Geometrie der Relativitätstheorie

Norbert Dragon
Institut für Theoretische Physik
Universität Hannover
http://www.itp.uni-hannover.de/~dragon

20. Juni 2000

Zusammenfassung

Mit einfachen Diagrammen können Zeitdilatation, Längenkontraktion und Lorentztransformationen aus der Tatsache abgeleitet werden, daß im Vakuum gradlinig gleichförmige Bewegung physikalisch nicht von Ruhe unterschieden werden kann und daß die Geschwindigkeit von Licht nicht von der Geschwindigkeit der Quelle abhängt. Wichtige Ergebnisse der relativistischen Physik werden dargestellt und scheinbare Widersprüche geklärt.

Die ersten drei Kapitel wurden mit der Absicht formuliert, daß sie im Wesentlichen auch Nichtphysikern mit wenig mathematischen Kenntnissen verständlich sein sollten. Im ersten Kapitel werden grundlegende Begriffe, das Vakuum, die vierdimensionale, gekrümmte Raumzeit und ihre Eigenschaften, vorgestellt. Im zweiten Kapitel wird das Verhalten bewegter Uhren abgeleitet, Koordinaten für Ereignisse werden eingeführt und ihre Lorentztransformationen bestimmt. Im folgenden Kapitel wird elementar gezeigt, daß es vom Beobachter abhängt, ob zwei Ereignisse gleichzeitig sind. Zeitdilatation und Längenkontraktion werden dargestellt und ihre scheinbar paradoxen Konsequenzen geklärt. Schließlich werden Geschwindigkeitsaddition, Dopplereffekt, Aberration und Bilder untersucht, die ein bewegter Beobachter sieht.

Die weiteren Kapitel setzen mathematische Kenntnisse voraus, wie sie bei Physikern und Mathematikern nach dem Grundstudium vorliegen. Im vierten Kapitel werden die Grundlagen der Mechanik zusammengestellt und auf relativistische Teilchen angewendet. Das fünfte Kapitel stellt die Elektrodynamik als relativistische Feldtheorie dar und bestimmt das Kraftgesetz, dem geladene, bewegte Teilchen unterliegen. Feldgleichungen, die wie die Maxwellgleichungen aus einem Wirkungsprinzip folgen, werden analysiert und die beiden Noethertheoreme bewiesen: zu Symmetrien der Wirkung gehören Erhaltungsgrößen und umgekehrt und zu Eichsymmetrien der Wirkung gehören Identitäten der Bewegungsgleichungen und umgekehrt. Dieses zweite Noethertheorem verbindet die Tatsache, daß auch bei wechselwirkenden Teilchen die Masse konstant ist, mit der Symmetrie der Wirkung unter Reparametrisierung der Weltlinie des Teilchens, und verknüpft den Befund, daß die elektrische Ladung erhalten ist, mit der Eichinvarianz der Elektrodynamik. Geometrische Strukturen von Eichtheorien werden im sechsten Kapitel vorgestellt. Es ist zwar zum Verständnis mancher gravitativer Effekte nicht erforderlich und kann beim ersten Lesen übergangen werden, hat man allerdings die mathematischen Strukturen von Paralleltransport, Torsion, Krümmung und Feldstärke durchgearbeitet und verstanden, so wird das anschließende Kapitel einfach. Dort werden Bahnen, Beobachter und Uhren

im Gravitationsfeld der Sonne oder eines schwarzen Lochs untersucht. Lokale Energie-Impulserhaltung wird aus den Noetheridentitäten abgeleitet, die die Invarianz unter allgemeinen Koordinatentransformationen spiegeln. Aus lokaler Energie-Impulserhaltung wiederum folgt die Geodätenhypothese für frei fallende Teilchen, die grundlegend für die Deutung der Allgemeinen Relativitätstheorie ist. Die Geodätenhypothese für Lichtstrahlen wird aus den Maxwellgleichungen hergeleitet.

Im Anhang werden Tensoren und konforme Transformationen behandelt. Es wird gezeigt, daß Lorentztransformationen der Richtungen von Lichtstrahlen die Möbiustransformationen der Riemannschen Zahlenkugel sind. Weitere Anhänge enthalten rechnerische Einzelheiten von retardierten Potentialen und zur Differentation von Determinanten. Schließlich enthält der Anhang einen Rechenschieber zur Geschwindigkeitsaddition und zur Berechnung der Aberration.

Der Artikel hat zur Zeit noch nicht seine endgültige Form. Für Hinweise auf Unverständliches oder Falsches, insbesondere auch auf Tippfehler, bin ich dankbar.

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen **5**
- 1.1 Realität, Lokalität, Raum und Zeit . . . 5
- 1.2 Struktur des Vakuums . . . 8

2 bewegte Beobachter **12**
- 2.1 Lichtkegel . . . 12
- 2.2 Satz des Minkowski . . . 15
- 2.3 Orts- und Zeitkoordinaten von Ereignissen . . . 18
- 2.4 Skalarprodukt und Längenquadrat . . . 21
- 2.5 Lorentztransformation . . . 23

3 Zeit, Längen und Bilder **28**
- 3.1 Relativität der Gleichzeitigkeit . . . 28
- 3.2 Perspektive und Zeitdilatation . . . 32
- 3.3 Zwillingsparadoxon . . . 35
- 3.4 Längenkontraktion . . . 37
- 3.5 Längenparadoxon . . . 39
- 3.6 Geschwindigkeitsaddition . . . 40
- 3.7 scheinbare Überlichtgeschwindigkeit . . . 42
- 3.8 Dopplereffekt und Aberration . . . 43
- 3.9 Bilder bewegter Beobachter . . . 46
- 3.10 beschleunigte Uhren . . . 49
- 3.11 elastische Körper . . . 52

4 relativistische Teilchen **54**
- 4.1 freie Teilchen . . . 54
- 4.2 Wirkungsprinzip . . . 56
- 4.3 Symmetrien und Erhaltungsgrößen . . . 61
- 4.4 Energie und Impuls . . . 67
- 4.5 Compton-Streuung . . . 69

5 Elektrodynamik **72**
5.1 kovariante Maxwellgleichungen 72
5.2 lokale Ladungserhaltung 74
5.3 Energie und Impuls 76
5.4 das elektrostatische Potential 78
5.5 Viererpotential 80
5.6 Eichtransformation 81
5.7 Wellengleichung 82
5.8 Koordinatentransformationen 85
5.9 Wirkungsprinzip 88
5.10 Symmetrien der Wirkung 91

6 Eichtheorie **101**
6.1 Golfspiel 101
6.2 Parallelverschiebung 102
6.3 Krümmung und Torsion 108
6.4 kovariante Ableitung 112
6.5 drehungsfreies Bezugssystem 114
6.6 geodätische Abweichung 117
6.7 Isospin 120

7 Teilchen im Gravitationsfeld **122**
7.1 Metrik 122
7.2 Geodäten und Beschleunigung 123
7.3 effektives Gravitationspotential 125
7.4 Periheldrehung 127
7.5 Lichtablenkung 129
7.6 Blickwinkel, Gewicht, Drehung und Zeit 132
7.7 Kruskalkoordinaten 140

8 Äquivalenzprinzip **145**
8.1 lokale Energie-Impulserhaltung 146
8.2 Testteilchen 149
8.3 Lichtstrahlen 153

A Indexschreibweise **159**

B Vektoren und Tensoren **165**

C Transformationsgruppen **170**
C.1 Möbiustransformationen 170
C.2 Definition konformer Transformationen 173
C.3 infinitesimale Transformationen 173
C.4 Lösung der konformen Killing-Gleichung 174
C.5 endliche konforme Transformationen 177
C.6 Lorentztransformationen von $\mathbb{R}^{p+1,q+1}$ 180
C.7 konforme Transformationen von $\mathbb{R} \times S^3$ 183

D das retardierte Potential **185**

E Ableitung der Determinante **188**

F Abwälzen von Ableitungen **190**

G Rechenschieber **192**

Literaturverzeichnis **195**

Index **198**

Abbildungsverzeichnis

2.1 Vorwärtslichtkegel bewegter Beobachter 13
2.2 Strahlensatz 16
2.3 Uhrenvergleich 17
2.4 Satz des Minkowski 17
2.5 senkrechte Vektoren 23
2.6 Lorentztransformation 24
2.7 Addition von Geschwindigkeiten 25

3.1 relativ gleichzeitig 28
3.2 Synchronisation im Ruhsystem von $\mathcal{B}_v$ 30
3.3 gedrehte Maßstäbe 32
3.4 Zeitdilatation 33
3.5 Zwillingsparadoxon 35
3.6 gleiche Beschleunigung 36
3.7 Längenkontraktion 38

6.1 Krümmung und Torsion 109
6.2 drehungsfreie Richtungen 115

7.1 gravitative Zeitdilatation 133
7.2 Abkürzung am fokalen Punkt 139
7.3 schwarzes Loch in Kruskal-Koordinaten (u, v) 142

Kapitel 1

Grundlagen

1.1 Realität, Lokalität, Raum und Zeit

Wir sind im täglichen Leben einer Vielzahl von Einflüssen mit einer oft unüberschaubaren Verflechtung von Wechselwirkungen ausgesetzt. Um einen Überblick zu gewinnen und Ursachen, ihre Auswirkungen und eventuell vorliegende Gesetzmäßigkeiten aufzuspüren, beobachten, messen und analysieren Physiker Eigenschaften von Systemen, die so präpariert sind, daß sie genügend einfach sind.

Wir unterstellen bei den weiteren Betrachtungen, daß physikalische Vorgänge real und lokal in Raum und Zeit ablaufen.

Als real bezeichnen wir Eigenschaften ideal präparierter physikalischer Systeme, wie zum Beispiel den Ort und Impuls eines Teilchens, wenn das Ergebnis der anschließenden, zugehörigen Messung festliegt. Dann kann man davon sprechen, daß das Teilchen den Ort und Impuls hat, daß dies also reale Teilcheneigenschaften sind. Die revolutionäre und noch immer nicht in das Intuitivwissen aller Physiker eingegangene Erkenntnis der Quantenphysik ist, daß diese Grundannahme falsch ist. Selbst bei ideal präparierten und vollständig bekannten Zuständen gibt es immer Messungen, deren Ergebnis nicht festliegt, sondern für deren Ergebnis nur eine Wahrscheinlichkeitsverteilung angeben werden kann. Quanteneigenschaften werden vor allem an kleinen oder geordneten Systemen wie Elementarteilchen, Atomen, Molekülen, Supraleitern und Festkörpern wichtig. Auf Quanteneigenschaften beruhen die chemischen Eigenschaften und die Materialeigenschaften der Materie. Wenn wir im folgenden von Teilchen reden, wollen wir Quanteneigenschaften vernachlässigen und eine idealisiert reale Welt betrachten.

Mit dem Begriff Lokalität fassen wir die Erfahrung zusammen, daß wir Systeme räumlich und zeitlich trennen können und sich die getrennten und

voneinander abgeschirmten Teile unabhängig voneinander verhalten. Man muß also zum Beispiel für den Ausgang eines Experiments in Hannover nicht berücksichtigen, wann in Laatzen die Straßenbahn abfährt. Nach einer Verletzung der Lokalität, etwa nach dem Einfluß der Planeten auf menschliche Lebenswege oder nach den homöopathischen Spuren, die früher vorhandene Stoffe in Mixturen, in denen sie schon lange nicht mehr sind, hinterlassen haben, wird zwar immer wieder gesucht, es gibt aber keinen Befund, der mit Lokalität unverträglich wäre.

Mißt man die Entfernung zwischen zwei Teilchen oder die Dauer zwischen zwei Ereignissen, so hängt das Ergebnis nicht vom Meßverfahren und nicht von der Art der Teilchen und auch nicht von der Art der Ereignisse ab, wenn man bekannte Unzulänglichkeiten der Meßverfahren berücksichtigt, zum Beispiel, daß Maßstäbe bei Aufrichten in die Vertikale durch ihr Gewicht schrumpfen und sich bei Erwärmen ausdehnen. Entfernung von Punkten und zeitliche Dauer zwischen Ereignissen können daher von vielen Einzelheiten konkreter Messungen abstrahiert werden und sind geometrische Eigenschaften von Raum und Zeit.

Einen Punkt im Raum können wir dadurch bezeichnen, daß wir angeben, wie weit nach vorn, nach rechts und nach oben er von einem gewählten Bezugspunkt entfernt ist. Diese Angaben heißen Koordinaten des Punktes. Man braucht drei Koordinaten, um einen jeden Punkt zu bezeichnen. Der Raum ist dreidimensional. Die Koordinaten eines Punktes hängen natürlich davon ab, welchen Bezugspunkt man gewählt hat und welche Richtungen man als vorn, rechts oder oben wählt.

Für physikalische Abläufe ist, wie im täglichen Leben bei Verabredungen, nicht nur der Ort wichtig, an dem ein Ereignis stattfindet, sondern auch die Zeit, zu der es stattfindet. Die Menge aller Ereignisse, die Raumzeit, ist vierdimensional, denn um ein einzelnes Ereignis zu bezeichnen, werden vier Angaben benötigt, der Ort, an dem es stattfindet und die Zeit, zu der es sich ereignet. Die Orts- und Zeitangaben, die ein Ereignis bezeichnen, hängen – wie die drei Koordinaten eines Ortes – vom Beobachter ab.

Ein Reisender, der im Zug an einem festen Platz sitzt, durchläuft eine Menge von Ereignissen. Diese Linie in der Raumzeit ist seine Weltlinie. Bezogen auf einen Punkt im Zug finden alle Ereignisse auf der Weltlinie des Reisenden an einem unveränderlichen Ort nacheinander statt. Für einen außenstehenden Beobachter hingegen durchläuft der Reisende unterschiedliche Orte. Gleichortigkeit, die Eigenschaft, zu verschiedenen Zeiten am gleichen Ort zu sein, hängt ebenso vom Bezugssystem ab, wie in räumlicher Geometrie die Frage, ob zwei Punkte hintereinander liegen. Unsere Betrachtungen werden zeigen, daß auch Gleichzeitigkeit zwei verschiedener Ereignisse vom Beobachter abhängt.

Gleichortigkeit und Gleichzeitigkeit sind keine geometrischen Strukturen der Raumzeit, denn als geometrisch bezeichnen wir nur diejenigen Eigenschaften, die nicht vom Bezugssystem abhängen. In dreidimensionaler Geometrie ist dies zum Beispiel die Eigenschaft einer Linie, gerade zu sein, oder die Entfernung zweier Punkte oder der Winkel zwischen zwei Geraden.

Physikalische Abläufe hängen nicht davon ab, ob ein Beobachter und welcher Beobachter sie beobachtet. Die physikalischen Abläufe sind daher geometrische Strukturen der Raumzeit. Insbesondere definieren die Weltlinien frei fallender Teilchen die Geraden der Raumzeit.

Für jedes Ereignis liegt fest, welche späteren Ereignisse von ihm mit einem Lichtstrahl beeinflußt werden können und umgekehrt, von welchen früheren Ereignissen es durch Lichtstrahlen hat beeinflußt werden können. Diese Ereignisse bilden den Vorwärts- und Rückwärtslichtkegel, die beide als geometrische Struktur zu jedem Ereignis der Raumzeit gehören.

In der Raumzeit ist die Entfernung zweier Ereignisse die Zeit, die auf einer freifallenden Uhr vergeht, die diese Ereignisse durchläuft. Aus dieser Zeit leiten sich alle Längenmaße ab, denn Längen werden durch Lichtlaufzeiten mit Uhren gemessen. Die wichtigste geometrische Eigenschaft der Uhren ist, daß diejenigen Ereignisse, die zeitlich gleich weit von einem gewählten Ereignis entfernt sind, auf einem Hyperboloid liegen und nicht, wie in der räumlichen Geometrie, auf einer Kugelfläche und auch nicht, wie in der Newtonschen Raumzeit, auf einer Ebene gleichzeitiger Ereignisse. Die Geometrie der Raumzeit ist normale Schulgeometrie, bei der Kreise durch Hyperbeln ersetzt sind.

Die vierdimensionale Raumzeit übersteigt und fasziniert unser im Alltag geschultes Anschauungsvermögen, obwohl wir leicht eine Abfolge von räumlichen Vorgängen, wie sie zum Beispiel auf Filmrollen gespeichert werden, durchdenken und intuitiv nachvollziehen können. Wer bei einem vierdimensionalen Raum sich einen Stapel von Bildern vorstellt, die eine Abfolge von dreidimensionale Situationen zeigen, hat die vierdimensionale Raumzeit im gleichen Maß erfaßt, wie jemand, der ein dreidimensionales Objekt, etwa einen rechteckigen Block, als Kartenstapel, als Abfolge von Schichten, begreift. Die physikalischen Befunde fügen die unserer Intuition verborgene Erkenntnis hinzu, daß die vierdimensionale Raumzeit ein Ganzes ist, das erst vom Beobachter in Schichten gleicher Zeit zerlegt wird. So wie, um im Bild zu bleiben, ein Block auch als Abfolge von schrägliegenden Schichten mit drei, vier, fünf und sechs Ecken zerlegt werden kann, zerlegen unterschiedlich bewegte Beobachter die Abfolge von Ereignissen in der Raumzeit verschieden.

Für Längen- und Zeitmessungen, die ein Beobachter vornimmt, ist seine Geschwindigkeit genauso wichtig wie Blickwinkel oder Perspektive für unsere räumliche Wahrnehmung. Dies ist zunächst verwirrend, denn unsere Alltagserfahrung ist auf langsame Bewegung beschränkt.

1.2 Struktur des Vakuums

Das einfachste physikalische System ist das Vakuum, ein Gebiet, von dem alle Teilchen entfernt und alle Einwirkungen von außen, wie elektrische und magnetische Felder, abgeschirmt sind. Dieses Vakuum ist die Bühne, auf der wir das Verhalten von Licht und Teilchen studieren, die von Beobachtern gesehen und mit Uhren und Maßstäben gemessen werden.

So einfach der Zustand Vakuum scheint, er ist eine Idealisierung und kann nur ungefähr realisiert werden. So werden wir dauernd von Neutrinos durchströmt, die aus der Sonne kommen und die wir nicht abschirmen können, weil sie nicht genügend gut wechselwirken. Aber weil die Neutrinos alles durchdringen, stören die Neutrinos auch nicht.

Der von Hintergrundstrahlung erfüllte Weltraum ist kein Vakuum. Diese Strahlung ist von der Frühzeit der Entwicklung des Universums zurückgeblieben und zeichnet ein Ruhsystem aus, durch das sich die Sonne mit einer Geschwindigkeit von etwa 370 km/s [1] bewegt. Diese Hintergrundstrahlung kann man mit Wänden abschirmen, allerdings muß man dann die Wände kühlen, damit nicht die Wärmestrahlung der Wände den Raum füllt.

Auch nach Entfernen aller Teilchen und Abschirmen aller äußeren Einflüsse behält das Vakuum Struktur.

Es steht im Vakuum ohne Bezug auf andere Teilchen fest, ob ein Beobachter frei fällt oder beschleunigt ist. Das kann er zum Beispiel an einer Sanduhr oder an mitgeführten Pendeln ablesen. Pendeln sie hin und her, so wirkt eine Beschleunigung senkrecht zur Drehachse, ansonsten kreisen Pendel mit konstanter Winkelgeschwindigkeit.

Ob ein Beobachter oder ein Teilchen beschleunigt ist, hat nichts damit zu tun, um was für ein Teilchen es sich handelt, denn alle Teilchen fallen gleich. Beschleunigung ist also eine Eigenschaft, die der im Laufe der Zeit durchlaufenen Bahn, der Weltlinie, zukommt. Das Vakuum enthält die Information, welche Weltlinien in der Raumzeit unbeschleunigt sind.

Im freien Fall unbeschleunigt durchlaufene Bahnen definieren die geraden Weltlinien der Raumzeit. Bei Abwesenheit von Gravitation sind sie auch räumlich gerade und es werden in gleichen Zeiten gleiche Entfernungen durchlaufen. Normalerweise aber bilden die im dreidimensionalen Raum durchlaufenen Bahnkurven frei fallender Teilchen keine ausgezeichnete Klasse von Bahnen, die zur Definition räumlich gerader Linien taugen. Durch einen Anfangspunkt und mit vorgegebener Anfangsrichtung gibt es ja viele Bahnkurven, zum Beispiel verschiedene Wurfparabeln, die zu unterschiedlicher Anfangsgeschwindigkeit gehören. Daß frei fallende Teilchen eine ausgezeichnete Klasse von geraden Linien definieren, enthüllt sich erst in der vierdimensionalen Raumzeit. Dort bestimmt die Anfangsgeschwindigkeit die anfängli-

che Richtung der Weltlinie und zu gegebener Anfangszeit, Anfangsort und Anfangsgeschwindigkeit gehört genau eine Weltlinie eines frei fallenden Teilchens. Unbeschleunigte Bewegung definiert also eine geometrische Struktur, nämlich Geraden, in der Raumzeit.

Gravitation kann man nicht abschirmen oder absaugen. Man kann sie auch nicht vollständig wegtransformieren, indem man in einem frei fallenden Labor experimentiert. Betrachten wir ein die Erde umkreisendes Labor, so kann man in diesem abgeschirmten Labor ohne Blick auf die Erde oder die Laborwände drei Richtungen, nämlich hintereinander, nebeneinander und untereinander folgendermaßen physikalisch unterscheiden. Testteilchen im Labor umrunden die Erde auf Großkreisen. Laufen sie hintereinander auf demselben Großkreis, so ist ihr Abstand zu allen Zeiten unverändert. Laufen sie nebeneinander auf Großkreisen um den Erdmittelpunkt mit gleichem Radius, so schneiden sich diese Großkreise zweimal pro Erdumlauf, nebeneinander laufende Testteilchen pendeln mit der Umlauffrequenz umeinander. Laufen die Testteilchen untereinander auf Großkreisen mit verschiedenen Radien, so läuft das erdnähere Teilchen schneller als das obere und beide Teilchen entfernen sich voneinander.

Wer sich der Mühe unterzogen hat, die Weltlinien dieser Testteilchen gedanklich zu verfolgen, hat im Wesentlichen erfahren, was ein gekrümmter Raum ist. Denn die Testteilchen zeigen an, daß die Raumzeit gekrümmt ist: zunächst parallele, gerade Weltlinien werden von Testteilchen, die zunächst nebeneinander ruhen, durchlaufen und können in der Raumzeit umeinander pendeln oder voneinander weglaufen.

Man mag die Konsequenz, daß die Raumzeit gekrümmt ist, als Folge einer ungewöhnlichen Definition von Geraden abtun und sich geradere Weltlinien in einer Raumzeit ohne Krümmung denken. Aber geradere Weltlinien als diejenigen von Lichtstrahlen und Testteilchen kann niemand physikalisch realisieren, denn alle freien Teilchen fallen gleich und alle Lichtstrahlen durchlaufen, wenn man von Beugungserscheinungen absieht, im Vakuum dieselben Weltlinien. Diese Weltlinien definieren eine gekrümmte Raumzeit. Geradere Linien sind eine Fiktion, um die sich die Natur nicht kümmert.

Grund für die relative Bewegung frei fallender Teilchen ist, daß die Gravitation nicht überall gleich ist: die Erdanziehung wirkt auf erdnähere Teilchen stärker und bei gleichem Abstand wirkt sie auf nebeneinander laufende Teilchen in verschiedene Richtung. Beschränkt man sich auf so kurze Zeiten und so kleine räumliche Abstände, daß die Ungleichmäßigkeit der Gravitation sich bei gegebener Meßgenauigkeit nicht auswirkt, so wird in einem mitfallenden Bezugssystem die Gravitation unmerklich. In genügend kleinen Raumzeitgebieten ist also die Raumzeit nicht merklich gekrümmt und hat die geometrischen Eigenschaften eines flachen Raumes. Dieser flache Raum, der die

Raumzeit in kleinen Gebieten annähernd beschreibt, heißt technisch „Tangentialraum“. Wie die Tangente eine Kurve in der Umgebung eines Punktes approximiert, so approximiert der Tangentialraum die Raumzeit in der Umgebung eines Ereignisses.

Da man Gravitation nicht abschirmen kann, wir aber zunächst die damit zusammenhängenden Verwicklungen vermeiden möchten, beschränken wir uns auf so kleine Zeitspannen und Raumgebiete, daß gravitative Effekte nicht meßbar sind, oder wir berücksichtigen gedanklich die bekannten Auswirkungen der Gravitation und ziehen sie vom Verhalten physikalischer Systeme ab. Diese Berücksichtigung gravitativer Effekte heißt unter Physikern die „Vernachlässigung gravitativer Effekte“. Wir vernachlässigen in der weiteren Diskussion zunächst gravitative Effekte und bestimmen geometrische Eigenschaften des Tangentialraumes der Raumzeit.

Im Vakuum steht ohne Bezug auf andere Körper wie etwa die Fixsterne fest, ob man sich im Laufe der Zeit dreht. Man kann physikalisch klären, ob sich alles um einen dreht oder ob der ganze Wirbel daher rührt, daß man sich selbst dreht. Im Labor, das wie oben durchgedacht die Erde umkreist, läßt sich messen, daß sich die Richtungen „untereinander“ und „hintereinander“ um die Richtung „nebeneinander“ drehen. Das kann man zum Beispiel mit Kreiseln mit fester Drehachse statt Punktteilchen überprüfen. Allerdings ist das Verhalten von Kreiseln, so einfach sie sind, immer noch komplizierter zu analysieren als Licht. Zur Definition von drehungsfreier Bewegung verwenden wir die Eigenschaften von Licht.

Drehungsfreiheit erkennt man daran, daß reflektiertes Licht jeweils aus der Richtung zurück kommt, in die man es ausgesendet hat. Wenn man sich während der Laufzeit des Lichtes gedreht hat, kommen reflektierte Lichtstrahlen aus einer anderen Richtung zurück, und man muß bei einer Filmvorführung in eine Richtung projizieren und in eine andere Richtung schauen. Mit Interferometern, die darauf beruhen, daß Lichtstrahlen in sich drehenden Systemen nicht umkehrbar sind, läßt sich Drehung mit einer Genauigkeit von 10^{-8} Grad pro Sekunde messen [2]. Von eigener Drehung physikalisch verschieden ist die Situation, bei der man von einem Objekt umkreist wird. Es kommen zwar auch die Lichtstrahlen vom Objekt aus Richtungen, die sich im Laufe der Zeit ändern, aber man sieht jeden einzelnen vom Objekt reflektierten Lichtstrahl aus der Richtung, in die man ihn ausgesendet hatte.

Erstaunlicherweise stimmen diese durch lokale Eigenschaften definierten drehungsfreien Bezugssysteme überein mit den Systemen, in denen das Licht von Fixsternen aus Richtungen einfällt, die sich im Laufe der Zeit bis auf Parallaxe und Aberration nicht ändern. Dies ist nicht selbstverständlich und gilt in der Allgemeinen Relativitätstheorie nicht mehr, wenn man eine schwere Masse umkreist oder in der Nähe eines schweren, rotierenden Körpers ruht.

Das Relativitätsprinzip zählt Größen auf, die im Vakuum bei Vernachlässigung gravitativer Effekte nicht physikalisch festgelegt werden können:

Eigenschaft 1 (Relativitätsprinzip) *Im Vakuum läßt sich kein Ort durch eine besondere physikalische Eigenschaft als Ursprung auszeichnen. Ebenso willkürlich ist die Festlegung einer Anfangszeit und die anfängliche Wahl von zwei zueinander senkrechten Richtungen als x- und y-Achse. Zudem läßt sich physikalisch nicht entscheiden, ob ein unbeschleunigter Beobachter ruht oder sich bewegt.*

Bewegen sich zwei unbeschleunigte Beobachter relativ zueinander, dann kann jeder Beobachter die Bewegung dem anderen zuschreiben. Alle physikalischen Abläufe sind verträglich mit der Deutung, daß er selber ruht.

Es ist nicht alles relativ. Beschleunigung und Drehbewegung können im Vakuum physikalisch ohne Bezug auf weitere Körper festgestellt werden. Positive und negative Zeitrichtung und rechts- und linkshändige Bezugssysteme können in Wechselwirkungen von Elementarteilchen unterschieden werden. Bei gewählter x- und y-Achse liegt demnach die Richtung der positiven z-Achse fest.

Das Relativitätsprinzip deckt nicht die Auffassung einiger Philosophen, richtig und falsch sei relativ und beruhe auf gesellschaftlichen Konventionen.

Das Relativitätsprinzip hat einen mathematisch genauen Sinn. Der Wechsel zu einem Bezugssystem mit einem anderen Ursprung, anderen Anfangszeitpunkt, mit anderen Richtungen und zu einem gleichmäßig gradlinig bewegten Beobachter ist eine Koordinatentransformation. Solche Transformationen können hintereinander ausgeführt werden und definieren eine Gruppe. Die Gruppe von Invarianztransformationen gehört zur Struktur des Vakuums. Mit fortgeschrittenen mathematischen Techniken wie in Abschnitt C.4 kann diese Gruppe algebraisch bestimmt werden. Wir können sie aber auch mit einfacher Dreiecksgeometrie ermitteln. Wir werden sehen, daß diese Gruppe aus den Poincaré-Transformationen besteht, die von den Translationen von Raum und Zeit und den Lorentztransformationen erzeugt wird. Dieses Ergebnis ist erstaunlich, denn die Maxwellgleichungen der Elektrodynamik (5.2, 5.3), die auch das Verhalten von Licht beschreiben, sind invariant unter der größeren Gruppe der konformen Transformationen und nicht nur unter Poincaré-Transformationen. Wir verwenden aber in unseren Raumzeitdiagrammen nicht nur Lichtstrahlen sondern auch gerade Weltlinien unbeschleunigter Beobachter. Gerade Weltlinien sind nicht invariant unter eigentlich konformen Transformationen (C.64). Darüber hinaus verwenden wir Uhren, deren Gang ein Schiedsrichter vergleichen kann. Dies schließt Dilatationen aus, die zu schneller oder langsamer gehenden Uhren führen würden. Als Invarianzgruppe des Vakuums verbleibt daher die Poincaré-Gruppe.

Kapitel 2

bewegte Beobachter

2.1 Lichtkegel

Daß bei einem unbeschleunigten Beobachter sich durch keinen auf der Newtonschen Mechanik beruhenden Effekt entscheiden läßt, ob er ruht oder sich bewegt, war ebenso wie die zugehörigen Invarianztransformationen der Newtonschen Mechanik, die Galilei-Transformationen, lange vor Einsteins Relativitätstheorie bekannt. Allerdings war man davon überzeugt, daß das Relativitätsprinzip nur angenähert gelte und daß Licht sich in einem Medium, dem Äther, ausbreite, der ein absolutes Ruhesystem definiere. Es war seit 1675 durch Olaf Rømers Beobachtung und Deutung der Umlaufzeiten der vier großen Jupitermonde Jo, Europa, Ganymed und Kallisto [1] bekannt, daß die Lichtgeschwindigkeit c im Vakuum endlich ist [3–5]. Da die Galilei-Transformation in das Bezugssystem eines mit Geschwindigkeit v bewegten Beobachters keine endliche Geschwindigkeit invariant läßt, sondern c in $c+v$ transformiert, können Galilei-Transformationen nicht die Invarianzgruppe des Vakuums bilden, wenn die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum für alle Beobachter gleich ist. Ebensowenig sind die Maxwell-Gleichungen (5.2, 5.3) der Elektrodynamik invariant unter Galilei-Transformationen.

Grundlegend für die relativistische Physik ist die Erkenntnis, daß es die Geschwindigkeit von Licht im Vakuum nicht gestattet, einen ruhenden Beobachter von einem gleichförmig bewegten Beobachter zu unterscheiden.

Eigenschaft 2 (Lichtgeschwindigkeit) *Die Geschwindigkeit c von Licht im Vakuum ist von der Geschwindigkeit der Quelle oder des Empfängers unabhängig.*

Dies hat Albert Michelson in seinem entscheidenden Experiment[2] festgestellt.

[1] Ich verdanke Herrn Ulrich Schröder [6] die Überprüfung dieser historischen Angaben.
[2] Experimentelle Befunde werden in [6, 7] ausführlicher diskutiert.

Daß die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum unabhängig von der Geschwindigkeit der Quelle ist, stimmt mit den Schlußfolgerungen überein, die man aus den Maxwellgleichungen (5.2, 5.3) für die elektromagnetischen Felder ziehen kann. Aus diesen Gleichungen leitet man ab (5.52), daß eine Ladung, die zur Zeit t' am Ort $\vec{x}'$ ist, sich auf die elektrischen und magnetischen Felder am Ort $\vec{x}$ zu der Zeit t auswirkt, die um die Lichtlaufzeit $\frac{1}{c}|\vec{x}-\vec{x}'|$ später ist

$$c(t-t') = |\vec{x}-\vec{x}'| \ . \tag{2.1}$$

Dies gilt unabhängig davon, ob sich die Ladung bewegt. Die Ereignisse $(t, \vec{x})$ bilden den Vorwärtslichtkegel von $(t', \vec{x}')$; elektromagnetische Ursachen wirken sich im Vakuum mit Lichtgeschwindigkeit c aus.

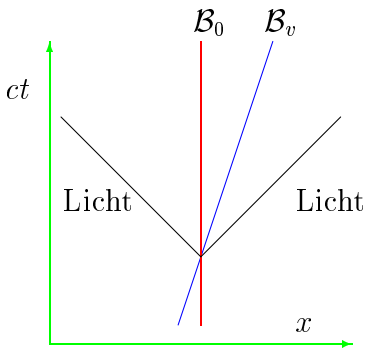


Abbildung 2.1: Vorwärtslichtkegel bewegter Beobachter

Die Unabhängigkeit der Lichtausbreitung von der Geschwindigkeit der Quelle ist in Abbildung 2.1 in einem Raumzeit-Diagramm dargestellt: Ein ruhender Beobachter durchläuft die gerade Weltlinie $\mathcal{B}_0$, sein Ort x ist zu allen Zeiten t unverändert, ein bewegter, ebenfalls unbeschleunigter Beobachter durchläuft die Weltlinie $\mathcal{B}_v$ und bewegt sich gleichmäßig in x-Richtung. Wenn beide zu einem Zeitpunkt an demselben Ort sind und Licht aussenden, so breitet sich das Licht von diesem Ereignis unabhängig davon aus, ob sich die Lichtquelle bewegt.

Die Unabhängigkeit der Ausbreitung des Lichtes von der Geschwindigkeit der Quelle besagt nicht, daß nicht andere Eigenschaften wie die Farbe des Lichtes, die Richtung der Lichtstrahlen und die Intensität der Strahlung davon abhängen. Die Richtung der einfallenden Lichtstrahlen, die Farbe des Lichtes und die Zahl der Photonen pro Fläche und Zeiteinheit, die Helligkeit, hängt von der Geschwindigkeit der Quelle und der Geschwindigkeit des Empfängers ab. Die Intensität elektromagnetischer Abstrahlung hängt von der Beschleunigung der Ladungen ab, die die Strahlung aussenden.

Da in unseren Diagrammen der Raumzeit jeweils die Zeit mal Lichtgeschwindigkeit ct und der Ort x aufgetragen werden, läuft Licht auf Geraden mit einem Winkel von $\pm 45°$ zu den Achsen.[3] Beobachter und massive Teilchen sind langsamer als Licht und durchlaufen jeweils Weltlinien, deren Tangenten innerhalb des Lichtkegels liegen. Da an jedem Ort der Lichtkegel nicht vom Bewegungszustand der Quelle abhängt und beispielsweise auch nicht von der Farbe des Lichts, gehört er zur geometrischen Struktur der Raumzeit.

Man kann die Unabhängigkeit der Lichtgeschwindigkeit von der Geschwindigkeit der Quelle bei Supernovaexplosionen von Sternen sehen. Zum Beispiel hat man 1987 in der Großen Mangellanschen Wolke eine Supernova, SN 1987 a, beobachtet, die vor 160 000 Jahren stattgefunden hat und bei der das explodierende, leuchtende Plasma mit einer Geschwindigkeit von zunächst 25 000 km/s ausgestoßen wurde. Hätte sich die Geschwindigkeit v des leuchtenden Plasmas zur Lichtgeschwindigkeit zu $c' = c + v$ addiert, so wäre das Licht vom Plasma, das sich auf uns zu bewegt, 12 000 Jahre vor dem Licht vom Plasma angekommen, das sich quer zur Sichtlinie bewegt. Es hat zwar niemand zu dem Zeitpunkt den Stern beobachtet, als das Licht von der Explosion hier eintraf. Aber bei den Neutrinos, die man gemessen hat, kann man aus den Meßaufzeichnungen diesen Zeitpunkt bestimmen. Als man eine Stunde später zum explodierten Stern hinsah, war die Explosion vollständig zu sehen. Demnach können schlimmstenfalls Laufzeitunterschiede von einer Stunde für die verschiedenen Lichtstrahlen aufgetreten sein. Ein Jahr hat etwa $365 \cdot 24$ Stunden. Bei einer Laufzeit von 160 000 Jahren waren daher die Geschwindigkeiten der Lichtstrahlen bis auf $1/(160\,000 \cdot 365 \cdot 24) \approx 0{,}7 \cdot 10^{-9}$, also in den ersten neun Dezimalen, gleich. Übrigens folgt aus dieser Beobachtung auch [8], daß die Neutrinos sich innerhalb dieser Genauigkeit mit Lichtgeschwindigkeit bewegt haben müssen und daß ihre Masse weniger als 10 eV beträgt.

Maßstäbe sind vielen Einflüssen unterworfen, die ihre Meßgenauigkeit beschränken. Die Länge von Maßstäben hängt von der Temperatur und streng genommen vom Druck ab. Wenn man Maßstäbe im Schwerefeld der Erde anlegt, so muß man schauen, also durch Licht überprüfen, ob sie verbogen sind. Das Gewicht von Maßstäben bewirkt, daß sie vertikal im Schwerefeld verkürzt sind. Über größere Längen stehen überhaupt keine Maßstäbe zur Verfügung. An der Ausfahrt Echte der Autobahn Hannover Kassel verkündet zwar ein Schild stolz „Echte 1000 m“, aber durch Hintereinanderlegen von Maßstäben kann man Längen, die wenige Meter überschreiten, nur noch ungenau bestimmen. Man mißt sie optisch mit Licht.

Da die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum konstant ist und wegen der Un-

[3] Wir lassen in den weiteren Diagrammen die Achsen der Übersichtlichkeit wegen weg.

vollkommenheiten fester Körper als Maßstäbe, definiert man räumliche Entfernung durch die Laufzeit von Licht. Diese Entfernung stimmt innerhalb der Meßgenauigkeit, die durch ungenaue Maßstäbe begrenzt wird, mit denjenigen Abständen überein, die man bestmöglich mit Maßstäben ermittelt.

Wenn man Längen durch Lichtlaufzeiten mißt, ist definitionsgemäß die Lichtgeschwindigkeit konstant und unabhängig von der Geschwindigkeit des Beobachters. Der physikalische Inhalt von Michelsons Messungen besteht in der Erkenntnis, daß Maßstäbe wie Meßlatten und starre Körper dieselben Längenmaße ergeben wie Apparate, die Lichtlaufzeiten messen.

Uhren messen zeitliche Entfernungen und da räumliche Entfernung durch Lichtlaufzeit definiert ist, bestimmen Uhren und Lichtstrahlen die geometrischen Eigenschaften der Raumzeit vergleichbar zu Zirkel und Lineal, die für die räumliche Geometrie grundlegend sind.

Der Zahlenwert der Lichtgeschwindigkeit hängt von den verwendeten Längen- und Zeiteinheiten ab. Mißt man Länge in Flugzeit von Licht, so hat c den natürlichen Wert $c = 1$ und die Formeln der relativistischen Physik sind besonders übersichtlich und enthüllen Gemeinsamkeiten zwischen Orts- und Zeitmessungen.

Daß Geschwindigkeiten dimensionslos sind, hat lange Tradition und ist kein Trick von Theoretikern. In Grimms Rotkäppchen ist die Geschwindigkeit eines Spaziergängers Eins und Großmutters Haus liegt eine halbe Stunde vom Dorf. Der Einwand, Länge und Zeit seien grundlegend verschieden, ist nicht stichhaltig. Man mißt ja auch normalerweise Höhenmeter in denselben Einheiten wie horizontale Entfernungen, obwohl jeder Bergsteiger weiß, daß im Gebirge ein Höhenmeter etwas anderes ist als ein Meter nach vorn.

Um unsere Formeln einfach zu halten, identifizieren wir

$$\text{Sekunde} \;= 299\,792\,458 \text{ Meter} \; . \tag{2.2}$$

Geschwindigkeiten sind dann dimensionslos. Meter pro Sekunde ist ein Zahlenfaktor wie Kilo oder Milli und bedeutet etwa 1/3 Nano

$$\frac{\text{Meter}}{\text{Sekunde}} = \frac{1}{299\,792\,458} \, , \quad c = 299\,792\,458 \; \frac{\text{Meter}}{\text{Sekunde}} = 1 \; . \tag{2.3}$$

In einige Ergebnisse fügen wir die Faktoren c ein, wie sie alltäglich auftreten, wenn wir nicht Sekunden in Meter umrechnen.

2.2 Satz des Minkowski

Die Länge zwischen zwei Punkten können wir in räumlicher Geometrie an einem Lineal ablesen, das beide Punkte verbindet. In der Raumzeit ist die

Entfernung zweier Ereignisse die Zeit, die auf einer unbeschleunigten Uhr vergeht, die beide Ereignisse durchläuft.[4] Finden beide Ereignisse nicht am gleichen Ort statt, so ist die Uhr, die beide Ereignisse durchläuft, bewegt. Welche Zeit auf einer bewegten Uhr vergeht, ergibt sich aus den folgenden Diagrammen.

Zu einem Zeitpunkt mögen zwei gleichförmig bewegte Beobachter $\mathcal{B}_\mathrm{S}$ und $\mathcal{B}_\mathrm{E}$ mit Uhren, die gleichmäßig gehen, denselben Ort durchlaufen. Ihre Weltlinien schneiden sich in diesem Ereignis O, dem Ursprung. Einfachheitshalber stellen beide Beobachter dabei ihre Uhren auf Null, damit wir im folgenden von Zeiten statt von Zeitdifferenzen reden können. Wenn seine Uhr später die Sendezeit T_S anzeigt, sende der Beobachter $\mathcal{B}_\mathrm{S}$ einen Lichtstrahl zum anderen Beobachter $\mathcal{B}_\mathrm{E}$. Dieser Lichtstrahl erreicht den Empfänger $\mathcal{B}_\mathrm{E}$, wenn dessen Uhr die Empfangszeit T_E anzeigt. Wenn beide Uhren gleichmäßig gehen und beide Beobachter sich gradlinig, gleichförmig bewegen und der Sender zu einer anderen, positiven Zeit T'_S den Lichtstrahl aussendet, so ist die Empfangszeit T'_E um denselben Faktor vergrößert wie die Sendezeit, denn die Dreiecke, die von den Lichtstrahlen und den Weltlinien der Beobachter gebildet werden, sind einander ähnlich. Das Verhältnis der Empfangszeit T_E, die der Empfänger $\mathcal{B}_\mathrm{E}$ mißt, zur Sendezeit T_S, die der Sender $\mathcal{B}_\mathrm{S}$ beim Aussenden des Lichtstrahls abliest, hängt nicht von der Sendezeit ab

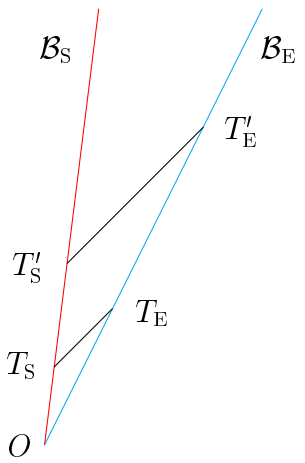


Abbildung 2.2: Strahlensatz

$$\frac{T_\mathrm{E}}{T_\mathrm{S}} = \kappa(\mathcal{B}_\mathrm{E}, \mathcal{B}_\mathrm{S}) \quad \text{für } T_\mathrm{S} > 0 \ . \tag{2.4}$$

Das Verhältnis κ der Sende- und Empfangszeit hängt von den beiden Beobachtern ab und davon, ob ihre gleichmäßig gehenden Uhren gleich gehen.

Bei zwei nebeneinander ruhenden Uhren kann man einfach ablesen, ob sie gleich gehen. Das ist bei bewegten Uhren schwieriger. Vergleicht man die Uhren zweier gleichmäßig bewegter Beobachter $\mathcal{B}_0$ und $\mathcal{B}_v$, so muß man beim Ablesen insbesondere die Lichtlaufzeiten berücksichtigen. Daher überlassen wir die Aufgabe, zwei zueinander bewegte Uhren zu vergleichen, einem Schiedsrichter $\mathcal{B}_s$, der sich mit solch einer Geschwindigkeit bewegt, daß er stets mitten zwischen $\mathcal{B}_0$ und $\mathcal{B}_v$ ist. Die Beobachter sind für den Schieds-

[4] Vorausgesetzt beide Ereignisse können von einer Uhr durchlaufen werden.

richter nur unwesentlich verschieden: sie entfernen sich von ihm mit entgegengesetzt gleicher Geschwindigkeit und durch eine Drehung um 180° kann er sie vertauschen. Für den Schiedsrichter sind die Lichtlaufzeiten von beiden Uhren gleich, er kann daher einfach ablesen, ob sie gleich gehen.

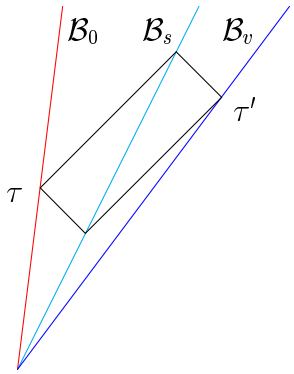


Abbildung 2.3: Uhrenvergleich

Der Schiedsrichter $\mathcal{B}_s$ sende zu einem Zeitpunkt Lichtstrahlen zu $\mathcal{B}_0$ und $\mathcal{B}_v$ aus. Bei Ankunft des Lichtstrahls möge die Uhr von $\mathcal{B}_0$ die Zeit τ anzeigen und die Uhr von $\mathcal{B}_v$ die Zeit τ'. Wenn die Lichtstrahlen reflektiert werden, so treffen sie zum selben Zeitpunkt wieder beim Schiedsrichter ein, da $\mathcal{B}_0$ und $\mathcal{B}_v$ für den Schiedsrichter $\mathcal{B}_s$ jederzeit gleich weit entfernt sind und die Lichtlaufzeiten übereinstimmen.

Die Uhren von $\mathcal{B}_0$ und $\mathcal{B}_v$ gehen gleich, wenn der Schiedsrichter sieht, daß sie gleiche Zeiten anzeigen.

$$\tau = \tau' \tag{2.5}$$

Verlängern wir die Weltlinien des Lichtstrahls, der von $\mathcal{B}_v$ empfangen und reflektiert wird, wenn auf seiner Uhr die Zeit τ angezeigt wird, bis zur Weltlinie von $\mathcal{B}_0$, und bezeichnen wir mit T_- die Zeit, die $\mathcal{B}_0$ abliest, wenn er den Lichtstrahl zu $\mathcal{B}_v$ aussendet und mit T_+ die Zeit, zu der er den von $\mathcal{B}_v$ reflektierten Lichtstrahl empfängt, so gilt wegen (2.4)

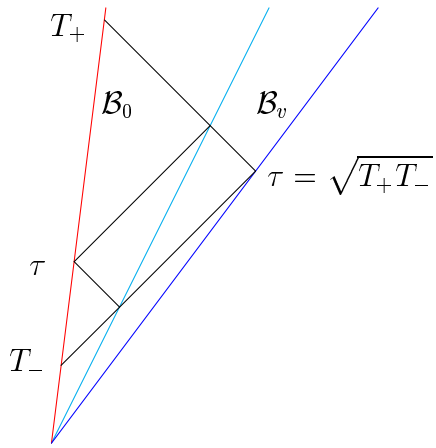


Abbildung 2.4: Satz des Minkowski

$$\tau = \kappa(\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_s)\kappa(\mathcal{B}_s, \mathcal{B}_0)T_- \ . \tag{2.6}$$

Denn der von $\mathcal{B}_s$ reflektierte Lichtstrahl läuft zu einer Zeit τ beim Beobachter $\mathcal{B}_0$ ein, die ein Vielfaches der Zeit ist, zu der er von $\mathcal{B}_s$ reflektiert worden ist, und diese Zeit ist ein Vielfaches der Zeit T_-, zu der der Lichtstrahl von $\mathcal{B}_0$ ausgesendet wurde.

Aus dem gleichen Grund gilt

$$T_+ = \kappa(\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_s)\kappa(\mathcal{B}_s, \mathcal{B}_0)\tau \ . \tag{2.7}$$

Demnach ist $T_+/\tau = \tau/T_-$ und wegen $\tau = \tau'$ gilt der Satz des Minkowski:

Durchlaufen zwei Beobachter $\mathcal{B}_0$ und $\mathcal{B}_v$ dasselbe Ereignis O und stellen sie dabei ihre Uhren auf Null, so ist die Zeit τ, die auf der Uhr von $\mathcal{B}_v$ bis zum Durchlaufen eines späteren Ereignisses E vergeht, das geometrische Mittel

derjenigen Zeit T_-, die die Uhr des Beobachter $\mathcal{B}_0$ anzeigt, wenn er Licht zu E aussendet, und der Zeit T_+, die sie anzeigt, wenn er Licht von E empfängt.

$$\tau^2 = T_+ T_- \ . \tag{2.8}$$

Dieser Zusammenhang ist für die Geometrie der Raumzeit so wichtig, wie der Satz des Pythagoras $a^2 + b^2 = c^2$ für die Euklidische Geometrie. Nach dem Satz des Pythagoras sind in der Ebene alle Punkte auf einem Kreis gleich weit von Mittelpunkt entfernt. Die Gleichung $\tau^2 = T_+ T_-$ besagt, wie wir zeigen werden, daß in der Raumzeit Hyperbeln Punkte gleicher zeitlicher Entfernung zum Ursprung O markieren.

Das Verhältnis

$$\frac{\tau}{T_-} = \kappa(\mathcal{B}_v, \mathcal{B}_0) \tag{2.9}$$

ist das Verhältnis von Empfangs- zu Sendezeit (2.4) von Lichtstrahlen, die von $\mathcal{B}_0$ zu $\mathcal{B}_v$ ausgesendet werden, und

$$\frac{T_+}{\tau} = \kappa(\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_v) \tag{2.10}$$

ist das Verhältnis für den Rückweg. Gemäß (2.6), (2.7) und (2.5) stimmen bei gleichen Uhren beide Verhältnisse überein

$$\kappa(\mathcal{B}_v, \mathcal{B}_0) = \kappa(\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_v) \ . \tag{2.11}$$

Setzt man (2.6) in (2.7) ein, so erhält man

$$T_+ = \big(\kappa(\mathcal{B}_v, \mathcal{B}_0)\big)^2 T_- \ . \tag{2.12}$$

Das Verhältnis der Zeit T_+, zu der ein Lichtstrahl empfangen wird, der im Ereignis E reflektiert worden ist, zu der Zeit T_-, zu der er zu E abgesendet wird, ist für alle Ereignisse E, die nach dem Ursprung[5] auf der geraden Weltlinie von $\mathcal{B}_v$ durchlaufen werden, konstant.

2.3 Orts- und Zeitkoordinaten von Ereignissen

Um die Ereignisse in der Raumzeit nicht nur einzeln benennen zu können, ordnen wir jedem Ereignis E in der Raumzeit Orts- und Zeitkoordinaten (t, x, y, z) zu. Wir verwenden dazu Meßwerte $(T_+, T_-, \theta, \varphi)$, die Lichtkoordinaten, die der Beobachter $\mathcal{B}_0$ für jedes Ereignis ermittelt. Dazu muß $\mathcal{B}_0$ Licht zum Ereignis E aussenden und von E empfangen, die zugehörigen Zeiten

[5] Für Ereignisse, die vor dem Ursprung durchlaufen werden, gilt $T_- = \kappa^2 T_+$.

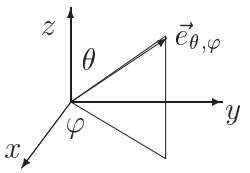
T_+ und T_- mit seiner Uhr messen und die Winkel θ und φ der ein- und auslaufenden Lichtstrahlen bestimmen.

Den Abstand $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ definieren wir als Hälfte der Laufzeit, die ein Lichtstrahl von $\mathcal{B}_0$ zum Ereignis E hin und wieder zurück braucht, dabei ist die Lichtgeschwindigkeit c einfachheitshalber 1. Als Zeit t, zu der E stattgefunden hat, definieren wir den Mittelwert von T_+ und T_-

$$t = \frac{T_+ + T_-}{2}\,, \quad r = \frac{T_+ - T_-}{2}\,. \tag{2.13}$$

Die Richtung des Lichtstrahls von $\mathcal{B}_0$ zum Ereignis E stimmt bis auf das Vorzeichen mit der Richtung überein, aus der der Lichtstrahl von E beim Beobachter wieder eintrifft, da sich der Beobachter nicht dreht, sondern Bezugsrichtungen verwendet, die sich im Laufe der Zeit nicht ändern. Diese Winkel θ und φ des zu E auslaufenden Lichtstrahls sowie der Abstand r sind definitionsgemäß die Kugelkoordinaten des Ortes.

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = r\,\vec{e}_{\theta,\varphi} = \frac{T_+ - T_-}{2} \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix} \tag{2.14}$$



Für Ereignisse auf der Weltlinie des Beobachters $\mathcal{B}_0$ gilt $T_+ = T_-$, also $\vec{x} = 0$, insbesondere hat der Ursprung O die Koordinaten $(0,0,0,0)$.

Die Wahl der Koordinaten hat keine physikalischen Konsequenzen. Wichtig ist nur, daß die Ereignisse in der Raumzeit eindeutig bezeichnet werden. Andere Koordinaten, die umkehrbar eindeutig mit den Meßwerten $(T_+, T_-, \theta, \varphi)$ zusammenhängen, sind ebenso denkbar.

Unsere Wahl der Koordinaten hat, wie wir gleich zeigen werden, den Vorteil, daß die Weltlinien von Lichtstrahlen und gleichmäßig, gradlinig bewegten Beobachtern Geraden im (t,x,y,z)-Koordinatensystem sind, mit anderen Worten, die Koordinaten (t,x,y,z) bilden ein Inertialsystem.

Sendet $\mathcal{B}_0$ zur Zeit t_0 einen Lichtstrahl in Richtung $\vec{e}_{\theta,\varphi}$ aus, so durchläuft der Lichtstrahl Ereignisse, für die T_-, θ und φ konstant sind

$$t = \frac{T_+ + t_0}{2}\,, \quad \vec{x}(t) = \frac{T_+ - t_0}{2}\,\vec{e}_{\theta,\varphi}\,, \tag{2.15}$$

oder, wenn wir die Variable T_+ durch t ersetzen,

$$\vec{x}(t) = \vec{e}_{\theta,\varphi}\cdot(t - t_0)\,. \tag{2.16}$$

Dies ist eine durch t parametrisierte Weltlinie, die zur Zeit t_0 die Weltlinie des Beobachters schneidet. In den Koordinaten (t,x,y,z) ist sie eine gerade Weltlinie, die mit Lichtgeschwindigkeit $c = 1$ durchlaufen wird, denn die

Geschwindigkeit $\vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt}$ ist ein Einheitsvektor. Durch Verschieben der Weltlinie um einen Vektor $\vec{x}_0 + \vec{e}_{\theta,\varphi} t_0$ erhält man allgemeiner die Weltlinien von Lichtstrahlen, die zur Zeit $t = 0$ den Ort $\vec{x}_0$ durchlaufen.

$$\vec{x}(t) = \vec{e}_{\theta,\varphi} \cdot t + \vec{x}_0 \tag{2.17}$$

Durchläuft die Weltlinie eines gradlinig bewegten Beobachter $\mathcal{B}_v$ den Ursprung O, so werden von $\mathcal{B}_0$ alle Ereignisse auf dieser Weltlinie aus derselben Richtung gesehen. Die Winkel θ und φ sind konstant, außer bei $t = 0$. Die Winkel, unter denen der sich nähernde Beobachter gesehen werden und die Richtung, in die er sich entfernt, hängen durch $\theta' = \pi - \theta$ und $\varphi' = \varphi + \pi$ zusammen und der Einheitsvektor $\vec{e}$ in Richtung des gradlinig bewegten Beobachters ändert bei $t = 0$ sein Vorzeichen.

Gemäß (2.12) gilt $T_+ = \kappa^2 T_-$ für die Ereignisse auf der geraden Weltlinie von $\mathcal{B}_v$. Für ihre Koordinaten heißt dies

$$t = (\kappa^2 + 1)\frac{T_-}{2}\,, \quad \vec{x} = (\kappa^2 - 1)\frac{T_-}{2}\,\vec{e}_{\theta,\varphi}\,, \tag{2.18}$$

oder, wenn wir T_- durch t ausdrücken,

$$\vec{x}(t) = \vec{v}\,t \;\text{ mit }\; \vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt} = \frac{\kappa^2 - 1}{\kappa^2 + 1}\,\vec{e}_{\theta,\varphi}\;. \tag{2.19}$$

Der Beobachter $\mathcal{B}_v$ durchläuft gradlinig gleichförmig mit Geschwindigkeit $v = \frac{\kappa^2-1}{\kappa^2+1}$ Ereignisse, die in (t, x, y, z)-Koordinaten auf einer Geraden liegen. Lösen wir $v(\kappa)$ nach κ auf, so erhalten wir den Faktor κ als Funktion der Relativgeschwindigkeit

$$\kappa = \sqrt{\frac{1+v}{1-v}}\;. \tag{2.20}$$

Durch Verschieben der Weltlinie um $\vec{x}_0$ erhält man allgemeiner die Weltlinie eines gleichmäßig gleichförmig bewegten Beobachters, der zur Zeit $t = 0$ den Ort $\vec{x}_0$ durchläuft.

$$\vec{x}(t) = \vec{v} \cdot t + \vec{x}_0 \tag{2.21}$$

Es sind also die Koordinaten (t, x, y, z), die wir aus den Zeiten T_+ und T_- sowie den Winkeln θ und φ konstruiert haben, Koordinaten eines Inertialsystems, in dem gleichmäßig gleichförmig bewegte Beobachter Geraden durchlaufen.

Für die Zeit τ, die auf einer gleichmäßig bewegten Uhr zwischen dem Ursprung O mit Koordinaten $(0, 0, 0, 0)$, und einem Ereignis E mit Koordinaten (t, x, y, z) vergeht, gilt $\tau^2 = T_+ T_-$ (2.8). Es ist wegen (2.13) und (2.14)

$$T_+ = t + r\,, \quad T_- = t - r\;,\; \text{mit } r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\;, \tag{2.22}$$

und daher gilt $\tau^2 = (t + r)(t - r) = t^2 - r^2 = t^2 - x^2 - y^2 - z^2$.

Eigenschaft 3 (Satz des Minkowski) *Auf einer unbeschleunigten Uhr vergeht zwischen den Ereignissen* $(0,0,0,0)$ *und* (t,x,y,z) *die Zeit* τ

$$\tau^2 = t^2 - x^2 - y^2 - z^2 \ . \tag{2.23}$$

Die Zeit zwischen zwei Ereignissen hängt nicht von Einzelheiten der Uhr ab, mit der sie gemessen wird. Die Zeit ist ein Maß für Entfernung, also eine geometrische Struktur, in der Raumzeit. Zeitlich gleich weit entfernte Ereignisse findet man nicht in einer Ebene $t = const$ wie in der nichtrelativistischen Physik oder auf einer Kugelschale $x^2+y^2+z^2 = r^2 = const$ wie in der Euklidischen Geometrie sondern auf einem Hyperboloid $t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = \tau^2 = const$. Das Quadrat der zeitlichen Entfernung zweier Ereignisse unterliegt nicht dem Satz des Pythagoras, sondern dem Satz des Minkowski.

Eine gleichmäßig mit Geschwindigkeit $\vec{v}$ bewegte Uhr durchläuft eine Weltlinie $\vec{x}(t) = \vec{v}\,t + \vec{x}_0$. Dabei vergeht zwischen dem Ereignis $(0, x_0, y_0, z_0)$ und dem späteren Ereignis $(t, v_x t + x_0, v_y t + y_0, v_z t + z_0)$ auf der Uhr die Zeit

$$\tau = \sqrt{1 - \vec{v}^2}\, t \ . \tag{2.24}$$

Dies folgt aus (2.23) und daraus, daß der Gang der Uhren translationsinvariant und unabhängig von der Wahl des Ursprungs ist.

Die Uhr von $\mathcal{B}_v$ hängt nicht davon ab, welcher Beobachter Koordinaten für das Ereignis ermittelt, in dem sie die Zeit τ anzeigt. Wenn ein anderer Beobachter den Ursprung durchläuft und die Zeiten T'_+ und T'_- und die Winkel θ' und φ' mißt und in Raumzeitkoordinaten (t', x', y', z') umrechnet, so muß $\tau^2 = T_+ T_-$ und $\tau^2 = T'_+ T'_-$ gelten und daher

$$t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 \ . \tag{2.25}$$

2.4 Skalarprodukt und Längenquadrat

Die in (2.23) auftretende Summe von Quadraten spielt eine zentrale Rolle in der relativistischen Physik. Um sie kürzer schreiben zu können, führen wir folgendes Skalarprodukt von Vierervektoren wie $v = (v^0, v^1, v^2, v^3)$ und $w = (w^0, w^1, w^2, w^3)$ ein

$$v \cdot w := v^0 w^0 - v^1 w^1 - v^2 w^2 - v^3 w^3 \ . \tag{2.26}$$

Als Längenquadrat eines Vierervektors w definieren[6] wir

$$w^2 = w \cdot w = (w^0)^2 - (w^1)^2 - (w^2)^2 - (w^3)^2 \ . \tag{2.27}$$

[6]Dem Leser bleibt überlassen, aus dem Zusammenhang zu erschließen, ob das Längenquadrat oder die y-Komponente eines Vektors gemeint ist.

Das Skalarprodukt (2.26) ist reell, symmetrisch und linear

$$v \cdot w = w \cdot v \,, \tag{2.28}$$

$$u \cdot (v + w) = u \cdot v + u \cdot w \;, \quad v \cdot (a\, w) = a\, (v \cdot w) \quad \forall a \in \mathbb{R} \,, \tag{2.29}$$

aber nicht definit. Lichtartige Vektoren haben Längenquadrat 0, ohne daß alle Komponenten verschwinden. Das Skalarprodukt ist nichtentartet, das heißt, es verschwindet das Skalarprodukt eines Vektors v nur dann mit allen anderen Vektoren, wenn $v = 0$ verschwindet.

Das Skalarprodukt zweier Vektoren u und v läßt sich als Differenz von Längenquadraten schreiben.

$$u \cdot v = \frac{1}{4}((u + v)^2 - (u - v)^2) \;. \tag{2.30}$$

Da verschiedene Beobachter zwar unterschiedliche Koordinaten, aber dieselben Längenquadrate von Vierervektoren ermitteln (2.25), hängen auch Skalarprodukte nicht vom Koordinatensystem der jeweiligen Beobachter ab.

Ist das Längenquadrat w^2 positiv, nennen wir w zeitartig, ist es negativ, so nennen wir w raumartig, ist $w^2 = 0 \,, w \neq 0$, so heißt w lichtartig.

Zwei Ereignisse A und B sind zueinander raumartig, wenn der entsprechende Differenzvektor, dessen Komponenten die Koordinatendifferenzen der Ereignisse enthält

$$w_{AB} = (t_A - t_B, x_A - x_B, y_A - y_B, z_A - z_B) \;, \tag{2.31}$$

und der in unseren Diagrammen von B nach A zeigt, raumartig ist. Entsprechend sind zueinander lichtartige oder zeitartige Ereignisse definiert.

Zueinander raumartige Ereignisse sind nicht Ursache oder Wirkung voneinander. Ereignisse auf der Weltlinie eines Lichtstrahls sind wegen (2.1) zueinander lichtartig. Ereignisse auf der Weltlinie eines Beobachters sind zeitartig zueinander, da Beobachter langsamer als Licht sind. Auf solch einer geraden Weltlinie gibt das Längenquadrat des Differenzvektors zweier zueinander zeitartiger Ereignisse das Quadrat der Zeit an, die auf einer mitgeführten Uhr zwischen den beiden Ereignissen vergeht.

Bei der Bestimmung von Koordinaten eines Ereignisses E wird wie in Abbildung 2.5 im Ereignis T_- ein Lichtstrahl zu E ausgesendet, dort reflektiert und im Ereignis T_+ von E kommend wieder empfangen. Der Vektor u halbiert den Abschnitt zwischen T_- und T_+ und zeigt demnach von T_- zum Ereignis t, das gleichzeitig zu E stattfindet. Vielfache des Vektors v zeigen demnach von t zu Ereignissen, die gleichzeitig stattfinden.

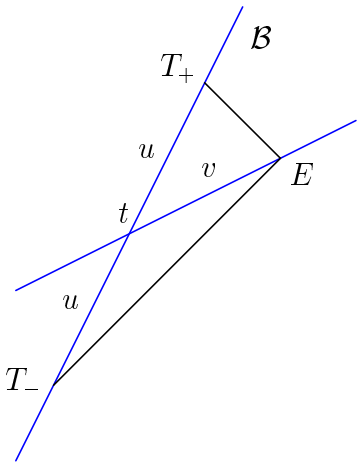


Abbildung 2.5: senkrechte Vektoren

Aus der Abbildung liest man ab, daß $u+v$ der Lichtstrahl von T_- zu E ist und $u-v$ der Lichtstrahl zurück von E zu T_+. Demnach verschwinden die Längenquadrate von $u+v$ und $u-v$

$$0 = (u \pm v)^2 = u^2 \pm 2u \cdot v + v^2 \ . \qquad (2.32)$$

Daher gilt $u^2 = -v^2$, und im Sinne des Skalarproduktes (2.26) stehen die Vierervektoren u und v senkrecht aufeinander.

$$u \cdot v = 0 \qquad (2.33)$$

In Raumzeitdiagrammen stehen die Diagonalen jedes Vierecks, dessen Seiten aus Lichtstrahlen bestehen, im Sinne des Skalarproduktes (2.26) senkrecht aufeinander.

Das Längenquadrat des raumartigen Vektors v ist dem Längenquadrat des zeitartigen Vektors u entgegengesetzt gleich. Das Längenquadrat von u wiederum ist nach (2.23) das Quadrat der Zeit, die zwischen T_- und t auf der Weltlinie des Beobachters vergeht, also gleich dem Quadrat der Lichtlaufzeit vom Beobachter zum Ereignis E. Demnach ist $-v^2$ das Quadrat der Entfernung von E zum Beobachter.

Eigenschaft 4 (Gleichzeitigkeit) *Der Tangentialvektor im Punkt P an die Weltlinie des Beobachters steht senkrecht im Sinne des Skalarproduktes (2.26) auf dem Vektor w_{EP} von P zu einem gleichzeitigen Ereignis E . Das negative Längenquadrat $-{w_{EP}}^2$ ist das Quadrat der Entfernung zwischen E und dem Beobachter.*

2.5 Lorentztransformation

Die Lichtstrahlen, die ein Ereignis E durchlaufen, schneiden die Weltlinien von zwei gegeneinander bewegten Beobachtern $\mathcal{B}_0$ und $\mathcal{B}_v$ zu verschiedenen Zeiten. Der Zusammenhang zwischen diesen Zeiten ist eine Koordinatentransformation der Lichtkoordinaten des Ereignisses E, die wir aus dem zweidimensionalen Raumzeitdiagramm 2.6 für den Fall ablesen können, daß die Weltlinien der Beobachter und das Ereignis E in derselben Ebene liegen.

Die Weltlinien der Beobachter $\mathcal{B}_0$ und $\mathcal{B}_v$ schneiden sich im Ursprung. Dort stellen beide ihre Uhren auf $t = 0$. Der von links nach rechts zum

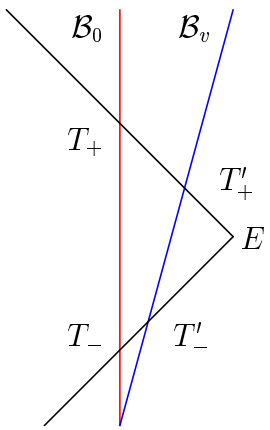


Abbildung 2.6: Lorentztransformation

Ereignis E laufende Lichtstrahl schneidet die Weltlinien, wenn auf den Uhren die Zeit T_- und T'_- angezeigt wird. Der durch das Ereignis E von rechts nach links laufende Lichtstrahl schneidet die Weltlinien zu Zeiten T'_+ und T_+.

Das Verhältnis $T'_-/T_- = \kappa$ ist das Verhältnis von Empfangs- zu Sendezeiten von Lichtstrahlen von $\mathcal{B}_0$ zu $\mathcal{B}_v$ (2.4). Es hängt von den Beobachtern, nicht aber vom Ereignis E ab. Mit dem gleichen Faktor (2.11) sind T_+ und T'_+ einander proportional, denn T_+ ist die Empfangszeit und T'_+ die Sendezeit eines Lichtstrahls von $\mathcal{B}_v$ zu $\mathcal{B}_0$.

Für die Lichtkoordinaten eines jeden Ereignisses, das zeitartig zum Ursprung in der Ebene liegt, die von den Weltlinien zweier zueinander bewegter Beobachter aufgespannt wird, gilt daher

$$T'_+ = \kappa^{-1}\, T_+ \,, \quad T'_- = \kappa\, T_- \,. \tag{2.34}$$

Wir unterstellen, daß diese Ebene für beide Beobachter die t-x-Ebene ist, und drücken die Lichtkoordinaten durch t und x aus (2.22)

$$t' + x' = \kappa^{-1}\,(t + x) \tag{2.35}$$
$$t' - x' = \ \kappa \ \ (t - x) \,. \tag{2.36}$$

Lösen wir nach t' und x' auf, so folgt in Matrixschreibweise

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \kappa + \kappa^{-1} & -\kappa + \kappa^{-1} \\ -\kappa + \kappa^{-1} & \kappa + \kappa^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} \,. \tag{2.37}$$

Diese Transformationen sind die Lorentztransformationen der t-x-Koordinaten auf die t'-x'-Koordinaten eines in x-Richtung bewegten Beobachters.

Drücken wir κ durch die Geschwindigkeit (2.20) aus und fügen wir die konventionellen Faktoren c ein, so erhält die Lorentztransformation von Ereignissen in der t-x-Ebene die Form

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{v}{c} \\ -\frac{v}{c} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} \ . \tag{2.38}$$

Am Transformationsgesetz (2.34) der Lichtkoordinaten liest man einfach ab, daß κ^{-1} zur inversen Transformation gehört und aus (2.20), daß dazu die negative Geschwindigkeit gehört

$$(\kappa(v))^{-1} = \kappa(-v) \ . \tag{2.39}$$

Lorentztransformationen zwischen Beobachtern, die sich in die gleiche Richtung bewegen, können sehr einfach hintereinander ausgeführt werden.

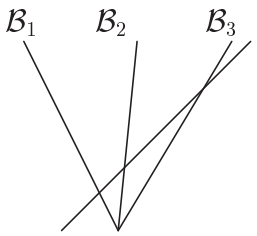


Abbildung 2.7: Addition von Geschwindigkeiten

Betrachten wir drei Beobachter $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ und $\mathcal{B}_3$, deren Weltlinien sich im Ursprung schneiden und die dabei ihre Uhren gemeinsam auf $t = 0$ stellen. Für die Zeiten T_-, zu denen ein von links nach rechts laufender Lichtstrahl von dem jeweiligen Beobachter registriert wird, gilt wegen (2.4)

$$T_-^{(2)} = \kappa_{21} T_-^{(1)} \ , \ T_-^{(3)} = \kappa_{32} T_-^{(2)} \ , \ T_-^{(3)} = \kappa_{31} T_-^{(1)} \ .$$

Hieraus liest man unmittelbar ab

$$\kappa_{31} = \kappa_{32}\, \kappa_{21} \ . \tag{2.40}$$

Dem Hintereinanderausführen von Transformationen mit Parameter κ entspricht die Multiplikation der positiven Zahlen $\kappa \in \mathbb{R}_+$.

Definieren wir die Schnelligkeit σ als Logarithmus von κ

$$\sigma = \frac{1}{2} \ln \frac{c+v}{c-v} = \operatorname{artanh} \frac{v}{c} \ , \tag{2.41}$$

so entspricht der Multiplikation der Faktoren κ die Addition der zugehörigen Schnelligkeiten. Es sind die Schnelligkeiten, nicht die Geschwindigkeiten, die sich beim Hintereinanderausführen von Transformationen auf bewegte Bezugssysteme addieren. Die Schnelligkeiten haben in Raumzeitdiagrammen die Rolle der Winkel zwischen Weltlinien. Sie ergeben sich völlig analog zu Winkeln in der Euklidischen Geometrie, die als Bogenlänge definiert sind, als Weglänge (3.41) des raumartigen Stückes der Hyperbel $u(s)^2 = 1$ zwischen den Weltlinien zweier Beobachter, die den Ursprung durchlaufen.

In Anhang G sind die Schnelligkeiten als Funktion der Geschwindigkeiten auf Skalen markiert. Durch Aneinanderlegen zweier Schnelligkeiten kann man so Geschwindigkeiten addieren.

Rechnet man aus (2.40) und (2.20) die Geschwindigkeit aus, die zu hintereinander ausgeführten Transformationen gehört, so erhält man die Additionsformel für kolineare Geschwindigkeiten

$$v_{31} = \frac{v_{32} + v_{21}}{1 + \frac{v_{32}\, v_{21}}{c^2}} \ . \tag{2.42}$$

In dieser Form scheint, anders als bei (2.40), die Assoziativität der Geschwindigkeitsaddition ein algebraisches Wunder. Auch die Tatsache, daß die Addition von Unterlichtgeschwindigkeiten $|v| < c$ nur wieder Unterlichtgeschwindigkeiten ergibt, ist nicht offensichtlich.

Die Formel zur Addition von kolinearen Geschwindigkeiten stimmt nicht mit der naiven Geschwindigkeitsaddition $v_{31} = v_{32} + v_{21}$ überein, die man aus der Annahme ableiten würde, daß die Uhren ruhender und bewegter Beobachter zwischen gleichzeitigen Ereignissen dieselbe Zeit messen.

Aus der Lorentztransformation von Ereignissen in der t-x-Ebene folgt leicht die Lorentztransformation beliebiger Ereignisse. Dies muß eine lineare Transformation sein, denn die gleichmäßig, gradlinig durchlaufenen Weltlinien sind für jeden Beobachter Geraden in der Raumzeit. Geraden werden also auf Geraden abgebildet. Stimmen zudem die Beobachter in der Wahl des Ursprungs überein, so sind Lorentztransformationen linear homogene Transformationen.

Die Lorentztransformation erhält alle Längenquadrate (2.25) und Skalarprodukte (2.30). Wir wissen schon (2.38), daß die Ereignisse T und X mit Koordinaten $(1,0,0,0)$ und $(0,1,0,0)$ im bewegten Bezugssystem Koordinaten $\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}(1,-v,0,0)$ und $\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}(-v,1,0,0)$ haben. Die Ereignisse Y mit Koordinaten $(0,0,1,0)$ und Z mit Koordinaten $(0,0,0,1)$ haben daher im bewegten Bezugssystem keine t- oder x-Komponenten, denn als Vierervektoren gelesen müssen die transformierten Koordinaten senkrecht im Sinne des Skalarproduktes (2.26) auf $(1,-v,0,0)$ und $(-v,1,0,0)$ stehen. Zudem bleibt ihr Längenquadrat unverändert und sie stehen senkrecht aufeinander. Also gehen die transformierten Koordinaten von Y und Z durch eine Drehung in der y-z-Ebene aus den ursprünglichen Koordinaten hervor. Bei einer drehungsfreien Lorentztransformation bleiben sie unverändert.

