I. Definition und allgemeine Eigenschaften topologischer Räume

1. Ein *topologischer Raum* ist ein Paar

$$(X, \mathbf{Off}(X)),$$

wobei X eine Menge ist und wobei $\mathbf{Off}(X)$ ein System von Teilmengen, oder anders gesagt, eine Teilmenge der Potenzmenge $\mathfrak{P}(X)$ ist, das (die) folgenden Axionen genügt:

(1) $X, \emptyset \in \mathbf{Off}(X)$.

(2) Wenn $U, V \in \mathbf{Off}(X)$, dann folgt

$$U \cap V \in \mathbf{Off}(X).$$

(3) Wenn $\{U_i\}_{i\in I}$ eine Familie von Mengen aus $\mathbf{Off}(X)$ ist, dann ist auch

$$\bigcup_{i\in I} U_i \in \mathbf{Off}(X).$$

Man nennt dann $\mathbf{Off}(X)$ die Menge der offenen Teilmengen von X und die Vorgabe eines solchen Systems von Teilmengen nennt man eine Topologie auf der Menge X.

Das Axiom (2) impliziert, daß $\mathbf{Off}(X)$ unter beliebigen endlichen Durchschnitten abgeschlossen ist.

2. Wenn auf der Menge X eine Topologie gegeben ist, dann können wir zu jedem Punkt $x \in X$ die Menge

$$\mathfrak{V}_x \subset \mathfrak{P}(X)$$

betrachten, die aus allen offenen Mengen besteht, die den Punkt x enthalten. Also

$$\mathfrak{V}_x = \{V \mid x \in V \text{ und } V \in \mathbf{Off}(X)\}.$$

Wir nennen $\mathfrak{V}_x$ das *System von offenen Umgebungen* von $x \in X$. Wir können jetzt das System (oder die Familie) von Systemen von offenen Umgebungen betrachten

$$\{\mathfrak{V}_x\}_{x\in X}$$

Dies erfüllt

(1) $V, U \in \mathfrak{V}_x$, dann ist $V \cap U \in \mathfrak{V}_x$

(2) $V \in \mathfrak{V}_x$ und $y \in V$, dann ist $V \in \mathfrak{V}_y$

Wir werden oft einen topologischen Raum einfach mit X notieren, d. h. wenn wir sagen:

“Es sei X ein topologischer Raum”

und meinen, daß wir zu der Menge X ein System $\mathbf{Off}(X)$ haben, das nicht mitnotiert wird.

3. Eine Abbildung $f : X \to Y$ zwischen topologischen Räumen heißt *stetig*, wenn für jede offene Menge $V \subset Y$ das Urbild $f^{-1}(V) = \{x \in X \mid f(x) \in V\}$ wieder offen ist.

3.1 Satz: *Sind X, Y, Z topologische Räume, und sind $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ stetige Abbildungen, dann ist auch das Kompositum*

$$g \circ f : X \longrightarrow Z$$

stetig.

Beweis: klar.

Es ist vielleicht eine gute Übung sich zu überlegen:

1) Wie viele Möglichkeiten gibt es, eine endliche Menge X mit der Struktur eines topologischen Raumes zu versehen?

2) Wenn X endlich ist, und $\mathbf{Off}(X)$ ein System offener Mengen ist, was kann man dann über $\mathbf{Off}(X)$ sagen? Men kann $\mathbf{Off}(X)$ mit einem anderen Begriff der Mengenlehre in Verbindung bringen. Welchen?

3) Seien $\mathbf{Off}_1(X)$ und $\mathbf{Off}_2(X)$ zwei Topologien auf einer endlichen Menge X. Wann ist die Identität

$$\mathrm{Id} : (X, \mathbf{Off}_1(X)) \longrightarrow (X, \mathbf{Off}_2(X))$$

stetig?

4) Auf jeder Menge X gibt es zwei extreme Topologien: Die eine ist die "indiskrete" Topologie, für die $\mathbf{Off}_{ind}(X) = \{\emptyset, X\}$, die andere ist die "diskrete" Topologie $\mathbf{Off}_{disk}(X) = \mathfrak{P}(X)$.

Frage: Sei Z ein topologischer Raum und

$$\begin{array}{ccccc} g & : & Z & \longrightarrow & X \\ h & : & X & \longrightarrow & Z \end{array}$$

seien Abbildungen. Jetzt versehen wir X einmal mit der diskreten und dann der indiskreten Topologie. Dann ist jeweils eine der beiden Abbildungen unabhängig von Z und seiner Topologie stetig.

4. Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt *abgeschlossen* wenn ihr Komplement

$$X \setminus A = \{x \in X | x \notin A\}$$

offen ist. Man überlegt sich leicht, daß das System der abgeschlossenen Mengen abgeschlossen unter der Bildung beliebiger Durchnitte und endlichen Vereinigungen ist.

II. Mengentheoretische Begriffe

1. Eine Teilmenge $\mathcal{F} \subset \mathfrak{P}(X)$ heißt *Filter*, wenn gilt:

(1) $\emptyset \notin \mathcal{F}$

(2) $A, B \in \mathcal{F}$, dann gibt es eine Menge $C \in \mathcal{F}$ mit $C \subset A \cap B$.

Ein Filter heißt *saturiert*, wenn gilt:

(3) Wenn $A \in \mathcal{F}$ und $A' \supset A$, dann ist auch $A' \in \mathcal{F}$.

1.1 In einem saturierten Filter gilt: Wenn $A, B \in \mathcal{F}$, dann ist auch $A \cap B \in \mathcal{F}$. (klar)

1.2 Zu jedem Filter $\mathcal{F}$ kann man einen saturierten Filter definieren:

$$\mathcal{F}^{sat} = \{A \mid A \subset X \text{ und es gibt } B \in \mathcal{F} \text{ mit } A \supset B\}$$

Wenn man $\mathcal{F}^{sat}$ und $\mathcal{F}$ als Teilmengen von $\mathfrak{P}(X)$ auffaßt, dann ist

$$\mathcal{F}^{sat} \supset \mathcal{F}.$$

Man kann auf der Menge aller Filter eine Ordnungsrelation definieren:

$$\mathcal{F}_1 \succ \mathcal{F}_2 \Longleftrightarrow \text{ zu jedem } A \in \mathcal{F}_2 \text{ gibt es ein } B \in \mathcal{F}_1 \text{ mit } B \subset A.$$

Das kann man auch in Termen der saturierten Filter beschreiben:

1.3
$$\mathcal{F}_1 \succ \mathcal{F}_2 \Longleftrightarrow \mathcal{F}_1^{sat} \supset \mathcal{F}_2,$$

dabei ist das Zeichen $\supset$ das Inklusionszeichen in $\mathfrak{P}(X)$.

1.4 Wir sagen $\mathcal{F}_1 \sim \mathcal{F}_2$, wenn $\mathcal{F}_1 \succ \mathcal{F}_2$ und $\mathcal{F}_2 \succ \mathcal{F}_1$ gilt, oder was dazu equivalent ist

$$\mathcal{F}_1^{sat} = \mathcal{F}_2^{sat}.$$

1.4.1 Man sollte sich das so vorstellen: Der Filter $\mathcal{F}_1$ ist größer als $\mathcal{F}_2$, wenn er "kleinere" Mengen enthält.

