TOPOLOGIE

VORLESUNG IM SOMMERSEMESTER 1996

an der Eberhard-Karls-Universität Tübingen

Richard Bödi

Inhalt

KAPITEL 1

Topologische Räume und stetige Abbildungen

(1.1) Definition. Sei X eine Menge und sei $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Das Paar $(X, \mathcal{O})$ (oder einfach nur X) heißt **topologischer Raum**, wenn gilt:

(T1) $\emptyset \in \mathcal{O}$, $X \in \mathcal{O}$

(T2) $\forall\, \mathcal{O}' \subseteq \mathcal{O} : \bigcup \mathcal{O}' \in \mathcal{O}$

(T3) $\forall\, \mathcal{O}' \subseteq \mathcal{O}$ ($\mathcal{O}'$ endlich $\implies \bigcap \mathcal{O}' \in \mathcal{O}$).

Das Mengensystem $\mathcal{O}$ heißt **Topologie** auf X, die Elemente O von $\mathcal{O}$ heißen **offene Mengen**, geschrieben als $O \underline{\subseteq}_{\circ} X$. Eine Menge $A \subseteq X$ heißt **abgeschlossen**, in Zeichen $A \overline{\subseteq} X$, wenn sie das Komplement einer offenen Menge ist.

Bemerkung. Offenheit und Abgeschlossenheit sind *keine* Gegensätze; es gibt Mengen, die sowohl offen als auch abgeschlossen sind (etwa $\emptyset$ und X).

(1.2) Beispiele. Sei X eine Menge.

(a) $\mathcal{O}_{\text{indiskret}} = \{\emptyset, X\}$ ist eine Topologie auf X, genannt die **indiskrete Topologie**.

(b) $\mathcal{O}_{\text{diskret}} = \mathcal{P}(X)$ ist eine Topologie auf X, genannt die **diskrete Topologie**.

(c) $\mathcal{O}_{\text{cofinit}} = \{O \subseteq X \mid X \setminus O \text{ endlich}\} \cup \{\emptyset\}$ ist eine Topologie auf X, genannt die **cofinite Topologie**.

(d) $\mathcal{O}_S = \{\emptyset, X, \{1\}\}$ ist eine Topologie auf $X = \{0, 1\}$, genannt die **Sierpinski-Topologie**.

(1.3) Definition. Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum und sei $x \in X$. Eine Menge U heißt **Umgebung von** x, wenn es eine offene Menge $O \underline{\subseteq}_{\circ} X$ mit $x \in O \subseteq U$ gibt. Das Mengensystem $\mathcal{U}(x)$ aller Umgebungen von x heißt **Umgebungsfilter von** x. Das Teilsystem aller *offenen* Umgebungen von x wird mit $\mathcal{O}(x)$ bezeichnet. Für $A \subseteq X$ heißt U eine **Umgebung von** A, falls $U \in \mathcal{U}(x)$ für alle $x \in A$ ist. Die Familie aller Umgebungen von A wird mit $\mathcal{U}(A)$ bezeichnet. Die Menge $\mathcal{O}(A)$ wird entsprechend definiert.

(1.4) Lemma. *Sei O Teilmenge eines topologischen Raumes X. Dann sind äquivalent:*

(a) O ist offen.

(b) $O \in \mathcal{U}(x)$ für alle $x \in O$.

(c) $\forall\, x \in O\ \exists\, U \in \mathcal{U}(x) : U \subseteq O.$

Beweis. (a) $\Longrightarrow$ (b): trivial.
(b) $\Longrightarrow$ (c): Wähle $U = O$.
(c) $\Longrightarrow$ (a): Zu $x \in O$ sei $V_x \in \mathcal{U}(x)$ mit $V_x \subseteq O$. Zu V_x gibt es ein $O_x \in \mathcal{O}$ mit $x \in O_x \subseteq V_x \subseteq O$. Wegen $O = \bigcup_{x \in O} O_x$ ist O offen nach (T2). □

(1.5) Lemma. *Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum und sei $x \in X$. Dann gilt für den Umgebungsfilter $\mathcal{U}(x)$:*

(U1) $\forall\, U \in \mathcal{U}(x) : x \in U.$
(U2) $\forall\, U \in \mathcal{U}(x)\ \exists\, V \in \mathcal{U}(x)\ \forall\, y \in V : U \in \mathcal{U}(y).$
(U3) $\forall\, U, V \subseteq X\ ((U \subseteq V \wedge U \in \mathcal{U}(x)) \Longrightarrow V \in \mathcal{U}(x)).$
(U4) $\forall\, U, V \in \mathcal{U}(x) : U \cap V \in \mathcal{U}(x).$

Beweis. (U1) und (U3) sind trivial. Zu jeder Umgebung $U \in \mathcal{U}(x)$ gibt es eine offene Umgebung $V \in \mathcal{O}(x)$ mit $V \subseteq U$. Damit folgt (U2) aus (1.4)(b) und (U3). (U4) folgt sofort aus (T2). □

(1.6) Lemma. *Sei X eine Menge und für jedes $x \in X$ sei eine Familie $\mathcal{U}(x)$ von Teilmengen von X definiert, die (U1) bis (U4) erfüllt. Dann gibt es genau eine Topologie $\mathcal{O}$ auf X, so daß die Familien $\mathcal{U}(x)$ Umgebungsfilter sind.*

Beweis. Für $U \in \mathcal{U}(x)$ setze $U^\circ := \{y \in X \mid U \in \mathcal{U}(y)\}$ sowie $\mathcal{O}(x) := \{U^\circ \mid U \in \mathcal{U}(x)\}$. Setze $\mathcal{O} := \bigcup_{x \in X} \mathcal{O}(x) \cup \{\emptyset\}$. Das Mengensystem $\mathcal{O}$ ist eine Topologie auf X:
(T1): $\emptyset \in \mathcal{O}$ ist klar, $X \in \mathcal{O}$ folgt sofort aus (U3).
(T2): Sei $\mathcal{O}' \subseteq \mathcal{O}$, setze $O := \bigcup \mathcal{O}'$ und sei $y \in O$. Dann gibt es ein $O' \in \mathcal{O}'$ mit $y \in O'$, also $O' \in \mathcal{O}(y)$. Damit ist $O \in \mathcal{U}(y)$ nach (U3) und es folgt $O \overset{\circ}{\subseteq} X$ aus (1.4)(b), da $y \in O$ beliebig.
(T3): Folgt sofort aus (U4).

Sei $x \in X$ und sei $\mathcal{V}(x)$ der Umgebungsfilter von x bzgl. der Topologie $\mathcal{O}$. Es ist $\mathcal{V}(x) = \mathcal{U}(x)$ nachzuweisen. Sei $V \in \mathcal{V}(x)$. Dann gibt es ein $O \in \mathcal{O}$ mit $x \in O \subseteq V$, wobei nach Definition $O \in \mathcal{U}(x)$ gilt. Aus (U3) folgt nun $V \in \mathcal{U}(x)$. Sei umgekehrt $U \in \mathcal{U}(x)$. Wir zeigen $x \in U^\circ \in \mathcal{O}$. Nach (U1) ist $x \in U^\circ$. Für $y \in U$ gibt es nach (U2) ein $V \in \mathcal{U}(y)$ mit $U \in \mathcal{U}(z)$ für alle $z \in V$. Also ist $V \subseteq U^\circ$ und wir haben gezeigt, daß $U^\circ \in \mathcal{U}(y)$ für alle $y \in U^\circ$ ist. Nach (1.4)(b) ist also $U^\circ \in \mathcal{O}$. □

(1.7) Definition. Eine Teilfamilie $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{O}$ heißt **Basis** der Topologie $\mathcal{O}$, falls jede nichtleere Menge $O \in \mathcal{O}$ Vereinigung von Elementen aus $\mathcal{B}$ ist. Eine Teilfamilie $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{O}$ heißt **Subbasis** von $\mathcal{O}$, falls $\{O_1 \cap \ldots \cap O_n \mid n \in \mathbb{N}, O_i \in \mathcal{S}\}$ eine Basis von $\mathcal{O}$ ist. Eine Teilfamilie $\mathcal{B}(x) \subseteq \mathcal{U}(x)$ eines Umgebungsfilters $\mathcal{U}(x)$ heißt **Umgebungsbasis** von x, falls für jedes $U \in \mathcal{U}(x)$ ein $V \in \mathcal{B}(x)$ mit $V \subseteq U$ existiert.

Bemerkung. Zu einer vorgebenen Topologie gibt es im allgemeinen viele verschiedene Basen und Subbasen.

(1.8) Lemma. *Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum. Eine Teilfamilie $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{O}$ ist genau dann eine Basis von $\mathcal{O}$, wenn es zu jedem $x \in X$ und jedem $O \in \mathcal{O}$ ein $U \in \mathcal{B}$ mit $x \in U \subseteq O$ gibt.*

Beweis. Natürlich erfüllt jede Basis $\mathcal{B}$ von $\mathcal{O}$ die angegebene Eigenschaft. Umgekehrt sei $O \in \mathcal{O}$. Zu jedem $x \in O$ gibt es ein $U_x \in \mathcal{B}$ mit $x \in U_x \subseteq O$. Damit folgt $O = \bigcup_{x \in O} U_x$. □

(1.9) Lemma. *Sei X eine Menge und sei $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ mit*

(B1) $\forall\, U, V \in \mathcal{B}\ \forall\, x \in U \cap V\ \exists\, W \in \mathcal{B} : x \in W \subseteq U \cap V$,

(B2) $\forall\, x \in X\ \exists\, U \in \mathcal{B} : x \in U$.

Setzt man $\mathcal{O} := \{\bigcup \mathcal{B}' \mid \mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}\}$, so ist $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum und $\mathcal{B}$ ist eine Basis von $\mathcal{O}$. Umgekehrt erfüllt jede Basis $\mathcal{B}$ einer Topologie (B1) und (B2).

Beweis. $(X, \mathcal{O})$ ist ein topologischer Raum:
(T1): $\emptyset = \bigcup \emptyset \in \mathcal{O}$ und $X = \bigcup \mathcal{B} \in \mathcal{O}$ wegen (B2) und der Definition von $\mathcal{O}$.
(T2): Folgt sofort aus der Definition von $\mathcal{O}$.
(T3): Es genügt, Axiom (T3) für zwei Mengen zu zeigen. Seien $U, V \in \mathcal{O}$, also $U = \bigcup \mathcal{B}_1$ und $V = \bigcup \mathcal{B}_2$ mit $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2 \subseteq \mathcal{B}$. Dann ist

$$U \cap V = \bigcup \mathcal{B}_1 \cap \bigcup \mathcal{B}_2 = \bigcup_{A \in \mathcal{B}_1, B \in \mathcal{B}_2} A \cap B.$$

Wegen (T2) genügt es zu zeigen, daß $A \cap B \in \mathcal{O}$ ist. Nach (B1) gilt:

$$\forall\, x \in A \cap B\ \exists\, W_x \in \mathcal{B} : x \in W_x \subseteq A \cap B,$$

also ist $A \cap B = \{W_x \mid x \in A \cap B\}$. Somit ist $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum.
Sei umgekehrt $\mathcal{B}$ eine Basis einer Topologie $\mathcal{O}$. Seien $U, V \in \mathcal{B}$. Wegen $U \cap V \in \mathcal{O}$ ist $U \cap V = \bigcup \mathcal{B}'$ mit $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$. Sei $x \in U \cap V$. Dann gibt es ein $W \in \mathcal{B}'$ mit $x \in W$. Wegen $W \subseteq U \cap V$ folgt (B1). Schließlich folgt (B2) sofort wegen $X \in \mathcal{O}$ und der Definition einer Basis. □

(1.10) Lemma. *Sei X eine Menge. Jede Familie $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$ bildet eine Subbasis einer Topologie $\mathcal{O}$ auf X.*

Beweis. Sei $\mathcal{B} = \{O_1 \cap \ldots \cap O_n \mid n \in \mathbb{N}, O_i \in \mathcal{S}\}$. Wir zeigen, daß $\mathcal{B}$ eine Basis ist, d.h. (B1) und (B2) erfüllt. (B1) gilt laut Definition einer Subbasis: Für $U = O_1 \cap \ldots \cap O_n$ und $V = O_{n+1} \cap \ldots \cap O_m$ gilt (B1) mit $W = O_1 \cap \ldots \cap O_m$. Axiom (B2) gilt wegen $X = \bigcap \emptyset$. □

Bemerkung. Man kann leicht zeigen, daß eine Basis bzw. eine Subbasis die zugehörige Topologie eindeutig bestimmt.

(1.11) Weitere Beispiele.

(a) Sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann bildet die Menge aller ε-Kugeln $U_\varepsilon(x) = \{y \in X \mid d(x,y) < \varepsilon\}$ $(x \in X)$ eine Basis $\mathcal{B}_d$ einer Topologie $\mathcal{O}_d$ auf X. (Wann diese Aussage umgekehrt werden kann, zeigen die Metrisationssätze).

(b) Sei $(X, \leq)$ ein linear geordneter Raum. Dann bildet die Menge aller Intervalle (a,b) für $a, b \in X$ mit $a < b$ eine Basis $\mathcal{B}_\leq$ einer Topologie $\mathcal{O}_\leq$ auf X. Eine Subbasis von $\mathcal{O}_\leq$ ist z.B. die Familie aller Mengen $\{x \in X \mid x > a\}$ und $\{x \in X \mid x < b\}$ für $a, b \in X$. Die Topologie $\mathcal{O}_\leq$ heißt **Ordnungstopologie auf** X.

(1.12) Definition (Hausdorff 1914). Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum, und sei $A \subseteq X$.

(a) Die Menge $A^\circ := \bigcup_{O \subseteq A, O \in \mathcal{O}} O$ heißt das **Innere** von A (bzgl. $\mathcal{O}$).

(b) Die Menge $\overline{A} := \bigcap_{A \subseteq C, C \,\overline{\subseteq}\, X} C$ heißt der **Abschluß** von A (bzgl. $\mathcal{O}$).

(c) Die Menge $\partial A := \overline{A} \setminus A^\circ$ heißt der **Rand** von A (bzgl. $\mathcal{O}$).

(d) Eine Element $x \in X$ heißt **Häufungspunkt** von A, falls $x \in \overline{A \setminus \{x\}}$. Die Menge aller Häufungspunkte von A wird mit A' bezeichnet. Punkte aus $X \setminus X'$ heißen **isoliert**.

(e) A heißt **dicht** in X, falls $\overline{A} = X$ ist.

(1.13) Lemma. *Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum und seien $A, B \subseteq X$.*

(a) $x \in \overline{A} \iff \forall U \in \mathcal{U}(x) : U \cap A \neq \emptyset \iff \exists$ Umgebungsbasis $\mathcal{B}(x)$ $\forall U \in \mathcal{B}(x) : U \cap A \neq \emptyset$.

(b) *A dicht in X* $\iff \forall O \in \mathcal{O} : O \cap A \neq \emptyset \iff \exists$ Basis $\mathcal{B}$ $\forall O \in \mathcal{B} : O \cap A \neq \emptyset \implies \forall O \,\underline{\circ}\, X : \overline{O} = \overline{O \cap A}$.

(c) $\forall O \in \mathcal{O}$ $(O \cap A = \emptyset \implies O \cap \overline{A} = \emptyset)$.

(d) $\overline{\emptyset} = \emptyset$, $A \subseteq \overline{A}$, $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$, $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.

(e) $A^\circ = X \setminus (\overline{X \setminus A}) = A \setminus \partial A$, $\overline{A} = A \cup \partial A = A \cup A'$.

(f) $X^\circ = X$, $A^\circ \subseteq A$, $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$, $A^{\circ\circ} = A^\circ$.

(g) $\partial X = \emptyset = \partial\emptyset$, $\partial(A \cup B) \subseteq \partial A \cup \partial B$, $\partial(A \cap B) \subseteq (\overline{A} \cap \partial B) \cup (\partial A \cap \overline{B})$.

(h) $A \subseteq B \implies A' \subseteq B'$, $(A \cup B)' = A' \cup B'$.

Beweis. (a) Sei $x \in \overline{A}$. Annahme: $\exists U \in \mathcal{U}(x) : U \cap A = \emptyset$. Dann ist $x \in U^\circ$, $A \subseteq X \setminus U^\circ \,\overline{\subseteq}\, X$ und $\overline{A} \subseteq X \setminus U^\circ$, also $x \notin \overline{A}$, ein Widerspruch. Die zweite Implikation ist trivial. Sei schließlich $x \in X$ und sei $\mathcal{B}(x)$ eine Umgebungsbasis von x mit $U \cap A \neq \emptyset$ für alle $U \in \mathcal{B}(x)$. Annahme: $x \notin \overline{A}$. Dann gibt es ein $C \,\overline{\subseteq}\, X$ mit $A \subseteq C$ und $x \notin C$, also $x \in X \setminus C \,\underline{\circ}\, X$, d.h. $X \setminus C \in \mathcal{U}(x)$ nach (1.4). Dann gibt es ein $U \in \mathcal{B}(x)$ mit $U \subseteq X \setminus C \subseteq X \setminus A$, was $U \cap A \neq \emptyset$ widerspricht.

(b) Die ersten beiden Äquivalenzen folgen sofort aus (a). Natürlich ist $\overline{O \cap A} \subseteq \overline{O}$. Umgekehrt sei $x \in \overline{O}$. Dann gilt $U \cap O \neq \emptyset$ für alle $U \in \mathcal{U}(x)$. Da A dicht ist in X, folgt $U \cap A \neq \emptyset$ und $O \cap A \neq \emptyset$, also $U \cap (O \cap A) \neq \emptyset$ für alle $U \in \mathcal{U}(x)$. Somit ist $x \in \overline{O \cap A}$ nach (a).
(c) Wäre $x \in O \cap \overline{A}$, so wäre $O \in \mathcal{U}(x)$ nach (1.4)(b), also $O \cap A \neq \emptyset$, ein Widerspruch.
(d) $\emptyset \mathrel{\overline{\subseteq}} X$ gilt nach (T1) und $A \subseteq \overline{A}$ gilt nach Definition des Abschlusses. Es ist $A \cup B \subseteq \overline{A} \cup \overline{B} \mathrel{\overline{\subseteq}} X$, also $\overline{A \cup B} \subseteq \overline{A} \cup \overline{B}$. Umgekehrt ist $\overline{A} \subseteq \overline{A \cup B}$ und $\overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$, also $\overline{A} \cup \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$. Die Gleichung $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$ ist klar.
(e) Nach (c) ist $X \setminus A \subseteq \overline{X \setminus A}$, also $X \setminus (\overline{X \setminus A}) \subseteq X \setminus (X \setminus A) = A$. Wegen $X \setminus (\overline{X \setminus A}) \overset{\circ}{\subseteq} X$ folgt $X \setminus (\overline{X \setminus A}) \subseteq A^\circ$. Sei umgekehrt $U \subseteq A$ offen. Dann ist $X \setminus A \subseteq X \setminus U = \overline{X \setminus U}$ und somit $\overline{X \setminus A} \subseteq X \setminus U$. Es folgt $U \subseteq X \setminus (\overline{X \setminus A})$. Damit gilt $A^\circ \subseteq X \setminus (\overline{X \setminus A})$. Schließlich ist $A \setminus \partial A = A \setminus (\overline{A} \setminus A^\circ) = A \setminus (A \setminus A^\circ) = A^\circ$. Die zweite Gleichung wird ähnlich bewiesen.
(f) Folgt aus (d) unter Anwendung der De Morganschen Regeln.
(g) und (h): einfach. □

(1.14) Definition (Frechét 1910, Hausdorff 1914, Hurewicz 1926, Weyl 1913, Armszajk 1931). Seien X und Y topologische Räume und sei $f : X \to Y$ eine Abbildung.

(a) Die Abbildung f heißt **stetig in** $x \in X$, falls für jede Umgebung $V \in \mathcal{U}(f(x))$ eine Umgebung $U \in \mathcal{U}(x)$ mit $f(U) \subseteq V$ existiert.
(b) Die Abbildung f heißt **stetig**, in Zeichen $f : X \overset{\sim}{\to} Y$, falls $f^{-1}(U) \overset{\circ}{\subseteq} X$ für alle $U \overset{\circ}{\subseteq} Y$ ist.
(c) Die Abbildung f heißt **offen (abgeschlossen)**, falls das Bild jeder in X offenen (abgeschlossenen) Menge in Y offen (abgeschlossen) ist.
(d) Die Abbildung f heißt ein **Homöomorphismus**, falls f bijektiv ist und sowohl f als auch f^{-1} stetig ist.

(1.15) Lemma. *Seien $(X, \mathcal{O}_1)$ und $(Y, \mathcal{O}_2)$ topologische Räume und sei $f : X \to Y$ eine Abbildung. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(a) f ist stetig.
(b) f ist stetig in allen Punkten $x \in X$.
(c) Es existiert eine Basis $\mathcal{B}_2$ von $\mathcal{O}_2$, so daß $f^{-1}(U) \in \mathcal{O}_1$ ist für alle $U \in \mathcal{B}_2$.
(d) Es existiert eine Subbasis $\mathcal{S}_2$ von $\mathcal{O}_2$, so daß $f^{-1}(U) \in \mathcal{O}_1$ ist für alle $U \in \mathcal{S}_2$.
(e) $\forall\, B \mathrel{\overline{\subseteq}} Y : f^{-1}(B) \mathrel{\overline{\subseteq}} X$.
(f) $\forall\, A \subseteq X : f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.
(g) $\forall\, B \subseteq Y : \overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}(\overline{B})$.
(h) $\forall\, B \subseteq Y : f^{-1}(B^\circ) \subseteq (f^{-1}(B))^\circ$.

Beweis. (a) $\Longrightarrow$ (b): Sei $x \in X$ und $V \in \mathcal{U}(f(x))$. Sei $W \in \mathcal{O}$ mit $x \in W \subseteq V$. Zu zeigen ist: Es existiert $U \in \mathcal{U}(x)$ mit $f(U) \subseteq V$. Da f stetig ist, ist $f^{-1}(W) \overset{\circ}{\subseteq} X$.

Wegen $x \in f^{-1}(f(x)) \subseteq f^{-1}(W) \subseteq f^{-1}(V)$ ist $f^{-1}(V) \in \mathcal{U}(x)$ nach (1.4). Setze also $U := f^{-1}(V)$.
(b) $\Longrightarrow$ (c): Sei $\mathcal{B}_2$ eine Basis von $\mathcal{O}_2$ und sei $U \in \mathcal{B}_2$. Ist $f(X) \cap U = \emptyset$, so ist $f^{-1}(U) = \emptyset \in \mathcal{O}_1$. Sei also $f(X) \cap U \neq \emptyset$. Für $y \in f(X) \cap U$ und $x \in f^{-1}(y)$ ist $U \in \mathcal{U}(f(x))$ nach (1.4). Damit gilt nach Voraussetzung:

$$\forall\, y \in f(X) \cap U \ \forall\, x \in f^{-1}(y)\ \exists\, U_{x,y} \in \mathcal{U}(x) : f(U_{x,y}) \subseteq U.$$

Setze $W_{x,y} := (U_{x,y})^\circ$. Nach (1.4) ist $W_{x,y} \in \mathcal{U}(x)$ und $W_{x,y} \subseteq f^{-1}(f(W_{x,y})) \subseteq f^{-1}(U)$. Es folgt

$$\bigcup_{y \in U, x \in f^{-1}(y)} W_{x,y} \subseteq f^{-1}(U) \quad \text{und} \quad f^{-1}(U) = \bigcup_{y \in U} f^{-1}(y) \subseteq \bigcup_{y \in U, x \in f^{-1}(y)} W_{x,y}.$$

Also gilt nach (T2)

$$f^{-1}(U) = \bigcup_{y \in U, x \in f^{-1}(y)} W_{x,y} \in \mathcal{O}_1.$$

(c) $\Longrightarrow$ (d): Trivial.
(d) $\Longrightarrow$ (e): Sei $A \mathrel{\overline{\subseteq}} X$. Wegen $f^{-1}(A) = X \setminus f^{-1}(Y \setminus A)$ zeigen wir, daß $f^{-1}(Y \setminus A)$ offen in X ist. Sei $\mathcal{S}_2$ eine Subbasis von $\mathcal{O}_2$ und sei $\mathcal{B}_2 = \{O_1 \cap \ldots \cap O_n \mid n \in \mathbb{N}, O_i \in \mathcal{S}\}$. Da $Y \setminus A$ offen in Y ist, gibt es $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}_2$ mit $Y \setminus A = \bigcup \mathcal{B}'$. Wegen $f^{-1}(O_1 \cap \ldots \cap O_n) = f^{-1}(O_1) \cap \ldots \cap f^{-1}(O_n)$ und $f^{-1}(O_i) \mathrel{\underline{\circ}} X$ nach Voraussetzung, ist $f^{-1}(U) \mathrel{\underline{\circ}} X$ für alle $U \in \mathcal{B}_2$ nach (T3). Also folgt

$$f^{-1}(Y \setminus A) = f^{-1}\Big(\bigcup_{U \in \mathcal{B}'} U\Big) = \bigcup_{U \in \mathcal{B}'} f^{-1}(U) \mathrel{\underline{\circ}} X.$$

(e) $\Longrightarrow$ (f): Aus $A \subseteq f^{-1}(\overline{f(A)}) \mathrel{\overline{\subseteq}} X$ folgt $\overline{A} \subseteq f^{-1}(\overline{f(A)})$ und damit ist $f(\overline{A}) \subseteq ff^{-1}(\overline{f(A)}) \subseteq \overline{f(A)}$.
(f) $\Longrightarrow$ (g): Aus $f(\overline{f^{-1}(B)}) \subseteq \overline{ff^{-1}(B)} \subseteq \overline{B}$ folgt $\overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}(\overline{B})$.
(g) $\Longrightarrow$ (h): Aus $\overline{f^{-1}(Y \setminus B)} \subseteq f^{-1}(\overline{Y \setminus B})$ und Lemma (1.13)(e) folgt $f^{-1}(B^\circ) = f^{-1}(Y \setminus (\overline{Y \setminus B})) = X \setminus f^{-1}(\overline{Y \setminus B}) \subseteq X \setminus \overline{f^{-1}(Y \setminus B)} = X \setminus \overline{X \setminus f^{-1}(B)} = f^{-1}(B)^\circ$.
(h) $\Longrightarrow$ (a): Sei U offen in Y. Dann ist $U^\circ = U$ und es folgt $f^{-1}(U) \subseteq f^{-1}(U)^\circ$. Nach (1.13)(f) ist also $f^{-1}(U) = f^{-1}(U)^\circ \mathrel{\underline{\circ}} X$. □

(1.16) Korollar. *Seien $f : (X, \mathcal{O}_1) \to (Y, \mathcal{O}_2)$ und $g : (Y, \mathcal{O}_2) \to (Z, \mathcal{O}_3)$ stetige Abbildungen. Dann ist auch die Komposition $g \circ f : (X, \mathcal{O}_1) \to (Z, \mathcal{O}_3)$ stetig.* □

(1.17) Definition. Seien $\mathcal{O}_1$ und $\mathcal{O}_2$ Topologien auf einer Menge X. Die Topologie $\mathcal{O}_1$ heißt **feiner** als $\mathcal{O}_2$ (bzw. $\mathcal{O}_2$ heißt **gröber** als $\mathcal{O}_1$), falls $\mathcal{O}_2 \subseteq \mathcal{O}_1$ gilt.