Die drehungsfreie Lorentztransformation in das Koordinatensystem eines

in x-Richtung mit Geschwindigkeit v bewegten Beobachters ist also

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{v}{c} \\ -\frac{v}{c} & 1 \end{pmatrix} & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad . \tag{2.43}$$

Bezeichnen wir den Vierervektor der Raumzeitkoordinaten kurz mit x und die Lorentzmatrix mit Λ, so lautet diese Transformation einfach

$$x' = \Lambda x \ . \tag{2.44}$$

Umgekehrt gilt $x = \Lambda^{-1} x'$, und wir erhalten die Koordinaten (ct, x, y, z) aus den Koordinaten (ct', x', y', z') durch Multiplikation mit der inversen Lorentzmatrix. Dies ist bei drehungsfreien Lorentztransformationen die ursprüngliche Lorentzmatrix, in der v durch $-v$ ersetzt ist.

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \begin{pmatrix} 1 & \frac{v}{c} \\ \frac{v}{c} & 1 \end{pmatrix} & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \quad . \tag{2.45}$$

Kapitel 3

Zeit, Längen und Bilder

3.1 Relativität der Gleichzeitigkeit

Bei gegebenem Ereignis E liegt nicht fest, welche Ereignisse zu E gleichzeitig sind, genauso wenig wie in normaler Schulgeometrie ohne weitere Angaben festliegt, welche Punkte hinter oder rechts von einem gegebenen Punkt liegen. Dazu muß man Richtungen wählen, auf die man die Angaben „hinter“ oder „rechts“ bezieht. In der Raumzeit steht die Menge der Ereignisse, die gleichzeitig zu E sind, erst fest, wenn man angibt, für welchen Beobachter Gleichzeitigkeit vorliegen soll. Dies verdeutlichen die folgenden zweidimensionalen Raumzeitdiagramme.

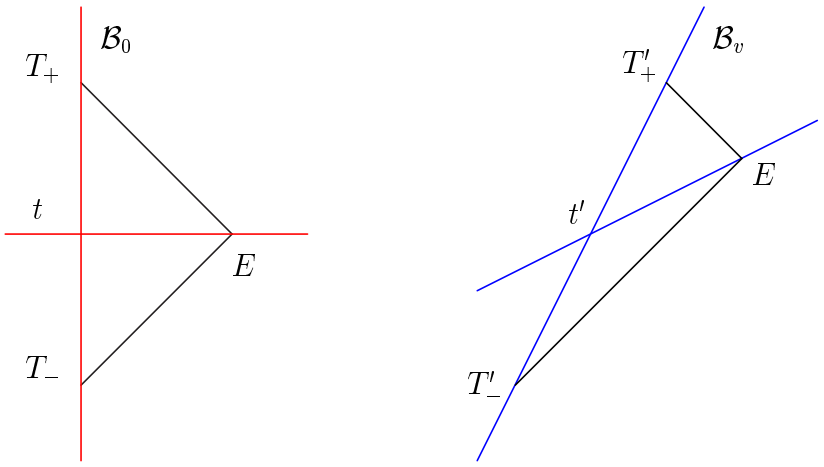


Abbildung 3.1: relativ gleichzeitig

Die Diagramme zeigen die Weltlinien von Beobachtern, die Lichtstrahlen zum Ereignis E aussenden und wieder empfangen, sowie die Linie von

Ereignissen, die für den jeweiligen Beobachter gleichzeitig zu E stattfinden.

Die Differenz $T_+ - T_- = t_{\text{hin}} + t_{\text{her}} = 2\,t_{\text{Laufzeit}}$ ist die Zeit, die der Lichtstrahl zum Ereignis hin und zurück braucht, also die doppelte Lichtlaufzeit und demnach die doppelte Entfernung von E zum Beobachter.

Als Zeit t, zu der das Ereignis E stattgefunden hat, haben wir den Mittelwert $t = (T_+ + T_-)/2$ vereinbart (2.13). Diese Zeit liegt um die Lichtlaufzeit nach T_- und vor T_+. Gleichzeitig zu E ist das Ereignis auf der Weltlinie des Beobachters, das in der Mitte zwischen den Ereignissen liegt, zu denen der Lichtstrahl ausgesendet und empfangen wird.

Wie man durch Verschieben des Dreiecks T_-, E, T_+ längs der Weltlinie des Beobachters sieht, finden alle Ereignisse auf Parallelen zur Weltlinie des Beobachters für ihn in gleicher Entfernung und mit gleicher Richtung der Lichtstrahlen, also am gleichen Ort $\vec{x}$ statt.

Gegeneinander bewegte Beobachter stimmen nicht darin überein, welche nacheinander liegenden Ereignisse am gleichen Ort stattfinden. Die Weltlinien gegeneinander bewegter Beobachter sind nicht parallel.

Alle Ereignisse auf der Geraden durch E, die die Weltlinie des Beobachters zwischen T_+ und T_- halbiert, sind für diesen Beobachter gleichzeitig zu E. Dies bestätigt man durch Vergrößern und Verkleinern des Dreiecks T_-, E, T_+ bei festgehaltenem Punkt t.

Gegeneinander bewegte Beobachter stimmen nicht darin überein, welche nebeneinander liegenden Ereignisse zur gleichen Zeit stattfinden. Dies folgt aus dem rechten Teil der Abbildung 3.1, denn die Gerade durch t und E ist nicht parallel zur Geraden durch t' und E.

Gleichzeitigkeit verschiedener Ereignisse ist ebenso wie Gleichortigkeit keine Struktur der Raumzeit, sie kommt zwei Ereignissen nicht unabhängig vom Beobachter zu, der diese Gleichzeitigkeit feststellt. Auch nach Korrektur von Laufzeiteffekten stimmen gegeneinander bewegte Beobachter nicht darin überein, welche Ereignisse gleichzeitig sind.

Ob zwei Ereignisse gleichzeitig stattfinden, ist vergleichsweise unwichtig und nur für die Buchhaltung von Bedeutung, die Ereignisse später, nachdem man von ihnen erfahren hat, um die Laufzeit versetzt einordnet. Physikalisch wichtiger ist die Menge der zu einem Ereignis E raumartigen Ereignisse. Sie umfaßt alle Ereignisse, die von irgendeinem Beobachter als gleichzeitig zu E angesehen werden. Dies sind die Ereignisse, die so früh stattfinden, daß man sie von E aus nicht mehr beeinflussen kann, und die noch nicht so lange her sind, daß man schon bei E von ihnen erfahren hätte. Zueinander raumartige Ereignisse können einander nicht beeinflussen.

Ein Vorschlag zur Rettung absoluter Gleichzeitigkeit könnte sein, sich auf diejenige Definition von Gleichzeitigkeit zu einigen, die zum ruhenden Beobachter gehört. Nur, welcher Beobachter ruht? Wir haben für unsere

Diagramme die Zeit- und Ortskoordinaten verwendet, die der Beobachter $\mathcal{B}_0$ den Ereignissen zuschreibt. Im Koordinatensystem des bewegten Beobachters $\mathcal{B}_v$ sind die Weltlinien und die gleichzeitigen Ereignisse wie in Abbildung 3.2.

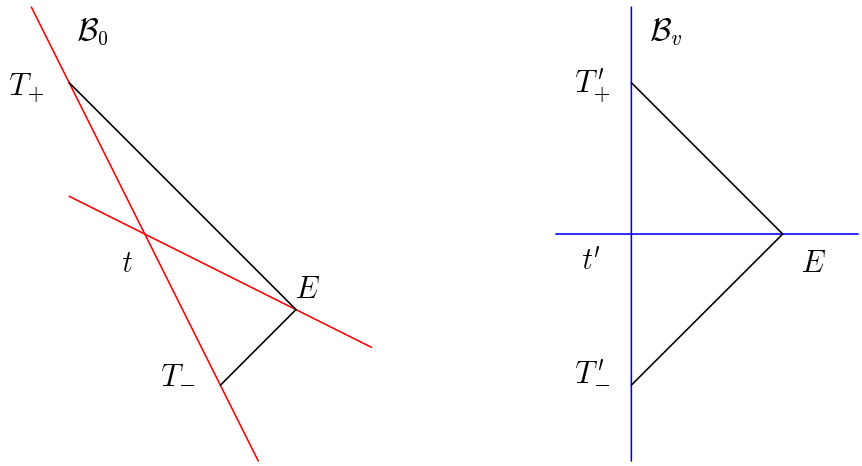


Abbildung 3.2: Synchronisation im Ruhsystem von $\mathcal{B}_v$

Im Vakuum läßt sich durch kein Experiment entscheiden, welcher Beobachter ruht. Die Festlegung, welcher von zwei unbeschleunigten Beobachtern ruht und welcher Beobachter sich bewegt, ist willkürlich und ohne physikalische Konsequenzen.

In Verbindung mit dem Kausalitätsprinzip, daß Ursachen früher als ihre Auswirkungen stattfinden, folgt aus der Relativitätsprinzip, daß sich alle Ursachen, nicht nur elektromagnetische Ursachen, höchstens mit Lichtgeschwindigkeit auswirken. Es gibt nämlich für jedes Paar von Ereignissen A und B, deren Zeitdifferenz geringer als die Lichtlaufzeit ist, sowohl Beobachter, für die A vor B stattfindet als auch Beobachter, für die B vor A stattfindet. Wenn diese Beobachter gleichwertig sind, können A und B nicht Ursache oder Wirkung voneinander sein. Insbesondere liegen daher die Tangenten an die Weltlinien von Teilchen und Beobachtern jeweils im Vorwärtslichtkegel.

Tachyonen, das heißt Teilchen, die sich mit Überlichtgeschwindigkeit bewegen, sind mit dem Kausalitäts- und Relativitätsprinzip unvereinbar. Auch wenn sie Licht reflektieren könnten, wären sie für einen Beobachter $\mathcal{B}$, dessen Weltlinie sie kreuzen, vor diesem Treffen unsichtbar, denn ihre Weltlinie schneidet nicht den Rückwärtslichtkegel von Ereignissen, die früher auf der Weltlinie von $\mathcal{B}$ stattfinden. Die Rückwärtslichtkegel der späteren Ereignisse auf der Weltlinie von $\mathcal{B}$ hingegen haben zwei Schnittpunkte mit der Weltlinie des Tachyons. Diese beiden Schnittpunkte entfernen sich im Laufe der Zeit in entgegengesetzte Richtungen, wenn $\mathcal{B}$ seine Weltlinie durchläuft. Das

Tachyon erschiene also einem Beobachter als ein Paar von Teilchen, das aus dem Nichts an einer Stelle entsteht und in entgegengesetzte Richtungen wegläuft. Es gibt nicht eine ernstzunehmende Beobachtung, die die Existenz von Tachyonen nahelegt.

Man kann ohne großen Aufwand Ereignisse verursachen, die zu einer tachyonischen Weltlinie gehören, etwa indem man bei einer Landebahn eines Flughafens alle Lampen mit getrennten, gleichlangen Leitungen anschließt, so daß die Lampen bei Einschalten gleichzeitig aufflammen. Ein Beobachter auf der Landebahn sieht dann zuerst die nächstgelegene Lampe aufleuchten, danach die beiden benachbarten Lampen, so als würde sich von der nächstgelegenen Lampe nach beiden Seiten überlichtschnell ein Signal ausbreiten. Die Ursache für das Aufflammen einer Lampe ist allerdings nicht, daß die vorherige Lampe angegangen ist, sondern daß die Flugleitung das Licht eingeschaltet hat. Diese Ursache wirkt sich höchstens mit Lichtgeschwindigkeit aus.

Empfangen wir eine Nachricht, so ist die Information vom Sender verursacht. Sie kann daher höchstens mit Lichtgeschwindigkeit übermittelt werden.

Daß die Lichtgeschwindigkeit Grenzgeschwindigkeit aller Wechselwirkungen ist, ist eine physikalische Aussage, die durch Beobachtungen bestätigt oder widerlegt werden kann. Solange man von Neutrinos, die keine elektromagnetischen Wechselwirkungen haben, nicht wußte, wie schnell sie sich ausbreiten, nahm man an, daß ihre Grenzgeschwindigkeit die Lichtgeschwindigkeit sei. Mittlerweile weiß man es genauer: die Grenzgeschwindigkeit von Neutrinos stimmt mit der Lichtgeschwindigkeit mindestens in den ersten neun Dezimalen überein. Dies ergibt sich aus der Beobachtung der Supernova SN 1987 a im Februar 1987, bei der man gleichzeitig Neutrinos und Licht nachgewiesen hat [8].

Weil sich Ursachen höchstens mit Lichtgeschwindigkeit auswirken, gibt es keinen wirklich starren Körper. Zum Beispiel wirkt sich ein Stoß auf das Ende eines Balkens zunächst nicht auf das andere Ende aus. Mit Schallgeschwindigkeit breitet sich im Balken die vom Stoß hervorgerufene Kompression als Welle aus und erst nachdem sie den Körper durchlaufen hat und Schwingungen abgeklungen sind, hat der Balken wieder seine ursprünglichen Abmessungen. Der Erkenntnis, daß es keinen ideal starren Körper gibt, kann man nicht dadurch ausweichen, daß man sich einen sehr harten Körper vorstellt, der mit starken inneren Kräften einer Verformung widersteht. Harte Körper haben hohe Schallgeschwindigkeiten, aber die Schallgeschwindigkeit ist stets kleiner als die Lichtgeschwindigkeit c.

3.2 Perspektive und Zeitdilatation

Eine Leiter markiert Längen durch ihre Sprossen. Wenn sie gedreht und an eine Mauer gelehnt wird, ändert sich weder die Länge der Leiter noch die Höhe der Mauer. Dennoch muß man bis zur Mauerhöhe auf der angelehnten Leiter mehr Sprossen erklimmen als bei einer gleichen, an der Mauer angebrachten Leiter. Die verringerte Höhe der angelehnten Leiter beruht darauf, daß sie gedreht worden ist und darauf, daß Höhe eine perspektivische Abmessung ist. Vergleicht man zwei zueinander gedrehte Leitern und betrachtet man als gleich hoch jeweils die Punkte auf einer Geraden, die einen rechten Winkel mit der Leiter bildet, so erscheint jede gedrehte Leiter gleicher Länge als weniger hoch.

Perspektivische Verkürzung sollte nicht als uneigentlich und nur scheinbar mißachtet werden. Sie ist physikalisch wichtig. Weil man die Höhe einer Leiter durch Drehen verändern kann, kann eine gedrehte Leiter durch eine niedrige Tür passen, auch wenn die Länge der Leiter größer ist als die Höhe der Tür, und obwohl Drehungen weder die Maße der Tür noch der Leiter ändern.

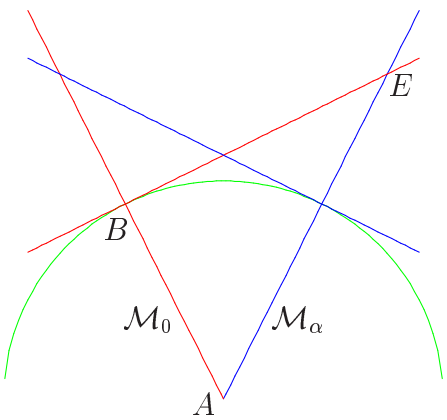


Abbildung 3.3: gedrehte Maßstäbe

Die nebenstehende Abbildung 3.3 stellt die perspektivische Höhe zweier zueinander gedrehter Maßstäbe $\mathcal{M}_0$ und $\mathcal{M}_\alpha$ in der Euklidischen Geometrie dar. In Euklidischer Geometrie markiert ein Kreis Punkte gleichen Abstandes zum Mittelpunkt und die Tangente an den Kreis steht senkrecht auf dem Ortsvektor.

Die beiden Maßstäbe berühren sich im Punkt A. Für einen Beobachter, der Höhe mit $\mathcal{M}_0$ mißt, sind Punkte gleich hoch wie B, wenn sie auf der Geraden durch B liegen, die einen rechten Winkel mit dem Maßstab bildet. Insbesondere ist für ihn der Punkt E gleich hoch wie der Punkt B. Die mit dem gedrehten Maßstab $\mathcal{M}_\alpha$ gemessene Länge zwischen A und E ist größer als die Länge zwischen den dazu gleich hohen Punkten A und B, denn der Kreis durch B schneidet den gedrehten Maßstab zwischen A und E.

Bezieht ein Beobachter Höhe auf die Richtung von $\mathcal{M}_\alpha$, so gilt ebenfalls, daß zwei Punkte auf dem dazu gedrehten Maßstab $\mathcal{M}_0$ weiter voneinander entfernt sind als zwei dazu gleichhohe Punkte auf dem Maßstab $\mathcal{M}_\alpha$. Die perspektivische Höhenverringerung ist wechselseitig.

Ersetzt man in Abbildung 3.3 den Kreis durch eine Hyperbel, so erhält man die geometrischen Verhältnisse der Raumzeit.

Bewegte Uhren verhalten sich ähnlich wie gedrehte Maßstäbe. Auf der Uhr eines Beobachter vergeht zwischen zwei Ereignissen A und B mehr Zeit als auf einer ihm gegenüber bewegten Uhr zwischen Ereignissen, die für ihn gleichzeitig zu A und B sind. Ohne Bezug auf den Beobachter läßt sich nicht entscheiden, ob eine Uhr bewegt ist und langsamer geht. Zeitdilatation durch Bewegung ist wie perspektivische Verkürzung durch Drehung wechselseitig.

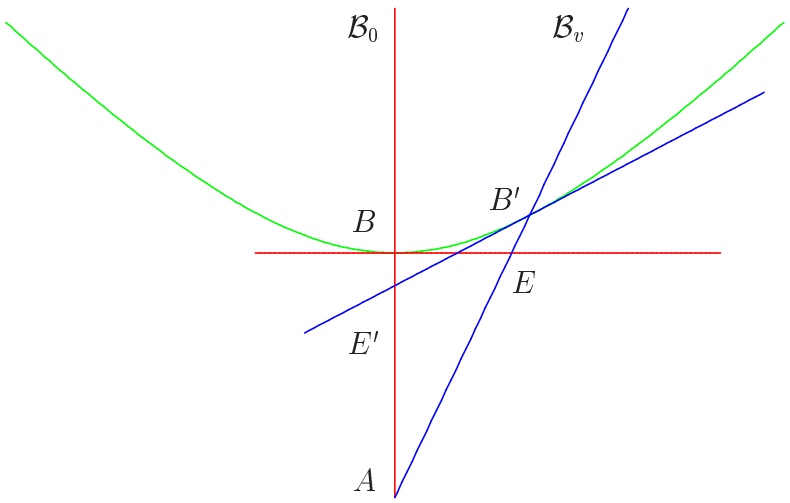


Abbildung 3.4: Zeitdilatation

Markieren wir in einem Raumzeitdiagramm eine Hyperbel $t^2 - x^2 = \tau^2$ für ein festes, positives τ^2 und mit $t > 0$, so sind dies Ereignisse gleichen zeitlichen Abstandes zum Ursprung (2.23). Gleichförmig bewegte Uhren, die gleich gehen und auf geraden Weltlinien von Beobachtern $\mathcal{B}_0$ und $\mathcal{B}_v$ den Ursprung $t = 0$, $x = 0$ durchlaufen, zeigen bei Durchlaufen des Ereignisses, in dem ihre Weltlinie die Hyperbel schneidet, eine um τ spätere Zeit an. Der Anschaulichkeit halber nehmen wir an, daß die Uhren die Zeit τ jeweils mit einem Ticken markieren.

Im Schnittpunkt von Weltlinie der Beobachter und Hyperbel ist jeweils die Tangente eingezeichnet. Diese Tangenten bestehen aus den Ereignissen, die für den jeweiligen Beobachter gleichzeitig zum Ticken seiner Uhr stattfinden.

Die Tangente steht nämlich im Sinne des Skalarproduktes (2.26) senkrecht (Eigenschaft 4) auf dem Ortsvektor vom Ursprung zur Hyperbel. Denn die Ortsvektoren $u(s)$ der Hyperbel erfüllen die Gleichung $u(s)^2 = \tau^2$, wobei τ nicht vom Parameter s abhängt. Differenziert man diese Gleichung nach s, so erhält man für den Tangentialvektor $v = \frac{du}{ds}$ die Beziehung $u \cdot v = 0$.

$$u(s) \cdot u(s) = \tau^2 \Rightarrow \frac{du}{ds} \cdot u = 0 \tag{3.1}$$

Die Tangente an die Hyperbel in Punkt B besteht also aus Ereignissen, die für den ruhenden Beobachter $\mathcal{B}_0$ nach Korrektur der Lichtlaufzeit gleichzeitig zum Ticken seiner Uhr stattfinden.

Diese Tangente schneidet die Weltlinie des bewegten Beobachters $\mathcal{B}_v$ im Ereignis E, bevor dessen Uhr tickt. Zwischen den Ereignissen A und E auf der Weltlinie des bewegten Beobachters vergeht auf der bewegten Uhr weniger Zeit als zwischen den Ereignissen A und B auf der Weltlinie des ruhenden Beobachters, für den das Ereignis E gleichzeitig zum Ereignis B ist (2.24).

$$\tau_{EA} = \sqrt{1 - v^2}\ \tau_{BA} \leq \tau_{BA} \tag{3.2}$$

Auch der Beobachter $\mathcal{B}_v$ stellt fest, daß auf bewegten Uhren zwischen Ereignissen A und E', die für ihn gleichzeitig zu Ereignissen A und B' auf seiner Weltlinie stattfinden, weniger Zeit abläuft, als auf seiner eigenen Uhr. Für den Beobachter $\mathcal{B}_v$ sind alle Ereignisse auf der Tangente durch B' gleichzeitig zum Ticken seiner Uhr. Demnach hat für ihn das Ereignis E' gleichzeitig zum Ticken seiner Uhr stattgefunden und zwar bevor die Uhr $\mathcal{B}_0$ getickt hat. Die Geschwindigkeit, mit der sich $\mathcal{B}_0$ relativ zu $\mathcal{B}_v$ bewegt, ist entgegengesetzt gleich der Geschwindigkeit v, mit der sich $\mathcal{B}_v$ relativ zu $\mathcal{B}_0$ bewegt, denn ein Schiedsrichter kann die Weltlinie von beiden mitsamt Uhren durch eine Drehung, die v in $-v$ überführt, vertauschen. Demnach gilt auch (2.24)

$$\tau_{E'A} = \sqrt{1 - v^2}\ \tau_{B'A} \leq \tau_{B'A}\ . \tag{3.3}$$

Die verkürzte Zusammenfassung „bewegte Uhren gehen langsamer“ unterschlägt die umständliche Angabe von Strecken (3.2, 3.3), deren Dauer zu vergleichen ist, und ist Anlaß von Mißverständnissen. Denn „langsamer gehen“ ist eine Ordnungsrelation und es kann nicht die Uhr $\mathcal{B}_0$ langsamer als die Uhr $\mathcal{B}_v$ und ebenfalls die Uhr $\mathcal{B}_v$ langsamer als die Uhr $\mathcal{B}_0$ gehen. Tatsächlich gehen beide Uhren gleich, dies kann ein Schiedsrichter wie in Abbildung 2.3 überprüfen. Ursache für den langsameren Gang der Uhr ist nicht eine absolut meßbare Bewegung. Es kann gleichförmige Bewegung nicht von Ruhe unterschieden werden. Ursache für den langsameren Gang der Uhr ist relative Bewegung. Sie hängt wie Gleichzeitigkeit vom Beobachter ab.

Projiziert ein Beobachter die Ereignisse, zu denen eine bewegte Uhr tickt, auf gleichzeitige Ereignisse auf seiner eigenen Weltlinie, so bestimmt er eine perspektivische Zeit. So wie die perspektivische Länge eines Maßstabs durch eine Drehung relativ zum Beobachter verkürzt wird, wird die perspektivische Zeit einer bewegten Uhr durch Relativbewegung vergrößert. Diese perspektivischen Größenänderungen gelten wechselseitig, egal welcher Beobachter die Drehung oder Bewegung feststellt.

3.3 Zwillingsparadoxon

Aus der verkürzten Formulierung „Bewegte Uhren gehen langsamer“ ergeben sich widersprüchliche Folgerungen, wenn man zwei baugleiche Uhren auf verschiedenen, nahezu geraden Weltlinien führt und ihren Gang vergleicht.

Nehmen wir der Anschaulichkeit halber zwei Zwillinge und vernachlässigen wir, daß Zwillinge keine idealen Uhren sind, weil Einsamkeit, Schwerelosigkeit und andere Effekte den Gang dieser realen, biologischen Uhren beeinflussen. Der eine Zwilling $\mathcal{B}_v$ starte im Ereignis S mit Geschwindigkeit v zum Mars, kehre bei Ankunft, dem Ereignis M, sofort wieder um, und reise mit Geschwindigkeit $-v$ zurück. Der andere Zwilling $\mathcal{B}_0$ warte unbewegt die Rückkehr ab. Welcher Zwilling, wenn überhaupt einer, ist beim Zusammentreffen im Ereignis R jünger? Jeder der Zwillinge sieht, daß sich der andere bewegt und daher weniger schnell altert. Wie sich die kurze Beschleunigungsperiode während des Umkehrens auf dem Mars auf den Gang von Uhren auswirkt, haben wir zwar nicht diskutiert, sie sollte aber vernachlässigbar sein, denn sie kann kurz und die Beschleunigung kann klein gehalten werden, während die Reise beliebig weit gedacht werden kann. Demnach sollte das Umkehren für das Altern der Zwillinge keine Rolle spielen.

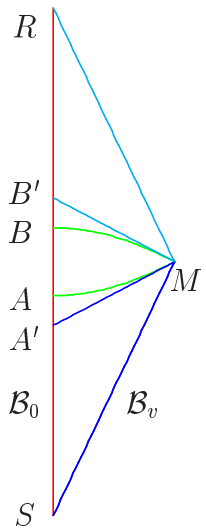


Abbildung 3.5: Zwillingsparadoxon

Aus der Abbildung 3.5 liest man ab, daß alle Argumente richtig sind und daß auf verbales Argumentieren wenig Verlaß ist. Die hilfsweise eingezeichnete Hyperbel von M nach A mit Ursprung bei S und die Hyperbel von M nach B mit Ursprung bei R erlauben, die Zeiten zwischen den Ereignissen zu vergleichen. Die Abschnitte von S nach A und von B nach R auf der Weltlinie des Stubenhockers dauern so lang, wie die Hin- und die Rückreise für den Reisenden. Der Stubenhocker ist zudem um die Zeit gealtert, die zwischen A und B vergangen ist. Auf der geraden Weltlinie ist also mehr Zeit vergangen als auf der gebogenen.

In Kapitel 4 wird gezeigt, daß auf der Geraden mehr Zeit vergeht als auf allen anderen, benachbarten Weltlinien von S nach R. „Wer rastet, der rostet“ und „Reisen hält jung“ gibt den relativistischen Effekt richtig wieder.

Wie steht es mit dem Argument, daß der Stubenhocker dem Reisenden bewegt erscheint und demnach auch der Marsbesucher $\mathcal{B}_v$ seinen Zwilling weniger schnell altern sieht?

Die Tangente MA' an die Hyperbel besteht aus Ereignissen, die für einen

Beobachter $\mathcal{B}_{\text{hin}}$, der mit zum Mars fliegt, gleichzeitig zur Ankunft M sind. Für $\mathcal{B}_{\text{hin}}$ findet A' gleichzeitig zu M statt. Offensichtlich gilt

$$\tau_{A'S} < \tau_{AS} = \tau_{MS} \ . \tag{3.4}$$

Zwischen Start S und dem Ereignis A', das für einen wegfliegenden Beobachter gleichzeitig zur Marsankunft M stattfindet, ist der Stubenhocker weniger gealtert als der Reisende während des Hinflugs zwischen S und M.

Die Tangente MB' besteht aus Ereignissen, die für einen Beobachter $\mathcal{B}_{\text{her}}$, der zurück fliegt, gleichzeitig zum Abflug M vom Mars sind. Für $\mathcal{B}_{\text{her}}$ findet B' gleichzeitig zu M statt. Offensichtlich gilt

$$\tau_{RB'} < \tau_{RB} = \tau_{RM} \ . \tag{3.5}$$

Zwischen dem Ereignis B', das für einen rückkehrenden Beobachter gleichzeitig zum Abflug vom Mars M stattfindet, und der Rückkehr R ist der Stubenhocker weniger gealtert als der Reisende während des Rückflugs zwischen M und R.

Verkürzt man die Befunde $\tau_{A'S} < \tau_{MS}$ und $\tau_{RB'} < \tau_{RM}$ zu der Aussage, daß dem Reisenden die Uhr des Stubenhockers bewegt erscheint und daß diese Uhr langsamer geht, und folgert man, daß bei Rückkehr der Reisende einen jüngeren Stubenhocker vorfindet, so ist dies Ergebnis nicht paradox, sondern falsch. Zwar sind die Ereignisse A' und B' auf der Weltlinie des Stubenhockers gleichzeitig zum Ereignis M der Ankunft am Mars und des Marsabflugs. Es stimmen aber A' und B' nicht überein, sie sind für verschiedene Beobachter gleichzeitig zum Ereignis M. Zwischen A' und B' vergeht auf der Weltlinie des Stubenhockers soviel Zeit, daß die Wartedauer τ_{RS} um τ_{BA} länger als die Reisedauer $\tau_{RM} + \tau_{MS}$ ist.

Die Weltlinien der Zwillinge unterscheiden sich durch den Knick, den die Weltlinie $\mathcal{B}_v$ beim Mars aufweist. Dennoch verursacht nicht der Knick das geringere Altern des Reisenden. Wir haben die Beschleunigung als augenblicklich idealisiert, sie trägt zur Reisedauer nicht bei und verjüngt nicht. Auch bei gleicher Beschleunigung altern die Zwillinge unterschiedlich, wie Abbildung 3.6 zeigt. Beide Zwillinge fliegen hier zunächst mit entgegengesetzt gleicher Geschwindigkeit weg, der erste Zwilling bremst früher als der zweite auf Ruhe ab. Später fliegen beide Zwillinge nach gleicher Beschleunigung wieder zurück. Ihre Weltlinien haben unterschiedliche Länge und die Zwillinge sind bei Rückkehr unterschiedlich

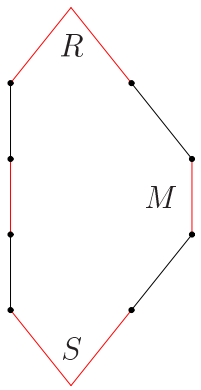


Abbildung 3.6: gleiche Beschleunigung

alt. Das Zwillingsparadoxon in Abbildung 3.5 ist der Grenzfall von Abbildung 3.6, in dem der erste Zwilling sofort auf Ruhe abbremst und der zweite Zwilling am Mars nicht wartet.

Das unterschiedliche Alter der Zwillinge ergibt sich, weil sie verschiedene Weltlinien durchlaufen und weil Zeit zwischen zwei Ereignissen die Weglänge der Weltlinie ist, die zwischen diesen Ereignissen durchlaufen wird.

Uhren verhalten sich wie Kilometerzähler. Kilometerzähler zeigen auf dem Umweg von Hannover über Karlsruhe nach München mehr an als auf der geraden Verbindung, aber nicht deshalb, weil in Karlsruhe das Lenkrad gedreht wird.

In einem Raumzeitdiagramm ist das unterschiedliche Altern der Zwillinge so paradox, wie in Euklidischer Geometrie die Aussage, daß im Dreieck jede Seite kürzer als die Summe der beiden anderer Seitenlängen ist. Um Dreiecke zu verstehen braucht man keine Differentialgeometrie der gekrümmten Raumzeit, selbst wenn man mit Kreisen und Ecken, mit gekrümmten Kurven also, zu tun hat. Ebenso wird die Allgemeine Relativitätstheorie zur Klärung des Zwillingsparadoxons nicht benötigt. Sie kann verwendet werden, gibt aber dieselbe Erklärung und dieselbe Antwort wie die Spezielle Relativitätstheorie: zwischen je zwei, genügend benachbarten Ereignissen auf der Weltlinie jedes freifallenden Beobachters vergeht mehr Zeit als auf allen anderen zeitartigen Weltlinien, die diese beiden Ereignisse verbinden.

Sind die beiden Ereignisse nicht genügend benachbart sondern weiter voneinander entfernt, kann Gravitation die Komplikation bewirken, daß verschiedene Weltlinien freifallender Beobachter diese Ereignisse verbinden und daß auf diesen Weltlinien verschieden viel Zeit vergeht, obwohl keiner der Beobachter eine fühlbare Beschleunigung erfahren hat. Es kann etwa eine Raumstation die Erde im freien Fall umkreisen und eine zweite senkrecht von der Erde abgeschossen in freiem Fall während der Aufwärtsbewegung an der ersten vorbeifliegen. Ist die Gipfelhöhe der zweiten Raumstation passend gewählt, so kann sie die erste Raumstation in der Abwärtsbewegung erneut treffen, nachdem diese die Erde umkreist hat. Im senkrechten Fall ist zwischen den zwei Begegnungen mehr Zeit vergangen als in der Raumstation, die die Erde umkreist. Dies zeigen wir am Ende des Abschnitts 7.6 .

3.4 Längenkontraktion

Festkörper, die wir als Meßlatten verwenden, haben Abmessungen, die sich durch die elektromagnetischen Kräfte zwischen ihren elementaren Bestandteilen ergeben. Wenn mikroskopisch die Abmessungen in Atomen und zwischen Atomen sich als Ergebnis des Austauschs von Photonen ergeben, steht

die makroskopische Länge in einem festen Verhältnis zur Lichtlaufzeit und die Abmessungen bewegter Festkörper verhalten sich wie die Zeiten bewegter Uhren.

Das Experiment von Michelson bestätigt dies quantitativ: die Lichtlaufzeit im Interferometer und die durch die starren Interferometerarme definierte makroskopische Länge des Interferometers stehen in einem festen Verhältnis, das unabhängig ist von der Orientierung der Arme zur Bahn der Erde um die Sonne und das daher unabhängig von der Geschwindigkeit ist. Wie bei realen Uhren sollten wir aber auch darauf gefaßt sein, daß reale Maßstäbe Abweichungen vom idealen Verhalten zeigen. Zum Beispiel werden beschleunigte Festkörper verformt und erwärmte Maßstäbe dehnen sich aus.

Anfang und Ende eines idealen, gleichmäßig bewegten Maßstabs durchlaufen zwei parallele, gerade Weltlinien. Eine dieser Linien (das linke Ende) sei die Weltlinie des Beobachters, der sich mit diesem Maßstab bewegt und ihn verwendet. Ereignisse auf einer Linie senkrecht zur Weltlinie des Beobachters sind gleichzeitig. Die Länge des Maßstabes ist also die Länge des Differenzvektors, der die zwei Weltlinien miteinander verbindet und auf ihnen senkrecht im Sinne des Skalarproduktes steht. Das Quadrat dieser Länge ist das negative Längenquadrat des Differenzvektors (Eigenschaft 4).

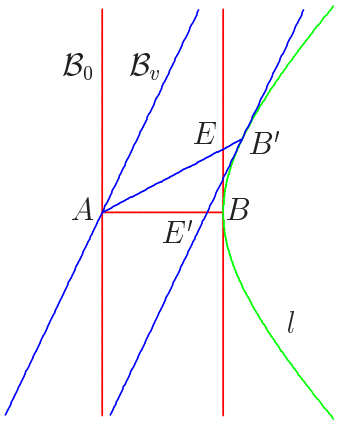


Abbildung 3.7: Längenkontraktion

Auf diesen Tatsachen beruht Abbildung 3.7. Die Weltlinie $\mathcal{B}_0$ und die dazu parallele Weltlinie durch B begrenzen einen ruhenden Maßstab der Länge l. Der auf $\mathcal{B}_0$ senkrechte Vektor w_{BA} von A nach B erfüllt die Gleichung $-{w_{BA}}^2 = l^2$ und endet auf der hilfsweise eingezeichneten Hyperbel mit Ursprung in A, die von Punkten P mit $-{w_{PA}}^2 = l^2$ gebildet wird. Insbesondere hat $w_{B'A}$ die Länge l. Die Gerade durch A und B' besteht aus Ereignissen, die für die Weltlinie $\mathcal{B}_v$ gleichzeitig sind, da $w_{B'A}$ senkrecht auf der Parallelen zu $\mathcal{B}_v$ steht (Ortsvektor und Tangente an die Hyperbel (3.1)). Also begrenzen die Weltlinie $\mathcal{B}_v$ und ihre Parallele durch B' einen bewegten Maßstab der Länge l. Vergleicht nun der ruhende Beobachter $\mathcal{B}_0$ die Länge seines Maßstabs mit dem bewegten Maßstab und wählt für diesen Vergleich das Ereignis A, in dem gleichzeitig die linken Enden beider Maßstäbe am gleichen Ort sind, so reicht zu diesem Zeitpunkt sein Maßstab bis zum Ereignis B, während das Ende des bewegten Maßstabs bei E' zwischen A und B liegt. Er schließt also, daß bewegte Maßstäbe kürzer sind.

Für den Beobachter $\mathcal{B}_v$ ruht sein eigener Maßstab und derjenige von $\mathcal{B}_0$ ist bewegt. Er wählt zum Vergleich der Länge ebenfalls das Ereignis A, zu

dem gleichzeitig die linken Enden beider Maßstäbe am gleichen Ort sind. Zu diesem Zeitpunkt reicht sein Maßstab von A bis B', aber das Ende des Maßstabs von $\mathcal{B}_0$ liegt bei E zwischen A und B'. Für $\mathcal{B}_v$ ist also der ihm gegenüber bewegte Maßstab von $\mathcal{B}_0$ kürzer.

Längenkontraktion ist wie Zeitdilatation eine Eigenschaft, die jeder Beobachter unter Berücksichtigung der Lichtlaufzeiten bei Maßstäben und Uhren feststellt, die ihm gegenüber bewegt sind. Insbesondere gilt dies gegenseitig, ohne auf logische Widersprüche zu führen: für den Beobachter $\mathcal{B}_0$ gehen die Uhren von $\mathcal{B}_v$ langsamer und sind die Maßstäbe von $\mathcal{B}_v$ kürzer. Aber auch der Beobachter $\mathcal{B}_v$ stellt fest, daß die Uhren von $\mathcal{B}_0$ langsamer gehen und die Maßstäbe von $\mathcal{B}_0$ kürzer sind.

Da Abbildung 3.7 und Abbildung 3.4 durch Spiegelung an der Winkelhalbierenden auseinander hervorgehen, stimmt der Längenkontraktionsfaktor und der Faktor der Zeitdilatation überein.

$$l_v = \sqrt{1 - v^2}\, l \tag{3.6}$$

3.5 Längenparadoxon

So wie Zeitdilatation zum Zwillingsparadoxon führt, so ergibt Längenkontraktion einen scheinbaren Widerspruch. Man kann zum Beispiel fragen, ob ein Auto in eine gleich große Garage paßt, wenn es schnell hinein fährt. Für den Garagenbesitzer, in dessen System die Garage ruht, ist das Auto wegen der Längenkontraktion kürzer und es paßt in die Garage. Aber aus Sicht des Autofahrers ist die Garage kürzer und das Auto paßt nicht hinein.

Daß beide recht haben, läßt sich aus Abbildung 3.7 ablesen. Die Weltlinie $\mathcal{B}_0$ und die dazu parallele Linie durch B mögen Garagentor und Garagenwand markieren, die Weltlinie $\mathcal{B}_v$ und die dazu parallele Linie durch B' das Heck und die vordere Stoßstange eines gleich langen Autos.

Wenn die Bewegung des Autos nur nach rechts in der Zeichenebene verläuft, ist ein Aufprall der Stoßstange auf die Garagenwand unvermeidlich. Dies Ereignis ist der Schnittpunkt der beiden Tangenten an die Hyperbel.

Es findet für den Garagenbesitzer erst nach der Zeit statt, zu der das Heck durch das Garagentor gefahren ist (Ereignis A). Denn gleichzeitig zu A sind für den Garagenbesitzer die Ereignisse auf der Geraden durch A und B und der Schnittpunkt der Tangenten liegt in Abbildung 3.7 oberhalb dieser Geraden. Der Garagenbesitzer schließt also, daß das Auto vor dem Aufprall in die Garage gepaßt hatte, also kürzer war.

Für den Autofahrer findet dieser Aufprall statt, bevor das Heck durch das Garagentor gefahren ist (Ereignis A), denn gleichzeitig zu A sind für den

Autofahrer die Ereignisse auf der Geraden durch A und B'. Er schließt also, daß die Garage zu kurz war.

Da die Durchfahrt des Hecks durch das Garagentor weder Ursache noch Auswirkung des Aufpralls der Stoßstange auf die Garagenwand ist, brauchen die Beobachter nicht darin übereinzustimmen, in welcher Reihenfolge diese Ereignisse stattfanden.

Gibt man einem dünnen Auto, das durch eine schmale Garage fährt, aber noch etwas Geschwindigkeit senkrecht zur Zeichenebene, so kann man bei geschickter Fahrt den Aufprall vermeiden.

Die Parallele zu $\mathcal{B}_0$ schneidet nicht mehr die Parallele zu $\mathcal{B}_v$, wenn $\mathcal{B}_v$ und ihre Parallele in A und E' die Zeichenebene durchstoßen. Für den Garagenbesitzer paßt zu dieser Zeit (Gerade durch A und B) das Auto ganz in die Garage und später ist das dünne Auto neben der schmalen Garage, also außerhalb der Zeichenebene, und prallt nicht auf die Garagenwand.

Auch der Autofahrer kommt durch die zu kurze Garage. Er fährt erst mit der Stoßstange an der Garagenwand vorbei (Ereignis B). Wenn später sein Heck in der Garage ist (Ereignis A), ragt zwar seine Stoßstange (Ereignis B') über die Garagenwand hinaus (Ereignis E), sie ist aber schon neben der Garage.

Natürlich ist bei ungeschickterer Fahrt ein Aufprall auf die Garagenwand möglich, etwa wenn die Weltlinie $\mathcal{B}_v$ und ihre Parallele die Zeichenebene in A und B' schneiden.

Ob ein langes, dünnes Auto bei schneller Fahrt durch eine zu kurze, schmale Garage paßt, hängt also nicht nur von seiner Länge ab, sondern auch von der zeitlichen Abfolge der Ereignisse. Um Fragen wie „Paßt das Auto durch die Garage?“ zu beantworten, müssen wir die Geometrie der Raumzeit berücksichtigen. Das entspricht zwar nicht unserer Alltagserfahrung, ist aber logisch nicht widersprüchlicher, als daß eine lange Leiter durch eine niedrige Tür paßt.

3.6 Geschwindigkeitsaddition

Wir betrachten ein Teilchen mit Weltlinie $x(s)$, dabei stehe die Bezeichnung x als Kurzschrift für die vier Raumzeitkoordinaten (ct, x, y, z). Wir wollen die Geschwindigkeit des Teilchens, die ein bewegter Beobachter $\mathcal{B}_v$ feststellt, mit der Geschwindigkeit vergleichen, die ein ruhender Beobachter im Labor mißt. Dazu betrachten wir die Komponenten des Tangentialvektors an die Weltlinie $x(s)$.

$$\frac{dx}{ds} = \begin{pmatrix} \frac{dx^0}{dt} \\ \frac{d\vec{x}}{dt} \end{pmatrix} \frac{dt}{ds} = \begin{pmatrix} c \\ \vec{v} \end{pmatrix} \frac{dx^0}{c\,ds} \tag{3.7}$$

Eine entsprechende Gleichung gilt für die Koordinaten $x'(s) = \Lambda x(s)$ (2.43) des bewegten Beobachters für die Weltlinie des Teilchens. Bewegt sich das Teilchen in der x'-y'-Ebene und drücken wir $\vec{v}'$ durch Betrag und Winkel aus, die der bewegte Beobachter feststellt, so gilt

$$\frac{dx'}{ds} = \begin{pmatrix} c \\ v' \cos\theta' \\ v' \sin\theta' \\ 0 \end{pmatrix} \frac{dx'^0}{c\, ds} \ . \tag{3.8}$$

Gemäß (2.45) hängen die Koordinaten $x = \Lambda^{-1} x'$ durch Matrixmultiplikation mit der inversen Lorentzmatrix Λ^{-1} mit den Koordinaten des bewegten Beobachters zusammen. Daher gilt auch $\frac{dx}{ds} = \Lambda^{-1} \frac{dx'}{ds}$. Führen wir die Matrixmultiplikation aus, so erhalten wir

$$\frac{dx}{ds} = \begin{pmatrix} c \\ v \cos\theta \\ v \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} \frac{dx^0}{c\, ds} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}(c + \frac{v}{c} v' \cos\theta') \\ \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}(v + v' \cos\theta') \\ v' \sin\theta' \\ 0 \end{pmatrix} \frac{dx'^0}{c\, ds} \ . \tag{3.9}$$

Für die x^0-Komponente heißt dies

$$\frac{dx^0}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} (1 + \frac{vv'}{c^2} \cos\theta') \frac{dx'^0}{ds} \tag{3.10}$$

und demnach gilt

$$\frac{dx}{ds} = \begin{pmatrix} c \\ \dfrac{v + v' \cos\theta'}{1 + \dfrac{vv'}{c^2} \cos\theta'} \\ \dfrac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} v' \sin\theta'}{1 + \dfrac{vv'}{c^2} \cos\theta'} \\ 0 \end{pmatrix} \frac{dx^0}{c\, ds} \ . \tag{3.11}$$

Analog zu (3.8) lesen wir hier die x- und y-Komponenten der Geschwindigkeit v_{Lab} des Teilchens ab, die der im Labor ruhende Beobachter ermittelt.

$$v_{x\mathrm{Lab}} = \frac{v + v' \cos\theta'}{1 + \frac{vv'}{c^2} \cos\theta'} \tag{3.12}$$

$$v_{y\mathrm{Lab}} = \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\, v' \sin\theta'}{1 + \frac{vv'}{c^2} \cos\theta'} \tag{3.13}$$

Falls sich das Teilchen und der Beobachter $\mathcal{B}_v$ in dieselbe Richtung bewegen, ist $\theta' = 0$ und $\mathcal{B}_0$ stellt eine Bewegung in x-Richtung mit der Gesamtgeschwindigkeit v_{Lab} fest (2.42).

$$v_{\mathrm{Lab}} = \frac{v + v'}{1 + \frac{vv'}{c^2}} \tag{3.14}$$

$\mathcal{B}_v$ sieht ein Teilchen mit Geschwindigkeit v', dessen Bewegungsrichtung mit der Bewegungsrichtung des Labors für $\mathcal{B}_v$ einen Winkel θ' bildet. Aus der $v_{x\mathrm{Lab}}$-Komponente und dem Betrag von $\vec{v}_{\mathrm{Lab}}$ ergibt sich, daß im Labor die Bewegungsrichtung des Teilchens mit der Bewegungsrichtung von $\mathcal{B}_v$ einen Winkel θ_{Lab} bildet.

$$\cos\theta_{\mathrm{Lab}} = \frac{v + v' \cos\theta'}{\sqrt{(v + v' \cos\theta')^2 + (1 - \frac{v^2}{c^2}) v'^2 \sin^2\theta'}} \tag{3.15}$$

3.7 scheinbare Überlichtgeschwindigkeit

Aus dem Quasar 3C273 [9, Kapitel 11] strömt Gas mit meßbarer Winkelgeschwindigkeit. Multipliziert man diese Winkelgeschwindigkeit mit der bekannten Entfernung, so erhält man die Geschwindigkeit quer zur Sichtlinie. Aus den Beobachtungen ergibt sich die siebenfache Lichtgeschwindigkeit. Und dabei hat man eine Bewegung in Richtung der Sichtlinie, die nicht zu einer sichtbaren Positionsänderung führt, noch nicht berücksichtigt.

Man kann die Geschwindigkeit $\vec{v} = \vec{v}_r + \vec{v}_t$ in einen Anteil $\vec{v}_r$ in Richtung der Sichtlinie und einen Anteil $\vec{v}_t$ quer dazu zerlegen. Der Anteil $\vec{v}_t$ gibt Anlaß zur beobachteten Winkelgeschwindigkeit. Wegen $\vec{v}^2 = \vec{v}_r{}^2 + \vec{v}_t{}^2$ sollte die Gesamtgeschwindigkeit noch höher sein als $|\vec{v}_t|$ und demnach höher als

die siebenfache Lichtgeschwindigkeit. Der Quasar scheint also Teilchen mit Überlichtgeschwindigkeit zu emittieren.

Diese Schlußfolgerung ist falsch. Die Bewegung in Sichtlinie kann nicht vernachlässigt werden, weil sich durch diese Bewegung die Laufzeit des Lichtes zur Erde ändert. Bildet die Geschwindigkeit $\vec{v}$ einen Winkel θ mit der Richtung von Quasar zur Erde, so vermindert sich während der Zeit dt der Abstand um $dr = dt\, v \cos\theta$. Auf der Erde vergeht zwischen der Beobachtung von zwei Ereignissen im ausströmenden Gas daher die Zeit $\Delta t = dt - \frac{dr}{c}$, wenn die Differenz ihrer Zeitkoordinaten dt beträgt. Verwendet der Beobachter auf der Erde die beobachtete Zeitdifferenz, um die Geschwindigkeit zu ermitteln, so vernachlässigt er die sich ändernde Laufzeit und rekonstruiert die scheinbare Geschwindigkeit

$$\vec{u} = \frac{dt}{\Delta t}\frac{d\vec{x}}{dt} = \frac{\vec{v}}{1 - \frac{v}{c}\cos\theta} \ . \tag{3.16}$$

Der Anteil dieser Geschwindigkeit quer zur Beobachtungsrichtung ist

$$u_{\text{quer}} = \frac{v \sin\theta}{1 - \frac{v}{c}\cos\theta} \ . \tag{3.17}$$

Die Geschwindigkeit u_{quer} wird maximal für Winkel $\cos\theta = \frac{v}{c}$ und beträgt dann $u_{\text{quer, max}} = \frac{v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$. Sie kann beliebig groß werden, obwohl die wahre Geschwindigkeit v kleiner als die Lichtgeschwindigkeit c ist.

3.8 Dopplereffekt und Aberration

Wenn zwei gegeneinander bewegte Beobachter das gleiche Ereignis durchlaufen, stimmen zwar ihre Rückwärtslichtkegel überein und sie empfangen daher dasselbe Licht. Dennoch sehen sie etwas Verschiedenes. Farbe, Richtung und Helligkeit des Lichtes hängen von der Geschwindigkeit des Beobachters ab.

Ein Lichtstrahl ist eine Wellenlösung der Maxwellgleichungen (5.2, 5.3) und wird, wenn wir etwas vereinfachen und ein skalares Potential statt des Vierervektorpotentials schreiben, durch eine ebene Welle

$$\phi(x^0, \vec{x}) = \Re A \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x} = \Re A \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\vec{k}\vec{x} - \omega t)} = |A| \cos(\vec{k}\vec{x} - \omega t + \alpha) \tag{3.18}$$

beschrieben. Das Skalarprodukt $k \cdot x$ in (3.18) ist das in (2.26) definierte Skalarprodukt $k \cdot x = k^0 x^0 - k^1 x^1 - k^2 x^2 - k^3 x^3$ des Vierervektors $x = (ct, \vec{x})$ mit dem Wellenvektor $k = (\frac{\omega}{c}, \vec{k})$. Dieser Wellenvektor ist lichtartig, $k^2 = 0$, das Vorzeichen von k^0 wird positiv gewählt, es gilt also

$$k^0 = \frac{\omega}{c} = |\vec{k}| \ . \tag{3.19}$$

Die ebene Welle (3.18) ist auf Flächen senkrecht zu $\vec{k}$ konstant

$$\phi(x^0, \vec{x} + \vec{n}) = \phi(x^0, \vec{x}) \quad \text{falls} \quad \vec{k}\vec{n} = 0 \ , \tag{3.20}$$

und bewegt sich mit Lichtgeschwindigkeit in Richtung von $\vec{e}_k = \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|}$

$$\phi(x^0 + dx^0, \vec{x} + \vec{e}_k \, dx^0) = \phi(x^0, \vec{x}) \ . \tag{3.21}$$

Insbesondere ist die Welle längs der Weltlinie des Lichtstrahls $(t, \vec{x}) = (t, t\,\vec{e}_k + \vec{x}_0)$ konstant. Die Welle hat die Frequenz $\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{c\,k^0}{2\pi}$ und die Wellenlänge $\lambda = \frac{2\pi}{|\vec{k}|}$

$$\phi(x^0 + cT, \vec{x}) = \phi(x^0, \vec{x}) \,, \quad \phi(x^0, \vec{x} + \lambda \vec{e}_k) = \phi(x^0, \vec{x}) \ . \tag{3.22}$$

Ein bewegter Beobachter verwendet Koordinaten $x' = \Lambda x$ (2.43) für die Ereignisse. Da Lorentztransformationen Skalarprodukte invariant lassen

$$k \cdot x = k' \cdot x' \ , \tag{3.23}$$

hat die Welle für einen bewegten Beobachter $\mathcal{B}_v$ einen lorentztransformierten Wellenvektor $k' = \Lambda k$. Dann hat sie für den bewegten Beobachter in allen Ereignissen dieselbe Phase, wie sie der ruhende Beobachter mißt. Der Wellenvektor ist also ein Vierervektor, dessen Komponenten wie die Komponenten von x (2.43) transformieren.

Die Transformation von Richtung und Frequenz von Lichtstrahlen muß nicht erneut berechnet werden. Man braucht nur die allgemeinen Formeln für Geschwindigkeitsaddition auf den Fall zu spezialisieren, daß das bewegte Teilchen ein Photon mit Lichtgeschwindigkeit ist, und in (3.10, 3.15) nach $\frac{dx'^0}{ds}$ und $\cos\theta'$ auflösen. Berücksichtigt man zudem, daß die Richtung, unter der ein Photon gesehen wird, entgegengesetzt zur Richtung ist, in die es sich bewegt, und daß daher $-\cos\theta$ statt $\cos\theta$ zu lesen ist, wenn θ der Winkel zwischen Blickrichtung und Bewegungsrichtung der Beobachter ist, so erhält man aus (3.15)

$$\cos\theta' = \frac{\frac{v}{c} + \cos\theta}{1 + \frac{v}{c}\cos\theta} \tag{3.24}$$

und aus (3.10)

$$\omega' = \omega \, \frac{1 + \frac{v}{c}\cos\theta}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \ . \tag{3.25}$$

Es ist jedoch algebraisch auch nicht aufwendiger, diese Transformationen der Richtung und Frequenz von Lichtstrahlen erneut herzuleiten. Wählen wir

zur Vereinfachung unserer Rechnungen die Achsenrichtungen unserer Bezugssysteme so, daß $\vec{v}$ in x-Richtung und $\vec{k}$ in der x-y-Ebene liegt, und bezeichnen wir mit θ den Winkel der x-Achse mit der Richtung, aus der das Licht kommt, so hat k im unbewegten System, dem Laborsystem, die Komponenten

$$k = \frac{\omega}{c} \begin{pmatrix} 1 \\ -\cos\theta \\ -\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} . \tag{3.26}$$

Der Wellenvektor k transformiert wie der Ortsvektor x, seine k'-Komponenten sind daher mit (2.43) auszurechnen

$$k' = \frac{\omega'}{c} \begin{pmatrix} 1 \\ -\cos\theta' \\ -\sin\theta' \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\omega}{c} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}(1+\frac{v}{c}\cos\theta) \\ -\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}(\frac{v}{c}+\cos\theta) \\ -\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} . \tag{3.27}$$

Ein bewegter Beobachter stellt also eine andere Frequenz und damit eine andere Farbe des Lichtes fest.

$$\omega' = \omega \, \frac{1+\frac{v}{c}\cos\theta}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{3.28}$$

Hierbei ist θ der Winkel zwischen dem Vektor $\vec{v}$ und der Richtung von $-\vec{k}$ zur Lichtquelle. Bewegt sich der Beobachter von der Lichtquelle weg, vermindert sich die Frequenz des Lichtes, das Licht ist rotverschoben. Läuft er auf die Lichtquelle zu, erhöht sich die Frequenz, das Licht ist blauverschoben. Diese geschwindigkeitsabhängige Frequenzverschiebung heißt Dopplereffekt. Er wird zur Geschwindigkeitsmessung, zum Beispiel bei der Verkehrsüberwachung, alltäglich verwendet.

Aus dem Verhältnis der k'_x-Komponente zu der k'_0-Komponente ergibt sich der Winkel θ', unter dem der Lichtstrahl vom bewegten Beobachter gesehen wird.

$$\cos\theta' = \frac{\frac{v}{c}+\cos\theta}{1+\frac{v}{c}\cos\theta} \tag{3.29}$$

Mit der trigonometrischen Identität

$$\tan\frac{\theta}{2} = \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} \tag{3.30}$$

läßt sich dies als Skalierung von $\tan\frac{\theta}{2}$ mit κ^{-1} (2.20) schreiben

$$\tan\frac{\theta'}{2} = \sqrt{\frac{c-v}{c+v}}\,\tan\frac{\theta}{2}\ . \tag{3.31}$$

In dieser Form ist die Abhängigkeit der transformierten Richtung von der Geschwindigkeit und der vorherigen Richtung separiert, $\tan\theta/2$ transformiert linear. Trägt man wie in Anhang G auf Skalen den Logarithmus von $\tan\theta/2$ und die Schnelligkeit (2.41) auf, so läßt sich an den hintereinander gelegten Skalen der transformierte Winkel ablesen.

Mit zunehmender Geschwindigkeit kommen dem bewegten Beobachter Lichtstrahlen ähnlich wie Regentropfen mehr und mehr aus der Richtung entgegen, in die er sich bewegt. Die Abweichung des Winkels θ' von θ nennt man Aberration.

Die Erde umläuft die Sonne im mittleren Abstand von $1{,}5\cdot10^{11}$ m. Die dabei zurückgelegte Strecke im Verhältnis zu einem Lichtjahr, $9{,}46\cdot10^{15}$ m, ist die Geschwindigkeit $v/c = 1{,}00\cdot10^{-4}$. Für solch kleine Geschwindigkeiten entwickeln wir (3.31)

$$\delta\theta = \theta' - \theta = -\frac{v}{c}\sin\theta\ . \tag{3.32}$$

Ein Stern, der senkrecht zur augenblicklichen Bewegungsrichtung der Erde unter $\theta = \frac{\pi}{2}$ gesehen wird, wird von der Erde in einer um $|\delta\theta| = 10^{-4}$, das sind 20,5 Bogensekunden, verschobenen Richtung gesehen. Während des Jahres ändert sich die Geschwindigkeitsrichtung der irdischer Beobachter. Daher durchlaufen die Richtungen, in denen wir Sterne beobachten, im Laufe des Jahres Ellipsen mit einer großen Achse von 41 Bogensekunden.

3.9 Bilder bewegter Beobachter

Sind zwei gegeneinander bewegte Beobachter zur gleichen Zeit am gleichen Ort, so wird jeder Lichtstrahl, den der eine Beobachter sieht, auch vom anderen Beobachter registriert, denn der Rückwärtslichtkegel eines Ereignisses hängt nicht vom Beobachter ab, der es durchläuft. Der Dopplereffekt ändert die Frequenz, also die Farbe, des Lichtes und zusätzlich die Zahl der Photonen, die pro Sekunde empfangen werden. Aberration ändert die Richtungen, unter denen die Lichtstrahlen einfallen, und daher auch die Dichte der Lichtstrahlen. Das Bild, das der bewegte Beobachter sieht, ist also eine verfärbte, verzerrte und in seiner Helligkeit geänderte Version des Bildes des ruhenden Beobachters. Topologisch, das heißt in den Lagebeziehungen, stimmen beide Bilder überein, da sich das zweite Bild durch eine stetige, umkehrbare Abbildung aus dem ersten ergibt.

Demnach kann ein bewegter Beobachter nicht Dinge sehen, die zu diesem Zeitpunkt einem an diesem Ort ruhenden Beobachter verborgen sind. Allerdings gehören bei hoher Geschwindigkeit zum Gesichtsfeld des Beobachters, der in Bewegungsrichtung schaut, Lichtstrahlen, die für den ruhenden Beobachter von hinten kommen und die er durch Wenden des Kopfes sehen kann [10].

Die Transformation (3.31) von Richtungen (θ, φ) von Lichtstrahlen auf Richtungen $(\theta', \varphi' = \varphi)$, aus denen der bewegte Beobachter die Lichtstrahlen sieht, ist eine Selbstabbildung der zweidimensionalen Kugeloberfläche S^2. Zwei benachbarte Richtungen $(\theta + d\theta, \varphi + d\varphi)$ und (θ, φ) haben in Bogenmaß gemessen die Entfernung

$$\Delta l = \sqrt{\left(d\theta\right)^2 + \sin^2\theta \left(d\varphi\right)^2} \ . \tag{3.33}$$

Das Bogenmaß, das der bewegte Beobachter sieht, stimmt hiermit bis auf einen Faktor überein. Aberration bildet Richtungen konform ab.

$$\sqrt{\left(d\theta'\right)^2 + \sin^2\theta' \left(d\varphi'\right)^2} = \frac{1 + \tan^2\frac{\theta}{2}}{\sqrt{\frac{c+v}{c-v}} + \sqrt{\frac{c-v}{c+v}}\tan^2\frac{\theta}{2}} \sqrt{\left(d\theta\right)^2 + \sin^2\theta \left(d\varphi\right)^2} \tag{3.34}$$

Daher stimmen bei beiden Beobachtern die Größenverhältnisse benachbarter, kleiner Objekte, überein. Insbesondere werden kleine Kreise, sie bestehen aus Punkten gleichen Abstands zum Mittelpunkt, wieder auf kleine Kreise abgebildet, und Winkel bleiben unverändert. Winkel sind ja das Verhältnis von Kreisbogen zu Kreisradius. Der bewegte Beobachter sieht eine winkeltreu verformte Version des Bildes des ruhenden Beobachters.

Abschnitt C.6 zeigt, daß die Lorentzgruppe, die das Längenquadrat $\tau^2 = \sum_{i=0}^{n}(x^i)^2 - \sum_{i=n+1}^{n+m+1}(x^i)^2$ invariant läßt, mit der konformen Gruppe übereinstimmt , die das Längenquadrat $\tau^2 = \sum_{i=1}^{n}(x^i)^2 - \sum_{i=n+1}^{n+m}(x^i)^2$ bis auf einen Vorfaktor invariant läßt, und daß die Richtungen der Lichtstrahlen in $n + m + 2$ Dimensionen eine $n + m$ dimensionale Mannigfaltigkeit ist, auf die die konforme Gruppe wirkt. Insbesondere wirkt in einer Zeit- und drei Raumdimensionen die Lorentzgruppe auf der zweidimensionalen Kugeloberfläche S^2 der Richtungen von Lichtstrahlen als Möbiusgruppe (C.2).

Die Lichtstrahlen vom Umriß einer Kugel zum Beobachter bilden einen Kreiskegel. Jeder Kreiskegel von Lichtstrahlen, auch wenn er nicht infinitesimal klein ist, ist auch für den bewegten Beobachter ein Kreiskegel. Daher erscheint jede Kugel dem bewegten Beobachter wieder als Kugel, zumindest was den Umriß betrifft.

Dies bestätigt man elegant, indem man ausnutzt, daß ein Kreis auf S^2 die Schnittkurve von S^2 mit einer Ebene E ist und daß durch die Inversion

$I_{(2,(0,0,-1))}$ (C.6) S^2 auf die Ebene $x^3 = 1$ und E auf eine Kugelfläche abgebildet werden, denn Inversion an einer Kugelfläche bildet Kugelflächen, zu denen auch Ebenen zählen, auf Kugelflächen ab [11]. Die Inversion (C.6) bildet also Kreise auf Kreise ab. Da zudem Möbiustransformationen Kreise auf Kreise abbilden, erscheinen kreisförmige Umrisse dem bewegten Beobachter wieder kreisförmig.

Rechnerisch bestätigt man dies etwas aufwendig folgendermaßen: Verwenden wir die Kurzschrift $c_\alpha = \cos(\alpha)$ und $s_\alpha = \sin(\alpha)$ für die auftretenden Winkel α, β und γ, so durchläuft mit γ zwischen 0 und 2π der Einheitsvektor

$$\vec{e}\,(\gamma,\alpha,\beta) = \begin{pmatrix} c_\beta c_\alpha - s_\beta s_\alpha s_\gamma \\ s_\alpha c_\gamma \\ s_\beta c_\alpha + c_\beta s_\alpha s_\gamma \end{pmatrix} \tag{3.35}$$

einen Kreis auf einem Kegel mit Öffnungswinkel α, dessen Achse $\vec{a}\,(\beta) = (c_\beta, 0, s_\beta)$ zur x-Achse um den Winkel β geneigt ist

$$\big(\vec{e}\,(\gamma,\alpha,\beta) - \vec{a}\,(\beta)\big)^2 = 2(1-c_\alpha)\,, \quad \vec{e}\,(\gamma,\alpha,\beta)\cdot\vec{a}\,(\beta) = c_\alpha\ . \tag{3.36}$$

Ist $\vec{e} = (e_x, e_y, e_z) = -\vec{k}/k^0$ die Einfallsrichtung eines Lichtstrahls, so wird er, wie in (3.27) abgeleitet, von einem in x-Richtung bewegten Beobachter in Richtung

$$\vec{e}(v) = \begin{pmatrix} \frac{v}{c} + e_x \\ \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,e_y \\ \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,e_z \end{pmatrix} \frac{1}{1+\frac{v}{c}e_x} \tag{3.37}$$

wahrgenommen. Setzen wir hier die Lichtstrahlen (3.35) eines kreisförmig erscheinenden Objektes ein und durchläuft γ den Bereich von 0 bis 2π, so beschreibt $\vec{e}(v)$ einen Kreis auf einem Kegel mit Öffnungswinkel $\alpha(v)$, dessen Achse zur x-Achse um den Winkel $\beta(v)$ geneigt ist. Dabei sind $\alpha(v)$ und $\beta(v)$ durch

$$\cot\beta(v) = \frac{c_\beta + \frac{v}{c}c_\alpha}{s_\beta\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad \text{und} \quad \cos\alpha(v) = \frac{c_\alpha + \frac{v}{c}c_\beta}{s_\beta\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\,\sin\beta(v) \tag{3.38}$$

gegeben. Dies folgt aus $\vec{e}(v)\cdot\vec{a}(\beta(v)) = \cos\alpha(v)$ durch Vergleich der Koeffizienten bei Potenzen von s_γ.

Insbesondere bilden die Richtungen mit $\theta = \pi/2$ senkrecht zur Bewegungsrichtung, wie oben, unten, rechts und links, einen Kreis, der die Menge aller Lichtstrahlen in Lichtstrahlen von vorn und Lichtstrahlen von hinten

trennt. Dieser Kreis wird vom bewegten Beobachter als Kreis mit Öffnungswinkel

$$\tan\frac{\bar{\theta}}{2} = \sqrt{\frac{c-v}{c+v}} \tag{3.39}$$

gesehen. Innerhalb dieses Kreises sieht der bewegte Beobachter die ruhenden Objekte, die vor ihm sind. Alle ruhenden Objekte, die außerhalb dieses Kreises gesehen werden, sind hinter dem bewegten Beobachter, auch wenn für den bewegten Beobachter ihr Licht von vorne einfällt [10].

3.10 beschleunigte Uhren

Die Weltlinie einer Uhr $\Gamma : s \to (t(s), x(s), y(s), z(s))$ ist zeitartig, das heißt, Ereignisse auf der Weltlinie liegen zeitartig zueinander[1]. Ist die Weltlinie nicht gerade sondern beschleunigt, so nähern wir sie durch viele kleine, gerade, zeitartige Strecken und setzen die Gesamtzeit additiv aus den Zeiten zusammen, die auf diesen Strecken vergehen.

Zwischen benachbarten Ereignissen mit Differenzvektor $ds(\frac{dt}{ds}, \frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds})$ zeigt jede gleichförmig bewegte Uhr die Zeit $\Delta\tau$ an.

$$\Delta\tau = ds\sqrt{\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 - \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 - \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 - \left(\frac{dz}{ds}\right)^2} \tag{3.40}$$

Ideale Uhren, die Weltlinien Γ durchlaufen, messen und addieren diese Zeiten.

Eigenschaft 5 (Zeit) *Auf einer zeitartigen Weltlinie $\Gamma : s \to x(s)$ zeigt eine ideale Uhr zwischen dem Ereignis $A = x(\underline{s})$ und dem späteren Ereignis $B = x(\bar{s})$ die Zeit $\tau(B, A\,; \Gamma)$ an.*

$$\begin{aligned} \tau(B, A\,; \Gamma) &= \int\limits_{\Gamma: A \to B} \Delta\tau \\ &= \int\limits_{\underline{s}}^{\bar{s}} ds\sqrt{\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 - \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 - \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 - \left(\frac{dz}{ds}\right)^2} \end{aligned} \tag{3.41}$$

Im Unterschied zur nichtrelativistischen Physik ist die Zeit keine Funktion der Ereignisse A und B, und $\Delta\tau$ ist nicht die Ableitung $d\tau$ einer Funktion τ. Die Zeit kommt nicht dem Ereignis A oder dem Ereignis B zu, sondern

[1] Die Funktion $t(s)$ ist monoton wachsend. Dann werden die Ereignisse auf der Weltlinie als Funktion des Bahnparameters s genau einmal und kausal geordnet durchlaufen.

der Weltlinie von A nach B. Die Zeit ist die Weglänge und demnach ein Funktional der Weltlinie Γ.

Auf geraden Weltlinien stimmt τ^2 überein mit dem Längenquadrat (2.27) des Differenzvektors w_{BA} (2.31) von A nach B.

Zwischen A und B setzt sich die Zeit additiv aus Zeiten zusammen, die auf Teilstücken der Weltlinie vergehen, das heißt für alle Ereignisse C, die auf der Weltlinie Γ zwischen A und B stattfinden, gilt

$$\int\limits_{\Gamma: A\to B} \Delta\tau \;=\; \int\limits_{\Gamma: A\to C} \Delta\tau \;+\; \int\limits_{\Gamma: C\to B} \Delta\tau \;. \tag{3.42}$$

Die Zeit $\tau(B, A\,; \Gamma)$ ist unabhängig von der Parametrisierung der Weltlinie.

Um dies einfach zu zeigen, führen wir den Vierervektor $x(s)$ ein.

$$(x^0(s), x^1(s), x^2(s), x^3(s)) = (t(s),\, x(s),\, y(s),\, z(s)) \tag{3.43}$$

Es ist $\Delta\tau = ds\sqrt{(\frac{dx}{ds})^2}$, und der Radikand ist das Längenquadrat $(\frac{dx}{ds})^2$ des Vierertangentialvektors $\frac{dx}{ds}$. Jede andere Parametrisierung $x(s')$ der Weltlinie Γ mit monoton wachsendem x^0 ist durch $x(s(s'))$ mit monoton wachsendem $s(s')$, also mit $\frac{ds}{ds'} = \sqrt{\left(\frac{ds}{ds'}\right)^2}$, gegeben. Nach der Kettenregel gilt $\frac{dx}{ds'} = \frac{ds}{ds'}\frac{dx}{ds}$, und mit dem Integralsubstitutionssatz folgt die Behauptung.

$$\int\limits_{\underline{s'}}^{\bar{s'}} ds' \sqrt{\left(\frac{dx}{ds'}\right)^2} = \int\limits_{\underline{s'}}^{\bar{s'}} ds' \frac{ds}{ds'} \sqrt{\left(\frac{dx}{ds}\right)^2} = \int\limits_{\underline{s}}^{\bar{s}} ds \sqrt{\left(\frac{dx}{ds}\right)^2} \tag{3.44}$$

Parametrisiert man eine zeitartige Weltlinie durch die Zeit t, die ein ruhender Beobachter den Ereignissen zuschreibt, dann ist die Weltlinie durch $\Gamma : t \to (t, x(t), y(t), z(t))$ gegeben und der Vierertangentialvektor hat die Komponenten $\frac{dx}{dt} = (1, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}) = (1, v_x, v_y, v_z)$ und das Längenquadrat $1 - \vec{v}^2$. Auf einer Bahn $\vec{x}(t)$ zeigt also eine mitgeführte Uhr zwischen t_1 und t_2 die Zeit

$$\tau = \int_{t_1}^{t_2} dt\, \sqrt{1 - \vec{v}^{\,2}} \;. \tag{3.45}$$

Wählt man den Bahnparameter s so, daß der Tangentialvektor überall die Länge $\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 = 1$ hat, dann stimmt s mit der Zeit τ überein, die auf einer mitgeführten Uhr vergeht. Umgekehrt hat der Tangentialvektor überall Einheitslänge, wenn die Weltlinie mit der Eigenzeit parametrisiert wird.

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 = 1 \;\Rightarrow \tau\big(x(\bar{s}), x(\underline{s}), \Gamma\big) = \bar{s} - \underline{s} \tag{3.46}$$

Die Zeit, $\tau(B, A\,;\Gamma)$, die ideale Uhren anzeigen, ist unabhängig von der Beschleunigung in dem Sinne, daß der Integrand $\Delta\tau$ (3.40) nicht von zweiten Ableitungen $\frac{d^2x}{ds^2}$ abhängt. Dennoch ist die Zeit $\tau(B, A\,;\Gamma)$ ein Funktional der Weltlinie Γ, das für gerade und gekrümmte Weltlinien, die A mit B verbinden, unterschiedliche Werte hat, obwohl die Uhr beschleunigungsunabhängig ist.

Daß Uhren beschleunigungsunabhängig die Weglänge der durchlaufenen Weltlinie anzeigen, gehört zur Definition idealer Uhren, mit denen dann reale Uhren verglichen werden.

Viele reale Uhren sind nicht ideal und weichen beträchtlich von idealen Uhren ab. Sonnenuhren zeigen den Winkel einer erdfesten Achse zur Sonne an. Pendeluhren und Sanduhren messen die Beschleunigung. Die Sanduhr läuft paradoxerweise, wenn man sie festhält, und bleibt stehen, wenn man sie fallen läßt, noch bevor sie aufschlägt; das Pendel kreist mit konstanter Winkelgeschwindigkeit, wenn man die Pendeluhr fallen läßt. Quarzuhren verändern ihre Schwingungsfrequenz, wenn nach dem Hookschen Gesetz die Beschleunigung die Quarze verformt. Bei jedem quantenmechanischen System ist zu erwarten, daß die Abänderung des Hamiltonoperators, die die Beschleunigung bewirkt, auch die Energieniveaus ändert, mit der die Uhr betrieben wird. Werden zum Beispiel Atome in magnetischen Feldern abgelenkt, so verstimmen die Magnetfelder die Übergangsfrequenzen. In jedem Fall muß das Verhalten realer, beschleunigter Uhren physikalisch analysiert werden. Es ist nicht durch (3.41) axiomatisch festgelegt.

Uhren können durch völlig unterschiedliche physikalische Prozesse realisiert werden, wie zum Beispiel durch den Zerfall des Myons oder durch elektromagnetische Übergänge in Atomen. Nach Ausschluß der offensichtlich nichtidealen Uhren und nach Korrektur der bekannten Störeffekte, die bei realen Uhren auftreten, insbesondere nach Korrekturen (7.4), die gravitativ verursacht und in der Allgemeinen Relativitätstheorie verstanden werden, stimmt (3.41) ausnahmslos mit allen Beobachtungen überein. Darauf beruht zum Beispiel das Satellitennavigationssystem GPS [12].