1.5 Ein Filter $\mathcal{F}$ heißt *Ultrafilter*, wenn er maximal bezüglich der Inklusion auf $\mathfrak{P}(X)$ ist. Ein Ultrafilter ist immer saturiert.

1.5.1 Satz: *Ein Filter $\mathcal{F}$ ist genau dann ein Ultrafilter, wenn für jede Teilmenge $A \subset X$ gilt:*

$$A \in \mathcal{F} \text{ oder das Komplement } X \setminus A \in \mathcal{F}.$$

Beweis: Sei $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter und $A \subset X$. Betrachte das folgende System von Teilmengen von X:

$$\mathcal{F}' = \{B | B \subset X \text{ und es gibt ein } B' \in \mathcal{F} \text{ mit } B \supset B' \cap A\}.$$

Wenn $A \notin \mathcal{F}$, dann ist A als Teilmenge von $\mathfrak{P}(X)$ sicher in $\mathcal{F}'$ und daher ist $\mathcal{F}'$ echt größer als $\mathcal{F}$. Also darf $\mathcal{F}'$ kein Filter sein. Das Axiom (2) gilt, daher muß es ein $B' \in \mathcal{F}$ geben mit $B' \cap A = \emptyset$ und damit $X \setminus A \in \mathcal{F}$, weil $X \setminus A \supset B'$.

Es gibt eine Klasse von Ultrafiltern, die man leicht hinschreiben kann: Wir wählen einen Punkt $x \in X$ und es sei

$$\mathcal{F}_x = \{A \in \mathfrak{P}(X) \mid x \in A\}.$$

Es ist sehr schwierig oder gar unmöglich, sich Ultrafilter "vorzustellen", die nicht von dieser einfachen Gestalt sind. Aber es gilt:

1.5.2 Satz: *Zu jedem Filter $\mathcal{F}$ gibt es einen Ultrafilter $\mathcal{F}^{\sim}$ mit*

$$\mathcal{F}^{\sim} \supset \mathcal{F}.$$

Der Beweis dieses Satzes benutzt das

Auswahlaxiom: *Sei I eine Indexmenge und es sei $\{X_i\}_{i \in I}$ eine mit I indizierte Familie nicht leerer Mengen. Dann ist das Produkt*

$$\prod_{i \in I} X_i \neq \emptyset$$

mit anderen Worten, es gibt eine Vorschrift f, die jedem $i \in I$ ein $f(i) \in X_i$ zuordnet.

Dieses Auswahlaxiom sieht eigentlich recht plausibel aus. Es ist aber gar nicht so harmlos, denn es ist äquivalent zu anderen Aussagen (- dem gleich folgenden Wohlordnungssatz und dem Lemma von Zorn -) , die absolut nicht plausibel sind.

1.5.3 Es sei X eine Menge mit einer Ordnungsrelation $<$. Ich erinnere noch einmal daran, was dies heißt:
Es heißt, daß wir eine Teilmenge im Produkt

$$\mathcal{R} \subset X \times X$$

mit den folgenden Eigenschaften haben

1) Die Diagonale $\Delta = \{(x, x) | x \in X\}$ liegt in $\mathcal{R}$.

2) Wenn $(x, y) \in \mathcal{R}$ und $(y, z) \in \mathcal{R}$, dann ist auch $(x, z) \in \mathcal{R}$.

Wie üblich schreiben wir für $(x, y) \in \mathcal{R}$ einfach $x < y$. Wir wollen auch noch fordern, daß

3) $x < y$ und $y < x$ genau dann gilt, wenn $x = y$.

Eine Ordnungsrelation $<$ auf einer Menge X heißt *totale* Ordnung, wenn je zwei Elemente vergleichbar sind, d.h. für $x, y \in X$ gilt $x < y$ oder $y < x$.

Schließlich gibt es noch den Begriff einer *Wohlordnung*: Eine Menge geordnete Menge $(x, <)$ heißt *wohlgeordnet* , wenn die Ordnung total ist und wenn jede nicht leere Teilmenge $A \subset X$ ein kleinstes (minimales) Element besitzt. Dieses minimale Element ist dann natürlich eindeutig bestimmt, weil die Anordnung total ist.

Die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen ist wohlgeordnet, das nennt man auch das Prinzip von der vollständigen Induktion.

Es gilt der

Wohlordnungssatz: *Auf jeder Menge gibt es eine Wohlordnung*

Auch dieser Satz ist eine Folge des Auswahlaxioms. Man kann das auch so verstehen, daß man auch über den abzählbaren Bereich hinaus ein Induktionsprinzip hat, die sogenannte transfinite Induktion.

Eine Teilmenge K einer angeordneten Menge X heißt eine*Kette*, wenn die Einschränkung der Ordnung auf K eine totale Ordnung ergibt, d.h. je zwei Elemente aus K sind vergleichbar. Eine Kette K heißt *nach oben beschränkt*, wenn es ein Element $x_K \in X$ gibt (es gehört nicht unbedingt zu der Kette), so daß $x < x_K$ für alle x aus der Kette. Wir schreiben $y > K$, wenn $y > x$ für alle $x \in K$.

Für $x \in T$ bezeichnen wir mit

$$T_x = \{y \in T \mid y < x \text{ und } y \neq x\}$$

den *Abschnitt in T vor x*.

Das Lemma von Zorn: *Es sei X eine Menge mit einer Ordnungsrelation $<$. Wir nehmen an, daß jede Kette nach oben beschränkt ist. Dann gibt es in X ein maximales Element x_m, d. h. ein Element, zu dem es kein $x' \in X$ mit $x' > x_m$ und $\neq x_m$ gibt.*

Wir führen den Beweis durch Widerspruch und nehmen an, daß unsere Menge X kein maximales Element enthält. Dann ist für jede Kette K die Menge

$$Y_K = \{y \in X \mid y > K \text{ und } y \notin K\}$$

nicht leer, denn zunächst hat K eine obere Schranke x_K, und weil dies Element nicht maximal sein kann, gibt es ein $x'_K > K_K$ mit $x'_K \neq x_K$, das dann in Y_K liegt.

Sein nun $\mathcal{K}$ die Menge aller Ketten und

$$f : \mathcal{K} \longrightarrow X$$

sei eine Auswahlfunktion mit $f(K) \in Y_K$ für alle $K \in \mathcal{K}$ (Auswahlaxiom!).

Zu dieser Auswahlfunktion f definieren wir f-Ketten: Eine Teilmenge $T \subset X$ heißt eine f-Kette, wenn gilt:

(1) Die Menge T mit der von der auf X gegebenen Ordnung ist wohlgeordnet.

(2) Für alle $x \in T$ gilt
$$f(T_x) = x.$$

Wir wollen uns eine Vorstellung davon erarbeiten, wie solche f-Ketten aussehen. Es sei T eine solche und T sei nicht leer. Weil T wohlgeordnet ist, haben wir ein minimales Element $x_0 \in T$. Dann ist $T_{x_0} = \emptyset$ und daher

$$x_0 = f(\emptyset),$$

d. h. das minimales Element einer nicht leeren f-Kette T hängt nicht von T ab, es ist für alle f-Ketten dasselbe Element. Wenn $T \setminus \{x_0\} \neq \emptyset$, dann haben wir darin wieder ein minimales Element x_1, es ist $T_{x_1} = \{x_0\}$ und

$$x_1 = f(\{x_0\}).$$

Wir bekommen also die Idee, "daß zwei f-Ketten am Anfang übereinstimmen".

