# Quantenfeldtheorie


**Gerhard Soff**

**Institut für Theoretische Physik**

**Technische Universität Dresden**


**Vorlesung im Sommersemester 1994**

**Vorbemerkungen**

Es ist eine wesentliche Zielvorstellung dieser Vorlesung, die Grundprinzipien der heutigen Quantenfeldtheorie basierend auf der Pfadintegralmethode zu vermitteln. Die Quantenfeldtheorie beschreibt Teilchenerzeugungs- und Vernichtungsprozesse. Ausgehend von dem generellen Oberbegriff “Quantenfeldtheorie” können als Untergebiete die Quantenelektrodynamik, die Quantenchromodynamik, das Weinberg-Salam Modell der elektroschwachen Wechselwirkung, das Standard-Modell, supersymmetrische Modelle, Superstring-Theorien usw. betrachtet werden. Die generelle Quantenfeldtheorie umfaßt als Unterbereiche alle anderen Teilaspekte der Theoretischen Physik und kann daher auch als “Krönung” der Theoretischen Physik angesehen werden. Der Versuch vereinheitlichte Feldtheorien (Theory of Everything “TOE” oder Grand Unified Theory “GUT”) zu schaffen, ist ein wesentliches Charakteristikum der heutigen Forschung in der Quantenfeldtheorie.

Die Quantenfeldtheorie ist mathematisch recht ambitiös und steht keinesfalls in allen Bereichen auf gesicherten mathematischen Fundamenten. Dies wird auch im Rahmen dieser Vorlesung offenkundig werden.

Es soll versucht werden, auf dem Kenntnisstand der nichtrelativistischen Quantenmechanik aufbauend die Grundkonzepte der Quantenfeldtheorie zu entwickeln. Diese Vorlesung ist als Ergänzungslehrveranstaltung für Studenten *nach* dem Vordiplom geeignet. Sie ist Bestandteil des Wahlpflichtfaches “Theorie der Hadronen und Kerne”. Eine profunde Kenntnis der nichtrelativistischen Quantenmechanik wird vorausgesetzt.

Inhaltlich wollen wir die folgenden Teilbereiche behandeln:

1. Einführung
2. Pfadintegrale in der Quantenmechanik
3. Lagrange–Formalismus für Felder
4. Yang–Mills Felder
5. Pfadintegrale in der Quantenfeldtheorie
6. Ableitung von Feynman–Regeln
7. Spontane Symmetriebrechung

Dieses Skript basiert partiell auf den grundsätzlichen Darstellungen in den folgenden Monographien:

# Literatur


[Bail 86] D. Bailin, A. Love, *Introduction To Gauge Field Theory*, (Adam Hilger, Bristol, 1986)

[Feyn 65] R. P. Feynman, A. R. Hibbs, *Quantum Mechanics and Path Integrals*, (McGraw Hill, New York, 1965)

[Grei 93] W. Greiner, J. Reinhardt, *Feldquantisierung*, (Harri Deutsch, Frankfurt am Main, 1993)

[Jank 79] W. Janke, *Pfad-Integrale und Quantenmechanische Fluktuationen*, Diplomarbeit, Fachbereich Physik, Freie Universität Berlin, 1979

[Ryde 85] L. H. Ryder, *Quantum Field Theory*, (Cambridge University Press, Cambridge, 1985)

[Schu 81] L. S. Schulman, *Techniques and Applications of Path Integration*, (John Wiley, New York, 1981)



Dieses Skript wäre nicht in dieser Form entstanden ohne die tatkräftige Mithilfe zahlreicher Kollegen. Besonders dankbar bin ich Dr. Harald Kalka für vielfältige Korrekturvorschläge sowie für einige Erweiterungen. Ergänzende Beiträge gab es durch Dr. Christian Hofmann und Dr. Günter Plunien. Dankbar bin ich auch den zahlreichen Helfern bei der technischen Erstellung des Skripts: Mark Beinker, André Peshier, Bernd Heide, Christian Dürr, Frau Ute Wächtler und Frau Gudrun Latus. Auch die Hörer dieser Vorlesung haben dankenswerterweise zu einigen Korrekturvorschlägen beigetragen.

# Vorwort zur Pfadintegral–Methode

Pfadintegrale erlauben eine alternative Beschreibung der Quantenmechanik und der Quantenfeldtheorie. Im Vergleich zu den Formulierungen der Quantentheorie von Schrödinger oder Heisenberg ermöglicht die Pfadintegral - Methode vielfach ein anschaulicheres Verständnis quantenmechanischer Phänomene. Jedoch muß betont werden, daß eine vollständige Äquivalenz zur Schrödinger - Theorie besteht. Neue oder gar abweichende Resultate in bezug auf die Erkenntnisse der traditionellen Quantenmechanik sind daher nicht zu erwarten. Außerdem sind explizite Berechnungen mit Pfadintegralen zumeist ungleich komplexer und langwieriger verglichen mit bekannten und erprobten Verfahren zur Lösung der Schrödinger - Gleichung. Daher werden Pfadintegral - Methoden oftmals nur formal angewendet. Generell trägt die Pfadintegral - Methode aber zu einem grundsätzlichen Verständnis der Quantenmechanik bei.

Pfadintegrale sind auch in der statistischen Physik von fundamentaler Bedeutung und haben eine weitverbreitete Anwendung beim Studium von Vielteilchensystemen. Technische Bedeutung haben sie in jüngster Zeit dadurch erlangt, daß zahlreiche Prozesse in modernen Eichtheorien bisher ausschließlich mit Pfadintegralen behandelt werden konnten.

Einigen Grundgedanken von Dirac folgend wurde die Pfadintegral - Darstellung der Quantenmechanik von Feynman [Feyn 48] eingeführt. An didaktischer Brillianz ist das Lehrbuch [Feyn 65] von Feynman über die Pfadintegral - Formulierung der Quantenmechanik nur schwerlich zu übertreffen. Es ist daher auch keineswegs beabsichtigt, dieses didaktische Meisterwerk zu ersetzen. Vielmehr soll diese Vorlesungsmitschrift in ergänzender Weise dazu beitragen, in die Theorie und die damit verbundenen Techniken der Pfadintegral - Darstellung der Quantenmechanik einzuführen. Seit der Veröffentlichung des Feynmanschen Lehrbuchs sind zahlreiche neue und bedeutsame Resultate abgeleitet worden, die auch im Rahmen einer Anfängervorlesung präsentiert werden sollten. Ferner liegt es ebenfalls in der Absicht für diese Vorlesungsniederschrift, einige Druckfehler im Feynmanschen Buch auszumerzen.

Schulman [Schu 81] hat ein weiteres exzellentes Lehrbuch über Pfadintegrale geschrieben. Die Monographie von Schulman ist teilweise recht ambitiös und somit gerade für den Anfänger etwas schwer verdaulich. Daher erscheint eine neue elementare Einführung in die Pfadintegral - Methode durchaus gerechtfertigt. Gerade für Studenten ist eine ausführliche Darstellung einzelner Rechenschritte sehr hilfreich. Dies erhöht rein formal die Zahl der notwendigen Zeilen, um einen gegebenen Sachverhalt zu erläutern. Aber letztlich bleibt bei diesem Vorgehen dennoch mehr Zeit für das physikalische Verständnis der prinzipiellen Grundgedanken. Sehr hilfreich in detaillierten Darstellungen war die ausgezeichnete Diplomarbeit [Jank 79] von W. Janke.

# Literatur


[Arfk 70] G. Arfken, *Mathematical Methods for Physicists*,
(Academic Press, New York, 1970)

[Bail 86] D. Bailin, A. Love, *Introduction To Gauge Field Theory*,
(Adam Hilger, Bristol, 1986)

[Carl 85] R. D. Carlitz, D. A. Nicole,
*Classical Paths and Quantum Mechanics*,
Ann. Phys. 164 (1985) 411

[Chen 87] Bin Kang Cheng, *Path-Integral evaluation of the propagator for a charged particle in a constant magnetic field and with the vector potential of a solenoid*,
Phys. Rev. A36 (1987) 2964

[Chet 87] L. Chetouani, L. Guechi, T. F. Hammann,
*Exact Path Integrals For The Ring Potential*,
Phys. Lett. 125A (1987) 277

[Chet 89] L. Chetouani, L. Guechi, T. F. Hammann,
*Generalized canonical transformations and path integrals*,
Phys. Rev. A40 (1989) 1157

[DeWi 79] C. DeWitt-Morette, A. Maheshwari, B. Nelson,
*Path Integration In Non-Relativistic Quantum Mechanics*,
Phys. Rep. 50 (1979) 255

[DeWi 89] C. DeWitt-Morette, See Kit Foong,
*Path-Integral Solutions of Wave Equations with Dissipation*,
Phys. Rev. Lett. 62 (1989) 2201

[Duru 79] I. H. Duru, H. Kleinert,
*Solution Of The Path Integral For The H-Atom*,
Phys. Lett. 84B (1979) 185

[Erko 88] Ş. Erkoç, R. Sever,
*Path-integral solution for pseudoharmonic potential*,
Phys. Rev. A37 (1988) 2687

[Fels 81] B. Felsager, *Geometry, Particles and Fields*,
(Odense University Press, Odense, 1981)

[Feyn 48] R. P. Feynman,
*Space-Time Approach to Non-Relativistic Quantum Mechanics*,
Rev. Mod. Phys. 20 (1948) 367

[Feyn 65] R. P. Feynman, A. R. Hibbs,
*Quantum Mechanics and Path Integrals*,
(McGraw Hill, New York, 1965)

[Fili 86] V. S. Filinov,
*Calculation Of The Feynman Integrals By Means Of The Monte Carlo Method*,
Nucl. Phys. B271 (1986) 717

[Gerr 86] C. C. Gerry,
*Coherent states and a path integral for the Morse oscillator*,
Phys. Rev. A33 (1986) 2207

[Glim 81] J. Glimm, A. Jaffe,
*Quantum Physics - A Functional Integral Point of View*,
(Springer, New York, 1981)

[Grei 93] W. Greiner, J. Reinhardt, *Feldquantisierung*,
(Harri Deutsch, Frankfurt am Main, 1993)

[Gros 87] C. Grosche, F. Steiner,
*Path integrals on curved manifolds*,
Z. Phys. C36 (1987) 699

[Gros 88] C. Grosche, *The Path Integral on the Poincaré Upper Half-Plane with a Magnetic Field and for the Morse Potential*,
Ann. Phys. 187 (1988) 110

[Itzy 80] C. Itzykson, J.-B. Zuber, *Quantum Field Theory*,
(McGraw Hill, New York, 1980)

[Jank 79] W. Janke, *Pfad-Integrale und Quantenmechanische Fluktuationen*,
Diplomarbeit, Fachbereich Physik, Freie Universität Berlin, 1979

[Jane 79] W. Janke, H. Kleinert,
*Summing Paths for a Particle in a Box*,
Lett. Nuovo Cim. 25 (1979) 297

[Khan 86] D. C. Khandekar, S. V. Lawande,
*Feynman Path Integrals: Some Exact Results And Applications*,
Phys. Rep. 137 (1986) 115

[Klei 87] H. Kleinert,
*How To Do The Time Sliced Path Integral Of The H Atom*,
Phys. Lett. 120B (1987) 361

[Klei 89] H. Kleinert,
*Path Integrals Over Fluctuating Non-Relativistic Fermion Orbits*,
Phys. Lett. 225B (1989) 381

[Lein 89] J. M. Leinaas, K. Olaussen,
*Path Integral Approach to Tunneling and Self-Trapping*,
Ann. Phys. 189 (1989) 243

[Mari 80] M. S. Marinov,
*Path Integrals in Quantum Theory: An Outlook Of Basic Concepts*,
Phys. Rep. 60 (1980) 1

[More 51] C. Morette,
*On the Definition and Approximation of Feynman's Path Integrals*,
Phys. Rev. 81 (1951) 848

[Muta 87] T. Muta, *Foundations of Quantum Chromodynamics*,
(World Scientific, Singapore, 1987)

[Papa 75] G. J. Papadopoulos, *Gaussian path integrals*,
Phys. Rev. D11 (1975) 2870

[Poko 87] S. Pokorski, *Gauge Field Theories*,
(Cambridge University Press, Cambridge, 1987)

[Ramo 81] P. Ramond, *Field Theory - A Modern Primer*,
(The Benjamin/Cummings Publishing Company, Reading, 1981)

[Rive 87] R. J. Rivers,
*Path Integral Methods in Quantum Field Theory*,
(Cambridge University Press, Cambridge, 1987)

[Ryde 85] L. H. Ryder, *Quantum Field Theory*,
(Cambridge University Press, Cambridge, 1985)

[Schu 81] L. S. Schulman, *Techniques and Applications of Path Integration*,
(John Wiley, New York, 1981)

[Sokm 86] I. Sökmen,
*Exact Path-Integral Solution Of A Charged Particle In A Class Of Time-Dependent, Axially Symmetric Electromagnetic Fields*,
Phys. Lett. 115A (1986) 6

[Sokm 86a] I. Sökmen,
*Exact Path-Integral Solution Of The Ring-Shaped Potential*,
Phys. Lett. 115A (1986) 249

[Wang 89] M. S. Wang,
*Derivation Of Feynman Path Integral Theory Based On Stochastic Mechanics*,
Phys. Lett. 137A (1989) 437

[Wieg 86] F. W. Wiegel,
*Introduction to Path-Integral Methods in Physics and Polymer Science*,
(World Scientific, Singapore, 1986)

# Einführung der Pfadintegration – Diskussionen im Rahmen des Hamilton-Formalismus

In der klassischen Mechanik können wir die Wirkung $\mathcal{A}[q(t), p(t)]$ als Funktional der generalisierten Koordinate $q(t)$ und des generalisierten Impulses $p(t)$ ausdrücken. Unter Verwendung der Hamilton–Funktion ist die Wirkung definiert durch das folgende Zeitintegral in den Grenzen $t_a$ und $t_b$

$$\mathcal{A}[q(t), p(t)] \;=\; \int_{t_a}^{t_b} \{p(t)\,\dot{q}(t) - H(p(t), q(t), t)\}\; dt \;. \tag{1}$$

Die generalisierte Geschwindigkeit $\dot{q}(t)$ ist hierbei eine Funktion des generalisierten Impulses, d.h. $\dot{q} \;=\; \dot{q}(p)$.

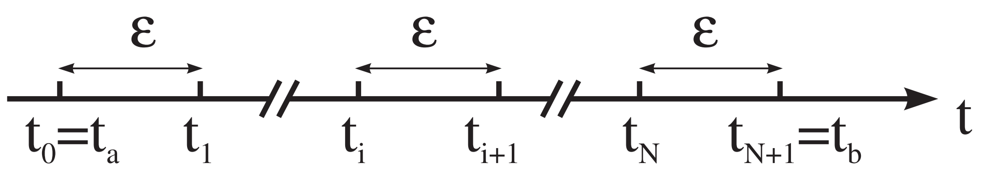
Der Grundgedanke der Summation über alle Wege im Phasenraum von $q_a$ nach $q_b$ kann in eine mathematische Formulierung übertragen werden, indem man die Zeitachse zwischen den Zeitpunkten $t_a$ und $t_b$ diskretisiert. Wir betrachten die diskreten Zeitpunkte

$$\begin{aligned} t_0 &= t_a \;, \\ t_n &= t_0 + n\epsilon \;=\; t_a + n\epsilon \quad \text{mit} \quad n \;=\; 1, 2, \ldots, N \;, \\ t_{N+1} &= t_b \;. \end{aligned} \tag{2}$$

Der Abstand zwischen jeweils zwei benachbarten diskreten Zeitpunkten ist einfach gegeben durch

$$\epsilon \;=\; \frac{t_b - t_a}{N+1} \;=\; \frac{T}{N+1} \;. \tag{3}$$

Das Zeitintervall $T = t_b - t_a$ ist konstant. Die Diskretisierung der Zeitachse ist in Figur 3 dargestellt.

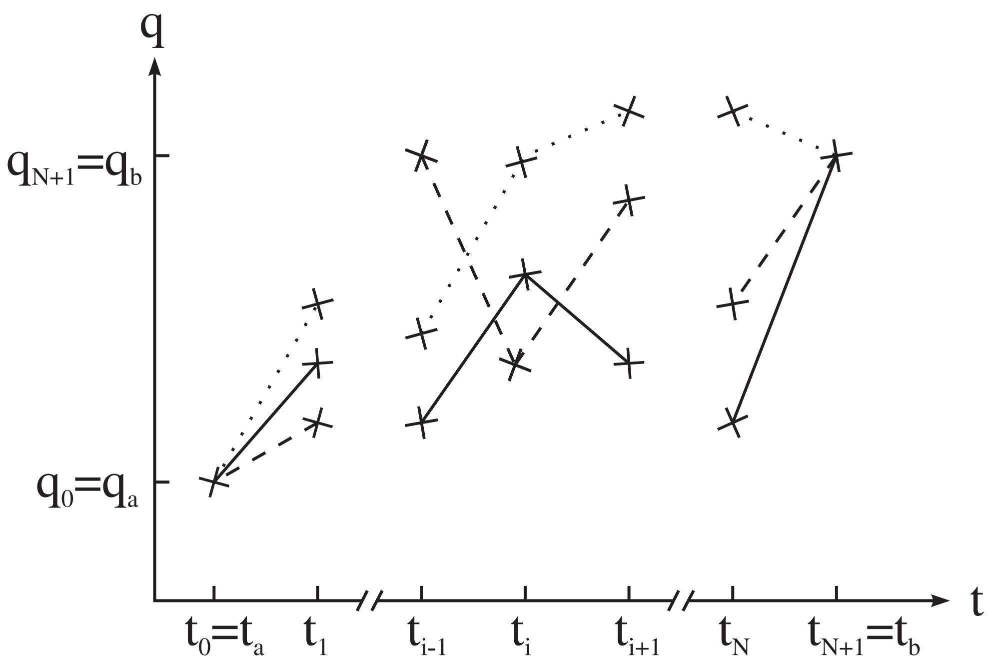



Figur 3: Diskretisierung der Zeitachse. Im Bild ist die Zeitachse zwischen den Zeitpunkten $t_1$ und $t_i$ bzw. zwischen $t_{i+1}$ und $t_N$ unterbrochen, was durch die doppelten schrägen Linien angedeutet wird.

$q_n = q(t_n)$ und $p_n = p(t_n)$ können alle möglichen Werte annehmen, und wir müssen über alle diese Werte integrieren. Die Endpunkte $q_a$ und $q_b$ bleiben aber fest, während hingegen über die Endimpulse $p_{N+1}$ auch integriert werden soll. Die $(t, q)$-Ebene wird in Figur 4 veranschaulicht. Ebenso wie die $(t, q)$-Ebene kann natürlich auch die $(t, p)$-Ebene dargestellt werden. Als entscheidender Unterschied ist jedoch zum Zeitpunkt $t_b \;=\; t_{N+1}$ der zugehörige Endimpuls $p_{N+1}$ *nicht* fixiert sondern variabel. Also kann auch $p_{N+1}$ alle möglichen Werte annehmen.

Das Wirkungsfunktional $\mathcal{A}[p, q]$ geht bei einer stückweisen, linearen Approximation des Weges in eine Funktion der $2N + 1$ Stützstellen $q_1, \ldots, q_N, p_1, \ldots, p_{N+1}$ über.

$$\begin{aligned} &\mathcal{A}(q_1, \ldots, q_N, p_1, \ldots, p_{N+1}) \;= \\ &\sum_{n=1}^{N+1} \epsilon \left[ p_n \frac{q_n - q_{n-1}}{\epsilon} - \frac{1}{2} \left( H(p_n, q_n, t_n) + H(p_n, q_{n-1}, t_n) \right) \right] \;. \end{aligned} \tag{4}$$



Figur 4: Schematisch werden die Pfade zwischen den Punkten $(t_a, q_a)$ und $(t_b, q_b)$ angedeutet. Die Endpunkte $q(t_a) = q_a$ und $q(t_b) = q_b$ sind fixiert. An den diskreten Zeitpunkten $t = t_1$ bis $t = t_N$ können die generalisierten Koordinaten $q_i$ jedoch alle Werte annehmen.

Im geforderten Limes $N \to \infty$ oder äquivalent $\epsilon \to 0$ mit der zusätzlichen Bedingung $(N+1)\epsilon = t_b - t_a = T$ repräsentiert die Funktion (4) immer besser das ursprüngliche Funktional.

Zusammen mit den Integrationen über die Stützstellen führt dies zu der folgenden *Definition* des Propagators und der Summe über alle Pfade

$$\begin{aligned}
G(q_b, t_b; q_a, t_a) &\equiv \sum_{\substack{\text{alle Pfade von} \\ q_a \text{ nach } q_b}} \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\mathcal{A}[p,q]\right\} \\
&\equiv \lim_{\substack{N\to\infty \\ \epsilon\to 0}} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{n=1}^{N} dq_n \, \frac{dp_n}{2\pi\hbar} \, \frac{dp_{N+1}}{2\pi\hbar} \\
&\quad \times \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\sum_{n=1}^{N+1} \epsilon \left[p_n \frac{q_n - q_{n-1}}{\epsilon} - \frac{1}{2}\left(H(p_n, q_n, t_n) + H(p_n, q_{n-1}, t_n)\right)\right]\right\} \\
&\equiv \int \mathcal{D}q \, \frac{\mathcal{D}p}{2\pi\hbar} \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\mathcal{A}[p,q]\right\} \, .
\end{aligned} \tag{5}$$

Wir haben dabei die abkürzende Bezeichnung

$$\mathcal{D}q = \lim_{\substack{N\to\infty \\ \epsilon\to 0}} \prod_{n=1}^{N} dq_n \tag{6}$$

eingeführt. Analoges gilt für $\mathcal{D}p$. Wir integrieren über alle Phasenraumvolumenelemente $dq_n \, dp_n$ gemessen in Einheiten des Planckschen Wirkungsquantums $h = 2\pi\hbar$. Die zusätzliche Integration über $p_{N+1}$ sagt aus, daß auch über alle Endimpulse bei $t = t_{N+1}$ integriert werden muß.

# Die Wirkung in der klassischen Mechanik

Wir beginnen unsere formale Studien mit einem Rückblick auf die klassische Mechanik. Hier haben wir gelernt, daß wir ein physikalisches System durch eine Lagrange - Funktion

$$L \;=\; L(q, \dot{q}, t) \tag{7}$$

mit den generalisierten Koordinaten $q = q(t)$ und den generalisierten Geschwindigkeiten $\dot{q} = \dot{q}(t)$ beschreiben können. $q$ kann dabei synonym für einen Satz von $N$ Variablen $q_i$ mit $i = 1, \ldots, N$ stehen.

Eine zentrale Rolle im Pfadintegral - Formalismus nimmt die Wirkung $\mathcal{A}$ ein, die als Zeitintegral über die Lagrange - Funktion zwischen den Zeitpunkten $t_a$ und $t_b$ definiert ist,

$$\mathcal{A} \;=\; \int_{t_a}^{t_b} L(q(t), \dot{q}(t), t)\, dt \;. \tag{8}$$

Die Gesetzmäßigkeiten für die Dynamik des Systems folgen aus dem Hamilton - Prinzip. Es besagt, daß die Wirkung $\mathcal{A}$ für den klassischen physikalischen Weg

$$q_{kl} \;=\; q_{kl}(t) \tag{9}$$

extremal werden muß. Dies bedeutet, daß für alle infinitesimalen Variationen $\delta q(t)$ mit festgehaltenen Endpunkten

$$\begin{aligned} \delta q(t_a) \;&\equiv\; 0 \qquad \text{mit} \qquad q(t_a) \;\equiv\; q_a \;, \\ \delta q(t_b) \;&\equiv\; 0 \qquad \text{mit} \qquad q(t_b) \;\equiv\; q_b \;, \end{aligned} \tag{10}$$

die Variation $\delta\mathcal{A}$ des Wirkungsfunktionals $\mathcal{A}[q(t)]$ verschwinden muß,

$$\delta\mathcal{A} \;=\; 0 \;. \tag{11}$$

Wir führen die Variation aus. Es ist

$$\delta\mathcal{A} \;=\; \mathcal{A}[q + \delta q] - \mathcal{A}[q] \;=\; 0 \;. \tag{12}$$

Wir setzen die Definition (8) ein

$$\begin{aligned} \mathcal{A}[q + \delta q] \;&=\; \int_{t_a}^{t_b} L(\dot{q} + \delta\dot{q},\, q + \delta q, t)\, dt \\ &=\; \int_{t_a}^{t_b} \left[ L(\dot{q},\, q,\, t) + \delta\dot{q}\, \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} + \delta q\, \frac{\partial L}{\partial q} \right]\, dt \\ &=\; \mathcal{A}[q] + \int_{t_a}^{t_b} \left[ \delta\dot{q}\, \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} + \delta q\, \frac{\partial L}{\partial q} \right]\, dt \;. \end{aligned} \tag{13}$$

Nach partieller Integration erhalten wir bekanntermaßen

$$\mathcal{A}[q + \delta q] - \mathcal{A}[q] \;=\; \delta q\, \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \bigg|_{t_a}^{t_b} - \delta q \int_{t_a}^{t_b} \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} \right]\, dt \;. \tag{14}$$

Der erste Term der rechten Seite ist null, da $\delta q$ an den Endpunkten $q_a$ und $q_b$ verschwindet. Aus dem Hamilton - Prinzip folgt so die Euler - Lagrange - Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} \;=\; 0 \; . \tag{15}$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung bestimmt den klassischen Pfad $q(t) \;=\; q_{kl}(t)$. Der Ausdruck

$$\frac{\delta \mathcal{A}}{\delta q} \;=\; -\left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q}\right\} \tag{16}$$

stellt die Funktionalableitung der Wirkung $\mathcal{A}$ in bezug auf den Weg $q$ dar.

In der klassischen Mechanik ist also die Form des Wirkungsintegrals $\mathcal{A} \;=\; \int L\, dt$ von Interesse, nicht aber unbedingt der Extremwert $\mathcal{A}_{kl}$ selber. Dieses Interesse leitet sich aus der Notwendigkeit ab, die Wirkung auch bezüglich benachbarter Wege $q \;=\; q_{kl} + \delta q$ zu kennen, um den Weg $q_{kl}$ der geringsten Wirkung bestimmen zu können. Wir werden noch sehen, daß in der Quantenmechanik beides – die Form des Wirkungsintegrals und der Wert des Extremums – von Bedeutung sind.

Wir definieren nun den zu $q$ konjugierten Impuls $p$ durch

$$p \;\equiv\; \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \; . \tag{17}$$

Wir erhalten die Hamilton - Funktion durch

$$H(p,q) \;=\; p\dot{q} - L(q,\, \dot{q},\, t) \tag{18}$$

mit $\dot{q} \;=\; \dot{q}(p)$. Die Hamiltonischen Bewegungsgleichungen lauten

$$\begin{aligned} \dot{q}(t) &\;=\; \frac{\partial H}{\partial p} \; , \\ \dot{p}(t) &\;=\; -\frac{\partial H}{\partial q} \; . \end{aligned} \tag{19}$$

Sie können ebenfalls aus dem Extremalprinzip $\delta \mathcal{A}$ gewonnen werden. Dazu muß man die Wirkung durch $p$ und $q$ ausdrücken,

$$\mathcal{A}[q(t),\, p(t)] \;=\; \int_{t_a}^{t_b} \{p(t)\, \dot{q}(t) - H(p(t), q(t), t)\}\; dt \; , \tag{20}$$

mit der Vorschrift, daß sowohl die generalisierten Koordinaten $q$ als auch die generalisierten Impulse $p$ unabhängig voneinander zu variieren sind.

Als erste Übung wollen wir die klassische Wirkung für den harmonischen Oszillator und für das freie Teilchen berechnen. Wir setzen hierbei der Einfachheit wegen $q(t) \;=\; x(t)$.

## Die klassische Wirkung für den harmonischen Oszillator und für das freie Teilchen

Der harmonische Oszillator wird durch die Lagrange-Funktion

$$L = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - \frac{m\omega^2}{2}x^2 \tag{21}$$

beschrieben. Die Lagrange-Funktion für ein freies Teilchen – ebenso wie die korrespondierende Bewegungsgleichung – ergibt sich einfach durch den Grenzübergang $\omega \to 0$,

$$L = \frac{m}{2}\dot{x}^2 \,. \tag{22}$$

Um den klasssischen Pfad $x_{kl}(t)$ für den Fall $\omega \neq 0$ zu erhalten, muß die aus (21) abgeleitete Bewegungsgleichung

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \tag{23}$$

mit den Randwerten

$$x(t_a) = x_a \,, \quad x(t_b) = x_b \tag{24}$$

integriert werden. Die beiden freien Konstanten der allgemeinen Lösung

$$x(t) = c_1 \sin\omega t + c_2 \cos\omega t \tag{25}$$

werden durch die Randbedingungen (24) folgendermaßen festgelegt

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{x_b \cos\omega t_a - x_a \cos\omega t_b}{\sin\omega T} \,, \\ c_2 &= \frac{x_a \sin\omega t_b - x_b \sin\omega t_a}{\sin\omega T} \,, \end{aligned} \tag{26}$$

mit

$$T = t_b - t_a \,. \tag{27}$$

Dies kann leicht durch Einsetzen der Koeffizienten $c_1$ und $c_2$ in die allgemeine Lösung (25) unter Verwendung der trigonometrischen Relation

$$\sin\omega T = \sin\omega t_b \cos\omega t_a - \cos\omega t_b \sin\omega t_a \tag{28}$$

geprüft werden.

Die Berechnung der Wirkung für den klassischen Pfad

$$\mathcal{A}_{kl} = \int_{t_a}^{t_b} L \, dt \tag{29}$$

wird durch eine partielle Integration wesentlich vereinfacht

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{kl} &= \int_{t_a}^{t_b} \left\{ \frac{m}{2}\dot{x}_{kl}^2 - \frac{m}{2}\omega^2 x_{kl}^2 \right\} dt \\ &= \frac{m}{2} x_{kl}\, \dot{x}_{kl} \Big|_{t_a}^{t_b} - \frac{m}{2}\int_{t_a}^{t_b} x_{kl} \left\{ \ddot{x}_{kl} + \omega^2 x_{kl} \right\} dt \\ &= \frac{m}{2} \left\{ x_{kl}(t_b)\, \dot{x}_{kl}(t_b) - x_{kl}(t_a)\, \dot{x}_{kl}(t_a) \right\} \,. \end{aligned} \tag{30}$$

In der zweiten Zeile verschwindet das Integral aufgrund der Bewegungsgleichung (23). Wir schreiben den Ausdruck für den klassischen Pfad um

$$\begin{aligned} x_{kl}(t) &= \{x_b\,(\cos\omega t_a\ \sin\omega t - \sin\omega t_a\ \cos\omega t)/\sin\omega T \\ &\quad + x_a\,(\sin\omega t_b\ \cos\omega t - \cos\omega t_b\ \sin\omega t)/\sin\omega T\} \\ &= \{x_b \sin\omega(t-t_a) + x_a \sin\omega(t_b - t)\}\,/\sin\omega T\ . \end{aligned} \tag{31}$$

Damit haben wir auch

$$\dot{x}_{kl}(t) = \omega\,\{x_b \cos\omega(t-t_a) - x_a \cos\omega(t_b - t)\}\,/\sin\omega T\ . \tag{32}$$

Diese Ausdrücke setzen wir in die Wirkung für den klassischen Pfad ein

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{kl} &= \frac{m}{2}\,\{x_b\,\omega(x_b\cos\omega T - x_a) - x_a\,\omega(x_b - x_a\cos\omega T)\}\,/\sin\omega T \\ &= \frac{m\omega}{2\sin\omega T}\left\{(x_a^2 + x_b^2)\cos\omega T - 2x_a x_b\right\}\ . \end{aligned} \tag{33}$$

Die Wirkung für das freie Teilchens folgt nun sofort durch den Grenzübergang $\omega \to 0$

$$\mathcal{A}_{kl} = \frac{m}{2}\frac{(x_b - x_a)^2}{T}\ . \tag{34}$$

Man beachte, daß bei der Wirkung für den harmonischen Oszillator im Gegensatz zu der des freien Teilchens die Orte absolut eingehen, da natürlich $x = 0$ ausgezeichnet ist.

## Quantenfluktuationen und die Summe über alle Pfade

Bei der Bestimmung des klassischen Pfades unter Verwendung des Variationsprinzips hatten wir rein formal die Wirkung entlang verschiedener Pfade in der Umgebung des klassischen Pfades miteinander verglichen. Der klassische Pfad folgte dann aus der Forderung eines Extremums für die Wirkung.

Interpretiert man die klassische Beschreibung in etwas überzogener Weise anschaulich, so scheint die Natur fähig zu sein, verschiedene Wege bezüglich ihrer Wirkung miteinander vergleichen zu können, um schließlich für das klassische System den Pfad extremaler Wirkung auszuwählen. Diese Interpretation wird etwas verständlicher, wenn man von dem quantenmechanischen Sachverhalt ausgeht, daß jedes physikalische System Quantenfluktuationen unterworfen ist. Diese Fluktuationen sind im klassischen Limes unbeobachtbar, da sie sich gerade zu einer Beschreibung durch den klassischen Pfad mitteln. Eine solche, mit der Mechanik offensichtlich konsistente Vorstellung ist jedoch nur dann wirklich gerechtfertigt, wenn sie auch quantenmechanische Phänomene erklärt, die einer rein klassischen Beschreibung nicht zugänglich sind.

Um dies etwas ausführlicher zu erläutern, betrachten wir die Elektronenbeugung am Doppelspalt. Entsprechend unseren Kenntnissen aus der Quantenmechanik, können Teilchen durchaus auch Welleneigenschaften zeigen, die mit den mechanischen Größen Energie und Impuls durch die De Broglie - Beziehungen verknüpft sind.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{p} &= \hbar \mathrm{k} \, , \\ E &= \hbar \omega \, . \end{aligned} \tag{35}$$

Dabei ist $\hbar$ die Plancksche Konstante

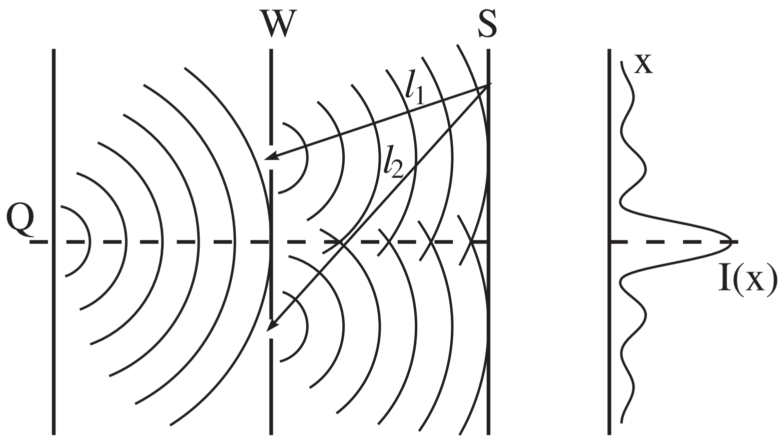
$$\hbar = 6.582173 \times 10^{-22} \text{ MeV s} \, . \tag{36}$$

Unter speziellen experimentellen Bedingungen zeigen Elektronen also ein ähnliches Verhalten wie Licht. Für Wellenphänomene ist aber die Bedeutung verschiedener Wege aus der Optik bekannt. Trifft eine Welle auf eine undurchlässige Wand $W$ mit zwei Öffnungen, so zeigt die Intensität $I$ auf einem Beobachtungsschirm $S$ hinter der Wand $W$ die aus der Quantenmechanik bekannten Interferenzbilder. Die schematische Versuchsanordnung und die dazugehörige Intensität $I(x)$ ist qualitativ in Figur 1 angegeben.
Ein entscheidentes Ingredienz der Quantentheorie ist, daß die Gesetze für die Kombinationen von Wahrscheinlichkeiten nicht der klassischen Wahrscheinlichkeitstheorie entsprechen. Beim Doppelspaltexperiment gilt für die Gesamtwahrscheinlichkeit $P$ dafür, daß das Elektron ausgehend von der Quelle $Q$ und nach Passieren der beiden Öffnungen in der Wand $W$ am Ort $x$ auf dem Schirm $S$ auftrifft,

$$P \neq P_1 + P_2 \, , \tag{37}$$

wobei $P_{1(2)}$ die Wahrscheinlichkeit für den selben Prozeß bezeichnet, wenn das Loch 2(1) geschlossen wird. Aus der Quantenmechanik wissen wir, daß wir die Wahrscheinlichkeiten mit Hilfe der Wahrscheinlichkeitsamplituden ermitteln können. Es gilt

$$P = |\phi|^2 \tag{38}$$




Figur 1: Schematische Darstellung des Doppelspaltversuchs und der resultierenden Intensität $I(x)$ auf dem Schirm $S$.

mit

$$\phi \;=\; \phi_1 + \phi_2 \;. \tag{39}$$

Ebenso ist

$$\begin{aligned} P_1 &= |\phi_1|^2 \;, \\ P_2 &= |\phi_2|^2 \;. \end{aligned} \tag{40}$$

Offensichtlich ist aber generell

$$P \;=\; |\phi_1 + \phi_2|^2 \;\neq\; P_1 + P_2 \;. \tag{41}$$

Ebenso wissen wir aus der elementaren Darstellung der Quantenmechanik, daß die Amplitude $\phi$ proportional ist zu

$$\phi \;\sim\; e^{ikl_1} + e^{ikl_2} \;, \tag{42}$$

wobei die geometrische Bedeutung der Abstände $l_1$ und $l_2$ aus der Figur 3 entnommen werden kann. Die Amplitude auf dem Schirm ergibt sich also, wenn man den Wegen durch die Öffnung $i$ mit $i\;=\;1,\;2$ die Amplitude $e^{ikl_i}$ zuordnet und über die beiden Möglichkeiten summiert.

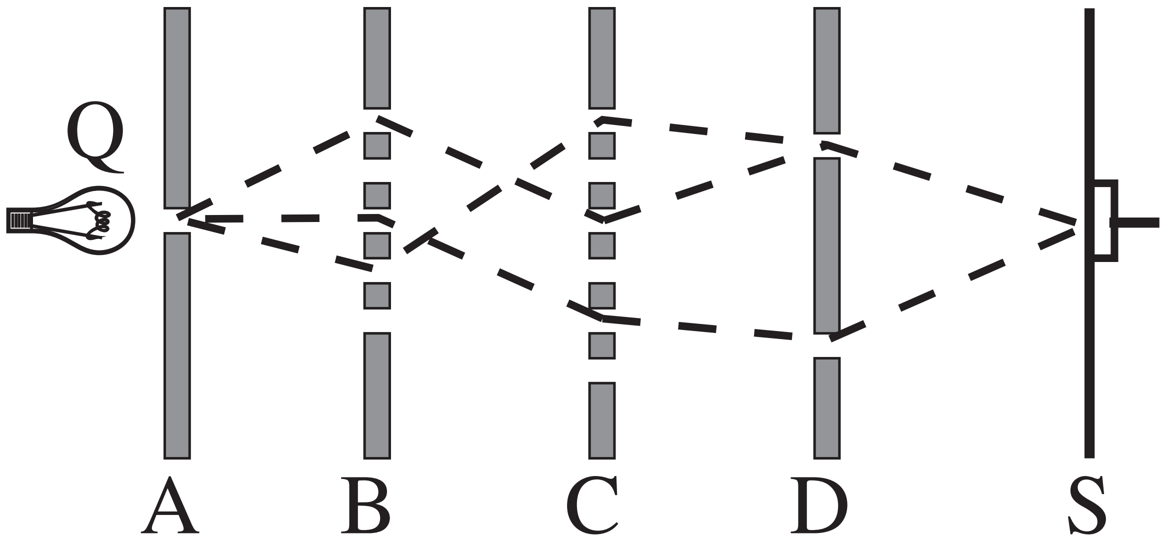
Um den Doppelspaltversuch zu verallgemeinern, denken wir uns den Raum zwischen der Emissionsquelle $Q$ und dem Detektorschirm $S$ mit mehreren undurchlässigen Wänden aufgefüllt. Jede einzelne Wand soll eine gewisse Anzahl von Löchern aufweisen. Wollen wir auch hier wieder die Gesamtwahrscheinlichkeit $P(x)$ berechnen, so müssen wir für jede einzelne Möglichkeit $i$ des Weges des Elektrons die zugehörige Amplitude $\phi_i$ ermitteln. Es folgt dann

$$P = \left| \sum_i \phi_i \right|^2 . \tag{43}$$

Wir superponieren also die Amplituden für die einzelnen Wege und bilden schließlich das Betragsquadrat. Figur 2 zeigt schematisch verschiedene Pfade zwischen zwei vorgegebenen Punkten in einem gegitterten Raum.

Dieses Gedankenexperiment läßt sich weiter verallgemeinern, indem wir uns den Raum vollständig gegittert vorstellen. Wir haben nun über eine unendliche Vielzahl von Wegen $\mathbf{r}(t)$ des Elektrons zu summieren. Die Gesamtamplitude erhält man in Erweiterung der theoretischen Beschreibung des Doppelspaltversuchs dadurch, daß man jedem Weg eine Einzelamplitude zuordnet und wieder über alle Alternativen des Weges summiert. Wir müssen nun eine Regel angeben, wie die verschiedenen Pfade zur Gesamtamplitude beitragen. Bei der Summation der einzelnen Amplituden trägt jede mit dem selben Betrag aber mit unterschiedlicher Phase bei. Diese Behauptung muß natürlich noch verifiziert werden. Es gilt

$$\phi = \sum_{\text{alle Pfade } q} \phi^{\text{Einzel}}[q] . \tag{44}$$




Figur 2: Schematische Darstellung drei alternativer Wege durch die Öffnungen der Wände $A$, $B$, $C$, $D$.

Das Hamiltonsche Variationsprinzip läßt uns vermuten, daß die Einzelamplituden durch die Wirkung der entsprechenden Pfade bestimmt sind. In der Wellentheorie ist die Amplitude durch den Ausdruck $e^{ikx} = e^{ipx/\hbar}$ bestimmt. Er hat die Form $e^{i\,\text{Wirkung}/\hbar}$.

Da die Amplitude vom *gesamten* Pfad abhängen muß, ist es naheliegend, daß klassische Wirkungsfunktional $\mathcal{A}[q(t)]$ zu benutzen und jedem Weg $q(t)$ eine Amplitude

$$\phi^{\text{Einzel}}[q] \;=\; e^{i\,\mathcal{A}[q]/\hbar} \tag{45}$$

zuzuordnen. Die Gesamtamplitude $\phi$ ist dann gegeben durch

$$\phi \;=\; \sum_{\text{alle Pfade } q} e^{i\,\mathcal{A}[q]/\hbar}\,. \tag{46}$$

Daß dieser Ausdruck im klassischen Limes $\hbar \to 0$ mit der Mechanik konsistent ist, sieht man qualitativ sehr leicht ein: Für Wirkungen $\mathcal{A}$ groß verglichen mit $\hbar$ ändert sich die Phase $\mathcal{A}/\hbar$ bei infinitesimalen Variationen von $q(t)$ im allgemeinen sehr stark, so daß sich die Beiträge gegeneinander auslöschen werden. Es liegt eine destruktive Interferenz vor. Eine Ausnahme macht nur die Umgebung des *klassischen* Pfades, da hier die Wirkung $\mathcal{A}$ stationär ist und somit die Amplituden aller benachbarten Wege konstruktiv interferieren können.

Die gesamte Übergangsamplitude $\phi$, die wir auch Propagator nennen, hängt offensichtlich davon ab, wann und wo das Teilchen gestartet ist, und wann und wo wir die Wahrscheinlichkeit, die durch das Betragsquadrat der Amplitude bestimmt ist, beobachten. Diese Abhängigkeit von den Anfangs- und Endpunkten bringen wir durch die folgende Notation explizit zum Ausdruck

$$G(q_b, t_b; q_a, t_a) \;\equiv\; \phi \;=\; \sum_{\text{alle Pfade } q} e^{i\,\mathcal{A}[q]/\hbar}\,. \tag{47}$$

Die Vorschrift "Summe über alle Pfade" müssen wir mathematisch noch genauer fassen. Dabei werden wir von einer Formulierung im Phasenraum, also dem Produktraum aus Ortsraum und Impulsraum, ausgehen.

## Repetitorium zur Greenschen Funktion in der Quantenmechanik

Die Grundgleichung der Quantenmechanik ist die Schrödinger - Gleichung

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\mathbf{r}, t) \;=\; H \psi(\mathbf{r}, t) \; . \tag{48}$$

Betrachten wir die Bewegung eines Teilchens mit der Masse $m$ in einem Potential $V(\mathbf{r}, t)$, so gilt

$$H \;=\; H_0 + V(\mathbf{r}, t) \tag{49}$$

mit

$$H_0 \;=\; -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \; . \tag{50}$$

Die Schrödinger - Gleichung ist eine Differentialgleichung erster Ordnung in der Zeit. Kennen wir also die Wellenfunktion $\psi(\mathbf{r}, t)$ zu einer speziellen Zeit $t$ und für alle $\mathbf{r}$, so bestimmt dies eindeutig die Wellenfunktion für alle $\mathbf{r}$ und alle anderen Zeiten $t'$. Da die Schrödinger - Gleichung außerdem linear in $\psi$ ist, gilt das Superpositionsprinzip sowie ein linearer Zusammenhang zwischen den Wellenfunktionen zu verschiedenen Zeiten, beispielsweise zwischen $\psi(\mathbf{r}, t')$ und $\psi(\mathbf{r}, t)$. Dies impliziert weiter, daß $\psi$ eine homogene Integralgleichung der Form

$$\psi(\mathbf{r}', t') \;=\; \int G(\mathbf{r}', t'; \mathbf{r}, t) \, \psi(\mathbf{r}, t) \, d^3r \tag{51}$$

befriedigt. Hierbei erstreckt sich die Integration über den ganzen Raum.

Die Gleichung (51) dient gleichzeitig zur Definition der Funktion $G$. $G$ nennen wir die zum Hamilton - Operator $H$ korrespondierende Greensche Funktion. Mit Hilfe der Greenschen Funktion $G$ und dem Anfangswert $\psi(\mathbf{r}, t)$ ist es uns möglich, die Wellenfunktion an allen Raumpunkten $\mathbf{r}'$ und zu allen Zeiten $t'$ zu bestimmen.

In den folgenden Betrachtungen beschränken wir uns zunächst auf die sogenannte retardierte Greensche Funktion, die der einschränkenden Bedingung

$$G(\mathbf{r}', t'; \mathbf{r}, t) \;=\; 0 \qquad \text{für} \qquad t' \;<\; t \tag{52}$$

unterworfen ist.

Um etwas vertrauter zu werden mit der Greenschen Funktion und für spätere Anwendungen ermitteln wir zunächst im eindimensionalen Fall die Eigenfunktionsdarstellung der Greenschen Funktion.

## Die Eigenfunktionsdarstellung der Greenschen Funktion

Wir wollen nun eine weitere wichtige Relation bezüglich der Greenschen Funktion ableiten, die für einige nachfolgende Rechnungen von Bedeutung ist. Wir betrachten zeitunabhängige Hamilton-Operatoren, d.h., es gilt die stationäre Gleichung

$$H\phi_n \;=\; E_n\,\phi_n \quad , \tag{53}$$

und wir können die zeitabhängige Wellenfunktion $\psi_n(x,t)$ ansetzen als

$$\psi_n(x,t) \;=\; e^{-(i/\hbar)E_n t}\,\phi_n(x)\,. \tag{54}$$

Die rein ortsabhängigen Wellenfunktionen $\phi_n(x)$ seien vollständig und orthonormal

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi_m^*(x)\,\phi_n(x)\,dx \;=\; \delta_{mn}\,. \tag{55}$$

In dem durch die Basisfunktionen $\phi_n(x)$ aufgespannten Hilbert-Raum können wir jede Funktion $f(x)$ darstellen als Superposition der Basisfunktionen

$$f(x) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} a_n\,\phi_n(x)\,. \tag{56}$$

Die Entwicklungskoeffizienten $a_n$ lassen sich leicht bestimmen. Wir bilden

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi_m^*(x)\,f(x)\,dx \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-\infty}^{\infty} \phi_m^*(x)\,\phi_n(x)\,dx \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} a_n\,\delta_{mn} \;=\; a_m\,. \tag{57}$$

Somit folgt zusammengefaßt

$$a_n \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} \phi_n^*(x)\,f(x)\,dx\;. \tag{58}$$

Setzen wir diesen Ausdruck in (56) ein, so führt dies offensichtlich auf die Idendität

$$f(x) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x) \int_{-\infty}^{\infty} \phi_n^*(y)\,f(y)\,dy \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x)\,\phi_n^*(y)\right] f(y)\,dy\,. \tag{59}$$

Durch diese einfachen Umformungen haben wir eine Darstellung der $\delta$-Funktion gewonnen

$$\delta(x-y) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x)\,\phi_n^*(y)\,, \tag{60}$$

was natürlich durch die angenommene Vollständigkeit der Basisfunktionen bereits impliziert wurde.

Wir können nun die Greensche Funktion durch die Basisfunktionen $\phi_n$ ausdrücken. Zum Zeitpunkt $t_1$ gilt

$$f(x) \;\equiv\; \Psi(x,t_1) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} c_n\,e^{-(i/\hbar)E_n t_1}\,\phi_n(x) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} a_n\,\phi_n(x) \tag{61}$$

für eine Lösung der Schrödinger-Gleichung. Es folgt

$$c_n \;=\; a_n\,e^{(i/\hbar)E_n t_1}\,. \tag{62}$$

Zum Zeitpunkt $t_2 > t_1$ gilt analog

$$\Psi(x,t_2) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \, e^{-(i/\hbar)E_n t_2} \, \phi_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \, e^{(i/\hbar)E_n(t_1-t_2)} \, \phi_n(x) \,. \tag{63}$$

Nun nutzen wir die Relation (58) für $a_n$ aus. Wir erhalten

$$\begin{aligned} \Psi(x,t_2) &= \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x) \, e^{(-i/\hbar)E_n(t_2-t_1)} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_n^*(y) \, f(y) \, dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x) \, \phi_n^*(y) \, e^{(-i/\hbar)E_n(t_2-t_1)} \, f(y) \, dy \,. \end{aligned} \tag{64}$$

Dies vergleichen wir mit der Definitionsgleichung der Greenschen Funktion

$$\Psi(x,t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x,t_2;y,t_1) \, f(y) \, dy \tag{65}$$

und ermitteln schließlich die Eigenfunktionsdarstellung für den Integralkern

$$G(x_2,t_2;x_1,t_1) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x_2) \, \phi_n^*(x_1) \, e^{(-i/\hbar)E_n(t_2-t_1)} \quad \text{für} \quad t_2 > t_1 \,. \tag{66}$$

## Das Anordnungsproblem

Eine besondere Willkür in der Definition der Pfadintegration besteht in der Behandlung der Hamilton–Funktion $H(p,q,t)$ bei der Zeitintegration im Argument der Exponentialfunktion. Hier wurde im Prozeß der Diskretisierung die einfachste, symmetrische Form ("äußere Mittelwertbildung") gewählt. Es sind natürlich noch andere Möglichkeiten der diskreten Darstellung der Zeitintegration denkbar. Allgemein betrachten wir die approximative Darstellung

$$\int_{t_a}^{t_b} H(p(t),q(t),t)\,dt \;\longrightarrow\; \sum_{i=1}^{N+1} \epsilon \cdot F_H \;, \tag{67}$$

die im Grenzfall $N \to \infty$ mit der Riemann–Definition des Zeitintegrals übereinstimmen soll. Im multiplikativen Faktor $F_H$ des Zeitintervalls $\epsilon$ kann beispielsweise die Hamilton–Funktion in der folgenden Form auftreten:

$$\begin{aligned}
a)\quad F_H &= \frac{H(p_i,q_i,t_i)+H(p_i,q_{i-1},t_i)}{2} : \quad \text{äußere Mittelwertbildung} \;, \\
b)\quad F_H &= H(p_i,\tfrac{1}{2}(q_i+q_{i-1}),t_i) : \quad \text{innere Mittelwertbildung} \;, \\
c)\quad F_H &= H(p_i,q_i,t_i) : \quad \text{rechtsseitiger Wert} \;, \\
d)\quad F_H &= H(p_i,q_{i-1},t_i) : \quad \text{linksseitiger Wert} \;.
\end{aligned}$$

Die verschiedenen Werte der Hamilton–Funktion bei der Zeitintegration zum Zeitpunkt $t_i$ sind in Figur 5 angegeben. Solange keine Produkte zwischen $q$ und $p$ auftreten — dies ist zum Beispiel bei der Hamilton–Funktion $H = T(p) + V(q,t)$ der Fall — liefern alle Approximationsformen identische Ergebnisse. Es treten dabei nur zusätzliche Phasenfaktoren der Gestalt $\exp\{i\epsilon(q_a+q_b)\}$ auf, die aber im Limes $\epsilon \to 0$ ihre Bedeutung verlieren.
Daß diese Unterscheidungen aber nicht immer unwichtig sind, zeigt die folgende Modell–Hamilton–Funktion, in der ein Produkt von $p$ und $q$ vorliegt. Als einfachstes Beispiel wählen wir

$$H(p,q) \;=\; p\,q/\tau \;, \tag{68}$$

wobei $\tau$ eine Konstante ist. Wir wollen nun das folgende Pfadintegral auswerten

$$G(q_b,t_b;q_a,t_a) \;=\; \int \mathcal{D}q\,\frac{\mathcal{D}p}{2\pi\hbar}\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\mathcal{A}\right\} \tag{69}$$

mit der speziellen Wirkung für die Hamilton–Funktion (68)

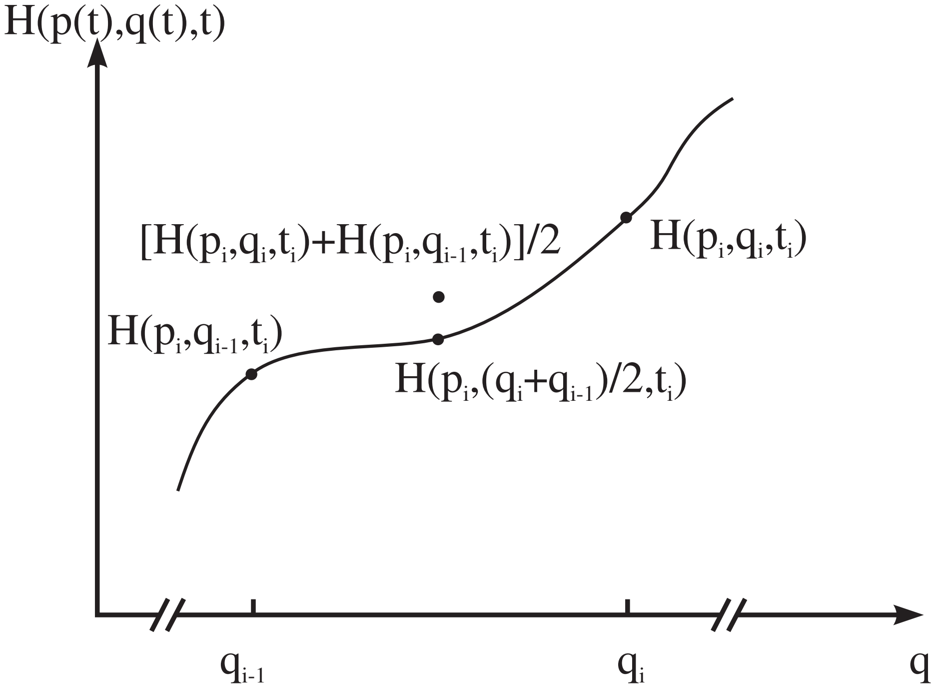
$$\mathcal{A} \;=\; \int_{t_a}^{t_b} (p\dot{q} - pq/\tau)\,dt \;. \tag{70}$$

Es sei nun

$$J \;=\; \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dq_a\,G(q_b,t_b;q_a,t_a)\,f(q_a) \;. \tag{71}$$

$J$ wird eingeführt, da die Ausführung der Pfadintegration in diesem Modellfall eine $\delta$-Funktion ergibt. $f$ sei eine beliebige Testfunktion. Wir setzen wieder

$$\epsilon \;=\; \frac{t_b - t_a}{N+1} \;=\; \frac{T}{N+1} \;. \tag{72}$$




Figur 5: Die Hamilton–Funktion $H(p(t), q(t), t)$ ist als Funktion der generalisierten Koordinate $q$ schematisch dargestellt (durchgezogene Linie). Verschiedene Approximationen bei der Zeitintegration im Pfadintegral sind durch die Kreuze angegeben.

Dies führt auf

$$\int \mathcal{D}q \, \frac{\mathcal{D}p}{2\pi\hbar} \;\longrightarrow\; \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \ldots \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \prod_{i=1}^{N} dq_i \, \frac{dp_i}{2\pi\hbar} \, \frac{dp_{N+1}}{2\pi\hbar} \, . \tag{73}$$

In den verschiedenen Formen der Diskretisierung folgt dann

$$\mathcal{A} \;\longrightarrow\; \sum_{i=1}^{N+1} \left\{ p_i \left( q_i - q_{i-1} \right) - \epsilon \, p_i \, \frac{q_i + q_{i-1}}{2} / \tau \right\}$$

für die Fälle $a$) und $b$) ,

$$\mathcal{A} \;\longrightarrow\; \sum_{i=1}^{N+1} \left\{ p_i \left( q_i - q_{i-1} \right) - \epsilon \, p_i \, q_i / \tau \right\}$$

für den Fall $c$) ,

$$\mathcal{A} \;\longrightarrow\; \sum_{i=1}^{N+1} \left\{ p_i \left( q_i - q_{i-1} \right) - \epsilon \, p_i \, q_{i-1} / \tau \right\}$$

für den Fall $d$) .

Wir verwenden im folgenden die Darstellung

$$\delta(q_1 - q_2) \;=\; \frac{1}{2\pi\hbar} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} p(q_1 - q_2) \right\} \, dp \tag{74}$$

der $\delta$-Funktion sowie die elementaren Relationen

$$\begin{aligned} \int \delta(a-x)\,\delta(x-b)\,dx &= \delta(a-b)\;, \\ \delta(ax) &= \frac{1}{|a|}\,\delta(x)\;. \end{aligned} \tag{75}$$

Ebenso werden wir die Exponentialfunktion repräsentieren durch

$$e^{T/\tau} = \lim_{N\to\infty} (1+\epsilon/\tau)^{N+1} = \lim_{N\to\infty} \left(1+\frac{T}{(N+1)\tau}\right)^{N+1} . \tag{76}$$

Nach der Integration haben wir den Limes $N \to \infty$ auszuführen. Für die Fälle $a)$ und $b)$ bekommen wir

$$\begin{aligned} &\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \prod_{i=1}^{N} dq_i\,\frac{dp_i}{2\pi\hbar}\,\frac{dp_{N+1}}{2\pi\hbar}\,\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\sum_{i=1}^{N+1} p_i\left([1-\tfrac{1}{2}\epsilon/\tau]q_i - [1+\tfrac{1}{2}\epsilon/\tau]q_{i-1}\right)\right\} \\ &= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \prod_{i=1}^{N} dq_i\;\delta([1-\tfrac{1}{2}\epsilon/\tau]q_1 - [1+\tfrac{1}{2}\epsilon/\tau]q_0)\cdot\delta(\ldots)\cdots \\ &\qquad \cdots\delta([1-\tfrac{1}{2}\epsilon/\tau]q_{N+1} - [1+\tfrac{1}{2}\epsilon/\tau]q_N) \\ &= \delta\left([1-\tfrac{1}{2}\epsilon/\tau]^{N+1}\,q_{N+1} - [1+\tfrac{1}{2}\epsilon/\tau]^{N+1}\,q_0\right) \\ &= \delta\left(q_{N+1} - \frac{[1+\frac{1}{2}\epsilon/\tau]^{N+1}}{[1-\frac{1}{2}\epsilon/\tau]^{N+1}}\,q_0\right)\frac{1}{[1-\frac{1}{2}\epsilon/\tau]^{N+1}} \\ &\overset{N\to\infty}{=} \delta\left(q_b - \frac{e^{T/2\tau}}{e^{-T/2\tau}}\,q_a\right)\frac{1}{e^{-T/2\tau}}\;. \end{aligned} \tag{77}$$

Somit erhalten wir schließlich

$$J_{a,b} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dq_a\,\delta\left(q_b - e^{T/\tau}\,q_a\right)\,e^{T/2\tau}\,f(q_a) = e^{-T/2\tau}\,f\left(e^{-T/\tau}\,q_b\right)\;. \tag{78}$$

Bei der linksseitigen Beschreibung folgt

$$\begin{aligned} &\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \prod_{i=1}^{N} dq_i\,\frac{dp_i}{2\pi\hbar}\,\frac{dp_{N+1}}{2\pi\hbar}\,\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\sum_{i=1}^{N+1} p_i\left([1-\epsilon/\tau]q_i - q_{i-1}\right)\right\} \\ &= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \prod_{i=1}^{N} dq_i\;\delta([1-\epsilon/\tau]q_1 - q_0)\cdot\delta([1-\epsilon/\tau]q_2 - q_1)\cdots \\ &\qquad \cdots\delta([1-\epsilon/\tau]q_N - q_{N-1})\cdot\delta([1-\epsilon/\tau]q_{N+1} - q_N) \\ &= \delta\left([1-\epsilon/\tau]^{N+1}q_{N+1} - q_0\right) \\ &\overset{N\to\infty}{=} \delta\left(e^{-T/\tau}\,q_b - q_a\right)\;. \end{aligned} \tag{79}$$

Somit bekommen wir

$$J_c = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dq_a\,\delta\left(e^{-T/\tau}\,q_b - q_a\right)\,f(q_a) = f\left(e^{-T/\tau}\,q_b\right)\;. \tag{80}$$

Bei der rechtsseitigen Beschreibung folgt

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \prod_{i=1}^{N} dq_i \, \frac{dp_i}{2\pi\hbar} \, \frac{dp_{N+1}}{2\pi\hbar} \, \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} \sum_{i=1}^{N+1} p_i \left( q_i - [1+\epsilon/\tau] q_{i-1} \right) \right\} \\
= \quad & \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \prod_{i=1}^{N} dq_i \; \delta(q_1 - [1+\epsilon/\tau] q_0) \cdot \delta(q_2 - [1+\epsilon/\tau] q_1) \cdots \\
& \qquad \cdots \delta(q_N - [1+\epsilon/\tau] q_{N-1}) \cdot \delta(q_{N+1} - [1+\epsilon/\tau] q_N) \\
= \quad & \delta\left( q_{N+1} - [1+\epsilon/\tau]^{N+1} q_0 \right) \\
\overset{N \to \infty}{\equiv} \quad & \delta\left( q_b - e^{T/\tau} \, q_a \right) \; . \qquad (81)
\end{aligned}$$

Dies führt uns schließlich auf

$$J_d \;=\; \int\limits_{-\infty}^{\infty} dq_a \, \delta\left( q_b - e^{T/\tau} \, q_a \right) \, f(q_a) \;=\; e^{-T/\tau} \, f\left( e^{-T/\tau} \, q_b \right) \; . \qquad (82)$$

Die Pfadintegrale und damit $J_{a,b},\ J_c,\ J_d$ liefern also für verschiedene Diskretisierungen der Zeitintegration über die Hamilton–Funktion wirklich verschiedene Ergebnisse. Vergleichen wir das Auftreten der Hamilton–Funktion in den einzelnen Diskretisierungsverfahren, so liegt im Fall $a)$ und $b)$ gerade das arithmetische Mittel von den entsprechenden Resultaten der Fälle $c)$ und $d)$ vor. Hingegen ist das Ergebnis $J_{a,b}$ in diesem simplen Beispiel gerade das geometrische Mittel von $J_c$ und $J_d$; also ein Ergebnis, das man intuitiv auch erwarten würde.

Aus der Sicht des Pfadintegral-Formalismus sprechen eigentlich nur Symmetriegründe für die Mittelwertbeschreibung. Natürlich weisen auch unsere Kenntnisse aus der gewöhnlichen Quantenmechanik bezüglich der zu erwartenden Endresultate in diese Richtung.

## Berechnung des Integrals $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx$

$I_1$ bezeichne das bestimmte Integral

$$I_1 \;\equiv\; \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx \;, \tag{83}$$

das von grundlegender Bedeutung ist für alle konkreten Berechnungen im Rahmen der Pfadintegralmethode. Wir verwenden einen Kunstgriff, um $I_1$ zu ermitteln. Man kann (83) auch in einer anderen Variablen ausdrücken

$$I_1 \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\,dy \;. \tag{84}$$

Multiplikation von (83) und (84) ergibt

$$\begin{aligned} I_1^2 \;&=\; \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\,dy \;=\; \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,e^{-y^2}\,dx\,dy \\ &=\; \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy \;. \end{aligned} \tag{85}$$

Dieses Integral erstreckt sich über die gesamte $xy$-Ebene. Zur Integration in der Ebene führen wir Polarkoordinaten $r,\,\theta$ ein. Dann gilt $x^2+y^2 \;=\; r^2$ und das Flächenelement lautet $dF \;=\; dx\,dy \;=\; r\,dr\,d\theta$. Um die gesamte Ebene zu erfassen, läuft $\theta$ von 0 bis $2\pi$ und $r$ von 0 bis $\infty$. Damit folgt

$$I_1^2 \;=\; \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} e^{-r^2}\,r\,dr\,d\theta \;=\; 2\pi\int_0^{\infty} e^{-r^2}\,r\,dr\,, \tag{86}$$

da sich die Integration über $\theta$ natürlich sofort ausführen läßt. Der Faktor $r$ im Integranden vereinfacht nun die Auswertung des Integrals beträchtlich, denn es gilt offensichtlich

$$\frac{d}{dr}\,e^{-r^2} \;=\; -2r\,e^{-r^2}\,. \tag{87}$$

Wir erhalten

$$I_1^2 \;=\; 2\pi\int_0^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)\left[\frac{d}{dr}e^{-r^2}\right]\,dr \;=\; -\pi\;e^{-r^2}\Big|_0^{\infty} \;=\; \pi \tag{88}$$

oder

$$I_1 \;\equiv\; \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx \;=\; \sqrt{\pi}\,. \tag{89}$$

Da $e^{-x^2}$ eine gerade Funktion ist, folgt auch

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx \;=\; 2\int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx \tag{90}$$

und somit

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx \;=\; \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,. \tag{91}$$

## Berechnung des Integrals $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2+bx}\,dx$

Damit das Integral konvergiert muß offensichtlich gelten $a > 0$. Wir betrachten zunächst den Spezialfall $b = 0$. Mit Hilfe der Substitution $u^2 = ax^2$ und $dx = 1/\sqrt{a}\,du$ folgt

$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}\,dx = \frac{1}{\sqrt{a}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2}\,du = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\,, \tag{92}$$

wobei wir das Resultat (89) verwendet haben.

Wir betrachten nun den allgemeinen Ausdruck mit $b \neq 0$ und führen eine quadratische Ergänzung des Exponenten durch

$$-ax^2 + bx = -(ax^2 - bx + \frac{b^2}{4a}) + \frac{b^2}{4a} = -\left(\sqrt{a}x - \frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2 + \frac{b^2}{4a}\,. \tag{93}$$

Nun substituieren wir wieder $u = \sqrt{a}x - b/(2\sqrt{a})$ mit $dx = 1/\sqrt{a}\,du$. Dies führt auf

$$I_3 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2+bx}\,dx = e^{b^2/(4a)}\,\frac{1}{\sqrt{a}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2}\,du = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\,e^{b^2/(4a)}\,. \tag{94}$$

## Berechnung des Integrals $\int_{-\infty}^{\infty} e^{a(x_1-x)^2}\,e^{b(x_2-x)^2}\,dx$

Wir schreiben

$$\begin{aligned} I_4 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{a(x_1-x)^2}\,e^{b\,(x_2-x)^2}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{a(x_1^2-2xx_1+x^2)}\,e^{b\,(x_2^2-2xx_2+x^2)}\,dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{(a+b)x^2-(2ax_1+2bx_2)x+ax_1^2+bx_2^2}\,dx \\ &= e^{ax_1^2+bx_2^2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{(a+b)x^2-(2ax_1+2bx_2)x}\,dx\,. \end{aligned} \tag{95}$$

Das letzte Integral werten wir mit Hilfe der Relation (94) aus. Es folgt

$$\begin{aligned} I_4 &= e^{ax_1^2+bx_2^2}\sqrt{\frac{-\pi}{a+b}}\,\exp\left\{-\frac{(2ax_1+2bx_2)^2}{4(a+b)}\right\} \\ &= \sqrt{\frac{-\pi}{a+b}}\,\exp\left\{\frac{-a^2x_1^2-b^2x_2^2-2abx_1x_2}{a+b}+ax_1^2+bx_2^2\right\} \\ &= \sqrt{\frac{-\pi}{a+b}}\,\exp\left\{\frac{1}{a+b}ab(x_1^2+x_2^2-2x_1x_2)\right\}\,. \end{aligned} \tag{96}$$

Damit ergibt sich zusammenfassend

$$I_4 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{a(x_1-x)^2}\,e^{b\,(x_2-x)^2}\,dx = \sqrt{\frac{-\pi}{a+b}}\,\exp\left\{\frac{ab}{a+b}(x_1-x_2)^2\right\}\,. \tag{97}$$

## Die Pfadintegraldarstellung des Propagators unter Verwendung der Lagrange-Funktion

Wir wollen nun die Pfadintegraldarstellung unter Einbeziehung der Wirkung im Hamilton–Formalismus zurückführen auf die ursprüngliche Feynman–Formulierung. Dazu betrachten wir ausschließlich Hamilton–Funktionen der Art

$$H(p,q,t) \;=\; \frac{p^2}{2m} + V(q,t)\,, \tag{98}$$

die aber zur Beschreibung sehr vieler physikalischer Systeme geeignet sind.

Es können die $N+1$ Impulsintegrationen explizit ausgeführt werden. Der verbleibende Ausdruck mit nur räumlichen Integrationen stellt die ursprüngliche Feynman–Formulierung für den Propagator $G(q_b,t_b;q_a,t_a)$ dar.

$$\begin{aligned}
G(q_b,t_b;q_a,t_a) \;&=\; \int \mathcal{D}q\,\frac{\mathcal{D}p}{2\pi\hbar}\,\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\int_{t_a}^{t_b}\left[p\,\dot q - H(p,q,t)\right]dt\right\}\\
&=\; \lim_{N\to\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\prod_{i=1}^{N}dq_i\right)\;\left(\prod_{i=1}^{N+1}\frac{dp_i}{2\pi\hbar}\right)\\
&\quad\times\;\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\sum_{i=1}^{N+1}\left[p_i\,(q_i-q_{i-1}) - \frac{p_i^2}{2m}\,\epsilon - V(q_i,t_i)\,\epsilon\right]\right\}\\
&=\; \lim_{N\to\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\prod_{i=1}^{N}dq_i\right)\;\left(\prod_{i=1}^{N+1}\frac{dp_i}{2\pi\hbar}\right)\\
&\quad\times\;\exp\left\{-\frac{i}{\hbar}\sum_{i=1}^{N+1}\frac{\epsilon}{2m}\left[p_i - \frac{m\,(q_i-q_{i-1})}{\epsilon}\right]^2\right\}\\
&\quad\times\;\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\sum_{i=1}^{N+1}\left[\frac{m}{2}\frac{(q_i-q_{i-1})^2}{\epsilon} - V(q_i,t_i)\,\epsilon\right]\right\}\;.
\end{aligned} \tag{99}$$

Die quadratische Ergänzung im Exponenten hat somit $N+1$ separierbare Gauß–Integrale über die Impulse $p_i$ erzeugt.

Wir verwenden nun die Integralbeziehung

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-ia(x-b)^2\right\}\,dx \;=\; \sqrt{\frac{\pi}{ia}}\;. \tag{100}$$

Dies führt uns direkt auf

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dp_i}{2\pi\hbar}\,\exp\left\{-\frac{i\epsilon}{2m\hbar}\,(p_i-\mathrm{const})^2\right\} \;=\; \frac{1}{2\pi\hbar}\left(\frac{m\,2\pi\hbar}{i\epsilon}\right)^{1/2} \;=\; \left(\frac{m}{2\pi i\hbar\epsilon}\right)^{1/2}. \tag{101}$$

Die $N+1$-fache Impulsintegration liefert daher einen Faktor $A^{-(N+1)}$ mit

$$A \;=\; \sqrt{\frac{2\pi i\hbar\epsilon}{m}}\;. \tag{102}$$

Für den Propagator bekommen wir also

$$\begin{aligned}
G(q_b, t_b; q_a, t_a) &= \lim_{N\to\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{A} \left( \prod_{i=1}^{N} \frac{dq_i}{A} \right) \\
&\quad \times \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} \sum_{i=1}^{N+1} \left[ \frac{m}{2} \left( \frac{q_i - q_{i-1}}{\epsilon} \right)^2 - V(q_i, t_i) \right] \epsilon \right\} \\
&\equiv \int \mathcal{D}'q \, \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{t_a}^{t_b} \left[ \frac{m}{2} \dot{q}^2 - V(q,t) \right] dt \right\} \\
&= \int \mathcal{D}'q \, \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{t_a}^{t_b} L(q, \dot{q}, t) \, dt \right\} \; . \qquad (103)
\end{aligned}$$

Dies ist das gewünschte Resultat. Es entspricht der ursprünglichen Feynman-Formulierung des Pfadintegrals. In (103) ist also $\mathcal{D}'q$ in der diskretisierten Version durch

$$\mathcal{D}'q = \lim_{\substack{N\to\infty \\ \epsilon\to 0}} \frac{1}{A} \prod_{i=1}^{N} \frac{dq_i}{A} \qquad (104)$$

zu ersetzen. Der Exponent in der letzten Zeile von (103) ist wieder das klassische Wirkungsfunktional, hier allerdings in der $(q, \dot{q})$-Formulierung mit der Lagrange-Funktion. Während die Phasenraum-Formel für quantitative Berechnungen oftmals flexibler ist, ist die Lagrange–Formulierung für das intuitive Verständnis besser geeignet.

## Die Ableitung der Pfadintegraldarstellung der Greenschen Funktion aus der Schrödinger - Theorie

Feynman hat die Pfadintegrale als Ausgangspunkt benutzt und damit die Quantenmechanik abgeleitet. Man kann aber auch von der Kenntnis der Quantenmechanik ausgehen und die Pfadintegrale ableiten. Wir starten von der Schrödinger - Gleichung. Zur Vereinfachung beschränken wir uns auf eine Dimension im Ortsraum. Dann gilt

$$i\hbar \, \frac{\partial \psi}{\partial t} \; = \; H \, \psi \tag{105}$$

mit dem Hamilton - Operator

$$H \; = \; T + V \; = \; \frac{1}{2m} \, p^2 + V \; = \; -\frac{\hbar^2}{2m} \, \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V \; . \tag{106}$$

Unser Interesse gilt nun dem Propagator oder der Greenschen Funktion. Die Greensche Funktion erfüllt die Gleichung [Schi 68]

$$\left( H_x - i\hbar \, \frac{\partial}{\partial t} \right) G(x,t;y,t_0) \; = \; -i\hbar \, \delta(x-y) \, \delta(t-t_0) \; . \tag{107}$$

Dies wollen wir kurz nachweisen. Einleitend hatten wir bemerkt, daß wir uns zunächst auf die retardierte Greensche Funktion mit

$$G(x,t;y,t_0) \; = \; 0 \qquad \text{für} \qquad t \; < \; t_0 \tag{108}$$

beschränken. Dann gilt die Definitionsgleichung

$$\Theta(t-t_0) \, \psi(x,t) \; = \; \int G(x,t;y,t_0) \, \psi(y,t_0) \, dy \; , \tag{109}$$

wobei $\Theta$ die Sprungfunktion bezeichnet. Auf diese Gleichung wenden wir nun den Operator

$$i\hbar \, \frac{\partial}{\partial t} - H_x$$

an. Dabei machen wir von dem Zusammenhang

$$\frac{d}{d\tau} \, \Theta(\tau) \; = \; \delta(\tau) \tag{110}$$

zwischen der Ableitung der Sprungfunktion und der $\delta$-Funktion Gebrauch. Wir bekommen

$$\begin{aligned} & i\hbar \, \delta(t-t_0) \, \psi(x,t) + \Theta(t-t_0) \, \left( i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - H_x \right) \, \psi(x,t) \; = \\ & \int \left( i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - H_x \right) \, G(x,t;y,t_0) \, \psi(y,t_0) \, dy \; . \end{aligned} \tag{111}$$

Der zweite Term auf der linken Seite verschwindet aufgrund der Schrödinger - Gleichung (105). Wir sehen nun, daß die Gleichung (111) befriedigt wird, wenn die Beziehung (107) gilt.

Wir führen nun den Greenschen Operator $\mathcal{G}(t, t_0)$ ein. Für zeitunabhängige Hamilton - Operatoren läßt sich der Greensche Operator darstellen als

$$\mathcal{G}(t, t_0) \;=\; \Theta(t - t_0)\, \exp\left[-\frac{i}{\hbar}\, H\,(t - t_0)\right] \;. \tag{112}$$

Die Greensche Funktion ergibt sich in der Ortsdarstellung aus dem Matrixelement des Greenschen Operators mit Eigenfunktionen des Ortsoperators

$$G(x, t; y, t_0) \;=\; \langle x|\mathcal{G}(t, t_0)|y\rangle \;. \tag{113}$$

In diesem Kapitel werden wir vielfach für die Wellenfunktionen die Diracsche *bra*($\langle x|$)– und *ket*($|y\rangle$)–Schreibweise verwenden. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir $t_0 \;=\; 0$ setzen. Dann gilt für $t \;>\; 0$

$$G(x, t; y, 0) \;=\; \langle x|\mathcal{G}(t, 0)|y\rangle \;=\; \langle x|e^{-iHt/\hbar}|y\rangle \;. \tag{114}$$

Wir schieben nun einen vollständigen Satz von Energieeigenzuständen $|n\rangle$ ein mit $n \;=\; 0, 1, \ldots$ und

$$H\,|n\rangle \;=\; E_n\,|n\rangle \;. \tag{115}$$

Die entsprechenden Wellenfunktionen sind

$$\phi_n(x) \;=\; \langle x|n\rangle \;. \tag{116}$$

Damit bekommen wir aus (114)

$$G(x, t; y, 0) \;=\; \sum_n \langle x|n\rangle\,\langle n|e^{-iHt/\hbar}|y\rangle \;=\; \sum_n \phi_n(x)\, e^{-iE_nt/\hbar}\, \phi_n^*(y) \;. \tag{117}$$

Dies entspricht gerade der bereits abgeleiteten Darstellung der Greenschen Funktion durch Eigenfunktionen des Hamilton - Operators. Im folgenden gehen wir aus von

$$G(x, t; y, 0) \;=\; \langle x|e^{-iHt/\hbar}|y\rangle \;. \tag{118}$$

Das Pfadintegral resultiert nun einfach aus der formalen Identität [Schu 81]

$$e^H \;=\; \left(e^{H/(N+1)}\right)^{N+1} \;. \tag{119}$$

Wir substituieren $\lambda \;=\; it/\hbar$ und schreiben

$$G(x, t; y, 0) \;=\; \langle x|e^{-\lambda(T+V)/(N+1)}\, e^{-\lambda(T+V)/(N+1)}\, \ldots\, e^{-\lambda(T+V)/(N+1)}|y\rangle \;, \tag{120}$$

wobei das Produkt im Matrixelement $(N + 1)$-mal auftritt. Nun gilt

$$\begin{aligned}
&e^{-\lambda(T+V)/(N+1)} \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[-\lambda(T+V)/(N+1)]^n}{n!} \;= \\
&1 - \frac{\lambda(T+V)/(N+1)}{1!} + \frac{\lambda^2(T+V)^2/(N+1)^2}{2!} + \ldots \;= \\
&1 - \frac{\lambda T}{N+1} - \frac{\lambda V}{N+1} + \frac{\lambda^2 T^2}{2(N+1)^2} + \frac{\lambda^2 V^2}{2(N+1)^2} + \frac{\lambda^2 TV}{2(N+1)^2} + \frac{\lambda^2 VT}{2(N+1)^2} + \ldots \;.
\end{aligned} \tag{121}$$

Damit erhalten wir

$$e^{-\lambda(T+V)/(N+1)} \;=\; e^{-\lambda T/(N+1)}\, e^{-\lambda V/(N+1)} + K\,\frac{\lambda^2}{(N+1)^2} + \ldots \tag{122}$$

mit dem Kommutator

$$K \;=\; \tfrac{1}{2}(VT - TV) \;=\; \tfrac{1}{2}[V,T]\,. \tag{123}$$

Dabei haben wir ausgenutzt

$$\begin{aligned}
&e^{-\lambda T/(N+1)}\, e^{-\lambda V/(N+1)} \;=\\
&\left(1 - \frac{\lambda T}{N+1} + \frac{\lambda^2 T^2}{2(N+1)^2} + \ldots\right)\left(1 - \frac{\lambda V}{N+1} + \frac{\lambda^2 V^2}{2(N+1)^2} + \ldots\right) \;=\\
&1 - \frac{\lambda T}{N+1} + \frac{\lambda^2 T^2}{2(N+1)^2} - \frac{\lambda V}{N+1} + \frac{\lambda^2 V^2}{2(N+1)^2} + \frac{\lambda^2 TV}{(N+1)^2} + \ldots\,.
\end{aligned} \tag{124}$$

Als nächsten Schritt wollen wir nun den Term

$$\left[e^{-\lambda(T+V)/(N+1)}\right]^{N+1} \;=\; \left[e^{-\lambda T/(N+1)}\, e^{-\lambda V/(N+1)} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{(N+1)^2}\right)\right]^{N+1} \tag{125}$$

ersetzen durch

$$\left[e^{-\lambda T/(N+1)}\, e^{-\lambda V/(N+1)}\right]^{N+1}\,. \tag{126}$$

Diese Ersetzung ist bei der Einbeziehung von Operatoren nicht ganz trivial. Bei den notwendigen Umformung müssen wir sorgfältig auf die Reihenfolge der einzelnen Faktoren achten. Wir betrachten zunächst die folgende Differenz

$$\begin{aligned}
&\left(e^{-\lambda T/(N+1)}\, e^{-\lambda V/(N+1)}\right)^{N+1} - \left(e^{-\lambda(T+V)/(N+1)}\right)^{N+1} \;=\\
&\left[e^{-\lambda T/(N+1)}\, e^{-\lambda V/(N+1)} - e^{-\lambda(T+V)/(N+1)}\right]\left[e^{-\lambda(T+V)/(N+1)}\right]^{N} \;+\\
&e^{-\lambda T/(N+1)}\, e^{-\lambda V/(N+1)}\left[e^{-\lambda T/(N+1)}\, e^{-\lambda V/(N+1)} - e^{-\lambda(T+V)/(N+1)}\right]\, e^{-\lambda(T+V)(N-1)/(N+1)}\\
&+ \ldots + \left(e^{-\lambda T/(N+1)}\, e^{-\lambda V/(N+1)}\right)^{N}\left[e^{-\lambda T/(N+1)}\, e^{-\lambda V/(N+1)} - e^{-\lambda(T+V)/(N+1)}\right]\,.
\end{aligned} \tag{127}$$

Diese Gleichung ist formal eine Identität. Es treten $N+1$ Terme auf, die jeweils als Faktor den Ausdruck

$$e^{-\lambda T/(N+1)}\, e^{-\lambda V/(N+1)} - e^{-\lambda(T+V)/(N+1)}$$

enthalten. Diese Differenz ist von der Ordnung $\mathcal{O}(1/N^2)$. Im Grenzfall $N \to \infty$ verschwindet diese Differenz. Somit bekommen wir

$$G(x,t;y,0) \;=\; \lim_{N\to\infty} \langle x|\left(e^{-\lambda T/(N+1)}\, e^{-\lambda V/(N+1)}\right)^{N+1} |y\rangle\,. \tag{128}$$

Dies ist die Trotter Produktformel. Von hier zu den Pfadintegralen sind es nur noch wenige Schritte. Wir fügen in (128) jeweils eine 1 in Form einer Vollständigkeitsrelation ein

$$\int dx_j\, |x_j\rangle\,\langle x_j| \;=\; 1 \qquad \text{mit} \qquad j \;=\; 1,\ldots,N\,. \tag{129}$$

Dies führt schließlich auf

$$G(x,t;y,0) \;=\; \lim_{N\to\infty} \int dx_1 \dots dx_N \prod_{j=0}^{N} \langle x_{j+1}| e^{-\lambda T/(N+1)} \, e^{-\lambda V/(N+1)} |x_j\rangle \;. \tag{130}$$

Speziell gilt

$$y \;=\; x_0, \qquad x \;=\; x_{N+1} \;. \tag{131}$$

Der Multiplikationsoperator $V$ ist diagonal im Ortsraum

$$e^{-\lambda V/(N+1)} \, |x_j\rangle \;=\; |x_j\rangle \, e^{-\lambda V(x_j)/(N+1)} \;. \tag{132}$$

Als nächstes benötigen wir Matrixelemente des Operators $\exp\{-\lambda T/(N+1)\}$ im Ortsraum zwischen verschiedenen Zuständen, zum Beispiel zwischen $\langle \eta|$ und $|\xi\rangle$. Um diese zu ermitteln, führen wir einen vollständigen Satz von Impulseigenzuständen ein

$$1 \;=\; \int dp \; |p\rangle \, \langle p| \tag{133}$$

mit

$$\langle p|\xi\rangle \;=\; \sqrt{\frac{1}{2\pi\hbar}} \, e^{-ip\xi/\hbar} \;. \tag{134}$$

Dies ergibt

$$\begin{aligned} \langle \eta| e^{-\lambda T/(N+1)} |\xi\rangle \;&=\; \int dp \; \langle \eta| e^{-\lambda T/(N+1)} |p\rangle \, \langle p|\xi\rangle \\ &=\; \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dp \; e^{-\lambda p^2/[2m(N+1)]} \, e^{ip(\eta-\xi)/\hbar} \;. \end{aligned} \tag{135}$$

Solche Gauß - Integrale treten bei Pfadintegralen sehr häufig auf. Wir benutzen die allgemeine Formel

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ay^2+by} \, dy \;=\; \sqrt{\frac{\pi}{a}} \, e^{b^2/(4a)} \;, \tag{136}$$

und wir erhalten

$$\langle \eta| e^{-\lambda T/(N+1)} |\xi\rangle \;=\; \sqrt{\frac{m(N+1)}{2\pi\lambda\hbar^2}} \, e^{-m(N+1)(\eta-\xi)^2/(2\lambda\hbar^2)} \;. \tag{137}$$

Dieses Resultat setzen wir in den Ausdruck für die Greensche Funktion $G$ ein und bekommen

$$\begin{aligned} G(x,t;y,0) \;&=\; \lim_{N\to\infty} \int dx_1 \dots dx_N \, \left(\frac{m(N+1)}{2\pi\lambda\hbar^2}\right)^{(N+1)/2} \\ &\quad \times \prod_{j=0}^{N} \exp\left[-\frac{m(x_{j+1}-x_j)^2(N+1)}{2\lambda\hbar^2} - \frac{\lambda\, V(x_j)}{N+1}\right] \;. \end{aligned} \tag{138}$$

Wir setzen nun wieder

$$\epsilon \;=\; \frac{t}{N+1} \;=\; \frac{\hbar\lambda}{i(N+1)} \tag{139}$$

und fassen die Faktoren mit den Exponentialausdrücken zusammen

$$
\begin{aligned}
G(x,t;y,0) &= \lim_{N\to\infty} \int dx_1 \ldots dx_N \left(\frac{m}{2\pi i\hbar\epsilon}\right)^{(N+1)/2} \\
&\quad \times \exp\left\{\frac{i\epsilon}{\hbar}\sum_{j=0}^{N}\left[\tfrac{1}{2}m\left(\frac{x_{j+1}-x_j}{\epsilon}\right)^2 - V(x_j)\right]\right\} \, . \qquad (140)
\end{aligned}
$$

Dies ist der Pfadintegralausdruck für den Propagator. Wir nehmen nun an, die verschiedenen Punkte $y,\, x_1,\, \ldots,\, x_N,\, x$ sind durch Geraden miteinander verbunden. Dann haben wir einen Streckenzug von $y$ nach $x$ vorliegen. Die Summe in der Exponentialfunktion kann dann als Riemann - Summe eines bestimmten Integrals entlang des Pfades verstanden werden

$$
\sum_{j=0}^{N}\epsilon\left[\tfrac{1}{2}m\left(\frac{x_{j+1}-x_j}{\epsilon}\right)^2 - V(x_j)\right] \longrightarrow \int_0^t d\tau\, \left[\tfrac{1}{2}m\left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 - V(x)\right] \, . \qquad (141)
$$

Der Integrand ist gerade die klassische Lagrange - Funktion

$$
L = \tfrac{1}{2}m\left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 - V(x) \, . \qquad (142)
$$

Das Integral selber ist die Wirkung. Damit ist das Argument der Exponentialfunktion gerade $i\mathcal{A}/\hbar$, wobei $\mathcal{A}$ entlang der einzelnen Geraden berechnet wird, die $y,\, x_1,\, x_2, \ldots,\, x_N,\, x$ verbinden. Der Vorfaktor

$$
\frac{1}{A} = \left(\frac{m}{2\pi i\hbar\epsilon}\right)^{1/2} \qquad (143)
$$

kommt bei dieser Rechnung automatisch heraus, ohne daß wir spezielle Annahmen machen müssen. Erst dieser Normierungsfaktor macht aus dem Pfadintegral einen endlichen Ausdruck. Letztlich haben wir wieder

$$
G(x,t;y,0) = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{A}\int\frac{dx_1}{A}\ldots\frac{dx_N}{A}\, e^{i\mathcal{A}[x]/\hbar} \, . \qquad (144)
$$

## Berechnung des Integrals $\int_0^\infty e^{(i\omega-\epsilon)t}\,dt$

Wir führen die Integration explizit aus

$$
\begin{aligned}
I_5 &= \int_0^\infty e^{(i\omega-\epsilon)t}\,dt \;=\; \int_0^\infty e^{i\omega t}\,e^{-\epsilon t}\,dt \\
&= \int_0^\infty \cos\omega t\,e^{-\epsilon t}\,dt + i\int_0^\infty \sin\omega t\,e^{-\epsilon t}\,dt \\
&= \frac{e^{-\epsilon t}}{\omega^2+\epsilon^2}(-\epsilon\cos\omega t+\omega\sin\omega t)\Big|_0^\infty + i\,\frac{e^{-\epsilon t}}{\omega^2+\epsilon^2}(-\epsilon\sin\omega t-\omega\cos\omega t)\Big|_0^\infty \\
&= \frac{\epsilon}{\omega^2+\epsilon^2}+\frac{i\omega}{\omega^2+\epsilon^2} \;=\; i\frac{\omega-i\epsilon}{(\omega+i\epsilon)(\omega-i\epsilon)} \;=\; \frac{i}{\omega+i\epsilon}\,. \qquad (145)
\end{aligned}
$$

Zusammengefaßt folgt also

$$
I_5 \;=\; \int_0^\infty e^{(i\omega-\epsilon)t}\,dt \;=\; \frac{i}{\omega+i\epsilon}\,. \qquad (146)
$$

## Berechnung des Integrals $\int_0^\infty e^{-a/x^2-bx^2}\,dx$

Wir substituieren

$$
\begin{aligned}
y &= x\sqrt{b}\,, \\
c &= \sqrt{ab}\,. \qquad (147)
\end{aligned}
$$

Dann haben wir [Schu 81]

$$
I_6 \;=\; \int_0^\infty e^{-a/x^2-bx^2}\,dx \;=\; \frac{1}{\sqrt{b}}\int_0^\infty e^{-c^2/y^2-y^2}\,dy \;=\; f(c)\,. \qquad (148)
$$

Hier ist $b$ eine Konstante. Von der Funktion $f(c)$ bilden wir die Ableitung in bezug auf $c$

$$
\frac{\partial f}{\partial c} \;=\; \frac{1}{\sqrt{b}}\int_0^\infty \left(-\frac{2c}{y^2}\right)\,e^{-c^2/y^2-y^2}\,dy\,. \qquad (149)
$$

Als neue Variable führen wir nun

$$
z \;=\; \frac{c}{y} \qquad (150)
$$

mit

$$
\frac{dz}{dy} \;=\; -\frac{c}{y^2}
$$

ein. Dies bewirkt auch einen Vorzeichenwechsel aufgrund der nachfolgenden Änderung der Integrationsgrenzen. Es folgt

$$
\frac{\partial f}{\partial c} \;=\; -\frac{2}{\sqrt{b}}\int_0^\infty e^{-z^2-c^2/z^2}\,dz \;=\; -2\,f(c)\,. \qquad (151)
$$

Diese Differentialgleichung in bezug auf $c$ läßt sich sofort lösen. Es resultiert

$$
f(c) \;=\; f(0)\,e^{-2c}\,, \qquad (152)
$$

was sich durch Einsetzen in (151) leicht nachprüfen läßt. $f(0)$ ist ein Gauß - Integral

$$f(0) \;=\; \sqrt{\frac{\pi}{4b}}\,. \tag{153}$$

Damit erhalten wir

$$f(c) \;=\; \sqrt{\frac{\pi}{4b}}\, e^{-2c} \tag{154}$$

und schließlich

$$I_6 \;=\; \int_0^\infty e^{-a/x^2 - bx^2}\, dx \;=\; \sqrt{\frac{\pi}{4b}}\, e^{-2\sqrt{ab}}\,. \tag{155}$$

# Berechnung des Integrals $\int_0^\infty e^{-ax^2}\, x^n\, dx$

Es sei [Reif 75]

$$I(n) \;=\; \int\limits_0^\infty e^{-ax^2}\, x^n\, dx \tag{156}$$

mit $n \;\geq\; 0$. Mit der Substitution

$$x \;=\; a^{-1/2}\, y \tag{157}$$

bekommen wir für $n \;=\; 0$

$$I(0) \;=\; a^{-1/2} \int\limits_0^\infty e^{-y^2}\, dy \;=\; \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\,. \tag{158}$$

Für $n \;=\; 1$ ergibt sich

$$I(1) \;=\; a^{-1} \int\limits_0^\infty e^{-y^2}\, y\, dy \;=\; a^{-1}\, \left[-\frac{1}{2}\, e^{-y^2}\right]_0^\infty \;=\; \frac{1}{2}\, a^{-1}\,. \tag{159}$$

Alle Integrale $I(n)$ mit ganzzahligen $n \;>\; 1$ können dann auf die Integrale $I(0)$ und $I(1)$ zurückgeführt werden, wenn man nach dem Parameter $a$ differenziert. Tatsächlich gilt

$$I(n) \;=\; -\frac{\partial}{\partial a}\left(\int_0^\infty e^{-ax^2}\, x^{n-2}\, dx\right) \;=\; -\frac{\partial I(n-2)}{\partial a}\,. \tag{160}$$

Dies ist eine Rekursionsbeziehung, die wir so oft wie nötig anwenden können. Zum Beispiel folgt

$$I(2) \;=\; -\frac{\partial I(0)}{\partial a} \;=\; -\frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\frac{\partial}{\partial a}\,\left(a^{-1/2}\right) \;=\; \frac{\sqrt{\pi}}{4}\, a^{-3/2}\,. \tag{161}$$

Wir können aber auch in (156) substituieren

$$x \;=\; (u/a)^{1/2}\,. \tag{162}$$

Somit folgt

$$dx \;=\; \tfrac{1}{2}\, a^{-1/2}\, u^{-1/2}\, du \tag{163}$$

und weiter

$$I(n) \;=\; \frac{1}{2}\, a^{-1/2\,(n+1)} \int\limits_0^\infty e^{-u}\, u^{1/2\,(n-1)}\, du\ . \tag{164}$$

Mit der Definition der Gamma - Funktion $\Gamma(x)$

$$\Gamma(x) \;=\; \int\limits_0^\infty e^{-u}\, u^{x-1}\, du \tag{165}$$

läßt sich (164) dann schreiben als

$$I(n) \;=\; \int\limits_0^\infty e^{-ax^2}\, x^n\, dx \;=\; \frac{1}{2}\,\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\, a^{-(n+1)/2}\ . \tag{166}$$

Betrachten wir noch einmal das Integral $I(1)$, so gilt speziell

$$I_7 \;=\; \int\limits_{-\infty}^\infty e^{-ax^2}\, x\, dx \;=\; 0\ , \tag{167}$$

da der Integrand eine ungerade Funktion von $x$ ist. Hingegen folgt bei der entsprechenden Erweiterung der unteren Integralgrenze bei $I(2)$

$$I_8 \;=\; \int\limits_{-\infty}^\infty e^{-ax^2}\, x^2\, dx \;=\; \frac{\sqrt{\pi}}{2}\, a^{-3/2}\ . \tag{168}$$

## Die Ableitung der Schrödinger - Gleichung aus der Pfadintegraldarstellung der Greenschen Funktion

Als nächsten Schritt wollen wir ausgehend von der Pfadintegralformulierung der Greenschen Funktion die Schrödinger - Gleichung ableiten. Wir beginnen unsere formale Studien mit dem bereits mehrfach erwähnten linearen Zusammenhang

$$\psi(x_2,t_2) \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} G(x_2,t_2;x_1,t_1)\,\psi(x_1,t_1)\,dx_1 \;, \tag{169}$$

der auch als Definitionsgleichung für die Greensche Funktion dienen kann. Diese Gleichung erlaubt es, aus der Kenntnis der Wellenfunktion zum Zeitpunkt $t_1$ und der Greenschen Funktion die Wellenfunktion zu allen Zeiten $t_2$ zu bestimmen.

Wir untersuchen nun den speziellen Fall, daß sich $t_2$ von $t_1$ nur um einen kleinen Wert $\epsilon$ unterscheidet. Für kleine Zeitintervalle $\epsilon$ können wir nach (169) und mit Hilfe der Pfadintegraldarstellung der Greenschen Funktion schreiben

$$\psi(x,t+\epsilon) \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{A}\,\exp\left\{\epsilon\frac{i}{\hbar}\,L\left(\frac{x+y}{2},\frac{x-y}{\epsilon},t+\tfrac{1}{2}\epsilon\right)\right\}\,\psi(y,t)\,dy \;, \tag{170}$$

wobei der Normierungsfaktor $A$ zunächst noch nicht spezifiziert werden muß.

Wir betrachten im eindimensionalen Fall die Lagrange - Funktion

$$L \;=\; \tfrac{1}{2}\,m\,\dot{x}^2 - V(x,t) \;. \tag{171}$$

Dies führt bezüglich (170) auf

$$\begin{aligned}\psi(x,t+\epsilon) \;&=\; \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{A}\,\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\,\frac{m(x-y)^2}{2\epsilon}\right\}\,\exp\left\{-\frac{i}{\hbar}\,\epsilon\,V\left(\frac{x+y}{2},t+\tfrac{1}{2}\epsilon\right)\right\}\\ &\qquad\times\psi(y,t)\,dy \;.\end{aligned} \tag{172}$$

Der Ausdruck $(x-y)^2/\epsilon$ tritt im Argument der ersten Exponentialfunktion auf. Weicht $y$ sehr stark von $x$ ab, so ist dieser Ausdruck sehr groß und der Phasenfaktor weist entsprechenderweise ein stark oszillierendes Verhalten auf. Nur wenn $y$ nahe $x$ ist, können wir signifikante Beiträge zum Integral (169) erwarten. Wir führen daher eine Substitution durch

$$y \;=\; x+\eta \;, \tag{173}$$

und wir nehmen an, daß es nur für kleine $\eta$ wesentliche Beiträge zum Integral (172) gibt. Damit erhalten wir

$$\psi(x,t+\epsilon) \;=\; \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{A}\,e^{im\eta^2/(2\hbar\epsilon)}\;e^{-i\epsilon V[(2x+\eta)/2,t+\epsilon/2]/\hbar}\,\psi(x+\eta,t)\,d\eta \;. \tag{174}$$

Wir entwickeln nun $\psi$ in eine Potenzreihe. Wir beschränken uns auf Terme der Ordnung $\epsilon$, dies impliziert Terme, die quadratisch in $\eta$ sind. Den Ausdruck $\epsilon\,V[(2x+\eta)/2,t+\epsilon/2]$ können wir durch den linksseitigen Wert $\epsilon\, V(x,t)$ ersetzen. Der Unterschied zwischen beiden Ausdrücken ist von höherer Ordnung in $\epsilon$ oder in $\epsilon\eta$. Bei dieser Reihenentwicklung bekommen wir also

$$\begin{aligned} \psi(x,t) + \epsilon\,\frac{\partial \psi}{\partial t} \;&=\; \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{A}\, e^{im\eta^2/(2\hbar\epsilon)} \left[1 - \frac{i\epsilon}{\hbar}\, V(x,t)\right] \\ &\quad \times \left[\psi(x,t) + \eta\,\frac{\partial \psi}{\partial x} + \tfrac{1}{2}\eta^2\,\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}\right]\, d\eta\ . \end{aligned} \qquad (175)$$

Betrachten wir nur den führenden Term auf der rechten Seite, so tritt der folgende Faktor auf, der mit $\psi(x,t)$ multipliziert wird

$$\frac{1}{A} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{im\eta^2/(2\hbar\epsilon)}\, d\eta \;=\; \frac{1}{A} \sqrt{\frac{2\pi i\hbar\epsilon}{m}}\ . \qquad (176)$$

Auf der linken Seite steht aber nur $\psi(x,t)$. Damit auch im Grenzfall $\epsilon \to 0$ beide Seiten von (174) oder (175) übereinstimmen, folgt

$$A \;=\; \sqrt{\frac{2\pi i\hbar\epsilon}{m}}\ . \qquad (177)$$

Diese Normierungskonstante hatten wir bereits früher abgeleitet. Jedoch haben wir hier einen Weg beschritten, der geeignet ist, auch für kompliziertere Lagrange - Funktionen die Normierungskonstante $A$ zu ermitteln. $A$ muß jeweils so bestimmt werden, daß die Gleichung (174) auch für $\epsilon \to 0$ gilt. Anderenfalls konvergiert das Pfadintegral nicht.

Ferner haben wir nach (175) die Integrale zu lösen

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{A}\, e^{im\eta^2/(2\hbar\epsilon)}\, \eta\, d\eta \;=\; 0 \qquad (178)$$

und

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{A}\, e^{im\eta^2/(2\hbar\epsilon)}\, \eta^2\, d\eta \;=\; \frac{i\hbar\epsilon}{m}\ . \qquad (179)$$

Dies ergibt schließlich

$$\psi + \epsilon\,\frac{\partial \psi}{\partial t} \;=\; \psi - \frac{i\epsilon}{\hbar}\, V\,\psi - \frac{\hbar\epsilon}{2im}\,\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}\ . \qquad (180)$$

Was die Terme in erster Ordung in $\epsilon$ betrifft, ist diese Gleichung erfüllt, sofern gilt

$$-\frac{\hbar}{i}\,\frac{\partial \psi}{\partial t} \;=\; -\frac{\hbar^2}{2m}\,\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + V(x,t)\,\psi\ . \qquad (181)$$

Dies ist die Schrödinger - Gleichung.

# Pfadintegrale in der nichtrelativistischen Quantenmechanik

Nach der Behandlung einiger Rechenregeln im Zusammenhang mit Pfadintegralen in der Quantenfeldtheorie machen wir nun einen Rückgriff auf die Darstellung von Übergangsamplituden mittels Pfadintegrale, um die zukünftig verwendete Nomenklatur einzuführen.

Wir beschreiben ein einfaches System durch eine generalisierte Koordinate $Q$ mit dem konjugierten Impuls $P$. Die korrespondierenden quantenmechanischen Operatoren für $Q$ werden mit $\hat{Q}_H$ im Heisenberg–Bild und $\hat{Q}_S$ im Schrödinger–Bild bezeichnet. Die Eigenzustände von $\hat{Q}_S$ seien $|q>_S$

$$\hat{Q}_S|q>_S = \; q\,|q>_S \quad . \tag{182}$$

Da $\hat{Q}_H$ zeitabhängig ist, sind es auch die Eigenzustände $|q,t>$

$$\hat{Q}_H(t)\,|q,t> = \; q\,|q,t> \quad . \tag{183}$$

Es sollte jedoch betont werden, daß die physikalischen Zustandsvektoren, anders als die Eigenzustände von $\hat{Q}_H(t)$, zeitunabhängig im Heisenberg–Bild sind. Es gilt der Zusammenhang

$$\hat{Q}_H(t) \;=\; e^{iHt/\hbar}\,\hat{Q}_S\,e^{-iHt/\hbar} \tag{184}$$

mit

$$|q,t> = \; e^{iHt/\hbar}\,|q>_S \;, \tag{185}$$

wobei $H$ der zeitunabhängige Hamilton–Operator ist. Die Wahrscheinlichkeitsamplitude dafür, daß ein System, das im Eigenzustand $|q',t'>$ zur Zeit $t'$ war, zum Zeitpunkt $t''$ im Zustand $q''$ ist, lautet

$$< q'',t''|q',t' > = \; {}_S< q''|e^{-iH(t''-t')/\hbar}|q'>_S \quad . \tag{186}$$

Die Übergangsamplitude kann als Pfadintegral ausgedrückt werden. Wir schreiben

$$(N+1)\epsilon \;=\; t''-t' \;. \tag{187}$$

Die Eigenzustände von $\hat{Q}_H$ bilden einen vollständigen Basissatz zu jedem gegebenen Zeitpunkt $t$.

$$\begin{aligned} < q'',t''|q',t' > \;&=\; \prod_{j=1}^{N}\int dq_j \;< q'',t''|q_N,t_N >< q_N,t_N|q_{N-1},t_{N-1} > \\ &\qquad \ldots < q_1,t_1|q',t' > \;. \end{aligned} \tag{188}$$

Wir müssen nun den Ausdruck $< q_{j+1},t_{j+1}|q_j,t_j >$ für große $N$ untersuchen, somit wird $\epsilon$ sehr klein. Die Diskussion wird vereinfacht, wenn der Hamilton–Operator die Form hat

$$H(Q,P) \;=\; \frac{P^2}{2m} + V(Q) \;. \tag{189}$$

Damit folgt nach (186) offensichtlich in erster Ordnung in $\epsilon$

$$< q_{j+1},t_{j+1}|q_j,t_j > \approx \; {}_S< q_{j+1}|1 - iH\epsilon/\hbar|q_j>_S \quad . \tag{190}$$

Allgemein verwenden wir

$$\begin{aligned}
\hat{Q}|q> &= q|q> \,, \quad \hat{P}|p> = p|p> \,, \\
<q'|q> &= \delta(q'-q) \,, \quad <p'|p> = \delta(p'-p) \,, \\
<q|p> &= <p|q>^* = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ipq} \,, \\
<q|\hat{P}|p> &= p <q|p> = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial q} <q|p>
\end{aligned} \tag{191}$$

und in erster Ordnung in $\Delta t$

$$<q_2(t+\Delta t)|q_1(t)> = <q_2|e^{-i\Delta t\, H/\hbar}|q_1> \ . \tag{192}$$

Nun ist aber

$$s<q_{j+1}|H|q_j>_S = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial q_j^2}\right) s<q_{j+1}|q_j>_S + V(q_j)\, s<q_{j+1}|q_j>_S \ . \tag{193}$$

Wir verwenden die Integraldarstellung der Diracschen $\delta$-Funktion

$$s<q_{j+1}|q_j>_S = \delta(q_{j+1}-q_j) = \frac{1}{\hbar}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dp_j}{2\pi}\exp\{ip_j(q_{j+1}-q_j)/\hbar\} \ , \tag{194}$$

wobei wir die Integrationsvariable als $p_j/\hbar$ geschrieben haben. Wir verwenden (194) in (193)

$$\begin{aligned}
s<q_{j+1}|H|q_j>_S &= \int\frac{dp_j}{2\pi\hbar}\left(\frac{p_j^2}{2m}+V(q_j)\right)\exp\{ip_j(q_{j+1}-q_j)/\hbar\} \\
&= \int\frac{dp_j}{2\pi\hbar}\exp\{ip_j(q_{j+1}-q_j)/\hbar\}\ H(q_j,p_j) \ .
\end{aligned} \tag{195}$$

Damit bekommen wir für (190)

$$\begin{aligned}
& <q_{j+1},t_{j+1}|q_j,t_j> \\
\simeq & \int\frac{dp_j}{2\pi\hbar}\exp\{ip_j(q_{j+1}-q_j)/\hbar\}\ (1-i\epsilon H(q_j,p_j)/\hbar) \ .
\end{aligned} \tag{196}$$

Bleiben wir konsistenterweise in erster Ordnung in $\epsilon$, können wir den Integranden vollständig als Exponentialfunktion schreiben

$$<q_{j+1},t_{j+1}|q_j,t_j> \ \approx \int\frac{dp_j}{2\pi\hbar}\exp\{i\epsilon/\hbar\,[p_j(q_{j+1}-q_j)/\epsilon - H(q_j,p_j)]\} \ . \tag{197}$$

Damit können wir die Übergangsamplitude ausdrücken als

$$\begin{aligned}
<q'',t''|q',t'> \ \approx & \prod_{j=1}^{N}\int dq_j\ \prod_{j=0}^{N}\frac{dp_j}{2\pi\hbar} \\
& \times\ \exp\left\{i\epsilon/\hbar\ \sum_{j=0}^{N}[p_j(q_{j+1}-q_j)/\epsilon - H(q_j,p_j)]\right\}
\end{aligned} \tag{198}$$

mit $q_0 = q'$ und $q_{N+1} = q''$. Im Grenzfall $N \to \infty$ mit festem $(N+1)\,\epsilon$ können wir die Übergangsamplitude als Pfadintegral ausdrücken

$$< q'', t''|q', t' > \;\; \propto \;\; \int \mathcal{D}q \int \mathcal{D}p \; \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int\limits_{t'}^{t''} dt \, [p\dot{q} - H(p,q)] \right\} \; . \qquad (199)$$

Die Normierungsfaktoren sind in der momentanen Diskussion ohne Bedeutung. Es wird integriert über alle Funktionen $p(t)$ und über alle Funktionen $q(t)$, die den Randbedingungen $q(t') = q', \;\; q(t'') = q''$ genügen. Wenn der Hamilton–Operator durch die angegebene Struktur gegeben ist, können wir die $p_j$-Integrationen ausführen. Wir vervollständigen den quadratischen Ausdruck und führen eine Variablentransformation durch

$$\tilde{p}_j \;\; = \;\; p_j - m\,(q_{j+1} - q_j)/\epsilon \; . \qquad (200)$$

Wir haben dann ein Gauß–Integral vorliegen und erhalten

$$< q_{j+1}, t_{j+1}|q_j, t_j > \approx \sqrt{\frac{m}{2\pi i \epsilon \hbar}} \; \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \epsilon [\tfrac{1}{2} m \epsilon^{-2} (q_{j+1} - q_j)^2 - V(q_j)] \right\} \; . \qquad (201)$$

Damit folgt insgesamt

$$\begin{aligned} < q'', t''|q', t' > \;\; &\approx \;\; (2\pi i \epsilon \hbar/m)^{-(N+1)/2} \\ & \prod_{j=1}^{N} \int dq_j \; \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \epsilon \sum_{j=0}^{N} \left[ \tfrac{1}{2} m \epsilon^{-2} (q_{j+1} - q_j)^2 - V(q_j) \right] \right\} \; . \end{aligned} \qquad (202)$$

Im Grenzfall $N \to \infty$ erhalten wir das Pfadintegral

$$< q'', t''|q', t' > \;\; \propto \;\; \int \mathcal{D}q \; \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int\limits_{t'}^{t''} dt \; L(q, \dot{q}) \right\} \qquad (203)$$

mit

$$L(q, \dot{q}) \;\; = \;\; \tfrac{1}{2} m \dot{q}^2 - V(q) \; . \qquad (204)$$

# Ausführung der Pfadintegration – Die freie Propagation

Wir führen nun die erste Pfadintegration konkret durch und betrachten als einfachstes Beispiel die Propagation eines freien Teilchens. Die Lagrange - Funktion lautet demnach

$$L \; = \; \tfrac{1}{2} m \, \dot{x}^2 \; . \tag{205}$$

Für die Pfadintegraldarstellung der Greenschen Funktion ergibt sich

$$\begin{aligned} G(x_b, t_b; x_a, t_a) \; &= \; \lim_{\epsilon \to 0} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \ldots \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ \frac{im}{2\hbar\epsilon} \sum_{i=1}^{N+1} (x_i - x_{i-1})^2 \right\} \\ &\qquad\qquad dx_1 \ldots dx_N \; \left( \frac{2\pi i \hbar \epsilon}{m} \right)^{-(N+1)/2} \; . \end{aligned} \tag{206}$$

In (206) liegt ein Satz von Gauß - Integralen der Form $\int \exp\{-ax^2 + bx\} \, dx$ vor. Das Integral einer Gauß - Funktion führt wieder auf eine Gauß - Funktion. Damit können wir ein Integral nach dem anderen ausführen. Wir verwenden die bereits bewiesene Integralformel

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ a(x_1 - x)^2 \right\} \, \exp \left\{ b(x_2 - x)^2 \right\} \, dx \; = \; \sqrt{\frac{-\pi}{a+b}} \, \exp \left\{ \frac{ab}{a+b} (x_1 - x_2)^2 \right\} \tag{207}$$

und führen dann die folgende Integration durch

$$\begin{aligned} &\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{2\pi i \hbar \epsilon}{m} \right)^{-2/2} \quad \exp \left\{ \frac{im}{2\hbar\epsilon} \left[ (x_2 - x_1)^2 + (x_1 - x_0)^2 \right] \right\} \, dx_1 \\ &\qquad = \; \left( \frac{2\pi i \hbar \cdot 2\epsilon}{m} \right)^{-1/2} \exp \left\{ \frac{im}{2\hbar(2\epsilon)} (x_2 - x_0)^2 \right\} \; . \end{aligned} \tag{208}$$

Im nächsten Schritt multiplizieren wir dieses Resultat mit

$$\left( \frac{2\pi i \hbar \epsilon}{m} \right)^{-1/2} \exp \left\{ \frac{im}{2\hbar\epsilon} (x_3 - x_2)^2 \right\}$$

und integrieren wieder, dieses Mal aber über die Variable $x_2$. Das Resultat ist ähnlich wie in (208), mit der Ausnahme, daß wir diesmal $(x_2 - x_0)^2$ ersetzen durch $(x_3 - x_0)^2$ und daß an zwei Stellen $2\epsilon$ durch $3\epsilon$ ersetzt wird. Wir bekommen also

$$\left( \frac{2\pi i \hbar \cdot 3\epsilon}{m} \right)^{-1/2} \exp \left\{ \frac{im}{2\hbar(3\epsilon)} (x_3 - x_0)^2 \right\}$$

und nach N Schritten

$$\left( \frac{2\pi i \hbar \cdot (N+1)\epsilon}{m} \right)^{-1/2} \exp \left\{ \frac{im}{2\hbar(N+1)\epsilon} (x_{N+1} - x_0)^2 \right\}$$

Es ist

$$(N+1) \, \epsilon \; = \; t_b - t_a \; . \tag{209}$$

Damit bekommt man für die Amplitude schließlich

$$G(x_b, t_b; x_a, t_a) \;=\; \left(\frac{2\pi i\hbar(t_b - t_a)}{m}\right)^{-1/2} \exp\left\{\frac{im(x_b - x_a)^2}{2\hbar(t_b - t_a)}\right\} \, . \tag{210}$$

$G$ entspricht genau der Greenschen Funktion für ein freies Teilchen, die auch im Rahmen der Schrödinger - Theorie abgeleitet wird.

