweis. Schreibe $x = (x_1, \dots, x_n)$ und $y = (y_1, \dots, y_n)$. Es gilt

$$Q(x) = Q(-x) = Q((y - x) - y) = Q(y) + Q(y - x) - 2(y | y - x).$$

Wegen $Q(x) = 1 = Q(y)$ und $y - x > 0$ folgt

$$0 < Q(y - x) = 2(y | y - x) = 2 \sum_{i=1}^n (y_i - x_i)(y | e_i),$$

und daher gibt es ein i mit $x_i < y_i$ und $(y | e_i) > 0$. Andererseits gilt

$$2 - 2(y | e_i) = Q(y) + Q(e_i) - 2(y | e_i) = Q(y - e_i) > 0,$$

also ist $2(y | e_i) = 1$, und damit $x \leq \sigma_i(y) = y - e_i < y$. Man setzt nun $i_1 = i$ und wiederholt dies Argument. \square

In den letzten beiden Sätzen wurde nur die Existenz geeigneter Folgen von Spiegelungen bewiesen, jedoch nichts über deren spezielle Gestalt. Da dies aber für spätere Anwendungen wichtig sein wird, untersuchen wir dies im folgenden.

Lemma 2.10. *Sei Q positiv definit und $\tau = \sigma_n \circ \dots \circ \sigma_1 \in \mathcal{W}_Q$.*

- (1) *Ist $x \in \mathbb{Z}^n$ mit $\tau(x) = x$, so ist $x = 0$.*
- (2) *Ist $x \in \mathbb{Z}^n$ positiv, so gibt es ein $k > 0$, so dass $\tau^k(x)$ nicht positiv ist.*

Beweis. (1) Für $j \neq i$ gilt $\sigma_j(x)_i = x_i$. Daher gilt $\sigma_1(x)_1 = \tau(x)_1 = x_1$, also $\sigma_1(x) = x$. Ebenso folgt dann nacheinander $\sigma_2(x) = x, \dots, \sigma_n(x) = x$. Es folgt für jedes i

$$x = \sigma_i(x) = x - 2(x | e_i)e_i,$$

also $(x | e_i) = 0$. Dann folgt auch $Q(x) = (x | x) = 0$, und damit $x = 0$, da Q positiv definit ist.

(2) Da die Gruppe \mathcal{W}_Q endlich ist, gibt es ein $k > 0$ mit $\tau^k = 1$. Für den Vektor

$$y = x + \tau(x) + \tau^2(x) + \dots + \tau^{k-1}(x)$$

gilt dann offenbar $\tau(y) = y$, also $y = 0$ nach (1). Dann können nicht alle $\tau^i(x)$ positiv sein. \square

Bemerkung 2.11. Ist Γ ein Dynkin-Graph und $Q = Q_\Gamma$, so liefert für unterschiedliche Nummerierungen der Knoten von 1 bis n unterschiedliche Coxeter-Transformationen $\tau = \sigma_n \circ \dots \circ \sigma_1$. Aber für jede Nummerierung existiert ein solches τ , was wir später (für spezielle Nummerierungen) noch ausnutzen werden.

Satz 2.12. *Sei Q positiv definit und $\tau = \sigma_n \circ \dots \circ \sigma_1 \in \mathcal{W}_Q$. Sei x eine positive Wurzel, und sei $k \geq 0$ mit $\tau^{k+1}(x) \not> 0$ aber $\tau^k(x) > 0$. Sei $i \in \{0, \dots, n-1\}$ maximal mit $\sigma_i \circ \dots \circ \sigma_1 \circ \tau^k(x) > 0$. Dann gilt*

$$\sigma_i \circ \dots \circ \sigma_1 \circ \tau^k(x) = e_{i+1}.$$

Beweis. Wir wiederholen das Argument aus dem Beweis von Satz 2.7: Sei y die positive Wurzel $\sigma_i \circ \dots \circ \sigma_1 \circ \tau^k(x)$. Es gilt wegen der Maximalität von i die Beziehung $0 \not\leq \sigma_{i+1}(y)$, und damit $\sigma_{i+1}(y)_{i+1} < 0$. Andererseits folgt dann genau wie dort $Q(y - y_{i+1}e_{i+1}) = 0$, also $y = y_{i+1}e_{i+1}$, und damit $y = e_{i+1}$. \square

Bemerkung 2.13. Wähle obiges k ohne Einschränkung minimal. (Das bedeutet, dass bei sukzessiver Anwendung der Spiegelungen $\sigma_1, \sigma_2, \dots$ auf x das Element $\sigma_{i+1} \circ \sigma_i \circ \dots \circ \sigma_1 \circ \tau^k(x)$ das erste nicht-positive ist.) Dann

ist für $k' < k$ und jedes i' bzw. für $k' = k$ und $i' < i$ der positive Vektor $\sigma_{i'} \circ \dots \circ \sigma_1 \circ \tau^{k'}(x)$ *verschieden* von der einfachen Wurzel $e_{i'+1}$, und auch (wende $\sigma_{i'}$ an!) *verschieden* von $e_{i'}$. Es wird also bei der sukzessiven Berechnung der Produkte $e_{i+1} = \sigma_i \circ \dots \circ \sigma_1 \circ \tau^k(x)$ bzw. $x = (\sigma_1 \circ \dots \circ \sigma_n)^k \circ \sigma_1 \circ \dots \circ \sigma_i(e_{i+1})$ niemals ein σ_j auf e_j angewandt. Dies wird später noch wichtig sein.

Bemerkung 2.14 (Wurzelsystem). (1) Eine endliche Teilmenge R eines euklidischen Vektorraums $(V, (- | -))$ heißt ein *Wurzelsystem*, falls

- (1) $0 \notin R$, und R erzeugt den \mathbb{R} -Vektorraum V .
- (2) Für jedes $\alpha \in R$ gilt $s_\alpha(V) \subseteq V$, wobei $s_\alpha(x) = x - 2 \frac{(x|\alpha)}{(\alpha|\alpha)} \alpha$ für jedes $x \in V$.
- (3) Für alle $\alpha, \beta \in R$ gilt $2 \frac{(\beta|\alpha)}{(\alpha|\alpha)} \in \mathbb{Z}$.

Gilt außerdem: Ist $\alpha \in R$ und $\lambda \alpha \in R$, so folgt $\lambda = \pm 1$, so heißt R *reduziert*.

(2) Sei Q eine positiv definite Einheitsform. Dann ist $Q_{\mathbb{R}}$ positiv definit, und $(- | -)$ induziert ein Skalarprodukt auf \mathbb{R}^n , welches \mathbb{R}^n zu einem euklidischen Vektorraum macht, in dem die Menge aller Wurzeln von Q ein reduziertes Wurzelsystem bildet.

Übung 2.15. Sei Γ ein zusammenhängender Graph, so dass Q_Γ positiv semidefinit ist.

- (1) Jede Wurzel ist positiv oder negativ.
- (2) Jede positive Wurzel ist reell.

3. KÖCHER UND ORIENTIERUNGEN

Definition 3.1. Ein *Köcher* ist ein gerichteter Graph. D. h. jede Kante ist mit einer Orientierung/Richtung versehen, die durch eine "Pfeilspitze" kenntlich gemacht wird. Man nennt die Kanten in einem Köcher daher *Pfeile*. Formal ist ein Köcher $\Gamma = (V, E, \alpha, \omega)$, wobei (V, E) ein Graph ist (der *unterliegende* Graph, bezeichnet mit $|\Gamma|$) und $\alpha, \omega : E \rightarrow V$ Abbildungen, wobei $\alpha(a)$ den Anfang und $\omega(a)$ das Ende (Pfeilspitze) eines Pfeiles bezeichnet: Für $i \xrightarrow{a} j$ ist $\alpha(a) = i$ und $\omega(a) = j$. Wir schreiben auch $a = (i, j) = (\alpha(a), \omega(a))$.

Man beachte, dass ein Graph auf verschiedene Arten orientiert werden kann, so dass also verschiedene Köcher denselben unterliegenden Graphen haben können.

3.2 (Wege, Zykel). Ein (orientierter) *Weg* in einem Köcher Γ ist eine Folge von Pfeilen a_1, \dots, a_s in Γ , so dass $\omega(a_i) = \alpha(a_{i+1})$ gilt für alle $i = 1, \dots, s-1$. Gilt zusätzlich $\omega(a_s) = \alpha(a_1)$, so handelt es sich um einen (orientierten) *Kreis* oder *Zykel*. Wir nennen Γ *zykelfrei* (oder: *ohne orientierte Kreise*), falls Γ keine (orientierten) Kreise enthält. Falls hingegen der unterliegende Graph $|\Gamma|$ keine Zykel enthält, nennen wir Γ *azyklisch*.

3.3 (Quelle, Senke). Ein Punkt i in einem Köcher heißt *Quelle* (bzw. *Senke*), falls $\omega(a) \neq i$ (bzw. $\alpha(a) \neq i$) gilt für alle Pfeile a des Köchers.

Lemma 3.4. *Jeder (nicht-leere) Köcher Γ ohne orientierte Kreise enthält Quellen und Senken.*

Beweis. ÜBUNG. □

Folgerung 3.5. *Sei Γ ein Köcher ohne orientierte Kreise. Dann können die Punkte $V = \{1, 2, \dots, n\}$ so durchnummeriert werden, dass für jeden Pfeil $a \in E$ gilt $\alpha(a) < \omega(a)$.*

Einen derartigen Köcher nennt man auch *standardisiert*. Es ist dann 1 eine Quelle und n eine Senke.

Beweis. ÜBUNG. □

3.6 (Spiegelung an Quellen/Senken). Sei i ein Punkt im Köcher Γ . Wir bilden einen neuen Köcher $\sigma_i\Gamma$. Der unterliegende Graph ist derselbe. Die Pfeile werden insofern geändert, dass alle Pfeile a , für die $\alpha(a) = i$ oder $\omega(a) = i$ gilt, umgedreht werden. Es gilt offenbar $\sigma_i\sigma_i\Gamma = \Gamma$. Insbesondere interessiert uns der Fall, wenn i eine Quelle oder eine Senke ist. Aus einer Quelle i wird eine Senke in $\sigma_i\Gamma$ eine Senke, und aus einer Senke wird eine Quelle.

Zwei Köcher heißen *spiegelungs-äquivalent*, wenn sie durch eine endliche Folge von Spiegelungen an Quellen oder Senken ineinander überführt werden können.

Lemma 3.7. *Sei Γ ein standardisierter Köcher mit Punkten $1, \dots, n$.*

- (1) *Für $1 \leq i < n$ ist i eine Senke und $i+1$ eine Quelle in $\sigma_i\sigma_{i-1}\dots\sigma_1\Gamma$.*
- (2) *Für $1 < i \leq n$ ist i eine Quelle und $i-1$ eine Senke in $\sigma_i\sigma_{i+1}\dots\sigma_n\Gamma$.*

Beweis. Seien i_1, \dots, i_s paarweise verschiedene Punkte in Γ . Sei $\Gamma' = \sigma_{i_s}\dots\sigma_{i_1}\Gamma$. Sei (i, j) ein Pfeil in Γ . Es ist (i, j) auch ein Pfeil in Γ' , wenn i, j beide zu der Menge $\{i_1, \dots, i_s\}$ gehören oder beide nicht. Hingegen ist (j, i) ein Pfeil von Γ' , wenn entweder i oder j (und nicht beide) zu $\{i_1, \dots, i_s\}$ gehören. Dies ist unmittelbar klar, da die Orientierung von (i, j) nur durch σ_i und σ_j geändert werden.

Betrachte nun den ersten Fall, sei $\Gamma' = \sigma_i\dots\sigma_1\Gamma$. Weil Γ standardisiert ist, gilt für alle Pfeile a in Γ mit $\omega(a) = i$, dass $\alpha(a) \in \{1, \dots, i-1\}$ liegt, und für alle Pfeile b mit $\alpha(b) = i$, dass $\omega(b) \in \{i+1, \dots, n\}$ liegt. Alle Pfeile a sind nun in Γ' zweimal umgekehrt worden, die Pfeile b nur einmal, und daher ist i in Γ' eine Senke. Ähnlich gilt für den Punkt $i+1$, dass alle Pfeile, die in $i+1$ landen in Punkten vom kleineren Index starten und genau einmal umgedreht werden, und daher ist $i+1$ in Γ' eine Quelle. □

Proposition 3.8. *Seien Γ und Γ' zwei azyklische Köcher mit selbem unterliegenden Graphen $|\Gamma| = |\Gamma'|$. Dann gibt es eine Folge i_1, \dots, i_s von Punkten in Γ , so dass für jedes $1 \leq l \leq s$ der Punkt i_l eine Quelle oder Senke in $\sigma_{i_{l+1}}\sigma_{i_{l+2}}\dots\sigma_{i_s}\Gamma$ ist und $\sigma_{i_1}\sigma_{i_2}\dots\sigma_{i_s}\Gamma = \Gamma'$.*

Kurz: Zwei azyklische Köcher mit selbem unterliegenden Graphen sind spiegelungs-äquivalent.