Das führt zu folgendem

Lemma: *Es sei T und T' zwei f-Ketten. Dann gilt $T = T'$, oder die eine f-Kette ist ein Abschnitt der anderen.*

Beweis: Es sei $T \neq T'$, wir können dann annehmen, daß $T \not\subset T'$. Dann gibt es wegen der Wohlordnung auf T ein minimales $x \in T$ mit $x \notin T'$. Es folgt, daß der Abschnitt vor x in T ganz in T' liegt, d. h.
$$T_x \subset T'.$$

Wenn nun $T' = T_x$, dann sind wir fertig. Wenn nicht, dann sei $x' \in T'$ minimal, so daß $x' \notin T_x$. Dann liegt der Abschnitt vor x' in T' ganz in T_x, also haben wir

$$T'_{x'} \subset T_x.$$

Dies muß eine echte Inklusion sein, denn bei Gleichheit bekämen wir

$$x' = f(T'_{x'}) = f(T_x) = x,$$

was wegen $x \notin T'$ nicht gelten kann. Es gibt also ein Element $y \in T_x$ mit $y \notin T'_{x'}$. Weil $y \in T'$ liegt, können wir es mit x' vergleichen. Es muß gelten $y > x'$, und wir erhalten $x > y > x'$. Es ist dann klar, daß $x' \notin T$ weil sonst $x' \in T_x$ wäre. Dann ist aber $x' \in T'$ das minimale Element in T' mit $x' \notin T$, denn wenn wir ein kleineres Element $x'' < x'$ in T' hätten mit $x'' \notin T$, dann wäre auch $x'' \notin T_x$ im Widerspruch zur Wahl von x'.

Wir haben also gezeigt: Wenn x minimal in T mit $x \notin T'$ und wenn $T_x \neq T'$, dann ist $T' \not\subset T$. Dann gilt für das minimale Element $x' \in T'$ mit $x' \notin T$

$$x' < x \text{ und natürlich } x' \neq x.$$

Dann können wir den Spieß umdrehen und starten mit $x' \in T'$. Es gilt $T'_{x'} \neq T$, weil wir zu Beginn angenommen haben, daß $T \not\subset T'$. Dann folgt wie oben $x < x'$ und das ist ein Widerspruch. Damit ist das Lemma bewiesen.

Nun beenden wir den beweis des Lemmas von Zorn. Wir betrachten nun die Menge aller f-Ketten. Sie bilden eine total geordnete Teilmenge der Potenzmenge, wir bilden ihre Vereinigung T_∞. Das ist wieder eine f-Kette, denn T_∞ ist zunächst total geordnet: Ist $A \subset T_\infty$ eine nicht leere Teilmenge, dann ist ihr Durchschnitt mit einer geeigneten f-Kette T nicht leer, also $T \cap A \neq \emptyset$. Sei $a_0 \in T \cap A$ ein minimales Element. Dann ist a_0 schon minimal in A. Wäre dies nicht so - also $a_1 < a_0$ und $a_1 \in A$, dann gäbe es eine f-Kette T' mit $a_1 \in A \cap T'$. Nun ist aber natürlich $T \subset T'$ nach dem Lemma und damit T ein Abschnitt von T'. Wenn dann $a_0 \in A \cap T$, folgt $a_1 \in A \cap T$ und das ist ein Widerspruch.

Es ist ferner klar: Für $x \in T_\infty$ gibt es ein T mit $x \in T$ und dann ist

$$T_{\infty,x} = T_x,$$

(Lemma) und somit $f(T_{\infty,x}) = x$.

Jetzt kommt das Finale: Wir betrachten $f(T_\infty)$, das ist ein Element in X mit $f(T_\infty) \notin T_\infty$ und $T_\infty \cup \{f(T_\infty)\}$ ist wieder eine f-Kette. Das widerspricht der Konstruktion von T_∞.

Ich will jetzt noch zeigen, daß das Lemma von Zorn Satz **1.5.2** impliziert. Dieser Beweis ist ein Prototyp für viele der Beweise, die das Lemma von Zorn benutzen.

Beweis von 1.5.2.: Ein Filter auf X ist zunächst eine Teilmenge von $\mathfrak{P}(X)$, die Menge aller Filter ist eine Menge von Teilmengen von $\mathfrak{P}(X)$. Darauf ist durch die Inklusion eine Ordnung definiert. Es sei $\mathcal{F}$ ein Filter, wir betrachten jetzt die Menge $M_\mathcal{F}$ aller Filter $\mathcal{F}'$, die den Filter $\mathcal{F}$ enthalten, d.h. die bezülich der obigen Ordnung größer sind als $\mathcal{F}$. d.h. $\mathcal{F}' \supset \mathcal{F}$. In dieser Menge von Filtern betrachten wir eine Kette K, das ist also eine Menge von Filtern, die $\mathcal{F}$ umfassen und für je zwei von ihnen - $\mathcal{F}', \mathcal{F}''$ - ist $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}''$ oder $\mathcal{F}' \supset \mathcal{F}''$. Ich zeige, daß eine solche Kette nach oben beschränkt ist. Dazu bilde ich einfach

$$\mathcal{F}^* = \bigcup_{\mathcal{F}' \in M_\mathcal{F}} \mathcal{F}'$$

Das ist wieder ein Filter. Jede Teilmenge $A \in \mathcal{F}^*$ ist schon Element eines der Filter $\mathcal{F}'$. Akso ist $\emptyset \notin \mathcal{F}^*$. Wir müssen zeigen, daß es zu zwei Mengen $A, B \in \mathcal{F}^*$ eine Menge $C \subset A \cap B$ mit $C \in \mathcal{F}^*$. Zu diesen Mengen gibt es $\mathcal{F}', \mathcal{F}''$ mit $A \in \mathcal{F}^prime$ und $B \in \mathcal{F}''$. Jetzt kommt die Kettenbedingung: Einer der beiden Filter ist grösser als der andere, dies sei $\mathcal{F}''$. Also gilt A und $B \in \mathcal{F}''$. Dann folgt aus der Filterbedingung für $\mathcal{F}''$, daß es ein $C \subset A \cap B$ gibt mit $C \in \mathcal{F}''$, also ist auch $C \in \mathcal{F}^*$ und das zeigt, daß $\mathcal{F}^*$ ein Filter ist.

Also ist in $M_{\mathcal{F}}$ jede Kette nach oben beschränkt, nach dem Lemma von Zorm gibt es in $M_{\mathcal{F}}$ ein maximales Element und das ist ein Ultrafilter.

III. Zurück zu den topologischen Räumen

1. Zu einem topologischen Raum $X (= (X, \mathbf{Off}(X)))$ haben wir die Systeme $\{\mathfrak{V}_x\}_{x\in X}$ von offenen Umgebungen der Punkte definiert. Das sind offensichtlich Filter (siehe 1.2).

Wir können aber auch umgekehrt eine Topologie auf einer Menge X konstruieren, wenn wir uns ein System von solchen Umgebungsfiltern vorgeben.

