Übersicht über den Stoff der Mechanik

Thomas Bökamp

18. Mai 1992

Die nachfolgenden Seiten enthalten mein Skript zu den Vorlesungen „Einführung in die Theoretische Physik“ und „Theoretische Physik I — Mechanik“ von M. Thies im Sommersemester 1991 und Wintersemester 1991/92.
Für Fehler und Unkorrektheiten kann keine Haftung übernommen werden. Ich möchte insbesondere darauf hinweisen, daß ich den Stoff der Vorlesung mit eigenen Bemerkungen ergänzt bzw. verändert habe, für die dabei entstandenen Fehler liegt die Verantwortung allein beim Autor des Skripts.

Inhaltsverzeichnis

I Einführung in die Theoretische Physik **7**

1 Elementare Newtonsche Mechanik **8**

1.1 Was wird betrachtet? 8

1.1.1 Idealisierungen 8

1.1.2 Bezugssysteme 8

1.1.3 Galileisches Relativitätsprinzip 9

1.2 Das zweite Newtonsche Gesetz 9

1.2.1 Übersicht über Kraftarten 9

1.2.2 Grenzen der Newtonschen Mechanik 10

1.2.3 Erste Bemerkungen zum Zweiteilchenproblem 10

1.3 2-Teilchenproblem mit Zentralkraft 11

1.3.1 Potential und Energie 11

1.3.2 Impuls und Drehimpuls 12

1.3.3 Polarkoordinaten 12

1.3.4 Lösen der Differentialgleichung für $U(r) = \frac{-A}{r}$ 13

1.3.5 Diskussion der Lösungen des Kepler-Problems 13

1.4 Effektive Potentiale 14

1.4.1 Klassifikation 15

1.4.2 Geschlossene Bahnkurven 16

2 Streuung am Zentralpotential **17**

2.1 Streuung am ∞-schweren Teilchen 17

2.1.1 Raumwinkel und Wirkungsquerschnitt 17

2.1.2 Berechnung des differentiellen Wirkungsquerschnitts 18

2.2 Rückstoßeffekte 20

2.2.1 Zurück zum Zweikörperproblem! 20

2.2.2 Streuwinkel im Laborsystem 22

2.2.3 Wirkungsquerschnitt im Laborsystem 23

3 n-Teilchen-System mit inneren Kräften **24**

3.1 Gesetze von Newton 24

3.2 Einführung eines Potentials 25

3.3 Noether-Theorem 25

3.3.1 Einführung des Noethertheorems - Gesamtimpuls 25
3.3.2 Beispiel Drehimpulserhaltung 26
3.4 Zusammenfassung der Erhaltungsgrößen 27
3.4.1 Nochmals Energieerhaltung 27
3.4.2 Schwerpunktsatz 28
3.4.3 Zusammenhang mit der Galilei-Gruppe 28

4 Lineare Schwingungen 30
4.1 Systeme mit einem Freiheitsgrad 30
4.1.1 Freier Harmonischer Oszillator 30
4.1.2 Erzwungene Schwingungen 34
4.2 Lösungsverfahren für inhomogene DGL'en 37
4.2.1 Approximation durch Treppenfunktionen 37
4.2.2 Die Greens-Funktions-Methode 39
4.2.3 Die „Dirac'sche δ-Funktion“ 41
4.2.4 Fourier-Transformationen 43
4.3 Lineare Systeme mit mehreren Freiheitsgraden 43
4.3.1 Beispiel: Zwei gekoppelte, ungedämpfte, harmonische Oszillatoren 43
4.3.2 Normalkoordinaten 46
4.3.3 Lineare Systeme mit n FHG 48

5 Kontinuierliche Systeme — Wellengleichung 49
5.1 Erster Versuch: Unendliche Schwingerkette 49
5.2 Übergang zum Kontinuum 50
5.3 Lösung der Wellengleichung 50
5.4 Anfangswertprobleme 51
5.5 Eigenschwingungen 53

II Theoretische Physik I — Mechanik 55

6 Abrundung der Newton'schen Mechanik 56
6.1 Der Phasenraum 56
6.1.1 Vorbemerkung: Vektoranalysis 56
6.1.2 Definitionen: Phasenraum — Konfigurationsraum 57
6.1.3 Elementare Eigenschaften 58
6.1.4 Klassifikation der Phasenraumkurven 59
6.1.5 Phasenraumfluß 61
6.1.6 Numerische Berechnungen 62
6.2 Nicht-Inertialsysteme und Trägheitskräfte 64
6.2.1 Vorüberlegungen 64
6.2.2 Wirkung der Translation 65
6.2.3 Wirkung der Drehung 65

7 Lagrange–Mechanik **67**
7.1 Koordinatensysteme . . . 67
7.1.1 Ko- und Kontravariante Koordinaten . . . 67
7.1.2 Beispiel Kugelkoordinaten . . . 69
7.1.3 Die Newton'schen Gleichungen . . . 71
7.2 Lagrange-Gleichung und Lagrange-Funktion . . . 72
7.2.1 Definition und Einführung . . . 72
7.2.2 Beispiele für den Lagrange-Formalismus . . . 73
7.3 Zwangsbedingungen . . . 75
7.3.1 Holonome und Nichtholonome Zwangsbedingungen . . . 75
7.3.2 Erarbeiten einer Lösungsstrategie . . . 76
7.3.3 Das d'Alembert'sche Prinzip . . . 79

8 Ergänzungen zur Lagrange-Mechanik **82**
8.1 Generalisierte Potentiale . . . 82
8.1.1 Einführung . . . 82
8.1.2 Teilchen in elektromagnetischen Feldern . . . 82
8.2 Noether-Theorem . . . 84
8.2.1 Zyklische Koordinaten . . . 84
8.2.2 Formulierung des Noether-Theorems . . . 85
8.2.3 Verbessertes Noether-Theorem . . . 86
8.3 Kleine Schwingungen . . . 87
8.3.1 Herleitung der Lagrange-Gleichungen . . . 87
8.3.2 Lösungsmethode . . . 89
8.3.3 Existenz von Normalkoordinaten . . . 89
8.3.4 Beispiel: Doppelpendel . . . 91

9 Das Prinzip der Kleinsten Wirkung **94**
9.1 Variationsrechnung . . . 94
9.1.1 Einführung . . . 94
9.1.2 Stetigkeit und Differenzierbarkeit von Funktionalen . . . 95
9.1.3 Einführungsbeispiel: Rotationsflächen . . . 96
9.1.4 Extrema mit Nebenbedingungen . . . 98
9.2 Beschreibung des Prinzips der kleinsten Wirkung . . . 100
9.2.1 Definition des Prinzips . . . 100
9.2.2 Herleitung der Lagrange-Gleichungen . . . 101
9.2.3 Unmittelbare Anwendungen . . . 102
9.2.4 Suche nach Extrema bei Funktionalen . . . 102
9.3 ∞-viele Freiheitsgrade . . . 103
9.3.1 Rückblick: Herleitung der Wellengleichung . . . 103
9.3.2 Die Lagrange'sche Dichte . . . 104
9.3.3 Zusammenfassung der Ergebnisse . . . 105
9.3.4 Beispiele . . . 107

10 Der Starre Körper **111**
10.1 Einführung . . . 111
10.1.1 Definition des starren Körpers . . . 111
10.1.2 Koordinaten des starren Körpers . . . 111
10.1.3 Drehachsen . . . 113
10.2 Die Kinematik des Starren Körpers . . . 116
10.2.1 Der Trägheitstensor . . . 116
10.2.2 Der Satz von Steiner . . . 118
10.2.3 Hauptachsentransformation . . . 119
10.2.4 Beispiel: homogener Quader . . . 121
10.3 Die Dynamik des Kreisels . . . 121
10.3.1 Herleitung der Lagrange-Funktion . . . 121
10.3.2 Erhaltungsgrößen . . . 122
10.3.3 Aufstellen der θ-Bewegungsgleichung . . . 123
10.3.4 Diskussion der möglichen Lösungen . . . 124
10.3.5 Der freie Kreisel . . . 126

11 Spezielle Relativitätstheorie **128**
11.1 Einführung . . . 128
11.1.1 Motivation . . . 128
11.1.2 Grundlagen . . . 129
11.1.3 Die Lorentz-Gruppe in der ict-Metrik . . . 129
11.2 Lorentz/Poincaré-Gruppe . . . 130
11.2.1 Einführung von Koordinaten . . . 130
11.2.2 Räumliche Drehungen . . . 132
11.2.3 Boosts in x-Richtung . . . 133
11.2.4 Zusammenstellung der Lorentz-/Poincaré-Gruppe . . . 135
11.3 Konsequenzen der Lorentz-Transformation . . . 136
11.3.1 Relativierung der Gleichzeitigkeit . . . 137
11.3.2 Längenkontraktion . . . 137
11.3.3 Zeit-Dilatation . . . 138
11.3.4 Addition von Geschwindigkeiten . . . 138
11.4 Geometrische Interpretation . . . 139
11.4.1 Lorentz-invariante Abstände . . . 139
11.4.2 3-dimensionaler Minkowski-Raum . . . 139
11.5 Relativistische Kinematik . . . 140
11.5.1 Einführung . . . 140
11.5.2 Das Prinzip der kleinsten Wirkung . . . 142
11.5.3 Reaktionen Relativistischer Teilchen . . . 145
11.6 Relativistische Dynamik . . . 150
11.6.1 Paradebeispiel: Maxwell-Theorie . . . 150
11.6.2 Erste Formulierung der Bewegungsgleichungen . . . 151
11.6.3 Kovariante Form der Bewegungsgleichung . . . 153

11.6.4 Der Feldstärketensor 155
11.6.5 Zusammenfassung 155

12 Hamilton'sche Mechanik 157
12.1 Einführung 157
12.1.1 Beispiel: Ein Teilchen im Potential 157
12.1.2 Hamiltonsche Formulierung des Problems 158
12.1.3 Vorteile der Hamilton'schen Formulierung 159
12.2 Legendre-Transformation 159
12.2.1 Definition und Beispiele 159
12.2.2 Geometrische und Physikalische Interpretation 161
12.2.3 Legendre-Transformation bezüglich mehrerer Variablen 162
12.3 Allgemeine Hamilton'sche Mechanik 162
12.3.1 Definition der Hamilton-Funktion 162
12.3.2 Elementare Beispiele 164
12.4 Formulierung mit den Poisson-Klammern 166
12.4.1 Einführung der Poisson-Klammern 166
12.4.2 Eigenschaften der Poisson-Klammer 167
12.4.3 Das Poisson'sche Theorem 168
12.4.4 Isotroper zweidimensionaler harmonischer Oszillator 168
12.5 Kanonische Transformationen 170
12.5.1 Beispiel: Harmonischer Oszillator 170
12.5.2 Definition Kanonischer Transformationen 171
12.5.3 Kriterien für kanonische Transformationen 172

Teil I

Einführung in die Theoretische Physik

Kapitel 1

Elementare Newtonsche Mechanik

1.1 Was wird betrachtet?

1.1.1 Idealisierungen

Die Elementare Newtonsche Mechanik beschäftigt sich nur mit Systemen, bei denen alle Kräfte bekannt sind. Das heißt insbesondere, daß keine Zwangskräfte betrachtet werden. In diesen Systemen soll die Bewegung von Körpern untersucht werden. Hierzu sind einige weitere Vereinfachungen und Idealisierungen notwendig.
Da die Behandlung ausgedehnter Körper mit dem Newtonschen Formalismus fast nicht möglich ist, betrachtet man idealisierte Massepunkte, die keine Ausdehnung und damit bei endlicher Masse eine unendliche Dichte besitzen.
Auch der Raum, in dem die Bewegung stattfindet muß mathematisch erfaßt werden. Als Modell verwendet man den $\mathbf{R}^3$ als euklidischen Vektorraum, sieht also die Welt als homogen und isotrop an. Für die Beschreibung der zeitlichen Entwicklung verwendet man eine universelle, das heißt stets und überall gleichförmig ablaufende, Zeit.

1.1.2 Bezugssysteme

Definition:

Ein Bezugssystem in dem für den Ortsvektor eines kräftefrei bewegten Körpers die Beziehung $\ddot{\vec{r}}(t) = 0$ gilt, nennt man Inertialsystem.

Gesucht ist die Transformation die Inertialsysteme wieder in Inertialsysteme überführt. Solche Transformationen heißen Galilei-Transformationen. Allgemein sieht eine solche Transformation so aus:

$$\begin{array}{rcl} R \in SO_3(\mathbf{R}), v, a \in \mathbf{R}^3, b \in \mathbf{R} & & \text{Zeitunabhängig} \\ \vec{r} \mapsto \vec{r}\,' & = & R\vec{r} + \vec{v}t + \vec{a}; \\ t \mapsto t' & = & t + b; \end{array}$$

Man beweist leicht durch Nachrechnen, daß diese Transformationen das gewünschte leisten, daß es bereits alle sind, die stetig aus der Identität hervorgehen und linear sind, ist aufwendiger.
Diese Transformationen enthalten noch 10 freie Parameter, denn die Matrix R kann durch drei Drehwinkel beschrieben werden. Also hat man 3 Parameter für eine Drehung (R), 3 für einen „boost“ ($\vec{v}$), 3 für eine Translation ($\vec{a}$) und einen für eine Zeittranslation (b).
Diese Translationen bilden die sogenannte Galilei-Gruppe, eine nicht-abelsche Untergruppe von affinen Abbildungen im $\mathbf{R}^4$. Man kann diese Abbildungen jedoch viel besser im $\mathbf{R}^5$ beschreiben, und zwar als lineare Abbildungen durch die Matrizen der Form

$$\left(\begin{array}{ccc|c|c} & R & & \vec{v} & \vec{a} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} \vec{r} \\ \hline t \\ 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} \vec{r}\,' \\ \hline t' \\ 1 \end{array}\right)$$

1.1.3 Galileisches Relativitätsprinzip

Für die Inertialsysteme, die man durch Transformationen der Galilei-Gruppe erhält fordert man das
Galileische Relativitätsprinzip:

Kein Inertialsystem ist irgendwie ausgezeichnet.

1.2 Das zweite Newtonsche Gesetz

Man betrachtet einen Körper der trägen Masse m und definiert für dessen Bewegung den Impuls $\vec{p}(t) := m \cdot \dot{\vec{r}}(t)$. Dann gilt in jedem Inertialsystem das
2. Gesetz:

$$\boxed{\frac{d}{dt}\vec{p}(t) = m \cdot \ddot{\vec{r}} = \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, \ldots, t);}$$

$\vec{F}$ heißt die auf den Körper wirkende Kraft.

1.2.1 Übersicht über Kraftarten

1. Gravitationskraft.
   Zwei Körper i und k mit den Massen m_i bzw. m_k üben aufeinander eine Kraft aus, wodurch k die Kraft

$$\vec{F_{ki}} = -Gm_i m_k \frac{\vec{r_{ik}}}{|\vec{r_{ik}}|^3}; \qquad \text{mit } \vec{r_{ik}} := \vec{r_i} - \vec{r_k};$$

spürt. Dabei muß in dieser Formel die schwere Masse verwendet werden. Man kann jedoch aufgrund von experimentellen Befunden davon ausgehen, daß schwere und träge Masse gleich sind.

Die Konstante G heißt Newtonsche Gravitationskonstante.

2. Coulomb-Kraft. Zwei Körper i und k mit den Ladungen e_i bzw. e_k üben aufeinander eine Kraft aus, wodurch k die Kraft

$$\vec{F_{ki}} = -K_c e_i e_k \frac{\vec{r_{ik}}}{|\vec{r_{ik}}|^3}; \qquad \text{mit } \vec{r_{ik}} := \vec{r_i} - \vec{r_k};$$

spürt.

Zur Illustration der relativen Stärke von Coulomb- und Gravitationskraft betrachtet man zwei Atommodelle die durch diese Kraftarten zusammengehalten werden. Das durch die Coulombkraft zusammengehaltene H-Atom hat den Radius $a_0 = 0,529 \cdot 10^{-8}$, während das durch Gravitation zusammengehaltene (n,n)-„Atom" den Radius $r_0 = 7 \cdot 10^{22}$m hätte.

3. Starke und schwache Wechselwirkung haben keine Bedeutung für die Newtonsche Mechanik, da die Reichweiten nur bei 10^{-15}m bzw. 10^{-18}m liegen.

1.2.2 Grenzen der Newtonschen Mechanik

Das zweite Newtonsche Gesetz stößt an zwei Grenzen

1. Bei Geschwindigkeiten in der Größenordnung der Lichtgeschwindigkeit c ist die naive Art der Geschwindigkeitsaddition nicht mehr richtig.

2. Im mikroskopischen Bereich können die Newtonschen Gesetze Vorgänge mit Wirkungen im Bereich des Plankschen Wirkungsquantums h nicht mehr richtig beschreiben.

Im Folgenden muß man also auf die Betrachtung solcher Bewegungen verzichten.

1.2.3 Erste Bemerkungen zum Zweiteilchenproblem

Als erstes und wichtigstes Beispiel betrachtet man zwei Teilchen, die aufeinander entgegengesetzt gleichgroße Kräfte ausüben, die nur vom gegenseitigen Abstand der Teilchen abhängen. Dies beschreibt man für die Teilchen 1 und 2 mit Massen m_1 und m_2 und Ortsvektoren $\vec{r_1}$ und $\vec{r_2}$ durch

$$\begin{aligned} m_1\ddot{\vec{r_1}} &= \vec{F}(\vec{r_1} - \vec{r_2}); \qquad (1.1) \\ m_2\ddot{\vec{r_2}} &= -\vec{F}(\vec{r_1} - \vec{r_2}); \\ \vec{F}(\vec{r}) &= f(r) \cdot \frac{\vec{r}}{r}; \end{aligned}$$

$\vec{F}(\vec{r})$ heißt Zentralkraft, da diese Funktion rotationssymmetrisch bezüglich des Zentrums 0 ist.
Um das Problem zu vereinfachen führt man neue Koordinaten ein:

$$\begin{array}{lrcl} \text{Schwerpunktskoordinate:} & \vec{R} & = & \frac{m_1\vec{r_1}+m_2\vec{r_2}}{m_1+m_2}; \\ \text{Relativkoordinate:} & \vec{r} & = & \vec{r_1}-\vec{r_2}; \end{array} \tag{1.2}$$

Addieren der Newtonschen Gleichungen 1.1 ergibt nun

$$m_1\ddot{\vec{r_1}} + m_2\ddot{\vec{r_2}} = (m_1+m_2)\ddot{\vec{R}} = 0;$$

Damit bewegt sich der Schwerpunkt also geradlinig.
Subtrahieren der Newtonschen Gleichungen 1.1 (multipliziert mit der jeweils anderen Masse) ergibt nun

$$m_1 m_2 \ddot{\vec{r}} = (m_1+m_2)\cdot\vec{F}(\vec{r});$$

und mit Einführung der reduzierten Masse[1] $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$ ergibt sich als effektives Einteilchenproblem

$$\mu\ddot{\vec{r}} = \vec{F}(\vec{r}); \tag{1.3}$$

Beim Kepler-Problem (= Zweiteilchenproblem im Gravitationsfeld) ergibt sich also

$$\mu\ddot{\vec{r}} = -Gm_1m_2\frac{\vec{r}}{r^3} =: -A\frac{\vec{r}}{r^3};$$

mit $A = Gm_1m_2$ und $f(r) = -\frac{A}{r^2}$.

1.3 2-Teilchenproblem mit Zentralkraft

1.3.1 Potential und Energie

Häufig läßt sich das Kraftfeld in der Form $\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}U(\vec{r})$ schreiben. Dies gilt insbesondere für die oben diskutierte Zentralkraft. Hier gilt sogar die noch einfachere Beziehung $f(r) = -\frac{dU}{dr}$ und man erhält U durch

$$U(r) = -\int_{r_0}^{r} f(r)\ dr;$$

Beim Kepler-Problem gilt also $U(r) = -\frac{A}{r}$.
Systeme dieser Art heißen konservativ, denn aus 1.3 ergibt sich

$$\begin{array}{rrcl} & \mu\ddot{\vec{r}} & = & -\vec{\nabla}U(r); \qquad |\cdot\dot{\vec{r}} \\ \Rightarrow & \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\mu(\dot{\vec{r}})^2\right) & = & \frac{d}{dt}(-U(r)); \\ \Rightarrow & \frac{d}{dt}\left(\frac{\mu}{2}\dot{\vec{r}}^{\,2}+U(r)\right) & = & 0; \\ \Rightarrow & E & := & \frac{\mu}{2}\dot{\vec{r}}^{\,2}+U(r) \text{ ist erhalten.} \end{array} \tag{1.4}$$

[1] Merkregel: $\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$

Daher definieren wir jetzt (für dieses Zweiteilchenproblem)
Definition:

$E := \frac{\mu}{2}\dot{\vec{r}}^2 + U(r)$ heißt die Energie des Systems.

1.3.2 Impuls und Drehimpuls

Es werden noch einige weitere kinematische Größen betrachtet.
Definition:

Impuls:

$$\vec{p} := \mu \cdot \dot{\vec{r}};$$

und Drehimpuls:

$$\vec{l} := \vec{r} \times \vec{p};$$

Wegen

$$\dot{\vec{l}} = \underbrace{(\dot{\vec{r}} \times \vec{p})}_{=0} + \underbrace{(\vec{r} \times \dot{\vec{p}})}_{=0 \text{ wegen } 1.3} = 0;$$

ist der Drehimpuls bei Zentralkraftproblemen erhalten. Dies ergibt eigentlich gleich drei Erhaltungsgrößen, nämlich die drei Komponenten l_x, l_y, l_z.
Da $\vec{l} \perp \vec{r}$ und $\vec{l} \perp \dot{\vec{r}}$ kann sich das Teilchen stets nur in der Ebene senkrecht zu $\vec{l}$ aufhalten. Demzufolge kann in nachfolgenden Betrachtungen die z-Koordinate vernachlässigt werden, d.h. das Koordinatensystem so gewählt werden, daß $\vec{l} \parallel z$-Achse.

1.3.3 Polarkoordinaten

Es erweist sich als vorteilhaft, die Gleichungen in Polarkoordinaten zu formulieren (im allgemeinen ist es stets empfehlenswert, Koordinaten zu wählen, die die Symmetrie des Systems unterstützen - hier ist das Potential rotationssymmetrisch). Als Transformationsgleichungen erhält man, wenn man $z = 0$ setzt:

$$\begin{aligned}
\vec{r} &= r \cdot \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}; \\
\dot{\vec{r}} &= \dot{r} \cdot \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} + r\dot{\varphi} \cdot \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}; \\
(\dot{\vec{r}})^2 &= \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2; \\
\vec{l} &= \mu r^2 \dot{\varphi} \cdot \vec{e_z}; & (1.5) \\
E &= \frac{\mu}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right) + U(r); & (1.6)
\end{aligned}$$

Das Ziel der Überlegungen ist nun die Bestimmung von $\varphi(t)$ und $r(t)$.

1.3.4 Lösen der Differentialgleichung für $U(r) = \frac{-A}{r}$

Aus 1.5 und 1.6 erhält man als Differentialgleichung für $r(\varphi)$:

$$E = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{l^2}{2\mu r^2} + U(r); \tag{1.7}$$

Mit der neuen Variable $\sigma = \frac{1}{r}$ kann man die DGL zurückführen auf (für Zentralpoteniale der Form $U(r) = -A/r$)

$$\frac{d\sigma}{d\varphi} = \pm\sqrt{\frac{2\mu}{l^2}(E + A\sigma) - \sigma^2};$$

Um das Ergebnis übersichtlicher zu gestalten führt man ein

$$\rho := \frac{l^2}{A\mu}; \qquad \varepsilon := \sqrt{1 + \frac{2El^2}{\mu A^2}}; \tag{1.8}$$

Als allgemeine Lösung von 1.7 erhält man (φ_0 ist dabei aufgrund der Anfangsbedingungen zu wählen):

$$r(\varphi) = \frac{\rho}{1 + \mathrm{sgn}(\rho)\varepsilon\cos(\varphi - \varphi_0)}; \tag{1.9}$$

1.3.5 Diskussion der Lösungen des Kepler-Problems

Aus 1.9 ergeben sich die folgenden Bahnkuven

1. Für $\varepsilon = 0$ erhält man Kreisbahnen um den Ursprung (= Schwerpunkt).
2. Für $0 < \varepsilon < 1$ erhält man Ellipsenbahnen, also die erwarteten Planetenbahnen, im Ursprung ist dabei ein Brennpunkt der Ellipse.
3. Für $\varepsilon = 1$ erhält man Parabeln.
4. Für $\varepsilon > 1$ erhält man Hyperbelbahnen. Diese werden im nachfolgenden Abschnitt noch genauer diskutiert.

Das erste Keplersche Gesetz

besagt, daß die Planetenbahnen Ellipsen sind, in deren Brennpunkt die Sonne steht. Da die Masse der Sonne wesentlich größer ist als die der Planeten, kann man Schwerpunkt und Sonnenmittelpunkt miteinander identifizieren. Also ist das erste Gesetz erfüllt bei Ellipsen- und Kreisbahnen, also genau dann, wenn $\varepsilon < 1$. Ist ist aber für $E < 0$ immer der Fall. $E < 0$ heißt dabei, daß es sich um gebundene Bahnen handelt (also solche, die beschränkt sind).

Das zweite Keplersche Gesetz

besagt, daß der Vektor Sonne-Planet in gleichen Zeiten gleiche Flächen überstreicht. Dies gilt wegen

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\frac{1}{2}r^2 \cdot d\varphi}{dt} = \frac{1}{2}r^2\dot{\varphi} = \frac{l}{2\mu} = \text{const.}$$

Dabei erhält man die erste Identität geometrisch durch die Approximation der kleinen Fläche dF durch ein Dreieck mit dem Winkel $d\varphi$.

Das dritte Keplersche Gesetz

besagt, daß das Verhältnis der dritten Potenzen der großen Halbachsen zu den Quadraten der Umlaufszeit konstant ist. Die Länge der großen Halbachse, a, erhält man in 1.9 die Summe von Minimum und Maximum halbiert. Dies ergibt

$$a = \frac{-A}{2E}; \quad \text{auch } \varepsilon \text{ und } \rho \text{ eliminiert!}$$

Die Umlaufszeit erhält man durch

$$F = 2\pi ab = \int_0^T \frac{dF}{dt}\, dt = \int_0^T \frac{l}{2\mu}\, dt = \frac{l}{2\mu} \cdot T;$$

Einsetzen von a und b ergibt

$$T = \frac{2\pi A\sqrt{\mu}}{\sqrt{-2E}^3};$$

Damit ergibt sich

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{A}{(2\pi)^2\mu} = \frac{G(m_1+m_2)}{(2\pi)^2} \approx \text{const. wegen Sonnenmasse} \gg \text{Planetenmasse}$$

1.4 Effektive Potentiale

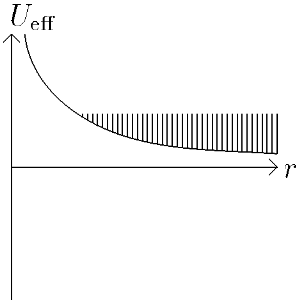
In Analogie zu 1.4 kann man 1.7 umformen zu

$$E = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \underbrace{\frac{l^2}{2\mu r^2} + U(r)}_{=:U_{\text{eff}}(r)} = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + U_{\text{eff}}(r); \tag{1.10}$$

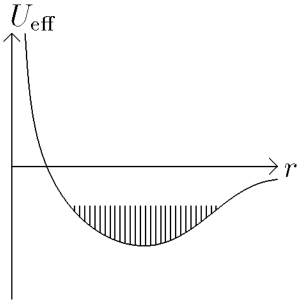
Der Term $\frac{l^2}{2\mu r^2}$ heißt Zentrifugalbarriere, da durch diesen Term eine zusätzliche Abstoßung des Teilchens erfolgt. U_{eff} heißt effektives Potential. Derartige effektiven Potentiale werden in der theoretischen Physik sehr häufig verwendet. Es handelt sich nicht um Potentiale im herkömmlichen Sinn, sondern um Funktionen, die in Differentialgleichungen in ähnlicher Weise auftreten, so daß man die Lösungen dieser DGL'en anhand des Vergleichs mit Potentialen qualitativ diskutieren kann.

1.4.1 Klassifikation

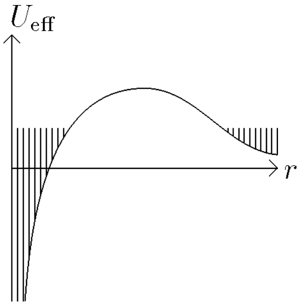
In den nachfolgenden Bildern werden schematisch die wichtigsten Beispiele für effektive Potentiale dargestellt. Um auf die nebenstehenden Interpretationen zu kommen, muß beachtet werden, daß ein Teilchen der Energie E sich in allen Gebieten mit $U_{\text{eff}} \leq E$ aufhalten kann (In den Zeichnungen für einen Energiewert schraffiert). Dabei wird das Teilchen im Verlauf der Zeit jeden Punkt dieses Gebietes berühren, soweit dieses zusammenhängend ist.



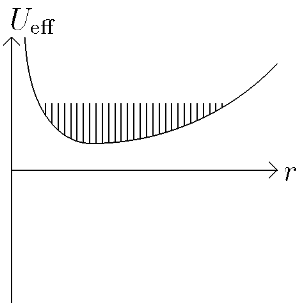
Dies ist das Bild für ein abstoßendes Potential. Gebundene Bahnen sind nicht möglich, alle Teilchen werden gestreut. Außerdem treten nur positive Energien auf.



Für anziehende Potentiale, bei denen nahe bei $r = 0$ die abstoßenden „Zentrifugalbarriere" überwiegt, ergibt sich dieses Bild. Für Energien $E < 0$ ergeben sich gebundene (nicht notwendig geschlossene) Bahnen, sonst sind die Bahnen wieder unbeschränkt. Diesmal können alle Energien auftreten, die größer als das Minimum von U_{eff} sind.



Dies ist der Prototyp eines anziehenden Potentials mit sehr kurzer Reichweite. In großem Abstand überwiegt die abstoßende „Zentrifugalbarriere", nahe am Zentrum überwiegt die Anziehung. Hier kann ein Teilchen offenbar mit derselben Energie sowohl gebundene als auch unbeschränkte Bahnen durchlaufen ($0 < E < \max(U_{\text{eff}})$).



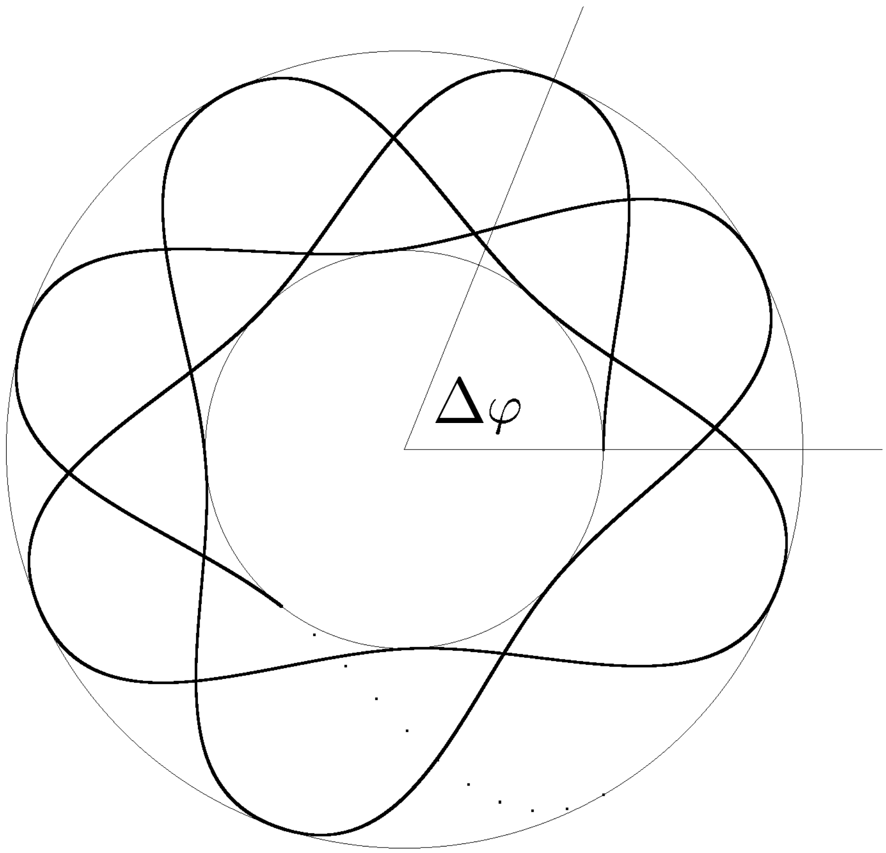
Bei diesem Potential können nur beschränkte Bahnen und nur Energien $E > \min(U_{\text{eff}})$ auftreten. Solche Potentiale treten z.B. bei Pendel- oder Federkonstruktionen auf.

1.4.2 Geschlossene Bahnkurven

Gebundene oder finite Bahnkurven sind im Allgemeinen nicht geschlossen. Das Kepler-Problem stellt also in dieser Hinsicht eine Ausnahme dar. Um ein Kriterium für das Auftreten geschlossener Bahnen zu erhalten, betrachtet man den Winkel $\Delta\varphi$, der entlang der Bahnkurve zwischen dem minimalen Radius r_0 und dem maximalen Radius r_1 zurückgelegt wird.
Unter Verwendung von 1.10 (Trennen der Variablen) erhält man die Beziehung

$$\Delta\varphi = \frac{l}{\mu}\int_{r_0}^{r_1} \frac{dr}{r^2 \cdot \sqrt{\frac{2}{\mu}(E - U_{\text{eff}})}};$$

Nun ist aber klar, daß geschlossene Bahnen genau dann auftreten, wenn $\exists q \in \mathbf{Q}$ mit $\Delta\varphi = q \cdot 2\pi$. Man kann nachweisen, daß nur Potentiale $\sim r^2$ oder $\sim -1/r$ immer geschlossene Bahnen haben (oder infinite). Bei allen anderen Potentialen kehrt ein Teilchen in der Regel nie zu seinem Ausgangspunkt zurück. Die dann entstehenden Bahnen heißen Rosettenbahnen. Hier ein Beispiel:



Kapitel 2

Streuung am Zentralpotential

2.1 Streuung am ∞-schweren Teilchen

Dies ergibt ein 1-Teilchen Problem, denn das zweite, ∞-schwere Teilchen kann sich nicht bewegen (dazu wäre eine ∞e Kraft erforderlich).

2.1.1 Raumwinkel und Wirkungsquerschnitt

Zum Messen der Streuung verwendet man vorzugsweise keine ebenen Winkel, sondern Raumwinkel. Ein Raumwinkel ist nach Definition eine Fläche auf der Einheitskugel. Die Einheitskugel parametrisiert man dabei durch

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} \sin\theta \ \cos\varphi \\ \sin\theta \ \sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix}; \qquad \begin{matrix} \theta \in [0, \pi] \\ \varphi \in [0, 2\pi[\end{matrix}$$

Ein Flächenelement auf der Einheitskugel (= Raumwinkelelement), daß durch $[\theta, \theta + d\theta] \times [\varphi, \varphi + d\varphi]$ gegeben ist, berechnet sich dann mit $\sin\theta d\theta d\varphi$.

Definition:

$$d\Omega := \sin\theta \ d\theta d\varphi;$$

heißt Raumwinkelelement.

Für die Untersuchung von Streuungen geht man davon aus, daß sehr viele Teilchen auf das (zunächst nur ein) Target (Ziel) „geschossen“ werden. Als sinnvoll hat es sich erwiesen, die nachfolgenden Größen zur Beschreibung zu verwenden

Definition:

Die Stromdichte oder Intensität ist definiert durch

$$\text{Stromdichte} := I := \frac{\text{Anzahl eintreffender Teilchen}}{\text{Fläche} \cdot \text{Zeit}};$$

Der Wirkungsquerschnitt ist definiert durch

$$d\sigma(\Omega) := \frac{\text{Anzahl der in das Raumwinkelelement } d\Omega \text{ unter } \Omega \text{ gestreuten Teilchen}}{\text{Zeit} \cdot \text{einfallende Stromdichte}};$$

Der differentielle Wirkungsquerschnitt ist (wobei die Ableitung „geeignet" zu definieren ist[1])

$$:= \frac{d\sigma}{d\Omega};$$

Im Folgenden werden rotationssymmetrische Konstellationen behandelt. Hier erhält man, wenn man auf die φ-Abhängigkeit verzichtet

$$d\Omega = 2\pi \sin\theta \; d\theta; \tag{2.1}$$

2.1.2 Berechnung des differentiellen Wirkungsquerschnitts

Der Versuchsaufbau ist rotationssymmetrisch bzgl. der z-Achse[2]. Das Target ruhe im Ursprung und die anderen Teilchen bewegen sich ursprünglich in positive z-Richtung, also parallel zur z-Achse. Die für den Bahnverlauf wesentliche kinematische Größe ist

---

[1] Man sollte zunächst ergänzend die Funktion σ definieren durch

$$\sigma := \left(\Omega \mapsto \frac{\text{Anzahl der Teilchen im Raumwinkel } \Omega}{\text{Zeit} \cdot \text{Intensität}}\right) : \mathcal{B} \to \mathbf{R};$$

wobei $\mathcal{B}$ die Borelsche σ-Algebra von $\mathbf{R}^2 \cap [0,\pi] \times [0,2\pi]$ ist (Raumwinkel sind ja Flächen). Um dann zu einer wohldefinierten Ableitung $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ zu kommen, muß man $\mathcal{B}$ oder Teilmengen von $\mathcal{B}$ als metrische Räume auffassen. Dies geht zum Beispiel, indem man nur achsenparallele Quader in $[0,\pi] \times [0,2\pi]$ mit konstanter Kantenlänge betrachtet. Dann erhält man als Differenzenquotient

$$\frac{\sigma(\Omega \cup \Delta\Omega) - \sigma(\Omega)}{\|\Delta\Omega\|} = \frac{\sigma([\theta_1,\theta_2+\Delta\theta] \times [\varphi_1,\varphi_2+\Delta\varphi]) - \sigma([\theta_1,\theta_2] \times [\varphi_1,\varphi_2])}{\|[\theta_1,\theta_2+\Delta\theta] \times [\varphi_1,\varphi_2+\Delta\varphi] \setminus [\theta_1,\theta_2] \times [\varphi_1,\varphi_2]\|},$$

wenn $\Omega = [\theta_1,\theta_2] \times [\varphi_1,\varphi_2]$ und die Norm die zugehörige Fläche auf der Einheitskugel angibt. Wenn man nun dies im Grenzwert $\|\Omega\| \to 0$ auswertet, ergeben sich die obigen Beziehungen als Grenzwerte $\Delta\theta, \Delta\varphi \to 0$.

[2] sogenannte Azimutal-Symmetrie

Definition:

Der Stoßparameter b eines Teilchens ist definiert als

$$b := \lim_{t \to -\infty} \text{ Abstand von der } z\text{-Achse.}$$

Da l konstant ist, kann man den Drehimpuls mit Hilfe von b zum „Zeitpunkt“ $t = -\infty$ berechnen.

$$l = \|m\vec{r} \times \dot{\vec{r}}\| == bmv_0 = b\sqrt{\frac{2E}{m}} \cdot m = b \cdot \sqrt{2Em};$$

Dabei wurde $v_0 = \|\dot{\vec{r}}(t = -\infty)\|$ durch 1.4 ausgedrückt und $\frac{b}{r} = \sin \angle(\vec{r}, \dot{\vec{r}})$ gesetzt.
Den Wirkungsquerschnitt ermittelt man mit Hilfe der Annahme, daß alle Teilchen mit Stoßparametern zwischen b und $b + \Delta b$ unter Winkeln zwischen θ und $\theta + \Delta\theta$ wieder austreten. Man betrachtet Streuungen in einem abstoßenden Potential. Dies gibt

$$2\pi \cdot b \cdot db \cdot I = -I \cdot \Delta\sigma \cdot \frac{\Delta\Omega}{\Delta\Omega};$$

Das Minuszeichen erklärt sich daraus, daß sich die Orientierung der Flächen umkehrt, denn tatsächlich treten Teilchen mit Stoßparameter b beim Winkel $\theta + \Delta\theta$ aus und umgekehrt. Dies führt dazu, daß zu kleineren Stoßparametern offenbar größere Winkel gehören müssen.
Wenn man nach $\frac{\Delta\sigma}{\Delta\Omega}$ auflöst, ein $\Delta\Omega$ nach 2.1 ersetzt und hierzu den Grenzübergang $\Delta \to d$ macht, ergibt sich

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = -\frac{b}{\sin\theta}\frac{db}{d\theta}; \tag{2.2}$$

Beispiel: Abstoßendes $\frac{1}{r}$-Potential

Aus 1.9 ergibt sich die Bahnkurve zu

$$r(t) = \frac{\rho}{1 - \varepsilon\cos\varphi};$$

Für den Winkel zwischen den Asymptoten und der Symmetrieachse gilt

$$\cos\varphi_a = \frac{1}{\varepsilon};$$

Geometrische Überlegungen führen zu der folgenden Beziehung zwischen θ und φ_a

$$\theta = \pi - 2 \cdot \varphi_a;$$

Damit gilt

$$\sin\frac{\theta}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_a\right) = \cos\varphi_a = \frac{1}{\varepsilon};$$

$$\cos\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{1-\frac{1}{\varepsilon^2}};$$

Wenn man auf die sich anbietende Größe $\cot^2\frac{\theta}{2}$ übergeht und ε nach 1.8 ersetzt ergibt sich

$$\cot^2\frac{\theta}{2} = \varepsilon^2 - 1 = \frac{2El^2}{mA^2} = \frac{4E^2b^2}{A^2};$$

Dies führt auf die gesuchte Abhängigkeit zwischen b und θ:

$$b = \frac{A}{2E}\cot\frac{\theta}{2}; \quad \Rightarrow \quad \frac{db}{d\theta} = \frac{-A}{4E}\frac{1}{\sin^2\frac{\theta}{2}};$$

Einsetzen in 2.2 ergibt

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{A^2}{16E^2}\frac{1}{\sin^4\frac{\theta}{2}}; \tag{2.3}$$

Die hier vorgerechnete Streuung am $\frac{1}{r}$-Potential nennt man Rutherfordstreuung.

