TECHNISCHE UNIVERSITÄT
MÜNCHEN
**Zentrum Mathematik**

Sommersemester 1999

Vorlesung
über

# SPIELTHEORIE

*Walter Schlee*



Das Spil, Gespil'(Gspịl), wie hchd. Spiel; (mhd., ahd. spil; Graff VI, 329. 331. BM. II, II, 499. Weigand, Wbch. II, 754); insonderheit a) im gewöhnlichsten Verstande. R.A.: 's gwissə' *Spịl* spịln, die sichrere Partie ergreifen. Namen von Kartenspielen s. bey H. Sachs 1612: I, 1042 und V, III, 39 (s. oben: spilen); Spiele der Italiener bey Martens, Italien II, 578—585. b) Musik. „Denen von der Ritterschaft, auch den alten Geschlechten in den Hauptstetten soll bey Hochzeiten zwayerley Spil (als Pfeiffer und Geiger), aber dem ringern Stand mehr nicht dann ein Spil zugelassen seyn;“ L.R. v. 1616, f. 564. Das Spil rüeren, Trommel (und Pfeiffen &c.) rühren. Das Spil teilen, ä. Sp., Einem eine Wahl vorlegen, ihm die Wahl laßen; BM. III, 26. II, II, 501,5. „Ob aber ir muot also stat daz si êlicher hirat doch niht entwesen wil, so teil ich ir ein ander spil,“ (mache einen andern Vorschlag); Kindh. Jesu, hg. v. Hahn, p. 69,9, s. unten: ungeteilt Spil. Der Spilmann, plur. die Spilleut, Musicant (ahd. spiliman und spiliwib; mhd. spileman, spilliute; Wigalois 1680. Graff II, 746. I, 653. BM. II, 46. III, 720. Weigand, Wbch. II, 755. Zeitschr. IV, 77). Spilleut haben, einen Tanz halten. Zu'n Spilleuten gên, zum Tanz gehen. Dà leit ə˜ *Spịlmà˜* bégràbm, sagt man im Scherz von einem Platz, wo jemand stolpert. „Zwoho zwohe, stolp stölperlein, da wird ein pfeiffer begraben sein,“ sagt der stolpernde Bauer bey H. Sachs V, III, 20. Der Spilgrâf, das Spilgrâfenamt, so hieß ehmals eine Stelle am Hofe, welcher die Oberaufsicht über die Musicanten im ganzen Lande und das Musik- und Theaterwesen zukam. Cbm. Kl. 169, p. 237 ff. Dieses Amt eingesetzt, „die Spilleut in mehrer Zucht, und fremde Spilleut fern zu halten,“ durch die aufgerichte PoliceyOrdn. lib. V, tit. 4, art. 4 aber entbehrlich geworden. Mandat v. 24. April 1626, Cgm. 4916, f. 532. 1581 ist das heil. Abendmahl versagt „allen spilern, spilgrafen, würfeltragern zw unerlichen sachen;“ Cgm. 4359, f. 38. Den 4. Nov. 1775 wurden die ehehin von den Spilgrafen den Spilleuten ertheilten Spilzettel abgeschafft, und verordnet, daß die Musikanten bey Strafe ein Musikpatent von der Ortsobrigkeit alle Jahre erholen und den Spilzettel mit 9 kr. lösen sollten. Hazzi, Statist. p. 224. In einer alten Hof-Rechnung v. 1467 (Wstr. Btr. V, 212) ist angesetzt, was an fremder Herren Hofierer und Spilleut ausgegeben worden, z. B. (an des) „Herzog(s) Sigmund von österreich Pfeiffer, trumetter und Paugker an sunbentag 8 fl. rhein., (an) des Kaisers Pfeiffer 3 fl. rhein. ... item ainem lautenschlager 1 fl. rhein., item einem Harpfer 1 fl.“ u. s. f. Für Trommler und Pfeiffer, ja auch die übrigen Subjecte einer militärischen Musik gilt noch immer der Plural Spil-leut. In weiterm Sinn, nemlich auch für Gaukler, Seiltänzer, kommt spilman, spilweib noch vor im Cgm. 719, f. 16a. Das Spilhaus, (römisches) Theater; H. Sachs 1560: II, III, 163. BM. I, 739. 'Das Federspil, ä. Sp., 1) Jagd mit abgerichteten Vögeln; 2) zur Jagd abgerichteter Vogel; BM. II, II, 503.' „All mein begird an vederspil sich kerten;“ Valkn. 8. „Das loblich ist an federspil das mag man an im schawen;“ das. 10. c) lebhafte Bewegung, Gedränge, Menge. Vilmar, kurhess. Idiot. 392. Das Volkspil, Volksmenge. cf. Firmenich I, 455,366: Minschespill, Menschenmenge. Weigand, Wbch. II, II, 754. Kirchspil, dem ältern Kirchmenge entsprechend, ist nicht volksüblich. BM. II, II, 502. In Lucerner Urkunden (1516; s. Geschfr. II, 203. III, 192. 264) steht immer Kilchspel. 'Vgl. oben: die Spelle, bîspel, gotspel &c. und Weigand, Wbch.

*J. A. Schmeller, Bayerisches Wörterbuch, Oldenburg-Verlag München 1877*

*Neudruck Oldenburg-Verlag München 1985*

# Inhaltsverzeichnis

# KAPITEL 1

## Einleitung

In dem Buch von Casti "Die großen fünf: Mathematische Theorien, die unser Jahrhundert prägten" ([11]) wird der Minimax-Satz der Spieltheorie neben dem Brouwerschen Fixpunktsatz, dem Theorem von Morse in der Singularitätentheorie, dem Anhaltesatz bei der Turingmaschine und der Simplexmethode in der Optimierung aufgeführt.
Das Wort Spiel hat eine sehr vielschichtige Bedeutung. Es umfaßt die Unterhaltungsspiele wie Brett-, Würfel- und Kartenspiele, Glücksspiele, auch das Murmelspiel, Kegeln, Eisstockschießen, Boccia usw. Hierzu gehört auch der Sport als mildere Form des Kampfspiels. Man spricht auch vom Leben als Spiel. Manchmal bezeichnet man auch die natürliche Neugierde als Spieltrieb. Im Althochdeutschen bezeichnet Spiel zunächst den Tanz. Unterhaltungsspiele sind seit dem Altertum überliefert (Ägypten, altes Reich). Das Schachspiel, das wohl berühmteste Spiel, stammt aus Indien oder China und erhielt etwa im 6. Jahrhundert n. Chr. die heutige Form. Es verbreitete sich über das oströmische Reich und über das arabische Spanien nach Europa. Nach Huizinga ([28])ist das Spiel wesentlicher Bestandteil aller Kultur und menschlicher Entwicklung.
Seit dem wegweisenden Buch ([44]) "Theory of Games and Economic Behaviour" von v. Neumann und Morgenstern aus dem Jahre 1944 ist die Spieltheorie eine mathematisch-wissenschaftliche Disziplin.
Die Bedeutung, die heutzutage der Spieltheorie beigemessen wird, ist in besonderer Weise augenfällig geworden durch die Verleihung des Nobelpreises für Wirtschaftswissenschaften im Jahre 1994 zu gleichen Teilen an Nash, Harsanyi und Selten für ihre bahnbrechenden Arbeiten auf dem Gebiet der

Spieltheorie (siehe [41], [42], [54], [55], [20], [21], [22]). Holler und Illig ([27, Seite 1]) schreiben in ihrem Buch "Einführung in die Spieltheorie"(1996), daß viele Wirtschaftswissenschaftler heute die Spieltheorie als formale Sprache der ökonomischen Theorie betrachten.
Die älteste wissenschaftliche Abhandlung über Spiele scheint sich in einem Brief aus dem Jahre 1713 an Bernoulli zu finden (siehe[66]). Im Jahre 1928 hat J. von Neumann ([43]) seine erste Arbeit über Spieltheorie veröffentlicht. Aus den Jahren 1921 und 1938 gibt aus auch zwei Arbeiten von Borel ([7], [8]), die sich mit diesem Thema beschäftigt. In wirtschaftlicher Hinsicht scheint Cournot([14]) den ersten und immer noch wichtigen Beitrag im Jahre 1838 geliefert zu haben. Stackelberg ([63]) hat sich etwa gleichzeitig wie v. Neumann und Borel mit Gleichgewichtspunkten im wirtschaftlichen Bereich beschäftigt, die sich in die spieltheoretischen Ansätze einfügen.
Aus dem Buch von Mehlmann ([38]) entnehmen wir die folgenden biographischen Notizen über die drei Nobelpreisträger:

**John Forbes Nash.**

Am 13. Juni 1928 in Bluefield, Virginia, geboren, absolvierte Nash seine Studien in Princeton als Schüler Albert W. Tuckers. Über das MIT (Massachusetts Institute of Technology) kehrte er später als Professor nach Princeton zurück. Das Schicksal hatte ihm nur eine geringe Zeitspanne für die schlagenden Beweise seiner erstaunlich vielseitigen mathematischen Begabung gegönnt. Seit 1959 von einer schweren Erkrankung aus dem Gleichgewicht gebracht, gelang es Nash erst Mitte der 80er Jahre die Krankheit zu besiegen.

**Reinhard Selten.**

Am 10. Oktober 1930 in Breslau (jetzt: Wroclaw) geboren, fühlte sich Selten frühzeitig zur Mathematik hingezogen. Die Studienjahre verbrachte er in Frankfurt, wo er bei Ewald Burger seine Magisterarbeit über ein Thema aus der kooperativen Spieltheorie verfaßte. Nach ersten Arbeiten auf dem Gebiet der experimentellen Ökonomie etablierte sich Selten binnen kürzester Zeit als einer der innovativsten Forscher der Spieltheorie. Auf Professuren in Berlin und Bielefeld folgte 1984 die Berufung auf den Lehrstuhl für wirtschaftliche Staatswissenschaften, insbesondere Wirtschaftstheorie der Universität Bonn. Besonders bemerkenswert ist Seltens Neigung zur wissenschaftlichen Kooperation und seine durch zahlreiche Arbeiten auf dem Gebiet der Politologie, der Biologie und der Psychologie erprobte Interdisziplinarität.

**John Harsanyi.**

John Harsanyi wurde am 29. Mai 1920 in Budapest geboren. In den Wirren der Nachkriegszeit mußte er als politischer Flüchtling das Land verlassen. Der Ausbildung nach Philosoph, studierte er in seiner neuen Heimat Australien und danach an der Universität Stanford Ökonomie, wo er 1959 seinen PhD. erwarb. Er bekleidete eine Professur an der Wayne State University in Detroit und wurde 1964 nach Berkeley an die University of California berufen. Zu seinen bedeutendsten Forschungsgebieten zählen die Verhandlungstheorie und die nutzentheoretisch begründbare Ethik. Hier auch noch eine Kurzbiographie der Begründer der wissenschaftlichen Spieltheorie.

Hier auch eine kurze Biographie der „Erfinder"der Spieltheorie:

**John von Neumann.**

Johann von Neumann, wie er ursprünglich hieß, wurde am 3. Dezember 1903 in Budapest geboren und starb am 8. Februar 1957 in Washington, D.C.. Er studierte in Berlin und Zürich Chemie und erhielt 1926 sein Diplom. Im gleichen Jahr promovierte er in Budapest mit einer Arbeit über Mengenlehre. Von 1926 bis 1929 war er Privatdozent in Berlin und danach bis 1930 in Hamburg. 1930 übersiedelte er zur Princeton University und wurde dort 1931 Professor. Neben den beiden Werken([43], [44]), mit denen er die Spieltheorie begründete, hat er auch bedeutende Arbeiten in reiner Mathematik und in Physik veröffentlicht.

**Oskar Morgenstern.**

Morgenstern wurde am 24. Januar 1902 in Görlitz geboren und ist am 26. Juli 1977 in Princeton gestorben. Morgenstern unterrichtete an der Universität Wien von 1929 - 1938, an der Princeton University von 1938 - 1970 und an der New York University von 1970-1977. Sein Arbeitsgebiet war die Ökonometrie, wo er auch einige Bücher veröffentlichte.
Ein Jahr vor dem Buch von v. Neumann und Morgenstern ([44]) erschien ein literarisches Werk, das sich mit einem Spiel befaßt: "Das Glasperlenspiel" von Hermann Hesse ([26]). Der Verfasser erhielt den Nobelpreis für Literatur vom Jahre 1946. Hermann Hesse wurde am 2. Juli 1877 in Calw, Deutschland, geboren und starb 1962 in Montagnola, Schweiz. Hier einige Zitate aus der Einleitung, die unseren Kontext berühren:

> „Das Spiel war zunächst nichts weiter als eine witzige Art von Gedächtnis und Kombinationsübung unter den Studenten und Musikanten........
>
> ..................später scheint das Spiel unter den Musikstudenten an Beliebtheit eingebüßt zu haben, dafür aber von den Mathematikern übernommen worden zu sein, ..........
>
> .... war das Spiel soweit entwickelt, daß es in besonderern Zeichen und Abbreviaturen mathematische Vorgänge auszudrücken vermochte; ..................
>
> Dieses mathematisch-astronomische Formelspiel erforderte eine große Aufmerksamkeit, Wachheit und Konzentration; unter den

> Mathematikern galt schon damals der Ruf eines guten Glasperlenspielers viel, er war gleichbedeutend mit dem eines sehr guten Mathematikers.“

Heutzutage beschäftigt sich die wissenschaftliche Spieltheorie hauptsächlich mit Modellen für wirtschaftliche Probleme. Aber auch politische, soziale, biologische, zoologische Modelle werden ausgearbeitet. Gesellschaftsspiele werden ebenfalls intensiv untersucht, nicht zuletzt das Schachspiel. Die augenfälligen Ergebnisse sind hier Computerprogramme (vgl. [49]). Spiele werden auch als Turingmaschinen implementiert, wie z.B. in ([13]) dargestellt.
Spiele haben eine sehr vielfältige Gestalt. Es kann Zug um Zug gespielt werden, oder es gibt nur eine einmalige Durchführung. Man spricht zwar auch von Solitärspielen, aber das eigentliche Spielproblem stellt sich erst, wenn mindestens zwei Spieler beteiligt sind. Die Spieltheorie trägt dieser Vielfalt durch ein reichliches Angebot an mathematischen Modellen Rechnung, von denen in den folgenden Abschnitten einige besprochen werden. Darüberhinaus beschreibt das Buch von Colman([12]) Experimente mit denen versucht wird, inwieweit die theoretischen Ansätze dem tatsächlichen Verhalten von Spielern oder Akteuren entsprechen. Hierzu und zur breiten Anwendungsmöglichkeit der Spieltheorie finden sich viele interessante und auch amüsante Tatsachen in dem Buch von Mero ([39])mit dem Titel „Moral Calculations“.
Streng wissenschaftlich gibt das von Reinhard Selten herausgegebene vierbändige Werk mit dem Titel „Game Equilibrium Models“([58], [59], [60], [61]) durch die Beiträge vieler bekannter Autoren ebenfalls einen Überblick der vielfältigen Anwendungsbereiche. Der Inhalt der vier Bände geht auf ein Forschungsjahr vom 1.Oktober 1987 bis zum 30. September 1988 am Zentrum für interdisziplinäre Forschung an der Universität Bielefeld zurück. Aus dem Vorwort entnehmen wir, daß unter den Teilnehmern Wirtschaftswissenschaftler, Biologen, Mathematiker, Politikwissenschaftler und ein Philosoph waren. Man sieht also, daß Spieler oder Akteure nicht physische Personen sein müssen, es können auch die ”Natur” oder juristische Personen oder Tiere als Akteure mitspielen. Neben den klassischen wirtschaftlichen Anwendungen, wird in den vielen Artikeln des vierbändigen Werkes auch versucht menschliche und tierische Verhaltensweisen und Entwicklungen nachzubilden.
Das Buch von Eigen und Winkler ([17]) mit dem Titel „Das Spiel: Naturgesetze steuern den Zufall“deckt Spielabläufe auch in der „unbelebten“Natur auf.
Anwendungen ( bzw. die Versuche hierzu) der mathematisch-wissenschaftlichen Spieltheorie auf philosophische, politische, gesellschaftliche und soziale Pro-

bleme finden sich z.B. bei Binmore ([4], [5], [6]).
Die Spieltheorie kann auch als Teil der Entscheidungstheorie aufgefaßt werden. Bei einem Spiel trifft ein Spieler seine Entscheidung unter Berücksichtigung möglicher Entscheidungen der anderen Spieler. In vielen Fällen entspricht dies der Realität eher als die Modellierung der Um- und Mitwelteinflüsse als Parameter oder Zufallseinflüsse (Solitärspiel!).
An wissenschaftlichen Zeitschriften, die sich nur mit Spieltheorie befassen, gibt es z.B. "Journal of Game Theory" und "Games and Economic Behavior".
In Mehlmann ([38]) findet man auch viele Internetadressen zur Spieltheorie und ihrer Anwendung.
Die Auswahl des Stoffes für dieses Skriptum orientiert sich an der mathematischen Strenge der Themen und der Anwendung im wirtschaftlichen Bereich.

# KAPITEL 2

## Spiele in Normalform

### 2.1 Definition

**Definition 2.1** *Unter einem Spiel* $\Gamma$ *versteht man ein Tripel* $(\mathcal{A}, \mathcal{S}, \mathcal{U})$*, wobei* $\mathcal{A}$ *die Menge der Spieler(Akteure),* $\mathcal{S}$ *die Menge der Entscheidungen (Strategien) aller Spieler, und* $\mathcal{U} : \mathcal{S} \to \mathcal{E}$ *das Spielergebnis* $\mathcal{E}$ *für jede Strategienwahl aller Spieler angibt. Die Durchführung des Spiels besteht darin, daß jeder Spieler eine bestimmte Strategie aus seiner Strategienmenge wählt.Die Gesamtheit dieser ausgewählten Strategien heißt Strategienkombination.*

**Bemerkung.** Diese Darstellung eines Spiels heißt auch Normalform oder strategische Form. Die extensive Form eines Spieles, bei der der sequentielle Ablauf eines Spieles dargestellt werden kann, wird später behandelt. Die extensive Form kann auf die Normalform zurückgeführt werden.
Das Spiel in dieser Form heißt auch nichtkooperativ. Denn das wesentliche Element bei kooperativen Spielen ist, daß über die Wahl der Strategien untereinander verhandelt wird und Koalitionen gebildet werden, um so das Spielergebnis $\mathcal{U}$ zu verbessern. Wenn die einzelnen Spielergebnisse zusammengelegt werden können, kann auch über die Aufteilung des „gemeinsamen Gewinns"verhandelt werden. Um diesen Vorgang zu beschreiben, wird bei der klassischen Methode aus dem Spielergebnis eine sogenannte charakteristische Funktion berechnet ( siehe z.B. Vorob'ev [64]) und bei der Methode von Harsanyi/Selten die Definition eines Spieles (siehe [25]) verallgemeinert, um Verhandlungen unter den Spielern beschreiben zu können.

Die angegebene Definition ist sehr allgemein und abstrakt. Um konkrete Ergebnisse ableiten zu können, müssen die einzelnen Teile des Tripels $(\mathcal{A}, \mathcal{S}, \mathcal{U})$ noch weiter spezifiziert werden.

**Spieler** $\mathcal{A}$: Ein Schwerpunkt der Literatur ist der Fall endlich vieler Spieler (Akteure) ($\mathcal{A} = \{1, 2, 3, \ldots, m\}$ oder $\{A_1, \ldots, A_m\}$). In der neuesten Literatur findet sich jedoch immer häufiger der Fall unendlich vieler Spieler (z.B. $\mathcal{A} = \mathbb{R}$).

**Strategien** $\mathcal{S}$: Grundlegend bei einem Spiel ist, daß das Spielergebnis für jeden Spieler nicht bloß von der eigenen Strategie abhängt, sondern von der gewählten Strategienkombination aller Spieler.
Einem Spieler können endlich viele ($\mathcal{S}^i = \{s^i_1, \ldots, s^i_{n_i}\}$) oder unendlich viele Strategien (z.B. $\mathcal{S}^i = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{R}^{d_i}$) zur Verfügung stehen. Die Strategie eines Spielers muß jedoch nicht unmittelbar in Zahlen ausdrückbar sein, z.B.„Wahl eines Berufes“, „Herstellung eines neuen Produktes“oder Ähnliches.
Die Menge der Strategien aller Spieler kann dann dargestellt werden durch das kartesische Produkt

$$\mathcal{S} = \prod_{i=1}^{m} \mathcal{S}^i \ .$$

Die Kombination von Strategien aller Spieler wird mit $s = (s^1, s^2, \ldots, s^m)$ bezeichnet. Häufig wird auch die Strategienkombination aller Spieler mit Ausnahme des $i$-ten Spielers benötigt und erhält die Bezeichnung $s^{-i}$. Man verwendet daher auch $s = (s^i, s^{-i})$. Folgerichtig wird die Strategienmenge aller Spieler mit Ausnahme des $i$-ten Spielers mit $\mathcal{S}^{-i}$ bezeichnet, d.h. $\mathcal{S} = \mathcal{S}^i \times \mathcal{S}^{-i}$.

**Spielergebnis** $\mathcal{U}$: Das Spielergebnis kann Gewinn, Verlust, irgendeine Form von Nutzen, Schaden, oder auch ein nicht unmittelbar durch Zahlen beschreibbares Ergebnis sein.
Ist das Spielergebnis durch eine Zahl gegeben, so spricht man von **Auszahlung**, Gewinn oder Nutzen, und kann es als Geldbetrag interpretieren.
In diesem Fall ist das Spielergebnis $\mathcal{U}$ eine Funktion mit Werten im $\mathbb{R}^m$:

$$\mathcal{U} : \mathcal{S} \to \mathbb{R}^m \tag{2.1}$$

Man drückt dies auch folgendermaßen aus

$$\mathcal{U} = (U^1, \ldots, U^m) \quad U^i(s) = U^i(s^1, s^2, \ldots, s^m) = U^i(s^i, s^{-i}) \quad i \in \mathcal{A} \ , \tag{2.2}$$

Wobei $U^i(s)$ die Auszahlung für den $i$-ten Spieler ist.
Obwohl wir uns im folgenden hauptsächlich mit skalaren zahlenmäßigen Spielergebnissen beschäftigen werden, scheint es im Hinblick auf vektormäßige Ergebnisse sinnvoll, auch **abstrakte Spielergebnisse** $\mathcal{U}$ zuzulassen. Dabei orientieren wir uns an den Darstellungen in Osborne und Rubinstein ([46]) und in Zhao ([68]).
Da sich die Strategienauswahl ausschließlich am Spielergebnis orientieren kann, muß für jeden Spieler auf der Menge $\mathcal{E}$ der möglichen Spielergebnisse eine Präferenzordnung $\succeq_i$ gegeben sein.
Genau wenn der Spieler $i$ das Ergebnis $a \in \mathcal{E}$ dem Ergebnis $b \in \mathcal{E}$ vorzieht, dann verwenden wir hierfür die Bezeichnung $a \succ_i b$ (synonym $b \prec_i a$).
Wenn der Spieler $i$ das Ergebnis $a \in \mathcal{E}$ nicht schlechter beurteilt als das Ergebnis $b \in \mathcal{E}$ , dann verwenden wir hierfür die Bezeichnung $a \succeq_i b$ (synonym $b \preceq_i a$).
Wir nehmen an, daß die Präferenzordnung $\succeq_i$, $\succ_i$ jedes Spielers auf der Ergebnismenge $\mathcal{E}$ eine Halbordnung oder eine Totalordnung ist.
Ist $\mathcal{E} = \mathcal{S}$ und somit $\mathcal{U}$ die identische Abbildung, dann kann die gewählte Strategienkombination selbst als Spielergebnis aufgefaßt werden. Dies ist der Standpunkt in Osborne und Rubinstein ([46]).
Im folgenden nehmen wir nun an, daß $\mathcal{E} = \prod_{i=1}^{m} \mathcal{E}^i$und daß $\mathcal{U} = (U^1, \ldots, u^m)$ mit $u^i : \mathcal{S} \to \mathcal{E}^i$. Die Präferenzrelationen $\succ_i$ und $\succeq_i$ sind dann primär auf $\mathcal{E}^i$ definiert, jedoch erzeugen diese in offensichtlicher Weise auch Präferenzrelationen auf ganz $\mathcal{E}$.

Welche seiner Strategien soll nun ein Spieler wählen? Das zentrale Problem der Spieltheorie ist es, Kriterien hierfür anzugeben, wenn möglich sogar einen eindeutigen Vorschlag zu machen. Aus dem vorher Gesagten ergibt sich, daß der einzelne Spieler eine Strategie wählen soll, die im Sinne seiner Präferenzen ein möglichst gutes Spielergebnis für ihn bringen soll. Unbestrittene Grundlagen für eine solche Entscheidung sind die unten definierten Begriffe dominante Strategien und das Nash-Gleichgewicht. Leider erfüllen beide nicht die Bedingung, einen eindeutigen Ratschlag für eine Strategienwahl geben zu können. Dominante Strategien kommen selten vor und Nash-Gleichgewichte gibt es häufig mehr als eines (mit verschieden guten Spielergebnissen für den einzelnen Spieler), siehe Abschnitt (3.5). Wir geben nun die grundlegenden Definitionen an.

Kann jeder Spieler seine optimale Strategie unabhängig davon wählen, wie sich die übrigen Spieler verhalten, dann nennt man diese Strategie eine ***dominante Strategie***.

**Definition 2.2** *Die Strategie $s^{i*}$ des Spielers i heißt eine dominante Stra-*

*tegie, wenn*

$$U^i(s^{i\,*}, s^{-i}) \succeq_i U^i(s^i, s^{-i}) \quad \forall s = (s^i, s^{-i}) \in \mathcal{S} \tag{2.3}$$

**Definition 2.3 (Gleichgewicht in dominanten Strategien)** *Eine Strategie $s^* = (s^{1\,*}, \ldots, s^{m\,*})$, bei der jedes $s^{i\,*}$, $i = 1, \ldots, m$ die Eigenschaft*

$$U^i(s^{i\,*}, s^{-i}) \succeq_i U^i(s^i, s^{-i}) \quad \forall i \in \mathcal{A}, \forall s = (s^i, s^{-i}) \in \mathcal{S} \tag{2.4}$$

*hat, nennt man ein* ***Gleichgewicht in dominanten Strategien****.*

Als die Grundlage der Spieltheorie gilt das Auswahlkriterium für Strategien, das im Jahre 1951 von Nash ([42]) entwickelt worden ist. Dieses Kriterium ist eine Verallgemeinerung des Gleichgewichtskonzepts, das Cournot ([14]) im Jahre 1838 für die Oligopoltheorie entwickelt hat (siehe hierzu das Beispiel (5) und das allgemeinere Beispiel in Abschnitt (7). Ein wichtiger (zumindest historisch gesehen) Spezialfall ist das Minimax-Prinzip von J. v. Neumann ([43]), das wir in Abschnitt (3.2) besprechen werden.

**Definition 2.4 (Nash-Gleichgewicht)** *Eine Strategienkombination $s^* = (s^{1\,*}, \ldots, s^{m\,*})$ heißt Nash-Gleichgewicht, wenn gilt*

$$U^i(s^{i\,*}, s^{-i\,*}) \succeq_i U^i(s^i, s^{-i\,*}) \quad \forall i \in \mathcal{A},\, s^i \in \mathcal{S}^i\ . \tag{2.5}$$

**Satz 2.1** *Jedes Gleichgewicht in dominanten Strategien ist auch ein Nash-Gleichgewicht.*

**Beweis:**
Die Bedingung (2.4) ist umfassender als die Bedingung (2.5). $\diamond$

## 2.2 Beispiele

Alle Beispiele sind nicht auf die textliche Einkleidung fixiert, die im folgenden angegeben wird. Es ist sogar besonders interessant, wenn neue Situationen gefunden werden können, die dem gleichen Schema folgen. Teilweise werden solche Varianten auch bereits angegeben. Auch die vorgeschlagenen Zahlenwerte dürfen nicht zu eng gesehen werden.
Wir beginnen mit einem oft zitierten Problem, dem sogenannten „Kampf der Geschlechter“. Bei der textlichen Einkleidung verwenden wir die Formulierung in Holler und Illig ([27]).

**Beispiel 1 [Kampf der Geschlechter]:**

Frederic und Nicole haben beim letzten Treffen nichts Genaues ausgemacht, wann und wo sie sich das nächste Mal treffen wollen. Frederic geht gerne zum Fußballspiel, Nicole gerne ins Kino. Frederic denkt bei sich, wird sie mir zuliebe zum Fußball gehen, oder geht sie doch ins Kino. Nicole denkt ähnlich, wird er mir zuliebe ins Kino gehen, oder geht er doch zum Fußball. Beiden liegt aber sehr viel daran, sich zu treffen.
Es gibt also vier Strategienkombinationen $(F, F)$, $(K, K)$, $(F, K)$, $(K, F)$. Nach der Beschreibung der beiden Spieler hat jede offensichtlich eine etwas andere Präferenzrelation.
„ER“könnte folgende haben

$$(K, F) \preceq_{Er} (F, K) \prec_{Er} (K, K) \prec_{Er} (F, F) \ ,$$

und „SIE “

$$(K, F) \preceq_{Sie} (F, K) \prec_{Sie} (F, F) \prec_{Sie} (K, K) \ .$$

Die beiden folgenden Beziehungen zeigen, daß $(K, K)$ ein Nash-Gleichgewicht ist:

$$(F, K) \prec_{Er} (K, K) \qquad (K, F) \prec_{Sie} (K, K) \ .$$

Ebenso erweist sich $(F, F)$ als Nash-Gleichgewicht:

$$(K, F) \prec_{Er} (F, F) \qquad (F, K) \prec_{Sie} (F, F) \ .$$

Ein Gleichgewicht in dominanten Strategien gibt es nicht.
Dieser Präferenzordnung entspricht die Auszahlungsmatrix in Holler und Illig ([27]):

| | | Sie | |
|---|---|---|---|
| | | Kino | Fußball |
| Er | Kino | (1,3) | (0,0) |
| | Fußball | (0,0) | (3,1) |

Die obigen Ergebnisse können wir hier nochmals nachprüfen. Es gibt keine dominante Strategie, weil

$$U^1(\text{Kino}, s^2) \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \not\geq U^1(\text{Fußball}, s^2) \begin{Bmatrix} 0 \\ 3 \end{Bmatrix}$$

Ebenso sind die Strategien (Kino,Kino) und (Fußball, Fußball) Nash-Gleichgewichte.
Wenn nun „Sie“ihre Präferenzen ändert zu

$$(K, F) \prec_{Sie} (F, F) \prec_{Sie} (F, K) \prec_{Sie} (K, K) \ ,$$

dann ist nur mehr $(K, K)$ ein Nash-Gleichgewicht. Dies entspricht einer Auszahlungsmatrix

| | | Sie | |
| --- | --- | --- | --- |
| | | Kino | Fußball |
| Er | Kino | (1,3) | (0,0) |
| | Fußball | (0,2) | (3,1) |

Wenn nun „Er"auch seine Präferenzen ändert zu

$$(K, F) \prec_{Er} (K, K) \prec_{Er} (F, K) \prec_{Er} (F, F) \ ,$$

dann ist nur mehr $(F, K)$ ein Gleichgewicht in dominanten Strategien, und also auch ein Nash-Gleichgewicht. Dies entspricht einer Auszahlungsmatrix

| | | Sie | |
| --- | --- | --- | --- |
| | | Kino | Fußball |
| Er | Kino | (1,3) | (0,0) |
| | Fußball | (2,2) | (3,1) |

◇

**Beispiel 2 [Gefangenendilemma]:**

Aus Mehlmann ([38, Seite 87]) entnehmen wir die folgende (sich in allen Spieltheoriebüchern findende) Anekdote von A.W. Tucker: Bonnie und Clyde werden nach einem mißglückten Banküberfall geschnappt und in verschiedenen Zellen untergebracht. Der Staatsanwalt kann den beiden, falls sie nicht gestehen ($s_2^i$, $i = 1, 2$) sollten, nur verbotenen Waffenbesitz nachweisen. Dafür gibt es drei Jahre Gefängnis. Falls einer der beiden standhaft bleibt, der andere jedoch gesteht ($s_1^i$, $i = 1, 2$), so erhält der Geständige als Zeuge der Anklage nur ein Jahr Gefängnis. Der Nichtgeständige erhält jedoch 9 Jahre. Gestehen beide, so müssen sie 7 Jahre absitzen. (Ob diese Regelung juristisch einwandfrei ist, sei dahingestellt)

| | | 2.Spieler | |
| --- | --- | --- | --- |
| | | $s_1^2$ | $s_2^2$ |
| 1.Spieler | $s_1^1$ | (-7,-7) | (-1,-9) |
| | $s_2^1$ | (-9,-1) | (-3,-3) |

Das einzige Nash-Gleichgewicht ist $(s_1^1, s_1^2)$. Hieraus ergibt sich das Dilemma, denn beide würden besser $(s_2^1, s_2^2)$ wählen.

Mehlmann ([38]) gibt noch zwei weitere Erzählvarianten zum „Gefangenendilemma“. ◇

**Beispiel 3 [Löwe-Lamm-Beispiel]:**

Unter der Bezeichnung Löwe-Lamm-Spiel hat Mehlmann ([38]) eine Menge bekannter Beispiele in ein Schema zusammengefaßt. Wir geben dieses Schema hier wieder.
Es sind hier zwei Spieler, von denen jeder die zwei gleichen Strategien hat, nämlich eine Löwenstrategie und eine Lammstrategie. Das Spielziel ist es, ein wertvolles Gut zu erbeuten.
Wählen beide Spieler die Löwenstrategie, so kämpfen sie um die Beute, wählen beide die Lammstrategie, so einigen sie sich über die Aufteilung. Wählen beide unterschiedliche Strategien, so überläßt der, der die Lammstrategie gewählt hat dem anderen Spieler die Beute.
Die Auszahlung berechnet sich folgendermaßen:

V sei der Gewinn bei alleiniger Besitznahme der Beute,

D/2 sei der Verlust, der im Zuge eines Kampfes entsteht,

W/2 sei der Gewinn, der bei kampfloser Aufteilung der Beute zusätzlich entsteht

Als Auszahlung wird dann festgelegt zu:

<table>
<tr><td></td><td>Löwe</td><td>Lamm</td></tr>
<tr><td>Löwe</td><td align="right">(V-D)/2</td><td align="right">0</td></tr>
<tr><td></td><td>(V-D)/2</td><td>V</td></tr>
<tr><td>Lamm</td><td align="right">V</td><td align="right">(V+W)/2</td></tr>
<tr><td></td><td>0</td><td>(V+W)/2</td></tr>
</table>

In den vier Kästchen sind die Auszahlungen an beide Spieler angegeben, wenn die Strategien in der zugehörigen Spalte und Zeile gespielt werden. Die Auszahlung für den Zeilenspieler, der die Strategie der zugehörigen Zeile spielt ist links unten angegeben, die für den Spaltenspieler, der die Strategie der zugehörigen Spalte spielt ist rechts oben angegeben.
Es ist auch üblich, folgende einfachere Darstellung zu verwenden: in jedem der vier Kästchen wird ein Auszahlungsvektor angegeben, wo die erste Komponente sich auf den Zeilenspieler(1. Spieler) bezieht und die zweite auf den Spaltenspieler (2. Spieler).
Spezialfälle sind:

(1) Das Dilemma des Wettrüstens für V=4, D=2 und W=0. Hier wird die friedliche Einigung nicht zusätzlich belohnt.

| | | 2.Spieler | |
|---|---|---|---|
| | | $s_1^2$ | $s_2^2$ |
| 1.Spieler | $s_1^1$ | (1,1) | (4,0) |
| | $s_2^1$ | (0,4) | (2,2) |

$s_1^i$, $i = 1, 2$ sind die Löwenstrategien, d.h. hier Aufrüsten der Streitkräfte; $s_2^i$, $i = 1, 2$ sind die Lammstrategien, d.h. hier Verzicht auf Rüstung. Das Nash-Gleichgewicht ist (Rüstung,Rüstung)mit der Auszahlung 1 (Vielleicht als ein Maß für das verfügbare Bruttosozialprodukt) an jeden Beteiligten. Würden beide sich auf Nicht-Rüstung einigen, so erhielte jeder die Auszahlung 2. Letzteres ist aber kein Nash-Gleichgewicht, d.h. jeder der Beteiligten ist versucht, den anderen reinzulegen und auf Rüstung umzustellen. Hierin liegt das Dilemma.

(2) Angsthasen-Spiel für V=2, D=4 und W=0. Die friedliche Einigung wird nicht zusätzlich belohnt, und der Kampf besonders schwer bestraft.

| | | 2.Spieler | |
|---|---|---|---|
| | | $s_1^2$ | $s_2^2$ |
| 1.Spieler | $s_1^1$ | (-1,-1) | (2,0)) |
| | $s_2^1$ | (0,2) | (1,1) |

Hierzu gibt es eine besonders eindrucksvolle Deutung von Bertrand Russel: Auf einer (für den allgemeinen Verkehr gesperrten Landstraße) steuern zwei Fahrer ihre Autos genau aufeinander zu. Verlierer (chicken) ist derjenige, der zuerst Angst bekommt und ausweicht(Lammstrategie).

Eine weitere Deutung findet sich in Nicholas Rays Film "Denn sie wissen nicht, was sie tun" aus dem Jahre 1955. Jimbo und sein Erzfeind Buzz rasen in ihrem Autos auf eine Klippe zu und derjenige gewinnt, der als letzter aus seinem Wagen hechtet, bevor dieser über die Klippe stürzt.

(3) Rousseaus Hirschjagdparabel für V=4, D=0 und W=6. Hier wird die friedliche Einigung besonders gut belohnt, während der Kampf überhaupt nicht bestraft wird.

| | | 2.Spieler | |
|---|---|---|---|
| | | $s_1^2$ | $s_2^2$ |
| 1.Spieler | $s_1^1$ | (2,2) | (4,0) |
| | $s_2^1$ | (0,4) | (5,5) |

> Jean-Jacques Rousseau hat in seiner Abhandlung über den Ursprung der Ungleichheit folgendes Gleichnis vom Zwiespalt zwischen individuellen Zielen und gemeinschaftlichem Handeln gegeben:
>
> Im Verlaufe einer Jagd ist es einer Gruppe von Jägern gelungen, einen Hirsch sowie mehrere Hasen einzukreisen. In die Enge getrieben, versuchen die Tiere gleichzeitig auszubrechen. Jeder Jäger steht nunmehr vor der Wahl, entweder die Hasen entkommen zu lassen und gemeinsam mit den anderen den Ausbruch des Hirsches zu verhindern (Lammstrategie, $s_2^i$, $i = 1, 2$) oder sich nach dem nächstbesten Hasen zu bücken (Löwenstrategie, $s_1^i$, $i = 1, 2$) und dabei vom Hirsch übersprungen zu werden. Der Hirsch kann nur dann erlegt werden, wenn jedermann der Versuchung widersteht, den leichten Fang zu machen. Wenn sich nur ein Jäger bückt, kann ihn der Hirsch überspringen und entkommen.

Als ersten Spieler kann man einen beliebigen der Jäger nehmen und als zweiten Spieler den Rest der Jäger. Es genügt ja, wenn ein Jäger sich bückt, was die anderen tun, ist dann gleichgültig.
Nash-gleichgewichte sind hier $(s_1^1, s_1^2)$ und $(s_2^1, s_2^2)$. $\diamond$

Ein weiteres berühmtes Beispiel ist auch das folgende.

**Beispiel 4 [Schere-Stein-Papier]:**

Bei diesem Kinderspiel hat jeder der zwei Spieler drei Strategien, nämlich das Zeigen von Schere, Stein oder Papier. Dabei stehen die gespreizten Mittel- und Zeigefinger für die Schere, die Faust für den Stein und die flache Hand für das Papier. Der Sieger wird durch die folgenden Spielregeln ermittelt: Schere schneidet Papier, Papier umwickelt den Stein und Stein schleift die Schere. Der Gewinn für den einzelnen Spieler wird meist in der Weise festgelegt, daß der Verlierer dem Gewinner eine Geldeinheit zahlt. Zeigen beide Spieler das Gleiche, dann erfolgt keine Zahlung. Es ergibt sich folgende Auszahlungsmatrix:

| | Schere | Stein | Papier |
|---|---|---|---|
| Schere | 0 | -1 | 1 |
| Stein | 1 | 0 | -1 |
| Papier | -1 | 1 | 0 |

Es gibt hier weder dominante Strategien noch Nash-Gleichgewichte.
$\diamond$

**Beispiel 5 [Nash-Gleichgewicht im Dyopol]:**

Dies ist ein Beispiel mit unendlich vielen Strategien.
Zwei Erdbeerfarmer $i = 1, 2$ ernten auf ihrem Feld jeweils $y_i \geq 0$ Kilo Erdbeeren. Die Arbeitskosten $K_i = y_i^2$ hängen vom Quadrat der geernteten Menge ab. Der Marktpreis $p$ hänge in folgender Weise mit der Gesamternte beider Farmer zusammen: $y_1 + y_2 = 60 - 0.5p$, also $p = 120 - 2(y_1 + y_2)$. Es kann angenommen werden, daß die Gesamternte vollständig verkauft werden kann. Der Gewinn des Farmers $i$ beträgt dann $G_i(y_1, y_2) = y_i p - y_i^2 = (120 - 2(y_1 + y_2))y_i - y_i^2$.
Wir nehmen nun weiter an, daß jeder Farmer seine Erntemenge planen kann. Allerdings habe diese Planung keinen Einfluß auf die Angebotsmenge des anderen Farmers. Jeder Farmer hat unendlich viele Strategien $y_i \in \mathbb{R}_+$. Gibt es hier ein Nash-Gleichgewicht?
Zur Lösung überlegen wir folgendes: Bei gegebenem $y_{-i} \in \mathbb{R}_+$ des Konkurrenten maximiert der Farmer $i$ seinen Gewinn $G_i$:

$$\frac{dG_i}{dy_i} = 120 - 6y_i - 2y_{-i} = 0 \ .$$

Als Anwort auf $y_{-i}$ ergibt sich

$$r^i(y_{-i}) = \begin{cases} 20 - 1/3 y_{-i} & y_{-i} \leq 60 \\ 0 & y_{-i} > 60 \end{cases} .$$

Schließlich ergibt sich $y_1 = r^1(y_2)$, $y_2 = r^2(y_1)$ und hieraus $y_1 = y_2 = 15$ und $G_i = 675$.
$\diamond$

## 2.3 Grundlegende Ergebnisse

Zuerst betrachten wir „strategisch äquivalente“Spiele.

**Definition 2.5 (strategische Äquivalenz)** *Gegeben seien zwei Spiele* $\Gamma = (\mathcal{A}, \mathcal{S}, \mathcal{U})$ *und* $\tilde{\Gamma} = (\mathcal{A}, \mathcal{S}, \tilde{\mathcal{U}})$ *mit der gleichen Anzahl von Spielern* $\mathcal{A} = 1, 2, \ldots, m$ *und der gleichen Strategienmenge. Sie heißen strategisch äquivalent, wenn sie die gleichen Nash-Gleichgewichte besitzen (die Menge der Nash-Gleichgewichte ist identisch).*

**Bemerkung.** Die strategische Äquivalenz ist tatsächlich eine Äquivalenzrelation in der Menge der Spiele mit gleicher Spieleranzahl und gleichen Strategienmengen.

**Satz 2.2** *Seien zwei Spiele* $\Gamma = (\mathcal{A},\mathcal{S},\mathcal{U})$ *und* $\tilde{\Gamma} = (\mathcal{A},\mathcal{S},\tilde{\mathcal{U}})$ *gegeben.* $\mathcal{E}$ *sei der Wertebereich von* $\mathcal{U}$ *und* $\tilde{\mathcal{E}}$ *der Wertebereich von* $\tilde{\mathcal{U}}$*.* $\Gamma$ *und* $\tilde{\Gamma}$ *sind strategisch äquivalent, wenn es Abbildungen* $f^i : \mathcal{E}^i \to \tilde{\mathcal{E}}^i$ *gibt, die Ordnungsisomorphismen sind.*

**Beweis:**
Vereinfachend bezeichnen wir die Präferenzrelation in $\mathcal{E}^i$ und in $\tilde{\mathcal{E}}^i$ mit $\succeq_i$.
Sei $s^* \in \mathcal{S}$ ein Nash-Gleichgewicht für $\Gamma$. Da $f^i$ ein Ordnungsisomorphismus ist, gilt

$$U^i(s^*) \succeq_i U^i(s^i, s^{-i\,*}) \quad \forall s^i \in \mathcal{S}^i \, , i = 1, \dots , m$$

genau wenn

$$f^i(U^i(s^*)) \succeq_i f^i(U^i(s^i, s^{-i\,*})) \quad \forall s^i \in \mathcal{S}^i \, , i = 1, \dots , m \; ,$$

was gleichbedeutend ist mit

$$\tilde{U}^i(s^*) \succeq_i \tilde{U}^i(s^i, s^{-i\,*}) \quad \forall s^i \in \mathcal{S}^i \, , i = 1, \dots , m \; .$$

Somit ist $s^*$ auch ein Nash-Gleichgewicht bezüglich des Spiels $\tilde{\Gamma}$. Offensichtlich gilt auch die umgekehrte Richtung.
Ist nun $s^*$ kein Nash-Gleichgewicht bezüglich $\Gamma$, dann gibt es ein $s^{i\,**} \in \mathcal{S}^i$ mit

$$U^i(s^*) \prec_i U^i(s^{i\,**}, s^{-i\,*}) \quad i = 1, \dots , m$$

genau, wenn

$$f^i(U^i(s^*)) \prec_i f^i(U^i(s^{i\,**}, s^{-i\,*})) \quad i = 1, \dots , m$$

was gleichbedeutend ist mit

$$\tilde{U}^i(s^*) \prec_i \tilde{U}^i(s^{i\,**}, s^{-i\,*}) \quad i = 1, \dots , m \; .$$

$s^*$ ist damit auch kein Nash-Gleichgewicht für $\tilde{\Gamma}$. Somit hat das Spiel $\tilde{\Gamma}$ keine zusätzlichen Gleichgewichtspunkte. Auch hier gilt offensichtlich die umgekehrte Richtung. $\diamond$

**Satz 2.3** *Gegeben seien zwei Spiele* $\Gamma = (\mathcal{A}, \mathcal{S}, \mathcal{U})$ *und* $\tilde{\Gamma} = (\mathcal{A}, \mathcal{S}, \tilde{\mathcal{U}})$ *mit der gleichen Anzahl von Spielern* $\mathcal{A} = 1, 2, \dots, m$ *und der gleichen Strategienmenge. Die Spielergebnisse* $\mathcal{U}$ *und* $\tilde{\mathcal{U}}$ *seien Auszahlungen mit der Beziehung*

$$\tilde{U^i}(s) = k^i U^i(s) + c^i \quad i = 1, 2, \dots, m \quad \forall s \in \mathcal{S} \ , \tag{2.6}$$

*wobei* $k^i > 0$ *und* $c^i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m$.

*Die beiden Spiele* $\Gamma$ *und* $\tilde{\Gamma}$ *sind strategisch äquivalent.*

**Beweis:**

Die durch die Beziehung zwischen den Auszahlungen $\mathcal{U}$ und $\tilde{\mathcal{U}}$ implizit definierte Funktion $f^i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f^i(x) = k^i x + c^i$, $x \in \mathbb{R}$ definiert einen Ordnungsisomorphismus. $\diamond$

**Definition 2.6** *Spiele, die bezüglich des Ordnungsisomorphismus (2.6) strategisch äquivalent sind, nennen wir strategisch linear-äquivalent.*

**Definition 2.7** *Ein* ***Konstantsummen-Spiel*** *ist ein Spiel mit einer Auszahlung als Spielergebnis, für das gilt*

$$\sum_{i \in \mathcal{A}} U^i(s) = C \quad C \in \mathbb{R} \quad \forall s \in \mathcal{S} \ . \tag{2.7}$$

*Ist* $C = 0$*, so spricht man von einem Nullsummen-Spiel.*

**Satz 2.4** *Jedes Konstantsummen-Spiel ist einem Nullsummen-Spiel strategisch äquivalent.*

**Beweis:**

Mit nachzurechnenden Konstanten $k^i$ und $c^i$, $i = 1, \dots, m$ zeigt man die strategische Linear-Äquivalenz. $\diamond$

**Definition 2.8** *Ein Zwei-Personenspiel heißt stark kämpferisch, wenn*

$$U^1(s) \preceq_i U^1(s') \quad \Leftrightarrow \quad U^2(s) \succeq_2 U^2(s') \quad \forall s, s' \in \mathcal{S} \ .$$

**Beispiel 6 [kämpferisches Spiel]:**

Wir betrachten ein Spiel aus Vorob'ev ([64]), bei dem jeder Spieler zwei Strategien hat, und als Spielergebnis eine Auszahlung gegeben ist:

| | | 2.Spieler | |
|---|---|---|---|
| | | $s_1^2$ | $s_2^2$ |
| 1.Spieler | $s_1^1$ | (-10,5) | (2,-2) |
| | $s_2^1$ | (1,-1) | (-1,1) |

$\diamond$

**Satz 2.5** *Jedes Zwei-Personen-Nullsummen-Spiel ist stark kämpferisch.*

**Satz 2.6** *Ein stark kämpferisches Zwei-Personenspiel mit einer Auszahlung ist einem Nullsummenspiel strategisch äquivalent.*

**Beweis:**
Nach Friedman ([18, Seite 79]) wurde dieser Satz erstmals in Leininger et al.([32]) bewiesen. Sei nun $\Gamma = (\mathcal{A}, \mathcal{S}, \mathcal{U})$ das gegebene stark kämpferische Spiel. In Anlehnung an Friedman ([18, Seite 80]) definieren wir ein neues Spiel $\tilde{\Gamma} = (\mathcal{A}, \mathcal{S}, \tilde{\mathcal{U}})$ mit

$$\tilde{U}^1(s) = U^1(s) \quad \tilde{U}^2(s) = -U^1(s) \quad \forall s \in \mathcal{S} \ .$$

Aus der Definition als kämpferisches Spiel folgt

$$U^2(s) \geq U^2(s') \Leftrightarrow U^1(s) \leq U^1(s') \ .$$

Vorzeichenumkehr liefert

$$U^1(s) \leq U^1(s') \Leftrightarrow -U^1(s) \geq -U^1(s') \ ,$$

und hieraus folgt schließlich entsprechend der Definition von $\tilde{U}^2$

$$-U^1(s) \geq -U^1(s') \Leftrightarrow \tilde{U}^2(s) \geq \tilde{U}^2(s') \ .$$

Damit ist gezeigt, daß die Funktion $f^2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f^2(U^2(s)) = -U^1(s), \forall s \in \mathcal{S}$ ein Ordnungsisomorphismus ist. Die verbleibende Funktion $f^1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wird als identische Abbildung gewählt. $\diamond$
**Bemerkung.** Wie der vorangehende Beweis zeigt, ist das strategisch äquivalente Nullsummenspiel nicht eindeutig, z.B. hätte man auch $\tilde{\mathcal{U}}$ definieren können als

$$\tilde{U}^2(s) = U^2(s) \quad \tilde{U}^1(s) = -U^2(s) \quad \forall s \in \mathcal{S} \ .$$

**Definition 2.9 (endliche Spiele)** *Ein Spiel $\Gamma = (\mathcal{A}, \mathcal{S}, \mathcal{U})$ heißt endlich, wenn die Anzahl $|\mathcal{A}|$ der Spieler (Akteure) und die Anzahl $|\mathcal{S}^i|$ der Strategien, auch reine Strategien genannt, für jeden Spieler $i$ endlich sind.*

**Bemerkung.** Die Auszahlungsfunktionen der einzelnen Spieler haben dann mit der Bezeichnung $n_i = |\mathcal{S}^i|$ folgende Darstellung:

$$U^i(s^1_{j_1}, \ldots, s^m_{j_m}) = u^i_{j_1,\ldots,j_m} \in \mathbb{R} \quad j_i = 1, \ldots, n_i \quad i = 1, \ldots, m \ .$$

Endliche Spiele sind ein wichtiges, ausführlich untersuchtes Modell der Spieltheorie. Wir werden uns in einem späteren Kapitel ausführlich damit beschäftigen.