2. Es sei X eine Menge und es sei zu jedem Punkt $x \in X$ ein Filter $\mathfrak{V}'_x \subset \mathfrak{P}(X)$ gegeben mit

1) Für alle $V \in \mathfrak{V}'_x$ gilt $x \in V$.

2) Ist $V \in \mathfrak{V}'_x$ und ist $y \in V$, dann gibt es ein $V_1 \in \mathfrak{V}'_y$ mit $y \in V_1 \subset V$.

Wenn uns ein solches System von "Umgebungsfiltern" gegeben ist, dann definieren wir dazu

$$\mathbf{Off}(X) = \mathbf{Off}(X; \{\mathfrak{V}'_x\}_{x\in X}) = \\ \{U \subset X \mid \text{Für alle } x \in U \text{ gibt es ein } V_x \in \mathfrak{V}_x \text{ mit } V_x \subset U\}.$$

Ich denke, daß es ganz klar ist, daß damit eine Topologie auf X definiert wird. Die Forderung 2) muß man stellen, damit die Mengen aus dem Umgebungsfilter $\mathfrak{V}'_x$ offen sind.

2.1. Ich behaupte nun ohne Beweis: Wenn wir von einem System $\{\mathfrak{V}'_x\}_{x\in X}$ wie oben ausgehen und dann $\mathbf{Off}(X)$ daraus definieren und dann zu diesem $\mathbf{Off}(X)$ wieder die Umgebungsfilter $\{\mathfrak{V}_x\}_{x\in X}$ von offenen Mengen definieren (siehe 1.2), dann gilt

$$\mathfrak{V}_x \sim \mathfrak{V}'_x \quad \text{für alle} \quad x \in X.$$

3. Sehr häufig werden Topologien durch Vorgabe eines Systems von Umgebungsfiltern definiert. Das ist zum Beispiel so bei den topologischen Räumen $\mathbb{R}^n$. Auf dem $\mathbb{R}^n$ haben wir den euklidischen Abstand

$$|x - y| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2},$$

und zu jedem Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ und jeder reellen Zahl $r > 0$ definieren wir die "offene" Kugel

$$K(x, r) = \{y \mid |x - y| < r\}.$$

Das liefert uns ein System von Umgebungsfiltern

$$\mathfrak{V}'_x = \{K(x, \epsilon)\}_{\epsilon > 0},$$

das den Forderungen (1) und (2) genügt. Dieses System von Umgebungsfiltern definiert dann die Standardtopologie auf dem $\mathbb{R}^n$. Die Dreiecksungleichung der Metrik wird benötigt, um die Forderung (2) oben in **2** zu verifizieren.

4. Wenn X ein topologischer Raum ist, und wenn $\mathcal{F}$ ein Filter ist, dann sagen wir, daß der *Filter $\mathcal{F}$ gegen einen Punkt $x \in X$ konvergiert*, wenn

$$\mathcal{F} > \mathfrak{V}_x$$

und wir schreiben dafür auch

$$x \in \lim \mathcal{F}.$$

An dieser Stelle ist es angemessen, kurz ein Wort über *Trennungsaxiome* zu verlieren. Bevor ich das tue, erinnere ich daran, daß wir dem Raum X ja auch die "indiskrete" Topologie

$$\mathbf{Off}(X) = \{\emptyset, X\}$$

verpassen können. Dann ist klar: Für jeden Filter $\mathcal{F}$ und jeden Punkt $x \in X$ gilt $x \in \lim \mathcal{F}$. Wir können also nicht erwarten, daß wir als Limes nur einen Punkt haben.

Wenn also ein Filter gegen einen Punkt x konvergiert, dann ist dieser Punkt unter Umständen nicht eindeutig bestimmt. Wenn aber unser Raum das Trennungsaxiom (T_2) erfüllt:

(T_2) Zu zwei Punkten $x, y \in X$ mit $x \neq y$ gibt es $V_x \in \mathfrak{V}_x$ und $V_y \in \mathfrak{V}_y$ mit $V_x \cap V_y = \emptyset$,

dann ist klar: Wenn ein Filter $\mathcal{F}$ gegen einen Punkt x konvergiert, dann ist dieser Punkt eindeutig bestimmt. Wir schreiben dann

$$x = \lim \mathcal{F}.$$

Ein topologischer Raum, der das Trennungsaxiom (T_2) erfüllt, heißt ein *Hausdorff-Raum*.

Wir sagen, daß ein Filter *konvergiert*, wenn es einen Punkt gibt gegen den er konvergiert. Man könnte auch einfach sagen $\lim \mathcal{F} \neq \emptyset$.

Mit Hilfe dieser Begriffe aus der Mengenlehre läßt sich die Definition von Stetigkeit umformulieren.

Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung. Für einen Punkt $x \in X$ betrachten wir $\mathfrak{V}_x$, und wir bilden

$$f(\mathfrak{V}_x) = \{f(V) \mid V \in \mathfrak{V}_x\}.$$

Das ist dann ein Filter in der Potenzmenge von Y. Wir sagen nun:

4.1 Die Abbildung $f : X \to Y$ zwischen topologischen Räumen heißt stetig im Punkt $x \in X$, wenn gilt

$$f(\mathfrak{V}_x) \succ \mathfrak{V}_{f(x)}.$$

Es gilt dann

4.2 *Die Abbildung $f : X \to Y$ ist genau dann stetig im Sinne von* I.3, *wenn sie in allen Punkten $X \in X$ stetig im Sinne von* 3.4.1 *ist.*

Das ist ziemlich klar.

Hierzu betrachten wir nun als Beispiel die Räume $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^n$ mit der in III.3 definierten Topologie. Es sei

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

eine Abbildung. Was heißt es, daß diese Abbildung in einem Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ stetig ist? Nach der Definition oben heißt es

$$f(\mathfrak{V}_x) > \mathfrak{V}_{f(x)}.$$

Was heißt nun dies? Wir haben gesehen, daß

$$\mathfrak{V}_{f(x)} \sim \{K(f(x), \epsilon)\}_{\epsilon > 0}.$$

Also besagt unsere Definition, daß es zu jedem $\epsilon > 0$ eine Umgebung $V \in \mathfrak{V}_x$ gibt mit

$$f(V) \subset K(f(x), \epsilon).$$

Nun haben wir auch hier, daß $\mathfrak{V}_x$ äquivalent zu dem Filter der offenen Kugeln ist. Also besagt die Definition der Stetigkeit, daß wir ein $\delta(\epsilon) > 0$ finden können, so daß

$$f(K(x, \delta(\epsilon))) \subset K(f(x), \epsilon),$$

und dies besagt nun wiederum, daß

$$|x - x'| < \delta(\epsilon) \Longrightarrow |f(x') - f(x)| < \epsilon,$$

und damit haben wir die alte Definition der Stetigkeit.

4.3. Die Umgebungsfilter sind auch nützlich, wenn man den Begriff der abgeschlossenen Menge etwas anders fassen will. Wenn $A \subset X$ eine Teilmenge des topologischen Raumes X ist, dann sagt man, daß ein Punkt $x \in X$ *im Abschluß* der Menge A liegt, wenn für alle $V \in \mathfrak{V}_x$ der Durchschnitt $A \cap V \neq \emptyset$.