Myonen werden in Speicherringen mit Magnetfeldern auf ihrer Bahn gehalten und intensiv untersucht, weil wir am Verhalten ihres Spins im Magnetfeld unser Verständnis der Elementarteilchenphysik mit einer Genauigkeit von 9 Dezimalen überprüfen können. Alle Beobachtungen, die man an diesen Myonen gemacht hat, sind verträglich mit der einfachen Annahme, daß die innere Uhr der Myonen, die ihren Zerfall regiert, unabhängig von der Beschleunigung die Zeit (3.41) anzeigt. So zeigte sich [13] innerhalb der Meßgenauigkeit von 1% keine Abweichung von (3.41), obwohl bei hochenergetischen Myonen die Beschleunigung im Speicherring etwa das $4 \cdot 10^{16}$-fache der Erdbeschleunigung beträgt. Bezogen auf die Masse $m_\mu c^2 = 105\,\mathrm{Mev}$ [1] des Myons, auf das Plancksche Wirkungsquantum $\hbar = 1,05 \cdot 10^{-34}\mathrm{Js}$ und die

Lichtgeschwindigkeit c, ist die Beschleunigung allerdings immer noch klein $b\frac{\hbar}{m_\mu c^3} \sim 10^{-13}$, diese Zahl ist die Geschwindigkeitsänderung des Myons im Speicherring relativ zur Lichtgeschwindigkeit während einer Schwingungsdauer seiner Wellenfunktion.

3.11 elastische Körper

Ein elastischer Körper besteht aus einer kontinuierliche Schar von Teilchen, die durch w^α, $\alpha = 1,2,3$, parametrisiert seien und Weltlinien $\Gamma_w : u \to x(u,w)$ durchlaufen. Von den Vektoren

$$u^m = \frac{\partial x^m}{\partial u} \ , \quad w^m_\alpha = \frac{\partial x^m}{\partial w^\alpha} \tag{3.47}$$

ist u^m tangential an die Weltlinie, die Vektoren w^m_α sind tangential an die Verbindungslinien zu Ereignissen mit gleichem Parameterwert u auf der Weltlinie der benachbarten Teilchen. Allerdings können dieselben Weltlinien Γ_w auch durch $u(u',w')$ mit $w' = w$ parametrisiert werden. Daher kommt den Vektoren w^m_α zum Ereignis auf der Nachbarweltlinie mit gleichem u keine unmittelbare Bedeutung zu. Nur die räumlichen Anteile

$$r^m_\alpha(u,w) = w^m_\alpha - \frac{u \cdot w_\alpha}{u \cdot u} u^m \ , \tag{3.48}$$

die senkrecht auf u^m stehen, sind von diesen Reparametrisierungen der Weltlinien unabhängig. Ihre Skalarprodukte bestimmen den räumlichen Abstand (Eigenschaft 4) des Teilchens mit Parameter w^α zu Nachbarteilchen $w^\alpha + dw^\alpha$

$$dl^2 = -r_\alpha \cdot r_\beta \, dw^\alpha dw^\beta = \big(- w_\alpha \cdot w_\beta + \frac{(u \cdot w_\alpha)(u \cdot w_\beta)}{u \cdot u} \big) dw^\alpha dw^\beta \ . \tag{3.49}$$

Für einen gleichförmig bewegten elastischen Körper stellt sich bei Abwesenheit von Gravitation eine Gleichgewichtslage mit konstanten Skalarprodukten $-r_\alpha \cdot r_\beta$ ein, die durch Wahl der Parameter w^α auf den Standardwert $-r_\alpha \cdot r_\beta = \delta_{\alpha\beta}$ gebracht werden können.

Betrachten wir ein Seil der Länge l, das aus einer einparametrigen Schar von Massepunkten mit zeitartigen Weltlinien Γ_w, $0 \le w \le l$ besteht. Das Seil sei anfänglich für $u = 0$ in Ruhe und zum Zerreißen gespannt, der Vektor $r^m(0,w) = w^m - \frac{(u\cdot w)}{(u\cdot u)} u^m$ sei konstant und habe Einheitslänge $r^2 = -1$. Wenn man das Seil beschleunigt und dabei die Randkurven Γ_0 und Γ_l für $u > 0$ vorgibt, so wird das Seil reißen, wenn im Parameterstreifen $u > 0$ und $0 < w < l$ für ein (u,w) die Länge dl größer als dw ist. Damit das Seil nicht zerreißt, muß für alle (u,w) im Parameterstreifen gelten

$$-r^2 \le 1 \ . \tag{3.50}$$

An der Frage [14, Kapitel 9], ob bei vorgegebenen Randkurven das Seil reißt, ist verwirrend, daß es für jedes raumartige Paar von Punkten $x(u,0)$ und $x(u',l)$ auf dem Rand raumartige Verbindungslinien gibt, die kürzer als l sind. Selbst wenn die gerade Verbindungslinie dieser Punkte länger ist als l, so läßt sich daraus nicht ohne weiteres schließen, daß das Seil reißt, denn in Raumzeitdiagrammen ist die Gerade unter allen denkbaren Verbindungslinien zweier raumartiger Punkte die längste und damit länger als die Linie

$$\frac{dx^m}{dl} = r^m \ , \tag{3.51}$$

die man erhält, wenn man an jedem Ereignis dem Vektor r^m zum gleichzeitigen, räumlich benachbarten Ereignis folgt.

Die folgende Überlegung zeigt aber, daß das Seil reißt, wenn zu einem Ereignis auf Γ_0 ein dazu raumartig liegendes Ereignis auf Γ_l existiert, dessen räumliche Entfernung größer als l ist. Dann gibt es nämlich einen Beobachter, für den diese beiden Ereignisse gleichzeitig und auf der x-Achse stattfinden. Wir wählen für alle Weltlinien Γ_w den Parameter u als die Koordinatenzeit t dieses Beobachters, dann gilt $t(u,w) = u$. Die Tangentialvektoren u^m und w^m haben spezieller die Form $u^m = (1, \dot{\vec{x}})$ mit $\dot{\vec{x}} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial u}$ und $w^m = (0, \vec{x}\,')$ mit $\vec{x}\,' = \frac{\partial \vec{x}}{\partial v}$. Die Ungleichung $-r^2 \leq 1$ besagt

$$\left(\vec{x}\,'\right)^2 + \frac{(\vec{x}\,' \cdot \dot{\vec{x}})^2}{1 - (\dot{\vec{x}})^2} \leq 1 \ . \tag{3.52}$$

Insbesondere sind die Weltlinien zeitartig, es ist also $(\dot{\vec{x}})^2 < 1$ und der zweite Term ist positiv. Die Ungleichung besagt also $\left(\vec{x}\,'\right)^2 \leq 1$ und daher $\left|\frac{\partial x^1}{\partial v}\right| \leq 1$ mit der Folge

$$\left|x^1(u,l) - x^1(u,0)\right| = \left|\int_{w=0}^{w=l} dw\, \frac{\partial x^i}{\partial w}\right| \leq \int_{w=0}^{w=l} dw\, \left|\frac{\partial x^i}{\partial w}\right| \leq \int_{w=0}^{w=l} dw \ = l \ . \tag{3.53}$$

Diese Ungleichung ist verletzt und das Seil zerreißt, falls der Abstand zweier raumartiger Ereignisse auf den Weltlinien Γ_0 und Γ_l größer als die Zerreißlänge l ist.

Durchlaufen beispielsweise für $t \geq 0$ der Anfang und das Ende eines zum Zerreißen gespannten Seils für $w = 0$ und $w = l$ verschobene Hyperbeln $\Gamma_w : t \to (t, x(t)) = (t, w + \sqrt{1+t^2})$, so reißt das Seil augenblicklich. Denn für $t > 0$ schneidet die raumartige Hyperbel der Länge l um den Punkt $(t, \sqrt{1+t^2})$ die Randkurve Γ_l bei $(t, l + \sqrt{1+t^2})$ und es gibt daher auf Γ_l Ereignisse, deren räumlicher Abstand zu $(t, \sqrt{1+t^2})$ größer ist als l.

Handelt es sich bei der Randkurven Γ_0 und Γ_l um konzentrische Hyperbeln, $\Gamma_w : t \to (t, x(t)) = (t, \sqrt{(1+w)^2 + t^2})$ für $w = 0$ und $w = l$, so zerreißt das Seil nicht, denn für die Weltlinien Γ_w gilt überall $r^2 = -1$.

Kapitel 4

relativistische Teilchen

4.1 freie Teilchen

Kräftefreie Teilchen bewegen sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit. Sie durchlaufen also eine gerade Weltlinie. Vergleichen wir verschiedene Weltlinien durch Ereignisse A und B, so ist die gerade Weltlinie dadurch ausgezeichnet, daß die in (3.41) definierte Zeit

$$\tau(B, A\,; \Gamma) := \frac{1}{c} \int\limits_{\underline{s}}^{\bar{s}} ds \sqrt{\left(\frac{dx}{ds}\right)^2} \tag{4.1}$$

größer als auf allen anderen Weltlinien von A nach B ist. Zu diesem Schluß gelangt man, wenn man die Weltlinie Γ variiert und die Zeit τ für eine Kurve $x(s)+\delta x(s)$ für kleine $\delta x(s)$ auswertet. Dann ändert sich τ in erster Ordnung um

$$\frac{1}{c} \int\limits_{\underline{s}}^{\bar{s}} ds \left(\sqrt{\left(\frac{d(x+\delta x)}{ds}\right)^2} - \sqrt{\left(\frac{dx}{ds}\right)^2} \right) = \frac{1}{c} \int\limits_{\underline{s}}^{\bar{s}} ds \; \frac{d\delta x}{ds} \cdot \frac{dx}{ds} \left(\sqrt{\left(\frac{dx}{ds}\right)^2} \right)^{-1}$$

und nach partieller Integration erhält man für die Differenz $\delta\tau$

$$\delta\tau = -\frac{1}{c} \int\limits_{\underline{s}}^{\bar{s}} ds \; \delta x \cdot \frac{d}{ds} \left(\frac{dx}{ds} \left(\sqrt{\left(\frac{dx}{ds}\right)^2} \right)^{-1} \right) \quad . \tag{4.2}$$

Randterme treten bei der partiellen Integration nicht auf, da auch die variierte Weltlinie durch A und B geht und da demnach $\delta x(\underline{s}) = 0$ und $\delta x(\bar{s}) = 0$

ist. Für eine Weltlinie extremaler Zeitdauer verschwindet $\delta\tau$ für alle Funktionen δx, die diese Randbedingungen erfüllen. Die Weltlinie $x(s)$ erfüllt daher die Differentialgleichung

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{dx}{ds}\left(\sqrt{\left(\frac{dx}{ds}\right)^2}\right)^{-1}\right) = 0 \ , \tag{4.3}$$

die besagt, daß der Einheitsvektor in Richtung der Tangente konstant ist. Die Länge des Tangentialvektors $\frac{dx}{ds}$ wird nicht festgelegt, da die Zeit τ, wie in (3.44) gezeigt, nicht von der Parametrisierung der Weltlinie abhängt.

Daß (4.3) nicht nur hinreichend sondern auch notwendig dafür ist, daß die Zeit stationär ist, zeigt folgende Überlegung. Wäre der Faktor bei δx^m zu einem Zeitpunkt größer Null, so wäre er in einer ganzen Umgebung dieses Punktes größer Null. Wählte man dann ein δx^m, das außerhalb dieser Umgebung verschwindet und innerhalb dieser Umgebung positiv ist, so wäre $\delta\tau$ negativ und die Zeit τ nicht stationär.

Wählt man die Parametrisierung so, daß der Tangentialvektor konstante Länge c hat

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 = c^2 \ , \tag{4.4}$$

dann stimmt der Bahnparameter s bis auf Wahl des Nullpunktes mit der Uhrzeit τ auf der Weltlinie überein und Gleichung (4.3) besagt, daß der Tangentialvektor sich längs der Bahn nicht ändert

$$\frac{d^2x}{ds^2} = 0 \ , \tag{4.5}$$

und die Weltlinie extremaler Zeit durch

$$x(s) = \frac{s}{\sqrt{1-\frac{\vec{v}^2}{c^2}}}\begin{pmatrix} c \\ \vec{v} \end{pmatrix} + x(0) \ . \tag{4.6}$$

gegeben ist. $\vec{v}$ und $x(0)$ werden durch Anfangs- oder Randbedingungen festgelegt.

Bei vorgegebenen Anfangs- und Endpunkten ist die Gerade in der Raumzeit eindeutig festgelegt. Auf ihr ist die Zeit nicht nur stationär sondern extremal. Die extremale Zeit $\tau(B, A, \Gamma)$ ist auf der geraden Weltlinie von A nach B größer als auf einer Weltlinie mit Knick. Die extremale Zeit ist also maximal.

Da freie Teilchen definitionsgemäß gerade Weltlinien durchlaufen, ist die Eigenzeit (4.1) bis auf einen Normierungsfaktor ihre Wirkung

$$W_{\text{Teilchen}}[x] = -mc \int ds \sqrt{\left(\frac{dx}{ds}\right)^2} \ . \tag{4.7}$$

Die physikalisch durchlaufenen Bahnen sind diejenigen, die bei festgehaltenen Randpunkten diese Wirkung (4.7) extremal machen, sie erfüllen also die Bewegungsgleichung (4.3).

4.2 Wirkungsprinzip

Abbildungen von Funktionen in die reellen Zahlen nennt man Funktionale. Zum Beispiel ordnet die Weglänge den Funktionen $x^m(t)$ die Länge der Bahn zu[1]. Kann man ein Funktional durch eine Reihe in den Funktionen $x^m(t)$ darstellen, so ist es von der Form

$$\begin{aligned} W[x] = \sum_n \frac{1}{n!} \int dt_1 dt_2 \ldots dt_n \, f_{m_1 m_2 \ldots m_n}(t_1, t_2, \ldots, t_n) \cdot \\ \cdot x^{m_1}(t_1) x^{m_2}(t_2) \ldots x^{m_n}(t_n) \end{aligned} \tag{4.8}$$

mit irgendwelchen Koeffizientenfunktionen $f_{m_1 m_2 \ldots m_n}(t_1, t_2, \ldots, t_n)$. Die Koeffizientenfunktionen heißen auch n-Punkt-Funktionen. Sie sind total symmetrisch unter jeder Permutation $\pi : \big(1, 2, \ldots, n\big) \to \big(\pi(1), \pi(2), \ldots, \pi(n)\big)$ der Argumente

$$f_{m_1 m_2 \ldots m_n}(t_1, t_2, \ldots, t_n) = f_{m_{\pi(1)} m_{\pi(2)} \ldots m_{\pi(n)}}(t_{\pi(1)}, t_{\pi(2)}, \ldots, t_{\pi(n)}) \ . \tag{4.9}$$

Lokale Funktionale, wie zum Beispiel die Weglänge, sind spezieller von der Form

$$W[x] = \int dt \, \mathcal{L}(x(t), \dot{x}(t), t) \ . \tag{4.10}$$

Der Wert solch eines lokalen Funktionals summiert sich aus Beiträgen von allen Zeiten und macht zu jedem Zeitpunkt t nur Gebrauch von einer Funktion $\mathcal{L}$ von den dann vorliegenden Daten t, x und $\dot{x}$ und eventuell von höheren, aber endlich hohen, Ableitungen von x. Die Größen t, x und seine Ableitungen bezeichnen wir als Jet-Variable. Auf den Variablen x und seinen

[1] Wir benennen in den nächsten zwei Abschnitten den Bahnparameter nicht mit s sondern mit t. $\dot{x}$ steht für die Ableitung von x nach dem Bahnparameter. Der Index m ($m = 1, \ldots, N =$ Zahl der Freiheitsgrade) zählt die Freiheitsgrade ab.

Ableitungen wirkt $\frac{d}{dt}$ algebraisch. Schreiben wir die n-te Ableitung als $x_{(n)}$, so bewirkt $\frac{d}{dt}$ eine Verschiebung im Ableitungsindex $\frac{d}{dt}x_{(n)} = x_{(n+1)}$.

Die Funktion $\mathcal{L}(x, \dot{x}, t)$, die im Integranden des lokalen Funktionals auftritt, heißt Lagrangefunktion. Sie ist eine Funktion der Jet-Variablen und ist zu unterscheiden von der verketteten Funktion $L(t) = \mathcal{L}(x(t), \dot{x}(t), t)$, die man erhält, wenn man die Funktion der Jet-Variablen auf der Bahn $x(t)$ ausgewertet und die Variable x und $\dot{x}$ durch die Funktionen $x(t)$ und $\dot{x}(t)$ ersetzt. Man kann zwar $\mathcal{L}(x, \dot{x}, t)$ nach x nicht aber $L(t)$ nach $x(t)$ ableiten. Wollen wir betonen, daß eine Gleichung als Identität in den Jet-Variablen gilt, so reden wir davon, daß sie *für alle* Bahnen gilt. Ist sie als Gleichung für die Funktion $L(t)$ gemeint, reden wir davon, daß sie *auf* Bahnen $x(t)$ gilt.

Physikalische Systeme sind durch ein lokales Funktional, die Wirkung, charakterisiert. Mit der Wirkung lassen sich Bewegungsgleichungen unabhängig vom verwendeten Koordinatensystem formulieren und der Zusammenhang von Symmetrie und Erhaltungsgrößen klären.

Wie wir am Ende von Abschnitt 4.3 zeigen werden, ist die Lagrangefunktion der lokalen Wirkung die Differenz

$$\mathcal{L}(x, \dot{x}, t) = E_{\text{kin}} - E_{\text{pot}} \tag{4.11}$$

von kinetischer und potentieller Energie. Zum Beispiel gehört zum Massepunkt an einer Feder, zum harmonischen Oszillator, die Lagrangefunktion

$$\mathcal{L}_{\text{Oszillator}}(x, \dot{x}, t) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}\kappa x^2 \tag{4.12}$$

und die Wirkung

$$W_{\text{Oszillator}}[x] = \int dt\, \frac{m}{2}(\dot{x}(t))^2 - \frac{\kappa}{2}(x(t))^2 \ . \tag{4.13}$$

Die Ableitung eines Funktionals $W[x + \lambda\delta x]$ nach λ bei $\lambda = 0$ mit beliebigem δx definiert die Funktionalableitung $\frac{\delta W}{\delta x^m(t)}$ bis auf Randterme, die wir vernachlässigen

$$\delta W[x, \delta x] = \lim_{\lambda\to 0}\frac{1}{\lambda}(W[x + \lambda\,\delta x] - W[x]) = \int dt\,\delta x^m(t)\,\frac{\delta W}{\delta x^m(t)} \ . \tag{4.14}$$

Gilt diese Gleichung für alle Variationen δx^m und ist die Funktionalableitung $\frac{\delta W}{\delta x^m(t)}$ stetig, so ist sie auch eindeutig, denn aus

$$\delta W[x, \delta x] = \int dt\,\delta x^m(t)\,f(t) = \int dt\,\delta x^m(t)\,g(t) \quad \forall \delta x^m \tag{4.15}$$

folgt $f(t) = g(t)$: Wäre nämlich zu einer Zeit t die Differenz $f(t) - g(t)$ positiv, so wäre sie in einer ganzen Umgebung positiv; wählte man dann ein δx^m, das innerhalb der Umgebung positiv ist und außerhalb verschwindet, so wäre $\int dt\, \delta x^m(t)\,(f(t) - g(t))$ positiv.

Für ein allgemeines Funktional (4.8) ist die Funktionalableitung durch

$$\frac{\delta W}{\delta x^m(t)} = \sum_n \frac{1}{n!} \int dt_1 dt_2 \ldots dt_n \, f_{m\, m_1 m_2 \ldots m_n}(t, t_1, t_2, \ldots, t_n) \cdot \\ \cdot x^{m_1}(t_1) x^{m_2}(t_2) \ldots x^{m_n}(t_n) \tag{4.16}$$

gegeben. Die Funktionalableitung ist selber wieder ein Funktional, das erneut differenziert werden kann. Die n-Punkt-Funktionen $f_{m_1 m_2 \ldots m_n}(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ sind die n-fachen Funktionalableitungen bei $x^m(t) \equiv 0$.

$$f_{m_1 m_2 \ldots m_n}(t_1, t_2, \ldots, t_n) = \frac{\delta^n W}{\delta x^{m_1}(t_1) \delta x^{m_2}(t_2) \ldots \delta x^{m_n}(t_n)} \Big|_{x^m(t) \equiv 0} \tag{4.17}$$

Um die Variationsableitung eines lokalen Funktionals zu bestimmen, betrachten wir, wie sich die Lagrangefunktion $\mathcal{L}(x_\lambda, \dot{x_\lambda}, t)$ als Funktion eines Parameters λ verhält, der eine Schar von Funktionen $x^m_\lambda(t) = x^m(t, \lambda)$ bezeichnet. Bei der Schar kann es sich beispielsweise um die Koordinaten einer Bahn x^m und beliebige Abweichungen δx^m handeln $x^m(t, \lambda) = x^m(t) + \lambda\, \delta x^m(t)$ oder um Bahnen, die durch kontinuierliche Transformationen mit Transformationsparameter λ auseinander hervorgehen. Die Funktion $x_{\lambda=0}$ nennen wir kürzer x, als $\delta\mathcal{L}$ und δx^m bezeichnen wir die Ableitung nach λ bei $\lambda = 0$. Da die Reihenfolge der Ableitungen nach λ und nach dem Bahnparameter t vertauscht werden kann, gilt

$$\delta \dot{x}^m = \frac{d}{dt} \delta x^m \ . \tag{4.18}$$

Daher besagt die Kettenregel für die Lagrangefunktion

$$\delta\mathcal{L} = \delta x^m \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^m} + \big(\frac{d}{dt} \delta x^m\big) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^m} \ . \tag{4.19}$$

Dies können wir mit der Produktregel als Summe einer vollständigen Ableitung und von Produkten mit undifferenzierten δx^m schreiben.

$$\delta\mathcal{L} = \delta x^m \big(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^m} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^m}\big) + \frac{d}{dt} \big(\delta x^m \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^m}\big) \tag{4.20}$$

Die Funktion der Jet-Variablen, die δx^m nach Abwälzen der Ableitung multipliziert

$$\frac{\hat{\partial}\mathcal{L}}{\hat{\partial} x^m} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^m} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^m} = \partial_{x^m} \mathcal{L} - \ddot{x}^n \partial_{\dot{x}^n} \partial_{\dot{x}^m} \mathcal{L} - \dot{x}^n \partial_{x^n} \partial_{\dot{x}^m} \mathcal{L} - \partial_t \partial_{\dot{x}^m} \mathcal{L} \ , \tag{4.21}$$

heißt Eulerableitung der Lagrangefunktion.[2]

Die Lagrangefunktion $\mathcal{L}$ ändert sich bei einer Änderung δx^m der Argumente um die vollständige Ableitung von $\delta x^m \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^m}$ und um δx^m mal der Eulerableitung $\frac{\hat{\partial}\mathcal{L}}{\hat{\partial} x^m}$. Von dieser Gleichung machen wir wiederholt Gebrauch. Sie gilt unabhängig davon, welche Änderung δx^m wir betrachten, ob sie eine beliebige Abweichung von physikalisch durchlaufenen Bahnen $x(t)$ bezeichnet, für die δx^m an Randpunkten verschwindet, oder ob δx^m für die Änderung von x^m unter einer Transformationsgruppe steht.

Aus (4.20) folgt die Variationsableitung der lokalen Wirkung (4.10)

$$\begin{aligned} \delta W[x, \delta x] &= \int dt\, \delta\mathcal{L}(x(t), \dot{x}(t), t) \\ &= \int dt\, \delta x^m \frac{\hat{\partial}\mathcal{L}}{\hat{\partial} x^m} + \frac{d}{dt}(\delta x^m \partial_{\dot{x}^m}\mathcal{L}) \ . \end{aligned} \tag{4.22}$$

Das Integral über die vollständige Ableitung ergibt Randterme

$$\int dt\, \frac{d}{dt}(\delta x^m \partial_{\dot{x}^m}\mathcal{L}) = \Big| \ \delta x^m \partial_{\dot{x}^m}\mathcal{L} \ \ . \tag{4.23}$$

Diese Randterme verschwinden für Bahnkurven, die durch dieselben Randpunkte gehen wie $x(t)$, da dort die Funktionen δx^m verschwinden. Die Funktionalableitung einer lokalen Wirkung (4.10) mit Lagrangefunktion $\mathcal{L}$ nach Variationen, die am Rand verschwinden, ist die Eulerableitung der Lagrangefunktion.

$$\frac{\delta W}{\delta x^m} = \frac{\hat{\partial}\mathcal{L}}{\hat{\partial} x^m} \tag{4.24}$$

Physikalisch durchlaufene Bahnkurven $x^m(t)$ sind bei Abwesenheit von Reibung und nichtholonomen Zwangsbedingungen durch das Prinzip der stationären Wirkung ausgezeichnet, daß die lokale Wirkung (4.10, 4.11) auf physikalischen Bahnen stationär ist bezüglich aller infinitesimalen Variationen der Bahn, die am Rand verschwinden. Es verschwindet also auf physikalischen Bahnen $x^m(t)$ die Eulerableitung der Lagrangefunktion

$$\Big(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^m} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^m}\Big)\Big|_{x(t)} = 0 \ . \tag{4.25}$$

Dies sind die Euler-Lagrange-Gleichungen für physikalische Bahnen $x(t)$. Sie sind die Bewegungsgleichungen, die physikalische Bahnen unter all denje-

[2]Die Eulerableitung von Lagrangefunktionen, die von höheren Ableitungen von x abhängt, ist im Anhang F gegeben.

nigen Bahnen aussondern, die zur Zeit $t = \underline{t}$ und $t = \bar{t}$ durch festgelegte Randpunkte gehen.[3]

Die Euler-Lagrange-Gleichungen (4.25) gelten in allen Koordinatensystemen, denn das Prinzip der extremalen Wirkung macht nicht Gebrauch von der Wahl von Koordinaten zur Beschreibung der Bahn. Fassen wir die Koordinaten x als Funktionen $x(y)$ von anderen Koordinaten y auf und schreiben wir die Lagrangefunktion um

$$\mathcal{L}'(y, \dot{y}, t) = \mathcal{L}(x(y), \frac{\partial x}{\partial y}\dot{y}, t) \ , \tag{4.26}$$

so gelten die Euler-Lagrange-Gleichungen in y-Koordinaten genau dann, wenn sie in x-Koordinaten erfüllt sind

$$\frac{\hat{\partial}\mathcal{L}'}{\hat{\partial} y^m} = \frac{\partial x^n}{\partial y^m}\frac{\hat{\partial}\mathcal{L}}{\hat{\partial} x^n} \ . \tag{4.27}$$

Beim harmonischen Oszillator (4.12) ist die Eulerableitung $-m\ddot{x} - \kappa x$ und die Euler-Lagrange-Gleichung hat die Lösung $x(t) = a\cos(\omega t + \varphi)$, wobei $\omega = \sqrt{\kappa/m}$ das 2π-fache der Frequenz ist. Die Amplitude a und die Phase φ werden durch die Anfangsbedingungen festgelegt.

Eine Funktion $\mathcal{L}$ der Jet-Variablen läßt sich genau dann als vollständige Ableitung schreiben, wenn ihre Eulerableitung als Funktion der Jet-Variablen verschwindet. Es ist klar, daß die Eulerableitung verschwindet, wenn $\mathcal{L} = \frac{dK(t,x)}{dt} = \partial_t K + \dot{x}\partial_x K$ eine Zeitableitung ist, denn dann ist $\delta\mathcal{L} = \frac{d}{dt}\delta K$. Um die Umkehrung zu zeigen, schreiben wir die Lagrangefunktion als Integral über ihre Ableitung

$$\mathcal{L}(x, \dot{x}, t) = \mathcal{L}(0, 0, t) + \int_0^1 d\lambda \, \frac{\partial}{\partial\lambda}\mathcal{L}(\lambda x, \lambda\dot{x}, t) \ . \tag{4.28}$$

Die Ableitung der Lagrangefunktion nach λ ist gemäß (4.20)

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\lambda}(\lambda x, \lambda\dot{x}, t) = x^m \frac{\hat{\partial}\mathcal{L}}{\hat{\partial} x^m}\Big|_{(\lambda x, \lambda\dot{x}, t)} + \frac{d}{dt}\big(x^m \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}^m}\Big|_{(\lambda x, \lambda\dot{x}, t)}\big) \ . \tag{4.29}$$

Demnach schreibt sich die Lagrangefunktion als

$$\mathcal{L}(x, \dot{x}, t) = x^m \int_0^1 d\lambda \, \frac{\hat{\partial}\mathcal{L}}{\hat{\partial} x^m}\Big|_{(\lambda x, \lambda\dot{x}, t)} + \frac{d}{dt}\big(x^m \int_0^1 d\lambda \, \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}^m} + \int^t dt' \mathcal{L}(0, 0, t')\big) \ . \tag{4.30}$$

[3] Ob durch festgelegte Randpunkte eine Kurve geht, die die Wirkung stationär macht, bedarf genauerer Untersuchung des Einzelfalls. Beim harmonischen Oszillator existiert keine physikalische Bahn, die zu den Zeiten t und $t + \frac{2\pi}{\omega}$ durch verschiedene Punkte geht. Beim relativistischen Teilchen müssen die Randpunkte der Weltlinie zeitartig zueinander liegen.

Dies ist eine vollständige Zeitableitung, falls die Eulerableitung der Lagrangefunktion identisch in den Jet-Variablen für alle $(\lambda x, \lambda \dot{x}, t)$ verschwindet.

4.3 Symmetrien und Erhaltungsgrößen

Das Relativitätsprinzip wird manchmal als Forderung „Alle physikalischen Gesetze sind in allen Inertialsystemen die gleichen“ formuliert. Diese Forderung ist schlecht definiert. Man kann jede Bewegungsgleichung in die Form $G_m(t) = 0$ bringen und sie Feynman folgend kurz als [15, Kapitel 25-6]

$$U = \sum_m \int dt (G_m(t))^2 = 0 \tag{4.31}$$

schreiben. Die Gleichung $U = 0$, daß die Unweltlichkeit U verschwindet, ist invariant unter der Gruppe aller invertierbaren Selbstabbildungen des Lösungsraumes der Bewegungsgleichung.

Wohldefiniert ist hingegen die Forderung nach Symmetrie der Wirkung. Das Relativitätsprinzip besagt: „Die Wirkung physikalischer Systeme ist lokal und invariant unter Poincaré-Transformationen“, also unter Translationen und Lorentztransformationen. Aus der Invarianz der Wirkung folgen Einschränkungen an die Lagrangefunktion und, wie das Noethertheorem zeigt, die Erhaltung von Energie, Impuls, Drehimpuls und Schwerpunktsgeschwindigkeit.

Um zu definieren, was eine Symmetrie oder Invarianz der Wirkung ist, betrachten wir kontinuierliche Transformationen von Kurven.

$$T_\alpha : x(t) \to T_\alpha x(t) \tag{4.32}$$

Zum Beispiel wird durch

$$T_\alpha x^m(t) = x^m(t) + \alpha c^m \tag{4.33}$$

eine Kurve räumlich in Richtung c^m verschoben oder durch

$$T_\alpha x^m(t) = x^m(t + \alpha) \tag{4.34}$$

zeitlich verschoben und durch

$$\begin{pmatrix} T_\alpha x(t) \\ T_\alpha y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \ . \tag{4.35}$$

um einen Winkel α gedreht. Der Transformationsparameter α sei so gewählt, daß $\alpha = 0$ zur identischen Abbildung gehört $T_0 x(t) = x(t)$.

Bei kontinuierlichen Transformationen können wir, anders als zum Beispiel bei Spiegelungen, nach dem Transformationsparameter ableiten. Wir bezeichnen als infinitesimale Transformation oder als Änderung von x^m die Ableitung ∂_α der transformierten Bahn $T_\alpha x$ nach dem Transformationsparameter bei $\alpha = 0$

$$\delta x^m = \partial_{\alpha|_{\alpha=0}} T_\alpha x^m \ . \tag{4.36}$$

Analog definieren wir die Änderung der Wirkung $W[T_\alpha x]$ als Ableitung nach dem Transformationsparameter α. Nach Kettenregel ändert sich W um

$$\delta W = \int dt \ \big(\partial_{\alpha|_{\alpha=0}} T_\alpha x^m\big) \frac{\delta W}{\delta x^m} \ . \tag{4.37}$$

Die Transformation T_α heißt Symmetrie der Wirkung $W[x]$, wenn sich die Wirkung nur um Randterme ändert, das heißt genauer [16], wenn sich der Integrand in (4.37) für alle Bahnen x^m als Ableitung einer Größe $\mathcal{Q}$ schreiben läßt

$$\delta x^m \frac{\delta W}{\delta x^m} + \frac{d}{dt}\mathcal{Q} = 0 \ . \tag{4.38}$$

Die physikalisch durchlaufenen Bahnen erfüllen die Bewegungsgleichungen $\frac{\delta W}{\delta x^m} = 0$, auf physikalischen Bahnen ist daher $\mathcal{Q}$ zeitunabhängig. Zu jeder kontinuierlichen Symmetrie der Wirkung gehört eine Erhaltungsgröße $\mathcal{Q}$!

Die Lagrangefunktion $\mathcal{L}$ einer lokalen Wirkung bleibt bei infinitesimalen Symmetrietransformationen wegen (4.20) und (4.24) bis auf eine Zeitableitung $\frac{d}{dt}K$ ungeändert

$$\delta\mathcal{L} = \delta x^m \frac{\hat{\partial}\mathcal{L}}{\hat{\partial} x^m} + \frac{d}{dt}\big(\delta x^m \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x^m}}\big) = \frac{d}{dt}K \tag{4.39}$$

mit $K = \delta x^m \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x^m}} - \mathcal{Q}$. Die Erhaltungsgröße $\mathcal{Q}$ ist also

$$\mathcal{Q} = \delta x^m \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x^m}} - K \ . \tag{4.40}$$

Bei einer lokalen Wirkung kann man für jede gegebene infinitesimale Transformation δx^m nach Ausrechnen von $\delta\mathcal{L}$ leicht entscheiden, ob sie zu einer kontinuierlichen Symmetrie gehört. $\delta\mathcal{L}$ läßt sich als Funktion der Jet-Variablen genau dann als Ableitung $\frac{d}{dt}K$ schreiben, wenn die Eulerableitung von $\delta\mathcal{L}$ verschwindet (4.30).

Umgekehrt gehört zu jeder Erhaltungsgröße eine kontinuierliche Symmetrie der Wirkung! Denn eine Funktion $\bar{\mathcal{Q}}(x, \dot{x}, t)$ der Jet-Variablen t, x und

$\dot{x}$ ist eine Erhaltungsgröße, wenn sich ihre Zeitableitung als Vielfaches der Funktionalableitung der Wirkung und eventuell von den Ableitungen der Funktionalableitungen[4] schreiben läßt

$$\frac{d}{dt}\bar{\mathcal{Q}}(x,\dot{x},t) + R_0^m \frac{\delta W}{\delta x^m} + R_1^m \frac{d}{dt}\frac{\delta W}{\delta x^m} = 0 \ . \tag{4.41}$$

Die Größen R_0^m und R_1^m hängen auf nicht weiter festgelegte Art von den Jet-Variablen ab. Fassen wir die Terme mit der Produktregel zusammen, so ist die Definitionsgleichung einer Erhaltungsgröße die Definition einer infinitesimale Symmetrie (4.38)

$$\frac{d}{dt}\big(\bar{\mathcal{Q}} + R_1^m \frac{\delta W}{\delta x^m}\big) + \big(R_0^m - \frac{d}{dt}R_1^m\big)\frac{\delta W}{\delta x^m} = 0 \ . \tag{4.42}$$

Die Wirkung ist also unter der infinitesimalen Transformation

$$\delta x^m = R_0^m - \frac{d}{dt}R_1^m \tag{4.43}$$

bis auf Randterme, die zur Ableitung $\frac{d}{dt}\mathcal{Q}$ der Erhaltungsgröße

$$\mathcal{Q} = \bar{\mathcal{Q}}(x,\dot{x},t) + R_1^m \frac{\delta W}{\delta x^m} \tag{4.44}$$

gehören, invariant. $\mathcal{Q}$ und $\bar{\mathcal{Q}}$ stimmen auf physikalischen Bahnen überein.

Der Zusammenhang von Symmetrien und Erhaltungsgrößen (4.40) ist von Emmy Noether 1918 formuliert worden.

Satz 1 *Noethertheorem: Zu jeder kontinuierlichen Symmetrie der Wirkung gehört eine Erhaltungsgröße und umgekehrt gehört zu jeder Erhaltungsgröße eine Symmetrie der Wirkung.*

Die erhaltene Größe $\mathcal{Q}$ (4.40) heißt Noether-Ladung.

Am Noethertheorem ist nichts zu beweisen, man muß nur erkennen, daß die Definition (4.38) einer Symmetrie der Wirkung eine Erhaltungsgröße definiert und daß umgekehrt die Definition einer Erhaltungsgröße eine Symmetrie definiert. Das Theorem ist deshalb wichtig, weil häufig Symmetrien der Wirkung offensichtlich sind und als geometrische Eigenschaft einfach durch Ansehen gefunden werden können.

[4]Die Verallgemeinerung auf den Fall, daß höhere Ableitungen auftreten, bleibt dem Leser und Anhang F überlassen.

Erhaltungsgrößen sind ausschlaggebend für die Frage, ob die Bewegungsgleichungen integrabel sind, das heißt, ob sich die Lösungen durch Rechenoperationen wie Integrieren gegebener Funktionen und Auflösen implizit gegebener Funktionen angeben lassen. Betreffen die Bewegungsgleichungen N Freiheitsgrade, so sind die Gleichungen genau dann integrabel, wenn es N unabhängige Erhaltungsgrößen $\mathcal{Q}_i$, $i = 1, 2, \ldots, N$ gibt, deren zugehörige infinitesimale Transformationen δ_i, hintereinander ausgeführt, wie Verschiebungen in ihrer Reihenfolge vertauscht werden dürfen $\delta_i \delta_j = \delta_i \delta_j$. Ändert man integrable Bewegungsgleichungen durch Zusatzterme ab, so führen solche Störungen integrabler Bewegung, selbst wenn sie klein sind, mit geringer, aber nichtverschwindender Wahrscheinlichkeit zu chaotischen Bahnen. Die Herleitung und Diskussion dieser wichtigen Erkenntnisse füllt Bücher [17–20], auf die hier nur verwiesen sei.

Über die Tatsache hinaus, daß Symmetrien der Wirkung mit Erhaltungsgrößen zusammenhängen, sind Symmetrien wichtig, weil man aus einer Lösung der Bewegungsgleichungen durch Symmetrietransformationen weitere Lösungen gewinnen kann. Zum Beispiel erhält man in der Allgemeinen Relativitätstheorie das Gravitationsfeld einer gleichförmig bewegten Masse aus demjenigen der ruhenden Masse durch eine Lorentztransformation. Transformationen, die Lösungen der Bewegungsgleichung auf andere Lösungen abbilden, sind daher auch in dem Fall wichtig, daß sie keine Symmetrien der Wirkung sind und nicht zu Erhaltungsgrößen gehören.

Transformationen, die Lösungen von Bewegungsgleichungen aufeinander abbilden, sind nicht unbedingt Symmetrien der Wirkung. Zum Beispiel werden Lösungen der Bewegungsgleichung $\ddot{x} = -g$ eines senkrecht fallenden Teilchens durch $x(t) \to \alpha^2 x(t/\alpha)$ auf Lösungen abgebildet, aber die infinitesimale Transformation $\delta x = 2x - \dot{x}$ läßt die Lagrangefunktion $\mathcal{L} = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 - mgx$ nicht invariant.

Die kinetische Energie $E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m\vec{v}^2$ eines nichtrelativistischen Teilchens ist invariant unter Drehungen und Verschiebungen. Sie hängt nicht davon ab, wo das sich bewegende Teilchen ist und nicht davon, in welche Richtung es sich bewegt. Besteht die Lagrangefunktion aus solch einer verschiebungsinvarianten kinetischen Energie und ist die potentielle Energie in einer Richtung c^m konstant $V(x^m) = V(x^m + \alpha c^m)$, so ist die die Lagrangefunktion invariant $\delta\mathcal{L} = 0$ unter der Verschiebung (4.33). Die zur infinitesimalen Verschiebung $\delta x^m = c^m$ gehörige Erhaltungsgröße (4.40)

$$c^m \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^m} \tag{4.45}$$

ist definitionsgemäß der Impuls in Richtung des Vektors c^m. Verschiebungsinvarianz ist die Ursache von Impulserhaltung.

Eine Variable x, die in der Lagrangefunktion nur mit ihrer Ableitung auftritt, heißt zyklische Variable. Ist zum Beispiel x^1 zyklisch, so ist die Lagrangefunktion invariant unter Translationen[5] $x^m \to x^m + \alpha\delta^m{}_1$ oder unter der infinitesimalen Änderung $\delta x^m = \delta^m{}_1$. Die Noether-Ladung stimmt mit dem zu x^1 konjugierten Impuls $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}^1}$ überein, der wegen den Euler-Lagrange-Gleichungen (4.25) offensichtlich erhalten ist, wenn $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^1} = 0$ ist.

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^1} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}^1} = 0 \tag{4.46}$$

Ist die Wirkung invariant unter Drehungen um eine Achse (4.35), so ist die zugehörige Noether-Ladung definitionsgemäß der Drehimpuls in Richtung dieser Achse.

Zur Zeittranslation (4.34) gehört gemäß (4.36) die infinitesimale Transformation

$$\delta x^m = \dot{x}^m. \tag{4.47}$$

Dies ist eine infinitesimale Symmetrie, falls die Lagrangefunktion $\mathcal{L}(x, \dot{x}, t)$ nicht von t abhängt, denn dann gilt wegen $\partial_t\mathcal{L} = 0$

$$\delta\mathcal{L} = \delta x^m\ \partial_{x^m}\mathcal{L} + (\frac{d}{dt}\delta x^m)\partial_{\dot{x}^m}\mathcal{L} = \dot{x}^m\ \partial_{x^m}\mathcal{L} + \ddot{x}^m\partial_{\dot{x}^m}\mathcal{L} = \frac{d\mathcal{L}}{dt} - \partial_t\mathcal{L} = \frac{d\mathcal{L}}{dt}\,,$$

also (4.39) mit $K = \mathcal{L}$. Die zur Zeittranslation gehörige Noether-Ladung (4.40), dies ist definitionsgemäß die Energie E, ist daher

$$E = \dot{x}^m\frac{\partial}{\partial\dot{x}^m}\mathcal{L} - \mathcal{L}\,. \tag{4.48}$$

Die Energie ist erhalten, wenn die Lagrangefunktion nicht explizit von der Zeit abhängt.

Aus (4.48) folgt das Rezept (4.11) für die Lagrangefunktion. Der Operator $\dot{x}\partial_{\dot{x}}$ zählt den Homogenitätsgrad in Geschwindigkeiten ab: $\dot{x}\partial_{\dot{x}}(\dot{x})^n = n(\dot{x})^n$. Jeder Term in der Energie, der homogen vom Grad n mit $n \neq 1$ in Geschwindigkeiten ist, muß in der Lagrangefunktion mit Vorfaktor $1/(n-1)$ erscheinen, damit er zur Energie (4.48) mit Koeffizient 1 beiträgt. Für kinetische Terme ist $n = 2$, für potentielle Energie ist $n = 0$. Also ist $\mathcal{L} = E_{\text{kin}} - E_{\text{pot}}$.

Für den harmonischen Oszillator ergibt sich die Energie

$$E_{\text{Oszillator}} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\kappa x^2\,. \tag{4.49}$$

Die Definition (4.48) der Energie wird oft auch als Definition der Hamiltonfunktion gelesen

$$\mathcal{H}(x,p) = \dot{x}^m p_m - \mathcal{L}\,, \quad p_m = \partial_{\dot{x}^m}\mathcal{L}\ . \tag{4.50}$$

[5] $\delta^m{}_n$ mit zwei Indizes bezeichnet das Kronecker-Delta (A.7).

Dabei werden statt Ort x^n und Geschwindigkeit $\dot{x}^m$ die Phasenraumvariablen, der Ort x^n und der kanonisch konjugierte Impuls $p_m = \partial_{\dot{x}^m}\mathcal{L}$, als unabhängig betrachtet. In Phasenraumvariablen lautet die Hamiltonfunktion des harmonischen Oszillators

$$\mathcal{H}_{\text{Oszillator}} = \frac{p^2}{2m} + \kappa\frac{x^2}{2}\,. \tag{4.51}$$

Formuliert man die Bewegung von Teilchen im Phasenraum, so hat diese Zeitentwicklung die Eigenschaft, flächentreu bezüglich des Flächenmaßes $dp_i dq^i - dH dt$ zu sein [17]. Auf dieser wichtigen geometrischen Eigenschaft beruht das Kolmogorov-Arnold-Moser-Theorem [18] und die daraus folgenden Schlüsse, daß schon kleine Störungen integrabler Bewegungen zu chaotischen Bahnen führen [19, 20], die im Raum aller Bahnen dicht liegen, aber geringes Maß haben.

Gilt für eine eindimensionale Bewegung ein Energiesatz $\frac{dE}{dt} = 0$ und ist die Energie von der Form

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + V(x) \tag{4.52}$$

mit einem Potential V, so läßt sich die Zeit $t(x)$, zu der ein Bahnpunkt durchlaufen wird, als Integral angeben und die Bahn $x(t)$ als Umkehrfunktion von $t(x)$ ermitteln. Denn wenn wir nach $\dot{x}$ auflösen und das Vorzeichen von $\dot{x}$ nach Bahnabschnitt wählen, je nach dem, ob x zu- oder abnimmt, so erhalten wir für zunehmendes x

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))}\,. \tag{4.53}$$

Die Ableitung der Umkehrfunktion ist hierzu invers $\frac{dt}{dx} = (\frac{dx}{dt})^{-1}$

$$\frac{dt}{dx} = \left(\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))}\right)^{-1}\,, \tag{4.54}$$

und $t(x)$ kann durch Integration über einen gegebenen Integranden bestimmt werden

$$t(x) - t(\underline{x}) = \int_{\underline{x}}^{x} \frac{dx'}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x'))}}\,. \tag{4.55}$$

Alle lösbaren Bewegungsgleichungen sind deshalb lösbar, weil sie genügend viele Erhaltungsgrößen besitzen und weil sich mit den Erhaltungsgrößen die Lösungen wie bei eindimensionaler Bewegung als Umkehrfunktion von Integralen über gegebene Funktionen ermitteln lassen.

4.4 Energie und Impuls

Die Wirkung (4.7) des freien, relativistischen Teilchens ist invariant unter Translationen $x^m \to x^m - a^m$. Dazu gehören vier infinitesimale Translationen δ_m $m = 0, \ldots, 3$, die jeweils die zugehörige Koordinate verschieben.

$$\delta_n x^m = -\delta^m{}_n \tag{4.56}$$

Die Lagrangefunktion (4.7) $\mathcal{L} = -mc\sqrt{\left(\frac{dx}{ds}\right)^2}$ ist unter diesen Translationen strikt invariant, die Größe K in (4.40) ist also Null. Die zu den Translationen δ_n gehörigen Noether-Ladungen sind die vier Komponenten des Viererimpulses

$$P_n = -\frac{\partial}{\partial \dot{x}^n}\mathcal{L} = mc\,\frac{\frac{dx_n}{ds}}{\sqrt{\left(\frac{dx}{ds}\right)^2}}\,. \tag{4.57}$$

Ihre Größe hängt nicht von der Parametrisierung der Weltlinie ab. Wählen wir $s = t$, so lesen wir wegen $x^0 = ct$ und mit $\vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt}$ den Viererimpuls ab.

$$P^0 = \frac{mc}{\sqrt{1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}}} \quad E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}}} \tag{4.58}$$

$$\vec{P} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}}} \tag{4.59}$$

Die Nullkomponente des Viererimpulses, P^0, ist bis auf einen Faktor c die Energie: $P^0 = E/c$. Es ist ja P^0 die Erhaltungsgröße zu Translationen von $x^0 = ct$ und E die Erhaltungsgröße, die zu Translationen von t gehört.

Die Gleichungen (4.58) und (4.59) geben die Geschwindigkeitsabhängigkeit von Energie und Impuls relativistischer Teilchen an. Insbesondere haben ruhende Teilchen die Energie

$$E_{\text{Ruhe}} = mc^2\ . \tag{4.60}$$

Diese wohl berühmteste Gleichung der Physik erscheint hier eher nebenbei. Auf ihr beruht die Erkenntnis, daß bei Umwandlung von Atomkernen durch Spaltung oder Verschmelzung Energien freigesetzt werden können, denn die Gesamtmasse der Kerne ist meßbar verschieden von der Summe der Einzelmassen. Der Massenunterschied beruht auf Bindungsenergie, die militärisch oder friedlich, zerstörerisch oder nutzbringend verwendet werden kann. Gleichung (4.58) enthält auch die Aussage, daß es unendlich viel Energie kosten

würde, ein massives Teilchen auf Lichtgeschwindigkeit zu bringen. Massive Teilchen sind immer langsamer als Licht.

Die Masse m ist geschwindigkeitsunabhängig. In manchen Darstellungen der Relativitätstheorie wird der Begriff Masse per Definition $E = mc^2$ als Synonym für die geschwindigkeitsabhängige Energie verwendet. Das vergeudet einen Begriff, denn man braucht kein Synonym für Energie. Heutzutage bezeichnet man mit Masse die Größe, die in veralteten Darstellungen umständlich Ruhemasse heißt.

Die Bewegungsgleichungen relativistischer, geladener Teilchen ist, wie wir in Abschnitt 5.3 zeigen, die Aussage, daß der Gesamtimpuls der wechselwirkenden Teilchen und Felder erhalten bleibt, und hat die Form $\frac{d}{dt}P = F$, wobei die Kraft F der Impulsfluß ist, der vom restlichen System auf das Teilchen übergeht. Bei mechanischen Anordnungen sind, lange bevor relativistische Korrekturen meßbar werden, Korrekturen wichtig, die die endliche Schallgeschwindigkeit in den Körpern, die ja nicht ideal starr sind, berücksichtigen. Bei hohen Relativgeschwindigkeiten werden die Kräfte auf ein Teilchen durch Stöße mit anderen Teilchen bewirkt, die durch Energie- und Impulserhaltung eingeschränkt sind, und durch Wechselwirkung mit Feldern, wie dem elektromagnetischen Feld oder dem gravitativen Feld, der Metrik.

Der Begriff „geschwindigkeitsabhängige Masse“ lenkt ab von der Frage „Wie lauten die relativistischen Bewegungsgleichungen?“ weil er zur Mißdeutung verführt, es seien keine anderen Änderungen als die der Masse in der Newtonschen Bewegungsgleichung nötig. Ähnlich einengend wirkt die Formulierung: „Was ist die geschwindigkeitsabhängige, gravitationserzeugende Masse?“ statt der Frage „Was ist die Quelle von Gravitation?“, die Spielraum für die zutreffende Antwort läßt, daß der Energie-Impulstensor, also Energie- und Impulsdichte und die zugehörigen Energie- und Impulsströme, Quelle der Gravitation ist.

Die Masse verknüpft die vier Komponenten des Impulses eines freien Teilchens. Unabhängig von der Geschwindigkeit gilt

$$P^2 = (P^0)^2 - \vec{P}^{\,2} = m^2c^2\,, \quad P^0 > 0\,. \tag{4.61}$$

Dies ist die Gleichung für eine Schale eines Hyperboloids: die Viererimpulse eines freien Teilchens liegen auf der Massenschale.

Die Beziehung (4.61) von Energie und Impuls gilt auch für masselose Teilchen, zum Beispiel für Photonen. Ihr Impuls P ist lichtartig

$$P^2 = (P^0)^2 - \vec{P}^{\,2} = 0\,, \quad P^0 = |\vec{P}| > 0 \tag{4.62}$$

und durch ein Vielfaches $P^m = \hbar k^m$ des Wellenvektors k gegeben.

4.5 Compton-Streuung

Die Wirkung für N freie Teilchen ist einfach die Summe von Wirkungen (4.7), wobei das i-te Teilchen die Bahnkurve $x_{(i)}$ $i = 1, \ldots, N$ durchläuft

$$W[x_{(1)}, \ldots, x_{(N)}] = \sum_{i=1}^{N} -m_i c \int ds \sqrt{\left(\frac{dx_{(i)}}{ds}\right)^2} \ . \tag{4.63}$$

Trivialerweise bleibt der Gesamtimpuls

$$P^m = \sum_{i=1}^{N} P^m_{(i)} \tag{4.64}$$

erhalten, denn schon jeder einzelne Vierimpuls ist wegen fehlender Wechselwirkung der Teilchen eine Erhaltungsgröße. Anders als die einzelnen Impulse bleibt aber der Gesamtimpuls auch bei Wechselwirkung eine Erhaltungsgröße, wenn nur die Wechselwirkung invariant unter Translationen von Raum und Zeit ist. Dies besagt das Noethertheorem (Satz 1). Wenn die Teilchen weit voneinander entfernt sind und man die Wechselwirkung vernachlässigen kann, so ist dieser erhaltene Impuls durch (4.64) gegeben. Diese theoretische Folgerung, daß bei wechselwirkenden Teilchen der Gesamtimpuls, das heißt die Energie und der räumliche Impuls, erhalten bleibt, ist in allen relevanten Experimenten und Beobachtungen bestätigt.

Allerdings bedurfte es einer „verzweifelten Hypothese“ von Pauli, der ein Neutrino als zusätzlichen Buchungsposten einführte, um die Energie-Impuls-Bilanz beim Betazerfall auszugleichen. Jahrzehnte später wurde das Neutrino (mittlerweile genauer 3 Arten von Neutrinos) nachgewiesen und seine postulierten Eigenschaften experimentell bestätigt.

Energie- und Impulserhaltung gilt nicht in der Allgemeinen Relativitätstheorie, wenn die Metrik nicht Poincaré-invariant ist. Zum Beispiel kühlt die Hintergrundstrahlung, die das Universum ausfüllt, durch Expansion ab, ohne daß die dabei abnehmende Energie woanders erscheint.

Energie- und Impulserhaltung legen die physikalischen Größen bei elastischer Streuung zweier Teilchen, also bei einem Streuprozeß, bei dem die Zahl der Teilchen und ihre Massen unverändert bleiben, fast vollständig fest.

Betrachten wir spezieller ein Photon, das mit Energie $E = c\, P^0_{(1)}$ einfällt und um den Winkel θ an einem zunächst ruhenden Elektron gestreut wird. Dieser Prozeß heißt Compton-Streuung.

Seien $P_{(1)}$ und $P_{(2)}$ die Vierimpulse von Photon und Elektron vor der Streuung und $P'_{(1)}$ und $P'_{(2)}$ nachher. Weil die Streuung elastisch ist und sich die Zahl der Teilchen und ihre Massen nicht ändern, gilt

$$P^2_{(1)} = P'^2_{(1)} = 0 \,, \quad P^2_{(2)} = P'^2_{(2)} = m^2 c^2 \ . \tag{4.65}$$

Hierbei ist m die Masse des Elektrons. Photonen haben keine Masse $m_{\text{Photon}} = 0$. Der Betrag ihres räumlichen Impulses ist daher $|\vec{P}_{(1)}| = E/c$. Der gleiche Zusammenhang mit der Energie gilt nach der Streuung

$$|\vec{P}_{(1)}| = E/c\,, \quad |\vec{P}'_{(1)}| = E'/c\ . \tag{4.66}$$

Viererimpulserhaltung besagt

$$P_{(1)} + P_{(2)} = P'_{(1)} + P'_{(2)}\ . \tag{4.67}$$

Also gilt insbesondere

$$(P_{(1)} + P_{(2)} - P'_{(1)})^2 = P'^2_{(2)}\ . \tag{4.68}$$

Man multipliziert aus und verwendet, daß die Massen gleich bleiben (4.65).

$$P_{(1)} \cdot P_{(2)} - P_{(1)} \cdot P'_{(1)} - P_{(2)} \cdot P'_{(1)} = 0 \tag{4.69}$$

Weil das Elektron zunächst ruht, ist $\vec{P}_{(2)} = 0$ und $P^0_{(2)} = mc$. Daher sind die Skalarprodukte $P_{(1)} \cdot P_{(2)}$ und $P'_{(1)} \cdot P_{(2)}$ einfach

$$P_{(1)} \cdot P_{(2)} = Em\,, \quad P'_{(1)} \cdot P_{(2)} = E'm\ . \tag{4.70}$$

Das Skalarprodukt $P_{(1)} \cdot P'_{(1)}$ schreibt sich als Funktion des Streuwinkels θ als

$$P_{(1)} \cdot P'_{(1)} = \frac{EE'}{c^2} - \vec{P}_{(1)} \cdot \vec{P}'_{(1)} = \frac{EE'}{c^2} - |\vec{P}_{(1)}||\vec{P}'_{(1)}| \cos\theta = \frac{EE'}{c^2}(1 - \cos\theta)\ . \tag{4.71}$$

Setzen wir die Skalarprodukte ein, so besagt (4.69)

$$0 = Em - \frac{EE'}{c^2}(1 - \cos\theta) - E'm\ . \tag{4.72}$$

Demnach ist die Energie des auslaufenden Photons durch den Streuwinkel festgelegt

$$E' = \frac{mc^2}{1 - \cos\theta + \frac{mc^2}{E}} \quad \text{oder} \quad \frac{mc^2}{E'} = \frac{mc^2}{E} + 1 - \cos\theta\ . \tag{4.73}$$

Diese Relation ist experimentell überprüft und bestätigt.

Photonen der Energie E sind in elektromagnetischen Feldern der Frequenz ν enthalten, wobei der Zusammenhang $E = h\nu$ besteht. Dabei ist die Konstante $h = 6,626 \cdot 10^{-34}$Js [1] das von Planck eingeführte Wirkungsquantum. Es besagt (4.73) also, daß die Frequenz von gestreuten elektromagnetischen

Wellen vom Streuwinkel abhängt und kleiner als die Frequenz der einfallenden Welle ist. Dies Ergebnis widerspricht der Vorstellung, daß die einfallende elektromagnetische Welle ein geladenes Teilchen beschleunigt, das dann seinerseits eine Welle mit den gestreuten Photonen abstrahlt. Bei solch einem Prozeß würde die Frequenz der abgestrahlten Welle mit der ursprünglichen Frequenz übereinstimmen. Gleichung (4.73) hingegen ergibt sich aus der Annahme, daß Elektronen Teilchen sind und daß elektromagnetische Wellen aus Teilchen, nämlich Photonen, bestehen. Sie ist aber kein Beweis für die Teilcheneigenschaft elektromagnetischer Wellen. Man gelangt ebenfalls zu (4.73), wenn man – was wir nicht getan haben – sowohl das Elektron als auch das Photon als Welle behandelt. Daß je nach betrachtetem physikalischen Prozeß Wellen sich teilchenartig verhalten und Teilchen Welleneigenschaften haben, macht die Grundlage der Quantenmechanik aus.

Kapitel 5

Elektrodynamik

5.1 kovariante Maxwellgleichungen

Elektrische und magnetische Felder $\vec{E}(x)$ und $\vec{B}(x)$ wirken sich durch die Lorentzkraft $\vec{F}(x,\vec{v})$ auf ein geladenes Teilchen aus.

$$\vec{F}_{\text{Lorentz}}(x,\vec{v}) = q\big(\vec{E}(x) + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B}(x)\big) \tag{5.1}$$

Hierbei ist q die Ladung und $\vec{v}$ die Geschwindigkeit des Teilchens, das zur Zeit t den Ort $\vec{x} = (x^1, x^2, x^3)$ durchläuft. Das Magnetfeld $\vec{B}$ hat dieselbe Dimension wie das elektrische Feld $\vec{E}$. Die Feldstärken sind Funktionen des Vierervektors $x = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ mit $x^0 = ct$.

Die elektromagnetischen Felder hängen mit der Ladungsdichte ρ und der Stromdichte $\vec{\jmath}$ durch die Maxwellgleichungen zusammen

$$\text{div}\vec{B} = 0 \ , \qquad \text{rot}\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{B} = 0 \ , \tag{5.2}$$

$$\text{div}\vec{E} = 4\pi\rho \ , \qquad \text{rot}\vec{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{E} = \frac{4\pi}{c}\vec{\jmath} \, . \tag{5.3}$$

Schreibt man für die partiellen Ableitungen nach den Raumzeitkoordinaten

$$\partial_0 = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x^0} \, , \quad \partial_1 = \frac{\partial}{\partial x^1} \, , \quad \partial_2 = \frac{\partial}{\partial x^2} \, , \quad \partial_3 = \frac{\partial}{\partial x^3} \, , \tag{5.4}$$

so lauten die homogenen Maxwellgleichungen (5.2)

$$\begin{aligned} \partial_1 B^1 + \partial_2 B^2 + \partial_3 B^3 &= 0 \ , \\ \partial_2 E^3 - \partial_3 E^2 + \partial_0 B^1 &= 0 \ . \\ \partial_3 E^1 - \partial_1 E^3 + \partial_0 B^2 &= 0 \ , \\ \partial_1 E^2 - \partial_2 E^1 + \partial_0 B^3 &= 0 \ . \end{aligned}$$

Wir deuten die Feldstärken als die sechs Komponenten eines antisymmetrischen Tensors, des Feldstärketensors [1]

$$F_{mn} = -F_{nm} \ , \quad m,n \in \{0,1,2,3\} \ , \quad F_{0i} = E^i \ , \ F_{ij} = -\varepsilon^{ijk} B^k \ , \tag{5.5}$$

dessen Komponenten wir der Übersichtlichkeit wegen in einer Matrix angeben

$$\begin{pmatrix} F_{00} & F_{01} & F_{02} & F_{03} \\ F_{10} & F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ F_{20} & F_{21} & F_{22} & F_{23} \\ F_{30} & F_{31} & F_{32} & F_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & E^1 & E^2 & E^3 \\ -E^1 & 0 & -B^3 & B^2 \\ -E^2 & B^3 & 0 & -B^1 \\ -E^3 & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix} \ . \tag{5.6}$$

Dann haben die homogenen Maxwellgleichungen die Form

$$\begin{aligned} \partial_1 F_{23} + \partial_2 F_{31} + \partial_3 F_{12} &= 0 \ , \\ \partial_2 F_{30} + \partial_3 F_{02} + \partial_0 F_{23} &= 0 \ , \\ \partial_3 F_{01} + \partial_0 F_{13} + \partial_1 F_{30} &= 0 \ , \\ \partial_0 F_{12} + \partial_1 F_{20} + \partial_2 F_{01} &= 0 \end{aligned}$$

und können in Indexschreibweise kurz als

$$\partial_l F_{mn} + \partial_m F_{nl} + \partial_n F_{lm} = 0 \tag{5.7}$$

geschrieben werden. In dieser kovarianten Form der homogenen Maxwellgleichungen ändert die linke Seite wegen $F_{mn} = -F_{nm}$ unter jeder Paarvertauschung von Indizes ihr Vorzeichen, sie ist also total antisymmetrisch unter Permutationen der Indizes. Die Gleichung (5.7) besteht nicht aus $4 \cdot 4 \cdot 4$ unabhängigen Komponentengleichungen, wie man bei drei Indizes l, m und n und einem Laufbereich über vier Werte vermuten könnte, sondern l, m und n müssen in einer nichttrivialen Gleichung paarweise verschieden sein und ihre Permutation führt nicht auf eine neue Gleichung. Daher enthält (5.7) $4 \cdot 3 \cdot 2 \,/\, 3! = 4$ unabhängige Gleichungen.

Die inhomogenen Maxwellgleichungen (5.3) lauten ausgeschrieben

$$\begin{aligned} \partial_1 E^1 + \partial_2 E^2 + \partial_3 E^3 &= \frac{4\pi}{c} \, c\rho \ , \\ -\partial_0 E^1 + \partial_2 B^3 - \partial_3 B^2 &= \frac{4\pi}{c} \, j^1 \ , \\ -\partial_0 E^2 + \partial_3 B^1 - \partial_1 B^3 &= \frac{4\pi}{c} \, j^2 \ , \\ -\partial_0 E^3 + \partial_1 B^2 - \partial_2 B^1 &= \frac{4\pi}{c} \, j^3 \ . \end{aligned}$$

[1] Die Indizes i,j,k haben Werte aus $\{1,2,3\}$. ε^{ijk} ist total antisymmetrisch, $\varepsilon^{ijk} = -\varepsilon^{jik} = -\varepsilon^{ikj}$. Es verschwindet also, wenn zwei der Indizes gleiche Werte annehmen. ε^{ijk} ist 1, falls i,j,k eine gerade Permutation von $1,2,3$ ist, und -1 bei einer ungeraden Permutation: $\varepsilon^{123} = \varepsilon^{231} = \varepsilon^{312} = 1$, $\varepsilon^{213} = \varepsilon^{321} = \varepsilon^{132} = -1$.

oder, wenn wir die elektrischen und magnetischen Felder als Komponenten des Feldstärketensors schreiben und zur Betonung der Struktur verschwindende Terme wie $\partial_0 F_{00}$ einfügen

$$\begin{aligned}
\partial_0 F_{00} - \partial_1 F_{10} - \partial_2 F_{20} - \partial_3 F_{30} &= \frac{4\pi}{c}\, c\rho \ , \\
-\partial_0 F_{01} + \partial_1 F_{11} + \partial_2 F_{21} + \partial_3 F_{31} &= \frac{4\pi}{c}\, j^1 \ , \\
-\partial_0 F_{02} + \partial_3 F_{32} + \partial_1 F_{12} + \partial_2 F_{22} &= \frac{4\pi}{c}\, j^2 \ , \\
-\partial_0 F_{03} + \partial_1 F_{13} + \partial_2 F_{23} + \partial_3 F_{33} &= \frac{4\pi}{c}\, j^3 \ .
\end{aligned}$$

Das Minuszeichen bei den Komponenten F_{01}, F_{02} und F_{03} gehört zur Definition der Komponenten des Feldstärketensors mit oberen Indizes[2]

$$F^{mn} = \eta^{mk}\eta^{nl} F_{kl} \ . \tag{5.8}$$

$$\begin{pmatrix} F^{00} & F^{01} & F^{02} & F^{03} \\ F^{10} & F^{11} & F^{12} & F^{13} \\ F^{20} & F^{21} & F^{22} & F^{23} \\ F^{30} & F^{31} & F^{32} & F^{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & -B^3 & B^2 \\ E^2 & B^3 & 0 & -B^1 \\ E^3 & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix} \tag{5.9}$$

Dann haben die inhomogenen Maxwellgleichungen die Form

$$\begin{aligned}
\partial_0 F^{00} + \partial_1 F^{10} + \partial_2 F^{20} + \partial_3 F^{30} &= \frac{4\pi}{c}\, c\rho \ , \\
\partial_0 F^{01} + \partial_1 F^{11} + \partial_2 F^{21} + \partial_3 F^{31} &= \frac{4\pi}{c}\, j^1 \ , \\
\partial_0 F^{02} + \partial_1 F^{12} + \partial_2 F^{22} + \partial_3 F^{32} &= \frac{4\pi}{c}\, j^2 \ , \\
\partial_0 F^{03} + \partial_1 F^{13} + \partial_2 F^{23} + \partial_3 F^{33} &= \frac{4\pi}{c}\, j^3 \ .
\end{aligned}$$

Lesen wir $j^0 = c\rho$ als Komponente der Viererstromdichte $j = (j^0, j^1, j^2, j^3)$, dann lauten die inhomogenen Maxwellgleichungen in Indexschreibweise

$$\partial_m F^{mn} = \frac{4\pi}{c}\, j^n \ . \tag{5.10}$$

5.2 lokale Ladungserhaltung

Wegen $F^{mn} = -F^{nm}$ und weil das Ergebnis zweifacher partieller Differentation[3] nicht von der Reihenfolge der Ableitungen abhängt $\partial_n \partial_m = \partial_m \partial_n$, verschwindet die Doppelsumme zweifacher Ableitungen $\partial_n \partial_m F^{mn}$.

[2] η^{mn} ist bei (A.21) definiert. Wir verwenden die Einsteinsche Summationskonvention.

[3] zweimal stetig differenzierbare Feldstärken vorausgesetzt

Denn es gilt allgemein, daß eine Doppelsumme über ein symmetrisches und ein antisymmetrisches Indexpaar verschwindet.

$$T_{rs}{}^{mn} = -T_{rs}{}^{nm} = T_{sr}{}^{mn} \;\Rightarrow\; T_{kl}{}^{kl} = 0 \tag{5.11}$$

Der Sachverhalt gilt, egal ob $T_{rs}{}^{mn} = S_{rs}A^{mn}$ aus Produkten zusammengesetzt ist oder ob die Indizes Differentationen benennen $T_{rs}{}^{mn} = \partial_r\partial_s F^{mn}$ oder ob die Koeffizienten $T_{rsa_3\ldots a_u}{}^{mnb_3\ldots b_o}$ weitere Indizes haben. Die Doppelsumme verschwindet, weil sie nach Anwenden der Permutationssymmetrie und Umbenennen der Summationsindizes ihrem Negativen gleich ist.

$$T_{kl}{}^{kl} = T_{lk}{}^{kl} = -T_{lk}{}^{lk} = -T_{lm}{}^{lm} = -T_{km}{}^{km} = -T_{kl}{}^{kl} \tag{5.12}$$

Eine einfache Folge dieser Überlegungen ist, daß die Doppelsumme $T_{mn}S^{mn}$ über ein symmetrischen Indexpaar $S^{mn} = S^{nm}$ in den Summationsindizes symmetrisiert,

$$T_{mn}S^{mn} = \frac{1}{2}(T_{mn} + T_{nm})S^{mn} \;, \tag{5.13}$$

denn $T_{mn} = \frac{1}{2}(T_{mn} + T_{nm}) + \frac{1}{2}(T_{mn} - T_{nm})$ kann als Summe eines symmetrischen und eines antisymmetrischen Teils $\frac{1}{2}(T_{mn} - T_{nm}) = -\frac{1}{2}(T_{nm} - T_{mn})$ geschrieben werden.

Beispielsweise ist $\frac{dx^m}{d\lambda}\frac{dx^n}{d\lambda}$ symmetrisch unter Vertauschung von m und n. Zum Längenquadrat eines Tangentialvektors $\frac{dx^m}{d\lambda}\frac{dx^n}{d\lambda}g_{mn}$ trägt daher nur der symmetrische Teil von g_{mn} bei, weshalb wir beim Längenquadrat ohne Einschränkung $g_{mn} = g_{nm}$ voraussetzen.

Wenden wir ∂_n auf (5.10) an, so erhalten wir $\partial_n\partial_m F^{mn} = \frac{4\pi}{c}\partial_n j^n$. Die linke Seite ist eine Doppelsumme über ein symmetrisches und ein antisymmetrisches Indexpaar und verschwindet wegen (5.11). Sie ist der rechten Seite, der Viererdivergenz $\partial_0 j^0 + \partial_1 j^1 + \partial_2 j^2 + \partial_3 j^3$ des Viererstroms, gleich

$$\partial_n j^n = 0 \;. \tag{5.14}$$

In Ladungs- und Stromdichte ausgedrückt ist dies die Kontinuitätsgleichung

$$\dot{\rho} + \mathrm{div}\vec{j} = 0 \;. \tag{5.15}$$

Die Kontinuitätsgleichung schränkt denkbare Quellen ρ und $\vec{j}$ für elektromagnetische Felder ein. Es können in den Maxwellgleichungen nur solche Ladungs- und Stromdichten auftreten, die der Kontinuitätsgleichung und damit lokaler Ladungserhaltung genügen. Lokale Ladungserhaltung besagt mehr, als daß die Gesamtladung erhalten ist. Mit Erhaltung der Gesamtladung wäre auch der nie beobachtete Vorgang verträglich, daß Ladung im

Labor verschwindet und gleichzeitig am anderen Ende der Welt wieder erscheint. Lokale Ladungserhaltung besagt, daß sich die Ladung in jedem Volumen V, daß man zeitlich unverändert abgegrenzt hat, nur dadurch im Laufe der Zeit ändert, daß durch die Oberfläche ∂V (lies „Rand von V“) Ströme fließen, deren Bilanz nicht ausgeglichen ist. Dies folgert man aus der Kontinuitätsgleichung durch Integration über das Volumen V mit dem Gaußschen Integralsatz

$$Q_V(t) = \int_V d^3x\, \rho(t,\vec{x})\,, \quad \frac{d}{dt}Q_V(t) = \int_V d^3x\, \dot{\rho} = -\int_V d^3x\, \mathrm{div}\vec{j} = -\oint_{\partial V} d\vec{f}\,\vec{j}\,. \tag{5.16}$$

5.3 Energie und Impuls

Zu elektromagnetischen Feldstärken gehören Energiedichte, Energieströme. Impulsdichten und Impulsströme, die sich zu Komponenten T^{kl} des Energie-Impulstensors zusammenfassen lassen[4]

$$T^{kl} = -\frac{1}{4\pi}\big(F^k{}_n F^{ln} - \frac{1}{4}\eta^{kl} F_{mn}F^{mn}\big)\ . \tag{5.17}$$

Der Energie-Impulstensor ist symmetrisch und spurfrei

$$T^{kl} = T^{lk}\,, \quad \eta_{kl}T^{kl} = 0\,. \tag{5.18}$$

Für jeden Wert des Index k sind T^{kl} vier Komponenten eines Vierervektorstromes, der in Abwesenheit von elektrischen Ladungs- und Stromdichten erhalten bleibt.

$$\partial_l T^{kl} = -\frac{1}{c}F^k{}_n j^n \tag{5.19}$$

Zur Bestätigung berechnen wir $-4\pi\partial_l T_k{}^l$

$$\begin{aligned}\partial_l\big(F_{kn}F^{ln} - \frac{1}{4}\delta^l_k F_{mn}F^{mn}\big) &= (\partial_l F_{kn})F^{ln} + F_{kn}\partial_l F^{ln} - \frac{1}{2}(\partial_k F_{mn})F^{mn}\\ &= \frac{1}{2}\big(\partial_l F_{kn} - \partial_n F_{kl} - \partial_k F_{ln}\big)F^{ln} + F_{kn}\partial_l F^{ln} = \frac{4\pi}{c}F_{kn}j^n\ .\end{aligned} \tag{5.20}$$

Dabei haben wir verwendet, daß die Doppelsumme mit $F^{ln} = -F^{nl}$ in den Indizes l und n antisymmetrisiert, daß also

$$2F^{ln}\partial_l F_{kn} = F^{ln}\big(\partial_l F_{kn} - \partial_n F_{kl}\big) + F^{ln}\big(\partial_l F_{kn} + \partial_n F_{kl}\big) = F^{ln}\big(\partial_l F_{kn} - \partial_n F_{kl}\big)$$

[4] Wir ziehen mit η Indizes hoch und runter (A.25), zum Beispiel ist $F^k{}_n = \eta^{kr}F_{rn}$ und $T_k{}^l = \eta_{kn}T^{nl}$.

gilt, weil die Doppelsumme über ein symmetrisches und ein antisymmetrisches Indexpaar verschwindet (5.11). Zudem haben wir die homogenen (5.7) und inhomogenen (5.10) Maxwellgleichungen eingesetzt.