Für die Übergangswahrscheinlichkeit erhalten wir durch Bildung des Absolutbetragsquadrates

$$P(t_b, t_a)\, dx \;=\; \frac{m}{2\pi\hbar(t_b - t_a)}\, dx \, . \tag{211}$$

Die Pfadintegralmethoden haben uns also dazu gedient, die Greensche Funktion zu ermitteln. Mit der Kenntnis der Greenschen Funktion können wir nun zahlreiche Prozesse der Quantenmechanik, beispielsweise Streuprozesse, berechnen. In dem gerade diskutierten Fall der freien Bewegung ist es natürlich sehr viel einfacher, die Greensche Funktion mit traditionellen Methoden der nichtrelativistischen Quantenmechanik abzuleiten.

## Abseparation des klassischen Pfades

Wir werden uns nun einige mathematische Techniken erarbeiten, um auch weitere Summen über Pfade ausführen zu können. Die Pfade nehmen eine relativ einfache Gestalt an, wenn in der zugehörigen Lagrange - Funktion die Variablen und deren Zeitableitung höchstens in quadratischer Form auftreten. Dann sind die bei der Pfadintegration auftretenden Integrale vom Gauß-Typ.

Es sei [Feyn 65]

$$L \;=\; a(t)\,\dot{x}^2 + b(t)\,\dot{x}\,x + c(t)\,x^2 + d(t)\,\dot{x} + e(t)\,x + f(t)\;. \tag{212}$$

Diese Lagrange - Funktion ist allgemeiner als notwendig. Um die Wirkung zu ermitteln, müssen wir die Lagrange - Funktion über die Zeit in den Grenzen zwischen $t_a$ und $t_b$ integrieren. Dabei können wir den Term $d(t)\,\dot{x}$ partiell integrieren. Es verbleibt dann eine Konstante sowie ein Term proportional zu $x$, der natürlich mit dem ursprünglichen Term $e(t)\,x$ zusammengefaßt werden kann. Dies impliziert, daß der Term $d(t)\,\dot{x}$ von Anfang an unberücksichtigt bleiben kann.

Wir wollen den Pfadintegralausdruck für die Greensche Funktion auswerten

$$G(x_b,t_b;x_a,t_a) \;=\; \int \exp\left\{ \frac{i}{\hbar}\int_{t_a}^{t_b} L(\dot{x},x,t)\,dt \right\}\,\mathcal{D}'x(t)\;. \tag{213}$$

Es sei wieder $x_{kl}(t)$ der klassische Pfad zwischen den spezifizierten Endpunkten $x_a$ und $x_b$ sowie

$$\mathcal{A}_{kl}[b,a] \;=\; \mathcal{A}[x_{kl}(t)] \tag{214}$$

die Wirkung für die Bewegung entlang des klassischen Pfades. Damit können wir einen beliebigen Pfad $x(t)$ ausdrücken durch

$$x \;=\; x_{kl} + y\;. \tag{215}$$

Der Unterschied zwischen dem klassischen Pfad $x_{kl}(t)$ und dem aktuellen Pfad $x(t)$ ist $y(t)$. In der diskretisierten Version ist $dx_i \;=\; dy_i$ und im allgemeinen folgt

$$\mathcal{D}'x(t) \;=\; \mathcal{D}'y(t)\;. \tag{216}$$

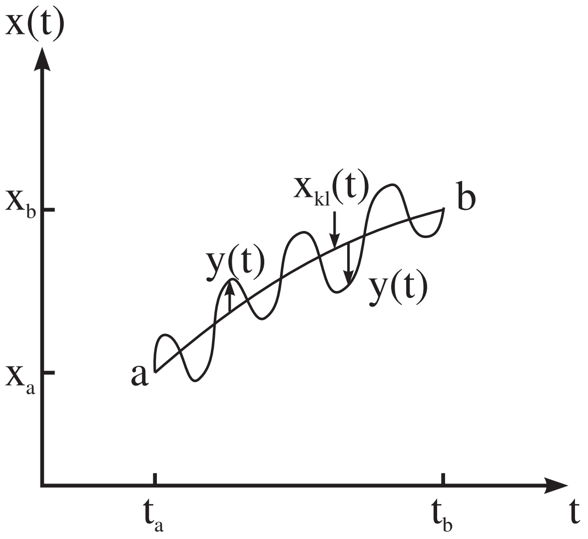
Für das Wirkungsintegral folgt

$$\mathcal{A}[x(t)] \;=\; \mathcal{A}[x_{kl}(t)+y(t)] \;=\; \int_{t_a}^{t_b} \left\{ a(t)\left(\dot{x}_{kl}^2 + 2\,\dot{x}_{kl}\,\dot{y} + \dot{y}^2\right) + \ldots \right\}\,dt\;. \tag{217}$$

Wir fassen alle Terme zusammen, in denen $y$ nicht auftritt. Es resultiert

$$\mathcal{A}[x_{kl}(t)] \;=\; \mathcal{A}_{kl}\;. \tag{218}$$

Alle Terme, die $y$ oder $\dot{y}$ als linearen Faktor beinhalten, verschwinden nach der Integration. Schließlich war nach dem Hamilton - Prinzip der klassische Pfad $x_{kl}(t)$ gerade durch diese Bedingung bestimmt worden.




Figur 6: Aufgetragen sind der klassische Pfad $x_{kl}(t)$ sowie ein aktueller Pfad $x(t)$ zwischen den Endpunkten $a$ und $b$ mit den Koordinaten $(x_a, t_a)$ und $(x_b, t_b)$. Der Unterschied zwischen $x(t)$ und $x_{kl}(t)$ ist $y(t)$. Ein positiver und ein negativer Wert von $y(t)$ sind schematisch durch die Pfeile angegeben.

Damit folgt

$$\mathcal{A}[x(t)] \;=\; \mathcal{A}_{kl} + \int_{t_a}^{t_b} \left\{ a(t)\,\dot{y}^2 + b(t)\,\dot{y}\,y + c(t)\,y^2 \right\}\,dt\;. \tag{219}$$

Das Integral über alle Pfade hängt nicht vom klassischen Pfad ab. Für die Greensche Funktion haben wir daher

$$G(b;a) \;=\; \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\mathcal{A}_{kl}\right\} \int_0^0 \left[\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\int_{t_a}^{t_b} \Big(a(t)\,\dot{y}^2 + b(t)\,\dot{y}\,y + c(t)\,y^2\Big)\;dt\right\}\right] \mathcal{D}'y(t)\,. \tag{220}$$

Da alle Pfade $y(t)$ bei $y \;=\; 0$ starten und enden, kann das Integral über alle Pfade nur von den Zeitpunkten $t_a$ und $t_b$ an den Endpunkten abhängen. Damit folgt

$$G(x_b, t_b; x_a, t_a) \;=\; \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\mathcal{A}_{kl}[b,a]\right\}\; F(t_b, t_a)\;. \tag{221}$$

Damit ist die Greensche Funktion $G$ bestimmt bis auf eine Funktion $F$, die nur von $t_a$ und $t_b$ abhängt. Ein ähnliches Vorgehen ist auch für allgemeinere Lagrange - Funktionen möglich. In jedem Fall gilt für quadratische Formen in der Lagrange - Funktion $G \;\sim\; \exp\{i\,\mathcal{A}_{kl}/\hbar\}$.

Wir führen nun eine Näherungsbetrachtung bezüglich der Bewegung eines Teilchens in einem äußeren Potential durch. Wir nehmen an, es gilt $\mathcal{A} \;\gg\; \hbar$. Dann tragen nur Pfade in der Nähe des klassischen Pfades zum Pfadintegral bei. Wir entwickeln daher

$$V(x) \;=\; V(x_{kl} + y) \;=\; V(x_{kl}) + y\,V'(x_{kl}) + \frac{y^2}{2}\,V''(x_{kl}) + \frac{y^3}{6}\,V'''(x_{kl}) + \ldots \tag{222}$$

Insbesondere wenn die die dritte und alle höheren Ableitungen des Potentials um den klassischen Pfad sehr klein sind, erhalten wir wieder als sehr gute Näherung eine quadratische Form. Dies entspricht gerade der Wentzel - Kramers - Brillouin (WKB) Näherung [Schi 68] in der Quantenmechanik.

# Die Greensche Funktion für das Potential des harmonischen Oszillators

Für den klassischen harmonischen Oszillator mit der Lagrange - Funktion

$$L \;=\; \tfrac{1}{2}\, m\, \left(\dot{x}^2 - \omega^2\, x^2\right) \tag{223}$$

folgt mit $T \;=\; t_b - t_a$ für die klassische Wirkung

$$\mathcal{A}_{kl} \;=\; \frac{m\omega}{2\,\sin(\omega T)}\,\left[(x_a^2 + x_b^2)\,\cos(\omega T) - 2x_a x_b\right]\;. \tag{224}$$

Dieses Resultat wurde bereits explizit abgeleitet.

Schreiben wir die Greensche Funktion in der Form

$$G(x_b, t_b; x_a, t_a) \;=\; e^{i\,\mathcal{A}_{kl}/\hbar}\, F(t_b, t_a) \tag{225}$$

mit

$$F(t_b, t_a) \;=\; \int\limits_0^0 \left(\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\int_{t_a}^{t_b}\left[a(t)\,\dot{y}^2 + b(t)\,\dot{y}\,y + c(t)\,y^2\right]dt\right\}\right)\,\mathcal{D}'y(t)\;, \tag{226}$$

so folgt nach Einsetzen der klassischen Wirkung

$$G(x_b, t_b; x_a, t_a) \;=\; F(T)\,\exp\left\{\frac{im\omega}{2\hbar\,\sin(\omega T)}\,\left[(x_a^2 + x_b^2)\,\cos(\omega T) - 2x_a x_b\right]\right\}\;. \tag{227}$$

Der Ausdruck für $F(T)$ muß noch ausgewertet werden.

Wir haben also das Pfadintegral für den harmonischen Oszillator

$$G(x_b, t_b; x_a, t_a) \;=\; \int_{x_a}^{x_b}\left(\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\int_{t_a}^{t_b}\left[\tfrac{1}{2}m(\dot{x}^2 - \omega^2 x^2)\,dt\right]\right\}\right)\,\mathcal{D}'x(t) \tag{228}$$

reduziert auf das Problem, die folgende Funktion zu berechnen

$$F(T) \;=\; \int\limits_0^0 \left(\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\int_0^T\left[\tfrac{1}{2}m(\dot{y}^2 - \omega^2 y^2)\,dt\right]\right\}\right)\,\mathcal{D}'y(t)\;. \tag{229}$$

Wir lösen dieses Pfadintegral mit einer Methode, die generell sehr wichtig ist für die Handhabung von Pfadintegralen. Da alle Pfade $y(t)$ von 0 bei $t \;=\; 0$ nach 0 bei $t \;=\; T$ gehen, können wir solche Pfade als Fourier - Sinusreihe ausdrücken mit der Fundamentalperiode $T$

$$y(t) \;=\; \sum_n a_n\,\sin\frac{n\pi t}{T}\;. \tag{230}$$

Wir können dann die verschiedenen Pfade als Funktion der Entwicklungskoeffizienten $a_n$ auffassen.

Für ein freies Teilchen haben wir bereits $F(T)$ ausgerechnet, es folgte

$$F(T) \;=\; \sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar T}}\;. \tag{231}$$

Für $\omega = 0$ muß dies auch für das Problem des harmonischen Oszillator ergeben.

Wir drücken nun das Integral über die Wirkung durch Fourier - Reihen aus

$$\begin{aligned} \int_0^T \dot{y}^2\, dt &= \sum_n \sum_m \frac{n\pi}{T}\frac{m\pi}{T}\, a_n\, a_m \int_0^T \cos\frac{n\pi t}{T}\, \cos\frac{m\pi t}{T}\, dt \\ &= \tfrac{1}{2}T \sum_n \left(\frac{n\pi}{T}\right)^2 a_n^2 \; . \end{aligned} \tag{232}$$

Dabei haben wir ausgenutzt, daß gilt

$$\int_0^{2\pi} \cos(mx)\, \cos(nx)\, dx = \pi\, \delta_{m,n} \qquad \text{für} \quad m,\, n \neq 0 \; .$$

Für den Potentialterm folgt ähnlich

$$\int_0^T y^2\, dt = \tfrac{1}{2}T \sum_n a_n^2 \; . \tag{233}$$

Das Einteilen der Zeitdauer $T$ in diskrete Schritte der Länge $\epsilon$ entspricht der Berücksichtigung einer endlichen Zahl $N+1$ von Koeffizienten $a_n$. Das Pfadintegral wird dann

$$\begin{aligned} F(T) = \mathcal{J} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} \left( \exp\left\{ \sum_{n=1}^{N+1} \frac{im}{2\hbar} \left[ \left(\frac{n\pi}{T}\right)^2 - \omega^2 \right] a_n^2 \right\} \right) \\ \frac{da_1}{A}\frac{da_2}{A} \ldots \frac{da_{N+1}}{A} \end{aligned} \tag{234}$$

mit

$$A = \sqrt{\frac{2\pi i\hbar}{m}} \; . \tag{235}$$

$\mathcal{J}$ bezeichnet die Jakobi - Determinate der Transformation von den einzelnen $y_i$ auf die $a_i$.

Das Resultat einer solchen Integration ist wieder die Lösung eines Gauß - Integrals

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{ \frac{im}{2\hbar} \left( \frac{n^2\,\pi^2}{T^2} - \omega^2 \right) a_n^2 \right\} \frac{da_n}{A} = \left( \frac{n^2\pi^2}{T^2} - \omega^2 \right)^{-1/2} \; . \tag{236}$$

Damit ist das Pfadintegral proportional zu

$$\prod_{n=1}^{N+1} \left( \frac{n^2\,\pi^2}{T^2} - \omega^2 \right)^{-1/2} = \left( \prod_{n=1}^{N+1} \left( \frac{n^2\,\pi^2}{T^2} \right)^{-1/2} \right) \left( \prod_{n=1}^{N+1} \left( 1 - \frac{\omega^2\, T^2}{n^2\pi^2} \right)^{-1/2} \right) \; . \tag{237}$$

Der erste Faktor auf der rechten Seite hängt nicht von $\omega$ ab und kann daher mit der Jakobi - Determinante und anderen Faktoren zu einer Konstante $\mathcal{C}$ zusammengefaßt werden. Der zweite Faktor hat als Grenzwert

$$\left( \frac{\sin(\omega T)}{\omega T} \right)^{-1/2} \qquad \text{für } N \to \infty, \text{ d.h. } \epsilon \to 0 \; .$$

Damit bekommen wir

$$F(T) \;=\; \mathcal{C}\,\left(\frac{\sin(\omega T)}{\omega T}\right)^{-1/2}\;, \tag{238}$$

wobei $\mathcal{C}$ unabhängig von $\omega$ ist. Für das freie Resultat ($\omega \;=\; 0$) fanden wir das Resultat (231). Damit folgt schließlich als vollständige Lösung für den harmonischen Oszillator

$$F(T) \;=\; \left(\frac{m\omega}{2\pi i\hbar\,\sin(\omega T)}\right)^{1/2}\;. \tag{239}$$

## Die Eigenfunktionen für das Potential des harmonischen Oszillators

In guten Vorlesungen zur Quantenmechanik werden die Eigenfunktionen für das Potential

$$V(x) \;=\; \tfrac{1}{2}\, m\, \omega^2\, x^2 \tag{240}$$

des harmonischen Oszillators als Standardbeispiel abgeleitet. Wir rufen uns die erzielten Resultate zurück in das Gedächtnis.

Ausgehend von der stationären Schrödinger - Gleichung

$$\widehat{H}\phi_n \;=\; -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\phi_n}{\partial x^2} + \tfrac{1}{2}m\omega^2 x^2\, \phi_n \;=\; E_n\, \phi_n \tag{241}$$

erhält man als Lösung die Energieeigenwerte

$$E_n \;=\; \hbar\omega\, (n + \tfrac{1}{2}) \quad \text{mit} \quad n \;=\; 0,\, 1,\, 2, \ldots \tag{242}$$

sowie die Eigenfunktionen

$$\phi_n \;=\; (2^n\, n!)^{-1/2} \, \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \, H_n(y)\; e^{-y^2/2}\; . \tag{243}$$

Hierbei haben wir die abkürzende Bezeichnung

$$y \;=\; \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\, x \tag{244}$$

eingeführt. Die Hermiteschen Polynome $H_n(y)$ sind gegeben durch

$$\begin{aligned} H_0(y) &\;=\; 1\;, \\ H_1(y) &\;=\; 2y\;, \\ H_2(y) &\;=\; (2y)^2 - 2\;, \\ H_3(y) &\;=\; (2y)^3 - 6(2y) \end{aligned} \tag{245}$$

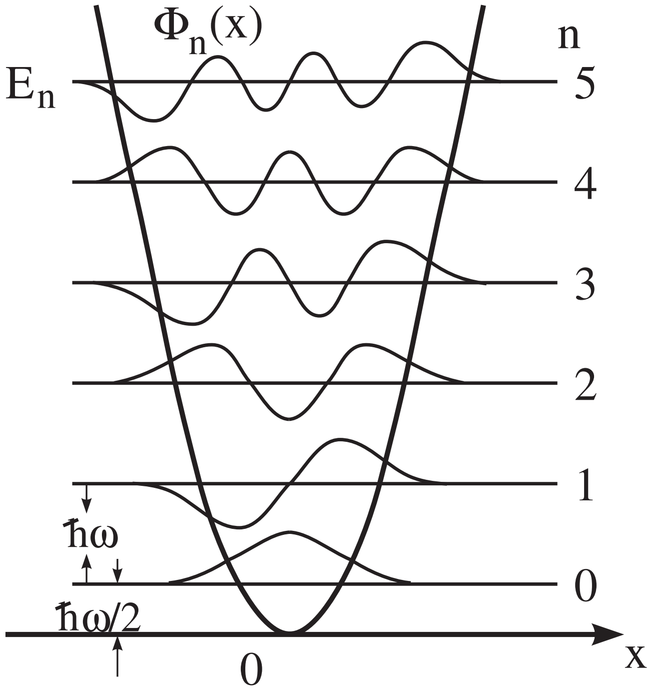
und generell durch

$$H_n(y) \;=\; (-1)^n\, e^{y^2}\, \frac{d^n}{dy^n}\, e^{-y^2}\; . \tag{246}$$

Figur 7 zeigt ein Oszillatorpotential sowie schematisch die Lage der äquidistanten Energieeigenwerte. Weiterhin ist die Grundstruktur der Eigenfunktionen ersichtlich.

Wir wollen nun zeigen, wie man diese Resultate auch durch die Kenntnis der Greenschen Funktion ableiten kann. Für die Greensche Funktion fanden wir mit Hilfe der Pfadintegralrechnung die explizite Darstellung

$$\begin{aligned} G(x_2, T; x_1; 0) \;=\; & \left(\frac{m\omega}{2\pi i\hbar\, \sin(\omega T)}\right)^{1/2} \\ & \times\, \exp\left\{\frac{i m\omega}{2\hbar\, \sin(\omega T)}\, \Big[(x_1^2 + x_2^2)\, \cos(\omega T) - 2x_1 x_2\Big]\right\}. \end{aligned} \tag{247}$$




Figur 7: Die Energieeigenwerte und Eigenfunktionen $\phi_n(x)$ für das Oszillatorpotential $V(x) = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2$.

Andererseits läßt sich die Greensche Funktion allgemein durch die Eigenfunktionen und Energieeigenwerte in der folgenden Form ausdrücken

$$G(x_2, T; x_1, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} \exp\left\{-\frac{i}{\hbar} E_n T\right\} \phi_n(x_2)\, \phi_n^*(x_1) \, . \tag{248}$$

Wir verwenden nun die trigonometrischen Relationen

$$\begin{aligned} i \sin(\omega T) &= \tfrac{1}{2} e^{i\omega T} \left(1 - e^{-2i\omega T}\right) , \\ \cos(\omega T) &= \tfrac{1}{2} e^{i\omega T} \left(1 + e^{-2i\omega T}\right) . \end{aligned} \tag{249}$$

Damit können wir Gleichung (247) schreiben als

$$\begin{aligned} G(x_2, T; x_1, 0) &= \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/2} e^{-i\omega T/2} \left(1 - e^{-2i\omega T}\right)^{-1/2} \\ &\quad \times \exp\left\{-\frac{m\omega}{2\hbar}\left[(x_1^2 + x_2^2)\left(\frac{1 + e^{-2i\omega T}}{1 - e^{-2i\omega T}}\right) - \frac{4\, x_1\, x_2\, e^{-i\omega T}}{1 - e^{-2i\omega T}}\right]\right\} . \end{aligned} \tag{250}$$

Wir wollen nun eine Reihenentwicklung dieses Ausdrucks vornehmen, so daß wir die einzelnen Terme in Gleichung (248) identifizieren können. Aufgrund des ersten Faktors $e^{-i\omega T/2}$ im Ausdruck (250) ist klar, daß die einzelnen Terme in der gesuchten Entwicklung die Faktoren

$$e^{-i\omega T/2}\, e^{-in\omega T}$$

aufweisen werden mit $n = 0, 1, 2, \ldots$. Dies impliziert wiederum durch einen Vergleich mit (248), daß die Energien in der Tat gegeben sind durch

$$E_n = \hbar\omega \, (n + \tfrac{1}{2}) \, .$$

Um auch die Wellenfunktion zu ermitteln, müssen wir die Entwicklung wirklich durchführen. Wir entwickeln (250) bis zur Ordnung $n = 2$

$$\begin{aligned} G(x_2, T; x_1, 0) &= \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/2} e^{-i\omega T/2} \left(1 + \tfrac{1}{2}\, e^{-2i\omega T} + \ldots\right) \exp\left\{-\frac{m\omega}{2\hbar}(x_1^2 + x_2^2)\right. \\ &\qquad \left. - \frac{m\omega}{\hbar}(x_1^2 + x_2^2)\left(e^{-2i\omega T} + \ldots\right) + \frac{2m\omega}{\hbar}\, x_1\, x_2\, e^{-i\omega T} + \ldots\right\} . \end{aligned} \tag{251}$$

Die Entwicklung einer der Exponentialfunktionen in eine Reihe liefert

$$\begin{aligned} G(x_2, T; x_1, 0) &= \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/2} \exp\left\{-\frac{m\omega}{2\hbar}(x_1^2 + x_2^2)\right\} e^{-i\omega T/2} \left(1 + \tfrac{1}{2}\, e^{-2i\omega T}\right) \times \\ &\left[1 + \frac{2m\omega}{\hbar}\, x_1 x_2\, e^{-i\omega T} + \frac{4m^2\omega^2}{2\hbar^2}\, x_1^2\, x_2^2\, e^{-2i\omega T} - \frac{m\omega}{\hbar}\left(x_1^2 + x_2^2\right) e^{-2i\omega T} + \ldots\right] . \end{aligned} \tag{252}$$

Von dieser Entwicklung betrachten wir den Term niedrigster Ordnung und vergleichen ihn mit dem entsprechenden Term niedrigster Ordnung in der Eigendarstellung (248) der Greenschen Funktion. Es resultiert

$$\begin{aligned} &\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/2} \exp\left\{-\frac{m\omega}{2\hbar}(x_1^2 + x_2^2)\right\} \exp\left\{-i\omega T/2\right\} \\ &= \exp\left\{-\frac{i}{\hbar} E_0 T\right\} \phi_0(x_2)\, \phi_0^*(x_1) \, . \end{aligned} \tag{253}$$

Daraus folgt offensichtlich $E_0 = \hbar\omega/2$ und

$$\phi_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \exp\left\{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}\right\} . \tag{254}$$

Als Phasenwahl haben wir $\phi_0$ reell gewählt. Dies stimmt mit unseren bisherigen Kenntnissen aus der Quantenmechanik überein. Der Term nächst höherer Ordnung in dieser Entwicklung lautet

$$\begin{aligned} &\exp\left\{-i\omega T/2\right\} \exp\left\{-i\omega T\right\} \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/2} \exp\left\{-\frac{m\omega}{2\hbar}(x_1^2 + x_2^2)\right\} \frac{2m\omega}{\hbar}\, x_1\, x_2 \\ &= \exp\left\{-\frac{i}{\hbar} E_1 T\right\} \phi_1(x_2)\, \phi_1^*(x_1) \, . \end{aligned} \tag{255}$$

Daraus folgt sofort $E_1 = \frac{3}{2}\,\hbar\omega$ und

$$\phi_1(x) = \sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}}\, x\, \phi_0(x) \, . \tag{256}$$

Der nächste Term entspricht dem Energieeigenwert $E_2 = \frac{5}{2}\,\hbar\omega$. Der hierzu gehörige Teil der Eigenfunktion, der von $x_1$ und $x_2$ abhängt, lautet

$$\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/2} \exp\left\{-\frac{m\omega}{2\hbar}\left(x_1^2 + x_2^2\right)\right\} \left[\frac{2m^2\omega^2}{\hbar^2}\, x_1^2\, x_2^2 - \frac{m\omega}{\hbar}\left(x_1^2 + x_2^2\right) + \frac{1}{2}\right] .$$

Dies muß dasselbe sein wie $\phi_2(x_2)\,\phi_2^*(x_1)$. Der Ausdruck in der eckigen Klammer kann umgeschieben werden in

$$\frac{1}{2}\left(\frac{2m\omega}{\hbar}x_1^2-1\right)\left(\frac{2m\omega}{\hbar}x_2^2-1\right) .$$

Damit ergibt sich

$$\phi_2(x) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{2m\omega}{\hbar}x^2-1\right)\,\phi_0(x)\,. \tag{257}$$

Auch dieses Resultat kann wieder verglichen werden mit der bekannten Lösung der Schrödinger - Gleichung. Wir finden vollständige Übereinstimmung. Die Fortführung dieser Studien, um auch die Eigenfunktionen $\phi_n(x)$ mit $n\;>\;2$ zu bestimmen, ist evident.

Damit haben wir gezeigt, daß die Greensche Funktion alle notwendigen Informationen enthält, um Eigenfunktionen und Energieeigenwerte ableiten zu können.

## Systeme mit mehreren Variablen

Wir diskutieren nun eine Verallgemeinerung der Pfadintegration in bezug auf Systeme mit mehreren Variablen. Bei einer freien Bewegung in drei Dimensionen gilt für die Wirkung

$$\mathcal{A}[b,a] \;=\; \tfrac{1}{2}\,m \int\limits_{t_a}^{t_b} \left[\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)\right]\,dt \tag{258}$$

und damit für die Greensche Funktion

$$G(x_b, y_b, z_b, t_b; x_a, y_a, z_a, t_a) \;=\; \int\limits_a^b \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\int\limits_{t_a}^{t_b} \tfrac{1}{2}\,m\,\left(\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)\right)\,dt\right\} \mathcal{D}x(t)\,\mathcal{D}y(t)\,\mathcal{D}z(t)\;. \tag{259}$$

Rechnen wir diesen Ausdruck explizit aus, so tritt der Faktor $1/A$ genau $3(N+1)$-mal auf, d.h. als Normierungsfaktor haben wir $A^{-3(N+1)}$.

Eine andere Situation mit mehreren Variablen tritt bei wechselwirkenden Systemen auf. Wir gehen nun von zwei Massen $m$ und $M$ mit den zugehörigen Koordinaten $x$ und $X$ aus. Die Wechselwirkung wird durch ein Potential $V(x,X)$ beschrieben. Es folgt für die Wirkung

$$\mathcal{A}[x(t), X(t)] \;=\; \int\limits_{t_a}^{t_b} \left[\tfrac{1}{2}\,m\,\dot{x}^2 + \tfrac{1}{2}\,M\,\dot{X}^2 - V(x,X)\right]\,dt \tag{260}$$

und entsprechend für die Greensche Funktion

$$G(x_b, X_b, t_b; x_a, X_a, t_a) \;=\; \int\limits_a^b \int\limits_a^b \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\mathcal{A}[x(t), X(t)]\right\} \mathcal{D}x(t)\,\mathcal{D}X(t)\;. \tag{261}$$

Wir betrachten jetzt den Spezialfall separabler Systeme. Wir gehen von zwei Teilchen beschrieben durch die dreidimensionalen Koordinaten $\mathbf{x}$ und $\mathbf{X}$ aus. Gilt für die Wirkung

$$\mathcal{A}[\mathbf{x}, \mathbf{X}] \;=\; \mathcal{A}_x[\mathbf{x}] + \mathcal{A}_X[\mathbf{X}]\;, \tag{262}$$

in der $\mathcal{A}_x$ nur Pfade $\mathbf{x}(t)$ und $\mathcal{A}_X$ nur Pfade $\mathbf{X}(t)$ beinhaltet, so nennen wir das System separabel. Dies tritt beispielsweise ein, wenn die Teilchen nicht wechselwirken. Damit erhalten wir für die Greensche Funktion

$$\begin{aligned} G(\mathbf{x}_b, \mathbf{X}_b, t_b; \mathbf{x}_a, \mathbf{X}_a, t_a) \;&=\; \int\limits_a^b \int\limits_a^b \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\left(\mathcal{A}_x[\mathbf{x}] + \mathcal{A}_X[\mathbf{X}]\right)\right\} \mathcal{D}^3\mathbf{x}(t)\,\mathcal{D}^3\mathbf{X}(t) \;= \\ &\int\limits_a^b \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\mathcal{A}_x[\mathbf{x}]\right\} \mathcal{D}^3\mathbf{x}(t)\; \int\limits_a^b \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\mathcal{A}_X[\mathbf{X}]\right\} \mathcal{D}^3\mathbf{X}(t) \;= \\ &G_x(\mathbf{x}_b, t_b; \mathbf{x}_a, t_a)\, G_X(\mathbf{X}_b, t_b; \mathbf{X}_a, t_a)\;. \end{aligned} \tag{263}$$

Für nichtwechselwirkende System faktorisieren die Integralkerne.

Wir behandeln nun die Wellenfunktionen für Vielteilchensysteme $\Psi(\mathrm{x}, \mathbf{X}, \ldots, t)$. Es ist die Wahrscheinlichkeitsamplitude dafür zum Zeitpunkt $t$ ein Teilchen am Ort x und ein anderes Teilchen am Ort $\mathbf{X}$ zu finden. Als Verallgemeinerung gilt

$$\begin{aligned} \Psi(\mathrm{x}, \mathbf{X}, \ldots, t) &= \int\int G(\mathrm{x}, \mathbf{X}, \ldots, t; \mathrm{x}', \mathbf{X}', \ldots, t') \\ &\quad \times \Psi(\mathrm{x}', \mathbf{X}', \ldots, t')\, d\mathrm{x}'\, d\mathbf{X}' \,, \end{aligned} \tag{264}$$

wobei $d\mathrm{x}'$ als Produkt so viele Differentiale enthält wie es Koordinaten im $\mathrm{x}'$-Raum gibt. Oftmals gibt es Transformationen auf spezielle Koordinaten, die die Separierbarkeit von Systemen offenkundig machen.

Es folgen einige kurze Bemerkungen zum Zusammenhang zwischen Pfadintegralen und Funktionalen. Wir untersuchen die Greensche Funktion

$$\begin{aligned} G(b,a) &= \int_a^b\int_a^b \Bigg[\exp\Bigg\{\frac{i}{\hbar}\int_{t_a}^{t_b} \tfrac{1}{2}\, m\, \dot{x}^2\, dt + \frac{i}{\hbar}\int_{t_a}^{t_b} \tfrac{1}{2}\, M\, \dot{X}^2\, dt \\ &\quad - \frac{i}{\hbar}\int_{t_a}^{t_b} V(x,X,t)\, dt\Bigg\}\Bigg]\ \mathcal{D}x(t)\, \mathcal{D}X(t)\ . \end{aligned} \tag{265}$$

Wir führen zunächst die Integrale über die Pfade $X(t)$ aus. Damit können wir formal schreiben

$$G(b,a) = \int_a^b \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\int_{t_a}^{t_b} \tfrac{1}{2}\, m\, \dot{x}^2\, dt\right\}\ T[x(t)]\, \mathcal{D}x(t) \tag{266}$$

mit

$$T[x(t)] = \int_a^b \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\int_{t_a}^{t_b} \left[\tfrac{1}{2}\, M\, \dot{X}^2 - V(x,X,t)\right]\, dt\right\}\ \mathcal{D}X(t)\ . \tag{267}$$

Durch die Integration über alle Pfade $X$ haben wir das Funktional $T$ erzeugt. Ein Funktional ist eine Zahl, die von der Kenntnis einer vollständigen Funktion abhängt. Bespielsweise ist die Fläche unter einer Kurve ein Funktional der Kurve, also $A = \int f(y)\, dy$. Wir schreiben Funktionale als $A[f(y)]$ und nicht als $A(f(y))$, denn $A$ hängt nicht von einem speziellen Wert der Funktion $f(y)$ am speziellen Punkt $y$ sondern von dem vollständigen Verlauf der Funktion $f(y)$ ab. $A$ hängt nicht von $y$ ab. In diesem Sinne ist $T$ ein Funktional von $x(t)$.

## Pfadintegrale und quadratische Lagrange - Funktionen

Die nachfolgenden Studien in diesem Kapitel basieren auf der quadratischen Lagrange - Funktion

$$L \;=\; \tfrac{1}{2}\, m\, \dot{x}^2 + b(t)\, x\, \dot{x} - \tfrac{1}{2}\, c(t)\, x^2 - e(t)\, x \;. \tag{268}$$

Diese Lagrange - Funktion beinhaltet als Spezialfälle den harmonischen Oszillator ($b \;=\; e \;=\; 0,\;\; c \;=\; m\omega^2$) und das uniforme Kraftfeld ($b \;=\; c \;=\; 0,\;\; e \;=$ const). Wir wollen die Greensche Funktion ermitteln.

$$G(x_b, t_b; x_a, t_a) \;=\; \int\limits_{x_a}^{x_b} \mathcal{D}'x(t)\, \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{t_a}^{t_b} L\, dt \right\} \;. \tag{269}$$

Aufgrund der Lagrange - Funktion (268) folgt sofort

$$\frac{\partial L}{\partial x} \;=\; b(t)\, \dot{x} - c(t)\, x - e(t) \tag{270}$$

und

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \;=\; m\, \dot{x} + b(t)\, x \tag{271}$$

und weiter

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) \;=\; m\, \ddot{x} + \dot{b}(t)\, x + b(t)\, \dot{x} \;. \tag{272}$$

Damit lautet die Bewegungsgleichung

$$m\, \ddot{x} + (c + \dot{b})x + e \;=\; 0 \;. \tag{273}$$

Die Randbedingungen sind $x(t_a) \;=\; x_a$ und $x(t_b) \;=\; x_b$. Es sei nun

$$y(\tau) \;=\; x(\tau) - x_{kl}(\tau) \tag{274}$$

die neue Integrationsvariable im Pfadintegral. Die Jacobi - Determinante bei diesem Variablenwechsel ist einfach 1. Fassen wir das Pfadintegral als Grenzfall der diskret gewählten $x_j$ auf, so bedeutet die Substitution $y_j \;=\; x_j - x_{kl}(t_j)$ gerade eine Translation.

Es sei nun $x_{kl}(t)$ eine Lösung der Euler - Lagrange Gleichung

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} \;=\; 0 \;. \tag{275}$$

Wir untersuchen generell die Entwicklung des Wirkungsfunktionals

$$\mathcal{A}[x(t)] \;=\; \int\limits_{t_a}^{t_b} L(\dot{x}, x, t)\, dt \tag{276}$$

mit

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A}[x(t)] &= \mathcal{A}[x_{kl}] + \int\limits_{t_a}^{t_b} dt \; \left.\frac{\delta \mathcal{A}[x]}{\delta x(t)}\right|_{x=x_{kl}} y(t) \\
&\quad + \tfrac{1}{2} \int\limits_{t_a}^{t_b}\int\limits_{t_a}^{t_b} dt\, dt'\, y(t) \; \left.\frac{\delta^2 \mathcal{A}[x]}{\delta x(t)\, \delta x(t')}\right|_{x=x_{kl}} y(t') + \ldots \\
&= \mathcal{A}_{kl} + \int\limits_{t_a}^{t_b} \left\{ \tfrac{1}{2}\, m\, \dot{y}^2 - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{y^n}{n!} \; \left.\frac{\partial^n V(x,t)}{\partial x^n}\right|_{x=x_{kl}} \right\} dt \; .
\end{aligned}
\tag{277}
$$

Dabei hängt die klassische Wirkung $\mathcal{A}_{kl} = \mathcal{A}[x_{kl}]$ nicht mehr von der Pfadintegration über $y$ ab, und der in $y$ lineare Anteil verschwindet wegen der Euler - Lagrange Gleichung für den klassischen Weg

$$
\left.\frac{\delta \mathcal{A}}{\delta x}\right|_{x=x_{kl}} = 0 \; .
$$

In dem verbleibenden, für die Pfadintegration über $y$ wichtigen Integral sind die Faktoren

$$
\left.\frac{\partial^n V(x,t)}{\partial x^n}\right|_{x=x_{kl}}
$$

aufgrund des bekannten klassischen Pfades $x_{kl}$ Funktionen der Zeit. Die linearen Anteile des Potentials verschwinden. Allein die klassische Wirkung $\mathcal{A}_{kl}$ hängt davon ab. Hat man ein Problem ohne lineare Anteile gelöst (zum Beispiel der harmonische Oszillator), so ist in diesem Fall das Hinzufügen eines linearen Anteils (zum Beispiel der angetriebene Oszillator) ein klassisch lösbares Problem.

Ferner dient der Ausdruck

$$
G(b;a) = e^{i\,\mathcal{A}_{kl}/\hbar} \int\limits_{0}^{0} \mathcal{D}'y \; \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} \int\limits_{t_a}^{t_b} \left( \tfrac{1}{2} m \dot{y}^2 - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \; \left.\frac{\partial^n V}{\partial x^n}\right|_{x=x_{kl}} y^n \right) dt \right\}
\tag{278}
$$

als Ausgangspunkt für eine quasiklassische Approximation des Propagators $G$. In dieser Näherung werden zunächst nur quadratische Fluktuationen berücksichtigt, welche exakt integrierbar sind. Eine Verbesserung dieser Näherung kann prinzipiell mit Hilfe störungstheoretischer Methoden erfolgen.

$\mathcal{A}[x_{kl}]$ kann also aus dem Pfadintegral über $\mathcal{D}'y(\tau)$ herausfaktorisiert werden. Die Randbedingungen für $y(\tau)$ lauten $y(t_a) = y(t_b) = 0$. Damit erhalten wir

$$
G(x_b, t_b; x_a, t_a) = \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} \mathcal{A}_{kl}(x_b, t_b; x_a, t_a) \right\} \; F(t_b, t_a) \; ,
\tag{279}
$$

wobei $\mathcal{A}_{kl}(x_b, t_b; x_a, t_a)$ die Wirkung entlang des klassischen Pfades $x_{kl}$ von $(x_a, t_a)$ bis $(x_b, t_b)$ ist und die Funktion $F(t_b, t_a)$ mit der Lagrange - Funktion

$$
L = \tfrac{1}{2} m \dot{x}^2 + b\, x\, \dot{x} - \tfrac{1}{2}\, c\, x^2
\tag{280}
$$

korrespondiert. Der lineare Anteil $e(t)\,x$ fällt aufgrund von (277) heraus. $F$ ist nur eine Funktion der Zeit. Wir müssen das entsprechende Pfadintegral lösen, was eine recht aufwendige Prozedur ist. Es gilt

$$F(t_b,t_a) = \lim_{N\to\infty}\int dy_1\dots dy_N \left(\frac{m}{2\pi i\hbar\epsilon}\right)^{(N+1)/2} \times \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\sum_{j=0}^{N}\left[\frac{m}{2\epsilon}(y_{j+1}-y_j)^2 - \tfrac{1}{2}\epsilon\, c_j\, y_j^2\right]\right\} \tag{281}$$

mit $c_j = c(t_j)$ und

$$t_j = t_a + \frac{j}{N}(t_b - t_a)\ . \tag{282}$$

Wir haben den Term $b\,x\,\dot{x}$ eliminiert, da er in eindimensionalen Problemen irrelevant ist. Es ist nicht notwendig, in der Wirkung den Term

$$\mathcal{A}_b = \int_{t_a}^{t_b} b(t)\,y(t)\,\dot{y}(t)\,dt$$

separat zu betrachten. Wir führen eine elementare partielle Integartion durch und setzen

$$v' = y(t)\,\dot{y}(t), \qquad u = b(t)$$

und somit

$$v = \tfrac{1}{2}y^2(t), \qquad u' = \dot{b}(t)\ .$$

Dies führt auf

$$\mathcal{A}_b = \tfrac{1}{2}\,b(t)\,y^2(t)\Big|_{t_a}^{t_b} - \int_{t_a}^{t_b}\tfrac{1}{2}\,\dot{b}(t)\,y^2(t)\,dt = -\int_{t_a}^{t_b}\tfrac{1}{2}\,\dot{b}(t)\,y^2(t)\,dt\ , \tag{283}$$

da $y(t_b) = y(t_a) = 0$ ist. Der verbleibende Ausdruck kann aber mit dem Term proportional zu $c(t)$ zusammengefaßt werden.

Wir wollen nun das Pfadintegral (281) für $F$ lösen. Zu diesem Zweck definieren wir einen Vektor $\eta$ mit $N$ Komponenten

$$\eta = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix}\ . \tag{284}$$

Wir bemerken, daß wir damit das Argument der Exponentialfunktion in (281) schreiben können als

$$-\eta^T\,\sigma\,\eta\ ,$$

wobei $T$ die Transposition anzeigt und $\sigma$ eine Matrix ist mit

$$\sigma \;=\; \frac{m}{2\epsilon\hbar i}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & & & \\ -1 & 2 & -1 & 0 & & \\ 0 & -1 & 2 & -1 & & \\ & & & & & \\ & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & -1 & 2 \end{pmatrix} + \frac{i\epsilon}{2\hbar}\begin{pmatrix} c_1 & 0 & & \\ 0 & c_2 & & \\ & & & \\ & & & c_N \end{pmatrix} . \tag{285}$$

Zur Veranschaulichung verifizieren wir zunächst den Spezialfall niedrigster Ordnung mit $N = 0$. Dann lautet das Argument der Exponentialfunktion

$$\frac{i}{\hbar}\left[\frac{m}{2\epsilon}(y_1 - y_0)^2 - \tfrac{1}{2}\epsilon c_0\, y_0^2\right] .$$

Dieser Ausdruck ist aber 0, da $y_0$ und $y_{N+1}$ fest auf 0 gesetzt sind. Die Größen $y_0$ und $y_{N+1}$ treten im Argument $-\eta^T\sigma\eta$ nicht auf. Als nächsten Spezialfall untersuchen wir $N = 2$. Dann lautet das Argument der Exponentialfunktion

$$\begin{aligned} &\frac{i}{\hbar}\left[\left\{\frac{m}{2\epsilon}(y_1 - y_0)^2 - \tfrac{1}{2}\epsilon c_0\, y_0^2\right\} + \left\{\frac{m}{2\epsilon}(y_2 - y_1)^2 - \tfrac{1}{2}\epsilon c_1\, y_1^2\right\}\right. \\ &+ \left.\left\{\frac{m}{2\epsilon}(y_3 - y_2)^2 - \tfrac{1}{2}\epsilon c_2\, y_2^2\right\}\right] = \\ &\frac{i}{\hbar}\left[\frac{m}{2\epsilon}y_1^2 + \left\{\frac{m}{2\epsilon}(y_2 - y_1)^2 - \tfrac{1}{2}\epsilon c_1\, y_1^2\right\} + \left\{\frac{m}{2\epsilon}y_2^2 - \tfrac{1}{2}\epsilon c_2\, y_2^2\right\}\right] . \end{aligned} \tag{286}$$

In der Matrixdarstellung folgt entsprechend

$$\begin{aligned} & -(y_1\,,\,y_2)\left(\frac{m}{2\epsilon\hbar i}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + \frac{i\epsilon}{2\hbar}\begin{pmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \\ = \;& -(y_1\,,\,y_2)\begin{pmatrix} \left(\frac{m}{\epsilon i\hbar} + \frac{i\epsilon}{2\hbar}c_1\right) y_1 & -\frac{m}{2\epsilon\hbar i}y_2 \\ -\frac{m}{2\epsilon\hbar i}y_1 & \left(\frac{m}{\epsilon i\hbar} + \frac{i\epsilon}{2\hbar}c_2\right) y_2 \end{pmatrix} \\ = \;& -\left[\left(\frac{m}{\epsilon i\hbar} + \frac{i\epsilon}{2\hbar}c_1\right) y_1^2 - \frac{m}{2\epsilon\hbar i}y_1\,y_2 - \frac{m}{2\epsilon\hbar i}y_1\,y_2\right. \\ & + \left.\left(\frac{m}{\epsilon i\hbar} + \frac{i\epsilon}{2\hbar}c_2\right) y_2^2\right] \end{aligned} \tag{287}$$

Die beiden Ausdrücke (286) und (287) stimmen überein. Die Verallgemeinerung ist evident.

Wir können somit in der Tat schreiben

$$F(t_b, t_a) \;=\; \lim_{N\to\infty}\left(\frac{m}{2\pi i\hbar\epsilon}\right)^{(N+1)/2}\int d^N\eta\; \exp\left(-\eta^T\,\sigma\,\eta\right) . \tag{288}$$

Wir wollen nun das Integral

$$\int d^N\eta\; \exp\left(-\eta^T\,\sigma\,\eta\right)$$

berechnen. $\sigma$ ist von der Form $i\,\tilde{\sigma}$, wobei $\tilde{\sigma}$ reell und symmetrisch ist. Dann kann $\sigma$ diagonalisiert werden durch eine unitäre Matrix $U$,

$$\sigma \;=\; U^\dagger \, \sigma_D \, U \ , \tag{289}$$

wobei $U$ unitär und $\sigma_D$ eine Diagonalmatrix ist mit den Eigenwerten $\sigma_\alpha$ von $\sigma$. Umgekehrt gilt: Haben zwei Matrizen die gleichen Eigenwerte, so sind sie durch eine unitäre Transformation miteinander verbunden. Es sei $\xi \;=\; U\,\eta$. Der Vektor $\xi$ ist reell und die $\{\xi\}$ bilden einen $N$-dimensionalen Vektorraum. Aufgrund der Bedingung $|\det U| \;=\; 1$ ist die Jacobi - Determinante beim Übergang von $d^N\eta$ nach $d^N\xi$ gleich 1. Daher folgt

$$\begin{aligned} \int d^N\eta \, \exp\left(-\eta^T\,\sigma\,\eta\right) \;&=\; \int d^N\xi \, \exp\left(-\xi^T\,\sigma_D\,\xi\right) \\ &=\; \prod_{\alpha=1}^{N} \sqrt{\frac{\pi}{\sigma_\alpha}} \;=\; \frac{\pi^{N/2}}{\sqrt{\det\sigma}} \ . \end{aligned} \tag{290}$$

Als Beispiel betrachten wir wieder den Spezialfall $N \;=\; 2$. Dann gilt

$$\begin{aligned} &\int d\xi_1\,d\xi_2\,\exp\left\{-(\xi_1\ ,\ \xi_2)\begin{pmatrix}\sigma_1 & 0\\ 0 & \sigma_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{pmatrix}\right\} \\ =\; &\int d\xi_1\,d\xi_2\,\exp\left\{-(\xi_1\ ,\ \xi_2)\begin{pmatrix}\sigma_1\,\xi_1\\ \sigma_2\,\xi_2\end{pmatrix}\right\} \\ =\; &\int d\xi_1\,d\xi_2\,\exp\left\{-\sigma_1\,\xi_1^2-\sigma_2\,\xi_2^2\right\} \ . \end{aligned} \tag{291}$$

Wir integrieren über $\xi_1$. Es folgt

$$\int d\xi_2 \sqrt{\frac{\pi}{\sigma_1}}\,\exp\left\{-\sigma_2\,\xi_2^2\right\} \;=\; \sqrt{\frac{\pi}{\sigma_1}}\sqrt{\frac{\pi}{\sigma_2}} \ . \tag{292}$$

Die Verallgemeinerung auf die $N$-dimensionale Integration ist evident.

Das Resultat (290) gilt nur unter der Voraussetzung, daß es keine Eigenwerte 0 gibt. Wenn auch nur ein Eigenwert 0 ist, existiert das Integral nicht. Wir schreiben nun

$$\begin{aligned} F(t_b,t_a) \;&=\; \lim_{N\to\infty}\left[\left(\frac{m}{2\pi i\hbar\epsilon}\right)^{N+1}\frac{\pi^N}{\det\sigma}\right]^{1/2} \\ &=\; \lim_{N\to\infty}\left[\frac{m}{2\pi i\hbar}\,\frac{1}{\epsilon}\,\frac{1}{\left(\frac{2i\hbar\epsilon}{m}\right)^N\,\det\sigma}\right]^{1/2} \ . \end{aligned} \tag{293}$$

Weiter definieren wir

$$f(t_b,t_a) \;=\; \lim_{N\to\infty}\left[\epsilon\,\left(\frac{2i\hbar\epsilon}{m}\right)^N\,\det\sigma\right] \ . \tag{294}$$

Nun ist

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{2i\hbar\epsilon}{m}\right)^N \det\sigma \\
&= \det\left\{\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & & & \\ -1 & 2 & -1 & 0 & & \\ 0 & -1 & 2 & -1 & & \\ & & & & & \\ & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & -1 & 2 \end{pmatrix} - \frac{\epsilon^2}{m}\begin{pmatrix} c_1 & 0 & & \\ 0 & c_2 & & \\ & & & \\ & & & c_N \end{pmatrix}\right\} \\
&\equiv \det\sigma'_N \equiv p_N \ , \qquad (295)
\end{aligned}
$$

wobei $\sigma'_N$ die Matrix in den geschweiften Klammern bezeichnet.

Wir betrachten zunächst die $j \times j$ Untermatrizen $\sigma'_j$, wir lassen aber $\epsilon$ gleich $(t_b - t_a)/(N+1)$. Diese Matrix besteht aus den ersten $j$ Reihen und Spalten von $\sigma'_N$ und die entsprechende Determinante ist $p_j$. Wir entwickeln $\sigma'_{j+1}$ in Untermatrizen. Es läßt sich dann zeigen, daß für die $p_j$ eine einfache Rekursionsbeziehung besteht

$$
p_{j+1} = \left(2 - \frac{\epsilon^2}{m} c_{j+1}\right) p_j - p_{j-1} \ , \qquad j = 1, \ldots, N, \qquad (296)
$$

mit $p_1 = 2 - \epsilon^2 c_1/m$ und $p_0 = 1$. Für den Spezialfall $j = 0$ ergibt sich nach (295) $p_1 = (2 - \epsilon^2/m\, c_1)p_0$, was mit (296) übereinstimmt. Aufgrund der Behauptung (296) folgt für $j$ = 1

$$
\begin{aligned}
p_2 &= \left(2 - \frac{\epsilon^2}{m} c_2\right) p_1 - 1 \\
&= \left(2 - \frac{\epsilon^2}{m} c_2\right)\left(2 - \frac{\epsilon^2}{m} c_1\right) - 1 \ . \qquad (297)
\end{aligned}
$$

Andererseits folgt aus der Matrizendarstellung

$$
\begin{aligned}
p_2 &= \det\begin{pmatrix} 2 - \frac{\epsilon^2}{m} c_1 & -1 \\ -1 & 2 - \frac{\epsilon^2}{m} c_2 \end{pmatrix} \\
&= \left(2 - \frac{\epsilon^2}{m} c_2\right)\left(2 - \frac{\epsilon^2}{m} c_1\right) - 1 \ , \qquad (298)
\end{aligned}
$$

was mit (297) identisch ist. Wir betrachten jetzt den Fall $j$ = 2. Aufgrund der Behauptung (296) folgt

$$
\begin{aligned}
p_3 &= \left(2 - \frac{\epsilon^2}{m} c_3\right) p_2 - p_1 \\
&= \left(2 - \frac{\epsilon^2}{m} c_3\right)\left[\left(2 - \frac{\epsilon^2}{m} c_2\right)\left(2 - \frac{\epsilon^2}{m} c_1\right) - 1\right] - \left(2 - \frac{\epsilon^2}{m} c_1\right) \ . \qquad (299)
\end{aligned}
$$

Andererseits folgt wieder aus der Matrizendarstellung

$$
\begin{aligned}
p_3 &= \det\begin{pmatrix} 2-\frac{\epsilon^2}{m}\,c_1 & -1 & 0 \\ -1 & 2-\frac{\epsilon^2}{m}\,c_2 & -1 \\ 0 & -1 & 2-\frac{\epsilon^2}{m}\,c_3 \end{pmatrix} \\
&= \left(2-\frac{\epsilon^2}{m}\,c_1\right)\left[\left(2-\frac{\epsilon^2}{m}\,c_2\right)\left(2-\frac{\epsilon^2}{m}\,c_3\right)-1\right]-\left(2-\frac{\epsilon^2}{m}\,c_3\right) . \qquad (300)
\end{aligned}
$$

Wir finden also in jedem Fall eine vollständige Übereinstimmung zwischen den beiden Ausdrücken. Der allgemeine Beweis kann leicht durchgeführt werden.

Wir schreiben nun die Beziehung (296) um in

$$
\frac{p_{j+1}-2p_j+p_{j-1}}{\epsilon^2} = -\frac{c_{j+1}}{m}\,p_j \; . \qquad (301)
$$

Hier sehen wir sofort, daß wir $p_N$ durch Lösung einer Differentialgleichung erhalten können. Wir bilden den Differenzenquotienten des Vorwärts- und Rückwärtsdifferenzenquotienten bei $p_j$

$$
\frac{\frac{p_{j+1}-p_j}{\epsilon}-\frac{p_j-p_{j-1}}{\epsilon}}{\epsilon} = \frac{p_{j+1}-2\,p_j+p_{j-1}}{\epsilon^2} , \qquad (302)
$$

was mit der linken Seite von (301) übereinstimmt. Setzen wir entsprechend (294), (295) und (301)

$$
\varphi(t) = \epsilon\,p_j \qquad (303)
$$

für $t = t_a + j\,\epsilon$, so erkennen wir, daß wir im Grenzfall $\epsilon \to 0$ die Differentialgleichung erhalten

$$
\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{c(t)}{m}\,\varphi \; . \qquad (304)
$$

Die Anfangswerte von $\varphi$ folgen aus

$$
\begin{aligned}
\varphi(0) &= \epsilon\,p_0 \;\to\; 0 , \\
\frac{d\varphi(0)}{dt} &= \epsilon\,\frac{p_1-p_0}{\epsilon} = 2-\frac{\epsilon^2}{m}\,c_1-1 \;\to\; 1 \qquad (305)
\end{aligned}
$$

für $N \to \infty$. Konsequenterweise ergibt sich $f(t_b,t_a) = \varphi(t_b)$ durch Lösung der Differentialgleichung

$$
m\,\frac{\partial^2 f(t,t_a)}{\partial t^2} + c(t)\,f(t,t_a) = 0 \qquad (306)
$$

mit den Anfangsbedingungen

$$
\begin{aligned}
f(t_a,t_a) &= 0 , \\
\left.\frac{\partial f(t,t_a)}{\partial t}\right|_{t\,=\,t_a} &= 1 \; . \qquad (307)
\end{aligned}
$$

Ausgehend von quadratischen Lagrange - Funktionen haben wir zusammenfassend den folgenden Ausdruck für die Greensche Funktion abgeleitet

$$
G(x_b,t_b;x_a,t_a) = \sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar\,f(t_b,t_a)}}\;\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\,\mathcal{A}_{kl}(x_b,t_b;x_a,t_a)\right\} \; . \qquad (308)
$$

## Die Greensche Funktion für das Potential des harmonischen Oszillators - Eine zweite Ableitung

Wir hatten im Rahmen der Diskussion quadratischer Lagrange - Funktionen den folgenden allgemeinen Ausdruck für die Greensche Funktion abgeleitet

$$G(x_b, t_b; x_a, t_a) \;=\; \sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar\, f(t_b, t_a)}}\, \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\, \mathcal{A}_{kl}(x_b, t_b; x_a, t_a)\right\} \;. \tag{309}$$

Die Funktion $f(t_b, t_a)$ ergibt sich durch Lösung der Differentialgleichung

$$m\, \frac{\partial^2 f(t, t_a)}{\partial t^2} + c(t)\, f(t, t_a) \;=\; 0 \tag{310}$$

mit den Anfangsbedingungen

$$f(t_a, t_a) \;=\; 0\;, \qquad \left.\frac{\partial f(t, t_a)}{\partial t}\right|_{t\,=\,t_a} \;=\; 1\;. \tag{311}$$

Natürlich folgt die Greensche Funktion für das freie Teilchen als Spezialfall des Ausdruckes (309). Für den Spezialfall des harmonischen Oszillators gilt $e(t) \;=\; 0,\;\; c(t) \;=\; m\,\omega^2 \;=\; \mathrm{const.}$ Durch Lösung der Differentialgleichung (310) erhalten wir für $f$

$$f(t_b, t_a) \;=\; \frac{\sin(\omega T)}{\omega} \tag{312}$$

mit $T \;=\; t_b - t_a$. Setzen wir diese Lösung in die Differentialgleichung ein, so folgt in der Tat

$$-m\, \frac{\omega^2}{\omega}\, \sin(\omega T) + m\omega^2\, \frac{\sin(\omega T)}{\omega} \;=\; 0\;. \tag{313}$$

Auch die Anfangsbedingungen sind erfüllt, denn es gilt

$$\begin{aligned} f(t_a,\, t_a) \;&=\; \frac{\sin(\omega \cdot 0)}{\omega} \;=\; 0\;, \\ \left.\frac{\partial f(t, t_a)}{\partial t}\right|_{t\,=\,t_a} \;&=\; \left.\frac{\omega\, \cos(\omega T)}{\omega}\right|_{T \to 0} \;=\; 1\;. \end{aligned} \tag{314}$$

Die exakte Greensche Funktion lautet daher

$$\begin{aligned} G(x_b, t_b; x_a, t_a) \;=\; &\sqrt{\frac{m\omega}{2\pi i\hbar\, \sin(\omega T)}}\; \times \\ &\exp\left\{\frac{im\omega}{2\hbar\, \sin(\omega T)}\, \Big[\Big(x_b^2 + x_a^2\Big)\, \cos(\omega T) - 2x_a x_b\Big]\right\}\;. \end{aligned} \tag{315}$$

## Aufspaltung der Pfadintegration

Wir betrachten nun zwei aufeinanderfolgende Ereignisse und den entsprechenden Pfadintegralausdruck dafür. Es sei $t_a < t_c < t_b$. Dann können wir die Wirkung offensichtlich aufspalten in

$$\mathcal{A}[b,a] \;=\; \mathcal{A}[b,c] + \mathcal{A}[c,a]\;. \tag{316}$$

Wenn wir über alle Pfade von $a$ nach $b$ integrieren wollen, so können wir zunächst über alle Wege von $a$ nach $c$ integrieren, dann integrieren wir über alle Wege von $c$ nach $b$ und schließlich integrieren wir das Resultat über alle möglichen Werte von $x_c$. Somit folgt für die Greensche Funktion

$$G(x_b,t_b;x_a,t_a) \;=\; \int \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\left(\mathcal{A}[b,c]+\mathcal{A}[c,a]\right)\right\}\mathcal{D}'x(t)\;. \tag{317}$$

Wir integrieren zunächst über alle möglichen Pfade von $a$ nach $c$. Bei der Durchführung dieses ersten Schrittes ist $\mathcal{A}[b,c]$ konstant und wir erhalten als Resultat

$$G(x_b,t_b;x_a,t_a) \;=\; \int\limits_{x_c}\int\limits_{c}^{b} \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\mathcal{A}[b,c]\right\} G(x_c,t_c;x_a,t_a)\,\mathcal{D}'x(t)\,dx_c\;. \tag{318}$$

Hierbei müssen wir über alle Möglichkeiten für $x_c$ integrieren.

Als nächsten Schritt führen wir die Integration über alle möglichen Pfade zwischen den beliebigen Punkten $x_c$ und dem festen Endpunkt $b$ durch. Es verbleibt schließlich ein Integral über alle möglichen Zwischenwerte von $x_c$

$$G(x_b,t_b;x_a,t_a) \;=\; \int\limits_{x_c} G(x_b,t_b;x_c,t_c)\,G(x_c,t_c;x_a,t_a)\,dx_c\;. \tag{319}$$

Dieses Resultat können wir auch aus der ursprünglichen Definition der Pfadintegrale herleiten. Nach (319) gilt die Regel, daß sich die Übergangsamplituden für Ereignisse in zeitlicher Folge multiplizieren. Die Verallgemeinerung ist evident und führt zu einer Aufspaltung in einzelne Teilintervalle.

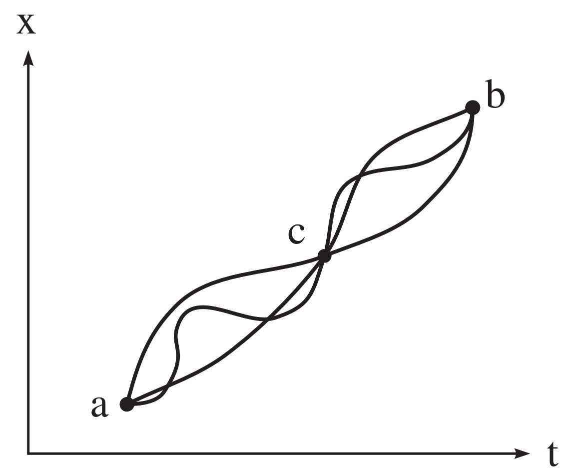
$$\begin{aligned} G(b,a) \;&=\; \int\limits_{x_1}\int\limits_{x_2}\ldots\int\limits_{x_N} G(b,N)\,G(N,N-1)\,\ldots \\ &\qquad G(i+1,i)\,\ldots\,G(1,a)\,dx_1\,dx_2\,\ldots\,dx_N\;. \end{aligned} \tag{320}$$

Für ein infinitesimales Zeitintervall $\epsilon$ zwischen zwei aufeinanderfolgenden Punkten können wir schreiben

$$G(i+1,i) \;=\; \frac{1}{A}\exp\left\{\frac{i\epsilon}{\hbar}\,L\left(\frac{x_{i+1}-x_i}{\epsilon},\frac{x_{i+1}+x_i}{2},\frac{t_{i+1}+t_i}{2}\right)\right\}\;. \tag{321}$$

Dieser Ausdruck gilt in erster Ordnung in $\epsilon$.

Die Greensche Funktion ist die Übergangsamplitude dafür, um von einem gegebenen Punkt im Raum zu einer gegebenen Zeit zu einem anderen Raum - Zeit - Punkt zu gelangen. Sind wir nur an der Wahrscheinlichkeitsamplitude zum Raum - Zeit - Punkt $(x,t)$ interessiert ohne Kenntnis der




Figur 8: Aufgetragen sind verschiedene Pfade zwischen den Punkten $a$ und $b$. Alle eingezeichneten Pfade treffen sich am Punkt $c$.

Vorgeschichte, so nennen wir diese Amplitude die Wellenfunktion $\psi(x,t)$. Damit besteht der bereits besprochene Zusammenhang

$$\psi(x_2,t_2) \;=\; \int\limits_{-\infty}^{\infty} G(x_2,t_2;x_3,t_3)\,\psi(x_3,t_3)\,dx_3 \;. \tag{322}$$

Die totale Wahrscheinlichkeitsamplitude bei $(x_2,t_2)$ ist durch das Integral über alle möglichen Werten von $x_3$ gegeben. Die Summe über alle möglichen Vergangenheiten wird durch eine einzige Funktion ausgedrückt.

## Impulsmessungen

Bisher sind wir von Orts- und Zeitmessungen ausgegangen. Gegeben sei die Wellenfunktion eines Teilchens $f(y)$ zum Zeitpunkt $t = 0$ und wir wollen die Wahrscheinlichkeit dafür finden, daß zur Zeit $T$ der Impuls des Teilchens zwischen $p$ und $p + dp$ liegt. Die entsprechende Wahrscheinlichkeit bezeichnen wir mit $P(p)\,dp$.

Die Amplitude dafür, daß das Teilchen am Ort $x$ zur Zeit $t = T$ ankommt, ist gegeben durch

$$\psi(x,T) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x,T;y,0)\, f(y)\, dy \; . \tag{323}$$

Wir setzen die freie Greensche Funktion ein und erhalten

$$\psi(x,T) = \sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar T}} \exp\left\{\frac{imx^2}{2\hbar T}\right\} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{\frac{-imxy}{\hbar T}\right\} \exp\left\{\frac{imy^2}{2\hbar T}\right\} f(y)\, dy. \tag{324}$$

Das Absolutbetragsquadrat dieser Amplitude ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß sich das Teilchen zwischen $x$ und $x + dx$ befindet. Wir gehen von einer eindimensionalen Bewegung aus. Dann können wir annehmen, daß wir bei $t = 0$ die Position des Teilchens im Rahmen $\pm b$ am Ursprung auf der $x$-Achse lokalisiert haben. Die Unsicherheit $b$ kann im Prinzip sehr groß sein. Als einzige Einschränkung setzen wir einen endlichen Wert voraus.

Den Impuls eines solchen Teilchen können wir durch eine Flugzeittechnik messen. Wir beobachten wie weit sich das Teilchen zur Zeit $t = T$ bewegt hat. Die Geschwindigkeit ist $x/T$ und der Impuls entsprechend $p = m\, x/T$. Der Fehler solch einer Impulsmessung beträgt $\pm bm/T$. Er kann sehr klein gemacht werden, sofern $T$ nur genügend groß ist. Für die Wahrscheinlichkeiten erhalten wir dann insgesamt

$$\begin{aligned} P(x)\, dx &= \frac{m\, dx}{2\pi\hbar T} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{\frac{im(y^2 - 2xy)}{2\hbar T}\right\} f(y)\, dy \right|^2 \\ &= P(p)\, dp \qquad \text{für} \qquad T \to \infty \; . \end{aligned} \tag{325}$$

Wir substituieren $p = mx/T$ und studieren den Grenzwert großer $T$. Es folgt

$$P(p)\, dp = \frac{dp}{2\pi\hbar} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{\frac{imy^2}{2\hbar T} - \frac{ipy}{\hbar}\right\} f(y)\, dy \right|^2 \; . \tag{326}$$

Für $|y| \leq b$ ergibt sich im Grenzfall $T \to \infty$

$$\begin{aligned} P(p)\, dp &= \frac{dp}{2\pi\hbar} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{ipy}{\hbar}\right\} f(y)\, dy \right|^2 \\ &= \frac{dp}{2\pi\hbar} \left|\phi(p)\right|^2 \; . \end{aligned} \tag{327}$$

Dies entspricht gerade der gewöhnlichen Fourier - Transformation in den Impulsraum. Dreidimensional gilt analog

$$\phi(\mathbf{p},t) = \int^{\mathbf{R}} \exp\left\{-\frac{i}{\hbar}\,\mathbf{p}\cdot\mathbf{R}\right\} \psi(\mathbf{R},t)\, d^3\mathbf{R} \; . \tag{328}$$

Die inverse Transformation lautet

$$\psi(\mathbf{R},t) \;=\; \int^{\mathbf{p}} \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\,\mathbf{p}\cdot\mathbf{R}\right\}\,\phi(\mathbf{p},t)\,\frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3}\;. \tag{329}$$

# Fourier-Transformation der Greenschen Funktion

Wir wollen nun die Greensche Funktion in den Impulsraum transformieren. Dabei gehen wir von der fundamentalen Beziehung

$$\psi(\mathbf{R}_2,t_2) \;=\; \int^{\mathbf{R}_1} G(\mathbf{R}_2,t_2;\mathbf{R}_1,t_1)\,\psi(\mathbf{R}_1,t_1)\,d^3\mathbf{R}_1 \tag{330}$$

aus. Im Impulsraum erwarten wir die gleiche Relation zwischen der Greenschen Funktion und der Wellenfunktion

$$\phi(\mathbf{p}_2,t_2) \;=\; \int^{\mathbf{p}_1} \mathcal{G}(\mathbf{p}_2,t_2;\mathbf{p}_1,t_1)\,\phi(\mathbf{p}_1,t_1)\,\frac{d^3\mathbf{p}_1}{(2\pi\hbar)^3}\;. \tag{331}$$

Bezüglich der Wellenfunktion und ihrer Fourier - Transformierten bestand der Zusammenhang

$$\psi(\mathbf{R},t) \;=\; \int^{\mathbf{p}} \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\,\mathbf{p}\cdot\mathbf{R}\right\}\,\phi(\mathbf{p},t)\,\frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3}\;. \tag{332}$$

Wir setzen nun (332) in (330) ein und bekommen

$$\psi(\mathbf{R}_2,t_2) \;=\; \int^{\mathbf{R}_1} G(\mathbf{R}_2,t_2;\mathbf{R}_1,t_1)\,\int^{\mathbf{p}_1} \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\,\mathbf{p}_1\cdot\mathbf{R}_1\right\}\phi(\mathbf{p}_1,t_1)\,\frac{d^3\mathbf{p}_1}{(2\pi\hbar)^3}\,d^3\mathbf{R}_1. \tag{333}$$

Mit Hilfe von

$$\phi(\mathbf{p},t) \;=\; \int^{\mathbf{R}} \exp\left\{-\frac{i}{\hbar}\,\mathbf{p}\cdot\mathbf{R}\right\}\,\psi(\mathbf{R},t)\,d^3\mathbf{R} \tag{334}$$

bilden wir die Fourier - Transformierte von $\psi(\mathbf{R}_2,t_2)$. Es resultiert

$$\begin{aligned}\phi(\mathbf{p}_2,t_2) \;&=\; \int^{\mathbf{R}_2}\int^{\mathbf{R}_1}\int^{\mathbf{p}_1} \exp\left\{-\frac{i}{\hbar}\,\mathbf{p}_2\cdot\mathbf{R}_2\right\}\,G(\mathbf{R}_2,t_2;\mathbf{R}_1,t_1)\\ &\qquad\times\;\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\,\mathbf{p}_1\cdot\mathbf{R}_1\right\}\,\phi(\mathbf{p}_1,t_1)\,\frac{d^3\mathbf{p}_1}{(2\pi\hbar)^3}\,d^3\mathbf{R}_1\,d^3\mathbf{R}_2\;.\end{aligned} \tag{335}$$

Durch Vergleich mit (331) sehen wir, daß bezüglich der Greenschen Funktion der Zusammenhang besteht

$$\begin{aligned}\mathcal{G}(\mathbf{p}_2,t_2;\mathbf{p}_1,t_1) \;&=\; \int^{\mathbf{R}_1}\int^{\mathbf{R}_2} \exp\left\{-\frac{i}{\hbar}\,\mathbf{p}_2\cdot\mathbf{R}_2\right\}\,G(\mathbf{R}_2,t_2;\mathbf{R}_1,t_1)\\ &\qquad\times\;\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\,\mathbf{p}_1\cdot\mathbf{R}_1\right\}\,d^3\mathbf{R}_1\,d^3\mathbf{R}_2\;.\end{aligned} \tag{336}$$

Dies gilt insbesondere auch für die freie Greensche Funktion.

Speziell betrachten wir nun die Fourier - Transformierte der freien Greenschen Funktion in einer Dimension

$$\mathcal{G}(p_2,t_2;p_1,t_1) \;=\; \int\!\!\int \exp\left\{-\frac{i}{\hbar}\,p_2x_2\right\}\,G(x_2,t_2;x_1,t_1)\,\exp\left\{\frac{i}{\hbar}p_1x_1\right\}\,dx_1\,dx_2 \tag{337}$$

mit

$$G(x_2,t_2;x_1,t_1) \;=\; \left[\frac{2\pi i\hbar(t_2-t_1)}{m}\right]^{-1/2} \exp\left\{\frac{im(x_2-x_1)^2}{2\hbar(t_2-t_1)}\right\} \; . \tag{338}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}(p_2,t_2;p_1,t_1) \;&=\; \int\int \left[\frac{2\pi i\hbar(t_2-t_1)}{m}\right]^{-1/2} \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\left(\frac{mx_2^2}{2(t_2-t_1)} - p_2x_2\right)\right\} \\
&\times\; \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\left(\frac{mx_1^2}{2(t_2-t_1)} - \left[\frac{mx_2}{(t_2-t_1)} - p_1\right] x_1\right)\right\} dx_1\, dx_2 \\
&=\; \int \left[\frac{2\pi i\hbar(t_2-t_1)}{m}\right]^{-1/2} \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\left(\frac{mx_2^2}{2(t_2-t_1)} - p_2x_2\right)\right\} \\
&\times\; \sqrt{\frac{\pi}{-\frac{i}{\hbar}\,\frac{m}{2(t_2-t_1)}}}\, \exp\left\{-\left[\frac{i}{\hbar}\left(\frac{mx_2}{t_2-t_1} - p_1\right)\right]^2 \Big/ \left[4\frac{i}{\hbar}\frac{m}{2(t_2-t_1)}\right]\right\} dx_2.
\end{aligned} \tag{339}$$

Jetzt ist

$$\left[\frac{2\pi i\hbar(t_2-t_1)}{m}\right]^{-1/2} \sqrt{\frac{\pi}{-\frac{i}{\hbar}\,\frac{m}{2(t_2-t_1)}}} \;=\; 1 \; . \tag{340}$$

Wir fassen die Argumente der Exponentialfunktion in (339) zusammen. Dies führt auf

$$\mathcal{G}(p_2,t_2;p_1,t_1) \;=\; \int \exp\left\{\frac{i}{\hbar}(p_1-p_2)x_2 - \frac{ip_1^2}{2\hbar m}(t_2-t_1)\right\} dx_2 \; . \tag{341}$$

Wir verwenden nun

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{\frac{i}{\hbar}(p_1-p_2)x_2\right\} dx_2 \;=\; 2\pi\hbar\; \delta(p_1-p_2) \; . \tag{342}$$

Somit folgt schließlich für die freie Greensche Funktion

$$\mathcal{G}(p_2,t_2;p_1,t_1) \;=\; 2\pi\hbar\; \delta(p_1-p_2)\; \exp\left\{-\frac{ip_1^2}{2\hbar m}(t_2-t_1)\right\} \tag{343}$$

für $t_2 \,>\, t_1$ und null sonst.

In drei Dimensionen folgt analog

$$\mathcal{G}(\mathbf{p}_2,t_2;\mathbf{p}_1,t_1) \;=\; (2\pi\hbar)^3\; \delta(\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_2)\; \exp\left\{-\frac{i|\mathbf{p}_1|^2}{2\hbar m}(t_2-t_1)\right\} \; . \tag{344}$$

Das Auftreten der $\delta$-Funktion drückt die Tatsache aus, daß sich der Impuls eines freien Teilchens nicht ändert. Jedoch ändert sich die Phase der Wellenfunktion kontinuierlich mit $\exp\{-\frac{i}{\hbar}Et\}$ und $E \;=\; p^2/(2m)$.

Für viele Anwendungen – insbesondere im Rahmen der relativistischen Quantenmechanik – ist es vorteilhaft, die Raum- und Zeitvariablen in symmetrischer Weise zu behandeln. Transformieren wir dann von der Koordinatendarstellung im Ortsraum zur Impulsdarstellung, so müssen wir auch eine Transformation von der Zeit $t$ zur Energie $E$ vornehmen. Die vollständige Transformation der Greenschen Funktion lautet dann

$$\begin{aligned} \mathrm{G}(\mathbf{p}_2, E_2; \mathbf{p}_1, E_1) &= \int^{\mathbf{R}_1} \int^{\mathbf{R}_2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{i}{\hbar}\,\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{R}_2\right\} \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\,E_2 t_2\right\} \times \\ G(\mathbf{R}_2, t_2; \mathbf{R}_1, t_1) \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\,\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{R}_1\right\} &\exp\left\{-\frac{i}{\hbar}\,E_1 t_1\right\} d^3\mathbf{R}_1\, d^3\mathbf{R}_2\, dt_1\, dt_2 \;. \end{aligned} \tag{345}$$

Die Energie ist nicht gleich $p^2/(2m)$, sondern muß als zusätzliche unabhängige Variable behandelt werden. Nur wenn sich das System für unendliche Zeit im selben Zustand aufhält gilt die klassische Energie - Impuls Relation.

Als Beispiel wollen wir wieder die Greensche Funktion für ein freies Teilchen berechnen. Wir müssen nur noch die Integration über die Zeitvariablen $t_1$ und $t_2$ durchführen. Wir machen dabei die Substitution

$$t_2 \;=\; t_1 + \tau \;. \tag{346}$$

Dann können wir das Doppelintegral über die Zeitvariablen schreiben als

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{\frac{i}{\hbar}(E_2 - E_1)t_1\right\} dt_1 \int_0^{\infty} \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\left(E_2 - \frac{p_1^2}{2m}\right)\tau\right\} d\tau \;. \tag{347}$$

Das erste Integral ergibt $2\pi\hbar\,\delta(E_2 - E_1)$. Das zweite Integral ist von der Form $\int_0^\infty e^{i\omega\tau} d\tau$. Es tritt oft in quantenmechanischen Problemen auf. Wenn $\omega$ reell ist, konvergiert das Integral nicht. Wir wenden einen Trick an und substituieren $\omega \;\to\; \omega + i\epsilon$, wobei $\epsilon$ reell ist. Wir können dann die Integration einfach durchführen und erhalten

$$\int_0^{\infty} e^{(i\omega - \epsilon)\tau} d\tau \;=\; \frac{i}{\omega + i\epsilon} \;. \tag{348}$$

Nun wäre es möglich, einfach den Grenzfall $\epsilon \;\to\; 0$ zu untersuchen und als Resultat $i/\omega$ zu erhalten. Jedoch wäre dieses Vorgehen nicht korrekt. In physikalischen Anwendungen wird die Greensche Funktion oft multipliziert mit anderen Funktionen und dann wird integriert. Der Integrand hätte dann bei $\omega \;=\; 0$ eine Singularität. Man kann auch nicht einfach den Hauptwert des Integrals bei $\omega \;=\; 0$ nehmen, das wäre falsch. Ferner würde die Rücktransformation des Integralkerns nicht auf den Ursprungsausdruck zurückführen. Wir lassen $\epsilon$ in dem Ausdruck stehen und plazieren den Pol einen infinitesimalen Abstand oberhalb der reellen Achse. Wir rationalisieren den Ausdruck

$$\frac{i}{\omega + i\epsilon} \;=\; \frac{i(\omega - i\epsilon)}{\omega^2 + \epsilon^2} \;=\; \frac{i\omega}{\omega^2 + \epsilon^2} + \frac{\epsilon}{\omega^2 + \epsilon^2} \;. \tag{349}$$

Den ersten Term können wir bei der Integration als Hauptwert betrachten und somit als $i/\omega$ interpretieren. Bezüglich des zweiten Terms erinnern wir uns an die folgende Darstellung der $\delta$-Funktion

$$\delta(\omega) \;=\; \lim_{\epsilon\to 0} \frac{1}{\pi}\,\frac{\epsilon}{\omega^2 + \epsilon^2} \tag{350}$$

für $\epsilon > 0$. Somit können wir schreiben

$$\int_0^\infty e^{i\omega\tau} d\tau \;=\; \lim_{\epsilon\to 0} \frac{i}{\omega + i\epsilon} \;=\; \mathrm{P.P.}\left(\frac{i}{\omega}\right) + \pi\,\delta(\omega)\,. \tag{351}$$

Kehren wir zurück zur Greenschen Funktion, so finden wir

$$\mathrm{G}(\mathbf{p}_2, E_2; \mathbf{p}_1, E_1) \;=\; (2\pi\hbar)^4\,\delta^3(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1)\,\delta(E_2 - E_1)\,i\hbar\,\left(E_1 - \frac{p_1^2}{2m} + i\epsilon\right)^{-1}. \tag{352}$$

Wir haben $\hbar\omega$ durch $E_2 - p_1^2/(2m)$ ersetzt. Die $\delta$-Funktion drückt Energie- und Impulserhaltung aus. Natürlich gilt

$$\frac{i}{E_1 - p_1^2/(2m) + i\epsilon} \;=\; \mathrm{P.P.}\left(\frac{i}{E_1 - p_1^2/(2m)}\right) + \pi\,\delta\left(E_1 - \frac{p_1^2}{2m}\right)\,. \tag{353}$$

Wir können auch nur die Zeitvariable transformieren und die Ortsvariable beibehalten. Dies ergibt

$$\mathsf{G}(x_2, E_2; x_1, E_1) \;=\; \int\!\!\int \exp\left\{\frac{i}{\hbar}E_2 t_2\right\}\, G(x_2, t_2; x_1, t_1)\, \exp\left\{-\frac{i}{\hbar}E_1 t_1\right\}\, dt_2\, dt_1\,.$$

Wir nutzen die Eigenfunktionsdarstellung der Greenschen Funktion aus

$$G(x_2, t_2; x_1, t_1) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x_2)\,\phi_n^*(x_1)\, \exp\left\{-\frac{i}{\hbar}E_n(t_2 - t_1)\right\} \tag{354}$$

für $t_2 > t_1$ und null sonst. Damit haben wir

$$\begin{aligned} \mathsf{G}(x_2, E_2; x_1, E_1) \;&=\; \int_{-\infty}^{\infty}\int_{t_1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \exp\left\{\frac{i}{\hbar}(E_2 - E_n)t_2\right\}\, \exp\left\{\frac{i}{\hbar}(E_n - E_1)t_1\right\} \\ &\quad \times\, \phi_n(x_2)\,\phi_n^*(x_1)\, dt_2\, dt_1\,. \end{aligned} \tag{355}$$

Wir substituieren wieder $t_2 = t_1 + \tau$. Dies führt auf

$$\begin{aligned} \mathsf{G}(x_2, E_2; x_1, E_1) \;&=\; \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{\frac{i}{\hbar}(E_2 - E_1)t_1\right\}\, dt_1 \\ &\quad \times \int_0^\infty \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left\{\frac{i}{\hbar}(E_2 - E_n)\tau\right\}\, \phi_n(x_2)\,\phi_n^*(x_1)\, d\tau \\ &=\; 2\pi i\hbar^2\,\delta(E_2 - E_1)\, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi_n(x_2)\,\phi_n^*(x_1)}{E_1 - E_n + i\epsilon}\,. \end{aligned} \tag{356}$$

# Störungsentwicklung

Die Störungsentwicklung, die wir in diesem Kapitel betrachten wollen, ist anwendbar, wenn das Potential oder zumindest ein Teil des Potentials vergleichsweise schwach gegenüber beispielsweise der kinetischen Energie ist. Bewegt sich ein Teilchen mit der Masse $m$ in einem Potential $V(x,t)$, so gilt für die Greensche Funktion bezüglich der Bewegung zwischen den Punkten $a$ und $b$

$$G_V(b,a) \;=\; \int_a^b \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\int_{t_a}^{t_b}\left[\tfrac{1}{2}m\dot{x}^2 - V(x,t)\right]dt\right\}\mathcal{D}x(t)\;. \tag{357}$$

Die hier gewählte Bezeichnung $G_V$ soll daran erinnern, daß sich das Teilchen im Potential $V$ bewegt. Im Gegensatz hierzu kennzeichnet im folgenden $G_0$ die Propagation eines freien Teilchens. Nur für einige Spezialfälle können wir $G_V$ explizit bestimmen.

Wir nehmen nun an, daß das Zeitintegral über das Potential entlang des Pfades klein gegenüber $\hbar$ ist. Dies erlaubt die Entwicklung

$$\exp\left\{-\frac{i}{\hbar}\int_{t_a}^{t_b}V(x,t)\,dt\right\} = 1 - \frac{i}{\hbar}\int_{t_a}^{t_b}V(x,t)\,dt + \frac{1}{2!}\left(\frac{i}{\hbar}\right)^2\left[\int_{t_a}^{t_b}V(x,t)\,dt\right]^2 + \ldots \tag{358}$$

Setzen wir dies in die Greensche Funktion ein, so ergibt sich sofort

$$G_V(b,a) \;=\; G_0(b,a) + G^{(1)}(b,a) + G^{(2)}(b,a) + \ldots \tag{359}$$

mit

$$\begin{aligned}
G_0(b,a) \;&=\; \int_a^b \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\int_{t_a}^{t_b}\tfrac{1}{2}m\dot{x}^2\,dt\right\}\mathcal{D}x(t)\;,\\
G^{(1)}(b,a) \;&=\; -\frac{i}{\hbar}\int_a^b \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\int_{t_a}^{t_b}\tfrac{1}{2}m\dot{x}^2\,dt\right\}\int_{t_a}^{t_b}V[x(s),s]\,ds\,\mathcal{D}x(t)\;,\\
G^{(2)}(b,a) \;&=\; -\frac{1}{2\hbar^2}\int_a^b \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\int_{t_a}^{t_b}\tfrac{1}{2}m\dot{x}^2\,dt\right\}\int_{t_a}^{t_b}V[x(s),s]\,ds\\
&\qquad\qquad \times\int_{t_a}^{t_b}V[x(s'),s']\,ds'\,\mathcal{D}x(t)\;.
\end{aligned} \tag{360}$$

Um Verwechslungen zu vermeiden, haben wir die Zeitvariablen $s$ und $s'$ genannt.

Zuerst betrachten wir den Integralkern $G^{(1)}$. Wir vertauschen die Reihenfolge der Integration über die Variable $s$ und dem Pfad $x(t)$. Wir schreiben

$$G^{(1)}(b,a) \;=\; -\frac{i}{\hbar}\int_{t_a}^{t_b}F(s)\,ds \tag{361}$$

mit

$$F(s) \;=\; \int\limits_a^b \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\int\limits_{t_a}^{t_b} \tfrac{1}{2} m\dot{x}^2\, dt\right\} V[x(s),s]\,\mathcal{D}x(t)\;. \tag{362}$$

Das Pfadintegral $F(s)$ kann folgendermaßen beschrieben werden. Es ist eine Summe über alle Pfade von freien Teilchen. Aber jeder Pfad ist gewichtet mit dem Potential $V[x(s), s]$, berechnet zum Zeitpunkt $s$. Das einzige Charakteristikum des Pfades in diesem speziellen Potential, das letztlich in die Rechnungen eingeht, ist nur der Wert zu dem speziellen Zeitpunkt $t = s$. D.h., vor und nach $s$ ist der Pfad derjenige eines freien Teilchens.

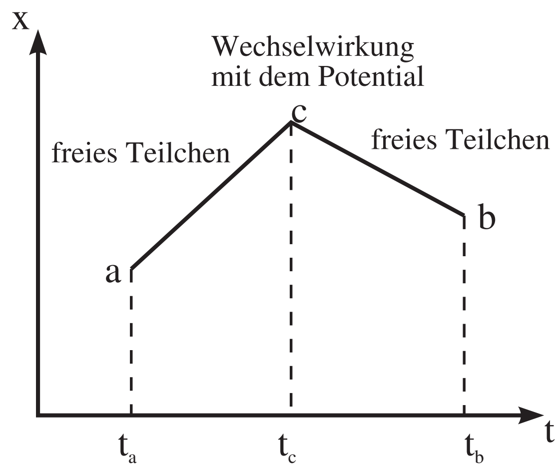
Wir können den Pfad in zwei Teile aufspalten, vor $s$ und nach $s$. Jeder Pfad soll durch $x_c$ zu dieser Zeit gehen. Die Summe aller Pfade kann dann ausgedrückt werden durch $G_0(b, c)\, G_0(c, a)$. Daraus folgt $F(s) = F(t_c)$ kann dargestellt werden als

$$F(t_c) \;=\; \int\limits_{-\infty}^{\infty} G_0(b,c)\, V(x_c,t_c)\, G_0(c,a)\, dx_c\;. \tag{363}$$

Dies führt auf

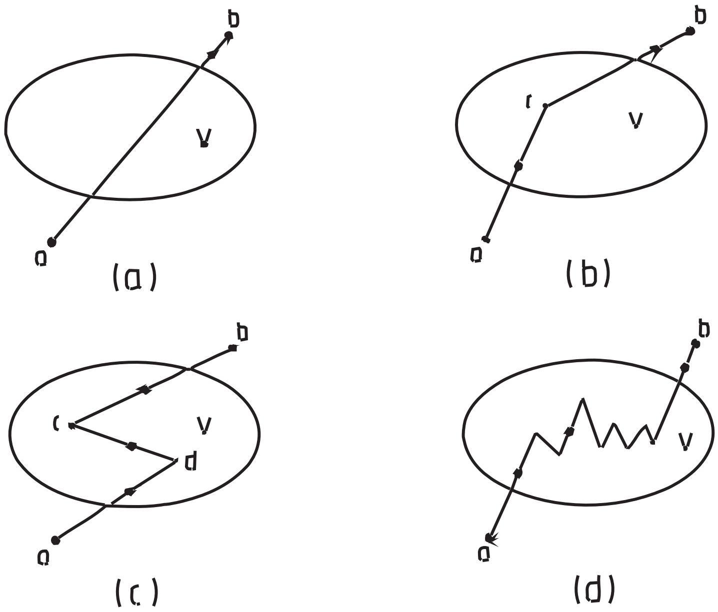
$$G^{(1)}(b,a) \;=\; -\frac{i}{\hbar}\int\limits_{t_a}^{t_b}\int\limits_{-\infty}^{\infty} G_0(b,c)\, V(c)\, G_0(c,a)\, dx_c\, dt_c\;. \tag{364}$$

Eine graphische Darstellung dieser Beziehung ist in Figur 9 wiedergegeben. Die Wechselwirkung




Figur 9: Freie Propagation eines Teilchens von $a$ nach $c$, Wechselwirkung mit dem Potential bei $c$, freie Propagation von $c$ nach $b$.

mit dem Potential $V$ nennen wir eine Streuung. Damit können wir $G_V$ folgendermaßen interpretieren. $G_V$ ist eine Summe von alternativen Wegen, die das Teilchen von $a$ nach $b$ gehen kann. Die Alternativen sind in Figur 10 dargestellt. Die Wechselwirkung mit dem Potential $V$ nennen wir eine Streuung. Eine mögliche Alternative, die diesen Integralkern ausmachen, besteht aus der folgenden




Figur 10: Alternative Pfade von $a$ nach $b$ durch das Potential $V$. (a) Freie Propagation, (b) einfache Wechselwirkung mit dem Potential $V$ bei $c$, (c) zweifache Streuung am Potential $V$, (d) mehrfache Streuung am Potential $V$.

Bewegung. Das Teilchen startet bei $a$, bewegt sich als freies Teilchen zum Punkt $c = (x_c, t_c)$, wird dort durch das Potential $V(c)$ gestreut und bewegt sich dann wieder als freies Teilchen vom Punkt $c$ nach $b$. Die Amplitude für diesen Pfad ist

$$G_0(b,c)\left[-\frac{i}{\hbar}V(c)\,dx_c\,dt_c\right]G_0(c,a)\ .$$

Der vollständige Integralkern $G^{(1)}$ wird dann durch Integration über alle $x_c$ und $t_c$ erhalten.

Für die Doppelstreuung am Potential und die Greensche Funktion $G^{(2)}$ folgt ebenso

$$G^{(2)}(b,a) \;=\; \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2 \int\int G_0(b,c)\,V(c)\,G_0(c,d)\,V(d)\,G_0(d,a)\,d\tau_c\,d\tau_d \tag{365}$$

mit der Abkürzung $d\tau = dx\,dt$. Dabei gilt wieder $G(b,a) = 0$ für $t_b < t_a$.

In dem Fall, daß wir für das Potential eine Summe $U + V$ vorliegen haben, wobei $U$ groß und $V$ klein sein soll, können wir ähnlich vorgehen. Wir nehmen an, die Bewegung im Potential $U$ läßt sich exakt behandeln und beschreiben sie durch $G_U$. Dann können wir gleichermaßen eine Störungsentwicklung ableiten, wobei wir $G_0$ nur durch $G_U$ zu ersetzen brauchen.

Wir wollen nun eine Integralgleichung für $G_V$ ableiten. Das bisherige Resultat können wir schreiben als

$$\begin{aligned} G_V(b,a) \;&=\; G_0(b,a) - \frac{i}{\hbar}\int G_0(b,c)\,V(c)\,G_0(c,a)\,d\tau_c \\ &+ \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2 \int\int G_0(b,c)\,V(c)\,G_0(c,d)\,V(d)\,G_0(d,a)\,d\tau_c\,d\tau_d + \ldots \end{aligned} \tag{366}$$

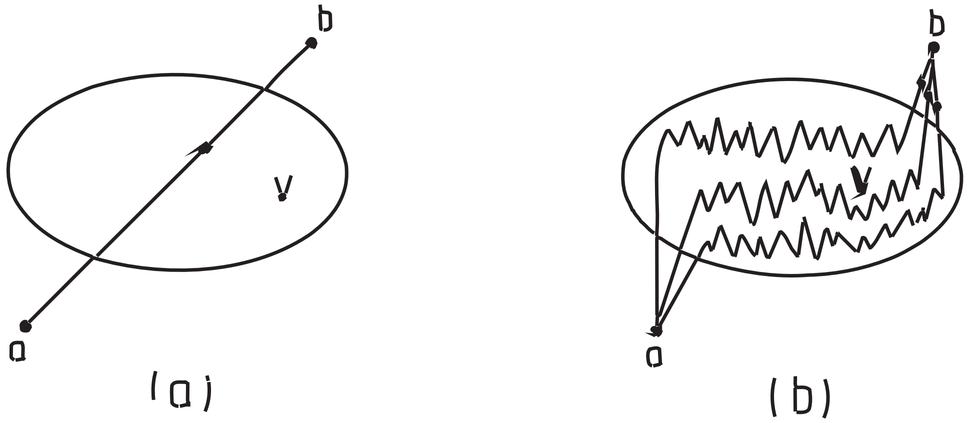
Alternativ können wir diesen Ausdruck auch schreiben als

$$\begin{aligned} G_V(b,a) &= G_0(b,a) - \frac{i}{\hbar}\int G_0(b,c)\,V(c)\Big[G_0(c,a) \\ &\quad - \frac{i}{\hbar}\int G_0(c,d)\,V(d)\,G_0(d,a)\,d\tau_d + \ldots\Big]\,d\tau_c\ . \end{aligned} \tag{367}$$

Der Ausdruck in der eckigen Klammer hat wieder exakt die gleiche Struktur wie der ursprüngliche Ausdruck (366). In beiden Fällen geht die Summe über eine unendliche Zahl von Termen. Dies impliziert, daß $G_V$ auch geschrieben werden kann als

$$G_V(b,a) = G_0(b,a) - \frac{i}{\hbar}\int G_0(b,c)\,V(c)\,G_V(c,a)\,d\tau_c\ . \tag{368}$$

Dies ist die Lippmann - Schwinger Gleichung. Sie stellt eine Integralgleichung zur Bestimmung von $G_V$ dar, falls $G_0$ bekannt ist. Es ist ein exakter Ausdruck. Das Pfadintegralproblem wurde so in eine Integralgleichung transformiert. Die beiden Alternativen in Gleichung (368) werden in Figur 11 graphisch wiedergegeben. Wir leiten nun eine nützliche und oft verwendete Entwicklung für die




Figur 11: Alternative Pfade durch das Potential $V$ von $a$ nach $b$ entsprechend der Gleichung (368). (a) Freie Propagation, (b) Vielfachstreuung am Potential.

Wellenfunktion ab. Wir gehen von der fundamentalen Relation aus

$$\psi(b) = \int G_V(b,a)\,f(a)\,dx_a\ , \tag{369}$$

wobei $f(a)$ die Wellenfunktion zum Zeitpunkt $t = t_a$ ist und $\psi(b)$ die Wellenfunktion zum Zeitpunkt $t = t_b$ kennzeichnet. Wir setzen diesen Ausdruck in die Entwicklung für $G_V(b,a)$ ein und erhalten

$$\begin{aligned} \psi(b) &= \int G_0(b,a)\,f(a)\,dx_a - \frac{i}{\hbar}\int\int G_0(b,c)\,V(c)\,G_0(c,a)\,d\tau_c\,f(a)\,dx_a \\ &\quad + \ldots \end{aligned} \tag{370}$$

Der erste Term dieser Reihe beschreibt die Wellenfunktion zur Zeit $t_b$ unter der Annahme das System sei frei zwischen den Zeitpunkten $t_a$ und $t_b$. Wir nennen diesen Term $\phi$,

$$\phi(b) = \int G_0(b,a)\,f(a)\,dx_a\ . \tag{371}$$

Damit bekommen wir

$$\begin{aligned}\psi(b) &= \phi(b) - \frac{i}{\hbar}\int G_0(b,c)\,V(c)\,\phi(c)\,d\tau_c \\ &+ \left(\frac{i}{\hbar}\right)^2 \int\int G_0(b,c)\,V(c)\,G_0(c,d)\,V(d)\,\phi(d)\,d\tau_c\,d\tau_d + \ldots \end{aligned} \tag{372}$$

Dies ist die Bornsche Reihe für $\psi$. Die ersten beiden Terme entsprechen der ersten Bornschen Näherung. Sie beinhaltet eine einzelne Streuung an einem Potential. Berücksichtigt man die ersten drei Terme, so erhält man die zweite Bornsche Näherung. Ersetzen wir $G_0$ durch $G_U$, so gelangen wir zur "distorted wave Born approximation".

Ebenso wie für die Greensche Funktion können wir für die Wellenfunktion eine exakte Integralgleichung ableiten,

$$\psi(b) = \phi(b) - \frac{i}{\hbar}\int G_0(b,c)\,V(c)\,\psi(c)\,d\tau_c\ . \tag{373}$$

Diese Gleichung ist äquivalent zur Schrödinger - Gleichung.

# Zeitabhängige Störungen

Wir gehen aus von der Partialwellendarstellung der Greenschen Funktion $G_U$

$$G_U(b,a) \;=\; \sum_n \phi_n(x_b)\,\phi_n^*(x_a)\,e^{-iE_n\,(t_b-t_a)/\hbar} \tag{374}$$

und stellen $G_V$ durch die Reihenentwicklung dar

$$\begin{aligned} G_V(b,a) \;=\;& \sum_n \phi_n(x_b)\,\phi_n^*(x_a)\,e^{-iE_n\,(t_b-t_a)/\hbar} \\ &- \frac{i}{\hbar}\int \sum_n\sum_m \phi_m(x_b)\,\phi_m^*(x_c)\,V(x_c,t_c)\,e^{-iE_m\,(t_b-t_c)/\hbar} \\ &\times\,\phi_n(x_c)\,\phi_n^*(x_a)\,e^{-iE_n\,(t_c-t_a)/\hbar}\,dx_c\,dt_c + \ldots \end{aligned} \tag{375}$$

Abkürzend läßt sich $G_V$ darstellen als

$$G_V(b,a) \;=\; \sum_n\sum_m a_{mn}(t_b,t_a)\,\phi_m(x_b)\,\phi_n^*(x_a)\;, \tag{376}$$

wobei die $a$'s Koeffizienten sind, die von $t_b$ und $t_a$ abhängen. Diese Koeffizienten sind Übergangsamplituden.

In niedrigster Ordnung in der Entwicklung in $V$ muß sich der Ausdruck (376) auf $G_U$ reduzieren, d.h. $a_{mn} \;=\; \delta_{mn}\exp\{-iE_n\,(t_b-t_a)/\hbar\}$. Wir können die $a_{mn}$ in eine Reihe bezüglich aufsteigender Ordnung in $V$ entwickeln

$$a_{mn} \;=\; \delta_{mn}\,e^{-iE_n\,(t_b-t_a)/\hbar} + a_{mn}^{(1)} + a_{mn}^{(2)} + \ldots \tag{377}$$

Der Vergleich mit der Greenschen Funktion (375) zeigt, daß gilt

$$\begin{aligned} a_{mn}^{(1)} \;=\;& -\frac{i}{\hbar}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{t_a}^{t_b} \phi_m^*(x_c)\,V(x_c,t_c)\,\phi_n(x_c)\,dx_c \\ &\times\; e^{i[E_m\,(t_c-t_b)-E_n\,(t_c-t_a)]/\hbar}\,dt_c\;. \end{aligned} \tag{378}$$

Wir bezeichnen abkürzenderweise das Matrixelement mit

$$V_{mn}(t_c) \;=\; -\frac{i}{\hbar}\int_{-\infty}^{\infty} \phi_m^*(x_c)\,V(x_c,t_c)\,\phi_n(x_c)\,dx_c\;. \tag{379}$$

Dies ergibt

$$a_{mn}^{(1)} \;=\; -\frac{i}{\hbar}\,e^{-iE_m t_b/\hbar}\,e^{iE_n t_a/\hbar}\int_{t_a}^{t_b} V_{mn}(t_c)\,e^{i(E_m-E_n)t_c/\hbar}\,dt_c\;. \tag{380}$$

Dies ist ein wichtiges Resultat der zeitabhängigen Störungstheorie. Der Koeffizient $a_{mn}$ ist die Amplitude dafür, das System im Zustand $m$ zur Zeit $t_b$ zu finden, wenn es anfangs im Zustand $n$ war.

Wir nehmen nun an, die Wellenfunktion zum Zeitpunkt $t_a$ war $\phi_n(x_a)$. Die Frage lautet, was ist die Wellenfunktion bei $t_b$? Dies können wir ausdrücken durch

$$\begin{aligned} \int\limits_{-\infty}^{\infty} G_V(b,a)\,\phi_n(x_a)\,dx_a &= \sum_k \sum_l a_{kl}\,\phi_k(x_b) \int\limits_{-\infty}^{\infty} \phi_l^*(x_a)\,\phi_n(x_a)\,dx_a \\ &= \sum_k a_{kn}\,\phi_k(x_b)\ . \end{aligned} \tag{381}$$

Hierbei haben wir die Orthogonalität der Eigenfunktionen ausgenutzt. Wirkt kein Potential, so muß offensichtlich gelten

$$a_{mn} \;=\; \delta_{mn}\,e^{-iE_n\,(t_b-t_a)/\hbar}\ . \tag{382}$$

Als nächsten Schritt betrachten wir Übergänge in erster Ordnung. Die Übergangsamplitude vom Zustand $m$ zum Zustand $n$ ist durch

$$a^{(1)}_{mn} \;=\; -\frac{i}{\hbar}\int\limits_{t_a}^{t_b} e^{i(E_n-E_m)t/\hbar}\,V_{mn}(t)\,dt\;e^{-i(E_m t_b - E_n t_a)/\hbar} \tag{383}$$

gegeben.

Wir nehmen nun an, daß gilt $V(x,t) = V(x)$. Für das Zeitintervall $(0,T)$ sei $V_{mn}$ konstant. Es ist

$$\begin{aligned} a^{(1)}_{mn}\,e^{i(E_m t_b - E_n t_a)/\hbar} &= -\frac{i}{\hbar}\,V_{mn}\int\limits_0^T e^{i(E_n-E_m)t/\hbar}\,dt \\ &= V_{mn}\,\frac{e^{i(E_n-E_m)T/\hbar}-1}{E_m-E_n}\ . \end{aligned} \tag{384}$$

Für die Wahrscheinlichkeit eines Übergangs im Zeitintervall $T$ ergibt sich dann

$$P(n\to m) \;=\; |a^{(1)}_{mn}|^2 \;=\; \frac{|V_{mn}|^2}{(E_n-E_m)^2}\,\left|e^{i(E_n-E_m)T/\hbar}-1\right|^2\ . \tag{385}$$

Nun ist

$$A \;=\; \left|e^{i(E_n-E_m)T/\hbar}-1\right|^2 \;=\; 2-2\,\cos\alpha \;=\; 4\sin^2\frac{\alpha}{2} \tag{386}$$

mit $\alpha = (E_n-E_m)T/\hbar$. Damit bekommen wir schließlich

$$P(n\to m) \;=\; 4\,|V_{mn}|^2\,\sin^2\left\{\frac{(E_n-E_m)T}{2\hbar}\right\}\,(E_n-E_m)^{-2}\ . \tag{387}$$

## Funktional und Funktionalableitung

Wir führen nun einen mathematischen Einschub durch. Die Erweiterung der Funktionen mehrerer Veränderlicher $F = F(\phi_1, \ldots, \phi_k, \ldots)$ auf ein kontinuierlich veränderliches $k$ führt zum Begriff des Funktionals. Es handelt sich dabei um eine Vorschrift, nach der einer Funktion $\phi(k)$ ein bestimmter Wert $F = F[\phi]$ zugeordnet wird. An Stelle von $k$ schreiben wir künftig $x$. In Figur 12 ist schematisch die Abbildung einer Funktion $\phi(x)$ auf das Funktional $F$ angegeben. Für $\phi$ und $F$ lassen wir auch komplexe Werte zu. Im folgenden geben wir einige Beispiele von Funktionalen an:
1.) $F$ sei die Fläche, die in einem Intervall $a \leq x \leq b$ durch die Funktion $\phi(x)$ gebildet wird,

$$F[\phi] \;=\; \int\limits_a^b \phi(x)\, dx \; . \tag{388}$$

2.) Ist $f = f(\phi)$ eine Funktion von $\phi$, zum Beispiel $f = \phi^2$, so ist das Integral

$$F[\phi] \;=\; \int\limits_a^b f(\phi(x))\, dx \tag{389}$$

ebenfalls ein Funktional $F$ von $\phi$.
3.) Ist $f = f(\phi, \phi')$ eine Funktion von $\phi$ und deren Ableitung $\phi'$, so wird durch das Integral

$$F[\phi] \;=\; \int\limits_a^b f\left(\phi(x), \phi'(x)\right)\, dx \tag{390}$$

wieder ein Funktional $F$ von $\phi$ definiert. Man kann also zum Beispiel das Wirkungsintegral

$$\mathcal{A} \;=\; \int\limits_{t_a}^{t_b} L(q_1, \ldots, \dot{q}_1, \ldots, t)\, dt \tag{391}$$

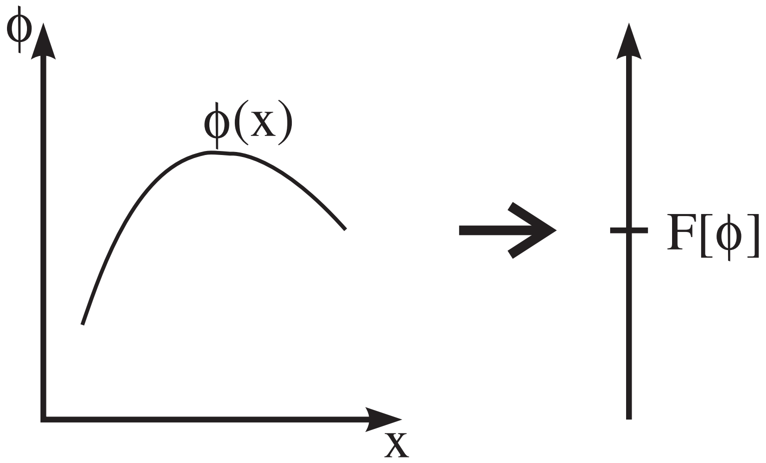
als Funktional der generalisierten Koordinaten $q$ lesen.
4.) Ordnet man einer Funktion $\phi(x)$ ihren Wert $\phi(x')$ an der Stelle $x'$ zu, so ist dadurch ein Funktional $F[\phi]$ definiert, das sich mit Hilfe der Diracschen Deltafunktion darstellen läßt

$$F[\phi] \;=\; \phi(x') \;=\; \int \phi(x)\, \delta(x' - x)\, dx \; . \tag{392}$$

Die Definition eines Funktionals läßt sich auch auf Funktionen $\phi(x, y, \ldots)$ mehrerer unabhängiger Veränderlicher $x,\ y, \ldots$ und auch auf mehrere unabhängige Funktionen $\phi_1(x, \ldots),\ \phi_2(x, \ldots)$ erweitern. Es gilt dann $F = F[\phi_1, \phi_2, \ldots]$.