Man könnte das auch so formulieren:

$$A \cap \mathfrak{V}_x \text{ ist ein Filter}$$

.

Mit $\bar{A}$ bezeichnen wir den Abschluß von A, das ist die Menge aller Punkte, die im Abschluß von A liegen. Es ist klar, daß $A \subset \bar{A}$, es ist klar, daß $\bar{A}$ selbst abgeschlossen ist und daß eine Menge B genau dann abgeschlossen ist, wenn $\bar{B} = B$.

4.4 Teilräume und Quotienten

Wenn wir in einem topologischen Raum X eine Teilmenge $A \subset X$ haben, dann können wir eine Topologie auf A definieren

$$\mathbf{Off}(A) = \{B \mid B \subset A \text{ und es gibt ein } U \subset X \text{ mit } U \cap A = B\}.$$

Wenn uns so eine Teilmenge gegeben ist, dann notieren wir dies auch manchmal dadurch, daß wir schreiben

$$i : A \hookrightarrow X,$$

wobei i dann die Abbildung $i(a) = a$ ist. Die Topologie auf A ist dann so gewählt, daß diese Inklusion stetig wird.

4.4..1 Wenn wir nun Teilmengen $B \subset A$ haben, dann müssen wir etwas vorsichtig mit den Begriffen *offene* und *abgeschlossene* Menge sein. Eine Teilmenge $B \subset A$ kann sehr wohl offene bzw. abgeschlossene Teilmenge des topologischen Raumes A sein, ohne daß sie offen bzw. abgeschlossen in X ist.

Das gilt zum Beispiel für die ganze Menge A selbst, sie ist immer offen und abgeschlossen in A aber nicht notwendig in X.

Wenn A selber abgeschlossen (bzw. offen) in X ist, dann ist jede in A abgeschlossene (bzw. offene) Teilmenge auch abgeschlossen (bzw. offen) in X.

Sei $X = (X, \mathbf{Off}(X))$ ein topologischer Raum und $\mathcal{R} \subset X \times X$ sei eine Äquivalenzrelation. Dann können wir bekanntlich die Quotientenmenge $Y = X/\mathcal{R}$ bilden, und wir haben die kanonische Projektion

$$\pi : X \longrightarrow X/\mathcal{R}.$$

Nun können wir auf $X/\mathcal{R}$ eine Topologie - die Quotiententopologie - wie folgt definieren. Wir sagen eine Menge $V \subset X/\mathcal{R}$ ist offen, wenn ihr Urbild $\pi^{-1}(V) \in \mathbf{Off}(X)$. Die Topologie ist also so gewählt, daß die Projektionsabbildung stetig ist.

Betrachten wir zum Beispiel den Raum $\mathbb{R}^n$ und darin die Äquivalenzrelation

$$x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}^n,$$

dann können wir den Quotienten $T^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ bilden. Für $n = 1$ ist das gerade die 1-Sphäre

$$S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}.$$

Was passiert, wenn wir oben $\mathbb{Z}^n$ durch $\mathbb{Q}^n$ ersetzen?

4.5.. Es sei $(X, \mathbf{Off}(X))$ ein topologischer Raum. Ein System von offenen Mengen $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{P}(X)$ heißt eine *Basis* der Topologie, wenn jede offene Menge $U \in \mathbf{Off}(X)$ als Vereinigung von offenen Mengen aus $\mathfrak{U}$ geschrieben werden kann.

Es ist dann klar:

Wenn $U_1, U_2 \in \mathfrak{U}$, dann ist $U_1 \cap U_2$ offen in $\mathfrak{P}(X)$ und dieser Durchschnitt kann infolgedessen wieder als Vereinigung von Mengen aus $\mathfrak{U}$ geschrieben werden.

Wenn wir uns umgekehrt auf der Menge X eine Teilmenge $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{P}(X)$ vorgeben, für die gilt:

Für je zwei Mengen $U_1, U_2 \in \mathfrak{U}$ kann ihr Durchschnitt $U_1 \cap U_2$ als Vereinigung von Mengen aus $\mathfrak{U}$ geschrieben werden,

dann können wir daraus eine Topologie gewinnen

$$\mathbf{Off}^{\mathfrak{U}}(X) = \left\{ \begin{array}{c} W \subset X \mid W \text{ ist Vereinigung von} \\ \text{Mengen aus } \mathfrak{U} \text{ oder } W = X \text{ oder } W = \emptyset \end{array} \right\}$$

Man verifiziert leicht, daß $\mathfrak{U}$ dann eine Basis für die Topologie ist.

Für den $\mathbb{R}^n$ bildet die Menge der offenen Kugeln $K(x, \epsilon)$ mit $x \in \mathbb{R}^n$ und $\epsilon > 0$ eine Basis der Topologie.

Etwas interessanter ist die Tatsache, daß auch die Kugeln $\{K(x, \frac{1}{n})\}_{n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{Q}^n}$ eine Basis bilden, d. h. die Kugeln mit einem Mittelpunkt, dessen Koordinaten rational sind und deren Radien $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots$ usw. sind.

In diesem Fall haben wir also eine abzählbare Basis der Topologie. Das ist manchmal sehr nützlich.

IV Kompakte und quasikompakte Räume

1. Ein topologischer Raum heißt *quasikompakt*, wenn eine der drei folgenden Bedingungen erfüllt ist.

(1) *Zu jeder offenen Überdeckung gibt es eine endliche Teilüberdeckung, d. h. für jede Familie* $\{U_i\}_{i \in I}$ *von offenen Mengen mit* $\bigcup_{i \in I} U_i = X$ *gibt es eine endliche Teilmenge* $E \subset I$*, so daß*

$$\bigcup_{i \in E} U_i = X.$$

(2) *für jede Familie* $\{A_i\}_{i \in I}$ *von abgeschlossenen Teilmengen mit*

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \emptyset$$

gibt es eine endliche Teilmenge $E \subset I$*, so daß* $\bigcap_{i \in E} A_i = \emptyset$.

(3) *Jeder Ultrafilter konvergiert.*

Ein topologischer Raum heißt *kompakt*, wenn er quasikompakt und Hausdorffsch ist.

Wir müssen die Äquivalenz von (1), (2), (3) zeigen. Die Äquivalenz (1) $\Leftrightarrow$ (2) ist ziemlich offensichtlich.

Wir zeigen (2) $\Rightarrow$ (3). Sei $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter. Dann ist mit $A \in \mathcal{F}$ auch der Abschluß $\overline{A} \in \mathcal{F}$ (Siehe 4.3.), weil $\mathcal{F}$ saturiert ist. Dann ist für jede endliche Teilmenge $A_1, \cdots, A_m \in \mathcal{F}$, $A_1 \cap \cdots \cap A_m \neq \emptyset$, also $\overline{A}_1 \cap \cdots \cap \overline{A}_m \neq \emptyset$. Also ist wegen (2) auch

$$\bigcap_{A \in \mathcal{F}} \overline{A} \neq \emptyset.$$

Sei x Element aus dem Durchschnitt. Für jede offene Menge und jedes $A \in \mathcal{F}$, $V_x \in \mathfrak{V}_x$ ist dann wegen $x \in \overline{A}$ auch $V_x \cap A \neq \emptyset$. Damit ist also die Menge aller der Durschnitte $V_x \cap A$, wobei V_x über $\mathfrak{V}_x$ und A über $\mathcal{F}$ läuft ein Filter. Dessen Saturierung ist größer als $\mathcal{F}$, also gleich $\mathcal{F}$ und es folgt

$$\mathcal{F} > \mathfrak{V}_x.$$

Wir zeigen (3) $\Rightarrow$ (2). Sei $\{A_i\}_{i \in I}$ gegeben, es sei $\bigcap_{i \in E} A_i \neq \emptyset$ für alle endlichen Teilmengen $E \subset I$. Dann bildet das System

$$\left\{ \bigcap_{i \in I} A_i \right\}_{E \text{ endlich in } I}$$

einen Filter. Dieser liegt in einem Ultrafilter, und der konvergiert gegen ein $x \in X$.