## 2.4 Existenz eines Nash-Gleichgewichts

Wie das Beispiel des Papier-Stein-Schere-Spiels zeigt, gibt es Spiele, die kein Nash-Gleichgewicht besitzen.
Bisher haben wir ganz allgemeine Strategienmengen zugelassen. Jetzt betrachten wir nur solche $S^i \subseteq \mathbb{R}^{d_i}$ mit einem gewissen $d_i$ für alle $i = 1, \dots, m$ (siehe z.B. (5)). Ferner beschränken wir uns auf Auszahlungen als Spielergebnisse.

**Satz 2.7 (Existenz eines Nash-Gleichgewichts)** *Sei* $(\mathcal{A}, \mathcal{S}, \mathcal{U})$ *ein Spiel* $\Gamma$ *mit folgenden Eigenschaften:*

*(1) Die Strategienmenge* $\mathcal{S}^i \subset \mathbb{R}^{d_i}$ *sei kompakt und konvex für alle Spieler* $i \in \mathcal{A}$

*(2) Die Auszahlungsfunktion für den i-ten Spieler* $U^i : \mathcal{S}^i \times \mathcal{S}^{-i} \to \mathbb{R}$ *sei stetig und beschränkt und für festes* $s^{-i} \in \mathcal{S}^{-i}$ *sei sie quasi-konkav in* $s^i \in \mathcal{S}^i$.

*Das Spiel* $\Gamma$ *besitzt dann ein Nash-Gleichgewicht.*

**Bemerkung.** Der Beweis wird in die folgenden Teilergebnisse aufgeteilt.
Ein Spieler $i$ betrachtet die Strategienkombination $s^{-i}$ der übrigen Spieler und stellt sich die Frage: Welche Strategie $r^i(s)$ liefert mir den größten Nutzen $U^i(s)$, wenn diese ihre Strategie beibehalten? Die Abbildung $r^i(\cdot)$ ist die Abbildung der besten Antwort.
Die formale Beschreibung ist in den beiden folgenden Definitionen enthalten.

**Definition 2.10** *Die Abbildung* $r^i$ *der besten Antwort für den Spieler i ist eine mengenwertige Funktion*

$$r^i : \mathcal{S}^{-i} \to \mathfrak{P}(\mathcal{S}^i) \tag{2.8}$$

*mit den Funktionswerten*

$$r^i(s^{-i}) := \{s^i \in \mathcal{S}^i \,|\, U^i(s^i, s^{-i}) = \max_{\tilde{s}^i} U^i(\tilde{s}^i, s^{-i})\} \tag{2.9}$$

**Definition 2.11** *Die Abbildung r der besten Antwort ist eine mengenwertige Funktion, deren Funktionswert das kartesische Produkt der Funktionswerte der* $r^i$, $i = 1, \dots, m$ *aus Definition 2.10 ist:*

$$r : \mathcal{S} \to \prod_{i=1}^{m} \mathfrak{P}(\mathcal{S}^i) \tag{2.10}$$

*mit den Funktionswerten*

$$\tag{2.11}$$

$$r(s) := (r^1(s^{-1}), \dots, r^m(s^{-m})) \; . \tag{2.12}$$

**Satz 2.8** *Die Abbildung $r$ der besten Antwort ist unter den Vorausetzungen des Satzes (2.7) wohldefiniert und alle Mengen $r(s)$, $s \in \mathcal{S}$, sind konvex.*

**Beweis:**
Da $U^i$ nach Annahme des Satzes (2.7) stetig ist und die Menge $\mathcal{S}$ kompakt, existiert das Maximum in der Definition von $r^i$. Damit ist $r^i$ wohldefiniert und somit auch $r$. Da dieses Maximum für eine quasikonkave Funktion gebildet wird, ist die Menge der Punkte, für die das Maximum erreicht wird, konvex. Das kartesische Produkt konvexer Mengen ist wieder konvex, daher ist auch $r(s)$ für $s \in \mathcal{S}$ konvex. $\diamond$

**Satz 2.9** *Eine Strategienkombination $s \in \mathcal{S}$ ist genau dann ein Nash-Gleichgewicht, wenn $s \in r(s)$.*

**Beweis:**
**Notwendig:**
Sei nun $s^*$ ein Nash-Gleichgewicht. Dann gilt nach Definition $U^i(s^*) \geq U^i(s^i, s^{-i\,*})$, $\forall s^i \in \mathcal{S}^i$ und alle $i$. Hieraus folgt $U^i(s^*) = \max_{\tilde{s}^i} U^i(\tilde{s}^i, s^{-i\,*})$. Dies ist die Definition von $r^i(s^{-i\,*})$ und somit gilt $s^* \in r(s^*)$.
**Hinreichend:**
Sei nun $s^* \in r(s^*)$, d.h. $s^{i\,*} \in r^i(s^{-i\,*})$. Aus der Definition von $r^i(s^{-i\,*})$ folgt $U^i(s^*) = \max_{\tilde{s}^i} U^i(\tilde{s}^i, s^{-i\,*})$, d.h. $U^i(s^*) \geq U^i(s^i, s^{-i\,*})$, $\forall s^i \in \mathcal{S}^i$ und alle $i$ . Dies ist die Definition des Nash-Gleichgewichts. $\diamond$

**Satz 2.10** *Die mengenwertige Abbildung $r : \mathcal{S} \to \prod_{i=1}^m \mathfrak{P}(\mathcal{S}^i)$ der besten Antwort ist unter den Voraussetzungen des Existenzsatzes (2.7) eine von oben halbstetige mengenwertige Funktion.*

**Beweis:**
Wir betrachten zwei konvergente Folgen ${}^k s \xrightarrow[k\to\infty]{} {}^0 s$, ${}^k s, {}^0 s \in \mathcal{S}$, ansonsten beliebig, und ${}^k t \xrightarrow[k\to\infty]{} {}^0 t$, ${}^k t \in r({}^k s)$. Zum Nachweis der Halbstetigkeit von oben muß ${}^0 t \in r({}^0 s)$ gezeigt werden.
Aus der Definition der mengenwertigen Funktion $r$ folgt für jedes $t^i \in r^i({}^0 s^{-i})$ und jedes $i$ die Ungleichungen $U^i({}^0 t^i, {}^0 s^{-i}) \leq U^i(t^i, {}^0 s^{-i})$. Gilt $U^i({}^0 t^i, {}^0 s^{-i}) = U^i(t^i, {}^0 s^{-i})$, so ist ${}^0 t \in r({}^0 s)$ gezeigt und der Satz bewiesen.

Es ist also noch der Fall $U^i({}^0t^i, {}^0s^{-i}) < U^i(t^i, {}^0s^{-i})$ für alle $i$ auszuschließen. Sei also $\varepsilon = U^i(t^i, {}^0s^{-i}) - U^i({}^0t^i, {}^0s^{-i}) > 0$. Aus der Stetigkeit der „gewöhnlichen Funktion" $U^i$ folgt für jedes $\delta > 0$ ein endliches $k_\delta$, so daß für $k > k_\delta$ gilt $|U^i({}^kt^i, {}^ks^{-i}) - U^i({}^0t^i, {}^0s^{-i})| < \delta$ und $|U^i(t^i, {}^ks^{-i}) - U^i(t^i, {}^0s^{-i})| < \delta$. Mit $\delta < \varepsilon/4$ gilt

$$\begin{aligned} U^i(t^i, {}^ks^{-i}) &> U^i(t^i, {}^0s^{-i}) - \varepsilon/4 > U^i(t^i, {}^0s^{-i}) - 3\varepsilon/4 \\ &= U^i({}^0t^i, {}^0s^{-i}) + \varepsilon/4 > U^i({}^kt^i, {}^ks^{-i}) \ . \end{aligned}$$

Also folgt $U^i(t^i, {}^ks^{-i}) > U^i({}^kt^i, {}^ks^{-i})$,was ${}^kt^i \notin r^i({}^ks^{-i})$ bedeutet. Dies ist ein Widerspruch gegen die anfänglichen Annahmen. Es muß also $U^i({}^0t^i, {}^0s^{-i} = U^i(t^i, {}^0s^{-i})$ gelten und damit ist die Halbstetigkeit von oben für $r$ gezeigt. ⋄

**Beweis [Existenz eines Nash-Gleichgewichts nach Satz 2.7 ]:**
Nach dem Satz (2.9) existiert genau dann ein Nash-Gleichgewicht, wenn die Abbildung der besten Antwort einen Fixpunkt hat. Um einen Fixpunkt mit dem Satz von Kakutani nachweisen zu können, müssen dessen Voraussetzungen überprüft werden. Nach den voranstehenden Ergebnissen treffen diese zu. ⋄

Das folgende Beispiel aus dem Buch von Friedman [18] ist eine Verallgemeinerung des bereits erwähnten Duopols.

**Beispiel 7 [Cournot Oligopol (siehe [14])]:**

Wir betrachten einen einzigen Markt mit $m$ Anbietern eines homogenen Gutes. Die potentiellen Käufer werden durch eine inverse Nachfragefunktion $p(Q)$ dargestellt, wobei $p(Q)$ der Preis einer Mengeneinheit des Gutes ist, wenn insgesamt $Q$ [ME] angeboten werden. Die Produktion der Firma $i$ sei $q^i$. Die Produktion von $q^i$ [ME] des Gutes verursache der Firma $i$ die Kosten $K^i(q^i)$. Der Profit der Firma $i$ berechnet sich dann zu

$$U^i(q^1, \dots, q^m) = q^i p(\sum_{i=1}^{m} q^i) - K^i(q^i) \ .$$

Um den obigen Existenzsatz anwenden zu können, muß die Menge der Strategien jedes Spieler konvex und kompakt sein. Klar ist $q^i \geq 0$. Theoretisch könnte $q^i$ beliebig groß werden, tatsächlich aber sind durch Produktionskapazitäten und dem erwünschten Mindestprofit (z.B.$\geq$ 0) Grenzen gesetzt, etwa $q^i \leq a^i$.
Um die zusätzlichen Anforderungen an $U^i$ zu erfüllen, wird ferner verlangt

1. Die inverse Nachfragefunktion $p$ ist auf $\mathbb{R}_+$ definiert, stetig und nicht zunehmend.

2. Die Funktion $Qp(Q)$ ist konkav für $Q \in \mathbb{R}$.

3. $K^i(q^i)$ ist ebenfalls auf $\mathbb{R}_+$ definiert, stetig, nichtnegativ und konvex.

Mit diesen Voraussetzungen erfüllen alle $U^i$ auf der Strategienmenge $\mathcal{S} = \prod_{i=1}^m [0, a^i]$ die Voraussetzungen des Existenzsatzes.
Sei nun

$$K^1(q^1) = 4q^1 \quad \text{und} \quad K^2(q^2) = 2q^2 + 0.1q^2 \times q^2$$
$$p(Q) = 100 - 4Q + 3Q^2 - Q^3$$

Der Profit für die Firmen ergibt sich dann zu

$$U^1(q^1, q^2) = 96q^1 - 4q^1(q^1 + q^2) + 3q^1(q^1 + q^2)^2 - q^1(q^1 + q^2)^3$$
$$U^2(q^1, q^2) = 98q^2 - 4q^1q^2 - 4.1q^2 \times q^2 + 3q^2(q^1 + q^2)^2 - q^2(q^1 + q^2)^3$$

Nimmt man an, daß die $a^i$ so groß sind, daß das Maximum im Innern auftritt, kann es durch Differenzieren gefunden werden. Die Nash-Gleichgewichte ergeben sich damit als Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems:

$$\frac{\partial U^1}{\partial q^1} = 96 - 8q^1 - 4q^2 + 6q^1(q^1 + q^2) + 3(1 - q^1)(q^1 + q^2)^2 - (q^1 + q^2)^3 = 0$$

$$\frac{\partial U^2}{\partial q^2} = 98 - 4q^1 - 8.2q^2 + 6q^2(q^1 + q^2) + 3(1 - q^2)(q^1 + q^2)^2 - (q^1 + q^2)^3 = 0$$

Aus Friedman ([18]) entnimmt man als Lösung den Gleichgewichtspunkt $q^T = (2.028, 2.081)$. In dem Buch von Kelley ([29]) findet man Verfahren zur Lösung von nichtlinearen Gleichungssystemen, die bei diesem und ähnlichen Beispielen verwendet werden können. $\diamond$

## 2.5 Aufgaben

**Aufgabe 1**(intern NGameA01):
Betrachten Sie ein Zweipersonen-Spiel, bei dem jeder Spieler zwei Strategien zur Verfügung hat und das die folgende Auszahlungsmatrix besitzt:

| | | 2. Spieler | |
|---|---|---|---|
| | | $s_1^2$ | $s_2^2$ |
| 1. Spieler | $s_1^1$ | $((V-D)/2,(V-D)/2)$ | $(V,0)$ |
| | $s_2^1$ | $(0,V)$ | $((V+W)/2,(V+W)/2)$ |

Geben Sie Bedingungen für $V$, $D$, $W$ an, sodaß es

1. ein Gleichgewicht in dominanten Strategien gibt,
2. ein Nash-Gleichgewicht!

**Aufgabe 2**(intern NGameA27):
Erweitern Sie den Dyopol der Erdbeerfarmer auf drei Farmer, bei gleichen Herstellungskosten und analogem Marktpreis. Berechnen Sie das Nash-Gleichgewicht und die Auszahlungen bzw. den Gewinn der einzelnen Farmer.

**Aufgabe 3**(intern NGameA28):
Es werde ein Objekt versteigert, das $m$ Interessenten $(i = 1, \ldots, m)$ jeweils mit $v_1 > v_2 > \ldots > v_m > 0$ bewerten. Die Gebote $b_i$, $i = 1, \ldots, m$ müssen von allen Interessenten gleichzeitig abgegeben werden. Das Objekt erhält derjenige mit dem höchsten Gebot. Haben mehrere Interessenten dieses größte Gebot abgegeben, dann erhält der Interessent mit der kleinsten Nummer das Objekt.
Formulieren Sie diese Versteigerung als Spiel, geben Sie die Strategienmengen und geeignete Auszahlungen für die Spieler (=Interessenten) an. Vereinfachend können Sie annehmen, daß jedem Interessenten neben der eigenen, auch die Bewertungen der anderen Interessenten bekannt ist.
Existiert ein Nash-Gleichgewicht nach dem Satz der Vorlesung? Können Sie Nash-Gleichgewichte angeben?

# KAPITEL 3

# Endliche Spiele

Wie wir gesehen haben, haben endliche Spiele (auch mit Auszahlung) nicht notwendig ein Nash-Gleichgewicht. Dies ist ein Grund für die gemischte Erweiterung endlicher Spiele mit Auszahlung, deren Definition und wichtigsten Eigenschaften im nächsten Abschnitt besprochen werden. Dieses Modell der Spieltheorie ist in der Literatur sehr ausführlich untersucht worden. In den weiteren Abschnitten werden die wichtigsten Ergebnisse besprochen.

## 3.1 Gemischte Erweiterung

### 3.1.1 Definition

Die Menge der reinen Strategien $\mathcal{S}$ kann zur Menge der sogenannten ***gemischten*** Strategien $\hat{\mathcal{S}}$ erweitert werden.

**Definition 3.1** *Unter der gemischten Strategie des Spielers i mit der Strategienmenge* $\mathcal{S}^i = \{s_1^i, \ldots, s_{n_i}^i\}$ *versteht man einen Vektor* $\hat{s}^i = (\hat{s}_1^i, \hat{s}_2^i, \ldots, \hat{s}_{n_i}^i)^T$ *mit*

$$\sum_{j=1}^{n_i} \hat{s}_j^i = 1\,, \quad \hat{s}_j^i \geq 0 \tag{3.1}$$

**Bemerkung.** Vektoren $\hat{s}^i = (\hat{s}_1^i, \hat{s}_2^i, \ldots, \hat{s}_{n_i}^i)^T$ mit einem $\hat{s}_k^i = 1$ werden mit der $k$-ten reinen Strategie identifiziert und auch vereinfachend mit $s_k^i$ bezeichnet . Gemischte Strategien sind damit echte Verallgemeinerungen. Die

Menge der gemischten Strategien ist die konvexe Hülle der reinen Strategien, wenn diese als Punkte des $\mathbb{R}^{n_i}$, z.B. als Einheitsvektoren, dargestellt werden. Sie ist also konvex und kompakt.
Gemischte Strategien können so gedeutet werden, daß der $i$-te Spieler die $k$-te reine Strategie $s_k^i$ mit Wahrscheinlichkeit $\hat{s}_k^i$ ausgewählt hat. Ferner wird angenommen, daß jeder Spieler (stochastisch) unabhängig vom anderen seine Strategie auswählt.Für die gemischte Erweiterung wird die ***Auszahlung*** an den $i$-ten Spieler als Erwartungswert definiert.

**Definition 3.2** *Spielt jeder Spieler eine gemischte Strategie, dann wird die Auszahlung an die jeweiligen Spieler i festgesetzt durch*

$$U^i(\hat{s}) = \sum_{j_1=1}^{n_1} \quad \cdots \quad \sum_{j_m=1}^{n_m} U^i(s^1_{j_1}, \ldots, s^m_{j_m}) \prod_{k=1}^{m} \hat{s}^k_{j_k} \,. \tag{3.2}$$

*Um anzudeuten,daß es sich um eine Auszahlung bei gemischten Strategien handelt verwenden wir auch die Bezeichnung* $\hat{U}^i$.

**Bemerkung.** Die Funktionen $\hat{U}^i$ sind offensichtlich multilineare stetige reellwertige Funktionen auf der kompakten konvexen Menge $\prod_{i=1}^m \hat{\mathcal{S}}^i$, wobei

$$\hat{\mathcal{S}}^i = \{(\hat{s}_1, \ldots, \hat{s}_{n_i}) | \sum_{j=1}^{n_i} s_j = 1 \,, \quad \hat{s}_j \geq 0 \,, j = 1, \ldots, n_i\}$$

Wir kommen nun zur Definition der gemischten Erweiterung eines endlichen Spieles mit Auszahlung.

**Definition 3.3** *Das Spiel* $\hat{\Gamma} = (\mathcal{A}, \hat{\mathcal{S}}, \hat{\mathcal{U}})$ *mit den obigen Definitionen von* $\hat{\mathcal{S}}$ *und* $\hat{\mathcal{U}}$ *heißt gemischte Erweiterung des endlichen Spieles* $\Gamma = (\mathcal{A}, \mathcal{S}, \mathcal{U})$ *mit der Auszahlung* $\mathcal{U}$.

Folgende Definitionen sind später nützlich.

**Definition 3.4** *Eine gemischte Strategie* $\hat{s}^i = (\hat{s}^i_1, \ldots, \hat{s}^i_{n_i})$ *des i-ten Spielers heißt stark gemischt, wenn* $\hat{s}^i_j > 0 \quad j = 1, \ldots, n_i$.
*Unter dem Träger* $\mathcal{T}$ *einer gemischten Strategie des i-ten Spielers versteht man die Menge der Indizes* $\{j | \hat{s}^i_j > 0\}$ *bzw. die Menge der reinen Strategien* $\{s^i_j | \hat{s}^i_j > 0\}$. *Abkürzend seien beide Menge gleichermaßend mit* $\mathcal{T}(\hat{s}^i)$ *bezeichnet.*

**Satz 3.1** *Sei eine gemischte Strategie eines Spielers als Konvexkombination mehrerer anderer gemischter Strategien gegeben:*

$$\hat{s}^{i0} = \sum_{\ell=1}^{r} \lambda_\ell {}^\ell\hat{s}^i \quad \sum_{\ell=1}^{r} \lambda_\ell = 1 \quad \ell \geq 0 \ ,$$

*dann gilt für die Auszahlung an den k-ten Spieler*

$$\hat{U}^k(\hat{s}^1, \ldots, \hat{s}^{i0}, \ldots, \hat{s}^m) = \sum_{\ell=1}^{r} \lambda_\ell \hat{U}^k(\hat{s}^1, \ldots, {}^\ell\hat{s}^{i0}, \ldots, \hat{s}^m) \tag{3.3}$$

**Beweis:**
Die Auszahlung bei der gemischten Erweiterung

$$\hat{U}^i(\hat{s}) = \sum_{j_1=1}^{n_1} \quad \ldots \quad \sum_{j_m=1}^{n_m} U^i(s^1_{j_1}, \ldots, s^m_{j_m}) \prod_{k=1}^{m} \hat{s}^k_{j_k}$$

läßt sich auch folgendermaßen schreiben

$$\hat{U}^i(\hat{s}) = \sum_{j_i=1}^{n_i} \left( \sum_{j_1=1}^{n_2} \quad \ldots \text{Summe } j_i \text{ fehlt} \ldots \quad \sum_{j_m=1}^{n_m} U^i(s^1_{j_1}, \ldots, s^m_{j_m}) \prod_{k \neq i} \hat{s}^k_{j_k} \right) \hat{s}^i_{j_i} \ .$$

$\diamond$

Mehrfache Anwendung des vorhergehenden Satzes liefert

**Satz 3.2 (Darstellung der Auszahlungsfunktion)** *Die gemischten Strategien $\hat{s}^{i\circ}$ des Spielers i seien als Konvexkombination gegeben*

$$\hat{s}^{i\circ} = \sum_{\ell=1}^{r_i} \lambda^i_\ell {}^\ell\hat{s}^i \quad \sum_{\ell=1}^{r_i} \lambda_\ell = 1 \quad \lambda_\ell \geq 0 \ ,$$

*wobei die gemischten Strategien ${}^\ell\hat{s}^i$ vorgegeben sind.*
*Dann gilt für die Auszahlung an den i-ten Spieler*

$$\hat{U}^i(\hat{s}^{1\circ}, \ldots, \hat{s}^{m\circ}) = \sum_{\ell_1=1}^{r_1} \cdots \sum_{\ell_m=1}^{r_m} \hat{U}^i({}^{\ell_1}\hat{s}^1, \ldots, {}^{\ell_m}\hat{s}^m) \prod_{k=1}^{m} \lambda^k_{\ell_k} \tag{3.4}$$

**Satz 3.3** *Die gemischten Erweiterungen von strategisch linear-äquivalenten Spielen sind ebenfalls strategisch linear-äquivalent.*

**Beweis:**

Bei strategisch linear-äquivalenten Spielen bestehen die folgenden Beziehungen zwischen den Auszahlungstensoren:

$$\tilde{u}^i_{j_1,\dots,j_m} = k^i u^i_{j_1,\dots,j_m} + c^i \quad i = 1,\dots,m \; ,$$

wobei $k^i > 0$ und $c^i \in \mathbb{R}$. Für die Auszahlungen $\hat{U}^i(\hat{s})$ und $\hat{\tilde{U}}^i(\hat{s})$ der gemischten Erweiterungen gilt definitionsgemäß:

$$\hat{U}^i(\hat{s}) = \sum_{j_1=1}^{n_1} \dots \sum_{j_m=1}^{n_m} u^i_{j_1,\dots,j_m} \prod_{k=1}^{m} \hat{s}^k_{j_k} \quad i = 1,\dots,m \; .$$

$$\hat{\tilde{U}}^i(\hat{s}) = \sum_{j_1=1}^{n_1} \dots \sum_{j_m=1}^{n_m} \tilde{u}^i_{j_1,\dots,j_m} \prod_{k=1}^{m} \hat{s}^k_{j_k} \quad i = 1,\dots,m \; .$$

Hieraus folgt unmittelbar

$$\hat{\tilde{U}}^i(\hat{s}) = k^i \hat{U}^i(\hat{s}) + c^i \quad i = 1,\dots,m \; ,$$

$\diamond$

**Bemerkung.** Leider ist die Aussage, daß die gemischten Erweiterungen strategisch äquivalenter endlicher Spiele mit Auszahlung wieder strategisch äquivalent sind, in dieser Allgemeinheit nicht richtig (siehe Gegenbeispiel (52) weiter unten). Diese Aussage gilt jedoch, wenn man sich auf die strategische Linear-Äquivalenz beschränkt. Im Fall von endlichen Spielen und deren gemischten Erweiterungen sprechen wir der Einfachheit halber dann auch nur von strategischer Äquivalenz.

### 3.1.2 Existenz eines Nash-Gleichgewichts

Der Existenzsatz (2.7) für ein Nash-Gleichgewicht ist hier anwendbar. Die Bedingung(1) ist nach Konstruktion erfüllt. Die Auszahlungsfunktion ist multilinear und erfüllt daher die in Bedingung(2) genannten Forderungen der Stetigkeit und Quasikonkavität. Die Beschränkheit der Auszahlung folgt aus dem Satz von Weierstrass, nach dem eine stetige reellwertige Funktion auf einer kompakten Menge ihr Maximum und Minimum annimmt.
Da der ursprüngliche Beweis von Nash ([42]) für die Existenz eines Nash-Gleichgewichts bei der gemischten Erweiterung von endlichen Spielen mit Auszahlung eine interessante Anwendung des Brouwerschen Fixpunktsatzes ist, werden wir ihn noch am Schluß dieses Abschnittes bringen. Zunächst werden spezielle Charakterisierungen von gemischten Strategien im Zusamenhang mit dem Nash-Gleichgwicht besprochen.

**Satz 3.4** *Für jede gemischte Strategienkombination $\hat{s}^0$ hat jeder Spieler $i$ wenigstens eine reine Strategie $s^i_k$ mit*

$$\hat{s}^{i\,0}_k > 0 \quad \textit{und} \quad \hat{U}^i(s^i_k, \hat{s}^{-i\,0}) \leq \hat{U}^i(\hat{s}^0)$$

**Beweis:**
Der Beweis erfolgt durch Widerspruch. Wir nehmen an, daß für den Spieler $i$ für alle $k$ mit $\hat{s}^{i\,0}_k > 0$ gilt

$$\hat{U}^i(s^i_k, \hat{s}^{-i\,0}) > \hat{U}^i(\hat{s}^0) \ .$$

Für diese reinen Strategien gilt dann

$$\hat{U}^i(s^i_k, \hat{s}^{-i\,0})\hat{s}^{i\,0}_k > \hat{U}^i(\hat{s}^0)\hat{s}^{i\,0}_k$$

Für die übrigen gilt

$$\hat{U}^i(s^i_k, \hat{s}^{-i\,0})\hat{s}^{i\,0}_k = \hat{U}^i(\hat{s}^0)\hat{s}^{i\,0}_k = 0$$

Summiert man diese Ungleichungen und Gleichungen auf, dann folgt

$$\sum_{j=1}^{n_i} \hat{U}^i(s^i_j, \hat{s}^{-i\,0})\hat{s}^{i\,0}_j > \sum_{j=1}^{n_i} \hat{U}^i(\hat{s}^0)\hat{s}^{i\,0}_k$$

Schließlich folgt

$$\hat{U}^i(\hat{s}^0) > \hat{U}^i(\hat{s}^0)$$

Dies ist ein Widerspruch, daher gilt die Aussage des Satzes. $\diamond$

**Satz 3.5** *Für die gemischte Erweiterung eines endlichen Spieles gilt folgende äquivalente Formulierung des Nash-Gleichgewichts. $\hat{s}^* = (\hat{s}^{i\,*}, \hat{s}^{-i\,*})$ ist genau dann ein Nash-Gleichgewicht, wenn für alle reinen Strategien $s^i_j$ des $i$-ten Spielers gilt*

$$\hat{U}^i(s^i_j, \hat{s}^{-i\,*}) \leq \hat{U}^i(\hat{s}^*) \quad j = 1, \ldots, n_i \quad i = 1, \ldots, m \tag{3.5}$$

**Beweis:**
**Notwendige Bedingung.**
Dies folgt unmittelbar aus der Definition eines Nash-Gleichgewichts.
**Hinreichende Bedingung.**
Wenn die Ungleichung (3.5) für alle reinen Strategien $s_i$ des $i$-ten Spielers gilt, dann folgt für alle gemischten Strategien:

$$\hat{U}^i(\hat{s}^i, \hat{s}^{-i\,*}) = \sum_{j=1}^{n_i} \hat{U}^i(s^i_j, \hat{s}^{-i\,*})\hat{s}^i_j \leq \sum_{j=1}^{n_i} \hat{U}^i(\hat{s}^*)\hat{s}^i_j = \hat{U}^i(\hat{s}^*)$$

$\diamond$
Zu dem vorangehenden Satz ergibt es eine interessante Variante.

**Satz 3.6** *Sei* $\hat{s}^* = (\hat{s}^{i\,*}, \hat{s}^{-i\,*})$ *ein Nash-Gleichgewicht. Für jeden Spieler* $i$ *ist jede reine Strategie* $s^i_j$ *aus der Trägermenge der gemischten Strategie* $\hat{s}^{i\,*}$ *eine beste Antwort auf die gemischte Strategie* $\hat{s}^{-i\,*}$ *der Mitspieler.*
*Anders ausgedrückt heißt dies, daß genau für alle reinen Strategien* $s^{i\,*}_j$ *aus der Trägermenge der gemischten Strategie* $\hat{s}^{i\,*}$ *in der Ungleichung (3.5) Gleichheit gilt:*

$$\hat{U}^i(s^i_j, \hat{s}^{-i\,*}) = \hat{U}^i(\hat{s}^*) \quad s^i_j \in \mathcal{T}(\hat{s}^{i\,*}) \ . \tag{3.6}$$

**Beweis:**
Nach Satz 3.1 ergibt sich

$$\hat{U}^i(\hat{s}) = \sum_{j=1}^{n_i} \hat{U}^i(s^i_j, s^{-i})\hat{s}^i_j \ .$$

Wäre nun im Falle eines Nash-Gleichgewichts für ein $j$ mit $\hat{s}^{i\,*}_j > 0$ der Wert $\hat{U}^i(s^i_j, s^{-i\,*}) < \hat{U}^i(\hat{s^*})$, dann würde gelten

$$\hat{U}^i(\hat{s^*}) > \sum_{j=1}^{n_i} \hat{U}^i(s^i_j, s^{-i\,*})\hat{s}^{i\,*}_j = \hat{U}^i(\hat{s^*}) \ ,$$

was ein Widerspruch ist. Es muß also Gleichheit gelten. Hieraus folgen die Aussagen des Satzes. $\diamond$
Zum Schluß dieses Abschnitts bringen wir noch den ursprünglichen Beweis von Nash ([42])für die Existenz eines Nash-Gleichgewichts bei der gemischten Erweiterung von endlichen Spielen mit Auszahlung. Dieser Beweis basiert auf dem Brouwerschen Fixpunktsatz.

**Satz 3.7 (Brouwerscher Fixpunktsatz)** *Sei* $K \subset \mathbb{R}^n$ *kompakt und konvex und* $f : K \to K$ *eine stetige Funktion. Dann existiert ein* $x \in K$ *mit* $x = f(x)$.

**Satz 3.8** *Die gemischte Erweiterung eines endlichen Spieles hat mindestens ein Nash-Gleichgewicht.*

**Beweis:**
Es wird nun eine Abbildung $f : K \to K$ konstruiert, die die konvexe und kompakte Menge $K$ der gemischten Strategien aller Spieler in sich abbildet. Diese Abbildung $f$ ist stetig auf $K$. Somit existiert nach dem Brouwerschen Fixpunktsatz ein Fixpunkt. Es kann gezeigt werden, daß dessen Existenz äquivalent mit der Existenz eines Nash-Gleichgewichts ist.

**Definition der Abbildung $f$.**
Hier ist

$$K = \prod_{i=1}^{m} \hat{\mathcal{S}}^i \subset \prod_{i=1}^{m} \mathbb{R}^{n_i} \tag{3.7}$$

$$f(\hat{s}) = (f_{11}(\hat{s}), \ldots, f_{1n_1}(\hat{s}), \ldots, f_{m1}(\hat{s}), \ldots, f_{mn_m}(\hat{s}))^T \tag{3.8}$$

und

$$f_{ij}(\hat{s}) = \frac{\hat{s}^i_j + \phi_{ij}(\hat{s})}{1 + \sum_{k=1}^{n_i} \phi_{ik}(\hat{s})} \ . \tag{3.9}$$

Mit der reinen Strategie $s^i_j$ ($j$-te Komponente) des $i$-ten Spielers wird definiert

$$\phi_{ij}(\hat{s}) = \max\{0, \hat{U}^i(s^i_j, \hat{s}^{-i}) - \hat{U}^i(\hat{s})\} \ . \tag{3.10}$$

$f(\hat{s})$ liegt tatsächlich in $K$, wegen

$$\sum_{j=1}^{n_i} \frac{\hat{s}^i_j + \phi_{ij}(\hat{s})}{1 + \sum_{k=1}^{n_i} \phi_{ik}(\hat{s})} = 1 \quad \forall i \ .$$

Da der Nenner nie Null werden kann und die Funktion $f$ aus lauter stetigen Funktionen zusammengesetzt ist, ist $f$ stetig auf $K$.
**Der Fixpunkt erweist sich als Nash-Gleichgewicht.**
$\hat{s}^*$ sei ein Fixpunkt, d.h.

$$\hat{s}^{i\,*}_j = \frac{\hat{s}^{i\,*}_j + \phi_{ij}(\hat{s}^*)}{1 + \sum_{k=1}^{n_i} \phi_{ik}(\hat{s}^*)} \quad \forall i, j$$

Multipliziert man die Gleichung mit dem Nenner ($\neq 0!$), so ergibt sich nach dem Streichen gleicher Summanden

$$\hat{s}^{i*}_j \sum_{k=1}^{n_i} \phi_{ik}(\hat{s}^*) = \phi_{ij}(\hat{s}^*)$$

Nach dem Satz (3.4) gibt es für jeden Spieler $i$ und jede gemischte Strategie $\hat{s}^i$ ein $j = \ell$, sodaß

$$\hat{s}^{-i}_\ell > 0 \quad \hat{U}^i(s^i_\ell, \hat{s}^{-i}) - \hat{U}^i(\hat{s}) \leq 0$$

Wir wählen nun für den Fixpunkt $\hat{s}^*$ und jedes $i$ ein solches $j = \ell$, sodaß $\phi_{i\ell}(\hat{s}^*) = 0$ und wegen $\hat{s}^{-i\,*}_\ell > 0$ folgt

$$\sum_{k=1}^{n_i} \phi_{ik}(\hat{s}^*) = 0 \quad \forall i$$

Da alle $\phi_{ik} \geq 0$ sind folgt

$$\phi_{ik}(\hat{s}^*) = 0 \quad k = 1, \ldots, n_i \quad \forall i$$

und somit

$$\hat{U}^i(s^i_k, \hat{s}^{-i*}) - \hat{U}^i(\hat{s}^*) \leq 0 \quad k = 1, \ldots, n_i \quad \forall i$$

Diese Aussage ist nach Satz (3.5) äquivalent dazu, daß $\hat{s}^*$ ein Nash-Gleichgewicht ist. ◇

### 3.1.3 Reduktion der Strategienmenge

In diesem Abschnitt wollen wir genauer besprechen, welche Strategien für einen Spieler überhaupt sinnvoll sind, d.h. welche für ein Nash-Gleichgewicht keine Rolle spielen.

**Definition 3.5** *Eine Strategienkombination aus $\hat{\mathcal{S}}^{-i}$ nennen wir eine Spielhypothese oder kürzer eine Hypothese des Spielers $i$.*

**Definition 3.6** *Eine Strategie eines Spielers $i$ heißt eine niemals-beste-Antwort, wenn es keine Hypothese des Spielers $i$ gibt, für die diese Strategie eine beste Antwort ist.*

**Definition 3.7** *Eine (reine) Strategie $s^i_j \in \mathcal{S}^i$ heißt stark dominiert, wenn es eine gemischte Strategie $\hat{s}^i \in \hat{\mathcal{S}}^i$ gibt, sodaß*

$$U^i(\hat{s}^i, s^{-i}) > U^i(s^i_j, s^{-i}) \quad \forall s^{-i} \in \mathcal{S}^{-i} \ . \tag{3.11}$$

*Eine (reine) Strategie $s^i_j \in \mathcal{S}^i$ heißt schwach dominiert, wenn es eine gemischte Strategie $\hat{s}^i \in \hat{\mathcal{S}}^i$ gibt, sodaß in der Ungleichung (3.11) statt „$>$“nur die Beziehung „$\geq$“gilt und für mindestens ein $s^{-i} \in \mathcal{S}^{-i}$ die strenge Ungleichung gilt.*

**Satz 3.9** *Eine Strategie eines Spielers in einem endlichen Spiel ist genau dann eine niemals-beste-Antwort, wenn sie stark dominiert wird.*

**Bemerkung.** Der Beweis ergibt sich unmittelbar aus den Eigenschaften der Abbildung der besten Antwort $r$.
Aufgrund dieses Satzes macht es Sinn, stark dominierte Strategien jedes Spielers zu eliminieren. Dies muß ein iterativer Prozeß sein, da nach einer Elimination im neuen Spiel andere Strategien ebenfalls wieder stark dominiert sein können. Im günstigsten Falle bleibt für jeden Spieler zum Schluß genau eine Strategie übrig; natürlich muß es auch mindestens eine sein.

**Definition 3.8** *Unter einer iterativen Elimination stark dominierter Strategien in dem Spiel* $\Gamma = (\mathcal{A}, \mathcal{S}, \mathcal{U})$ *verstehen wir eine Folge* $t = 0, 1, \ldots, T$ *von Teilmengen* ${}^tX^i \subseteq \mathcal{S}^i$ *mit den Eigenschaften*

1. ${}^0X^i = \mathcal{S}^i$;
2. ${}^{t+1}X^i \subseteq {}^tX^i$;
3. *Für* $t = 0, 1, \ldots, T-1$ *ist jede Strategie aus* ${}^tX^i \backslash {}^{t+1}X^i$ *eine stark dominierte in dem Spiel* ${}^t\Gamma = (\mathcal{A}, {}^tX, {}^tU)$;
4. *keine Strategie in* ${}^TX^i$ *ist in dem Spiel* ${}^T\Gamma = (\mathcal{A}, {}^TX, {}^TU)$ *stark dominiert.*

In Harsanyi ([], [24]) findet sich ein weiterer Ansatz für die Reduktion von Strategien, der sich aus dem Folgenden ergibt.

**Definition 3.9** *Eine Menge* $H^i \subseteq \hat{\mathcal{S}}^{-i}$ *von Hypothesen des Spielers i heißt* $\hat{s}^i$*-stabil, wenn die (reine oder gemischte) Strategie* $\hat{s}^i$ *eine beste Antwort des Spielers i für alle* $\hat{s}^{-i} \in H^i$ *ist. Um den Zusammenhang mit der besten Antwort* $\hat{s}^i$ *auszudrücken, wird die Bezeichnung* $H^i = H^i(\hat{s}^i)$ *gewählt.*

**Satz 3.10** *Ist die gemischte Strategie* $\hat{s}^i$ *eine beste Antwort für die Strategienkombination* $\hat{s}^{-i}$ *der Mitspieler, so ist jede reine Strategie* $s^i_j \in \mathcal{T}(\hat{s}^i)$ *ebenfalls eine beste Antwort.*

**Beweis:**
Dies ist eine allgemeinere Formulierung des Satzes (3.6). Nach Satz 3.1 ergibt sich

$$\hat{U}^i(\hat{s}) = \sum_{j=1}^{n_i} \hat{U}^i(s^i_j, s^{-i})\hat{s}^i_j \ .$$

Da nun $\hat{s}^i$ eine beste Antwort für $\hat{s}^{-i}$ ist gilt $\hat{U}^i(s^i_j, s^{-i}) \leq \hat{U}^i(\hat{s})$. Gäbe es nun ein $j$ mit $\hat{s}^i_j > 0$ und $\hat{U}^i(s^i_j, s^{-i}) < \hat{U}^i(\hat{s})$, dann würde gelten

$$\hat{U}^i(\hat{s}) > \sum_{j=1}^{n_i} \hat{U}^i(s^i_j, s^{-i})\hat{s}^i_j = \hat{U}^i(\hat{s}) \ ,$$

was ein Widerspruch ist. Es muß also Gleichheit gelten. Hieraus folgen die Aussagen des Satzes. $\diamond$
Hieraus ergibt sich folgender Satz.

**Satz 3.11** *Die stabile Hypothesenmenge einer gemischten Strategie ist der Durchschnitt der stabilen Hypothesenmengen der Menge der reinen Strategien des Trägers der gemischten Strategie.*

**Bemerkung.** Es genügt also stabile Hypothesenmengen für reine Strategien zu betrachten.

**Satz 3.12**

$$\bigcup_{j=1}^{n_i} H^i(s^i_j) = \hat{\mathcal{S}}^i \quad \forall i \ .$$

**Satz 3.13** *Die stabilen Hypothesenmengen eines Spielers $i$ sind abgeschlossene und konvexe (eventuell leere) Teilmengen von $\mathcal{S}^{-i}$.*

**Beweis:**
Die Konvexität folgt aus Satz (3.2), wenn die Strategienkombination der Mitspieler des Spielers $i$ als Konvexkombination zweier Strategienkombination dargestellt wird. Die beste Antwort ist dann auch beste Antwort der Konvexkombination. Die Abgeschlossenheit folgt aus der Stetigkeit der Auszahlungsfunktion. $\diamond$

**Definition 3.10** *Eine reine Strategie $s^i_j$ des Spielers $i$ heißt mindere Strategie, wenn die stabile Hypothesenmenge $H^i(s^i_j)$ das Lebesguemaß Null (z.B. gleich $\emptyset$ ist) hat oder wenn $H^i(s^i_j)$ eine echte Teilmenge einer anderen stabilen Hypothesenmenge $H^i(s^i_k)$, $k \neq j$, ist.*

**Satz 3.14** *Stark und schwach dominierte Strategien sind mindere Strategien.*

**Beweis:**
Nach Satz (3.9) ist die stabile Hypothesenmenge einer stark dominierten Strategie leer. Die Hypothesenmenge einer schwach dominierten Strategie ist aufgrund der Definition eine Teilmenge der Hypothesenmenge der dominierenden Strategie. $\diamond$

## 3.2 Zweipersonen-Nullsummen-Spiel

Da jedes Konstantsummen-Spiel einem Nullsummen-Spiel äquivalent ist, beschränken wir uns auf Nullsummen-Spiele.
Wenn $U^1 = U$ die Auszahlungsmatrix für den ersten Spieler ist, dann muß $U^2 = -U^1 = -U$ die Auszahlungsmatrix für den zweiten Spieler sein. Daher

hat bei Zweipersonen-Nullsummenspielen das Nash-Gleichgewicht eine besondere Form. Wir betrachten sofort die gemischte Erweiterung. Allgemein gilt für einen Gleichgewichtspunkt

$$\hat{s}^* = (\hat{s}^{1\,*}, \hat{s}^{2\,*})$$

$$\hat{U}^i(\hat{s}^{i\,*}, \hat{s}^{-i\,*}) \geq \hat{U}^i(\hat{s}^i, \hat{s}^{-i\,*}) \quad i = 1,2 \quad \hat{s}^i \in \hat{\mathcal{S}}^i$$

Hieraus folgt speziell:

$$\hat{U}^1(\hat{s}^{1\,*}, \hat{s}^{2\,*}) \geq \hat{U}^1(\hat{s}^1, \hat{s}^{2\,*}) \quad \text{und} \quad \hat{U}^2(\hat{s}^{1\,*}, \hat{s}^{2\,*}) \geq \hat{U}^2(\hat{s}^{1\,*}, \hat{s}^2)\ .$$

Wegen der Beziehung $U^2 = -U^1 = -U$ folgt schließlich die ***Sattelpunkt***s-eigenschaft des Strategienpaares $(\hat{s}^{1\,*}, \hat{s}^{2\,*})$ (Sattelpunktsstrategie) bezüglich der reinen oder gemischten Strategien.

$$\hat{U}(\hat{s}^1, \hat{s}^{2\,*}) \leq \hat{U}(\hat{s}^{1\,*}, \hat{s}^{2\,*}) \leq \hat{U}(\hat{s}^{1\,*}, \hat{s}^2) \quad \forall \hat{s}^i \in \hat{\mathcal{S}}^i \tag{3.12}$$

**Bemerkung.** Nach dem Satz (3.8) über die Existenz eines Nash-Gleichgewichts gibt es in gemischten Strategien immer einen Sattelpunkt.

**Sattelpunkte in reinen Strategien.**
Die folgenden Überlegungen rechtfertigen die Bezeichnung Minimax-Strategien für Sattelpunktsstrategien.
Überlegung des 1. Spielers: Wenn ich meine Strategie Nr. $j$ spiele, dann gewinne ich mindestens $\min_k u(s_j^1, s_k^2)$, egal welche Strategie der 2.Spieler spielt. Ich wähle dann diejenige Strategie $j$, die mir die Auszahlung $\max_j \min_k u(s_j^1, s_k^2)$ liefert.
Überlegung des 2. Spielers: Wenn ich meine Strategie Nr. $k$ spiele, dann verliere ich höchstens $\max_j u(s_j^1, s_k^2)$. Ich wähle dann diejenige Strategie $k$, die mir den geringsten Verlust beschert, nämlich $\min_k \max_j u(s_j^1, s_k^2)$.
Man kann leicht Beispiele angeben, bei denen kein Sattelpunkt in reinen Strategien existiert, z.B. beim Schere-Stein-Papier-Spiel:

| | Schere | Stein | Papier | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Schere | 0 | -1 | 1 | -1 | |
| Stein | 1 | 0 | -1 | -1 | -1 |
| Papier | -1 | 1 | 0 | -1 | |
| | 1 | 1 | 1 | | |
| | | 1 | | | |

Offensichtlich gilt

$$\max_j \min_k \hat{U}(\hat{s}_j^1, \hat{s}_k^2) \leq \min_k \max_j \hat{U}(\hat{s}_j^1, \hat{s}_k^2) \ . \tag{3.13}$$

Wie der folgende allgemeinere Satz zeigt, liegt genau dann ein Sattelpunkt und damit ein Nash-Gleichgewicht vor, wenn diese Ungleichung zu einer Gleichung wird.