Beweis. Es genügt den Fall zu behandeln, wo Γ' aus Γ entsteht, wo genau ein Pfeil $a = (i, j)$ umgekehrt werden muss. Entfernt man diesen Pfeil aus dem Graphen Γ , so zerfällt dieser, weil es keine Zykel gibt, in zwei disjunkte Teile Γ_1 und Γ_2 , wobei i ein Punkt in Γ_1 und j ein Punkt in Γ_2 ist. Man kann annehmen, dass die Punkte in Γ_1 so durch $1, \dots, s$ nummeriert sind, dass Γ_1 standardisiert ist. Nummeriere die Punkte in Γ_2 durch $s + 1, \dots, n$ beliebig. Gilt nun $1 \leq k \leq s < l \leq n$, so gibt es in Γ einen Pfeil (k, l) genau dann, wenn $k = i$ und $j = l$, d. h. dieser Pfeil ist a . Nun ist k eine Quelle in $\sigma_{k-1} \dots \sigma_1 \Gamma_1$ für $1 \leq k \leq s$, und $\sigma_s \dots \sigma_1 \Gamma_1 = \Gamma_1$. Wegen der Disjunktheit von Γ_1 und Γ_2 ist für jedes $1 \leq k \leq s$ nun k auch eine Quelle in $\sigma_{k-1} \dots \sigma_1 \Gamma$, und es ist $\sigma_s \dots \sigma_1 \Gamma = \Gamma'$. \square

Übung 3.9. Man zeige, dass das vorherige Ergebnis im allgemeinen nicht mehr richtig ist, wenn man “azyklisch” durch “zykelfrei” ersetzt.

4. DARSTELLUNGEN VON KÖCHERN

Im folgenden sei K stets ein Körper.

Definition 4.1 (Darstellungen). Sei $\Gamma = (I, E, \alpha, \omega)$ ein Köcher. Eine (endlichdimensionale) K -lineare Darstellung von Γ ist ein Tupel

$$V = (V(i), V(a))_{i \in I, a \in E},$$

wobei

- für jedes $i \in I$ ist $V(i)$ ein endlichdimensionaler K -Vektorraum;
- für jedes $a = (i, j) \in E$ ist $V(a) : V(i) \rightarrow V(j)$ eine K -lineare Abbildung.

Die Menge aller Darstellungen von Γ bezeichnen wir mit $\mathcal{L}_K(\Gamma)$. Häufig unterdrücken wir das Wort “ K -linear” und sprechen nur von Darstellungen.

Beispiel 4.2. (1) Sei Γ der Köcher $\overset{1}{\circ} \rightarrow \overset{2}{\circ}$. Eine Darstellung von Γ ist nicht anderes als ein Paar von endlichdimensionalen K -Vektorräumen und einem Homomorphismus zwischen diesen.

(2) Sei Γ der Köcher bestehend aus einem Punkt mit einer Schlaufe. Eine Darstellung von Γ ist nicht anderes als ein endlichdimensionaler K -Vektorraum zusammen mit einem Endomorphismus.

4.3 (Dimensionsvektor). Sei $V = (V(i), V(a))$ eine K -lineare Darstellung des Köcher Γ . Das Tupel

$$\underline{\dim}(V) = (\dim_K V(1), \dots, \dim_K V(n)) \in \mathbb{Z}^n$$

heißt der *Dimensionsvektor* von V . Dies ist eine wichtige Invariante der Darstellung V .

Definition 4.4 (Morphismen). $\Gamma = (I, E, \alpha, \omega)$ ein Köcher. Seien $V = (V(i), V(a))$ und $W = (W(i), W(a))$ zwei K -lineare Darstellungen. Ein *Morphismus* von $f : V \rightarrow W$ (nur Schreibweise!) ist ein Tupel $(f(i))_{i \in I}$ mit

K -linearen Abbildungen $f(i) : V(i) \longrightarrow W(i)$, so dass für jeden Pfeil $a = (i, j) \in E$ das folgende Diagramm kommutiert

$$\begin{array}{ccc} V(i) & \xrightarrow{f(i)} & W(i) \\ v(a) \downarrow & & \downarrow W(a) \\ V(j) & \xrightarrow{f(j)} & W(j), \end{array}$$

also $W(a) \circ f(i) = f(j) \circ V(a)$ gilt.

Komposition zweier Morphismen $f = (f(i))_{i \in I} : V \longrightarrow W$ und $g = (g(i))_{i \in I} : W \longrightarrow U$ ist definiert als $gf = (g(i) \circ f(i))_{i \in I} : V \longrightarrow U$, und dies ist offenbar wieder ein Morphismus von Darstellungen.

Ein Morphismus $f = (f(i)) : V \longrightarrow W$ heißt *Isomorphismus*, falls $f(i)$ für alle $i \in I$ Isomorphismen sind. Ein Morphismus $f = (f(i)) : V \longrightarrow W$ heißt *Monomorphismus* (bzw. *Epimorphismus*), falls jedes $f(i)$ injektiv (bzw. surjektiv) ist. Falls $V = W$ gilt, heißt f auch *Endomorphismus*, und falls f zusätzlich Isomorphismus ist, so heißt f *Automorphismus*. Gibt es zwischen zwei Darstellungen V und W einen Isomorphismus, so heißen V und W *isomorph*, und wir schreiben $V \simeq W$.

Zwischen zwei Darstellungen gibt es immer den Nullmorphismus, und jede Darstellung V hat als Endomorphismus den identischen Morphismus $1_V = (1_{V(i)})_{i \in I}$.

Die Menge aller Morphismen von $f : V \longrightarrow W$ bezeichnen wir mit $\text{Hom}(V, W)$. Im Fall $V = W$ schreiben wir $\text{End}(V) = \text{Hom}(V, V)$. Da man in offensichtlicher Weise die Summe $f + g$ von Morphismen $f, g : V \longrightarrow W$ erklären kann, ist $\text{Hom}(V, W)$ ein K -Vektorraum und $\text{End}(V)$ eine K -Algebra (ein Ring).

Übung 4.5. Ein Morphismus $f : V \longrightarrow W$ ist ein Isomorphismus genau dann, wenn es einen Morphismus $g : W \longrightarrow V$ gibt mit $gf = 1_V$ und $fg = 1_W$.

4.6 (Unter-/Faktordarstellungen). Sei $V = (V(i), V(a))$ eine Darstellung. Eine Darstellung $U = (U(i), U(a))$ heißt *Unterdarstellung* von V , falls $U(i) \subseteq V(i)$ Unterräume sind für alle $i \in I$, und falls die Inklusionen $U(i) \xrightarrow{\subseteq} V(i)$ einen Morphismus von Darstellungen definiert, falls also $V(a)(x) = U(a)(x)$ für alle $x \in U(i)$ und für alle Pfeile $a = (i, j)$ gilt.

Ist U eine Unterdarstellung von V , so ist die Faktordarstellung V/U definiert als Faktorvektorraum $(V/U)(i) = V(i)/U(i)$ für jedes $i \in I$, und für alle Pfeile $a = (i, j)$ die K -lineare Abbildung $(V/U)(a)$ definiert wird durch $(V/U)(a)(x + U(i)) \stackrel{\text{def}}{=} V(a)(x) + U(j)$. Dies ist wohldefiniert: Denn ist $x \in U(i)$, so ist $V(a)(x) = U(a)(x) \in U(j)$. Nach Konstruktion liefert dies eine Darstellung.

Offenbar gilt: Ist U eine Unterdarstellung von V , so ist $\underline{\dim}(U) \leq \underline{\dim}(V)$ und $\underline{\dim}(V/U) \leq \underline{\dim}(V)$.

4.7 (Kern/Bild/Cokern). Der Kern: Sei $f : V \rightarrow W$ ein Morphismus. Definiere $\text{Kern}(f) = U = (U(i), U(a))$, wobei $U(i) = \text{Kern}(f(i))$, und für jeden Pfeil $a = (i, j)$ sei $U(a)$ die eindeutig bestimmte K -lineare Abbildung $U(i) \rightarrow U(j)$, so dass das linke Quadrat im folgenden Diagramm kommutiert

$$\begin{array}{ccccc} U(i) & \xrightarrow{\subseteq} & V(i) & \xrightarrow{f(i)} & W(i) \\ U(a) \downarrow & & V(a) \downarrow & & \downarrow W(a) \\ U(j) & \xrightarrow{\subseteq} & V(j) & \xrightarrow{f(j)} & W(j). \end{array}$$

Für $x \in U(i) = \text{Kern } f(i)$ definiere $U(a)(x) = V(a)(x)$. Dann gilt

$$f(j)(U(a)(x)) = f(j)(V(a)(x)) = W(a)(f(i)(x)) = W(a)(0) = 0,$$

also liegt das Bild von $U(a)$ in $U(j)$. Das linke Quadrat kommutiert offenbar, und umgekehrt zeigt die Kommutativität, dass man $U(a)$ wie oben definieren muss.

Das Bild: Wird analog definiert. (ÜBUNG!)

Der Cokern: Dieser ist definiert als die Faktordarstellung $\text{Coker}(V) = W / \text{Bild}(f)$.

4.8 (Einfache Darstellungen). Eine Darstellung V eines Köchers heißt *einfach*, falls $V \neq 0$ und für jede Unterdarstellung $U \subseteq V$ gilt, dass $U = 0$ oder $U = V$ ist.

Übung 4.9. Sei $V \neq 0$ eine Darstellung eines Köchers. Folgende Aussagen sind äquivalent:

- (1) V ist einfach.
- (2) Jede Faktordarstellung von V ist 0 oder gleich V .
- (3) Ist $f : U \rightarrow V$ ein Monomorphismus, so gilt $U = 0$ oder f ist ein Isomorphismus.
- (4) Ist $g : V \rightarrow W$ ein Epimorphismus, so gilt $W = 0$ oder g ist ein Isomorphismus.

Übung 4.10. (1) Sei $\Gamma = (I, E, \alpha, \omega)$ ein Köcher. Für jedes $i \in I = \{1, \dots, n\}$ definiere eine Darstellung S_i durch

$$S_i(j) = \begin{cases} K & j = i, \\ 0 & j \neq i. \end{cases}$$

und $V(a) = 0$ für alle Pfeile $a \in E$. Dann ist S_i eine einfache Darstellung. Für $i \neq j$ gilt $S_i \not\cong S_j$.

(2) Sei Γ ohne orientierte Kreise und $V \neq 0$ eine Darstellung. Es gibt ein $i \in I$ und einen Monomorphismus $S_i \rightarrow V$. Es gibt ein $j \in I$ und einen Epimorphismus $V \rightarrow S_j$. (Hinweis: Γ kann als standardisiert angenommen werden.)

Proposition 4.11. Sei Γ ohne orientierte Kreise. Jede einfache Darstellung ist isomorph zu einem S_i (für ein $i \in I$).

Beweis. Ist V einfach, so gibt es (wegen $V \neq 0$) nach vorstehender Übung ein i und einen Monomorphismus $S_i \rightarrow V$, der aber wegen der Einfachheit von V auch ein Epimorphismus sein muss. \square

Folgerung 4.12. Sei Γ ohne orientierte Kreise. Sei Q die zu $|\Gamma|$ gehörige Einheitsform. Das Bilden des Dimensionsvektors $\underline{\dim}$ induziert eine Bijektion zwischen den Isomorphieklassen der einfachen Darstellungen von Γ und den einfachen Wurzeln von Q .

Beweis. Es genügt zu bemerken, dass für jede Darstellung V mit $\underline{\dim}(V) = e_i$ offenbar $V \simeq S_i$ gelten muss. \square

Übung 4.13. Sei Γ der Köcher $\tilde{\mathbb{A}}_0$ (ein Punkt 1 mit einer Schlaufe a). Für jedes $\alpha \in K$ sei S_α die Darstellung mit $S_\alpha(1) = K$ und $S_\alpha(a) : K \rightarrow K$ die lineare Abbildung mit $S_\alpha(a)(x) = \alpha x$. Man zeige, dass alle S_α einfache Darstellungen sind mit $S_\alpha \not\cong S_\beta$ für alle $\alpha \neq \beta$.

4.14 (Direkte Summe). Sei $V = (V(i), (V(a)))$ eine Darstellung. V ist direkte Summe von zwei Unterdarstellungen $U_1 = (U_1(i), U_1(a))$ und $U_2 = (U_2(i), U_2(a))$, und man schreibt $V = U_1 \oplus U_2$, falls

- (1) für jedes $i \in I$ ist der Vektorraum $V(i) = U_1(i) \oplus U_2(i)$ direkte Summe der Unterräume $U_1(i)$ und $U_2(i)$;
- (2) für jeden Pfeil a ist die lineare Abbildung $V(a) = U_1(a) \oplus U_2(a)$ direkte Summe der linearen Abbildungen $U_1(a)$ und $U_2(a)$.

Dabei ist die direkte Summe zweier linearer Abbildung wie folgt erklärt: Seien V, V' Vektorräume und $V = U_1 \oplus U_2$ sowie $V' = U'_1 \oplus U'_2$ direkte Summen von Unterräumen. Seien $f_1 : U_1 \rightarrow U'_1$ und $f_2 : U_2 \rightarrow U'_2$ lineare Abbildungen. Dann ist $f_1 \oplus f_2 : V \rightarrow V'$ definiert durch $(f_1 \oplus f_2)(u_1 + u_2) = f_1(u_1) + f_2(u_2)$ für alle $u_1 \in U_1, u_2 \in U_2$.

