Topologie I

R. Vogt

März 1995

1 Topologische Räume

Topologie ist Stetigkeitsgeometrie, d.h. sie untersucht Eigenschaften geometrischer Gebilde, die unter bijektiven umkehrbar stetigen Abbildung erhalten bleiben. Eine solche Eigenschaft ist etwa, zusammenhängend zu sein, während Längen und Volumina unter allgemeinen stetigen Abbildungen nicht erhalten bleiben.

Ausgehend vom Stetigkeitsbegriff der Analysis wollen wir die Definition eines topologischen Raumes erarbeiten. Wir erinnern:

1.1 Sei $M \subset \mathbb{R}$. Eine Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ heißt *stetig* in $a \in M$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so daß $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ für alle $x \in M$ mit $|x - a| < \delta$.

Die Menge $\{x \in \mathbb{R};\ |x - a| < \delta\}$ besteht aus allen Punkten von $\mathbb{R}$, die von a einen Abstand kleiner als δ haben. Sie wird *δ-Umgebung* von a genannt und mit $U_\delta(a)$ bezeichnet. Stetigkeit können wir also definieren, sobald wir einen Abstandsbegriff haben. Mengen, auf denen ein Abstandsbegriff definiert ist, heißen metrische Räume.

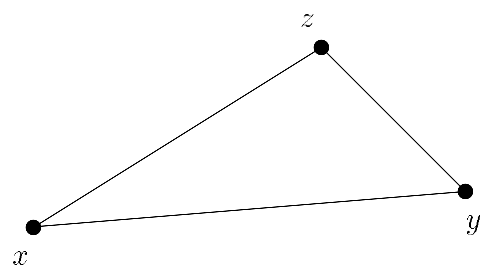
1.2 Definition: Ein *metrischer Raum* ist eine Menge X zusammen mit einer Abbildung $d : X \times X \to \mathbb{R}$, genannt *Metrik* oder *Abstandsfunktion*, so daß für $x, y, z \in X$ stets gilt

(i) $d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$

(ii) $d(x, y) = d(y, x)$

(iii) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

Erläuterung: Die drei Axiome geben Bedingungen an, die wir von einem vernünftigen Abstandsbegriff erwarten: Ist der Abstand zweier Punkte Null, so sind die Punkte gleich. Der Abstand von x zu y ist derselbe, wie der von y zu x. Das dritte Axiom, genannt Dreiecksungleichung, ist am besten durch folgendes Bild erklärt:



Eine δ-Umgebung von a ist dann $U_\delta(a) = \{x \in X;\ d(x, a) < \delta\}$

Selbstverständlich kann ein Abstand nur positive Werte haben:

1.3 Ist $d : X \times X \to \mathbb{R}$ eine Metrik auf X, so gilt $d(x,y) \geq 0$ für alle $x, y \in X$.

Beweis: $0 = d(x,x) \leq d(x,y) + d(y,x) = 2d(x,y)$. $\square$

1.4 Beispiele:

1. Auf $\mathbb{R}^n = \{(x_1, \ldots, x_n);\ x_i \in \mathbb{R}\}$ benutzt man meist eine der folgenden drei Metriken: Sei $x = (x_1, \ldots, x_n),\ y = (y_1, \ldots, y_n)$

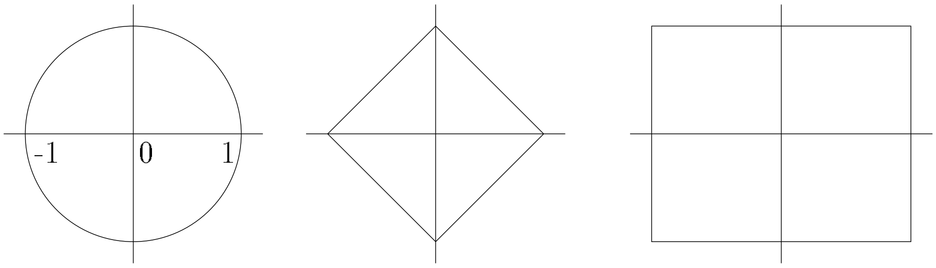
   (i) $d_2(x,y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$ (euklidische Metrik)

   (ii) $d_1(x,y) = |x_1 - y_1| + \cdots + |x_n - y_n|$ (L_1-Metrik)

   (iii) $d_\infty(x,y) = \max\{|x_i - y_i|;\ i = 1, \ldots, n\}$ (Maximummetrik)

   Den Nachweis der Axiome überlassen wir dem Leser.

   Für $n = 2$ sehen die Umgebungen $U_1(0)$ wie folgt aus



   euklidische Metrik L_1-Metrik Maximummetrik

2. Im Zusammenhang mit der gleichmäßigen Konvergenz von Funktionenfolgen spielen folgende metrische Räume eine bedeutende Rolle:

   Sei $X \neq \emptyset$ eine beliebige Menge und $B(X, \mathbb{R})$ die Menge der beschränkten Funktionen $f : X \to \mathbb{R}$. Dann ist

$$d_\infty(f,g) = \sup\{|f(x) - g(x)|;\ x \in X\}$$

   eine Metrik auf $B(X, \mathbb{R})$.

3. In der Analysis werden auch folgende metrische Räume behandelt: Sei $C([0,1], \mathbb{R})$ die Menge der stetigen Funktionen $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ und $p > 0$ auf $\mathbb{N}$. Dann ist

$$d_p(f,g) = \left(\int_0^1 |f(x) - g(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

   eine Metrik auf $C([0,1], \mathbb{R})$.

4. Auf jeder Menge X kann man die diskrete Metrik definieren:

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & x \neq y \end{cases}$$

Der Stetigkeitsbegriff (1.1) läßt sich offensichtlich wörtlich auf metrische Räume erweitern.

1.5 Definition: Eine Abbildung $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ von metrischen Räumen heißt *stetig in* $a \in X$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so daß

$$d_Y\Big(f(x), f(a)\Big) < \varepsilon \quad \text{für alle } x \in X \text{ mit } d_X(x,a) < \delta,$$

d.h. wenn es zu jeder ε-Umgebung V von $f(a)$ in Y eine δ-Umgebung U von a in X gibt, so daß $f(U) \subset V$.
Ist f in jedem $a \in X$ stetig, heißt f *stetig*.
f heißt *Homöomorphismus*, falls f bijektiv und sowohl f als auch die Umkehrfunktion f^{-1} stetig sind.

Der Homöomorphiebegriff in der Topologie entspricht dem Isomorphiebegriff in der Algebra. Homöomorphe metrische Räume werden also in der Topologie als im wesentlichen gleich betrachtet. Deshalb definiert der Topologe

1.6 Definition: Zwei Metriken d und $\overline{d}$ auf einer Menge X heißen *äquivalent*, wenn die identische Abbildung $id : (X, d) \longrightarrow (X, \overline{d})$ ein Homöomorphismus ist.

1.7 Übung: Zeigen Sie, daß die drei Metriken auf $\mathbb{R}^n$ aus Beispiel 1.4.1 äquivalent sind.

Nach (1.7) können verschiedene Metriken zum selben Stetigkeitsbegriff führen. Dies kann als Hinweis dafür angesehen werden, daß man weniger als eine metrische Struktur für die Definition der Stetigkeit benötigt. Nach Definition 1.5 genügt es in der Tat zu wissen, was eine Umgebung eines Punktes ist. In 1.5 hängen die Umgebungen von einem Parameter ε ab, von dem wir uns zunächst lösen wollen:

1.8 Definition: Sei (X, d) ein metrischer Raum und $a \in X$. Eine Menge $U \subset X$ heißt *Umgebung* von a, wenn es eine ε-Umgebung V von a mit $\varepsilon > 0$ gibt, so daß $V \subset U$.

Wissen wir für jedes $x \in X$ und $y \in Y$, was eine Umgebung von x bzw. y ist, können wir wie in (1.5) stetige Abbildungen $f : X \to Y$ definieren.

Damit wir für stetige Abbildungen dieses Typs auch Sätze beweisen können, müssen die Umgebungssysteme Axiome erfüllen. Z.B. wird bei dem üblichen Beweis der Stetigkeit der Summe $f + g$ zweier stetiger Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

benutzt, daß der Durchschnitt zweier Umgebungen wieder eine Umgebung ist. Damit sind die ersten drei Axiome der folgenden Definition naheliegende Forderungen an einen vernünftigen Umgebungsbegriff. Den Wert des vierten Axioms werden wir etwas später einsehen.

1.9 Definition: Eine *Topologie* $\mathcal{T}$ auf einer Menge X ordnet jedem $x \in X$ eine nicht leere Menge $\mathcal{T}(x)$ von Teilmengen von X zu, so daß gilt

(i) $x \in U \quad \forall\, U \in \mathcal{T}(x)$

(ii) $U \in \mathcal{T}(x)$ und $U \subset V \Rightarrow V \in \mathcal{T}(x)$

(iii) $U, V \in \mathcal{T}(x) \Rightarrow U \cap V \in \mathcal{T}(x)$

(iv) $U \in \mathcal{T}(x) \Rightarrow \exists V \in \mathcal{T}(x)$, so daß $U \in \mathcal{T}(y) \quad \forall y \in V$.

Die Mengen $U \in \mathcal{T}(x)$ heißen Umgebungen von X, das Paar $(X, \mathcal{T})$ heißt topologischer Raum.

1.10 Beispiele:

1. Auf einem metrischen Raum ist die kanonische Topologie durch die Umgebungen im Sinne von (1.8) definiert. Der Nachweis der Axiome ist dem Leser überlassen.

2. Sei X eine beliebige Menge. Die diskrete Topologie $\mathcal{D}$ auf X hat als $\mathcal{D}(x)$ die Menge aller Teilmengen von X, die x enthalten. Bei der Klumpentopologie $\mathcal{K}$ auf X besteht $\mathcal{K}(x)$ nur aus der Menge X.

3. Auf $\mathbb{N}$ definieren wir eine Topologie $\mathcal{T}$ durch: $U \in \mathcal{T}(x)$, falls 0 und x aus U sind.

4. Sei $(X, <)$ eine total geordnete Menge. Die Ordnungstopologie $\mathcal{T}$ auf X hat in $\mathcal{T}(x)$ alle Mengen U mit folgender Eigenschaft: Gibt es ein $a < x$, so gibt es ein a_1, so daß $\{z \in X;\ a_1 < z \leq x\} \subset U$, gibt es ein $b > x$, so gibt es ein b_1, so daß $\{z \in X;\ x \leq z < b_1\} \subset U$.

1.11 Übung: Sind d und $\overline{d}$ äquivalente Metriken auf X, dann sind die zugehörigen kanonischen Topologien dieselben.

Bevor wir stetige Abbildungen zwischen topologischen Räumen betrachten, wollen wir einige wichtige Begriffe einführen, die zum Teil schon aus der Analysis bekannt sind.

1.12 Definition: Eine Menge A eines topologischen Raumes $(X, \mathcal{T})$ heißt *offen*, wenn jedes $a \in A$ eine Umgebung U besitzt, so daß $U \subset A$. Die Menge A heißt *abgeschlossen*, falls ihr Komplement offen ist.

1.13 Übung: Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Zeigen Sie

(i) $\emptyset$ und X sind offen und abgeschlossen

(ii) die Vereinigung beliebig vieler offener Mengen ist offen

(iii) der Durchschnitt zweier (und damit endlich vieler) offener Mengen ist offen

(iv) der Durchschnitt beliebig vieler abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen

(v) die Vereinigung zweier (und damit endlich vieler) abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.

Geben Sie Beispiele dafür an, daß die Vereinigung beliebig vieler abgeschlossener Mengen nicht abgeschlossen und der Durchschnitt beliebig vieler offener Mengen nicht offen zu sein braucht.

Offene und abgeschlossene Mengen sind für die Untersuchung topologischer Räume von fundamentaler Bedeutung. In der Tat bestimmt die Angabe der offenen Mengen sogar die Topologie.

1.14 Satz: Sei X eine Menge und $\mathcal{O}$ eine Familie von Teilmengen, so daß gilt

(i) $\emptyset,\ X \in \mathcal{O}$

(ii) beliebige Vereinigung von Mengen aus $\mathcal{O}$ liegen in $\mathcal{O}$

(iii) der Durchschnitt zweier Mengen aus $\mathcal{O}$ liegt in $\mathcal{O}$.

Dann gibt es genau eine Topologie $\mathcal{T}$ auf X, deren offene Mengen genau die Mengen aus $\mathcal{O}$ sind.

Damit $\mathcal{O}$ die Familie der offenen Mengen in $(X, \mathcal{T})$ ist, sind nach (1.13) die drei Bedingungen aus (1.14) notwendig.

Zum Beweis zunächst drei Beobachtungen

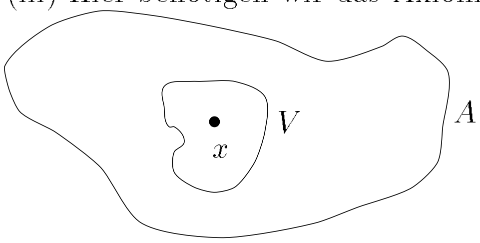
1.15 (i) Eine offene Menge ist Umgebung eines jeden ihrer Punkte

(ii) $U \in \mathcal{T}(x) \Leftrightarrow \exists$ offene Menge A mit $x \in A \subset U$

(iii) $\mathring{A} = \{x \in A;\ A \in \mathcal{T}(x)\}$, genannt das *Innere* oder der *Kern* von $A \subset X$, ist offen.

Beweis: (i) folgt direkt aus der Definition (1.12)

(iii) Hier benötigen wir das Axiom 1.9. Sei $x \in \mathring{A}$. Dann ist A Umgebung von x.



Also gibt es eine Umgebung V von x, so daß $A \in \mathcal{T}(y)$ für alle $y \in V$. D.h. $y \in \mathring{A}$ für alle $y \in V$. Also liegt die Umgebung V von x ganz in $\mathring{A}$.

(ii) $U \in \mathcal{T}(x)$. Dann ist $\mathring{U}$ offen und $x \in \mathring{U}$. Also $x \in \mathring{U} \subset U$. Sei umgekehrt A eine offene Menge mit $x \in A \subset U$, dann ist A Umgebung von x nach (i) und U Umgebung von x nach 1.9 (ii). $\square$

Beweis 1.14: Für die gesuchte Topologie $\mathcal{T}$ auf X muß nach 1.15 (ii) gelten

$$\mathcal{T}(x) = \{U \subset X;\ \exists A \in \mathcal{O} \text{ mit } x \in A \subset U\}.$$

Die Eindeutigkeit von $\mathcal{T}$ ist damit klar. Wir zeigen nun, daß $\mathcal{T}$ tatsächlich eine Topologie und $\mathcal{O}$ die Familie der zugehörigen offenen Mengen ist.

$X \in \mathcal{O}$, also ist $\mathcal{T}(x) \neq \emptyset$. Die Axiome 1.9 (i) und (ii) sind offensichtlich erfüllt. Sind nun $U, W \in \mathcal{T}(x)$, dann gibt es $A, B \in \mathcal{O}$ mit $x \in A \subset U$ und $x \in B \subset W$. Es folgt $x \in A \cap B \subset U \cap W$. Nach Voraussetzung ist $A \cap B \in \mathcal{O}$, also $U \cap W \in \mathcal{T}(x)$. Für Axiom (iv) nehme $V = A$.

Sei nun $A \in \mathcal{O}$ und $x \in A$. Da $A \in \mathcal{T}(x)$, ist A eine Umgebung von x, die in A liegt, also ist A offen. Sei umgekehrt B eine offene Menge von $(X, \mathcal{T})$ dann gibt es zu jedem $b \in B$ ein $A_b \in \mathcal{O}$ mit $b \in A_b \subset B$. Also ist $B = \bigcup_{b \in B} A_b$. Nach Voraussetzung (ii) ist $B \in \mathcal{O}$. $\square$

1.16 Bemerkung: Wir werden ab jetzt fast immer Topologien durch Angabe ihrer offenen Mengen festlegen.

Jetzt noch einige Bemerkungen zum Begriff des Kerns und des dazu komplementären Begriffs, der Hülle

1.17 Definition: Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $A \subset X$

(i) Die Punkte aus $\mathring{A}$ heißen *innere Punkte* von A

(ii) $x \in X$ heißt *Berührungspunkt* von A, falls für jede Umgebung U von x gilt: $U \cap A = \emptyset$. Die *Hülle* oder der *Abschluß* $\overline{A}$ von A ist die Menge der Berührungspunkte von A

(iii) $x \in X$ heißt *Häufungspunkt* von A, wenn für jede Umgebung U von x gilt: $(U - \{x\}) \cap A \neq \emptyset$

(iv) $x \in X$ heißt *Randpunkt* von A, wenn für jede Umgebung U von x gilt

$$U \cap A \neq \emptyset \text{ und } U \cap (X - A) \neq \emptyset$$

1.18 Übung: Sei $(X, \mathcal{T})$ topologischer Raum und A, B Teilmengen von X

1. $\overline{A}$ ist die kleinste abgeschlossene Menge, die A enthält, d.h.

$$\overline{A} = \bigcap\{C \subset X;\ C \text{ abgeschlossen, } A \subset C\}$$

2. Es gilt $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ und $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$

3. $\mathring{A}$ ist die größte in A enthaltene offene Menge, d.h.

$$\mathring{A} = \bigcup\{C \subset X;\ C \text{ offen, } C \subset A\}$$

4. Es gilt $(A \cap B)^\circ = \mathring{A} \cap \mathring{B}$ und $(A \cup B)^\circ \supset \mathring{A} \cup \mathring{B}$

Wenden wir uns nun Abbildungen topologischer Räume zu. Die Definition der Stetigkeit haben wir uns bereits erarbeitet:

1.19 Definition: Seien $(X, \mathcal{S})$ und $(Y, \mathcal{T})$ topologische Räume. Eine Abbildung $f := X \to Y$ heißt *stetig in* $x \in X$, wenn es zu jeder Umgebung V von $f(x)$ eine Umgebung U von x gibt, so daß $f(U) \subset V$.
f heißt *stetig*, falls es in allen Punkten $x \in X$ stetig ist. Ist f bijektiv und sind f und ihre Umkehrfunktion f^{-1} stetig, nennt man f einen *Homöomorphismus*. Wir schreiben dann $(X, \mathcal{S}) \cong (Y, \mathcal{T})$.

1.20 Beispiele:

1. Für jeden topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$ ist die identische Abbildung $id : (X, \mathcal{T}) \to (X, \mathcal{T})$ stetig.

2. Jede konstante Abbildung $(X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T})$ von topologischen Räumen ist stetig.

3. Ist $\mathcal{D}$ die diskrete Topologie auf X und $(Y, \mathcal{T})$ ein beliebiger topologischer Raum, dann ist jede Abbildung $f : (X, \mathcal{D}) \to (Y, \mathcal{T})$ stetig.

4. Ist $\mathcal{K}$ die Klumpentopologie auf Y und $(X, \mathcal{T})$ ein beliebiger topologischer Raum, dann ist jede Abbildung $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{K})$ stetig.

1.21 Konvention: Um die Schreibarbeit zu vereinfachen, schreiben wir für einen topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$ kurz X und nennen ihn kurz Raum.

1.22 Satz: Sind $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ Abbildungen von Räumen, f stetig in $x \in X$ und g stetig in $y = f(x) \in Y$, dann ist $g \circ f$ stetig in x.

Beweis: Sei W Umgebung von $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(y)$. Da g in y stetig ist, gibt es eine Umgebung V von y, so daß $g(V) \subset W$. Da f in x stetig ist, gibt es eine Umgebung U von x, so daß $f(U) \subset V$. Es folgt

$$(g \circ f)(U) = g(f(U)) \subset g(V) \subset W$$

□

Das nächste Resultat gibt eine Reihe nützlicher Kriterien für die globale Stetigkeit einer Abbildung an.

1.23 Satz: Für eine Abbildung $f : X \to Y$ von topologischen Räumen sind äquivalent:

1. f ist stetig
2. $B \subset Y$ offen $\Rightarrow f^{-1}(B)$ offen
3. $B \subset Y$ abgeschlossen $\Rightarrow f^{-1}(B)$ abgeschlossen
4. $A \subset X$ beliebig $\Rightarrow f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$
5. $B \subset Y$ beliebig $\Rightarrow \overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\overline{B})$
6. $B \subset Y$ beliebig $\Rightarrow f^{-1}(\mathring{B}) \subset (f^{-1}(B))^\circ$

Beweis: (1) $\Rightarrow$ (4): Sei $x \in \overline{A}$ und V eine Umgebung von $f(x)$. Da f stetig ist, gibt es eine Umgebung U von x mit $f(U) \subset V$. Da $x \in \overline{A}$, ist $U \cap A \neq \emptyset$. Es folgt: $\emptyset \neq f(U \cap A) \subset f(U) \cap f(A) \subset V \cap f(A)$. Also ist $f(x)$ Berührungspunkt von $f(A)$, so daß $f(x) \in \overline{f(A)}$

(4) $\Rightarrow$ (5) Sei $A = f^{-1}(B)$. Dann gilt nach (4) $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)} \subset \overline{B}$. Also

$$\overline{f^{-1}(B)} = \overline{A} \subset f^{-1}f(\overline{A}) \subset f^{-1}(\overline{B})$$

(5) $\Rightarrow$ (3) Sei $B \subset Y$ abgeschlossen. Nach (5) gilt

$$f^{-1}(\overline{B}) = f^{-1}(B) \subset \overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\overline{B})$$

Also ist $f^{-1}(\overline{B}) = \overline{f^{-1}(B)}$ und somit abgeschlossen.

(3) $\Rightarrow$ (2) Sei $B \subset Y$ offen. Dann ist $Y - B$ abgeschlossen und $f^{-1}(Y - B) = X - f^{-1}(B)$ abgeschlossen. Also ist $f^{-1}(B)$ offen.

(2) $\Rightarrow$ (6) $\mathring{B}$ und damit $f^{-1}(\mathring{B})$ sind offen. Da $f^{-1}(\mathring{B}) \subset f^{-1}(B)$, folgt (6) aus (1.18.3).

(6) $\Rightarrow$ (1) Sei $x \in X$ und V Umgebung von $f(x)$. Nach (1.15.2) ist $f(x) \in \mathring{V}$. Nach (6) gilt $x \in f^{-1}(\mathring{V}) \subset (f^{-1}(V))^\circ$. Insbesondere ist $U = (f^{-1}(V))^\circ$ eine Umgebung von x und $f(U) \subset f(f^{-1}(V)) \subset V$. $\square$

2 Initiale und terminale Topologien

Initiale Topologien auf einer Menge X sind so definiert, daß möglichst viele Abbildungen von X in einen anderen Raum stetig sind, wobei vorgegebene zusätzliche Bedingungen erfüllt sein müssen. Gibt es keine solche Bedingung, tut die diskrete Topologie nach (1.20.3) das Gewünschte. Bei terminalen Topologien sollen möglichst viele Abbildungen nach X stetig sein. Liegen keine Zusatzbedingungen vor, ist die Klumpentopologie die Lösung.

Je mehr offene Mengen X besitzt, um so mehr Abbildung aus X heraus sind stetig, je weniger offene Mengen es besitzt, um so mehr Abbildungen nach X sind stetig (vergl. (1.23)). Die Überlegung führt zu folgender Definition:

2.1 Definition: Seien $\mathcal{O}_1$ und $\mathcal{O}_2$ die Familien offener Mengen zweier Topologien $\mathcal{T}_1$ und $\mathcal{T}_2$ auf X. Wir sagen $\mathcal{T}_1$ ist *feiner* als $\mathcal{T}_2$, wenn $\mathcal{O}_2 \subset \mathcal{O}_1$, d.h. $\mathcal{T}_1$ hat "mehr" offene Mengen als $\mathcal{T}_2$. Wir nennen dann $\mathcal{T}_2$ *gröber* als $\mathcal{T}_1$.

2.2 Satz und Definition: Sei X eine Menge, $\{X_j;\ j \in J\}$ eine Menge topologischer Räume und $\{f_j : X_j \to X;\ j \in J\}$ eine Menge von Abbildungen. Dann gibt es genau eine Topologie $\mathcal{T}$ auf X mit folgenden Eigenschaften:

1. $f_j : X_j \to X$ ist stetig für alle $j \in J$
2. Ist Y ein Raum, dann ist eine Abbildung $g : X \to Y$ genau dann stetig, wenn alle Kompositionen $g \circ f_j,\ j \in J$, stetig sind.

Diese Topologie heißt *initiale Topologie* bzgl. der f_j und ist die feinste Topologie auf X, für die (2.2.1) erfüllt ist.

Beweis: Damit alle f_j stetig sind, muß gelten: Ist U offen in X, dann ist $f_j^{-1}(U)$ offen in X_j für jedes $j \in J$. Da wir die feinste Topologie mit dieser Eigenschaft haben wollen, machen wir den Ansatz

$$U \subset X \text{ offen } \iff f_j^{-1}(U) \text{ ist offen in } X_j \text{ für alle } j \in J.$$

Die Bedingungen des Satzes 1.14 sind leicht nachgeprüft, so daß dadurch tatsächlich eine Topologie $\mathcal{T}$ auf X definiert ist.

Nach Definition von $\mathcal{T}$ sind alle $f_j : X_j \to X$ stetig. Ist nun $g : X \to Y$ eine stetige Abbildung, dann sind auch die Kompositionen $g \circ f_j$ stetig. Sind umgekehrt alle Kompositionen $g \circ f_j$ stetig und ist $V \subset Y$ offen, dann ist $g^{-1}(V)$ offen in X, da $f_j^{-1}(g^{-1}(V)) = (g \circ f_j)^{-1}(V)$ offen in X_j ist für alle $j \in J$. Also ist g stetig. Es bleibt noch die Eindeutigkeit von $\mathcal{T}$ zu zeigen: Sei $\mathcal{S}$ eine weitere Topologie auf

X, die den Bedingungen (1) und (2) genügt. Indem wir für Y einmal $(X, \mathcal{T})$ und einmal $(X, \mathcal{S})$ nehmen, sehen wir aus Bedingung (2), daß

$$id : (X, \mathcal{T}) \longrightarrow (X, \mathcal{S}) \quad \text{und} \quad id : (X, \mathcal{S}) \longrightarrow (X, \mathcal{T})$$

beide stetig sind. Also haben beide Räume dieselben offenen Mengen und damit dieselbe Topologie. □

Die für uns wichtigsten Spezialfälle sind

2.3 Definition: Ist X ein topologischer Raum und $p : X \to Y$ eine surjektive Abbildung auf eine Menge Y. Die initiale Topologie $\mathcal{T}$ auf Y bzgl. p heißt *Quotiententopologie* auf Y, $(Y, \mathcal{T})$ heißt *Quotientenraum* von X bzgl. p und die stetige Abbildung $p : X \to Y$ heißt *Identifizierung.*

Man stellt sich Y auf X dadurch gewonnen vor, daß man alle Punkte $x \in p^{-1}(y)$ für jedes $y \in Y$ miteinander zu einem Punkt verklebt.

2.4 Übungsbeispiele:

1. Sei $A \subset X, X$ ein Raum. Sei X/A der Raum mit der Quotiententopologie, der aus X dadurch entsteht, daß A zu einem Punkt identifiziert wird. Sei $p : X \to X/A$ die Projektion. Zeigen Sie:

$$\begin{array}{rcl} \{f : X/A \to Y \text{ stetig }\} & \longrightarrow & \{g : X \to Y;\ g \text{ stetig}, g(A) \text{ ist ein Punkt}\} \\ f & \longmapsto & f \circ p \end{array}$$

ist bijektiv.

2. Sei I^n der n-dimensionale Einheitswürfel und ∂I^n sein Rand. Zeigen Sie: $I^n/\partial I^n$ ist homöomorph zur Einheitssphäre S^n im $\mathbb{R}^{n+1}$.

2.5 Für eine surjektive Abbildung $p : X \to Y$ sind nach (2.2) äquivalent:

1. p ist eine Identifizierung

2. $g : Y \to Z$ ist stetig $\iff g \circ p : X \to Z$ ist stetig

3. $V \subset Y$ ist offen $\iff p^{-1}(V) \subset X$ ist offen

2.7 Definition: Sei $(X_i;\ i \in I)$ eine Familie topologischer Räume und X ihre disjunkte Vereinigung. Die *Summentopologie* auf X ist die initiale Topologie bzgl. der Familie der Inklusionen $j_i : X_i \subset X$. Die Menge X mit der Summentopologie heißt *topologische Summe* der X_i.

2.8 Nach (2.2) sind äquivalent:

1. X ist topologische Summe der $X_i,\ i \in I$

2. $f : X \to Y$ ist stetig $\Longleftrightarrow f|X_i$ ist stetig für alle $i \in I$.

Terminale Topologien bilden das Gegenstück zu Initialen. Sie haben "duale" Eigenschaften. Genauer bedeutet das, daß man ihre universelle Beschreibung aus (2.2) dadurch erhält, daß man die Abbildungspfeile alle umdreht:

2.9 Satz und Definition: Sei X eine Menge und $\{f_j : X \to X_j,\ i \in J\}$ eine Menge von Abbildungen von X in topologische Räume X_j. Dann gibt es genau eine Topologie $\mathcal{T}$ auf X mit folgenden Eigenschaften:

1. $f_j : X \to X_j$ ist stetig für alle $j \in J$
2. Ist Y ein Raum, dann ist eine Abbildung $g : Y \to X$ genau dann stetig, wenn alle Kompositionen $f_j \circ g,\ j \in J$ stetig sind.

Diese Topologie heißt *terminale* Topologie bzgl. der f_j und ist die gröbste Topologie auf X, für die (2.9.1) erfüllt ist.

Beweis: Damit alle f_j stetig sind, muß gelten: Ist $U \subset X_j$ offen in X_j, dann ist $f_j^{-1}(U)$ offen in X. Wir suchen also die gröbste Topologie auf X, für die jedes $f_j^{-1}(U),\ U \subset X_j$ offen, $j \in J$, offen ist. Leider genügt die Familie dieser Mengen nicht den Bedingungen (1.14), so daß Sonderbetrachtungen nötig sind:

2.10 Definition: Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Eine Familie $\mathcal{S}$ offener Teilmengen von X heißt *Subbasis* von $\mathcal{T}$, wenn $\mathcal{T}$ die gröbste Topologie auf X ist, für die die Mengen aus $\mathcal{S}$ offen sind. Eine Familie $\mathcal{B}$ offener Teilmengen heißt *Basis* von $\mathcal{T}$, falls jede offene Menge $U \neq X, \emptyset$ Vereinigung von Mengen aus $\mathcal{B}$ ist.

2.11 Lemma: Sei X eine Menge und $\mathcal{S}$ eine Familie von Teilmengen von X. Sei

$$\begin{aligned} \mathcal{B} &= \{S_1 \cap \cdots \cap S_n;\quad n \in \mathbb{N},\ S_i \in \mathcal{S}\} \\ \mathcal{O} &= \left\{\textstyle\bigcup_{i\in I} B_i;\quad I \text{ beliebige Indexmenge, } B_i \in \mathcal{B}\right\} \cup \{\emptyset, X\} \end{aligned}$$

Dann genügt $\mathcal{O}$ den Bedingungen (1.14). Die zugehörige Topologie $\mathcal{T}$ hat $\mathcal{S}$ als Subbasis und $\mathcal{B}$ als Basis.

Beweis: Sei $\widehat{\mathcal{O}}$ die Menge der offenen Teilmengen der gröbsten Topologie, die $\mathcal{S}$ enthält. Wegen Bedingung (1.14 (iii)) ist $\mathcal{B} \subset \widehat{\mathcal{O}}$, und wegen (1.14 (ii)) ist dann auch $\mathcal{O} \subset \widehat{\mathcal{O}}$. Man prüft nun leicht nach, daß $\mathcal{O}$ den Bedingungen (1.14) genügt. Es folgt: $\mathcal{O} = \widehat{\mathcal{O}}$. □

Fortsetzung des Beweises 2.9: Wir wissen, daß

$$\mathcal{S} = \{f_j^{-1}(U);\ j \in J, U \text{ offen in } X_j\}$$

aus offenen Teilmengen von X bestehen muß. Sei $\mathcal{T}$ die Topologie, die $\mathcal{S}$ als Subbasis hat. Dann sind alle $f_j : X \to X_j$ stetig.

Ist nun $g : Y \to X$ stetig, dann sind natürlich alle $f_j \circ g$, $j \in J$ stetig. Seien umgekehrt alle $f_j \circ g$ stetig. Ist $V = f_k^{-1}(U) \in \mathcal{S}$, wobei $U \subset X_k$ offen ist, so ist $g^{-1}(V) = g^{-1}(f_k^{-1}(U)) = (f_k \circ g)^{-1}(U)$ offen. Die Stetigkeit von g folgt damit aus

2.12 Übung: Ist $f : X \to Y$ eine Abbildung von Räumen und $\mathcal{S}$ eine Subbasis der Topologie von Y, so ist f genau dann stetig, wenn $f^{-1}(V)$ für alle $V \in \mathcal{S}$ offen ist.

Die Eindeutigkeit der Topologie in (2.9) beweist man wie in (2.2). □

Wenden wir uns wieder den wichtigsten Spezialfällen zu.

2.13 Definition: Sei X ein topologischer Raum und $i : Y \to X$ eine injektive Abbildung. Ist $\mathcal{T}$ die terminale Topologie auf Y bzgl. i, heißt i eine *Einbettung*. Ist Y Teilmenge von X und i die Inklusion, nennt man $\mathcal{T}$ die *Spur-* oder *Teilraumtopologie* von Y bzgl. X.