KAPITEL 2

Konstruktion topologischer Räume *(Nach Bourbaki 1951)*

(2.1) Die Initialtopologie. Sei X eine Menge, $(Y_i, \mathcal{O}_i)_{i\in I}$ eine Familie topologischer Räume und $f_i : X \to Y_i$ $(i \in I)$ Abbildungen.
Ziel: Konstruiere aus $\mathcal{O}_i$ und den Abbildungen f_i eine Topologie $\mathcal{O}(X, \mathcal{O}_i, f_i)$ auf X. Die Topologie $\mathcal{O}(X, \mathcal{O}_i, f_i)$ wird **Initialtopologie auf X bzgl.** $\{f_i\}_{i\in I}$ genannt.
Idee: $\mathcal{O}(X, \mathcal{O}_i, f_i)$ soll gerade so fein sein, daß alle f_i stetig werden.
Ausführung: Setze $\mathcal{S}_i := \left\{ f_i^{-1}(O) \,\middle|\, O \in \mathcal{O}_i \right\}$ für $i \in I$ sowie $\mathcal{S} = \bigcup_{i\in I} \mathcal{S}_i$. Nach Lemma (1.10) ist $\mathcal{S}$ eine Subbasis, welche eine Topologie $\mathcal{O}(X, \mathcal{O}_i, f_i)$ (eindeutig) definiert. Nach Konstruktion von $\mathcal{O}(X, \mathcal{O}_i, f_i)$ sind die Abbildungen f_i stetig.

(2.2) Lemma. *Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum mit $\mathcal{O} = \mathcal{O}(X, \mathcal{O}_i, f_i)$ und sei $g : Z \to X$ eine Abbildung des topologischen Raumes Z. Die Abbildung g ist genau dann stetig, wenn die Kompositionen $f_i \circ g : Z \to Y_i$ für alle $i \in I$ stetig sind.*

Beweis. Ist g stetig, so sind alle Kompositionen $g \circ f_i$ stetig nach (1.16). Die Umkehrung folgt aus (1.15)(d). $\square$

(2.3) Beispiele. (a) *Die Unterraum- oder Spurtopologie.* Sei $(Y, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum und sei $X \subseteq Y$. Die Initialtopologie $\mathcal{O}_X := \mathcal{O}(X, \mathcal{O}, \iota : X \hookrightarrow Y)$ heißt **Unterraum- oder Spurtopologie** auf X. Eine Menge $U \subseteq X$ ist genau dann offen, wenn es eine offene Menge $V \underline{\mathrm{O}}\, Y$ mit $U = V \cap X$ gibt.
(b) *Die Produkttopologie* (Frechét 1910 (endliche Produkte), Tychonoff 1930)). Seien $(Y_i, \mathcal{O}_i)_{i\in I}$ topologische Räume und sei $X := \prod_{i\in I} Y_i$ das kartesische Produkt der Mengen Y_i. Seien $\pi_i : X \to Y_i$ die i-ten Projektionen. Die Topologie $\mathcal{O}_\Pi := \mathcal{O}(X, \mathcal{O}_i, \pi_i)$ heißt **Produkttopologie** auf X. Eine Menge $U \subseteq X$ ist genau dann offen, wenn sich U schreiben läßt als Vereinigung von Mengen der Form $(U_i)_{i\in I}$, wobei $U_i \underline{\mathrm{O}}\, Y_i$ für alle $i \in I$ und $U_i = Y_i$ für fast alle $i \in I$ ist. Die Projektionen π_i sind offene Abbildungen.

Bemerkung. Im allgemeinen sind die Abbildungen f_i nicht offen. Dies ist aber bei den Projektionen und der Produkttopologie der Fall. Bei der Spurtopologie gilt dies genau dann, wenn X offen in Y ist.

(2.4) Die Finaltopologie. Sei Y eine Menge, $(X_i, \mathcal{O}_i)_{i\in I}$ eine Familie topologischer Räume und $f_i : X_i \to Y$ $(i \in I)$ Abbildungen.
Ziel: Konstruiere aus $\mathcal{O}_i$ und den Abbildungen f_i eine Topologie $\mathcal{O}(Y, \mathcal{O}_i, f_i)$ auf Y. Die Topologie $\mathcal{O}$ wird **Finaltopologie auf X bzgl.** $\{f_i\}_{i\in I}$ genannt.
Idee: $\mathcal{O}$ soll gerade so grob sein, daß alle f_i stetig werden.
Ausführung: Setze $\mathcal{M}_i := \left\{O \subseteq Y \;\middle|\; f_i^{-1}(O) \in \mathcal{O}_i\right\}$ für $i \in I$ sowie $\mathcal{O}(Y, \mathcal{O}_i, f_i) = \bigcap_{i\in I} \mathcal{M}_i$. Wir müssen nachweisen, daß $\mathcal{O} := \mathcal{O}(Y, \mathcal{O}_i, f_i)$ eine Topologie ist.
(T1) ist klar.
(T2) Sei $\mathcal{O}' \subseteq \mathcal{O}$, d.h. es ist $f_i^{-1}(O) \in \mathcal{O}_i$ für alle $O \in \mathcal{O}'$ und alle $i \in I$. Also ist $f_i^{-1}(\bigcup \mathcal{O}') = \bigcup_{O\in\mathcal{O}'} f_i^{-1}(O) \in \mathcal{O}_i$ für alle $i \in I$, d.h. es ist $\bigcup_{O\in\mathcal{O}'} O \in \mathcal{O}$.
(T3) wird analog wie (T2) bewiesen.

(2.5) Lemma. *Sei $(Y, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum mit $\mathcal{O} = \mathcal{O}(Y, \mathcal{O}_i, f_i)$ und sei $g : Y \to Z$ eine Abbildung des topologischen Raumes Z. Die Abbildung g ist genau dann stetig, wenn die Kompositionen $g \circ f_i : Y_i \to Z$ für alle $i \in I$ stetig sind.*

Beweis. Ist g stetig, so sind alle Kompositionen $f_i \circ g$ stetig nach (1.16). Sei umgekehrt $g \circ f_i$ stetig für alle $i \in I$. Sei umgekehrt $U \underset{\mathcal{O}}{\subseteq} Z$. Mit $V := g^{-1}(U)$ ist dann $(g \circ f_i)^{-1}(U) = f_i^{-1}(g^{-1}(U)) = f_i^{-1}(V)$ offen in X_i. Nach Definition von $\mathcal{O}(Y, \mathcal{O}_i, f_i)$ ist dann V offen in Y, d.h. die Abbildung g ist stetig. □

(2.6) Beispiele. (a) *Die Quotiententopologie* (Moore 1925). Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum und sei $f : X \to Y$ surjektiv. Die Topologie $\mathcal{O}_Y := \mathcal{O}(Y, \mathcal{O}, f)$ heißt **Quotiententopologie** auf Y. Eine Menge $U \subseteq Y$ ist genau dann offen, wenn $f^{-1}(U)$ offen in X ist.
(b) *Die Summentopologie* (Tietze 1923). Seien $(X_j, \mathcal{O}_j)_{j\in J}$ topologische Räume und sei $Y := \bigcup_{j\in J} X_j$ die disjunkte Vereinigung der Mengen X_j. Seien $\iota_j : X_j \hookrightarrow Y$ die kanonischen Einbettungen. Die Topologie $\mathcal{O}_\cup := \mathcal{O}(Y, \mathcal{O}_j, \iota_j)$ heißt **Summentopologie** auf Y. Eine Menge $U \subseteq Y$ ist genau dann offen, wenn $U \cap X_j$ offen in X_j für alle $j \in J$ ist. Wir schreiben $Y = \bigoplus_{j\in J} X_j$.

(2.7) Definition. Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe und sei $\mathcal{O}$ eine Topologie auf G. Das Tripel $(G, \cdot, \mathcal{O})$ heißt **topologische Gruppe**, falls die Abbildungen $G \times G \to G : (x, y) \mapsto x \cdot y$ und $G \to G : x \mapsto x^{-1}$ stetig sind. Dabei ist $G \times G$ mit der Produkttopologie versehen.

(2.8) Beispiele topologischer Gruppen. (a) $(\mathbb{R}, +, \mathcal{O}_d)$
(b) $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot, \mathcal{O}_d)$
(c) $(\mathrm{GL}_n\mathbb{R}, \cdot, \mathcal{O})$, wobei $\mathcal{O}$ die Spurtopologie von $\mathrm{GL}_n\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}^{n^2}$ ist.

(2.9) Lemma. *Sei $(G, \cdot, \mathcal{O})$ eine topologische Gruppe und sei $a \in G$. Dann sind die Abbildungen $\lambda_a : G \to G : x \mapsto ax$ und $\rho_a : G \to G : x \mapsto xa$ Homöomorphismen.* □

KAPITEL 3

Trennungseigenschaften

(3.1) Definition. Sei X ein topologischer Raum.

(a) X heißt ein **$\mathbf{T}_0$-Raum** (Kolmogoroff, Alexander, Hopf 1935), wenn gilt:
$\forall\, x, y \in X \ (x \neq y \implies \exists\, U \mathrel{\underline{\mathrm{o}}} X \ (x \in U \wedge y \notin U) \vee (x \notin U \wedge y \in U))$.

(b) X heißt ein **$\mathbf{T}_1$-Raum** (Riesz 1907), wenn gilt:
$\forall\, x, y \in X \ (x \neq y \implies \exists\, U \mathrel{\underline{\mathrm{o}}} X \ (x \in U \wedge y \notin U))$.

(c) X heißt ein **$\mathbf{T}_2$-Raum** oder **Hausdorff-Raum** (Hausdorff 1914), wenn gilt:
$\forall\, x, y \in X \ (x \neq y \implies \exists\, U \in \mathfrak{U}(x)\ \exists\, V \in \mathfrak{U}(y) : U \cap V = \emptyset)$.

(d) X heißt ein **$\mathbf{T}_3$-Raum** (Vietoris 1921), wenn gilt:
$\forall\, A \mathrel{\overline{\subseteq}} X \ \forall\, y \in X \ (y \notin A \implies \exists\, U \in \mathfrak{U}(A)\ \exists\, V \in \mathfrak{U}(y) : U \cap V = \emptyset)$.

(e) X heißt ein **$\mathbf{T}_4$-Raum**, wenn gilt:
$\forall\, A, B \mathrel{\overline{\subseteq}} X \ (A \cap B = \emptyset \implies \exists\, U \in \mathfrak{U}(A)\ \exists\, V \in \mathfrak{U}(B) : U \cap V = \emptyset)$.

(f) X heißt **regulär**, wenn X ein T_1-Raum und ein T_3-Raum ist.

(g) X heißt **normal** (Tietze, 1923), wenn X ein T_1-Raum und ein T_4-Raum ist.

(h) Ein T_1-Raum X heißt **vollständig regulär** (Tychonoff 1930), wenn gilt:
$\forall\, A \mathrel{\overline{\subseteq}} X \ \forall\, y \in X \ (y \notin A \implies \exists\, f : X \xrightarrow{\sim} [0,1] \ (f(y) = 0 \wedge \forall\, a \in A : f(a) = 1))$.

Bemerkung. Vollständig reguläre Räume lassen sich (allerdings recht kompliziert) auch ohne die Hilfe stetiger reellwertiger Funktionen definieren, siehe etwa O. Frink, 1964 oder R. Engelking, p. 48, Exercise 1.5G.

(3.2) Charakterisierungen der $\mathbf{T}_i$-Räume. *Sei X ein topologischer Raum. Dann gelten die folgenden Aussagen.*

(a) X ist genau dann ein T_1-Raum, wenn die Mengen $\{x\}$ für alle $x \in X$ abgeschlossen sind.

(b) X ist genau dann ein T_2-Raum, wenn die Diagonale $\Delta := \{(x,x) \mid x \in X\}$ im Produktraum $X \times X$ abgeschlossen ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn $\{x\} = \bigcap_{U \in \mathfrak{U}(x)} \overline{U}$ für alle $x \in X$ gilt.

(c) X ist genau dann ein T_3-Raum, wenn für alle $x \in X$ die Familie $\mathcal{A}(x)$ aller abgeschlossenen Umgebungen von x, also $\mathcal{A}(x) = \big\{A \,\big|\, A \in \mathfrak{U}(x), A \mathrel{\overline{\subseteq}} X\big\}$, eine Umgebungsbasis von x bildet.

(d) *X ist genau dann ein T_4-Raum, wenn für alle $B \mathrel{\overline{\subseteq}} X$ die Familie $\mathcal{A}(B)$ aller abgeschlossenen Umgebungen von B, also $\mathcal{A}(B) = \big\{A \,\big|\, A \in \mathcal{U}(B), A \mathrel{\overline{\subseteq}} X\big\}$, eine Umgebungsbasis von B bildet.*

Beweis. (a) Sei X ein T_1-Raum und sei $x \in X$. Zu jedem $y \in X \setminus \{x\}$ gibt es ein $U_y \in \mathcal{U}(y)$ mit $x \notin U_y$. Damit gilt $X \setminus \{x\} = \bigcup_{y \in X \setminus \{x\}} U_y \mathrel{\overset{\circ}{\subseteq}} X$, also $\{x\} \mathrel{\overline{\subseteq}} X$. Umgekehrt ist für $y \neq x$ die Menge $X \setminus \{x\}$ eine offene Umgebung von y, die x nicht enthält.
(b) Sei X ein T_2-Raum und sei $(x, y) \notin \Delta$. Dann ist $x \neq y$ und es gibt offene Umgebungen $U \in \mathcal{O}(x)$ und $V \in \mathcal{O}(y)$ mit $U \cap V = \emptyset$. Insbesondere ist $(U \times V) \cap \Delta = \emptyset$. Da $U \times V$ offen im Produkt $X \times X$ ist, folgt, daß $(X \times X) \setminus \Delta$ offen in $X \times X$ ist, d.h. Δ ist abgeschlossen. Ist umgekehrt Δ abgeschlossen, so ist $(X \times X) \setminus \Delta$ offen in $X \times X$. Sei $(x, y) \notin \Delta$. Dann gibt es nach Definition der Produkttopologie $U \in \mathcal{O}(x)$ und $V \in \mathcal{O}(y)$ mit $U \times V \subseteq (X \times X) \setminus \Delta$. Insbesondere ist also $U \cap V = \emptyset$. Dies beweist die erste Äquivalenz. Nach (1.13)(c) ist sogar $\overline{U} \cap V = \emptyset$. Also ist $y \notin \bigcap_{U \in \mathcal{U}(x)} \overline{U}$. Da $y \neq x$ beliebig war, folgt $\bigcap_{U \in \mathcal{U}(x)} \overline{U} = \{x\}$. Umgekehrt gibt es für $y \neq x$ ein $U \in \mathcal{U}(x)$ mit $y \notin \overline{U}$. Damit sind U und $X \setminus \overline{U}$ die gewünschten Umgebungen von x und y.
(c) Sei $U \in \mathcal{O}(x)$. Zu zeigen: Es gibt ein $A \in \mathcal{A}(x)$ mit $A \subseteq U$. Es ist $X \setminus U \mathrel{\overline{\subseteq}} X$ und $x \notin X \setminus U$. Somit gibt es $V \in \mathcal{O}(x)$ und $W \in \mathcal{O}(X \setminus U)$ mit $V \cap W = \emptyset$. Also ist $V \subseteq X \setminus W \subseteq U$ und es folgt $A := \overline{V} \subseteq \overline{X \setminus W} = X \setminus W \subseteq U$. Umgekehrt sei $B \mathrel{\overline{\subseteq}} X$ und $x \in X \setminus B$. Wegen $X \setminus B \in \mathcal{U}(x)$ gibt es nach Voraussetzung ein $A \in \mathcal{A}(x)$ mit $A \subseteq X \setminus B$, also $B \subseteq X \setminus A$. Damit ist $X \setminus A \in \mathcal{U}(B)$ mit $A \cap (X \setminus A) = \emptyset$.
(d) Analog zu (c). □

(3.3) Beziehungen zwischen den Trennungsaxiomen.

$$
\begin{array}{lllllll}
\text{NORMAL} & \overset{(f)}{\Longrightarrow} \text{ VOLLST. REGULÄR} & \overset{(e)}{\Longrightarrow} & \text{REGULÄR} & \overset{(c)}{\Longrightarrow} \mathrm{T}_2 & \overset{(b)}{\Longrightarrow} \mathrm{T}_1 & \overset{(a)}{\Longrightarrow} \mathrm{T}_0 \\
\Downarrow \text{(g)} & & & \Downarrow \text{(d)} & & & \\
\mathrm{T}_4 & & & \mathrm{T}_3 & & &
\end{array}
$$

Die Beweise sind bis auf (e) und (f) trivial. □

(3.4) Beispiele.

(a) Der Sierpinski-Raum aus (1.1)d) ist ein T_0-Raum, aber kein T_1-Raum.
(b) Für jede unendliche Menge X ist X bzgl. der cofiniten Topologie ein T_1-Raum, aber kein T_2-Raum.
(c) Modifiziere $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_{\leq})$ wie folgt: Ersetze $\mathcal{O}(0)$ durch $\mathcal{O}(0)' := \{U \setminus M \mid U \in \mathcal{O}(0)\}$ mit $M := \big\{\frac{1}{n} \,\big|\, n \in \mathbb{N}\big\}$ und setze $\mathcal{U}(0)' := \{V \subseteq \mathbb{R} \mid \exists U \in \mathcal{O}(0)' : U \subseteq V\}$. Klar: $\mathcal{U}(0)'$ erfüllt (U1) bis (U4) aus (1.5) und nach (1.6) definieren die Familien $\mathcal{U}(x)$ für $x \neq 0$ zusammen mit $\mathcal{U}(0)'$ eine Topologie $\mathcal{O}'$ auf $\mathbb{R}$. Da die Mengen aus $\mathcal{U}(0)'$

verkleinert wurden, bleibt $(\mathbb{R}, \mathcal{O}')$ ein T_2-Raum. Außerdem ist M abgeschlossen bzgl. $\mathcal{O}'$. Ist nun V eine offene Umgebung von M, so ist $0 \in V$, d.h. M und 0 können nicht durch offene Mengen getrennt werden. Also ist $(\mathbb{R}, \mathcal{O}')$ nicht regulär.

(d) Für $|X| \geq 2$ ist $(X, \mathcal{O}_{\text{indiskret}})$ ein T_3-Raum und ein T_4-Raum, aber er ist weder regulär noch normal.

(e) siehe Engelking, 1.5.9

(f) siehe Engelking, 1.5.10

(3.5) Lemma von Urysohn. *Sei X ein T_4-Raum und $A, B \subseteq X$ disjunkt und nichtleer. Dann gibt es eine stetige Abbildung $f : X \xrightarrow{\sim} [0,1]$ mit $f(A) = \{0\}$ und $f(B) = \{1\}$.*

Beweis (Urysohn, 1925). (1) Für jedes $r \in I := \mathbb{Q} \cap [0,1]$ konstruieren wir eine offene Menge $U_r \underline{\subseteq} X$ mit den Eigenschaften

(a) $\forall\, r, s \in \mathbb{N}\ (r < s \implies \overline{U}_r \subseteq U_s)$.

(b) $A \subseteq U_0$, $B \subseteq X \setminus U_1$.

Sei dazu $I = \{r_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ mit $r_1 = 0$ und $r_2 = 1$. Da X ein T_4-Raum ist, gibt es $U \in \mathcal{O}(A)$ und $V \in \mathcal{O}(B)$ mit $U \cap V = \emptyset$. Nach (1.13)(c) ist sogar $\overline{U} \cap V = \emptyset$. Also gilt $A \subseteq U \subseteq \overline{U} \subseteq X \setminus V \subseteq X \setminus B$. Setze $U_0 := U$ und $U_1 := X \setminus B$. Damit gilt $\overline{U}_0 \subseteq U_1$, d.h. U_0 und U_1 erfüllen (a) und (b). Außerdem gilt

(a_n) $\forall\, i, j \leq n\ (r_i < r_j \implies \overline{U}_{r_i} \subseteq U_{r_j})$.

für $n = 2$. Seien nun die Mengen U_{r_i} für $i \leq n$ $(n \geq 2)$ definiert, so daß (a_n) und (b) erfüllt ist.

Wähle $r_l \in \{r_1, \ldots, r_n\}$ so, daß $r_l < r_{n+1}$ gilt und $r_{n+1} - r_l$ minimal ist.

Wähle $r_m \in \{r_1, \ldots, r_n\}$ so, daß $r_{n+1} < r_m$ gilt und $r_m - r_{n+1}$ minimal ist.

Wegen $r_l < r_m$ ist $\overline{U}_{r_l} \subseteq U_{r_m}$ nach (a_n). Da die abgeschlossenen Umgebungen von $\overline{U}_{r_l}$ nach (3.2)(d) eine Umgebungsbasis von $\overline{U}_{r_l}$ bilden, gibt es eine offene Menge U mit $\overline{U}_{r_l} \subseteq U \subseteq \overline{U} \subseteq U_{r_m}$. Setze $U_{r_{n+1}} := U$. Damit ist klar, daß $\{U_{r_1}, \ldots, U_{r_{n+1}}\}$ die Aussagen (a_{n+1}) und (b) erfüllt. Via vollständiger Induktion erhält man also eine Familie $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ offener Mengen, die (a) und (b) erfüllt.

(2) Wir setzen

$$f : X \to [0,1] : x \mapsto \begin{cases} \inf\{r \mid x \in U_r\} & \text{falls } x \in U_1 \\ 1 & \text{falls } x \in X \setminus U_1 \end{cases}$$

Damit ist klar, daß $f(A) = \{0\}$ und $f(B) = \{1\}$ gilt. Es ist noch die Stetigkeit von f nachzuweisen. Nach (1.15)(d) ist zu zeigen, daß $f^{-1}(W)$ offen ist für jedes Element W einer Subbasis $\mathcal{S}$ von $[0,1]$. Wir wählen gemäß (1.11)(b) als Subbasis die Familie $\mathcal{S} = \{[0,a) \mid 0 < a \leq 1\} \cap \{(b,1] \mid 0 \leq b < 1\}$. Wegen $f(x) < a \iff \exists\, r < a : x \in U_r$ gilt

$$f^{-1}([0,a)) = \bigcup_{r<a} U_r \underline{\subseteq} X.$$

Analog folgt aus $f(x) > b \iff \exists\, s' > b : x \notin U_{s'} \iff \exists\, s > b : x \notin \overline{U}_s$

$$f^{-1}((b,1]) = \bigcup_{s>b} X \setminus \overline{U}_s = X \setminus \bigcap_{s>b} \overline{U}_s \mathrel{\underline{\mathbf{o}}} X.$$

(3.6) Korollar. *Jeder normale Raum ist vollständig regulär.*

(3.7) Korollar. *Ein topologischer Raum X ist genau dann ein T_4-Raum, wenn es zu je zwei abgeschlossenen, nichtleeren und disjunkten Teilmengen A und B eine stetige Funktion $f : X \overset{\sim}{\to} [0,1]$ gibt mit $f(A) = \{0\}$ und $f(B) = \{1\}$.*

Beweis. Die Notwendigkeit der Bedingung ist das Lemma von Urysohn. Seien umgekehrt A und B zwei abgeschlossene, nichleere und disjunkte Teilmengen und sei $f : X \overset{\sim}{\to} [0,1]$ eine stetige Funktion mit $f(A) = \{0\}$ und $f(B) = \{1\}$. Dann sind $U = f^{-1}([0, \frac{1}{4}))$ und $V = f^{-1}((\frac{3}{4}, 1])$ disjunkte Umgebungen von A und B. □

(3.8) Korollar. *Sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann ist $(X, \mathcal{O}_{\mathrm{d}})$ normal.*

Beweis. Seien A und B zwei abgeschlossene, nichtleere, disjunkte Teilmengen. Nach Aufg. 7 sind die Abbildungen $\mathrm{d}_A : X \to \mathbb{R} : x \mapsto \mathrm{d}(x, A)$ und $\mathrm{d}_B : X \to \mathbb{R} : x \mapsto \mathrm{d}(x, B)$ stetig. Damit ist auch

$$f : X \to [0,1] : x \mapsto \frac{\mathrm{d}_A(x)}{\mathrm{d}_A(x) + \mathrm{d}_B(x)}$$

stetig. Außerdem gilt $f(A) = \{0\}$ und $f(B) = \{1\}$. □

(3.9) Lemma. *Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{O})$ ist genau dann vollständig regulär, wenn er ein T_1-Raum ist und die Familie $\mathcal{B} = \left\{ f^{-1}(U) \;\middle|\; U \mathrel{\underline{\mathbf{o}}} \mathbb{R}, f : X \overset{\sim}{\to} [0,1] \right\}$ als Basis besitzt.*

Beweis. (1) Sei X vollständig regulär. Natürlich sind die Mengen aus $\mathcal{B}$ offen. Sei $O \in \mathcal{O}$. Dann ist $X \setminus O \mathrel{\overline{\subseteq}} X$. Da X vollständig regulär ist, gibt es zu jedem $x \in O$ eine stetige Funktion $f_x : X \overset{\sim}{\to} [0,1]$ mit $f_x(X \setminus O) = \{1\}$ und $f_x(x) = 0$. Damit ist $x \in f_x^{-1}((-\infty, 1))$ offen in X und aus $O \subseteq \bigcup_{x \in O} f_x^{-1}((-\infty, 1)) \subseteq O$ folgt $O = \bigcup_{x \in O} f_x^{-1}((-\infty, 1))$, d.h. $\mathcal{B}$ ist eine Basis von $\mathcal{O}$.
(2) Sei $A \mathrel{\overline{\subseteq}} X$ und $y \in X \setminus A$. Nach Voraussetzung gibt es Funktionen $f_i : X \overset{\sim}{\to} [0,1]$ und $U_i \mathrel{\underline{\mathbf{o}}} \mathbb{R}$, $(i \in I)$, mit $X \setminus A = \bigcup_{i \in I} f_i^{-1}(U_i)$. Damit folgt $A = \bigcap_{i \in I} X \setminus f_i^{-1}(U_i)$. Wegen $y \notin A$ gibt es ein $k \in I$ mit $y \in f_k^{-1}(U_k)$, also $f_k(y) \in U_k$ bzw. $f_k(y) \notin [0,1] \setminus U_k$. Nach (3.8) ist das Intervall $[0,1]$ normal, also vollständig regulär nach (3.6). Somit gibt es eine stetige Funktion $g : [0,1] \overset{\sim}{\to} [0,1]$ mit $g(f_k(y)) = 0$ und $g([0,1] \setminus U_k) = \{1\}$. Dann ist $g \circ f_k : X \to [0,1]$ stetig mit $g \circ f_k(y) = 0$ und $g \circ f_k(A) \subseteq g([0,1] \setminus U_k) = \{1\}$, denn wegen $A \subseteq X \setminus f_k^{-1}(U_k)$ folgt für $a \in A$: $a \notin f_k^{-1}(U_k)$ und damit $f_k(a) \notin U_k$. □

(3.10) Korollar. *Sei $(X, \mathcal{O})$ ein vollständig regulärer Raum. Dann ist $\mathcal{O}$ gerade die Initialtopologie bzgl. der Familie aller stetigen Funktionen $f : X \to [0,1]$. Diese Funktionen werden Urysohn-Funktionen genannt.*

(3.11) Definition. Eine Abbildung $f : X \to Y$ zwischen topologischen Räumen X und Y heißt **Einbettung**, falls $f : X \to f(X)$ ein Homöomorphismus ist, wobei $f(X) \subseteq Y$ die Spurtopologie trägt. X heißt in Y eingebettet.
Bsp.: Sei $A \subseteq X$ mit der Spurtopologie bzgl. X versehen. Dann ist die Inklusionsabbildung $\iota : A \hookrightarrow X : x \mapsto x$ eine Einbettung von A in X.