Sind B_i bzw. B'_i Basen von U_i bzw. U'_i ($i = 1, 2$), so sind $B = (B_1, B_2)$ bzw. $B' = (B'_1, B'_2)$ Basen von V bzw. V' , und bzgl. solcher Basen wird die lineare Abbildung $f_1 \oplus f_2 : V \rightarrow V'$ dargestellt durch die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix},$$

wobei A_i die Darstellungsmatrix von f_i bzgl. der entsprechenden Basen ist ($i = 1, 2$).

Man kann die direkte Summe nicht nur für Unterdarstellungen einer Darstellung definieren, sondern allgemeiner: Sind $V = (V(i), V(a))$ und $W = (W(i), W(a))$ Darstellungen, so definiert man

$$V \oplus W \stackrel{\text{def}}{=} (V(i) \oplus W(i), V(a) \oplus W(a)).$$

4.15 (Unzerlegbarkeit). Eine Darstellung V heißt *unzerlegbar*, falls $V \neq 0$ ist, und falls aus einer Zerlegung $V = U_1 \oplus U_2$ in eine direkte Summe von Unterräumen stets folgt, dass $U_1 = 0$ oder $U_2 = 0$ gilt.

Offenbar ist jede einfache Darstellung insbesondere unzerlegbar. Die Umkehrung gilt im allgemeinen nicht.

Die unzerlegbaren Darstellungen sind die Grunbausteine für alle Darstellungen:

Satz 4.16 (Krull-Remak-Schmidt). *Jede K -lineare Darstellung V eines Köchers Γ besitzt eine direkte Zerlegung*

$$V = V_1 \oplus \dots \oplus V_s$$

in unzerlegbare Unterdarstellungen V_i . Jede solche Zerlegung ist bis auf Isomorphie und Reihenfolge der Summanden eindeutig.

Beweis. Die Existenz ergibt sich leicht per Induktion nach der “totalen Dimension” $\dim_K V_1 + \dots + \dim_K V_n$ von V : Ist diese = 0, so ist $V = 0$, ist sie = 1, so ist V offenbar unzerlegbar (sogar einfach). Ist die totale Dimension > 1 , so ist V entweder unzerlegbar oder V zerlegt sich in ein direkte Summe von Unterdarstellungen $V = U_1 \oplus U_2$, und auf U_1 und U_2 kann man die Induktionsvoraussetzung anwenden.

Die Eindeutigkeit ist komplizierter zu zeigen. Wir verweisen auf die Literatur. (Wir werden evtl. später nochmal darauf eingehen.) \square

4.17 (Endlicher Darstellungstyp). Ein Köcher Γ heißt von *endlichem Darstellungstyp* (über dem Körper K), falls es bis auf Isomorphie nur endlich viele unzerlegbare Darstellungen gibt.

Oftmals ist es nicht einfach, die Unzerlegbarkeit bzw. die Zerlegbarkeit einer Darstellung direkt mit Hilfe der Definition der Unzerlegbarkeit nachzuweisen. Stattdessen ist es hilfreich, den Endomorphismenring einer Darstellung zu untersuchen.

Proposition 4.18. *Sei $V \neq 0$ eine Darstellung. Dann sind äquivalent:*

- (1) V ist unzerlegbar.
- (2) Die einzigen idempotenten Elemente in $\text{End}(V)$ sind 0 und 1.

Speziell: Ist $\text{End}(V) \simeq K$, so ist V unzerlegbar. Ist V unzerlegbar und W eine Darstellung mit $\text{End}(W) \simeq \text{End}(V)$, so ist auch W unzerlegbar.

Beweis. Sei $V = U_1 \oplus U_2$ direkte Summe von Unterdarstellungen. Definiere $e_1, e_2 \in \text{End}(V)$ wie folgt: Für jedes $i \in I$ ist $e_1(i) : V(i) \rightarrow V(i) = U_1(i) \oplus U_2(i)$ die Projektion auf den Unterraum $U_1(i)$. Dann gilt für jeden Pfeil $i \xrightarrow{a} j$ wegen

$$V(a) = \begin{pmatrix} U_1(a) & 0 \\ 0 & U_2(a) \end{pmatrix}$$

die Gleichheit $V(a) \circ e_1(i) = e_1(j) \circ V(a)$, d. h. das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} V(i) & \xrightarrow{e_1(i)} & V(i) \\ V(a) \downarrow & & \downarrow V(a) \\ V(j) & \xrightarrow{e_1(j)} & V(j), \end{array}$$

kommutiert, und e_1 ist ein Endomorphismus von V . Offenbar gilt $e_1^2 \stackrel{\text{def}}{=} e_1 \circ e_1 = e_1$. Analog wird e_2 definiert. Sind $U_1, U_2 \neq 0$, so gilt $e_1, e_2 \neq 0, 1$. Ist also V zerlegbar, so gibt es nicht-triviale Idempotente in $\text{End}(V)$.

Sei umgekehrt $e \in \text{End}(V)$ idempotent. Dann ist auch $1-e$ idempotent. Es sind $U_1 = \text{Bild}(e) \subseteq V$ und $U_2 = \text{Bild}(1-e)$ Unterdarstellungen von V . Ist $e \neq 0, 1$, so sind $U_1 \neq 0$ und $U_2 \neq 0$. Aus $e(1-e) = 0 = (1-e)e$ erhält man leicht $V = U_1 \oplus U_2$: Zunächst $V(i) = U_1(i) \oplus U_2(i)$ für alle $i \in I$, und für jeden Pfeil $i \xrightarrow{a} j$ gilt $V(a) \circ e(i) = e(j) \circ V(a)$ und $V(a) \circ (1-e(i)) = (1-e(j)) \circ V(a)$, und es ergibt sich

$$e(j) \circ V(a) \circ (1-e(i)) = V(a) \circ e(i) \circ (1-e(i)) = 0$$

sowie

$$(1-e(j)) \circ V(a) \circ e(i) = V(a) \circ e(i) \circ (1-e(i)) = 0,$$

woraus sich sofort

$$V(a) = \begin{pmatrix} U_1(a) & 0 \\ 0 & U_2(a) \end{pmatrix}$$

ergibt, d. h. wir haben $V = U_1 \oplus U_2$. □

4.19 (Normalformen). Isomorphie von Darstellungen (oder anderen “Objekten”) ist eine Äquivalenzrelation. Man möchte Objekte bis auf Isomorphie klassifizieren. Eine Äquivalenzrelation liefert eine Einteilung in die Äquivalenzklassen. Grob gesprochen ist eine Normalform eines Objektes ein Repräsentant derselben Äquivalenzklasse, welcher sich relativ leicht und prägnant beschreiben lässt und welcher einem Objekt eindeutig zugeordnet werden kann.

In der Linearen Algebra studiert man solche Normalformen in gewissen Fällen. Etwa die Klassifikation von $m \times n$ -Matrizen bis auf Äquivalenz. Oder die Klassifikation der quadratischen Matrizen (Endomorphismen) bis auf Ähnlichkeit, welche auf die Jordansche Normalform führt (über algebraisch abgeschlossenem Körper K). Oder die Normalformen orthogonaler, symmetrischer oder unitärer Abbildungen, etc.

Wir gehen nun auf die erstgenannten Probleme näher ein.

Beispiel 4.20. Sei $f : K^n \rightarrow K^m$ eine lineare Abbildung. Dies ist gerade eine Darstellung des Köchers $\Gamma : \overset{1}{\circ} \rightarrow \overset{2}{\circ}$. Wir fixieren auf K^n und K^m Basen, etwa die Standardbasen, so dass f durch eine Matrix $A \in M_{m,n}(K)$ gegeben ist. Zwei solche Matrizen A und B heißen äquivalent, falls es Matrizen $P \in \text{GL}_m(K)$ und $Q \in \text{GL}_n(K)$ gibt mit $B = PAQ$. Anders ausgedrückt, lineare Abbildungen $f, g : K^n \rightarrow K^m$ heißen äquivalent, falls es Isomorphismen $\varphi : K^n \rightarrow K^n$ und $\psi : K^m \rightarrow K^m$ gibt mit $g = \psi f \varphi^{-1}$, bzw. $g\varphi = \psi f$. Dies bedeutet gerade, dass $K^n \xrightarrow{f} K^m$ und $K^n \xrightarrow{g} K^m$ isomorphe Darstellungen von Γ liefern. In der Linearen Algebra I wird eine Normalform

für f bzw. angeben: A ist äquivalent zu der Matrix

$$R = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix},$$

wobei $r = \text{Rang}(A)$ viele Einsen auftreten und sonst nur Nullen. Wäre $m = n$, so wäre offenbar $R = (1) \oplus (1) \oplus \dots \oplus (1) \oplus (0) \oplus \dots \oplus (0)$ (r -mal 1), bzw. wäre die Darstellung $K^n \xrightarrow{f} K^m$ isomorph zu einer direkten Summe von Darstellungen der Form

$$\mathbf{1} = (K \xrightarrow{1} K) \text{ (} r\text{-mal) und } (K \xrightarrow{0} K) = (K \xrightarrow{0} 0) \oplus (0 \xrightarrow{0} K).$$

Es ist $\mathbf{1}$ eine unzerlegbare Darstellung von Γ , denn es ist offenbar $\text{End}(\mathbf{1}) = K$. Im Fall $m \neq n$ treten in der direkten Summe die Summanden der Form $0 \xrightarrow{0} K$ und $K \xrightarrow{0} 0$ mit ungleicher Vielfachheit auf. Dies sind einfache Darstellungen, also unzerlegbare Darstellungen.

Zusammengefasst:

Proposition 4.21. *Die unzerlegbaren Darstellungen des Köchers $\Gamma : \circ \xrightarrow{1} \circ$ sind (bis auf Isomorphie) gegeben durch die drei Darstellungen*

$$K \xrightarrow{1} K, \quad 0 \xrightarrow{0} K, \quad K \xrightarrow{0} 0.$$

Insbesondere ist Γ von endlichem Darstellungstyp.

Bemerkung 4.22. (1) Die Dimensionsvektoren der obigen drei unzerlegbaren Darstellungen sind $(1, 1)$, $(0, 1)$ und $(1, 0)$. Dies sind gerade die positiven Wurzeln des Graphen $|\Gamma| = \mathbb{A}_2$.

(2) Für den noch einfacheren Fall $\Gamma = \mathbb{A}_1$ ist die einzige unzerlegbare Darstellung K .

Beispiel 4.23. Sei nun Γ der Einschlaufenköcher. Eine Darstellung dieses Köchers ist gerade ein Endomorphismus eines endlichdimensionalen Vektorraums. Isomorphie von Darstellungen bedeutet gerade Ähnlichkeit von Endomorphismen bzw. quadratischen Matrizen. Wir nehmen nun an, dass der Körper K algebraisch abgeschlossen ist, etwa $K = \mathbb{C}$. In der Linearen Algebra II wird gezeigt, dass der Satz von der Jordanschen Normalform gilt: Jede quadratische Matrix ist ähnlich zu einer direkten Summe von Jordankästchen der Form

$$J_n(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & \lambda & 1 \\ & & & & \lambda \end{pmatrix} \in M_n(K).$$

(Einsen ununterbrochen auf der Nebendiagonalen.)

Behauptung: Die Darstellungen $(K^n, J_n(\lambda))$ sind unzerlegbar und paarweise nicht-isomorph ($n \geq 1, \lambda \in K$.)

Eine direkte Zerlegung von $(V, f) = (K^n, J_n(\lambda))$ ist eine direkte Zerlegung des Vektorraums $V = U_1 \oplus U_2$ in Unterräume U_1 und U_2 , die f -invariant sind, d. h. $f(U_1) \subseteq U_1$ und $f(U_2) \subseteq U_2$. Ist $g = f - \lambda \cdot 1_V$, so sind U_1 und U_2 auch g -invariant, und g ist nilpotent mit Nilpotenzindex genau n (was man der Matrix $J_n(0)$ ansieht). Die Einschränkungen von g auf U_1 und U_2 sind ebenfalls nilpotent. Wären dies Matrizen kleineren Formats, so würde dies einen kleineren Nilpotenzindex liefern.

Vergleich der Dimensionen bzw. der Eigenwerte liefert die Nicht-Isomorphie. (Der Beweis gilt offenbar über jedem Körper K .)

Proposition 4.24. Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper. Die unzerlegbaren Darstellungen des Einschlaufenköchers sind (bis auf Isomorphie) gegeben durch die Darstellungen

$$(K^n, J_n(\lambda)) \quad (n \geq 1, \lambda \in K),$$

und diese sind paarweise nicht-isomorph. Insbesondere ist der Einschlaufenköcher nicht von endlichem Darstellungstyp über K .

Bemerkung 4.25. Obige Darstellungen sind auch unzerlegbare Darstellungen des Einschlaufenköchers über einem beliebigen Körper K . Jedoch gibt es über nicht-algebraisch abgeschlossenem Körper weitere unzerlegbare Darstellungen.

Bemerkung 4.26. Man mache sich umgekehrt klar, dass obige Klassifikationen der unzerlegbaren Darstellungen die beiden beschriebenen Normalformenprobleme aus der Linearen Algebra lösen.