Direkt aus 2.9 erhält man

2.14 Für eine injektive Abbildung $i : Y \to X$ sind äquivalent

1. i ist Einbettung
2. $g : Z \to Y$ ist stetig $\Longleftrightarrow$ $i \circ g : Z \to X$ ist stetig
3. $U \subset Y$ offen $\Longleftrightarrow \exists V \subset X$ offen, so daß $U = i^{-1}(V)$

3.* Ist i die Inklusion einer Teilmenge, nimmt (3) folgende Form an: $U \subset Y$ offen $\Longleftrightarrow \exists V \subset X$ offen, so daß $U = V \cap Y$

2.15 Definition: Sei $(X_i; i \in I)$ eine Familie topologischer Räume und $X = \prod_{i \in I} X_i$. Die *Produkttopologie* auf X ist die terminale Topologie auf X bzgl. der Familie der Projektionen $p_i : X \to X_i$. Die Menge X mit der Produkttopologie heißt *topologisches Produkt* der X_i.

2.16 Nach (2.9) sind äquivalent

1. $X = \prod_{i \in I} X_i$ besitzt die Produkttopologie
2. $g : Z \to X$ ist stetig $\Longleftrightarrow$ $p_i \circ g$ ist stetig $\forall i \in I$

Um sich mit den Begriffen vertraut zu machen, sollte der Leser verifizieren.

2.17

1. Sei $A \subset X$ mit der Spurtopologie versehen. Ist $U \subset A$ offen (bzw. abgeschlossen) in der Spurtopologie und A offen (bzw. abgeschlossen) in X, dann ist U offen (bzw. abgeschlossen) in X.

2. Sei $X = \prod_{i \in I} X_i$ topologisches Produkt und $U \subset X$ eine offene Menge. Ist $(x_i) \in U$, dann gibt es endlich viele Indizes $i_1, \ldots, i_k$ und offene Umgebungen V_{i_j} von x_{i_j} in X_{i_j}, $j = 1, \ldots, k$, so daß mit $V_i = X_i$ für $i \notin \{i_1, \ldots, i_k\}$ gilt $\prod_{i \in I} V_i \subset U$.

2.18 Übungen:

1. $i : Y \to X$ ist Einbettung $\Longleftrightarrow i : Y \to i(Y)$ ist ein Homöomorphismus, falls $i(Y)$ die Spurtopologie von X hat.

2. Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt offen (bzw. abgeschlossen), wenn mit $A \subset X$ auch $f(A) \subset Y$ offen (bzw. abgeschlossen) ist. Zeigen Sie: Eine stetige surjektive offene (bzw. abgeschlossene) Abbildung ist eine Identifizierung.

3. Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume. Definiere

$$d : (X \times Y) \times (X \times Y) \to \mathbb{R}$$

durch $d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max\{d_X(x_1, x_2), d_Y(y_1, y_2)\}$.
Zeigen Sie: $(X \times Y, d)$ ist ein metrischer Raum, dessen zugehöriger topologischer Raum das topologische Produkt von X und Y ist.

3 Zusammenhang

3.1 Definition Ein Raum X heißt *zusammenhängend*, wenn er nicht homöomorph zur topologischen Summe zweier nicht-leerer Räume ist. Eine Teilmenge A von X heißt *zusammenhängend*, wenn A als Teilraum zusammenhängend ist.

Wir übersetzen die Definition in eine für Beweise günstigere Form:

3.2 Satz: Für eine Teilmenge A eine Raumes X sind äquivalent

(1) A ist zusammenhängend.

(2) Sind U, V offen in X, $A \subset U \cup V$ und $A \cap U \cap V = \emptyset$, so folgt $A \cap U = \emptyset$ oder $A \cap V = \emptyset$.

Beweis: (1) $\Rightarrow$ (2): Sind die Voraussetzungen an U und V erfüllt, so ist A als Teilraum die topologische Summe von $U \cap A$ und $V \cap A$. Also folgt $U \cap A = \emptyset$ oder $V \cap A = \emptyset$.

(2) $\Rightarrow$ (1): Angenommen A wäre die topologische Summe von Y und Z. Dann sind Y und Z offen in A, d.h. es gibt offene Mengen U, V in X mit $U \cap A = Y$ und $V \cap A = Z$. Es folgt $A \subset U \cup V$, $A \cap U \cap V = Y \cap Z = \emptyset$. Also folgt $Y = U \cap A = \emptyset$ oder $Z = V \cap A = \emptyset$, d.h. A ist zusammenhängend.

3.3 Beispiel: Aus dem Vollständigkeitsaxiom folgt, daß die zusammenhängenden Teilmengen von $\mathbb{R}$, die mehr als einen Punkt enthalten, Intervalle sind.

Der folgende Satz faßt die wichtigsten Resultate über zusammenhängende Mengen zusammen.

3.4 Satz:

(1) Ist $A \subset X$ zusammenhängend und $A \subset B \subset \overline{A}$, so ist auch B zusammenhängend

(2) Sind $A_i \subset X$, $i \in I$, zusammenhängend mit $\bigcap_{i \in I} A_i \neq \emptyset$, dann ist $\bigcup_{i \in I} A_i$ zusammenhängend.

(3) Ist X zusammenhängend und $f : X \to Y$ stetig, dann ist $f(X)$ zusammenhängend.

Beweis: (1) Sei $B \subset U \cup V$ mit U, V offen in X und $B \cap U \cap V = \emptyset$. Da $A \subset U \cup V$ und $A \cap U \cap V = \emptyset$, ist $A \cap U = \emptyset$ oder $A \cap V = \emptyset$, weil A zusammenhängend ist, etwa $A \cap V = \emptyset$. Dann ist $A \subset X \backslash V$. Da $X \backslash V$ abgeschlossen ist, ist $B \subset \overline{A} \subset X \backslash V$. Also $B \cap V = \emptyset$.

(2) Sei $A = \bigcup_{i \in A} A_i \subset U \cup V$ mit U, V offen in X und $A \cap U \cap V = \emptyset$. Sei $x \in \bigcap_{i \in I} A_i$ o. b. d. A. in U. Dann ist $A_i \cap U \neq \emptyset \ \forall i \in I$. Da A_i zusammenhängend ist, folgt $A_i \cap V = \emptyset \ \forall i \in I$, also $\bigcup_{i \in I} A_i \cap V = \emptyset$.

(3) Sei $f(X) \subset U \cup V$ mit U, V offen, $f(X) \cap U \cap V = \emptyset$. Dann ist $X = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)$ und $X \cap f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) = f^{-1}(f(X) \cap U \cap V) = \emptyset$. Da X zusammenhängend ist, ist etwa $f^{-1}(U) = \emptyset$, also $f(X) \cap U = \emptyset$. □

Aus (3.4.3) und (3.3) folgt

3.5 Zwischenwertsatz: Sei X zusammenhängend und $X \to \mathbb{R}$ stetig. Seien $a < b$ im Bild von f. Dann ist $[a, b]$ im Bild von f.

Wir werden später eine stärkere Bedingung als den Zusammenhang benötigen.

3.6 Definition: Ein Raum X heißt *wegzusammenhängend*, wenn es zu je zwei Punkten $x, y \in X$ eine stetige Abbildung (= Weg) $w : [0, 1] \to X$ mit $w(0) = x$ und $w(1) = y$ gibt.

3.7 Satz: Ein wegzusammenhängender Raum ist zusammenhängend. Die Umkehrung braucht nicht zu gelten.

Beweis: Der erste Teil folgt aus (3.4.3) und (3.4.2). Wir überlassen es dem Leser zu zeigen, daß

$$X = \{(x, f(x)); x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2 \text{ mit } f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

zusammenhängend, aber nicht wegzusammenhängend ist. □

3.8 Definition: Sei X ein Raum und $x \in X$. Die *Zusammenhangskomponente* $C(x)$ von x ist die Vereinigung aller zusammenhängender Teilmengen von X, die x enthalten.

3.9 Satz:

(1) $C(x)$ ist zusammenhängend und abgeschlossen.

(2) Für $x \neq y$ ist $C(x) = C(y)$ oder $C(x) \cap C(y) = \emptyset$.

Beweis: (1) $C(x)$ ist nach (3.4.2) zusammenhängend. Da $\overline{C(x)}$ nach (3.4.1) zusammenhängend ist, folgt $\overline{C(x)} = C(x)$.

(2) Angenommen $z \in C(x) \cap C(y)$. Dann ist $C(x) \cup C(y)$ zusammenhängend. Aus der Definition folgt $C(x) = C(x) \cup C(y) = C(y)$. □

4 Die Trennungsaxiome

Wir erinnern zunächst an den Konvergenzbegriff aus der Analysis.

4.1 Definition Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in einem Raum X *konvergiert gegen* $z \in X$, wenn es zu jeder Umgebung U von z ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so daß $x_n \in U \ \forall n \geq n_0$. Wir nennen dann z einen *Grenzwert* von (x_n).

In allgemeinen topologischen Räumen kann eine Folge durchaus mehrere Grenzwerte haben.

4.2 Beispiel: Sei $\mathbb{N}$ mit der Topologie (1.10.3) versehen. Dann ist jedes $z \in \mathbb{N}$ Grenzwert der konstanten Folge $(x_n = 0)_{n\in\mathbb{N}}$.

Solche Pathologien sollen geeignete Trennungsaxiome verhindern.

4.3 Definition: Zwei Teilmengen A und B eines Raumes X lassen sich *trennen*, wenn es disjunktive offene Mengen U, V gibt, so daß $A \subset U$ und $B \subset V$.

4.4. Definition: Ein Raum X genügt dem Trennungaxiom
T_1, wenn $\{x\}$ abgeschlossen ist $\forall x \in X$.
T_2, wenn sich $\{x\}$ und $\{y\}$ für $x \neq y$ trennen lassen.
T_3, wenn sich jede abgeschlossene Menge A und jede Menge $\{x\}$ mit $x \notin A$ trennen lassen.
T_4, wenn sich je zwei disjunkte abgeschlossene Mengen A, B trennen lassen.
Ein T_2-Raum heißt *Hausdorffraum*. Ein Raum heißt *regulär*, wenn er T_1 und T_3 erfüllt, und *normal*, wenn er T_1 und T_4 erfüllt.

(4.5) Direkt aus den Axiomen folgt: Normal $\Rightarrow$ Regulär $\Rightarrow T_2 \Rightarrow T_1$.

Die Umkehrungen brauchen nicht zu gelten.

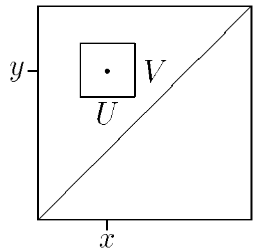
4.6 Beispiele
(1) $\mathbb{N}$ mit der Topologie aus (1.10.3) ist kein T_1 Raum: $\{0\}$ ist offen und nicht abgeschlossen.
(2) Die Menge $\mathbb{R} \sqcup \{\overline{0}\}$ sei wie folgt topologisiert: U ist Umgebung von $x \in \mathbb{R}$, falls es ein $r > 0$ gibt, so daß $]x-r, x+r[\subset U$, V ist Umgebung von $\overline{0}$, falls es ein $r > 0$ gibt, so daß $\overline{0} \cup \{y \in \mathbb{R};\ 0 < |y| < r\} \subset V$. Dann ist $\mathbb{R} \sqcup \{\overline{0}\}$ T_1-Raum, aber 0 und $\overline{0}$ lassen sich nicht trennen.
(3) $\mathbb{R}$ sei wie folgt topologisiert: Sei $D = \{\frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}\}$. U ist Umgebung von $x \in \mathbb{R}$, wenn es ein offenes Intervall I in $\mathbb{R}$ gibt, so daß $x \in I \subset U$ also $x \in (I\backslash D) \cap \mathbb{R}_+ \subset U$. Dieser Raum erfüllt T_2, aber nicht T_3, denn D ist abgeschlossen und läßt sich nicht von 0 trennen.

Um sich die Begriffe anzueignen, beweise man

4.7 Übung: Ist X eine T_i-Raum, $i = 1, 2, 3$, dann auch jeder Teilraum von X (Für T_4-Räume ist das falsch).

4.8 Satz: Ein Raum X ist genau dann T_2-Raum, wenn die Diagonale $\triangle = \{(x,x); x \in X\}$ in $X \times X$ abgeschlossen ist.

Beweis: $X \times X \backslash \triangle$ ist in der Produkttopologie genau dann offen, wenn es zu $(x,y) \in X \times X \backslash \triangle$, d.h. für $x \neq y$, offene Umgebungen U von x und V von y gibt, so daß $U \times V \subset X \times X \backslash \triangle$, d.h. $U \cup V = \emptyset$. $\square$



Dieses Resultat hat eine interessante Folgerung, die ein bekanntes Ergebnis aus der Analysis verallgemeinert.

4.9 Definition: Eine Teilmenge A eines Raumes X heißt *dicht*, wenn $\overline{A} = X$

4.10 Satz: Seien $f, g : X \to Y$ stetige Abbildungen eines Raumes in einen Hausdorffraum. Dann gilt

(1) Der Graph von f, $G = \{(x, f(x)) \in X \times Y; x \in X\}$ ist abgeschlossen in $X \times Y$.

(2) $A = \{x \in X; f(x) = g(x)\}$ ist abgeschlossen in X.

(3) $D \subset X$ dicht und $f|D = g|D \Rightarrow f = g$

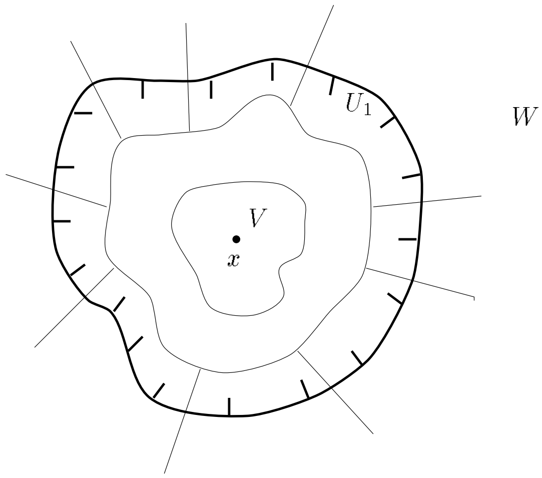
Beweis: (1) Die Abbildung $h : X \times Y \to Y \times Y$, $h(x,y) = (f(x), y)$ ist nach (2.16) stetig, und $G = h^{-1}(\triangle)$.
(2) Die Abbildung $h : X \to Y \times Y$, $h(x) = (f(x), g(x))$ ist nach (2.16)stetig, und $A = h^{-1}(\triangle)$.
(3) $D \subset A$, also $X = \overline{D} \subset \overline{A} = A$. $\square$

Wir zeigen nun andere wichtige Charakterisierungen von T_3- und T_4-Räumen.

4.11 Satz: Ein Raum X ist genau dann T_3, wenn es zu jedem $x \in X$ und jeder Umgebung U von x eine offene Menge V gibt, so daß

$$x \in V \subset \overline{V} \subset U$$

Beweis: Sei X T_3-Raum und U Umgebung von x. Dann gibt es eine offene Umgebung $U_1 \subset U$ von x. Da sich $X \backslash U_1$ und x trennen lassen, gibt es offene Mengen V und W, so daß $V \cap W = \emptyset$, $x \in V$, $X \backslash U_1 \subset W$. Da $V \subset X \backslash W$, ist $\overline{V} \subset \overline{X \backslash W} = X \backslash W \subset U_1 \subset U$. $\square$



Ähnlich beweist man

4.12 Satz: Ein Raum X ist genau dann T_4, wenn es zu jeder abgeschlossenen Menge A und jeder offenen Menge U mit $A \subset U$ eine offene Menge V gibt, so daß $A \subset V \subset \overline{V} \subset U$. $\square$

Als Anwendung zeigen wir

4.13 Satz: Sei X das topologische Produkt nicht-leerer Räume X_j, $j \in J$. Dann ist X genau dann T_i-Raum, $i = 1, 2, 3$, wenn jedes X_j T_i-Raum ist (für T_4-Räume ist das falsch).

Beweis: X erfülle T_i. Wähle in jedem X_j einen Punkt z_j. Dann ist

$$X_k \longrightarrow X, \; x \longmapsto (y_j)_{j \in J} \text{ mit } y_j = \begin{cases} x & j = k \\ z_j & \text{sonst} \end{cases}$$

eine Einbettung. Nach (4.7) ist X_k ein T_i-Raum.

Die Umkehrung beweisen wir exemplarisch für T_3-Räume. Sei $x = (x_j)_{j \in J} \in X$ und U eine Umgebung von x. Nach (2.17) gibt es eine Menge $\prod_{j \in J} W_j \subset U$, wobei W_j Umgebung von x_j und nur endlich viele W_j, etwa für $j_i, \ldots, j_k$, von X_j verschieden sind. Da alle X_j T_3-Räume sind, gibt es offene Mengen V_{j_r}, so daß $x_{j_r} \subset V_{j_r} \subset \overline{V}_{j_r} \subset W_{j_r}$, $r = 1, \ldots, k$. Setze $V_j = X_j$ für $j \notin \{j_1, \ldots, j_k\}$ und $V = \prod_{j \in J} V_j$. Dann ist V offen und $x \in V \subset \overline{V} \subset U$. $\square$

Die folgenden wichtigen Sätze charakterisieren T_4-Räume durch Abbildungen:

4.14 Erweiterungssatz von Tietze: Für einen Raum X sind äquivalent

(1) X ist T_4.

(2) Ist $A \subset X$ abgeschlossen und $f : A \to [0, 1]$ stetig, dann gibt es eine stetige Erweiterung $F : X \to [0, 1]$ von f, d.h. $F|A = f$.

Beweis: (2) $\Rightarrow$ (1): Seien B und C disjunkte abgeschlossene Teilmengen von X. Die Abbildung

$$f : B \cup C \to [0,1],\ f(x) = \begin{cases} 0 & x \in B \\ 1 & x \in C \end{cases}$$

ist stetig und besitzt somit eine stetige Erweiterung F. Dann trennen die offenen Mengen $F^{-1}([0, \frac{1}{3}])$ und $F^{-1}(]\frac{2}{3}, 1])$ die Mengen B und C.

(1) $\Rightarrow$ (2): Für $t \in [0,1]$ definieren wir $A_t = \{a \in A; f(a) \le t\}$. Für jedes $d \in [0,1]$ der Form $d = \frac{p}{2^n}$ konstruieren wir durch Induktion nach n (dies entspricht der Intervallhalbierung) abgeschlossene Mengen X_d, so daß $X_{d1} \subset \overset{\circ}{X}_{d2}$, falls $d_1 < d_2$, und $X_d \cap A = A_d$. Wir beginnen mit $X_0 = A_0$ und $X_1 = X$.

Seien induktiv alle X_d mit $d = \frac{p}{2k}$, $k \le n$, konstruiert. Sei $c = \frac{2p+1}{2^{n+1}}$. Dann ist c Mittelpunkt des Intervalls $[a,b] = [\frac{p}{2^n}, \frac{p+1}{2^n}]$. Wir trennen die abgeschlossenen disjunkten Mengen X_a und $\{a \in A, f(a) \ge c\} \cup X/ \overset{\circ}{X}_b$ durch offene Mengen U_1 und U_2. Nach (4.12) gibt es eine offene Menge V, so daß $X_a \subset V \subset \overline{V} \subset U_1$. Wir setzen $X_c = \overline{V} \cup A_c$. Dann ist X_c abgeschlossen, $X_c \cap A = A_c$, weil $\overline{V} \cap \{a \in A; f(a) \ge c\} = \emptyset$ und $X_c \subset \overset{\circ}{X}_b$, da $\overline{V} \subset \overset{\circ}{X}_b$ und $A_c \subset \overset{\circ}{A}_b \subset \overset{\circ}{X}_b$.

Für $t \in [0,1]$ definieren wir $X_t = \bigcap\limits_{d \ge t} X_d$. Dann ist X_t abgeschlossen, $X_{t_1} \subset \overset{\circ}{X}_{t_2}$ für $t_1 < t_2$, weil es für genügend großes n Punkte d_1 und d_2 mit $t_1 < d_1 < d_2 < t_2$ gibt. Weiter gilt $A_t = X_t \cap A$, denn

$$X_t \cap A = \bigcap_{d \ge t} X_d \cap A = \bigcap_{d \ge t} A_d \supset A_t.$$

Ist umgekehrt $a \in A$, aber $f(a) > t$, dann gibt es ein d mit $f(a) > d > t$. Es folgt $a \notin A_d$, also $a \notin X_t \cap A$.

Definiere

$$F : X \to [0,1],\ F(x) = \mathrm{Inf}\{t \in [0,1]; x \in X_t\}$$

Für $a \in A$ ist $a \in A_{f(a)} \subset X_{f(a)}$, also $F(a) \le f(a)$. Angenommen $F(a) < f(a)$, dann gibt es ein $t < f(a)$, so daß $a \in X_t$. Aber dann ist $f(a) \le t$, ein Widerspruch.

F ist auch stetig in $z \in X$: Sei $s > 0$ gegeben. Wähle $0 < r < s$ und $U = \overset{\circ}{X}_{F(z)+s-r} \setminus X_{F(z)-s+r}$ (setze $X_t = \emptyset$ für $t < 0$ und $X_t = X$ für $t > 1$). Dann gilt für $x \in U$:

$$F(z) - s + r \le F(x) \le F(z) + s - r$$

$\square$

4.15 Trennungslemma von Urysohn: Für einen Raum X sind äquivalent

(1) X ist T_4.

(2) Sind $A, B \subset X$ disjunkt und abgeschlossen, dann gibt es eine stetige Abbildung $F : X \to [0,1]$, so daß $A \subset F^{-1}(0)$ und $B \subset F^{-1}(1)$.

Der Beweis folgt aus (4.14). Vergleiche auch den ersten Teil des Beweises.

Der Erweiterungssatz von Tietze läßt sich leicht verallgemeinern.

4.16 Übung: Ist X ein T_4-Raum, $A \subset X$ abgeschlossen und $f : A \to \mathbb{R}$ eine stetige Abbildung, dann besitzt f eine Erweiterung $F : X \to \mathbb{R}$. Gilt $|f(a)| < c$ (bzw. $\leq c$) $\forall a \in A$, kann F so gewählt werden, daß auch $|F(x)| < c$ (bzw. $\leq c$).

5 Kompakte Räume

Basis für viele wichtige Sätze und damit auch ihrer Folgerungen ist der Satz von Heine-Borel. Aus ihm folgt etwa der Satz über die Existenz von Maxima und Minima stetiger Funktionen auf abgeschlossenen Intervallen, und daraus wiederum der Mittelwertsatz, der für die Behandlung differenzierbarer Funktionen von zentraler Bedeutung ist.

5.1 Satz von Heine-Borel: Jede Überdeckung eines abgeschlossenen Intervalls durch offene Intervalle besitzt eine endliche Teilüberdeckung.

Wir wollen nun topologische Räume studieren, die eine Art Heine-Borel-Kriterium erfüllen.

5.2 Definition: Eine Familie $\mathcal{U}$ von Teilmengen eines Raumes X heißt *Überdeckung* von X, wenn $X = \bigcup_{U\in\mathcal{U}} U$. Die Überdeckung $\mathcal{U}$ heißt *offen* (bzw. *abgeschlossen*), wenn jedes $U \in \mathcal{U}$ offen (bzw. abgeschlossen) ist. Eine *Teilüberdeckung* von $\mathcal{U}$ ist eine Unterfamilie $\mathcal{W} \subset \mathcal{U}$, so daß $\mathcal{W}$ wieder überdeckt.

5.3 Definition: Ein Raum X heißt *kompakt*, wenn jede offene Überdeckung von X eine endliche Teilüberdeckung besitzt. Eine Teilmenge A von X heißt kompakt, wenn sie als Teilraum kompakt ist.

Beispiele:

(1) Aus der Analysis ist bekannt: Jede abgeschlossene beschränkte Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ ist kompakt.

(2) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ mit Grenzwert b. Dann ist

$$\{b\} \cup \{a_n;\ n \in \mathbb{N}\} \quad \text{kompakt}$$

Direkt aus der Definition bzw. durch Übergang zum Komplement folgt

5.4 Satz: Für eine Teilmenge A eines Raumes X sind äquivalent

(1) A ist kompakt.

(2) Ist $\mathcal{U}$ eine Familie von offenen Teilmengen von X mit $A \subset \bigcup_{U\in\mathcal{U}} U$, dann existiert eine endliche Teilfamilie $\mathcal{W} \subset \mathcal{U}$ mit $A \subset \bigcup_{U\in\mathcal{W}} U$.

(3) Ist $\mathcal{B}$ eine Familie abgeschlossener Teilmengen von X, so daß $A \cap \bigcap_{B\in\mathcal{B}} B = \emptyset$, dann existiert eine endliche Teilfamilie $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}$ mit $A \cap \bigcap_{B\in\mathcal{C}} B = \emptyset$.

5.5 Satz: Ist X kompakt und $f : X \to Y$ stetig, so ist $f(X)$ kompakt.

Beweis: Ist $\mathcal{U}$ eine offene Überdeckung von $f(X)$ in Y, dann ist $\{f^{-1}(U);\ U \in \mathcal{U}\}$ offene Überdeckung von X. Also gibt es eine endliche Teilfamilie $\mathcal{W} \subset$

$\mathcal{U}$, so daß $\{f^{-1}(V); V \in \mathcal{W}\}$ überdeckt. Es folgt $f(X) = \bigcup_{V\in\mathcal{W}} f(f^{-1}(V)) \subset \bigcup_{V\in\mathcal{W}} V$. $\square$

Der nächste Satz ist Schlüssel für eine Reihe wichtiger Resultate über kompakte Räume.

5.6 Satz: Seien $A \subset X$ und $B \subset Y$ kompakte Teilmengen und sei $\mathcal{U}$ eine offene Überdeckung von $A \times B$ in $X \times Y$. Dann gibt es offene Mengen $U \subset X$, $V \subset Y$ und endlich viele $U_1, \dots, U_n \in \mathcal{U}$, so daß $A \times B \subset U \times V \subset \bigcup_{i=1}^n U_i$.

Schritt 1: Zu jedem $a \in A$ gibt es offene Mengen $U_a \subset X, V_a \subset Y$, sowie $U_{a,1}, \dots, U_{a,n(a)} \in \mathcal{U}$, so daß $\{a\} \times B \subset U_a \times V_a \subset \bigcup_{i=1}^{n(a)} U_{a,i}$.

Beweis: Sei $a \in A$ fest. Zu jedem $b \in B$ gibt es ein $U_{a,b} \in \mathcal{U}$, so daß $(a,b) \in U_{a,b}$. Nach Definition der Produkttopologie gibt es offene Mengen $S_b \subset X, T_b \subset Y$, so daß $(a,b) \in S_b \times T_b \subset U_{a,b}$. Dann ist $\{T_b; b \in B\}$ eine offene Überdeckung von B, die eine endliche Teilüberdeckung $\{T_{b_1}, \dots, T_{b_k}\}$ besitzt. Dann ist mit $n(a) = k, U_a = \bigcap_{i=1}^k S_{b_i}, V_a = \bigcup_{i=1}^k T_{b_i}$ und $U_{a,i} = U_{a,b_i}$ Schritt 1 gezeigt:

$$\{a\} \times B \subset U_a \times \bigcup_{i=1}^k T_{b_i} = \bigcup_{i=1}^k U_a \times T_{b_i} \subset \bigcup_{i=1}^k S_{b_i} \times T_{b_i} \subset \bigcup_{i=1}^k U_{a,b_i}.$$

Schritt 2: Die U_a aus Schritt 1 bilden eine offene Überdeckung von A in X, die somit eine endliche Teilüberdeckung $\{U_{a_1}, \dots, U_{a_r}\}$ besitzt. Wir setzen nun $U = \bigcup_{j=1}^r U_{a_j}$, $V = \bigcap_{j=1}^r V_{a_j}$. Dann gilt

$$A \times B \subset U \times V = \left(\bigcup_{j=1}^r U_{a_j}\right) \times \left(\bigcap_{j=1}^r V_{a_j}\right) \subset \bigcup_{j=1}^r U_{a_j} \times V_{a_j} \subset \bigcup_{j=1}^r \bigcup_{i=1}^{n(a_j)} U_{a_j,i}.$$

Wir ziehen daraus einige Folgerungen.

5.7 Satz: Das topologische Produkt $X = X_1 \times \ldots \times X_n$ von nicht-leeren Räumen ist genau dann kompakt, wenn alle X_i kompakt sind.

Beweis: Ist X kompakt, dann ist nach (5.5) auch $X_i = p_i(X)$ kompakt, wobei $p_i : X \to X_i$ die Projektion ist. Sind umgekehrt alle X_i kompakt, folgt induktiv aus (5.6), daß auch X kompakt ist. $\square$

5.8 Bemerkung: Auch das Produkt beliebig vieler kompakter Räume ist kompakt. Unser Beweis liefert das Ergebnis nur für endlich viele Faktoren.

5.9 Sind $A \subset X$ und $B \subset Y$ kompakte Teilmengen und $W \subset X \times Y$ offen, so daß $A \times B \subset W$. Dann gibt es offene Mengen $U \subset X$ und $V \subset Y$, so daß $A \times B \subset U \times V \subset W$.

Beweis: Wende (5.6) mit der Überdeckung $\{W\}$ an. $\square$

5.10 Satz:

(1) Sind A und B disjunkte, kompakte Teilmengen eines Hausdorffraumes X, dann lassen sich A und B trennen.

(2) Jeder abgeschlossene Teilraum A eines kompakten Raumes X ist kompakt.

(3) Jeder kompakte Teilraum A eines Hausdorffraumes X ist abgeschlossen.

(4) Ein kompakter Hausdorffraum ist normal.

Beweis: (1) Nach (4.8) ist die Diagonale $\triangle$ abgeschlossen in $X \times X$. Da A und B disjunkt sind, gilt $A \times B \subset X \times X \backslash \triangle$. Nach (5.9) gibt es offene Mengen U und V, so daß $A \times B \subset U \times V \subset X \times X \backslash \triangle$, d.h. U und V trennen A und B.

(2) Sei $\mathcal{B}$ eine Familie abgeschlossener Mengen, so daß $A \cap \bigcap_{B \in \mathcal{B}} B = \emptyset$. Da X kompakt ist, gibt es in $\mathcal{B} \cup \{A\}$ eine endliche Teilfamilie $\{B_1, \ldots, B_n\}$ mit leerem Durchschnitt. Insbesondere gilt $A \cap \bigcap_{i=1}^{n} B_i = \emptyset$.

(3) Sei $x \in X \backslash A$. Da A und $\{x\}$ kompakt sind, lassen sie sich nach (1) trennen. Insbesondere ist $X \backslash A$ offen.

(4) folgt aus (1) und (2). □

Für die Konstruktion von Homöomorphismen werden wir folgendes Ergebnis häufig benutzen.

5.11 Satz: Sei $f : X \to Y$ stetig, X kompakt und Y hausdorffsch. Dann gilt

(1) f ist abgeschlossen, d.h. ist $A \subset X$ abgeschlossen, dann ist $f(A) \subset Y$ abgeschlossen.

(2) Ist f surjektiv, so ist f eine Identifizierung.

(3) Ist f injektiv, so ist f eine Einbettung.

Beweis: (1): Ist $A \subset X$ abgeschlossen, so sind A und damit $f(A)$ kompakt. Also ist auch $f(A)$ abgeschlossen.

(2) Surjektive abgeschlossene stetige Abbildungen sind Identifikationen.

(3) Sei $g : Z \to X$ eine Abbildung, so daß $f \circ g$ stetig ist, und $A \subset X$ abgeschlossen. Dann ist $g^{-1}(A) = (f \circ g)^{-1}(f(A))$ nach (1) abgeschlossen, und damit g stetig. □.

Teil (1) und (3) verallgemeinern bekannte Resultate über stetige Abbildungen auf abgeschlossenen Intervallen. Ein weiterer Satz dieser Art ist

5.12 Satz: Ist X kompakt und $f : X \to \mathbb{R}$ stetig, dann gibt es Punkte $a, b \in X$, so daß $f(a) \leq f(x) \leq f(b)\ \forall x \in X$.

Beweis: Wir zeigen die Existenz des Minimums. Sei $c = \operatorname{Inf} f(x)$, falls dieses existiert, und sonst $c = -\infty$. Setze $A_q = f^{-1}(]-\infty, q])$ und $A = \bigcap_{c<q} A_q$. Jedes A_q ist abgeschlossen und für $c < q$ nicht leer. Angenommen $A = \emptyset$, dann gäbe es nach (5.4.3) endlich viele q_i, wir ordnen sie nach Größe $q_1 < \ldots < q_n$, so daß $\bigcap_{i=1}^n A_{q_i} = \emptyset$. Aber $\bigcap_{i=1}^n A_{q_i} = A_{q_i} \neq \emptyset$. Also ist $A \neq \emptyset$. Für $a \in A$ gilt $c \leq f(a) \leq q \; \forall q > c$. Es folgt $c = f(a)$. □

Wir wenden uns noch kurz kompakten Mengen in metrischen Räumen zu.

5.13 Definition: Sei (X, d) ein metrischer Raum. Für Teilmengen $A, B \subset X$ heißt

$$d(A, B) = \mathrm{Inf}\{d(x, y);\; x \in A, y \in B\}$$

der *Abstand* von A und B, und

$$d(A) = \mathrm{Sup}\{d(x, y);\; x, y \in A\}$$

der *Durchmesser* von A.

5.14 Übung: Versehen wir $X \times X$ mit der Produkttopologie, dann sind die Abbildungen

$$\begin{array}{ll} d : X \times X \to \mathbb{R}, & (x, y) \mapsto d(x, y) \\ d(-, A) : X \to \mathbb{R}, & x \mapsto d(x, A) \end{array}$$

stetig.