2.2 Rückstoßeffekte

2.2.1 Zurück zum Zweikörperproblem!

Bisher wurde das Zweikörperproblem nur auf ein effektives Einkörperproblem zurückgeführt und dessen Lösung wurde diskutiert. In der Tat sind die Änderungen, die beim Zurückgehen zur ursprünglichen Situation auftreten, häufig vernachlässigbar (und wir haben sie bisher immer vernachlässigt). Bei Streuproblemen mit annähernd gleichschweren Teilchen geht das jedoch nicht mehr.

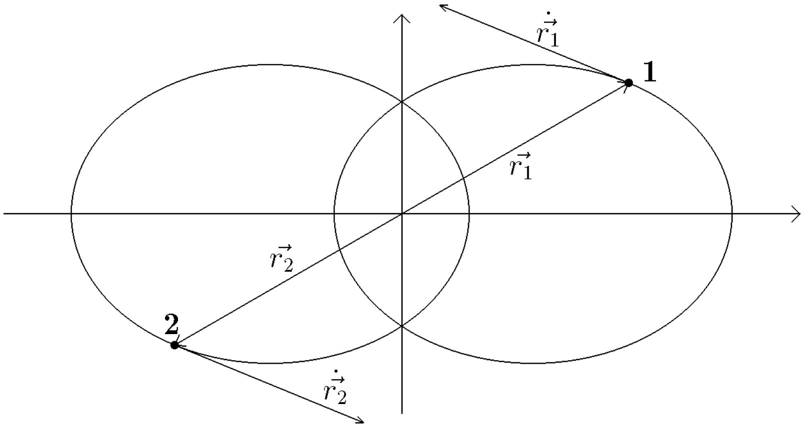
Es erweist sich als vorteilhaft, die Bewegungen stets im Schwerpunktsystem (= CM-System von **C**enter of **M**ass) zu beschreiben. Zur Bewertung der Ergebnisse wird man diese dann in ein anderes System transformieren, falls erforderlich.

Im Schwerpunktsystem gilt $\vec{R} = \dot{\vec{R}} = 0$. Damit erhält man aus 1.2:

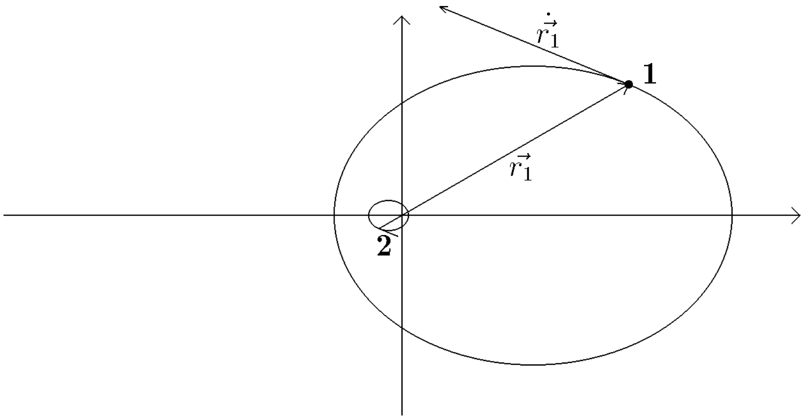
$$\vec{r_1} = \frac{m_2}{m_1+m_2}\vec{r}; \qquad \vec{r_2} = \frac{-m_1}{m_1+m_2}\vec{r};$$

Dies zeigt, daß die Bahnen der Teilchen die gleiche Form haben wie die Bahn des Relativvektors. Dies rechtfertigt nochmals die Vernachlässigung der Korrektur.

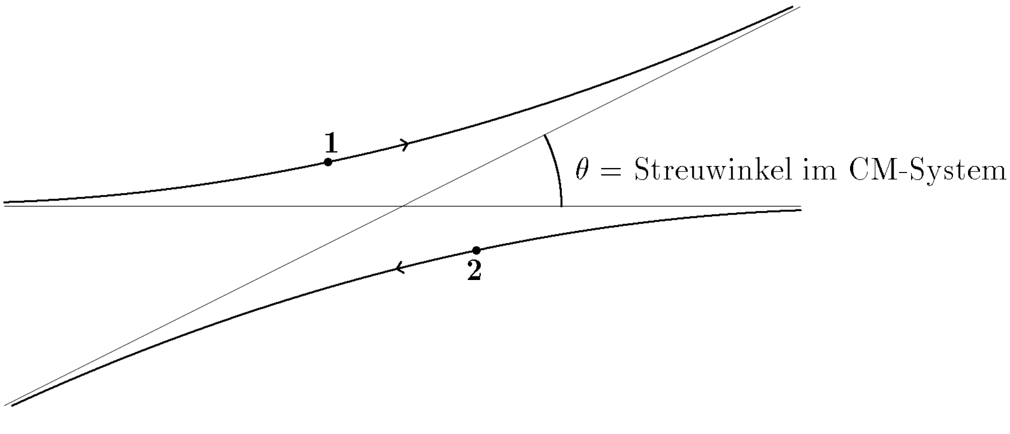
Skizze für die Bahnen des Kepler-Problems bei $m_1 = m_2$:



Skizze für die Bahnen des Kepler-Problems bei $m_1 \ll m_2$:



Skizze für die Bahnen beim Streuproblem $m_1 = m_2$:

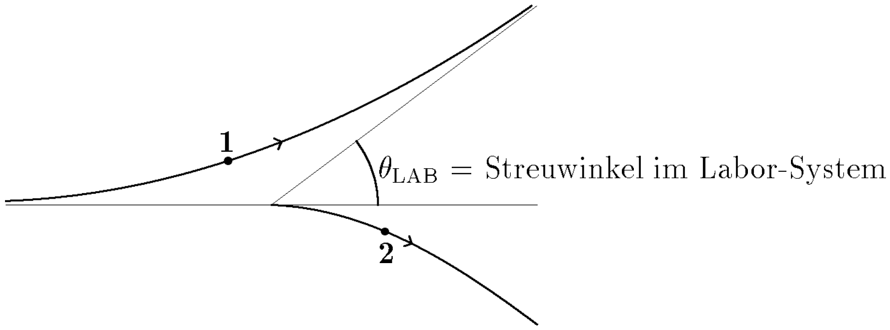


Man kann sich anhand dieser Skizze (auch für beliebige Massenverhältnisse) leicht überlegen, daß der Streuwinkel im Schwerpunktsystem stets mit dem des effektiven Einteilchenproblems übereinstimmt.

2.2.2 Streuwinkel im Laborsystem

Da man Versuche häufig in dem System durchführt, in dem vorher eines der Teilchen ruht, ist es notwendig, den Streuwinkel in dieses System, das sog. **LAB**orsystem, umzurechnen. Der nachfolgenden Zeichnung kann man entnehmen, wie der Versuch im LAB-System abläuft.

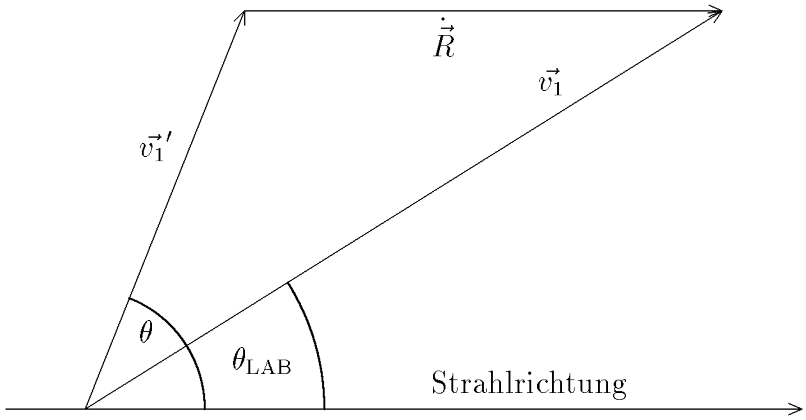
Skizze für die Bahnen beim Streuproblem im Laborsystem:



Um eine Beziehung zwischen θ und $\theta_{\rm LAB}$ zu erhalten, führt man zunächst geeignete Bezeichnungen ein. Größen im LAB-System werden in gewohnter Weise bezeichnet $\vec{r_1}, \vec{v_1}, \ldots$. Die Größen des Schwerpunktsystems werden mit einem Strich gekennzeichnet $\vec{r_1}', \vec{v_1}', \ldots$. Dann gelten die Beziehungen

$$\begin{aligned} \vec{r_1} &= \vec{R} + \vec{r_1}'; \\ \vec{v_1} &= \dot{\vec{R}} + \vec{v_1}'; \end{aligned}$$

Dies führt zu der folgenden Skizze der Situation nach der Begegnung:



Dem entnimmt man die Beziehung

$$\tan\theta_{\rm LAB} = \frac{|\vec{v_1}'|\cdot\sin\theta}{|\vec{v_1}'|\cdot\cos\theta + |\dot{\vec{R}}|};$$

Für die elastische Streuung gilt nun jedoch

$$\lim_{t\to-\infty}|\dot{\vec{r}}| = \lim_{t\to+\infty}|\dot{\vec{r}}| = v_0;$$

Also können wir setzen

$$v_1' = \frac{m_2}{m_1+m_2}v_0;$$

Da die Schwerpunktsgeschwindigkeit $\dot{R}$ erhalten ist, können wir sie zum Zeitpunkt $t = -\infty$ einfach bestimmen. Da nämlich vor dem Stoß $\dot{\vec{r_2}} = 0$, gilt hier

$$\dot{R} = \frac{m_1}{m_1+m_2}\dot{r} = \frac{m_1}{m_1+m_2}v_0;$$

Mit all diesen Beziehungen erhalten wir für den Streuwinkel im Laborsystem

$$\tan\theta_{\mathrm{LAB}} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta + \frac{m_1}{m_2}}; \tag{2.4}$$

Als Grenzfälle erhält man:

1. $m_1 \ll m_2 \;\Rightarrow\; \theta_{\mathrm{LAB}} \approx \theta.$
2. $m_1 = m_2 \;\Rightarrow\; \theta_{\mathrm{LAB}} = \frac{\theta}{2}.$ Siehe Bronstein, Seite 181 unten.
3. $m_1 \geq m_2 \;\Rightarrow$ maximaler Streuwinkel bei $\cos\theta = -\frac{m_2}{m_1}$.
   Man erhält diese Beziehung, wenn man das Maximum des Tangens durch Kurvendiskussion des Ausdrucks 2.4 bestimmt. Also durch den Ansatz $\frac{d(\tan\theta_{\mathrm{LAB}})}{d\theta} = 0$.

2.2.3 Wirkungsquerschnitt im Laborsystem

Man möchte nun auch im Laborsystem den Wirkungsquerschnitt bestimmen. Der Ansatz hierfür ist

$$\left.\frac{d\sigma(\theta_{\mathrm{LAB}})}{d\Omega}\right|_{\mathrm{LAB}} = \frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega}\cdot\frac{d\cos\theta}{d\cos\theta_{\mathrm{LAB}}};$$

wegen $d\Omega = 2\pi\; d\cos\theta$.
Da dies im Allgemeinen zu aufwendig zu rechnen ist, wird nur der Spezialfall $m_1 = m_2$ betrachtet. Hier gilt (siehe Spezialfall 2 oben)

$$\begin{aligned}\frac{d\cos\theta}{d\cos\theta_{\mathrm{LAB}}} &= \frac{\sin\theta}{\sin\theta_{\mathrm{LAB}}}\cdot\frac{d\theta}{d\theta_{\mathrm{LAB}}} = \\ &= \frac{\sin 2\theta_{\mathrm{LAB}}}{\sin\theta_{\mathrm{LAB}}}\cdot 2 = \\ &= 4\cos\theta_{\mathrm{LAB}};\end{aligned}$$

Für die Rutherfordstreuung folgt damit (vgl. 2.3):

$$\left.\frac{d\sigma}{d\Omega}\right|_{\mathrm{LAB}} = \frac{A^2}{16E^2}\frac{1}{\sin^4\theta_{\mathrm{LAB}}}\cdot 4\cos\theta_{\mathrm{LAB}};$$

Kapitel 3

n-Teilchen-System mit inneren Kräften

3.1 Gesetze von Newton

Nun sollen allgemein n Massepunkte mit Massen m_i $(1 \leq i \leq n)$ und mit Ortsvektoren $\vec{r_i}$ $(1 \leq i \leq n)$ betrachtet werden. Als Wechselwirkungen sollen nur innere Zentralkräfte berücksichtigt werden. Bisher wurden die Newtonschen Gesetze nur für maximal zwei Teilchen eingeführt. Deshalb hier nochmals das zweite und dritte Gesetz, diesmal für n Teilchen (Das erste kann nur für ein Teilchen formuliert werden).

Definitionen:

Relativvektoren

$$\vec{r_{ik}} := \vec{r_i} - \vec{r_k} \quad \forall 1 \leq i, k \leq n;$$

Gesamtmasse

$$M := \sum_{i=1}^{n} m_i;$$

Schwerpunktskoordinaten

$$\vec{R} := \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r_i}}{M};$$

Eine Kraft heißt innere Zentralkraft, wenn alle Kräfte auf das i-te Teilchen von der Gestalt

$$\vec{F_{ki}} = \frac{\vec{r_{ik}}}{r_{ik}} \cdot f_{ki}(r_{ik}) \quad \forall i \neq k \in \{1, \ldots, n\};$$

mit skalaren Funktionen f_{ki} sind.

Der Impuls des i-ten Teilchens ist definiert durch

$$\vec{p_i} := m_i \dot{\vec{r_i}};$$

Damit kann man formulieren

2. Newton'sches Gesetz:

$$\boxed{\dot{\vec{p_i}} = \sum_{k\neq i} \vec{F_{ki}};}$$

3. Newton'sches Gesetz:

$$\boxed{\forall 1 \leq k, i, \leq n \qquad f_{ki} = f_{ik};}$$

3.2 Einführung eines Potentials

Zunächst führt man für eine einzelne Wechselwirkung ein Potential ein. Um bei mehreren Teilchen die Kraft als Gradient eines Potentials zu erhalten, muß man den Operator $\vec{\nabla}_i = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_i} \\ \frac{\partial}{\partial y_i} \\ \frac{\partial}{\partial z_i} \end{pmatrix}$ einführen, der bezüglich der Koordinaten des i-ten Teilchens ableitet.
Dann hat man

$$U_{ki}(r) = U_{ki}(r_0) - \int_{r_0}^{r} f_{ki}(r')\ dr';$$

$$\vec{F_{ki}} = -\vec{\nabla}_i U_{ki}(r_{ik});$$

Das Potential für alle n Teilchen erhält man nun, unter Berücksichtigung des 3. Newton'schen Gesetzes, durch Addition

$$U(\vec{r_1}, \ldots, \vec{r_n}) = \sum_{k<i} U_{ki}(r_{ik});$$

$$\sum_{k(\neq i)} \vec{F_{ki}} = -\vec{\nabla}_i U(\vec{r_1}, \ldots, \vec{r_n});$$

Bei der letzten Gleichung ist zu beachten, daß die Terme, die nicht von $\vec{r_i}$ abhängen, abgeleitet Null ergeben.
Jetzt kann man das 2. Newton'sche Gesetz so formulieren

$$\dot{\vec{p_i}} = m_i \ddot{\vec{r_i}} = -\vec{\nabla}_i U;$$

3.3 Noether-Theorem

3.3.1 Einführung des Noethertheorems - Gesamtimpuls

Ziel dieses Abschnitts ist die Ermittlung von Erhaltungssätzen, die bei der Lösung der Bewegungsgleichung $\dot{\vec{p_i}} = -\vec{\nabla}_i U$ helfen. Dazu addiert man zunächst alle Bewegungsgleichungen

$$\sum_{i=1}^{n} \dot{\vec{p_i}} = -\sum_{i=1}^{n} \vec{\nabla}_i U(\vec{r_1}, \ldots, \vec{r_n});$$

Um die letzte Summe zu bestimmen, betrachtet man infinitesimale Verschiebungen der Form

$$\begin{aligned} \vec{r_i} &\mapsto \vec{r_i} + \delta\vec{a}; \\ U(\vec{r_1}, \ldots, \vec{r_n}) &\mapsto U(\vec{r_1} + \delta\vec{a}, \ldots, \vec{r_n} + \delta\vec{a}); \end{aligned}$$

Da diese Verschiebung des Koordinatenursprungs um $\delta\vec{a}$ das Potential nicht ändert, folgt unter Anwendung der Taylorentwicklung

$$U(\vec{r_1}, \ldots, \vec{r_n}) = U(\vec{r_1} + \delta\vec{a}, \ldots, \vec{r_n} + \delta\vec{a}) = U(\vec{r_1}, \ldots, \vec{r_n}) + \delta\vec{a} \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \vec{\nabla}_i U(\vec{r_1}, \ldots, \vec{r_n})}_{=0} + \cdots;$$

Damit hat man eine Erhaltungsgröße gefunden, nämlich der Gesamtimpuls

$$\vec{P} := \sum_{i=1}^{n} \vec{p_i};$$

Diese Vorgehensweise entspricht dem
Noether-Theorem

Jeder Erhaltungsgröße entspricht einer Symmetrie der zugehörigen Konfiguration und umgekehrt.

3.3.2 Beispiel Drehimpulserhaltung

Als weiteres Beispiel betrachte man den Drehimpuls

$$\begin{aligned} \vec{l_i} &= \vec{r_i} \times \vec{p_i}; \\ \dot{\vec{l_i}} &= \vec{r_i} \times \dot{\vec{p_i}} = -\vec{r_i} \times \vec{\nabla}_i U(\vec{r_1}, \ldots, \vec{r_n}); \end{aligned}$$

Man vermutet, daß die Summe erhalten sein könnte

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \sum_{i=1}^{n} \vec{l_i}; \\ \dot{\vec{L}} &= -\sum_{i=1}^{n} \vec{r_i} \times \vec{\nabla}_i U = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&=^{1} && -\sum_{k\neq i} \vec{r_i} \times (\vec{r_i} - \vec{r_k}) \frac{1}{r_{ik}} \cdot \frac{\partial U}{\partial r_{ik}} = \\
&= && -\sum_{k\neq i} \underbrace{(\vec{r_i} \times \vec{r_k})}_{\text{antisymmetrisch}} \underbrace{\frac{1}{r_{ik}} \cdot \frac{\partial U}{\partial r_{ik}}}_{\text{symmetrisch}} = \\
&= && 0;
\end{aligned}$$

Also ist der Gesamtdrehimpuls $\vec{L}$ erhalten. Doch welche Symmetrie ist mit dieser Erhaltungsgröße verknüpft? Man betrachte eine infinitesimale Drehung des Systems. Hierzu sei $\delta\vec{\varphi}$ ein infinitesimaler Vektor in Richtung der Drehachse.

$$\begin{aligned}
\vec{r} &\mapsto \vec{r} + (\delta\vec{\varphi} \times \vec{r}); \\
\vec{r} \cdot \vec{r} &\mapsto r^2 + \underbrace{2\vec{r}(\delta\vec{\varphi} \times \vec{r})}_{=0} + \underbrace{o(\delta\varphi^2)}_{=0^2};
\end{aligned}$$

Da das Potential rotationsinvariant ist gilt mit der Taylor-Näherung

$$\begin{aligned}
U(\vec{r_1}, \ldots, \vec{r_n}) &= U(\vec{r_1} + \delta\vec{\varphi} \times \vec{r_1}, \ldots, \vec{r_n} + \delta\vec{\varphi} \times \vec{r_n}) = \\
&= U(\vec{r_1}, \ldots, \vec{r_n}) + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} (\delta\vec{\varphi} \times \vec{r_i}) \cdot \vec{\nabla}_i U(\vec{r_1}, \ldots, \vec{r_n})}_{=\sum_{i=1}^{n} \delta\vec{\varphi} \cdot (\vec{r_i} \times \vec{\nabla}_i U) = 0} + \cdots;
\end{aligned}$$

Womit die Äquivalenz von Rotationsinvarianz und Drehimpulserhaltung offensichtlich ist.

3.4 Zusammenfassung der Erhaltungsgrößen

3.4.1 Nochmals Energieerhaltung

Für n Teilchen ist die Energie natürlich definiert durch

$$E = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r_i}}^2 + U(\vec{r_1}, \ldots, \vec{r_n});$$

Man prüft, ob sie auch für n Teilchen erhalten ist

[1] unter Verwendung der Kettenregel.

[2] weil Quadrate infinitesimaler Parameter vernachlässigt werden können.

$$\begin{aligned}
\frac{dE}{dt} &= \sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\vec{r_i}} \ddot{\vec{r_i}} + \underbrace{\frac{dU(\vec{r_1},\dots,\vec{r_n})}{dt}}_{= \sum_{i=1}^{n} (\vec{\nabla}_i U)\cdot \dot{\vec{r_i}} + \underbrace{\frac{\partial U}{\partial t}}_{=0^3}} = \\
&= \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\left(m_i \ddot{\vec{r_i}} + \vec{\nabla}_i U\right)}_{=0} \cdot \dot{\vec{r_i}} = 0;
\end{aligned}$$

Damit ist also die Energie erhalten. Das Noether-Theorem ordnet dem die Translationsinvarianz in der Zeit zu ($\frac{\partial U}{\partial t} = 0$). Man kann auch zeitlich nicht konstante Potentiale betrachten, bei denen die Energie nicht mehr erhalten ist, dann ist U von der Form $U(\vec{r_1},\dots,\vec{r_n},t)$. Doch solche Potentiale sind vorläufig von unseren Untersuchungen ausgeschlossen.

3.4.2 Schwerpunktsatz

Für den Schwerpunkt gilt

$$\frac{d\vec{R}}{dt} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\vec{r_i}} = \frac{\vec{P}}{M} = \text{const.};$$

$$\Rightarrow \qquad \vec{R}(t) = \vec{R}(0) + \frac{\vec{P}}{M}\cdot t;$$

Damit erhält man eine neue (und von den bisherigen überraschenderweise unabhängige) Erhaltungsgröße

$$\vec{R} - \frac{\vec{P}}{M}\cdot t \text{ ist erhalten.}$$

Das Noethertheorem erklärt dies durch die „boost"-Invarianz des Systems, d.h. Invarianz bezüglich Transformationen der Art

$$\vec{r} \mapsto \vec{r} + \vec{v_0}\cdot t;$$

3.4.3 Zusammenhang mit der Galilei-Gruppe

Wer die bisher ermittelten Erhaltungsgrößen mitgezählt hat, sollte auf 10 unabhängige gekommen sein (Vektorkomponenten einzeln gezählt). Dies erinnert an die ganz zu Beginn vorgestellte Galilei-Gruppe mit deren 10 freien Parametern. In der Tat kann man jeder Erhaltungsgröße einen solchen Parameter zuordnen.

[3] da U nicht explizit von der Zeit abhängt.

So wird auch einsichtig[4], daß keine weiteren Erhaltungsgrößen existieren.
Hier sind sie nochmals alle zusammen:

$$\boxed{\vec{P} \qquad\qquad \vec{L} \qquad\qquad E \qquad\qquad \vec{R} - \frac{\vec{P}}{M} \cdot t}$$

[4]Ein strenger Beweis ist das natürlich nicht - Nur eine „gefühlsmäßige“ Aussage.

Kapitel 4

Lineare Schwingungen

Die Newton'schen Bewegungsgleichungen sind i.A. nicht linear. Trotzdem werden die linearen Schwingungen in der Theoretischen Physik mit großer Gründlichkeit untersucht. Dies liegt zum einen daran, daß sie fast die einzigen Differentialgleichungen sind, die man mit relativ geringem Aufwand noch exakt lösen kann. Zum anderen treten sie bei einigen wichtigen Problemen auf und werden sehr häufig als Näherung verwendet.
In der Physik sind insbesondere zu nennen

1. Das Hooke'sche Gesetz.
2. Die Maxwell-Gleichungen der Elektro-Dynamik.
3. Die Schrödinger-Gleichung der Quantenmechanik.

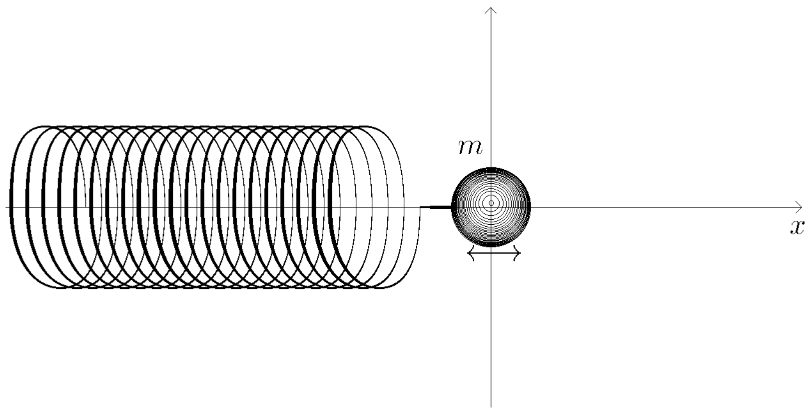
Im Folgenden werden allgemeine Lösungsverfahren vorgestellt, die auch außerhalb der Mechanik verwendet werden (jedoch an Beispielen aus der Mechanik erläutert).

4.1 Systeme mit einem Freiheitsgrad

Systeme mit einem Freiheitsgrad sind solche, bei denen die Bewegung auf eine eindimensionale Mannigfaltigkeit eingeschränkt ist. Allgemein ist die Zahl der Freiheitsgrade die Dimension des Konfigurationsraumes, in dem jedem Punkt eine mögliche Position des Systems entspricht.

4.1.1 Freier Harmonischer Oszillator

Paradebeispiel für lineare Schwingungen ist der Harmonische Oszillator. Hier wird das „Modell“ eines frei schwingenden gedämpften harmonischen Oszillators diskutiert.
Modellvorstellung:
Ein Massepunkt m, der sich nur entlang der x-Achse bewegen kann und an einer Feder festgemacht ist:



Die Newton'sche Bewegungsgleichung lautet hier

$$m\ddot{x} = -Dx - C\dot{x};$$

wobei D die Federkonstante und C eine Reibungskonstante ist. Es soll $D > 0$ und $C > 0$ sein, damit die Energie abnimmt:

$$\begin{aligned} E &= \frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{D}{2}x^2; \\ \dot{E} &= \dot{x}\,(m\ddot{x} + Dx) = -C\dot{x}^2 < 0; \end{aligned}$$

Man führt als neue Größen ein

$$\gamma = \frac{C}{2m}; \qquad \omega_0^2 = \frac{D}{m}; \tag{4.1}$$

und erhält als neue Darstellung des Problems

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0; \tag{4.2}$$

oder, mit Hilfe des linearen Differentialoperators

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &:= \frac{d^2}{dt^2} + 2\gamma\frac{d}{dt} + \omega_0^2; \\ \mathcal{L}[x] &= 0; \end{aligned}$$

Dies ist eine lineare Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten (γ, ω_0).
Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten lassen sich stets mit einem e-Ansatz lösen, da $e^{\lambda t}$ Eigenfunktion zum Operator $\frac{d}{dt}$ und zum Eigenwert λ ist. Es gilt also

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(e^{\lambda t}\right) &= \lambda \cdot e^{\lambda t}; \\ \Rightarrow \qquad \left(\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2\right) \cdot e^{\lambda t} &= 0; \\ \Rightarrow \qquad \lambda_{1/2} &= -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}; \end{aligned}$$

Damit erhält man als Lösung:

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}; \qquad c_1, c_2 \text{ beliebige Konstanten.}$$

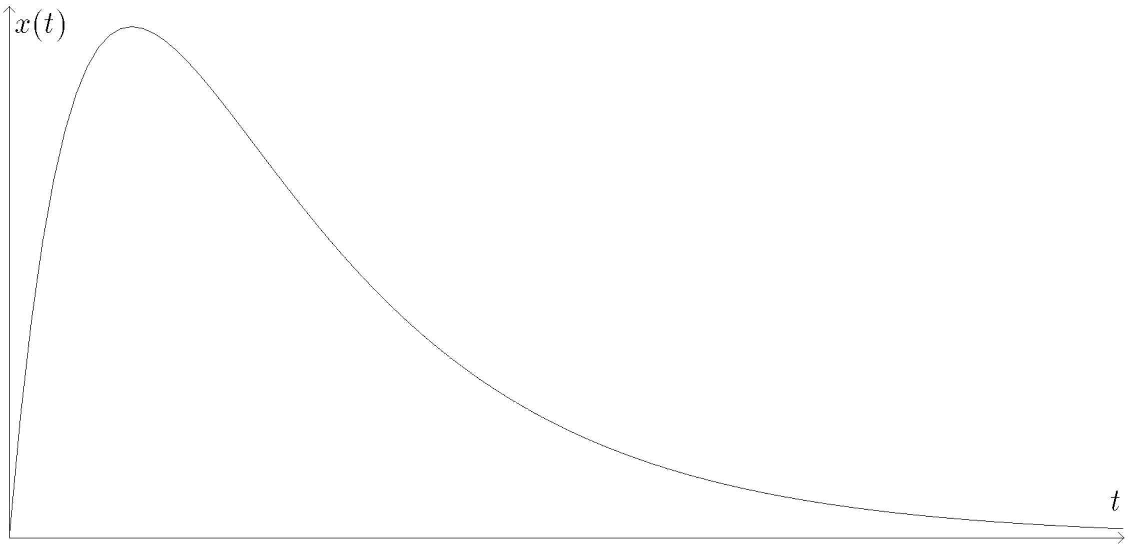
Frage: Ist dies bereits die allgemeinste Lösung?
Man kann sich schnell überlegen, daß jedes Anfangswertproblem (Vorgabe von $x(0), \dot{x}(0)$) mit genau einer der oben angegebenen Lösungen gelöst wird. Dies legt die Annahme nahe, daß die DGL bereits vollständig gelöst ist.
Als Beispiel soll nun das AWP[1] $x(0) = 0$ und $\dot{x}(0) = v_0$ diskutiert werden. Man erhält die Lösung

$$\begin{aligned}
c_1 = -c_2 &= \frac{v_0}{2\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}}; \\
x(t) &= \frac{v_0 \cdot e^{-\gamma t}}{2\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}} \cdot \left(e^{\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}\cdot t} - e^{-\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}\cdot t} \right); \\
&= \frac{v_0}{\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}} \cdot e^{-\gamma t} \cdot \sinh\left(\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \cdot t \right); \\
&= \frac{v_0}{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}} \cdot e^{-\gamma t} \cdot \sin\left(\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \cdot t \right);
\end{aligned}$$

Nun sollen diese Einzellösungen diskutiert werden.

$\gamma^2 > \omega_0^2$ „starke Dämpfung“:

Man erhält das folgende Bild:



Es tritt keine Schwingung auf, vielmehr wird die Bewegung stark gedämpft und kommt relativ bald annähernd zur Ruhe.

[1]Anfangswertproblem

$\gamma^2 = \omega_0^2$ „aperiodischer Kriech-/Grenz-fall“

Für diesen Fall ist unsere bisherige Lösung nicht ganz richtig. Zunächst sieht man, daß für $\lambda_1 = \lambda_2$ nicht alle Anfangsbedingungen berücksichtigt werden können.

Bei Vielfachheiten von Eigenwerten ist die folgende Regel zu berücksichtigen:

Ein linearer Differentialoperator $\mathcal{L}$ mit $n \in \mathbf{N}$ fachem Eigenwert λ zur Eigenfunktion $e^{\lambda t}$ hat (in $\mathbf{C}$) als Lösung Funktionen des Typs

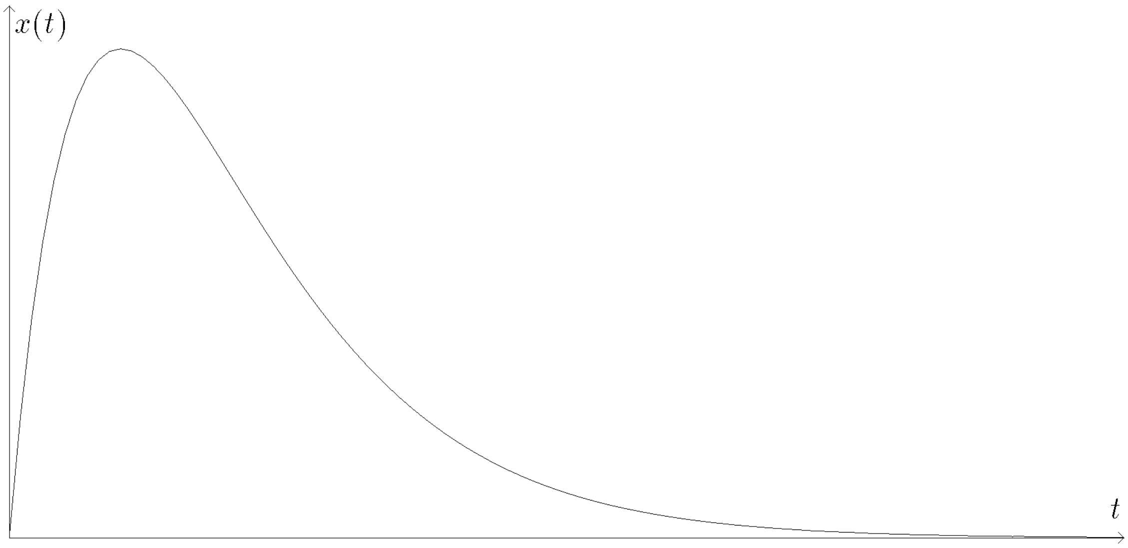
$$F(t) = \left(\sum_{i=0}^{n-1} c_i t^i \right) \cdot e^{\lambda t};$$

mit beliebigen Konstanten $c_0, \ldots, c_{n-1}$

Dies ergibt als Lösung unseres AWP's:

$$x(t) = v_0 \cdot t \cdot e^{-\gamma t};$$

Die Skizze hierzu:

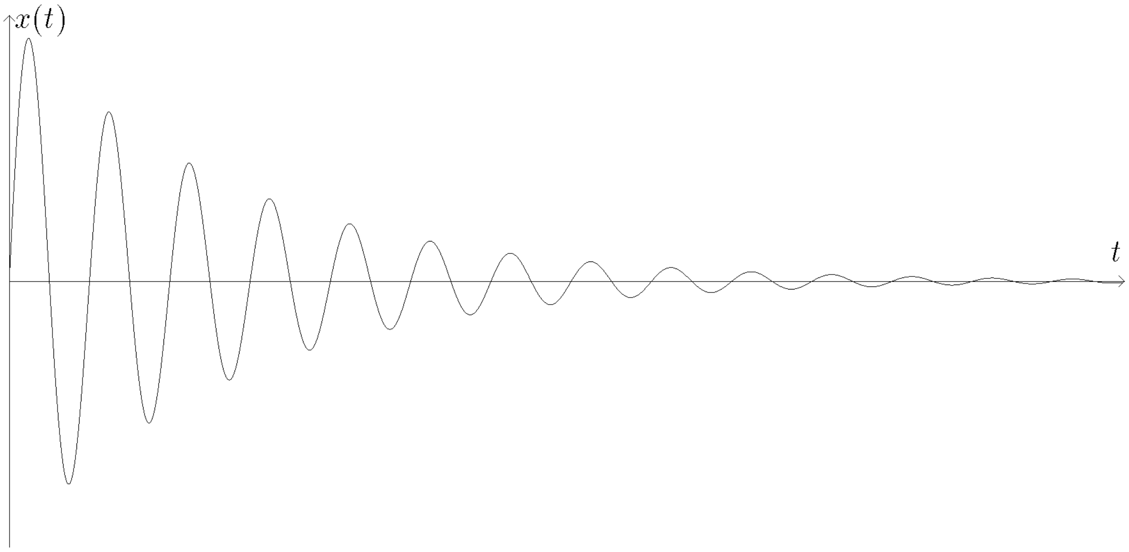


Man sieht, daß auch in diesem Fall keine Schwingung zustandekommt.

$\gamma^2 < \omega_0^2$ Schwingungen

Spätestens jetzt fällt auf, daß die oben aufgelisteten Lösungen komplex sein können. Da dies physikalisch nicht sinnvoll ist, muß man sich auf reelle Lösungen beschränken. Deswegen ist in diesem Fall die Sinusfunktion auszuwählen. (Um die allgemeine Lösung zu erhalten muß man beliebige Linearkombinationen aus Real- und Imaginärteil betrachten.) Im übrigen ist zu beachten, daß die beiden Nullstellen in diesem Fall nicht übereinstimmen, obwohl die Realteile gleich und die Imaginärteile betragsmäßig gleich sind. Also trifft nicht die Regel aus dem vorangegangenen Abschnitt zu.

Nun ergibt sich also das Bild einer gedämpften Schwingung:



Die Skizze zeigt, daß auch hier (für $\gamma \neq 0$) die Bewegung sehr schnell zur Ruhe kommt.

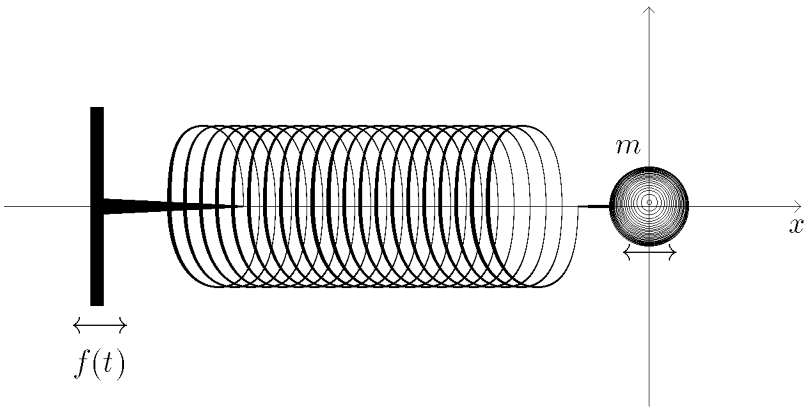
Die Frequenz der Schwingung ist $\omega := \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$. Die Lösung wird dann

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega} \cdot e^{-\gamma t} \cdot \sin \omega t;$$

Im Allgemeinen können auch Cosinusfunktionen auftreten, wenn $x(0) \neq 0$.

4.1.2 Erzwungene Schwingungen

Zunächst eine Skizze:



Hier wird das andere Ende nicht wie bisher festgehalten, sondern es findet eine Anregung der Bewegung von dieser Seite her statt. Die Funktion $f(t)$ beschreibt die Veränderung des Aufhängepunktes der Feder. Wenn $x = 0$ wieder die Ruhelage der Masse ist, erhält man als Bewegungsgleichung

$$m\ddot{x} = -D(x - f) - C\dot{x};$$

Oder umformuliert mit 4.1:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = f; \tag{4.3}$$

Dies ist eine inhomogene lineare Differentialgleichung.
Zum Auffinden der allgemeinen Lösung ist die folgende Überlegung hilfreich:
Angenommen, wir haben 2 verschiedene Lösungen von 4.3. Dann ist die Differenz der beiden eine Lösung der homogenen Gleichung (mit $f = 0$). Und umgekehrt, wenn wir eine Lösung der inhomogenen Gleichung und eine Lösung der homogenen Gleichung addieren, so erhalten wir stets eine weitere Lösung der inhomogenen Differentialgleichung[2].
Es gilt also

$$\text{Lösungsraum von 4.3} \;=\; \text{Eine Lösung von 4.3} \;+\; \text{Lösungsraum von 4.2.}$$

Nachdem wir im vorangehenden Paragraphen bereits die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung bestimmt haben, reduziert sich die Aufgabe darauf, eine einzelne Lösung von 4.3 zu finden. Zunächst betrachten wir nur einen Spezialfall.

Spezialfall $f(t) = f_0 \cdot \cos \Omega t$

Wir können in diesem Fall die Differentialgleichung gleich komplex formulieren. Dies ist zwar nicht notwendig, aber hilfreich. Die alte Differentialgleichung findet man im Realteil wieder.

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 e^{i\Omega t};$$

Man sieht, daß der Ansatz $x(t) = Ae^{i\Omega t}$ zum Ziel führt. Einsetzen ergibt

$$(-\Omega^2 + 2i\gamma\Omega + \omega_0^2) \cdot A = f_0;$$

und damit

$$A = \frac{f_0}{-\Omega^2 + 2i\gamma\Omega + \omega_0^2};$$

Dies ist die komplexe Amplitude der Schwingung. Der Betrag von A ist für die größe des Ausschlags verantwortlich, die Phase von A führt zu einer Phasenverschiebung zwischen der Schwingung des Massepunktes und der Erregerschwingung. Zur Diskussion der Amplitude macht man die nachfolgenden Näherungen:

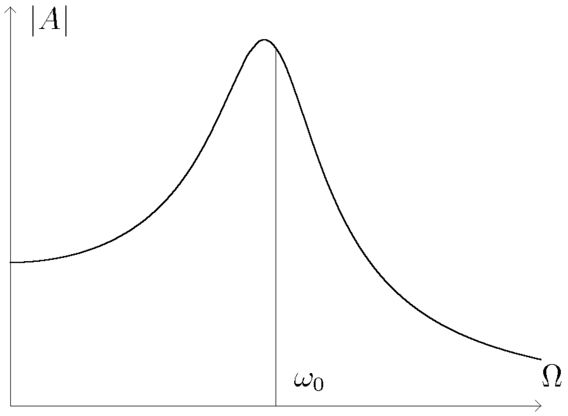
[2]Diese Aussagen folgen unmittelbar aus der Linearität des Differentialoperators

$$\begin{aligned} \Omega &\approx \omega_0; \\ \omega_0^2 - \Omega^2 = (\omega_0 - \Omega)(\omega_0 + \Omega) &\approx 2\omega_0 \cdot (\omega_0 - \Omega); \\ 2\gamma\Omega &\approx 2\gamma\omega_0; \qquad \text{Annahme: } \gamma \ll \omega_0; \\ \Longrightarrow \qquad A &\approx \frac{f_0}{2\omega} \cdot \left(\frac{1}{\omega_0 - \Omega + i\gamma} \right); \end{aligned}$$

Damit erhält man für den Betrag der Amplitude die Formel für die sogenannte „Breit-Wigner-Resonanz“:

$$|A| = \frac{|f_0|}{2\omega_0} \cdot \frac{1}{\sqrt{(\omega_0 - \Omega)^2 + \gamma^2}};$$

Daraus sieht man unmittelbar, daß die Amplitude für $\Omega \approx \omega_0$ maximal wird. Außerdem ist das Maximum umso breiter und kleiner, je größer γ ist.
Ohne Näherung erhält man den folgenden Verlauf der Kurve:



Für die Phasenverschiebung φ der Schwingung erhält man mit der obigen Näherung:

$$\tan\varphi = \frac{\gamma}{\omega_0 - \Omega} \qquad \Rightarrow \qquad \varphi = \arctan \frac{\gamma}{\omega_0 - \Omega};$$

Man findet diese Phasenverschiebung mit dem Ansatz $A = |A| \cdot e^{-\varphi i}$.
Wenn man berücksichtigt, daß für alle Lösungen der homogenen Gleichung $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$ gilt, so sieht man, daß die anderen Lösungen nur noch den „Einschwingvorgang“ zusätzlich beinhalten. Damit ist die soeben durchgeführte Diskussion der partikulären Lösung auch für alle weiteren Lösungen richtig.
Bisher haben für die „Erregerfunktion“ den einfachen Fall $f(t) = A\cos\Omega t$ angenommen. Hier konnte man die Lösung der Differentialgleichung unmittelbar ansehen. Im allgemeinen Fall geht das natürlich nicht. Deshalb soll der folgende Abschnitt den Lösungsverfahren für inhomogene lineare Differentialgleichungen gewidmet werden.