**Satz 3.15** *Sei eine stetige Funktion $f : X \times Y \to \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$ gegeben, wobei $X \subseteq \mathbb{R}^{n_1}$ und $Y \subseteq \mathbb{R}^{n_2}$ kompakte Mengen seien.*
*Notwendig und hinreichend für die Existenz eines Sattelpunktes der Funktion $f$ ist die Gültigkeit der folgenden Gleichung:*

$$\max_x \min_y f(x, y) = \min_y \max_x f(x, y) \ . \tag{3.14}$$

**Beweis:**
**Notwendige Bedingung.**
$(x^*, y^*)$ sei ein Sattelpunkt der Funktion $f$, d.h.

$$f(x, y^*) \leq f(x^*, y^*) \leq f(x^*, y) \quad \forall x, y$$

Hieraus folgt

$$\max_x f(x, y^*) \leq f(x^*, y^*) \leq \min_y f(x^*, y) \ .$$

Nun können wir die äußerste linke Seite dieser Doppelungleichung weiter verkleinern, und die äußerste rechte Seite weiter vergrößern

$$\min_y \max_x f(x, y) \leq f(x^*, y^*) \leq \max_x \min_y f(x, y) \ .$$

Damit gilt

$$\min_y \max_x f(x, y) \leq \max_x \min_y f(x, y) \ .$$

Da ganz allgemein

$$\max_x \min_y f(x, y) \leq \min_y \max_x f(x, y)$$

gilt, folgt die Gleichheit wie im Satz behauptet.
**Hinreichende Bedingung.**
Es gelte nun

$$\max_x \min_y f(x, y) = \min_y \max_x f(x, y) \ .$$

Die beiden äußeren Extrema mögen für die Werte $x^*$ bzw. $y^*$ angenommen werden, dann gilt

$$\max_x \min_y f(x,y) = \max_x f(x,y^*) \geq f(x^*,y^*)$$
$$\min_y \max_x f(x,y) = \min_y f(x^*,y) \leq f(x^*,y^*)$$

Somit folgt

$$\min_y \max_x f(x,y) = \min_y f(x^*,y) \leq f(x^*,y^*) \leq \max_x f(x,y^*) = \max_x \min_y f(x,y)$$

Wegen der Gleichheit der beiden äußeren Größen folgt überall Gleichheit und somit auch

$$f(x,y^*) \leq \max_x f(x,y^*) = f(x^*,y^*) = \min_y f(x^*,y) \leq f(x^*,y)$$

Dies ist die Sattelpunktsdefinition. ⋄

**Satz 3.16** *Sei eine stetige Funktion $f : X \times Y \to \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$ gegeben, wobei $X \subseteq \mathbb{R}^{n_1}$ und $Y \subseteq \mathbb{R}^{n_2}$ kompakte Mengen seien. Ferner seien $(\tilde{x},\tilde{y})$ und $(x^*,y^*)$ zwei verschiedene Sattelpunkte der Funktion $f$. Dann sind auch $(x^*,\tilde{y})$ und $(\tilde{x},y^*)$ Sattelpunkte der Funktion $f$ und es gilt:*

$$f(\tilde{x},\tilde{y}) = f(x^*,y^*) = f(\tilde{x},y^*) = f(x^*,\tilde{y}) \ .$$

**Definition 3.11** *Sei $(s^{1*}, s^{2*})$ ein Sattelpunkt. Die Auszahlung $v = \hat{U}(s^{1*}, s^{2*})$ an den ersten Spieler heißt auch Wert des Zweipersonen-Nullsummen-Spieles.*

**Satz 3.17** *Sei $v(U)$ der Wert des Zweipersonen-Nullsummen-Spieles mit der Auszahlungsmatrix $U = (u_{jk})$ für den ersten Spieler, dann gilt*

$$\max_j \min_k u_{jk} \leq v(U) \leq \min_k \max_j u_{jk} \ .$$

### 3.2.1 Berechnung von Sattelpunktsstrategien

Die allgemeine Berechnung erfolgt durch Zurückführung auf die lineare Optimierung. Grundlage sind die folgenden Beziehungen, die darauf beruhen, daß die Auszahlungen jeweils als Konvexkombination bezüglich des Vektors $s^1$ bzw. $s^2$ aufgefaßt werden können oder allgemeiner auf Satz (3.5):

$$\max_{\hat{s}^1} \min_{\hat{s}^2} \hat{U}(\hat{s}^1, \hat{s}^2) = \max_{\hat{s}^1} \min_k \hat{U}(\hat{s}^1, s^2_k) = \max_{\hat{s}^1} \min_k \sum_{j=1}^{n_1} u_{jk} \hat{s}^1_j \qquad (3.15)$$

$$\min_{\hat{s}^2} \max_{\hat{s}^1} \hat{U}(\hat{s}^1, \hat{s}^2) = \min_{\hat{s}^2} \max_j \hat{U}(s^1_j, \hat{s}^2) = \min_{\hat{s}^2} \max_j \sum_{k=1}^{n_2} u_{jk} \hat{s}^2_k \qquad (3.16)$$

**Problem des Spielers No. 1.**
Die Berechnung von

$$v = \max_{\hat{s}^1} \min_k \sum_{j=1}^{n_1} u_{jk} \hat{s}_j^1 \tag{3.17}$$

ist dem folgenden linearen Optimierungsproblem (mit $x_j = \hat{s}_j^1$) äquivalent

$$v \to \max_x \tag{3.18}$$

$$v \leq \sum_{j=1}^{n_1} u_{jk} x_j \quad k = 1, \ldots, n_2 \tag{3.19}$$

$$\sum_{j=1}^{n_1} x_j = 1 \tag{3.20}$$

$$x_j \geq 0 \quad j = 1, \ldots, n_1 \tag{3.21}$$

Da ein Sattelpunkt der gemischten Erweiterung des Spieles existiert, hat dieses Optimierungsproblem eine Lösung. Man kann auch folgendermaßen argumentieren.
Eine zulässige Lösung, d.h. ein $x \in \mathbb{R}$, das die Nebenbedingungen erfüllt, ist z.B.

$$x_1 = 1 \qquad x_j = 0 \quad j = 2, \ldots, n_1 \qquad v = \min_k u_{1k} \ .$$

Die Menge der zulässigen Lösungen ist nichtleer, beschränkt und abgeschlossen. Die Zielfunktion ist stetig, daher nimmt sie nach dem Satz von Weierstraß auf der Menge der zulässigen Lösungen ihr Maximum an. Es existiert also eine optimale Lösung $x^0$.
**Problem des Spielers No. 2.**
Die Berechnung von

$$v = \min_{\hat{s}^2} \max_j \sum_{k=1}^{n_2} u_{jk} \hat{s}_k^2 \tag{3.22}$$

ist dem folgenden linearen Optimierungsproblem (mit $y_k = \hat{s}_k^2$) äquivalent

$$v \to \min_y \tag{3.23}$$

$$\sum_{k=1}^{n_2} u_{jk} y_k \leq v \quad j = 1, \ldots, n_1 \tag{3.24}$$

$$\sum_{k=1}^{n_2} y_k = 1 \tag{3.25}$$

$$y_k \geq 0 \quad k = 1, \ldots, n_2 \tag{3.26}$$

Auch hier folgt aus der oben bewiesenen Existenz eines Sattelpunkts die Lösbarkeit dieser Optimierungsaufgabe. Wie vorher kann man auch folgendermaßen argumentieren.

Eine zulässige Lösung, d.h. ein $y \in \mathbb{R}$, das die Nebenbedingungen erfüllt, ist z.B.

$$y_1 = 1 \qquad y_k = 0 \quad k = 2, \dots, n_2 \qquad v = \max_j u_{j1}$$

Wie beim Problem des 1. Spielers ist die Menge der zulässigen Lösungen nichtleer, beschränkt und abgeschlossen. Die Zielfunktion ist stetig, daher nimmt sie nach dem Satz von Weierstraß auf der Menge der zulässigen Lösungen ihr Maximum an. Es existiert also eine optimale Lösung $y^0$.

**Nochmals ein Beweis für die Existenz eines Sattelpunktes.**

Beide Optimierungsprobleme sind zueinander dual und beide haben optimale Lösungen. Nach dem starken Dualitätssatz der Linearen Optimierung (siehe [3, Seite 83]) folgt aus der Existenz einer optimalen Lösung des primalen Problems eine solche des dualen Problems und die optimalen Werte beider Zielfunktionen sind gleich. Damit ist erneut die Existenz eines Sattelpunktes (siehe Satz (3.15)) bewiesen.

**Andere Darstellung der Optimierungsprobleme des 1. und des 2. Spielers.**

Zu jedem Zweipersonen-Nullsummen-Spiel kann ein ebensolches strategisch äquivalentes mit einem Spielwert $> 0$ konstruiert werden (Addition einer Konstanten zu den Auszahlungen). Wenn nun der Spielwert $v > 0$ ist, dann kann bei den Optimierungsaufgaben durch $v$ dividiert werden und es ergibt sich:

**Problem des ersten Spielers.**

Sei $\tilde{x} = \dfrac{x}{v}$.

$$\sum_{j=1}^{n_1} \tilde{x}_j \to \min \tag{3.27}$$

$$\sum_{j=1}^{n_1} u_{jk}\tilde{x}_j \geq 1 \quad k = 1, \dots, n_2 \tag{3.28}$$

$$\tilde{x}_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n_1 \tag{3.29}$$

**Problem des zweiten Spielers.**

$$\sum_{k=1}^{n_2} \tilde{y}_k \to \max \tag{3.30}$$

$$\sum_{k=1}^{n_2} u_{jk}\tilde{y}_k \leq 1 \quad j = 1, \ldots, n_1 \tag{3.31}$$

$$\tilde{y}_k \geq 0 \quad k = 1, \ldots, n_2 \tag{3.32}$$

**Lösung bei einem Spiel mit $n \times n$ reinen Strategien.**
Wir folgen hier einer Darstellung in ([47, Seite 28ff.])
$(x^0, y^0)$ seien optimale Sattelpunktsstrategien mit $x_j^0 > 0$, $y_j^0 > 0$ für alle $j = 1, \ldots, n$. Der Spielwert $v$ kann folgendermaßen dargestellt werden:

$$v = \sum_{j=1}^{n} x_j^0 \left( \sum_{k=1}^{n} u_{jk} y_k^0 \right) \; .$$

Da alle Nicht-Sattelpunktsstrategien ungünstiger sind, also hier insbesondere die reinen Strategien, folgt

$$\sum_{k=1}^{n} u_{jk} y_k^0 \leq v \; . \tag{3.33}$$

Tatsächlich muß hierbei aber für alle $j$ Gleichheit gelten, da sonst der Spielwert kleiner als $v$ wäre.
Nehmen wir zunächst an, daß die Matrix $U = (u - jk)$ invertierbar ist. Sei ferner $\vec{\mathbf{1}}$ ein Vektor passender Größe, dessen Komponenten alle gleich 1 sind. Dann gilt

$$\vec{\mathbf{1}}^T y^0 = 1 \quad Uy = v\vec{\mathbf{1}} \Rightarrow y = vU^{-1}\vec{\mathbf{1}} \Rightarrow 1 = \vec{\mathbf{1}}^T y^0 = v\vec{\mathbf{1}}^T U^{-1}\vec{\mathbf{1}} \; .$$

Somit folgt weiter

$$v = \frac{1}{\vec{\mathbf{1}}^T U^{-1}\vec{\mathbf{1}}} \qquad y^0 = \frac{U^{-1}\vec{\mathbf{1}}}{\vec{\mathbf{1}}^T U^{-1}\vec{\mathbf{1}}} \; . \tag{3.34}$$

Bei der Strategie $x^0$ für den 1. Spieler starten wir analog mit

$$\vec{\mathbf{1}}^T x^0 = 1 \quad U^T x = v\vec{\mathbf{1}} \Rightarrow x = vU^{-T}\vec{\mathbf{1}} \Rightarrow 1 = \vec{\mathbf{1}}^T x^0 = v\vec{\mathbf{1}}^T U^{-T}\vec{\mathbf{1}} \ .$$

Es ergibt sich dann

$$v = \frac{1}{\vec{\mathbf{1}}^T U^{-T}\vec{\mathbf{1}}} \qquad x^0 = \frac{U^{-T}\vec{\mathbf{1}}}{\vec{\mathbf{1}}^T U^{-T}\vec{\mathbf{1}}} \ . \tag{3.35}$$

Selbstverständlich ergibt sich für $v$ der gleiche Wert, da $\vec{\mathbf{1}}^T U^{-1}\vec{\mathbf{1}} = \vec{\mathbf{1}}^T U^{-T}\vec{\mathbf{1}}$. Wir verwenden nun eine explizite Darstellung der Inversen. Zur Erinnerung aus der linearen Algebra:
Der $(j,k)$-Minor einer Determinante $|U|$ einer quadratischen Matrix ist die mit dem Vorzeichen $(-1)^{j+k}$ versehene Determinante der Matrix $U_{jk}$, die aus $U$ durch Streichen der $j$-ten Zeile und der $k$-ten Spalte entsteht. Die folgende Matrix existiert immer:

$$U^* = ((-1)^{j+k}|U_{jk}|)^T \tag{3.36}$$

Die Inverse, wenn sie existiert ist gleich $\frac{U^*}{|U|}$. Setzen wir dies in die obigen Formeln ein, dann ergibt sich

$$v = \frac{|U|}{\vec{\mathbf{1}}^T U^*\vec{\mathbf{1}}} \qquad x^0 = \frac{U^{*,T}\vec{\mathbf{1}}}{\vec{\mathbf{1}}^T U^*\vec{\mathbf{1}}} \qquad y^0 = \frac{U^*\vec{\mathbf{1}}}{\vec{\mathbf{1}}^T U^*\vec{\mathbf{1}}} \tag{3.37}$$

Mit der schwächeren Annahme $\vec{\mathbf{1}}^T U^*\vec{\mathbf{1}} \neq 0$ kann ein Grenzübergang für $|U| \to 0$ durchgeführt werden. Die Darstellungen für $x^0$ und $y^0$ bleiben erhalten, $v$ ergibt sich zu 0.

**Graphische Lösung.**
Wenn der erste oder der zweite Spieler nur zwei reine Strategien zur Verfügung hat, dann kann man den Spielwert und die Sattelpunkts-Strategien des Spielers mit den zwei reinen Strategien graphisch bestimmen.
Nehmen wir nun an, daß der erste Spieler nur zwei reine Strategien besitzt: $n_1 = 2$.
Für den ersten Spieler ergibt sich dann folgendes Problem mit $x = x_1$ und $x_2 = 1 - x$

$$v \to \max_x \tag{3.38}$$

$$v \leq u_{2k} + (u_{1k} - u_{2k})x \quad k = 1, \ldots, n_2 \tag{3.39}$$

$$0 \leq x \leq 1 \tag{3.40}$$

Von den Funktionen $g_k(x) = u_{2k} + (u_{1k} - u_{2k})x$ wird auf dem Intervall $0 \leq x \leq 1$ das Minimum gesucht. Das Maximum der sich ergebenden Funktion $g_{\min}(x)$ liefert den Spielwert $v$ und eine optimale gemischte Strategie $x$ ($x_1 = x,\ x_2 = 1 - x$) für Spieler No. 1. Als Minimum linearer Funktionen ist $g_{\min}(\cdot)$ eine konkave Funktion. Das Maximum ist daher eindeutig oder wird auf einem Intervall angenommen. Im letzteren Fall entsprechen allen $x$ aus diesem Intervall optimale gemischte Strategien des ersten Spielers.
Optimale Strategien für den zweiten Spieler bekommt man folgendermaßen. Das Problem des zweiten Spielers ist:

$$v \to \min_y \tag{3.41}$$

$$\sum_{k=1}^{n_2} u_{1k} y_k \leq v \tag{3.42}$$

$$\sum_{k=1}^{n_2} u_{2k} y_k \leq v \tag{3.43}$$

$$\sum_{k=1}^{n_2} y_k = 1 \tag{3.44}$$

$$y_k \geq 0 \quad k = 1, \ldots, n_2 \tag{3.45}$$

Jeder Funktion $g_k(\cdot)$ des ersten Spielers entspricht eine reine Strategie $k$ des zweiten Spielers. Für alle Funktionen $g_k(\cdot)$, deren Graph durch das Maximum von $g_{\min}(\cdot)$ geht, kann $y_k > 0$ gewählt werden. Da das Problem des zweiten Spielers außer der Variablen $v$ nur zwei weitere Basisvariablen besitzt, genügt es, deren zwei auszuwählen. Man hat dann schließlich nur ein Spiel mit höchstens zwei reinen Strategien für jeden Spieler (falls $x \neq 0, 1$).
Der Fall, daß der zweite Spieler nur zwei reine Strategien zur Verfügung hat, läßt sich durch Umnumerierung der Spieler auf den vorigen Fall zurückführen.

### 3.2.2 Lineare Optimierung als Spielproblem

Formulierung als Spiel
Eine wichtige Rolle spielen hier die symmetrischen Spiele.

**Definition 3.12** *Ein Zweipersonen-Nullsummen-Spiel, dessen Auszahlungsmatrix $U$ für den ersten Spieler die Eigenschaft*

$$U^T = -U \tag{3.46}$$

*hat, also schiefsymmetrisch ist, heißt symmetrisches Spiel.*

**Satz 3.18** *Ein symmetrisches Spiel hat den Spielwert 0 und beide Spieler haben die gleichen Sattelpunktsstrategien.*

**Beweis:**
Man zeigt, daß bei einem symmetrischen Spiel das Problem (3.18) - (3.21) des ersten Spielers gleich dem Problem (3.23) - (3.26) des zweiten Spielers ist und somit auch $x^0 = y^0$. Aus der Darstellung $x^{0\,T} U x^0$ des Spielwertes folgt dann der Wert 0 des Spieles. $\diamond$

**Satz 3.19** *Gegeben sei das folgende Paar dualer linearer Optimierungsprobleme:*

| *primales Problem* | *duales Problem* |
|---|---|
| $Ax \leq b$ | $A^T y \geq c$ |
| $x \geq 0$ | $y \geq 0$ |
| $c^T x \to \max$ | $b^T y \to \min$ |

*Diesen beiden dualen Optimierungsproblemen wird ein Zweipersonen-Nullsummen-Spiel mit der folgenden Auszahlungsmatrix (in Blockmatrixform) für den ersten Spieler zugeordnet:*

$$\mathbb{U} = \begin{pmatrix} 0 & -A^T & c \\ A & 0 & -b \\ -c^T & b^T & 0 \end{pmatrix}$$

*Sei* $\hat{s}^{*T} = (\hat{r}^{*T}, \hat{z}^{*T}, \tau^*)$ *eine optimale gemischte Strategie des ersten Spielers. Es gelten folgende Aussagen:*

*(1) Wenn* $\hat{s}^*$ *eine optimale Strategie mit* $\tau^* > 0$ *ist, dann sind*

$$x^0 = \frac{1}{\tau^*}\hat{r}^* \quad bzw. \quad y^0 = \frac{1}{\tau^*}\hat{z}^*$$

*optimale Lösungen des primalen bzw. dualen Problems.*

*(2) Wenn für jede optimale Strategie* $\hat{s}^*$ *die letzte Komponente* $\tau^* = 0$ *ist, dann haben beide linearen Optimierungsprobleme keine optimale Lösung.*

*(3) Seien* $x^0$ *und* $y^0$ *optimale Lösungen des primalen bzw. dualen Problems, dann ergibt sich die optimale gemischte Strategie* $\hat{s}^{*T} = (\hat{r}^{*T}, \hat{z}^{*T}, \tau^*)$ *des Spieles zu*

$$\tau^* = \frac{1}{\vec{\mathbf{1}}^T x^0 + \vec{\mathbf{1}}^T y^0 + 1} \qquad \hat{r}^* = \tau^* x^0 \qquad \hat{z}^* = \tau^* y^0$$

**Beweis:**

Das angegebene Spiel mit der Matrix $\mathbb{U}$ ist ein symmetrisches Spiel, daher ist der Spielwert gleich 0 und beide Spieler haben die gleichen optimalen Strategien. Für optimale Strategien $\hat{s}^*$ gilt unter Berücksichtigung, daß reine Strategien für den zweiten Spieler nicht besser sein können, folgende Beziehung:

$$\hat{s}^{T,*}\mathbb{U} \geq 0 \quad (= \hat{s}^{*T}\mathbb{U}\hat{s}^*) \tag{3.47}$$

Da $\hat{s}^*$ eine gemischte Strategie ist gilt auch

$$\hat{r}^* \geq 0 \quad \hat{z}^* \geq 0 \quad \tau^* \geq 0 \quad \vec{\mathbf{1}}^T\hat{r}^* + \vec{\mathbf{1}}^T\hat{z}^* + \tau^* = 1 \tag{3.48}$$

Wir beweisen nun die drei Aussagen des Satzes der Reihe nach:

(1) Beweis der Aussage (1). Sei nun ein optimales $\hat{s}^*$ mit $\tau^* > 0$ gegeben. Die Bedingungen (3.47) ausgeschrieben ergeben dann

$$\hat{r}^* \geq 0 \quad \hat{z}^* \geq 0 \quad \tau^* > 0 \tag{3.49}$$
$$\vec{\mathbf{1}}^T\hat{r}^* + \vec{\mathbf{1}}^T\hat{z}^* + \tau^* = 1 \tag{3.50}$$
$$\hat{z}^{*T}A - \tau c^T \geq 0 \tag{3.51}$$
$$-\hat{r}^{*T}A^T + \tau b^T \geq 0 \tag{3.52}$$
$$\hat{r}^{*T}c - z^{*T}b \geq 0 \tag{3.53}$$

Da $\tau^* > 0$ ist, können alle diese Beziehungen durch $\tau^*$ dividiert werden.Bei den Ungleichungen bleibt die Richtung erhalten. Wir sehen dann, daß

$$x^0 = \frac{1}{\tau^*}r^* \quad \text{bzw.} \quad y^0 = \frac{1}{\tau^*}z^*$$

zulässige Lösungen des jeweiligen Optimierungsproblems sind. Es gilt immer $x^{0T}c - y^{0T}b \leq 0$. Nach Formel (3.53) gilt jedoch auch die entgegengesetzte Ungleichung, also folgt Gleichheit und damit sind $x^0$ und $y^0$ optimale Lösungen.

(2) Beweis der Aussage (2). Wir greifen hier wieder zurück auf die Beziehungen (3.49). Da es keine optimale Lösung mit $\tau^* > 0$ gibt, muß wegen der „komplementären Schlupfbedingung“(Satz 3.6) $\hat{r}^{T,*}c - \hat{z}^{T,*}b > 0$ sein, denn die Strategienkomponente $\tau$ des ersten Spielers korrespondiert mit dieser Ungleichung. Es gibt nun zwei Fälle.

(Fall 2a) ${r^*}^T c > 0$: Sei nun ein $\alpha > 0$ und eine zulässige Lösung $x$ gegeben. Dann ist für beliebige $\alpha > 0$ der Vektor $x + \alpha r^* > 0$ eine zulässige Lösung des primalen Optimierungsproblems, wegen

$$(Ax \leq b) \wedge (-{r^*}^T A^T \geq 0) \Rightarrow A(x + \alpha r^*) \leq b \ .$$

Dies zeigt, daß es keine optimale Lösung des primalen Problems gibt, und damit keine zulässige Lösung für das duale Problem.

Der Wert der Zielfunktion ergibt sich zu

$$c^T(x + \alpha r^*) = c^T x + \alpha \underbrace{c^T r^*}_{>0 \text{ nach Annahme}}$$

(Fall 2b) ${r^*}^T c \leq 0$: Dann gilt $b^T z^* < 0$. Analoge Überlegungen wie bei Fall 2a zeigen, daß keine optimale Lösung für das duale Problem existiert und damit keine zulässige Lösung für das primale Problem.

(3) Wird durch direktes Nachrechnen gezeigt.

$\diamond$

## 3.3 Zweipersonen-Zweistrategien-Spiel

Der Fall eines endlichen Spieles mit zwei Spielern, wo jeder Spieler nur zwei Strategien hat, ist ein Spiele-Modell, das genügend komplex ist, um bereits Eigenheiten von allgemeinen m-Personen-Spielen aufzeigen zu können.Wir werden daher im folgenden eine vollständige Lösung dieses Spieletyps angeben. Man spricht hier auch von einem Bimatrix-Spiel , da die Auszahlung bei zwei Spielern und endlichem Spiel durch zwei Matrizen beschrieben werden kann.
Die gemischten Strategien stellen wir hier folgendermaßen dar:

$$\hat{s}^{1\,*} = (x, 1-x)^T \qquad \hat{s}^{2\,*} = (y, 1-y)^T \tag{3.54}$$

Die beiden Ungleichungen ($i = 1, 2$)

$$U^i((1,0), \hat{s}^{-i\,*}) \leq U^i(\hat{s}^{1\,*}, \hat{s}^{2\,*}) \qquad U^i((0,1), \hat{s}^{-i\,*}) \leq U^i(\hat{s}^{1\,*}, \hat{s}^{2\,*})$$

ergeben für den ersten Spieler ($i = 1$) mit den Abkürzungen $A$, und $a$:

$$A = U_{11}^1 - U_{12}^1 - U_{21}^1 + U_{22}^1 \tag{3.55}$$
$$a = U_{22}^1 - U_{12}^1 \tag{3.56}$$
$$A(1-x)y - a(1-x) \leq 0 \tag{3.57}$$
$$Axy - ax \geq 0 \tag{3.58}$$

und für den zweiten Spieler ($i = 2$) mit den Abkürzungen $B$ und $b$:

$$B = U_{11}^2 - U_{12}^2 - U_{21}^2 + U_{22}^2 \tag{3.59}$$
$$b = U_{22}^2 - U_{21}^2 \tag{3.60}$$
$$B(1-y)x - b(1-y) \leq 0 \tag{3.61}$$
$$Bxy - by \geq 0 \tag{3.62}$$

Wie man sieht, ergeben sich die Bedingungen für die Gleichgewichtsstrategien, die zum Spieler 2 gehören, aus denen des Spielers 1, indem man $A$ durch $B$, $a$ durch $b$ ersetzt und $x$ und $y$ austauscht.
Es genügt daher die vom Spieler 1 herrührenden Bedingungen in Abhängigkeit von $A$ und $a$ zu untersuchen:

**Fall** $A = 0$**,** $a = 0 \;\Rightarrow\quad 0 \leq x \leq 1 \quad 0 \leq y \leq 1$

**Fall** $A = 0$**,** $a > 0 \;\Rightarrow\quad x = 0 \quad 0 \leq y \leq 1$

**Fall** $A = 0$**,** $a < 0 \;\Rightarrow\quad x = 1 \quad 0 \leq y \leq 1$

**Fall** $A > 0$**,** $0 < x < 1 \;\Rightarrow\quad y = a/A \Rightarrow \quad 0 \leq a \leq A$

**Fall** $A > 0$**,** $x = 0 \;\Rightarrow\quad y \leq a/A \quad 0 \leq y \leq 1$

$\Rightarrow \quad \{0 \leq a\} = \{0 \leq a \leq A\} \cap \{A \leq a\}$

**Fall** $A > 0$**,** $x = 1 \;\Rightarrow\quad y \geq a/A \quad 0 \leq y \leq 1$

$\Rightarrow \quad \{a \leq A\} = \{0 \leq a \leq A\} \cap \{a \leq 0\}$

**Fall** $A < 0$**,** $0 < x < 1 \;\Rightarrow\quad y = a/A$

$\Rightarrow \quad A \leq a \leq 0$

**Fall** $A < 0$**,** $x = 0 \;\Rightarrow\quad y \geq a/A \Rightarrow \quad \{A \leq a\} = \{A \leq a \leq 0\} \cap \{0 \leq a\}$

**Fall** $A < 0$**,** $x = 1 \;\Rightarrow\quad y \leq a/A \Rightarrow \quad \{a \leq 0\} = \{A \leq a \leq 0\} \cap \{a \leq A\}$

Nach den Werten für $A$ und $a$ geordnet ergibt sich einschließlich der Fallunterscheidungen für $B$ und $b$

| $A$ | $a$ | $x$ | $y$ |
|---|---|---|---|
| $A = 0$ | $a = 0$ | $0 \leq x \leq 1$ | $0 \leq y \leq 1$ |
| $A = 0$ | $a > 0$ | $x = 0$ | $0 \leq y \leq 1$ |
| $A = 0$ | $a < 0$ | $x = 1$ | $0 \leq y \leq 1$ |
| $A > 0$ | $0 \leq a \leq A$ | $0 < x < 1$ | $y = a/A$ |
| | | $x = 0$ | $0 \leq y \leq a/A$ |
| | | $x = 1$ | $a/A \leq y \leq 1$ |
| $A > 0$ | $A \leq a$ | $x = 0$ | $0 \leq y \leq 1$ |
| $A > 0$ | $a \leq 0$ | $x = 1$ | $0 \leq y \leq 1$ |
| $A < 0$ | $A \leq a \leq 0$ | $0 < x < 1$ | $y = a/A$ |
| | | $x = 0$ | $a/A \leq y \leq 1$ |
| | | $x = 1$ | $0 \leq y \leq a/A$ |
| $A < 0$ | $0 \leq a$ | $x = 0$ | $0 \leq y \leq 1$ |
| $A < 0$ | $a \leq A$ | $x = 1$ | $0 \leq y \leq 1$ |

| $B$ | $b$ | $y$ | $x$ |
|---|---|---|---|
| $B = 0$ | $b = 0$ | $0 \leq y \leq 1$ | $0 \leq x \leq 1$ |
| $B = 0$ | $b > 0$ | $y = 0$ | $0 \leq x \leq 1$ |
| $B = 0$ | $b < 0$ | $y = 1$ | $0 \leq x \leq 1$ |
| $B > 0$ | $0 \leq b \leq B$ | $0 < y < 1$ | $x = b/B$ |
| | | $y = 0$ | $0 \leq x \leq b/B$ |
| | | $y = 1$ | $b/B \leq x \leq 1$ |
| $B > 0$ | $B \leq b$ | $y = 0$ | $0 \leq x \leq 1$ |
| $B > 0$ | $b \leq 0$ | $y = 1$ | $0 \leq x \leq 1$ |
| $B < 0$ | $B \leq b \leq 0$ | $0 < y < 1$ | $x = b/B$ |
| | | $y = 0$ | $b/B \leq x \leq 1$ |
| | | $y = 1$ | $0 \leq x \leq b/B$ |
| $B < 0$ | $0 \leq b$ | $y = 0$ | $0 \leq x \leq 1$ |
| $B < 0$ | $b \leq B$ | $y = 1$ | $0 \leq x \leq 1$ |

**Beispiel 8 [Kampf der Geschlechter]:**

Es sind die folgenden Auszahlungen gegeben:

$$\begin{pmatrix} (1,3) & (0,0) \\ (0,0) & (3,1) \end{pmatrix}$$

Man kan auch folgende Deutung geben: Zwei Geschäftspartnern bieten sich zwei gemeinsame Unternehmungen an, bei jeweils einer der Unternehmungen hat der eine einen größeren Vorteil als der andere. Sie können aber beide Geschäfte nur gemeinsam machen. Wenn Sie sich nicht einigen, ist der Vorteil für beide Null.

Es ergeben sich folgende charakteristischen Größen:

$$A = 1 - 0 - 0 + 3 = 4 \quad a = 3 - 0 = 3$$
$$B = 3 - 0 - 0 + 1 = 4 \quad b = 1 - 0 = 1$$

Es liegt der Fall $A > 0,\ 0 \leq a \leq A$ vor. Hieraus ergibt sich eine dreiteilige Menge: $M_1^x = \{(x,y)|0 < x < 1 \quad y = a/A\}$, $M_2^x = \{x = 0| \quad 0 \leq y \leq a/A\}$, $M_3^x = \{x = 1| \quad a/A \leq y \leq 1\}$.
Es liegt auch der Fall $B > 0,\ 0 \leq b \leq B$ vor. Hieraus ergibt sich eine dreiteilige Menge: $M_1^y = \{(x,y)|0 < y < 1 \quad x = b/B\}$, $M_2^y = \{y = 0| \quad 0 \leq x \leq b/B\}$, $M_3^y = \{y = 1| \quad b/B \leq x \leq 1\}$.
Die Punkte der Menge $(M_1^x \cup M_2^x \cup M_3^x) \cap (M_1^y \cup M_2^y \cup M_3^y)$ sind die Nash-Gleichgewichte. Wie man aus der folgenden Abbildung (3.1) sieht, sind dies die Punkte (x,y)=(0,0), (1,1), (1/4, 3/4).
Dies ergibt die Strategien für den ersten Spieler: ${}^1\hat{s}^1 = (1,0)$, ${}^2\hat{s}^1 = (0,1)$, ${}^3\hat{s}^1 = (1/4, 3/4)$.
Dies ergibt die Strategien für den zweiten Spieler: ${}^1\hat{s}^2 = (1,0)$, ${}^2\hat{s}^2 = (0,1)$, ${}^3\hat{s}^2 = (3/4, 1/4))$.

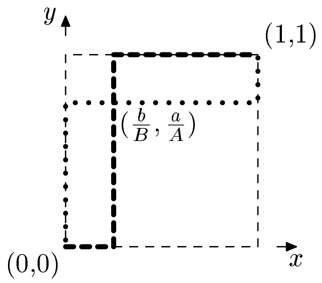



**Abbildung 3.1**

Da es drei Nash-Gleichgewichte gibt, kann man auch philosophische Betrachtungen anstellen. Bei den Nash-Gleichgewichten Nummer 1 und 2 erhält der eine die Auszahlung 3, der andere die Auszahlung 1. Wenn dieses Spiel öfters gespielt wird, dann müßte sich einer in gewisser Weise dem anderen immer unterordnen.
Das dritte Gleichgewicht ist ausgewogen, denn jeder Spieler erhält die gleiche Auszahlung: $v^1 = 1 \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} + 3 \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} = 3/4$ und $v^2 = 3 \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} + 1 \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} = 3/4$. Diese Auszahlung ist jedoch geringer als bei Fall 1 und 2.

◇

**Beispiel 9 [Gegenbeispiel strategische Äquivalenz]:**

Wir betrachten nochmals das folgende Spiel aus Vorob'ev ([64]) und deren gemischte Erweiterung.

| | | 2.Spieler | |
|---|---|---|---|
| | | $s_1^2$ | $s_2^2$ |
| 1.Spieler | $s_1^1$ | (-10,5) | (2,-2) |
| | $s_2^1$ | (1,-1) | (-1,1) |

Die relevanten Werte für die Lösung sind $A = -14$, $a = -3$ und $B = 9$, $b = 2$. Die Lösung ergibt sich zu x=b/B=2/9 und y=a/A=(-3)/(-14)=3/14. Dieses Spiel ist beispielsweise äquivalent dem folgenden Nullsummen-Spiel:

| | | 2.Spieler | |
|---|---|---|---|
| | | $s_1^2$ | $s_2^2$ |
| 1.Spieler | $s_1^1$ | (-10,10) | (2,-2) |
| | $s_2^1$ | (1,-1) | (-1,1) |

Die relevanten Werte für die Lösung sind $A = -14$, $a = -3$ und $B = 14$, $b = 3$. Die Lösung ergibt sich zu x=b/B=3/14 und y=a/A=(-3)/(-14)=3/14. Die jeweils einzigen Nash-Gleichgewichte sind also verschieden.

$\diamond$

## 3.4 Berechnung von Nash-Gleichgewichten

Dieser Abschnitt basiert auf dem im Jahre 1966 von McKelvey und McLennan ([36]) veröffentlichten Überblick der Methoden zur Berechnung von Nash-Gleichgewichten endlicher Spiele und der Beschreibung des hieraus enstandenen Computerprogramms „Gambit“ ([35], [34]).
Die Berechnung von Nash-Gleichgewichten bei Konstantsummen-Spielen und zwei Personen geschieht mit Hilfe der linearen Optimierung und ist in Abschnitt (3.2) besprochen worden. Es wird dabei auch mitgeliefert, ob es genau eines oder unendlich viele (in gemischten Strategien) gibt.

### 3.4.1 Allgemeine Zweipersonen-Spiele

Da die Auszahlungen an beide Spiele durch zwei Matrizen dargestellt werden können spricht man auch von einem Bimatrix-Spiel Die für diesen Fall in Gambit implementierte Methode stützt sich auf die in Satz (3.5) gegebene äquivalente Formulierung für das Nash-Gleichgewicht und Satz (3.6), der als Satz vom komplementären Schlupf aufgefaßt werden kann. Diese Ungleichungen können als lineares Komplementaritätsproblem der Optimierung formuliert werden. Lemke und Howson haben hierfür 1964 eine Lösungsmethode entwickelt ([10]).
Wir kommen nun zur Formulierung des linearen Komplementaritätsproblems. Seien $\underline{U}^1$, $\underline{U}^2$ die Auszahlungsmatrizen für den Spieler 1 bzw. 2. Alle Elemente diese Matrizen können als positiv angenommen werden, da es zu jedem Spiel ein solches strategisch linear-äquivalentes gibt. Folgerichtig

ist dann auch die Auszahlung $p^i$ beim Nash-Gleichgewicht an die einzelnen Spieler positiv. Sei $v^i = \hat{s}^i/p^i$, $i = 1, \dots, m$, dann läßt sich Satz (3.5) mit Schlupfvektoren $w^i$ so formulieren ($\vec{\mathbf{1}}$ ist ein Vektor passender Länge, dessen Komponenten alle 1 sind)

$$\underline{U}^1\, v^2 + w^1 = \vec{\mathbf{1}} \quad v^2 > 0,\, w^1 > 0 \tag{3.63}$$

$$\underline{U}^2\, v^1 + w^2 = \vec{\mathbf{1}} \quad v^1 > 0,\, w^2 > 0 \tag{3.64}$$

$$\tag{3.65}$$

Da die Bedingungen $\sum_{j=1}^{n_i} v^i = 1/p^i > 0$, $i = 1, 2$ weggelassen wurden, entsteht eine zusätzliche (falsche) Lösung $v^1 = v^2 = 0$.
Nach Satz (3.6) gelten ferner die Komplementärbedingungen

$$(v^1)^T\, w^1 = 0 \qquad (v^2)^T\, w^2 = 0\ . \tag{3.66}$$

Zusammengefaßt läßt sich dies folgendermaßen schreiben

$$\begin{pmatrix} 0 & \underline{U}^1 \\ \underline{U}^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w^1 \\ w^2 \end{pmatrix} = \vec{\mathbf{1}} \tag{3.67}$$

Dieses Problem wird durch den Algorithmus von Lemke und Howson ([10]) gelöst. Für die Beschreibung des Algorithmus wird auf ([36]) verwiesen.

### 3.4.2 $m$-Personen-Spiele

Im Falle von $m > 2$ liefern die Sätze (3.5) und (3.6) ein nichtlineares Komplementaritätsproblem. Rosenmüller ([50]) und Wilson ([67]) haben unabhängig voneinander den Lemke-Howson Algorithmus auf diesen Fall verallgemeinert. Jedoch scheint dafür kein Computerprogramm implementiert worden zu sein. Der Algorithmus von Scarf ([51], [52]) zur Bestimmung eines Fixpunktes einer stetigen Funktion auf einer kompakten Menge gilt als eher handhabbar. Beim Beweis des Satzes (3.8) der Existenz eines Nash-Gleichgewichts bei der gemischten Erweiterung endlicher Spiele ist eine solche Funktion (siehe 3.7) definiert worden ist, deren Fixpunkte Nash-Gleichgewichte sind.
Für die Beschreibung des Algorithmus wird auf ([36]) verwiesen.
Die Bestimmung von Nash-Gleichgewichten kann auch als Minimierungsproblem formuliert werden. Die zu minimierende Funktion ist nichtnegativ und genau die Nullstellen sind die Nash-Gleichgewichte. McKelvey gibt in ([36, Seite 19 ]) eine solche Funktion an, von ihm auch Liapunov-Funktion genannt:

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n_i} [\phi_{ij}(\hat{s})]^2\ ,$$

wobei $\phi_{ij}$ die in Formel (3.10) definierte Funktion ist.

Diese Methode ist auch im Programm als „Liap“eingearbeitet.

### 3.4.3 Das Programm Gambit

Das Programm Gambit(http://www.hss.caltech.edu/˜gambit/Gambit.html, Stand Juni 1999), von McKelvey und anderen implementiert wurde, verwendet die im vorherigen Abschnitt angegebenen Methoden zur Lösung von $m$-Personen-Spielen in Normalform. Die Programmöglichkeiten für Spiele in extensiver Form werden weiter unten besprochen.
Beim Aufruf des Programms erscheint das nebenstehende Programmfenster. Unter dem Menüpunkt 'File' kann ein neues oder ein bereits abgespeichertes Spiel aufgerufen werden (die Endung **nfg** bezieht sich auf **n**ormal **f**orm **g**ame).

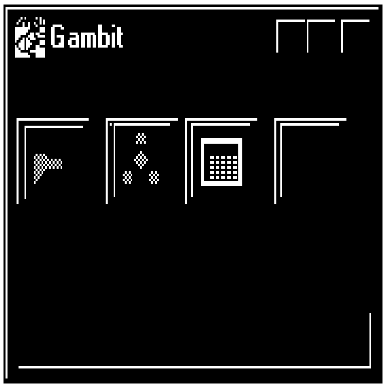
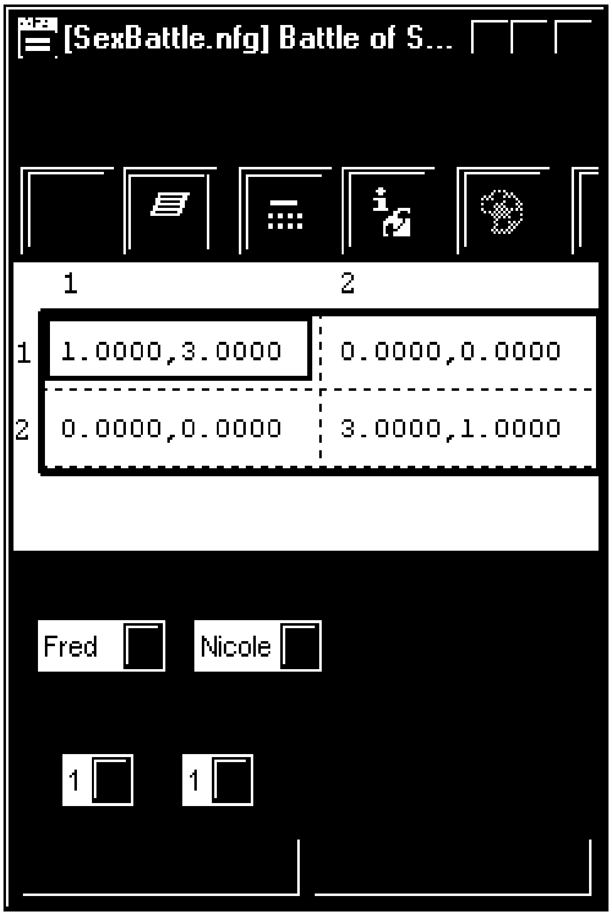



**Abbildung 3.2**

**Beispiel 10 [Kampf der Geschlechter]:**




Es können Namen (='labels') für Spieler und Strategien vergeben werden. Die Einträge für die Auszahlungen werden in einem extra Fenster getätigt, das nach einem Doppelklick auf die entsprechende Stelle im Auszahlungsschema des Spiels erscheint. Im Menü 'solve' kann unter Standard angegeben werden wieviele Nash-Gleichgewichte maximal berechnet werden sollen. Mit dem Aufruf 'solve' im Menü 'solve' erscheint dann die folgende Tabelle:

| Id | Pl | Equ Values | Creator | Nash | Perfect | Liap Value | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | Fred | 3.0000 | Enum | Y | DK | 0.0000 | 2: 1.0000 | |
| | Nicole | 1.0000 | | | | | 2: 1.0000 | |
| 2 | Fred | 0.7500 | Enum | Y | DK | 0.0000 | 1: 0.2500 | 2: 0.7500 |
| | Nicole | 0.7500 | | | | | 1: 0.7500 | 2: 0.2500 |
| 1 | Fred | 1.0000 | Enum | Y | DK | 0.0000 | 1: 1.0000 | |
| | Nicole | 3.0000 | | | | | 1: 1.0000 | |

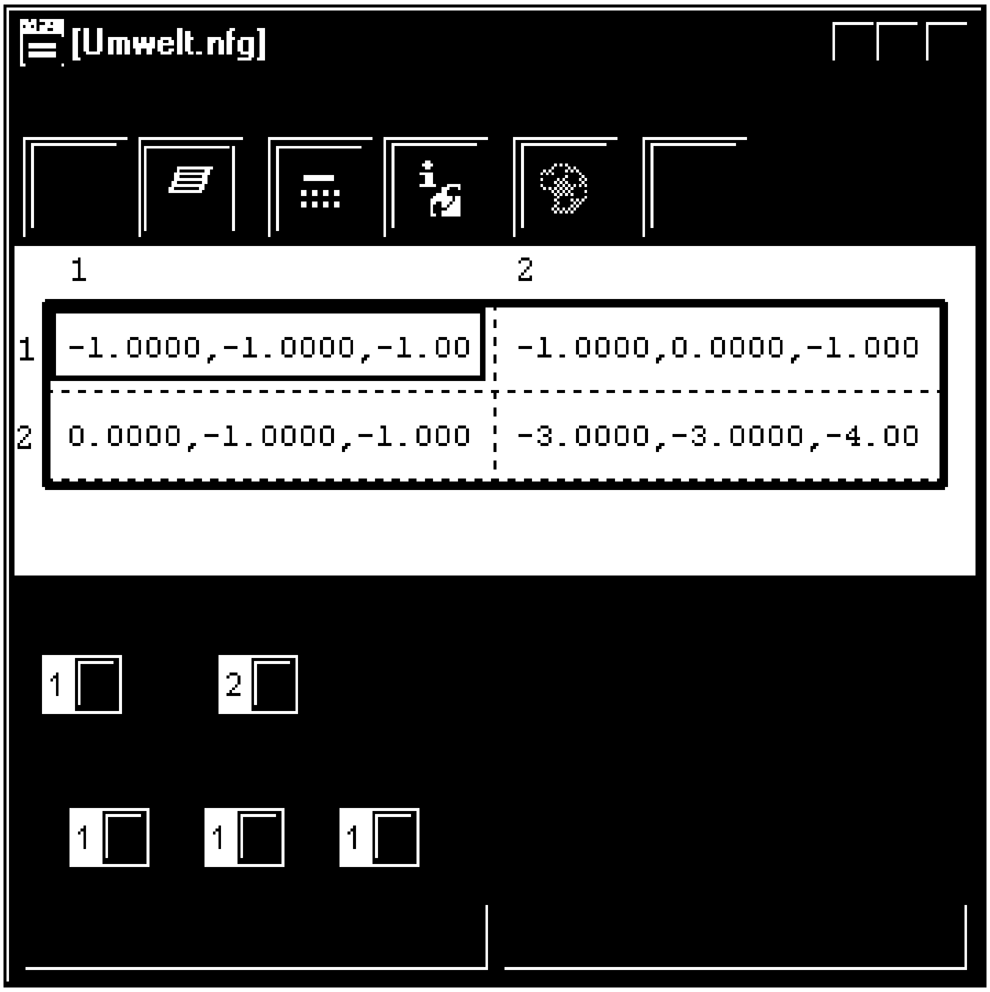
◇

**Beispiel 11 [Umweltschutz]:**

Drei chemische Firmen (siehe auch 5.1) verwenden das Wasser einer natürlichen Resource zur Produktion. Jede Firma hat zwei Strategien, nämlich ihr Abwasser zu reinigen (Strategie 1, Kosten 1 GE) oder das Abwasser ungereinigt zurückfließen zu lassen (Strategie 2, keine Kosten). Nun seien die örtlichen Gegebenheiten aber so, daß das ungereinigte Abwasser einer Firma keinen merkbaren Schaden anrichtet, wenn jedoch mindestens zwei Firmen ihr Abwasser ungereinigt zurückfließen lassen, dann schadet dies der Produktion aller drei Firmen. In diesem Fall muß die natürliche Resource total gereinigt werden und für jede Firma entstehen zusätzlich 3 GE an Kosten. Es ergibt sich die Auszahlungsfunktion von Tabelle (3.1)

| | Auszahlung | | |
|---|---|---|---|
| Strategie | Firma1 | Firma2 | Firma3 |
| (1,1,1) | -1 | -1 | -1 |
| (1,1,2) | -1 | -1 | 0 |
| (1,2,1) | -1 | 0 | -1 |
| (1,2,2) | -4 | -3 | -3 |
| (2,1,1) | 0 | -1 | -1 |
| (2,1,2) | -3 | -4 | -3 |
| (2,2,1) | -3 | -3 | -4 |
| (2,2,2) | -3 | -3 | -3 |

**Tabelle 3.1** Umweltschutz




Zur Eingabe der Auszahlungen wählt man im vorigen Fenster die gewünschte Strategienkombination und macht den Doppelclick im markierten Bereich der Tabelle. Dies resultiert im nebenstehenden Fenster. Als Lösung ergibt sich:

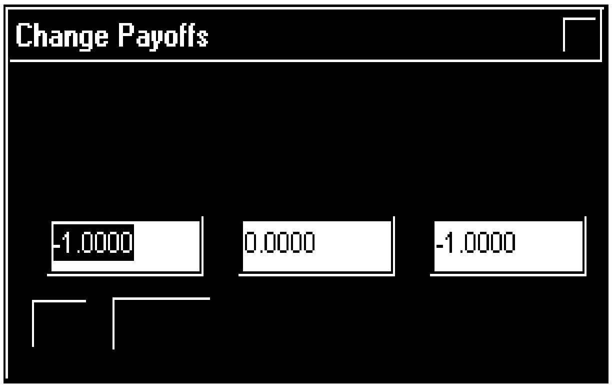



**Abbildung 3.3**

| Id | Pl | Equ Values | Creator | Nash | Perfect | Liap Value | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 8 | 1 | -1.0000 | Liap | Y | DK | 0.0000 | 1: 1.0000 | 2: 0.0000 |
| | 2 | 0.0000 | | | | | 1: 0.0000 | 2: 1.0000 |
| | 3 | -1.0000 | | | | | 1: 1.0000 | 2: 0.0000 |
| 7 | 1 | -1.0000 | Liap | Y | DK | 0.0000 | 1: 1.0000 | |
| | 2 | -1.0000 | | | | | 1: 1.0000 | 2: 0.0000 |
| | 3 | 0.0000 | | | | | 1: 0.0000 | 2: 1.0000 |
| 6 | 1 | -1.0000 | Liap | Y | DK | 0.0000 | 1: 0.6667 | 2: 0.3333 |
| | 2 | -1.3333 | | | | | 1: 1.0000 | 2: 0.0000 |
| | 3 | -1.0000 | | | | | 1: 0.6667 | 2: 0.3333 |
| 5 | 1 | -1.3333 | Liap | Y | DK | 0.0000 | 1: 1.0000 | |
| | 2 | -1.0000 | | | | | 1: 0.6667 | 2: 0.3333 |
| | 3 | -1.0000 | | | | | 1: 0.6667 | 2: 0.3333 |
| 4 | 1 | 0.0000 | Liap | Y | DK | 0.0000 | 1: 0.0000 | 2: 1.0000 |
| | 2 | -1.0000 | | | | | 1: 1.0000 | |
| | 3 | -1.0000 | | | | | 1: 1.0000 | |
| 3 | 1 | -1.0000 | Liap | Y | DK | 0.0000 | 1: 0.6667 | 2: 0.3333 |
| | 2 | -1.0000 | | | | | 1: 0.6667 | 2: 0.3333 |
| | 3 | -1.3333 | | | | | 1: 1.0000 | 2: 0.0000 |
| 2 | 1 | -2.8660 | Liap | Y | DK | 0.0000 | 1: 0.2113 | 2: 0.7887 |
| | 2 | -2.8660 | | | | | 1: 0.2113 | 2: 0.7887 |
| | 3 | -2.8660 | | | | | 1: 0.2113 | 2: 0.7887 |
| 1 | 1 | -1.1340 | Liap | Y | DK | 0.0000 | 1: 0.7887 | 2: 0.2113 |
| | 2 | -1.1340 | | | | | 1: 0.7887 | 2: 0.2113 |
| | 3 | -1.1340 | | | | | 1: 0.7887 | 2: 0.2113 |

Nach Vorob'ev ([64]) sind

$$x_i = \frac{1}{3+\sqrt{3}} = 0.2113 \quad i = 1,2,3 \text{ und } x_i = \frac{1}{3-\sqrt{3}} = 0.7887 \quad i = 1,2,3$$

zwei Lösungen des Spiels, die den obigen Lösungen Nummer 1 und 2 entsprechen. Man beachte hierbei

$$\frac{1}{3+\sqrt{3}} + \frac{1}{3-\sqrt{3}} = 1 \ .$$

Die Lösungen Nummer 5 und 6 sind zusätzlich zu den Angaben von Vorob'ev. $\diamond$

## 3.5 Verfeinerung des Nash-Gleichgewichts

Für die praktische Anwendung gibt es hauptsächlich zwei Probleme mit dem Begriff des Nash-Gleichgewichts, nämlich das Vorhandensein mehrerer

Gleichgewichte mit unterschiedlichen Auszahlungen und die manchmal nicht überzeugenden Strategien, die das Gleichgewicht bilden.
Als Beispiel für den ersten Fall sei der „Kampf der Geschlechter“(siehe Seite 14) genannt. Als Beispiel für den zweiten Fall dient das folgende Zweipersonen-Spiel aus van Damme ([15, Seite 13 ]):

**Beispiel 12:**

| | $s_1^2$ | $s_2^2$ |
|---|---|---|
| $s_1^1$ | (1,1) | (0,0) |
| $s_2^1$ | (0,0) | (0,0) |

Es gibt keinen Grund das Nash-Gleichgewicht $(s_2^1, s_2^2)$ dem Nash-Gleichgewicht $(s_1^1, s_1^2)$ vorzuziehen. $\diamond$

Diese Problematik hat eine Unzahl von Artikeln mit Vorschlägen von verfeinerten Gleichgewichtsdefinitionen, die die Anzahl der Nash-Gleichgewichte einschränken, hervorgebracht. In van Damme ([15]) findet sich eine zusammenfassende Besprechung fast aller dieser Kriterien. Wir verwenden Teile dieses Buches als hauptsächliche Grundlage dieses Abschnitts. Wir betrachten hier nur den Fall der gemischten Erweiterung endlicher Spiele.
Einen (vorläufigen) Schlußpunkt schien hier die Tracing-Procedure von Harsanyi ([23]) aus dem Jahre 1975 zu setzen. Eine ausführliche Beschreibung dieser Methode mit Beispielen findet sich in Harsanyi und Selten ([25]). Anscheinend war aber Harsanyi mit diesem eindeutigen Auswahlkriterium nicht zufrieden, denn im Jahre 1995 hat er ([24]) ein weiteres neues Auswahlkriterium für Nash-Gleichgewichte angegeben. Grob gesprochen beruht dieses Kriterium auf Risikowahrscheinlichkeiten, die sich auf das Lebesgue-Maß von Spielhypothesen beziehen. Die weitere Diskussion unter Experten wird zeigen, ob und/oder welches eindeutige Auswahlkriterium allgemein akzeptiert wird.
Im folgenden wird die bekannteste dieser Verfeinerungen, nämlich das „perfekte“Gleichgewicht von Selten ([56]) behandelt.
Der Ausgangspunkt für diesen Ansatz ist die Annahme, daß jeder Spieler mit kleiner Wahrscheinlichkeit Ungenauigkeiten begeht. Das wird so interpretiert, daß jeder Spieler alle Strategien mit einer positiven, wenn auch kleinen Wahrscheinlichkeit spielt. Er verwendet also nur stark gemischte Strategien mit der Bedingung, daß alle Komponenten $\geq \eta$ sind mit einem kleinen $\eta > 0$. Etwas allgemeiner wird das $\eta$ für alle Strategienkomponenten als verschieden zugelassen $\hat{s}_j^i \geq \eta_j^i$. Jedem endlichen Spiel $\Gamma$ wird daher ein $\eta$-gestörtes Spiel

$\Gamma_\eta$ zugeordnet.