Wir kommen nun zur Funktionalableitung. Bevor wir zur mathematischen Definition gelangen, werden wir erst einige anschauliche Betrachtungen durchführen. Die unabhängige Variable sei hier die Zeit $t$. Das Funktional $F[\phi(t)]$ ist die Abbildung einer Funktion $\phi(t)$ auf eine Zahl. Die Frage lautet nun, wie ändert sich diese Zahl, wenn wir kleine Änderungen der Argumentfunktion $\phi(t)$ durchführen. Wir untersuchen also die Differenz

$$F[\phi(t) + \eta(t)] - F[\phi(t)] \tag{393}$$



Figur 12: Abbildung einer Funktion $\phi(x)$ auf ein Funktional $F[\phi]$.

für kleine $\eta(t)$. Zuerst teilen wir dazu die Zeit $t$ in verschiedene Einzelintervalle $\epsilon$ mit den diskreten Randwerten $t_i$ ein. Die Funktion $\phi(t)$ können wir in diesem Zusammenhang approximieren durch die Angabe der Werte $\phi_i$ zur Zeit $t_i$. Das Funktional $F[\phi(t)]$ ist nun eine Zahl, die von allen $\phi_i$ abhängt, ebenso wie eine Funktion von mehreren Variablen $\phi_i$ abhängen kann,

$$F[\phi(t)] \ \rightarrow \ F(\ldots, \phi_i, \phi_{i+1}, \ldots) \ . \tag{394}$$

Nun können wir die partielle Ableitung in bezug auf eine dieser Variablen $\phi_i$, nämlich $\partial F / \partial \phi_i$, betrachten. Die Funktionalableitung in der diskretisierten Version bei $s \ = \ t_i$ ist dann gerade die partielle Ableitung dividiert durch das Intervall $\epsilon$,

$$\frac{\delta F}{\delta \phi(s)} \ \rightarrow \ \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial F}{\partial \phi_i} \ . \tag{395}$$

Wir schreiben für die Funktionalableitung also $\delta F / \delta \phi(s)$. Es muß jedoch betont werden, daß diese Nomenklatur nicht einheitlich ist. Wenn wir die Funktion ändern von $\phi(t)$ nach $\phi(t) + \eta(t)$, dann ändern wir in der diskretisierten Version alle $\phi_i$ von $\phi_i$ nach $\phi_i + \eta_i$ mit $\eta_i \ = \ \eta(t_i)$. Nach den gewöhnlichen Regeln der partiellen Differentiation lautet die Differenz in erster Ordnung

$$F(\ldots, \phi_i + \eta_i, \phi_{i+1} + \eta_{i+1}, \ldots) - F(\ldots, \phi_i, \phi_{i+1}, \ldots) \ = \ \sum_i \frac{\partial F}{\partial \phi_i} \eta_i \ . \tag{396}$$

Bezeichnen wir nun

$$\frac{1}{\epsilon} \frac{\partial F}{\partial \phi_i} \ = \ K_i \ ,$$

so ergibt die letzte Summe gerade $\sum_i K_i \, \eta_i \, \epsilon$, was im Grenzfall $\epsilon \ \rightarrow \ 0$ gerade $\int K(t) \, \eta(t) \, dt$ wird.

Bezüglich der Differenz (393) resultiert also in niedrigster Ordnung in $\eta$ ein linearer Ausdruck in $\eta$. Wir schreiben dafür $\int K(s) \, \eta(s) \, ds$. Dann wird

$$K(s) \ = \ \frac{\delta F}{\delta \phi(s)} \tag{397}$$

die Funktionalableitung von $F$ in bezug auf eine Variation der Funktion $\phi(t)$ bei $t = s$ genannt. In erster Ordung gilt also

$$F[\phi+\eta] = F[\phi] + \int \frac{\delta F}{\delta\phi(s)}\, \eta(s)\, ds + \ldots \tag{398}$$

$\delta F/\delta\phi(s)$ hängt von der Funktion $\phi(t)$ ab sowie von dem Wert $s$. Dieser Ausdruck ist ein Funktional von $\phi(t)$ und eine Funktion der Zeit $s$.

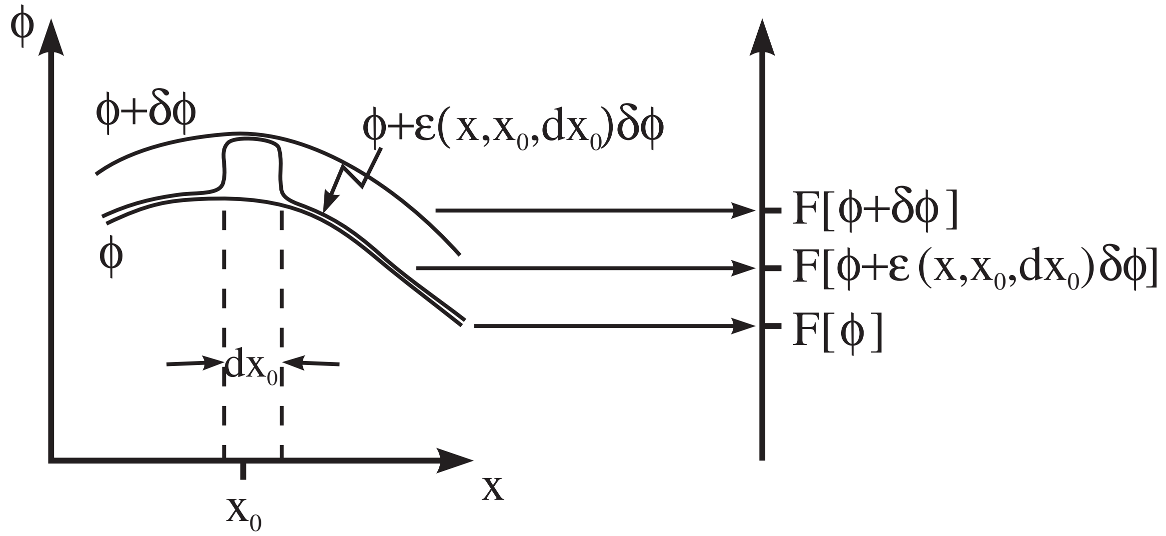
Wir können auch direkt von Differentialen ausgehen. Im Fall einer Funktion mehrerer Veränderlicher können wir schreiben

$$df = \sum_i \frac{\partial f}{\partial \phi_i}\, d\phi_i\ . \tag{399}$$

Ebenso gilt für die erste Variation eines Funktionals

$$\delta F = \int \frac{\delta F}{\delta\phi(s)}\, \delta\phi(s)\, ds\ . \tag{400}$$

Wir wollen nun die Änderung $\eta$ etwas präziser fassen. Verändert man die Funktion $\phi(x)$ um $\delta\phi(x)$, so wird durch das Funktional der Funktion $\phi + \delta\phi$ ein Wert $F[\phi+\delta\phi] = F + \delta F$ zugeordnet. Die Änderung der Funktion $\phi$ und die zugeordneten Funktionale sind schematisch in Figur 13 wiedergegeben.




Figur 13: Links sind schematisch die Funktionen $\phi$, $\phi + \epsilon(x, x_0, dx_0)\,\delta\phi$ und $\phi + \delta\phi$ aufgetragen. Rechts sind die zugehörigen Funktionale angegeben.

Variiert man die Funktion $\phi(x)$ nur in einer Umgebung $dx_0$ einer Stelle $x_0$, so wird $F$ um

$$F[\phi + \epsilon(x, x_0, dx_0)\,\delta\phi] - F[\phi] \tag{401}$$

verändert. Dabei ist

$$\epsilon(x, x_0, dx_0) \;=\; \begin{cases} 1 \;\; \forall \;\; x \;\; \text{in der Umgebung} \;\; dx_0 \;\; \text{von} \;\; x_0 \\ 0 \;\; \forall \;\; x \;\; \text{außerhalb von} \;\; dx_0 \end{cases} \quad . \tag{402}$$

Den Grenzwert

$$\frac{\delta F[\phi]}{\delta\phi(x_0)} \;=\; \lim_{dx_0\to 0}\,\lim_{\delta\phi\to 0} \frac{F[\phi+\epsilon(x, x_0, dx_0)\,\delta\phi]-F[\phi]}{\delta\phi\, dx_0} \tag{403}$$

bezeichnet man, sofern er existiert, als Funktionalableitung von $F$ nach $\phi(x_0)$. Das Differential $\delta F$ zu einer beliebigen differentiellen Veränderung $\delta\phi$ erhält man durch Integration über $x_0$,

$$\delta F \;=\; \int_{x_0} \frac{\delta F[\phi]}{\delta\phi(x_0)}\,\delta\phi(x_0)\, dx_0 \;. \tag{404}$$

Den Index 0 lassen wir im folgenden aus Einfachheitsgründen weg. Die Funktionalableitung ist die Verallgemeinerung der partiellen Ableitung $\partial F/\partial\phi_k$ einer Funktion $F$ auf kontinuierliche $k$-Werte. Die Beziehung (404) entspricht dem totalen Differential einer Funktion mehrerer unabhängiger Veränderlicher.

Wir wollen nun einige Eigenschaften der Funktionalableitung diskutieren.
1.) Für das Funktional

$$F[\phi] \;=\; \phi(x') \tag{405}$$

folgt

$$\begin{aligned} \frac{\delta\phi(x')}{\delta\phi(x)} \;&=\; \lim_{dx\to 0}\,\lim_{\delta\phi\to 0} \frac{\phi(x')+\epsilon(x', x, dx)\,\delta\phi-\phi(x')}{\delta\phi\, dx} \\ &=\; \lim_{dx\to 0} \frac{\epsilon(x', x, dx)}{dx} \;. \end{aligned} \tag{406}$$

Entsprechend der Definition von $\epsilon$ sehen wir, daß bei einer Integration dieses Ausdrucks entweder 0 oder 1 resultiert, je nachdem ob $x'$ im Integrationsbereich von $x$ liegt oder nicht. Damit hat der Ausdruck (406) formal die Eigenschaft der Diracschen $\delta$-Funktion. Multiplizieren wir (406) mit $f(x)$ und integrieren, so erhalten wir trivialerweise nach Integration $f(x')$. Damit haben wir

$$\frac{\delta\phi(x')}{\delta\phi(x)} \;=\; \delta(x'-x) \;. \tag{407}$$

Diese Beziehung ist nur die Verallgemeinerung von

$$\frac{\partial\phi_{k'}}{\partial\phi_k} \;=\; \delta_{kk'} \tag{408}$$

auf kontinuierliches $k$.
2.) Ist das Funktional die Ableitung $\phi'$ an einer Stelle $x'$,

$$F[\phi] \;=\; \phi'(x') \;, \tag{409}$$

so folgt durch eine analoge Überlegung

$$\frac{\delta\phi'(x')}{\delta\phi(x)} \;=\; \delta'(x'-x) \;=\; -\frac{d}{dx}\,\delta(x'-x) \;. \tag{410}$$

3.) Ist $f = f(\phi)$ eine differenzierbare Funktion von $\phi$ (zum Beispiel $f = \phi^2$), so ergibt sich für die Funktionalableitung von $F[\phi] = f(\phi(x'))$ aus der Definition wie in der gewöhnlichen Differentialrechnung die Kettenregel

$$\frac{\delta f(\phi(x'))}{\delta\phi(x)} = \frac{df}{d\phi}\frac{\delta\phi(x')}{\delta\phi(x)} = \frac{df}{d\phi}\,\delta(x'-x)\;. \tag{411}$$

Entsprechend gilt für die Funktionalableitung von $F[\phi] = f(\phi(x'), \phi'(x'))$

$$\begin{aligned}\frac{\delta f(\phi(x'),\phi'(x'))}{\delta\phi(x)} &= \frac{\partial f}{\partial\phi}\frac{\delta\phi(x')}{\delta\phi(x)} + \frac{\partial f}{\partial\phi'}\frac{\delta\phi'(x')}{\delta\phi(x)} \\ &= \frac{\partial f}{\partial\phi}\,\delta(x'-x) - \frac{\partial f}{\partial\phi'}\frac{d}{dx}\,\delta(x'-x)\;. \end{aligned}\tag{412}$$

4.) Ist $F[\phi] = \int f(\phi(x'))\,dx'$, so folgt für die Funktionalableitung

$$\frac{\delta F[\phi]}{\delta\phi(x)} = \int \frac{\delta f(\phi(x'))}{\delta\phi(x)}\,dx'\;, \tag{413}$$

wobei wir die Vertauschbarkeit der Funktionalableitung mit der Integration vorausgesetzt haben. Wir setzen (411) ein und führen die Integration über $x'$ durch. Es folgt

$$\frac{\delta F}{\delta\phi(x)} = \frac{df}{d\phi}\;. \tag{414}$$

Für das Funktional $F[\phi] = \int f(\phi(x'), \phi'(x'))\,dx'$ erhalten wir nach (412)

$$\frac{\delta F[\phi]}{\delta\phi(x)} = \frac{\partial f}{\partial\phi} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial\phi'}\;. \tag{415}$$

Es ist also zum Beispiel die Funktionalableitung des Wirkungsintegrals der Euler - Lagrangesche Ausdruck.

Die Beziehungen für die Funktionalableitung lassen sich ohne weiteres auch auf Funktionen $\phi(x, y, \ldots)$ mehrerer unabhängiger Variablen $x, y, \ldots$ und auch auf mehrere unabhängige Funktionen $\phi_1(x, \ldots), \phi_2(x, \ldots), \ldots$ erweitern. Dies findet beispielsweise Anwendung, wenn wir die Lagrange - Funktion $L$ mittels der Lagrange - Dichte $l$ als Funktional der Felder und deren Ableitungen schreiben,

$$L[\psi_i, \dot{\psi}_i] = \int l(\psi_i, \mathrm{grad}\,\psi_i, \dot{\psi}_i)\,d^3x\;. \tag{416}$$

# Pfadintegrale und statistische Mechanik

Ein System im thermischen Gleichgewicht kann verschiedene Zustände besetzen. Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß sich ein System in einem Zustand mit der Energie $E$ befindet, ist proportional zu $e^{-E/(kT)}$, wobei $k$ die Boltzmann-Konstante ist. $k = 8.61735 \times 10^{-5}$ eV $\mathrm{K}^{-1}$. Sind die Energieeigenzustände degeneriert, so haben die einzelnen Unterzustände die gleiche Besetzungswahrscheinlichkeit.

Das erwähnte exponentielle Gesetz stellt noch keine echte Wahrscheinlichkeitsverteilung dar, da noch keine korrekte Normierung vorliegt. Den Normierungsfaktor bezeichnen wir mit $1/Z$. Damit ergibt sich für die Wahrscheinlichkeit, daß sich das System in einem Zustand mit der Energie $E_i$ befindet,

$$p_i = \frac{1}{Z}\, e^{-E_i\,\beta} \tag{417}$$

mit der Abkürzung

$$\beta = \frac{1}{kT} \,. \tag{418}$$

Dies führt auf die Zustandssumme

$$Z = \sum_i e^{-E_i\,\beta} \,. \tag{419}$$

Wir können eine äquivalente Normierung mittels der Energie $F$ definieren, so daß gilt

$$p_i = e^{-\beta(E_i - F)} \,. \tag{420}$$

$F$ wird die Helmholtzsche freie Energie genannt. Ihr Wert hängt von der Temperatur ab, obwohl die verschiedenen Energieniveaus $E_i$ nicht von $T$ abhängen. Evidenterweise gilt

$$Z = e^{-\beta F} \,. \tag{421}$$

Wir wollen nun einige Charakteristika der Zustandssumme $Z$ diskutieren. Die physikalischen Eigenschaften eines Systems im thermischen Gleichgewicht können von einer exponentiellen Verteilungsfunktion abgeleitet werden. $\mathcal{A}$ sei der korrespondierende Operator für eine Meßgröße. Dann ist der Erwartungswert im Zustand $\phi_i$ gegeben durch

$$A_i = \int \phi_i^*\, \mathcal{A}\, \phi_i\, dV \,. \tag{422}$$

Das statistische Mittel für das gesamte System lautet

$$\bar{A} = \sum_i p_i\, A_i = \frac{1}{Z} \sum_i A_i\, e^{-E_i\,\beta} \,. \tag{423}$$

Beispielsweise ergibt sich für den Erwartungswert der Energie

$$U = \sum_i p_i\, E_i = \frac{1}{Z} \sum_i E_i\, e^{-\beta\, E_i} = \sum_i E_i\, e^{-\beta(E_i - F)} \,. \tag{424}$$

Sofern der Normierungsfaktor $Z$ als Funktion der Temperatur bekannt ist, kann dieser Ausdruck leicht berechnet werden. Aus $Z = \sum_i \exp\{-E_i\,\beta\}$ folgt

$$\sum_i E_i\, e^{-\beta E_i} \;=\; -\frac{\partial Z}{\partial \beta} \;=\; -\frac{\partial Z}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial \beta} \;=\; kT^2\,\frac{\partial Z}{\partial T}\;. \tag{425}$$

Dies impliziert

$$U \;=\; \frac{kT^2}{Z}\frac{\partial Z}{\partial T} \;=\; kT^2\,\frac{\partial \ln Z}{\partial T} \;=\; F - T\frac{\partial F}{\partial T} \;=\; \frac{\partial}{\partial \beta}(\beta F)\;. \tag{426}$$

Es werden in allen Rechnungen partielle Ableitungen verwendet, da es noch andere Variablen wie zum Beispiel das Volumen und den Druck geben kann.

Wir betrachten nun den Fall, daß sich andere Variablen (zum Beispiel das Volumen) ändern. In erster Ordnung Störungstheorie folgt

$$E_i + \Delta E_i \;=\; \int \phi_i^*\,(H + \Delta H)\,\phi_i\,dV\;. \tag{427}$$

Wir betrachten ein System in dem partikulären Zustand $E_i$ und führen eine kleine Änderung des Parameters $\alpha$ durch. $\alpha$ kann dabei verschiedene Bedeutungen haben. $\frac{\Delta H}{\Delta \alpha}$ betrachten wir als eine Art "Kraft", die mit dem Parameter $\alpha$ assoziiert ist. Der Begriff "Kraft" ist hierbei nicht wörtlich zu nehmen. Die Dimension kann total verschieden von der einer echten Kraft sein. Für den Fall, daß der Parameter $\alpha$ das Volumen ist, ist diese "Kraft" gerade das Negative des Drucks. Wir bezeichnen

$$f_\alpha \;=\; \frac{\partial H}{\partial \alpha}\;. \tag{428}$$

Es gilt generell, daß die "Kraft" multipliziert mit der Änderung des Parameters gleich der Änderung der Energie ist. Als Beispiel sei $P$ der Druck und $V$ das Volumen. Damit folgt in diesem Fall

$$-P\,\Delta V \;=\; \Delta E\;. \tag{429}$$

Für den Erwartungswert der "Kraft" haben wir bei konstanter Temperatur

$$\begin{aligned} \bar{f}_\alpha \;&=\; \overline{\left(\frac{\partial H}{\partial \alpha}\right)} \;=\; \sum_i p_i\left(\frac{\partial H}{\partial \alpha}\right)_i \;=\; \sum_i p_i\,\frac{\partial E_i}{\partial \alpha} \\ &=\; \sum_i \frac{1}{Z}\,\frac{\partial E_i}{\partial \alpha}\,e^{-E_i/(kT)} \;=\; -\frac{kT}{Z}\,\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\sum_i e^{-E_i/(kT)}\right) \;=\; -\frac{kT}{Z}\,\frac{\partial Z}{\partial \alpha}\;. \end{aligned} \tag{430}$$

Dies führt auf

$$\bar{f}_\alpha \;=\; -\frac{1}{\beta}\,\frac{\partial \ln Z}{\partial \alpha}\,, \tag{431}$$

wobei $\beta$ und andere Parameter konstant gehalten werden. Mit der Definition $Z = e^{-\beta F}$ von $F$ folgt

$$\bar{f}_\alpha \;=\; \frac{\partial F}{\partial \alpha}\;. \tag{432}$$

Wenn der Parameter $\alpha$ das Volumen $V$ ist, so ist $-\bar{f}_\alpha$ der Druck $P$ und wir haben

$$P \;=\; -\frac{\partial F}{\partial V}\;. \tag{433}$$

Allgemein gilt nun

$$dU \;=\; -P\,dV + dQ \;. \tag{434}$$

$dQ$ ist eine zusätzliche Energie, die dem externen Wärmebad zugeführt oder entnommen wird, um die Temperatur beizubehalten. Es ist der Wärmeaustausch. Wenn sich das Volumen $V$ um $dV$ ändert, dann ändern sich $E_i$ um $dE_i$ und $F$ um $dF$. Aus

$$U \;=\; \sum_i E_i\, e^{-\beta(E_i - F)}$$

folgt somit

$$dU \;=\; \sum_i dE_i\, e^{-\beta(E_i-F)} + \beta\, dF \sum_i E_i\, e^{-\beta(E_i-F)} - \beta \sum_i E_i\, dE_i\, e^{-\beta(E_i-F)} \;. \tag{435}$$

Der erste Term entspricht $-P\;dV$, die beiden restlichen Terme entsprechen dQ. Aus (434) folgt mit (426) und (433)

$$\frac{dQ}{dV} \;=\; \frac{\partial U}{\partial V} + P \;=\; \frac{\partial}{\partial V}\left(F - T\,\frac{\partial F}{\partial T}\right) - \frac{\partial F}{\partial V} \;=\; -T\,\frac{\partial^2 F}{\partial T\,\partial V} \tag{436}$$

oder

$$dQ \;=\; -T\frac{\partial^2 F}{\partial T\,\partial V}\,dV \;. \tag{437}$$

Die letzte Gleichung gibt den Wärmewechsel an, wenn wir das Volumen um $dV$ ändern, dabei aber die Temperatur konstant halten.

Variieren wir die Temperatur und halten das Volumen $V$ konstant, so ist der Wärmeaustausch äquivalent dem Wechsel in der totalen Energie

$$\Delta Q \;=\; \frac{\partial U}{\partial T}\,\Delta T \;=\; \frac{\partial}{\partial T}\left(F - T\,\frac{\partial F}{\partial T}\right)\Delta T \;=\; -T\,\frac{\partial^2 F}{\partial T^2}\Delta T \;. \tag{438}$$

Generell gilt das Resultat

$$\Delta Q \;=\; -T\left(\frac{\partial^2 F}{\partial T\,\partial V}\Delta V + \frac{\partial^2 F}{\partial T\,\partial \alpha}\Delta\alpha + \frac{\partial^2 F}{\partial T^2}\Delta T\right) \;, \tag{439}$$

wobei auch die Änderung des Parameters $\alpha$ berücksichtigt wurde. Mit der Definition der Entropie

$$S \;=\; -\frac{\partial F}{\partial T} \tag{440}$$

folgt

$$\Delta Q \;=\; T\,\Delta S \;, \tag{441}$$

$$U \;=\; F + TS \;. \tag{442}$$

Somit können alle Größen der Thermodynamik durch entsprechendes Differenzieren aus der Partitionsfunktion $Z$ abgeleitet werden.

Quantenmechanisch ist die Aufenthaltswahrscheinlichkeit für das System am Ort $x$ gegeben durch

$$P(x) = \frac{1}{Z} \sum_i \phi_i^*(x)\, \phi_i(x)\, e^{-\beta E_i} , \tag{443}$$

wobei $\phi_i$ die Wellenfunktion des Eigenzustandes mit der Energie $E_i$ bezeichnet. Wir betrachten den Erwartungswert der Größe $\mathcal{A}$

$$\bar{A} = \frac{1}{Z} \sum_i A_i\, e^{-\beta E_i} = \frac{1}{Z} \sum_i \int \phi_i^*(x)\, \mathcal{A}\, \phi_i(x)\, e^{-\beta E_i}\, dx . \tag{444}$$

Aus Einfachheitsgründen beschränken wir uns hier auf eine Raumdimension. Der Erwartungswert solcher Größen kann ermittelt werden, wenn wir die folgende Funktion kennen,

$$\rho(x', x) = \sum_i \phi_i(x')\, \phi_i^*(x)\, e^{-\beta E_i} . \tag{445}$$

In (444) agiert der Operator $\mathcal{A}$ nur auf $\phi_i$, aber nicht auf $\phi_i^*$. In der Größe $\rho(x', x)$ können wir $\mathcal{A}$ nur auf $x$ oder $x'$ wirken lassen, danach setzen wir $x' = x$ und integrieren über $x$. Dies ist gleichbedeutend mit dem Ermitteln der Spur von $\mathcal{A}\rho$. Evidenterweise gilt

$$P(x) = \frac{1}{Z}\, \rho(x, x) , \tag{446}$$

und da die Wahrscheinlichkeit auf 1 normiert ist, folgt

$$Z = \int \rho(x, x)\, dx = \mathrm{Tr}\, \rho . \tag{447}$$

Aus der statistischen Dichtematrix $\rho(x', x)$ können wir also $Z$ bestimmen.

Die Definition der statistischen Dichtematrix erinnert sehr an die Definition der Greenschen Funktion für stationäre Systeme

$$G(x_2, t_2; x_1, t_1) = \sum_j \phi_j(x_2)\, \phi_j^*(x_1)\, e^{-iE_j\,(t_2 - t_1)/\hbar} . \tag{448}$$

Die Gültigkeit dieses Ausdruckes ist beschränkt auf Situationen in denen der Hamilton-Operator zeitlich konstant ist und für Zeiten $t_2 > t_1$. Dies ist aber gerade die Situation in der statistischen Mechanik, da nur dann, wenn $H$ konstant ist, thermisches Gleichgewicht erzielt werden kann. Der Vergleich der Ausdrücke (448) und (445) zeigt, daß bei dem Übergang $(t_2 - t_1) \to -i\beta\hbar$ eine formale Identifikation erreicht werden kann.

Wir schreiben nun für $\rho(x', x)$ den Ausdruck $k(x_2, u_2; x_1, u_1)$ mit $x_2 = x',\ x_1 = x,\ u_2 = \hbar\beta,\ u_1 = 0$.

$$k(x_2, u_2; x_1, u_1) = \sum_i \phi_i(x_2)\, \phi_i^*(x_1)\, e^{-[(u_2 - u_1)/\hbar] E_i} . \tag{449}$$

Wir differenzieren $k$ partiell in bezug auf $u_2$

$$-\hbar \frac{\partial k}{\partial u_2} = \sum_i E_i\, \phi_i(x_2)\, \phi_i^*(x_1)\, e^{-[(u_2 - u_1)/\hbar] E_i} . \tag{450}$$

Mit

$$E_i\, \phi_i(x_2) = H\, \phi_i(x_2) \tag{451}$$

können wir schreiben

$$-\hbar\,\frac{\partial k(2,1)}{\partial u_2} \;=\; H_2\,k(2,1) \tag{452}$$

oder

$$-\frac{\partial \rho(2,1)}{\partial \beta} \;=\; H_2\,\rho(2,1)\;. \tag{453}$$

Hierbei soll der Index bei $H_2$ die Wirkung auf die Koordinate $x_2$ andeuten. Diese Differentialgleichung entspricht der Schrödinger-Gleichung für die Greensche Funktion

$$-\frac{\hbar}{i}\,\frac{\partial G(2,1)}{\partial t_2} \;=\; H_2\,G(2,1) \quad \text{für} \quad t_2 \;>\; t_1\;. \tag{454}$$

In diesem Sinn ist $\rho$ auch die Greensche Funktion in der statistischen Mechanik.

Wir schreiben nun die Greensche Funktion als Pfadintegral. Für den Hamilton–Operator

$$H \;=\; -\frac{\hbar^2}{2m}\,\frac{d^2}{dx^2} + V(x) \tag{455}$$

und $t_2 - t_1 \;=\; \epsilon$ folgt

$$G(2,1) \;=\; \sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar\epsilon}}\,\exp\left\{\frac{im}{2\hbar}\frac{(x_2-x_1)^2}{\epsilon} - \frac{i}{\hbar}\epsilon\,V\left(\frac{x_2+x_1}{2}\right)\right\}\;. \tag{456}$$

Ebenso folgt in der statistischen Mechanik mit $u_2 - u_1 \;=\; \eta$ und $\epsilon \;=\; -i\eta$

$$k(x_2,\eta;x_1,0) \;=\; \sqrt{\frac{m}{2\pi\eta\hbar}}\,\exp\left\{-\frac{1}{\hbar}\left(\frac{m}{2\eta}(x_2-x_1)^2 + \eta\,V[(x_2+x_1)/2]\right)\right\}\;. \tag{457}$$

Ebenso gilt wieder für aufeinanderfolgende Ereignisse

$$k(2,1) \;=\; \int k(2,3)\,k(3,1)\,dx_3\;. \tag{458}$$

Der Pfadintegralausdruck für $k$ lautet damit

$$k(x_b,u_b;x_a,u_a) \;=\; \int \exp\left\{-\sum_{i=0}^{N}\left[\frac{m}{2\hbar\eta}(x_{i+1}-x_i)^2 + \frac{\eta}{\hbar}\,V(x_i)\right]\right\}\prod_{i=1}^{N}\frac{dx_i}{a} \tag{459}$$

mit

$$a \;=\; \sqrt{\frac{2\pi\hbar\eta}{m}}\;. \tag{460}$$

Vorübergehend haben wir umbenannt $x_2 \;=\; x_b,\;\; x_1 \;=\; x_a$. Das Potential bei $(x_{i+1}+x_i)/2$ haben wir durch den linksseitigen Wert $V(x_i)$ ersetzt. Es tritt hierbei kein Anordnungsproblem auf. Das Integral wird über alle Pfade von $x_a$ nach $x_b$ ausgeführt. Es ist $x_0 \;=\; x_a$, $x_{N+1} \;=\; x_b$ und $u_b - u_a \;=\; (N+1)\eta$. Das Resultat dieser Ableitung ist, daß folgendes gilt, wenn wir einen Pfad $x(u)$ betrachten, der die Koordinate als Funktion eines Parameters $u$ angibt,

$$\rho(x_2,x_1) \;=\; \int \exp\left\{-\frac{1}{\hbar}\int_0^{\beta\hbar}\left[\frac{m}{2}\dot{x}^2(u) + V(x)\right]du\right\}\mathcal{D}x(u) \tag{461}$$

mit

$$\dot{x} \;=\; \frac{dx}{du} \,. \tag{462}$$

Dies ist eigentlich ein recht amüsantes Resultat, da es das vollständige statistische Verhalten eines quantenmechanischen Systems ausgedrückt durch ein Pfadintegral wiedergibt, ohne daß irgendwo ein "$i$" auftritt, das sonst charakteristisch für die Quantenmechanik ist. Bei dem obigen Pfadintegral sieht man sehr leicht, welcher Pfad beiträgt und welcher Pfad exponentiell gedämpft ist.

$u$ ist keinesfalls eine echte Zeit. Es ist nur ein Parameter in dem Ausdruck für die Dichtematrix. Jedoch wird für $u$ häufig das Wort "Zeit" gebraucht, auch wenn es schon von der Dimension her nicht stimmt.

# Der harmonische Oszillator in der statistischen Mechanik

Für das Potential des harmonischen Oszillators hatten wir im Rahmen der nichtrelativistischen Quantenmechanik die Greensche Funktion abgeleitet. Wir fanden

$$G(b,a) = \sqrt{\frac{m\omega}{2\pi i\hbar\,\sin(\omega T)}}\,\exp\left\{\frac{im\omega}{2\hbar\,\sin(\omega T)}\left[\left(x_a^2+x_b^2\right)\cos(\omega T)-2x_a x_b\right]\right\}. \tag{463}$$

Dabei galt $(N+1)\epsilon = T$ mit $T = t_b - t_a$, in der statistischen Mechanik verwenden wir $(N+1)\eta = \beta\hbar$. Aus $\epsilon = -i\eta$ ergibt sich $T = -i\beta\hbar$. Wir setzen dies in die trigonometrischen Funktionen ein und bekommen

$$\begin{aligned} \sin(\omega T) &\rightarrow \sin\{\omega(-i\beta\hbar)\} = -i\,\sinh\{i\omega(-i\beta\hbar)\} = -i\,\sinh(\omega\beta\hbar)\,, \\ \cos(\omega T) &\rightarrow \cos\{\omega(-i\beta\hbar)\} = \cosh\{i\omega(-i\beta\hbar)\} = \cosh(\omega\beta\hbar)\,. \end{aligned} \tag{464}$$

Dadurch erhalten wir in der statistischen Mechanik die Dichtematrix für das System eines harmonischen Oszillators

$$\begin{aligned} \rho(x',x) &= \sqrt{\frac{m\omega}{2\pi\hbar\,\sinh(\omega\beta\hbar)}}\,\exp\left\{-\frac{m\omega}{2\hbar\,\sinh(\omega\beta\hbar)}\right. \\ &\quad\times\left.\left[\left(x^2+x'^2\right)\cosh(\omega\beta\hbar)-2xx'\right]\right\}. \end{aligned} \tag{465}$$

Wir wollen nun zeigen, daß für die freie Energie $F$ folgt

$$F = kT\,\ln\left[2\,\sinh\frac{\hbar\omega}{2kT}\right]. \tag{466}$$

Aus $Z = e^{-\beta F}$ erhalten wir

$$F = -\frac{1}{\beta}\ln Z = -kT\,\ln Z\,. \tag{467}$$

Damit läßt sich die Behauptung auch schreiben als

$$Z = \frac{1}{2\,\sinh\{\omega\hbar/(2kT)\}}\,. \tag{468}$$

Aus der Relation $Z = \int\rho(x,x)\,dx = \mathrm{Tr}\,\rho$ folgt explizit

$$Z = \int\sqrt{\frac{m\omega}{2\pi\hbar\,\sinh(\omega\beta\hbar)}}\,\exp\left\{-\frac{m\omega}{2\hbar\,\sinh(\omega\beta\hbar)}\,2x^2\left(\cosh(\omega\beta\hbar)-1\right)\right\}dx\,. \tag{469}$$

Wir verwenden nun

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ax^2}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{-a}} \tag{470}$$

und erhalten

$$\begin{aligned} Z &= \sqrt{\frac{m\omega}{2\pi\hbar\,\sinh(\omega\beta\hbar)}}\,\sqrt{\pi}\left\{\frac{m\omega}{2\hbar\,\sinh(\omega\beta\hbar)}\,2\left(\cosh(\omega\beta\hbar)-1\right)\right\}^{-\frac{1}{2}} \\ &= \left\{2(\cosh(\omega\beta\hbar)-1)\right\}^{-1/2}\,. \end{aligned} \tag{471}$$

Nun verwenden wir die Relation

$$2\,\sinh\frac{x}{2} \;=\; \sqrt{2(\cosh x - 1)} \tag{472}$$

und bekommen damit in der Tat die Behauptung (468). Dies ist eine wichtige thermodynamische Relation, die wir mit Hilfe des Pfadintegralformalismus abgeleitet haben.

Wir machen nun die Annahme, die Temperatur sei nicht zu klein. Dann ist $\beta\hbar$ sehr klein. In der Partitionsfunktion ist $x_1 \;=\; x_2$. Jeder Pfad startet von $x_1$ und ist in kurzer "Zeit" wieder zurück bei $x_1$. Für große Abstände von $x_1$ wird bei der fixierten "Zeit" $\beta\hbar$ eine hohe kinetische Energie benötigt, um nach $x_1$ zurückzugelangen. Diese Pfade sind aber exponentiell gedämpft. Daher trägt in $V[x(u)]$ in erster Näherung nur $x_1$ bei und wir approximieren $V[x(u)] \;\simeq\; V[x_1]$ für alle Pfade. Damit folgt für Temperaturen, die nicht in der Nähe des absoluten Nullpunktes liegen

$$\rho(x_1, x_1) \;\simeq\; e^{-\beta V(x_1)} \int\limits_{x_1}^{x_1} \exp\left\{-\frac{m}{2\hbar}\int\limits_0^{\beta\hbar} \dot{x}^2(u)\,du\right\} \mathcal{D}x(u)\;. \tag{473}$$

Der letzte Ausdruck ist gerade das Pfadintegral eines freien Teilchens. In der nichtrelativistischen Quantenmechanik hatten wir die Greensche Funktion für ein freies Teilchen abgeleitet,

$$G(b,a) \;=\; \sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar T}}\,\exp\left\{\frac{im(x_b - x_a)^2}{2\hbar T}\right\}\;. \tag{474}$$

Mit $T \;=\; -i\beta\hbar$ bekommen wir

$$\int\limits_{x_1}^{x_2} \exp\left\{-\frac{m}{2\hbar}\int\limits_0^{\beta\hbar} \dot{x}^2(u)\,du\right\} \mathcal{D}x(u) \;=\; \sqrt{\frac{mkT}{2\pi\hbar^2}}\;\exp\left\{-\frac{mkT(x_2 - x_1)^2}{2\hbar^2}\right\}\;. \tag{475}$$

Wenn wir nur an der Partitionsfunktion interessiert sind, gilt $x_2 \;=\; x_1$, und wir finden

$$\rho(x_1, x_1) \;=\; \sqrt{\frac{mkT}{2\pi\hbar^2}}\;e^{-\beta V(x_1)}\;. \tag{476}$$

Die Partitionsfunktion ist das Integral dieses Ausdruckes über alle möglichen Anfangswerte $x_1$

$$Z \;=\; \sqrt{\frac{mkT}{2\pi\hbar^2}}\;\int e^{-\beta V(x_1)}\,dx_1\;. \tag{477}$$

Dies ist ein Resultat für die Partitionsfunktion, das im Limes der klassischen Mechanik gilt. Es ist das Boltzmann–Gesetz.

Für $N$-Teilchen, die mittels eines Potentials $V(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_N)$ wechselwirken, wobei $\mathbf{x}_a$ den Ortsvektor des Teilchens $a$ bezeichnet, ist das entsprechende Integral

$$\int \exp\left\{-\beta\, V(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_N\right\} d^3\mathbf{x}_1\, d^3\mathbf{x}_2\, \ldots d^3\mathbf{x}_N$$

zu bestimmen. Als Maß für eine eventuelle Abweichung $\Delta x$ von $x_1$, so daß die angewendete Näherung noch gültig ist, haben wir offensichtlich entsprechend der Breite in (475)

$$\Delta x \;=\; \frac{\hbar}{\sqrt{mkT}}\;. \tag{478}$$

Für größere $\Delta x$ wird die Exponentialfunktion stark gedämpft. Dies bedeutet auch, daß sich $V(x_1 + \Delta x)$ kaum von $V(x_1)$ unterscheiden sollte.

Wir wollen nun einige quantenmechanische Effekte diskutieren. Dazu definieren wir eine mittlere Position in dem Parameterraum von $u$,

$$\bar{x} \;=\; \frac{1}{\beta\hbar} \int\limits_0^{\beta\hbar} x(u)\, du \;, \tag{479}$$

die für jeden speziellen Pfad definiert ist. Wir können nun eine Taylor–Entwicklung von $V(x)$ um $\bar{x}$ durchführen

$$\begin{aligned} \int\limits_0^{\beta\hbar} V[x(u)]\, du \;&=\; \beta\hbar V(\bar{x}) + \int\limits_0^{\beta\hbar} [x(u) - \bar{x}]\, V'(\bar{x})\, du \\ &\quad + \tfrac{1}{2} \int\limits_0^{\beta\hbar} [x(u) - \bar{x}]^2\, V''(\bar{x})\, du + \;\ldots \end{aligned} \tag{480}$$

Der zweite Term auf der rechten Seite verschwindet aufgrund der Definition (479) von $\bar{x}$. Der erste von null verschiedene Korrekturterm zum klassischen Resultat ist also von zweiter Ordnung. In dem Pfadintegral (473) integrieren wir über alle Pfade, die bei $x_1$ beginnen und die wieder bei $x_1$ enden. In der Partitionsfunktion (477) integrieren wir schließlich über alle Anfangswerte $x_1$. Statt über alle Anfangswerte $x_1$ können wir auch über alle Mittelwerte $\bar{x}$ integrieren. Wir schreiben daher die Partitionsfunktion als

$$Z \;=\; \int d\bar{x} \int\limits_{x_1}^{x_1} \exp\left\{ -\frac{1}{\hbar} \left[ \tfrac{1}{2} m \int\limits_0^{\beta\hbar} \dot{x}^2\, du + \int\limits_0^{\beta\hbar} V[x(u)]\, du \right] \right\} \mathcal{D}x(u) \;. \tag{481}$$

Alle Pfade werden unter den folgenden Bedingungen gewählt:
1.) $\bar{x}$ ist durch den obigen Ausdruck gegeben und ist fest.
2.) Anfangs- und Endpunkt sind identisch.
Dies impliziert, daß eine Integration über alle Pfade auch eine Integration über alle Endpunkte enthält.

Mit der Näherung (480) bekommen wir für die Partitionsfunktion

$$Z \;\simeq\; \int e^{-\beta V(\bar{x})} d\bar{x} \int\limits_{x_1}^{x_1} \exp\left\{ -\int\limits_0^{\beta\hbar} \left[ \tfrac{1}{2} m \dot{x}^2 + \tfrac{1}{2} [x(u) - \bar{x}]^2\, V''(\bar{x}) \right] \frac{du}{\hbar} \right\} \mathcal{D}x(u) \,. \tag{482}$$

Mit

$$\int\limits_0^{\beta\hbar} (x - \bar{x})\, du \;=\; 0 \;=\; \int\limits_0^{\beta\hbar} y\, du \tag{483}$$

bekommen wir für das Pfadintegral in (482)

$$\int\limits_{x_1 - \bar{x}}^{x_1 - \bar{x}} \exp\left\{ -\int\limits_0^{\beta\hbar} \left[ \tfrac{1}{2} m \dot{y}^2 + \tfrac{1}{2} y^2\, V''(0) \right] \frac{du}{\hbar} \right\} \mathcal{D}y(u) \;. \tag{484}$$

Der Integrand dieses Pfadintegrals ist der gleiche wie für den harmonischen Oszillator mit $\omega^2 = -V''(0)/m$.

Wir wollen nun die Zwangsbedingung (479) bezüglich des Pfades in das Pfadintegral einbauen. Wir multiplizieren das gesamte Pfadintegral mit

$$\delta\left(\int\limits_0^{\beta\hbar} y\, du\right) \ . \tag{485}$$

Wir verwenden die Fourier–Darstellung

$$\delta(x) \ = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp(ikx)\, \frac{dk}{2\pi} \ . \tag{486}$$

Damit wird das Pfadintegral unter Einbeziehung der genannten Zwangsbedingung

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \int\limits_{x_1-\bar{x}}^{x_1-\bar{x}} \exp\left\{-\frac{1}{\hbar}\int\limits_0^{\beta\hbar} \left(\tfrac{1}{2}m\dot{y}^2 + \tfrac{1}{2}V''\, y^2 + iky\right) du\right\} \mathcal{D}y(u) \ . \tag{487}$$

Dies ist wieder das Pfadintegral für den getriebenen harmonischen Oszillator, wenn wir $m$ und $V''$ als imaginär interpretieren. Auf eine explizite Durchrechnung des Pfadintegrals (487) wird an dieser Stelle zunächst verzichtet. Unter Verwendung der bereits abgeleiteten klassischen Wirkung für den getriebenen Oszillator bekommt man schließlich

$$Z \ \simeq \ \sqrt{\frac{mkT}{2\pi\hbar^2}} \int \exp\left\{-\beta\left[V(\bar{x}) + \frac{\beta\hbar^2}{24m} V''(\bar{x})\right]\right\} d\bar{x} \ . \tag{488}$$

Der zweite Term in dem Argument der Exponentialfunktion entspricht der quantenmechanischen Korrektur erster Ordnung zum klassischen Ausdruck.

## Das Plancksche Strahlungsgesetz

Als Anwendungsbeispiel für ein System von harmonischen Oszillatoren betrachten wir nun die Strahlung eines schwarzen Körpers.

Die freie Energie eines harmonischen Oszillators lautete

$$F \;=\; kT\,\ln\left(2\,\sinh\frac{\hbar\omega}{2kT}\right)\;. \tag{489}$$

Die freie Energie eines linearen Systems von Oszillatoren ist daher gegeben durch die Superposition

$$F \;=\; kT\,\sum_i \ln\left(2\,\sinh\frac{\hbar\omega_i}{2kT}\right)\;. \tag{490}$$

Aus der Definition der Partitionsfunktion

$$Z \;=\; \sum_i e^{-E_i\,\beta} \;=\; e^{-\beta F} \tag{491}$$

folgt

$$F \;=\; -\frac{1}{\beta}\,\ln Z\;. \tag{492}$$

Wir berechnen die mittlere Energie des Oszillatorsystems

$$U \;=\; -\frac{1}{Z}\,\frac{\partial Z}{\partial\beta} \;=\; -\frac{\partial}{\partial\beta}\,\ln Z \;=\; \frac{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta E_n}\,E_n}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta E_n}}\;. \tag{493}$$

Es ist

$$Z \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(n+1/2)\beta\hbar\omega}\;. \tag{494}$$

Offensichtlich gilt

$$Z \;=\; e^{-1/2\,\beta\hbar\omega}\,\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\beta\hbar\omega} \;=\; e^{-1/2\,\beta\hbar\omega}\left(1+e^{-\beta\hbar\omega}+e^{-2\beta\hbar\omega}+\ldots\right)\;. \tag{495}$$

Diese unendliche Summe ist eine konvergente geometrische Reihe mit dem Grenzwert

$$Z \;=\; e^{-1/2\,\beta\hbar\omega}\,\frac{1}{1-e^{-\beta\hbar\omega}}\;. \tag{496}$$

Damit erhalten wir

$$\ln Z \;=\; -\tfrac{1}{2}\,\beta\hbar\omega - \ln\left(1-e^{-\beta\hbar\omega}\right) \tag{497}$$

und weiter

$$U \;=\; -\frac{\partial}{\partial\beta}\ln Z \;=\; -\left(-\tfrac{1}{2}\hbar\omega - \frac{e^{-\beta\hbar\omega}\,\hbar\omega}{1-e^{-\beta\hbar\omega}}\right)\;. \tag{498}$$

Zusammengefaßt folgt

$$U \;=\; \hbar\omega\left(\tfrac{1}{2}+\frac{1}{e^{\beta\hbar\omega}-1}\right)\;. \tag{499}$$

Die Nullpunktsenergie führt bei einem System von unendlich vielen Oszillatoren zu Divergenzen und bleibt aus Renormierungsgründen unberücksichtigt.

Wir betrachten nun das elektromagnetische Feld in einem abgeschlossenen Kasten mit dem Volumen $V$. Die Wellen sind charakterisiert durch den Wellenzahlvektor $\mathbf{k}$. Es liegen zwei Polarisationsmoden vor.

Wir drücken die gesamte innere Energie als Integral über das Einheitsvolumen im Phasenraum aus

$$U \;=\; 2\int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\,\hbar\omega\,\frac{1}{e^{\hbar\omega/(kT)}-1}\;. \tag{500}$$

$U$ kann aus $F$ abgeleitet werden

$$U \;=\; \frac{\partial}{\partial\beta}\,(\beta\,F) \tag{501}$$

mit

$$F \;=\; kT\,\int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} 2\,\ln\left(1 - e^{-\hbar\omega/(kT)}\right)\;. \tag{502}$$

Das Volumenelement im $\mathbf{k}$–Raum schreiben wir in sphärischen Koordinaten als

$$d^3\mathbf{k} \;=\; 4\pi\,k^2\,dk \;=\; 4\pi\,\frac{\omega^2}{c^3}\,d\omega\;. \tag{503}$$

Damit finden wir für die Energie des Strahlungsfeldes im Frequenzbereich zwischen $\omega$ und $\omega + d\omega$

$$\frac{dU}{d\omega} \;=\; \frac{2\cdot 4\pi}{(2\pi c)^3}\,\frac{\hbar\omega^3}{e^{\hbar\omega/(kT)}-1}\;. \tag{504}$$

Dies ist das Plancksche Strahlungsgesetz für den schwarzen Körper.

## Hamilton–Darstellung der Pfadintegrale in der statistischen Mechanik

Da der statistische Operator $e^{-\beta H}$ die gleiche Struktur wie der quantenmechanische Zeitentwicklungsoperator aufweist, ist klar, daß man wie zuvor auch eine Pfadintegralformel für $\rho(x,x')$ aufstellen kann. Eine zu den früheren Ableitungen vollkommen analoge Rechnung ergibt

$$Z \;=\; \int dx\,\rho(x,x) \;=\; \oint \mathcal{D}x\,\frac{\mathcal{D}p}{2\pi}\exp\left\{-\int\limits_0^\beta [p(-i\dot{x})+H(p,x)]d\tau\right\}\;. \tag{505}$$

Dabei deutet das Zeichen $\oint$ an, daß alle Wege periodisch mit der Periode $\beta$ sein müssen, d.h.

$$x(0) \;=\; x(\beta)\;. \tag{506}$$

Hat die Hamilton–Funktion die einfache Gestalt

$$H(p,x) \;=\; \frac{p^2}{2m}+V(x,t)\;, \tag{507}$$

so können die $p$–Integrationen wie in der quantenmechanischen Rechnung wieder explizit ausgeführt werden und es bleibt nur ein Pfadintegral über die Ortsvariablen übrig

$$\rho(x,x') \;=\; \int \mathcal{D}'x\exp\left\{-\int\limits_0^\beta [\tfrac{1}{2}m\dot{x}^2+V(x)]d\tau\right\} \equiv\; < x\beta|x'0 >^E\;, \tag{508}$$

$$Z \;=\; \oint \mathcal{D}'x\exp\left\{-\int\limits_0^\beta [\tfrac{1}{2}m\dot{x}^2+V(x)]d\tau\right\} \;\equiv\; \oint \mathcal{D}'x\exp\Big\{-\mathcal{A}^E[x(t)]\Big\}\;. \tag{509}$$

Das Maß $\mathcal{D}'x$ lautet in der gegitterten Version wieder

$$\mathcal{D}'x \;=\; \frac{1}{A^E}\prod_{i=1}^{N}\frac{dx_i}{A^E} \tag{510}$$

mit der euklidischen Normierungskonstanten

$$A^E \;=\; \sqrt{\frac{2\pi\epsilon^E}{m}}\;, \tag{511}$$

die man aus der quantenmechanischen Konstanten $A$ durch die Substitution $i\epsilon \;\to\; \epsilon^E$ erhält. Der gesamte Ausdruck für $\rho(x,x')$ folgt aus der quantenmechanischen Amplitude, wenn man die Wick–Rotation

$$\begin{aligned}\tau \;&=\; it\;,\\ \beta \;&=\; iT \;\equiv\; i(t_b-t_a)\end{aligned} \tag{512}$$

vornimmt. Man beachte, daß sich die euklidische Wirkung

$$\mathcal{A}^E \;=\; \int\limits_0^\beta \left[\tfrac{1}{2}m\dot{x}^2+V(x)\right]d\tau \;=\; \int\limits_0^\beta \left[\tfrac{1}{2}m\dot{x}^2-(-V(x))\right]d\tau \tag{513}$$

von einer "normalen" Wirkung dadurch unterscheidet, daß gilt $V(x) \;\to\; -V(x)$, d.h. in der anschaulichen Interpretation findet die Bewegung im "umgedrehten" Potential statt.

# Einführung der Klein-Gordon Gleichung

Der nichtrelativistische Energiesatz übertragen auf die Operatorform

$$\hat{E} = \frac{\hat{\vec{p}}^2}{2m_0} + V(\vec{x}) \tag{514}$$

mit den Operatoren

$$\hat{E} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \tag{515}$$

und

$$\hat{\vec{p}} = -i\hbar \vec{\nabla} \tag{516}$$

führt auf die Schrödinger-Gleichung

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(\vec{x},t)}{\partial t} = \left[ -\frac{\hbar^2}{2m_0} \vec{\nabla}^2 + V(\vec{x}) \right] \Psi(\vec{x},t). \tag{517}$$

Um eine relativistische Wellengleichung zu erhalten, gehen wir vom relativistischen Energie-Impuls-Erhaltungssatz aus:

$$p^\mu p_\mu = \frac{E^2}{c^2} - \vec{p} \cdot \vec{p} = m_0^2 c^2 \tag{518}$$

mit

$$p^\mu = \left\{ \frac{E}{c}, p_x, p_y, p_z \right\} \tag{519}$$

und

$$p_\mu = g_{\mu\nu} p^\nu = \left\{ \frac{E}{c}, -p_x, -p_y, -p_z \right\}. \tag{520}$$

Hierbei haben wir für den Fundamentaltensor $g_{\mu\nu}$ die folgende Signatur gewählt

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{521}$$

Ferner haben wir von der Einsteinschen Summenkonvention gebrauch gemacht (über doppelt vorkommende Indizes, wobei einer kontravariant und der andere kovariant ist, wird automatisch summiert).

Wir übertragen dies auf die Operatorebene. Mit

$$\hat{p}^\mu = i\hbar \frac{\partial}{\partial x_\mu} = i\hbar \left\{ \frac{\partial}{\partial(ct)}, -\vec{\nabla} \right\} \tag{522}$$

folgt

$$\hat{p}^\mu \hat{p}_\mu = -\hbar^2 \frac{\partial}{\partial x_\mu} \frac{\partial}{\partial x^\mu} = -\hbar^2 \Box = -\hbar^2 \left\{ \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \triangle \right\}. \tag{523}$$

Ausgehend vom relativistischen Energie-Impulserhaltungssatz (518) folgt als relativistische Wellengleichung die Klein-Gordon Gleichung

$$\hat{p}^\mu \hat{p}_\mu \, \Psi(\vec{x},t) \; = \; m_0^2 c^2 \, \Psi(\vec{x},t) \tag{524}$$

oder explizit ausgeschrieben

$$\left( \Box + \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \right) \Psi(\vec{x},t) = \left( \frac{\partial^2}{c^2 \partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \right) \Psi(\vec{x},t) = 0. \tag{525}$$

Man sieht der Klein-Gordon Gleichung direkt an, daß sie Lorentz-kovariant ist, da $\hat{p}^\mu \hat{p}_\mu$ eine Lorentz-Invariante ist.

Freie Lösungen haben die Form

$$\Psi(\vec{x},t) = e^{-\frac{i}{\hbar} p^\mu x_\mu} = e^{-\frac{i}{\hbar}(Et - \vec{p}\cdot\vec{x})}. \tag{526}$$

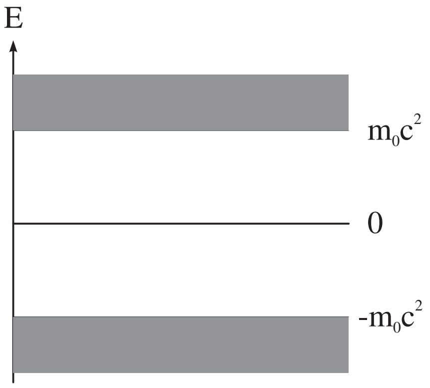
Anwendung des Klein-Gordon Operators auf die Lösung dieser ebenen Wellen führt auf

$$\frac{E^2}{c^2} - \vec{p}\cdot\vec{p} = m_0^2 c^2 \tag{527}$$

und somit auf

$$E = \pm c \sqrt{m_0^2 c^2 + \vec{p}^2}. \tag{528}$$

Es gibt daher formal Lösungen zu positiven wie auch zu negativen Energien.




Figur 14: Lösungsspektrum der freien Klein-Gordon Gleichung.

Wir wollen nun das elektromagnetische Feld ankoppeln. In der nichtrelativistischen Quantenmechanik geschah diese Ankopplung durch die minimale Kopplung

$$\hat{E} \to i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - eA_0 \tag{529}$$

und

$$\hat{\vec{p}} \to i\hbar \vec{\nabla} - \frac{e}{c}\vec{A}. \tag{530}$$

Diese Art der Ankopplung ist ein eichinvariantes Konzept. Eine Eichtransformation der elektromagnetischen Potentiale führt nur zu einer Phasentransformation der Wellenfunktion und kann durch diese kompensiert werden. In Observablen machen sich diese Eichtransformationen nicht bemerkbar. In vierdimensionaler Notation machen wir nun die Substitution

$$\hat{p}^\mu \to \hat{p}^\mu - \frac{e}{c} A^\mu \tag{531}$$

mit

$$A^\mu = \{A_0, \vec{A}\}. \tag{532}$$

Damit folgt für die Klein-Gordon Gleichung

$$\left(\hat{p}^\mu - \frac{e}{c} A^\mu\right) \left(\hat{p}_\mu - \frac{e}{c} A_\mu\right) \; \Psi(\vec{x}, t) \;=\; m_0^2 c^2 \; \Psi(\vec{x}, t) \tag{533}$$

oder

$$\left[ g^{\mu\nu} \left( i\hbar \frac{\partial}{\partial x^\nu} - \frac{e}{c} A_\nu \right) \left( i\hbar \frac{\partial}{\partial x^\mu} - \frac{e}{c} A_\mu \right) \right] \Psi(\vec{x}, t) = m_0^2 c^2 \; \Psi(\vec{x}, t). \tag{534}$$

Wir untersuchen nun die Ladungs- und Stromdichten resultierend aus der Klein-Gordon Theorie. Dazu multiplizieren wir (534) mit $\Psi^*$ und subtrahieren dann den komplex konjugierten Ausdruck. Dies ergibt

$$\begin{aligned} 0 \;&=\; \Psi^*(\vec{x}, t) \left[ -g^{\mu\nu} \left( \frac{\partial}{\partial x^\nu} + \frac{ie}{\hbar c} A_\nu \right) \left( \frac{\partial}{\partial x^\mu} + \frac{ie}{\hbar c} A_\mu \right) \right] \Psi(\vec{x}, t) \\ &\quad - \Psi(\vec{x}, t) \left[ -g^{\mu\nu} \left( \frac{\partial}{\partial x^\nu} - \frac{ie}{\hbar c} A_\nu \right) \left( \frac{\partial}{\partial x^\mu} - \frac{ie}{\hbar c} A_\mu \right) \right] \Psi^*(\vec{x}, t) \\ &=\; g^{\mu\nu} \left[ \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left( \Psi \frac{\partial}{\partial x^\nu} \Psi^* - \Psi^* \frac{\partial}{\partial x^\nu} \Psi \right) - 2 \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left( \Psi \frac{ie}{\hbar c} A_\nu \Psi^* \right) \right]. \end{aligned} \tag{535}$$

Wir bezeichnen nun

$$j_\nu = \frac{i\hbar e}{2m_0} \left( \Psi^* \frac{\partial}{\partial x^\nu} \Psi - \Psi \frac{\partial}{\partial x^\nu} \Psi^* \right) - \frac{e^2}{m_0 c} A_\nu \Psi^* \Psi = \{c\rho, \vec{j}\}. \tag{536}$$

Dies führt zu der Kontinuitätsgleichung

$$g^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\mu} j_\nu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} j^\mu = 0. \tag{537}$$

Für die Ladungsdichte bekommen wir

$$\rho = \frac{i\hbar e}{2m_0 c^2} \left( \Psi^* \frac{\partial}{\partial t} \Psi - \Psi \frac{\partial}{\partial t} \Psi^* \right) - \frac{e^2}{m_0 c^2} A_0 \Psi \Psi^*. \tag{538}$$

Für Zentralfelder $eA_0(r)$ und für stationäre Zustände der Form

$$\Psi(\vec{x}, t) = \Phi(\vec{x}) e^{-\frac{i}{\hbar}\epsilon t} \tag{539}$$

mit der Energie $\epsilon$ reduziert sich dies auf

$$\rho(\vec{r}\,) = e \, \frac{\epsilon - eA_0(r)}{m_0 c^2} \, \Phi(\vec{r}\,) \, \Phi^*(\vec{r}\,). \tag{540}$$

Damit hat die Ladungsdichte *kein* einheitliches Vorzeichen. Die Klein-Gordon Gleichung ist eine Differentialgleichung zweiter Ordnung. Somit sind unabhängig voneinander $\Psi^*(\vec{x}, t)$ und $\partial\Psi^*(\vec{x}, t)/\partial t$ zu einem beliebigen Zeitpunkt $t$ frei wählbare Anfangsbedingungen. Damit ist aber auch der Ausdruck (538) für $\rho$ keineswegs positiv definit. Der Ausdruck für $\rho$ hat dadurch auch keine Wahrscheinlichkeitsinterpretation.

## Einführung der Dirac-Gleichung

Dirac stellte im Jahre 1928 eine relativistisch kovariante Wellengleichung in Schrödinger-Form auf

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \hat{H}\Psi\,. \tag{541}$$

Grundprinzip ist, daß dies eine Differentialgleichung linear in der Zeitableitung ist. Die quadratische Form in der Zeitableitung in der Klein-Gordon Theorie führte zu Schwierigkeiten bezüglich der Wahrscheinlichkeitsinterpretation der Ladungsdichte $\rho$. Dem Kovarianzprinzip folgend sollen Raum- und Zeitkoordinaten gleichberechtigt sein. Daher sollte auch im Hamilton-Operator die Ableitung in den Raumkoordinaten linear erscheinen. Wir machen den Ansatz

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \left[\frac{\hbar c}{i}\left(\hat{\alpha}_1\frac{\partial}{\partial x^1} + \hat{\alpha}_2\frac{\partial}{\partial x^2} + \hat{\alpha}_3\frac{\partial}{\partial x^3}\right) + \hat{\beta}\, m_0 c^2\right]\,\Psi = \hat{H}\,\Psi\,. \tag{542}$$

Die bisher unbekannten Koeffizienten $\hat{\alpha}_i$ und $\hat{\beta}$ müssen noch fixiert werden. Für diese Koeffizienten nehmen wir als Ansatz eine Matrixstruktur an. Damit haben wir als Wellenfunktion $\Psi(\vec{x},t)$ einen Spaltenvektor mit $N$ Komponenten $\Psi_\sigma(\vec{x},t)$ vorliegen. Wir schreiben explizit

$$\begin{aligned} i\hbar\frac{\partial\Psi_\sigma}{\partial t} &= \frac{\hbar c}{i}\sum_{\tau=1}^{N}\left(\hat{\alpha}_1\frac{\partial}{\partial x^1} + \hat{\alpha}_2\frac{\partial}{\partial x^2} + \hat{\alpha}_3\frac{\partial}{\partial x^3}\right)_{\sigma\tau}\Psi_\tau + m_0c^2\sum_{\tau=1}^{N}\hat{\beta}_{\sigma\tau}\Psi_\tau \\ &= \sum_{\tau=1}^{N}(\hat{H})_{\sigma\tau}\,\Psi_\tau\,. \end{aligned} \tag{543}$$

Eine positiv definite Dichte läßt sich leicht angeben.

$$\rho(\vec{x}) = \Psi^+(\vec{x})\Psi(\vec{x}) = (\Psi_1^*, \Psi_2^*, \ldots, \Psi_N^*)\begin{pmatrix}\Psi_1\\ \Psi_2\\ \vdots\\ \Psi_N\end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{N}\Psi_i^*(\vec{x})\,\Psi_i(\vec{x})\,. \tag{544}$$

Wir werden diese Dichte noch ableiten. Wir fordern, daß für ein freies Teilchen die relativistische Energie-Impuls Beziehung gilt

$$E^2 = \vec{p}^{\,2}c^2 + m_0^2c^4\,. \tag{545}$$

Ferner soll die Kontinuitätsgleichung für den Viererstrom gelten. Außerdem muß die Bewegungsgleichung der Forderung der Lorentz-Kovarianz genügen.
Die erste Forderung wird erfüllt, wenn jede einzelne Komponente $\Psi_\sigma$ des Spaltenvektors $\Psi$ der Klein-Gordon Gleichung genügt.

$$-\hbar^2\,\frac{\partial^2\Psi_\sigma(\vec{x},t)}{\partial t^2} = \left(-\hbar^2c^2\,\vec{\nabla}^{\,2} + m_0^2c^4\right)\Psi_\sigma(\vec{x},t) \tag{546}$$

Wir wenden den Dirac-Operator (543) ein zweites Mal an und erhalten

$$\begin{aligned} -\hbar^2\frac{\partial^2\Psi(\vec{x},t)}{\partial t^2} &= -\hbar^2c^2\sum_{i,j=1}^{3}\frac{\hat{\alpha}_i\hat{\alpha}_j + \hat{\alpha}_j\hat{\alpha}_i}{2}\,\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^i\partial x^j} \\ &\quad + \frac{\hbar m_0c^3}{i}\sum_{i=1}^{3}(\hat{\alpha}_i\hat{\beta} + \hat{\beta}\hat{\alpha}_i)\,\frac{\partial\Psi}{\partial x^i} + \hat{\beta}^2\,m_0^2c^4\,\Psi\,. \end{aligned} \tag{547}$$

Ein Vergleich mit der Klein-Gordon Gleichung führt sofort auf die Algebra der Matrizen $\hat{\alpha}_i$ und $\hat{\beta}$

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}_i\hat{\alpha}_j + \hat{\alpha}_j\hat{\alpha}_i &= 2\,\delta_{ij}\,, \\ \hat{\alpha}_i\hat{\beta} + \hat{\beta}\hat{\alpha}_i &= 0\,, \\ \hat{\beta}^2 &= 1\,. \end{aligned} \tag{548}$$

Damit der Hamilton-Operator $\hat{H}$ hermitesch ist und somit reelle Eigenwerte hat, müssen auch die Matrizen $\hat{\alpha}_i$, $\hat{\beta}$ hermitesch sein

$$\hat{\alpha}_i^+ = \hat{\alpha}_i\,, \tag{549}$$

$$\hat{\beta}^+ = \hat{\beta}\,. \tag{550}$$

Aufgrund von (548) können die Eigenwerte dieser Matrizen nur $\pm 1$ sein. Die Antikommutationsbeziehungen (548) implizieren auch, daß die Spur der $\hat{\alpha}_i$ verschwindet. Mit Sp $\hat{A}\hat{B}$ =Sp $\hat{B}\hat{A}$ folgt

$$\mathrm{Sp}\ \hat{\alpha}_i = \mathrm{Sp}\ \hat{\beta}^2\hat{\alpha}_i = \mathrm{Sp}\ \hat{\beta}\hat{\alpha}_i\hat{\beta} = -\mathrm{Sp}\ \hat{\alpha}_i = 0\,. \tag{551}$$

Eine mögliche Realisierung der oben definierten Algebra ist gegeben durch die (4,4)-Matrizen

$$\hat{\alpha}_i = \begin{pmatrix} 0 & \hat{\sigma}_i \\ \hat{\sigma}_i & 0 \end{pmatrix}\,, \tag{552}$$

$$\hat{\beta} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & -\mathbf{1} \end{pmatrix}\,, \tag{553}$$

wobei $\hat{\sigma}_i$ die drei Pauli-Matrizen sind

$$\hat{\sigma}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\,,\ \hat{\sigma}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\,,\ \hat{\sigma}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\,. \tag{554}$$

Die Pauli-Matrizen erfüllen die Vertauschungsrelationen

$$\hat{\sigma}_i\hat{\sigma}_j + \hat{\sigma}_j\hat{\sigma}_i = 2\,\delta_{ij}\,. \tag{555}$$

Damit lautet die freie Dirac-Gleichung

$$\begin{aligned} i\hbar\frac{\partial\Psi(\vec{x},t)}{\partial t} &= -i\hbar c\sum_{k=1}^{3}\hat{\alpha}_k\frac{\partial}{\partial x^k}\Psi(\vec{x},t) + \hat{\beta}\,m_0c^2\,\Psi(\vec{x},t) \\ &= (c\hat{\vec{\alpha}}\cdot\vec{p} + \hat{\beta}m_0c^2)\Psi(\vec{x},t) \end{aligned} \tag{556}$$

Hier haben wie die $\hat{\alpha}$-Matrizen zu einem Vektor zusammengefaßt.

Als nächstes wollen wir die Viererstromdichte und ihre Kontinuitätsgleichung konstruieren. Dazu multiplizieren wir die Dirac-Gleichung (556) von links mit $\Psi^+ = (\Psi_1^*, \Psi_2^*, \Psi_3^*, \Psi_4^*)$ und die hermitesch konjugierte Form der Dirac-Gleichung (556) von rechts mit $\Psi$. Die Subtraktion beider Ausdrücke liefert

$$i\hbar\frac{\partial(\Psi^+\Psi)}{\partial t} = \frac{\hbar c}{i}\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x^k}(\Psi^+\hat{\alpha}_k\Psi)\,. \tag{557}$$

Dies hat die Form der Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\vec{j} = 0 \tag{558}$$

mit der positiv definiten Dichte

$$\rho = \Psi^+ \Psi = \sum_{i=1}^{4} \Psi_i^+ \Psi_i \tag{559}$$

und der Stromdichte

$$\vec{j} = c\Psi^+ \hat{\vec{\alpha}} \Psi \,. \tag{560}$$

Wir wollen nun die Dirac-Gleichung in vierdimensionaler Notation darstellen. Wir multiplizieren dazu die Dirac-Gleichung von links mit $\hat{\beta}/c$

$$\left( \hat{\beta} i\hbar \frac{\partial}{\partial(ct)} + \sum_{k=1}^{3} \hat{\beta}\hat{\alpha}_k i\hbar \frac{\partial}{\partial x^k} - m_0 c \right) \Psi(\vec{x}, t) = 0 \,. \tag{561}$$

Mit den Definitionen

$$\gamma^0 = \hat{\beta} \,, \tag{562}$$

$$\gamma^i = \hat{\beta}\hat{\alpha}_i \tag{563}$$

können wir formal schreiben

$$i\hbar \left( \gamma^0 \frac{\partial}{\partial x^0} + \gamma^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \gamma^2 \frac{\partial}{\partial x^2} + \gamma^3 \frac{\partial}{\partial x^3} \right) \Psi - m_0 c \, \Psi = 0 \,. \tag{564}$$

Sofern sich der Index nur auf räumliche Komponenten ($i = 1, 2, 3$) bezieht, ist er ein reiner Zählindex. Es wird hierbei zunächst nicht zwischen kontravarianter und kovarianter Stellung unterschieden. Wegen $\hat{\beta}^2 = 1$ wird damit aus der Algebra der Dirac-Matrizen $\hat{\alpha}_i$ und $\hat{\beta}$

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2 \, g^{\mu\nu} \,. \tag{565}$$

Die $\gamma^i$ mit $i = 1, 2, 3$ sind antihermitesch und unitär, d.h.

$$\gamma^{i+} = -\gamma^i \,, \tag{566}$$

$$(\gamma^i)^{-1} = \gamma^{i+} \,. \tag{567}$$

$\gamma^0$ hingegen ist hermitesch und unitär

$$\gamma^{0+} = \gamma^0 \,, \tag{568}$$

$$(\gamma^0)^{-1} = \gamma^{0+} \,. \tag{569}$$

Eine explizite Darstellung lautet

$$\gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \hat{\sigma}^i \\ -\hat{\sigma}^i & 0 \end{pmatrix} \,, \tag{570}$$

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & -\mathbf{1} \end{pmatrix} . \tag{571}$$

Wir führen eine weitere Notation ein. Es sei

$$\not{A} \equiv \gamma^\mu A_\mu = g_{\mu\nu}\gamma^\mu A^\nu = \gamma^0 A^0 - \sum_{i=1}^{3} \gamma^i A^i = \gamma^0 A^0 - \vec{\gamma}\cdot\vec{A} . \tag{572}$$

Ebenso gilt

$$\not{\nabla} \equiv \gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \gamma^0 \frac{\partial}{\partial(ct)} + \sum_{i=1}^{3} \gamma^i \frac{\partial}{\partial x^i} = \gamma^0 \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} + \vec{\gamma}\cdot\vec{\nabla} . \tag{573}$$

Damit kann die Dirac-Gleichung geschrieben werden als

$$(i\hbar\not{\nabla} - m_0 c)\Psi = 0 . \tag{574}$$

Mit $\hat{p}_\mu = i\hbar\,\partial/\partial x^\mu$ folgt

$$(\not{p} - m_0 c)\Psi = 0 \tag{575}$$

oder mit $\hat{D} := \not{p} - m_0 c$ in kompakter Weise $\hat{D}\Psi = 0$. Führt man die elektromagnetischen Potentiale durch minimale und somit eichinvariante Kopplung ein, so ergibt sich

$$(\not{p} - \frac{e}{c}\not{A} - m_0 c)\Psi = 0 . \tag{576}$$

# Freie Bewegung eines Dirac-Teilchens

Wir notieren die freie Dirac-Gleichung in der Form

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \hat{H}\Psi = \left(c\hat{\vec{\alpha}}\cdot\vec{p} + m_0c^2\hat{\beta}\right)\Psi\,. \tag{577}$$

Die stationären Zustände folgen aus dem Ansatz

$$\Psi(\vec{x},t) = \Phi(\vec{x})\exp\left\{-\frac{i}{\hbar}\epsilon\, t\right\} \tag{578}$$

für die Zeitentwicklung der Wellenfunktion. Dies führt auf

$$\epsilon\Phi(\vec{x}) = \hat{H}\Phi(\vec{x})\,. \tag{579}$$

Für die späteren Anwendungen erweist es sich als vorteilhaft, den vierkomponentigen Spaltenvektor

$$\Phi = \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \\ \Phi_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} \tag{580}$$

mit

$$\phi := \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix} \tag{581}$$

und

$$\chi := \begin{pmatrix} \Phi_3 \\ \Phi_4 \end{pmatrix} \tag{582}$$

in zwei zweikomponentige Spaltenvektoren, dies sind die Spinoren $\phi$ und $\chi$, aufzuteilen. Wir verwenden die explizite Darstellung der $\hat{\alpha}$- und $\hat{\beta}$- Matrizen. Damit lautet die stationäre Dirac-Gleichung

$$\epsilon\begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} 0 & \hat{\vec{\sigma}} \\ \hat{\vec{\sigma}} & 0 \end{pmatrix}\cdot\hat{\vec{p}}\begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} + m_0c^2\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} \tag{583}$$

oder komponentenweise ausgeschrieben

$$\epsilon\phi = c\hat{\vec{\sigma}}\cdot\hat{\vec{p}}\chi + m_0c^2\phi\,, \tag{584}$$

$$\epsilon\chi = c\hat{\vec{\sigma}}\cdot\hat{\vec{p}}\phi - m_0c^2\chi\,. \tag{585}$$

Die freie Bewegung ist gekennzeichnet durch Zustände mit scharfem Impuls $\vec{p}$. Wir setzen daher an

$$\begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_0 \\ \chi_0 \end{pmatrix}\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\vec{p}\cdot\vec{x}\right\}\,. \tag{586}$$

Einsetzen in (584) und (585) liefert

$$(\epsilon - m_0c^2)\phi_0 - c\hat{\vec{\sigma}}\cdot\vec{p}\chi_0 = 0\,, \tag{587}$$

$$-c\hat{\vec{\sigma}}\cdot\vec{p}\phi_0 + (\epsilon + m_0c^2)\chi_0 = 0\,. \tag{588}$$

Hierbei wurde der Impulsoperator $\hat{\vec{p}}$ aufgrund des Ansatzes (586) durch seinen Eigenwert ersetzt. Das lineare Gleichungssystem für $\phi_0$ und $\chi_0$ hat nur dann eine nichttriviale Lösung, wenn die Koeffizientendeterminante verschwindet. Dies impliziert

$$\begin{vmatrix} \epsilon - m_0c^2 & -c\hat{\vec{\sigma}} \cdot \vec{p} \\ -c\hat{\vec{\sigma}} \cdot \vec{p} & \epsilon + m_0c^2 \end{vmatrix} = 0 \tag{589}$$

oder

$$\epsilon^2 - m_0^2c^4 - c^2(\hat{\vec{\sigma}} \cdot \vec{p})(\hat{\vec{\sigma}} \cdot \vec{p}) = 0\,. \tag{590}$$

Alle Größen, die hier auftreten, müssen noch als mit der 2x2-Einheitsmatrix multipliziert betrachtet werden. Wir verwenden jetzt die Relation

$$(\hat{\vec{\sigma}} \cdot \vec{A})(\hat{\vec{\sigma}} \cdot \vec{B}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + i\hat{\vec{\sigma}} \cdot (\vec{A} \times \vec{B})\,. \tag{591}$$

Die Paulischen Spinmatrizen sind

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{592}$$

$$\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \tag{593}$$

$$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{594}$$

Es gelten die Vertauschungsrelationen

$$\sigma_x\sigma_y = -\sigma_y\sigma_x = i\sigma_z \tag{595}$$

$$\sigma_y\sigma_z = -\sigma_z\sigma_y = i\sigma_x \tag{596}$$

$$\sigma_z\sigma_x = -\sigma_x\sigma_z = i\sigma_y \tag{597}$$

sowie

$$\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma_z^2 = \mathbf{1}\,. \tag{598}$$

Diese Gleichungen lassen sich kompakt schreiben als

$$\sigma_j\sigma_k = \sum_{l=1}^{3} i\,\epsilon_{jkl}\sigma_l + \delta_{jk}. \tag{599}$$

Hier ist $\epsilon_{jkl}$ ein antisymmetrische Tensor dritter Stufe. Damit folgt

$$\begin{aligned} (\hat{\vec{\sigma}} \cdot \vec{A})(\hat{\vec{\sigma}} \cdot \vec{B}) &= \sum_{j,k=1}^{3} \sigma_j A_j \sigma_k B_k = \sum_{j,k=1}^{3} (\delta_{jk} + \sum_{l=1}^{3} i\epsilon_{jkl}\sigma_l) A_j B_k \\ &= \vec{A} \cdot \vec{B} + i \sum_{l=1}^{3} \sigma_l \sum_{j,k=1}^{3} \epsilon_{jkl} A_j B_k = \vec{A} \cdot \vec{B} + i\vec{\sigma} \cdot (\vec{A} \times \vec{B})\,. \end{aligned} \tag{600}$$

Gleichung (590) führt damit auf

$$\epsilon^2 = m_0^2c^4 + c^2\vec{p}^{\,2} \tag{601}$$

oder

$$\epsilon = \pm E_p \tag{602}$$

mit

$$E_p := c\sqrt{\vec{p}^{\,2} + m_0^2 c^2}\,. \tag{603}$$

Es gibt somit Lösungen zu positiven wie auch zu negativen Energien. Für ein gegebenes $\epsilon$ erhalten wir aus (588)

$$\chi_0 = \frac{c\left(\hat{\vec{\sigma}} \cdot \vec{p}\right)}{m_0 c^2 + \varepsilon}\,\phi_0\,. \tag{604}$$

Für $\phi_0$ nehmen wir jetzt als Ansatz den Zweier–Spinor

$$\phi_0 = U = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} \tag{605}$$

mit der Norm

$$U^\dagger U = U_1^* U_1 + U_2^* U_2 = 1\,, \tag{606}$$

wobei $U_1$ und $U_2$ $c$–Zahlen sind. Somit erhalten wir die Lösungen zu positiven und negativen Energien der freien Dirac–Gleichung

$$\Psi_{\vec{p},\lambda}(\vec{x},t) = N \begin{pmatrix} U \\ \dfrac{c\left(\hat{\vec{\sigma}} \cdot \vec{p}\right)}{m_0 c^2 + \lambda E_p}\,U \end{pmatrix} \frac{e^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p}\cdot\vec{x} - \lambda E_p t)}}{\left(\sqrt{2\pi\hbar}\right)^3}\,. \tag{607}$$

$\lambda = \pm 1$ charakterisiert die Lösungen zu positiver bzw. negativer Energie mit dem Zeitentwicklungsfaktor $\varepsilon = \lambda E_p$. Der Normierungsfaktor $N$ bestimmt sich aus der Forderung

$$\int \Psi^\dagger_{\vec{p},\lambda}(\vec{x},t)\Psi_{\vec{p}\,',\lambda'}(\vec{x},t)\,d^3x = \delta_{\lambda\lambda'}\,\delta(\vec{p} - \vec{p}\,')\,. \tag{608}$$

Einsetzen ergibt

$$N^2 \cdot \left( U^\dagger U + U^\dagger \frac{c^2\left(\hat{\vec{\sigma}} \cdot \vec{p}\right)\left(\hat{\vec{\sigma}} \cdot \vec{p}\right)}{(m_0 c^2 + \lambda E_p)^2} U \right) = 1 \tag{609}$$

und weiter

$$N^2 \left( 1 + \frac{c^2 \vec{p}^{\,2}}{(m_0 c^2 + \lambda E_p)^2} \right) = 1\,. \tag{610}$$

Wir bekommen also

$$\begin{aligned} N &= \sqrt{\frac{(m_0 c^2 + \lambda E_p)^2}{(m_0 c^2 + \lambda E_p)^2 + c^2 \vec{p}^{\,2}}} = \sqrt{\frac{(m_o c^2 + \lambda E_p)^2}{(m_o^2 c^4 + c^2 \vec{p}^{\,2}) + 2 m_0 c^2 \lambda E_p + E_p^2}} \\ &= \sqrt{\frac{(m_0 c^2 + \lambda E_p)^2}{2(m_0 c^2 + \lambda E_p)\lambda E_p}} = \sqrt{\frac{m_0 c^2 + \lambda E_p}{2\lambda E_p}}\,. \end{aligned} \tag{611}$$

Die Lösungen (607) sind Eigenzustände des Impulsoperators

$$\hat{\vec{p}}\,\Psi_{\vec{p},\lambda}(\vec{x},t) = \vec{p}\,\Psi_{\vec{p},\lambda}(\vec{x},t)\,. \tag{612}$$

Zu jedem Impuls $\vec{p}$ gehören zwei Arten von Zuständen, nämlich solche mit $\lambda = +1$ ($\varepsilon = +E_p$) und solche mit $\lambda = -1$ ($\varepsilon = -E_p$). Es gibt jedoch eine weitere Quantenzahl, die Helizität, die zur weiteren Klassifikation der freien Einteilchenzustände herangezogen werden kann. Der Operator

$$\hat{\vec{\Sigma}} \cdot \hat{\vec{p}} \equiv \begin{pmatrix} \hat{\vec{\sigma}} & 0 \\ 0 & \hat{\vec{\sigma}} \end{pmatrix} \cdot \hat{\vec{p}} \tag{613}$$

vertauscht mit dem Hamilton–Operator der freien Dirac–Gleichung. Der Operator

$$\hat{\vec{S}} = \frac{1}{2}\hbar\hat{\vec{\Sigma}} = \frac{1}{2}\hbar \begin{pmatrix} \hat{\vec{\sigma}} & 0 \\ 0 & \hat{\vec{\sigma}} \end{pmatrix} \tag{614}$$

kann als Verallgemeinerung des Spin–Operators in der nichtrelativistischen Quantenmechanik betrachtet werden. Wir berechnen nun den angesprochenen Kommutator

$$\left[\hat{H}, \hat{\vec{\Sigma}} \cdot \hat{\vec{p}}\right] = \left[c\hat{\vec{\alpha}} \cdot \hat{\vec{p}} + \hat{\beta} m_0 c^2, \hat{\vec{\Sigma}} \cdot \hat{\vec{p}}\right]_- = c\left[\hat{\vec{\alpha}} \cdot \hat{\vec{p}}, \hat{\vec{\Sigma}} \cdot \hat{\vec{p}}\right]\,. \tag{615}$$

Weiter folgt

$$\begin{aligned}
&\left(\hat{\vec{\alpha}} \cdot \hat{\vec{p}}\right)\left(\hat{\vec{\Sigma}} \cdot \hat{\vec{p}}\right) - \left(\hat{\vec{\Sigma}} \cdot \hat{\vec{p}}\right)\left(\hat{\vec{\alpha}} \cdot \hat{\vec{p}}\right) \\
&\quad = \begin{pmatrix} 0 & \hat{\vec{\sigma}} \cdot \hat{\vec{p}} \\ \hat{\vec{\sigma}} \cdot \hat{\vec{p}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\vec{\sigma}} \cdot \hat{\vec{p}} & 0 \\ 0 & \hat{\vec{\sigma}} \cdot \hat{\vec{p}} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \hat{\vec{\sigma}} \cdot \hat{\vec{p}} & 0 \\ 0 & \hat{\vec{\sigma}} \cdot \hat{\vec{p}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \hat{\vec{\sigma}} \cdot \hat{\vec{p}} \\ \hat{\vec{\sigma}} \cdot \hat{\vec{p}} & 0 \end{pmatrix} \\
&\quad = \begin{pmatrix} 0 & \left(\hat{\vec{\sigma}} \cdot \hat{\vec{p}}\right)^2 \\ \left(\hat{\vec{\sigma}} \cdot \hat{\vec{p}}\right)^2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \left(\hat{\vec{\sigma}} \cdot \hat{\vec{p}}\right)^2 \\ \left(\hat{\vec{\sigma}} \cdot \hat{\vec{p}}\right)^2 & 0 \end{pmatrix} = 0\,.
\end{aligned} \tag{616}$$

Zusammengefaßt ergibt sich

$$\left[\hat{H}, \hat{\vec{\Sigma}} \cdot \hat{\vec{p}}\right] = 0 \tag{617}$$

und ebenso

$$\left[\hat{\vec{p}}, \hat{\vec{\Sigma}} \cdot \hat{\vec{p}}\right] = 0\,. \tag{618}$$

Daraus resultiert, daß $\hat{\vec{\Sigma}} \cdot \hat{\vec{p}}$ gleichzeitig mit $\hat{H}$ und $\hat{\vec{p}}$ diagonalisiert werden kann. Dasselbe trifft auf den Helizitätsoperator

$$\hat{\Lambda}_S = \frac{1}{2}\hbar\hat{\vec{\Sigma}} \cdot \frac{\hat{\vec{p}}}{|\vec{p}\,|} = \hat{\vec{S}} \cdot \frac{\hat{\vec{p}}}{|\vec{p}\,|} \tag{619}$$

zu. Die Helizität stellt die Projektion des Spins auf die Impulsachse dar.

Bewegt sich die ebene Welle in $z$–Richtung, dann ist

$$\vec{p} = (0, 0, p) \tag{620}$$

und

$$\hat{\Lambda}_S = \hat{S}_z = \frac{\hbar}{2}\hat{\Sigma}_z = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{621}$$

mit den Eigenwerten $\pm\hbar/2$. Die Eigenvektoren von $\hat{\Lambda}_S$ sind durch

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} U_{-1} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ U_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ U_{-1} \end{pmatrix} \tag{622}$$

mit

$$U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{623}$$

und

$$U_{-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{624}$$

gegeben. Jetzt können wir die vollständige Klassifikation der ebenen Dirac–Wellen, die sich in $z$–Richtung bewegen, vornehmen. Wir bezeichnen sie mit $\Psi_{p_z,\lambda,s_z}(\vec{x},t)$ und notieren

$$\begin{aligned} \Psi_{p,\lambda,+\frac{1}{2}}(\vec{x},t) &= N \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dfrac{c\sigma_z p}{m_0c^2 + \lambda E_p}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} e^{\frac{i}{\hbar}(pz - \lambda E_p t)}\,, \\ \Psi_{p,\lambda,-\frac{1}{2}}(\vec{x},t) &= N \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \dfrac{c\sigma_z p}{m_0c^2 + \lambda E_p}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} e^{\frac{i}{\hbar}(pz - \lambda E_p t)}\,. \end{aligned} \tag{625}$$

Die Lösungen erfüllen die Orthonormalitätsrelation

$$\int \Psi^\dagger_{p_z,\lambda,s_z}\Psi_{p'_z,\lambda',s'_z}\, d^3x = \delta_{\lambda\lambda'}\,\delta_{s_z s'_z}\,\delta(p_z - p'_z)\,. \tag{626}$$

Für viele Betrachtungen ist es weiterhin zweckmäßig, noch den Vorzeichenoperator $\hat{\Lambda}$ einzuführen

$$\hat{\Lambda} = \frac{\hat{H}}{\sqrt{\hat{H}^2}} = \frac{c\hat{\vec{\alpha}}\cdot\hat{\vec{p}} + \hat{\beta}m_0c^2}{c\sqrt{\hat{\vec{p}}^2 + m_0^2c^2}}\,. \tag{627}$$

$\hat{\Lambda}$ kommutiert natürlich mit dem Hamilton–Operator der freien Dirac–Gleichung. $\hat{\Lambda}$ ist hermitesch und unitär,

$$\hat{\Lambda} = \hat{\Lambda}^\dagger = \hat{\Lambda}^{-1}\,. \tag{628}$$

In der Impulsdarstellung nimmt $\hat{\Lambda}$ eine besonders einfache Gestalt an,

$$\hat{\Lambda} = \frac{c(\hat{\vec{\alpha}}\cdot\vec{p}) + \hat{\beta}m_0c^2}{E_p}\,. \tag{629}$$

Für diesen Vorzeichenoperator gilt

$$\hat{\Lambda}\Psi_{p,\lambda,s_z} = \frac{\varepsilon}{E_p}\Psi_{p,\lambda,s_z} = \frac{\lambda E_p}{E_p}\Psi_{p,\lambda,s_z} = \lambda\Psi_{p,\lambda,s_z}\,. \tag{630}$$

$\hat{\Lambda}$ hat als Eigenwert offensichtlich das Vorzeichen $\lambda = \pm 1$ des Zeitentwicklungsfaktors.

Wir werten nun generell $\hat{\vec{\sigma}} \cdot \vec{p}$ aus. Es folgt

$$\hat{\vec{\sigma}} \cdot \vec{p} = \begin{pmatrix} 0 & p_x \\ p_x & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -ip_y \\ ip_y & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_z & 0 \\ 0 & -p_z \end{pmatrix}\,. \tag{631}$$

Mit

$$p_\pm = p_x \pm ip_y \tag{632}$$

folgt

$$\hat{\vec{\sigma}} \cdot \vec{p} = \begin{pmatrix} p_z & p_- \\ p_+ & -p_z \end{pmatrix}\,. \tag{633}$$

Wir führen jetzt einen Nomenklaturwechsel durch, um eine Anpassung an Bezeichnungen in der Literatur zu erreichen. In vierdimensionaler Form schreiben wir jetzt

$$\Psi(x) = e^{-ipx/\hbar}u(p)\,, \tag{634}$$

wobei der vierkomponentige Spaltenvektor $u(p)$ die Gleichung

$$(\not{p} - m_0c)\; u(p) = 0 \tag{635}$$

befriedigt. Es sei nun $u_+(\vec{p})$ eine Lösung für $E(\vec{p}) = +c\sqrt{\vec{p}^{\,2} + m_0c^2}$, dann befriedigt $u_+(\vec{p})$ die Gleichung

$$(c\hat{\vec{\alpha}} \cdot \vec{p} + \hat{\beta}m_0c^2)\; u_+(\vec{p}) = E(\vec{p})\, u_+(\vec{p})\,. \tag{636}$$

In dieser Nomenklatur lauten die Lösungen für die Spinoren für positive Energie und für den Impuls $\vec{p}$

$$\begin{aligned} u_+^{(1)}(\vec{p}) &= \sqrt{\frac{E(\vec{p}) + m_0c^2}{2E(\vec{p})}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dfrac{c\hat{\vec{\sigma}} \cdot \vec{p}}{E(\vec{p}) + m_0c^2}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \end{pmatrix}\,, \\ u_+^{(2)}(\vec{p}) &= \sqrt{\frac{E(\vec{p}) + m_0c^2}{2E(\vec{p})}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \dfrac{c\hat{\vec{\sigma}} \cdot \vec{p}}{E(\vec{p}) + m_0c^2}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \end{pmatrix}\,. \end{aligned} \tag{637}$$

Die Normierungskonstante wurde so bestimmt, daß gilt

$$u^\dagger u = 1\,. \tag{638}$$

Ferner stellen wir die Orthogonalitätsrelation fest

$$u_+^{(r)\dagger}(\vec{p})\, u_+^{(s)}(\vec{p}) = \delta_{rs} \qquad \text{für} \quad r, s = 1, 2\,. \tag{639}$$

Oftmals ist es vorteilhaft, eine andere Normierung zu wählen, nämlich

$$u_+^\dagger(\vec{p})\, u_+(\vec{p}) = \frac{E(\vec{p})}{m_0 c^2}\,, \tag{640}$$

da diese Normierung invariant ist. Diese Konvention macht eine Normierung ausgedrückt durch den adjungierten Spinor $\bar{u}(\vec{p})$ sehr einfach. Wir schreiben (636) mit $p_0 = \pm E(\vec{p})/c$

$$\begin{aligned} p_0 u &= (\hat{\vec{\alpha}} \cdot \vec{p} + \hat{\beta} m_0 c) u\,, \\ p_0 u^\dagger &= u^\dagger (\hat{\vec{\alpha}} \cdot \vec{p} + \hat{\beta} m_0 c)\,. \end{aligned} \tag{641}$$

Wir multiplizieren die erste Gleichung von links mit $u^\dagger \hat{\beta}$ und die zweite von rechts mit $\hat{\beta} u$. Nach Addition bekommen wir

$$2 p_0 u^\dagger \hat{\beta} u = 2 m_0 c u^\dagger u\,, \tag{642}$$

da $\hat{\beta}$ und $\hat{\vec{\alpha}}$ antikommutieren. Mit der Normierungsübereinkunft $u^\dagger u = |p_0|/m_0 c$ und mit der Definition

$$\bar{u} = u^\dagger \hat{\beta} \tag{643}$$

erhalten wir

$$\bar{u} u = \frac{p_0}{|p_0|} = \lambda\,. \tag{644}$$

$\bar{u} u$ ist also plus oder minus Eins je nach Vorzeichen der Energie. Multiplizieren wir (641) von rechts mit $\hat{\beta}$, so bewirkt dies

$$\bar{u}(\vec{p})(\not{p} - m_0 c) = 0\,. \tag{645}$$

Wir multiplizieren nun (635) mit $\bar{u}\gamma^\mu$ von links sowie (645) mit $\gamma^\mu u$ von rechts. Die Addition liefert

$$\begin{aligned} 2 m_0 c\, \bar{u}(\vec{p}) \gamma^\mu u(\vec{p}) &= \bar{u}(\vec{p})(\not{p}\gamma^\mu + \gamma^\mu \not{p}) u(\vec{p}) = p_\nu\, \bar{u}(\vec{p})(\gamma^\nu \gamma^\mu + \gamma^\mu \gamma^\nu) u(\vec{p}) \\ &= 2 p^\mu\, \bar{u}(\vec{p}) u(\vec{p}) \end{aligned} \tag{646}$$

und weiter

$$\bar{u}(\vec{p}) \gamma^\mu u(\vec{p}) = \lambda \frac{p^\mu}{m_0 c}\,. \tag{647}$$

Hierbei haben wir von der Normierung (644) Gebrauch gemacht. In der gleichen Weise können wir ableiten

$$\bar{u}(\vec{p}) \gamma_5 u(\vec{p}) = 0\,. \tag{648}$$

Wir wollen nun die Orthogonalitätsrelationen studieren. Zu diesem Zweck bezeichnen wir mit $u_+^r(\vec{p})$, $r = 1, 2$, die beiden Lösungen mit positiver Energie, die dem Impuls $\vec{p}$ entsprechen, und mit den

Helizitäten $+1$ oder $-1$. Diese beiden Lösungen sind orthogonal, denn sie entsprechen verschiedenen Eigenwerten des Helizitätsoperators

$$\bar{u}^r_+(\vec{p})u^s_+(\vec{p}) = \delta_{rs} \qquad \text{mit} \qquad r, s = 1, 2. \tag{649}$$

Ebenso sind die Lösungen $u_-(-\vec{p})$ zum Impuls $-\vec{p}$ und zu negativer Energie orthogonal zu $\bar{u}^r_+(\vec{p})$. Hier gelten die Gleichungen

$$(\not{p} + m_0c)\, u_-(-\vec{p}) = 0, \tag{650}$$

$$\bar{u}_-(-\vec{p})\, (\not{p} + m_0c) = 0\,. \tag{651}$$

Jetzt multiplizieren wir die Gleichung

$$(\not{p} - m_0c)\, u_+(\vec{p}) = 0 \tag{652}$$

mit $\bar{u}_-(-\vec{p})$ von links. Dies ergibt

$$\bar{u}_-(-\vec{p})\, \not{p} u_+(\vec{p}) = m_0c\, \bar{u}_-(-\vec{p})u_+(\vec{p}). \tag{653}$$

Weiter multiplizieren wir (651) von rechts mit $u_+(\vec{p})$, wir erhalten

$$\bar{u}_-(-\vec{p})\, \not{p} u_+(\vec{p}) = -m_0c\, \bar{u}_-(-\vec{p})u_+(\vec{p}). \tag{654}$$

Somit folgt die Orthogonalität

$$\bar{u}_-(-\vec{p})\, u_+(\vec{p}) = 0. \tag{655}$$

Als weitere neue Nomenklatur schreiben wir für die Zustände negativer Energie

$$u^s_-(-\vec{p}) \equiv v^s(\vec{p}). \tag{656}$$

Die Orthogonalität lautet nun

$$\bar{v}^r(\vec{p})v^s(\vec{p}) = -\delta_{rs}. \tag{657}$$

Zusammengefaßt gilt

$$\bar{u}^r_+(\vec{p})u^s_+(\vec{p}) = -\bar{v}^r(\vec{p})v^s(\vec{p}) = \delta_{rs}, \tag{658}$$

$$\bar{v}^r(\vec{p})u^s_+(\vec{p}) = \bar{u}^r_+(\vec{p})v^s(\vec{p}) = 0. \tag{659}$$

Aufgrund der Orthogonalitäts– und Normierungsrelationen befriedigen die Lösungen die Gleichung

$$\sum_{r=1}^{2} \left\{ u^r{}_{+\alpha}(\vec{p})\, \bar{u}^r_{+\beta}(\vec{p}) - v^r_\alpha(\vec{p})\, \bar{v}^r_\beta(\vec{p}) \right\} = \delta_{\alpha\beta} \tag{660}$$

mit $\alpha, \beta = 1, 2, 3, 4$. Diese Gleichung entspricht dem äußeren Produkt von $u$ und $\bar{u}$ (man beachte die Stellung von $u$ und $\bar{u}$), welches eine $4 \times 4$–Matrix ergibt. Die Normierungsbedingungen (658) und (659) implizieren ferner

$$\sum_{r=1}^{2} \left\{ \bar{u}^r_{+\alpha}(\vec{p})\, u^r_{+\beta}(\vec{p}) - \bar{v}^r_\alpha(\vec{p})\, v^r_\beta(\vec{p}) \right\} = 4. \tag{661}$$

Schließlich führen wir eine weitere Notation ein durch

$$w^r(\vec{p}) = u^r_+(\vec{p}), \qquad r = 1,2 \tag{662}$$

$$w^{r+2}(\vec{p}) = v^r_+(\vec{p}) = u^r_-(-\vec{p}), \qquad r = 1,2. \tag{663}$$

Hier lautet die Orthogonalitätsrelation

$$\bar{w}^m(\vec{p})w^m(\vec{p}) = \epsilon^m \delta_{mn} \tag{664}$$

mit $m,n = 1,2,3,4$ (keine Summation). Es ist $\epsilon^m = +1$ für $m = 1,2$ und $\epsilon^m = -1$ für $m = 3,4$. Die Dirac-Gleichung ausgedrückt durch die $w^r$ lautet

$$(\not{p} - m_0 c)\, w^r(\vec{p}) = 0 \qquad \text{für} \qquad r = 1,2, \tag{665}$$

$$(\not{p} + m_0 c)\, w^r(\vec{p}) = 0 \qquad \text{für} \qquad r = 3,4. \tag{666}$$

# Das Neutrino

Im Jahr 1930 wurde von W. Pauli die Existenz des Neutrinos postuliert. Dieses neue Teilchen sollte auch bei der schwachen Wechselwirkung die Energieerhaltung garantieren, die in den $\beta$-Zerfallsexperimenten zu dieser Zeit verletzt schien. Da jedoch auch in aufwendigen Experimenten zum $\beta$-Zerfall von Atomkernen die Energie des Neutrinos nicht explizit zu bestimmen war, muß die Wechselwirkung dieses postulierten Teilchens beim Durchgang durch Materie extrem gering sein. So darf es beispielsweise keine Ladung haben. Ebenso müssen seine Masse und sein magnetisches Moment als null oder verschwindend klein angenommen werden. Das Teilchen erhielt den Namen Neutrino mit der abkürzenden Bezeichnung $\nu$. Aufgrund der relativistischen Masse-Energie Relation bewegt sich ein Teilchen mit der Ruhemasse $m_\nu = 0$ mit Lichtgeschwindigkeit. Die experimentelle Obergrenze für die Ruhemasse des dem Elektron zugeordneten Neutrinos liegt bei einigen Elektronenvolt und somit bei weniger als einem Promille der Elektronenruhemasse. Daher erscheint die Annahme $m_\nu = 0$ gerechtfertigt. Ferner haben experimentelle Beobachtungen der Drehimpulsbilanz beim $\beta$-Zerfall ergeben, daß das Neutrino den Spin $\frac{1}{2}$ haben muß. Konsequenterweise sollte die Dirac-Gleichung für $m_0 = 0$ die fundamentale Bewegungsgleichung des Neutrinos sein.
Bezüglich Ladung, magnetisches Moment, Masse und Geschwindigkeit können Neutrino und Photon als gleich angesehen werden. Der entscheidende Unterschied zwischen beiden Teilchen besteht in der Ganz- und Halbzahligkeit des Spins.
Man unterscheidet zwischen dem Neutrino $\nu$, das bei $\beta^+$-Zerfällen auftritt, und dem bei $\beta^-$-Zerfällen emittierten Antineutrino $\bar{\nu}$.
Experimentell läßt sich das Neutrino heute als Folge des $\beta$-Zerfall durch den Rückstoß des Atomkerns nachweisen. Ferner kann durch das Neutrino der inverse $\beta$-Zerfall ausgelöst werden, der experimentell beobachtet werden kann. Als Prototyp des $\beta$-Zerfalls kann die Umwandlung

$$\mathrm{n} \rightarrow \mathrm{p} + \mathrm{e}^- + \bar{\nu}$$

angesehen werden. Der umgekehrte Prozeß

$$\mathrm{p} + \bar{\nu} \rightarrow \mathrm{n} + \mathrm{e}^+$$

heißt inverser $\beta$-Zerfall.
Als weiterer empirischer Sachverhalt hat sich durch genaue Studien des inversen $\beta$-Zerfalls herausgestellt, daß das Antineutrino nur eine bestimmte Spinorientierung bezüglich seiner Impulsrichtung aufweist. Nimmt man hingegen in den theoretischen Rechnungen an, daß der Spin des Antineutrinos sowohl parallel als auch antiparallel zu seinem Impuls orientiert sein kann, dann sind die theoretischen Reaktionsquerschnitte nur halb so groß wie die experimentellen Werte. Genaue experimentelle Analysen haben gezeigt, daß der Spin des Neutrinos antiparallel und der des Antineutrinos parallel zum Impuls $\vec{p}$ ausgerichtet ist. Abschließend zu diesen einführenden Bemerkungen sei erwähnt, daß es verschiedene Neutrinoarten gibt, die sich bei Prozessen der schwachen Wechselwirkung durch ihre Zuordnung zu Elektronen, Myonen beziehungsweise Taus unterscheiden.
Bereits im Jahr 1929 wurde von Weyl eine zweikomponentige Gleichung zur Beschreibung von masselosen Spin-$\frac{1}{2}$-Teilchen vorgeschlagen. Die Weyl-Gleichung verletzt jedoch die Paritätsinvarianz. Aus diesem Grund wurde sie zunächst verworfen. Erst nachdem die Paritätsverletzung der schwachen Wechselwirkung experimentell nachgewiesen war, haben Landau, Salam sowie Lee und

Yang im Jahr 1957 diesen Vorschlag wieder aufgegriffen und die Weyl-Gleichung als grundlegende Bewegungsgleichung des Neutrinos betrachtet.
Wir betrachten zunächst die Dirac-Gleichung für ein Teilchen der Masse $m_0 = 0$

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = c\,\hat{\vec{\alpha}} \cdot \hat{\vec{p}}\,\Psi(x) . \tag{667}$$

Diese Gleichung enthält die $\hat{\beta}$-Matrix nicht mehr. Die Antivertauschungsrelationen für die drei Matrizen $\hat{\alpha}_1,\ \hat{\alpha}_2$ und $\hat{\alpha}_3$,

$$\{\hat{\alpha}_i, \hat{\alpha}_j\} = 2\,\delta_{ij} , \tag{668}$$

können auch durch die 2×2 Pauli-Matrizen erfüllt werden. Es war ja gerade die Notwendigkeit, $\hat{\beta}$ als vierte antikommutierende Matrix zu konstruieren, die es erforderte, 4×4 Matrizen einzuführen. Die Notwendigkeit, ein Teilchen mit dem Spin $\frac{1}{2}$ mit zwei Spinoren beschreiben zu müssen, hängt mit der Masse des Teilchens zusammen. Dieser Grund entfällt, wenn die Masse Null ist. Die Wellengleichung für ein solches Teilchen kann mit nur einem Spinor aufgestellt werden.
Die Wellengleichung für die zwei-komponentige Amplitude $\Phi^+(x)$, die ursprünglich das Neutrino beschreiben sollte, lautet

$$i\hbar \frac{\partial \Phi^+}{\partial t} = c\,\hat{\vec{\sigma}} \cdot \hat{\vec{p}}\,\Phi^+(x) \tag{669}$$

oder in expliziter Form

$$\frac{\partial \Phi^+}{\partial t} = -c\,\hat{\vec{\sigma}} \cdot \vec{\nabla}\,\Phi^+(x) , \tag{670}$$

wobei die $\hat{\sigma}_i$ wieder die 2×2 Pauli-Matrizen sind. Die ebenen Wellenlösungen der Weyl-Gleichung sind dann durch

$$\Phi^+(x) = \frac{1}{\sqrt{2E(2\pi)^3}}\, e^{-\frac{i}{\hbar}px}\, u(p) \tag{671}$$

gegeben mit

$$p = \{p_0, \vec{p}\} = \{\frac{E}{c}, \vec{p}\} . \tag{672}$$

In Anlehnung an die ebenen Wellenlösungen für Elektronen, sind die Wellenfunktionen für Neutrinos so normiert, daß bei Lorentz-Transformationen die Norm invariant bleibt. $u(p)$ ist ein zweikomponentiger Spinor, der die Gleichung

$$p_0\, u = \hat{\vec{\sigma}} \cdot \vec{p}\, u \tag{673}$$

befriedigt. Wir bemerken weiter, daß die Bedingung (673) beinhaltet, daß die Lösung für ein vorgegebenes Vorzeichen der Energie einer bestimmten Orientierung des Spins in bezug auf die Bewegungsrichtung entspricht. Indem wir auf beide Seiten den Helizitäts-Operator $\hat{\vec{\sigma}} \cdot \hat{\vec{p}}/|\vec{p}\,|$ wirken lassen, erhalten wir

$$(p_0^2 - \vec{p}^{\,2})\, u = 0, \tag{674}$$

so daß nichtverschwindende Lösungen für $u$ nur dann existieren, wenn gilt

$$p_0 = \pm|\vec{p}\,| . \tag{675}$$

Auch hieraus folgt, daß sich Neutrinos mit Lichtgeschwindigkeit bewegen. Die Lösung von Gleichung (673) lautet in der üblichen Darstellung der Pauli-Matrizen mit der z-Achse in $\vec{p}$-Richtung

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} . \tag{676}$$

Diese Lösung beschreibt aber rechtshändige Neutrinos, deren Spin in Bewegungsrichtung zeigt. Um auch linkshändige Neutrinos erhalten zu können, müssen wir jedoch von der Gleichung

$$i\hbar \frac{\partial \Phi^-}{\partial t} = -c\,\hat{\vec{\sigma}} \cdot \hat{\vec{p}}\,\Phi^-(x) \tag{677}$$

ausgehen. Mit dem Ansatz

$$\Phi^-(x) = \frac{1}{\sqrt{2E(2\pi)^3}}\, e^{-\frac{i}{\hbar}px}\, v(p) \tag{678}$$

finden wir

$$p_0\, v = -\hat{\vec{\sigma}} \cdot \vec{p}\, v \tag{679}$$

mit

$$v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} . \tag{680}$$

In Gleichung (679) kann $E$ positiv oder negativ sein. Wir nennen die Lösung (678) einen Neutrinozustand. In diesem Zustand ist der Spin antiparallel zu $\vec{p}$ gerichtet und kann durch eine Linksschraube dargestellt werden. Das experimentelle Resultat aus $\beta$-Zerfallsexperimenten sagt aus, daß sich das Neutrino stets mit seinem Spin antiparallel zur Bewegungsrichtung bewegt. Dies bedeutet, die Helizität oder Longitudinalpolarisation eines Neutrinos positiver Energie ist negativ, während die Helizität eines Neutrinos negativer Energie positiv ist. Die Lösung mit $p_0 = -|\vec{p}\,|$ hat den Spin parallel zu $\vec{p}$ und kann durch eine rechtshändige Schraube dargestellt werden. Hingegen ist die Helizität eines Antineutrinos beschrieben durch die Gleichung (673) zu positiver Energie ebenfalls positiv. In der Interpretation der Löchertheorie der negativen Energiezustände hat das Antineutrino einen Impuls entgegengesetzt zu einem leeren negativen Energiezustand. Daher ist die Relation zwischen Spinrichtung und Impuls eines Antineutrinos durch eine rechtshändige Schraube dargestellt. Es sollte jedoch betont werden, daß die Behauptung, daß das Neutrino (Antineutrino) stets linkshändig (rechtshändig) ist, nur dann sinnvoll ist, wenn die Ruhemasse exakt Null ist. Anderenfalls läßt sich eine Lorentz-Transformation finden, so daß ein linkshändiges Teilchen in ein rechtshändiges Teilchen übergeführt wird.
Um den Neutrinostrom zu konstruieren, schreiben wir die Gleichung (677) um

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \Phi^-}{\partial t} - \hat{\vec{\sigma}} \cdot \vec{\nabla}\Phi^- = 0 . \tag{681}$$

Fassen wir nun die Einheitsmatrix und $\vec{\sigma}$ zu einem Vierervektor zusammen, so können wir die Weyl-Gleichung kompakter schreiben

$$\hat{\sigma}_\mu \nabla^\mu \Phi^- = 0 . \tag{682}$$

Die hermitesch konjugierte Gleichung lautet

$$\nabla^\mu (\Phi^-)^\dagger \hat{\sigma}_\mu \;=\; 0\,. \tag{683}$$

Wir multiplizieren die erste Gleichung von links mit $(\Phi^-)^\dagger$, die letzte von rechts mit $\Phi^-$ und addieren beide Gleichungen. Dies ergibt

$$\nabla^\mu (\Phi^-)^\dagger \hat{\sigma}_\mu \Phi^- \;=\; 0\,. \tag{684}$$

Dies ist eine Kontinuitätsgleichung mit dem Viererstrom

$$j_\mu \;=\; (\Phi^-)^\dagger \hat{\sigma}_\mu \Phi^-\,. \tag{685}$$

Die Raum- und Zeitanteile sind

$$\vec{j} \;=\; -(\Phi^-)^\dagger \hat{\vec{\sigma}} \Phi^-\,, \tag{686}$$

$$\rho \;=\; (\Phi^-)^\dagger \Phi^-\,. \tag{687}$$

Die Normierungskonstante der Neutrinowellenfunktion läßt sich aus dem Integral der positiv definiten Dichte $\rho$ ableiten, wenn wir fordern

$$\int \rho\, d^3x \;=\; 1\,. \tag{688}$$

Bei der Behandlung verschiedener Wechselwirkungen können Neutrinos zusammen mit anderen Teilchen mit dem Spin $\frac{1}{2}$ vorkommen, die eine endliche Masse besitzen und daher durch vierkomponentige Wellenfunktionen beschrieben werden. Um in solchen Fällen eine einheitliche Bezeichnung zu haben, ist es zweckmäßig, auch für das Neutrino eine bispinorielle Wellenfunktion einzuführen. Um den Zusammenhang der zweikomponentigen Lösungen der Weyl-Gleichung mit den bereits bekannten vierkomponentigen Elektronenspinoren erstellen zu können, kehren wir zurück zur Dirac-Gleichung für eine Teilchen der Ruhemasse $m_0$. Jedoch wählen wir eine andere Darstellung der Dirac-Matrizen $\hat{\vec{\alpha}}$ und $\hat{\beta}$,

$$\hat{\alpha}_i \;=\; \begin{pmatrix} \hat{\sigma}_i & 0 \\ 0 & -\hat{\sigma}_i \end{pmatrix}\,, \tag{689}$$

$$\hat{\beta} \;=\; \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\,. \tag{690}$$

Wir prüfen die Antivertauschungsrelationen der Dirac-Matrizen nach

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}_i\hat{\alpha}_j + \hat{\alpha}_j\hat{\alpha}_i \;&=\; \begin{pmatrix} \hat{\sigma}_i & 0 \\ 0 & -\hat{\sigma}_i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \hat{\sigma}_j & 0 \\ 0 & -\hat{\sigma}_j \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \hat{\sigma}_j & 0 \\ 0 & -\hat{\sigma}_j \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \hat{\sigma}_i & 0 \\ 0 & -\hat{\sigma}_i \end{pmatrix} \\ &=\; \begin{pmatrix} \hat{\sigma}_i\hat{\sigma}_j + \hat{\sigma}_j\hat{\sigma}_i & 0 \\ 0 & \hat{\sigma}_i\hat{\sigma}_j + \hat{\sigma}_j\hat{\sigma}_i \end{pmatrix} \;=\; 2\delta_{ij}\,, \end{aligned} \tag{691}$$

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}_i\hat{\beta} + \hat{\beta}\hat{\alpha}_i \;&=\; \begin{pmatrix} \hat{\sigma}_i & 0 \\ 0 & -\hat{\sigma}_i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \hat{\sigma}_i & 0 \\ 0 & -\hat{\sigma}_i \end{pmatrix} \\ &=\; \begin{pmatrix} 0 & -\hat{\sigma}_i \\ \hat{\sigma}_i & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \hat{\sigma}_i \\ -\hat{\sigma}_i & 0 \end{pmatrix} \;=\; 0\,. \end{aligned} \tag{692}$$

Diese Darstellung hat den Nachteil, daß die vier Komponenten des Bispinors im nichtrelativistischen Grenzfall nicht in große und kleine Komponenten aufspalten. Da jedoch Neutrinos zumindest näherungsweise die Ruhemasse null haben und deshalb immer extrem relativistische Teilchen sind, ist dieser Nachteil in der Praxis unbedeutend. In dieser Darstellung kann man nun die Dirac-Gleichung mit Hilfe der Zwei-Komponenten-Schreibweise

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Phi^+ \\ \Phi^- \end{pmatrix} \tag{693}$$

aufspalten in

$$i\hbar \frac{\partial \Phi^+}{\partial t} = -i\hbar c\, \hat{\vec{\sigma}} \cdot \vec{\nabla}\, \Phi^+ - m_0 c^2 \Phi^- , \tag{694}$$

$$i\hbar \frac{\partial \Phi^-}{\partial t} = i\hbar c\, \hat{\vec{\sigma}} \cdot \vec{\nabla}\, \Phi^- - m_0 c^2 \Phi^+ . \tag{695}$$

Wir erkennen, daß die oberen und unteren Komponenten von $\Psi$ nur durch den Massenterm miteinander verkoppelt werden. Im Grenzfall $m_0 \to 0$ ergeben sich zwei ungekoppelte zweikomponentige Gleichungen, die der jeweiligen Weyl-Gleichung entsprechen. $\Phi^+$ beschreibt Antineutrinos und $\Phi^-$ Neutrinos.
Aufgrund der Tatsache, daß in der Natur Neutrinos beziehungsweise Antineutrinos nur mit einer definierten Helizität auftreten, müssen wir fordern, daß in der vierkomponentigen Beschreibung zwei der Komponenten verschwinden. Dies erreichen wir durch Anwendung der Projektionsoperatoren

$$\hat{P}_\pm = \frac{1}{2}(1 \pm \gamma_5) \tag{696}$$

auf den Bispinor $\Psi$. In der hier benutzten Darstellung ist $\gamma_5$ diagonal. Mit $\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \gamma_5$ folgt

$$\gamma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} . \tag{697}$$

Somit bekommen wir

$$\Psi^- = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)\Psi = \begin{pmatrix} 0 \\ \Phi^- \end{pmatrix} , \tag{698}$$

$$\Psi^+ = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5)\Psi = \begin{pmatrix} \Phi^+ \\ 0 \end{pmatrix} . \tag{699}$$

Hiernach gilt offensichtlich unter Verwendung von $\gamma_5^2 = 1$

$$\gamma_5 \Psi^- = \Psi^- , \tag{700}$$

$$\gamma_5 \Psi^+ = -\Psi^+ . \tag{701}$$

Diese Gleichungen sind nur dann mit der Dirac-Gleichung vereinbar, wenn die Neutrinomasse exakt null ist. $\gamma_5$ antikommutiert mit allen $\gamma$-Matrizen, während es mit dem Massenterm natürlich kommutiert. $\Psi^+$ und $\Psi^-$ sind Eigenfunktionen des Hamilton-Operators, des Helizitäts-Operators sowie von $\gamma_5$.