4.2 Lösungsverfahren für inhomogene DGL'en

4.2.1 Approximation durch Treppenfunktionen

Man versucht in der Differentialgleichung

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = f;$$

die Funktion $f(t)$ durch Treppenfunktionen zu approximieren. Diese Treppenfunktionen kann man in eine endliche Summe von Rechteckfunktionen zerlegen. Damit reduziert sich das Problem auf die Diskussion dieser Rechteckfunktionen.
Man wählt eine Schrittweite Δt und definiert für $n \in \mathbf{N}$:

$$\begin{aligned} t_n &:= n \cdot \Delta t \\ \varphi_n &:= \left(t \mapsto \begin{cases} 0 & t < t_n; \\ \frac{1}{\Delta t} & t_n < t < t_{n+1}; \\ 0 & t > t_{n+1}; \end{cases} \right); \end{aligned}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \varphi_n(t) &= \varphi_0(t - t_n); \qquad (4.4) \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_n(t)\, dt &= 1; \\ f(t) &\approx \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(t_n) \cdot \varphi_n(t) \cdot \Delta t; \end{aligned}$$

Nun sucht man die Lösungen der Gleichungen

$$\ddot{g_n} + 2\gamma\dot{g_n} + \omega_0^2 g_n = \varphi_n; \qquad (4.5)$$

Und erhält durch Multiplikation mit $f(t_n)\Delta t$ und Summation über n:

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + 2\gamma\frac{d}{dt} + \omega_0^2\right) \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(t_n) \cdot g_n(t) \cdot \Delta t}_{\approx x(t)} = \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(t_n) \cdot \varphi_n(t) \cdot \Delta t}_{\approx f(t)};$$

Man wird dann also für $\Delta t \to 0$ erwarten, $x(t)$ beliebig genau annähern zu können.
Wegen 4.4 läßt sich 4.5 umformulieren zu

$$\ddot{g_n}(t) + 2\gamma\dot{g_n}(t) + \omega_0^2 g_n(t) = \varphi_0(t - t_n);$$

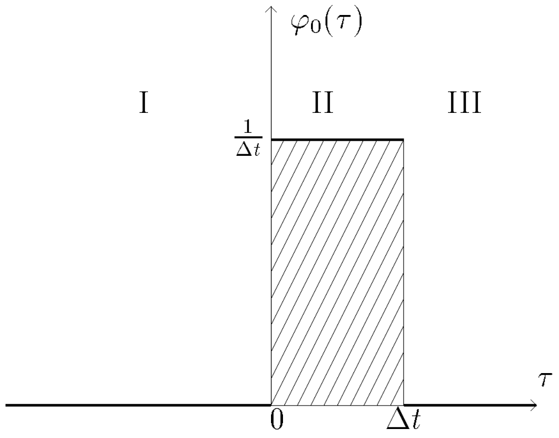
Daher gilt auch für die Lösungen

$$g_n(t) = g_0(t - t_n);$$

Damit genügt es nun für $\tau = t - t_n$ die Gleichung

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + 2\gamma\frac{d}{dt} + \omega_0^2\right) g(\tau) = \varphi_0(\tau); \tag{4.6}$$

zu lösen.
Man unterteilt dies in drei Abschnitte:



(I) Da wir nur eine Lösung haben wollen und noch keine Anfangsbedingungen zu berücksichtigen sind kann man hier die triviale Lösung wählen

$$g|_{]-\infty,0]} =: g_{\mathrm{I}} \equiv 0;$$

(II) In diesem Bereich ($[0, \Delta t]$) erhält man die DGL

$$\ddot{g} + 2\gamma\dot{g} + \omega_0^2 g = \frac{1}{\Delta t};$$

Man findet als allgemeine Lösung

$$g_{\mathrm{II}}(\tau) := g|_{[0,\Delta t]}(\tau) = \frac{1}{\Delta t \cdot \omega_0^2} + a_1 e^{\lambda_1 \tau} + a_2 e^{\lambda_2 \tau};$$

Nun ist zu berücksichtigen, daß g stetig differenzierbar sein sollte. Daher muß man die Anfangsbedingungen $g_{\mathrm{II}}(0) = 0$ und $\dot{g}_{\mathrm{II}}(0) = 0$ wählen. Es ergibt sich

$$a_1 = \frac{\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}\frac{1}{\Delta t \cdot \omega_0^2}; \qquad a_2 = \frac{-\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2}\frac{1}{\Delta t \cdot \omega_0^2};$$

λ_1, λ_2 sind natürlich die entsprechenden Werte aus der Lösung der homogenen Gleichung.

(III) In diesem Bereich erhält man wieder eine homogene DGL mit der bekannten Lösung

$$g_{\mathrm{III}}(\tau) := g|_{[\Delta t,\infty[}(\tau) = b_1 e^{\lambda_1 \tau} + b_2 e^{\lambda_2 \tau};$$

Wieder muß man die vorhergehende Lösung stetig differenzierbar fortsetzen und erhält für die Konstanten

$$b_1 = \frac{\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \frac{1}{\Delta t \cdot \omega_0^2} \cdot \left(1 - e^{-\lambda_1 \Delta t}\right); \qquad b_2 = \frac{-\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} \frac{1}{\Delta t \cdot \omega_0^2} \cdot \left(1 - e^{-\lambda_2 \Delta t}\right);$$

Da diese Treppenfunktionen jedoch viel zu aufwendig zu berechnen sind, versucht man zunächst einen Grenzübergang $\Delta t \to 0$ durchzuführen. Dies geschieht im nächsten Abschnitt.

4.2.2 Die Greens-Funktions-Methode

Zunächst eine Bezeichnung: $g_0 := \dfrac{1}{\Delta t \cdot \omega_0^2}$.
Nun untersucht man die oben gefundene Teillösung g_{II} mit Hilfe einer Taylor-Näherung.

$$\begin{aligned}
g_{\mathrm{II}}(\tau) &= g_0 + a_1 e^{\lambda_1 \tau} + a_2 e^{\lambda_2 \tau} \approx \\
&\approx g_0 + a_1 \left(1 + \lambda_1 \tau + \frac{1}{2}\lambda_1^2 \tau^2\right) + a_2 \left(1 + \lambda_2 \tau + \frac{1}{2}\lambda_2^2 \tau^2\right) = \\
&= \frac{1}{2}\left(a_1 \lambda_1^2 + a_2 \lambda_2^2\right) \cdot \tau^2;
\end{aligned}$$

Dies heißt, daß man g_{II} für kleine Δt vernachlässigen kann. (die Wirkung dieses Zeitabschnittes auf die Bewegung ($\dot{g}$) ist natürlich nicht vernachlässigbar, wohl aber die Auslenkung zur Zeit $\tau = \Delta t$.)
Die in g_{III} auftretenden Konstanten b_1, b_2 müssen ebenfalls durch eine Taylor-Entwicklung genähert werden.

$$\begin{aligned}
b_1 &= \frac{\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} g_0 \cdot \left(1 - e^{-\lambda_1 \Delta t}\right) \approx \\
&\approx \frac{\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} g_0 \cdot \lambda_1 \Delta t = \\
&= \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \frac{1}{\omega_0^2}; \\
b_2 &= \frac{-\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} g_0 \cdot \left(1 - e^{-\lambda_2 \Delta t}\right) \approx \\
&\approx \frac{-\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} g_0 \cdot \lambda_2 \Delta t = \\
&= \frac{-\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \frac{1}{\omega_0^2};
\end{aligned}$$

Somit erhält man als Grenzfunktion für $\Delta t \to 0$:

$$g(\tau) = \begin{cases} 0 & \tau \leq 0; \\ \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \frac{1}{\omega_0^2} \left(e^{\lambda_1 \tau} - e^{\lambda_2 \tau} \right) & \tau \geq 0; \end{cases}$$

Wenn man noch $\lambda_{1/2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$ einsetzt ergibt sich

$$g(\tau) = \begin{cases} 0 & \tau \leq 0; \\ \frac{1}{2\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}} \left(e^{\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \cdot \tau} - e^{-\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \cdot \tau} \right) \cdot e^{-\gamma \tau} & \tau \geq 0; \end{cases}$$

Man verwendet an dieser Stelle (und auch sonst recht häufig) die sog. Theta-Funktion, die durch

$$\theta := \left(\tau \mapsto \begin{cases} 0 & \tau < 0; \\ 1 & \tau \geq 0; \end{cases} \right) : \mathbf{R} \to \mathbf{R};$$

definiert ist. Mit ihr schreibt man kurz

$$g(\tau) = \theta(\tau) \cdot \frac{e^{-\gamma \tau} \cdot \left(e^{\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \cdot \tau} - e^{-\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \cdot \tau} \right)}{2\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}}; \tag{4.7}$$

Man muß jetzt wieder zwischen den Fällen starker und schwacher Dämpfung unterscheiden und führt hierzu $\omega := \left| \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \right|$ und findet

$$g(\tau) = \theta(\tau) \cdot e^{-\gamma t} \cdot \begin{cases} \frac{\sinh \omega \tau}{\omega} & \text{Im Fall starker Dämpfung.} \\ \frac{\sin \omega \tau}{\omega} & \text{Im Fall schwacher Dämpfung.} \end{cases}$$

Um nun auf die ursprünglich gesuchte Funktion $x(t)$ zu kommen, müssen wir von der zu Beginn erwähnten Summation zum Integral und von Δt zum Differential dt übergehen. Dies liefert:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t-t') \cdot f(t')\, dt' = \int_{-\infty}^{t} \frac{e^{-\gamma(t-t')} \cdot \left(e^{\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \cdot (t-t')} - e^{-\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \cdot (t-t')} \right)}{2\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}} \cdot f(t')\, dt';$$

Um Schreibaufwand zu sparen schreibt man

$$\tilde{g}(t) := \frac{e^{-\gamma t} \cdot \left(e^{\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \cdot t} - e^{-\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \cdot t} \right)}{2\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}};$$

Nun prüft man, ob die gefundene Lösung für $x(t)$ — das Integral kann man ja stets exakt oder numerisch lösen, wenn $f(t)$ bekannt ist — auch tatsächlich die Differentialgleichung löst.

$$
\begin{aligned}
x(t) &= \int_{-\infty}^{t} \tilde{g}(t-t') \cdot f(t')\, dt'; \\
\dot{x}(t) &=^{3} \underbrace{\tilde{g}(0)}_{=0} \cdot f(t) + \int_{-\infty}^{t} \dot{\tilde{g}}(t-t') \cdot f(t')\, dt'; \\
\ddot{x}(t) &= \underbrace{\dot{\tilde{g}}(0)}_{=1} \cdot f(t) + \int_{-\infty}^{t} \ddot{\tilde{g}}(t-t') \cdot f(t')\, dt'; \\
\ddot{x}(t) + 2\gamma\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) &= f(t) + \int_{-\infty}^{t} \underbrace{\left(\ddot{\tilde{g}} + 2\gamma\dot{\tilde{g}} + \omega_0^2\tilde{g}\right)(t-t')}_{\substack{=0 \\ \text{Da } \tilde{g} \text{ eine Lösung der ho-} \\ \text{mogenen DGL ist.}}} \cdot f(t')\, dt' = f(t);
\end{aligned}
$$

Damit ist nachgewiesen, daß wir so tatsächlich eine Lösung erhalten.

Zusammenfassung der Greens-Funktions-Methode

Man findet die Green's Funktion g, indem man untersucht, wie das System auf einen infinitesimalen „Kraftstoß" reagiert. Durch Summation (= Integration) aller Kraftstöße kann man eine beliebige anregende Funktion f nachbilden und erhält die Lösung der Bewegungsgleichung ebenfalls als Integral über die Green's Funktion.
Zu beachten ist dabei, daß die Green's Funktion nicht eindeutig ist, denn man muß nicht — wie hier geschehen — davon ausgehen, daß der Kraftstoß auf das ruhende System wirkt.
An der Lösung läßt sich gut der sogenannte „Gedächnis-Effekt" erkennen. Der Faktor $e^{-\gamma(t-t')}$ unter dem Integral bewirkt, daß für den augenblicklichen Zustand des Systems hinreichend weit zurückliegende Einwirkungen keine Rolle mehr spielen.
Man beachte auch die Parallelen zu inhomogenen linearen Gleichungssystemen, deren Lösung mit Hilfe der inversen Matrix berechnet werden kann. In diesem Sinn ist die Funktionenabbildung $f(t) \mapsto x(t)$ eine Art Umkehrabbildung zum Differentialoperator. Im Gegensatz zum linearen Gleichungssystem wird hier jedoch nicht gefordert, daß die Abbildung umkehrbar ist. Man verwendet eine Umkehrung D^{-1} von D, für die nur $D \circ D^{-1} = \mathrm{id}$ gilt, aber nicht das Umgekehrte.

4.2.3 Die „Dirac'sche δ-Funktion"

Bisher haben wir zum Auffinden der Green's Funktion Rechteckfunktionen eingeführt, und an den Ergebnissen wurde ein Grenzübergang $\Delta t \to 0$ durchgeführt. Man möchte jedoch gern die Lösung gleich in der benötigten Form herleiten. Dies führt jedoch auf das Problem, daß einerseits die oben definierten Funktionen $\varphi_{\Delta t}$ dann divergieren und daß

[3] Zum Differenzieren solcher Integrale vergleiche Bronstein S.327

andererseits die Lösungen nicht hinreichend oft differenzierbar sind, also keine Lösungen einer umgeschriebenen DGL sein können.
Der Grenzübergang $\Delta T \to 0$ ist für $\varphi_{\Delta t}$ jedoch „unter einem Integral" möglich

$$\lim_{\Delta t \to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{\Delta t}(t-t') \cdot f(t')\, dt' = f(t);$$

Man kann also eine Funktion $\delta : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ durch die Beziehung

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-t') \cdot f(t')\, dt' = f(t);$$

definieren — das Bedauerliche ist jedoch, daß eine solche Funktion nicht existiert[4].
Definition:

Die Theta-Funktion ist gegeben durch

$$\theta := \left(\tau \mapsto \begin{cases} 0 & \tau < 0; \\ 1 & \tau \geq 0; \end{cases} \right) : \mathbf{R} \to \mathbf{R};$$

Man definiert das Symbol $\delta(t)$ für alle $t \in \mathbf{R}$ durch die Beziehung

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-t') \cdot f(t')\, dt' = f(t); \quad \forall t \in \mathbf{R}, f \in C(\mathbf{R});$$

Man nennt δ die „Dirac'sche δ-Funktion".

Eine (**unzulässige**) Anwendung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung ergibt

$$\frac{d}{dt}\theta(t) = \delta(t);$$

denn $\int_{-\infty}^{t} \delta(t')\, dt' = \theta(t)$.
Man kann in vielen Fällen δ wie eine Funktion behandeln, sollte jedoch immer wissen, daß es eigentlich keine ist. Dann kann man die nachfolgende DGL als Ausgangspunkt für die Green's Funktion verwenden (vgl. 4.6)

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + 2\gamma \frac{d}{dt} + \omega_0^2 \right) g(\tau) = \delta(\tau);$$

Man sieht nun leicht, daß die oben gefundene Green's Funktion diese DGL löst

$$\begin{aligned} g(t) &= \theta(t) \cdot \tilde{g}(t); \\ \dot{g}(t) &= \underbrace{\delta(t) \cdot \tilde{g}(t)}_{= \left\{ \begin{array}{ll} 0 \cdot \tilde{g}(t) & (t \neq 0) \\ \delta(0) \cdot 0 & (t = 0) \end{array} \right\} = 0} + \theta(t) \cdot \dot{\tilde{g}}(t) = \theta(t) \cdot \dot{\tilde{g}}(t); \end{aligned}$$

[4]Angenommen, sie existiert für stetige f, so würde sofort folgen, daß $\delta(t) = 0$ almost everywhere. Dann aber wäre das obige Integral immer Null — Also gibt es eine solche Funktion nicht.

$$\ddot{g}(t) = \underbrace{\delta(t)\cdot\dot{\tilde{g}}(t)}_{=\left\{\begin{array}{ll} 0\cdot\dot{\tilde{g}}(t) & (t\neq 0) \\ \delta(0)\cdot 1 & (t=0)\end{array}\right\}=\delta(t)} +\theta(t)\cdot\ddot{\tilde{g}}(t) = \delta(t)+\theta(t)\cdot\ddot{\tilde{g}}(t);$$

Wenn man beachtet, daß $\tilde{g}$ Lösung der homogenen Gleichung ist, sieht man, daß die gewünschte Beziehung gilt.

4.2.4 Fourier-Transformationen

Nachdem wir die Lösung der inhomogenen Gleichung 4.3 schon für $f(t) = f_0 \cos \Omega t$ kennen, kann man versuchen, andere f als Überlagerung solcher Schwingungen darzustellen. Man weiß, daß es für periodische Funktionen zumindest möglich ist eine Reihendarstellung

$$f(t) = \sum_{i=0}^{\infty} f_i \cos(it + \varphi_i);$$

zu finden. Ist f nicht periodisch, so führt häufig der Ansatz eines Fourier-Integrals zum Ziel

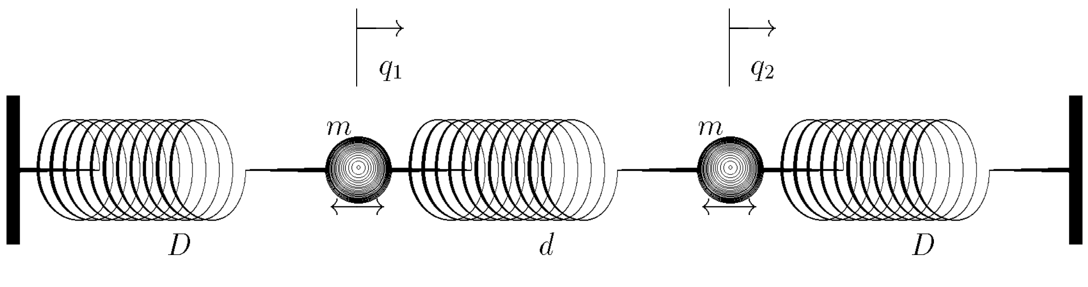
$$f(t) = \int_0^{\infty} (a(y)\cos ty + b(y)\sin ty)\; dy;$$

Man erhält die Gesamtlösung wieder durch Summation bzw. Integration über alle einzelnen Lösungen.

4.3 Lineare Systeme mit mehreren Freiheitsgraden

4.3.1 Beispiel: Zwei gekoppelte, ungedämpfte, harmonische Oszillatoren

Zunächst eine kleine Skizze des betrachteten Beispiels:



Es werden diesmal also zwei Massen betrachtet, die sich in horizontaler Richtung bewegen können. Man beachte, daß die beiden Massen gleich, die Federn am Rand jedoch anders (Federkonstante D) als die mittlere Feder sind (Federkonstante d). Es erweist sich als vorteilhaft, die in der Zeichnung angedeuteten Koordinaten zu verwenden. Dann ergibt sich als Potentielle Energie[5]

$$V(q_1, q_2) = \frac{D}{2} \cdot q_1^2 + \frac{D}{2} \cdot q_2^2 + \frac{d}{2} \cdot (q_1 - q_2)^2;$$

Nun ergibt partielles Differenzieren[6] zusammen mit dem Newton'schen Gesetz die Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned} m \cdot \ddot{q}_1 &= -Dq_1 + d(q_2 - q_1); \\ m \cdot \ddot{q}_2 &= -Dq_2 - d(q_2 - q_1); \end{aligned}$$

Man benötigt wieder Bezeichnungen

$$\omega_0^2 := \frac{D}{m}; \qquad \eta := \frac{d}{m};$$

Man schreibt nun:

$$\begin{aligned} \ddot{q}_1 + \omega_0^2 q_1 + \eta(q_1 - q_2) &= 0; \\ \ddot{q}_2 + \omega_0^2 q_2 + \eta(q_2 - q_1) &= 0; \end{aligned}$$

Dies ist ein System von zwei gekoppelten linearen Differentialgleichungen. Da der Differentialoperator

$$\mathcal{L}[\vec{q}] := \left\{ \frac{d^2}{dt^2} + \begin{pmatrix} \omega_0^2 + \eta & -\eta \\ -\eta & \omega_0^2 + \eta \end{pmatrix} \right\} (\vec{q}); \qquad \text{mit } \vec{q} := \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix};$$

linear ist, bilden die Lösungen der homogenen Gleichung $\mathcal{L}[\vec{q}] = 0$ stets einen Vektorraum. Die Linearität dieses Operators sieht man zum Beispiel so: Da der Differentialoperator und das Matrixprodukt lineare Operatoren sind, muß auch ihre Summe eine lineare Abbildung sein, denn die linearen (Selbst-)Abbildungen eines Vektorraums bilden wieder einen Vektorraum (eigtl. sogar eine Algebra).
Da man nun „nur“ noch eine Basis des Lösungsraumes benötigt, macht es Sinn, nach speziellen Lösungen zu suchen. Dabei garantiert zunächst nichts, daß der Lösungsraum überhaupt endlichdimensional ist, dies wird sich jedoch später ergeben.
Man versucht nun solche Lösungen zu finden, bei denen sich die beiden Massen gleichartig bewegen, d.h. mit der gleichen Frequenz schwingen. Dazu macht man den Ansatz

$$\vec{q}(t) = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \cdot \cos(\omega t - \delta);$$

[5] Diesmal wird nicht aus dem Kraftgesetz ein Potential hergeleitet, sondern das bekannte Potential wird direkt verwendet.

[6] Man mache sich klar, daß die partielle Ableitung das Gewünschte leistet.

Dies führt sofort auf ein algebraisches Gleichungssystem (wegen $\ddot{\vec{q}} = -\omega^2\vec{q}$):

$$\begin{pmatrix} \omega_0^2 + \eta - \omega^2 & -\eta \\ -\eta & \omega_0^2 + \eta - \omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = 0;$$

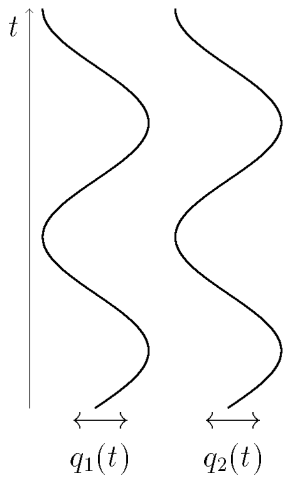
Für die Existenz nichttrivialer Lösungen muß die Determinante der Matrix verschwinden. Dies führt zur folgenden Lösung für ω:

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \eta \pm \eta = \begin{cases} \omega_0^2 = \frac{D}{m}; \\ \omega_0^2 + 2\eta = \frac{D+2d}{m}; \end{cases}$$

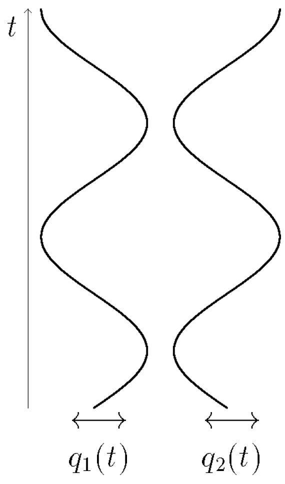
Man hat nun zu jeder der beiden Lösungen einen 1-dimensionalen Lösungsraum, aus dem man ein geeignetes Element auswählt, um eine Basis zu erhalten. In diesem Fall kann man z.B. die erste Konstante normieren: $c_1 = 1$. Dann erhält man als Lösungen

$$\vec{q}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \cos(\omega_0 t - \delta); \qquad \vec{q}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \cos(\sqrt{\omega_0^2 + 2\eta} \cdot t - \delta);$$

Man kann diese Lösungen leicht veranschaulichen



Hier sind schematisch die beiden gefundenen Lösungen dargestellt. Während im Fall $\omega = \omega_0$ die beiden Massen synchron schwingen und sich damit kaum gegenseitig beeinflussen (links), ist der andere Fall gerade der, bei dem die gegenseitige Beinflussung maximal ist (rechts). Beeinflussung heißt dabei, daß die Bewegung der einen Masse eine Kraft auf die andere Masse bewirkt.



Man definiert $\omega_1 := \omega_0$ und $\omega_2 = \sqrt{\omega_0^2 + 2\eta}$. Dann sind alle bisher gefundenen Lösungen von der Form

$$\vec{q}(t) = A_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \cos(\omega_1 t - \delta_1) + A_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \cos(\omega_2 t - \delta_2);$$

Man kann nun leicht zeigen, daß die Integrationskonstanten $A_1, A_2, \delta_1, \delta_2$ durch die Anfangsbedingungen $q_1(0), q_2(0), \dot{q}_1(0), \dot{q}_2(0)$ stets eindeutig bestimmt sind. Daher ist bereits die allgemeinste Lösung gefunden. (Und man sieht nun, daß der Lösungsraum tatsächlich endlichdimensional ist[7].) Die gefundene Basis besteht aus den sog. Fundamentalschwingungen. Allgemein

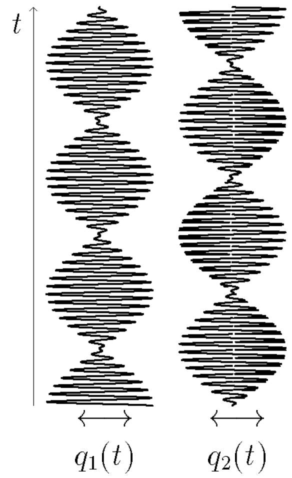
[7] Genaugenommen ist er 4-dimensional. Man hätte sich dies auch anhand der Anfangsbedingungen klarmachen können.

Definition

Eine Lösung der Bewegungsgleichung eines mehrdimensionalen harmonischen Oszillators heißt Fundamentalschwingung, wenn alle Koordinaten/Komponenten mit der gleichen Frequenz (oder gar nicht) schwingen.

Zum Abschluss sollen noch einige spezielle Anfangsbedingungen diskutiert werden.

1. $q_1(0) = q_2(0) = a$; $\dot{q}_1(0) = \dot{q}_2(0) = 0$; führt auf eine Fundamentalschwingung, nämlich
$$\vec{q} = a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \cos(\omega_1 t);$$
2. $q_1(0) = -q_2(0) = a$; $\dot{q}_1(0) = \dot{q}_2(0) = 0$; führt ebenfalls auf eine Fundamentalschwingung, nämlich
$$\vec{q} = a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \cos(\omega_2 t);$$
3. $q_1(0) = a$; $q_2(0) = 0$; $\dot{q}_1(0) = \dot{q}_2(0) = 0$; ist der interressanteste Fall. Rechnung ergibt
$$\begin{aligned} \vec{q} &= \frac{a}{2}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \cos(\omega_1 t) + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \cos(\omega_2 t)\right] = \\ &= a \cdot \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2} \cdot t\right) \cdot \cos\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2} \cdot t\right) \\ \sin\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2} \cdot t\right) \cdot \sin\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2} \cdot t\right) \end{pmatrix}; \end{aligned}$$



Im Fall schwacher Kopplung ($\omega_1 \approx \omega_2, \omega_1 - \omega_2 \ll \omega_1 + \omega_2, d \ll D$) ergibt sich das nebenstehende Bild einer Schwebung. Man kennt dieses Phänomen aus der Akustik, wo die Überlagerung zweier benachbarter Frequenzen zu einem solchen „schwebenden" Ton führt.

4.3.2 Normalkoordinaten

Wir sind im letzten Abschnitt auf eine Bewegungsgleichung der Form
$$\ddot{\vec{q}} = -\mathbf{M} \cdot \vec{q}; \tag{4.8}$$

mit einer reellen, symmetrischen Matrix $\mathbf{M}$ gestoßen. Ein Ansatz mit einer Exponentialfunktion $\vec{a} \cdot e^{\omega t}$ führt auf das algebraische System

$$\mathbf{M}\vec{a} = \omega^2 \vec{a};$$

Dies ist jedoch eine Eigenwertgleichung. Gesucht sind also die Eigenwerte (ω^2) und Eigenvektoren ($\vec{a}$). Da $\mathbf{M}$ reell und symmetrisch ist, existieren stets reelle Eigenwerte und die Matrix läßt sich diagonalisieren. Das Diagonalisieren entspricht einem Wechsel des Koordinatensystems. Da man die Eigenwerte und Eigenvektoren einer Diagonalmatrix unmittelbar ansieht, ist man bestrebt, die Bewegungsgleichung gleich für solche Koordinaten aufzustellen.

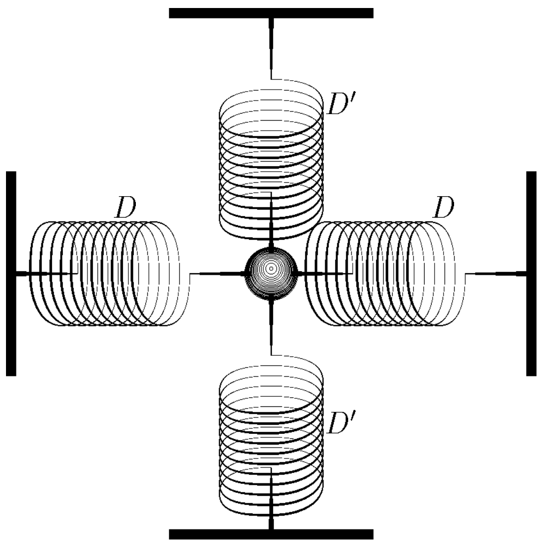
Definition:

Eine Bewegungsgleichung der Form 4.8 heißt entkoppelt, wenn die Matrix $\mathbf{M}$ diagonalisiert ist. Die zugehörigen Koordinaten heißen die Normal-, Haupt- oder Schwerpunktskoordinaten des Systems.

Diagonalisieren zeigt, daß im letzten Abschnitt

$$Q := \frac{q_1 + q_2}{2}; \qquad q := q_1 - q_2;$$

Normalkoordinaten gewesen wären.
Ein besonders einfaches Beispiel für die Nützlichkeit von Normalkoordinaten ist der anisotrope Harmonische Oszillator.



Führt man ein Koordinatensystem ein, bei dem x- und y-Achse parallel zu den Federn sind und der Ursprung in der Ruhelage der Masse liegt, so gilt

$$\begin{aligned} m \cdot \ddot{x} &= -Dx; \\ m \cdot \ddot{y} &= -D'y; \end{aligned}$$

und man erhält bereits die entkoppelten Bewegungsgleichungen. Nimmt man ein um den Winkel φ gedrehtes Koordinatensystem, so ergibt sich das wesentlich kompliziertere System

$$\begin{aligned} m \cdot \ddot{x}' &= -(D\cos^2\varphi + D'\sin^2\varphi) \cdot x' - D(\cos\varphi \cdot \sin\varphi) \cdot y'; \\ m \cdot \ddot{y}' &= -(D\sin^2\varphi + D'\cos^2\varphi) \cdot y' - D(\cos\varphi \cdot \sin\varphi) \cdot x'; \end{aligned}$$

Bei dem zugrundeliegenden Potential kann man die Hauptkoordinaten an den Äquipotentiallinien erkennen. Die Äquipotentiallinien sind bei diesem Problem nämlich Ellipsen und gerade die Koordinatensysteme, in denen diese Ellipsen Normalform haben, sind Hauptkoordinatensysteme. Wären die Äquipotentiallinien jedoch Kreise, so wäre jedes gedrehte System auch ein Hauptkoordinatensystem.

4.3.3 Lineare Systeme mit n FHG

Betrachtet werden Systeme mit Bewegungsgleichungen der Form 4.8. Dabei läßt man beliebige symmetrische $n \times n$-Matrizen zu.
Ein physikalisches System, das auf eine solche Bewegungsgleichung führt, ist zum Beispiel die Schwingerkette mit n Massen. Das sind n Massepunkte, die sich entlang einer Linie bewegen können und die mit Federn verbunden sind.
Man erhält mit dem Exponentialansatz wieder eine Eigenwertgleichung. Sind nun alle Eigenwerte ungleich Null, so hat man bereits eine Basis seines Lösungsraumes. Ist jedoch ein Eigenwert $= 0$, so ist eine lineare, gleichförmige Bewegung in Richtung des Eigenvektors eine Lösung der DGL. Dies passiert z.B. bei translationsinvarianten Systemen, wie der seitlich nicht befestigten Schwingerkette.
Sind mehrere Eigenwerte gleich, so spricht man von entarteten Frequenzen.
Die Äquipotentialflächen solcher Systeme sind stets Ellipsen, Ellipsoide bzw. deren n-dimensionale Verallgemeinerungen. Diese Figuren haben stets genau n Hauptachsen und diese bilden das Hauptkoordinatensystem, in dem die Bewegungsgleichung Diagonalform hat.

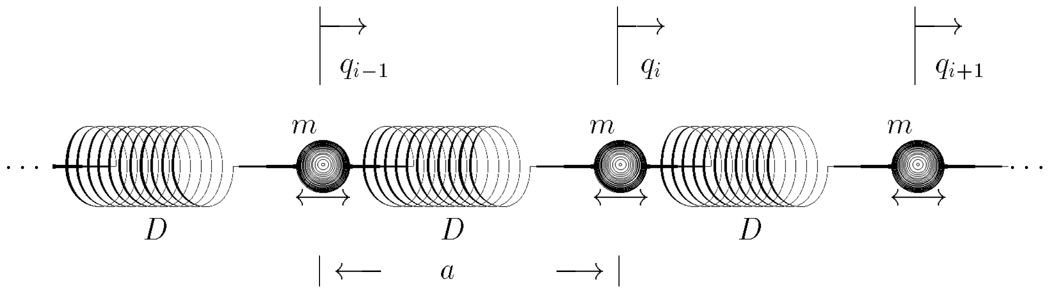
Kapitel 5

Kontinuierliche Systeme — Wellengleichung

Zum Abschluß des ersten Teiles sollen die Methoden verallgemeinert werden, so daß man auch kontinuierliche, schwingende Systeme untersuchen kann.

5.1 Erster Versuch: Unendliche Schwingerkette

Man betrachtet abzählbar-unendlich viele Massepunkte gleicher Masse, die mit Federn der Federkonstante D und Ruhelänge a untereinander entlang einer Linie verbunden sind. Alle Massen können nur entlang dieser Linie ausgelenkt werden. Die Auslenkung des i-ten Massepunktes aus seiner Ruhelage wird mit q_i bezeichnet. (Die Massepunkte seien in ihrer natürlichen Reihenfolge durch ganze Zahlen durchnumeriert).



Dann ergibt sich als Potential für den i-ten Massepunkt ($i \in \mathbf{Z}$)

$$V = \cdots + \frac{D}{2}(q_i - q_{i-1})^2 + \frac{D}{2}(q_{i+1} - q_i)^2 + \cdots;$$

Dies liefert abzählbar-unendlich viele Differentialgleichungen

$$\forall i \in \mathbf{Z}: \qquad m\ddot{q}_i = -D(2q_i - q_{i-1} - q_{i+1});$$

Da bei diesem System die bisherigen Lösungswege versagen, versucht man eine „Flucht nach vorne“:

5.2 Übergang zum Kontinuum

Man will den Grenzfall von überabzählbar vielen Massepunkten entlang einer Schwingerkette betrachten. Hierzu macht man die folgenden Grenzübergänge

$$a \to 0; \qquad m \to 0; \qquad D \to \infty;$$

Um nicht bei einem beliebigen System zu enden, sondern bei einem dem diskreten System noch ähnlichen, fordert man bestimmte Zusammenhänge zwischen diesen Größen

$$\frac{m}{a} = \text{const} =: \rho; \text{ Dichte.} \qquad D \cdot a = \text{const} =: \delta; \text{ Kopplungsstärke.}$$

Setzt man diese neuen Konstanten in die oben gefundenen Differentialgleichungen ein, so ergibt sich

$$\frac{\rho}{\delta}\ddot{q}_i = \frac{q_{i+1} - 2q_i + q_{i-1}}{a^2};$$

Durch Grenzübergang soll aus der Folge $(q_i(t), i \in \mathbf{Z})$ eine Funktion $q(x,t)$ mit $x \in \mathbf{R}$ werden. Damit kann man den Grenzübergang durchführen

$$\frac{\rho}{\delta}\frac{\partial^2}{\partial t^2}q(x,t) = \lim_{a\to 0}\frac{q(x+a,t) - 2q(x,t) + q(x-a,t)}{a^2};$$

Wegen

$$\frac{q(x+a,t) - 2q(x,t) + q(x-a,t)}{a^2} = \frac{\frac{q(x+a,t)-q(x,t)}{a} - \frac{q(x,t)-q(x-a,t)}{a}}{a};$$

hat man

$$\lim_{a\to 0}\frac{q(x+a,t) - 2q(x,t) + q(x-a,t)}{a^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}q(x,t);$$

Definert man nun noch $\frac{\rho}{\delta} =: \frac{1}{v^2}$, so erhält man die

Wellengleichung:

$$\left(\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) q(x,t) = 0;$$

Die Wellengleichung ist eine partielle lineare Differentialgleichung 2. Ordnung. Als Anfangsbedingung müssen die gesamten Funktionen $q(x,0)$ und $\dot{q}(x,0)$ vorgegeben werden.

5.3 Lösung der Wellengleichung

Man schreibt die Wellengleichung um

$$\left[\left(\frac{1}{v}\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\right)\right) \cdot \left(\frac{1}{v}\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right)\right)\right] q(x,t) = 0;$$

definiert neue Variable

$$x^+ := x + vt; \qquad x^- := x - vt;$$

und erhält

$$\begin{aligned}
x &= \frac{x^+ + x^-}{2};\\
vt &= \frac{x^+ - x^-}{2};\\
\frac{\partial}{\partial x^+} &= \frac{\partial x}{\partial x^+}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial(vt)}{\partial x^+}\frac{\partial}{\partial(vt)} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial(vt)}\right);\\
\frac{\partial}{\partial x^-} &= \frac{\partial x}{\partial x^-}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial(vt)}{\partial x^-}\frac{\partial}{\partial(vt)} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial(vt)}\right);
\end{aligned}$$

Man definiert weiter

$$Q(x^+, x^-) := q\left(\frac{x^+ + x^-}{2}, \frac{x^+ - x^-}{2}\right) = q(x,t);$$

Damit erhält man eine besonders einfache Darstellung der Wellengleichung

$$\frac{\partial}{\partial x^-}\frac{\partial}{\partial x^+}Q(x^+, x^-) = 0;$$

Dieser Gleichung sieht man die Lösung sofort an:

$$Q(x^+, x^-) = F(x^+) + G(x^-); \qquad F, G \in C^1(\mathbf{R}) \text{ beliebig.}$$

Das heißt als Lösung für q:

$$q(x,t) = F(x + vt) + G(x - vt);$$

Anschaulich bedeuted dies, daß sich Wellen beliebiger Form mit der Geschwindigkeit v nach links und/oder nach rechts ausbreiten können. Die Form ändert sich dabei nicht. Will man auch die in der Natur beobachtete Formänderung berechnen, so benötigt man ein anderes Modell, daß dann die Dispersion (Frequenzabhängigkeit von v) enthält.

5.4 Anfangswertprobleme

Wie schon gesagt benötigt man in diesem Fall die Vorgabe der Funktionen

$$\begin{aligned}
q(x,0) &= a(x);\\
\dot{q}(x,0) &= b(x);
\end{aligned}$$

Allgemein hat man

$$\begin{aligned} q(x,t) &= F(x+vt)+G(x-vt); \\ \dot{q}(x,t) &= v\cdot(F'(x+vt)-G'(x-vt)); \\ &\Rightarrow\ F(x)-G(x)=F(x_0)-G(x_0)+\frac{1}{v}\int_{x_0}^{x} b(x')\,dx'; \end{aligned}$$

Damit erhält man

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{2}\left(F(x_0)-G(x_0)+a(x)+\frac{1}{v}\int_{x_0}^{x} b(x')\,dx'\right); \\ G(x) &= \frac{1}{2}\left(G(x_0)-F(x_0)+a(x)+\frac{1}{v}\int_{x_0}^{x} b(x')\,dx'\right); \end{aligned}$$

Eingesetzt in $q(x,t)$ ergibt sich

$$q(x,t)=\frac{a(x+vt)+a(x-vt)}{2}+\frac{1}{2v}\int_{x-vt}^{x+vt} b(x')\,dx';$$

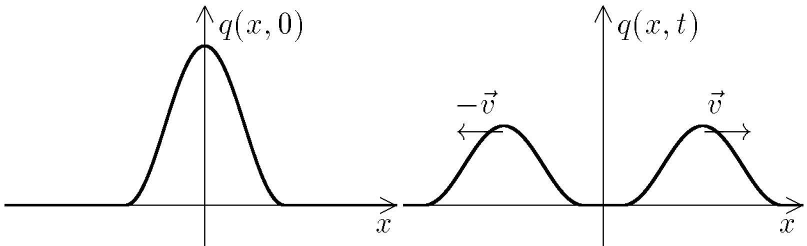
Dies ist eine Lösung unseres Anfangswertproblems. Man vermutet, daß diese Lösung eindeutig ist, und daß wir damit bereits alle Lösungen gefunden haben (Beweis ?!).
Zwei Beispiele

1. Sei $a\in C^1(\mathbf{R})$ beliebig, $b\equiv 0$.

   Dann erhält man die Lösung

   $$q(x,t)=\frac{a(x+vt)+a(x-vt)}{2};$$

   Dies heißt, daß sich jeweils eine Welle halber Amplitude aber gleicher Form nach links und rechts ausbreitet.



   Hier die Situation zur Zeit $t=0$.