Als einfache Folgerung erhalten wir

5.15 Satz: Für nicht-leere Teilmengen A, B eines metrischen Raumes (X, d) gilt:

(1) $d(x, A) = 0 \iff x \in \overline{A}$.

(2) A kompakt, B abgeschlossen, $A \cap B = \emptyset \Rightarrow d(A, B) > 0$ (ist A nur abgeschlossen, ist dies i.a. falsch).

(3) Ist A kompakt, so gibt es ein $a \in A$, so daß $d(A, B) = d(a, B)$.

(4) Sind A und B kompakt, gibt es $a \in A$ und $b \in B$ mit $d(A, B) = d(a, b)$.

(5) $d(A) = d(\overline{A})$.

(6) Ist A kompakt, gibt es $a, b \in A$ mit $d(A) = d(a, b)$.

Für spätere Anwendungen benötigen wir

5.16 Lebegue'sches Lemma: Zu jeder Überdeckung $\mathcal{U}$ eines kompakten metrischen Raumes (X, d) gibt es eine Zahl λ, genannt *Lebesguezahl* zu $\mathcal{U}$, so daß jede Menge M mit $d(M) < \lambda$ in einem $U \in \mathcal{U}$ liegt.

Beweis: Jedes $x \in X$ liegt in einem $U(x) \in \mathcal{U}$. Da $U(x)$ offen ist, enthält es eine Kugelumgebung $K(x; \varepsilon(x)) = \{y \in X; d(x, y) < \varepsilon(x)\}$. Die offene Überdeckung $\mathcal{W} = \{K(x; \frac{1}{2}\varepsilon(x)); x \in X\}$ von X enthält eine endliche Teilüberdeckung $\{K(x_1, \frac{1}{2}\varepsilon(x_1)), \ldots, K(x_n, \frac{1}{2}\varepsilon(x_n))$. Sei $\lambda = \min\{\frac{1}{2}\varepsilon(x_1), \ldots, \frac{1}{2}\varepsilon(x_n)\}$ und M eine Menge mit $d(M) < \lambda$. Wähle $y \in M$. Das liegt in einem $K(x_i, \frac{1}{2}\varepsilon(x_i))$. Da für jedes $z \in M$ gilt, $d(y,z) < \lambda < \frac{1}{2}\varepsilon(x_i))$, folgt $M \subset K(x_i, \varepsilon(x_i)) \subset U(x_i) \in \mathcal{U}$. $\square$

Wir benötigen für später noch eine Abschwächung des Kompaktheitbegriffs.

5.17 Definition: Ein Raum X heißt *lokal kompakt*, wenn es zu jedem $x \in X$ und jeder Umgebung U von x eine kompakte Umgebung K von x in U gibt, d.h. es gibt eine offene Menge V, so daß $x \in V \subset K \subset U$.

5.18 Satz: Jeder kompakte Hausdorffraum X ist lokal kompakt.

Beweis: Sei U offene Umgebung von $x \in X$. Da X normal ist, besitzt x eine abgeschlossene Umgebung K in U. Nach (5.10) ist K kompakt. $\square$

5.19 Satz: Ein lokal kompakter Hausdorffraum X ist regulär.

Beweis: Sei U eine offene Umgebung von $x \in X$. Dann besitzt x eine kompakte Umgebung K in U, die nach (5.10) abgeschlossen ist. Also ist X regulär nach (4.11). $\square$

5.20 Übung: (*Einpunktkompaktifizierung*) Sei X lokal kompakter Hausdorffraum und $X^c := X \sqcup \{w\}$. Offene Mengen in X^c seien alle offene Mengen von X und alle Mengen der Form $X^c \backslash K$, wobei $K \subset X$ kompakt ist. Zeigen Sie: Dies definiert eine Topologie auf X^c, die Inklusion $X \hookrightarrow X^c$ ist eine Einbettung, X^c ist kompakt.

5.21 Übung:
(1) Ein Hausdorffraum ist genau dann lokal kompakt, wenn jeder Punkt eine kompakte Umgebung besitzt.

(2) Sind X und Y nicht leer, dann ist $X \times Y$ genau dann lokal kompakt, wenn es X und Y sind.

6 Abbildungsräume

Sei $Abb(X,Y)$ die Menge der Abbildungen der Menge X in die Menge Y. Die Abbildung

$$e_{X,Y} : X \times Abb(X,Y) \longrightarrow Y,\ (x,f) \longmapsto f(x)$$

heißt *Auswertung.*

6.1 Ist $f : X \times Y \to Z$ eine Abbildung. Dann gibt es genau eine Abbildung $\hat{f} : Y \to Abb(X,Z)$, genannt *adjungierte Abbildung* von f, so daß das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
X \times Abb(X,Z) \arrow[rr, "e_{X,Z}"] & & Z \\
& x \times Y \arrow[ul, "id_X \times \hat{f}"] \arrow[ur, "f"'] &
\end{tikzcd}$$

kommutiert. $\hat{f}$ ist gegeben durch

$$\hat{f}(y) : X \longrightarrow Z,\ x \longmapsto f(x,y)$$

Beweis: $f(x,y) = e_{X,Z} \circ (id_x \times \hat{f})(x,y) = e_{X,Y}(x, \hat{f}(y)) = \left(\hat{f}(y)\right)(x)$. Also muß $\hat{f}(y)$ wie angegeben definiert werden. $\square$

Wir topologiesieren die Teilmenge $C(X,Y)$ der stetigen Abbildungen in $Abb(X,Y)$.

6.2 Definition: Die *kompakt-offene Topologie* auf $C(X,Y)$ hat als Subbasis die Mengen

$$W(K,U) = \{f \in Abb(X,Y);\ f(K) \subset U, K \subset X \text{ kompakt}, U \subset Y \text{ offen}\}$$

$C(X,Y)$ versehen mit dieser Topologie wird Y^X bezeichnet.

6.3 Satz:

(1) Sind $g : A \to X$ und $h : Y \to Z$ stetig, dann sind es auch

$$g^* : Y^X \to Y^A,\ f \mapsto f \circ g \text{ und } h_* : Y^X \to Z^X,\ f \mapsto h \circ f$$

(2) Ist $f : X \times Y \to Z$ stetig, dann ist es auch $\hat{f} : Y \to Z^X$.

(3) Ist X lokal kompakt, dann ist $e_{X,Z} : X \times Z^X \to Z$ stetig.

(4) Ist X lokal kompakt, dann ist $Z^{X \times Y} \to (Z^X)^Y$, $f \mapsto \hat{f}$, bijektiv.

Beweis: (1) Nach (2.12) genügt es nachzuweisen, daß $(g^*)^{-1}(W(K,U))$ offen in Y^X ist, wobei $K \subset A$ kompakt und $U \subset Y$ offen. Aber

$$(g^*)^{-1}(W(K,U)) = \{f \in Y^X;\ f \circ g(K) \subset U\} = W(g(K),U)$$

ist eine Subbasismenge von Y^X, da $g(K)$ kompakt ist.
Sei $L \subset X$ kompakt und $V \subset Z$ offen. Dann ist

$$\begin{aligned}(h_*)^{-1}(W(L,V)) &= \{f \in Y^X; h \circ f(L) \subset V\} = \{f \in Y^X; f(L) \subset h^{-1}(V)\} \\ &= W(L, h^{-1}(V)).\end{aligned}$$

(2) Ist $f : X \times Y \to Z$ stetig, dann natürlich auch $\hat{f}(y) : X \to Z$, also ist Bild $(\hat{f}) \subset Z^X$. Sei $K \subset X$ kompakt und $V \subset Z$ offen. Sei $y \in \hat{f}^{-1}(W(K,V))$, d.h. $\hat{f}(y)$ bildet K nach V ab, also $f(K \times y) \subset V$ oder $K \times y \subset f^{-1}(V)$. Nach (5.9) gibt es offene Mengen $U_1 \subset X$, $U_2 \subset Y$, so daß $K \times y \subset U_1 \times U_2 \subset f^{-1}(V)$. Insbesondere gilt $f(K \times U_2) \subset V$, also $U_2 \subset \hat{f}^{-1}(W(K,V))$. Damit ist $\hat{f}^{-1}(W(K,V))$ offen.

(3) Sei V offen in Z und $(x,f) \in e_{X,Z}^{-1}(V)$, also $f(x) \in V$ oder $x \in f^{-1}(V)$. Da X lokal kompakt ist, besitzt x eine kompakte Umgebung K in $f^{-1}(V)$. Da $f(K) \subset V$, ist $K \times W(K,V)$ Umgebung von (x,f), die in $e_{X,Z}^{-1}(V)$ liegt, da $e(K, W(K,V)) \subset V$.

(4) Ist $f : X \times Y \to Z$ stetig, dann ist nach (2) $\hat{f} : Y \to Z^X$ stetig. Ist umgekehrt $\hat{f}$ stetig, dann nach (6.1) auch f, da $e_{X,Z}$ stetig ist. Nach (6.1) entsprechen sich f und $\hat{f}$ umkehrbar eindeutig. $\square$

Es wäre nun schön zu wissen, wann die Bijektion (6.3.4) ein Homöomorphismus ist. Auskunft gibt das

6.4 Exponentialgesetz: Sind X und Y lokal kompakt, so ist

$$Z^{X \times Y} \to (Z^X)^Y, \; f \mapsto \hat{f}$$

ein Homöomorphismus.

Beweis: Mit X und Y ist auch $X \times Y$ lokal kompakt (5.21). Damit sind die Auswertungsabbildungen $e_{X,Z}$, $e_{X \times Y,Z}$, und e_{Y,Z^X} stetig. Sei $h : (Z^X)^Y \to Z^{X \times Y}$ die zu $e_{X,Z} \circ (id_x \times e_{Y,Z^X})$ adjungierte Abbildung, d.h. das Diagramm

$$\begin{tikzcd} X \times Y \times Z^{X \times Y} \arrow[r, "e_{X \times Y,Z}"] & Z \\ X \times Y \times (Z^X)^Y \arrow[u, "id_{X \times Y} \times h"] \arrow[r, "id_X \times e_{Y,Z^X}"] & X \times Z^X \arrow[u, "e_{X,Z}"'] \end{tikzcd}$$

kommutiert. Sei $u : Y \times Z^{X \times Y} \to Z^X$ die Adjungierte zu $e_{X \times Y,Z}$ und $k : Z^{X \times Y} \to (Z^X)^Y$ die Adjungierte zu u; d.h. die Diagramme

$$\begin{tikzcd} X \times Z^Y \arrow[rr, "e_{X,Z}"] & & Z \\ & X \times Y \times Z^{X \times Y} \arrow[ul, "id_X \times u"] \arrow[ur, "e_{X \times Y,Z}"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} Y \times (Z^X)^Y \arrow[rr, "e_{Y,Z^X}"] & & Z^X \\ & Y \times Z^{X \times Y} \arrow[ul, "id_Y \times k"] \arrow[ur, "u"'] & \end{tikzcd}$$

kommutieren. h und k sind zueinander inverse Abbildungen: Sei $f : X \times Y \to Z$ aus $Z^{X \times Y}$. Dann gilt für $k(f) : Y \to Z^X$

$$k(f)(y) = e_{Y,Z^X}(y,f) = u(y,f)$$

und

$$u(y,f): X \to Z, x \mapsto e_{X,Z}(x, u(y,f)) = e_{X\times Y,Z}(x,y,f) = f(x,y).$$

Also ist $k(f) = \hat{f}$, die Adjungierte von f. Für $h(\hat{f}) : X \times Y \to Z$ gilt

$$\begin{aligned} h(\hat{f})(x,y) &= e_{X,Z} \circ (id_X \times e_{Y,Z^X})(x,y,\hat{f}) = e_{X,Z} \circ (x, \hat{f}(y)) \\ &= [\hat{f}(y)](x) = f(x,y) \end{aligned}$$

□

6.4 Übung: (1) Ist X lokal kompakt, dann ist

$$(Y \times Z)^X \to Y^X \times Z^X, f \mapsto (p_1 \circ f, p_2 \circ f)$$

ein Homöomorphismus (p_i sind die Projektionen)

(2) Ist $Y \to Z$ eine Einbettung, dann auch $Y^X \to Z^X$.

(3) Sind A, B, X, Y Räume und A, B lokal kompakt, dann ist

$$X^A \times Y^B \to (X \times Y)^{A\times B},\ (f,g) \mapsto f \times g$$

stetig.

6.5 Bemerkung: (6.4.1) und (6.4.3) bleiben richtig, wenn man lokal kompakt durch hausdorffsch ersetzt.

6.6 Satz: Sind X und Y lokal kompakt, dann ist die Komposition

$$Y^X \times Z^Y \to Z^X,\ (f,g) \mapsto g \circ f$$

stetig.

Beweis: Nach (6.3.3) ist

$$\begin{array}{ccccc} X \times Y^X \times Z^Y & \xrightarrow{e_{X,Y} \times id} & Y \times Z^Y & \xrightarrow{e_{Y,Z}} & Z \\ (x,f,g) & \longrightarrow & (f(x),g)) & \longrightarrow & g \circ f(x) \end{array}$$

stetig. Die Komposition ist die Adjungierte dieser Abbildung. □

Für spätere Anwendungen ist folgender Satz besonders wichtig.

6.7 Satz: Ist $f : X \to Y$ eine Identifizierung und Z lokal kompakt, dann ist auch $id \times f : Z \times X \to Z \times Y$ eine Identifizierung.

Beweis: Sei $g : Z \times Y \to T$ eine Abbildung, so daß $g \circ (id \times f)$ stetig ist. Wir müssen zeigen, daß g stetig ist. Sei $h : X \to T^Z$ die (stetige) Adjungierte zu $g \circ (id \times f)$. d.h.

$$h(x) : Z \to T, z \mapsto g \circ (id \times f)(z,x) = g(z, f(x)) = [\hat{g}(f(x))](z),$$

wobei $\hat{g}$ die Adjungierte von g ist. Es folgt $h = \hat{g} \circ f$. Da h stetig und f Identifizierung ist, ist $\hat{g}$ stetig und damit auch g nach (6.3.4). □

Kap. II Homotopietheorie

7 Der Homotopiebegriff

Das zentrale Problem der Topologie ist das

7.1 Homöomorphieproblem: Sind zwei gegebene Räume X und Y homöomorph oder nicht?

Offensichtlich ist "homöomorph sein" eine Äquivalenzrelation. Man hätte gerne gewußt, wann zwei Räume zur selben Äquivalenzklasse gehören, und hätte gerne eine möglichst vollständige Liste aller Äquivalenzklassen. Eine solche vollständige Liste kann es nach Sätzen aus der mathematischen Logik nicht geben. Da auch (7.1) in der von uns angegebenen Form oft nur schwer lösbar ist, versucht man es zunächst mit einer gröberen Äquivalenzrelation, die größere Äquivalenzklassen liefert: Sind X und Y homöomorph, gibt es Abbildungen

$$f : X \to Y, \qquad\qquad g : Y \to X$$

so daß $g \circ f = id_X$ und $f \circ g = id_Y$. Statt nun zu verlangen, daß die Kompositionen die Identitäten sind, könnte man schwächer fordern, daß sich $g \circ f$ und $f \circ g$ in die jeweiligen Identitäten deformieren lassen, d.h. daß sie zu den Identitäten homotop sind.

7.2 Konvention: Unter Abbildungen verstehen wir ab jetzt nur stetige Abbildungen.

7.3 Definition: Sei $\mathcal{C}$ eine Familie von Abbildungen $X \to Y$ und seien $f_0, f_1 \in \mathcal{C}$. Eine *Homotopie* von f_0 und f_1, wir schreiben $F : f_0 \simeq f_1$, ist eine Abbildung $F : X \times [0,1] \to Y$, so daß $F(x,0) = f_0(x), F(x,1) = f_1(x)$. Wir sagen "$F \in \mathcal{C}$", falls jede Abbildung $F_t : X \to Y$, $x \mapsto F(x,t)$, $t \in [0,1]$ in $\mathcal{C}$ liegt, und nennen f_0 und f_1 *homotop* in $\mathcal{C}$.

Die abgeschwächte Form eines Homöomorphismus' ist die Homotopieäquivalenz.

7.4 Definition: Eine Abbildung $f : X \to Y$ von Räumen heißt *Homotopieäquivalenz*, wir schreiben $f : X \simeq Y$, wenn es eine Abbildung $g : Y \to X$ gibt, genannt eine *homotopieinverse* Abbildung zu f, so daß

$$g \circ f \simeq id_X \text{ und } f \circ g \simeq id_Y.$$

Im Sinne des eben diskutierten wollen wir zunächst nachweisen, daß "homotopieäquivalent sein" ebenfalls eine Äquivalenzrelation ist.

7.5 Satz:

(1) Sei $\mathcal{C}$ eine Familie von Abbildungen $X \to Y$. Dann ist "homotop sein in $\mathcal{C}$" eine Äquivalenzrelation.

(2) Sei $\mathcal{C}$ eine Familie von Abbildungen $T \to X, X \to Y, Y \to Z$, abgeschlossen unter Komposition. Dann gilt für $f : T \to X, g_0, g_1 : X \to Y$ und $h, h_0, h_1 : Y \to Z$

$$\begin{array}{l} g_0 \simeq g_1 \text{ in } \mathcal{C} \Rightarrow h \circ g_0 \circ f \simeq h \circ g_1 \circ f \text{ in } \mathcal{C} \\ g_0 \simeq g_1 \text{ in } \mathcal{C} \text{ und } h_0 \simeq h_1 \text{ in } \mathcal{C} \Rightarrow h_0 \circ g_0 \simeq h_1 \circ g_1 \text{ in } \mathcal{C} \end{array}$$

(3) "homotopieäquivalent sein" ist eine Äquivalenzrelation.

Beweis: (1) *Reflexivität*: $g \simeq g$ in $\mathcal{C}$ vermöge $G : X \times I \xrightarrow{proj} X \xrightarrow{g} Y$, denn dann gilt $G_t = g \in \mathcal{C}$.

Symmetrie: $G : g_0 \simeq g_1$ in $\mathcal{C} \Rightarrow -G : g_1 \simeq g_0$ in $\mathcal{C}$, wobei

$$-G : X \times [0,1] \to Y, (x,t) \mapsto G(x, 1-t).$$

Beachte $-G_t = G_{1-t} \in \mathcal{C}$.

Transivität: $G : g_0 \simeq g_1$ und $\overline{G} : g_1 \simeq g_2$ in $\mathcal{C} \Rightarrow G + \overline{G} : g_0 \simeq g_2$ in $\mathcal{C}$ mit

$$(G + \overline{G})(x,t) = \begin{cases} G(x, 2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \overline{G}(x, 2t-1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Die Stetigkeit von $G + \overline{G}$ folgt aus (7.7). Beachte wieder, daß $(G + \overline{G})_t \in \mathcal{C}$.

(2) $G : g_0 \simeq g_1$ in $\mathcal{C} \Rightarrow h \circ G \circ (f \times id) : h \circ g_0 \circ f \simeq h \circ g_1 \circ f$ in $\mathcal{C}$
$g_0 \simeq g_1$ und $h_0 \simeq h_1$ in $\mathcal{C} \Rightarrow h_0 \circ g_0 \simeq h_0 \circ g_1 \simeq h_1 \circ g_1$ in $\mathcal{C}$ nach dem eben gezeigten.

(3) folgt aus (2).

Für spätere Verweise notieren wir separat

7.6 Ist $\mathcal{C}$ eine Familie von Abbildungen $X \to Y$ und sind $F, \overline{F}$ Homotopien in $\mathcal{C}$, so daß $F_1 = \overline{F}_0$, dann sind auch

$$\begin{array}{lll} -F: & X \times [0,1] \to Y, & -F(x,t) = F(x, 1-t) \\ F + \overline{F}: & X \times [0,1] \to Y, & (F + \overline{F})(x,t) = \begin{cases} F(x, 2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \overline{F}(x, 2t-1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} \end{array}$$

in $\mathcal{C}$.

Es ist noch der Nachweis der Stetigkeit von $F + \overline{F}$ zu erbringen:

7.7 Satz: Sei $\mathcal{U}$ eine offene (bzw. endliche, abgeschlossene) Überdeckung von X und $f : X \to Y$ eine Abbildung, so daß $f|U : U \to Y$ stetig ist für alle $U \in \mathcal{U}$. Dann ist f stetig.

Beweis: Sei $\mathcal{U}$ offene Überdeckung. Sei $V \subset Y$ offen. Dann ist

$$f^{-1}(V) = \bigcup_{U \in U} U \cap f^{-1}(V)$$

offen, denn $U \cap f^{-1}(V)$ ist offen in U in der Spurtopologie, da f/U stetig ist, und damit auch offen in X, weil U offen ist.

Ist $\mathcal{U}$ endliche abgeschlossene Überdeckung, folgt genauso, daß $f^{-1}(V)$ abgeschlossene in X ist, falls $V \subset Y$ abgeschlossen ist. □

Wir wollen jetzt auf weitere wichtige Probleme zu sprechen kommen, die im 1. Kapitel schon angerissen wurden.

7.8 Erweiterungsproblem: Gegeben ein Raum X, ein Teilraum $B \subset X$ und eine Abbildung $f : B \to Y$. Wann läßt sich f zu einer Abbildung $F : X \to Y$ erweitern?

$$\begin{tikzcd} B \arrow[rr, "i"] \arrow[dr, "f"'] & & X \arrow[dl, "F"] \\ & Y & \end{tikzcd} \qquad i \text{ ist die Inklusion}$$

Dual dazu (man drehe alle Pfeile um) haben wir das

7.9 Liftungsproblem: Gegeben seien Abbildungen $p : X \to B$ (in der Regel ist p surjektiv) und $f : Y \to B$. Wann gibt es einen "Lift" $F : Y \to X$, so daß folgendes Diagramm kommutiert?

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[d, "p"] \\ Y \arrow[ur, "F"] \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd}$$

Die Bedeutung von (7.8) haben wir z.B. bei der Charakterisierung normaler Räume gesehen. Auf das Liftungsproblem werden wir später noch zu sprechen kommen. Auch diese Probleme haben eine schwache, d.h. homotope Version, indem wir nur verlangen, daß die Diagramme bis auf Homotopie kommutieren.

Als weiteres Problem wollen wir das Retraktionsproblem ansprechen.

7.10 Definition: Ein Raum A heißt *Retrakt* eines Raumes X, wenn es Abbildungen $i : A \to X$ und $r : X \to A$ gibt, so daß $r \circ i = id_A$. Wir nennen r eine *Retraktion* von i.

7.11 Bemerkung: i ist stets eine Einbettung, denn (2.14.2) ist trivialerweise erfüllt. Deshalb faßt man A meist als Teilraum von X auf.

7.12 Retraktionsproblem: Wann ist $A \subset X$ ein Retrakt von X?

Dual dazu (Pfeile umdrehen?) haben wir das

7.13 Schnittproblem: Wann gibt es zur Abbildung $p : X \to A$ einen *Schnitt*, d.h. eine Abbildung $s : A \to X$, so daß $p \circ s = id_A$?

7.14 Bemerkung: p ist eine Identifizierung, denn (2.5.2) ist trivialerweise erfüllt. Beachte, daß A vermöge s als Teilraum von X aufgefaßt werden kann und damit ein Retrakt von X ist.

Wir wollen an einem Beispiel die Bedeutung des Retraktionsproblems erläutern:

7.15 Satz (Beweis später): Sei $\mathbb{B}^n$ die n-dimensionale Einheitskugel und S^{n-1} ihre Randsphäre. Dann ist S^{n-1} nicht Retrakt von $\mathbb{B}^n$.

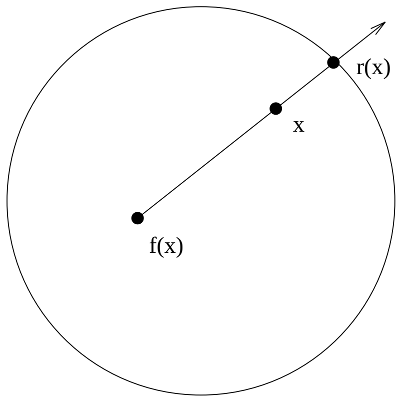
Dieser Satz hat eine interessante Anwendung:

7.16 Brower'scher Fixpunktsatz: Jede Abbildung $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}^n$ hat einen Fixpunkt.

Beweisskizze: Angenommmen f hat keinen Fixpunkt. Dann ist $f(x) \neq x \ \forall x \in \mathbb{B}^n$. Sei $r(x)$ der Schnittpunkt des Strahls von $f(x)$ durch x mit der Randsphäre. Dann ist

$$r : \mathbb{B}^n \to S^{n-1}$$

eine stetige Retraktion, denn $r(a) = a$ für alle $a \in S^{n-1}$. Widerspruch. $\square$



Will man (7.15) direkt beweisen, hat man große Schwierigkeiten. Wenn man keine Retraktion findet, kann es sein, daß es keine gibt oder daß man sich ungeschickt anstellt. Den Ausweg aus diesem Dilemma bietet die Algebraische Topologie, die geometrische Sachverhalte in algebraische übersetzt, die oft leichter lösbar sind.

8 Der Grundansatz der Algebraischen Topologie

Im vergangenen Paragraphen haben wir von Familien von Abbildungen $X \to Y$ gesprochen, die in (7.5.2) unter Komposition abgeschlossen sein sollten. Beispiele solcher Familien sind Abbildungen von Paaren

$$f : (X, A) \to (Y, B),$$

die vorgegebene Teilräume ineinander abbilden, d.h. für die $f(A) \subset B$. Ist $g : (Y, B) \to (Z, C)$ auch eine Abbildung von Paaren, dann offensichtlich auch $g \circ f : (X, A) \to (Z, C)$.

Eine andere wichtige Familie besteht aus denjenigen Abbildungen $f : X \to Y$, die eine vorgegebene Abbildung $f_A : A \to Y$, $A \subset X$, erweitern, d.h. sie ist die Lösungsmenge des Erweiterungsproblems von f_A. Hier muß man bei der Abgeschlossenheit bzgl. der Komposition vorsichtiger sein. In der Regel beschäftigen wir uns aber mit Familien, die bzgl. der Komposition abgeschlossen sind. Solche Familien kennt man auch aus anderen Bereichen der Mathematik: Differenzierbare Abbildungen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, Homomorphismen von Gruppen, abelschen Gruppen oder Ringen, lineare Abbildungen von Vektorräumen. Da dieses Phänomen also in der Mathematik weit verbreitet ist, hat man dafür einen eigenen Begriff eingeführt.

8.1 Definition: Eine *Kategorie* $\mathcal{C}$ besteht aus

(i) einer Klasse von *Objekten* $A, B, C, \ldots$

(ii) für jedes Paar A, B von Objekten einer Menge $\mathcal{C}(A, B)$ von *Morphismen*. Statt $f \in \mathcal{C}(A, B)$ schreiben wir auch $f : A \to B$

(iii) für jedes Tripel A, B, C von Objekten einer Kompositionsabbildung

$$\mathcal{C}(B, C) \times \mathcal{C}(A, B) \to \mathcal{C}(A, C),\ (g, f) \mapsto g \circ f$$

(iv) für jedes Objekt A einem Morphismus $id_A \in \mathcal{C}(A, A)$

Diese Daten erfüllen folgende Axiome

(1) für $f \in \mathcal{C}(A, B)$, $g \in \mathcal{C}(B, C)$ und $h \in \mathcal{C}(C, D)$ gilt $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$, d.h. die Komposition ist assoziativ.

(2) für $f \in \mathcal{C}(A, B)$ gilt $f \circ id_A = f = id_B \circ f$.

8.2 Beispiele

(1) $\mathcal{S}ets$: Kategorie der Mengen. Objekte sind alle Mengen, Morphismen Abbildungen.

(2) $\mathcal{G}p$: Kategorie der Gruppen. Objekte sind Gruppen, Morphismen Homomorphismen.

(3) $\mathcal{A}b$: Kategorie der abelschen Gruppen. Objekte sind abelsche Gruppen, Morphismen sind Homomorphismen.

(4) $\mathcal{T}op$: Kategorie der topologischen Räume. Objekte sind Räume, Morphismen stetige Abbildungen.

(5) $\mathcal{T}op^*$: Kategorie der basierten Räume. Objekte sind Paare (X, x_0), wobei $x_0 \in X$ ein ausgezeichneter Punkt ist, genannt *Basispunkt*, Morphismen sind *basierte Abbildungen*, d.h. stetige Abbildungen $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ so daß $f(x_0) = y_0$.

(6) $\mathcal{T}op^2$: Kategorie der Paare topologischer Räume. Objekte sind Paare (X, A), bestehend aus einem Raum X und einem Teilraum A, Morphismen $f : (X, A) \to (Y, B)$ sind stetige Abbildungen $f : X \to Y$, so daß $f(A) \subset B$.

(7) $\mathcal{T}op^3$: Kategorie der Tripel topologischer Räume. Objekte sind Tripel (X, A, B) von Räumen, wobei $A, B \subset X$, Morphismen $f : (X, A, B) \to (Y, U, V)$ sind stetige Abbildungen $f : X \to Y$ mit $f(A) \subset U, f(B) \subset V$.

(8) $\mathcal{T}op^*_h$: basierte Homotopiekategorie. Objekte sind basierte Räume (X, x_0) wie in (5), ein Morphismus $(X, x_0) \to (Y, y_0)$ ist aber eine Homotopieklasse $[f]$ von Abbildungen $(X, x_0) \to (Y, y_0)$, wobei die Homotopie in $\mathcal{T}op^*$ verlaufen muß. Die Komposition ist definiert durch $[g] \circ [f] = [g \circ f]$; sie ist wegen (7.5.2) unabhängig von der Repräsentantenauswahl $f \in [f]$ und $g \in [g]$.

Wir wollen nun kurz skizzieren, wie wir etwa den Beweis von (7.15) angehen werden. Dazu listen wir zunächst einige Bezeichnungen auf, derer wir uns zum Teil schon bedient haben.

8.3 Bezeichnungen:
Sei $x \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Dann ist $\| x \| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$ die *euklidische Norm*
$\mathbb{B}^n = \{x \in \mathbb{R}^n;\ \| x \| \leq 1\}$ *n-Ball*
$\partial\mathbb{B}^n = S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n;\ \| x \| < 1\}$ ist der Rand von $\mathbb{R}^n$, die *n-Sphäre*
$I = [0, 1]$
$I^n = I \times \ldots \times I$
$\partial I^n = \{x \in I^n;\ \text{ein } x_i \in \{0, 1\}\}$ ist der Rand von I^n
$J^{n-1} = \{x \in I^n; x_1 = 0 \text{ oder } x_i \in \{0, 1\}, i > 1\}$

8.4 Übung: Zeigen Sie

(1) $(I^n, \partial I^n) \cong (\mathbb{B}^n, S^{n-1})$ (Homöomorphismus von Paaren)

(2) $I^n/\partial I^n \cong \mathbb{B}^n/S^{n-1} \cong S^n$

Für den Beweis von (7.15) ordnen wir zunächst jedem basiertem Raum oder allgemein jedem basiertem Raumpaar (X, A, a_0) mit $a_0 \in A$ eine einfacher zu handhabende Menge zu.

8.5 Definition: Wir fassen I^{n-1} als Seite $1 \times I^{n-1} \subset I^n$ auf. Bezeichnet $[-,-]$ die Menge von Homotopieklassen in der entsprechenden Kategorie, dann heißt

$$\pi_n(X, x_0) := [(I^n, \partial I^n), (X, x_0)]$$

die *n-te (absolute) Homotopiegruppe* von (X, x_0) und

$$\pi_n(X, A, a_0) := [(I^n, 1 \times I^{n-1}, J^{n-1}), (X, A, a_0)]$$

die *n-te (relative) Homotopiegruppe* des basierten Paares (X, A, a_0).

Wir werden in diesem Kapitel fast ausschließlich mit basierten Räumen oder basierten Paaren arbeiten. Einige Betrachtungen werden dann etwas komplizierter, wir handeln uns aber den Vorteil ein, daß es genau eine konstante Abbildung gibt.

8.6 Bezeichung: Die konstante Abbildung $(X, x_0) \to (Y, y_0)$, die alles nach y_0 abbildet, wird *Nullabbildung* benannt und mit 0 oder $0_{X,Y}$ bezeichnet.

Ist $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ aus $\mathcal{T}op^*$, erhalten wir eine induzierte Abbildung von Mengen

$$f_* : \pi_n(X, x_0) \to \pi_n(Y, y_0), \ [g] \mapsto [f \circ g],$$

die nach (7.5) unabhängig von der Repräsentantenwahl $g \in [g]$ ist. Entsprechendes gilt natürlich für Abbildungen basierter Paare. Man sieht auch sofort

8.7

(1) $(id_X)_* = id_{\pi_n(X,x_0)}$

(2) Für $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ und $g : (Y, y_0) \to (Z, z_0)$ gilt

$$(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$$

Damit ist $\pi_n(-)$ zusammen mit den induzierten Abbildungen ein Funktor von der Kategorie $\mathcal{T}op^*$ in die Kategorie $\mathcal{S}ets^*$ der basierten Mengen, wobei die Nullabbildung der Basispunkt von $\pi_n(X, x_0)$ ist.