Die zweikomponentige Weyl-Theorie ist also äquivalent zu einer vierkomponentigen Dirac-Beschreibung. Jedoch ist im Rahmen der Weyl-Gleichung, die Unterscheidung nach Teilchen und Antiteilchen gegenstandslos. Die beiden möglichen Zustände des Neutrinos sind nur durch parallele und antiparallele Orientierung des Spins zum Impuls charakterisiert.
Wir wollen nun die Nichtinvarianz der zweikomponentigen Theorie bei Paritäts-Transformationen untersuchen. Bei der Operation der Rauminversion ($\vec{p} \rightarrow -\vec{p},\ \vec{x} \rightarrow -\vec{x},\ \vec{\sigma} \rightarrow \vec{\sigma}$) wird ein Zustand der Energie $p_0 = |\vec{p}\,|$, Impuls $\vec{p}$ und Helizität $\vec{\sigma} \cdot \vec{p}/|\vec{p}\,| = 1$ übergeführt in einen Zustand mit $p_0 = |\vec{p}\,|$, Impuls $-\vec{p}$ und Helizität $-1$. So einen Zustand gibt es aber nicht in einer zweikomponentigen Theorie des Neutrinos. Es gibt noch einen anderen Weg die Nichtinvarianz einer zweikomponentigen Theorie bei Rauminversion festzustellen. $\vec{p}$ ist ein polarer Vektor, $\vec{\sigma}$ ist ein Axialvektor, somit ist $\vec{\sigma} \cdot \vec{p}$ ein Pseudoskalar bei Inversion. Die Wellengleichung, die die Masse $m_0$ enthält, ist bezüglich einer Spiegelung von sich aus symmetrisch. Bei der Beschreibung eines Teilchens mit nur einem Spinor geht diese Symmetrie verloren. Diese Symmetrie ist aber auch nicht unbedingt erforderlich; denn die Spiegelsymmetrie ist keine universelle Eigenschaft der Natur. Spiegelsymmetrie ist nur unter der Bedingung vorhanden, daß man gleichzeitig das Teilchen durch das Antiteilchen ersetzt. Die Zustände des Neutrinos sind in den Spinrichtungen nicht entartet. Ein Teilchen mit der Masse null besitzt nur eine axiale Symmetrie bezüglich der Impulsrichtung.

# Lagrange-Formalismus für Felder

Die Lagrange-Funktion eines Feldes können wir ausdrücken als Integral über die Lagrange-Dichte, die im allgemeinen von den Wellenfeldern $\psi_\sigma$ und ihren Ableitungen $\partial\psi_\sigma/\partial x_\mu$ abhängt.

$$L = \int \mathcal{L}\left(\Psi_\sigma, \frac{\partial \Psi_\sigma}{\partial x_\mu}\right)\, d^3x. \tag{702}$$

Aus dem Variationsprinzip

$$\delta \int L\, dt = 0 \tag{703}$$

wollen wir die Feldgleichungen herleiten.

$$\delta \int L\, dt = \delta \int \mathcal{L}\left(\Psi_\sigma, \frac{\partial \Psi_\sigma}{\partial x_\mu}\right)\, d^3x\, dt = \delta \int \mathcal{L}\left(\Psi_\sigma, \frac{\partial \Psi_\sigma}{\partial x_\mu}\right) d^4x = 0. \tag{704}$$

Die Variation ist definiert als

$$\delta \int \mathcal{L}\left(\Psi_\sigma, \frac{\partial \Psi_\sigma}{\partial x^\mu}\right)\, d^4x = \int \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Psi_\sigma}\delta\Psi_\sigma + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\frac{\partial \Psi_\sigma}{\partial x^\mu})}\,\delta\left(\frac{\partial \Psi_\sigma}{\partial x^\mu}\right)\right] d^4x = 0. \tag{705}$$

Wir verwenden die Vertauschbarkeit von Variation und partieller Differentiation

$$\delta\frac{\partial \Psi_\sigma}{\partial x^\mu} = \frac{\partial}{\partial x^\mu}(\delta\Psi_\sigma). \tag{706}$$

Wir führen eine partielle Integration in (705) durch. Dabei beachten wir, daß die Variation von $\Psi_\sigma$ an den Integrationsgrenzen verschwindet. Dies führt auf

$$\int \delta\Psi_\sigma \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Psi_\sigma} - \frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\frac{\partial \Psi_\sigma}{\partial x^\mu})}\right] d^4x = 0. \tag{707}$$

Da dies für beliebige Variationen $\delta\Psi_\sigma$ gelten soll, folgt für die Feldgleichungen

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Psi_\sigma} - \frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\frac{\partial \Psi_\sigma}{\partial x^\mu})} \quad = \quad 0\ . \tag{708}$$

Wir wenden dies für den Fall der Klein-Gordon Theorie an. Zur Beschreibung von Teilchen und Antiteilchen betrachten wir als unabhängige Variablen $\Psi$ und $\Psi^*$. Die Lagrange-Dichte des Klein-Gordon Feldes lautet dann

$$\mathcal{L}\left(\Psi, \Psi^*, \frac{\partial \Psi}{\partial x^\mu}, \frac{\partial \Psi^*}{\partial x^\mu}\right) = \frac{1}{2}\frac{\hbar^2}{m_0}\left(g^{\mu\nu}\frac{\partial \Psi^*}{\partial x^\mu}\frac{\partial \Psi}{\partial x^\nu} - \frac{m_0^2c^2}{\hbar^2}\Psi^*\Psi\right). \tag{709}$$

Der Vorfaktor $\frac{\hbar^2}{2m_0}$ ist so gewählt, daß $\int \mathcal{L}\, d^3x$ die Dimension einer Energie besitzt. Wir wenden nun die Euler-Lagrange Gleichungen an und wollen zeigen, daß hieraus die Klein-Gordon Gleichung resultiert.
Es folgt

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\frac{\partial \Psi^*}{\partial x^\mu})} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Psi^*} = 0 = \frac{1}{2}\frac{\hbar^2}{m_0}\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}g^{\mu\nu}\frac{\partial \Psi}{\partial x^\nu} + \frac{m_0^2c^2}{\hbar^2}\Psi\right) \tag{710}$$

und weiter

$$g^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\partial}{\partial x^\nu}\Psi + \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2}\Psi = 0. \tag{711}$$

Analog ergibt sich für das $\Psi^*$-Feld

$$\frac{\partial}{\partial x^\nu}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\frac{\partial \Psi}{\partial x^\nu})} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Psi} = 0 = \frac{1}{2}\frac{\hbar^2}{m_0}\left(\frac{\partial}{\partial x^\nu} g^{\mu\nu}\frac{\partial \Psi^*}{\partial x^\mu} + \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2}\Psi^*\right) \tag{712}$$

und somit

$$g^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\partial}{\partial x^\nu}\Psi^* + \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2}\Psi^* = 0. \tag{713}$$

# Einführung des Energie–Impuls Tensors

Zur Berechnung des Energie–Impuls Tensors gehen wir vom Noetherschen Theorem aus: Jeder kontinuierlichen Symmetrietransformation, die die Lagrange–Dichte $\mathcal{L}$ und die Bewegungsgleichungen invariant läßt, ist ein Erhaltungssatz und somit eine Konstante der Bewegung zugeordnet. Als Spezialfall betrachten wir die infinitesimale Verschiebung

$$x'_\mu = x_\mu + \epsilon_\mu \; , \tag{714}$$

$$\delta x_\mu = x'_\mu - x_\mu = \epsilon_\mu \; . \tag{715}$$

Dabei ändert sich die Lagrange–Dichte um

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_\mu}\delta x_\mu = \epsilon_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_\mu}. \tag{716}$$

Wenn andererseits $\mathcal{L}$ translationsinvariant ist, hängt $\mathcal{L}$ nicht explizit von den Koordinaten ab. Daraus folgt die Variation von $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\Psi_\sigma, \partial\Psi_\sigma/\partial x_\mu)$

$$\delta\mathcal{L} = \sum_\sigma \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Psi_\sigma}\delta\Psi_\sigma + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial\Psi_\sigma/\partial x_\sigma)}\delta\left(\frac{\partial\Psi_\sigma}{\partial x_\mu}\right)\right]. \tag{717}$$

Die Variation von $\Psi_\sigma$ ist gegeben durch

$$\delta\Psi_\sigma = \frac{\partial\Psi_\sigma(x)}{\partial x_\nu}\,\delta x_\nu = \frac{\partial\Psi_\sigma}{\partial x_\nu}\epsilon_\nu. \tag{718}$$

Weiterhin verwenden wir die Euler–Lagrange Gleichungen

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Psi_\sigma} - \frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial\Psi_\sigma/\partial x^\mu)} = 0. \tag{719}$$

Aus (716) und (717) folgt

$$\begin{aligned} \epsilon_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_\mu} &= \sum_\sigma \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Psi_\sigma}\delta\Psi_\sigma + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial\Psi_\sigma/\partial x_\mu)}\delta\left(\frac{\partial\Psi_\sigma}{\partial x_\mu}\right)\right] \\ &= \sum_\sigma \left[\left\{\frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial\Psi_\sigma/\partial x^\mu)}\right\}\epsilon_\nu \frac{\partial\Psi_\sigma}{\partial x_\nu} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial\Psi_\sigma/\partial x_\mu)}\frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(\frac{\partial\Psi_\sigma}{\partial x_\mu}\right)\epsilon_\nu\right]. \end{aligned} \tag{720}$$

Im letzten Term haben wir ausgenutzt, daß gilt

$$\delta\left(\frac{\partial\Psi_\sigma}{\partial x_\mu}\right) = \frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(\frac{\partial\Psi_\sigma}{\partial x_\mu}\right)\delta x_\nu = \frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(\frac{\partial\Psi_\sigma}{\partial x_\mu}\right)\epsilon_\nu. \tag{721}$$

(720) kann zusammengefaßt werden zu

$$\epsilon_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_\mu} = \frac{\partial}{\partial x_\mu}\left[\sum_\sigma \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial\Psi_\sigma/\partial x_\mu)}\epsilon_\nu \frac{\partial\Psi_\sigma}{\partial x_\nu}\right]. \tag{722}$$

Da dies für beliebige Verschiebungen $\epsilon_\mu$ gilt, können wir schreiben

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu}T_{\mu\nu} = 0 \tag{723}$$

mit dem Energie–Impuls Tensor

$$T_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu}\,\mathcal{L} + \sum_\sigma \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial\Psi_\sigma/\partial x_\mu)}\frac{\partial\Psi_\sigma}{\partial x^\nu}. \tag{724}$$

(723) sind vier Kontinuitätsgleichungen, eine für jedes $\nu$.

In der klassischen Mechanik mit den generalisierten Koordinaten $q_n$ sind die generalisierten Impulse definiert durch $p_n = \partial L/\partial\dot{q}_n$. In Analogie hierzu definieren wir nun die zu $\Psi_\sigma(\vec{x},t)$ konjugierten Impulsdichten durch

$$\Pi_\sigma(\vec{x},t) = \frac{\partial\mathcal{L}(\Psi_\sigma, \partial\Psi_\sigma/\partial x_\nu)}{\partial\dot{\Psi}_\sigma(\vec{x},t)} \tag{725}$$

mit

$$\dot{\Psi}_\sigma = \frac{\partial\Psi_\sigma}{\partial(ct)}. \tag{726}$$

In der klassischen Mechanik war die Hamilton–Funktion definiert durch

$$H(p,q) = p\dot{q} - L(q,\dot{q}). \tag{727}$$

Wir schreiben nun in der Feldtheorie die Hamilton–Funktion als Volumenintegral über die Hamilton–Dichte $\mathcal{H}(\Pi,\Psi)$

$$H = \int d^3x\ \mathcal{H}(\Pi(\vec{x},t),\Psi(\vec{x},t)). \tag{728}$$

In Analogie zu (727) führen wir die Hamilton–Dichte ein

$$\mathcal{H} = \sum_\sigma \Pi_\sigma\dot{\Psi}_\sigma - \mathcal{L}. \tag{729}$$

Damit finden wir aus (724)

$$p_\nu \equiv \int d^3x\ T_{0\nu} = \int d^3x \left[\sum_\sigma \Pi_\sigma \frac{\partial\Psi_\sigma}{\partial x^\nu} - g_{0\nu}\mathcal{L}\right] \tag{730}$$

und nach (723) unter Verwendung des Gaußschen Satzes

$$\frac{\partial p_\nu}{\partial t} = 0. \tag{731}$$

Die Größen $p_\nu$ sind also zeitlich konstant. Für die $T_{00}$–Komponente des Energie–Impuls Tensors folgt demnach

$$T_{00} = \sum_\sigma \Pi_\sigma\dot{\Psi}_\sigma - \mathcal{L} = \mathcal{H} \tag{732}$$

und

$$\int d^3x\ T_{00} = H. \tag{733}$$

Für den Fall der Klein–Gordon Theorie bekommen wir explizit

$$\begin{aligned}
T_\mu{}^\nu &= \frac{\partial \Psi}{\partial x^\mu}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial \Psi/\partial x^\nu)} + \frac{\partial \Psi^*}{\partial x^\mu}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial \Psi^*/\partial x^\nu)} - \mathcal{L}\,\delta_\mu{}^\nu \\
&= \frac{1}{2}\frac{\hbar^2}{m_0}\left[g^{\sigma\nu}\frac{\partial \Psi^*}{\partial x^\sigma}\frac{\partial \Psi}{\partial x^\mu} + g^{\sigma\nu}\frac{\partial \Psi}{\partial x^\sigma}\frac{\partial \Psi^*}{\partial x^\mu} - \right. \\
&\quad \left.\left(g^{\sigma\tau}\frac{\partial \Psi^*}{\partial x^\sigma}\frac{\partial \Psi}{\partial x^\tau} - \frac{m_0^2 c^2}{\hbar}\Psi^*\Psi\right)\delta_\mu{}^\nu\right].
\end{aligned} \tag{734}$$

Dies führt schließlich auf

$$\begin{aligned}
\mathcal{H} &\equiv T_0{}^0 \\
&= \frac{1}{2}\frac{\hbar^2}{m_0}\left[g^{\sigma 0}\frac{\partial \Psi^*}{\partial x^\sigma}\frac{\partial \Psi}{\partial x^0} + g^{\sigma 0}\frac{\partial \Psi}{\partial x^\sigma}\frac{\partial \Psi^*}{\partial x^0}\right. \\
&\quad \left.-\left(g^{\sigma\tau}\frac{\partial \Psi^*}{\partial x^\sigma}\frac{\partial \Psi}{\partial x^\tau} - \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2}\Psi^*\Psi\right)\delta_0{}^0\right] \\
&= \frac{1}{2}\frac{\hbar^2}{m_0}\left[\frac{\partial \Psi^*}{\partial x^0}\frac{\partial \Psi}{\partial x^0} + \frac{\partial \Psi}{\partial x^0}\frac{\partial \Psi^*}{\partial x^0}\right. \\
&\quad \left.-\left(\frac{\partial \Psi^*}{\partial x^0}\frac{\partial \Psi}{\partial x_0} - \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial \Psi^*}{\partial x^i}\frac{\partial \Psi}{\partial x^i} - \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2}\Psi^*\Psi\right)\right] \\
&= \frac{1}{2}\frac{\hbar^2}{m_0}\left[\frac{1}{c^2}\frac{\partial \Psi^*}{\partial t}\frac{\partial \Psi}{\partial t} + (\vec{\nabla}\Psi^*)\cdot(\vec{\nabla}\Psi) + \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2}\Psi^*\Psi\right].
\end{aligned} \tag{735}$$

# Klassische Feldtheorie

Wir gehen jetzt von der klassischen Lagrange–Dichte aus

$$\mathcal{L} \;=\; \mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu \varphi) \tag{736}$$

mit

$$\partial_\mu \varphi \;\equiv\; \frac{\partial \varphi}{\partial x^\mu}\,, \quad \mu \;=\; 0,1,2,3\;. \tag{737}$$

Die Wirkung

$$\mathcal{A}[\varphi] \;\equiv\; \int\limits_{t_1}^{t_2} dt\; L \;=\; \int\limits_{t_1}^{t_2} dt \int d^3x\; \mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu \varphi) \tag{738}$$

ist ein Funktional des Feldes. Die Lagrange–Gleichungen folgen aus der Forderung, daß die Wirkung $\mathcal{A}$ stationär sein soll bei einer Variation der generalisierten Koordinaten. Wir betrachten

$$\varphi \;\to\; \varphi + \delta\varphi\;. \tag{739}$$

Dann ist

$$\mathcal{A} \;=\; \mathcal{A} + \delta\mathcal{A} \tag{740}$$

mit

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{A} \;&=\; \int\limits_{t_1}^{t_2} dt \int d^3x \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi}\,\delta\varphi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)}\,\delta(\partial_\mu \varphi) \right) \\
&=\; \int\limits_{t_1}^{t_2} dt \int d^3x \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} \right) \right] \delta\varphi \\
&\quad + \int\limits_{t_1}^{t_2} dt \int d^3x\; \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)}\,\delta\varphi \right)\;.
\end{aligned} \tag{741}$$

Der letzte Term kann integriert werden. Er ergibt den Wert $[\partial\mathcal{L}/\partial(\partial_\mu\varphi)]\,\delta\varphi$ an der Oberfläche des Raum–Zeit Volumens, über das integriert wird. Wenn wir uns nun auf solche Variationen beschränken, die an der Oberfläche verschwinden — gerade so wie wir gewöhnlich die Lagrange–Gleichungen ableiten durch die Forderung, daß $\delta q$ bei $t_1$ und $t_2$ verschwinden sollen — so verschwindet auch der letzte Term. Es folgt – wie bereits abgeleitet – die Funktionalableitung

$$\frac{\delta\mathcal{A}}{\delta\varphi(x)} \;=\; \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} \right)\;. \tag{742}$$

Die Forderung, daß $\mathcal{A}$ stationär bei einer solchen Variation sein soll, bedingt

$$\frac{\delta\mathcal{A}}{\delta\varphi(x)} \;=\; 0 \tag{743}$$

und die Euler–Lagrange Gleichungen lauten

$$\partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} \right) \;=\; \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi}\,. \tag{744}$$

Beispielsweise gilt für

$$\mathcal{L} \;=\; \tfrac{1}{2}\,\rho\,(\partial^\mu y)(\partial_\mu y) \tag{745}$$

das Ergebnis

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} \;&=\; 0\,, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu y)} \;&=\; \rho\,\partial^\mu y\,. \end{aligned} \tag{746}$$

Die Euler–Lagrange Gleichung lautet dann

$$\Box y \;\equiv\; \partial_\mu \partial^\mu y \;=\; \frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \nabla^2 y \;=\; 0\,. \tag{747}$$

Dies ist die Wellengleichung.

Die elektromagnetischen Feldgleichungen sind ebenfalls aus einer Lagrange–Dichte ableitbar

$$\mathcal{L} \;=\; -\frac{1}{4}\,(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)\,(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) - j_\mu A^\mu\,. \tag{748}$$

Die Euler–Lagrange Gleichungen für die Komponenten $A_\nu$ ergeben dann

$$\partial_\mu\,(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) \;=\; j^\nu\,. \tag{749}$$

Mit der Definition

$$F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu\, A_\nu - \partial_\nu\, A_\mu \tag{750}$$

können wir auch schreiben

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}\, F^{\mu\nu} - j_\mu\, A^\mu \tag{751}$$

sowie

$$\partial_\mu\, F^{\mu\nu} = j^\nu \quad . \tag{752}$$

Der Faktor $\frac{1}{4}$ fällt durch die Summationen weg. Dies ist gerade die kovariante Form der Maxwell–Gleichungen. Die Komponente mit $\nu \;=\; 0$ ergibt

$$\boldsymbol{\nabla}\,\cdot \mathbf{E} \;=\; \rho \tag{753}$$

mit

$$\mathbf{E} \;=\; -\frac{1}{c}\,\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \boldsymbol{\nabla}\, A_0 \tag{754}$$

und $\rho \;=\; j^0$. Die räumlichen Komponenten ergeben

$$\boldsymbol{\nabla}\,\times \mathbf{B} \;=\; \frac{1}{c}\,\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{j} \tag{755}$$

mit

$$\mathbf{B} \;=\; \boldsymbol{\nabla}\,\times\,\mathbf{A}\,. \tag{756}$$

Es folgen auch die weiteren Maxwell–Gleichungen

$$\boldsymbol{\nabla}\,\times\,\mathbf{E} \;=\; -\frac{1}{c}\,\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\,, \tag{757}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\,\cdot \mathbf{B} \;=\; 0\,. \tag{758}$$

# Einführung in die Quantenelektrodynamik – Repetitorium zur klassischen Elektrodynamik

Quantenelektrodynamik beschreibt die Wechselwirkung von geladenen Teilchen mit dem elektromagnetischen Feld. In den vorangegangenen Studien haben wir die quantenmechanischen Gesetze eines Systems aus dem Sachverhalt bestimmt, daß wir zunächst die klassischen Gesetze mit Hilfe des Prinzips der kleinsten Wirkung ausgedrückt haben. Das Extremum der Wirkung $\mathcal{A}$, bestimmt durch die Variation einer Variablen $q$, führte zu den klassischen Bewegungsgleichungen. Die quantenmechanischen Gesetze ergaben sich folgendermaßen: Die quantenmechanische Übergangsamplitude für jede gegebene Situation ist das Pfadintegral über $e^{i\mathcal{A}/\hbar}$, integriert über alle möglichen Pfade der Variablen $q$.

Auch die Maxwell – Gleichungen der Elektrodynamik können durch ein Prinzip der geringsten Wirkung ausgedrückt werden. Die Wirkung ist hierbei ein Funktional des Vektorpotentials $\mathbf{A}$ und des skalaren Potentials $\Phi$. Die Bestimmung des Extremums der Wirkung durch Variation der Feldvariablen $\Phi(\mathbf{r}, t)$ und $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ führt auf die Maxwellschen Gleichungen. Daraus kann man verallgemeinernd schließen, daß die Greensche Funktion gegeben ist durch

$$G(b; a) \;=\; \int\limits_a^b e^{i\,\mathcal{A}[\mathbf{A},\Phi]/\hbar}\,\mathcal{D}\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)\,\mathcal{D}\Phi(\mathbf{r}, t)\,, \tag{759}$$

wobei das Pfadintegral an jedem Punkt der Raum-Zeit über alle Werte von $\mathbf{A}$ und $\Phi$ geht. Natürlich müssen wieder die Randbedingungen an jedem Anfangs- und Endpunkt berücksichtigt werden.

In den folgenden Betrachtungen nehmen wir an, die magnetische Permeabilität und die Dielektrizitätskonstante seien die des freien Raumes. Die Maxwell – Gleichungen lauten dann

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E} &= 4\pi\rho\,,\\
\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B} &= \frac{1}{c}\left(\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} + 4\pi\mathbf{j}\right)\,,\\
\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{B} &= 0\,,\\
\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{E} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\,.
\end{aligned} \tag{760}$$

Es gilt die Kontinuitätsgleichung

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{j} \;=\; -\frac{\partial\rho}{\partial t}\,. \tag{761}$$

Es ist

$$\mathbf{B} \;=\; \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A}\,. \tag{762}$$

Wir wählen die Coulomb – Eichung

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A} \;=\; 0\,. \tag{763}$$

Bei dieser Wahl ist die relativistische Invarianz zunächst nicht offensichtlich. Wir werden bei unseren Betrachtungen jedoch zunächst im nichtrelativistischen Rahmen bleiben. Es ist

$$\mathbf{E} \;=\; -\boldsymbol{\nabla}\Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} \tag{764}$$

und

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{E} \;=\; -\nabla^2 \Phi \;=\; 4\pi\rho \; . \tag{765}$$

Für $\rho \;=\; 0$ folgt $\Phi \;=\; 0$ und $\mathbf{E} \;=\; -(1/c)\,\partial\mathbf{A}/\partial t$. Aus $\mathbf{j} \;=\; 0$ folgt

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{A} \;=\; 0 \; , \tag{766}$$

d.h. jede Komponente von $\mathbf{A}$ erfüllt die Wellengleichung.

# Das Noether–Theorem

Wir betrachten nun Invarianzen von $\mathcal{A}$ bei kontinuierlichen Transformationen und leiten daraus erhaltene Größen ab. Wir untersuchen

$$\mathcal{A} \;=\; \int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3x\, \mathcal{L}(\varphi(x), \partial_\mu\varphi(x)) \tag{767}$$

bei einer generellen Transformation der Koordinaten $x$ und der Felder $\varphi$. Wir studieren den Übergang

$$x^\mu \;\rightarrow\; x'^\mu \;=\; x^\mu + \delta x^\mu \;, \tag{768}$$

wobei $\delta x^\mu$ durch einen Satz von infinitesimalen Parametern $\delta\omega^i$ spezifiziert wird

$$\delta x^\mu \;=\; X_i^\mu(x)\, \delta\omega^i \;. \tag{769}$$

Man beachte die Summenkonvention. Die Parameter $\delta\omega^i$ können auch Größen sein, die durch mehrere Indizes gekennzeichnet werden. Ferner betrachten wir

$$\varphi(x) \;\rightarrow\; \varphi'(x') \;=\; \varphi(x) + \delta\varphi(x) \tag{770}$$

mit

$$\delta\varphi(x) \;=\; \phi_i(x)\, \delta\omega^i \;. \tag{771}$$

Die totale Variation $\delta\varphi(x)$, abgeleitet aus der Variation des Feldes und aus der Variation des Argumentes liefert

$$\begin{aligned}
\varphi'(x') \;&=\; \varphi'(x + \delta x) \;=\; \varphi'(x) + \delta x^\nu\, (\partial_\nu\varphi) \\
&=\; \varphi(x) + \tilde{\delta}\varphi(x) + \delta x^\nu\, (\partial_\nu\varphi) \;,
\end{aligned} \tag{772}$$

wobei $\tilde{\delta}\varphi$ die Variation der Feldfunktion allein bezeichnet.

$$\tilde{\delta}\varphi(x) \;\equiv\; \delta\varphi(x) - \delta x^\nu(\partial_\nu\varphi) \;=\; [\phi_i(x) - (\partial_\nu\varphi) X_i^\nu(x)]\, \delta\omega^i \;. \tag{773}$$

Die Variation der Wirkung $\mathcal{A}$ lautet dann

$$\delta\mathcal{A} \;=\; \int_{t_1}^{t_2} \delta(d^4x)\, \mathcal{L} + \int_{t_1}^{t_2} d^4x\, \delta\mathcal{L} \;. \tag{774}$$

Nun ist

$$\begin{aligned}
d^4x' \;&=\; \left|\det\left[\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}\right]\right|\, d^4x \;=\; \left|\det\left[\delta^\mu_\nu + \partial_\nu(X_i^\mu\, \delta\omega^i)\right]\right|\, d^4x \\
&=\; \left[1 + \partial_\mu(X_i^\mu\, \delta\omega^i)\right]\, d^4x \;.
\end{aligned} \tag{775}$$

Hierbei haben wir uns im letzten Schritt nur auf Terme in niedrigster Ordnung in $\delta\omega^i$ beschränkt. Somit haben wir

$$\delta(d^4x) \;=\; \left[\partial_\mu(X_i^\mu\, \delta\omega^i)\right]\, d^4x \;. \tag{776}$$

Die Variation von $\delta\mathcal{L}$ bestimmt sich aus den Variationen $\delta x$ und $\delta\varphi$, wobei sich $\delta\varphi$ wiederum aus $\tilde{\delta}\varphi$ und $\delta x$ ableitet. Wir hatten bereits den Ausdruck vorliegen

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{A} &= \int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3x \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} - \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)}\right)\right] \delta\varphi \\ &\quad + \int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3x \, \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)}\delta\varphi\right) \, . \end{aligned} \tag{777}$$

Was wir nun $\tilde{\delta}\varphi$ nennen, war früher genau $\delta\varphi$. Wenn $\varphi$ die Euler–Lagrange Gleichungen erfüllt, bleibt nur das zweite Integral auf der rechten Seite übrig. Daher folgt

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3x \, \delta\mathcal{L} = \int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3x \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^\mu}\,\delta x^\mu + \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)}\,\tilde{\delta}\varphi\right)\right] . \tag{778}$$

Damit bekommen wir zusammengefaßt für $\delta\mathcal{A}$

$$\delta\mathcal{A} = \int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3x \, \partial_\mu\left(\mathcal{L}\, X_i^\mu \,\delta\omega^i + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)}\left[\phi_i - (\partial_\nu\varphi)X_i^\nu\right]\delta\omega^i\right) . \tag{779}$$

Wenn nun $\mathcal{A}$ invariant ist in bezug auf Variationen, die durch die Konstanten $\delta\omega^i$ parametrisiert werden, sagen wir $\mathcal{A}$ ist invariant bei “globalen” Transformationen. Werden die $\omega^i$ ihrerseits wieder ortsabhängig, so sprechen wir von lokalen Transformationen. Aufgrund der Invarianz haben wir

$$\frac{\delta\mathcal{A}}{\delta\omega^i} = 0 \, . \tag{780}$$

Damit folgt, daß der Strom

$$j_i^\mu \equiv \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)}\,(\partial_\nu\varphi) - \mathcal{L}\,\delta_\nu^\mu\right) X_i^\nu - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)}\,\phi_i \tag{781}$$

erhalten ist, d.h. es gilt die Kontinuitätsgleichung

$$\partial_\mu\, j_i^\mu = 0 \, . \tag{782}$$

Der Zusammenhang zwischen kontinuierlichen Symmetrietransformationen und erhaltenen Strömen repräsentiert das Noethersche Theorem. Es folgt, daß die Ladung

$$Q_i(t) \equiv \int d^3x \, j_i^0(t,\mathbf{x}) \tag{783}$$

eine Konstante ist, unabhängig von $t$. Es gilt

$$\begin{aligned}\dot{Q}_i(t) &= \int d^3x \,\partial_0\, j_i^0(t,\mathbf{x}) = \int d^3x \left[\partial_\mu\, j_i^\mu(t,\mathbf{x}) - \partial_r\, j_i^r(t,\mathbf{x})\right] \\ &= -\int dS_r\, j_i^r(t,\mathbf{x}) = 0 \, . \end{aligned} \tag{784}$$

Wir nehmen an, daß $j_i^r$ an der Grenzfläche verschwindet. Es ist wichtig zu bemerken, daß wir zur Ableitung der Stromerhaltung die Euler–Lagrange Gleichung für $\varphi$ verwendet haben.

Haben wir mehrere Felder $\varphi^a$ vorliegen, so gilt allgemein

$$j_i^\mu \;=\; \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi^a)}\,(\partial_\nu\varphi^a) - \mathcal{L}\,\delta^\mu_\nu\right) X_i^\nu - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi^a)}\,\phi_i^a\;. \tag{785}$$

Wir können zu $j_i^\mu$ jede Größe hinzuaddieren, deren Divergenz verschwindet, beispielsweise

$$j_i^\mu \;\equiv\; \partial_\nu\,T_i^{\mu\nu}\;, \tag{786}$$

wobei $T_i^{\mu\nu}$ ein antisymmetrischer Tensor ist mit

$$T_i^{\mu\nu} \;=\; -T_i^{\nu\mu}\;. \tag{787}$$

Es gilt

$$\partial_\mu\,\partial_\nu T_i^{\mu\nu} \;=\; \partial_\nu\,\partial_\mu T_i^{\mu\nu} \;=\; -\partial_\nu\,\partial_\mu T_i^{\nu\mu} \;=\; 0\;. \tag{788}$$

Wir wollen schließlich einige Eigenschaften des Energie–Impuls Tensors diskutieren. Ist die Lagrange–Dichte von den Raum–Zeit Punkten nicht explizit abhängig, so ist $T^{\mu\nu}$ divergenzfrei.

$$\partial_\mu\,T^{\mu\nu} \;=\; 0\;. \tag{789}$$

Die $T^{00}$-Komponente beschreibt die Energiedichte des Systems. Die Komponenten $T^{ik}$ mit $i,k = 1,2,3$ werden als Spannungstensor zusammengefaßt und beschreiben die Impulsströmung. Die Komponenten $T^{0\nu}$ beinhalten die Impulsdichte des Systems. Der Gesamtimpuls ist dann das Volumenintegral der räumlichen Komponenten. Die Berechtigung für die Bezeichnungen "Impuls" und "Energie" zieht man aus dem Transformationsverhalten gegenüber Raum- und Zeittranslationen. Als Folge der Invarianz gegenüber Raumtranslationen ist beispielsweise der Gesamtimpuls konstant. Da in der Mechanik der Impuls bei dieser Transformation konstant ist und letztlich auch dadurch definiert wird, ist man daher auch im Fall der Feldtheorie berechtigt, diese Größe als Gesamtfeldimpuls zu bezeichnen. Entsprechendes gilt für die Energie, wenn man die Zeittranslation betrachtet.

# Skalare Feldtheorie

Wir befassen uns nun mit der klassischen Feldtheorie eines reellen skalaren Feldes. Wir beginnen unsere Untersuchungen mit der Lagrange–Dichte

$$\mathcal{L} \;=\; \tfrac{1}{2}(\partial_\mu\varphi)(\partial^\mu\varphi) - \tfrac{1}{2}\,\mu^2\,\varphi^2 - \frac{1}{4!}\,\lambda\,\varphi^4 \;. \tag{790}$$

$\mu^2$ und $\lambda$ sind Konstanten. Die Euler–Lagrange Gleichungen ergeben

$$\Big(\partial_\mu\partial^\mu + \mu^2\Big)\,\varphi(x) \;=\; -\frac{1}{6}\,\lambda\,\varphi^3(x)\;. \tag{791}$$

Die rechte Seite ist analog zu einer Stromquelle $j^\nu$, mit dem wichtigen Unterschied, daß dieser Term durch das Feld durch Selbstwechselwirkung hervorgerufen wird. Für $\lambda\;=\;0$ folgt die Klein–Gordon Theorie mit der relativistischen Energie–Impuls Beziehung

$$-E^2 + \mathbf{p}^2 + \mu^2 \;=\; 0\;, \tag{792}$$

wobei $\mu$ die Ruhemasse des Teilchens ist. Allgemeiner gilt für

$$\mathcal{L} \;=\; \tfrac{1}{2}(\partial_\mu\varphi)(\partial^\mu\varphi) - V(\varphi) \tag{793}$$

und unter der Bedingung, daß $V$ ein absolutes Minimum bei $\varphi\;=\;v$ aufweist,

$$\left.\frac{dV}{d\varphi}\right|_{\varphi=v} \;=\; 0 \quad . \tag{794}$$

Wir identifizieren

$$\left.\frac{d^2V}{d\varphi^2}\right|_{\varphi=v} \;\equiv\; \mu^2\;. \tag{795}$$

Die Masse ist ein Maß für die Krümmung im Potential $V(\varphi)$ beim Potentialminimum. Dies folgt aus der Identifikation $\mu^2\,\varphi \;=\; dV/d\varphi$ in den Bewegungsgleichungen (791) für $\lambda \;=\; 0$ und $\partial_\mu\partial^\mu\varphi + \frac{dV(\varphi)}{d\varphi} = 0$.

Die Aussage, daß $\varphi$ ein skalares Feld sei, beschreibt sein Verhalten unter Poincaré–Transformationen. Wir untersuchen die Transformation

$$x^\mu \;\to\; x'^\mu \;=\; \Lambda^\mu_\nu\,x^\nu + a^\mu\;, \tag{796}$$

wobei $\Lambda^\mu_\nu$ die eigentlichen Lorentz–Transformationen beschreibt und die Größe $a^\mu$ eine Raum–Zeit Translation angibt. Für ein skalares Feld gilt

$$\varphi(x) \;\to\; \varphi'(x') \;=\; \varphi(x)\;, \tag{797}$$

d.h. $\varphi(x)$ ist invariant. Wir betrachten speziell eine infinitesimale Translation

$$x^\mu \;\to\; x^\mu + \epsilon^\mu\;. \tag{798}$$

Für die infinitesimalen Parameter-Änderung $\delta\omega^i$ können wir die Größen $\epsilon^\nu$ wählen, ebenso

$$X^\mu_\nu(x) \;=\; \delta^\mu_\nu\;. \tag{799}$$

Wir erinnern uns, daß galt $\delta x^\mu = X_i^\mu(x)\,\delta\omega^i$. Da $\varphi$ invariant ist, ist auch $\delta\varphi$ null und aufgrund von

$$\delta\varphi(x) = \phi_i(x)\,\delta\omega^i \tag{800}$$

folgt

$$\phi_\nu(x) = 0 \;. \tag{801}$$

Ferner haben wir

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)} = \partial^\mu\varphi \;. \tag{802}$$

Der erhaltene Noether–Strom folgt dann aus

$$\begin{aligned} T_\nu^\mu &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)}\,(\partial_\nu\varphi) - \delta_\nu^\mu\,\mathcal{L} \\ &= (\partial^\mu\varphi)(\partial_\nu\varphi) - \delta_\nu^\mu\,\left(\tfrac{1}{2}(\partial_\sigma\varphi)(\partial^\sigma\varphi) - \tfrac{1}{2}\,\mu^2\,\varphi^2 - \frac{1}{4!}\,\lambda\varphi^4\right) . \end{aligned} \tag{803}$$

Für $\lambda = 0$ folgt als "Ladung"

$$\begin{aligned} P_\nu &\equiv \int d^3x\, T_\nu^0 \\ &= \int d^3x\, \left[(\partial^0\varphi)(\partial_\nu\varphi) + \delta_\nu^0\,\tfrac{1}{2}\varphi\left(\Box\varphi + \mu^2\varphi\right)\right] \\ &= \int d^3x\,(\partial^0\varphi)(\partial_\nu\varphi) \;. \end{aligned} \tag{804}$$

Um dieses Resultat abzuleiten, haben wir eine totale Divergenz $\delta_\nu^0\,\frac{1}{2}\,\partial_\mu[\varphi\partial^\mu\varphi]$ zum Integranden hinzuaddiert und ferner haben wir die Bewegungsgleichungen ausgenutzt, um den zweiten Term zu eliminieren.

Für ein freies reelles Feld $\varphi(x)$ können wir eine Fourier-Entwicklung durchführen

$$\varphi(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\,\frac{1}{2k_0}\,\left(a(k)\,e^{-ikx} + a^*(k)\,e^{ikx}\right) \tag{805}$$

mit

$$k_0 = \sqrt{\mathbf{k}^2 + \mu^2} \;. \tag{806}$$

$\varphi(x)$ in (805) ist rein reell. Einsetzen in $P_\nu$ und die Ausführung einiger Integrationen ergibt

$$P_\mu = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\,\frac{1}{2k_0}\,a^*(k)\,a(k)\,k_\mu \;. \tag{807}$$

Dieser Ausdruck ist unabhängig von $x^0 = ct$. $P_\mu$ ist der Energie–Impuls Vektor des Feldes. Jede Mode ist durch den Vektor $k$ gekennzeichnet mit $k^2 = \mu^2$. $a(k)$ ist die Amplitude dafür, daß die Mode den Impuls $k$ aufweist und $(2\pi)^{-3}\,(2k_0)^{-1}\,|a(k)|^2\,d^3k$ ist die Anzahl der Moden, die den

Impuls im Element $d^3k$ um k haben. Die nullte Komponente ist die Energie des Feldes. Allgemein haben wir

$$
\begin{aligned}
P_0 &= \int d^3x \, \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \varphi)} \, (\partial_0 \varphi) - \mathcal{L} \right) \\
&= \int d^3x \, \left[ \tfrac{1}{2} \, \pi^2(x) + \tfrac{1}{2} (\partial_r \varphi)^2 + V(\varphi) \right] \\
&\equiv \int d^3x \, \mathcal{H} \; = \; H
\end{aligned}
\tag{808}
$$

mit

$$
\pi \; \equiv \; \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \varphi)} \; . \tag{809}
$$

In Analogie zur klassischen Mechanik können wir die Bewegungsgleichungen in eine Form bringen, die den Hamilton–Gleichungen entsprechen. Es gilt trivialerweise

$$
\partial_0 \varphi \; = \; \pi(x) \; = \; \frac{\delta H}{\delta \pi(x)} \; . \tag{810}
$$

Also ist

$$
\partial_0 \pi \; = \; \partial_0^2 \varphi \tag{811}
$$

und

$$
\frac{\delta H}{\delta \varphi(x)} \; = \; -\nabla^2 \varphi + \frac{\partial V}{\partial \varphi} \; . \tag{812}
$$

In diesem Zusammenhang erinnern wir uns an die allgemeine Regel: Für das Funktional

$$
F[\varphi] \; = \; \int f(\varphi(x'), \, \varphi'(x')) \, dx' \tag{813}
$$

folgt

$$
\frac{\delta F[\varphi]}{\delta \varphi(x)} \; = \; \frac{\partial f}{\partial \varphi} - \frac{d}{dx} \, \frac{\partial f}{\partial \varphi'} \; . \tag{814}
$$

Die Euler–Lagrange Gleichung lautet in diesem Fall

$$
\Box \varphi \; = \; -\frac{\partial V}{\partial \varphi} \; . \tag{815}
$$

Dies führt auf die Gleichung

$$
\partial_0 \pi \; = \; -\frac{\delta H}{\delta \varphi} \; . \tag{816}
$$

Die Gleichungen (810) und (816) sind die Hamiltonschen Gleichungen.

Wir betrachten nun eine infintesimale Lorentz–Transformation

$$
x^\mu \; \to \; x^\mu + \epsilon^{\mu\nu} \, x_\nu \tag{817}
$$

mit $\epsilon^{\mu\nu} = -\epsilon^{\nu\mu}$. Für die infinitesimalen Parameter $\delta\omega^i$ werden nun die Größen $-\epsilon^{\rho\sigma}$ gewählt. Damit ist

$$X^\mu_{\rho\sigma}(x) = -\delta^\mu_\rho \, x_\sigma + \delta^\mu_\sigma \, x_\rho \, . \tag{818}$$

Es war $\delta x^\mu = X^\mu_i(x) \, \delta\omega^i$. Da $\varphi$ ein Skalar ist, gilt $\delta\varphi = 0$ und damit $\phi_{\rho\sigma}(x) = 0$. Der erhaltene Strom kann durch den Energie–Impuls Tensor

$$T^\mu_\nu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} \, (\partial_\nu \varphi) - \delta^\mu_\nu \mathcal{L} \tag{819}$$

ausgedrückt werden. Wir setzen (818) und (819) in den Ausdruck (781) für den Noether–Strom ein und finden

$$M^\mu_{\rho\sigma} = x_\rho \, T^\mu_\sigma - x_\sigma \, T^\mu_\rho \, . \tag{820}$$

Die dazugehörige "Ladung" ist

$$M_{\rho\sigma} \equiv \int d^3x \, M^0_{\rho\sigma} \, . \tag{821}$$

$M_{\rho\sigma}$ ist der Drehimpulstensor des Feldes.

Das Noether–Theorem kann auch auf interne Symmetrietransformationen, die nicht die Raum–Zeit Koordinaten $x$ betreffen, angewendet werden. Wir betrachten ein komplexes Feld

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \, [\varphi_1(x) + i \, \varphi_2(x)] \, . \tag{822}$$

Die Lagrange–Dichte ist dann eine Funktion der beiden Felder $\varphi_1(x)$ und $\varphi_2(x)$ oder äquivalent von $\varphi(x)$ und $\varphi^*(x)$.

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \varphi^*)(\partial^\mu \varphi) - \mu^2 \, \varphi^* \varphi - \lambda(\varphi^* \varphi)^2 \, . \tag{823}$$

Durch Variation nach $\varphi^*$ erhalten wir die Euler–Lagrange Gleichung

$$\partial_\mu(\partial^\mu \varphi) = -\mu^2 \, \varphi - 2\lambda \, (\varphi^* \varphi)\varphi \, . \tag{824}$$

Für $\lambda = 0$ haben wir wieder die Klein–Gordon Gleichung vorliegen

$$(\Box + \mu^2)\varphi(x) = 0 \, . \tag{825}$$

Wir betrachten die globale Eichtransformation

$$\begin{aligned} \varphi(x) &\rightarrow \varphi'(x) = e^{-iq\Lambda} \, \varphi(x) \, , \\ \varphi^*(x) &\rightarrow \varphi^{*\prime}(x) = e^{iq\Lambda} \, \varphi^*(x) \, , \end{aligned} \tag{826}$$

wobei $q$ und $\Lambda$ reell sind und unabhängig von $x$ sind. Wenn $\Lambda$ infinitesimal ist, folgt

$$e^{-iq\Lambda} \approx 1 - iq\Lambda \tag{827}$$

und

$$\delta\varphi(x) = -iq\Lambda \, \varphi(x) \, . \tag{828}$$

Damit gilt

$$\phi(x) \;=\; -iq\,\varphi(x)\;. \tag{829}$$

Ähnlich haben wir

$$\delta(\varphi^*) \;=\; (\delta\varphi)^* \tag{830}$$

und

$$\phi^*(x) \;=\; [\phi(x)]^*\;. \tag{831}$$

Da offensichtlich $\mathcal{L}$ invariant ist bei der betrachteten Phasentransformation ist es auch $\mathcal{A}$. Damit lautet der Noether–Strom

$$\begin{aligned} j^\mu &= -\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)}\,\phi - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\varphi^*)}\,\phi^* \\ &= (\partial^\mu\varphi^*)iq\varphi - (\partial^\mu\varphi)iq\,\varphi^* \\ &\equiv -iq\,\varphi^*\,\overset{\leftrightarrow}{\partial^\mu}\,\varphi\;. \end{aligned} \tag{832}$$

Dies ist gerade der gewöhnliche Ladungsstrom in der Klein–Gordon Theorie.

## Entwicklung in ebene Wellen

Wenn wir das Vektorpotential $\mathbf{A}$ in ebene Wellen entwickeln, d.h.

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t) \;=\; \sum_k \mathbf{a}_k(t)\, e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \;, \tag{833}$$

lautet die Gleichung für die Amplitude $\mathbf{a}_k$

$$\ddot{\mathbf{a}}_k \;=\; -c^2\, k^2\, \mathbf{a}_k \;. \tag{834}$$

Dies impliziert, daß $\mathbf{a}_k$ ein einfacher harmonischer Oszillator mit der Frequenz $\omega \;=\; kc$ für jede Komponente von $\mathbf{a}$ ist. Es gibt nur zwei unabhängige transversale Wellen. Die Komponente von $\mathbf{a}_k$ in Richtung von k muß verschwinden. Die Eichbedingung lautet

$$\mathbf{k}\cdot\mathbf{a}_k \;=\; 0 \;. \tag{835}$$

Das elektromagnetische Feld im freien Raum ist äquivalent einem Satz freier harmonischer Oszillatoren mit zwei transversalen Wellen für jeden Wert von $\mathbf{k}$. Bei diesen ebenen Wellen stehen $\mathbf{E},\ \mathbf{B}$ und $\mathbf{k}$ senkrecht aufeinander.

Wir betrachten nun den Fall, daß Ladungen und Ströme vorhanden sind. Wir führen Fourier - Entwicklungen durch

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}(\mathbf{r},t) &= \sqrt{4\pi}c \int \mathbf{a}_k(t)\, e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \;, \\
\Phi(\mathbf{r},t) &= \int \Phi_k(t)\, e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \;, \\
\mathbf{j}(\mathbf{r},t) &= \int \mathbf{j}_k(t)\, e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \;, \\
\rho(\mathbf{r},t) &= \int \rho_k(t)\, e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \;.
\end{aligned} \tag{836}$$

Wir bezeichnen die Ortskoordinaten der punktförmigen Ladung $e$ mit $\mathbf{q}(t)$. Damit gilt

$$\rho(x,y,z,t) \;=\; e\,\delta^3(\mathbf{r}-\mathbf{q}(t)) \tag{837}$$

und weiter

$$\rho_k \;=\; e\, e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{q}(t)} \;. \tag{838}$$

Die Stromdichte ist ähnlich gegeben durch

$$\mathbf{j}(\mathbf{r},t) \;=\; e\,\dot{\mathbf{q}}(t)\,\delta^3(\mathbf{r}-\mathbf{q}(t)) \;. \tag{839}$$

Für eine gewisse Anzahl von Ladungen mit den Ortskoordinaten $\mathbf{q}_i(t)$ folgt

$$\begin{aligned}
\rho_k &= \sum_i e_i\, e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{q}_i(t)} \;, \\
\mathbf{j}_k &= \sum_i e_i\, \dot{\mathbf{q}}_i(t)\, e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{q}_i(t)} \;.
\end{aligned} \tag{840}$$

Gleichung (835) gilt natürlich weiter und wir können sie ausnutzen, um einige Ausdrücke zu vereinfachen. Es gilt

$$\mathbf{B}_k \;=\; \sqrt{4\pi}\, c\, i\, \mathbf{k} \times \mathbf{a}_k \tag{841}$$

und

$$\mathbf{E}_k \;=\; -i\, \mathbf{k}\, \Phi_k - \sqrt{4\pi}\, \dot{\mathbf{a}}_k \;. \tag{842}$$

Aus

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{E} \;=\; -\nabla^2 \Phi \;=\; 4\pi\rho \tag{843}$$

folgt

$$i\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_k \;=\; k^2\, \Phi_k \;. \tag{844}$$

Somit haben wir

$$k^2\, \Phi_k \;=\; 4\pi\rho_k \tag{845}$$

und weiter

$$\Phi_k \;=\; 4\pi\rho_k / k^2 \;. \tag{846}$$

Die Funktion $\Phi_k$ ist damit vollständig bestimmt durch die Ladungsdichte $\rho_k$. Es ist nicht notwendig eine dynamische Differentialgleichung zu lösen, die beispielsweise $\ddot{\Phi}_k$ enthält. Aufgrund der gewählten Eichung enthält das Coulomb - Potential keinerlei Retardierung. Es beschreibt die instantane Wechselwirkung. Jegliche Retardierungseffekte sind im Vektorpotential enthalten.

Wir müssen noch die Gleichung

$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{B} \;=\; \frac{1}{c} \left( \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + 4\pi\, \mathbf{j} \right) \tag{847}$$

lösen. Ausgedrückt durch die Fourier - Koeffizienten lautet sie

$$i\, \mathbf{k} \times \mathbf{B}_k \;=\; \frac{1}{c}\, \dot{\mathbf{E}}_k + \frac{1}{c}\, 4\pi\, \mathbf{j}_k \;. \tag{848}$$

Nun ist

$$i\, \mathbf{k} \times \mathbf{B}_k \;=\; -\sqrt{4\pi}\, c\, \mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{a}_k) \;=\; \sqrt{4\pi}\, c\, k^2\, \mathbf{a}_k \tag{849}$$

und es gilt außerdem

$$\dot{\mathbf{E}}_k \;=\; -i\, \mathbf{k}\, \dot{\Phi}_k - \sqrt{4\pi}\, \ddot{\mathbf{a}}_k \tag{850}$$

sowie

$$\dot{\Phi}_k \;=\; 4\pi\, \dot{\rho}_k / k^2 \;. \tag{851}$$

Wir setzen dies ein in (848) und erhalten

$$\sqrt{4\pi}\, ck^2\, \mathbf{a}_k \;=\; -\frac{1}{c}\, i\mathbf{k}\, 4\pi\, \dot{\rho}_k / k^2 - \frac{1}{c} \sqrt{4\pi}\, \ddot{\mathbf{a}}_k + \frac{1}{c} 4\pi\, \mathbf{j}_k \tag{852}$$

und daher

$$\ddot{\mathbf{a}}_k + k^2 c^2\, \mathbf{a}_k \;=\; \sqrt{4\pi}\left(\mathbf{j}_k - i\frac{\mathbf{k}}{k^2}\dot{\rho}_k\right) \;=\; \sqrt{4\pi}\,\mathbf{j}'_k\;. \tag{853}$$

Dabei ist

$$\mathbf{j}'_k \;\equiv\; \mathbf{j}_k - i\mathbf{k}\,\dot{\rho}_k/k^2 \tag{854}$$

der transversale Anteil von $\mathbf{j}_k$. Die Stromerhaltung sagt aus

$$\dot{\rho}_k \;=\; -i\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{j}_k\;. \tag{855}$$

Somit folgt

$$\mathbf{j}'_k \;=\; \mathbf{j}_k - \frac{\mathbf{k}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{j}_k)}{k^2}\;. \tag{856}$$

Offensichtlich gilt

$$\mathbf{k}\cdot\mathbf{j}'_k \;=\; 0\;. \tag{857}$$

Die beiden Richtungen senkrecht auf k kennzeichnen wir durch die Indizes 1 und 2. Die Komponenten von $\mathbf{a}_k$ in diese Richtungen lauten entsprechend $a_{1k}$ und $a_{2k}$. Damit können die Maxwellschen Gleichungen geschrieben werden als

$$\begin{aligned} \ddot{a}_{1k} + k^2c^2\, a_{1k} &= \sqrt{4\pi}\, j_{1k}\;, \\ \ddot{a}_{2k} + k^2c^2\, a_{2k} &= \sqrt{4\pi}\, j_{2k}\;. \end{aligned} \tag{858}$$

Dies sind gleichzeitig die Bewegungsgleichungen für den angetriebenen Oszillator.

# Die Wirkung in der Quantenelektrodynamik

Quantenelektrodynamik ist die Theorie der Wechselwirkung von geladenen Teilchen und dem elektromagnetischen Feld. Die Hypothese der Quantenelektrodynamik ist es nun, die Oszillatoren in der Fourier - Darstellung der klassischen Maxwell - Gleichungen durch Quantenoszillatoren zu ersetzen. Hier erwächst die Nützlichkeit der Pfadintegrale aus der Tatsache, daß das elektromagnetische Feld als eine unendliche Ansammlung von Oszillatoren verstanden wird, deren Wechselwirkung mit der geladenen Materie durch einen linearen Kraftterm für die Oszillatoren beschrieben werden kann. Die Pfadintegrale dafür sind bekannt und man kann die Feldkoordinaten vollständig ausintegrieren. Für jeden Impuls hat das elektromagnetische Feld zwei Freiheitsgrade (transversale Polarisation). In der Coulomb - Eichung können wir das Potential $\Phi$ vollständig durch die Ladungsdichte $\rho$ ausdrücken und somit als dynamische Variable eliminieren.

Für die Pfadintegralbeschreibung müssen wir zunächst die Wirkung bestimmen. Das Prinzip der geringsten Wirkung führt uns auf die Bewegungsgleichungen. Die Wirkung lautet

$$\mathcal{A} \;=\; \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_3 \; . \tag{859}$$

Der mechanische Anteil ist

$$\mathcal{A}_1 \;=\; \sum_i \tfrac{1}{2}\, m_i \int |\dot{\mathbf{q}}_i|^2 \, dt \; . \tag{860}$$

Dies ist die Wirkung der geladenen Teilchen ohne Berücksichtigung der Felder. $\mathcal{A}_2$ beschreibt die Wechselwirkung zwischen geladenen Teilchen und Feldern.

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_2 \;&=\; -\int \left[\rho(\mathbf{r},t)\,\Phi(\mathbf{r},t) - \frac{1}{c}\,\mathbf{j}(\mathbf{r},t)\cdot\mathbf{A}(\mathbf{r},t)\right] d^3\mathbf{r}\, dt \\ &=\; -\sum_i e_i \int \left\{\Phi(\mathbf{q}_i(t),t) - \frac{1}{c}\,\dot{\mathbf{q}}_i(t)\cdot\mathbf{A}(\mathbf{q}_i(t),t)\right\} dt \; . \end{aligned} \tag{861}$$

Hierbei haben wir punktförmige, geladene Teilchen angenommen. Schließlich haben wir noch den Anteil des Strahlungsfeldes

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_3 \;&=\; \frac{1}{8\pi}\int \left(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2\right) d^3\mathbf{r}\, dt \\ &=\; \frac{1}{8\pi}\int \left[\left|-\boldsymbol{\nabla}\Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right|^2 - |\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A}|^2\right] d^3\mathbf{r}\, dt \; . \end{aligned} \tag{862}$$

Dies ist die Wirkung des Feldes. Die Variablen, nach denen nun explizit variiert werden kann, sind $\mathbf{A}(\mathbf{r},t),\ \Phi(\mathbf{r},t)$ und $\mathbf{q}_i(t)$.

Aus dieser Wirkung können durch Variation die Maxwellschen Gleichungen abgeleitet werden. Da die dynamischen Gleichungen am einfachsten durch die Variablen $\mathbf{a}_k$ ausgedrückt werden, ist es sinnvoll, diese Variablen für die Beschreibung der Wirkung heranzuziehen. Wir setzen die Fourier - Darstellung ein. Dies ergibt

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_3 \;&=\; \tfrac{1}{2}\int \left(\left|\dot{\mathbf{a}}_k + i\mathbf{k}\frac{\Phi_k}{\sqrt{4\pi}}\right|^2 - c^2\,|\mathbf{k}\times\mathbf{a}_k|^2\right) \frac{d^3\mathbf{k}\, dt}{(2\pi)^3} \\ &=\; \tfrac{1}{2}\int \left(\Phi_k\Phi_k^*\,\frac{k^2}{4\pi} + \dot{\mathbf{a}}_k^*\cdot\dot{\mathbf{a}}_k - k^2c^2\,\mathbf{a}_k^*\cdot\mathbf{a}_k\right) \frac{d^3\mathbf{k}\, dt}{(2\pi)^3} \; . \end{aligned} \tag{863}$$

Dabei haben wir ausgenutzt, daß gilt $\mathbf{k} \cdot \mathbf{a}_k = 0$.

Für $\mathcal{A}_2$ erhalten wir

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A}_2 &= -\sum_i e_i \int \left\{ \Phi(\mathbf{q}_i(t), t) - \frac{1}{c}\, \dot{\mathbf{q}}_i \cdot \mathbf{A}(\mathbf{q}_i(t), t) \right\} dt \\
&= -\sum_i e_i \int \left\{ \int \Phi_k(t)\, e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{q}_i(t)}\, \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \right. \\
&\quad - \left. \frac{1}{c}\, \dot{\mathbf{q}}_i(t)\, \sqrt{4\pi} c \int \mathbf{a}_k(t)\, e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{q}_i(t)}\, \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \right\} dt \;. \qquad (864)
\end{aligned}
$$

Jetzt war aber

$$
\begin{aligned}
\rho_k &= \sum_i e_i\, e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{q}_i(t)} \,, \\
\mathbf{j}_k &= \sum_i e_i\, \dot{\mathbf{q}}_i(t)\, e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{q}_i(t)} \;. \qquad (865)
\end{aligned}
$$

Damit können wir schreiben

$$
\mathcal{A}_2 = -\int \left( \rho_{-k}\, \Phi_k - \sqrt{4\pi}\, \mathbf{j}_{-k} \cdot \mathbf{a}_k \right) \frac{d^3\mathbf{k}\, dt}{(2\pi)^3} \;. \qquad (866)
$$

Wir verwenden nun $\Phi_k = 4\pi\rho_k/k^2$ und fassen die Terme, die $\Phi_k$ beinhalten, in $\mathcal{A}_2$ und $\mathcal{A}_3$ zusammen. Wir bezeichnen

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A}_2' &= -\int \rho_{-k}\, \Phi_k\, \frac{d^3\mathbf{k}\, dt}{(2\pi)^3} \,, \\
\mathcal{A}_3' &= \tfrac{1}{2} \int \Phi_k\, \Phi_k^*\, \frac{k^2}{4\pi}\, \frac{d^3\mathbf{k}\, dt}{(2\pi)^3} \;. \qquad (867)
\end{aligned}
$$

Jetzt gilt $\Phi_k^* = 4\pi\, \rho_k^*/k^2$. Ferner ist

$$
\rho_k^* = \sum_i e_i\, e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{q}_i(t)} = \rho_{-k} \;. \qquad (868)
$$

Damit folgt insgesamt

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A}_c &= \mathcal{A}_2' + \mathcal{A}_3' \\
&= \int \left[ -\rho_{-k}\, \rho_k\, \frac{4\pi}{k^2} + \tfrac{1}{2} \frac{4\pi\rho_k}{k^2}\, \frac{4\pi\rho_{-k}}{k^2}\, \frac{k^2}{4\pi} \right] \frac{d^3\mathbf{k}\, dt}{(2\pi)^3} \\
&= \int \left[ -\rho_{-k}\, \rho_k\, \frac{4\pi}{k^2} + \tfrac{1}{2}\, \rho_k\, \rho_{-k}\, \frac{4\pi}{k^2} \right] \frac{d^3\mathbf{k}\, dt}{(2\pi)^3} \\
&= -\tfrac{1}{2} \int \rho_{-k}\, \rho_k\, \frac{4\pi}{k^2}\, \frac{d^3\mathbf{k}\, dt}{(2\pi)^3} \\
&= -\tfrac{1}{2} \int \sum_i e_i\, e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{q}_i(t)} \sum_j e_j\, e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{q}_j(t)}\, \frac{4\pi}{k^2}\, \frac{d^3\mathbf{k}\, dt}{(2\pi)^3} \\
&= -\tfrac{1}{2} \int \sum_{i,j} e_i\, e_j\, e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j)}\, \frac{4\pi}{k^2}\, \frac{d^3\mathbf{k}\, dt}{(2\pi)^3} \;. \qquad (869)
\end{aligned}
$$

Aus der Elektrodynamik wissen wir, daß gilt

$$\int \frac{d^3\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}\, e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} \;=\; \frac{4\pi}{|\mathbf{q}|^2}\;. \tag{870}$$

Damit folgt

$$\mathcal{A}_c \;=\; -\frac{4\pi}{2}\int \frac{\rho_k\,\rho_{-k}}{k^2}\,\frac{d^3\mathbf{k}\,dt}{(2\pi)^3} \;=\; -\tfrac{1}{2}\int\sum_i\sum_j \frac{e_i\,e_j}{|\mathbf{q}_i-\mathbf{q}_j|}\,dt\;. \tag{871}$$

Der Integrand ist gerade die Coulomb - Wechselwirkung zwischen Ladungen.

Wir fassen den Materieanteil der Wirkung zusammen.

$$\mathcal{A}_{\mathrm{mat}} \;=\; \mathcal{A}_1+\mathcal{A}_c \;=\; \int\sum_i\left(\tfrac{1}{2}m_i\,\dot{\mathbf{q}}_i^2-\tfrac{1}{2}\sum_j\frac{e_i\,e_j}{|\mathbf{q}_i-\mathbf{q}_j|}\right)dt \tag{872}$$

und schreiben weiter

$$\mathcal{A} \;=\; \mathcal{A}_{\mathrm{mat}}+\mathcal{A}_{\mathrm{int}}+\mathcal{A}_{\mathrm{rad}}\;. \tag{873}$$

Wir haben also die Wirkung des elektromagnetischen Feldes in zwei Anteile aufgespalten, ein Anteil trägt zur instantanen Coulomb - Wechselwirkung bei. Den verbleibenden Rest nennen wir die Wirkung des Strahlungsfeldes $\mathcal{A}_{\mathrm{rad}}$. Das Strahlungsfeld korrigiert das instantane Feld. Beispielsweise muß der Gesamteffekt retardiert sein. Wirkungen dürfen sich nicht schneller als mit Lichtgeschwindigkeit ausbreiten. Die Wirkung des Strahlungsfeldes ist $\mathcal{A}_3$ bis auf die Terme proportional zu $\Phi_k$.

$$\mathcal{A}_{\mathrm{rad}} \;=\; \tfrac{1}{2}\int\left(\dot{a}_{1k}^*\,\dot{a}_{1k}-k^2c^2\,a_{1k}^*\,a_{1k}+\dot{a}_{2k}^*\,\dot{a}_{2k}-k^2c^2\,a_{2k}^*\,a_{2k}\right)\frac{d^3\mathbf{k}\,dt}{(2\pi)^3}\;. \tag{874}$$

Die Wechselwirkung dieser Oszillatoren mit den Teilchen wird beschrieben durch

$$\mathcal{A}_{\mathrm{int}} \;=\; \sqrt{4\pi}\int\left(j_{1,-k}\,a_{1k}+j_{2,-k}\,a_{2k}\right)\frac{d^3\mathbf{k}\,dt}{(2\pi)^3}\;. \tag{875}$$

Die Variation der totalen Wirkung bezüglich $a_{1k}$ und $a_{2k}$ führt auf die Bewegungsgleichungen (Maxwell - Gleichungen) für $a_{1k}$ und $a_{2k}$. Bezüglich dieser Ableitung notieren wir $\mathcal{A}_{\mathrm{int}}$ in symmetrischer Form

$$\mathcal{A}_{\mathrm{int}} \;=\; \sqrt{4\pi}\,\frac{1}{2}\int\left(j_{1,-k}\,a_{1k}+j_{1,k}\,a_{1k}^*+j_{2,-k}\,a_{2k}+j_{2,k}\,a_{2k}^*\right)\frac{d^3\mathbf{k}\,dt}{(2\pi)^3}\;. \tag{876}$$

Es folgt

$$\begin{aligned}
\frac{\delta\mathcal{A}_{\mathrm{rad}}}{\delta a_{1k}^*} \;&=\; \frac{1}{2}\int\left[-\ddot{a}_{1k}-k^2c^2\,a_{1k}\right]\frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\;,\\
\frac{\delta\mathcal{A}_{\mathrm{int}}}{\delta a_{1k}^*} \;&=\; \sqrt{4\pi}\,\frac{1}{2}\int j_{1k}\frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\;.
\end{aligned} \tag{877}$$

Explizit ausgeschrieben gilt für Punktteilchen

$$\mathcal{A}_{\mathrm{int}} \;=\; \sqrt{4\pi}\sum_j\int\left(a_{1k}\,\dot{q}_{1j}+a_{2k}\,\dot{q}_{2j}\right)\,e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{q}_j(t)}\,\frac{d^3\mathbf{k}\,dt}{(2\pi)^3}\;, \tag{878}$$

wobei $q_{1j}$ und $q_{2j}$ die Komponenten von $\mathbf{q}_j$ in transversaler Richtung bezüglich k sind. Somit folgen alle Gesetze der nichtrelativistischen Mechanik und der Elektrodynamik aus der Forderung, daß $\mathcal{A}$ bezüglich der Variation von $\mathbf{q}_j(t),\ a_{1k}(t)$ und $a_{2k}(t)$ stationär sein soll.

Quantenelektrodynamik folgt durch Integration von $e^{i\mathcal{A}/\hbar}$ über alle Pfade.

# Zur Quantenmechanik des Strahlungsfeldes

Wir beginnen die Diskussion mit dem Studium des leeren Raumes, in dem keine Materie vorhanden ist. Damit ist die gesamte Wirkung allein durch das Strahlungsfeld gegeben.

$$\mathcal{A} \;=\; \mathcal{A}_{\text{rad}} \;. \tag{879}$$

Dies ist genau die Wirkung eines Satzes harmonischer Oszillatoren mit dem einzigen Unterschied, daß jetzt die Koordinaten komplexwertig sind. Die Eigenmoden des Systems sind ebene Wellen, zwei für jeden Wert von k – entsprechend den Polarisationen 1 und 2 – mit der Frequenz $\omega \;=\; kc$. Für eine dieser Moden, zum Beispiel $a_{1k}$, sind die verfügbaren Energiezustände

$$E_{1k} \;=\; \left(n_{1k} + \tfrac{1}{2}\right)\, \hbar kc \tag{880}$$

mit $n_{1k} \;=\; 0,\, 1,\, 2, \ldots$. Ist $n_{1k} \;=\; 1$, sagen wir, es gibt ein Photon der Polarisation 1 und mit dem Betrag des Impulses $\hbar k$. Im allgemeinen können $n_{1k}$ solcher Photonen vorhanden sein. Die Energie eines jeden solchen Photons ist dann $\hbar kc$.

Es muß natürlich bei dem mathematischen Übergang von den Oszillatorquanten in das Teilchenbild (Photonen) der Bose - Charakter der Photonen berücksichtigt werden. Die Wellenfunktion mehrerer Photonen muß symmetrisiert werden. Der Austausch zweier Teilchen produziert keinen neuen Zustand.

Im Grundzustand sind keine Photonen vorhanden. Dieser Vakuumzustand ist dadurch gegeben, daß keine Photonen in irgendeiner Mode sind. Addieren wir die Energien aller möglichen Moden, so erhalten wir einen unendlichen Wert. Dies ist eine der Trivialdivergenzen in der Quantenelektrodynamik. Wir ordnen nun dem Vakuumzustand die Energie null zu. Dies entspricht einer Nullpunktsrenormierung. Dann ist die totale Energie in jedem Zustand des elektromagnetischen Feldes gegeben durch

$$E \;=\; \sum_j n_j \,\hbar\omega_j \;, \tag{881}$$

wobei $n_j$ die Besetzungszahlen bezeichnen.

Die Wellenfunktion für einen Satz von Oszillatoren ist gerade das Produkt der Wellenfunktion für jede einzelne Mode. Die Wellenfunktion für den Grundzustand, den Vakuumzustand, lautet bis auf eine Normierungskonstante

$$\phi_0 \;=\; \exp\left\{ -\sum_k \frac{kc}{2\hbar}\left(a^*_{1k}\, a_{1k} + a^*_{2k}\, a_{2k}\right)\right\} \;. \tag{882}$$

Der Ein-Photonenzustand $(1\text{k})$ ist gegeben durch $a^*_{1k}\,\phi_0$. Dieser Zustand ist noch nicht normiert. Die weitere Rechnung können wir aus der Betrachtung des harmonischen Oszillators in der Quantenmechanik übernehmen. Es ergeben sich so die Mehr-Photonenzustände mit der korrekten Normierung. Die Normierung für den Ein-Photonenzustand folgt aus $\int \phi^*_0\, a_{1k}\, a^*_{1k}\, \phi_0\, da_{1k}$. Dies ist gerade $\hbar/(2kc)$, ohne daß wir die Rechnung konkret durchgeführt haben. Daraus resultiert für den normierten Ein-Photonenzustand $\sqrt{2kc/\hbar}\; a^*_{1k}\phi_0$.

Betrachten wir die Wechselwirkung von Feldern und Materie, so erhalten wir für die Amplitude

$$\text{Amplitude} = \int \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\left(\mathcal{A}_{\text{mat}} + \mathcal{A}_{\text{int}} + \mathcal{A}_{\text{rad}}\right)\right\} \prod_{i,k} \mathcal{D}\mathbf{q}_i \, \mathcal{D}a_{1k} \, \mathcal{D}a_{2k} \; . \tag{883}$$

Die Koordinaten des Strahlungsoszillators können sofort ausintegriert werden, da nur quadratische Ausdrücke auftreten.

# Feldtheorie und Pfadintegrale

Die Feldtheorie ist heutzutage das Hauptanwendungsgebiet der Pfadintegrale. Wir beginnen mit einigen allgemeinen Vorbemerkungen. In der Pfadintegralbeschreibung der Quantenmechanik summieren wir über alle Pfade $x(t)$ mit $0 \leq t \leq T$. Für $x(t)$ wurden gewisse Randbedingungen bei $t = 0$ und $t = T$ vorgegeben. In der Feldtheorie haben wir über alle Feldkonfigurationen $\varphi(\mathbf{r}, t)$ zu summieren, wobei $\mathbf{r}$ als auch $t$ variieren. Angenommen wir haben das klassische Feld $\varphi(\mathbf{r}, t)$ vorliegen, dann soll das entsprechende quantenmechanische Objekt mit $\psi(\varphi(\mathbf{r}, t))$ bezeichnet werden. Dies ist die Wahrscheinlichkeitsamplitude dafür, daß das Feld den Wert $\varphi(\mathbf{r})$ zur Zeit $t$ angenommen hat.

Wir nehmen an, daß die Dynamik des klassischen Feldes aus dem Variationsprinzip mit der Wirkung abgeleitet wird, die gegeben ist durch

$$\mathcal{A} = \int dt \int d^3x \, \mathcal{L}(\varphi, \dot{\varphi}) \tag{884}$$

mit

$$\mathcal{L} = \tfrac{1}{2} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 - \tfrac{1}{2} \left( \boldsymbol{\nabla} \varphi \right)^2 - \tfrac{1}{2} m^2 \varphi^2 - P(\varphi) \; . \tag{885}$$

$m$ ist hierbei konstant und $P$ ist eine Funktion von $\varphi$, beispielsweise $\lambda \, \varphi^4$. Dann erfüllt das klassische Feld die Euler–Lagrange Gleichung

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \nabla^2 \varphi + m^2 \varphi + \frac{\partial P}{\partial \varphi} = 0 \; . \tag{886}$$

Der quantenmechanische Zustand wird durch den Propagator charakterisiert

$$G[\varphi''(\mathbf{r}), t''; \varphi'(\mathbf{r}), t'] = \int \prod_{\mathbf{r}\tau} d\varphi(\mathbf{r}, \tau) \, \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_0^t d\tau \int d^3x \, \mathcal{L}(\varphi, \dot{\varphi}) \right\} \; . \tag{887}$$

Das Symbol $\prod_{\mathbf{r}\tau}$ kennzeichnet eine Summe über alle Feldkonfigurationen. Die Summe ist über alle Felder zu nehmen, die zur Zeit $t'$ die Konfiguration $\varphi'(\mathbf{r})$ und bei $t''$ die Konfiguration $\varphi''(\mathbf{r})$ haben.

Startet man von der Kenntnis von $G$, kann man formal alles Weitere ableiten: Wellengleichung, Kommutatorbeziehungen, Vakuumerwartungswerte, Störungsentwicklungen usw.

# Pfadintegrale in der Feldtheorie

Es gibt zwei Wege, die gewöhnlich in der Quantenfeldtheorie beschritten werden, um letzlich Propagatoren abzuleiten. Der traditionelle Weg basiert auf Feldoperatoren und der kanonischen Quantisierung dieser Operatorfelder. Der modernere Weg, den wir beschreiten wollen, involviert Pfadintegrale über klassische Felder.

Startpunkt unserer Betrachtungen ist das gewöhnliche Gauß–Integral

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} dy \, \exp\left\{-\tfrac{1}{2}ay^2\right\} \;=\; (2\pi)^{1/2}\, a^{-1/2} \tag{888}$$

mit $a \,>\, 0$. Dies kann verallgemeinert werden zu einem Integral über $n$ reelle Variable

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} dy_1 \ldots dy_n \, \exp\left\{-\tfrac{1}{2}\mathbf{y}^T \hat{A}\mathbf{y}\right\} \;=\; (2\pi)^{n/2} \left(\det \hat{A}\right)^{-1/2} \;, \tag{889}$$

wobei $\hat{A}$ eine relle, positiv definite, symmetrische Matrix und $\mathbf{y}$ ein Spaltenvektor mit den Komponenten $(y_1, \ldots, y_n)$ ist. $\mathbf{y}^T$ bezeichnet den transponierten Ausdruck von $\mathbf{y}$.

Den Beweis von (889) hatten wir bereits durchgeführt. Zur Erinnerung geben wir einen kurzen Abriß des Beweises. Wir betrachteten den Ausdruck

$$\int d^N\eta \, \exp\left\{-\eta^T\sigma\eta\right\} \;. \tag{890}$$

$\sigma$ kann durch eine unitäre Matrix diagonalisiert werden

$$\sigma \;=\; U^+\,\sigma_D\,U \;, \tag{891}$$

wobei $\sigma_D$ die Diagonalmatrix mit den Eigenwerten $\sigma_\alpha$ ist. Wir setzen $\xi \;=\; U\eta$. Der Vektor $\xi$ ist reell und die Menge $\{\xi\}$ der Vektoren $\xi$ bilden einen $N$-dimensionalen Vektorraum. Da gilt $|\det U| \;=\; 1$ ist auch die Jacobi–Determinante beim Übergang von $d^N\eta$ nach $d^N\xi$ gleich 1. Somit folgt

$$\int d^N\eta \, \exp\left\{-\eta^T\,\sigma\,\eta\right\} \;=\; \int d^N\xi \, \exp\left\{-\xi^T\,\sigma_D\,\xi\right\} \;=\; \prod_{\alpha=1}^{N}\sqrt{\frac{\pi}{\sigma_\alpha}} \;=\; \frac{\pi^{N/2}}{\sqrt{\det\sigma}} \;. \tag{892}$$

Dies setzt voraus, daß kein Eigenwert den Wert null aufweist. In diesem Fall existiert das Integral (892) nicht.

Wir führen einige Umformungen durch, da es für die folgenden Rechnungen sehr bequem ist. Wir schreiben

$$\det\hat{A} \;=\; \exp\left\{\ln\,\det\hat{A}\right\} \;=\; \exp\left\{\mathrm{Tr}\,\ln\hat{A}\right\} \;, \tag{893}$$

wobei $(\mathrm{Tr}\hat{A})$ die Spur der Matrix $\hat{A}$ bedeutet. Wir haben also die Identität

$$\ln\,\det\hat{A} \;=\; \mathrm{Tr}\,\ln\hat{A} \tag{894}$$

vorliegen. Wir wollen dies beweisen. Dazu schreiben wir

$$\hat{A} \;=\; U^+\,\hat{A}_D\,U \;, \tag{895}$$

wobei $\hat{A}_D$ eine Diagonalmatrix ist mit den Eigenwerten $A_\alpha$. Dann ist

$$\det \hat{A} \;=\; \det \hat{A}_D \;=\; \prod_{\alpha=1}^{N} A_\alpha \tag{896}$$

und weiter

$$\ln \det \hat{A} \;=\; \sum_{\alpha=1}^{N} \ln A_\alpha \;=\; \mathrm{Tr}\, \ln \hat{A}_D \;. \tag{897}$$

Jetzt müssen wir noch zeigen, daß gilt

$$\mathrm{Tr}\, \ln \hat{A} \;=\; \mathrm{Tr}\, \ln \hat{A}_D \;. \tag{898}$$

Nun ist der Ausdruck $\ln \hat{A}$ definiert durch die Taylor–Reihenentwicklung, d.h.

$$\ln \hat{A} \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} a_n \, \hat{A}^n$$

mit Koeffizienten $a_n$, die wir hier nicht weiter spezifizieren müssen. Betrachten wir einen beliebigen Term, so folgt aber

$$\hat{A}^m \;=\; U^+ \, \hat{A}_D \, U \ldots U^+ \, \hat{A}_D \, U \;=\; U^+ \, \hat{A}_D^m \, U \;. \tag{899}$$

Nun nutzen wir aus, daß die Spur eine Invariante bei unitären Transformationen ist. Fassen wir wieder alle Terme zusammen, so gilt in der Tat (898). Damit ist auch der Beweis von (894) und (893) abgeschlossen.

Mit diesem Resultat können wir Gleichung (889) umformen in

$$(2\pi)^{-n/2} \int_{-\infty}^{\infty} dy_1 \ldots dy_n \, \exp\left\{-\tfrac{1}{2}\mathbf{y}^T \hat{A} \mathbf{y}\right\} \;=\; \exp\left\{-\tfrac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\, \ln \hat{A}\right\} \;. \tag{900}$$

Wir verallgemeinern nun die Integration über eine endliche Zahl von Komponenten des Spaltenvektors $\mathbf{y}$ auf die unendlichen Komponenten der Funktion $\varphi(x)$, die stetig sei. Dies ergibt das Pfadintegral oder Funktionalintegral

$$\int \mathcal{D}\varphi \, \exp\left\{-\tfrac{1}{2}\int dx' \int dx \, \varphi(x') \, A(x',x) \, \varphi(x)\right\} \;=\; \exp\left\{-\tfrac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\, \ln \hat{A}\right\} \;. \tag{901}$$

Wieder haben wir das Symbol $\mathcal{D}$ für die Pfadintegration verwendet. Das Integral soll so definiert sein, daß es alle Normierungsfaktoren, wie zum Beispiel $(2\pi)^{-n/2}$ weghebt. Die Integrale über $x$ und $x'$ sind als eindimensionale Integrale im Bereich $(-\infty, \infty)$ zu verstehen. Jedoch verallgemeinert sich diese Behandlung trivialerweise auf den Fall, daß wir $dx$ durch $d^4x$ ersetzen und die Integration über den 4-dimensionalen Raum geht.

Die Spur in $(\mathrm{Tr}\, \ln \hat{A})$ kann durch Fourier–Transformation berechnet werden. Wir betrachten zum Beispiel den Fall

$$A(x',x) \;=\; \left(\frac{\partial}{\partial x'}\frac{\partial}{\partial x} + r\right) \, \delta(x'-x) \;, \tag{902}$$

wobei $r$ eine Konstante ist. Dieses spezielle Beispiel werden wir später noch verwenden. Die eindimensionale Diracsche Delta–Funktion hat die Impulsdarstellung

$$\delta(x'-x) \;=\; \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{2\pi}\, e^{ip(x'-x)} \;. \tag{903}$$

Damit folgt

$$A(x',x) \;=\; \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{2\pi}\, e^{ip(x'-x)}\, (p^2+r) \;. \tag{904}$$

$\hat{A}$ ist eine kontinuierliche Matrix $A(x',x)$. Es sei $f(A)$ eine in eine Potenzreihe entwickelbare Funktion einer solchen Matrix, also formal

$$f(A) \;=\; \sum_n c_n\, A^n \;. \tag{905}$$

In Komponentenschreibweise bedeutet dies offenbar

$$\begin{aligned} f(A)(x',x) \;&=\; c_0 + c_1\, A(x',x) + c_2 \int dx_1\, A(x',x_1)\, A(x_1,x) + \ldots \\ &+ c_m \int dx_1\, dx_2 \ldots dx_{m-1}\, A(x',x_1)\, A(x_1,x_2) \ldots A(x_{m-1},x) + \ldots \end{aligned} \tag{906}$$

Wenn, wie in unserem Fall $A(x',x)$ nur von der Koordinatendifferenz $x'-x$ abhängt, lautet die Fourier-Transformierte

$$A(x',x) \;=\; \int \frac{dk}{2\pi}\, e^{-ik(x'-x)}\, A(k) \;. \tag{907}$$

Somit ist zum Beispiel das quadratische Glied in (906)

$$\begin{aligned} \int dx_1\, A(x',x_1)\, A(x_1,x) \;&=\; \int dx_1 \int \frac{dk'}{2\pi} \int \frac{dk}{2\pi}\, e^{-ik'(x'-x_1)}\, e^{-ik(x_1-x)}\, A(k')\, A(k) \\ &=\; \int \frac{dk}{2\pi} e^{-ik(x'-x)}\, \left(A(k)\right)^2 \;. \end{aligned} \tag{908}$$

Es ist ersichtlich, daß im allgemeinen Glied $n$-ter Ordnung Deltafunktionen aus den $n-1$ $x$-Integrationen ebensoviele $k$-Integrationen zum Verschwinden bringen, so daß gilt

$$\int dx_1 \ldots dx_{n-1}\, A(x',x_1) \ldots A(x_{n-1},x) \;=\; \int \frac{dk}{2\pi}\, e^{-ik(x'-x)}\, \left(A(k)\right)^n \;. \tag{909}$$

Somit gilt allgemein für eine Funktion die Identität

$$f(A)(x',x) \;=\; \int \frac{dk}{2\pi}\, e^{-ik(x'-x)}\, f\left(A(k)\right) \;. \tag{910}$$

Wir haben hier absichtlich die Schreibweise $f(A)(x',x)$ gewählt, um klar zu machen, daß erst die Funktion der Matrix $A$ zu bilden ist und dann deren Komponenten $x'$ und $x$ zu nehmen sind. Allerdings läßt sich die womöglich irreführende Schreibweise $f(A(x',x))$ nicht immer vermeiden.

Somit gilt auch

$$\mathrm{Tr}\, \ln \hat{A} \;=\; \int dx \int \frac{dp}{2\pi}\, \ln(p^2+r) \;. \tag{911}$$

Um die Spur zu bilden, haben wir dabei $x' = x$ gesetzt und über alle Werte von $x$ integriert.

Wir können eine kleine Verallgemeinerung von (900) durch Einfügen eines linearen Term durchführen

$$\begin{aligned} & (2\pi)^{-n/2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} dy_1 \dots dy_n \, \exp\left\{-\tfrac{1}{2}\mathbf{y}^T \hat{A}\, \mathbf{y} + \boldsymbol{\rho}^T \mathbf{y}\right\} \\ = \;& \exp\left\{-\tfrac{1}{2} \operatorname{Tr} \ln \hat{A}\right\} \exp\left\{\tfrac{1}{2} \boldsymbol{\rho}^T \hat{A}^{-1} \boldsymbol{\rho}\right\} , \end{aligned} \tag{912}$$

wobei $\boldsymbol{\rho}$ ein gegebener Spaltenvektor ist. $\hat{A}^{-1}$ existiert, da $\hat{A}$ positiv definit ist. Gleichung (912) erhält man durch Vervollständigung des quadratischen Binoms

$$\mathbf{y}^T \hat{A}\, \mathbf{y} - 2\, \boldsymbol{\rho}^T \mathbf{y} \;=\; \left(\mathbf{y} - \hat{A}^{-1} \boldsymbol{\rho}\right)^T \hat{A} \left(\mathbf{y} - \hat{A}^{-1} \boldsymbol{\rho}\right) - \boldsymbol{\rho}^T \hat{A}^{-1} \boldsymbol{\rho} \tag{913}$$

und durch die Variablensubstitution

$$\mathbf{y}' \;=\; \mathbf{y} - \hat{A}^{-1} \boldsymbol{\rho} \,. \tag{914}$$

Die Umformung (913) wollen wir noch nachweisen.

$$\begin{aligned} & \left(\mathbf{y} - \hat{A}^{-1} \boldsymbol{\rho}\right)^T \hat{A} \left(\mathbf{y} - \hat{A}^{-1} \boldsymbol{\rho}\right) - \boldsymbol{\rho}^T \hat{A}^{-1} \boldsymbol{\rho} \\ = \;& \mathbf{y}^T \hat{A}\, \mathbf{y} - \mathbf{y}^T \hat{A}\, \hat{A}^{-1} \boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}^T (\hat{A}^{-1})^T \hat{A}\, \mathbf{y} + \boldsymbol{\rho}^T (\hat{A}^{-1})^T \hat{A}\, \hat{A}^{-1} \boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}^T \hat{A}^{-1} \boldsymbol{\rho} \\ = \;& \mathbf{y}^T \hat{A}\, \mathbf{y} - \mathbf{y}^T \boldsymbol{\rho} - \left(\mathbf{y}^T \hat{A}^T \hat{A}^{-1} \boldsymbol{\rho}\right)^T + \boldsymbol{\rho}^T (\hat{A}^{-1})^T \boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}^T \hat{A}^{-1} \boldsymbol{\rho} \,. \end{aligned} \tag{915}$$

Jetzt ist $\hat{A}$ eine symmetrische Matrix, also $\hat{A}^T = \hat{A}$ und es gilt offensichtlich $\mathbf{y}^T \boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\rho}^T \mathbf{y}$. Ferner ist

$$\boldsymbol{\rho}^T (\hat{A}^{-1})^T \boldsymbol{\rho} \;=\; \left(\boldsymbol{\rho}^T \hat{A}^{-1} \boldsymbol{\rho}\right)^T \;=\; \boldsymbol{\rho}^T \hat{A}^{-1} \boldsymbol{\rho} \,. \tag{916}$$

Das letzte Gleichheitszeichen gilt, da der Ausdruck nur eine $c$-Zahl ist.

Das entsprechende Pfadintegral lautet dann

$$\begin{aligned} & \int \mathcal{D}\varphi \, \exp\left\{-\tfrac{1}{2} \int dx' \int dx \, \varphi(x')\, A(x', x)\, \varphi(x) + \int dx \, \rho(x)\, \varphi(x)\right\} \\ = \;& \exp\left\{-\tfrac{1}{2} \operatorname{Tr} \ln \hat{A}\right\} \exp\left\{\tfrac{1}{2} \int dx' \int dx \, \rho(x')\, A^{-1}(x', x)\, \rho(x)\right\} , \end{aligned} \tag{917}$$

wobei $\rho(x)$ eine gegebene Funktion ist.

$A^{-1}(x', x)$ läßt sich leicht aus der Fourier-Transformation von $A(x', x)$ gewinnen. Unter Verwendung von (910) führt dies auf

$$A^{-1}(x', x) \;=\; \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{2\pi}\, e^{ip(x'-x)}\, (p^2 + r)^{-1} \,. \tag{918}$$

Diese Relationen ermöglichen es uns, etwas allgemeinere Integrale als nur Gauß–Integrale zu lösen. Wir differenzieren den diskreten Ausdruck (912) in bezug auf $\rho_{m_1},\ \rho_{m_2},\ldots,\ \rho_{m_p}$ bei $\rho\ =\ 0$ und erhalten

$$\begin{aligned}
&(2\pi)^{-n/2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dy_1\ldots dy_n\, y_{m_1}\ldots y_{m_p}\,\exp\left\{-\tfrac{1}{2}\,\mathbf{y}^T\,\hat{A}\,\mathbf{y}\right\}\\
&=\ \exp\left\{-\tfrac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\,\ln\hat{A}\right\}\,\left(A^{-1}_{m_1m_2}\ldots A^{-1}_{m_{p-1}m_p}+\mathrm{Permutationen}\right)\ , \qquad (919)
\end{aligned}$$

sofern $p$ gerade ist. Falls $p$ ungerade ist, tritt nach der Differentiation ein $\rho$ als Vorfaktor auf, der aber bei $\rho\ =\ 0$ den gesamten Ausdruck verschwinden läßt.

Wir verallgemeinern dies für den Pfadintegral–Fall

$$\begin{aligned}
&\int\mathcal{D}\varphi\,\varphi(x_1)\ldots\varphi(x_p)\,\exp\left\{-\tfrac{1}{2}\int dx'\,\int dx\,\varphi(x')\,A(x',x)\,\varphi(x)\right\}\\
&=\ \exp\left\{-\tfrac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\,\ln\hat{A}\right\}\,\left(A^{-1}(x_1,x_2)\ldots A^{-1}(x_{p-1},x_p)+\mathrm{Permutationen}\right)\ . \qquad (920)
\end{aligned}$$

Um die Differentiation im Pfadintegral auszuführen, müssen wir die Ableitung als Funktionalableitung $\delta/\delta\rho(x_1),\ldots,\delta/\delta\rho(x_p)$ verstehen, mit der Definition

$$\frac{\delta}{\delta\rho(x_i)}\left(\int dx\,\rho(x)\,\varphi(x)\right)\ =\ \varphi(x_i)\ ,\qquad i\ =\ 1,\ldots,p \qquad (921)$$

Bis jetzt haben wir reelle Spaltenvektoren und reelle Funktionen $\varphi(x)$ diskutiert. Die Untersuchungen können wir leicht auf komplexe Spaltenvektoren und Funktionen ausweiten. Beispielsweise gilt

$$\begin{aligned}
(2\pi)^{-n}\int dz_1\,dz_1^*\ldots dz_n\,dz_n^*\,\exp\left\{-\mathbf{Z}^+\,\hat{A}\,\mathbf{Z}\right\}\ &=\ \left(\det\hat{A}\right)^{-1}\\
&=\ \exp\left\{-\mathrm{Tr}\,\ln\hat{A}\right)\ , \qquad (922)
\end{aligned}$$

wobei $\hat{A}$ eine hermitesche Matrix ist. $\mathbf{Z}$ ist ein komplexer Spaltenvektor mit den Komponenten $(z_1,\ldots,z_n)$, $\mathbf{Z}^+\ =\ (\mathbf{Z}^*)^T$ und

$$\int dz\int dz^*\ \equiv\ 2\int d(\mathrm{Re}\,z)\,d(\mathrm{Im}\,z)\ . \qquad (923)$$

Wir haben $z\ =\ (x,iy)$ und $z^*\ =\ (x,-iy)$. Die Jacobi–Determinante lautet dann

$$J\left(\frac{z,z^*}{x,y}\right)\ =\ \begin{vmatrix}\frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y}\\ \frac{\partial z^*}{\partial x} & \frac{\partial z^*}{\partial y}\end{vmatrix}\ =\ \begin{vmatrix}1 & i\\ 1 & -i\end{vmatrix}\ =\ -2i \qquad (924)$$

und damit $|J|\ =\ 2$. Der Ausdruck (922) läßt sich ebenso wie (889) ableiten. Auch die hermitesche Matrix $\hat{A}$ kann durch eine unitäre Transformation diagonalisiert werden. Die Eigenwerte sind reell. Wir führen ebenfalls eine unitäre Transformation der Vektoren $\mathbf{Z}^*$ und $\mathbf{Z}$ durch. Das resultierende Produkt im Argument der Exponentialfunktion wird nach $(\mathrm{Re}\,z_i)$ und $(\mathrm{Im}\,z_i)$ aufgespalten und getrennt integriert. Dies bewirkt das die in (889) auftretende Wurzel verschwindet und wir bekommen das Ergebnis (922).

Das entsprechende Pfadintegral lautet dann

$$\int \mathcal{D}\varphi\, \mathcal{D}\varphi^* \, \exp\left\{ - \int dx' \int dx\, \varphi^*(x')\, A(x',x)\, \varphi(x) \right\} \;=\; \exp\left\{ -\mathrm{Tr}\, \ln \hat{A} \right\} \;. \tag{925}$$

Wir diskutieren noch kurz den formalen Ausdruck für das Pfadintegral. Wir nehmen an, daß die $x$ und $x'$-Integrationen über einen endlichen Bereich von $X$ nach $\bar{X}$ gehen. Zum Schluß betrachten wir den Übergang $X,\, \bar{X} \;\to\; \infty$. Wir teilen den Bereich in $N+1$ gleiche Segmente der Länge $\epsilon$

$$(N+1)\, \epsilon \;=\; \bar{X} - X \;. \tag{926}$$

Die Schritte sollen sein $x_0 \;=\; X,\; x_1,\; x_2, \ldots,\; x_N$ und es gelte

$$\varphi_i \;=\; \varphi(x_i) \;, \quad A_{jk} \;=\; A(x_j, x_k) \;. \tag{927}$$

Dann läßt sich das Gauß'sche Pfadintegral definieren als

$$\begin{aligned} & \int \mathcal{D}\varphi \, \exp\left\{ -\tfrac{1}{2} \int dx' \int dx\, \varphi(x')\, A(x',x)\, \varphi(x) \right\} \\ = \;& \lim_{N\to\infty} (2\pi)^{-N/2} \prod_{i=1}^{N} \int d\varphi_i \, \exp\left\{ -\tfrac{1}{2} \sum_{j,k} \varphi_j\, A_{jk}\, \varphi_k \right\} \\ = \;& \lim_{N\to\infty} (2\pi)^{-N/2} \prod_{i=1}^{N} \int d\varphi_i \, \exp\left\{ -\tfrac{1}{2}\, \boldsymbol{\varphi}^T\, \hat{A}\, \boldsymbol{\varphi} \right\} \;, \end{aligned} \tag{928}$$

wobei $\boldsymbol{\varphi}$ ein Spaltenvektor mit den Komponenten $(\varphi_1, \ldots, \varphi_N)$ ist. Wir können nun mit $\bar{X}$ und $X$ gegen $+\infty$ und $-\infty$ gehen und können die Gauß–Integrale lösen. Es folgt $\exp\{-\frac{1}{2}\, \mathrm{Tr}\, \ln \hat{A}\}$.

## Die Amplitude für den Übergang vom Grundzustand zum Grundzustand

Wir hatten bereits gezeigt, daß die Übergangsamplitude von $(q_i, t_i)$ nach $(q_f, t_f)$ gegeben ist durch

$$< q_f, t_f | q_i, t_i > = N \int \mathcal{D}q \int \mathcal{D}p \, \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int\limits_{t_i}^{t_f} dt \, [p\dot{q} - H(p,q)] \right\} . \tag{929}$$

$N$ bezeichnet einen Normierungsfaktor. Die Randbedingungen des Problems lauteten $q(t_i) = q_i, \;\; q(t_f) = q_f$. Diese Art von Randbedingung ist angebracht zur Beschreibung der Bewegung eines klassischen Teilchens. Eine analoge Randbedingung in der Feldtheorie wäre $\psi(t_i) = \psi_i, \;\; \psi(t_f) = \psi_f$. Aber in der Feldtheorie haben wir eine andere Situation vorliegen. Was wir betrachten müssen, ist die Erzeugung eines Teilchens, die Wechselwirkung und die Vernichtung des Teilchens. Der Prozeß der Erzeugung kann durch eine Quelle generiert werden, die Vernichtung kann durch eine Senke beschrieben werden. Das Vakuum zum Zeitpunkt $t = -\infty$ entwickelt sich zum Vakuum zur Zeit $t = \infty$, wobei bewirkt durch die Quelle Teilchen erzeugt werden können, wechselwirken und vernichtet werden können. Wir wollen nun die Amplitude für den Übergang vom Grundzustand zum Grundzustand bei Anwesenheit einer Quelle bestimmen.

Wir addieren einen Quell–Term $(-J(t)\,q)$ als treibende Kraft zum Hamilton–Operator. Dann lautet die Übergangsamplitude bei Anwesenheit dieser Quelle

$$< q'', t'' | q', t' >^J \propto \int \mathcal{D}q \int \mathcal{D}p \, \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int\limits_{t'}^{t''} dt \, [\dot{q}p - H(p,q) + Jq] \right\} , \tag{930}$$

wobei $H(p,q)$ den Hamilton–Operator für $J = 0$ bezeichnet. Das hochgestellte $J$ deutet auf die Anwesenheit der Quelle hin.

Die Grundzustands–Grundzustands Übergangsamplitude spielt eine zentrale Rolle in der Quantenfeldtheorie. Wir nehmen zunächst an, $J(t)$ sei null für Zeiten kleiner als $t_-$ und für Zeiten größer als $t_+$. Wir verwenden die Vollständigkeit der Eigenzustände $|q_+, t_+ >$ und $|q_-, t_- >$ von $\hat{Q}_H$ zu den Zeitpunkten $t_+$ und $t_-$

$$\begin{aligned} < q'', t'' | q', t' >^J &= \\ &\int dq_+ \int dq_- \;\; < q'', t'' | q_+, t_+ > < q_+, t_+ | q_-, t_- >^J < q_-, t_- | q', t' > \end{aligned} \tag{931}$$

mit $t'' > t_+ > t_- > t'$.

Es seien nun $|n >$ die Energie–Eigenzustände

$$H\,|n > = E_n \,|n > , \tag{932}$$

und wir führen die Zeitabhängigkeit der Wellenfunktionen ein

$$\psi_n(q,t) = < q, t | n > = e^{-iE_nt/\hbar} {}_S < q | n > . \tag{933}$$

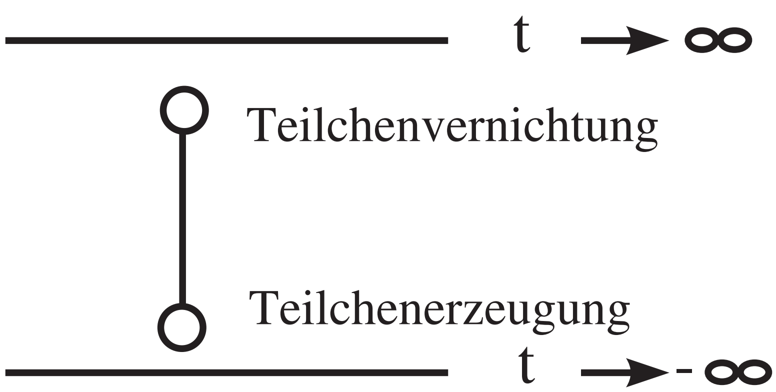
Dann folgt

$$< q'', t''|q_+, t_+ > = \sum_n < q'', t''|n >< n|q_+, t_+ > = \sum_n \psi_n(q'', t'')\, \psi_n^*(q_+, t_+) \tag{934}$$

und

$$< q_-, t_-|q', t' > = \sum_n \psi_n(q_-, t_-)\, \psi_n^*(q', t')\ . \tag{935}$$

Als Einschub wollen wir zunächst einige formale Eigenschaften der Greenschen Funktion disku-




Figur 15: Darstellung der Vakuum–Vakuum Übergangsamplitude bei Gegenwart einer Quelle.

tieren und die Feynman–Kac Formel ableiten. Für zeitunabhängige Hamilton–Operatoren $H$ ist die zeitabhängige Greensche Funktion in Operator–Form gegeben durch

$$\hat{G}(t) \ = \ \Theta(t)\, e^{-iHt/\hbar}\ . \tag{936}$$

Es gilt dabei

$$\hat{G}(t+s) \ = \ \hat{G}(t)\, \hat{G}(s) \qquad \text{für} \qquad t,\ s\ >\ 0\ . \tag{937}$$

In der Ortsdarstellung nimmt dies die Form an

$$G(x, t+s; y, 0) \ = \ \int dz\ G(x, t; z, s)\, G(z, s; y, 0)\ . \tag{938}$$

Wir nehmen nun an, wir haben einen vollständigen Satz von Energieeigenzuständen $|n>,\ n\ = 0, 1, \ldots$ vorliegen

$$H|n> = \ E_n\, |n>\ \ . \tag{939}$$

Dies entspricht den Wellenfunktionen in der Ortsdarstellung

$$u_n(x) \ = < x|n>\ \ . \tag{940}$$

Für $t > 0$ folgt

$$G(x,t;y,0) \;=\; <x|\hat{G}(t)|y> = \sum_n <x|n><n|e^{-iHt/\hbar}|y>$$
$$= \sum_n u_n(x)\, e^{-iE_nt/\hbar}\, u_n^*(y)\;. \tag{941}$$

Diese Relation ermöglicht es uns, von der zeitabhängigen Greenschen Funktion ausgehend etwas über Energieniveaus und Wellenfunktionen zu lernen. Von Bedeutung ist die Fourier–Transformierte

$$\tilde{G}(z) \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} e^{izt/\hbar}\, \hat{G}(t)\, dt \;=\; \int_0^{\infty} e^{i(z-H)t/\hbar} dt\;. \tag{942}$$

Wir hatten früher die Relation studiert

$$\int_0^{\infty} e^{i\omega\tau}\, d\tau \;=\; \lim_{\epsilon\to 0} \frac{i}{\omega + i\epsilon}\;. \tag{943}$$

Für $\operatorname{Im} z > 0$ folgt damit aus (942)

$$\tilde{G}(z) \;=\; \frac{i\hbar}{z - H}\;. \tag{944}$$

Singularitäten treten bei $\operatorname{Im} z = 0$ auf, da das Spektrum von $H$ reell ist. Die Fourier–Transformation der Greenschen Funktion in der Ortsdarstellung führt auf

$$\mathcal{G}(x,y;z) \;=\; i\hbar \sum_n \frac{u_n(x)\, u_n^*(y)}{z - E_n}\;. \tag{945}$$

Dieses Resultat hatten wir ebenfalls bereits abgeleitet. Für das diskrete Spektrum entsprechen die Pole der Greenschen Funktion in der Energiedarstellung gerade der energetischen Lage der gebundenen Zustände. Für das kontinuierliche Spektrum von $H$ hat $\mathcal{G}$ einen Schnitt.

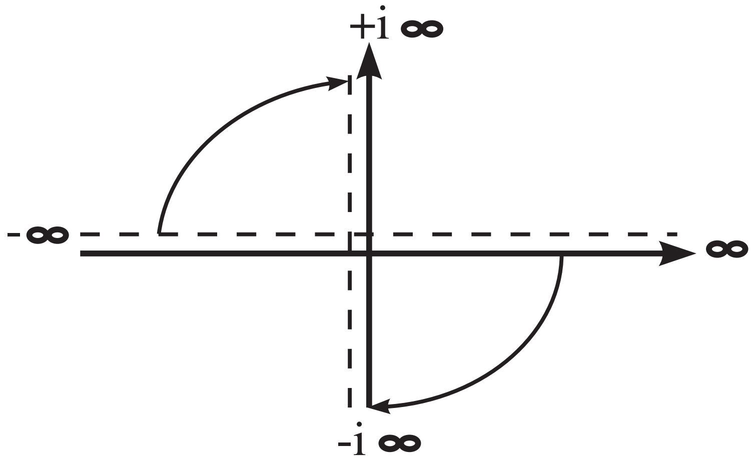
Aus (941) folgt die Feynman–Kac Formel, die das asymptotische Verhalten der zeitabhängigen Greenschen Funktion $(t \to \infty)$ verknüpft mit dem energetischen Grundzustand. Wir setzen in (941) zunächst $y = x$ und integrieren über alle $x$. Durch die Normierung der Energieeigenfunktionen folgt

$$\int dx\, G(x,t;x,0) \;=\; \sum_n e^{-iE_nt/\hbar} \int dx\, |u_n(x)|^2 \;=\; \sum_n e^{-iE_nt/\hbar}\;. \tag{946}$$

Wir betrachten nun diesen Ausdruck für komplexe Zeiten nämlich für $it/\hbar = \tau$. Für große positive $\tau$ wird die Summe auf der rechten Seite dominiert vom Beitrag des Grundzustands–Energieniveaus $(\exp\{-\tau E_0\})$. Dies ist genau der spezielle Gesichtspunkt, den wir betrachten wollen.

$$\lim_{\tau\to\infty} e^{E_0\tau} \int G(x, -i\hbar\tau; x, 0)\, dx \;=\; 1 \tag{947}$$

für einen nichtentarteten Grundzustand. Für einen entarteten Grundzustand erscheint der Grad der Entartung auf der rechten Seite. Gibt es keinen gebundenen Zustand, so gilt die gleiche Aussage für den Rand des Kontinuums.



Figur 16: Wick–Rotation in der komplexen Zeitebene.

Bevor der Grenzwert bezüglich $\tau$ gebildet wird, wenden wir den Logarithmus an

$$\begin{aligned} E_0 &= -\lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{\tau} \log \int dx\, G(x, -i\hbar\tau; x, 0) \\ &= \lim_{\tau\to\infty} \frac{-1}{\tau} \log \operatorname{Tr} e^{-\tau H} . \end{aligned} \tag{948}$$

Dies ist die Feynman–Kac Formel. Sie stellt einen exzellenten Weg dar, um Grundzustandsenergien zu bestimmen. Man braucht dazu keine Detailkenntnisse, sondern man muß nur das asymptotische Verhalten bestimmen.

Der Zusammenhang von (934) mit der Grundzustands-Grundzustands Amplitude wird dadurch erreicht, daß man die Amplitude auf die imaginäre Zeitachse analytisch fortsetzt und den Grenzfall $t'' \to -i\infty, \quad t' \to i\infty$ untersucht. Die abfallenden Exponentialfunktionen stellen dann sicher, daß nur die Beiträge der Grundzustandswellenfunktion $\psi_0$ von Bedeutung sind. Es gilt

$$\lim_{t''\to -i\infty} < q'', t''|q_+, t_+ > = \lim_{t''\to -i\infty} \psi_0(q'', t'')\, \psi_0^*(q_+, t_+) \tag{949}$$

und

$$\lim_{t'\to i\infty} < q_-, t_-|q', t' > = \lim_{t'\to i\infty} \psi_0(q_-, t_-)\, \psi_0^*(q', t') . \tag{950}$$

Statt der vollständigen Rotation von der reellen Zeitachse auf die imaginäre Zeitachse hätte auch schon eine kleine Rotation $t \to e^{-i\delta}\, t$ das gleiche Resultat ergeben. Als Nebenbemerkung erwähnen wir, daß auch die Substitution $Jq \to Jq + \frac{1}{2} i\delta q^2$ zu dem gleichen Resultat führt. Kehren wir zur reellen Zeit zurück, so folgt

$$\begin{aligned} &\lim_{t''\to\infty,\, t'\to-\infty} < q'', t''|q', t' >^J \;/\; [\psi_0(q'', t'')\, \psi_0^*(q', t')] \\ &= \int dq_+ \int dq_- \; \psi_0^*(q_+, t_+) \; < q_+, t_+|q_-, t_- >^J \; \psi_0(q_-, t_-) . \end{aligned} \tag{951}$$

Der Ausdruck auf der rechten Seite ist die Wahrscheinlichkeitsamplitude dafür, das System im Grundzustand zur Zeit $t_+$ zu finden, wenn es zur Zeit $t_-$ im Grundzustand war. Wir sind nun an dem Fall interessiert, in dem $J(t)$ nicht null ist, nicht nur für das endliche Intervall zwischen $t_-$ und $t_+$, sondern für alle Zeiten. Wir untersuchen daher das Objekt

$$W[J] \;\propto\; \lim_{t''\to\infty,\; t'\to-\infty} < q'', t''|q', t' >^J \tag{952}$$

für große positive $t_+$ und große negative $t_-$. Oftmals nennt man auch $W[J] \;=\; Z[J]$. Es folgt

$$W[J] \;\propto\; \int \mathcal{D}q \int \mathcal{D}p \;\exp\left\{ \frac{i}{\hbar} \int\limits_{-\infty}^{\infty} dt[p\dot{q} - H(p,q) + Jq] \right\} \;. \tag{953}$$

Das Pfadintegral geht über alle Funktionen $p(t)$ und über alle $q(t)$ mit den Randbedingungen

$$\lim_{t'\to-\infty} q(t') \;=\; q' \;; \quad \lim_{t''\to\infty} q(t'') \;=\; q'' \;. \tag{954}$$

$q'$ und $q''$ sind gewählte Konstanten, die oft zu null bestimmt werden. Dann schreiben wir $< 0, t''|0, t' >$.