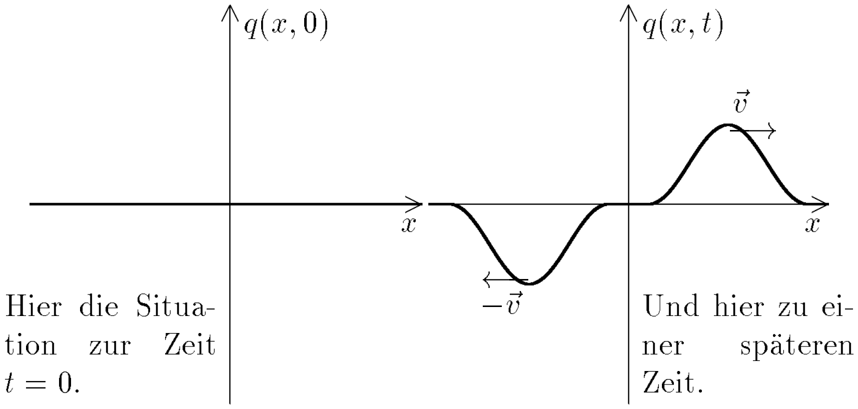
   Und hier zu einer späteren Zeit.

2. Sei $b\in C(\mathbf{R})$ beliebig, $B\in C^1(\mathbf{R})$ eine zugehörige Stammfunktion und $a\equiv 0$.

Dann erhält man die Lösung

$$q(x,t) = \frac{1}{2v}(B(x+vt) - B(x-vt));$$

Dies heißt, daß sich wieder Wellen gleicher Gestalt nach links und rechts ausbreiten, doch diesmal ist das Vorzeichen der Ausschläge gerade umgekehrt.



5.5 Eigenschwingungen

Wie im diskreten Fall will man auch hier Lösungen der Form

$$q(t) = c \cdot \cos(\omega t - \delta);$$

untersuchen. Dabei müssen c und $q(t)$ jedoch C^1-Funktionen sein. Geht man mit diesem Ansatz in die Wellengleichung, so ergibt sich

$$\left(\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)(c(x)\cdot\cos(\omega t - \delta)) = \left(-\frac{\omega^2}{v^2} - \frac{d^2}{dx^2}\right)c(x)\cdot\cos(\omega t - \delta) = 0;$$

mit $k := \frac{\omega}{v}$ ergibt sich

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + k^2\right)c(x) = 0;$$

Man erhält nun offenbar für jedes ω eine Lösung der Form

$$c(x) = A \cdot \cos(kx - \alpha);$$

Die Fundamentalschwingungen heißen hier monochromatische Wellen und sind von der Form

$$q(x,t) = A \cdot \cos(kx - \alpha) \cdot \cos(\omega t - \delta);$$

Die räumliche Ausdehnung der Wellenberge wird mit durch die Zahl $\lambda := 2\pi k$ angegeben. λ heißt die Wellenlänge.
Die hier gefundenen Lösungen sind eigentlich besser bekannt unter dem Namen „stehende Wellen“. Hier gibt es sie mit jeder beliebigen Frequenz. Dies ändert sich jedoch, wenn man endliche Systeme betrachtet, die an den Enden festgemacht sind.

Teil II

Theoretische Physik I — Mechanik

Kapitel 6

Abrundung der Newton'schen Mechanik

6.1 Der Phasenraum

6.1.1 Vorbemerkung: Vektoranalysis

Die Hilfsmittel der Vektoranalysis werden hier nicht wiedergegeben — ich verweise auf die einschlägige Fachliteratur. Einige Definitionen sind jedoch in der „reinen“ Analysis fast unbekannt:

Vereinbarung:

Es wird vereinbart daß in jedem Ausdruck, der mindestens so stark gebunden ist wie ein Produkt (z.B. Produkt, Quotient, ...) und in dem ein Index an mindestens zwei verschiedenen Stellen auftritt, über diesen Index zu Summieren ist — und zwar über den gesamten Wertebereich des Index —, falls dieser Index nicht global einen bestimmten Wert hat.
Von dieser Konvention wird im Folgenden ohne weitere Hinweise Gebrauch gemacht. Man beachte jedoch, daß im Abschnitt über Relativitätstheorie — und nur dort — eine etwas andere Summenkonvention verwendet wird.
Diese Konvention heißt „Einstein'sche Summenkonvention“.

Definition:

Das Levy-Civita-Symbol ϵ_{ijk} ist definiert durch

$$\forall i,j,k \in \{1,2,3\}: \qquad \epsilon_{ijk} := \begin{cases} 0 & \text{falls } \{i,j,k\} \neq \{1,2,3\}; \\ \text{sgn }(i,j,k) & \text{falls } (i,j,k) \text{ Permutation von } (1,2,3). \end{cases}$$

Es gilt der folgende Zusammenhang mit dem Kronecker-δ

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{ilm} = \delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl};$$

Und für beliebige Vektoren $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{R}^3$ gilt

$$\vec{x} \times \vec{y} = \left(\epsilon_{ijk}x_j y_k\right)_{1 \leq i \leq 3};$$

6.1.2 Definitionen: Phasenraum — Konfigurationsraum

Zur Motivation betrachtet man ein konservatives System mit einem FHG. Hier gilt - wenn q den Ort des Teilchens bezeichnet und U das Potential

$$m\ddot{q} = -\frac{dU}{dq};$$

Mit der Energie

$$E = \frac{m}{2}\dot{q}^2 + U(q);$$

gilt

$$\dot{q} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}(E - U(q))};$$

und man findet die Lösungen durch

$$\int dt = \pm \int \frac{dq}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U(q))}};$$

Einerseits legt die bisher verwendete Koordinate q — sie beschreibt den bereits definierten Konfigurationsraum — die Position unseres Systems im Anschauungsraum fest. Andererseits genügt es nicht, q zu einem bestimmten Zeitpunkt zu kennen, um die Bewegung beschreiben zu können. Hierzu sind die zwei Anfangsbedingungen $q(t_0), \dot{q}(t_0)$ notwendig. Daher ist der Konfigurationsraum völlig ungeeignet, wenn man die Gesamtheit aller möglichen Bewegungen untersuchen will. Man verwendet hierzu den sog. Phasenraum

Definition:

Der Phasenraum entsteht aus dem Konfigurationsraum eines Systems, indem man zu jeder Ortskoordinate q_i die zugehörige Impulskoordinate $p_i = m\dot{q}_i$ hinzufügt. Damit ist die Dimension des Phasenraums doppelt so groß wie die des Konfigurationsraums.

Die Phasenraumgeschwindigkeit $\vec{v}_{\text{Phase}}$ ist definiert durch

$$\vec{v}_{\text{Phase}} := \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \vec{q} \\ \vec{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\vec{p}}{m} \\ \vec{F}(\vec{q}) \end{pmatrix};$$

Zuweilen faßt man den Phasenraum auch als den Graphen der Funktion

$$E \equiv H(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{p^2}{2m} + U(\vec{q}); \tag{6.1}$$

auf. Diese Darstellung ist völlig gleichwertig zu der obigen, doch man kann viele Dinge anhand dieser plastischen Darstellung besser veranschaulichen.
Man betrachtet die Bahn eines Teilchens auch im Phasenraum. Die Menge aller Punkte $(\vec{q}(t), \vec{p}(t))$ mit t beliebig heißt Phasenkurve oder Phasenbahn.
Zeichnungen des (2-dim.) Phasenraums, die eine repräsentative Auswahl von Phasenraumkurven enthalten, heißen Phasenportraits.

6.1.3 Elementare Eigenschaften

Aus der Motivation für die Einführung eines Phasenraums folgt sofort:

Durch jeden Punkt im Phasenraum geht genau eine Phasenkurve.

Bei konservativen Systemen ist die Energie entlang einer Phasenkurve erhalten. Daß heißt, daß die Phasenraumkurven gerade die Linien gleichen Niveaus in der Darstellung 6.1 sind. (Höhenlinien — wenn man den Phasenraum als Karte des Funktionsgraphen auffasst)

Beispiel 1: Harmonischer Oszillator

Hier ist

$$\begin{aligned} U(q) &= \frac{1}{2}m\omega^2 q^2; \\ H(p,q) &= \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2; \\ F(q) &= -m\omega^2 q; \\ \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{p}{m} \\ -m\omega^2 q \end{pmatrix}; \end{aligned}$$

Man definiert

$$\begin{aligned} \tilde{q} &:= \sqrt{m}\cdot\omega q; \\ \tilde{p} &:= \frac{1}{\sqrt{m}}\cdot p; \\ \tau &:= \omega t; \end{aligned}$$

und erhält als besonders einfache Darstellung des Phasenraums

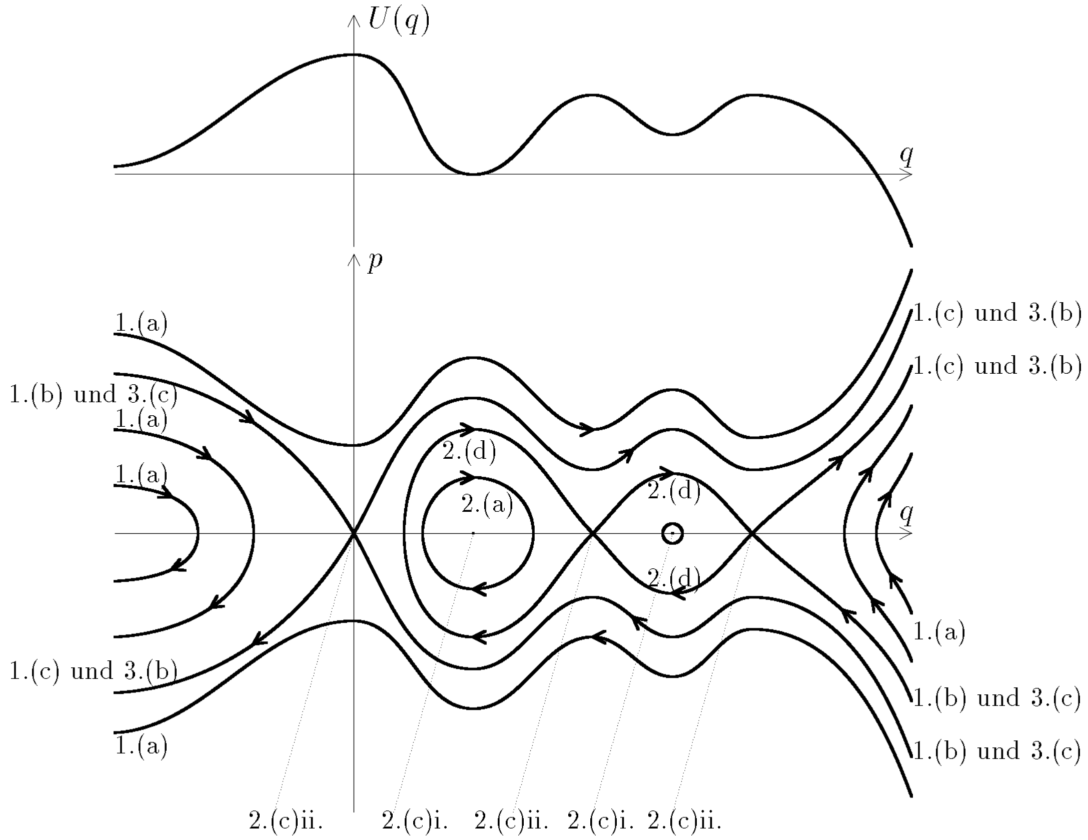
$$\begin{aligned} \tilde{H}(\tilde{p},\tilde{q}) &= \frac{1}{2}\left(\tilde{p}^2+\tilde{q}^2\right); \\ \frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\tilde{q}\\ \tilde{p}\end{pmatrix} &= \frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\tilde{p}\\ -\tilde{q}\end{pmatrix}; \end{aligned}$$

In dieser Darstellung haben wir also Kreise mit dem Radius $\sqrt{2}E$. Allgemein hätten sich Ellipsenbahnen ergeben.
Nachdem wir oben gesagt haben, daß durch jeden Punkt des Phasenraums genau eine Phasenkurve geht, drängt sich hier die Frage auf, welche Kurve durch den Nullpunkt geht. Hierzu die folgende Feststellung

> An den Punkten $(\vec{q}_0,\vec{p}_0)$, für die $\vec{v}_{\text{Phase}}=0$ gilt, befindet sich das System im Gleichgewicht. Die zugehörige Phasenraumkurve besteht nur aus diesem einen Punkt. Man nennt diesen Punkt eine Gleichgewichtslage, einen Fixpunkt oder einen kritischen Punkt des Systems.

6.1.4 Klassifikation der Phasenraumkurven

Hier eine qualitative Skizze eines Phasenraums. Die Nummern verweisen auf die nachstehenden Erläuterungen



Man unterscheidet die folgenden Bahntypen:

1. unbeschränkte Bahnen

   (a) Streubahnen
   sind diejenigen Bahnen, für die

   $$\lim_{t\to-\infty} q(t) = \pm \lim_{t\to\infty} q(t) = \pm\infty;$$

   gilt. Dabei unterscheidet man im 1-dim. zwischen Bahnen, die einen Umkehrpunkt erreichen (also reflektiert werden) und solchen, die dies nicht tun. In mehrdimensionalen Konfigurationsräumen gibt es hier keine Unterschiede mehr.

   (b) Einfangbahnen
   sind Bahnen, die, aus dem Unendlichen kommend, auf einen Fixpunkt zulaufen. Dieser wird i.A. nur näherungsweise erreicht (im Limes $t \to \infty$).

   (c) Fluchtbahnen
   sind das Gegenteil von Einfangbahnen. Der Fixpunkt ist der Grenzwert für $t \to -\infty$. Für große Zeiten entfernen sich diese Bahnen ins Unendliche.

2. bechränkte Bahnen

   (a) Periodische Bahnen
   sind alle Bahnen, die nach einer bestimmten Zeit $t_0 \in]0, \infty[$ zu ihrer Ausgangslage zurückkehren (also keine Gleichgewichtslagen).

   (b) Diejenigen Bahnen, die eine „quasiperiodische“ Bewegung ausführen (also nur annähernd in ihre Ausgangslage zurückkehren), haben keine eigene Bezeichnung.

   (c) Fixpunkte
   sind die Bahnen, die nur aus einem Punkt bestehen, dem Fixpunkt. Es ist zu beachten, daß sich diese Bahnen nicht mit den Bahnen schneiden, die auf den Fixpunkt zulaufen oder sich von ihm entfernen.
   An den Fixpunkten gilt

   $$p_0 = 0; \qquad \frac{dU}{dq}(q_0) = 0;$$

   Man macht eine Taylorentwicklung

   $$U(q) \approx U(q_0) + \frac{1}{2}U''(q_0) \cdot (q - q_0)^2;$$

   und unterscheidet

i. Elliptische Fixpunkte ($U''(q_0) > 0$)
sind Fixpunkte, die in einem Minimum des Potentials liegen und von periodischen oder quasiperiodischen Bahnen umgeben sind.

ii. Hyperbolische Fixpunkte ($U''(q_0) < 0$)
sind Fixpunkte, die in einem Maximum des Potentials liegen und zum Teil von Streubahnen umgeben sind.

iii. Indifferente Fixpunkte ($U''(q_0) = 0$)
nenne ich diejenigen, die zu keiner der obigen Kathegorien gehören (Sattelpunkte des Potentials).

(d) Separatrix
heißen Bahnen, die Fixpunkte verbinden.

3. Separatrix
ist auch ein übergeordneter Begriff für all die Bahnen, die Bereiche voneinander abgrenzen, in denen verschiedene Bahntypen vorkommen. Insbesondere sind dies

   (a) Die oben genannten Separatrix.
   (b) Fluchtbahnen (bei Nichtinertialsystemen nicht immer).
   (c) Einfangbahnen (bei Nichtinertialsystemen nicht immer).
   (d) ...

6.1.5 Phasenraumfluß

Man frägt nun nach dem zeitlichen Verlauf der Bahnen im Phasenraum. Hierzu ist nochmals die Sichtweise der Phasenraumkurven als Höhenlinien der Energie wichtig.
Es gilt

$$
\begin{aligned}
E &= H(p,q) = \frac{p^2}{2m} + V(q);\\
\vec{\nabla} H(p,q) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial q} \\ \frac{\partial H}{\partial p} \end{pmatrix};\\
\vec{v}_{\text{Phase}} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial p} \\ -\frac{\partial H}{\partial q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{p}{m} \\ -\frac{dV}{dq} \end{pmatrix};\\
&\text{Also:}\\
\vec{v}_{\text{Phase}} &\perp \vec{\nabla} H(p,q);\\
|\vec{v}_{\text{Phase}}| &= |\vec{\nabla} H(p,q)|;\\
\vec{v}_{\text{Phase}} &\sim \frac{1}{\text{Abstand E-äquidistanter Phasenraumkurven}};
\end{aligned}
$$

Dies ermöglicht ein besseres Interprtieren des Phasenportraits — aus dem ja normalerweise die zeitliche Entwicklung nicht quantitativ bestimmbar ist.

Mehr analythisch ist die folgende Überlegung:
Zu jedem Zeitpunkt t_0 kann jedem Punkt des Phasenraums ein Physikalisches System zugeordnet werden, dessen Bewegung durch den Punkt eindeutig festgelegt ist. Das heißt, es gibt für jede Zeit t eine Abbildung, die jedem Punkt $\begin{pmatrix} q(t_0) \\ p(t_0) \end{pmatrix}$ den Punkt $g^{(t,t_0)} \begin{pmatrix} q(t_0) \\ p(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q(t) \\ p(t) \end{pmatrix}$ zuordnet.
Wenn das System selbst nicht zeitabhängig ist, d.h. $\frac{\partial V}{\partial t} = 0$ — das System heißt dann autonom, dann bilden die Abbildungen $\{g^{(t)} := g^{(t,0)} | \ t \in \mathbf{R}\}$ eine Gruppe mit der Komposition als Verknüpfung, denn es gilt $g^{(t+s)} = g^{(t)} \circ g^{(s)}$. Diese Gruppe heißt der Phasenraumfluß.
Insbesondere in Statistischen Mechanik ist der Phasenraumfluß ein geeignetes Mittel, um viele Prozesse gleichzeitig zu studieren.
Bei konservativen Systemen ist der Phasenraumfluß eine Gruppe volumenerhaltender Abbildungen. (Im Folgenden werden die Eigenschaften der Abbildungen mit denen des Phasenraumflußes identifiziert.)
Man sieht dies z.B. so[1]

$$\text{div}\ \vec{v}_{\text{Phase}} = \vec{\nabla} \cdot \vec{v}_{\text{Phase}} = \frac{\partial}{\partial q}\frac{\partial H}{\partial p} + \frac{\partial}{\partial p}\left(-\frac{\partial H}{\partial q}\right) = 0;$$

Bei nichtkonservativen Systemen ist dies anders. Bei Prozessen mit Energieverlust (Reibung) ist der Phasenfluß kontrahierend, bei Systemen mit Energiezunahme ist er Volumenvergrößernd.
Phasenraumuntersuchungen sind also sehr aufschlußreich für das Verhalten von mechanischen Systemen. Aber die hier immer wieder angesprochene Anschaulichkeit versagt sehr schnell, wenn größere Systeme untersucht werden. Die Zahl der Dimensionen des Phasenraums ist nämlich

$$= 2 \cdot \ (\text{Zahl der Teilchen}) \ \cdot \ (\text{FHG je Teilchen})\ ;$$

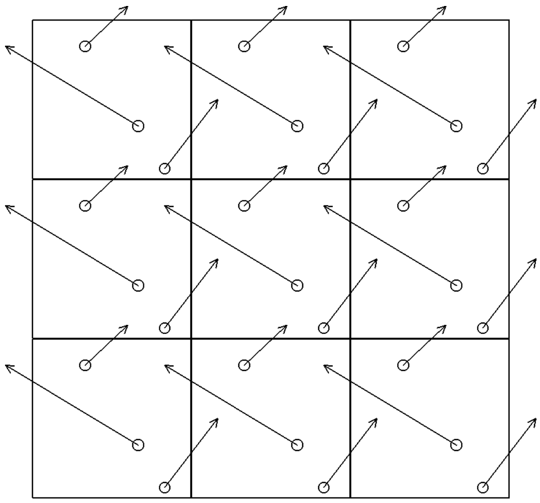
Also sind bereits Systeme mit 2 FHG bei einem Teilchen nicht mehr elementar zu veranschaulichen (4 Dimensionen lassen sich nur noch durch Projektionen oder ähnliche Tricks darstellen).

6.1.6 Numerische Berechnungen

Systeme mit mehr als 2 FHG lassen sich häufig nicht mehr analythisch lösen. Daher ist die Numerische Berechnung der Lösungen der Bewegungsgleichungen besonders dann von

[1]Anschaulich ist die durch eine Oberfläche tretende Anzahl von Teilchen (bei konstanter Teilchendichte) proportional zum Skalarprodukt aus $\vec{v}_{\text{Phase}}$ und dem Normalenvektor dieser Fläche. Man wird also die Änderung der Teilchenanzahl in einem Raumgebiet erhalten, wenn man dieses Skalarprodukt über die Oberfläche integriert. Der Gauß'sche Integralsatz sagt nun, daß dieses Integral dem Integral der Divergenz von $\vec{v}_{\text{Phase}}$ über das eingeschlossene Volumen gleich ist. Also ist das Verschwinden dieser Größe eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Volumenerhaltung des Phasenraumflusses.

Bedeutung, wenn prinzipiell nur Systeme mit sehr vielen FHG auftreten, wie etwa in der Molekularphysik, wo für makroskopische Körper etwa 10^{23} Teilchen beschrieben werden sollen. Auch numerisch lassen sich solche Systeme jedoch nur beschränkt betrachten.
Als erstes Beispiel betrachten wir „Correlations in the Motion of Atoms in Liquid Argon" nach A. Rahmann aus Phys. Rev. 136 (1964) Ah05.
Betrachtet werden 864 Atome im 3-dim. Konfigurationsraum mit periodischen Randbedingungen. Das heißt, daß man eine theoretisch unendliche Materiemenge annimmt, die aus Gruppen von jeweils 864 Atomen aufgebaut ist, die sich gleichartig bewegen. Also 1/864 aller Atome bewegt sich parallel zum Atom 1 der betrachteten Population. Man nimmt zu Beginn eine homogene Verteilung der 864 Atome in einem Würfel und packt den Raum dicht mit diesen Würfeln. Das hat zur Folge, daß immer dann, wenn ein Teilchen diesen Würfel verläßt, aus einem anderen Würfel ein Teilchen der gleichen Nummer mit den gleichen physikalischen Daten eintritt. Im zweidimensionalen veranschaulicht die folgende Skizze die Situation.



Man verwendet das „Lennard-Jones"-Zweiteilchenpotential

$$V(r) = c\left(\left(\frac{r_0}{r}\right)^{12} - \left(\frac{r_0}{r}\right)^{6}\right);$$

Man hat dann Differentialgleichungen der Form

$$\frac{d}{dt}x_i = v_i(x_1, \dots, x_n);$$

die für $i = 1, \dots, 864$ ausgewertet werden müssen. Man muß jedoch $n \approx 5000$ Teilchen berücksichtigen, die die Bewegung von Teilchen i beeinflussen.
Mit $\Delta t = 10^{-14}$ und $t_k := k \cdot \Delta t$ gilt näherungsweise

$$\frac{x_i(t_{k+1}) - x_i(t_k)}{\Delta t} = v_i(x_1(t_k), \dots, x_n(t_k));$$

für alle $k \in \mathbf{N}$ Dies führt auf die Euler-Methode zur numerischen Lösung der Differentialgleichung

$$x_i(t_{k+1}) = x_i(t_k) + \Delta t \cdot v_i(x_1(t_k), \ldots, x_n(t_k));$$

deren Fehler $\sim o\left((\Delta t)^2\right)$ ist.
Ein zweites Beispiel ist „Simulation of Wetting and Drying of solid-fluid Interfaces on the Delft Molecular Dynamics Procession". Nachzulesen bei J.H. Sikkenk and etc. in Journal of Statistical Physics 52 (1988) 23.
Der Festkörper wurde simuliert durch eine 3 Teilchen dicke Schicht mit insgesamt 2904 Teilchen. Die Flüssigkeit bestand aus 8500 Teilchen mit periodischen Randbedingungen. Die Wechselwirkung wurde wieder mit dem Lennard-Jones-Potential beschrieben.
Dies führte auf 20.000 gekoppelte Differentialgleichungen 1. Ordnung. Für die Berechnung waren 2000 CPU-Stunden (83 Tage) an Spezialcomputern (Rechengeschwindigkeit von Cray 1) nötig.

6.2 Nicht-Inertialsysteme und Trägheitskräfte

6.2.1 Vorüberlegungen

Bisher wurden nur Inertialsysteme betrachtet, das heißt solche, für die bei kräftefreier Bewegung

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = 0;$$

gilt. Ein beliebiges Koordinatensystem, in dem derselbe Massepunkt durch $\vec{r}'$ beschrieben wird, kann durch die Gültigkeit der Beziehung

$$\frac{d^2\vec{r}\,'}{dt^2} = \vec{f}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t);$$

bei kräftefreier Bewegung beschrieben werden. Ziel ist es nun, die Funktion $\vec{f}$ aus dem Koordinatensystem zu berechnen.
Hierzu muß zunächst geklärt werden, in welcher Form die Bezugssysteme dargestellt werden sollen. Prinzipiell werden nur Orthonormalsysteme betrachtet, die aber zeitabhängig sein dürfen. Im einzelnen

- Inertialsystem I $\longrightarrow$ $(\vec{0}, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.
- bewegtes Bezugssystem B $\longrightarrow$ $(\vec{0}', \vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2, \vec{e}\,'_3)$.

Die Beziehung zwischen den beiden Bezugssystemen wird in zwei Teilen behandelt.
Zuerst führt man eine Translation von $\vec{0}$ nach $\vec{0}'$ durch. Dann führt eine Drehung zum Ziel[2]. Diese kann durch eine Orthogonale Matrix $R \in SO_3(\mathbf{R})$ beschrieben werden. In

[2]Spiegelungen werden aufgrund ihrer geringen physikalischen Relevanz nicht betrachtet. Also sind die beiden Systeme Rechts-Orthonormalsysteme.

Formeln

$$\vec{0}' = \vec{0} + \vec{c}; \qquad \vec{e}'_i = R\vec{e}_i; \; (1 \leq i \leq 3);$$

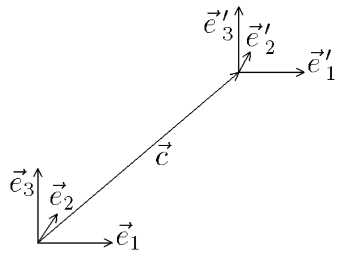
In Komponenten erhält man den Folgenden Zusammenhang zwischen den Systemen

$$r'_i = \vec{r}' \cdot \vec{e}'_i = (\vec{r} - \vec{c}) \cdot R\vec{e}_i = r_k \cdot \vec{e}_k R\vec{e}_i - \underbrace{\vec{c}R\vec{e}_i}_{=:d_i} = r_k R_{ki} - d_i = (R^t)_{ik} \cdot r_k - d_i;$$

6.2.2 Wirkung der Translation

Wir betrachten nun die Wirkung einer Zeitabhängigen Translation um den Vektor $\vec{c}(t)$. Es gelte also

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{c};$$



Damit gilt

$$\begin{aligned} \vec{r} &= \vec{r}' + \vec{c}; \\ \dot{\vec{r}} &= \dot{\vec{r}}' + \dot{\vec{c}}; \\ \ddot{\vec{r}} &= \ddot{\vec{r}}' + \ddot{\vec{c}}; \end{aligned}$$

Wenn nun im Inertialsystem die Bewegungsgleichung

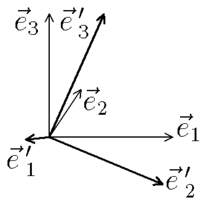
$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}^{(\mathrm{I})} = \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}}, t);$$

Dann gilt offenbar

$$\begin{aligned} m(\ddot{\vec{r}}' + \ddot{\vec{c}}) &= \vec{F}(\vec{r}' + \vec{c}, \dot{\vec{r}}' + \dot{\vec{c}}, \ddot{\vec{r}}' + \ddot{\vec{c}}, t) = \vec{F}^{(\mathrm{B})}; \\ m\ddot{\vec{r}}' &= \vec{F}^{(\mathrm{B})} \underbrace{- m\ddot{\vec{c}}}_{\text{„Scheinkraft"}}; \end{aligned}$$

damit ist für den Fall einer Translation die neue Bewegungsgleichung gefunden.

6.2.3 Wirkung der Drehung



Hier gilt $\vec{r} = \vec{r}'$. Also

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \underbrace{\dot{r}_i\vec{e}_i}_{=:\vec{v}^{\mathrm{I}}} = \underbrace{\dot{r}'_i\vec{e}'_i}_{=:\vec{v}^{\mathrm{B}}} + r'_i\dot{\vec{e}}'_i;$$

Es ist zu beachten, daß

$$\vec{v}^{\mathrm{B}} = \left(\frac{d}{dt}\right)^{\mathrm{B}} \vec{r} \neq \left(\frac{d}{dt}\right)^{\mathrm{I}} \vec{r} = \vec{v}^{\mathrm{I}};$$

Für den Differenzterm $r'_i\dot{\vec{e}}'_i$ benötigt man die Beziehungen

$$\begin{aligned} & \vec{e}'_i = R\vec{e}_i; \\ \Rightarrow \; & \dot{\vec{e}}'_i = \dot{R}(t)\vec{e}_i = \dot{R}(t)R^t(t)\vec{e}'_i; \\ & RR^t = E_3; \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\Rightarrow \quad \underbrace{\dot{R}R^t}_{=:A} + \underbrace{R\dot{R}^t}_{=A^t} = 0;\\
A \quad &=: \quad \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix};\\
A\vec{x} \quad &= \quad \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_2 x_3 - \omega_3 x_2 \\ \omega_3 x_1 - \omega_1 x_3 \\ \omega_1 x_2 - \omega_2 x_1 \end{pmatrix} = \vec{\omega} \times \vec{x};
\end{aligned}
$$

Damit ergibt sich

$$\frac{d}{dt}\vec{e}\,'_i = [\vec{\omega}(t) \times \vec{e}\,'_i]\,;$$

Den so definierten Vekor $\vec{\omega}$ kann man sehr anschaulich interprtieren. $\hat{\vec{\omega}}(t)$ beschreibt die Richtung der momentanen Drehachse, $|\vec{\omega}|$ ist die derzeitige Drehgeschwindigkeit.
Damit har man für die Geschwindigkeiten

$$\vec{v}^{\mathrm{I}} = \vec{v}^{\mathrm{B}} + r'_i \cdot (\vec{\omega}(t) \times \vec{e}\,'_i) = \vec{v}^{\mathrm{B}} + \vec{\omega}(t) \times \vec{r}\,';$$

Und nun zur zweiten Ableitung

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \quad &= \quad \ddot{r}_i \vec{e}_i =: \vec{a}^{\mathrm{I}};\\
\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \quad &= \quad \underbrace{\ddot{r}'_i \vec{e}\,'_i}_{=:\vec{a}^{\mathrm{B}}} + 2\dot{r}'_i \dot{\vec{e}}\,'_i + r'_i \ddot{\vec{e}}\,'_i;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
2\dot{r}'_i \dot{\vec{e}}\,'_i \quad &= \quad 2\dot{r}'_i\,(\vec{\omega}(t) \times \vec{e}\,'_i) = 2\vec{\omega}(t) \times \vec{v}^{\mathrm{B}};\\
\ddot{\vec{e}}\,'_i \quad &= \quad \dot{\vec{\omega}}(t) \times \vec{e}\,'_i + \vec{\omega}(t) \times \dot{\vec{e}}\,'_i = \dot{\vec{\omega}}(t) \times \vec{e}\,'_i + \vec{\omega}(t) \times (\vec{\omega}(t) \times \vec{e}\,'_i)\,;\\
r'_i \ddot{\vec{e}}\,'_i \quad &= \quad \dot{\vec{\omega}}(t) \times \vec{r} + \vec{\omega}(t) \times (\vec{\omega}(t) \times \vec{r})\,;
\end{aligned}
$$

Also ist

$$\vec{a}^{\mathrm{I}} = \vec{a}^{\mathrm{B}} + 2\vec{\omega} \times \vec{v}^{\mathrm{B}} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})\,;$$

Damit können wir eine Bewegungsgleichung im Inertialsystem

$$m\vec{a}^{\mathrm{I}} = \vec{F}^{\mathrm{I}};$$

auf das bewegte Koordinatensystem transformieren

$$m\vec{a}^{\mathrm{B}} = \vec{F}^{\mathrm{B}} \underbrace{\underbrace{- 2m\vec{\omega} \times \vec{v}^{\mathrm{B}}}_{\text{„Coriolis-Kraft"}} - m\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} \underbrace{- m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})}_{\text{„Zentrifugalkraft"}}}_{\text{Schein- oder Trägheitskräfte}};$$

Damit ist auch der Fall einer Drehung vollständig behandelt. Die Kombination von Drehung und Translation wird dem Leser überlassen.

Kapitel 7

Lagrange–Mechanik

7.1 Koordinatensysteme

Bisher wurden nur karthesische Koordinatensysteme betrachtet. Bestimmte Probleme lassen sich jedoch kaum in solchen Koordinaten formulieren. (Zum Beispiel Bewegungen auf gekrümmten Flächen wie Kugeloberfläche, ...) Es erweist sich als äußerst fruchtbar, eine große Vielfalt verschiedener Koordinatensysteme zuzulassen. Ein neues Koordinatensystem mit den Koordinaten q_1, q_2, q_3, t wird beschrieben durch die Abbildung

$$(q_1, q_2, q_3, t) \mapsto \vec{r}(q_1, q_2, q_3, t) = \begin{pmatrix} r_1(q_1, q_2, q_3, t) \\ r_2(q_1, q_2, q_3, t) \\ r_3(q_1, q_2, q_3, t) \end{pmatrix};$$

Um das System überhaupt sinnvoll behandeln zu können, muß man gewisse Minimalforderungen stellen. Die genannte Abbildung muß zumindest auf einer zusammenhängenden Teilmenge des $\mathbf{R}^3$ definiert sein und dort stetig differenzierbar und lokal umkehrbar, das heißt

$$\det \left(\frac{\partial r_i}{\partial q_j} \right) \neq 0;$$

Insbesondere folgt aus der Differenzierbarkeit, daß die Funktion auf einer offfenen Teilmenge der $\mathbf{R}^3$ definiert sein muß.

7.1.1 Ko- und Kontravariante Koordinaten

Definition:

Als i-te Koordinatenlinie bezeichnet man die Punktmenge

$$\{\vec{r}(q_1, q_2, q_3, t) | q_i \text{ beliebig und } q_j \ (j \neq i), t \text{ fest gewählt. } \};$$

die von den anderen Koordinaten abhängt.
Durch jeden Raumpunkt gehen (nötigenfalls bei Einschränkung des Definitionsbereichs) genau 3 Koordinatenlinien. Die Tangenten an diese Linien

$$\vec{u}_k := \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_k} = \frac{\partial r_i}{\partial q_k}\vec{e}_i;$$

die mit $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ bezeichnet werden sind linear unabhängig. Man nennt die dadurch gegebene Basis die generalisierte Basis der Koordinaten. Diese Basis besteht aus zeit- und ortsabhängigen Vektoren.
Die Darstellung eines Vektors $\vec{A}$ in der Form

$$\vec{A} = A^i \vec{u}_i;$$

heißt die „Kontravariante Darstellung“ von $\vec{A}$ und A^i heißt die i-te kontravariante Komponente von $\vec{A}$.
In Analogie zur Berechnung der Komponenten bezüglich einer Normalbasis defininiert man für $\vec{A}$ die kovarianten Komponenten A_i durch

$$A_i := \vec{A} \cdot \vec{u}_i = A^j \, \vec{u}_j \cdot \vec{u}_i;$$

Man sieht, daß auch die kovarianten Komponenten den Vektor $\vec{A}$ vollständig beschreiben.
Den Zusammenhang von kovarianter und kontravarianter Darstellung und noch weitere Eigenschaften der Koordinaten beschreibt die symmetrische 3×3-Matrix

$$(g_{ij}) := (\vec{u}_i \cdot \vec{u}_j);$$

die der metrische Tensor, oder einfach die Metrik, des Koordinatensystems heißt. Im Falle Karthesischer Koordinaten ist dies natürlich die Einheitsmatrix.
Die i-te Koordinatenfläche ist die Menge

$$\{\vec{r}(q_1, q_2, q_3, t) | q_i, t \text{ fest gewählt und } q_j \ (j \neq i) \text{ beliebig. } \};$$

die von den gewählten Koordinaten q_i und t abhängt.

Zunächst sollen für die neuen Koordinaten einige Differentiationsregeln hergeleitet und in Kurzform aufgelistet werden. Aus der Kettenregel folgt sofort für das „Richtungselement“

$$\begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} dq_i;$$

Für das Flächenelement ergibt sich

$$ds = \sqrt{d\vec{r} \cdot d\vec{r}} = \sqrt{\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_j} \, dq_i dq_j} = \sqrt{g_{ij} dq_i dq_j};$$

was man sich am besten in der Form

$$ds^2 = g_{ij} dq_i dq_j;$$

merkt.
Die Beziehung $A_i = g_{ij} A^j$ wird *im Volksmund* mit den Worten „einen Index herunterziehen“ gekennzeichnet.
Nun zu einer geometrischen Interpretation der kovarianten Komponenten. Man betrachtet hierzu die Normalenvektoren auf den Koordinatenflächen.

$$\vec{w}_i := \vec{\nabla} q_i = \frac{\partial q_i}{\partial r_k} \vec{e}_k;$$

Die Normalenvektoren $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3$ bilden eine Basis, die reziproke oder duale Basis. Es ist

$$\vec{w}_i \cdot \vec{u}_j = \frac{\partial q_i}{\partial r_k} \vec{e}_k \cdot \frac{\partial r_l}{\partial q_j} \vec{e}_l = \delta_{kl} \frac{\partial q_i}{\partial r_k} \frac{\partial r_l}{\partial q_j} = \frac{\partial q_i}{\partial r_k} \frac{\partial r_k}{\partial q_j} = \delta_{ij};$$

Damit beweist man (durch Multiplikation mit $\vec{u}_j$) die Beziehung

$$\vec{A} = A^i \vec{u}_i = A_i \vec{w}_i;$$

Somit ist klar, daß die kovarianten Komponenten die Darstellung von $\vec{A}$ bezüglich der reziproken Basis sind.
Nun gilt

$$A^i \vec{u}_i = A_j \vec{w}_j = (g_{ji} A^i) \vec{w}_j = A^i (g_{ij} \vec{w}_j);$$

für alle Vektoren $\vec{A}$. Damit folgt sofort die Beziehung zwischen den $\vec{u}_i$ und den $\vec{w}_i$

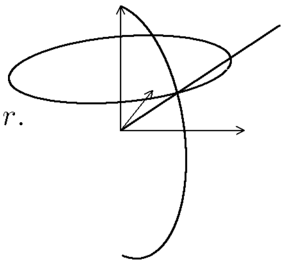
$$\vec{u}_i = g_{ij} \vec{w}_j;$$

7.1.2 Beispiel Kugelkoordinaten

Die häufig verwendeten Kugelkoordinaten sind definiert durch

$$\vec{r}(r, \theta, \varphi) = r \begin{pmatrix} \cos\varphi \sin\theta \\ \sin\varphi \sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}; \qquad [0, \infty[\times [0, \pi] \times [0, 2\pi[\to \mathbf{R}^3;$$

Als Koordiatenlinien erhält man



- Halbgerade aus dem Ursprung bei Variation von r.
- Einen Meridian bei Variation von θ.
- Einen Kreis parallel zur x-y-Ebene bei Variation von φ.

Basisvektoren der generalisierten Basis sind

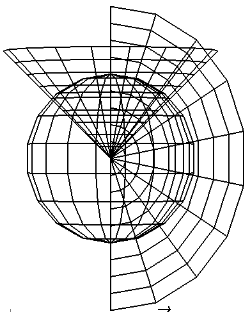
$$\begin{aligned}
\vec{u}_r &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix} =: \vec{e}_r = \hat{\vec{r}}; \\
\vec{u}_\theta &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = r \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\varphi \\ \cos\theta\sin\varphi \\ -\sin\theta \end{pmatrix} =: r\vec{e}_\theta; \\
\vec{u}_\varphi &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = r\sin\theta \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} =: r\sin\theta\vec{e}_\varphi;
\end{aligned}$$

Die Metrik der Kugelkoordinaten ist

$$g_{ij} = (\vec{u}_i \cdot \vec{u}_j) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2\sin^2\theta \end{pmatrix};$$

Die Koordinatenflächen sind

- Zu einem festgehaltenen Radius r ergibt sich eine Kugelschale.
- Bleibt θ konstant, so erhält man einen halben Kegelmantel.
- Hält man φ fest, so ist es eine Halbebene an der z-Achse.



Als reziproke Basis erkennt man aus $\vec{u}_i = g_{ij}\vec{w}_j$:

$$\vec{w}_r = \vec{e}_r; \qquad \vec{w}_\theta = \frac{1}{r}\vec{e}_\theta; \qquad \vec{w}_\varphi = \frac{1}{r\sin\theta}\vec{e}_\varphi;$$

Das Wegelement ist

$$d\vec{r} = \frac{\partial r}{\partial q_i}dq_i = \vec{u}_i dq_i = \vec{e}_r dr + r\vec{e}_\theta d\theta + r\sin\theta\vec{e}_\varphi d\varphi;$$

und das Flächenelement ist

$$(ds)^2 = d\vec{r}\cdot d\vec{r} = g_{ij}dq_i dq_j = (dr)^2 + r^2(d\theta)^2 + r^2\sin^2\theta(d\varphi)^2;$$

Nun prüft man — besser spät als nie — ob die gewählten Koordinaten überhaupt lokal umkehrbar sind. Hierzu berechnet man die Jakobideterminante

$$\det\left(\frac{\partial r_i}{\partial q_j}\right) = \begin{vmatrix} \frac{\partial r_1}{\partial q_1} & \frac{\partial r_1}{\partial q_2} & \frac{\partial r_1}{\partial q_3} \\ \frac{\partial r_2}{\partial q_1} & \frac{\partial r_2}{\partial q_2} & \frac{\partial r_2}{\partial q_3} \\ \frac{\partial r_3}{\partial q_1} & \frac{\partial r_3}{\partial q_2} & \frac{\partial r_3}{\partial q_3} \end{vmatrix} = |\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3| = \vec{u}_1 \cdot [\vec{u}_2 \times \vec{u}_3] = |\vec{u}_2 \times \vec{u}_3| = r^2 \sin\theta;$$

und diese ist offenbar immer ungleich Null, wenn $r \neq 0$ und $\theta \notin \{0, \pi\}$, also genau für die Punkte außerhalb der z-Achse.