**Definition 3.13** *Ein Spiel $\hat{\Gamma}_\eta = (\mathcal{A}, \hat{\mathcal{S}}(\eta), \mathcal{U})$ heißt das $\hat{\Gamma} = (\mathcal{A}, \hat{\mathcal{S}}, \mathcal{U})$ zugeordnete $\eta$-gestörte Spiel, wenn*

$$\hat{\mathcal{S}}^i(\eta^i) = \{\hat{s}^i | \hat{s}^i_j \geq \eta^i_j > 0\,,\ \sum_{j=1}^{n^i} \hat{s}^i_j = 1\} \tag{3.68}$$

$$\hat{\mathcal{S}}(\eta) = \prod_{i=1}^{m} \hat{\mathcal{S}}^i(\eta^i)\ . \tag{3.69}$$

**Bemerkung.** Das gestörte Spiel ist nicht die gemischte Erweiterung eines anderen Spieles. Wenn wir nur solche $\eta$ mit $\sum_{j=1}^{n^i} \eta^i_j < 1$ betrachten gilt $\mathcal{S}(\eta) \neq \emptyset$. Die Existenz eines Gleichgewichtspunktes ist dann nach Satz 2.7 gesichert. Es gilt aber folgende Beziehung.

**Satz 3.20** *Eine Strategienkombination $\hat{s} \in \hat{\mathcal{S}}_\eta$ ist ein Nash-Gleichgewicht des gestörten Spiels $\hat{\Gamma}_\eta$ genau, wenn für alle Spieler $i = 1, \ldots, m$ und alle reinen Strategien $j = 1, \ldots, n_i$ die Aussage gilt*

$$\{U^i(s^i_j, \hat{s}^{-i}) < U^i(\hat{s}^i, \hat{s}^{-i})\} \Rightarrow \hat{s}^i_j = \eta^i_j$$

**Beweis:**

Satz (3.5) anders ausgedrückt behauptet, daß genau für $s^i_j \notin \mathcal{T}(\hat{s})$ bezüglich des ungestörten Spiels $\hat{\Gamma}$ gilt

$$U^i(s^i_j, \hat{s}^{-i}) < U^i(\hat{s}^i, \hat{s}^{-i})\ .$$

Im gestörten Spiel muß dann $\hat{s}^i_j$ möglichst klein sein, d.h. $\hat{s}^i_j = \eta^i_j$. $\diamond$

**Definition 3.14** *Ein Nash-Gleichgewicht $\hat{s}$ des Spiels $\hat{\Gamma} = (\mathcal{A}, \hat{\mathcal{S}}, \hat{\mathcal{U}})$ heißt ein perfektes Gleichgewicht , wenn $\hat{s}$ Häufungspunkt einer Folge $(s_\eta)_{\eta\downarrow 0}$ ist, bei der jedes Folgenglied ein Nash-Gleichgewicht des zugeordneten $\eta$-gestörten Spiels ist.*

**Satz 3.21 (Selten [56])** *Jede gemischte Erweiterung eines endlichen Spieles besitzt ein perfektes Gleichgewicht*

**Beweis:**

Da $(\hat{s}_\eta)_{\eta\downarrow 0}$ eine Folge in der kompakten Menge $\mathcal{S}$ ist, hat sie mindestens einen Häufungspunkt $\hat{s} \in \hat{\mathcal{S}}$. Wir greifen nun einen solchen Häufungspunkt

$\hat{s}^*$ heraus. Hierzu existiert eine Teilfolge ${}^t\hat{s}^*$ der Folge $(\hat{s}_\eta)_{\eta\downarrow 0}$, die gegen $\hat{s}^*$ konvergiert. Wegen der Gleichgewichtseigenschaft der Folgenglieder gilt

$$U^i({}^t\hat{s}^{i\,*}, {}^t\hat{s}^{-i\,*}) \geq U^i(\hat{s}^i, {}^t\hat{s}^{-i\,*}) \quad \forall\, \hat{s}^i \in \hat{\mathcal{S}}^i({}^t\eta) \quad i = 1, \ldots, m$$

Lassen wir nun $t \to \infty$ gehen, folgt wegen der Stetigkeit der Auszahlung $U^i$

$$U^i(\hat{s}^{i\,*}, \hat{s}^{-i\,*}) \geq U^i(\hat{s}^i, \hat{s}^{-i\,*}) \quad \forall \hat{s}^i \in \mathcal{S}^i \quad \forall\, i = 1, \ldots, m$$

Damit ist gezeigt, daß $\hat{s}^{i\,*}$ ein Nash-Gleichgewicht des Spiels $\hat{\Gamma}$ ist. $\diamond$

Zum Beweis und zur Formulierung des nächsten Satzes benötigen wir noch eine Definition, die von Myerson ([40]) eingeführt wurde.

**Definition 3.15** *Seien ein Spiel $\hat{\Gamma} = (\mathcal{A}, \hat{\mathcal{S}}, \hat{\mathcal{U}})$, und davon eine Strategienkombination $\hat{s} \in \hat{\mathcal{S}}$ gegeben und ein $\epsilon > 0$. $\hat{s}$ ist ein $\epsilon$-perfektes Gleichgewicht von $\hat{\Gamma}$, falls $\hat{s}$ stark gemischt ist, und für alle Spieler $i = 1, \ldots, m$ und alle reinen Strategien $j = 1, \ldots, n_i$ die Aussage gilt*

$$\{U^i(s^i_j, \hat{s}^{-i}) < U^i(\hat{s}^i, \hat{s}^{-i})\} \Rightarrow \hat{s}^i_j \leq \epsilon \tag{3.70}$$

**Satz 3.22** *Seien ein Spiel $\hat{\Gamma} = (\mathcal{A}, \hat{\mathcal{S}}, \hat{\mathcal{U}})$ und davon eine Strategienkombination $\hat{s} \in \hat{\mathcal{S}}$ gegeben. Folgende drei Aussagen sind äquivalent:*

1. *$\hat{s}$ ist ein perfektes Gleichgewicht.*
2. *$\hat{s}$ ist der Grenzwert einer Folge $(\hat{s}_\epsilon)_{\epsilon\downarrow 0}$, deren Folgenglieder $\hat{s}_\epsilon$ $\epsilon$-perfekte Gleichgewichte von $\hat{\Gamma}$ für alle $\epsilon > 0$ sind.*
3. *$\hat{s}$ ist der Grenzwert einer Folge, deren Folgenglieder $\hat{s}_\epsilon$ Kombinationen von stark gemischten Strategien sind mit der zusätzlichen Eigenschaft, daß $\hat{s}$ die beste Antwort für jedes Folgenglied ist.*

**Beweis:**

(1) $\Rightarrow$ (2) Sei $\hat{s}$ Häufungspunkt einer Folge $(\hat{s}_\eta)_{\eta\downarrow 0}$ nach Definition (3.14). Mit $\epsilon = \max_{j,i} \eta^i_j$ ist dann $\hat{s}$ ein $\epsilon$-perfektes Gleichgewicht von $\hat{\Gamma}$

(2) $\Rightarrow$ (3) Sei nun $(\hat{s}_\epsilon)_{\epsilon\downarrow 0}$ eine Folge von $\epsilon$-perfekten Gleichgewichten des Spiels $\hat{\Gamma}$, die gegen $\hat{s}$ konvergiert. Seien nun alle $\epsilon$ klein genug. Dann ist nach Definition (3.15) und nach Satz (3.20) jedes Element des Trägers $\mathcal{T}(\hat{s})$ eine beste Antwort für jedes $\hat{s}_\epsilon$. Somit ist auch $\hat{s}$ eine beste Antwort für alle Folgenglieder.

(3) $\Rightarrow$ (1) Sei nun die Folge $(\hat{s}_\epsilon)_{\epsilon\downarrow 0}$ gegen $\hat{s}$ konvergent. Mit der Definition

$$\eta^i_j(\epsilon) = \begin{cases} s^i_{\epsilon,j} & \text{falls } s^i_j \notin \mathcal{T}(s^i) \\ \epsilon & \text{sonst} \end{cases}$$

konvergiert $\eta(\epsilon)$ mit $\epsilon$ gegen 0. Mit $\hat{s}_\epsilon \in \hat{S}(\eta(\epsilon))$ und Satz (3.20) ist $\hat{s}_\epsilon$ Nash-Gleichgewicht von $\Gamma_{\eta(\epsilon)}$. Nach Definition (3.14) ist dann $\hat{s}$ ein perfektes Gleichgewicht. $\diamond$

**Bemerkung.** Die Aussage (3) dieses Satzes findet sich bereits in Selten ([56]) und wird in Osborne und Rubinstein ([46]) als Definition verwendet und als „perfektes Gleichgewicht der zitternden Hand“ bezeichnet.

**Beispiel 13 [Fortsetzung von Beispiel 12]:**

Wir betrachten folgende Strategien

$$\hat{s}^1_\epsilon = (1-\epsilon, \epsilon)^T \quad \hat{s}^2_\epsilon = (1-\epsilon, \epsilon)^T$$

mit den Auszahlungen

$$\hat{U}^i(\hat{s}^1_\epsilon, \hat{s}^2_\epsilon) = (1-\epsilon)^2 \quad i = 1, 2\ .$$

Wegen

$$\begin{aligned} \hat{U}^1(s^1_1, \hat{s}^2_\epsilon) &= (1-\epsilon) \\ \hat{U}^2(\hat{s}^1_\epsilon, s^2_1) &= (1-\epsilon) \\ \hat{U}^1(s^1_2, \hat{s}^2_\epsilon) = \hat{U}^2(\hat{s}^1_\epsilon, s^2_2) &= 0 \end{aligned}$$

sind $s^1_1$ bzw $s^2_1$ die jeweils besten Antworten für alle Folgenglieder $\hat{s}_\epsilon = (\hat{s}^1_\epsilon, \hat{s}^2_\epsilon)$. Damit ist nach Satz (3.22, Aussage 3) $(s^1_1, s^2_1)$ ein perfektes Gleichgewicht. Offensichtlich ist $(s^1_2, s^2_2)$ kein perfektes Gleichgewicht. $\diamond$

Wie wir aus Abschnitt 3.1.3 wissen, kommen stark dominierte Strategien für Gleichgewichte nicht in Frage, jedoch schwach dominierte.

**Definition 3.16** *Ein Nash-Gleichgewicht heißt undominiert , wenn die zugehörigen Strategien der einzelnen Spieler nicht schwach dominiert sind.*

**Satz 3.23** *Jedes perfekte Gleichgewicht ist undominiert.*

**Beweis:**

Nach Definition der schwachen Dominanz kann eine schwach dominierte Strategie niemals beste-Antwort für eine stark gemischte Strategie sein. $\diamond$

**Beispiel 14:**
Dieses Beispiel aus van Damme ([15, Seite 29]) zeigt, daß nicht jedes Nash-Gleichgewicht und auch nicht jedes undominierte Nash-Gleichgewicht ein perfektes Gleichgewicht ist. Das Beispiel hierzu ist ein Spiel mit drei Spielern, die jeweils zwei Strategien haben. Die folgenden beiden Matrizen geben die Auszahlungen für Spieler 1, 2 und 3, in dieser Reihenfolge an. Spieler 1 wählt eine Zeile aus, Spieler 2 eine Spalte und Spieler 3 eine Matrix.

| | | $s_1^2$ | $s_2^2$ | | | $s_1^2$ | $s_2^2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $s_1^3$ | $s_1^1$ | (1,1,1) | (1,0,1) | $s_2^3$ | $s_1^1$ | (1,1,0) | (0,0,0) |
| | $s_2^1$ | (1,1,1) | (0,0,1) | | $s_2^1$ | (0,1,0) | (1,0,0) |

Die Strategientripel $(s_2^1, s_1^2, s_1^3)$ und $(s_1^1, s_1^2, s_1^3)$ sind Nash-Gleichgewichte dieses Spiels, jedoch nur das Tripel $(s_1^1, s_1^2, s_1^3)$ ist ein perfektes Gleichgewicht. Insbesondere zeigt dieses Beispiel auch, daß das Konzept des perfekten Gleichgewichts eine echte Einschränkung für die Nash-Gleichgewichte darstellt. $\diamond$

Der folgende Satz wurde gleichzeitig von van Damme und anderen gefunden.

**Satz 3.24 (Bimatrixspiel, perfektes Gleichgewicht)** *Nash-Gleichgewichte der gemischten Erweiterung eines Zweipersonen-Spieles ( Bimatrix-Spiel)) sind genau dann perfekte Gleichgewichte, wenn sie undominiert sind.*

Der **Beweis** ist etwas langwierig, siehe van Damme ([15, Seite 50]).
Okada [45] hat bewiesen, daß für eine Spielerzahl $m \geq 3$ die Umkehrung von Satz 3.23 nicht gilt. Er hat auch Beispiele dazu angegeben. Siehe auch die undominierte Strategienkombination $(s_2^1, s_1^2, s_1^3)$ des obigen Beispiels 14.

Die Undominiertheit einer Strategie $\hat{s}^i$ $i = 1, 2$ bei einem Bimatrix-Spiel kann als lineares Optimierungsproblem formuliert werden. Die Grundlage hierzu bildet das zweipersonen-Nullsummen-Spiel des folgenden Satzes.

**Satz 3.25** *Gegeben sei ein endliches Zweipersonen-Spiel* $\Gamma$ *mit den Auszahlungsmatrizen* $\underline{U}^1 = (u_{jk}^1)$ *und* $\underline{U}^2 = (u_{jk}^2)$. $\hat{s}^1$ *sei eine gemischte Strategie des* *ersten Spielers aus diesem Spiel. Hieraus konstruieren wir ein Zweipersonen-Nullsummen-Spiel* $\Gamma^o$ *mit der folgenden Auszahlungsmatrix für den ersten Spieler:*

$$ujk^0 = u^1_{jk} - U^1(\hat{s}^1, s^2_k) \ .$$

*Die Strategie* $\hat{s}^1$ *ist genau dann undominiert, wenn der Spielwert* $v(\Gamma^0) = 0$ *und die Strategie des zweiten Spielers im* $\Gamma^0$ *stark gemischt ist.*
*Die analoge Aussage gilt für eine Strategie* $\hat{s}^2$ *des zweiten Spielers im Spiel* $\Gamma$*.*

**Beweis:**
Der Beweis ergibt sich aus der Äquivalenz der folgenden vier Aussagen:

1. $\hat{s}^1$ wird von $\hat{s}^{1\,o}$ in $\Gamma$ dominiert.

2. $U^1(\hat{s}^{1\,o}, s^2_j) \geq U^1(\hat{s}^1, s^2_j)$ und $U^1(\hat{s}^{1\,o}, s^2_{j'}) > U^1(\hat{s}^1, s^2_{j'})$ für ein $j'$.

3. $U^0(\hat{s}^{1\,o}, s^2_j) \geq 0$ und $U^0(\hat{s}^{1\,o}, s^2_j) > 0$ für ein $j$.

4. $v(\Gamma^0) \geq 0$, und wenn $v(\Gamma^0) = 0$ dann ist die Strategie des zweiten Spielers in $\Gamma^0$ stark gemischt.

$\diamond$

## 3.6 Aufgaben

**<u>Aufgabe 4</u>**(intern NGameA29):
Eliminieren Sie bei dem folgenden Zweipersonen-Spiel alle stark dominierten Strategien

| | $s^2_1$ | $s^2_2$ | $s^2_3$ |
|---|---|---|---|
| $s^1_1$ | (1,3) | (2,7) | (3,9) |
| $s^1_2$ | (2,1) | (3,1) | (3,8) |
| $s^1_3$ | (3,1) | (2,1) | (5,3) |

Geben Sie ein Nash-Gleichgewicht dieses Spiels an!

**<u>Aufgabe 5</u>**(intern NGameA31):
Geben Sie die stabilen Hypothesenmengen bei den Spielen "Kampf der Geschlechter" und "Dilemma des Wettrüstens" an.

**Aufgabe 6**(intern NGameA03):
Berechnen Sie ein Nash-Gleichgewicht des folgenden stark vereinfachten Marktmodells!
In einer (kleineren) Stadt bestehe die folgende Situation. Eine gewisse Ware werde nur von zwei verschiedenen Kaufleuten angeboten. Die Kaufleute legen zu Beginn des Tages unabhängig voneinander den Preis fest. Eine Änderung des Preises sei erst am nächsten Tag wieder möglich. Es werde angenommen, daß nur drei verschiedene Preise $p_1$, $p_2$, $p_3$ $(0 < p_1 < p_2 < p_3)$ gewählt werden. Der billigere Anbieter macht an diesem Tag um $a_1$ Geldeinheiten mehr Gewinn als sein Konkurrent, falls $p_1$ sein Preis ist. Er macht um $a_2$ Geldeinheiten mehr Gewinn, wenn $p_2$ sein Preis ist $(0 < a_1 < a_2)$. Jeder der beiden Kaufleute betrachtet den Mehrgewinn seines Konkurrenten als eigenen (fiktiven) Verlust. Es kann außerdem angenommen werden, daß bei gleichem Preis jeder an diesem Tag gleich viel Gewinn macht.

**Aufgabe 7**(intern NGameA07):
Eine Firma $F$ produziert ein Gerät, dessen Lebensdauer von einem Transistor abhängt. Wird das Gerät innerhalb der Garantiefrist defekt, so muß es auf Kosten der Firma $F$ repariert werden; die Reparaturkosten betragen DM 36. Die Lieferfirma $L$ bietet 3 Typen von Transistoren zu unterschiedlichen Preisen und Garantieleistungen an:

- Typ I kostet 4 DM pro Stück und $L$ übernimmt keinerlei Garantie.
- Typ II kostet 24 DM pro Stück und $L$ übernimmt die Reparaturkosten bei einem Defekt innerhalb der Garantiefristen.
- Typ III kostet 40 DM pro Stück, da er zusätzlich versichert ist. Wird ein Transistor vom Typ III innerhalb der Garantiefrist defekt, so übernimmt $L$ die Reparaturkosten und zahlt zusätzlich (aus der Versicherung) 40 DM an $F$.

a) Beschreiben Sie diese Situation als Zweipersonen-Nullsummen-Spiel. Wer ist der zweite Spieler. Welche Strategien haben beide Spieler?

b) Bestimmen Sie den Wert der gemischten Erweiterung sowie eine optimale Strategie von $F$. Wie läßt sich diese Strategie realisieren?

**Aufgabe 8**(intern NGameA05):

Gegeben sei ein Zweipersonen-Nullsummen-Spiel, bei dem der Spieler 2 ein Objekt versteckt, das der Spieler 1 suchen muß. Wenn der Spieler 2 den j-ten Ort als Versteck wählt, dann hat das Auffinden des Objektes den Wert $a_j > 0$. Wählt der Spieler 1 ebenfalls den j-ten Ort (j-te Strategie), dann erhält er das gefundene Objekt, der Spieler 2 verliert es. Wählen beide Spieler verschiedene Orte aus, dann erhält jeder die Auszahlung 0.
Offensichtlich ist die Auszahlungsmatrix für den Spieler 1 eine Diagonalmatrix diag$(a_1, a_2, \dots, a_n)$.
Geben Sie den Spielwert und die Minimax-Strategien der gemischten Erweiterung dieses Spieles an.
Wie ändern sich Spielwert und Minimax-Strategien, wenn man auch nichtpositive $a_j$ zuläßt?

**Aufgabe 9**(intern NGameA32):
Gegeben sei ein Zweipersonen-Nullsummen-Spiel mit der folgenden Auszahlungsmatrix für den ersten Spieler

$$U = \begin{pmatrix} -5 & 7 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & 11 & -1 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie die Sattelpunktsstrategien graphisch!

**Aufgabe 10**(intern NGameA10):
Untersuchen Sie das Bimatrixspiel mit den folgenden Auszahlungen auf Nashgleichgewichte in gemischten Strategien:

| | |
|---|---|
| ((V-D)/2, (V-D)/2) | (V,0) |
| (0,V) | ((W+V)/2,(W+V)/2) |

**Aufgabe 11**(intern NGameA09):

Viele Spieltheoriebücher zitieren das Problem des Colonel Blotto.

Colonel Blotto muß zwei Gebirgspässe gegen den Feind verteidigen. Er hat 6 Kompanien zur Verfügung, sein Gegner 5 Kompanien. Stellt Colonel Blotto auf einem Pass weniger Kompanien auf als sein Gegner, dann verliert er alle diese Kompanien. Stellt er mehr Kompanien auf als sein Gegner, dann verliert sein Gegner alle dort aufgestellten Kompanien. Stehen auf beiden Seiten gleich viel Kompanien, dann erleidet keiner einen Verlust. Die Verluste des Gegners zählt Colonel Blotto als seinen Gewinn. Verlust und Gewinn auf beiden Pässen werden zusammengezählt. Der Gegner zählt genauso, sodaß ein Zweipersonen-Nullsummenspiel entsteht. Es ergeben sich folgende Strategien und Auszahlungen für Colonel Blotto:

| | 4:1 | 3:2 | 2:3 | 1:4 |
|---|---|---|---|---|
| 5:1 | 4 | 2 | 1 | 0 |
| 4:2 | 1 | 3 | 0 | -1 |
| 3:3 | -2 | 2 | 2 | -2 |
| 2:4 | -1 | 0 | 3 | 1 |
| 1:5 | 0 | 1 | 2 | 4 |

Berechnen Sie die Strategien beider Spieler z.B. mit Maple.

**Aufgabe 12**(intern NGameA11a):

Wir betrachten folgendes Fernseh-Werbeproblem. Drei Firmen möchten ihre konkurrierenden Produkte für die nahen Feiertage als passende Geschenkidee anpreisen. Jede Firma hat die Möglichkeit ihre Werbung entweder beim Frühstücksfernsehen oder am Abend vor der Tagesschau zu plazieren. Wenn mehr als eine Firma zur gleichen Werbezeit ihr Produkt anpreist, so kommt sich der potentielle Käufer veralbert vor und die Werbung dieser Firmen schlägt fehl. Die Firma, der es gelingt, allein am Morgen zu werben, kann eine Menge von 1 Einheit verkaufen; die Firma, der es gelingt, allein am Abend zu werben, kann eine Menge von 2 Einheiten verkaufen. Es ergeben sich folgende Auszahlungen:

| | Auszahlung | | |
|---|---|---|---|
| Strategie | Firma1 | Firma2 | Firma3 |
| (1,1,1) | 0 | 0 | 0 |
| (1,1,2) | 0 | 0 | 2 |
| (1,2,1) | 0 | 2 | 0 |
| (1,2,2) | 1 | 0 | 0 |
| (2,1,1) | 2 | 0 | 0 |
| (2,1,2) | 0 | 1 | 0 |
| (2,2,1) | 0 | 0 | 1 |
| (2,2,2) | 0 | 0 | 0 |

Die gemischten Strategien der Firmen 1, 2 bzw. 3 seien mit $(x_1, 1-x_1)^T$, $(x_2, 1-x_2)^T$ bzw. $(x_3, 1-x_3)^T$ bezeichnet.Zeigen Sie, da $x_1 = x_2 = x_3 = \sqrt{2} - 1$ ein Nash-Gleichgewicht ist.
Verifizieren Sie dieses Nash-Gleichgewicht auch mit dem Gambit-Programm. Liefert dieses Programm noch weitere Nash-Gleichgewichte?

**Aufgabe 13**(intern NGameA35):
Geben Sie zu jeden Zweipersonen-Nullsummen-Spiel eine solches symmetrisches Spiel an, aus dem die Lösung des ursprünglichen Spiels abgelesen werden kann.

**Aufgabe 14**(intern NGameA36):
Drei Gase mit den in der Tabelle angeführten Konstanten sollen so gemischt werden, daß ein möglichst billiges Mischgas mit einem Heizwert von mindestens $3000Kcal/m^3$ und einem Schwefelgehalt von höchstens $3g/m^3$ entsteht.

| Gas Nr. | 1 | 2 | 3 | Einheit |
|---|---|---|---|---|
| Preis $p_i$ | 10 | 30 | 20 | DM/1000 $m^3$ |
| Heizwert $h_i$ | 1000 | 3000 | 6000 | Kcal/$m^3$ |
| Schwefelgehalt $S_i$ | 8 | 1 | 2 | g/$m^3$ |

Gesucht ist ein Mischgas mit den geringsten Kosten pro $m^3$.
Reduzieren Sie die Anzahl der Variablen auf zwei und berechnen Sie die optimale Mischung mit Hilfe eines geeigneten Zweipersonen-Nullsummen-Spiel (z.B. mit dem Gambit-Programm)!

**Aufgabe 15**(intern NGameA33):
Verifizieren Sie an dem folgenden Spiel mit drei Spielern, die jeweils zwei Strategien haben die Sätze in der Vorlesung über perfekte Gleichgewichte. Die folgenden beiden Matrizen geben die Auszahlungen für Spieler 1, 2 und 3, in dieser Reihenfolge an. Spieler 1 wählt eine Zeile aus, Spieler 2 eine Spalte und Spieler 3 eine Matrix.

| | | $s_1^2$ | $s_2^2$ | | | $s_1^2$ | $s_2^2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $s_1^3$ | $s_1^1$ | (1,1,1) | (1,0,1) | $s_2^3$ | $s_1^1$ | (1,1,0) | (0,0,0) |
| | $s_2^1$ | (1,1,1) | (0,0,1) | | $s_2^1$ | (0,1,0) | (1,0,0) |

Die Strategientripel $(s_2^1, s_1^2, s_1^3)$ und $(s_1^1, s_1^2, s_1^3)$ sind Nash-Gleichgewichte dieses Spiels, jedoch nur das Tripel $(s_1^1, s_1^2, s_1^3)$ ist ein perfektes Gleichgewicht.

# KAPITEL 4

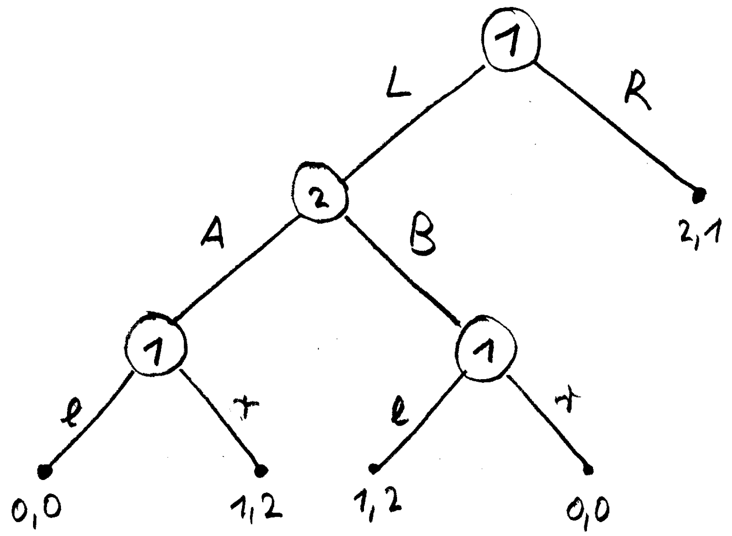
# Spiele in extensiver Form

## 4.1 Definition

Es werden hier Spiele betrachtet, die als eine Folge von Spielzügen gegeben sind, die in einer gewissen Reihenfolge von endlich vielen Spielern gemacht werden. Spiele dieser Art werden in mathematischer Hinsicht bereits in ([44]) besprochen. Die Darstellung hier orientiert sich an Kuhn ([31]) zurückgeht.

Anschaulich kann jedes solche Spiel graphentheoretisch als Baum (Spielbaum) dargestellt werden. Der Wurzelpunkt ist der Start des Spieles.

**Beispiel 15:**




◇

Um Zufallseinflüsse modellieren zu können, wird ein zusätzlicher Spieler eingeführt, der hier die Nummer „0"erhält. Des weiteren wird noch modelliert, daß ein Spieler, der am Zug ist, nicht über die vorangehende Aktion informiert ist (etwa, wenn mehrere Spieler gleichzeitig ziehen, d.h. sie wählen ihre Strategie unabhängig voneinander). Die Beschreibung des Spielbaumes drücken wir durch Spielabläufe, d.h. Folgen von Spielzügen aus: $\mathfrak{a} = ({}^k z)_{k=1,\dots,K}$. Die Folge $\mathfrak{a}' = ({}^k z)_{k=1,\dots,K+1}$ wird als Verlängerung der Folge $\mathfrak{a}$ betrachtet, manchmal auch als $\mathfrak{a}'' = (\mathfrak{a}, \mathfrak{a}')$ geschrieben. Die leere Folge, d.h. die Folge der Länge Null wird mit $\mathfrak{n}$ bezeichnet. Die Menge aller Spielzüge, aus der die Folgenglieder genommen sind, wird mit $\mathcal{Z}$ bezeichnet.

**Definition 4.1** *Eine Menge $\mathcal{B}$ von endlichen oder unendlichen Folgen $({}^k z)_{k=1,\dots,K}.K = 0, 1, \dots$ heißt Spielbaum, falls sie folgende Eigenschaften hat:*

*(1)* $\mathfrak{n} \in \mathcal{B}$.

*(2)*
$$({}^k z)_{k=1,\dots,K} \in \mathcal{B} \Rightarrow ({}^k z)_{k=1,\dots,L} \in \mathcal{B} \quad \forall L \leq K$$

.

*(3)*
$$({}^k z)_{k=1,\dots} \in \mathcal{B} \Rightarrow ({}^k z)_{k=1,\dots L} \in \mathcal{B} \quad \forall L \geq 0$$

*Die Elemente von $\mathcal{B}$ heißen auch Spielabläufe, Spielhistorien oder kurz Historien.*

**Definition 4.2** *Die Elemente einer Teilmenge $\mathcal{F}$ von $\mathcal{B}$, die alle unendlichen Folgen und diejenigen endlichen Folgen $({}^k z)_{k=1,\dots,K}$ enthält, für die keine Fortsetzung $({}^k z)_{k=1,\dots,K+1} \notin \mathcal{B}$ existiert, heißen terminal (oder final) (Spielenden!).*

**Definition 4.3** *Für $\mathfrak{a} \in \mathcal{B} \backslash \mathcal{F}$ heißen die Elemente der Menge*

$$\mathcal{Z}(\mathfrak{a}) = \{z | (\mathfrak{a}, z) \in \mathcal{B}\}$$

*Spielzüge (im Anschluß an die Historie $\mathfrak{a}$).*

**Definition 4.4** *Das 6-Tupel $\Gamma = (\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{P}, (w_{\mathfrak{a}})_{\mathfrak{a}: \mathcal{P}(\mathfrak{a})=0}, (\mathcal{I}_0, \mathcal{I}_1, \dots, \mathcal{I}_m), {}_e\mathcal{U})$ heißt ein Spiel in extensiver Form, wenn*

1. *$\mathcal{A} = \{1, 2, \dots, m\}$ die Menge der (eigentlichen) Spieler ist;*
2. *$\mathcal{B}$ ein Spielbaum ist;*
3. *$\mathcal{P}$ eine Funktion ist, mit*

   $$\mathcal{P} : \mathcal{B} \backslash \mathcal{F} \to \mathcal{A} \cup \{0\} \text{ und } \mathcal{P}^{-1}(\{i\}) \neq \emptyset \quad \forall i = 1, 2, \dots, m \ .$$

4. *$w_{\mathfrak{a}}$ für jedes $\mathfrak{a} \in \mathcal{B} \backslash \mathcal{F}$ mit $\mathcal{P}(\mathfrak{a}) = 0$ eine Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf der Menge $\mathcal{Z}(\mathfrak{a})$ ist, die angibt mit welcher Wahrscheinlichkeit ein Spielzug aus $\mathcal{Z}(\mathfrak{a})$ die Historie $\mathfrak{a}$ fortsetzt ($\sum_{z \in \mathcal{Z}(\mathfrak{a})} w_{\mathfrak{a}}(z) = 1$).*
5. *für $i = 0, 1, \dots, m$ jeweils eine Partition $\mathcal{I}^i$ der Menge $\mathcal{B}^i = \{\mathfrak{a} \in \mathcal{B} | \mathcal{P}(\mathfrak{a}) = i\}$ gegeben ist, bei der für je zwei verschiedene Elemente $\mathfrak{a}'$ und $\mathfrak{a}''$ aus dem gleichen Element $I^i_j$ der Partition $\mathcal{I}^i$ $\mathcal{Z}(\mathfrak{a}') = \mathcal{Z}(\mathfrak{a}'')$ gilt.*
6. *${}_e\mathcal{U}$ eine Funktion ${}_e\mathcal{U} : \mathcal{F} \to \mathcal{E}$ ist, die für jedes $t \in \mathcal{F}$ ein Spielergebnis $\mathcal{E}^i$ für jeden Spieler $i \in \mathcal{A}$ angibt ($\mathcal{E} = \prod_{i=1}^m \mathcal{E}^i$ und eine Präferenzrelation $\succeq_i$ auf $\mathcal{E}^i$).*

**Definition 4.5** *Ein extensives Spiel $\Gamma$ heißt endlich , wenn $\mathcal{B}$ endlich ist. Es heißt mit endlichem Horizont , wenn die Längen der terminalen Elemente $\mathcal{F}$ beschränkt sind. Als Länge $\mathfrak{l}(\Gamma)$ eines Spiels bezeichnet man die Länge des längsten Elements von $\mathcal{B}$*

**Bemerkung.** Bei manchen Gesellschaftsspielen wird gewürfelt oder Karten werden gemischt (d.h. in eine zufällige Reihenfolge gebracht). Bei vielen wirtschaftlichen Problemen sind Werte von Einflußgrößen unbekannt, z.B.

der Zinssatz im nächsten Jahr. Dies alles und Ähnliches kann als ein Spielzug des Spielers 0 modelliert werden.

Die Folgen aus $\mathcal{B}$ sind alle möglichen Spielverlaufsabschnitte(Historien). Die leere Folge ist der Start des Spieles. Die Elemente der Folgen sind Spielzüge, Aktionen der einzelnen Spieler, die meist abwechselnd zum Zug kommen. $\mathcal{P}(\mathfrak{a})$ ist der Spieler, der nach der Historie $\mathfrak{a}$ an der Reihe ist. Ihm stehen gewisse Spielzüge, nämlich die aus der Menge $\mathcal{Z}(\mathfrak{a})$ zur Verfügung. Im graphentheoretischen Sinne beschreibt $\mathcal{B}$ einen Baum mit Wurzel $\mathfrak{n}$.

Die Elemente der Menge $\mathcal{F}$ repräsentieren Endzustände des Spieles. Es sind die Spielzustände, bei denen jedem Spieler sein Spielergebnis zugeteilt wird.

Die Elemente der Partitionen $\mathcal{I}^i$ von $\mathcal{B}^i$ stellen die Spielzustände dar, die der Spieler, der bei dieser Situation an die Reihe kommt, nicht unterscheiden kann. Man spricht hier von einer Informationsmenge oder einer Informationspartition. Daher muß die Menge der Spielzüge für jedes Element einer Informationsmenge identisch sein (d.h. $\mathcal{Z}(\mathfrak{a}') = \mathcal{Z}(\mathfrak{a}''))$.

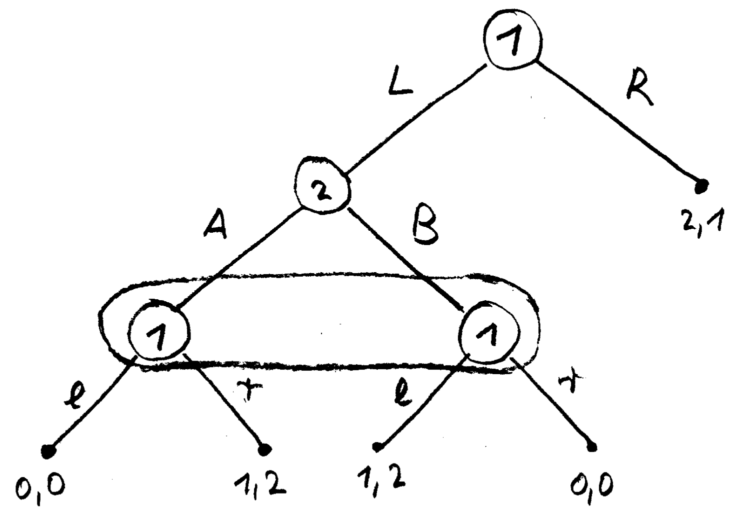
**Beispiel 16 [Fortsetzung Beispiel 15]:**

Hier ist

$$\begin{aligned} \mathcal{B} &= \{\mathfrak{n}, (R), (L), (L,A), (L,A,\ell), (L,A,r), (L,B), (L,B,\ell), (L,B,r)\} \\ \mathcal{F} &= \{(R), (L,A,\ell), (L,A,r), (L,B,\ell), L,B,r)\} \\ &\text{für } \mathfrak{a} \in \mathcal{B}\backslash\mathcal{F} : P(\mathfrak{n}) = 1, P((L)) = 2, \end{aligned}$$

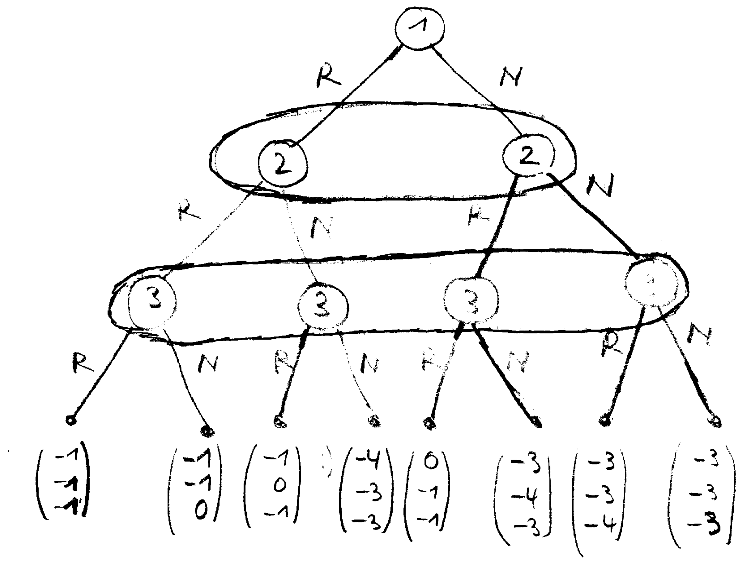
$\diamond$

**Definition 4.6** *Ein Spiel* $\Gamma = (\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{P}, (w_\mathfrak{a})_{\mathfrak{a}\in\mathcal{B}}, (\mathcal{I}_0, \mathcal{I}_1, \ldots, \mathcal{I}_m),_e \mathcal{U})$ *heißt ein Spiel mit perfekter Information, falls für alle i alle Elemente von* $\mathcal{I}^i$ *einelementig sind. In allen anderen Fällen spricht man von einem Spiel ohne perfekte Information.*




**Bemerkung.** Spiele, bei denen alle Spieler gleichzeitig eine Strategie wählen können nach [] als extensive Spiele ohne perfekte Information dargestellt werden.

**Beispiel 17 [Umweltschutzproblem, Fortsetzung von Beispiel 11]:**



◇

**Bemerkung.** Man spricht von einem Spiel Γ mit vollständiger Informations, wenn jeder Spieler über alle Komponenten $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{P}, (w_h)_{h \in \mathcal{B}}, (\mathcal{I}_0, \mathcal{I}_1, \ldots, \mathcal{I}_m), {}_e\mathcal{U})$ des Spieles informiert ist, andernfalls nennt man es ein

Spiel mit unvollständiger Information, siehe Friedman [18]. Wir betrachten hier nur Spiele mit vollständiger Information.

## 4.2 Spiele mit perfekter Information

Extensive Spiele mit perfekter Infomation können auch abgekürzt dargestellt werden durch $\Gamma = (\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{P}, (w_{\mathfrak{a}})_{\mathfrak{a}\in\mathcal{B}}, {}_e\mathcal{U})$, die Informationspartitionen nur einelementige Mengen enthalten.

**Definition 4.7** *Gegeben sei ein Spiel mit perfekter Information*

$$\Gamma = (\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{P}, (w_{\mathfrak{a}})_{\mathfrak{a}:\mathcal{P}(\mathfrak{a})=0}, {}_e\mathcal{U})$$

*in extensiver Form.*
*Sei* $\mathcal{B}^i = \{\mathfrak{a} \in \mathcal{B} | \mathcal{P}(\mathfrak{a}) = i\}$*. Als (reine) Strategie* $s^i$ *des Spielers* $i \in \mathcal{A} \cup \{0\}$ *bezeichnet man eine Funktion*

$$s^i : \mathcal{B}^i \to \mathcal{Z} \text{ mit } s^i(\mathfrak{a}) \in \mathcal{Z}(\mathfrak{a}) \quad \forall \mathfrak{a} \in \mathcal{B}^i \ . \tag{4.1}$$

*Falls* $\mathcal{B}^i$ *endlich ist, kann* $s^i$ *offensichtlich auch als Vektor dargestellt werden. Die Menge aller Strategien des i-ten Spielers wird mit* $\mathcal{S}^i$ *bezeichnet.*
*Falls* $\mathcal{U}$ *eine skalare Auszahlung an die eigentlichen Spieler darstellt, wird die Auszahlung für einen eigentlichen Spieler bei der Strategienkombination* $(s^1, s^2, \ldots, s^m)$ *als Erwartungswert festgelegt:*

$$U^i(s^1, s^2, \ldots, s^m) = \sum_{s^0 \in \mathcal{S}^0} {}_eU^i(s^0, s^1, \ldots, s^m) \operatorname{prob}(s^0) \ . \tag{4.2}$$

*Hierbei bezeichnet* $\operatorname{prob}(s^0)$ *die Wahrscheinlichkeit der Strategie* $s^0$*.*

**Bemerkung.** Jede Strategienkombination aller Spieler liefert einen terminalen Spielablauf, der eine Auszahlung an jeden Spieler ergibt.
Es steht auch eine Normalform $(\mathcal{A}, \mathcal{S}, \mathcal{U})$ des extensiven Spiels zur Verfügung und damit auch die Definition eines Nash-Gleichgewichts. Zugleich können aber auch Besonderheiten eines Spiels, die nur an der extensiven Form ablesbar sind, in Betracht gezogen werden. Die Zuordnung von Normalform und extensiver Form ist nicht eineindeutig. Aus der Normalform kann ohne zusätzliches Wissen die extensive Form nicht zurückgewonnen werden.

**Beispiel 18 [Fortsetzung von Beispiel 15]:**

Die Normalform dieses Spiels ergibt sich folgendermaßen.

$$\mathcal{B}^1 = \{\mathfrak{n}, (LA), (LB)\}$$
$$\mathcal{B}^2 = \{(L)\}$$

Die Strategien des ersten Spielers entnimmt man folgender Tabelle

| | $\mathfrak{n}$ | $(LA)$ | $(LB)$ | |
|---|---|---|---|---|
| $s_1^1$ | $L$ | $\ell$ | $\ell$ | $(L, \ell, \ell)$ |
| $s_2^1$ | $L$ | $\ell$ | r | $(L, \ell, r)$ |
| $s_3^1$ | $L$ | $r$ | $\ell$ | $(L, r, \ell)$ |
| $s_4^1$ | $L$ | $r$ | $r$ | $(L, r, r))$ |
| $s_5^1$ | R | $\ell$ | $\ell$ | $(R, \ell, \ell)$ |
| $s_6^1$ | R | $\ell$ | r | $(R, \ell, r)$ |
| $s_7^1$ | R | $r$ | $\ell$ | $(R, r, \ell)$ |
| $s_8^1$ | R | $r$ | $r$ | $(R, r, r)$ |

| | $(L)$ | |
|---|---|---|
| $s_1^2$ | $A$ | $(A)$ |
| $s_2^2$ | $B$ | $(B)$ |

| | Auszahlung | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1.Spieler | | 2.Spieler | |
| | $s_1^2$ | $s_1^2$ | $s_1^2$ | $s_1^2$ |
| $s_1^1$ | 0 | 1 | 0 | 2 |
| $s_2^1$ | 0 | 1 | 0 | 0 |
| $s_3^1$ | 1 | 0 | 2 | 2 |
| $s_4^1$ | 1 | 0 | 2 | 0 |
| $s_5^1$ | 2 | 2 | 1 | 1 |
| $s_6^1$ | 2 | 2 | 1 | 1 |
| $s_7^1$ | 2 | 2 | 1 | 1 |
| $s_8^1$ | 2 | 2 | 1 | 1 |

Man beobachtet hier einen Effekt, der typisch ist für die Normalform eines extensiven Spiels, nämlich, daß die Strategien Nummer 5 bis 8 des ersten Spielers für alle Spieler die gleichen Auszahlungen liefern. Da es bei einem Spiel in Normalform nur auf die Auszahlungen ankommt, sind eigentlich drei dieser vier Strategien überflüssig. Ist die ursprüngliche Darstellung eines Spiels die Normalform, so scheinen solche Auszahlungsmatrizen unsinnig und kommen daher nicht vor.
Die folgende Definition führt den Begriff äquivalente Strategien ein. $\diamond$

**Definition 4.8** *Zwei Strategien* ${}^1s^i$ *und* ${}^2s^i$ *eines Spielers i heißen äquivalent, wenn die zugehörigen Ergebnisse für alle Spieler äquivalent sind. Ist eine Auszahlung gegeben, dann bedeutet dies*

$$U^k({}^1s^i, s^{-i}) = U^k({}^2s^i, s^{-i}) \quad \forall s^{-i} \in \mathcal{S}^{-i} \quad \forall k \ .$$

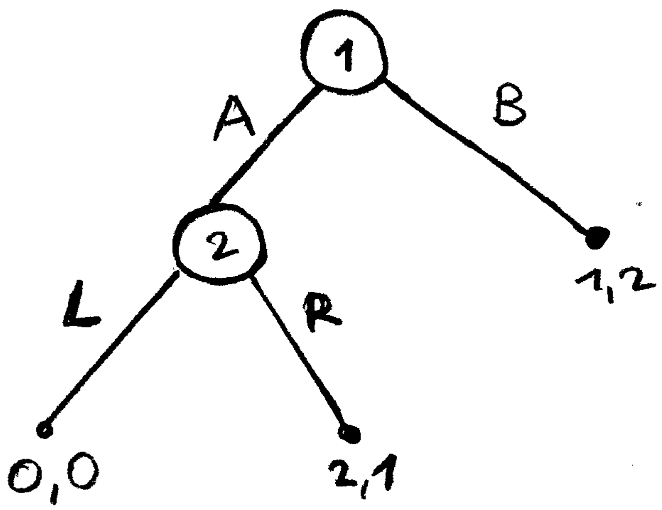
**Bemerkung.** Für äquivalente Strategien muß nur ein Vertreter unter die Strategienmenge aufgenommen werden.