Wenn die Ladungs- und Stromdichte verschwindet, dann besteht der Energie-Impulstensor aus Komponenten von vier erhaltenen Strömen (5.19). Die Nullkomponenten T^{k0} sind Dichten, deren räumliches Integral

$$P^k = \frac{1}{c}\int d^3x\, T^{k0}(x) \tag{5.21}$$

zeitunabhängig ist (5.16), wenn das Integrationsvolumen so groß gewählt ist, daß die Ströme $T^{ki},\ i \in \{1,2,3\}$, durch den Rand verschwinden. Die Erhaltungsgrößen gehören, wie wir bei (5.104) sehen werden, zur Invarianz der Wirkung unter Translationen der Zeit und des Ortes und sind daher die Energie und der Impuls $P^k = (E/c, P^1, P^2, P^3)$. Also sind die Komponenten $T^{k0}(x)$ die Energiedichte für $k = 0$ und die Impulsdichten für $k = 1, 2, 3$. Wir schreiben sie mit (5.6, 5.8) als quadratischen Ausdruck im elektrischen und magnetischen Feld[5]

$$T^{00} = \frac{1}{8\pi}\left(\vec{E}^2 + \vec{B}^2\right), \quad E = \frac{1}{8\pi}\int d^3x \left(\vec{E}^2 + \vec{B}^2\right) \tag{5.22}$$

$$T^{i0} = \frac{1}{4\pi}\varepsilon^{ijk}E^jB^k, \quad P^i = \frac{1}{4\pi c}\int d^3x\, \varepsilon^{ijk}E^jB^k\ . \tag{5.23}$$

Es ist also $\frac{1}{8\pi}\left(\vec{E}^2 + \vec{B}^2\right)$ die Energiedichte des elektromagnetischen Feldes. Der Poyntingvektor

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi}\vec{E} \times \vec{B} \tag{5.24}$$

ist das c^2-fache der Impulsdichte des elektromagnetischen Feldes. Wegen $T^{0i} = T^{i0}$ ist der Poyntingvektor die Energiestromdichte.

In Anwesenheit von elektrischer Ladungs- und Stromdichte sind Energie und Impuls des elektromagnetischen Feldes wegen (5.19) zeitlich veränderlich

$$\partial_t \frac{1}{8\pi}\left(\vec{E}^2 + \vec{B}^2\right) + \mathrm{div}\vec{S} = -\vec{E}\cdot\vec{\jmath}, \tag{5.25}$$

$$\partial_t \frac{S^i}{c^2} + \partial_j T^{ij} = -E^i\rho - \frac{1}{c}\varepsilon^{ijk}B^k j^j \tag{5.26}$$

$$\text{mit} \quad T^{ij} = -\frac{1}{4\pi}\left(E^iE^j + B^iB^j - \frac{1}{2}\delta^{ij}\left(\vec{E}^2 + \vec{B}^2\right)\right), \tag{5.27}$$

[5]Die Indizes i, j, k nehmen hier Werte aus $\{1, 2, 3\}$ an.

denn Energie und Impuls kann mit geladenen Teilchen ausgetauscht werden. Wenn der Gesamtimpuls von Teilchen und elektromagnetischem Feld erhalten ist, muß $\rho\vec{E}+\frac{1}{c}\vec{j}\times\vec{B}$ die zeitliche Änderung der Impulsdichte sein, die den Ladungsträgern zukommt, und $\vec{j}\cdot\vec{E}$ ist die Änderung ihrer Energiedichte.

Für den Impuls $\vec{P}$ und die Energie E_{Teilchen} eines Punktteilchen mit Ladung q, das die Kurve $\vec{z}(t)$ mit einer Ladungsdichte $\rho(t,\vec{x}) = q\,\delta^3(\vec{x}-\vec{z}(t))$ und einer Stromdichte $\vec{j}(t,\vec{x}) = q\,\dot{\vec{z}}\,\delta^3(\vec{x}-\vec{z}(t))$ durchläuft, gilt also

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}_{\text{Lorentz}} = q\left(\vec{E}+\frac{\vec{v}}{c}\times\vec{B}\right), \quad \frac{dE_{\text{Teilchen}}}{dt} = q\,\frac{d\vec{x}}{dt}\cdot\vec{E}\ . \tag{5.28}$$

Aus Energie- und Impulserhaltung und den Maxwellgleichungen folgen also die Lorentzkraft (5.1) und die relativistische Bewegungsgleichung geladener Punktteilchen. Die Energie des Teilchens ändert sich durch die Arbeit, die das elektrische Feld an ihm verrichtet, das Magnetfeld ändert die Teilchenenergie nicht.

5.4 das elektrostatische Potential

Das elektrische Feld einer kugelsymmetrischen, statischen Ladungsverteilung folgt aus dem Gaußschen Integralsatz und dem naheliegenden Ansatz, daß das $\vec{E}$-Feld zeitunabhängig und radial gerichtet ist.[6]

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}E(|\vec{x}|) \tag{5.29}$$

Den Betrag des $\vec{E}$-Feldes bestimmt man, indem man die Maxwell-Gleichung (5.3) $\operatorname{div}\vec{E} = 4\pi\rho$ über eine Kugel K_r mit Radius r integriert. Auf der rechten Seite ergibt sich 4π mal der Ladung $Q(r)$, die in der Kugel eingeschlossen ist, die linke Seite formt man mit dem Gaußschen Integralsatz in ein Integral über die Kugeloberfläche ∂K_r um

$$4\pi Q(r) = \int_{K_r} d^3x\ \operatorname{div}\vec{E}(x) = \oint_{\partial K_r} d\vec{f}\cdot\vec{E}(x)\ . \tag{5.30}$$

Auf der Kugeloberfläche ist die nach außen gerichtete Flächennormale $d\vec{f}$ parallel zur Richtung des $\vec{E}$-Feldes, das Skalarprodukt $d\vec{f}\cdot\vec{E}$ ist also gleich dem Produkt der Beträge. Der Betrag des elektrischen Feldes ist auf der

[6] Unglücklicherweise beginnen „Energie“ und „elektrische Feldstärke“ mit demselben Buchstaben. Wir bezeichnen den Betrag der elektrischen Feldstärke und die Energie mit E und hoffen, daß dies den Leser nicht verwirrt.

Kugeloberfläche konstant und kann vor das Integral gezogen werden, das die Größe $4\pi r^2$ der Kugeloberfläche ergibt. Wir erhalten $4\pi Q(r) = 4\pi r^2 E(r)$

$$E(r) = \frac{Q(r)}{r^2} \ . \tag{5.31}$$

Bei einer kugelsymmetrischen Ladungsverteilung wirken sich auf eine Probeladung am Ort $\vec{x}$ nur die Ladungen aus, die innerhalb der Kugel mit Radius $|\vec{x}|$ sind. Die Kraft $\vec{F} = q\vec{E}$ ist abstoßend, wenn die Ladungen q und $Q(r)$ gleiches Vorzeichen haben.

Innerhalb einer homogen geladenen Kugel mit Radius R verhält sich $Q(r)$ zur Gesamtladung Q wie das Volumen $\frac{4}{3}\pi r^3$ zum Gesamtvolumen $\frac{4}{3}\pi R^3$, es gilt dort $Q(r) = \frac{r^3}{R^3}Q$ und demnach gilt für eine homogen geladene Kugel

$$E(r) = \begin{cases} \frac{Q}{R^3}\, r & \text{falls } r < R \\ Q\,\frac{1}{r^2} & \text{falls } r \geq R \ . \end{cases} \tag{5.32}$$

Im Inneren einer homogen geladenen Kugel wirkt auf ein entgegengesetzt geladenes Probeteilchen dieselbe anziehende Kraft wie auf einen kugelsymmetrischen harmonischen Oszillator.

Das elektrostatische Feld läßt sich als Gradient eines Potentials $\phi(\vec{x})$ schreiben und erfüllt daher auch die restlichen Maxwell-Gleichungen

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\phi\,, \quad \phi(\vec{x}) = \begin{cases} -\frac{Q}{2R^3}\vec{x}^{\,2} + \frac{3Q}{2R} & \text{falls } |\vec{x}| < R \\ Q\,\frac{1}{|\vec{x}|} & \text{falls } |\vec{x}| \geq R \ . \end{cases} \tag{5.33}$$

Demnach ist das Potential außerhalb eines Punktteilchens mit Ladung q, das im Ursprung ruht, das Coulomb-Potential $\phi(\vec{x}) = \frac{q}{|\vec{x}|}$. Befindet sich das Teilchen bei $\vec{y}$, so gehört dazu das verschobene Potential $\phi(\vec{x}) = \frac{q}{|\vec{x}-\vec{y}|}$, denn die Maxwellgleichungen sind verschiebungsinvariant. Das Potential mehrerer Punktladungen erhält man als Summe der Potentiale der einzelnen Ladungen, denn die Maxwellgleichungen sind linear inhomogen.

$$\phi(\vec{x}) = \sum_i \frac{q_i}{|\vec{x} - \vec{y}_i|} \tag{5.34}$$

Für eine kontinuierliche Ladungsverteilung $\rho(\vec{y})$ geht dies in die kontinuierliche Summe über, nämlich in das Integral (siehe Anhang D)

$$\phi(\vec{x}) = \int d^3y\, \frac{\rho(\vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|} \ . \tag{5.35}$$

Dieses Potential erfüllt die Gleichung $-\mathrm{div}\,\mathrm{grad}\phi = 4\pi\rho$, also die Poisson-Gleichung

$$\Delta\phi = -4\pi\rho \ . \tag{5.36}$$

Hierbei ist Δ der Laplace-Operator.

$$\Delta = \mathrm{div}\,\mathrm{grad} = {\partial_1}^2 + {\partial_2}^2 + {\partial_3}^2 \ . \tag{5.37}$$

Die homogene Poisson-Gleichung heißt Laplace-Gleichung. Im ladungsfreien Fall erfüllt das elektrostatische Potential die Laplace-Gleichung. In der mathematischen Literatur heißen Funktionen u, die die Laplace-Gleichung $\Delta u = 0$ erfüllen, harmonisch.

Real- und Imaginärteil komplex differenzierbarer Funktionen $f(x+\mathrm{i}y) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)$ erfüllen die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen $\partial_x u = \partial_y v$ und $\partial_x v = -\partial_y u$ und sind demnach harmonische Funktionen. Darauf beruht die Wichtigkeit von Funktionentheorie für Potentialprobleme in zwei Raumdimensionen.

5.5 Viererpotential

Die homogenen Maxwellgleichungen (5.7) besagen, daß die Feldstärken $F_{kl}(x)$ die antisymmetrisierten Ableitungen von vier Potentialfunktionen $A_l(x)$ sind.

$$F_{kl}(x) = \partial_k A_l(x) - \partial_l A_k(x) \tag{5.38}$$

Feldstärken von dieser Form lösen die homogenen Maxwellgleichungen, denn (5.7) ist total antisymmetrisch unter Permutationen und die Reihenfolge von partiellen Ableitungen kann vertauscht werden $\partial_k\partial_l A_m - \partial_l\partial_k A_m = 0$.

Umgekehrt überprüft man durch Differenzieren, daß die antisymmetrisierten Ableitungen des folgenden Viererpotentials[7] die Feldstärken ergeben.

$$\begin{aligned} A_l(x) &= \int_0^1 d\lambda\, \lambda x^m F_{ml}(\lambda x) \qquad (5.39)\\ \partial_k A_l - \partial_l A_k &= \int_0^1 d\lambda \left(\lambda\delta_k^m F_{ml}(\lambda x) + \lambda x^m \cdot \lambda(\partial_k F_{ml})_{|(\lambda x)}\right) - k \leftrightarrow l \\ &= \int_0^1 d\lambda\, 2\lambda F_{kl}(\lambda x) + \lambda^2 x^m (\partial_k F_{ml} - \partial_l F_{mk})_{|(\lambda x)} \end{aligned}$$

[7] in sternförmigen Gebieten, die mit jedem Punkt x auch die Verbindungsstrecke zum Ursprung enthalten,

Verwenden wir im letzten Term $F_{ml} = -F_{lm}$ und die homogene Maxwellgleichung (5.7) $-\partial_k F_{lm} - \partial_l F_{mk} = \partial_m F_{kl}$, so folgt die Behauptung

$$\begin{aligned}\partial_k A_l - \partial_l A_k &= \int_0^1 d\lambda \left(2\lambda F_{kl}(\lambda x) + \lambda^2 x^m \partial_m F_{kl}(\lambda x)\right) \\ &= \int_0^1 d\lambda \, \frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\lambda^2 F_{kl}(\lambda x)\right) = \lambda^2 F_{kl}(\lambda x)\Big|_{\lambda=0}^{\lambda=1} = F_{kl}(x) \ . \end{aligned} \tag{5.40}$$

Die Komponente A_0 heißt skalares Potential ϕ. Die räumlichen Komponenten faßt man zum Vektorpotential $\vec{A} = (-A_1, -A_2, -A_3)$ zusammen. Mit diesen Bezeichnungen besagt (5.38) für das magnetische und das elektrische Feld

$$\vec{B} = \mathrm{rot}\vec{A} \ , \quad \vec{E} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{A} \ . \tag{5.41}$$

5.6 Eichtransformation

Wegen $\partial_k\partial_l\Lambda = \partial_l\partial_k\Lambda$ folgt aus (5.38), daß sich die Feldstärken nicht ändern, wenn man zum Vierervektorpotential A_l die Ableitung einer Funktion Λ hinzufügt

$$A_l' = A_l + \partial_l\Lambda \ . \tag{5.42}$$

Diese Abänderung (5.42) des Vierervektorpotentials heißt Eichtransformation. Das skalare Potential ϕ und das Vektorpotential $\vec{A}$ ändern sich unter einer Eichtransformation um

$$\phi' = \phi + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\Lambda \ , \quad \vec{A}' = \vec{A} - \overrightarrow{\mathrm{grad}}\Lambda \ . \tag{5.43}$$

Durch Eichtransformationen zusammenhängende Vierervektorpotentiale können durch keinen physikalischen Effekt voneinander unterschieden werden.

Relativistische Quantenfeldtheorie liefert einen tiefliegenden Grund für Eichinvarianz, der über den ästhetischen Reiz einer Symmetrie weit hinaus geht [21]. Ein quantisiertes Vierervektorpotential A_m erzeugt Zustände mit negativer Norm. Sie machen sich nur dann nicht als negative und daher widersinnige Wahrscheinlichkeiten in physikalischen Prozessen bemerkbar, wenn die physikalischen Vorgänge eichinvariant sind.

Im heutigen Standardmodell der elementaren Wechselwirkungen gibt es zwölf Vierervektorpotentiale mit zugehörigen Eichtransformationen. Acht von ihnen, die Gluonen, erzeugen die starken Wechselwirkungen, die Quarks zu den Bausteinen der Atomkerne, den Protonen und Neutronen, zusammenfügen. Drei weitere Vierervektorpotentiale, die W^+- und W^--Bosonen und das Z-Boson

erzeugen die schwachen Wechselwirkungen, die Umwandlungen der verschiedenen Quarksorten ineinander und der Elektronsorten, also Elektron, Myon und τ-Lepton, in zugehörige Neutrinos bewirken. Zum Beispiel sind β-Zerfälle von Atomkernen von schwachen Wechselwirkungen verursacht. Das Viererpotential der Elektrodynamik bewirkt die elektromagnetischen Wechselwirkungen. In der Quantenfeldtheorie erzeugt und vernichtet es Photonen.

Neben den starken, schwachen und elektromagnetischen Wechselwirkungen gibt es nach heutigem Wissensstand nur noch die Gravitation als elementare Wechselwirkung. Auch sie wird durch ein Feld, allerdings nicht durch ein Viererpotential A_m, sondern durch eine Metrik g_{mn}, mit einer zugehörigen Eichinvarianz, der Invarianz unter Wechsel des Koordinatensystems, bewirkt. Die Gravitation nimmt aus mehreren Gründen eine Sonderstellung unter den Eichtheorien ein. Zur quantisierten Metrik gehören Teilchen mit Spin 2 und weil für jedes weitere Teilchen mit Spin 2 eine weitere Eichinvarianz erforderlich wäre, kann es nur eine elementare Metrik, nicht mehrere, geben. Die Eichinvarianz erzwingt, daß alle freien Teilchen in der Raumzeit torsionsfreie Geodäten der Metrik durchlaufen und daß alle Materie jeweils durch ihren Energie-Impuls-Tensor Gravitation erzeugt. Die Eichinvarianz liefert so eine Erklärung für das Äquivalenzprinzip, daß alle freien Teilchen gleich fallen und Materie auf gleiche Art Gravitation erzeugt.

Die Quanteneigenschaften der Gravitation sind im ihrem Wesen unverstanden, denn die Metrik bestimmt, wie sich Auswirkungen von Ursachen ausbreiten. Man wird wohl in einer erfolgreichen Formulierung von Quantengravitation nur eine Wahrscheinlichkeit dafür angeben können, ob zwei Ereignisse zueinander raumartig oder zeitartig sind. Es ist unklar, wie dies zu formulieren ist und welche der klassischen Begriffe in einer Quantengravitation abzuändern sind.

5.7 Wellengleichung

Setzt man die Lösung $F_{kl} = \partial_k A_l - \partial_l A_k$ (5.38) der homogenen Maxwellgleichungen in die kovarianten inhomogenen Maxwellgleichungen (5.10) ein und verwendet man zur Abkürzung die Schreibweise

$$\partial^m = \eta^{mk}\partial_k\,, \qquad (\partial^0,\partial^1,\partial^2,\partial^3) = (\partial_0,-\partial_1,-\partial_2,-\partial_3) \tag{5.44}$$

$$A^n = \eta^{nl}A_l\,, \quad (A^0,A^1,A^2,A^3) = (\phi,\vec{A}) = (A_0,-A_1,-A_2,-A_3) \tag{5.45}$$

so erhält man

$$\partial_m\partial^m A^n - \partial_m\partial^n A^m = \frac{4\pi}{c}\,j^n\ . \tag{5.46}$$

Im Term $\partial_m \partial^n A^m$ kann die Reihenfolge der Ableitungen vertauscht werden, weil das Ergebnis zweifacher partieller Differentation nicht von der Reihenfolge der Ableitungen abhängt. Also gilt $\partial_m \partial^n A^m = \partial^n \partial_m A^m$. Durch Wahl der Eichung kann erreicht werden, daß dieser Term verschwindet

$$\partial_m A^m = 0 \ . \tag{5.47}$$

Erfüllt nämlich ein Viererpotential A'^m noch nicht diese Lorentzbedingung, sondern gilt $\partial_m A'^m = f(x)$, so gilt wegen (5.42) die Lorentzeichung (5.47) für das Viererpotential A^n, falls die Funktion Λ der inhomogenen Wellengleichung genügt.

$$\partial_m \partial^m \Lambda(x) = f(x) \tag{5.48}$$

Der Differentialoperator $\partial_m \partial^m$ heißt Wellenoperator oder d'Alembert-Operator. Er wird kurz mit dem Symbol $\Box$ geschrieben und „Box“ genannt.

$$\Box = \partial_m \partial^m = \eta^{ml} \partial_m \partial_l = \partial_0^2 - \partial_1^2 - \partial_2^2 - \partial_3^2 \tag{5.49}$$

In der Lorentzeichung (5.47) muß wegen (5.46) jede Komponente des Viererpotentials eine inhomogene Wellengleichung erfüllen.

$$\Box A^n = \frac{4\pi}{c} j^n \tag{5.50}$$

Jede Lösung dieser linear inhomogenen Gleichung läßt sich als Summe einer partikulären Lösung, dem retardierten Potential, und einer Lösung der homogenen Wellengleichung, einem Wellenpaket, schreiben.

$$A^n = A^n_{\text{ret}} + A^n_{\text{hom}} \tag{5.51}$$

Zum retardierten Potential zur Zeit $x^0 = ct$ am Ort $\vec{x}$

$$A^n_{\text{ret}}(x^0, \vec{x}) = \frac{1}{c} \int d^3y \, \frac{j^n(x^0 - |\vec{x} - \vec{y}|, \vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|} \tag{5.52}$$

tragen die Ladungs- und Stromdichten von allen Orten $\vec{y}$ gewichtet mit ihrem Coulombpotential $1/|\vec{x} - \vec{y}|$ bei und zwar mit den Werten, die sie zu der um die Lichtlaufzeit früheren Zeit $y^0 = x^0 - |\vec{x} - \vec{y}|$ (2.1) hatten. Eine Abänderung der Ladungs- oder Stromdichte wirkt sich im Vakuum mit Lichtgeschwindigkeit aus. Im Anhang D wird gezeigt, daß das retardierte Potential eine Lösung der inhomogenen Wellengleichung ist und daß es aufgrund der Kontinuitätsgleichung $\partial_n j^n = 0$ (5.14) die Lorentzbedingung (5.47) erfüllt.

Insbesondere hat (5.48) eine Lösung Λ, zum Beispiel das zur Inhomogenität f gehörige retardierte Potential. Jede Lösung Λ ist nur eindeutig

bis auf Lösungen der homogenen Wellengleichung. Es bleibt also in der Lorentzeichung noch die Möglichkeit, mit Funktionen Λ umzueichen, die die Wellengleichung $\Box\Lambda = 0$ erfüllen.

Jede ebene Welle $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x}$ (3.18) mit lichtartigem Wellenvektor k

$$k^2 = (k^0)^2 - (k^1)^2 - (k^2)^2 - (k^3)^2 = 0 \tag{5.53}$$

löst die homogene Wellengleichung $\Box\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x} = 0$, wie man durch elementares Differenzieren bestätigt. Die Gleichung $k^2 = 0$ legt die Komponente k^0 fest und damit die Frequenz als Funktion des Wellenvektors $\vec{k}$ (3.19). Wir wählen ohne wesentliche Einschränkung k^0 positiv, die Lösung $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x}$ mit negativem k^0 schreiben wir als $\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x}$.

$$k^0 = \frac{\omega}{c} = |\vec{k}| \tag{5.54}$$

Mit $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x}$ ist auch jedes komplexe Vielfache $a(\vec{k})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x}$ Lösung der homogenen Wellengleichung, gleiches gilt für Summen und Integrale, die sich aus solchen Lösungen zusammensetzen.

Die allgemeinste, reelle Lösung der homogenen Wellengleichung $\Box A^n = 0$ ist ein Wellenpaket

$$A^n_{\mathrm{hom}}(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2k^0} \left(a^{n\dagger}(\vec{k})\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x} + a^n(\vec{k})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x}\right) . \tag{5.55}$$

Dabei ist $a^{n\dagger}$ das komplex konjugierte der Amplitude a^n, ein Normierungsfaktor $(2\pi)^3 2k^0$ ist so abgespalten, wie in relativistischer Quantenfeldtheorie üblich. Die Komponente $k^0 = \sqrt{\vec{k}^2}$ im Nenner und im Exponenten in $k\cdot x = k^0x^0 - k^1x^1 - k^2x^2 - k^3x^3$ ist eine Funktion der Integrationsvariablen.

Daß man jede Lösung der homogenen Wellengleichung als Wellenpaket (5.55) schreiben kann, folgt daraus, daß solch eine Lösung durch die Anfangsbedingungen $A^n(0,\vec{x})$ und $\partial_0 A^n(0,\vec{x})$ festgelegt ist. Wertet man das Wellenpaket (5.55) und seine Zeitableitung zur Zeit $x^0 = 0$ aus, so erkennt man, daß $\frac{a^{n\dagger}(\vec{k}) + a^n(-\vec{k})}{2k^0}$ die Fouriertransformierte von $A^n(0,\vec{x})$ und daß $\mathrm{i}\frac{a^{n\dagger}(\vec{k}) - a^n(-\vec{k})}{2}$ die Fouriertransformierte von $\partial_0 A^n(0,\vec{x})$ ist. Durch inverse Fouriertransformation kann man nach $a^{n\dagger}(\vec{k})$ auflösen

$$a^{n\dagger}(\vec{k}) = \int d^3x\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{k}\vec{x}} \left(k^0 A^n(0,\vec{x}) - \mathrm{i}\partial_0 A^n(0,\vec{x})\right) . \tag{5.56}$$

Mit dem Symbol „Ableitung zu beiden Seiten“

$$f \overset{\leftrightarrow}{\partial}_m g = f(\partial_m g) - (\partial_m f) g \tag{5.57}$$

schreibt sich dies elegant und für alle Zeiten x^0 als

$$a^{n\dagger}(\vec{k}) = -\mathrm{i}\int d^3x\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x} \overset{\leftrightarrow}{\partial}_0 A^n(x) \ . \tag{5.58}$$

Die Gleichung gilt auch für $x^0 \neq 0$, denn der Integrand ist die Nullkomponente eines Stromes $J_m = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x} \overset{\leftrightarrow}{\partial}_m A(x)$, der wegen der Wellengleichung erhalten ist $\partial_m J^m = 0$. Die Kontinuitätsgleichung (5.14) hat zur Folge, daß das Raumintegral (5.58) über die Nullkomponente des Stromes bei lokalisierten Wellenpaketen nicht von der Zeit abhängt.

Das Viererpotential erfüllt in der Lorentzeichung die entkoppelten Wellengleichungen (5.50). Seine Komponenten sind aber noch durch die Lorentzeichbedingung (5.47) verknüpft. Die vier Amplituden $a^{n\dagger}(\vec{k})$ sind daher eingeschränkt

$$k_n a^{n\dagger}(\vec{k}) = 0 \ . \tag{5.59}$$

Zudem kann man noch, ohne die Lorentzbedingung zu verletzen und ohne die Potentiale meßbar abzuändern, mit Eichfunktionen Λ umeichen (5.42), die die Wellengleichung erfüllen. Dies ändert die Amplituden um

$$a'^{n\dagger}(\vec{k}) = a^{n\dagger}(\vec{k}) + \mathrm{i}k^n \lambda^\dagger(\vec{k}) \ . \tag{5.60}$$

Dabei ist $\lambda^\dagger(\vec{k})$ die Amplitude der Eichfunktion Λ.

Gemäß (5.59) sind von den vier Amplituden des Viererpotentials nur drei unabhängig und die Amplitude in Richtung des Viererwellenvektors kann weggeeicht werden (5.60). Das Viererpotential enthält also pro Wellenvektor $\vec{k}$ zwei Freiheitsgrade. Dies entspricht den zwei Polarisationsrichtungen von Lichtstrahlen.

5.8 Koordinatentransformationen

Die homogenen Maxwellgleichungen behalten ihre Form in beliebigen Koordinatensystemen. Seien die Koordinaten $x(x')$ invertierbar als Funktion der Koordinaten x' gegeben und seien die Feldstärken $F_{kl}(x)$ als Lösungen der homogenen Maxwellgleichungen (5.7) durch antisymmetrisierte Ableitungen eines Viererpotentials (5.38) $A_l(x)$ gegeben, dann definiert

$$A'_s(x') = \frac{\partial x^l}{\partial x'^s} A_l(x(x')) \tag{5.61}$$

das zugehörige Viererpotential im gestrichenen Koordinatensystem.

Die Feldstärken im gestrichenen System

$$\begin{aligned} F'_{rs}(x') &= \partial'_r\big(\frac{\partial x^l}{\partial x'^s}A_l(x(x'))\big) - \partial'_s\big(\frac{\partial x^l}{\partial x'^r}A_l(x(x'))\big) \\ &= \big(\frac{\partial^2 x^l}{\partial x'^r \partial x'^s} - \frac{\partial^2 x^l}{\partial x'^s \partial x'^r}\big)A_l + \big(\frac{\partial x^k}{\partial x'^r}\frac{\partial x^l}{\partial x'^s} - \frac{\partial x^k}{\partial x'^s}\frac{\partial x^l}{\partial x'^r}\big)\partial_k A_l \end{aligned} \tag{5.62}$$

hängen linear von den Feldstärken im anderen Koordinatensystem ab, denn jede in zwei Ableitungsindizes antisymmetrisierte Ableitung $\frac{\partial^2 x^l}{\partial x'^r \partial x'^s}$ verschwindet und im letzten Term kann die Antisymmetrisierung durch Umbenennung der Summationsindizes in eine Antisymmetrisierung in k und l umgeschrieben werden

$$F'_{rs}(x') = \frac{\partial x^k}{\partial x'^r}\frac{\partial x^l}{\partial x'^s}F_{kl}(x(x')) \ . \tag{5.63}$$

Die Transformationen (5.61) und (5.63) sind Tensortransformationen (B.18). Die transformierten Komponenten als Funktion der Koordinaten x' sind linear in den ursprünglichen Komponenten am Ort $x(x')$. Zudem treten passend zum Indexbild Transformationsmatrizen $\frac{\partial x}{\partial x'}$ auf. Weil die Transformation linear ist, sind Summe und Vielfache von Tensoren gleichen Transformationsgesetzes wieder Tensoren und bilden Vektorräume. Die Assoziativität des Tensortransformationsgesetzes folgt aus der Kettenregel der Differentation, denn sei x' durch eine weitere Koordinatentransformation als Funktion von x'' gegeben, so gilt für $x(x'(x''))$ $\quad \frac{\partial x^k}{\partial x''^r} = \frac{\partial x'^m}{\partial x''^r}\frac{\partial x^k}{\partial x'^m}$.

Antisymmetrisierte Ableitungen von antisymmetrischen Tensorfeldern mit unteren Indizes, die wie (5.61) und (5.63) transformieren, transformieren ihrerseits wieder wie ein Tensorfeld mit einem zusätzlichen Index, denn störende zweite Ableitungen $\frac{\partial^2 x^l}{\partial x'^r \partial x'^s}$ verschwinden durch die Antisymmetrisierung. Völlig analog zur Herleitung von (5.63) aus dem Transformationsgesetz (5.61) folgt aus (5.63), daß die antisymmetrisierte Ableitung von $F_{kl} = -F_{lk}$ wie ein Tensor transformiert.

$$\partial'_t F'_{rs} + \partial'_r F'_{st} + \partial'_s F'_{tr} = \frac{\partial x^m}{\partial x'^t}\frac{\partial x^k}{\partial x'^r}\frac{\partial x^l}{\partial x'^s}\big(\partial_m F_{kl} + \partial_k F_{lm} + \partial_l F_{mk}\big) \tag{5.64}$$

Sind also die homogenen Maxwellgleichungen in einem Koordinatensystem erfüllt, so auch in jedem anderen, denn verschwindende Tensorkomponenten sind ein Fixpunkt unter Tensortransformationen.

Auch die inhomogenen Maxwellgleichungen (5.10) sind invariant unter beliebigen Koordinatentransformationen, wenn wir sie als Definitionsgleichung

der Ladungs- und Stromdichte lesen.

$$\frac{4\pi}{c} j'_l(x') = \partial'_m F'^{\,m}{}_l(x') = \eta^{mk} \frac{\partial}{\partial x'^{\,m}} \Big(\frac{\partial x^r}{\partial x'^{\,k}} \frac{\partial x^s}{\partial x'^{\,l}} F_{rs}(x(x')) \Big) \tag{5.65}$$

$$= \eta^{mk} \Big(\frac{\partial^2 x^r}{\partial x'^{\,m} \partial x'^{\,k}} \frac{\partial x^s}{\partial x'^{\,l}} + \frac{\partial x^r}{\partial x'^{\,k}} \frac{\partial^2 x^s}{\partial x'^{\,m} \partial x'^{\,l}} \Big) F_{rs}(x(x')) + $$

$$+ \eta^{mk} \frac{\partial x^t}{\partial x'^{\,m}} \frac{\partial x^r}{\partial x'^{\,k}} \frac{\partial x^s}{\partial x'^{\,l}} \partial_t F_{rs}(x(x')) \tag{5.66}$$

Dies ist ein linear inhomogenes Transformationsgesetz für die Ladungs- und Stromdichte, zu der im transformierten Bezugssystem auch die Feldstärken F_{kl} und die symmetrisierten, spurfreien Ableitungen der Feldstärken beitragen

$$F_{tr\,s} = \frac{1}{2} \big(\partial_t F_{rs} + \partial_r F_{ts} \big) - \frac{1}{4} \eta_{tr} \eta^{uv} \partial_u F_{vs} \tag{5.67}$$

$$j'_l(x') = \Big(\frac{1}{4} \eta^{mk} \eta_{tr} \frac{\partial x^t}{\partial x'^{\,m}} \frac{\partial x^r}{\partial x'^{\,k}} \Big) \frac{\partial x^s}{\partial x'^{\,l}} \, j_s(x(x')) +$$

$$+ \frac{c}{4\pi} \eta^{mk} \Big(\frac{\partial^2 x^r}{\partial x'^{\,m} \partial x'^{\,k}} \frac{\partial x^s}{\partial x'^{\,l}} + \frac{\partial x^r}{\partial x'^{\,k}} \frac{\partial^2 x^s}{\partial x'^{\,m} \partial x'^{\,l}} \Big) F_{rs}(x(x')) +$$

$$+ \frac{c}{4\pi} \eta^{mk} \frac{\partial x^t}{\partial x'^{\,m}} \frac{\partial x^r}{\partial x'^{\,k}} \frac{\partial x^s}{\partial x'^{\,l}} F_{tr\,s}(x(x')) \; . \tag{5.68}$$

Wenn die Koordinatentransformation konform ist (C.20), wenn also die transformierte Minkowskimetrik bis auf einen Faktor mit der ursprünglichen Metrik übereinstimmt

$$\eta^{mk} \frac{\partial x^t}{\partial x'^{\,m}} \frac{\partial x^r}{\partial x'^{\,k}} = \sqrt{\det \frac{\partial x}{\partial x'}} \, \eta^{tr} \; , \tag{5.69}$$

dann verschwinden die inhomogenen Terme. Der Befund, daß in einem Raumzeitgebiet zwar elektromagnetische Feldstärken, nicht aber Ladungs- und Stromdichten vorhanden sind, ist unter konformen Transformationen invariant. Die Ladungs- und Stromdichte transformiert unter konformen Transformationen homogen als Vektordichte.

$$j'_l(x') = \sqrt{\det \frac{\partial x}{\partial x'}} \, \frac{\partial x^s}{\partial x'^{\,l}} \, j_s(x(x')) \tag{5.70}$$

Unter konformen Transformationen verschwindet die dritte Zeile von (5.68), weil $\eta^{tr} F_{tr\,s} = 0$ gilt. Die zweite Zeile verschwindet für infinitesimale konforme Transformationen, weil (C.46)

$$\partial_k \partial_l \xi^m = -2 b_l \delta^m_k - 2 b_k \delta^m_l + 2 b^m \eta_{kl} \tag{5.71}$$

$$\eta^{mk} \big(\partial_m \partial_k \xi^r \delta^s_l + \delta^r_k \partial_m \partial_l \xi^s \big) F_{rs} = 2 \big(b^r \delta^s_l + b^s \delta^r_l - b_l \eta^{rs} \big) F_{rs} = 0 \tag{5.72}$$

nach sich zieht. Auch endliche konforme Transformationen transformieren die Ladungs- und Stromdichte homogen, da sie durch homogene Transformationen erzeugt werden.

Der experimentelle Befund, daß in einem Raumzeitgebiet zwar elektromagnetische Feldstärken, aber keine Ladungen und keine Stromdichten vorhanden sind, ist also unter konformen Transformationen invariant. Andere Transformationen führen zu Bezugssystemen, in denen zwar immer noch die Maxwellgleichungen gelten, in denen aber das Raumzeitgebiet mit Ladungs- und Stromdichte erfüllt ist.

Experimentell läßt sich gleichmäßige Beschleunigung von unbeschleunigter Bewegung unterscheiden. Der experimentelle Befund, daß Teilchen unbeschleunigt sind und gerade Weltlinien durchlaufen, schränkt die Transformationsgruppe weiter ein. Von den konformen Transformationen bilden nur Dilatationen und Poincaré-Transformationen gerade Weltlinien wieder auf Geraden ab.

Berücksichtigt man noch, daß ein Schiedsrichter entscheiden kann, ob verschiedene Beobachter gleiche Maßstäbe und Uhren verwenden, so sind Dilatationen ausgeschlossen und äquivalente Koordinatensysteme gehen durch Poincaré-Transformationen, also durch Translationen in der Raumzeit und durch Lorentztransformationen, auseinander hervor.

5.9 Wirkungsprinzip

Die inhomogenen Maxwellgleichungen (5.10) sind die Feststellung, daß das Funktional W des Vierervotentials $A_m(x)$

$$W = W_{\text{Maxwell}} + W_{\text{Materie}} \tag{5.73}$$

$$W[A]_{\text{Maxwell}} = -\frac{1}{16\pi}\int d^4x\, \eta^{km}\eta^{ln}\big(\partial_k A_l - \partial_l A_k\big)\big(\partial_m A_n - \partial_n A_m\big) \tag{5.74}$$

für physikalische Felder stationär ist bezüglich aller Variationen $\delta A_m(x)$, die am Rand des Integrationsgebietes verschwinden.

Es ist ja die Ableitung $\frac{\delta W}{\delta \phi}$ eines Funktionals definiert durch (4.14)

$$\delta W[A,\delta A] = \lim_{\lambda\to 0}\frac{1}{\lambda}(W[A+\lambda\delta A] - W[A]) = \int d^4x\, \delta A_l(x)\frac{\delta W}{\delta A_l(x)}\ . \tag{5.75}$$

Setzen wir in W_{Maxwell} die variierten Felder $A + \lambda\delta A$ ein und leiten wir nach λ ab, so erhalten wir für die Änderung von W_{Maxwell} vier Terme mit δA von gleicher Form, die sich zu

$$\delta W_{\text{Maxwell}} = -\frac{1}{4\pi}\int d^4x\, \eta^{km}\eta^{ln}\,\partial_k\,\delta A_l\big(\partial_m A_n - \partial_n A_m\big) \tag{5.76}$$

summieren. Formen wir den Integranden mit der Produktregel der Differentation um

$$\partial_k\big(\eta^{km}\eta^{ln}\,\delta A_l\big(\partial_m A_n-\partial_n A_m\big)\big)-\delta A_l\,\partial_k\left(\eta^{km}\eta^{ln}\left(\partial_m A_n-\partial_n A_m\right)\right), \quad (5.77)$$

so können wir den ersten Term integrieren. Er trägt nur zu Randtermen bei und verschwindet für Variationen $\delta A_l(x)$, die so gewählt sind, daß sie am Rand verschwinden. Am zweiten Term lesen wir die Variationsableitung der Maxwellwirkung nach $A_l(x)$ für Variationen ab, die am Rand verschwinden

$$\frac{\delta W_{\text{Maxwell}}}{\delta A_l}=\frac{1}{4\pi}\partial_k F^{kl}\,, \quad (5.78)$$

wobei $F^{kl}=\eta^{km}\eta^{ln}F_{mn}$ (5.8) und $F_{mn}(x)=\partial_m A_n(x)-\partial_n A_m(x)$ (5.38) ist.

Wir definieren mit der Variationsableitung der Materiewirkung den elektromagnetischen Strom

$$\frac{\delta W_{\text{Materie}}}{\delta A_l}=-\frac{1}{c}j^l\ . \quad (5.79)$$

Die inhomogenen Maxwellgleichungen (5.10) sind die Bedingung, daß die Gesamtwirkung $W_{\text{Maxwell}}+W_{\text{Materie}}$ stationär ist und verschwindende Variationsableitungen hat

$$0=4\pi\frac{\delta W}{\delta A_l}=\partial_k F^{kl}-\frac{4\pi}{c}j^l\ . \quad (5.80)$$

Die homogenen Maxwellgleichungen (5.7) sind wegen der Definition der Feldstärken $F_{mn}(x)=\partial_m A_n(x)-\partial_n A_m(x)$ (5.38) identisch erfüllt.

Eulerableitung

Die Maxwellwirkung (5.74) ist ein lokales Funktional der Felder $A_l(x)$, das heißt, sie läßt sich als Integral

$$W[A]=\int d^4x\,\mathcal{L}(A(x),\partial A(x),x) \quad (5.81)$$

über eine Lagrangedichte $\mathcal{L}(A,\partial A,x)$ schreiben, die von den Jet-Variablen x^m, A_l, $\partial_k A_l$ und eventuell von höheren Ableitungen der Felder abhängt.

Die Variationsableitung einer lokalen Wirkung ergibt sich aus der Ableitung der Lagrangedichte $\mathcal{L}(A+\lambda\delta A,\partial(A+\lambda\delta A),x)$ nach λ

$$\delta\mathcal{L}=\partial_\lambda\mathcal{L}(A+\lambda\delta A,\partial(A+\lambda\delta A),x)_{|_{\lambda=0}}=\ \delta A_l\,\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_l}+(\partial_k\,\delta A_l)\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_k A_l)} \quad (5.82)$$

Dies können wir mit der Produktregel als Summe von vollständigen Ableitungen und von Produkten mit undifferenzierten δA_l schreiben

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{L} &= \delta A_l\big(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_l} - \partial_k\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_k A_l)}\big) + \partial_k\big(\delta A_l\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_k A_l)}\big)\\ &= \delta A_l\frac{\hat\partial\mathcal{L}}{\hat\partial A_l} + \partial_k\big(\delta A_l\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_k A_l)}\big)\ .\end{aligned} \tag{5.83}$$

Die Funktion der Jet-Variablen, die δA_l nach Abwälzen der Ableitungen multipliziert

$$\frac{\hat\partial\mathcal{L}}{\hat\partial A_l} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_l} - \partial_k\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_k A_l)} \tag{5.84}$$

$$= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_l} - (\partial_k\partial_r A_s)\frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial(\partial_k A_l)\partial(\partial_r A_s)} - (\partial_k A_s)\frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial(\partial_k A_l)\partial A_s} - \frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial(\partial_k A_l)\partial x^k}\ ,$$

heißt Eulerableitung der Lagrangedichte.

Die Lagrangedichte $\mathcal{L}$ ändert sich bei Änderung der Argumente um δA_l mal der Eulerableitung und um die vollständige Ableitung von $\delta A_l\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_k A_l)}$. Diese Identität in den Jet-Variablen gilt unabhängig davon, welche Änderungen δA_l wir betrachten, ob sie eine beliebige Abweichung von physikalischen Feldern bezeichnet, die für große Raumzeitargumente verschwindet, oder ob sie für die Änderung der Felder unter einer Transformationsgruppe steht.

Aus (5.83) folgt die Variationsableitung der lokalen Wirkung

$$\delta W[A,\delta A] = \int d^4x\,\delta A_l\frac{\hat\partial\mathcal{L}}{\hat\partial A_l} + \partial_k\big(\delta A_l\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_k A_l)}\big)\ . \tag{5.85}$$

Die Ableitungsterme können für alle Funktionen $\delta A_l(x)$ und $A_l(x)$ integriert werden und tragen nur zu Randtermen bei. Betrachten wir Variationen $\delta A_l(x)$, die am Rand, das heißt für große Werte der räumlichen oder zeitlichen Koordinaten, verschwinden, so verschwinden diese Randterme. Daher ist die Variationsableitung jeder lokalen Wirkung für Variationen der Felder, die am Rand verschwinden, die Eulerableitung der Lagrangedichte

$$\frac{\delta W}{\delta A_l} = \frac{\hat\partial\mathcal{L}}{\hat\partial A_l}\ . \tag{5.86}$$

Physikalische Felder, wie das Viererpotential der Elektrodynamik, sind dadurch ausgezeichnet, daß sie eine lokale Wirkung (5.81) extremal machen. Sie erfüllen mit geeigneter Lagrangedichte $\mathcal{L}$ die Differentialgleichungen

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_l} - \partial_k\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_k A_l)} = 0\ . \tag{5.87}$$

5.10 Symmetrien der Wirkung

Um einfach definieren zu können, was eine Symmetrie der Wirkung $W[A]$ ist, betrachten wir eine einparametrige Gruppe T_α von Transformationen, die Felder auf Felder abbilden und die so parametrisiert sei, daß $T_\alpha \circ T_\beta = T_{\alpha+\beta}$ gilt und folglich T_0 zur identischen Abbildung gehört. Als infinitesimale Transformation oder Änderung $\delta A_l(x)$ bezeichnen wir die Ableitung der Transformation bei $\alpha = 0$.

$$\delta A_l(x) = \frac{d}{d\alpha} T_\alpha A_l(x)\Big|_{\alpha=0} \tag{5.88}$$

Wir nennen eine Transformation lokal, wenn $\delta A_l(x)$ nur von den Jet-Variablen x, $A_n(x)$ und von endlich vielen Ableitungen $\partial_{m_1} \ldots \partial_{m_r} A_n(x)$ der Felder an diesem Punkt, nicht aber von $A_n(y)$ oder seinen Ableitungen an einem anderen Punkt $y \neq x$ abhängt.

Die Wirkung $W[T_\alpha A]$ ändert sich nach Definition der Variationsableitung (5.75) um

$$\delta W = \int d^4x \, \delta A_l(x) \frac{\delta W}{\delta A_l(x)} \; . \tag{5.89}$$

Die Transformation T_α heißt Symmetrie der Wirkung $W[A]$, wenn sich die Wirkung nur um Randterme ändert, das heißt genauer [16], wenn sich der Integrand in (5.89) identisch in den Feldern A_l als Summe von Ableitungen schreiben läßt

$$\delta A_l \frac{\delta W}{\delta A_l} + \partial_m j^m = 0 \; . \tag{5.90}$$

Physikalische Felder erfüllen $\frac{\delta W}{\delta A_l} = 0$, demnach gehört zu jeder Symmetrie der Wirkung ein Strom j^m, der die Kontinuitätsgleichung erfüllt, falls die Felder die Bewegungsgleichungen erfüllen!

Die Lagrangedichte $\mathcal{L}$ einer lokalen Wirkung bleibt unter jeder infinitesimalen Symmetrietransformation wegen (5.83) und (5.86) bis auf vollständige Ableitungen $\partial_m K^m$ mit $K^m = \delta A_l \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_m A_l)} - j^m$ ungeändert

$$\delta \mathcal{L} = \delta A_l \frac{\hat{\partial} \mathcal{L}}{\hat{\partial} A_l} + \partial_m \big(\delta A_l \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_m A_l)} \big) = \partial_m K^m \; . \tag{5.91}$$

Der erhaltene Strom ist also

$$j^m = \delta A_l \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_m A_l)} - K^m \; . \tag{5.92}$$

Der Strom ist lokal, wenn die Symmetrie lokal ist.

Bei einer lokalen Wirkung kann man für jede gegebene infinitesimale Transformation δA_l nach Ausrechnen von $\delta \mathcal{L}$ leicht entscheiden, ob sie zu

einer kontinuierlichen Symmetrie gehört. $\delta\mathcal{L}$ läßt sich als Funktion der Jet-Variablen genau dann als Ableitung $\partial_m K^m$ schreiben (4.30), wenn die Euler-ableitung von $\delta\mathcal{L}$ verschwindet.

Umgekehrt gehört zu jedem Strom, der aufgrund der Bewegungsgleichungen erhalten ist, eine Symmetrie der Wirkung. Denn Funktionen $\bar{j}^m$ der Felder und ihrer Ableitungen gehören zu einem Strom, der aufgrund der Bewegungsgleichungen erhalten ist, wenn identisch in den Jet-Variablen gilt[8]

$$0 = \partial_m \bar{j}^m + R_l \frac{\delta W}{\delta A_l(x)} + R_l^m \partial_m \big(\frac{\delta W}{\delta A_l(x)}\big) \ . \tag{5.93}$$

Die Größen R_l und R_l^m hängen auf nicht weiter festgelegte Art von den Koordinaten x, den Feldern $A_l(x)$ und ihren Ableitungen ab. Durch Abwälzen der Ableitung können wir diese Gleichung in die Form (5.90) bringen

$$0 = \partial_m(\bar{j}^m + R_l^m \frac{\delta W}{\delta A_l(x)}) + \big(R_l - \partial_m R_l^m\big) \frac{\delta W}{\delta A_l(x)} \ . \tag{5.94}$$

Zu jedem erhaltenen Strom gehört also die infinitesimale Symmetrie der Wirkung und ein äquivalenter Strom

$$\delta A_l = R_l - \partial_m R_l^m \ , \quad j^m = \bar{j}^m + R_l^m \frac{\delta W}{\delta A_l(x)} \ . \tag{5.95}$$

Die Ströme $\bar{j}^m$ und j^m stimmen für physikalische Felder überein.

Aus der Kontinuitätsgleichung (5.14) folgt (5.16), daß die zum erhaltenen Strom gehörige Ladung erhalten ist

$$\mathcal{Q}(t) = \int d^3x \, j^0(t, \vec{x}) \, , \quad \frac{d\mathcal{Q}}{dt} = 0 \ , \tag{5.96}$$

wenn die Ströme $\vec{j}$ als Funktion der Felder genügend schnell abfallen und das Integrationsvolumen so groß gewählt ist, daß keine Ladung über die Randfläche strömt.

Wir fassen zusammen:

Satz 2 *Noethertheorem der Feldtheorie: Zu jeder kontinuierlichen, lokalen Symmetrie der lokalen Wirkung gehört ein erhaltener, lokaler Strom* (5.92) *und eine Erhaltungsgröße* $\mathcal{Q}$ (5.96). *Umgekehrt gehört zu jedem lokalen, erhaltenen Strom eine kontinuierliche, lokale Symmetrie der lokalen Wirkung.*

[8] Die Untersuchung des Falls, daß höhere Ableitungen auftreten, bleibt dem Leser und Anhang F überlassen.

Am Noethertheorem ist nichts zu beweisen, man muß nur erkennen, daß eine infinitesimalen Symmetrie der Wirkung einen erhaltenen Strom definiert (5.90) und umgekehrt. Die Beziehung zwischen infinitesimaler Symmetrie und erhaltenem Strom ist linear. Die Nullvektoren dieser linearen Abbildung werden durch das zweite Noethertheorem (Satz 3) charakterisiert: zu Eichsymmetrien gehören verschwindende Ströme. Verschwindet der Strom, so ist (5.90) eine Identität zwischen den Bewegungsgleichungen. Zu solch einer Identität gehört eine Eichsymmetrie.

infinitesimale Bewegungen

Die Transformationen (5.61) können nicht nur als Transformationsgesetz des Viererpotentials unter Wechsel des Koordinatensystems gelesen werden, bei dem jedes Ereignis x mit neuen Koordinaten x' bezeichnet wird, sondern die Transformation kann auch als aktive Transformation gelesen werden, bei der Ereignisse x' auf Ereignisse $x(x')$ abgebildet werden. Solche Transformationen nennen wir auch Bewegungen.

Um Invarianztransformationen der Wirkung W_{Maxwell} (5.74) zu untersuchen, beschränken wir uns zunächst auf infinitesimale Transformationen

$$x'^m = x^m - \xi^m\,, \quad x^m = x'^m + \xi^m \tag{5.97}$$

und rechnen nur in erster Ordnung in ξ^m. Das Vektorfeld ξ^m hängt zunächst beliebig von x ab. Da wir nur in erster Ordnung in ξ^m rechnen, ist $\xi^m(x) = \xi^m(x')$, denn wenn man $\xi^m(x-\xi)$ entwickelt, ist die Differenz von höherer Ordnung in ξ. Für die partiellen Ableitungen $\frac{\partial x^s}{\partial x'^l}$ erhalten wir daher $\delta_l{}^s + \partial_l \xi^s$. Demnach lautet das infinitesimale Transformationsgesetz (5.61)

$$A'_s(x-\xi) = A'_s(x) - \xi^n \partial_n A_s(x) = A_s(x) + \partial_l \xi^n A_n\ . \tag{5.98}$$

Daraus entnehmen wir die Änderung $\delta A_s(x) = A'_s(x) - A_s(x)$

$$\delta A_s(x) = \xi^n \partial_n A_s + \partial_s \xi^n A_n\ . \tag{5.99}$$

Dies ist die Lie-Ableitung (B.20) $\mathcal{L}_\xi A_s$ des Vektorfeldes A längs des Vektorfeldes ξ. Entsprechend ändern sich wegen (5.63) die Feldstärken

$$\delta F_{rs}(x) = \xi^n \partial_n F_{rs} + \partial_r \xi^n F_{ns} + \partial_s \xi^n F_{rn}\ . \tag{5.100}$$

Die Maxwell-Lagrangedichte ändert sich daher um

$$\begin{aligned} \delta\big(F_{rs}F^{rs}\big) &= 2(\xi^n \partial_n F_{rs} + \partial_r \xi^n F_{ns} + \partial_s \xi^n F_{rn})F^{rs} \\ &= \partial_n\big(\xi^n F_{rs}F^{rs}\big) + 2(-\frac{1}{2}\eta_{lr}\partial_n \xi^n + \partial_r \xi_l + \partial_l \xi_r)F^l{}_s F^{rs}\ . \end{aligned} \tag{5.101}$$

Der zweite Term verschwindet und die Lagrangefunktion ändert sich nur um Ableitungsterme, wenn ξ^m zu einer konformen Transformation gehört und die konforme Killing-Gleichung (C.31) erfüllt. Die Maxwellwirkung ist unter konformen Transformationen, nicht aber unter allgemeinen Koordinatentransformationen invariant.

Die Maxwell-Lagrangedichte ist invariant unter Eichtransformationen

$$\delta_\Lambda A_s = \partial_s \Lambda \ , \tag{5.102}$$

denn die Feldstärken $F_{mn} = \partial_m A_n - \partial_n A_m$ ändern sich nicht, wenn man zum Viererpotential einen Vierergradienten hinzufügt. Wenn wir jede konforme Transformation mit einer Eichtransformation mit $\Lambda = -\xi^n A_n$ begleiten, treten im Transformationsgesetz des Viererpotentials keine Ableitungen von ξ^m auf und das Viererpotential erscheint im Transformationsgesetz nur in Form der eichinvarianten Feldstärken

$$\delta_{\text{kombiniert}} A_s(x) = \xi^n \partial_n A_s + \partial_s \xi^n A_n - \partial_s \big(\xi^n A_n\big) = \xi^n F_{ns} \ . \tag{5.103}$$

Zu jedem konformen Killingfeld ξ^m gehört eine Symmetrie der Maxwellwirkung unter der kombinierten Transformation und demnach ein erhaltener Strom (5.92)

$$j^k_{\text{kombiniert}} = -\frac{1}{4\pi}\big((\xi^n F_{nl})F^{kl} - \frac{1}{4}\xi^k F_{rs}F^{rs}\big) = \xi_n T^{nk} \tag{5.104}$$

$$T^{kl} = -\frac{1}{4\pi}\big(F^k{}_n F^{ln} - \frac{1}{4}\eta^{kl} F_{mn}F^{mn}\big) \ . \tag{5.105}$$

Dabei sind T^{kl} die Komponenten des Energie-Impulstensors (5.17).

Die Komponenten des Energie-Impulstensors sind als Energiedichte T^{00}, Energiestrom T^{0i}, Impulsdichten T^{i0} und Impulsströme T^{ij}, $\quad i,j \in \{1,2,3\}$, der elektromagnetischen Felder zu deuten, denn per Definition ist die Energie die Erhaltungsgröße, die zur Invarianz der Wirkung unter Zeittranslationen $\xi^m = (1,0,0,0)$ gehört, und der Impuls gehört zur Invarianz unter räumlichen Translationen, zum Beispiel $\xi^m = (0,1,0,0)$.

geladenes Punktteilchen

Wir koppeln ein relativistisches Punktteilchen mit Weltlinie $\Gamma : s \to x(s)$ an die elektromagnetischen Felder $A_l(x)$, indem wir zur Wirkung (4.7) des freien Teilchens und der Maxwellwirkung (5.74) des freien elektromagnetischen Feldes die folgende Wechselwirkung hinzufügen

$$W_{\text{Kopplung}}[A,x] = -\frac{q}{c}\int ds\, \frac{dx^m}{ds} A_m(x(s)) \ . \tag{5.106}$$

Die Wechselwirkung W_{Kopplung} ist bis auf Randterme invariant unter Reparametrisierung $s(s')$ der Weltlinie und unter Eichtransformationen $\delta A_m = \partial_m \Lambda$. Die Wechselwirkung ist auch invariant unter allgemeinen Koordinatentransformationen, allerdings ist die Maxwell-Wirkung nur unter der Untergruppe der konformen Transformationen invariant und die Wirkung der Punktteilchen nur unter der noch kleineren Gruppe der Poincaré-Transformationen. Insbesondere ist wegen der Translationsinvarianz der Gesamtimpuls und die Gesamtenergie erhalten.

Wenn wir die Weltlinie $x(s)$ variieren, ändert sich der Integrand von W_{Kopplung} in erster Ordnung um

$$\begin{aligned}
&\frac{d(x^m + \delta x^m)}{ds} A_m(x + \delta x) - \frac{dx^m}{ds} A_m(x) = \\
&= \frac{d\delta x^m}{ds} A_m(x) + \frac{dx^m}{ds} \delta x^n \partial_n A_m(x) = \\
&= \frac{d}{ds}\left(\delta x^m A_m\right) - \delta x^m \frac{d}{ds} A_m(x(s)) + \frac{dx^m}{ds} \delta x^n \partial_n A_m(x) = \\
&= \frac{d}{ds}\left(\delta x^m A_m\right) + \delta x^n F_{nm} \frac{dx^m}{ds} \ . \qquad (5.107)
\end{aligned}$$

Der erste Term ist eine Ableitung, die zu W_{Kopplung} nur Randterme beiträgt und die verschwinden, wenn die Variation δx^m am Rand verschwindet. Kombiniert mit der Variation der Wirkung (4.7) des freien Teilchens ergeben sich die Bewegungsgleichungen

$$\frac{d}{ds} P^n = \frac{q}{c} F^n{}_m \frac{dx^m}{ds} \qquad (5.108)$$

mit Teilchenimpulsen P^n, die durch (4.57) gegeben sind.

Die Bewegungsgleichungen sind invariant unter Reparametrisierungen $s(s')$. Wählen wir als Bahnparameter die Zeit $s = t$, so stimmen sie überein mit den Gleichungen (5.28), die die Erhaltung der Gesamtenergie und des Gesamtimpulses garantieren und aus denen man die Lorentzkraft abliest.

Um die Auswirkung der Kopplung für die Maxwellgleichungen zu bestimmen, schreiben wir die Kopplung als

$$W_{\text{Kopplung}}[A, x] = -\frac{q}{c} \int d^4y \int ds \, \frac{dx^l}{ds} \delta^4(y - x(s)) A_l(y) \qquad (5.109)$$

und lesen den elektromagnetischen Strom als Variationsableitung $\frac{\delta W_{\text{Kopplung}}}{\delta A_l}$ (5.79) ab

$$j^l(y) = q \int ds \, \delta^4(y - x(s)) \frac{dx^m}{ds} \ . \qquad (5.110)$$

Wählen wir in diesem reparametrisierungsinvarianten Ausdruck speziell die Parametrisierung $s = t$, so können wir mit der δ-Funktion $\delta(y^0 - t)$ die Integration ausführen und erhalten für die elektrische Ladungs- und Stromdichte des Punktteilchens mit Bahnkurve $\vec{x}(t)$

$$\rho(t, \vec{y}) = q\, \delta^3(\vec{y} - \vec{x}(t))\,, \quad \vec{\jmath}(t, \vec{y}) = q\, \frac{d\vec{x}}{dt}\, \delta^3(\vec{y} - \vec{x}(t))\ . \tag{5.111}$$

Noetheridentität und Eichinvarianz

Ist eine Wirkung $W[\phi]$ von Feldern ϕ oder von Teilchenbahnen unter einer infinitesimalen Transformation invariant, deren Transformationsparameter $\xi(x)$ eine beliebige Funktion der Raumzeit ist, solche Transformationen nennen wir Eichtransformationen, so sind die Bewegungsgleichungen nicht unabhängig voneinander und die zugehörigen erhaltenen Ströme j^m sind trivial, das heißt physikalisch nicht unterscheidbar von $j^m = 0$. Zu Eichsymmetrien gehören Identitäten der Bewegungsgleichungen und verschwindende Erhaltungsgrößen. Gelten umgekehrt zwischen den Bewegungsgleichungen Identitäten, dann ist die Wirkung eichinvariant.

Dies folgt [16] aus der Definition (5.90) einer infinitesimalen Symmetrie[9]

$$\delta_\xi \phi_l \frac{\delta W}{\delta \phi_l} + \partial_m j^m_\xi = 0\ . \tag{5.112}$$

Wir fassen die linke Seite als eine Lagrangefunktion der Jet-Variablen auf, zu denen wir ξ und seine Ableitungen zählen können, und berechnen die Eulerableitung nach ξ. Die Eulerableitung der vollständigen Ableitung $\partial_m j^m_\xi$ verschwindet identisch in den Jet-Variablen und beim ersten Term ist die Eulerableitung nach ξ eine Identität zwischen den Bewegungsgleichungen. Diese Identität ist unabhängig von ξ, wenn, wie das bei infinitesimalen Transformationen der Fall ist, $\delta_\xi \phi_l(x)$ linear im Transformationsparameter ist

$$\frac{\hat{\partial}}{\hat{\partial}\xi}\big(\delta_\xi \phi_l \frac{\delta W}{\delta \phi_l}\big) = 0\ . \tag{5.113}$$

Zu jeder Eichinvarianz der Wirkung gehört also eine Identität der Bewegungsgleichungen!

Wem diese Herleitung der Noetheridentität zu schnell geht, kann das Ergebnis folgendermaßen erschließen. Die Transformation $\delta_\xi \phi_l(x)$ enthält die

[9] ϕ_l steht für alle Felder. Sie werden durch l abgezählt.

beliebige Funktion $\xi(x)$ linear, da es sich um den Parameter einer infinitesimalen Transformation handelt, und ist daher von der Form[10]

$$\delta_\xi \phi_l = R_l\, \xi + R_l^k\, \partial_k \xi \ . \tag{5.114}$$

Dabei sind R_l und R_l^k Funktionen der Jet-Variablen. Wälzen wir in (5.112) die Ableitungen von ξ ab

$$(R_l\, \xi + R_l^k\, \partial_k \xi)\frac{\delta W}{\delta \phi_l} = \xi\big(R_l \frac{\delta W}{\delta \phi_l} - \partial_k \big(R_l^k \frac{\delta W}{\delta \phi_l}\big)\big) + \partial_k (\xi R_l^k \frac{\delta W}{\delta \phi_l}) \ , \tag{5.115}$$

so erhalten wir

$$\xi\big(R_l \frac{\delta W}{\delta \phi_l} - \partial_k \big(R_l^k \frac{\delta W}{\delta \phi_l}\big)\big) + \partial_m \big(j_\xi^m + \xi R_l^m \frac{\delta W}{\delta \phi_l}\big) = 0 \ . \tag{5.116}$$

Dies ist für beliebige Funktionen ξ nur möglich, wenn der Faktor bei ξ verschwindet, denn wenn der Faktor bei ξ in einer Umgebung eines Punktes positiv ist, so wählen wir ξ außerhalb dieser Umgebung Null und innerhalb dieser Umgebung positiv. Dann gäbe das Integral über die Raumzeit auf der linken Seite der Gleichung einen positiven Wert.

Also gilt die Noetheridentität (5.113)

$$R_l \frac{\delta W}{\delta \phi_l} - \partial_k \big(R_l^k \frac{\delta W}{\delta \phi_l}\big) = 0 \ . \tag{5.117}$$

Zudem erfüllt der Strom $J^m = j_\xi^m + \xi R_l^m \frac{\delta W}{\delta \phi_l}$ die Kontinuitätsgleichung $\partial_m J^m = 0$ identisch in den Jet-Variablen. Diese Identität hat, wie das algebraische Poincaré-Lemma [21] besagt, die allgemeine Lösung $J^m = \partial_n B^{nm}$, wobei $B^{mn} = -B^{nm}$ beliebige, unter Vertauschung der Indizes antisymmetrische Funktionen der Jet-Variablen sind.

Also verschwindet der Strom j_ξ^m aufgrund der Bewegungsgleichungen bis auf einen Anteil, der aus Ableitungen einer antisymmetrischen Größe besteht

$$j_\xi^m = -\xi R_l^m \frac{\delta W}{\delta \phi_l} + \partial_n B^{mn} \ , \quad B^{mn} = -B^{nm} \ . \tag{5.118}$$

Solche Stöme nennnen wir topologisch. Die zugehörigen Ladungen $\mathcal{Q}_V$ hängen für Felder, die Bewegungsgleichungen erfüllen, nur von B^{0i} auf dem Rand des Integrationsvolumens V ab $\mathcal{Q}_V = \int_V d^3x j^0 = \oint_{\partial V} df^i B^{0i}$. Ladungen, die nicht vom Wert der Felder im Innern des Integrationsvolumens abhängen,

[10] Die Untersuchung des Falls, daß höhere Ableitungen auftreten, bleibt dem Leser und Anhang F überlassen.

sind topologisch, das heißt unabhängig von Veränderungen der Felder in beschränkten Gebieten. Die Gesamtladung $\mathcal{Q}$ verschwindet, wenn die B^{0i} für große Werte der Raumzeitkoordinaten genügend schnell klein werden.

Umgekehrt gehört zu jeder Identität der Bewegungsgleichungen

$$0 = S_l \frac{\delta W}{\delta \phi_l} + S_l^k \partial_k \frac{\delta W}{\delta \phi_l} \ , \tag{5.119}$$

die identisch in den Jet-Variablen gilt, eine Eichsymmetrie der Wirkung und ein erhaltener Strom, der aufgrund der Bewegungsgleichungen verschwindet! Um dies zu zeigen, multiplizieren wir die Identität mit einer beliebigen Funktion ξ und schreiben sie als Definition (5.112) einer Eichinvarianz

$$0 = \xi\big(S_l \frac{\delta W}{\delta \phi_l} + S_l^k \partial_k \frac{\delta W}{\delta \phi_l}\big)\big) = \big(S_l\, \xi - \partial_k\big(\xi S_l^k\big)\big) \frac{\delta W}{\delta \phi_l} + \partial_m\big(\xi S_l^m \frac{\delta W}{\delta \phi_l}\big) \ . \tag{5.120}$$

Damit ist das zweite Noethertheorem bewiesen.

Satz 3 *zweites Noethertheorem: Zu jeder kontinuierlichen Eichsymmetrie der Wirkung gehört eine Identität zwischen den Bewegungsgleichungen und umgekehrt. Die zur Eichsymmetrie gehörende Ladung $\mathcal{Q}$ ist topologisch, das heißt unabhängig von Änderungen der Felder in beschränkten Gebieten.*

Ist die Wirkung die Summe einer eichinvarianten Wirkung für Felder A_l und einer zweiten, ebenfalls eichinvarianten Wirkung, die die Felder A_k an weitere Felder ϕ_i, die wir Materiefelder nennen, koppelt

$$W[A, \phi] = W_{\text{Eich}}[A] + W_{\text{Materie}}[A, \phi] \ , \tag{5.121}$$

so gilt die Noetheridentität für die Bewegungsgleichung

$$\frac{\delta W_{\text{Eich}}}{\delta A_k} = -\frac{\delta W_{\text{Materie}}}{\delta A_k} \tag{5.122}$$

zweifach. Die linke Seite erfüllt wegen (5.113) die Noetheridentität

$$0 = \frac{\hat{\partial}}{\hat{\partial}\xi}\big(\delta_\xi A_k \frac{\delta W_{\text{Eich}}}{\delta A_k}\big) \ . \tag{5.123}$$

Die Noetheridentität der rechten Seite

$$0 = \frac{\hat{\partial}}{\hat{\partial}\xi}\big(\delta_\xi A_k \frac{\delta W_{\text{Materie}}}{\delta A_k} + \delta_\xi \phi_i \frac{\delta W_{\text{Materie}}}{\delta \phi_i}\big) \tag{5.124}$$

gilt für alle Felder, insbesondere auch für solche Materiefelder ϕ_i, die ihre Bewegungsgleichungen $\frac{\delta W_{\text{Materie}}}{\delta \phi_i} = 0$ erfüllen. Dann fallen die Beiträge der Materiefelder zur Noetheridentität weg und auch die rechte Seite erfüllt identisch in den Feldern A_k

$$0 = \frac{\hat{\partial}}{\hat{\partial}\xi}\big(\delta_\xi A_k \frac{\delta W_{\text{Materie}}}{\delta A_k}\big) \ , \quad \text{wenn} \quad \frac{\delta W_{\text{Materie}}}{\delta \phi_i} = 0 \ . \tag{5.125}$$

Die Maxwellwirkung W_{Maxwell} (5.74) ist invariant unter infinitesimalen Eichtransformationen (5.42)

$$\delta_\xi A_l = \partial_l \xi \ . \tag{5.126}$$

Dies ist (5.114) mit $R_l = 0$ und $R^k_l = \delta^k{}_l$ und führt zur Identität (5.113)

$$-\partial_l \frac{\delta W_{\text{Maxwell}}}{\delta A_l} = 0 \ . \tag{5.127}$$

Werden Materiefelder mit einer eichinvarianten Materiewirkung angekoppelt $W[A,\phi] = W_{\text{Maxwell}}[A] + W_{\text{Materie}}[A,\phi]$ und kommen die restlichen Felder ϕ nur in W_{Materie} vor, so erfüllen beide Teile getrennt die Noetheridentität

$$\partial_l \frac{\delta W_{\text{Maxwell}}}{\delta A_l} = 0 = \partial_l \frac{\delta W_{\text{Materie}}}{\delta A_l} \ . \tag{5.128}$$

Dabei ist die erste Gleichung $\partial_l(\partial_k F^{kl}) = 0$ eine Identität und gilt für beliebige Felder $A_l(x)$. Die zweite Gleichung ist die Kontinuitätsgleichung $\partial_l j^l = 0$ für den elektromagnetischen Strom $j^l \sim \frac{\delta W_{\text{Materie}}}{\delta A_l}$ (5.79). Sie gilt aufgrund der Eichinvarianz der Wirkung, wenn die restlichen Felder ϕ ihre Bewegungsgleichungen erfüllen, identisch in A_l. Dieser Sachverhalt hängt nicht von Einzelheiten der Ankopplung der Materie ab und gilt, solange die Materiefelder nur in W_{Materie} auftreten und beide Teile der Wirkung getrennt eichinvariant sind.

Die Wirkung von Punktteilchen ist invariant unter infinitesimalen Transformationen $\delta_\xi x^m = \xi \frac{dx^m}{ds}$, die zu Reparametrisierungen $s' = s - \xi(s)$ gehören. Diese Transformation ist, richtig gelesen, von der Form (5.114) mit $R^m = \frac{dx^m}{ds}$ und $R^{mk} = 0$, wobei der Index k zu der Ableitung nach dem Bahnparameter gehört und nur einen Wert annimmt. Die zugehörige Noetheridentität (5.117) lautet

$$0 = \frac{dx^m}{ds} \frac{\delta W}{\delta x^m(s)} \ . \tag{5.129}$$

Dies ist eine Identität in x^m, falls alle weiteren Freiheitsgrade, die ebenfalls unter der Reparametrisierung transformieren, ihre Bewegungsgleichungen erfüllen.

Für die Wirkung freier Teilchen W_{Teilchen} (4.7) besagt die Noetheridentität

$$\frac{dx^m}{ds}\frac{d}{ds}\frac{\frac{dx_m}{ds}}{\sqrt{\frac{dx}{ds}\cdot\frac{dx}{ds}}} = 0 \ . \tag{5.130}$$

Sie ist ohne Einschränkung an x^m erfüllt, denn die Änderung eines Einheitsvektors ist stets auf ihm senkrecht (3.1).

Für die Ankopplung an das elektromagnetische Feld W_{Kopplung} (5.106) lautet die Identität (5.129)

$$\frac{dx^m}{ds}\big(\frac{q}{c}F_{mn}\frac{dx^n}{ds}\big) = 0\,. \tag{5.131}$$

Sie ist unabhängig davon erfüllt, ob die elektromagnetischen Felder ihren Bewegungsgleichungen genügen, denn eine Doppelsumme eines symmetrischen Indexpaares mit einem antisymmetrischen Indexpaar verschwindet (5.11).

Da der Viererimpuls P^m (4.57) proportional zum Tangentialvektor $\frac{dx^m}{ds}$ ist, besagt die Noetheridentität, daß sich P^2 und damit die Masse (4.61) selbst bei Wechselwirkung nicht längs der Bahn ändert $\frac{d}{ds}P^2 = 2P^m\frac{d}{ds}P_m = 0$. Denn fügen wir der Wirkung W_{Teilchen} einen reparametrisierungsinvarianten Teil W_{Kraft} hinzu, so lauten die Bewegungsgleichungen $\frac{d}{ds}P_m = F_m$ und die Kraft $F_m = -\frac{\delta W_{\text{Kraft}}}{\delta x^m}$ steht senkrecht auf dem Viererimpuls

$$\frac{dx^m}{ds}\frac{\delta W_{\text{Kraft}}}{\delta x^m} = 0 \ . \tag{5.132}$$

Das Quadrat des Viererimpulses eines Punktteilchens, dessen Wirkung reparametrisierungsinvariant ist, ist also auch bei Wechselwirkung erhalten. Diese theoretische Schlußfolgerung stimmt mit den Beobachtungen von Teilchen im elektromagnetischen oder gravitativen Feld überein, ist aber meßbar falsch bei Teilchenumwandlungen wie zum Beispiel Kernzerfällen. Teilchenumwandlung kann nicht Auswirkung von Kräften auf Punktteilchen sein.

Mathematisch und physikalisch ist die Beschreibung von Materie durch Punktteilchen unhaltbar. Weil geladene Punktteilchen nicht ausgedehnt sind, erzeugen sie elektromagnetische Feldstärken, die in der Nähe des Punktteilchens nicht mehr als kleine Störung vernachlässigt werden können, zum Beispiel ist die Feldenergie, die zu einem Punktteilchen gehört, unendlich. Modelle mit ausgedehnten Ladungsverteilungen benötigen zusätzliche Wechselwirkungen, die verhindern, daß die zu Teilchen gehörigen Ladungsverteilungen wegen der Abstoßung gleichnamiger Ladungen zerfließen. Die Ladungsverteilung kann nicht starr sein, weil es in relativistischer Physik keinen wirklich starren Körper geben kann. Daher muß Materie durch eine Feldtheorie beschrieben werden. Nach heutigem Wissensstand liefert nur die Quantenfeldtheorie eine akzeptable Theorie für Materie.

Kapitel 6

Eichtheorie

6.1 Golfspiel

Die wichtigsten geometrischen Strukturen einer Eichtheorie kann man an folgendem, unrealistischen Beispiel ablesen. Wir betrachten ein Schiff auf dem Meer einer Erde, die sich nicht dreht, so daß keine Coriolis-Kraft eine Richtung auszeichnet. Auf diesem Schiff ist ein Golfplatz für Gäste eingerichtet.

Bei ihrem Spiel bemerken sie, daß es keine Rolle spielt, ob der Bug des Schiffes in diese oder jene Richtung zeigt, solange diese Richtung während des Spieles beibehalten wird. Das Golfspiel ist invariant unter Drehungen des Golfplatzes.

Nun seien noch andere Schiffe mit Golfplätzen unterwegs. Solange die Golfspiele sich auf jeweils ein Schiff beschränken, laufen alle Golfspiele unabhängig davon ab, wie jedes einzelne Schiff orientiert ist. Die Schiffe können jedes für sich gedreht werden. Die Golfspiele sind invariant unter geeichten Drehungen, das heißt, die Drehung darf von Ort zu Ort variieren.

Um der Langeweile an Bord abzuhelfen, wird ein Golfturnier veranstaltet, bei dem Abschlag und Loch auf benachbarten Schiffen liegen. Immer noch darf dann jedes Schiff beliebig gedreht werden, es muß nur auf jedem Schiff die Richtung zum anderen Schiff bekannt sein. Diese Information kann zum Beispiel an Gummifäden abgelesen werden, mit denen man die Schiffe verbindet und die sich spannen, wenn ein Schiff relativ zum anderen gedreht wird. Die Gummifäden, die die Information über Richtungen der Schiffe speichern, heißen in der Mathematik Zusammenhang oder Konnektion und in der Physik Eichfeld oder Yang-Mills-Feld.

Genauer gesagt, enthalten die Eichfelder die Information darüber, welche Richtung am benachbarten Ort parallel zu einer Richtung am ursprünglichen Ort ist.

Gespannte Gummifäden üben Kräfte aus. Dies ist auch in Eichtheorien so: die Eichfelder bewirken Kräfte zwischen den Objekten, die gedreht werden.

Fast alle bekannten, elementaren Kräfte gehören zu solchen Eichfeldern: die elektrischen und magnetischen Kräfte, auf denen Atombau, Chemie, Materialeigenschaften, Biologie und unsere heutige Zivilisation beruhen, die schwachen Kräfte, die zum Beispiel Kernumwandlungen durch Beta-Zerfall bewirken, die starken Kräfte, die Quarks zu Proton und Neutron zusammenfügen und die Kernkräfte zwischen ihnen verursachen, und die Gravitation. Leider ist nicht ganz richtig, daß alle elementaren Kräfte Eichwechselwirkungen sind: im Standardmodell gibt es darüber hinaus Yukawa-Kopplungen, die zu Fermionmassen führen, und die Wechselwirkung des Higgsfeldes mit sich.