7.1.3 Die Newton'schen Gleichungen in generalisierten Koordinanten

Zweck dieses Abschnittes ist die Umformulierung der Newton'schen Bewegungsgleichungen für die oben diskutierten allgemeinen Koordinatensysteme.
Man hat in einem Inertialsystem die Bewegungsgleichung

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F};$$

und erhält durch Multiplikation mit $\vec{u}_k = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_k}$

$$m\ddot{\vec{r}}\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_k} = \vec{F}\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_k}; \qquad (k = 1, 2, 3);$$

Man berechnet die linke Seite mit dem Ansatz

$$\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial}{\partial q_k}\right)\ \dot{\vec{r}}^2 = \frac{d}{dt}\left(2\dot{\vec{r}} \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}}{\partial \dot{q}_k}\right) - 2\dot{\vec{r}}\frac{\partial \dot{\vec{r}}}{\partial q_k} = \cdots$$

Nebenrechnungen ergeben

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{\vec{r}}}{\partial \dot{q}_k} &= \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}\left(\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial \vec{r}}{\partial t}\right) = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_k}; \\ \frac{\partial \dot{\vec{r}}}{\partial q_k} &= \frac{\partial}{\partial q_k}\left(\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial \vec{r}}{\partial t}\right) = \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_k}\right)\dot{q}_i + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_k}\right) = \frac{d}{dt}\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_k}; \end{aligned}$$

und man erhält damit

$$\cdots = 2\left(\ddot{\vec{r}}\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_k} + \dot{\vec{r}}\frac{d}{dt}\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_k}\right) - 2\dot{\vec{r}}\frac{d}{dt}\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_k} = 2\ddot{\vec{r}}\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_k};$$

Für die rechte Seite definiert man zunächst

Definition:

Die generalisierte Kraft ist gegeben durch

$$Q_k := \vec{F} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_k};$$

Häufig kann man $\vec{F}$ mit Hilfe eines Potentials $U(\vec{r})$ darstellen (bei konservativen Systemen). Dann hat man

$$Q_k = -\vec{\nabla} U(\vec{r}) \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_k} = -\frac{\partial}{\partial q_k} \underbrace{U\left(\vec{r}(q_1, q_2, q_3, t)\right)}_{=:V(q_1, q_2, q_3, t).} = -\frac{\partial}{\partial q_k} V(q_i, t);$$

Dann hat die Bewegungsgleichung die Form

$$\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial}{\partial q_k}\right)\left(\frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^{\,2}\right) = -\frac{\partial}{\partial q_k} V(q_i, t); \tag{7.1}$$

7.2 Lagrange-Gleichung und Lagrange-Funktion

7.2.1 Definition und Einführung

Aus der Bewegungsgleichung 7.1 folgt, wenn man berücksichtigt, daß das Potential nicht von $\dot{q}_k$ abhängt

$$\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial}{\partial q_k}\right)\left(\frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^{\,2} - V(q_i, t)\right) = 0;$$

Damit definiert man

Definition:

Die Kinetische Energie eines mechanischen Systems ist

$$T := \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^{\,2};$$

Die Potentielle Energie eines Systems ist

$$V := V(q_i, t) = U\left(\vec{r}(q_1, q_2, q_3, t)\right);$$

Die Lagrange-Funktion des Systems ist

$$L := T - V;$$

Und es gilt für $k \in \{1,2,3\}$ die Lagrange-Gleichung

$$\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial}{\partial q_k}\right) L = 0;$$

Bemerkung:
Dieser Lagrange-Formalismus ist hier mit zu vielen Zusatzvorraussetzungen hergeleitet worden. Später wird man sehen, daß die Lagrange-Gleichung auch für geschwindigkeitsabhängige Potentiale richtig ist.
Man sollte sich zudem nicht zusehr an die Form der Lagrange-Funktion $L = T - V$ gewöhnen, denn bei vielen Problemen gilt die Lagrange-Gleichung für andere Lagrange-Funktionen.

7.2.2 Beispiele für den Lagrange-Formalismus

Zentralpotentiale

Als generalisierte Koordinaten bieten sich hier die Kugel- oder Polarkoordinaten an. Man erhält

$$\begin{aligned} T &= \frac{m}{2} g_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2\right); \\ V &= U(r); \\ L &= \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2\right) - U(r); \end{aligned}$$

Damit erhält man die Lagrange-Gleichungen

$$\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial}{\partial r}\right) L = \frac{d}{dt}m\dot{r} - mr\dot{\theta}^2 - mr\sin^2\theta\cdot\dot{\varphi}^2 + \frac{\partial U}{\partial r} = 0; \tag{7.2}$$

$$\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial}{\partial \theta}\right) L = \frac{d}{dt}mr^2\dot{\theta} - mr^2\sin\theta\cos\theta\cdot\dot{\varphi}^2 = 0; \tag{7.3}$$

$$\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial}{\partial \varphi}\right) L = \frac{d}{dt}mr^2\sin^2\theta\cdot\dot{\varphi} = 0; \tag{7.4}$$

Man wählt das Koordinatensystem so, daß $\theta = \frac{\pi}{2}$ ist. Dies ist möglich, da man stets die Anfangsbedingungen $\theta = \frac{\pi}{2}$ und $\dot{\theta} = 0$ erreichen kann. Dann aber folgt aus 7.3, daß die Lösung für θ konstant ist.
Nun erhält man aus 7.4 die Erhaltungsgröße

$$l = mr^2\dot{\varphi}; \qquad \text{Drehimpuls in } z\text{-Richtung.}$$

Aus 7.2 erhält man nun

$$m\ddot{r} = -\frac{\partial U(r)}{\partial r} + \frac{l^2}{mr^3} = -\frac{\partial}{\partial r}\underbrace{\left(U(r) + \underbrace{\frac{l^2}{2mr^2}}_{\text{Zentrifugalbarriere}}\right)}_{U_{\text{eff.}}};$$

Die Gesamtenergie berechnet sich mit

$$E = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + U_{\text{eff.}}(r);$$

und ist erhalten

$$\frac{dE}{dt} = m\dot{r}\ddot{r} + \frac{\partial U_{\text{eff.}}}{\partial r}\dot{r} = 0;$$

Rotierendes Bezugssystem

Wir betrachten ein Koordinatensystem, daß mit konstanter Winkelgeschwindigkeit um die z-Achse rotiert. Wir haben also $\vec{\omega} \parallel \vec{e}_z$. Diesem System sind am besten mitrotierende Zylinderkoordinaten angepaßt

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} \cos\omega t & -\sin\omega t & 0 \\ \sin\omega t & \cos\omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1\cos\omega t - q_2\sin\omega t \\ q_1\sin\omega t + q_2\cos\omega t \\ q_3 \end{pmatrix};$$

Man erhält als generalisierte Basis

$$\vec{u}_1 = \frac{\partial\vec{r}}{\partial q_1} = \begin{pmatrix} \cos\omega t \\ \sin\omega t \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad \vec{u}_2 = \frac{\partial\vec{r}}{\partial q_2} = \begin{pmatrix} -\sin\omega t \\ \cos\omega t \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad \vec{u}_3 = \frac{\partial\vec{r}}{\partial q_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

Man hat nun $\vec{r} = q_i\vec{u}_i$ und erhält damit

$$\dot{\vec{r}} = \dot{q}_i\vec{u}_i + q_i\dot{\vec{u}}_i = \dot{q}_i\vec{u}_i + \omega(q_1\vec{u}_2 - q_2\vec{u}_1) = (\dot{q}_1 - \omega q_2)\vec{u}_1 + (\dot{q}_2 + \omega q_1)\vec{u}_2 + \dot{q}_3\vec{u}_3;$$

Damit berechnet man die kinetische Energie

$$T = \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2 = \frac{m}{2}\left((\dot{q}_1 - \omega q_2)^2 + (\dot{q}_2 + \omega q_1)^2 + \dot{q}_3^2\right);$$

Man hat nun für die kräftefreie Bewegung die Lagrangefuktion $L = T$. Die Lagrange-Gleichungen lauten nun in vektorieller Form

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\vec{q}}} - \frac{\partial L}{\partial\vec{q}} = \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \dot{q}_1 - \omega q_2 \\ \dot{q}_2 + \omega q_1 \\ \dot{q}_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \omega(\dot{q}_2 + \omega q_1) \\ -\omega(\dot{q}_1 - \omega q_2) \\ 0 \end{pmatrix} = 0;$$

Man verwendet die Kurzschreibweisen

$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix}; \qquad \vec{q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}; \qquad \dot{\vec{q}} = \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{pmatrix};$$

Nun kann man leicht überprüfen, daß die Lagrange-Gleichungen äquivalent sind zu der schon vorher gefundenen Beziehung

$$\ddot{\vec{q}} + 2\vec{\omega} \times \dot{\vec{q}} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{q}) = 0;$$

7.3 Zwangsbedingungen

7.3.1 Holonome und Nichtholonome Zwangsbedingungen

Eine Zwangsgedingung ist eine Einschränkung der Bewegung der Massepunkte durch geometrische Bedingungen. Genau

Definition:

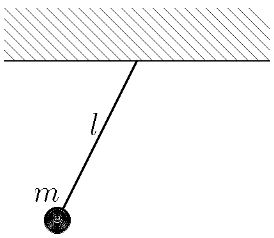
Es seien n Massepunkte mit den Ortsvektoren $\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n$ gegeben. Eine holonome Zwangsbedingung ist von der Form

$$f(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n, t) = 0;$$

Wenn die Funktion f dabei nicht von der Zeit abhängt, nennt man die Zwangsbedingung skleronom, sonst rheonom. Man beachte, daß auch nichholonome Zwangsbedingungen auftreten können (z.B. in Form von Differentialgleichungen).
Gelten in einem System s voneinander unabhängige holonome Zwangsbedingungen, so reduziert sich die Zahl der Freiheitsgrade um s. Bei n Teilchen also

$$\text{Zahl der FHG } = 3n - s;$$

Ein Beispiel für eine holonome Zwangsbedingung ist das starre Pendel. An einer undehnbaren Stange der Länge l, die drehbar aufgehängt ist, ist ein Teilchen befestigt. Man hat die Zwangsbedingung



$$f(\vec{r}) = \vec{r}^{\,2} - l^2 = 0;$$

In Kugelkoordinaten erkennt man sofort die 2 verbleibenden Freiheitsgrade θ und φ. Das Teilchen bewegt sich also auf der Kugelschale.

Hätte man einen Faden genommen, so würde die Zwangsbedingung

$$f(\vec{r}) = \vec{r}^{\,2} - l^2 \leq 0;$$

lauten. Für solche nichtholonome Zwangsbedingungen soll keine allgemeine Lösungsstrategie gegeben werden.
Man kann jedoch das Fadenpendel unter der Annahme lösen, daß der Faden immer gespannt bleibt. Wenn man dann noch die Fadenlänge zeitlich variiert, erhält man ein holonome und rheonome Zwangsbedingung

$$f(\vec{r}) = \vec{r}^{\,2} - [l(t)]^2 = 0;$$

Ein weiteres Beispiel ist der starre Körper, der durch 3 Teilchen mit festem Abstand gegeben ist. Die Zwangsbedingungen lauten hier

$$\begin{aligned} f_1(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3) &= |\vec{r}_1 - \vec{r}_2| - \text{const.}_1 = 0; \\ f_2(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3) &= |\vec{r}_1 - \vec{r}_3| - \text{const.}_2 = 0; \\ f_3(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3) &= |\vec{r}_2 - \vec{r}_3| - \text{const.}_3 = 0; \end{aligned}$$

Es ist übrigens nicht so, daß die Zahl dieser Gleichungen gleich der Zahl der unabhängigen Zwangsbedingungen ist. So kann man einerseits redundante Gleichungen hinzufügen, etwa $f_4 = f_1 + f_2 + f_3 \equiv 0$, andererseits kann man aber auch mehrere Bedingungen zu einer zusammenfassen, etwa $f_5 = f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 \equiv 0$. So ist die Zahl der Zwangsbedingungen die Maximalzahl nichtredundanter Gleichungen.
Als letztes Beispiel noch eine differentielle Zwangsbedingung. Man betrachte eine Kugel (Bowlingkugel), die über eine Ebene rollt. Dabei ist die Anzahl der Freiheitsgrade bei infinitesimalen Verrückungen durch die Rollbedingung verringert, denn eine Bewegung in eine spezielle Richtung zieht eine bestimmte Änderung der Lage der Kugel nach sich. Global betrachtet sind aber alle Kugelpositionen möglich, so daß die Zahl der FHG weiterhin 5 ist (x, y für den Mittelpunkt, α, β, γ für die Orientierung). Damit kann die Rollbedingung nicht integrabel sein.

7.3.2 Erarbeiten einer Lösungsstrategie

Bisher wurden nur Systeme betrachtet, bei denen alle Kräfte bekannt sind. Dies ist bei Zwangsbedingungen jedoch nicht mehr möglich, da die Zwangskräfte ebenfalls unbekannt sind.
Daher versucht man zunächst, ein Koordinatensystem zu finden, in dem die Zwangsbedingung automatisch erfüllt ist — oder zumindest sehr leicht erfüllbar ist. Das heißt, man wählt generalisierte Koordinaten, deren Koordinatenflächen gerade den Hyperebenen entsprechen, die die Zwangsbedingungen festlegen. Dann hat man für jede Zwangsbedingung eine Koordinate die entweder gar nicht betrachtet werden muß, oder bereits unabhängig von der Lösung der Bewegungsgleichung festgelegt ist. Im Beispiel des obigen Pendels etwa ist es gar nicht mehr nötig, die generalisierte Koordinate r zu betrachten,

da sie ohnehin konstant ist. Beim Fadenpendel mit variabler Fadenlänge hingegen ist die r-Koordinate nicht konstant, aber die Lösung der zugehörigen Koordinate der Lösung ist durch die Zwangsbedingung bekannt.
So kann man nach dem Umschreiben der Newton'schen Gleichungen für die neuen Koordinaten die Zwangsbedingungen „einsetzen“ und braucht sie danach nicht mehr zu berücksichtigen. Idealerweise haben dann einige der Lagrange-Gleichungen eine triviale Lösung, während andere mit den bisherigen Methoden gelöst werden müssen.
Dieses Vorgehen soll an einem einfachen Beispiel illustriert werden. Man betrachte ein Teilchen, daß sich nur entlang einer gekrümmten Linie im 3-dimensionalen Raum fortbewegen kann. Zusätzlich soll eine Kraft $F(\vec{r})$ auf das Teilchen wirken.
Ganz allgemein hat man die Bewegungsgleichung

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}(\vec{r}) + \vec{Z}(\vec{r}); \tag{7.5}$$

Wobei $\vec{Z}(\vec{r})$ die unbekannte Zwangskraft ist. Die Zwangsbedingungen seien in der Form

$$\begin{aligned} f_1(\vec{r},t) &= 0; \\ f_2(\vec{r},t) &= 0; \end{aligned}$$

gegeben, wobei jede der beiden Funktionen eine 2-dimensionale Fläche definiert, die in der Umgebung des Teilchens hinreichend glatt ist. [1] Der Schnitt der beiden Flächen ist dann genau unsere Linie.
Nun geht man davon aus, daß die durch die jeweilige Zwangsbedingung wirkenden Zwangskräfte stets senkrecht zu diesen Flächen sind. Diese Annahme scheint vernünftig, wenn man sich die Zwangsbedingungen als unendlich feste Barrieren vorstellt, an die das Teilchen stossen kann. Dann kann man die beiden Zwangskräfte so schreiben

$$\begin{aligned} \vec{Z}_1(\vec{r},t) &= \lambda_1(t)\vec{\nabla} f_1(\vec{r},t); \\ \vec{Z}_2(\vec{r},t) &= \lambda_2(t)\vec{\nabla} f_2(\vec{r},t); \end{aligned}$$

Nun hat die Bewegungsgleichung die Form

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}(\vec{r}) + \lambda_1(t)\vec{\nabla} f_1(\vec{r},t) + \lambda_2(t)\vec{\nabla} f_2(\vec{r},t);$$

Wenn man nun diese Gleichung „auf die Kurve projiziert“, kann man die Zwangskräfte eliminieren. Dies haben wir bei der Herleitung des Lagrange-Formalismus durch das Skalarprodukt mit dem Tangentenvektor erreicht.
Nun muß man also geeignete Koordinaten suchen, um diesen Formalismus anwenden zu können.
Am Beispiel eines Kreises der Nullpunktsymmetrisch in der x-y-Ebene liegt, soll dies gezeigt werden. Man verwendet die sogenannten Zylinderkoordinaten. Es ist

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varrho\cos\varphi \\ \varrho\sin\varphi \\ z \end{pmatrix};$$

[1] Das heißt insbesondere differenzierbar.

Hier lauten die Zwangsbedingungen, wenn R der Kreisradius ist

$$\varrho = R = \text{const.} \qquad \text{und} \qquad z = 0 = \text{const.}$$

Die Parameterdarstellung des Kreises ist

$$\vec{r}(\varphi) = R \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}; \tag{7.6}$$

Und der Tangentenvektor ist

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = R \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix};$$

Nun lautet die projizierte Bewegungsgleichung

$$(m\ddot{\vec{r}} - \vec{F}) \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = \vec{Z} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = 0;$$

Durch Differentiation findet man weiter

$$\ddot{\vec{r}} = R\ddot{\varphi} \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} + R\dot{\varphi}^2 \begin{pmatrix} -\cos\varphi \\ -\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix};$$

Ferner ist

$$\vec{F} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = -\frac{\partial U}{\partial \varphi};$$

Damit erhält man die Bewegungsgleichung

$$mR^2\ddot{\varphi} + \frac{\partial U}{\partial \varphi} = 0; \tag{7.7}$$

Wenn man gleich die Lagrangefunktion mit

$$L = T - V = \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2 - U(\varphi);$$

berechnet und den Lagrange-Formalismus

$$\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial}{\partial \varphi}\right) L = 0;$$

anwendet, so erhält man sehr viel schneller das gleiche Ergebnis.
Nun soll noch spezieller $U(\varphi) \equiv 0$ angenommen werden. Man sieht sofort, daß dann die Lösung der Bewegungsgleichung 7.7 lautet

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \omega_0 t;$$

mit beliebigen Konstanten φ_0 und ω_0. Durch Einsetzen in 7.6 erhält man die vollständige Lösung

$$\vec{r}(\varphi) = R \begin{pmatrix} \cos(\varphi_0 + \omega_0 t) \\ \sin(\varphi_0 + \omega_0 t) \\ 0 \end{pmatrix};$$

Wenn man dies in die ursprüngliche Bewegungsgleichung 7.5 einsetzt, erhält man auch die Zwangskraft

$$\vec{Z} = -Rm\omega_0^2 \begin{pmatrix} \cos(\varphi_0 + \omega_0 t) \\ \sin(\varphi_0 + \omega_0 t) \\ 0 \end{pmatrix};$$

Zum Abschluß ist zu beachten, daß der Lagrange-Formalismus sehr viel schneller zum Ziel führt, jedoch substantiell nichts neues bietet — alle Ergebnisse könnten mit größerem Aufwand auch direkt aus den Newton'schen Gleichungen gewonnen werden.

7.3.3 Das d'Alembert'sche Prinzip

Bei der Herleitung der Lösung im obigen Beispiel haben wir eine Annahme gemacht, die offenbar stets zur Lösung von Problemen mit Zwangsbedingungen nötig ist. Wir haben angenommen, daß die Zwangskräfte senkrecht auf der Bewegungsrichtung stehen. Dieses Prinzip muß jedoch etwas allgemeiner formuliert werden, wenn man auch zeitabhängige Zwangsbedingungen zuläßt. Hier benötigt man den Begriff der virtuellen Verrückung

Definition:

Unter einer virtuellen Verrückung eines mechanischen Systems versteht man eine infinitesimale Verschiebung des/der Massepunkte(s), die zu den Zwangsbedingungen zu der festgehaltenen Zeit kompatibel ist. Das heißt, eine Verschiebung, die tatsächlich möglich wäre, wenn die Zwangsbedingung zeitlich konstant ist. Virtuelle Verrückungen werden bezeichnet mit

$$\delta\vec{r}.$$

Nun kann man das für die Lösung von Problemen mit Zwangsbedingungen äußerst fruchtbare d'Alembert'sche Prinzip formulieren.

Das d'Alembert'sche Prinzip

Das d'Alembert'sche Prinzip besagt, daß bei virtuellen Verrückungen des Systems die Zwangskräfte keine Arbeit leisten. In Formeln

$$\vec{Z} \cdot \delta\vec{r} = 0;$$

Nur bei zeitlich konstanten Zwangsbedingungen leisten die Zwangskräfte tatsächlich keine Arbeit, sonst können sie sehr wohl Arbeit leisten.

Nun wieder ein Beispiel — Das dreidimensionale Pendel.
Man hat die eine Zwangsbedingung, daß

$$\vec{r}^{\,2} - l^2 = 0;$$

und damit hat das System zwei Freiheitsgrade.
Da die Zwangskraft offenbar von der Form $\vec{Z} = \lambda(t)\vec{r}$ ist, hat man die Newton'sche Bewegungsgleichung

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} + \lambda(t)\vec{r};$$

Man verwendet hier natürlich shärische Polarkoordinaten (= Kugelkoordinaten). Sie lauten

$$\vec{r}(r,\theta,\varphi) = r\begin{pmatrix} \cos\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix};$$

Die Koordinaten φ und θ führen nun auf dynamische Gleichungen, in denen die Zwangsbedingung keine Rolle mehr spielt. Die Lösung der dritten Gleichung für r ist hingegen durch die Zwangsbedingung eindeutig vorgegeben. Dies sieht sieht man nach dem d'Alembert'schen Prinzip durch die virtuellen Verrückungen, die hier gegeben sind durch

$$\delta\vec{r} = \frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta}d\theta + \frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi}d\varphi;$$

Von der tatsächlichen Verrückung unterscheidet sich dieser Term durch das Fehlen der partiellen Ableitungen nach r und nach t. Diese sind zwar hier wegen der Zwangsbedingungen $= 0$, aber bei einer variablen Länge des Aufhängefadens würden diese Terme den Unterschied zur tatsächlichen Verrückung darstellen.
Durch Projektion oder Anwenden der Lagrange-Methode erhält man die Bewegungsgleichungen, die nach bekannter Methode zu lösen sind.

Nun noch eine kleine Verallgemeinerung des d'Alembert'schen Prinzips.
Ein Konfigurationsraum mit n Massepunkten wird als ein hochdimensionaler Raum angesehen

$$\{\vec{r}_1,\ldots,\vec{r}_n\} \equiv \vec{r} \in \mathbf{R}^{3n};$$

Es seien s holonome unabhängige Zwangsbedingungen in der Form

$$(1 \le i \le s) \qquad f_i(\vec{r},t) = 0;$$

gegeben. Dann definiert jedes f_i durch

$$M_t^i := \left\{\vec{r} | \vec{r} \in \mathbf{R}^{3n}, f_i(\vec{r},t) = 0\right\};$$

eine $(3n-1)$-dimensionale Fläche. Dann ist das System beschränkt auf

$$M_t := \bigcap_{i=1}^{s} M_t^i;$$

Dies sind alle möglichen Lagen des Systems. Dieser Raum ist $(3n - s)$-dimensional. Damit gibt es genau $3n - s$ Freiheitsgrade. Man kann nun auch eine $3n$-dimensionale Zwangskraft bilden

$$\{\vec{Z}_1, \ldots, \vec{Z}_n\} \equiv \vec{Z} \in \mathbf{R}^{3n};$$

Das d'Alembert'sche Prinzip sagt nun

$$\boxed{\vec{Z}(t) \perp M_t; \qquad \forall\ t;}$$

Wenn man M_t mit den generalisierten Koordinaten $q_1, \ldots, q_f$ parametrisiert, kann man die virtuellen Verrückungen beschreiben durch

$$\delta\vec{r} = \sum_{i=1}^{f} \frac{\partial\vec{r}}{\partial q_i} dq_i;$$

Das d'Alembert'sche Prinzip kann nun auch so formuliert werden

$$\boxed{\vec{Z}(t) \cdot \delta\vec{r} = 0;}$$

Kapitel 8

Ergänzungen zur Lagrange-Mechanik

8.1 Generalisierte Potentiale

8.1.1 Einführung

Bisher wurden nur Systeme mit Potentialen der Form $V(q_i, t)$ betrachtet. Für allgemeinere Kräfte hatten wir nur die Beziehung

$$\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial}{\partial q_i}\right) T = Q_i = \vec{F} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i};$$

die die generalisierten Kräfte Q_i verwendet. Man hofft nun, diese generalisierten Kräfte in der Form

$$Q_i = \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial}{\partial q_i}\right) V(q_k, \dot{q}_k, t);$$

darstellen zu können.
Dann gilt natürlich wieder die Lagrange-Gleichung in ihrer bisherigen Form mit $L = T - V$.
Es wird sich herrausstellen, daß diese generalisierten Potentiale tatsächlich in der Natur vorkommen.

8.1.2 Teilchen in elektromagnetischen Feldern

Elektrische und Magnetische Phänomene sind das bekannteste Beispiel für das Auftreten von generalisierten Potentialen. Klassisch hat man die Bewegungsgleichung

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}_{\text{Lorentz}} = e\vec{E}(\vec{r}, t) + \frac{e}{c}\left[\vec{v} \times \vec{B}(\vec{r}, t)\right];$$

mit elektrischem Feld $\vec{E}$ und magnetischem Feld $\vec{B}$.

Diese beiden Felder gewinnt man aus zwei Potentialen, einem Vektorpotential $\vec{A}$ und einem skalaren Potential Φ durch die Beziehungen

$$\begin{aligned}
\vec{E} &= -\vec{\nabla}\Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\vec{\nabla}\Phi - \frac{1}{c}\dot{\vec{A}}; \\
\vec{B} &= \vec{\nabla} \times \vec{A} = \mathrm{rot}\ \vec{A};
\end{aligned}$$

Man macht für das zugehörige generalisierte Potential den Ansatz

$$V = e\Phi - \frac{e}{c}\dot{\vec{r}} \cdot \vec{A};$$

Die generalisierten Kräfte werden dann berechnet durch

$$Q_k = \frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial \dot{r}_k} - \frac{\partial V}{\partial r_k};$$

Man hat nun

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V}{\partial r_k} &= e\frac{\partial \Phi}{\partial r_k} - \frac{e}{c}\dot{r}_i\frac{\partial A_i}{\partial r_k}; \\
\frac{\partial V}{\partial \dot{r}_k} &= -\frac{e}{c}A_k; \\
\frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial \dot{r}_k} &= -\frac{e}{c}\frac{d}{dt}A_k = -\frac{e}{c}\left(\frac{\partial A_k}{\partial t} + \frac{\partial A_k}{\partial r_i}\frac{dr_i}{dt}\right); \\
Q_k &= -\frac{e}{c}\frac{\partial A_k}{\partial t} - \frac{e}{c}\frac{\partial A_k}{\partial r_i}\dot{r}_i - e\frac{\partial \Phi}{\partial r_k} + \frac{e}{c}\dot{r}_i\frac{\partial A_i}{\partial r_k} = \\
&= e\underbrace{\left(-\frac{\partial \Phi}{\partial r_k} - \frac{1}{c}\frac{\partial A_k}{\partial t}\right)}_{=E_k} + \frac{e}{c}\underbrace{\left(\dot{r}_i\left(\frac{\partial A_i}{\partial r_k} - \frac{\partial A_k}{\partial r_i}\right)\right)}_{=(\delta_{ki}\delta_{lj}-\delta_{kj}\delta_{li})\dot{r}_l\frac{\partial A_j}{\partial r_i} = \epsilon_{mkl}\epsilon_{mij}\dot{r}_l\frac{\partial A_j}{\partial r_i} = \left[\dot{\vec{r}}\times\left[\vec{\nabla}\times\vec{A}\right]\right]_k}; \\
&= eE_k + \frac{e}{c}\left[\dot{\vec{r}} \times \vec{B}\right]_k;
\end{aligned}$$

Damit haben wir also ein generalisiertes Potential gefunden, das die realen Kräfte beschreibt. Die Lagrange-Funktion ist nun

$$L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2 - e\Phi(\vec{r}, t) + \frac{e}{c}\dot{\vec{r}} \cdot \vec{A}(\vec{r}, t);$$

Aber die zugrundeliegenden Potentiale $\vec{A}$ und Φ sind nicht eindeutig bestimmt, denn die folgenden Umformungen mit einer beliebigen Eichfunktion $\chi(\vec{r}, t) \in C^2$ liefert weitere Potentiale, die das gleiche leisten.

$$\begin{aligned}
\Phi &\mapsto \Phi + \frac{1}{c}\frac{\partial \chi(\vec{r}, t)}{\partial t}; \\
\vec{A} &\mapsto \vec{A} - \vec{\nabla}\chi(\vec{r}, t);
\end{aligned}$$

Denn für die Felder gilt dann

$$\begin{aligned}
\vec{E} &\mapsto \vec{E} - \vec{\nabla}\left(\frac{1}{c}\frac{\partial\chi}{\partial t}\right) - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(-\vec{\nabla}\chi\right) = \vec{E};\\
\vec{B} &\mapsto \vec{B} - \vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\chi = \vec{B};
\end{aligned}$$

Auch die Lagrange-Funktion ändert sich dann

$$L \mapsto L - \frac{e}{c}\frac{\partial\chi}{\partial t} - \frac{e}{c}\dot{\vec{r}}\cdot\vec{\nabla}\chi = L - \frac{e}{c}\frac{d}{dt}\chi(\vec{r},t);$$

Die Bewegungsgleichungen sind jedoch invariant unter dieser Transformation der Potentiale, denn

$$\begin{aligned}
\left[\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial\dot{r}_i} - \frac{\partial}{\partial r_i}\right]\left(\frac{d}{dt}\chi(\vec{r},t)\right) &= \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial\dot{r}_i}\left(\frac{\partial}{\partial t}\chi(\vec{r},t) + \dot{r}_k\frac{\partial}{\partial r_k}\chi(\vec{r},t)\right) - \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial r_i}\chi(\vec{r},t) =\\
&= \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial r_i}\chi(\vec{r},t) - \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial r_i}\chi(\vec{r},t) =\\
&= 0;
\end{aligned}$$

Aus dieser Rechnung ersieht man die im Folgenden häufig zu verwendende Invarianz der Lagrange-Gleichungen: Wann immer die Lagrange-Funktion eine Transformation der Form

$$L \mapsto L + \frac{d}{dt}F(q_i,t);$$

erfährt, bleiben die Lagrange-Gleichungen unverändert.

8.2 Noether-Theorem

8.2.1 Zyklische Koordinaten

Das weiter oben schon erläuterte Noether-Theorem soll nun auch für den Lagrange-Formalismus fruchtbar gemacht werden. Zunächst fällt ein Spezialfall auf.
Wenn

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = 0;$$

dann hat man wegen

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0;$$

die Erhaltungsgröße

$$p_i := \frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i};$$

Für diesen Fall haben sich einige Bezeichnungen eingebürgert.

Definition:

Eine generalisierte Koordinate q_i heißt „zyklische Koordinate“, wenn gilt

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = 0;$$

In diesem Fall ist der generalisierte Impuls, definiert durch

$$p_i := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i};$$

eine Erhaltungsgröße des Systems.

8.2.2 Formulierung des Noether-Theorems

Nun soll der Zusammenhang zwischen Symmetrien der Lagrange-Gleichungen und Erhaltungsgrößen geklärt werden.
Hierzu betrachtet man Kontinuierliche Transformationen, die sich stetig aus der Identität erhalten lassen.

$$q_i \mapsto q_i + \eta_i(q_k, t);$$

Für unsere Untersuchungen wollen wir nur infinitesimale Verrückungen zulassen, also Transformationen der Form

$$q_i \mapsto q_i + \alpha\eta_i(q_k, t);$$

mit einem infinitesimalen Parameter α. Wir erhalten dann nach dem Satz von Taylor

$$L(q_i, \dot{q}_i, t) \mapsto L(q_i + \alpha\eta_i, \dot{q}_i + \alpha\dot{\eta}_i, t) = L(q_i, \dot{q}_i, t) + \alpha\left(\eta_k \frac{\partial L}{\partial q_k} + \dot{\eta}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right);$$

Die betrachtete Transformation wird nun als Symmetrie bezeichnet, wenn L unverändert bleibt, also wenn

$$\eta_k \frac{\partial L}{\partial q_k} + \dot{\eta}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = 0;$$

Da aus der Lagrange-Gleichung folgt

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k};$$

ist diese Bedingung äquivalent zu

$$\eta_k \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} + \dot{\eta}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \frac{d}{dt}\left(\eta_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) = 0;$$

Damit können wir jetzt das Noether-Theorem für den Lagrange-Formalismus formulieren

Noether-Theorem

Wenn für eine Transformation

$$q_i \mapsto q_i + \eta_i(q_k, t); \qquad (1 \leq i \leq n);$$

die Beziehung

$$\eta_k \frac{\partial L}{\partial q_k} + \dot{\eta}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = 0;$$

gilt, also die Transformation eine Symmetrie des Systems ist, dann hat das System eine Erhaltungsgröße, es ist

$$\eta_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k};$$

erhalten.

Diese Formulierung schließt viele Ergebnisse der vorangegangenen Kapitel ein. Man kann auch hiermit zeigen, daß

1. Translationsinvarianz im Raum entspricht die Erhaltungsgröße „Impuls".

2. Rotationsinvarianz um eine Achse zieht eine Erhaltung des Drehimpulses um diese Achse nach sich.

3. ...

Aber wir stoßen an Grenzen, wenn man die Energieerhaltung aus der Translationsinvarianz in der Zeit erhalten will.

8.2.3 Verbessertes Noether-Theorem

Bisher haben wir — etwas zu restriktiv — gefordert, daß L unter unserer Transformation invariant ist. Entscheident für die Bewegung des Systems sind jedoch vielmehr die Lagrange-Gleichungen. Wir haben oben gesehen, daß diese unverändert bleiben, wenn man die Lagrangefunktion um die Zeitableitung einer beliebigen Funktion verschiebt. Daher hier die bessere Darstellung des Noether-Theorems.

Noether-Theorem

Wenn für eine Transformation

$$q_i \mapsto q_i + \eta_i(q_k, t); \qquad (1 \leq i \leq n);$$

die Beziehung

$$\eta_k \frac{\partial L}{\partial q_k} + \dot{\eta}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \frac{d}{dt} f(q_k, \dot{q}_k, t);$$

mit einer beliebigen, hinreichend oft differenzierbaren Funktion f gilt, dann hat das System eine Erhaltungsgröße, es ist

$$\eta_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - f(q_k, \dot{q}_k, t);$$

erhalten.

Hiermit kann man nun, wenn L nicht von t abhängt die Energieerhaltung herleiten. Man hat die Transformation

$$q_i \mapsto q_i + \alpha \dot{q}_i;$$

Also $\eta_i = \dot{q}_i$. Erhalten ist dann

$$\dot{q}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - L;$$

Dies ist die übliche Energie, wenn $V = V(q_k)$, wegen

$$\begin{aligned}
\dot{q}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - L &= \dot{q}_k \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}(T - V) - T + V = \\
&= \dot{q}_k \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}\left(\frac{1}{2} g_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j\right) - \frac{1}{2} g_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k + V = \\
&= \frac{1}{2} g_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k + V = \\
&= T + V;
\end{aligned}$$

Das Noether-Theorem bleibt auch beim Vorhandensein von Zwangsbedingungen gültig — wenn auch die Zwangsbedingungen die geforderte Symmetrie haben, erhält man eine Erhaltungsgröße.

8.3 Kleine Schwingungen

8.3.1 Herleitung der Lagrange-Gleichungen

Wir betrachten ein mechanisches System mit zeitunabhängigen, holonomen Zwangsbedingungen. n Teilchen seien durch f Koordinaten parametrisiert, und f sei auch die Zahl der Freiheitsgrade.

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i\,(q_1, \ldots, q_f)\,; \qquad \text{für } 1 \leq i \leq n;$$

Man definiert eine reelle, symmetrische $f \times f$-Matrix durch

$$(t_{kl})_{1 \leq k,l \leq f} := \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_l};$$

Zu beachten ist die Ähnlichkeit mit dem metrischen Tensor g_{kl}. Mit Hilfe dieser Matrix erhält man

$$T = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i}{2} \dot{\vec{r}}_i^{\,2} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{f} \sum_{l=1}^{f} m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_l} \dot{q}_k \dot{q}_l = \frac{1}{2} t_{kl} \dot{q}_k \dot{q}_l;$$

Es sollen auch nur Potentiale betrachtet werden, die weder von t noch von $\dot{q}_i$ explizit abhängen. Dann erhält man als Lagrange-Gleichungen

$$\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial}{\partial q_i} \right) L = \frac{d}{dt} (t_{ij} \dot{q}_j) - \frac{1}{2} \frac{\partial t_{kl}}{\partial q_i} \dot{q}_k \dot{q}_l + \frac{\partial V}{\partial q_i} = 0;$$

Kleine Schwingungen können nur um Gleichgewichtslagen herum auftreten, also sucht man nach Punkten, wo $q_i \equiv 0$ eine Lösung der Lagrange-Gleichungen ist. Dies ist offenbar genau dann der Fall, wenn

$$\forall 1 \leq i \leq f: \qquad \frac{\partial V}{\partial q_i} = 0;$$

Mit anderen Worten verschwinden also alle generalisierten Kräfte in diesem Punkt. Wir wollen um eine Gleichgewichtslage bei $(\mathring{q}_1, \ldots, \mathring{q}_f)$ entwickeln. Hierzu führt man neue Koordianten ein

$$\eta_i := q_i - \mathring{q}_i; \qquad 1 \leq i \leq f;$$

Man nähert nun die Kinetische Energie durch

$$T = \frac{1}{2} t_{kl} \dot{q}_k \dot{q}_l \approx \frac{1}{2} \mathring{t}_{kl}\, \dot{\eta}_k \dot{\eta}_l; \qquad \text{Mit } \mathring{t}_{kl} := t_{kl}(\mathring{q}_i);$$

und das Potential durch

$$V \approx \underbrace{V\left(\mathring{q}_k\right)}_{\text{irrelevant!}} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j} \right)\Bigg|_{\mathring{q}_k} \eta_i \eta_j \mapsto \frac{1}{2} \mathring{v}_{ij}\, \eta_i \eta_j; \qquad \text{Mit } \mathring{v}_{ij} := \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j} \right)\Bigg|_{\mathring{q}_k};$$

Damit erhält man eine Näherung für die Lagrange-Funktion

$$L \approx \frac{1}{2} \left(\mathring{t}_{ij}\, \dot{\eta}_i \dot{\eta}_j + \mathring{v}_{ij}\, \eta_i \eta_j \right);$$

und die Bewegungs-/Lagrange-Gleichungen lauten

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_i} - \frac{\partial L}{\partial \eta_i} = \mathring{t}_{ij}\, \ddot{\eta}_j + \mathring{v}_{ij}\, \eta_j = 0;$$

Dies ist ein lineares Differentialgleichungssystem mit konstanten Koeffizienten.

8.3.2 Lösungsmethode

Man sieht der Differentialgleichung eigentlich den Ansatz schon an — wir versuchen es mit

$$\eta_i = a_i e^{i\omega t};$$

Dies ist die sogenannte Eigenschwingungsmethode. Man erwartet, das die auf diese Weise gefundenen Lösungen eine Basis des Lösungsraums bilden. Das System vereinfacht sich zunächst zu

$$\mathring{v}_{ij}\ a_j = \omega^2\ \mathring{t}_{ij}\ a_j;$$

Der besseren Übersicht wegen verwendet man die Matritzen

$$\mathbf{V} := \left(\mathring{v}_{ij}\right), \mathbf{T} := \left(\mathring{t}_{ij}\right) \in M(f \times f, \mathbf{R});$$

Dann erkennt man ein verallgemeinertes Eigenwertproblem für die Eigenwerte (ω^2) und die Eigenvektoren ($\vec{a}$):

$$\mathbf{V}\vec{a} = \omega^2 \mathbf{T}\vec{a}; \tag{8.1}$$

Nur wenn $\mathbf{T}$ die Einheitsmatrix ist, reduziert sich das Problem auf das gewöhnliche Eigenwertproblem. Hier lautet die Bedingung für Eigenwerte jedoch

$$\det\left(\mathbf{V} - \omega^2 \mathbf{T}\right) = 0;$$

Welche Werte für ω^2 erwartet man?

- Bei einem stabilen Gleichgewicht erwartet man nur positive Werte für ω^2.
- Bei einem indifferenten Gleichgewich erwartet man mindestens einen Wert $= 0$.
- Bei labilen Gleichgewichtslagen treten negative Werte für ω^2 auf.