### 4.2.1 Perfektes Teilspiel-Gleichgewicht

**Definition 4.9** *Für ein* $\mathfrak{a} \in \mathcal{B}$ *eines extensiven Spiels* $\Gamma = (\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{P}, {}_e\mathcal{U})$ *mit perfekter Information und ohne zufällige Spielzüge ist ein Teilspiel* $\Gamma(\mathfrak{a})$ *gegeben durch* $(\mathcal{A}|_\mathfrak{a}, \mathcal{B}|_\mathfrak{a}, \mathcal{P}|_\mathfrak{a}, {}_e\mathcal{U}|_\mathfrak{a})$*, wobei*

$$\begin{gathered}
\mathcal{B}|_\mathfrak{a} = \{\mathfrak{a}' | (\mathfrak{a}, \mathfrak{a}') \in \mathcal{B}\} \\
\mathcal{B}^i|_\mathfrak{a} = \{\mathfrak{a}' | (\mathfrak{a}, \mathfrak{a}') \in \mathcal{B} \wedge \mathcal{P}(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}') = i\} \\
\mathcal{A}|_\mathfrak{a} = \{i | \mathcal{B}^i|_\mathfrak{a} \neq \emptyset\} \\
\mathcal{P}|_\mathfrak{a}(\mathfrak{a}') = \mathcal{P}(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}') \\
s^i|_\mathfrak{a} : \mathcal{B}^i|_\mathfrak{a} \to \mathcal{B} \ \mathit{mit} \ s^i|_\mathfrak{a}(\mathfrak{a}') = s^i(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}') \quad \forall \mathfrak{a}' \in \mathcal{B}|_\mathfrak{a} \\
{}_e\mathcal{U}|_\mathfrak{a}(s|_\mathfrak{a}) = {}_e\mathcal{U}(s) \quad \forall\, s|_\mathfrak{a} = (s^i|_\mathfrak{a}, s^{-i}|_\mathfrak{a}) \ .
\end{gathered}$$

**Beispiel 19 [siehe ([46])]:**



Auszahlungen und Strategien

| | L | R |
|---|---|---|
| A | (0,0) | **(2,1)** |
| B | **(1,2)** | (1,2) |

Nash-Gleichgewichte sind die Strategienkombinationen $(A, R)$, $(B, L)$.

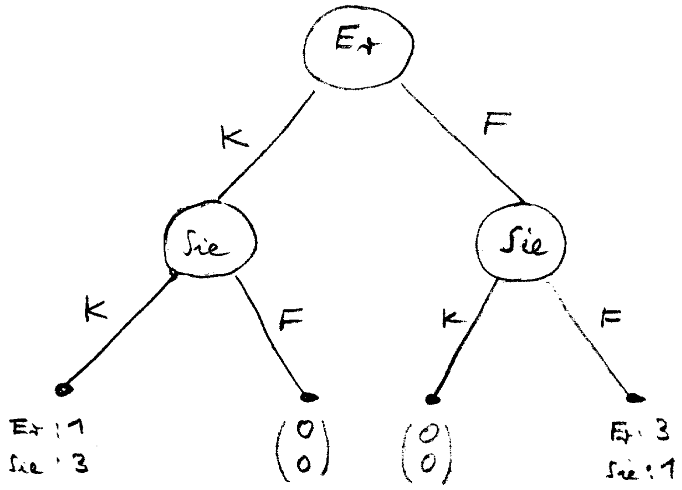
Das Gleichgewicht $(B, L)$ kann als Drohung des zweiten Spielers aufgefaßt werden, daß er $L$ wählen würde, wenn der erste Spieler $A$ statt $B$ wählt. Die Auszahlung wäre jedoch auch für den zweiten Spieler besser, wenn er $R$ wählen würde. Die Drohung des zweiten Spielers ist daher wenig überzeugend. Hieraus ergibt sich die nachfolgende Definition. $\diamond$

**Definition 4.10** *Ein perfektes Teilspiel-Gleichgewicht des Spieles* $\Gamma = (\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{P}, {}_e\mathcal{U})$ *ist eine Strategienkombination* $s^*$*, sodaß für jedes* $\mathfrak{a} \in \mathcal{B} \backslash \mathcal{F}$ $s^*|_{\mathfrak{a}}$ *ein Nash-Gleichgewicht in* $\Gamma(\mathfrak{a})$ *ist.*

**Bemerkung.** Diese Definition stammt von Selten ([56]).

**Beispiel 20 [Stackelberg-Spiel ([63])]:**

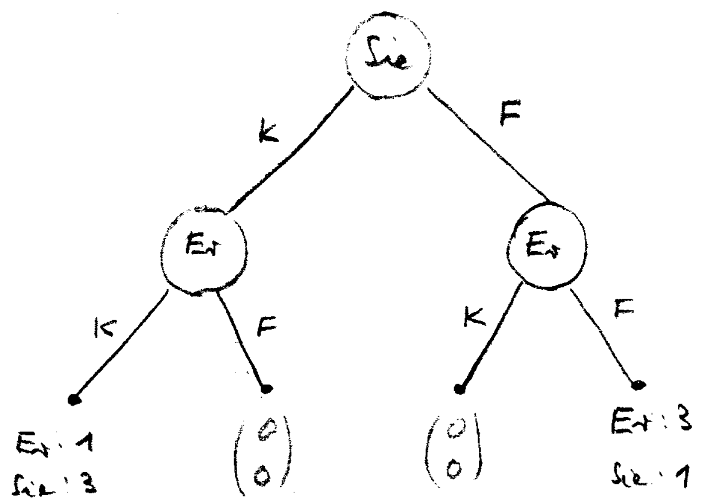
Unter einem Stackelberg-Spiel versteht man im einfachsten Fall ein Zweipersonen-Spiel, bei dem ein Spieler, der Führer, eine Vorgabe gibt und der andere Spieler, Nachfolger genannt, seine Entscheidung darauf aufbaut. Es ist dies ein extensives Spiel, bei dem der „Führer“ als erster am Zug ist. Nach Osborne und Rubinstein wird hierbei häufig als Gleichgewichtskriterium das perfekte Teilspiel-Gleichgewicht gewählt. Als Beispiel nehmen wir hier das Spiel „Kampf der Geschlechter“ im Sinne von Stackelberg abgewandelt. Im ersten Fall sei „Er“ der Führer.




Es ergibt sich folgende Auszahlungsmatrix:

| | | Sie | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | KK | KF | FK | FF |
| Er | K | **(1,3)** | (1,3) | (0,0) | (0,0) |
| | F | (0,0) | **(3,1)** | (0,0) | **(3,1)** |

Die fett gedruckten Auszahlungen repräsentieren Nash-Gleichgewichte, aber nur die Strategienkombination $(F, KF)$ ist ein perfektes Teilspiel-Gleichgewicht. Erwartungsgemäß bedeutet dieses, daß beide „Fußball“ wählen.
Im zweiten Fall sei „Sie“ der Führer.



Es ergibt sich folgende Auszahlungsmatrix:

| | | Sie | |
|---|---|---|---|
| | | K | F |
| | KK | **(1,3)** | (0,0) |
| | KF | **(1,3)** | (3,1) |
| Er | FK | (0,0) | (0,0) |
| | FF | (0,0) | **(3,1)** |

Wieder repräsentieren die fett gedruckten Auszahlungen die Nash-Gleichgewichte, aber nur die Strategienkombination $(KF, K)$ ist ein perfektes Teilspiel-Gleichgewicht. Erwartungsgemäß bedeutet dieses, daß beide „Kino" wählen.
$\diamond$

Der folgende Existenzsatz geht auf Kuhn ([31]) zurück.

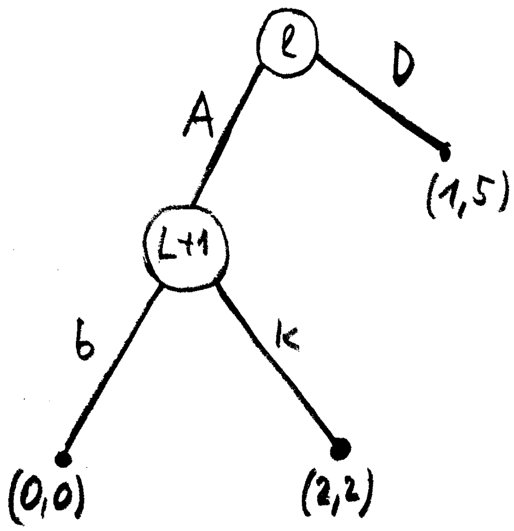
**Satz 4.1 (Existenz eines perfekten Teilspiel-Gleichgewichts)** *Jedes endliche extensive Spiel mit perfekter Information hat ein perfektes Teilspiel-Gleichgewicht in reinen Strategien.*

**Beweis:**
Sei $\Gamma = (\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{P}, {}_e\mathcal{U})$ ein endliches extensives Spiel mit perfekter Information. Sei $\mathfrak{a} \in \mathcal{B}$. Der Satz wird durch Induktion über die Länge $\ell(\Gamma(\mathfrak{a}))$ des Teilspiels $\Gamma(\mathfrak{a})$ gezeigt.
Sei nun $\ell(\Gamma(\mathfrak{a})) = 0$. $\mathfrak{a}$ ist dann ein terminaler Spielablauf, dem im gegebenen Spiel das Spielergebnis $R(\mathfrak{a}) = {}_e\mathcal{U}(\mathfrak{a})$ zugeordnet ist. Dieses Spielergebnis ist in diesem Teilspiel $\Gamma(\mathfrak{a})$ ein Nash-Gleichgewicht, ein perfektes Teilspiel-Gleichgewicht.
Sei nun für jedes Teilspiel der Länge $\ell(\Gamma(\mathfrak{a})) \leq k$ ein solches Gleichgewicht $R(\mathfrak{a})$ bereits ermittelt.
Wir betrachten nun ein $\mathfrak{a} = (\mathfrak{a}', z) \in \mathcal{B}$ mit $z \in \mathcal{Z}(\mathfrak{a}')$. Ferner sei $\ell(\Gamma(\mathfrak{a})) \leq k$ und $\ell(\Gamma(\mathfrak{a}')) = k+1$. Nach dem Spielablauf $\mathfrak{a}'$ sei der Spieler $\mathcal{P}(\mathfrak{a}') = i$ am Zug. Für alle Teilspiele $\Gamma(\mathfrak{a})$ mit $z \in \mathcal{Z}(\mathfrak{a}')$ sind die Nash-Gleichgewichte durch $R(\mathfrak{a})$ nach Induktionsannahme bereits festgelegt. Unter dieser Menge suchen wir dasjenige Gleichgewicht, das für den $i$-ten Spieler das Maximum bezüglich seiner Präferenzordnung liefert, dies ist dann $R(\mathfrak{a}')$. Damit ist das perfekte Teilspiel-Gleichgewicht für das Teilspiel $\Gamma(\mathfrak{a}')$ mit der Länge $k+1$ gefunden. Dies kann für alle Teilspiele der Länge $k+1$ durchgeführt werden. Nach endlich vielen Schritten wird ein perfektes Teilspiel-Gleichgewicht des gegebenen Spiels $\Gamma$ gefunden. $\diamond$
**Bemerkung.** Diese Beweismethode kann auch zur Konstruktion eines perfekten Teilspiel-Gleichgewichts verwendet werden. Ferner zeigt der Satz auch, daß gemischte Strategien hier nicht erforderlich sind.

### 4.2.2 Zwei Beispiele

**Beispiel 21 [Seltens Warenhausketten-Paradoxon]:**

Dieses Beispiel stammt von Selten. ([57]). Eine Warenhauskette (Spieler $L+1$) hat in $K$ Orten Filialen. In jedem dieser Orte Nummer $\ell$ gibt es einen einzigen potentiellen Konkurrenten, den Spieler $\ell$. Im $\ell$-ten Zeitabschnitt entscheidet sich der $\ell$-te Konkurrent, ob er es mit der Warenhauskette aufnehmen will(**A**gressiv) oder nicht (**D**efensiv). Die Warenhauskette kann den Konkurrenten **b**ekämpfen oder mit ihm **k**ooperieren. Die Struktur des Spiels und typische Auszahlungen an die Warenhauskette und den Konkurrenten ersieht man aus der nebenstehenden Abbildung. Bei den Auszahlungen ist zuerst der Betrag für den $\ell$-ten Spieler und dann der Betrag für die Warenhauskette genannt.




Das Spiel wird $L$-mal gespielt, jeder potentielle Konkurrent kommt genau einmal an die Reihe. Egal wie das Ergebnis im $\ell$-ten Zeitabschnitt ist, der $(\ell+1)$-te Konkurrent entscheidet sich von neuem. Der Spielbaum wächst hier enorm an. Die Auszahlungen für die Warenhauskette addieren sich über die $L$-Zeitabschnitte hinweg.
Im $\ell$-ten Zeitabschnitt gibt es zwei Nash-Gleichgewichte $(b, D)$ und $(k, A)$. Über die $L$ Zeitabschnitte hinweg ergeben sich dann Nash-Gleichgewichte durch beliebige Kombination dieser beiden Typen. Das perfekte Teilspiel-Gleichgewicht des gesamten Spieles ergibt sich durch Rückwärtsrechnung. In der $KL$-ten Periode erzielt die Warenhauskette den besten Gewinn durch Kooperation, auch der Gewinn des Konkurrenten ist größer, wenn er Agressivität wählt. Offensichtlich setzt sich dies nach rückwärts fort, sodaß das perfekte Teilspiel-Gleichgewicht darin besteht, daß jeder Konkurrent Agressivität und die Warenhauskette Kooperation wählt. Selten bezeichnet dies als paradox, da die Warenhauskette offensichtlich nicht in der Lage ist potentielle Konkurrenten abzuschrecken. Gelänge dies ab einer gewissen Periode $\ell'$, so könnte der Warenhauskonzern seinen Gewinn enorm steigern (immer

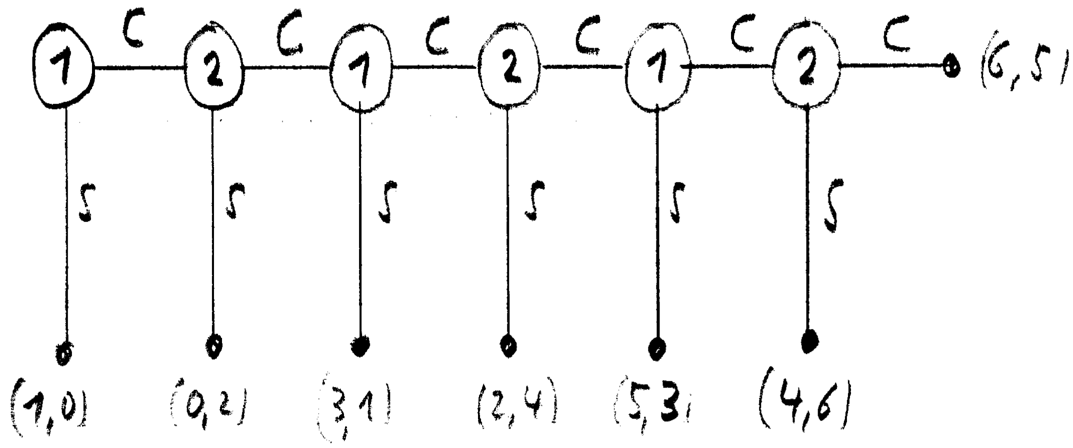
plus 5!). ◇

**Beispiel 22 [Tausendfüssler-Spiel]:**

Der Name dieses Spiels rührt von der Form des Spielbaums her. Es wurde ausgiebig von Rosenthal in ([65]) studiert.

Dies ist ein Zweipersonen-Spiel. Jeder Spieler hat die Möglichkeit das Spiel fortzusetzen (**C**ontinue) oder zu stoppen (**S**top).

Die Auszahlung entspricht dem Gedanken, daß jeder Spieler es vorzieht, selbst zu stoppen, als daß dies der andere Spieler in der nächsten Periode macht. Das Spiel beginnt zum Zeitpunkt $t = 0$ und endet zum Zeitpunkt $t = T$, wobei $T$ eine gerade Zahl ist. Für $T = 6$ ist das Spiel hier aufgezeichnet:




Dieses Spiel hat genau ein perfektes Teilspiel-Gleichgewicht, nämlich jeder Spieler wählt **S**toppen, wenn er an der Reihe ist. Auch dies ist paradox, da jeder Spieler sicher versucht, ob er nicht mehr erreicht als die beim Stoppen fällige Auszahlung.

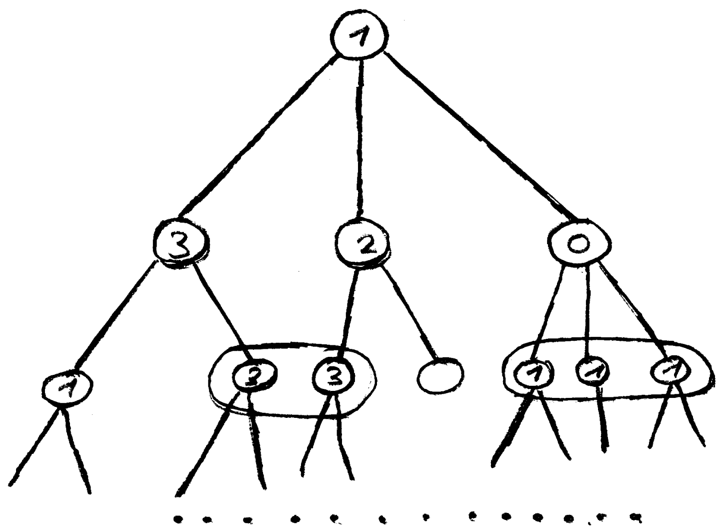
◇

# 4.3 Spiele ohne perfekte Information

## 4.3.1 Allgemeine Definitionen und Ergebnisse

**Definition 4.11** *Sei $\mathfrak{a} \in \mathcal{B}$ und $\mathcal{P}((\mathfrak{a}) = i$. $\mathcal{R}^i(\mathfrak{a})$ bezeichne die Folge der Informationsmengen und der darauffolgenden Spielzüge des Spielers i,auf die er entlang der Historie $\mathfrak{a}$ trifft.*
*Man sagt, ein extensives Spiel $\Gamma$ habe die Eigenschaft der perfekten Erinnerung , falls $\mathcal{R}^i(\mathfrak{a}) = \mathcal{R}^i(\mathfrak{a}')$, wenn $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}'$ in der gleichen Informationsmenge des Spielers i liegen. In allen anderen Fällen spricht man von einem Spiel ohne perfekte Erinnerung.*

**Beispiel 23 [Spiel ohne perfekte Erinnerung]:**




◇

**Bemerkung.** Im folgenden betrachten wir nur Spiele mit perfekter Erinnerung. Hier spielen gemischte Strategien eine Rolle. Da hier die Informationsmengen nicht notwendig einelementig sind müssen wir die Definition (4.1) einer reinen Strategie verallgemeinern.

**Definition 4.12** *Gegeben sei ein extensives Spiel*

$$\Gamma = (\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{P}, (w_{\mathfrak{a}})_{\mathfrak{a}:\mathcal{P}(\mathfrak{a})=0}, (\mathcal{I}_0, \mathcal{I}_1, \ldots, \mathcal{I}_m), {}_e\mathcal{U})$$

*ohne perfekte Information, aber mit perfekter Erinnerung.*

*Es sei*

$$\mathcal{B}^i = \{\mathfrak{a} \in \mathcal{B} | \mathcal{P}(\mathfrak{a}) = i\} = \bigcup_{j=1}^{r_i} I_j^i$$

*wobei*

$$\mathcal{I}^i = \{I_j^i \quad j = 1, \ldots, r_i\}$$

*die Informationspartition von $\mathcal{B}^i$ ist. Als (reine) Strategie $s^i$ des Spielers $i \in \mathcal{A} \cup \{0\}$ bezeichnet man eine Funktion*

$$s^i : \mathcal{I}^i \to \mathcal{Z} \text{ mit } s^i(I_j^i) \in \mathcal{Z}(\mathfrak{a}) \text{ für ein } \mathfrak{a} \in I_j^i \ . \tag{4.3}$$

Es bieten sich nun zwei Möglichkeiten, gemischte Strategien zu definieren, nämlich durch eine unabhängige Wahrscheinlichkeitsverteilung auf der Menge der reinen Strategien der einzelnen Spieler und durch sogenannte Verhaltensstrategien, die den Ablauf des Spieles berücksichtigen.

**Definition 4.13** *Eine Verhaltensstrategie eines Spielers $i$ ist eine Menge $\beta^i(I)_{I\in\mathcal{I}^i}$ von unabhängigen Wahrscheinlichkeitsverteilungen. Hierbei ist $\beta^i(I)$ eine Wahrscheinlichkeitsverteilung über $\mathcal{Z}(I)$. Mit $\beta^i$bezeichnen wir alle diese Wahrscheinlichkeitsverteilungen. Schließlich ist $\beta = (\beta^1, \ldots, \beta^m)$ eine Kombination von Verhaltensstrategien aller Spieler.*

**Definition 4.14** *Eine reine Strategie $s^i$ des Spielers $i$ in einem extensiven Spiel heißt verträglich mit einem Spielablauf $\mathfrak{a} = ({}^1z, \ldots, {}^kz)$, wenn für alle $\ell \leq k$ mit $\mathcal{P}({}^1z, \ldots, {}^\ell z) = i$ die Beziehung $s^i({}^1z, \ldots, {}^\ell z) = {}^{\ell+1}z$ gilt.*

**Definition 4.15** *Als Wahrscheinlichkeit $\pi^i(\mathfrak{a})$ des Spielablaufs $\mathfrak{a}$ bezüglich des $i$-ten Spielers bezeichnet man die Summe aller Wahrscheinlichkeiten $\hat{s}_j^i$ von reinen Strategien $s_j^i$, die mit dem Spielablauf $\mathfrak{a}$ verträglich sind.*

**Bemerkung.** $\pi^i(\mathfrak{a})$ ist offensichtlich die Wahrscheinlichkeit,die durch die gemischte Strategie $\hat{s}^i$ des $i$-ten Spielers dem Spielablauf $\mathfrak{a}$ zugeordnet wird. Wenn entlang des Spielablaufs $\mathfrak{a}$ der Spieler $i$ niemals zum Zug kommt, dann ist nach Definition $\pi^i(\mathfrak{a}) = 1$. Insgesamt wird einem terminalen Spielablauf $\mathfrak{a}$ die Wahrscheinlichkeit

$$\prod_{i\in\mathcal{A}\cup\{0\}} \pi^i(\mathfrak{a}) \tag{4.4}$$

zugeordnet.

Eine Verhaltensstrategie $\beta$ ordnet einem terminalen Spielablauf $\mathfrak{a} = ({}^1z, \ldots, {}^Kz)$ die Wahrscheinlichkeit

$$\prod_{\ell=0}^{K} \beta^{\mathcal{P}({}^1z,\ldots,{}^\ell z)}({}^1z, \ldots, {}^\ell z)({}^{\ell+1}z)$$

zu. Hierbei ist zu beachten, daß sich für $\ell = 0$ die Folge $({}^1z, \ldots, {}^\ell z) = \mathfrak{n}$ ergibt.

**Satz 4.2** *Für jede gemischte Strategie eines Spielers in einem endlichen extensiven Spiel mit perfekter Erinnerung gibt es eine Verhaltensstrategie, die äquivalent bezüglich der Auszahlung ist.*

**Beweis:**
Sei $\hat{s}^i$ eine gemischte Strategie des Spielers $i$. Ferner seien $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}'$ zwei Spielabläufe in der gleichen Informationsmenge $I^i_j$. Da es sich um ein Spiel mit perfekter Erinnerung handelt, sind die Spielzüge des Spielers $i$ beim Spielablauf $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}'$ die gleichen. Daher gilt $\pi^i(\mathfrak{a}) = \pi^i(\mathfrak{a}')$. Ebenso gilt für $z \in \mathcal{Z}(\mathfrak{a}) = \mathcal{Z}(\mathfrak{a}')$ auch $\pi^i(\mathfrak{a}, z) = \pi^i(\mathfrak{a}', z)$. Somit läßt sich eindeutig definieren

$$\beta^i(I^i_j)(z) = \frac{\pi^i(\mathfrak{a}, z)}{\pi^i(\mathfrak{a})} \ .$$

Im Sinne einer bedingten Wahrscheinlichkeit kann für $\pi^i(\mathfrak{a}) = 0$ der Wert von $\beta^i(I^i)(\mathfrak{a})$ beliebig festgelegt werden, etwa gleich 0. Offensichtlich gilt auch

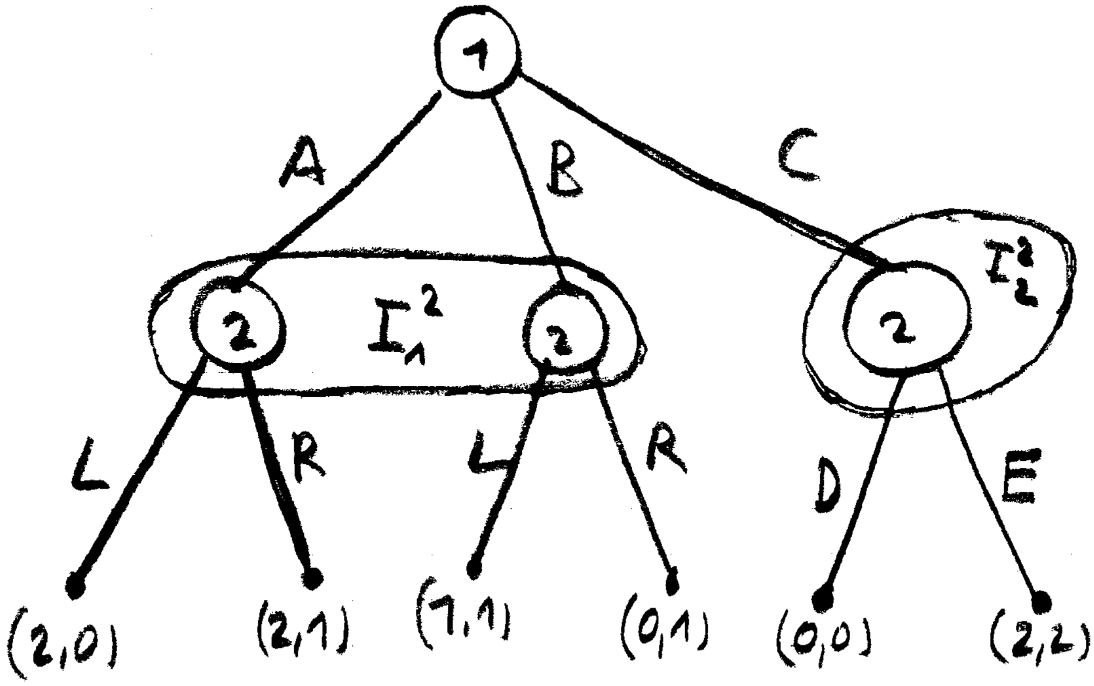
$$\pi^i(\mathfrak{a}) = \sum_{z \in \mathcal{Z}(\mathfrak{a})} \pi^i(\mathfrak{a}, z) \ .$$

Das eben definierte $\beta^i$ ist somit als Verhaltensstrategie geeignet. Es ist noch zu zeigen, daß $\hat{s} = (\hat{s}^1, \ldots, \hat{s}^m)$ und $\beta = (\beta^1, \ldots, \beta^m)$ äquivalent bezüglich der Auszahlung sind.
Es wird nun angenommen, daß ein gewisser terminaler Spielablauf $\mathfrak{a} = ({}^1z, \ldots, {}^Kz)$ konsistent bezüglich $\hat{s}^i$ und $\hat{s}^{-i}$ ist, ansonsten wäre seine Wahrscheinlichkeit bezüglich $\pi$ und $\beta$ gleich 0. Somit gilt (vgl. 4.4

$$\prod_{\ell=0}^{K-1} \beta^i({}^1z, \ldots, {}^{\ell+1}z)(z) = \prod_{\ell=0}^{K-1} \frac{\pi^i({}^1z, \ldots, {}^{\ell+1}z))}{\pi^i({}^1z, \ldots, {}^\ell z)} = \pi^i(\mathfrak{a}) \ .$$

◇

**Beispiel 24:**




| | | 2.Spieler | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | LD | LE | RD | RE |
| | A | (2,0) | (2,0) | (2,1) | (2,1) |
| 1.Spieler | B | (1,1) | (1,1) | (0,1) | (0,1) |
| | C | (0,0) | (2,2) | (0,0) | (2,2) |

Wir gehen von folgenden gemischten Strategien aus

$$\hat{s}^1 = (1/3, 1/3, 1/3) \qquad \hat{s}^2 = (1/4, 1/4, 1/4, 1/4)\ .$$

Sei der terminale Spielablauf $\mathfrak{a} = (A, R)$ gegeben.

$$\pi^1(\mathfrak{a}) = \hat{s}^1 = 1/3$$

$$\pi^2(\mathfrak{a}) = \hat{s}^2_3 + \hat{s}^2_4 = 1/2 \quad \pi^2(A) = 1$$

$$\beta^2(I_1^2)(R) = \frac{\pi^2(\mathfrak{a})}{\pi^2(A)}$$

Wahrscheinlichkeit für das Ergebnis $\mathfrak{a}$ mit der Auszahlung (2,1)

$$\pi^1(\mathfrak{a}) \times \pi^2(\mathfrak{a})$$

◇

### 4.3.2 Sequentielles Gleichgewicht

Der Begriff des sequentiellen Gleichgewichts wurde von Kreps und Wilson in [30] entwickelt.

**Definition 4.16** *Eine Einschätzung in einem extensiven Spiel ist ein Paar $(\beta, \mu)$, wobei $\beta$ eine Kombination von Verhaltensstrategien und $\mu$ eine Funktion ist, die jeder Informationsmenge (jeden Spielers) ein Wahrscheinlichkeitsmaß über der Menge ihrer Spielabläufe zuordnet.*

**Bemerkung.** Für die Informationsmenge $I_j^i$ ist $\mu(I_j^i)(\mathfrak{a})$ die Wahrscheinlichkeit, die der Spieler $i = \mathcal{P}(I_j^i)$ der Historie $\mathfrak{a} \in I_j^i$ zuordnet, unter der Bedingung, daß die Informationsmenge $I_j^i$ erreicht wird.

**Definition 4.17** *Sei $\mathfrak{a}^* = ({}^1z, \ldots, {}^Kz)$ eine terminale Historie der Länge $K$. Gegebenenfalls gibt es eine Teilhistorie $\mathfrak{a} = ({}^1z, \ldots, {}^Lz)$, mit $L \leq K$, die in einer Informationsmenge $I$ liegt.*
*Wir definieren die folgende auf eine Informationsmenge $I$ bezogene Wahrscheinlichkeit des terminalen Ereignisses $\mathfrak{a}^*$:*

*falls es keine Teilhistorie von $\mathfrak{a}^*$ in $I$ gibt*

$$\mathcal{W}(\mathfrak{a}^*; I) = 0$$

*sonst*

$$\mathcal{W}(\mathfrak{a}^*; I) = \mu(I)({}^1z, \ldots, {}^Lz) \prod_{\ell=L}^{K-1} \beta^{\mathcal{P}({}^1z,\ldots,{}^\ell z)}({}^1z, \ldots, {}^\ell z)({}^{\ell+1}z) \ .$$

*Hieraus ergibt sich durch Erwartungswertbildung die auf die Informationsmenge $I$ bezogenene Auszahlung $\mathcal{U}^i(\beta^*, \mu^*; I)$.*

**Bemerkung.** Aufgrund der Annahme der perfekten Erinnerung gibt es höchstens eine Teilfolge, die in der Informationsmenge $I$ liegt.

**Definition 4.18** *In einem extensiven Spiel mit perfekter Erinnerung heißt eine Einschätzung $(\beta^*, \mu^*)$ sequentiell rational, wenn für die Auszahlung $\mathcal{U}^i$ jedes Spielers $i$ und für jede seiner Informationsmenge $I_j^i \in \mathcal{I}^i$ gilt:*

$$\mathcal{U}^i(\beta^*, \mu^*; I_j^i) \geq \mathcal{U}^i(\beta^i, \beta^{-i\,*}, \mu^*; I_j^i) \quad \forall \beta^i \ .$$

**Definition 4.19** *Eine Einschätzung* $(\beta, \mu)$ *heißt konsistent, wenn sie Grenzwert einer Folge* $({}^k\beta, {}^k\mu)$ *ist, wobei alle* ${}^k\beta$ *stark gemischt und* ${}^k\mu$ *davon abgeleitet sind.*

**Definition 4.20** *Eine Einschätzung, die sequentiell rational und konsistent ist, heißt sequentielles Gleichgewicht.*

**Satz 4.3** *Sei* $\Gamma$ *ein endliches extensives Spiel mit perfekter Erinnerung. Ferner sei* $\hat{s}^*$ *ein perfektes Gleichgewicht von* $\Gamma$*und* $\beta^*$ *sei die daraus abgeleitete Verhaltensstrategie. Dann gibt es ein* $\mu^*$*, sodaß* $(\beta^*, \mu^*)$ *ein sequentielles Gleichgewicht ist.*

**Beweis:**

Da $\hat{s}^*$ ein perfektes Gleichgewicht ist, gibt es eine gegen $\hat{s}^*$ konvergente Folge ${}^k\hat{s}$ von stark gemischten Strategien, für die überdies $\hat{s}^*$ beste Antwort ist. Die sich hieraus ergebenden Folgen ${}^k\beta$ und ${}^k\mu$ sind konvergent, bzw. haben Häufungspunkte, sodaß die in der Definition des sequentiellen Gleichgewichts erforderlichen Voraussetzungen erfüllt sind. $\diamond$

**Bemerkung.** Da jedes endliche Spiel ein perfektes Gleichgewicht besitzt, hat jedes extensive Spiele konsequenterweise mindestens ein sequentielles Gleichgewicht. Ein sequentielles Gleichgewicht ist immer auch ein perfektes Teilspiel-Gleichgewicht (in gemischten Strategien). Aber wie das folgende Beispiel (siehe [18]), das letztlich auf van Damme ([15]) zurückgeht, zeigt, ist nicht jedes sequentielle Gleichgewicht ein perfektes Gleichgewicht.

**Beispiel 25:**

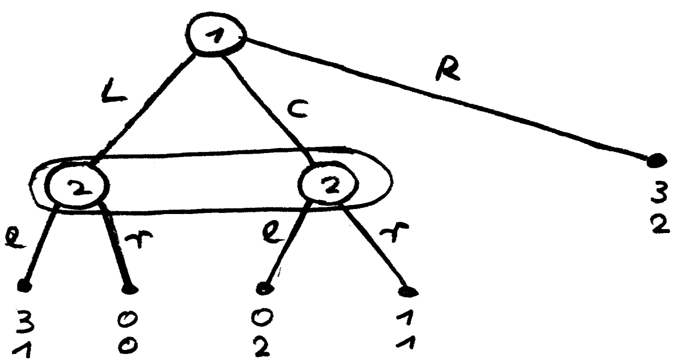



**Abbildung 4.4.1**

der erste Spieler sei der Zeilenspieler, der zweite der Spaltenspieler. Es ergibt sich folgende Auszahlungsmatrix

| | $\ell$ | r |
|---|---|---|
| L | (3,1) | (0,0) |
| C | (0,2) | (1,1) |
| R | **(3,2)** | **(3,2)** |

Die fett gedruckten Auszahlungen entsprechen Nash-Gleichgewichten. Das Gleichgewicht (R,$\ell$) ist perfekt, aber (R,r) nicht, wie man durch Nachrechnen zeigt.
Sequentielle Gleichgewichte $(\beta, \mu)$ sind

$$\beta^1 = (x, 0, 1-x) \forall x : 0 \leq x \leq 1 \qquad \beta^2 = (1, 0)$$
$$\mu(\{(L), (C)\})(L) = 1 \quad \mu(\{(L), (C)\})(C) = 0$$

◇

**Beispiel 26 [Selten's Pferd]:**

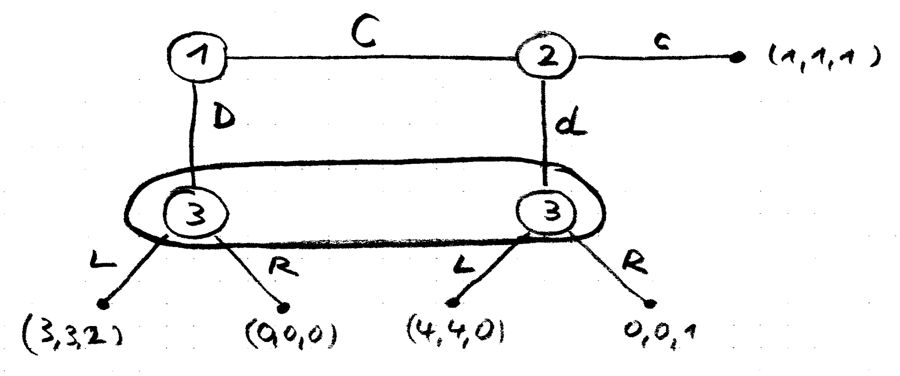



**Abbildung 4.4.2** Selten's Pferd
Es ergiben sich folgende Auszahlungsmatrizen:

| | | $s_1^2 = c$ | $s_2^2 = d$ |
|---|---|---|---|
| $s_1^3 = L$ | $s_1^1 = C$ | (1, 1, 1) | (4, 4, 0) |
| | $s_2^1 = D$ | (3, 3, 2) | (3, , 2) |

| | | $s_1^2 = c$ | $s_2^2 = d$ |
|---|---|---|---|
| $s_2^3 = R$ | $s_1^1 = C$ | (1, 1, 1) | (0, 0, 1) |
| | $s_2^1 = D$ | (0, 0, 0) | (0, 0, 0) |

Hier gibt es zwei verschiedene Typen von Nash-Gleichgewichten.

Der erste Typ eines Nash-Gleichgewichts: kein sequentielles Gleichgewicht und auch kein perfektes Gleichgewicht

$$\hat{s}_2^1 = 1 \quad \hat{s}_1^2 \geq 1/3 \quad \hat{s}_1^3 = 1$$

Der zweite Typ eines Nash-Gleichgewichts: sequentielles Gleichgewicht und auch perfektes Gleichgewicht

$$\hat{s}_1^1 = 1 \quad \hat{s}_1^2 = 1 \quad \hat{s}_2^3 \geq 3/4$$

◇

## 4.4 Berechnung von Gleichgewichten

Auch hier ist das bereits in Abschnitt (3.4.3) erwähnte Programm nützlich. Es besteht die Möglichkeit interaktiv einen beschrifteten Spielbaum aufzubauen. Hier spielt vor allem die auszuwählende Rechenmethode "Gobit" eine Rolle. Diese Methode basiert auf dem Artikel ([37]) von McKelvey und Palfrey . Als Beispiel sei hier das mitgelieferte einfache Pokerspiel gezeigt:

Beide Spieler hinterlegen einen Einsatz von 1GE.

Spieler 1 zieht eine Karte aus dem gemischten Kartenstapel. Spieler 1 sieht die Karte an, Spieler 2 weiß nicht welche Karte gezogen wurde. Spieler 1 entscheidet sich für "FOLD" oder "RAISE".

Wenn Spieler 1 sich für "FOLD" entscheidet, dann erhält der Spieler 1 den gesamten hinterlegten Einsatz, wenn die Karte rot(RED) ist, andernfalls erhält ihn der Spieler 2 (Karte schwarz(BLACK)).

Wenn sich der Spieler 1 für "RAISE" entscheidet, dann muß Spieler 1 nochmals 1GE hinterlegen und Spieler 2 kommt nun an die Reihe. Er kann "PASS" oder "MEET" wählen.

Wenn der Spieler 2 "PASS' wählt, dann erhält der Spieler 1 den gesamten Einsatz. Andernfalls muß der Spieler 2 einen weiteren Einsatz von 1GE hinterlegen und der Spieler 1 muß seine Karte offenlegen. Wenn die Karte rot(RED) ist erhält Spieler 1 den gesamten hinterlegten Einsatz, andernfalls erhält ihn der Spieler 2.

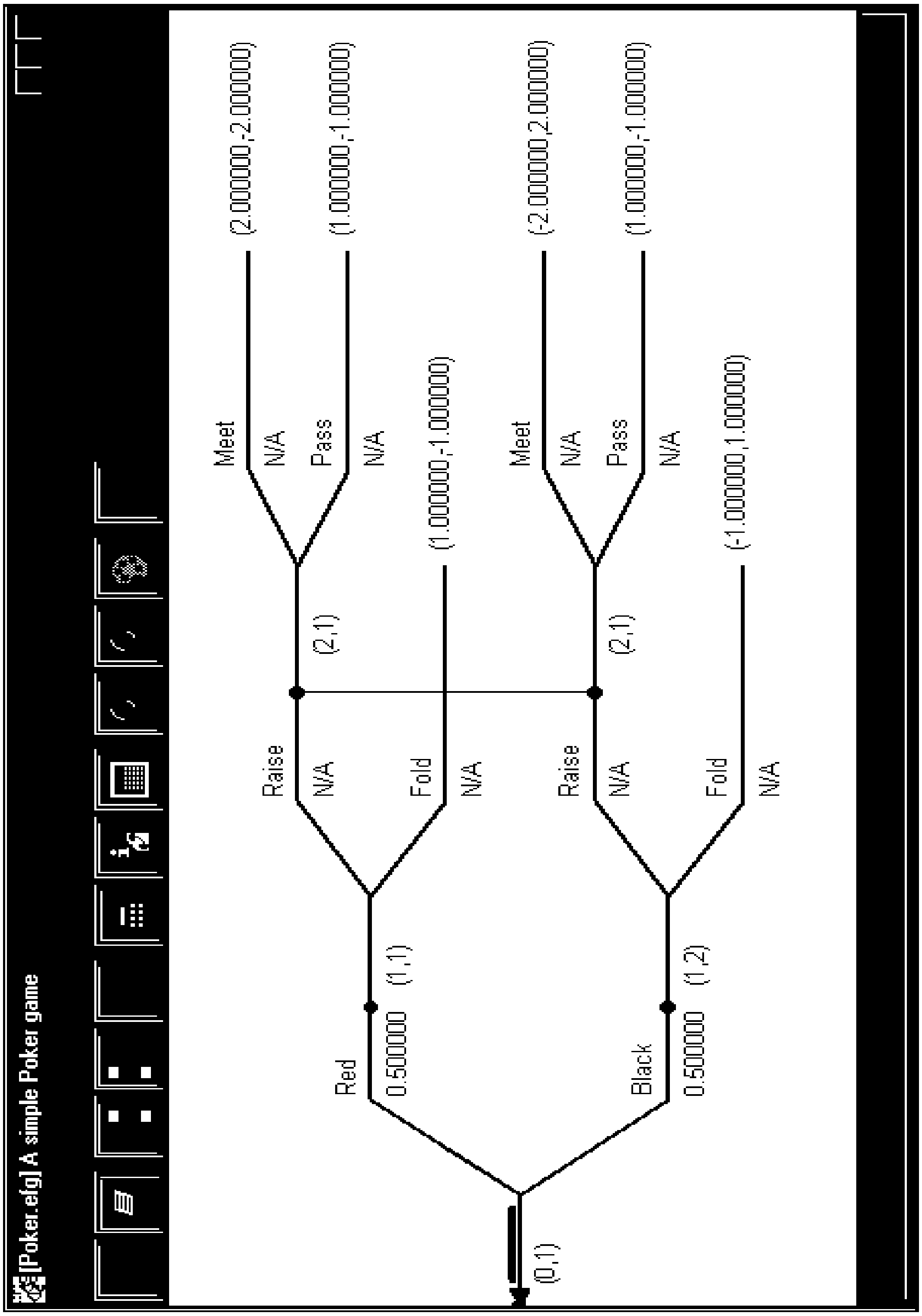



**Abbildung 4.4.3** einfaches Pokerspiel

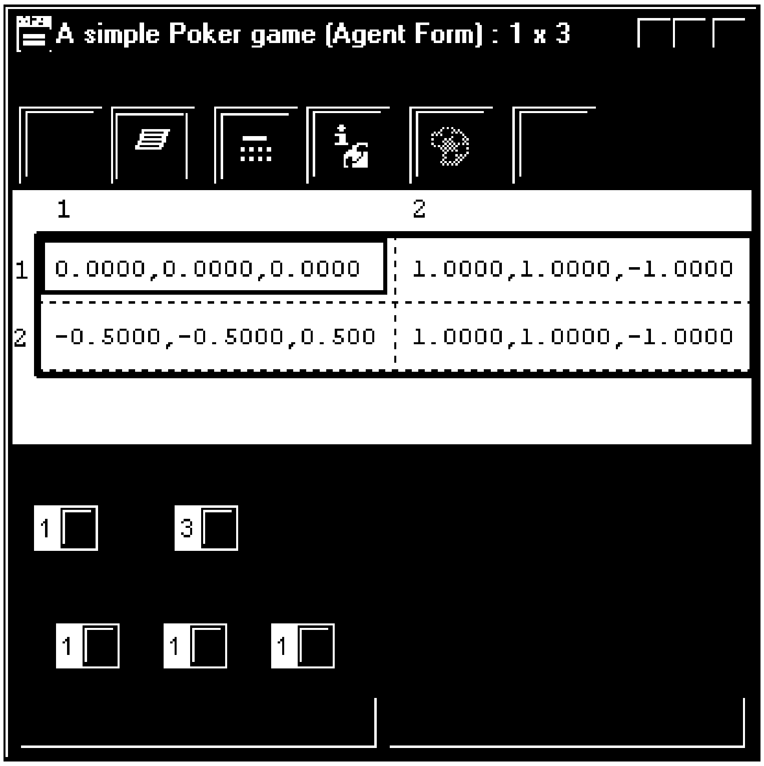
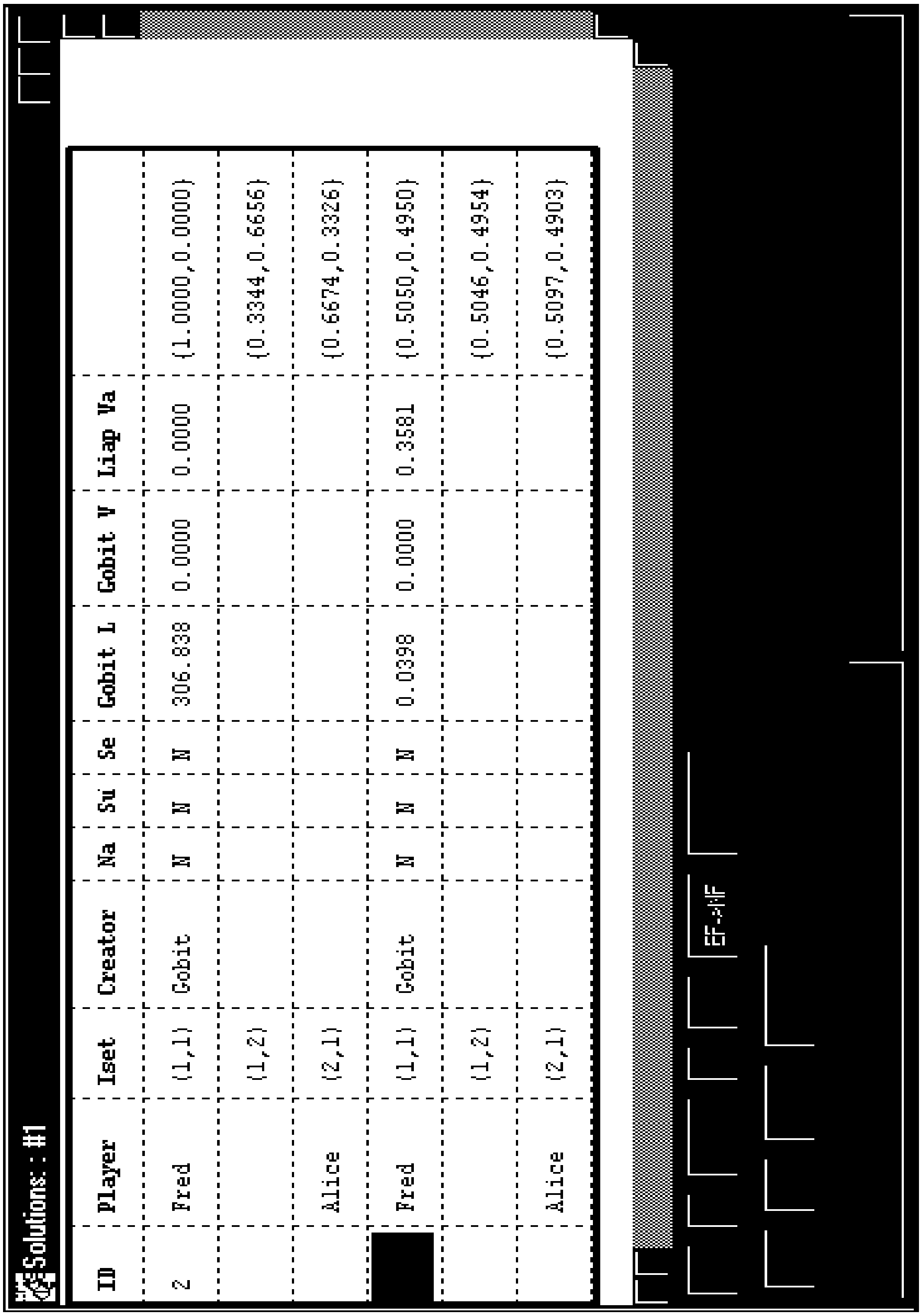



**Abbildung 4.4.4** Normalform des einfachen Pokerspiels




| ID | Player | Iset | Creator | Na | Su | Se | Gobit L | Gobit V | Liap Va | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | Fred | (1,1) | Gobit | N | N | N | 306.838 | 0.0000 | 0.0000 | (1.0000,0.0000) |
| | | (1,2) | | | | | | | | (0.3344,0.6656) |
| | Alice | (2,1) | | | | | | | | (0.6674,0.3326) |
| | Fred | (1,1) | Gobit | N | N | N | 0.0398 | 0.0000 | 0.3581 | (0.5050,0.4950) |
| | | (1,2) | | | | | | | | (0.5046,0.4954) |
| | Alice | (2,1) | | | | | | | | (0.5097,0.4903) |

**Abbildung 4.4.5** Gobit-Lösung des einfachen Pokerspiels

## 4.5 Aufgaben

**Aufgabe 16**(intern NGameA02):
Von einem Haufen von 5 Streichhlzer mssen zwei Spieler abwechselnd ein oder zwei Streichhlzer wegnehmen. Wer das letzte Streichholz wegnimmt ist Sieger. Geben Sie die extensive und die strategische Form dieses Spieles an! Geben Sie ferner eine geeignete Auszahlungsmatrix dieses Spieles an! Welche Strategien sind Nash-Gleichgewichte, perfekte Gleichgewichte und perfekte Teilspiel-Gleichgewichte dieses Spieles?