Daher gibt es zu jeder Umgebung $V_x \in \mathfrak{V}_x$ eine Menge Z aus dem Ultrafilter mit $Z \subset V_x$. Es ist aber auch $A_i \cap Z \neq \emptyset$, weil dieser Durchschnitt im Ultrafilter liegt. Also ist $V_x \cap A_i \neq \emptyset$ und weil V_x beliebig war und A_i abgeschlossen, folgt $x \in A_i$. Das gilt für alle $i \in I$ und somit ist $x \in \bigcap_{i \in I} A_i$.

2. Es ist manchmal möglich, den Gebrauch des Auswahlaxioms zu vermeiden.

Auf topologischen Räumen X, die eine abzählbare Basis $\mathfrak{U}$ besitzen, wird das Konzept der Folgenkonvergenz wieder sehr nützlich. Wenn man eine Folge von $\{x_n\}_{n=1,\cdots}$ von Elementen aus X hat, dann kann man zu dieser Folge den Filter der Folgenabschnitte bilden:

$$\mathfrak{A} = \{A_n\}_{n \in \mathbb{N}},$$

wobei $A_n = \{x_n, x_{n+1} \cdots \quad \cdots\}$, d. h. A_n besteht aus der Menge der Folgenglieder mit Index $\geq n$. Man sagt dann, daß die Folge gegen einen Punkt x konvergiert, wenn $x \in \lim \mathfrak{A}$.

Dies Konzept ist zwar auch ohne abzählbare Basis sinnvoll, aber nicht so nützlich.

2.1 *Ein topologischer Raum* $(X, \mathbf{Off}(X))$, *der eine abzählbare Basis* $\mathfrak{U}$ *besitzt, ist genau dann quasikompakt, wenn jede Folge* $\{x_n\}_{n=1,2,\cdots}$ *eine konvergente Teilfolge besitzt.*

Beweis Angenommen X sei quasikompakt und $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sei eine Folge. Wir bilden den Filter $\mathfrak{A}$ der Abschnitte der Folge, dieser besteht aus den Mengen

$$A_n = \{x_n, x_{n+1} \cdots x_m \cdots\}.$$

Dieser liegt in einem Ultrafilter $\mathcal{F}$, der gegen ein Element x konvergiert. Wir betrachten die offenen Mengen $U \in \mathfrak{U}$, die den Punkt x enthalten, sie bilden eine abzählbare Menge $W_1, W_2, \cdots$. Wir setzen $W_n^\sim = W_1 \cap \cdots \cap W_n$. Zu jedem Index k gibt es eine Menge $Y \in \mathcal{F}$ mit $Y_k \subset W_k^\sim$. Da nun für jeden Index n gilt $A_n \cap Y_k \neq \emptyset$ sehen wir, daß es zu jedem k beliebig große Indizes n gibt mit $x_n \in W_k^\sim$. Es gibt also einen Index n_1 mit $x_{n_1} \in W_1^\sim$. Dann gibt es einen Index n_2 mit $n_2 > n_1$ und $a_{n_2} \in W_2^\sim$ und induktiv folgt, daß es eine Folge ganzer Zahlen $n_1 < n_2 < \cdots n_k < \cdots$ gibt mit $x_{n_k} \in W_k^\sim$.

Ich behaupte, daß die Teilfolge $\{x_{n_\nu}\}_{v=1\ldots}$ gegen x konvergiert. Denn zu jeder Umgebung $V \in \mathfrak{V}_x$ gibt es einen Index k mit $W_k^\sim \subset V$, und daher ist der Abschnitt $\{x_{n_k}, x_{n_{k+1}} \cdots\} \subset V$ nach Konstruktion der $W_k^\sim$.

Nehmen wir nun an, daß umgekehrt jede Folge eine konvergente Teilfolge habe. Sei $\{U_i\}_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von X. Betrachten wir nun die Menge $\mathfrak{U}' \subset \mathfrak{U}$, die aus denjenigen Mengen V aus $\mathfrak{U}$ bestehen, zu denen es ein $i \in I$ mit $V \subset U_i$ gibt. Dann ist

$$X = \bigcup_{V\in\mathfrak{U}} V,$$

und dies ist eine abzählbare Überdeckung, also

$$X = \bigcup_{i=1}^{\infty} V_i,$$

wobei wir jetzt die $V \in \mathfrak{U}'$ abgezählt haben. Angenommen es gäbe keine endliche Teilüberdeckung. Dann können wir zu jedem Index n ein x_n finden mit $x_n \notin \bigcup_{i=1}^n V_i$. Sei $x_{n_1}, x_{n_2} \cdots x_{n_k}$ mit $n_1 < n_2 < \cdots$ eine konvergente Teilfolge, sei $x \in \lim x_{n_k}$. Dann ist $x \notin \bigcup_{i=1}^\infty V_i$, denn sonst wäre $x \in V_{i_0}$ und dann $x_{n_\nu} \in V_{i_0}$ für genügend große ν und das ist ein Widerspruch.

3. Der Satz von Tychonoff: Sei I eine Indexmenge und $\{X_i\}_{i\in I}$ sei eine Familie von topologischen Räumen. Wir bilden die Produktmenge

$$\prod_{i\in I} X_i$$

und definieren darauf eine Topologie. Das tun wir, indem wir eine Basis der Topologie angeben (siehe III.4.5). Zu jeder endlichen Teilmenge $E \subset I$ sei $\mathfrak{U}_E$ das folgende System von Teilmengen von $\prod_{i\in I} X_i$:

$$\mathfrak{U}_E = \left\{ \prod_{i\notin E} X_i \times \prod_{j\in E} U_j \mid U_j \text{ läuft über die offenen Teilmengen von } X_j \right\}$$

und sei $\mathfrak{U} = \bigcup \mathfrak{U}_E$. Dann erfüllt $\mathfrak{U}$ die Anforderungen, die wir in III.4.5. gestellt haben und liefert uns dann eine Topologie auf $\prod_{i\in I} X_i$.

Nun gilt der folgende

Satz von Tychonoff: *Sei $\{X_i\}_{i\in I}$ eine Familie von quasikompakten topologischen Räumen. Dann ist der topologische Raum*

$$\prod_{i\in I} X_i$$

auch quasikompakt.

Wenn alle X_i hausdorffsch sind, dann ist auch $\prod_{i\in I} X_i$ hausdorffsch und somit kompakt.