8.3.3 Existenz von Normalkoordinaten

Man definiert noch weitere Matrizen

$$\mathbf{A} := \left(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_f\right); \qquad \mathbf{\Omega^2} := \begin{pmatrix} \omega_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & \omega_f^2 \end{pmatrix};$$

Nun kann man 8.1 nochmals umformulieren zu

$$\begin{aligned} \mathbf{VA} &= \mathbf{TA\Omega^2}; \qquad | \cdot \mathbf{A}^t; \\ \mathbf{A}^t\mathbf{VA} &= \mathbf{A}^t\mathbf{TA\Omega^2}; \end{aligned} \tag{8.2}$$

In Komponentenschreibweise lautet die letzte Gleichung

$$\mathring{v}_{ij}\ a_{il}a_{jk} = \mathring{t}_{ij}\ a_{il}a_{jk}\omega_k^2;$$

Durch Subtrahieren dieser Gleichung von sich selbst mit vertauschtem k und l erhält man

$$\mathring{v}_{ij}\,(a_{il}a_{jk} - a_{ik}a_{jl}) = \mathring{t}_{ij}\,\left(\omega_k^2 a_{il}a_{jk} - \omega_l^2 a_{ik}a_{jl}\right);$$

Die Linke Seite dieser Gleichung ist aber $= 0$, da $\mathbf{V}$ symmetrisch ist:

$$\mathring{v}_{ij}\,(a_{il}a_{jk} - a_{ik}a_{jl}) = \mathring{v}_{ij}\;a_{il}a_{jk} - \mathring{v}_{ji}\;a_{ik}a_{jl} = 0;$$

Für die Rechte Seite ergibt sich jedoch, unter Berücksichtigung der Symmetrie von $\mathbf{T}$

$$\left(\omega_k^2 - \omega_l^2\right)\mathring{t}_{ij}\;a_{il}a_{jk} = 0;$$

Nach diesen Vorbereitungen untersucht man die Matrix $\mathbf{A}^t\mathbf{T}\mathbf{A}$. Wenn man vorraussetzt, daß die Lösungen für ω^2 paarweise verschieden sind, so erhält man für die Elemente außerhalb der Diagonale

$$\left(\omega_k^2 - \omega_l^2\right)(\mathbf{A}^t\mathbf{T}\mathbf{A})_{lk} = 0; \quad \Rightarrow \quad (\mathbf{A}^t\mathbf{T}\mathbf{A})_{lk} = 0;\ \text{für } k \neq l;$$

Für die Diagonalelemente erhält man, wenn ein stabiles Minimum vorliegt [1]

$$(\mathbf{A}^t\mathbf{T}\mathbf{A})_{kk} = \mathring{t}_{ij}\;a_{ik}a_{jk} > 0;$$

Bei geeigneter Wahl der „Eigenvektoren“ $\vec{a}_k$ kann man sicher erreichen, daß

$$(\mathbf{A}^t\mathbf{T}\mathbf{A})_{kk} = 1;$$

Wenn man nun von der Existenz der Lösungen ausgeht, und eine neue Variable definiert

$$\vec{\xi} := \mathbf{A}^{-1}\vec{\eta};$$

so erhält man die Gleichungen

$$\begin{aligned} \mathbf{T}\ddot{\vec{\eta}} + \mathbf{V}\vec{\eta} &= 0; \\ \mathbf{T}\mathbf{A}\ddot{\vec{\xi}} + \mathbf{V}\mathbf{A}\vec{\xi} &= 0; \\ \underbrace{\mathbf{A}^t\mathbf{T}\mathbf{A}}_{=E_f}\ddot{\vec{\xi}} + \mathbf{A}^t\mathbf{V}\mathbf{A}\vec{\xi} &= 0; \end{aligned}$$

Da wir aber unsere Lösungen schon kennen, wissen wir, daß

$$\mathbf{A}^t\mathbf{V}\mathbf{A} = \mathbf{\Omega^2};$$

sein muß.

[1] Das diese Diagonalelemente tatsächlich positiv sind, sieht man am besten durch Vergleich mit der Formel für die kinetische Energie. Wenn man dort die zugehörige Lösung einsetzt, erhält man nur dann positive Werte für T, wenn die Diagonalelemente der hier diskutierten Matrix positiv sind.

Damit haben wir aber bereits bewiesen, daß sich jedes System in Normalkoordinaten transformieren läßt. Denn die jetzt gewonnene Bewegungsgleichung für die $\vec{\xi}$ liegt bereits in Diagonalform vor.

$$\ddot{\vec{\xi}} + \mathbf{\Omega^2}\vec{\xi} = 0;$$

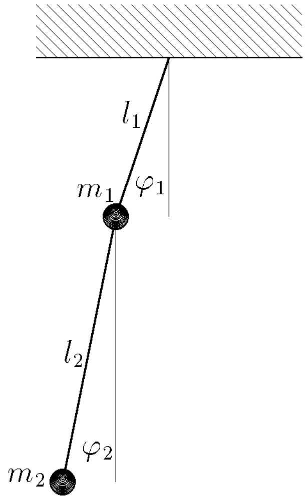
Am deutlichsten wird dies in der komponentenweisen Darstellung

$$\ddot{\xi}_i + \omega_i^2 \xi_i = 0; \qquad 1 \leq i \leq f;$$

Geometrisch bedeuted diese Diagonalisierung der Bewegungsgleichungen, daß wir die Äquipotential-Hyperflächen, die durch Ellipsen, Ellipsoide, o.ä. gegeben sind, in ihre Normalform bringen, das heißt die Koordinatenachsen in Richtung der Hauptachsen dieser Hyperflächen ausrichten. Dies geschieht praktisch durch eine Drehung.[2]

8.3.4 Beispiel: Doppelpendel

Betrachtet wird die Konfiguration zweier aneinander angehängter Pendel in der Ebene. Das obere Pendel mit der Länge l_1 habe den Ausschlagwinkel φ_1 und die Masse m_1. Die Auslenkung des unteren Pendels mit der Länge l_2 (gegenüber der Senkrechten) wird mit φ_2 bezeichnet, hier ist die Masse m_2 befestigt.



Diese natürliche Beschreibung des Problems liefert bereits die generalisierten Koordinaten, die Zwangsbedingungen sind bereits automatisch erfüllt (da wir den Pendellängen keine Koordinate zugeordnet haben). Die Gleichgewichtslage ist offensichtlich bei $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ (alle anderen Gleichgewichtszustände sind instabil).
Für die kinetische Energie erhält man

$$T = \frac{m_1}{2} l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{m_2}{2}\left(l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + l_2^2 \dot{\varphi}_2^2 + 2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)\right);$$

Und die potentielle Lageenergie ist

$$V = -m_1 g l_1 \cos\varphi_1 - m_2 g (l_1 \cos\varphi_1 + l_2 \cos\varphi_2);$$

[2] Da für Drehmatrizen ja $\mathbf{A}^t = \mathbf{A}^{-1}$ gilt, tritt hier ein enger Zusammenhang mit der Diagonalisierung von Matrizen zutage.

Damit ist die Lagrange-Funktion

$$L = \frac{m_1}{2} l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{m_2}{2} \left(l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + l_2^2 \dot{\varphi}_2^2 + 2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \right) +$$
$$+ m_1 g l_1 \cos\varphi_1 + m_2 g (l_1 \cos\varphi_1 + l_2 \cos\varphi_2);$$

Da die Gleichgewichtslage gerade am Koordinaten-Nullpunkt liegt, kann man die kleinen Auslenkungen ohne weiteres wieder mit φ_1 und φ_2 bezeichnen. Taylornäherung der Lagrange-Funktion bis zur 2. Ordnung ergibt nun[3], wenn man alle konstanten Terme vernachlässigt.

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}(m_1 + m_2) l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 (l_2^2 \left(\dot{\varphi}_2^2 + 2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \right) - \frac{1}{2}(m_1 + m_2) g l_1 \varphi_1^2 - \frac{1}{2} m_2 g l_2 \varphi_2^2 = \\ &= \frac{1}{2} \left(\mathring{t}_{ij}\ \dot{\varphi}_i \dot{\varphi}_j - \mathring{v}_i\ j \varphi_i \varphi_j \right); \end{aligned}$$

Daraus kann man also die Matrizen $\mathbf{T}$ und $\mathbf{V}$ ablesen, und man erhält mit der Definition $\omega_i^2 := \frac{g}{l_i}$ für $i = 1, 2$

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} (m_1 + m_2) l_1^2 & m_2 l_1 l_2 \\ m_2 l_1 l_2 & m_2 l_2^2 \end{pmatrix}; \qquad \mathbf{V} = \begin{pmatrix} (m_1 + m_2) l_1^2 \omega_1^2 & 0 \\ 0 & m_2 l_2^2 \omega_2^2 \end{pmatrix};$$

Damit erhält man für die Frequenzen der Elementarschwingungen die Gleichung

$$\det(\mathbf{V} - \omega^2 \mathbf{T}) = \begin{vmatrix} (m_1 + m_2) l_1^2 (\omega_1^2 - \omega^2) & -m_2 l_1 l_2 \omega^2 \\ -m_2 l_1 l_2 \omega^2 & m_2 l_2^2 (\omega_1^2 - \omega^2) \end{vmatrix} = 0;$$

Es ergibt sich

$$\omega^4 - \frac{m_1 + m_2}{m_1} (\omega_1^2 + \omega_2^2) \omega^2 + \frac{m_1 + m_2}{m_1} \omega_1^2 \omega_2^2 = 0;$$

Daraus kann man nun die Frequenzen der Eigenschwingungen bestimmen. Hat man diese, so muß man die zugehörigen Lösungsvektoren bestimmen und erhält dann die Vollständige Lösung, indem man die gefundenen Einzelschwingungen überlagert. Wir wollen dies in 2 Spezialfällen tun.

1. $\frac{m_1}{m_2} \gg 1;$

   Man hat in diesem Fall näherungsweise

   $$(\omega^2 - \omega_1^2)(\omega^2 - \omega_2^2) = 0;$$

   Also

   $$\omega^2 = \omega_1^2; \qquad \text{oder} \qquad \omega^2 = \omega_2^2;$$

   Hier hat man also entkoppelte getrennte Schwingungen. Die beiden Pendel verhalten sich so, als wäre das andere nicht da bzw. unbeweglich. Die zugehörigen Lösungsvektoren sind natürlich die Einheitsvektoren.

[3]Bis zur zweiten Ordnung heißt, daß alle Summanden der Taylor-Reihe, in denen die Faktoren φ_1 und/oder φ_2 mehr als zweimal vorkommen, vernachlässigt werden.

2. $m_1 = m_2, l_1 = l_2, \omega_1^2 = \omega_2^2$;
   Hiermit ergibt sich
$$\omega^4 - 4\omega_1^2\omega^2 + 2\omega_1^4 = 0;$$
   Also
$$\omega^2 = \omega_1^2\left(2 \pm \sqrt{2}\right);$$
   Welche Eigenvektoren gehören nun zu dieser Lösung?
   Für $\omega^2 = \omega_1^2\left(2 + \sqrt{2}\right)$ findet man die Lösungsschar
$$\begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \varphi_2(t) \end{pmatrix} = N_1 \begin{pmatrix} -2 - \sqrt{2} \\ 2 + 2\sqrt{2} \end{pmatrix} e^{i\omega t};$$
   Für $\omega^2 = \omega_1^2\left(2 - \sqrt{2}\right)$ findet man die Lösungsschar
$$\begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \varphi_2(t) \end{pmatrix} = N_2 \begin{pmatrix} 2 - \sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} - 2 \end{pmatrix} e^{i\omega t};$$
   Für die Transformationsmatrix **A** macht man den Ansatz
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} N_1\left(2 + \sqrt{2}\right) & N_2\left(2 - \sqrt{2}\right) \\ -N_1\left(2 + 2\sqrt{2}\right) & N_2\left(2\sqrt{2} - 2\right) \end{pmatrix};$$
   Mit diesem Ansatz erhält man
$${}^t\mathbf{A}\mathbf{T}\mathbf{A} = m_1 l_1^2 \begin{pmatrix} 4N_1^2\left(2 + \sqrt{2}\right) & 0 \\ 0 & 4N_2^2\left(2 - \sqrt{2}\right) \end{pmatrix};$$
   Man wählt
$$N_1^2 = \frac{1}{4\left(2 + \sqrt{2}\right) m_1 l_1^2}; \qquad N_2^2 = \frac{1}{4\left(2 - \sqrt{2}\right) m_1 l_1^2};$$
   und erhält
$$\begin{aligned} {}^t\mathbf{A}\mathbf{T}\mathbf{A} &= E; \text{ Einheitsmatrix.} \\ {}^t\mathbf{A}\mathbf{V}\mathbf{A} &= \omega_1^2 \begin{pmatrix} 2 + \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 2 - \sqrt{2} \end{pmatrix} = \mathbf{\Omega^2}; \end{aligned}$$

Damit haben wir die oben allgemein gewonnenen Ergebnisse auch hier noch einmal bestätigt. Man sieht jedoch, daß es nicht möglich ist, für jeden Wert der Konstanten $(m_1, m_2, l_1, \ldots)$ die Normalkoordinaten unmittelbar anzugeben.

Kapitel 9

Das Prinzip der Kleinsten Wirkung

9.1 Variationsrechnung

9.1.1 Einführung

Die Variationsrechnung untersucht Funktionale, das heißt Abbildungen von Funktionenräumen nach $\mathbf{R}$. Ziel der Untersuchungen (soweit wir sie wiedergeben) ist das Auffinden von Extrema und Stationären Punkten der Abbildung. Einfache Beispiele für Funktionale sind

$$\begin{aligned}
\mathcal{I} &= \left(f \mapsto \int_a^b A(x)f(x)\,dx\right) : C[a,b] \to \mathbf{R} \qquad \text{Lineares Funktional.}\\
\mathcal{I} &= \left(f \mapsto \int_a^b f(x)^2\,dx\right) : C[a,b] \to \mathbf{R} \qquad \text{Nichtlineares Funktional.}\\
\mathcal{I} &= \left(f \mapsto f(x_0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-x_0)\,dx\right) : C(\mathbf{R}) \to \mathbf{R} \qquad \text{Lineares Funktional.}
\end{aligned}$$

Ein Beispiel für eine Anwendung der Variationsrechnung ist das Fermatsche' Prinzip. Gesucht ist die kürzeste Verbindung zweier Punkte der Ebene, wenn an jedem Punkt nur eine bestimmte Geschwindigkeit möglich ist.
Wir benötigen für die Mechanik nur eine spezielle Sorte von Funktionalen. Für Funktionen $q : [\tau_1, \tau_2] \to \mathbf{R}$ mit $q(\tau_1) = q_1$ und $q(\tau_2) = q_2$ betrachtet man das Funktional

$$\mathcal{I}[q] = \left(q \mapsto \int_{\tau_1}^{\tau_2} f(q(\tau), \dot{q}(\tau), \tau)\,d\tau\right) : C^2[\tau_1, \tau_2] \to \mathbf{R};$$

mit $\dot{q} = \frac{dq}{d\tau}$.
Um den Zusammenhang mit Funktionen mehrerer Variablen deutlich zu machen, muß man die Funktionen als Vektoren mit „überabzählbar vielen Einträgen“ auffassen. Funktionale sind also Funktionen mit $2^{\aleph_0}$ Variablen.

9.1.2 Stetigkeit und Differenzierbarkeit von Funktionalen

Definition

Ein Funktional $\mathcal{I} : F \to \mathbf{R}$ heißt stetig, wenn für alle $f \in F$ gilt

$$\forall \varepsilon > 0 : \; \exists \delta > 0 : \; \forall g \in F \text{ mit } \|f - g\| < \delta \Rightarrow |\mathcal{I}(f) - \mathcal{I}(g)| < \varepsilon;$$

Dabei werden die folgenden „Normen" verwendet (je nach Funktionenklasse F und Zweck der Untersuchung)

$$\begin{aligned} \|f\| &= \sup_x |f(x)|; \\ \|f\| &= \sup_x |f(x)| + \sup_x |f'(x)|; \\ \|f\| &= \int_{\mathbf{R}} f^2(x)\, dx; \end{aligned} \tag{9.1}$$

Das Funktional heißt differenzierbar im Punkt $f \in F$, wenn es ein lineares Funktional $\mathcal{I}'_f : F \to \mathbf{R}$ gibt, so daß gilt

$$\forall h \in F : \quad \mathcal{I}(f) - \mathcal{I}(f + h) = \mathcal{I}'_f(h) + o\left(\|h\|^2\right);$$

Dabei heißt ein Funktional linear, wenn es ein Homomorphismus der Vektorräume F und $\mathbf{R}$ ist.

Wir behaupten nun, daß das oben definierte Funktional

$$\mathcal{I}[q] = \int_{\tau_1}^{\tau_2} f(q(\tau), \dot{q}(\tau), \tau)\, d\tau;$$

für jede partiell differenzierbare Funktion $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ differenzierbar ist. Es gilt nämlich[1]

$$\begin{aligned} \mathcal{I}[q + h] - \mathcal{I}[q] &= \int_{\tau_1}^{\tau_2} f(q(\tau) + h(\tau), \dot{q}(\tau) + \dot{h}(\tau), \tau) - f(q(\tau), \dot{q}(\tau), \tau)\, d\tau = \\ &= \int_{\tau_1}^{\tau_2} h(\tau)\frac{\partial f}{\partial q}(\cdots) + \dot{h}(\tau)\frac{\partial f}{\partial \dot{q}}(\cdots) + o(h^2(\tau), \dot{h}^2(\tau))\, d\tau = \cdots \end{aligned}$$

Eine Nebenrechnung ergibt

$$\begin{aligned} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \dot{h}(\tau)\frac{\partial f}{\partial \dot{q}}(\cdots)\, d\tau &= \left[h(\tau)\frac{\partial f}{\partial \dot{q}}(\cdots)\right]_{\tau_1}^{\tau_2} - \int_{\tau_1}^{\tau_2} h(\tau)\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{q}}(\cdots)\right)\, d\tau = \\ &= -\int_{\tau_1}^{\tau_2} h(\tau)\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{q}}(\cdots)\right)\, d\tau; \end{aligned} \tag{9.2}$$

Beim letzten Schritt ist die zugrundeliegende Funktionenklasse zu beachten, daher gilt $h(\tau_1) = h(\tau_2) = 0$. Wir verwenden im Folgenden die Norm 9.1, die auch die $\dot{h}$-Terme

[1] Das Argument der Partiellen Ableitungen $(q(\tau), \dot{q}(\tau), \tau)$ wird durch Punkte $(\cdots)$ ersetzt.

einschließt.

$$\cdots = \underbrace{\int_{\tau_1}^{\tau_2} \left(\frac{\partial f}{\partial q} - \frac{d}{d\tau}\frac{\partial f}{\partial \dot q}\right)(\cdots)h(\tau)\, d\tau}_{=:\mathcal{I}'_q[h] \to \text{ lineares Funktional.}} + o(\|h\|^2);$$

Als Funktionalableitung bezeichnet man nun nicht etwa das gefundene lineare „Approximationsfunktional“, sondern man nennt so die Funktion

$$\frac{\delta \mathcal{I}[q]}{\delta(q(\tau))} := \frac{\partial f}{\partial q} - \frac{d}{d\tau}\frac{\partial f}{\partial \dot q};$$

Damit haben wir für den uns interressierenden Fall eine Möglichkeit gefunden, die Ableitung $\mathcal{I}'_q$ des Funktionals zu berechnen. Analog zur Differentiation von Funktionen einer oder mehrerer reller Variablen ist das Verschwinden der Ableitung notwendig (aber nicht hinreichend) für ein Minimum oder Maximum, wenn die Funktion noch auf einer ganzen Umgebung des entsprechenden Punktes definiert ist. Überraschenderweise ist es bei Funktionalen jedoch gar nicht immer erforderlich, nach Minima oder Maxima zu suchen. Entscheidend für das Prinzip der kleinsten Wirkung — Nomen non est Omen — sind vielmehr die stationären Punkte der Abbildung, die auch für Funktionale als die Punkte definiert sind, an denen die Ableitung verschwindet.
Die obigen Rechnungen können nun wie folgt zusammengefasst werden. Das Funktional

$$\mathcal{I} = \left(q \mapsto \int_{\tau_1}^{\tau_2} f(q(\tau), \dot q(\tau), \tau)\, d\tau\right) : \left\{q \in C^1[\tau_1, \tau_2] | q(\tau_1) = q_1; \text{ und } q(\tau_2) = q_2;\right\} \to \mathbf{R};$$

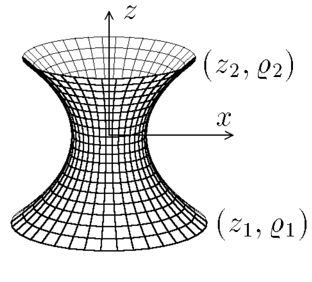
ist stationär im Punkt q aus der fraglichen Funktionenmenge, genau wenn q die Euler-Gleichung

$$\frac{\partial f}{\partial q} - \frac{d}{d\tau}\frac{\partial f}{\partial \dot q} = 0;$$

löst.

9.1.3 Einführungsbeispiel: Rotationsflächen

Mit dem soeben entwickelten Apparat wollen wir uns nun an der Lösung des folgenden Problems versuchen.
Gegeben seien zwei konzentrisch zur z-Achse und parallel zur x-y-Ebene befestigte Kreise (z.B. in Form von Drähten). Eine Haut (Seifenblase, Gummi), die über diese Kreise gespannt ist, nimmt die Lage ein, bei der die aufgespannte Fläche minimal ist. Gesucht ist nach einer Darstellung dieser Fläche.



Man kann selbstverständlich annehmen, daß die entstehende Figur rotationssymmetrisch bezüglich der z-Achse ist. Dann entspricht jeder Fläche genau eine Funktion $f : z \mapsto$

$x = f(z)$ in der x-z-Ebene, die durch Rotation die gewünschte Fläche erzeugt. Die Randbedingungen für eine solche Funktion lauten etwa

$$f(z_1) = \varrho_1; \qquad f(z_2) = \varrho_2;$$

Man stellt jedoch fest, daß ein anderer Ansatz schneller zur Lösung führt. Man stellt die Figur durch „die“ Umkehrfunktion $z = g(x)$ dar. Natürlich hat man dann bestenfalls lokale Lösungen und man wird die Gesamtlösung aus mehreren Teilen zusammenfügen müssen. Dennoch führt diese Methode schneller zum Erfolg, da die sich ergebende Differentialgleichung wesentlich einfacher ist.
Man hat also die Randbedingungen

$$g(\varrho_1) = z_1; \qquad g(\varrho_2) = z_2;$$

Für ein Stück dx entlang der x-Achse ermittelt man die Kurvenlänge

$$ds = \sqrt{dx^2 + dz^2} = \sqrt{1 + g'(x)^2}\ dx;$$

also erhält man als zugehörige Fläche

$$dF = 2\pi x \sqrt{1 + g'(x)^2}\ dx;$$

Durch Integration erhält man also das Funktional[2]

$$F[g] = \int_{\varrho_1}^{\varrho_2} 2\pi \sqrt{1 + g'(x)^2}\ x\ dx;$$

Dieses Funktional ist von dem Typ, wie er oben diskutiert wurde, wenn man

$$f(g, g', x) = 2\pi \sqrt{1 + g'^2}\ x;$$

setzt. Die Euler-Lagrange-Gleichungen liefern

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial g'} = 0; \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial f}{\partial g'} = \text{const.} = \frac{2\pi g' x}{\sqrt{1 + g'^2}} =: c \cdot 2\pi;$$

Man erhält also

$$\begin{aligned} x^2 g'^2 &= c^2(1 + g'^2); \\ g' &= \pm\sqrt{\frac{c^2}{x^2 - c^2}}; \\ \int dg &= \pm c \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - c^2}}; \end{aligned}$$

[2] Man muß hier die Annahme machen, daß die Lösung auf dem ganzen Intervall $[\varrho_1, \varrho_2]$ existiert und differenzierbar ist. Dies ist jedoch möglich, da für jedes Teilintervall gilt, daß die Lösung auf dem ganzen Intervall auch Lösung des auf das Teilintervall eingeschränkten Problems ist. Nur die Randbedingungen sind in Abhängigkeit von der Gesamtlösung zu wählen. Wir können diese Randbedingungen aber auch durch Differenzierbarkeitsforderungen ohne Kenntnis der Gesamtlösung bestimmen. (Dies wird sich später ganz natürlich ergeben.) Hier gehen wir jedoch zunächst davon aus, daß $[\varrho_1, \varrho_2]$ schon ein hinreichend kleines Teilintervall ist.

Nach Bronstein (S. 48) findet man als Lösung des rechten Integrals

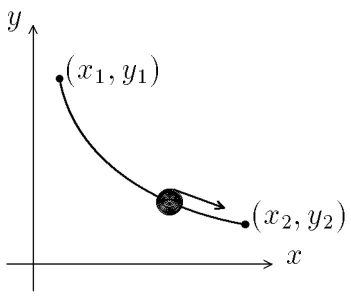
$$g(x) = \pm c \cdot \operatorname{arcosh} \frac{x}{c} + b;$$

mit einer beliebigen Integrationskonstanten b. Wir sind ja eigentlich an der Umkehrfunktion interressiert. Es ergibt sich

$$f(z) = c \cdot \cosh \frac{z-b}{c};$$

Damit haben wir eine Lösung gefunden, die bereits überall definiert ist und die an die Randbedingungen stets durch die Integrationskonstanten c und b angepasst werden kann. Die oben erwähnte Zusammenstückelung ging also beim Umkehren ganz automatisch. Ein weiteres Beispiel soll noch kurz erwähnt werden.

Brachistochrome



Wie muß die Rutschbahn eines Teilchens gewählt werden, daß im Schwerefeld eine möglichst kurze Zeit benötigt wird, um zwei Punkte zu verbinden. Man hat also für die Bahnkurve $y(x)$ die Randbedingungen

$$y(x_1) = y_1; \qquad \text{und} \qquad y(x_2) = y_2;$$

Man hat für das Funktional den Ansatz

$$T[y] = \int_{t_1}^{t_2} dt;$$

Für dt hat man $v = \frac{ds}{dt}$; $\Rightarrow$ $dt = \frac{ds}{v}$ und v erhält man mit

$$E = \frac{m}{2} v^2 + mgy;$$

und der (stets möglichen) Festsetzung $E = 0$. Nun hat man für das Funktional

$$T[y] = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{-2gy}}\, dx;$$

Dies ergibt eine Zykloide.

9.1.4 Extrema mit Nebenbedingungen

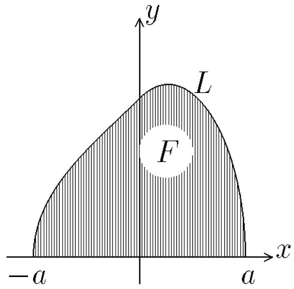
Häufig werden an die Lösungen von Variationsproblemen weitere Bedingungen gestellt. Wenn etwa das Durchhängen eines Seiles untersucht wird, so ist es nicht zweckmäßig, alle Funktionen zu betrachten — das unendlich lange und unendlich tief durchhängende Seil

hat natürlich energetisch die beste Lage — sondern man muß sich auf solche Funktionen beschränken, die eine bestimmte Kurvenlänge haben, nur so macht die Aufgabe Sinn. Wir werden also fordern, daß unser Funktional $\mathcal{I}$ stationär ist bezüglich der Funktionenmenge, die durch die Bedingung $\mathcal{G}[q] = 0$ mit einem weiteren Funktional $\mathcal{G}$ gegeben ist. Auch mehrere Bedingungen dieser Art sind denkbar.
Bei Funktionen mehrerer Veränderlicher findet man Extrema mit Nebenbedingungen mit der Methode der Lagrange-Multiplikatoren. In Analogie dazu macht man auch hier den Ansatz[3]

$$\delta\left(\mathcal{I} - \lambda\mathcal{G}\right) = 0;$$

Dieser Ansatz führt nun im Allgemeinen auf eine Kurvenschar $q(.,\lambda)$, aus der man die Lösung durch Einsetzen in die Bedingung $\mathcal{G}[q] = 0$ erhält.

Beispiel: Problem der Königin von Dido



Gesucht ist die Kurve vorgegebener Länge mit vorgegebenen Randpunkten $(-a, 0)$ und $(a, 0)$, die zwischen sich und der x-Achse das größtmögliche Flächenstück einschließt. Wir nehmen an, daß sich diese Kurve (zumindest stückweise) als differenzierbare Funktion $y(x)$ darstellen läßt. Man hat die Funktionale

$$F[y] = \int_{-a}^{a} y \; dx; \text{ Fläche.} \qquad G[y] = \int_{-a}^{a} \sqrt{1 + y'^2}\; dx = L; \text{ Kurvenlänge.}$$

Nach der oben vorgestellten Methode untersucht man also das Funktional

$$\int_{-a}^{a} y + \lambda\sqrt{1 + y'^2}\; dx;$$

Man erhält

$$\begin{aligned} 1 - \frac{d}{dx}\frac{\lambda y'}{\sqrt{1+y'^2}} &= 0; \\ \frac{d}{dx}\underbrace{\left(x - \frac{\lambda y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right)}_{=\text{const.}=:c;} &= 0; \end{aligned}$$

[3]Diesen Ansatz kann man sich für Funktionen mehrerer Variabler veranschaulichen. Für Funktionale kann hier weder ein Beweis noch eine anschauliche Herleitung gegeben werden. Es muß darauf hingewiesen werden, daß diese Bedingung im Allgemeinen weder notwendig noch hinreichend ist. Bei offenen Funktionenmengen, hinreichender Differenzierbarkeit und einigen weiteren Vorraussetzungen — von denen man in der Physik stillschweigend annimmt, daß sie erfüllt sind — ist diese Bedingung jedoch zumindest notwendig für Extrema.

$$\begin{aligned}
\frac{\lambda y'}{\sqrt{1+y'^2}} &= x-c; \\
y'^2 &= \frac{(x-c)^2}{\lambda^2-(x-c)^2}; \\
\frac{dy}{dx} &= \pm\frac{x-c}{\sqrt{\lambda^2-(x-c)^2}};
\end{aligned}$$

Trennung der Variablen ergibt nun eine Schar von Kreisbögen. Mit diesem Wissen kann man den Weg etwas abkürzen. Man hat nämlich für einen Kreis mit beliebigem Radius R um den Mittelpunkt (x_0, y_0)

$$\begin{aligned}
(x-x_0)^2+(y-y_0)^2 &= R^2; \\
y-y_0 &= \pm\sqrt{R^2-(x-x_0)^2}; \\
\frac{dy}{dx} &= \pm\frac{x-x_0}{\sqrt{R^2-(x-x_0)^2}};
\end{aligned}$$

Man erhält nun für die Integrationskonstante

$$y(a)=y(-a)=0; \quad \Longrightarrow \quad x_0=0=c;$$

Um den Lagrange-Multiplikator $\lambda = R$ zu ermitteln, berechnen wir zunächst ds

$$\begin{aligned}
ds &= \sqrt{1+y'^2}\ dx = \\
&= \sqrt{1+\frac{x^2}{R^2-x^2}}\ dx = \\
&= \frac{R\ dx}{\sqrt{R^2-x^2}};
\end{aligned}$$

Also ergibt sich für die Länge des Bogens (mit der Substitution $x = R\sin\phi$)

$$L = 2\int_0^a \frac{R\ dx}{\sqrt{R^2-x^2}} = 2\int_0^{\arcsin\frac{a}{R}} \frac{R^2\cos\phi\ d\phi}{R\cos\phi} = 2R\cdot\arcsin\frac{a}{R};$$

Also ergibt sich für den Radius (und damit für den Lagrange-Multiplikator) die transzendente Gleichung

$$\sin\frac{L}{2R} = \frac{a}{R};$$

Man kann diese Gleichung nur numerisch lösen, z.B. mit dem Newton-Verfahren.

9.2 Beschreibung des Prinzips der kleinsten Wirkung

9.2.1 Definition des Prinzips

Mit der bereits weiter oben verwendeten Lagrange-Funktion gilt

Prinzip der stationären Wirkung

In einem mechanischen System mit der Lagrange-Funktion

$$L(q_i, \dot{q}_i, t)$$

sind genau die Bahnen zwischen den Raumpunkten $\vec{q}^{(1)}$ und $\vec{q}^{(2)}$ möglich, für die das Wirkungsfunktional

$$\mathcal{S}[\vec{q}] = \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t)\; dt;$$

stationär wird. Dabei ist vorrausgesetzt, daß alle Zwangsbedingungen holonom sind und die Koordinaten $q_1, \ldots, q_f$ allen f Freiheitsgraden entsprechen.

Der hier auftretende Begriff Wirkung kommt von der physikalischen Dimension des Integrals. Die Lagrange-Funktion hat die Dimension Energie, also ergibt die Integration die Dimension Energie·Zeit. Diese Dimension heißt Wirkung.

9.2.2 Herleitung der Lagrange-Gleichungen

Nun wollen wir — um dieses neue Prinzip zu bestätigen, die Lagrange-Gleichungen aus dem Prinzip der kleinsten (stationären) Wirkung[4] herleiten.
Bisher haben wir nur Funktionale von Funktionen $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ betrachtet. Daher müssen die Überlegungen zum Auffinden von stationären Punkten hier wiederholt werden.
Man hat (wieder einmal unter Verwendung der Taylor-Entwicklung)

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{S}[\vec{q}] &= \mathcal{S}[\vec{q} + \delta\vec{q}] - \mathcal{S}[\vec{q}] = \\
&= \int_{t_1}^{t_2} L(q_i + \delta q_i, q_i + \delta\dot{q}_i, t) - L(q_i, \dot{q}_i, t)\; dt = \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \left(\delta q_i \frac{\partial L}{\partial q_i} + \delta\dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right)\; dt = \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \delta q_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right)\; dt;
\end{aligned}$$

Beim letzten Schritt wurde eine Nebenrechnung analog zu 9.2 weggelassen. Man beachte die Summenkonvention!
Nun erhält man, da die δq_i beliebige Funktionen sein können, die Bedingungen

$$\left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = 0; \qquad \forall 1 \le i \le f;$$

Dies sind wieder die alten Euler-Lagrange-Gleichungen.

---

[4]Wie die obige Definition zeigt, verlangt dieses Prinzip nicht, daß die Wirkung minimal wird, sondern nur, daß sie stationär wird. Unter Umständen kann auch eine maximale Wirkung einer realen Lösung entsprechen. Dennoch hat sich die Bezeichnung „Prinzip der kleinsten Wirkung“ eingeschliffen.

9.2.3 Unmittelbare Anwendungen

Es soll das Verhalten freier Massepunkte auf $2d$-Flächen studiert werden.
Auf einer Kugel verwendet man die Polarkoordinaten und erhält für ein freies Teilchen der Masse m beim Kugelradius $R = \text{const.}$

$$L = T = \frac{m}{2}\left(R^2\dot{\theta}^2 + R^2\sin^2\theta\cdot\dot{\varphi}^2\right);$$

Die Lagrange-Gleichungen lauten dann

$$\begin{aligned}\ddot{\theta} - \sin\theta\cos\theta\cdot\dot{\varphi}^2 &= 0;\\ \frac{d}{dt}\left(\sin^2\theta\cdot\dot{\varphi}\right) &= 0;\end{aligned}$$

Eine Lösung findet man mit dem Ansatz $\theta = \frac{\pi}{2} = \text{const.}$. Dann hat man $\ddot{\varphi} = 0$ und damit ist die Lösung der mit konstanter Geschwindigkeit durchlaufene Großkreis in der x-y-Ebene. Man überlegt sich nun leicht, daß man alle Lösungen erhält, wenn man beliebige mit konstanter Geschwindikeit durchlaufene Großkreise zuläßt.
Bei zwei dicht beieinander liegenden Punkten gibt es zwei Lösungen, die die beiden Punkte verbinden. Die kurze direkte Verbindung ist ein Minimum des Wirkungsfunktionals. Aber die ebenfalls mögliche Variante „hintenherum“ ist kein Minimum des Funktionals, sondern ein Sattelpunkt (benachbarte Großkreise ergeben eine kleinere Wirkung, andere Funktionen eine größere).
Ein weiteres Beispiel ist der Zylindermantel. Hier kann sich ein Teilchen auf einer Schraubenlinie mit beliebiger „Hubhöhe“ (auch 0 und negativ) bewegen. Für die Verbindung zweier Punkte gibt es hier sehr viele Möglichkeiten. Diese erhält man, wenn man den Zylinder endlos in der Ebene abrollt und dabei einen der Punkte stets, den anderen nur einmal einzeichnet. Jede Verbindungslinie einer Projektion des einen Punktes mit dem anderen Punkt entspricht genau einer Lösung.
Allgemein sieht man, daß die Lösungen, die man aufgrund des Prinzips der kleinsten Wirkung erhält weder eindeutig sind, noch gibt es eine Möglichkeit, Minima des Wirkungsfunktionals zu erkennen. Normalerweise ist es jedoch gar nicht notwendig zu entscheiden, ob eine Lösung ein Minimum des Funktionals ist — schließlich sind alle stationären Lösungen physikalisch mögliche Bahnen.

9.2.4 Suche nach Extrema bei Funktionalen

Wenn man es benötigt, wie kann man dann entscheiden, ob ein stationärer Punkt eines Funktionals ein Extremum ist? Es gibt hierfür zwei Möglichkeiten.
Wir betrachten zunächst die

2. Variation

Es sei q ein stationärer Punkt des Funktionals

$$\mathcal{I}[q] = \int_{\tau_1}^{\tau_2} f(q,\dot{q},\tau)\; d\tau;$$

und h eine beliebige Funktion mit $h(\tau_1) = h(\tau_2) = 0$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}[q+h] + \mathcal{I}[q] &= \int_{\tau_1}^{\tau_2} f(q-h, \dot{q}-\dot{h}, \tau) - f(q, \dot{q}, \tau)\; d\tau = \\
&= \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left(h\frac{\partial f}{\partial q} + \dot{h}\frac{\partial f}{\partial \dot{q}} + \frac{1}{2}h^2\frac{\partial^2 f}{\partial q^2} + h\dot{h}\frac{\partial^2 f}{\partial q \partial \dot{q}} + \frac{1}{2}\dot{h}^2\frac{\partial^2 f}{\partial \dot{q}^2} \right) d\tau = \\
&= \frac{1}{2}\int_{\tau_1}^{\tau_2} \left(h^2\frac{\partial^2 f}{\partial q^2} + 2h\dot{h}\frac{\partial^2 f}{\partial q \partial \dot{q}} + \dot{h}^2\frac{\partial^2 f}{\partial \dot{q}^2} \right) d\tau;
\end{aligned}$$

Man hat damit für die „2. Variation“ des Funktionals:

$$\delta^2\mathcal{I}[h] := \frac{1}{2}\int_{\tau_1}^{\tau_2} \left(h^2\frac{\partial^2 f}{\partial q^2} + 2h\dot{h}\frac{\partial^2 f}{\partial q \partial \dot{q}} + \dot{h}^2\frac{\partial^2 f}{\partial \dot{q}^2} \right) d\tau;$$

Man sieht nun

1. Wenn $\delta^2\mathcal{I}[h] > 0$ für beliebige h, dann hat man ein Minimum des Funktionals.
2. Wenn $\delta^2\mathcal{I}[h] < 0$ für beliebige h, dann hat man ein Maximum des Funktionals.
3. Sonst hat man im Allgemeinen, aber nicht immer, einen Sattelpunkt des Funktionals. Ist insbesondere $\delta^2\mathcal{I}[h] = 0$ für alle h, dann ist keine Aussage über Minimum oder Maximum möglich.

Legendre-Bedingung

Eine notwendige Bedingung dafür, daß das obige Funktional im stationären Punkt q ein Minimum hat, ist

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial \dot{q}^2}(q, \dot{q}, t) > 0;}$$

Zum Beweis betrachte man einige spezielle Funktionen h_σ. Zu einem vorgegebenen $\alpha \in \mathbf{R}$ sei h_σ die stetige und stückweise lineare Funktion, die außerhalb von $]\alpha-\sigma, \alpha+\sigma[$ null ist, am Punkt α ist jedoch $h_\sigma(\alpha) = \sqrt{\sigma}$. Man erhält $\dot{h}^2 = \frac{1}{\sigma}$. Läßt man nun $\sigma \to 0$ gehen, so bleibt als einziger Term in der zweiten Variation

$$\delta^2\mathcal{I}[h] \to \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial \dot{q}^2}\int_{\tau_1}^{\tau_2} \dot{h}^2\; d\tau \to \left.\frac{\partial^2 f}{\partial \dot{q}^2}\right|_\alpha;$$

Damit ist die Legendre-Bedingung offenbar notwendig für ein Minimum — aber keineswegs hinreichend.

9.3 Lagrange-Mechanik und Prinzip der kleinsten Wirkung für ∞-viele Freiheitsgrade

9.3.1 Rückblick: Herleitung der Wellengleichung

Bereits in Kapitel 5 haben wir die Wellengleichung aus den Newton'schen Gleichungen hergeleitet. Da die Lagrange-Gleichung für harmonische Oszillatoren der zugehörigen

Newton'schen Gleichung mathematisch völlig gleichwertig ist, kann man das damalige Ergebnis ohne weiteres übernehmen.
Wir gewinnen jedoch die zusätzliche Möglichkeit, Systeme in generalisierten Koordinaten zu betrachten. Wenn diese auf dieselbe Lagrange-Gleichung führen bleiben die Ergebnisse der nachfolgenden Überlegungen richtig.
Gegenüber der Bezeichnungsweise in Kapitel 5 muß leider einiges geändert werden. Die Lösungsfunktionen $\eta(x,t)$ und die Auslenkungen werden mit η_i und nicht mehr mit den Buchstaben q bezeichnet. Die Dichte heißt nun μ und die Kopplungsstärke ist die Young-Konstante Y.
Nun lautet die Wellengleichung

$$\left(\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\eta(x,t) = 0;$$

mit $v^2 = \frac{Y}{\mu}$.
Die Lösungen hiervon haben wir ja bereits diskutiert. Daher soll im Folgenden nochmals auf andere Herleitungsvarianten eingegangen werden.