Zurück zum Beispiel: Eine wichtige Frage ist, ob die Schiffe so gedreht werden können, daß alle Schiffe parallel zueinander sind, so daß alle Gummifäden schlaff sind und keine Kraft ausüben. Dann erübrigt sich ein Streit, ob die Gummifäden deshalb gespannt sind, weil sich das Nachbarschiff oder das eigene Schiff gedreht hat.

Rechnerisch kann man dies entscheiden, indem man die Krümmung der Konnektion ausrechnet. In der Allgemeinen Relativitätstheorie heißt diese Krümmung Riemanntensor, in der Eichtheorie der elektromagnetischen, schwachen und starken Kräfte heißt sie Feldstärke oder Yang-Mills-Feldstärke.

Krümmung stellt man fest, wenn man mit dem Schiff einen Rundkurs fährt und auf dem Golfplatz während der Fahrt eine vorgegebene Richtung betrachtet, die während der Fahrt parallel verschoben wird. Krümmung führt dazu, daß die parallel verschobene Richtung nach Rückkehr an den Ausgangpunkt nicht mit der dort hinterlegten Anfangsrichtung übereinstimmt. Beispielsweise durchfahre man in Gedanken ein Viertel des Äquators, dann zum Nordpol und dann südwärts zum Ausgangspunkt. Jede parallel verschobene Richtung auf dem Golfplatz ist nach Rückkehr um 90°gedreht. Die Abweichung der längs einer geschlossenen Kurve parallel transportierten Richtung von der Ausgangsrichtung ist für kleine Flächen proportional zur umfahrenen Fläche und ein Maß für die umlaufene Krümmung.

6.2 Parallelverschiebung

Parallelverschiebung ist eine geometrische Struktur, die, wenn sie erklärt ist, einen Zusammenhang von Vektoren am Anfangspunkt A und Endpunkt B jeder Kurve $\Gamma : A \to B$ herstellt. Wir bezeichnen mit $P_{\Gamma:A\to B}\ v$ den Vektor am Punkt B, den wir durch Parallelverschieben des Vektors v von A längs Γ

nach B erhalten.

Parallelverschiebung hat definitionsgemäß folgende Eigenschaften: Wird eine Summe $v+w$ parallel verschoben, so soll dies mit der Summe der parallel verschobenen Teile übereinstimmen. Zudem soll jedes Vielfache von v in das Vielfache von $P_{\Gamma:A\to B}v$ verschoben werden

$$P_{\Gamma:A\to B}(v+w) = (P_{\Gamma:A\to B}v) + (P_{\Gamma:A\to B}w) \ , \quad P_{\Gamma:A\to B}(c\,v) = c\,(P_{\Gamma:A\to B}v) \ . \tag{6.1}$$

Parallelverschiebung ist also mit der Vektorraumstruktur verträglich.

Jeder Vektor sich selbst parallel, besteht die Kurve Γ nur aus einem Punkt, so ist $P_\Gamma v = v$. Hintereinanderausführen von Parallelverschiebung ergibt definitionsgemäß die Parallelverschiebung längs hintereinander durchlaufener Wege. Für jeden Punkt C auf der Kurve zwischen A und B und die zugehörigen Teilkurven Γ_1 und Γ_2 mit $\Gamma = \Gamma_2 + \Gamma_1$ soll also gelten

$$P_{\Gamma:A\to B}\ v = P_{\Gamma_2:C\to B}P_{\Gamma_1:A\to C}\ v \ . \tag{6.2}$$

Da Paralleverschiebung hintereinander ausgeführt werden kann, so liegt sie fest, wenn für jeden Vektor v an jedem Ort x der Vektor $P_\xi v(x)$ am benachbarten Ort $x+\xi$ definiert ist, den man durch Parallelverschiebung längs des infinitesimalen Kurvenstücks von x zu $x+\xi$ erhält. Parallelverschiebung längs endlicher Strecken ist durch Hintereinanderausführen von infinitesimalen Verschiebungen erklärt.

Demnach erhält man aus einem Vektor mit Komponenten $u^m(x)$ durch Parallelverschiebung um ξ bis auf Terme der Ordnung ξ^2 einen Vektor am Ort $x+\xi$ mit Komponenten

$$\left(P_\xi u\right)^m = u^m - \xi^k \Gamma_{kl}{}^m u^l \ . \tag{6.3}$$

Für $\xi = 0$ bleiben die Komponenten unverändert, jeder Vektor ist sich selbst parallel. Die Form des Terms $\xi^k u^l \Gamma_{kl}{}^m$ ist durch Linearität in u und ξ festgelegt. Der Term muß linear in ξ sein, denn wir vernachlässigen für infinitesimal benachbarte Orte $x+\xi$ Terme der Ordnung ξ^2. Die Funktionen $\Gamma_{kl}{}^m(x)$ sind die Komponentenfunktionen der affinen Konnektion oder des affinen Zusammenhangs und definieren die Parallelverschiebung.

Verschieben wir längs der rückwärts durchlaufenen Kurve $-\Gamma$ von B nach A, so erhalten wir den ursprünglichen Vektor

$$P_{-\Gamma:B\to A}\ \left(P_{\Gamma:A\to B}\ v\right) = v \ . \tag{6.4}$$

Insbesondere definiert Paralletransport längs geschlossener Kurven Γ, die von einem Punkt A wieder zu A zurückführen, lineare Abbildungen der Vektoren v auf Vektoren $P_\Gamma v$, die hintereinander ausgeführt und invertiert werden können. Diese Abbildungen bilden eine Gruppe, die Holonomiegruppe.

Die Holonomiegruppe, die durch Paralleltransport von einem Punkt B längs geschlossener Wege zurück zu B erzeugt wird, ist der Holonomiegruppe des Punktes A isomorph, wenn A und B durch einen Weg zusammenhängen. Ist für die Vektoren eine zusätzliche Struktur definiert, zum Beispiel ihre Länge, und ist der Paralleltransport damit verträglich, und erhält die Länge, so ist die Holonomiegruppe eine Untergruppe der linearen Transformationen, die Länge erhält, also eine Untergruppe der Drehgruppe oder der Lorentzgruppe.

Parallelverschiebung von dualen Vektoren ω ist auf natürliche Art dadurch erklärt, daß Parallelverschiebung linear auf ω wirkt und daß der zum Ort $x+\xi$ parallel verschobene duale Vektor $P_\xi\omega$, auf parallel verschobene Vektoren $P_\xi u$ angewendet, dasselbe ergibt wie $\omega(u)$ an der Stelle x.

$$P_\xi\omega(P_\xi u) = \omega(u) \tag{6.5}$$

Dies gilt in Komponenten bis zur Ordnung $(\xi)^2$ für alle Vektoren u^m

$$\omega_m u^m = P_\xi\omega(P_\xi u) = (P_\xi\omega)_m(u^m - \xi^k\Gamma_{kl}{}^m u^l) = ((P_\xi\omega)_m - (P_\xi\omega)_n\xi^k\Gamma_{km}{}^n)u^m$$

genau dann, wenn Parallelverschiebung dualer Vektoren durch

$$(P_\xi\omega)_m = \omega_m + \xi^k\Gamma_{km}{}^n\omega_n \tag{6.6}$$

gegeben ist.

Allgemeiner definiert man Parallelverschiebung von Tensoren dadurch, daß der zum Ort $x+\xi$ parallel verschobene Tensor angewendet auf parallelverschobene Vektoren und duale Vektoren, dasselbe ergeben soll, wie der unverschobene Tensor auf die unverschobenen Vektoren am Ort x oder kurz $P_\xi T(P_\xi v,\dots) = T(v,\dots)$. Für die Komponenten heißt dies

$$\begin{aligned}(P_\xi T)_{m_1\dots m_r}{}^{n_1\dots n_s} =& T_{m_1\dots m_r}{}^{n_1\dots n_s} + \\ &+ \xi^k\Gamma_{km_1}{}^l T_{l\dots m_r}{}^{n_1\dots n_s} + \dots + \xi^k\Gamma_{km_r}{}^l T_{m_1\dots l}{}^{n_1\dots n_s} - \\ &- \xi^k\Gamma_{kl}{}^{n_1} T_{m_1\dots m_r}{}^{l\dots n_s} - \dots - \xi^k\Gamma_{kl}{}^{n_s} T_{m_1\dots m_r}{}^{n_1\dots l}\ .\end{aligned} \tag{6.7}$$

Die $r+s$ Terme mit der Konnektion Γ arbeiten in dieser Gleichung das Indexbild der Komponenten des Tensors T nach der Produktregel der Differentation ab: es entstehen die gleichen $r+s$ Terme, die man erhalten hätte, wenn die Tensorkomponenten als ein Produkt von s Vektorkomponenten und r Komponenten dualer Vektoren gegeben wären und wenn man die Komponenten der parallel verschobenen Vektoren ausmultipliziert und dabei Terme der Ordnung $(\xi)^2$ vernachlässigt hätte.

Koordinatentransformation der Konnektion

Im Koordinatensystem $x'(x)$ sind gemäß (B.7) die Komponenten des parallel nach $x+\xi$ verschobenen Vektors durch

$$(P_\xi u)'^m = \frac{\partial x'^m}{\partial x^n}\Big|_{x+\xi} \big(u^n - \xi^k \Gamma_{kl}{}^n u^l\big) \tag{6.8}$$

gegeben. Dabei ist zu beachten, daß $P_\xi u$ ein Vektor am Ort $x+\xi$ ist und daß die Jacobimatrix der partiellen Ableitungen $\frac{\partial x'}{\partial x}$ am verschobenen Ort auszuwerten ist. Entwickeln wir nach ξ, so gilt in erster Ordnung

$$(P_\xi u)'^m = \big(\frac{\partial x'^m}{\partial x^n}\Big|_x + \xi^k \frac{\partial^2 x'^m}{\partial x^k \partial x^n}\Big|_x\big)\big(u^n - \xi^k \Gamma_{kl}{}^n u^l\big) \tag{6.9}$$

$$= \frac{\partial x'^m}{\partial x^n} u^n + \xi^k u^l \big(\frac{\partial^2 x'^m}{\partial x^k \partial x^l} - \frac{\partial x'^m}{\partial x^n}\Gamma_{kl}{}^n\big)\ . \tag{6.10}$$

Drücken wir dies durch die Komponenten im gestrichenen System aus

$$(P_\xi u)'^m = u'^m - \xi'^r u'^s\, \Gamma'_{rs}{}^m\ , \tag{6.11}$$

und verwenden wir dabei (B.15), so können wir die Komponentenfunktionen der Konnektion im transformierten Koordinatensystem ablesen

$$\Gamma'_{rs}{}^m(x') = \frac{\partial x^k}{\partial x'^r}\frac{\partial x^l}{\partial x'^s}\big(\frac{\partial x'^m}{\partial x^n}\Gamma_{kl}{}^n(x(x')) - \frac{\partial^2 x'^m}{\partial x^k \partial x^l}\big)\ . \tag{6.12}$$

Durch Differenzieren von (B.15) nach x^k und mit der Kettenregel folgt

$$\frac{\partial x^k}{\partial x'^r}\frac{\partial x^l}{\partial x'^s}\frac{\partial^2 x'^m}{\partial x^k \partial x^l} = -\frac{\partial x^k}{\partial x'^r}\big(\frac{\partial}{\partial x^k}\frac{\partial x^l}{\partial x'^s}\big)\frac{\partial x'^m}{\partial x^l} = -\frac{\partial^2 x^l}{\partial x'^r \partial x'^s}\frac{\partial x'^m}{\partial x^l}\ . \tag{6.13}$$

Daher schreibt sich das Transformationsgesetz der Konnektion auch als

$$\Gamma'_{rs}{}^m(x') = \frac{\partial x^k}{\partial x'^r}\frac{\partial x^l}{\partial x'^s}\frac{\partial x'^m}{\partial x^n}\Gamma_{kl}{}^n(x(x')) + \frac{\partial^2 x^n}{\partial x'^r \partial x'^s}\frac{\partial x'^m}{\partial x^n}\ . \tag{6.14}$$

Ist die Transformation $x'(x)$ nicht affin, oder mit anderen Worten, hängen die Koordinaten x' nicht linear inhomogen von x ab, so transformiert die Konnektion inhomogen. In flachen Räumen gilt die einfache Vorschrift für Parallelverschiebung, daß parallel verschobene Vektoren unveränderte Komponenten haben und daß $\Gamma_{kl}{}^n$ verschwindet, nur in solchen Koordinatensystemen, die durch affine Transformationen miteinander zusammen hängen.

Zerlegt man $\Gamma_{kl}{}^m$ in einen symmetrischen und antisymmetrischen Anteil

$$\Gamma_{kl}{}^m = S_{kl}{}^m + \frac{1}{2} T_{kl}{}^m \ , \tag{6.15}$$

$$S_{kl}{}^m = \frac{1}{2}\big(\Gamma_{kl}{}^m + \Gamma_{lk}{}^m\big) \ , \quad T_{kl}{}^m = \Gamma_{kl}{}^m - \Gamma_{lk}{}^m \ , \tag{6.16}$$

so transformieren $S_{kl}{}^m = S_{lk}{}^m$ und $T_{kl}{}^m = -T_{lk}{}^m$ getrennt voneinander

$$S'_{rs}{}^m(x') = \frac{\partial x^k}{\partial x'^r}\frac{\partial x^l}{\partial x'^s}\frac{\partial x'^m}{\partial x^n} S_{kl}{}^n(x(x')) + \frac{\partial^2 x^n}{\partial x'^r \partial x'^s}\frac{\partial x'^m}{\partial x^n} \ , \tag{6.17}$$

$$T'_{rs}{}^m(x') = \frac{\partial x^k}{\partial x'^r}\frac{\partial x^l}{\partial x'^s}\frac{\partial x'^m}{\partial x^n} T_{kl}{}^n(x(x')) \ . \tag{6.18}$$

Weil die zweiten Ableitungen von x nach x' nicht von der Reihenfolge der Ableitungen abhängen, sind sie symmetrisch unter Vertauschen der Indizes r und s und tragen nicht inhomogen zu den transformierten Komponentenfunktionen des antisymmetrischen Anteils $T_{kl}{}^n$ bei. $T_{kl}{}^n$ sind die Komponentenfunktionen eines Tensors mit zwei unteren und einem oberen Index (B.18), der Torsion. Die Torsion verschwindet in allen Koordinatensystemen, wenn sie in einem verschwindet.

Die Koordinatentransformation $x'^n = x^n + \frac{1}{2} S_{kl}{}^n (x^k - c^k)(x^l - c^l)$ ist in einer Umgebung von $x^n = c^n$ invertierbar, wobei die Umkehrfunktion in niedrigster Ordnung in $x' - c$ durch $x^n = x'^n - \frac{1}{2} S_{kl}{}^n (x'^k - c^k)(x'^l - c^l)$ gegeben ist. Im Koordinatensystem x' verschwindet gemäß (6.17) der symmetrische Teil der Konnektion. Er kann an jedem vorgegebenen Punkt durch Wahl eines Koordinatensystems zum Verschwinden gebracht werden.

Geradengleichung

Eine Kurve $x(s)$ ist gerade oder eine Geodäte, wenn der Tangentialvektor $u^m(s) = \frac{dx^m}{ds}$ nach Parallelverschiebung längs der Kurve zum Punkt $x(s+\varepsilon) = x + \varepsilon u$ mit dem dortigen Tangentialvektor bis auf Terme der Ordnung ε^2 übereinstimmt.

$$P_{\varepsilon u} u(s) = u(s + \varepsilon) \tag{6.19}$$

In Komponenten bedeutet dies

$$u^m(s) - \varepsilon u^k \Gamma_{kl}{}^m u^l = u^m(s + \varepsilon) = u^m(s) + \varepsilon \frac{d}{ds} u^m(x) \ . \tag{6.20}$$

Die Koordinatenfunktionen der Geraden erfüllen also die Geodätengleichung

$$\frac{d^2 x^m}{ds^2} + \Gamma_{kl}{}^m \frac{dx^k}{ds}\frac{dx^l}{ds} = 0 \ . \tag{6.21}$$

Falls die affine Konnektion überall verschwindet, sind die Koordinaten von Geraden lineare Funktionen $x^m(s) = u^m \cdot s + x^m(0)$ des Bahnparameters.

Es ist $\frac{dx^k}{ds}\frac{dx^l}{ds} = \frac{dx^l}{ds}\frac{dx^k}{ds}$ symmetrisch unter Vertauschung der Indizes. Zerlegt man die Konnektion in ihren symmetrischen und antisymmetrischen Teil (6.15) und bedenkt man, daß die Doppelsumme über ein symmetrisches und ein antisymmetrisches Indexpaar verschwindet (5.11), so sieht man, daß zur Geradengleichung nur der symmetrische Teil ${S_{kl}}^m$ der Konnektion beiträgt.

metrikverträgliche Parallelverschiebung

Ist für Vektoren u an jedem Punkt x ein Längenquadrat erklärt

$$ {u^2}_{|x} = g_{mn}(x)u^m(x)u^n(x) \ , \tag{6.22} $$

so ist Parallelverschiebung verträglich mit der Metrik

$$ g_{mn}(x) = g_{nm}(x) \ , \tag{6.23} $$

wenn sie die Länge des Vektors nicht verändert, wenn also bis auf Terme der Ordnung $(\xi)^2$ gilt

$$ (P_\xi u)^2 = u^2 \ . \tag{6.24} $$

Setzen wir die Komponenten (6.3) des parallel verschobenen Vektors ein und berechnen wir das Längenquadrat am Ort $x + \xi$, so heißt dies

$$ \begin{aligned} 0 =& g_{mn}(x+\xi)(u^m - \xi^k {\Gamma_{kl}}^m u^l)(u^n - \xi^k {\Gamma_{kl}}^n u^l) - g_{mn}(x)u^m u^n \\ =& \xi^k \partial_k g_{mn} u^m u^n - g_{mn} u^m \xi^k {\Gamma_{kl}}^n u^l - g_{mn}\xi^k {\Gamma_{kl}}^m u^l u^n \\ =& \xi^k \left(\partial_k g_{mn} - g_{ml}{\Gamma_{kn}}^l - g_{ln}{\Gamma_{km}}^l\right) u^m u^n \ . \end{aligned} \tag{6.25} $$

Diese Gleichung gilt für alle ξ^k und alle u^m genau dann, wenn

$$ \partial_k g_{mn} - g_{ml}{\Gamma_{kn}}^l - g_{ln}{\Gamma_{km}}^l = 0 \tag{6.26} $$

erfüllt ist, denn wir können in der Identität (6.25) die Komponenten von ξ und u als Variable betrachten und nach ihnen differenzieren. Wir führen zur Vereinfachung die Notation

$$ \Gamma_{kl\,m} = g_{mn}{\Gamma_{kl}}^n \tag{6.27} $$

ein und zerlegen $\Gamma_{kl\,m}$ wie in (6.15) in einen symmetrischen und antisymmetrischen Teil. Die Gleichungen (6.26) legen den symmetrischen Teil $S_{kl\,m}$ der

Konnektion fest. Dies sieht man, wenn man die permutierten Versionen von (6.26) geeignet linear kombiniert

$$\partial_k g_{mn} - \frac{1}{2}T_{k\,n\,m} - \frac{1}{2}T_{k\,m\,n} = \quad S_{k\,n\,m} + S_{k\,m\,n} \tag{6.28}$$

$$\partial_m g_{nk} - \frac{1}{2}T_{m\,k\,n} - \frac{1}{2}T_{m\,n\,k} = \quad S_{m\,k\,n} + S_{m\,n\,k} \tag{6.29}$$

$$-\partial_n g_{km} + \frac{1}{2}T_{n\,m\,k} + \frac{1}{2}T_{n\,k\,m} = -S_{n\,m\,k} - S_{n\,k\,m}\ . \tag{6.30}$$

Addiert man diese drei Gleichungen, so heben sich wegen $S_{k\,n\,m} = S_{n\,k\,m}$ und $S_{m\,n\,k} = S_{n\,m\,k}$ auf der rechten Seite vier Terme weg und man erhält

$$S_{k\,m\,n} = \frac{1}{2}\big(\partial_k g_{mn} + \partial_m g_{nk} - \partial_n g_{k\,m}\big) - \frac{1}{2}T_{k\,n\,m} - \frac{1}{2}T_{m\,n\,k}\ . \tag{6.31}$$

Wir setzten voraus, daß die Metrik invertierbar ist[1], und lösen $S_{k\,l\,n} = g_{nm}S_{kl}{}^{m}$ nach $S_{kl}{}^{m}$ durch Multiplikation mit der inversen Metrik

$$g^{nr}g_{rm} = \delta^{n}_{m} \tag{6.32}$$

auf. Dabei bezeichnet man die Matrixelemente der inversen Metrik g^{-1} einfach mit g^{nm} und entnimmt der Indexstellung, daß es sich um die inverse Metrik handelt.

Setzt man in (6.15) ein, so ergeben sich die Komponenten des metrikverträglichen, affinen Zusammenhangs

$$\Gamma_{kl}{}^{m} = \frac{1}{2}g^{mn}\big(\partial_k g_{nl} + \partial_l g_{nk} - \partial_n g_{kl} + T_{nk\,l} + T_{nl\,k} + T_{kl\,n}\big)\ . \tag{6.33}$$

Wenn die Konnektion $\Gamma_{kl}{}^{m}$ metrikverträglich ist und die Torsion $T_{kl}{}^{m}$ verschwindet, so ist die Konnektion durch das Christoffelsysmbol gegeben

$$\Gamma_{kl}{}^{m} = \frac{1}{2}g^{mn}\big(\partial_k g_{nl} + \partial_l g_{nk} - \partial_n g_{kl}\big)\ . \tag{6.34}$$

Verschwindet die Torsion nicht, so trägt sie auch zum symmetrischen Teil $S_{kl}{}^{m}$ der metrikverträglichen Konnektion bei und macht sich in der Geradengleichung (6.21) bemerkbar.

6.3 Krümmung und Torsion

Hat Parallelverschiebung, die durch Angabe einer affinen Konnektion $\Gamma_{kl}{}^{m}$ definiert wird, keine speziellen Eigenschaften, so hat der Raum Torsion und Krümmung.

[1] Ist die Parallelverschiebung metrikverträglich und die Metrik in einem Punkt invertierbar, so ist sie in allen damit wegzusammenhängenden Punkten invertierbar, denn aus $g_{mn}(x+\xi)v^n = 0$ und der Metrikverträglichkeit würde $g_{mn}(x)(P_{-\xi}v)^n = 0$ folgen.

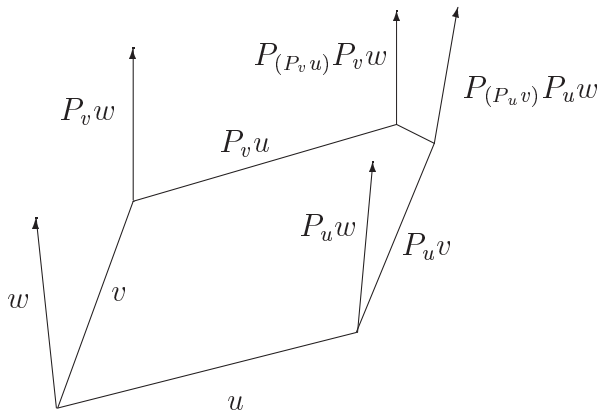


Abbildung 6.1: Krümmung und Torsion

Torsion zeigt sich daran, daß Parallelogramme sich nicht schließen. Seien u^m und v^n die Komponenten von zwei Vektoren am Ort x. Folgt man dem Vektor u und verschiebt dabei den Vektor v längs u parallel, so erhält man am Ort $x+u$ den Vektor mit Komponenten $(P_u v)^n = v^n - u^r v^s \Gamma_{rs}{}^n$ (6.3). Folgt man von $x+u$ diesem parallel verschobenen Vektor, so gelangt man zu $x+u+P_u v$ mit Koordinaten $x^n + u^n + v^n - u^r v^s \Gamma_{rs}{}^n$. Vertauscht man die Reihenfolge des Vorgehens und folgt zunächst v und dann $P_v u$, so gelangt man zu $x+v+P_v u$ mit Koordinaten $x^n + v^n + u^n - v^r u^s \Gamma_{rs}{}^n$.

Das so durchlaufende Parallelogramm schließt sich nicht, wenn der Vektor $T(u,v)$ mit Komponenten $u^r v^s (\Gamma_{rs}{}^n - \Gamma_{sr}{}^n)$ nicht verschwindet. Der Differenzvektor ist linear in u und in v und wechselt das Vorzeichen, wenn man u und v vertauscht. Er definiert die Torsion, eine bilineare, unter Permutation antisymmetrische Abbildung von Paaren von Vektoren, die ein Parallelogramm definieren, auf den Vektor, um den sich das Parallelogramm zu schließen fehlt

$$(T(u,v))^n = u^r v^s \, T_{rs}{}^n \ , \quad T_{rs}{}^n = \Gamma_{rs}{}^n - \Gamma_{sr}{}^n \ . \tag{6.35}$$

Wenn die Torsion nicht verschwindet, haben Parallelogramme ähnliche Eigenschaften wie Schraubengewinde. Folgt man einer Rille eines Gewindes einmal durch Rechts- und ein anderes Mal durch Linksdrehung um 180°, so endet man nicht am selben Ort, sondern um eine Ganghöhe versetzt.

Die Torsion verschwindet, wenn die affine Konnektion symmetrisch unter Vertauschung der unteren beiden Indizes ist, wenn also $\Gamma_{rs}{}^n = \Gamma_{sr}{}^n$ gilt.

Krümmung zeigt sich daran, daß ein Vektor w, der parallel um ein Parallelogramm verschoben wird, nicht mit dem ursprünglichen Vektor übereinstimmt. Wir zeigen diesen Sachverhalt, indem wir w längs der Seiten u und $P_u v$ und über die Lücke $T(u,v)$ parallel verschieben, also den Vektor

$P_{T(u,v)}P_{(P_u v)}P_u w$ bestimmen und die Differenz zu dem Vektor $P_{(P_v u)}P_v w$ berechnen, der aus w durch Parallelverschiebung längs der beiden gegenüberliegenden Seiten v und $P_v u$ hervorgeht.

Der Vektor $P_{(P_u v)}P_u w$ hat bis auf Terme, die quadratisch in u und v sind, Komponenten

$$(P_{(P_u v)}P_u w)^n = (P_u w)^n - \Gamma_{kl}{}^n(x+u)(P_u v)^k (P_u w)^l \ .$$

Entwickeln wir Γ nach u und multiplizieren wir aus, so folgt

$$\begin{aligned}(P_{(P_u v)}P_u w)^n &= w^n - \Gamma_{kl}{}^n u^k w^l - \\ &\quad - \big(\Gamma_{kl}{}^n(x) + u^m \partial_m \Gamma_{kl}{}^n(x)\big)\big(v^k - \Gamma_{rs}{}^k u^r v^s\big)\big(w^l - \Gamma_{rs}{}^l u^r w^s\big) \\ &= w^n - \Gamma_{kl}{}^n u^k w^l - \Gamma_{kl}{}^n v^k w^l + \Gamma_{kl}{}^n \Gamma_{rs}{}^k u^r v^s w^l + \\ &\quad + \Gamma_{kl}{}^n \Gamma_{rs}{}^l u^r v^k w^s - u^m \partial_m \Gamma_{kl}{}^n v^k w^l \ . \end{aligned} \tag{6.36}$$

Verschieben wir noch um $T(u,v)$, so erhalten wir diese Komponenten und Terme, bei denen diese Komponenten mit $-T(u,v)\Gamma(x+u+P_u v)$ multipliziert sind. Da $T(u,v)$ schon bilinear in u und v ist, brauchen wir in unserer Näherung, die quadratische Terme in u und v vernachlässigt, nicht berücksichtigen, daß das Argument von Γ verschoben ist und wir erhalten nur einen Zusatzterm $-T(u,v)^k \Gamma_{kl}{}^n w^l = -u^r v^s (\Gamma_{rs}{}^k - \Gamma_{sr}{}^k)\Gamma_{kl}{}^n w^l$. Insgesamt folgt

$$\begin{aligned}(P_{T(u,v)}P_{(P_u v)}P_u w)^n &= w^n - \Gamma_{kl}{}^n u^k w^l - \Gamma_{kl}{}^n v^k w^l + \Gamma_{kl}{}^n \Gamma_{sr}{}^k u^r v^s w^l + \\ &\quad + \Gamma_{kl}{}^n \Gamma_{rs}{}^l u^r v^k w^s - u^m \partial_m \Gamma_{kl}{}^n v^k w^l \ . \end{aligned} \tag{6.37}$$

Hiervon unterscheidet sich der Vektor $P_{(P_v u)}P_v w$, der anders um das Parallelogramm verschoben wurde und sich aus (6.36) durch Vertauschen von u und v ergibt, durch

$$\begin{aligned}&(P_{T(u,v)}P_{(P_u v)}P_u w)^n - (P_{(P_v u)}P_v w)^n = \\ &\quad - \big(\partial_k \Gamma_{lm}{}^n - \partial_l \Gamma_{km}{}^n - \Gamma_{km}{}^r \Gamma_{lr}{}^n + \Gamma_{lm}{}^r \Gamma_{kr}{}^n\big) u^k v^l w^m \ . \end{aligned} \tag{6.38}$$

Da diese Differenz bereits bilinear in u und v ist, ändert sie sich nicht in der betrachteten Näherung, wenn wir sie längs $P_v u$ und v parallel zurück in den Ursprung des Parallelogramms verschieben. Sie stimmt daher überein mit der Differenz des Vektors, der einmal um das gesamte Parallelogramm einschließlich der Lücke $T(u,v)$ parallel verschoben wurde und dem Ausgangsvektor. Diese Differenz definiert den Riemanntensor

$$(P_{-v}P_{(-P_v u)}P_{T(u,v)}P_{(P_u v)}P_u w - w)^n = -R_{klm}{}^n u^k v^l w^m \tag{6.39}$$

$$R_{klm}{}^n = \partial_k \Gamma_{lm}{}^n - \partial_l \Gamma_{km}{}^n - \Gamma_{km}{}^r \Gamma_{lr}{}^n + \Gamma_{lm}{}^r \Gamma_{kr}{}^n \ . \tag{6.40}$$

Der Riemanntensor ordnet einem Paar von Vektoren u und v, die ein infinitesimales Parallelogramm definieren, eine Abbildung $R(u,v)$ zu. Vektoren w, die parallel um das Parallelogramm mit Seiten u und w verschoben worden sind, unterscheiden sich vom anfänglichen Vektor um -$R(u,v)w$. Der Riemanntensor ist linear in seinen Argumenten und antisymmetrisch unter Vertauschung der Vektoren u und v

$$(R(u,v)w)^n = R_{klm}{}^n u^k v^l w^m \ , \quad R_{klm}{}^n = -R_{lkm}{}^n \ . \tag{6.41}$$

Gemäß Definition ist der Riemanntensor unabhängig vom verwendeten Koordinatensystem, seine Komponenten transformieren als Tensorfelder (B.18)

$$R'_{pqr}{}^s(x') = \frac{\partial x^k}{\partial x'^p}\frac{\partial x^l}{\partial x'^q}\frac{\partial x^m}{\partial x'^r}\frac{\partial x'^s}{\partial x^n} R_{klm}{}^n(x(x')) \ , \tag{6.42}$$

wie man mit dem Transformationsgesetz der Konnektion (6.14) bestätigt.

Notwendig dafür, daß in einem Koordinatensystem alle Komponenten $\Gamma_{kl}{}^m$ der affinen Konnektion verschwinden, ist offensichtlich, daß Torsion und Krümmung verschwinden, denn wenn $\Gamma_{kl}{}^m = 0$ überall gilt, verschwinden die Tensoren $T_{kl}{}^n$ und $R_{klm}{}^n$. Wenn umgekehrt Torsion und Krümmung verschwinden, so lassen sich Koordinatensysteme finden, in denen die Komponenten der Konnektion verschwinden: zur Konstruktion dieser Koordinaten verschleppt man von einem Ausgangpunkt eine Basis von Tangentialvektoren parallel zu jedem anderen Punkt. Das Ergebnis ist wegunabhängig, weil die Krümmung verschwindet. Als Koordinaten, in denen die Konnektion verschwindende Komponentenfunktionen hat, können die Bahnparameter der Integralkurven (B.5) dieser parallelen Vektorfelder verwendet werden, da die Torsion verschwindet und es egal ist, ob man erst der einen oder der anderen Koordinatenlinie folgt, um vom Ursprung zu einem anderen Punkt zu gelangen.

Wenn die Parallelverschiebung metrikverträglich ist, so hat der Vektor w dieselbe Länge wie der um ein Parallelogramm parallel verschobene Vektor $w - R(u,v)w$. In niedrigster Ordnung gilt also $0 = w^n g_{nr} R_{klm}{}^r u^k v^l w^m$ identisch in den Variablen u^k, v^l und w^m. Dies gilt genau dann, wenn der Riemanntensor, dessen letzter Index durch Multiplikation mit der Metrik nach unten gezogen ist, im zweiten Indexpaar antisymmetrisch ist

$$R_{klmn} = g_{nr} R_{klm}{}^r \ , \quad R_{klmn} = -R_{klnm} \ . \tag{6.43}$$

In anderen Worten: Parallelverschiebung vom Ort x um das Parallellogramm mit Seiten u und v bildet jeden Vektor w auf $w \to (\mathbb{1} - R(u,v))w$ ab. Es ist also $\mathbb{1} - R(u,v)$ in niedrigster Ordnung in u und v ein Element der Holonomiegruppe. Bewahrt Paralleltransport die Länge eines Vektors, so ist die

Holonomiegruppe eine Untergruppe der Drehgruppe oder der Lorentzgruppe, je nach Vorzeichen im Längenquadrat. Die Abbildung $R(u,v)$ ist also eine infinitesimale Erzeugende von Drehungen oder Lorentztransformationen und R_{klmn} daher antisymmetrisch im zweiten Indexpaar.

6.4 kovariante Ableitung

Durch Parallelverschiebung können Tensorfelder an benachbarten Orten verglichen werden. Man verschiebt dazu einfach das Feld T von Ort $x+\xi$ parallel um $-\xi$ an den Ort x. Die Differenz zu $T(x)$ in erster Ordnung in ξ definiert am Punkt x die kovariante Ableitung $D_\xi T$ des Tensors T längs des Vektorfeldes ξ

$$P_{-\xi}T\Big|_{x+\xi} - T\Big|_x = D_\xi T(x) \ . \tag{6.44}$$

Da die kovariante Ableitung linear im Vektorfeld ξ ist

$$D_{\xi+\chi}T = D_\xi T + D_\chi T \ , \quad D_{f\cdot\xi} = f D_\xi T \ , \tag{6.45}$$

definiert $D_\xi T = \xi^k D_k T$ einen Tensor DT mit Komponenten $D_k T$, der ein Vektorargument mehr als der Tensor T hat.

Für die kovariante Ableitung eines Vektorfeldes (6.3) erhalten wir

$$D_\xi v^n(x) = (P_{-\xi}v(x+\xi) - v(x))^n = v^n(x+\xi) + \xi^k \Gamma_{kl}{}^n v^l - v^n(x) \ . \tag{6.46}$$

Wir entwickeln $v^n(x+\xi) = v^n(x) + \xi^k \partial_k v^n$. Beim zweiten Term braucht nicht berücksichtigt zu werden, daß ξ, Γ und v^l am Ort $x+\xi$ einzusetzen sind. Wenn wir sie nach ξ entwickeln, so wirkt sich das geänderte Argument in erster Ordnung in ξ nicht in den Termen aus, die schon einen Faktor ξ enthalten. Wir lesen ab

$$D_k v^n = \partial_k v^n + \Gamma_{kl}{}^n v^l \ . \tag{6.47}$$

Die kovariante Ableitung eines dualen Vektorfeldes folgt aus (6.6)

$$D_k \omega_n = \partial_k \omega_n - \Gamma_{kn}{}^l \omega_l \ . \tag{6.48}$$

Die kovariante Ableitung der Komponenten eines Tensor der Stufe (r,s) enthält wegen (6.7) außer der partiellen Ableitung r Terme mit negativem Vorzeichen, bei denen ein unteren Index mit der affinen Konnektion transformiert wird, und s Terme mit positivem Vorzeichen, bei denen jeweils ein oberer Index mit der affinen Konnektion multipliziert wird.

$$\begin{aligned} D_k T_{m_1\ldots m_r}{}^{n_1\ldots n_s} =& \partial_k T_{m_1\ldots m_r}{}^{n_1\ldots n_s} - \\ & - \Gamma_{km_1}{}^l T_{l\ldots m_r}{}^{n_1\ldots n_s} - \cdots - \Gamma_{km_r}{}^l T_{m_1\ldots l}{}^{n_1\ldots n_s} - \\ & + \Gamma_{kl}{}^{n_1} T_{m_1\ldots m_r}{}^{l\ldots n_s} + \cdots + \Gamma_{kl}{}^{n_s} T_{m_1\ldots m_r}{}^{n_1\ldots l} \end{aligned} \tag{6.49}$$

Parallelverschiebung ist genau dann metrikverträglich (6.26), wenn die kovariante Ableitung der Metrik

$$D_k g_{mn} = \partial_k g_{mn} - \Gamma_{km}{}^l g_{ln} - \Gamma_{kn}{}^l g_{ml} \tag{6.50}$$

verschwindet.

Die kovariante Ableitung von Tensoren ist linear

$$D_\xi(T+S) = D_\xi T + D_\xi S \ , \quad D_\xi cT = cD_\xi T \quad \forall c \in \mathbb{R} \ , \tag{6.51}$$

erfüllt die Produktregel

$$D_m(TS) = (D_m T)S + T(D_m S) \ , \tag{6.52}$$

und stimmt auf Skalarfeldern (B.1) mit der partiellen Ableitung überein.

Die kovariante Ableitung $\frac{\delta v}{\delta s}$ eines Vektors $v(s)$ längs einer Bahn $x(s)$ vergleicht den Vektor $v(s+\epsilon)$, der parallel um $-\epsilon\frac{dx}{ds}$ zurückverschoben ist, mit $v(s)$ in erster Ordnung in ϵ

$$\begin{aligned} \epsilon\frac{\delta v}{\delta s} &= P_{\left(-\epsilon\frac{dx}{ds}\right)} v(s+\epsilon) - v(s) \ , \\ \frac{\delta v^n}{\delta s} &= \frac{dv^n}{ds} + \frac{dx^k}{ds}\Gamma_{kl}{}^n v^l \ . \end{aligned} \tag{6.53}$$

Insbesondere besagt (6.21), daß die kovariante Ableitung des Tangentialvektors, die durch (6.53) für den Fall $v = \frac{dx}{ds}$ gegeben ist, längs einer Geraden oder Geodäten verschwindet.

Betrachten wir das Skalarprodukt $(a \cdot b) = a^m b^n g_{mn}$ von Vektoren a und b auf einer Kurve, so gilt für metrikverträgliche Konnektion $\Gamma_{mn}{}^k$ (6.26)

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}(a\cdot b) &= \frac{d}{ds}\big(g_{kl}a^k b^l\big) = \frac{dx^m}{ds}\partial_m g_{kl} a^k b^l + g_{kl}\frac{da^k}{ds}b^l + g_{kl}a^k\frac{db^l}{ds} \\ &= \big(\frac{da^k}{ds} + \Gamma_{mn}{}^k\frac{dx^m}{ds}a^n\big)g_{kl}b^l + a^k g_{kl}\big(\frac{db^l}{ds} + \Gamma_{mn}{}^l\frac{dx^m}{ds}b^n\big) \\ &= \frac{\delta a^k}{\delta s}g_{kl}b^l + a^k g_{kl}\frac{\delta b^l}{\delta s} = \frac{\delta a}{\delta s}\cdot b + a\cdot\frac{\delta b}{\delta s} \ . \end{aligned} \tag{6.54}$$

Berechnet man aus der zweifachen kovarianten Ableitung eines Vektorfeldes

$$\begin{aligned} D_k(D_l v^n) &= \partial_k(D_l v^n) - \Gamma_{kl}{}^r(D_r v^n) + \Gamma_{km}{}^n(D_l v^m) \\ &= \partial_k(\partial_l v^n + \Gamma_{lm}{}^n v^m) - \Gamma_{kl}{}^r(D_r v^n) + \Gamma_{km}{}^n(\partial_l v^m + \Gamma_{lr}{}^m v^r) \ , \end{aligned}$$

den Kommutator $[D_k, D_l]v^n = D_k(D_l v^n) - D_l(D_k v^n) = D_k(D_l v^n) - k \leftrightarrow l$, so erhält man Krümmung und Torsion

$$[D_k, D_l]v^n = -T_{kl}{}^r D_r v^n + R_{klm}{}^n v^m \ . \tag{6.55}$$

6.5 drehungsfreies Bezugssystem

Ein Beobachter durchlaufe eine Weltlinie $x^m(s)$, die mit der Zeit parametrisiert sei, die seine Uhr anzeigt. Dann hat der Tangentialvektor $\frac{dx^m}{ds} = {e_0}^m$ Einheitslänge. Senkrecht im Sinne des Skalarproduktes stehen an jedem Punkt der Weltlinie drei Basisvektoren e_i, $i = 1, 2, 3$, die räumlichen Maßstäbe des Beobachters, die von der Weltlinie zu gleichzeitigen, benachbarten Ereignissen zeigen, und die paarweise orthogonal und normiert sein mögen. Die vier orthonormalen Basisvektoren definieren längs der Weltlinie ein Vierbein

$$ {e_a}^m {e_b}^n g_{mn} = e_a \cdot e_b = \eta_{ab} \quad a, b \in \{0, 1, 2, 3\} \ . \tag{6.56} $$

Da die Skalarprodukte längs der Weltlinie konstant sind, folgt mit (6.54)

$$ \frac{\delta e_a}{\delta s} \cdot e_b + e_a \cdot \frac{\delta e_b}{\delta s} = 0 \ . \tag{6.57} $$

Drückt man die kovariante Ableitung des Vierbeins wieder als Linearkombination des Vierbeins aus

$$ \frac{\delta {e_a}^k}{\delta s} = {\omega_a}^c \, {e_c}^k \ , \tag{6.58} $$

so besagt (6.57), daß die Koeffizienten ω_{ab} antisymmetrisch sind.

$$ \omega_{ab} = {\omega_a}^c \eta_{bc} \quad \omega_{ab} = -\omega_{ba} \ . \tag{6.59} $$

ω ist eine infinitesimale Lorentztransformation (C.45, C.55).

Eine Weltlinie definiert auf folgende Weise ein natürliches Vierbein: die kovariante Ableitung des normierten Tangentialvektors e_0 definiert einen Vektor, die Beschleunigung, der als Linearkombination des Tangentialvektors und eines dazu senkrechten normierten Vektors e_1 geschrieben werden kann. Die kovariante Ableitung des Vektors e_1 kann als Linearkombination von e_0, e_1 und einem weiteren, normierten Vektor e_2 geschrieben werden, der senkrecht auf e_0 und e_1 steht. Durch fortlaufendes Differenzieren erhält man so die Gleichungen (6.58); allerdings verschwinden die Koeffizienten ${\omega_a}^c$ für $c > a+1$, weil Differenzieren jeweils zum nächsten Basisvektor des Vierbeins führt. Zudem sind die Koeffizienten ω_{ab} antisymmetrisch. Daher vereinfacht sich (6.58) zu den Frenet-Serretschen Formeln

$$ \begin{aligned} \frac{\delta e_0}{\delta s} &= -\omega_{01} \, e_1 & \frac{\delta e_1}{\delta s} &= -\omega_{01} \, e_0 - \omega_{12} \, e_2 \\ \frac{\delta e_2}{\delta s} &= \omega_{12} \, e_1 - \omega_{23} \, e_3 & \frac{\delta e_3}{\delta s} &= \omega_{23} \, e_2 \ . \end{aligned} \tag{6.60} $$

Die Koeffizientenfunktion ω_{01} ist der Betrag der Beschleunigung, ω_{12} ist der Betrag der Änderung der Richtung der Beschleunigung und über Coriolis-Effekte meßbar. ω_{23} schließlich erhält man durch Differenzieren der Richtung der Änderung der Beschleunigung. Verschwindet ω_{23}, so ist die Bahnkurve eben. Verschwindet ω_{12}, so ist die Bahn räumlich gerade, verschwindet ω_{01} so ist die Bahnkurve eine Gerade in der Raumzeit, also eine Geodäte, die Weltlinie eines frei fallenden Teilchens.

Aus den Koeffizientenfunktionen $\omega_{01}(s)$, $\omega_{12}(s)$ und $\omega_{23}(s)$ und den Anfangsbedingungen $x(0), e_a(0)$ kann die Bahnkurve $x(s)$ eindeutig bestimmt werden. Es ist ohne weiteres möglich, daß die Weltlinien zweier Zwillinge, die vom gleichen Ereignis $x(0)$ mit unterschiedlicher Geschwindigkeit $\frac{dx}{ds}_{|s=0} = e_0(0)$ starten, sich später schneiden. Auch wenn alle Koeffizientenfunktionen $\omega_{01}(s)$, $\omega_{12}(s)$ und $\omega_{23}(s)$ des ersten Zwillings zwischen Start bei $s = 0$ und Treffen bei $s = s_1$ mit denjenigen des anderen Zwillings zwischen $s = 0$ und $s = s_1$ übereinstimmen, kann der zweite Zwilling eine längere Weltlinie durchlaufen haben, auf der das Treffen zu einer späteren Zeit bei $s_2 > s_1$ stattfindet.

Das Vierbein, daß durch die Frenet-Serretschen Formeln definiert ist, ist normalerweise nicht drehungsfrei. Als drehungsfrei definiert ein Beobachter ein räumliches Bezugssystem e_1, e_2 und e_3, in dem Lichtwege umkehrbar sind und reflektierte Lichtstrahlen wieder aus der Richtung einfallen, in die sie ausgesendet worden waren.

Wir entwickeln eine nicht notwendig gerade Weltlinie $\Gamma : s \to x(s)$ mit Tangentialvektor ${e_0}^m = \frac{dx^m}{ds}$ und das gemäß (6.58) mitgeführte Vierbein ${e_a}^m(s)$ um einen Punkt $x(0)$ und betrachten einen Lichtstrahl, der zur Zeit $-s$ in Richtung n^i ausgesendet wird, dann in einem Punkt reflektiert und zur Zeit s wieder aus Richtung n^i_E empfangen wird. Die Weltlinien des ausgesendeten und empfangenen Lichtstrahls $y_A(\lambda)$ und $y_E(\lambda)$ lösen die Geodätengleichung, die Weltlinie des Beobachters die Gleichung $\frac{d{e_0}^m}{ds} + {\Gamma_{kl}}^m {e_0}^k {e_0}^l = {\omega_0}^b {e_b}^m$. Bis zu quadratischer Ordnung in s sind die Weltlinien

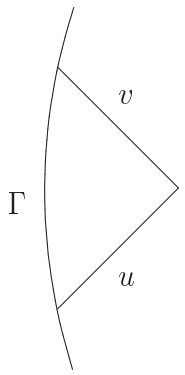


Abbildung 6.2: drehungsfreie Richtungen

$$x^m(s) = x^m(0) + s{e_0}^m + \frac{1}{2}s^2\left(-{\Gamma_{kl}}^m {e_0}^k {e_0}^l + {\omega_0}^b {e_b}^m\right) , \tag{6.61}$$

$$y^m_A(\lambda) = x^m(-s) + \lambda u^m - \frac{1}{2}\lambda^2 {\Gamma_{kl}}^m u^k u^l , \tag{6.62}$$

$$y^m_E(\lambda) = x^m(s) - \lambda v^m - \frac{1}{2}\lambda^2 {\Gamma_{kl}}^m v^k v^l . \tag{6.63}$$

Dabei haben die Tangentialvektoren u und v an die Weltlinie der ein- und auslaufenden Lichtstrahlen räumliche Komponenten n_E^i und n^i

$$u = e_0{}^m(-s) + n^i e_i{}^m(-s)\,, \quad v = e_0{}^m(s) - n_E^i e_i{}^m(s)\,, \quad \sum_{i=1}^{i=3} n^{i\,2} = 1 = \sum_{i=1}^{i=3} n_E^{i\ 2}\,. \tag{6.64}$$

Die Vierbeine lösen die Differentialgleichung (6.58) und sind in linearer Ordnung

$$e_a{}^m(s) = e_a{}^m(0) + s\big(-\Gamma_{kl}{}^m e_0{}^k e_a{}^l + \omega_a{}^b e_b{}^m\big)\,. \tag{6.65}$$

Die Bedingung, daß sich die Lichtstrahlen in einem Punkt schneiden

$$y_A(\lambda) = y_E(\lambda')\,, \tag{6.66}$$

sind vier Gleichungen, die λ, λ' und die zwei unabhängigen Komponenten von n_E als Funktion von n und s festlegen.

Wertet man diese Gleichungen zunächst in linearer Ordnung in s aus, indem man Skalarprodukte mit e_0 und e_j, $j = 1, 2, 3$, betrachtet, so ergibt sich $\lambda = \lambda' = s$ und $n_E^i = n^i$. Bis zur nächsten Ordnung gilt also

$$\lambda = s + s^2\lambda_2\,, \quad \lambda' = s + s^2\lambda_2'\,, \quad n_E^i = n^i + s\,\delta n^i\,. \tag{6.67}$$

Die Änderung δn des Einheitsvektors n ist senkrecht zu n. Der reflektierte Lichtstrahl kommt aus derselben Richtung zurück, und das Bezugssystem ist drehungsfrei, wenn $\delta n^i = 0$ ist.

In Ordnung s^2 heben sich in den Gleichungen (6.66) die symmetrischen Anteile $\Gamma_{kl}{}^m + \Gamma_{lk}{}^m$ der Konnektion weg. Für die Komponenten der Torsion $T_{kl}{}^m = \Gamma_{kl}{}^m - \Gamma_{lk}{}^m$ verwenden wir die Kurzschrift $T_{abc} = T_{kl}{}^m e_a{}^k e_b{}^l e_c{}^n g_{mn}$. Dann besagt (6.66) in quadratischer Ordnung

$$\delta n_i = (\lambda_2 - \lambda_2')n_i - 2n^j\omega_{ji} + T_{0j\,i}n^j\,, \quad \lambda_2 + \lambda_2' = n^j\omega_{j0} \tag{6.68}$$

Falls die Torsion verschwindet, so ist $\delta n_i = 0$ und das Bezugssystem drehungsfrei, wenn $\omega_{ij} = 0$ für $i, j \in \{1, 2, 3\}$ gilt und das Vierbein die Gleichungen des Fermi-Walker-Transports erfüllt.

$$\begin{aligned} \frac{\delta e_0}{\delta s} &= b_1\, e_1 + b_2\, e_2 + b_3\, e_3 & \frac{\delta e_1}{\delta s} &= b_1 e_0 \\ \frac{\delta e_2}{\delta s} &= b_2 e_0 & \frac{\delta e_3}{\delta s} &= b_3 e_0\,. \end{aligned} \tag{6.69}$$

Fermi-Walker-Transport längs einer Weltlinie ändert das Vierbein über Paralleltransport hinaus durch die drehungsfreie Lorentztransformation, die den

zum Nachbarort parallel verschobenen Tangentialvektor in den dortigen Tangentialvektor transformiert.

Wenn die Torsion nicht verschwindet, so zerlegen wir $T_{0i\,j} = S_{ij} + A_{ij}$ in seinen symmetrischen Teil $S_{ij} = \frac{1}{2}(T_{0i\,j} + T_{0j\,i})$ und seinen antisymmetrischen Teil $A_{ij} = \frac{1}{2}(T_{0i\,j} - T_{0j\,i})$. Die Gleichung $\delta n^i = 0$ (6.68) für alle Richtungen n besagt, daß die Matrix mit Matrixelementen $S_{ji} + A_{ji} - 2\omega_{ji} + (\lambda_2 - \lambda_2')\delta_{ji}$ verschwindet. Dies gilt genau dann, wenn $S_{ji} = (\lambda_2' - \lambda_2)\delta_{ji}$ und $\omega_{ij} = \frac{1}{2}A_{ij}$ gilt. Verschwindet der symmetrische, spurfreie Teil von $T_{0i\,j}$ nicht, so kann man nicht durch Wahl des Bezugssystems Drehungsfreiheit bezüglich aller Achsen realisieren.

6.6 geodätische Abweichung

Inhomogene Gravitation verändert durch Gezeiteneffekte den Abstand zwischen frei fallenden Teilchen, die gerade Weltlinien durchlaufen und die Geodätengleichung erfüllen.

Parametrisieren wir die Teilchen durch Parameter v und parametrisieren wir für festes v jede Weltlinie durch einen Bahnparameter u, so ist diese Schar von Weltlinien durch $x^m(u, v)$ gegeben, wobei $\frac{\partial x^m}{\partial u} = u^m$ der Tangentialvektor an die jeweilige Geodäte ist

$$\frac{\delta u^m}{\delta u} = 0 = \frac{\partial^2 x^m}{\partial u^2} + u^k u^l \Gamma_{kl}{}^m \ . \tag{6.70}$$

Für den Vektor $v^m = \frac{\partial x^m}{\partial v}$ zur benachbarten Geodäten gilt

$$\frac{\delta v^m}{\delta u} = \frac{\partial v^m}{\partial u} + u^k \Gamma_{kl}{}^m v^l = \frac{\partial u^m}{\partial v} + u^k \Gamma_{kl}{}^m v^l = \frac{\delta u^m}{\delta v} + T_{kl}{}^m u^k v^l \ , \tag{6.71}$$

denn aus der Definition von u^m und v^m folgt $\frac{\partial v^m}{\partial u} = \frac{\partial^2 x^m}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 x^m}{\partial v \partial u} = \frac{\partial u^m}{\partial v}$. Sind die Geodäten so parametrisiert, daß die Länge des Tangentialvektors u^m unabhängig von v ist, und ist die Parallelverschiebung metrikverträglich und torsionsfrei, so ist das Skalarprodukt $u^m v^n g_{mn}$ längs der Geodäten konstant.

$$0 = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial v}\big(u \cdot u\big) = \frac{\delta u}{\delta v} \cdot u = \frac{\delta v}{\delta u} \cdot u = \frac{\delta}{\delta u}\big(v \cdot u\big) = \frac{\partial}{\partial u}\big(v \cdot u\big) \tag{6.72}$$

Ist also der Vektor v^m zu Beginn senkrecht zur Tangente u^n und zeigt er von der Geodäten zu einem gleichzeitigen Ereignis auf der Nachbargeodäten, so tut er das auch später.

Für die zweite Ableitung von v erhalten wir

$$\frac{\delta^2 v^m}{\delta u^2} = \frac{\delta}{\delta u}\frac{\delta v^m}{\delta u} = \frac{\partial}{\partial u}\big(\frac{\partial u^m}{\partial v} + u^k \Gamma_{kl}{}^m v^l\big) + u^r \Gamma_{rn}{}^m \big(\frac{\partial u^n}{\partial v} + u^k \Gamma_{kl}{}^n v^l\big) \ .$$

Ersetzen wir die Ableitungen $\frac{\partial u^m}{\partial u} = \frac{\partial^2 x^m}{\partial u^2}$ mit der Geodätengleichung (6.70)

$$= -\frac{\partial}{\partial v}\big(u^k u^l \Gamma_{kl}{}^m\big) - \big(u^r u^s \Gamma_{rs}{}^k\big)\Gamma_{kl}{}^m v^l + u^k \frac{\partial}{\partial u}\Gamma_{kl}{}^m v^l + u^k \Gamma_{kl}{}^m \frac{\partial v^l}{\partial u} + \\ + u^k \Gamma_{kl}{}^m \big(\frac{\partial u^l}{\partial v} + u^r \Gamma_{rs}{}^l v^s\big) \ ,$$

dann kombinieren sich die Ableitungsterme von u^l und v^l wegen (6.71) zu $u^k T_{kl}{}^m \frac{\partial v^l}{\partial u}$. Mit $\Gamma_{lk}{}^m = T_{lk}{}^m + \Gamma_{kl}{}^m$ formen wir die verbleibenden Terme um und erhalten mit der Kettenregel $\frac{\partial}{\partial u}\Gamma_{lk}{}^m = u^r \partial_r \Gamma_{lk}{}^m$ und $\frac{\partial}{\partial v}\Gamma_{lk}{}^m = v^r \partial_r \Gamma_{lk}{}^m$ sowie mit $\frac{\delta}{\delta u}u^k = 0$ die Gleichung für geodätische Abweichung

$$\frac{\delta^2 v^m}{\delta u^2} = R_{kln}{}^m u^k v^l u^n + \frac{\delta}{\delta u}\big(u^k T_{kl}{}^m v^l\big) \ . \tag{6.73}$$

Dabei ist $R_{kln}{}^m$ der Riemanntensor (6.40). Auf einer gegebener Geodäten ist dies ein linear homogenes Differentialgleichungssystem zweiter Ordnung für den Vektor v^m, der zur benachbarten Geodäten zeigt.

Wenn Parallelverschiebung torsionsfrei und metrikverträglich ist, die affine Konnektion also durch das Christoffelsymbol (6.34) gegeben ist, so vereinfacht sich wegen $T_{kl}{}^m = 0$ die erste Bianchi-Identität zu

$$R_{klm}{}^n + R_{lmk}{}^n + R_{mkl}{}^n = 0 \ . \tag{6.74}$$

Hieraus und aus der Antisymmetrie in den ersten beiden (6.41) und den letzten beiden Indizes (6.43) folgt, daß der Riemanntensor unter Vertauschung der beiden Indexpaare symmetrisch ist

$$\begin{aligned} R_{klmn} &= -R_{lmkn} - R_{mkln} = R_{lmnk} + R_{mknl} \\ &= -R_{mnlk} - R_{nlmk} - R_{knml} - R_{nmkl} \\ &= 2R_{mnkl} + R_{nlkm} + R_{knlm} = 2R_{mnkl} - R_{lknm} \quad \text{oder} \end{aligned}$$

$$R_{klmn} = R_{mnkl} \ . \tag{6.75}$$

Daher ist die Matrix ω^2

$$\omega^2_{mn} = -R_{kmln} u^k u^l = \omega^2_{nm} \ , \quad \omega^2_{mn} u^n = 0 \ , \tag{6.76}$$

symmetrisch. Sie bildet u^m auf Null und den zu u^m orthogonalen Raum auf sich ab. Die Gleichung für geodätische Abweichung (6.73) hat bei torsionsfreier Parallelverschiebung die Form

$$\frac{\delta^2 v^m}{\delta u^2} + \omega^2{}_n{}^m v^n = 0 \tag{6.77}$$

An jedem vorgegebenen Punkt der Geodäten kann ein Koordinatensystem eingeführt werden, so daß an diesem Punkt die Konnektion verschwindet, die Metrik gleich der flachen Metrik $g_{mn} = \eta_{mn}$ ist, der Tangentialvektor $u^m = (1, 0, 0, 0)$ nur eine Zeitkomponente hat und die Matrix ω^2 diagonal ist. In einer kleinen Umgebung dieses Punktes lautet daher die Gleichung für geodätische Abweichung ungefähr

$$\frac{d^2 v^i}{dt^2} + (\omega^i)^2 v^i = 0 \ , \quad \text{(keine Summe über } i) \ , \quad i = 1, 2, 3 \ . \tag{6.78}$$

Ist $(\omega^i)^2$ positiv, so ist dies die Bewegungsgleichung eines harmonischen Oszillators mit Federkonstante $m\,(\omega^i)^2$, dessen Auslenkung nach dem Hookschen Gesetz eine linear mit dem Abstand ansteigende Anziehung entgegenwirkt. Zu negativem $(\omega^i)^2$ gehört Abstoßung in Richtung der Auslenkung.

Im Vakuum besagen die Einsteingleichungen $R_{kmln} g^{mn} = 0$, daß die Matrix ω^2 spurfrei ist. Wirken die Gezeitenkräfte zwischen zwei benachbarten Geodäten wie eine rücktreibende, anziehende Kraft, so gibt es in einer Richtung senkrecht dazu Abstoßung. Die Summe der drei Federkonstanten $m(\omega^i)^2$ verschwindet.

Gleiches gilt übrigens auch in Newtonscher Gravitation. Denn das Newtonsche Gravitationspotential im Vakuum erfüllt die Laplace-Gleichung (5.37)

$$\Delta\phi = 0 \ . \tag{6.79}$$

Entwickelt man das Potential um einen Punkt

$$\phi(x, y, z) = \phi(0, 0, 0) + \sum_{i=1}^{i=3} g^i x^i + O(x^2) \ , \tag{6.80}$$

so kann man durch Übergang in ein mitfallendes Koordinatensystem

$$x'^i(x, t) = x^i + \frac{1}{2} g^i t^2 \tag{6.81}$$

die Gravitationsbeschleunigung in niedrigster Ordnung wegtransformieren. In diesem Koordinatensystem hat das Potential keine linearen Terme, die quadratischen Terme können durch Basiswahl diagonalisiert werden.

$$\phi(x, y, z) = \phi(0, 0, 0) + \frac{1}{2}\left(ax^2 + by^2 + cz^2\right) + \ldots \tag{6.82}$$

Die Laplace-Gleichung besagt, daß die Summe $a + b + c$ der drei Federkonstanten verschwindet, genauso wie aufgrund der Einsteingleichungen der Allgemeinen Relativitätstheorie.

Wenn in Newtonscher Gravitation im Vakuum Teilchen im freien Fall die Erde umkreisen, so pendeln die Weltlinien von nebeneinander laufenden Teilchen umeinander, die Gezeitenkräfte wirken also in dieser Richtung anziehend. Ist der Abstandsvektor zweier Teilchen dazu senkrecht und laufen sie mit unterschiedlichem Abstand um die Erde, so bewirken die Gezeitenkräfte Abstoßung und die Teilchen entfernen sich voneinander.

Ein senkrecht auf eine Zentralmasse fallender Körper wird durch Gezeitenkräfte in Fallrichtung gestreckt und quer dazu gestaucht. Ein so durch Gezeitenkräfte zerrissener Komet, der Komet Shoemaker-Levy, schlug 1994 als Kette von hintereinander fallenden Bruchstücken auf dem Jupiter ein.

In einem fiktiven Tunnel, der durch die Erde gebohrt ist, wirken Gezeitenkräfte für hintereinander fallende Teilchen anziehend, auf nebeneinander fallende Teilchen wirken sie abstoßend.

Gravitation bewirkt, daß sich der Abstand frei fallender Teilchen ändert, ohne daß die Teilchen einer spürbaren Kraft ausgesetzt sind. Diese Änderung der beiderseitigen Abstände durch geodätische Abweichung beruht auf Gezeitenkräften der Gravitation, die von anderen Massen verursacht wird, nicht auf gegenseitiger Gravitation der Testteilchen. Die geodätische Abweichung ist unabhängig von den Massen der beteiligten Testteilchen, wächst mit ihrem Abstand und ist normalerweise richtungsabhängig.

6.7 Isospin

Die Vektoren, die parallel verschoben werden, müssen nicht unbedingt geometrisch anschauliche Tangentialvektoren sein. In der Theorie der Elementarteilchen treten Materiefelder $\Psi(x)$ auf, die zum Beispiel zu Teilchen wie Elektronen oder Neutrinos gehören, und deren Komponenten $\Psi^i(x)$ angeben, in welchen Maße das Feld an diesem Ort elektronartig oder neutrinoartig ist. Solche Teilcheneigenschaften werden in der Elementarteilchenphysik mit den Namen Geschmack und Farbe, Flavour und Colour, bezeichnet, die Anschaulichkeit vorspiegeln. Wir bezeichnen zusammenfassend diese Eigenschaften als Isospin, die Vektoren Ψ sind Vektoren im Isospinraum.

Für die Felder Ψ ist an jedem Punkt x komponentenweise Addition und Multiplikation mit Zahlen erklärt; sie sind an jedem Punkt x ein Vektor in einem abstrakten Raum.

Parallelverschiebung solcher Vektoren ist definitionsgemäß linear (6.1), also verträglich mit der Vektorraumstruktur. Zudem ist jeder Vektor sich selbst parallel.

Daher haben die von x zu $x+\xi$ parallel verschobenen Felder Komponenten

von der Form

$$\left(P_\xi \Psi\right)^i = \Psi^i - \xi^k A_{k\,j}{}^i \Psi^j \ . \tag{6.83}$$

Die Felder $A_{k\,j}{}^i(x)$ heißen in der Physik Eichfelder oder Yang-Mills-Felder, in der Mathematik ist die Bezeichnung Zusammenhang oder Konnektion geläufig. $\xi^k A_{k\,j}{}^i$ sind Matrixelemente einer Matrix $\xi^k A_k$, die auf die Materiefelder am Punkt x wirkt. Liest man $\xi^k A_k$ als matrixwertige Funktion, die Vektoren ξ in Matrizen abbildet, so sind A_k an jedem Punkt Komponenten eines dualen Vektors, also einer matrixwertigen 1-Form $A_k dx^k$ (B.9). Parallelverschiebung ist durch Angabe einer matrixwertigen 1-Form festgelegt.

Mit Eichtransformationen können an jedem Punkt die abstrakten Bezugsrichtungen im Flavour- oder Colourraum geändert und die Komponenten von Ψ linear transformiert werden.

$$\Psi'^i(x) = O_j{}^i(x) \Psi^j(x) \ . \tag{6.84}$$

Solche Transformationen können hintereinander ausgeführt und invertiert werden und bilden an jedem Punkt eine Gruppe, die Gruppe der Eichtransformationen.

Die Eichgruppe des Standardmodells der Elementarteilchenphysik ist die Gruppe U(1)×SU(2)×SU(3). Sie enthält die Gruppe U(1) der unitären Transformationen, die in einem komplex eindimensionalen Raum das Betragsquadrat $|z|^2 = z^* z$ invariant lassen, die also mit einer komplexen Phase multiplizieren $z \to z' = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} z$. Die Gruppen SU($n$) bestehen aus den speziellen unitären Transformationen, also denjenigen linearen Transformationen die in einem komplex n-dimensionalen Raum das Betragsquadrat $\sum_{i=1}^{i=n} |z^i|^2$ invariant lassen und deren Determinante den speziellen Wert 1 hat.

Kapitel 7

Teilchen im Gravitationsfeld

7.1 Metrik

Das Längenquadrat von Tangentialvektoren am Punkt x ist in der Allgemeinen Relativitätstheorie nicht durch (2.27) sondern allgemeiner durch[1]

$$\frac{dx}{ds} \cdot \frac{dx}{ds} := \frac{dx^m}{ds} \frac{dx^n}{ds} g_{mn}(x) \tag{7.1}$$

gegeben. Die Funktionen $g_{mn}(x)$ sind die Komponenten der Metrik, die wir wegen (5.13) als symmetrisch voraussetzen

$$g_{mn}(x) = g_{nm}(x) \ . \tag{7.2}$$

Die Metrik einer gekrümmten Raumzeit ist x-abhängig. In der flachen Raumzeit der Speziellen Relativitätstheorie mit Längenquadrat (2.27) hat die Metrik in kartesischen Koordinaten die Form (A.21)

$$g_{\text{flach } mn} = \eta_{mn} \ . \tag{7.3}$$

Auch in gekrümmten Räumen gibt es für jeden Punkt x, aber nicht für alle Punkte gemeinsam, Koordinatensysteme, so daß dort die Metrik mit der Metrik der flachen Raumzeit übereinstimmt $g_{mn\,|x} = \eta_{mn}$. Geometrische Eigenschaften kleiner Objekte, auf deren Abmessungen sich die Metrik nicht wesentlich ändert, und Abläufe von Ereignissen, während derer sich die Metrik nicht wesentlich ändert, stimmen daher in der Allgemeinen Relativitätstheorie und der Speziellen Relativitätstheorie überein. Insbesondere gelten in kleinen Raumzeitbereichen die geometrischen Konstruktionen, aus denen wir

[1] Wir verwenden die Einsteinsche Summationskonvention.

Zeitdilatation und Längenkontraktion abgelesen haben und die darauf beruhen, daß Längenmessungen mit festen Meßlatten dieselben Werte ergeben wie Laufzeitmessungen mit Licht. Die Lichtgeschwindigkeit ist also in kleinen Raumzeitgebieten konstant. In größeren Raumzeitgebieten stehen keine starren Meßlatten zur Verfügung, Lichtstrahlen werden vom Gravitationsfeld schwerer Körper abgelenkt. Bei großen Abständen und über lange Zeiten werden Begriffe wie „konstante Lichtgeschwindigkeit“ , „gleichzeitige Ereignisse“ oder „räumlicher Abstand“ unklar und physikalisch unwichtig.

7.2 Geodäten und Beschleunigung

Die Metrik der Raumzeit bestimmt den Gang von Uhren, die auf einer Weltlinie $\Gamma : s \to x(s)$ Ereignisse $A = x(\underline{s})$ und $B = x(\bar{s})$ durchlaufen. Zwischen diesen Ereignissen vergeht auf einer idealen Uhr die Zeit

$$\tau(B, A\,;\Gamma) = \frac{1}{c}\int_{\underline{s}}^{\bar{s}} ds \sqrt{\frac{dx^k}{ds}\frac{dx^l}{ds} g_{kl}(x(s))}\ . \tag{7.4}$$

Freie Teilchen im Gravitationsfeld durchlaufen, wie wir in Abschnitt 8.2 ableiten, Weltlinien Γ, auf denen diese Zeit zwischen irgend zwei genügend benachbarten[2] Ereignissen A und B größer als auf allen anderen Linien wird, die ebenfalls A und B verbinden. Diese Weltlinien heißen die zeitartigen Geodäten oder, weniger technisch, die zeitartigen Geraden der gekrümmten Raumzeit mit Metrik g_{mn}.

Für die Bahnen $x(s)$ freier Teilchen im Gravitationsfeld gelten also die Euler-Lagrange-Gleichungen (4.25) mit der Lagrangefunktion (vgl. 4.7)

$$\mathcal{L} = -mc\sqrt{g_{kl}(x)\frac{dx^k}{ds}\frac{dx^l}{ds}}\ . \tag{7.5}$$

Die Eulerableitung (4.21) dieser Lagrangefunktion ist

$$\begin{aligned}\frac{\hat{\partial}\sqrt{g_{kl}\dot{x}^k\dot{x}^l}}{\hat{\partial}x^m} =& \frac{\partial_m g_{kl}\dot{x}^k\dot{x}^l}{2\sqrt{g_{tu}\dot{x}^t\dot{x}^u}} - \frac{d}{ds}\frac{g_{ml}\dot{x}^l}{\sqrt{g_{tu}\dot{x}^t\dot{x}^u}} \\ =& \frac{1}{2\sqrt{g_{tu}\dot{x}^t\dot{x}^u}}\big(\partial_m g_{kl}\dot{x}^k\dot{x}^l - 2g_{ml}\ddot{x}^l - 2\partial_k g_{ml}\dot{x}^k\dot{x}^l\big) - \\ & - g_{ml}\dot{x}^l\frac{d}{ds}\frac{1}{\sqrt{g_{tu}\dot{x}^t\dot{x}^u}}\ .\end{aligned} \tag{7.6}$$

[2]Für beliebige Ereignisse A und B auf der Weltlinie freier Teilchen ist nur gesichert, daß die Weltlinie stationäre Länge hat. Dies ist ähnlich wie bei einem Großkreis auf einer Kugeloberfläche. Sind zwei Punkte auf dem Großkreis weiter als einen halben Kugelumfang entfernt, so ist die Weglänge auf dem Großkreis kein lokales Minimum.

Da die Eigenzeit ein Funktional der Bahn ist, das nicht von der Parametrisierung der Bahn abhängt (3.44), können wir die Parametrisierung wählen. Wir verlangen, daß der Tangentialvektor konstantes Längenquadrat c^2 hat

$$g_{tu}\dot{x}^t\dot{x}^u = c^2 \tag{7.7}$$

und der Bahnparameter mit der Eigenzeit längs der Bahn übereinstimmt (3.46). Dann vereinfacht sich die Eulerableitung.

$$c\frac{\hat{\partial}\sqrt{g_{kl}\dot{x}^k\dot{x}^l}}{\hat{\partial}x^m}\Big|_{g_{tu}\dot{x}^t\dot{x}^u=c^2} = -g_{mn}\left(\ddot{x}^n + \Gamma_{kl}{}^n\dot{x}^k\dot{x}^l\right) \tag{7.8}$$

Die hier auftretenden Christoffelsymbole (6.34) sind wegen (5.13) symmetrisch im unteren Indexpaar $\Gamma_{kl}{}^n = \Gamma_{lk}{}^n$ und setzen sich aus partiellen Ableitungen der Metrik und aus der inversen Metrik (6.32) zusammen

$$\Gamma_{kl}{}^n = \frac{1}{2}g^{nm}\left(\partial_k g_{ml} + \partial_l g_{mk} - \partial_m g_{kl}\right), \quad \Gamma_{kl}{}^n = \Gamma_{lk}{}^n \ . \tag{7.9}$$

Ist der Bahnparameter s die Eigenzeit, so ist der Vektor

$$b^n = \ddot{x}^n + \Gamma_{kl}{}^n\dot{x}^k\dot{x}^l \tag{7.10}$$

die Beschleunigung längs einer Weltlinie $x^m(t)$. Frei fallende Teilchen sind per Definition unbeschleunigt. Ihre Weltlinien machen die zu (7.5) gehörige Wirkung extremal und erfüllen in der Parametrisierung (7.7) die Geodätengleichung

$$\ddot{x}^n + \Gamma_{kl}{}^n\dot{x}^k\dot{x}^l = 0 \ . \tag{7.11}$$

Dabei braucht $g_{tu}\dot{x}^t\dot{x}^u = c^2$ nur anfänglich gelten. Längs einer Geodäten ändert sich das Längenquadrat des Tangentialvektors nicht.

$$\frac{d}{ds}\left(g_{tu}\dot{x}^t\dot{x}^u\right) = 2\ddot{x}^t\dot{x}^u g_{tu} + \dot{x}^t\dot{x}^u\dot{x}^m\partial_m g_{tu} = 2b^t\dot{x}^u g_{tu} = 0 \tag{7.12}$$

Die Beschleunigung b^t ist stets senkrecht zum Tangentialvektor an die Weltlinie, falls sie so parametrisiert ist, daß die Länge des Tangentialvektors konstant ist. Die Beschleunigung hat daher für einen Beobachter, der die Weltlinie durchläuft, nur räumliche Komponenten.

Verwendet man als Lagrangefunktion nicht die Länge des Tangentialvektors, sondern sein Längenquadrat $\mathcal{L} = \frac{1}{2}g_{kl}(x)\frac{dx^k}{ds}\frac{dx^l}{ds}$, so ist die zugehörige Wirkung nicht mehr invariant unter Reparametrisierungen der Weltlinie. Vielmehr erzwingen die zugehörigen Euler-Lagrange-Gleichungen, daß die

Weltlinie eine Geodäte ist, die mit einem Tangentialvektor konstanter Länge durchlaufen wird.

$$\begin{aligned}\frac{\hat{\partial}}{\hat{\partial}x^m}\big(\frac{1}{2}g_{kl}\dot{x}^k\dot{x}^l\big) &= \frac{1}{2}\partial_m g_{kl}\dot{x}^k\dot{x}^l - \frac{d}{ds}\big(g_{ml}\dot{x}^l\big)\\ &= \frac{1}{2}\big(\partial_m g_{kl}\dot{x}^k\dot{x}^l - 2g_{ml}\ddot{x}^l - 2\partial_k g_{ml}\dot{x}^k\dot{x}^l\big) = -g_{mn}\big(\ddot{x}^n + \Gamma_{kl}{}^n\dot{x}^k\dot{x}^l\big)\end{aligned} \tag{7.13}$$

7.3 effektives Gravitationspotential

Gravitation beeinflußt freie Teilchen dadurch, daß die Metrik g_{mn} nicht mehr die flache Metrik η_{mn} (A.21) ist, sondern eine Lösung der Einstein-Gleichungen. Die Einstein-Gleichungen beschreiben den Einfluß von Energie- und Impulsstromdichten auf die Metrik und sollen hier nicht diskutiert werden. Wir verwenden hier nur ein Ergebnis, nämlich die Schwarzschild-Lösung der Einstein-Gleichungen. Diese Lösung beschreibt die Gravitation außerhalb einer kugelsymmetrischen Massenverteilung.