(3.12) Satz. *Jeder vollständig reguläre Raum X kann in das topologische Produkt $\prod_{f\in I}[0,1]$ eingebettet werden, wobei $I = \{f : X \to [0,1] \mid f \text{ stetig}\}$ ist.*

Beweis. Die Abbildung $\chi : X \to \prod_{f\in I}[0,1] : x \mapsto (f(x))_{f\in I}$. ist die gesuchte Einbettung:

(1) χ *ist injektiv:* Sei $x \neq y$. Da X vollständig regulär ist, gibt es $g : X \xrightarrow{\sim} [0,1]$ mit $g(x) = 0$ und $g(y) = 1$, also $(f(x))_{f\in I} \neq (f(y))_{f\in I}$.

(2) χ *ist stetig:* Sei $\pi_g : \prod_{f\in I}[0,1] \to [0,1]$ die Projektion auf die g-te Koordinate. Nach (2.2) ist zu zeigen, daß $\pi_g \circ \chi$ stetig ist für alle $g \in I$. Dies ist aber klar wegen $\pi_g \circ \chi(x) = g(x)$ für alle $x \in X$.

(3) χ^{-1} *ist stetig:* Nach (3.9) ist $\mathcal{B} = \left\{ f^{-1}(U) \,\middle|\, U \underset{\circ}{\subseteq} \mathbb{R}, f : X \xrightarrow{\sim} [0,1] \right\}$ eine Basis von X. Es gilt für $g^{-1}(U) \in \mathcal{B}$

$$\begin{aligned}
\chi(g^{-1}(U)) &= \left\{\chi(x) \,\middle|\, x \in g^{-1}(U)\right\} = \{(f(x))_{f\in I} \mid g(x) \in U \wedge (f(x))_{f\in I} \in \chi(X)\} \\
&= \{(f(x))_{f\in I} \mid \pi_g((f(x))_{f\in I}) \in U \wedge (f(x))_{f\in I} \in \chi(X)\} \\
&= \pi_g^{-1}(U) \cap \chi(X) \underset{\circ}{\subseteq} \chi(X),
\end{aligned}$$

also ist χ^{-1} stetig nach (1.15)(c) und der Definition der Sportopologie. □

(3.13) Fortsetzungssatz von Tietze. *Sei X ein normaler Raum und sei $A \overline{\subseteq} X$. Dann läßt sich jede stetige Funktion $f : A \to \mathbb{R}$ zu einer stetigen Funktion $F : X \to \mathbb{R}$ fortsetzen.*

Beweis (Urysohn, 1925). Sei zunächst $f : A \to [-1,1]$ stetig.

(1) Sei $f_0 : A \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}$ und sei $c > 0$ mit $|f_0(x)| \leq c$ für alle $x \in A$.

Beh.: $\exists\, g : X \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}$ $(\forall\, x \in X : |g(x)| \leq \frac{1}{3}c \wedge \forall\, x \in A : |f_0(x) - g(x)| \leq \frac{2}{3}c)$.

Bew.: Die Mengen $C := f_0^{-1}([-c, -\frac{1}{3}c])$ und $D := f_0^{-1}([\frac{1}{3}c, c])$ sind disjunkt und abgeschlossen nach (1.15)(e). Nach dem Lemma von Urysohn (3.5) gibt es eine Funktion $h : X \xrightarrow{\sim} [0,1]$ mit $h(C) \subseteq \{0\}$ und $h(D) \subseteq \{1\}$. Setze $g : X \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{2}{3}c(h(x) - \frac{1}{2})$. Da h, sowie die Subtraktion und die Multiplikation von $\mathbb{R}$ stetig sind, ist auch g stetig. Außerdem ist $|g(x)| \leq \frac{2}{3}c\frac{1}{2} = \frac{1}{3}c$ für alle $x \in X$ und

$$|f_0(x) - g(x)| \leq \begin{cases} |-c + \frac{1}{3}c| = \frac{2}{3}c & \text{falls } x \in C \\ |c - \frac{1}{3}c| = \frac{2}{3}c & \text{falls } x \in D \\ |\frac{1}{3}c + \frac{1}{3}c| = \frac{2}{3}c & \text{falls } x \in A \setminus (C \cup D) \end{cases}$$

(2) Via Induktion konstruieren wir eine Folge $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ stetiger Funktionen $g_k : X \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}$, für die gilt:

(a) $\forall\, x \in X : |g_k(x)| \leq \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}$

(b) $\forall\, x \in A : |f(x) - \sum_{j=1}^{k} g_j(x)| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{k}$

Sei $g_1 = g$ aus (1) mit $c = 1$. Sind $g_1, \ldots, g_k$ schon definiert, so wenden wir (1) auf die Funktion $f_0 := \left(f - \sum_{j=1}^{k} g_j\right)\big|_A$ an. Dabei ist $c = \left(\frac{2}{3}\right)^k$. Dies liefert eine Funktion g_{k+1}, welche (a) und (b) erfüllt mit $k+1$ anstelle von k.

(3) Setze $F_k := \sum_{j=1}^{k} g_j$ und $F := \sum_{j=1}^{\infty} g_j$. Wegen (a) ist F auf X wohldefiniert und es ist $F : X \to [-1,1]$. Nach (b) ist $F(x) = f(x)$ für alle $x \in A$. Wir müssen noch zeigen, daß F stetig ist, d.h.

$$\forall\, x_0 \in X \;\forall\, \varepsilon > 0 \;\exists\, U \in \mathfrak{U}(x_0) \;\forall\, y \in U : |F(x_0) - F(y)| < \varepsilon.$$

Sei $k \in \mathbb{N}$ so, daß $|F(x) - F_i(x)| < \frac{1}{3}\varepsilon$ für alle $x \in X$ und alle $i \geq k$ gilt. Da F_k stetig ist, gibt es eine Umgebung $U \in \mathfrak{U}(x_0)$ mit $|F_k(x_0) - F_k(y)| < \frac{1}{3}\varepsilon$ für alle $y \in U$. Damit gilt für alle $y \in U$

$$|F(x_0) - F(y)| \leq |F(x_0) - F_k(x_0)| + |F_k(x_0) - F_k(y)| + |F_k(y) - F(y)| \leq 3\frac{1}{3}\varepsilon = \varepsilon.$$

(4) Sei nun $f : A \to \mathbb{R}$ stetig. Die Abbildung $\iota : \mathbb{R} \to (-1,1) : x \mapsto \frac{x}{1+|x|}$ ist ein Homöomorphismus. Nach dem bisher Bewiesenen ist $\iota \circ f : A \to [-1,1]$ fortsetzbar zu $F_1 : X \to [-1,1]$. Die Menge $B := F_1^{-1}(\{-1,1\})$ ist abgeschlossen und disjunkt zu A. Da X vollständig regulär ist, gibt es $h : X \xrightarrow{\sim} [0,1]$ mit $h(B) \subseteq \{0\}$ und $h(A) \subseteq \{1\}$. Die Abbildung $F_2 : X \to [-1,1] : X \mapsto F_1(x)h(x)$ ist eine stetige Fortsetung von $\iota \circ f$ auf X. Wegen $h(B) \subseteq \{0\}$ ist $F_2(X) \subseteq \iota(\mathbb{R}) = (-1,1)$. Schließlich ist $F : X \to \mathbb{R} : x \mapsto \iota^{-1} \circ F_2(x)$ stetig und für $x \in A$ ist

$$F(x) = \iota^{-1} \circ F_2(x) = \iota^{-1} \circ (F_1(x)h(x)) = \iota^{-1} \circ F_1(x) = \iota^{-1} \circ (\iota \circ f)(x) = f(x),$$

d.h. F ist eine stetige Fortsetzung von f auf X. □

(3.14) Satz. *Ein T_1-Raum X ist genau dann normal, wenn für X der Fortsetzungssatz von Tietze gilt.*

Beweis. Ist X nicht normal, so gibt es abgeschlossene und disjunkte Teilmengen A und B in X, die nicht durch offene Mengen getrennt werden können. Dann läßt sich die stetige Funktion

$$f : A \cup B \to [0,1] : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{falls } x \in A \\ 1 & \text{falls } x \in B \end{cases}$$

nicht auf X stetig fortsetzen. □

KAPITEL 4
Zusammenhängende Räume

(4.1) Definition (Jordan 1893 (für $\mathbb{R}^2$), Riesz 1907, Lennes 1911, Hausdorff 1914).
Ein topologischer Raum X heißt **zusammenhängend**, wenn sich X nicht als topologische Summe $X_1 \oplus X_2$, schreiben läßt, wobei X_1 und X_2 nicht leer sind.

(4.2) Definition. Zwei Teilmengen A, B eines topologischen Raumes X heißen **separiert**, falls $\overline{A} \cap B = \emptyset = A \cap \overline{B}$ gilt.

(4.3) Beispiel. Zwei offene disjunkte Teilmengen sind nach (1.13)(c) stets separiert.

(4.4) Lemma. *Für einen topologischen Raum X sind folgende Aussagen äquivalent:*

(a) *X ist zusammenhängend.*

(b) *$\emptyset$ und X sind die einzigen zugleich offenen als auch abgeschlossenen Teilmengen von X.*

(c) *Ist $X = A \cup B$ und sind A, B separiert, so folgt $A = \emptyset$ oder $B = \emptyset$.*

(d) *Ist $X = A \cup B$ und sind A, B offen und disjunkt, so folgt $A = \emptyset$ oder $B = \emptyset$.*

(e) *Jede stetige Abbildung $f : X \overset{\sim}{\to} (\{0,1\}, \mathcal{O}_{\text{diskret}})$ ist konstant.*

Beweis. (a) $\Longrightarrow$ (b): Sei $X_1 \,\overline{\underline{\mathrm{O}}}\, X$ nichtleer mit $X_1 \neq X$. Dann ist $X_2 := X \setminus X_1 \,\overline{\underline{\mathrm{O}}}\, X$ nichtleer und es ist $X = X_1 \dot\cup X_2$. Der Raum X trägt die Summentopologie bzgl. der Inklusionen $\iota_1 : X_1 \hookrightarrow X$ und $\iota_2 : X_2 \hookrightarrow X$, denn es ist $\iota_j(X_j) \,\underline{\mathrm{O}}\, X$ für $j = 1, 2$. Also ist $X = X_1 \oplus X_2$ und X ist nicht zusammenhängend.

(b) $\Longrightarrow$ (c): Sei $X = A \cup B$, wobei A und B separiert sind. Dann ist $\overline{A} \subseteq X \setminus B \subseteq A$ und ebenso $\overline{B} \subseteq B$. Nach (1.13)(d) folgt $\overline{A} = A$ und $\overline{B} = B$. Damit ist $A = X \setminus B$ auch offen, also ist $A = \emptyset$ oder $A = X$ (und dann folgt $B = \emptyset$).

(c) $\Longrightarrow$ (d): Folgt sofort aus (1.13)(c) oder aus (4.3).

(d) $\Longrightarrow$ (e): Sei $f : X \overset{\sim}{\to} (\{0,1\}, \mathcal{O}_{\text{diskret}})$ surjektiv. Setze $A := f^{-1}(0) \neq \emptyset$ und $B := f^{-1}(1) \neq \emptyset$. Da f stetig ist und die Mengen $\{0\}$ und $\{1\}$ offen und disjunkt sind, sind auch die Urbilder A und B offen und disjunkt. Wegen $X = A \cup B$ gilt also (d) nicht.

(e) $\Longrightarrow$ (a): Sei $X = X_1 \oplus X_2$ mit $X_1, X_2 \neq \emptyset$. Dann ist die surjektive Abbildung

$$f : X \to (\{0,1\}, \mathcal{O}_{\text{diskret}}) : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{falls } x \in X_1 \\ 1 & \text{falls } x \in X_2 \end{cases}$$

stetig nach (2.5) und (2.6)(b), denn die Kompositionen $f \circ \iota_1$ und $f \circ \iota_2$ sind konstant und damit stetig. $\square$

(4.5) Definition. Eine Teilmenge A eines topologischen Raumes X heißt **zusammenhängend**, wenn $(A, \mathcal{O}_A)$ zusammenhängend ist.

(4.6) Beispiele. (a) $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ ist nicht zusammenhängend.
(b) Jede unendliche Menge ist bzgl. der cofiniten Topologie zusammenhängend.
(c) Jeder diskrete Raum ist unzusammenhängend.
(d) Sei C eine zusammenhängende Teilmenge von $\mathbb{R}$. Dann ist C eines der Intervalle $(a,b), (a,b], [a,b), [a,b]$ mit $-\infty \leq a \leq b \leq \infty$. (Klar: Die angegebenen Intervalle sind zusammenhängend. Gibt es umgekehrt ein $x \in \mathbb{R} \setminus C$ und $a, b \in C$ mit $a < x < b$, so ist $C = (C \cap (-\infty, x)) \oplus (C \cap (x, \infty))$ eine nichttriviale Zerlegung von C).
(e) Der Raum $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_S)$ mit der Sorgenfrey-Topologie $\mathcal{O}_S$ ist nicht zusammenhängend.

(4.7) Lemma. *Sei $f : X \overset{\sim}{\to} Y$ stetig. Ist X zusammenhängend, so ist es auch $f(X) \subseteq Y$.*

Beweis. Sei $f(X)$ nicht zusammenhängend. Dann gibt es $Y_1, Y_2 \underset{\circ}{\subseteq} X$ nichtleer und disjunkt mit $f(X) = Y_1 \dot\cup Y_2$. Damit ist $X = f^{-1}(Y_1) \dot\cup f^{-1}(Y_2)$ mit $f^{-1}(Y_i) \neq \emptyset$ offen in Y. Also ist X nicht zusammenhängend. $\square$

(4.8) Korollar (Zwischenwertsatz). *Sei X zusammenhängend und sei $f : X \overset{\sim}{\to} \mathbb{R}$ stetig. Dann ist für alle $s, t \in f(X)$ mit $s \neq t$ auch $(s,t) \subseteq f(X)$.*

Beweis. Folgt aus (4.7) und Beispiel (4.6)(d). $\square$

(4.9) Lemma. *Eine Teilmenge A eines topologischen Raumes X ist genau dann zusammenhängend, wenn für alle separierten Mengen C, D mit $A = C \cup D$ gilt: $C = \emptyset$ oder $D = \emptyset$.*

Beweis. Sei $A \subseteq X$ zusammenhängend und sei $A = C \cup D$ mit C, D separiert in X. Dann sind C, D auch separiert in A (bzgl. der Spurtopologie). Nach (4.4)(c) folgt damit $C = \emptyset$ oder $D = \emptyset$. Sei umgekehrt A nicht zusammenhängend. Dann gibt es bzgl. $\mathcal{O}_A$ offene (und damit abgeschlossene) und disjunkte Teilmengen $C, D \subseteq A$ mit $A = C \cup D$. Da C, D abgeschlossen in A sind, sind C, D auch separiert in X. Die Behauptung folgt nun wieder mit (4.4)(c). $\square$

(4.10) Korollar. *Sei A eine zusammenhängende Teilmenge eines topologischen Raumes X und seien C, D separierte Mengen. Ist $A \subseteq C \cup D$, so ist $A \subseteq C$ oder $A \subseteq D$.*

Beweis. Es ist $(A \cap C) \cap \overline{(A \cap D)} = \emptyset = \overline{(A \cap C)} \cap (A \cap D)$ und $A = (A \cap C) \cup (A \cap D)$. Nach (4.9) folgt o.E. etwa $A \cap C = \emptyset$, also $A \subseteq D$. $\square$

(4.11) Satz. *Sei X ein topologischer Raum und sei $\{A_i\}_{i \in I}$ eine Familie zusammenhängender Teilmengen von X. Gibt es ein $i_0 \in I$ mit $\overline{A_{i_0}} \cap A_i \neq \emptyset$ oder $A_{i_0} \cap \overline{A_i} \neq \emptyset$ für alle $i \in I$, so ist $\bigcup_{i \in I} A_i$ zusammenhängend.*

Beweis. Sei $A := \bigcup_{i \in I} A_i = C \cup D$ mit C, D separiert. Nach (4.10) ist o.E. $A_{i_0} \subseteq C$. Ebenso ist $A_i \subseteq C$ oder $A_i \subseteq D$ für alle $i \in I$. Wäre $A_i \subseteq D$ für ein $i \in I$, so wäre $\overline{A_{i_0}} \cap A_i \subseteq \overline{C} \cap D = \emptyset$, ein Widerspruch. Also gilt $A_i \subseteq C$ für alle $i \in I$. Somit ist $D = \emptyset$ und A ist zusammenhängend nach (4.9). $\square$

(4.12) Korollar. *Sei X ein topologischer Raum und sei $\{A_i\}_{i \in I}$ eine Familie zusammenhängender Teilmengen von X mit $\bigcap_{i \in I} A_i \neq \emptyset$. Dann ist $\bigcup_{i \in I} A_i$ zusammenhängend.* $\square$

(4.13) Korollar. *Sei A eine zusammenhängende Teilmenge eines topologischen Raumes X und sei $A \subseteq B \subseteq \overline{A}$. Dann ist auch B zusammenhängend.*

Beweis. Wegen $B \subseteq \overline{A}$ ist $\{x\} \cap \overline{A} \neq \emptyset$ für alle $x \in B$. Damit erfüllt die Familie $\mathcal{A} = \{A\} \cup \{\{x\}\}_{x \in B}$ die Bedingung von (4.11), d.h. $B = \bigcup \mathcal{A}$ ist zusammenhängend. $\square$

(4.14) Korollar. *Enthält ein topologischer Raum X eine zusammenhängende, dichte Teilmenge, so ist X zusammenhängend.* $\square$

(4.15) Korollar. *Liegen je zwei Punkte eines topologischen Raumes X in einer zusammenhängenden Teilmenge, so ist X zusammenhängend.*

Beweis. Sei $x_0 \in X$. Zu $x \in X$ sei C_x zusammenhängend mit $x, x_0 \in C_x$. Dann ist $x_0 \in \bigcap_{x \in X} C_x$ und $X = \bigcup_{x \in X} C_x$ ist zusammenhängend nach (4.12). $\square$

(4.16) Satz. *Das topologische Produkt $X := \prod_{i \in I} X_i$ ist genau dann zusammenhängend, wenn alle topologischen Räume X_i zusammenhängend sind.*

Beweis. Ist X zusammenhängend, so ist $X_i = \pi_i(X)$ zusammenhängend nach (4.7).
Seien umgekehrt alle X_i zusammenhängend. Sei zunächst $I = \{0, 1\}$. Je zwei Punkte $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X_0 \times X_1$ liegen in $C = (X \times \{y_1\}) \cup (\{x_2\} \times Y)$. Dabei sind $X \times \{y_1\}$ und $\{x_2\} \times Y$ zusammenhängend und nicht disjunkt. Also ist C zusammenhängend nach (4.12). Nach (4.15) ist damit auch $X_0 \times X_1$ zusammenhängend. Mittels Induktion ist also $X := \prod_{i \in I} X_i$ für I endlich zusammenhängend.

Sei nun I beliebig. Für $i \in I$ wähle $x_i \in X_i$. Sei $\mathcal{F} := \{F \subseteq I \mid F \text{ endlich}\}$. Für $F \in \mathcal{F}$ setze

$$Y_F := \prod_{i \in F} X_i \times \prod_{i \in I \setminus F} \{x_i\}\,.$$

Nach dem bisher Bewiesenen ist Y_F zusammenhängend. Wegen $(x_i)_{i \in I} \in \bigcap_{F \in \mathcal{F}} Y_F$ ist $Y := \bigcup_{F \in \mathcal{F}} Y_F$ zusammenhängend nach (4.12). Wegen $Y \cap V \neq \emptyset$ für jede Menge V der kanonischen Basis von X, ist Y dicht in X nach (1.13)(b). Damit ist X zusammenhängend nach (4.14). □

(4.17) Korollar. *Die topologischen Räume $\mathbb{R}^n$ und $[0,1]^m$ sind zusammenhängend.* □

(4.18) Definition (Hausdorff 1914). Sei X ein topologischer Raum und sei $x \in X$. Die Menge

$$C_x := \bigcup_{C \subseteq X \text{zsh}, x \in C} C$$

heißt die **Zusammenhangskomponente von x in X**.

Bemerkung. Nach (4.12) ist C_x zusammenhängend; die Menge C_x ist die größte zusammenhängende Teilmenge von X, die x enthält. Nach (4.13) ist C_x stets abgeschlossen. Im allgemeinen ist C_x aber *nicht* offen (in $\mathbb{Q}$ etwa sind die Zusammenhangskomponenten einpunktig). Für $y \notin C_x$ ist $C_x \cap C_y = \emptyset$ und für $y \in C_x$ ist $C_x = C_y$ nach (4.12).
Der Raum X ist genau dann zusammenhängend, wenn es ein $x \in X$ mit $C_x = X$ gibt. Dann gilt sogar $C_y = X$ für alle $y \in X$.

(4.19) Definition (Sierpinski 1921). Ein topologischer Raum X heißt **total unzusammenhängend**, wenn all seine Zusammenhangskomponenten einpunktig sind, d.h. es ist $C_x = \{x\}$ für alle $x \in X$.

(4.20) Beispiele. (a) $(X, \mathcal{O}_{\text{diskret}})$ ist total unzusammenhängend.
(b) $(\mathbb{Q}, \mathcal{O}_{\mathbb{Q}})$ ist total unzusammenhängend.
(c) Die Cantor-Menge $\mathcal{C}$ ist total unzusammenhängend.

(4.21) Definition. Sei X ein topologischer Raum. Eine stetige Abbildung $p : [0,1] \to X$ heißt ein **Weg in X**. Der Raum X heißt **wegzusammenhängend**, wenn es zu je zwei Punkten $x, y \in X$ einen Weg p gibt, der x und y verbindet, d.h. es ist $p(0) = x$ und $p(1) = y$.

(4.22) Lemma. *Jeder wegzusammenhängende Raum X ist zusammenhängend.*

Beweis. Nach (4.15) ist zu zeigen, daß je zwei Punkte $x, y \in X$ in einer zusammenhägenden Teilmenge liegen. Da X wegzusammenhängend ist, gibt es einen Weg $p : [0,1] \to X$ mit $p(0) = x$ und $p(1) = y$. Da $p([0,1])$ zusammenhängend ist nach (4.7) und (4.6), folgt die Behauptung des Lemmas. □

(4.23) Beispiele. (a) Jeder indiskrete Raum ist wegzusammenhängend.
(b) $\mathbb{R}^n$ ist wegzusammenhängend.
(c) Der Abschluß einer wegzusammenhängenden Teilmenge muß nicht wieder wegzusammenhängend sein (vgl. jedoch Korollar (4.13)): Die Menge $S := \{(x, \sin(\frac{1}{x})) \mid x > 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$ ist wegzusammenhängend, nicht jedoch $\overline{S} = S \cup \{(0,y) \mid y \in [-1,1]\}$.

(4.24) Definition. Ein topologischer Raum X heißt **lokal (weg-)zusammenhängend**, wenn es zu jedem $x \in X$ und jeder Umgebung $U \in \mathfrak{U}(x)$ eine (weg-)zusammenhängende Umgebung $V \in \mathfrak{U}(x)$ mit $V \subseteq U$ gibt.

(4.25) Lemma. *Ist X lokal zusammenhängend, so sind alle Zusammenhangskomponenten offen.*

Beweis. Sei $x \in X$ und $y \in C_x$. Sei $U \in \mathfrak{U}(y)$ zusammenhängend. Wegen $U \cap C_x \neq \emptyset$ ist $U \cup C_x$ zusammenhängend nach (4.12). Also ist $U \cup C_x \subseteq C_x$, d.h. C_x ist offen in X. □

(4.26) Beispiele. (a) Sei

$$X := (\{0\} \times [0,1]) \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \subseteq \mathbb{R}^2$$

mit

$$A_n := \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x \in [0, \frac{1}{n}], y = 1 - nx \right\}.$$

Dann ist X zusammenhängend nach (4.12) und natürlich auch wegzusammenhängend. Aber X ist nicht lokal zusammenhängend (etwa um den Punkt $(0, \frac{1}{2})$).
(b) $(-1,0) \cup (0,1)$ ist bzgl. der Spurtopologie lokal (weg-)zusammenhängend, aber nicht zusammenhängend.
(c) $\mathbb{Q}$ ist nicht lokal zusammenhängend.

KAPITEL 5

Konvergenz

(5.1) Definition (Riesz 1908, Cartan 1937, Bourbaki 1940). Sei X eine Menge. Eine Menge $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ heißt **Filter auf** X, wenn gilt:

(F1) $X \in \mathcal{F}$, $\emptyset \notin \mathcal{F}$

(F2) $\forall\, A, B \in \mathcal{F} : A \cap B \in \mathcal{F}$

(F3) $\forall\, A \in \mathcal{F}\ \forall\, B \subseteq X\ (A \subseteq B \implies B \in \mathcal{F})$

Eine Teilmenge $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{F}$ heißt **Basis des Filters** $\mathcal{F}$, wenn es für alle $A \in \mathcal{F}$ ein $B \in \mathcal{B}$ mit $B \subseteq A$ gibt. Ein Filter $\mathcal{F}$ heißt **frei**, falls $\bigcap \mathcal{F} = \emptyset$ gilt; Andernfalls heißt $\mathcal{F}$ **fixiert**.

(5.2) Lemma. *Sei X eine Menge und sei $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}$. Die Familie $\mathcal{B}$ ist genau dann eine Basis eines Filters $\mathcal{F}$, wenn es zu jedem $A, B \in \mathcal{B}$ ein $C \in \mathcal{B}$ gibt mit $C \subseteq A \cap B$.*

Beweis. Ist $\mathcal{B}$ eine Filterbasis, so folgt die angegebene Eigenschaft sofort aus der Definition einer Basis und Axiom (F2). Setze umgekehrt $\mathcal{F} := \{A \subseteq X \mid \exists\, B \in \mathcal{B} : B \subseteq A\}$. Dann ist $\mathcal{F}$ ein Filter. (F1) und (F3) sind trivial erfüllt. Sind $A, A' \in \mathcal{F}$, so gibt es $B, B' \in \mathcal{B}$ mit $B \subseteq A$ und $B' \subseteq A'$. Nach Voraussetzung gibt es ein $C \in \mathcal{B}$ mit $C \subseteq B \cap B' \subseteq A \cap A'$, also $A \cap A' \in \mathcal{F}$. Somit gilt auch (F2). Schließlich ist $\mathcal{B}$ nach Konstruktion eine Basis von $\mathcal{F}$. □

(5.3) Beispiele. (a) Sei X eine Menge und $\emptyset \neq A \subseteq X$. Dann ist $\mathcal{F} := \{F \subseteq X \mid A \subseteq F\}$ ein fixierter Filter auf X, $A \subseteq \bigcap \mathcal{F}$. Die Menge $\mathcal{B} = \{A\}$ ist eine Basis von $\mathcal{F}$.