8.8 Definition: Seien $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ Kategorien. Ein *Funktor* $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ordnet jedem Objekt $A \in \mathcal{C}$ ein Objekt $F(A) \in \mathcal{D}$ und jedem Morphismus $f : A \to B$ aus $\mathcal{C}$ einen Morphismus $F(f) : F(A) \to F(B)$ aus $\mathcal{D}$ zu, so daß gilt

(1) $F(id_A) = id_{F(A)}$

(2) $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$

Beweisskizze von 7.15: Sei $i : S^{n-1} \to \mathbb{B}^n$ die Inklusion. Angenommen, es gibt eine Retraktion $r : \mathbb{B}^n \to S^{n-1}$, d.h. $r \circ i = id$, dann kann man i und r als Abbildungen von Paaren $(S^{n-1}, 1) \rightleftarrows (\mathbb{B}^n, 1)$ auffassen. Wir erhalten induzierte Abbildungen

$$id = id_* = (r \circ i)_* = r_* \circ i_* : \pi_{n-1}(S^{n-1}, 1) \to \pi_{n-1}(\mathbb{B}^n, 1) \to \pi_{n-1}(S^{n-1}, 1)$$

Das ist aber unmöglich, denn später werden wir zeigen, daß $\pi_{n-1}(S^{n-1}, 1) \neq \{0\}$, dagegen ist aber $\pi_i(\mathbb{B}^n, 1) = \{0\}\ \forall i \in \mathbb{N}$. $\square$

Wir beschäftigen uns mit der letzten Aussage.

8.9 Definition: Ein Raum X heißt *zusammenziehbar* (bzw. *basiert zusammenziehbar*), wenn er zu einem Punkt homotopieäquivalent (bzw. basiert homotopieäquivalent) ist.

8.10 Übung: (1) Ein Morphismus $f : X \to Y$ in einer Kategorie $\mathcal{C}$ heißt Isomorphismus, wenn es einen Morphismus $g : Y \to X$ gibt, so daß $g \circ f = id_X$ und $f \circ g = id_y$. Zeigen Sie: Sind

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D$$

Morphismen in $\mathcal{C}$, so daß $g \circ f$ und $h \circ g$ Isomorphismen sind, dann sind f, g und h Isomorphismen.

(2) Zeigen Sie: Für eine basierte Homotopieäquivalenz $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ sind $[f] : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ und $f_* : \pi_n(X, x_0) \to \pi_n(Y, y_0)$ Isomorphismen in $\mathcal{T}op_h^*$ bzw. $\mathcal{S}ets^*$.

(3) Zeigen Sie: (X, x_0) ist (basiert) zusammenziehbar, wenn id_X (basiert) homotop zur Nullabbildung ist.

Wir beweisen nun das gewünschte Resultat.

8.11 Satz: Sei $x_0 \in \mathbb{B}^n$ ein beliebiger Basispunkt. Dann ist $(\mathbb{B}^n, x_0)$ basiert zusammenziehbar. Folglich gilt

$$\pi_i(\mathbb{B}^n, x_0) = \{0\}\ \forall i \in \mathbb{N}$$

Beweis: Sei P ein einpunktiger Raum, $O : P \to \mathbb{B}^n$ und $p : \mathbb{B}^n \to P$ die konstanten Abbildungen. Dann ist $p \circ O = id_p$ und $O \circ p : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}^n$ die Projektion auf x_0.

$$F : \mathbb{B}^n \times I \to \mathbb{B}^n, \quad (x, t) \mapsto (1 - t)x_0 + tx$$

ist eine basierte Homotopie von $O \circ p$ nach $id_{\mathbb{B}^n}$. $\square$

Für algebraische Manipulationen ist es natürlich günstig, auf unseren basierten Mengen eine algebraische Struktur zu haben. Nicht ohne Grund wurde $\pi_n(X, x_0)$ Homotopiegruppe genannt.

8.12 Satz: Sei $\mathcal{C}$ eine Familie von Abbildungen $f : X \to Y$. Die *konstante Homotopie* von f, $X \times I \overset{proj}{\to} X \overset{f}{\to} Y$ bezeichnen wir mit O_f. Ist $A \subset X$ ein Teilraum und $F : X \times I \to Y$ eine Homotopie, so daß $F \mid A \times I$ konstant ist, d.h. $F \mid A \times I = O_{f|A}$, schreiben wir $F : F_0 \simeq F_1\ rel A$. Seien nun F, G, H Homotopien in $\mathcal{C}$, so daß $F_1 = G_0$ und $G_1 = H_0$. Dann gibt es Homotopien von Homotopien, d.h. Abbildungen $(X \times I) \times I \to Y$, so daß gilt

(1) $O_{F_0} + F \simeq F \simeq F + O_{F_1}\ rel X \times \partial I$ in $\mathcal{C}$.

(2) $F + (-F) \simeq O_{F_0}$, $(-F) + F \simeq O_{F_1}\ rel X \times \partial I$ in $\mathcal{C}$.

(3) $(F + G) + H \simeq F + (G + H)\ rel X \times \partial I$ in $\mathcal{C}$

(4) $F \simeq \overline{F}\ rel X \times \partial I$ in $\mathcal{C}$, $G \simeq \overline{G}\ rel X \times \partial I$ in $\mathcal{C}$
$\Rightarrow F + G \simeq \overline{F} + \overline{G}\ rel X \times \partial I$ in $\mathcal{C}$.

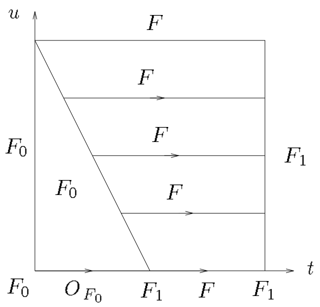
(5) Für Abbildungen $g : A \to X$ und $h : Y \to Z$ gilt

$$h \circ F \circ (g \times id_I) + h \circ G \circ (g \times id_I) = h \circ (F + G) \circ (g \times id_I).$$

Dabei ist eine Homotopie von Homotopien $K : (X \times I) \times I \to Y$ in $\mathcal{C}$, falls alle Abbildungen $K_{s,t} : X \to Y$, $x \mapsto K(x, s, t), (s, t) \in I \times I$, in $\mathcal{C}$ sind.

Beweis: Jeder Punkt in den Schaubildern steht für eine Kopie X, die mit den angegebenen Abbildungen nach Y geht.

(1)



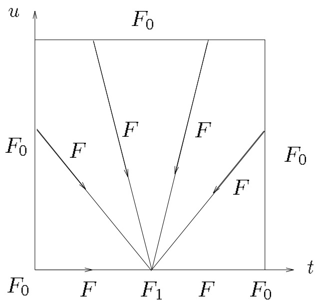
$$(O_{F_0}+F)(x,t) = \begin{cases} F_0(x) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ F(x, 2t-1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Die gesuchte Homotopie wird durch

$$(x,t,u) \mapsto \begin{cases} F_0(x) & 0 \leq t \leq \frac{1-u}{2} \\ F(x, \frac{2t+u-1}{1+u}) & \frac{1-u}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

gegeben. Analog wird der zweite Teil von (1) gezeigt.

(2)



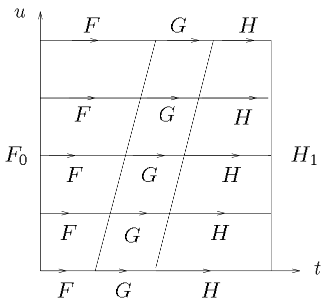
$$(F+(-F))(x,t) = \begin{cases} F(x, 2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ F(x, 2-2t) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Die gesuchte Homotopie ist

$$(x,t,u) \mapsto \begin{cases} F(x, 2t(1-u)) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ F(x, (2-2t)(1-u)) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Analog beweist man den zweiten Teil.

(3)



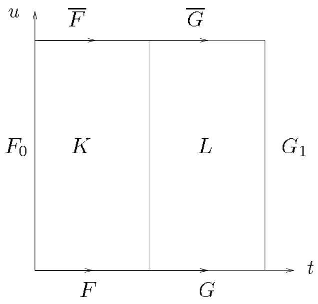
$$(F+(G+H))(x,t) = \begin{cases} F(x,2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ G(x,4t-2) & \frac{1}{2} \leq t \leq \frac{3}{4} \\ H(x,4t-3) & \frac{3}{4} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

$$((F+G)+H)(x,t) = \begin{cases} F(x,4t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{4} \\ G(x,4t-1) & \frac{1}{4} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ H(x,2t-1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Die gesuchte Homotopie ist

$$(x,t,u) \mapsto = \begin{cases} F(x,\frac{4t}{1+u}) & 0 \leq t \leq \frac{1}{4}(1+u) \\ G(x,4t-1-u) & \frac{1}{4}(1+u) \leq t \leq \frac{1}{4}(2+u) \\ H(x,\frac{4t-u-2}{2-u}) & \frac{1}{4}(2+u) \leq t \leq 1 \end{cases}$$

(4) Seien $K : F \simeq \overline{F}$ und $L : G \simeq \overline{G}$ die vorgegebenen Homotopien $relX \times \partial I$. Insbesondere gilt $K(x,1,u) = F_1(x) = G_0(x) = L(x,0,u)$. Also ist die gesuchte Homotopie gegeben durch



$$(x,t,u) \mapsto \begin{cases} K(x,2t,u) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ L(x,2t-1,u) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Behauptung (5) folgt sofort aus der Definition. □

Als Folgerung erhalten wir

8.13 Satz: Sind $[f],[g] \in \pi_n(X,x_0)$ bzw. $\pi_{n+1}(X,A,a_0)$, $n \geq 1$, so wird durch $[f]+[g]=[f+g]$ auf diesen Mengen eine Gruppenstruktur definiert, wobei

$$f+g : I^n \to X,\ (t_1,\dots,t_n) \mapsto \begin{cases} f(t_1,\dots,t_{n-1},2t_n) & 0 \leq t_n \leq \frac{1}{2} \\ g(t1,\dots,t_{n-1},2t_n-1) & \frac{1}{2} \leq t_n \leq 1 \end{cases}$$

Ist $g : (X,x_0) \to (Y,y_0)$ (bzw. $(X,A,a_0) \to (Y,B,b_0)$) eine basierte Abbildung (von Paaren), so ist $g_* : \pi_n(X,a_0) \to \pi_n(Y,b_0)$ (bzw. $g_* : \pi_{n-1}(X,A,a_0) \to \pi_{n-1}(Y,B,b_0)$) ein Homomorphismus.

Man beachte hierbei, daß $\pi_n(X,A,a_0)$ nur für $n \geq 1$ definiert ist und wegen der Bedingung, daß $1 \times I^{n-1}$ nach A abgebildet wird, erst für $n \geq 2$ eine Addition definiert werden kann.

Beweis: Wir fassen einen Repräsentanten

$$f : (I^n, \partial I^n) \to (X, x_0)$$

als Homotopie $I^{n-1} \times I \to X$ der Nullabbildung $rel \partial I^{n-1}$ auf. Nach (8.12.4) ist $[f + g]$ unabhängig von der Repräsentantenwahl $f \in [f]$ und $g \in [g]$. Nach (8.12.1),. . .,(8.12.3) wird eine Gruppenstruktur definiert mit der Homotopieklasse der konstanten Abbildung als neutralem Element. (8.12.5) zeigt, daß g_* ein Homomorphismus ist. □

Unser nächstes Ziel wird es sein, einige Homotopiegruppen zu berechnen. Dafür entwickeln wir aber zunächst einige Hilfsmittel.

9 Faserungen und Kofaserungen

In diesem Abschnitt wenden wir und Spezialfällen des Erweiterungs- und des Liftungsproblems zu, die für den weiteren Aufbau der Theorie von Bedeutung sind.

9.1 Definition: Sei $\mathcal{C}$ eine Familie von Räumen. Eine Abbildung $f : X \to Y$ hat die *Homotopieerweiterungseigenschaft* (HEE) *bzgl.* $\mathcal{C}$, wenn es zu jeder Homotopie $G : X \times I \to Z$, wobei $Z \in \mathcal{C}$, und jeder Abbildung $h : Y \to Z$, so daß $G_0 = h \circ f$, eine Erweiterung von h zu einer Homotopie $H : Y \times I \to Z$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "G_t"'] & & Y \arrow[dl, "h"] \\ & Z & \end{tikzcd}$$

gibt, so daß $H_0 = h$ und $H_t \circ f = G_t$. Ist $\mathcal{C} = ob\mathcal{T}op$, heißt f *Kofaserung.* Sind alle Daten aus $\mathcal{T}op^*$, sprechen wir von *basierten Kofaserungen* (entsprechend für $\mathcal{T}op^2$ usw.).

Dual dazu hat $f : Y \to X$ die *Homotopieliftungseigenschaft* (HLE) bzgl. $\mathcal{C}$, wenn sich jede Homotopie $G : Z \times I \to X$ mit $Z \in \mathcal{C}$ bei vorgegebener Abbildung $h : Z \to Y$ mit $f \circ h = G_0$ zu einer Homotopie $H : Z \times I \to Y$

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[d, "f"] \\ Z \arrow[ur, "h"] \arrow[r, "G_t"'] & X \end{tikzcd}$$

liften läßt, so daß also $H_0 = h$ und $f \circ H_t = G_t$. Ist $\mathcal{C}$ die Menge der Würfel I^n, $n \in \mathbb{N}$, heißt f *Serre-Faserung*, ist $\mathcal{C} = ob\mathcal{T}op$, heißt f *Hurewicz-Faserung* oder kürzer *Faserung.* Sind alle Daten aus $\mathcal{T}op^*$, sprechen wir von *basierten Faserungen* (entsprechend für $\mathcal{T}op^2$ usw.)

9.2 Bezeichnung: Ist $f : X \to Y$ Kofaserung, heißt $Y/f(X)$ *Kofaser* von f, ist $f : Y \to X$ Faserung, heißt $f^{-1}(x), x \in X$, *Faser über* x.

9.3 Beispiele:

(1) Die Inklusion $X \to X \sqcup Y$ ist eine (nicht basierte) Kofaserung.
(2) Die Projektion $X \times Y \to X$ ist eine Hurewicz-Faserung in $\mathcal{T}op$ und in $\mathcal{T}op^*$, wobei (x_0, y_0) der Basispunkt von $X \times Y$ ist.

Der Beweis ist in beiden Fällen einfach. Für weitere Beispiele müssen wir erst mehr über Faserungen und Kofaserungen wissen.

9.4 Satz: Sei $\mathcal{C}$ eine Familie von Räumen. Haben $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ die HEE (bzw. die HLE) bzgl. $\mathcal{C}$, dann auch $g \circ f : X \to Z$.

Beweis: Gegeben sei eine Homotopie $F : X \times I \to A$, $A \in \mathcal{C}$, und eine

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "F_t"'] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, dashed, "h \circ g"] & Z \arrow[dl, "h"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

Abbildung $h : Z \to A$, so daß $h \circ g \circ f = F_0$. Da f die HEE für A besitzt, gibt es eine Homotopie $G : Y \times I \to A$, so daß $G_0 = h \circ g$ und $G_t \circ f = F_t$.

Da g die HEE für A besitzt, gibt es eine Homotopie $H : Z \times I \to A$, so daß $H_0 = h$ und $H_t \circ g = G_t$. Da $H_t \circ g \circ f = G_t \circ f = F_t$, ist H die gesuchte Homotopie. Den HLE-Fall beweist man analog. $\square$

Wir führen nun eine Konstruktion ein, die auf einem allgemeinen kategorientheoretischen Begriff beruht.

9.5 Definition: Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie. Das *Pushout* eines Diagramms

$$B \xleftarrow{\ f\ } A \xrightarrow{\ g\ } C$$

in $\mathcal{C}$ besteht aus einem Objekt X und zwei Morphismen $B \xrightarrow{\ \overline{g}\ } X \xleftarrow{\ \overline{f}\ } C$, so daß
(i) $\overline{f} \circ g = \overline{g} \circ f$
(ii) sind $B \xrightarrow{\ p\ } Y \xleftarrow{\ q\ } C$ Morphismen, so daß $p \circ f = q \circ g$, dann gibt es

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & B \arrow[d, "\overline{g}"'] \arrow[ddr, "p"] & \\
C \arrow[r, "\overline{f}"] \arrow[drr, "q"'] & X \arrow[dr, dashed, "r"] & \\
& & Y
\end{tikzcd}$$

genau einen Morphismus $r : X \to Y$, so daß $p = r \circ \overline{g}$ und $q = r \circ \overline{f}$.

Dual dazu besteht das *Pullback* eines Diagramms in $\mathcal{C}$

$$B \xrightarrow{\ f\ } A \xleftarrow{\ g\ } C$$

aus einem Objekt X und zwei Morphismen $B \xleftarrow{\ \overline{g}\ } X \xrightarrow{\ \overline{f}\ } C$, so daß
(i) $f \circ \overline{g} = g \circ \overline{f}$
(ii) sind $B \xleftarrow{\ p\ } Y \xrightarrow{\ q\ } C$ Morphismen, so daß $f \circ p = g \circ q$, dann gibt es

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[dr, dashed, "r"] \arrow[drr, "q"] \arrow[ddr, "p"'] & & \\
& X \arrow[r, "\overline{f}"'] \arrow[d, "\overline{g}"] & C \arrow[d, "g"] \\
& B \arrow[r, "f"'] & A
\end{tikzcd}$$

genau einen Morphismus $r : Y \to X$, so daß $\overline{f} \circ r = q$ und $\overline{g} \circ r = p$.

9.6 Übung:

(1) Ist $B \xrightarrow{\ u\ } Z \xleftarrow{\ v\ } C$ ein zweites Pushout von $B \xleftarrow{\ f\ } A \xrightarrow{\ g\ } C$, dann gibt es genau einen Morphismus $r : X \to Z$ mit $r \circ \overline{f} = v$ und $r \circ \overline{g} = u$. Dieses r ist ein Isomorphismus.

(2) In $\mathcal{T}op$ und $\mathcal{T}op^*$ gibt es Pushouts und Pullbacks. Das *kanonische Pushout* von $B \xleftarrow{\ f\ } A \xrightarrow{\ g\ } C$, ist die Menge $B \cup_A C$ der Äquivalenzklassen von $B \sqcup C$ unter der Relation $f(a) \sim g(a)$, $a \in A$ (man "verklebt" B und C längs der Bilder von A) mit der Quotiententopologie. Die Abbildungen $\overline{g} : B \to B \cup_A C$ und

$\overline{f}: C \to B \cup_A C$ sind von der Inklusionen nach $B \sqcup C$ induziert.
Das *kanonische Pullback* $B \times_A C$ von $B \xrightarrow{f} A \xleftarrow{g} C$ ist

$$B \times_A C = \{(b,c) \in B \times C; f(b) = g(c)\} \subset B \times C$$

mit der Teilraumtopologie und den Projektionen als Morphismen.

Im basierten Fall sind das Bild der Basispunkte in $B \cup_A C$ bzw. $(b_0, c_0) \in B \times_A C$ die Basispunkte.

(3) Ist Y lokal kompakt, dann ist mit

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & B \arrow[d, "\overline{g}"'] \\ C \arrow[r, "\overline{f}"] & X \end{tikzcd} \quad \text{auch} \quad \begin{tikzcd} A \times Y \arrow[r, "f \times id"] \arrow[d, "g \times id"] & B \times Y \arrow[d, "\overline{g} \times id"] \\ C \times Y \arrow[r, "\overline{f} \times id"] & X \times Y \end{tikzcd}$$

ein Pushoutdiagramm (Hinweis: Verwende (6.7)).

9.7 Satz: Sei $\mathcal{C}$ eine Familie von Räumen. Sei

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"] & B \arrow[d, "\overline{g}"] \\ C \arrow[r, "\overline{f}"] & B \cup_A C \end{tikzcd}$$

ein Pushoutdiagramm. Besitzt f die HEE bzgl. $\mathcal{C}$, dann auch $\overline{f}$.

Sei dual dazu

$$\begin{tikzcd} B \times_A C \arrow[r, "\overline{g}"] \arrow[d, "\overline{f}"] & B \arrow[d, "f"] \\ C \arrow[r, "g"] & A \end{tikzcd}$$

ein Pullbackdiagramm. Besitzt f die HLE bzgl. $\mathcal{C}$, dann auch $\overline{f}$.

Beweis: Gegeben sei eine Homotopie $G : C \times I \to Z, Z \in \mathcal{C}$, und eine

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"] & B \arrow[d, "\overline{g}"'] \arrow[ddr, "K_t"] & \\ C \arrow[r, "\overline{f}"] \arrow[drr, "G_t"'] & B \cup_A C \arrow[dr, "h"] & \\ & & Z \end{tikzcd}$$

Abbildung $h : B \cup_A C \to Z$, so daß $G_0 = h \circ \overline{f}$. Da $G_0 \circ g = h \circ \overline{f} \circ g = h \circ \overline{g} \circ f$, gibt es eine Homotopie $K : B \times I \to Z$, so daß $K_0 = h \circ \overline{g}$ und $K_t \circ f = G_t \circ g$ ist. Da $K_t(f(a)) = G_t(g(a)), a \in A$, faktorisiert die Homotopie

$$(K, G) : (B \sqcup C) \times I = B \times I \sqcup C \times I \longrightarrow Z$$

durch die Projektion $p \times id : (B \sqcup C) \times I \to (B \cup_A C) \times I$ und definiert die gesuchte Homotopie $H : (B \cup_A C) \times I \to Z$. Denn $p \times id$ ist eine Identifizierung, weil I lokal kompakt ist.

Im dualen Fall ist eine Homotopie $G : Z \times I \to C$ und eine Abbildung

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[drrr, "K_t"] \arrow[dr, dashed, "h"] \arrow[ddr, "G_t"'] & & & \\
& B \times_A C \arrow[rr, "\overline{g}"] \arrow[d, "\overline{f}"] & & B \arrow[d, "f"] \\
& C \arrow[rr, "g"] & & A
\end{tikzcd}$$

$h : Z \to B \times_A C$ gegeben, so daß $\overline{f} \circ h = G_0$. Da $g \circ G_0 = f \circ \overline{g} \circ h$, gibt es eine Homotopie $K : Z \times I \to B$, so daß $K_0 = \overline{g} \circ h$ und $f \circ K_t = g \circ G_t$. Insbesondere faktorisiert $(K, G) : Z \times I \to B \times C$ durch den Teilraum $B \times_A C$ von $B \times C$ und definiert damit die gesuchte, nach (2.14) stetige Homotopie $H : Z : I \to B \times_A C$. $\square$

Wir werden in Zukunft oft auf die dualen Beweise verzichten.

9.8 Definition: Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung. Der *Abbildungszylinder* $Z(f)$ von f ist definiert durch

$$Z(f) = (X \times I \sqcup Y)/\sim \quad (x, 1) \sim f(x),\ x \in X$$

mit der Quotiententopologie. Wir haben Abbildungen

$$\begin{array}{ll}
i(f) : X \to Z(f), & c \mapsto (x, 0) \\
j(f) : Y \to Z(f), & y \mapsto y \\
r(f) : Z(f) \to Y, & (x, t) \mapsto f(x),\ y \mapsto y
\end{array}$$

Dual dazu ist der *Abbildungswegeraum* $W(f)$ definiert durch

$$W(f) = \{(x, w) \in X \times Y^I;\ w(1) = f(x)\}$$

mit der Teilraumtopologie von $X \times Y^I$. Wir haben Abbildungen

$$\begin{array}{ll}
p(f) : W(f) \to Y, & (x, w) \mapsto w(0) \\
q(f) : W(f) \to X, & (x, w) \mapsto x \\
s(f) : X \to W(f), & x \mapsto (x, \underline{f(x)}),
\end{array}$$

wobei $\underline{f(x)} : I \to Y$ der konstante Weg mit Bild $f(x)$ ist.

9.9 Bemerkungen: Offensichtlich sind

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "f"] & X \times I \arrow[d, "\overline{f}"] \\
Y \arrow[r, "j(f)"] & Z(f)
\end{tikzcd}
\qquad \text{und} \qquad
\begin{tikzcd}
W(f) \arrow[r, "\overline{f}"] \arrow[d, "q(f)"] & Y^I \arrow[d, "p_1"] \\
X \arrow[r, "f"] & Y
\end{tikzcd}$$

ein Pushout- bzw. ein Pullbackdiagramm und $i(f) = \overline{f} \circ i_0$, $p(f) = p_0 \circ \overline{f}$, wobei $i_t : X \to X \times I$, $x \to (x, t)$, und $p_t : Y^I \to Y$, $w \mapsto w(t)$.

$i(f)$ und $j(f)$ sind Einbettungen als abgeschlossene Teilräume. Weiter gilt $f = r(f) \circ i(f) = p(f) \circ s(f)$, $r(f) \circ j(f) = id_Y$ und $q(f) \circ s(f) = id_X$.

Wir definieren Abbildungen

$$\begin{array}{ll} \lambda : Z(f) \longrightarrow Y \times I, & (x,t) \mapsto (f(x),t),\ y \mapsto (y,1) \\ \rho : X^I \longrightarrow W(f), & w \mapsto (w(1), f \circ w) \end{array}$$

9.10 Satz: Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung

(1) f ist Kofaserung in Top $\iff$ λ hat eine Retraktion $r : Y \times I \to Z(f)$. Folglich ist dann λ eine Einbettung.

(2) f ist Faserung in Top $\iff$ ρ hat einen Schnitt $s : W(f) \to X^I$. Folglich ist ρ dann eine Identifizierung.

Beweis: (1) "$\Rightarrow$": Sei $G = \overline{f} : X \times I \to Z(f)$ und $h = j(f) : Y \to Z(f)$. Dann gilt $G_1 = h \circ f$ (hier übernimmt 1 die Rolle der 0). Also gibt es eine Homotopie $r : Y \times I \to Z(f)$ mit $r_1 := h$ und $r_t \circ f = G_2$. Dies ist die gesuchte Retraktion.

"$\Leftarrow$": Sei $r : Y \times I \to Z(f)$ eine Retraktion von λ, $G : X \times I \to Z$ eine Homotopie und $h : Y \to Z$ eine Abbildung, so daß $h \circ f = G_1$. Dann faktorisiert

$$(G,h) : X \times I \sqcup Y \longrightarrow Z$$

durch die Relation $(x,1) \sim f(x)$ und definiert eine Abbildung $g : Z(f) \to Z$. Die gesuchte Homotopie ist $g \circ r : Y \times I \to Z$.

Teil (2) ist dual. □

9.11 Folgerung: Eine Kofaserung $f : X \to Y$ ist stets eine Einbettung.

Beweis: Gegeben sei $g : Z \to X$, so daß $f \circ g : Z \to Y$ stetig ist. Es ist die Stetigkeit von g zu zeigen. Folgendes Diagramm ist kommutativ,

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "g"] & X \arrow[r, "i(f)"] \arrow[d, "f"] & Z(f) \arrow[d, "\lambda"] \\ & Y \arrow[r, "i_0"] & Y \times I \end{tikzcd} \qquad i_0(y) = (y,0)$$

und $i_0 \circ f \circ g$ stetig. Da $\lambda \circ i(f)$ eine Einbettung ist, ist g stetig. □

9.12 Übung*: Ist $X \subset Y$ und ist der Teilraum $X \times I \cup Y \times 1$ ein Retrakt von $Y \times I$, dann ist $\lambda : Z(i) \to Y \times I$ eine Einbettung (i ist die Inklusion).

9.13 Weitere Beispiele:

(1) Ist $f : A \to X$ eine Kofaserung, dann auch $id \times f : Y \times A \to Y \times X$ für jeden Raum Y.

(2) Ist $f : A \to X$ eine Kofaserung von lokal kompakten Räumen und Y beliebig, dann ist $f^* : Y^X \to Y^A$ eine Hurewicz-Faserung.

(3) $X \times \partial I \xrightarrow{id \times i} X \times I$ ist eine Kofaserung.

(4) $\pi : X^I \to X \times X$, $\pi(w) = (w(0), w(1))$, ist eine Hurewicz-Faserung.

(5) Für jede Abbildung $f : X \to Y$ sind $i(f) : X \to Z(f)$ und $j(f) : Y \to Z(f)$ Kofaserungen und $p(f) : W(f) \to Y$ und $q(f) : W(f) \to X$ Hurewicz-Faserungen.

Beweise: (1) Da f eine Einbettung ist, fassen wir A als Teilraum von X auf. Nach (9.10) hat $Z(f)$ dieselbe Topologie wie der Teilraum $A \times I \cup X \times 1$ von $X \times I$. Also gibt es eine Retraktion $r : X \times I \to A \times I \cup X \times 1$. Dann ist $id \times r : Y \times X \times I \to Y \times A \times I \cup Y \times X \times 1$ eine Retraktion. Nach (9.12) hat dieser Teilraum dieselbe Topologie wie $Z(id \times f)$. Damit ist $id \times f$ eine Kofaserung nach (9.10).

(2) Gegeben sei eine Homotopie $G : Z \times I \to Y^A$ und eine Abbildung $h : Z \to Y^X$ mit $f^* \circ h = G_0$. Durch Übergang zur adjungierten Abbbildung

$$\begin{tikzcd} & Y^X \arrow[dd, "f^*"] \\ Z \arrow[ur, "h"] \arrow[dr, "G_0"'] & \\ & Y^A \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} Z \times A \arrow[rr, "id \times f"] \arrow[dr, "\overline{G}_0"'] & & Z \times X \arrow[dl, "\overline{h}"] \\ & Y & \end{tikzcd}$$

erhalten wir

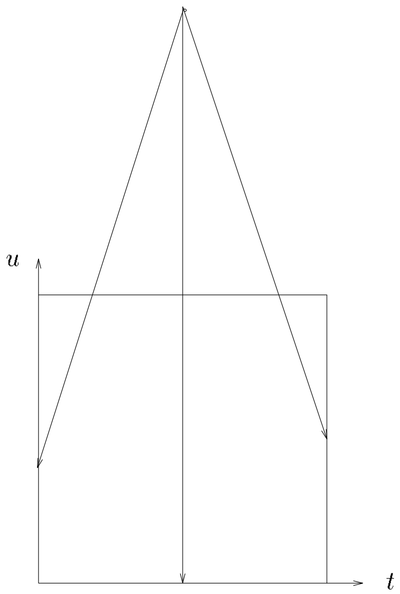
$$\begin{array}{ll} \overline{G} : Z \times A \times I \to Y, & \overline{G}(z,a,t) = G(z,t)(a) \\ \overline{h} : Z \times X \to Y, & \overline{h}(z,x) = h(z)(x) \end{array}$$

Da $\overline{G}_0(z,a) = G_0(z)(a) = (f^* \circ h(z))(a) = h(z)(f(a)) = \overline{h}(z, f(a))$, gilt $\overline{h} \circ f = \overline{G}_0$. Also gibt es eine Homotopie $\overline{H} : Z \times X \times I \to Y$ mit $\overline{H}_0 = h$ und $\overline{H}_t \circ (id \times f) = \overline{G}_t$. Sei $H : Z \times I \to Y^X$ die adjungierte, $H(z,t)(x) = \overline{H}(z,x,t)$. Dann gilt $H_0(z)(x) = \overline{H}(z,x,0) = \overline{h}(z,x) = h(z)(x)$, also $H_0 = h$, und

$$(f^* \circ H_t(z))(a) = H_t(z)(f(a)) = \overline{H}_t(z, f(a)) = \overline{G}_t(z,a) = G_t(z)(a),$$

so daß auch $f^* \circ H_t = G_t$.

(3) Wegen (1) genügt es zu zeigen, daß $i : \partial I \to I$ eine Kofaserung ist. Dafür genügt wiederum der Nachweis, daß $\partial I \times I \cup I \times 0$ ein Retrakt von I^2 ist. Die Retraktion ist gegeben durch Projektion von Punkt $(\frac{1}{2}, 2)$:



$$(t,u) \mapsto \begin{cases} (0, \dfrac{u-4t}{1+t}) & t \leq \dfrac{1}{4}u \\[2ex] (\dfrac{2}{2-u}(t-\dfrac{u}{4}), 0) & \dfrac{1}{4}u \leq t \leq 1-\dfrac{u}{4} \\[2ex] (1, \dfrac{u+4t-4}{t}) & 1-\dfrac{u}{4} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

(4) Da $X \times X = X^{\partial I}$ und $\partial I, I$ lokal kompakt sind, folgt (4) aus (2) und (3).

(5)
$$\begin{tikzcd} X \sqcup X = X \times \partial I \arrow[r, "id \times i"] \arrow[d, "id \sqcup f"] & X \times I \arrow[d, "\overline{f}"] \\ X \sqcup Y \arrow[r, "i(f) \sqcup j(f)"] & Z(f) \end{tikzcd}$$

ist ein Pushoutprogramm. Da $id \times i$ eine Kofaserung ist, ist $i(f) \sqcup j(f)$ nach (9.7) eine Kofaserung. Das Ergebnis folgt aus (9.3.1) und (9.4). Der zweite Teil ist dual. □

(9.9) zeigt, daß Y ein Retrakt von $Z(f)$ ist und X als Retrakt in $W(f)$ liegt. Es gilt aber noch mehr: $r(f)$ und $s(f)$ sind Homotopieäquivalenzen. In diesem Fall nennt man Y und X Deformationsretrakte von $Z(f)$ bzw. $W(f)$.

9.14 Definition: Ein Teilraum $A \subset X$ heißt *Deformationsretrakt* von X, wenn es zur Inklusion $i : A \to X$ eine Retraktion $r : X \to A$, genannt *Deformationsretraktion*, und eine Homotopie $R : X \times I \to X$ gibt, genannt *Deformation*, so daß

$$r \circ i = id_A \text{ und } R : i \circ r \simeq id_X.$$

Ist R eine Homotopie $relA$, d.h. $R(a,t) = a \ \forall a \in A$ bzw. $R_t \circ i = i \ \forall t \in I$, heißt A *starker Deformationsretrakt* (SDR) von X.

9.15 Satz: Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung. Dann sind $r(f) : Z(f) \to Y$ und $q(f) : W(f) \to X$ starke Deformationsretraktionen und $j(f) : Y \to Z(f)$, $s(f) : X \to W(f)$ Einbettungen als SDR.