**Aufgabe 17**(intern NGameA34):
Dieses Zweipersonen-Spiel ist aus „Mehlmann: Wer gewinnt das Spiel“ entnommen mit der nebenstehenden abgeänderten Startsituation. Hier sind es zwei „Büsche“, es könnten aber auch mehr Büsche sein. Es gibt gestrichelte und gepunktete „Zweige“. Der Spieler $S$ darf nur gestrichelte Zweige durchschneiden, der Spieler $P$ nur gepunktete. Wie bei einem Strauch oder Baum fallen damit auch alle Zweige weg, die von dem durchschittenen ausgehen. Jeder Spieler darf nur einen Zweig durchschneiden, wenn er am Zug ist. Das Spiel ist beendet, wenn ein Spieler keine Zugmöglichkeit mehr hat; dieser Spieler hat dann auch verloren. Geben Sie den Spielbaum zeichnerisch und formal an. Wählen Sie eine geeignete Auszahlung. Bestimmen Sie Nash-Gleichgewichte, perfekte Gleichgewichte und perfekte Teilspiel-Gleichgewichte.

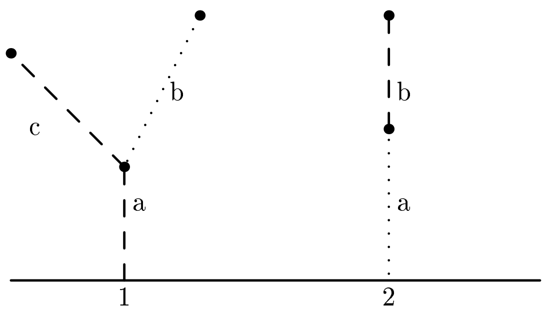


**Abbildung 4.6**

**Aufgabe 18**(intern NGameA37):
Zeigen Sie, daß ein perfektes Teilspiel-Gleichgewicht eines extensiven Spiels ebenfalls ein perfektes Teilspiel-Gleichgewicht eines Spiels $\Gamma'$ ist, das aus $\Gamma$ durch Streichen eins Teilspiels entsteht, das im Gleichgewicht nicht erreicht wird. Dem neu entstandenen terminalen Spielablauf werde dabei die Auszahlung der Gleichgewichtsstrategie im gestrichenen Teilspiel zugewiesen.

**Aufgabe 19**(intern NGameA38):

Ändern Sie bei Selten's Problem der Warenhauskette die Auszahlung bei der Strategie „bekämpfen“ zum Wert 3 für die Warenhauskette und zum Wert -1 für den potentiellen Konkurrenten ab.
Ändert Sie das Tausendfüssler-Spiel so ab, daß Spieler 2 als erster zieht, aber behalten Sie die Auszahlungen bei.
Wie ändern sich die Gleichgewichtsstrategien?

KAPITEL 5

# Kooperative Spiele

## 5.1 Definition und Beispiele

**Definition 5.1** *Ein kooperatives Spiel* $\Gamma_K$ *ist ein Tupel* $(\mathcal{A}, \mathcal{V})$*, bei dem* $\mathcal{A} = \{1, 2, \ldots, m\}$ *die* $m$ *Spieler und* $\mathcal{V} : \mathfrak{P}(\mathcal{A}) \to \mathbb{R}$ *die sogenannte charakteristische Funktion bezeichnet. Teilmengen von* $\mathcal{A}$ *heißen Koalitionen. Die charakteristische Funktion hat folgende Eigenschaften*

$$\mathcal{V}(\emptyset) = 0 \tag{5.1}$$

$$\mathcal{V}(A \cup B) \geq \mathcal{V}(A) + \mathcal{V}(B) \quad \forall A, B \subseteq \mathcal{A} \quad A \cap B = \emptyset \tag{5.2}$$

*Die zweite Beziehung beschreibt die Eigenschaft der Superadditivität, die erst eine Koalition* $A \cup B$ *gegenüber den Koalitionen* $A$ *und* $B$ *interessant macht.*

**Beispiel 27 [Gemeindeübergreifende Wasserversorgung]:**

Wir folgen hier einer Darstellung in Holler und Illig ([27, Seite 270ff.]); Für vier Gemeinden soll eine neue Wasserversorgung errichtet werden. Jeweils zwei Gemeinden liegen nahe beisammen, das jeweils andere Paar von Gemeinden müßte durch eine Pipeline angeschlossen werden. Es könnte auch jede Gemeinde für sich, oder die beiden Gemeindepaare für sich eine Wasserversorgung errichten. Für die verschiedenen Koalitionen ergibt sich folgende

Kostenfunktion $c : \mathfrak{P}(\mathcal{A}) \to \mathbb{R}$ [GE]:

$$\begin{gathered} c(\{1,2,3,4\}) = 700 \\ c(\{1,2,3\}) = c(\{1,2,4\}) = c(\{1,3,4\}) = c(\{2,3,4\}) = 600 \\ c(\{1,3\}) = c(\{1,4\}) = c(\{2,3\}) = c(\{2,4\}) = 500 \\ c(\{1,2\}) = c(\{3,4\}) = 400 \\ c(\{1\}) = c(\{2\}) = c(\{3\}) = c(\{4\}) = 300 \end{gathered}$$

Für die Kostenfunktion gilt Subadditivität: $c(A)+c(B) \geq c(A \cup B)$ $(A \cap B = \emptyset)$. Als charakteristische Funktion des Spieles setzen wir daher $\mathcal{V}(A) := -c(A)$. $\diamond$

**Beispiel 28 [Veredelung eines Produktes]:**

Der erste Spieler sei ein Verkäufer, der ein Produkt für $a$[GE] anbietet. Der zweite und dritte Spieler seien Veredelungsbetriebe, die dieses Produkt zum Endwert $b$ bzw. $c$ veredeln. Es werde $a < b \leq c$ angenommen. Die charakteristische Funktion könnte man festlegen zu:

$$\begin{gathered} \mathcal{V}(2) = \mathcal{V}(3) = \mathcal{V}(2,3) = 0 \\ \mathcal{V}(1) = a \quad \mathcal{V}(1,2) = b \quad \mathcal{V}(1,3) = c \\ \mathcal{V}(1,2,3) = c \end{gathered}$$

$\diamond$

### 5.1.1 Zusammenhang von kooperativem und nichtkooperativem Spiel

#### Berechnung der charakteristischen Funktion eines $m$-Personen-Spieles

Wir betrachten nun die gemischte Erweiterung eines endlichen Spieles $\Gamma = (\mathcal{A}, \mathcal{S}, \mathcal{U})$ und wollen hieraus ein kooperatives Spiel konstruieren. Wir lassen Koalitionen $B$ von Spielern aus $\mathcal{A}$ zu und fragen, welchen Gesamtvorteil $g(B)$ diese Koalition mindestens erzielen kann. Es wird sich zeigen, daß $g(B)$ superadditiv ist und somit als charakteristische Funktion des kooperativen Spieles dienen kann.
Wir verwenden folgende Bezeichnungen:
$\hat{s}^B$ bezeichne die Gesamtstrategie der Koalition $B$, $\hat{s}^{-B}$ die Gesamtstrategie der übrigen Spieler. $\hat{s}^i$ und $\hat{s}^{-i}$ wird wie bisher verwendet.

Wir konstruieren nun ein Zweipersonen-Nullsummen-Spiel, bei dem der erste Spieler durch die Koalition $B$ und der zweite Spieler durch die Gegenkoalition $-B$ repräsentiert werden. Als Auszahlungsmatrix $\mathbb{U}_B$ dieses Spiels wird festgelegt:

$$\mathbb{U}^B(\hat{s}^B, \hat{s}^{-B}) = \sum_{i \in B} U^i(\hat{s}^B, \hat{s}^{-B}) \ . \tag{5.3}$$

$g(B)$ wird als Spielwert dieses Zweipersonen-Nullsummen-Spiels definiert:

$$g(B) := \max_{\hat{s}^B} \min_{\hat{s}^{-B}} \mathbb{U}^B(\hat{s}^B, \hat{s}^{-B}) \ . \tag{5.4}$$

**Satz 5.1** *Die in (5.4) definierte Funktion $g : \mathfrak{P}(\mathcal{A}) \to \mathbb{R}$ kann als charakteristische Funktion eines kooperativen Spieles der Spieler $\mathcal{A}$ definiert werden.*

**Beweis:**
$g(\emptyset) = 0$ ist klar ($\sum_{i \in \emptyset} = 0!$).
Die Superadditivität ergibt sich für $A \cap B = \emptyset$ aus den folgenden Beweisschritten:

$$g(A \cup B) = \max_{\hat{s}^{A \cup B}} \min_{\hat{s}^{-(A \cup B)}} (\mathbb{U}^A(\hat{s}) + \mathbb{U}^B(\hat{s})) \geq \max_{\hat{s}^{A \cup B}} \left( \min_{\hat{s}^{-(A \cup B)}} \mathbb{U}^A(\hat{s}) + \min_{\hat{s}^{-(A \cup B)}} \mathbb{U}^B(\hat{s}) \right)$$

Nun vergrößern wir den Bereich der Minimierung und zerlegen wegen $A \cap B = \emptyset$ die Maximierung $\max_{\hat{s}^{A \cup B}}$

$$g(A \cup B) \geq \max_{\hat{s}^A} \max_{\hat{s}^B} (\min_{\hat{s}^{-A}} \mathbb{U}^A(\hat{s}) + \min_{\hat{s}^{-B}} \mathbb{U}^B(\hat{s})) \ .$$

Wegen $A \cap B = \emptyset$ enthält $-A$ die Koalition $B$ und $-B$ die Koalition $A$. Die Maximierung über die entsprechende Strategienmenge fällt damit weg, und es gilt

$$g(A \cup B) \geq \max_{\hat{s}^A} \min_{\hat{s}^{-A}} \mathbb{U}^A(\hat{s}) + \max_{\hat{s}^B} \min_{\hat{s}^{-B}} \mathbb{U}^B(\hat{s}) = g(A) + g(B) \ .$$

$\diamond$

**Satz 5.2 (Komplementäreigenschaft)** *Für die gemischte Erweiterung eines Konstantsummenspiels gilt:*

$$g(B) + g(\mathcal{A} \backslash B) = g(\mathcal{A}) \quad \forall B \ .$$

**Beweis:**
Sei die Konstante $c$ die Summe der Auszahlungen aller Spieler für eine bestimmte gemeinsame Strategie, d.h.

$$c = \mathbb{U}^{\mathcal{A}}(\hat{s}) = \mathbb{U}^{B}(\hat{s}) + \mathbb{U}^{-B}(\hat{s}) \; .$$

Hieraus folgt auch $g(\mathcal{A}) = c$. Weiter gilt

$$\begin{aligned} g(B) = \max_{\hat{s}^B} \min_{\hat{s}^{-B}} \mathbb{U}^{B}(\hat{s}^B, \hat{s}^{-B}) \\ &= \max_{\hat{s}^B} \min_{\hat{s}^{-B}} \left(c - \mathbb{U}^{-B}(\hat{s}^B, \hat{s}^{-B})\right) \\ &= c - \min_{\hat{s}^B} \max_{\hat{s}^{-B}} \mathbb{U}^{-B}(\hat{s}^B, \hat{s}^{-B}) \\ &\overset{(*)}{=} c - \max_{\hat{s}^{-B}} \min_{\hat{s}^B} \mathbb{U}^{-B}(\hat{s}^B, \hat{s}^{-B}) \\ &= g(\mathcal{A}) - g(\mathcal{A} \backslash B) \end{aligned}$$

(*) folgt aus der Sattelpunktseigenschaft. $\diamond$

**Beispiel 29 [Umweltschutz]:**

Drei chemische Firmen verwenden das Wasser einer natürlichen Resource zur Produktion. Jede Firma hat zwei Strategien, nämlich ihr Abwasser zu reinigen (Strategie 1, Kosten 1 GE) oder das Abwasser ungereinigt zurückfließen zu lassen (Strategie 2, keine Kosten). Nun seien die örtlichen Gegebenheiten aber so, daß das ungereinigte Abwasser einer Firma keinen merkbaren Schaden anrichtet, wenn jedoch mindestens zwei Firmen ihr Abwasser ungereinigt zurückfließen lassen, dann schadet dies der Produktion aller drei Firmen. In diesem Fall muß die natürliche Resource total gereinigt werden und für jede Firma entstehen zusätzlich 3 GE an Kosten. Es ergibt sich die Auszahlungsfunktion von Tabelle (5.1)

| | Auszahlung | | |
|---|---|---|---|
| Strategie | Firma1 | Firma2 | Firma3 |
| (1,1,1) | -1 | -1 | -1 |
| (1,1,2) | -1 | -1 | 0 |
| (1,2,1) | -1 | 0 | -1 |
| (1,2,2) | -4 | -3 | -3 |
| (2,1,1) | 0 | -1 | -1 |
| (2,1,2) | -3 | -4 | -3 |
| (2,2,1) | -3 | -3 | -4 |
| (2,2,2) | -3 | -3 | -3 |

**Tabelle 5.1** Umweltschutz

Bezeichnet man die gemischten Strategien für die Firmen 1,2 bzw. 3 mit $(x_1, 1-x_1)^T$, $(x_2, 1-x_2)^T$ bzw. $(x_3, 1-x_3)^T$ , dann gibt es drei Nash-Geichgewichte mit $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, $x_1 = x_2 = x_3 = \dfrac{1}{3+\sqrt{3}}$, $x_1 = x_2 = x_3 = \dfrac{1}{3-\sqrt{3}}$. Dies nur zur Information.

Wir wollen hier die charakteristische Funktion des zugeordneten kooperativen Spiels berechnen.
Die Auszahlungsmatrix der Einer-Koalition (z.B. Firma 1) ergibt sich zu:

| | | Koalition{2,3} | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | (1,1) | (1,2) | (2,1) | (2,2) |
| Koalition{1} | Strategie 1 | -1 | -1 | -1 | -4 |
| | Strategie 2 | 0 | -3 | -3 | -3 |

Man stellt hier fest, daß ein Sattelpunkt in reinen Strategien mit dem Wert -3 existiert.
Die Auszahlungsmatrix der Zweier-Koalition (z.B. Firma 2 und 3) ergibt sich zu

| | | Koalition{1} | |
|---|---|---|---|
| | | Strategie 1 | Strategie 2 |
| Koalition{2,3} | (1,1) | -2 | -2 |
| | (1,2) | -1 | -7 |
| | (2,1) | -1 | -7 |
| | (2,2) | -6 | -6 |

Man stellt hier ebenfalls fest, daß ein Sattelpunkt in reinen Strategien existiert mit dem Wert -2. Die Dreier-Koalition liefert als günstigste Auszahlung ebenfalls -2. Die charakteristische Funktion wird damit festgelegt zu:

$$\begin{gathered}\mathcal{V}(\emptyset) = 0 \\ \mathcal{V}(\{1\}) = \mathcal{V}(\{2\}) = \mathcal{V}(\{3\}) = -3 \\ \mathcal{V}(\{1,2\}) = \mathcal{V}(\{2,3\}) = \mathcal{V}(\{1,3\}) = -2 \\ \mathcal{V}(\mathcal{A}) = -2\end{gathered}$$

$\diamond$

**Konstruktion eines nichtkooperativen $m$-Personen-Spieles**

Wir orientieren uns an der Darstellung in Rauhut et al. ([48, Seite 317ff.])
Gegeben sei ein kooperatives $m$-Personen-Spiel $\Gamma_K(\mathcal{A}, \mathcal{V})$.
Wir betrachten die Menge aller Koalitionen $B \cup \{i\} \subset \mathcal{A}$, die den Spieler $i$ enthalten. Dies sind insgesamt $2^{m-1}$ Koalitionen. Diese Koalitionen seien

durchnummeriert und erhalten die Bezeichnung $B^i_j$. Jedem Spieler $i$ wird nun die $j$-te derartige Koalition als $j$-te Strategie

$$s^i_j = B^i_j \tag{5.5}$$

zugeordnet. Man könnte diese Strategien dahingehend interpretieren, daß sich der Spieler $i$ die $j$-te Koalition $B \cup \{i\}$ aussucht, der er angehören möchte. Die Auszahlung wird dann folgendermaßen festgelegt:

$$U^i(s^1_{j_1}, \ldots, s^m_{j_m}) = \begin{cases} \frac{\mathcal{V}(B\cup\{i\})}{|B\cup\{i\}|} & \text{falls } s^k_{j_k} = B \cup \{i\} \quad \forall k \in B \\ \mathcal{V}(\{i\}) & \text{sonst} \end{cases} \tag{5.6}$$

**Satz 5.3** *Das Spiel $\Gamma(\mathcal{A},\mathcal{S},\mathcal{U})$ mit den Strategien $\mathcal{S}$, wie sie durch (5.5) beschrieben sind, und der Auszahlungsfunktion (5.6) hat die charakteristische Funktion $\mathcal{V}$, die zur Definition verwendet wurde.*

**Beweis:**
Wir berechnen die charakteristische Funktion für eine beliebige Koalition $L \subsetneqq \mathcal{A}$. Dazu betrachten wir das Zweipersonen-Nullsummenspiel, das aus dem 1. Spieler besteht, der die Koalition $L$ repräsentiert, und dem 2. Spieler, der die Gegenkoalition $\mathcal{A}\backslash L$ repräsentiert. Die Auszahlungsmatrix für den 1.Spieler (Koalition $L$) ergibt sich als $\sum_{i \in L} U^i(s)$ nach Definition (5.6) zu

$$U(s^L, s^{-L}) = \begin{cases} \mathcal{V}(L) & \text{falls } s^L = \underbrace{(L, L, \ldots, L)}_{|L|-\text{mal}} \\ \\ \sum_{i\in L} \mathcal{V}(\{i\}) & \text{sonst} \end{cases}$$

Wenn also der "1. Spieler" die Strategie $s^L = \underbrace{(L, L, \ldots, L)}_{|L|-\text{mal}}$ wählt, dann erhält er unabhängig von der Strategie $s^{-L}$ des 2. Spielers die Auszahlung $\mathcal{V}(L) = \sum_{i\in L} \mathcal{V}(L)/|L|$. Nimmt man noch die Superadditivität $\mathcal{V}(L) \geq \sum_{i \in L} \mathcal{V}(\{i\})$ hinzu, so ergibt sich das Strategienpaar $(s^L, s^{-L})$ mit $s^L = \underbrace{(L, L, \ldots, L)}_{|L|-\text{mal}}$ und $s^{-L}$ beliebig als Sattelpunkt. Die Auszahlung ergibt den Wert der charakteristischen Funktion für die Koalition $L$. Der Wert $\mathcal{V}(L)$ wird also zurückgewonnen.
Im Falle $L = \mathcal{A}$ ergibt sich der Wert der charakteristischen Funktion als

$$\max_s \sum_{i=1}^m U^i(s) = \sum_{i=1}^m \frac{\mathcal{V}(\mathcal{A})}{|\mathcal{A}|} \; .$$

Also auch hier wird der Wert der charakteristischen Funktion zurückgewonnen. $\diamond$

**Bemerkung.** Dieser Satz zeigt auch, daß die Beziehung nichtkooperatives Spiel und kooperatives Spiel nicht eineindeutig ist. Wie der Beweis zeigt, kann ein kooperatives Spiel die Komplementäreigenschaft haben, ohne aus einem Konstantsummenspiel hervorgegangen zu sein.
Wie man in ([48]) findet, ist es jedoch möglich, einem kooperativem Spiel mit der Komplementäreigenschaft ein nichtkooperatives Konstantsummen-Spiel zuzuordnen. Hierzu wird die Auszahlungsfunktion

$$\tilde{U}^i(s) = \frac{\mathcal{V}(\mathcal{A})}{m} + U^i(s) - \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} U^j(s)$$

verwendet, die auf der oben definierten Auszahlungsfunktion $U^i$ basiert. Im Beweis wird zwingend die Komplementäreigenschaft verwendet, nämlich beim Nachweis des Strategienpaares $(s^L, s^{-L})$ mit

$$s^L = \underbrace{(L, L, \ldots, L)}_{|L|-\text{mal}} \qquad s^- s^{\mathcal{A}\backslash L} = \underbrace{(\mathcal{A}\backslash L, \mathcal{A}\backslash L, \ldots, \mathcal{A}\backslash L)}_{(m-|L|)-\text{mal}}$$

als Sattelpunkt.

### 5.1.2 Koalitionsgewinn und strategische Äquivalenz

Die charakteristische Funktion eines kooperativen Spieles sagt nichts aus über die Verteilung des Koalitionsgewinns, das ist der Wert der charakteristischen Funktion. In diesem Abschnitt werden die Grundbedingungen einer solchen Gewinnverteilung untersucht.

**Definition 5.2** *Ein Vektor* $(z_1, z_2, \ldots, z_m)$ *heißt Zuteilung (Imputation), wenn er folgende Bedingungen erfüllt*

$$z_i \geq \mathcal{V}(\{i\}) \quad i = 1, 2, \ldots, m \qquad \sum_{i=1}^{m} z_i = \mathcal{V}(\mathcal{A}) \; . \tag{5.7}$$

$z_i \geq \mathcal{V}(\{i\})$ *heißt die Bedingung der individuellen Rationalität,* $\sum_{i=1}^m z_j = \mathcal{V}(\mathcal{A})$ *die der Gruppenrationalität oder kollektive Rationalität.*

**Bemerkung.** $z_j$ kann als Auszahlung (Zuteilung) an den $j$-ten Spieler verstanden werden. Es gibt nur dann über $\mathcal{V}(\{j\})$, $j = 1, 2, \ldots, m$ hinaus etwas zu verteilen, wenn $\sum_{i=1}^m \mathcal{V}(\{j\}) < \mathcal{V}(\mathcal{A})$ gilt. Diesem Aspekt gelten die folgenden Überlegungen.

**Definition 5.3** *Eine charakteristische Funktion heißt additiv, wenn*

$$\mathcal{V}(B) = \sum_{i \in B} \mathcal{V}(\{i\}) \quad \forall B \subseteq \mathcal{A} \ .$$

**Satz 5.4** *Eine charakteristische Funktion ist genau dann additiv, wenn*

$$\sum_{j=1}^{m} \mathcal{V}(\{j\}) = \mathcal{V}(\mathcal{A})$$

**Beweis:**
Die Notwendigkeit folgt aus der Annahme der Additivität. Daß die Bedingung auch hinreichend ist, folgt unter Verwendung der Superadditivität aus:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(\mathcal{A}) = \sum_{j=1}^{m} \mathcal{V}(\{j\}) &= \sum_{j \in B} \mathcal{V}(\{j\}) + \sum_{j \in \mathcal{A} \setminus B} \mathcal{V}(\{j\} \\ &\leq \mathcal{V}(B) + \mathcal{V}(\mathcal{A} \setminus B) \leq \mathcal{V}(\mathcal{A}) \ . \end{aligned}$$

Es gilt also überall Gleichheit und insbesondere

$$\mathcal{V}(B) = \sum_{j \in B} \mathcal{V}(\{j\}) \quad \forall B \ .$$

Somit gilt die Additivität. ⋄

**Definition 5.4** *Ein kooperatives Spiel mit einer additiven charakteristischen Funktion heißt unwesentlich, sonst heißt es wesentlich.*

**Bemerkung.** Ein "kooperatives" Spiel mit einem Spieler ist unwesentlich, da die Bedingung des vorangegehenden Satzes erfüllt ist.

**Satz 5.5** *Ein unwesentliches Spiel hat genau eine Imputation, nämlich* $(\mathcal{V}(\{1\}), \mathcal{V}(\{2\}), \ldots, \mathcal{V}(\{m\}))$.
*Ein wesentliches Spiel hat unendlich viele verschiedene Imputationen.*

**Beweis:**
Für ein unwesentliches Spiel folgt unter Beachtung der Additivität und $z_i \geq \mathcal{V}(\{i\})$

$$\mathcal{V}(\mathcal{A}) = \sum_{i=1}^{m} \mathcal{V}(\{i\}) \leq \sum_{i=1}^{m} z_i = \mathcal{V}(\mathcal{A}) \ .$$

Daher muß Gleichheit gelten, insbesondere $z_i = \mathcal{V}(\{i\})$.

Im Falle der wesentlichen Spiele kann die positive Größe

$$\mathcal{V}(\mathcal{A}) - \sum_{i=1}^{m} \mathcal{V}(\{i\}) > 0$$

auf unendlich viele verschiedene Weisen in $m$ positive Summanden $\varepsilon_i$ zerlegt werden, sodaß sich unendlich viele verschiedene Imputationen $z_i = \mathcal{V}(\{i\}) + \varepsilon_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$ ergeben. $\diamond$

**Definition 5.5 (Strategische Äquivalenz kooperativer Spiele)** *Zwei kooperative Spiele $\Gamma_K(\mathcal{A}, \mathcal{V})$ und $\tilde{\Gamma}_K(\mathcal{A}, \tilde{\mathcal{V}})$ mit den gleichen Spielern $\mathcal{A}$ heißen strategisch äquivalent, falls es ein $k > 0$ und $c_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, m$ gibt, sodaß*

$$\tilde{\mathcal{V}}(B) = k \times \mathcal{V}(B) + \sum_{i \in B} c_i \quad \forall B \subseteq \mathcal{A} \ . \tag{5.8}$$

**Bemerkung.** Setzt man in Definition (5.4) die spezielle strategisch linear-äquivalente Gewinnfunktion $\tilde{U^i} = k \times U^i + c_i$ unter Verwendung von Gleichung (5.3) ein, so ergibt sich die obige Definition für das einem nichtkooperativem Spiel zugeordnete kooperative Spiel. Es wird hier als neue Definition angegeben, da ein kooperatives Spiel nicht notwendigerweise auf einem nichtkooperativem basiert. Die Relation "strategisch (linear-)äquivalent" ist auch bei kooperativen Spielen eine Äquivalenzrelation (reflexiv, symmetrisch, transitiv). Der folgende Satz ist eine Rechtfertigung dieser Definition.
**Bemerkung.** Die Äquivalenzrelation "strategisch äquivalent" induziert in der Menge der Spiele mit der gleichen Anzahl von Spielern eine Klasseneinteilung.

**Satz 5.6** *Die Mengen der Imputationen strategisch äquivalenter kooperativer Spiele können umkehrbar eindeutig aufeinander abgebildet werden.*

**Beweis:**
Wir gehen aus von der Beziehung

$$\tilde{\mathcal{V}}(B) = k\mathcal{V}(B) + \sum_{i \in B} c_i$$

Es seien die Bedingungen der Imputationen für das ursprüngliche Spiel erfüllt, d.h.:

$$z_i \geq \mathcal{V}(\{i\}) \qquad \sum_{i=1}^{m} z_i = \mathcal{V}(\mathcal{A}) \ .$$

Die Multiplikation beider Beziehungen mit $k > 0$ und Addition mit $c_i$ liefert

$$\tilde{z}_i = kz_i + c_i \quad i = 1, \ldots, m$$

und damit die Behauptung.
Der Umkehrschluß von dem neuen Spiel auf das alte folgt analog zur Reflexivität der Relation "strategisch äquivalent". $\diamond$

**Definition 5.6** *Ein kooperatives Spiel heißt ein Null-Spiel, wenn seine charakteristische Funktion identisch 0 ist.*

**Satz 5.7** *Jedes unwesentliche Spiel ist strategisch äquivalent einem Null-Spiel.*

**Beweis:**
Für das strategisch äquivalente Spiel nehmen wir $k = 1$ und $c_i = -\mathcal{V}(\{i\})$.
Da bei einem unwesentlichen Spiel

$$\mathcal{V}(B) = \sum_{i \in B} \mathcal{V}(\{i\}) \quad \forall B$$

gilt offensichtlich

$$\tilde{\mathcal{V}}(B) = 0 \quad \forall B \ .$$

$\diamond$
**Bemerkung.** Die unwesentlichen Spiele bilden also genau eine Äquivalenzklasse.

**Definition 5.7** *Ein kooperatives Spiel dessen charakteristische Funktion folgende Eigenschaften hat*

$$\mathcal{V}(\{i\}) = 0 \quad i = 1, \ldots, m \qquad \mathcal{V}(\mathcal{A}) = 1 \tag{5.9}$$

*heißt ein 0-1-reduziertes kooperatives Spiel.*

**Bemerkung.** Man beachte, daß über die Werte $\mathcal{V}(B)$ für beliebige $B$ keine Aussage gemacht wird. Wegen der Superadditivität gilt jedoch:

1. $0 \leq \mathcal{V}(B) \leq 1$, $\forall B \subseteq \mathcal{A}$
2. Die charakteristische Funktion ist nichtnegativ und monoton.
3. Die Menge aller Imputationen ist

$$\{(z_1, \ldots, z_m) | \sum_{i=1}^{m} z_i = 1 \qquad z_i \geq 0 \quad i = 1, \ldots, m\} \ .$$

**Satz 5.8** *Jedes wesentliche kooperative Spiel ist einem 0-1-reduzierten kooperativem Spiel strategisch äquivalent.*

**Beweis:**

$$\tilde{\mathcal{V}}(\{i\}) = k\mathcal{V}(\{i\}) + c_i = 0 \quad i = 1, \ldots, m$$
$$\tilde{\mathcal{V}}(\mathcal{A}) = k\mathcal{V}(\mathcal{A}) + \sum_{i=1}^{m} c_i = 1$$

Hieraus berechnen sich $k$ und $c_i$ zu

$$k = \frac{1}{\mathcal{V}(\mathcal{A}) - \sum_{i=1}^{m} \mathcal{V}(\{i\})} \tag{5.10}$$

$$c_i = -\frac{\mathcal{V}(\{i\})}{\mathcal{V}(\mathcal{A}) - \sum_{i=1}^{m} \mathcal{V}(\{i\})} \quad i = 1, \ldots, m\ . \tag{5.11}$$

Wegen der Wesentlichkeit des Spieles und der Superadditivität ist $k > 0$, wie gefordert. $\diamond$

**Beispiel 30 [Äquivalenzklassen eines kooperativem Zweipersonen-Spiels]:**
Neben der einzigen Klasse der unwesentlichen Spiele, gibt es auch genau eine Klasse der wesentlichen Spiele mit der charakteristischen Funktion:

$$\mathcal{V}(\{i\}) = 0 \quad i = 1, 2 \qquad \mathcal{V}(\{1, 2\}) = 1\ .$$

Andere Wertezuordnungen gibt es hier nicht.
Die charakteristische Funktion eines wesentlichen Spieles hat bei zwei Personen folgende Darstellung:

$$\mathcal{V}(\{i\}) = c_i \quad \mathcal{V}(\{1, 2\}) = k + c_1 + c_2\ ,$$

wobei $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ und $k > 0$. Die charakteristische Funktion ist also dreiparametrig. $\diamond$

**Beispiel 31 [Äquivalenzklassen eines kooperativem Dreipersonen-Spiels mit der Komplementäreigenschaft]:**

Nach ([27, z.B. Seite 268]) kann dieses Spiel als Abstimmungsspiel über eine feste zu verteilende Summe gedeutet werden, wobei mit einfacher Mehrheit über die Verteilung entschieden wird.
Ein wesentliches Spiel kann der Äquivalenzklasse mit

$$\mathcal{V}(\{i\}) = 0 \quad i = 1,2,3 \qquad \mathcal{V}(\{1,2,3\}) = 1$$

zugeordnet werden. Aus der Komplementäreigenschaft

$$\mathcal{V}(\{1,2,3\}) = \mathcal{V}(\{1,2,3\}\backslash\{i\}) + \mathcal{V}(\{i\})$$

folgt zusätzlich zwingend

$$\mathcal{V}(\{1,2\}) = \mathcal{V}(\{1,3\}) = \mathcal{V}(\{2,3\}) = 1 \ .$$

◇

**Beispiel 32 [Äquivalenzklassen eines kooperativem Dreipersonen-Spiels]:**
Neben der einzigen Klasse der unwesentlichen Spiele gibt es unendlich viele Klassen wesentlicher Spiele mit den charakteristischen Funktionen:

$$\mathcal{V}(\{i\}) = 0 \quad i = 1,2,3 \qquad \mathcal{V}(\{1,2,3\}) = 1 \ .$$

$$\mathcal{V}(\{1,2\}) = \alpha_1 \quad \mathcal{V}(\{1,3\}) = \alpha_2 \quad \mathcal{V}(\{2,3\}) = \alpha_3 \qquad 0 \le \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \le 1$$

Die charakteristische Funktion eines wesentlichen Spieles hat bei drei Personen folgende Darstellung:

$$\mathcal{V}(\{i\}) = c_i \quad \mathcal{V}(\{1,2,3\}) = k + c_1 + c_2 + c_3$$

$$\mathcal{V}(\{1,2\}) = k\alpha_1 + c_1 + c_2 \quad \mathcal{V}(\{1,3\}) = k\alpha_2 + c_1 + c_3 \quad \mathcal{V}(\{2,3\}) = k\alpha_3 + c_2 + c_3$$

wobei $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$, $k > 0$ und $0 \le \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \le 1$. Die charakteristische Funktion ist also siebenparametrig. ◇

## 5.2 Beste Zuteilung

Der zu verteilende Nutzen (oder das Kapital) ist $\mathcal{V}(\mathcal{A}) = \sum_{i=1}^{m} z_i$. Jeder Spieler $i$ möchte natürlich, daß sein Anteil $z_i$ möglichst groß ist. Dies ist so nicht möglich, wenn einer mehr bekommt, muß ein anderer weniger bekommen. Ein Spieler kann natürlich auch mit einer Koalition $B$, der er angehört argumentieren und verlangen, daß die Koalition ihrem Nutzen (Kapital) $\mathcal{V}(B)$ nach besser berücksichtigt wird. Er kann so auf eine größere Zuteilung $z_i$ hoffen. In den folgenden Abschnitten werden Lösungvorschläge für diese widerstreitenden Interessen besprochen.

### 5.2.1 Dominanz von Imputationen

**Definition 5.8** *Eine Imputation $x = (x_1, \ldots, x_m)$ dominiert eine Imputation $y = (y_1, \ldots, y_m)$ bezüglich ( oder auch durch die) der Koalition $B$, falls*

$$\sum_{i \in B} x_i \leq \mathcal{V}(B) \text{ Bedingung der Effektivität} \tag{5.12}$$

$$x_i > y_i \quad \forall i \in B \text{ Bedingung der Präferenz.} \tag{5.13}$$

*Wir bezeichnen diesen Sachverhalt auch mit*

$$x \succ_B y \ .$$

**Definition 5.9** *Eine Imputation $x$ dominiert die Imputation $y$, in Zeichen $x \succ y$, wenn es eine Koalition $B$ gibt, sodaß $x \succ_B y$.*

**Bemerkung.** Man kann dies auch folgendermaßen ausdrücken. Wenn $x \succ y$, dann gibt es Kräfte in der Gesellschaft, d.h. unter den $m$ Spielern, die diese Gewinnverteilung unterstützen.
Die Relation $x \succ y$ ist im allgemeinen nicht transitiv.
Offensichtlich kann Dominanz nicht bezüglich einer Einerkoalition $\{i\}$ und der Gesamtkoalition $\mathcal{A}$ auftreten.
Jedoch bleibt die Dominanz bei strategischer Äquivalenz erhalten.

**Satz 5.9 (Dominanz bei strategischer Äquivalenz)** *Seien $\Gamma_K(\mathcal{A}, \mathcal{V})$ und $\tilde{\Gamma}_K(\mathcal{A}, \tilde{\mathcal{V}})$ zwei strategisch äquivalente kooperative Spiele und seien $x$, $y$ bzw. $\tilde{x}$, $\tilde{y}$ strategisch äquivalente Imputationen für $\Gamma_K$ bzw. $\tilde{\Gamma}_K$, dann folgt aus $x \succ_B y$ die Beziehung $\tilde{x} \succ_B \tilde{y}$.*

**Bemerkung.** Zur Untersuchung der Dominanz genügt es daher die Äquivalenzklassen von Spielen zu betrachten.
**Beweis:**
Sei

$$\tilde{\mathcal{V}}(B) = k\mathcal{V}(B) + \sum_{i \in B} c_i \qquad \text{mit } k > 0\,, c_i \in \mathbb{R} \quad \forall B \subset \mathcal{A}\ .$$

Aus $y_i < x_i$ folgt dann $\tilde{y}_i = ky_i + c_i < kx_i + c_i = \tilde{x}_i$. Ferner gilt

$$\begin{aligned} \sum_{i \in B} \tilde{x}_i = \sum_{i \in B}(kx_i + c_i) \\ = k\sum_{i \in B} x_i + \sum_{i \in B} c_i \leq k\mathcal{V}(B) + \sum_{i \in B} c_i \\ = \tilde{\mathcal{V}}(B) \end{aligned} \tag{5.14}$$

Damit sind alle Eigenschaften der Dominanz für $\tilde{\Gamma}_K$ gezeigt. $\diamond$

**Beispiel 33 [Dominanz bei unwesentlichen Spielen]:**

Da unwesentliche kooperative Spiele genau eine Imputation besitzen, gibt es hier keine Dominanz. $\diamond$

**Bemerkung.** Die Imputationen $x = (x_1, x_2, x_3)$ eines 0-1-reduzierten kooperativen Spiels können als baryzentrische Koordinaten aufgefaßt werden. Für $m = 3$ lassen sich auf diese Weise Beispiele für Dominanz und einige weitere Begriffe zeichnerisch in der Ebene darstellen. hier sind dann die Zuteilungen die Punkte $\vec{z}$ einer Dreiecksfläche mit den Ecken $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$:

$$x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + x_3\vec{a}_3 = \vec{z} \tag{5.15}$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 1 \tag{5.16}$$
$$x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0 \tag{5.17}$$

Läßt man die Bedingungen $x_i \geq 0$, $i = 1, 2, 3$ fallen, so kann man alle Punkte der Ebene darstellen. Ferner zeigt Nachrechnen, daß die Menge der Punkte $x_1$=constant eine zum Vektor $\vec{a}_2 - \vec{a}_3$ parallele Gerade ist. Analoges gilt für $x_2$=constant und $x_3$=constant. Die folgende Skizze veranschaulicht dies.

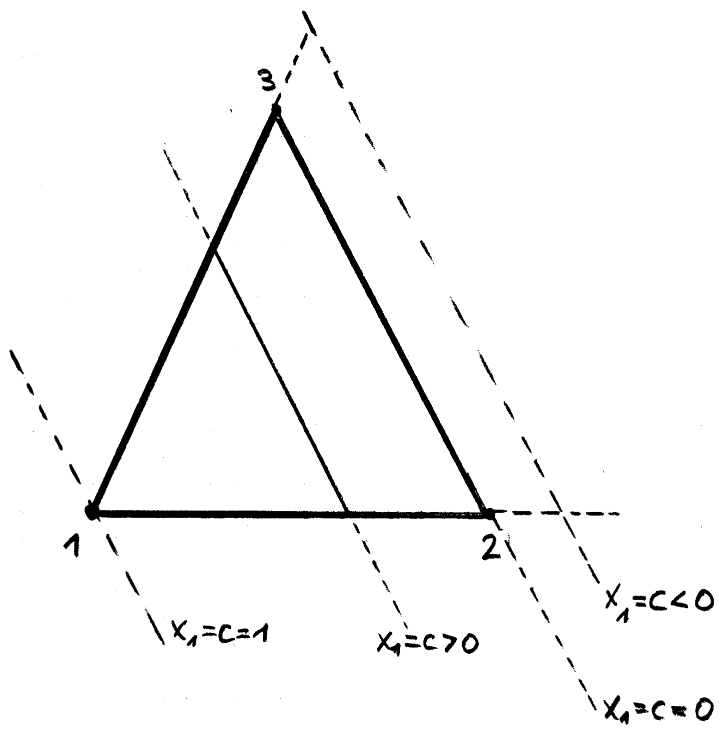


**Abbildung 5.5.1**

**Beispiel 34 [Dominanz bei einem Dreipersonen-Spiel mit der Komplementäreigenschaft]:**
Wir bezeichnen die Imputationen mit $(x_1, x_2, x_3)$ und $(y_1, y_2, y_3)$. Wegen der Eigenschaften $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ und $x_i \geq 0$, $i = 1, 2, 3$ einer Imputation $x$, werden wir diese als baryzentrische Koordinaten auffassen.
Jeder Punkt $\vec{z}$ des $\mathbb{R}^2$ kann mithilfe von drei Punkten $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$, die nicht auf einer Geraden liegen, dargestellt werden als

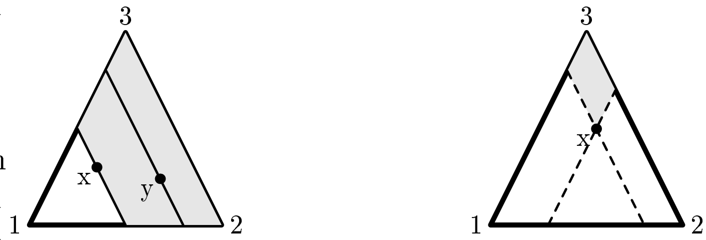



**Abbildung 5.2** Dominanz schlechthin

$$\vec{z} = \xi_1\vec{a}_1 + \xi_2\vec{a}_2 + \xi_3\vec{a}_3 \quad \text{mit} \quad \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 1 \tag{5.18}$$

Die Menge aller Imputationen besteht dann aus der von $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ und $\vec{a}_3$ gebildeten Dreiecksfläche.
Wir wollen nun die Menge aller Imputationen $y$ berechnen, die von $x$ dominiert werden.
Dominanz kann nur bezüglich der Zweierkoalitionen auftreten. In der 0-1-reduzierten Form gilt wegen der vorausgesetzten Komplementäreigenschaft $\mathcal{V}(\{1,2\}) = 1$, $\mathcal{V}(\{1,3\}) = 1$, $\mathcal{V}(\{2,3\}) = 1$.
Gilt nun $x \succ_{\{1,2\}} y$, dann muß auch gelten

$$x_1 + x_2 \leq \mathcal{V}(\{1,2\}) = 1 \quad y_1 < x_1 \quad y_2 < x_2 \ .$$

Da $x_1 + x_2$ immer $\leq 1$ ist, brauchen wir nur $y_1 < x_1 \quad y_2 < x_2$ betrachten.

Die Menge aller $y$, für die $y_1 < x_1$ gilt, ist das grau markierte Trapez im linken Bild der Abbildung (5.2), wobei der Rand außer der Linie durch $x$ dazugehört. Die $y$-Werte, für die $y_1 < x_1$ gilt, liegen immer weiter von der Ecke 1 weg als $x$.
Die Menge aller $y$, für die $y_1 < x_1$ und $y_2 < x_2$ gilt, ist das im rechten Bild der Abbildung 5.2 grau markierte Parallelogramm, wobei der Rand, der innerhalb des Dreiecks liegt, nicht dazugehört.

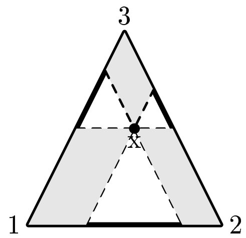



**Abbildung 5.3**

Die Menge aller $y$ schließlich, die von $x$ dominiert werden, ist die Menge $\{x|y_1 < x_1 \quad y_2 < x_2\} \cup \{x|y_1 < x_1 \quad y_3 < x_3\} \cup \{x|y_2 < x_2 \quad y_3 < x_3\}$ . Diese

Menge ist in der Abbildung (5.3) grau markiert. $\diamond$

### 5.2.2 Der Kern eines kooperativen Spieles

Die explizite Definition des Kerns eines kooperativen Spiels stammt von Gillies ([19]) aus dem Jahre 1959. Inhaltlich findet sich der Kern bereits bei Edgeworth ([16]) im Jahre 1881.

**Definition 5.10 (Kern eines kooperativen Spieles)** *Die Menge aller nichtdominierten Imputationen eines kooperativen Spieles heißt der Kern $\mathcal{K} = \mathcal{K}(\Gamma_K)$ des Spieles.*

**Satz 5.10** *$z = (z_1, \ldots, z_m) \in \mathcal{K}$ gilt genau, wenn*

$$\mathcal{V}(B) \leq \sum_{i \in B} z_i \quad \forall B \subseteq \mathcal{A} \tag{5.19}$$

**Beweis:**
Es genügt 0-1-reduzierte Spiele zu betrachten.
Für die Koalition $\mathcal{A}$ und die Einerkoalitionen $\{i\}$, $i = 1, \ldots, m$ ist die Ungleichung (5.19) immer erfüllt. Wir betrachten also nur andere Koalitionen $B$.
**Notwendig.**
Wir nehmen nun an, daß für eine Koalition $B \neq \mathcal{A}$, die außerdem keine Einerkoalition ist,

$$\mathcal{V}(B) > \sum_{i \in B} z_i$$

gelte.
Hieraus folgt weiter

$$\sum_{i \notin B} z_i = \mathcal{V}(\mathcal{A}) - \sum_{i \in B} z_i > \mathcal{V}(B) - \sum_{i \in B} z_i > 0 \; .$$

Wir konstruieren nun eine Imputation $y$ mit $y \succ_B z$.
Sei

$$0 < \varepsilon < \frac{1}{|B|} \left( \mathcal{V}(B) - \sum_{i \in B} z_i \right)$$

und setzen $y$ fest zu

$$y_i = \begin{cases} z_i + \varepsilon & \text{falls } i \in B \\ \frac{1}{|\mathcal{A} \backslash B|} \left( \sum_{i \notin B} z_i - |B| \varepsilon \right) & \text{falls } i \notin B \end{cases} \; .$$

$y$ ist tatsächlich eine Imputation.

$$\sum_{i=1}^{m} y_i = \sum_{i\in B} z_i + |B|\varepsilon + |A\backslash B| \times \frac{1}{|A\backslash B|}\left(\sum_{i\notin B} z_i - |B|\varepsilon\right) \tag{5.20}$$

$$= \sum_{i=1}^{m} z_i = \mathcal{V}(\mathcal{A}) = 1\ . \tag{5.21}$$

$y_i \geq 0$ für $i \in B$ folgt aus $z_i \geq 0$ und $\varepsilon > 0$. Für $i \notin B$ gilt:

$$\frac{1}{|\mathcal{A}\backslash B|}\left(\sum_{i\notin B} z_i - |B|\varepsilon\right) > \frac{1}{|\mathcal{A}\backslash B|}\left(\sum_{i\notin B} z_i - \mathcal{V}(B) + \sum_{i\in B} z_i\right) \tag{5.22}$$

$$\geq \frac{1}{|\mathcal{A}\backslash B|}(\mathcal{V}(\mathcal{A}) - \mathcal{V}(B)) \geq 0\ . \tag{5.23}$$

$y$ dominiert $z$.
$y_i > z_i$ ist für alle $i \in B$ erfüllt. $\sum_{i\in B} y_i \leq \mathcal{V}(B)$ folgt aus

$$\sum_{i\in B} y_i = \sum_{i\in B} z_i + |B|\varepsilon < \sum_{i\in B} z_i + \mathcal{V}(B) - \sum_{i\in B} z_i = \mathcal{V}(B)\ .$$

Da nun $y \succ_B z$ , so würde $z$ damit nicht zum Kern gehören, also muß die Ungleichung (5.19) gelten.