In der Schwarzschildmetrik hat das Längenquadrat außerhalb der Zentralmasse in Kugelkoordinaten $(x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, r, \theta, \varphi)$ die Form

$$g_{kl}(x)\frac{dx^k}{ds}\frac{dx^l}{ds} = c^2(1-\frac{r_0}{r})\big(\frac{dt}{ds}\big)^2 - \frac{\big(\frac{dr}{ds}\big)^2}{(1-\frac{r_0}{r})} - r^2\big(\frac{d\theta}{ds}\big)^2 - r^2\sin^2\theta\big(\frac{d\varphi}{ds}\big)^2\ . \tag{7.14}$$

Der Parameter r_0 heißt Schwarzschildradius. Er ergibt sich als Integrationskonstante der Einstein-Gleichungen und wird in Gleichung (7.22) mit der Masse, die das Gravitationsfeld erzeugt, identifiziert. Ist die Zentralmasse so komprimiert, daß sie sich vollständig im Inneren des Schwarzschildradius befindet, so kann sie, wie wir in Abschnitt 7.7 sehen werden, kein Licht nach außen abstrahlen. Sie ist also schwarz und heißt Schwarzes Loch.[3]

Die Geodätengleichung der Schwarzschildmetrik ist lösbar, weil die Bahn freier Teilchen aus den Erhaltungssätzen konstruiert werden kann.

Die Wirkung $W[\Gamma] = -mc^2\tau(\Gamma)$

$$W[\Gamma] = -mc\int ds\sqrt{c^2(1-\frac{r_0}{r})\big(\frac{dt}{ds}\big)^2 - \frac{\big(\frac{dr}{ds}\big)^2}{(1-\frac{r_0}{r})} - r^2\big(\frac{d\theta}{ds}\big)^2 - r^2\sin^2\theta\big(\frac{d\varphi}{ds}\big)^2} \tag{7.15}$$

[3]Reizvollerweise setzt sich der Name Schwarzschild aus Abschirmung und dem resultierenden Erscheinungsbild zusammen.

legt die Parametrisierung der Weltlinie Γ nicht fest (3.44). Wir wählen den Bahnparameter s so, daß der Tangentialvektor $\frac{dx}{ds}$ überall längs der Bahn dieselbe Länge c hat. Dann ist s die Zeit τ, die eine mitgeführte Uhr anzeigt.

$$c^2(1-\frac{r_0}{r})\big(\frac{dt}{ds}\big)^2 - \frac{\big(\frac{dr}{ds}\big)^2}{(1-\frac{r_0}{r})} - r^2\big(\frac{d\theta}{ds}\big)^2 - r^2\sin^2\theta\big(\frac{d\varphi}{ds}\big)^2 = c^2 \qquad (7.16)$$

Die Metrik ist drehinvariant. Das zeigt sich in Kugelkoordinaten daran, daß die $\frac{d\theta}{ds}$- und $\frac{d\varphi}{ds}$-Abhängigkeit des Längenquadrats $r^2\big(\big(\frac{d\theta}{ds}\big)^2+\sin^2\theta\big(\frac{d\varphi}{ds}\big)^2\big)$ (3.33) genauso ist wie im flachen Raum auf der Kugeloberfläche in Kugelkoordinaten und daran, daß die übrigen Terme im Längenquadrat nicht von θ und φ abhängen. Wegen der Drehinvarianz der Wirkung (7.15) ist gemäß Noethertheorems der Drehimpuls $\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}$ erhalten. Da das Kreuzprodukt senkrecht auf seinen Faktoren steht, also $\vec{r}\cdot\vec{L}=0$ gilt, und da $\vec{L}$ konstant ist, liegt $\vec{r}$ immer in der Ebene, auf der $\vec{L}$ senkrecht steht. Die Bahnkurve ist also eben. In Kugelkoordinaten heißt dies, daß die Bewegung nach Wahl der Koordinatenachsen in der x-y-Ebene verläuft, also mit zeitlich konstantem

$$\theta = \frac{\pi}{2}\ . \qquad (7.17)$$

Es sind mit der Eigenschaft, daß die Bahnkurve eben ist, noch nicht alle Konsequenzen der Drehinvarianz ausgewertet; ebene Bahnen würden schon aus konstanter Richtung des Drehimpulses folgen. Daß auch der Betrag des Drehimpulses erhalten ist, zeigt sich daran, daß die Wirkung (7.15) invariant unter Translationen von φ ist. Der Winkel φ ist eine zyklische Variable. Der dazu konjugierte Impuls $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\frac{d\varphi}{ds}}$, der Drehimpuls L in z-Richtung, ist zeitlich konstant (4.46) und hat bei unserer Wahl des Bahnparameters (7.16) den Wert

$$L = mr^2\frac{d\varphi}{ds}\ . \qquad (7.18)$$

Die Wirkung (7.15) ist nicht nur drehinvariant, sondern die Lagrangefunktion hängt auch nicht von der Zeit t ab, es ist also auch t eine zyklische Variable und der dazu konjugierte Impuls ist erhalten.

$$E = mc^2\big(1-\frac{r_0}{r}\big)\frac{dt}{ds} \qquad (7.19)$$

Die zu Zeittranslationen gehörige Erhaltungsgröße ist definitionsgemäß die Energie E.

Setzen wir (7.17), (7.18) und (7.19) in (7.16) ein und multiplizieren wir mit $-\frac{m}{2}(1-\frac{r_0}{r})$ so ergibt sich mit der Notation $\dot{r}=\frac{dr}{ds}$ der Energiesatz (4.52) für die eindimensionale Bewegung der Radialkoordinate r

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + V_{\text{eff}}(r) = \frac{E^2}{2mc^2} - \frac{mc^2}{2}\ , \quad V_{\text{eff}}(r) = -\frac{mr_0c^2}{2r} + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{L^2r_0}{2mr^3}\ . \qquad (7.20)$$

Bis auf den $\frac{1}{r^3}$-Term im effektiven Potential, der die Drehimpulsbarriere $\frac{L^2}{2mr^2}$ der nichtrelativistischen Physik in $\frac{L^2}{2mr^2}\left(1-\frac{r_0}{r}\right)$ abändert, und bis auf die Benennung der Erhaltungsgröße, ist dies der Energiesatz für die Radialbewegung eines Teilchens[4] mit Masse m im Newtonschen Gravitationspotential einer Zentralmasse M.

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 - G\frac{mM}{r} + \frac{L^2}{2mr^2} = E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} \tag{7.21}$$

Der Koeffizient $G = 6,66 \cdot 10^{-11}\frac{\text{m}^3}{\text{kg}\cdot\text{sec}^2}$ [22] ist die Gravitationskonstante.

Bei großem Abstand von der Zentralmasse wird der Term $-\frac{L^2 r_0}{2mr^3}$ vernachlässigbar und die Bahnen in der Schwarzschildmetrik stimmen mit den Bahnen im Newtonschen Gravitationsfeld einer Zentralmasse M überein, wenn wir den Schwarzschildradius als

$$r_0 = \frac{2GM}{c^2} \tag{7.22}$$

identifizieren. Da Massen positiv sind, ist auch der Integrationsparameter r_0 der Einsteingleichungen positiv. Für die Sonne beträgt der Schwarzschildradius $r_{0|_{\text{Sonne}}} = 2,953 \cdot 10^3\text{m}$ [1].

Der Energiesatz für die Radialbewegung im Gravitationsfeld einer Zentralmasse M lautet nach Identifizierung des Schwarzschildradiusses in der Allgemeinen Relativitätstheorie

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 - G\frac{mM}{r} + \frac{L^2}{2mr^2} - G\frac{L^2 M}{mc^2\, r^3} = \frac{E^2}{2mc^2} - \frac{mc^2}{2}\ . \tag{7.23}$$

7.4 Periheldrehung

Wegen des zusätzlichen $\frac{1}{r^3}$-Terms ist die Gravitation in der Allgemeinen Relativitätstheorie stärker anziehend als die Newtonsche Gravitation. Die Bahnkurven der Planeten um die Sonne sind nur noch näherungsweise geschlossene Ellipsen $r(\varphi) = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\varphi}$ mit großer Halbachse a und Exzentrizität e, auf denen r periodisch zwischen maximalem Abstand $r_1 = a(1+e)$ und minimalem Abstand $r_2 = a(1-e)$, dem Perihel, hin und her pendelt. Im effektiven Potential der Allgemeinen Relativitätstheorie wird ein etwas größerer Winkel als $\Delta\varphi = 2\pi$ von Perihel zu Perihel durchlaufen. Das Perihel verschiebt sich nach vorne.

[4] Dies gilt nur im Grenzfall einer kleinen Masse m, genauer tritt in der kinetischen Energie $\frac{1}{2}m\dot{r}^2$ der radialen Relativbewegung der zwei Körper und in der Drehimpulsbarriere $\frac{L^2}{2mr^2}$ statt m die reduzierte Masse $m_{\text{red}} = \frac{mM}{m+M}$ auf.

Zur Berechnung der Periheldrehung betrachten wir den Kehrwert der Radialkoordinate als Funktion von φ

$$u(\varphi) = \frac{r_0}{r(\varphi)} \ . \tag{7.24}$$

Für seine Ableitung gilt mit $\kappa = \frac{L}{mcr_0}$ wegen (7.20)

$$\frac{du}{d\varphi} = -\frac{r_0}{r^2}\frac{dr}{ds}(\frac{d\varphi}{ds})^{-1} = -\frac{mr_0}{L}\frac{dr}{ds} = \pm\sqrt{u^3 - u^2 + \frac{1}{\kappa^2}u + \frac{1}{\kappa^2}\big(\frac{E^2}{m^2c^4} - 1\big)} \ . \tag{7.25}$$

Das Vorzeichen vor der Wurzel ist je nach Bahnabschnitt zu nehmen, je nach dem ob r mit φ ab- oder zunimmt. Der Radikand ist ein Polynom dritter Ordnung $(u-u_1)(u-u_2)(u-u_3)$ mit Nullstellen $u_1 < u_2 < u_3$, die

$$u_1 + u_2 + u_3 = 1 \tag{7.26}$$

$$u_1u_2 + u_1u_3 + u_2u_3 = \frac{1}{\kappa^2} \tag{7.27}$$

$$u_1u_2u_3 = \frac{1}{\kappa^2}\big(1 - \frac{E^2}{m^2c^4}\big) \tag{7.28}$$

erfüllen. Nehmen wir den Kehrwert von (7.25), so erhalten wir die Ableitung der Umkehrfunktion $\varphi(u)$ und können integrieren (4.55).

$$\varphi(u) - \varphi(u_1) = \int_{u_1}^{u} \frac{du'}{\sqrt{(u'-u_1)(u'-u_2)(u'-u_3)}} \tag{7.29}$$

Insgesamt vergrößert sich der Winkel φ während der Bewegung zwischen maximalem über minimalen bis zu maximalem Wert von r um

$$\varphi_{\text{Umlauf}} = 2\int_{u_1}^{u_2} \frac{du}{\sqrt{(u-u_1)(u-u_2)(u-u_3)}} \ . \tag{7.30}$$

Mit den Variablen $y = \sqrt{\frac{u-u_1}{u_2-u_1}}$ und $k^2 = \frac{u_2-u_1}{u_3-u_1}$ hat das Integral die Form

$$\begin{aligned}
\varphi_{\text{Umlauf}} &= 2\frac{2}{\sqrt{u_3-u_1}}\int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}} \\
&= 2\frac{2}{\sqrt{u_3-u_1}}\int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}(1 + k^2\frac{y^2}{2} + \ldots) \\
&= 2\frac{2}{\sqrt{u_3-u_1}}\frac{\pi}{2}(1 + \frac{k^2}{4} + O(k^4)) \ .
\end{aligned} \tag{7.31}$$

Hier haben wir das Integral genähert, denn die minimalen und maximalen Abstände der Planeten von der Sonne sind in Einheiten des Schwarzschildradiusses der Sonne riesig und u_1 und u_2 daher klein. Wegen $u_3 = 1 - u_1 - u_2$ (7.26) gilt genähert $k^2 = \frac{u_2 - u_1}{1 - 2u_1 - u_2} = u_2 - u_1 + \ldots$ und $(u_3 - u_1)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2}(2u_1 + u_2) + \ldots$. In dieser Näherung wird der Umlaufwinkel

$$\varphi_{\text{Umlauf}} = 2\pi(1 + \frac{3}{4}(u_1 + u_2)) = 2\pi + \frac{3}{2}\pi\frac{2GM}{c^2}(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}) \; . \tag{7.32}$$

Für die Keplerbahnen der Planeten sind die Kuben der großen Halbachsen proportional den Quadraten der Umlaufzeiten

$$G(M_{\text{Sonne}} + M_{\text{Planet}}) = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2} \approx GM_{\text{Sonne}} \tag{7.33}$$

und minimaler und maximaler Abstand sind durch Größe der Halbachse a und die Exzentrizität e durch $r_1 = a(1 + e)$ und $r_2 = a(1 - e)$ gegeben. Das Perihel wandert daher pro Umlauf um

$$\varepsilon = \frac{24\pi^3 a^2}{c^2 T^2 (1 - e^2)} \; . \tag{7.34}$$

In dieser Form ist die Periheldrehung durch die astronomisch beobachtbaren Größen ausgedrückt. Der Effekt fällt mit dem Abstand der Planeten von der Sonne (7.32) und ist im Sonnensystem daher beim Merkur am größten. Pro Jahrhundert beträgt die beobachtete Verschiebung des Perihels des Merkurs $5599'' \pm 0,5''$. Berechnet man im Rahmen Newtonscher Physik die Einflüsse der anderen Planeten auf den Merkur, so müßte die Perihelverschiebung $5557'' \pm 1''$ betragen. Der Rest von $42'' \pm 1,2''$ stimmt mit der allgemein relativistischen Korrektur überein [23].

7.5 Lichtablenkung

Für elektromagnetische Wellen mit kurzer Wellenlänge

$$A_m(x) = \Re\, a_m(x, \varepsilon) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta(x)}{\varepsilon}} \tag{7.35}$$

folgt im Grenzfall $\varepsilon \to 0$ aus den Maxwell-Gleichungen (8.38), wie wir in Abschnitt 8.3 ableiten, daß in einer Raumzeit mit Metrik $g_{mn}(x)$ der Wellenvektor

$$k_m = \partial_m \theta \tag{7.36}$$

lichtartig ist

$$g^{mn}k_m k_n = 0 \tag{7.37}$$

und daß die Lichtstrahlen

$$\frac{dx^m}{d\lambda} = g^{mn}k_n(x) \tag{7.38}$$

gerade Linien sind (8.50). Die Geodäten, die Lichtstrahlen durchlaufen, lassen sich, wenn man skrupelhaft ist, nicht aus dem Wirkungsprinzip mit Lagrangefunktion (7.5) ableiten, denn das Längenquadrat des Tangentialvektors verschwindet und die Wurzel aus dem Längenquadrat ist bei Null nicht differenzierbar. Man kann als Lagrangefunktion für die Weltlinien von Lichtstrahlen das Längenquadrat des Tangentialvektors statt seiner Wurzel verwenden.

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}g_{mn}\frac{dx^m}{ds}\frac{dx^n}{ds} \tag{7.39}$$

Die zugehörigen physikalischen Bahnen sind Geodäten mit konstanter Länge des Tangentialvektors. Die Wirkung ist nicht invariant unter Reparametrisierungen $s(s')$ der Weltlinie. Lösungen der Bewegungsgleichungen gehen durch affine Reparametrisierungen $s(s') = \kappa s' + s(0)$ in Lösungen über. Solche Reparametrisierungen treten zum Beispiel in der flachen Raumzeit auf, wenn wir den Lichtstrahl mit Lichtkegelzeiten unbeschleunigter Beobachter parametrisieren.

Die Metrik einer kugelsymmetrischen Masse ist durch (7.14) gegeben. Wir konstruieren die Bahnen der Lichtstrahlen aus den Erhaltungsgrößen.

Die Lagrangefunktion hängt nicht vom Bahnparameter s ab und demnach ist die zur Translation des Bahnparameters gehörige Energie (4.48) erhalten. Diese Erhaltungsgröße stimmt mit dem Längenquadrat $\mathcal{L}$ überein, denn die Lagrangefunktion ist wie kinetische Energie quadratisch in den Ableitungen nach dem Bahnparameter. Da das Längenquadrat des Tangentialvektors an die Lichtbahnen verschwindet, hat diese Erhaltungsgröße den Wert Null.

$$c^2(1-\frac{r_0}{r})\big(\frac{dt}{ds}\big)^2 - \frac{\big(\frac{dr}{ds}\big)^2}{(1-\frac{r_0}{r})} - r^2\big(\frac{d\theta}{ds}\big)^2 - r^2\sin^2\theta\big(\frac{d\varphi}{ds}\big)^2 = 0 \tag{7.40}$$

Wie bei massiven Teilchen folgt aus der Drehinvarianz der Schwarzschildmetrik, daß jede Bahnkurve eben ist und nach Wahl der Koordinatenachsen in der x-y-Ebene verläuft.

$$\theta = \pi/2 \tag{7.41}$$

Der Winkel φ ist wegen Drehinvarianz eine zyklische Variable (4.46) und der zu φ konjugierte Impuls L – er ist bis auf einen Faktor die z-Komponente des Drehimpulses – bleibt erhalten.

$$L = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{d\varphi}{ds}} = r^2 \frac{d\varphi}{ds} \tag{7.42}$$

Die Schwarzschildlösung ist statisch, die Lagrangefunktion hängt nicht explizit von der Zeit t ab und t ist eine zyklische Variable (4.46). Der zu t konjugierte Impuls ist bis auf einen Faktor die Energie E.

$$E = \big(1 - \frac{r_0}{r}\big) c^2 \frac{dt}{ds} \tag{7.43}$$

Setzen wir in (7.40) ein und formen wir um, so erhalten wir effektiv einen Energiesatz für die eindimensionale Bewegung der Radialkoordinate

$$\big(\frac{dr}{ds}\big)^2 + L^2 \big(\frac{1}{r^2} - \frac{r_0}{r^3}\big) = \frac{E^2}{c^2} \ . \tag{7.44}$$

Das effektive Potential besteht nur aus der relativistischen Drehimpulsbarriere

$$V_{\text{eff}}(r) = L^2 \frac{1}{r^2} \big(1 - \frac{r_0}{r}\big) \ . \tag{7.45}$$

Es wird extremal bei $r = \frac{3}{2} r_0$, läßt aber keine stabile, gebundene Bahn zu. Es fehlt nämlich, da das Längenquadrat lichtartiger Tangentialvektoren Null und nicht c^2 ist, der Kepler-Anteil $-\frac{r_0 c^2}{r}$ im effektiven Potential. Für $r < \frac{3}{2} r_0$ wirkt die Drehimpulsbarriere anziehend.

Um die Lichtablenkung zu berechnen, betrachten wir $u(\varphi) = \frac{r_0}{r(\varphi)}$ (7.24). Ausgedrückt in $\frac{du}{d\varphi}$ lautet (7.44)

$$\big(\frac{du}{d\varphi}\big)^2 = u^3 - u^2 + \frac{E^2 r_0^2}{L^2 c^2} = (u - u_1)(u - u_2)(u - u_3) \ . \tag{7.46}$$

mit $u_1 < u_2 < u_3$ und

$$u_1 + u_2 + u_3 = 1 \tag{7.47}$$

$$u_1 u_2 + u_2 u_3 + u_3 u_1 = 0 \tag{7.48}$$

$$u_1 u_2 u_3 = -\frac{E^2 r_0^2}{L^2 c^2} \ . \tag{7.49}$$

Die ersten beiden Gleichungen ergeben u_3 und eine Beziehung zwischen u_1 und u_2

$$u_3 = 1 - (u_1 + u_2) = -\frac{u_1 u_2}{u_1 + u_2} \, , \quad u_1 = \frac{1 - u_2}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{1 + 2u_2 - 3{u_2}^2} \ . \tag{7.50}$$

Gleichung (7.46) ist ein Energiesatz für eindimensionale Bewegung mit verschwindender Energie in einem Potential $-(u-u_1)(u-u_2)(u-u_3)$. Man sieht diesem Polynom leicht an, daß die kleinste Nullstelle u_1 negativ ist, daß also die Bewegung von $r=\infty$ zu $r_{\min}$ zwischen $u=0$ und $u_2=\frac{r_0}{r_{\min}}$ verläuft. Für Lichtstrahlen, die an der Sonne vorbeilaufen, ist das Verhältnis u_2 von Schwarzschildradius zum Minimalabstand vom Sonnenmittelpunkt klein. Wenn wir nach u_2 entwickeln, erhalten wir

$$u_1 = -u_2 + {u_2}^2 \ , \quad u_3 = 1 - {u_2}^2 \ . \tag{7.51}$$

Zwischen $r=\infty$, $r=r_{\min}$ und wieder $r=\infty$ wird der Winkel

$$\Delta\varphi = 2\int_0^{u_2} \frac{du}{\sqrt{(u-u_1)(u-u_2)(u-u_3)}} \tag{7.52}$$

durchlaufen. Skalieren wir die Integrationsvariable $y=\frac{u}{u_2}$

$$\Delta\varphi = 2\int_0^{1} \frac{dy}{\sqrt{(y-\frac{u_1}{u_2})(y-1)(u_2 y-u_3)}} \tag{7.53}$$

und entwickeln wir mit $\frac{u_1}{u_2}=-1+u_2$ und $u_3=1$ in erster Ordnung in u_2, so folgt in dieser Näherung und wegen $\frac{1}{\sqrt{1-y^2}(1+y)} = -\frac{d}{dy}\frac{\sqrt{1-y^2}}{1+y}$

$$\Delta\varphi = 2\int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}(1+\frac{u_2}{2}(y+\frac{1}{1+y})) = 2(\frac{\pi}{2}+\frac{u_2}{2}+\frac{u_2}{2}) = \pi + 2\frac{r_0}{r_{\min}} \ . \tag{7.54}$$

Der Lichtstrahl durchläuft also nicht den Winkel π, wie im flachen Raum mit $r_0=0$, sondern wird um

$$\Delta\varphi - \pi = \frac{4GM}{r_{\min}c^2} \tag{7.55}$$

abgelenkt. Die Lichtablenkung ist umso größer, je näher der Lichtstrahl an der Sonne vorbeiläuft. Streift der Lichtstrahl den Sonnenrand, so ist $r_{\min} = r_{\text{Sonne}} = 6,953\cdot 10^8\text{m}$ und Lichtstrahlen werden um $8,49\cdot 10^{-6} = 1,75''$ abgelenkt. Bei Sonnenfinsternissen kann man diese Lichtstrahlen sehen. Die Beobachtungen stimmen mit dem berechneten Wert überein.

7.6 Blickwinkel, Gewicht, Drehung und Zeit

Lichtbahnen, Maßstäbe und Uhren werden durch Gravitation eines Zentralkörpers beeinflußt. Uhren, die im Gravitationsfeld ruhen, gehen vergleichsweise langsamer als gleiche Uhren, die außerhalb ruhen. Bilder, die ein Beobachter im starken Gravitationsfeld sieht, unterscheiden sich von den Bildern,

die wir alltäglich gewöhnt sind. Zu den weiteren Absonderlichkeiten gehört, daß bei Umkreisen des Schwarzen Lochs in geringem Abstand zum Schwarzschildradius die Fliehkräfte anziehend wirken. Richtungen, zum Beispiel Kreiselachsen, die drehungsfrei beim Umlauf um das Gravitationszentrum mitgeführt werden, sind nach einem Umlauf gegenüber dem Fixsternhimmel verdreht. Auf Uhren von Zwillingen kann zwischen zwei Treffen unterschiedlich viel Zeit vergehen, obwohl beide Zwillinge frei fallen und keiner spürbaren Beschleunigung ausgesetzt sind.

ruhende Uhren

Die Schwarzschildmetrik (7.14) ist zeitunabhängig. Weltlinien mit konstanten Ortskoordinaten (r, θ, φ) gehören zu ruhenden Beobachtern, etwa auf der Oberfläche einer Erde, die sich nicht dreht. Diese ruhenden Beobachter sind relativ zu frei fallenden Beobachtern gleichmäßig beschleunigt.

Vergleichen wir den Gang von Uhren solcher ruhender Beobachter $\mathcal{B}_1$ und $\mathcal{B}_2$ durch Lichtsignale, die vom Beobachter $\mathcal{B}_1$ im Zeitabstand (7.4)

$$c\Delta\tau_1 = \sqrt{g_{00}(\vec{x}_1)}\, dx^0 \tag{7.56}$$

jeweils bei Ticken seiner Uhr ausgesendet werden. Wir brauchen die Geodätengleichung für den Lichtstrahl zum zweiten Beobachter nicht lösen. Wenn die zweite Geodäte mit Koordinatendifferenz dx^0 später gestartet wird, trifft sie auch um diese Koordinatendifferenz später beim zweiten Beobachter ein. Es ist nämlich die Metrik zeitunabhängig, die Geodätengleichung enthält x^0 nicht explizit und mit einer Geodäte ist jede um ein festes dx^0 verschobene Geodäte selbst wieder Geodäte.

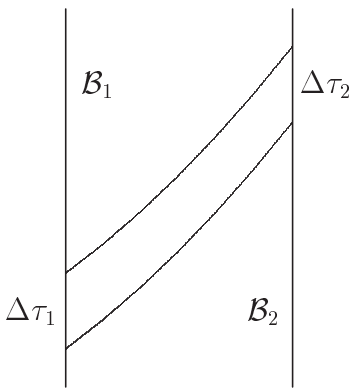


Abbildung 7.1: gravitative Zeitdilatation

Für den zweiten Beobachter gilt daher $c\Delta\tau_2 = \sqrt{g_{00}(\vec{x}_2)}\, dx^0$ mit derselben Koordinatendifferenz dx^0 und demnach

$$\Delta\tau_1 = \sqrt{\frac{g_{00}(\vec{x}_1)}{g_{00}(\vec{x}_2)}}\, \Delta\tau_2 \ . \tag{7.57}$$

Ruht der erste Beobachter in der Schwarzschildmetrik $g_{00}(\vec{x}) = 1 - \frac{r_0}{r}$ an einem tieferen Ort $r_1 < r_2$ als der zweite Beobachter, so ist $g_{00}(\vec{x}_1) < g_{00}(\vec{x}_2)$ und die Zeitdifferenz $\Delta\tau_2$, die beim zweiten Beobachter zwischen den Ereignissen vergeht, zu denen er die erste Uhr ticken sieht, ist größer als $\Delta\tau_1$. Die Uhr, die im tieferen Gravitationspotential ruht, geht langsamer.

Beim Ticken der ruhenden Uhr kann es sich um eine elektromagnetische Schwingung handeln. Elektromagnetische Wellen von Quellen, die tiefer im Gravitationspotential ruhen, werden von weiter außen ruhenden Empfängern rotverschoben wahrgenommen

$$\nu_1 = \sqrt{\frac{g_{00}(\vec{x}_2)}{g_{00}(\vec{x}_1)}}\,\nu_2 \ . \tag{7.58}$$

Ist die Metrik nicht zeitunabhängig, so ist es normalerweise nicht möglich, in der gekrümmten Raumzeit willkürfrei eine Klasse von ruhenden Beobachtern anzugeben. Dann läßt sich eine gravitative Zeitdilatation nicht von der Zeitdilatation trennen, die durch relative Bewegung der Beobachter verursacht wird. Aus gleichem Grund läßt sich normalerweise gravitative Rotverschiebung nicht vom Dopplereffekt trennen, bei dem die Rotverschiebung durch die Relativbewegung von Quelle und Empfänger verursacht wird.

ruhende Beobachter

Ein Beobachter bezieht Längen und Zeiten benachbarter Ereignisse auf einen Satz von vier normierten und zueinander senkrechten Basisvektoren, auf das Vierbein. Dabei ist der zeitartige Basisvektor die Tangente an seine eigene, mit der Eigenzeit parametrisierte Weltlinie. Die Tangente verbindet Ereignisse, die eine Zeiteinheit nacheinander stattfinden, und bezeichnet die Uhr des Beobachters. Die drei dazu senkrechten raumartigen Basisvektoren zeigen von seiner Weltlinie zu gleichzeitigen Ereignissen in Einheitsabstand, sie sind die räumlichen Meßlatten.

Ein Beobachter, der in der Schwarzschildmetrik ruht, verwendet zum Beispiel das Vierbein

$$e_0 = \begin{pmatrix} \sqrt{1-\frac{r_0}{r}}^{-1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_r = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{1-\frac{r_0}{r}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_\theta = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{r} \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_\varphi = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{r\sin\theta} \end{pmatrix} \ . \tag{7.59}$$

Bezogen auf dieses Vierbein sind in der $\theta = \frac{\pi}{2}$-Ebene die Komponenten eines Tangentialvektors $\frac{dx}{ds}$ in vertikaler und horizontaler Richtung

$$e_r \cdot \frac{dx}{ds} = (1-\frac{r_0}{r})^{-\frac{1}{2}}\frac{dr}{ds} \ , \quad e_\varphi \cdot \frac{dx}{ds} = r\frac{d\varphi}{ds} \ . \tag{7.60}$$

Der Vektor e_r zeigt für einen ruhenden Beobachter weg vom Gravitationszentrum nach oben. Für den Winkel α, den ein in der $\theta = \frac{\pi}{2}$-Ebene einfallender

Lichtstrahl $x(s)$ mit der Vertikalen einschließt, gilt

$$\tan\alpha = -\frac{e_\varphi \cdot \frac{dx}{ds}}{e_r \cdot \frac{dx}{ds}} = -r\sqrt{1-\frac{r_0}{r}}\,\frac{\frac{d\varphi}{ds}}{\frac{dr}{ds}} \ . \tag{7.61}$$

Verwenden wir die Erhaltungssätze (7.42, 7.44) so erhalten wir

$$(\tan\alpha)^2 = \frac{\frac{r}{r_0}-1}{\frac{E^2 r_0^2}{c^2L^2}\left(\frac{r}{r_0}\right)^3 - \frac{r}{r_0}+1} \ . \tag{7.62}$$

An jedem Ort ist der Winkel eines Lichtstrahls mit der Vertikalen eine Funktion von $\frac{E^2}{c^2L^2}$.

Das effektive Potential (7.45) für Lichtstrahlen in der Schwarzschildmetrik wird extremal bei $r = \frac{3}{2}r_0$ und hat dort den Wert $V_{\text{eff, max}} = \frac{4}{27}\frac{L^2}{{r_0}^2}$. Für Lichtstrahlen, die $r = \frac{3}{2}r_0$ durchlaufen können, gilt daher

$$\frac{E^2}{c^2} > \frac{4}{27}\frac{L^2}{{r_0}^2} \ . \tag{7.63}$$

Solche Lichtstrahlen können daher höchstens unter einem Winkel mit

$$(\tan\alpha(r))^2 = \frac{\frac{r}{r_0}-1}{\frac{4}{27}\left(\frac{r}{r_0}\right)^3 - \frac{r}{r_0}+1} \tag{7.64}$$

zur Vertikalen gesehen werden. Alle Lichtstrahlen von Objekten mit $r > \frac{3}{2}r_0$, zum Beispiel der Sternenhimmel, werden von ruhenden Beobachtern bei $r < \frac{3}{2}r_0$ innerhalb des Öffnungswinkels $\alpha(r)$ gesehen. Für $r \to r_0$ geht dieser Öffnungswinkel gegen Null, der ganze sichtbare Sternenhimmel schrumpft auf einen Punkt zusammen so wie in einem Tunnel das Licht vom Eingang. Diese Lichtstrahlen von entfernten Objekten sind gemäß (7.58) zu Frequenzen $\nu(r) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{r_0}{r}}}\nu(\infty)$ blauverschoben. Diese optischen Erscheinungen lassen sich auch als Aberration und Dopplereffekt eines Beobachters verstehen, der sich relativ zu frei fallenden Beobachtern schnell bewegt. Ein bei $r = r_0$ ruhender Beobachter hätte Lichtgeschwindigkeit: er wäre so schnell, wie radial nach außen abgestrahltes Licht.

Für einen ruhenden Beobachter bei $r = \frac{3}{2}r_0$ nimmt der Sternenhimmel den halben Raumwinkel und die Objekte innerhalb $r = \frac{3}{2}r_0$ die andere Hälfte ein. Für Beobachter bei $r > \frac{3}{2}r_0$ kommen alle Lichtstrahlen, die von Objekten mit $r < \frac{3}{2}r_0$ abgestrahlt werden, aus einem Bereich mit Öffnungswinkel $\alpha(r)$. Für große Abstände $r \to \infty$ erscheint der Bereich um das Gravitationszentrum um $\sqrt{3}$ vergrößert; der Bereich in Inneren von $\frac{3}{2}\frac{r_0}{r}$ wird unter einem Winkel mit $\tan\alpha \to \sqrt{3}\frac{3}{2}\frac{r_0}{r}$ gesehen.

Fallende Beobachter sind gegenüber ruhenden Beobachtern bewegt. Ihr Bild des Sternenhimmels ist eine durch Aberration, Dopplereffekt und in der Leuchtstärke abgeänderte Version des Bildes, das ruhende Beobachter sehen. Beim Überqueren von $r = r_0$ bleibt die Frequenzverschiebung von Licht und der Raumwinkel des Sternenhimmels endlich.

kreisende Beobachter

Kreist ein Beobachter um das Gravitationszentrum auf der Bahnkurve

$$\begin{pmatrix} t(s) \\ r(s) \\ \theta(s) \\ \varphi(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s\,a(r) \\ r(0) \\ \frac{\pi}{2} \\ s\,\omega \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad a(r) = \sqrt{\frac{1+\frac{r^2\omega^2}{c^2}}{1-\frac{r_0}{r}}}\ , \tag{7.65}$$

so erfüllt er normalerweise nicht die Geodätengleichung freier Teilchen (7.11) sondern ist in Richtung von e_r beschleunigt (7.10). Die Beschleunigung beträgt

$$b_r = -b\cdot e_r = -b^k {e_r}^l g_{kl} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{r_0}{r}}}\Big(\frac{c^2}{2}\frac{r_0}{r^2} - (r-\frac{3}{2}r_0)\omega^2\Big)\ . \tag{7.66}$$

Ein mit $\omega = 0$ ruhender Beobachter der Masse m wiegt also

$$F_{\text{Gewicht}} = \frac{m}{\sqrt{1-\frac{r_0}{r}}}\frac{c^2}{2}\frac{r_0}{r^2}. \tag{7.67}$$

Kreist er für $r > \frac{3}{2}r_0$ mit Winkelgeschwindigkeit

$$\omega^2 = \frac{c^2 r_0}{r^2(2r-3r_0)} \quad \text{und daher} \quad a^2 = \frac{2r}{2r-3r_0} \tag{7.68}$$

um das Gravitationszentrum, so verschwindet die Beschleunigung und er fällt frei. Für $r = \frac{3}{2}r_0$ ist die Beschleunigung b unabhängig von der Winkelgeschwindigkeit und für $r < \frac{3}{2}r_0$ erhöht sich das Gewicht des Beobachters, wenn er nicht ruht, sondern um das Gravitationszentrum kreist. Dort wirkt die zur Kreisbewegung gehörige Zentrifugalkraft nach innen [24] und erhöht das Gewicht, denn die Drehimpulsbarriere $\frac{L^2}{2mr^2}\big(1-\frac{r_0}{r}\big)$ (7.20) wird maximal für $r = \frac{3}{2}r_0$ und anziehend für $r < \frac{3}{2}r_0$.

Kreisbahnen, die mit $\frac{3}{2}r_0 < r \le 3r_0$ im freien Fall durchlaufen werden, sind instabil. Das effektive Potential V_{eff} (7.20) als Funktion von $u = \frac{r_0}{r}$ ist durch $V_{\text{eff}} = \frac{m}{2}(-u + bu^2 - bu^3)$ mit $b = \frac{L^2}{m^2 r_0^2}$ gegeben. Ist $b > 3$, so wird das effektive Potential extremal bei $u_{\min,\max} = \frac{1}{3}\big(1 \mp \sqrt{1-\frac{3}{b}}\big)$. Die stabilen Kreisbahnen gehören zum Minimum und treten nur für $u < \frac{1}{3}$, also für $r > 3r_0$, auf.

rotierender Fixsternhimmel

Für einen Beobachter, der das Schwarze Loch im freien Fall umkreist, ändern sich dauernd die Richtungen der Fixsterne durch Parallaxe und Aberration, denn sein Ort und seine Geschwindigkeit relativ zu den Fixsternen ändert sich auf der Kreisbahn. Auch nach einem vollständigen Umlauf um die Zentralmasse sieht er nicht wieder dasselbe Bild. Der Fixsternhimmel ist gegenüber drehungsfrei transportierten Richtungen, die der Beobachter beispielsweise durch Kreisel oder Atominterferometer markiert hat, verdreht.

Um dies zu zeigen, betrachten wir einen Beobachter, der das Gravitationszentrum in der x-y-Ebene, also mit $\theta = \frac{\pi}{2}$, im freien Fall umkreist (7.65, 7.68) und als Bezugssystem die Basisvektoren

$$e_0 = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \quad e_r = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{1-\frac{r_0}{r}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_\theta = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{r} \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_\varphi = \sqrt{1-\tfrac{r_0}{r}} \begin{pmatrix} \frac{\omega r^2}{c^2(r-r_0)} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{a}{r} \end{pmatrix} \tag{7.69}$$

verwendet. Der Vektor e_0 ist die Tangente an seine Weltlinie, auf der die normierten Vektoren e_r, e_θ und e_φ senkrecht stehen. Die Weltlinie des frei fallenden Beobachters ist eine Geodäte, die kovariante Ableitung

$$\frac{\delta u^m}{\delta s} = \frac{du^m}{ds} + \frac{dx^k}{ds}\,\Gamma_{kl}{}^m\,u^l = \frac{du^m}{ds} + \big(a\Gamma_{0l}{}^m + \omega\Gamma_{\varphi l}{}^m\big)u^l \tag{7.70}$$

verschwindet für $u^m = e_0{}^m$. Dabei sind die nichtverschwindenden Christoffelsymbole $\Gamma_{kl}{}^m$ (6.34) der Schwarzschildmetrik (7.14)

$$\begin{aligned}
&\Gamma_{rr}{}^r = -\frac{r_0}{2r(r-r_0)}\,, && \Gamma_{\theta\theta}{}^r = -(r-r_0)\,, && \Gamma_{\varphi\varphi}{}^r = -(r-r_0)\sin^2\theta\,,\\
&\Gamma_{tt}{}^r = \frac{c^2 r_0}{2r^3}(r-r_0)\,, && \Gamma_{r\theta}{}^\theta = \Gamma_{\theta r}{}^\theta = \frac{1}{r}\,, && \Gamma_{\varphi\varphi}{}^\theta = -\sin\theta\cos\theta\,,\\
&\Gamma_{r\varphi}{}^\varphi = \Gamma_{\varphi r}{}^\varphi = \frac{1}{r}\,, && \Gamma_{\varphi\theta}{}^\varphi = \Gamma_{\theta\varphi}{}^\varphi = \cot\theta\,, && \Gamma_{tr}{}^t = \Gamma_{rt}{}^t = \frac{r_0}{2r(r-r_0)}\,.
\end{aligned} \tag{7.71}$$

Ebenso überprüft man, daß der Vektor e_θ, der senkrecht auf der Bahnebene steht, parallel längs der Weltlinie verschoben wird, daß also seine kovariante Ableitung verschwindet.

Der Vektor e_r zeigt in radiale Richtung und ist nicht parallel zu e_r am benachbarten Punkt auf der Kreisbahn. Auch e_φ wird nicht parallel verschoben. Längs der Bahn ist die kovariante Ableitung der beiden Vektoren

$$\frac{\delta e_r{}^m}{\delta s} = \frac{\omega}{a} e_\varphi{}^m\,, \quad \frac{\delta e_\varphi{}^m}{\delta s} = -\frac{\omega}{a} e_r{}^m\,. \tag{7.72}$$

Vielmehr sind es wegen $\varphi(s) = \omega s$ und (7.72) die Linearkombinationen

$$e_1 = e_r \cos\frac{\varphi}{a} - e_\varphi \sin\frac{\varphi}{a} \ , \quad e_2 = e_r \sin\frac{\varphi}{a} + e_\varphi \cos\frac{\varphi}{a} \ , \tag{7.73}$$

die parallel und drehungsfrei verschoben werden und $\frac{\delta e_1}{\delta s} = 0$ und $\frac{\delta e_2}{\delta s} = 0$ erfüllen.

Wenn nun nach einem Umlauf der Winkel φ von 0 auf 2π zugenommen hat, so sind e_1 und e_2 relativ zu den Vektoren bei $\varphi = 0$ um den Winkel $2\pi(\frac{1}{a} - 1) = 2\pi(\sqrt{1 - \frac{3r_0}{2r}} - 1)$ verdreht, so als hätten die Vektoren e_1 und e_2, die in der Bahnebene liegen, Reibung mit dem Zentralkörper. Die Fixsterne sind nach einem Umlauf gegenüber den drehungsfrei mitgeführten Richtungen um $2\pi(1 - \frac{1}{a})$, auf Kreisbahnen mit großem Radius ist dies etwa $\frac{3}{2}\pi\frac{r_0}{r}$, verdreht. Dies läßt sich mit Atominterferometern in Satelliten auf Erdumlaufbahnen messen.

Zwillingsparadoxon frei fallender Beobachter

Diejenige Weltlinie, auf der zwischen zwei zeitartig zueinander liegenden Ereignissen am meisten Zeit vergeht, ist in jedem Fall die Weltlinie eines frei fallenden Beobachters, aber umgekehrt ist nicht unbedingt wahr, daß auf der Weltlinie jedes frei fallenden Beobachters zwischen zwei Ereignissen mehr Zeit vergeht als auf jeder anderen Weltlinie, die ebenfalls diese Ereignisse verbindet. Sind die Ereignisse weit entfernt, so kann auf einer Geodäten durchaus weniger Zeit vergehen als auf einer beschleunigten Weltlinie. Zum Beispiel durchlaufen die Kreisbahn (7.65) und ein ortsfester, beschleunigter Beobachter mit Weltlinie

$$\begin{pmatrix} t(s') \\ r(s') \\ \theta(s') \\ \varphi(s') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s'\frac{1}{\sqrt{1-\frac{r_0}{r}}} \\ r(0) \\ \frac{\pi}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \tag{7.74}$$

die Ereignisse $(0, r(0), \frac{\pi}{2}, 0)$ und $(\frac{2\pi}{\omega}a(r), r(0), \frac{\pi}{2}, 0 \sim 2\pi)$. Dabei vergeht auf der Kreisbahn die Zeit $s = \frac{2\pi}{\omega}$ und beim ortsfesten Beobachter die Zeit

$$s' = \frac{2\pi}{\omega}a(r)\sqrt{1 - \frac{r_0}{r}} = s\sqrt{1 + \frac{r^2\omega^2}{c^2}} \ . \tag{7.75}$$

Dies ist mehr Zeit als auf der Kreisbahn, auch wenn ω für $r > \frac{3}{2}r_0$ so gewählt wird (7.68), daß der Kreis im freien Fall durchlaufen wird.

Die Zeit, die beim ortsfesten Beobachter zwischen einer Umkreisung vergeht, ist nicht maximal, denn auf seiner Weltlinie ist die Wirkung (7.5) nicht stationär. Am meisten Zeit vergeht auf der Weltlinie eines Beobachters im senkrechten Fall. Man kann durch Wahl der Gipfelhöhe der Bahn erreichen, daß ein von der Erde mit hoher Geschwindigkeit senkrecht gestarteter Beobachter im freien Fall während der Aufwärtsbewegung an der Raumstation und am ortsfesten Beobachter vorbeikommt und bei der Abwärtsbewegung dieselbe Stelle passiert, wenn die Raumstation gerade eine Umkreisung vollendet hat. Die zwei Ereignisse, in denen sich die Weltlinie des senkrecht fallenden Beobachters und der im freien Fall kreisenden Raumstation kreuzen, sind durch zwei Geodäten verbunden; das Gravitationsfeld der Erde wirkt als Gravitationslinse.

Es gilt ganz allgemein, daß in einem zentralsymmetrischen Gravitationsfeld auf Geodäten Γ die Uhrzeit zwischen zwei Ereignissen A und B dann nicht maximal wird, wenn die Geodäte den Zentralkörper zwischen A und B mehr als halb umläuft. Denn dann besitzt sie zwischen A und B einen zu A fokalen Punkt C. Ein Ereignis C heißt fokaler Punkt zu A, wenn A und C durch zwei verschiedene Geodäten gleicher Länge verbunden sind.

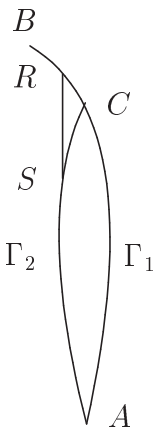


Abbildung 7.2: Abkürzung am fokalen Punkt

Solch ein fokaler Punkt C wird auf Geodäten im zentralsymmetrischen Gravitationsfeld nach einem halben Umlauf erreicht, denn alle Kurven, die aus der Geodäten durch Rotation um die Achse vom Zentrum zu A entstehen, sind Geodäten gleicher Länge, die A und C verbinden.

Hinter einem fokalen Punkt ist die Zeit von A nach B auf einer Geodäten Γ_1 nicht mehr maximal, wie man aus der Abbildung 7.2 abliest. Die Zeit stimmt mit der Zeit längs Γ_2 von A nach C und längs Γ_1 von C nach B überein und kann durch eine „Abkürzung“ von S nach R noch vergrößert werden. Daß die Zeit auf der Abkürzung zwischen S und R größer als von S über C nach R ist, hatten wir bei der Diskussion des Zwillingsparadoxons in Abbildung 3.5 gesehen. Für kleine Dreiecke überträgt sich die Ungleichung $\tau_{RS} > \tau_{RC} + \tau_{CS}$ des flachen Minkowski-Raumes in die gekrümmte Raumzeit,[5] denn im Punkt C kann die Metrik auf die Form $g_{mn} = \eta_{mn}$ des flachen Raumes gebracht werden und in genügend kleinen

[5]Die verschiedenen Weltlinien Γ_1 und Γ_2 haben in C eine nichtverschwindende Relativgeschwindigkeit, denn das Anfangswertproblem der Geodätengleichung ist Lipschitz-stetig und hat daher eindeutige Lösungen.

Raumzeit-Gebieten ändert sie sich nur wenig.

Insbesondere können die Geodäten Γ_1 und Γ_2 in Abbildung 7.2 Weltlinien von Lichtstrahlen sein, die vom Gravitationsfeld einer Masse fokussiert werden. In dem Fall gibt es dann eine Geodäte von A nach B, auf der die Wirkung, die zur Lagrangefunktion (7.39) gehört, maximal ist. Die Wirkung ist größer als Null, denn schon die Abkürzung über S nach R ist zeitartig. Also gibt es die Weltlinie eines freifallenden Beobachters, der bei B Licht empfängt, das er bei A ausgesendet hat.

7.7 Kruskalkoordinaten

Beim Schwarzschildradius $r = r_0$ wird das Längenquadrat (7.14) eines Vektors singulär, falls der Vektor eine nichtverschwindende $\frac{dr}{ds}$-Komponente hat. Diese Singularität beruht auf der Wahl ungeeigneter Koordinaten ähnlich wie Kugelkoordinaten bei $(x, y, z) = 0$. Dies sieht man, wenn man neue Koordinaten (v, u) als Funktionen von (t, r) einführt und diese Koordinaten so wählt, daß radiale Lichtstrahlen in der (u, v)-Ebene so wie in der 1+1-dimensionalen, flachen Raumzeit Geraden sind, die mit den Koordinatenachsen einen Winkel von $\pm 45°$ bilden. Daß solche Koordinaten existieren, ist überraschend lang nicht erkannt worden, obwohl bekannt war, daß jede zweidimensionale Metrik konformflach (C.28) ist.

In Kruskalkoordinaten (v, u, θ, φ) ist das Längenquadrat

$$g_{kl}(x)\frac{dx^k}{ds}\frac{dx^l}{ds} = f(r(u,v))\Big(\big(\frac{dv}{ds}\big)^2 - \big(\frac{du}{ds}\big)^2\Big) - r^2(u,v)\Big(\big(\frac{d\theta}{ds}\big)^2 + \sin^2\theta\big(\frac{d\varphi}{ds}\big)^2\Big). \tag{7.76}$$

Es stimmt mit (7.14) überein, wenn wir $u(t, r)$ und $v(t, r)$ durch

$$u = \big(\frac{r}{r_0} - 1\big)^{\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{\frac{r}{2r_0}} \cosh\frac{ct}{2r_0}\,, \quad v = \big(\frac{r}{r_0} - 1\big)^{\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{\frac{r}{2r_0}} \sinh\frac{ct}{2r_0} \tag{7.77}$$

definieren. Umgekehrt sind dann $t(v, u)$ und $r(v, u)$ implizit gegeben

$$\tanh\frac{ct}{2r_0} = \frac{v}{u}\,, \quad \big(\frac{r}{r_0} - 1\big)\,\mathrm{e}^{\frac{r}{r_0}} = u^2 - v^2\ . \tag{7.78}$$

Bestätigen wir zunächst, daß das Längenquadrat in Kruskalkoordinaten (7.76) mit der Schwarzschildmetrik (7.14) übereinstimmt. Um die Formeln lesbar zu halten und um Schreibarbeit zu sparen, verwenden wir r_0 als Längeneinheit und $\frac{r_0}{c}$ als Zeiteinheit. In diesen Einheiten sind $r_0 = 1$ und $c = 1$ und tauchen als Faktoren nicht mehr auf. Zudem sparen wir uns bei den Komponenten $\frac{dx}{ds}$ des Tangentialvektors den Nenner und schreiben kürzer

dx. Allerdings ergänzen wir diese Kurzschrift wieder, bevor wir in Integrale einsetzen, in denen das Symbol dx eine andere Bedeutung hat und Teil der Integrationsvorschrift ist. Wir schreiben also kürzer für die Ableitung

$$\frac{d\big(\tanh\frac{ct}{2r_0}\big)}{ds} = \frac{c}{2r_0\cosh^2\frac{ct}{2r_0}}\frac{dt}{ds}$$

$$d\big(\tanh\frac{t}{2}\big) = \frac{1}{2\cosh^2\frac{t}{2}}dt = \frac{1}{2}\big(1-\tanh^2\frac{t}{2}\big)dt = \frac{1}{2}\big(1-\frac{v^2}{u^2}\big)dt\ . \qquad (7.79)$$

Hierbei haben wir $\tanh\frac{t}{2} = \frac{v}{u}$ (7.78) verwendet. Daher gilt auch

$$d\big(\tanh\frac{t}{2}\big) = d(\frac{v}{u}) = \frac{1}{u^2}(-vdu+udv)\ . \qquad (7.80)$$

Lösen wir (7.79) und (7.80) nach dt auf, so erhalten wir

$$dt = 2\frac{udv-vdu}{u^2-v^2} = \frac{2}{r-1}\,\mathrm{e}^{-r}(udv-vdu)\ . \qquad (7.81)$$

Berechnen wir die Ableitung von $u^2-v^2 = (r-1)\,\mathrm{e}^r$ (7.78), so folgt

$$d(u^2-v^2) = 2(udu-vdv) = d((r-1)\,\mathrm{e}^r) = r\,\mathrm{e}^r dr\ , \qquad (7.82)$$

oder, nach dr aufgelöst,

$$dr = \frac{2}{r}\,\mathrm{e}^{-r}(udu-vdv)\ . \qquad (7.83)$$

Demnach ist das Längenquadrat

$$\begin{aligned}
&(1-\frac{1}{r})\big(dt\big)^2 - \frac{\big(dr\big)^2}{1-\frac{1}{r}} \\
&\quad = 4\,\mathrm{e}^{-2r}\big(\frac{1-\frac{1}{r}}{(r-1)^2}(udv-vdu)^2 - \frac{1}{r^2(1-\frac{1}{r})}(udu-vdv)^2\big) \\
&\quad = 4\frac{\mathrm{e}^{-2r}}{r(r-1)}\big((udv-vdu)^2-(udu-vdv)^2\big) \\
&\quad = 4\frac{\mathrm{e}^{-2r}}{r(r-1)}(u^2-v^2)\big(\big(dv\big)^2-\big(du\big)^2\big) = 4\frac{\mathrm{e}^{-r}}{r}\big(\big(dv\big)^2-\big(du\big)^2\big)\ .
\end{aligned}$$

Setzen wir in diese Kurzschrift wieder die Faktoren c und r_0 ein, so erhalten wir die Schwarzschildmetrik (7.14) in Kruskalkoordinaten (7.76)

$$(1-\frac{r_0}{r})c^2\big(\frac{dt}{ds}\big)^2 - \frac{1}{1-\frac{r_0}{r}}\big(\frac{dr}{ds}\big)^2 = f(r(u,v))\big(\big(\frac{dv}{ds}\big)^2-\big(\frac{du}{ds}\big)^2\big)\ , \qquad (7.84)$$

$$f(r) = (2r_0)^2\frac{r_0}{r}\,\mathrm{e}^{-\frac{r}{r_0}}\ . \qquad (7.85)$$

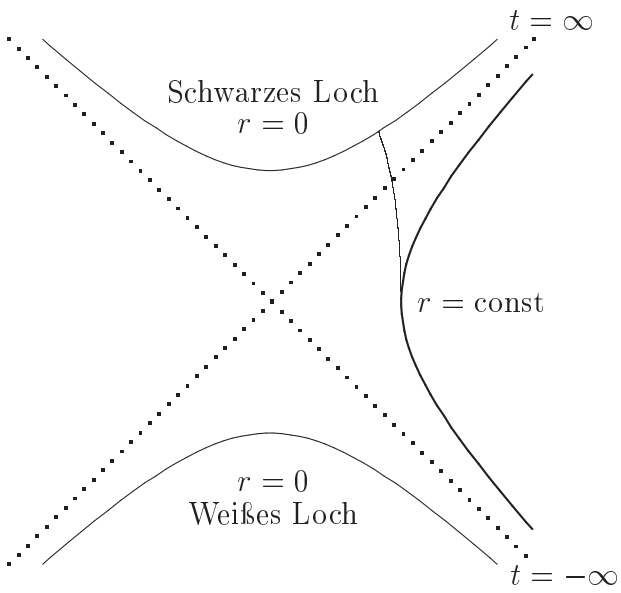


Abbildung 7.3: schwarzes Loch in Kruskal-Koordinaten (u, v)

Tangentialvektoren mit $\frac{dv}{ds} = \pm\frac{du}{ds}$ und $\frac{d\theta}{ds} = 0 = \frac{d\varphi}{ds}$, sind lichtartig, $\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 = 0$, und gehören zu radial ein- oder auslaufenden Lichtstrahlen. Radiale Lichtstrahlen durchlaufen in der (u, v)-Ebene von unten nach oben Geraden mit einem Winkel von $\pm 45°$ zu den Achsen.

Weltlinien mit konstantem $r > r_0$ gehören zu ruhenden Beobachtern. Diese Linien sind wegen (7.78) Hyperbeln $u^2 - v^2 = const > 0\,,\ u > 0$, in der (u, v)-Ebene. Linien gleicher Koordinatenzeit t sind in der (u, v)-Ebene Geraden durch den Ursprung mit Steigung zwischen -1 und $+1$.

Die Koordinatentransformation (7.77) bildet alle Ereignisse außerhalb des Schwarzschildradiusses, also alle (t, r) mit $r > r_0$, auf den Bereich

$$\mathcal{M} = \{(u, v) : u > 0,\ -u < v < u\} \tag{7.86}$$

ab. Außerhalb von $\mathcal{M}$ ist die Abbildung nicht mehr invertierbar. Die Halbgerade $v = u \geq 0$ gehört zu $t = \infty$, die Halbgerade $v = -u \leq 0$ zu $t = -\infty$. Diese Halbgeraden sind auch Teil der entarteten Hyperbel $u^2 - v^2 = 0$, die zu $r = r_0$, also zum Schwarzschildradius, gehört.

In Kruskalkoordinaten ist die Metrik auch außerhalb $\mathcal{M}$ im ganzen Bereich $v^2 - u^2 < 1$ eine singularitätenfreie Lösung der Einsteingleichungen. Die Punkte der Hyperbel $v^2 - u^2 = 1$ in der (u, v)-Ebene entsprechen $r = 0$. Für $r = 0$ wird die Funktion $f(r)$ (7.85) singulär. Durch Berechnung von Quadraten des Riemanntensors $R_{abc}{}^d$ kann man zeigen, daß diese Singularität der

Metrik in Kruskalkoordinaten anders als die Singularität der Schwarzschildmetrik am Horizont $r = r_0$ nicht durch eine Koordinatentransformation vermieden werden kann. Denn das Quadrat des Riemanntensors $R_{abc}{}^d R^{abc}{}_d$ ist eine skalare Funktion, die wie $\frac{1}{r^6}$ für $r \to 0$ divergiert.

Die Ereignisse $r = 0$ bestehen in Kruskalkoordinaten aus einem weißen Loch, den Punkten $r = 0$ mit $v \leq -1$, von dem nur Lichtstrahlen nach $\mathcal{M}$ ausgesendet werden können, und einem schwarzen Loch mit $r = 0$ und $v \geq 1$, das nur Lichtstrahlen aus $\mathcal{M}$ empfangen, aber keine Lichtstrahlen aussenden kann. Licht läuft nämlich in der (u, v)-Ebene auf Geraden mit Winkel $\pm 45°$ zu den Achsen nach oben. Auch von jedem Ereignis mit $0 < r < r_0$ und $v > 0$ kann kein Licht nach $\mathcal{M}$ ausgesendet werden, jeder ausgesendete Lichtstrahl endet im schwarzen Loch bei $r = 0$. Der Schwarzschildradius ist also ein Horizont: Lichtstrahlen von Ereignissen mit $r < r_0$ und $v > 0$ können von einem Beobachter außerhalb des Schwarzschildhorizonts nicht gesehen werden.

Auch wenn das Überschreiten des Horizonts unumkehrbar zum Zusammensturz nach $r = 0$ führt, so ist dieses Überschreiten dennoch für freifallende Beobachter ohne spektakuläre Phänomene. Es wirken sich bei ihm nur die Gezeitenkräfte der Gravitation aus, die daher rühren, daß bei freiem Fall benachbarte Punkte durch die unterschiedliche Gravitation unterschiedlich fallen und ihren Abstand verändern. Diese Gezeitenkräfte sind am Horizont $r = r_0$ klein, wenn der Schwarzschildradius groß ist.

Weiße Löcher können nicht durch zusammenstürzende Sterne entstehen. Ist die Materie eines Stern zunächst bis zu $r_{\text{Stern}} > r_0$ ausgedehnt, so gilt in Kruskalkoordinaten die Metrik (7.76) nur für $r > r_{\text{Stern}}$. Die Sternenoberfläche wäre in Abbildung 7.3 durch die Linie $r = \text{const}$ gegeben. Bricht die Materie des Sterns später unter dem eigenen Gewicht zusammen, so weicht die Weltlinie der Sternenoberfläche wie in Abbildung 7.3 angedeutet, von der Hyperbel $r = \text{const}$ nach links, zu kleineren Werten von r ab. Der Tangentialvektor an diese Weltlinie ist überall innerhalb des Vorwärtslichtkegels: Materie ist langsamer als Licht. Daher ist das vollständige Zusammenstürzen in den Punkt $r = 0$ unvermeidlich, wenn der Stern auf weniger als den Schwarzschildradius geschrumpft ist. Es gilt dann in Abbildung 7.3 die Kruskalmetrik rechts von der Weltlinie, die die Oberfläche des zusammenstürzenden Sterns markiert. Insbesondere bildet sich die Singularität des Schwarzen Lochs bei $r = 0$.

Die Singularität der Schwarzschildlösung bei $r = 0$ zeigt, daß die Beschreibung von Materie durch Teilchen, die Bahnen durchlaufen, und von Gravitation durch eine Metrik g_{mn}, die die Einsteingleichungen erfüllt, bei $r = 0$ nicht gültig ist. Die Approximation, Teilchen durch Weltlinien darzustellen, wird für quantenmechanische Teilchen unzureichend, wenn sich die

Metrik auf den Abmessungen des Wellenpakets des Teilchens ändert.

An der Singularität bei $r = 0$ ist verblüffend, daß sie eine Weltlinie mit Überlichtgeschwindigkeit durchläuft: ihr Tangentialvektor ist raumartig.

Die Funktion $r(u, v)$ ist spezieller eine Funktion von $u^2 - v^2$. Ihr Wert stimmt also mit $r(u', v')$ an lorentztransformierten (2.37 mit $\kappa = \mathrm{e}^{\sigma}$) Argumenten überein.

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\sigma & \sinh\sigma \\ \sinh\sigma & \cosh\sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \tag{7.87}$$

Diese Lorentztransformation läßt also r invariant. Sie verschiebt t (7.78)

$$r' = r \qquad t' = t + \frac{2r_0}{c}\sigma \ . \tag{7.88}$$

Die Zeittranslation ist also eine Lorentztransformation der Kruskalkoordinaten (u, v). Sie hat einen Fixpunkt bei $(u, v) = (0, 0)$. Dieser Fixpunkt ist der mathematische Grund dafür, daß mit dem Ansatz

$$g_{kl}(x)\frac{dx^k}{ds}\frac{dx^l}{ds} = \mathrm{e}^{\nu(t,r)}\Big(\frac{dt}{ds}\Big)^2 - \mathrm{e}^{\mu(t,r)}\Big(\frac{dr}{ds}\Big)^2 - r^2\Big(\frac{d\theta}{ds}\Big)^2 - r^2\sin^2\theta\Big(\frac{d\varphi}{ds}\Big)^2 \tag{7.89}$$

für die Schwarzschildlösung nicht auch gleich die Kruskallösung gefunden wurde. Dieser Ansatz scheint immer möglich, wenn die Metrik drehinvariant ist. Er unterstellt aber auch noch, daß sich Flächen mit konstantem t nicht schneiden, daß also Zeittranslationen keinen Fixpunkt haben. Diese Unterstellung ist falsch.

Kapitel 8

Äquivalenzprinzip

Grundlegend für die geometrische Deutung der Gravitation ist das Äquivalenzprinzip, nämlich der physikalische Befund, daß alle Testteilchen unter Einfluß der Gravitation dieselben Weltlinien durchlaufen. Da die Weltlinien frei fallender Teilchen universell sind und nicht von Eigenschaften der Teilchen, wie zum Beispiel von ihrer Masse, abhängen, sind diese Weltlinien eine geometrische Struktur, nämlich Geraden oder Geodäten, der Raumzeit. Ebenso universell sind die Weltlinien von Lichtstrahlen; sie entstehen als Grenzfall von Geodäten massiver Teilchen, wenn deren Geschwindigkeit gegen die Lichtgeschwindigkeit strebt. Auch Lichtstrahlen durchlaufen Geodäten der Raumzeit.

Wir haben in unserer Darstellung bisher einfach die Geodätenhypothese und damit das Äquivalenzprinzip unterstellt und angenommen, daß frei fallende Teilchen und Licht im Vakuum Geodäten der Metrik der Raumzeit durchlaufen. Tatsächlich folgt das Äquivalenzprinzip aus der Invarianz der Wirkung, die aufgrund der Feldgleichungen der Allgemeinen Relativitätstheorie stationär ist, unter Koordinatenwechsel. Aus den Maxwellgleichungen, die durch Eichinvarianz und Koordinateninvarianz der Wirkung festgelegt sind, folgt, daß die Weltlinien von Lichtstrahlen Geodäten sind. Die Geodätenhypothese ist, im Gegensatz zu ihrem Namen, keine Hypothese, die man zur Deutung des metrischen Feldes fordern kann und die man in Spielarten der Allgemeinen Relativitätstheorie abändern könnte. Wie wir zeigen werden, spielt Torsion für das Verhalten von Testteilchen und Licht keine Rolle. Testteilchen und Lichtstrahlen folgen den Geodäten des torsionsfreien, metrikverträglichen Paralleltransports.

Die Geodätenhypothese gilt näherungsweise, solange die Ausmessungen des Teilchens und die Wellenlänge des Lichts klein ist gegenüber den Strecken, auf denen sich das Gravitationsfeld ändert. Diese Einschränkung gilt auch schon für das Äquivalenzprinzip in der Newtonscher Physik. Daß eine große

und eine kleine Masse gleich fallen, leitet man gelegentlich mit der Überlegung her, daß, wenn man eine Masse in zwei Teile zerschneidet, beide Teile nebeneinander so fallen wie die Gesamtmasse. Das gilt allerdings nur, wenn die Teile nicht unterschiedlicher Gravitation ausgesetzt sind, also wenn das Gravitationsfeld auf den Abmessungen der Gesamtmasse konstant ist, und wenn man die gegenseitige Gravitation der Teile vernachlässigen kann.

Die Geodätenhypothese wird in der Nähe von Singularitäten der Metrik falsch, denn dort ändert sich die Metrik innerhalb der Wellenlänge von Licht oder der Comptonwellenlänge von Teilchen. Um das Verhalten von Licht und Teilchen in der Nähe einer Singularität zu bestimmen, muß man die gekoppelten Feldgleichungen für Metrik und Materie lösen.

Die Koordinateninvarianz der Wirkung ist in einer Quantenfeldtheorie mit Spin-2-Teilchen notwendig, um zu verhindern, daß sich unphysikalische Zustände mit negativer und daher widersinniger Wahrscheinlichkeit in physikalischen Prozessen auswirken [21]. Diese Koordinateninvarianz ist also nicht nur schön und ästhetisch reizvoll, sondern zwingend erforderlich. Aus denselben Gründen kann es nur ein Spin-2 Teilchen und damit nur eine Metrik geben [25]. Dies erklärt den erstaunlichen als Äquivalenzprinzip formulierten Befund, daß alle Teilchen ein und derselben Gravitation unterliegen und nicht an mehrere Spin-2-Felder auf so unterschiedliche Art koppeln wie an die zwölf Spin-1-Felder des Standardmodells der elementaren Wechselwirkungen.

8.1 lokale Energie-Impulserhaltung

Die Geodätenhypothese folgt daraus, daß die Wirkung, aus der die Feldgleichungen abgeleitet werden, invariant unter Koordinatentransformationen ist.

Unter infinitesimalen Koordinatentransformationen $x'^m = x^m - \xi^m$ ändert sich die Metrik um die Lie-Ableitung (B.22) längs ξ

$$\delta g_{mn} = \xi^k \partial_k g_{mn} + \partial_m \xi^k g_{kn} + \partial_n \xi^k g_{mk} \ . \tag{8.1}$$

Wir unterstellen, daß in Abwesenheit von Materie die Feldgleichungen der Metrik aus einer Wirkung $W_{\text{Metrik}}[g]$ folgen, die invariant unter allgemeinen Koordinatentransformationen ist, und daß alle anderen Felder ϕ, die Materiefelder, durch eine ebenfalls koordinateninvariante Wirkung W_{Materie} an die Metrik gekoppelt ist.[1]

$$W[g, \phi] = W_{\text{Metrik}}[g] + W_{\text{Materie}}[g, \phi] \tag{8.2}$$

[1] Brans-Dicke-Theorien enthalten ein Skalarfeld, das auch in W_{Metrik} auftritt. Weder gilt, bezogen auf diese Felder, lokale Energieerhaltung, noch folgen Testteilchen den metrikverträglichen, torsionsfreien Geodäten.

Wie die Felder ϕ unter infinitesimalem Wechsel der Koordinaten transformieren und welche genauere Struktur die beiden Anteile der Wirkung haben, wird im weiteren nicht benötigt, da wir nur die Noetheridentität (5.125) auswerten, die zu den Transformationen (8.1) gehört. Erfüllen die Materiefelder ϕ_i ihre Bewegungsgleichungen $\frac{\delta W_{\text{Materie}}}{\delta \phi_i} = 0$, so gelten identisch im Feld g_{mn} die Gleichungen

$$(\partial_k g_{mn}) \frac{\delta W_{\text{Materie}}}{\delta g_{mn}} - \partial_m (g_{kn} \frac{\delta W_{\text{Materie}}}{\delta g_{mn}}) - \partial_n (g_{mk} \frac{\delta W_{\text{Matrie}}}{\delta g_{mn}}) = 0 \ . \tag{8.3}$$

Nennen wir die Variationsableitung der Materiewirkung

$$\mathcal{T}^{mn}(x) = -\frac{1}{2} \frac{\delta W_{\text{Materie}}}{\delta g_{mn}(x)} \tag{8.4}$$

im Vorgriff auf die spätere Deutung die Energie-Impulstensordichte. Sie ist in den Feldgleichungen der Allgemeinen Relativitätstheorie

$$\frac{\delta W_{\text{Metrik}}}{\delta g_{mn}(x)} = 2\mathcal{T}^{mn}(x) \tag{8.5}$$

die Quelle für Gravitation und enthält in ihren Komponenten Energiedichten und Energiestromdichten sowie Impulsdichten und Impulsstromdichten.

Weil die Metrik $g_{mn} = g_{nm}$ symmetrisch unter Vertauschung der beiden Indizes ist, gilt

$$\mathcal{T}^{mn} = \mathcal{T}^{nm} \ . \tag{8.6}$$

Die Noetheridentität (8.3) besagt für die Energie-Impulstensordichte

$$\partial_l \mathcal{T}^{ml} + \Gamma_{kl}{}^{m} \mathcal{T}^{kl} = 0 \ , \tag{8.7}$$

wobei

$$\Gamma_{kl}{}^{m} = \frac{1}{2} g^{mn} (\partial_k g_{nl} + \partial_l g_{nk} - \partial_n g_{kl}) \tag{8.8}$$

das Christoffelsymbol (6.34) ist, das zum metrikverträglichen, torsionsfreien Paralleltransport gehört.

Daß die Gleichung (8.7) kovariant ist und in allen Koordinatensystemen gilt, wird offensichtlich, wenn wir von der Tensordichte $\mathcal{T}^{mn}$ das Volumenelement $\sqrt{g}$ (E.11) abspalten.

$$\mathcal{T}^{mn} = \sqrt{g}\, T^{mn} \tag{8.9}$$

Der Energie-Impulstensor T^{mn} erfüllt wegen (8.7) und (E.12) die Gleichung

$$0 = \sqrt{g} \big(\partial_l T^{ml} + \Gamma_{lk}{}^{k} T^{ml} + \Gamma_{lk}{}^{m} T^{kl} \big) = \sqrt{g} D_l T^{ml} \ , \tag{8.10}$$

es verschwindet also die kovariante Divergenz des Energieimpulstensors. Dabei ist die Konnektion $\Gamma_{kl}{}^{m}$, mit der die kovariante Ableitung gebildet wird, metrikverträglich und torsionsfrei, also durch das Christoffelsymbol gegeben.

Die Gleichung (8.7) beschreibt analog zur Elektrodynamik (5.19), wie in der Allgemeinen Relativitätstheorie Energie und Impuls erhalten sind und wie die Energie- und Impulserhaltung verletzt ist.

Für jeden Raumzeitpunkt lassen sich Koordinaten finden, so daß das Christoffelsymbol an diesem Punkt verschwindet. Dies haben wir im Anschluß an Gleichung (6.17) gezeigt. Grenzt man in solch einem Koordinatensystem ein kleines Volumen ab, und integriert man die Energiedichte $\mathcal{T}^{00}$, so ändert sich, analog zu (5.16), die im Volumen befindliche Energie nur dadurch, daß unausgeglichen Energie durch die Randflächen in das Volumen hinein oder heraus strömt. Dies ist zwar nicht ganz richtig, denn das Christoffelsymbol verschwindet nicht im ganzen Volumen, aber man kann den Fehler durch Verkleinern des Volumens beliebig klein machen. Gleiches gilt für jede Komponente des Impulses und die zugehörige Impulsdichte $\mathcal{T}^{0i}$. Lokal gilt also in jedem Raumzeitpunkt Energie- und Impulserhaltung.

Folglich gibt die Allgemeine Relativitätstheorie auf die Frage, „Wann würden wir es auf der Erde merken, wenn plötzlich die Sonne nicht mehr da wäre und die Gravitation der Sonne die Erde nicht mehr auf einer Umlaufbahn hielte?“ die Antwort, daß solch eine Situation nicht entstehen kann, denn Energie und Impuls können nicht einfach weggedacht werden, sondern nur an einen anderen Punkt transportiert werden. Die Frage ist im Rahmen der Allgemeinen Relativitätstheorie so sinnvoll wie in der Zahlentheorie die Frage, ob eine ganze Zahl gerade oder ungerade ist, wenn sie zwischen 0 und 1 liegt.

Obwohl es in jedem Raumzeitpunkt Energie- und Impulserhaltung gibt, gibt es dennoch keine Erhaltung der Gesamtenergie oder des Gesamtimpulses. Es läßt sich, wie wir im Anschluß an Gleichung (6.42) diskutiert haben, das Christoffelsymbol nur dann in einer Umgebung eines Punktes durch Wahl des Koordinatensystems auf Null transformieren, wenn der Riemanntensor verschwindet und folglich die Raumzeit flach ist. Dies ist nur in einer Raumzeit, die vollständig leer ist, der Fall. Der Term $\Gamma_{kl}{}^{m}\mathcal{T}^{kl}$ in (8.7) verletzt die Energie- und Impulserhaltung. Anders als im Fall der Elektrodynamik (5.19), wo die Zusatzterme $\frac{1}{c}F^{k}{}_{n}j^{n}$ den Austausch von Energie und Impuls des elektromagnetischen Feldes mit den Ladungen beschreibt, kann $\Gamma_{kl}{}^{m}\mathcal{T}^{kl}$ nicht als Austausch von Energie- und Impuls der Materie mit dem Gravitationsfeld gedeutet werden, denn dieser Term hängt vom verwendeten Koordinatensystem ab. Er kann nicht gemessen werden, denn alle Meßapparate messen Größen, die vom verwendeten Koordinatensystem unabhängig sind.

In speziellen Situationen, wenn nämlich die Metrik eine Isometrie besitzt,

und ein Feld ξ existiert, so daß $\delta g_{mn} = 0$ (8.1) ist, folgt aus (8.7), daß zu dieser Isometrie eine Erhaltungsgröße gehört. Wir sehen dies, wenn wir die Killing-Gleichung (C.26)

$$0 = \delta g_{mn} = \xi^k \partial_k g_{mn} + \partial_m \xi^k g_{kn} + \partial_n \xi^k g_{mk} \tag{8.11}$$

mit $\mathcal{T}^{mn}$ multiplizieren und, wir verwenden die Schreibweise $\xi_n = g_{nk}\xi^k$, geeignet zusammenfassen

$$\begin{aligned} 0 &= \big(\xi^k \partial_k g_{mn} + \partial_m \xi^k g_{kn} + \partial_n \xi^k g_{mk}\big)\mathcal{T}^{mn} \\ &= \partial_m(\xi_n \mathcal{T}^{mn}) + \partial_n(\xi_m \mathcal{T}^{mn}) + \\ &\quad + \xi^k\big((\partial_k g_{mn})\mathcal{T}^{mn} - \partial_m(g_{kn}\mathcal{T}^{mn}) - \partial_n(g_{mk}\mathcal{T}^{mn})\big) \ . \end{aligned} \tag{8.12}$$

Die letzte Zeile verschwindet wegen (8.3). Dann besagt die Gleichung, daß zu jedem Killingfeld ein erhaltener Strom gehört

$$j^n = \mathcal{T}^{nm}\xi_m \ , \quad \partial_n j^n = 0 \ . \tag{8.13}$$

Ist zur Beispiel die Metrik zeitunabhängig, so ist die Energie der Materie im Gravitationsfeld erhalten; ist die Metrik drehinvariant, so ist der Drehimpuls der Materie erhalten.