Beweis: Die Deformation $R : id \simeq j(f) \circ r(f)$ ist gegeben durch

$$R : Z(f) \times I \to Z(f), \qquad ((x,t),u) \mapsto (x, max(t,u)),\ (y,u) \mapsto y$$

Dual dazu ist die Deformation $R : id \simeq s(f) \circ q(f)$ definiert durch

$$W(f) \times I \to W(f), ((x,w),u) \mapsto (x, w_u)$$

mit $w_u(t) = w(\max(t,u))$. $\square$

Da $f = r(f) \circ i(f) = p(f) \circ s(f)$ nach (9.9), folgt (9.15) aus (9.13.5).

9.16 Satz: Jede Abbildung $f : X \to Y$ läßt sich als Kompositionen (Homotopieäquivalenz) $\circ$ (Kofaserung) und (Faserung) $\circ$ (Homotopieäquivalenz) schreiben. D.h. bis auf Homotopieäquivalenz können wir f durch eine Faserung und durch eine Kofaserung ersetzen.

Der basierte Fall
Von (9.7) an haben wir nur in $\mathcal{T}op$ gearbeitet. (9.7) selbst gilt mit demselben Beweis auch in $\mathcal{T}op^*$. Von (9.8) an müssen wir Änderungen vornehmen: Bei einer basierten Homotopie $F : X \times I \to Y$ gilt $F(x_0, t) = y_0 \ \forall t \in I$, wir haben also eine Zusatzbedingung von F, die wir loswerden wollen. F induziert eine basierte Abbildung

$$\overline{F} : X \times I/(x_0 \times I) \to Y,$$

wobei das Bild von $x_0 \times I$ im Quotienten der Basispunkt von $X \times I/(x_0 \times I)$ ist. $\overline{F}$ braucht keine Zusatzbedingung zu erfüllen.

9.17 Definition Sei $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ eine basierte Abbildung. Der *reduzierte Zylinder* über X ist

$$MX = X \times I/(x_0 \times I),$$

der *reduzierte Abbildungszylinder* von f ist

$$M(f) = Z(f)/(x_0, t) \sim y_0.$$

Ersetzen wir den Zylinder $X \times I$ durch MX und $Z(f)$ durch $M(f)$, erhalten wir die basierten Versionen von (9.8)-(9.11), (9.15) und (9.16).

Beim Wegeraum X^I und $W(f)$ benötigen wir keine Änderungen. Die Basispunkte sind durch die Basispunkte der Räume bzw. durch die konstante Abbildung gegeben. Auch das Dualitätsprinzip gilt, denn

9.18 Übung: Seien X, Y basierte Räume und $\mathcal{T}op^*(X, Y)$ mit der Teilraumtopologie von Y^X versehen. Dann ist die Adjunktionsabbildung

$$\mathcal{T}op^*(MX, Y) \cong \mathcal{T}op^*(X, Y^I)$$

ein Homöomorphismus.

Probleme haben wir mit den wichtigen Beispielen (9.13).

9.19 Bemerkung: (9.13.1) gilt auch in $\mathcal{T}op^*$ (mit demselben Beweis). Für (9.13.2) hat f^* nur die basierte HLE für basierte Räume Z, für die $\{z_0\} \hookrightarrow Z$ eine abgeschlossene Kofaserung ist. Dabei ist es egal, ob f basierte oder nicht basierte Kofaserung ist.

(9.13.3) und damit die weiteren Beispiele haben eine neue Form, da $X \times I$ durch $MX = X \times I/(x_0 \times I)$ ersetzt wird. Aus (9.21) folgt aber (9.13.5) im basierten Fall.

9.20 Definition: Sind X und Y basierte Räume, dann heißt

$$X \vee Y = X \sqcup Y/x_0 \sim y_0$$

der *Wedge* von X und Y. Er ersetzt in $\mathcal{T}op^*$ die disjunkte Vereinigung.

9.21 Satz:

(1) Die Inklusion $X \to X \vee Y$ ist basierte Kofaserung.

(2) $(i_0, i_1) : X \vee X \to MX$ ist basierte Kofaserung.

(3) $\pi : X^I \to X \times X$ ist basierte Faserung.

Beweis: (1) ist trivial. Für (2) beachte, daß $X \vee X = X \times \partial I/(x_0, 0) \sim (x_0, 1)$. Ist $s : I^2 \to \partial I \times I \cup I \times 0$ die Abbildung aus dem Beweis (9.13.4), dann induziert

$$X \times I \times I \to X \times \partial I \times 0 \cup X \times I \times 0, \quad (x,t,u) \mapsto (x, s(t,u))$$

eine Retraktion $MX \times I/0 \times I \to M(i_0, i_1)$, wie gewünscht. $0 \in MX$ ist der Basispunkt (3) beweisen wir durch Dualisierung von (9.13.3): Sei $G : Z \times I \to X \times X$ eine basierte Homotopie und $h : Z \to X^I$ eine Abbildung, so daß $\pi \circ h = G_0$. Dann ist die gesuchte Liftung $H : Z \times I \to X^I$ definiert durch

$$H(z,u) : I \to X,\ t \mapsto \begin{cases} pr_1 \circ G\left(z, \dfrac{u-4t}{1+t}\right) & 0 \leq t \leq \dfrac{u}{4} \\ h(z)\left(\dfrac{2}{2-u}\left(t - \dfrac{u}{4}\right)\right) & \dfrac{u}{4} \leq t \leq 1 - \dfrac{u}{4} \\ pr_2 \circ G\left(z, \dfrac{u+4t-4}{t}\right) & 1 - \dfrac{u}{4} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

□

9.22 Übung: $A \subset X$ ist genau dann eine Kofaserung, falls es eine Abbildung $\varphi : X \to I$ und eine Homotopie $H : X \times I \to X$ gibt, so daß $A \subset \varphi^{-1}(0)$ und

$$\begin{array}{ll} H(x,0) = x & x \in X \\ H(a,t) = a & a \in A, t \in I \\ H(x,t) \in A & \text{für } t > \varphi(x) \end{array}$$

Hinweis: Sei $r : X \times I \to X \times 0 \cup A \times I$ eine Retraktion. Definiere

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \sup\{|t - pr_2(r(x,t))\,|,\ t \in I\} \\ H(x,t) &= pr_1(r(x,t)) \end{aligned}$$

Sind umgekehrt H und φ gegeben, definiere r durch

$$r(x,t) = \begin{cases} (H(x,t),0) & t \leq \varphi(x) \\ (H(x,t),t-\varphi(x)) & t \geq \varphi(x) \end{cases}$$

9.23 Übung: Beweise mit Hilfe von (9.22): Sind $A \subset X$ und $B \subset Y$ Kofaserungen und A abgeschlossen in X, dann ist

$$X \times B \cup A \times Y \subset X \times Y$$

eine Kofaserung. Ist $A \subset X$ oder $B \subset Y$ SDR, dann ist $X \times B \cup B \times Y \subset X \times Y$ SDR. Benutze diese Ergebnisse zum Beweis der Bemerkung (9.19) bzgl. des basierten Falls von (9.13.2).

10 Exakte Sequenzen

In diesem Paragraphen verlassen wir kurz die Topologie und behandeln algebraische Hilfsmittel, die wir später benötigen.

10.1 Definition: Eine Sequenz in $\mathcal{S}ets^*$, $\mathcal{G}p$ oder $\mathcal{A}b$

$$\longrightarrow A_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} A_n \xrightarrow{f_n} A_{n-1} \longrightarrow \ldots$$

heißt *exakt bei* A_n, wenn $Bild\ f_{n+1} = Kern\ f_n$, wobei $Kern\ f_n$ das Urbild des Basispunktes bzw. der Null ist. Die Sequenz heißt *exakt*, wenn sie bei allen A_n exakt ist.

Exakte Sequenzen sind ein zentrales Hilfsmittel für die Berechnung von Gruppen. Als einfaches Beispiel zeige der Leser

10.2 Übung: (1) Für einen Homomorphismus $f : A \to B$ von Gruppen gilt

$$\begin{array}{lll} 0 \to A \xrightarrow{f} B & \text{exakt} & \iff f \text{ ist injektiv} \\ A \xrightarrow{f} B \to 0 & \text{exakt} & \iff f \text{ ist surjektiv} \\ 0 \to A \xrightarrow{f} B \to 0 & \text{exakt} & \iff f \text{ ist ein Isomorphismus} \end{array}$$

(2) Ist $A \xrightarrow{f} B \to C \to D \xrightarrow{g} E$ eine exakte Folge von $\mathcal{G}p$ und ist f surjektiv und g injektiv, dann ist $C = 0$.

Wir kommen nun zu zwei wichtigen Sätzen.

10.3 Satz: Sei $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ eine exakte Sequenz in $\mathcal{A}b$.

(1) Gibt es einen Homomorphismus $j : C \to B$, so daß $g \circ j = id_C$, so ist

$$\alpha : A \oplus C \to B,\ (a, c) \mapsto f(a) + j(c)$$

ein Isomorphismus.

(2) Gibt es einen Homomorphismus $r : B \to A$, so daß $r \circ f = id_A$, so ist

$$\beta : B \to A \oplus C,\ b \mapsto (r(b), g(b))$$

ein Isomorphismus.

Beweis: Da alle Gruppen abelsch sind, sind α und β Homomorphismen

(1) α ist injektiv: $\alpha(a_1, c_1) = \alpha(a_2, c_2) \Rightarrow f(a_1) + j(c_1) = f(a_2) + j(c_2) \Rightarrow g \circ f(a_1) + g \circ j(c_1) = g \circ f(a_2) + g \circ j(c_2)$.

Da $g \circ f(a_1) = 0 = g \circ f(a_2)$ und $g \circ j = id_C$, folgt $c_1 = c_2$, also $f(a_1) = f(a_2)$. Da f injektiv ist, folgt auch $a_1 = a_2$.

α ist surjektiv: Sei $b \in B$. Dann ist $b - j \circ g(b) \in Kern\ g$, denn $g(b - j \circ g(b)) = g(b) - g \circ j \circ g(b) = g(b) - g(b) = 0$. Also gibt es ein $a \in A$ mit $f(a) = b - j \circ g(b)$. Es folgt $\alpha(a, g(b)) = f(a) + j \circ g(b) = b$.

(2) β ist injektiv: $\beta(b_1) = \beta(b_2) \Rightarrow r(b_1) = r(b_2)$ und $g(b_1) = g(b_2)$. Damit unterscheiden sich b_1 und b_2 um ein Element aus $Kern\ g$, d.h. es gibt ein $a \in A$, so daß $b_1 = b_2 + f(a)$. Da $r(b_2) = r(b_1) = r(b_2) + r \circ f(a) = r(b_2) + a$, ist $a = 0$, also $b_1 = b_2$.

β ist surjektiv: Sei $(a, c) \in A \oplus C$. Da g surjektiv ist, gibt es ein $b \in B$ mit $g(b) = c$. Da $r(b - f \circ r(b) + f(a)) = r(b) - r \circ f \circ r(b) + r \circ f(a) = r(b) - r(b) + a = a$ und $g(b - f \circ r(b) + f(a)) = g(b) - g \circ f \circ r(b) + g \circ f(a) = c - 0 + 0 = c$, ist $\beta(b - f \circ r(b) + f(a)) = (a, c)$. $\square$

Für den wichtigsten Satz des Abschnitts benötigen wir

10.4 Satz: Gegeben sei ein kommuatives Diagramm in $\mathcal{G}p$

$$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "h_1"] & A_2 \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "h_2"] & A_3 \arrow[r, "f_3"] \arrow[d, "h_3"] & A_4 \arrow[d, "h_4"] \\ B_1 \arrow[r, "g_1"] & B_2 \arrow[r, "g_2"] & B_3 \arrow[r, "g_3"] & B_4 \end{tikzcd}$$

mit exakten Zeilen, so daß h_4 injektiv und h_1 surjektiv ist. Dann gilt

$$Kern\ h_3 = f_2(Kern\ h_2) \text{ und } Bild\ h_2 = g_2^{-1}(Bild\ h_3).$$

Der Beweis ist eine sog. Diagrammjagd: (1) $Kern\ h_3 \subset f_2(Kern\ h_2) : x \in Kern\ h_3 \Rightarrow h_3(x) = 0 \Rightarrow g_3 \circ h_3(x) = 0 = h_4 \circ f_3(x) \Rightarrow f_3(x) = 0$ (da h_4 injektiv) $\Rightarrow \exists y \in A_2$ mit $f_2(y) = x$ (wegen Exaktheit) $\Rightarrow g_2 \circ h_2(y) = h_3 \circ f_2(y) = h_3(x) = 0 \Rightarrow \exists z \in B_1$ mit $g_1(z) = h_2(y)$ (Exaktheit).

Da h_1 surjektiv ist, gibt es ein $w \in A_1$ mit $h_1(w) = z$. Also $g_1 \circ h_1(w) = h_2 \circ f_1(w) = h_2(y)$, d.h. $h_2(y - f_1(w)) = 0$, so daß $y - f_1(w) \in Kern\ h_2$. Da nun $f_2(y - f_1(w)) = f_2(y) - f_2 \circ f_1(w) = x - 0 = x$, folgt $x \in f_2\ (Kern\ h_2)$.

(2) $f_2(Kern\ h_2) \subset Kern\ h_3 : x \in Kern\ h_2 \Rightarrow h_3 \circ f_2(x) = g_2 \circ h_2(x) = 0 \Rightarrow f_2(x) \in Kern\ h_3$.

(3) $Bild\ h_2 \subset g_2^{-1}(Bild\ h_3) : x \in Bild\ h_2 \Rightarrow \exists y \in A_2$ mit $h_2(y) = x \Rightarrow g_2(x) = g_2 \circ h_2(y) = h_3 \circ f_2(y) \Rightarrow g_2(x) \in Bild\ h_3$

(4) $g_2^{-1}(Bild\ h_3) \subset Bild\ h_2 : x \in g_2^{-1}(Bild\ h_3) \Rightarrow \exists y \in A_3$ mit $g_2(x) = h_3(y) \Rightarrow h_4 \circ f_3(y) = g_3 \circ h_3(y) = g_3 \circ g_2(x) = 0 \Rightarrow f_3(y) = 0$ (h_4 ist injektiv) $\Rightarrow \exists z \in A_2$ mit $f_2(z) = y$ (Exaktheit).

$g_2(x - h_2(z)) = g_2(x) - g_2 \circ h_2(z) = g_2(x) - h_3 \circ f_2(z) = g_2(x) - h_3(y) = 0 \Rightarrow \exists w \in B_1$ mit $g_1(w) = x - h_2(z) \Rightarrow \exists u \in A_1$ mit $h_1(u) = w$ (h_1 ist surjektiv). Es folgt:

$h_2(f_1(u)+z) = h_2f_1(u) + h_2(z) = g_1h_1(u) + h_2(z) = x - h_2(z) + h_2(z) = x$. Also $x \in Bild\, h_2$. □

Das für unsere Anwendungen wichtige Resultat ist

10.5 Fünfer-Lemma: Das kommutative Diagramm in $\mathcal{G}p$

$$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "h_1"] & A_2 \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "h_2"] & A_3 \arrow[r, "f_3"] \arrow[d, "h_3"] & A_4 \arrow[r, "f_4"] \arrow[d, "h_4"] & A_5 \arrow[d, "h_5"] \\ B_1 \arrow[r, "g_1"] & B_2 \arrow[r, "g_2"] & B_3 \arrow[r, "g_3"] & B_4 \arrow[r, "g_4"] & B_5 \end{tikzcd}$$

habe exakte Sequenzen. Dann gilt

(1) h_1 surjektiv und h_2, h_4 injektiv $\Rightarrow h_3$ injektiv.

(2) h_2, h_4 surjektiv und h_5 injektiv $\Rightarrow h_3$ surjektiv.

(3) h_1 surjektiv, h_5 injektiv, h_2, h_4 bijektiv $\Rightarrow h_3$ bijektiv

Beweis: (1) Nach (10.4) gilt $Kern\ h_3 = f_2(Kern\ h_2) = f_2(0) = 0$.

(2) Nach (10.4), angewandt auf den rechten Teil des Diagramms, gilt $Bild\ h_3 = g_3^{-1}(Bild\ h_4) = g_3^{-1}(B_4) = B_3$

(3) folgt aus (1) und (2). □

11 Homotopieexakte Sequenzen

Ab jetzt arbeiten wir nur noch mit basierten Räumen und basierten Paaren. Ziel dieses Abschnitts ist es, exakte Sequenzen für Homotopiegruppen aufzustellen. Dafür benötigen wir weitere Konstruktionen auf Räumen.

11.1 Definition: Sei $f(X, x_0) \to (Y, y_0)$ eine Abbildung

(1) $CX = X \times I/(x_0 \times I \cup X \times 0) = MX/X \times 0$ heißt *reduzierter Kegel* von X.

(2) $C(f) = (CX \sqcup Y)/(x, 1) \sim f(x) = M(f)/X \times 0$ heißt *reduzierter Abbildungskegel* von f.

(3) $SX = X \times I/(x_0 \times I \cup X \times \partial I) = CX/X \times 1$ heißt *reduzierte Einhängung* von X.

Dual dazu haben wir

(4) $PX = \{w \in X^I;\ w(0) = x_0\} = (X, x_0)^{(I,0)}$ heißt *basierter Wegeraum* von X.

(5) $P(f) = \{(x, w) \in X \times Y^I,\ w(0) = y_0,\ w(1) = f(x)\}$ heißt *basierter Abbildungswegeraum* von f.

(6) $\Omega X = \{w \in X^I; w(0) = w(1) = x_0\} = (X, x_0)^{(I,\partial I)}$ heißt *Schleifenraum* von X.

Die Basispunkte sind in allen Fällen die offensichtlichen.

11.2 Bemerkungen: (1) Die Konstruktionen (1), (3), (4), (6) definieren offensichtliche Funktoren $\mathcal{T}op^* \to \mathcal{T}op^*$. Ist $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ eine Abbildung, dann definiert $(x, t) \mapsto (f(x), t)$ die Funktoren C und S auf f und $w \mapsto f \circ w$ die Funktoren P und Ω auf f.

Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie und $\mathcal{A}r\mathcal{C}$ die Kategorie der Pfeile (arrows) von $\mathcal{C}$, d.h. ob $\mathcal{A}r\mathcal{C}$ ist die Klasse aller Morphismen aus $\mathcal{C}$ und $\mathcal{A}r\mathcal{C}(f, g)$ ist die Menge der kommutativen Quadrate

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"] & \bullet \arrow[d, "v"] \\ \bullet \arrow[r, "g"] & \bullet \end{tikzcd}$$

mit der offensichtlichen Komposition. Dann definieren (2) und (5) Funktoren

$$\mathcal{A}r\mathcal{T}op^* \longrightarrow \mathcal{T}op^*$$

die auf dem Morphismus

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"] & Y \arrow[d, "v"] \\ U \arrow[r, "g"] & V \end{tikzcd}$$

durch $(x,t) \mapsto (u(x),t)$, $y \mapsto v(y)$ bzw. durch $(x,w) \mapsto (u(x), v \circ w)$ gegeben sind.

(2) Wir haben *natürliche* Inklusionen

$$c_X : X \to CX,\ x \mapsto (x,1),\ \text{und}\ c(f) : Y \to C(f),\ y \mapsto y$$

als abgeschlossene Teilmengen und natürliche Projektionen

$$p_X : PX \to X,\ w \mapsto w(1),\ \text{und}\ p(f) : P(f) \to X,\ (x,w) \mapsto x.$$

Dabei bedeutet "natürlich", daß für jede Abbildung $u : X \to U$ in $\mathcal{T}op^*$ bzw. $(u,v) : f \to g$ in $\mathcal{A}r\mathcal{T}op^*$ die Diagramme

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "c_X"] \arrow[d, "u"] & CX \arrow[d, "C_u"] \\ U \arrow[r, "c_U"] & CU \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} Y \arrow[r, "c(f)"] \arrow[d, "v"'] & C(f) \arrow[d, "C(u,v)"] \\ V \arrow[r, "c(g)"] & C(g) \end{tikzcd}$$

kommutativ sind (entsprechend für p_X und $p(f)$).

(3) Nach Definition von $C(f)$ und $P(f)$ sind

$$\begin{tikzcd} X \vee X \arrow[r, "(i_0, i_1)"] \arrow[d, "(0,f)"'] & M(f) \arrow[d] \\ Y \arrow[r, "c(f)"] & C(f) \end{tikzcd} \qquad \text{und} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "c_X"] \arrow[d, "f"'] & CX \arrow[d, "\overline{f}"] \\ Y \arrow[r, "c(f)"] & C(f) \end{tikzcd}$$

Pushoutdiagramme und

$$\begin{tikzcd} P(f) \arrow[r] \arrow[d, "p(f)"] & Y^I \arrow[d, "\pi"] \\ X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd} \qquad \text{und} \qquad \begin{tikzcd} P(f) \arrow[r, "\overline{f}"] \arrow[d, "p(f)"'] & PY \arrow[d, "p_Y"] \\ X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

Pullbackdiagramme. Folglich sind $c(f)$ und $c_X = c(id_X)$ basierte Kofaserungen und $p(f)$ und $p_Y = p(id_Y)$ basierte Faserungen. Ist f basierter Kofaserung bzw. Faserung, so gilt dasselbe für $\overline{f} : CX \to C(f)$ bzw. für $\overline{f} : P(f) \to PY$.

11.3 Übung: Zur Schulung des Dualitätsverständnisses beweise man

(1) Die Adjunktion definiert Homöomorphismen

$$\mathcal{T}op^*(CX,Y) \cong \mathcal{T}op^*(X,PY)\ \text{und}\ \mathcal{T}op^*(SX,Y) \cong \mathcal{T}op^*(X,\Omega Y)$$

(2) Bezeichnet $[X,Y]^*$ die Menge der basierten Homotopieklassen basierter Abbildungen $X \to Y$, dann definiert die Adjunktion eine Bijektion

$$[SX,Y]^* \cong [X,\Omega Y]^*$$

Für CX und PY ist die entsprechende Aussage (11.3.2) trivial, denn

11.4 CX und PY sind in $\mathcal{T}op^*$ zusammenziehbar.

Beweis: $CX \times I \to CX, \quad (x,t,u) \mapsto (x, t\cdot u)$
$PY \times I \to PY, \quad (w,u) \mapsto w_u$ mit $w_u(t) = w(t\cdot u)$

sind basierte Kontraktionen von CX und PY. □

Wir benötigen für unsere Hauptresultate einen Hilfssatz, der sich am besten in der Kategorie $\mathcal{A}r\mathcal{T}op^*$ formulieren läßt. Obwohl es klar sein dürfte, wie der Homotopiebegriff in dieser Kategorie definiert werden muß, wollen wir ihn ausformulieren: Eine Homotopie eines Morphismus (u,v)

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"] & B \arrow[d, "v"] \\ X \arrow[r, "g"] & Y \end{tikzcd}$$

besteht aus Homotopien $U : A \times I \to X$ von u und $V : B \times I \to Y$ von v, so daß (U_t, V_t) für alle $t \in I$ ein Morphismus in $\mathcal{A}r\mathcal{T}op^*$ ist, d.h. $g \circ U_t = V_t \circ f \ \forall t \in I$.

11.5 Satz: Sei $A \xrightarrow{i} X$ eine basierte Kofaserung und A basiert zusammenziehbar. Dann definieren die Projektionen eine Homotopieäquivalenz

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "p_1"'] & X \arrow[d, "p_2"] \\ 0 \arrow[r, "j"] & X/A \end{tikzcd}$$

in $\mathcal{A}r\mathcal{T}op^*$, also eine basierte Homotopieäquivalenz von Paaren $(X,A) \to (X/A, 0)$, wobei $0 \in X/A$ der Basispunkt ist.

Dual dazu gilt: Ist $f : X \to A$ basierte Faserung mit Faser F und A basiert zusammenziehbar, dann definieren die Inklusionen eine basierte Homotopieäquivalenz in $\mathcal{A}r\mathcal{T}op^*$

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "proj"] \arrow[d, hook, "i"'] & \{a_0\} \arrow[d, hook, "j"'] \\ X \arrow[r, "f"] & A \end{tikzcd}$$

Beweis: Den ersten Teil überlassen wir dem Leser als Dualitätsübung. Sei

$$R : A \times I \to A$$

eine basierte Kontraktion, d.h. $R_0(a) = a$ und $R_1(a) = a_0 \ \forall a \in A$. Da f eine Faserung ist, gibt es eine basierte Homotopie

$$\begin{tikzcd} & & X \arrow[d, "f"] \\ X \arrow[urr, "id"] \arrow[r, "f"'] & A \arrow[r, "R_t"'] & A \end{tikzcd}$$

$H : X \times I \to X$ mit $H_0 = id_X$ und $f \circ H_t = R_t \circ f$. Da $f \circ H_1(x) = R_1 \circ f(x) = a_0$, ist *Bild* $H_1 \subset f^{-1}(a_0) = F$, d.h. H_1 definiert eine Abbildung $X \to F$.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u = H_1"'] & A \arrow[d, "v = R_1"] \\
F \arrow[r, "proj"] \arrow[d, hook, "i"'] & \{a_0\} \arrow[d, hook, "j"] \\
X \arrow[r, "f"] & A
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
F \arrow[r, "proj"] \arrow[d, hook, "i"'] & \{a_0\} \arrow[d, hook, "j"] \\
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"'] & A \arrow[d, "v"] \\
F \arrow[r, "proj"] & \{a_0\}
\end{tikzcd}$$

Das Paar (H, R) definiert eine Homotopie $(id_X, id_A) \simeq (i, j) \circ (u, v)$ in $\mathcal{A}r\mathcal{T}op^*$. Für $x \in F$ gilt $f \circ H_t(x) = R_t \circ f(x) = R_t(a_0) = a_0$. Also ist die Einschränkung von H auf $F \times I$ eine Abbildung nach F und das Paar $(H_t|F, R_t|\{a_0\})$ ist eine Homotopie $(id_F, id_{\{a_0\}}) \simeq (u, v) \circ (i, j)$. □

Bei diesem Beweis wird wesentlich benutzt, daß $R_t(a_0) = a_0 \; \forall t \in I$. Das läßt sich nun leicht verallgemeinern:

11.6 Übung: Sei $\mathcal{A}r_2\mathcal{T}op^*$ die Kategorie, die Diagramme

$$A_1 \xrightarrow{f_1} B_1 \xrightarrow{g_1} C_1$$

in $\mathcal{T}op^*$ als Objekte und kommutative Leitern

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "h_1"] & B_1 \arrow[r, "g_1"] \arrow[d, "h_2"] & C_1 \arrow[d, "h_3"] \\
A_2 \arrow[r, "f_2"] & B_2 \arrow[r, "g_2"] & C_2
\end{tikzcd}$$

in $\mathcal{T}op^*$ als Morphismen hat. Der Homotopiebegriff ist analog zu dem in $\mathcal{A}r\mathcal{T}op^*$. Sei $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ ein Diagramm in $\mathcal{T}op^*$. Dann gilt:

(1) Ist g eine basierte Kofaserung und hat f eine Retraktion $r : Y \to X$ mit einer Deformation $R_t : Y \to Y$, $R_t : id_Y \simeq f \circ r$, so daß $r \circ R_t = r$, $R_t \circ f = f \; \forall t \in I$, dann ist

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, equal] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "r"'] \arrow[dr, phantom, "pushout"] & Z \arrow[d, "\overline{r}"] \\
X \arrow[r, equal] & X \arrow[r, "\overline{g}"] & Q
\end{tikzcd}$$

eine Homotopieäquivalenz *rel* X in $\mathcal{A}r_2\mathcal{T}op^*$.

(2) Ist f eine basierte Faserung und hat g einen Schnitt $s : Z \to Y$ mit einer Deformation $R_t : Y \to Y, id_Y \simeq s \circ g$, so daß $g \circ R_t = g$, $R_t \circ s = s \; \forall t \in I$, dann ist

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r, "\overline{f}"] \arrow[d, "\overline{s}"'] \arrow[dr, phantom, "pullback"] & Z \arrow[r, equal] \arrow[d, "s"] & Z \arrow[d, equal] \\
X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r, "g"] & Z
\end{tikzcd}$$

eine Homotopieäquivalenz $rel\ Z$ in $\mathcal{A}r_2\mathcal{T}op^*$.

Die exakten Sequenzen, die wir konstruieren, basieren auf folgendem einfachem Ergebnis

11.7 Satz: Für basierte Abbildungen $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ sind äquivalent

(1) $0 \simeq g \circ f$

(2) Es gibt eine Abbildung $h : C(f) \to Z$, so daß $g = h \circ c(f)$

(3) Es gibt eine Abbildung $k : X \to P(g)$, so daß $f = p(g) \circ k$

$$\begin{tikzcd}
& P(g) \arrow[d, "p(g)"] & \\
X \arrow[ur, "k"] \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "c(f)"] & Z \\
& C(f) \arrow[ur, "h"'] &
\end{tikzcd}$$

Wir zeigen diesmal (1) $\iff$ (2) und überlassen den dualen Fall (1) $\iff$ (3) dem Leser. Sei $H : X \times I \to Z$ die Homotopie $0 \simeq g \circ f$, dann definieren wir

$$h : C(f) \to Z,\ (x,t) \mapsto H(x,t),\ y \mapsto g(y).$$

Ist umgekehrt h gegeben, so ist

$$H : X \times I \xrightarrow{proj} CX \xrightarrow{\overline{f}} C(f) \xrightarrow{h} Z$$

die gesuchte Homotopie, denn $H_0(x) = h(x,0) = z_0$ und $H_1(x) = H(x,1) = h(f(x)) = g \circ f(x)$. □

11.8 Folgerung: $[X,Z]^* \xleftarrow{f^*} [Y,Z]^* \xleftarrow{c(f)^*} [C(f),Z]^*$
$[X,Z]^* \xleftarrow{g_*} [X,Y]^* \xleftarrow{p(g)_*} [X,P(g)]^*$

sind exakte Sequenzen in $\mathcal{S}ets^*$. □

Wir iterieren nun den Prozeß und erhalten für $f : X \to Y$ ein Diagramm

11.9

$$\begin{tikzcd}
Y & X \arrow[l, "f"'] & P(f) \arrow[l, "p(f)"'] & P(p(f)) \arrow[l, "p^2(f)"'] & P(p^2(f)) \arrow[l, "p^3(f)"'] & P(p^3(f)) \arrow[l, "p^4(f)"'] & \cdots \\
& & F \arrow[ul, "i"] \arrow[u, "\rho(f)"] \arrow[ur, phantom, "\mathrm{I}"] & \Omega Y \arrow[l, dashed, "\delta"'] \arrow[u, "\rho^2(f)"] \arrow[ur, phantom, "\mathrm{II}"] & \Omega X \arrow[l, "\Omega f"'] \arrow[u, "\rho^3(f)"] \arrow[ur, phantom, "\mathrm{III}"] & \Omega P(f) \arrow[l, "\Omega p(f)"'] \arrow[u, "\rho^4(f)"] & \cdots \\
& & & & & \Omega F \arrow[ul, "\Omega i"] \arrow[u] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Hier ist $F = f^{-1}(y_0) = \overline{f}^{-1}(0)$, wobei $\overline{f} : P(f) \to PY$ die Abbildung aus (11.2.3) ist. i und $\rho(f)$ sind Inklusionen. Wir definieren induktiv $p^{n+1}(f) = p(p^n(f)))$ und $\rho^{n+1}(f) = \rho(p^n(f)))$. Ist f eine Faserung, dann ist auch $\overline{f}$ eine Faserung. Weil PY basiert zusammenziehbar ist, ist $\rho(f)$ nach (11.5) eine basierte Homotopieäquivalenz.

11.10 Ist f eine Faserung, definieren wir δ als $\widetilde{\rho(f)} \circ p^2(f) \circ \rho^2(f)$, wobei $\widetilde{\rho(f)}$ ein Homotopieinverses von $\rho(f)$ ist. Also ist δ nur bis auf Homotopie eindeutig definiert, aber für jede Wahl ist Quadrat I homotopiekommutativ.