(b) Sei X ein topologischer Raum und sei $x \in X$. Dann ist der Umgebungsfilter $\mathcal{U}(x)$ ein fixierter Filter auf X mit $x \in \bigcap \mathcal{U}(x)$. Eine Umgebungsbasis $\mathcal{B}(x)$ von $\mathcal{U}(x)$ ist auch eine Filterbasis von $\mathcal{U}(x)$. Die Familie $\mathcal{O}(x)$ aller offenen Umgebungen ist **kein** Filter, nur eine Filterbasis von $\mathcal{U}(x)$.

(c) $\mathcal{B} := \big\{(0, \frac{1}{n}) \,\big|\, n \in \mathbb{N}\big\}$ ist eine Filterbasis eines freien Filters $\mathcal{F}$ auf $[0,1]$.

(d) $\mathcal{B} := \{(a, \infty) \mid a \in \mathbb{R}\}$ ist eine Filterbasis eines freien Filters $\mathcal{F}$ auf $\mathbb{R}$. $\mathcal{F}$ heißt **Fréchet-Filter** auf $\mathbb{R}$.

(5.4) Definition. Seien $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ Filter auf einer Menge X. Der Filter $\mathcal{F}$ heißt **feiner** als $\mathcal{G}$ (bzw. $\mathcal{G}$ heißt **gröber** als $\mathcal{F}$), falls $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ gilt. Der Filter $\mathcal{F}$ heißt **Ultrafilter**, wenn es keinen echt feineren Filter als $\mathcal{F}$ auf X gibt.

(5.5) Lemma. *Jeder Filter $\mathcal{F}$ auf einer Menge X läßt sich zu einem Ultrafilter $\mathcal{G}$ verfeinern.*

Beweis. Die Menge $\wp = \{\mathcal{G} \mid \mathcal{G} \text{ Filter auf } X \text{ feiner als } \mathcal{F}\}$ ist bzgl. Inklusion partiell geordnet. Sei $\wp' \subseteq \wp$ eine linear geordnete Teilmenge (Kette). Klar: $\mathcal{H} := \bigcup_{\mathcal{G}\in\wp'} \mathcal{G}$ ist ein Filter. Also ist $(\wp, \subseteq)$ induktiv geordnet und nach dem Zornschen Lemma gibt es ein maximales Element $\mathcal{G} \in \wp$. Natürlich ist $\mathcal{G}$ ein Ultrafilter. □

(5.6) Lemma. *Ein Filter $\mathcal{F}$ auf einer Menge X ist genau dann ein Ultrafilter, wenn für jedes $A \subseteq X$ entweder $A \in \mathcal{F}$ oder $X \setminus A \in \mathcal{F}$ gilt.*

Beweis. Sei $A \subseteq X$. Wegen $\emptyset \notin \mathcal{F}$ gilt entweder $A \cap F \neq \emptyset$ für alle $F \in \mathcal{F}$ oder $(X \setminus A) \cap F \neq \emptyset$ für alle $F \in \mathcal{F}$. Andernfalls wäre $A \cap F_1 = \emptyset$ und $X \setminus A \cap F_2 = \emptyset$ für $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$. Also wäre $F_1 \subseteq X \setminus A$ und $F_2 \subseteq A$, also $F_1 \cap F_2 = \emptyset$, ein Widerspruch. Ist etwa $A \cap F \neq \emptyset$ für alle $F \in \mathcal{F}$, so ist $\{F \cap A \mid F \in \mathcal{F}\}$ eine Filterbasis eines Filters $\mathcal{G}$, der feiner als $\mathcal{F}$ ist und A enthält. Da $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter ist, folgt $\mathcal{F} = \mathcal{G}$, also $A \in \mathcal{F}$. Umgekehrt sei $\mathcal{G}$ echt feiner als $\mathcal{F}$. Dann gibt es $G \in \mathcal{G}$ mit $G \notin \mathcal{F}$, also $X \setminus G \in \mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$. Dies widerspricht $\emptyset = G \cap (X \setminus G) \in \mathcal{G}$. Damit ist $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter. □

(5.7) Korollar. *Ein Filter $\mathcal{F}$ auf einer Menge X ist genau dann ein fixierter Ultrafilter, wenn es ein $x \in X$ mit $\mathcal{F} = \{F \subseteq X \mid x \in F\}$ gibt.*

Beweis. Natürlich ist $\{F \subseteq X \mid x \in F\}$ ein fixierter Ultrafilter. Sei umgekehrt $\mathcal{F}$ ein fixierter Ultrafilter und sei $x \in \bigcap \mathcal{F}$. Nach (5.6) ist entweder $\{x\} \in \mathcal{F}$ oder $X \setminus \{x\} \in \mathcal{F}$. Letzteres ist aber wegen $x \in \bigcap \mathcal{F}$ unmöglich. Also folgt die Behauptung nach (F3). □

(5.8) Definition. Sei $\mathcal{F}$ ein Filter auf einem topologischen Raum X.

(a) $\mathcal{F}$ **konvergiert** gegen $x \in X$, in Zeichen: $\mathcal{F} \to x$, falls $\mathcal{U}(x) \subseteq \mathcal{F}$. Der Punkt x heißt dann **Limespunkt** von $\mathcal{F}$.

(b) $x \in X$ heißt **Berührpunkt** von $\mathcal{F}$, falls $F \cap U \neq \emptyset$ für alle $F \in \mathcal{F}$ und alle $U \in \mathcal{U}(x)$ gilt. Die Menge aller Berührpunkte ist also $\bigcap_{F\in\mathcal{F}} \overline{F}$.

Bemerkung. Aus den obigen Definitionen ist direkt ersichtlich, daß jeder Limespunkt eines Filters $\mathcal{F}$ auch ein Berührpunkt von $\mathcal{F}$ ist.

(5.9) Beispiele. (a) Der Umgebungsfilter $\mathcal{U}(x)$ eines topologischen Raumes konvergiert gegen $x \in X$.

(b) Der Filter aus (5.3)(c) konvergiert gegen 0.

(c) Der Fréchet-Filter besitzt keine Berührpunkte.

(5.10) Lemma. *Sei $\mathcal{F}$ ein Filter auf einem topologischen Raum X. Ein Element $x \in X$ ist genau dann Berührpunkt von $\mathcal{F}$, wenn es einen feineren Filter $\mathcal{G}$ mit $\mathcal{G} \to x$ gibt.*

Beweis. Sei x ein Berührpunkt von $\mathcal{F}$. Dann ist $\{U \cap F \mid U \in \mathcal{U}(x), F \in \mathcal{F}\}$ eine Filterbasis eines Filter $\mathcal{G}$, der feiner als $\mathcal{F}$ ist und gegen x konvergiert. Ist umgekehrt $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ mit $\mathcal{G} \to x$, so ist $\mathcal{U}(x) \subseteq \mathcal{G}$, also $U \cap F \neq \emptyset$ für alle $U \in \mathcal{U}(x)$ und alle $F \in \mathcal{F}$. Also ist x ein Berührpunkt von $\mathcal{F}$. □

(5.11) Lemma. *Sei X ein topologischer Raum und sei $A \subseteq X$. Für $x \in X$ setze $\mathcal{U}_A(x) := \{U \cap A \mid U \in \mathcal{U}(x)\}$.*

(a) Ist $x \in A$, so ist $\mathcal{U}_A(x)$ gerade der Umgebungsfilter von x in der Spurtopologie $\mathcal{O}_A$ von A in X, genannt der **Spurfilter** *von $\mathcal{U}(x)$ bzgl. A.*

(b) Ist $x \in \overline{A}$, so ist $\mathcal{U}_A(x)$ eine Basis eines Filters $\mathcal{V}_A(x)$ auf X, der feiner ist als $\mathcal{U}(x)$ und die Menge A enthält.

Beweis. (a) folgt sofort aus der Definition der Spurtopologie.
(b) Seien $U_1 \cap A, U_2 \cap A \in \mathcal{U}_A(x)$. Wähle $U \in \mathcal{U}(x)$ mit $U \subseteq U_1 \cap U_2$. Dann ist $U \cap A \in \mathcal{U}_A(x)$ mit $U \cap A \subseteq (U_1 \cap A) \cap (U_2 \cap A)$. Wegen $x \in \overline{A}$ ist außerdem $U \cap A \neq \emptyset$ nach (1.13)(a). Nach (5.2) ist damit $\mathcal{U}_A(x)$ eine Basis eines Filters $\mathcal{V}_A(x)$. Nach (F3) ist $\mathcal{U}(x) \subseteq \mathcal{V}_A(x)$, d.h. $\mathcal{V}_A(x)$ ist feiner als $\mathcal{U}(x)$. Natürlich ist $A \in \mathcal{V}_A(x)$ nach Konstruktion. □

(5.12) Lemma. *Sei X ein topologischer Raum und sei $A \subseteq X$. Dann sind folgende Behauptungen äquivalent:*

(a) $x \in \overline{A}$.

(b) $\mathcal{V}_A(x) \to x$.

(c) Es gibt einen Filter $\mathcal{F}$ auf X mit $A \in \mathcal{F}$ und $\mathcal{F} \to x$.

Beweis. (a) $\Longrightarrow$ (b): Folgt sofort aus (5.11)(b).
(b) $\Longrightarrow$ (c): trivial wegen $A \in \mathcal{V}_A(x)$.
(c) $\Longrightarrow$ (a): Ist $\mathcal{F} \to x$ mit $A \in \mathcal{F}$, so ist x ein Berührpunkt von $\mathcal{F}$ und es gilt daher $x \in \bigcap_{F \in \mathcal{F}} \overline{F} \subseteq \overline{A}$. □

(5.13) Lemma. *Ein topologischer Raum X ist genau dann ein Hausdorff-Raum, wenn jeder Filter auf X höchstens einen Limespunkt besitzt.*

Beweis. Sei X ein Hausdorff-Raum und seien $x, y \in X$ Limespunkte eines Filters $\mathcal{F}$ auf X. Dann ist $\mathcal{U}(x), \mathcal{U}(y) \subseteq \mathcal{F}$. Ist $x \neq y$, so gibt es $U \in \mathcal{U}(x)$ und $V \in \mathcal{U}(y)$ mit $U \cap V = \emptyset$. Wegen $U \cap V \in \mathcal{F}$ ist dies unmöglich, also ist $x = y$. Seien umgekehrt $x, y \in X$. Wäre $U \cap V \neq \emptyset$ für alle $U \in \mathcal{U}(x)$ und $V \in \mathcal{U}(y)$, so wäre $\{U \cap V \mid U \in \mathcal{U}(x), V \in \mathcal{U}(y)\}$ eine Filterbasis eines Filters $\mathcal{F}$, der wegen $\mathcal{U}(x), \mathcal{V}(x) \subseteq \mathcal{F}$ die Punkte x und y als Limespunkte besitzt, also folgt $x = y$. □

(5.14) Definition. Sei $\mathcal{F}$ ein Filter auf einer Menge X und sei $f : X \to Y$ eine Abbildung. Die Familie $\{f(F) \mid F \in \mathcal{F}\}$ bildet eine Basis für einen Filter $f(\mathcal{F})$, genannt der **Bildfilter**

von $\mathcal{F}$ unter f. (Hinweis: Wegen $\emptyset \neq f(F_1 \cap F_2) \subseteq f(F_1) \cap f(F_2)$ bildet obige Familie tatsächlich eine Basis nach (5.2).)

(5.15) Lemma. *Seien X, Y topologische Räume, $x \in X$, und sei $f : X \to Y$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(a) f ist stetig in x.
(b) Für alle Filter $\mathcal{F}$ mit $\mathcal{F} \to x$ gilt $f(\mathcal{F}) \to f(x)$.
(c) $f(\mathcal{U}(x)) \to f(x)$.

Beweis. (a) $\Longrightarrow$ (b): Sei f stetig und sei $\mathcal{F}$ ein Filter auf X mit $\mathcal{F} \to x$. Zu $V \in \mathcal{U}(f(x))$ gibt es $U \in \mathcal{U}(x)$ mit $f(U) \subseteq V$, da f in x stetig ist. Wegen $\mathcal{F} \to x$ ist $U \in \mathcal{F}$, also $f(U) \in f(\mathcal{F})$ und damit auch $V \in f(\mathcal{F})$. Folglich ist $\mathcal{U}(f(x)) \subseteq f(\mathcal{F})$, also $f(\mathcal{F}) \to f(x)$.
(b) $\Longrightarrow$ (c): trivial, da $\mathcal{U}(x) \to x$.
(c) $\Longrightarrow$ (a): Sei $\mathcal{F} = \mathcal{U}(x)$. Wegen $f(\mathcal{F}) \to f(x)$ ist $\mathcal{U}(f(x)) \subseteq f(\mathcal{F})$. Da $\{f(F) \mid F \in \mathcal{F}\}$ eine Basis von $f(\mathcal{F})$ ist, gibt es zu jedem $V \in \mathcal{U}(f(x))$ ein $U \in \mathcal{F} = \mathcal{U}(x)$ mit $f(U) \subseteq V$, d.h. f ist stetig im Punkt x. □

(5.16) Lemma. *Seien X, Y zwei topologische Räume und sei $D \subseteq X$ dicht in X. Sei $f : (D, \mathcal{O}_D) \to Y$ eine Abbildung. Für alle $x \in X$ ist $\mathcal{B}_D(x) := \{f(B) \mid B \in \mathcal{U}_D(x)\}$ eine Basis eines Filters $\mathcal{F}(x)$ auf Y. Für $x \in D$ ist $\mathcal{F}(x)$ gerade der Bildfilter $f(\mathcal{U}_D(x))$. Ist $f : X \to Y$ und $x \in X$, so ist $\mathcal{F}(x)$ gerade der Bildfilter $f(\mathcal{V}_D(x))$.*

Beweis. Die Familie $\mathcal{B}_D(x)$ ist eine Filterbasis: Nach (5.11)(b) ist für $x \in \overline{D} = X$ die Familie $\mathcal{U}_D(x)$ eine Filterbasis. Deshalb gibt es zu $B_1, B_2 \in \mathcal{U}_D(x)$ ein $B \in \mathcal{U}_D(x)$ mit $B \subseteq B_1 \cap B_2$. Also folgt $\emptyset \neq f(B) \subseteq f(B_1 \cap B_2) \subseteq f(B_1) \cap f(B_2)$, d.h. $\mathcal{B}_D(x)$ ist eine Filterbasis. Die zweite Aussage folgt aus (5.11)(b) und der Definition eines Bildfilters. Die letzte Aussage folgt aus der Tatsache, daß $\mathcal{U}_D(x)$ eine Filterbasis von $\mathcal{V}_D(x)$ ist für alle $x \in X$. □

(5.17) Lemma. *Sei $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung zwischen Hausdorff-Räumen und sei $D \subseteq X$ dicht in X. Dann ist f eindeutig durch die Bilder $f(x)$ für $x \in D$ bestimmt.*

Beweis. Für alle $x \in X$ konvergiert nach (5.11) der Filter $\mathcal{V}_D(x)$ gegen x. Nach (5.13) ist x der einzige Limespunkt von $\mathcal{V}(x)$. Da f stetig und Y ein Hausdorff-Raum ist, konvergiert der Bildfilter $f(\mathcal{V}(x))$ eindeutig gegen $f(x)$. Nach (5.16) ist $\mathcal{B}_D(x) = \{f(B) \mid B \in \mathcal{U}_D(x)\}$ eine Filterbasis von $\mathcal{F}(x) = f(\mathcal{V}_D(x))$. Da $\mathcal{B}_D(x)$ aber nur von den Bildern von f auf D abhängt, folgt die Behauptung. □

(5.18) Satz. *Sei X ein topologischer Raum und sei $D \subseteq X$ dicht. Sei $f : D \to Y$ ein stetige Abbildung in einen regulären Raum Y. Die Abbildung f läßt sich genau dann zu* *einer stetigen Abbildung $F : X \to Y$ fortsetzen, wenn für jedes $x \in X$ der Filter $\mathcal{F}(x)$ konvergiert.*

Beweis. Sei $x \in X$. Nach (5.16) ist $\mathcal{F}(x) = F(\mathcal{V}_D(x))$. Wegen $\mathcal{V}_D(x) \to x$ folgt $\mathcal{F}(x) = F(\mathcal{V}_D(x)) \to F(x)$ aus der Stetigkeit von F und (5.15). Sei umgekehrt $F(x)$ der nach (5.13) eindeutig bestimmte Limespunkt von $\mathcal{F}(x)$. Da f stetig ist in $x \in D$, folgt $\mathcal{F}(x) = f(U_D(x)) \to f(x)$ nach (5.16) und (5.15). Also ist $F(x) = f(x)$ für alle $x \in D$, d.h. F ist eine Fortsetzung von f. Die Abbildung F ist stetig: Sei $x \in X$ und $W \in \mathcal{U}(F(x))$. Da Y regulär ist, gibt es nach (3.2)(c) eine abgeschlossene Umgebung $V \in \mathcal{U}(F(x))$ mit $V \subseteq W$. Da f stetig ist auf D, gibt es $U \in \mathcal{O}$ mit $f(U \cap D) \subseteq V$. Wegen $U \in \mathcal{U}(y)$ für alle $y \in U$ ist $f(U \cap D) \in f(\mathcal{U}_D(y))$. Nach Konstruktion ist $F(y)$ Limespunkt und daher auch Berührpunkt von $\mathcal{F}(y)$, also ist $F(y) \in \overline{f(U \cap D)} \subseteq \overline{V} = V$. Es folgt $F(U) \subseteq V \subseteq W$, d.h. F ist stetig. $\square$

(5.19) Lemma. *Sei X eine Menge und sei $\mathcal{O}$ die Initialtopologie auf X bzgl. der Abbildungen $f_i : X \to X_i$ $(i \in I)$. Ein Filter $\mathcal{F}$ auf X konvergiert genau dann gegen $x \in X$, wenn für jedes $i \in I$ der Bildfilter $f_i(\mathcal{F})$ gegen $f_i(x)$ konvergiert.*

Beweis. Ist $\mathcal{F} \to x$, so folgt $f_i(\mathcal{F}) \to f_i(x)$ nach (5.15). Nach (2.1) ist

$$\left\{ \bigcap_{j \in J} f_j^{-1}(U_j) \;\middle|\; J \subseteq I \text{ endlich}, U_j \in \mathcal{U}(f_j(x)) \right\}$$

eine Umgebungsbasis von x. Nach Voraussetzung gibt es für alle $U_j \in \mathcal{U}(f_j(x))$ ein $V_j \in \mathcal{F}$ mit $f_j(V_j) \subseteq U_j$. Also folgt $\emptyset \neq V := \bigcap_{j \in J} V_j \subseteq \bigcap_{j \in J} f_j^{-1}(U_j)$. Wegen $V \in \mathcal{F}$ (J ist endlich!) folgt also $\mathcal{U}(x) \subseteq \mathcal{F}$, d.h. es gilt $\mathcal{F} \to x$. $\square$

(5.20) Korollar. *Seien X_i, $(i \in I)$, topologische Räume, sei $X := \prod_{i \in I} X_i$ das topologische Produkt und sei $\pi_i : X \to X_i$ die i-te Projektion. Ein Filter $\mathcal{F}$ auf X konvergiert genau dann gegen $x \in X$, wenn für jedes $i \in I$ der Bildfilter $\pi_i(\mathcal{F})$ gegen $\pi_i(x)$ konvergiert.* $\square$

KAPITEL 6

Kompakte Räume

(6.1) Definition (Alexandroff, Urysohn, 1923). Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{O})$ heißt **quasikompakt**, wenn jede offene Überdeckung von X eine endliche Teilüberdeckung besitzt, d.h. $\forall\, \mathcal{O}' \subseteq \mathcal{O}\ (\bigcup \mathcal{O}' = X \implies \exists\, O_1, \ldots, O_n \in \mathcal{O}' : \bigcup_{i=1}^n O_i = X)$. Ein quasikompakter T_2-Raum heißt **kompakt**. Eine Teilmenge $A \subseteq X$ heißt **(quasi)kompakt**, wenn A in der Spurtopologie (quasi)kompakt ist. $A \subseteq X$ heißt **relativ kompakt**, wenn $\overline{A}$ kompakt ist.

(6.2) Beispiele. (a) $[0,1]^n \subseteq \mathbb{R}^n$ ist kompakt (Beweis später), $[0,1), (0,1], (0.1) \subseteq \mathbb{R}$ sind nicht kompakt, aber relativ kompakt. $[0, \infty)$ ist nicht relativ kompakt.
(b) Jeder unendliche diskrete Raum ist nicht kompakt.
(c) Jeder indiskrete Raum mit mindestens 2 Elementen ist quasikompakt, aber nicht kompakt.
(d) Jede Menge ist bzgl. der cofiniten Topologie quasikompakt.
(e) $[0,1] \cap \mathbb{Q}$ ist nicht kompakt.

(6.3) Lemma. *Für einen topologischen Raum sind folgende Aussagen äquivalent:*

(a) *X ist quasikompakt.*
(b) *Jede Familie $\{A_i\}_{i \in I}$ abgeschlossener Teilmengen von X mit $\bigcap_{i \in I} A_i = \emptyset$ enthält eine endliche Teilfamilie $\{A_j\}_{j \in J}$ mit $\bigcap_{j \in J} A_j = \emptyset$.*
(c) *Jeder Filter auf X besitzt einen Berührpunkt.*
(d) *Jeder Ultrafilter auf X konvergiert.*

Beweis. (a) $\implies$ (b): Durch Übergang zum Komplement.
(b) $\implies$ (c): Besitzt ein Filter $\mathcal{F}$ keinen Berührpunkt, so bildet $\{\overline{F} \mid F \in \mathcal{F}\}$ eine Familie abgeschlossener Mengen, welche (b) widerspricht.
(c) $\implies$ (d): Folgt sofort aus (5.10),
(d) $\implies$ (a): Sei $\{U_i\}_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von X, welche keine endliche Teilüberdeckung enthält. Dann ist $\mathcal{B} := \{A_F := X \setminus (\bigcup_{i \in F} U_i) \mid F \subseteq I \text{ endlich}\}$ eine Filterbasis für einen Filter $\mathcal{F}$ (beachte, daß die Mengen A_F alle nichtleer sind). Sei $\mathcal{U}$ ein Ultrafilter, der $\mathcal{F}$ enthält, siehe (5.5). Nach Voraussetzung konvergiert $\mathcal{U}$ gegen ein $x \in X$. Da $\{U_i\}_{i \in I}$

eine Überdeckung von X ist, gibt es ein $j \in I$ mit $x \in U_j$. Nach Konstruktion ist aber $X \setminus U_j \in \mathcal{B} \subseteq \mathcal{F} \subseteq \mathcal{U}$, also $U_j \notin \mathcal{U}$. Damit ist $\mathcal{U}(x) \not\subseteq \mathcal{U}$, ein Widerspruch. $\square$

(6.4) Korollar. *Jede unendliche Teilmenge A eines kompakten Raumes X besitzt einen Häufungspunkt.*

Beweis. Sei $A \subseteq X$ unendlich und sei $B = \{b_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$ eine abzählbare Teilmenge von A. Die Familie $\mathcal{B} := \{\{b_n, b_{n+1}, \ldots\} \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist eine Filterbasis für einen Filter $\mathcal{F}$. Wegen $B \in \mathcal{B}$ ist $A \in \mathcal{F}$. Nach (6.3)(c) besitzt $\mathcal{F}$ einen Berührpunkt $x \in X$, d.h. es ist $U \cap F \neq \emptyset$ für alle $U \in \mathcal{U}(x)$ und alle $F \in \mathcal{F}$. Damit ist $x \notin B$ und wegen $B \in \mathcal{F}$ ist $U \cap B = U \setminus \{x\} \cap B \neq \emptyset$ für alle $U \in \mathcal{U}(x)$, d.h. x ist ein Häufungspunkt von B und somit auch von A. $\square$

(6.5) Lemma. *Sei X ein Hausdorff-Raum, sei $A \subseteq X$ kompakt und sei $x \in X \setminus A$. Dann gibt es $U \in \mathcal{O}(x)$ und $V \in \mathcal{O}(A)$ mit $U \cap V = \emptyset$.*

Beweis. Für $y \in A$ gibt es $U_y \in \mathcal{O}(x)$ und $V_y \in \mathcal{O}(y)$ mit $U_y \cap V_y = \emptyset$. Die Familie $\{V_y\}_{y\in A}$ ist eine Überdeckung von A. Da A kompakt ist, gibt es eine endliche Teilüberdeckung $\{V_{y_1}, \ldots, V_{y_n}\}$ von $\{V_y\}_{y\in A}$. Setze $V := \bigcup_{i=1}^n V_{y_i} \in \mathcal{O}(A)$ und $U := \bigcap_{i=1}^n U_{y_i} \in \mathcal{O}(x)$. Wegen $U \cap V = \emptyset$ folgt die Behauptung. $\square$

(6.6) Korollar. *Sei A Teilmenge eines topologischen Raumes X. Ist X (quasi)kompakt und A abgeschlossen in X, so ist A (quasi)kompakt. Ist A kompakt und X ein Hausdorff-Raum, so ist A abgeschlossen.*

Beweis. Sei X quasikompakt und sei $A \subseteq X$ abgeschlossen. Sei $\{A_i\}_{i\in I}$ eine Familie abgeschlossener Teilmengen von A mit $\bigcap_{i\in I} A_i = \emptyset$. Da A abgeschlossen ist in X, sind die Mengen A_i auch abgeschlossen in X. Da X quasikompakt ist, folgt $\bigcap_{j\in J} A_j = \emptyset$ für eine endliche Teilmenge $J \subseteq I$. Nach (6.3)(b) ist A quasikompakt. Da jeder Teilraum eines T_2-Raumes wieder ein T_2-Raum ist, folgt die Behauptung auch für kompakte Räume X. Sei umgekehrt $A \subseteq X$ kompakt und X ein Hausdorff-Raum. Nach (6.5) ist $X \setminus A$ offen in X, also ist A abgeschlossen in X. $\square$

(6.7) Korollar. *Eine Teilmenge A eines kompakten Raumes X ist genau dann kompakt, wenn sie abgeschlossen ist.* $\square$

(6.8) Korollar. *Jeder kompakte Raum X ist normal.*

Beweis. Sei X kompakt und seien $A, B \subseteq X$ disjunkt und abgeschlossen. Nach (6.6) sind A und B kompakt. Nach (6.5) gibt es zu jedem $a \in A$ ein $U_a \in \mathcal{O}(a)$ und ein $V_a \in \mathcal{O}(B)$ mit $U_a \cap V_a = \emptyset$. Da A kompakt ist, gibt es eine endliche Teilüberdeckung $\{U_{a_1}, \ldots, U_{a_n}\}$ von