In der Lagrangeschen Formulierung haben wir

$$< q'', t''|q', t' >^J \;\propto\; \int \mathcal{D}q \;\exp\left\{ \frac{i}{\hbar} \int\limits_{t'}^{t''} dt\,[L(q,\dot{q}) + Jq] \right\} \;. \tag{955}$$

Entsprechend gilt

$$W[J] \;\propto\; \int \mathcal{D}q \;\exp\left\{ \frac{i}{\hbar} \int\limits_{-\infty}^{\infty} dt\,[L(q,\dot{q}) + Jq] \right\} \;. \tag{956}$$

Dieses Pfadintegral ist nicht wohl definiert. Wir setzen daher zunächst den Integranden zu imaginären Zeiten fort, führen dann das Pfadintegral durch und kehren dann zu reellen Zeiten zurück. Wir führen die Variable

$$\bar{t} \;=\; it \tag{957}$$

ein. Daraus folgt $W[J] \;\to\; W_E[J]$ mit

$$W_E[J] \;\propto\; \int \mathcal{D}q \;\exp\left\{ \frac{1}{\hbar} \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\bar{t} \left[ L\left(q, i\frac{dq}{d\bar{t}}\right) + Jq \right] \right\} \;. \tag{958}$$

Hierbei werden $q$ und $J$ als Funktionen von $\bar{t}$ betrachtet. Es ist

$$\lim_{\bar{t}\to-\infty} q(\bar{t}) \;=\; q' \;, \quad \lim_{\bar{t}\to\infty} q(\bar{t}) \;=\; q'' \;. \tag{959}$$

$q'$ und $q''$ sind beliebig gewählte Konstanten. Damit folgt

$$W_E[J] \;\propto\; \int \mathcal{D}q \int \mathcal{D}p \;\exp\left\{ -\frac{1}{\hbar} \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\bar{t} \left[ -ip\frac{dq}{d\bar{t}} + H(p,q) - Jq \right] \right\} \;. \tag{960}$$

# Zeitgeordnetes Produkt und $n$-Punkt-Funktionen

Die Pfadintegral-Darstellung der Übergangsamplitude oder des sogenannten Feynmann-Kerns $\langle q', t'|q, t\rangle$ kann dazu verwendet werden, auch andere interessante Übergangsmatrixelemente und Operator-Erwartungswerte zu ermitteln. Von besonderer Bedeutung sind die Matrixelemente des Ortsoperators $\hat{q}(t)$ (im Heisenberg-Bild) sowie von Produkten von $\hat{q}$-Operatoren. Sie nehmen in der Pfadintegral-Formulierung eine relative einfache Form an. Wir untersuchen dies zunächst anhand eines eindimensionalen quantenmechanischen Systems und verallgemeinern dies später auf mehrere Dimensionen und schließlich auf Quantenfelder.

Es sei $t_i$ ein Zeitpunkt im Intervall $t \leq t_i \leq t'$. Um das Matrixelement des Operators $\hat{q}(t_i)$ zwischen den Zuständen $\langle q', t'|$ und $|q, t\rangle$ zu berechnen, wird man geschickterweise bei der Konstruktion des Pfadintegrals die Partition der Zeitkoordinate so wählen, daß $t_i$ mit einem der Stützpunkte übereinstimmt. Dann kann man nämlich den Operator $\hat{q}(t_i)$ auf den zugehörigen Eigenzustand $|q_i, t_i\rangle$ wirken lassen und erhält den Eigenwert $q(t_i)$ als $c$-Zahl im Integranden

$$
\begin{aligned}
\langle q', t'|\hat{q}(t_i)|q, t\rangle &= \int dq_{N-1} \cdots \int dq_1 \, \langle q', t'|q_{N-1}, t_{N-1}\rangle \cdots \times \langle q_{i+1}, t_{i+1}|\hat{q}(t_i)|q_i, t_i\rangle \\
&\quad \cdots \langle q_1, t_1|q, t\rangle \\
&= \int \mathcal{D}q \, \mathcal{D}p \; q(t_i) \, e^{\frac{i}{\hbar}\int\limits_t^{t'} (p\dot{q}-H)\, d\tau} \quad . \qquad (961)
\end{aligned}
$$

Wir wollen dies nun auf ein Produkt von mehreren $\hat{q}$-Operatoren generalisieren. Wir betrachten zwei intermediäre Zeitpunkte $t_i$ und $t_j$, von denen wir zunächst annehmen, daß $t_i > t_j$ gilt. Dann folgt

$$
\begin{aligned}
\langle q', t'|\hat{q}(t_i)|q, t\rangle &= \int dq_{N-1} \cdots \int dq_1 \langle q', t'|q_{N-1} t_{N-1}\rangle \cdots \\
&\quad \langle q_{j+1}, t_{j+1}|\hat{q}(t_j)|q_j, t_j\rangle \cdots \langle q_1, t_1|q, t\rangle \\
&= \int \mathcal{D}q \, \mathcal{D}p \, q(t_i) \, q(t_j) \, e^{\frac{i}{\hbar}\int\limits_t^{t'} d\tau (p\dot{q}-H)} \quad . \qquad (962)
\end{aligned}
$$

Für den Fall $t_j > t_i$ gilt diese Betrachtung so nicht, da das Pfadintegral eine von rechts nach links monoton ansteigende Ordnung der Zeitstützpunkte voraussetzt. Drehen wir hingegen für $t_j > t_i$ die Reihenfolge der $\hat{q}$-Operatoren um, so folgt wieder das alte Resultat (962). Wir definieren das zeitgeordnete Produkt

$$
T[\hat{q}(t_j)\, \hat{q}(t_i)] = \begin{cases} \hat{q}(t_j)\, \hat{q}(t_i) & \text{für} \quad t_j > t_i \\ \hat{q}(t_i)\, \hat{q}(t_j) & \text{für} \quad t_i > t_j \end{cases} \quad . \qquad (963)
$$

Damit resultiert zusammengefaßt

$$
\langle q', t'|T[\hat{q}(t_i)\, \hat{q}(t_j)]|q, t\rangle = \int \mathcal{D}q \, \mathcal{D}p \, q(t_i) \, q(t_j) \, e^{\frac{i}{\hbar}\int\limits_t^{t'} d\tau (p\dot{q}-H)} \quad . \qquad (964)
$$

Dieser Ausdruck läßt sich natürlich auch auf zeitgeordnete Produkte höherer Ordnung verallgemeinern. Es gilt

$$\langle q', t'|T[\hat{q}(t_1)\,\hat{q}(t_2))\cdots\hat{q}(t_n)]|q,t\rangle = \int \mathcal{D}q\,\mathcal{D}p\; q(t_1)\cdots q(t_n)\, e^{\frac{i}{\hbar}\int\limits_t^{t'} d\tau (p\dot{q}-H)} \quad . \tag{965}$$

Im folgenden bezeichnen wir den Grundzustand eines Systems mit $|0\rangle$. Er wird auch der Vakuumzustand genannt. Von besonderem Interesse ist nun der Grundzustands-Erwartungswert des zeitgeordneten Produkts von $\hat{q}$-Operatoren. Diese Größe bezeichnen wir im Rahmen der Quantenfeldtheorie als den Propagator des Feldes. Wir definieren die 2-Punkt-Funktion als

$$G(t_1, t_2) = \langle 0|T[\hat{q}(t_1)\,\hat{q}(t_2)]|0\rangle \quad . \tag{966}$$

Sie hängt im eindimensionalen Fall nur von den beiden Zeitkoordinaten $t_1$ und $t_2$ ab. Diese Funktion läßt sich durch einen geschickten Kunstgriff aus dem Übergangsmatrixelement (965) extrahieren. Zu diesem Zweck schieben wir in (965) rechts und links einen vollständigen Satz von Eigenzuständen ein, diesmal aber bestehend aus den Eigenzuständen des Hamilton-Operators im Schrödinger-Bild

$$\hat{H}|n\rangle_s = E_n|n\rangle_s \quad . \tag{967}$$

Dabei ist

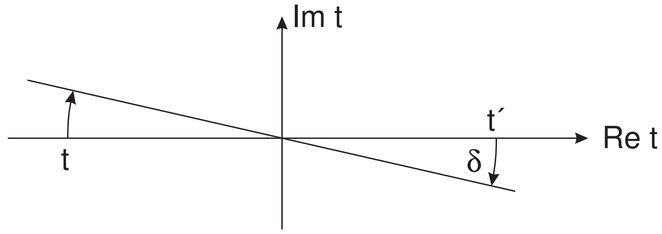
$$\begin{aligned} |q,t\rangle &= e^{i\hat{H}t/\hbar}\sum_n n\rangle_s\, {}_s\langle n|q\rangle_s = \sum_n e^{iE_nt/\hbar}\,|n\rangle_s\, {}_s\langle n|q\rangle_s \\ &= \sum_n e^{iE_nt/\hbar}\,\psi_n^*(q)|n\rangle_s \quad . \end{aligned} \tag{968}$$

$\psi_n(q)$ bezeichnet die zum Zustand $|n\rangle$ gehörige Wellenfunktion im Ortsraum. Damit kann man das Matrixelement aus (965) umschreiben als

$$\begin{aligned} \langle q',t'|T[\hat{q}(t_1)\,\hat{q}(t_2)]|q,t\rangle &= \sum_{n,n'}\langle q',t'|n'\rangle_s\, {}_s\langle n'|T[\hat{q}(t_1)\,\hat{q}(t_2)]|n\rangle_s\, {}_s\langle n|q,t\rangle \\ &= \sum_{n,n'} e^{-i(E_{n'}-E_nt)/\hbar}\,\psi_{n'}(q')\,\psi_n^*(q)\, {}_s\langle n'|T[\hat{q}(t_1)\,\hat{q}(t_2)]|n\rangle_s \end{aligned} \tag{969}$$

Auf der rechten Seite taucht als einer von vielen Summanden (nämlich für $n' = n = 0$) die uns interessierende 2-Punkt-Funktion $G(t_1, t_2)$ auf.
Wir wollen nun diesen Beitrag aus der Summe (969) herauslösen. Die Bildung des Grenzübergangs $t' \to +\infty,\, t \to -\infty$ hilft zunächst nicht weiter, da die Exponentialfunktionen im Unendlichen ungedämpft oszillieren. Wir verwenden den folgenden mathematischen Kunstgriff: Wir verändern die Vorschrift des Grenzübergangs etwas und geben der Zeitkoordinate einen Imaginäranteil. Genauer gesagt müssen wir die Zeitkoordinate in der komplexen Ebene um einen Winkel $0 < \delta < \pi$

in mathematisch negativer Richtung drehen, also den Limes $t' \to \infty\, e^{-i\delta}$ und $t' \to -\infty\, e^{-i\delta}$ untersuchen. Dadurch wird erreicht, daß der Faktor $e^{-i(E_{n'}t\,t'-E_n t)}$ asymptotisch exponentiell abfällt, vorausgesetzt alle Energien $E_n$ können positiv gewählt werden.




Drehung der Zeitkoordinate ins Komplexe

Ausgedrückt durch neue, gedrehte Zeitkoordinaten

$$\tau = e^{i\delta}\, t \qquad \text{und} \qquad \tau' = e^{i\delta}\, t' \tag{970}$$

lautet der Grenzfall des Matrixelements (969)

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{t'\to\infty \\ t\to-\infty}} \langle q', t'|T[\hat{q}(t_1)\hat{q}(t_2)]|q, t\rangle &= \lim_{\substack{\tau'\to e^{i\delta}\,\infty \\ t\to -e^{i\delta}\,\infty}} \langle q', e^{-i\delta}\tau'|T[\hat{q}(t_1)\hat{q}(t_2)]|q, e^{-i\delta}\tau\rangle \\ &\to \lim_{\substack{\tau'\to\infty \\ \tau\to-\infty}} \langle q', e^{-i\delta}\tau'|T[\hat{q}(t_1)\hat{q}(t_2)]|q, e^{-i\delta}\tau\rangle \quad . \end{aligned} \tag{971}$$

Hierbei sind wir zu reellen Werten der gedrehten Zeitkoordinate $\tau$ übergegangen. Damit dies mathematisch zulässig ist, muß das berechnete Matrixelement eine analytische Funktion in $t$ und $t'$ sein. Der betrachtete Übergang entspricht dann einer analytischen Fortsetzung.

Der genaue Wert, den man für den Winkel $\delta$ wählt, ist unwichtig. Dieser Wert darf das Endergebnis nicht beeinflussen. Am elegantesten wird der Formalismus jedoch, wenn man $\delta = \pi/2$ wählt, also die Zeitachse in die rein imaginäre Richtung dreht: $t' \to -i\infty$, $t \to +i\infty$. Dieser Trick einer Drehung der zeitartigen Komponente eines Minkowski-Vektors um $90°$ in der komplexen Ebene wird als Wick-Rotation bezeichnet. Angewandt auf das Problem der 2-Punkt-Funktion bewirkt die Wick-Rotation, daß (969) bei imaginären Zeiten $t = -i\tau$, $\tau$ reell, zu berechnen ist,

$$\begin{aligned} \langle q', -i\tau'|T[\hat{q}(t_1)\hat{q}(t_2)]|q, -i\tau\rangle &= \sum_{n,n'} e^{-(E_{n'}\tau'-E_n\tau)}\, \psi_{n'}(q')\, \psi_n^*(q) \\ &\quad {}_s\langle n'|T[\hat{q}(t_1)\hat{q}(t_2)]|n\rangle_s \quad . \end{aligned} \tag{972}$$

Anstelle oszillierender erhält man für die gewählten imaginären Zeiten monoton abfallende Exponentialfunktionen in der Summe. Im Limes großer $\tau$ dominiert dann aber der am langsamsten abfallende Summand, das heißt der Grundzustand $n = 0$ mit der niedrigsten Energie. Wir erhalten also

$$\langle q', -i\tau' | T[\hat{q}(t_1)\hat{q}(t_2)] | q, -i\tau\rangle \rightarrow e^{-E_0(\tau'-\tau)}\,\psi_0(q')\,\psi_0^*(q)\langle 0|T[\hat{q}(t_1)\hat{q}(t_2)]|0\rangle \quad . \tag{973}$$

Der Vorfaktor auf der rechten Seite von (973) ist gerade der Limes des Feynman-Kerns im Euklidischen.

$$\begin{aligned} \langle q', -i\tau' | q, -i\tau &= \sum_n e^{-E_n(\tau'-\tau)}\,\psi_n(q')\,\psi_n^*(q) \\ \rightarrow e^{-E_0(\tau'-\tau)}\,\psi_0(q')\,\psi_0^*(q) &= \psi_0(q', -i\tau')\,\psi_0^*(q, -i\tau) \quad . \end{aligned} \tag{974}$$

Damit erhalten wir die gesuchte 2-Punkt-Funktion als Limes des Quotienten aus (973) und (974)

$$\langle 0|T[\hat{q}(t_1)\hat{q}(t_2)]|0\rangle = \lim_{\substack{\tau'\rightarrow\infty \\ \tau\rightarrow-\infty}} \frac{\langle q', -i\tau'|T[\hat{q}(t_1)\,\hat{q}(t_2)]|q, -i\tau\rangle}{\langle q', -i\tau'|q, -i\tau\rangle} \quad . \tag{975}$$

Nun können wir die analytische Fortsetzung zurück zu reellen Zeiten vornehmen, das heißt eine Drehung um $90°$ in der komplexen Ebene. Ausgedrückt durch die Pfadintegral-Darstellung für Zähler und Nenner von (975) ergibt sich für die 2-Punkt-Funktion

$$\begin{aligned} \langle 0|T[\hat{q}(t_1)\hat{q}(t_2)]|0\rangle &= \lim_{\substack{t'\rightarrow\infty \\ t\rightarrow-\infty}} \frac{\langle q', t'|T[\hat{q}(t_1)\,\hat{q}(t_2)]|q, t\rangle}{\langle q', t'|q, t\rangle} \\ &= \lim_{\substack{t'\rightarrow\infty \\ t\rightarrow-\infty}} \frac{\int \mathcal{D}q \int \mathcal{D}p\, q(t_1)\, q(t_2)\, e^{\frac{i}{\hbar}\int_{-\infty}^{\infty} dt\,(p\dot{q}-H)}}{\int \mathcal{D}q \int \mathcal{D}p\, e^{\frac{i}{\hbar}\int_{-\infty}^{\infty} dt\,(p\dot{q}-H)}} \quad . \end{aligned} \tag{976}$$

Diese Beziehung läßt sich sofort auch für beliebige $n$-Punkt-Funktionen hinschreiben

$$\langle 0|T[\hat{q}(t_1)\cdots\hat{q}(t_n)]|0\rangle = \lim_{\substack{t'\rightarrow\infty \\ t\rightarrow-\infty}} \frac{\int \mathcal{D}q \int \mathcal{D}p\, q(t_1)\cdots q(t_n)\, e^{\frac{i}{\hbar}\int_{-\infty}^{\infty} dt\,(p\dot{q}-H)}}{\int \mathcal{D}q \int \mathcal{D}p\, e^{\frac{i}{\hbar}\int_{-\infty}^{\infty} dt\,(p\dot{q}-H)}} \tag{977}$$

Im Fall der Lagrange-Formulierung können wir analog schreiben

$$\langle 0|T[\hat{q}(t_1)\cdots\hat{q}(t_n)]|0\rangle = \lim_{\substack{t'\rightarrow\infty \\ t\rightarrow-\infty}} \frac{\int \mathcal{D}q\, q(t_1)\cdots q(t_n)\, e^{\frac{i}{\hbar}\int_{-\infty}^{\infty} dt\,L(q,\dot{q})}}{\int \mathcal{D}q\, e^{\frac{i}{\hbar}\int_{-\infty}^{\infty} dt\,L(q,\dot{q})}} \quad . \tag{978}$$

## Die Vakuum-Persistenz-Amplitude $W[I]$ oder die Verweil-Amplitude

Um etwas über die dynamischen Eigenschaften eines Quantensystems zu lernen, kann man die Reaktion untersuchen, die erfolgt, wenn am System „gerüttelt“ wird. Das soll heißen, man unterwirft das System einer von außen aufgeprägten Störung und beobachtet, welchen Einfluß dies auf Übergangsamplituden hat, beispielsweise auf $\langle q', t'|q, t\rangle$. Die Störung soll durch einen klassischen Quellterm $J(t)$ beschrieben werden, den man sich durch ein makroskopisches Kraftfeld realisiert denken könnte. Damit $J(t)$ als Inhomogenität in der Bewegungsgleichung auftritt, muß ein Term $J(t)q$ in die Lagrange-Funktion bzw. $-J(t)q$ in die Hamilton-Funktion geschrieben werden. Aufgrund dieser Modifikation lautet nun der Feynman-Kern in der Pfadintegral-Formulierung

$$\langle q', t'|q, t\rangle_J = \int \mathcal{D}q \int \mathcal{D}p \, e^{\frac{i}{\hbar}(p\dot{q} - H(p,q) + J(t)q)} \tag{979}$$

wobei der Index $J$ die Abhängigkeit von der Störung kennzeichnet. Es soll gelten

$$\lim_{t \to \pm\infty} J(t) = 0 \quad . \tag{980}$$

Wir definieren die Vakuum-Vakuum-Amplitude oder die Vakuum-Persistenz-Amplitude oder die Verweil-Amplitude als

$$W[J] = \langle 0|0\rangle_J = \lim_{\substack{t' \to -i\infty \\ t \to i\infty}} \frac{\langle q', t'|q, t\rangle_J}{\langle q', t'|q, t\rangle} \quad . \tag{981}$$

$W$ ist ein Funktional von $J$. Es ist ein Fundamentalobjekt in der Quantenfeldtheorie. Aus der Kenntnis dieses generierenden Funktionals lassen sich die $n$-Teilchen-Greenschen-Funktionen ableiten. Damit lassen sich in einer störungstheoretischen Behandlung der Quantenfeldtheorie alle Observablen ermitteln. Ferner kann das generierende Funktional $W[J]$ als Ausgangspunkt für eine nicht perturbative Behandlung der Quantenfeldtheorie dienen. Bis auf den Normierungsfaktor ist $W[J]$ gerade der Feynman-Kern für die Propagation von $(q, t)$ nach $(q', t')$ unter Berücksichtigung der Störung $J(t)q$. Deshalb läßt sich $W[J]$ durch das entsprechende Pfadintegral darstellen

$$W[J] = \mathcal{N} \int \mathcal{D}q \int \mathcal{D}p \, \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dt (p\dot{q} - H(p,q) + Jq) \right\} \quad . \tag{982}$$

Die Normierungskonstante $\mathcal{N}$ kann durch die Forderung

$$W[0] = 1 \tag{983}$$

fixiert werden. Der Grundzustand eines Systems soll stabil sein, wenn keine äußere Störung wirkt, $J = 0$. Bei einer Verallgemeinerung auf ein Quantensystem von $D$ Dimensionen folgt

$$W[J_1,\cdots,J_D] = \mathcal{N}\int \prod_{\alpha=1}^{D} \mathcal{D}q_\alpha \prod_{\alpha=1}^{D} \mathcal{D}p_\alpha \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\int_{-\infty}^{+\infty} dt \left(\sum_{\alpha=1}^{D} p_\alpha\,\dot{q}_\alpha - H\right) + \sum_{\alpha=1}^{D} J_\alpha\, q_\alpha\right\} \tag{984}$$

Wir können die $n$-fache Funktionalableitung von $W[J]$ nach der Funktion $J(t)$ bilden

$$\frac{\delta^n W[J]}{\delta J(t_1)\cdots\delta J(t_n)} = \left(\frac{i}{\hbar}\right)^n \mathcal{N}\int \mathcal{D}q \int \mathcal{D}p\, q(t_1)\cdots q(t_n) \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\int_{-\infty}^{+\infty} dt(p\dot{q} - H + Jq)\right\} \tag{985}$$

Dies unterscheidet sich von der Definition der $n$-Punkte-Funktion nur durch das Auftreten von $J(t)$ im Exponenten. Also erhält man die $n$-Punkt-Funktion aus der Funktionalableitung von $W[J]$, genommen an der Stelle $J = 0$,

$$\langle 0|T[\hat{q}(t_1)\cdots\hat{q}(t_n)]|0\rangle = \left(\frac{\hbar}{i}\right)^n \left.\frac{\delta^n\, W[J]}{\delta\, J(t_1)\cdots\delta\, J(t_n)}\right|_{J=0} \quad . \tag{986}$$

Dies ist die grundlegende Relation für die Berechnung von Propagatoren in der Quantenfeldtheorie.

# Das generierende Funktional W[J]

In der Quantenfeldtheorie sind die Greenschen Funktionen definiert als Grundzustandserwartungswerte von Produkten von Feldoperatoren. Das Analoge in der nichtrelativistischen Quantenmechanik sind Grundzustandserwartungswerte von Produkten von Operatoren $\hat{Q}_H$. Diese können aus $W[J]$ abgeleitet werden. Wir betrachten zunächst das Produkt von nur zwei Operatoren

$$\mathcal{P} \;= < q'', t''|\hat{Q}_H(t_b)\,\hat{Q}_H(t_a)|q', t' > \tag{987}$$

mit $t_b \;>\; t_a$. Wie früher teilen wir das betrachtete Zeitintervall zwischen $t'$ und $t''$ auf in $t', t_1, t_2, \ldots, t_N$. $t_b$ und $t_a$ sollen mit zwei dieser Schritte übereinstimmen. Mit der Vollständigkeitsrelation folgt

$$\begin{aligned}
\mathcal{P} \;&=\; \prod_{j=1}^{N} \int dq_j \; < q'', t''|q_N, t_N >< q_N, t_N|q_{N-1}, t_{N-1} > \ldots \\
&< q_{b+1}, t_{b+1}|\hat{Q}_H(t_b)|q_b, t_b > \ldots < q_{a+1}, t_{a+1}|\hat{Q}_H(t_a)|q_a, t_a > \ldots < q_1, t_1|q', t' > \\
&=\; \prod_{j=1}^{N} \int dq_j \, q_b \, q_a \; < q'', t''|q_N, t_N >< q_N, t_N|q_{N-1}, t_{N-1} > \ldots < q_1, t_1|q', t' > \\
&\approx\; \prod_{j=1}^{N} \int dq_j \prod_{j=0}^{N} \int \frac{dp_j}{2\pi\hbar}\, q_b \, q_a \, \exp\left\{ \frac{i}{\hbar}\epsilon \sum_{j=0}^{N} [p_j(q_{j+1} - q_j)/\epsilon - H(p_j, q_j)] \right\}.
\end{aligned} \tag{988}$$

Im Grenzfall $N \;\to\; \infty$ mit fixiertem $(N+1)\epsilon$ erhalten wir das Pfadintegral

$$\mathcal{P} \;\propto\; \int \mathcal{D}q \int \mathcal{D}p \; q(t_b)\, q(t_a) \; \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{t'}^{t''} dt \, [p\dot{q} - H(p,q)] \right\} \tag{989}$$

mit $t_b \;>\; t_a$. Für $t_a \;>\; t_b$ folgt

$$\begin{aligned}
&< q'', t''|\hat{Q}_H(t_a)\,\hat{Q}_H(t_b)|q', t' > \\
\propto \;& \int \mathcal{D}q \int \mathcal{D}p \; q(t_b)\, q(t_a) \; \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{t'}^{t''} dt \, [p\dot{q} - H(p,q)] \right\} \; .
\end{aligned} \tag{990}$$

Das können wir zusammenfassen als

$$\begin{aligned}
&< q'', t''|T\left(\hat{Q}_H(t_b)\,\hat{Q}_H(t_a)\right)|q', t' > \\
\propto \;& \int \mathcal{D}q \int \mathcal{D}p \; q(t_b)\, q(t_a) \; \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{t'}^{t''} dt \, [p\dot{q} - H(p,q)] \right\} \; ,
\end{aligned} \tag{991}$$

wobei der Zeitordnungsoperator definiert ist durch

$$T\left(\hat{Q}_H(t_b)\,\hat{Q}_H(t_a)\right) \;=\; \begin{cases} \hat{Q}_H(t_b)\,\hat{Q}_H(t_a) & \text{für } \; t_b \;>\; t_a \\ \hat{Q}_H(t_a)\,\hat{Q}_H(t_b) & \text{für } \; t_a \;>\; t_b \end{cases} \; . \tag{992}$$

Dieses Resultat läßt sich leicht verallgemeinern zu einem zeitgeordneten Produkt von $n$ Operatoren

$$\begin{aligned}
&< q'', t''|T\left(\hat{Q}_H(t'_n)\,\ldots\hat{Q}_H(t'_2)\,\hat{Q}_H(t'_1)\right)|q', t' > \\
\propto \;& \int \mathcal{D}q \int \mathcal{D}p \; q(t'_n)\,\ldots\, q(t'_2)\, q(t'_1) \; \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{t'}^{t''} dt \, [p\dot{q} - H(p,q)] \right\} \; .
\end{aligned} \tag{993}$$

$T$ bringt die Operatoren in chronologische Ordnung. Operatoren, deren Zeitargument einer späteren Zeit entsprechen, stehen links.

Sofern der Hamilton–Operator keine Produkte der generalisierten Koordinaten und Impulse enthält, bekommen wir nach Ausführung der $p$–Integration

$$\begin{aligned} & < q'', t''| T \left( \hat{Q}_H(t'_n) \ldots \hat{Q}_H(t'_2) \, \hat{Q}_H(t'_1) \right) |q', t' > \\ \propto \quad & \int \mathcal{D}q \; q(t'_n) \, \ldots \, q(t'_2) \, q(t'_1) \, \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int\limits_{t'}^{t''} dt \; L(q, \dot{q}) \right\} \; . \end{aligned} \tag{994}$$

Wir wollen nun den Zusammenhang mit dem Grundzustandserwartungswert von zeitgeordneten Produkten von Operatoren erstellen. Wir führen die Zeiten $t'_+$ und $t'_-$ ein mit $t'' > t'_+ > t'_- > t'$. Wir verwenden wieder die Vollständigkeit der Eigenzustände $|q'_+, t'_+ >$ und $|q'_-, t'_- >$ von $\hat{Q}_H$ zu den Zeitpunkten $t'_+$ und $t'_-$.

$$\begin{aligned} < q'', t''| T \left( \hat{Q}_H(t'_n) \, \ldots \, \hat{Q}_H(t'_1) \right) |q', t' > \; &= \; \int dq'_+ \, dq'_- \; < q'', t''|q'_+, t'_+ > \\ \times \; < q'_+, t'_+| T \left( \hat{Q}_H(t'_n) \, \ldots \, \hat{Q}_H(t'_1) \right) |q'_-, t'_- > & < q'_-, t'_-|q', t' > \; . \end{aligned} \tag{995}$$

Wir führen wieder Energieeigenzustände ein und verfahren wie zuvor.

$$\begin{aligned} & \lim_{t' \to -\infty, \, t'' \to \infty} < q'', t''| T \left( \hat{Q}_H(t'_n) \, \ldots \, \hat{Q}_H(t'_1) \right) |q', t' > \; / \; [\psi_0(q'', t'') \, \psi_0^*(q', t')] \\ = \; & \int dq'_+ \, dq'_- \; \psi_0^*(q'_+, t'_+) \; < q'_+, t'_+| T \left( \hat{Q}_H(t'_n) \, \ldots \, \hat{Q}_H(t'_1) \right) |q'_-, t'_- > \; \psi_0(q'_-, t'_-) \\ = \; & < 0| T \left( \hat{Q}_H(t'_n) \, \ldots \, \hat{Q}_H(t'_1) \right) |0 > \; . \end{aligned} \tag{996}$$

$< 0| T \left( \hat{Q}_H(t'_n) \, \ldots \, \hat{Q}_H(t'_1) \right) |0 >$ bezeichnet den Erwartungswert des Grundzustandes mit zeitgeordneten Produkten von Operatoren. Damit folgt nach (993)

$$\begin{aligned} & < 0| T \left( \hat{Q}_H(t'_n) \, \ldots \, \hat{Q}_H(t'_1) \right) |0 > \propto \\ & \int \mathcal{D}q \int \mathcal{D}p \; q(t'_n) \, \ldots \, q(t'_1) \, \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int\limits_{t'}^{t''} dt \, [p\dot{q} - H(p, q)] \right\} \; . \end{aligned} \tag{997}$$

Mit Hilfe dieser Relation können wir nun den Zusammenhang der Amplitude $W[J]$ für den Übergang vom Grundzustand zum Grundzustand mit dem Grundzustandserwartungswert von zeitgeordneten Produkten von Operatoren $\hat{Q}_H$ erstellen. Wir betrachten nun die Funktionalableitung von $W[J]$ in bezug auf die äußeren Quellen $J(t'_1), \; J(t'_2), \ldots, \; J(t'_n)$. Dies führt auf

$$\begin{aligned} & \left. \frac{\delta^n W[J]}{\delta J(t'_n) \ldots \delta J(t'_1)} \right|_{J(t)=0} \; \propto \\ & \left( \frac{i}{\hbar} \right)^n \int \mathcal{D}q \int \mathcal{D}p \; q(t'_n) \, \ldots \, q(t'_1) \, \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int\limits_{-\infty}^{\infty} dt \, [p\dot{q} - H(p, q)] \right\} \end{aligned} \tag{998}$$

und damit schließlich

$$\left(\frac{i}{\hbar}\right)^n < 0|T\left(\hat{Q}_H(t'_n)\,\ldots\,\hat{Q}_H(t'_1)\right)|0> =$$

$$\left.\frac{\delta^n W[J]}{\delta J(t'_n)\ldots\delta J(t'_1)}\right|_{J(t)=0} \quad . \tag{999}$$

In allen betrachteten Fällen tritt stets die gleiche Proportionalitätskonstante auf, so daß wir ein Gleichheitszeichen in (999) schreiben können.

Wenn $W[J]$ bekannt ist, können wir daraus die Grundzustandserwartungswerte oder Vakuumerwartungswerte von zeitgeordneten Produkten von Operatoren $\hat{Q}_H$ generieren. Daher wird $W[J]$ das generierende Funktional genannt. Dieser Ausdruck wird in der Quantenfeldtheorie verwendet, um Greensche Funktionen zu ermitteln.

# Zur Quantenfeldtheorie eines skalaren Feldes

Wir hatten in der nichtrelativistischen Quantenmechanik einen externen Quellterm oder eine treibende Kraft $J(t)\,Q$ vom Hamilton–Operator subtrahiert und studierten die Wahrscheinlichkeitsamplitude $W[J]$, das System im Grundzustand bei $t = +\infty$ zu finden, wenn es im Grundzustand bei $t = -\infty$ war. $W[J]$ konnte in Form eines Pfadintegrals ausgedrückt werden. Der Erwartungswert von zeitgeordneten Produkten einer beliebigen Zahl von Operatoren $\hat{Q}_H$ im Grundzustand konnte aus $W[J]$ durch Funktionalableitung gewonnen werden. Ursprünglich waren wir von einer einzelnen generalisierten Koordinaten $Q$ und dem konjugierten Impuls $P$ ausgegangen.

Wir studieren nun die relativistische Feldtheorie mit einem Kontinuum von Freiheitsgraden $\varphi(t, \mathrm{x})$ zu einer gegebenen Zeit $t$. Wir quantisieren die Feldtheorie durch den Übergang vom klassischen Feld $\varphi(t, \mathrm{x})$ zum Operatorfeld $\hat{\varphi}(t, \mathrm{x})$ im Heisenberg–Bild. In ähnlicher Weise hatten wir den Übergang von der klassischen Mechanik zur nichtrelativistischen Quantenmechanik vollzogen mit $Q(t) \to \hat{Q}_H$. Mit dem Operator $\hat{\varphi}$, der im Besetzungszahlraum wirkt, gilt nun

$$\hat{\varphi}(t, \mathrm{x})\,|\varphi(\mathrm{x}), t> = \varphi(t, \mathrm{x})\,|\varphi(\mathrm{x}), t> \quad . \tag{1000}$$

Die Verallgemeinerung des nichtrelativistischen Ausdrucks für die Übergangsamplitude zur Quantenfeldtheorie lautet

$$< \varphi''(\mathrm{x}), t''|\varphi'(\mathrm{x}), t' > \propto \int \mathcal{D}\varphi \int \mathcal{D}\pi \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\int_{t'}^{t''} dt \int d^3x\,[\pi\,\partial_0\varphi - \mathcal{H}(\pi, \varphi)]\right\} \quad . \tag{1001}$$

Dies gilt für eine skalare Feldtheorie. $\pi$ übernimmt nun die Rolle von $P$ und wir sind von $\dot{Q}$ auf $\partial_0\varphi$ übergegangen. $\mathcal{H}$ bezeichnet die Hamilton–Dichte.

$$\pi = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\varphi)} \tag{1002}$$

ist die konjugierte Impulsdichte zu $\varphi$, $\partial_0\varphi = \partial\varphi/\partial x_0$. Wir haben $c = 1$ gesetzt, so daß es keinen Unterschied zwischen $t$ und $x_0$ gibt. Das Pfadintegral geht über alle Funktionen $\pi(t, \mathrm{x})$ und alle Funktionen $\varphi(t, \mathrm{x})$ mit den Randbedingungen

$$\varphi(t'', \mathrm{x}) = \varphi''(\mathrm{x})\ , \quad \varphi(t', \mathrm{x}) = \varphi'(\mathrm{x})\ . \tag{1003}$$

Das Pfadintegral geht über *klassische* Felder und nicht über Operatorfelder.

Wenn wir wieder einen externen Quellterm $J(t, \mathrm{x})\,\varphi(t, \mathrm{x})$ von der Hamilton–Dichte subtrahieren, können wir die Übergangsamplitude vom Grundzustand bei $t = -\infty$ zum Grundzustand bei $t = \infty$ in Gegenwart dieser Quelle studieren. In der relativistischen Quantenfeldtheorie spricht man vom Grundzustand als den Vakuumzustand. Im allgemeinen enthält der Vakuumzustand keine Teilchen. Durch Analogie erhalten wir

$$\begin{aligned} W[J] &= N \lim_{t''\to\infty,\, t'\to-\infty} \int \mathcal{D}\varphi \int \mathcal{D}\pi \\ &\quad \times \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\int_{t'}^{t''} dt \int d^3x\,[\pi\,\partial_0\varphi - \mathcal{H}(\pi, \varphi) + J\varphi]\right\} \quad . \end{aligned} \tag{1004}$$

Der Normierungsfaktor $N$ wird so gewählt, daß gilt

$$W[J] \;=\; 1 \qquad \text{für} \qquad J \;=\; 0\,. \tag{1005}$$

Dies impliziert, daß sich der Vakuumzustand nicht ändert, wenn die äußere Quelle abgeschaltet wird. Damit gilt ebenfalls durch Analogie

$$\left(\frac{i}{\hbar}\right)^n \;< 0|T\left(\hat{\varphi}(x_1)\ldots\hat{\varphi}(x_n)\right)|0> \;=\; \left.\frac{\delta^n W[J]}{\delta J(x_1)\ldots\delta J(x_n)}\right|_{J(x)=0} \tag{1006}$$

mit $x_i \;\equiv\; (x_i^0, \mathbf{x}_i),\;\; i \;=\; 1,\ldots,n$. $|0>$ bezeichnet den Vakuumzustand.

Wir bezeichnen den Vakuum-Erwartungswert eines zeitgeordneten Produktes von $n$ Feldoperatoren auch als $n$-Teilchen Green–Funktion

$$G^{(n)}(x_1,\ldots,x_n) \;=\; < 0|T\left(\hat{\varphi}(x_1)\ldots\hat{\varphi}(x_n)\right)|0> \tag{1007}$$

und somit

$$\left(\frac{i}{\hbar}\right)^n G^{(n)}(x_1,\ldots,x_n) \;=\; \left.\frac{\delta^n W[J]}{\delta J(x_1)\ldots\delta J(x_n)}\right|_{J(x)=0}\,. \tag{1008}$$

Diese $n$-Teilchen Green–Funktion ist von äußerster Wichtigkeit, denn sie ist direkt verknüpft mit der Streuamplitude für $n$ einlaufende oder auslaufende Spin-Null Teilchen. Diese Streuamplitude und die entsprechenden observablen Streuquerschnitte werden wir erhalten, wenn wir zunächst $W[J]$ angeben und dann mittels (1008) die Greensche Funktion bestimmen.

Unter Verwendung der Symmetrie von $G$ in ihren Variablen können wir die Entwicklung ansetzen

$$W[J] \;=\; \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{i}{\hbar}\right)^n \frac{1}{n!}\int d^4x_1\ldots\int d^4x_n\, G^{(n)}(x_1,\ldots,x_n)\, J(x_1)\ldots J(x_n), \tag{1009}$$

wobei der Term für $n \;=\; 0$ gleich 1 ist. Die Funktionalableitung dieses Ausdruckes generiert wieder (1008).

Zum Verständnis des Faktors $1/n!$ in (1009) führen wir die folgende Zwischenrechnung durch. Es sei

$$F[\phi] \;=\; \int G(x_1,\ldots,x_n)\,\phi(x_1)\ldots\phi(x_n)\,d^nx\,. \tag{1010}$$

Wir behaupten, es gilt für die Funktionalableitung unter Ausnutzung der Symmetrie von $G$ in den Argumenten

$$\frac{\delta}{\delta\phi(y)}F[\phi] \;=\; \int n\,G(x_1,\ldots,x_{n-1},y)\,\phi(x_1)\ldots\phi(x_{n-1})\,d^{n-1}x\,. \tag{1011}$$

Es ist

$$\begin{aligned} F[\phi+\eta] \;&=\; \int G\prod_{i=1}^{n}\left(\phi(x_i)+\eta(x_i)\right)\,d^nx \\ &=\; \int G\prod_{i=1}^{n}\phi(x_i)\,d^nx + \int G\sum_{j=1}^{n}\left(\prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n}\phi(x_i)\right)\eta(x_j)\,d^nx + \mathcal{O}(\eta^2)\,. \end{aligned} \tag{1012}$$

Der erste Term entspricht gerade $F[\phi]$. Im zweiten Term ziehen wir die Summation vor das Integral und nutzen die Symmetrie der Greenschen Funktion $G$ in ihren Argumenten aus. Dies liefert

$$\begin{aligned} F[\phi+\eta] &= F[\phi] + n\int G(x_1,\ldots,x_{n-1},y)\,\phi(x_1)\ldots\phi(x_{n-1})\,\eta(y)\,d^{n-1}x\,dy \\ &\quad + \mathcal{O}(\eta^2)\,. \end{aligned} \tag{1013}$$

Der Vergleich mit

$$F[\phi+\eta] - F[\phi] \;=\; \int \frac{\delta F[\phi]}{\delta\phi(y)}\,\eta(y)\,dy + \mathcal{O}(\eta^2) \tag{1014}$$

ergibt die Behauptung. Die Mehrfachanwendung dieser Zwischenrechnung liefert

$$\frac{\delta^n F[\phi]}{\delta\phi(y_1)\ldots\delta\phi(y_n)} \;=\; n\,(n-1)\ldots G(y_1,\ldots,y_n) \;=\; n!\,G(y_1,\ldots,y_n)\;. \tag{1015}$$

Die Reihe (1009) entspricht der Taylor–Reihe.

Wir können nun eine Fortsetzung in den euklidischen Raum definieren, $W[J] \;\rightarrow\; W_E[J]$ mit

$$\bar{x} \;=\; (\bar{x}_0, \bar{\mathbf{x}}) \;=\; (ix_0, \mathbf{x})\;. \tag{1016}$$

Der räumliche Anteil von $x$ bleibt also unverändert. Damit haben wir

$$W_E[J] \;=\; N\int\mathcal{D}\varphi\int\mathcal{D}\pi\;\exp\left\{-\frac{1}{\hbar}\int d^4\bar{x}\left[-i\pi\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{x}_0} + \mathcal{H} - J\varphi\right]\right\}, \tag{1017}$$

wobei das Volumenintegral über den vierdimensionalen euklidischen Raum geht. Wir haben die Randbedingungen

$$\begin{aligned} \lim_{\bar{x}_0\rightarrow\infty}\varphi(\bar{x}) &= \varphi'(\mathbf{x})\,, \\ \lim_{\bar{x}_0\rightarrow-\infty}\varphi(\bar{x}) &= \varphi''(\mathbf{x})\,. \end{aligned} \tag{1018}$$

$\varphi'(\mathbf{x})$ und $\varphi''(\mathbf{x})$ können beliebig gewählt werden, beispielsweise können sie null gesetzt werden. Die euklidische Green–Funktion lautet dann

$$\left(\frac{1}{\hbar}\right)^n G_E^{(n)}(\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_n) \;=\; \left.\frac{\delta^n W_E[J]}{\delta J(\bar{x}_1)\ldots\delta J(\bar{x}_n)}\right|_{J(\bar{x})\,=\,0}\;. \tag{1019}$$

Die entsprechende Funktionalentwicklung ist gegeben durch

$$W_E[J] \;=\; \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\hbar}\right)^n\frac{1}{n!}\int d^4\bar{x}_1\ldots\int d^4\bar{x}_n\,G_E^{(n)}(\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_n)\,J(\bar{x}_1)\ldots J(\bar{x}_n)\;. \tag{1020}$$

Wieder ist der Term mit $n \;=\; 0$ gleich 1.

Wir betrachten den Spezialfall

$$\mathcal{L}(\varphi,\partial_\mu\varphi) \;=\; \tfrac{1}{2}\hbar^2(\partial_0\varphi)^2 + F(\varphi,\boldsymbol{\nabla}\varphi)\,, \tag{1021}$$

wobei $F$ eine beliebige Funktion ist. Die Hamilton–Dichte nimmt dann die Form an

$$\mathcal{H} \;=\; \pi\,\partial_0\varphi - \mathcal{L} \;=\; \frac{1}{2\hbar^2}\,\pi^2 - F(\varphi,\boldsymbol{\nabla}\varphi)\;. \tag{1022}$$

Es ist $\pi = \partial\mathcal{L}/\partial(\partial_0\varphi)$ und damit

$$\pi = \tfrac{1}{2}\hbar^2\, 2\partial_0\varphi = \hbar^2\partial_0\varphi. \tag{1023}$$

Dies ergibt $\pi^2 = \hbar^4(\partial_0\varphi)^2$. Das euklidische Pfadintegral lautet dann

$$\begin{aligned} W_E[J] &= N\int\mathcal{D}\varphi\int\mathcal{D}\pi \\ &\qquad \times\,\exp\left\{-\frac{1}{\hbar}\int d^4\bar{x}\left[-i\pi\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{x}_0}+\frac{\pi^2}{2\hbar^2}-F(\varphi,\boldsymbol{\nabla}\varphi)-J\varphi\right]\right\}. \end{aligned} \tag{1024}$$

Das Pfadintegral über $\pi$ kann wie folgt ausgeführt werden. Wir müssen auswerten

$$I \equiv \int\mathcal{D}\pi\,\exp\left\{-\frac{1}{\hbar}\int d^4\bar{x}\left[-i\pi\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{x}_0}+\frac{\pi^2}{2\hbar^2}\right]\right\}. \tag{1025}$$

Dies ist von der Form

$$I = \int\mathcal{D}\pi\,\exp\left\{-\tfrac{1}{2}\int d^4\bar{x}'\int d^4\bar{x}\,\pi(\bar{x}')\,A(\bar{x}',\bar{x})\,\pi(\bar{x})+\int d^4\bar{x}\rho(\bar{x})\,\pi(\bar{x})\right\} \tag{1026}$$

mit

$$A(\bar{x}',\bar{x}) = \hbar^{-3}\,\delta^4(\bar{x}'-\bar{x}) \tag{1027}$$

und

$$\rho(\bar{x}) = \frac{i}{\hbar}\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{x}_0}. \tag{1028}$$

Mit

$$\begin{aligned} &\int\mathcal{D}\varphi\,\exp\left\{-\tfrac{1}{2}\int dx'\int dx\,\varphi(x')\,A(x',x)\,\varphi(x)+\int dx\,\rho(x)\,\varphi(x)\right\} = \\ &\exp\left\{-\tfrac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\,\ln\hat{A}\right\}\,\exp\left\{\tfrac{1}{2}\int dx'\int dx\,\rho(x')\,A^{-1}(x',x)\,\rho(x)\right\} \end{aligned} \tag{1029}$$

soll folgen

$$I \propto \exp\left\{-\frac{1}{\hbar}\int d^4\bar{x}\,\tfrac{1}{2}\hbar^2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{x}_0}\right)^2\right\}. \tag{1030}$$

Dies ist trivial, denn es gilt

$$A^{-1}(\bar{x}',\bar{x}) = \hbar^3\,\delta^4(\bar{x}'-\bar{x}). \tag{1031}$$

Damit lautet das euklidische generierende Funktional

$$W_E[J] = N'\int\mathcal{D}\varphi\,\exp\left\{-\frac{1}{\hbar}\int d^4\bar{x}\left[\tfrac{1}{2}\hbar^2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{x}_0}\right)^2-F(\varphi,\boldsymbol{\nabla}\varphi)-J\varphi\right]\right\} \tag{1032}$$

und ausgedrückt durch die euklidische Lagrange–Dichte $\mathcal{L}_E$

$$W_E[J] = N'\int\mathcal{D}\varphi\,\exp\left\{\frac{1}{\hbar}\int d^4\bar{x}\,[\mathcal{L}_E+J\varphi]\right\}. \tag{1033}$$

Zurücktransformiert in den Minkowski–Raum gilt dann

$$W[J] = N'\int\mathcal{D}\varphi\,\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\int_{-\infty}^{\infty}dt\int d^3\mathbf{x}\left[\mathcal{L}\left(\varphi,\frac{\partial\varphi}{\partial x^\mu}\right)+J\varphi\right]\right\}. \tag{1034}$$

Der Normierungsfaktor wird wieder so gewählt, so daß gilt $W[J] = 1$ für $J = 0$.

# Der Propagator für das Klein–Gordon Feld

Für den Fall des freien skalaren Feldes können wir das generierende Funktional exakt berechnen. Im Gegensatz hierzu können wir im Fall des wechselwirkenden skalaren Feldes nur eine Entwicklung in Potenzen der Kopplungskonstanten um das freie Feld durchführen.

Die Lagrange–Dichte des freien Feldes lautet für $\lambda \, = \, 0$

$$\mathcal{L} \;=\; \frac{\hbar^2}{2}\, \partial_\nu \varphi \, \partial^\nu \varphi - \frac{\mu^2}{2}\, \varphi^2 \; . \tag{1035}$$

Wir starten unsere Untersuchungen im euklidischen Raum, berechnen hier $W_E[J]$ und gehen dann zurück zum Minkowski–Raum. Eine konsistente Feldtheorie kann nur auf diesem Umweg generiert werden. Im Minkowski–Raum ist $W[J]$ nicht direkt bestimmbar. Die Lagrange–Dichte ist von der Form

$$\mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu \varphi) \;=\; \frac{\hbar^2}{2}\, (\partial_0 \varphi)^2 + F(\varphi, \; \boldsymbol{\nabla} \varphi) \; . \tag{1036}$$

Damit ist der bereits abgeleitete Ausdruck für das generierende Funktional $W_E[J]$ anwendbar

$$W_E[J] \;=\; N' \int \mathcal{D}\varphi \; \exp \left\{ \frac{1}{\hbar} \int d^4 \bar{x} \, (\mathcal{L}_E + J\varphi) \right\} \tag{1037}$$

mit $\bar{x} \; = \; (ix_0, \mathrm{x})$. Die Fortsetzung der Lagrange–Dichte in den euklidischen Raum ergibt

$$\mathcal{L}_E \;=\; -\frac{\hbar^2}{2}\, \bar{\partial}_\nu \varphi \, \bar{\partial}_\nu \varphi - \tfrac{1}{2} \mu^2 \, \varphi^2 \tag{1038}$$

mit

$$\bar{\partial}_\nu \varphi \, \bar{\partial}_\nu \varphi \;=\; \bar{\partial}_0 \varphi \, \bar{\partial}_0 \varphi + \bar{\partial}_1 \varphi \, \bar{\partial}_1 \varphi + \bar{\partial}_2 \varphi \, \bar{\partial}_2 \varphi + \bar{\partial}_3 \varphi \, \bar{\partial}_3 \varphi \; . \tag{1039}$$

Damit folgt offensichtlich

$$W_E[J] \;=\; N' \int \mathcal{D}\varphi \; \exp \left\{ \frac{1}{\hbar} \int d^4 \bar{x} \left( -\frac{\hbar^2}{2}\, \bar{\partial}_\nu \varphi \, \bar{\partial}_\nu \varphi - \tfrac{1}{2} \mu^2 \, \varphi^2 + J\varphi \right) \right\} . \tag{1040}$$

Dieser Ausdruck ist von der Form

$$\begin{aligned} W_E[J] \;\;&=\;\; N' \int \mathcal{D}\varphi \; \exp \Big\{ -\tfrac{1}{2} \int d^4 \bar{x}' \int d^4 \bar{x} \; \varphi(\bar{x}') \, A(\bar{x}', \bar{x}) \, \varphi(\bar{x}) \\ &\quad + \int d^4 \bar{x} \; \rho(\bar{x}) \, \varphi(\bar{x}) \Big\} \end{aligned} \tag{1041}$$

mit

$$A(\bar{x}', \bar{x}) \;=\; \frac{1}{\hbar} \left( \hbar^2 \frac{\partial}{\partial \bar{x}'_\nu} \frac{\partial}{\partial \bar{x}_\nu} + \mu^2 \right) \; \delta(\bar{x}' - \bar{x}) \tag{1042}$$

und

$$\rho(\bar{x}) \;=\; \frac{1}{\hbar}\, J(\bar{x}) \; . \tag{1043}$$

Wir verwenden jetzt das bereits abgeleitete Resultat

$$\int \mathcal{D}\varphi \, \exp\left\{-\tfrac{1}{2}\int dx' \int dx \, \varphi(x')\, A(x',x)\, \varphi(x) + \int dx \, \rho(x)\, \varphi(x)\right\} \; = \\ \exp\left\{-\tfrac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\,\ln \hat{A}\right\} \, \exp\left\{\tfrac{1}{2}\int dx' \int dx \, \rho(x')\, A^{-1}(x',x)\, \rho(x)\right\} . \tag{1044}$$

Dies führt uns auf

$$W_E[J] \; = \; \exp\left\{\frac{1}{2\hbar^2}\int d^4\bar{x}' \int d^4\bar{x} \; J(\bar{x}')\, A^{-1}(\bar{x}',\bar{x})\, J(\bar{x})\right\} . \tag{1045}$$

Dabei wurde die Proportionalitätskonstante so gewählt, daß gilt $W_E[J] \; = \; 1$ für $J \; = \; 0$. Wir verwenden die Notation

$$\Delta_F^E(\bar{x}' - \bar{x}) \; = \; \hbar^{-1}\, A^{-1}(\bar{x}',\bar{x}) \; . \tag{1046}$$

$\Delta_F^E$ ist der Feynman–Propagator im euklidischen Raum für skalare Felder.

$$W_E[J] \; = \; \exp\left\{\frac{1}{2\hbar}\int d^4\bar{x}' \int d^4\bar{x} \; J(\bar{x}')\, \Delta_F^E(\bar{x}' - \bar{x})\, J(\bar{x})\right\} \; . \tag{1047}$$

Um die inverse Größe $A^{-1}$ zu berechnen, führen wir eine Fourier–Transformation durch.

$$\delta(\bar{x}' - \bar{x}) \; = \; \int \frac{d^4\bar{p}}{(2\pi\hbar)^4} \; \exp\left\{-\frac{i}{\hbar}\,\bar{p}\cdot(\bar{x}' - \bar{x})\right\} \; . \tag{1048}$$

Das Skalarprodukt ist im euklidischen Raum definiert durch

$$\bar{p}\cdot\bar{x} \; = \; \bar{p}_0\bar{x}_0 + \bar{p}_1\bar{x}_1 + \bar{p}_2\bar{x}_2 + \bar{p}_3\bar{x}_3 \; . \tag{1049}$$

Dann folgt

$$A(\bar{x}',\bar{x}) \; = \; \int \frac{d^4\bar{p}}{(2\pi\hbar)^4} \; \exp\left\{-\frac{i}{\hbar}\,\bar{p}\cdot(\bar{x}' - \bar{x})\right\} \, \hbar^{-1}\,(\bar{p}^2 + \mu^2) \tag{1050}$$

mit

$$\bar{p}^2 \; = \; \bar{p}_0^2 + \bar{p}_1^2 + \bar{p}_2^2 + \bar{p}_3^2 \; . \tag{1051}$$

Der inverse Ausdruck lautet offensichtlich

$$A^{-1}(\bar{x}',\bar{x}) \; = \; \int \frac{d^4\bar{p}}{(2\pi\hbar)^4} \; \exp\left\{-\frac{i}{\hbar}\,\bar{p}\cdot(\bar{x}' - \bar{x})\right\} \, \hbar\,(\bar{p}^2 + \mu^2)^{-1} \; . \tag{1052}$$

Damit können wir für $\Delta_F^E$ schreiben

$$\Delta_F^E(\bar{x}' - \bar{x}) \; = \; \int \frac{d^4\bar{p}}{(2\pi\hbar)^4} \; \exp\left\{-\frac{i}{\hbar}\,\bar{p}\cdot(\bar{x}' - \bar{x})\right\} \, \tilde{\Delta}_F^E(\bar{p}) \tag{1053}$$

mit

$$\tilde{\Delta}_F^E(\bar{p}) \; = \; (\bar{p}^2 + \mu^2)^{-1} \; . \tag{1054}$$

Wir haben nun $W_E[J]$ berechnet und kehren zurück zum Minkowski–Raum. Es folgt

$$W[J] \; = \; \exp\left\{-\frac{i}{2\hbar}\int d^4x' \int d^4x \; J(x')\, \Delta_F(x' - x)\, J(x)\right\} \tag{1055}$$

mit

$$\Delta_F(x' - x) \;=\; \int \frac{d^4p}{(2\pi\hbar)^4}\; \exp\left\{-\frac{i}{\hbar}\, p\cdot(x' - x)\right\} \tilde{\Delta}_F(p) \tag{1056}$$

und

$$\tilde{\Delta}_F(p) \;=\; (p^2 - \mu^2 + i\epsilon)^{-1}\;. \tag{1057}$$

Es galt zuvor $\bar{x} \;=\; (ix_0, \mathbf{x})$. Nun ist

$$\bar{p} \;=\; (\bar{p}_0, \bar{\mathbf{p}}) \;=\; (-ip_0, \mathbf{p})\;. \tag{1058}$$

Die $x_0,\; x_0{}'$ und $p_0$-Integrationen wurden von der imaginären Achse zur reellen Achse gedreht. In der Rotation des Weges für die $p_0$-Integration wurde das $i\epsilon$ mit $\epsilon \;\to\; 0^+$ eingeführt. Dies ist notwendig, um die Polstellen in $p_0$ richtig zu umgehen für $p^2 \;=\; \mu^2$.

# Eichfelder — Komplexe skalare Felder und das elektromagnetische Feld

Hat das skalare Feld zwei reelle Komponenten $\varphi_1$ und $\varphi_2$, dann können wir ein komplexes skalares Feld definieren durch

$$\begin{aligned} \varphi &= (\varphi_1 + i\varphi_2)/\sqrt{2}, \\ \varphi^* &= (\varphi_1 - i\varphi_2)/\sqrt{2}. \end{aligned} \tag{1059}$$

Die Wirkung ist eine reelle Größe. Daher schreiben wir für die Lagrange–Dichte

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \varphi^*)(\partial^\mu \varphi) - m^2 \varphi^* \varphi. \tag{1060}$$

Betrachten wir nun $\varphi$ und $\varphi^*$ als unabhängige Felder, so führen die Euler–Lagrange Gleichungen auf zwei Klein–Gordon Gleichungen

$$\begin{aligned} (\Box + m^2)\varphi &= 0, \\ (\Box + m^2)\varphi^* &= 0. \end{aligned} \tag{1061}$$

Die Lagrange–Dichte ist offensichtlich invariant unter der globalen Transformation

$$\begin{aligned} \varphi &\to e^{-i\Lambda}\varphi, \\ \varphi^* &\to e^{i\Lambda}\varphi^*, \end{aligned} \tag{1062}$$

wobei $\Lambda$ eine reelle Konstante ist. Die Transformation (1062) nennt man eine Eichtransformation erster Art. In infinitesimaler Form folgt

$$\begin{aligned} \delta\varphi &= -i\Lambda\varphi, \\ \delta\varphi^* &= i\Lambda\varphi^*. \end{aligned} \tag{1063}$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} \delta(\partial_\mu\varphi) &= -i\Lambda(\partial_\mu\varphi), \\ \delta(\partial_\mu\varphi^*) &= i\Lambda(\partial_\mu\varphi^*). \end{aligned} \tag{1064}$$

Die Transformation (1062) enthält keine Raum–Zeit–Abhängigkeit, es ist eine rein interne Transformation. In unserer früheren Nomenklatur

$$\begin{aligned} \delta x^\mu &= X^\mu_\nu \delta\omega^\nu, \\ \delta\varphi &= \Phi_\mu \delta\omega^\mu \end{aligned} \tag{1065}$$

folgt für den betrachteten Spezialfall

$$\begin{aligned} \Phi &= -i\varphi, \\ \Phi^* &= i\varphi^*, \\ X &= 0. \end{aligned} \tag{1066}$$

Der erhaltene Noether–Strom bestimmt sich dann aus

$$j^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)}(-i\varphi) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi^*)}(i\varphi^*). \tag{1067}$$

Hierbei haben wir über die inneren Indizes von $\varphi$ effektiv summiert; dies ergibt getrennte Beiträge von $\varphi$ und $\varphi^*$. Mit der Lagrange–Dichte (1060) folgt explizit

$$j^\mu = i(\varphi^* \partial^\mu \varphi - \varphi \partial^\mu \varphi^*). \tag{1068}$$

Dieser Strom hat eine verschwindende Vierer–Divergenz

$$\partial_\mu j^\mu = 0. \tag{1069}$$

Die entsprechende Erhaltungsgröße ist die „Ladung“

$$Q = \int j^0 \, dV = i \int \left( \varphi^* \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \varphi \frac{\partial \varphi^*}{\partial t} \right) dV. \tag{1070}$$

Für diese Erhaltungsgröße gilt $dQ/dt = 0$.

Wir können die Eichtransformationen (1062) in geometrischer Form darstellen. Setzen wir den Ansatz für die Felder (1059) in die Lagrange–Dichte (1060) ein, so folgt

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi_1)(\partial^\mu \varphi_1) + \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi_2)(\partial^\mu \varphi_2) - \frac{1}{2} m^2 (\varphi_1^2 + \varphi_2^2). \tag{1071}$$

Wir führen nun einen Vektor in einem zweidimensionalen Raum mit den Basivektoren $\mathbf{i}$ und $\mathbf{j}$ ein durch

$$\mathbf{\Phi} = \mathbf{i}\frac{\varphi_1}{\sqrt{2}} + \mathbf{j}\frac{\varphi_2}{\sqrt{2}}. \tag{1072}$$

Damit lautet die Lagrange–Dichte

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \mathbf{\Phi}) \cdot (\partial^\mu \mathbf{\Phi}) - m^2 \mathbf{\Phi} \cdot \mathbf{\Phi}. \tag{1073}$$

Die Eichtransformation (1062) kann ausgedrückt werden als

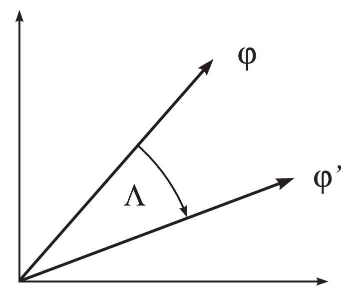
$$\begin{aligned} \varphi_1' + i\varphi_2' &= e^{-i\Lambda}(\varphi_1 + i\varphi_2), \\ \varphi_1' - i\varphi_2' &= e^{i\Lambda}(\varphi_1 - i\varphi_2). \end{aligned} \tag{1074}$$

Dies ist gleichbedeutend mit

$$\begin{aligned} \varphi_1' &= \varphi_1 \cos\Lambda + \varphi_2 \sin\Lambda, \\ \varphi_2' &= -\varphi_1 \sin\Lambda + \varphi_2 \cos\Lambda. \end{aligned} \tag{1075}$$

Die Gleichungen (1075) implizieren eine Rotation des Vektors $\mathbf{\Phi}$ um den Winkel $\Lambda$.
Rotationen in zwei Dimensionen bilden die Gruppe $SO(2)$. Auf der anderen Seite wurde die Transformation auch gleichbedeutend dargestellt durch $e^{i\Lambda}$ mit

$$e^{i\Lambda} \left( e^{i\Lambda} \right)^\dagger = 1. \tag{1076}$$




Figur 17: Eine Rotation des Feldes $\varphi$ im inneren Raum.

Dies entspricht einer unitären Matrix in einer Dimension und die zugehörige Gruppe ist $U(1)$. Die Gruppe $U(1)$ ist die Gruppe aller Zahlen der Form $e^{i\alpha} = \cos\alpha + i \sin\alpha$ und da gilt, $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$, ist der Raum der Gruppe ein Kreis.
Die Transformationen, die wir bislang besprochen haben, betreffen alle Raum–Zeit–Punkte gleichermaßen; sie gelten global. Dies widerspricht in der Philosophie dem Relativitätsprinzip, da auch kausal nicht verbundene Weltpunkte gleichzeitig dieselbe Transformation erfahren sollen. Wir weichen nun von dem globalen Charakter der $\Lambda$ ab und betrachten sie als beliebige Funktion $\Lambda(x^\mu)$ der Raum–Zeit. Dies nennen wir eine lokale Eichtransformation oder eine Eichtransformation der zweiten Art. Wieder betrachten wir infinitesimale Transformationen mit $\Lambda \ll 1$. Es folgt

$$\varphi \to \varphi - i\Lambda\varphi \tag{1077}$$

sowie

$$\begin{aligned} \delta\varphi &= -i\Lambda\varphi, \\ \partial_\mu\varphi &\to \partial_\mu\varphi - i(\partial_\mu\Lambda)\varphi - i\Lambda(\partial_\mu\varphi). \end{aligned} \tag{1078}$$

Damit bekommen wir

$$\delta(\partial_\mu\varphi) = -i\Lambda(\partial_\mu\varphi) - i(\partial_\mu\Lambda)\varphi \tag{1079}$$

und ebenso

$$\begin{aligned} \delta\varphi^* &= i\Lambda\varphi^*, \\ \delta(\partial_\mu\varphi^*) &= i\Lambda(\partial_\mu\varphi^*) + i(\partial_\mu\Lambda)\varphi^*. \end{aligned} \tag{1080}$$

Man beachte jeweils den Extraterm proportional zu $\partial_\mu\Lambda$. $\partial_\mu\varphi$ transformiert sich nicht kovariant, d.h. nicht in der selben Weise wie $\varphi$. Dieser Extraterm bewirkt auch, daß die Wirkung bei dieser lokalen Eichtransformation nicht invariant ist. Die Änderung der Lagrange–Dichte ist formal gegeben durch

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi}\delta\varphi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)}\delta(\partial_\mu\varphi) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi^*}\delta\varphi^* + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi^*)}\delta(\partial_\mu\varphi^*). \tag{1081}$$

Jetzt verwenden wir die Euler–Lagrange Gleichungen für $\partial\mathcal{L}/\partial\varphi$ und setzen die Variation $\delta\varphi$ und $\delta(\partial_\mu\varphi)$ ein.

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{L} &= \partial_\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)}\right](-i\Lambda\varphi) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)}(-i\Lambda\partial_\mu\varphi - i\varphi\partial_\mu\Lambda)\\ &\quad +\partial_\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi^*)}\right]i\Lambda\varphi^* + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi^*)}(i\Lambda(\partial_\mu\varphi^*) + i(\partial_\mu\Lambda)\varphi^*)\\ &= -i\Lambda\partial_\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)}\varphi\right] - i\,\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)}(\partial_\mu\Lambda)\varphi\\ &\quad +i\Lambda\partial_\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi^*)}\varphi^*\right] + i\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi^*)}(\partial_\mu\Lambda)\varphi^*\end{aligned} \tag{1082}$$

Der erste und dritte Term ist eine totale Divergenz, so daß die entsprechende Änderung in der Wirkung verschwindet. Mit der expliziten Form der Lagrange–Dichte (1060) erhalten wir die verbleibenden Terme

$$\delta\mathcal{L} = i(\partial_\mu\Lambda)(\varphi^*\partial^\mu\varphi - \varphi\partial^\mu\varphi^*) = j^\mu\partial_\mu\Lambda \tag{1083}$$

mit dem Strom (1068). Damit ist die Wirkung nicht invariant unter Eichtransformationen der zweiten Art. Um sie invariant zu machen, führen wir einen neuen Vierervektor $A_\mu$ ein, der direkt an den Strom $j^\mu$ koppelt. Dies führt zu einem Extraterm in der Lagrange–Dichte

$$\mathcal{L}_1 = -ej^\mu A_\mu = -ie(\varphi^*\partial^\mu\varphi - \varphi\partial^\mu\varphi^*)A_\mu. \tag{1084}$$

Die Kopplungskonstante $e$ ist so gewählt, daß $eA_\mu$ die gleichen Einheiten hat wie $\partial/\partial x^\mu$. Ferner fordern wir, daß unter Eichtransformationen zweiter Art gelten soll

$$A_\mu \to A_\mu + \frac{1}{e}\partial_\mu\Lambda. \tag{1085}$$

Damit bekommen wir

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{L}_1 &= -e(\delta j^\mu)A_\mu - ej^\mu(\delta A_\mu)\\ &= -e(\delta j^\mu)A_\mu - j^\mu\partial_\mu\Lambda\end{aligned} \tag{1086}$$

Der letzte Term hebt sich mit (1083) auf. Wir müssen noch den ersten Term in (1086) aufheben. Wir haben

$$\begin{aligned}\delta j^\mu &= i\delta(\varphi^*\partial^\mu\varphi - \varphi\partial^\mu\varphi^*)\\ &= i(i\Lambda\varphi^*\partial^\mu\varphi - \varphi^* i\Lambda\partial^\mu\varphi - i\varphi^*(\partial^\mu\Lambda)\varphi)\\ &\quad -i(-i\Lambda\varphi\partial^\mu\varphi^* + \varphi i\Lambda\partial^\mu\varphi^* + \varphi i(\partial^\mu\Lambda)\varphi^*)\\ &= 2\varphi^*\varphi\partial^\mu\Lambda.\end{aligned} \tag{1087}$$

Zusammengefaßt resultiert

$$\delta\mathcal{L} + \delta\mathcal{L}_1 = -2eA_\mu(\partial^\mu\Lambda)\varphi^*\varphi. \tag{1088}$$

Wir addieren noch einen dritten Term zu $\mathcal{L}$

$$\mathcal{L}_2 = e^2 A_\mu A^\mu \varphi^*\varphi. \tag{1089}$$

Für die Variation ergibt sich

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L}_2 &= 2e^2 A_\mu \delta A^\mu \varphi^*\varphi \\ &= 2eA_\mu(\partial^\mu\Lambda)\varphi^*\varphi \end{aligned} \tag{1090}$$

und damit zusammengefaßt das erwünschte Ergebnis:

$$\delta\mathcal{L} + \delta\mathcal{L}_1 + \delta\mathcal{L}_2 = 0. \tag{1091}$$

Die totale Lagrange–Dichte $\mathcal{L} + \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2$ ist nun invariant aufgrund der Tatsache, daß wir die Vektorfelder $A_\mu$ eingeführt haben, die direkt an den Strom des komplexen Feldes $\varphi$ koppeln. Nun sollte das Feld $A_\mu$ aber auch selbst zur Lagrange–Dichte mit einem Term $\mathcal{L}_3$ beitragen und damit dynamischen Charakter haben. Da bereits $\mathcal{L} + \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2$ invarinat ist, muß auch $\mathcal{L}_3$ selbst invariant sein. Für die Konstruktion von $\mathcal{L}_3$ definieren wir die vierdimensionale Rotation von $A_\mu$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \tag{1092}$$

Unter der Eichtransformation (1085) ist $F_{\mu\nu}$ offensichtlich selbst invariant. Die skalare Lagrange–Dichte $\mathcal{L}_3$ kann dann angegeben werden als

$$\mathcal{L}_3 = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}. \tag{1093}$$

Fassen wir alle Terme zusammen, so führt dies auf

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{tot}} &= \mathcal{L} + \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_3 \\ &= (\partial_\mu\varphi)(\partial^\mu\varphi^*) - ie(\varphi^*\partial^\mu\varphi - \varphi\partial^\mu\varphi^*)A_\mu + e^2 A_\mu A^\mu\varphi^*\varphi - m^2\varphi^*\varphi - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \\ &= (\partial_\mu\varphi + ieA_\mu\varphi)(\partial^\mu\varphi^* - ieA^\mu\varphi^*) - m^2\varphi^*\varphi - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}. \end{aligned} \tag{1094}$$

$F_{\mu\nu}$ kann als elektromagnetischer Feldstärketensor identifiziert werden. Das elektromagnetische Feld erscheint also ganz natürlich aufgrund der Forderung nach Invarianz der Wirkung bei Eichtransformationen der zweiten Art, d.h., bei lokalen (koordinatenabhängigen) Rotationen im inneren Raum des komplexen $\varphi$–Feldes. Die Eichpotentiale $A_\mu$ koppeln an den Strom $j_\mu$ mit der Kopplungsstärke $e$, welche die Ladung des Feldes $\varphi$ ist.

Wir sehen, daß wir die gewöhnliche Ableitung $\partial_\mu\varphi$ in der Lagrange–Dichte ersetzt haben durch die kovariante Ableitung $D_\mu\varphi$

$$\begin{aligned} D_\mu\varphi &= (\partial_\mu + ieA_\mu)\varphi\,, \\ (D_\mu\varphi)^* &= (\partial_\mu - ieA_\mu)\varphi^*\,. \end{aligned} \tag{1095}$$

Für die Variation der kovarianten Ableitung folgt sofort

$$
\begin{aligned}
\delta(D_\mu\varphi) &= \delta(\partial_\mu\varphi) + ie(\delta A_\mu)\varphi + ieA_\mu\delta\varphi \\
&= -i\Lambda(\partial_\mu\varphi + ieA_\mu\varphi) = -i\Lambda(D_\mu\varphi)\,. \qquad (1096)
\end{aligned}
$$

Dies ist gerade die Regel für kovariantes Transformationsverhalten. Die Eichfelder werden eingeführt, um Invarianz unter lokalen $U(1)$ Eichtransformationen zu gewärleisten. Die inhomogenen Maxwell–Gleichungen werden aus der totalen Lagrange–Dichte durch Variation nach den $A_\mu$ abgeleitet. Die Euler–Lagrange Gleichung

$$
\frac{\partial\mathcal{L}_{\text{tot}}}{\partial A_\mu} - \partial_\nu\left(\frac{\partial\mathcal{L}_{\text{tot}}}{\partial(\partial_\nu A_\mu)}\right) = 0 \qquad (1097)
$$

führt auf

$$
\begin{aligned}
\partial_\nu F^{\mu\nu} &= -ie(\varphi^*\partial^\mu\varphi - \varphi\partial^\mu\varphi^*) + 2e^2A^\mu|\varphi|^2 \\
&= -ie(\varphi^*D^\mu\varphi - \varphi(D^\mu\varphi)^*) \equiv -ej^\mu\,. \qquad (1098)
\end{aligned}
$$

Wir wissen, daß das elektromagnetische Feld masselos ist. Diesen Punkt wollen wir noch etwas betonen. Ein Masseterm in der Lagrange–Dichte hätte die Form

$$
\mathcal{L}_M = M^2A_\mu A^\mu\,. \qquad (1099)
$$

Ein derartiger Term ist nicht invariant unter Eichtransformationen. Die Ladung $e$ erscheint als Kopplungskonstante. Sie verbindet das $\varphi$–Feld und das elektromagnetische Feld mit der Kopplungsstärke $e$. Die elektrische Ladung $e$ hat aber auch gleichzeitig eine zweite Bedeutung als Erhaltungsgröße resultierend aus der nullten Komponente des Noether–Stroms. Dieser duale Charakter von Erhaltungsgröße und Kopplungsstärke ist eine Konsequenz des Eichprinzips. Immer wenn eine Erhaltungsgröße wie zum Beispiel Isospin oder Strangenes auftritt, können wir fragen, ob es zugehörige masselose Eichfelder gibt, die an Teilchen mit derartigen Quantenzahlen ankoppeln.

# Yang–Mills Felder

Wir betrachten nun nichtabelsche Eichtheorien. Das skalare Feld, das wir bislang behandelt haben, hatte zwei Komponenten, die durch Rotation in einer Ebene miteinander verbunden waren. Offensichtlich kann dies verallgemeinert werden durch die Annahme von drei Komponenten des $\Phi$–Feldes

$$\mathbf{\Phi} = (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3) \tag{1100}$$

in einem internen Raum. Rotationen in diesem Raum entsprechen wieder Eichtransformationen.

Die Hypothese, daß Isospin eine lokale Symmetrie ist, wurde zuerst von Yang und Mills 1954 behandelt und diskutiert. Diese Annahme ist heute ein wesentlicher Bestandteil des Standardmodells. Sie ist verknüpft mit der Wechselwirkung zwischen Quarks und der zugehörigen Farbeichsymmetrie sowie mit den vereinigten elektroschwachen Wechselwirkungen und dem zugehörigen schwachen Isospin und der Hyperladungseichsymmetrie.

Wir betrachten nun im internen dreidimensionalen Raum eine Rotation um die dritte Achse um den Winkel $\Lambda_3$

$$\begin{aligned}
\Phi_1' &= \cos\Lambda_3\,\Phi_1 + \sin\Lambda_3\,\Phi_2,\\
\Phi_2' &= -\sin\Lambda_3\,\Phi_1 + \cos\Lambda_3\,\Phi_2,\\
\Phi_3' &= \Phi_3\,.
\end{aligned} \tag{1101}$$

Für ein infinitesimales $\Lambda_3$ folgt

$$\begin{aligned}
\Phi_1' &= \Phi_1 + \Lambda_3\Phi_2,\\
\Phi_2' &= -\Lambda_3\Phi_1 + \Phi_2,\\
\Phi_3' &= \Phi_3\,.
\end{aligned} \tag{1102}$$

Dies folgt für $\mathbf{\Lambda} = (0,\,0,\,\Lambda_3)$ aus der allgemeinen Gleichung

$$\mathbf{\Phi} \longrightarrow \mathbf{\Phi}' = \mathbf{\Phi} - \mathbf{\Lambda} \times \mathbf{\Phi}\,, \tag{1103}$$

welche einer Rotation um den kleinen Winkel $\mathbf{\Lambda}$ entspricht. $|\mathbf{\Lambda}|$ ist der Winkel der Rotation, $\mathbf{\Lambda}/|\mathbf{\Lambda}|$ gibt die Achse der Rotation an. Somit haben wir auch

$$\delta\mathbf{\Phi} = -\mathbf{\Lambda} \times \mathbf{\Phi}\,. \tag{1104}$$

Diese drei Gleichungen entsprechen wieder einer Eichtransformation erster Art. Es tritt hierbei ein Vektorprodukt auf, das nicht kommutativ ist. Der nichtabelsche Charakter der Gruppe $O(3)$ der Rotation wird noch physikalische Konsequenzen haben.

Jetzt wollen wir den allgemeinen Fall von lokalen Rotationen um den Winkel $\mathbf{\Lambda}(x^\mu)$ diskutieren. Es gilt dann

$$\partial_\mu\mathbf{\Phi} \longrightarrow \partial_\mu\mathbf{\Phi}' = \partial_\mu\mathbf{\Phi} - (\partial_\mu\mathbf{\Lambda}) \times \mathbf{\Phi} - \mathbf{\Lambda} \times \partial_\mu\mathbf{\Phi} \tag{1105}$$

oder

$$\delta(\partial_\mu \mathbf{\Phi}) = -(\partial_\mu \mathbf{\Lambda}) \times \mathbf{\Phi} - \mathbf{\Lambda} \times \partial_\mu \mathbf{\Phi} \,. \tag{1106}$$

$\partial_\mu \mathbf{\Phi}$ transformiert sich nicht kovariant. Wieder wollen wir eine kovariante Ableitung konstruieren. Dies wird es erforderlich machen, ein Eichpotential analog zu $A_\mu$ einzuführen. Die kovariante Ableitung schreiben wir formal als

$$D_\mu \mathbf{\Phi} = \partial_\mu \mathbf{\Phi} + g\mathbf{W}_\mu \times \mathbf{\Phi} \,. \tag{1107}$$

$\mathbf{W}_\mu$ ist das Eichpotential analog zu $A_\mu$. Man sollte beachten, daß $\mathbf{W}_\mu$ ein Vektor im internen Raum ist, während $A_\mu$ nur eine Komponente in diesem Raum hatte. $g$ ist eine Kopplungskonstante analog zur elektrische Ladung $e$. Wir fordern nun als kovariantes Transformationsverhalten

$$\delta(D_\mu \mathbf{\Phi}) = -\mathbf{\Lambda} \times (D_\mu \mathbf{\Phi}) \,. \tag{1108}$$

Wie soll sich nun $\mathbf{W}_\mu$ transformieren, um diese Forderung zu befriedigen? Als Ansatz machen wir einige Annahmen. Zunächst ist $\mathbf{W}_\mu$ ein interner Vektor, so daß bei der Transformation wie in (1104) ein Term der Form $\mathbf{\Lambda} \times \mathbf{W}_\mu$ erwartet werden kann. Wir wissen, daß $A_\mu$ bei internen Transformationen einen Zusatzterm $(1/e)\partial_\mu \mathbf{\Lambda}$ erhält, ähnliches erwarten wir auch von $\mathbf{W}_\mu$. So setzen wir an

$$\mathbf{W}_\mu \longrightarrow \mathbf{W}_\mu - \mathbf{\Lambda} \times \mathbf{W}_\mu + \frac{1}{g}\partial_\mu \mathbf{\Lambda} \tag{1109}$$

oder

$$\delta \mathbf{W}_\mu = -\mathbf{\Lambda} \times \mathbf{W}_\mu + \frac{1}{g}\partial_\mu \mathbf{\Lambda} \,. \tag{1110}$$

Dies ergäbe zusammengefaßt

$$\begin{aligned} \delta(D_\mu \mathbf{\Phi}) &= \delta(\partial_\mu \mathbf{\Phi}) + g(\delta \mathbf{W}_\mu) \times \mathbf{\Phi} + g\mathbf{W}_\mu \times \delta\mathbf{\Phi} \\ &= -\mathbf{\Lambda} \times \partial_\mu \mathbf{\Phi} - (\partial_\mu \mathbf{\Lambda}) \times \mathbf{\Phi} - g(\mathbf{\Lambda} \times \mathbf{W}_\mu) \times \mathbf{\Phi} \\ &\quad +(\partial_\mu \mathbf{\Lambda}) \times \mathbf{\Phi} - g\mathbf{W}_\mu \times (\mathbf{\Lambda} \times \mathbf{\Phi}) \\ &= -\mathbf{\Lambda} \times \partial_\mu \mathbf{\Phi} - g\left[(\mathbf{\Lambda} \times \mathbf{W}_\mu) \times \mathbf{\Phi} + \mathbf{W}_\mu \times (\mathbf{\Lambda} \times \mathbf{\Phi})\right] \end{aligned} \tag{1111}$$

Wir nutzen nun die Vektoridentität aus

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C} + \mathbf{B} \times (\mathbf{A} \times \mathbf{C}) = \mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) \,. \tag{1112}$$

Damit schreiben wir die Terme in der eckigen Klammer in (1111) um. Es ergibt sich

$$\delta(D_\mu \mathbf{\Phi}) = -\mathbf{\Lambda} \times (\partial_\mu \mathbf{\Phi} + g\mathbf{W}_\mu \times \mathbf{\Phi}) = -\mathbf{\Lambda} \times D_\mu \mathbf{\Phi} \,. \tag{1113}$$

Dies ist das gewünschte Verhalten für eine kovariante Transformation. $\mathbf{W}_\mu$ ist das Analogon zu $A_\mu$. Was ist nun das Analogon zum Feldstärketensor $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$? Wir bezeichnen diese Größe mit $\mathbf{W}_{\mu\nu}$. $F_{\mu\nu}$ ist ein Skalar unter der Gruppe $O(2)$, $\mathbf{W}_{\mu\nu}$ jedoch ist ein Vektor unter der Gruppe $O(3)$ und wird sich daher wie $\mathbf{\Phi}$ transformieren.

$$\delta(\mathbf{W}_{\mu\nu}) = -\mathbf{\Lambda} \times \mathbf{W}_{\mu\nu} \,. \tag{1114}$$

Der Ansatz $\mathbf{W}_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathbf{W}_\nu - \partial_\nu \mathbf{W}_\mu$ kann dies nicht befriedigen, denn es folgt

$$\begin{aligned}\delta(\partial_\mu \mathbf{W}_\nu - \partial_\nu \mathbf{W}_\mu) &= \partial_\mu(-\mathbf{\Lambda} \times \mathbf{W}_\nu + \frac{1}{g}\partial_\nu \mathbf{\Lambda}) - \partial_\nu(-\mathbf{\Lambda} \times \mathbf{W}_\mu + \frac{1}{g}\partial_\mu \mathbf{\Lambda}) \\ &= -\mathbf{\Lambda} \times (\partial_\mu \mathbf{W}_\nu - \partial_\nu \mathbf{W}_\mu) - ((\partial_\mu \mathbf{\Lambda}) \times \mathbf{W}_\nu - (\partial_\nu \mathbf{\Lambda}) \times \mathbf{W}_\mu) \quad (1115)\end{aligned}$$

Der letzte Term ist unerwünscht und sollte daher weggehoben werden. Ferner stellen wir fest, daß gilt

$$\begin{aligned}\delta(g\mathbf{W}_\mu \times \mathbf{W}_\nu) &= g(-\mathbf{\Lambda} \times \mathbf{W}_\mu + \frac{1}{g}\partial_\mu \mathbf{\Lambda}) \times \mathbf{W}_\nu \\ &\quad + g\mathbf{W}_\mu \times (-\mathbf{\Lambda} \times \mathbf{W}_\nu + \frac{1}{g}\partial_\nu \mathbf{\Lambda})\,. \end{aligned} \quad (1116)$$

Der erste und der dritte Term können wieder zusammengefaßt werden

$$\delta(g\mathbf{W}_\mu \times \mathbf{W}_\nu) = -g\mathbf{\Lambda} \times (\mathbf{W}_\mu \times \mathbf{W}_\nu) + ((\partial_\mu \mathbf{\Lambda}) \times \mathbf{W}_\nu - (\partial_\nu \mathbf{\Lambda}) \times \mathbf{W}_\mu)\,. \quad (1117)$$

Der zweite Term ist der gleiche wie in (1115), somit definieren wir

$$\mathbf{W}_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathbf{W}_\nu - \partial_\nu \mathbf{W}_\mu + g\mathbf{W}_\mu \times \mathbf{W}_\nu\,. \quad (1118)$$

Jetzt transformiert sich $\mathbf{W}_{\mu\nu}$ wie gefordert entsprechend der Gleichung (1114). Die Feldstärke $\mathbf{W}_{\mu\nu}$ ist ein Vektor, $\mathbf{W}_{\mu\nu}\mathbf{W}^{\mu\nu}$ bildet einen Skalar, und wir können in Analogie zur skalaren Feldtheorie die Lagrange–Dichte ansetzen als

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\,(D_\mu \mathbf{\Phi}) \cdot (D^\mu \mathbf{\Phi}) - \frac{m^2}{2}\mathbf{\Phi} \cdot \mathbf{\Phi} + \frac{1}{4}\mathbf{W}_{\mu\nu} \cdot \mathbf{W}^{\mu\nu}\,. \quad (1119)$$

Die Bewegungsgleichungen folgen wieder durch Variation der Lagrange–Dichte. Die Euler-Lagrange Gleichungen lauten

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{W}^i_\mu} = \partial_\nu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \mathbf{W}^i_\mu)}\right]\,, \quad (1120)$$

wobei $i$ ein innerer Index ist. Es resultiert explizit

$$\partial^\nu \mathbf{W}_{\mu\nu} + g\mathbf{W}^\nu \times \mathbf{W}_{\mu\nu} = g[(\partial_\mu \mathbf{\Phi}) \times \mathbf{\Phi} + g(\mathbf{W}_\mu \times \mathbf{\Phi}) \times \mathbf{\Phi}]\,. \quad (1121)$$

Berücksichtigen wir die Definition der kovarianten Ableitung, so erhalten wir

$$D^\nu \mathbf{W}_{\mu\nu} = g(D_\mu \mathbf{\Phi}) \times \mathbf{\Phi} \equiv g\mathbf{J}_\mu\,. \quad (1122)$$

Dies ist das Analogon zu den inhomogenen Maxwell–Gleichungen. $\mathbf{W}_{\mu\nu}$ ist das Isospin–Eichfeld. $\mathbf{J}_\mu$ ist der Quell– oder Materieterm. Während jedoch die Maxwell–Gleichungen linear in $A_\mu$ sind, ist die Gleichung (1122) nichtlinear in $\mathbf{W}_\mu$. In Abwesenheit äußerer Quellen wird aus den Maxwellschen Gleichungen

$$\partial^\nu F_{\mu\nu} = 0 \quad (1123)$$

und somit

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E} &= 0\,, \\ \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \mathrm{rot}\,\mathbf{B} &= 0\,. \end{aligned} \quad (1124)$$

Für das nichtabelsche Eichfeld gilt jedoch

$$D^\nu \mathbf{W}_{\mu\nu} = 0 \tag{1125}$$

und somit

$$\partial^\nu \mathbf{W}_{\mu\nu} = -g\mathbf{W}^\nu \times \mathbf{W}_{\mu\nu} \,. \tag{1126}$$

Damit wirkt das $\mathbf{W}_{\mu\nu}$–Feld als Quelle für sich selbst. Ferner erwähnen wir, daß auch im nichtabelschen Fall das Isospin–Feld $\mathbf{W}_{\mu\nu}$ masselos sein sollte. Betrachten wir einen möglichen Massenterm in der Lagrange–Dichte

$$\mathcal{L}_m = m^2\, \mathbf{W}_\mu \cdot \mathbf{W}^\mu \,, \tag{1127}$$

so stellen wir erneut fest, daß dieser Term nicht eichinvariant wäre. Die Bewegungsgleichung würde hiermit lauten

$$D^\nu \mathbf{W}_{\mu\nu} = g\mathbf{J}_\mu + m^2 \mathbf{W}_\mu \,. \tag{1128}$$

# Ein spezielles Gauß–Integral im Komplexen

Wir beweisen die Integralformel

$$\int dz_1\, dz_1^* \dots dz_N dz_N^*\, e^{-\vec{z}^\dagger \hat{A}\vec{z}} = (2\pi)^N e^{-\mathrm{Tr}\ln \hat{A}}\ . \tag{1129}$$

Die hermitesche Matrix $\hat{A}$ kann durch die unitäre Matrix $\hat{U}$ diagonalisiert werden. Es sei $\vec{\tilde{z}} = \hat{U}\vec{z}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\int dz_1\, dz_1^* \dots dz_N dz_N^*\, e^{-\vec{z}^\dagger \hat{A}\vec{z}} &= \int d\tilde{z}_1\, d\tilde{z}_1^* \dots d\tilde{z}_N d\tilde{z}_N^*\ \exp\left\{-\sum_{i=1}^N \alpha_i |\tilde{z}_i|^2\right\} \\ &= \prod_{i=1}^N \int d\tilde{z}_i\, d\tilde{z}_i^* e^{-\alpha_i|\tilde{z}_i|^2},\end{aligned} \tag{1130}$$

wobei $\alpha_i$ die Elemente der zu $\hat{A}$ zugehörigen Diagonalmatrix sind. Das Integrationsmaß ist invariant unter der unitären Transformation. Damit folgt für jeden Faktor in (1130)

$$\begin{aligned}\int d\tilde{z}\, d\tilde{z}^* e^{-\alpha|\tilde{z}|^2} &= 2\int d\mathrm{Re}\tilde{z}\, d\mathrm{Im}\,\tilde{z}\, e^{-\alpha(\mathrm{Re}\tilde{z})^2} e^{-\alpha(\mathrm{Im}\tilde{z})^2} \\ &= 2\left(\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-\alpha x^2}\right)^2 = 2\,\frac{\pi}{\alpha}\end{aligned} \tag{1131}$$

und zusammengefaßt

$$\int dz_1\, dz_1^* \dots dz_N dz_N^*\, e^{-\vec{z}^\dagger \hat{A}\vec{z}} = \prod_{i=1}^N \frac{2\pi}{\alpha_i} = \frac{(2\pi)^N}{\det \hat{A}} = (2\pi)^N e^{-\mathrm{Tr}\ln \hat{A}}\ . \tag{1132}$$

# Konstruktion des Pfadintegrals in der Feldtheorie

Wir betrachten ein skalares Feld $\phi(\vec{x},t)$ und wollen nun das spezielle Übergangsmatrixelement $<\phi'',t''|\phi',t'>$ berechnen. Wir diskretisieren den Konfigurationsraum in $M$ Zellen $\vec{x}_l$ mit $l=1,...,M$, sowie die Zeitkoordinate in $N$ Intervalle durch Wahl der Stützpunkte $t_n$ mit $n=0,\ldots,N$. Damit ist $t_0=t'$, $t_1=t'+\epsilon$, ..., $t_N=t''$. Dann existiert in jeder der Zellen eine Basis von Eigenzuständen des Heisenberg–Feldoperators $\hat{\phi}_{l\,n}\equiv\hat{\phi}(\vec{x}_l,t_n)$, die die Vollständigkeitsrelation

$$\int d\phi_{l\,n}\,|\phi_l,t_n><\phi_l,t_n|=1 \tag{1133}$$

erfüllt.

Die Übergangsamplitude läßt sich in ein Produkt über die Amplituden der $M$ Zellen zerlegen. Anschließend wird die Zeitentwicklung diskretisiert

$$\begin{aligned}
<\phi'',t''|\phi',t'> &\simeq <\phi_1'',\phi_2'',\ldots,\phi_M'',t''|\phi_1',\phi_2',\ldots,\phi_M',t'> \\
&= \prod_{l=1}^{M}<\phi_l'',t''|\phi_l',t'> \\
&= \prod_{l=1}^{M}\int d\phi_{l\,N-1}\ldots\int d\phi_{l\,2}\int d\phi_{l\,1}<\phi_l'',t''|\phi_{l\,N-1},t_{N-1}>\ldots \\
&\quad <\phi_{l\,2},t_2|\phi_{l\,1},t_1><\phi_{l\,1},t_1|\phi',t'>\ .
\end{aligned} \tag{1134}$$

Macht man $N$ sehr groß, so genügt es, die Übergangsamplituden für infinitesimal benachbarte Zeitpunkte zu kennen

$$\begin{aligned}
<\phi_{l\,n+1},t_{n+1}|\phi_{l\,n},t_n> &= <\phi_{l\,n+1}|\exp\left\{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}\epsilon\right\}|\phi_{l\,n}> \\
&= <\phi_{l\,n+1}|1-\frac{i}{\hbar}\hat{H}\epsilon|\phi_{l\,n}>+\mathcal{O}(\epsilon^2).
\end{aligned} \tag{1135}$$

Der Hamilton-Operator der diskretisierten Theorie (endliches $M$) lautet

$$\hat{H}(\hat{\Pi}_1,...,\hat{\Pi}_M;\,\hat{\phi}_1,...,\hat{\phi}_M)=\sum_{l=1}^{M}\Delta V\ \hat{\mathcal{H}}(\hat{\Pi}_l,\hat{\phi}_l) \tag{1136}$$

und hängt von den diskretisierten Werten des konjugierten Feldoperators

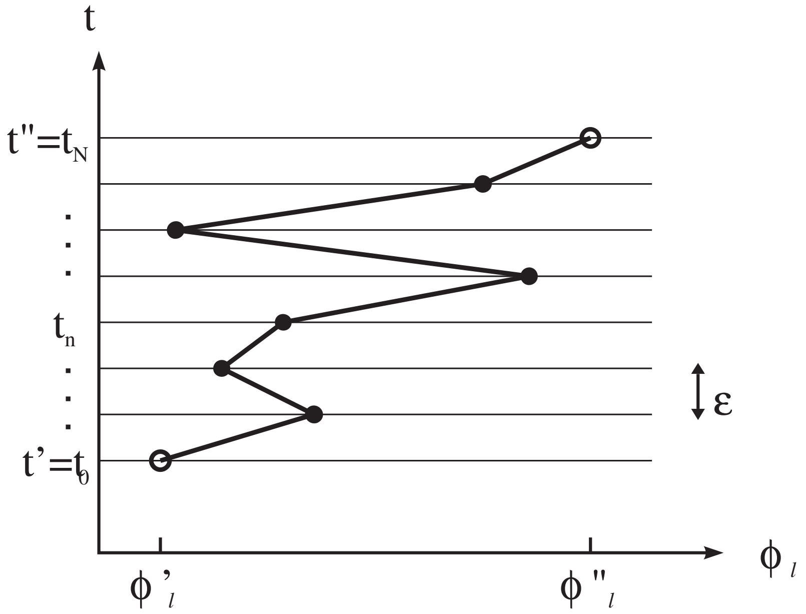
$$\hat{\Pi}_l=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\hat{\phi}}_l} \tag{1137}$$

ab. Zur Auswertung von (1135) wird wieder ein vollständiger Satz von Eigenzuständen

$$\hat{\Pi}_l|\Pi_{l\,n}>=\ \Pi_{l\,n}|\Pi_{l\,n}> \tag{1138}$$

mit

$$\int\frac{\Delta V d\Pi_{l\,n}}{2\pi\hbar}\,|\Pi_{l\,n}><\Pi_{l\,n}|=1 \tag{1139}$$




Figur 18: Ein Pfad für die Entwicklung der Feldfunktion in einer Zelle $l$ des Konfigurationsraumes.

eingeschoben. Dann ergibt das Matrixelement des Hamilton-Operators

$$
\begin{aligned}
& < \phi_{l\,n+1}|\hat{H}(\hat{\Pi}, \hat{\phi})|\phi_{l\,n} > \\
= & \int \frac{\Delta V d\Pi_{l\,n}}{2\pi\hbar} < \phi_{l\,n+1}|\Pi_{l\,n} >< \Pi_{l\,n}|\hat{H}|\phi_{l\,n} > \\
= & \int \frac{\Delta V d\Pi_{l\,n}}{2\pi\hbar} < \phi_{l\,n+1}|\Pi_{l\,n} >< \Pi_{l\,n}|\phi_{l\,n} > \Delta V\ \mathcal{H}(\Pi_{l\,n}, \phi_{l\,n}).
\end{aligned} \tag{1140}
$$

Man beachte, daß hier nicht mehr der Operator $\hat{\mathcal{H}}$ der Hamilton-Dichte auftritt. Als Verallgemeinerung von

$$< q|p > = \ \exp(ipq/\hbar) \tag{1141}$$

in der Quantenmechanik verwenden wir nun

$$< \phi_{l\,n}|\Pi_{l\,n} > = \ \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\Delta V\ \Pi_{l\,n}\phi_{l\,n}\right\} . \tag{1142}$$

Im Kontinuumslimes wird dies

$$< \phi|\Pi > = \ \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\int d^3x\ \Pi(\vec{x})\phi(\vec{x})\right\} . \tag{1143}$$

Das Überlapp-Matrixelement in (1135) wird damit

$$
\begin{aligned}
< \phi_{l\,n+1}, t_{n+1}|\phi_{l\,n}, t_n > \ = & \int \frac{\Delta V d\Pi_{l\,n}}{2\pi\hbar} \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\Delta V\ \Pi_{l\,n}(\phi_{l\,n+1} - \phi_{l\,n})\right\} \\
& \times \left(1 - \frac{i}{\hbar}\epsilon\ \Delta V\ \mathcal{H}_{l\,n}\right) + \mathcal{O}(\epsilon^2)
\end{aligned} \tag{1144}
$$

mit der Abkürzung $\mathcal{H}_{l\,n} \equiv \mathcal{H}(\Pi_{l\,n}, \phi_{l\,n})$. Damit bekommen wir schließlich

$$\begin{aligned} < \phi'', t''|\phi', t' > \;&\simeq\; \prod_{l=1}^{M}\left(\prod_{n=1}^{N-1}\int d\phi_{l\,n}\right)\left(\prod_{n=0}^{N-1}\int\frac{\Delta V d\Pi_{l\,n}}{2\pi\hbar}\right) \\ &\times \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{l=1}^{M}\Delta V\;\Pi_{l\,n}(\phi_{l\,n+1}-\phi_{l\,n})\right\} \\ &\times \exp\left\{-\frac{i}{\hbar}\sum_{n=0}^{N-1}\epsilon\sum_{l=1}^{M}\Delta V\;\mathcal{H}_{l\,n}\right\}. \end{aligned} \tag{1145}$$

Im Kontinuums-Grenzfall führt dies auf das Ergebnis

$$\begin{aligned} < \phi'', t''|\phi', t' > &= \lim_{V\to\infty}\lim_{M\to\infty}\lim_{N\to\infty}\prod_{l=1}^{M}\left(\prod_{n=1}^{N-1}\int d\phi_{l\,n}\right)\left(\prod_{n=0}^{N-1}\int\frac{\Delta V d\Pi_{l\,n}}{2\pi\hbar}\right) \\ &\times \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{l=1}^{M}\Delta V\;\Pi_{l\,n}(\phi_{l\,n+1}-\phi_{l\,n})\right\} \\ &\times \exp\left\{-\frac{i}{\hbar}\sum_{n=0}^{N-1}\epsilon\sum_{l=1}^{M}\Delta V\mathcal{H}_{l\,n}\right\} \\ &\equiv \int\mathcal{D}\phi\int\mathcal{D}\Pi\;\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\int_{t'}^{t''}d\tau\int d^3x\;\Big(\Pi\partial_0\phi-\mathcal{H}(\Pi,\phi)\Big)\right\}\;. \end{aligned} \tag{1146}$$

Der Grenzübergang besteht damit aus drei Schritten

$$\begin{aligned} &\lim_{N\to\infty} \quad \text{unter der Bedingung} \quad N\epsilon = t''-t' \quad \text{fest,} \\ &\lim_{M\to\infty} \quad \text{unter der Bedingung} \quad M\Delta V = V \quad \text{fest,} \\ &\lim_{V\to\infty} \quad . \end{aligned}$$

Das Phasenraumintegral (1146) läßt sich auf die Feynmansche Form bringen, wenn die Hamilton-Funktion nur quadratisch von den konjugierten Feld $\Pi$ abhängt. Wir nehmen an, daß $\mathcal{H}$ die Standardform hat

$$\mathcal{H}(\Pi,\phi) = \frac{1}{2\hbar^2}\Pi^2 + \frac{1}{2}\hbar^2(\vec{\nabla}\phi)^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2 + V(\phi) = \frac{1}{2\hbar^2}\Pi^2 + \mathcal{H}'\,. \tag{1147}$$

Dann lautet die Übergangsamplitude für benachbarte Zeitstützpunkte in erster Ordnung

$$\begin{aligned} < \phi_{l\,n+1}, t_{n+1}|\phi_{l\,n}, t_n > \;&\simeq\; \int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\Delta V d\Pi_{l\,n}}{2\pi\hbar} \\ &\times \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\epsilon\,\Delta V\left(\Pi_{l\,n}\dot{\phi}_{l\,n} - \frac{1}{2\hbar^2}\Pi_{l\,n}^2 - \mathcal{H}'_{l\,n}\right)\right\}. \end{aligned} \tag{1148}$$

In $\mathcal{H}'_{l\,n}$ sind die $\Pi$-unabhängigen Terme der Hamilton-Dichte zusammengefaßt. Gleichung (1148) ist wieder ein Gaußsches Integral, das sich durch quadratische Ergänzung auf die Standardform bringen läßt.

$$\begin{aligned} < \phi_{l\,n+1}, t_{n+1}|\phi_{l\,n}, t_n > \;&\simeq\; \frac{\Delta V}{2\pi\hbar}\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\epsilon\Delta V\left(\frac{1}{2}\hbar^2\dot{\phi}_{l\,n}^2 - \mathcal{H}'_{l\,n}\right)\right\} \\ &\times \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\Pi'\exp\left\{-\frac{i\epsilon\Delta V}{2\hbar^3}\Pi'^2\right\} \\ &= \left(\frac{2\pi i\epsilon}{\Delta V\hbar}\right)^{-1/2}\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\epsilon\,\Delta V\left(\hbar^2\dot{\phi}_{l\,n}^2 - \mathcal{H}'_{l\,n}\right)\right\}\;. \end{aligned} \tag{1149}$$

Für das Übergangselement folgt damit schließlich

$$\begin{aligned} < \phi'', t'' | \phi', t' > &= \lim_{V\to\infty} \lim_{M\to\infty} \lim_{N\to\infty} \prod_{l=1}^{M} \prod_{n=1}^{N-1} \int d\phi_{l\,n} \left( \frac{2\pi i \epsilon}{\Delta V \hbar} \right)^{-N/2} \\ &\quad \times \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \sum_{n=0}^{N-1} \epsilon \sum_{l=1}^{M} \Delta V \mathcal{L}_{l\,n} \right\} \\ &\equiv \mathcal{N} \int \mathcal{D}\phi \, \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int d^4x \, \mathcal{L}(\phi, \dot{\phi}) \right\} . \end{aligned} \tag{1150}$$

# Spinor – Feldtheorie

Wir gehen aus von der Dirac–Gleichung

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\,\psi(x) \;=\; 0\;. \tag{1151}$$

Es gelten für die 4×4-Matrizen $\gamma^\mu$ die folgenden Antikommutatorrelationen

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} \;\equiv\; \gamma^\mu\,\gamma^\nu + \gamma^\nu\,\gamma^\mu \;=\; 2\,g^{\mu\nu}\;. \tag{1152}$$

Das hermitesch konjugierte Feld

$$\psi^+(x) \;\equiv\; \psi^{*T}(x) \tag{1153}$$

gehorcht dann der Gleichung

$$\psi^+(x)\,\left(-i\;\overleftarrow{\partial}_\mu\;\gamma^{\mu+} - m\right) \;=\; 0\;. \tag{1154}$$

Damit befriedigt

$$\bar{\psi}(x) \;\equiv\; \psi^+(x)\,\hat{A} \tag{1155}$$

die Gleichung

$$\bar{\psi}(x)\,\left(-i\;\overleftarrow{\partial}_\mu\;\gamma^{\mu} - m\right) \;=\; 0\;, \tag{1156}$$

vorausgesetzt die Matrix $\hat{A}$ erfüllt die Relation

$$\gamma^{\mu+}\,\hat{A} \;=\; \hat{A}\,\gamma^\mu\;. \tag{1157}$$

Wir betrachten die Darstellung

$$\gamma^0 \;=\; \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & -I_2 \end{pmatrix}\;, \qquad \gamma^i \;=\; \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}\;, \qquad i \;=\; 1,2,3. \tag{1158}$$

Es gilt dann in dieser Darstellung

$$\begin{aligned} \gamma^0 &\;=\; \gamma^{0+}\;, \\ \gamma^i &\;=\; -\gamma^{i+}\;. \end{aligned} \tag{1159}$$

In dieser Darstellung können wir also wählen

$$\hat{A} \;=\; \gamma^0 \;=\; \hat{A}^+\;. \tag{1160}$$

Dann ist

$$\mathcal{L} \;=\; \bar{\psi}(x)\,(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\,\psi(x) \tag{1161}$$

die entsprechende Lagrange–Dichte. Die Variation nach $\bar{\psi}$ führt dann sofort auf die Dirac–Gleichung für $\psi(x)$. Variation in bezug auf $\psi$ ergibt

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi)} \;=\; \bar{\psi}(x)\,i\gamma^\mu \tag{1162}$$

und

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} \;=\; -m\,\bar{\psi}(x)\;. \tag{1163}$$

Dies ergibt die Dirac–Gleichung für $\bar{\psi}$.

Bei Poincaré–Transformationen $x \;\to\; x' \;=\; \Lambda x + a$ transformiert sich das Spinorfeld entsprechend

$$\psi(x) \;\to\; \psi'(x') \;=\; S(\Lambda)\,\psi(x)\;, \tag{1164}$$

wobei $S$ noch spezifiziert werden muß. Beispielsweise gilt für die infinitesimalen Lorentz–Transformationen $x^\mu \;\to\; x^\mu + \epsilon^{\mu\nu}x_\nu$ mit $\epsilon^{\mu\nu} \;=\; -\epsilon^{\nu\mu}$

$$S(\Lambda) \;=\; 1 - \frac{1}{4} i\,\epsilon^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu} \tag{1165}$$

mit

$$\sigma_{\mu\nu} \;=\; \frac{i}{2}\,(\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu)\;. \tag{1166}$$

Bei einer infinitesimalen Translation ist $\psi$ invariant, wie die skalare Theorie auch. Der Energie–Impuls Tensor lautet

$$\begin{aligned} T^\mu_\lambda \;&=\; \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi)}\,\partial_\lambda\psi + \partial_\lambda\bar{\psi}\,\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \bar{\psi})} - \delta^\mu_\lambda\,\mathcal{L} \\ &=\; \bar{\psi} i \gamma^\mu \partial_\lambda \psi\;, \end{aligned} \tag{1167}$$

denn $\mathcal{L}$ ist aufgrund der Dirac–Gleichung null.

Wir können auch $\psi$ wieder in die Fourier–Komponenten zerlegen. Es gibt vier unabhängige Lösungen der Dirac–Gleichung: zwei für positive Energie $u(k,\pm s)$ und zwei für negative Energie $v(k,\pm s)$. Daher können wir allgemein ansetzen

$$\psi(x) \;=\; \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\,\frac{1}{2k_0}\,\sum_{\pm s}\Big[a(k,s)\,u(k,s)\,e^{-ikx} + b^*(k,s)\,v(k,s)\,e^{ikx}\Big]\;. \tag{1168}$$

$u$ und $v$ befriedigen jeweils die Gleichungen

$$\begin{aligned} (\not{k} - m)\,u(k,\pm s) \;&=\; 0\;, \\ (\not{k} + m)\,v(k,\pm s) \;&=\; 0\;. \end{aligned} \tag{1169}$$

Dabei haben wir die übliche Feynman–Notation verwendet

$$\not{p} \;\equiv\; \gamma^\mu\,p_\mu\;. \tag{1170}$$

Der Vektor $s$ ist der kovariante Spinvektor mit

$$\begin{aligned} s^2 \;&=\; -1\;, \\ s\cdot k \;&=\; 0\;. \end{aligned} \tag{1171}$$

Im Ruhesystem $s = (0, \mathbf{n})$ spezifiziert $s$ die Spinrichtung. $u$ und $v$ befriedigen damit

$$
\begin{aligned}
\gamma_5 \not{s}\, u(k, \pm s) &= \pm u(k, \pm s) \,, \\
\gamma_5 \not{s}\, v(k, \pm s) &= \pm v(k, \pm s) \,.
\end{aligned} \tag{1172}
$$

Die Normierung lautet

$$
\bar{u}(k, s)\, \gamma_\mu\, u(k, s) \;=\; \bar{v}(k, s)\, \gamma_\mu\, v(k, s) \;=\; 2k_\mu \,. \tag{1173}
$$

Es ist

$$
\gamma_5 \;\equiv\; i\, \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 \,. \tag{1174}
$$

In der obigen Standarddarstellung der Dirac–Matrizen gilt

$$
\gamma_5 \;=\; \begin{pmatrix} 0 & I_2 \\ I_2 & 0 \end{pmatrix} \,. \tag{1175}
$$

Es gilt ferner

$$
\bar{\psi}(x) \;=\; \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\, \frac{1}{2k_0} \sum_{\pm s} \left[ b(k, s)\, \bar{v}(k, s)\, e^{-ikx} + a^*(k, s)\, \bar{u}(k, s)\, e^{ikx} \right] \tag{1176}
$$

mit $\bar{v} \equiv v^+ \gamma^0$ und $\bar{u} \equiv u^+ \gamma^0$. Der Energie–Impuls Vektor lautet

$$
\begin{aligned}
P_\mu &= \int d^3x\, T^0_\mu \\
&= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\, \frac{1}{2k_0} \sum_{\pm s} \left[ a^*(k, s)\, a(k, s)\, k_\mu - b(k, s)\, b^*(k, s)\, k_\mu \right] .
\end{aligned} \tag{1177}
$$

An dieser Stelle müssen wir eine Eigenheit der Spinorfeldtheorie diskutieren. Wir können wieder die Größe $(2\pi)^{-3}\, (2k_0)^{-1}\, a^*(k, s)\, a(k, s)\, d^3k$ als die Zahl der “a”-Moden interpretieren mit dem Spin $s$ und Impuls im Element $d^3k$ um $\mathbf{k}$ wie im skalaren Fall. Die Schwierigkeit bereitet der zweite Term, denn die “b”-Moden haben negative Energie. In der traditionellen kanonischen Feldtheorie werden diese negativen Energiezustände als positive Energie Antiteilchen–Zustände betrachtet.

# Grassmann–Variable

Wir folgen einem Vorschlag von Berezin und betrachten die Größen $a,\ a^*,\ b,\ b^*$ als antikommutierende $c$-Zahlen. Alle Paare dieser Größen antikommutieren

$$\begin{aligned}\{a, a'\} &= \{a, a'^*\} = \{a, b'\} = \{a, b'^*\} \\ &= \{a^*, a'^*\} = \{a^*, b'\} = \{a^*, b'^*\} = \{b, b'\} \\ &= \{b, b'^*\} = \{b^*, b'^*\} = 0 \end{aligned} \tag{1178}$$

mit $a = a(k, s)$ und $a' = a(k', s')$. Die antikommutierenden Variablen bilden eine Grassmann–Algebra. In der skalaren Feldtheorie waren $a,\ a^*$ gewöhnliche $c$-Zahlen. Die Einführung der Grassmann–Variablen wird hier durch das Spin-Statistik Theorem bewirkt. Damit wird auch die Energie im Fall von Spinoren eine Grassmann–Variable. Der Begriff “positiv” macht dabei keinen Sinn. Spin–Felder sind *keine* klassischen Felder. Die observable Energie ist ein Erwartungswert der Energie.