Übung 4.27. Sei Γ der Einschlaufenköcher mit Punkt 1 und Schlaufe a . Sei $K = \mathbb{R}$ der Körper der reellen Zahlen. Man zeige, dass folgendes V eine einfache Darstellung ist, wobei $V(1) = \mathbb{R}^2$ und $V(a)$ gegeben ist durch die Matrix $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Man zeige $\text{End}(V) \simeq \mathbb{C}$.

Die beiden folgenden Sätze bilden zusammengenommen den Satz von Gabriel.

Theorem 4.28. Sei K ein Körper und Γ ein zusammenhängender Köcher und $|\Gamma|$ der unterliegende Graph. Dann sind äquivalent:

- (1) Γ ist von endlichem Darstellungstyp.
- (2) Die zugehörige quadratische Form $Q_{|\Gamma|}$ ist positiv definit.
- (3) $|\Gamma|$ ist ein Dynkin-Graph \mathbb{A}_n ($n \geq 1$), \mathbb{D}_n ($n \geq 4$) oder $\mathbb{E}_6, \mathbb{E}_7, \mathbb{E}_8$.

Theorem 4.29. Sei K ein Körper und Γ ein zusammenhängender Köcher, so dass die zugehörige quadratische Form $Q_{|\Gamma|}$ positiv definit ist. Dann induziert \dim eine bijektive Abbildung zwischen der Menge der Isomorphieklassen unzerlegbarer Darstellungen von Γ und der Menge der positiven Wurzeln von $Q_{|\Gamma|}$.

Folgerung 4.30. *Die Frage, ob der Darstellungstyp von Γ endlich oder unendlich ist, und, im endlichen Fall, die Anzahl der Isomorphieklassen unzerlegbarer Darstellungen, hängt weder von der Orientierung von Γ noch vom Grundkörper K ab.*

Ziel in folgenden Abschnitten ist der Beweis der beiden Theoreme.

5. UNENDLICHER DARSTELLUNGSTYP

Proposition 5.1. *Sei Γ ein Köcher mit unterliegendem Graphen $|\Gamma| = \tilde{A}_m$ ($m \geq 0$). Dann ist Γ von unendlichem Darstellungstyp.*

Beweis. Sei $m = 0$, also Γ der Einschlaufenköcher. Wegen Proposition 4.24 und Bemerkung 4.25 liefern $M_n = (K^n, J_n(0))$ unendliche viele paarweise nicht-isomorphe unzerlegbare Darstellungen.

Sei $m > 0$. Fixiere einen Pfeil a in Γ . Sei V_n die Darstellung, die an a gegeben ist durch $K^n \xrightarrow{J_n(0)} K^n$ und an allen anderen Pfeile durch $K^n \xrightarrow{1} K^n$. Wegen der Identitäten besteht ein Endomorphismus f von V_n an jedem Punkt aus ein und derselben linearen Abbildung $f(i)$. Daran sieht man, dass V_n einen zu $\text{End}(M_n)$ (aus dem ersten Beweisteil) isomorphen Endomorphismenring hat und daher unzerlegbar ist (vgl. Proposition 4.18). \square

Proposition 5.2. *Sei Γ ein Köcher mit zwei Punkten 1 und 2 und $s \geq 2$ Pfeilen a_1, a_2, \dots, a_s von 1 nach 2. Dann hat Γ unendlichen Darstellungstyp.*

Beweis. Definiere V_n wie folgt: Es ist $V(1) = K^n = V(2)$ und $V(a_1) = J_n(0)$ sowie $V(a_j) = 1_{K^n}$ für $j = 2, \dots, s$. Man sieht unmittelbar, dass V_n einen Endomorphismenring hat, der isomorph ist zu dem Endomorphismenring der Darstellung $(K^n, J_n(0))$ des Einschlaufenköchers. \square

Bemerkung 5.3. In obigen Beweisen kann man statt $K^n \xrightarrow{J_n(0)} K^n$ auch $K \xrightarrow{J_1(\lambda)} K$ betrachten ($\lambda \in K$) und bekommt damit, falls K unendlich ist, unendlich viele paarweise nicht-isomorphe unzerlegbare (sogar einfache) Darstellungen. Ist K ein endlicher Körper, so muss man dies etwas modifizieren: Dann betrachtet man $K[X]/(p) \xrightarrow{\cdot X} K[X]/(p)$, wobei p ein irreduzibles normiertes Polynom ist, und verwendet, dass es unendlich viele davon gibt (vgl. eine Vorlesung über Körper-/Galoistheorie). (Es ist $K \xrightarrow{J_1(\lambda)} K$ der Spezialfall $K[X]/(X - \lambda) \xrightarrow{\cdot X} K[X]/(X - \lambda)$.)

Proposition 5.4. *Sei Γ' ein Teilköcher von Γ (nicht notwendigerweise voll). Hat Γ' unendlichen Darstellungstyp, so auch Γ .*

Beweis. Der Beweis stellt das bereits in den vorherigen Propositionen verwendete Beweisprinzip systematisch dar. Konstruiere eine Abbildung $F : \mathcal{L}_K(\Gamma') \rightarrow \mathcal{L}_K(\Gamma)$ wie folgt. Sei $V = (V(i), V(a))_{i \in I', a \in E'}$ eine Darstellung von Γ' . Dann ist $F(V) = W = (W(i), W(a))_{i \in I, a \in E}$ definiert durch

$$W(i) = \begin{cases} V(i) & i \in I', \\ 0 & i \in I \setminus I' \end{cases}$$

und

$$W(a) = \begin{cases} V(a) & a \in E', \\ 0 & a \in E \setminus E'. \end{cases}$$

Es ist unmittelbar klar, dass $F(V)$ eine Darstellung von Γ ist.

Für einen Morphismus $f \in \text{Hom}_{\Gamma'}(V_1, V_2)$ definiert man auch einen Morphismus $F(f) \in \text{Hom}_{\Gamma}(F(V_1), F(V_2))$ wie folgt:

$$F(f)(i) = \begin{cases} f(i) & i \in E', \\ 0 & i \in E \setminus E'. \end{cases}$$

Es ist offensichtlich, dass für $f \in \text{Hom}_{\Gamma'}(V_1, V_2)$ und $g \in \text{Hom}_{\Gamma'}(V_2, V_3)$ gilt

$$(5.1) \quad F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$$

sowie

$$(5.2) \quad F(1_V) = 1_{F(V)}.$$

Die Zuordnung $f \mapsto F(f)$ ist außerdem K -linear. Nach Konstruktion ist auch folgendes unmittelbar klar: F induziert für alle $V_1, V_2 \in \mathcal{L}_K(\Gamma')$ einen Isomorphismus

$$(5.3) \quad \text{Hom}_{\Gamma'}(V_1, V_2) \simeq \text{Hom}_{\Gamma}(F(V_1), F(V_2)), \quad f \mapsto F(f)$$

Es folgt:

- (1) Für alle $V_1, V_2 \in \mathcal{L}_K(\Gamma')$ gilt $V_1 \simeq V_2$ genau dann, wenn $F(V_1) \simeq F(V_2)$ gilt. (Unmittelbar aus (5.3).)
- (2) Für alle $V \in \mathcal{L}_K(\Gamma')$ gilt: V ist unzerlegbar genau dann, wenn $F(V)$ unzerlegbar ist. (Folgt mit Proposition 4.18.)

Sind nun V_i unendlich viele paarweise nicht-isomorphe unzerlegbare Darstellungen von Γ' , so sind $F(V_i)$ unendlich viele paarweise nicht-isomorphe unzerlegbare Darstellungen von Γ . \square

5.5 (Funktoen). Man nennt eine Abbildung $F : \mathcal{L}_K(\Gamma') \longrightarrow \mathcal{L}_K(\Gamma)$, die sowohl den Darstellungen (Objekten) wie auch den Morphismen Darstellungen bzw. Morphismen zuordnet und die Eigenschaften (5.1) und (5.2) erfüllt, einen *Funktor*, und da $f \mapsto F(f)$ eine lineare Abbildung ist, auch einen K -linearen Funktor. Einen Funktor mit der Eigenschaft (5.3) nennt man *voll-treu* (*voll* (surjektiv) *und* *treu* (injektiv)), oder auch eine volle Einbettung. Die daraus resultierenden Eigenschaften (1) und (2) sind für Betrachtungen des Darstellungstyps natürlich besonders wichtig.

Natürlich hat man Funktoen $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ auch in einem allgemeineren Kontext zwischen *Kategorien* \mathcal{C} und \mathcal{D} , die aus *Objekten* und *Morphismen* zwischen diesen Objekten bestehen. Wir wollen aber die allgemeine Theorie dazu zunächst nicht vertiefen.

Übung 5.6. Man drücke die Beweise von Propositionen 5.1 und 5.2 mit Hilfe von voll-treuen Funktoen aus.

Übung 5.7. Sei Γ' ein Teilköcher von Γ . Man definiere auf kanonische Weise einen Funktor $G : \mathcal{L}_K(\Gamma) \rightarrow \mathcal{L}_K(\Gamma')$, so dass mit dem Funktor $F : \mathcal{L}_K(\Gamma') \rightarrow \mathcal{L}_K(\Gamma)$ aus dem Beweis von Proposition 5.4 für jede Darstellung $V \in \mathcal{L}_K(\Gamma')$ gilt: $G(F(V)) \simeq V$. Ist der Funktor G immer voll-treu? Gilt auch immer $F(G(V)) \simeq V$ ($V \in \mathcal{L}_K(\Gamma)$)?

Übung 5.8. Es sei $\Gamma = \Gamma' + \Gamma''$ eine disjunkte Vereinigung von Köchern. Es ist Γ von endlichem Darstellungstyp genau dann, wenn Γ' und Γ'' von endlichem Darstellungstyp sind.

Proposition 5.9. *Es entstehe Γ' aus Γ durch Schrumpfen eines Pfeils $a = (i, j)$. Hat Γ' unendlichen Darstellungstyp, so auch Γ .*

Beweis. Nenne den zusammengeschrumpften Punkt $i' \in I'$. Definiere einen Funktor $F : \mathcal{L}_K(\Gamma') \rightarrow \mathcal{L}_K(\Gamma)$ durch

$$F(V)(k) = \begin{cases} V(k) & k \neq i, j, \\ V(i') & \text{sonst,} \end{cases}$$

sowie für Pfeile $k \xrightarrow{b} l$

$$F(V)(b) = \begin{cases} V(b) & b \neq a, \\ 1_{V(i')} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Ist $f : V \rightarrow W$ ein Morphismus von Darstellungen von Γ' , so definiere

$$F(f)(k) = \begin{cases} f(k) & k \neq i, j, \\ f(i') & \text{sonst.} \end{cases}$$

Offenbar ist $F(f)$ ein Morphismus zwischen den Darstellungen $F(V)$ und $F(W)$, und F ist ein Funktor. Da F einen Morphismus nur so abändert, dass an der Stelle i' die lineare Abbildung $f(i')$ dupliziert wird, ist klar, dass der Funktor treu ist. Da in $F(V)$ und $F(W)$ am Pfeil a die Identitäten stehen, ist auch klar, dass der Funktor voll ist. \square

Proposition 5.10. *Sei Γ ein zusammenhängender Graph, der kein Dynkin-Graph ist. Dann enthält Γ einen Teilgraphen Γ' , der ein erweiterter Dynkin-Graph $\tilde{\mathbb{A}}_m$ ($m \geq 0$), $\tilde{\mathbb{D}}_m$ ($m \geq 4$) oder $\tilde{\mathbb{E}}_m$ ($m = 6, 7, 8$) ist.*

Beweis. Enthält Γ einen Kreis, so als Teilgraphen einen erweiterten Dynkin-Graphen $\tilde{\mathbb{A}}_m$. Also kann man annehmen, dass Γ keine Kreise enthält, insbesondere auch keine mehrfachen Kanten. Da Γ nicht von der Form \mathbb{A}_n muss es einen Verzweigungspunkt der Ordnung ≥ 3 geben. Ist die Ordnung sogar ≥ 4 , so enthält Γ den erweiterten Dynkin-Graphen $\tilde{\mathbb{D}}_4$. Enthält Γ einen weiteren Verzweigungspunkt der Ordnung 3, so ist $\tilde{\mathbb{D}}_m$ ($m \geq 5$) enthalten. Also kann man annehmen, dass Γ genau einen Verzweigungspunkt der Ordnung 3 enthält und keine höheren Ordnungen. Da Γ nicht von der Form \mathbb{D}_n ist, müssen dabei mindestens zwei Arme eine Länge (= Anzahl Pfeile) ≥ 2 haben. Hat auch der dritte Arm eine Länge ≥ 2 , so ist $\tilde{\mathbb{E}}_6$ enthalten. Hat der

dritte Arm die Länge 1, so kommt man leicht darauf, dass $\tilde{\mathbb{E}}_7$ oder $\tilde{\mathbb{E}}_8$ als Teilgraphen enthalten sein müssen. \square

Satz 5.11. *Sei Γ ein Köcher, so dass der unterliegende Graph $|\Gamma|$ ein erweiterter Dynkin-Graph $\tilde{\mathbb{A}}_m$ ($m \geq 0$), $\tilde{\mathbb{D}}_m$ ($m \geq 4$) oder $\tilde{\mathbb{E}}_m$ ($m = 6, 7, 8$) ist. Dann ist Γ von unendlichem Darstellungstyp.*

Der Beweis dieses Satzes wird auf später verschoben. Man beachte, dass er nur noch für die Fälle $\tilde{\mathbb{D}}_4$ und $\tilde{\mathbb{E}}_m$ ($m = 6, 7, 8$) bewiesen werden muss. Mit diesem Satz ergibt sich sofort die Implikation “(1) \Rightarrow (3)” aus Theorem 4.28:

Folgerung 5.12. *Sei Γ ein zusammenhängender Köcher, der von endlichem Darstellungstyp ist. Dann ist $|\Gamma|$ ein Dynkin-Graph \mathbb{A}_n ($n \geq 1$), \mathbb{D}_n ($n \geq 4$) oder $\mathbb{E}_6, \mathbb{E}_7, \mathbb{E}_8$.*

6. SPIEGELUNGSFUNKTOREN

Das wichtigste Hilfsmittel für den Beweis sind die von Bernstein, Gelfand und Ponomarev in [3] entwickelten Spiegelungsfunktoren.