$\{U_a\}_{a\in A}$. Dann sind $U := \bigcup_{i=1}^n U_{a_i} \in \mathcal{O}(A)$ und $V := \bigcap_{i=1}^n V_{a_i} \in \mathcal{O}(B)$ die gewünschten disjunkten Umgebungen von A und B. □

(6.9) Satz. *Sei $f : X \to Y$ eine stetige Surjektion zwischen topologischen Räumen X und Y. Ist X quasikompakt, so auch Y. Ist Y zusätzlich ein T_2-Raum, so ist Y kompakt.*

Beweis. Sei $\{U_i\}_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von Y. Dann ist $\left\{f^{-1}(U_i)\right\}_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von X. Da X kompakt ist, gibt es eine endliche Teilüberdeckung $\left\{f^{-1}(U_{i_1}), \dots, f^{-1}(U_{i_n})\right\}$. Damit folgt aber $\bigcup_{k=1}^n U_{i_k} = Y$, da f surjektiv ist. Also ist Y quasikompakt. Die zweite Aussage ist trivial, da Unterräume von T_2-Räumen wieder T_2-Räume sind. □

(6.10) Korollar. *Sei $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung eines kompakten Raumes X in einen Hausdorff-Raum Y. Dann ist f eine abgeschlossene Abbildung. Ist f zusätzlich bijektiv, so ist f ein Homöomorphismus.*

Beweis. Sei $A \overline{\subseteq} X$. Nach (6.6) ist A kompakt und nach (6.9) ist $f(A)$ kompakt, also abgeschlossen nach (6.6). Somit ist f abgeschlossen. Ist f bijektiv, so existiert f^{-1} und f^{-1} ist stetig nach (1.15)(e). □

(6.11) Korollar. *Seien $\mathcal{O}_1$ und $\mathcal{O}_2$ zwei Topologien auf einer Menge X, wobei $\mathcal{O}_1$ feiner als $\mathcal{O}_2$ sei. Ist $(X, \mathcal{O}_1)$ kompakt und ist $(X, \mathcal{O}_2)$ ein Hausdorff-Raum, so ist $\mathcal{O}_1 = \mathcal{O}_2$. Damit sind unter den Hausdorff-Topologien die kompakten Topologien minimale Topologien.*

Beweis. Betrachte die Identität id: $(X, \mathcal{O}_1) \to (X, \mathcal{O}_2)$. Da $\mathcal{O}_1$ feiner als $\mathcal{O}_2$ ist, ist diese Abbildung stetig. Nach (6.10) ist id sogar ein Homöomorphismus, d.h. es ist $\mathcal{O}_1 = \mathcal{O}_2$. □

(6.12) Subbasissatz von Alexander. *Sei $\mathcal{S}$ eine Subbasis eines topologischen Raumes X. Der Raum X ist genau dann quasikompakt, wenn jede Überdeckung von Mengen aus $\mathcal{S}$ eine endliche Teilüberdeckung enthält.*

Beweis. Ist X quasikompakt, so folgt die Aussage nach Definition der Kompaktheit. Sei umgekehrt $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter auf X. Nach (6.3)(d) müssen wir zeigen, daß $\mathcal{F}$ konvergiert. Angenommen, der Ultrafilter $\mathcal{F}$ konvergiert nicht. Dann gibt es zu jedem $x \in X$ ein $U_x \in \mathcal{S}$ mit $x \in U_x$ und $U_x \notin \mathcal{F}$. Andernfalls wäre $\mathcal{U}(x) \subseteq \mathcal{F}$, also $\mathcal{F} \to x$, ein Widerspruch. Die Überdeckung $\{U_x\}_{x\in X}$ von X besitzt nach Voraussetzung eine endliche Teilüberdeckung $\{U_{x_1}, \dots, U_{x_n}\}$. Da $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter ist, folgt $X \setminus U_{x_j} \in \mathcal{F}$ für alle $j = 1, \dots, n$ aus (5.6). Wegen $X = \bigcup_{k=1}^n U_{x_k}$ ist $\bigcap_{k=1}^n X \setminus U_{x_k} = \emptyset$, was (F1) widerspricht. Also konvergiert $\mathcal{F}$ doch und X ist quasikompakt. □

(6.13) Korollar. *Das Einheitsintervall $[0, 1]$ ist kompakt.*

Beweis. Eine Subbasis der natürlichen Topologie auf $[0,1]$ ist

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2 = \{[0,a) \mid 0 < a \leq 1\} \cup \{(b,1] \mid 0 \leq b < 1\}\,.$$

Sei $\mathcal{U}$ eine Überdeckung von $[0,1]$ aus Mengen von $\mathcal{S}$. Wegen $1 \notin \bigcup \mathcal{S}_1$ existiert eine Menge $(b,1]$ in $\mathcal{U}$. Analog existiert eine Menge $[0,a)$ in $\mathcal{U}$. Damit sind $m := \sup\{a \mid [0,a) \in \mathcal{U}\}$ und $n := \inf\{b \mid (b,1] \in \mathcal{U}\}$ wohldefiniert und es gilt $m > n$, da $\mathcal{U}$ das Intervall $[0,1]$ überdeckt. Dann gibt es $c, d \in [0,1]$ mit $n \leq c < d \leq m$ und $[0,d), (c,1] \in \mathcal{U}$. Also ist $\{[0,d), (c,1]\}$ eine endliche Teilüberdeckung von $\mathcal{U}$. □

(6.14) Satz von Tychonoff (1935). *Sei $X = \prod_{i \in I} X_i$ Produkt topologischer Räume X_i. Der Raum X ist genau dann (quasi)kompakt, wenn alle X_i (quasi)kompakt sind.*

Beweis. Der Raum X ist genau dann ein Hausdorff-Raum, wenn alle X_i Hausdorff-Räume sind (siehe Aufgabe 16). Ist X quasikompakt, so sind die Räume $X_i = \pi_i(X)$ quasikompakt nach (6.9). Seien also alle X_i quasikompakt.

„Originalbeweis". Die Familie $\mathcal{S} = \left\{\pi_i^{-1}(U) \,\middle|\, i \in I, U \overset{\circ}{\subseteq} X_i\right\}$ ist nach Definition eine Subbasis der Produkttopologie. Sei $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{S}$ eine Überdeckung von X. Für $i \in I$ sei $\mathcal{U}_i := \left\{U \overset{\circ}{\subseteq} X_i \,\middle|\, \pi_i^{-1}(U) \in \mathcal{U}\right\}$. Angenommen, die Familie $\mathcal{U}$ besitzt keine endliche Teilüberdeckung. Dann kann für jedes $i \in I$ auch keine endliche Teilüberdeckung $\mathcal{B}_i$ von $\mathcal{U}_i$ die Menge X_i überdecken, denn sonst wäre $\left\{\pi_i^{-1}(U) \,\middle|\, U \in \mathcal{B}_i\right\}$ eine endliche Teilüberdeckung von X. Da die X_i kompakt sind, kann auch kein $\mathcal{U}_i$ den Raum X_i überdecken. Wähle also für jedes $i \in I$ ein $x_i \in X_i \setminus \bigcup \mathcal{U}_i$. Dann ist aber $(x_i)_{i \in I} \in X \setminus \bigcup \mathcal{U}$, ein Widerspruch. Also ist X nach (6.12) kompakt.

Beweis nach Bourbaki. Sei $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter auf X. Dann ist für jedes $i \in I$ der Bildfilter $\mathcal{F}_i := \pi_i(\mathcal{F})$ ein Ultrafilter auf X_i nach Aufg. 28. Da alle X_i quasikompakt sind, konvergieren alle Bildfilter $\mathcal{F}_i$ nach (6.3)(d) gegen einen Punkt $x_i \in X$. Nach (5.20) konvergiert dann $\mathcal{F}$ gegen $x = (x_i)_{i \in I}$. Also ist X nach (6.3)(d) quasikompakt. □

(6.15) Korollar. *Ein topologischer Raum X ist genau dann vollständig regulär, wenn er sich in einen kompakten Raum einbetten läßt.*

Beweis. Nach (6.8) ist ein kompakter Raum normal und damit vollständig regulär. Da sich diese Trennungseigenschaft (im Gegensatz zur Normalität) auf Unterräume überträgt, folgt die Behauptung. Ist umgekehrt X vollständig regulär, so folgt die Behauptung aus aus (3.12) und (6.14). □

KAPITEL 7

Lokalkompakte Räume

(7.1) Definition (Alexandroff 1923). Ein topologischer Raum X heißt **lokalkompakt**, wenn er ein T_2-Raum ist und jeder Punkt von X eine kompakte Umgebung besitzt.

(7.2) Beispiele. (a) Jeder kompakte Raum ist lokalkompakt.
(b) Jeder diskrete Raum ist lokalkompakt.
(c) $\mathbb{R}$ ist lokalkompakt, aber nicht kompakt.
(d) $\mathbb{Q}$ ist nicht lokalkompakt.

(7.3) Lemma. *Jeder lokalkompakte Raum X ist regulär.*

Beweis. Nach (3.2)(c) ist zu zeigen, daß für jeden Punkt $x \in X$ die abgeschlossenen Umgebungen von x eine Umgebungsbasis bilden. Sei dazu $K \in \mathcal{U}(x)$ kompakt. Dann ist K abgeschlossen in X nach (6.6) und regulär nach (6.8) und (3.3). Sei $O \in \mathcal{O}(x)$. Dann ist $O \cap K \in \mathcal{U}(x)$. Da $K \setminus O \overline{\subseteq} K$ und K regulär, gibt es in K disjunkte offene Umgebungen $V \in \mathcal{O}_K(x)$ und $W \in \mathcal{O}_K(K \setminus O)$. Dann ist in K auch $\overline{V} \cap W = \emptyset$, also folgt $V \subseteq \overline{V} \subseteq K \setminus W \subseteq O \cap K \subseteq O$. Wegen $K \in \mathcal{U}(x)$ ist $V \in \mathcal{U}(x)$ und da K abgschlossen ist in X, ist auch $\overline{V}$ abgeschlossen in X, w.z.b.w. □

(7.4) Korollar. *In jedem lokalkompakten Raum X bilden für jeden Punkt x die kompakten Umgebungen von x eine Umgebungsbasis von x.*

Beweis. Nach (7.3) ist X regulär und nach (3.2)(c) bilden die abgeschlossenen Umgebungen $\mathcal{A}(x)$ von x eine Umgebungsbasis von x. Sei $K \in \mathcal{U}(x)$ kompakt. Dann ist $\{K \cap A \mid A \in \mathcal{A}(x)\}$ eine Umgebungsbasis von x aus lauter kompakten Umgebungen, siehe (6.7). □

(7.5) Lemma. *Jeder lokalkompakte Raum X ist vollständig regulär.*

Beweis. Sei $A \overline{\subseteq} X$ and $x \in X \setminus A$. Da X regulär ist, gibt es nach (7.4) eine offene, relativ kompakte Umgebung U von x mit $\overline{U} \cap A = \emptyset$. Da $\overline{U}$ kompakt ist, ist $\overline{U}$ (in der Spurtopologie) normal nach (6.8). Nach dem Lemma von Urysohn (3.5) gibt es eine stetige Funktion $f_0 : \overline{U} \to [0,1]$ mit $f_0(x) = 0$ und $f_0(\partial U) = \{1\}$. Durch $f(y) = 1$ für alle $y \in X \setminus \overline{U}$ wird f_0 zur gewünschten Urysohn-Funktion $f : X \xrightarrow{\sim} [0,1]$ fortgesetzt. $\square$

(7.6) Lemma. *Jeder Teilraum A eines lokalkompakten Raumes X, der sich in der Form $A = C \cap V$ schreiben läßt, wobei $C \mathrel{\overline{\subseteq}} X$ und $V \mathrel{\overset{\circ}{\subseteq}} X$ ist, ist selbst lokalkompakt.*

Beweis. Jeder offene Teilraum V von X ist lokalkompakt nach (7.4). Sei C abgeschlossen in X und sei $x \in C$. In X existiert eine kompakte Umgebung K von x. Nach Definition der Spurtopologie ist $K \cap C$ eine Umgebung von x in C, die nach (6.7) abgeschlossen und damit kompakt (da in K liegend) ist. Also ist C lokalkompakt. Da $C \cap V$ offen im lokalkompakten Raum C ist, folgt die Behauptung. $\square$

(7.7) Lemma. *Jeder lokalkompakte Teilraum A eines Hausdorff-Raumes X läßt sich in der Form $A = C \cap V$ schreiben, wobei $C \mathrel{\overline{\subseteq}} X$ und $V \mathrel{\overset{\circ}{\subseteq}} X$ ist.*

Beweis. Wir zeigen, daß A offen in $\overline{A}$ ist, denn dann gibt es nach Definition der Spurtopologie eine offene Menge V von X mit $A = \overline{A} \cap V$. Mit $C = \overline{A}$ folgt dann das Lemma. Sei $x \in A$ und sei K eine kompakte Umgebung von x in A. Nach (6.6) ist K abgeschlossen in X. Sei $O := K^\circ$. Nach Definition der Spurtopologie gibt es $U \mathrel{\overset{\circ}{\subseteq}} \overline{A}$ mit $O = U \cap A$. Bezüglich der Spurtopologie auf $\overline{A}$ ist $x \in U \subseteq \overline{U} = \overline{U \cap A} = \overline{O} \subseteq \overline{K} = K \subseteq A$ nach (1.13)(b). Dies zeigt, daß A offen ist in $\overline{A}$, w.z.b.w. $\square$

(7.8) Korollar. *Ein Teilraum A eines lokalkompakten Raumes X ist genau dann lokalkompakt, wenn er sich in der Form $A = C \cap V$ mit $C \mathrel{\overline{\subseteq}} X$ und $V \mathrel{\overset{\circ}{\subseteq}} X$ schreiben läßt.* $\square$

(7.9) Korollar. *Ein topologischer Raum X ist genau dann lokalkompakt, wenn er homöomorph zu einem offenen Teilraum eines kompakten Raumes ist.*

Beweis. Nach (7.6) ist jeder offene Teilraum eines kompakten Raumes lokalkompakt. Ist umgekehrt X lokalkompakt, so ist X vollständig regulär nach (7.3) und somit nach (3.12) in einen kompakten Raum Y einbettbar. Wir können o.E. $X \subseteq Y$ annehmen. Nach (7.8) gibt es $C \mathrel{\overline{\subseteq}} Y$ und $V \mathrel{\overset{\circ}{\subseteq}} Y$ mit $X = C \cap V$. Da C kompakt und $C \cap V$ offen ist in C, folgt die Behauptung. $\square$

(7.10) Satz. *Sei $X = \prod_{i \in I} X_i$ Produkt topologischer Räume X_i. Der Raum X ist genau dann lokalkompakt, wenn alle X_i lokalkompakt und fast alle X_i kompakt sind.*

Beweis. Seien alle X_i lokalkompakt. Nach dem Satz von Tychonoff (6.14) genügt es zu zeigen, daß das endliche Produkt $X = X_1 \times \ldots \times X_n$ lokalkompakt ist. Sei $x = (x_1, \ldots, x_n) \in X$ und seien $K_i \in \mathcal{U}(x_i)$ kompakte Umgebungen. Dann ist nach Tychonoff $K_1 \times \ldots \times K_n$ eine kompakte Umgebung von x in X. Sei umgekehrt X lokalkompakt.

Sei $i_0 \in I$ und $x_{i_0} \in X_{i_0}$. Wähle $y \in X$ mit $y_{i_0} = x_{i_0}$. Sei $K \in \mathcal{U}(y)$ kompakt. Da die Projektion π_{i_0} offen und stetig ist, ist $\pi_{i_0}(K)$ eine kompakte Umgebung von x_{i_0}, d.h. alle Räume X_i sind lokalkompakt. Nach Definition der Produkttopologie gibt es eine offene Menge $\prod_{i \in I} U_i \subseteq K$, wobei $U_i = X_i$ für fast alle $i \in I$ gilt. Insbesondere ist $\pi_i(K) = X_i$ für fast alle $i \in I$, d.h. fast alle X_i sind kompakt. $\square$

(7.11) Korollar. *Sei $f : X \to Y$ eine stetige und offene Surjektion zwischen topologischen Räumen X und Y. Ist X lokalkompakt und ist Y ein Hausdorff-Raum, so ist Y lokalkompakt.*

Beweis. Sei $y \in Y$ und wähle $x \in f^{-1}(y)$. Sei $K \in \mathcal{U}(x)$ kompakt. Da f offen ist, ist $f(K) \in \mathcal{U}(y)$ und $f(K)$ ist kompakt nach (6.9). $\square$

KAPITEL 8

Kompaktifizierungen

(8.1) Definition. Seien X, Y topologische Räume und sei Y kompakt. Der Raum Y heißt **Kompaktifizierung von** X, wenn es eine Einbettung $\iota : X \hookrightarrow Y$ gibt, so daß $\iota(X)$ dicht in Y liegt. Ist $Y \setminus \iota(X)$ einpunktig, so heißt Y eine **Einpunkt-Kompaktifizierung** oder auch **Alexandroff-Kompaktifizierung** von X.

(8.2) Satz. *Ein nicht kompakter, topologischer Raum X besitzt genau dann eine Einpunkt-Kompaktifizierung Y, wenn er lokalkompakt ist. Bis auf Homöomorphie ist die Einpunkt-Kompaktifizierung von X eindeutig.*

Beweis (Alexandroff, 1924). (1) Sei $\iota : X \hookrightarrow Y$ eine Einbettung mit $Y \setminus \iota(X) = \{\infty\}$, d.h. $\iota : X \hookrightarrow \iota(X)$ ist ein Homöomorphismus, wobei $\iota(X)$ mit der Spurtopologie versehen ist. Da Y kompakt ist, ist $\{\infty\}$ abgeschlossen in Y, d.h. $\iota(X)$ ist offen in Y und damit lokalkompakt nach (7.9).
Sei umgekehrt X lokalkompakt und nicht kompakt. Setze $Y := X \cup \{\infty\}$ mit $\infty \notin X$. Um eine Topologie auf Y zu definieren, muß nach (1.6) nur ein Umgebungsfilter $\mathcal{U}(\infty)$ angegeben werden. Dazu geben wir eine Umgebungsbasis $\mathcal{B}(\infty)$ von $\mathcal{U}(\infty)$ wie folgt an: Wir setzen $\mathcal{B}(\infty) := \{Y \setminus K \mid K \subseteq X \text{ kompakt}\}$. Da die Vereinigung zweier kompakter Teilmengen wieder kompakt ist, ist für $U, V \in \mathcal{B}(\infty)$ auch $U \cap V \in \mathcal{B}(\infty)$. Nach (5.2) ist damit $\mathcal{B}(\infty)$ eine Filterbasis eines Filters $\mathcal{U}(\infty)$. Der Umgebungsfilter von $x \in X$ in X bildet eine Basis $\mathcal{B}(x)$ für einen Filter $\mathcal{U}(x)$ von x in Y. Die Familie $\{\mathcal{U}(x) \mid x \in Y\}$ definiert nach (1.6) eine Topologie $\mathcal{O}_Y$ auf Y, so daß $\mathcal{U}(x)$ Umgebungsfilter sind. Die Familie $\mathcal{B} = \bigcup_{y \in Y} \mathcal{B}(y)$ ist eine Basis von $\mathcal{O}_Y$. Insbesondere stimmt die Spurtopologie von X in $(Y, \mathcal{O}_Y)$ mit der Originaltopologie von X überein.
(2) Der Raum $(Y, \mathcal{O}_Y)$ ist ein Hausdorff-Raum: Da X ein Hausdorff-Raum ist, genügt es zu zeigen, daß es zu $x \in X$ disjunkte Umgebungen $U \in \mathcal{U}(x)$ und $V \in \mathcal{U}(\infty)$ gibt. Sei also $x \in X$ und sei $K \in \mathcal{U}(x)$ kompakt. Wähle eine Umgebung $U \in \mathcal{O}(x)$ mit $U \subseteq K$. Dann ist $V := Y \setminus K \in \mathcal{U}(\infty)$ disjunkt zu U.
(3) Der Raum $(Y, \mathcal{O}_Y)$ ist kompakt: Sei $\mathcal{U}$ eine Überdeckung von Y. Nach dem Subbasissatz von Alexander können wir annehmen, daß $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{B}$ ist. Da ∞ nur in Mengen aus $\mathcal{B}(\infty)$ liegt, gibt es ein $U_0 \in \mathcal{U}$ der Form $U_0 = Y \setminus K$ mit $K \subseteq X$ kompakt. Die Familie $\mathcal{U}$ ist auch eine

Überdeckung von K. Da K kompakt ist, gibt es $U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{U}$ mit $K \subseteq U_1 \cup \ldots \cup U_n$. Also ist $Y = U_0 \cup U_1 \cup \ldots \cup U_n$ und Y ist somit kompakt.
(4) X liegt dicht in $(Y, \mathcal{O}_Y)$: Es ist nur zu zeigen, daß ∞ ein Häufungspunkt von X ist. Sei also $U \in \mathcal{U}(\infty)$. Nach (1.13)(b) können wir o.E. $U \in \mathcal{B}(\infty)$ wählen. Nach Konstruktion ist $U \setminus \{\infty\} \cap X \neq \emptyset$, da X nach Voraussetzung nicht kompakt ist. Also ist ∞ ein Häufungspunkt von X.
(5) Sei Y^* eine weitere Einpunkt-Kompaktifizierung von X. Wir können wieder $X \subseteq Y^*$ und $Y^* = X \cup \{\infty^*\}$ annehmen. Setze nun

$$f : Y^* \to Y : y \to \begin{cases} y & \text{falls } y \in X \\ \infty & \text{falls } y = \infty^*. \end{cases}$$

Natürlich ist f eine Bijektion, die auf X stetig ist. Die Abbildung ist in ∞^* stetig: Sei dazu $U = Y \setminus K \in \mathcal{B}(\infty)$ mit $K \subseteq X$ kompakt. Setze $U^* := Y^* \setminus K$. Da K kompakt ist, ist K abgeschlossen in Y^*, d.h. die Menge U^* ist offen in Y^*. Aus $\infty^* \in U^*$ folgt damit $U^* \in \mathcal{U}(\infty^*)$. Wegen $f(K) = K$ gilt

$$f(U^*) = f(Y^* \setminus K) = f(Y^*) \setminus f(K) = Y \setminus K = U.$$

Somit ist f stetig in ∞^*. Nach (1.15) ist f stetig auf ganz Y. Da Y kompakt und Y^* ein Hausdorff-Raum ist, ist f sogar ein Homöomorphismus nach (6.10), w.z.b.w. □

Bemerkung. Die Einpunkt-Kompaktifizierung eines nicht kompakten, lokalkompakten Raumes X ist die kleinste Kompaktifizierung von X.

(8.3) Stone-Čech-Kompaktifizierung (Stone, Čech, 1937). Sei X ein vollständig regulärer Raum. Nach (3.12) ist die Abbildung $\chi : X \to \prod_{f \in I}[0,1] : x \mapsto (f(x))_{f \in I}$ eine Einbettung in einen kompakten Raum (nach Tychonoff). Setze $\beta X := \overline{\chi(X)}$. Nach (6.7) ist βX kompakt und $\chi(X)$ ist natürlich dicht in βX. Also ist βX eine Kompaktifizierung von X, genannt die **Stone-Čech-Kompaktifizierung** von X.

(8.4) Lemma. *Ein topologischer Raum X besitzt genau dann eine Kompaktifizierung Y, wenn er vollständig regulär ist.*

Beweis. Ist X vollständig regulär, so besitzt er eine Stone-Cech-Kompaktifizierung. Ist Y eine Kompaktifizierung von X, so kann X als Unterraum von Y aufgefaßt werden. Da Y kompakt ist, ist Y und damit auch X vollständig regulär. □

(8.5) Satz. *Sei X ein vollständig regulärer Raum und sei Y ein kompakter Raum. Sei $\varphi : X \to Y$ stetig. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte stetige Abbildung $\Phi : \beta X \to Y$ mit $\Phi \circ \chi = \varphi$, d.h. φ läßt sich eindeutig zu einer stetigen Abbildung Φ auf βX fortsetzen.*

Durch diese Eigenschaft wird die Stone-Čech-Kompaktifizierung bis auf Homöomorphie eindeutig bestimmt.

Beweis. Sei $\varphi : X \to Y$ stetig. Seien $\chi_X : X \to \prod_{f\in I}[0,1] : x \mapsto (f(x))_{f\in I}$ und $\chi_Y : Y \to \prod_{g\in J}[0,1] : y \mapsto (g(y))_{g\in J}$ die Einbettungen aus (3.12) mit $I = \{f : X \to [0,1] \mid f \text{ stetig}\}$ und $J = \{g : Y \to [0,1] \mid f \text{ stetig}\}$. Setze

$$\Psi : \prod_{f\in I}[0,1] \to \prod_{g\in J}[0,1] : (x_f)_{f\in I} \mapsto (x_{g\circ\varphi})_{g\in J}.$$

Die Abbildung Ψ ist stetig nach (2.2), denn es gilt für $h \in J$

$$\pi_h(\Psi((x_f)_{f\in I})) = \pi_h((x_{g\circ\varphi})_{g\in J}) = x_{h\circ\varphi} = \pi_{h\circ\varphi}((x_f)_{f\in I}).$$

Ferner ist

$$\Psi(\chi_X(x)) = \Psi((f(x))_{f\in I}) = (g(\varphi(x)))_{g\in J} = \chi_Y(\varphi(x)) \in \chi_Y(Y),$$

woraus

$$\Psi(\beta X) = \Psi(\overline{\chi_X(X)}) \subseteq \overline{\Psi(\chi_X(X))} \subseteq \overline{\chi_Y(Y)} = \chi_Y(Y)$$

folgt. Definiere nun $\Phi = \chi_Y^{-1} \circ \Psi\big|_{\beta X}$. Wir haben also folgendes kommutative Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\chi_X"'] & Y \arrow[d, "\chi_Y"'] \\
\beta X \arrow[r, "\Psi"] \arrow[ur, "\Phi"] \arrow[d, "\subseteq"'] & \chi_Y(Y) \arrow[d, "\subseteq"'] \\
\prod\limits_{f\in I}[0,1] \arrow[r, "\Psi"] & \prod\limits_{g\in J}[0,1]
\end{tikzcd}$$

Die Abbildung Φ ist stetig und es gilt für $x \in X$

$$\Phi \circ \chi_X(x) = \chi_Y^{-1} \circ \Psi\big|_{\beta X} \circ \chi_X(x) = \chi_Y^{-1} \circ \chi_Y \circ \varphi(x) = \varphi(x).$$

Da X dicht liegt in βX, ist die stetige Fortsetzung Φ nach (5.17) eindeutig bestimmt.