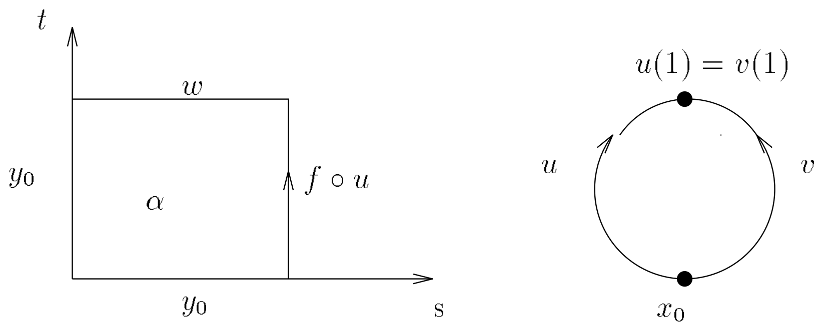
Da $p(f)$ stets eine Faserung ist, sind die $\rho^n(f)$ für $n > 1$ Homotopieäquivalenzen, induzieren also Bijektionen auf Homotopiemengen. Wir untersuchen nun das Quadrat II. Zunächst identifizieren wir die Räume

$$\begin{aligned} P(p(f)) &= \{((x,w),v) \in P(f) \times X^I;\ v(0) = x_0, v(1) = p(f)(x,w) = x\} \\ &= \{(w,v) \in Y^I \times X^I;\ w(0) = y_0, v(0) = x_0, w(1) = f \circ v(1)\} \end{aligned}$$

$P(p^2(f))$ ist Teilraum von $P(p(f)) \times P(f)^I$. Da $P(f) \subset X \times Y^I$, können wir $P(f)^I$ als Teilraum von $X^I \times Y^{I^2}$ auffassen (vgl. (6.4.2))

$$P(f)^I = \{(u,\alpha) \in X^I \times Y^{I^2};\ \alpha(0,t) = y_0, \alpha(1,t) = f \circ u(t)\ \forall t \in I\}$$

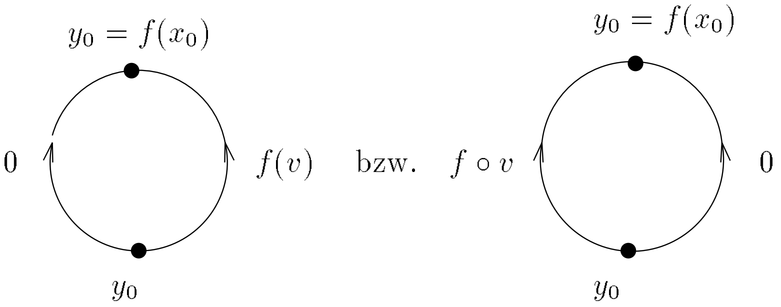
$$\begin{aligned} P(p^2(f)) &= \{((w,v),(u,\alpha)) \in P(p(f)) \times P(f)^I;\ \alpha(s,0) = y_0, u(0) = x_0, \\ &\quad \alpha(s,1) = w(s), u(1) = v(1)\} \end{aligned}$$



Die Abbildungen sind definiert durch

$$\begin{aligned} &\rho^2(f) : \Omega Y \to P(p(f)),\ w \mapsto (w,0) \\ &\rho^3(f) : \Omega X \to P(p^2(f)),\ v \mapsto ((0,v),(0,0)) \\ &p^3(f) : P(p^2(f)) \to P(p(f)),\ ((w,v),(u,\alpha)) \mapsto (w,v) \end{aligned}$$

Es folgt: $p^3(f) \circ \rho^3(f)(v) = (0,v)$, $\rho^2(f) \circ \Omega f(v) = (f \circ v, 0)$. Bildet man die rechte Komponente mit f nach Y^I ab, erhält man Schleifen



Bis auf das Vorzeichen lassen diese sich ineinander deformieren: Sei

$$H : \Omega X \times I \to P(p(f)),\ H_t(v) : I \to P(p(f)),\ s \mapsto (w_t(s), u_t(s))$$

mit $w_t(s) = \begin{cases} y_0 & 0 \le s \le t \\ f \circ v(s-t) & t \le s \le 1 \end{cases}$

und $u_t(s) = \begin{cases} x_0 & 0 \le s \le 1-t \\ v(2-s-t) & 1-t \le s \le 1 \end{cases}$

Also ist $\rho^2(f) \circ \Omega f(v)$ homotop zur Abbildung $\Omega X \to P(p(f)),\ v \mapsto (0, -v)$. Die Abbildung $\eta_X : \Omega X \to \Omega X,\ v \mapsto -v$ ist ein Homöomorphismus und

$$\rho^2(f) \circ \Omega(f) \simeq p^3(f) \circ \rho^3(f) \circ \eta_X$$

Als Zwischenergebnis erhalten wir nach (11.8) eine exakte Sequenz in $\mathcal{S}ets^*$

$$[Z,Y]^* \xleftarrow{f_*} [Z,X]^* \xleftarrow{p(f)_*} [Z,P(f)]^* \xleftarrow{\triangle(f)_*} [Z,\Omega Y]^* \xleftarrow{\Omega f_*} [Z,\Omega X]^*$$

mit $\triangle(f) = p^2(f) \circ \rho^2(f)$. Indem wir f durch Ωf ersetzen, können wir die Sequenz nach rechts durch $[Z, P(\Omega f)]^* \longleftarrow [Z, \Omega^2 X]^* \longleftarrow \ldots$ fortsetzen. Nun gilt aber

11.11 Es gibt einen kanonischen Homöomorphismus $h : P(\Omega f) \cong \Omega P(f)$, so daß

$$\begin{tikzcd} P(\Omega f) \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "p(\Omega f)"'] & & \Omega P(f) \arrow[dl, "\Omega p(f)"] \\ & \Omega X & \end{tikzcd}$$

kommutiert.

Beweis: $P(\Omega f) \subset \Omega X \times \Omega Y^I$ und $\Omega P(f) \subset P(f)^I$. Nach (6.4.2) können wir beide Räume als Teilräume von $X^I \times Y^{I^2}$ auffassen, und als solche sind sie gleich, nämlich

$$\{(u,\alpha) \in X^I \times Y^{I^2};\ \alpha(0,t) = \alpha(s,0) = \alpha(s,1) = y_0,\ u(0) = u(1) = x_0,$$
$$\alpha(1,t) = f \circ u(t)\}$$

Beide Abbildungen $p(\Omega f)$ und $\Omega p(f)$ bilden (u,α) nach u ab. Wir fassen zusammen

11.12 Satz: Sei $f : X \to Y$ eine basierte Abbildung. Dann gibt es in $\mathcal{S}ets^*$ exakte Sequenzen

$$[Z,Y]^* \xleftarrow{f_*} [Z,X]^* \xleftarrow{p(f)_*} [Z,P(f)]^* \xleftarrow{\triangle(f)_*} [Z,\Omega Y]^* \xleftarrow{\Omega f_*} [Z,\Omega X]^* \\ \xleftarrow{\Omega p(f)_*} [Z,\Omega P(f)]^* \leftarrow \dots$$

und dual dazu

$$[X,Z]^* \xleftarrow{f^*} [Y,Z]^* \xleftarrow{c(f)^*} [C(f),Z]^* \xleftarrow{\overline{\triangle}(f)^*} [SX,Z]^* \xleftarrow{Sf^*} [SY,Z]^* \\ \xleftarrow{Sc(f)^*} [SC(f),Z]^* \leftarrow \dots$$

Ist f eine Faserung, dann ist

$$[Z,Y]^* \xleftarrow{f_*} [Z,X]^* \xleftarrow{i_*} [Z,F]^* \xleftarrow{\delta_*} [Z,\Omega Y]^* \xleftarrow{\Omega f_*} [Z,\Omega X]^* \\ \xleftarrow{\Omega i_*} [Z,\Omega F]^* \leftarrow \dots$$

exakt. Ist f eine Kofaserung, dann ist dual dazu

$$[X,Z]^* \xleftarrow{f^*} [Y,Z]^* \xleftarrow{p^*} [Y/X,Z]^* \xleftarrow{\overline{\delta}^*} [SX,Z]^* \xleftarrow{Sf^*} [SY,Z]^* \\ \xleftarrow{Sp^*} [S(Y/X),Z]^* \leftarrow \dots$$

exakt, wobei $p : Y \to Y/X$ die Projektion ist.

Wir wollen diesen Satz auf Homotopiegruppen anwenden. Nach dem Exponentialgesetz für Abbildungsräume haben wir einen Homöomorphismus

$$(X,A,a_0)^{I^n,1\times I^{n-1},J^{n-1}} \cong \left((X,A,a_0)^{(I,1,0)},0\right)^{(I^{n-1},\partial I^{n-1})}$$

Ist $i : A \hookrightarrow X$ die Inklusion, so ist $(X,A,a_0)^{(I,1,0)} = P(i)$. Die Abbildung $p(i) : P(i) \to A$, ordnet $g : (I,1,0) \to (X,A,a_0)$ den Punkt $g(1) \in A$ zu. Die Adjunktion bildet $f : (I^n, 1 \times I^{n-1}, J^{n-1}) \to (X,A,a_0)$ nach

$$\begin{aligned} &g : (I^{n-1},\partial I^{n-1}) \to (P(i),0) \\ &g(t_2,\dots,t_n) : (I,1,0) \to (X,A,0),\ t \mapsto f(t,t_2,\dots,t_n) \end{aligned}$$

ab.

11.13 Satz: Diese Zuordnung definiert einen Isomorphismus

$$\pi_n(X,A,a_0) \cong \pi_{n-1}(P(i),0) \qquad n \geq 1.$$

Unter diesem Isomorphismus geht $p(i)_* : \pi_{n-1}(P(i),0) \to \pi_{n-1}(A,a_0)$ über in

$$\partial : \pi_n(X,A,a_0) \to \pi_{n-1}(A,a_0),\ [f] \mapsto [f \mid 1 \times I^{n-1}]$$

□

Beachten wir weiter, daß
$$\Omega^n X = (X, x_0)^{(I^n, \partial I^n)},$$
folgt

11.14 Satz: Die Adjunktion definiert einen Isomorphismus

$$\pi_k(\Omega^n X, 0) \cong \pi_{k+n}(X, x_0)$$

□

Aus (11.12) erhalten wir also mit $i : A \subset X$, $j : (X, x_0) \subset (X, A)$ und $Z = S^0$

11.15 Satz: Für jedes Paar $A \subset X$ ist

$$\pi_0(X, a_0) \leftarrow \pi_0(A, a_0) \overset{\partial}{\leftarrow} \pi_1(X, A, a_0) \overset{j_*}{\leftarrow} \pi_1(X, a_0) \overset{i_*}{\leftarrow} \pi_1(A, a_0) \overset{\partial}{\leftarrow} \dots$$

eine exakte Sequenz von basierten Menge bzw. Gruppen und Homomorphismen. Ist $f : X \to B$ eine basierte Faserung mit Faser $F = f^{-1}(b_0)$, so ist

$$\pi_0(B, b_0) \overset{f_*}{\leftarrow} \pi_0(X, x_0) \overset{j_*}{\leftarrow} \pi_0(F, x_0) \overset{\triangle(f)_*}{\longleftarrow} \pi_1(B, b_0) \overset{f_*}{\leftarrow} \pi_1(X, x_0) \leftarrow \dots$$

exakt. □

Wir vermerken

11.16 $\pi_n(X, X, x_0) = \{0\}$

denn $\pi_n(X, X, x_0) \cong \pi_{n-1}(P(id_X), 0) = \pi_{n-1}(PX, 0) = \{0\}$, letzteres, weil PX zusammenziehbar ist.

Als nächstes wollen wir die Situation einer Komposition untersuchen. Gegeben seien also basierte Abbildungen

$$h = g \circ f : X \overset{f}{\to} Y \overset{g}{\to} Z.$$

Wir haben eine kanonische Abbildung

$$\begin{array}{c} P(h) = \{(x, w) \in X \times Z^I;\ w(0) = z_0, w(1) = h(x)\} \\ l \downarrow \\ P(g) = \{(y, w) \in Y \times Z^I;\ w(0) = z_0, w(1) = g(y)\} \end{array}$$

gegeben durch $l(x, w) = (f(x), w)$. Wir fassen $P(g)^I$ wieder als Teilraum von $Y^I \times Z^{I^2}$ auf und erhalten dann

$$P(l) = \{(x, v, \alpha) \in X \times Y^I \times Z^{I^2};\ \alpha(0, t) = \alpha(t, 0) = z_0,\ \alpha(1, t) = g \circ v(t),$$
$$v(0) = y_0, v(1) = f(x)\}$$

Wir wollen $P(l)$ und $P(f)$ vergleichen. Dazu benutzen wir

11.17 Lemma: $s : 1 \times I \subset I^2$ ist eine SDR mit Retraktion

$$r : I^2 \to 1 \times I, \ (t_1, t_2) \mapsto (1, \min(t_1, t_2))$$

Es gibt eine Deformation $R_u : I^2 \to I^2$, so daß $R_u \circ s = s$ und $r \circ R_u = r$.

Beweis:

$$R_u(t_1, t_2) = \begin{cases} (t_1, 2u \cdot \min(t_1, t_2) + (1 - 2u)t_2) & 0 \leq u \leq \frac{1}{2} \\ (2u - 1 + (2 - 2u)t_1, \min(t_1, t_2)) & \frac{1}{2} \leq u \leq 1 \end{cases}$$

□

11.18 Die Abbildung $\rho : P(l) \to P(f), \ (x, v, \alpha) \mapsto (x, v)$ ist eine Deformationsretraktion mit Schnitt

$$P(f) \to P(l), \ (x, v) \mapsto (x, v, g \circ v \circ r)$$

Beweis: Die Deformation $D_u : P(l) \to P(l)$ ist durch

$$(x, v, \alpha) \mapsto (x, v, \alpha \circ R_u)$$

mit R_u aus (11.17) definiert. □

Indem wir in (11.13) f durch l ersetzen, erhalten wir mit (11.15)

11.19 Satz: Seien $A \subset B \subset X$ basierte Räume mit Basispunkt $a_0 \in A$, dann induzieren die Inklusionen eine exakte Sequenz

$$\pi_1(X, B) \longleftarrow \pi_1(X, A) \longleftarrow \pi_1(B, A) \xleftarrow{\partial} \pi_2(X, B) \longleftarrow \pi_2(X, A) \longleftarrow \ldots$$

von Gruppen bzw. basierten Mengen. □

11.20 Übung: Zeigen Sie $\partial : \pi_{n+1}(X, B) \to \pi_n(B, A)$ ist die Komposition $\pi_{n+1}(X, B) \xrightarrow{\partial} \pi_n(B) \xrightarrow{i*} \pi_n(B, A)$, wobei ∂ die Randabbildung von (11.13) und $i : (B, a_0) \subset (B, A)$ die Inklusion ist.

12 Algebraische Strukturen auf Homotopiemengen

Satz 11.12 bescherte uns eine exakte Sequenz basierter Mengen, während wir in den anschließenden Folgerungen exakte Sequenzen erhielten, die bis auf drei Endterme aus Gruppen bestanden. Es liegt daher nahe zu vermuten, daß die basierten Mengen in (11.12) auch Gruppenstrukturen haben.

Nach Definition ist SX ein Quotientenraum von $X \times I$. Basierte Abbildungen $f : SX \to Y$ können vermöge

$$\begin{tikzcd} X \times I \arrow[d] \arrow[dr, dashed, "F"] & \\ SX \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

als Homotopien $F : X \times I \to Y$ aufgefaßt werden. Da dann $F(X \times \partial I \cup x_0 \times I) = \{y_0\}$, ist F eine basierte Homotopie der Nullabbildung. Homotopien können wir aber addieren: Wie erhalten aus (8.12)

12.1 Satz: $[SX, Y]^*$ ist eine Gruppe. Die Verknüpfung ist definiert durch $[f]+[g] = [f+g]$ mit

$$f + g : SX \to Y,\ (x,t) \mapsto \begin{cases} f(x, 2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ g(x, 2t-1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

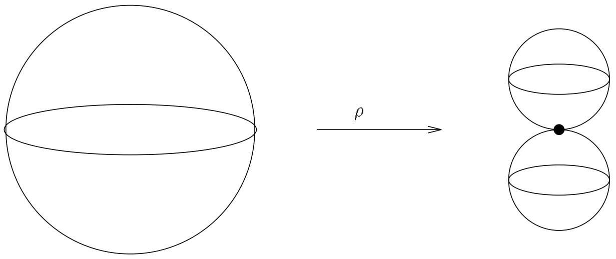
□

Diese Gruppenstruktur ist durch eine Abbildung induziert.

12.2 Definition: Die Abbildung

$$\rho : SX \to SX \vee SX, \quad (x,t) \mapsto \begin{cases} (x, 2t) \in SX \vee \{0\} & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ (x, 2t-1) \in \{0\} \vee SX & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

wobei $0 \in SX$ der Basispunkt ist, heißt *Schnürabbildung*.



Die Abbildung $\bigtriangledown : X \vee X \to X$, die jede Kopie X identisch abbildet, heißt *Faltabbildung*.

Mit diesen Bezeichnungen ist $f+g$ die Komposition

$$f+g : SX \xrightarrow{\rho} SX \vee SX \xrightarrow{f \vee g} Y \vee Y \xrightarrow{\nabla} Y$$

Man macht sich leicht klar

12.3 $[X,Z]^* \times [Y,Z]^* \cong [X \vee Y, Z]^*, \quad ([f],[g]) \mapsto [\nabla \circ (f \vee g)]$
$[X,Y]^* \times [X,Z]^* \cong [X, Y \times Z]^*, \quad ([f],[g]) \mapsto [(f,g)]$

und wir erhalten

12.4 Die Gruppenstruktur auf $[SX,Y]^*$ ist gegeben durch

$$[SX,Y]^* \times [SX,Y]^* \cong [SX \vee SX, Y]^* \xrightarrow{\rho^*} [SX,Y]^*$$

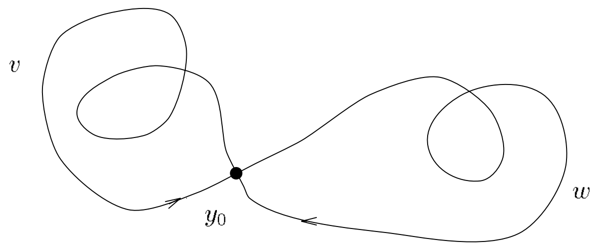
Dual dazu erhalten wir

12.5 Satz: $[X,\Omega Y]^*$ ist eine Gruppe unter der Verknüpfung

$$[X,\Omega Y]^* \times [X,\Omega Y]^* \cong [X, \Omega Y \times \Omega Y]^* \xrightarrow{\mu_*} [X,\Omega Y]^*,$$

wobei $\mu : \Omega Y \times \Omega Y \to \Omega Y$ definiert ist durch

$$\mu(v,w) : t \mapsto \begin{cases} v(2t) & 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ w(2t-1) & \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$



(durchlaufe erst v dann w)

12.6 Nach (8.13) definiert μ auf ΩY eine Gruppenstruktur bis auf Homotopie.

Der Adjunktionsisomorphismus $[SX,Y]^* \cong [X,\Omega Y]^*$ überführt die Verknüpfung $+_s$ auf der linken Seite in die Verknüpfung $+_\Omega$ auf der rechten Seite und ist damit ein Gruppenisomorphismus. Ist nun X selbst eine Einhängung, $X = SZ$, hat die rechte Seite zwei Verknüpfungen $+_S$ und $+_\Omega$ mit demselben neutralen Element, der Nullabbildung 0. Der folgende Satz vergleicht diese Strukturen.

12.7 Satz: Die Gruppenstrukturen $+_S$ und $+_\Omega$ auf $[SX,\Omega Y]^*$ stimmen überein, und $[S^2X,Y]^* \cong [SX,\Omega Y]^* \cong [X,\Omega^2 Y]^*$ ist abelsch.

Aus den Beschreibungen der Verknüpfung mit Hilfe der Abbildungen ρ und μ folgt sofort

12.8: Sind $g : A \to X$ und $h : Y \to B$ basiert, dann sind

$$\begin{aligned} g^* &: [SX, Y]^* \to [SA, Y]^*,\ [f] \mapsto [f \circ Sg] \\ g^* &: [X, \Omega Y]^* \to [A, \Omega Y]^*,\ [f] \mapsto [f \circ g] \\ h_* &: [SX, Y]^* \to [SX, B]^*,\ [f] \mapsto [h \circ f] \\ h_* &: [X, \Omega Y]^* \to [X, \Omega B]^*,\ [f] \mapsto [\Omega h \circ f] \end{aligned}$$

Homomorphismen:

Z.B gilt für $f, g : X \to \Omega Y$ mit der Diagonalen $\triangle : X \to X \times X$

$$\begin{aligned} \Omega h \circ (f +_\Omega g) &= \Omega h \circ (\mu_Y \circ (f \times g) \circ \triangle) = \mu_B \circ (\Omega h \times \Omega h) \circ (f \times g) \circ \triangle \\ &= (\Omega h \circ f) +_\Omega (\Omega h \circ g) \end{aligned}$$

Beweis 12.7: Sind $[(f_1, f_2)], [(g_1, g_2)]$ aus $[SX, \Omega Y \times \Omega Y]^*$, dann ist $(f_1, f_2) +_S (g_1, g_2)$ gegeben durch

$$SX \xrightarrow{\rho} SX \vee SX \xrightarrow{\quad (f_1, f_2) \vee (g_1, g_2) \quad} (\Omega Y \times \Omega Y) \vee (\Omega Y \times \Omega Y) \xrightarrow{\nabla} \Omega Y \times \Omega Y$$

Da die Projektionen mit $\vee$ vertauschen, ist die i-te Koordinatenabbildung

$$SX \xrightarrow{\rho} SX \vee SX \xrightarrow{f_i \vee g_i} \Omega Y \vee \Omega Y \xrightarrow{\nabla} \Omega Y,$$

so daß

$$[(f_1, f_2)] +_S [(g_1, g_2)] = [(f_1 +_S g_1, f_2 +_S g_2)].$$

Da μ_* ein Homomorphismus ist, folgt,

$$\begin{aligned} &([f_1] +_\Omega [f_2]) +_S ([g_1] +_\Omega [g_2]) \\ &\qquad = \mu_*[(f_1, f_2)] +_S \mu_*[(g_1, g_2)] = \mu_*[(f_1 +_S g_1, f_2 +_S g_2)] \\ &\qquad = ([f_1] +_S [g_1]) +_\Omega ([f_2] +_S [g_2]) \end{aligned}$$

Mit $[f_2] = [g_1] = 0$ erhalten wir

$$[f_1] +_S [g_2] = [f_1] +_\Omega [g_2],$$

so daß $+_S = +_\Omega$. Setzen wir jetzt $[f_1] = [g_2] = 0$ folgt daraus wiederum

$$[f_2] +_S [g_1] = [g_1] +_\Omega [f_2] = [g_1] +_S [f_2]$$

□

12.9 Folgerung: $\pi_n(X, x_0)$ ist für $n \geq 2$ und $\pi_n(X, A, a_0)$ für $n \geq 3$ abelsch.

Am Ende der Homotopiesequenzen haben wir nur noch basierte Mengen. Exaktheit ist in diesem Bereich daher eine schwache Aussage. Wir können sie aber verschärfen, denn die Gruppe $[Z, \Omega Y]^*$ operiert auf der basierten Menge $[Z, P(f)]^*$ in (11.2), und dual dazu operiert die Gruppe $[SX, Z]^*$ auf der basierten Menge $[C(f), Z]^*$. Wir erinnern

12.10 Definition: Eine Gruppe $(G,+)$ *operiert* auf einer Menge M, wenn es eine Abbildung

$$G \times M \to M,\ (g,x) \mapsto g \cdot x$$

gibt, so daß (1) $e \cdot x = x \quad \forall x \in M$, e neutrales Element
(2) $(g_1 + g_2) \cdot x = g_1 \cdot (g_2 \cdot x) \quad g_1, g_2 \in G, x \in M$

Ist $f : X \to Y$ eine basierte Abbildung, dann induziert

$$\lambda : \Omega Y \times P(f) \to P(f),\ (v,(x,w)) \mapsto (x, v+w)$$

eine Operation von $[Z,\Omega Y]^*$ auf $[Z,P(f)]^*$ durch

$$\begin{array}{ccccc} [Z,\Omega Y]^* \times [Z,P(f)]^* & \cong & [Z,\Omega Y \times P(f)]^* & \overset{\lambda_*}{\to} & [Z,P(f)] \\ ([f],[g]) & & \longmapsto & & [f]\cdot[g] \end{array}$$

Die Axiome (12.10) folgen aus (8.12).

12.11 Satz: In der exakten Sequenz (11.12) gilt für $\alpha_0, \alpha_1 \in [Z,P(f)]^*$ und $\beta_0, \beta_1 \in [Z,\Omega Y]^*$

(1) $p(f)_*(\alpha_1) = p(f)_*(\alpha_2) \iff \exists \beta \in [Z,\Omega Y]^*$, so daß $\beta \cdot \alpha_1 = \alpha_0$.

(2) $\triangle(f)_*(\beta_1 + \beta_2) = \beta_1 \cdot \triangle(f)_*(\beta_2)$

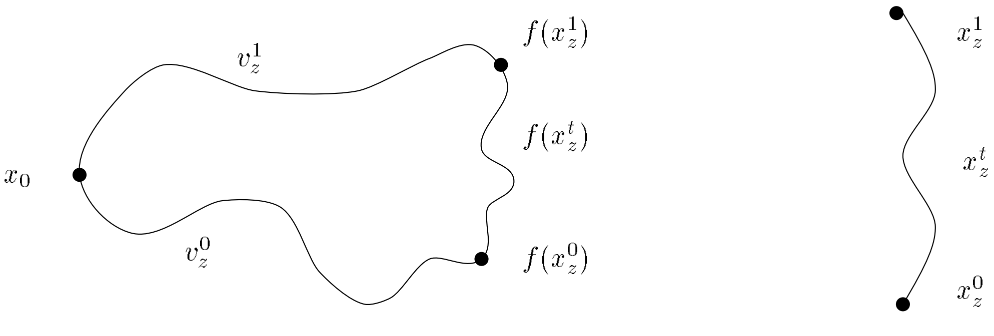
(3) $\triangle(f)_*(\beta) = \beta \cdot [0] \quad \forall \beta \in [Z,\Omega Y]^*$

Beweis: (1) Seien $g_i : Z \to P(f)$ Repräsentanten von α_i. Sei $g_i(z) = (x_z^i, v_z^i)$. Dann wird $p(f)_*(\alpha_i)$ durch die Abbildung

$$Z \to X,\ z \mapsto x_z^i$$

repräsentiert. Da $p(f)_*(\alpha_1) = p(f)_*(\alpha_2)$, gibt es eine Homotopie

$$H : Z \times I \to X,\ H_t(z) = x_z^t$$



β sei repräsentiert durch

$$h : Z \to \Omega X,\ h(z) = (v_z^0 + f(x_z^t)) - v_z^1.$$

Dann gilt $\lambda(h(z), g_1(z)) = (x_z^1, ((v_z^0+f(x_z^t)-v_z^1)+v_z^1)$. Der Weg $((v_z^0+f(x_z^t)-v_z^1)+v_z^1$ ist homotop *rel* Endpunkten zum Weg $v_z^0 + f(x_z^t)$ und die Homotopie ist stetig in z. Die Kontraktion $I \times I \to X$, $(u,t) \mapsto x_z^{(1-u)\cdot t}$ des Weges x_2^t auf x_z^0 ist stetig in z. Beide zusammen definieren eine Homotopie $Z \times I \to P(f)$ von $\lambda \circ (h, g_1)$ nach g_0.

Beweise (2) und (3) folgen direkt aus den Definitionen. $\square$

13 Transport und die Rolle des Basispunktes

Sei $A \subset X$ eine abgeschlossene Kofaserung.

13.1 Definition: Sei $\sigma : A \times I \to Y$ eine Homotopie und $f : X \to Y$ eine Abbildung. Ein *Transport* von f längs σ ist eine Homotopie $F : X \times I \to Y$, so daß $F|A \times I = \sigma$ und $F_0 = f$.

Ein Transport existiert immer, da $A \subset X$ eine Kofaserung ist. Er ist natürlich nicht eindeutig durch f und σ gegeben, aber es gilt

13.2 Satz: Seien $\sigma, \tau : A \times I \to Y$ und $f, g : X \to Y$ gegeben, so daß $\sigma \simeq \tau$ $rel A \times \partial I$, insbesondere also $\sigma_0 = \tau_0$, $\sigma_1 = \tau_1$, und $f \simeq g$ $rel A$, insbesondere also $f|A = g|A$. Sei F ein Transport von f längs σ und G ein Transport von g längs τ. Dann gilt $F_1 \simeq G_1$ $rel A$

Beweis: Sei $\chi : A \times I \times I \to Y$ die Homotopie $\sigma \simeq \tau$ $rel A \times \partial I$ und $H : X \times 0 \times I \to Y$ die Homotopie $f \simeq g$ $rel A$. Dann haben wir eine Abbildung

$$A \times I \times I \cup X \times I \times 0 \cup X \times I \times 1 \cup X \times 0 \times I \xrightarrow{\chi \cup F \cup G \cup H} Y$$

Nach Übung 9.23 ist $A \times I \cup X \times \partial I \subset X \times I$ eine Kofaserung. Damit besitzt $\chi \cup F \cup G \cup H$ eine Erweiterung $K : X \times I \times I \to Y$. Es gilt $K(x, 1, 0) = F_1(x)$, $K(x, 1, 1) = G_1(x)$, $K(a, 1, t) = \chi(a, 1, t) = \sigma_1(x) = \tau_1(x)$. Also ist $K|X \times 1 \times I$ eine Homotopie von F_1 und G_1 $rel A$. □

13.3 Folgerung: Ist F ein Transport von f längs σ, dann ist die Homotopieklasse $[F_1]^A$ von F_1 $rel A$ eindeutig durch die Homotopieklasse von σ $rel A \times \partial I$ und die Homotopieklasse $[f]^A$ von f $rel A$ bestimmt. Wir schreiben $[F_1]^A = \sigma \cdot [f]^A$.

Wir wollen diese Überlegung auf Homotopiemengen anwenden.

13.4 Definition: Ein basierter Raum (X, x_0) heißt *wohlpunktiert*, wenn $\{x_0\} \subset X$ eine abgeschlossene Kofaserung ist.

Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung, (X, x_0) wohlpunktiert und $\sigma : I \to Y$ ein Weg von $y_0 = f(x_0)$ nach y_1. Sei F ein Transport von f längs σ. Dann ist $F_1(x_0) = y_1$. Wir erhalten also eine Abbildung

$$[(X, x_0), (Y, y_0)]^* \longrightarrow [(X, x_0), (Y, y_1)]^*, \quad [f] \mapsto \sigma \cdot [f].$$

13.5 Diese Abbildung ist bijektiv.

Beweis: $[g] \mapsto (-\sigma) \cdot [g]$ ist die Umkehrabbildung, denn

$$\begin{aligned} (-\sigma) \cdot (\sigma \cdot [f]) &= (-\sigma + \sigma) \cdot [f] && \text{nach Definition} \\ &= (O_{x_0}) \cdot [f] && \text{(nach 13.3 und 8.12)} \\ &= [f] \end{aligned}$$

Analog zeigt man, daß $\sigma \cdot ((-\sigma) \cdot [g]) = [g]$. □

13.6 Satz: Sei (X, x_0) wohlpunktiert, und seien $f, g : X \to Y$ Abbildungen. Es gilt: $f \simeq g$ genau dann, wenn es einen Weg σ von $f(x_0)$ nach $g(x_0)$ in Y gibt, so daß $\sigma \cdot [f] = [g]$. Hierbei ist $[\ ]$ die basierte Homotopieklasse.

Beweis: Ist $\sigma \cdot [f] = [g]$, so gibt es einen Transport $F : X \times I \to Y$ von f längs σ mit $F_1 = g$ und $F_0 = f$. Also ist $F : f \simeq g$. Sei umgekehrt $F : f \simeq g$ und $\sigma(t) = F(x_0, t)$. Dann ist F ein Transport von f längs σ und $[g] = [F_1] = \sigma \cdot [f]$.

□

Wir wollen nun berücksichtigen, daß $\sigma \cdot [f]$ nur von der Homotopieklasse eines Weges *rel* Endpunkte abhängt.

13.7 Definition: Ein *Gruppoid* ist eine *kleine Kategorie* $\mathcal{C}$, d.h. ob $\mathcal{C}$ ist eine Menge, in der jeder Morphismus ein Isomorphismus ist.

Für uns von Bedeutung ist der *Fundamentalgruppoid* $\pi(X)$ eines Raumes X. Seine Objekte sind die Punkte $a \in X$, seine Morphismen von a nach b sind die Homotopieklassen von Wegen in X von a und b. Nach (8.13) definiert die Addition von Wegen eine assoziative Komposition auf $\pi(X)$ und der inverse Weg repräsentiert den inversen Morphismus in $\pi(X)$.

13.2 Beachte: $\pi(X)(a, a) = \pi_1(X, a)$

Sei jetzt (X, x_0) wohlpunktiert. Die Zuordnung

$$\pi(Y) \to Sets$$

die jedem $y \in Y$ die Menge $[(X, x_0), (Y, y_0)]^*$ und jeder Homotopieklasse $[\sigma]$ von Wegen von y_0 nach y_1 die Abbildung

$$[(X, x_0), (Y, y_0)]^* \to [(X, x_0), (Y, y_1)]^*, \ [f] \mapsto [\sigma] \cdot [f] = \sigma \cdot [f]$$

zuordnet, ist nach (8.13) und (13.3) ein Funktor. Insbesondere gilt

13.9 (1) Für $y_0 \xrightarrow{[\sigma]} y_1 \xrightarrow{[\tau]} y_2$ in $\pi(X)$ gilt

$$[\sigma + \tau] \cdot [f] = [\tau] \cdot ([\sigma] \cdot [f])$$

(2) $[O_{y_0}] \cdot [f] = [f]$

Wir haben also Paarungen

$$\pi(Y)(y_0, y_1) \times [(X, x_0), (Y, y_0)]^* \to [(X, x_0), (Y, y_1)]^*$$

die (13.9) erfüllen. Man sagt dann $\pi(Y)$ *operiert auf den Mengen* $[(X, x_0), (Y, y)]^*$, $y \in Y$. Schränkt man auf das Objekt $y_0 \in Y$ ein, hat man eine Operation der Gruppe $\pi_1(Y, y_0)$ auf $[(X, x_0), (Y, y_0)]^*$ im üblichen Sinne.

13.10 Satz: Sei (X, x_0) wohlpunktiert. Die kanonische Abbildung

$$v : [(X, x_0), (Y, y_0)]^* \to [X, Y]$$

ist injektiv genau dann, wenn $\pi_1(Y, y_0)$ trivial auf $[(X, x_0), (Y, y_0)]^*$ operiert, und surjektiv genau dann, wenn Y wegzusammenhängend ist.