**Hinreichend.**

Würde $z$ von $y$ dominiert bezüglich der Koalition $B$, dann würde gelten

$$\sum_{i\in B} z_i < \sum_{i\in B} y_i \leq \mathcal{V}(B)\ .$$

Dies ist ein Widerspruch, daher gibt es kein $y \succ z$, und es gilt die Ungleichung (5.19). $\diamond$

**Satz 5.11** *Der Kern eines kooperativen Spieles ist konvex.*

**Beweis:**

Die Imputationen $z \in \mathcal{K}$ erfüllen folgende linearen Gleichungen und Ungleichungen:

$$z_i \geq \mathcal{V}(\{i\}) \quad i = 1, \ldots, m \tag{5.24}$$

$$\sum_{i=1}^{m} z_i = \mathcal{V}(\mathcal{A}) \tag{5.25}$$

$$\sum_{i\in B} z_i \geq \mathcal{V}(B) \quad \forall B \subseteq \mathcal{A} \tag{5.26}$$

Als Durchschnitt von Halbräumen und Hyperebenen ist der Kern eine konvexe Menge. ◇

**Bemerkung.** In diesem Zusammenhang sei darauf hingewiesen, daß entsprechend der Definition einer konvexen Menge die leere Menge ebenfalls als konvex gilt.

**Satz 5.12** *Der Kern eines unwesentlichen Spieles besteht aus einem Element, nämlich der Imputation $z = (\mathcal{V}(\{1\}), \ldots, \mathcal{V}(\{m\}))$.*

**Satz 5.13** *Der Kern jedes wesentlichen Spieles mit der Komplementäreigenschaft ist leer.*

**Beweis:**
Sei $z$ eine Imputation, die zum Kern gehört, dann gilt

$$\mathcal{V}(\{i\}) \leq z_i \tag{5.27}$$

$$\mathcal{V}(\mathcal{A}\backslash\{i\}) \leq \sum_{j \neq i} z_j \tag{5.28}$$

Das Aufaddieren dieser zwei Ungleichungen und die Verwendung der Komplementäreigenschaft ergibt:

$$\mathcal{V}(\{i\}) + \mathcal{V}(\mathcal{A}\backslash\{i\}) = \mathcal{V}(\mathcal{A}) \leq \sum_{i=1}^{m} z_i$$

Wegen den Eigenschaften einer Imputation muß sogar Gleichheit gelten:

$$\mathcal{V}(\mathcal{A}) = \sum_{i=1}^{m} z_i$$

Somit folgt $\mathcal{V}(\{i\}) = z_i$, $\forall i$.
Dies impliziert aber ferner die Additivität der charakteristschen Funktion und zeigt daher, daß das Spiel unwesentlich ist im Gegensatz zur Annahme. Daher muß der Kern leer sein. ◇

**Bemerkung.** Aus diesem Satz folgt, daß der Kern des Abstimmungsspieles auf Seite (107) leer ist.

**Satz 5.14 (Kern eines allgemeinen Dreipersonen-Spiels)** *Gegeben sei ein Dreipersonen-Spiel in der 0-1-reduzierten Form:*

$$\mathcal{V}(\emptyset) \quad \mathcal{V}(\{i\}) = 0 \quad i = 1, 2, 3 \qquad \mathcal{V}(\{1, 2, 3\}) = 1\ .$$

$$\mathcal{V}(\{2, 3\}) = \alpha_1 \quad \mathcal{V}(\{1, 3\}) = \alpha_2 \quad \mathcal{V}(\{1, 2\}) = \alpha_3 \qquad 0 \leq \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \leq 1$$

*Der Kern ist genau dann nicht leer, wenn*

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \leq 2\ . \tag{5.29}$$

**Beweis:**
Eine Imputation $z$ gehört genau dann zum Kern, wenn

$$z_1 + z_2 \geq \alpha_3 \quad z_1 + z_3 \geq \alpha_2 \quad z_2 + z_3 \geq \alpha_1$$

Berücksichtigt man $z_1 + z_2 + z_3 = 1$ dann ergibt sich

$$z_3 \leq 1 - \alpha_3 \quad z_2 \leq 1 - \alpha_2 \quad z_1 \leq 1 - \alpha_1 \ . \tag{5.30}$$

In baryzentrischen Koordinaten ausgedrückt heißt dies, daß der Punkt $z$ weiter von der $i$-ten Ecke entfernt ist als der Punkt $(1 - \alpha_1, 1 - \alpha_2, 1 - \alpha_3)$.
*Notwendig*:
Summiert man die Ungleichungen (5.30) auf, so ergibt sich die Bedingung (5.29) des Satzes.
*Hinreichend*:
Geht man von der Ungleichung (5.29) aus, so kann man einen Punkt angeben, der im Kern liegt:
Es gibt $\varepsilon_i \geq 0$, $\alpha_i + \varepsilon_i \leq 1$, $i = 1, 2, 3$, sodaß

$$\sum_{i=1}^{3} (\alpha_i + \varepsilon_i) = 2 \quad z_i = 1 - \alpha_i - \varepsilon_i \quad i = 1, 2, 3$$

Man rechnet nach, daß $z$ eine Imputation ist und die Ungleichungen (5.30) erfüllt, also zum Kern gehört. $\diamond$
**Bemerkung.** Die geometrische Form des Kerns eines allgemeinen Dreipersonen-Spiels hängt ab von der Lage der folgenden jeweils zu einer Dreiecksseite parallelen Geraden

$$g_1 = \{(z_1, z_2, z_3) | z_1 = 1 - \alpha_1\} \qquad g_2 = \{(z_1, z_2, z_3) | z_2 = 1 - \alpha_2\}$$
$$g_3 = \{(z_1, z_2, z_3) | z_3 = 1 - \alpha_3\} \ .$$

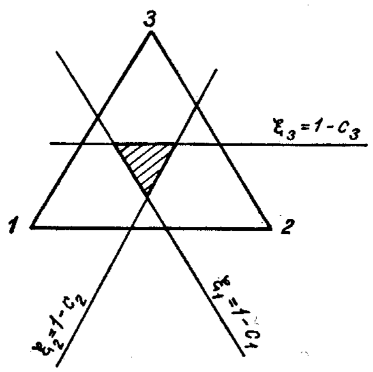



**Abbildung 5.4:** Kern eines 3-Personen-Spiels

Er kann ein einzelner Punkt, ein Geradenstück, ein Dreieck, ein Viereck, ein Fünfeck oder ein Sechseck sein(siehe Abbildung (5.4)).

### 5.2.3 von-Neumann-Morgenstern Lösungen (VNM)

Als Ausgangspunkt dieses weiteren Vorschlags der Verteilung des Gewinns kann ein Mangel des Kerns $\mathcal{K}$ aufgefaßt werden. Der Kern hat nur eine sogenannte innere Stabilität: Keine Imputation aus $\mathcal{K}$ dominiert irgend eine andere Imputation aus $\mathcal{K}$. Es kann aber für irgendeine Imputation $y$ unter Umständen keine Imputation $z \in \mathcal{K}$ angeboten werden mit $z \succ y$. Dieser Überlegung trägt die Menge $\mathcal{R}$ der von-Neumann-Morgenstern Lösungen Rechnung. Dieses Konzept wurde von den genannten Autoren eingeführt (siehe [44]).

**Definition 5.11** *Die v.Neumann und Morgenstern-Lösung ( oder die VNM-Lösung, oder die stabile Menge) eines kooperativen Spieles nennt man die Menge $\mathcal{R}$ von Imputationen, die folgende Bedingungen erfüllt:*

(1) Keine Imputation aus $\mathcal{R}$ dominiert irgend eine andere Imputation aus $\mathcal{R}$ (interne Stabilität).

(2) Zu jeder Imputation $x \notin \mathcal{R}$ gibt es eine Imputation $z \in \mathcal{R}$, die $x$ dominiert: $z \succ x$ (externe Stabilität).

**Satz 5.15** *Wenn die VNM-Lösung $\mathcal{R} \neq \emptyset$ ist, dann gilt $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{R}$.*

**Beweis:**
Wenn $\mathcal{K} = \emptyset$, dann gilt in jedem Fall $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{R}$.
Wenn eine Imputation $z \in \mathcal{K}$ ist, dann wird sie von keiner anderen Imputation dominiert. Würde $z \notin \mathcal{R}$ liegen, dann würde sie von einer Imputation aus $\mathcal{R}$ dominiert. Dies ist ein Widerspruch, daher muß $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{R}$ gelten. $\diamond$

**Satz 5.16** *Wenn die VNM-Lösung $\mathcal{R}$ eines kooperativen Spieles nur aus einer einzigen Imputation besteht, dann ist das Spiel unwesentlich.*

**Beweis:**
Wir nehmen nun an, daß das Spiel wesentlich ist und o.B.d.A. in der 0-1-reduzierten Form vorliegt. Insbesondere ist damit auch $m > 1$. Sei nun $z$ die einzige Imputation und für ein $j$ sei $z_j > 0$. Ein solches $j$ gibt es wegen der Eigenschaften einer Imputation. Hieraus konstruieren wir nun eine neue Imputation $y$:

$$y_i = \begin{cases} z_i + \frac{z_j}{m-1} & \text{falls } i \neq j \\ 0 & \text{falls } i = j \end{cases}.$$

Man rechnet nach, daß $y$ nicht von $z$ dominiert ist. Daher muß entweder $y \in \mathcal{R}$ sein oder es gibt eine weitere Imputation $x$, die $y$ dominiert und zu $\mathcal{R}$ gehört.

In beiden Fällen enthält $\mathcal{R}$ mindestens 2 Imputationen im Widerspruch zur Annahme. Daher muß das Spiel unwesentlich sein. $\diamond$

**Bemerkung.** Lucas [33] hat 1968 ein Zehnpersonen-Spiel angegeben, das keine VNM-Lösung besitzt. Wie das folgende Beispiel zeigt, kann es unendlich viele VNM-Lösungen für ein Spiel geben.

**Beispiel 35 [Dreipersonen-Abstimmungsspiel]:**

Wir betrachten nochmals das Abstimmungsspiel von Seite 107. Wir wissen, der Kern ist leer. Da das Spiel wesentlich ist, muß eine VNM-Lösung mindestens 2 Imputationen enthalten. Es liege wieder die 0-1-reduzierte Form unter Berücksichtigung der Komplementäreigenschaft vor. Die Dominanzmengen für eine Imputation $x$ haben wir schon früher ausgerechnet. Wir untersuchen zwei Fälle, die aufgrund inhaltlicher Überlegungen herausgegriffen werden.

**Fall 1:** Ein Spieler, z.B. der dritte erhält vorab einen gewissen Betrag $z_3$ ausbezahlt, die anderen zwei teilen sich den Rest. Diese Menge von Imputationen entspricht in baryzentrischen Koordinaten einer Parallele $AB$ zur Dreiecksseite $P_1P_2$. Aufgrund früherer Überlegungen wissen wir, daß diese Menge intern stabil ist, also die erste Bedingung einer VNM-Lösung erfüllt. Der Schnittpunkt der beiden Geraden $AG$ und $BH$ muß außerhalb des Dreiecks liegen, dann wird jede Imputation durch eine Imputation der Strecke $AB$ dominiert. Die Bedingung hierfür ist $z_3 < \frac{1}{2}$. Dies ergibt sich folgendermaßen:

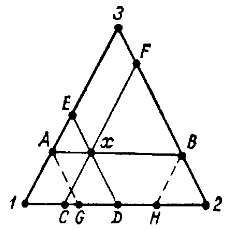


**Abbildung 5.5:** VNM-Lösung

Die Gerade durch $A$ und $B$ wird beschrieben durch $g_{AB} = \{(\xi_1, \xi_2\xi_3)|\xi_3 = z_3\}$. Die Gerade durch $A$ und $G$ (parallel zu $P_2P_3$) wird beschrieben durch $g_{AG} = \{(\xi_1, \xi_2\xi_3)|\xi_1 = 1 - z_3\}$. Die Gerade durch $B$ und $H$ (parallel zu $P_1P_3$) wird beschrieben durch $g_{BH} = \{(\xi_1, \xi_2\xi_3)|\xi_2 = 1 - z_3\}$. Der Schnittpunkt von $g_{AG}$ und $g_{BH}$ ist in baryzentrischen Koordinaten gegeben durch $(1 - z_3, 1 - z_3, \xi_3^*)$ mit $\xi_3^* = 1 - 2(1 - z_3)$. Da der Schnittpunkt außerhalb des Dreiecks liegen soll, d.h. unterhalb der Strecke $P_1P_2$, muß $\xi_3^* < 0$ gelten, d.h. $z_3 < \frac{1}{2}$.
Es gibt hier also überabzählbar viele verschiedene VNM-Lösungen, es muß nur $z_3 < \frac{1}{2}$ für die Strecke $AB$ gelten.
Darüberhinaus kann man auch zu $P_1P_3$ und zu $P_2P_3$ parallele Strecken betrachten, woraus dann $z_2 < \frac{1}{2}$ bzw. $z_1 < \frac{1}{2}$ folgt.

**Fall 2:** Eine VNM-Lösung enthalte drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen. Seien dies die Ecken eines Dreiecks $ABC$. Die schraf-


**Abbildung 5.6** VNM-Lösung

fierten Flächen im linken Bild der Abbildung (5.6) werden nicht von den Eckpunkten dominiert. Macht man aber das Dreieck größer bis schließlich die Ecken verschwinden, so gelangt man zu dem symmetrischen Dreieck mit den Ecken $A = (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$, $B = (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $C = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$.
Bei beiden Fällen spricht man von **diskriminierenden Lösungen**, da ein Spieler eventuell nichts bekommt oder doch vorab eventuell mit weniger abgespeist wird. Die beiden Erfinder der VNM-Lösungen meinten darin Verhaltensweisen realer Gesellschaften zu erkennen, die zu Ausgrenzungen von gewissen Gruppen führen. Die vorteilhaft behandelten Spieler entsprächen den Verhaltensnormen.

$\diamond$

### 5.2.4 Schmeidlers Nucleolus

Der Lösungsvorschlag des Nucleolus wurde im Jahre 1969 von Schmeidler [53] formuliert. Ziel ist es hier, Imputationen $x = (x_1, \dots, x_m)$ zu berechnen, die die Überschüsse

$$\delta(B) = \mathcal{V}(B) - \sum_{i \in B} x_i \quad \forall B \subset \mathcal{A} \tag{5.31}$$

minimieren. Da gleichzeitig alle $\delta(B)$ minimiert werden sollen, ist dies ein Problem der Mehrziel- oder Vektoroptimierung.
Um ausdrücken zu können, was man hier mit Minimum meint, muß allgemein im $\mathbb{R}^d$ ( die Größe von $d$ richtet sich nach dem zu bearbeitenden Problem, hier ist etwa $d = 2^m$) eine Ordnung eingeführt werden.
Bekannt ist die koordinatenweise Ordnung $x \leq y$, was $x_j \leq y_j$, $j = 1, \dots, d$ meint. Dies ist aber keine vollständige Ordnung, da es $x$, $y$ gibt, für die weder $x \leq y$ noch $y \leq x$ gilt. Eine vollständige Ordnung im $\mathbb{R}^d$ liefert die lexikographische Ordnung "$\leq_L$" ( von Wörterbüchern her bekannt). Es wird definiert

$$x \leq_L y \Leftrightarrow \quad \exists k : 0 \leq k \leq d \quad x_j = y_j \quad j = 1, \dots, k \quad x_{k+1} < y_{k+1} \tag{5.32}$$

Wenn keine Koalition $B$ willkürlich bevorzugt werden soll, so können wir zwei verschiedene Vektoren $(\delta(B))_{B \subset \mathcal{A}}$ nicht direkt vergleichen. Wir ordnen zuerst die Komponenten der Größe nach, die größte zuerst: $[x] = (x_{[1]}, \dots, x_{[d]})$ und danach erst führen wir den lexikographischen Vergleich durch.

**Definition 5.12** *Sei $M \subset \mathbb{R}^d$. Ein $z \in M$ heißt Lexmaxmin-Element bzw. $z = \mathrm{lexmaxmin}_{x \in M}$, falls*

$$[z] \leq_L [x] \quad \forall x \in M \ . \tag{5.33}$$

**Definition 5.13** *Nucleolus Als Nucleolus eines Spieles $\Gamma_K(\mathcal{A}, \mathcal{V})$ bezeichnen wir die Imputation $x = (x_1, \dots, x_m)$, die Lösung der folgenden Optimierungsaufgabe ist:*

$$(\delta(B))_{B \subset \mathcal{A}} \to \mathrm{lexmaxmin} \tag{5.34}$$
$$\mathcal{V}(B) - \sum_{i \in B} x_i = \delta(B) \quad \forall B \subseteq \mathcal{A} \tag{5.35}$$
$$\sum_{i=1}^{m} x_i = \mathcal{V}(\mathcal{A}) \tag{5.36}$$
$$x_i \geq \mathcal{V}(\{i\}) \quad i = 1, \dots, m \tag{5.37}$$

**Beispiel 36 [allgemeines Dreipersonen-Spiel]:**

$$(\delta(B))_{B \subset \mathcal{A}} \to \mathrm{lexmaxmin} \tag{5.38}$$
$$\mathcal{V}(\mathcal{A}) - x_1 - x_2 - x_3 = 0 \tag{5.39}$$
$$\mathcal{V}(\{1\}) - x_1 = \delta(\{1\}) \tag{5.40}$$
$$\mathcal{V}(\{2\}) - x_2 = \delta(\{2\}) \tag{5.41}$$
$$\mathcal{V}(\{3\}) - x_3 = \delta(\{3\}) \tag{5.42}$$
$$\mathcal{V}(\{1,2\}) - x_1 - x_2 = \delta(\{1,2\}) \tag{5.43}$$
$$\mathcal{V}(\{1,3\}) - x_1 - x_3 = \delta(\{1,3\}) \tag{5.44}$$
$$\mathcal{V}(\{2,3\}) - x_2 - x_3 = \delta(\{2,3\}) \tag{5.45}$$
$$x_i \geq \mathcal{V}(\{i\}) \quad i = 1, \dots, m \tag{5.46}$$

$\diamond$

**Satz 5.17** *Die jeweiligen Nucleoli strategisch äquivalenter Spiele können durch die entsprechende strategische Transformation ineinander übergeführt werden. Nucleolus*

**Beweis:**
Die Überschüsse rechnen sich folgendermaßen um:

$$\tilde{\mathcal{V}}(B) - \sum_{i\in B} \tilde{x}_i = \left(k\mathcal{V}(B) + \sum_{i\in B} c_i\right) - \sum_{i\in B}(kx_i + c_i) = k\left(\mathcal{V}(B) - \sum_{i\in B} x_i\right) .$$

Da $k > 0$, wird die lexikographische Ordnung der Überschüsse nicht beeinträchtigt. $\diamond$
Es genügt daher die **Berechnung** bei wesentlichen Spielen an der 0-1-reduzierten Form durchzuführen. Hier lautet das Problem des Nucleolus folgendermaßen:

$$(\delta(B))_{B\subset\mathcal{A}} \rightarrow \text{lexmaxmin} \tag{5.47}$$

$$\mathcal{V}(B) - \sum_{i\in B} x_i = \delta(B) \quad \forall B \subseteq \mathcal{A} \tag{5.48}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = 1 \tag{5.49}$$

$$x_i \geq 0 \quad i = 1, \ldots, m \tag{5.50}$$

Wir folgen hier einem Vorschlag von Behringer ([1]). Die Berechnung erfolgt stufenweise. In der ersten Stufe wird das folgende lineare Optimierungsproblem berechnet:

$$z \rightarrow \min \tag{5.51}$$

$$\mathcal{V}(B) - \sum_{i\in B} x_i \leq z \quad \forall B \subsetneqq \mathcal{A} \tag{5.52}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = 1 \tag{5.53}$$

$$x_i \geq 0 \quad i = 1, \ldots, m \tag{5.54}$$

Der Zielfunktionswert der Lösung sei mit $z^{1\,*}$ bezeichnet. Gibt es genau eine optimale Imputation $x^{1\,*} = (x_1^{1\,*}, \ldots, x_m^{1\,*})$, so ist die lexmaxmin-Lösung gefunden. Ist die optimale Lösung nicht eindeutig, dann geht man zur zweiten Stufe über.

$$\vdots$$

In der r-ten Stufe sei nun die optimale Lösung nicht eindeutig, der minimale Zielwert sei $z^{r\,*}$.
In jeder Stufe sind alle Variablen außer $z$ vorzeichenbeschränkt. $z$ kann daher immer Basisvariable bleiben.

Um von der $r$-ten Stufe zur $(r+1)$-sten Stufe zu gelangen,werden die Ungleichungen des Typs

$$\mathcal{V}(B) - \sum_{i \in B} x_i \leq z \quad \forall B \subset \mathcal{A}$$

von der $r$-ten Stufe, deren zugehörige duale Variable größer Null ist (die Nummer der Variablen ist ein wirksamer Index), durch

$$\mathcal{V}(B) - \sum_{i \in B} x_i \leq z^{r\,*}$$

ersetzt. Dieses Optimierungsproblem wird erneut gelöst. Ist die Lösung nicht eindeutig, so geht man zur nächsten Stufe über, ansonsten (Lösung hat sich nicht geändert) hat man die lexmaxmin-Lösung, also den Nucleolus $x^{r+1\,*} = (x_1^{r+1\,*}, \ldots, x_m^{r+1\,*})$ gefunden.

**Satz 5.18** *Der Nucleolus existiert für jedes kooperative Spiel und ist eindeutig.*

**Beweis:**
Ein unwesentliches Spiel hat genau eine Imputation und diese ist dann auch der Nucleolus.
Bei einem wesentlichen Spiel ersieht man aus der 0-1-reduzierten Form, daß die Menge der Imputationen nicht leer und kompakt ist. Unter der lexikographischen Ordnung ist die Menge der Imputationen vollständig geordnet. Hieraus folgt die Existenz und Eindeutigkeit. $\diamond$

**Beispiel 37 [allgemeines 0-1-reduziertes Dreipersonen-Spiel]:**

Wir wählen $\alpha_3 = \frac{2}{3}$, $\alpha_2 = \frac{1}{3}$, $\alpha_1 = 0$.
Das Tableau der **ersten Stufe** einschließlich Schlupfvariablen lautet:

| $z$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $s1$ | $s2$ | $s3$ | $s12$ | $s13$ | $s23$ | R.S. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | $\alpha_3$ |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | $\alpha_2$ |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | $\alpha_1$ |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Das optimale Simplextableau für die erste Stufe lautet:

| $z$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $s1$ | $s2$ | $s3$ | $s12$ | $s13$ | $s23$ | R.S. | $\delta(B)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | 0 | 0 | $-\frac{1}{6}$ | |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | 1 | 0 | $\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{3}$ |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | $-\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 | 0 | $\frac{1}{6}$ | $-\frac{1}{2}$ |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | $\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | -1 | 0 | $\frac{1}{6}$ | $-\frac{1}{6}$ |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | $-\frac{3}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | 1 | 1 | $\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{6}$ |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | -1 | -1 | 1 | 0 | $\frac{1}{3}$ | $-\frac{1}{6}$ |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | -1 | 0 | $\frac{1}{3}$ | $-\frac{2}{3}$ |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 | 0 | $\frac{1}{6}$ | – |

Die optimale Imputation ist hier $x_1 = \frac{1}{3}$, $x_2 = \frac{1}{2}$, $x_3 = \frac{1}{6}$.
Gleichungen Nummer 3 und 4 müssen korrigiert werden.
Das Tableau der **zweiten Stufe** einschließlich der Schlupfvariablen lautet:

| $z$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $s1$ | $s2$ | $s3$ | $s12$ | $s13$ | $s23$ | R.S. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | 0 | $\frac{1}{6}$ |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | $+\frac{1}{6}$ |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | $\frac{1}{3}$ |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Das optimale Simplextableau für die zweite Stufe lautet:

| $z$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $s1$ | $s2$ | $s3$ | $s12$ | $s13$ | $s23$ | R.S. | $\delta(B)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | $\frac{1}{2}$ | 1 | 0 | $-\frac{1}{2}$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | $-\frac{1}{2}$ | 0 | 0 | $\frac{1}{2}$ | 0 | $\frac{1}{3}$ | $-\frac{1}{2}$ |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | 0 | $\frac{1}{6}$ | $-\frac{1}{3}$ |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | -1 | 0 | $\frac{1}{6}$ | $-\frac{1}{6}$ |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | $-\frac{1}{6}$ |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | -1 | 0 | 0 | 1 | $\frac{1}{6}$ | $-\frac{1}{3}$ |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | $-\frac{1}{2}$ | 0 | 0 | $-\frac{1}{2}$ | 0 | $-\frac{1}{3}$ | $-\frac{1}{2}$ |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | $\frac{1}{2}$ | 0 | 0 | $\frac{1}{2}$ | 0 | $\frac{1}{3}$ | – |

Die optimale Imputation ist hier $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{1}{3}$, $x_3 = \frac{1}{6}$.
Gleichungen Nummer 2 und 5 müssen korrigiert werden.

Das Tableau der **dritten Stufe** einschließlich Schlupfvariablen lautet:

| $z$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $s1$ | $s2$ | $s3$ | $s12$ | $s13$ | $s23$ | R.S. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 | $\frac{1}{3}$ |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | 0 | $\frac{1}{6}$ |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | $\frac{2}{3}+\frac{1}{6}$ |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}$ |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Das optimale Simplextableau für die dritte Stufe lautet:

| $z$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $s1$ | $s2$ | $s3$ | $s12$ | $s13$ | $s23$ | R.S. | $\delta(B)$ | gleichm. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 0 | 0 | $-\frac{1}{2}$ | 0 | 0 | 0 | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | | |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | $\frac{1}{3}$ | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{3}$ |
| 0 | 0 | 0 | 1 | $\frac{1}{2}$ | 0 | 0 | 0 | -1 | $-\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{6}$ | $-\frac{1}{3}$ | $-\frac{1}{3}$ |
| 0 | 0 | 0 | 0 | $\frac{1}{2}$ | 0 | 1 | 0 | -1 | $-\frac{1}{2}$ | 0 | $-\frac{1}{6}$ | $-\frac{1}{3}$ |
| 0 | 0 | 0 | 0 | $\frac{1}{2}$ | 0 | 0 | -1 | -1 | $-\frac{1}{2}$ | 0 | $-\frac{1}{6}$ | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | $-\frac{1}{3}$ | $-\frac{1}{3}$ |
| 1 | 0 | 0 | 0 | $-\frac{1}{2}$ | 0 | 0 | 0 | 0 | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{2}{3}$ |
| 0 | 0 | 0 | 0 | $\frac{1}{2}$ | 0 | 0 | 0 | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | – | – |

Die optimale Imputation ist hier $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{1}{3}$, $x_3 = \frac{1}{6}$. Da dies der gleiche Imputation wie bei der 2.Stufe ist, ist dies auch der Nucleolus.
Die mit "gleichm." betitelte Spalte der voranstehenden Tabelle gibt zum Vergleich die Überschüsse bei der gleichmäßigen Aufteilung an: $x = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.
Schließlich folgt noch eine Tabelle der Vektoren $[(\delta(B))_B]$, aus der die stufenweise Entwicklung der lexmaxmin-Optimierung ersichtlich ist:

| | $z$ | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| gleichm. | $--$ | 0 | $-\frac{1}{3}$ | $-\frac{1}{3}$ | $-\frac{1}{3}$ | $-\frac{1}{3}$ | $-\frac{2}{3}$ |
| 1. Stufe | $-\frac{1}{6}$ | $-\frac{1}{6}$ | $-\frac{1}{6}$ | $-\frac{1}{6}$ | $-\frac{1}{3}$ | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{2}{3}$ |
| 2. Stufe | $-\frac{1}{3}$ | $-\frac{1}{6}$ | $-\frac{1}{6}$ | $-\frac{1}{3}$ | $-\frac{1}{3}$ | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ |
| 3. Stufe | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{6}$ | $-\frac{1}{6}$ | $-\frac{1}{3}$ | $-\frac{1}{3}$ | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ |

$\diamond$

### 5.2.5 Die Shapley Zuteilung

Shapley ([62]) hat im Jahre 1953 eine Berechnungsformel für eine Imputation angegeben, die sich aus vier Annahmen (Axiomen) eindeutig ergibt. Um die Axiome formulieren und verstehen zu können, benötigen wir noch eine Definition und einen Satz.

**Definition 5.14 (Automorphismus von $\mathcal{V}$)** *Sei $\pi$ eine Permutation der Spieler. $\pi B$ sei das Bild der Koalition $B$ unter dieser Permutation. $\pi$ heißt ein Automorphismus der charakteristischen Funktion $\mathcal{V}$, wenn*

$$\mathcal{V}(\pi B) = \mathcal{V}(B) \ . \tag{5.55}$$

**Satz 5.19** *Die Menge aller charakteristischen Funktionen $\mathcal{V}$ für eine feste Spielermenge $\mathcal{A}$ bildet einen konvexen Kegel, d.h. mit $\mathcal{V}_1$ und $\mathcal{V}_2$ ist auch*

$$\mathcal{W} = \lambda_1 \mathcal{V}_1 + \lambda_2 \mathcal{V}_2 \quad \forall \lambda_1, \lambda_2 \geq 0$$

*eine charakteristische Funktion.*

**Beweis:**
$\mathcal{W}$ hat die Eigenschaften einer charakteristischen Funktion. $\diamond$

**Definition 5.15 (Shapley's Axiome)** *Gegeben sei ein kooperatives Spiel $\Gamma_K = (\mathcal{A}, \mathcal{V}$. Eine Zuteilung $\Phi(\mathcal{V}) = (\Phi_1(\mathcal{V}), \Phi_2(\mathcal{V}), \ldots, \Phi_m(\mathcal{V}))$ für dieses Spiel, die die folgenden Bedingungen erfüllt, heißt Shapley-Zuteilung (auch Shapley-Wert):*

**(1)** $\sum_{i=1}^m \Phi_i(\mathcal{V}) = \mathcal{V}(\mathcal{A})$

**(2)** *Falls für ein gewisses $i$*

$$\mathcal{V}(B) = \mathcal{V}(B \backslash \{i\}) + \mathcal{V}(\{i\}) \quad \forall B : \ B \subset \mathcal{A} \wedge i \in B$$

*gilt, so gilt $\Phi_i(\mathcal{V}) = \mathcal{V}(\{i\})$*

**(3)** *Für jeden Automorphismus $\pi$ von $\mathcal{V}$ gilt $\Phi_i(\mathcal{V}) = \Phi_{\pi i}(\mathcal{V})$*

**(4)** *Sind $\mathcal{V}$ und $\mathcal{W}$ zwei charakteristische Funktionen für die gleiche Spielermenge, dann soll gelten*

$$\Phi(\mathcal{V} + \mathcal{W}) = \Phi(\mathcal{V}) + \Phi(\mathcal{W}) \ .$$

**Bemerkung.** Vergleiche zur Bedingung (1) die Definition (5.2). Ein Spieler, der die Bedingung (2) erfüllt, wird manchmal auch als Dummy-Spieler(Strohmann) bezeichnet. Bedingung (3) sagt aus, daß die Zuteilung die Symmetrien im Spiel berücksichtigen soll. Setzt sich der Nutzen für die Koalitionen additiv zusammen, dann wird dies durch die Additivitätsbedingung (4) geeignet berücksichtigt.
Erstaunlicherweise folgt aus diesen Annahmen die Existenz und Eindeutigkeit einer solchen Zuteilung(Imputation). Darüberhinaus gilt die folgende Formel.

**Satz 5.20 (Formel der Shapley Zuteilung)** *Die Shapley-Zuteilung* $\Phi(\mathcal{V})$ *ist für jedes Spiel durch die folgende Berechnungsformel:*

$$\Phi_i(\mathcal{V}) = \sum_{B:\, B \subset \mathcal{A}} (\mathcal{V}(B) - \mathcal{V}(B \backslash \{i\})) \frac{(|B|-1)!(m-|B|)!}{m!} \quad i = 1, \ldots, m \tag{5.56}$$

*gegeben.*

Der Beweis erfolgt in mehreren Schritten und wird in mehrere Sätze aufgeteilt.

**Definition 5.16** *Unter den* ***Randwerten von Koalitionen*** $B$ *werden folgende rekursiv definierte Größen* $r_B$*:*

$$r_{\{i\}}(\mathcal{V}) = \mathcal{V}(\{i\}) \quad \forall i \in \mathcal{A} \tag{5.57}$$

$$r_B(\mathcal{V}) = \mathcal{V}(B) - \sum_{L:\, L \subsetneqq B} r_L(\mathcal{V}) \quad \forall B:\, B \subset \mathcal{A} \wedge |B| > 1 \tag{5.58}$$

*verstanden.*

**Satz 5.21** *Für den Randwert* $r_B$ *einer Koalition* $B$ *gilt:*

$$r_B(\mathcal{V}) = \sum_{L:\, L \subset B} (-1)^{|B|-|L|} \mathcal{V}(L) \ .$$

**Beweis:**
Induktion über die Anzahl der Elemente der Teilmengen. $\diamond$
**Bemerkung.** Zur Herleitung der Shapley-Zuteilung wird die charakteristische Funktion unter Zuhilfenahme der Randwerte $r_B$ als Linearkombination von "elementaren" charakteristischen Funktionen dargestellt. Die Berechnung der Shapley-Zuteilung kann dann auf die Berechnung der Shapley-Zuteilung elementarer charakteristischer Funktionen zurückgeführt werden.

**Definition 5.17** *Für ein $B \subset \mathcal{A}$ nennt man die folgende Funktion*

$$\mathcal{V}_B : \mathfrak{P}(\mathcal{A}) \to \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad \mathcal{V}_B(L) = \begin{cases} 1 & \text{falls } B \subset L \\ 0 & \text{falls } B \not\subset L \end{cases} \tag{5.59}$$

*eine elementare charakteristische Funktion.*

**Bemerkung.** Der Spieler $i \notin B$ ist im Sinne von Axiom (2) der Definition (5.15) ein Dummy-Spieler für $\mathcal{V}_B$. Es gilt nämlich für $i \notin B$ und $\forall L : L \subset \mathcal{A} \wedge i \in L$

$$\begin{aligned} B \subset L \quad &\Rightarrow \quad \underbrace{\mathcal{V}_B(L)}_{1} = \underbrace{\mathcal{V}_B(L \backslash \{i\})}_{1} + \underbrace{\mathcal{V}_B(\{i\})}_{0} \\ B \not\subset L \quad &\Rightarrow \quad \underbrace{\mathcal{V}_B(L)}_{0} = \underbrace{\mathcal{V}_B(L \backslash \{i\})}_{0} + \underbrace{\mathcal{V}_B(\{i\})}_{0} \end{aligned}$$

In beiden Fällen ist die Bedingung erfüllt, daher ist Spieler $i$ ein Dummy.

**Satz 5.22** *Für das Spiel $\Gamma_K(\mathcal{A}, c\mathcal{V}_B)$ mit einer Konstanten $c \in \mathbb{R}$ ist die Shapley-Zuteilung durch*

$$\Phi_i(c\mathcal{V}_B) = \begin{cases} \frac{c}{|B|} & \text{falls } i \in B \\ 0 & \text{falls } i \notin B \end{cases} \tag{5.60}$$

*gegeben.*

**Beweis:**
Jede Permutation $\pi$, die $B$ auf sich abbildet ist ein Automorphismus der charakteristischen Funktion $c\mathcal{V}_B$. Daher ist nach Axiom (3) der Definition (5.15) $\Phi_i(c\mathcal{V}_B) = \Phi_{\pi i}(c\mathcal{V}_B)$ für $i \in B$.
Im Sinne von Axiom (2) der Definition (5.15) ist jedes $i \notin B$ ein Dummy-Spieler für die charakteristische Funktion $c\mathcal{V}_B$. Daher gilt $\Phi_i(c\mathcal{V}_B) = c\mathcal{V}_B(\{i\}) = 0$. Wegen Axiom (1) der Definition (5.15) folgt dann die Aussage des Satzes. $\diamond$

**Satz 5.23** *Die charakteristische Funktion $\mathcal{V}$ eines Spieles $\Gamma_K(\mathcal{A}, \mathcal{V})$ kann als Linearkombination elementarer charakteristischer Funktionen dargestellt werden:*

$$\mathcal{V} = \sum_{\substack{B:\, B \subset \mathcal{A} \\ B \neq \emptyset}} r_B(\mathcal{V}) \mathcal{V}_B \ , \tag{5.61}$$

*wobei die $r_B$ die Randwerte von Koalitionen $B$ sind. Die Darstellung ist eindeutig.*

**Beweis:**
Es muß gezeigt werden:

$$\mathcal{V}(M) = \sum_{\substack{B:\, B\subset\mathcal{A}\\ B\neq\emptyset}} r_B(\mathcal{V})\mathcal{V}_B(M) \ .$$

Für $r_B(\mathcal{V})$ setzen wir ein:

$$r_B(\mathcal{V}) = \sum_{L:\, L\subset B} (-1)^{|B|-|L|}\mathcal{V}(L) \ .$$

Somit ergibt sich

$$\mathcal{V}(M) = \sum_{\substack{B:\, B\subset\mathcal{A}\\ B\neq\emptyset}} \sum_{L:\, L\subset B} (-1)^{|B|-|L|}\mathcal{V}(L)\mathcal{V}_B(M) \ .$$

Berücksichtigt man die Definition von $\mathcal{V}_B(M)$, so folgt weiter

$$\mathcal{V}(M) = \sum_{\substack{B:\, B\subset M\\ B\neq\emptyset}} \sum_{L:\, L\subset B} (-1)^{|B|-|L|}\mathcal{V}(L) \ .$$

Vertauschen der beiden Summen und abzählen der $(-1)^{|B|-|L|}$ liefert

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}(M) &= \sum_{L\subset M}\left[\sum_{B:\, L\subset B\subset M}(-1)^{|B|-|L|}\right]\mathcal{V}(L) \\
&= \sum_{L\subset M}\left[\sum_{b=|L|}^{|M|}\sum_{\substack{|B|=b\\ B:\, L\subset B\subset M}}(-1)^{|B|-|L|}\right]\mathcal{V}(L) \ .
\end{aligned}$$

Da eine Menge $B$ von $b$ Elementen, die eine Menge $L$ enthält, aus einer Menge $M$ auf $\binom{|M|-|L|}{b-|L|}$ verschiedene Weisen gewählt werden kann, folgt weiter

$$\mathcal{V}(M) = \sum_{L\subset M}\left[\sum_{b=|L|}^{|M|}\binom{|M|-|L|}{b-|L|}(-1)^{|B|-|L|}\right]\mathcal{V}(L) \ . \tag{5.62}$$

Die Indextransformation $\beta = b-|L|$ und die Anwendung der binomischen Formel liefert

$$\begin{aligned}
\sum_{b=|L|}^{|M|}\binom{|M|-|L|}{b-|L|}(-1)^{|B|-|L|} &= \sum_{\beta=0}^{|M|-|L|}\binom{|M|-|L|}{\beta}(-1)^{\beta}(+1)^{|M|-|L|-\beta} = \\
&= \begin{cases} 0 & \text{falls } |M|-|L|>0 \\ 1 & \text{falls } |M|-|L|=0 \end{cases} \ .
\end{aligned}$$

Eingesetzt ergibt sich

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}(M) = \sum_{L=M} &\left[\sum_{b=|L|}^{|M|} \binom{|M|-|L|}{b-|L|} (-1)^{|B|-|L|}\right] \mathcal{V}(L) \\
&+ \sum_{\substack{L\subset M\\ L\neq M}} \left[\sum_{b=|L|}^{|M|} \binom{|M|-|L|}{b-|L|} (-1)^{|B|-|L|}\right] \mathcal{V}(L) = \\
= \mathcal{V}(M) + 0 \ .
\end{aligned}$$

Damit ist die Darstellung einer charakteristischen Funktion durch elementare charakteristische Funktionen gezeigt. Bleibt noch die Eindeutigkeit. Angenommen es gäbe zwei verschiedene Darstellungen:

$$\mathcal{V}(S) = \sum_{\substack{B:\, B\subset\mathcal{A}\\ B\neq\emptyset}} \lambda_B(\mathcal{V})\mathcal{V}_B(S) = \sum_{\substack{B:\, B\subset\mathcal{A}\\ B\neq\emptyset}} \tilde{\lambda}_B(\mathcal{V})\mathcal{V}_B(S) \ .$$

Wir beweisen die Gleichheit der Koeffizienten durch Induktion über die Menge aller Untermengen $S$ einer Menge $M \subset \mathcal{A}$. Zunächst liefert $S = \{i\}$ die Gleichheit von $\tilde{\lambda}_{\{i\}} = \lambda_{\{i\}}$. Nimmt man nun an, daß für alle $S \subsetneqq M$ die Gleichheit $\tilde{\lambda}_S = \lambda_S$ bereits bewiesen ist. Dann folgt für $S = M$ die Gleichheit $\tilde{\lambda}_M = \lambda_M$, da für $B \not\subset M$ die Summanden $\mathcal{V}_B$ gleich Null sind und für $B \subset M$ nach Induktionsannahme $\tilde{\lambda}_B = \lambda_B$ gilt. Damit ist die Eindeutigkeit der Darstellung bewiesen. $\diamond$

Zum Beweis der Formel (5.56) benötigen wir noch den folgenden Satz.

**Satz 5.24** *Falls die Differenz $\mathcal{V} - \mathcal{W}$ zweier charakteristischer Funktionen ebenfalls eine charakteristische Funktion ist, dann gilt für die Shapley-Zuteilung*

$$\Phi(\mathcal{V} - \mathcal{W}) = \Phi(\mathcal{V}) - \Phi(\mathcal{W}) \ .$$

**Beweis:**
Nach Axiom (4) von Definition (5.15) folgt aus $\mathcal{V} = (\mathcal{V} - \mathcal{W}) + \mathcal{W}$ die Behauptung des Satzes. $\diamond$

**Beweis [Formel (5.56)]:**
Nach Satz (5.23), Axiom (4) von Definition (5.15) und Satz (5.24) folgt

$$\Phi_i(\mathcal{V}) = \sum_{\substack{B:B\subset\mathcal{A}\\ i\in B}} \frac{r_B(\mathcal{V})}{|B|} \ .$$

Verwendet man die Darstellung (5.16) für $r_B(\mathcal{V})$ und vertauscht anschließend die beiden Summationen, dann ergibt sich:

$$\begin{aligned}\Phi_i(\mathcal{V}) &= \sum_{\substack{B: B\subseteq\mathcal{A}\\ i\in B}} \frac{1}{|B|}\left[\sum_{L\subset B}(-1)^{|B|-|L|}\mathcal{V}(L)\right]\\ &= \sum_{L\subset\mathcal{A}}\left[\sum_{B:\, L\cup\{i\}\subset B}\frac{1}{|B|}(-1)^{|B|-|L|}\right]\mathcal{V}(L)\end{aligned}$$

Es gibt genausoviel Teilmengen $L$ von $B$ ohne $i$ wie mit $i$. Wenn $i \in L$ ist, dann gilt

$$\gamma_i(L) = \sum_{B:\, L\cup\{i\}\subset B}\frac{1}{|B|}(-1)^{|B|-|L|} = -\gamma_i(L\backslash\{i\})$$

und berücksichtigt man $\mathcal{V}(L) = \mathcal{V}(L\backslash\{i\})$, falls $i \notin L$, so folgt weiter

$$\Phi_i(\mathcal{V}) = \sum_{L\subset\mathcal{A}}\gamma_i(L)(\mathcal{V}(L) - \mathcal{V}(L\backslash\{i\}))\ .$$

Nach einer Argumentation, die zu Formel (5.62) geführt hat, ergibt sich

$$\gamma_i(L) = \sum_{b=|L|}^{m}\frac{1}{b}(-1)^{b-|L|}\binom{m-|L|}{b-|L|}\ .$$

Wir verwenden nun

$$\frac{1}{b} = \int_0^1 x^{b-1}dx\ ,$$

die binomische Formel und setzen $\ell = |L|$.

$$\begin{aligned}&\sum_{b=1}^{m}\frac{1}{b}(-1)^{b-\ell}\binom{m-\ell}{b-\ell}\\ &\qquad= \sum_{b=1}^{m}\int_0^1 x^{b-1}dx(-1)^{b-\ell}\binom{m-\ell}{b-\ell}\\ &\qquad= \int_0^1\left[\sum_{b=1}^{m}x^{b-\ell}(-1)^{b-\ell}\binom{m-\ell}{b-\ell}\right]x^{\ell-1}dx\\ &\qquad= \int_0^1(1-x)^{m-\ell}x^{\ell-1}dx = \frac{(m-\ell)>(\ell-1)>}{m>}\ .\end{aligned}$$

Das zuletzt angegebene Integral stellt die sogenannte Betafuntkion dar, die für ganzzahlige $m$ und $\ell$ den angeführten Wert hat. Hieraus folgt schließlich die Behauptung. ◇

Wir rechnen nun nach, daß die Shapley-Zuteilung tatsächlich eine Imputation in dem früher beschriebenen Sinne ist.
**Nachweis** von $\Phi_i(\mathcal{V}) \geq \mathcal{V}(\{i\})$
Wegen der Superadditivität gilt $\mathcal{V}(B) - \mathcal{V}(B\backslash\{i\}) \geq \mathcal{V}(\{i\})$, falls $i \in B$. Aus Formel (5.56) folgt dann

$$\Phi_i(\mathcal{V}) \geq \mathcal{V}(\{i\}) \sum_{\substack{B:\, B \subseteq \mathcal{A} \\ i \in B}} \frac{(|B|-1)!(m-|B|)!}{m!} \quad i = 1, \ldots, m$$

Als nächstes kann gezeigt werden

$$\sum_{\substack{B:\, B \subseteq \mathcal{A} \\ i \in B}} \frac{(|B|-1)!(m-|B|)!}{m!} = 1 \quad i = 1, \ldots, m$$

Nach einer bereits mehrfach angewendeten Methode des Berechnens der Anzahl der verschiedenen Mengen $B$ $(i \in B)$ folgt

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{B:\, B \subseteq \mathcal{A} \\ i \in B}} \frac{(|B|-1)!(m-|B|)!}{m!} \\
&\quad = \sum_{b=1}^{m} \sum_{\substack{B:\, |B|=b \\ i \in B}} \frac{(|B|-1)!(m-|B|)!}{m!} \\
&\quad = \sum_{b=1}^{m} \frac{(b-1)!(m-b)!}{m!} \times \frac{(m-1)!}{(b-1)!(m-b)!} \\
&\quad = \sum_{b=1}^{m} \frac{1}{m} \\
&\quad = 1\ .
\end{aligned}$$

**Nachweis** von $\sum_{i=1}^{m} \Phi_i(\mathcal{V}) = \mathcal{V}(\mathcal{A})$

$$\sum_{i=1}^{m} \Phi_i(\mathcal{V}) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{\substack{B:\, B \subseteq \mathcal{A} \\ i \in B}} \frac{(|B|-1)!(m-|B|)!}{m!} (\mathcal{V}(B) - \mathcal{V}(B\backslash\{i\}))$$

Betrachten wir nun eine feste Menge $L$. Diese erscheint mit dem entsprechenden Koeffizienten als Minuend $|L|$-mal und als Subtrahend $(m-|L|)$-mal. Dies ergibt für den Minuend einen Koeffizienten von $|L|\frac{(|L|-1)!(m-|L|)!}{m!} = \frac{|L|!(m-|L|)!}{m!}$. Falls $L = \mathcal{A}$ ist, ist dieser Koeffizient gleich.

Für den Subtrahend ergibt dies einen Koeffizienten (beachte Koeffizient beruht auf $(|L|+1)!$) von $-(m-|L|)\frac{|L|!(m-|L|-1)!}{m!} = -\frac{(|L|-1)!(m-|L|)!}{m!}$. Falls $L = \mathcal{A}$ ist, ist dieser Koeffizient gleich 0.
Alle Summanden bis auf den von $\mathcal{V}(\mathcal{A})$ heben sich auf. Daher bleibt nur noch $\mathcal{V}(\mathcal{A})$ übrig.

**Nachweis** der restlichen Axiome:
**Axiom (2)**: der Dummy-Spieler. Für alle $B$ gilt hier $\mathcal{V}(B) - \mathcal{V}(B\backslash\{i\}) = \mathcal{V}(\{i\})$, falls $i \in B$. Aus dem Obigen folgt dann $\Phi_i(\mathcal{V}) = \mathcal{V}(\{i\})$.
**Axiom (3)**: Wenn $\pi$ ein Automorphismus ist,dann bleibt $\mathcal{V}(\pi L) = \mathcal{V}(L)$ für alle $L$ und somit auch $\Phi_i(\mathcal{V})$ unverändert.
**Axiom (4)**: Die Additivität von $\Phi(\mathcal{V})$ folgt aus der Darstellung als Linearkombination von Werten der charakteristischen Funktion $\mathcal{V}$.