Sei nun Z eine weitere Kompaktifizierung von X mit der Fortsetzungseigenschaft und sei $\chi_Z : X \hookrightarrow Z$ die zugehörige Einbettung. Dann gibt es stetige Fortsetzungen $\mathsf{X}_Z : \beta X \to Z$ von χ_Z und $\mathsf{X}_X : Z \to \beta X$ von χ_X, d.h. das folgenden Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\chi_Z"] \arrow[d, "\chi_X"'] & Z \arrow[dl, shift right, "\mathsf{X}_X"'] \\
\beta X \arrow[ur, shift right, "\mathsf{X}_Z"'] &
\end{tikzcd}$$

Da $\mathsf{X}_Z(\beta X)$ kompakt ist, ist $\mathsf{X}_Z(\beta X)$ abgeschlossen in Z, also ist

$$Z = \overline{\chi_Z(X)} = \overline{\mathsf{X}_Z(X)} \subseteq \mathsf{X}_Z(\overline{X}) = \mathsf{X}_Z(\beta X),$$

d.h. X_Z ist surjektiv. Analog zeigt man, daß X_X surjektiv ist. Weiter gilt für $x \in \chi_X(X)$

$$\mathsf{X}_X \circ \mathsf{X}_Z(x) = \left((\chi_X \circ \chi_Z^{-1}) \circ (\chi_Z \circ \chi_X^{-1})\right)(x) = x$$

und ebenso ist $\mathsf{X}_Z \circ \mathsf{X}_X(x) = x$ für $x \in \chi_Z(X)$. Da $\chi_X(X)$ dicht in βX und $\chi_Z(X)$ dicht in Z liegt, folgt wie zuvor $\mathsf{X}_X \circ \mathsf{X}_Z = \mathbb{1}_{\beta X}$ und $\mathsf{X}_Z \circ \mathsf{X}_X = \mathbb{1}_Z$, d.h. X_X und X_Z sind Homöomorphismen. □

Bemerkung. Stetige Abbildungen $f : X \to Y$ eines lokalkompakten Raumes X in einen kompakten Raum Y lassen sich i.a. nicht auf die Alexandroff-Kompaktifizierung von X stetig fortsetzen. So ist etwa die Abbildung $\sin : \mathbb{R} \to [0, 1]$ nicht stetig fortsetzbar auf $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

(8.6) Lemma. *Sei Y eine Kompaktifizierung eines vollständig regulären Raumes X. Dann gibt es eine stetige Surjektion $f : \beta X \to Y$, so daß Y die Quotiententopologie bzgl. f besitzt.*

Beweis. Nach (8.5) läßt sich die Einbettung $\iota : X \hookrightarrow Y$ zu einer stetigen Surjektion $f : \beta X \to Y$ fortsetzen. Nach (6.10) ist f eine abgeschlossene Abbildung und via Komplementbildung folgt, daß eine Menge $O \subseteq Y$ genau dann offen ist, wenn $f^{-1}(O)$ offen in βX ist. Also besitzt Y die Quotiententopologie bzgl. f. □

Bemerkung. Die Stone-Čech-Kompaktifizierung eines vollständig regulären Raumes X ist nach (8.6) die größte Kompaktifizierung von X.

KAPITEL 9
Uniforme Räume

(9.1) Definition. Sei X eine Menge. Setze $A^{-1} := \{(x,y) \in X \times X \mid (y,x) \in A\}$ und $AB := \{(x,y) \in X \times X \mid \exists\, z \in X \ ((x,z) \in A \wedge (z,y) \in B)\}$ für $A, B \subseteq X \times X$. Die Menge $\Delta = \{(x,x) \mid x \in X\}$ heißt **Diagonale**. Potenzen A^k werden rekursiv definiert: $A^1 = A$ und $A^k = A^{k-1}A$. Die Menge A heißt **symmetrisch**, wenn $A = A^{-1}$ gilt. Der Durchschnitt $A \cap A^{-1}$ ist stets symmetrisch.

(9.2) Lemma. *Sei X eine Menge und seien $A, B, C \subseteq X \times X$.*

(a) $\Delta^{-1} = \Delta$, $\Delta^k = \Delta$, $(A^{-1})^{-1} = A$
(b) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
(c) $(AB)C = A(BC)$
(d) $A \subseteq B \implies (A^{-1} \subseteq B^{-1} \wedge AC \subseteq BC)$
(e) *Ist A symmetrisch, so auch A^k für jedes $k \in \mathbb{N}$*

□

(9.3) Definition (Weil, 1938, Bourbaki, 1940). Sei X eine Menge. Eine Familie $\mathcal{U}$ von Teilmengen von $X \times X$ heißt **uniforme Struktur**, **Uniformität** oder **Nachbarschaftsfilter** auf X, wenn gilt

(UF1) $\forall\, U, V \in \mathcal{U} : U \cap V \in \mathcal{U}$
(UF2) $\forall\, V \subseteq X \times X \ (\exists\, U \in \mathcal{U} : U \subseteq V \implies V \in \mathcal{U})$
(UF3) $\bigcap \mathcal{U} = \Delta$
(UF4) $\forall\, U \in \mathcal{U} : U^{-1} \in \mathcal{U}$
(UF5) $\forall\, U \in \mathcal{U}\ \exists\, V \in \mathcal{U} : V^2 \subseteq U$

Die Mengen aus $\mathcal{U}$ heißen **Nachbarschaften**. Ist $(x,y) \in U \in \mathcal{U}$, so heißen x und y benachbart von der Ordnung U. Das Paar $(X, \mathcal{U})$ heißt **uniformer Raum**.

Bemerkung. Für alle Mengen U einer uniformen Struktur gilt $U \subseteq U^n$ $(n \in \mathbb{N})$, da stets $\Delta \subseteq U$ ist.

(9.4) Definition. Sei $(X, \mathcal{U})$ ein uniformer Raum. Eine Teilfamilie $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{U}$ heißt **Basis der Uniformität** $\mathcal{U}$, wenn jede Nachbarschaft aus $\mathcal{U}$ eine Menge aus $\mathcal{B}$ enthält. Eine Teilfamilie $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{U}$ heißt **Subbasis der Uniformität** $\mathcal{U}$, wenn die endlichen Schnitte von Mengen aus $\mathcal{S}$ einer Basis von $\mathcal{U}$ bilden.

(9.5) Lemma. *Eine Basis $\mathcal{B}$ einer Uniformität $\mathcal{U}$ erfüllt folgende Eigenschaften:*
(BUF1) $\forall U, V \in \mathcal{B}\ \exists W \in \mathcal{B} : W \subseteq U \cap V$
(BUF2) $\forall U \in \mathcal{B}\ \exists V \in \mathcal{B} : V \subseteq U^{-1}$
(BUF3) $\bigcap \mathcal{B} = \Delta$
(BUF4) $\forall U \in \mathcal{B}\ \exists V \in \mathcal{B} : V^2 \subseteq U$
Umgekehrt definiert jede Familie $\mathcal{B}$ von Teilmengen von $X \times X$, welche (BUF1) bis (BUF4) erfüllt, eine Basis einer eindeutig definierten Uniformität $\mathcal{U}$. Dabei kann $\mathcal{U}$ wie folgt definiert werden: $\mathcal{U} := \{V \subseteq X \times X \mid \exists U \in \mathcal{B} : U \subseteq V\}$.

Beweis. Natürlich erfüllt jede Basis $\mathcal{B}$ einer Uniformität $\mathcal{U}$ die Aussagen (BUF1) bis (BUF4). Umgekehrt erfüllt $\mathcal{U} := \{V \subseteq X \times X \mid \exists U \in \mathcal{B} : U \subseteq V\}$ die Axiome (U1) bis (U5). Die Eindeutigkeitsaussage ist trivial. □

(9.6) Lemma. *Eine Familie $\mathcal{S}$ von Teilmengen von $X \times X$ ist genau dann Subbasis einer (eindeutig bestimmten) Uniformität $\mathcal{U}$ auf der Menge X, wenn sie die folgenden Eigenschaften erfüllt:*
(SUF1) $\forall U \in \mathcal{S}\ \exists V \in \mathcal{S} : V \subseteq U^{-1}$
(SUF2) $\bigcap \mathcal{S} = \Delta$
(SUF3) $\forall U \in \mathcal{S}\ \exists V \in \mathcal{S} : V^2 \subseteq U$
Insbesondere definiert jede Familie $\{\mathcal{U}_i\}_{i\in I}$ von Uniformitäten $\mathcal{U}_i$ auf X eine Subbasis $\mathcal{S}$ einer (neuen) Uniformität $\mathcal{U}$ auf X via $\mathcal{S} := \bigcup_{i\in I} \mathcal{U}_i$. □

(9.7) Beispiele. (a) Sei X eine Menge. Dann ist $\mathcal{B} = \{\Delta\}$ eine Basis einer uniformen Struktur, die die **diskrete uniforme Struktur auf** X genannt wird. Wegen Axiom (U3) gibt es keine indiskrete uniforme Struktur auf X.
(b) Sei (X, d) ein metrischer Raum. Für $\varepsilon > 0$ sei $U_\varepsilon = \{(x, y) \in X \times X \mid \mathrm{d}(x, y) < \varepsilon\}$. Dann ist $\mathcal{B}_{\mathrm{d}} := \{U_\varepsilon \mid \varepsilon > 0\}$ eine Basis einer uniformen Struktur $\mathcal{U}_{\mathrm{d}}$ auf X, genannt **die von** d **erzeugte uniforme Struktur auf** X.

(9.8) Lemma. *Sei $(X, \mathcal{U})$ ein uniformer Raum. Für $U \in \mathcal{U}$ und $x \in X$ setzen wir $U(x) = \{y \in X \mid (x, y) \in U\}$. Dann definieren die Familien $\mathcal{U}(x) = \{U(x) \mid U \in \mathcal{U}\}$, $x \in X$, Umgebungsfilter einer Topologie $\mathcal{O}_{\mathcal{U}}$ auf X, genannt die* **Topologie des uniformen Raumes** $(X, \mathcal{U})$. *Eine Basis $\mathcal{B}$ von $\mathcal{U}$ ergibt Umgebungsbasen $\mathcal{B}(x)$ für jeden Punkt $x \in X$.*

Beweis. Die Familien $\mathcal{U}(x)$ für $x \in X$ erfüllen die Bedingungen (U1) bis (U4) von (1.6). Außer für (U2) ist dies trivial. Sei $U(x) \in \mathcal{U}(x)$. Zu zeigen ist: Es gibt ein $V \in \mathcal{U}$ mit $U(x) \in \mathcal{U}(y)$ für alle $y \in V(x)$. Wähle $V \in \mathcal{U}$ mit $V^2 \subseteq U$. Dann gilt für $y \in V(x)$ und $z \in V(y)$ nach Definition $(x, z) \in V^2 \subseteq U$, also $z \in V(x)$. Also haben wir $y \in V(y) \subseteq U(x)$ gezeigt und damit folgt (U2) aus (U3). Nach (1.5) erzeugen die $\mathcal{U}(x)$ eine (eindeutig bestimmte) Topologie $\mathcal{O}_\mathcal{U}$ auf X, so daß $\mathcal{U}(x)$ der Umgebungsfilter von x ist für alle $x \in X$. Die letzte Aussage wird analog bewiesen. □

(9.9) Lemma. *Sei $(X, \mathcal{U})$ ein uniformer Raum. Dann bilden sowohl die (bzgl. der Produkttopologie auf $X \times X$) abgeschlossenen als auch die offenen Nachbarschaften eine Basis von $\mathcal{U}$.*

Beweis. Da die offenen Umgebungen eines Punktes eine Umgebungsbasis von $\mathcal{U}(x)$ bilden, folgt die Aussage für die offenen Nachbarschaften aus (9.8). Wir betrachten nun die abgeschlossenen Nachbarschaften. Sei $U \in \mathcal{U}$. Wähle $W_1 \in \mathcal{U}$ mit $W_1^2 \subseteq U$ und $W_2 \in \mathcal{U}$ mit $W_2^2 \subseteq W_1$. Dann ist $V := W_2 \cap W_2^{-1} \in \mathcal{U}$ symmetrisch und es gilt $V^3 \subseteq V^3V = V^2V^2 \subseteq W_2^4 \subseteq W_1^2 \subseteq U$. Für $(x, y) \in \overline{V}$ ist $D := (V(x) \times V(y)) \cap V \neq \emptyset$. Sei also $(z, z') \in D$. Wegen $z \in V(x)$ und $z' \in V(y)$ ist $(x, z), (z, z'), (z', y) \in V$, woraus $(x, y) \in V^3 \subseteq U$ folgt. Damit ist $\overline{V} \subseteq V^3 \subseteq U$, w.z.b.w. □

(9.10) Definition. Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{O})$ heißt **uniformisierbar**, wenn es eine Uniformität $\mathcal{U}$ auf X gibt mit $\mathcal{O} = \mathcal{O}_\mathcal{U}$.

(9.11) Beispiele. (a) Die diskrete uniforme Struktur auf einer Menge X induziert auf X die diskrete Topologie.
(b) Ist $\mathcal{U}$ eine von einer Metrik d induzierte uniforme Struktur, so ist die von der Uniformität $\mathcal{U}$ induzierte Topologie gleich der von der Metrik d induzierten Topologie.

(9.12) Definition. Eine Abbildung $f : X \to Y$ zwischen uniformen Räumen $(X, \mathcal{U})$ und $(Y, \mathcal{V})$ heißt **gleichmäßig stetig**, falls gilt:

$$\forall V \in \mathcal{V}\ \exists U \in \mathcal{U}\ \forall (x, y) \in U : (f(x), f(y)) \in V.$$

(9.13) Lemma. *Eine Abbildung $f : X \to Y$ zwischen uniformen Räumen $(X, \mathcal{U})$ und $(Y, \mathcal{V})$ ist genau dann gleichmäßig stetig, wenn das Urbild einer jeden Nachbarschaft $V \in \mathcal{V}$ eine Nachbarschaft auf X ist, d.h. es gilt $\big\{(f^{-1}(x), f^{-1}(y)) \,\big|\, (x, y) \in V\big\} \in \mathcal{U}$.*

Beweis. Sei f gleichmäßig stetig und sei $V \in \mathcal{V}$. Dann gibt es $U \in \mathcal{U}$ mit $(f(x), f(y)) \in V$ für alle $(x, y) \in U$, woraus $U \subseteq W := \big\{(f^{-1}(x), f^{-1}(y)) \,\big|\, (x, y) \in V\big\}$ folgt. Nach (UF2) ist dann $W \in \mathcal{U}$. Umgekehrt gilt $(f(x), f(y)) \in V$ für alle $(x, y) \in W$, woraus mit $U = W$ die gleichmäßige Stetigkeit folgt. □

(9.14) Lemma. *Eine gleichmäßig stetige Abbildung $f : X \to Y$ zwischen uniformen Räumen $(X, \mathcal{U})$ und $(Y, \mathcal{V})$ ist als Abbildung $f : (X, \mathcal{O}_\mathcal{U}) \to (Y, \mathcal{O}_\mathcal{V})$ stetig.*

Beweis. Sei $x \in X$. Sei $V \in \mathcal{V}$. Dann gibt es $U \in \mathcal{U}$ mit $(f(x), f(y)) \in V$ für alle $(x, y) \in U$. Damit folgt $f(y) \in V(f(x))$ für alle $y \in U(x)$, also $f(U(y)) \subseteq V(f(x))$. Nach (9.8) ist f also stetig. □

(9.15) Lemma. *Sei $(X, \mathcal{U})$ ein kompakter uniformer Raum und sei $(Y, \mathcal{V})$ ein uniformer Raum. Dann ist jede stetige Abbildung $f : X \to Y$ gleichmäßig stetig.*

Beweis. Sei $f : X \to Y$ stetig. Sei $W \in \mathcal{V}$ und sei $V \in \mathcal{V}$ symmetrisch mit $V^2 \subseteq W$ (vgl. den Beweis von (9.9)). Da f stetig ist, gibt es nach (9.8) für jedes $x \in X$ ein $V_x \in \mathcal{U}$ mit $f(V_x(x)) \subseteq V(f(x))$. Für jedes $x \in X$ sei $U_x \in \mathcal{U}$ offen mit $U_x^2 \subseteq V_x$. Damit gilt $f(U_x(x)) \subseteq f(U_x^2(x)) \subseteq f(V_x(x)) \subseteq V(f(x))$. Die offene Überdeckung $\{U_x(x)\}_{x \in X}$ besitzt aufgrund der Kompaktheit von X eine endliche Teilüberdeckung $\{U_{x_i}(x_i)\}_{i=1}^n$. Setze $U := \bigcap_{i=1}^n U_{x_i}(x_i) \in \mathcal{U}$. Für $u \in X$ gibt es außerdem ein $z \in \{x_1, \ldots, x_n\}$ mit $u \in U_z(z)$, also $(z, u) \in U_z \subseteq U_z^2$. Für $(u, v) \in U$ gilt daher auch $(z, v) \in U_z^2$. Damit ist $f(u), f(v) \in f(U_z^2(z)) \subseteq V(f(z))$, d.h. wir haben $(f(u), f(z)) \in V^{-1} = V$ und ebenso $(f(z), f(v)) \in V$. Dies impliziert $(f(u), f(v)) \in V^2 \subseteq W$ und f ist somit gleichmäßig stetig. □

(9.16) Definition. Zwei uniforme Räume X und X heißen **isomorph**, wenn es eine Bijektion $f : X \to Y$ gibt, so daß f und f^{-1} gleichmäßig stetig sind.

(9.17) Initiale Uniformität. Sei X eine Menge, sei $\{(Y_i, \mathcal{U}_i)\}_{i \in I}$ eine Familie uniformer Räume und seien $f_i : X \to Y_i$ $(i \in I)$ Abbildungen.
Ziel: Definiere mit Hilfe der Uniformitäten $\mathcal{U}_i$ und der Abbildungen f_i eine Quasi-Uniformität $\mathcal{U} = \mathcal{U}(X, \mathcal{U}_i, f_i)$ auf X, d.h. die Familie $\mathcal{U}$ erfüllt die Axiome (UF1) bis (UF5) mit Ausnahme von (UF3). An dessen Stelle tritt (UF3*) $\Delta \subseteq \bigcap \mathcal{U}$. Die Quasi-Uniformität $\mathcal{U}$ wird die **initiale Uniformität auf X bzgl. der Abbildungen** f_i genannt.
Idee: $\mathcal{U}$ soll gerade so fein sein, daß alle f_i gleichmäßig stetig werden.
Ausführung: Setze $\mathcal{S}_i := \{(f_i \times f_i)^{-1}(U) \mid U \in \mathcal{U}_i\}$ für $i \in I$ sowie $\mathcal{S} = \bigcup_{i \in I} \mathcal{S}_i$. Gilt $\Delta = \bigcap \mathcal{S}$, so ist $\mathcal{S}$ nach Lemma (9.6) eine Subbasis einer uniformen Struktur $\mathcal{U}$ auf X. Gilt nur $\Delta \subseteq \bigcap \mathcal{S}$, so definiert $\mathcal{S}$ immerhin noch eine Quasi-Uniformität $\mathcal{U}$. Nach Konstruktion sind die Abbildungen f_i gleichmäßig stetig.

(9.18) Lemma. *Sei $\{f_i : X \to (Y_i, \mathcal{U}_i)\}_{i \in I}$ eine Familie von Abbildungen von der Menge X in die uniformen Räume $(Y_i, \mathcal{U}_i)$ und sei $\mathcal{U} = \mathcal{U}(X, \mathcal{U}_i, f_i)$ die initiale Uniformität auf X. Dann induziert $\mathcal{U}$ auf X die Initialtopologie bzgl. der Abbildungen f_i, d.h. es ist $\mathcal{O}_{\mathcal{U}} = \mathcal{O}(X, \mathcal{O}_{\mathcal{U}_i}, f_i)$.*

Beweis. Sei $\mathcal{O} = \mathcal{O}(X, \mathcal{O}_{\mathcal{U}_i}, f_i)$ und $x \in X$. Wir zeigen zuerst, daß die Mengen der Form $\bigcap_{i \in J} f_i^{-1}(U_i(f_i(x)))$, wobei $J \subseteq I$ endlich und $U_i \in \mathcal{U}_i$ ist, eine Umgebungsbasis $\mathcal{B}(x)$ von

$\mathcal{U}(x)$ bzgl. $\mathcal{O}$ bilden. Seien dazu $U_i(f_i(x)) \in \mathcal{O}_{\mathcal{U}_i}$. Da nach (9.14) die Abbildungen f_i stetig sind bzgl. der Initialtopologie $\mathcal{O}$, ist $f_i^{-1}(U_i(f_i(x)))$ eine Umgebung von x. Wähle nun eine Umgebung $U \in \mathcal{O}$ von $x \in X$. Dann gibt es $O_i \in \mathcal{O}_{\mathcal{U}_i}$, $(i \in J)$, so daß $x \in \bigcap_{i\in J} f_i^{-1}(O_i) \subseteq U$ gilt. Da O_i Umgebung von $f_i(x)$ ist, gibt es $U_i \in \mathcal{U}_i$ mit $O_i = U_i(f_i(x))$. Also ist $\bigcap_{i\in J} f_i^{-1}(U_i(f_i(x))) \subseteq U$ und damit ist $\mathcal{B}(x)$ eine Umgebungsbasis von x bzgl. $\mathcal{O}$.

Nach Definition der initialen uniformen Struktur und der davon induzierten Topologie bilden die Mengen der Form $U = \left(\bigcap_{i\in J}(f_i \times f_i)^{-1}(U_i)\right)(x)$ mit $J \subseteq I$ endlich eine Umgebungsbasis von x, wobei $U_i \in \mathcal{U}_i$ ist. Es gilt

$$\begin{aligned} y \in U &\iff \forall\, i \in J : (x,y) \in (f_i \times f_i)^{-1}(U_i) \\ &\iff \forall\, i \in J : (f_i(x), f_i(y)) \in U_i \\ &\iff \forall\, i \in J : f_i(y) \in U_i(f_i(x)) \\ &\iff \forall\, i \in J : y \in f_i^{-1}(U_i(f_i(x))) \\ &\iff y \in \bigcap_{i\in J} f_i^{-1}(U_i(f_i(x))). \end{aligned}$$

Damit ist das Lemma bewiesen.

KAPITEL 10

Uniformisierung und Metrisierung

(10.1) Definition. Eine Abbildung $\mathrm{d}: X \times X \to [0, \infty]$ heißt **Pseudometrik** auf der Menge X, wenn gilt:
(PM1) $\forall x \in X : \mathrm{d}(x, x) = 0$
(PM2) $\forall x, y \in X : \mathrm{d}(x, y) = \mathrm{d}(y, x)$
(PM3) $\forall x, y, z \in X : \mathrm{d}(x, y) \leq \mathrm{d}(x, z) + \mathrm{d}(z, y)$

(10.2) Definition. Eine Pseudometrik d auf einem uniformen Raum $(X, \mathcal{U})$ heißt **uniform bzgl.** $\mathcal{U}$, falls gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists U \in \mathcal{U} \; \forall x, y \in X \;\; ((x, y) \in U \implies \mathrm{d}(x, y) < \varepsilon).$$

(10.3) Lemma. *Sei* d *eine Pseudometrik auf dem uniformen Raum* $(X, \mathcal{U})$*. Ist* d *uniform bzgl.* $\mathcal{U}$*, dann ist* $\mathrm{d}: X \times X \to \mathbb{R}$ *stetig bzgl. der Produkttopologie der Räume* $(X, \mathcal{O}_{\mathcal{U}})$*.*

Beweis. Sei $(x_0, y_0) \in X \times X$, $\varepsilon > 0$ und $U \in \mathcal{U}$ mit $\mathrm{d}(x.y) < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $x, y \in X$ mit $(x, y) \in U$. Nach (9.8) ist $U(x_0) \times U(y_0)$ eine Umgebung von (x_0, y_0) im Produktraum $X \times X$. Für $(x, y) \in U(x_0) \times U(y_0)$ ist $(x_0, x), (y_0, y) \in U$ und nach (PM2), (PM3) folgt $|\mathrm{d}(x_0.y_0) - \mathrm{d}(x, y)| \leq \mathrm{d}(x_0, x) + \mathrm{d}(y_0, y) \leq \varepsilon$, d.h. d ist stetig. $\square$

(10.4) Lemma. *Sei* $(X, \mathcal{U})$ *ein uniformer Raum und sei* $\{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ *eine Folge von symmetrischen Nachbarschaften mit* $U_0 = X \times X$ *und* $U_{i+1}^3 \subseteq U_i$*. Dann gibt es eine Pseudometrik* d *auf* X *mit*

$$\left\{(x, y) \in X \times X \;\middle|\; \mathrm{d}(x, y) < 2^{-i}\right\} \subseteq U_i \subseteq \left\{(x, y) \in X \times X \;\middle|\; \mathrm{d}(x, y) \leq 2^{-i}\right\}.$$

Beweis. Für $x, y \in X$ betrachte die Familie endlicher Folgen

$$F_{x,y} := \left\{(x_0, \ldots, x_k) \in X^{k+1} \;\middle|\; k \in \mathbb{N},\; x_0 = x, x_k = y\right\}.$$

Setze

$$S(F_{x,y}) := \left\{ \sum_{j=1}^{k} 2^{-i_j} \;\middle|\; (x_0, \ldots, x_k) \in F_{x,y} \wedge \forall j = 1, \ldots, k : (x_{j-1}, x_j) \in U_{i_j} \right\}.$$

und
$$\mathrm{d}\,(x,y) := \inf S(F_{x,y}).$$

Die Abbildung $\mathrm{d} : X \times X \to [0,\infty)$ ist eine Pseudometrik auf X: Wegen $(x,x) \in U_i$ ist $\mathrm{d}\,(x,x) \leq 2^{-i}$ für alle $i \in \mathbb{N}$, also $\mathrm{d}\,(x,x) = 0$. Damit gilt (PM1). Da die Nachbarschaften U_i symmetrisch sind, folgt sofort (PM2). Für $x,y,z \in X$ setze

$$F_{x,z,y} := \{(x_0,\ldots,x_n) \mid \exists\, k \in \mathbb{N} : (x_0,\ldots,x_k) \in F_{x,z} \wedge (x_k,\ldots,x_n) \in F_{z,y}\}.$$

Dann ist
$$\inf S(F_{x,z,y}) = \inf S(F_{x,z}) + \inf S(F_{z,y}) = \mathrm{d}\,(x,z) + \mathrm{d}\,(z,y).$$

Wegen $F_{x,z,y} \subseteq F_{x,y}$ folgt hieraus $\mathrm{d}\,(x,y) \leq \mathrm{d}\,(x,z) + \mathrm{d}\,(z,y)$, also (PM3). Nach Definition von d folgt sofort $U_i \subseteq \left\{(x,y) \in X \times X \;\middle|\; \mathrm{d}\,(x,y) \leq 2^{-i}\right\}$. Sei nun $x,y \in X$ mit $\mathrm{d}\,(x,y) < 2^{-i}$, d.h. es gibt $(x_0,\ldots,x_k) \in F_{x,y}$ mit $(x_{j-1},x_j) \in U_{i_j}$ für alle $j = 1,\ldots,k$ und $\sum_{j=1}^{k} 2^{-i_j} < 2^{-i}$. Zu zeigen ist, daß $(x,y) \in U_i$ gilt. Wir verwenden dazu vollständige Induktion. Für $k = 1$ ist nach Voraussetzung $2^{-i_1} < 2^{-i}$, also $i_1 > i$, und damit folgt $(x,y) \in U_{i_1} \subseteq U_i$. Sei nun $(x_0,\ldots,x_{k+1}) \in F_{x,y}$ mit $(x_{j-1},x_j) \in U_{i_j}$ für alle $j = 1,\ldots,k+1$ und $\sum_{j=1}^{k+1} 2^{-i_j} < 2^{-i}$. O.E. gilt etwa $2^{-i_1} < 2^{-i-1}$. Sei $n \leq k$ maximal mit $\sum_{j=1}^{n} 2^{-i_j} < 2^{-i-1}$.