Beweis: Ist Y wegzusammenhängend und $f : X \to Y$ gegeben, dann gibt es einen Weg σ von $f(x_0)$ nach y_0. Transportieren wir f entlang σ, erhalten wir eine Abbildung $g \simeq f$ mit $g(x_0) = y_0$.
Ist umgekehrt v surjektiv und $\underline{y} : X \to Y$ die konstante Abbildung nach $y \in Y$, dann gibt es eine basierte Abbildung $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$, so daß $f \simeq \underline{y}$ unbasiert. Sei F eine solche Homotopie. Dann ist $F|x_0 \times I$ ein Weg von y_0 nach y.

Sei nun $[\sigma] \in \pi_1(Y, y_0)$ und $[f] \in [(X, x_0), (Y, y_0)]^*$, dann gilt nach (13.6) $v([\sigma] \cdot [f]) = v([f])$. Ist v injektiv, folgt $[\sigma] \cdot [f] = [f]$. Also operiert $\pi_1(Y, y_0)$ trivial.
Sei umgekehrt $v([f]) = v([g])$. Dann gibt es nach (13.6) eine Schleife σ, d.h. ein $[\sigma] \in \pi_1(Y, y_0)$, so daß $[g] = [\sigma] \cdot [f]$. Operiert $\pi_1(Y, y_0)$ trivial, folgt $[f] = [g]$. □

Wir wollen uns jetzt auf Homotopiegruppen einschränken. In diesem Fall können wir kanonische Transporte wählen. Sei $i : A \subset X$ und $a \in A$.

Sei $f : (I^n, 1 \times I^{n-1}, J^{n-1}) \to (X, A, a)$ gegeben. Ein Transport von f längs σ ist eine Homotopie von Paaren

$$F_t : (I^n, 1 \times I^{n-1}) \to (X, A)$$

so daß $F_t(u) = \sigma(t)$ für $u \in J^{n-1}$. Analog definieren wir den Transport von $g : (I^n, \partial I^n) \to (X, a)$ längs σ. Da $J^{n-1} \subset \partial I^n \subset I^n$ Kofaserungen sind, existieren solche Transporte immer und (13.2) gilt entsprechend. Es folgt

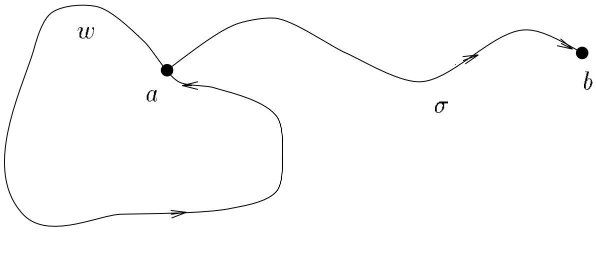
13.11 Satz: Der Fundamentalgruppoid $\pi(A)$ operiert auf den Mengen $\pi_n(A, a)$, den Mengen $\pi_n(X, a)$ und den Mengen $\pi_n(X, A, a)$.

Man macht sich sofort klar, daß die Operation auf $\pi_0(A)$ und $\pi_0(X)$ trivial ist. Für die anderen Homotopiemengen kann man den Transport folgendermaßen beschreiben: Seien $\Omega_a A$ und $\Omega_a X$ die Schleifenräume von A und X zum Basispunkt $a \in A$ und

$$P_a(i) = (X, A, a)^{(I,1,0)}.$$

Ein Weg σ von a nach b in A definiert eine Abbildung von Paaren

$$\overline{\sigma} : (\Omega_a X, \Omega_a A) \to (\Omega_b X, \Omega_b A), \ w \mapsto -\sigma + (w + \sigma)$$



und eine Abbildung
$$\overline{\sigma} : P_a(i) \to P_b(i),\ v \mapsto -\sigma + v.$$
Direkt aus der Adjunktion folgt

13.12 Ist $[f] \in \pi_n(X,a)$ oder $[f] \in \pi_n(A,a)$, so ist $[\sigma]\cdot[f] = \overline{\sigma}_*[f]$.
Ist $[f] \in \pi_n(P_a(i))$, so ist $[\sigma]\cdot[f] = \overline{\sigma}_*[f]$.

Ist $\triangle(i) : \Omega_a X \to P_a(i)$ die Inklusion, dann kommutiert
$$\begin{tikzcd} \Omega_a X \arrow[r, "\triangle(i)"] \arrow[d, "\overline{\sigma}"] & P_a(i) \arrow[d, "\overline{\sigma}"] \\ \Omega_b X \arrow[r, "\triangle(i)"] & P_b(i) \end{tikzcd}$$
bis auf Homotopie. Denn $(\overline{\sigma}\circ\triangle(i))(w) = -\sigma + w$ und $(\triangle(i)\circ\overline{\sigma})(w) = -\sigma + (w+\sigma)$. Da σ ganz in A verläuft, definiert die Homotopie, die σ auf den Anfangspunkt zusammenzieht, eine Homotopie in $P_b(i)$ von $-\sigma + (w+\sigma)$ nach $-\sigma + w$, stetig in w.

Die Konstruktion erweitert zu Abbildungen
$$\begin{array}{ll} \Omega_a A \times \Omega_a X \to \Omega_a X, & (v,w) \mapsto -v + (w+v) \\ \Omega_a A \times P_a(i) \to P_a(i), & (v,w) \mapsto -v + w \end{array}$$
Da das Invertieren von Wegen stetig ist, kommutieren nach (8.12) folgende Diagramme bis auf Homotopie
$$\begin{tikzcd} \Omega_a A \times \Omega_a X \arrow[r] \arrow[d, "\overline{\sigma}\times\overline{\sigma}"] & \Omega_a X \arrow[d, "\overline{\sigma}"] \\ \Omega_b A \times \Omega_b X \arrow[r] & \Omega_b X \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \Omega_a A \times P_a(i) \arrow[r] \arrow[d, "\overline{\sigma}\times\overline{\sigma}"] & P_a(i) \arrow[d, "\overline{\sigma}"] \\ \Omega_b A \times P_b(i) \arrow[r] & P_b(i) \end{tikzcd}$$
Wir fassen zusammen

13.13 Satz:

(1) Der Fundamentalgruppoid $\pi(A)$ operiert auf den Gruppen $\pi_n(A,a)$, $\pi_n(X,a)$, $\pi_n(X,A,a)$, $a \in A$, durch Homomorphismen.

(2) Ist σ ein Weg von a und b in A, dann kommutieren die Diagramme
$$\begin{tikzcd} {} \arrow[r] & \pi_n(A,a) \arrow[r] \arrow[d, "{[\sigma]\cdot}"] & \pi_n(X,a) \arrow[r] \arrow[d, "{[\sigma]\cdot}"] & \pi_n(X,A,a) \arrow[r] \arrow[d, "{[\sigma]\cdot}"] & \cdots \arrow[r] & \pi_0 X \arrow[d, equal] \\ {} \arrow[r] & \pi_n(A,b) \arrow[r] & \pi_n(X,b) \arrow[r] & \pi_n(X,A,b) \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & \pi_0 X \end{tikzcd}$$
und
$$\begin{tikzcd} \pi_1(A,a) \times \pi_n(X,a) \arrow[r] \arrow[d, "{[\sigma]\cdot \times [\sigma]\cdot}"] & \pi_n(X,a) \arrow[d, "{[\sigma]\cdot}"] \\ \pi_1(A,b) \times \pi_n(X,b) \arrow[r] & \pi_n(X,b) \end{tikzcd}$$

$$\begin{array}{ccc}
\pi_1(A,a)\times\pi_n(X,A,a) & \longrightarrow & \pi_n(X,A,a)\\
\Big\downarrow{\scriptstyle [\sigma]\cdot\times[\sigma]\cdot} & & \Big\downarrow{\scriptstyle [\sigma]\cdot}\\
\pi_1(A,b)\times\pi_n(X,A,b) & \longrightarrow & \pi_n(X,A,b)
\end{array}$$

(3) Die Operation von $\pi_1(A,a)$ auf sich ist durch die Konjugation gegeben.

13.14 Folgerung: Ist A wegzusammenhängend, sind alle Gruppen $\pi_n(X,A,a)$, $a\in A, n\geq 2$, zueinander isomorph. Entsprechendes gilt für $\pi_n(A,a)$, $n\geq 1$.

13.15 Definition: Wir nennen X bzw. (X,A) *n-einfach*, falls die Operation von $\pi_1(X,x)$ auf $\pi_n(X,x)$ für alle $x\in X$ bzw. die Operation von $\pi_1(A,a)$ auf $\pi_n(X,A,a)$ für alle $a\in A$ trivial ist.

13.16 Definition: Ein *H-Raum* (*Hopf-Raum*) ist ein basierter Raum (X,e) mit einer basierten stetigen Multiplikation $\mu: X\times X\to X$, so daß e homotopieneutral ist, d.h. die Abbildungen $x\mapsto\mu(e,x)$ und $x\mapsto\mu(x,e)$ sind homotop zu id_X.

13.17 Beispiel: ΩX ist unter der Addition von Wegen ein H-Raum.

13.18 Satz: Sei (X,e) ein H-Raum. Dann ist die Addition von Wegen in ΩX homotopiekommutativ. Insbesondere ist $\pi_1(X,e)$ kommutativ.

Beweis: Sei $\mu: X\times X\to X$ die Multiplikation. Wie in (12.7) zeigt man, daß μ_* und die Addition von Wegen dieselbe Verknüpfung auf $[S^0,\Omega X]^*$ und beide kommutativ sind. □

13.19 Satz: Ein wegzusammenhängender H-Raum (X,e) ist n-einfach für alle n.

Beweis: Da die Addition von Wegen in ΩX kommutativ ist, ist $[\sigma]\cdot\ \simeq id$ für jeden Weg $\sigma\in\Omega X$. Damit operiert $\pi_1(X,e)$ trivial auf $\pi_n(X,e)$. Für andere Basispunkte $x\in X$ folgt nun die Behauptung aus (13.13.2).

14 Serre-Faserungen

Um exakte Sequenzen von Homotopiegruppen zu erhalten, genügt schon eine Serre-Faserung.

14.1 Satz: Sei $p : E \to B$ eine basierte Abbildung, die eine "freie", d.h. nicht-basierte, Serre-Faserung ist. Sei $F = p^{-1}(b_0)$ die Faser über dem Basispunkt und $i : F \hookrightarrow E$ die Inklusion. Dann gibt es eine exakte Sequenz

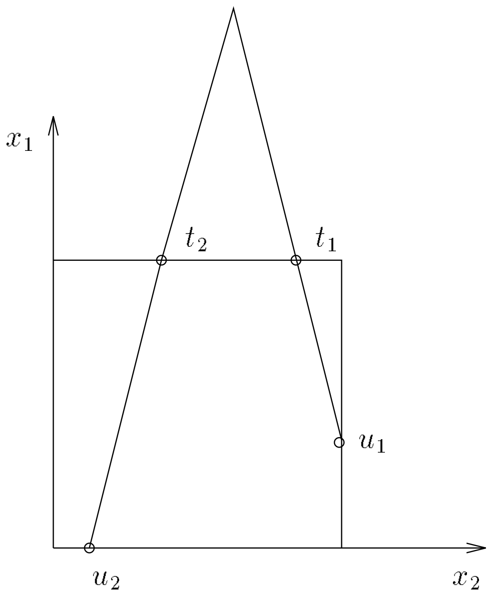
$$\ldots \to \pi_{n+1}B \xrightarrow{\triangle} \pi_n F \xrightarrow{i_*} \pi_n E \xrightarrow{p_*} \pi_n B \xrightarrow{\triangle} \ldots \longrightarrow \pi_0 B.$$

Für den Beweis benötigen wir drei Hilfsresultate.

14.2 Lemma: Es gibt einen Homöomorphismus von Tripeln

$$\varphi : (I \times I^n, 0 \times I^n \cup I \times \partial I^n, 1 \times I^n) \cong (I \times I^n, 1 \times I^n, 0 \times I^n \cup I \times \partial I^n)$$

Beweis: Wir betrachten die Projektion vom Punkt $(2, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2})$ aus.



φ ist dadurch definiert, daß man die Strecken $[t_i, u_i]$ an ihren Mittelpunkten spiegelt. Für Formelfanatiker geben wir die Abbildung für den Fall $n = 1$ an. Im allgemeinen Fall werden für jede Koordinate drei Fälle betrachtet.

$$\varphi(x_1, x_2) = \begin{cases} \left(\dfrac{1 - 3x_2 - x_1x_2}{1 + x_2}, \dfrac{(1 - x_1)(1 + x_2)}{4 + x_1}\right) & 0 \le x_2 \le \dfrac{1}{4}x_1 \\ \left(1 - x_1, \dfrac{1 - 2x_1 + 2x_2 + 2x_1x_2}{4 - 2x_1}\right) & \dfrac{1}{4}x_1 \le x_2 \le 1 - \dfrac{1}{4}x_1 \\ \left(\dfrac{x_1 - x_1x_2 + 5x_2 - 4}{x_2}, \dfrac{4x_2^2 - 13x_2 + 2x_1x_2 - 3x_1 + 12}{8 - 4x_2 - 2x_1}\right) & 1 - \dfrac{1}{4}x_1 \le x_2 \le 1 \end{cases}$$

14.3 Lemma: Sei $K \subset I^n$ Vereinigung abgeschlossener Seiten der Dimension kleiner als n. Sei $p : E \to B$ eine Serre-Faserung. Gegeben sei ein kommutatives

Quadrat

$$\begin{tikzcd}
0 \times I^n \cup I \times K \arrow[rr, "f"] \arrow[d, phantom, "\bigcap"] & & E \arrow[d, "p"] \\
I \times I^n \arrow[rr, "H"] \arrow[urr, dashed, "F"] & & B
\end{tikzcd}$$

Dann gibt es eine Erweiterung $F : I \times I^n \to E$ von f, so daß $p \circ F = H$.

Beweis: Sei $S^{(r)}$ die Vereinigung von K und allen Seiten von I^n der Dimension $\leq r$. Wir konstruieren $F|I \times S^{(r)}$ induktiv. Für $r = -1$ ist F durch f gegeben. Sei $F|I \times S^{(r-1)}$ bereits konstruiert und I^r eine r-dimensionale Seite von I^n, die nicht in K (also nicht in $S^{(r-1)}$) liegt. Dann ist F bereits auf $0 \times I^r \cup I \times \partial I^r$ vorgegeben. Betrachte nun

$$\begin{tikzcd}
1 \times I^r \arrow[r, "\varphi", "\cong"'] \arrow[d, phantom, "\bigcap"] & 0 \times I^r \cup I \times \partial I^r \arrow[r, "F"] \arrow[d, phantom, "\bigcap"] & E \arrow[d, "p"] \\
I \times I^r \arrow[r, "\varphi", "\cong"'] & I \times I^r \arrow[r, "H"] & B
\end{tikzcd}$$

Da p Serre-Faserung ist, gibt es eine Abbildung $g : I \times I^r \to E$, so daß $g|1 \times I^r = F \circ \varphi$ und $p \circ g = H \circ \varphi$. Wir definieren F auf $I \times I^r$ durch

$$F|I \times I^r = g \circ \varphi^{-1}.$$

$\square$

Wir betrachten nun

$$\begin{tikzcd}
F \arrow[r, "\rho(p)"] \arrow[dr, "i"'] & P(p) \arrow[r, "\overline{p}"] \arrow[d, "p(p)"] \arrow[dr, phantom, "pullback"] & PB \arrow[d, "p_B"] \\
& E \arrow[r, "p"] & B
\end{tikzcd}$$

Da i eine Inklusion ist, ist auch $\rho(p)$ eine Inklusion. Fassen wir F als Teilraum von $P(p)$ auf, so gilt $F = \{(e, w) \in P(p); \overline{p}(e, w) = 0\}$.

14.4 Lemma: $\rho(p)_* : \pi_n(F, e_0) \to \pi_n(P(p); 0)$ ist ein Isomorphismus und $\triangle = \rho(p)_*^{-1} \circ \triangle(p)$

Beweis: Da PB zusammenziehbar ist, gibt es eine basierte Homotopie $H : id_{PB} \simeq 0$.
Surjektivität: Sei $[f] \in \pi_n(P(p))$ repräsentiert durch $f : (I^n, \partial I^n) \to (P(p), 0)$. Da $\overline{p}$ als Pullback von p eine Serre-Faserung ist, gibt es im kommutativen Quadrat

$$\begin{tikzcd}
0 \times I^n \cup I \times \partial I^n \arrow[rr, "f \cup 0"] \arrow[d, phantom, "\bigcap"] & & P(p) \arrow[d, "\overline{p}"] \\
I \times I^n \arrow[r, "id \times \overline{p} \circ f"] & I \times PB \arrow[r, "H"] & PB
\end{tikzcd}$$

nach (14.3) eine Erweiterung $G : I \times I^n \to P(p)$ von $f \cup 0$, so daß $\overline{p} \circ G = H \circ (id \times \overline{p} \circ f)$. Da $G|I \times \partial I^n = 0$, definiert G eine Homotopie von Paaren, $G : (I \times I^n, I \times \partial I^n) \to (P(p), 0)$. Sei $g = G|1 \times I^n \to P(p)$. Dann ist $\overline{p} \circ g = 0$, d.h. g bildet nach $F \subset P(p)$ ab. Da $f \simeq g$ als Abbildung nach $P(p)$, ist g der gesuchte Lift.

Injektivität: Seien $f_0, f_1 : (I^n, \partial I^n) \to (F, e_0)$ Abbildungen, so daß $\rho(p) \circ f_0 \simeq \rho(p) \circ f_1$, d.h. es gibt eine Homotopie von Paaren

$$G : (I \times I^n, I \times \partial I^n) \to (P_p, 0)$$

von f_0 nach f_1 (die wir jetzt als Abbildungen nach $P(p)$ auffassen). Wir müssen jetzt wie im Fall der Surjektivität die Homotopie G nach F liften. Das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
0 \times I \times I^n \cup I \times 0 \times I^n \cup I \times I \times \partial I^n \arrow[rr, "G \cup 0_{f_0} \cup 0_{f_1} \cup 0"] \arrow[d, equal] & & P_p \arrow[dd, "\overline{p}"] \\
0 \times I^{n+1} \cup I \times \partial I^{n+1} \arrow[d, phantom, "\bigcap"] & & \\
I \times I^{n+1} \arrow[r, "id \times \overline{p} \circ G"] \arrow[uurr, dashed] & I \times PB \arrow[r, "H"] & PB
\end{tikzcd}$$

ist kommutativ, weil $\overline{p}(0_{f_0} \cup 0_{f_1}) = 0$. Nach (14.2) gibt es eine Erweiterung $\overline{G} : I \times I^{n+1} \to P(p)$, wie gestrichelt, so daß $\overline{p} \circ \overline{G} = H \circ (id \times \overline{p} \circ G)$. Sei $K = \overline{G}|1 \times I^{n+1}$. Dann ist $\overline{p} \circ K = 0$, so daß K eine Homotopie in F von f_0 nach f_1 ist. Da $K|I \times \partial I^n = 0$, ist K eine Homotopie von Paaren $(I \times I^n, I \times \partial I^n) \to (F, e_0)$. $\square$

Satz 14.1 folgt nun aus (11.5) und (14.4).

Wenden wir uns nun der Konstruktion von Serre-Faserungen zu.

14.5 Definition: Der *n-dimensionale, projektive Raum* $\mathbb{K}P^n$ über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ oder den Quaternionen $\mathbb{H}$ ist die Menge aller 1-dimensionalen $\mathbb{K}$-Untervektorräume von $\mathbb{K}^{n+1}$, d.h.

$$\mathbb{K}P^n = (\mathbb{K}^{n-1} \backslash \{0\}) / \sim,$$

$x \sim \lambda \cdot x$ für $\lambda \in \mathbb{K}^* = \mathbb{K} \backslash \{0\}$, mit Quotientenraumtopologie.

14.6 Sei $d = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{K}$, d.h. $d = 1, 2$ bzw. 4 für $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$. Sei $[x]$ die Äquivalenzklasse von $x \in \mathbb{K}^{n-1} \backslash \{0\}$ in $\mathbb{K}P^n$. Dann definiert

$$p : S^{(n+1)d-1} \to \mathbb{K}P^n, \ x \mapsto [x]$$

einen Homöomorphismus von $S^{(n+1)d-1} / \approx$ mit $x \approx \lambda \cdot x$ für $\lambda \in S^{d-1} \subset \mathbb{K} \cong \mathbb{R}^d$ nach $\mathbb{K}P^n$. Insbesondere ist $\mathbb{K}P^n$ kompakt.

14.7 Satz: Die Abbildung $p : S^{(n+1)d-1} \to \mathbb{K}P^n$ ist eine Serre-Faserung mit Faser S^{d-1} über $[(1, 0, \ldots, 0)]$.

14.8 Bemerkung: Mit etwas mehr Aufwand kann man sogar zeigen, daß p eine Hurewicz-Faserung ist.

Beweis 14.7: Sei $U_i = \{[x_0, x_1, \ldots, x_n] \in \mathbb{K}P^n; x_i \neq 0\}$. Dann gilt

(1) $\{U_0, U_1, \ldots, U_n\}$ ist eine offene Überdeckung von $K\mathbb{P}^n$.

(2) Es gibt einen Homöomorphismus $h_i : p^{-1}(U_i) \to U_i \times S^{d-1}$, so daß

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(U_i) \arrow[rr, "h_i"] \arrow[dr, "p"'] & & U_i \times S^{d-1} \arrow[dl, "pr"] \\ & U_i & \end{tikzcd}$$

kommutiert. Insbesondere ist $p : p^{-1}(U_i) \to U_i$ eine Faserung.

Teil (1) ist klar. Wir definieren h_i durch

$$h_i(x_0, \ldots, x_n) = \left(p(x_0, \ldots, x_n), \frac{x_i}{\| x_i \|^{-1}} \right).$$

Die Umkehrfunktion von h_i ist

$$g_i : U_i \times S^{d-1} \to p^{-1}(U_i), \quad (p(x), t) \mapsto \| x_i \| \cdot t \cdot x_i^{-1} \cdot x.$$

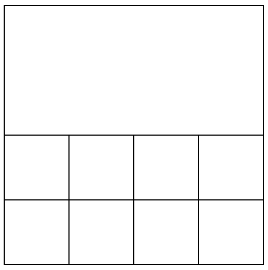
Man beachte dabei, daß $p(x) = p(y)$ nach (14.6) genau dann, wenn es ein $\lambda \in S^{d-1}$ gibt, so daß $\lambda \cdot x = y$.
Satz 14.7 folgt nun aus

14.9 Satz: Sei $p : E \to B$ eine Abbildung und $\mathcal{U} = \{U_j; j \in J\}$ eine offene Überdeckung von B, so daß $p : p^{-1}(U_j) \to U_j$ für alle $j \in J$ eine Serre-Faserung ist. Dann ist p eine Serre-Faserung.

Beweis: Gegeben sei ein kommutatives Quadrat

$$\begin{tikzcd} 0 \times I^n \arrow[r, "f"] \arrow[d, phantom, "\bigcap"] & E \arrow[d, "p"] \\ I \times I^n \arrow[r, "H"] \arrow[ur, dashed, "F"] & B \end{tikzcd}$$

Wir müssen das gestrichelte F konstruieren. Sei λ eine Lebesgue-Zahl zur offenen Überdeckung $\{H^{-1}(U_j) : j \in J\}$ von $I \times I^n$ (siehe (5.16)). Wir zerlegen I in k Intervalle der Länge $\frac{1}{k}$, so daß $\frac{1}{k} \cdot \sqrt{n+1} < \lambda$ und erhalten eine Zerlegung von $I \times I^n$ in k^{n+1} Würfel vom Durchmesser kleiner λ. Wir konstruieren F durch Induktion über die kleinen Würfel, beginnend mit der



Bodenschicht, Schicht für Schicht aufwärts. Im Induktionsschritt ist F auf dem Boden und einigen Seiten des kleinen Würfels konstruiert. Der kleine Würfel liegt ganz in einer Überdeckungsmenge $H^{-1}(U_j)$, so daß wir folgende Situation vorfinden (wir bezeichnen den kleinen Würfel wieder mit $I \times I^n$. Sei $I \times K$ die Vereinigung der Seiten, auf denen F bereits konstruiert ist)

$$\begin{tikzcd} 0 \times I^n \cup I \times K \arrow[r, "F"] \arrow[d, phantom, "\bigcap"] & p^{-1}(U_j) \arrow[d, "p"] \\ I \times I^n \arrow[r, "H"] & U_j \end{tikzcd}$$

Die gesuchte Erweiterung von F existiert nach (14.3), weil $p : p^{-1}(U_j) \to U_j$ Serre-Faserung ist. $\square$

14.10 Bezeichnung: Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ oder $\mathbb{H}$. Die Faserungen

$$S^{(n+1)d-1} \to \mathbb{K}P^n,$$

mit Faser $S^{d-1}, d = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{K}$, heißen *Hopf-Faserungen.*

14.11 Sei $i : S^{d-1} \hookrightarrow S^{(n+1)d-1}$ die Inklusion der Faser. Dann ist $i \simeq 0$

denn offensichtlich ist i nicht surjektiv, so daß die Aussage aus folgender einfachen Aufgabe folgt.

14.12 Aufgabe: Ist $f : X \to S^n$ eine basierte, nicht surjektive Abbildung, dann ist $f \simeq 0$.

14.13 Satz: Ist $F \overset{i}{\hookrightarrow} E \overset{p}{\to} B$ eine Serre-Faserung und $i \simeq 0$, dann gilt:

$$\pi_n(B) \cong \pi_n(E) \oplus \pi_{n-1}(F) \quad n \geq 2$$

Beweis: Wir konstruieren einen spaltenden Homomorphismus

$$\begin{tikzcd} \ldots \arrow[r] & \pi_n E \arrow[r, "p_*"] & \pi_n B \arrow[r, shift left, "\triangle"] & \pi_{n-1} F \arrow[l, shift left, "\alpha"] \arrow[r, "i_*"] & \pi_{n-1} E \arrow[r, "p_*"] & \ldots \end{tikzcd}$$

so daß $\triangle \circ \alpha = id$. Dann ist $\triangle$ surjektiv, also i_* die Nullabbildung, und p_* injektiv, so daß Kern $\triangle \cong \pi_n E$. Die Aussage folgt dann aus (10.3). Wir benutzen die exakte Sequenz

$$[F, \Omega B]^* \xrightarrow{\triangle(p)_*} [F, P(p)]^* \xrightarrow{p(p)_*} [F, E]^* \xrightarrow{p_*} [F, B]^*.$$

Mit den Bezeichnungen aus (14.4) gilt

$$p(p)_*[\rho(p)] = [p(p) \circ \rho(p)] = [i] = [0].$$

Also gibt es ein $[j] \in [F, \Omega B]^*$ mit $\triangle(p)_*[j] = [\triangle(p) \circ j] = [\rho(p)]$, d.h. $\triangle(p) \circ j \simeq \rho(p)$. Wir identifizieren wieder $\pi_n(B)$ mit $\pi_{n-1}(\Omega B)$ vermöge der Adjunktion. Dann ist $\alpha = j_*$ die gesuchte Abbildung, denn

$$\triangle \circ \alpha = \rho(p)_*^{-1} \circ \triangle(p)_* \circ j_* = \rho(p)_*^{-1} \circ \rho(p)_* = id$$

□

14.14 Folgerungen:

(1) Für die Hopf-Faserungen $p : S^{(n+1)d-1} \to \mathbb{K}P^n$ gilt

$$\pi_k(\mathbb{K}P^n) \cong \pi_k(S^{(n+1)d-1}) \oplus \pi_{k-1}(S^{d-1}) \quad k \geq 2$$

(2) $\pi_k(S^2) \cong \pi_k(S^3) \oplus \pi_{k-1}(S^1) \quad k \geq 2$

(3) $\pi_k(S^4) \cong \pi_k(S^7) \oplus \pi_{k-1}(S^3) \quad k \geq 2$

Die Teile (2) und (3) folgen aus dem Teil (1) mit

14.15 Satz: $\mathbb{R}P^1 \cong S^1$, $\mathbb{C}P \cong S^6, \mathbb{H}P^1 \cong S^4$

Beweis: Sei $[z_0, z_1] \in \mathbb{K}P^1 = S^{2d-1}/\approx$. Ist $z_1 = 0$, so ist $z_0 \in S^{d-1}$, also $(z_0, 0) \approx (1, 0)$, d.h. $\{[z_0, 0] \in \mathbb{K}P^1\}$ besteht nur aus einem Punkt e^0. Für $z_1 \neq 0$ definiert

$$\mathbb{K}P^1 \backslash \{e^0\} \longrightarrow \mathbb{K}, \quad [z_0, z_1] \longrightarrow \frac{z_0}{z_1}$$

einen Homöomorphismus mit Umkehrabbildung.

$$z \longmapsto \left[\frac{z}{\sqrt{1+ \parallel z \parallel^2}}, \frac{1}{\sqrt{1+ \parallel z \parallel^2}}\right].$$

Also ist $\mathbb{K}P^1$ die Einpunktkompaktifizierung von $\mathbb{K}$ und damit homöomorph zu S^d. □

15 Überlagerungen

15.1 Definition: Eine *Überlagerung* ist eine surjektive Serre-Faserung $p : E \to B$, die ein lokaler Homöomorphismus ist. D.h. zu jedem $x \in E$ gibt es eine Umgebung U so daß $p : U \to p(U)$ ein Homöomorphismus ist.

15.2 Beispiele: (1) Die Hopf-Faserung $S^n \to \mathbb{R}P^n$ ist eine Überlagerung mit Faser S^0.

(2) $p : \mathbb{R} \to S^1$, $t \mapsto e^{2\pi i t}$ ist eine Überlagerung mit Faser $\mathbb{Z}$.

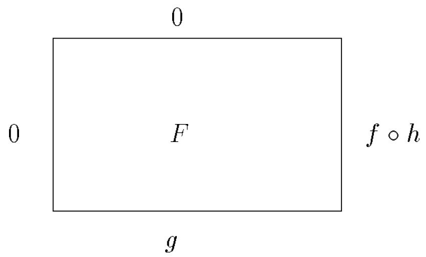
Wir interessieren uns im zweiten Beispiel für die Randabbildung

$$\triangle : \pi_1(S^1) \to \pi_0(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}.$$

Für eine Serre-Faserung $f : E \to B$ mit Faser F betrachten wir

$$\begin{tikzcd} \pi_1(B) \arrow[rr, "\triangle(f)"] \arrow[dr, "\triangle"'] & & \pi_0(P(f)) \\ & \pi_0(F) \arrow[ur, "\rho(f)"'] & \end{tikzcd}$$

$\triangle(f)([g])$ ist repräsentiert durch den Punkt $(e_0, g) \in P(f)$, d.h. $\triangle(f)([g])$ ist die Wegeklasse von (e_0, g). Da $\rho(f)(x) = (x, 0)$ ist, repräsentiert x die Wegeklasse $\triangle([g])$ genau dann, wenn es in $P(f)$ einen Weg von (e_0, g) nach $(x, 0)$ gibt. Ein solcher Weg ist ein Paar (h, F), wobei $h : I \to I$ ein Weg von e_0 nach x und $F : I^2 \to B$ eine Homotopie von Wegen ist, so daß



15.3 Satz: $\triangle : \pi_1(S^1) \to \pi_0(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ ist ein Isomorphismus von Gruppen.

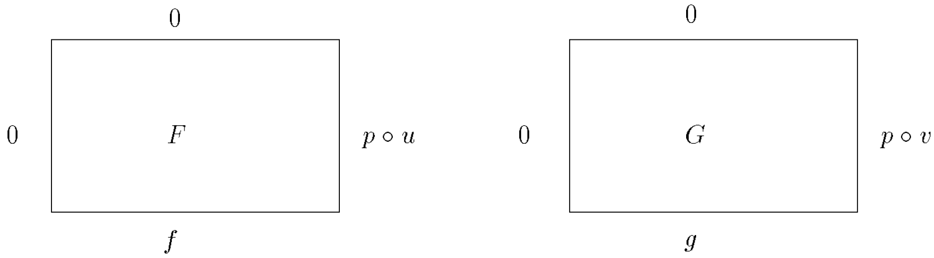
15.4 Folgerung: $\pi_n(S^1) = \begin{cases} \mathbb{Z} & n = 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

Beweis: Da $\mathbb{R}$ zusammenziehbar ist, folgt aus der exakten Homotopie-Sequenz der Serre-Faserung $p : \mathbb{R} \to S^1$, daß

$$\pi_n(S^1) \cong \pi_{n-1}(\mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & n = 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wegen (15.3) ist dies ein Isomorphismus von Gruppen. □

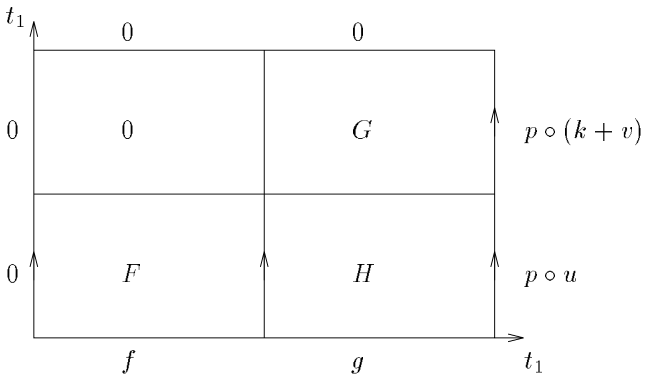
Beweis 15.3: Nach dem eben gezeigten genügt es nachzuweisen,daß $\triangle$ ein Homomorphismus ist. Seien $[f],[g] \in \pi_1(S^1)$ und $\triangle([f]) = k$, $\triangle([g]) = l$. Nach unseren Überlegungen gibt es Wege $u, v : I \to \mathbb{R}$ von 0 nach k bzw. 0 nach l und Homotopien von Wegen in S^1



Dann definiert

$$0 \xrightarrow{u} k \xrightarrow{k+v} k+l$$

einen Weg in $\mathbb{R}$ von 0 nach $k+l$, und



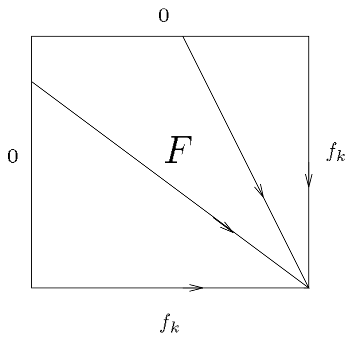
mit $H(t_1, t_2) = (p \circ u(t_2)) \cdot g(t_1)$ eine Homotopie von Wegen (H ist hier auf I^2 definiert. Damit hat das angegebene Quadrat die Kantenlänge 2 und muß wie üblich auf Kantenlänge 1 reparametrisiert werden). Es folgt: $\triangle([f+g])$ wird durch $k+l$ repräsentiert. □

15.5 Ergänzung: Sei $f_k : (I, \partial I) \to (S^1, 1)$ durch $f_k(t) = e^{2\pi ikt}$ definiert. Dann ist $\triangle([f_k]) = -k$. Insbesondere ist $[f_1]$ ein Erzeuger von $\pi_1(S^1)$ und $[f_k] = k \cdot [f_1]$.