6.1 (Spiegelungsfunktoren). Sei Γ ein Köcher und k ein Punkt in Γ .

(1) Sei k eine Quelle. Definiere einen Funktor $R_{\bar{k}} : \mathcal{L}_K(\Gamma) \longrightarrow \mathcal{L}_K(\sigma_k \Gamma)$ wie folgt. Sei $V = (V(i), V(a))_{i \in I, a \in E}$ eine Darstellung von Γ . Setze $\Gamma' = \sigma_k \Gamma$, mit Punktmenge $I' = I$ und Pfeilmenge E' . Definiere eine Darstellung $R_{\bar{k}}^- = W = (W(i), W(a))_{i \in I, a \in E'}$ durch $W(i) = V(i)$ für jedes $i \in I$ mit $i \neq k$; der Vektorraum $W(k)$ wird wie folgt definiert: Seien i_1, \dots, i_s die Knoten, so dass es Pfeile $k \xrightarrow{a_j} i_j$ in Γ gibt ($j = 1, \dots, s$). Bezeichne mit b_j die entsprechenden umgekehrten Pfeile $k \xleftarrow{b_j} i_j$ in Γ' . Sei

$$(6.1) \quad \phi = \begin{pmatrix} V(a_1) \\ V(a_2) \\ \vdots \\ V(a_s) \end{pmatrix}$$

die lineare Abbildung

$$V(k) \longrightarrow \bigoplus_{j=1}^s V(i_j)$$

mit $\phi(x) = (V(a_1)(x), \dots, V(a_s)(x))$. Sei

$$W(k) = \text{Coker}(\phi) = \bigoplus_{j=1}^s V(i_j) / \text{Bild}(\phi)$$

und $\pi : \bigoplus_{j=1}^s V(i_j) \longrightarrow W(k)$ die kanonische Surjektion. Dann ist π von der Form $\pi = (W(b_1), \dots, W(b_s))$ wobei $W(b_j) : W(i_j) = V(i_j) \longrightarrow W(k)$ definiert wird durch $W(b_j) = \pi(0, \dots, 0, x, 0, \dots, 0)$ (wobei x an der j -ten Stelle steht. Die restlichen linearen Abbildungen $W(b)$ für Pfeile $b \neq b_1, \dots, b_s$ sind definiert durch $W(b) = V(b)$.

Wir erklären nun, wie R_k^- auf Morphismen wirkt. Sei $f : V \rightarrow V'$ ein Morphismus von Darstellungen von Γ . Es wird $R_k^-(f)(i) = f(i)$ gesetzt für jedes $i \in I$ mit $i \neq k$. Es muss noch $R_k^-(f)(k)$ definiert werden. Definiere W', ϕ' und π' analog zu W, ϕ und π . Man erhält folgendes Diagramm

$$(6.2) \quad \begin{array}{ccccc} V(k) & \xrightarrow{\phi} & \bigoplus_{j=1}^s V(i_j) & \xrightarrow{\pi} & W(k) \\ f(k) \downarrow & & \downarrow \bigoplus_{j=1}^s f(i_j) & & \downarrow R_k^-(f)(k) \\ V'(k) & \xrightarrow{\phi'} & \bigoplus_{j=1}^s V'(i_j) & \xrightarrow{\pi'} & W'(k), \end{array}$$

wobei das linke Quadrat kommutiert, wie man leicht nachrechnet, und daher die lineare Abbildung $R_k^-(f)(k)$ auf den Cokernen induziert, die eindeutig dadurch definiert ist, dass das rechte Quadrat kommutiert (vgl. das Argument in 4.6). Aus dieser Kommutativität folgt auch leicht, dass R_k^- ein Morphismus ist.

(2) Sei k eine Senke. Definiere einen Funktor $R_K^+ : \mathcal{L}_K(\Gamma) \rightarrow \mathcal{L}_K(\sigma_k \Gamma)$ wie folgt. Sei $V = (V(i), V(a))_{i \in I, a \in E}$ eine Darstellung von Γ . Setze $\Gamma' = \sigma_k \Gamma$, mit Punktmenge $I' = I$ und Pfeilmenge E' . Definiere eine Darstellung $R_k^- = W = (W(i), W(a))_{i \in I, a \in E'}$ durch $W(i) = V(i)$ für jedes $i \in I$ mit $i \neq k$; der Vektorraum $W(k)$ wird wie folgt definiert: Seien i_1, \dots, i_s die Knoten, so dass es Pfeile $i_j \xrightarrow{a_j} k$ in Γ gibt ($j = 1, \dots, s$). Bezeichne mit b_j die entsprechenden umgekehrten Pfeile $i_j \xleftarrow{b_j} k$ in Γ' . Sei

$$(6.3) \quad \psi = (V(a_1), \dots, V(a_s))$$

die lineare Abbildung

$$\bigoplus_{j=1}^s V(i_j) \rightarrow V(k),$$

definiert durch $\psi(x_1, \dots, x_s) = \sum_{j=1}^s V(a_j)(x_j)$. Sei $W(k) = \text{Kern}(\psi)$ und $\iota : W(k) \rightarrow \bigoplus_{j=1}^s V(i_j)$ die Inklusionsabbildung. Es ist dann ι von der Form $\iota = (W(b_1), \dots, W(b_s))^{tr}$, wobei $W(b_j) : W(k) \rightarrow V(i_j)$ definiert wird durch $W(b_j) = p_j \circ \iota$ (p_j die j -te Projektion). Die restlichen linearen Abbildungen $W(b)$ für Pfeile $b \neq b_1, \dots, b_s$ sind definiert durch $W(b) = V(b)$.

Für Morphismen wird R_k^+ analog wie R_k^- definiert; man nimmt hier die entsprechenden Abbildungen zwischen den Kernen statt den Cokernen.

Lemma 6.2. (1) Ist k eine Quelle bzw. eine Senke, so ist R_k^- (bzw. R_k^+) ein K -linearer Funktor $\mathcal{L}_K(\Gamma) \rightarrow \mathcal{L}_K(\sigma_k \Gamma)$.

(2) $R_k^\pm(V \oplus V') \simeq R_k^\pm(V) \oplus R_k^\pm(V')$.

(3) Sei k eine Quelle. Dann gilt

$$V \simeq R_k^+ R_k^-(V) \oplus F,$$

wobei

$$F(i) = \begin{cases} \text{Kern}(\phi) & i = k \\ 0 & i \neq k. \end{cases}$$

wobei ϕ wie in (6.1) definiert ist und alle lineare Abbildungen von F die Nullabbildungen sind.

(4) Sei k eine Senke. Dann gilt

$$V \simeq R_k^- R_k^+(V) \oplus G,$$

wobei

$$F(i) = \begin{cases} \text{Coker}(\psi) & i = k \\ 0 & i \neq k. \end{cases}$$

wobei ϕ wie in (6.3) definiert ist und alle lineare Abbildungen von G die Nullabbildungen sind.

Beweis. (1) Die Eigenschaften (5.1) und (5.2) sowie die K -Linearität ergeben sich leicht aus der Eindeutigkeit der auf den Cokernen bzw. Kernen induzierten Abbildungen. Es ist noch zu zeigen, dass für einen Morphismus f auch $R_k^\pm(f)$ wieder einen Morphismus liefert, also die Kommutativität gewisser Diagramme gilt. Dies ist nur für den Fall, dass der Knoten k bzw. ein Pfeil a_i involviert ist. Dafür ergibt sich die Aussage aus der Kommutativität des rechten Quadrats in (6.2), indem man mit Hilfe der Inklusionabbildungen auf die Komponenten einschränkt.

(2) Da R_k^\pm K -lineare Funktoren sind, also insbesondere $R_k^\pm(f + g) = R_k^\pm(f) + R_k^\pm(g)$ für Morphismen f und g gilt, ergibt sich dies aus folgender Charakterisierung der direkten Summe (ÜBUNG): Seien M , N und X Darstellungen eines Köchers Γ . Es gilt $X \simeq M \oplus N$ genau dann, wenn es Morphismen $i_M : M \rightarrow X$, $i_N : N \rightarrow X$, sowie $p_M : X \rightarrow M$, $p_N : X \rightarrow N$ gibt mit

$$p_M \circ i_M = 1_M, \quad p_N \circ i_N = 1_N, \quad p_M \circ i_N = 0, \quad p_N \circ i_M = 0,$$

sowie

$$i_M \circ p_M + i_N \circ p_N = 1_X.$$

(3) Sei $V' = R_k^+ R_k^-(V)$. Für $i \neq k$ gilt offenbar $V'(i) = V(i)$. Für $i = k$ gilt offenbar (mit obigen Bezeichnungen) $V'(k) = \text{Kern}(\pi)$. Also ist zu zeigen $V(k) \simeq \text{Kern}(\pi) \oplus \text{Kern}(\phi)$. Wir haben folgende Situation:

$$\begin{array}{ccc} \text{Kern}(\pi) & \xrightarrow{\subseteq} & \bigoplus_{j=1}^s V(i_j) \xrightarrow{\pi} W(k) \\ \uparrow h & \nearrow \phi & \\ V(k) & & \end{array}$$

wobei $h(x) \stackrel{\text{def}}{=} \phi(x)$ gesetzt wird. Dies ist wohl definiert, denn für die kanonische Surjektion π gilt nach Definition $\text{Bild}(\phi) = \text{Kern}(\pi)$. Das Dreieck ist dann nach Definition kommutativ, und es gilt $\text{Kern}(h) = \text{Kern}(\phi)$ und h ist surjektiv. Der Rangsatz (= Dimensionsformel für lineare Abbildungen), genauer der Beweis davon, angewendet auf die surjektive lineare Abbildung h liefert

$$V(k) \simeq \text{Kern}(h) \oplus \text{Bild}(h) = \text{Kern}(\phi) \oplus \text{Kern}(\pi).$$

Für jeden Knoten i gilt also, dass die Vektorräume $V(i)$ und $V'(i) \oplus F(i)$ isomorph sind. Um einzusehen, dass dies eine Isomorphie der Darstellungen V und $V' \oplus F$ ergibt, muss man einsehen, dass folgende Diagramme kommutieren:

$$\begin{array}{ccc} V(k) & \xrightarrow{V(a_i)} & V(i) \\ \downarrow \sim & & \parallel \\ V'(k) \oplus F(k) & \xrightarrow{(V'(a_i,0))} & V'(i) \end{array}$$

Dies ergibt sich aber unmittelbar, wenn man sich den Isomorphismus im Beweis des Rangsatzes vor Augen führt.

(4) Geht analog. □

Satz 6.3. Sei Γ ein Köcher, V eine unzerlegbare Darstellung von Γ .

- (1) Sei k eine Quelle.
 - (a) Falls $V \simeq S_k$ ist, so gilt $R_k^-(S_k) = 0$.
 - (b) Falls $V \not\simeq S_k$ ist, so ist $R_k^-(V)$ unzerlegbar mit $\underline{\dim}(R_k^-(V)) = \sigma_k(\underline{\dim}(V))$, und es gilt $R_k^+(R_k^-(V)) \simeq V$.
- (2) Sei k eine Senke.
 - (a) Falls $V \simeq S_k$ ist, so gilt $R_k^+(S_k) = 0$.
 - (b) Falls $V \not\simeq S_k$ ist, so ist $R_k^+(V)$ unzerlegbar mit $\underline{\dim}(R_k^+(V)) = \sigma_k(\underline{\dim}(V))$, und es gilt $R_k^-(R_k^+(V)) \simeq V$.

Beweis. Sei k eine Quelle. (Der Fall, dass k eine Senke ist, geht analog.) Falls $V \simeq S_k$, so ist offenbar $R_k^-(V) = 0$ (ÜBUNG). Es gelte nun $V \not\simeq S_k$. Nach dem Lemma gilt $V \simeq R_k^+ R_k^-(V) \oplus F$, wobei $F \simeq (S_k)^m$ gilt für eine natürliche Zahl m . Da aber V unzerlegbar ist und $V \not\simeq S_k$ folgt $m = 0$ (d. h. $F = 0$) und $V \simeq R_k^+ R_k^-(V)$. Insbesondere gilt $V' = R_k^-(V) \neq 0$. Man kann V' zerlegen in $V' = U \oplus U'$, wobei U unzerlegbar ist mit $R_k^+(U) \neq 0$, und es gilt $V = R_k^+(V') \simeq R_k^+(U) \oplus R_k^+(U')$. Da V unzerlegbar ist, ergibt sich $R_k^+(U') = 0$. Dies ergibt $U \oplus U' = V' = R_k^-(V) = R_k^- R_k^+(U)$. Es folgt $U' = 0$. In der Tat: Setzt man $U'' = R_k^- R_k^+(U)$, so folgt aus aus Eigenschaft (4) des Lemmas offenbar $\dim_K U'(i) = \dim_K U''(i) - \dim_K U(i) \leq 0$ für jeden Punkt $i \in I$, also $U' = 0$. Es folgt, dass $R_k^-(V) = U$ unzerlegbar ist.