Die Verallgemeinerung der Spinorfelder zur Quantenfeldtheorie wird durch Funktionalintegration über klassische Spinorfeldkonfigurationen durchgeführt. Dazu müssen wir Differentiation und Integration in bezug auf Grassmann–Variable einführen. Wir betrachten zwei Variable

$$\{a, a\} = \{a, b\} = \{b, b\} = 0 \ . \tag{1179}$$

Damit gilt auch

$$a^2 = b^2 = 0 \ . \tag{1180}$$

Ohne Verlust der Allgemeinheit können wir jede Funktion $f(a, b)$ schreiben als

$$\begin{aligned} f(a, b) &= f_0 + f_1\, a + \tilde{f}_1\, b + f_2\, ab \\ &= f_0 + f_1\, a + \tilde{f}_1\, b - f_2\, ba \ , \end{aligned} \tag{1181}$$

wobei $f_0,\ f_1,\ \tilde{f}_1$ und $f_2$ gewöhnliche $c$-Zahlen sind. Beispielsweise gilt auch

$$e^{ax} = 1 + ax \ , \tag{1182}$$

wenn $a$ eine Grassmann–Variable ist.

Differentiation erfolgt offensichtlich durch

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial a} &= f_1 + f_2\, b \ , \\ \frac{\partial f}{\partial b} &= \tilde{f}_1 - f_2\, a \ . \end{aligned} \tag{1183}$$

Für die zweite Ableitung gilt

$$\frac{\partial^2 f}{\partial a\, \partial b} = -\frac{\partial^2 f}{\partial b\, \partial a} = -f_2 \ . \tag{1184}$$

Ähnlich können wir die Integration über Grassmann–Variable definieren. Die infinitesimale Größen $da$ und $db$ sind ebenfalls Grassmann–Variable

$$\{a, da\} = \{a, db\} = \{da, b\} = \{da, db\} = 0 \ . \tag{1185}$$

Multiple Integrale werden sukzessive ausgeführt

$$\int da\, db\, f(a,b) \;\equiv\; \int da \left( \int db\, f(a,b) \right) \;. \tag{1186}$$

Dazu müssen wir nur die elementaren Integrale $\int da$ und $\int da\, a$ kennen. Nun ist

$$\left( \int da \right)^2 \;=\; \left( \int da \right) \left( \int db \right) \;=\; \int da\, db \;=\; -\int db\, da \;=\; -\left( \int da \right)^2 . \tag{1187}$$

Daraus folgt

$$\int da \;=\; 0 \;. \tag{1188}$$

Da es keine weitere Skala für Grassmann–Variable gibt, können wir frei definieren

$$\int da\, a \;=\; 1. \tag{1189}$$

Wir sehen, daß die Integration die gleiche Wirkung hat wie die Differentiation

$$\int da\, db\, f(a,b) \;=\; -f_2 \;=\; \frac{\partial^2 f}{\partial a\, \partial b} \;. \tag{1190}$$

Die Verallgemeinerung zu einer endlichen Zahl von Grassmann–Variablen ist offensichtlich. Auch die Funktionalableitung und Integration ist ähnlich. Es gibt keinen Unterschied zwischen bestimmter und unbestimmter Integration. Es ist beispielsweise

$$\int e^{ax}\, da \;=\; \int (1 + ax)\, da \;=\; x \;. \tag{1191}$$

# Weitere Bemerkungen zu Grassmann–Variablen

## Differentiation

### Differentiation nach Grassmann-Variablen

Bei "herkömmlichen" Variablen ist die Ableitung so definiert, daß

$$[\frac{\partial}{\partial x_i}, x_j] = \delta_{ij} \tag{1192}$$

und damit

$$\frac{\partial x_j}{\partial x_i} = \delta_{ij} \quad . \tag{1193}$$

Grassmann-Zahlen dagegen sind *antikommutierende* Objekte — man nennt sie oft auch "fermionische Objekte" —, und deshalb *definiert* man:

$$\{\frac{\partial}{\partial \theta_p}, \theta_r\} = \delta_{pr} \tag{1194}$$

Auch hier (wende den Antikommutator auf 1 an; $\frac{\partial}{\partial\theta}1 = 0$) gilt:

$$\frac{\partial \theta_r}{\partial \theta_p} = \delta_{pr} \tag{1195}$$

Für Grassmann-Zahlen $\{\theta\}$ gilt

$$\{\theta_p, \theta_r\} = 0 \quad . \tag{1196}$$

Genauso gilt analog zu

$$[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}] = 0 \tag{1197}$$

nun

$$\{\frac{\partial}{\partial \theta_p}, \frac{\partial}{\partial \theta_r}\} = 0 \quad . \tag{1198}$$

Beweis: Mit Hilfe von $[\frac{\partial}{\partial\theta_i}, \{\frac{\partial}{\partial\theta_j}, \theta_r\}] = 0 \forall i, j, r$ und der (sog. "graded") Jacobi-Identität $[\{\theta_r, \frac{\partial}{\partial\theta_i}\}, \frac{\partial}{\partial\theta_j}] + [\{\frac{\partial}{\partial\theta_i}, \frac{\partial}{\partial\theta_j}\}, \theta_r] + [\{\frac{\partial}{\partial\theta_j}, \theta_r\}, \frac{\partial}{\partial\theta_i}] = 0 \forall i, j, r$ folgt $[\theta_r, \{\frac{\partial}{\partial\theta_i}, \frac{\partial}{\partial\theta_j}\}] = 0 \forall i, j, r$. Für alle Funktionen $f(\theta_1 \ldots \theta_N)$, die als Potenzreihe in den $\theta_r$ geschrieben werden können, ist daher $\{\frac{\partial}{\partial\theta_i}, \frac{\partial}{\partial\theta_j}\}f = \{\frac{\partial}{\partial\theta_i}, \frac{\partial}{\partial\theta_j}\}f \cdot 1 = f\{\frac{\partial}{\partial\theta_i}, \frac{\partial}{\partial\theta_j}\}1 = 0 \forall f$.
Als Beispiel betrachte

$$\frac{\partial}{\partial \theta_i}\frac{\partial}{\partial \theta_j}(\theta_r\theta_p) = \delta_{rj}\delta_{pi} - \delta_{ri}\delta_{pj} \tag{1199}$$

Das Ergebnis ist in der Tat antisymmetrisch in i und j.

Beweis: $\frac{\partial}{\partial\theta_i}(\frac{\partial}{\partial\theta_j}\theta_r\theta_p) = \frac{\partial}{\partial\theta_i}(\delta_{rj}\theta_p - \theta_r \underbrace{\frac{\partial}{\partial\theta_j}\theta_p}_{\delta_{pj}}) = \delta_{rj}\delta_{pi} - \delta_{ri}\delta_{pj}$

## Integration

### Integration über Grassmann-Variablen

*Fall 1: Eine Grassmann-Variable*

Angenommen, es gebe nur eine Grassmann-Variable $\theta$ mit

$$\{\theta, \theta\} = 0 \quad . \tag{1200}$$

Sei

$$f(\theta) = f(0) + f_1\theta \tag{1201}$$

eine Funktion dieser Grassmann-Variablen. (Höhere Terme verschwinden wegen $\theta^2 = 0$.) Dann definiere ganz formal das Integral

$$\int d\theta f(\theta) = I[f] \tag{1202}$$

als Funktional

$$I \quad : \quad f \to I[f] \in C \quad . \tag{1203}$$

Das Integral ist eine komplexe Zahl c. Hier kann man das Integral weder als Fläche unter einer Kurve $f(\theta)$ interpretieren, noch haben Integrationsgrenzen einen Sinn. Trotzdem fordert man einige Eigenschaften, die denen von $\int_{-\infty}^{+\infty} dx$ entsprechen:

$$\int d\theta f(\theta + \theta_0) = \int d\theta f(\theta) \quad \text{Translationsinvarianz} \tag{1204}$$

$$\int d\theta[\alpha f(\theta) + \beta g(\theta)] = \alpha \int d\theta f(\theta) + \beta \int d\theta g(\theta) \quad \alpha, \beta \in C \quad \text{Linearität} \tag{1205}$$

$$\int d\theta \, 1 := 0 \tag{1206}$$

$$\int d\theta \, \theta := 1 \tag{1207}$$

Dann ist

$$\int d\theta f(\theta) = f_1 \quad . \tag{1208}$$

Gleichzeitig ist

$$\frac{\partial}{\partial\theta} f(\theta) = f_1 \quad . \tag{1209}$$

Es gibt also *keinen Unterschied zwischen Differentiation und Integration.*
Definiere die (eindimensionale) *Deltafunktion* mit

$$\int d\theta f(\theta)\delta(\theta) = f(0) \quad . \tag{1210}$$

Aus

$$\int d\theta f(\theta)\theta = \int d\theta \, \theta f(0) + \int d\theta \, \theta^2 f_1 = f(0) \tag{1211}$$

wegen $\theta^2 = 0$ schließt man

$$\delta(\theta) = \theta \quad . \tag{1212}$$

*Fall 2: Mehrere Grassmann-Variablen*

Die Argumentation verläuft ähnlich wie im Fall der Differentiation.
Gegeben seien N Grassmann-Variablen $\theta_1 \dots \theta_N$ mit

$$\{\theta_i, \theta_j\} = 0 \quad \forall i, j = 1 \dots N \quad . \tag{1213}$$

Die Differentiale sind ebenfalls antikommutierende ("fermionische") Objekte. Deshalb fordere

$$\{d\theta_i, d\theta_j\} = 0 \quad \forall i, j = 1 \dots N \tag{1214}$$

bzw.

$$\{\int d\theta_i, \int d\theta_j\} = 0 \quad \forall i, j = 1 \dots N \quad . \tag{1215}$$

Analog zum eindimensionalen Fall gelten *Translationsinvarianz* und *Linearität* sowie

$$\int d\theta_i \, 1 := 0 \quad \forall i \tag{1216}$$

$$\int d\theta_i \theta_i := 1 \quad \forall i \tag{1217}$$

und

$$\{\int d\theta_i, \theta_j\} = 0 \quad \text{für} \quad i \neq j \quad . \tag{1218}$$

Man kann die letzten beiden Gleichungen zusammenfassen zu

$$\{\int d\theta_i, \theta_j\} = \delta_{ij} \quad . \tag{1219}$$

Vergleicht man die Antikommutatoren (1215,1218) mit (1194,1198) und berücksichtigt

$$\frac{\partial}{\partial \theta_i} 1 = \int d\theta_i \, 1 = 0 \quad \forall i \quad , \tag{1220}$$

so erkennt man wieder:
*Integration = Differentiation.*
Anschaulich kann man das so verstehen: Differenzieren bzw. Integrieren bedeutet Erniedrigen bzw. Erhöhen der Ordnung um 1. Da es bei Grassmann-Variablen jedoch nur die Ordnungen 0 und 1 gibt, ist diese Erniedrigung bzw. Erhöhung *modulo 2* zu verstehen. Und dann haben Erniedrigen und Erhöhen den gleichen Effekt.
Eine beliebige Funktion der Grassmann-Variablen läßt sich entwickeln:

$$f(\theta_1 \dots \theta_N) = f(0) + f^1 \theta_1 + \dots + f^N \theta_N + f^{12} \theta_2 \theta_1 + \dots + f^{12 \dots N} \theta_N \dots \theta_2 \theta_1 \tag{1221}$$

Mit Hilfe von (1216,1217) erhält man dann

$$\int d\theta_1 \int d\theta_2 \dots \int d\theta_N f(\theta_1 \dots \theta_N) = f^{12 \dots N} \quad . \tag{1222}$$

Ein Integral $\int d\theta_1 \dots \int d\theta_N$ stellt somit eine *Projektion auf die Komponente höchster Ordnung in der Reihenentwicklung* von $f(\theta_1 \dots \theta_N)$ dar.

# Symmetrische Form der Lagrange–Dichte des Dirac–Feldes

Die Lagrange–Dichte des Dirac–Feldes

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi}(x)(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\Psi(x) \tag{1223}$$

ist auch invariant unter globalen Phasentransformationen

$$\begin{aligned} \Psi &\rightarrow \Psi\, e^{i\chi}\,, \\ \Psi^\dagger &\rightarrow \Psi^\dagger\, e^{-i\chi}\,. \end{aligned} \tag{1224}$$

Daraus folgt entsprechend dem Noether–Theorem ein erhaltener Stromdichtevektor $j_\mu(\vec{x}, t)$. Es ist

$$j_\mu = -ie\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\Psi)}\Psi - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\bar{\Psi})}\bar{\Psi}\right) = e\bar{\Psi}\gamma_\mu\Psi\,. \tag{1225}$$

Hier haben wir wieder in der Definition von $j_\mu$ den Faktor $e$, die elektrische Elementarladung, aufgenommen. Der Ausdruck (1225) ist gerade der elektrische Stromdichtevektor des Dirac–Feldes. Die zugehörige Erhaltungsgröße ist die Gesamtladung

$$Q = \int d^3x\, j_0(\vec{x}, t) = e\int d^3x\, \bar{\Psi}\gamma_0\Psi = e\int d^3x\, \Psi^\dagger\Psi\,. \tag{1226}$$

Damit ist die Konstanz von $Q$ direkt verknüpft mit der Normerhaltung des Dirac–Feldes. Die Lagrange–Dichte (1223) hat jedoch den Schönheitsfehler, daß sie nicht symmetrisch in den beiden Komponenten $\Psi(x)$ und $\bar{\Psi}(x)$ ist. Ferner gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^* &\equiv \mathcal{L}^\dagger = [\bar{\Psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\Psi]^\dagger \\ &= \Psi^\dagger(-i\gamma^{\mu\dagger} \overleftarrow{\partial}_\mu - m)\gamma^{0\dagger}\Psi \\ &= \Psi^\dagger(-i\gamma^0\gamma^\mu\gamma^0 \overleftarrow{\partial}_\mu - m)\gamma^0\Psi \\ &= \bar{\Psi}(-i\gamma^\mu \overleftarrow{\partial}_\mu - m)\Psi \neq \mathcal{L}\,. \end{aligned} \tag{1227}$$

Hierbei haben wir als Eigenschaften der $\gamma$–Matrizen $\gamma^{0\,\dagger} = \gamma^0$ und $\gamma^0\gamma^{\mu\dagger}\gamma^0 = \gamma^\mu$ ausgenutzt. Wir können nun eine symmetrisierte Form der Diracschen Lagrange–Dichte einführen

$$\begin{aligned} \mathcal{L}' &\equiv \frac{1}{2}(\mathcal{L} + \mathcal{L}^\dagger) \\ &= \frac{1}{2}\bar{\Psi}(i\gamma^\mu\vec{\partial}_\mu - m)\Psi + \frac{1}{2}\bar{\Psi}(-i\gamma^\mu \overleftarrow{\partial}_\mu - m)\Psi \\ &= \frac{1}{2}\bar{\Psi}i\gamma^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu \Psi - m\bar{\Psi}\Psi\,. \end{aligned} \tag{1228}$$

Der Pfeil über $\partial_\mu$ gibt hierbei nur die Richtung der Wirkung des Ableitungsoperators an, nicht aber irgendeinen Vektorcharakter. Diese symmetrische Form der Lagrange–Dichte führt zu den gleichen Bewegungsgleichungen wie die ursprüngliche Lagrange–Dichte. Offensichtlich gilt jetzt auch $\mathcal{L}^\dagger = \mathcal{L}$.

# Das Transformationsverhalten von Dirac–Feldern

Wir gehen aus von infinitesimalen Lorentz–Transformationen $x^\mu \;\to\; x^\mu + \epsilon^{\mu\nu} x_\nu$ mit dem antisymmetrischen Tensor $\epsilon^{\mu\nu} \;=\; -\epsilon^{\nu\mu}$ und der Transformationsmatrix

$$S(\Lambda) \;=\; 1 - \frac{1}{4} i\, \epsilon^{\mu\nu}\, \sigma_{\mu\nu}\ . \tag{1229}$$

Dabei ist

$$\sigma_{\mu\nu} \;=\; \frac{i}{2}(\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu)\ . \tag{1230}$$

Damit ist mit $\psi'(x') \;=\; \psi(x) + \delta\psi(x) \;=\; S(\Lambda)\,\psi(x)$

$$\delta\psi(x) \;=\; -\frac{i}{4}\, \epsilon^{\mu\nu}\, \sigma_{\mu\nu}\, \psi(x)\ . \tag{1231}$$

Die infinitesimalen Parameter $\delta\omega^i$ sind $-\epsilon^{\rho\sigma}$. Mit der Notation $\delta\psi(x) \;=\; \Phi_i(x)\,\delta\omega^i$ folgt

$$\Phi_{\rho\sigma} \;=\; \frac{i}{2}\, \sigma_{\rho\sigma}\, \psi(x)\ . \tag{1232}$$

Hierbei ist zu beachten, daß nicht alle Komponenten von $\epsilon^{\mu\nu}$ unabhängig sind. Dies führt zu einem Faktor 2 beim Übergang von (1231) nach (1232). Der dazugehörige Drehimpulsdichtetensor ist dann gegeben durch

$$M^\mu_{\rho\sigma} \;=\; x_\rho T^\mu_\sigma - x_\sigma T^\mu_\rho + \bar\psi(x)\,\gamma^\mu\, \tfrac{1}{2}\, \sigma_{\rho\sigma}\, \psi(x)\ . \tag{1233}$$

Dieses Resultat wollen wir ableiten. Für den erhaltenen Strom gilt generell

$$j^\mu_i \;\equiv\; \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi^a)}\,(\partial_\nu\varphi^a) - \mathcal{L}\,\delta^\mu_\nu \right)\, X^\nu_i - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi^a)}\,\Phi^a_i, \tag{1234}$$

wobei im Fall des Dirac–Feldes $\Phi^a_i$ durch (1232) bestimmt ist. Ferner haben wir bereits abgeleitet, daß gilt

$$T^\mu_\nu \;=\; \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)}\,\partial_\nu\psi - \partial_\nu\bar\psi\,\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\bar\psi)} - \delta^\mu_\nu\,\mathcal{L} \;=\; \bar\psi\, i\gamma^\mu\,\partial_\nu\psi\ . \tag{1235}$$

Es ist

$$X^\mu_{\rho\sigma}(x) \;=\; -\delta^\mu_\rho\, x_\sigma + \delta^\mu_\sigma\, x_\rho\ . \tag{1236}$$

Auch dies wollen wir nochmals kurz verifizieren. Es galt

$$\delta x^\mu \;=\; X^\mu_i(x)\,\delta\omega^i \;=\; \epsilon^{\mu\nu}\, x_\nu \;=\; X^\mu_{\rho\sigma}(x)\,(-\tfrac{1}{2})\epsilon^{\rho\sigma}\ . \tag{1237}$$

Der Faktor $\frac{1}{2}$ resultiert aus der Antisymmetrie von $\epsilon^{\rho\sigma}$. $\delta\omega^i$ betrifft aber nur die linear unabhängigen Parameter. Damit soll jetzt (1236) folgen. Einsetzten von (1236) in (1237) ergibt in der Tat

$$\begin{aligned}
\delta x^\mu \;&=\; -\delta^\mu_\rho\, x_\sigma\, \epsilon^{\rho\sigma}(-\tfrac{1}{2}) + \delta^\mu_\sigma\, x_\rho\, \epsilon^{\rho\sigma}(-\tfrac{1}{2}) \\
&=\; \tfrac{1}{2}\, \epsilon^{\mu\sigma}\, x_\sigma - \tfrac{1}{2}\, \epsilon^{\rho\mu}\, x_\rho \;=\; \tfrac{1}{2}\, \epsilon^{\mu\sigma}\, x_\sigma + \tfrac{1}{2}\, \epsilon^{\mu\rho}\, x_\rho \\
&=\; \epsilon^{\mu\sigma}\, x_\sigma\ .
\end{aligned} \tag{1238}$$

Mit (1236) bekommen wir für den erhaltenen Strom

$$j^{\mu}_{\rho\sigma} \;=\; j^{\mu 1}_{\rho\sigma} + j^{\mu 2}_{\rho\sigma} \tag{1239}$$

mit

$$\begin{aligned} j^{\mu 1}_{\rho\sigma} \;=\; T^{\mu}_{\;\nu}\, X^{\nu}_{\;\rho\sigma} \;&=\; T^{\mu}_{\;\nu}\, (-\delta^{\nu}_{\rho}\, x_{\sigma} + \delta^{\nu}_{\sigma}\, x_{\rho}) \\ &=\; -T^{\mu}_{\;\rho}\, x_{\sigma} + T^{\mu}_{\;\sigma}\, x_{\rho}\;. \end{aligned} \tag{1240}$$

Ferner werten wir entsprechend von (1234) aus

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\psi)} \;&=\; \bar{\psi}(x)\, i\gamma^{\mu}\;, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\bar{\psi})} \;&=\; 0\;. \end{aligned} \tag{1241}$$

Zusammen mit (1232) führt dies auf

$$j^{\mu 2}_{\rho\sigma} \;=\; -\bar{\psi}\, i\gamma^{\mu}\, \frac{i}{2}\, \sigma_{\rho\sigma}\, \psi \;=\; \tfrac{1}{2}\, \bar{\psi}\, \gamma^{\mu}\, \sigma_{\rho\sigma}\, \psi\;. \tag{1242}$$

(1239), (1240) und (1242) ergeben zusammengefaßt die Behauptung (1233).

Der Drehimpuls des Feldes lautet dann

$$M_{\rho\sigma} \;=\; \int d^3x\, M^{0}_{\rho\sigma}\;. \tag{1243}$$

Die beiden ersten Terme in $M^{\mu}_{\rho\sigma}$ spiegeln den Anteil des Bahndrehimpulses des Feldes wieder während der letzte Term den Spindrehimpuls beschreibt.

Die Lagrange–Dichte für das Dirac–Feld ist ebenfalls invariant bei globalen Eichtransformationen

$$\begin{aligned} \psi'(x) \;&=\; e^{-iq\Lambda}\, \psi(x)\;, \\ \bar{\psi}'(x) \;&=\; e^{iq\Lambda}\, \bar{\psi}(x)\;. \end{aligned} \tag{1244}$$

In diesem Fall ist $\Phi(x) \;=\; -iq\,\psi(x)$. Mit (1241) folgt für den erhaltenen Noether–Strom

$$j^{\mu} \;=\; -q\, \bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi\;. \tag{1245}$$

Dies ist gerade das Negative des elektromagnetischen Stromes, der an das elektromagnetische Feld koppelt.

Wir betrachten nun das paritätstransformierte Feld

$$\psi^{P}(x^0, \mathrm{x}) \;=\; \epsilon\, \gamma^0\, \psi(x^0, -\mathrm{x})\;, \tag{1246}$$

wobei $\epsilon$ ein Phasenfaktor ist. $\psi^P$ befriedigt dann die Gleichung

$$(i\gamma^{\mu}\partial^{P}_{\mu} - m)\psi^{P}(x^{P}) \;=\; 0 \tag{1247}$$

mit $x^{\mu P} \;=\; (x^0, -\mathrm{x})$ und $\partial^{P}_{\mu} \;=\; \partial/\partial x^{\mu P}$. Parität ist in der Quantenelektrodynamik und in der Quantenchromodynamik erhalten. Die schwache Wechselwirkung hingegen verletzt die Parität.

Für masselose Teilchen, wie zum Beispiel Neutrinos, ist es nicht notwendig, eine vierkomponentige Beschreibung zu verwenden. Es sei $\psi(x)$ eine Lösung der masselosen Dirac–Gleichung. Dann können wir schreiben

$$\psi(x) \;=\; \psi_L(x) + \psi_R(x) \tag{1248}$$

mit

$$\begin{aligned} \psi_L(x) &= \tfrac{1}{2}(1-\gamma_5)\,\psi(x)\;, \\ \psi_R(x) &= \tfrac{1}{2}(1+\gamma_5)\,\psi(x)\;. \end{aligned} \tag{1249}$$

$\psi_L(x)$ und $\psi_R$ sind offensichtlich Eigenvektoren von $\gamma_5$,

$$\begin{aligned} \gamma_5\,\psi_R &= \psi_R\;, \\ \gamma_5\,\psi_L &= -\psi_L\;. \end{aligned} \tag{1250}$$

Da $\psi(x)$ die masselose Dirac–Gleichung befriedigt, tut das auch $\gamma_5\psi(x)$, denn $\gamma_5$ antikommutiert mit $\gamma_\mu$. $\psi_L$ und $\psi_R$ werden Weyl–Spinoren genannt. Jeder enthält zwei Komponenten. Man verwendet hierbei besser die Weyl–Darstellung der Dirac–Matrizen

$$\gamma^0 \;=\; \begin{pmatrix} 0 & I_2 \\ I_2 & 0 \end{pmatrix}\;, \qquad \gamma^i \;=\; \begin{pmatrix} 0 & -\sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix}\;, \tag{1251}$$

$$\gamma^5 \;=\; i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \;=\; \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & -I_2 \end{pmatrix} \;=\; \beta\;. \tag{1252}$$

In dieser Darstellung haben die Weyl–Spinoren $(\psi_{R,L})_\alpha$ jeweils nur zwei nichtverschwindende Komponenten.

Die Fourier–Darstellung lautet

$$\begin{aligned} \psi_R(x) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\,\frac{1}{2k_0}\left[a(k,+)\,u(k,+\tfrac{1}{2})\,e^{-ikx} + b^*(k,+)\,v(k,\tfrac{1}{2})\,e^{ikx}\right]\;, \\ \psi_L(x) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\,\frac{1}{2k_0}\left[a(k,-)\,u(k,-\tfrac{1}{2})e^{-ikx} + b^*(k,-)\,v(k,-\tfrac{1}{2})e^{ikx}\right]. \end{aligned} \tag{1253}$$

$u(k,h)$ und $v(k,h)$ mit $h \;=\; \pm\frac{1}{2}$ sind Lösungen der masselosen Dirac–Gleichung zu positiver und negativer Energie

$$\not{k}\,u(k,h) \;=\; \not{k}\,v(k,h) \;=\; 0\;. \tag{1254}$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \gamma_5 u(k,h) &= 2h\,u(k,h)\;, \\ \gamma_5 v(k,h) &= 2h\,v(k,h)\;. \end{aligned} \tag{1255}$$

Die Normierung lautet

$$\bar{u}(k,h)\,\gamma_\mu\,u(k,h) \;=\; \bar{v}(k,h)\,\gamma_\mu\,v(k,h) \;=\; 2k_\mu\;. \tag{1256}$$

Aus (1233) und (1243) ersehen wir, daß der totale Spin des Feldes gegeben ist durch

$$S_{\rho\sigma} \;=\; \int d^3x\, \bar{\psi}(x)\, \gamma^0\, \tfrac{1}{2}\, \sigma_{\rho\sigma}\, \psi(x)\ . \tag{1257}$$

Der Spinvektor **S** definiert durch

$$S^k \;=\; \tfrac{1}{2}\, \epsilon^{ijk}\, S_{ij} \tag{1258}$$

läßt sich ausdrücken als

$$\mathbf{S}[\psi] \;=\; \tfrac{1}{2} \int d^3x\, \bar{\psi}(x)\, \boldsymbol{\gamma}\, \gamma_5\, \psi(x)\ . \tag{1259}$$

Für das Weyl–Feld $\psi_R$ ergibt dies

$$\mathbf{S}[\psi_R] \;=\; \tfrac{1}{2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\, \frac{1}{2k_0}\, [a^*(k,+)\, a(k,+)\, \hat{\mathbf{k}} + b(k,+)\, b^*(k,+)\, \hat{\mathbf{k}}]\ . \tag{1260}$$

Evidenterweise hat die positive Energiemode des Feldes $\psi_R$ auch positive (rechtshändige) Helizität. Der Bahndrehimpuls ist stets senkrecht auf $\hat{\mathbf{k}}$. Ebenso hat $\psi_L$ negative (linkshändige) Helizität. Für $\mathcal{L}$ gilt

$$\mathcal{L} \;=\; \bar{\psi} i \gamma^\mu \partial_\mu \psi \;=\; \chi_R^+ i \sigma^\mu \partial_\mu \chi_R + \chi_L^+ i \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \chi_L \tag{1261}$$

in der Weyl–Darstellung

$$\psi_\alpha \;=\; \begin{pmatrix} \chi_R \\ \chi_L \end{pmatrix} \tag{1262}$$

mit $\sigma^\mu \;=\; (1, \boldsymbol{\sigma})$ und $\bar{\sigma}^\mu \;=\; (1, -\boldsymbol{\sigma})$.

# Pfadintegrale über Grassmann–Variable

Es sei $\theta$ eine Grassmann–Variable. Wir betrachten das Gauß–Integral

$$\int d\theta \, \exp\left\{-\tfrac{1}{2}a\theta^2\right\} \;=\; \int d\theta \;=\; 0 \,. \tag{1263}$$

Um ein nichttriviales Resultat zu erhalten, müssen wir mehr als eine Variable vorliegen haben. Generell untersuchen wir ein Gauß–Integral über $n$ Grassmann–Variable

$$I_n \;\equiv\; \int d\theta_1 \ldots d\theta_n \, \exp\left\{-\tfrac{1}{2}\hat{\theta}^T \hat{A}\, \hat{\theta}\right\} \,, \tag{1264}$$

wobei $\hat{A}$ eine reelle antisymmetrische Matrix ist und $\hat{\theta}$ ein Spaltenvektor ist mit den Komponenten $(\theta_1, \ldots, \theta_n)$. $\hat{A}$ darf nicht wie in den früheren Betrachtungen eine symmetrische Matrix sein, da sonst aus $\{\theta_i, \theta_j\} \;=\; 0$ sofort folgt, daß $I_n \;=\; 0$ ist. Jeder nichtverschwindende Term in der Entwicklung der Exponentialfunktion beinhaltet eine gerade Anzahl von Faktoren $\theta_i$, die sich aber alle unterscheiden müssen, da $\theta_i^2 \;=\; 0$. Wenn $n$ ungerade ist, gibt es eine ungerade Zahl von Faktoren $d\theta$. Es gibt dann mindestens einen Faktor $\int d\theta_i$, wobei der Integrand 1 ist. Aus $\int d\theta_i \;=\; 0$ folgt $I_n \;=\; 0$ für $n$ ungerade. Wenn $n$ gerade ist, ist der einzige Term, der in der Entwicklung der Exponentialfunktion beibehalten werden muß, der $n$ Faktoren von $\theta$ beinhaltet. Terme mit mehr als $n$ Faktoren von $\theta$ sind automatisch null aufgrund von $\theta_i^2 \;=\; 0$. Terme mit weniger als $n$ Faktoren von $\theta$ ergeben null nach Integration, da zumindest ein Faktor $\int d\theta_i$ auftritt, wobei der Integrand 1 ist. Für ganzzahliges $n$ verbleibt

$$I_n \;=\; \int d\theta_1 \ldots d\theta_n \, \frac{1}{(n/2)!} \left(-\tfrac{1}{2}\,\hat{\theta}^T \hat{A}\, \hat{\theta}\right)^{n/2} \;=\; \left(\det \hat{A}\right)^{1/2} \,. \tag{1265}$$

Wir verifizieren die letzte Relation, indem wir uns zunächst die Spezialfälle $n \;=\; 2$ und $n \;=\; 4$ anschauen. Für $n \;=\; 2$ folgt

$$\hat{A} \;=\; \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ -a_{12} & 0 \end{pmatrix} \,, \qquad\qquad \hat{A}\hat{\theta} \;=\; \begin{pmatrix} a_{12}\,\theta_2 \\ -a_{12}\,\theta_1 \end{pmatrix} \,. \tag{1266}$$

Dann ist

$$\hat{\theta}^T \hat{A}\hat{\theta} \;=\; \theta_1\, a_{12}\, \theta_2 - \theta_2\, a_{12}\, \theta_1 \;=\; 2\, a_{12}\, \theta_1\, \theta_2 \,. \tag{1267}$$

Ebenso gilt

$$\det \hat{A} \;=\; a_{12}^2 \,. \tag{1268}$$

Nach Ausführung der Integration wird in der Tat die Gleichung (1265) bestätigt.

Wir betrachten nun den Fall $n \;=\; 4$. Es ist

$$\hat{A} \;=\; \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & a_{24} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & a_{34} \\ -a_{14} & -a_{24} & -a_{34} & 0 \end{pmatrix} \tag{1269}$$

und

$$\hat{A}\hat{\theta} = \begin{pmatrix} a_{12}\theta_2 + a_{13}\theta_3 + a_{14}\theta_4 \\ -a_{12}\theta_1 + a_{23}\theta_3 + a_{24}\theta_4 \\ -a_{13}\theta_1 - a_{23}\theta_2 + a_{34}\theta_4 \\ -a_{14}\theta_1 - a_{24}\theta_2 - a_{34}\theta_3 \end{pmatrix} . \tag{1270}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} \hat{\theta}^T \hat{A}\hat{\theta} &= \theta_1 a_{12}\theta_2 + \theta_1 a_{13}\theta_3 + \theta_1 a_{14}\theta_4 - \theta_2 a_{12}\theta_1 + \theta_2 a_{23}\theta_3 + \theta_2 a_{24}\theta_4 \\ &\quad -\theta_3 a_{13}\theta_1 - \theta_3 a_{23}\theta_2 + \theta_3 a_{34}\theta_4 - \theta_4 a_{14}\theta_1 - \theta_4 a_{24}\theta_2 - \theta_4 a_{34}\theta_3 . \end{aligned} \tag{1271}$$

Zusammengefaßt ergibt sich

$$\begin{aligned} -\tfrac{1}{2}\,\hat{\theta}^T \hat{A}\hat{\theta} &= -\theta_1 a_{12}\theta_2 - \theta_1 a_{13}\theta_3 - \theta_1 a_{14}\theta_4 \\ &\quad - \theta_2 a_{23}\theta_3 - \theta_2 a_{24}\theta_4 - \theta_3 a_{34}\theta_4 . \end{aligned} \tag{1272}$$

Jetzt muß man diesen Ausdruck quadrieren. Dabei bleiben aber nur die Terme übrig, die keinen Faktor doppelt enthalten.

$$\begin{aligned} \left(-\tfrac{1}{2}\,\hat{\theta}^T \hat{A}\hat{\theta}\right)^2 &= \theta_1 a_{12}\theta_2\theta_3 a_{34}\theta_4 + \theta_1 a_{13}\theta_3\theta_2 a_{24}\theta_4 + \theta_1 a_{14}\theta_4\theta_2 a_{23}\theta_3 \\ &\quad + \theta_2 a_{23}\theta_3\theta_1 a_{14}\theta_4 + \theta_2 a_{24}\theta_4\theta_1 a_{13}\theta_3 + \theta_3 a_{34}\theta_4\theta_1 a_{12}\theta_2 \\ &= \theta_1\theta_2\theta_3\theta_4 \left(2a_{12}a_{34} - 2a_{13}a_{24} + 2a_{14}a_{23}\right) . \end{aligned} \tag{1273}$$

Wir multiplizieren mit $1/2!$ und integrieren. Es folgt

$$I_n = a_{12}a_{34} - a_{13}a_{24} + a_{14}a_{23} . \tag{1274}$$

Wir bilden nun die Determinante von $\hat{A}$.

$$\begin{aligned} \det \hat{A} &= -a_{12} \begin{vmatrix} -a_{12} & a_{23} & a_{24} \\ -a_{13} & 0 & a_{34} \\ -a_{14} & -a_{34} & 0 \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} -a_{12} & 0 & a_{24} \\ -a_{13} & -a_{23} & a_{34} \\ -a_{14} & -a_{24} & 0 \end{vmatrix} \\ &\quad - a_{14} \begin{vmatrix} -a_{12} & 0 & a_{23} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 \\ -a_{14} & -a_{24} & -a_{34} \end{vmatrix} \\ &= -a_{12}(-a_{12}a_{34}^2 - a_{23}a_{34}a_{14} + a_{24}a_{13}a_{34}) \\ &\quad +a_{13}(-a_{12}a_{34}a_{24} + a_{24}a_{13}a_{24} - a_{24}a_{23}a_{14}) \\ &\quad -a_{14}(-a_{12}a_{23}a_{34} + a_{23}a_{13}a_{24} - a_{23}a_{23}a_{14}) \\ &= a_{12}^2 a_{34}^2 + 2a_{12}a_{23}a_{34}a_{14} - 2a_{12}a_{24}a_{13}a_{34} \\ &\quad + a_{13}^2 a_{24}^2 - 2a_{13}a_{24}a_{23}a_{14} + a_{14}^2 a_{23}^2 . \end{aligned} \tag{1275}$$

Wir bilden $I_n^2$ und vergleichen

$$\begin{aligned} I_n^2 &= a_{12}^2 a_{34}^2 - a_{12}a_{34}a_{13}a_{24} + a_{12}a_{14}a_{23}a_{34} \\ &\quad - a_{13}a_{24}a_{12}a_{34} + a_{13}^2 a_{24}^2 - a_{13}a_{24}a_{14}a_{23} \\ &\quad + a_{14}a_{23}a_{12}a_{34} - a_{14}a_{23}a_{13}a_{24} + a_{14}^2 a_{23}^2 . \end{aligned} \tag{1276}$$

Damit stimmen die Ausdrücke für $I_n^2$ überein.

Man beachte, daß jetzt gilt

$$I_n \;=\; \left(\det \hat{A}\right)^{1/2} . \tag{1277}$$

In unseren anfänglichen Betrachtungen für skalare Felder hatten wir ein Minuszeichen ($-\frac{1}{2}$) im Exponenten stehen.

Wir verallgemeinern nun die Betrachtungen auf unendlich viele Komponenten einer Grassmann–Funktion $\psi(x)$. Bisher hatten wir es mit den endlich vielen Komponenten des Spaltenvektors $\hat{\theta}$ zu tun. Somit gilt jetzt

$$\begin{aligned}\int \mathcal{D}\psi \, \exp\left\{-\tfrac{1}{2}\int dx' \int dx \, \psi(x')\, A(x',x)\, \psi(x)\right\} \;&=\; \left(\det \hat{A}\right)^{1/2} \\ &=\; \exp\left\{\tfrac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\,\ln \hat{A}\right\} . \end{aligned}\tag{1278}$$

Der letzte Schluß erfolgt in Analogie zu unseren früheren Betrachtungen. Ebenfalls in Erweiterung unserer früheren Betrachtungen können wir einen linearen Term in den Exponenten mit einbeziehen. Es folgt dann

$$\int d\theta_1 \ldots d\theta_n \, \exp\left\{-\tfrac{1}{2}\hat{\theta}^T \hat{A}\hat{\theta} + \hat{\rho}^T \hat{\theta}\right\} \;=\; \exp\left\{\tfrac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\,\ln \hat{A}\right\} \exp\left\{-\tfrac{1}{2}\,\hat{\rho}^T \hat{A}^{-1}\hat{\rho}\right\} , \tag{1279}$$

wobei $\hat{\rho}$ ebenfalls ein Spaltenvektor ist, der auch aus Grassmann–Komponenten $(\rho_1, \ldots, \rho_n)$ besteht. Es gilt also

$$\{\rho_i, \rho_j\} \;=\; \{\rho_i, \theta_j\} \;=\; 0 . \tag{1280}$$

Das Resultat (1279) können wir wieder ableiten durch Vervollständigung des Quadrates und durch Variablensubstitution. Wir schreiben

$$\hat{\theta}^T \hat{A}\hat{\theta} - 2\hat{\rho}^T \hat{\theta} \;=\; \left(\hat{\theta} + \hat{A}^{-1}\hat{\rho}\right)^T \; \hat{A} \; \left(\hat{\theta} + \hat{A}^{-1}\hat{\rho}\right) + \hat{\rho}^T \hat{A}^{-1}\hat{\rho} . \tag{1281}$$

Dabei haben wir die Antisymmetrie von $\hat{A}$ ausgenutzt, ebenso wie den Grassmann–Charakter von $\hat{\rho}$ und $\hat{\theta}$. Die Variablensubstitution

$$\hat{\theta}' \;=\; \hat{\theta} + \hat{A}^{-1}\hat{\rho} \tag{1282}$$

führt auf das Resultat (1279).

Für komplexe Grassmann–Variable gilt ebenfalls analog zu früher

$$\int d\theta_1^*\, d\theta_1 \ldots \int d\theta_n^*\, d\theta_n \, \exp\left\{-\hat{\theta}^+ \hat{A}\hat{\theta}\right\} \;=\; \det \hat{A} , \tag{1283}$$

wobei $\hat{A}$ eine schief-hermitesche Matrix ist. Wir definieren die Integration über komplexe Variable durch

$$\int d\theta_i^*\, d\theta_i \;=\; 2\int d(\mathrm{Re}\,\theta_i)\, d(\mathrm{Im}\,\theta_i) . \tag{1284}$$

Das entsprechende Pfadintegral lautet dann auch ähnlich wie früher

$$\int \mathcal{D}\psi^* \, \mathcal{D}\psi \; \exp\left\{ - \int dx' \int dx \, \psi^*(x') \, A(x', x) \, \psi(x) \right\} \; = \; \det \hat{A}$$
$$= \; \exp\left\{ \mathrm{Tr} \; \ln \hat{A} \right\} \; . \tag{1285}$$

Sofern ein linearer Term im Exponenten vorhanden ist, lautet die Verallgemeinerung

$$\int \mathcal{D}\psi^* \, \mathcal{D}\psi \; \exp\left\{ - \int dx' \int dx \, \psi^*(x') \, A(x', x) \, \psi(x) \right.$$
$$\left. + \; \int dx \, [\rho^*(x) \, \psi(x) - \psi^*(x) \, \rho(x)] \right\}$$
$$= \;\; \exp\left\{ \mathrm{Tr} \; \ln \hat{A} \right\} \; \exp\left\{ - \int dx' \int dx \, \rho^*(x') \, A^{-1}(x', x) \, \rho(x) \right\} \; . \tag{1286}$$

Für spätere Rechnungen ist es auch wichtig, im vierdimensionalen Minkowski–Raum zu arbeiten. In diesem Fall gilt

$$\int \mathcal{D}\psi^* \, \mathcal{D}\psi \; \exp\left\{ i \int d^4x' \int d^4x \, \psi^*(x') \, B(x', x) \, \psi(x) \right\} \; = \; \det(i\hat{B})$$
$$= \; \exp\left\{ \mathrm{Tr} \; \ln(i\hat{B}) \right\} \; , \tag{1287}$$

wobei $\hat{B}$ hermitesch ist. Ferner gilt

$$\int \mathcal{D}\psi^* \, \mathcal{D}\psi \; \exp\left\{ i \int d^4x' \int d^4x \, \psi^*(x') \, B(x', x) \, \psi(x) \right.$$
$$\left. + \; i \int d^4x \, [\sigma^*(x) \, \psi(x) + \psi^*(x) \, \sigma(x)] \right\}$$
$$= \;\; \exp\left\{ \mathrm{Tr} \; \ln(i\hat{B}) \right\} \; \exp\left\{ -i \int d^4x' \int d^4x \, \sigma^*(x') \, B^{-1}(x', x) \, \sigma(x) \right\} \; . \tag{1288}$$

# Das generierende Funktional für Spinor–Feldtheorien

In Analogie zu den Betrachtungen für skalare Feldtheorien schreiben wir für das generierende Funktional für Spinor– Feldtheorien

$$W[\sigma, \bar{\sigma}] \;=\; N' \int \mathcal{D}\bar{\psi}\, \mathcal{D}\psi\, \exp\left\{ i \int d^4x\, \left( \mathcal{L} + \bar{\psi}\sigma + \bar{\sigma}\psi \right) \right\}. \tag{1289}$$

$\sigma(x)$ bezeichnet eine externe Quelle für $\bar{\psi}$ und $\bar{\sigma}$ eine externe Quelle für $\psi$. Es liegt der wesentliche Unterschied vor, daß die Quellen diesmal Grassmann–Variable sind. $N'$ wird so gewählt, daß gilt $W = 1$ für $\sigma = \bar{\sigma} = 0$.

Die Greenschen Funktionen werden definiert durch

$$\begin{aligned} & G^{(2n)}(x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_n) \;= \\ & < 0|T(\hat{\psi}(x_1) \ldots \hat{\psi}(x_n)\, \hat{\bar{\psi}}(y_1) \ldots \hat{\bar{\psi}}(y_n))|0 > . \end{aligned} \tag{1290}$$

$\hat{\psi}$ bezeichnet den Feldoperator. Der Zeitordnungsoperator ist definiert wie bisher, mit der Ausnahme, daß er zu einem zusätzlichen Minuszeichen führt, wenn zwei Dirac–Felder miteinander vertauscht werden.

Mit dem generierenden Funktional hängen die Greenschen Funktionen zusammen über

$$\begin{aligned} & i^{2n}\, G^{(2n)}(x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_n) \;= \\ & \left. \frac{\delta^{(2n)} W[\sigma, \bar{\sigma}]}{\delta\bar{\sigma}(x_1) \ldots \delta\bar{\sigma}(x_n)\, \delta\sigma(y_1) \ldots \delta\sigma(y_n)} \right|_{\sigma=\bar{\sigma}=0} . \end{aligned} \tag{1291}$$

$G^{(2n)}$ ist antisymmetrisch in den Indizes $x_i$ und in den Indizes $y_i$, da gilt

$$\frac{\delta^2}{\delta\sigma(x_i)\, \delta\sigma(x_j)} \;=\; -\frac{\delta^2}{\delta\sigma(x_j)\, \delta\sigma(x_i)} . \tag{1292}$$

# Der Propagator für das Dirac–Feld

Wir bestimmen das generierende Funktional für das freie Dirac–Feld in analoger Weise zu unseren entsprechenden Ableitungen für die freie skalare Theorie. Wir beginnen mit der Lagrange–Dichte

$$\mathcal{L} \;=\; \bar{\psi}(x)\,(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi(x)\,. \tag{1293}$$

Diese Lagrange–Dichte setzen wir in den allgemeinen Ausdruck für das generierende Funktional ein

$$W[\sigma,\bar{\sigma}] \;=\; N' \int \mathcal{D}\bar{\psi}\,\mathcal{D}\psi\;\exp\left\{i\int d^4x\,(\mathcal{L} + \bar{\psi}\sigma + \bar{\sigma}\psi)\right\}. \tag{1294}$$

Damit können wir das generierende Funktional schreiben als

$$\begin{aligned} W[\sigma,\bar{\sigma}] \;&=\; N' \int \mathcal{D}\bar{\psi}\,\mathcal{D}\psi\;\exp\left\{i\int d^4x' \int d^4x\;\bar{\psi}(x)\,B(x',x)\,\psi(x)\right. \\ &\qquad \left. +\, i\int d^4x\left[\bar{\psi}(x)\,\sigma(x) + \bar{\sigma}(x)\,\psi(x)\right]\right\} \end{aligned} \tag{1295}$$

mit

$$B(x',x) \;=\; (-i\gamma^\mu\partial^x_\mu - m)\,\delta^4(x'-x)\,. \tag{1296}$$

$\partial^x_\mu$ soll andeuten, daß sich die Differentiation auf $x$ und nicht $x'$ bezieht. Wir führen die Pfadintegration durch und erhalten das generelle Resultat

$$W[\sigma,\bar{\sigma}] \;=\; \exp\left\{-i\int d^4x' \int d^4x\;\bar{\sigma}(x')\,B^{-1}(x',x)\,\sigma(x)\right\}. \tag{1297}$$

Die Proportionalitätskonstante wurde wieder so gewählt, daß gilt $W[\sigma,\bar{\sigma}] \;=\; 1$ für $\sigma \;=\; \bar{\sigma} \;=\; 0$. Wir können auch schreiben

$$W[\sigma,\bar{\sigma}] \;=\; \exp\left\{-i\int d^4x' \int d^4x\;\bar{\sigma}(x')\,S_F(x'-x)\,\sigma(x)\right\} \tag{1298}$$

mit

$$S_F(x'-x) \;=\; B^{-1}(x',x)\,. \tag{1299}$$

$S_F(x'-x)$ bezeichnet den Feynman–Propagator für das Dirac–Feld. Wieder konstruieren wir den inversen Ausdruck $B^{-1}(x',x)$ durch Fourier–Transformation. Es ist

$$B(x',x) \;=\; \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\,e^{-ip\cdot(x'-x)}\,(\not{p} - m)\,. \tag{1300}$$

Dies impliziert

$$B^{-1}(x',x) \;=\; S_F(x'-x) \;=\; \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\,e^{-ip\cdot(x'-x)}\,\frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2}\,. \tag{1301}$$

Auch hier müssen wir wieder eine Vorschrift für die Umgehung des Pols bei $p^2 \;=\; m^2$ angeben. Dies wird bewirkt durch die Addition von $i\epsilon$ im Nenner von (1301). Damit schreiben wir schließlich

$$S_F(x'-x) \;=\; \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\,e^{-ip\cdot(x'-x)}\,\tilde{S}_F(p) \tag{1302}$$

mit

$$\tilde{S}_F(p) \;=\; \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \;=\; (\not{p} - m + i\epsilon)^{-1}\,. \tag{1303}$$

# Das masselose Vektorfeld

Bereits aus der klassischen Elektrodynamik wissen wir, daß die Maxwell–Gleichungen

$$\partial_\mu(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) \;=\; j^\nu \tag{1304}$$

nicht eindeutig die Vektorpotentiale fixieren. Wenn $A^\mu$ die Maxwell–Gleichungen befriedigen, so tut es auch

$$A'^\mu(x) \;\equiv\; A^\mu(x) + \partial^\mu \Lambda(x) \tag{1305}$$

mit einer beliebigen Funktion $\Lambda(x)$. Die Feldstärken $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$ bleiben invariant bei den Substitutionen

$$\begin{aligned} A_0 &\;\to\; {A_0}' \;=\; A_0 + \partial_0\Lambda \;, \\ \mathbf{A} &\;\to\; \mathbf{A}' \;=\; \mathbf{A} - \boldsymbol{\nabla}\Lambda \;. \end{aligned} \tag{1306}$$

Die mangelnde Eindeutigkeit der Vektorpotentiale führt zu Schwierigkeiten beispielsweise bei der Funktionalintegration. Als generelle Eichbedingung führen wir die Lorentz–Bedingung ein

$$\partial_\mu A^\mu(x) \;=\; 0 \;, \tag{1307}$$

die offensichtlich kovariant ist. Selbst die Lorentz–Bedingung fixiert nicht vollständig das Vektorpotential. Wenn $A$ und $A'$ wie in (1305) miteinander verknüpft sind, so ist die Lorentz–Bedingung immer befriedigt, sofern gilt

$$\Box\Lambda \;\equiv \partial^\mu\partial_\mu\Lambda \;=\; 0 \;. \tag{1308}$$

Die Lorentz–Bedingung kann in den Lagrange–Formalismus miteinbezogen werden durch den Gebrauch eines Lagrange–Multiplikators $\xi$. Wir addieren einen eichfixierenden Term $-\frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu)^2$ zur Lagrange–Dichte. Damit lautet die Lagrange–Dichte für das elektromagnetische Feld unter Einbeziehung einer Eichfixierung

$$\mathcal{L} \;=\; -\frac{1}{4}\,F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - j_\mu A^\mu - \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu)^2 \;. \tag{1309}$$

Dabei ist

$$F_{\mu\nu} \;\equiv\; \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \;. \tag{1310}$$

Die Euler–Lagrange Gleichungen ergeben dann

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + \frac{1}{\xi}\,\partial^\nu(\partial_\mu A^\mu) \;=\; j^\nu \;. \tag{1311}$$

Wenn der Strom erhalten ist, d.h., wenn die Kontinuitätsgleichung gilt, folgt

$$\Box(\partial_\mu A^\mu) \;=\; 0 \;. \tag{1312}$$

Wenn $\partial_\mu A^\mu$ und $(\partial/\partial t)(\partial_\mu A^\mu)$ zu einer Zeit $t_0$ verschwindet, folgt

$$\partial_\mu A^\mu \;=\; 0 \tag{1313}$$

für alle Zeiten. Dies reduziert (1311) zu den Maxwell–Gleichungen, die dann auch geschrieben werden können als

$$\Box A^\nu \;=\; j^\nu \;. \tag{1314}$$

Wie erwartet wird diese Gleichung auch befriedigt durch $A^\nu + \partial^\nu \Lambda$ mit $\Box \Lambda \;=\; 0$. Aus der Lagrange–Dichte (1309) und der Lorentz–Bedingung (1307) folgt

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} \;=\; -F^{\mu\nu} - \frac{1}{\xi}\, g^{\mu\nu}\,(\partial_\lambda A^\lambda) \;=\; -F^{\mu\nu} \;. \tag{1315}$$

Der Term $\frac{1}{\xi}\, g^{\mu\nu}\,(\partial_\lambda A^\lambda)$ folgt direkt aus (1309). Weiter müssen wir für die Ableitung von (1315) ausnutzen, daß gilt

$$F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \;=\; (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) \;. \tag{1316}$$

Bei Poincaré–Transformationen

$$\mathbf{x} \;\to\; \mathbf{x}' \;=\; \hat{\Lambda}\mathbf{x} + \mathbf{a} \tag{1317}$$

transformiert sich das Vektorpotential wie

$$A^\mu(x) \;\to\; A'^\mu(x') \;=\; \Lambda^\mu_\nu\, A^\nu(x) \;. \tag{1318}$$

$A^\mu$ ist invariant bei infinitesimalen Translationen. Der Energie–Impuls Tensor lautet

$$T^\mu_\lambda \;=\; \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)}\, \partial_\lambda A_\nu - \delta^\mu_\lambda\, \mathcal{L} \;=\; -F^{\mu\nu}\, \partial_\lambda A_\nu + \delta^\mu_\lambda\, \frac{1}{4}\, F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma} \;. \tag{1319}$$

Dies gilt für den feldfreien Fall ($j \;=\; 0$).

Die Fourier–Darstellung von $A$ lautet

$$A_\mu(x) \;=\; \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\, \frac{1}{2k_0}\, \left( a_\mu(k)\, e^{-ikx} + a^*_\mu(k)\, e^{ikx} \right) \tag{1320}$$

mit $k_0 \;=\; |\mathbf{k}|$. Aufgrund der Lorentz–Bedingung gilt

$$k \cdot a(k) \;=\; 0 \;. \tag{1321}$$

Für den Energie–Impuls Vektor folgt

$$P_\nu \;=\; \int d^3x\, T^0_\nu \;=\; \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\, \frac{1}{2k_0}\, \left[ -a^*(k)\, a(k)\, k_\nu \right] \;. \tag{1322}$$

Wir können nicht sofort die Größe $(2\pi)^{-3}(2k_0)^{-1}[-a^*(k)\, a(k)]\, d^3k$ als die Zahl der Moden interpretieren, die einen Impuls im Element $d^3k$ um $\mathbf{k}$ haben, da $-a^*(k)\, a(k)$ offensichtlich nicht positiv definit ist. Die Lorentz–Bedingung und somit (1321) impliziert jedoch

$$a_0(k) \;=\; \hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{a}(k) \tag{1323}$$

mit $\hat{\mathbf{k}} \;=\; \mathbf{k}/|\mathbf{k}|$. Damit ist die Zeitkomponente von $a_\mu$ gleich der longitudinalen Komponente $\mathbf{a} \cdot \hat{\mathbf{k}}$. Somit wird auch $a^*(k) \cdot a(k)$ vollständig durch die transversale Komponente gegeben,

$$\mathbf{a}_\perp \;=\; \mathbf{a} - \mathbf{a} \cdot \hat{\mathbf{k}}\, \hat{\mathbf{k}} \;. \tag{1324}$$

Aus (1323) folgt

$$-a^*(k)\,a(k) \;=\; -\mathbf{a}^*(k)\cdot\hat{\mathbf{k}}\,\mathbf{a}(k)\cdot\hat{\mathbf{k}} + \mathbf{a}^*(k)\cdot\mathbf{a}(k) \;=\; \mathbf{a}_\perp^*(k)\cdot\mathbf{a}_\perp(k)\;. \tag{1325}$$

Die Lorentz–Eichung stellt also sicher, daß die zeitartigen Photonen durch die longitudinalen Photonen weggehoben werden. Es verbleibt eine nichtnegative Energie.

Wir untersuchen die Fourier–Darstellung der Funktion $\Lambda(x)$ mit $\Box\Lambda \;=\; 0$

$$\Lambda(x) \;=\; \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\,\frac{1}{2k_0}\,\Big[\lambda(k)\,e^{-ikx} + \lambda^*(k)\,e^{ikx}\Big]\;. \tag{1326}$$

Aufgrund der Eichbedingung haben wir

$$a_\mu{}'(k) \;=\; a_\mu(k) - ik_\mu\,\lambda(k)\;. \tag{1327}$$

Wir können stets eine Eichung wählen, in der gilt

$$a_0{}'(k) \;=\; \mathbf{a}'(k)\cdot\hat{\mathbf{k}} \;=\; 0\;. \tag{1328}$$

Die einzigen nichtverschwindenden Komponenten sind somit die transversalen Moden. In dieser Eichung gilt

$$a_\mu(k) \;=\; \sum_{\lambda=1,2} a(k,\lambda)\,\epsilon_\mu(k,\lambda)\;, \tag{1329}$$

wobei $\epsilon_\mu(k,1)$ und $\epsilon_\mu(k,2)$ zwei orthonormale raumartigen Vektoren in der Ebene senkrecht zu $\mathbf{k}$ sind. Es gilt

$$\epsilon_0(k,\lambda) \;=\; 0, \tag{1330}$$

$$\boldsymbol{\epsilon}(k,\lambda)\cdot\boldsymbol{\epsilon}(k,\lambda') \;=\; \delta_{\lambda\lambda'}, \tag{1331}$$

$$\boldsymbol{\epsilon}(k,1)\times\boldsymbol{\epsilon}(k,2) \;=\; \hat{\mathbf{k}}, \tag{1332}$$

$$\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\epsilon}(k,\lambda) \;=\; 0\;. \tag{1333}$$

Einsetzen in den Energie–Impuls Vektor (1322) liefert

$$P_\nu \;=\; \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\,\frac{1}{2k_0}\sum_{\lambda=1,2} a^*(k,\lambda)\,a(k,\lambda)\,k_\nu\;. \tag{1334}$$

Wir betrachten erneut die infinitesimale Lorentz–Transformation $x^\mu \;\to\; x'^\mu \;=\; x^\mu + \epsilon^{\mu\nu}x_\nu$ mit $\epsilon^{\mu\nu} \;=\; -\epsilon^{\nu\mu}$. Damit haben wir

$$\delta A^\mu(x) \;=\; \epsilon^{\mu\nu}\,A_\nu(x) \tag{1335}$$

und

$$\Phi^\mu_{\rho\sigma} \;=\; \delta^\mu_\rho A_\sigma - \delta^\mu_\sigma A_\rho\;. \tag{1336}$$

Hierbei haben wir wieder explizit von der Antisymmetrie von $\epsilon^{\mu\nu}$ Gebrauch gemacht. Der Drehimpulsdichtetensor lautet dann

$$M^\mu_{\rho\sigma} \;=\; x_\rho\,T^\mu_\sigma - x_\sigma\,T^\mu_\rho + F^{\mu\nu}\left(g_{\nu\sigma}\,A_\rho - g_{\nu\rho}\,A_\sigma\right)\;. \tag{1337}$$

Der totale Drehimpuls hat also einen Bahndrehimpuls– und einen Spinanteil. Bei der Ableitung des Spinanteils von (1337) haben wir Gebrauch gemacht von dem generellen Ausdruck

$$j_i^{\mu(2)} \;=\; \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi^a)}\,\Phi_i^a \;=\; \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A^\nu)}\,\Phi_i^\nu \;=\; -F^\mu_{\ \nu}\left(\delta_\rho^\nu\,A_\sigma - \delta_\sigma^\nu\,A_\rho\right) \tag{1338}$$

sowie von (1315) und (1336).

Mit der Eichung (1328) folgt für den totalen Spin des Feldes

$$\begin{aligned} S_{\rho\sigma} \;&\equiv\; \int d^3x\,F^{0\nu}(g_{\nu\sigma}\,A_\rho - g_{\nu\rho}\,A_\sigma) \\ &=\; i\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\,\frac{1}{2k_0}\,\left[a_\sigma^*(k)\,a_\rho(k) - a_\rho^*(k)\,a_\sigma(k)\right]. \end{aligned} \tag{1339}$$

Der Spinvektor kann ausschließlich durch die transversalen Moden ausgedrückt werden. Definitionsgemäß gilt

$$S^\tau \;=\; \tfrac{1}{2}\,\epsilon^{\rho\sigma\tau}\,S_{\rho\sigma}\;. \tag{1340}$$

Daraus folgt mit (1332)

$$\begin{aligned} \mathbf{S} \;&=\; i\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\,\frac{1}{2k_0}\,\left[a^*(k,2)\,a(k,1) - a^*(k,1)\,a(k,2)\right]\,\hat{\mathbf{k}} \\ &=\; \int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\,\frac{1}{2k_0}\,\left[b^*(k,+)\,b(k,+) - b^*(k,-)\,b(k,-)\right]\,\hat{\mathbf{k}} \end{aligned} \tag{1341}$$

mit

$$b(k,\pm) \;\equiv\; \frac{1}{\sqrt{2}}\,\left[a(k,1) \mp i\,a(k,2)\right]\;. \tag{1342}$$

$b(k,\pm)$ kennzeichnen Moden mit positiven bzw. negativen Helizitäten.

# Der Propagator für das Photon

Wir wollen zunächst die freien Propagatoren für die skalare und für die Spinor–Feldtheorie zusammenfassen. Für skalare Felder mit der Lagrange–Dichte

$$\mathcal{L} \;=\; \tfrac{1}{2}\,\partial_\mu\phi\,\partial^\mu\phi - \tfrac{1}{2}m^2\,\phi^2 \;=\; -\tfrac{1}{2}\,\phi(\Box + m^2)\phi \tag{1343}$$

(Oberflächenterme werden vernachlässigt) fanden wir die 2–Punkte Funktion

$$G(x,y) \;=\; i\Delta_F(x-y)\;, \tag{1344}$$

wobei der Feynman–Propagator $\Delta_F$ die Gleichung befriedigt

$$(\Box + m^2)\,\Delta_F(x-y) \;=\; -\delta^4(x-y)\;. \tag{1345}$$

Es ist

$$\Delta_F(x-y) \;=\; \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\;\exp\{-ip\cdot(x-y)\}\;(p^2 - m^2 + i\epsilon)^{-1}\;. \tag{1346}$$

Für Spinor–Felder mit der Lagrange–Dichte

$$\mathcal{L} \;=\; i\bar\psi\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar\psi\psi \;=\; \bar\psi S_F^{-1}\psi \tag{1347}$$

ist die 2–Punkte Funktion gerade $i$-mal dem Propagator

$$G(x,y) \;=\; i\,S_F(x-y)\;. \tag{1348}$$

Es ist

$$S_F(x-y) \;=\; \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\;\exp\{-ip\cdot(x-y)\}\;(\not p - m + i\epsilon)^{-1}\;. \tag{1349}$$

In jedem Fall ist der Propagator gerade das Inverse des Operators, der im quadratischen Term der Lagrange–Dichte auftritt. Der Faktor $\frac{1}{2}$ in der skalaren Lagrange–Dichte ist ohne Bedeutung. Er tritt nur für reelle $\phi$ auf, er fehlt bei komplexen $\phi$. Es ist möglich, von der gerade formulierten Erkenntnis als Definition für den Propagator auszugehen.

Wir beginnen unsere Ableitung des Photonenpropagators mit dem generierenden Funktional der Quantenelektrodynamik

$$W[J] \;=\; \int \mathcal{D}A_\mu\;\exp\left\{i\int(\mathcal{L} + j^\mu A_\mu)d^4x\right\}\;, \tag{1350}$$

wobei $j^\mu$ eine externe Stromquelle ist. Bei Abwesenheit von Materie gilt

$$\mathcal{L} \;=\; -\frac{1}{4}\,F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\;. \tag{1351}$$

Die Variation der Lagrange–Dichte (1351) führt auf die Maxwell–Gleichungen

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} \;=\; \partial_\mu(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) \;=\; 0 \tag{1352}$$

oder

$$(g_{\mu\nu}\Box - \partial_\mu\partial_\nu)A^\mu \;=\; 0\;. \tag{1353}$$

Die Lagrange–Dichte kann umgeschrieben werden in

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= -\frac{1}{4}\left(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu\right)\left(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu\right) \\
&= -\frac{1}{4}\partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu + \frac{1}{4}\partial_\mu A_\nu \partial^\nu A^\mu + \frac{1}{4}\partial_\nu A_\mu \partial^\mu A^\nu - \frac{1}{4}\partial_\nu A_\mu \partial^\nu A^\mu \\
&= -\tfrac{1}{2}\,\partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu + \tfrac{1}{2}\,\partial_\mu A_\nu \partial^\nu A^\mu \\
&= -\tfrac{1}{2}\,\partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu + \tfrac{1}{2}\,\partial_\mu A^\nu \partial_\nu A^\mu \; . \qquad (1354)
\end{aligned}$$

Nach partieller Integration des zweiten Terms folgt

$$\mathcal{L} = -\tfrac{1}{2}\,\partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu - \tfrac{1}{2}\,A^\mu \partial_\mu \partial_\nu A^\nu \; , \qquad (1355)$$

wobei wir wieder Oberflächenterme weggelassen haben. Ebenso verfahren wir mit dem ersten Term in (1355). Dies ergibt

$$\mathcal{L} = \tfrac{1}{2}\,A^\mu [g_{\mu\nu}\Box - \partial_\mu \partial_\nu]\,A^\nu \; . \qquad (1356)$$

Nach der eingangs genannten Vorschrift soll der Photonenpropagator $D_{\mu\nu}$ das Inverse dieses Operators sein, d.h., es muß gelten

$$(g_{\mu\nu}\Box - \partial_\mu \partial_\nu) D^{\nu\lambda}(x-y) = \delta_\mu^\lambda\,\delta^4(x-y) \; . \qquad (1357)$$

Ebenso sehen wir, daß $D^{\nu\lambda}$ die Greensche Funktion der Maxwell-Gleichungen (1353) ist. Nun multiplizieren wir (1357) mit dem Operator $\partial^\mu$. Dies liefert

$$(0 \cdot \partial_\nu) D^{\nu\lambda} = \partial^\lambda\,\delta^4(x-y) \; . \qquad (1358)$$

Hieraus erkennen wir, daß $D^{\nu\lambda}$ kein Inverses hat und formal unendlich ist. Wir wenden den Operator $(g_{\mu\nu}\Box - \partial_\mu \partial_\nu)$ auf $\partial^\mu \Lambda$ an und sehen, daß dies null ergibt,

$$(g_{\mu\nu}\Box - \partial_\mu \partial_\nu)\,\partial^\mu \Lambda = (\partial_\nu \Box - \Box \partial_\nu)\Lambda = 0 \; . \qquad (1359)$$

Damit hat der Operator den Eigenwert null und somit kein Inverses. Unser geradliniger Weg, den Photonenpropagator zu bestimmen, ist also zunächst fehlgeschlagen.

Im Rahmen der Pfadintegralmethode betrachten wir das generierende Funktional

$$W = \int \mathcal{D}A_\mu \,\exp\left\{ i \int \mathcal{L}\, d^4x \right\} \; . \qquad (1360)$$

$\mathcal{L}$ bleibt invariant bei der Eichtransformation $A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu \Lambda$. Aber die Pfadintegration erstreckt sich über alle $A_\mu$, auch unter Einbeziehung derjenigen $A_\mu$, die über Eichtransformationen miteinander verbunden sind. Dies liefert einen unendlichen Beitrag zu $W$ und damit auch zur Greenschen Funktion, die durch Funktionalableitung aus $W$ gewonnen wird.

Um einen endlichen Wert für $W$ zu bekommen, müssen wir eine spezielle Eichung fixieren. Wir werden die Lorentz–Eichbedingung $\partial_\mu A^\mu = 0$ wählen. Dies ergibt aus (1356) die Lagrange–Dichte

$$\mathcal{L} = \tfrac{1}{2}\,A^\mu\, g_{\mu\nu} \Box A^\nu \; . \qquad (1361)$$

Der Operator $g_{\mu\nu}\Box$ hat ein Inverses, der als Feynman–Propagator bekannt ist,

$$D_F(x,y)_{\mu\nu} \;=\; -g_{\mu\nu}\,\Delta_F(x,y;m\,=\,0)\;. \tag{1362}$$

Mit dem eichfixierenden Term

$$\mathcal{L}_{GF} \;=\; -\tfrac{1}{2}\,(\partial_\mu A^\mu)^2 \tag{1363}$$

kann die Lagrange–Dichte insgesamt geschrieben werden als

$$\mathcal{L} \;=\; -\frac{1}{4}\,F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\,(\partial_\mu A^\mu)^2\;. \tag{1364}$$

Wir können in ähnlicher Weise die Betrachtungen nochmals im Impulsraum durchführen. Aus dem Operator $g_{\mu\nu}\Box - \partial_\mu\partial_\nu$ wird dann $-g_{\mu\nu}\,k^2 + k_\mu k_\nu$. Es läßt sich leicht zeigen, daß dieser Operator kein Inverses hat. Der inverse Operator müßte die Form haben $A\,g^{\nu\lambda} + B\,k^\nu k^\lambda$ mit

$$(-g_{\mu\nu}\,k^2 + k_\mu k_\nu)(A\,g^{\nu\lambda} + B\,k^\nu k^\lambda) \;=\; \delta_\mu^\lambda\;. \tag{1365}$$

Dies impliziert jedoch

$$-A\,k^2\,\delta_\mu^\lambda + A\,k_\mu\,k^\lambda \;=\; \delta_\mu^\lambda\;, \tag{1366}$$

was offensichtlich aufgrund der unterschiedlichen Tensorstruktur keine Lösung hat. Auf der anderen Seite hat in der Lorentz–Eichung der Operator $-g_{\mu\nu}\,k^2$ das Inverse $-g^{\nu\lambda}\,(1/k^2)$, und der Feynman–Propagator lautet

$$D_F(k)_{\mu\nu} \;=\; -\frac{g_{\mu\nu}}{k^2}\;. \tag{1367}$$

Allgemeiner können wir zur Lagrange–Dichte einen beliebigen Beitrag von $\mathcal{L}_{GF}$ hinzuaddieren,

$$\begin{aligned}\mathcal{L} \;&=\; -\frac{1}{4}\,F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi}\,(\partial_\mu A^\mu)^2 \\ &=\; \tfrac{1}{2}\,A^\mu\left[g_{\mu\nu}\Box + \left(\frac{1}{\xi}-1\right)\partial_\mu\partial_\nu\right]A^\nu\;.\end{aligned} \tag{1368}$$

Im Impulsraum wird aus dem Operator in eckiger Klammer

$$-k^2\,g_{\mu\nu} + \left(1-\frac{1}{\xi}\right)\,k_\mu\,k_\nu\;. \tag{1369}$$

Das Inverse hiervon ergibt den Propagator

$$D(k)_{\mu\nu} \;=\; -\frac{1}{k^2}\left[g_{\mu\nu} + (\xi-1)\,\frac{k_\mu\,k_\nu}{k^2}\right]\;, \tag{1370}$$

was sich leicht durch Produktbildung mit (1369) nachweisen läßt.

Spezielle Namensgebungen bezüglich $\xi$ sind verbunden mit

$\xi \;\to 1:$ Feynman–Propagator (Feynman–Eichung),

$\xi \;\to 0:$ Landau–Eichung .

Die Physik ist natürlich unabhängig von der Wahl von $\xi$.

# Die Greensche Funktion für die freie skalare Feldtheorie

Wir berechnen nun die Greenschen Funktionen nach

$$\left(\frac{i}{\hbar}\right)^n G^{(n)}(x_1,\ldots,x_n) \;=\; \left.\frac{\delta^n W[J]}{\delta J(x_1)\ldots\delta J(x_n)}\right|_{J(x)=0} \tag{1371}$$

mit

$$W[J] \;=\; \exp\left\{-\frac{i}{2\hbar}\int d^4x' \int d^4x\; J(x')\,\Delta_F(x'-x)\,J(x)\right\} \;. \tag{1372}$$

Damit erhalten wir

$$G^{(2)}(x_1,x_2) \;=\; i\hbar\,\Delta_F(x_1-x_2)\;, \tag{1373}$$

$$\begin{aligned} G^{(4)}(x_1,x_2,x_3,x_4) \;=\;& (i\hbar)^2\;[\Delta_F(x_1-x_2)\,\Delta_F(x_3-x_4) \\ &+\Delta_F(x_1-x_3)\,\Delta_F(x_2-x_4) \\ &+\;\Delta_F(x_1-x_4)\,\Delta_F(x_2-x_3)]\,. \end{aligned} \tag{1374}$$

Weiter gilt $G^{(n)} \;=\; 0$ für $n$ ungerade. Wir können diese Resultate diagrammatisch darstellen.

$$i\hbar\,\Delta_F(y-x) \;=\; {}_x- \;\;-\;\;-\;\;-_y \;=\; G^{(2)}(x,y) \tag{1375}$$

und

$$G^{(4)}(x_1,x_2,x_3,x_4) \;=\; \begin{array}{c} {}_{x_2}- \;\;-\;\;-\;\;-_{x_1} \\ {}_{x_4}- \;\;-\;\;-\;\;-_{x_3} \end{array} \;+(x_3\;\leftrightarrow\;x_2)+(x_4\;\leftrightarrow x_2). \tag{1376}$$

Aus der Darstellung

$$\Delta_F(x'-x) \;=\; \int\frac{d^4p}{(2\pi\hbar)^4}\,\exp\left\{-\frac{i}{\hbar}\,p\cdot(x'-x)\right\}(p^2-\mu^2+i\epsilon)^{-1} \tag{1377}$$

folgt direkt

$$(\hbar^2\,\partial_\nu\partial^\nu+\mu^2)\Delta_F(x-x') \;=\; -\delta(x-x')\;. \tag{1378}$$

Daher ist $\Delta_F(x-x')$ die Greensche Funktion für den Operator $(\hbar^2\,\partial_\nu\partial^\nu+\mu^2)$. Sie ist assoziiert mit der Propagation der Lösungen der Klein–Gordon Wellengleichung

$$(\hbar^2\,\partial_\nu\partial^\nu+\mu^2)\varphi(x) \;=\; 0. \tag{1379}$$

Da dies die klassische Feldgleichung für ein neutrales skalares Feld ist, schlußfolgern wir, daß $\Delta_F(x-x')$ assoziiert ist mit der Propagation eines neutralen skalaren Teilchens von $x'$ nach $x$. Daher erwarten wir auch, daß $G^{(4)}(x_1,x_2,x_3,x_4)$ verknüpft ist mit der Streuamplitude eines Prozesses, bei dem wir es mit vier einlaufenden oder auslaufenden neutralen skalaren Teilchen zu tun haben.

Wir führen nun eine Fourier–Transformation der Greenschen Funktion in den Impulsraum durch

$$\begin{aligned} &\tilde{G}^{(n)}(p_1,\ldots,p_n)\,(2\pi)^4\,\delta(p_1+\ldots+p_n) \;= \\ &\int d^4x_1\ldots\int d^4x_n\;\exp\{i(p_1x_1+\ldots+p_nx_n)\}\;G^{(n)}(x_1,\ldots,x_n). \end{aligned} \tag{1380}$$

Die Diracsche $\delta$-Funktion als Faktor tritt aufgrund der Translationsinvarianz von $G^{(n)}(x_1, \ldots, x_n)$ auf. $G^{(n)}$ hängt nur von Differenzen der $x_i$ ab. Es gilt

$$\tilde{G}^{(2)}(p, -p) \;=\; i\,\tilde{\Delta}_F(p) \;=\; i\,(p^2 - \mu^2 + i\epsilon)^{-1}. \tag{1381}$$

Aufgrund der $\delta$-Funktion ist $\tilde{G}^{(2)}(p_1, p_2)$ nur definiert für $p_1 + p_2 \;=\; 0$.

Diagrammatisch symbolisieren wir $i\,\tilde{\Delta}_F(p)$ durch eine Linie mit dem assoziierten Impuls

$$\tilde{G}^{(2)}(p, -p) \;=\; i\,\tilde{\Delta}_F(p) \;=\; -\;-\;\;\rightarrow\;\;-\,. \tag{1382}$$

Die freie Greensche Funktion symbolisiert durch $\begin{array}{c} -\;-\;-\;- \\ -\;-\;-\;- \end{array}$ ist ein unverbundenes Objekt. Die einzelnen Propagationen symbolisiert durch die beiden Linien sind unabgängig voneinander und nicht miteinander verbunden. Es ist vorteilhaft, die sogenannten verbundenen Greenschen Funktionen zu studieren.

Wir führen ein generierendes Funktional $X[J]$ für verbundene Greensche Funktionen ein durch den Zusammengang

$$W[J] \;=\; e^{i\,X[J]}\,. \tag{1383}$$

Die verbundenen Greenschen Funktionen $G_c^{(n)}(x_1, \ldots, x_n)$ sind definiert durch die Funktionalentwicklung

$$i\,X[J] \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int d^4x_1 \ldots \int d^4x_n\, G_c^{(n)}(x_1, \ldots, x_n)\, J(x_1) \ldots J(x_n)\,. \tag{1384}$$

Daraus folgt

$$i^n\, G_c^{(n)}(x_1, \ldots, x_n) \;=\; i \left.\frac{\delta^n X[J]}{\delta J(x_1) \ldots \delta J(x_n)}\right|_{J(x)\,=\,0}. \tag{1385}$$

In unserem feldfreien Fall folgt

$$i\,X[J] \;=\; -\frac{i}{2} \int d^4x' \int d^4x\; J(x')\, \Delta_F(x' - x)\, J(x) \tag{1386}$$

und die einzige nichtverschwindende verbundene Greensche Funktion ist $G^{(2)}$. In einer wechselwirkenden Theorie gibt es verbundene Greensche Funktionen mit mehr als zwei skalaren Teilchen. Ähnlich wie die unverbundenen Greenschen Funktionen können wir auch die verbundenen Greenschen Funktionen in den Impulsraum transformieren.

## Die effektive Wirkung und die irreduzible Greensche Funktion

Wir führen das klassische Feld $\varphi_c(x)$ ein durch die Definition

$$\varphi_c(x) \;=\; \frac{\delta X[J]}{\delta J(x)} \,. \tag{1387}$$

$\varphi_c(x)$ ist ein Funktional von $J$. Wir hatten den allgemeinen Zusammenhang abgeleitet

$$\left(\frac{i}{\hbar}\right)^n \; < 0|T(\hat\varphi(x_1)\ldots\hat\varphi(x_n))|0> \;=\; \left.\frac{\delta^n W[J]}{\delta J(x_1)\ldots\delta J(x_n)}\right|_{J(x)=0} \,. \tag{1388}$$

Damit folgt ($\hbar \;=\; 1$)

$$\frac{\delta W[J]}{\delta J(x)} \;=\; i < 0|\hat\varphi(x)|0>_J \,, \tag{1389}$$

wobei $< 0|\hat\varphi|0>_J$ der Vakuumerwartungswert des Feldoperators in Gegenwart der Quelle $J$ ist. Aus $W[J] \;=\; e^{iX[J]}$ folgt

$$\begin{aligned}\varphi_c(x) \;&=\; \frac{\delta X[J]}{\delta J(x)} \;=\; \frac{< 0|\hat\varphi(x)|0>_J}{< 0|0>_J} \\ &=\; \frac{\frac{1}{i}\,\frac{\delta W[J]}{\delta J(x)}}{< 0|0>_J} \;=\; \frac{-i\,\frac{\delta W[J]}{\delta J(x)}}{W[J]} \,,\end{aligned} \tag{1390}$$

wobei wir die Notation

$$W[J] \;=< 0|0>_J \tag{1391}$$

für die Vakuum–Vakuum Amplitude in Gegenwart der Quelle $J$ verwendet haben. Bei Abwesenheit der Quelle ist $\varphi_c(x)$ gerade der Vakuumerwartungswert des Feldoperators.

Mit diesen Vorbereitungen läßt sich die effektive Wirkung $\Gamma[\varphi_c]$ definieren durch die Transformation

$$\Gamma[\varphi_c] \;=\; X[J] - \int d^4x\; J(x)\,\varphi_c(x) \,. \tag{1392}$$

Bilden wir die Funktionalableitung von (1392) in bezug auf $J(x)$ und benutzen dabei (1387), dann sehen wir sofort, daß $\Gamma[\varphi_c]$ nur von $\varphi_c$ abhängt, wie es auch die Notation impliziert. So wie $\varphi_c$ durch Funktionalableitung von $X[J]$ gewonnen werden kann, so kann $J$ durch Funktionalableitung von $\Gamma[\varphi_c]$ generiert werden. Es gilt

$$\begin{aligned}\frac{\delta\Gamma[\varphi_c]}{\delta\varphi_c(x)} \;&=\; \frac{\delta X[J]}{\delta\varphi_c(x)} - J(x) - \int d^4y\; \frac{\delta J(y)}{\delta\varphi_c(x)}\,\varphi_c(y) \,, \\ \frac{\delta X[J]}{\delta\varphi_c(x)} \;&=\; \int d^4y\; \frac{\delta X[J]}{\delta J(y)}\,\frac{\delta J(y)}{\delta\varphi_c(x)} \;=\; \int d^4y\; \frac{\delta J(y)}{\delta\varphi_c(x)}\,\varphi_c(y)\end{aligned} \tag{1393}$$

und damit schließlich

$$J(x) \;=\; -\frac{\delta\Gamma[\varphi_c]}{\delta\varphi_c} \,. \tag{1394}$$

Für die freie Theorie folgt aus

$$i\,X[J] \;=\; -\frac{i}{2}\int d^4x' \int d^4x\; J(x')\,\Delta_F(x'-x)\,J(x) \tag{1395}$$

sofort

$$\varphi_c(x) \;=\; -\int d^4x'\;\Delta_F(x-x')\,J(x')\;. \tag{1396}$$

Da nun gilt

$$(\partial_\nu\partial^\nu+\mu^2)\,\Delta_F(x-x') \;=\; -\delta(x-x'), \tag{1397}$$

folgt

$$(\partial_\nu\partial^\nu+\mu^2)\,\varphi_c(x) \;=\; J(x)\;. \tag{1398}$$

Dies ist identisch zur klassischen Feldgleichung in Gegenwart einer Quelle $J$. Dies rechtfertigt auch die Bezeichnung von $\varphi_c(x)$ als klassisches Feld.

Wir berechnen nun $\Gamma[\varphi_c]$ explizit für den Fall des freien Feldes. Es gilt (1395), (1397) und (1398). Damit ist

$$\begin{aligned} X[J] &= -\tfrac{1}{2}\int d^4x\,J(x)\int d^4x'\;J(x')\,\Delta_F(x'-x)\\ &= -\tfrac{1}{2}\int d^4x\;J(x)\int d^4x'\;\Big[(\partial_\nu{}'\partial^{\nu\prime}+\mu^2)\varphi_c(x')\Big]\,\Delta_F(x'-x)\;. \end{aligned} \tag{1399}$$

Es wird zweimal partiell integriert. Oberflächenterme werden vernachlässigt und so folgt

$$\begin{aligned} X[J] &= -\tfrac{1}{2}\int d^4x\,J(x)\int d^4x'\;\varphi_c(x')\,(\partial_\nu{}'\partial^{\nu\prime}+\mu^2)\Delta_F(x'-x)\\ &= -\tfrac{1}{2}\int d^4x\,J(x)\int d^4x'\;\varphi_c(x')\,(-\,\delta(x'-x))\\ &= \tfrac{1}{2}\int d^4x\;\Big[(\partial_\nu\partial^\nu+\mu^2)\varphi_c(x)\Big]\,\varphi_c(x)\;. \end{aligned} \tag{1400}$$

Insgesamt bekommen wir in der Tat

$$\begin{aligned} \Gamma[\varphi_c] &= -\tfrac{1}{2}\int d^4x\,\varphi_c(x)(\partial_\nu\partial^\nu+\mu^2)\varphi_c(x)\\ &= \tfrac{1}{2}\int d^4x\;\Big(\partial_\nu\varphi_c\partial^\nu\varphi_c-\mu^2{\varphi_c}^2\Big)\;, \end{aligned} \tag{1401}$$

wobei wir im letzten Schritt noch einmal partiell integriert haben. Dies ist exakt die Wirkung des freien Feldes in der klassischen Theorie. Daher resultiert auch die Bezeichnung effektive Wirkung für $\Gamma(\varphi_c)$.

Im allgemeinen Fall der wechselwirkenden Theorie, in dem wir $\Gamma[\varphi_c]$ nicht exakt bestimmen können, wird eine Funktionalentwicklung durchgeführt

$$\Gamma[\varphi_c] \;=\; -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^n}{n!}\int d^4x_1\ldots\int d^4x_n\;\Gamma^{(n)}(x_1\ldots x_n)\,\varphi_c(x_1)\ldots\varphi_c(x_n)\;. \tag{1402}$$

Die Koeffizienten $\Gamma^{(n)}$ in dieser Entwicklung sind die irreduziblen Greenschen Funktionen für ein Teilchen. In der Theorie des freien Feldes ist die einzige nichtverschwindende irreduzible Greensche Funktion nur für ein Teilchen gegeben. Aus (1401) erhalten wir

$$\Gamma^{(2)}(x', x) \;=\; \left(\partial_\nu^{x'} \partial_{x'}^\nu + \mu^2\right)\, \delta(x' - x)\;. \tag{1403}$$

Wir können wieder eine Fourier–Transformation der Einteilchen–Green Funktion in den Impulsraum durchführen. Es folgt

$$\begin{aligned}&\tilde{\Gamma}^{(n)}(p_1, \ldots, p_n)\, (2\pi)^4\, \delta(p_1 + \ldots + p_n) \;= \\ &\int d^4x_1 \ldots \int d^4x_n\; \exp\left\{i(p_1x_1 + \ldots + p_nx_n)\right\}\; \Gamma^{(n)}(x_1, \ldots, x_n)\;.\end{aligned} \tag{1404}$$

Es folgt offensichtlich aus (1403) und (1404)

$$\tilde{\Gamma}^{(2)}(p, -p) \;=\; -(p^2 - \mu^2)\;. \tag{1405}$$

Alternativ zu (1402) können wir eine Entwicklung in Potenzen des Impulses durchführen. Im Ortsraum haben wir eine Entwicklung von der folgenden Form vorliegen

$$\Gamma[\varphi_c] \;=\; \int d^4x \left(-V(\varphi_c) + \frac{A(\varphi_c)}{2}\, \partial_\nu\varphi_c\, \partial^\nu\varphi_c + \ldots\right)\;, \tag{1406}$$

wobei $A(\varphi_c)$ und $V(\varphi_c)$ Funktionen (aber keine Funktionale) von $\varphi_c$ sind.

Der Koeffizient $V(\varphi_c)$ nennt man gewöhnlich das effektive Potential. Zuvor hatten wir bereits abgeleitet $J(x) \;=\; -\delta\Gamma[\varphi_c]/\delta\varphi_c(x)$. Im Fall des klassischen Feldes, welches aufgrund der Translationsinvarianz konstant in Raum und Zeit ist, folgt aus (1406)

$$\frac{dV}{d\varphi_c} \;=\; J\;. \tag{1407}$$

Insbesondere, wenn wir den Quellterm $J$ null setzen, hat $\varphi_c$ die Bedeutung des Vakuumerwartungswertes des Feldoperators, und es ist

$$\frac{dV}{d\varphi_c} \;=\; 0\;. \tag{1408}$$

Wenn wir einmal das effektive Potential kennen, können wir aus den abgeleiteten Gleichungen den Vakuumerwartungswert des Feldoperators ermitteln. Wenn $\varphi_c(x)$ von Raum und Zeit abhängt, müssen wir den Vakuumerwartungswert aus $\delta\Gamma/\delta\varphi_c \;=\; 0$ ermitteln. Der Vakuumerwartungswert ist der stationäre Punkt von $V(\varphi_c)$. In unserer freien Feldtheorie gilt

$$V(\varphi_c) \;=\; \tfrac{1}{2}\,\mu^2\,\varphi_c^2\;. \tag{1409}$$

Hier ist der Vakuumerwartungswert des Feldoperators null.

## Störungsreihe für wechselwirkende Felder

Das Ziel der Studien, die wir nun beginnen wollen, ist die Ableitung von Feynman–Regeln für die Beschreibung störungstheorethischer Prozesse in der Quantenfeldtheorie. Zunächst bleiben wir bei dem Beispiel eines skalaren Feldes unter Einbeziehung einer Selbswechselwirkung. Diese sei beschrieben durch eine lokale Potentialfunktion $V(\phi)$, wobei wir noch eine Kopplungskonstante $g$ als Faktor abspalten. Damit läßt sich die betrachtete Lagrange–Dichte ausdrücken als

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{\text{int}} = \frac{\hbar^2}{2} \partial_\mu \phi \, \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - gV(\phi) \,. \tag{1410}$$

Das erzeugende Funktional der wechselwirkenden Theorie lautet damit

$$\begin{aligned} W[J] &= \mathcal{N} \int D\phi \, \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} \int d^4x \, (\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{\text{int}} + J\phi) \right\} \\ &= \mathcal{N} \int D\phi \, \exp\left\{ -\frac{i}{\hbar} \int d^4x \, gV(\phi) \right\} \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} \int d^4x \, (\mathcal{L}_0 + J\phi) \right\} \,. \end{aligned} \tag{1411}$$

Den Wechselwirkungsterm haben wir als Faktor abgespalten. Ohne diesen Faktor hätten wir das generierende Funktional $W_0[J]$ für freie Felder vorliegen, das wir analytisch ausintegrieren können. Um eine rechentechnische Auswertung bewerkstelligen zu können, wenden wir einen Trick an: Wir ersetzen das Feld $\phi$ jeweils durch einen Funktional–Differentialoperator nach der Quelle $J(x)$. Es gilt

$$\frac{\delta}{\delta J(x)} \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} \int d^4x' \, (\mathcal{L}_0 + J\phi) \right\} = \frac{i}{\hbar} \phi(x) \, \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} \int d^4x' \, (\mathcal{L}_0 + J\phi) \right\} \,. \tag{1412}$$

Die Hilfsgröße $J$ war ja gerade eingeführt worden, um solche Umformungen zu ermöglichen. Wir ersetzen im folgenden jedes auftretende $\phi$ in $V(\phi)$ durch den Ableitungsoperator

$$\phi(x) \to \frac{\hbar}{i} \frac{\delta}{\delta J(x)} \,. \tag{1413}$$

Dies führt zu der Schreibweise

$$\mathcal{L}_{\text{int}}(\phi) \to \mathcal{L}_{\text{int}} \left( \frac{\hbar}{i} \frac{\delta}{\delta J(x)} \right) \,. \tag{1414}$$

Wir gehen nun davon aus, daß das Vertauschen der Funktionalintegration mit der Differentiation nach dem Parameter $J$ mathematisch erlaubt ist und ziehen den Wechselwirkungsterm vor das Integral. Also lautet das erzeugende Funktional mit Wechselwirkung

$$W[J] = \mathcal{N} \exp\left\{ -\frac{i}{\hbar} \int d^4x \, gV\left( \frac{\hbar}{i} \frac{\delta}{\delta J(x)} \right) \right\} W_0[J] \,. \tag{1415}$$

Wieder wird der Normierungsfaktor so bestimmt, daß gilt $W[0] = 1$. Damit folgt explizit

$$\mathcal{N}^{-1} = \exp\left\{ -\frac{i}{\hbar} \int d^4x \, gV\left( \frac{\hbar}{i} \frac{\delta}{\delta J(x)} \right) \right\} W_0[J] \Bigg|_{J=0} \,. \tag{1416}$$

Entwickeln wir in (1415) und (1416) die Exponentialfunktion in eine Potenzreihe, so liefert dies die Störungsreihe für das erzeugende Funktional. Man kann schreiben

$$W[J] = W_0[J] \, (1 + g w_1[J] + g^2 w_2[J] + \cdots) \,. \tag{1417}$$

Die Entwicklungskoeffizienten lassen sich nicht ganz trivial ermitteln, da wir auch den Normierungsfaktor (1416) in eine Taylor–Reihe entwickeln müssen. Wir definieren nun Funktionale $u_k[J]$ durch

$$\exp\left\{-\frac{i}{\hbar}\int d^4x\, gV\left(\frac{\hbar}{i}\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)\right\} W_0[J] \equiv \\ W_0[J](1+gu_1[J]+g^2u_2[J]+g^3u_3[J]+\cdots)\,. \tag{1418}$$

Damit bekommen wir beispielsweise

$$\begin{aligned} u_1[J] &= W_0^{-1}[J]\left(-\frac{i}{\hbar}\int d^4x\, V\left(\frac{\hbar}{i}\frac{\delta}{\delta J}\right)\right) W_0[J]\,, \\ u_2[J] &= W_0^{-1}[J]\frac{1}{2!}\left(-\frac{i}{\hbar}\int d^4x\, V\left(\frac{\hbar}{i}\frac{\delta}{\delta J}\right)\right)\left(-\frac{i}{\hbar}\int d^4y\, V\left(\frac{\hbar}{i}\frac{\delta}{\delta J}\right)\right) W_0[J]\,. \end{aligned} \tag{1419}$$

Um das erzeugende Funktional $W[J]$ als Potenzreihe zu erhalten, müssen zwei Reihen durcheinander dividiert werden

$$W[J] = W_0[J]\,\frac{1+gu_1[J]+g^2u_2[J]+g^3u_3[J]+\cdots}{1+gu_1[0]+g^2u_2[0]+g^3u_3[0]+\cdots}\,. \tag{1420}$$

Die Koeffizienten–Funktionale $w_k[J]$ ergeben sich erst nach Division der beiden Reihen. Betrachten wir nun allgemein die Division zweier Potenzreihen

$$\frac{\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k\, x^k}{\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k\, x^k} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k\, x^k\,. \tag{1421}$$

Wir bringen den Nenner auf die rechte Seite und führen die Multiplikation aus. Dann ergibt sich nach Koeffizientenvergleich

$$a_k = \sum_{i=0}^{k} b_{k-i}\, c_i\,. \tag{1422}$$

Mit dieser Rekursionsbeziehung lassen sich sukzessive die $c_i$ berechnen. Speziell folgt für $a_0 = b_0 = 1$

$$\begin{aligned} c_0 &= 1\,, \\ c_1 &= a_1 - b_1\,, \\ c_2 &= a_2 - b_2 - (a_1 - b_1)b_1\,. \end{aligned} \tag{1423}$$

Damit folgt auch bis zur quadratischen Ordnung

$$\begin{aligned} w_1[J] &= u_1[J] - u_1[0]\,, \\ w_2[J] &= (u_2[J] - u_2[0]) - (u_1[J] - u_1[0])u_1[0]\,. \end{aligned} \tag{1424}$$

# Feynman–Regeln für die $\phi^4$–Theorie

Als praktisches Beispiel wollen wir die Störungsreihe der $\phi^4$–Theorie ableiten. Wir gehen aus von der Lagrange–Dichte

$$\mathcal{L} = \frac{\hbar^2}{2}\,\partial_\mu\phi\,\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \frac{g}{4!}\phi^4\,. \tag{1425}$$

Um das erzeugende Funktional $W[J]$ und um die 2–Punkt– und 4–Punkt–Greensche Funktion in erster Ordnung Störungstheorie ermitteln zu können benötigen wir das Funktional

$$\begin{aligned} u_1[J] &= W_0^{-1}[J]\left(-\frac{i}{\hbar}\int d^4x\,V\left(\frac{\hbar}{i}\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)\right)W_0[J] \\ &= W_0^{-1}[J]\frac{-i}{\hbar}\frac{1}{4!}\int d^4x\,\left(\frac{\hbar}{i}\right)^4\left(\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)^4 W_0[J]\,. \end{aligned} \tag{1426}$$

Das erzeugende Funktional der freien Theorie ist analytisch bekannt

$$\begin{aligned} W_0[J] &= \exp\left\{-\frac{i}{2\hbar}\int d^4y\,d^4z\;J(y)\Delta_F(y-z)J(z)\right\} \\ &\equiv \exp\left\{-\frac{i}{2\hbar}(J,\Delta_F J)\right\}\,. \end{aligned} \tag{1427}$$

Man erhält für die erste Ableitung

$$\begin{aligned} &\frac{\hbar}{i}\frac{\delta}{\delta J(x)}\exp\left\{-\frac{i}{2\hbar}(J,\Delta_F J)\right\} = \\ &\quad -\int d^4y\;\Delta_F(x-y)\,J(y)\,\exp\left\{-\frac{i}{2\hbar}(J,\Delta_F J)\right\}\,. \end{aligned} \tag{1428}$$

Entsprechend folgt für die zweite Ableitung

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\hbar}{i}\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)^2\exp\left\{-\frac{i}{2\hbar}(J,\Delta_F J)\right\} = \\ &\quad \left[-\frac{\hbar}{i}\Delta_F(0) + \left(\int d^4y\;\Delta_F(x-y)J(y)\right)^2\right]\exp\left\{-\frac{i}{2\hbar}(J,\Delta_F J)\right\}\,. \end{aligned} \tag{1429}$$

In diesem Zusammenhang erinnern wir an die Funktionalableitungsregel

$$\frac{\delta\phi(x')}{\delta\phi(x)} = \delta(x'-x)\,. \tag{1430}$$

Diese Regel ist verantwortlich für das Auftreten von $\Delta_F(0)$. Die dritte Ableitung wird zu

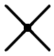
$$\begin{aligned} &\left(\frac{\hbar}{i}\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)^3\exp\left\{-\frac{i}{2\hbar}(J,\Delta_F J)\right\} = \\ &\quad \left[3\frac{\hbar}{i}\Delta_F(0)\int d^4y\;\Delta_F(x-y)J(y)\right. \\ &\quad \left. - \left(\int d^4y\;\Delta_F(x-y)J(y)\right)^3\right]\exp\left\{-\frac{i}{2\hbar}(J,\Delta_F J)\right\}\,. \end{aligned} \tag{1431}$$

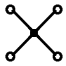
Die vierte Ableitung lautet schließlich

$$\left(\frac{\hbar}{i}\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)^4 \exp\left\{-\frac{i}{2\hbar}(J,\Delta_F J)\right\} =$$
$$\left[3\left(\frac{\hbar}{i}\right)^2 (\Delta_F(0))^2 - 6\frac{\hbar}{i}\Delta_F(0)\left(\int d^4y\, \Delta_F(x-y)J(y)\right)^2 + \left(\int d^4y\, \Delta_F(x-y)J(y)\right)^4\right] \exp\left\{-\frac{i}{2\hbar}(J,\Delta_F J)\right\}. \tag{1432}$$

Zur Veranschaulichung benutzen wir eine graphische Schreibweise. Jedem Feynman–Propagator $\Delta_F(x-y)$ wird eine Linie  zugeordnet. Außerdem werden die Quellterme $J(x)$ durch Linienenden  bezeichnet. Wir fassen die graphische Schreibweise zusammen.

| | | |
|---|---|---|
| Propagator | $i\hbar\Delta_F(x-y)$ |  |
| Schleife | $i\hbar\Delta_F(0)$ |  |
| Externe Quelle | $\frac{i}{\hbar}\int d^4x\, J(x)$ |  |
| $\phi^4$–Wechselwirkung | $-\frac{i}{\hbar}\int d^4x$ |  |

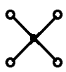
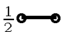
Es ist zu beachten, daß zu jedem Vertex  mit vier daranhängenden Linien und zu jedem Quellterm  jeweils eine Koordinate $x$ gehört. Über diese Koordinate muß integriert werden, $\int d^4x$. In dieser kompakten Schreibweise erhalten wir für $u_1[J]$

$u_1[J] = \frac{1}{4!}\Big(3$  $+\,6$  $+$  $\Big)\,.$ (1433)

Hier treten Terme quadratisch und in vierter Potenz in $J$ auf, sowie ein konstanter Term der Form . Die Normierung des erzeugenden Funktionals $W[J]$ auf $W[0] = 1$ führt dazu, daß sich die Beiträge solcher unverbundener Vakuumblasen herauskürzen. In erster Ordnung der Störungsentwicklung gilt

$$\begin{aligned} W[J] &= \frac{1 + gu_1[J] + \cdots}{1 + gu_1[0] + \cdots} W_0[J] \\ &= (1 + g(u_1[J] - u_1[0]) + \cdots)\, W_0[J]\,. \end{aligned} \tag{1434}$$

Der Normierungsterm $u_1[0]$ enthält nur die Vakuumgraphen, da ja durch die Forderung $J = 0$ die Linienenden explizit eliminiert werden. Damit lautet das erzeugende Funktional in erster Ordnung graphisch dargestellt

$W[J] = \Big[1 + \frac{g}{4!}\Big(6$  $+$  $\Big) + \ldots\Big]\, e^{\frac{1}{2}}$ (1435)

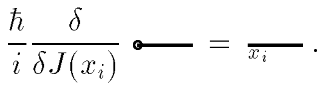
Explizit ausgeschrieben bekommen wir

$$
\begin{aligned}
W[J] \;=\; & \Big[1 - \frac{i}{\hbar}\frac{g}{4!}\int d^4x\,(6i\hbar\Delta_F(0)\cdot \\
& \int d^4y_1 \int d^4y_2\,\Delta_F(x-y_1)\Delta_F(x-y_2)J(y_1)J(y_2) \\
& + \int d^4y_1\,d^4y_2\,d^4y_3\,d^4y_4\,\Delta_F(x-y_1)\Delta_F(x-y_2)\Delta_F(x-y_3) \\
& \Delta_F(x-y_4)J(y_1)J(y_2)J(y_3)J(y_4) + \cdots)\Big] \exp\left\{-\frac{i}{2\hbar}(J,\Delta_F J)\right\} . \qquad (1436)
\end{aligned}
$$

Ausgehend von diesen Erkenntnissen können wir nun auch die Greensche Funktion der wechselwirkenden Theorie in erster Ordnung der Störungsentwicklung berechnen. Die 2–Punkt–Funktion resultiert aus

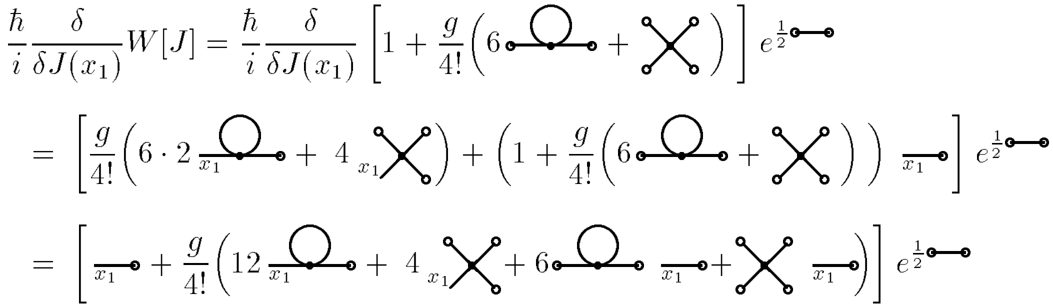
$$
G(x_1,x_2) = \left(\frac{\hbar}{i}\right)^2 \left.\frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(x_1)\,\delta J(x_2)}\right|_{J=0} . \qquad (1437)
$$

Die Auswertung machen wir am übersichtlichsten wieder graphisch. Die Differentiation nach $J(x_i)$ bedeutet einfach, daß ein Linienende durch eine offene äußere Linie mit dem Koordinatenindex $x_i$ ersetzt wird,



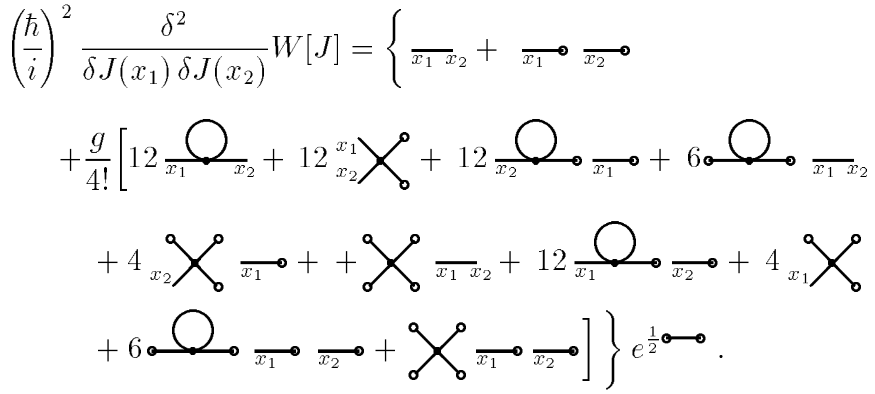
(1438)

Damit resultiert für die erste Ableitung des Funktionals (1435)



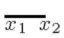
(1439)

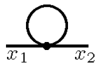
Jeder der Summanden enthält mindestens einen Endpunkt  (entspricht einem Faktor $J(x)$), so daß auch in der wechselwirkenden Theorie keine 1–Punkt Greensche Funktion existiert, da diese im Grenzfall $J \to 0$ verschwindet. Für die zweite Ableitung von $W[J]$ ergibt sich graphisch



(1440)

Im Grenzfall $J \to 0$ fallen alle Terme bis auf zwei weg. Die 2–Punkt–Greensche Funktion der $\phi^4$–Theorie lautet damit

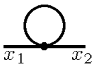
$$G^{(2)}(x_1, x_2) = $$ 

$$+ \frac{1}{2}\, g$$ 

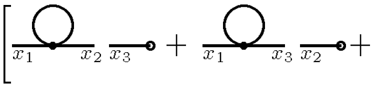
$$+ \; O(g^2)\,. \tag{1441}$$

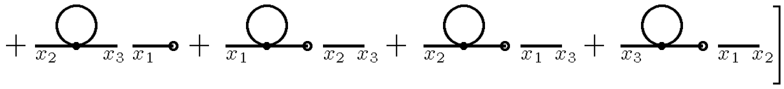
Explizit ausgeschrieben gilt

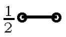
$$\begin{aligned} G^{(2)}(x_1, x_2) &= i\hbar\Delta_F(x_1 - x_2) \\ &-\frac{1}{2}\hbar^2 g\, \Delta_F(0) \int d^4x\, \Delta_F(x_1 - x)\Delta_F(x - x_2) + O(g^2)\,. \end{aligned} \tag{1442}$$

Der Einfluß der Wechselwirkung auf die Greensche Funktion besteht also in niedrigster Ordnung im Auftreten des Schleifengraphen 

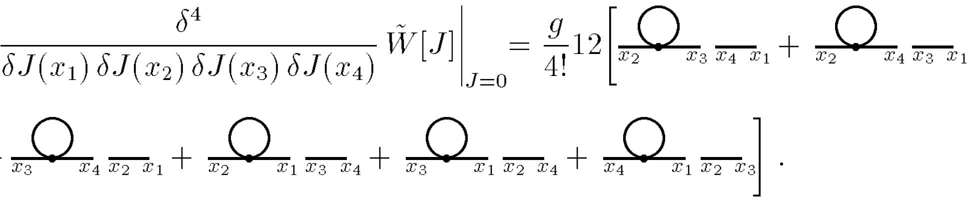
(„tadpole graph“). Die Berechnung der 4–Punkt Greenschen Funktion erfordert sehr viel mehr Aufwand, da beim nochmaligen Differentieren viel mehr Terme entstehen. Letztlich interessieren wir uns aber nur für diejenigen Beiträge, die im Limes $J \to 0$ nicht verschwinden, also kein Linienende  enthalten. Diese Bedingung schränkt die Zahl der relevanten Terme stark ein. Wir betrachten zunächst den Beitrag $\tilde{W}[J]$ mit  zu dem erzeugenden Funktional $W[J]$. Die interessierenden Terme mit einem Linienende in der dritten Ableitung ergeben sich als

$$\left(\frac{\hbar}{i}\right)^3 \frac{\delta^3}{\delta J(x_1)\, \delta J(x_2)\, \delta J(x_3)} \tilde{W}[J] = \frac{g}{4!}\, 12 \Big[$$ 

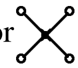


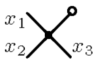
$$\Big]\, e^{\frac{1}{2}}$$ 
$$+ \dots\,. \tag{1443}$$

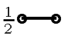
Die weggelassenen Terme enthalten mindestestens zwei Linienenden, d. h. zwei Faktoren $J(x_i)$. Wir gehen nun zur vierten Ableitung über und setzen anschließend $J = 0$. Es bleiben die folgenden Terme übrig

$$\left(\frac{\hbar}{i}\right)^4 \frac{\delta^4}{\delta J(x_1)\, \delta J(x_2)\, \delta J(x_3)\, \delta J(x_4)} \tilde{W}[J]\bigg|_{J=0} = \frac{g}{4!} 12 \Big[$$ 

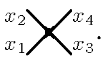
$$\Big]\,. \tag{1444}$$

Es handelt sich hier immer um den gleichen, aus zwei disjunkten Anteilen bestehenden Graphen, der mit allen Permutationen der Koordinaten $x_i$ auftritt. Analog geht die Rechnung für den Beitrag $\overset{\circ}{W}[J]$, der den Faktor  enthält. Es folgt

$$\left(\frac{\hbar}{i}\right)^3 \frac{\delta^3}{\delta J(x_1)\, \delta J(x_2)\, \delta J(x_3)} \overset{\circ}{W}[J] = \frac{g}{4!}\, 24$$ 

$$e^{\frac{1}{2}}$$ 
$$+ \dots \tag{1445}$$

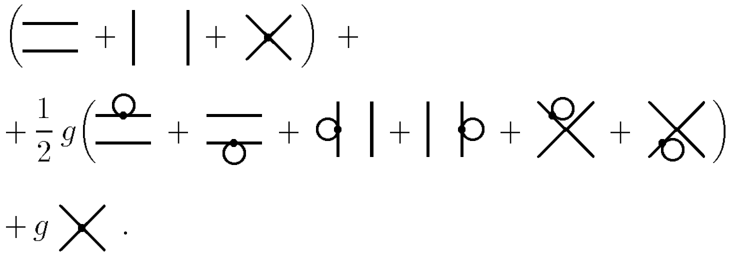
Weiter erhalten wir

$$\left(\frac{\hbar}{i}\right)^4 \frac{\delta^4}{\delta J(x_1)\, \delta J(x_2)\, \delta J(x_3)\, \delta J(x_4)} \overset{\circ}{W}[J]\bigg|_{J=0} = \frac{g}{4!}\, 24$$ 

$$. \tag{1446}$$

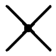
Damit sind alle Beiträge zur 4–Punkt–Funktion der $\phi^4$–Theorie in erster Ordnung ausgerechnet. Das Ergebnis hat graphisch die folgende Gestalt

$$G^{(4)}(x_1, x_2, x_3, x_4) \;=$$



(1447)

Die Struktur dieses Resultats ist sehr plausibel. Zusätzlich zur freien 4–Punkt Funktion treten in erster Ordnung alle Propagatoren mit einem Selbstenergieeinschub  auf. Zusätzlich gibt es einen einzigen echten Wechselwirkungsgraphen  .

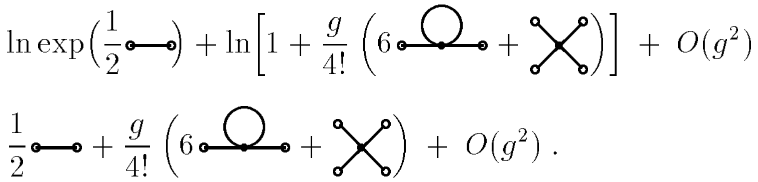
Die numerischen Vorfaktoren vor den einzelnen Graphen — man spricht auch von Symmetriefaktoren — kann man durch kombinatorische Überlegegungen erschließen. Der Symmetriefaktor des Streugraphen  ist $4!/4! = 1$, denn es gibt $4!$ Möglichkeiten, die vier äußeren Linien den vier Beinen des Vertex zuzuordnen.