Ist $n < k$, so ist $\sum_{j=1}^{n+1} 2^{-i_j} \geq 2^{-i-1}$, also $\sum_{j=n+2}^{k} 2^{-i_j} < 2^{-i-1}$. Nach Induktionsvoraussetzung folgt $(x,x_n) \in U_{i+1}$ und $(x_{n+1},y) \in U_{i+1}$. Wegen $2^{-i_{n+1}} < 2^{-i}$ ist $i+1 \leq i_{n+1}$, also $(x_n,x_{n+1}) \in U_{i_{n+1}} \subseteq U_{i+1}$. Damit ist $(x,y) \in U_{i+1}^3 \subseteq U_i$, was zu beweisen war.

Ist $n = k$, so folgt nach Induktionsvoraussetzung $(x,x_k) \in U_{i+1}$. Wegen $2^{-i_{k+1}} < 2^{-i}$ ist $i+1 \leq i_{k+1}$, also $(x_k,y) \in U_{i_{k+1}} \subseteq U_{i+1}$. Es folgt $(x,y) \in U_{i+1}^2 \subseteq U_i$. □

(10.5) Korollar. *Sei $(X,\mathfrak{U})$ ein uniformer Raum und sei $U \in \mathfrak{U}$ symmetrisch. Dann gibt es eine bzgl. $\mathfrak{U}$ uniforme Pseudometrik d, für die $\left\{(x,y) \in X \times X \;\middle|\; \mathrm{d}\,(x,y) < \frac{1}{2}\right\} \subseteq U$ gilt.*

Beweis. Nach (UF5) gibt es eine Folge $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Nachbarschaften aus $\mathfrak{U}$ mit $U_0 = X \times X$, $U_1 = U$ und $U_{n+1}^3 \subseteq U_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gibt es nach (10.4) eine Pseudometrik d auf X mit

$$\left\{(x,y) \in X \times X \;\middle|\; \mathrm{d}\,(x,y) < 2^{-i}\right\} \subseteq U_i \subseteq \left\{(x,y) \in X \times X \;\middle|\; \mathrm{d}\,(x,y) \leq 2^{-i}\right\}.$$

Insbesondere ist $\left\{(x,y) \in X \times X \;\middle|\; \mathrm{d}\,(x,y) < \frac{1}{2}\right\} \subseteq U$. Sei $\varepsilon > 0$ und sei $i \in \mathbb{N}$ mit $2^{-i} < \varepsilon$. Dann ist $\mathrm{d}\,(x,y) \leq 2^{-i} < \varepsilon$ für alle $(x,y) \in U_i$, d.h. d ist uniform bzgl. $\mathfrak{U}$. □

(10.6) Korollar. *Sei $(X,\mathfrak{U})$ ein uniformer Raum, der eine abzählbare Basis besitzt. Dann gibt es eine Metrik d auf X mit $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}_{\mathrm{d}}$. Man sagt, der uniforme Raum $(X,\mathfrak{U})$ ist* **metrisierbar**.

Beweis. Sei $\mathcal{B} = \{V_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ eine Basis von $\mathcal{U}$. Sei $\mathcal{B}' = \{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ eine Teilfamilie von $\mathcal{B}$ gemäß (10.4). Da $\mathcal{B}'$ unendlich ist, ist auch $\mathcal{B}'$ eine Basis von $\mathcal{U}$. Dann gibt es eine Pseudometrik d mit $\left\{(x,y) \in X \times X \,\middle|\, \mathrm{d}\,(x,y) < 2^{-i}\right\} \subseteq U_i$. Wegen (UF3) ist auch $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} U_i = \Delta$, also gilt für $x \neq y$ stets $\mathrm{d}\,(x,y) \neq 0$, d.h. d ist eine Metrik. □

(10.7) Lemma. *Sei $(X,\mathcal{U})$ ein uniformer Raum. Dann ist der topologische Raum $(X,\mathcal{O}_{\mathcal{U}})$ ein T_1-Raum.*

Beweis. Nach (3.2)(a) ist zu zeigen, daß alle Mengen $\{x\}$ abgeschlossen sind. Sei dazu $y \in X \setminus \{x\}$. Wegen $\bigcap \mathcal{U} = \Delta$ gibt es ein $U \in \mathcal{U}$ mit $(y,x) \notin U$, also $x \notin U(y)$, woraus $U(y) \subseteq X \setminus \{x\}$ folgt. Da $U(y)$ eine Umgebung von y ist bzgl. der Topologie $\mathcal{O}_{\mathcal{U}}$, ist damit $X \setminus \{x\}$ offen, also $\{x\} \mathrel{\overline{\subseteq}} X$. □

(10.8) Satz. *Ein topologischer Raum $(X,\mathcal{O})$ ist genau dann uniformisierbar, wenn er vollständig regulär ist.*

Beweis. Sei X vollständig regulär. Sei $C(X)$ die Menge aller stetigen Funktionen von X nach $[0,1]$. Sei $\mathcal{U}_{\mathrm{d}}$ die von der euklidischen Metrik d auf $[0,1]$ induzierten Uniformität. Sei $\mathcal{U}$ die initiale Uniformität auf X bzgl. aller Abbildungen aus $C(X)$. Nach (9.18) ist $\mathcal{O}_{\mathcal{U}}$ die Initialtopologie bzgl. aller Abbildungen aus $C(X)$. Schließlich folgt $\mathcal{O} = \mathcal{O}_{\mathcal{U}}$ aus (3.10). Sei umgekehrt $(X,\mathcal{O})$ uniformisierbar, d.h. es gibt eine uniforme Struktur $\mathcal{U}$ auf X mit $\mathcal{O} = \mathcal{O}_{\mathcal{U}}$. Sei $A \mathrel{\overline{\subseteq}} X$ and $y \in X \setminus A$. Wegen $X \setminus A \mathrel{\overset{\circ}{\subseteq}} X$ gibt es ein symmetrisches $U \in \mathcal{U}$ mit $U(y) \subseteq X \setminus A$ bzw. $A \cap U(y) = \emptyset$. Sei d die Pseudometrik gemäß (10.5). Dann ist die Funktion $f : X \to [0,1] : x \mapsto \min\{2\mathrm{d}\,(x,y), 1\}$ stetig nach (10.3) (beachte, daß das punktweise Minimum zweier stetiger reeller Funktionen wieder stetig ist) und es gilt $f(y) = 0$ sowie $f(A) \subseteq \{1\}$. Da $(X,\mathcal{O})$ ein T_1-Raum nach (10.7) ist, ist $(X,\mathcal{O})$ also vollständig regulär. □

(10.9) Definition. Ein topologischer Raum $(X,\mathcal{O})$ heißt **metrisierbar**, wenn es eine Metrik d auf X gibt mit $\mathcal{O} = \mathcal{O}_{\mathrm{d}}$.

(10.10) Korollar. *Vollständig reguläre Räume mit abzählbarer Basis sind metrisierbar.*

Beweis. Sei $(X,\mathcal{O})$ vollständig regulär. Nach (10.8) gibt es eine uniforme Struktur $\mathcal{U}$ auf X mit $\mathcal{O} = \mathcal{O}_{\mathcal{U}}$. Da $\mathcal{O}$ eine abzählbare Basis besitzt, besitzt $\mathcal{U}$ ebenfalls eine abzählbare Basis $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. O.E. kann diese Basis so gewählt werden, daß sie die Bedingungen in (10.4) erfüllt. Wegen (UF3) ist $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n = \Delta$ und damit ist die Pseudometrik d aus (10.4) eine Metrik, welche die Topologie $\mathcal{O}$ induziert. Also ist X metrisierbar. □

(10.11) Korollar. *Jeder vollständig reguläre Raum mit abzählbarer Basis ist normal.*

Beweis. Folgt sofort aus (3.8) und (10.10). □

KAPITEL 11

Vervollständigung

(11.1) Definition. Sei $(X, \mathcal{U})$ ein uniformer Raum, $A \subseteq X$ und $U \in \mathcal{U}$. Die Menge A heißt **klein der Ordnung** U, wenn $A \times A \subseteq U$ gilt.

(11.2) Lemma. *Sei $(X, \mathcal{U})$ ein uniformer Raum und sei $U \in \mathcal{U}$ symmetrisch.*

(a) *Für $(x, y) \in U$ ist $U(x)$ klein der Ordnung U^2 und $U(x) \cup U(y)$ ist klein der Ordnung U^3.*

(b) *Ist $A \subseteq X$ klein der Ordnung U, so ist $U(A) := \bigcup_{a \in A} U(a)$ klein der Ordnung U^3.*

(c) *Sind $A, B \subseteq X$ klein der Ordnung U und ist $A \cap B \neq \emptyset$, so ist $A \cup B$ klein der Ordnung U^2.*

(d) *Ist $A \subseteq X$ klein der Ordnung U und ist $B \subseteq X$ mit $A \cap B \neq \emptyset$, so ist $A \subseteq U(B)$.*

Beweis. (a) Ist $z, z' \in U(x)$, so ist $(z, x), (x, z') \in U$, also ist $(z, z') \in U^2$. Dies zeigt $U(x) \times U(x) \subseteq U^2$, d.h. $U(x)$ ist klein der Ordnung U^2. Ist $z \in U(x)$ und $z' \in U(y)$, so ist $(z, x), (x, y), (y, z') \in U$, also $(z, z') \in U^3$. Die anderen Aussagen werden ähnlich bewiesen.
(b) Seien $x, y \in U(A)$. Dann gibt es $a, a' \in A$ mit $x \in U(a)$ und $y \in U(a')$. Nach Teil (a) ist $U(a) \cup U(a')$ klein der Ordnung U^3, d.h. es ist $(x, y) \in U^3$. Dies zeigt $U(A) \times U(A) \subseteq U^3$ und $U(A)$ is somit klein der Ordnung U^3.
(c) Seien $x, y \in A \cup B$ und wähle $z \in A \cap B$. Da A und B klein der Ordnung U sind, ist $(x, z), (z, y) \in U$, also $(x, y) \in U^2$.
(d) Sei $a \in A$ und wähle $b \in A \cap B$. Da A klein der Ordnung U ist, gilt $(b, a) \in U$, also $a \in U(b) \subseteq U(B)$. Da $a \in A$ beliebig ist, folgt $A \subseteq U(B)$. $\square$

(11.3) Definition. Sei $(X, \mathcal{U})$ ein uniformer Raum. Ein Filter $\mathcal{F}$ auf X heißt **Cauchy-Filter**, wenn es zu jedem $U \in \mathcal{U}$ ein $F \in \mathcal{F}$ gibt, das klein ist der Ordnung U. Der Raum $(X, \mathcal{U})$ heißt **vollständig**, wenn jeder Cauchy-Filter konvergiert.

(11.4) Beispiele. (a) $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{R}$ sind vollständig.
(b) $\mathbb{Q}$ und $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$ sind nicht vollständig.

(11.5) Lemma. *Sei $(X, \mathcal{U})$ ein uniformer Raum und sei $\mathcal{F}$ ein konvergenter Filter auf X. Dann ist $\mathcal{F}$ ein Cauchy-Filter.*

Beweis. Sei $\mathcal{F} \to x \in X$ und sei $U \in \mathcal{U}$. Sei $V \in \mathcal{U}$ symmetrisch mit $V^2 \subseteq U$. Wegen $\mathcal{F} \to x \in X$ gibt es ein $F \in \mathcal{F}$ mit $x \in F \subseteq V(x)$. Da $V(x)$ klein ist der Ordnung U, gilt dies auch für F. Also ist $\mathcal{F}$ ein Cauchy-Filter. □

(11.6) Lemma. *Sei $(X, \mathcal{U})$ ein uniformer Raum und sei $\mathcal{F}$ ein Cauchy-Filter. Dann konvergiert $\mathcal{F}$ gegen jeden seiner Berührpunkte.*

Beweis. Sei x ein Berührpunkt von $\mathcal{F}$ und sei $U \in \mathcal{U}$ abgeschlossen. Dann gibt es $F \in \mathcal{F}$ mit $F \times F \subseteq U$. Wegen $U \overline{\subseteq} X \times X$ ist $\overline{F} \times \overline{F} = \overline{F \times F} \subseteq \overline{U} = U$. Da x Berührpunkt von $\mathcal{F}$ ist, folgt $x \in \overline{F}$ und $\overline{F} \subseteq U(x)$. Nach (9.9) bilden die abgeschlossenen Nachbarschaften eine Basis der Uniformität $\mathcal{U}$. Also ist $\mathcal{U}(x) \subseteq \mathcal{F}$, d.h. es gilt $\mathcal{F} \to x$. □

(11.7) Lemma. *Sei $f : X \to Y$ gleichmäßig stetig und sei $\mathcal{F}$ ein Cauchy-Filter. Dann ist der Bildfilter $f(\mathcal{F})$ ein Cauchy-Filter.*

Beweis. Sei $V \in \mathcal{V}$. Dann gibt es ein $U \in \mathcal{U}$ mit $(f(x), f(y)) \in \mathcal{V}$ für alle $(x, y) \in \mathcal{U}$. Da $\mathcal{F}$ ein Cauchy-Filter ist, gibt es ein $F \in \mathcal{F}$ klein der Ordnung U, also $F \times F \subseteq U$. Somit ist $f(F) \times f(F) \subseteq V$, d.h. $f(F)$ ist klein der Ordnung V. Da die Menge $\{f(F) \mid F \in \mathcal{F}\}$ eine Filterbasis des Bildfilters $f(\mathcal{F})$ ist, ist also $f(\mathcal{F})$ ebenfalls ein Cauchy-Filter. □

(11.8) Lemma. *Sei $(X, \mathcal{U})$ ein uniformer Raum und sei $\mathcal{F}$ ein Cauchy-Filter. Dann gibt es einen eindeutig bestimmten minimalen Cauchy-Filter $\mathcal{F}^*$ mit $\mathcal{F}^* \subseteq \mathcal{F}$.*

Beweis. Sei $\mathcal{B}^* := \{U(F) \mid U \in \mathcal{U}, F \in \mathcal{F}\}$. Klar: $\mathcal{B}^*$ ist eine Basis für einen Filter $\mathcal{F}^*$ auf X, der gröber ist als $\mathcal{F}$. Der Filter $\mathcal{F}^*$ ist ein Cauchy-Filter, denn zu $U \in \mathcal{U}$ gibt es ein symmetrisches $V \in \mathcal{U}$ mit $V^3 \subseteq U$ und ein $F \in \mathcal{F}$, das klein der Ordnung V ist. Dann ist $V(F) \in \mathcal{F}^*$ klein der Ordnung U nach (11.2)(b). Sei nun $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ ein weiterer Cauchy-Filter. Wir müssen zeigen, daß $\mathcal{F}^* \subseteq \mathcal{G}$ ist. Sei dazu $U \in \mathcal{U}$ und $F \in \mathcal{F}$. Sei $G \in \mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ klein der Ordnung U. Dann ist $F \cap G \neq \emptyset$ und es folgt $G \subseteq U(F)$ nach (11.2)(d). Somit ist $U(F) \in \mathcal{G}$, also $\mathcal{B}^* \subseteq \mathcal{G}$ und damit $\mathcal{F}^* \subseteq \mathcal{G}$, was zu beweisen war. □

(11.9) Korollar. *Sei $(X, \mathcal{U})$ ein uniformer Raum. Dann sind die Umgebungsfilter $\mathcal{U}(x)$ minimale Cauchy-Filter.*

Beweis. Nach (11.2)(a) ist $\mathcal{U}(x)$ ein Cauchy-Filter, der gegen x konvergiert. Sei $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{U}(x)$ ein Cauchy-Filter. Nach (5.10) ist x ein Berührpunkt von $\mathcal{F}$. Nach (11.6) konvergiert $\mathcal{F}$ gegen x, d.h. es ist $\mathcal{U}(x) \subseteq \mathcal{F}$, woraus $\mathcal{U}(x) = \mathcal{F}$ folgt. Somit ist $\mathcal{U}(x)$ minimal. □

(11.10) Korollar. *Ist $\mathcal{F}$ ein minimaler Cauchy-Filter, so ist für jedes $F \in \mathcal{F}$ auch $F^\circ \in \mathcal{F}$.*

Beweis. Ist $\mathcal{F}$ minimal, so ist $\mathcal{F}^* = \mathcal{F}$. Also gibt es zu $F \in \mathcal{F}$ ein $F' \in \mathcal{F}$ und ein $U \in \mathcal{U}$ mit $U(F') \subseteq F$. Nach (9.9) kann U dabei offen in $X \times X$ gewählt werden. Somit ist auch $U(x)$

offen in X für alle $x \in F'$ (denn die Projektion $X \times X \to X$ auf die zweite Komponente ist eine offene Abbildung). Also ist auch $U(F') = \bigcup_{x \in F'} U(x) \in \mathcal{F}$ offen. Insbesondere ist $U(F') \subseteq F^\circ$, also $F^\circ \in \mathcal{F}$. □

(11.11) Lemma. *Sei $(X, \mathcal{U})$ ein uniformer Raum, sei $A \subseteq X$, und sei $\iota : A \hookrightarrow X$ die Inklusionsabbildung. Die initiale Uniformität $\mathcal{U}_A = \mathcal{U}(A, \mathcal{U}, \iota)$ auf A ist gegeben durch $\mathcal{U}_A = \{U \cap (A \times A) \mid U \in \mathcal{U}\}$. Die Uniformität $\mathcal{U}_A$ wird auch* **Spur-Uniformität** *auf A genannt. Ist $\overline{A} = X$ und ist $\mathcal{F}$ ein Cauchy-Filter auf X, so ist der Spurfilter $\mathcal{F}_A = \{F \cap A \mid F \in \mathcal{F}\}$ ein Cauchy-Filter auf $(A, \mathcal{U}_A)$.*

Beweis. Nach (9.17) ist $\big\{(\iota \times \iota)^{-1}(U) \,\big|\, U \in \mathcal{U}\big\} = \{U \cap (A \times A) \mid U \in \mathcal{U}\}$ eine Subbasis von $\mathcal{U}_A$. Klar: Die Familie $\mathcal{U}_A$ ist abgeschlossen gegenüber endlichen Schnitten und Obermengenbildung, d.h. $\mathcal{U}_A$ ist selbst schon eine Uniformität auf A. Nach (5.11)(b) ist $\mathcal{F}_A$ ein Filter auf A. Die zweite Aussage folgt nun sofort aus der Definition von $\mathcal{F}_A$ und der Beschreibung von $\mathcal{U}_A$. □

(11.12) Lemma. *Ein uniformer Raum $(X, \mathcal{U})$ ist genau dann vollständig, wenn es eine dichte Teilmenge $D \subseteq X$ gibt, so daß der Bildfilter $\iota(\mathcal{F})$ eines jeden Cauchy-Filters $\mathcal{F}$ auf $(D, \mathcal{U}_D)$ in X konvergiert. Dabei ist $\iota : D \hookrightarrow X$ die Inklusionsabbildung.*

Beweis. Sei $(X, \mathcal{U})$ vollständig und sei $D \subseteq X$ dicht in X. Nach (9.18) ist die Inklusionsabbildung $\iota : (D, \mathcal{U}_D) \hookrightarrow (X, \mathcal{U})$ gleichmäßig stetig. Somit ist der Bildfilter $\iota(\mathcal{F})$ ein Cauchy-Filter auf $(X, \mathcal{U})$ nach (11.7). Da $(X, \mathcal{U})$ vollständig ist, konvergiert damit $\iota(\mathcal{F})$.
Sei umgekehrt $\mathcal{F}$ ein Cauchy-Filter auf $(X, \mathcal{U})$. Nach (11.8) gibt es einen minimalen Cauchy-Filter $\mathcal{F}^* \subseteq \mathcal{F}$. Wegen $F^\circ \neq \emptyset$ für alle $F \in \mathcal{F}^*$ nach (11.10) ist $F \cap D \neq \emptyset$ fär alle $F \in \mathcal{F}^*$. Damit bildet $\mathcal{B} := \{F \cap D \mid F \in \mathcal{F}^*\}$ eine Filterbasis eines Filters $\mathcal{F}^*_D$ auf D. Nach (11.11) ist $\mathcal{F}^*_D$ ein Cauchy-Filter auf $(D, \mathcal{U}_D)$. Nach Voraussetzung konvergiert der Bildfilter $\iota(\mathcal{F}^*_D)$ gegen ein $x \in X$. Wegen $\iota(F \cap D) = F \cap D$ ist $\mathcal{B}$ auch eine Filterbasis von $\iota(\mathcal{F}^*_D)$. Insbesondere ist $\iota(\mathcal{F}^*_D)$ feiner als $\mathcal{F}^*$. Also ist x ein Berührpunkt von $\mathcal{F}^*$ und da $\mathcal{F}^*$ ein Cauchy-Filter ist, gilt $\mathcal{F}^* \to x$ nach (11.6). Wegen $\mathcal{F}^* \subseteq \mathcal{F}$ folgt auch $\mathcal{F} \to x$, w.z.b.w. □

(11.13) Satz. *Sei $(X, \mathcal{U})$ ein uniformer Raum und sei $D \subseteq X$ dicht. Ist $(Y, \mathcal{V})$ ein vollständiger uniformer Raum und ist $f : D \to Y$ gleichmäßig stetig, so läßt sich f eindeutig zu einer gleichmäßig stetigen Abbildung $F : X \to Y$ fortsetzen.*

Beweis. Nach (10.8) ist $(Y, \mathcal{O}_\mathcal{V})$ vollständig regulär und damit regulär. Sei $\mathcal{O}_D$ die Spurtopologie von $\mathcal{O}_\mathcal{V}$ auf D. Die Abbildung $f : (D, \mathcal{O}_D) \to (Y, \mathcal{O}_\mathcal{V})$ ist stetig nach (9.14). Nach (5.16) und (5.18) läßt sich f zu einer stetigen Abbildung $F : (X, \mathcal{O}_\mathcal{U}) \to (Y, \mathcal{O}_\mathcal{V})$ fortsetzen, wenn für alle $x \in X$ der Filter $\mathcal{F}(x)$, welcher von $\{f(U \cap D) \mid U \in \mathcal{U}(x)\}$

erzeugt wird, in X konvergiert. Nach (5.11) ist $\mathcal{U}_D(x) = \{U \cap D \mid U \in \mathcal{U}(x)\}$ eine Filterbasis eines Filters auf X. Nach (5.16) ist $\mathcal{B}_D(x) = \{f(B) \mid B \in \mathcal{U}_D(x)\}$ eine Filterbasis des Bildfilters $\mathcal{F}(x) = f(\mathcal{U}_D(x))$. Nach Definition der Spur-Uniformität ist $\mathcal{U}_D(x)$ ein Cauchy-Filter auf D. Nach (11.7) ist der Bildfilter $\mathcal{F}(x)$ ein Cauchy-Filter auf Y, welcher aufgrund der Vollständigkeit von Y gegen (genau) einen Punkt $F(x) \in Y$ konvergiert (beachte, daß der topologische Raum $(Y, \mathcal{O}_\mathcal{V})$ ein T_2-Raum ist). Nach (5.18) ist die so definierte Abbildung $F : (X, \mathcal{O}_\mathcal{U}) \to (Y, \mathcal{O}_\mathcal{V})$ stetig. Die Eindeutigkeit von F folgt sofort aus (5.17). Es bleibt nachzuweisen, daß F gleichmäßig stetig ist. Sei dazu $V \in \mathcal{V}$. Wähle ein $W \in \mathcal{V}$ symmetrisch mit $W^3 \subseteq V$. Da f gleichmäßig stetig ist, gibt es ein $U' = U^3 \cap (D \times D) \in \mathcal{U}_D$ mit $(f(u), f(v)) \in W$ für alle $(u, v) \in U'$. Sei $(x, y) \in U$. Da $\mathcal{F}(x)$ und $\mathcal{F}(y)$ Cauchy-Filter sind, gibt es $W_1 = f(U_1 \cap D) \in \mathcal{F}(x)$ und $W_2 = f(U_2 \cap D) \in \mathcal{F}(y)$ mit $F(x) \in W_1$ und $F(y) \in W_2$, die klein sind der Ordnung W. Dabei ist nach Definition $U_1 \in \mathcal{U}(x)$ und $U_2 \in \mathcal{U}(y)$. Für $u \in U(x) \cap U_1 \cap D$ und $v \in U(y) \cap U_2 \cap D$ gilt dann $(F(x), f(u)), (f(v), F(y)) \in W$. Die Vereinigung $U(x) \cup U(y)$ ist klein der Ordnung U^3 nach (11.2)(a). Also ist $(u, v) \in U^3 \cap (D \times D) = U'$. Damit gilt $(f(u), f(v)) \in W$ und es folgt $(F(x), F(y)) \in W^3 \subseteq V$ für alle $(x, y) \in U$, d.h. die Abbildung F ist gleichmäßig stetig. □

(11.14) Vervollständigungssatz. *Zu jedem uniformen Raum* $(X, \mathcal{U})$ *gibt es einen vollständigen uniformen Raum* $(\alpha X, \alpha\mathcal{U})$ *und eine gleichmäßig stetige injektive Abbildung* $\iota : X \to \alpha X$*, so daß* $\iota(X)$ *dicht ist in* αX*. Der uniforme Raum* $(\alpha X, \alpha\mathcal{U})$ *heißt* **Vervollständigung von** $(X, \mathcal{U})$.

Beweis. (1) Sei αX die Menge aller minimalen Cauchy-Filter auf X. Für $U \in \mathcal{U}$ symmetrisch setze

$$\alpha U := \{(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \in \alpha X \times \alpha X \mid \exists\, M \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G} : M \text{ ist klein der Ordnung U}\}$$

und $\alpha\mathcal{B} := \{\alpha U \mid U \in \mathcal{U}\}$. Dann ist $\alpha\mathcal{B}$ eine Basis einer uniformen Struktur $\alpha\mathcal{U}$ auf αX: Seien $U, V \in \mathcal{U}$ symmetrisch. Dann ist $W := U \cap V \in \mathcal{U}$ symmetrisch und es gilt $\alpha W \subseteq \alpha U \cap \alpha V$. Also gilt (BUF1). Da die Mengen αU aus $\alpha\mathcal{U}$ alle symmetrisch sind, folgt sofort Axiom (BUF2). Da jeder Cauchy-Filter eine Menge enthält, die klein ist der Ordnung U, ist $(\mathcal{F}, \mathcal{F}) \in \alpha U$ für alle $U \in \mathcal{U}$. Seien $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \alpha X$ mit $(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \in \bigcap \alpha\mathcal{U}$. Dann ist $\{F \cup G \mid F \in \mathcal{F}, G \in \mathcal{G}\}$ eine Basis eines Filters $\mathcal{H}$. Dieser ist natürlich gröber als $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$. Da es nach Voraussetzung zu jedem symmetrischen $U \in \mathcal{U}$ ein $M \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ mit $M \times M \subseteq U$ gibt, ist $\mathcal{H}$ ein Cauchy-Filter. Aus der Minimalität von $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ folgt nun, daß $\mathcal{F} = \mathcal{H} = \mathcal{G}$ ist. Damit gilt (BUF3). Seien schließlich $U, V \in \mathcal{U}$ symmetrisch mit $V^2 \subseteq U$. Seien $\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H} \in \alpha\mathcal{U}$ mit $(\mathcal{F}, \mathcal{G}), (\mathcal{G}, \mathcal{H}) \in \alpha V$. Dann gibt es $M \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ und $N \in \mathcal{G} \cap \mathcal{H}$, die klein der Ordnung V sind. Wegen $M \cap N \in \mathcal{G}$ ist $M \cap N \neq \emptyset$ und $M \cup N$ ist klein der

Ordnung V^2 nach (11.2)(c). Wegen $M \cup N \in \mathcal{F} \cap \mathcal{H}$ ist $(\mathcal{F}, \mathcal{H}) \in \alpha(V^2) \subseteq \alpha U$. Also folgt $(\alpha V)^2 \subseteq \alpha(V^2) \subseteq \alpha U$. Dies beweist (BUF4). Also ist $(\alpha X, \alpha\mathcal{U})$ ein uniformer Raum.