Da oben schon gezeigt wurde, dass $F = 0$ gilt, folgt nach Definition von F (im Lemma) $\text{Kern}(\phi) = 0$. Es folgt nach Definition von $W = R_k^-(V)$ nun

$$\dim_K W(i) = \begin{cases} \sum_{j=1}^s \dim_K V(i_j) - \dim_K V(k) & i = k \\ \dim_K V(i) & i \neq k. \end{cases}$$

(Es ist ϕ injektiv, also $\text{Bild}(\phi) \simeq V(k)$. Mit dem Rangsatz folgt $\dim W(k) = \dim(\text{Coker}(\phi)) = \dim(\bigoplus V(i_j)) - \dim \text{Bild}(\phi) = \sum \dim V(i_j) - \dim V(k)$.) Dies bedeutet aber nach Definition der Spiegelung σ_k auf \mathbb{Z}^n gerade

$$\underline{\dim}(R_k^-(V)) = \sigma_k(\underline{\dim}(V)),$$

denn $\sigma_k(x)_i = x_i$ für alle $i \neq k$, und, da k genau mit i_1, \dots, i_s verbunden ist,

$$\sigma_k(x)_k = x_k - 2(x | e_k) = x_k - 2 \sum_j x_j (e_j | e_k) = -x_k + \sum_{j=1}^s x_{i_j},$$

da $(e_{i_j} | e_k) = -1/2$. □

Als Folgerungen erhält man (vgl. ÜBUNGEN)

Folgerung 6.4. *Sei Γ ein Köcher. Sei i eine Quelle oder eine Senke. Es ist Γ von endlichem Darstellungstyp genau dann, wenn $\sigma_i \Gamma$ von endlichem Darstellungstyp ist. Dabei stimmen die Anzahlen der Isomorphieklassen unzerlegbarer Darstellungen von Γ mit denen von $\sigma_i \Gamma$ überein.*

Folgerung 6.5. *Der Darstellungstyp eines azyklischen Köchers Γ hängt nur von $|\Gamma|$ ab.*

Übung 6.6. (a) Sei k eine Quelle und S_k die zum Punkt k gehörige einfache Darstellung. Man zeige $R_k^-(S_k) = 0$.

(b) Sei $\Gamma : \overset{1}{\circ} \longrightarrow \overset{2}{\circ}$. Man berechne für jede unzerlegbare Darstellung V von Γ die Darstellung $R_1^-(V)$ von $\sigma_1 \Gamma$.

(c) Sei $\Gamma : \overset{1}{\circ} \xleftarrow{0} \overset{2}{\circ} \xrightarrow{3} \overset{3}{\circ}$. Man berechne $R_2^-(V)$ für die Darstellungen $V = (K \xleftarrow{0} 0 \xrightarrow{0} K)$ und $V = (K \xleftarrow{1} K \xrightarrow{1} K)$.

7. DER BEWEIS DES SATZES VON GABRIEL

Der Dynkin-Fall. Der folgende Satz beweist Theorem 4.29 und Implikation “(3) \Rightarrow (1)” in Theorem 4.28.

Satz 7.1. *Sei Γ ein Köcher, so dass der unterliegende Graph $|\Gamma|$ ein Dynkin-Graph \mathbb{A}_n , ($n \geq 1$), \mathbb{D}_n ($n \geq 4$) oder \mathbb{E}_n ($n = 6, 7, 8$) ist. Dann induziert dim eine Bijektion zwischen der Menge der Isomorphieklassen unzerlegbarer Darstellungen von Γ und den positiven Wurzeln von $Q_{|\Gamma|}$. Insbesondere ist Γ von endlichem Darstellungstyp.*

Beweis. Γ kann als standardisiert angenommen werden. Sei $\tau = \sigma_n \circ \dots \circ \sigma_1$ die zugehörige Coxetertransformation.

(1) Sei V eine unzerlegbare Darstellung. Dann ist $x = \underline{\dim}(V) \in \mathbb{Z}^n$ ein positiver Vektor. Sei $k > 0$ und $i \in \{0, \dots, n-1\}$ mit

$$y \stackrel{\text{def}}{=} \sigma_i \circ \dots \circ \sigma_1 \circ \tau^k(x) > 0,$$

aber $\sigma_{i+1} \circ \sigma_i \circ \dots \circ \sigma_1 \circ \tau^k(x) \not> 0$, wobei dies die früheste Position ist, an der dieser Übergang passiert (vgl. Lemma 2.10). Sei

$$W = R_i^- \circ \dots \circ R_1^- \circ (R_n^- \circ \dots \circ R_1^-)^k(V).$$

Dann ist W eine unzerlegbare Darstellung des Köchers $\sigma_i \dots \sigma_1 \Gamma$ mit Dimensionsvektor $\underline{\dim}(W) = y$. (Denn bei sukzessiver Anwendung der Spiegelungsfunktoren, ausgehend von V , bleiben (bis W) alle Darstellungen unzerlegbar; sonst wäre zwischendurch eine Darstellung $= 0$, was nur passieren kann, wenn ein R_i^- auf die einfache Darstellung S_i angewendet wird. Dann würde man aber bei der entsprechenden Folge der Wurzeln $\sigma_i(e_i)$ bilden und in den negativen Bereich kommen.) Da $\sigma_{i+1}(y) \not\geq 0$, muss $R_{i+1}^-(W) = 0$ gelten, und daher muss $W \simeq S_{i+1}$ sein. Daher gilt $y = e_{i+1}$, und es folgt, dass $x = \tau^{-k} \circ \sigma_1 \circ \dots \circ \sigma_i(y)$ eine Wurzel ist. Daher induziert $\underline{\dim}$ eine Abbildung von der Menge der Isomorphieklassen unzerlegbarer Darstellungen von Γ in die Menge der positiven Wurzeln von $Q_{|\Gamma|}$. Außerdem zeigt dies, dass diese Abbildung injektiv ist: Denn ist V' eine weitere unzerlegbare Darstellung mit $\underline{\dim}(V') = x = \underline{\dim}(V)$, so folgt genau wie oben

$$R_i^- \circ \dots \circ R_1^- \circ (R_n^- \circ \dots \circ R_1^-)^k(V') \simeq S_{i+1},$$

und durch Anwendung der Spiegelungsfunktoren in umgekehrter Reihenfolge auf S_{i+1} erhalten wir $V' \simeq V$.

(2) Wir zeigen nun die Surjektivität. Sei x eine positive Wurzel von $Q_{|\Gamma|}$. Nach Satz 2.12 gibt es $k > 0$ und $i \in \{0, \dots, n-1\}$ mit

$$\sigma_i \circ \dots \circ \sigma_1 \circ \tau^k(x) = e_{i+1}.$$

Wendet man nun die entsprechenden Spiegelungsfunktoren in umgekehrter Reihenfolge auf S_{i+1} an, so liefert dies eine unzerlegbare Darstellung V mit $\underline{\dim}(V) = x$. (Man beachte dabei Bemerkung 2.13.) \square

Der erweiterte Dynkin-Fall. Wir beweisen nun Satz 5.11 und damit die noch fehlende Implikation “(1) \Rightarrow (3)” aus Theorem 4.28. Nochmal formuliert:

Satz 7.2. *Sei Γ ein Köcher, so dass der unterliegende Graph $|\Gamma|$ ein erweiterter Dynkin-Graph $\tilde{\mathbb{A}}_m$ ($m \geq 0$), $\tilde{\mathbb{D}}_m$ ($m \geq 4$) oder $\tilde{\mathbb{E}}_m$ ($m = 6, 7, 8$) ist. Dann ist Γ von unendlichem Darstellungstyp.*

Beweis. Man kann sich auf die Fälle $\tilde{\mathbb{D}}_4$ und $\tilde{\mathbb{E}}_m$ ($m = 6, 7, 8$) beschränken, und man kann sich eine bestimmte Orientierung aussuchen. Wir nehmen an, dass die Pfeile alle von dem Verzweigungspunkt weg zeigen, der die Nummer 1 trägt, und dass der Köcher standardisiert ist. Sei $Q = Q_{|\Gamma|}$ die zugehörige quadratische Form. Dann ist Q eine positiv semidefinite Einheitsform, die nicht positiv definit ist.

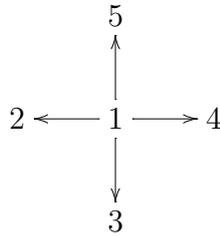
Sei $\delta > 0$ der (minimale) positive Radikalvektor δ (wie in den Übungen konstruiert). Nach Übung 1.13 ist für jede einfache Wurzel e_i und jedes $k > 0$ die Summe $e_i + k\delta$ eine positive Wurzel. Es gibt also unendlich viele solcher Wurzeln. Sei $\tau^{-1} = \sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \dots \circ \sigma_n$ die inverse Coxetertransformation. Wir zeigen, dass es in jedem der vier Fälle eine natürliche Zahl $p > 0$ gibt mit

$$\tau^{-p}(e_1) = e_1 + \delta,$$

und dass bei sukzessiver Anwendung der σ_i zwischendurch nur positive Vektoren vorkommen (man braucht offenbar nur überprüfen, dass $(\tau^{-i}(e_1))_1 > 0$

für alle $1 \leq i \leq m$ gilt, denn der Koeffizient vor e_1 wird höchstens bei Anwendung von σ_1 erniedrigt, und jede Wurzel ist positiv oder negativ (Übung 2.15)). Für jede natürliche Zahl k folgt dann $\tau^{-kp}(e_1) = e_1 + k\delta$, denn weil δ ein Radikalvektor ist, gilt $\tau^{-1}(\delta) = \delta$. Ist F das Produkt der Spiegelfunktoren $R_1^+ \circ \dots \circ R_n^+$, so ergibt dann $F^{kp}(S_1)$ ($k \geq 1$) unendlich viele unzerlegbare Darstellungen, die paarweise verschiedene Dimensionsvektoren haben und daher paarweise nicht-isomorph sind.

In der Tat ergeben explizite Rechnungen (siehe Maple-Rechnungen), dass man für p die Zahlen $p = 1, 2, 3, 5$ für die Fälle $\tilde{\mathbb{D}}_4, \tilde{\mathbb{E}}_6, \tilde{\mathbb{E}}_7$ bzw. $\tilde{\mathbb{E}}_8$ hat. Wir zeigen es hier für den Fall $\tilde{\mathbb{D}}_4$, versehen mit der Nummerierung und Orientierung wie folgt:



Es ist δ der Vektor $\begin{matrix} 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 \end{matrix}$. Man rechnet der Reihe nach

$$\begin{aligned} \sigma_5(e_1) &= e_1 + e_5, & \sigma_4(e_1 + e_5) &= e_1 + e_4 + e_5, \\ \sigma_3(e_1 + e_4 + e_5) &= e_1 + e_3 + e_4 + e_5, \\ \sigma_2(e_1 + e_3 + e_4 + e_5) &= e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5, \\ \tau^{-1}(e_1) &= \sigma_1(e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5) = 3e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5 = e_1 + \delta. \end{aligned}$$

□

Damit ist der Satz von Gabriel bewiesen.

Wir formulieren einen Beweisschritt des Satzes 7.1 nochmal als Folgerung.

Folgerung 7.3. Sei Γ ein Dynkin-Köcher mit standardisierter Nummerierung $1, \dots, n$ der Knoten. Sei $C^+ : \mathcal{L}_K(\Gamma) \rightarrow \mathcal{L}_K(\Gamma)$ der Funktor $C^+ = R_1^+ \circ \dots \circ R_n^+$. Sei V eine unzerlegbare Darstellung von Γ . Dann gibt es ein $k \geq 0$ und ein i mit $0 \leq i \leq n-1$, so dass für die einfache Darstellung S_{i+1} zum Punkt $i+1$ des Köchers $\sigma_i \dots \sigma_1 \Gamma$ gilt: $V \simeq C^{+k} \circ R_1^+ \circ \dots \circ R_i^+(S_{i+1})$.

Folgerung 7.4. Sei Γ ein Dynkin-Köcher und V eine unzerlegbare K -lineare Darstellung von Γ . Dann gilt $\text{End}(V) \simeq K$.