Die 4–Punkt–Funktion hat eine recht komplizierte Gestalt aufgrund der Anwesenheit der Produkte von disjunkten 2–Punkt–Funktionen. Beschränken wir uns hingegen auf die zusammenhängende Greensche Funktion $G_c^4(x_1, x_2, x_3, x_4)$, dann wird nur der letzte Term von (1447) beitragen. Wir betrachten hierzu das erzeugende Funktional

$$\frac{i}{\hbar} X[J] = \ln W[J] \,. \tag{1448}$$

Damit folgt ausgehend von der graphischen Darstellung für $W[J]$

$$\frac{i}{\hbar} X[J] \;=$$



(1449)

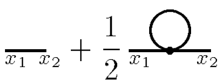
Hiervon müssen wir jetzt die vierte Ableitung nach $J$ bilden, um auf die zusammenhängende 4–Punkt–Funktion zu kommen. Es gibt hier nur einen einzigen nichtverschwindenden Beitrag,

$$G_c^{(4)}(x_1, x_2, x_3, x_4) \;=\; \left(\frac{\hbar}{i}\right)^3 \frac{\delta^4 X[J]}{\delta J(x_1)\, \delta J(x_2)\, \delta J(x_3)\, \delta J(x_4)}\bigg|_{J=0}$$

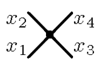
$$= \; g$$  $$+ \; O(g^2) \,. \tag{1450}$$

Wir fassen die verbundenen Greenschen Funktionen zusammen

$$G_c^{(2)}(x_1, x_2) \;=$$




$$G_c^{(4)}(x_1, x_2, x_3, x_4) \;=$$




(1451)

Wieder können wir eine Fourier–Transformation in den Impulsraum vornehmen. Wir setzen $\hbar = 1$ und verwenden

$$\tilde{G}^{(n)}(p_1, p_2, \ldots, p_n)(2\pi)^4 \delta(p_1 + p_2 + \cdots + p_n) = \int dx_1 \ldots dx_n \, G^{(n)}(x_1, \ldots, x_n) \, e^{i(p_1 x_1 + \cdots + p_n x_n)} \,. \tag{1452}$$

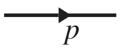
Diese Definition gilt gleichermaßen für verbundene und unverbundene Greensche Funktionen. Für die freie Theorie finden wir so

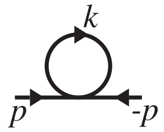
$$\tilde{G}_0^{(2)}(p, -p) = \frac{i}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} \,, \tag{1453}$$

während die verbundene Greensche Funktion bei Anwesenheit der Wechselwirkung lautet

$$\tilde{G}^{(2)}(p, -p) = \frac{i}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} - \frac{i}{2} g \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} \frac{i}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} + O(g^2) \,. \tag{1454}$$

Dies können wir erneut diagrammatisch darstellen

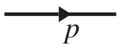
$\tilde{G}^{(2)}(p, -p) =$ 

$+ \frac{1}{2}$ 

$+ O(g^2) \,.$ (1455)

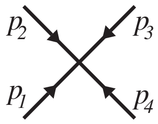
Die Feynman–Regeln zur Darstellung und Berechnung der Diagramme fassen wir zusammen:

1. Jeder Linie, die den Impuls $p$ trägt, ordnen wir einen Faktor $i(p^2 - m^2 + i\varepsilon)^{-1}$ zu



$\frac{i}{p^2 - m^2 + i\varepsilon}$ (1456)

2. Jedem Vertex mit vier Linien, die die Impulse $p_1$, $p_2$, $p_3$, $p_4$ tragen, ordnen wir einen Faktor $-ig$ zu. Es gilt insgesamt Impulserhaltung



$-ig \quad ; \quad p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 0$ (1457)

3. Wir integrieren über jeden Impuls $k$ einer inneren Schleife mit dem Gewicht $d^4k\,(2\pi)^{-4}$.

## Mandelstam Variable

Zur Beschreibung von Streuprozessen ist es vorteilhaft, invariante Variablen zu verwenden, die in jedem Koordinatensystem unverändert gelten. Zur Illustration betrachten wir Streuprozesse von zwei Teilchen der Form AB $\to$ CD. Zur Beschreibung dieses Streuprozesses wollen wir Variable verwenden, die invariant unter Lorentz-Transformationen sind. Gegeben seien die Impulse der vier Teilchen $p_A, p_B, p_C$ und $p_D$. Mögliche Invariante sind damit $p_A \cdot p_B, p_A \cdot p_C$ und $p_A \cdot p_D$. Ferner gilt

$$p_i^2 = m_i^2 \tag{1458}$$

und aufgrund der Gesamtimpulserhaltung

$$p_A + p_B = p_C + p_D \,. \tag{1459}$$

Damit sind nur zwei der drei Skalarprodukte unabhängig voneinander. Wir definieren die folgenden Variablen

$$\begin{aligned} s &:= (p_A + p_B)^2 \,, \\ t &:= (p_A - p_C)^2 \,, \\ u &:= (p_A - p_D)^2 \,. \end{aligned} \tag{1460}$$

Es gilt die allgemeine Relation

$$s + t + u = m_A^2 + m_B^2 + m_C^2 + m_D^2 \,. \tag{1461}$$

Dies prüfen wir nach

$$\begin{aligned} s + t + u &= p_A^2 + p_B^2 + 2p_A p_B + p_A^2 + p_C^2 - 2p_A p_C + p_A^2 + p_D^2 - 2p_A p_D \\ &= m_A^2 + m_B^2 + m_C^2 + m_D^2 + 2p_A(p_A + p_B - p_C - p_D) \,. \end{aligned} \tag{1462}$$

Die letzte Klammer verschwindet aufgrund der Energie-Impulserhaltung (1459). Die Variable $s$ hat im Schwerpunktsystem eine besonders einfache Bedeutung. Hier gilt

$$\begin{aligned} p_A &= (E_A, \vec{p}_A) \\ p_B &= (E_B, \vec{p}_B) = (E_B, -\vec{p}_A) \end{aligned} \tag{1463}$$

und damit

$$s = (E_A + E_B)^2 \,. \tag{1464}$$

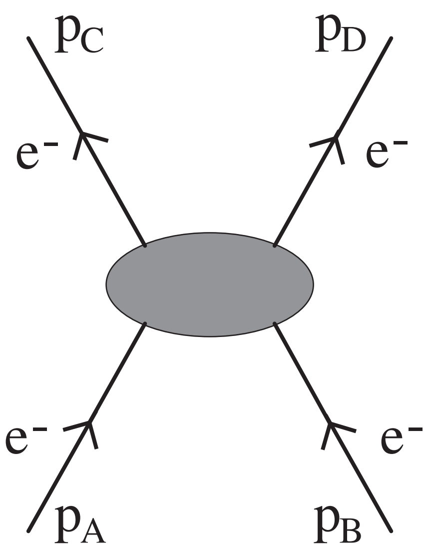
Damit entspricht $\sqrt{s}$ der totalen Schwerpunktsenergie. Die Variable $t$ schreiben wir aus als

$$\begin{aligned} t &= (p_A - p_C)^2 = p_A^2 + p_C^2 - 2p_A p_C \\ &= m_A^2 + m_C^2 - 2E_A E_C + 2|\vec{p}_A||\vec{p}_C| \cos\theta \,, \end{aligned} \tag{1465}$$

wobei $\theta$ der Winkel zwischen $\vec{p}_A$ und $\vec{p}_C$ ist.

Als Beispiel betrachten wir nun die elastische Streuung von zwei Elektronen. Hierbei gilt offensichtlich

$$m_A = m_B = m_C = m_D = m_e \,. \tag{1466}$$




Figur 19: Graphische Darstellung der Elektron-Elektron Streuung. Im Eingangskanal haben die Teilchen die Impulse $p_A$ und $p_B$, im Ausgangskanal die Impulse $p_C$ und $p_D$.

Ferner sei $\vec{p}_e$ der Impuls des Elektrons im Schwerpunktsystem, so daß gilt

$$\vec{p}_A = -\vec{p}_B = \vec{p}_e\,. \tag{1467}$$

Aufgrund der Energie-Impulserhaltung folgt

$$|\vec{p}_C| = |\vec{p}_D| = |\vec{p}_e| =: p_e \tag{1468}$$

mit

$$p_e = \sqrt{E_e^2 - m_e^2}\,. \tag{1469}$$

Damit ergibt sich

$$s = (E_A + E_B)^2 = (2E_A)^2 = 4(p_e^2 + m_e^2)\,, \tag{1470}$$

$$t = 2m_e^2 - 2E_e^2 + 2p_e^2\cos\theta = -2p_e^2(1-\cos\theta)\,. \tag{1471}$$

Für $u$ folgt

$$u = m_A^2 + m_D^2 - 2E_A E_D + 2\vec{p}_A \cdot \vec{p}_D\,. \tag{1472}$$

Im Schwerpunktsystem gilt aber $\vec{p}_C = -\vec{p}_D$ und daher schließlich

$$u = 2m_e^2 - 2E_e^2 - 2p_e^2\cos\theta = -2p_e^2(1+\cos\theta)\,. \tag{1473}$$

Damit ist der Streuprozess vollständig durch $p_e$ und $\theta$ beschrieben.

# Zum Elektronenpropagator $S_F$

Wir betrachten ein Elektron im elektromagnetischen Feld. Wir gehen aus von der Dirac-Gleichung

$$(i\gamma_\mu \partial^\mu - m)\,\psi = -e\,\gamma_\mu A^\mu\,\psi. \tag{1474}$$

Die rechte Seite weist die Struktur des Faktors auf, den wir jedem elektromagnetischen Vertex zuordnen. Wir erinnern uns, daß für ein einlaufendes Photon gilt

$$A_\mu = \epsilon_\mu\, e^{-ikx}. \tag{1475}$$

Wir gehen jetzt aus von der Definitionsgleichung der freien Greenschen Funktion

$$(i\,\gamma_\mu \partial^\mu - m)\,G_F \;=\; \delta^{(4)}(x - x'). \tag{1476}$$

Mit dieser Greenschen Funktion können wir eine Lösung zu (1474) finden

$$\psi(x) \;=\; -e \int d^4x'\; G_F(x, x')\,\gamma_\mu\; A^\mu(x')\;\psi(x'). \tag{1477}$$

$\psi$ tritt hier auch auf der rechten Seite auf, so daß bei einer iterativen Lösung eine Störungsreihe in Potenzen von $e$ erhalten wird.

Aufgrund der Translationsinvarianz ist $G_F(x, x')$ nur eine Funktion der Differenz $x - x'$. Wir transformieren in den Impulsraum

$$G_F(x - x') \;=\; \frac{1}{(2\pi)^4} \int S_F(p)\; e^{-ip(x-x')}\; d^4p. \tag{1478}$$

Wir setzen dies in (1476) ein und bekommen

$$\frac{1}{(2\pi)^4} \int (\not p - m)\; S_F(p)\; e^{-ip(x-x')}\; d^4p \;=\; \frac{1}{(2\pi)^4} \int e^{-ip(x-x')}\; d^4p. \tag{1479}$$

Die rechte Seite ist gerade die Fourier-Darstellung der Delta-Funktion. Damit bekommen wir im Impulsraum gerade

$$(\not p - m)\; S_F(p) = 1 \tag{1480}$$

und somit

$$S_F(p) = \frac{1}{\not p - m} \;=\; \frac{\not p + m}{p^2 - m^2}. \tag{1481}$$

Nachdem wir die Struktur des elektromagnetischen Vertex eines Spin -$\frac{1}{2}$ Teilchens abgeleitet haben, wollen wir auch den Vertex eines Klein-Gordon-Teilchens ableiten. Wir gehen aus von der Klein-Gordon-Gleichung

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2)\;\phi \;=\; 0. \tag{1482}$$

Die minimale Ankopplung des elektromagnetischen Feldes führt auf

$$i\partial^\mu \rightarrow i\partial^\mu + eA^\mu \tag{1483}$$

und die Klein-Gordon-Gleichung wird zu

$$(\partial_\mu \partial^\mu \; + \; m^2) \, \phi \; = \; -V\phi \tag{1484}$$

mit

$$V \; = \; -ie(\partial_\mu A^\mu + A^\mu \partial_\mu) - e^2 A^2. \tag{1485}$$

Beschränken wir uns in Störungsrechnung niedrigster Ordnung auf die Terme in niedrigster Ordnung in $e$, so können wir zunächst den Term $-e^2A^2$ vernachlässigen.

Wir betrachten nun die Amplitude für die Streuung eines Klein-Gordon-Teilchens von einem Anfangszustand $\phi_i$ in einem Endzustand $\phi_f$ bewirkt durch das elektromagnetische Potential $A_\mu$. Die Übergangsamplitude kann geschrieben werden als

$$\begin{aligned} T_{fi} \;&=\; -i \int \phi_f^*(x) \, V(x) \, \phi_i(x) \, d^4x \\ &=\; i \int \phi_f^* \; ie(A^\mu \partial_\mu + \partial_\mu A^\mu) \, \phi_i \; d^4x \; . \end{aligned} \tag{1486}$$

Die Ableitung auf der rechten Seite wirkt auf $A^\mu$ und $\phi_i$. Wir führen eine partielle Integration durch

$$\int \phi_f^* \; \partial_\mu (A^\mu \phi_i) \; d^4x \; = \; - \int (\partial_\mu \phi_f^*) \; A^\mu \; \phi_i \; d^4x. \tag{1487}$$

Damit können wir formal schreiben

$$T_{fi} \; = \; -i \int j_\mu^{fi} \, A^\mu \, d^4x \tag{1488}$$

mit

$$j_\mu^{fi} \; = \; -ie[\phi_f^*(\partial_\mu \phi_i) - (\partial_\mu \phi_f^*)\phi_i]. \tag{1489}$$

Wenn das einlaufende Klein-Gordon-Teilchen den Viererimpuls $p_i$ aufweist, so können wir ansetzen

$$\phi_i(x) \; = \; N_i \; e^{-ip_i x} \tag{1490}$$

mit der Normierungskonstanten $N_i$. Mit einem ähnlichen Ausdruck für $\phi_f$ folgt

$$j_\mu^{fi} \; = \; -e \; N_i \; N_f \, (p_i + p_f)_\mu \; e^{i(p_f - p_i)x}. \tag{1491}$$

Damit ist die gesuchte Struktur des elektromagnetischen Vertex abgeleitet.

# Regeln für Feynman–Graphen

Wir notieren in kompakter Schreibweise die Regeln für Feynman–Graphen in der Quantenelektrodynamik. Die Ausdrücke für Wirkungsquerschnitte teilt man in zwei Teile auf. Erstens die invariante Amplitute $\mathcal{M}$, die ein Lorentz–Skalar ist und in der die Physik liegt, und zweitens die kinematischen und Phasenraumfaktoren. Ausgedrückt durch $\mathcal{M}$ lautet der Ausdruck für den differentiellen Wirkungsquerschnitt für spinlose Teilchen und für Photonen (skalare Quantenelektrodynamik)

$$\begin{aligned} d\sigma = & \frac{1}{|\vec{v}_1 - \vec{v}_2|} \left(\frac{1}{2E_1}\right) \left(\frac{1}{2E_2}\right) |\mathcal{M}|^2 \frac{d^3p_1'}{2E_1'(2\pi)^3} \cdots \frac{d^3p_n'}{2E_n'(2\pi)^3} \cdot \\ & (2\pi)^4 \delta^4 \left(p_1 + p_2 - \sum_{i=1}^{n} p_i'\right) S \,. \end{aligned} \tag{1492}$$

Wie üblich ist

$$E_i = \sqrt{\vec{p}_i^{\,2} + m_i^2} \,. \tag{1493}$$

$\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ sind die Geschwindigkeiten der kollinear einfallenden Teilchen. In dem Ausdruck (1492) wird dann über alle die Ausgangsimpulse $p_1' \ldots p_n'$ integriert, die nicht beobachtet werden. Den Faktor $1/(2\pi)^3$ bei der Dichte der Endzustände macht man sich leicht klar. Wir betrachten die Dichte der Zustände von ebenen Wellen in einem Kasten mit der Kastenlänge $L$. Stehende Wellen im Kasten erfordern

$$\begin{aligned} k_x L &= n_x 2\pi \,, \\ k_y L &= n_y 2\pi \,, \\ k_z L &= n_z 2\pi \,. \end{aligned} \tag{1494}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} dN &= dn_x \, dn_y \, dn_z \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} L^3 dk_x \, dk_y \, dk_z = \frac{V}{(2\pi)^3} d^3k \\ &= \frac{V}{(2\pi)^3} d^3p \quad \text{für} \quad \hbar = 1 \,. \end{aligned} \tag{1495}$$

Den statistischen Faktor $S$ erhält man, indem man für jeweils $l$ identische Teilchen im Endzustand einen Faktor $\frac{1}{l!}$ mitnimmt

$$S = \prod_i \frac{1}{l_i!} \,. \tag{1496}$$

Für Dirac–Teilchen ersetzt man den Faktor $1/(2E_i)$ durch $m_i/E_i$ und nimmt wieder den statistischen Faktor $S$ mit. Mit der Konvention, daß Dirac–Spinoren auf $2m$ statt auf Eins normiert sind, gilt Gleichung (1492) unverändert auch für Fermionen.

Die differentielle Zerfallsrate (Zerfallswahrscheinlichkeit) eines Teilchens mit der Masse $M$ ist in seinem Ruhesystem gegeben durch

$$d\omega = d\left(\frac{1}{\tau}\right) = \frac{1}{2M} |\mathcal{M}|^2 \frac{d^3p_1'}{2E_1'(2\pi)^3} \cdots \frac{d^3p_n'}{2E_n'(2\pi)^3} (2\pi)^4 \delta^4 \left(p - \sum_{i=1}^{n} p_i'\right) S \,. \tag{1497}$$

Für jedes Fermion im Endzustand ersetzt man wieder (abhängig von der Normierungsvorschrift der Spinoren) $1/(2E_i) \to m_i/E_i$ . Der Faktor $1/(2M)$ wird weggelassen, wenn das Teilchen im Eingangskanal ein Fermion ist. Ferner summiert man in den Ausdrücken (1492) und (1497) über die möglichen Endzustände und mittelt in den Anfangszuständen über die Polarisationsrichtungen. Für den Fall, daß die einlaufenden Teilchen die Spins $s_1$ und $s_2$ haben, müssen wir eine Summation über Spinzustände durchführen. Für einen anfänglich unpolarisierten Zustand ersetzen wir $|\mathcal{M}|^2$ durch

$$|\mathcal{M}|^2 \to \frac{1}{(2s_1+1)(2s_2+1)} \sum_{s_i,s_f} |\mathcal{M}_{fi}|^2 \,. \tag{1498}$$

Diese Substitution gilt auch für Bosonen.

Wir werden uns jetzt der Berechnung der invarianten Amplitude $\mathcal{M}$ in niedrigster Ordnung Störungstheorie zu und fassen die Feynman–Regeln zusammen. Die invariante Amplitude $\mathcal{M}$ findet man, indem man alle Feynman–Graphen für den in Frage kommenden Prozeß aufzeichnet, außer solchen mit unverbunden Blasen. Die einem Graphen $G$ entsprechende Amplitude $\mathcal{M}(G)$ wird dadurch konstruiert, daß man den Elementen des Graphen Faktoren zuordnet. Die Faktoren in niedrigster Ordnung Störungstheorie sind die folgenden:

1. Ein Faktor $u(p,s)$ bzw. $v(p,s)$ für jede einlaufende äußere Fermionenlinie, je nach dem, ob sie im Anfangs– oder Endzustand auftritt; ebenso ein Faktor $\bar{u}(p,s)$ bzw. $\bar{v}(p,s)$ für jede aus dem Graphen herauslaufende Fermionenlinie.

2. Ein Faktor $\varepsilon_\mu$ (Polarisationsvektor) für jede äußere Photonenlinie.

3. Für jede innere Fermionenlinie mit Impuls $p$ ein Faktor

$$iS_F(p) = \frac{i}{\not{p} - m + i\varepsilon} = \frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} \,. \tag{1499}$$

   Hierbei ist $m$ die Masse des Fermions.

4. Für jede innere Bosonenlinie mit Spin Null und Impuls $q$ ein Faktor

$$i\Delta_F(q) = \frac{i}{q^2 - \mu^2 + i\varepsilon} \,. \tag{1500}$$

   Hierbei ist $\mu$ die Masse des Bosons.

5. Für jede innere Photonenlinie mit Impuls $q$ ein Faktor

$$i(D_F(q))_{\mu\nu} = -\frac{ig_{\mu\nu}}{q^2 + i\varepsilon} \,. \tag{1501}$$

   Wir haben hierbei eine spezielle Eichung fixiert und mögliche zusätzliche Eichterme weggelassen.

6. Für jeden inneren Impuls $k$, der nicht durch die Impulserhaltung an den Vertices festgelegt ist, ist zu integrieren mit dem Gewicht

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \tag{1502}$$

7. Für jeden geschlossenen Fermionenring ein Faktor $-1$.

8. Ein Faktor $-1$ zwischen zwei Graphen, die sich nur durch eine Vertauschung zweier äußerer, identischer Fermionenlinien unterscheiden. Dazu gehört nicht nur die Vertauschung identischer Teilchen im Endzustand, sondern zum Beispiel auch die Vertauschung eines einlaufenden Teilchen mit einem auslaufenden Antiteilchen.

9. Ein Faktor $-ie\gamma_\mu$ an jeden Vertex eines Spinors.

10. Ein Faktor $-ie(p+p')_\mu$ an jedem Vertex eines Bosons mit Spin Null, wobei $p$ und $p'$ die Impulse der geladenen Linien sind.

11. Ein Faktor $2ie^2 g_{\mu\nu}$ für jeden „Seemöven"–Graphen.

12. Ein Faktor $\frac{1}{2}$ für jeden geschlossenen Ring, der nur zwei Photonenlinien enthält.

In dem Streuquerschnitt geht die Übergangsrate normiert auf den Fluß der einfallenden Teilchen ein. Dieser Fluß $|J|$ ist gegeben durch die Anzahl der Teilchen pro Flächeneinheit, die pro Teileinheit aufeinander zulaufen. Haben die einlaufenden Teilchen die Geschwindigkeiten $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$, so lautet der Fluß

$$|J| = \frac{1}{V}|\vec{v}_1 - \vec{v}_2|\,. \tag{1503}$$

Dies entspricht gerade der Teilchendichte mal der Relativgeschwindigkeit. Im folgenden werden wir uns stets auf kollineare Stöße beschränken. Die Anzahl der Targetteilchen pro Volumeneinheit ist gerade $1/V$, weil wir die Normierung der Wellenfunktion so vorgenommen haben, daß im Normierungsvolumen genau ein Teilchen sitzt. Wir wollen jetzt den Flußfaktor $|\vec{v}_1 - \vec{v}_2|$ durch eine Invariante ausdrücken. Es ist

$$\begin{aligned} E_1E_2|\vec{v}_1 - \vec{v}_2| &= E_1E_2\sqrt{\vec{v}_1^{\,2} + \vec{v}_2^{\,2} - 2\vec{v}_1\cdot\vec{v}_2} \\ &= E_1E_2\sqrt{\frac{\vec{p}_1^{\,2}}{E_1^2} + \frac{\vec{p}_2^{\,2}}{E_2^2} - \frac{2\vec{p}_1\cdot\vec{p}_2}{E_1E_2}} = \sqrt{\vec{p}_1^{\,2}E_2^2 + \vec{p}_2^{\,2}E_1^2 - 2\vec{p}_1\cdot\vec{p}_2E_1E_2}\,. \end{aligned} \tag{1504}$$

Wir haben ausgenutzt, daß gilt $\vec{v}_i = \vec{p}_i/E_i$ . Ferner gilt

$$\begin{aligned} \sqrt{(p_1p_2)^2 - m_1^2m_2^2} &= \sqrt{(E_1E_2 - \vec{p}_1\cdot\vec{p}_2)^2 - m_1^2m_2^2} \\ &= \sqrt{E_1^2E_2^2 + (\vec{p}_1\cdot\vec{p}_2)^2 - 2E_1E_2\vec{p}_1\cdot\vec{p}_2 - m_1^2m_2^2} \\ &= \sqrt{(\vec{p}_1^{\,2} + m_1^2)(\vec{p}_2^{\,2} + m_2^2) + (\vec{p}_1\cdot\vec{p}_2)^2 - 2E_1E_2\vec{p}_1\cdot\vec{p}_2 - m_1^2m_2^2} \\ &= \sqrt{\vec{p}_1^{\,2}\vec{p}_2^{\,2} + \vec{p}_2^{\,2}m_1^2 + \vec{p}_1^{\,2}m_2^2 + \vec{p}_1^{\,2}\vec{p}_2^{\,2} - 2E_1E_2\vec{p}_1\cdot\vec{p}_2} \\ &= \sqrt{\vec{p}_1^{\,2}E_2^2 + \vec{p}_2E_1^2 - 2E_1E_2\vec{p}_1\cdot\vec{p}_2}\,. \end{aligned} \tag{1505}$$

Hierbei haben wir von der Kollinearität Gebrauch gemacht, $(\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2)^2 = \vec{p}\,_1^2 \vec{p}\,_2^2$. Damit können wir zusammenfassend schreiben:

$$E_1 E_2 |\vec{v}_1 - \vec{v}_2| = \sqrt{(p_1 p_2)^2 - m_1^2 m_2^2}\,. \tag{1506}$$

## Relativistisch invarianter Wirkungsquerschnitt

In diesem Abschnitt leiten wir den Zusammenhang zwischen der S-Matrix, der invarianten Streuamplitude $M_{fi}$ und dem relativistisch invarianten Wirkungsquerschnitt her.
Gegeben ist der Anfangszustand $| \, i >$ eines Systems (zwei freie Teilchen mit dem Gesamtimpuls $P_i = p_1 + p_2$) und es sind die verschiedenen möglichen Endzustände $| \, f >$ (zwei freie Teilchen mit $P_f = p_1' + p_2'$) zu berechnen. Das Ergebnis eines Stoßes kann dann als Superposition

$$\sum_f |f >< f|S|i > \tag{1507}$$

dargestellt werden. Die Entwicklungskoeffizienten $< f|S|i >$ bilden die S-Matrix oder Streumatrix $S_{fi}$. Die Quadrate $|S_{fi}|^2$ geben die Übergangswahrscheinlichkeiten in bestimmte Zustände $|f >$ an.

Ohne Wechselwirkung zwischen den Teilchen würde sich der Zustand des Systems nicht ändern, die zugehörige S-Matrix wäre die Einheitsmatrix (es gibt keine Streuung). Es ist zweckmäßig, diese Einheitsmatrix immer abzutrennen und die Streumatrix in der From

$$S_{fi} \;=\; \delta_{fi} + i(2\pi)^4 \; \delta^4(P_f - P_i) \; T_{fi} \tag{1508}$$

mit der neuen Matrix $T_{fi}$ (Streuamplitude) darzustellen. Im zweiten Term ist die $\delta$-Funktion herausgezogen worden, die den Erhaltungssatz für den 4-Impuls ausdrückt. Im Weiteren untersuchen wir Übergänge $i \neq f$,

$$S_{fi} \;=\; i(2\pi)^4 \; \delta^4(P_f - P_i) \; T_{fi} \quad . \tag{1509}$$

Beim Quadrieren von $|S_{fi}|$ tritt das Quadrat der $\delta$-Funktion auf. Dieses ist folgendermaßen zu verstehen. Die $\delta$-Funktion ist dargestellt durch das Integral

$$\delta^4(P_f - P_i) \;=\; \frac{1}{(2\pi)^4} \int e^{i(P_f - P_i)x} \; d^4x \quad . \tag{1510}$$

Berechnet man dieses Integral für $P_f = P_i$ (auf Grund der zweiten $\delta$-Funktion) und erstreckt man die Integration über ein großes aber endliches Volumen $V$ und endliches Zeitintervall $t$, dann ergibt (1510) einfach den Wert $Vt/(2\pi)^4$. Das heißt, wir haben

$$[(2\pi)^4 \; \delta^4(P_f - P_i)]^2 \;=\; Vt \; (2\pi)^4 \; \delta^4(P_f - P_i) \quad . \tag{1511}$$

Die Übergangswahrscheinlichkeit pro Zeiteinheit ist dann gegeben durch

$$\omega_{f \leftarrow i} \;=\; \frac{|S_{fi}|^2}{t} \;=\; (2\pi)^4 \; \delta^4(P_f - P_i) \; |T_{fi}|^2 \; V \quad . \tag{1512}$$

Dieser Ausdruck läßt sich auch in differentieller Form schreiben als

$$d\omega \;=\; (2\pi)^4 \; \delta^4(P_f - P_i) \; |T_{fi}|^2 \; V \; d\mathcal{N}_f \tag{1513}$$

mit

$$d\mathcal{N}_f \;=\; \frac{V \; d^3 \, \vec{p}\,'_1}{(2\pi)^3} \, \frac{V \; d^3 \vec{p}\,'_2}{(2\pi)^3} \tag{1514}$$

als der Zahl der Endzustände. Dabei müssen die Wellenfunktionen aller Teilchen zur Berechnung des Matrixelementes "auf ein Teilchen im Volumen $V$" normiert sein, d.h. alle Wellenfunktionen enthalten den Faktor $\sqrt{N_i/2E_iV}$, wobei

$$N_i \;=\; \begin{cases} 2m_0 & \text{Spin } \frac{1}{2} - \text{Teilchen} \\ & \text{für} \\ 1 & \text{Photonen.} \end{cases} \tag{1515}$$

(Man beachte: die Faktoren $N_i$ hängen von der gewählten Normierung der Wellenfunktion ab. Oftmals normiert man die Bispinoren zu $\overline{u}u = 2m_0$. In diesem Fall sind alle $N_i = 1$).

Nun führen wir die invariante Streuamplitude $M_{fi}$ ein, welche mit $T_{fi}$ über die Beziehung

$$T_{fi} \;=\; \left(\frac{N_1}{2E_1V}\,\frac{N_2}{2E_2V}\,\frac{N_1'}{2E_1'V}\,\frac{N_2'}{2E_2'V}\right)^{1/2} M_{fi} \tag{1516}$$

verknüpft ist. Hier steht je ein Faktor $\sqrt{N_i/2E_iV}$ für jedes Teilchen im Anfangs- und Endzustand. Damit erhalten wir

$$d\omega \;=\; (2\pi)^4\,\delta^4(P_f - P_i)\,\frac{N_1\,N_2}{4E_1E_2V}\,|M_{fi}|^2\,\frac{N_1'\,d^3\vec{p}\,'_1}{2E_1'(2\pi)^3}\,\frac{N_2'\,d^3\vec{p}\,'_2}{2E_2'(2\pi)^3} \quad . \tag{1517}$$

Erinnert sei daran, daß sowohl $N_i$ als auch $d^3\vec{p}_i/2E_i$ relativistisch invariante Größen sind.

Der (gegenüber Lorentz-Transformationen) invariante Streuquerschnitt ergibt sich aus $d\omega$, indem wir durch die Stromdichte

$$j \;=\; \frac{I}{V\;E_1\;E_2} \tag{1518}$$

dividieren; $I$ ist dabei der 4-Skalar

$$I \;=\; \sqrt{(p_1\cdot p_2)^2 - m_1^2\,m_2^2} \quad . \tag{1519}$$

Damit erhalten wir schließlich

$$d\sigma \;=\; \frac{N_1N_2}{4I}(2\pi)^4\,\delta^4(p_1+p_2-p_1'-p_2')\,|M_{fi}|^2\left[\frac{N_1'\,d^3\vec{p}\,'_1}{2E_1'(2\pi)^3}\,\frac{N_2'\,d^3\vec{p}\,'_3}{2E_2'(2\pi)^3}\right] \quad . \tag{1520}$$

Dieser Ausdruck läßt sich für Prozesse mit mehreren Teilchen im Endzustand verallgemeinern, wenn man die eckige Klammer in (1520) durch

$$\prod_n \frac{N_n\,d^3\vec{p}\,'_n}{2E_n'(2\pi)^3} \tag{1521}$$

ersetzt. Abschließend müssen wir noch die Ununterscheidbarkeit der Teilchen im Endzustand berücksichtigen. Das geschieht, indem wir (1520) mit einem Entartungsfaktor $S$ multiplizieren. Für den wichtigen Spezialfall von nur zwei Teilchen im Endzustand gilt:

$$S = \begin{cases} 1/2 & \text{für} \quad \text{2 identische Teilchen im Endzustand} \\ 1 & \qquad\;\; \text{sonst.} \end{cases} \tag{1522}$$

Bevor wir den Wirkungsquerschnitt (1520) weiter umformen, geben wir die Formel für die S-Matrix an, in welcher der Zusammenhang mit der invarianten Amplitude $M_{fi}$ noch einmal zum Ausdruck kommt,

$$S_{fi} \;=\; i(2\pi)^4\,\delta^4(p_1+p_2-p_1'-p_2')\,M_{fi}\sqrt{\frac{N_1}{2E_1}}\sqrt{\frac{N_2}{2E_2}}\sqrt{\frac{N_1'}{2E_1'}}\sqrt{\frac{N_2'}{2E_2'}}\cdot S. \tag{1523}$$

Unser Ziel besteht nun, den invarianten Wirkungsquerschnitt (1520) weiter umzuformen und zu vereinfachen. Dazu betrachten wir die 4 Deltafunktionen

$$\delta^4(p_1+p_2-p_1'-p_2') \;=\; \delta^3(\vec{p}_1+\vec{p}_2-\vec{p}\,'_1-\vec{p}\,'_2)\,\delta(E_1+E_2-E_1'-E_2') \quad . \tag{1524}$$

Die erste Deltafunktion wird bei der Impulsintegration $d^3\vec{p_2}\,'$ verbraucht. Nun gehen wir in das Massenschwerpunktsystem (CMS), in dem gilt

$$\vec{p_1}\,' = -\vec{p_2}\,' \;\equiv\; \vec{p} \quad . \tag{1525}$$

Das verbliebene Differential $d^3\vec{p_1}\,'$ schreiben wir in der Form

$$d^3\vec{p_1}\,' = \vec{p_1}\,'^2\,d|\vec{p_1}\,'|d\Omega \;=\; |\vec{p_1}\,'|\,\frac{E_1'E_2'd(E_1'+E_2')}{E_1'+E_2'}\,d\Omega, \tag{1526}$$

welches wir nun herleiten wollen. Dazu benötigen wir die Ableitung

$$\frac{d|\vec{p_1}\,'|}{dE} = \frac{d|\vec{p_1}\,'|}{d\vec{p_1}\,'^{\,2}}\cdot\frac{d\vec{p_1}\,'^{\,2}}{dE} = \frac{1}{2|\vec{p_1}\,'|}\frac{d\vec{p_1}\,'^{\,2}}{dE} \tag{1527}$$

wobei

$$E \;\equiv\; E_1'+E_2' \;=\; \sqrt{\vec{p}^{\,2}+m_1^2}+\sqrt{\vec{p}^{\,2}+m_2^2} \tag{1528}$$

die Gesamtenergie darstellt. Der Ausdruck $d\vec{p_1}\,'^{\,2}/dE \;=\; d\vec{p}^{\,2}/dE$ läßt sich nun bestimmen, wenn wir (1528) quadrieren

$$(\vec{p}^{\,2}+m_1^2)(\vec{p}^{\,2}+m_2^2) = \left[\frac{1}{2}(E^2-m_1^2-m_2^2)-\vec{p}^{\,2}\right]^2 \tag{1529}$$

und nach $\vec{p}^{\,2}$ umstellen

$$\vec{p}^{\,2} = \frac{E^2}{4}-\frac{1}{2}(m_1^2+m_2^2)+\frac{1}{4E^2}(m_1^2-m_2^2)^2\;. \tag{1530}$$

Die Differentation nach $E$ ergibt

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{p}^{\,2}}{dE} \;&=\; \frac{E}{2}-\frac{(m_1^2-m_2^2)^2}{2E^3} = \frac{E^4-(E_1^2-E_2^2)^2}{2E^3} \\ &=\; \frac{(E_1'+E_2')^4-(E_1'^2-E_2'^2)^2}{2(E_1'+E_2')^3} \;=\; \frac{(E_1'+E_2')^2-(E_1'-E_2')^2}{2(E_1'+E_2')} \\ &=\; \frac{2E_1'E_2'}{E_1'+E_2'} \quad .\end{aligned} \tag{1531}$$

Zusammen mit (1527) folgt schließlich (1526). Das Einsetzen in (1520) ergibt dann

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{N_1 N_2 N_1' N_2' S}{16\, I\, (2\pi)^2} \frac{|\vec{p_1}'|}{E_1' + E_2'} |M_{fi}|^2 \quad . \tag{1532}$$

Im Schwerpunktsystem gilt

$$I = |\vec{p}_1|(E_1 + E_2) = |\vec{p}_1| E \tag{1533}$$

und wir erhalten damit den Wirkungsquerschnitt für die Winkelverteilung im Schwerpunktsystem,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{N_1 N_2 N_1' N_2' S}{64\pi^2 E^2} \frac{|\vec{p_1}'|}{|\vec{p}_1|} |M_{fi}|^2 \quad . \tag{1534}$$

Unter Benutzung von (1533) läßt sich der Wirkungsquerschnitt auch durch die Invariante $I^2$ ausdrücken

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{N_1 N_2 N_1' N_2' S}{64\pi^2 I^2} |\vec{p}_1||\vec{p_1}'|\, |M_{fi}|^2 \quad . \tag{1535}$$

Diesen Ausdruck formen wir noch weiter um, indem wir die invariante Größe (Mandelstam-Variable)

$$t \equiv (p_1 - p_1')^2 = m_1^2 + m_1^2 - 2(p_1 \cdot p_1') = m_1^2 + m_1'^2 - 2E_1 E_1' + 2|\vec{p}_1||\vec{p_1}'| \cos\theta \tag{1536}$$

einführen; $\theta$ ist darin der Winkel zwischen $\vec{p}_1$ und $\vec{p_1}'$. Im Schwerpunktsystem werden die Impulse $|\vec{p}_1|$ und $|\vec{p_1}'|$ allein durch die Gesamtenergie bestimmt und für gegebenes $E$ ist

$$dt = 2|\vec{p}_1||\vec{p_1}'|\, d\cos\theta \quad . \tag{1537}$$

Mit $d\Omega = 2\pi d\cos\theta$ folgt aus (1535)

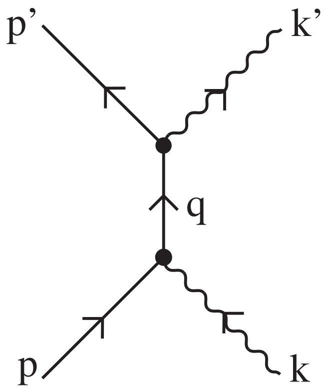
$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{N_1 N_2 N_1' N_2' S}{64\pi\, I^2} |M_{fi}|^2 \quad . \tag{1538}$$

In diesem Wirkungsquerschnitt stehen nur invariante Größen. Er ist daher in jedem beliebigen Bezugssystem gültig.

# Crossing–Relationen

Die Crossing–Relationen werden an dem einfachen Beispiel der Photonen–Elektron–Streuung demonstriert. In niedrigster Ordnung ist das ein Prozeß mit zwei Vertices. (Prozesse mit nur einem Vertex sind wegen Verleztung des Impuls–Energie–Satzes ausgeschlossen.)

Die Streuung eines Photons am Elektron wird durch den folgenden Graphen dargestellt:




Figur 20:Streuung eines Photons mit dem Viererimpuls $k$ an einem Elektron mit dem Viererimpuls $p$.

Die Zeitachse läuft hier nach oben. Der Impuls–Energie–Satz lautet

$$p + k = p' + k' \,. \tag{1539}$$

Die zugehörige $S$–Matrix ist von der Struktur

$$\bar{u}(p', s') \; \not{\epsilon}_2 i S_F(q) \; \not{\epsilon}_1 u(p, s) \,. \tag{1540}$$

Dieser Prozeß ist jedoch unvollständig. Neben dem direkten Term muß noch der Austauschprozeß berücksichtigt werden:
Beide Prozesse werden kohärent addiert und die vollständige $S$–Matrix für die Photon–Elektron–Streuung (Compton–Effekt) besitzt die Struktur

$$\bar{u}(p', s') \, [\not{\epsilon}_2 i S_F(q) \; \not{\epsilon}_1 + \; \not{\epsilon}_1 i S_F(q') \; \not{\epsilon}_2] \, u(p, s) \,. \tag{1541}$$

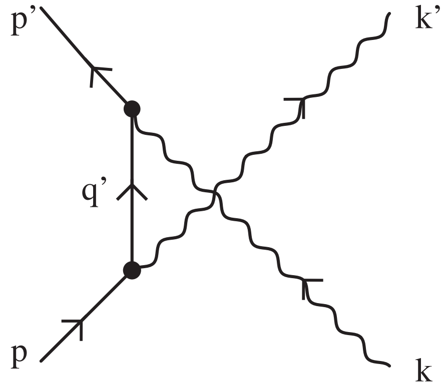
Das Pluszeichen resultiert aus dem Bosonencharakter der Photonen. Die kinematischen Invarianten (Mandelstam–Variablen) für diesen Prozeß lauten

$$s \;=\; (p + k)^2 = (p' + k')^2 \,, \tag{1542}$$

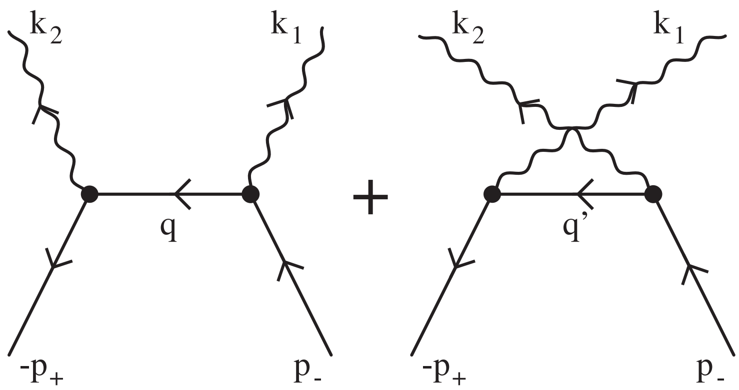
$$t \;=\; (p - p')^2 = (k' - k)^2 \,, \tag{1543}$$

$$u \;=\; (p - k')^2 = (p' - k)^2 \,. \tag{1544}$$

Die Größe $\sqrt{s}$ stellt dabei die Gesamtenergie im Massenschwerpunktsystem (CMS) dar. Man spricht deshalb bei der Compton–Streuung von einem Prozeß im $s$–Kanal.



Figur 21: Austauschprozeß zur Photon-Elektron Streuung.



Figur 22: Direkt- und Austauschgraph zur Elektron-Positron Paarvernichtung.

Durch drehen dieser Feynman–Diagramme um $90°$ in bzw. entgegengesetzt zur Uhrzeigerrichtung gelangen wir zur Elektronen–Positronen–Paar Vernichtung bzw. Erzeugung. Der direkte und Austauschprozeß bei der Paarvernichtung sind demzufolge darstellbar als
Dabei ist folgende Umbennung der $4$–Vektoren ersichtlich

$$p \to p_- \quad , \quad p' \to -p_+ \tag{1545}$$

$$k \to -k_1 \quad , \quad k' \to k_2 \, . \tag{1546}$$

Die Mandelstam–Variablen lauten nun

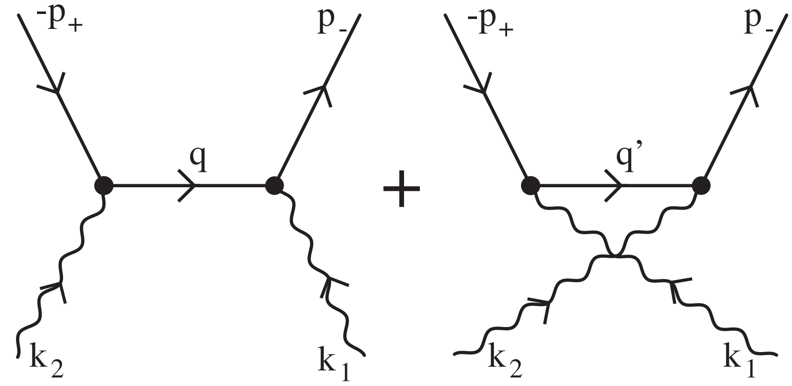
$$s = (p_- - k_1)^2 = (k_2 - p_+)^2 \, , \tag{1547}$$

$$t = (p_- + p_+)^2 = (k_1 + k_2)^2 \, , \tag{1548}$$

$$u = (p_- - k_2)^2 = (k_1 - p_+)^2 \, . \tag{1549}$$

Bei der Paarvernichtung stellt $\sqrt{t}$ die Gesamtenergie im CMS dar. Wir sprechen also vom $t$–Kanal. Die $S$–Matrix für die Paarvernichtung besitzt die Struktur

$$\bar{v}(p_+, s_+) \left[ \not{\epsilon}_2 i S_F(q) \not{\epsilon}_1 + \not{\epsilon}_1 i S_F(q') \not{\epsilon}_2 \right] u(p_-, s_-) \, . \tag{1550}$$



Figur 23: Direkt- und Austauschdiagramm zur Elektron-Positron Paarerzeugung durch zwei Photonen.

Nun zur Paarerzeugung. Die Feynman–Graphen sind in der Figur dargestellt.
Hier lauten die Umbenennungen

$$p \to -p_+ \qquad , \qquad p' \to p_- \tag{1551}$$

$$k \to k_2 \qquad , \qquad k' \to -k_1 \,. \tag{1552}$$

Aus (1542) — (1544) erhält man dann für die Mandelstam–Variablen

$$s \;=\; (k_2 - p_+)^2 = (p_- - k_1)^2 \,, \tag{1553}$$

$$t \;=\; (p_- + p_+)^2 = (k_1 + k_2)^2 \,, \tag{1554}$$

$$u \;=\; (k_1 - p_+)^2 = (p_- - k_2)^2 \,. \tag{1555}$$

Genau wie die Paarvernichtung ist die Paarerzeugung ein Prozeß im $t$–Kanal, d.h. $\sqrt{t}$ ist die Gesamtenergie im CMS. Daß wir sowohl bei der Paarerzeugung als auch bei der Paarvernichtung einen Prozeß im $t$-Kanal vorliegen haben, ist ein Spezialfall und hängt mit der Gleichheit von Teilchen und Antiteilchen beim Photon zusammen. Die $S$–Matrix für die Paarerzeugung besitzt die Struktur

$$\bar{u}(p_-, s_-)\,[\,\not{\epsilon}_2 i S_F(q)\ \not{\epsilon}_1 +\ \not{\epsilon}_1 i S_F(q')\ \not{\epsilon}_2]\, v(p_+, s_+)\,. \tag{1556}$$

Vergleichen wir die $S$–Matrix für die drei unterschiedlichen Prozesse miteinander, so stellt man fest, daß die Ausdrücke in den eckigen Klammern alle identisch sind. Sie unterscheiden sich nur in den $2$ Bispinoren. Bei der Berechnung des Absolutquadrates der $S$–Matrix (welches in die Wirkungsquerschnitte eingeht) reicht es deshalb aus, nur einen dieser Prozesse auszuwerten. Die beiden anderen Prozesse erhält man dann, indem man im Endergebnis lediglich die Variablen umbenennt. Das ist der große Vorteil der Crossing–Relationen.

# Summationen über Polarisationen

In vielen Experimenten wird weder die Polarisation der Teilchen im Endzustand noch die Polarisation der Teilchen im Anfangszustand gemessen. Man nimmt an, daß die verschiedenen, möglichen Anfangspolarisationen mit gleicher Wahrscheinlichkeit vorkommen. Damit beinhaltet der gemessene Wirkungsquerschnitt eine Summe über die Endpolarisationen $s_f$ und einen Mittelwert über die Anfangspolarisationen $s_i$.

Die auftretende Doppelsumme über die Polarisationen läßt sich umformen. Wir üben dies an einem Beispiel.

$$\begin{aligned} & \sum_{\pm s_f, s_i} |\bar{u}(p_f, s_f)\gamma^0 u(p_i, s_i)|^2 \\ = & \sum_{\pm s_f, s_i} \bar{u}_\alpha(p_f, s_f)\, \gamma^0_{\alpha\beta}\, u_\beta(p_i, s_i)\, u^+_\lambda(p_i, s_i)\, \gamma^{0+}_{\lambda\delta}\, \gamma^{0+}_{\delta\sigma}\, u_\sigma(p_f, s_f) \\ = & \sum_{\pm s_f, s_i} \bar{u}_\alpha(p_f, s_f)\, \gamma^0_{\alpha\beta}\, u_\beta(p_i, s_i)\, \bar{u}_\delta(p_i, s_i)\, \gamma^0_{\delta\sigma}\, u_\sigma(p_f, s_f)\,. \end{aligned} \tag{1557}$$

Hierbei haben wir ausgenutzt, daß gilt $\gamma^{0+} = \gamma^0$. Über doppelt vorkommende Indizes soll in dieser Summe automatisch summiert werden. Für einen beliebigen Übergangsoperator $\hat{\Gamma}$ erhält man allgemein

$$|\bar{u}(f)\hat{\Gamma}u(i)|^2 = \left(\bar{u}(f)\hat{\Gamma}u(i)\right)\left(\bar{u}(i)\hat{\bar{\Gamma}}u(f)\right) \tag{1558}$$

mit

$$\hat{\bar{\Gamma}} = \gamma^0\hat{\Gamma}^+\gamma^0\,. \tag{1559}$$

Wir prüfen dies nach

$$\begin{aligned} & \left(\bar{u}_\alpha(f)\, \hat{\Gamma}_{\alpha\beta}\, u_\beta(i)\right)\left(u^+_\gamma(i)\, \hat{\Gamma}^+_{\gamma\delta}\, \gamma^{0+}_{\delta\tau}\, u_\tau(f)\right) \\ = & \left(\bar{u}_\alpha(f)\, \hat{\Gamma}_{\alpha\beta}\, u_\beta(i)\right)\left(u^+_\gamma(i)\, \gamma^0_{\gamma\epsilon}\, \gamma^0_{\epsilon\mu}\, \hat{\Gamma}^+_{\mu\delta}\, \gamma^{0+}_{\delta\tau}\, u_\tau(f)\right) \\ = & \left(\bar{u}(f)\, \hat{\Gamma}\, u(i)\right)\left(\bar{u}(i)\, \hat{\bar{\Gamma}}\, u(f)\right)\,. \end{aligned} \tag{1560}$$

Hierbei haben wir ausgenutzt $(\gamma^0)^2 = 1$ und

$$\left(\bar{u}(f)\hat{\Gamma}u(i)\right)^* = \left(\bar{u}(f)\hat{\Gamma}u(i)\right)^+\,. \tag{1561}$$

Für eine Reihe von Operatoren $\hat{\Gamma}$ läßt sich $\hat{\bar{\Gamma}}$ sofort ausrechnen, z.B.,

$$\bar{\gamma}^\mu = \gamma^0\gamma^{\mu+}\gamma^0 = \gamma^\mu \tag{1562}$$

wegen

$$\gamma^0\gamma^{0+}\gamma^0 = \gamma^0\gamma^0\gamma^0 = \gamma^0 \tag{1563}$$

und

$$\gamma^0\gamma^{i+}\gamma^0 = -\gamma^0\gamma^i\gamma^0 = \gamma^i\gamma^0\gamma^0 = \gamma^i\,. \tag{1564}$$

Allgemeiner haben wir

$$\overline{\not{a}\;\not{b}\;\not{c}\;\ldots\;\not{p}} = \not{p}\;\ldots\;\not{c}\;\not{b}\;\not{a}\,. \tag{1565}$$

Die Spinsummationen lassen sich auf Spurbildungen zurückführen. Dies wollen wir nun verifizieren. Wir machen dabei Gebrauch von den bereits eingeführten Projektionsoperatoren

$$\hat{\Lambda}_{\pm} = \frac{\pm\;\not{p} + m_0}{2m_0} \tag{1566}$$

oder

$$\hat{\Lambda}_{r} = \frac{\epsilon_r\;\not{p} + m_0}{2m_0}\,. \tag{1567}$$

Als Beispiel berechnen wir

$$\begin{aligned}
\sum_{\pm s_i} u_\beta(p_i, s_i)\,\bar{u}_\lambda(p_i, s_i) &= \sum_{r=1}^{4} \epsilon_r\, w^r_\beta(\vec{p}_i)\,\bar{w}^r_\gamma(\vec{p}_i)\left(\frac{\not{p}_i + m_0}{2m_0}\right)_{\gamma\lambda} \\
&= \left(\frac{\not{p}_i + m_0}{2m_0}\right)_{\beta\lambda} = \left(\hat{\Lambda}_+(p_i)\right)_{\beta\lambda}\,.
\end{aligned} \tag{1568}$$

Hierbei haben wir von den folgenden, bereits bewiesenen Relationen Gebrauch gemacht

$$\bar{w}^r(\not{p} - \epsilon_r m_0) = 0 \tag{1569}$$

oder

$$\bar{w}^r\;\not{p} = \epsilon_r m_0 \bar{w}^r \tag{1570}$$

sowie

$$\sum_{r=1}^{4} \epsilon_r\, w^r_\beta(\vec{p}_i)\,\bar{w}^r_\gamma(\vec{p}_i) = \delta_{\beta\gamma}\,. \tag{1571}$$

Die letzte Gleichung repräsentiert die bekannte Vollständigkeitsrelation. Wir betrachten Gleichung (1557) nun ausführlicher

$$\begin{aligned}
&\sum_{\alpha,\sigma}\sum_{\pm s_f} \bar{u}_\alpha(p_f, s_f)\,\gamma^0_{\alpha\beta}\left(\sum_{\pm s_i} u_\beta(p_i, s_i)\,\bar{u}_\delta(p_i, s_i)\right)\gamma^0_{\delta\sigma}\,u_\sigma(p_f, s_f) \\
&= \sum_{\alpha,\sigma}\sum_{\pm s_f} \bar{u}_\alpha(p_f, s_f)\,\gamma^0_{\alpha\beta}\left(\frac{\not{p}_i + m_0}{2m_0}\right)_{\beta\delta}\gamma^0_{\delta\sigma}\,u_\sigma(p_f, s_f) \\
&= \sum_{\alpha,\sigma}\sum_{\pm s_f} \bar{u}_\alpha(p_f, s_f)\left(\gamma^0\frac{\not{p}_i + m_0}{2m_0}\gamma^0\right)_{\alpha\sigma} u_\sigma(p_f, s_f) \\
&= \sum_{\alpha,\sigma}\sum_{r=1}^{2} \bar{w}^r_\alpha(\vec{p}_f)\left(\gamma^0\frac{\not{p}_i + m_0}{2m_0}\gamma^0\right)_{\alpha\sigma} w^r_\sigma(\vec{p}_f) \\
&= \sum_{\alpha,\sigma}\sum_{r=1}^{4} \epsilon_r \bar{w}^r_\alpha(\vec{p}_f)\left[\gamma^0\frac{\not{p}_i + m_0}{2m_0}\gamma^0\right]_{\alpha\sigma}\left[\frac{\not{p}_f + m_0}{2m_0}\right]_{\sigma\tau} w^r_\tau(\vec{p}_f) \\
&= \sum_{\alpha,\sigma}\left[\gamma^0\frac{\not{p}_i + m_0}{2m_0}\gamma^0\right]_{\alpha\sigma}\left[\frac{\not{p}_f + m_0}{2m_0}\right]_{\sigma\alpha} \\
&= \mathrm{Sp}\left[\gamma^0\left(\frac{\not{p}_i + m_0}{2m_0}\right)\gamma^0\left(\frac{\not{p}_f + m_0}{2m_0}\right)\right]\,.
\end{aligned} \tag{1572}$$

Hierbei haben wir in der dritten Zeile von unten ausgenutzt, daß gilt

$$\not{p}\, w^r(p) = \epsilon_r m_0\, w^r(p)\,. \tag{1573}$$

Diese Beziehung hilft uns, die Summation von $r = 1$ bis 2 formal auf $r = 1$ bis 4 zu erweitern. Danach verwenden wir die Vollständigkeitsrelation. Generell erhält man für ein allgemeines Matrixelement nach Durchführung der Spinsummen

$$\sum_{\pm s_f, \pm s_i} |\bar{u}(p_f, s_f)\hat{\Gamma} u(p_i, s_i)|^2 = \mathrm{Sp}\left[\hat{\Gamma}\, \frac{\not{p}_i + m_0}{2m_0}\, \hat{\bar{\Gamma}}\, \frac{\not{p}_f + m_0}{2m_0}\right]. \tag{1574}$$

Als nächstes untersuchen wir den Ausdruck

$$A := \sum_{\pm s_f, \pm s_i} |\bar{v}(p_i, s_i)\gamma^0 v(p_f, s_f)|^2\,. \tag{1575}$$

Wir schreiben die Summen über die Spins um

$$\sum_{\pm s_i} v_\alpha(p_i, s_i)\, \bar{v}_\beta(p_i, s_i) = \sum_{r=1}^{4} \epsilon_r\, w^r_\alpha(\vec{p}_i)\, \bar{w}^r_\gamma(\vec{p}_i)(-)\left(\frac{-\not{p}_i + m_0}{2m_0}\right)_{\gamma\beta}. \tag{1576}$$

Es galt

$$\bar{w}^r(\vec{p}\,)(\not{p} - \epsilon_r m_0) = 0\,; \tag{1577}$$

damit gilt speziell für $r = 1$ und $r = 2$

$$\bar{w}^r(\vec{p}\,)(\not{p} - m_0) = 0\,, \tag{1578}$$

während wir für $r = 3$ und $r = 4$ haben

$$\epsilon_r\, \bar{w}^r(\vec{p}\,)\left(\frac{\not{p} - m_0}{2m_0}\right) = \bar{w}^r(\vec{p}\,)\,. \tag{1579}$$

Wir nutzen jetzt die Vollständigkeitsrelation aus

$$\sum_{r=1}^{4} \epsilon_r\, w^r_\alpha(\vec{p}\,)\, \bar{w}^r_\beta(\vec{p}\,) = \delta_{\alpha\beta}\,. \tag{1580}$$

Damit folgt als Resultat

$$\begin{aligned} \sum_{\pm s_i} v_\alpha(p_i, s_i)\, \bar{v}_\beta(p_i, s_i) &= -\delta_{\alpha\gamma}\left(\frac{-\not{p}_i + m_0}{2m_0}\right)_{\gamma\beta} \\ &= -\left(\frac{-\not{p}_i + m_0}{2m_0}\right)_{\alpha\beta}. \end{aligned} \tag{1581}$$

Damit erhalten wir abschließend

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{4m_0^2}\, \mathrm{Sp}\gamma^0(\not{p}_i - m_0)\gamma^0(\not{p}_f - m_0) \\ &= \frac{1}{4m_0^2}\left[\mathrm{Sp}\gamma^0\ \not{p}_i\gamma^0\ \not{p}_f + m_0^2\, \mathrm{Sp}(\gamma^0)^2\right]. \end{aligned} \tag{1582}$$

Entsprechend gilt generell

$$\sum_{\pm s_f, \pm s_i} |\bar{v}(p_i, s_i)\hat{\Gamma} v(p_f, s_f)|^2 = \mathrm{Sp}\left[\hat{\Gamma}\, \frac{\not{p}_i - m_0}{2m_0}\hat{\bar{\Gamma}}\, \frac{\not{p}_f - m_0}{2m_0}\right]. \tag{1583}$$

Man beachte dabei das unterschiedliche Vorzeichen im Vergleich zu (1574).

# Spuren von $\gamma$-Matrizen

Für die Berechnung von Feynman–Diagrammen und somit auch physikalisch meßbaren Wirkungsquerschnitten ist es unerläßlich, einige nützliche Eigenschaften der Spuren von Kombinationen der Dirac–Matrizen zu untersuchen. Dabei ist es nicht notwendig, die explizite Gestalt der $\gamma$-Matrizen zu verwenden. Zumeist ist es ausreichend, von der Kommutator–Algebra der $\gamma$-Matrizen Gebrauch zu machen. Wir fassen diese Eigenschaften zusammen:

**1.)** Die Spur eine ungeraden Anzahl von $\gamma$-Matrizen ist Null.
Es gilt für beliebige Vierervektoren $a_1 \dots a_n$

$$\mathrm{Sp}\ \not{a}_1 \dots \not{a}_n = \mathrm{Sp}\ \not{a}_1 \dots \not{a}_n \gamma_5 \gamma_5 = \mathrm{Sp}\, \gamma_5\ \not{a}_1 \dots \not{a}_n \gamma_5 \tag{1584}$$

wegen der Vertauschbarkeit der Faktoren unter der Spur, d.h., Sp$AB$ =Sp$BA$. Jetzt nutzen wir die Antikommutatorrelation

$$\gamma_\mu \gamma_5 + \gamma_5 \gamma_\mu = 0 \tag{1585}$$

aus und ziehen das erste $\gamma_5$ nach rechts durch. Das liefert $n$ Minuszeichen, und wir erhalten insbesondere für ungerade $n$

$$\mathrm{Sp}\ \not{a}_1 \dots \not{a}_n = (-1)\,\mathrm{Sp}\ \not{a}_1 \dots \not{a}_n \gamma_5 \gamma_5 = 0\,. \tag{1586}$$

**2.)**

$$\begin{aligned} \mathrm{Sp}\,\mathbf{1} &= 4 && (1587)\\ \mathrm{Sp}\ \not{a}\ \not{b} &= \mathrm{Sp}\ \not{b}\ \not{a} = \frac{1}{2}\,\mathrm{Sp}(\not{a}\ \not{b} + \not{b}\ \not{a}) = \frac{1}{2}\,\mathrm{Sp}(\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu)a_\mu b_\nu \\ &= \mathrm{Sp}\, g^{\mu\nu} a_\mu b_\nu = a\cdot b\,\mathrm{Sp}\,\mathbf{1} = 4a\cdot b && (1588) \end{aligned}$$

**3.)**

$$\begin{aligned} \mathrm{Sp}\ \not{a}_1 \dots \not{a}_n &= a_1\cdot a_2\,\mathrm{Sp}\ \not{a}_3 \dots \not{a}_n - a_1\cdot a_3\,\mathrm{Sp}\ \not{a}_2\ \not{a}_4 \dots \not{a}_n + \dots \\ &\quad + a_1\cdot a_n\,\mathrm{Sp}\ \not{a}_2 \dots \not{a}_{n-1}\,. && (1589) \end{aligned}$$

Insbesondere gilt

$$\mathrm{Sp}\ \not{a}_1\ \not{a}_2\ \not{a}_3\ \not{a}_4 = 4\,[(a_1\cdot a_2)(a_3\cdot a_4) - (a_1\cdot a_3)(a_2\cdot a_4) + (a_1\cdot a_4)(a_2\cdot a_3)]\,. \tag{1590}$$

In der Beweisführung verwenden wir

$$\not{a}_1\ \not{a}_2 = -\ \not{a}_2\ \not{a}_1 + 2a_1\cdot a_2 \tag{1591}$$

und schieben damit $\not{a}_1$ auf die rechte Seite von $\not{a}_2$. Es folgt

$$\mathrm{Sp}\ \not{a}_1\ \not{a}_2 \dots \not{a}_n = 2a_1\cdot a_2\,\mathrm{Sp}\ \not{a}_3 \dots \not{a}_n - \mathrm{Sp}\ \not{a}_2\ \not{a}_1\ \not{a}_3 \dots \not{a}_n\,. \tag{1592}$$

Durch Fortsetzen dieses Prozesses erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathrm{Sp}\ \not{a}_1 \dots \not{a}_n &= 2a_1\cdot a_2\,\mathrm{Sp}\ \not{a}_3 \dots \not{a}_n - \ \dots + 2a_1\cdot a_n\,\mathrm{Sp}\ \not{a}_2 \dots \not{a}_{n-1} \\ &\quad -\mathrm{Sp}\ \not{a}_2 \dots \not{a}_n\ \not{a}_1\,. && (1593) \end{aligned}$$

Schließlich bringen wir durch Ausnutzung der Vertauschbarkeit von Matrizen unter der Spur $\not{a}_1$ wieder auf die linke Seite der anderen $\gamma$–Matrizen zurück. Daraus folgt die Behauptung. Speziell ergibt sich

$$\begin{aligned}\mathrm{Sp}\ \not{a}_1\ \not{a}_2\ \not{a}_3\ \not{a}_4 &= a_1\cdot a_2\,\mathrm{Sp}\ \not{a}_3\ \not{a}_4 - a_1\cdot a_3\,\mathrm{Sp}\ \not{a}_2\ \not{a}_4 + a_1\cdot a_4\,\mathrm{Sp}\ \not{a}_2\ \not{a}_3 \\ &= 4\left[(a_1\cdot a_2)(a_3\cdot a_4) - (a_1\cdot a_3)(a_2\cdot a_4) + (a_1\cdot a_4)(a_2\cdot a_3)\right]. \end{aligned} \tag{1594}$$

Diese Relationen sind außerordentlich nützlich, wenn man eine komplizierte Spur von vielen $\gamma$–Matrizen ausrechnen muß.

**4.)**

$$\mathrm{Sp}\,\gamma^5 = 0\,. \tag{1595}$$

Unter Verwendung von

$$\gamma^\mu\gamma^5 = -\gamma^5\gamma^\mu \tag{1596}$$

folgt

$$\mathrm{Sp}\,\gamma^5 = \mathrm{Sp}\,\gamma^5(\gamma^0)^2 = -\mathrm{Sp}\,\gamma^0\gamma^5\gamma^0 = -\mathrm{Sp}\,\gamma^5(\gamma^0)^2 = -\mathrm{Sp}\,\gamma^5 = 0\,. \tag{1597}$$

**5.)** Das Skalarprodukt der $\gamma$–Matrizen mit sich selbst ist

$$\gamma_\mu\gamma^\mu = g_{\mu\nu}\gamma^\mu\gamma^\nu = 4\cdot 1\,. \tag{1598}$$

Weiterhin gilt

$$\gamma_\mu\ \not{a}\gamma^\mu = \gamma_\mu\gamma^\nu a_\nu\gamma^\mu = a_\nu\gamma_\mu(2g^{\mu\nu} - \gamma^\mu\gamma^\nu) = 2\ \not{a} - 4\ \not{a} = -2\ \not{a}\,. \tag{1599}$$

Ferner betrachten wir

$$\begin{aligned}\gamma_\mu\ \not{a}\ \not{b}\gamma^\mu &= \gamma_\mu\gamma^\nu a_\nu\gamma^\lambda b_\lambda\gamma^\mu = \gamma_\mu\ \not{a}2g^{\lambda\mu}b_\lambda - \gamma_\mu\ \not{a}\gamma^\mu\ \not{b} = 2\ \not{b}\ \not{a} + 2\ \not{a}\ \not{b} \\ &= 4\,a\cdot b - 2\ \not{a}\ \not{b} + 2\ \not{a}\ \not{b} = 4\,a\cdot b\,. \end{aligned} \tag{1600}$$

Ebenso ergibt sich

$$\begin{aligned}\gamma_\mu\ \not{a}\ \not{b}\ \not{c}\gamma^\mu &= \gamma_\mu\ \not{a}\ \not{b}2g^{\mu\nu}c_\nu - \gamma_\mu\ \not{a}\ \not{b}\gamma^\mu\ \not{c} = 2\ \not{c}\ \not{a}\ \not{b} - 4\,a\cdot b\ \not{c} \\ &= 4\ \not{c}a\cdot b - 2\ \not{c}\ \not{b}\ \not{a} - 4a\cdot b\ \not{c} = -2\ \not{c}\ \not{b}\ \not{a}\,. \end{aligned} \tag{1601}$$

Abschließend betrachten wir noch den folgenden Ausdruck

$$\gamma_\mu\ \not{a}\ \not{b}\ \not{c}\ \not{d}\gamma^\mu = \gamma_\mu\ \not{a}\ \not{b}\ \not{c}2g^{\mu\nu}d_\nu - \gamma_\mu\ \not{a}\ \not{b}\ \not{c}\gamma^\mu\ \not{d} = 2\ \not{d}\ \not{a}\ \not{b}\ \not{c} + 2\ \not{c}\ \not{b}\ \not{a}\ \not{d}\,. \tag{1602}$$

# Elektron–Positron–Paarerzeugung durch zwei Photonen

Die Berechnung des Wirkungsquerschnittes für die Paarerzeugung erfolgt in mehreren Schritten:

- das Zeichnen aller Feynman–Diagramme, die zu diesem Prozeß beitragen;
- das Übersetzen der Feynman–Graphen in einen mathematischen Ausdruck für die S–Matrix;
- die Bildung des Absolutquadrates der S–Matrix und Summation über die Polarisations– und Spinzustände;
- Auswertung der Spuren und deren Darstellung durch Mandelstam–Variable, welches zum relativistisch invarianten Wirkungsquerschnitt führt.

In zwei weiteren Abschnitten werden ausgehend vom relativistisch invarianten Wirkungsquerschnitt

- durch Integration der totale Wirkungsquerschnitt und
- durch Übergang ins Massenmittelpunktsystem (CMS) die Winkelverteilung

berechnet.
Beginnen wir mit den Feynman–Graphen.
Die Paarerzeugung stellt in niedrigster Ordnung einen Prozeß mit zwei Vertizes dar. Dabei müssen die Amplituden für den *direkten* und *Austausch*prozeß kohärent addiert werden.
Nun wenden wir die Feynman–Regeln der QED im Impulsraum an. Jedes Diagramm enthält 4 äußere Linien, denen folgende Faktoren zuzuordnen sind:

$$\text{auslaufendes Elektron} \quad \longleftrightarrow \quad \sqrt{\frac{m_0}{E_-}}\,\overline{u}\,(p_-,s_-) \tag{1603}$$

$$\text{auslaufendes Positron} \quad \longleftrightarrow \quad \sqrt{\frac{m_0}{E_+}}\,v\,(p_+,s_+) \tag{1604}$$

$$\text{1. einlaufendes Photon} \quad \longleftrightarrow \quad \sqrt{\frac{1}{2\omega_1}}\;\varepsilon_1 \tag{1605}$$

$$\text{2. einlaufendes Photon} \quad \longleftrightarrow \quad \sqrt{\frac{1}{2\omega_2}}\;\varepsilon_2 \tag{1606}$$

Die beiden Vertizes liefern die Faktoren

$$-i\,e\,\gamma_\mu \quad \text{und} \quad -i\,e\,\gamma_\nu. \tag{1607}$$

(Wir benutzen hier das Gauß-Einheiten-System, in welchem die Feinstrukturkonstante $\alpha = e^2/\hbar c$ ist und $\hbar = c = 1$.) Die Photonen greifen an den Vertizes an und man faßt gleich zusammen

$$\not{\varepsilon}_1 \;=\; \gamma_\mu \varepsilon_1^\mu \quad \text{und} \quad \not{\varepsilon}_2 \;=\; \gamma_\nu \varepsilon_2^\nu. \tag{1608}$$

Jeder Vertex erhält eine $\delta$–Funktion multipliziert mit $(2\pi)^4$, welche die 4–Impuls–Erhaltung garantiert. Die innere Linie repräsentiert den Elektronen–Propagator

$$iS_F(q) = \frac{i}{\not{q} - m_0 + i\varepsilon} = i\,\frac{\not{q} + m_0}{q^2 - m_0^2 + i\varepsilon}. \tag{1609}$$

Über alle inneren Linien wird dabei mit $\int d^4q/(2\pi)^4$ integriert. Damit lautet die S–Matrix

$$
\begin{aligned}
S_{fi} &= -\alpha \sqrt{\frac{m_0}{E_-}}\sqrt{\frac{m_0}{E_+}}\sqrt{\frac{1}{2\omega_1}}\sqrt{\frac{1}{2\omega_2}}\,\overline{u}\,(p_-, s_-) \\
&\quad \Bigg[\int \frac{d^4q}{(2\pi)^4}\ \not{\epsilon}_2 iS_F(q)\ \not{\epsilon}_1 (2\pi)^4\delta^4(k_2 - p_+ - q)(2\pi)^4\delta^4(p_- - k_1 - q) + \\
&\quad \int \frac{d^4q'}{(2\pi)^4}\ \not{\epsilon}_1 iS_F(q')\ \not{\epsilon}_2 (2\pi)^4\delta^4(k_1 + p_+ - q')(2\pi)^4\delta^4(p_- - k_2 - q')\Bigg] \\
&\quad v\,(p_+, s_+).
\end{aligned}
\tag{1610}
$$

Die invariante Streuamplitude $M_{fi}$, welche in den Wirkungsquerschnitt eingeht, ist mit der S–Matrix über folgende Beziehung

$$
S_{fi} = i\,(2\pi)^4\,\delta^4(k_1 + k_2 - p_- - p_+)\,M_{fi}\sqrt{\frac{m_0}{E_-}}\sqrt{\frac{m_0}{E_+}}\sqrt{\frac{1}{2\omega_1}}\sqrt{\frac{1}{2\omega_2}} \tag{1611}
$$

verknüpft. Die Integration von (1610) und der Vergleich mit (1611) führt zu

$$
M_{fi} = -\alpha\,\overline{u}\,(p_-, s_-)\left[\not{\epsilon}_2 \frac{\not{q} + m_0}{q^2 - m_0^2 + i\varepsilon}\ \not{\epsilon}_1 +\ \not{\epsilon}_1 \frac{\not{q}' + m_0}{q'^2 - m_0^2 + i\varepsilon}\ \not{\epsilon}_2\right] v\,(p_+, s_+)\,, \tag{1612}
$$

wobei die Abkürzungen

$$
q = p_- - k_1 = k_2 - p_+ = k_2 + p, \tag{1613}
$$

$$
q' = p_- - k_2 = k_1 - p_+ = k_1 + p, \tag{1614}
$$

mit $p = -p_+$ verwendet wurden. Sie sind mit den Mandelstam–Variablen über

$$
s = q^2 \tag{1615}
$$

$$
u = q'^2 \tag{1616}
$$

verknüpft. Der Wirkungsquerschnitt beinhaltet das Absolutquadrat $|M_{fi}|^2$. Einfache analytische Ausdrücke lassen sich dafür herleiten, wenn man über die Spinprojektionen des Elektrons und Positrons im Endzustand *summiert* und gleichzeitig über die 2 Polarisationszustände jedes Photons im Anfangszustand *mittelt*. In der Praxis entspricht das einem Experiment mit unpolarisierten Teilchen– und Lichtstrahlen.

Die Mittelung über die Photonenpolarisationen entspricht formal der Ersetzung der Matrizen $\not{\varepsilon}$ durch die $\gamma$–Matrizen,

$$
\not{\epsilon}_1^+ Q\ \not{\epsilon}_1 \longrightarrow \frac{1}{2}\gamma_\mu Q \gamma^\mu, \tag{1617}
$$

$$
\not{\epsilon}_2^+ Q\ \not{\epsilon}_2 \longrightarrow \frac{1}{2}\gamma_\nu Q \gamma^\nu, \tag{1618}
$$

wobei $Q$ einen beliebigen Operator (Matrix) darstellt. Damit erhalten wir aus Gleichung (1612)

$$
\overline{|M_{fi}|^2} = \frac{\alpha^2}{4}\Big[\overline{u}\,(p_-, s_-)\Gamma_{\mu\nu} v\,(p_+, s_+)\Big]\Big[\overline{u}\,(p_-, s_-)\Gamma^{\mu\nu} v\,(p_+, s_+)\Big]^*, \tag{1619}
$$

mit der Definition

$$\Gamma_{\mu\nu} \equiv \gamma_\mu S_F(q)\gamma_\nu + \gamma_\nu S_F(q')\gamma_\mu. \tag{1620}$$

Nun summieren wir über die Spins. Unter Verwendung von

$$\overline{\Gamma} \equiv \gamma^0\,\Gamma^\dagger\gamma^0 \tag{1621}$$

erhalten wir

$$\sum_{s_-,s_+} \overline{|M_{fi}|^2} = \frac{\alpha^2}{4}\sum_{s_-,s_+} \overline{u}\,(p_-,s_-)\,\Gamma_{\mu\nu}\,v\,(p_+,s_+)\,\overline{v}\,(p_+,s_+)\,\overline{\Gamma}^{\mu\nu}\,u\,(p_-,s_-). \tag{1622}$$

Mit den Regeln

$$\sum_{s_-} u_\alpha(p_-,s_-)\,\overline{u}_\beta(p_-,s_-) = \left(\frac{\not p_- + m_0}{2m_0}\right)_{\alpha\beta} \tag{1623}$$

$$\sum_{s_+} v_\alpha(p_+,s_+)\,\overline{v}_\beta(p_+,s_+) = \left(\frac{\not p_+ - m_0}{2m_0}\right)_{\alpha\beta} \tag{1624}$$

sowie

$$\overline{\not a\ \not b \cdots \not q} = \not q \cdots \not b\, \not a \tag{1625}$$

ergibt sich der Ausdruck

$$\begin{aligned}\sum_{s_-,s_+} \overline{|M_{fi}|^2} &= \frac{\alpha^2}{4}\,\frac{\not p_- + m_0}{2m_0}\,\Gamma_{\mu\nu}\,\frac{\not p_+ - m_0}{2m_0}\,\overline{\Gamma}^{\mu\nu}\\ &= -\frac{\alpha^2}{16m_0^2}\,(\not p_- + m_0)\left[\gamma_\mu S_F(q)\gamma_\nu + \gamma_\nu S_F(q')\gamma_\mu\right]\\ &\qquad (\not p + m_0)\left[\gamma^\nu S_F(q)\gamma^\mu + \gamma^\mu S_F(q')\gamma^\nu\right].\end{aligned} \tag{1626}$$

Hierbei wurde $(\not p_+ - m_0)$ durch $-(\not p + m_0)$ ersetzt. Das Ausmultiplizieren erzeugt vier Terme

$$\sum_{s_-,s_+} \overline{|M_{fi}|^2} = -\frac{\alpha^2}{4m_0^2}\Big[f\,(s,u) + g\,(s,u) + f\,(u,s) + g\,(u,s)\Big], \tag{1627}$$

die unter Verwendung von (1615) und (1616) folgendermaßen lauten:

$$f(s,u) = \frac{1}{4(s-m_0^2)^2}\ \mathrm{Sp}\{(\not p_- + m_0)\gamma_\mu(\not q + m_0)\gamma_\nu(\not p + m_0)\gamma^\nu(\not q + m_0)\gamma^\mu\},$$

$$f(u,s) = \frac{1}{4(u-m_0^2)^2}\ \mathrm{Sp}\{(\not p_- + m_0)\gamma_\nu(\not q' + m_0)\gamma_\mu(\not p + m_0)\gamma^\mu(\not q' + m_0)\gamma^\nu\},$$

$$g(s,u) = \frac{1}{4(s-m_0^2)(u-m_0^2)}\ \mathrm{Sp}\{(\not p_- + m_0)\gamma_\mu(\not q + m_0)\gamma_\nu(\not p + m_0)\gamma^\mu(\not q' + m_0)\gamma^\nu\},$$

$$g(u,s) = \frac{1}{4(s-m_0^2)(u-m_0^2)}\ \mathrm{Sp}\{(\not p_- + m_0)\gamma_\nu(\not q' + m_0)\gamma_\mu(\not p + m_0)\gamma^\nu(\not q + m_0)\gamma^\mu\}.$$

Man beachte hierbei die Symmetrie bei Vertauschung von $s$ mit $u$ bzw. von $q$ mit $q'$. Diese Symmetrie sagt aus, daß wir insgesamt nur zwei Spuren auswerten müssen: $f(s,u)$ und $g(s,u)$. Die anderen beiden Terme folgen dann unmittelbar aus der Vertauschung der Variablen. Folgende bekannte Regeln verwenden wir beim Auswerten der Spuren:

**(i)** Die Spur einer ungeraden Anzahl von $\gamma$–Matrizen ist Null.

**(ii)** $$\mathrm{Sp}\{1\} \;=\; 4 \tag{1628}$$

**(iii)** $$\mathrm{Sp}\{\not{a}\,\not{b}\} \;=\; 4\,a\cdot b \tag{1629}$$

**(iv)** $$\mathrm{Sp}\{\not{a}\,\not{b}\,\not{c}\,\not{d}\} \;=\; 4\,[(a\cdot b)(c\cdot d)+(a\cdot d)(b\cdot c)-(a\cdot c)(b\cdot d)]. \tag{1630}$$

Weiterhin erinnern wir an die wichtige Vertauschungsrelation

$$\gamma^\mu\gamma^\nu+\gamma^\nu\gamma^\mu \;=\; 2\,g^{\mu\nu}, \tag{1631}$$

aus welcher man die Relationen

$$\begin{aligned}
\gamma^\mu\gamma_\mu &= 4 && (1632)\\
\gamma^\mu\,\not{a}\,\gamma_\mu &= -2\,\not{a} && (1633)\\
\gamma^\mu\,\not{a}\,\not{b}\,\gamma_\mu &= 4\,a\cdot b && (1634)\\
\gamma^\mu\,\not{a}\,\not{b}\,\not{c}\,\gamma_\mu &= -2\,\not{c}\,\not{b}\,\not{a} && (1635)
\end{aligned}$$

ableitet. Damit haben wir das Werkzeug in der Hand, diese Spuren auszuwerten.

Wir beginnen mit der Spur in $f(s,u)$. Das Ausmultiplizieren liefert eine Vielzahl von Termen, doch nach Regel **(i)** sind nur diejenigen von Null verschieden, welche proportional zu einer geraden Potenz von $m_0$ sind. Wir haben einen Term proportional zu $m_0^0 = 1$, sechs Terme proportional zu $m_0^2$ und einen Term proportional zu $m_0^4$. Der erste Term proportional zu $m_0^0 = 1$ lautet

$$\begin{aligned}
\mathrm{Sp}\{\not{p}_-\gamma_\mu\,\not{q}\gamma_\nu\,\not{p}\gamma^\nu\,\not{q}\gamma^\mu\} &= -2\,\mathrm{Sp}\{\not{p}_-\gamma_\mu\,\not{q}\,\not{p}\,\not{q}\gamma^\mu\}\\
&= 4\,\mathrm{Sp}\{\not{p}_-\,\not{q}\,\not{p}\,\not{q}\}\\
&= 4^2[2\,(q\cdot p)(q\cdot p_-)-(p\cdot p_-)\,q^2]. && (1636)
\end{aligned}$$

Die 6 verschiedenen Terme proportional zu $m_0^2$ beinhalten die Spuren

$$\begin{aligned}
\mathrm{Sp}\{\gamma_\mu\gamma_\nu\,\not{p}\gamma^\nu\,\not{q}\gamma^\mu\} &= -2\,\mathrm{Sp}\{\gamma_\mu\,\not{p}\,\not{q}\gamma^\mu\} &&= -2\cdot4^2\,p\cdot q && (1637)\\
\mathrm{Sp}\{\gamma_\mu\,\not{q}\gamma_\nu\gamma^\nu\,\not{q}\gamma^\mu\} &= 4\,\mathrm{Sp}\{\gamma_\mu\,\not{q}\,\not{q}\gamma^\mu\} &&= +4^3\,q^2 && (1638)\\
\mathrm{Sp}\{\gamma_\mu\,\not{q}\gamma_\nu\,\not{p}\gamma^\nu\gamma^\mu\} &= -2\,\mathrm{Sp}\{\gamma_\mu\,\not{q}\,\not{p}\gamma^\mu\} &&= -2\cdot4^2\,p\cdot q && (1639)\\
\mathrm{Sp}\{\not{p}_-\,\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma^\nu\,\not{q}\gamma^\mu\} &= 4\,\mathrm{Sp}\{\not{p}_-\,\gamma_\mu\,\not{q}\gamma^\mu\} &&= -2\cdot4^2\,p_-\cdot q && (1640)\\
\mathrm{Sp}\{\not{p}_-\,\gamma_\mu\gamma_\nu\,\not{p}\gamma^\nu\gamma^\mu\} &= -2\,\mathrm{Sp}\{\not{p}_-\,\gamma_\mu\,\not{p}\gamma^\mu\} &&= +4^2\,p_-\cdot p && (1641)\\
\mathrm{Sp}\{\not{p}_-\,\gamma_\mu\,\not{q}\gamma_\nu\gamma^\nu\gamma^\mu\} &= 4\,\mathrm{Sp}\{\not{p}_-\,\gamma_\mu\,\not{q}\gamma^\mu\} &&= -2\cdot4^2\,p_-\cdot q. && (1642)
\end{aligned}$$

Diese lassen sich zusammenfassen zu

$$4^2\,m_0^2\,(4\,q^2-4\,q\cdot p-4\,q\cdot p_-+p\cdot p_-) \;=\; 4^2\,m_0^2\,(p\cdot p_- -4\,q\cdot q'). \tag{1643}$$

Dabei wurde

$$q + q' \;=\; p + p_- \tag{1644}$$

benutzt. Der einzige Term proportional zu $m_0^4$ lautet schließlich

$$m_0^4\,\mathrm{Sp}\{\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma^\nu\gamma^\mu\} \;=\; 4^3 m_0^4. \tag{1645}$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} f(s,u) \;=\; & \frac{2}{(s-m_0^2)^2}\Big[4\,(q\cdot p)(q\cdot p_-) \\ & - 2\,q^2\,(p\cdot p_-) - 8\,m_0^2\,q\cdot q' + 2\,m_0^2\,p\cdot p_- + 8\,m_0^4\Big]. \end{aligned} \tag{1646}$$

In diesem Ausdruck treten nur Invariante (Skalarprodukte) auf. Unser Ziel ist es nun, die 4–Skalare $(q\cdot p)$, $(q\cdot p_-)$ sowie $(p\cdot p_-)$ durch die bekannten Mandelstam–Variablen $s \;=\; q^2$ und $u \;=\; q'^2$ auszudrücken. Dazu quadrieren wir (1613) sowie (1614) und erhalten

$$p_-\cdot k_1 \;=\; -p\cdot k_2 \tag{1647}$$

$$p_-\cdot k_2 \;=\; -p\cdot k_1. \tag{1648}$$

Daraus folgt unmittelbar

$$q\cdot p \;=\; q\cdot p_- \tag{1649}$$

$$q'\cdot p \;=\; q'\cdot p_-. \tag{1650}$$

Weiterhin erhalten wir die interessante Relation

$$\begin{aligned} q\cdot q' \;&=\; (p+k_2)\cdot(p+k_1) \;=\; m_0^2 + p\cdot k_2 + p\cdot k_1 + k_2\cdot k_1 \\ &=\; m_0^2 - (p_- - p - k_2)\cdot k_1 \;=\; m_0^2 - k_1^2 \;=\; m_0^2. \end{aligned} \tag{1651}$$

Im letzten Schritt wurde von der Beziehung

$$k_1^2 \;=\; k_2^2 \;=\; 0 \tag{1652}$$

Gebrauch gemacht, welche aussagt, daß die Ruhemasse des Photons Null ist. Andererseits, aus (1644) folgt

$$(q+q')^2 \;=\; (p+p_-)^2 \;=\; 2\,m_0^2 + 2\,p\cdot p_- \tag{1653}$$

und mit (1651)

$$2\,p\cdot p_- \;=\; (q+q')^2 - 2\,q\cdot q' \;=\; q^2 + q'^2 \;=\; s+u. \tag{1654}$$

Gleichzeitig erhalten wir aus (1649) und (1650)

$$2\,q\cdot p \;=\; q\cdot p + q\cdot p_- \;=\; q\cdot(q+q') \;=\; s + m_0^2, \tag{1655}$$

$$2\,q'\cdot p \;=\; q'\cdot p + q'\cdot p_- \;=\; q'\cdot(q+q') \;=\; u + m_0^2. \tag{1656}$$

Mit diesen Vorbetrachtungen läßt sich der Ausdruck (1646) umschreiben als

$$
\begin{aligned}
f(s,u) &= \frac{2}{(s-m_0^2)^2}\Big[4\,(q\cdot p)^2 - 2\,(p\cdot p_-)(s-m_0^2)\Big] \\
&= \frac{2}{(s-m_0^2)^2}\Big[(s+m_0^2)^2 - (s+u)(s-m_0^2)\Big] \\
&= \frac{2}{(s-m_0^2)^2}\Big[4\,m_0^2 - (s-m_0^2)(u-m_0^2) + 2\,m_0^2\,(s-m_0^2)\Big]. \qquad (1657)
\end{aligned}
$$

Damit ist auch

$$
f(u,s) = \frac{2}{(u-m_0^2)^2}\Big[4\,m_0^2 - (s-m_0^2)(u-m_0^2) + 2\,m_0^2\,(u-m_0^2)\Big]. \qquad (1658)
$$

Die Berechnung von $g\,(s,u)$ unterscheidet sich in der Auswertung der Spuren vom bisherigen Resultat. Das wird hervorgerufen durch die „verschachtelte“ Reihenfolge der $\gamma_\mu$ und $\gamma_\nu$ Matrizen. Deshalb werden wir oft die Beziehung (1631) benutzen, die sich u. a. auch schreiben läßt als

$$
\not a\,\gamma_\nu = 2\,a_\nu - \gamma_\nu\,\not a. \qquad (1659)
$$

Somit erhalten wir für den ersten Term aus $g\,(s,u)$, welcher zu $m_0^0 = 1$ proportional ist,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Sp}\{\not p_-\gamma_\mu\not q\gamma_\nu\not p\gamma^\mu\not q'\gamma^\nu\} &= 2\,\mathrm{Sp}\{\not p_-\gamma_\mu\not p\gamma^\mu\not q'\not q\} \\
&\quad - \mathrm{Sp}\{\not p_-\gamma_\mu\gamma_\nu\not q\not p\gamma^\mu\not q'\gamma^\nu\} \\
&= -4\,\mathrm{Sp}\{\not p_-\not p\not q'\not q\} - 2\,\mathrm{Sp}\{\not p_-\not q\not p\gamma_\nu\not q'\gamma^\nu\} \\
&\quad + \mathrm{Sp}\{\not p_-\gamma_\nu\gamma_\mu\not q\not p\gamma^\mu\not q'\gamma^\nu\} \\
&= -4\,\mathrm{Sp}\{\not p_-\not p\not q'\not q\} + 4\,\mathrm{Sp}\{\not p_-\not q\not p\not q'\} \\
&\quad + 4\,q\cdot p\,\mathrm{Sp}\{\not p_-\gamma_\nu\not q'\gamma^\nu\} \\
&= -4\,\mathrm{Sp}\{\not p_-\not p\not q'\not q\} + 4\,\mathrm{Sp}\{\not p_-\not q\not p\not q'\} \\
&\quad - 8\,q\cdot p\,\mathrm{Sp}\{\not p_-\not q'\} \\
&= 4^2\Big[-(p\cdot p_-)(q\cdot q') - (q\cdot p_-)(q'\cdot p) \\
&\quad + (q'\cdot p_-)(q\cdot p) + (q\cdot p_-)(q'\cdot p) \\
&\quad + (q'\cdot p_-)(q\cdot p) - (p\cdot p_-)(q\cdot q') \\
&\quad - 2\,(q\cdot p)(q'\cdot p_-)\Big] \\
&= -32\,(p\cdot p_-)(q\cdot q'). \qquad (1660)
\end{aligned}
$$

Mit der selben Technik lassen sich ebenfalls die 6 Terme proportional zu $m_0^2$ auswerten. Für die auftretenden Spuren erhält man

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Sp}\{\gamma_\mu\gamma_\nu\not p\gamma^\mu\not q'\gamma^\nu\} &= 4^2(q'\cdot p) \qquad (1661) \\
\mathrm{Sp}\{\gamma_\mu\not q\gamma_\nu\gamma^\mu\not q'\gamma^\nu\} &= 4^2(q\cdot q') \qquad (1662) \\
\mathrm{Sp}\{\gamma_\mu\not q\gamma_\nu\not p\gamma^\mu\gamma^\nu\} &= 4^2(q\cdot p) \qquad (1663) \\
\mathrm{Sp}\{\not p_-\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma^\mu\not q'\gamma^\nu\} &= 4^2(q'\cdot p_-) \qquad (1664) \\
\mathrm{Sp}\{\not p_-\gamma_\mu\gamma_\nu\not p\gamma^\mu\gamma^\nu\} &= 4^2(q\cdot p_-) \qquad (1665) \\
\mathrm{Sp}\{\not p_-\gamma_\mu\not q\gamma_\nu\gamma^\mu\gamma^\nu\} &= 4^2(q\cdot p_-), \qquad (1666)
\end{aligned}
$$

was sich zusammenfassen läßt als

$$8\, m_0^2\, [4\, q \cdot p + 4\, q' \cdot p + 2\, m_0^2 + 2\, p \cdot p_-\, ]. \tag{1667}$$

Der Term proportional zu $m_0^4$ ergibt

$$m_0^4\, \mathrm{Sp}\{\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma^\mu \gamma^\nu\} \;\; = \;\; -32\, m_0^4. \tag{1668}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} g(s,u) = \frac{2}{(s-m_0^2)(u-m_0^2)} \Big[ & 4\, m_0^2\, (q \cdot p) + 2\, m_0^2\, (q' \cdot p) \\ & + 2\, m_0^4 + 2\, m_0^2\, (p \cdot p_-) - 4\, (p \cdot p_-)(q \cdot q') - 4\, m_o^4 \Big]. \end{aligned} \tag{1669}$$

Mit Hilfe der Beziehungen (1651), (1654), (1655) und (1656) vereinfacht sich der Ausdruck zu

$$\begin{aligned} g(s,u) &= \frac{2}{(s-m_0^2)(u-m_0^2)} \Big[ (s+u) m_0^2 + 2\, m_0^4 \Big] \\ &= \frac{2}{(s-m_0^2)(u-m_0^2)} \Big[ 4\, m_0^2 + (s-m_0^2) + (u-m_0^2) \Big]. \end{aligned} \tag{1670}$$

Man beachte, daß dieser Ausdruck symmetrisch in $s$ und $u$ ist,

$$g(s,u) \;\; = \;\; g(u,s). \tag{1671}$$

Für das mittlere Matrixelement (1627) erhalten wir somit

$$\begin{aligned} \sum_{s_-, s_+} \overline{|M_{fi}|^2} \;\; &= \;\; -\frac{\alpha^2}{4 m_0^2} \Big[ f(s,u) + f(u,s) + 2\, g(s,u) \Big] \\ &= \;\; -\frac{2\alpha^2}{m_0^2} \left[ \left( \frac{m_0^2}{s-m_0^2} + \frac{m_0^2}{u-m_0^2} \right)^2 + \left( \frac{m_0^2}{s-m_0^2} + \frac{m_0^2}{u-m_0^2} \right) \right. \\ & \qquad \left. - \frac{1}{4} \left( \frac{s-m_0^2}{u-m_0^2} + \frac{u-m_0^2}{s-m_0^2} \right) \right]. \end{aligned} \tag{1672}$$

Damit haben wir das Absolutbetragsquadrat des Matrixelementes vollständig durch die invarianten Größen $s$, $u$ und $m_0^2$ ausgedrückt.

Der differentielle Wirkungsquerschnitt ist allgemein gegeben als (siehe (1535)

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} \;\; = \;\; \frac{N_1 N_2 N_1' N_2' S}{64\, \pi^2\, I^2}\; |\vec{p}_1|\, |\vec{p}_1'|\, |M_{fi}|^2\, . \tag{1673}$$

Für den Fall der Paarerzeugung haben wir $\vec{p}_1 = \vec{k}_1$, $\vec{p}_1' = \vec{p}_-$, $N_1 = N_2 = 1$, $N_1' = N_2' = 2\, m_0$ und $S = 1$. Damit folgt für den gemittelten Wirkungsquerschnitt

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} \;\; = \;\; \frac{m_0^2}{16\, \pi^2\, I^2}\, |\vec{k}_1| |\vec{p}_-| \sum_{s_-, s_+} \overline{|M_{fi}|^2}. \tag{1674}$$

Nun wollen wir diesen Wirkungsquerschnitt vollständig durch die Mandelstam–Variablen ausdrücken. Wir beginnen mit der Invarianten $I^2$, welche lautet

$$I^2 \;\; \equiv \;\; (p_1 \cdot p_2)^2 + m_1^2 m_2^2 \;\; = \;\; (k_1 \cdot k_2)^2. \tag{1675}$$

Andererseits gilt

$$t \quad \equiv \quad (k_1 + k_2)^2 \quad = \quad 2\, k_1 \cdot k_2. \tag{1676}$$

Damit erhalten wir

$$I^2 \quad = \quad \frac{1}{4}\, t^2. \tag{1677}$$

Im zweiten Schritt ersetzen wir d$\Omega$ durch einen invarianten Ausdruck. Dazu verwenden wir

$$s \;\equiv\; (p_- - k_1)^2 \;=\; m_0^2 - 2\, p_- \cdot k_1 \;=\; m_0^2 - 2\, E_- \omega_1 + 2\, |\vec{k}_1| |\vec{p}_-| \cos\Theta, \tag{1678}$$

wobei $\Theta$ den Winkel zwischen dem einfallenden Photon und auslaufenden Elektron repräsentiert. Die Differentiation nach $\mathrm{d}\cos\Theta$ führt zu

$$\mathrm{d}s \quad = \quad 2\, |\vec{p}_-| |\vec{k}_1|\, \mathrm{d}\cos\Theta \quad = \quad \frac{1}{2\,\pi} \cdot 2\, |\vec{p}_-| |\vec{k}_1|\, \mathrm{d}\Omega. \tag{1679}$$

Einsetzen von (1677) und (1679) in (1674) ergibt

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}s} &= \frac{m_0^2}{4\,\pi\, t^2} \sum_{s_-, s_+} \overline{|M_{fi}|^2} \\
&= \frac{\alpha^2}{2\,\pi\, t^2} \left[ \frac{1}{4} \left( \frac{s - m_0^2}{u - m_0^2} + \frac{u - m_0^2}{s - m_0^2} \right) \right. \\
&\quad \left. - \left( \frac{m_0^2}{s - m_0^2} + \frac{m_0^2}{u - m_0^2} \right)^2 - \left( \frac{m_0^2}{s - m_0^2} + \frac{m_0^2}{u - m_0^2} \right) \right].
\end{aligned} \tag{1680}$$

Das ist der allgemeine Ausdruck für den Wirkungsquerschnitt, der in allen Bezugssytemen gilt. Aus ihm leiten wir in den nächsten Abschnitten den totalen Wirkungsquerschnitt und die Winkelverteilung im Schwerpunktsystem her.

# Totaler Wirkungsquerschnitt für die $e^-e^+$–Erzeugung

Der totale Wirkungsquerschnitt wird aus (1680) für ein gegebenes $t$ — das ist das Quadrat der Gesamtenergie im Schwerpunktsystem — berechnet. Dazu integrieren wir über $s$ und beachten dabei, daß wegen der Beziehung

$$s + u + t \;=\; 2m_0^2 \tag{1681}$$

nur zwei Mandelstam-Variable unabhängig sind. Das heißt, die Variable $u$ wird durch $s$ und $t$ ausgedrückt. Um Schreibarbeit zu sparen, führen wir die Abkürzungen

$$x \;=\; s - m_0^2\,, \tag{1682}$$

$$y \;=\; u - m_0^2 \;=\; -(x+t) \tag{1683}$$

ein. Der totale Wirkungsquerschnitt lautet dann mit $ds \;=\; dx$

$$\begin{aligned}\sigma \;&=\; \frac{\alpha^2}{2\pi t^2}\int_a^b dx\left[\left(\frac{m_0^2}{x+t}-\frac{m_0^2}{x}\right)^2 + \left(\frac{m_0^2}{x+t}-\frac{m_0^2}{x}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{x}{x+t}+\frac{x+t}{x}\right)\right]\\ &=\; -\frac{\alpha^2}{8\pi t^2}\int_a^b dx\,\left[\frac{4m_0^4\,t^2}{x^2(x+t)^2} + \frac{4m_0^2\,t}{x(x+t)} + \frac{x}{x+t} + \frac{t}{x} + 1\right].\end{aligned} \tag{1684}$$

Nun müssen wir die Integrationsgrenzen festlegen. Sie hängen mit dem physikalisch zulässigen Bereich der Mandelstam-Variable zusammen und werden einerseits durch die Beziehung (1681) und andererseits durch die Gleichung

$$s\,u \geq\; m_0^4 \tag{1685}$$

bestimmt. Die letzte Bedingung (für die untere Grenze) läßt sich auch in die Form

$$xy \;+\; m_0^2(x+y) \;=\; 0 \tag{1686}$$

umschreiben. Zusammen mit (1681) bzw. (1683) erhalten wir damit eine quadratische Gleichung

$$x^2 \;+\; xt \;+\; m_0^2 t \;=\; 0\,, \tag{1687}$$

deren zwei Lösungen die Integrationsgrenzen definieren:

$$a = -\frac{t}{2} \;-\; \frac{1}{2}\sqrt{t(t-4m_0^2)}\,, \tag{1688}$$

$$b = -\frac{t}{2} \;+\; \frac{1}{2}\sqrt{t(t-4m_0^2)}. \tag{1689}$$

Die Integration in (1684) ist elementar. Wir benutzen dazu die folgenden Standardintegrale

$$\int \frac{dx}{x(t+x)} \;=\; -\frac{1}{t}\,\ln\,\frac{t+x}{x} \;+\; C\,, \tag{1690}$$

$$\int \frac{dx}{x^2(t+x)^2} \;=\; -\left[\frac{1}{tx} \;+\; \frac{2}{t^2}\right]\frac{1}{t+x} \;+\; \frac{2}{t^3}\,\ln\,\frac{t+x}{x} \;+\; C\,, \tag{1691}$$

$$\int \frac{x\,dx}{x+t} \;=\; -\,t\;\ln(t+x)\;+\;C\;. \tag{1692}$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
\sigma \;&=\; \frac{\alpha^2}{8\pi t^2}\left[\left(\frac{t}{x}+2\right)\,\frac{4m_0^4}{t+x} \;-\; \frac{8m_0^4}{t}\;\ln\,\frac{t+x}{x} \;+\; 4m_0^2\;\ln\,\frac{t+x}{x} \;-\; x\;+\right.\\
&\qquad \left.+\;\;t\;\ln\,(t+x)\;-\;t\;\ln x\;-\;x\;\;\right]\Bigg|_a^b\\
&=\; \frac{\alpha^2}{8\pi t^2}\left[\left(t+4m_0^2\;-\;\frac{8m_0^2}{t}\right)\;\ln\,\frac{t+x}{x}\;+\;4m_0^4\,\frac{2x+t}{x(t+x)}\;-\;2x\right]\Bigg|_a^b. \qquad (1693)
\end{aligned}$$

Nun setzen wir die Integrationsgrenzen ein und erhalten

$$\begin{aligned}
\sigma \;&=\; \frac{\alpha^2}{4\pi t}\left[\left(t+4m_0^2\;-\;\frac{8m_0^4}{t}\right)\;\ln\,\frac{\sqrt{t}+\sqrt{t-4m_0^2}}{\sqrt{t}-\sqrt{t-4m_0^2}}\;-\right.\\
&\qquad \left.-\;\left(\frac{4m_0^2}{t}+1\right)\;\sqrt{t(t-4m_0^2)}\right]. \qquad (1694)
\end{aligned}$$

Mit dem Einführen der Abkürzung

$$\tau \;=\; t/m_0^2 \tag{1695}$$

läßt sich dieser Ausdruck weiter vereinfachen zu

$$\sigma \;=\; \frac{\alpha^2}{4\pi m_0^2\tau^3}\left[(\tau^2+4\tau-8)\;\ln\,\frac{\sqrt{\tau}+\sqrt{\tau-4}}{\sqrt{\tau}-\sqrt{\tau-4}}\;-\;(\tau+4)\,\sqrt{\tau(\tau-4)}\right]. \tag{1696}$$

In einem beliebigen Bezugssystem, in dem das Photon $k_1$ dem Photon $k_2$ entgegenfliegt ($\vec{k}_1||-\vec{k}_2$), gilt die Relation

$$\begin{aligned}
t \;&\equiv\; (k_1+k_2)^2 \;=2k_1\cdot k_2 \;=\; 2\omega_1\omega_2\;-\;2\vec{k}_1\cdot\vec{k}_2\\
&=\; 2(\omega_1\omega_2\;+\;\omega_1\omega_2)\;=\;4\omega_1\omega_2\;. \qquad (1697)
\end{aligned}$$

Nun ist es üblich, die Größe

$$z \;=\; \sqrt{1-\frac{m_0^2}{\omega_1\omega_2}} \tag{1698}$$

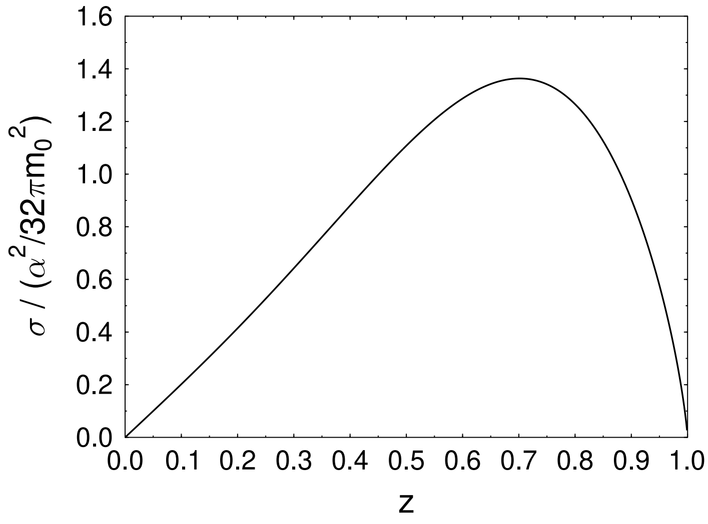
einzuführen, welche für Photonenenergien $\sqrt{\omega_1\omega_2} \geq m_0$ definiert ist. Im Schwerpunktsystem, wo $\omega_1 = \omega_2$ gilt, bedeutet das, daß ein Photon mindestens die Ruheenergie des Elektrons aufbringen muß. Mit Hilfe von (1695) und (1697) erhalten wir

$$\tau \;=\; \frac{4}{1-z^2}. \tag{1699}$$

Diesen Ausdruck setzen wir in (1696) ein und bekommen

$$\sigma \;=\; \frac{\alpha^2}{32\pi m_0^2}\,(1-z^2)\left[(3-z^4)\;\ln\,\left|\frac{1+z}{1-z}\right|+2z\,(z^2-2)\right]. \tag{1700}$$

Der Definitionsbereich von $z$ liegt zwischen 0 und 1. Die obere Grenze entspricht dem Fall unendlich großer Photonenenergie. In diesem Grenzwert geht der Wirkungsquerschnitt interessanterweise gegen Null.




Figur 24: Totaler Wirkungsquerschnitt der Paarerzeugung.

# Winkelverteilung der Elektron-Positron-Erzeugung

Ausgangspunkt ist der berechnete Wirkungsquerschnitt (1674) mit dem Amplitudenquadrat (1672), den wir durch die Variablen $x$ und $y$ aus (1682) und (1683) ausdrücken:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{8\pi^2 I^2}\,|\vec{k}_1||\vec{p}_-|\,\left\{\frac{1}{4}\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)-\left(\frac{m_0^2}{x}+\frac{m_0^2}{y}\right)^2-\left(\frac{m_0^2}{x}+\frac{m_0^2}{y}\right)\right\}. \tag{1701}$$

Da im Schwerpunktsystem

$$E_- = E_+ = \omega_1 = \omega_2 \equiv \omega \tag{1702}$$

und

$$I^2 = 4\omega^4 \tag{1703}$$

gelten, erhalten wir für die Winkelverteilung im Schwerpunktsystem

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2|\vec{p}_-|}{128\pi^2\omega^3}\left[\frac{(x^2+y^2)-4m_0^2(x+y)}{xy} - \frac{4m_0^4(x+y)^2}{x^2y^2}\right]. \tag{1704}$$

Nun werden wir $x$ und $y$ durch den Winkel $\Theta$ zwischen Photon und Elektron ausdrücken. Wir erinnern an die Definition der Mandelstam-Variable

$$s \equiv (p_- - k_1)^2 = m_0^2 - 2p_-\cdot k_1\,, \tag{1705}$$

$$u \equiv (k_1 - p_+)^2 = m_0^2 - 2p_+\cdot k_1\,. \tag{1706}$$

Unter Verwendung von (1702) und $\vec{p}_- = -\vec{p}_+$ können wir schreiben

$$x \equiv s - m_0^2 = -2E_-\omega_1 + 2\vec{p}_- \cdot \vec{k}_1 = -2\omega(\omega - |\vec{p}_-| \cos\Theta) \, , \tag{1707}$$

$$y \equiv u - m_0^2 = -2E_+\omega_1 - 2\vec{p}_+ \cdot k_1 = -2\omega(\omega + |\vec{p}_-| \cos\Theta) \, . \tag{1708}$$

Damit erhalten wir auch die Beziehungen

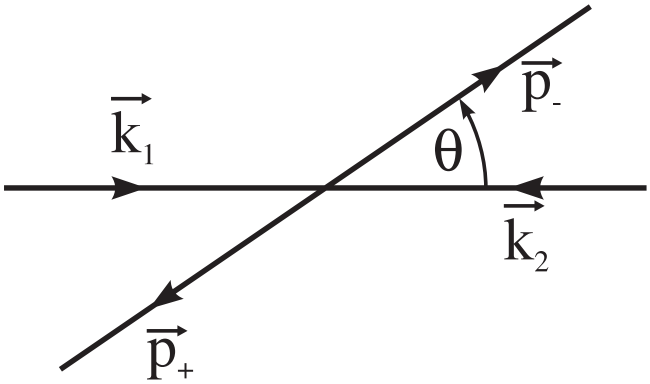
$$x + y = -4\omega^2 \, , \tag{1709}$$

$$xy = 4\omega^2(\omega^2 - \vec{p}_-^{\,2} \cos^2\Theta) \, , \tag{1710}$$

$$x^2 + y^2 = 8\omega^2(\omega^2 + \vec{p}_-^{\,2} \cos^2\Theta) \, , \tag{1711}$$

welche in (1704) eingehen.

An dieser Stelle wollen wir die Impulsbeziehungen im Schwerpunktsystem graphisch veranschaulichen:




Figur 25: Impulsbeziehungen der Elektron-Positron Paarerzeugung durch zwei Photonen im Schwerpunktsystem.

Einsetzen von (1709) bis (1711) in (1704) ergibt

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2 |\vec{p}_-|}{64\,\pi^2\,\omega^3} \left[ \frac{2m_0^2 + \omega^2 + \vec{p}_-^{\,2}\ \cos^2\Theta}{(\omega^2 - \vec{p}_-^{\,2}\ \cos^2\Theta)} - \frac{2m_0^4}{(\omega^2 - \vec{p}_-^{\,2}\cos^2\ \Theta)^2} \right] . \tag{1712}$$

Dieser Ausdruck läßt sich mittels der Beziehung

$$\vec{p}_-^{\,2} = \omega^2 - m_0^2 \tag{1713}$$

auch umschreiben in die Form

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2 |\vec{p}_-|}{64\pi^2\omega^3} \left[ \frac{\omega^2 + \vec{p}_-^{\,2}(1 + \sin^2\Theta)}{\omega^2 - \vec{p}_-^{\,2}\ \cos^2\Theta} - \frac{2\vec{p}_-^{\,4}\sin^4\Theta}{(\omega^2 - \vec{p}_-^{\,2}\ \cos^2\Theta)^2} \right] . \tag{1714}$$

Im ultrarelativistischen Fall gilt

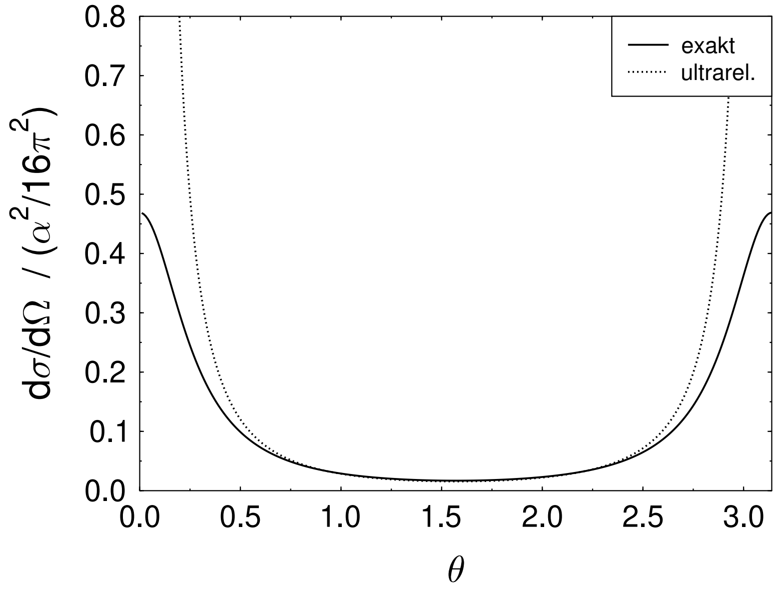
$$\vec{p}_-^{\,2} \simeq \omega^2 \tag{1715}$$

und wir erhalten

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{64\,\pi^2\,\omega^2} \left[ \frac{2}{\sin^2\Theta} - 1 \right] . \tag{1716}$$

Es treten zwei symmetrische Maxima bei $\Theta = 0$ und $\Theta = \pi$ auf. Für $\Theta \simeq 0$ reduziert sich das auf

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \simeq \frac{\alpha^2}{32\,\pi^2\,\omega^2\,\Theta^2} . \tag{1717}$$




Figur 26a: Winkelverteilung der Elektronen im Schwerpunktsystem bei der Paarerzeugung durch zwei Photonen. Die Photonenenergie ist $\omega = 4\ m_0$ . In der Abbildung ist neben dem exakten Wirkungsquerschnitt (1714) auch die ultrarelativistische Näherung (1716) eingetragen.