9.3.2 Die Lagrange'sche Dichte

Bisher sind wir von den diskreten Bewegungsgleichungen ausgegangen und haben an diesen den Kontinuumsübergang durchgeführt. Nun wollen wir es einmal direkt an den Lagrange-Gleichungen versuchen.
Im diskreten Fall hat man

$$L = \sum_i \left(\frac{1}{2}\mu\dot{\eta}_i^2 - \frac{1}{2}Y\left(\frac{\eta_{i+1}-\eta_i}{a}\right)^2\right);$$

Offenbar führt der Grenzübergang auf

$$L = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}\mu\dot{\eta}^2 - \frac{1}{2}Y\eta'^2\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\mathcal{L}}(x)\,dx;$$

Die vorkommende Funktion heißt Lagrange-Dichte. Genau gilt jedoch

Definition:

Die Lagrange'sche Dichte $\mathcal{L}$ ist die Funktion

$$\mathcal{L}(\dot{\eta}(x,t),\eta'(x,t)) = \frac{1}{2}\mu\dot{\eta}^2 - \frac{1}{2}Y\eta'^2 = \hat{\mathcal{L}}(x);$$

Natürlich ist nun die Frage, ob man hieraus die Wellengleichung herleiten kann.
Hierzu versuchen wir, die Wellengleichung mit Hilfe dieser Funktion anzugeben, so daß man für andere Lagrange-Dichten nicht die Herleitung wiederholen muß, sondern gleich

aus diesem Ergebnis die neue Wellengleichung angeben kann. Dies wäre dann ein Analogon zur Euler-Lagrange-Gleichung für diskrete Probleme.
Doch zunächst bleiben wir bei unserem Spezialfall. Die Lagrange-Gleichungen sind

$$\sum_j \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L_j}{\partial \dot\eta_i} - \frac{\partial L_j}{\partial \eta_i} \right) = 0; \qquad \forall i \in \mathbf{Z};$$

Die einzelnen Lagrange-Funktionen sind, mit der Bezeichnung $\xi_i := \frac{\eta_{i+1}-\eta_i}{a}$

$$L_j = \frac{1}{2}\mu\dot\eta_j^2 - \frac{1}{2}Y\xi_j^2;$$

Wir berechnen die einzelnen Bestandteile der Lagrange-Gleichungen

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L_j}{\partial \dot\eta_i} &= \delta_{ij}\frac{\partial L_j}{\partial \dot\eta_j}; \\
\frac{\partial L_j}{\partial \eta_i} &= \frac{\partial L_j}{\partial \xi_j}\frac{\partial \xi_j}{\partial \eta_i} = \\
&= \frac{\partial L_j}{\partial \xi_j}\frac{\delta_{j,i-1}-\delta_{ji}}{a} = \\
&= \frac{1}{a}\left(\delta_{j,i-1}\frac{\partial L_{i-1}}{\partial \xi_{i-1}} - \delta_{ij}\frac{\partial L_i}{\partial \xi_i}\right); \\
\sum_j \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L_j}{\partial \dot\eta_i} - \frac{\partial L_j}{\partial \eta_i} \right) &= \sum_j \left(\frac{d}{dt}\delta_{ij}\frac{\partial L_j}{\partial \dot\eta_j} - \frac{1}{a}\left(\delta_{j,i-1}\frac{\partial L_{i-1}}{\partial \xi_{i-1}} - \delta_{ij}\frac{\partial L_i}{\partial \xi_i}\right)\right) = \\
&= \frac{d}{dt}\frac{\partial L_i}{\partial \dot\eta_i} - \frac{1}{a}\left(\frac{\partial L_{i-1}}{\partial \xi_{i-1}} - \frac{\partial L_i}{\partial \xi_i}\right) = 0;
\end{aligned}$$

Im Grenzwert $a \to 0$ erhält man nun wegen $\xi(x,t) = \eta'(x,t)$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}(\dot\eta,\eta')}{\partial \dot\eta} + \frac{d}{dx}\frac{\partial \mathcal{L}(\dot\eta,\eta')}{\partial \eta'} = 0;}$$

Wenn man nun die Lagrange-Dichte einsetzt ergibt sich die Wellengleichung in der Form

$$\mu\ddot\eta + Y\eta'' = 0;$$

9.3.3 Zusammenfassung der Ergebnisse

diskret	kontinuierlich
$L = \sum_i a \cdot L_i;$	$L = \int \mathcal{L}\ dx;$
$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot\eta_i} - \frac{\partial L}{\partial \eta_i} = 0;$	$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot\eta} + \frac{d}{dx}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta'} = 0;$
$\frac{m}{a}\ddot\eta_i - ka\left(\frac{\frac{\eta_{i+1}-\eta_i}{a} - \frac{\eta_i-\eta_{i+1}}{a}}{a}\right) = 0;$	$\mu\ddot\eta - Y\eta'' = 0;$

Allgemein hat man 3 Schritte zu tun, um eine physikalische Theorie zu erstellen:

1. Wähle geeignete Felder als FHG (Funktionen in Raum und Zeit).

2. Konstruiere hierzu die Lagrange-Dichte und ein Wirkungsfunktional. Hierbei sollten die Symmetrien des Systems berücksichtigt werden.

3. Durch Anwendung des Prinzips der kleinsten Wirkung erhält man so die Feldgleichungen, die — falls der Ansatz sinnvoll war — zu physikalischen Ergebnissen führen.

Wir wollen hiermit jetzt eine Theorie der Wellengleichungen aufbauen. (Klassische Feldtheorie)
Unsere Felder und Freiheitsgrade sind dabei durch das mechanische Problem vorgegeben. Dies ergibt die Lagrange-Dichte. Damit haben wir das Wirkungsfunktional

$$\begin{aligned} \mathcal{I}[\eta] &= \int_{t_1}^{t_2} L\ dt = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathbf{R}^3} \mathcal{L}(\dot\eta, \vec\nabla\eta, \eta, \vec r, t)\ d^3r\ dt; \end{aligned}$$

Durch die Bedingung $\delta\mathcal{I} = 0$ wollen wir nun „Feldgleichungen“ finden.

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{I} &= \int dt \int d^3r\ \delta\mathcal{L}(\dot\eta, \vec\nabla\eta, \eta, \vec r, t) = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathbf{R}^3} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\eta}\delta\eta + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\eta}\delta\dot\eta + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\vec\nabla\eta}\delta\vec\nabla\eta\ d^3r\ dt = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathbf{R}^3} \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\eta} - \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\eta} - \vec\nabla\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\vec\nabla\eta}\right)\delta\eta\ d^3r\ dt; \\ \Longrightarrow \quad & \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\eta} - \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\eta} - \vec\nabla\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\vec\nabla\eta} = 0; \end{aligned}$$

Dabei ist

$$\vec\nabla\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\vec\nabla\eta} = \sum_{k=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial\eta}{\partial x_k}\right)};$$

Feldgleichung der klassischen Feldtheorie

$$\boxed{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\eta} - \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\eta} - \vec\nabla\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\vec\nabla\eta} = 0;}$$

9.3.4 Beispiele

Elastische Wellen im 3d-Medium

Für die Lagrange-Dichte hat man

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\mu\dot{\eta}^2 - \frac{1}{2}Y(\vec{\nabla}\eta)^2;$$

Mit der oben hergeleiteten Feldgleichung folgt

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\eta}} + \vec{\nabla}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\vec{\nabla}\eta} = \mu\ddot{\eta} - Y\Delta\eta = 0;$$

Dabei ist $\Delta := \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ der Laplace-Operator. Man kann auch schreiben

$$\left(\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right)\eta(x,t) = 0;$$

Dies ist die 3-dimensionale Wellengleichung. Eine Diskussion der Lösungen findet man bei den Übungen zur Analysis II von Prof. Keller oder weniger ausführlich im Band „Analysis 2“ von Otto Forster.

Maxwellgleichungen

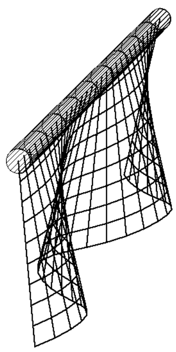
Nur kurz erwähnt werden soll die Tatsache, daß man mit Hilfe der Lagrange-Dichte

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\vec{E}^2 - \vec{B}^2\right),$$

der weiter oben eingeführten Potentiale Φ und $\vec{A}$ und mit dieser Feldgleichung die homogenen Maxwell-Gleichungen herleiten kann.

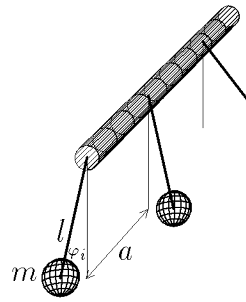
Torsionsstab

Dies ist ein Beispiel für eine nichtlineare Wellengleichung. Als Konfiguration wollen wir ein Gummiband betrachten, daß unendlich lang ist. Es soll im Schwerefeld so befestigt werden, daß eine Rotation um den oberen Rand möglich ist. Im Gegensatz zu den bisher diskutierten Systemen kann man hier nicht mehr davon ausgehen, daß voneinander unabhängige Schwingungen stattfinden.



Um die zugehörige Lagrange-Dichte zu finden, gehen wir nochmals zum diskreten Fall zurück. Hier betrachtet man eine Reihe von Pendeln, die an einer Stange befestigt sind und senkrecht zu dieser schwingen können. Überdies soll die Stange auf die Pendel eine

Kraft ausüben, die proportional zur Auslenkung der Pendel ist und die dieser Auslenkung entgegenwirkt[5]. Einen Stab mit dieser Eigenschaft nennt man Torsionsstab.



Im diskreten Fall hat man die kinetesche Energie

$$T = \frac{1}{2}\sum_i ml^2\dot{\varphi}_i^2;$$

und die potentielle Energie

$$V = mgl\sum_i(1-\cos\varphi_i) + \frac{1}{2}k\sum_i(\varphi_{i+1}-\varphi_i)^2;$$

Man hat also die Lagrange-Funktion $L = T - V = \sum_i aL_i$ mit

$$L_i = \frac{1}{2}\underbrace{\frac{m}{a}}_{\to\mu} l^2\dot{\varphi}_i^2 + \underbrace{\frac{m}{a}}_{\to\mu} gl\cos\varphi_i - \frac{1}{2}\underbrace{ka}_{\to Y}\left(\frac{\varphi_{i+1}-\varphi_i}{a}\right)^2;$$

Im Kontinuumslimes erhält man nun problemlos die Lagrange-Dichte

$$\mathcal{L}(\varphi,\dot{\varphi},\varphi') = \frac{1}{2}\mu l^2\dot{\varphi}^2 + \mu gl\cos\varphi - \frac{1}{2}Y\varphi'^2;$$

Unsere Feldgleichung liefert die Wellengleichung

$$\mu l^2\ddot{\varphi} - Y\varphi'' + \mu gl\sin\varphi = 0;$$

die eine nichtlineare partielle Differentialgleichung 2. Ordnung ist.
Mit den Substitutionen

$$v^2 := \frac{Y}{\mu l^2}; \qquad \omega_0^2 := \frac{g}{l};$$

erhält man

$$\boxed{\ddot{\varphi} - v^2\varphi'' + \omega_0^2\sin\varphi = 0;}$$

Im Fall $\omega_0^2 = 0$ erhält man natürlich wieder die schon bekannte Wellengleichung, deren Lösungen wir schon kennen.

Klein-Gordon-Gleichung

Für den Fall kleiner Auslenkungen und $\omega_0^2 \neq 0$ erhält man näherungsweise die Klein-Gordon-Gleichung

$$\ddot{\varphi} - v^2\varphi'' + \omega_0^2\varphi = 0;$$

[5]Diese Kraft kann man auch als Schwerkraft interpretieren.

als linearisierte Wellengleichung.
Der Ansatz

$$\varphi(x,t) = \varphi_0 e^{i(kx-\omega t)};$$

führt zu den Eigenschwingungen/Eigenwellen des Systems. Man erhält die „Dispersionsrelation“

$$\omega^2(k) = \omega_0^2 + v^2k^2;$$

Für jedes $k \in \mathbf{R}$ hat man also die spezielle Lösung

$$\varphi(x,t) = \varphi_0(k) e^{i(kx-\omega(k)t)};$$

Die allgemeine Lösung erhält man durch Integration über die speziellen Lösungen durch das Fourier-Integral

$$\varphi(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_0(k) e^{i(kx-\omega(k)t)}\, dk;$$

Diese Lösungen führen zu einer Dispersion — wie der Name Dispersionsrelation schon angedeutet hat. Die Wellenpakete zerfließen also, das heißt die Ausschläge werden im Lauf der Zeit kleiner. Hierzu soll als Beispiel eine spezielle Funktion

$$\varphi_0(k) = \varphi_0 e^{-\alpha k^2};$$

Zum Zeitpunkt $t = 0$ hat man die Wellenform

$$\begin{aligned}
\varphi(x,0) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_0(k) e^{ikx}\, dk = \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_0 e^{-\alpha k^2} e^{ikx}\, dk = \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_0 e^{-\alpha\left(k-\frac{ix}{2\alpha}\right)^2} e^{-\frac{x^2}{4\alpha}}\, dk = \\
&= \varphi_0 e^{-\frac{x^2}{4\alpha}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha k'^2}\, dk';
\end{aligned}$$

einer Gauß-Funktion. Die Breite des Wellenbergs ist nun proportional zu $x_0 = 2\sqrt{\alpha}$. Für die Wellenform zu einem späteren Zeitpunkt ergibt sich

$$\begin{aligned}
\varphi(x,0) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_0 e^{-\alpha k^2} e^{i(kx-\omega(k)t)}\, dk = \ldots \\
\omega_0^2 \gg v^2k^2 \quad \Rightarrow \quad \omega &= \sqrt{\omega_0^2 + v^2k^2} \approx \omega_0 \left(1 + \frac{v^2k^2}{2\omega_0^2}\right) \approx \omega_0 + \frac{v^2k^2}{2\omega_0}; \\
\Longrightarrow \qquad \ldots &= e^{-i\omega_0 t} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} e^{-\overbrace{\left(\alpha + \frac{iv^2t}{2\omega_0}\right)}^{=:\tilde{\alpha}} k^2}\, dk \sim \\
&\sim e^{-i\omega_0 t} e^{-\frac{x^2}{4\tilde{\alpha}}};
\end{aligned}$$

Für die Breite des Wellenberges ist noch die folgende Rechnung zu berücksichtigen

$$\begin{aligned} e^{-\frac{x^2}{4\tilde{\alpha}}} &= e^{-\frac{\tilde{\alpha}^* x^2}{4|\tilde{\alpha}|^2}} = \\ &= e^{-\frac{x^2}{4\left(\alpha^2+\frac{v^4t^2}{4\omega_0^2}\right)}\cdot\left(\alpha-\frac{iv^2t}{2\omega_0}\right)} \sim \\ &\sim e^{-\frac{x^2\alpha}{4\left(\alpha^2+\frac{v^4t^2}{4\omega_0^2}\right)}} = \\ &= e^{-\frac{x^2}{4\alpha'}}; \end{aligned}$$

$$\text{Mit} \qquad \alpha' = \alpha + \frac{1}{2}\left(\frac{v^2t}{2\omega_0}\right)^2;$$

Dies zeigt die monotone Zunahme der Breite des Wellenberges. Aus Energieerhaltungsgründen muß natürlich die Höhe entsprechend abnehmen.

Sine-Gordon-Gleichung

In Anlehnung an den Namen der genäherten Gleichung und im Anbetracht des Auftauchens des Sinus nennt man die genaue Gleichung

$$\ddot{\varphi} - v^2\varphi'' + \omega_0^2 \sin\varphi = 0;$$

die „Sine-Gordon-Gleichung“. Bei dieser Gleichung sind insbesondere solche Lösungen interessant, für die

$$\varphi(x,t) = f(x - vt);$$

gilt. Es gibt — wie wir in den Übungen nachweisen — also hier wieder Wellen, die keine Dispersion aufweisen. Diese Lösungen heißen Solitonen.
Dies sind jedoch die einzigen Lösungen für große Ausschläge, die hier einfach erhalten werden können.

Kapitel 10

Der Starre Körper

10.1 Einführung

10.1.1 Definition des starren Körpers

In diesem Abschnitt soll das Verhalten starrer Körper untersucht werden. Diese Untersuchungen sind für die Makrophysik und für Anwendungen erforderlich.
Man beachte, daß ein starrer Körper stets eine Idealisierung ist, reale Körper sind nicht starr sondern können verformt werden. Doch zunächst die wichtigsten Daten der von uns untersuchten starren Körper.

Definition:

Ein Ensemble aus n Massepunkten mit den zeitunabhängigen, holonomen Zwangsbedingungen

$$|\vec{r}_i - \vec{r}_j| = \text{const.}; \qquad \forall\ i, j;$$

heißt starrer Körper. Bei überabzählbar vielen Massepunkten ($n = \infty$) gehen die Einzelmassen m_i über in eine kontinuierliche Masseverteilung $\varrho(\vec{r})d^3r$ mit der Dichte $\varrho(\vec{r})$.
Für $n \geq 3$ hat man im Allgemeinen[1] 6 Freiheitsgrade. 3 für die Schwerpunktskoordinate, 3 für die Orientierung.

10.1.2 Koordinaten des starren Körpers

Für die Untersuchung der Bewegung starrer Körper bieten sich bestimmte generalisierte Koordinaten an, die den vorhandenen Freiheitsgraden am besten angepaßt sind. Die ersten 3 der 6 Koordinaten sind die karthesischen Koordinaten des Schwerpunkts. Weitere 3 Koordinaten sollen die Orientierung des Körpers im Raum beschreiben.
Wir betrachten hierzu ein raumfestes Koordinatensystem K und ein körperfestes Koordinatensystem K'. Beide sollen denselben Ursprung haben und die Koordinaten werden

[1] Falls die Massepunkte nicht alle auf einer Linie liegen.

durch

$$
\begin{aligned}
K \quad &: \quad \vec{r} = (r_1, r_2, r_3); \\
K' \quad &: \quad \vec{r} = (r_1', r_2', r_3');
\end{aligned}
$$

bezeichnet. Beide Koordinatensysteme seien Orthonormalsysteme, so daß es eine orthogonale Matrix $\mathbf{A} = A_{ij}$ gibt, für die gilt

1. $r_i' = A_{ij} r_j$;

2. $\mathbf{A}\mathbf{A}^t = \mathbf{1}$;

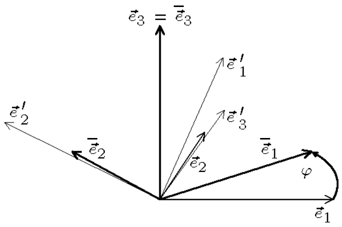
3. $\det \mathbf{A} = +1$; (also $\mathbf{A}$ keine Raumspiegelung.)

Das heißt $\mathbf{A} \in SO(3)$. Wir haben 9 Matrixelemente und 6 unabhängige Bedingungen für diese Matrix, es verbleiben also 3 Parameter. Wir versuchen nun eine explizite Darstellung der Matrix durch diese 3 Parameter zu finden.
Hierzu definiert man

Die Eulerschen Winkel

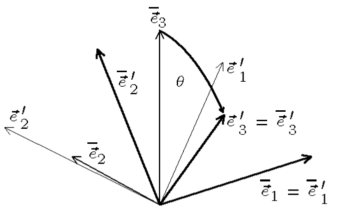
Wir wollen sukzessive das Koordinatensystem K in das System K' überführen. Dies geschieht in drei Schritten, die jeweils einen der gesuchten Paramter liefern.

Der erste Eulersche Winkel heißt φ. Beim Drehen des Systems K um die r_3-Achse mit dem Winkel φ soll die r_2-Achse in eine $\overline{r}_2$-Achse übergehen, die in der Ebene der r_3-Achse und der r_3'-Achse liegt. Das gesamte neue System heißt das $\overline{K}$-System. Die Drehung ist gegeben durch die Matrix

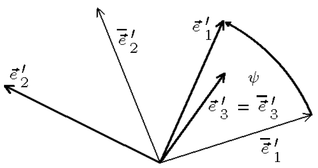


$$
\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};
$$

Der zweite Euler-Winkel ist θ. Beim Drehen des Systems $\overline{K}$ soll die $\overline{r}_3$-Achse in die r_3'-Achse übergeführt werden. Dazu wird um die $\overline{r}_1$-Achse mit dem Winkel θ gedreht. Das entstehende System heißt $\overline{K}'$-System, die zur Drehung gehörige Matrix ist



$$
\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix};
$$



Der dritte Eulerwinkel heißt ψ. Mit diesen Winkel wird um die $\bar{r}'_3$-Achse gedreht, so daß das entstehende System mit dem K'-System übereinstimmt. Die zugehörige Drehmatrix ist

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

Dieser Algorithmus liefert also die Eulerwinkel (φ, θ, ψ), die die Orientierung des Systems K' — und damit die Orientierung des Körpers — eindeutig beschreiben.

Konfigurationsmannigfaltigkeit

Die Konfigurationsmannigfaltigkeit des starren Körpers ist nun

$$\mathbf{R}^3 \times SO(3) \qquad : \qquad ((x, y, z), \mathbf{A}(\varphi, \theta, \psi));$$

Die Euler-Winkel sind Koordinaten in $SO(3)$, die zu vorgegebenen Winkeln gehörige Matrix erhält man durch

$$\mathbf{A}(\varphi, \theta, \psi) = \mathbf{B}(\psi) \cdot \mathbf{C}(\theta) \cdot \mathbf{D}(\varphi);$$

Das Ergebnis findet man z.B. im Buch „Klassische Mechanik“ von Herbert Goldstein.

10.1.3 Drehachsen

Euler'sches Theorem

Theorem

Jede Auslenkung des starren Körpers mit einem festgehaltenen Punkt ist eine Drehung um eine Achse.

Das Theorem ist äquvalent zu

$$\exists \text{ ein Vektor } \vec{r} \text{ mit } \mathbf{A}\vec{r} = \vec{r};$$

und das bedeuted nichts anderes als

$$\text{Jedes } \mathbf{A} \in SO(3) \text{ hat einen Eigenwert } +1.$$

Beweis

1. zeige: Alle Eigenwerte haben $|\lambda| = 1$.

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\vec{r} = \lambda\vec{r} \quad &\longleftrightarrow \quad A_{ij}r_j = \lambda r_i; \\ \vec{r}^{\,*}\mathbf{A}^t = \lambda^*\vec{r}^{\,*} \quad &\longleftrightarrow \quad A_{ij}r_j^* = \lambda^* r_i^*; \\ \Rightarrow \qquad \vec{r}^{\,*}\vec{r} = \vec{r}^{\,*}\mathbf{A}^t\mathbf{A}\vec{r} = |\lambda|^2\vec{r}^{\,*}\vec{r} \quad &\Longrightarrow \quad |\lambda| = 1; \end{aligned}$$

2. zeige: Es gibt mindestens einen reellen Eigenwert.

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{1}) = 0;$$

   ist eine kubische Gleichung in $\mathbf{R}$, also gibt es mindestens eine reelle Lösung.

3. zeige: Die reelle Lösung λ_1 ist positiv.

   Wegen $\det \mathbf{A} = 1 = \lambda_1\lambda_2\lambda_3$ können bei 3 reellen Lösungen nicht alle negativ sein. Also ist o.B.d.A. λ_1 positiv.

   Wenn es aber auch eine komplexe Lösung λ_2 gibt, so ist auch die dazu konjugiert komplexe Zahl ein Eigenwert $\lambda_3 = \lambda_2^*$. Also ist

$$1 = \det \mathbf{A} = \lambda_1\lambda_2\lambda_2^* = \lambda_1;$$

Zeitliche Änderung der Vektoren $\vec{r}$

Die Koordinatensysteme werden nun mit ihren Basisvektoren identifiziert.

$$\begin{aligned} K &:= (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)\,; \\ K' &:= (\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}', \vec{e}_3{}')\,; \end{aligned}$$

Dabei sind beide Systeme ortonormal, doch nur K ist ein Inertialsystem.
Für beliebige Punkte $\vec{r}$ gilt nun

$$\vec{r} = r_i\vec{e}_i = r_i'\vec{e}_i{}';$$

Wenn $\vec{r}$ einen Punkt des starren Körpers beschreibt, so sind die Koordinaten r_i' zeitunabhängig. Es gilt also

$$\dot{r}_i = r_j'\dot{A}_{ij} = r_j'\delta_{kj}\dot{A}_{ki} = r_j'A_{jl}A_{kl}\dot{A}_{ki} = r_lA_{kl}\dot{A}_{ki} =: M_{il}r_l;$$

mit der Matrix

$$(M_{ij}) = \mathbf{M} = \dot{\mathbf{A}}^t\mathbf{A};$$

Wegen

$$A_{kl}A_{ki} = \delta_{li}; \quad \Rightarrow \quad 0 = A_{kl}\dot{A}_{ki} + \dot{A}_{kl}A_{ki} = M_{il} + M_{li};$$

ist $\mathbf{M}$ sogar antsymmetrisch, wir können also definieren

$$\mathbf{M} =: \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}; \qquad \vec{\omega} := \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix};$$

Man prüft nun ohne Schwierigkeiten, daß

$$\dot{\vec{r}} = \mathbf{M}\vec{r} = \vec{\omega} \times \vec{r};$$

Man hat also

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{r};$$

$\vec{\omega}$ beschreibt die Richtung der momentanen Drehachse und ist unabhängig von $\vec{r}$, aber abhängig von t.

Berechnung der Drehachse aus den Euler-Winkeln

Im Raumfesten System gilt

$$\mathbf{M} = \dot{\mathbf{A}}^t\mathbf{A}; \qquad \text{und} \qquad \mathbf{A} = \mathbf{BCD};$$

Also

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}^t &= \mathbf{D}^t\mathbf{C}^t\mathbf{B}^t; \\
\dot{\mathbf{A}}^t &= \dot{\mathbf{D}}^t\mathbf{C}^t\mathbf{B}^t + \mathbf{D}^t\dot{\mathbf{C}}^t\mathbf{B}^t + \mathbf{D}^t\mathbf{C}^t\dot{\mathbf{B}}^t = \\
\mathbf{M} &= \dot{\mathbf{D}}^t\mathbf{D} + \mathbf{D}^t\dot{\mathbf{C}}^t\mathbf{C}\mathbf{D} + \mathbf{D}^t\mathbf{C}^t\dot{\mathbf{B}}^t\mathbf{BCD} = \\
&= \cdots \quad \text{Fleißig rechnen.}
\end{aligned}$$

Man erhält als Ergebnis die raumfesten Komponenten von $\vec{\omega}$

$$\begin{aligned}
\omega_1 &= \dot{\theta}\cos\varphi + \dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi; \\
\omega_2 &= \dot{\theta}\sin\varphi - \dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi; \\
\omega_3 &= \dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta;
\end{aligned}$$

Also

$$\vec{\omega} = \dot{\varphi} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{raumfeste 3-Achse.}} + \dot{\theta} \underbrace{\begin{pmatrix} \sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{Knotenlinie.}} + \dot{\psi} \underbrace{\begin{pmatrix} \sin\theta\sin\varphi \\ -\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix}}_{\text{Körperfeste 3-Achse.}};$$

Bei der Darstellung der Körperfesten 3-Achse ist zu beachten, daß dies nicht die Polarkoordinatendarstellung des Vektors ist. Doch der einzige Unterschied ist

$$\varphi = \varphi_{\text{Polarkoordinaten}} - 270°;$$

Im Körperfesten System gilt

$$\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = \vec{\omega} = \dot{\varphi}\vec{\mathbf{e}}_\varphi + \dot{\theta}\vec{\mathbf{e}}_\theta + \dot{\psi}\vec{\mathbf{e}}_\psi;$$

Dabei kann man die Einheitsvektoren wie folgt im K'-System ausdrücken

$$\begin{aligned}
\vec{\mathbf{e}}_\varphi &= \mathbf{A}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta\sin\psi \\ \sin\theta\cos\psi \\ \cos\theta \end{pmatrix}; \qquad (10.1) \\
\vec{\mathbf{e}}_\theta &= \mathbf{A}\begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\psi \\ -\sin\psi \\ 0 \end{pmatrix}; \\
\vec{\mathbf{e}}_\psi &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};
\end{aligned}$$

10.2 Die Kinematik des Starren Körpers

10.2.1 Der Trägheitstensor

Der Drehimpuls des starren Körpers ist gegeben durch[2]

$$\vec{L} = \sum_i m_i(\vec{r}_i \times \vec{v}_i) = \sum_i m_i(\vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i));$$

In Komponenten heißt das

$$\begin{aligned} L_k &= \sum_i m_i \epsilon_{klm} (\vec{r}_i)_l (\epsilon_{mnp} \omega_n (\vec{r}_i)_p) = \\ &= \sum_i m_i (\delta_{kn}\delta_{lp} - \delta_{kp}\delta_{ln})(\vec{r}_i)_l(\vec{r}_i)_p \omega_n = \\ &= \sum_i m_i \left(\omega_k \vec{r}_i^{\,2} - (\vec{r}_i)_k (\vec{r}_i \vec{\omega})\right); \end{aligned}$$

Also hat man

$$\vec{L} = \sum_i m_i \left(\vec{\omega}\vec{r}_i^{\,2} - \vec{r}_i(\vec{r}_i\vec{\omega})\right);$$

Das heißt $\vec{L}$ ist eine lineare Funkion von $\vec{\omega}$, aber der Drehimpuls ist im allgemeinen nicht zu $\vec{\omega}$ parallel.
Man kann diesen Zusammenhang auch mit einer Matrix beschreiben

$$L_k = I_{kl}\omega_l; \qquad \vec{L} = \mathbf{I}\vec{\omega};$$

Dabei gilt für die Matrix $\mathbf{I}$ (wir führen auch das Ergebnis an, daß man für eine kontinuierliche Verteilung erhält)

$$I_{kl} = \sum_i m_i \left(\delta_{kl}\vec{r}_i^{\,2} - (\vec{r}_i)_k(\vec{r}_i)_l\right) = \int \varrho(\vec{r}) \left(\delta_{kl} r^2 - r_k r_l\right) \, d^3r;$$

$\mathbf{I}$ ist eine reelle, symmetrische Matrix und heißt der Trägheitstensor des Körpers bezüglich Rotation um den Ursprung des Koordinatensystems.

Tensorrechnung

In der Physik verwendet man den Begriff Tensor nur für ganz bestimmte Tensoren (im mathematischen Sinn). Daher zuerst eine Definition.

[2]Wir beschränken uns zunächst auf Körper mit endlich vielen Massepunkten. Die Behandlung kontinuierlicher Masseverteilungen ist jedoch zu den hier vorgeführten Rechnungen völlig analog.

Definition:

Ein Tensor n-ter Stufe ist eine Abbildung

$$T : \{1,2,3\}^n \to \mathbf{R}; \quad T(i,j,k,\ldots,z) = T_{ijk\cdots z};$$

die sich bei Drehungen mit einer Matrix $\mathbf{A} \in SO(3)$ durch die Beziehung

$$T'_{ijk\cdots z} = \sum_{l,m,\ldots,y=1}^{3} A_{il}A_{jm}\cdots A_{zy}T_{lm\cdots y};$$

transformiert.

Beispiele

1. Ein Tensor 0-ter Stufe ist ein Skalar, also eine reelle Zahl $T \in \mathbf{R}$. Das Transformationsverhalten ist hierbei einfach $T' = T$.
2. Ein Tensor 1-ter Stufe ist ein Vektor $T \in \mathbf{R}^3$, der sich durch Anwendung der linearen Abbildung transformiert.
3. Tensoren 2-ter Stufe sind quadratische 3×3-Matrizen, das Transformationsverhalten ist
$$\mathbf{T}' = T'_{ij} = A_{ik}A_{jl}T_{kl} = \mathbf{A}\mathbf{T}\mathbf{A}^t;$$

Es gibt zwei Verknüpfungen für Tensoren 1-ter Stufe

Das Skalarprodukt zweier Tensoren 1-ter Stufe ist definiert durch

$$\vec{a} \cdot \vec{b} := \vec{a}^t\vec{b} = \sum_{i=1}^{3} a_i b_i;$$

Das Ergebnis dieses Produkts ist ein Tensor 0-ter Stufe.

Das Tensorprodukt zweier Tensoren 1-ter Stufe ist definiert durch

$$\overleftrightarrow{\vec{a}\vec{b}} := \vec{a}\vec{b}^t = (a_i b_j)_{1 \leq i,j \leq 3};$$

Ergebnis des Produkts ist ein Tensor 2-ter Stufe. Diese Operation heißt auch dyadisches Produkt.
Es gelten die Rechenregeln

$$\begin{aligned}
(\vec{a}\vec{b}^t)\vec{c} &= \vec{a}(\vec{b}^t\vec{c});\\
\vec{c}^{\,t}(\vec{a}\vec{b}^t) &= (\vec{c}^{\,t}\vec{a})\vec{b}^t;\\
(\vec{a}\vec{b}^t)(\vec{c}\vec{d}^{\,t}) &= (\vec{b}^t\vec{c})(\vec{a}\vec{d}^{\,t});\\
\mathrm{sp}(\vec{a}\vec{b}^t) = \mathrm{tr}(\vec{a}\vec{b}^t) &= \vec{a}^t\vec{b};
\end{aligned}$$

(sp oder tr bezeichnet dabei die Spur einer Matrix.)
Durch die Tensorrechnung gewinnt man nun eine Koordinatenfreie Darstellung des Trägheitstensors

$$\mathbf{I} = \sum_i m_i \left(\mathbf{1}\vec{r}_i^{\,2} - \vec{r}_i \vec{r}_i^{\,t} \right);$$

Die Rotationsenergie

Die Rotationsenergie eines starren Körpers ist seine Kinetische Energie in dem System in dem ein Punkt ruht. Man hat

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}\sum_i m_i \vec{v}_i^{\;2} = \\ &= \frac{1}{2}\sum_i m_i \vec{v}_i \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) = \\ &= \frac{1}{2}\sum_i m_i \vec{\omega} \cdot (\vec{r}_i \times \vec{v}_i) = \\ &= \frac{1}{2}\vec{\omega}\vec{L} = \\ &= \frac{1}{2}\vec{\omega}\mathbf{I}\vec{\omega}; \end{aligned}$$

Im Allgemeinen muß man zusätzlich noch eine Translationsenergie berücksichtigen.

10.2.2 Der Satz von Steiner

Wir wollen nun speziell Rotationen um eine feste Achse betrachten. Es soll also gelten

$$\vec{\omega} = \omega\vec{\eta}; \qquad \text{und} \qquad \|\vec{\eta}\| = 1;$$

Damit erhält man für die Rotationsenergie

$$T = \frac{1}{2}\omega^2 \; \vec{\eta}\mathbf{I}\vec{\eta};$$

Man definiert

Definition:

Zu einem Starren Körper mit Trägheitstensor $\mathbf{I}$ und einem Richtungsvektor $\vec{\eta}$ mit $\|\vec{\eta}\|$ definiert man die Zahl

$$I_{\vec{\eta}} := \vec{\eta}\mathbf{I}\vec{\eta};$$

Sie heißt das Trägheitsmoment des Körpers in Richtung $\vec{\eta}$.

Ist der Winkel zwischen $\vec{r}_i$ und $\vec{\eta}$ gegeben durch φ_i, so gilt

$$\begin{aligned} I_{\vec{\eta}} &= \sum_i m_i \left(\vec{r}_i^{\,2} - (\vec{r}_i\vec{\eta})^2\right) = \\ &= \sum_i m_i \left(\vec{r}_i^{\,2} - \vec{r}_i^{\,2}\cos^2\varphi_i\right) = \\ &= \sum_i m_i \vec{r}_i^{\,2} \sin^2\varphi_i; \end{aligned}$$

Dies ergibt die elementare Definition des Trägheitsmomentes.
Man beachte, daß Trägheitstensor und -momente von der Wahl des Koordinatensystems abhängen.
Für die Trägheitsmomente bezüglich gleicher Richtung und verschiedener Koordinatensysteme hat man jedoch eine Umrechnungsformel.
Wir gehen zur Herleitung der Umrechnungsformel von einem beliebigen Koordinatensystem aus und definieren im Schwerpunkt ein weiteres System, mit dem verglichen wird.
Der Schwerpunkt ist

$$\vec{R} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i};$$

Die Vektoren $\vec{r}_i{}'$ im Schwerpunktsystem sind

$$\vec{r}_i{}' = \vec{r}_i - \vec{R};$$

Es gilt nun für den Trägheitstensor

$$\begin{aligned} I &= \sum_i m_i (\vec{r}_i \times \vec{\eta})^2 = \\ &= \sum_i m_i \left((\vec{R} + \vec{r}_i{}') \times \vec{\eta}\right)^2 = \\ &= \sum_i m_i (\vec{R} \times \vec{\eta})^2 + \sum_i m_i (\vec{r}_i{}' \times \vec{\eta})^2 + \underbrace{2\sum_i m_i (\vec{R} \times \vec{\eta})(\vec{r}_i{}' \times \vec{\eta})}_{=0;} = \\ &= I_{\text{Schwerpunkt}} + \sum_i m_i (\vec{R} \times \vec{\eta})^2; \end{aligned}$$

Der Satz von Steiner lautet nun also

$$I = I_{\text{Schwerpunkt}} + \sum_i m_i (\vec{R} \times \vec{\eta})^2;$$

10.2.3 Hauptachsentransformation

Der Trägheitstensor **I** ist eine reelle symmetrische Matrix. Wie man aus der linearen Algebra weiß, können solche Matritzen orthogonal diagonalisiert werden. Das heißt es gibt ein karthesisches Koordinatensystem aus Eigenvektoren und **I** ist von der Gestalt

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix};$$

Die Eigenwerte I_k heißen die Hauptträgheitsmomente des Körpers.
Wenn **I** diagonal ist, hatman die schönen Beziehungen

$$\begin{aligned} \vec{L} = \mathbf{I}\vec{\omega}; \quad \Rightarrow \qquad L_1 &= I_i\omega_1; \\ L_2 &= I_2\omega_2; \\ L_3 &= I_3\omega_3; \\ T = \frac{1}{2}\vec{\omega}\mathbf{I}\vec{\omega} &= \frac{1}{2}\left(I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + I_3\omega_3^2\right); \end{aligned}$$

Sind mehrere Hauptträgheitsmomente gleich, so sagt man sie seien entartet. Bei zwei gleichen Eigenwerten sind die Trägheitseigenschaften des Körpers invariant unter Drehungen um den dritten Eigenvektor. Die beiden anderen Eigenvektoren können frei in einer Ebene gewählt werden.
Bei drei entarteten Hauptträgheitsmomenten ist der Trägheitstensor ein Vielfaches der Einheitsmatrix. Dann ist die Matrix in jedem Koordinatensystem diagonal.
Das Trägheitsverhalten eines Körpers bezüglich Rotation um einen festen Punkt wird charakterisiert durch 6 reelle Zahlen. Dies sind die 3 Hauptträgheitsmomente und drei Winkel für die Orientierung des zugehörigen Hauptachsensystems. (Man hätte auch andere Zahlen wählen können — z.B. 6 Matrixeinträge)
Man beachte jedoch, daß Symmetrien des Trägheitstensors in keinem Zusammenhang zu geometrischen Symmetrien des Körpers stehen müssen — auch wenn die Massendichte im Körper konstant ist.

Konstruktion des Trägheitsellipsoids

Formal ist das Trägheitsellipsoid die Menge der Punkte im Raum, für die gilt

$$1 = \vec{r}\mathbf{I}\vec{r};$$

Für den Richtungsvektor $\vec{\eta}$ gilt offenbar, daß der Punkt $\vec{\eta} \cdot \sqrt{I_{\vec{\eta}}}^{-1}$ auf dem Trägheitsellipsoid liegt. Aber wenn $\vec{\eta}$ alle Richtungen durchläuft, erhält man so schon alle Punkte des Trägheitsellipsoids.
Bei Entartungen der Hauptträgheitsmomente erhält man nicht immer ein Ellipsoid. Bei 2 entarteten Eigenwerten erhält man ein Rotationsellipsiod, bei 3 erhält man eine Kugel. Verschwindet ein Hauptträgheitsmoment, so erhält man einen Ellipsenzylinder.

10.2.4 Beispiel: homogener Quader

Wir betrachten einen homogenen Quader mit den Kantenlängen a, b, c und der Massendichte ϱ_0. Das Koordinatensystem hat seinen Ursprung im Schwerpunkt und die Quaderkanten sind achsenparallel.
Für das 3. Hauptträgheitsmoment erhält man

$$\begin{aligned} I_{33} &= \varrho_0 \int (x^2 + y^2)\ d^3r = \\ &= \varrho_0 c \left(\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} x^2\ dx \cdot b + \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} y^2\ dy \cdot a \right) = \\ &= \frac{1}{12} \varrho_0 cba(a^2 + b^2) \frac{1}{12} = \cdots \\ \text{Mit } M = \varrho_0 abc\ : & \\ \cdots &= \frac{M}{12}(a^2 + b^2); \end{aligned}$$

Durch Rechnung oder Symmetrieargumente erhält man

$$\mathbf{I} = \frac{M}{12} \begin{pmatrix} b^2 + c^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 + c^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 + b^2 \end{pmatrix};$$

Die Hauptachsen des Rotationsellipsoids sind also proportional zu

$$\frac{1}{\sqrt{b^2 + c^2}}, \qquad \frac{1}{\sqrt{a^2 + c^2}}, \qquad \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}};$$

In diesem Fall ahmt das Trägheitsellipsoid die Gestalt des Körpers nach. Im Prinzip geschieht dies immer — aber selten so deutlich wie hier.

10.3 Die Dynamik des Kreisels

Im folgenden wird der schwere symmtrische Kreisel untersucht — einer der kompliziertesten starren Körper, deren Kinematik noch exakt behandelt werden kann. Schwer heißt der Kreisel, weil wir seine Bewegung im Schwerefeld untersuchen, symmetrisch, weil zwei Trägheitsmomente des Kreisels entartet sein sollen.