**Satz 5.25** *Die Shapley-Zuteilungen strategisch äquivalenter kooperativer Spiele $\Gamma_K$ und $\tilde{\Gamma}_K$ mit den Parametern $k > 0$ und $c_i \in \mathbb{R}$ entsprechen einander eineindeutig:*

$$\Phi_i(\tilde{\mathcal{V}}) = k\Phi_i(\mathcal{V}) + c_i \qquad i = 1, \ldots, m \,. \tag{5.63}$$

**Beweis:**
Seien $\mathcal{V}$ und $\tilde{\mathcal{V}}$ zwei strategisch äquivalente charakteristische Funktionen:

$$\tilde{\mathcal{V}}(B) = k\mathcal{V}(B) + \sum_{i \in B} c_i \qquad k > 0\,, c_i \in \mathbb{R} \quad \forall B \,.$$

Unter Verwendung der elementaren charakteristischen Funktionen $\mathcal{V}_{\{i\}}$, $i = 1, \ldots, m$ ergibt sich die folgende Darstellung

$$\tilde{\mathcal{V}}(B) = k\mathcal{V}(B) + \sum_{i=1}^{m} c_i \mathcal{V}_{\{i\}}(B) \qquad k > 0\,, c_i \in \mathbb{R} \quad \forall B \,.$$

Satz (5.24) liefert dann

$$\Phi_j(\tilde{\mathcal{V}}) = k\Phi_j(\mathcal{V}) + \sum_{i=1}^{m} \Phi_j(c_i \mathcal{V}_{\{i\}}) \,.$$

Nach Satz (5.22) gilt

$$\Phi_j(c_i \mathcal{V}_{\{i\}}) = \begin{cases} c_i & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{falls } i \neq j \end{cases} \,,$$

und es folgt die Behauptung des Satzes. $\diamond$

**Beispiel 38** [**Fortsetzung Umweltschutz von Seite 100**]:

| $B$ | $\|B\|$ | $\frac{(m-\|B\|)!(\|B\|-1)!}{m!}$ | $\mathcal{V}$ | $\mathcal{V}(B)-\mathcal{V}(B\backslash\{1\})$ | $\mathcal{V}(B)-\mathcal{V}(B\backslash\{2\})$ | $\mathcal{V}(B)-\mathcal{V}(B\backslash\{3\})$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\{1\}$ | 1 | 1/3 | −3 | −3 | 0 | 0 |
| $\{2\}$ | 1 | 1/3 | −3 | 0 | −3 | 0 |
| $\{3\}$ | 1 | 1/3 | −3 | 0 | 0 | −3 |
| $\{1,2\}$ | 2 | 1/6 | −2 | 1 | 1 | 0 |
| $\{1,3\}$ | 2 | 1/6 | −2 | 1 | 0 | 1 |
| $\{2,3\}$ | 2 | 1/6 | −2 | 0 | 1 | 1 |
| $\{1,2,3\}$ | 3 | 1/3 | −2 | 0 | 0 | 0 |
| $i$ | – | – | – | 1 | 2 | 3 |
| $\Phi_i$ | – | – | – | −2/3 | −2/3 | −2/3 |

$\diamond$

**Beispiel 39** [**Montagetrupp mit Vorarbeiter**]:

Der Spieler Nummer $m$ zähle als Vorarbeiter. Folgende charakteristische Funktion wird festgelegt:

$$\mathcal{V}(B) = \begin{cases} 1 & \text{falls } B : \{i,n\} \subset B \quad i \neq m\,, i = 1,\ldots,m-1 \\ 1 & \text{falls } B : \{1,2,\ldots,m-1\} \subset B \\ 0 & \text{falls } B = \{m\} \\ 0 & \text{falls } B : m \notin B \wedge |B| < m-1 \end{cases}$$

Die Shapley-Zuteilung kann wie folgt berechnet werden. Jede Permutation $\pi$ mit $\pi\, m = m$ ist ein Automorphismus der charakteristischen Funktion, daher gilt

$$\Phi_i(\mathcal{V}) = \frac{1-\Phi_m(\mathcal{V})}{m-1}\ .$$

Bleibt also die Berechnung von $\Phi_m(\mathcal{V})$. Es gilt nach Gleichung (5.56)

$$\Phi_m(\mathcal{V}) = \sum_{B:\, m\in B} \frac{(|B|-1)!(m-|B|)!}{m!}(\mathcal{V}(B) - \mathcal{V}(B\backslash\{m\}))\ .$$

Wenn $m \in B$ dann gilt

$$\mathcal{V}(B) = \begin{cases} 1 & \text{falls } |B| > 1 \\ 0 & \text{falls } |B| = 1 \end{cases} \quad \text{und} \quad \mathcal{V}(B\backslash\{m\}) = \begin{cases} 1 & \text{falls } |B| = m \\ 0 & \text{falls } |B| < m \end{cases}\ .$$

Es brauchen dann nur die Summanden ungleich Null berücksichtigt werden:

$$\Phi_m(\mathcal{V}) = \sum_{b=2}^{m-1} \frac{(b-1)!(m-b)!}{m!} \sum_{\substack{B:|B|=b \\ m\in B}} 1\ .$$

Mit

$$\sum_{\substack{B:|B|=b \\ m\in B}} 1 = \binom{m-1}{b-1}$$

folgt

$$\Phi_i(\mathcal{V}) = \begin{cases} \dfrac{2}{m(m-1)} & \text{falls } i \neq m \\ \dfrac{(m-2)}{m} & \text{falls } i = m \end{cases}\ .$$

Die Auszahlung an den Vorarbeiter ist also $\frac{1}{2}(m-1)(m-2)$-mal größer als an den "einfachen" Arbeiter. Man könnte dies als Verhältnis der Löhne deuten. Es bleibt jedoch die schwierige Aufgabe, die charakteristische Funktion möglichst wirklichkeitsnah zu ermitteln.
Schließlich sei noch bemerkt, daß dieses Spiel die Komplementäreigenschaft besitzt und daher auf ein $m$-Personen-Konstantsummenspiel zurückgeführt werden kann. Aus der ursprünglichen Definition von $\mathcal{V}$ folgt

$$\mathcal{V}(\mathcal{A}\backslash B) = \begin{cases} 0 & \text{falls } B: \{i,n\} \subset B \quad i \neq m\,, i = 1,\dots,m-1 \\ 0 & \text{falls } B: \{1,2,\dots,m-1\} \subset B \\ 1 & \text{falls } B = \{m\} \\ 1 & \text{falls } B: m \notin B \wedge |B| < m-1 \end{cases}$$

und somit gilt die Komplementäreigenschaft $\mathcal{V}(\mathcal{A}) = \mathcal{V}(\mathcal{A}\backslash\mathcal{B}) + \mathcal{V}(B)$. Da es sich außerdem um ein wesentliches Spiel handelt ( $\mathcal{V}(\mathcal{A}) = 1$, $\mathcal{V}(\{i\}) = 0$ ), ist der Kern leer.

$\diamond$

## 5.3 Aufgaben

**Aufgabe 20**(intern NGameA11):

Wir betrachten folgendes Fernseh-Werbeproblem. Drei Firmen möchten ihre konkurrierenden Produkte für die nahen Feiertage als passende Geschenkidee anpreisen. Jede Firma hat die Möglichkeit ihre Werbung entweder beim Frühstücksfernsehen oder am Abend vor der Tagesschau zu plazieren. Wenn mehr als eine Firma zur gleichen Werbezeit ihr Produkt anpreist, so kommt sich der potentielle Käufer veralbert vor und die Werbung dieser Firmen schlägt fehl. Die Firma, der es gelingt, allein am Morgen zu werben, kann eine Menge von 1 Einheit verkaufen; die Firma, der es gelingt, allein am Abend zu werben, kann eine Menge von 2 Einheiten verkaufen. Es ergeben sich folgende Auszahlungen:

| | Auszahlung | | |
|---|---|---|---|
| Strategie | Firma1 | Firma2 | Firma3 |
| (1,1,1) | 0 | 0 | 0 |
| (1,1,2) | 0 | 0 | 2 |
| (1,2,1) | 0 | 2 | 0 |
| (1,2,2) | 1 | 0 | 0 |
| (2,1,1) | 2 | 0 | 0 |
| (2,1,2) | 0 | 1 | 0 |
| (2,2,1) | 0 | 0 | 1 |
| (2,2,2) | 0 | 0 | 0 |

Die gemischten Strategien der Firmen 1, 2 bzw. 3 seien mit $(x_1, 1-x_1)^T$, $(x_2, 1-x_2)^T$ bzw. $(x_3, 1-x_3)^T$ bezeichnet.Zeigen Sie, daß $x_1 = x_2 = x_3 = \sqrt{2} - 1$ ein Nash-Gleichgewicht ist.
Berechnen Sie ferner die charakteristische Funktion des kooperativen Spieles, das diesem nichtkooperativen Dreipersonen- Spiel zugeordnet ist!

**Aufgabe 21**(intern NGameA12):
Geben Sie die Klassen von kooperativen Zwei- und Dreipersonen-Spielen an, wenn diese aus nichtkooperativen Konstantsummen-Spielen enstanden sind.

**Aufgabe 22**(intern NGameA14):
Betrachten Sie das Wasserversorgungs-Spiel aus der Vorlesung: Für vier Gemeinden soll eine neue Wasserversorgung errichtet werden. Jeweils zwei Gemeinden liegen nahe beisammen, das jeweils andere Paar von Gemeinden müßte durch eine Pipeline angeschlossen werden. Es könnte auch jede Gemeinde für sich, oder die beiden Gemeindepaare für sich eine Wasserversorgung errichten. Für die verschiedenen Koalitionen ergibt sich folgende

Kostenfunktion

$$
\begin{gathered}
c(\{1,2,3,4\}) = 700 \\
c(\{1,2,3\}) = c(\{1,2,4\}) = c(\{1,3,4\}) = c(\{2,3,4\}) = 600 \\
c(\{1,3\}) = c(\{1,4\}) = c(\{2,3\}) = c(\{2,4\}) = 500 \\
c(\{1,2\}) = c(\{3,4\}) = 400 \\
c(\{1\}) = c(\{2\}) = c(\{3\}) = c(\{4\}) = 300
\end{gathered}
$$

Für die Kostenfunktion gilt Subadditivität: $c(A)+c(B) \geq c(A \cup B)$ $(A \cap B = \emptyset)$. Als charakteristische Funktion des Spieles setzen wir daher $\mathcal{V}(A) := -c(A)$.

(1) Zu welcher äquivalenzklasse gehört dieses Vierpersonen-Spiel? Besitzt es die Komplementäreigenschaft?

(2) Geben Sie die Menge der Imputationen an (Originalwerte, nicht die Imputationen des Repräsentanten der äquivalenzklasse)!

(3) Berechnen Sie wenigstens ein Element des Kernes! Was wäre zu tun, um den vollständigen Kern darzustellen?

(Hinweis: Sie können z.B. Maple verwenden.)

**Aufgabe 23**(intern NGameA13):
Betrachten Sie ein allgemeines kooperatives Dreipersonen-Spiel. Stellen Sie die Imputationen als baryzentrische Koordinaten dar und geben Sie die Menge der von einer gewissen Imputation $x$ dominierten Imputationen an.

**Aufgabe 24**(intern NGameA15):
Zeigen Sie, daß die folgende Funktion $\mathcal{V}$ eine charakteristische Funktion für ein Dreipersonenspiel ist:

$$
\begin{gathered}
\mathcal{V}(\{1\}) = \mathcal{V}(\{2\}) = \mathcal{V}(\{3\}) = 0 \\
\mathcal{V}(\{2,3\}) = \mathcal{V}(\{1,3\}) = \mathcal{V}(\{1,2\}) = 2 \\
\mathcal{V}(\{1,2,3\}) = 3 \quad \mathcal{V}(\emptyset) = 0 \, .
\end{gathered}
$$

Geben Sie den Kern dieses Spieles an!

**Aufgabe 25**(intern NGameA16):

Geben Sie den Kern für das Dreipersonen-Spiel mit der folgenden charakteristischen Funktion an:

$$\begin{gathered}\mathcal{V}(\{1\}) = \mathcal{V}(\{2\}) = \mathcal{V}(\{3\}) = -1 \\ \mathcal{V}(\{2,3\}) = \mathcal{V}(\{1,3\}) = \mathcal{V}(\{1,2\}) = 0 \\ \mathcal{V}(\{1,2,3\}) = 3 \quad \mathcal{V}(\emptyset) = 0 \ .\end{gathered}$$

**Aufgabe 26**(intern NGameA17):
Zeigen Sie, daß es für jede Imputation des folgenden Dreipersonen-Spiels eine VNM-Lösung gibt, in der sie enthalten ist:

$$\begin{gathered}\mathcal{V}(\{1\}) = \mathcal{V}(\{2\}) = \mathcal{V}(\{3\}) = 2 \\ \mathcal{V}(\{2,3\}) = \mathcal{V}(\{1,3\}) = \mathcal{V}(\{1,2\}) = 6 \\ \mathcal{V}(\{1,2,3\}) = 8 \quad \mathcal{V}(\emptyset) = 0 \ .\end{gathered}$$

**Aufgabe 27**(intern NGameA18):

(1) Geben Sie den Kern für alle kooperativen Zweipersonen-Spiele an!

(2) Geben Sie hinreichende Bedingungen für einen leeren Kern bei Vierpersonen-Spielen an!

**Aufgabe 28**(intern NGameA19):
Geben Sie jeweils eine VNM-Lösung für kooperative Zweipersonen-Spiele und kooperative Dreipersonen-Spiele an

**Aufgabe 29**(intern NGameA20):
Berechnen Sie den Nucleolus für

(1) alle kooperativen Zweipersonen-Spiele,

(2) ein kooperatives Dreipersonen-Spiel in 0-1-reduzierter Form mit $\mathcal{V}(\{2,3\}) = \frac{3}{4}$, $\mathcal{V}(\{1,3\}) = \mathcal{V}(\{1,2\}) = \frac{1}{2}$,

(3) ein kooperatives Dreipersonen-Spiel mit der Komplementäreigenschaft.

**Aufgabe 30**(intern prufg98A03):
Wir betrachten hier nochmals das aus der übung bekannte Problem des Colonel Blotto.
Colonel Blotto muß zwei Gebirgspässe gegen den Feind verteidigen. Er hat 6 Kompanien zur Verfügung, sein Gegner 5 Kompanien. Stellt Colonel Blotto auf einem Pass weniger Kompanien auf als sein Gegner, dann verliert er alle diese Kompanien. Stellt er mehr Kompanien auf als sein Gegner, dann verliert sein Gegner alle dort aufgestellten Kompanien. Stehen auf beiden Seiten gleich viel Kompanien, dann erleidet keiner einen Verlust. Die Verluste des Gegners zählt Colonel Blotto als seinen Gewinn. Verlust und Gewinn auf beiden Pässen werden zusammengezählt. Der Gegner zählt genauso, sodaß ein Zweipersonen-Nullsummenspiel entsteht. Es ergeben sich folgende Strategien und Auszahlungen für Colonel Blotto:

| | 4:1 | 3:2 | 2:3 | 1:4 |
|---|---|---|---|---|
| 5:1 | 4 | 2 | 1 | 0 |
| 4:2 | 1 | 3 | 0 | -1 |
| 3:3 | -2 | 2 | 2 | -2 |
| 2:4 | -1 | 0 | 3 | 1 |
| 1:5 | 0 | 1 | 2 | 4 |

Bekanntlich ist der Spielwert dieses Zweipersonen-Nullsummen-Spiels $\frac{14}{9}$ (gleich der Auszahlung an Colonel Blotto).
Colonel Blotto und sein Gegner sind kampfesmüde. Sie erinnern sich, daß Sie beim Studium das Fach Spieltheorie gehört haben und möchten nun den kooperativen Aspekt ihres Spieles betrachten. Sie erhoffen sich davon eine günstigere Lösung ihres Problems. Was können Sie hierzu beitragen? Beantworten Sie folgende Fragen:

1. Berechnen Sie die dem beschriebenen Spiel zugeordnete charakteristische Funktion.

2. Welcher äquivalenzklasse gehört dieses Spiel an?

3. Welche Zuteilungen (Imputationen) gibt es?

4. Geben Sie Schmeidlers Nucleolus an!

**Aufgabe 31**(intern NGameA21):

Das folgende Spiel versucht das Verhältnis von Großgrundbesitzer und armen Landarbeitern nachzumodellieren.
Es seien $m$ Spieler gegeben und der $m$-te Spieler sei der Großgrundbesitzer. Ferner sei eine Funktion $f : \mathcal{N}_0 \to \mathbb{R}$ gegeben. Die charakteristische Funktion wird folgendermaßen festgelegt:

$$\mathcal{V}(B) = \begin{cases} f(|B|-1) & \text{falls } m \in B \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$

Berechnen Sie die Shapley-Zuteilung!
Sind Bedingungen an die Funktion $f$ nötig?

**Aufgabe 32**(intern NGameA22):
Wir betrachten nun einen ausgeglichenen Markt für ein Produkt. Es gebe $p = |P|$ Verkäufer und $q = |Q|$ Käufer, also $p+q$ agierende Personen (Spieler). Der Verkäufer Nummer $k$ besitze die Menge $x_k\,(\geq 0)$ des Produktes, der Käufer Nummer $\ell$ möchte $y_\ell\,(\geq 0)$ Mengeneinheiten des Produktes kaufen. Die Ausgeglichenheit des Marktes verlangt

$$\sum_{k=1}^{p} x_k = \sum_{\ell=1}^{q} y_\ell \ .$$

Der Wert der charakteristischen Funktion für die Koalition $B$ wird festgelegt zu

$$\mathcal{V}(B) = \min\left\{ \sum_{k\in P\cap B} x_k \, , \sum_{\ell\in Q\cap B} y_\ell \right\} .$$

Berechnen Sie die Shapley-Zuteilung!

**Aufgabe 33**(intern NGameA24):
Geben Sie die Shapley-Zuteilung für kooperative Zwei- und Dreipersonen-Spiele an!

**Aufgabe 34**(intern NGameA23):
Wir betrachten ein Gremium, bei dem es zwei verschiedene Typen von Mitgliedern gibt, die A-Mitglieder und die B-Mitglieder. Insgesamt gebe es 15 Mitglieder, 5 A-Mitglieder und 10 B-Mitglieder. Eine Entscheidung sei gültig, wenn insgesamt mindestens 9 Mitglieder zustimmen, alle A-Mitglieder eingeschlossen. Der Wert der charakteristischen Funktion sei für jede Koalition, die eine Entscheidung herbeiführen kann, gleich 1, für die übrigen 0.

Werten Sie jedes Mitglied durch seine Shapley-Zuteilung. Gibt es Dummy-Mitglieder? Hat dieses kooperative Spiel irgendeine andere wichtige Eigenschaft?
Wo sind Ihnen derartige Gremien begegnet?

**Aufgabe 35**(intern NGameA25):
Seien $G, g_i \in \mathbb{R}_+$ gegeben mit $G > \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} g_i$.
Zeigen Sie, daß durch die Definition

$$\mathcal{V}(B) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \sum_{i\in B} g_i \geq G \\ 0 & \text{falls } \sum_{i\in B} g_i < G \end{cases} \qquad \forall B \subset \mathcal{A}$$

tatsächlich eine charakteristische Funktion eines kooperativen $m$-Personenspiels gegeben ist. (Dieses Spiel wird auch gewichtetes Majoritätenspiel genannt.)

KAPITEL 6

# Anhang

## 6.1 Relationen

Wir betrachten nur (Total-)Ordnungen und Halbordnungen zur Beurteilung von Spielergebnissen. Aus ([9]) entnehmen wir die folgenden Definitionen.

**Definition 6.1** *Eine binäre Relation $R$ auf einer Menge $E$ heißt*

1. *reflexiv, falls* $\forall a \in E$ *gilt* $(aRa)$
2. *irreflexiv, falls* $\forall a \in E$ *gilt* $\neg(aRa)$
3. *symmetrisch, falls* $\forall a, b \in E$ *gilt* $(aRb \Rightarrow bRa)$
4. *asymmetrisch, falls* $\forall a, b \in E$ *gilt* $aRb \Rightarrow \neg bRa)$
5. *antisymmetrisch, falls* $\forall a, b \in E$ *gilt* $(aRb \wedge bRa) \Rightarrow a = b$
6. *transitiv, falls* $\forall a, b, c \in E$ *gilt* $(aRb \wedge bRc) \Rightarrow aRc$
7. *negativ transitiv, falls* $\forall a, b, c \in E$ *gilt* $(\neg aRb \wedge \neg bRc) \Rightarrow \neg aRc)$
8. *zusammenhängend, falls* $\forall a, b \in E$ *gilt* $a \neq b \Rightarrow (aRb \vee bRa)$
9. *stark zusammenhängend oder total, falls* $\forall a, b \in E$ *gilt* $aRb \vee bRa$

**Definition 6.2** *Eine binäre Relation $R$ auf einer Menge $E$ heißt eine Äquivalenzrelation, wenn sie reflexiv, symmetrisch und transitiv ist.*

**Definition 6.3** *1. Eine binäre Relation $R$ auf einer Menge $E$ heißt Halbordnung, wenn sie reflexiv, transitiv und antisymmetrisch ist.*

*2. Eine zusammenhängende Halbordnung auf einer Menge $E$ heißt (totale) Ordnung.*

**Definition 6.4 (Ordnungshomomorphismus)** *Sei $R$ eine binäre Relation auf einer Menge $A$ und $S$ eine binäre Relation auf einer Menge $B$. Eine Funktion $f : A \to B$ heißt ein Ordnungshomomorphismus, falls*

$$xRy \Rightarrow f(x)Sf(y) \quad \forall x, y \in A \ . \tag{6.1}$$

*$f : A \to B$ heißt ein Ordnungsisomorphismus, falls*

$$xRy \Leftrightarrow f(x)Sf(y)\forall x, y \in A \ . \tag{6.2}$$

*Ein bijektiver Ordnungsisomorphismus heißt auch Ähnlichkeitsabbildung.*

## 6.2 Konvexität

**Definition 6.5** *Sei $D \subset \mathbb{R}^d$ konvex. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt quasikonkav, wenn für alle $x, y \in D$ und alle $0 \leq \lambda \leq 1$ die Ungleichung*

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \min\{f(x), f(y)\} \tag{6.3}$$

*gilt. Sie heißt strikt quasikonkav, wenn für $x \neq y$ und $0 < \lambda < 1$ in der Beziehung (6.3) strikte Ungleichheit gilt.*

**Bemerkung.** Jede konkave Funktion ist quasikonkav. Hat eine quasikonkave Funktion auf ihrem Definitionsbereich ein Maximum, so gibt es bei strikter Quasikonkavität genau einen Punkt, an dem die Funktion ihr Maximum annimmt.

**Satz 6.1** *Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine quasikonkave Funktion mit $D \subset \mathbb{R}$. Dann ist die Menge $M_\alpha = \{x | x \in D \text{ mit } f(x) \geq \alpha\}$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ konvex.*

**Beweis:**
Sei $x, y \in M_\alpha$. Dann gilt $f(x), f(y) \geq \alpha$. Wegen der Quasikonkavität folgt für alle $\lambda \in [0,1]$ die Ungleichung $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \min\{f(x), f(y)\} \geq \alpha$. Somit ist mit $x$ und $y$ auch deren Verbindungsstrecke in der Menge $M_\alpha$. Hieraus folgt deren Konvexität. $\diamond$

## 6.3 Mengenwertige Funktionen

Wir folgen hier der Darstellung in Berge ([2]). Allerdings beschränken wir uns im folgenden auf solche $X$ und $Y$, die ausschließlich Teilmengen eines $\mathbb{R}^d$ mit entsprechender Dimension $d$ und üblicher Topologie sind. Es werden solche Sätze zitiert, die für das Verständnis des nächsten Abschnitts erforderlich sind. Beweise siehe ([2]).

**Definition 6.6** *Sei eine Menge $X$ und eine Menge $Y$ gegeben. Ferner gebe es eine wohldefinierte Vorschrift, mit der zu jedem $x \in X$ eine Teilmenge $G(x)$ von $Y$ angegeben werden kann. Die Korrespondenz (Zuordnung) $x \to G(x)$ heißt eine mengenwertige Funktion $G : D \to \mathfrak{P}(Y)$, wobei die Teilmenge $D = \{x | \, G(x) \neq \emptyset\}$ von $X$ der Definitionsbereich der mengenwertigen Funktion $G$ ist.*

**Bemerkung.** Ist $G(x)$ für alle $x$ aus dem Definitionsbereich einelementig, so entspricht der mengenwertigen Funktion eine "gewöhnliche" Funktion.

**Definition 6.7** *Eine mengenwertige Funktion $G : D \to \mathfrak{P}(Y)$ heißt halbstetig von oben im Punkt $x^0$, wenn für jede offene Menge $M$, die $G(x^0)$ enthält, eine Umgebung $V(x^0)$ existiert, sodaß aus $x \in V(x^0)$ folgt $G(x) \subset M$.*
*Die mengenwertige Funktion heißt halbstetig von oben, wenn sie für alle $x \in D$ halbstetig von oben ist.*

**Bemerkung.** Ist $G$ einwertig, so stimmt diese Definition mit der Stetigkeitsdefinition "gewöhnlicher" Funktionen überein. Für die Stetigkeit mengenwertiger Funktionen benötigt man noch eine Halbstetigkeit von unten. Hier genügt die Halbstetigkeit von oben.
Die Halbstetigkeit bei mengenwertigen Funktionen hat keinen unmittelbaren Zusammenhang mit der Halbstetigkeit bei "gewöhnlichen" Funktionen.

**Definition 6.8** *Sei $G : D \to \mathfrak{P}(Y)$ eine mengenwertige Funktion, dann bezeichne für alle $B \subset Y$*

$$G^+(B) = \{x | x \in D \wedge G(x) \subset B\}$$

*das Urbild von $B$.*

**Bemerkung.** Als weitere Analogie zu den "gewöhnlichen" Funktionen sei noch der folgende Satz zitiert.

**Satz 6.2** *Die mengenwertige Funktion $G : D \to \mathfrak{P}(Y)$ ist genau dann halbstetig von oben, wenn $G(x)$ für jedes $x \in D$ kompakt ist und wenn für jede offene Menge $M$ die Menge $G^+(M)$ offen ist.*

**Definition 6.9** *Eine mengenwertige Funktion* $G : D \to \mathfrak{P}(Y)$ *heißt abgeschlossen, wenn es für* $x^0 \in D$, $y^0 \in Y$ *mit* $y^0 \notin G(x^0)$ *zwei Umgebungen* $V_x, V_y$ *gibt, so daß*

$$x \in V_x(x^0) \quad \Rightarrow \quad G(x) \cap V_y(y^0) = \emptyset$$

*gilt.*

**Bemerkung.** Aus dieser Definition folgt, daß die graphische Darstellung der mengenwertigen Funktion $G$, d.h. die Menge $\{(x, y) | \, x \in D, \, y \in Y \text{ mit } y \in G(x)\}$, genau dann eine abgeschlossene Menge ist, wenn $G$ abgeschlossen ist.

**Satz 6.3** *Wenn* $Y$ *kompakt ist, dann ist die mengenwertige Funktion* $G : D \to \mathfrak{P}(Y)$ *genau dann halbstetig von oben, wenn sie abgeschlossen ist.*

**Satz 6.4** *Wenn* $Y$ *kompakt ist, dann ist die mengenwertige Funktion* $G : D \to \mathfrak{P}(Y)$ *halbstetig von oben, wenn für jedes Paar konvergenter Folgen* $\lim_{k\to\infty} x^k = x^0$ *und* $\lim_{k\to\infty} y^k = y^0$ *mit* $y^k \in G(x^k)$ *auch* $y^0 \in G(x^0)$ *gilt.*

**Satz 6.5 (Fixpunktsatz von Kakutani)** *Gegeben sei eine von oben halbstetige mengenwertige Funktion* $G : D \to \mathfrak{P}(D)$, *deren Funktionswerte* $G(x)$ *konvexe Teilmengen des Definitionsbereiches* $D$ *sind. Sei ferner* $D$ *kompakt, nichtleer und konvex. Dann existiert ein Punkt* $x^0$ *mit* $x^0 \in G(x^0)$. *(Ein solcher Punkt* $x^0$ *heißt Fixpunkt der mengenwertigen Funktion* $G$.*)*

**Bemerkung.** Dies ist eine Verallgemeinerung des Brouwer'schen Fixpunktsatzes.

## 6.4 Wichtige Sätze der Linearen Optimierung

Sattelpunktsstrategien sind eng verknüpft mit der linearen Optimierung und der Dualitätstheorie. Im folgenden wird eine Zusammenfassung der für die Spieltheorie wichtigen Ergebnisse der linearen Optimierung gegeben.
Unter einem linearen Optimierungsproblem versteht man eine Optimierungsaufgabe mit linearer Zielfunktion und linearen Ungleichungen und/oder Gleichungen als Nebenbedingungen.
Jedes lineare Optimierungsproblem kann auf folgendes Grundproblem (Grundform) mit $A \in \mathbb{R}^{m,n}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$ zurückgeführt werden :

$$c^T x \to \max \tag{6.4}$$

$$Ax \le b \tag{6.5}$$

$$x \ge 0 \tag{6.6}$$

Die Standardmethode zur Lösung linearer Optimierungsaufgaben ist das Simplexverfahren. Die Berechnungen erfolgen am Standardproblem (an der Standardform). Das Grundproblem kann durch die Verwendung von Schlupfvariablen in diese Form übergeführt werden:

$$c^T x \to \max \tag{6.7}$$

$$Ax = b \tag{6.8}$$

$$x \geq 0 \tag{6.9}$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann der Rang der Matrix $A$ zu $\mathrm{rg}(A) = m$ angenommen werden. Es gilt dann $m \leq n$. Die Menge $\mathcal{Z} = \{x | Ax = b, x \geq 0\}$ bezeichnet man als Menge der zulässigen Lösungen.

Da $\mathrm{rg}(A) = m$ gilt, gibt es $m$ linear unabhängige Spaltenvektoren von $A = (a_{\bullet 1}, a_{\bullet 2}, \ldots, a_{\bullet n})$. Diese Spaltenvektoren fassen wir zur Matrix (der Basisvektoren) $A_B \in \mathbb{R}^{m,m}$ zusammen. Die übrigen Spaltenvektoren ergeben eine Matrix (der Nicht-Basisvektoren) $A_N \in \mathbb{R}^{m,n-m}$, sodaß $A = (A_B A_N)$. Die Aufteilung der Vektoren $x$ und $c$ erfolgt entsprechend: $x^T = (x_B^T, x_N^T)$, $c^T = (c_B^T, c_N^T)$. Eine Lösung von $Ax = b$ mit $x_N = 0$ für eine gewisse Basis $B$ heißt Basislösung des Gleichungssystems. Gilt außerdem $x_B \geq 0$, dann spricht man von einer zulässigen Basislösung.

Es ergeben sich folgende Beziehungen:

$$x_B = A_B^{-1} b - A_B^{-1} A_N x_N \tag{6.10}$$

$$z = c^T x = c_B^T x_B + c_N x_N \tag{6.11}$$

$$z = c_B^T (A_B^{-1} b - A_B^{-1} A_N x_N) + c_N^T x_n \tag{6.12}$$

$$z = c_B^T A_B^{-1} b + (c_N^T - c_B^T A_B^{-1} A_N) x_N \tag{6.13}$$

Das Simplexverfahren besteht nun darin, daß man, ausgehend von einer zulässigen Basislösung zu einer neuen Basislösung mit einem verbesserten Zielwert übergeht. Die neue Basis unterscheidet sich von der alten Basis durch eine einzige Basisvariable. Eine alte Basisvariable wird neue Nicht-Basisvariable, eine alte Nicht-Basisvariable wird neue Basisvariable. Man setzt diesen Basisaustausch solange fort bis

**(1)** eine Basislösung mit optimalem (maximalem) Zielwert erreicht ist, dies ist dann auch der maximale Zielwert auf $\mathcal{Z}$; oder

**(2)** man feststellt, daß die Zielfunktion auf dem zulässigen Bereich nicht beschränkt ist.

Die Berechnungen können an dem folgenden Simplextableau zur Basis $A_B$ erfolgen:

| | | Basisvariable | | | | | Nicht-Basisvariable | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $-z$ | $x_{k_1}$ | $\dots$ | $x_{k_p}$ | $\dots$ | $x_{k_m}$ | $x_{k_{m+1}}$ | $\dots$ | $x_{k_q}$ | $\dots$ | $x_{k_n}$ | rechte Seite |
| $x_{k_1}$ | 0 | | | | | | | | | | | |
| $\vdots$ | $\vdots$ | | | $(\delta_{ij})$ | | | | | $A_B^{-1}A_N = (a_{ij}^N)$ | | | $A_B^{-1}b = (b_i)$ |
| $x_{k_m}$ | 0 | | | | | | | | | | | |
| | 1 | 0 | $\dots$ | 0 | $\dots$ | 0 | | | $c_N^T - c_B^T A_B^{-1} A_N$ | | | $-c_B^T A_B^{-1} b$ |

Es gelten folgende Aussagen, an denen sich der Basisaustausch orientiert:

**(1)** Wenn $c_N^T - c_B^T A_B^{-1} A_N \le 0$ , dann ist die zugehörige zulässige Basislösung $x^{0\,T} = ((A_B^{-1}b)^T, \vec{0}^T)$ optimal, d.h. $c^T x^0 \ge c^T x,\ \forall x \in \mathcal{Z}$.

**(2)** Gelte etwa für die $q$-te Koordinate $c_{N,q}^T = (c_N^T - c_B^T A_B^{-1} A_N)_q > 0$ und $a_{\bullet q}^N \le 0$, so ist die Zielfunktion auf $\mathcal{Z}$ nicht beschränkt.

**(3)** Sei etwa die $q$-te Koordinate $c_{N,q}^T = (c_N^T - c_B^T A_B^{-1} A_N)_q \ge 0$ und für wenigstens ein $p$ sei $a_{pq}^N > 0$, so liefert der folgende Basisaustausch eine neue zulässige Basislösung mit einem nicht kleineren Zielfunktionswert:

$x_{k_q}$ wird neue Basisvariable.

Eine Basisvariable $x_{k_p}$ mit

$$\frac{b_p}{a_{pq}^N} = \min\left\{ \frac{b_j}{a_{jq}^N} \,\middle|\, j = 1, \dots, m \quad a_{jq}^N > 0 \right\} \tag{6.14}$$

wird neue Nicht-Basisvariable.

Ist $c_{N,q} > 0$ und $\dfrac{b_p}{a_{pq}^N} > 0$, dann ist der Zielfunktionswert der neuen Basislösung größer als der Zielfunktionswert der alten Basislösung.

Zwei Fragen bleiben noch zu klären

**(1)** Wie erhält man eine zulässige Anfangsbasislösung?

Die Menge $\mathcal{Z} = \{x | Ax = b \quad x \ge 0\}$ ist genau dann nicht leer, wenn das lineare Optimierungsproblem

$$\sum_{j=1}^{m} y_i \to \min \tag{6.15}$$

$$Ax + y = b \tag{6.16}$$

$$x, y \ge 0 \tag{6.17}$$

den minimalen Zielfunktionswert 0 hat. In diesem Fall sind alle $y_j = 0$ und hieraus ergibt sich (eventuell mit Zusatzrechnung) eine zulässige Basislösung des ursprünglichen Optimierungsproblems (in den Variablen $x_i$).

**(2)** Was passiert, wenn bei einem Basisaustausch $\frac{b_p}{a_{pq}^N} = 0$.? Man nennt dies den entarteten Fall. In diesem Fall bleibt der Zielfunktionswert beim Übergang zur neuen Basis unverändert und es kann in der Reihenfolge der Basislösung eine zyklische Wiederkehr der gleichen Basis auftreten. Die Anwendung der folgenden Regel von Bland garantiert immer einen eindeutigen Basisaustausch und unterbindet solche Zykel. Die Regel von Bland schränkt die Auswahl der neuen Basisvariablen und der neuen Nicht-Basisvariablen beim Basisaustausch ein:

neue Basisvariable Nummer $k_q$, sodaß

$$k_q = \min\{k_i | i = 1, \ldots, n-m \quad (c_N^T - c_B^T A_B^{-1} A_N)_{(i)} > 0\}$$

neue Nicht-Basisvariable Nummer $k_p$, sodaß

$$k_p = \min\{k_\ell | \frac{b_\ell}{a_{\ell q}^N} = \min\left\{\frac{b_j}{a_{jq}^N} | j = 1, \ldots, m \quad a_{jq}^N > 0\right\}\}$$

Man stellt nun dem obigen Grundproblem (primales Problem) ein duales Problem gegenüber. Die Konstruktion ist derart, daß das duale Problem des dualen Problems wieder das ursprüngliche primale Problem ergibt.

| primales Problem | duales Problem |
|---|---|
| $Ax \leq b$ | $A^T y \geq c$ |
| $x \geq 0$ | $y \geq 0$ |
| $c^T x \to \max$ | $b^T y \to \min$ |

Es gelten folgende Aussagen:

**(1)** Sind $\tilde{x}$ und $\tilde{y}$ zulässige Punkte, dann gilt $b^T \tilde{y} \geq c^T \tilde{x}$.

**(2)** Genau, wenn für zulässige Punkte $x^o$, $y^o$ die Gleichung $b^T y^o = c^T x^o$ gilt, dann sind beide Punkte optimal für das jeweilige Problem.

**(3)** $x^o$, $y^o$ sind genau dann optimal, wenn

$$y^{oT}(Ax^o - b) = 0 \qquad x^{oT}(A^T y^o - c) = 0\ .$$

Man nennt dies die Bedingung des komplementären Schlupfs (complementary slackness condition).

**(4)** Die optimale Lösung des dualen Problems liest man aus dem optimalen Tableau der Standardform des primalen Problems als negative Zielfunktionskoeffizienten der Schlupfvariablen ab.

# Literaturverzeichnis

[1] F.A. Behringer. Vorlesung über Spieltheorie. [Persönliche Aufzeichnungen. Die Vorlesung wurde über ein Jahrzehnt hinweg regelmäßig jährlich abgehalten] (- 1997).

[2] C. Berge. „Espaces topologiques et fonctions multivoques“. Dunod, Paris (1966).

[3] M.J. Best und K. Ritter. „Linear Programming: Active Set Analysis and Computer Programs“. Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs New Jersey 07632 (1985).

[4] Ken Binmore. Game theory and the social contract. In Selten [59], Seiten 85 – 163.

[5] Ken Binmore. „Game theory and the social contract: Playing fair“. MIT Press, Cambridge, Massachusetts (1994).

[6] Ken Binmore. „Game theory and the social contract: Just playing“. MIT Press, Cambridge, Massachusetts (1998).

[7] E. Borel. La théorie du jeu et les équations intégrales à noyau symmétrique. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences* **173**, 1304 – 1308 (1921).

[8] E. Borel. Applications aux jeux d'hasard. In „Traité du calcul des probabilités et ses applications“. Gauthier-Villars, Paris (1938).

[9] DOUGLAS S. BRIDGES UND GHANSHYAM B. MEHTA. „Representations of Preferences Ordering“, Band 422 aus „Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems“. Springer-Verlag, Berlin (1995).

[10] C. E. LEMKE UND J. T. JR. HOWSON. Equilibrium points in bimatrix games. *SIAM Journal on Applied Math.* **12**, 413 – 423 (1964).

[11] JOHN L. CASTI. „Die großen fünf: Mathematische Theorien, die unser Jahrhundert prägten“. Birkhäuser Verlag, Basel (1966).

[12] ANDREW M. COLMAN. „Game Theory and Experimental Games. The Study of Strategic Interaction“. International series in experimental social psychology,vol. 4. Pergamon Press, Oxford, London (1982).

[13] ANNE CONDON. „Computational models of games“. Acm distinguished dissertations, Massachusetts Institute of Technology, Massachusetts (1989).

[14] A. COURNOT. „Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses“. Hachette, Paris (1838).

[15] ERIC VAN DAMME. „Stability and Perfection of Nash Equilibria“. Springer-Verlag, neudruck der 2.auflage Auflage (1996).

[16] F. Y. EDGEWORTH. „Mathematical Psychics“. Kegan Paul, London (1881).

[17] MANFRED EIGEN UND RUTHILD WINKLER. „Das Spiel: Naturgesetze steuern den Zufall“. Piper, München, Zürich, 4 Auflage (1996).

[18] J.W. FRIEDMAN. „Game Theory with Application to Economics“. University Press, Oxford (1986).

[19] D. B. GILLIES. Solutions to general non-zero-sum-games. In A. W. TUCKER UND R. D. LUCE (Herausgeber), „Contributions to the Theory of Games IV, Annals of Mathematical Studies 40“, Seiten 47–87. Princeton University Press, Princeton (1959).

[20] J.C. HARSANYI. Games with incomplete information played by 'bayesian' players, part i. *Management Science* **14**, 159–182 (1967).

[21] J.C. HARSANYI. Games with incomplete information played by 'bayesian' players, part ii. *Management Science* **15**, 320–334 (1968).

[22] J.C. Harsanyi. Games with incomplete information played by 'bayesian' players, part iii. *Management Science* **15**, 486–502 (1968).

[23] John C. Harsanyi. The tracing procedure: a bayesian approach to defining a solution for n-person noncooperative games. *Int. Journal of Game Theory* **4**(2), 61 – 94 (1975).

[24] John C. Harsanyi. A new theory of equilibrium selection for games with complete information. *Games and Economic Behavior* **8**, 91 – 122 (1995).

[25] John C. Harsanyi und Reinhard Selten. „A General Theory of Equilibrium Selection in Games". MIT Press, Cambridge Massachusetts (1988).

[26] H. Hesse. „Das Glasperlenspiel". Suhrkamp Taschenbuch Verlag, Frankfurt am Main (1972).

[27] M. J. Holler und G. Illig. „Einführung in die Spieltheorie". Springer-Verlag, Berlin, 3 Auflage (1996).

[28] Johan Huizinga. „Homo Ludens:Vom Ursprung der Kultur im Spiel". Rowohlt Taschenbuch-Verlag, Hamburg (1956).

[29] C. T. Kelley. „Iterative Methods for Linear and Nonlinear Equations". Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia (1995).

[30] D. M. Kreps und R. B. Wilson. Sequential equilibria. *Econometrica 50* **50**, 863 – 894 (1982).

[31] H.W. Kuhn. Extensive games and the problem of information. In H.W. Kuhn und A.W. Tucker (Herausgeber), „Contributions to the Theory of Games", Band II aus „Annals of Mathematics Studies 28", Seiten 193 – 216. Princeton University Press, Princeton (1953).

[32] Wolfgang Leininger, Lars Thorlund-Petersen und Jürgen Weibull. A note on strictly competitive and zero-sum games. Bericht, Universität Bonn (1988).

[33] W. F. Lucas. A game with no solution. *Bulletin of the American Mathematical Society* **74**, 237–239 (1968).

[34] R. D. McKelvey und al. Gambit command language. Internet (1997). Beschreibung der Kommando-Version des Programms.

[35] R. D. McKelvey und al. Gambit graphics user interface. Internet (1997). Beschreibung des Windows-Programms.

[36] R. D. McKelvey und A. McLennan. Computation of equilibria in finite games. In H. Amman, H. D. Kendrick und J. Rust (Herausgeber), „Handbook of Computational Economics“, Seiten 87 – 142. Elsevier (1996).

[37] R. D. McKelvey und Th. R. Palfrey. Quantal response equilibria for normal form games. *Games and Economic Behavior* **10**, 6 – 38 (1995).

[38] A. Mehlmann. „Wer gewinnt das Spiel? Spieltheorie in Fabeln und Paradoxa“. Verlag Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden (1997).

[39] Lszlo Mero. „Moral Calculations. Game Theory, Logic, and Human Frailty“. Springer-Verlag, New York (1998).

[40] R. B. Myerson. Refinements of the nash equilibrium concept. *International Journal of Game Theory* **7**, 73 – 80 (1978).

[41] J.F. Nash. Equilibrium points in n-person games. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* **36**, 48–49 (1950).

[42] J.F. Nash. Non-cooperative games. *Annals of Mathematics* **54**, 286–295 (1951).

[43] J. von Neumann. Zur Theorie der Gesellschaftsspiele. *Mathematische Annalen* **100**, 295–300 (1928).

[44] J. von Neumann und O. Morgenstern. „Theory of Games and Economic Bahaviour“. Princeton University Press, Princeton (1944).

[45] A. Okada. Perfect equilibrium points and lexicographic domination. *International Journal of Game theory* **17**, 225 – 239 (1988). [Bei mehr als zwei Spielern ist nicht jedes undominierte Gleichgewicht ein perfektes Gleichgewicht].

[46] M. J. Osborne und A. Rubinstein. „A Course in Game Theory“. MIT Press, Cambridge, Massachusetts (1994).

[47] G. Owen. „Spieltheorie“. Springer-Verlag, Berlin (1971).

[48] B. Rauhut, N. Schmitz und E.-W. Zachow. „Spieltheorie“. Teubner-Verlag, Stuttgart (1979).

[49] A. Reinefeld. „Spielbaum-Suchverfahren“. Informatik-Fachberichte Vol.200. Springer-Verlag, Berlin (1989).

[50] J. Rosenmüller. On a generalization of the lemke-howson algorithm to noncooperative $n$-person games. *SIAM Journal of Applied Mathematics* **21**, 73 – 79 (1971).

[51] H. Scarf. The approximation of fixed points of a continuous mapping. *SIAM Journal of Applied Mathematics* **15**, 1328 – 1343 (1967).

[52] H. Scarf. „The Computation of Economic Equilibria“. Yale University Press, New Haven (1973).

[53] D. Schmeidler. The nucleolus of a characteristic function game. *SIAM J. Applied Mathematics* **17**, 1163–1170 (1969).

[54] R. Selten. Spieltheoretische Behandlung eines Oligopolmodells mit Nachfrageträgheit. *Zeitschrift für die gesamte Staatswirtschaft* **121**, 301–324, 667–689 (1965).

[55] R. Selten. Reexamination of the perfectness concept for equilibrium points in extensive games. *International Journal of Game Theory* **4**, 25 – 55 (1975).

[56] R. Selten. Reexamination of the perfectness concept for equilibrium points in extensive games. *International Journal of Game Theory* **4**, 25–55 (1975).

[57] R. Selten. The chain store paradox. *Theory and Decisions* **9**, 127 – 159 (1978).

[58] Reinhard Selten (Herausgeber). „Game Equilibrium Models I:Evolution and Game Dynamics“. Springer-Verlag, Berlin (1991).

[59] Reinhard Selten (Herausgeber). „Game Equilibrium Models II: Methods, Morals, amd Markets“. Springer-Verlag, Berlin (1991).

[60] Reinhard Selten (Herausgeber). „Game Equilibrium Models III:Strategic Bargaining“. Springer-Verlag, Berlin (1991).

[61] Reinhard Selten (Herausgeber). „Game Equilibrium Models IV: Social and Political Interaction“. Springer-Verlag, Berlin (1991).

[62] L. Shapley. A value for n-person games. In H. W. Kuhn und A. W. Tucker (Herausgeber), „Contributions to the Theory of Games Vol.2“. Princeton University Press, Princeton (1953).

[63] H. Stackelberg. „Marktform und Gleichgewicht". Springer-Verlag, Wien (1934).

[64] N.N. Vorob'ev. „Game Theory", Band 7 aus „Application of Mathematics". Springer-Verlag, Berlin (1977).

[65] Rosenthal R. W. Games of perfect information, predatory pricing and the chain-store paradox. *Journal of Economic Theory* **25**, 92 – 100 (1981).

[66] J. Waldegrave. Minimax solution to 2-person zero-sum game, reported 1713 in letter from P.de Montmort to N. Bernoulli. In W. J. Baumol und S. Goldfield (Herausgeber), „Precursors of Mathematical Economics", Seiten 3 – 9. London School of Economics, London (1968).

[67] R. Wilson. Computing equilibria of $n$-person games. *SIAM Journal of Applied Mathematics* **21**, 80 – 87 (1971).

[68] J. Zhao. The equilibria of a multiple objective game. *International Journal of Game Theory* **20**, 171 – 182 (1991).

# Autorenregister

# Sachregister

## M



## N



## P



## Q



## R



## S

**T**

# English Vocabulary

**action**, *de:* Spielzug (bei extensiven Spielen
**agent form**, *de:* Normalform, strategische Form
**assessment**, *de:* Einschätzung

**belief**, *de:* Spielhypothese
**best response**, *de:* beste Antwort

**carrier**, *de:* Träger(menge)
**centipede**, *de:* Tausendfüssler
**chain-store**, *de:* Warenhauskette
**characteristic function**, *de:* charakteristische Funktion
**collective rationality**, *de:* kollektive (Gruppen-) Rationalität
**complementarity**, *de:* Komplementäreigenschaft
**complete information**, *de:* vollständige Information
**core**, *de:* Kern

**effectiveness condition**, *de:* Bedingung der Effektivität
**equilibrium, trembling hand perfect**, *de:* Gleichgewicht der zitternden Hand
**external stability**, *de:* externe Stabilität

**game theory**, *de:* Spieltheorie
**game tree**, *de:* Spielbaum
**game, coalitional**, *de:* kooperatives Spiel
**game, constant sum**, *de:* Konstantsummen-Spiel
**game, cooperative** , *de:* kooperatives Spiel
**game, essential**, *de:* wesentliches (kooperatives) Spiel
**game, extensive**, *de:* extensives Spiel
**game, inessential**, *de:* unwesentliches (kooperatives) Spiel
**game, noncooperative** , *de:* nichtkooperatives Spiel
**game, zero**, *de:* Null-Spiel

**history**, *de:* Spielhistorie, Spielablauf

**imperfect information**, *de:* ohne perfekte Information
**imputation**, *de:* Zuteilung (Imputation)
**imputation, dominance of** , *de:* Dominanz von Zuteilungen
**individual rationality**, *de:* individuelle Rationalität
**internal stability**, *de:* interne Stabilität

**Nash equilibrium**, *de:* Nash-Gleichgewicht
**never-best response**, *de:* niemals beste Antwort
**nucleolus**, *de:* Nucleolus

**perfect equilibrium**, *de:* perfektes Gleichgewicht
**perfect information**, *de:* perfekte Information
**player**, *de:* Spieler
**preferability condition**, *de:* Bedingung der Präferenz

**Selten's horse**, *de:* Selten's Pferd
**sequential equilibrium**, *de:* sequentielles Gleichgewicht
**Shapley value**, *de:* Shapley Wert

**strategic equivalence**, *de:* strategische Äquivalenz
**strategic form**, *de:* strategische Form, Normalform
**strategy, behavioral**, *de:* Verhaltensstrategie
**strategy, combination of**, *de:* Kombination von Strategien
**strategy, mixed**, *de:* gemischte Strategie
**strategy, strictly dominated**, *de:* stark dominierte Strategie
**strategy, strongly mixed**, *de:* stark gemischte Strategie
**strategy, weakly dominated**, *de:* schwach dominierte Strategie
**strictly competitive**, *de:* stark kämpferisch
**subgame**, *de:* Teilspiel
**subgame perfect equilibrium**, *de:* perfektes Teilspiel-Gleichgewicht
**superadditivity**, *de:* Superadditivität
**support**, *de:* Träger(menge)

**von-Neumann-Morgenstern solutions**, *de:* von Neumann-Morgenstern-Lösungen

**0-1-reduced form**, *de:* 0-1-reduzierte Form