Ändert sich die Metrik wie im expandierenden Universum im Laufe der Zeit, so ist die Energie nicht erhalten. Die Energie der Hintergrundstrahlung nimmt durch die Rotverschiebung, die mit der Expansion einhergeht, ab, ohne daß diese Energie in eine andere, meßbare Energieform überführt wird.

8.2 Testteilchen

Ist ein Testteilchen so klein, daß auf seinen Abmessungen die Ungleichmäßigkeit des metrischen Feldes vernachlässigt werden kann, andererseits aber so ausgedehnt, daß die Gravitation, die es selbst erzeugt auch an dem Ort vernachlässigt werden kann, an dem es sich aufhält, so durchläuft im Vakuum, wie wir in diesem Abschnitt zeigen, der Schwerpunkt dieses Testteilchens in der Raumzeit eine Geodäte des torsionsfreien, metrikverträglichen Paralleltransports.

Ein Teilchen hat Energie und Impuls und trägt also zur Energie-Impulstensordichte (8.4) bei. Um das Verhalten des Teilchens im Gravitationsfeld zu klären, denken wir uns die Feldgleichungen (8.5) der Gravitation zunächst in Abwesenheit des Teilchens gelöst. Dann existieren eine Metrik g_{mn} und eine Energie-Impulstensordichte $\mathcal{T}^{mn}$, die insbesondere die Gleichung (8.7) für die kovariante Energie-Impulserhaltung lösen. Fügen wir ein Testteilchen

hinzu, so ändert sich die Metrik und damit verbunden das Christoffelsymbol und die Energie-Impulstensordichte. Außer (8.7) gilt auch

$$0 = \partial_l(\mathcal{T}^{ml} + \tau^{ml}) + (\Gamma_{kl}{}^m + \gamma_{kl}{}^m)(\mathcal{T}^{kl} + \tau^{kl}) \ . \tag{8.14}$$

Für die Änderung τ^{ml} der Energie-Impulstensordichte, die vom Testteilchen hervorgerufen ist, und die Änderung des Christoffelsymbols $\gamma_{kl}{}^m$ folgt also

$$0 = \partial_l \tau^{ml} + \Gamma_{kl}{}^m \tau^{kl} + \gamma_{kl}{}^m(\mathcal{T}^{kl} + \tau^{kl}) \ . \tag{8.15}$$

Wir betrachten das Testteilchen im Vakuum, das heißt in einem Gebiet der Raumzeit, in dem $\mathcal{T}^{kl}$ verschwindet. Darüber hinaus nehmen wir an, daß wir die gravitative Rückwirkung des Teilchens auf sich selbst, den Term $\gamma_{kl}{}^m \tau^{kl}$ vernachlässigen dürfen. Diese Annahme schließt aus, daß das Teilchen ein Punktteilchen ist. Insbesondere muß das Teilchen groß gegen den zu seiner Masse gehörigen Schwarzschildradius sein und überall geringe Dichten von Energie- und Impuls haben, damit wir die ihm eigene Gravitation vernachlässigen können.

Mit diesen Modellannahmen vernachlässigen wir die gravitativen Auswirkungen des Testteilchens und fassen die Metrik g_{mn} als vorgegebenes Feld auf, als sogenanntes Hintergrundfeld, unter dessen Einfluß sich das Testteilchen bewegt

$$0 = \partial_l \tau^{ml} + \Gamma_{kl}{}^m \tau^{kl} \tag{8.16}$$

und folglich

$$\tau^{mn} = \partial_l\big(x^n \tau^{ml}\big) + x^n \Gamma_{kl}{}^m \tau^{kl} \ . \tag{8.17}$$

Als weitere Eigenschaft des Teilchens nehmen wir an, daß die Energie-Impulstensordichte des Teilchens auf einen Schlauch um die Weltlinie des Schwerpunktes $X(\lambda)$ beschränkt ist, das heißt, wenn wir über Schichten gleicher Zeit $x^0 = X^0(\lambda)$ integrieren, so verschwindet für jedes λ

$$\int_{x^0 = X^0(\lambda)} d^3x \, (x^l - X^l(\lambda)) \tau^{mn} = 0 \ . \tag{8.18}$$

Für $m = n = 0$ definiert diese Gleichung die Weltlinie des Energieschwerpunktes eines ausgedehnten Teilchens. Wir fordern als Eigenschaft des Teilchens, daß die Schwerpunkte der anderen Komponenten der Energie-Impulstensordichte mit dem Energieschwerpunkt übereinstimmen, so wie das bei einem Punktteilchen der Fall ist. Zur rechnerischen Vereinfachung wählen wir als Parameter λ der Weltlinie die Koordinatenzeit x^0 und nennen ihn t. Es gilt dann einfach $X^0(t) = t$.

Der Schlauch sei groß genug, daß die Energie- und Impulsdichten des Teilchen klein sind, und klein genug, so daß sich auf seinen Abmessungen nicht

auswirkt, daß die Gravitation ungleichmäßig ist. Was diese etwas unklaren Eigenschaften genau besagen sollen, zeigt die folgende Rechnung.

Wir integrieren (8.16) über Schichten gleicher Zeit $x^0 = t$

$$0 = \int_{x^0=t} d^3x\, \partial_0 \tau^{m0} + \partial_i \tau^{mi} + \Gamma_{kl}{}^m \tau^{kl} \ . \tag{8.19}$$

Beim ersten Term kann die Zeitableitung vor das Integral gezogen werden. Das Integral über die räumlichen Ableitungen $\partial_i \tau^{mi}$ verschwindet, denn nach dem Gaußschen Satz ist es gleich dem Oberflächenintegral über die Fläche, die das Integrationsvolumen berandet, und in weiter Entfernung von Schwerpunkt verschwindet τ^{mi}, weil das Teilchen klein ist. Beim dritten Term entwickeln wir $\Gamma_{kl}{}^m(x)$ um den Schwerpunkt mit einem Restglied zweiter Ordnung

$$\Gamma_{kl}{}^m(x) = \Gamma_{kl}{}^m(X) + (x^r - X^r)\partial_r \Gamma_{kl}{}^m(X) + \frac{1}{2}(x^r - X^r)(x^s - X^s)\partial_r \partial_s \Gamma_{kl}{}^m(\bar{x}) \ ,$$

wobei $\bar{x}$ ein nicht genauer bekannter Punkt zwischen $X(t)$ und x ist. Setzten wir diese Entwicklung in das Integral $\int_{x^0=t} \Gamma_{kl}{}^m(x)\tau^{kl}$ ein, so können wir beim ersten Term $\Gamma_{kl}{}^m(X)$ und beim zweiten $\partial_r \Gamma_{kl}{}^m(X)$ vor das Integral ziehen, da diese Faktoren nicht von der Integrationsvariablen abhängen. Das Integral über $(x^r - X^r)\tau^{kl}$ verschwindet nach Definition des Schwerpunktes (8.18). Das Integral über den Term mit dem Restglied vernachlässigen wir

$$\int_{x^0=t} d^3x\, \frac{1}{2}(x^r - X^r)(x^s - X^s)\partial_r \partial_s \Gamma_{kl}{}^m(\bar{x})\tau^{kl} \approx 0 \ . \tag{8.20}$$

Es ist proportional zu den Änderungen von Γ in zweiter Ordnung innerhalb der Abmessungen des Teilchens und verschwindet im Grenzfall eines nicht ausgedehnten Teilchens. In diesem Sinn ist ein Testteilchen klein.

Wir erhalten mit dieser Näherung aus (8.19)

$$0 = \frac{d}{dt} \int d^3x\, \tau^{m0} + \Gamma_{kl}{}^m(X(t)) \int d^3x\, \tau^{kl} \ . \tag{8.21}$$

Für ein Integral mit $\Gamma_{kl}{}^m$ wirkt τ^{kl} wie ein Vielfaches der $\delta^3(\vec{x} - \vec{X}(t))$-Funktion.

Integrieren wir (8.17) so erhalten wir aus denselben Gründen

$$\begin{aligned} \int d^3x\, \tau^{kl} &= \int d^3x\, \partial_0(x^k \tau^{0l}) + \partial_i(x^k \tau^{il}) + x^k \Gamma_{mn}{}^l \tau^{mn} \\ &= \frac{d}{dt}\big(X^k(t) \int d^3x\, \tau^{0l}\big) + \Gamma_{mn}{}^l(X(t)) X^k(t) \int d^3x\, \tau^{mn} \ . \end{aligned} \tag{8.22}$$

Kombinieren wir dies Ergebnis mit (8.21), so vereinfacht es sich zu

$$\int d^3x\,\tau^{kl} = \big(\frac{d}{dt}X^k(t)\big)\int d^3x\,\tau^{0l}\ . \tag{8.23}$$

Für $l = 0$ und wegen $\tau^{kl} = \tau^{lk}$ erhalten wir

$$\int d^3x\,\tau^{0k} = \big(\frac{d}{dt}X^k(t)\big)\int d^3x\,\tau^{00}\ , \tag{8.24}$$

und, wenn wir k in l umbenennen und in (8.23) einsetzen,

$$\int d^3x\,\tau^{kl} = \big(\frac{d}{dt}X^k(t)\big)\big(\frac{d}{dt}X^l(t)\big)\int d^3x\,\tau^{00}\ . \tag{8.25}$$

Setzen wir in (8.21) ein, so erhalten wir

$$0 = \frac{d}{dt}\big(\frac{dX^m}{dt}\int d^3x\,\tau^{00}\big) + \Gamma_{kl}{}^m(X)\frac{dX^k}{dt}\frac{dX^l}{dt}\int d^3x\,\tau^{00}\ . \tag{8.26}$$

Dies ist die Geodätengleichung in der Parametrisierung $X^0(t) = t$. Fassen wir $t(s)$ als Funktion eines Parameters s auf, die durch

$$\frac{dt}{ds} = f(t)\ , \quad f(t) = \frac{1}{m}\int_{x^0=t} d^3x\,\tau^{00} \tag{8.27}$$

definiert ist, über den Normierungsfaktor m sagen wir gleich etwas, dann ist (8.26) die Gleichung für eine Geodäte (7.11), die mit ihrer Eigenzeit parametrisiert ist

$$\frac{d^2}{ds^2}X^m(s) + \Gamma_{kl}{}^m(X)\frac{dX^k}{ds}\frac{dX^l}{ds} = 0\ . \tag{8.28}$$

Greifen wir nochmal die Bemerkung nach (8.21) auf, daß für Integrale über $\Gamma_{kl}{}^m$ die Energie-Impulstensordichte wie ein Vielfaches der δ-Funktion wirkt. Dieses Vielfache wird in (8.25) und (8.27) bestimmt. Bei Integration mit $\Gamma_{kl}{}^m$ ist die Energie-Impulstensordichte

$$\tau^{kl}(x) = m\frac{dX^k}{dt}\frac{dX^l}{dt}\frac{dt}{ds}\delta^3(\vec{x} - \vec{X}(t))\ . \tag{8.29}$$

Den Normierungsfaktor m identifizieren wir als Masse des Teilchens. Dazu integrieren wir die Komponenten τ^{k0}, das sind die Dichten von Energie und Impuls, über eine Schicht gleicher Zeit. Für Energie und Impuls erhalten wir

$$P^k(t) = \int_{x^0=t} d^3x\,\tau^{k0} = m\frac{dX^k}{ds}\Big|_{s(t)}\ . \tag{8.30}$$

Dies ist im Maßsystem $c = 1$ der Vierimpuls eines Teilchens mit Masse m und Eigenzeit s (4.57) (3.46).

Verteilt man viele Teilchen mit einer Energie-Impulstensordichte (8.29) zu einem Kontinuum mit Massendichte $\rho(x)$ und normierter Vierergeschwindigkeit $u^k(x)$ mit $u^2 = 1$

$$\mathcal{T}^{kl} = \sqrt{g}\,\rho\,u^k\,u^l\ , \tag{8.31}$$

Materie mit solch einem Energie-Impulstensor nennt man Staub, so besagt die kovariante Energie-Impulserhaltung

$$0 = \sqrt{g}D_k(\,\rho\,u^k\,u^l) = \sqrt{g}\big(D_k(\rho\,u^k)u^l + \rho\,u^k D_k u^l\big)\ . \tag{8.32}$$

Die beiden Terme müssen getrennt verschwinden, denn die Ableitung eines Einheitsvektors $D_k u^l$ steht auf u^l senkrecht (6.54). Demnach sind u^l Tangentialvektoren von Geodäten

$$u^k D_k u^l = 0\ , \tag{8.33}$$

und die Massendichte gehört zu einem erhaltenen Strom (E.13)

$$\sqrt{g}D_k\big(\rho\,u^k\big) = \partial_k\big(\sqrt{g}\,\rho\,u^k\big) = 0\ . \tag{8.34}$$

Die Massendichte ρ ändert sich dadurch, daß Geodäten auseinander- oder zusammenlaufen.

8.3 Lichtstrahlen

Lichtstrahlen sind elektromagnetische Wellen, die die Maxwell-Gleichungen lösen. Um den Einfluß der Gravitation auf Licht zu bestimmen, untersuchen wir die Feldgleichungen für das elektromagnetische Viererpotential, die sich aus der Wirkung mit Lagrangedichte

$$\mathcal{L}_{\text{Maxwell}}(g, A, \partial A) = -\frac{1}{16\pi}\sqrt{g}g^{km}g^{ln}\big(\partial_k A_l - \partial_l A_k\big)\big(\partial_m A_n - \partial_n A_m\big) \tag{8.35}$$

ergeben. Diese Lagrangefunktion ist bis auf vollständige Ableitungen und die Normierung eindeutig festgelegt, wenn man fordert, daß die Bewegungsgleichungen zweiter Ordnung sein sollen und daß die Wirkung invariant unter Eichtransformationen (5.42) und unter Koordinatentransformationen (B.18) sein soll. Wenn die Metrik flach ist $g_{\text{flach }mn} = \eta_{mn}$, dann stimmt die Lagrangefunktion mit (5.74) überein.

Sowohl die Eichinvarianz und Koordinateninvarianz als auch die Beschränkung der Ableitungsordnung sind in einer Quantenfeldtheorie zwingend erforderlich [21], damit nicht unphysikalische Freiheitsgrade mit negativen, und daher widersinnigen Wahrscheinlichkeiten sich in physikalischen Prozessen auswirken.

Durch Variation des Viererpotentials $A_n(x)$ in W_{Maxwell} erhält man die Bewegungsgleichungen

$$\partial_m\big(\sqrt{g}g^{km}g^{ln}\big(\partial_k A_l - \partial_l A_k\big)\big) = 0 \ . \tag{8.36}$$

Diese Gleichungen sind kovariant, denn $F_{kl} = \partial_k A_l - \partial_k A_k$ und daher auch $F^{mn} = g^{km}g^{ln}F_{kl}$ transformieren, wie ihr Indexbild angibt, als Tensor (5.63). Die Ableitung von $\sqrt{g}$ ergibt ein Christoffelsymbol (E.12), das die partielle Ableitung von F^{mn} zur kovarianten Ableitung ergänzt

$$\partial_m\big(\sqrt{g}\,F^{mn}\big) = \sqrt{g}\,\big(\partial_m F^{mn} + \Gamma_{ml}{}^m F^{ln} + \Gamma_{ml}{}^n F^{ml}\big) = \sqrt{g}\,D_m F^{mn} \ . \tag{8.37}$$

Der Term $\Gamma_{ml}{}^n F^{ml}$ kann hinzugefügt werden, da die Summe über ein antisymmetrisches Indexpaar $F^{ml} = -F^{lm}$ und ein symmetrisches Indexpaar $\Gamma_{ml}{}^n = \Gamma_{lm}{}^n$ verschwindet (5.11).

Wegen $\Gamma_{kl}{}^m = \Gamma_{lk}{}^m$ kann die Feldstärke auch durch kovariante Ableitungen geschrieben werden $F_{kl} = D_k A_l - D_l A_k$. Die Maxwellgleichungen im Gravitationsfeld nehmen daher die Form an

$$D_m D^m A^n - D_m D^n A^m = 0 \ . \tag{8.38}$$

Über die Eichfreiheit des Viererpotentials verfügen wir so, daß diese Gleichungen einfach werden. Wir verlangen die Lorentz-Eichbedingung

$$D_m A^m = 0 \ . \tag{8.39}$$

Dann vereinfacht sich $D_m D^n A^m$ zu $g^{nl}D_m D_l A^m$, weil die kovariante Ableitung der Metrik und folglich der inversen Metrik verschwindet (6.50), und wir können die beiden Ableitungen wegen der Lorentzbedingung durch ihren Kommutator (6.55) ersetzen. Da zudem die Torsion verschwindet, gilt

$$D_m D^n A^m = g^{nl} R_{mlr}{}^m A^r \ . \tag{8.40}$$

Die Summe

$$R_{km} = R_{klm}{}^l \tag{8.41}$$

definiert die Komponenten des Ricci-Tensors[2]. Mit $R^n{}_m = g^{nl}R_{lm}$ schreiben sich schließlich die Feldgleichungen des Viererpotentials im Gravitationsfeld

$$D_m D^m A^n + R^n{}_m A^m = 0 \ . \tag{8.42}$$

Im flachen Raum verschwindet der Riemann- und der Ricci-Tensor und es gibt kartesische Koordinatensysteme, in denen die Christoffelsymbole verschwinden. Dann reduzieren sich diese Gleichungen auf die Wellengleichung (5.50) im Vakuum.

[2]gesprochen Ritschi

Die Bewegungsgleichung im gekrümmten Raum ist nicht die Gleichung, die man aus der Wellengleichung des flachen Raumes erhält, wenn man die partiellen Ableitungen durch kovariante Ableitungen ersetzt. Über diese minimale Ersetzung hinaus enthält sie einen Zusatzterm mit dem Ricci-Tensor, der nicht einfach einem Term im flachen Raum entspricht.

In der kovarianten Formulierung der Maxwellgleichung tritt die metrikverträgliche, torsionsfreie Konnektion, das Christoffelsymbol auf. Ebenso wie Testteilchen spürt das elektromagnetische Feld nichts von Torsion.

Die Variationsableitung der Maxwellwirkung nach der Metrik ist die Energie-Impulsdichte des elektromagnetischen Feldes (8.4). Mit den Formeln (E.9) für die Ableitung einer Determinante und der inversen Matrix (E.14) erhalten wir aus (8.35)

$$\mathcal{T}^{mn}_{\text{Maxwell}} = -\frac{1}{4\pi}\sqrt{g}\big(F^m{}_l F^{nl} - \frac{1}{4} g^{mn} F_{kl} F^{kl}\big) \ . \tag{8.43}$$

Diese elektromagnetische Energie-Impulstensordichte stimmt für den flachen Raum mit (5.17) überein und rechtfertigt den Namen Energie-Impulstensordichte für die Variationsableitung (8.4).

Genau genommen verhalten sich elektromagnetische Wellen im Gravitationsfeld nicht universell. So wie am Spalt die Beugungserscheinungen von der Wellenlänge abhängen, so sind die Einflüsse ungleichmäßiger Gravitation auf elektromagnetische Wellen verschieden, wenn die Wellen verschiedene Wellenlängen haben. Universell ist das Verhalten elektromagnetischer Wellen nur in dem Grenzfall, in dem die Wellenlänge vernachlässigbar klein wird gegenüber den Abmessungen, auf denen sich die Metrik g_{mn} ändert.

Wir untersuchen den Grenzfall verschwindender Wellenlängen als Grenzwert $\varepsilon \to 0$ des Ansatzes

$$A_m(x,\varepsilon) = \Re\, a_m(x,\varepsilon) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\dfrac{\theta(x)}{\varepsilon}} \tag{8.44}$$

für das elektromagnetische Potential $A_m(x)$. Diesen Ansatz findet man unter den Namen Eikonalnäherung, Wentzel-Kramers-Brillouin-Näherung oder Geometrische Optik in verschiedenen Bereichen der Theoretischen Physik. Hier unterstellt er, daß es möglich ist, für kurze Wellenlängen eine Schar von Lösungen der Maxwellgleichung zu finden, deren komplexe Amplitude $a_m(x,\varepsilon)$ nur wenig von der Wellenlänge abhängt, so daß sie um $\varepsilon = 0$ stetig ist und durch eine Entwicklung in ε angenähert werden kann. Im flachen Raum ist diese Annahme mit $\theta(x) = k \cdot x$ und einer Amplitude, die nicht von ε abhängt, erfüllt (3.18).

Die Flächen, auf denen θ konstant ist, sind für $\varepsilon \to 0$ die Wellenfronten konstanter Phase, denn die Phase $\alpha_m(x,\varepsilon)$ der Amplitude $a_m = r_m \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_m}$ ist

nach Annahme entwickelbar und die Fronten gleicher Phase $\frac{\theta}{\varepsilon} + \alpha_m = \text{const}$ sind für $\varepsilon \to 0$ für alle vier Komponenten des Viererpotentials gemeinsam durch $\theta = \text{const}$ gegeben. Demnach ist

$$k_m = \partial_m \theta(x) \tag{8.45}$$

der Wellenvektor, der senkrecht auf der Wellenfront steht. Er ist tangential an die Weltlinie $x^m(\lambda)$ des Lichtstrahls, die er durch die Differentialgleichung

$$\frac{dx^m}{d\lambda} = g^{mn} k_n \tag{8.46}$$

definiert. Die Wellengleichung (8.42) bedeutet

$$\begin{aligned} 0 = \Re\big(&- \frac{1}{\varepsilon^2} k^m k_m a_n + 2\frac{\mathrm{i}}{\varepsilon} k^m D_m a_n + \frac{\mathrm{i}}{\varepsilon}(D_m k^m) a_n + \\ &+ D^m D_m a_n + R_n{}^k a_k \big) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\dfrac{\theta(x)}{\varepsilon}} \ . \end{aligned} \tag{8.47}$$

Damit diese Gleichung identisch in ε mit nichtverschwindender Amplitude a_n erfüllt ist, muß $k^2 = 0$ gelten

$$k^m k_m = 0 \ . \tag{8.48}$$

Weil der Tangentialvektor k^m an die Weltlinie des Lichtstrahls ein Gradient ist (8.45) und weil seine Länge konstant ist (8.48), ist die Weltlinie eine Geodäte.[3] Denn aus

$$0 = \frac{1}{2} D_n(k^m k_m) = k^m D_n k_m = k^m(\partial_n \partial_m \theta - \Gamma_{nm}{}^l k_l) = k^m D_m k_n = \frac{dx^m}{d\lambda} D_m k_n \tag{8.49}$$

folgt, daß die kovariante Ableitung des Tangentialvektors k^n längs der Weltlinie des Lichtstrahls verschwindet. Lichtstrahlen durchlaufen lichtartige Geodäten des torsionsfreien, metrikverträglichen Paralleltransports

$$0 = \frac{dx^m}{d\lambda} D_m k^n = \frac{dk^n}{d\lambda} + \frac{dx^m}{d\lambda} \Gamma_{ml}{}^n k^l = \frac{d^2 x^n}{d\lambda^2} + \Gamma_{kl}{}^n \frac{dx^k}{d\lambda} \frac{dx^l}{d\lambda} \ . \tag{8.50}$$

Die Lorentz-Eichbedingung besagt für (8.44)

$$0 = D_m A^m = \Re\big(\frac{\mathrm{i}}{\varepsilon} k_m a^m + D_m a^m\big) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta(x)}{\varepsilon}} \ . \tag{8.51}$$

[3] Aus den gleichen Gründen durchlaufen relativistische, quantenmechanische Wellenpakete von Teilchen mit Masse $\frac{m}{\varepsilon}$, die der Klein-Gordon Gleichung $(\Box + \frac{m^2}{\varepsilon^2})\Psi = 0$ genügen, zeitartige Geodäten mit einem Wellenvektor auf der Massenschale $k^n k_n = m^2$.

In führender Ordnung in $\frac{1}{\varepsilon}$ steht demnach der Wellenvektor senkrecht auf dem Polarisationsvektor

$$k_m a^m = 0 \ . \tag{8.52}$$

Durch Eichtransformationen $A_m \to A_m + \partial_m \varepsilon \, \Re f(x) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta(x)}{\varepsilon}}$ kann zudem der Teil der Amplitude $a_m(x,0)$ in Richtung von k_m weggeeicht werden. Die elektromagnetische Welle ist transversal.

In Ordnung $\frac{1}{\varepsilon}$ besagt (8.47), daß der Term

$$k^m D_m a^n + \frac{1}{2}(D_m k^m) a^n = 0 \tag{8.53}$$

mit $\varepsilon \to 0$ verschwindet. Es ist nämlich nach Ansatz k^m unabhängig von ε und wegen $k^2 = 0$ trägt $\frac{k^2}{\varepsilon^2} a_n$ keinen Term der Ordnung $\frac{1}{\varepsilon}$ bei. Multipliziert man mit dem konjugiert komplexen Amplitudenvektor a_n^* und berücksichtigt man, daß a_n^* die konjugiert komplexe Gleichung erfüllt, so ergibt sich ein kovariant erhaltener Strom

$$0 = k^m D_m (a^n a_n^*) + (D_m k^m)(a^n a_n^*) = D_m (k^m a^n a_n^*) \ . \tag{8.54}$$

Jeder kovariant erhaltene Strom gehört zu einer Stromdichte, die eine Kontinuitätsgleichung erfüllt (E.13). Im vorliegenden Fall ist die Nullkomponente $\frac{1}{\hbar\varepsilon}\frac{1}{8\pi}\sqrt{g}\, k^0 a^n a_n^*$ des erhaltenen Stromes die Photonendichte, denn die Energiedichte $\mathcal{T}^{00}$ (8.43) des elektromagnetischen Feldes ist $\frac{1}{\epsilon^2}\frac{1}{8\pi}\sqrt{g}\, k^0 k^0 a^n a_n^*$ (8.44), also einen Faktor $\omega = k^0/\varepsilon$ größer. Wenn diese Energie von Teilchen mit Energie $\hbar\omega$ getragen wird, dann ist $\frac{1}{\hbar\varepsilon}\frac{1}{8\pi}\sqrt{g}\, k^0 a^n a_n^*$ die Dichte dieser Teilchen. Der Erhaltungssatz der Photonenzahl besagt, daß sich Photonen geometrisch so verdünnen, wie die verschiedenen lichtartigen Geodäten auseinander laufen. Dies ist für lokale Energieerhaltung notwendig. Weltlinien von Photonen beginnen nicht im Vakuum und enden nicht im Vakuum, sie durchlaufen es.

Die Eikonalnäherung für Licht bewegt sich zwischen Skylla und Charybdis. Der Grenzfall $\varepsilon \to 0$ führt zwar dazu, daß Lichtstrahlen sich universell bewegen. Wir haben aber die Gravitation vernachlässigt, die der Lichtstrahl durch seinen Energie-Impulstensor erzeugt. Im Grenzfall ist das sicher falsch, denn die Energiedichte divergiert mit $\frac{1}{\varepsilon^2}$.

Die Polarisationsrichtung der Lichtstrahlen wird längs der Weltlinie parallel transportiert. Schreiben wir nämlich in (8.53) die Amplitude $a_m = a e_m$ als Einheitsvektor e_m mal Betrag $a = \sqrt{a^n a_n^*}$

$$0 = k^m (\partial_m a) e_n + a\big(k^m D_m e_n + \frac{1}{2} e_n D_m k^m\big) \ , \tag{8.55}$$

so hebt sich wegen (8.54) der erste gegen den letzten Term weg

$$k^m D_m e_n = 0 \ . \tag{8.56}$$

Dies schließt unsere Diskussion der Geodätenhypothese ab. Die Feldgleichungen erlauben herzuleiten, daß sich Testteilchen und Lichtstrahlen so verhalten, wie wir das für unsere geometrischen Konstruktionen unterstellt haben. Aus rein geometrischen Gründen kann man zunächst nicht ausschließen, daß Paralleltransport mit Torsion einhergeht oder metrikunverträglich ist. Formuliert man allerdings die Bewegungsgleichungen der Elektrodynamik und der Materie als Variationsprinzip eines Funktionals, das unter Eichtransformationen und Koordinatentransformationen invariant ist, so sind solche allgemeineren Geometrien nicht bei Testteilchen und Lichtstrahlen realisiert.

Anhang A

Indexschreibweise

Die Lorentztransformation (2.43) ist ein Beispiel für eine Transformation $T : x \to T(x)$, die invertierbar ist und die von einer weiteren Transformation gefolgt werden kann. Invertierbare Transformationen bildet auf natürliche Art eine Gruppe mit Hintereinanderausführen als Gruppenverknüpfung

$$T_2 \circ T_1 : x \to T_2(T_1(x)) \tag{A.1}$$

und identischer Abbildung als Einselement. So ist die Menge $\mathrm{GL}(n)$ der invertierbaren, linearen Transformationen eines n-dimensionalen Vektorraumes eine Gruppe. Schränkt man die Transformationen von $\mathrm{GL}(n)$ durch eine Invarianzforderung ein, etwa, daß lichtartige Vektoren auf lichtartige Vektoren abgebildet werden oder durch die stärkere Forderung, daß das Längenquadrat jedes Vektors unverändert bleiben soll, so erhält man Untergruppen, zum Beispiel die Gruppe, die von Lorentztransformationen und Dilatationen erzeugt wird, oder die Lorentzgruppe.

Verschiedene Gruppen G und L können ähnliche Gruppenverknüpfungen haben, in solch einem Fall gibt es eine Zuordnung

$$D : \begin{array}{l} G \to L \\ g \to D(g) \end{array} \tag{A.2}$$

von Gruppenelementen, die Produkte auf Produkte abbildet

$$D(g_1 \circ g_2) = D(g_1) \circ D(g_2) \ . \tag{A.3}$$

Besteht in solch einem Fall L aus linearen Transformationen eines Vektorraumes, so heißt die Abbildung D Darstellung von G. Die zu $D(g)$ gehörige Matrix heißt Darstellungsmatrix von g.

Sind $D(g)$ Darstellungsmatrizen, so gilt $D(g^{-1}) = (D(g))^{-1}$, und wegen

$$D^{\mathrm{T}\,-1}(g_2) \cdot D^{\mathrm{T}\,-1}(g_1) = (D^{\mathrm{T}}(g_1) \cdot D^{\mathrm{T}}(g_2))^{-1} = (D(g_2) \cdot D(g_1))^{\mathrm{T}\,-1} \tag{A.4}$$

sind die transponierten, invertierten Matrizen $D^{\mathrm{T}\,-1}(g)$ Darstellungsmatrizen. Die Darstellung $D^{\mathrm{T}\,-1}$ heißt zu D kontragrediente Darstellung.

Ebenso sind die komplex konjugierten Matrizen $D(g)^*$ Darstellungsmatrizen und definieren die zu D komplex konjugierte Darstellung D^*.

Mit jeder Darstellung D sind daher drei weitere Darstellungen $D^{\mathrm{T}\,-1}$, D^* und $(D^{\mathrm{T}\,-1})^* = D^{\dagger\,-1}$ natürlich gegeben. Die Darstellung ist reell, wenn für alle Gruppenelemente $D^*(g) = D(g)$ gilt, orthogonal, wenn $D^{\mathrm{T}\,-1}(g) = D(g)$ gilt, symplektisch, wenn $D^{\mathrm{T}\,-1}(g) = \jmath D(g) \jmath^{-1}$ mit einer schiefsymmetrischen Matrix $\jmath^{\mathrm{T}} = -\jmath$ gilt, und unitär, wenn $D^\dagger = D^{-1}$ gilt.

Normalerweise sind die Darstellungen D, $D^{\mathrm{T}\,-1}$, D^* und $D^{\dagger\,-1}$ verschieden. Unter welcher Darstellung ein Vektor transformiert, geben wir durch das Indexbild seiner Komponenten an.

$$\begin{aligned} t'^{\,n} &= D^n{}_m t^m & \qquad u'_n &= (D^{\mathrm{T}\,-1})_n{}^m u_m \\ v'^{\,\dot{n}} &= (D^*)^{\dot{n}}{}_{\dot{m}} v^{\dot{m}} & \qquad w'_{\dot{n}} &= (D^{\dagger\,-1})_{\dot{n}}{}^{\dot{m}} w_{\dot{m}} \end{aligned} \tag{A.5}$$

Wir verwenden hier und im folgenden die Einsteinsche Summationskonvention und verabreden, um Summenzeichen nicht schreiben zu müssen, daß jeder in einem Term doppelt auftretende Index, wie hier m oder $\dot{m}$, die Anweisung enthält, über seinen Laufbereich, hier von 1 bis zur Dimension der Matrix D, zu summieren. Der Name des Summationsindexpaares kann frei gewählt werden, er muß nur von allen anderen im Term auftretenden Indizes verschieden sein.

Transformiert ein Vektor unter der Darstellung D, so bezeichnen wir seine Komponenten mit oberen Indizes, transformiert er unter $D^{\mathrm{T}\,-1}$, so schreiben wir seinen Index unten. Zum komplex konjugierten Transformationsgesetz gehören gepunktete Indizes.

Der erste Index der Matrixelemente $D^n{}_m$ der Transformationsmatrix bezeichnet die Zeile, der zweite die Spalte. Dabei schreiben wir den ersten Index von D nach oben. Er steht dann in derselben Höhe wie der Index der Komponente des transformierten Vektors. Die Matrix D^{-1} ist wie D und die $\mathbb{1}$-Matrix ein Element der Matrixgruppe $D(G)$. Ihre Matrixelemente werden mit demselben Indexbild geschrieben

$$D^k{}_l \, (D^{-1})^l{}_m = \delta^k{}_m \ . \tag{A.6}$$

Hierbei bezeichnet das Kronecker-Delta $\delta^k{}_l$ die Matrixelemente der $\mathbb{1}$-Matrix

$$\delta^k{}_l = \begin{cases} 0 & \text{falls} \quad k \neq l \\ 1 & \text{falls} \quad k = l \end{cases} \ . \tag{A.7}$$

Die Matrixelemente der transponierten Matrix erhält man durch Vertauschen von Zeilen- und Spaltenindex. Es bezeichnet der erste Index die Zeile,

also gilt

$$(D^{\mathrm{T}\,-1})_m{}^n = (D^{-1})^n{}_m \tag{A.8}$$

passend zur Konvention, daß Komponenten von Vektoren mit kontragredientem Transformationsgesetz mit unteren Indizes bezeichnet werden.

Produkte von Vektorkomponenten, zum Beispiel $u_l t^k$, transformieren ebenfalls linear und definieren weitere Darstellungen. Aus (A.5) folgt

$$u'_l t'^k = (D^{\mathrm{T}\,-1})_l{}^n D^k{}_m \, u_n t^m \ . \tag{A.9}$$

Entsprechend transformieren Vielfachprodukte von Vektorkomponenten mit Matrizen, deren Matrixelemente Vielfachprodukte der Matrixelemente von $D(g)$, $D^{\mathrm{T}\,-1}(g)$, $D^*(g)$ und $D^{\dagger\,-1}(g)$ sind. Objekte, deren Komponenten linear wie Produkte von Vektorkomponenten transformieren, nennt man Tensoren. Ihr Transformationsgesetz läßt sich am Indexbild ablesen. Zum Beispiel enthält das Tensortransformationsgesetz eines Tensors mit o oberen und u unteren Indizes ein o-faches Produkt von Matrixelementen von D und ein u-faches Produkt von Matrixelementen von $D^{\mathrm{T}\,-1}$.

$$\begin{aligned} T'^{\,k_1 k_2 \ldots k_o}{}_{l_1 l_2 \ldots l_u} =& D^{k_1}{}_{m_1} D^{k_2}{}_{m_2} \ldots D^{k_o}{}_{m_o} \cdot \\ & \cdot (D^{\mathrm{T}\,-1})_{l_1}{}^{n_1} \ldots (D^{\mathrm{T}\,-1})_{l_u}{}^{n_u} \, T^{\,m_1 m_2 \ldots m_o}{}_{n_1 n_2 \ldots n_u} \end{aligned} \tag{A.10}$$

Eine Invariante $T' = T$ ist ein Tensor ohne Index, solch ein Tensor heißt auch Skalar. Ein Vektor ist ein Tensor mit einem Index.

Das Tensortransformationsgesetz wird wegen der Vielzahl der Indizes als unüberschaubar und kompliziert empfunden. Tatsächlich ist es im Vergleich zu anderen Transformationsgesetzen sehr einfach, denn es ist linear und die Matrixelemente der linearen Transformation sind Produkte der Matrixelemente der Darstellungsmatrizen. Tensortransformationen lassen sich daher leicht hintereinander ausführen. Zum Beispiel transformiert $\tan\theta/2$ nach Aberrationsformel (3.31) unter Geschwindigkeitstransformationen längs einer Achse als Tensor, das Transformationsgesetz von $\cos\theta$ (3.29) ist vergleichsweise unübersichtlich.

Weil das Tensortransformationsgesetz linear ist, hat es einen Fixpunkt. Verschwindet ein Tensor, so verschwindet er auch nach der Transformation. Es ist also die Aussage, daß ein Tensor verschwindet, in allen durch die Transformationen zusammenhängenden Bezugssystemen richtig.

Die Summe $u_k t^k = u'_k t'^k$ ist invariant.

$$u'_k t'^k = (D^{\mathrm{T}\,-1})_k{}^n D^k{}_m \, u_n t^m = (D^{-1})^n{}_k D^k{}_m \, u_n t^m = \delta^n{}_m \, u_n t^m = u_m t^m$$

Hierher rührt der Name kontragredientes Transformationsgesetz: das Transformationsgesetz $D^{\mathrm{T}\,-1}$ mit unterem Index ist entgegengesetzt zu D.

Werden Komponenten eines Tensors für gleiche Werte eines oberen und unteren Indexes über den Laufbereich summiert $T^{\ldots k\ldots}{}_{\ldots k\ldots}$, solch eine Summe nennt man Kontraktion des Tensors, so tragen zum Transformationsgesetz nur noch die restlichen Indizes bei. Ein Summationsindex ist, was das Transformationsgesetz anbelangt, stumm. Die Kontraktion eines Tensors mit o oberen und u unteren Indizes ergibt einen Tensor mit $o-1$ oberen und $u-1$ unteren Indizes. Der Name des Summationsindexpaares ist beliebig, er muß nur verschieden von jedem weiteren Index des Tensors gewählt werden.

Aus (A.10) folgt, daß Summen, Vielfache und Produkte von Tensorkomponenten mit passendem Indexbild wie zum Beispiel

$$T_{kl}{}^{m} = U_{kln}{}^{nm} + 5V^{m}{}_{l}W_{k}$$

wieder Komponenten von Tensoren sind. Die Menge der Tensoren bildet eine Algebra. Weiter folgt, daß Komponenten, bei denen Indizes gleichen Typs permutiert sind, ebenfalls einen Tensor definieren, denn die Reihenfolge der Matrixelemente der Transformationsmatrizen $D(g)$ kann vertauscht werden. Zum Beispiel sind S_{mn} oder A^{mn}

$$S_{mn} = \frac{1}{2}(T_{mn} + T_{nm})\,, \quad A^{mn} = \frac{1}{2}(F^{mn} - F^{nm})\,, \tag{A.13}$$

Komponenten von Tensoren, wenn T_{mn} und F^{mn} Komponenten von Tensoren sind. In diesem Beispiel ist $S_{mn} = S_{nm}$ ein permutationssymmetrischer Tensor, $A^{mn} = -A^{nm}$ ist antisymmetrisch unter Permutationen der Indizes.

Die Kontraktion eines symmetrischen mit einem antisymmetrischen Indexpaar verschwindet (5.11).

Das Kronecker-Delta (A.7) definiert numerisch die Komponenten eines Tensors mit einem oberen und einem unteren Index. Der so definierte Tensor ist unter allen linearen Transformationen invariant.

$$\delta'^{k}{}_{l} = D^{k}{}_{m}(D^{T\,-1})_{l}{}^{n}\delta^{m}{}_{n} = D^{k}{}_{m}\delta^{m}{}_{n}D^{-1\,n}{}_{l} = D^{k}{}_{m}D^{-1\,m}{}_{l} = \delta^{k}{}_{l}\ . \tag{A.14}$$

Unitäre, orthogonale und symplektische Transformationen sind lineare Transformationen, die zugehörige quadratische Formen invariant lassen.

Seien z^m die komplexen Komponenten eines Vektors aus einem komplexen Vektorraum, dann sind die Transformationen

$$z'^{\,m} = U^{m}{}_{n}z^{n} \tag{A.15}$$

unitär, wenn das Betragsquadrat $\sum_m (z^m)^* z^m$ für alle Vektoren invariant ist, wenn also die Komponenten $(z^m)^*$ einen kontragredienten Vektor $\bar{z}_m$ definieren. Aus dem Transformationsgesetz (A.15) folgt durch komplexe Konjugation mit der Schreibweise $\bar{z}^{\,\dot{m}} := (z^m)^*$

$$\bar{z}'^{\,\dot{m}} = U^{*\,\dot{m}}{}_{\dot{n}}\bar{z}^{\,\dot{n}} \tag{A.16}$$

für das invariante Betragsquadrat

$$\bar{z}'^{\dot{m}} z'^{n} \delta_{\dot{m}n} = U^{*\,\dot{m}}{}_{\dot{k}}\, U^{n}{}_{l}\, \delta_{\dot{m}n}\, \bar{z}^{\dot{k}}\, z^{l} = \delta_{\dot{k}l}\, \bar{z}^{\dot{k}}\, z^{l} \ . \tag{A.17}$$

Diese Gleichung muß für alle z^m gelten. Daher gilt

$$U^{*\,\dot{m}}{}_{\dot{k}}\, U^{n}{}_{l}\, \delta_{\dot{m}n} = \delta_{\dot{k}l} \ . \tag{A.18}$$

Dies ist eine Tensortransformation (A.10) mit $D = U^{-1}$. Der numerisch definierte Tensor $\delta_{\dot{k}l}$, dessen Komponenten Zahlenwerte Null oder Eins haben, behält seinen Wert, wenn man ihn, so wie sein Indexbild angibt, mit unitären Transformationen transformiert. Er ist ein numerisch invarianter Tensor.

Gleichung (A.18) schränkt die Matrizen U ein. In Matrixschreibweise müssen sie die Beziehung $U^{*\,\mathrm{T}} \cdot U = 1$ oder $U^{\dagger} = U^{-1}$ erfüllen, also unitär sein. Mit dem numerisch invarianten Tensor $\delta_{\dot{k}l}$ läßt sich die Beziehung

$$\bar{z}_m = \delta_{\dot{n}m} \bar{z}^{\dot{n}} \tag{A.19}$$

kovariant schreiben. Unter unitären Transformationen transformiert ein Vektor mit einem oberen gepunkteten Index so wie ein Vektor mit einem ungepunkteten unteren Index.

Analog analysiert man reelle, orthogonale Transformationen. Dies sind Transformationen

$$x'^{n} = \Lambda^{n}{}_{m}\, x^{m} \ , \tag{A.20}$$

die ein Längenquadrat $x^m x^n \eta_{mn}$ invariant lassen. Die symmetrische Matrix η sei invertierbar und kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit als diagonal mit Matrixelementen $+1$ oder -1 vorausgesetzt werden.

Insbesondere sind beim Längenquadrat $x^m x^n \eta_{mn} = t^2 - x^2 - y^2 - z^2$ (2.27) die Koeffizienten von η_{mn} durch

$$\eta_{mn} \quad = \quad \begin{cases} 0 & \text{falls} \quad m \neq n \\ 1 & \text{falls} \quad m = n = 0 \\ -1 & \text{falls} \quad m = n \in \{1,2,3\} \end{cases} \ . \tag{A.21}$$

gegeben. Die Matrixelemente von η^{-1} werden mit η^{mn} bezeichnet. Sie stimmen mit η_{mn} überein.

$$\eta^{mn} \eta_{nl} = \delta^{m}{}_{l} \tag{A.22}$$

Da die Transformationen reell sind, brauchen gepunktete Indizes nicht eingeführt zu werden. Weil das Längenquadrat invariant ist, transformiert $\eta_{nm} x^m$ kontragredient zu x^n. Dies folgt ebenso wie bei unitären Transformationen.

$$x'^{m} x'^{n} \eta_{mn} = \Lambda^{m}{}_{k}\, \Lambda^{n}{}_{l}\, \eta_{mn}\, x^{k}\, x^{l} = \eta_{kl}\, x^{k}\, x^{l} \tag{A.23}$$

Diese Gleichung muß für alle Vektoren x^m gelten, also ist η_{mn} ein numerisch invarianter Tensor

$$\Lambda^m{}_k \, \Lambda^n{}_l \, \eta_{mn} = \eta_{kl} \ . \tag{A.24}$$

Daher transformiert $\eta_{nm} x^m$ kontragredient zum Vektor x^n. Um Arbeit zu sparen, schreibt man x_n für $\eta_{nm} x^m$. Dann gilt umgekehrt $x^m = \eta^{ml} x_l$. Diese Konvention bezeichnet man als Index Hoch- und Runterziehen

$$x_n = \eta_{nm} x^m \ , \quad x^m = \eta^{mn} x_n \ . \tag{A.25}$$

Gehört η zu einem positiv definiten Längenquadrat, so ist $\eta_{mn} = \delta_{mn}$, und die Definitionsgleichung (A.24) besagt in Matrixschreibweise $\Lambda^{\mathrm{T}} = \Lambda^{-1}$. Die Länge wird von orthogonalen Transformationen oder, weniger mathematisch klingend, von Drehungen invariant gelassen. Unter Drehungen transformieren Vektoren mit oberen Indizes und Vektoren mit unteren Indizes gleich.

Ist das Längenquadrat nicht definit, zum Beispiel in der Raumzeit, muß zwischen oberen und unteren Indizes unterschieden werden, denn die zugehörigen Vektoren transformieren verschieden unter Lorentztransformationen.

Symplektische Transformationen

$$x'^n = S^n{}_m \, x^m \tag{A.26}$$

lassen eine antisymmetrische Bilinearform $\langle x, y \rangle = x^m y^n \jmath_{mn}$ mit $\jmath_{mn} = -\jmath_{nm}$ invariant. Die Bilinearform ist nicht entartet, das heißt, $\jmath_{mn}$ sind Matrixelemente einer invertierbaren Matrix. Sie hat in geeigneter Basis die Form

$$\jmath = \begin{pmatrix} & \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & \end{pmatrix} \ , \quad \jmath^2 = -1 \ . \tag{A.27}$$

Solch eine antisymmetrische Matrix tritt als Poisson-Klammer der Phasenraumkoordinaten in der Hamiltonschen Mechanik auf. Unter symplektischen Transformationen ist $\jmath_{mn}$ ein numerisch invarianter Tensor

$$S^m{}_k \, S^n{}_l \, \jmath_{mn} = \jmath_{kl} \ , \tag{A.28}$$

der zum Runterziehen von Indizes verwendet werden kann. Mit der inversen Matrix $\jmath^{-1}$ werden sie wieder hochgezogen. Wie bei der Metrik η bezeichnet man die Matrixelemente der inversen Matrix $\jmath^{-1}$ einfach mit $\jmath^{nm}$ und entnimmt der Indexstellung, daß es sich um die inverse Matrix handelt

$$x_n = \jmath_{nm} x^m \ , \ x^n = \jmath^{nm} x_m \ , \ \jmath^{nm} = -\jmath_{nm} \ , \ \jmath^{nl} \jmath_{lm} = \delta^n{}_m \ . \tag{A.29}$$

Beim Hoch- und Runterziehen der Indizes ist auf die Reihenfolge der Indizes von $\jmath$ zu achten, da $\jmath$ antisymmetrisch ist.

Anhang B

Vektoren und Tensoren

Die Raumzeit hat die mathematische Struktur einer Mannigfaltigkeit. Sie besteht aus Punkten p, die wir Ereignisse nennen und durch Koordinaten $x = (x^1, x^2, \ldots, x^d)$ bezeichnen. Eine genaue Behandlung von Mannigfaltigkeiten findet sich in vielen Lehrbüchern wie zum Beispiel in [28–31]. Hier sollen nur möglichst kurz die wichtigsten Begriffe zusammengestellt werden und dabei die Physikern geläufigen Schlampigkeiten in Kauf genommen werden. Wir setzen voraus, daß zu jedem Punkt p eine Umgebung gehört, die durch eine Koordinatenabbildung bijektiv und beiderseits stetig in eine Umgebung von $x(p) \in \mathbb{R}^d$ abgebildet wird. Weil jede Koordinatenabbildung lokal bijektiv ist, gestatten wir uns, die Koordinaten x zur Benennung der Punkte p zu verwenden, also vom Punkt x zu reden, statt vom Punkt p mit Koordinaten $x(p)$.

In einem anderen Koordinatensystem bezeichnen wir dieselben Punkte mit Koordinaten $x'(x)$. Diese Koordinaten können in ihrem gemeinsamen Gültigkeitsbereich ineinander umgerechnet werden, das heißt, umgekehrt sind die Koordinaten x Funktionen $x(x')$. Wir setzen voraus, daß die Koordinatentransformationen genügend oft differenzierbar sind.

Die Anzahl d der Koordinaten, die zur Bezeichnung eines Punktes benötigt werden, ist die Dimension der Mannigfaltigkeit. Ohne es weiter zu erwähnen, verschieben wir oft den Indexbereich von Raumzeitkoordinaten zu $(x^0, x^1, \ldots, x^{d-1})$. Die physikalische Raumzeit ist vierdimensional, allerdings ist dies ein Befund, der sich bei höherer experimenteller Auflösung ändern könnte. Was uns als Punkt erscheint, ist möglicherweise in weitere Dimensionen ausgedehnt und nur klein.

Mit den Koordinaten können wir jede Funktion f von der Mannigfaltigkeit in die reellen Zahlen durch eine reelle Funktion $f(x^0, x^1, \ldots, x^{d-1})$ angeben.

In einem Koordinatensystem x' ist dieselbe Funktion f durch

$$f'(x'(x)) = f(x) \text{ oder } f'(x') = f(x(x')) \text{ gegeben.} \tag{B.1}$$

Weltlinien Γ sind Kurven in der Raumzeit, die in Koordinaten durch reelle Funktionen $(x^0(s), x^1(s), \ldots, x^{d-1}(s))$ einer reellen Variablen s gegeben sind. Die Koordinaten $x'(s)$ derselben Kurve Γ ergeben sich einfach aus der Kettenregel $x'(s) = x'(x(s))$.

Die koordinatenunabhängige Definition des Tangentialvektors u im Punkt x an eine Kurve $x(s)$, die den Punkt $x = x(0)$ durchläuft, geht von der Eigenschaft aus, daß reelle Funktionen auf die Kurve $x(s)$ eingeschränkt und nach dem Bahnparameter abgeleitet werden können. Der Tangentialvektor ist die Ableitung nach dem Kurvenparameter, also eine lineare Abbildung u, die Funktionen f, die in einer Umgebung von x definiert sind, reelle Zahlen $u(f)$ zuordnet und der Produktregel genügt

$$u(f) = \frac{d}{ds} f(x(s))_{|s=0} = \frac{dx^m}{ds}_{|s=0} \partial_{m|x} f(x) \ , \quad u = \frac{dx^m}{ds} \partial_m \ , \tag{B.2}$$

$$u(f_1 + f_2) = u(f_1) + u(f_2) \ , \quad u(c\, f) = c\, u(f) \quad \forall c \in \mathbb{R} \ , \tag{B.3}$$

$$u(f_1 \cdot f_2) = u(f_1) f_2 + f_1 u(f_2) \ . \tag{B.4}$$

Tangentialvektoren am Punkt x gehören zu Äquivalenzklassen von Kurven durch x, die in einer Umgebung dieses Punktes in erster Ordnung übereinstimmen.

Tangentialvektoren an Kurven durch x bilden einen Vektorraum, den Tangentialraum am Punkt x, denn Summe und Vielfache sind wiederum Tangentialvektoren an Kurven durch x. Insbesondere sind die partiellen Ableitungen $\partial_{m|x}$ die Tangentialvektoren an die Koordinatenlinien und bilden eine Basis des Tangentialraumes am Punkt x, in der jeder Tangentialvektor entwickelt werden kann $u = u^m \partial_m$.

In dieser zum Koordinatensystem gehörigen Basis haben Vektoren Komponenten

$$u^m(x(s)) = \frac{dx^m(s)}{ds} \ . \tag{B.5}$$

Gibt man an jedem Punkt x einen Vektor an, also ein Vektorfeld mit Komponentenfunktionen $u^m(x)$, so kann man umgekehrt (B.5) als Differentialgleichung für eine Schar von Kurven $x(s)$, die Integralkurven des Vektorfeldes u, betrachten. In einem anderen Koordinatensystem $x'(x)$ hat nach der Kettenregel

$$\frac{d}{ds} x'^m(x(s)) = \frac{\partial x'^m}{\partial x^n} \frac{dx^n}{ds} \ , \tag{B.6}$$

dasselbe Vektorfeld die Komponenten

$$u'^m(x'(x)) = \frac{\partial x'^m}{\partial x^n} u^n(x) \ . \tag{B.7}$$

Dual zu Vektoren am Punkt x sind die linearen Abbildungen, die Vektoren am Punkt x in die reellen Zahlen abbilden $\omega : u \to \omega(u) \in \mathbb{R}$. Die linearen Abbildungen können addiert und mit reellen Zahlen multipliziert werden und bilden an jedem Punkt x den Dualraum des dortigen Tangentialraumes.

Insbesondere kann man das Anwenden jedes Tangentialvektors u am Punkt x auf eine Funktion f als lineare Abbildung des Vektors in die reellen Zahlen lesen. Dabei definieren zwei Funktionen dieselbe Abbildung von Tangentialvektoren, wenn ihre ersten Ableitungen bei x übereinstimmen.

Jeder duale Vektor am Punkt x kann als Äquivalenzklasse von Funktionen verstanden werden, die äquivalent sind, wenn ihre ersten Ableitungen bei x übereinstimmen. Wir bezeichnen am Punkt x die Äquivalenzklasse einer Funktion f mit df und betrachten insbesondere die Äquivalenzklassen dx^m der Koordinatenfunktionen. Sie bilden eine Basis des Dualraumes. Denn jede Funktion f bildet Vektoren u auf $u(f) = u^m \partial_m f_{|x}$ ab. Die lineare Funktion $\bar{f} = c_m x^m$, $u(\bar{f}) = u^m c_m$, ist mit f äquivalent, wenn die Konstanten c_m mit den partiellen Ableitungen $\partial_m f_{|x}$ bei x übereinstimmen. Die Äquivalenzklasse df an der Stelle x kann also als $\partial_m f_{|x} dx^m$ geschrieben werden.

Die Basis dx^m ist dual zur Basis ∂_n des Tangentialraumes

$$dx^m : \ \partial_n \to (\partial_n x^m) = \delta^m{}_n \ . \tag{B.8}$$

Gibt man an jedem Punkt einen dualen Vektor als Linearkombination der Basis dx^m an

$$\omega(x) = dx^m \omega_m(x) \ , \tag{B.9}$$

so nennt man $\omega(x)$ duales Vektorfeld oder auch 1-Form. Es ist normalerweise nicht wahr, daß die Komponentenfunktionen $\omega_m(x)$ einer 1-Form Ableitungen einer Funktion f sind. Die speziellen dualen Vektorfelder, die in einer Umgebung eines Punktes von der Form

$$df = dx^m \partial_m f \tag{B.10}$$

sind, haben Komponentenfunktionen $\omega_m(x)$, die spezieller die Gleichungen

$$\partial_m \omega_n - \partial_n \omega_m = 0 \tag{B.11}$$

erfüllen. Sind umgekehrt die Funktionen $\omega_m(x)$ gegeben und erfüllen sie die Integrabilitätsbedingung (B.11), so ist in sternförmigen Gebieten, die mit

jedem Punkt x auch die Verbindungsstrecke zu einem Ursprung $x = 0$ enthalten, ω die Ableitung df der Funktion

$$f(x) = \int_0^1 d\lambda \, x^m \omega_m(x \cdot \lambda)) \; . \tag{B.12}$$

Der Beweis folgt den gleichen Rechenschritten wie der Beweis von (5.39).

Weil die Abbildung ω linear in u ist, hat sie in Komponenten die Form

$$\omega(u)\Big|_x = \omega_m(x) u^m(x) \; . \tag{B.13}$$

Im Koordinatensystem $x'(x)$ hat dieselbe Abbildung die Komponenten

$$\omega'_m(x') = \frac{\partial x^k}{\partial x'^m} \omega_k(x(x')) \; , \tag{B.14}$$

denn nach der Kettenregel ist die Jacobimatrix der Umkehrfunktionen $\frac{\partial x}{\partial x'}$ invers zur Jacobimatrix $\frac{\partial x'}{\partial x}$

$$\frac{\partial x^l}{\partial x'^s} \frac{\partial x'^m}{\partial x^l} = \delta^m{}_s \; , \quad \frac{\partial x^k}{\partial x'^s} \frac{\partial x'^s}{\partial x^l} = \delta^k{}_l \; , \tag{B.15}$$

daher gilt $\omega'_m(x') u'^m(x') = \omega_m(x) u^m(x) = \omega(u)_{|x}$.

Tensorfelder $T(u, \ldots, v, \omega, \ldots, \chi)$ der Stufe (r, s) sind an jedem Punkt x Abbildungen, die in jedem Argument linear sind und r Vektoren $u, \ldots, v$ am Punkt x und s duale Vektoren $\omega, \ldots, \chi$ am Punkt x in die reellen Zahlen abbilden. Wegen der Linearität haben sie die Form

$$T(u, \ldots, v, \omega, \ldots, \chi) = T_{m_1 \ldots m_r}{}^{n_1 \ldots n_s} u^{m_1} \ldots v^{m_r} \omega_{n_1} \ldots \chi_{n_s} \; . \tag{B.16}$$

Dabei sind alle Komponentenfunktionen am jeweiligen Punkt x zu nehmen. Die Komponenten des Tensors erhält man insbesondere, wenn man als Argumente $u, \ldots, v, \omega, \ldots, \chi$ die Basisvektoren $\partial_{m_1}, \ldots, \partial_{m_r}, dx^{n_1}, \ldots, dx^{n_s}$ einsetzt

$$T_{m_1 \ldots m_r}{}^{n_1 \ldots n_s} = T(\partial_{m_1}, \ldots, \partial_{m_r}, dx^{n_1}, \ldots, dx^{n_s}) \; . \tag{B.17}$$

Dasselbe Tensorfeld hat im Koordinatensystem $x'(x)$ die Komponentenfelder

$$T'_{k_1 \ldots k_r}{}^{l_1 \ldots l_s}(x') = \frac{\partial x^{m_1}}{\partial x'^{k_1}} \ldots \frac{\partial x^{m_r}}{\partial x'^{k_r}} \frac{\partial x'^{l_1}}{\partial x^{n_1}} \ldots \frac{\partial x'^{l_s}}{\partial x^{n_s}} T_{m_1 \ldots m_r}{}^{n_1 \ldots n_s}(x(x')) \; . \tag{B.18}$$

Dies bestätigt man mit (B.15), indem man $T(u, \ldots, v, \omega, \ldots, \chi)$ mit den Komponenten im x- und x'-Koordinatensystem auswertet.

Die lineare Transformation (B.18) der Tensorkomponentenfelder heißt Tensortransformation. Dem Indexbild der Tensorkomponenten läßt sich leicht entnehmen, welche Produkte von Jacobimatrizen auftreten.

Tensoren entstehen auf viele Arten in der Geometrie, wann immer eine geometrische Größe proportional zu Vektoren ist, wie zum Beispiel das Skalarprodukt $(u,v) = g_{mn}u^m v^n$ von Vektoren, oder Größen, die wie die Flächengröße von Parallelogrammen skalieren. Zum Beispiel ist die Torsion ein Tensor der Stufe $(r,s) = (2,1)$ und Krümmung zeigt sich am Riemanntensor, einem Tensor der Stufe (3,1). Funktionen (B.1) sind Tensorfelder der Stufe $(0,0)$ und heißen, wenn man ihr Transformationsgesetz betonen will, Skalarfelder.

Unter Koordinatentransformationen $x^m = x'^m + \xi^m(x')$ mit infinitesimalem ξ^m ändert sich unter Vernachlässigung von Termen der Ordnung ξ^2 ein Tensor wegen (B.18), $\frac{\partial x^m}{\partial x'^k} = \delta^m{}_k + \partial_k \xi^m$ und $\frac{\partial x'^l}{\partial x^n} = \delta^l{}_n - \partial_n \xi^l$ durch seine Lie-Ableitung

$$T'_{k_1\ldots k_r}{}^{l_1\ldots l_s} = T_{k_1\ldots k_r}{}^{l_1\ldots l_s} + \mathcal{L}_\xi T_{k_1\ldots k_r}{}^{l_1\ldots l_s} \ . \tag{B.19}$$

Dabei besteht die Lie-Ableitung $\mathcal{L}_\xi T$ aus einem Verschiebungsterm $\xi(\partial T)$, der von $T(x'+\xi) = T(x') + \xi\partial T$ herrührt, und aus $r+s$ Termen $(\partial\xi)T$, die von der Entwicklung der Jacobimatrizen $\frac{\partial x'}{\partial x}$ stammen.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_\xi T_{k_1\ldots k_r}{}^{l_1\ldots l_s} = {} & \xi^m \partial_m T_{k_1\ldots k_r}{}^{l_1\ldots l_s} + \\ & + \partial_{k_1}\xi^m T_{m\ldots k_r}{}^{l_1\ldots l_s} + \cdots + \partial_{k_r}\xi^m T_{k_1\ldots m}{}^{l_1\ldots l_s} - \\ & - \partial_m \xi^{l_1} T_{k_1\ldots k_r}{}^{m\ldots l_s} - \cdots - \partial_m \xi^{l_s} T_{k_1\ldots k_r}{}^{l_1\ldots m}\end{aligned} \tag{B.20}$$

Die Lieableitung eines Skalarfeldes stimmt mit der partiellen Ableitung überein. Die Liebableitung $\mathcal{L}_u v$ eines Vektorfeldes v nach einem Vektorfeld u (5.99) ergibt die Komponenten des Kommutators $[A,B] = AB - BA$ der Differentialoperatoren $u^m\partial_m$ und $v^n\partial_n$

$$[u^m\partial_m, v^n\partial_n] = (u^m\partial_m v^n - v^m\partial_m u^n)\partial_n = \mathcal{L}_u v^n \partial_n \ . \tag{B.21}$$

Die Lieableitung der Metrik

$$\mathcal{L}_\xi g_{mn} = \xi^k \partial_k g_{mn} + \partial_m \xi^k g_{kn} + \partial_n \xi^k g_{mk} \tag{B.22}$$

ist die symmetrisierte, kovariante Ableitung von $\xi_m = g_{mn}\xi^n$

$$\mathcal{L}_\xi g_{mn} = \partial_m(g_{nk}\xi^k) + \partial_n(g_{mk}\xi^k) - (\Gamma_{mn}{}^l + \Gamma_{nm}{}^l) g_{lk}\xi^k = D_m\xi_n + D_n\xi_m \ , \tag{B.23}$$

wobei die Konnektion Γ durch das Christoffelsymbol (6.34) gegeben ist. Die symmetrisierte, kovariante Ableitung des Feldes ξ_m ist proportional zur Metrik (C.26), falls ξ^m zu einer infinitesimalen konformen Transformation gehört und verschwindet für infinitesimale Isometrien.

Anhang C

Transformationsgruppen

C.1 Möbiustransformationen

Als $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ bezeichnet man die Gruppe, die aus den speziellen, linearen Transformationen L_M eines komplex zweidimensionalen Vektorraumes bestehen, die volumentreu sind. Die Determinante der zu L_M gehörigen Matrix M hat also jeweils den speziellen Wert 1.

$$L_M : \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} az_1 + bz_2 \\ cz_1 + dz_2 \end{pmatrix}, \; M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \; a,b,c,d \in \mathbb{C}, \; ad - bc = 1 \,. \tag{C.1}$$

Bei Transformationen mit $\pm M$ ändert sich das Verhältnis $z = \frac{z_1}{z_2}$ durch die zugehörige Möbiustransformation

$$T_M : z \to \frac{az + b}{cz + d} \,, \quad ad - bc = 1 \,, \; T_M = T_{(-M)} \,. \tag{C.2}$$

Insbesondere gehören hintereinander ausgeführte Möbiustransformationen zum Matrixprodukt der hintereinander ausgeführten linearen Transformationen.

$$T_{M_2} \circ T_{M_1} = T_{M_2 M_1} \tag{C.3}$$

Zu gegebener Möbiustransformation mit Koeffizienten $a,b,c,d \in \mathbb{C}$ gehört jeweils ein Paar von linearen Transformationen mit Matrizen $\pm M$. Die Möbiusgruppe stimmt mit der Gruppe $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})/\mathbb{Z}_2$ überein, also der Gruppe der komplexen 2×2-Matrizen, deren Determinante 1 ist, wobei Matrizen M und $-M$ identifiziert werden.

Die Variable z hängt umkehrbar eindeutig mit den Richtungen $\vec{e}_{(\theta,\varphi)}$ von Lichtstrahlen durch Inversion an einer Kugelfläche zusammen. Definitionsgemäß ist die Inversion an einer Kugelfläche mit Radius R und Mittelpunkt $\vec{m}$

die Abbildung

$$I_{(R,\vec{m})}:\ \vec{r}\to\frac{R^2}{(\vec{r}-\vec{m})^2}(\vec{r}-\vec{m})+\vec{m}\ . \tag{C.4}$$

Inversion an einer Kugel bildet Kugelflächen auf Kugelflächen ab, wobei Ebenen als Kugelflächen mit unendlichem Radius aufzufassen sind. Dies wird in [11, Kapitel 3, Abbildung 4] wunderschön elementar geometrisch gezeigt. Insbesondere werden Kreise, das sind Schnittkurven von Kugelflächen, wieder auf Kreise abgebildet. Weil infinitesimale Kugeln auf infinitesimale Kugeln abgebildet werden, ist die Abbildung konform, denn die Längen von kleinen Objekten, genauer die Größe von Tangentialvektoren und infinitesimalen Kreisbögen ändern sich zwar um einen Skalenfaktor, der vom Ort abhängt, aber da er nicht von der Richtung der Tangentialvektoren abhängt, es werden ja Kugeln auf Kugeln abgebildet, bleiben Größenverhältnisse von kleinen Objekten, dazu zählen auch Winkel, unverändert.

Invertieren wir an der Kugelfläche mit $R=2$ und $\vec{m}=(0,0,-1)$, so wird die Einheitskugel, die aus den Richtungen $\vec{e}_{(\theta,\varphi)}$ von Lichtstrahlen besteht

$$\vec{e}_{(\theta,\varphi)}=\begin{pmatrix}\sin\theta\cos\varphi\\ \sin\theta\sin\varphi\\ \cos\theta\end{pmatrix}=2\cos\frac{\theta}{2}\begin{pmatrix}\sin\frac{\theta}{2}\cos\varphi\\ \sin\frac{\theta}{2}\sin\varphi\\ \cos\frac{\theta}{2}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\ , \tag{C.5}$$

bijektiv auf die Ebene $x^3=1$, die um den Punkt ∞ ergänzt ist, abgebildet

$$I_{(2,(0,0,-1))}:\ \begin{pmatrix}\sin\theta\cos\varphi\\ \sin\theta\sin\varphi\\ \cos\theta\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2\tan\frac{\theta}{2}\cos\varphi\\ 2\tan\frac{\theta}{2}\sin\varphi\\ 1\end{pmatrix}\ . \tag{C.6}$$

Wir fassen die x^1-x^2-Koordinaten der Ebene $x^3=1$ zur komplexen Variable $-2z$ zusammen und nennen die Einschränkung von $I_{(2,(0,0,-1))}$ auf die Einheitskugel I

$$I:\ \vec{e}_{(\theta,\varphi)}\to z=-\tan\frac{\theta}{2}\left(\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi\right)=-\tan\frac{\theta}{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\ . \tag{C.7}$$

Die Drehungen $D_{(\vec{e}_3,\alpha)}$ von Lichtstrahlen um die x^3-Achse mit einem Winkel α verändern φ in $\varphi+\alpha$ und wirken auf z durch Multiplikation mit $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$. Gleichförmige Bewegung mit Schnelligkeit σ (2.41) in x^3-Richtung verändert $\tan\frac{\theta}{2}$ durch Aberration um den Faktor $\mathrm{e}^{-\sigma}$ (3.31). Auf die komplexe Variable z wirken also die Drehung um die x^3-Achse und die Bewegung in x^3-Richtung durch Multiplikation

$$ID_{(\vec{e}_3,\alpha,\sigma)}I^{-1}:z\to\lambda z\text{ mit }\lambda=\mathrm{e}^{-\sigma+\mathrm{i}\alpha}\neq 0\ . \tag{C.8}$$

Diese Möbiustransformation (C.2) gehört zum Matrixpaar

$$\pm \begin{pmatrix} \lambda^{\frac{1}{2}} & \\ & \lambda^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix} = \pm \exp \frac{-\sigma + \mathrm{i}\alpha}{2} \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix} \ . \tag{C.9}$$

Die Drehung $D_{(\vec{e}_1, \frac{\pi}{2})}$ um die x^1-Achse mit einem Winkel $\frac{\pi}{2}$ verändert Richtungen von Lichtstrahlen durch

$$D_{(\vec{e}_1, \frac{\pi}{2})} : \ \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ -\cos\theta \\ \sin\theta\sin\varphi \end{pmatrix} \ . \tag{C.10}$$

Wir projizieren die gedrehten Lichtstrahlen in die $x^3 = 1$-Ebene

$$I_{(2,(0,0,-1))} : \ \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ -\cos\theta \\ \sin\theta\sin\varphi \end{pmatrix} \to \frac{4}{2(1+\sin\theta\sin\varphi)} \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ -\cos\theta \\ \sin\theta\sin\varphi + 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{C.11}$$

und lesen die Transformation der komplexen Variablen z ab, die zu Drehungen von Lichtstrahlen um die x^1-Achse mit Winkel $\frac{\pi}{2}$ gehört

$$z' = -\frac{\sin\theta\cos\varphi}{1+\sin\theta\sin\varphi} + \mathrm{i}\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta\sin\varphi} \ . \tag{C.12}$$

Dies ist die Möbiustransformation

$$I D_{(\vec{e}_1, \frac{\pi}{2})} I^{-1} : \ z \to -\mathrm{i}\frac{z+\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}} \ , \tag{C.13}$$

die zum Matrixpaar

$$\pm \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 1 \end{pmatrix} = \pm \exp \frac{\mathrm{i}\pi}{4} \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix} \tag{C.14}$$

gehört. Die Gruppenelemente $I D_{(\vec{e}_3),\alpha,\sigma)} I^{-1}$ und $I D_{(\vec{e}_1),\frac{\pi}{2})} I^{-1}$ erzeugen, wie man leicht prüft, die gesamte Möbiusgruppe [27]. So erhält man zum Beispiel die Drehung $D_{(\vec{e}_2, \frac{\pi}{2})}$ um $\frac{\pi}{2}$ um die x^2-Achse aus der Drehung $D_{(\vec{e}_3, -\frac{\pi}{2})}$, gefolgt von $D_{(\vec{e}_1, \frac{\pi}{2})}$ und $D_{(\vec{e}_3, \frac{\pi}{2})}$. Durch Hintereinanderausführen der entsprechenden Möbiustransformationen erhält man

$$I D_{(\vec{e}_2, \frac{\pi}{2})} I^{-1} : \ z \to -\frac{z+1}{z-1} \ . \tag{C.15}$$

die zum Matrixpaar

$$\pm \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \pm \exp \frac{\mathrm{i}\pi}{4} \begin{pmatrix} & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & \end{pmatrix} \tag{C.16}$$

gehört.

Die Lorentzgruppe wirkt auf Richtungen von Lichtstrahlen genauso wie die Möbiusgruppe auf die komplexe Variable z.

C.2 Definition konformer Transformationen

Transformationen T der Raumzeit $\mathcal{M}$ bilden Punkte x auf Punkte $x'(x)$ ab

$$T: \begin{array}{l} \mathcal{M} \to \mathcal{M} \\ x \to T(x) = x'(x) \ . \end{array} \tag{C.17}$$

Sie verschleppen Kurven $T \circ \Gamma : s \to T(x(s)) = x'(x(s))$ und Tangentialvektoren.

$$\frac{dx'^m}{ds}_{|_{x'(x)}} = \frac{\partial x'^m}{\partial x^n} \frac{dx^n}{ds}_{|_x} \tag{C.18}$$

Eine invertierbare Transformation heißt konform, wenn das Längenquadrat für alle Tangentialvektoren sich höchstens um einen Faktor $\mathrm{e}^{\lambda(x)}$, den konformen Faktor, der vom Ort abhängen darf, ändert. Dann bleiben Größenverhältnisse infinitesimal kleiner, benachbarter Objekte und insbesondere Winkel unverändert und infinitesimale Kreise werden auf infinitesimale Kreise abgebildet.

$$\frac{\partial x'^m}{\partial x^k} \frac{dx^k}{ds}_{|_x} \frac{\partial x'^n}{\partial x^l} \frac{dx^l}{ds}_{|_x} g_{mn}(x'(x)) = \mathrm{e}^{\lambda(x)} \frac{dx^k}{ds}_{|_x} \frac{dx^l}{ds}_{|_x} g_{kl}(x) \tag{C.19}$$

Diese Gleichung gilt für alle Tangentialvektoren $\frac{dx}{ds}$, und die Transformation ist konform genau dann, wenn

$$\frac{\partial x'^m}{\partial x^k} \frac{\partial x'^n}{\partial x^l} g_{mn}(x'(x)) = \mathrm{e}^{\lambda(x)} g_{kl}(x) \tag{C.20}$$

gilt. Ist der konforme Faktor $\mathrm{e}^{\lambda} = 1$, so läßt die Transformation T alle Längenquadrate von Tangentialvektoren unverändert und ist eine Isometrie.

C.3 infinitesimale Transformationen

Wir betrachten eine einparametrige Gruppe T_α von Transformationen, die so parametrisiert sei, daß $T_{\alpha+\beta} = T_\alpha T_\beta$ gilt. Dann gehört $\alpha = 0$ zur identischen Abbildung $T_0 = \mathrm{id}$ und es gilt $(T_\alpha)^{-1} = T_{-\alpha}$. Variiert α, so durchläuft $T_\alpha x = x'(\alpha, x)$ für jedes festgehaltene x als Funktion von α eine Kurve mit Tangentialvektoren

$$\frac{d(T_\alpha x)^m}{d\alpha} = \xi^m(T_\alpha(x)) \ . \tag{C.21}$$

Die Tangentialvektoren an diese Kurven definieren ein Vektorfeld, das wegen $T_{\alpha+\varepsilon}(x) - T_\alpha(x) = T_\varepsilon T_\alpha(x) - T_0 T_\alpha(x)$ von α und x nur über $T_\alpha(x)$ abhängt. Es kann demnach durch Differenzieren bei $\alpha = 0$ bestimmt werden.

$$\xi^m(x) = \frac{d(T_\alpha x)^m}{d\alpha}_{|_{\alpha=0}} \tag{C.22}$$

Die Lösungen $x(\alpha)$ des zugehörigen Differentialgleichungssystems

$$\frac{dx^m}{d\alpha} = \xi^m(x(\alpha)) \tag{C.23}$$

definieren T_α als Abbildung der Anfangswerte $x(0)$ auf $x(\alpha)$.

$$T_\alpha(x(0)) = x(\alpha) \tag{C.24}$$

Der Transformationsparameter α läßt sich als Faktor im erzeugenden Vektorfeld absorbieren, da sich T_α als $T_{\beta\cdot\alpha}$ mit $\beta = 1$ schreiben läßt und da $\hat{T}_\beta = T_{\beta\cdot\alpha}$ bei festgehaltenem α eine einparametrige Untergruppe mit erzeugendem Vektorfeld $\alpha \cdot \xi$ ist.