(2) Setze $\iota : X \to \alpha X : x \mapsto \mathcal{U}(x)$. Da der Umgebungsfilter $\mathcal{U}(x)$ für $x \in X$ ein minimaler Cauchy-Filter ist nach (11.9), ist ι eine Abbildung nach αX. Die Abbildung ι ist gleichmäßig stetig: Sei $\alpha U \in \alpha\mathcal{U}$ und wähle $V \in \mathcal{U}$ symmetrisch mit $V^3 \subseteq U$. Nach (11.2) ist für $(x, y) \in V$ die Vereinigung $V(x) \cup V(y)$ klein der Ordnung $V^3 \subseteq U$. Somit ist $(\iota \times \iota)(V) \subseteq \alpha U$, denn für $(x, y) \in V$ besitzen $\iota(x)$ und $\iota(y)$ die Vereinigung $V(x) \cup V(y)$ als gemeinsame Menge, welche klein ist der Ordnung U. Ist $\iota(x) = \iota(y)$, so folgt $\mathcal{U}(x) = \mathcal{U}(y)$, d.h. es ist $(x, y) \in U$ für alle $U \in \mathcal{U}$. Nach (BUF3) folgt damit $x = y$, d.h ι ist injektiv.

(3) Das Bild $\iota(X)$ ist dicht in αX: Sei $\mathcal{F} \in \alpha X$ und sei $\alpha U(\mathcal{F})$ eine Umgebung von $\mathcal{F}$ in αX. Sei $V \in \mathcal{F}$ klein der Ordnung U. Nach (11.10) ist $\emptyset \neq V^\circ \in \mathcal{F}$ und für $x \in V^\circ$ ist

$$\iota(x) = \mathcal{U}(x) \in \alpha U(\mathcal{F}) = \{\mathcal{G} \in \alpha\mathcal{X} \mid \exists\, M \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G} : M \text{ ist klein der Ordnung U}\}.$$

Insbesondere ist $\iota(X) \cap \alpha U(\mathcal{F}) \neq \emptyset$, d.h. $\iota(X)$ ist dicht in αX. Außerdem konvergiert der Bildfilter $\iota(\mathcal{F})$ gegen $\mathcal{F} \in \alpha X$, denn zu jedem $\alpha U(\mathcal{F})$ gibt es nach dem eben Bewiesenen ein $V^\circ \in \mathcal{F}$ mit $\iota(V^\circ) \subseteq \alpha U(\mathcal{F})$.

(4) Die Abbildung $\iota : (X, \mathcal{U}) \to (\iota(X), \mathcal{U}_{\iota(X)})$ ist ein Isomorphismus zwischen uniformen Räumen: Natürlich ist ι bijektiv und nach (2) ist ι gleichmäßig stetig. Es bleibt zu zeigen, daß ι^{-1} gleichmäßig stetig ist. Sei dazu $U \in \mathcal{U}$ symmetrisch. Für $(\mathcal{U}(x), \mathcal{U}(y)) \in \alpha\mathcal{U}$ gibt es nach Definition von $\alpha\mathcal{U}$ ein $M \in \mathcal{U}(x) \cap \mathcal{U}(y)$ klein der Ordnung U. Wegen $x, y \in M$ ist also $(\iota^{-1}(\mathcal{U}(x)), \iota^{-1}(\mathcal{U}(y))) = (x, y) \in U$, was zu beweisen war.

(5) Der Raum $(\alpha X, \alpha\mathcal{U})$ ist vollständig: Wir benützen dazu Lemma (11.12). Nach (4) können wir o.E. $(\iota(X), \mathcal{U}_{\iota(X)})$ mit $(X, \mathcal{U})$ identifizieren, d.h. anstatt einen Cauchy-Filter auf $(\iota(X), \mathcal{U}_{\iota(X)})$ zu betrachten, können wir einen Cauchy-Filter $\mathcal{F}$ auf $(X, \mathcal{U})$ betrachten. Nach (11.12) ist dann zu zeigen, daß der Bildfilter $\iota(\mathcal{F})$ in $(\alpha X, \alpha\mathcal{U})$ konvergiert. Dies wurde aber in (3) gezeigt. $\square$

(11.15) Satz. *Jede gleichmäßig stetige Abbildung $\varphi : X \to Y$ von einem uniformen Raum $(X, \mathcal{U})$ in einen vollständigen uniformen Raum $(Y, \mathcal{V})$ läßt sich eindeutig zu einer gleichmäßig stetigen Abbildung $\Phi : \alpha X \to Y$ fortsetzen, d.h. es gilt $\Phi \circ \iota = \varphi$.*

Beweis. Betrachte folgendes kommutative Diagram

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\iota"'] & Y \\
\iota(X) \arrow[ur, "\Phi_0"] \arrow[d, "\subseteq"'] & \\
\alpha X \arrow[uur, "\Phi"'] &
\end{tikzcd}$$

wobei $\Phi_0 := \varphi \circ \iota$ gleichmäßig stetig ist nach (11.14), Beweisteil (4). Nach (11.13) läßt sich Φ_0 eindeutig zu einer gleichmäßig stetigen Abbildung $\Phi : \alpha X \to Y$ fortsetzen. □

(11.16) Satz. *Zu jedem uniformen Raum $(X, \mathfrak{U})$ gibt es bis auf Isomorphie nur eine Vervollständigung.*

Beweis. Wird analog zu Satz (8.5) bewiesen. Verwende hierzu (11.13) und (11.14). □

KAPITEL 12

Kompaktheit und Vollständigkeit

(12.1) Definition. Ein uniformer Raum $(X, \mathfrak{U})$ heißt **präkompakt**, wenn zu jedem $U \in \mathfrak{U}$ eine endliche Überdeckung von X existiert, die aus Mengen besteht, die klein sind der Ordnung U.

(12.2) Satz. *Jeder vollständig reguläre Raum X läßt sich durch eine präkompakte uniforme Struktur $\mathfrak{U}$ uniformisieren.*

Beweis. Sei $C(X)$ die Menge aller stetigen Funktion von X nach $[0,1]$. Sei $\mathfrak{U}_{\mathrm{d}}$ die von der euklidischen Metrik d auf $[0,1]$ induzierten Uniformität. Sei $\mathfrak{U}$ die initiale Uniformität bzgl. aller Abbildungen aus $C(X)$. Nach (9.18) ist $(X, \mathfrak{U})$ eine Uniformisierung von X. Wir zeigen, daß $(X, \mathfrak{U})$ präkompakt ist. Sei dazu $U \in \mathfrak{U}$. Dann gibt es Abbildungen $f_1, \dots, f_n : X \xrightarrow{\sim} [0,1]$ und $U_1, \dots, U_n \in \mathfrak{U}_{\mathrm{d}}$ mit $V := \bigcap_{i=1}^n (f_i \times f_i)^{-1}(U_i) \subseteq U$. Da $[0,1]$ kompakt ist, gibt es eine endliche Überdeckung $\{W_1, \dots, W_k\}$ von $[0,1]$ mit Mengen, die klein sind der Ordnung $\bigcap_{i=1}^n U_i$. Dann ist $\left\{\bigcap_{i=1}^n f_i^{-1}(W_{\sigma(i)}) \,\middle|\, \sigma \in \Lambda_k\right\}$ eine Überdeckung von X mit Mengen, die klein sind der Ordnung $V \subseteq U$. Also ist $(X, \mathfrak{U})$ präkompakt. Dabei ist Λ_k die Menge *aller* Abbildungen von $\{1, \dots, n\}$ in sich. $\square$

(12.3) Satz. *Ein uniformer Raum $(X, \mathfrak{U})$ ist genau dann präkompakt, wenn seine Vervollständigung αX kompakt ist.*

Beweis. Sei $(X, \mathfrak{U})$ präkompakt. Der Raum αX ist ein T_2-Raum nach (10.8). Nach (6.3)(d) ist zu zeigen, daß jeder Ultrafilter $\mathcal{F}$ auf αX konvergiert. Nach (9.9) bilden die abgeschlossenen Nachbarschaften eine Basis von $\alpha\mathfrak{U}$. Sei $U \in \alpha\mathfrak{U}$ abgeschlossen. Sei $\iota : X \hookrightarrow \alpha X$ die kanonische Einbettung und setze $V = (\iota \times \iota)^{-1}(U)$. Sei $\{A_1, \dots, A_n\}$ eine Überdeckung von X mit Mengen, die klein sind der Ordnung V. Sei $B_i := \iota(A_i)$ für $1 \leq i \leq n$. Dann ist $\{B_1, \dots, B_n\}$ eine Überdeckung von $\iota(X)$ mit Mengen, die klein sind der Ordnung U. Da $\iota(X)$ dicht ist in αX, ist $\alpha X = \bigcup_{i=1}^n \overline{B_i}$. Da U abgeschlossen ist, ist $\overline{B_i}$ ebenfalls klein der Ordnung U. Nach Übungsaufgabe 29 gibt es ein $j \in \{1, \dots, n\}$ mit $\overline{B_j} \in \mathcal{F}$. Also enthält $\mathcal{F}$ Mengen beliebig kleiner Ordnung, d.h. $\mathcal{F}$ ist ein Cauchy-Filter. Da αX vollständig ist, konvergiert $\mathcal{F}$, w.z.b.w.

Sei umgekehrt $U, V \in \alpha\mathfrak{U}$ mit $V^2 \subseteq U$ und V symmetrisch. Da X kompakt ist, besitzt die Überdeckung $\{V(x)\}_{x \in \alpha X}$ eine endliche Teilüberdeckung $\{V(x_1), \dots, V(x_n)\}$. Nach (11.2) ist $V(x_i)$ klein der Ordnung U. Die Urbilder $(\iota \times \iota)^{-1}(V(x_i))$ für $1 \le i \le n$ überdecken X und sind klein der Ordnung $(\iota \times \iota)^{-1}(U)$. Also ist X präkompakt. $\square$

(12.4) Beispiele. $[0,1] \cap \mathbb{Q}$ ist präkompakt, $\mathbb{Q}$ ist es nicht.

(12.5) Satz. *Sei X ein kompakter topologischer Raum und sei $(X, \mathcal{U})$ eine Uniformisierung von X. Dann ist $\mathcal{U} = \{U \subseteq X \times X \mid U \in \mathcal{U}_{X \times X}(\Delta)\}$. Insbesondere läßt sich X auf genau eine Weise uniformisieren. Der uniforme Raum $(X, \mathcal{U})$ ist vollständig.*

Beweis. Die Nachbarschaften aus $\mathcal{U}$ sind Umgebungen der Diagonalen Δ im Produktraum $X \times X$. Als kompakter Raum ist X vollständig regulär und damit uniformisierbar durch eine uniforme Struktur $\mathcal{U}$. Angenommen, es gibt ein $W \in \mathcal{U}_{X \times X}(\Delta)$ mit $W \notin \mathcal{U}$. Dann ist $\{U \cap (X \times X \setminus W) \mid U \in \mathcal{U}\}$ eine Basis für einen Filter $\mathcal{F}$ auf $X \times X$, der feiner ist als $\mathcal{U}$. Da $X \times X$ kompakt ist, hat $\mathcal{F}$ und damit auch $\mathcal{U}$ einen Berührpunkt $(x, y) \notin \Delta$. Dies widerspricht aber $\bigcap_{U \in \mathcal{U}} \overline{U} = \bigcap_{U \in \mathcal{U}} U = \Delta$, siehe (9.9) und (U3). $\square$

(12.6) Satz. *Sei X ein vollständig regulärer Raum und sei $(X, \mathcal{U})$ die präkompakte Uniformisierung von X gemäß (12.2). Dann ist die Vervollständigung $(\alpha X, \alpha\mathcal{U})$ von $(X, \mathcal{U})$, betrachtet als topologischer Raum, die Stone-Cech-Kompaktifizierung von X.*

Beweis. Nach (12.3) ist $(\alpha X, \alpha\mathcal{U})$ kompakt. Sei $\varphi : X \xrightarrow{\sim} Y$ eine stetige Abbildung in einen kompakten Raum Y. Nach (12.5) besitzt Y eine vollständige Uniformisierung $(Y, \mathcal{V})$. Sei $\iota : X \to \alpha X$ die kanonische Einbettung. Diese ist nach (11.14) gleichmäßig stetig. Nach (11.15) gibt es eine eindeutig bestimmte gleichmäßig stetige Abbildung $\Phi : \alpha X \to (Y, \mathcal{V})$ mit $\varphi = \Phi \circ \iota$. Damit ist der topologische Raum αX homöomorph zur Stone-Čech-Kompaktifizierung βX von X nach (8.5). $\square$

KAPITEL 13

Ausgewählte Beispiele

(13.1) Die Topologie der irrationalen Steigung. Sei $X = \{(x, y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \mid y \geq 0\}$ und sei $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ mit $\alpha > 0$. Für $(x, y) \in X$ und $\varepsilon > 0$ setze

$$U_\varepsilon(x,y) := \{(x,y)\} \cup \Big\{(u,0) \in \mathbb{Q}^2 \,\Big|\, |u - x - \frac{y}{\alpha}| < \varepsilon\Big\} \cup \Big\{(u,0) \in \mathbb{Q}^2 \,\Big|\, |u - x + \frac{y}{\alpha}| < \varepsilon\Big\}.$$

Die Familien $\mathcal{U}(x, y) = \{U_\varepsilon(x, y) \mid \varepsilon > 0\}$ erfüllen die Bedingungen (U1) bis (U4) und definieren daher eine Topologie $\mathcal{O}_1$ auf X nach (1.6).

(a) Der Raum $(X, \mathcal{O}_1)$ ist ein Hausdorff-Raum:
Da α irrational ist, können nie zwei Punkte aus X auf einer Menge der Form $L^+_{x,y} \cup L^-_{x,y}$ liegen. Somit sind die Projektionen zweier verschiedener Punkte $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X$ entlang $L^+_{x_1,y_1}$ und $L^-_{x_1,y_1}$ bzw. entlang $L^+_{x_2,y_2}$ und $L^-_{x_2,y_2}$ nie gleich. Dadurch läßt sich $\varepsilon > 0$ so klein wählen, daß $I^+_{x_1,y_1} \cup I^-_{x_1,y_1}$ und $I^+_{x_2,y_2} \cup I^-_{x_2,y_2}$ disjunkt sind.

(b) Der Raum $(X, \mathcal{O}_1)$ ist *kein* Urysohn-Raum:
Es ist $\overline{U_\varepsilon(x, y)}$ wie im Bild unten gegeben.

Außerdem folgt hieraus, daß $(X, \mathcal{O}_1)$ zusammenhängend ist. Somit ist $(X, \mathcal{O}_1)$ ein abzählbarer zusammenhängender T_2-Raum.

(c) Der Raum $(X, \mathcal{O}_1)$ ist *nicht* wegzusammenhängend:
Ist $f : [0,1] \to X$ stetig, so ist $\left\{ f^{-1}(x) \,\middle|\, x \in X \right\}$ eine abzählbare Familie disjunkter, abgeschlossener Teilmengen, die $[0,1]$ überdecken, was unmöglich ist.

(d) Jede stetige Abbildung $f : X \to \mathbb{R}$ ist konstant:
Anderfalls wäre nach (4.6)(d) das Bild $f(X)$ ein Intervall in ‘RR. Insbesondere wäre $f(X)$ überabzählbar, was der Abzählbarkeit von X widerspricht.
Insbesondere folgt aus (d), daß $(X, \mathcal{O}_1)$ *pseudokompakt* ist, d.h. jede stetige Funktion $g : X \to \mathbb{R}$ ist beschränkt. Andererseits ist $(X, \mathcal{O}_1)$ nicht kompakt, denn die Menge $\{(z, 0) \in X \mid z \in \mathbb{Z}\}$ hat keinen Häufungspunkt.

(13.2) Der Niemytzki-Raum. Sei $X := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, y \geq 0 \right\}$ die obere Halbebene der euklidischen Ebene. Sei $\mathcal{O}_e$ die von der euklidischen Topologie auf $\mathbb{R}^2$ induzierte Spurtopologie auf X. Sei $R := \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ und $H := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, y > 0 \right\}$. Definiere auf X eine Topologie $\mathcal{O}_2$ durch die Basis

$$\mathcal{B}_2 = \mathcal{O}_e \cup \{\{x\} \cup B_{x,\varepsilon} \mid x \in R, \varepsilon > 0\},$$

wobei $B_{x,\varepsilon} \subseteq H$ die offene Kreisscheibe mit Radius ε ist, die R in x berührt.

(a) Die Topologie $\mathcal{O}_2$ ist feiner als die von der euklidischen Topologie induzierte Spurtopologie $\mathcal{O}_e$ auf X. Damit ist $(X, \mathcal{O}_2)$ ein Urysohn-Raum. Die von $\mathcal{O}_2$ auf R induzierte Spurtopologie ist die diskrete Topologie. Außerdem gibt es zu jedem $x \in R$ und jedem $U \in \mathcal{O}_e$ mit $x \in U$ eine Menge $B_{x,\varepsilon}$ mit $\{x\} \cup B_{x,\varepsilon} \subseteq U$, siehe Bild unten.

(b) Der Raum $(X, \mathcal{O}_2)$ ist vollständig regulär:
Sei $A \overline{\subseteq} X$ und sei $b \in X \setminus A$.
(i) Ist $b \in H$, so gibt es ein $U \in \mathcal{U}(b) \cap \mathcal{O}_e$ mit $U \subseteq X \setminus A$. Damit ist $X \setminus U$ abgeschlossen bzgl. $\mathcal{O}_e$. Da $\mathcal{O}_e$ vollständig regulär ist, gibt es eine Urysohn-Funktion $f : X \to [0, 1]$ mit $f(b) = 0$ und $f(X \setminus U) \subseteq \{1\}$, die bzgl. $\mathcal{O}_e$ stetig ist. Da $\mathcal{O}_2$ feiner als $\mathcal{O}_e$ ist, ist f auch stetig bzgl. $\mathcal{O}_2$.
(ii) Sei $b = (b, 0) \in R$. Nach (a) gibt es ein $B_{b,\varepsilon}$ disjunkt zu A. Dann ist die Abbildung

$$f : X \to [0,1] : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{falls } x = b \\ 1 & \text{falls } x \notin \{x\} \cup B_{x,\varepsilon} \\ \frac{(u-b)^2+v^2}{2\varepsilon v} & \text{sonst, wobei } x = (u,v) \end{cases}$$

stetig nach (1.15)(d) und (1.11)(b) wegen $f^{-1}([0, r)) = \{b\} \cup B_{x,r\varepsilon} \in \mathcal{O}_2$ und $f^{-1}((r, 1]) = X \setminus \overline{B_{x,r\varepsilon}} \in \mathcal{O}_2$.

(c) Der Raum $(X, \mathcal{O}_2)$ ist nicht normal:
Die Menge R ist abgeschlossen in X, denn es ist $X \setminus R = \bigcup \{O \in \mathcal{O}_e \mid O \cap R = \emptyset\}$ offen. Da die von $\mathcal{O}_2$ induzierte Spurtopologie auf R diskret ist, ist jede Teilmenge $A \subseteq R$ abgeschlossen in R und damit auch in X, wegen $R \overline{\subseteq} X$. Angenommen, der Raum X wäre normal. Dann gibt es zu jeder Teilmenge $A \subseteq R$ offene disjunkte Mengen $U_A, V_A \subseteq X$ mit $A \subseteq U_A$ und $R \setminus A \subseteq V_A$. Für $A \subseteq R$ setze $Q_A := \big\{(x, y) \in H \,\big|\, (x, y) \in \mathbb{Q}^2\big\} \cap U_A$. Seien $A, B \subseteq R$ mit $A \neq B$. Ohne Einschränkung sei $A \setminus B \neq \emptyset$. Wegen $\emptyset \neq A \setminus B \subseteq U_A \cap V_B$, und da die Menge $Q = \big\{(x, y) \in H \,\big|\, (x, y) \in \mathbb{Q}^2\big\}$ dicht in X ist, folgt $\emptyset \neq Q \cap U_A \cap V_B \subseteq Q_A \setminus U_B \subseteq Q_A \setminus Q_B$, also $Q_A \neq Q_B$. Nun besitzt R aber $2^{2^{\aleph_0}}$ Teilmengen, die Menge Q aber nur $2^{\aleph_0}$, was dem oben Bewiesenen widerspricht. Also ist X nicht normal.

(d) Der Raum $(X, \mathcal{O}_2)$ ist nicht lokalkompakt:
Betrachte eine Menge $B_{x,\varepsilon}$ und sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\partial B_{x,\varepsilon}$, die in $\mathcal{O}_e$ gegen x konvergiert. Wegen $B_{x,\varepsilon} \cap B_{x,\delta} = \{x\}$ für alle $\delta < \varepsilon$, hat die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\overline{B_{x,\varepsilon}}$ keinen Häufungspunkt bzgl. $\mathcal{O}_2$. Somit ist $\overline{B_{x,\varepsilon}}$ nicht kompakt. Da die abgeschlossenen Umgebungen eines Punktes in einem regulären Raum nach (3.2)(c) eine Umgebungsbasis bilden, ist $(X, \mathcal{O}_2)$ nicht lokalkompakt.

(e) Der Raum $(X, \mathcal{O}_2)$ ist (lokal) wegzusammenhängend:
Jeder Weg bzgl. $\mathcal{O}_e$ zwischen zwei Punkten $x \in H$ und $y \in R$ ist auch ein Weg bzgl. $\mathcal{O}_2$. Somit ist $(X, \mathcal{O}_2)$ wegzusammenhängend. Da die Mengen $\{x\} \cup B_{x,r\varepsilon}$ wegzusammenhängend sind, ist $(X, \mathcal{O}_2)$ auch lokal wegzusammenhängend.

(13.3) Das Arens-Quadrat. Sei $Q = (0, 1) \times (0, 1) \subseteq \mathbb{R}^2$ und sei $X := Q \cup \{(0, 0), (1, 0)\}$. Sei $\mathcal{O}_e$ die von der euklidischen Topologie auf $\mathbb{R}^2$ induzierte Spurtopologie auf Q. Für

$n \in \mathbb{N}$ sei $\mathcal{U}((0,0)) := \big\{\{(0,0)\} \cup \big\{(x,y) \,\big|\, 0 < x < \frac{1}{2}, 0 < y < \frac{1}{n}\big\} \,\big|\, n \in \mathbb{N}\big\}$ und $\mathcal{U}((1,0)) := \big\{\{(0,0)\} \cup \big\{(x,y) \,\big|\, \frac{1}{2} < x < 1, 0 < y < \frac{1}{n}\big\} \,\big|\, n \in \mathbb{N}\big\}$. Nach (1.6) erzeugen die Familien $\mathcal{O}_e$, $\mathcal{U}((0,0))$ und $\mathcal{U}((1,0))$ eine Topologie $\mathcal{O}_3$ auf X.

(a) Der Raum $(X, \mathcal{O}_3)$ ist (lokal) wegzusammenhängend,
da die Topologie $\mathcal{O}_3$ gröber ist als die von der euklidischen Topologie auf $\mathbb{R}^2$ induzierte Topologie auf X.

(b) Der Raum $(X, \mathcal{O}_3)$ ist ein Hausdorff-Raum, aber kein Urysohn-Raum: Die erste Behauptung ist klar, die zweite folgt aus der Tatsache, daß die Punkte $(0,0)$ und $(1,0)$ keine disjunkten abgeschlossenen Umgebungen besitzen.

(c) Der Raum $(X, \mathcal{O}_3)$ ist nicht lokalkompakt,
denn er ist nicht vollständig regulär (nach (a) ist er nicht einmal ein Urysohn-Raum).

(13.4) Das löchrige Zelt von Cantor. Betrachte die Cantor-Menge $\mathcal{C}$ in $[0,1]$, wobei $[0,1]$ mit $[0,1] \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^2$ identifiziert werde. Sei $p = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \in \mathbb{R}^2$. Für $c \in \mathcal{C}$ sei l_c die Strecke in $\mathbb{R}^2$, die c mit p verbindet. Sei $E \subseteq \mathcal{C}$ die Menge aller Punkte aus $\mathcal{C}$, die in ihrer triadischen Darstellung irgendwann konstant werden. Dies sind also genau die Endpunkte von herausgenommenen Intervallen. Setze $F := \mathcal{C} \setminus E$. Definiere $X_E := \bigcup_{c \in E} l_c$ und $X_F := \bigcup_{c \in F} l_c$, sowie $X_0 := \{(x,y) \in X_E \mid y \in \mathbb{Q}\}$ und $X_1 := \{(x,y) \in X_F \mid y \notin \mathbb{Q}\}$. Die Menge $X := X_1 \cup X_2$ sei mit der Spurtoplogie $\mathcal{O}_4$ der euklidischen Topologie auf $\mathbb{R}^2$ ausgestattet.

(a) Der Raum $(X, \mathcal{O}_4)$ ist zusammenhängend.

(b) Der Raum $(X, \mathcal{O}_4)$ ist nicht wegzusammenhängend.

(c) Die Teilmenge $Y := X \setminus \{p\}$ ist total unzusammenhängend.

(d) Der Raum $(X, \mathcal{O}_3)$ ist normal.

(e) Der Raum $(X, \mathcal{O}_3)$ ist nicht lokalkompakt.

Literatur

[1] Bourbaki, N., Topologie générale ch. I at II, Paris **1961**
[2] Dugundji, ?., Topology, Boston **1966**
[3] Engelking, R., General Topology, Berlin: Heldermann **1989**
[4] Engelking, R., Sieklucki, K., Topology. A Geometric Approach, Berlin: Heldermann **1992**
[5] Grotemeyer, K.P., Topologie, BI **1968**
[6] Kelley, J.L., General Topology, New York **1955**
[7] Kowalsky, H.J., Topologische Räume, Basel–Stuttgart **1961**
[8] Kuratowski, K., Topologie I, Warschau **1948**
[9] Lipschutz, S., Allgemeine Topologie, McGraw-Hill **1977**
[10] Querenburg, B., Mengentheoretische Topologie, Berlin: Springer Verlag **1979**
[11] Rinow, W., Topologie, Berlin: VEB Verlag **1975**
[12] Steen, ?., Seebach, ?., Counterexamples in Topology, New York: Springeer Verlag **1986**