Beweis. Für die einfachen Darstellungen S_i ($i \in I$) gilt $\text{End}(S_i) \simeq K$. □

8. DIE ANZAHL UNZERLEGBARER DARSTELLUNGEN

Satz 8.1. Sei Γ ein Köcher, dessen unterliegender Graph $|\Gamma|$ ein Dynkin-Graph \mathbb{A}_n , ($n \geq 1$), \mathbb{D}_n ($n \geq 4$) oder \mathbb{E}_n ($n = 6, 7, 8$) ist. Dann ist die Anzahl

der Isomorphieklassen unzerlegbarer Darstellungen gegeben durch

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_n & \frac{n(n+1)}{2}, \\ \mathbb{D}_n & n(n-1), \\ \mathbb{E}_6 & 36, \\ \mathbb{E}_7 & 63, \\ \mathbb{E}_8 & 120. \end{aligned}$$

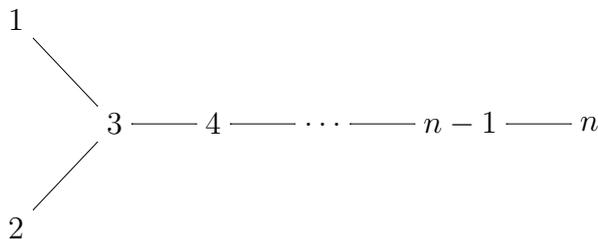
Diese Anzahl hängt weder von der Orientierung von Γ noch vom Grundkörper K ab.

Dass die Anzahl nicht vom Grundkörper abhängt, ist nicht selbstverständlich. Auch nicht obige Aussage $\text{End}(V) \simeq K$ für unzerlegbare Darstellungen V . Vgl. Übung 4.27.

Wir werden den Satz nur teilweise beweisen. Für den Fall \mathbb{A}_n folgt das Ergebnis aus der Klassifizierung der (positiven) Wurzeln in den Übungen. Wir behandeln noch den Fall \mathbb{D}_n .

Sei Γ ein Graph und n die Anzahl der Knoten. Für einen positiven Vektor $x \in \mathbb{Z}^n$ sei $\text{supp}(x)$ der Träger von x , d. h. der volle Teilgraph von Γ , der aus allen Punkten i besteht mit $x_i \neq 0$. Es heißt x dünn, falls $x_i \in \{0, 1\}$ gilt für $i = 1, \dots, n$.

Proposition 8.2. Sei Γ der Dynkin-Graph \mathbb{D}_n wie folgt nummeriert:



Die positiven Wurzeln von Q_Γ sind

- (1) die dünnen Vektoren mit zusammenhängenden Träger;
- (2) Für alle $3 \leq k < l \leq n$ die Vektoren

$$v_{kl} = e_1 + e_2 + 2(e_3 + \dots + e_k) + e_{k+1} + \dots + e_l.$$

Vom ersten Typ gibt es $\frac{(n-1)n}{2} + 3 + 2(n-3)$, vom zweiten Typ $\frac{(n-2)(n-3)}{2}$, insgesamt also $n(n-1)$.

Beweis. Nach ÜBUNG ist ein dünner positiver Vektor x eine Wurzel genau dann, wenn der Träger $\text{supp}(x)$ zusammenhängend ist. Ein einfaches Zählargument liefert die behauptete Anzahl. Auch die Anzahl der Vektoren des zweiten Typs ist leicht zu verifizieren. Man rechnet leicht nach, dass die Vektoren des zweiten Typs Wurzeln sind. Es ist also noch zu zeigen, dass eine positive Wurzel x , die nicht dünn ist, von der Form v_{kl} ist. Definiere zu x einen weiteren positiven Vektoren y durch

$$y_i = \begin{cases} 1 & x_i \neq 0, \\ 0 & x_i = 0. \end{cases}$$

Es ist dann y ein positiver dünner Vektor mit $y < x$ und mit $\text{supp}(y) = \text{supp}(x)$, nach Konstruktion. Da x eine Wurzel ist, muss dieser Träger offenbar zusammenhängend sein, da Q eingeschränkt auf den Zusammenhangskomponenten positiv definit bleibt. Daher ist nach dem ersten Teil y eine Wurzel. Nach Satz 2.9 gibt es eine Folge von Zahlen $i_1, \dots, i_r \in \{1, \dots, n\}$ mit

$$\sigma_{i_s} \circ \dots \circ \sigma_{i_1}(x) = x - e_{i_1} - \dots - e_{i_s}$$

für alle s und $\sigma_{i_r} \dots \sigma_{i_1}(x) = y$. Insbesondere ist $\sigma_{i_r}(y) > y$, und $y_{i_r} = 1$. Offenbar bedeutet dies gerade

$$\sum_{\substack{j \\ \bar{j}, \bar{i}_r}} y_j > 2y_{i_r} = 2,$$

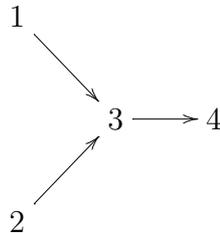
und daher muss i_r mit mehr als zwei Knoten verbunden sein. Es folgt $i_r = 3$ und $y_1 = y_2 = y_4 = 1$. Da $\text{supp}(y)$ zusammenhängend ist, ist $y = \sum_{j=1}^l e_j$ für ein l mit $4 \leq l \leq n$. Dann ist $\sigma_{i_r}(y) = v_{3,l}$. Was liefert nun weitere Anwendung der Spiegelung $\sigma_{i_{r-1}}$? Es wird im nächsten Schritt $v_{3,l}$ an der Position i_{r-1} um 1 vergrößert. Dann muss $(v_{3,l} | e_{i_{r-1}}) < 0$ sein. Man rechnet:

$$(v_{k,l} | e_i) = 0 \text{ für } i = 1, 2, \dots, k-1, k+2, \dots, l-1, l+2, \dots, n,$$

sowie $(v_{k,l} | e_k) = 1$ und $(v_{k,l} | e_l) = 1/2$ für $k < l-1$ und $(v_{k,l} | e_l) = 0$ für $k = l-1$. Interessant sind also nur die Fälle $i = l+1$ und $i = k+1$. Man sieht, dass $\sigma_{l+1}(v_{k,l})$ größeren Träger als $v_{k,l}$ hat, wegen $(v_{kl} | e_{l+1}) = -1/2$. Bleibt nur $i = k+1$. Es gilt $(V_{kl} | e_{k+1}) = -1/2$, also $\sigma_{k+1}(v_{k,l}) = v_{k+1,l}$, und daraus folgt induktiv die Behauptung. \square

Übung 8.3. (a) Man bestimme alle unzerlegbaren Darstellungen des Köchers mit unterliegendem Graphen \mathbb{A}_n , bei beliebiger Orientierung der Pfeile.

(b) Sei Γ der Köcher mit unterliegenden Graphen \mathbb{D}_4 wie folgt orientiert:



Man bestimme alle unzerlegbaren Darstellungen von Γ mit Hilfe von a) und Spiegelungsfunktoren (Coxeter-Transformationen).

Diese Multiplikation zwischen Wegen (also auf den obigen Basiselementen von A) wird bilinear auf ganz A fortgesetzt. Offenbar ist sie assoziativ und es gelten die Distributivgesetze. Es gilt:

- (1) $\varepsilon_i w = \delta_{i, \alpha(w)} \cdot w$;
- (2) $w \varepsilon_j = \delta_{j, \omega(w)} \cdot w$;
- (3) $\varepsilon_i \varepsilon_j = \delta_{ij} \varepsilon_i$ (d. h. $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ bilden "orthogonale Idempotente").

Setzt man $1 \stackrel{\text{def}}{=} \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_n \in A$, so folgt $1 \cdot w = w = w \cdot 1$ für jeden Weg w . Es ist also 1 das Einselement in A . Damit ist A ein (in der Regel nichtkommutativer) Ring mit Einselement. Weil A auch ein K -Vektorraum ist, so dass die Beziehung

$$\alpha(ab) = (\alpha a)b = a(\alpha b)$$

für alle $\alpha \in K$ und alle $a, b \in A$ gilt, ist dies eine K -Algebra.

Bezeichnung: A heißt die *Wegealgebra* von Γ über K , und man schreibt $A = K\Gamma$.

In der Darstellungstheorie von Algebren werden die Moduln über einer Algebra untersucht.

9.2 (Moduln und Homomorphismen). Sei A eine K -Algebra. Ein K -Vektorraum M heißt ein *A -Modul* (genauer: Rechtsmodul), falls es eine Abbildung $M \times A \rightarrow M$, $(m, a) \mapsto m \cdot a = ma$ gibt mit folgenden Eigenschaften:

$$m(a + a') = ma + ma', \quad (m + m')a = ma + m'a, \quad m(aa') = (ma)a', \quad m1 = m$$

für alle $m, m' \in M$ und alle $a, a' \in A$.

Ein *Homomorphismus* $f : M \rightarrow N$ zwischen A -Moduln M und N ist eine A -lineare Abbildung, d. h. es gilt $f(ma) = f(m)a$ für alle $a \in A$ und alle $m \in M$. Die Menge $\text{Hom}_A(M, N)$ aller A -linearen Abbildungen von M nach N bildet einen K -Vektorraum. *Kerne*, *Bilder* und *Cokerne* von Modulhomomorphismen sind wie für lineare Abbildungen zwischen Vektorräumen oder Morphismen zwischen K -linearen Darstellungen definiert. Ähnliches gilt für *Untermoduln*, *direkte Summen*, *einfache Moduln*, *unzerlegbare Moduln*, etc.

Ähnlich wie $\mathcal{L}_K(\Gamma)$ bilden die *endlichdimensionalen* (sic!) A -Moduln zusammen mit den Homomorphismen eine *Kategorie* $\text{mod}(A)$. (Aufgrund obiger aufgezählter Eigenschaften eine *abelsche* K -Kategorie.) (Häufig wird mit $\text{mod}(A)$ die Kategorie der endlich erzeugten Moduln bezeichnet.)

Der nächste Satz besagt, dass das Studium der (endlichdimensionalen) Darstellungen von Γ gleichwertig ist zum Studium der (endlichdimensionalen) Moduln über der Wegealgebra $K\Gamma$.

Satz 9.3. *Sei Γ ein Köcher und $A = K\Gamma$ die Wegealgebra. Dann sind die K -Kategorien $\text{mod}(A)$ und $\mathcal{L}_K(\Gamma)$ äquivalent.*

Beweis. Wir erklären, was dies bedeutet. Wir konstruieren Funktoren

$$\Phi : \text{mod}(A) \rightarrow \mathcal{L}_K(\Gamma)$$

und

$$\Psi : \mathcal{L}_K(\Gamma) \longrightarrow \text{mod}(A)$$

die zueinander invers sind in folgendem Sinn: Für jeden endlichdimensionalen A -Modul M und für jede Darstellung gibt es Isomorphismen $\Psi\Phi(M) \simeq M$ und $\Phi\Psi(V) \simeq V$, die in gewisser Weise *natürlich* sind (vgl. Beweispunkt (4)).

(1) Sei M ein endlichdimensionaler A -Modul. Definiere eine Darstellung $\Phi(M) = V = (V(i), V(a))$ wie folgt:

Sei $V(i)$ der K -Vektorraum $M\varepsilon_i$ für alle $i \in I$. Für jeden Pfeil $a : i \rightarrow j \in E$ definiere $V(a) : M\varepsilon_i \rightarrow M\varepsilon_j$ durch $V(a)(m\varepsilon_i) \stackrel{\text{def}}{=} m\varepsilon_i a = ma\varepsilon_j$. Dies ist eine K -lineare Abbildung.

Sei nun $f : M \rightarrow M'$ ein Homomorphismus von A -Moduln. Für alle $m \in M$ gilt $f(m\varepsilon_i) = f(m)\varepsilon_i$, also gilt $f(M\varepsilon_i) \subseteq M'\varepsilon_i$. Daher ergibt die Einschränkung von f eine lineare Abbildung $f(i) : V(i) \rightarrow V'(i)$, und $\Phi(f) \stackrel{\text{def}}{=} (f(i))_{i \in I}$ liefert einen Morphismus $\Phi(f) : \Phi(M) \rightarrow \Phi(M')$, denn für jeden Pfeil $a : i \rightarrow j$ gilt

$$\begin{aligned} (f(j) \circ V(a))(m\varepsilon_i) &= f(j)(ma\varepsilon_j) = f(ma\varepsilon_j) = f(m)a\varepsilon_j \\ &= V'(a)(f(m)\varepsilon_i) = (V'(a) \circ f(i))(m\varepsilon_i), \end{aligned}$$

also $f(j) \circ V(a) = V'(a) \circ f(i)$. Es ist leicht nachzurechnen, dass damit Φ einen K -linearen Funktor definiert.

(2) Sei $V = (V(i), V(a))$ eine (endlichdimensionale) Darstellung. Setze $\Psi(V) = M = \bigoplus_{i \in I} V(i)$. Definiere eine A -Modulstruktur auf M : Sei $m = (m_i)_{i \in I} \in M$. Sei w ein Weg in Γ . Ist $w = \varepsilon_i$, so sei $mw = m\varepsilon_i = m_i$. Sei $w = a_1 \dots a_s$ ein Weg von i nach j , Konkatenation von Pfeilen a_k . Sei $V(w) \stackrel{\text{def}}{=} V(a_s) \circ \dots \circ V(a_1)$. Definiere mw komponentenweise durch $(mw)_k = \delta_{kj} V(w)(m_i)$. Die einzige nicht-triviale Komponente von mw ist also die j -te, gegeben durch $(mw)_j = V(w)(m_i)$. Diese Aktion von Wegen wird fortgesetzt zu einer Aktion von $A = K\Gamma$ auf M , und M wird damit zu einem A -Modul.