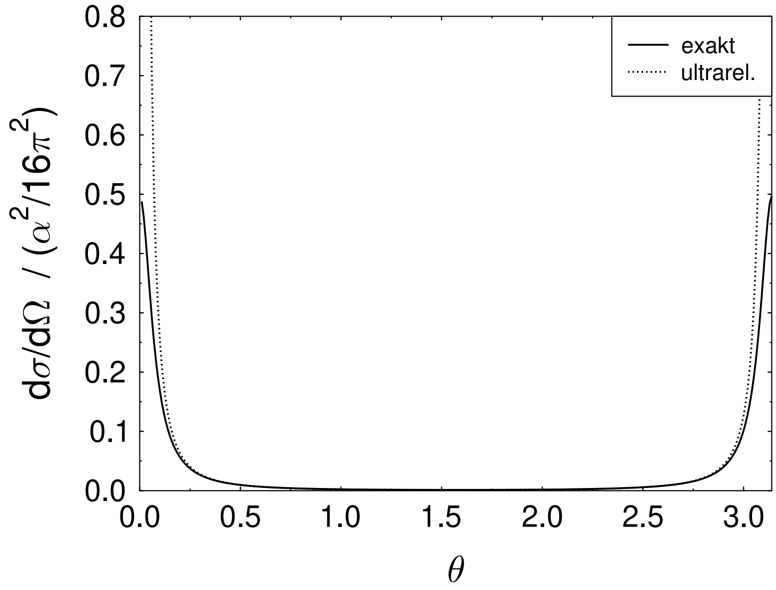
# Einführung in die spontane Symmetriebrechung

Wir untersuchen die Struktur des Grundzustandes eines Systems, also des Vakuumzustandes. Zunächst betrachten wir einen dünnen Stab mit einer kreisförmigen Grundfläche auf einer Ebene. Entlang der Länge üben wir eine Kraft aus.
Übersteigt die Kraft einen kritischen Wert, so wird sich der Stab in einer Ebene biegen, die zufällig bestimmt ist. Der neue Grundzustand des Systems ist unsymmetrisch, da eine Ebene ausgezeichnet ist. Alle anderen degenerierten Grundzustände wären gleichberechtigt; diese Grundzustände sind durch Rotationssymmetrie verknüpft. Die essentiellen Punkte in diesem Beispiel sind die folgenden
(i) Ein Parameter übersteigt einen kritischen Wert.
(ii) Die ursprünglich symmetrische Konfiguration wird instabil.
(iii) Der neue Grundzustand ist degeneriert.

Als zweites Beispiel betrachten wir den Ferromagnetismus. Die einzelnen Atome im Ferromagneten wechselwirken mittels einer Spin-Spin Wechselwirkung

$$H = -\sum_{i,j} I_{ij}\ \vec{s}_i \cdot \vec{s}_j\ . \tag{1718}$$

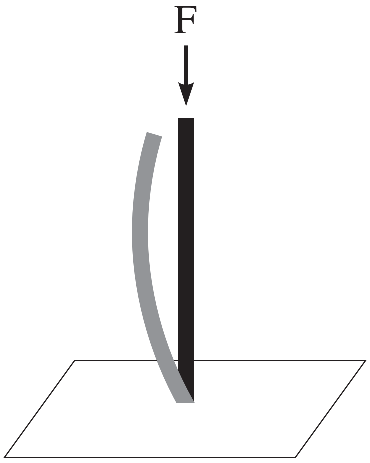
Diese Wechselwirkung ist ein Skalar und daher invariant unter Rotation. Der Grundzustand des Systems ist jedoch der, in dem alle Spins zumindest in einem Teilbereich ausgerichtet sind. Die Richtung der spontanen Magnetisierung ist wieder zufällig und der entartete Grundzustand kann von




Figur 26b: Winkelverteilung der Elektronen im Schwerpunktsystem bei der Paarerzeugung durch zwei Photonen. Die Photonenenergie ist $\omega = 14\ m_0$. In der Abbildung ist neben dem exakten Wirkungsquerschnitt (1714) auch die ultrarelativistische Näherung (1716) eingetragen.

einem anderen Grundzustand mittels Rotation erreicht werden. Die spontane Magnetisierung verschwindet bei hohen Temperaturen $T$, wenn der Grundzustand symmetrisch wird und alle Atome zufällig orientiert sind. Der kritische Parameter ist hierbei $T$.
Beide Beispiele demonstrieren die spontane Brechung der Symmetrie. In beiden Beispielen besitzt das System Rotationssymmetrie, aber der Grundzustand ist nicht invariant unter dieser Symmetrietransformation. Eine Besonderheit des Ferromagnetismus ist es, daß es ein unendliches System sein kann. Die Magnetisierung hat eine spezielle Richtung ausgezeichnet und eine Messung dieser Richtung oder des Winkels wird auch im Rahmen der Quantenmechanik einen scharfen Wert ergeben. Aber die konjugierte Variable des Winkels ist der Drehimpuls. Dieser Drehimpuls des Systems ist demnach vollständig unbestimmt und muß daher eine unendliche Summe von allen Werten von $J$ sein. Die Tatsache, daß der Ferromagnet ein unendliches System darstellen kann, erlaubt interessante Vergleiche zur Feldtheorie, denn auch hier haben wir es mit einem System mit einer unendlichen Zahl von Freiheitsgraden zu tun.
Wir betrachten nun eine ähnliche Situation in der skalaren Feldtheorie, in der sich die Symmetrie der Lagrange-Dichte nicht widerspiegelt in der Symmetrie des Grundzustandes. Der Grundzustand in der Feldtheorie ist der Vakuumzustand und wir werden somit konfrontiert mit einem neuen Typ von Vakuum. Für die Lagrange-Dichte wählen wir die komplexe $\Phi^4$-Theorie

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= (\partial_\mu\Phi)(\partial^\mu\Phi^*) - m^2\Phi\Phi^* - \lambda(\Phi\Phi^*)^2 \\ &= (\partial_\mu\Phi)(\partial^\mu\Phi^*) - V(\Phi,\Phi^*)\,. \end{aligned} \tag{1719}$$




Figur 27: Ein Stab unter Wirkung einer senkrechten Kraft. Demonstration der spontanen Symmetriebrechung.

Der $\lambda$-Term beschreibt die Selbstwechselwirkung. Gewöhnlich ist $m$ die Masse eines physikalischen Teilchens. Hier soll $m^2$ jedoch nur die Rolle eines Parameters übernehmen. Wir betonen dies, da $m^2$ im folgenden auch negative Werte annehmen kann. $\mathcal{L}$ ist offensichtlich invariant unter der globalen Eichtransformation

$$\Phi \to \exp\{i\Lambda\}\,\Phi\,. \tag{1720}$$

Der Grundzustand wird durch Minimierung des Potentials erhalten. Es folgt

$$\frac{\partial V}{\partial \Phi} = m^2\Phi^* + 2\lambda\Phi^*(\Phi^*\Phi)\,. \tag{1721}$$

Für $m^2 > 0$ liegt dieses Minimum bei $\Phi^* = \Phi = 0$. Für $m^2 < 0$ jedoch existiert ein lokales Maximum bei $\Phi = 0$ und ein Minimum bei

$$|\Phi|^2 = -\frac{m^2}{2\lambda} =: a^2\,, \tag{1722}$$

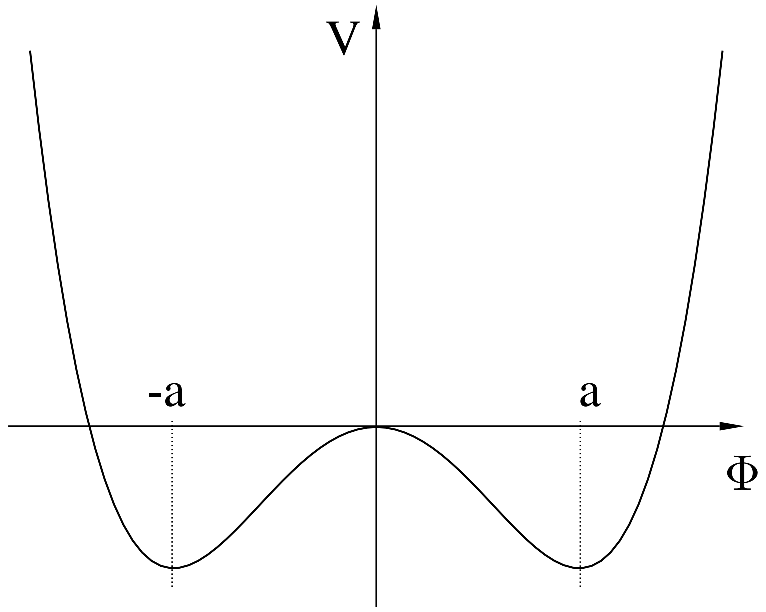
d.h. bei $|\Phi| = a$. In der Quantenfeldtheorie wird $\Phi$ ein Operator, und die genannte Bedingung wird übertragen auf den Vakuumerwartungswert des Feldoperators $\hat{\Phi}$:
$| < 0|\hat{\Phi}|0 > |^2 = a^2$.
Das Potential hat ein Minimum bei $|\Phi| = a$ und ein lokales Maximum bei $\Phi = 0$. Wir setzen

$$\Phi = \Phi_1 + i\Phi_2\,. \tag{1723}$$

Die Figur zeigt das Potential $V$ als Funktion von $\Phi_1$ und $\Phi_2$. Die Minima von $V$ liegen entlang des Kreises $|\Phi| = a$. Dies stellt einen unendlichen Satz degenerierter Vakua dar, die durch Rotation miteinander verbunden sind. Die physikalischen Anregungen des Feldes sind dann Störungen um $|\Phi| = a$ und nicht um $\Phi = 0$.

Wir führen Polarkoordinaten ein und setzen

$$\Phi(x) = \rho(x)\exp\{i\Theta(x)\}\;. \tag{1724}$$




Figur 28: Das Potential hat ein Minimum bei $|\Phi| = a$ und ein lokales Maximum bei $\Phi = 0$.

Das Operatorzeichen lassen wir weg. Damit drücken wir das komplexe Feld durch die beiden reellen Felder $\rho$ und $\Theta$ aus. Wir wählen nun den Vakuumzustand

$$< 0|\Phi|0 > = \ a \tag{1725}$$

mit reellem $a$. Dann haben wir

$$\begin{aligned} < 0|\rho|0 > &= \ a \\ < 0|\Theta|0 > &= \ 0 \,. \end{aligned} \tag{1726}$$

Dieses feldtheoretische Beispiel weist die gleichen Charakteristika auf wie der Ferromagnet. Es gelten die gleichen Symmetriebetrachtungen bezüglich des degenerierten Vakuumzustandes. Jetzt setzen wir

$$\Phi(x) = [\rho'(x) + a] \ \exp\{i\Theta(x)\} \tag{1727}$$

$\rho'$ und $\Theta$ haben jeweils verschwindende Vakuumerwartungswerte. Mit diesem Ansatz folgt

$$\begin{aligned} V &= m^2\rho'^2 + 2m^2a\rho' + m^2a^2 + \lambda(\rho'^4 + 4a\rho'^3 + 6a^2\rho'^2 + 4a^3\rho' + a^4) \\ &= \lambda\rho'^4 + 4a\lambda\rho'^3 + 4\lambda a^2\rho'^2 - \lambda a^4 \\ &= \lambda\left[(\rho' + a)^2 - a^2\right]^2 - \lambda a^4 \\ &= \lambda(\Phi^*\Phi - a^2)^2 - \lambda a^4 \end{aligned} \tag{1728}$$

Hierbei haben wir (1722) ausgenutzt. Ferner gilt

$$(\partial_\mu\Phi)(\partial^\mu\Phi^*) = (\partial_\mu\rho')(\partial^\mu\rho') + (\rho' + a)^2(\partial_\mu\Theta)(\partial^\mu\Theta) \tag{1729}$$

In $V$ gibt es einen Term proportional zu $\rho'^2$, so daß die dem $\rho'$ zugeordnete physikalische Masse gegeben ist durch $m^2_{\rho'} = 4\lambda a^2$.
Es existiert jedoch kein Term proportional zu $\Theta^2$, so daß $\Theta$ ein masseloses Feld ist. Als Resultat der spontanen Symmetriebrechung erhalten wir aus den beiden ursprünglich massebehafteten Feldern, dem Realteil und Imaginärteil von $\Phi$, nun ein massebehaftetes Feld sowie ein masseloses Feld. Klarerweise wird es Energie kosten, $\rho'$ gegen die rücktreibenden Kräfte des Potentials zu verschieben. Es gibt aber keine rücktreibenden Kräfte gegenüber einer Verschiebung entlang des Tales $|\Phi| = a$. Das Teilchen, daß der $\Theta$-Bewegung entspricht, nennt man Goldstone–Boson. Dies ist ein ganz allgemeiner Gesichtspunkt. Eine spontane Symmetriebrechung einer stetigen Symmetrie beinhaltet die Existenz eines masselosen Teilchens, des Goldstone–Teilchens. Diese Aussage ist Inhalt des Goldstone–Theorems.
Für die weiteren Studien betrachten wir $\Phi$ als aufgespalten in Real- und Imaginärteil.

$$\Phi(x) = a + \frac{\Phi_1(x) + i\Phi_2(x)}{\sqrt{2}} \tag{1730}$$

mit der Nebenbedingung

$$< \Phi_1 >_0 = < \Phi_2 >_0 = 0\,. \tag{1731}$$

Damit folgt für die Lagrange-Dichte unter Benutzung von (1722)

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \Phi_1)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu \Phi_2)^2 - 2\lambda a^2 \Phi_1^2 - \sqrt{2}\lambda \Phi_1 a(\Phi_1^2 + \Phi_2^2) - \frac{\lambda}{4}(\Phi_1^2 + \Phi_2^2)^2 + \lambda a^4\,. \tag{1732}$$

Wieder stellt sich das $\Phi_2$-Feld als masselos heraus, während für $\Phi_1$ als Quadrat der Masse der Wert $4\lambda a^2$ resultiert.

# Spontane Brechung der Eichsymmetrien

Bislang haben wir eine Lagrange-Dichte mit einer $U(1)$ Symmetrie betrachtet. Zwei reelle Felder $\Phi$ bildeten eine zweidimensionale Darstellung der $U(1)$. Eines dieser Felder hat einen nichtverschwindenden Vakuumserwartungswert. Es stellte sich heraus, daß es ein masseloses Teilchen, das Goldstone-Boson, gibt sowie ein massives Teilchen.

Wir betrachten jetzt zunächst als Beispiel einer nichtabelschen Gruppe die $SO(3)$. Es sei nun $\Phi_i$ mit $i = 1, 2, 3$ ein Isovektorfeld. Mit der Konvention, daß über doppelte Indizes summiert wird, gehen wir von der Lagrange-Dichte

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu \Phi_i \partial^\mu \Phi_i - \frac{1}{2}m^2 \Phi_i \Phi_i - \lambda(\Phi_i \Phi_i)^2 \quad . \tag{1733}$$

$\mathcal{L}$ ist ein Lorentz-Skalar, aber auch invariant bei Rotation im Isospin-Raum. Wie zuvor betrachten wir das Minimum des Potentials

$$V(\Phi_i) = \frac{1}{2}m^2 \Phi_i \Phi_i + \lambda(\Phi_i \Phi_i)^2 \quad . \tag{1734}$$

Wenn der Parameter $m^2 > 0$ ist, liegt das Minimum bei $\Phi_i = 0$. Für $m^2 < 0$ folgt

$$\mid \Phi_0 \mid = (\Phi_1^2 + \Phi_2^2 + \Phi_3^2)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{-m^2}{4\lambda}\right)^{\frac{1}{2}} \equiv a \quad . \tag{1735}$$

Wieder haben wir degenerierte Vakua, und wir sind frei, den physikalischen Grundzustand zu wählen. Wir setzen

$$\vec{\Phi}_0 = a\vec{e}_3 \quad . \tag{1736}$$

Der Vakuumwert von $\Phi$, also $\Phi_0$, zeigt in die $\vec{e}_3$-Richtung im Isospin-Raum. Indem wir ferner setzten

$$\Phi_3 = \chi + a \quad , \tag{1737}$$

sind die physikalischen Felder jetzt $\Phi_1$, $\Phi_2$ und $\chi$. Für das Potential folgt

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2}m^2\left(\Phi_1^2 + \Phi_2^2 + (\chi+a)^2\right) + \lambda\left(\Phi_1^2 + \Phi_2^2 + (\chi+a)^2\right)^2 \\ &= 4a^2\lambda\chi^2 + 4a\lambda\chi(\Phi_1^2 + \Phi_2^2 + \chi^2) + \lambda(\Phi_1^2 + \Phi_2^2 + \chi^2)^2 - \lambda a^4 \\ &= \lambda\left((\Phi_i\Phi_i - a^2)^2 - a^4\right) \quad . \end{aligned} \tag{1738}$$

Der einzige Term in der vorletzten Zeile, welcher quadratisch in den Feldvariablen auftritt, lautet $4a^2\lambda\chi^2$. Dem entspricht die Masse

$$m_\chi^2 = 8a^2\lambda \, , \tag{1739}$$

während weiter gilt

$$m_{\Phi_1} = m_{\Phi_2} = 0 \, . \tag{1740}$$

Nach der spontanen Symmetriebrechung haben wir also zwei Goldstone-Bosonen und ein massives skalares Feld vorliegen. Die Zahl der Goldstone-Bosonen richtet sich also nach der zugrunde liegenden Symmetriegruppe.

Als Spezialfall dieser Symmetriegruppen betrachten wir Eichsymmetrien der Form $\Phi \to e^{i\Lambda(x)}\Phi$. Dies führt zur Einführung des elektromagnetischen Feldes aufgrund der kovarianten Ableitung. Die Lagrange-Dichte lautet somit

$$\mathcal{L} = \{(\partial_\mu + ieA_\mu)\Phi\}\{(\partial^\mu - ieA^\mu)\Phi^*\} - m^2\Phi^*\Phi - \lambda(\Phi^*\Phi)^2 - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \quad . \tag{1741}$$

Dies ist die Lagrange-Dichte der skalaren Quantenelektrodynamik. Wie zuvor sehen wir $m^2$ als positiven oder negativen Parameter an, so daß für $m^2 < 0$ und bei Abwesenheit des Eichfeldes das Vakuum liegt bei

$$\mid \Phi \mid = a = \left(\frac{-m^2}{2\lambda}\right)^{\frac{1}{2}} \quad . \tag{1742}$$

Wieder setzten wir

$$\Phi(x) = a + \frac{\Phi_1(x) + i\Phi_2(x)}{\sqrt{2}} \quad . \tag{1743}$$

Ausgedrückt durch die physikalischen Felder $\Phi_1$ und $\Phi_2$ lautet nun die Lagrange-Dichte

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + e^2a^2A_\mu A^\mu + \frac{1}{2}(\partial_\mu\Phi_1)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu\Phi_2)^2 - \\ &\quad -2\lambda a^2\Phi_1^2 + \sqrt{2}eaA^\mu\partial_\mu\Phi_2 + \cdots \end{aligned} \tag{1744}$$

Der interessante Term ist nun der zweite, proportional zu $A_\mu^2$. Das Photon hat jetzt eine effektive Masse erhalten. $\Phi_1$ ist ein massives Feld, $\Phi_2$ hingegen ist masselos. Der gemischte Term in $A^\mu\partial_\mu\Phi_2$ kann durch eine Eichtransformation eliminiert werden. Für infinitesimale $\Lambda$ folgt aus $\Phi' = (1 + i\Lambda)\,\Phi$ und $\Phi'^* = (1 - i\Lambda)\,\Phi^*$ sowie (1743)

$$\Phi_1' = \Phi_1 - \Lambda\Phi_2 \tag{1745}$$

$$\Phi_2' = \Phi_2 + \Lambda\Phi_1 + \sqrt{2}\Lambda a \quad . \tag{1746}$$

Dies zeigt, daß $\Phi_2$ eine inhomogene Transformation erfährt, die einer Rotation sowie auch einer Translation in der $(\Phi_1, \Phi_2)$-Ebene entspricht. Wir können $\Lambda$ so wählen, daß $\Phi_2$ verschwindet. Damit eliminieren wir auch den gemischten Term in $A^\mu\partial_\mu\Phi_2$. In dieser Eichung lautet die Lagrange-Dichte

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + e^2a^2A_\mu A^\mu + \frac{1}{2}(\partial_\mu\Phi_1)^2 - 2\lambda a^2\Phi_1^2 + \cdots \quad . \tag{1747}$$

Diese Lagrange-Dichte enthält nur noch zwei Felder, das Photonenfeld mit Spin 1, sowie $\Phi_1$ mit Spin 0. Beide Felder sind massive Felder. Das $\Phi_2$ -Feld, das im Fall der spontanen Symmetriebrechung der globalen Symmetrie masselos geworden ist (Goldstone-Boson), ist nun verschwunden. Zusätzlich hat das Eichfeld aufgrund der Tatsache, daß wir eine lokale Symmetrie vorliegen haben, eine Masse bekommen. Dieses Phänomen nennt man den Higgs-Mechanismus. Die spontane Brechung der Eichsymmetrie resultiert nicht in dem Auftreten eines masselosen Goldstone-Bosons, sondern im vollständigen Verschwinden dieses Feldes und dem Auftretren eines massiven Eichfeldes.
Die spontane Brechung der U(1) Symmetrie führt zu dem folgenden Teilchenspektrum, jeweils abhängig von einer globalen oder lokalen Symmetrie.

1. Goldstone-Mode: Spontane Brechung der globalen U(1)-Symmetrie:
   zwei massive skalare Felder $\Rightarrow$ ein massives skalares Feld und ein masseloses skalares Feld

2. Higgs-Mode: Spontane Brechung der Eichsymmetrie U(1):
   zwei massive skalare Felder und ein Photon $\Rightarrow$ ein massives skalares Feld und ein massives Photon

Man beachte, daß die Zahl der Freiheitsgrade bei dieser Transformation erhalten bleibt. Im Goldstone-Fall ist dies einfach, denn ein massives und ein masseloses skalares Feld hat jeweils einen Freiheitsgrad. Im Higgs-Fall hat das masselose Photon zwei Freiheitdsgrade (die beiden transversalen Polarisationen). Jedoch hat das massive Photon drei Freiheitsgrade, es kommt eine physikalische Longitudinalpolarisation hinzu. Hier gilt demnach: $2+2 = 1+3$ . Man sagt, das Photon hat das skalare Feld „aufgefressen“ und dadurch eine Masse erhalten. Die spezielle Eichung, die wir gewählt haben um dies zu erreichen, nennt man auch die physikalische, unitäre oder U-Eichung.

Wir wenden uns nun dem nichtabelschen Higgs-Phänomen zu. Die bisherige Lagrange-Dichte ändern wir ab, indem wir den Eichfeldterm addieren,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(D_\mu\Phi_i)(D^\mu\Phi_i) - \frac{1}{2}m^2\Phi_i\Phi_i - \lambda(\Phi_i\Phi_i)^2 - \frac{1}{4}F^i_{\mu\nu}F^{i\mu\nu} \tag{1748}$$

mit

$$\begin{aligned} D_\mu\Phi_i &= \partial_\mu\Phi_i + g\,\epsilon_{ijk}\,A^j_\mu\Phi_k \;, \\ F^i_{\mu\nu} &= \partial_\mu A^i_\nu - \partial_\nu A^i_\mu + g\,\epsilon_{ijk}\,A^j_\mu A^k_\nu \quad . \end{aligned} \tag{1749}$$

Das Potential V hat für $m^2 < 0$ ein Minimum bei

$$\mid \Phi_0 \mid = \left(\frac{-m^2}{4\lambda}\right)^{\frac{1}{2}} = a \;, \tag{1750}$$

und wir wählen wie zuvor den Vakuumzustand derart, daß er in $\vec{e}_3$-Richtung zeigt:

$$\vec{\Phi}_0 = a\vec{e}_3 \;. \tag{1751}$$

Die physikalischen Felder sind dann $\Phi_1$, $\Phi_2$ und $\chi = \Phi_3 - a$ . Damit folgt für die Lagrange-Dichte

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2}\left((\partial_\mu\Phi_1)^2 + (\partial_\mu\Phi_2)^2 + (\partial_\mu\chi)^2\right) + ag\left((\partial_\mu\Phi_1)A^\mu_2 - (\partial_\mu\Phi_2)A^\mu_1\right) \\ &\quad + \frac{1}{2}a^2g^2\left((A^1_\mu)^2 + (A^2_\mu)^2\right) - \frac{1}{4}\left(\partial_\mu A^i_\nu - \partial_\nu A^i_\mu\right)^2 - 4a^2\lambda\chi^2 + \cdots \quad . \end{aligned} \tag{1752}$$

Es sind nur die Terme quadratisch in den Feldern aufgeführt. Die Lagrange-Dichte enthält wieder einen gemischten Term in $A^\mu$ und in $\Phi$. Wir nutzen wieder aus, daß wir eine lokale Symmetrie vorliegen haben. Dies impliziert, daß wir an jedem Raum-Zeit Punkt eine unabhängige Eichtransformation vornehmen können. Wir wählen als Eichung die unitäre Eichung, so daß an jedem Punkt in der Raum-Zeit $\vec{\Phi}$ entlang der dritten Isospin-Achse liegt.

$$\vec{\Phi}(x) = \Phi_3\vec{e}_3 = (a+\chi)\vec{e}_3 \quad . \tag{1753}$$

Damit eliminieren wir nun die Felder $\Phi_1$ und $\Phi_2$, und wir haben

$$\begin{aligned}
D_\mu \Phi_1 &= g(a+\chi) A^2_\mu \,, \\
D_\mu \Phi_2 &= -g(a+\chi) A^1_\mu \,, \\
D_\mu \Phi_3 &= \partial_\mu \chi \quad .
\end{aligned} \tag{1754}$$

Weiter folgt

$$(D_\mu \Phi_i)^2 = a^2 g^2 \left( (A^1_\mu)^2 + (A^2_\mu)^2 \right) + (\partial_\mu \chi)^2 + \cdots \tag{1755}$$

und

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}(\partial_\mu A^i_\nu - \partial_\nu A^i_\mu)^2 + \frac{1}{2} a^2 g^2 \left( (A^1_\mu)^2 + (A^2_\mu)^2 \right) + \frac{1}{2}(\partial_\mu \chi)^2 - 4a^2 \lambda \chi^2 + \cdots \quad . \tag{1756}$$

Die verbleibenden Teilchen sind dann ein massives skalares Teilchen, zwei massive Vektorteilchen und ein masseloses Vektorteilchen. Die beiden Goldstone-Bosonen, die bei der spontan gebrochenen globalen Symmetrie auftraten, sind nun verschwunden in dem Modell der lokalen Symmetriebrechung. Zwei der masselosen Eichfelder sind nun massiv geworden. Wieder fassen wir zusammen:

1. Goldstone-Mode: globale O(3)-Symmetrie.
   drei massive skalare Felder $\Rightarrow$ ein massives skalares Feld und zwei masselose skalare Felder

2. Higgs-Mode: lokale O(3)-Symmetrie.
   drei massive skalare Felder und drei masselose Vektorfelder $\Rightarrow$ ein massives skalares Feld, zwei massive Vektorfelder und ein masseloses Vektorfeld

Im Higgs-Fall zählen wir wieder die Freiheitsgrade ab und erhalten $3 + 3 * 2 = 1 + 2 * 3 + 2$ .

# Supraleitung

Supraleitung liefert eine nette Illustration des abelschen Higgs-Modells. Supraleitende Metalle weisen bei niedrigen Temperaturen keinen elektrischen Widerstand auf. Diese Metalle können daher verlustfrei Strom transportieren. Ferner schirmt dieser Strom das Magnetfeld ab, das somit innerhalb des Supraleiters verschwindet (Meissner-Effekt). In anderer Sprechweise kann man den Meissner-Effekt so beschreiben, daß die Photonen effektiv massiv werden, wie wir das vom Higgs-Phänomen her kennen.

Wir starten von der Lagrange-Dichte der skalaren Quantenelektrodynamik und betrachten eine zeitunabhängige Situation mit $\partial_0 \Phi = 0$ . Dann gilt

$$\mathcal{L} = -(\vec{\nabla} - ie\vec{A})\Phi \cdot (\vec{\nabla} + ie\vec{A})\Phi^* - m^2 \mid \Phi \mid^2 - \lambda \mid \Phi \mid^4 - \frac{1}{4}(\vec{\nabla} \times \vec{A})^2 \tag{1757}$$

oder

$$-\mathcal{L} = \mid (\vec{\nabla} - ie\vec{A})\Phi \mid^2 + m^2 \mid \Phi \mid^2 + \lambda \mid \Phi \mid^4 + \frac{1}{4}(\vec{\nabla} \times \vec{A})^2 \tag{1758}$$

In der Theorie der Supraleitung ist $-\mathcal{L}$ die Landau-Ginzburg freie Energie mit $m^2 = a(T - T_c)$ im Bereich der kritischen Temperatur $T_c$. $\Phi$ ist eine Vielteilchenwellenfunktion. Nach Bardeen-Cooper-Schrieffer (BCS) führen attraktive Kräfte zwischen den Elektronen zu Elektronenpaaren, die sich wie Bosonen verhalten. Bei niedrigen Temperaturen fallen diese Bosonen in denselben Quantenzustand (Bose-Einstein-Kondensation). Für $T > T_c$ ist $m^2 > 0$, und die minimale freie Energie ist bei $\mid \Phi \mid = 0$. Für $T < T_c$ ist $m^2 < 0$, und die minimale freie Enegie ist bei

$$\mid \Phi \mid^2 = -\frac{m^2}{2\lambda} > 0\ . \tag{1759}$$

Dies schafft die Verknüpfung zur spontanen Symmetriebrechung. $\mathcal{L}$ ist invariant bei der üblichen Phasentransformation

$$\begin{aligned} \Phi &\rightarrow e^{i\Lambda(x)}\Phi\ , \\ \vec{A} &\rightarrow \vec{A} + \frac{1}{e}\vec{\nabla}\Lambda(x) \quad . \end{aligned} \tag{1760}$$

Der zugehörige erhaltene Strom lautet

$$\begin{aligned} \vec{j} &\equiv \frac{\partial(-\mathcal{L})}{\partial(\vec{\nabla}\Phi)}(i\Phi) + \frac{\partial(-\mathcal{L})}{\partial(\vec{\nabla}\Phi^*)}(-i\Phi^*) \\ &= -i(\Phi^*\vec{\nabla}\Phi - \Phi\vec{\nabla}\Phi^*) - 2e \mid \Phi \mid^2 \vec{A} \quad . \end{aligned} \tag{1761}$$

Für $T < T_c$ variiert $\Phi$ nur geringfügig in dem supraleiteneden Material, und der zweite Term dominiert.

$$\vec{j} = \frac{em^2}{\lambda}\vec{A} = -k^2\vec{A} \quad , \tag{1762}$$

wobei $k$ eine positive Konstante ist. Dies ist die London-Gleichung. Das elektrische Feld ist dann

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = 0 \quad . \tag{1763}$$

Damit folgt für den Ohmschen Widerstand $R$, definiert durch

$$\vec{E} \; = \; R\vec{j} \, , \tag{1764}$$

der Wert

$$R \; = \; 0 \, , \tag{1765}$$

d.h. das Material ist supraleitend.

Auch der Meissner-Effekt, also das Herausdrängen des magnetischen Flusses, ist leicht abgeleitet. Wir gehen aus vom Ampère-Gesetz

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{j} \quad . \tag{1766}$$

Wir bilden die Rotation und nutzen aus, daß gilt $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$. Somit folgt aus (1762) und $\vec{B} \; = \; \vec{\nabla} \times \vec{A}$

$$\nabla^2 \vec{B} = k^2 \vec{B} \quad . \tag{1767}$$

Beschränken wir uns aus Einfachheitsgründen auf eine Dimension, dann hat diese Gleichung die Lösung

$$B_x = B_0 e^{-kx} \quad . \tag{1768}$$

Damit dringt das Magnetfeld nur mit der charakteristischen Tiefe $\frac{1}{k}$ ein. Setzt man die numerischen Werte ein, so folgt für $\frac{1}{k} \sim 10^{-6}$ cm. Ferner sehen wir, daß gilt

$$\nabla^2 \vec{A} = k^2 \vec{A} \quad . \tag{1769}$$

In Lorentz-kovarianter Form geschrieben lautet diese Gleichung

$$\Box A_\mu = -k^2 A_\mu \quad . \tag{1770}$$

Dies impliziert, daß das Photon eine effektive Masse $k$ aufweist, was wiederum ein Charakteristikum des Higgs-Phänomens ist.

# Versteckte Symmetrien

Aufgrund des Noether–Theorems gibt es einen Zusammenhang zwischen exakten Symmetrien und Erhaltungssätzen. Lokale Eichinvarianz dient als dynamisches Prinzip zur Konstruktion wechselwirkender Feldtheorien. Eichinvarianz führt zunächst stets zu Feldtheorien, in denen die Wechselwirkung durch masselose Vektorbosonen generiert wird. Hierzu gibt es aber nur das Photon. Das anschaulichste Beispiel für eine spontane Symmetriebrechung ist das eines Ferromagneten. Obwohl die zugrunde liegende Wechselwirkung perfekt rotationsinvariant ist, ist der Ferromagnet unterhalb der Curie–Temperatur vollständig ausgerichtet.

Man muß unterscheiden zwischen exakten und approximativen Symmetrien. Bei den approximativen Symmetrien können wir die beiden Fälle vorliegen haben, daß die Lagrange–Dichte explizit symmetriebrechende Terme enthält oder daß die Lagrange–Dichte exakt symmetrisch ist, jedoch der physikalische Vakuumzustand diese Symmetrie nicht widerspiegelt. Wir werden im folgenden finden, daß eine exakt symmetrische Lagrange–Dichte und ein unsymmetrischer Grundzustand notwendigerweise ein oder mehrere masselose Spin–Null–Teilchen, bekannt als Goldstone–Bosonen, generiert. Wir haben also zunächst die folgenden Schwierigkeiten vorliegen: Eichtheorien führen zu masselosen Vektorbosonen und die spontane Brechung einer stetigen Symmetrie führt zur Existenz spinloser Teilchen. Jedoch gibt es ein Zwischenspiel zwischen den Goldstone–Bosonen und den Eichbosonen, die den Eichbosonen Masse geben und das Goldstone–Boson aus dem Spektrum eliminieren. Dies wird durch den Higgs–Mechanismus bewirkt.

Eine exakte Symmetrie ist durch zwei Eigenschaften charakterisiert. Die Lagrange–Dichte ist invariant bei der entsprechenden Symmetrie–Transformation

$$\delta\mathcal{L} = 0 \tag{1771}$$

und das eindeutige physikalische Vakuum ist ebenfalls invariant. Einige der inneren Symmetrien, wie die Flavor–Symmetrie des Isospins und der SU(3) sowie die Erhaltung von Strangeness und Charm gelten nur näherungsweise. In diesem Zusammenhang schreibt man nützlicherweise

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{symmetrisch}} + \varepsilon\,\mathcal{L}_{\text{Symmetrie brechend}} \quad . \tag{1772}$$

Ein Standardbeispiel ist

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{stark}} + \mathcal{L}_{\text{em}} \quad , \tag{1773}$$

in dem die Lagrange–Dichte der starken Wechselwirkung isospin–invariant ist und die Isospin–Verletzung beim elektromagnetischen Term liegt. Beim Ferromagneten ist die Nächste–Nachbar–Wechselwirkung zwischen Spins oder magnetischen Dipolmomenten invariant unter der Gruppe der räumlichen Rotationen SO(3). Oberhalb der Curie–Temperatur haben wir eine exakte Symmetrie bei Abwesenheit äußerer Felder vorliegen. SO(3)–invarianz ist manifest. Durch ein äußeres magnetisches Feld können wir jedoch eine Richtung auszeichnen. Die SO(3)–Symmetrie wird zur SO(2)–Symmetrie durch einen symmetrie–brechenden Term in der Lagrange–Dichte. Unterhalb der Curie–Temperatur wird die SO(3)–Symmetrie spontan zur SO(2)–Symmetrie gebrochen. Die Richtung der spontanen Magnetisierung ist zufällig und die Eigenschaften des unendlichen Ferromagneten hängen nicht von der Orientierung ab. Daher ist der Grundzustand unendlich entartet.

Jedoch ist der Übergang von einem Grundzustand zu einem anderen im unendlichen Ferromagneten unmöglich, da es die Umorientierung unendlich vieler Dipole erfordert.

Wir betrachten nun ein einfaches mathematisches Modell. Die Lagrange–Dichte eines selbstwechselwirkenden skalaren Feldes $\phi$ wird studiert:

$$\mathcal{L} \;=\; \tfrac{1}{2}\left(\partial_\mu \phi\right)\left(\partial^\mu \phi\right) - V(\phi) \quad . \tag{1774}$$

Wie hängt nun die Natur des Vakuums und das Teilchenspektrum vom effektiven Potential V($\phi$) ab?
Das Potential sei ein gerades Potential von $\phi$, d. h.

$$V(\phi) \;=\; V(-\,\phi) \quad . \tag{1775}$$

Damit ist die Lagrange–Dichte invariant bei der Paritätstransformation

$$\phi \;\longrightarrow\; -\,\phi \quad . \tag{1776}$$

Wir spezialisieren uns auf das explizite Potential

$$V(\phi) \;=\; \tfrac{1}{2}\,\mu^2 \phi^2 + \tfrac{1}{4}\,|\lambda|\,\phi^4 \quad . \tag{1777}$$

Der quadratische Term wirkt wie der Massenterm in der skalaren Feldtheorie. Die Beschränkung auf den Term vierter Ordnung garantiert die Renormierbarkeit der Theorie. Stabilität wird durch das Vorzeichen des Terms vierter Ordnung sichergestellt.

Zwei Fälle können wir unterscheiden, wovon einer der spontan gebrochenen Symmetrie entspricht. Für $\mu^2 > 0$ hat das Potential ein eindeutiges Minimum bei $\phi = 0$. Dies entspricht dem Vakuumzustand.
Der Vakuumzustand wird am einfachsten im Hamilton–Formalismus untersucht. Die Hamilton–Dichte ist gegeben durch

$$\mathcal{H} \;=\; \Pi\dot{\phi} - \mathcal{L} \tag{1778}$$

mit

$$\dot{\phi} \;=\; \partial_0 \phi \tag{1779}$$

und dem kanonischen Impuls

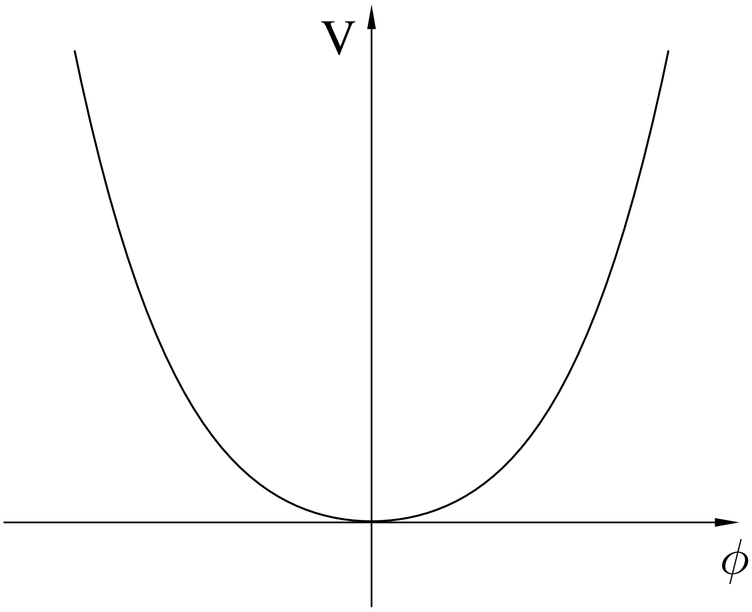
$$\Pi \;\equiv\; \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \quad . \tag{1780}$$

Dies führt uns auf

$$\mathcal{H} \;=\; \frac{1}{2}\left[\left(\partial_0 \phi\right)^2 + \left(\vec{\nabla}\phi\right)^2\right] + V(\phi) \quad . \tag{1781}$$

Wir erkennen hieraus, daß der Zustand niedrigster Energie offensichtlich der ist, für den gilt: $\phi =$ const. Diesen Zustand bezeichnen wir mit $< \phi >_0$.
Hiernach entspricht $< \phi >_0$ dem Minimum von $V$. Für $\mu^2 > 0$ folgt

$$< \phi >_0 \;=\; 0 \quad . \tag{1782}$$




Figur 29: Potential $V$ für $\mu^2 > 0$ .

Für kleine Oszillationen um das Minimum folgt

$$\mathcal{L}_{\rm so} \;=\; \frac{1}{2}\left[(\partial_\mu\phi)\,(\partial^\mu\phi) - \mu^2\phi^2\right] \quad . \tag{1783}$$

Dies entspricht der Lagrange–Dichte eines freien Teilchens der Masse $\mu$.

Für $\mu^2 < 0$ haben wir die Situation einer spontan gebrochenen Symmetrie vorliegen. Das Potential

$$V(\phi) \;=\; -\frac{1}{2}\left|\mu^2\right|\phi^2 + \frac{1}{4}\left|\lambda\right|\phi^4 \tag{1784}$$

hat Minima bei

$$<\phi>_0 \;=\; \pm\sqrt{\frac{-\mu^2}{|\lambda|}} \;\equiv\; \pm\, v \quad . \tag{1785}$$

Diese Werte entsprechen den zwei entarteten Zuständen niedrigster Energie. Jeder kann als Vakuumzustand gewählt werden. Die Paritätstransformation ist zwar eine Invarianzeigenschaft der Lagrange–Dichte, aber nicht des einmal gewählten Vakuumzustandes. Wir wählen willkürlich

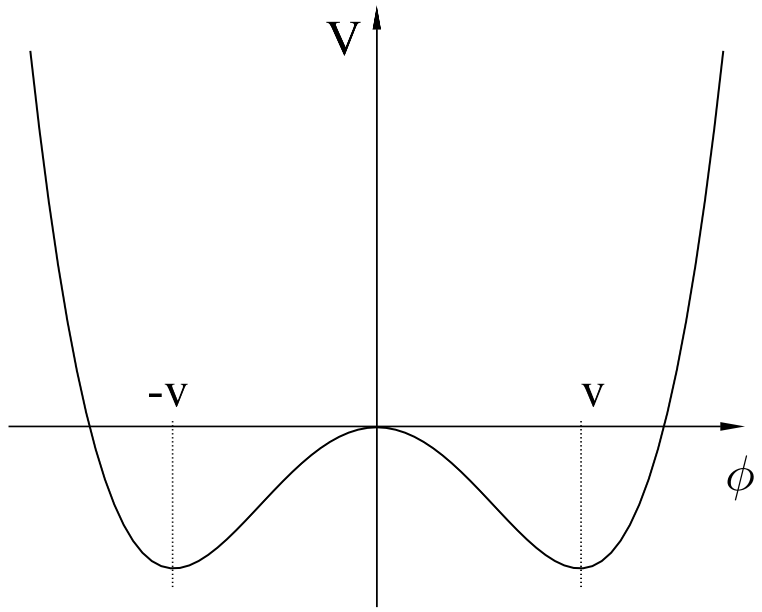
$$<\phi>_0 \;=\; +v \tag{1786}$$

und definieren ein verschobenes Feld

$$\phi' \;\equiv\; \phi - <\phi>_0 \;=\; \phi - v \quad . \tag{1787}$$

Damit folgt für den Vakuumzustand

$$<\phi'>_0 \;=\; 0 \quad . \tag{1788}$$




Figur 30: Potential $V$ für $\mu^2 < 0$ .

Es gilt

$$\frac{-\mu^2}{|\lambda|} \;=\; v^2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad |\lambda| \;=\; \frac{-\mu^2}{v^2} \quad . \tag{1789}$$

Ausgedrückt durch das verschobene Feld lautet die Lagrange–Dichte

$$\mathcal{L}_{\rm so} \;=\; \tfrac{1}{2}\left(\partial_\mu \phi'\right)\left(\partial^\mu \phi'\right) - \left|\mu^2\right| \left(\frac{\phi'^{\,4}}{4v^2} + \frac{\phi'^{\,3}}{v} + \phi'^{\,2} - \frac{v^2}{4}\right) \quad . \tag{1790}$$

Es ist

$$\begin{aligned} \phi'^{\,2} \;&=\; \left(\phi - v\right)^2 \\ &=\; \phi^2 + v^2 - 2\phi v \;, \end{aligned} \tag{1791}$$

$$\begin{aligned} \phi'^{\,3} \;&=\; \left(\phi - v\right)\left(\phi - v\right)^2 \\ &=\; \phi^3 + \phi v^2 - 2\phi^2 v - v\phi^2 - v^3 + 2\phi v^2 \\ &=\; \phi^3 - 3\phi^2 v + 3\phi v^2 - v^3 \;, \end{aligned} \tag{1792}$$

$$\begin{aligned} \phi'^{\,4} \;&=\; \left(\phi - v\right)\left(\phi - v\right)^3 \\ &=\; \phi^4 - 3\phi^3 v + 3\phi^2 v^2 - \phi v^3 - \phi^3 v + 3\phi^2 v^2 - 3\phi v^3 + v^4 \\ &=\; \phi^4 - 4\phi^3 v + 6\phi^2 v^2 - 4\phi v^3 + v^4 \quad . \end{aligned} \tag{1793}$$

Zusammengefaßt folgt für das Potential

$$V(\phi) \;=\; \left|\mu^2\right| \left(\frac{\phi^4}{4v^2} - \frac{1}{2}\phi^2\right) \quad . \tag{1794}$$

Für kleine Oszillationen um den Vakuumzustand folgt

$$\mathcal{L}_{\rm so} \;=\; \tfrac{1}{2}\left[(\partial_\mu\phi')\,(\partial^\mu\phi') - 2\left|\mu^2\right|\phi'^2\right] \quad . \tag{1795}$$

Dazu kommt noch eine irrelevante Konstante.

Wir diskutieren nun die spontane Brechung stetiger Symmetrien. Wir betrachten das Goldstone–Modell für zwei skalare Felder $\phi_1$ und $\phi_2$.

$$\mathcal{L} \;=\; \tfrac{1}{2}\left[(\partial_\mu\phi_1)\,(\partial^\mu\phi_1) + (\partial_\mu\phi_2)\,(\partial^\mu\phi_2)\right] - V(\phi_1^2+\phi_2^2) \quad . \tag{1796}$$

Diese Lagrange–Dichte ist invariant in der Gruppe SO(2) der Rotationen in der Ebene.

$$\Phi \;\equiv\; \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \;\longrightarrow\; \begin{pmatrix} \cos\Theta & \sin\Theta \\ -\sin\Theta & \cos\Theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \quad . \tag{1797}$$

Wie zuvor betrachten wir das effektive Potential

$$V\left(\Phi^2\right) \;=\; \tfrac{1}{2}\,\mu^2\Phi^2 + \tfrac{1}{4}\,|\lambda|\left(\Phi^2\right)^2 \tag{1798}$$

mit

$$\Phi^2 \;=\; \phi_1^2 + \phi_2^2 \quad . \tag{1799}$$

Wir unterscheiden wieder zwei Fälle. $\mu^2 > 0$ entspricht wieder der exakten Symmetrie. Der eindeutige Vakuumzustand liegt bei

$$<\Phi>_0 \;=\; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad . \tag{1800}$$

Für kleine Oszillationen um den Grundzustand erhalten wir daher

$$\mathcal{L}_{\rm so} \;=\; \tfrac{1}{2}\left[(\partial_\mu\phi_1)\,(\partial^\mu\phi_1) - \mu^2\phi_1^2\right] + \tfrac{1}{2}\left[(\partial_\mu\phi_2)\,(\partial^\mu\phi_2) - \mu^2\phi_2^2\right] \quad . \tag{1801}$$

Dies ist die gewöhnliche Lagrange–Dichte für zwei skalare Teilchen mit jeweils der Masse $\mu$. Der Fall $\mu^2 < 0$ führt zur spontanen Brechung der SO(2)–Symmetrie. Das absolute Minimum des Potentials liegt nun bei

$$<\Phi>_0^2 \;=\; \frac{-\mu^2}{|\lambda|} \;\equiv\; v^2 \quad . \tag{1802}$$

Dies führt zu einem Kontinuum von unterschiedlichen Vakuumzuständen, die in der Energie entartet sind. Diese Entartung ist eine Konsequenz der SO(2)–Symmetrie des effektiven Potentials. Wir wählen als physikalischen Vakuumzustand die Konfiguration

$$<\Phi>_0 \;=\; \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix} \quad . \tag{1803}$$

Wir entwickeln nun um die Vakuumkonfiguration

$$\Phi' \;\equiv\; \Phi - <\Phi>_0 \;\equiv\; \begin{pmatrix} \eta \\ \xi \end{pmatrix} \quad . \tag{1804}$$

Damit bekommen wir für kleine Oszillationen

$$\mathcal{L}_{\text{so}} = \frac{1}{2}\left[(\partial_\mu \eta)(\partial^\mu \eta) + 2\mu^2\eta^2\right] + \frac{1}{2}\left[(\partial_\mu \xi)(\partial^\mu \xi)\right] \quad . \tag{1805}$$

Es gibt nun zwei Teilchen im Spektrum. Das $\eta$–Teilchen, assoziiert mit radialen Oszillationen, hat $(\text{Masse})^2 = -2\mu^2 > 0$. Das $\xi$–Teilchen, jedoch, ist masselos. Die Masse des $\eta$–Teilchens kann betrachtet werden als Konsequenz der Rückstellkräfte des Potentials gegen radiale Oszillationen. Im Gegensatz hierzu ist die Masselosigkeit von $\xi$ eine Konsequenz der SO(2)–Invarianz der Lagrange–Dichte. Hier gibt es keine Rückstellkraft gegen Winkeloszillationen. Das Aufspalten des Spektrums und das Auftreten masseloser Teilchen ist bekannt als Goldstone–Phänomen. Die masselosen Teilchen sind bekannt als Goldstone–Bosonen. Sie verbinden die verschiedenen Vakua.

Wir betrachten nun lokal eichinvariante Lagrange–Dichten, die zu spontan gebrochenen Symmetrien führen. Dabei werden wir einen Zusammenhang zwischen den masselosen Eichfeldern und den masselosen Goldstone–Bosonen aufdecken, die die spontane Symmetriebrechung begleiten. Dieses Zwischenspiel nennt man Higgs–Phänomen. Dies ist die lokal eichinvariante Erweiterung des Goldstone–Modells.

Wir betrachten die Lagrange–Dichte eines geladenen skalaren Teilchens

$$\mathcal{L} = \left|\mathcal{D}^\mu \phi\right|^2 - \mu^2 \left|\phi\right|^2 - \left|\lambda\right| \left(\phi^* \phi\right)^2 - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \ , \tag{1806}$$

wobei $\phi$ ein komplexes Feld ist

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{\phi_1 + i\phi_2}{\sqrt{2}} \ , \\ \phi^* &= \frac{\phi_1 - i\phi_2}{\sqrt{2}} \end{aligned} \tag{1807}$$

und wie üblich

$$\mathcal{D}_\mu \equiv \partial_\mu + iqA_\mu \tag{1808}$$

die minimale Ankopplung beschreibt. Weiterhin gilt

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad . \tag{1809}$$

Die Lagrange–Dichte ist invariant unter der globalen U(1)–Rotation

$$\phi \longrightarrow \phi' = \mathrm{e}^{i\Theta}\phi \tag{1810}$$

und unter der lokalen Eichtransformation

$$\phi(x) \longrightarrow \phi'(x) = \mathrm{e}^{iq\alpha(x)}\phi(x) \quad , \tag{1811}$$

$$A_\mu(x) \longrightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \partial_\mu \alpha(x) \quad . \tag{1812}$$

Wie üblich sind zwei Fälle zu unterscheiden, abhängig von den Parametern des effektiven Potentials. Für $\mu^2 > 0$ hat das Potential ein eindeutiges Minimum bei $\phi = 0$ und die exakte Symmetrie der Lagrange–Dichte bleibt erhalten. Das Spektrum ist einfach das der gewöhnlichen QED geladener skalarer Teilchen mit einem einzelnen masselosen Photon $A_\mu$ und zwei skalaren Teilchen $\phi$ und $\phi^*$ mit gemeinsamer Masse $\mu$. Die Situation $\mu^2 = -\left|\mu^2\right| < 0$ ist die der spontan gebrochenen

Symmetrie. Sie muß speziell untersucht werden. Das Potential hat ein Kontinuum von absoluten Minima. Dies entspricht einem Kontinuum von degenerierten Vakua. Es ist dabei

$$< |\phi|^2 >_0 \;=\; \frac{-\mu^2}{2\,|\lambda|} \;\equiv\; \frac{v^2}{2} \quad . \tag{1813}$$

Um das Spektrum zu studieren, führen wir eine Verschiebung des Feldes zum physikalischen Vakuum durch. Dazu wählen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit

$$< \phi >_0 \;=\; \frac{v}{\sqrt{2}} \tag{1814}$$

mit $v > 0$ einer reellen Zahl. Das verschobene Feld wird definiert durch

$$\phi' \;\equiv\; \phi - < \phi >_0 \quad . \tag{1815}$$

Wir parametrisieren es durch

$$\phi' \;=\; \mathrm{e}^{i\xi/v}\,(v+\eta)\,/\sqrt{2} \;\cong\; (v+\eta+i\xi)\,/\sqrt{2} \quad . \tag{1816}$$

Damit folgt für kleine Oszillationen

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\mathrm{so}} \;&=\; \tfrac{1}{2}\left[(\partial_\mu\eta)\,(\partial^\mu\eta) + 2\mu^2\eta^2\right] + \tfrac{1}{2}\left[(\partial^\mu\xi)\,(\partial_\mu\xi)\right] \\ &\quad - \tfrac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + qvA_\mu\,(\partial^\mu\xi) + \tfrac{1}{2}q^2v^2A_\mu A^\mu + \cdots \end{aligned} \tag{1817}$$

Wie wir das aus unseren Studien des Goldstone–Phänomens kennen, hat das $\eta$–Feld, das radialen Oszillationen entspricht, $(\mathrm{Masse})^2 = 2\mu^2 > 0$. Das Eichfeld tritt auf als hätte es eine Masse erworben, aber es ist vermischt mit dem scheinbar masselosen $\xi$–Feld.

Eine schlaue Wahl der Eichung wird es leichter machen, das Spektrum der spontan gebrochenen Symmetrie zu analysieren. Wir schreiben die Terme mit $A_\mu$ und $\xi$ auf als $\frac{q^2v^2}{2}(A_\mu + \frac{1}{qv}\partial_\mu\xi)(A^\mu + \frac{1}{qv}\partial^\mu\xi)$. Diese Form plädiert für die Eichtransformation

$$A_\mu \;\longrightarrow\; A'_\mu \;=\; A_\mu + \tfrac{1}{qv}\partial_\mu\xi \quad . \tag{1818}$$

Wegen (1811) und (1812) geht dies einher mit der Phasenrotation des skalaren Feldes

$$\phi \;\longrightarrow\; \phi'' \;=\; \mathrm{e}^{-i\xi(x)/v}\,\phi'(x) \;=\; (v+\eta)\,/\sqrt{2} \quad . \tag{1819}$$

Mit der Kenntnis, daß die Lagrange–Dichte lokal eichinvariant ist, können wir zu $\mathcal{L}_{\mathrm{so}}$ zurückkehren und berechnen

$$\mathcal{L}_{\mathrm{so}} \;=\; \tfrac{1}{2}\left[(\partial_\mu\eta)\,(\partial^\mu\eta) + 2\mu^2\eta^2\right] - \tfrac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \tfrac{q^2v^2}{2}A'_\mu A'^\mu \quad . \tag{1820}$$

Wieder werden irrelevante Konstanten weggelassen. In dieser Eichung ist das Teilchen–Spektrum manifest:

- ein $\eta$–Feld, mit $(\mathrm{Masse})^2 = -2\mu^2 > 0$,
- ein massives Vektorfeld $A'_\mu$ mit der Masse $qv$,
- kein $\xi$–Feld.

Durch die Wahl der Eichung wurde das $\xi$–Teilchen vollständig aus der Lagrange–Dichte eliminiert. Die Eichtransformation zeigt, daß das, was früher das $\xi$–Feld war, nun verantwortlich für die longitudinale Komponente des massiven Vektorfeldes $A'_\mu$ ist.

Vor der spontanen Symmetriebrechung hatte die Theorie vier Teilchenfreiheitsgrade: zwei skalare, $\phi$ und $\phi^*$, sowie zwei Helizitätszustände des masselosen Eichfeldes $A_\mu$. Nach der spontanen Symmetriebrechung haben wir ein skalares Teilchen $\eta$ sowie drei Helizitätszustände des massiven Eichfeldes $A'_\mu$. Man sagt, das masselose Photon hat das masselose Goldstone–Boson aufgegessen und wurde so zu einem massiven Vektorboson. Das verbleibende massive skalare $\eta$ ist bekannt als Higgs–Boson.
Die spezielle Eichung, die das Teilchen-Spektrum transparent macht, nennt man unitäre Eichung, da nur physikalische Zustände in der Lagrange–Dichte auftreten. Die Wechselwirkung wird durch massive Vektorbosonen vermittelt. Eichbosonen und Goldstone–Bosonen haben sich gegenseitig kuriert.

# Das Salam-Weinberg-Modell der elektroschwachen Wechselwirkung

Wir wollen uns jetzt der Theorie der elektroschwachen Wechselwirkung zuwenden, deren Beschreibung als Eichtheorie erst durch die Einführung des Higgs-Mechanismus, der die Massen der Eichfelder durch spontane Symmetriebrechung erzeugt, möglich wird. Im Gegensatz zur Quantenelektrodynamik, die die elektromagnetische Wechselwirkung geladener Teilchen durch Austausch eines *masselosen* Vektorbosons – nämlich des Photons $\gamma$ – beschreibt, sind die Austauschteilchen der schwachen Wechselwirkung – die geladenen $W^+$- und $W^-$-Bosonen sowie das neutrale $Z^0$-Boson massebehaftete Vektorbosonen. Die Massen ergeben sich aus dem Experiment zu ungefähr

$$M_{W^+} = M_{W^-} = 78.6 \text{ GeV} \quad , \tag{1821}$$

$$M_{Z^0} = 89.3 \text{ GeV} \quad . \tag{1822}$$

Dieser Unterschied zur Quantenelektrodynamik hat für die schwache Wechselwirkung unschöne Konsequenzen, welche wir im folgenden kurz skizzieren:
Die Vektorbosonen der schwachen Wechselwirkung genügen als Spin-1-Teilchen der Proca-Gleichung:

$$\left(\hat{p}^2 - m^2\right) A^\mu = j^\mu \quad . \tag{1823}$$

Der Massenterm zerstört die Eichinvarianz der Theorie. Außerdem wird die Theorie dadurch unrenormierbar. Dies kann man leicht einsehen, indem man den Propagator des Proca-Feldes betrachtet:

$$D^{\mu\nu}_{\text{Proca}} = \frac{g^{\mu\nu} - \dfrac{p^\mu p^\nu}{m^2}}{p^2 - m^2} \quad , \tag{1824}$$

wobei der Zähler des Propagators gerade die Transversalität ausdrückt. (Zur Erinnerung: Der Photon-Propagator hat in der Lorentz-Eichung die Gestalt:

$$D^{\mu\nu}_\gamma = \frac{g^{\mu\nu} - \dfrac{p^\mu p^\nu}{p^2}}{p^2} \quad . \tag{1825}$$

Auch hier steht im Zähler der Projektor auf die transversalen Zustände.) Im Limes $p^2 \to \infty$ zeigen diese Propagatoren ein unterschiedliches Verhalten:

$$D^{\mu\nu}_\gamma(p^2 \to \infty) \;\to\; \frac{g^{\mu\nu}}{p^2} \sim \mathcal{O}\left(\frac{1}{p^2}\right) \quad , \tag{1826}$$

$$D^{\mu\nu}_{\text{Proca}}(p^2 \to \infty) \;\to\; \frac{p^\mu p^\nu}{p^2} \sim \mathcal{O}\left(\frac{p^2}{p^2}\right) \quad . \tag{1827}$$

Berechnet man nun Loop-Graphen, die – wie es zum Beispiel bei der Selbstenergie des Elektrons der Fall ist – Vektorbosonen enthalten, so divergieren diese für massive Vektorbosonen stärker als für masselose. Der von der Emission und nachfolgenden Absorption eines Photons stammende Beitrag zur Selbstenergie des Elektrons verhält sich für $p \to \infty$ wie

$$\int \mathrm{d}^4 p \, \frac{1}{p^3} \sim \mathcal{O}(p) \quad , \tag{1828}$$

während der gleiche Graph für die Emission und nachfolgende Absorption eines massiven Vektorbosons wie

$$\int \mathrm{d}^4 p \, \frac{1}{p} \sim \mathcal{O}(p^3) \tag{1829}$$

divergiert. Der *Divergenzgrad* ist im letzten Fall also um zwei erhöht. Für diese Divergenz kann die Renormierung nicht durchgeführt werden.

## Die masselose SU(2)-Theorie

In der Quantenelektrodynamik koppelt das Photonenfeld an die Ladungen der Leptonen. Im folgenden erweitern wir dieses Konzept, um eine Theorie der schwachen Wechselwirkung zu erhalten. Dazu müssen wir zunächst verstehen, was die Ladungen in dieser Theorie sind und wie die Ankopplung der Eichfelder funktioniert. Zur Motivation betrachten wir einmal den $\beta$-Zerfall eines Neutrons im Atomkern. Dabei wandelt sich das Neutron $n$ in ein Proton $p$ um, wobei ein Elektron $e^-$ und ein Elektron-Antineutrino $\bar{\nu}_\mathrm{e}$ entstehen:

$$n \longrightarrow p\, e^-\, \bar{\nu}_\mathrm{e} \quad . \tag{1830}$$

Streut man ein Neutrino an einem Neutron, so kann im Endzustand ein Proton und ein Elektron entstehen:

$$\nu_\mathrm{e}\, n \longrightarrow e^-\, p \quad . \tag{1831}$$

Diese Prozesse kann man sich durch Austausch eines intermediären Vektorbosons induziert vorstellen. Experimentell findet man, daß die Neutrinos (nahezu) masselos sind und nur mit linkshändiger Helizität in der Natur vorzukommen scheinen, während ihre Antiteilchen rechtshändig polarisiert sind.

Vergleicht man den Prozeß mit der Streuung von Elektronen am Proton durch Austausch eines virtuellen Photons, so kann man zu dem Schluß kommen, daß unter der schwachen Wechselwirkung Elektron und Elektron-Neutrino verschiedene Zustände des gleichen Teilchens sind. Da von der schwachen Wechselwirkung nur linkshändige Teilchen betroffen sind, können wir das linkshändige Elektron und das zugehörige Neutrino als verschiedene Zustände eines linkshändigen Spin-$\frac{1}{2}$-Feldes auffassen. Wir ordnen deshalb beide Teilchen in ein Dublett ein. Das rechtshändige Elektron bildet dagegen einen Singulett-Zustand, da es keinen Neutrino-Partner besitzt:

$$\Psi_L = \begin{pmatrix} \nu_\mathrm{e} \\ e^- \end{pmatrix}_L \quad , \qquad \Psi_R = (e^-)_R \quad . \tag{1832}$$

(Der Index $L$ bezeichnet die *linkshändigen* Teilchen, für die der Spin entgegengesetzt zur Bewegungsrichtung zeigt, $R$ bezeichnet die *rechtshändigen* Teilchen.)

Nun wird auch einsichtig, was man unter einer Ladung der schwachen Wechselwirkung zu verstehen hat und was die Ankopplung eines intermediären Bosons der schwachen Wechselwirkung bewirkt: Die Wechselwirkung „schaltet“ zwischen den Komponenten des linkshändigen Dubletts $\Psi_L$ hin und her. Die Singuletts bleiben von dieser Wechselwirkung dagegen unberührt. Die Ladung der schwachen Wechselwirkung wird als *Flavour* bezeichnet und gibt an, in welchem Maße ein Teilchen der schwachen Wechselwirkung unterliegt und ob es sich im Elektron- oder Neutrino-Zustand befindet.

Auf die gleiche Weise werden auch $\mu$ und $\nu_\mu$ in Multipletts eingeordnet, sowie $\tau$ und $\nu_\tau$.

Bei Quarks kann man ebenfalls eine Einordnung treffen, die vielleicht etwas künstlicher erscheint, da die in einem Duplett eingeordneten linkshändigen Quarks durchaus vergleichbare Massen besitzen. Deshalb treten *zwei* rechtshändige Singuletts auf, da jedes der im linkshändigen Dublett eingeordneten Quarks auch einen rechtshändigen Partner hat. Für die leichten Quarks hat man demnach die folgenden Multipletts:

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L \quad , \qquad u_R \quad , \qquad d_R \quad . \tag{1833}$$

Wir beschäftigen uns hier ausschließlich mit dem Elektronensektor und dessen Ankopplungen im Rahmen der Theorie der schwachen Wechselwirkung. Wir ordnen den Leptonen ihre Wellenfunktionen zu und konstruieren auf diese Weise einen 8-komponentigen Spinor, welcher die Wellenfunktionen der linkshändigen Teilchen enthält, sowie einen 4-komponentigen Spinor, der die Wellenfunktion des rechtshändigen Teilchens bildet:

$$\Psi_L = \begin{pmatrix} \psi_\nu \\ \psi_{\mathrm{e}} \end{pmatrix}_L \quad , \qquad \Psi_R = (\psi_{\mathrm{e}})_R \quad . \tag{1834}$$

Es ist bereits bekannt, wie aus einer allgemeinen Wellenfunktion $\psi$ der rechtshändige bzw. linkshändige Anteil mittels der Projektionsoperatoren $\Pi_{R/L} = (1 \pm \gamma_5)/2$ herausprojiziert werden kann:

$$\begin{aligned} \psi_L &= \frac{1-\gamma_5}{2}\,\psi \quad , \\ \psi_R &= \frac{1+\gamma_5}{2}\,\psi \quad . \end{aligned} \tag{1835}$$

Dabei steht $\psi$ für die Wellenfunktion des Elektrons bzw. des Elektron-Neutrinos. (Für das Elektron-Neutrino verschwindet die rechtshändige Komponente: $\psi_R \equiv 0$.)
Wir halten noch einmal die Projektoreigenschaften von $\Pi_{R/L}$ fest:

$$\begin{aligned} \Pi_R\,\Pi_R &= \left(\frac{1+\gamma_5}{2}\right)^2 = \frac{1+\gamma_5+\gamma_5+\gamma_5^2}{4} = \frac{1+\gamma_5}{2} = \Pi_R \\ &\quad \text{und ebenso} \\ \Pi_L\,\Pi_L &= \Pi_L \quad , \\ &\quad \text{sowie} \\ \Pi_R\,\Pi_L &= \left(\frac{1+\gamma_5}{2}\right)\left(\frac{1-\gamma_5}{2}\right) = \frac{1}{4}(1+\gamma_5-\gamma_5-\gamma_5^2) = 0 \\ &\quad \text{und} \\ \Pi_L\,\Pi_R &= 0 \quad . \end{aligned} \tag{1836}$$

Für einen 8-komponentigen Spinor, wie in Gl. (1834) definiert, wird der Projektionsoperator entsprechend definiert als:

$$\Pi_{R/L} = \begin{pmatrix} \frac{1\pm\gamma_5}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1\pm\gamma_5}{2} \end{pmatrix} \quad .$$

Wir versuchen nun, die Wechselwirkung zu formulieren, indem wir die Lagrange-Funktion dafür aufstellen. Wir beginnen zunächst mit dem freien Anteil:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \mathrm{i}\left(\overline{(\psi_{\mathrm{e}})_L} + \overline{(\psi_{\mathrm{e}})_R}\right)\gamma^\mu\partial_\mu\left((\psi_{\mathrm{e}})_L + (\psi_{\mathrm{e}})_R\right) - \left(\overline{(\psi_{\mathrm{e}})_L} + \overline{(\psi_{\mathrm{e}})_R}\right) m\left((\psi_{\mathrm{e}})_L + (\psi_{\mathrm{e}})_R\right) \\ &\quad + \mathrm{i}\overline{(\psi_\nu)_L)}\,\gamma^\mu\partial_\mu\,(\psi_\nu)_L \\ &= \mathrm{i}\overline{(\psi_{\mathrm{e}})_L}\,\gamma^\mu\partial_\mu\,(\psi_{\mathrm{e}})_L + \mathrm{i}\overline{(\psi_{\mathrm{e}})_L}\,\gamma^\mu\partial_\mu\,(\psi_{\mathrm{e}})_R + \mathrm{i}\overline{(\psi_{\mathrm{e}})_R}\,\gamma^\mu\partial_\mu\,(\psi_{\mathrm{e}})_L \\ &\quad + \mathrm{i}\overline{(\psi_{\mathrm{e}})_R}\,\gamma^\mu\partial_\mu\,(\psi_{\mathrm{e}})_R + \mathrm{i}\overline{(\psi_\nu)_L}\,\gamma^\mu\partial_\mu\,(\psi_\nu)_L \\ &\quad - m\left(\overline{(\psi_{\mathrm{e}})_L}(\psi_{\mathrm{e}})_L + \overline{(\psi_{\mathrm{e}})_R}(\psi_{\mathrm{e}})_L + \overline{(\psi_{\mathrm{e}})_L}(\psi_{\mathrm{e}})_R + \overline{(\psi_{\mathrm{e}})_R}(\psi_{\mathrm{e}})_R\right) \quad . \end{aligned} \tag{1837}$$

Dabei haben wir bereits berücksichtigt, daß das Neutrino nur linkshändig auftritt und masselos ist. Mit den Projektoreigenschaften (1836) folgt sofort, daß die Massenterme, die nur linkshändige bzw. nur rechtshändige Wellenfunktionen enthalten, verschwinden:

$$\overline{(\psi_e)_L}(\psi_e)_L = \overline{(\psi_e)_R}(\psi_e)_R \equiv 0 \quad , \tag{1838}$$

denn es gilt mit $\Pi_R \, \Pi_L = 0$

$$\overline{(\psi_e)_L}(\psi_e)_L = \overline{(\Pi_L \psi_e)}(\Pi_L \psi_e) = \psi_e^\dagger \Pi_L^\dagger \gamma^0 \Pi_L \psi_e = \psi_e^\dagger \gamma^0 \Pi_R \, \Pi_L \psi_e = 0 \quad . \tag{1839}$$

Ebenso verschwinden die Ableitungsterme, bei denen eine linkshändige und eine rechtshändige Wellenfunktion vorkommen:

$$\begin{aligned} \mathrm{i}\overline{(\psi_e)_L}\,\gamma^\mu \partial_\mu \,(\psi_e)_R &= \mathrm{i}\overline{(\Pi_L \psi_e)}\,\gamma^\mu \partial_\mu \,(\Pi_R \psi_e) \\ &= \mathrm{i}(\Pi_L \psi_e)^\dagger \,\gamma^0 \gamma^\mu \partial_\mu \,\Pi_R \psi_e \\ &= \mathrm{i}\psi_e^\dagger \Pi_L^\dagger \,\gamma^0 \gamma^\mu \partial_\mu \,\Pi_R \,\psi_e \\ &= \mathrm{i}\psi_e^\dagger \,\gamma^0 \,\Pi_R \,\gamma^\mu \partial_\mu \,\Pi_R \psi_e \\ &= \mathrm{i}\overline{\psi_e}\,\gamma^\mu \partial_\mu \,\Pi_L \,\Pi_R \psi_e = 0 \quad \text{wegen} \quad \Pi_L \,\Pi_R \equiv 0 \quad . \end{aligned} \tag{1840}$$

Damit schreibt sich die Lagrange-Funktion:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \;=\; & \mathrm{i}\overline{(\psi_e)_L}\,\gamma^\mu \partial_\mu \,(\psi_e)_L + \mathrm{i}\overline{(\psi_\nu)_L}\,\gamma^\mu \partial_\mu \,(\psi_\nu)_L + \mathrm{i}\overline{(\psi_e)_R}\,\gamma^\mu \partial_\mu \,(\psi_e)_R \\ & - m\overline{(\psi_e)_L}(\psi_e)_R - m\overline{(\psi_e)_R}(\psi_e)_L \quad . \end{aligned} \tag{1841}$$

Die Massenterme *mischen* den *rechts*- und den *linkshändigen* Anteil der Wellenfunktionen. Die sich daraus ergebenden Konsequenzen können an dieser Stelle nicht diskutiert werden.
Wir können die Lagrange-Funktion nun auch in der Form

$$\mathcal{L} = \mathrm{i}\overline{\Psi_L}\,\gamma^\mu \partial_\mu \,\Psi_L + \mathrm{i}\overline{\Psi_R}\,\gamma^\mu \partial_\mu \Psi_R - \overline{\Psi_L} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ m \end{pmatrix} \Psi_R - \overline{\Psi_R}\,(0, m) \cdot \Psi_L \tag{1842}$$

schreiben, wobei wir wie in Gl. (1834) linkshändige und rechtshändige Wellenfunktionen zu einem Dublett bzw. einem Singulett zusammengefaßt haben. Weiterhin haben wir die zweikomponentige Größe $\begin{pmatrix} 0 \\ m \end{pmatrix}$ eingeführt, um die in Gl. (1841) auftretenden Massenterme in unsere neue Notation zu übersetzen.

## Ankopplung des elektromagnetischen Feldes und der Felder der schwachen Wechselwirkung

In diesem Abschnitt wollen wir die Ankopplung der Eichfelder der elektromagnetischen und der schwachen Wechselwirkung konstruieren. Dabei wird es sich als zweckmäßig erweisen, die Massenterme in Gl. (1842) wegzulassen (der im nächsten Abschnitt zu besprechende *Higgs-Mechanismus* wird diese Terme erzeugen) und die Elektronen wie die Neutrinos als masselos anzusehen. Die Lagrange-Funktion (1842) hat nun die Gestalt

$$\mathcal{L} = \mathrm{i}\overline{\Psi_L}\,\gamma^\mu \partial_\mu\,\Psi_L + \mathrm{i}\overline{\Psi_R}\,\gamma^\mu \partial_\mu\,\Psi_R \quad . \tag{1843}$$

$\Psi_L = \begin{pmatrix} \psi_\nu \\ \psi_\mathrm{e} \end{pmatrix}$ transformiert sich mittels unitärer $2 \times 2$-Matrizen (da die Norm der Wellenfunktion erhalten bleiben soll). Diese Transformation können wir getrennt behandeln als unitäre Transformation mittels SU(2)-Matrizen und einem U(1)-Phasenfaktor. Aus Analogie zu Spinoren, die das gleiche SU(2)-Transformationsverhalten zeigen, bezeichnen wir $\Psi_L$ als *Isospinor*.
Wir halten außerdem fest, daß $\Psi_R$ als Skalar im Isospinraum von der SU(2)-Transformation nicht berührt wird (er transformiert sich nach der trivialen Darstellung, welche einfach der Multiplikation mit der $1$ entspricht), sondern nur der U(1)-Phasentransformation unterliegt.
Als Generatoren der SU(2) wählen wir wieder die Pauli-Matrizen:

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \;, \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix} \;, \quad \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad . \tag{1844}$$

Dann schreibt sich die allgemeine SU(2)-Transformation als: $\exp(-\mathrm{i}\vec{\alpha}\cdot\vec{\tau}/2)$, wobei der Vektor $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ gerade die drei Gruppenparameter der SU(2)-Gruppe bezeichnet.
Wir fassen noch einmal die Transformationseigenschaften der linkshändigen und rechtshändigen Wellenfunktionen unter einer SU(2)-Transformation zusammen:

$$\begin{aligned} &\Psi_L \text{ transformiert sich gemäß:} && \Psi_L \longrightarrow \Psi_L' = e^{-\frac{\mathrm{i}}{2}\vec{\tau}\cdot\vec{\alpha}}\,\Psi_L \quad , \\ &\text{während } \Psi_R \text{ davon unberührt bleibt:} && \Psi_R \longrightarrow \Psi_R' = 1\cdot\Psi_R \quad . \end{aligned} \tag{1845}$$

Dies wird zur Folge haben, daß die Eichfelder der elektroschwachen Wechselwirkung nur an die linkshändigen Spinoren koppeln.
Die Lagrange-Funktion (1843) ist invariant unter SU(2)-Transformationen. Diese Invarianz würde durch die Massenterme aufgrund des unterschiedlichen Transformationsverhaltens von $\Psi_L$ und $\Psi_R$ zerstört werden.
Indem wir von *globalen* SU(2)-Transformationen $\exp(-\mathrm{i}\vec{\tau}\cdot\vec{\alpha}/2)$ zu *lokalen* Transformationen $\exp(-\mathrm{i}\vec{\tau}\cdot\vec{\alpha}(x)/2)$ übergehen und ortsabhängige Parameter $\vec{\alpha}(x)$ einführen, werden wir zu Eichtransformationen geführt, die das Auftreten von Eichfeldern bewirken. Keines dieser Eichfelder, die im folgenden eingeführt werden, kann mit dem Photonenfeld identifiziert werden. Dies läßt sich sofort einsehen: Das Photon wechselwirkt auch mit dem rechtshändigen Spinor $\Psi_R$. Eine Umeichung des Photonenfeldes muß durch die entsprechende Transformation von $\Psi_R$ kompensiert werden. $\Psi_R$ ist jedoch invariant unter SU(2)-Transformationen.

Als nächstes betrachten wir U(1)-Transformationen von $\Psi_L$ und $\Psi_R$. Unter einer U(1)-Transformation, also einer Phasentransformation, werden sich $\Psi_L$ und $\Psi_R$ unterschiedlich transformieren, denn für $\Psi_R$ ist die Transformationsmatrix eine $1 \times 1$-Matrix:

$$\Psi_R \longrightarrow \Psi_R' = e^{\mathrm{i}\beta}\,\Psi_R \quad , \tag{1846}$$

während $\Psi_L$ sich mittels einer $2 \times 2$-Diagonalmatrix transformiert, also nach einer anderen *Darstellung* der U(1)-Gruppe:

$$\Psi_L \longrightarrow \Psi_L' = \begin{pmatrix} e^{\mathrm{i}\beta'} & 0 \\ 0 & e^{\mathrm{i}\beta'} \end{pmatrix} \Psi_L \quad . \tag{1847}$$

Die Phase $\beta'$ muß deshalb nicht notwendigerweise mit der Phase $\beta$ übereinstimmen.
Aber es läßt sich ein Zusammenhang zwischen $\beta$ und $\beta'$ herstellen:
Wir können nämlich in Analogie zum Spin das Dublett der linkshändigen Teilchen bzw. das Singulett des rechtshändigen Elektrons klassifizieren. Beim Spin bzw. beim Drehimpuls werden die einzelnen Multipletts durch ihren Drehimpuls $l$ unterschieden. Die Drehimpulsunterzustände eines Multipletts werden durch die $z$-Komponente des Drehimpulses $l^z$ charakterisiert. Als Beispiel betrachten wir ein Teilchen mit

$$\begin{array}{lll} \text{Spin 0:} & l = 0 & l^z = 0 \\ \text{Spin } \frac{1}{2} \text{ (2 Möglichkeiten der Spineinstellung):} & l = \frac{1}{2} & l^z = \pm\frac{1}{2} \end{array} \tag{1848}$$

Analog dazu führen wir den *schwachen Isospin* $I_w$ zur Einordnung der links- und rechtshändigen Teilchen ein:

- Für das Singulett $\Psi_R$ gilt $I_w = 0$ und für die Wellenfunktion des rechtshändigen Elektrons $(\psi_\mathrm{e})_R$ ist die Projektion gegeben durch $I_w^z = 0$.
- Das Dublett $\Psi_L$ erhält den Isospin $I_w = \frac{1}{2}$. Es ist Konvention, die $z$-Komponente des Isospins $I_w^z = +\frac{1}{2}$ der Neutrino-Wellenfunktion $(\psi_\nu)_L$ und $I_w^z = -\frac{1}{2}$ der Elektron-Wellenfunktion $(\psi_\mathrm{e})_L$ zuzuordnen.

Damit können wir folgenden Zusammenhang zwischen der Ladung $Q$ der Teilchen und ihrer Isospin-Projektion $I_w^z$ aufstellen:

$$\begin{array}{ll} (\psi_\mathrm{e})_R \;:\; Q = -1 \;,\; I_w^z = 0 & \Rightarrow \quad Q = I_w^z - 1 \\ \left.\begin{array}{l} (\psi_\mathrm{e})_L \;:\; Q = -1 \;,\; I_w^z = -\frac{1}{2} \\ (\psi_\nu)_L \;:\; Q = 0 \;,\; I_w^z = +\frac{1}{2} \end{array}\right\} & \Rightarrow \quad Q = I_w^z - \frac{1}{2} \end{array} \tag{1849}$$

Offensichtlich läßt sich noch eine weitere Quantenzahl anstelle des Isospins $I_w$ zur Klassifikation der Multipletts angeben, nämlich die *schwache Hyperladung* $Y_w$, die definiert wird durch

$$Q = I_w^z + \frac{Y_w}{2} \quad . \tag{1850}$$

Dadurch wird $Y_w$ als ganze Zahl definiert, und es gilt:
$Y_w = -1$ für das Dublett der linkshändigen Teilchen und
$Y_w = -2$ für das Singulett der rechtshändigen Teilchen.
Wir fassen Ladung, Hyperladung, Isospin und Isospin-Projektion noch einmal in der folgenden Tabelle zusammen:

| | $I_w$ | $I_w^z$ | $Y_w$ | $Q$ |
|---|---|---|---|---|
| $(\psi_{\mathrm{e}})_R$ | 0 | 0 | $-2$ | $-1$ |
| $(\psi_{\mathrm{e}})_L$ | $\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | $-1$ | $-1$ |
| $(\psi_\nu)_L$ | $\frac{1}{2}$ | $+\frac{1}{2}$ | $-1$ | 0 |

Wir kehren nun zur U(1)-Transformation von $\Psi_L$ bzw. $\Psi_R$ zurück:
Da das linkshändige Elektron und das linkshändige Neutrino unterschiedliche Ladungen $Q$ besitzen, sich aber auf die gleiche Weise, nämlich mit $\exp(\mathrm{i}\beta')$ transformieren, kann $\beta'$ nicht von der Ladung $Q$ bestimmt werden. Es muß vielmehr die schwache Hyperladung $Y_w$ sein, die in die Phasen $\beta'$ bzw. $\beta$ eingeht ($I_w$ scheidet aus, da sonst die U(1)-Transformation für $\Psi_R$ die triviale Transformation, Multiplikation mit der $1$, wäre). Nach einem Vorschlag von Weinberg wird diese Phase für beide Multipletts durch $\beta Y_w/2$ definiert. Die U(1)-Transformation lautet demnach für die beiden Multipletts:

$$\begin{aligned} \Psi_R \quad &\longrightarrow \quad \Psi_R' = e^{\mathrm{i}\beta Y_w/2}\,\Psi_R = e^{-\mathrm{i}\beta}\,\Psi_R \quad , \\ \Psi_L \quad &\longrightarrow \quad \Psi_L' = e^{\mathrm{i}\beta Y_w/2}\,\Psi_L = e^{-\mathrm{i}\beta/2}\,\Psi_L \quad . \end{aligned} \tag{1851}$$

Somit kann es wiederum nicht das Photonenfeld sein, daß an $\Psi_L$ und $\Psi_R$ koppelt und welches einer U(1)-Eichtransformation genügt. Schon mit der Einordnung von Elektron und Neutrino in *ein* Multiplett mußte dieser Gedanke aufgegeben werden, da Photonen nur an geladene Teilchen koppeln können.
Die Lagrange-Funktion (1843) ist invariant gegenüber globalen U(1)- und SU(2)-Eichtransformationen. Wir gehen nun von globalen zu lokalen Eichtransformation über. Dies bedingt die Einführung von zusätzlichen Feldern, den Felder der für die Wechselwirkung verantwortlichen Vektorbosonen.
Für eine SU(2)-Eichtheorie muß die gewöhnliche Ableitung der linkshändigen Teilchenfelder durch die kovariante Ableitung ersetzt werden:

$$\partial_\mu\,\Psi_L \longrightarrow \tilde{D}_\mu\,\Psi_L = \left(\partial_\mu - \mathrm{i}g\frac{\vec{\tau}}{2}\cdot\vec{W}_\mu\right)\Psi_L \quad , \tag{1852}$$

um die Invarianz der Lagrange-Funktion unter lokalen Eichtransformationen zu gewährleisten. Hier haben wir entsprechend zu den drei ortsabhängigen Gruppenparametern $\alpha_1(x), \ldots, \alpha_3(x)$ drei Eichfelder $\vec{W}_\mu = \{W_\mu^1, W_\mu^2, W_\mu^3\}$ eingeführt, um die Auswirkungen der SU(2)-Eichtransformation zu kompensieren. Die Ankopplung geschieht über die Paulischen $\tau$-Matrizen, die bereits oben eingeführt wurden. Das rechtshändige Singulett $\Psi_R$ ist blind gegenüber der SU(2)-Transformation, was sich durch das Fehlen des entsprechenden SU(2)-Kopplungsterms äußert. $g$ ist die Kopplungskonstante der SU(2).
Die lokale U(1)-Eichtransformation bewirkt die Ankopplung eines Eichfeldes $B_\mu$ sowohl an das linkshändige Dublett wie auch an das rechtshändige Singulett:

$$\begin{aligned} \partial_\mu\,\Psi_R \quad &\longrightarrow \quad D_\mu\,\Psi_R = \partial_\mu\,\Psi_R + \mathrm{i}g'\,B_\mu\,\Psi_R \\ \tilde{D}_\mu\,\Psi_L \quad &\longrightarrow \quad D_\mu\,\Psi_L = \partial_\mu\,\Psi_L + \frac{\mathrm{i}}{2}g'\,B_\mu\,\Psi_L - \frac{\mathrm{i}}{2}g\,\vec{\tau}\cdot\vec{W}_\mu\,\Psi_L\;. \end{aligned} \tag{1853}$$

Der unterschiedliche Faktor $1$ bzw. $\frac{1}{2}$ bei der Ankopplung des $B_\mu$-Feldes rührt von der für $\Psi_L$ und $\Psi_R$ unterschiedlichen Hyperladung her. Die Vorzeichen der SU(2)- bzw. der U(1)-Kopplungsterme sind Konvention.

Indem wir die kinetischen Beiträge der SU(2)-Eichfelder

$$-\frac{1}{4}\, G^i_{\mu\nu}\, G^{\mu\nu}_i$$

und der U(1)-Eichfelder

$$-\frac{1}{4}\, F_{\mu\nu}\, F^{\mu\nu}$$

zur so erweiterten Lagrange-Funktion addieren, erhalten wir schließlich:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \mathrm{i}\overline{\Psi_L}\,\gamma^\mu \left[\partial_\mu + \frac{\mathrm{i}}{2} g'\, B_\mu - \frac{\mathrm{i}}{2} g\, \vec{\tau} \cdot \vec{W}_\mu\right] \Psi_L + \mathrm{i}\overline{\Psi_R}\,\gamma^\mu \left[\partial_\mu + \mathrm{i} g' B_\mu\right] \Psi_R \\ & -\frac{1}{4}\, F_{\mu\nu}\, F^{\mu\nu} - \frac{1}{4}\, G^i_{\mu\nu}\, G^{\mu\nu}_i \quad . \end{aligned} \tag{1854}$$

Nun müssen wir uns noch mit der Massenerzeugung befassen, denn bis jetzt sind sowohl die Elektronenfelder als auch sämtliche Eichfelder masselos!

# Erzeugung der Eichfeldmassen

Die Massenerzeugung geschieht durch Ankopplung aller Felder an das Higgs-Feld sowie durch nachfolgende spontane Symmetriebrechung, wie wir sie bereits besprochen haben.
Wir führen das Higgs-Feld als Isospinor *mit komplexen Einträgen* ein:

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix} \quad . \tag{1855}$$

Es ist also ein Dublett wie das Dublett $\Psi_L$ der linkshändigen Leptonwellenfunktionen. Im Gegensatz zu diesen sind die Einträge in das Higgs-Dublett komplexe *skalare* Wellenfunktionen. Die obere Komponente soll die Ladung $Q = +1$ tragen, die untere Komponente ist neutral ($Q = 0$). Wiederum können wir diesem Dublett einen Isospin $I_w$ und eine Isospin-Projektion $I_w^z$ sowie eine Hyperladung $Y_w$ zuordnen. Mit der Relation (1850)

$$Q = I_w^z + \frac{Y_w}{2}$$

erhalten wir die folgende Tabelle:

| | $I_w$ | $I_w^z$ | $Y_w$ | $Q$ |
|---|---|---|---|---|
| $\phi^+$ | $\frac{1}{2}$ | $+\frac{1}{2}$ | 1 | 1 |
| $\phi^0$ | $\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | 1 | 0 |

Die komplexen Komponenten $\phi^+$, $\phi^0$ des Higgs-Feldes können in der Form

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \phi_3 + \mathrm{i}\phi_4 \\ \phi_1 + \mathrm{i}\phi_2 \end{pmatrix} \tag{1856}$$

mit reellen Feldern $\phi_1$, $\phi_2$, $\phi_3$ und $\phi_4$ geschrieben werden.
Wie für das linkshändige Dublett lautet die Ankopplung der Eichfelder an das Higgs-Dublett mittels der kovarianten Ableitung

$$D_\mu \Phi = \left( \partial_\mu - \frac{\mathrm{i}}{2} g \, \vec{\tau} \cdot \vec{W}_\mu - \frac{\mathrm{i}}{2} g' \, B_\mu \right) \Phi \quad . \tag{1857}$$

Weiterhin koppelt das Higgs-Feld noch an die massiven Elektronenfelder an. Die Ankopplung wird motiviert durch die Form der Massenterme, die wir anfänglich in die Lagrange-Funktion eingeführt hatten (Gl. (1842)):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{Higgs}} &= -G_{\mathrm{e}} \left( \overline{\Psi_L} \cdot \Phi \, \Psi_R + \overline{\Psi_R} \, \Phi^\dagger \cdot \Psi_L \right) \\ &\quad + (D_\mu \Phi)^\dagger \, (D_\mu \Phi) - \frac{m^2}{2} \, |\Phi|^2 - \frac{\lambda}{4} \left( \Phi^\dagger \, \Phi \right)^2 \quad . \end{aligned} \tag{1858}$$

Dabei ist zu beachten, daß

$$\overline{\Psi_L} \, \Phi = \left( \overline{\psi_\nu}, \overline{\psi_{\mathrm{e}}} \right)_L \cdot \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix} = \overline{(\psi_\nu)_L} \, \phi^+ + \overline{(\psi_{\mathrm{e}})_L} \, \phi^0 \tag{1859}$$

einen Isoskalar bildet! Ebenso gilt mit

$$\Phi^\dagger = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \phi_3 + \mathrm{i}\phi_4 \\ \phi_1 + \mathrm{i}\phi_2 \end{pmatrix}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \phi_3 - \mathrm{i}\phi_4 \\ \phi_1 - \mathrm{i}\phi_2 \end{pmatrix}^T = \left(\phi^-, (\phi^0)^*\right) \tag{1860}$$

auch die Beziehung

$$\Phi^\dagger \, \Psi_L = \phi^- \, (\psi_\nu)_L + \overline{\phi^0} \, (\psi_\mathrm{e})_L \quad . \tag{1861}$$

Damit lauten die Higgs-Fermion-Kopplungsterme:

$$-G_\mathrm{e} \left[\overline{(\psi_\nu)_L} \, \phi^+ \, (\psi_\mathrm{e})_R + \overline{(\psi_\mathrm{e})_L} \, \phi^0 \, (\psi_\mathrm{e})_R + \overline{(\psi_\mathrm{e})_R} \, \phi^- \, (\psi_\nu)_L + \overline{(\psi_\mathrm{e})_R} \, \overline{\phi^0} \, (\psi_\mathrm{e})_L\right] \tag{1862}$$

Auf diese Terme kommen wir am Schluß noch zu sprechen. Nun ist das Minimum des Higgs-Feldes für $m^2 < 0$ nicht bei

$$\phi_1 = \phi_2 = \phi_3 = \phi_4 = 0 \quad , \tag{1863}$$

sondern bei

$$\left(\Phi^\dagger \, \Phi\right) = -\frac{m^2}{\lambda} = \frac{1}{2} \left(\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 + \phi_4^2\right) \quad . \tag{1864}$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir die Basis im Isospinraum so wählen, daß das Minimum des Higgs-Potentials bei $\phi_1^2 = -2m^2/\lambda$, $\phi_2 = \phi_3 = \phi_4 = 0$ liegt. Wir schreiben für diesen Vakuumwert:

$$\phi_1 = \sqrt{-\frac{2m^2}{\lambda}} = \sqrt{2} \, \eta \quad ; \tag{1865}$$

also lautet das Higgs-Dublett für den Vakuumzustand

$$\Phi_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \eta \end{pmatrix} \quad . \tag{1866}$$

Anregungen des Higgs-Feldes um den Vakuumzustand $\Phi_0$ haben dann die Form:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \phi_3(x) + \mathrm{i}\phi_4(x) \\ \sqrt{2} \, \eta + \phi_1(x) + \mathrm{i}\phi_2(x) \end{pmatrix} \quad . \tag{1867}$$

Wir können allerdings aufgrund der *lokalen Eichsymmetrie* eine SU(2)-Transformation durchführen, die die Felder $\phi_3$, $\phi_4$ und $\phi_2$ zum Verschwinden bringt. Diese Umeichung wird gerade durch eine entsprechende Transformation der $\vec{W}_\mu$-Felder kompensiert. $\Phi$ behält dann gerade noch *einen* Freiheitsgrad, nämlich das skalare reelle Feld $\phi_1 \equiv \sigma(x)$:

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \eta + \dfrac{\sigma(x)}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad . \tag{1868}$$

$\sigma(x)$ beinhaltet die Anregungen des Higgs-Feldes, also die Fluktuationen von $\Phi(x)$ um den Vakuumerwartungswert $\eta$.

Damit lautet die kovariante Ableitung (1857) des Higgs-Feldes:

$$
\begin{aligned}
D_\mu \Phi &= \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\,\partial_\mu\,\sigma \end{pmatrix} - \left(\frac{\mathrm{i}}{2} g\,\vec{\tau}\cdot\vec{W}_\mu - \frac{\mathrm{i}}{2} g'\,B_\mu\right) \begin{pmatrix} 0 \\ \eta + \frac{1}{\sqrt{2}}\,\sigma \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\,\partial_\mu\,\sigma \end{pmatrix} - \frac{\mathrm{i}}{2} \begin{pmatrix} g\,W_\mu^3 + g'\,B_\mu & g(W_\mu^1 - \mathrm{i}W_\mu^2) \\ g(W_\mu^1 + \mathrm{i}W_\mu^2) & -g\,W_\mu^3 + g'\,B_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \eta + \frac{1}{\sqrt{2}}\,\sigma \end{pmatrix} \\
&= -\frac{\mathrm{i}}{2} \begin{pmatrix} g\,\eta(W_\mu^1 - \mathrm{i}W_\mu^2) + \dfrac{g\sigma}{\sqrt{2}}(W_\mu^1 - \mathrm{i}W_\mu^2) \\ \mathrm{i}\sqrt{2}\,\partial_\mu\,\sigma + \eta(-g\,W_\mu^3 + g'\,B_\mu) + \dfrac{\sigma}{\sqrt{2}}(-g\,W_\mu^3 + g'\,B_\mu) \end{pmatrix} \quad . \qquad (1869)
\end{aligned}
$$

Wir bilden jetzt den kinetischen Anteil der Lagrange-Funktion für das Higgs-Teilchen (1858), wobei wir nur die Terme notieren, in denen jeweils zwei der $W_\mu^i$- und $B_\mu$-Felder auftreten. Dies sind die Terme, welche für die Massenerzeugung der SU(2)-Eichfelder verantwortlich sind (Massenterme gehen in die Lagrange-Funktion immer quadratisch in den Eichfeldern ein). Wir erhalten also:

$$
\begin{aligned}
(D_\mu\,\Phi)^\dagger\,(D^\mu\,\Phi) &= \frac{1}{2}\,(\partial_\mu\,\sigma)\,(\partial^\mu\,\sigma) \\
&\quad + \frac{g^2\eta^2}{4}\left|W_\mu^1 - \mathrm{i}W_\mu^2\right|^2 + \frac{\eta^2}{4}\left(-g\,W_\mu^3 + g'\,B_\mu\right)^2 \quad . \qquad (1870)
\end{aligned}
$$

Die Terme in der zweiten Zeile enthalten nun gerade die Massen des $W_\mu^1$- und des $W_\mu^2$-Feldes sowie eines dritten Feldes, das aus einer Überlagerung des $W_\mu^3$- und des $B_\mu$-Feldes besteht. Dieses Feld definieren wir als

$$
Z_\mu = \frac{g\,W_\mu^3 - g'\,B_\mu}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \quad . \qquad (1871)
$$

Dies können wir unter Einführung des *Weinberg-Winkels* noch etwas umschreiben. Es gelten die folgenden Beziehungen für die Kopplungskonstanten $g$ und $g'$:

$$
\begin{aligned}
\frac{g}{\sqrt{g^2 + g'^2}} &\in [0,1] \\
\frac{g'}{\sqrt{g^2 + g'^2}} &\in [0,1]
\end{aligned}
\qquad (1872)
$$

und

$$
\left(\frac{g}{\sqrt{g^2 + g'^2}}\right)^2 + \left(\frac{g'}{\sqrt{g^2 + g'^2}}\right)^2 = 1 \quad . \qquad (1873)
$$

Damit definieren wir den Weinbergwinkel $\theta_W$ durch

$$
\cos\theta_W = \frac{g}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \qquad (1874)
$$

$$
\sin\theta_W = \frac{g'}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \quad . \qquad (1875)
$$

Somit gilt auch die Relation

$$\tan\theta_W = \frac{g'}{g} \quad , \tag{1876}$$

und für das in Gl. (1871) definierte $Z_\mu$-Feld ergibt sich

$$Z_\mu = \cos\theta_W \, W_\mu^3 - \sin\theta_W \, B_\mu \quad . \tag{1877}$$

Die Felder $W_\mu^1$ und $W_\mu^2$ erhalten die gleichen Massen. Massenterme für die reellen Vektorfelder haben die Gestalt $\frac{M_W^2}{2} \, W_\mu^i W_i^\mu$ für das $W_\mu^1$- und das $W_\mu^2$-Feld und $\frac{M_Z^2}{2} \, Z_\mu Z^\mu$ für das $Z_\mu$-Feld. Durch Vergleich mit (1870) erhalten wir

$$\frac{M_W^2}{2} = \frac{g^2\eta^2}{4} \quad \Rightarrow \quad M_W = \sqrt{\frac{g^2\eta^2}{2}} \tag{1878}$$

$$\frac{M_Z^2}{2} = \frac{g^2\eta^2}{4} \cdot \frac{1}{\cos^2\theta_W} \quad \Rightarrow \quad M_Z = \sqrt{\frac{g^2\eta^2}{2\cos^2\theta_W}} = \frac{M_W}{|\cos\theta_W|} \tag{1879}$$

Die letzte Zeile folgt aus:

$$\begin{aligned}
\frac{\eta^2}{4}\left(-g\,W_\mu^3 + g'\,B_\mu\right)^2 &= \frac{\eta^2 g^2}{4}\left(-W_\mu^3 + \frac{g'}{g}\,B_\mu\right)^2 \\
&= \frac{\eta^2 g^2}{4}\left(-W_\mu^3 + \tan\theta_W\,B_\mu\right)^2 \\
&= \frac{\eta^2 g^2}{4\cos^2\theta_W}\left(-\cos\theta_W\,W_\mu^3 + \sin\theta_W\,B_\mu\right)^2 \\
&= \frac{\eta^2 g^2}{4\cos^2\theta_W}\,Z_\mu^2 \quad .
\end{aligned} \tag{1880}$$

Das zu $W_\mu^1$, $W_\mu^2$ und $Z_\mu$ orthogonale Feld bezeichnen wir mit

$$A_\mu = \sin\theta_W \, W_\mu^3 + \cos\theta_W \, B_\mu \quad . \tag{1881}$$

Für dieses Feld existiert kein Massenterm in der Lagrange-Funktion (1870) des Higgs-Feldes (Der Massenterm müßte die Gestalt $\eta^2(g'\,W_\mu^3 + g\,B_\mu)$ besitzen):

$$\frac{M_A^2}{2} \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad M_A \equiv 0 \quad . \tag{1882}$$

Dieses Feld wollen wir mit dem Photonfeld identifizieren. Wir werden im folgenden sehen, das die Identifikation gerechtfertigt ist.
Dazu schreiben wir die Lagrange-Funktion (1854) für die Leptonen noch einmal auf (wir verwenden zur Abkürzung die Schreibweise $\not{a} = a_\mu\gamma^\mu$):

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \mathrm{i}\overline{\Psi_L}\,\gamma\mu\left[\partial_\mu + \frac{\mathrm{i}}{2}\,g'\,B_\mu - \frac{\mathrm{i}}{2}\,g\,\vec{\tau}\cdot\vec{W}_\mu\right]\,\Psi_L + \mathrm{i}\overline{\Psi_R}\,\gamma^\mu\left[\partial_\mu + \mathrm{i}\,g'\,B_\mu\right] \\
&= \mathrm{i}\overline{\begin{pmatrix}\psi_\nu \\ \psi_\mathrm{e}\end{pmatrix}_L}\,\gamma^\mu \begin{pmatrix} \partial_\mu + \frac{\mathrm{i}}{2}(g'\,B_\mu - g\,W_\mu^3) & -\frac{\mathrm{i}}{2}\,g(W_\mu^1 - \mathrm{i}W_\mu^2) \\ -\frac{\mathrm{i}}{2}\,g(W_\mu^1 + \mathrm{i}W_\mu^2) & \partial_\mu + \frac{\mathrm{i}}{2}(g'\,B_\mu + g\,W_\mu^3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix}\psi_\nu \\ \psi_\mathrm{e}\end{pmatrix}_L \\
&\quad + \mathrm{i}\overline{(\psi_\mathrm{e})_R}\,\gamma^\mu(\partial_\mu + \mathrm{i}\,g'\,B_\mu)(\psi_\mathrm{e})_R
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\overline{(\psi_\nu)_L}, \overline{(\psi_e)_L}\right) \gamma^\mu \begin{pmatrix} (\mathrm{i}\,\partial_\mu - \frac{1}{2}(g'\,B_\mu - g\,W_\mu^3))(\psi_\nu)_L + \frac{1}{2}\,g(W_\mu^1 - \mathrm{i}\,W_\mu^2)(\psi_e)_L \\ \frac{1}{2}\,g(W_\mu^1 + \mathrm{i}\,W_\mu^2)(\psi_\nu)_L + (\mathrm{i}\,\partial_\mu - \frac{1}{2}(g'B_\mu + g\,W_\mu^3))(\psi_e)_L \end{pmatrix} \\
&\quad + \mathrm{i}\overline{(\psi_e)_R}\gamma^\mu\,\partial_\mu(\psi_e)_R - g'\overline{(\psi_e)_R}\gamma^\mu\,B_\mu(\psi_e)_R \\
&= \mathrm{i}\overline{(\psi_\nu)_L)}\;\partial\!\!\!/(\psi_\nu)_L - \frac{1}{2}\overline{(\psi_\nu)_L}(g'\;B\!\!\!/ - g\;W\!\!\!\!/^3)(\psi_\nu)_L + \frac{1}{2}\,g\,\overline{(\psi_\nu)_L}(W\!\!\!\!/^1 - \mathrm{i}\;W\!\!\!\!/^2)(\psi_e)_L \\
&\quad + \mathrm{i}\overline{(\psi_e)_L)}\;\partial\!\!\!/(\psi_e)_L - \frac{1}{2}\overline{(\psi_e)_L}(g'\;B\!\!\!/ + g\;W\!\!\!\!/^3)(\psi_e)_L + \frac{1}{2}\,g\,\overline{(\psi_e)_L}(W\!\!\!\!/^1 + \mathrm{i}\;W\!\!\!\!/^2)(\psi_\nu)_L \\
&\quad + \mathrm{i}\overline{(\psi_e)_R}\;\partial\!\!\!/(\psi_e)_R - g'\overline{(\psi_e)_R}\;B\!\!\!/(\psi_e)_R
\end{aligned}
\tag{1883}
$$

Um nun diesen Ausdruck in eine Form überzuführen, in der die neuen $Z$- und $A$-Felder auftreten und die beiden Kopplungskonstanten $g$ und $g'$ durch eine einheitliche Konstante $g$ sowie den Weinberg-Winkel ersetzt sind, benötigen wir die folgenden Nebenrechnungen:

1. Nebenrechnung: Mit der Definition des $Z$-Feldes (1871) gilt:

$$\sqrt{g^2 + g'^2}\;Z\!\!\!/ = g\;W\!\!\!\!/^3 - g'\;B\!\!\!/$$

Mit der Beziehung $\cos\theta_W = g/\sqrt{g^2 + g'^2}$ folgt daraus:

$$g'\;B\!\!\!/ - g\;W\!\!\!\!/^3 = -\frac{g}{\cos\theta_W}\;Z\!\!\!/ \quad . \tag{1884}$$

2. Nebenrechnung: $B\!\!\!/$ ergibt sich durch Elimination von $W\!\!\!\!/^3$ aus

$$
\begin{aligned}
A\!\!\!/ &= \sin\theta_W\;W\!\!\!\!/^3 + \cos\theta_W\;B\!\!\!/ \qquad |\cdot\cos\theta_W \\
Z\!\!\!/ &= \cos\theta_W\;W\!\!\!\!/^3 - \sin\theta_W\;B\!\!\!/ \qquad |\cdot(-\sin\theta_W)
\end{aligned}
$$

zu

$$B\!\!\!/ = \cos\theta_W\;A\!\!\!/ - \sin\theta_W\;Z\!\!\!/$$

Wegen der Beziehung $g' = g\;\tan\theta_W$ folgt schließlich:

$$g'\;B\!\!\!/ = g\;\sin\theta_W\;A\!\!\!/ - g\frac{\sin^2\theta_W}{\cos\theta_W}\;Z\!\!\!/ \quad . \tag{1885}$$

3. Nebenrechnung: Wir wollen den Ausdruck $g'\;B\!\!\!/ + g\;W\!\!\!\!/^3$ auswerten. $B\!\!\!/$ haben wir bereits berechnet. $W\!\!\!\!/^3$ ergibt sich aus Elimination von $B\!\!\!/$ aus:

$$
\begin{aligned}
A\!\!\!/ &= \sin\theta_W\;W\!\!\!\!/^3 + \cos\theta_W\;B\!\!\!/ \qquad |\cdot\sin\theta_W \\
Z\!\!\!/ &= \cos\theta_W\;W\!\!\!\!/^3 - \sin\theta_W\;B\!\!\!/ \qquad |\cdot(\cos\theta_W)
\end{aligned}
$$

zu

$$W\!\!\!\!/^3 = \sin\theta_W\;A\!\!\!/ + \cos\theta_W\;Z\!\!\!/ \quad .$$

Daraus folgt mit $g' = g\;\tan\theta_W$ die benötigte Relation:

$$
\begin{aligned}
g'\;B\!\!\!/ + g\;W\!\!\!\!/^3 &= g'(\cos\theta_W\;A\!\!\!/ - \sin\theta_W\;Z\!\!\!/) + g(\sin\theta_W\;A\!\!\!/ + \cos\theta_W\;Z\!\!\!/) \\
&= 2\,g\;\sin\theta_W\;A\!\!\!/ - g\left(\frac{\sin^2\theta_W}{\cos\theta_W} - \cos\theta_W\right)\;Z\!\!\!/ \\
&= 2\,g\sin\theta_W\;A\!\!\!/ - \frac{g}{\cos\theta_W}(\sin^2\theta_W - \cos^2\theta_W)\;Z\!\!\!/
\end{aligned}
\tag{1886}
$$

Mit diesen Nebenrechnungen folgt aus Gl. (1883)

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} \;=\; & \mathrm{i}\overline{\psi_\nu}\,\not{\partial}\,\psi_\nu + \mathrm{i}\overline{\psi_\mathrm{e}}\,\not{\partial}\,\psi_\mathrm{e} \\
& + \frac{g}{\sqrt{2}}\left[\overline{(\psi_\nu)_L}\,\frac{\not{W}^1 - \mathrm{i}\,\not{W}^2}{\sqrt{2}}\,(\psi_\mathrm{e})_L + \overline{(\psi_\mathrm{e})_L}\,\frac{\not{W}^1 + \mathrm{i}\,\not{W}^2}{\sqrt{2}}\,(\psi_\nu)_L\right] \\
& + \frac{g}{2\cos\theta_W}\,\overline{(\psi_\nu)_L}\,\not{Z}\,(\psi_\nu)_L \\
& - g\,\sin\theta_W\,\overline{(\psi_\mathrm{e})_R}\,\not{A}\,(\psi_\mathrm{e})_R + g\,\frac{\sin^2\theta_W}{\cos\theta_W}\,\overline{(\psi_\mathrm{e})_R}\,\not{Z}\,(\psi_\mathrm{e})_R \\
& - g\,\sin\theta_W\,\overline{(\psi_\mathrm{e})_L}\,\not{A}\,(\psi_\mathrm{e})_L + \frac{g}{2\cos\theta_W}\,(\sin^2\theta_W - \cos^2\theta_W)\,\overline{(\psi_\mathrm{e})_L}\,\not{Z}\,(\psi_\mathrm{e})_L \quad . \qquad (1887)
\end{aligned}
$$

Wir fassen die Terme, die das $A_\mu$-Feld bzw. das $Z_\mu$-Feld enthalten zusammen und führen die komplexen Felder

$$
W_\mu = \frac{W_\mu^1 + \mathrm{i}W_\mu^2}{\sqrt{2}} \quad , \qquad W_\mu^\dagger = \frac{W_\mu^1 - \mathrm{i}W_\mu^2}{\sqrt{2}} \quad . \qquad (1888)
$$

Damit ergibt sich schließlich

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} = \; & \mathrm{i}\overline{\psi_\nu}\,\not{\partial}\,\psi_\nu + \mathrm{i}\overline{\psi_\mathrm{e}}\,\not{\partial}\,\psi_\mathrm{e} \qquad (1889) \\
& + \frac{g}{\sqrt{2}}\left[\overline{(\psi_\nu)_L}\,\not{W}^\dagger\,(\psi_\mathrm{e})_L + \overline{(\psi_\mathrm{e})_L}\,\not{W}\,(\psi_\nu)_L\right] - g\,\sin\theta_W\,\overline{\psi_\mathrm{e}}\,\not{A}\,\psi_\mathrm{e} \\
& + \frac{g}{\cos\theta_W}\left[\frac{1}{2}\overline{(\psi_\nu)_L}\,\not{Z}\,(\psi_\nu)_L + \sin^2\theta_W\,\overline{(\psi_\mathrm{e})_R}\,\not{Z}(\psi_\mathrm{e})_R\right. \\
& \left. + \frac{1}{2}(\sin^2\theta_W - \cos^2\theta_W)\,\overline{(\psi_\mathrm{e})_L}\,\not{Z}\,(\psi_\mathrm{e})_L\right]
\end{aligned}
$$

Da das $A_\mu$-Feld ausschließlich – und in gleicher Stärke – an links- und rechtshändige Elektronen koppelt, können wir es mit dem Photonenfeld identifizieren.