Das Vektorfeld ξ heißt infinitesimale Transformation und Erzeugende der Transformation $T_{\alpha=1}$. Die Transformation $T_{\alpha=1}$ läßt sich als exponentiertes Vektorfeld $T = \mathrm{e}^{\xi}$ schreiben. Denn zu T_α gehört das erzeugende Vektorfeld $\alpha \cdot \xi$ und der Relation $T_{\alpha+\beta} = T_\alpha T_\beta$ entspricht $\mathrm{e}^{(\alpha+\beta)\xi} = \mathrm{e}^{\alpha\xi}\mathrm{e}^{\beta\xi}$.

Für die partiellen Ableitungen $\frac{\partial x'^m}{\partial x^k}$ mit $x'(x) = T_\alpha(x)$ gilt bei $\alpha = 0$

$$\frac{\partial (T_\alpha x)^m}{\partial x^k}_{|_{\alpha=0}} = \delta^m{}_k \quad \text{und} \quad \partial_\alpha \frac{\partial (T_\alpha x)^m}{\partial x^k}_{|_{\alpha=0}} = \partial_k \xi^m \ . \tag{C.25}$$

Differenzieren wir (C.20) bei $\alpha = 0$, so erhalten wir mit $\epsilon = -\partial_\alpha \lambda_{|_{\alpha=0}}$ die konforme Killing-Gleichung

$$\xi^k \partial_k g_{mn} + \partial_m \xi^k g_{kn} + \partial_n \xi^k g_{mk} + \epsilon g_{mn} = 0 \ . \tag{C.26}$$

Sie kann als lineare Gleichung für die Metrik $g_{mn}(x)$ gelesen werden, konforme Transformationen, die von ξ erzeugt werden, zuzulassen oder als lineare Gleichung für Vektorfelder $\xi^m(x)$, konforme Transformationen der Metrik g_{mn} zu erzeugen. Vektorfelder, die die konforme Killing-Gleichung lösen, heißen konforme Killing-Vektorfelder der Metrik g_{mn}. In mehr als zwei Dimensionen hat die konforme Killing-Gleichung im allgemeinen, gekrümmten Raum[1] normalerweise keine nichtverschwindende Lösung ξ.

Falls ϵ verschwindet, bestimmt (C.26) infinitesimale Isometrien. Die Gleichung heißt dann kürzer Killing-Gleichung.

C.4 Lösung der konformen Killing-Gleichung

Im gekrümmten Raum sind die Komponenten g_{mn} der Metrik x-abhängige Funktionen. Im flachen Minkowskiraum $\mathcal{M} = \mathbb{R}^{p,q}$ existieren kartesische Ko-

[1] Einfachheitshalber nennen wir die Raumzeit kürzer Raum, wenn keine Mißdeutungen zu befürchten sind.

ordinaten x^m, $m = 1, \ldots, d$, in denen die Metrik $g_{mn} = \eta_{mn}$ durch

$$\eta_{mn} = \begin{cases} 0 & \text{falls} \quad m \neq n \\ 1 & \text{falls} \quad m = n \in \{1, \ldots, p\} \\ -1 & \text{falls} \quad m = n \in \{p+1, \ldots, p+q\} \end{cases} . \tag{C.27}$$

gegeben ist. Hierbei lassen wir zu, daß der Raum p zeitartige und q raumartige Dimensionen hat, und verallgemeinern den physikalischen Fall $p = 1$ und $q = 3$. Der Raum heißt konformflach, wenn die Metrik in einem Koordinatensystem bis auf einen Faktor mit η_{mn} übereinstimmt.

$$g_{mn} = \mathrm{e}^{\Phi(x)} \eta_{mn} \tag{C.28}$$

Wenn eine Transformation die konformflache Metrik (C.28) nur um einen Faktor e^{λ} (C.20) ändert, ist sie auch eine konforme Transformation der flachen Metrik η_{mn}. Die flache Metrik wird dann um den Faktor $\mathrm{e}^{-\Phi(x'(x))} \mathrm{e}^{\lambda} \mathrm{e}^{\Phi(x)}$ abgeändert. Wir überlassen die Komplikationen, daß einige dieser Faktoren Null oder unendlich werden können, getrennten Untersuchungen, und betrachten konforme Transformationen des flachen Raums.

Im flachen Raum lautet die konforme Killing-Gleichung

$$\partial_m \xi_n + \partial_n \xi_m + \epsilon \, \eta_{mn} = 0 \ , \quad \text{wobei} \quad \xi_n = \eta_{nk} \xi^k \ . \tag{C.29}$$

Multiplizieren wir mit η^{mn} und benennen wir die Dimension des Raums $\eta^{mn} \eta_{nm}$ mit $d = p + q$, so ergibt sich

$$\epsilon = -\frac{2}{d} \partial_k \xi^k \ . \tag{C.30}$$

Die konforme Killing-Gleichung des flachen Raums lautet also

$$\partial_m \xi_n + \partial_n \xi_m - \frac{2}{d} \partial_k \xi^k \eta_{mn} = 0 \ . \tag{C.31}$$

Für $d = 1$ ist wegen (C.20) offensichtlich jede invertierbare Transformation konform.

Für $d = 2$ lautet die konforme Killing-Gleichung (C.31)

$$\partial_1 \xi_2 + \partial_2 \xi_1 = 0 \qquad \partial_1 \xi_1 - \eta_{11} \eta_{22} \, \partial_2 \xi_2 = 0 \ . \tag{C.32}$$

Für $\det \eta = \eta_{11} \eta_{22} = -1$ führt dies auf

$$(\partial_1 - \partial_2)(\xi_1 - \xi_2) = 0 \ , \quad (\partial_1 + \partial_2)(\xi_1 + \xi_2) = 0 \ , \tag{C.33}$$

mit der allgemeinen Lösung

$$\xi_1 = f(x^1 - x^2) + g(x^1 + x^2) \ , \quad \xi_2 = f(x^1 - x^2) - g(x^1 + x^2) \tag{C.34}$$

mit beliebigen Funktionen $f(x)$ und $g(x)$. Zu solchen infinitesimalen Transformationen gehören endliche Transformationen

$$T_{F,G} : (x^1 - x^2, x^1 + x^2) \to (F(x^1 - x^2), G(x^1 + x^2)) \tag{C.35}$$

mit Funktionen F und G, die genau dann zu invertierbaren Transformationen von $\mathbb{R}^{1,1}$ gehören, wenn sie strikt monoton sind und $\mathbb{R}$ invertierbar auf sich abbilden.
Für $\eta_{11}\eta_{22} = +1$ sind die Gleichungen (C.32) die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen für Real- und Imaginärteil einer komplex differenzierbaren Funktion

$$f(z) = \xi_1(x^1, x^2) + \mathrm{i}\xi_2(x^1, x^2)\,, \quad z = x^1 + \mathrm{i}x^2\,, \quad \partial_{\bar{z}} f(z) = 0\ . \tag{C.36}$$

Zu jeder komplex differenzierbaren Funktion $f(z)$ gehört also eine infinitesimale konforme Transformation. Die konforme Killing-Gleichung hat für $d = 2$ unendlich viele, linear unabhängige Lösungen.

Die zugehörigen endlichen Transformationen sind durch holomorphe Selbstabbildungen mit nirgends verschwindender Ableitung gegeben. Dies sind bei der komplexen Zahlenkugel $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ die Möbiustransformationen (C.2).

Für $d \geq 3$ ist der Vektorraum der konformen Killing-Vektorfelder endlich dimensional. Dies ergibt sich durch zweifaches Ableiten von (C.31). Anwenden von $\eta^{mr}\eta^{ns}\partial_r\partial_s$ zeigt wegen $d \neq 1$

$$\Box\partial_k\xi^k = 0\ . \tag{C.37}$$

Wenden wir $\eta^{rs}\partial_r\partial_s = \Box$ an, so folgt

$$\partial_m\Box\xi_n + \partial_n\Box\xi_m = 0\ . \tag{C.38}$$

Wenden wir schließlich $\eta^{ms}\partial_r\partial_s$ an und symmetrisieren in r und n, so folgt wegen $d \neq 2$

$$\partial_r\partial_n\partial_k\xi^k = 0\ . \tag{C.39}$$

Es ist also $\partial_k\xi^k$ eine lineare Funktion der Koordinaten x

$$\partial_k\xi^k = d(a - 2\,b\cdot x) \quad a \in \mathbb{R}\,,\ b \in \mathbb{R}^d\ . \tag{C.40}$$

In (C.31) eingesetzt

$$\partial_m\xi_n + \partial_n\xi_m = 2\,\eta_{mn}\,(a - 2\,b\cdot x) \tag{C.41}$$

führt dies für $m = n$ (keine Summe über m) $\partial_m\xi^n{}_{|_{m=n}} = (a - 2b\cdot x)$ auf

$$\xi^m = ax^m - 2b\cdot x\,x^m + b^m\,x\cdot x + f^m(x)\,, \tag{C.42}$$

wobei f^m nicht von x^m abhängt ($\partial_k f^m = 0$ falls $k = m$) und wegen (C.31) die Killing-Gleichung des flachen Raumes

$$\partial_m f^k \eta_{nk} + \partial_n f^k \eta_{mk} = 0 \tag{C.43}$$

erfüllt. Das Killing-Vektorfeld f^m gehört zu infinitesimalen Isometrien der Metrik η_{mn} des flachen Raumes. Ableiten der Killing-Gleichung und kombinieren zyklisch vertauschter Indizes zeigt, daß zweite Ableitungen von $f_m = \eta_{mk} f^k$ verschwinden.

$$0 = \partial_l(\partial_m f_n + \partial_n f_m) + \partial_m(\partial_n f_l + \partial_l f_n) - \partial_n(\partial_l f_m + \partial_m f_l) = 2\partial_l \partial_m f_n \tag{C.44}$$

Also ist f^m eine linear inhomogene Funktion der Koordinaten und von der Form

$$f^m = t^m + \omega^m{}_l \, x^l \,, \quad \omega^m{}_l = \eta^{mk}\omega_{kl} \,, \quad \omega_{kl} = -\omega_{lk} \tag{C.45}$$

und gehört zu Translationen mit Parametern t und infinitesimalen Lorentztransformationen mit Parametern ω. In $d \geq 3$ Dimensionen haben konforme Killing-Vektorfelder die Form

$$\xi^m = t^m + \omega^m{}_l \, x^l + a x^m - 2b \cdot x \, x^m + b^m \, x \cdot x \ . \tag{C.46}$$

Da die antisymmetrischen $d \times d$-Matrizen ω, sie gehören zu Lorentztransformationen in d-Dimensionen, einen $\frac{d(d-1)}{2}$-dimensionalen Vektorraum bilden, hat der Vektorraum der konformen Killing-Vektorfelder die Dimension $\frac{(d+2)(d+1)}{2}$, genauso wie die Lorentzgruppe in $d+2$-Dimensionen.

C.5 endliche konforme Transformationen

Zu infinitesimalen Translationen $\xi^m = t^m$ gehören endliche Translationen, die durch die Lösungen $x^m(\alpha) = x^m(0) + \alpha t^m$ des Differentialgleichungssystems

$$\frac{dx^m}{d\alpha} = t^m \tag{C.47}$$

gegeben sind (C.24). Wie schon bemerkt, reicht es, die Transformation für $\alpha = 1$ zu untersuchen, da jeder andere Wert von α in ξ absorbiert werden kann. Mit der Notation $x(1) = x'$ und $x(0) = x$ lautet die endliche Translation

$$x'^m = x^m + t^m \ . \tag{C.48}$$

Endliche Dilatationen gehören zum Differentialgleichungssystem

$$\frac{dx^m}{d\alpha} = a x^m \tag{C.49}$$

mit der Lösung $x(\alpha) = \mathrm{e}^{\alpha a} x(0)$ und lauten in der obigen Notation

$$x'^m = \mathrm{e}^a x^m \ . \tag{C.50}$$

Endliche Lorentztransformationen, die zu $\xi^m = \omega^m{}_n x^n$ gehören, sind lineare Transformationen $x' = \Lambda x$ mit Matrizen Λ, die das Längenquadrat in $\mathbb{R}^{p,q}$ invariant lassen. Die Matrizen Λ erfüllen (C.20) die Gleichungen

$$\Lambda^m{}_k \Lambda^n{}_l \, \eta_{mn} = \eta_{kl} \ , \tag{C.51}$$

die besagen, daß in den Spalten von Λ die Komponenten von Vektoren stehen, die normiert und zueinander orthogonal sind. Man bezeichnet die Lorentzgruppe als Gruppe $\mathrm{O}(p,q)$ der bezüglich des Skalarproduktes η mit p zeitartigen und q raumartigen Richtungen orthogonalen Transformationen. Die Gruppe der Drehungen $\mathrm{O}(d,0)$ stimmt mit $\mathrm{O}(0,d)$ überein und wird kürzer als $\mathrm{O}(d)$ geschrieben. Die Untergruppe von Matrizen mit der speziellen Determinante $\det\Lambda = 1$ wird mit $\mathrm{SO}(q,p)$ bezeichnet. Die Gruppe der speziellen Lorentztransformationen $\mathrm{SO}(p,q)$ enthält das Produkt von Drehgruppen $\mathrm{SO}(p)\times\mathrm{SO}(q)$ als Untergruppe. Die aus Translationen und Lorentztransformationen erzeugte Gruppe heißt Poincaré-Gruppe.

$$T_{\Lambda,t} x^m = \Lambda^m{}_n x^n + t^m \tag{C.52}$$

Für $d = 2$ lassen sich die zu $\xi^m = \omega^m{}_n x^n$ gehörigen Lorentztransformationen $\mathrm{SO}(1,1)$ und $\mathrm{SO}(2)$ leicht angeben. Die Matrix ω ist η mal einer antisymmetrischen Matrix (C.45) und im ersten Fall durch $\omega_{\mathrm{Lorentz}}$ und im zweiten Fall durch $\omega_{\mathrm{Drehung}}$ gegeben.

$$\omega_{\mathrm{Lorentz}} = \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ \lambda & 0 \end{pmatrix} \quad \omega_{\mathrm{Drehung}} = \begin{pmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{pmatrix} \tag{C.53}$$

Das zu $\mathrm{SO}(1,1)$ gehörige Differentialgleichungssystem $\frac{dx}{d\alpha} = \omega x$ wird durch

$$\begin{pmatrix} x^0(\alpha) \\ x^1(\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh(\alpha\lambda) & \sinh(\alpha\lambda) \\ \sinh(\alpha\lambda) & \cosh(\alpha\lambda) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0(0) \\ x^1(0) \end{pmatrix} \tag{C.54}$$

gelöst[2]. Die Lorentztransformation ist

$$\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\lambda & \sinh\lambda \\ \sinh\lambda & \cosh\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \end{pmatrix} \ . \tag{C.55}$$

Diese Transformation bildet die Weltlinie $\Gamma : s \to x^m(s) = \delta^m_0 \, s + x^m(0)$ eines ruhenden Teilchens auf die Weltlinie eines Teilchens ab, das sich mit

[2]Der Indexbereich der Koordinaten ist wie üblich zu $x^0 = ct$ und $x^1 = x$ verschoben.

Geschwindigkeit $\frac{v}{c} = \tanh\lambda$ in x^1-Richtung bewegt. Drückt man λ durch $\frac{v}{c}$ aus, so lautet die Transformation

$$\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \begin{pmatrix} 1 & \frac{v}{c} \\ \frac{v}{c} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \end{pmatrix} \ . \tag{C.56}$$

Die Lösungen des zu Drehungen gehörigen Differentialgleichungssystems sind

$$\begin{pmatrix} x^1(\alpha) \\ x^2(\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha\theta) & -\sin(\alpha\theta) \\ \sin(\alpha\theta) & \cos(\alpha\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1(0) \\ x^2(0) \end{pmatrix} \ , \tag{C.57}$$

und die endliche Drehung um den Winkel θ ist

$$\begin{pmatrix} x'^1 \\ x'^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} \ . \tag{C.58}$$

Zu $\xi^m = -2b\cdot x\, x^m + b^m\, x\cdot x$, den infinitesimalen, speziellen konformen Transformationen, gehört das Differentialgleichungssystem

$$\frac{dx^m}{d\alpha} = (\delta^m{}_n x^2 - 2x^m x_n) b^n \ . \tag{C.59}$$

Wir lösen durch Multiplikation mit der inversen Matrix nach b^m auf

$$\Big(\frac{\delta^m{}_n x^2 - 2x^m x_n}{x^4}\Big)\frac{dx^n}{d\alpha} = b^m \tag{C.60}$$

und bemerken, daß die linke Seite die Ableitung $\frac{d}{d\alpha}\frac{x^m}{x^2}$ ist. Daher können beide Seiten leicht über α integriert werden

$$\frac{x^m(\alpha)}{x^2(\alpha)} - \frac{x^m(0)}{x^2(0)} = \alpha b^m \ . \tag{C.61}$$

Spezielle konforme Transformationen sind Translationen der am Einheitshyperboloid invertierten Punkte $\frac{x^m}{x^2}$.
Schreiben wir x'^m für $x^m(1)$ und x^m für $x^m(0)$ und lösen wir nach $\frac{x'^m}{x'^2}$ auf

$$\frac{x'^m}{x'^2} = \frac{x^m + b^m x^2}{x^2} \tag{C.62}$$

und bestimmen wir daraus x'^2,

$$x'^2 = \frac{x^2}{(1 + 2b\cdot x + b^2 x^2)} \tag{C.63}$$

so erhalten wir

$$x'^m = \frac{x^m + b^m x^2}{1 + 2b \cdot x + b^2 x^2} \ . \tag{C.64}$$

Die spezielle konforme Transformation (C.64) ist nichtlinear. Der Lichtkegel mit Ursprung bei $x = -\frac{b}{b^2}$ erfüllt $1 + 2b \cdot x + b^2 x^2 = b^2(x + \frac{b}{b^2})^2 = 0$ und wird auf $x' = \infty$ abgebildet. Damit spezielle konforme Transformationen invertierbare Selbstabbildungen des Raums $\mathcal{M}$ sind, muß daher der Raum abgeändert werden, er kann nicht $\mathbb{R}^{p,q}$ sein.

C.6 Lorentztransformationen von $\mathbb{R}^{p+1,q+1}$

Es gibt eine Abbildung τ von $\mathbb{R}^{p,q}$ auf Lichtstrahlen in $\mathbb{R}^{p+1,q+1}$, so daß konformen Transformationen in $\mathbb{R}^{p,q}$, die singulär sind, Lorentztransformationen in $\mathbb{R}^{p+1,q+1}$ entsprechen.

$$T_{\text{Lorentz}} \circ \tau = \tau \circ T_{\text{konform}} \tag{C.65}$$

Seien ζ^M, $M = 0, \ldots, d+1$, kartesische Koordinaten von $\mathbb{R}^{p+1,q+1}$ mit Längenquadrat $\zeta^2 = \zeta^M \zeta^N \eta_{MN}$

$$\eta_{MN} = \begin{cases} 0 & \text{falls} \quad M \neq N \\ 1 & \text{falls} \quad M = N \in \{0, 1, \ldots, p\} \\ -1 & \text{falls} \quad M = N \in \{p+1, \ldots, p+q+1\} \end{cases} \ . \tag{C.66}$$

Lorentztransformationen $\mathrm{SO}(p+1, q+1)$ bilden den Lichtkegel, die Menge $L_{(p+1,q+1)}$ der Punkte $\zeta \neq 0$, die $\zeta^M \zeta^N \eta_{MN} = 0$ oder

$$\sum_{i=0}^{p} (\zeta^i)^2 = \sum_{j=p+1}^{p+q+1} (\zeta^j)^2 \tag{C.67}$$

erfüllen, auf sich ab. Ein Lichtstrahl l_ζ ist die Menge aller nichtverschwindenden Vielfachen eines Punktes aus $L_{(p+1,q+1)}$. Es gehört also $\hat{\zeta}$ zu l_ζ wenn $\hat{\zeta} = \lambda\zeta$ und $\lambda \neq 0$ gilt. Die Menge der Lichtstrahlen ist der projektive Lichtkegel $L_{(p+1,q+1)}/\mathbb{R}$. Da Lorentztransformationen linear sind, bilden sie Lichtstrahlen auf Lichtstrahlen ab, die Abbildung hängt nicht davon ab, welchen Punkt ζ man als Repräsentanten des Lichtstrahls wählt.

Durch die Normierungsbedingung $\sum_{i=0}^{p} (\zeta^i)^2 = 1 = \sum_{j=p+1}^{p+q+1} (\zeta^j)^2$ wird bis auf das Vorzeichen ein Repräsentant des Lichtstrahls festgelegt. Die Normierungsbedingung identifiziert Lichtstrahlen mit Paaren von Punkten auf Kugelflächen S^p und S^q, wobei noch entgegengesetzt liegende Punktpaare

zu identifizieren sind. Die Mannigfaltigkeiten $L_{(p+1,q+1)}/\mathbb{R}$ und $(S^p \times S^q)/\mathbb{Z}_2$ sind diffeomorph.

Die Abbildung τ bildet $\mathbb{R}^{p,q}$ in die Menge der Lichtstrahlen $L/\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}^{p+1,q+1}$ durch

$$\tau : x \to l_\zeta(x)\,, \quad (\zeta^0, \zeta^m, \zeta^{d+1}) = \lambda(\frac{1-x^2}{2}, x^m, \frac{1+x^2}{2}) \tag{C.68}$$

ab. Dabei durchlaufen Indizes aus dem kleinen Alphabet den Bereich von 1 bis d und x^2 ist das Längenquadrat $x^m x^n \eta_{mn}$. Wegen $(\frac{1-x^2}{2})^2 + x^2 - (\frac{1+x^2}{2})^2 = 0$ ist ζ ein Punkt auf dem Lichtkegel. Der Lichtstrahl l_ζ hängt nicht vom Faktor $\lambda > 0$ ab.

Die Abbildung kann für $(\zeta^0 + \zeta^{d+1}) \neq 0$ invertiert werden

$$x^m = \frac{\zeta^m}{\zeta^0 + \zeta^{d+1}}\ . \tag{C.69}$$

Offensichtlich ist $\tau \circ T_{\text{Lorentz}}$ von der Form $T_{\text{Lorentz}} \circ \tau$; Lorentztransformationen in $\mathbb{R}^{p,q}$ entsprechen also Lorentztransformationen der Lichtstrahlen.

Es ist $\tau \circ T_{\text{Dilatation}}$ von der Form $T_{\text{Lorentz}} \circ \tau$; Dilatationen in $\mathbb{R}^{p,q}$ entsprechen also Lorentztransformationen der Lichtstrahlen.

Bilden wir nämlich $x' = \mathrm{e}^a x$ mittels τ auf Lichtstrahlen ab, so gilt

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^a x &\to \lambda(\frac{1-\mathrm{e}^{2a}x^2}{2}, \mathrm{e}^a x^m, \frac{1+\mathrm{e}^{2a}x^2}{2}) \\ &= \lambda \mathrm{e}^a(\cosh a \frac{1-x^2}{2} - \sinh a \frac{1+x^2}{2}, x^m, \cosh a \frac{1+x^2}{2} - \sinh a \frac{1-x^2}{2}) \\ &= \lambda'(\Lambda^0{}_M \zeta^M, \Lambda^m{}_M \zeta^M, \Lambda^{d+1}{}_M \zeta^M) \end{aligned} \tag{C.70}$$

mit

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \cosh a & & -\sinh a \\ & \mathbb{1} & \\ -\sinh a & & \cosh a \end{pmatrix}\ . \tag{C.71}$$

Die Transformation $\zeta' = \Lambda\zeta$ ist eine Lorentztransformation (C.55).

Es ist $\tau \circ T_{\text{Translation}}$ von der Form $T_{\text{Lorentz}} \circ \tau$, Translationen in $\mathbb{R}^{p,q}$ entsprechen also Lorentztransformationen der Lichtstrahlen. Bilden wir nämlich $x'^m = x^m + t^m$ auf Lichtstrahlen ab, so gilt

$$\begin{aligned} x^m + t^m &\to \lambda(\frac{1-x^2-2t\cdot x - t^2}{2}, x^m + t^m, \frac{1+x^2+2t\cdot x + t^2}{2}) \\ &= \lambda(\Lambda^0{}_M \zeta^M, \Lambda^m{}_M \zeta^M, \Lambda^{d+1}{}_M \zeta^M) \end{aligned} \tag{C.72}$$

mit

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda^0{}_0 & \Lambda^0{}_n & \Lambda^0{}_{d+1} \\ \Lambda^m{}_0 & \Lambda^m{}_n & \Lambda^m{}_{d+1} \\ \Lambda^{d+1}{}_0 & \Lambda^{d+1}{}_n & \Lambda^{d+1}{}_{d+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\frac{t^2}{2} & -t_n & -\frac{t^2}{2} \\ t^m & \delta^m{}_n & t^m \\ \frac{t^2}{2} & t_n & 1+\frac{t^2}{2} \end{pmatrix} . \tag{C.73}$$

Man überprüft durch Nachrechnen von (C.51), daß $\zeta' = \Lambda\zeta$ eine Lorentztransformation ist.

Inversion am Einheitshyperboloid $x' = \frac{x}{x^2}$ spiegelt ζ^0.

$$\begin{aligned} \frac{x}{x^2} &\to \lambda(\frac{1-\frac{1}{x^2}}{2}, \frac{x^m}{x^2}, \frac{1+\frac{1}{x^2}}{2}) \\ &= \frac{\lambda}{x^2}(-\frac{1-x^2}{2}, x^m, \frac{1+x^2}{2}) \end{aligned} \tag{C.74}$$

Spezielle konforme Transformationen sind Translationen (C.61) der invertierten Punkte, daher entsprechen ihnen Lorentztransformationen der zugehörigen Lichtstrahlen.

$$\begin{aligned} \frac{x^m + b^m x^2}{1 + 2b\cdot x + b^2x^2} &\to \lambda(\frac{1-\frac{x^2}{1+2b\cdot x+b^2x^2}}{2}, \frac{x^m + b^m x^2}{1 + 2b\cdot x + b^2x^2}, \frac{1+\frac{x^2}{1+2b\cdot x+b^2x^2}}{2}) \\ &= \lambda'(\frac{1 + 2b\cdot x + b^2x^2 - x^2}{2}, x^m + b^m x^2, \frac{1 + 2b\cdot x + b^2x^2 + x^2}{2}) \\ &= \lambda'(\Lambda^0{}_M\zeta^M, \Lambda^m{}_M\zeta^M, \Lambda^{d+1}{}_M\zeta^M) \end{aligned} \tag{C.75}$$

Die Matrix Λ, die man hier abliest, stimmt bis auf Umbenennung und Vorzeichenwechsel mit (C.73) überein.

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1-\frac{b^2}{2} & b_n & \frac{b^2}{2} \\ -b^m & \delta^m{}_n & b^m \\ -\frac{b^2}{2} & b_n & 1+\frac{b^2}{2} \end{pmatrix} \tag{C.76}$$

Man überprüft durch Nachrechnen von (C.51), daß $\zeta' = \Lambda\zeta$ eine Lorentztransformation ist.

Translationen, Lorentztransformationen, Dilatationen und spezielle konforme Transformationen erzeugen die konforme Gruppe. Alle diese Transformationen wirken als Lorentztransformationen auf $\mathbb{R}^{p+1,q+1}$ und transformieren die Mannigfaltigkeit $(S^p \times S^q)/\mathbb{Z}_2$ der Lichtstrahlen. Umgekehrt gehört zu jeder infinitesimalen Lorentztransformation von $\mathbb{R}^{p+1,q+1}$ eine infinitesimale konforme Transformation von $\mathbb{R}^{p,q}$.

Obwohl die konformen Killing-Vektorfelder in $\mathbb{R}^{p,q}$ wohldefiniert sind, haben die endlichen Transformationen in $\mathbb{R}^{p,q}$ Singularitäten. Erst auf dem Raum $(S^p \times S^q)/\mathbb{Z}_2$ der Lichtstrahlen in $\mathbb{R}^{(p+1+q+1)}$ wirken sie invertierbar und frei von Singularitäten.

C.7 konforme Transformationen von $\mathbb{R} \times S^3$

Die Mannigfaltigkeit $(S^1 \times S^3)/\mathbb{Z}_2$ ist nicht zeitorientierbar. Wenn nämlich die Zeit der Winkel im Kreis S^1 ist, läßt sich nicht vorher und nachher trennen. Ersetzt man den Kreis $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ durch die reelle Achse $\mathbb{R}$, so erhält man die zeitorientierbare Mannigfaltigkeit $\mathcal{M} = \mathbb{R} \times S^3$. In Koordinaten $(t, \alpha, \theta, \varphi)$ hat sie das Längenquadrat

$$\frac{dx}{ds} \cdot \frac{dx}{ds} = \big(\frac{dt}{ds}\big)^2 - \Big(\big(\frac{d\alpha}{ds}\big)^2 + \sin^2\alpha\Big(\big(\frac{d\theta}{ds}\big)^2 + \sin^2\theta\big(\frac{d\varphi}{ds}\big)^2\Big)\Big) \ . \tag{C.77}$$

$\mathbb{R}$ ist eine Überlagerung von S^1. Die Abbildung

$$\Pi : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to S^1 \\ t \to (x^0, x^1) = (\cos t, \sin t) \end{array} \ , \tag{C.78}$$

ist lokal invertierbar, aber wir identifizieren nicht die Zeiten t und $t + 2\pi$.

Eingebettet in $\mathbb{R}^4$ ist der Ortsvektor eines Punktes von S^3 gegeben durch

$$(x^2, x^3, x^4, x^5) = (\cos\alpha, \sin\alpha\cos\theta, \sin\alpha\sin\theta\cos\varphi, \sin\alpha\sin\theta\sin\varphi) \ . \tag{C.79}$$

Die Winkel α und θ variieren zwischen 0 und π, φ zwischen 0 und 2π.

Die in SO(2, 4) enthaltenen Drehungen SO(2) des Kreises wirken als Translation der Zeit $t \to t + a$. Auf $\mathbb{R} \times S^3$ ist die Lorentzgruppe SO(2, 4) abgeändert, die 2π-periodische Drehung in der 0-1-Ebene ist durch die Translation ersetzt. Die Zeittranslation ist eine Isometrie. Die in SO(2, 4) enthaltenen Drehungen SO(4) drehen S^3 und erhalten das Längenquadrat, sie sind also ebenfalls eine Isometrie. Die Isometrien von $\mathbb{R} \times S^3$ bilden die Produktgruppe $\mathbb{R}\times$SO(4).

Die Lorentztransformation auf bewegte Bezugssysteme mischt zeitliche Koordinaten (x^0, x^1) und räumliche Koordinaten (x^2, x^3, x^4, x^5). Zum Beispiel ändert eine infinitesimale Lorentztransformation in der 0-2-Ebene die x^0- und x^2-Koordinaten um

$$\delta x^0 = x^2 \, , \quad \delta x^2 = x^0 \ .$$

Dies wird eine infinitesimale Transformation auf $S^1 \times S^3$, wenn wir sie um eine Streckung $\delta x^m = -a x^m$ mit $a = x^0 x^2$ so ergänzen, daß δx^m senkrecht auf dem Ortsvektor in $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^4$ steht und der transformierte Punkt wieder auf $S^1 \times S^3$ liegt

$$\begin{array}{l} \delta x^0 = x^2 - a x^0 \, , \ \delta x^1 = -a x^1 \, , \\ \delta x^2 = x^0 - a x^2 \, , \ \delta x^3 = -a x^3 \, , \ \delta x^4 = -a x^4 \, , \ \delta x^5 = -a x^5 \ . \end{array} \tag{C.81}$$

Wir lesen aus $\delta x^0 = \delta \cos t = -\sin t\, \delta t$ (C.78) und $\delta x^2 = \delta \cos \alpha = -\sin \alpha\, \delta \alpha$ (C.79) die infinitesimale Transformation von t und α ab

$$\delta t = -\sin t \cos \alpha\,,\ \ \delta \alpha = -\cos t \sin \alpha\,. \tag{C.82}$$

Die Winkel θ und φ bleiben unverändert. Das Längenquadrat (C.77) ändert sich um einen konformen Faktor

$$\delta\big(\frac{dx}{ds}\cdot\frac{dx}{ds}\big) = 2\big(\frac{d\delta x}{ds}\cdot\frac{dx}{ds}\big) + \delta g_{mn}\frac{dx^m}{ds}\frac{dx^n}{ds} = -2\cos t\cos\alpha\,\big(\frac{dx}{ds}\cdot\frac{dx}{ds}\big)\,. \tag{C.83}$$

Lorentztransformationen von $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^4$, die Zeit- und Raumkoordinaten mischen, sind auf $\mathbb{R} \times S^3$ als konforme Transformationen realisiert.

Das Transformationsgesetz (C.82) zerfällt in zwei eindimensionale Transformationen

$$\delta(t \pm \alpha) = -\sin(t \pm \alpha)\,. \tag{C.84}$$

Die zu $\delta x = -\sin x$ gehörige endliche Transformation (C.24) mit Transformationsparameter σ erhalten wir aus der Differentialgleichung

$$\frac{dx}{d\sigma} = -\sin x\,, \quad \frac{1}{\sin x}\frac{dx}{d\sigma} = \frac{d\ln\tan\frac{x}{2}}{d\sigma} = -1 \tag{C.85}$$

mit der Lösung

$$\tan\frac{x(\sigma)}{2} = \mathrm{e}^{-\sigma}\ \tan\frac{x(0)}{2} \tag{C.86}$$

als Abbildung des Anfangswerts $x(0)$ auf $x(\sigma)$. Diese Abbildung ist uns von der Aberration (3.31) wohlvertraut. Bei $x = \pi$ liegt ein Fixpunkt und keine Singularität vor, wie die äquivalente Form $\cot\frac{x(\sigma)}{2} = \mathrm{e}^{\sigma}\ \cot\frac{x(0)}{2}$ zeigt.

Unter einer Lorentztransformation in der 0-2-Ebene bleiben also θ und φ unverändert und t' und α' sind aus den Gleichungen

$$\tan\frac{t'+\alpha'}{2} = \mathrm{e}^{-\sigma}\ \tan\frac{t+\alpha}{2}\,, \quad \tan\frac{t'-\alpha'}{2} = \mathrm{e}^{-\sigma}\ \tan\frac{t-\alpha}{2} \tag{C.87}$$

zu entnehmen. Diese Transformation ist typisch für alle drehungsfreien, konformen Transformationen von $\mathbb{R} \times S^3$, denn die zugehörige Lorentztransformation von $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^4$, die Zeit- und Raumkoordinaten mischt, kann durch Drehungen in $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^4$ auf diese Form gebracht werden.

Obwohl jede Kugelfläche S^n eine Längenskala, nämlich den an der Krümmung ablesbaren Radius enthält, ist erstaunlicherweise $\mathbb{R} \times S^3$ ein maximal konform-symmetrischer Raum mit einer größeren konformen Gruppe als der Minkowskiraum $R^{1,3}$, der nicht alle konformen Transformationen sondern nur die von Poincaré-Transformationen und Dilatationen erzeugten Transformationen zuläßt. Hingegen hat die Isometriegruppe von $\mathbb{R} \times S^3$ kleinere Dimension als die Poincaré-Gruppe des Minkowskiraumes $R^{1,3}$.

Anhang D

das retardierte Potential

Mathematisch ist die Herleitung des elektrostatischen Potentials (5.35) fragwürdig, denn das Riemannintegral ist als Grenzwert von verfeinerten Riemannsummen definiert, die das Integrationsvolumen zerlegen. Die dabei auftretenden Summen sind nicht Beiträge von kleinen geladenen Kugeln sondern von Quadern, die nicht kugelsymmetrisch sind.

Wir überprüfen deshalb, daß (5.35) die Poisson-Gleichung löst. Dazu betrachten wir vorsichtshalber das Integrationsgebiet V_ε, das aus allen Punkten $\vec{y}$ besteht, deren Abstand zu $\vec{x}$ mindestens ε beträgt, wir schneiden also aus dem Integrationsgebiet eine Kugel K_ε mit Radius ε heraus. Später betrachten wir dann den Grenzfall $\varepsilon \to 0$. Im Gebiet V_ε gilt

$$\int_{V_\varepsilon} d^3y\, \Delta_y \phi(y) \frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}|} = \int_{V_\varepsilon} d^3y \left(\Delta_y \phi(y) \frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}|} - \phi(y) \Delta_y \frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}|} \right) . \quad \text{(D.1)}$$

Hierbei ist Δ_y der Laplace-Operator, der nach den y-Koordinaten differenziert. Die Gleichung gilt, weil in V_ε die Funktion $\frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}|}$ differenzierbar und harmonisch ist, also $\Delta_y \frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}|} = 0$ erfüllt.

Der Integrand ist eine Summe von Ableitungstermen

$$\Delta_y \phi(y) \frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}|} - \phi(y) \Delta_y \frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}|} = \partial_{y^i} \left(\partial_{y^i} \phi(y) \frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}|} - \phi(y) \partial_{y^i} \frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}|} \right) .$$

Daher ist das Integral nach dem Gaußschen Satz dem Oberflächenintegral

$$- \oint_{\partial V_\varepsilon} d\vec{f} \cdot \left((\overrightarrow{\mathrm{grad}}_y \phi(y)) \frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}|} - \phi(y) \overrightarrow{\mathrm{grad}}_y \frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}|} \right) \quad \text{(D.3)}$$

gleich. Hier zeigt die Flächennormale in das Gebiet V_ε hinein. Der Rand ∂V_ε besteht aus der Kugeloberfläche $\partial \mathrm{K}_\varepsilon$ und aus dem Rand für große $\vec{y}$, den wir

vernachlässigen können, wenn der Integrand für große Abstände genügend schnell klein wird und stärker als $1/r^2$ abfällt. Auf $\partial \mathrm{K}_\varepsilon$ gilt

$$\frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}|} = \frac{1}{\varepsilon}\,, \quad \overrightarrow{\mathrm{grad}}_y \frac{1}{|\vec{y}-\vec{x}|} = -\frac{\vec{y}-\vec{x}}{|\vec{y}-\vec{x}|}\frac{1}{\varepsilon^2}\ . \tag{D.4}$$

Das Integral über den ersten Term verschwindet im Grenzfall $\varepsilon \to 0$, denn nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung ist es gleich einem Wert von $\frac{1}{\varepsilon}\ \vec{e}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}}_y\phi$, wobei $\vec{e}$ der Einheitsnormalenvektor ist, an einer Stelle der Kugeloberfläche mal der Kugeloberfläche $4\pi\varepsilon^2$. Im zweiten Term ist das Skalarprodukt gleich dem Produkt der Beträge. Wir schreiben das Integral mit dem Mittelwertsatz als ϕ an einer Stelle der Kugeloberfläche mal $\oint_{\partial \mathrm{K}_\varepsilon} do\,\frac{1}{\varepsilon^2} = 4\pi$ und erhalten insgesamt im Grenzfall $\varepsilon \to 0$

$$-4\pi\phi(x) = \int d^3y\,\Delta_y\phi(y)\frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}|}\ . \tag{D.5}$$

Diese Gleichung stellt jede zweifach differenzierbare Funktion, die für große Abstände verschwindet und deren Gradient schneller als $1/r$ für große Abstände verschwindet, durch ihren anharmonischen Anteil $\Delta\phi$ dar. Demnach ist (5.35) das elektrostatische Potential einer räumlich beschränkten Ladungsverteilung, das die Poisson-Gleichung löst.

Wälzen wir durch partielle Integration die Differentationen auf $\frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}|}$ ab, so ist (D.5) die Gleichung

$$\Delta\frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}|} = -4\pi\delta^3(\vec{x}-\vec{y})\ . \tag{D.6}$$

Das retardierte Potential zur Zeit $x^0 = ct$ am Ort $\vec{x}$ ergibt sich aus dem elektrostatischen Potential, wenn man die Ladungsdichte zu der Zeit einsetzt, die um die Lichtlaufzeit vom Ort der Ladung $\vec{y}$ zum Ort $\vec{x}$ früher ist.

$$\phi_{\mathrm{ret}}(x^0,\vec{x}) = \int d^3y\,\frac{\rho(x^0-|\vec{x}-\vec{y}|,\vec{y})}{|\vec{x}-\vec{y}|} \tag{D.7}$$

Wir überprüfen, daß das retardierte Potential die inhomogene Wellengleichung löst und differenzieren den Integranden nach der Kettenregel.[1]

$$\begin{aligned}
&\big(\partial_0\partial_0 - \partial_1\partial_1 - \partial_2\partial_2 - \partial_3\partial_3\big)\frac{\rho(x^0-|\vec{x}-\vec{y}|,\vec{y})}{|\vec{x}-\vec{y}|}\\
&= \frac{\partial_0\partial_0\rho}{|\vec{x}-\vec{y}|} - \partial_i\big(-\partial_0\rho\,\frac{x^i-y^i}{|\vec{x}-\vec{y}|^2} + \rho\,\partial_i\frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}|}\big)\\
&= \frac{\partial_0\partial_0\rho}{|\vec{x}-\vec{y}|} - \partial_0\partial_0\rho\frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}|} + \partial_0\rho\partial_i\frac{x^i-y^i}{|\vec{x}-\vec{y}|^2} + \partial_0\rho\frac{x^i-y^i}{|\vec{x}-\vec{y}|}\big(-\frac{x^i-y^i}{|\vec{x}-\vec{y}|^3}\big) -
\end{aligned}$$

[1] Der Index i durchläuft die Werte 1,2 und 3.

$$-\rho\Delta\frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}|} = 4\pi\rho\delta^3(\vec{x}-\vec{y}) \tag{D.8}$$

Streng genommen müssen wir aus dem Integrationsgebiet eine Kugel K_ε herausschneiden und den Grenzfall $\varepsilon \to 0$ betrachten. Bis auf die zweiten Ableitungen von $\frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}|}$ sind alle anderen Terme weniger divergent als $1/\varepsilon^3$ und tragen im Grenzfall $\varepsilon \to 0$ nicht bei.

Es erfüllt also das retardierte Potential die inhomogene Wellengleichung

$$\Box\phi = 4\pi\rho \ . \tag{D.9}$$

Die folgende Rechnung zeigt, daß das retardierte Vierepotential (5.52) die Lorentzeichbedingung $\partial_m A^m = 0$ (5.47) erfüllt.

$$\partial_m A^m(x^0,\vec{x}) = \frac{1}{c}\int d^3y\,\frac{\partial_{x^0} j^0(x^0-|\vec{x}-\vec{y}|,\vec{y})}{|\vec{x}-\vec{y}|} + \partial_{x^i}\big(\frac{j^i(x^0-|\vec{x}-\vec{y}|,\vec{y})}{|\vec{x}-\vec{y}|}\big) \tag{D.10}$$

Die Ableitung $\partial_{x^0} j^0(x^0,\vec{y})$ ist wegen der Kontinuitätsgleichung $\partial_m j^m = 0$ gleich $-\partial_{y^i} j^i(x^0,\vec{y})$. Dies gilt auch, falls die Zeit x^0 retardiert ist, allerdings differenzieren die Ableitungen ∂_{y^i} nicht die Retardierung.

$$\partial_{x^0} j^0(x^0-|\vec{x}-\vec{y}|,\vec{y}) = -\partial_{y^i} j^i(x^0-|\vec{x}-\vec{z}|,\vec{y})\big|_{\vec{z}\,=\,\vec{y}} \tag{D.11}$$

Im zweiten Term von (D.10) differenzieren die Ableitungen nach x^i jeweils nach $|\vec{x}-\vec{y}|$ und stimmen demnach mit dem negativen der Ableitung nach y^i überein, die nicht auf die drei räumlichen Argumente $\vec{y}$ von $j^i(x^0,\vec{y})$ wirken.

$$\partial_{x^i}\frac{j^i(x^0-|\vec{x}-\vec{y}|,\vec{y})}{|\vec{x}-\vec{y}|} = -\partial_{y^i}\frac{j^i(x^0-|\vec{x}-\vec{y}|,\vec{z})}{|\vec{x}-\vec{y}|}\Big|_{\vec{z}\,=\,\vec{y}} \tag{D.12}$$

Zusammengenommen sind beide Terme die Ableitung, die nach der gesamten y-Abhängigkeit differenziert.

$$\partial_m A^m = -\frac{1}{c}\int_V d^3y\,\partial_{y^i}\big(\frac{j^i(x^0-|\vec{x}-\vec{y}|,\vec{y})}{|\vec{x}-\vec{y}|}\big)$$

Mit dem Gaußschen Satz schreiben wir dies als Oberflächenintegral

$$\partial_m A^m = -\frac{1}{c}\oint_{\partial V} d\vec{f}\,\frac{\vec{j}(x^0-|\vec{x}-\vec{y}|,\vec{y})}{|\vec{x}-\vec{y}|} \ . \tag{D.13}$$

Das Integrationsvolumen V ist so groß gewählt, daß keine Ströme durch die Oberfläche abfließen, daher verschwindet das Integral und die retardierten Viererpotentiale erfüllen die Lorentzbedingung.

Anhang E

Ableitung der Determinante

Jede lineare Transformation L_M bildet Basisvektoren e_j, $j = 1, 2, \ldots, n$ auf Vektoren $L_M e_j = M^i{}_j e_i$ ab. Dabei bezeichnen $M^i{}_j$ die Matrixelemente der zu L_M und zur Basis gehörigen Matrix. Die Vektoren $L_M e_j$ spannen ein Volumen auf, das proportional ist zu dem nichtverschwindenden Volumen, das die Basisvektoren e_j aufspannen. Der Proportionalitätsfaktor definiert die Determinante der Matrix M

$$\mathrm{vol}(L_M e_1, L_M e_2, \ldots, L_M e_n) = \det(M)\mathrm{vol}(e_1, e_2, \ldots, e_n) \ . \tag{E.1}$$

Da Volumen linear in jedem seiner Argumente ist, können wir die Koeffizienten $M^i{}_j$ herausziehen und erhalten

$$\mathrm{vol}(L_M e_1, L_M e_2, \ldots, L_M e_n) = M^{i_1}{}_1 M^{i_2}{}_2 \ldots M^{i_n}{}_n \mathrm{vol}(e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_n}) \ . \tag{E.2}$$

Das Volumen, das von einem Vektor mit sich selbst und weiteren Vektoren aufgespannt wird, verschwindet

$$\mathrm{vol}(e_1, \ldots, a, \ldots, a, \ldots, e_n) = 0 \ . \tag{E.3}$$

Daraus folgt in Kombination mit der Linearität, daß das Volumen total antisymmetrisch unter Vertauschung seiner Argumente ist

$$\begin{gathered} 0 = \mathrm{vol}(a+b, a+b, \ldots) = \\ = \mathrm{vol}(a, a, \ldots) + \mathrm{vol}(a, b, \ldots) + \mathrm{vol}(b, a, \ldots) + \mathrm{vol}(b, b, \ldots) = \\ = 0 + \mathrm{vol}(a, b, \ldots) + \mathrm{vol}(b, a, \ldots) + 0 \end{gathered} \tag{E.4}$$

$$\mathrm{vol}(e_1, \ldots, a, \ldots, b, \ldots, e_n) = -\mathrm{vol}(e_1, \ldots, b, \ldots, a, \ldots, e_n) \tag{E.5}$$

Weil Volumen total antisymmetrisch in seinen Argumenten ist, gilt daher

$$\mathrm{vol}(e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_n}) = \varepsilon_{i_1 i_2 \ldots i_n} \mathrm{vol}(e_1, e_2, \ldots, e_n) \ , \tag{E.6}$$

wobei $\varepsilon_{i_1 i_2 \ldots i_n}$ total antisymmetrisch ist und $\varepsilon_{12\ldots n} = 1$ ist. Die Determinante der Matrix M ist daher das folgende Polynom der Matrixelemente $M^i{}_j$

$$\det M = \varepsilon_{i_1 i_2 \ldots i_n} M^{i_1}{}_1 M^{i_2}{}_2 \ldots M^{i_n}{}_n \ . \tag{E.7}$$

Durch Differenzieren folgt

$$\frac{\partial \det M}{\partial M^i{}_j} = \varepsilon_{i_1,\ldots,i_{j-1},i,i_{j+1},\ldots i_n} M^{i_1}{}_1 \ldots M^{i_{j-1}}{}_{j-1} M^{i_{j+1}}{}_{j+1} \ldots M^{i_n}{}_n \ . \tag{E.8}$$

Wir identifizieren dies Ergebnis, indem wir mit $M^i{}_l$ multiplizieren und über i summieren. Dann erhält man wieder die Determinante, wenn $l = j$ ist. Im anderen Fall $l \neq j$ erhält man Null, weil in der Summe mit dem ε-Tensor schon $M^{i_l}{}_l$ steht und ε total antisymmetrisch ist. Also ist

$$\frac{\partial \det M}{\partial M^i{}_j} = (\det M)(M^{-1})^j{}_i \ . \tag{E.9}$$

Die Ableitung der Determinante einer einparametrigen Schar von Matrizen $M(\alpha)$ ist folglich nach Kettenregel

$$\partial_\alpha \det M(\alpha) = \det M (M^{-1})^j{}_i \, \partial_\alpha M^i{}_j \ . \tag{E.10}$$

Für die Ableitung der Wurzel der negativen Determinante

$$g := -\mathrm{detg} \tag{E.11}$$

der Matrix g, deren Elemente die Komponenten der Metrik sind $(\mathrm{g})_{mn} = g_{mn}$, heißt dies

$$\partial_k \sqrt{g} = \frac{1}{2\sqrt{g}} \, g g^{rs} \partial_k g_{rs} = \sqrt{g}\, \Gamma_{kl}{}^l \ , \tag{E.12}$$

wobei $\Gamma_{kl}{}^m$ das Christoffelsymbol (6.34) ist, das im metrikverträglichen, torsionsfreien Paralleltransport auftritt. Zu jedem kovariant erhaltenen Strom gehört demnach eine Stromdichte, die eine Kontinuitätsgleichung erfüllt.

$$\sqrt{g}\, D_m j^m = \sqrt{g}\big(\partial_m j^m + \Gamma_{mk}{}^m j^k\big) = \partial_m\big(\sqrt{g}\, j^m\big) \ . \tag{E.13}$$

Die Matrixelemente $(M^{-1})^i{}_j$ der inversen Matrix sind rationale Funktionen der Matrixelemente $M^m{}_n$ der Matrix M. Ihre Ableitung

$$\frac{\partial (M^{-1})^i{}_j}{\partial M^m{}_n} = -(M^{-1})^i{}_m (M^{-1})^n{}_j \tag{E.14}$$

erhält man, wenn man in der definierenden Relation $M^{-1}M = 1$ die Matrizen variiert $(\delta M^{-1})M + M^{-1}\delta M = 0$ und nach δM^{-1} auflöst

$$\delta M^{-1} = -M^{-1}(\delta M) M^{-1} \ . \tag{E.15}$$

Etwas umständlicher bestätigt man diese Relation durch Differenzieren der Relation $(M^{-1})^i{}_j M^j{}_k = \delta^i{}_j$ mit $\frac{\partial M^i{}_j}{\partial M^m{}_n} = \delta^i{}_m \delta^n{}_j$.

Anhang F

Abwälzen von Ableitungen

Die Abkürzung d stehe für die Ableitung $\frac{d}{dt}$ oder jede andere Ableitung, die der Produktregel genügt. Wegen

$$f\,\big(dg\big) = d\big(fg\big) - \big(df\big)\,g\ . \tag{F.1}$$

können in Produkten $f(d^n g)$ die n-fachen Ableitungen von g auf den anderen Faktor f abgewälzt werden

$$f\,\big(d^n g\big) = d\,\Big(\sum_{k=0}^{n-1}\big((-1)^k d^k f\big)\big(d^{n-k-1}g\big)\Big) + \big((-1)^n d^n f\big)\,g\ . \tag{F.2}$$

Die Wirkung jedes Differentialoperators $D = \sum_n f_n d^n$ mit irgendwelchen Koeffizientenfunktionen f_n und n-fachen Ableitungen d^n auf g können wir schreiben als Summe einer vollständigen Ableitung einer Größe $X_{D,\,g}$ und eines Produktes, das g als Faktor enthält.

$$Dg = \sum_n f_n d^n g = d\,X_{D,\,g} + Y_D\,g \tag{F.3}$$

$$X_{D,\,g} = \sum_{k,l}\big((-1)^k d^k f_{k+l+1}\big)\big(d^l g\big) \tag{F.4}$$

$$Y_D = \sum_n (-1)^n (d^n f_n)\ . \tag{F.5}$$

Die Relation macht nur Gebrauch davon, daß der Differentialoperator d der Produktregel genügt und gilt unabhängig davon, was f_n oder g ist oder ob d für die Zeitableitung oder für irgendeine andere Ableitungen steht.

Die infinitesimale Änderung einer Lagrangefunktion $\mathcal{L}(x, \dot{x}, \ddot{x}, \ldots, t)$ kann als Differentialoperator gelesen werden, der auf δx wirkt

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{L} &= \mathcal{L}(x+\delta x, \dot{x}+\delta\dot{x}, \ddot{x}+\delta\ddot{x}, \ldots, t) - \mathcal{L}(x, \dot{x}, \ddot{x}, \ldots, t)\\ &= \delta x\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x} + (\frac{d}{dt}\delta x)\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}} + (\frac{d^2}{dt^2}\delta x)\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\ddot{x}} + \ldots\ .\end{aligned} \tag{F.6}$$

Wälzen wir die Ableitung von δx ab und schreiben wir $\delta\mathcal{L}$ als Summe einer vollständigen Ableitung und eines Produktes, das δx als Faktor enthält, so definiert der Koeffizient bei δx die Eulerableitung der Lagrangefunktion $\mathcal{L}$.

$$\delta\mathcal{L} = \delta x \frac{\hat{\partial}\mathcal{L}}{\hat{\partial} x} + \frac{d}{dt} Z_{\mathcal{L},\delta x} \tag{F.7}$$

$$Z_{\mathcal{L},\delta x} = \sum_{k,l} (-1)^k \big(\frac{d^k}{dt^k} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_{(k+l+1)}} \big) \frac{d^l}{dt^l} \delta x \tag{F.8}$$

$$\frac{\hat{\partial}\mathcal{L}}{\hat{\partial} x} = \sum_{n} (-1)^n \frac{d^n}{dt^n} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_{(n)}} \tag{F.9}$$

Dabei haben wir die Notation $x_{(n)} = \frac{d^n x}{dt^n}$ für die Jet-Variablen verwendet.

Multiplizieren man Dg mit einer Funktion h, so definiert das Abwälzen der Ableitungen von g auf h den transponierten Differentialoperator D^T

$$hDg = h \sum_n f_n d^n g = d\, X_{h,D,g} + (D^T(h))\, g \tag{F.10}$$

$$X_{h,D,g} = \sum_{k,l} \big((-1)^k d^k (f_{k+l+1} h) \big) \big(d^l g \big) \tag{F.11}$$

$$D^T h = \sum_n (-1)^n d^n (f_n h) \tag{F.12}$$

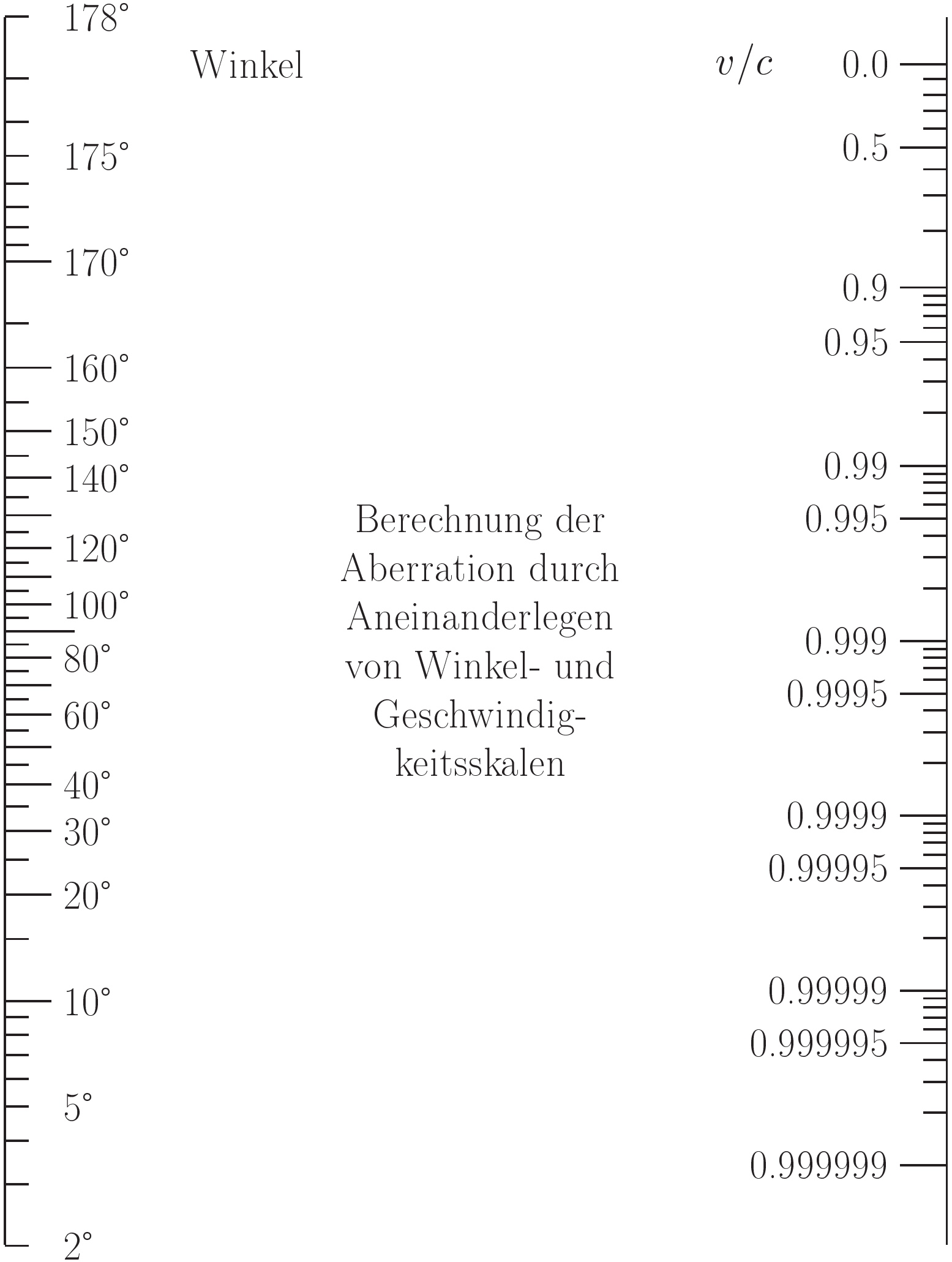
$$D^T = \sum_k \big(\sum_l (-1)^{k+l} (d^l f_{k+l}) \big) d^k \ . \tag{F.13}$$

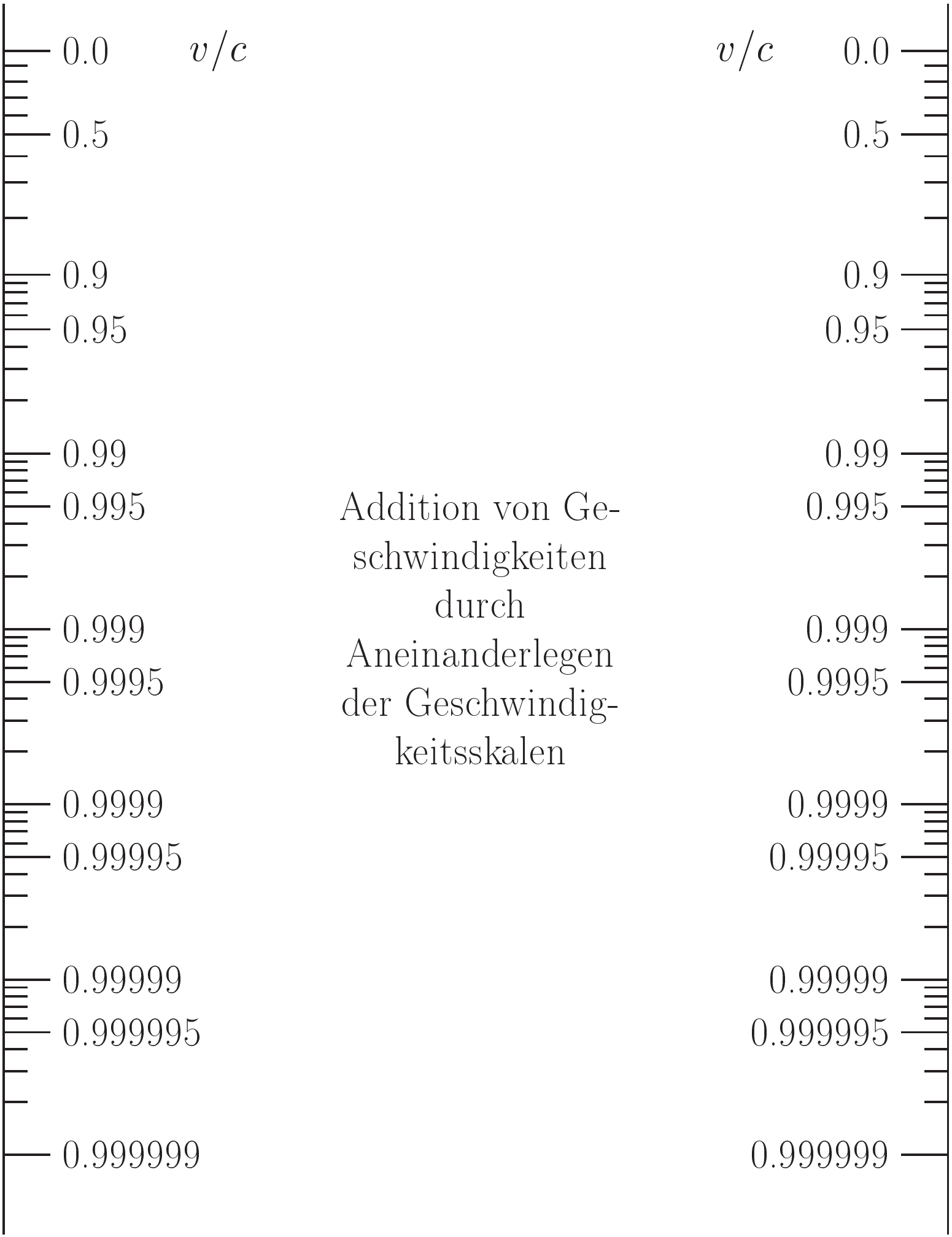
h und g treten in der algebraischen Identität (F.10) bilinear wie in einem Skalarprodukt auf, ohne daß es sich bei ihnen um Vektoren eines Hilbertraums handeln muß.

Anhang G

Rechenschieber

Als Funktion des Winkels θ und der Geschwindigkeit v/c sind auf den Skalen $\ln\tan\theta/2$ und die Schnelligkeit $\ln\sqrt{\frac{c+v}{c-v}}$ aufgetragen. Aberration bestimmt man einfach wie beim Rechenschieber durch Hintereinanderlegen (Addieren) von $\ln\tan\theta/2$ und $\ln\sqrt{\frac{c+v}{c-v}}$ (3.31), die aus zwei Geschwindigkeiten resultierende Gesamtgeschwindigkeit durch Aneinanderlegen zweier Geschwindigkeitsskalen (2.40). Zum Beispiel erscheint ein Lichtstrahl mit Winkel von 150° zur Bewegungsrichtung einem mit $v/c = 0,999$ bewegten Beobachter unter 10° und $v_1/c = 0,99$ und $v_2/c = 0,98$ ergibt eine Geschwindigkeit von $v/c = 0,9999$.


Winkel
178°
175°
170°
160°
150°
140°
120°
100°
80°
60°
40°
30°
20°
10°
5°
2°
Berechnung der Aberration durch Aneinanderlegen von Winkel- und Geschwindig-keitsskalen
v/c
0.0
0.5
0.9
0.95
0.99
0.995
0.999
0.9995
0.9999
0.99995
0.99999
0.999995
0.999999


0.0
v/c
0.5
0.9
0.95
0.99
0.995
0.999
0.9995
0.9999
0.99995
0.99999
0.999995
0.999999
Addition von Geschwindigkeiten durch Aneinanderlegen der Geschwindigkeitsskalen
v/c
0.0
0.5
0.9
0.95
0.99
0.995
0.999
0.9995
0.9999
0.99995
0.99999
0.999995
0.999999

Literaturverzeichnis

[1] Particle Data Group, Particle Physics Booklet, CERN Scientific Information Service, CH-1211 Geneva 23, 1998

[2] Ignazio Ciufolini and John Archibald Wheeler, Gravitation and Inertia, Princeton Series in Physics, 1995

[3] Ch. Gerthsen und H. Vogel, Physik, 18. Auflage, Springer-Verlag, Berlin, 1995

[4] Wolfgang Rindler, Essential Relativity, Springer-Verlag, Heidelberg, 1986

[5] Hanns Ruder und Margret Ruder, Die Spezielle Relativitätstheorie, Vieweg Verlagsgesellschaft, Braunschweig, 1993

[6] Ulrich E. Schröder, Spezielle Relativitätstheorie, Verlag Harry Deutsch, Frankfurt am Main, 1994

[7] Clifford M. Will, Theory and Experiment in Gravitational Physics, Cambridge University Press, Cambridge, 1993
Clifford M. Will, The Confrontation between General Relativity and Experiment, A 1998 Update, Lecture notes from 26th SLAC Summer Institute on Particle Physics: Gravity – From the Hubble Length to the Planck Length (SSI 98), Stanford, CA, 3-14 Aug 1998
http://xxx.lanl.gov/abs/gr-qc/9811036

[8] Leo Stodolsky, The speed of light and the speed of neutrinos, Phys. Lett. B 201 (1988) 353

[9] R. Kippenhahn, Light from the Depths of Time, Springer-Verlag, Berlin, 1987,

[10] Norbert Dragon und Nicolai Mokros, Relativistischer Flug durch Stonehenge, http://www.itp.uni-hannover.de/~dragon, 1999

[11] Tristan Needham, Visual Complex Analysis, Clarendon Press, Oxford, 1997

[12] Gunter Seeber, Satellite Geodesy: Foundations, Methods, and Applications, de Gruyther, New York 1993
B. Parkinson, J. Spilker Editors, Global Positioning System: Theory and Applications Volume I, American Institute of Aeronautics and Astronautics, Washington, DC, 1996

[13] J. Bailey et al., Il Nuovo Cimento **9A** (1972) 369

[14] John S. Bell, Speakable and unspeakable in quantum mechanics, Cambridge University Press, Cambridge, 1987

[15] Richard P. Feynman, Robert B. Leighton and Mathew Sand, The Feynman Lectures on Physics II, Addison-Wesley Publishing Company, Reading, 1964

[16] Friedemann Brandt, Die Noethertheoreme, Antrittsvorlesung, Hannover, 12. April 2000, unveröffentlicht
Peter J. Olver, Applications of Lie Groups to Differential Equations, Springer-Verlag, Heidelberg, (1986)

[17] Vladimir I. Arnol'd, Mathematical Methods of Classical Mechanics, Springer-Verlag, Heidelberg, (1980)

[18] Jürgen Moser, Stable and Random Motion in Dynamical Systems, Princeton University Press, Princeton, (1973)

[19] M. V. Berry, Regular and Irregular Motion, Amer. Inst. Phys. Conf. Proceedings Nr.46, Topics in Nonlinear Dynamics, S.Jorna ed., AIP, (1978) 16

[20] G. Eilenberger, Reguläres und chaotisches Verhalten Hamiltonscher Systeme, 14. Ferienkurs Nichtlineare Dynamik in kondensierter Materie, Kernforschungsanlage Jülich, 1983

[21] Norbert Dragon, BRS Symmetry and Cohomology, http://www.itp.uni-hannover.de/~dragon, 1996

[22] A. Schumacher, H. Schütt, H. Walesch und H. Meyer, Determination of the Gravitational Constant G using a Fabry-Pérot Pendulum Resonator, http://wpos6.uni-wuppertal.de:8080/~gravi/moriond.ps.gz, 1997 erscheint in den Proceedings XXXII Rencontres de Moriond

[23] John Lighton Synge, Relativity: The General Theory, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1964

[24] Marek A. Abramowicz, Black Holes and the Centrifugal Force Paradox, Scientific American, March 1993, p. 26 - 31

[25]

[26] V. S. Varadarajan, Lie Groups, Lie Algebras and Their Representations, Springer Verlag, New York, 1984

[27] Roger Penrose and Wolfgang Rindler, Spinors and space-time, Cambridge University Press, Cambridge, 1984

[28] Klaus Jänich, Vektoranalysis, Springer Verlag, Berlin, 1992

[29] Louis Auslander and Robert E. Mackenzie, Introduction to Differentiable Manifolds, McGraw-Hill Book Company, New York, 1963

[30] Wilhelm Klingenberg, Eine Vorlesung über Differentialgeometrie, Springer Verlag, Berlin, 1973

[31] S. Kobayashi and K. Nomizu, Foundations of Differential Geometry, Interscience Publishers, New York, 1963

Index

Aberration, 43–49, 135, 136, 192
Allgemeine Relativitätstheorie, 10, 37, 51, 69, 122–144

Beobachter, 8–49, 114–117, 132–140
beobachtete Bilder, 46
Beschleunigung, 8, 13, 35, 36, 51, 115, 123–125, 136
Blickwinkel, 132

Christoffelsymbol, 108, 124
Comptonstreuung, 69–71
Coulomb-Potential, 79

d'Alembert-Operator, 83
Darstellung, 159
  kontragrediente ∼, 160
  reelle ∼, 160
Dopplereffekt, 43–46, 134–136
Drehimpuls, 65, 126, 131
drehungsfreie Bezugssysteme, 10, 115

ebene Bahnkurven, 126
effektives Potential, 127, 131, 135
Eichtheorie, 82, 101–121
Eichtransformation, 81, 121
eindimensionale Bewegung, 66
Elektrodynamik, 72–100
Energie, 57, 65, 67–69, 77, 126, 131, 148
  $E = mc^2$, 67
Energieerhaltung, 69, 76, 148
Erhaltungsgrößen, 61–68
Euler-Lagrange-Gleichungen, 59
Eulerableitung, 59, 89–90

Fermi-Walker-Transport, 116
flacher Raum, 9
fokaler Punkt, 139
Funktional, 50, 51, 56, 124
  lokales ∼, 56, 89
Funktionalableitung, 57, 59

Galilei-Transformation, 12
gekrümmter Raum, 9
Geodäte, 106, 115, 123–125, 130, 133, 136
geodätische Abweichung, 117–120
Geschwindigkeit, 7, 8, 12, 13, 15, 25, 26, 40–42
Gewicht, 132
Gezeitenkräfte, 120
Gleichortigkeit, 6
Gleichzeitigkeit, 6, 18–30, 34
Gravitation, 82
Gruppe, 11, 47, 159
  einparametrige ∼, 173

Hamiltonfunktion, 65
harmonische Funktion, 80
Hintergrundstrahlung, 8, 69
Holonomiegruppe, 104, 112
Horizont, 143
Hyperbel, 33–35, 38

Impuls, 67–68, 77, 148
Inertialsystem, 19
Information, 31

Inversion, 182
Isometrie, 173, 183

Jet-Variable, 56, 89

Kausalität, 30
Killing-Gleichung, 174
konform, 47, 87, 173
konformflach, 140, 175
Konnektion, 101–108
Kontinuitätsgleichung, 75
Kontraktion, 162
Koordinaten, 6, 22
kovariante Ableitung, 112
Kronecker-Delta, 160
Kruskalkoordinaten, 140–144
Krümmung, 108–112

Ladungserhaltung, 75
Längenkontraktion, 37–40
Längenquadrat, 21–23, 38, 47, 49–50, 122–144, 163–164, 173–184
Lagrangedichte, 89
Lagrangefunktion, 57, 65
Laplace-Gleichung, 80, 119
Lichtablenkung, 129
lichtartig, 22, 43, 68
Lichtgeschwindigkeit, 12, 15
  als Grenzgeschwindigkeit, 31
Lichtkegel, 7, 12–15
Lichtkegelkoordinaten, 28
Lichtkoordinaten, 18, 23, 24
Lichtstrahl, 43
Lie-Ableitung, 93, 169
Lokalität, 5
Lorentzeichung, 83
Lorentzkraft, 72, 78
Lorentztransformation, 23–27, 164, 177, 180–184

Mannigfaltigkeit, 165
Masse, 68
masselose Teilchen, 68
Massenschale, 68
Maßstab, 6, 15, 37–39
Maßsystem, 15
Maxwellgleichungen, 11, 13, 43, 72
Meter, 15
Metrik, 107, 122–125
  flache ∼ , 122
  inverse ∼, 108
  Schwarzschild∼, 125–144
Michelson, 12, 15, 38
Minkowski, 21, 174, 184
Möbiustransformation, 47, 170–172, 176
Myonen, 51

n-Punkt-Funktion, 56, 58
Neutrinogeschwindigkeit, 14
Noetheridentität, 96–100, 146–148
Noethertheorem, 61–63, 91–93, 98

p-Form, 167
Parallelverschiebung, 102–108
  metrikverträgliche ∼, 107–108
Periheldrehung, 128
Photon, 13, 44, 46, 68–70
Poincaré-Transformation, 11, 61, 69, 178
Poisson-Gleichung, 80
Poyntingvektor, 77

Quantenphysik, 5

raumartig, 22
Raumzeit, 6
  flache ∼, 122, 174
  gekrümmte ∼, 122
Realität, 5
Relativitätsprinzip, 11, 61
Relativität, 28–31
retardiertes Potential, 83

Riemanntensor, 110
Rømer, 12
Rotverschiebung, 134

Schiedsrichter, 16
Schnelligkeit, 25, 46, 192
Schwarzes Loch, 125, 143
Schwarzschild, 125
Sekunde, 15
senkrecht, 23, 33, 38, 126
Skalarfeld, 169
Standardmodell, 81
starrer Körper, 15, 31
Staub, 153
Summationskonvention, 160
Supernova, 14, 31
Symmetrie, 61–63
symplektisch, 164

Tachyonen, 30
Teilchen, 54–56
    freie ∼, 56
    geladenes ∼, 78, 94–96, 100
    im Gravitationsfeld, 122–132
Tensor, 161–169
Tensortransformation, 169
topologische Ladung, 98
Torsion, 106, 108–112
Transformation, 173
    infinitesimale, 62
    infinitesimale ∼, 173–174
    konforme ∼, 11, 47, 173–184
    orthogonale ∼, 164

Überlichtgeschwindigkeit, 30, 42
Uhr, 26, 34, 49–51
    beschleunigte ∼, 49–51
    im Gravitationsfeld, 133–134
    reale ∼, 51
unitär, 162

Vakuum, 8–11
Vektorfeld
    duales ∼, 167
Vierbein, 134
Viererimpuls, 67, 68
Viererpotential, 80
Vierervektor, 43, 44

Welle, 43, 84
Wellengleichung, 82–85
Wellenoperator, 83
Wellenpaket, 84
Wellenvektor, 43, 84
Weltlinie, 6, 13
Wirkungsprinzip, 56–61, 88–100

Zeit, 123
    -dilatation, 32–34
zeitartig, 22
Zentrifugalkraft, 136
Zusammenhang, 101–108
Zwillingsparadoxon, 35–37, 115
zyklische Variable, 65, 126