Beweis: Für $h : I \to \mathbb{R}$, $h(t) = -k \cdot t$ ist $p \circ h = -f_k$, denn

$$p \circ h(t) = e^{-2\pi ikt} = e^{2\pi ik(1-t)} = f_k(1-t) = -f_k(t)$$

Damit ist (h, F) der gesuchte Weg von $(0, f_k)$ nach $(-k, 0)$.



16 Der Homotopieausschneidungssatz und Anwendungen

Hauptresultat dieses Abschnitts und Ausgangspunkt für alles Weitere ist der

16.1 Homotopieausschneidungssatz: Sei Y die Vereinigung zweier offener Mengen Y_1 und Y_2, und sei $Y_0 = Y_1 \cap Y_2$. Für jede Wahl des Basispunktes $y_0 \in Y_0$ sei

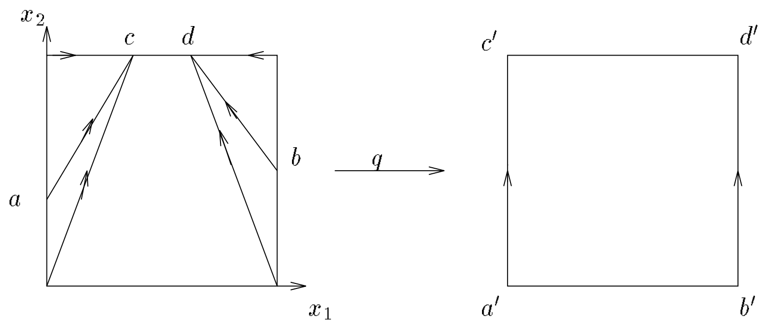
$$\begin{aligned} \pi_n(Y_1, Y_0) &= 0 \quad \text{für } 0 < n < p,\ p \geq 1 \\ \pi_n(Y_2, Y_0) &= 0 \quad \text{für } 0 < n < q,\ q \geq 1 \end{aligned}$$

Dann ist die durch die Inklusion $j : (Y_2, Y_0) \hookrightarrow (Y, Y_1)$ induzierte Abbildung $j_* : \pi_n(Y_2, Y_0) \to \pi_n(Y, Y_1)$ ein Isomorphismus für $1 \leq n \leq p + q - 3$ und ein Epimorphismus für $1 \leq n \leq p + q - 2$.

Der Name "Ausschneidungssatz" rührt daher, daß (Y_2, Y_0) aus (Y, Y_1) dadurch entsteht, daß man $Y_1 \backslash Y_2$ "herausschneidet". Der hier angegebene Beweis geht auf D. Puppe zurück. Wir benötigen zunächst ein Hilfresultat.

16.2 Ist $f : (I^n, \partial I^n) \to (X, A)$ als Abbildung von Paaren homotop zur konstanten Abbildung nach $a_0 \in A$, dann gibt es eine Abbildung $g : (I^n, \partial I^n) \to (X, A)$ und eine Homotopie $f \simeq g\ rel\ \partial I^n$, so daß $g(I^n) \subset A$.

Beweis: Sei $q : I^{n-1} \to I^n$ definiert durch



Dabei werden die Seiten a und b auf die Punkte a' und b' und die eingezeichneten Pfeile auf die Pfeile abgebildet, während die parallelen Strecken zur x-Achse zwischen den inneren Pfeilen auf die Länge 1 gedehnt werden. Für $n = 1$ ist die Abbildung definiert durch

$$q(x_1, x_2) = \begin{cases} (0, 4x_1) & 0 \leq x_1 \leq \dfrac{x_2}{4} \\ \left(\dfrac{2}{2 - x_2}(x_1 - \dfrac{x_2}{4}), x_2\right) & \dfrac{x_2}{4} \leq x_1 \leq 1 - \dfrac{x_2}{4} \\ (1, 4 - 4x_1) & 1 - \dfrac{x_2}{4} \leq x_1 \leq 1 \end{cases}$$

Diese Formel läßt sich auf den allgemeinen Fall übertragen wie in (14.2). Ist nun

$F : (I \times I^n, I \times \partial I^n) \to (X, A)$ die Nullhomotopie von f, dann ist $F \circ q$ die gesuchte Homotopie mit $g = (F \circ q)_1$. □

Für den Beweis von (16.1) betrachten wir *kleine Würfel*

$$W = W(a, \delta, L) = \{x \in \mathbb{R}^n;\ a_i \leq x_i \leq a_i + \delta \text{ für } i \in L,\ x_i = a_i \text{ für } i \notin L\}$$

mit $a \in \mathbb{R}^n$, $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$ und $L \subset \{1, 2, \ldots, n\}$. Dann ist $\dim W = |L| :=$ Anzahl der Elemente in L. Wir bezeichnen mit ∂W die Vereinigung der echten Seiten von W und nennen

$$K_p(W) = \{x \in W; x_i < a_i + \frac{\delta}{2} \text{ für mindestens } p \text{ Werte } i \in L\}$$

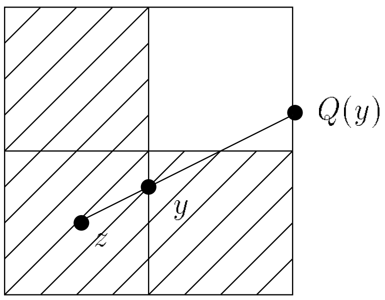
die Teilmenge von W mit p *kleinen Koordinaten* und

$$G_q(W) = \{x \in W; x_i > a_i + \frac{\delta}{2} \text{ für mindestens } q \text{ Werte } i \in L\}$$

die Teilmenge von W mit q *großen Koordinaten*.

16.3 Sei $A \subset Y$ und $f : W = W(a, \delta, L) \to Y$ eine Abbildung. Sei $p \leq |L|$ und $f^{-1}(A) \cap W' \subset K_p(W')$ für alle Würfel W' in ∂W. Dann gibt es eine Abbildung $g : W \to Y$ und eine Homotopie $g \simeq f$ *rel* ∂W, so daß $g^{-1}(A) \subset K_p(W)$. Ein entsprechendes Resultat gilt für $G_q(W)$.

Beweis: Es genügt, den Fall $W = I^n = W(0, 1, \{1, \ldots, n\})$ zu betrachten. Im Bild



ist $n = 2$, $K_2(W)$ das linke untere Teilquadrat und $K_1(W)$ der gesamte gestreifte Teil. Allgemein sei $z = (\frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{4}) \in K_n(W)$. Nach Voraussetzung hat $x \in \partial W$ mit $f(x) \in A$ mindestens p kleine Koordinaten. Sei $h : I^n \to I^n$ die stetige Abbildung, die die Strecken $[y, Q(y)]$ nach $Q(y)$ abbildet und die Strecken $[z, y]$ linear auf $[z, Q(y)]$ streckt.

Die lineare Deformation dieses Streckfaktors nach 1 definiert eine Homotopie

$$h \simeq id \qquad rel\ \partial I^n = \partial W$$

und $g = f \circ h$ ist die gesuchte Abbildung: Sei $g(x) \in A$. Ist $x_i \geq \frac{1}{2}$ für ein i, so ist $h(x) \in W' \subset \partial W$, weil $x \notin K_n(W)$. Da $f(h(x)) = g(x) \in A$, ist $h(x) \in f^{-1}(A) \cap W'$ und hat damit p kleine Koordinaten. Nach Konstruktion von h folgt aber: Ist die i-te Koordinate von $h(x)$ klein, so ist auch x_i klein. Also ist $x \in K_p(w)$. □

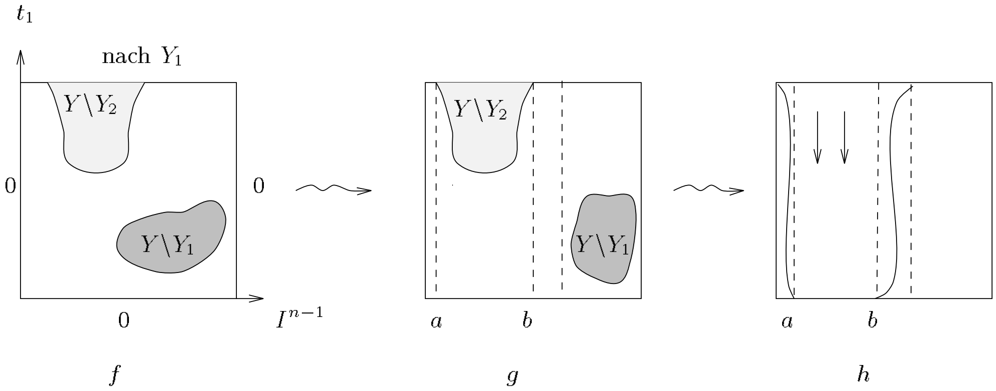
Beweis von 16.1 (Surjektivität): Gegeben sei eine Abbildung

$$f : (I^n, 1 \times I^{n-1}, J^{n-1}) \to (Y, Y_1, y_0)$$

$n \leq p+q-2$. Wir müssen f als Abbildung von Tripeln homotop in eine Abbildung h deformieren, die $Y \backslash Y_2$ nicht trifft. Dann gilt natürlich

$$h : (I^n, 1 \times I^{n-1}, J^{n-1}) \to (Y_2, Y_0, y_0)$$

Beweisidee: Sei $pr : I^n \to I^{n-1}$, $(t_1, \ldots, t_n) \mapsto (t_2, \ldots t_n)$ die Projektion. Zunächst deformieren wir f in eine Abbildung g, so daß $pr(g^{-1}(Y \backslash Y_2)) \cap pr(g^{-1}(Y \backslash Y_1)) = \emptyset$. Danach “drücken” wir den Würfel in t_1-Richtung wie skizziert ein, d.h.



h ist die Komposition der Projektion des Würfels unter die angegebene Kurve, gefolgt von g. Man erkennt sofort, daß h die Menge Y/Y_2 nicht mehr trifft.

Konstruktion von h aus g: Wir wollen annehmen, daß

$$g : (I^n, 1 \times I^{n-1}, J^{n-1}) \to (Y, Y_1, y_0)$$

bereits gefunden sei, so daß $pr(g^{-1}(Y \backslash Y_2)) \cap pr(g^{-1}(Y \backslash Y_1)) = \emptyset$. Nach dem Satz von Urysohn gibt es eine stetige Abbildung

$$\tau : I^{n-1} \to [0, 1]$$

mit $\tau(pr(g^{-1}(Y \backslash Y_1))) = \{0\}$ und $\tau(pr(g^{-1}(Y \backslash Y_2))) = \{1\}$. Definiere

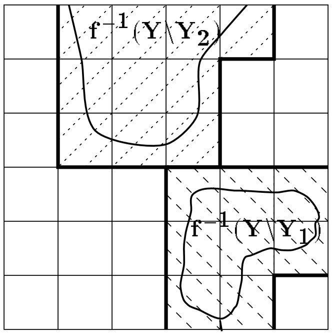
$$G : I \times I^n \to Y,\ (t, t_1, \ldots, t_n) \mapsto g(t_1(1 - t \cdot \tau(t_2, \ldots, t_n)), t_2, \ldots, t_n)$$

G ist eine Homotopie von Tripeln: Offensichtlich ist $G(I \times J^{n-1}) = \{y_0\}$. Angenommen $G(t, 1, t_2, \ldots, t_n) = g(1 - t \cdot \tau, t_2, \ldots, t_n) \notin Y_1$, dann ist $\tau = 0$, also $G(t, 1, t_2, \ldots, t_n) = g(1, t_2, \ldots, t_n) \in Y_1$, ein Widerspruch.

Wir setzen nun $h = G_1$. Angenommen $h(t_1, \ldots, t_n) = g(t_1, (1 - \tau), t_2, \ldots, t_n) \notin Y_2$, so ist $\tau = 1$ und $h(t_1, \ldots, t_n) = g(0, t_2, \ldots, t_n) = y_0 \in Y_2$, eine Widerspruch. $\square$

Konstruktion von g: $\{f^{-1}(Y_1), f^{-1}(Y_2)\}$ ist eine offene Überdeckung von I^n. Nach Lebesgue's Lemma können wir I^n in ein Gitter kleiner Würfel unterteilen, so daß jeder Würfel ganz in $f^{-1}(Y_1)$ oder $f^{-1}(Y_2)$ liegt. Also trifft kein kleiner

Würfel sowohl $f^{-1}(Y\backslash Y_1)$ als auch $f^{-1}(Y\backslash Y_2)$.



(A) Wir ändern f auf allen Würfeln W, die $f^{-1}(Y\backslash Y_2)$ treffen, und nur auf diesen (!) homotop zu einer Abbildung g_0 so ab, daß

$$W \cap g_0^{-1}(Y\backslash Y_2) \subset K_q(W)$$

mit p aus der Voraussetzung.

(B) Wir ändern h auf allen Würfeln W, die $g_0^{-1}(Y\backslash Y_1) = f^{-1}(Y\backslash Y_1)$ treffen, und nur auf diesen (!) homotop zu einer Abbildung g ab, so daß

$$W \cap g^{-1}(Y\backslash Y_1) \subset G_q(W)$$

mit q aus der Voraussetzung.

Beide Homotopien sind Homotopien von Tripeln.

Dann hat $x \in pr(g^{-1}(Y\backslash Y_2)) \cap pr(g^{-1}(Y\backslash Y_1))$ mindestens $p-1$ kleine und $q-1$ große Koordinaten, insgesamt also mindestens $p+q-2$ Koordinaten. x hat aber $n-1 \leq p+q-3$ Koordinaten, kann also nicht existieren.

Teil (A): Seien $W_1, \ldots, W_r$ alle kleinen Würfel und ihre niederdimensionalen Randwürfel, für die $W_i \cap f^{-1}(Y\backslash Y_2) \neq \emptyset$, nach Dimension geordnet. Beginnend mit $f_0 = f$ konstruieren wir induktiv Abbildungen

$$f_k : (I^n, 1 \times I^{n-1}, J^{n-1}) \to (Y, Y_1, y_0)$$

so daß,

(1) $f_k \simeq f \; rel \; U_2 := \bigcup\{W; f(W) \subset Y_2\}$, d.h. f ändert sich nur auf Würfeln, die $Y\backslash Y_2$ treffen.

(2) $f(W) \subset Y_1 \Rightarrow f_k(W) \subset Y_1$ für alle W.

(3) $f_k^{-1}(Y\backslash Y_2) \cap W_j \subset K_p(W_j)$ für $1 \leq j \leq k$

Induktionsschritt von $k-1$ nach k: Wir müssen Bedingung (3) für W_k erreichen. Nach Induktion gilt $f_{k-1}^{-1}(Y\backslash Y_2) \cap W \subset K_p(W)$ für $W \subset \partial W_k$.

Da $W_k \cap f^{-1}(Y \backslash Y_2) \neq \emptyset$, gilt $f(W_k) \subset Y_1$. Wegen (2) gilt auch $f_{k-1}(W_k) \subset Y_1$.

Behauptung: Es gibt eine Homotopie $\Psi : f_{k-1}|W_k \simeq \varphi : W_k \to Y_1 \ rel\ \partial W_k$, so daß $\varphi^{-1}(Y_1 \backslash Y_0) \subset K_p(W_k)$.

Beweis: Fall $\dim W_k \geq p$: Die Behauptung folgt aus (16.3).

Fall $\dim W_k = 0$: Da $p \geq 1$, ist $K_p(W_k) = \emptyset$. Der Punkt W_k muß also unter φ in einen Punkt aus Y_0 abgebildet werden. Gesucht wird daher ein Weg Ψ von $f_{k-1}(W_k)$ nach einem Punkt aus Y_0. Das Bild der Strecke von W_k in einem Punkt aus J^{n-1} ist ein solcher Weg von $f_{k-1}(W_k)$ nach y_0. Ein geeignetes Anfangsstück verbindet $f_{k-1}(W_k)$ innerhalb von Y_1 (!) mit einem Punkt aus Y_0.

Fall $0 < \dim W_k < p$: Für $W \subset \partial W_k$ gilt nach Induktion $f_{k-1}^{-1}(Y \backslash Y_2) \cap W \subset K_p(W) = \emptyset$. Da $f(W) \subset Y_1$, gilt $f_{k-1}(W) \subset Y_1$ nach (2). Also

$$f_{k-1} : (W_k, \partial W_k) \to (Y_1, Y_0).$$

Da $\dim W_k < p$, ist f_{k-1} homotop zur konstanten Abbildung nach y_0. Also gibt es die gesuchte Homotopie nach (16.2).

Wir erweitern die Homotopie Ψ auf $U_2 \cup W_1 \cup \ldots \cup W_{k-1}$, indem wir dort die konstante Homotopie wählen. Weiter dehnen wir Ψ induktiv auf $W_{k+1}, \ldots, W_r$ wie folgt aus: $\partial W_j \subset W_j$ ist Kofaserung. Also erweitert

$$\begin{tikzcd} \partial W_j \arrow[dr, "\Psi_t"'] & \subset & W_j \arrow[dl, "f_{k-1}"] \\ & Y_1 & \end{tikzcd}$$

$\Psi|\partial W_j \times I$ auf $W_j \times I$. Setze $f_k = \Psi_1$. Nach Konstruktion ist Ψ eine Homotopie von Tripeln $(I^n, 1 \times I^n, J^{n-1}) \to (Y, Y_1, y_0)\ rel\ U_2$, und f_k erfüllt die Bedingungen (1), (2), (3). (Beachte, daß alle nicht-konstanten Homotopien in Y_1 verlaufen.)

Teil (B): Seien $W_1', \ldots, W_s'$ alle kleinen Würfel und ihre niederdimensionalen Randwürfel, für die $W_i' \cap f^{-1}(Y \backslash Y_1) \neq \emptyset$, geordnet nach Dimension. Wir setzen $g_0 = f_r$. Dann gilt $W_i' \cap f^{-1}(Y \backslash Y_1) = W_i' \cap g_0^{-1}(Y \backslash Y_1)$. Beginnend mit g_0 konstruieren wir induktiv Abbildungen

$$g_k : (I^n, 1 \times I^{n-1}, J^{n-1}) \to (Y, Y_1, y_0)$$

analog zum Teil (A), so daß

(1) $g_k \simeq g_0\ rel\ U_i := \partial I^n \cup \bigcup\{W; f(W) \subset Y_1\}$, d.h. g_0 ändert sich nur auf Würfeln, die $Y \backslash Y_1$ treffen

(2) $g_0(W) \subset Y_2 \Rightarrow g_k(W) \subset Y_2$ für alle W

(3) $g_k^{-1}(Y \backslash Y_1) \cap W_j' \subset G_q(W_j')$ für $1 \leq j \leq k$

Die Konstruktion ist wie im Teil (A). Mit $g = g_s$ haben wir den gesuchten Lift von f.

Injektivität: Seien $f, g : (I^n, 1 \times I^{n-1}, J^{n-1}) \to (Y_2, Y_0, y_0)$ Abbildungen, die als Abbildungen nach (Y, Y_1, y_0) homotop sind, d.h. es gibt eine Homotopie

$$F : (I^n \times I, 1 \times I^{n-1} \times I, J^{n-1} \times I) \to (Y, Y_1, y_0)$$

mit $F_0 = f$ und $F_1 = g$. Für die Injektivität müssen wir eine Homotopie

$$G : (I^n \times I, 1 \times I^{n-1} \times I, J^{n-1} \times I) \to (Y_2, Y_0, y_1)$$

mit $G_0 = f$ und $G_1 = g$ finden. Dazu fassen wir F als Abbildung

$$F : (I^{n+1}, 1 \times I^n, J^n) \to (Y, Y_1, Y_2)$$

mit

$$F|J^n : J^n = J^{n-1} \times I \cup I^n \times 0 \cup I^n \times 1 \xrightarrow{y_0 \cup f \cup g} Y_2$$

auf. Nach dem Verfahren aus dem Surjektivitätsbeweis deformieren wir F rel J^n als Abbildung von Tripeln in eine Abbildung G, die $Y \backslash Y_2$ nicht mehr trifft, und erhalten so die gewünschte Homotopie. Nach unserem Beweis ist dies möglich, falls $n + 1 \le p + q - 2$, also falls $n \le p + q - 3$ ist. □

Die für uns wichtigste Anwendung des Ausschneidungssatzes ist

16.4 Der Freudenthal'sche Einhängungssatz: Sei $\pi_i(X) = 0$ für $0 \le i \le n$. Dann ist die Einhängung

$$E : \pi_i(X) \to \pi_{i+1}(SX),\ [f] \mapsto [Sf]$$

ein Isomorphismus für $0 \le i \le 2n$ und ein Epimorphismus für $i = 2n + 1$

Für den Beweis benötigen wir einige Vorbereitungen

16.5 Lemma: Sei $f : (X, A, a_0) \to (Y, B, b_0)$ eine Abbildung von Tripeln, so daß $f_X : X \to Y$ und $f_A : A \to B$ nicht-basierte Homotopieäquivalenzen sind. Dann ist $f_* : \pi_n(X, A, a_0) \to \pi_n(Y, B, b_0)$ ein Isomorphismus für $n \ge 1$.

Beweis: Wir behandeln zunächst den absoluten Fall. Sei $g : (Y, b_0) \to (X, a_1)$ ein Homotopieinverses von f und $F : id_X \simeq g \circ f$ eine nicht-basierte Homotopie. Ist $h : (I^n, \partial I^n) \to (X, a_0)$ eine Abbildung, dann ist $F \circ (h \times id_I)$ ein Transport von h längs des Wegs $\sigma(t) = F(a_0, t)$. Insbesondere ist $g_* \circ f_*([h]) = [\sigma] \cdot [h]$. Nach §13 ist $g_* \circ f_* : \pi_n(X, a_0) \to \pi_n(X, a_1)$ ein Isomorphismus. Analog ist $f_* \circ g_* : \pi_n(Y, b_0) \to \pi(Y, f(a_1))$ ein Isomorphismus. Nach (8.10.1) ist $f_* : \pi_n(X, a_0) \to \pi(Y, b_0)$ ein Isomorphismus.

Für den relativen Fall wenden wir das Fünfer-Lemma auf folgendes Diagramm an

$$\begin{array}{ccccccccc}
\pi_n(A, a_0) & \longrightarrow & \pi_n(X, a_0) & \longrightarrow & \pi_n(X, A, a_0) & \longrightarrow & \pi_{n-1}(A, a_0) & \longrightarrow & \pi_{n-1}(X, a_0) \\
f_* \downarrow \cong & & f_* \downarrow \cong & & f_* \downarrow & & f_* \downarrow \cong & & f_* \downarrow \cong \\
\pi_n(B, b_0) & \longrightarrow & \pi_n(Y, b_0) & \longrightarrow & \pi_n(Y, B, b_0) & \longrightarrow & \pi_{n-1}(B, b_0) & \longrightarrow & \pi_{n-1}(Y, b_0)
\end{array}$$

Als nächstes beweisen wir

16.6 Satz: Sei $A \subset X$ eine Kofaserung und $a_0 \in A$. Sei

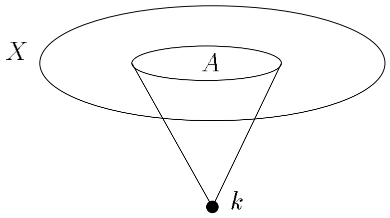
$$\begin{array}{ll} \pi_i(A, a_0) = 0 & \text{für } 0 \leq i \leq p,\ p \geq 0 \\ \pi_i(X, A, a_0) = 0 & \text{für } 0 < i \leq q \end{array}$$

Dann induziert die Projektion eine Bijektion

$$p_* : \pi_i(X, A, a_0) \to \pi(X/A, 0)$$

für $i \leq p+q$ und eine Surjektion für $i = p+q+1$ (0 ist der Basispunkt von X/A).

Beweis:



Sei $TA = A \times I/A \times 0$ der nicht-reduzierte Kegel mit Kegelpunkt k. Dann ist

$$\begin{array}{ccc} A & \subset & TA \\ \cap & & \cap \\ X & \subset & X \cup TA \end{array}$$

ein Pushout und damit $TA \subset X \cup TA$ eine Kofaserung. Da TA zusammenziehbar ist, ist die Projektion

$$q : (X \cup TA, TA) \to (X/A, 0)$$

nach (11.5) eine Homotopieäquivalenz von Paaren und damit nach (16.5)

$$q_* : \pi_n(X \cup TA, TA, a) \to \pi_n(X/A, 0, 0)$$

ein Isomorphismus für $n \geq 1$ und jede Wahl des Basispunktes $a \in TA$. Setze nun $Y = X \cup TA$, $Y_1 = TA \simeq \{k\}$, $Y_2 = Y \backslash \{k\} \simeq X$. Dann ist $Y_0 = Y_1 \cap Y_2 \cong A \times]0, 1] \simeq A$. Die Inklusionen definieren ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\pi_i(X, A) \arrow[r, "\cong"'] & \pi_i(Y_2, Y_0) \arrow[rr] & & \pi_i(Y, Y_1) \arrow[r, "q_*", "\cong"'] & \pi_i(X/A, 0) \\
& \pi_i(Y_2, Y_1 \backslash A \cap Y_2) \arrow[u, "\cong"'] \arrow[rr, "j_*"] & & \pi_i(Y, Y_1 \backslash (A \times 1)) \arrow[u, "\cong"'] &
\end{tikzcd}$$

dessen obere Reihe p_* ist. Die Isomorphie an den angegebenen Stellen folgt aus (16.5). Auf j_* wenden wir den Ausschneidungssatz an:

$$\pi_i(Y_1 \backslash A, (Y_1 \backslash A) \cap Y_2) \cong \pi_i(Y_1, Y_1 \backslash \{k\}) \cong \pi_i(Y_1, A) \cong \pi_{i-1}(A) \cong 0$$

für $0 < i < p+2$. Die ersten Isomorphismen folgen aus (16.5), der letzte aus der exakten Sequenz des Paares (Y_1, A), weil Y_1 auf $\{k\}$ zusammenziehbar ist. Aus (16.5) folgt weiter

$$\pi_i(Y_2, (Y_1 \backslash A) \cap Y_2) \cong \pi_i(X, A) \cong 0 \text{ für } 0 < i < q+1$$

Also ist j_* bijektiv für $i \leq p+q+2+1-3 = p+q$ und surjektiv für $i = p+q+1$.
□

Beweis des Einhängungssatzes: Sei $[f] \in \pi_i(X, x_0)$,

$$f : (I^i, \partial I^i) \to (X, x_0).$$

Dann ist $Sf : (I^{i+1}, \partial I^{i+1}) \to (SX, x_0)$ definiert durch

$$Sf(t_0, \ldots, t_i) = (f(t_1, \ldots, t_i), t_0) \in SX.$$

Da die Verknüpfung in $\pi_i(X, x_0)$ nach (8.13) mit Hilfe der i-ten Koordinate definiert ist, ist $[f] \mapsto [Sf]$ ein Homomorphismus.

Da der Kegel CX basiert zusammenziehbar ist, ist ∂ im Diagramm

$$\pi_i(X) \xleftarrow{\partial} \pi_{i-1}(CX, X) \xrightarrow{p_*} \pi_{i+1}(SX)$$

ein Isomorphismus. Für $[f] \in \pi_i(X)$ repräsentiert

$$\overline{f} : I^{i+1} \to CX, \; \overline{f} : (t_0, t_1, \ldots, t_i) = (f(t_1, \ldots, t_i), t_0)$$

eine Homotopieklasse $[\overline{f}] \in \pi_{n+1}(CX, X)$, so daß $\partial[\overline{f}] = [f]$. Denn $\overline{f}(1, t_1, \ldots, t_i) = (f(t_1, \ldots, t_i), 1)) \in X \subset CX$. Folglich ist $p_* \circ \partial^{-1}$ der Einhängungshomomorphismus. Da $\pi_i(X) = 0$ für $i \leq n$ und $\pi_i(CX, X) \cong \pi_{i-1}(X) \cong 0$ für $i-1 \leq n$, ist p_* nach (16.6) bijektiv für $i+1 \leq n+n+1$, also für $i \leq 2n$ und surjektiv für $i = 2n+1$. □

Als Folgerung zeigen wir

16.7 Satz: (1) $\pi_i(S^n) = 0$ für $0 \leq i < n$

(2) $E : \pi_i(S^n) \cong \pi_{i+1}(S^{n+1})$ für $i \leq 2n-2$

(3) $\pi_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$ für $n \geq 1$

Beweis: Da S^n für $n \geq 1$ zusammenhängend ist, gilt $\pi_0(S^n) = 0$ für $n \geq 1$. Weiter gilt bekanntlich $S(S^n) \cong S^{n+1}$. Wir betrachten folgende Sequenzen von Einhängungshomomorphismen

$$
\begin{array}{l}
0 = \pi_0(S^1) \xrightarrow{(1)} \pi_1(S^2) \xrightarrow{(2)} \pi_2(S^3) \xrightarrow{(3)} \pi_3(S^4) \longrightarrow \\[1em]
0 = \pi_0(S^2) \xrightarrow{(1)} \pi_1(S^3) \xrightarrow{(2)} \pi_2(S^4) \xrightarrow{(3)} \pi_3(S^5) \longrightarrow \\[1em]
0 = \pi_0(S^3) \xrightarrow{(1)} \pi_1(S^4) \xrightarrow{(2)} \pi_2(S^5) \xrightarrow{(3)} \pi_3(S^6) \\[1em]
\qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots
\end{array}
$$

Nach dem Einhängungssatz mit $n = 0$ und $X = S^k$ sind die Homomorphismen (1) bijektiv, also $\pi_1(S^n) = 0$ für $n > 1$. Damit sind auch die Morphismen (2) bijektiv usw.

Teil (2) folgt nun aus (1) und dem Einhängungssatz. Insbesondere gilt

$$\pi_2(S^2) \cong \pi_3(S^3) \cong \pi_4(S^4) \cong \ldots$$

Wir wissen bereits ((14.14), (15.4)), daß $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ und

$$\pi_2(S^2) \cong \pi_2(S^3) \oplus \pi_1(S^1) \cong 0 \oplus \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}$$

□

Mit (16.7) ist der Beweis von (7.15) vollständig. Als weitere Anwendung zeigen wir

16.8 Folgerung: $\mathbb{R}^m \cong \mathbb{R}^n \iff m = n$

Beweis: Die Rückrichtung ist klar. Sei nun $\mathbb{R}^m \cong \mathbb{R}^n$, $0 < n < m$, sei $h : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ der Homöomorphismus. Dann ist auch

$$h : \mathbb{R}^m \backslash \{0\} \to \mathbb{R}^n \backslash \{h(0)\}$$

ein Homöomorphismus. Da nun $\mathbb{R}^m \backslash \{0\} \simeq S^{m-1}$ und $\mathbb{R}^n \backslash \{h(0)\} \simeq S^{n-1}$, folgt $\pi_i(S^{m-1}) \cong \pi_i(S^{n-1})$ für alle i. Insbesondere also

$$
\begin{array}{lll}
0 = \pi_{n-1}(S^{m-1}) \cong \pi_{n-1}(S^{n-1}) & \cong \mathbb{Z} & \text{für } n \geq 2 \\
& \cong \{\pm 1\} & \text{für } n = 1
\end{array}
$$

ein Widerspruch. □

16.9 Bemerkung: Nach (16.7) gilt $\pi_{n+k}(S^n) \cong \pi_{n+k+q}(S^{n+q})$ für $k \leq n-2$. Man nennt diese Gruppe daher die *k-te stabile Homotopiegruppe*

$$\pi_k^S = \lim_{n\to\infty} \pi_{n+k}(S^n)$$

Ihre Berechnung ist Arbeitsgebiet zahlreicher Mathematiker. Ein Ende ist nicht abzusehen. Wir schließen mit einer kurzen Liste bekannter Resultate. Die aktuelle Liste ist erheblich länger, verwendet werden raffinierte Methoden der Algebra, algebraischen Topologie und algebraischen Geometrie zusammen mit numerischen Methoden und Computern.

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
π_k^S	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}/2$	$\mathbb{Z}/2$	$\mathbb{Z}/24$	0	0	$\mathbb{Z}/2$	$\mathbb{Z}/240$	$\mathbb{Z}/2$

k	9	10	11	12	13	14	15
π_k^S	$\mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2$	$\mathbb{Z}/6$	$\mathbb{Z}/504$	0	$\mathbb{Z}/3$	$\mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2$	$\mathbb{Z}/480 \oplus \mathbb{Z}/2$