Beweis: Sei $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter auf $\prod_{i\in I} X_i$. Sei $p_i(\mathcal{F}) = \mathcal{F}_i$ der Bildfilter unter der Projektion auf die i-te Komponente. Das ist wieder ein Ultrafilter, denn wenn $\emptyset \neq A_i \subset X_i$, dann ist $p_i^{-1}(A_i) \in \mathcal{F}$ oder $p_i^{-1}(X_i \backslash A_i) \in \mathcal{F}$. Also ist A_i oder $X_i \backslash A_i$ in $p_i(\mathcal{F}) = \mathcal{F}_i$. Sei $\lim \mathcal{F}_i \neq \emptyset$ die Menge der Limiten von $\mathcal{F}_i$. Sei $x \in \prod \lim \mathcal{F}_i \neq \emptyset$. Es folgt unmittelbar aus der Definition der Topologie, daß $x \in \lim \mathcal{F}$, also konvergiert $\mathcal{F}$. Bingo!

Man kann den Gebrauch des Auswahlaxioms vermeiden, wenn man etwas bescheidener in den Ansprüchen wird. Wenn wir annehmen, daß unsere Indexmenge I abzählbar ist, und wenn wir auch noch annehmen, daß alle die topologischen Räume X_i eine abzählbare Basis besitzen, dann kann man die Quasikompaktheit von $\prod X_i$ ohne das Auswahlaxiom beweisen.

Dazu überlegen wir uns, daß wir ausgehend von den abzählbaren Basen $\mathfrak{U}_i \subset \mathfrak{P}(X_i)$ eine abzählbare Basis von $\prod_{i\in I} X_i$ finden können. Dazu müssen wir nur bedenken, daß die Menge der endlichen Teilmengen von I wieder abzählbar ist. Dann sind also die Mengen

$$\mathfrak{U}_E = \left\{ \prod_{i\in I\backslash E} X_i \times \prod_{i\in E} U_i \right\},$$

wobei jetzt die U_i über die abzählbaren Basen in den X_i mit $i \in E$ läuft, wieder abzählbar. Dann ist aber auch

$$\bigcup_{E\subset I} \mathfrak{U}_E$$

abzählbar. Also besitzt $\prod_{i\in I} X_i$ eine abzählbare Basis.

Nun wenden wir das Folgenkriterium für Kompaktheit an. Wir denken uns I abgezählt und betrachten eine Folge

$$\underline{x}_1, \underline{x}_2, \cdots \underline{x}_n \cdots \in X_1 \times X_2 \times \cdots X_n$$

(natürlich darf das Produkt auf der rechten Seite auch endlich sein).

Die $\underline{x}_\nu$ haben nun Komponenten

$$\underline{x}_\nu = (x_\nu^{(1)}, x_\nu^{(2)}, \cdots, x_\nu^{(n)}, \cdots)$$

mit $x_\nu^{(n)} \in X_n$. Es gibt nun eine Teilfolge

$$\underline{x}_{\nu_1}, \underline{x}_{\nu_2} \cdots \qquad \text{mit} \qquad \nu_1 < \nu_2 < \cdots,$$

so daß die Folge der ersten Komponenten konvergiert, d. h. $\lim x_{\nu_i}^{(1)} \neq \emptyset$.

Von dieser Teilfolge gibt es eine Teilfolge

$$\underline{x}_{\nu_{\mu_2}}, \underline{x}_{\nu_{\mu_2}} \cdots \mu_1 < \mu_2 < \cdots,$$

so daß nun auch die zweiten Komponenten konvergieren. Diese setzen wir fort und betrachten die Teilfolge

$$\{\underline{x}_1, \underline{x}_{\nu_2}, \underline{x}_{\nu_{\mu_3}} \cdots\},$$

die dann konvergiert.

4. Die Eigenschaft eines topologischen Raumes quasikompakt zu sein, ist eine Endlichkeitseigenschaft. Natürlich ist jeder endliche topologische Raum quasikompakt. Auf jeder beliebigen Menge gibt es eine Topologie, so daß der Raum quasikompakt wird. Dafür können wir die indiskrete Topologie wählen.

4.1 Satz: *Seien $X.Y$ topologische Räume, sei X quasikompakt und $f : X \to Y$ sei surjektiv und stetig. Dann ist auch Y quasikompakt.*

Beweis: klar.

4.2 Satz: *Sei X ein quasikompakter topologischer Raum. Dann ist eine abgeschlossene Teilmenge $A \subset X$ versehen mit der induzierten Topologie auch quasikompakt. Wenn der Raum X hausdorffsch ist, dann ist eine Teilmenge genau dann kompakt, wenn sie abgeschlossen ist.*

Beweis: Sei $A = \bigcup_{i\in I} V_i$ eine offene Überdeckung. Nach Definition ist dann $V_i = A \cap U_i$ mit geeigneten $U_i \in \mathbf{Off}(X)$ und

$$X = \bigcup_{i\in I} U_i \cup C\ A.$$

Diese Überdeckung hat eine endliche Teilüberdeckung und das gilt dann auch für $A = \bigcup_{i\in I} V_i$.

Die Umkehrung ist auch klar, da wird aber benutzt, daß X hausdorffsch ist.

Man sagt, daß eine Teilmenge eines topologischen Raumes *quasikompakt* ist, wenn sie als topologischer Raum mit der induzierten Topologie quasikompakt ist.

Wir haben im Abschnitt I gesehen, daß es auf einer endlichen Menge X viele Topologien gibt. Insbesondere kann es vorkommen, daß die Identität

$$(X, \mathbf{Off}_1(X)) \longrightarrow (X, \mathbf{Off}_2(X))$$

stetig ist, ihre Umkehrung aber nicht.

Man sagt, daß eine stetige, bijektive Abbildung

$$f : X \longrightarrow Y$$

zwischen topologischen Räumen ein *Homöomorphismus* ist, wenn auch ihre Umkehrung stetig ist. Hier gilt nun:

4.3 Satz: *Seien $X.Y$ topologische Räume und*

$$f : X \longrightarrow Y$$

sei bijektiv und stetig. Ferner sei X quasikompakt und Y hausdorffsch. Dann ist f ein Homöomorphismus.

Beweis: Sei $g : Y \to X$ die Umkehrung. Wir wählen eine offene Menge $U \subset X$ und müssen zeigen, daß $g^{-1}(U) = f(U)$ offen ist. Das ist genau dann der Fall, wenn für $A = X \backslash U$ gilt. $f(A)$ ist abgeschlossen. Nun ist A aber kompakt (Satz 4.2, für diese Richtung brauchen wir nicht, daß X hausdorffsch ist), also ist $f(A)$ kompakt. Weil Y jetzt hausdorffsch ist, folgt, daß $f(A)$ abgeschlossen ist.

5. Einige kompakte Räume

Im ersten Semester lernt man, daß in $\mathbb{R}$ jede nach oben und unten beschränkte Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge besitzt. Daraus folgt, daß jedes abgeschlossene Intervall $[a,b]\subset\mathbb{R}$ kompakt ist. Hier benutzen wir, daß $\mathbb{R}$ eine abzählbare Basis hat. Wenn wir die "milde" Form des Satzes von Tychonoff anwenden, dann erhalten wir, daß im $\mathbb{R}^n$ jeder abgeschlossene Würfel

$$W=\prod_{i=1}^{n}[a_i,b_i]$$

kompakt ist und bekommen

5.1 Satz: *Eine Teilmenge $A\subset\mathbb{R}^n$ ist genau dann kompakt, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist.*

Daraus erhält man dann:

5.2 Korollar: *Wenn $A\subset\mathbb{R}^n$ abgeschlossen und beschränkt ist, und wenn*

$$f:A\longrightarrow\mathbb{R}$$

stetig ist, dann ist $f(A)$ beschränkt und f nimmt ein Maximum und ein Minimum an.