Sei $f = (f(i))_{i \in I}$ ein Morphismus zwischen Darstellungen $V = (V(i), V(a))$ und $V' = (V'(i), V'(a))$. Definiere $\Psi(f) = \bigoplus_i f(i) : M = \bigoplus_{i \in I} V(i) \rightarrow \bigoplus_{i \in I} V'(i) = M'$. Dies ist ein Homomorphismus von A -Moduln. Es genügt zu zeigen, dass für einen Weg w und $m \in M$ gilt $\Psi(f)(mw) = \Psi(f)(m)w$. Ist w wie oben, so gilt

$$\begin{aligned} \Psi(f)(mw) &= \bigoplus_k f(k)(V(w)(m_i)) = f(j)(V(w)(m_i)) \\ &= f(j)(V(w)(m_i)) = V'(w)f(i)(m_i) = f(i)(m_i)w \\ &= \Psi(f)(m)w. \end{aligned}$$

(3) Sei M ein endlichdimensionaler A -Modul. Dann gilt

$$\Psi\Phi(M) = \bigoplus_{i \in I} M\varepsilon_i \simeq M$$

wegen $\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_n = 1$. Man überprüft leicht, dass dies eine Isomorphie von A -Moduln ist. (Sogar Gleichheit.)

Ist umgekehrt $V = (V(i), V(a))$ eine Darstellung, so ist $\Phi\Psi(V) = (W(i), (W(a)))$, wobei $W(k) = (\bigoplus_{i \in I} V(i))\varepsilon_k = V(k)$ gilt. Außerdem ist für Pfeile $a : i \rightarrow j$ mit $M = \Psi(V)$

$$W(a)(m\varepsilon_i) = ma\varepsilon_j = (ma)_j = V(a)(m_i) = V(a)(m\varepsilon_i),$$

also $W(a) = V(a)$.

(4) Die “Natürlichkeit” der Isomorphismen bedeutet folgendes: Bezeichne für jeden endlichdimensionalen A -Modul M den eben konstruierten Isomorphismus $\Psi\Phi(M) \simeq M$ mit α_M , und für jede Darstellung V von Γ mit β_V den Isomorphismus $\Phi\Psi(V) \simeq V$. Dann bedeutet die Natürlichkeit der beiden Isomorphismen gerade, dass für jedes $f \in \text{Hom}_A(M, N)$ und jedes $g \in \text{Hom}_\Gamma(V, W)$ die Diagramme

$$\begin{array}{ccc} \Psi\Phi(M) & \xrightarrow{\alpha_M} & M \\ \Psi\Phi(f) \downarrow & & \downarrow f \\ \Psi\Phi(N) & \xrightarrow{\alpha_N} & N \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{ccc} \Phi\Psi(V) & \xrightarrow{\beta_V} & V \\ \Phi\Psi(g) \downarrow & & \downarrow g \\ \Phi\Psi(W) & \xrightarrow{\beta_W} & W \end{array}$$

kommutieren. Dies verifiziere man als ÜBUNG. (Man sagt auch, dass der Funktor $\Psi\Phi$ (natürlich) isomorph ist zum identischen Funktor, und ebenso $\Phi\Psi$.) \square

Übung 9.4. Sei Γ der Köcher $\overset{1}{\circ} \longrightarrow \overset{2}{\circ}$.

(a) Man zeige, dass die Wegealgebra $K\Gamma$ isomorph ist zur Algebra $A = \begin{pmatrix} K & K \\ 0 & K \end{pmatrix} \subset M_2(K)$, die aus den oberen 2×2 -Dreiecksmatrizen über K besteht. (Zwei K -Algebren sind *isomorph*, falls es einen K -linearen Ringisomorphismus gibt.)

(b) Einen endlichdimensionalen A -Modul (Rechtsmodul) kann man auffassen als direkte Summe $V \oplus W$ endlichdimensionaler Vektorräume, gebildet zu einem Tripel (V, W, f) mit einer linearen Abbildung $f : V \rightarrow W$. (Warum?) Man erläutere, wie dabei die Operation

$$(v, w) \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$$

definiert ist.

Übung 9.5. Sei Γ der Einschlaufenköcher.

(a) Man zeige $K\Gamma \simeq K[T]$ (Polynomring über K in der Unbestimmten T). Man zeige, dass die (unzerlegbaren) Darstellungen $(K^n, J_n(\lambda))$ aus Proposition 4.24 zu den endlichdimensionalen (unzerlegbaren) $K[T]$ -Moduln $K[T]/((T - \lambda)^n)$ korrespondieren.

(b) Sei $K = \mathbb{C}$. Was sind die (endlichdimensionalen) einfachen $K[T]$ -Moduln?

10. ANHANG: AUSBLICK

1. Die natürliche Verallgemeinerung des Satzes von Gabriel ist der Satz von Kac. Wir beschreiben diesen ganz kurz.

Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper. Sei Γ ein Köcher mit zugehöriger quadratischer Form Q . Besitzt der Punkt i keine Schlaufe, so nennt man den Einheitsvektor e_i eine einfache Wurzel. Sei \mathcal{W} die Weyl-Gruppe, also die von den Spiegelungen $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ zu den einfachen Wurzeln e_i erzeugte Gruppe. Eine reelle Wurzel x ist von der Form $x = \sigma(e_i)$, wobei $\sigma \in \mathcal{W}$ und e_i einfache Wurzel ist.

Sei die Fundamentalregion $F \subset \mathbb{N}^n$ definiert durch diejenigen $x \in \mathbb{N}^n$, so dass:

- der Träger $\text{supp}(x)$ ist zusammenhängend;
- $(x | e_i) \leq 0$ für alle einfachen Wurzeln e_i .

Ein $x \in \mathbb{N}^n$ heißt (positive) imaginäre Wurzel, falls $x = \sigma(y)$ für ein $\sigma \in \mathcal{W}$ und ein $y \in F$ gilt. Ein $x \in \mathbb{N}^n$ heißt (positive) Wurzel, falls x reelle oder imaginäre Wurzel ist.

Bemerkung 10.1. Für jede reelle Wurzel x gilt $Q(x) = 1$. Für jede imaginäre Wurzel gilt $Q(x) \leq 0$. (Insbesondere sind imaginäre Wurzeln keine Wurzeln im Sinne der Vorlesung.)

Satz 10.2 (Kac). Sei $x \in \mathbb{N}^n$. Es gibt eine unzerlegbare Darstellung V von Γ mit $\underline{\dim}(V)$ genau dann, wenn x eine Wurzel ist. Dabei gilt:

- (1) Ist x reell, so gibt es (bis auf Isomorphie) genau eine unzerlegbare Darstellung V mit $x = \underline{\dim}(V)$.
- (2) Ist x imaginär, so gibt es unendlich viele (nicht-isomorphe) unzerlegbare Darstellungen V mit $x = \underline{\dim}(V)$.

Genauer gilt für eine Wurzel x : Die Isomorphieklassen unzerlegbarer Darstellungen mit Dimensionsvektor x bilden ein geometrisches Objekt, dessen Dimension ("Anzahl der Parameter") durch die Zahl $1 - Q(x)$ gegeben ist.

Man vergleiche: Im darstellungsendlichen (= Dynkin-Fall) ist jede positive Wurzel reell, und $\underline{\dim}$ induziert eine Bijektion zwischen den Isomorphieklassen unzerlegbarer Darstellungen und den positiven Wurzeln.

2. Eine endlichdimensionale K -Algebra A heißt von endlichem Darstellungstyp, wenn es bis auf Isomorphie nur endlich viele unzerlegbare Darstellungen gibt. Also ist die Wegealgebra $A = K\Gamma$ darstellungsendlich genau dann, wenn Γ darstellungsendlich ist.

Sei K algebraisch abgeschlossen. Ist A nicht darstellungsendlich, so kann A entweder zahm oder wild sein. (Satz von Drozd.) Dabei bedeutet zahm sehr grob gesprochen, dass man die unzerlegbaren Moduln klassifizieren kann, während dies im wilden Fall nicht möglich ist. (Etwas genauer bedeutet

zahn, dass die nach dem Satz von Kac angedeutete Anzahl der Parameter immer ≤ 1 ist, während im wilden Fall die Anzahl der Parameter beliebig hoch wird.)

Es gilt nun:

Satz 10.3. *Eine Wegealgebra $A = K\Gamma$ von unendlichem Darstellungstyp ist zahn genau dann, wenn Γ ein erweiterter Dynkin-Köcher ist. (Wobei hier angenommen wird, dass Γ keine orientierten Kreise enthält, damit $K\Gamma$ endlichdimensional ist.)*

Insbesondere ist schon der Köcher Γ bestehend aus zwei Punkten 1 und 2 und drei Pfeilen von 1 nach 2 wild.

Für den Einschlaufenköcher, bestehend aus dem Knoten 1, sind alle Vielfachen ne_1 ($n \geq 1$) imaginäre Wurzeln; es gilt $Q(ne_1) = 0$. Der Satz von Kac liefert (abstrakt) unendlich viele unzerlegbare Darstellungen mit Dimensionsvektor, beschrieben durch einen Parameter. Diese hatten wir bereits als $(K^n, J_n(\lambda))$ identifiziert, mit dem Parameter $\lambda \in K$. Daher handelt es sich um eine zahme Situation.

3. Sei auch hier K algebraisch abgeschlossen. Nicht jede endlichdimensionale K -Algebra A ist eine Wegealgebra eines Köchers Γ . Zunächst mal muss man Morita-Äquivalenz zulassen. Zwei K -Algebren heißen Morita-äquivalent, falls die Kategorien $\text{mod}(A)$ und $\text{mod}(B)$ äquivalent sind. Dann liefern die Wegealgebren $K\Gamma$ gerade die sogenannten erblichen Algebren. Dies bedeutet, dass Untermoduln projektiver Moduln wieder projektiv sind. (Man sagt auch, die globale Dimension ist ≤ 1 .) Allgemein gilt folgendes:

Satz 10.4 (Gabriel). *Sei A eine endlichdimensionale K -Algebra. Dann gibt es einen Köcher Γ und ein Ideal I in $K\Gamma$, so dass A Morita-äquivalent ist zu $K\Gamma/I$.*

Dies bedeutet, ähnlich zu dem zuletzt bewiesenen Satz, dass A -Moduln identifiziert werden können mit Darstellungen von Γ , die zusätzlich die "Relationen" aus I erfüllen.

Beispiel: Sei Γ der Köcher $\overset{1}{\circ} \xrightarrow{\alpha} \overset{2}{\circ} \xrightarrow{\beta} \overset{3}{\circ}$. Sei I das durch $\alpha\beta$ erzeugte Ideal in $K\Gamma$. Man sagt, es gilt die Relation $\alpha\beta = 0$. Dann betrachtet man Darstellungen V , für die zusätzlich $V(\alpha) \circ V(\beta) = 0$ gilt. Dies erfüllen alle unzerlegbaren Darstellungen des Köchers Γ (ohne Relation) außer $K \xrightarrow{1} K \xrightarrow{1} K$.

4. Es gibt noch weitere, gewichtete Dynkin- und erweiterte Dynkin-Graphen. Dies sind außer den schon behandelten

$$\mathbb{B}_n : \quad \circ \xrightarrow{(1,2)} \circ \text{ --- } \circ \text{ --- } \dots \text{ --- } \circ \text{ --- } \circ \quad (n \geq 1)$$

$$\mathbb{C}_n : \quad \circ \xrightarrow{(2,1)} \circ \text{ --- } \circ \text{ --- } \dots \text{ --- } \circ \text{ --- } \circ \quad (n \geq 1)$$

$$\mathbb{F}_4 : \quad \circ \text{ --- } \circ \xrightarrow{(1,2)} \circ \text{ --- } \circ$$

$$\mathbb{G}_2 : \quad \circ \xrightarrow{(1,3)} \circ$$

und für die erweiterten ähnlich definierte Diagramme.

Vorsehen mit einer sogenannten Modulation führen diese Graphen zu Darstellungen von sogenannten Spezies (Dlab-Ringel), und es gilt ein zum Satz von Gabriel analoges Ergebnis in dieser allgemeineren Situation.

LITERATUR

- [1] I. Assem, D. Simson, A. Skowroński: *Elements of the Representation Theory of Associative Algebras. 1: Techniques of Representation Theory*, London Mathematical Society Student Texts 65. Cambridge University Press 2006. 458 S. (Kapitel VII.)
- [2] M. Barot: *Representations of quivers*, Preprint.
http://www.matem.unam.mx/barot/articles/notes_ictp.pdf
- [3] I. N. Bernstein, I. M. Gelfand, V. A. Ponomarev: *Coxeter Functors and Gabriel's Theorem*, *Uspehi Mat. Nauk* 28 (1973), 19–33.
- [4] H. Derksen, J. Weyman: *Quiver representations*, *Notices of the AMS* 52 (2005), 200–206. <http://www.ams.org/notices/200502/fea-weyman.pdf>
- [5] P. Gabriel, A. V. Roiter: *Representations of Finite-Dimensional Algebras*, Springer 1992. (Kapitel 6 und 7.)
- [6] R. S. Pierce: *Associative Algebras*, Springer Verlag, New York, 1982. (Kapitel 8.)

INSTITUT FÜR MATHEMATIK, UNIVERSITÄT PADERBORN, GERMANY
E-mail address: dirk@math.upb.de