5.3 Es sei $I=\{1,2,\cdots n\cdots\}$ und es sei $\{X_\nu\}_{\nu\in I}$ eine Familie von quasikompakten topologischen Räumen. Für alle $\nu>1$ sei eine stetig Abbildung

$$f_\nu : X_v \longrightarrow X_{\nu-1}$$

gegeben. (Dann haben wir für alle Paar $\nu>\mu$ eine stetige Abbildung $f_{\nu,\mu}=f_{\mu+1,\nu}\circ\cdots\circ f_{\nu,\nu-1}$.). Ein solches Datum nennt man ein projektives System.

Wir definieren nun den projektiven Limes

$$\lim_{\leftarrow} X_\nu=\{(\cdots x_\nu\cdots x_1)\mid f(x_\nu)=x_{\nu-1}\text{ für alle }\nu>1\}$$

als Teilmenge des Produktes $\prod X_\nu$.

5.3.1 *Der projektive Limes eines projektiven Systems kompakter Räume ist kompakt.*

Hier stand vorher diese Behauptung für quasikompakte Räume, dann ist sie aber falsch! Darauf hat mich jemand aufmerksam gemacht, wofür ich mich an dieser Stelle bedanke. Man benötigt an dieser Stelle, daß die Räume hausdorffsch sind, damit man zeigen kann, daß $\lim\limits_{\leftarrow} X_\nu$ eine abgeschlossene Teilmenge im Produkt ist. Genauer benötigt man

Lemma: *Es seien X, Y zwei topologische Räume, es sei $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung. Wenn der Raum Y hausdorffsch ist, dann ist der Graph $\Gamma_f = \{(x, f(x)) | x \in X\}$ als Teilmenge des mit der Produkttopologie versehen Produktes $X \times Y$ abgeschlossen.*

Der Beweis sei dem Leser überlassen. Man kann sogar zeigen, daß für einen Raum X die Diagonale Δ_X genau dann im Produkt $X \times X$ abgeschlossen ist, wenn X hausdorffsch ist. (übungsaufgabe)

Die Aussage **3.5.1.** ist schon dann ein nützlicher Satz, wenn die Räume X_ν endliche Mengen mit der diskreten Topologie versehen sind. Dann sind die X_ν kompakt und hausdorffsch. Dann ist sowohl

$$\prod_{\nu \in \mathbb{N}} X_\nu$$

also auch

$$\lim_{\leftarrow} X_\nu$$

kompakt (wenn uns ein projektives System $f_v : X_\nu \to X_{\nu-1}$ gegeben ist).

Solche topologischen Räume, die man als projektive Limiten von endlichen Mengen (mit der diskreten Topologie versehen) schreiben kann, nennt man proendlich.

5.3.2 Diese spielen in der Algebra und Zahlentheorie eine Rolle. Sei zum Beispiel p eine Primzahl. Dann kann man für jede Zahl m den Ring

$$\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}$$

betrachten. Dies ist ein endlicher Ring, den wir mit der diskreten Topologie versehen. Für jedes Paar $n > m$ haben wir die Abbildung

$$\varphi_{n,m} : \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z},$$

und wir setzen dann

$$\mathbb{Z}_p = \lim_{\leftarrow} \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}.$$

Dies ist dann ein nullteilerfreier Ring, der den Ring $\mathbb{Z}$ enthält:

$$\begin{aligned} i :& \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_p \\ & x \mapsto (\cdots x \mod p^m \cdots). \end{aligned}$$

Nun haben wir auf $\mathbb{Z}_p$ noch die Topologie des projektiven Limes. Mit dieser Topologie wird dann $\mathbb{Z}_p$ zu einem kompakten topologischen Hausdorff-Ring. Der Quotientenkörper $\mathbb{Q}_p$ dieses Ringes heißt Körper der p-adischen Zahlen.

Man kann diese Begriffe auch noch verallgemeinern. Sei I eine beliebige Indexmenge mit einer Ordnungsrelation $<$. Es sei wieder $i = j \Leftrightarrow (i < j$ und $j < i)$.

Es sein nun eine Familie $\{X_i\}_{i\in I}$ von topologischen Räumen gegeben. Für je zwei vergleichbare Indizes $i < j$ sei eine stetige Abbildung

$$\varphi_{ji} : X_j \longrightarrow X_i$$

gegeben, und es gelte

(a) $\varphi_{ii} = \mathrm{Id}$.

(b) Ist $k > j > i$, dann ist

$$\varphi_{ki} = \varphi_{ji} \circ \varphi_{kj}.$$

Auch so etwas nennt man ein projektives System von topologischen Räumen. Wir können wieder den projektiven Limes bilden

$$\lim_{\leftarrow}(X_i, \varphi_{ji}) = \{(\cdots x_j \cdots x_i \cdots) \mid \varphi_{ji}(x_j) = x_i\},$$

und haben dann:

Der projektive Limes eines projektiven Systems von kompakten Räumen ist wieder kompakt.

Hierzu gebe ich noch zwei Beispiele:

5.4.1 Wir betrachten auf der Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen die durch die Teilbarkeit gegebene Ordnungsrelation

$$n << m \text{ heißt} n \mid m.$$

Dann haben wir Ringhomomorphismen

$$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$

falls $n << m$, und wir können den projektiven Limes bilden

$$\hat{\mathbb{Z}} = \lim_{\leftarrow} \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$$

und erhalten einen kompakten topologischen Ring.

Es ist ziemlich leicht zu sehen (Chinesischer Restsatz), daß

$$\hat{\mathbb{Z}} = \prod_p \mathbb{Z}_p,$$

wobei p über alle Primzahlen läuft.

5.4.2 Sei $\overline{\mathbb{Q}}$ ein algebraischer Abschluß des rationalen Zahlkörpers $\mathbb{Q}$. Dann ist $\overline{\mathbb{Q}}$ die Vereinigung aller Zwischenkörper K, die endlich und normal über $\mathbb{Q}$ sind. Für jeden solchen Zwischenkörper $K/\mathbb{Q}$ haben wir die Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ der Automorphismen von K. Wenn $\mathbb{Q} \subset K \subset L$, dann haben wir einen surjektiven Homomorphismus

$$\varphi_{L/K} : \mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}) \longrightarrow \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}),$$

der durch die Einschränkung gegeben ist. Wir können dann den projektiven Limes bilden

$$\varprojlim_{K/\mathbb{Q}} \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}).$$

Die Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ ist die Gruppe aller Automorphismen von $\overline{\mathbb{Q}}$, und es ist leicht zu sehen, daß

$$\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \longrightarrow \varprojlim_{K/\mathbb{Q}} \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$$

ein Isomorphismus zwischen Gruppen ist. Auf der rechten Seite haben wir jetzt aber die Topologie des projektiven Limes und damit wird $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ zu einer proendlichen topologischen Gruppe.