10.3.1 Herleitung der Lagrange-Funktion

Als Koordinatensystem betrachten wir zunächst das körperfeste Hauptachsensystem. Das heißt $\mathbf{I}$ ist von der Gestalt

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_1 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix};$$

Wir können nun die kinetische Energie in diesem System berechnen, denn die kinetische Energie ist ein Skalar (Tensor 0-ter Stufe) und ändert sich beim zurückdrehen in das Inertialsystem nicht. Man hat nun (unter Verwendung von 10.1)

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} I_1(\omega_1^2 + \omega_2^2) + \frac{1}{2} I_3 \omega_3^2 = \\ &= \frac{1}{2} I_1 \left(\dot{\varphi} \sin^2 \theta + \dot{\theta} \right) + \frac{1}{2} I_3 \left(\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi} \right)^2 ; \end{aligned}$$

Für die potentielle Energie gilt, wenn M die Gesamtmasse und Z die z-Koordinate des Schwerpunkts bezeichnen und die Schwerkraft in Richtung der negativen z-Achse weist

$$V = \sum_i g m_i z_i = g M Z = M g l \cos \theta;$$

wobei l der Abstand des Aufhängepunktes vom Schwerpunkt ist.
Wir haben also die Lagrange-Funktion

$$L = T - V = \frac{1}{2} I_1 \left(\dot{\varphi} \sin^2 \theta + \dot{\theta} \right) + \frac{1}{2} I_3 \left(\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi} \right)^2 - M g l \cos \theta;$$

10.3.2 Erhaltungsgrößen

Aufgrund der vielen Freiheitsgrade ist das Problem nicht lösbar, wenn wir nicht noch einige Erhaltungsgrößen finden, die die Bewegunsgleichungen vereinfachen. Für die Lagrange-Funktion gilt

$$L = L(\theta, \dot{\theta}, \dot{\varphi}, \dot{\psi});$$

Es sind also φ und ψ zyklische Koordinaten. Man hat also die Erhaltungsgrößen

1. Der Drehimpuls um die körperfeste 3-Achse ist erhalten. Es gilt

$$p_\psi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = I_3(\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta) = I_3 \omega_3 = \text{const.}$$

2. Der Drehimpuls um die raumfeste 3-Achse ist ebenfalls erhalten. Es ist

$$\begin{aligned} p_\varphi &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \\ &= I_1 \dot{\varphi} \sin^2 \theta + I_3(\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi}) \cos \theta = \\ &= \dot{\varphi} \left(I_1 \sin^2 \theta + I_3 \cos^2 \theta \right) + I_3 \cos \theta \, \dot{\psi} = \text{const.} \end{aligned}$$

Man definiert nun zwei Konstanten, die die Rechnungen einfacher gestalten, als dies die ursprünglichen Erhaltungsgrößen würden:

$$a := \frac{p_\psi}{I_1} = \frac{I_3 \omega_3}{I_1}; \qquad b := \frac{p_\varphi}{I_1};$$

Eine weitere Erhaltungsgröße liefert der Energie-Satz

$$E = T + V = \frac{1}{2} I_1 \left(\dot{\varphi} \sin^2 \theta + \dot{\theta} \right) + \frac{1}{2} I_3 \left(\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi} \right)^2 + M g l \cos \theta = \text{const.}$$

10.3.3 Aufstellen der θ-Bewegungsgleichung

Ziel ist es, aus der Energie E mit Hilfe von p_ψ und p_φ die Koordinaten $\dot{\psi}$ und $\dot{\varphi}$ zu eliminieren. Dann erhält man ein effektives Problem für θ mit nur einem Freiheitsgrad. Man hat

$$\begin{aligned}
p_\varphi &= I_1\dot{\varphi}\sin^2\theta + \underbrace{I_3\cos\theta\,\underbrace{(\dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi})}_{=\omega_3;}}_{=I_1\,a\cos\theta;} = I_1 b;\\
&\Rightarrow\ b = \sin^2\theta\dot{\varphi} + a\cos\theta;\\
&\Rightarrow\ \underline{\underline{\dot{\varphi} = \frac{b - a\cos\theta}{\sin^2\theta};}}\\
&\Rightarrow\ \underline{\underline{\dot{\psi} = \omega_3 - \dot{\varphi}\cos\theta = \frac{I_1 a}{I_3} - \cos\theta\left(\frac{b - a\cos\theta}{\sin^2\theta}\right);}}
\end{aligned}$$

Die Energie ist auch

$$E = T + V = \frac{1}{2}I_1\left(\dot{\varphi}\sin^2\theta + \dot{\theta}\right) + \frac{1}{2}I_3\omega_3^2 + Mgl\cos\theta = \text{const}.$$

Also ist

$$E' := E - \frac{1}{2}I_3\omega_3^2 = \frac{1}{2}I_1\left(\dot{\varphi}\sin^2\theta + \dot{\theta}\right) + Mgl\cos\theta = \text{const}.$$

Setzt man nun $\dot{\varphi}$ ein, so ergibt sich

$$\frac{I_1}{2}\dot{\theta}^2 = E' - Mgl\cos\theta - \frac{I_1}{2}\sin^2\theta\left(\frac{b - a\cos\theta}{\sin^2\theta}\right)^2;$$

Also

$$\dot{\theta}^2\sin^2\theta = \left(\frac{2E'}{I_1} - \frac{2Mgl}{I_1}\cos\theta\right)\sin^2\theta - (b - a\cos\theta)^2;$$

Mit den Bezeichnungen

$$\alpha := \frac{2E'}{I_1}; \qquad \beta := \frac{2Mgl}{I_1}; \qquad u := \cos\theta; \qquad \dot{u} = -\dot{\theta}\sin\theta;$$

erhält man

$$\dot{u}^2 = (\alpha - \beta u)(1 - u^2) - (b - au)^2;$$

Also kann man das Problem für die neue Variable u lösen

$$\int \frac{du}{\sqrt{(\alpha - \beta u)(1 - u^2) - (b - au)^2}} = \int dt;$$

Man sagt, das Problem ist vollständig integrabel. Integrale dieses Typs — genannt elliptische Integrale — sind im Allgemeinen nicht geschlossen darstellbar, das heißt es gibt keine explizit angebbare Stammfunktion, sondern bestenfalls eine Reihenentwicklung für diese.

10.3.4 Diskussion der möglichen Lösungen

Um qualitativ näheres über die Lösungen sagen zu können kehren wir zurück zur Erhaltungsgröße E' — die wir nun die Energie nennen wollen.

$$E' = \frac{1}{2}I_1\dot{\theta}^2 + \underbrace{Mgl\cos\theta + \frac{1}{2}I_1\frac{(b-a\cos\theta)^2}{\sin^2\theta}}_{=:U_{\text{eff.}}(\theta)};$$

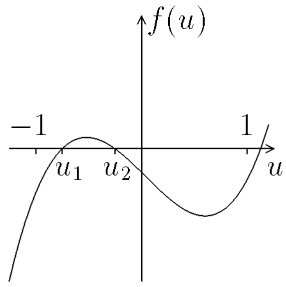
Eine Kurvendiskussion liefert dann Aussagen über die möglichen Bahnen.
Aber auch hier ist es einfacher, bei der neuen Koordinate u zu bleiben. Es ist

$$\dot{u}^2 = f(u) := (\alpha - \beta u)(1-u^2) - (b-au)^2;$$

Verlauf von $f(u)$

$f(u)$ ist eine Parabel 3. Ordnung, daraus folgt wegen $f(u) = \beta u^3 + \cdots$ und $\beta > 0$[3]

$$\lim_{u\to\pm\infty} f(u) = \pm\infty;$$



Außerdem gilt

$$f(\pm 1) = -(b-au)^2 \le 0;$$

Uns interressiert nur der Bereich $-1 \le u \le 1$, da nur hier u sinnvoll interpretierbar ist.
Da zusätzlich auch $f(u) = \dot{u}^2 \ge 0$ gelten muß, hat $f(u)$ im Intervall $[-1,1]$ im Allgemeinen 2 Nullstellen u_1 und u_2.
Also sind alle Lösungen nur im Intervall $[u_1, u_2]$ definiert. Man beachte bei diesen Überlegungen, daß $f(u)$ kein effektives Potential ist.
Aus diesen Überlegungen folgt sofort, daß auch θ auf ein Intervall beschränkt ist, nämlich

$$\theta \in [\theta_1, \theta_2] := [\arccos u_2, \arccos u_1];$$

Darstellung der Lösungen im Raum

Es soll das Aussehen der Schnittkurve der Kreiselachse mit einer um den Aufhängepunkt konzentrischen Kugel diskutiert werden.
Wir gehen aus von der Gleichung

$$\dot{\varphi} = \frac{b - a\cos\theta}{\sin^2\theta};$$

mit der neuen Konstanten $u' := b/a$ erhält man

$$\dot{\varphi} = \frac{a(u'-u)}{1-u^2};$$

Wir diskutieren nun die einzelnen Fälle

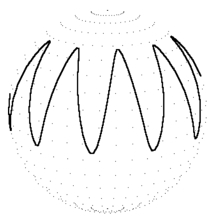
1. $u' > u_2$ oder $u' < u_1$

   In diesem Fall hat $\dot{\varphi}$ keinen Vorzeichenwechsel. Die Bewegung besteht nun aus drei Komponenten

   (a) Die θ-Bewegung ist ein periodisches Kippen der Kreiselachse zwischen den Winkeln θ_1 und θ_2. Man nennt diese Bewegung Nutation.

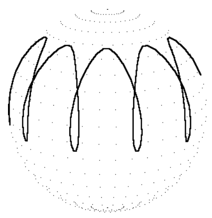
   (b) Die φ-Bewegung ist eine Drehung der Kreiselachse um die raumfeste 3-Achse. Diese Bewegung heißt Präzession.

   (c) Unabhängig von den anderen Bewegungen dreht sich der Kreisel auch noch um seine (körperfeste) 3-Achse. Die zugehörige Koordinate ist ψ. Unabhängig heißt, daß die Bewegung nicht qualitativ von θ abhängt, sie hängt aber quantitativ von $\theta, \ldots$ ab.



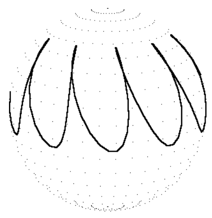
2. $u_1 < u' < u_2$

   In diesem Fall wechselt $\dot{\varphi}$ das Vorzeichen und es entstehen „Schlaufen" der Bahn.



3. $u' = u_1$ oder $u' = u_2$

   In diesem Fall kommt an den Umkehrpunkten θ_1 oder θ_2 die θ- und die φ-Bewegung gleichzeitig zur Ruhe. Die Bahnen haben an diesen Stellen singuläre Punkte.



Die Eulersche Gleichung

Für den Drehimpuls $\vec{L}$ und das Drehmoment $\vec{N}$ des Kreisels gilt

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N};$$

10.3.5 Der freie Kreisel

Der Kreisel heißt frei, wenn keine Schwerkraft auf ihn wirkt. Wenn man jedoch den Kreisel im Schwerpunkt unterstützt, hat die Schwerkraft ebenfalls keinen Einfluß auf die Bewegung. Denn egal ob $l = 0$ oder $g = 0$, wir haben stets

$$\beta = \frac{2Mgl}{I_1} = 0;$$

Also vereinfacht sich unsere Bewegungsgleichung zu einer Gleichung 2. Ordnung

$$\dot{u}^2 = \alpha(1 - u^2) - (b - au)^2;$$

Wir suchen zunächst spezielle Lösungen, für die $\dot{u} = 0$. Für diese gilt

$$\alpha(1 - u^2) - (b - au)^2 = 0;$$

Dies liefert ein oder zwei brauchbare Lösungen. Wir betrachten nun diese Lösung mit $\theta = \theta_0 = \text{const.}$. Wir haben

$$\dot{\varphi} = \frac{b - a\cos\theta_0}{\sin^2\theta_0} = \text{const.}$$

d.h. eine konstante Drehung. Man nennt dies auch reguläre Präzession. Auch für ψ erhält man eine konstante Drehung

$$\dot{\psi} = \frac{I_1 a}{I_3} - \dot{\varphi}\cos\theta_0 = \text{const.}$$

Wir untersuchen nun die Vektoren $\vec{L}$ und $\vec{\omega}$.

Im Körperfesten System

Hier gilt

$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} \dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi \\ \dot{\varphi}\cos\theta\cos\psi \\ \dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi} \end{pmatrix};$$

Wenn man berücksichtigt, daß $\psi = A + t\dot{\psi}$, so erhält man aus

$$\vec{L} = \mathbf{I}\vec{\omega},$$

daß $\vec{L} \not\parallel \vec{\omega}$. Aber man weiß, daß $\vec{L}, \vec{e}_3{}'$ und $\vec{\omega}$ in einer Ebene liegen.

Im Raumfesten System

Hier ist der Drehimpuls $\vec{L}$ erhalten. Ferner gilt

$$\theta = \text{const.} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \vec{L} \parallel \vec{e}_3;$$

Da man die letzte Bedingung durch Wahl des Koordinatensystems jedoch immer erfüllen kann, liefert $\theta = \text{const.}$ bereits die allgemeinste Lösung des Problems. Diese Überlegungen gelten jedoch ausschließlich für den freien Kreisel.

Kapitel 11

Spezielle Relativitätstheorie

11.1 Einführung

11.1.1 Motivation

Man stellt beim Auftreten von Geschwindigkeiten $v \approx c = v_{\text{Licht}}$ Abweichungen von der Newton'schen Mechanik fest. Dies sind zum Beispiel

1. Konstanz der Lichtgeschwindigkeit

   $$c = 299.792,458 \frac{\text{km}}{\text{sec}} = 1,079 \cdot 10^9 \frac{\text{km}}{\text{h}};$$

   unabhängig von der Bewegung der Quelle und/oder des Beobachters. Dies wurde nachgewiesen mit dem Michelson-Morley-Experiment (1887).

2. Maximale Geschwindigkeit c

   In keinem Versuch wurde bisher eine größere Geschwindigkeit gemessen als c, auch wenn die bisherige Physik eine größere Geschwindigkeit erwarten ließ.

3. Existenz von masselosen Teilchen mit Energie und Impuls.

   Bestimmte Experimente konnten nur erklärt werden, wenn man masselosen Teilchen Energie und Impuls zusprach — aber das ist klassisch nicht möglich, wegen

   $$E_{\text{kin}} = \frac{m}{2} v^2; \qquad p = mv;$$

4. Radioaktiver Zerfall schnellbewegter Teilchen.

   Myonen haben im Labor eine Halbwertszeit von $\tau = 2,2 \cdot 10^{-6} sec$, und sollten daher bei Bewegung mit Lichtgeschwindigkeit nicht weiter als $\tau \cdot c \approx 660\text{m}$ kommen. Tatsächlich beobachtet man jedoch eine durchschnittliche Wegstrecke von 10 bis 30km.

Da man diese Abweichung im Rahmen der bisherigen Physik nicht erklären kann, versucht man nun die Naturgesetze neu zu formulieren, so daß sie sowohl diese neuen Beobachtungsergebnisse erklären als auch den Ergebnissen der Newton'schen Physik in anderen Bereichen nicht widersprechen.

11.1.2 Grundlagen

Die wesentlichen Axiome der Newton'schen Mechanik sind

- Alle Inertialsysteme sind äquivalent.
- Alle Inertialsysteme gehen durch Operationen der Galilei-Gruppe ineinander über.

Einstein hingegen fordert

- Alle Inertialsysteme sind äquivalent.
- Die Lichtgeschwindigkeit c ist unabhängig vom speziellen Inertialsystem.

Dabei sind die Inertialsysteme in beiden Fällen gleich definiert, aber die beiden Theorien führen zu unterschiedlichen Transformationen zwischen den Inertialsystemen.
Ziel der nachfolgenden Abschnitte ist es, den Übergang zwischen Inertialsystemen mathematisch zu beschreiben.

11.1.3 Die Lorentz-Gruppe in der ict-Metrik

Wir gehen von zwei Inertialsystemen K und K' aus, die zum Zeitpunkt $t = 0$ übereinstimmen. Das System K' bewege sich relativ zum System K mit der Geschwindigkeit $\vec{v}$ entlang der positiven x-Achse.
Eine punktförmige Lichtquelle sende im Ursprung zur Zeit $t = 0$ einen Lichtblitz aus. Für die Punkte, an denen der Lichtblitz ankommt, gilt

$$\vec{x}^{\,2} = c^2t^2;$$

Da dies entsprechend auch im K'-System gilt, hat man

$$\vec{x}^{\,2} - c^2t^2 = \vec{x}'^2 - c^2t'^2 = 0;$$

Also ist für eine notwendige Bedingung für die Transformationen zwischen Inertialsystemen die Invarianz der quadratischen Form

$$b(\vec{x}, t) = \vec{x}^{\,2} - c^2t^2;$$

Um dies als kanonisches Skalarprodukt eines 4-dimensionalen Vektorraums interpretieren zu können, definiert man

$$\begin{aligned}(x_1, x_2, x_3, x_4) &= (\vec{x}, ict);\\ \mathbf{x} &= x \underbrace{\vec{e}_x}_{=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}} + y \underbrace{\vec{e}_y}_{=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}} + z \underbrace{\vec{e}_z}_{=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}} + ict \underbrace{\vec{e}_t}_{=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}} \;;\end{aligned}$$

Damit entspricht die Invarianz der Quadratischen Form oben genau der Invarianz der kanonischen (euklidischen) Norm in diesem Raum. Also erhalten wir die gesuchten Transformationen als Drehungen in diesem Raum, diese Drehungen sind aber gerade die Elemente der orthogonalen Gruppe $SO(4)$. [1]
Die Verwendung komplexer Koordinaten im $\mathbf{R}^4$ führt zur sogenannten *ict*-Metrik. Man kann mit diesem Ansatz die gesamte Relativitätstheorie bewältigen.
Aber die Verwendung imaginärer Koordinaten hat wichtige Nachteile. Insbesondere tauchen bei Verwendung dieser Metrik in diversen Naturgesetzen komplexe Faktoren auf — die man dort meist nicht mehr erklären kann. Aus diesem und anderen Gründen hat sich die *ict*-Metrik nicht durchgesetzt. Wir werden im Folgenden ein anderes Konzept verfolgen.

11.2 Lorentz/Poincaré-Gruppe

11.2.1 Einführung von Koordinaten

Anstelle wie oben komplexe Koordinaten einzuführen wollen wir nun von komplexen Basisvektoren ausgehen — eine Vorgehensweise, die sich besser bewährt hat. Man definiert

$$\mathbf{x} = x^0 \underbrace{\vec{e}_0}_{=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}} + x^1 \underbrace{\vec{e}_1}_{=\begin{pmatrix}0\\-i\\0\\0\end{pmatrix}} + x^2 \underbrace{\vec{e}_2}_{=\begin{pmatrix}0\\0\\-i\\0\end{pmatrix}} + x^3 \underbrace{\vec{e}_3}_{=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\-i\end{pmatrix}} \;;$$

Dabei schreibt man die Indizes oben, da die Metrik dieser Koordinaten nicht die Einheitsmatrix ist, und wir hier die kontravarianten Komponenten haben. Zur Vereinfachung der Schreibweisen, hier eine Vereinbarung

[1] Der betrachtete Vektorraum ist natürlich nicht der $\mathbf{R}^4$, sondern ein Raum mit teilweise komplexen Koordinaten. Die euklidische Norm ist in diesem Raum keine Norm mehr und das Skalarprodukt ist nicht mehr definit. Eigentlich müßte man auch noch getrennt zeigen, daß das „Standartskalarprodukt“ dieses Raumes unter orthogonalen Transformationen aus $SO(4)$ invariant ist (Dies ist übrigens nicht schwer).

Vereinbarung:

Wir vereinbaren für dieses Kapitel eine spezielle Summenkonvention. Wenn nach der bisherigen Summenkonvention über einen Koordinaten-Index zu summieren ist, dann summiert man

- von 0 bis 3, wenn der Index ein griechischer Buchstabe ist.
- von 1 bis 3, wenn der Index ein lateinischer Buchstabe ist.

Dies gilt auch dann, wenn der Wertebereich des lateinischen Index eigentlich 0 enthält. Üblicherweise wird in der Relativitätstheorie nur über Indizes summiert, die auf verschiedenen Ebenen (oben/unten) stehen.

Nach diesen Vorbemerkungen, berechnen wir zunächst den metrischen Tensor

$$g_{\mu\nu} = \vec{e}_\mu \vec{e}_\nu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix};$$

Man hat damit die beiden Koordinatendarstellungen

$$\begin{array}{cl} \text{Kontravariante Koordinaten:} & (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z); \\ \text{Kovariante Koordinaten:} & (x_0, x_1, x_2, x_3) = (ct, -x, -y, -z); \end{array}$$

Überlicherweise schreibt man

$$g^{\mu\nu} := g_{\mu\nu}^{-1};$$

Hier gilt

$$g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix};$$

Somit gelten die schönen Umrechnungsformeln

$$\begin{aligned} x_\mu &= g_{\mu\nu} x^\nu; \\ x^\mu &= g^{\mu\nu} x_\nu; \end{aligned}$$

Für das Skalarprodukt in diesem Raum gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} &:= x^\mu \vec{e}_\mu \cdot y^\nu \vec{e}_\nu = \\ &= g_{\mu\nu} x^\mu y^\nu = \\ &= (x^0 y^0 - x^1 y^1 - x^2 y^2 - x^3 y^3) = \\ &= x^0 y^0 - \underbrace{\vec{x} \cdot \vec{y}}_{\text{3-dimensional}} = \\ &= x^\mu y_\mu = x_\nu y^\nu = \\ &= g^{\mu\nu} x_\mu y_\nu; \end{aligned}$$

Dieses Skalarprodukt liefert eine nicht definite Metrik. Man nennt $|\mathbf{x}| := \mathbf{x}\cdot\mathbf{x}$ die Länge des Vektors $\mathbf{x}$. Die vierdimesionale Raumzeit mit dieser Metrik heißt „Minkowski-Raum“.
Wir definieren noch[2]

$$g_\mu^{\ \nu} := g_{\mu\rho}g^{\rho\nu} = \mathbf{1} = \delta_{\mu\nu};$$

um stets die Regel anwenden zu können, daß nur über Indizes verschiedener Ebenen summiert wird.

11.2.2 Räumliche Drehungen

Wir suchen nun lineare Transformationen, die die „Skalarprodukte“ invariant lassen. Man macht den Ansatz

$$(x^\mu)' = \Lambda^\mu_{\ \nu}x^\nu;$$

Man erhält

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}\cdot\mathbf{x} &= (x_\mu)'(x^\mu)' = \\
&= (\Lambda_\mu^{\ \nu}x_\nu)(\Lambda^\mu_{\ \rho}x^\rho) = \\
&= \Lambda_\mu^{\ \nu}\Lambda^\mu_{\ \rho}x_\nu x^\rho = \\
&\stackrel{!}{=} x_\nu x^\rho;
\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich die Forderung

$$\Lambda_\mu^{\ \nu}\Lambda^\mu_{\ \rho} = \delta_{\nu\rho} = g^\nu_{\ \rho} = \mathbf{1}; \tag{11.1}$$

Damit ergibt sich die Frage: Welche Form hat Λ?
Man vermutet natürlich, daß räumliche Drehungen zu den zulässigen Transformationen gehören. Dies gilt wegen

$$\vec{x}\,' = \mathbf{R}\vec{x}; \qquad \text{Mit} \qquad \mathbf{R}^t\mathbf{R} = \mathbf{1};$$

also

$$c^2t'^2 - \vec{x}\,'^2 = c^2t^2 - \vec{x}^t\mathbf{R}^t\mathbf{R}\vec{x} = c^2t^2 - \vec{x}\,^2;$$

Hier ist

$$\Lambda^\mu_{\ \nu} = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & & & \\ 0 & & \mathbf{R} & \\ 0 & & & \end{array}\right);$$

Nun prüft man leicht die Beziehung

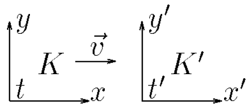
$$\Lambda_\mu^{\ \nu}\Lambda^\mu_{\ \rho} = \mathbf{1};$$

Die Drehungen sind jedoch wenig interessant, da sie schon aus der Galilei-Gruppe bekannt sind. Interessanter sind die sogenannten „boosts“.

[2] Man beachte die Reihenfolge der Indizes. Es ist zwischen $g_\mu^{\ \nu}$ und $g^\nu_{\ \mu}$ zu unterscheiden!

11.2.3 Boosts in x-Richtung

Ein Boost ist der Übergang in ein bewegtes Bezugssystem. wir schränken uns im Moment auf die Betrachtung von Bewegungen in x-Richtung ein. Außerdem sollen die Ursprünge der Systeme zur Zeit $t = 0$ übereinstimmen.



Man kann sich anhand von Gedankenexperimenten leicht klarmachen, daß bei diesen boosts die y- und z-Koordinaten unverändert bleiben. Man betrachte hierzu einen schnell fahrenden Zug. Würde die y-Koordinate bei Bewegung gestaucht, so würde ein am Bahngleis stehender Beobachter meinen, daß der Zug zwischen den Schienen fährt — die Mitreisenden wären da jedoch anderer Meinung. Diese beiden Beobachtungen widersprechen sich jedoch, denn anhand der Spuren kann man ja eindeutig feststellen, wo der Zug gefahren ist. Analog widerlegt man alle anderen möglichen Abweichungen.
Doch nun wollen wir zunächst nach den Transformationsmatrizen suchen.
Wir definieren zunächst: Λ ohne Indizes steht für die 4×4-Matrix mit den Einträgen $\Lambda^{\mu}{}_{\nu}$.
Nun hat man mit 11.1

$$\begin{aligned}
\Lambda_{\mu\nu}\Lambda^{\mu}{}_{\rho} &= g_{\nu\rho}; \qquad\qquad \text{Multiplizieren mit } g_{\sigma\nu};\\
\Lambda^{\sigma}{}_{\nu}g_{\sigma\mu}\Lambda^{\mu}{}_{\rho} &= g_{\nu\rho};\\
\Lambda^{t}g\Lambda &= g;
\end{aligned}$$

Die letzte Gleichung kann sehr einfach bestätigen.

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{x} = \mathbf{x}'\cdot\mathbf{x}' = \mathbf{x}^{t}\Lambda^{t}g\Lambda\mathbf{x} = \mathbf{x}^{t}g\mathbf{x};$$

Wenn wir nun — wie oben erläutert — annehmen, daß die y- und z-Koordinaten unverändert bleiben, erhält man für Λ

$$\Lambda = \left(\begin{array}{cc|cc} \cdot & \cdot & 0 & 0\\ \cdot & \cdot & 0 & 0\\ \hline 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right);$$

Daher betrachten wir im Folgenden den Teilraum ohne y- und z-Komponenten. Dies ist ein 2-dimensionaler Minkowski-Raum. Für unsere Matrix Λ machen wir den Ansatz

$$\Lambda = \begin{pmatrix} A & B\\ C & D \end{pmatrix};$$

Wir erhalten die Bedingung

$$\Lambda^{t}g\Lambda = \begin{pmatrix} A^2 - C^2 & AB - CD\\ AB - CD & B^2 - D^2 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & -1 \end{pmatrix};$$

Ausgeschrieben

$$\begin{aligned} AB - CD &= 0; && (11.2) \\ A^2 &= C^2 + 1; && (11.3) \\ D^2 &= B^2 + 1; && (11.4) \end{aligned}$$

Wegen 11.3 setzt man

$$A = \cosh\xi; \qquad C = \sinh\xi;$$

und wegen 11.4 setzt man

$$D = \cosh\eta; \qquad B = \sinh\eta;$$

und wegen 11.2 gilt nun

$$\cosh\xi \sinh\eta = \cosh\eta \sinh\xi; \quad \Rightarrow \quad \xi = \eta;$$

Damit ist Λ von der Gestalt

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \cosh\xi & \sinh\xi \\ \sinh\xi & \cosh\xi \end{pmatrix};$$

Die Matrix ist einer Drehmatrix äußerlich sehr ähnlich. Doch hier treten statt der trigonometrischen die entsprechenden hyperbolischen Funktionen auf. Die Gleichung

$$c^2t^2 - x^2 = \text{const.};$$

definiert ja gerade eine Hyperbel.
Außerdem fällt auf, daß hier x und t gleichzeitig in die Transformation involviert sind.
Zuletzt wollen wir nun den Parameter ξ, den man als Rapidität bezeichnet, aus den gegebenen Größen bestimmen.
Im System K' bewegt sich der Ursprung von K mit $-v$. Allgemein gilt

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\xi & \sinh\xi \\ \sinh\xi & \cosh\xi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix};$$

Also gilt für den Ursprung von K

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\xi & \sinh\xi \\ \sinh\xi & \cosh\xi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct\cosh\xi \\ ct\sinh\xi \end{pmatrix};$$

Damit folgt

$$-v = v' = \frac{x'}{t'} = \frac{ct\sinh\xi}{t\cosh\xi} = c\tanh\xi;$$

Also $\xi = -\operatorname{artanh} \frac{v}{c}$. Damit folgt

$$\begin{aligned}
\cosh \xi &= \frac{1}{\sqrt{1 - \tanh^2 \xi}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \\
\sinh \xi &= \frac{\tanh \xi}{\sqrt{1 - \tanh^2 \xi}} = \frac{-\frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \\
\Lambda &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & \frac{-\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\ \frac{-\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \end{pmatrix}; \\
t' &= \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \\
x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \\
y' &= y; \\
z' &= z;
\end{aligned}$$

Die vier letzten Gleichungen nennt man hierbei Lorentz-Transformationen.
Man sieht, wenn man $c \to \infty$ gehen läßt, daß dann die Lorentz-Transformationen mit den zugehörigen Galilei-Transformationen übereinstimmen. Dieser Grenzwert ($c \to \infty$) führt immer zu der nicht-relativistischen Näherung, wobei zum Teil aber noch gewisse Nullpunktsverschiebungen berücksichtigt werden müssen (siehe weiter unten).
Mit den gebräuchlichen Abkürzungen

$$\beta := \frac{v}{c}; \qquad \gamma := \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}};$$

erhält man

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

11.2.4 Zusammenstellung der Lorentz-/Poincaré-Gruppe

Wir habe soeben den Begriff Lorentz-Transformation für die Transformation für einen boost in x-Richtung verwendet. In diesem Abschnitt sind damit allgemein alle linearen Transformationen gemeint, die die Bedingung 11.1 erfüllen.
Im Folgenden wollen wir uns bei der Konstruktion der Lorentz-/Poincaré-Gruppe an der Galilei-Gruppe orientieren. Zur Erinnerung seien hier nochmals die 10 Parameter der Galilei-Gruppe angeführt.

Die Galilei-Gruppe hat drei Winkel-Parameter für Drehungen, 3 Parameter für boosts und drei Parameter für Translationen. Ferner einen Parameter für Translationen in der Zeit.
Wir wollen nun zeigen, daß auch die Lorentz-Transformationen eine Gruppe bilden. Klar ist, daß diese Gruppe nicht leer ist und ein Einselement (Die Identität) hat. Da sie eine Untergruppe der Linearen Abbildungen des $\mathbf{R}^4$ ist, genügt es nun, die Abgeschlossenheit nachzuweisen. Seien Λ_1, Λ_2 zwei Transformationen. Dann gilt

$$\Lambda_i^t g \Lambda_i = g; \qquad \text{Für } i = 1, 2;$$

Also gilt auch

$$(\Lambda_1 \Lambda_2)^t g \Lambda_1 \Lambda_2 = \Lambda_2^t \Lambda_1^t g \Lambda_1 \Lambda_2 = g;$$

Also bilden die Lorentz-Transformationen eine Untergruppe.
Wir haben bereits gesehen, daß räumliche Drehungen stets Lorentz-Transformationen sind. Also bilden die Matrizen der Form

$$\Lambda = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & & & \\ 0 & & \mathbf{R} & \\ 0 & & & \end{array} \right);$$

eine Untergruppe, die sogenannte Drehgruppe. Diese Gruppe ist natürlich nichtabelsch, also sind Lorentz-Transformationen im Allgemeinen auch nicht vertauschbar.
Man kann zeigen, daß die boosts in eine Richtung eine abelsche Untergruppe bilden, doch boosts in verschiedene Richtungen bilden weder eine Untergruppe, noch sind sie vertauschbar. Man kann auch zeigen, daß jede Lorentz-Transformation ein Produkt von boost und Drehung ist.
Boosts und Drehungen haben je 3 Parameter, also insgesamt 6. Die Gruppe aller Lorentz-Transformationen heißt die (homogene) Lorentz-Gruppe.
In Analogie zur Galilei-Gruppe, kann man auch relativistisch Raum- und Zeittranslationen zulassen. Die Gruppe, die diese Transformationen noch mit einbezieht, heißt inhomogene Lorentzgruppe oder Poincaré-Gruppe. Ihre Elemente sind in der Form

$$\mathbf{x} \mapsto \Lambda \mathbf{x} + \mathbf{a}$$

darstellbar. Da $\mathbf{a}$ ein Vierer-Vektor ist, hat man jetzt insgesamt 10 Paramter — wie in der Galilei-Gruppe.

11.3 Konsequenzen der Lorentz-Transformation

Im Folgenden sollen die wesentlichen neuen Erscheinungen in der Relativitätstheorie anhand eines boosts in x-Richtung untersucht werden. Die Systeme werden wie oben mit K und K' bezeichnet.

11.3.1 Relativierung der Gleichzeitigkeit

Wir betrachten zwei Ereignisse im K-System mit den Koordinaten (x_1, t_1) und (x_2, t_2). Die beiden Ereignisse seien (im K-System) gleichzeitig, es gelte also $t_1 = t_2 = t$. Ein K'-Beobachter mißt für diese Ereignisse die Koordinaten

$$\begin{array}{rcll} x_1' &=& \gamma(x_1 - vt); \qquad t_1' = \gamma\left(t - \frac{vx_1}{c^2}\right) & \text{Ereignis 1} \\ x_2' &=& \gamma(x_2 - vt); \qquad t_2' = \gamma\left(t - \frac{vx_2}{c^2}\right) & \text{Ereignis 2} \end{array}$$

Also ist $t_1' \neq t_2'$ für $x_1 \neq x_2$ und $v \neq 0$. Die Ereignisse finden also im System K' nicht mehr gleichzeitig statt. Für die Zeitdifferenz erhält man

$$t_1' - t_2' = \gamma \frac{v}{c^2}(x_2 - x_1);$$

Die Zeitdifferenz ist also proportional zur Geschwindigkeit des Bezugssystems und zur K-Entfernung der Ereignisse.

11.3.2 Längenkontraktion

Wir betrachten einen in K zwischen den Punkten x_1 und x_2 ruhenden Stab. Seine Länge ist natürlich $l = x_2 - x_1$. Welche Länge mißt jedoch der bewegte Beobachter? Um den die Länge des im System K' bewegten Stabes zu messen, wird der Beobachter gleichzeitig die Ortskoordinaten von Stabende (x_2', t') und Stabanfang (x_1', t') messen und für die Länge $l' = x_2' - x_1'$ angeben.

Man benötigt hierzu die inverse Lorentz-Transformation. Es gibt zwei Möglichkeiten, diese zu finden. Man könnte einerseits durch Auflösen der Gleichungen nach x' und t' die Umkehrabbildung berechnen, andererseits ist es jedoch wesentlich einfacher, die inverse Transformation als boost mit der Geschwindigkeit $-v$ aufzufassen und so nur die Vertauschungen

$$\begin{array}{rcl} v & \longleftrightarrow & -v; \\ x & \longleftrightarrow & x'; \\ t & \longleftrightarrow & t'; \end{array}$$

vorzunehmen. Mit beiden Methoden erhält man das Ergebnis

$$x = \frac{x' - vt'}{\sqrt{1-\beta^2}}; \qquad t = \frac{t' + \frac{vx'}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}};$$

Für unsere Ereignisse erhält man also (wieder mit den gebräuchlichen Abkürzungen)

$$x_1 = \gamma(x_1' - vt'); \qquad x_2 = \gamma(x_2' - vt'); \qquad \Rightarrow \qquad l = x_2 - x_1 = \gamma l';$$

Der Beobachter im bewegten System mißt also die kürzere Länge, die sich durch

$$l' = \sqrt{1-\beta^2} \cdot l;$$

ergibt.

11.3.3 Zeit-Dilatation

In diesem Abschnitt soll das Verhalten von Uhren in den verschiedenen Bezugssystemen untersucht werden. Ein Zeitintervall $t_2 - t_1$ wird im System K durch die am gleichen Ort stattfindenden Ereignisse (t_1, x) und (t_2, x) dargestellt. Dies ist das Modell einer Uhr in K. Der Beobachter in K' erhält die Zeiten

$$t_1' = \gamma\left(t_1 - \frac{vx}{c^2}\right); \qquad t_2' = \gamma\left(t_2 - \frac{vx}{c^2}\right); \qquad \Rightarrow \quad t_2' - t_1' = \gamma(t_2 - t_1);$$

Uhren in bewegten Bezugssystemen ticken also nach der Beziehung

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\beta^2}};$$

langsamer. Dieses Phänomen der Zeit-Dilatation wird deshalb oft in dem Satz „Bewegte Uhren gehen langsamer“ zusammengefaßt. Man beachte, daß diese Zeit-Dilatation nicht nur Uhren sondern alle Vorgänge in der Natur betrifft!

11.3.4 Addition von Geschwindigkeiten

Da nach den Eingangs geschilderten Beobachtungen keine größeren Geschwindigkeiten als die Lichtgeschwindigkeit auftreten, kann die naive Geschwindigkeitsaddition, die in der Galilei-Gruppe verwendet wird, relativistisch nicht mehr stimmen. Daher muß eine neue Beziehung für die Addition von Geschwindigkeiten hergeleitet werden.
Wir tun dies hier nur für kollineare Geschwindigkeiten. Man betrachtet hierzu drei Inertialsysteme K, K' und K''. System K' bewege sich relativ zu System K mit Geschwindigkeit v_1 in x-Richtung und System K'' bewege sich relativ zu System K' mit Geschwindigkeit v_2 in x'-Richtung. Als Summengeschwindigkeit v interpretieren wir die Geschwindigkeit von K'' relativ zu K.
Man erhält diese Geschwindigkeit aus der Transformation, die für die Koordinatenumrechnung von K nach K'' erforderlich ist. Diese Transformation wiederum ist als Produkt von Matrizen gegeben[3]

$$\Lambda(v) = \Lambda(v_2)\Lambda(v_1);$$

Es erweist sich als vorteilhaft, hier wieder mit den Rapiditäten zu rechnen. Für diese gilt — wie man mit den Additionstheoremen für hyperbolische Funktionen leicht nachrechnet:

$$\begin{pmatrix} \cosh\xi_1 & \sinh\xi_1 \\ \sinh\xi_1 & \cosh\xi_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh\xi_2 & \sinh\xi_2 \\ \sinh\xi_2 & \cosh\xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh(\xi_1+\xi_2) & \sinh(\xi_1+\xi_2) \\ \sinh(\xi_1+\xi_2) & \cosh(\xi_1+\xi_2) \end{pmatrix};$$

Das heißt die Rapidität ist additiv unter boosts in der gleichen Richtung. Dies ist auch der Beweis, daß die boosts in eine Richtung eine Abelsche Gruppe bilden — denn die Addition der Rapiditäten definiert einen Isomorphismus in die additive Gruppe von **R**.

[3] siehe Lineare Algebra

Für den boost von K nach K'' definiert man die Rapidität $\xi = \xi_1 + \xi_2$. Man erhält

$$-\frac{v}{c} = \tanh\xi = \tanh(\xi_1 + \xi_2) = \frac{\tanh\xi_1 + \tanh\xi_2}{1 + \tanh\xi_1 \cdot \tanh\xi_2} = -\frac{\frac{v_1}{c} + \frac{v_2}{c}}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}};$$

Daraus ergibt sich die Additionsformel

$$v = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}};$$

11.4 Geometrische Interpretation

11.4.1 Lorentz-invariante Abstände

Man definiert im 4-dimensionalen Minkowski-Raum den Lorenz-invarianten „Abstand“ $(\Delta s)^2$ durch

$$(\Delta s)^2 := c^2(t_1 - t_2)^2 - (\vec{x}_1 - \vec{x}_2)^2;$$

Man unterscheidet nun zwischen 3 Typen von Abständen

Raumartige Abstände

Ein Abstand heißt raumartig, wenn $(\Delta s)^2 < 0$ ist. Der Abstand zweier Ereignisse ist genau dann raumartig, wenn es ein Inertialsystem gibt, in dem die beiden Ereignisse gleichzeitig an verschiedenen Orten stattfinden.
Zwei Ereignisse mit raumartigem Abstand können sich niemals gegenseitig beeinflussen (d.h. das eine kann nicht Folge des anderen sein).

Zeitartige Abstände

Der Abstand zweier Ereignisse heißt zeitartig, wenn $(\Delta s)^2 > 0$ ist. Zwei Ereignisse haben dann und nur dann einen zeitartigen Abstand voneinander, wenn es ein Bezugssystem gibt, in dem die beiden Ereignisse am gleichen Ort stattfinden.
Bei zwei Ereignisse mit zeitartigem Abstand kann man eindeutig entscheiden, welches Ereignis zuerst stattgefunden hat. Dieses Ereignis kann das andere beeinflussen.

Lichtartige Abstände

Ereignisse mit $(\Delta s)^2 = 0$ haben einen lichtartigen Abstand voneinander.

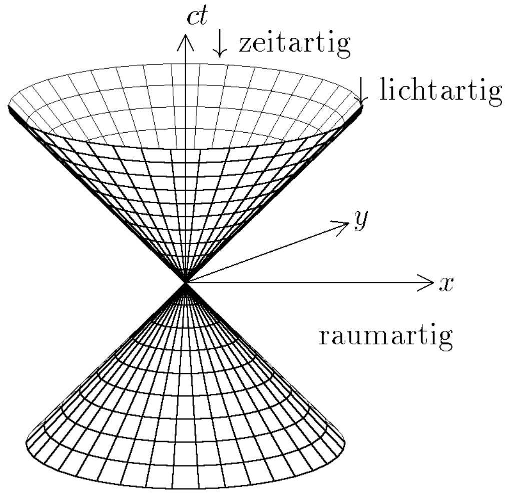
11.4.2 3-dimensionaler Minkowski-Raum

Wenn man die z-Koordinate vernachlässigt, kann man den Minkowsky-Raum noch plastisch veranschaulichen. Wir zeichnen die ct-Achse nach oben in ein 3-dimensionales

Koordinatensystem ein. Der Abstand von Ereignissen wird hier gegeben durch die Quadratische Form

$$q(x, y, ct) = c^2t^2 - x^2 - y^2;$$

Die Punkte mit lichtartigem Abstand vom Ursprung sind also genau die Punkte der totalisotropen Teilräume der zugehörigen Bilinearform. Dies ergibt einen Kegel, der symmetrisch um die ct-Achse liegt. Dieser Kegel teilt den Raum in 4 Zusammenhangskomponenten.
Die Punkte auf dem Kegel sind gerade die mit lichtartigem Abstand vom Ursprung. Diesen Kegel nennt man auch den Lichtkegel (um den Ursprung).
Die Punkte außerhalb des Kegels haben einen raumartigen Abstand vom Ursprung.



Die Punkte im Inneren des Kegels, die unterhalb der x-y-Ebene liegen, haben vom Ursprung einen zeitartigen Abstand. Es sind gerade die Punkte, die die Ereignisse im Ursprung beeinflussen können. Die Menge dieser Punkte kann als absolute Vergangenheit bezeichnet werden.
Die absolute Zukunft bilden dagegen die Punkte im Kegelinneren, die oberhalb der x-y-Ebene liegen. Auch sie haben einen zeitartigen Abstand voneinander. Diese und nur diese Punkte können durch Ereignisse im Ursprung beeinflusst werden.

11.5 Relativistische Kinematik

11.5.1 Einführung

Wir wollen nun bewegte Teilchen im Rahmen der Relativitätstheorie beschreiben. Im Minkowski-Raum wird die Bewegung von Teilchen durch ihre Bahn — hier Weltlinie genannt — dargestellt

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} ct \\ \vec{x}(t) \end{pmatrix};$$

Für massive Teilchen ist dabei nur eine Bewegung mit $v < c$ möglich. Das heißt die Bahnen massiver Teilchen verlaufen stets innerhalb des Lichtkegels um einen beliebigen Punkt der Bahn. Masselose Teilchen bewegen sich stets auf dem Lichtkegel. Bisher sind keine Teilchen bekannt, die sich aus ihrem Lichtkegel entfernen können — manche Physiker vermuten jedoch, daß solche Tachyonen existieren.
Man erhält ein Lorentz-invariantes Linienelement durch

$$(ds)^2 = (dx^\mu)(dx_\mu) = c^2(dt)^2\left(1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)^2\right) = c^2(1-\beta^2)dt^2;$$

Lorentz-invariante Zahlen wie dieses Linienelement $ds^2 = c^2(1-\beta^2)dt^2$ heißen Lorentz-Skalare.
Einen weiteren Lorentz-Skalar, das Element der Eigenzeitm $d\tau$ erhält man durch

$$d\tau := \frac{ds}{c} = \sqrt{1-\beta^2}\; dt;$$

Man berechnet nun die Zeit, die für das bewegte Teilchen vergangen ist, im Ruhesystem durch den Ansatz

$$\Delta t = \int_{t_1}^{t_2} d\tau = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1-\beta^2}\; dt;$$

Allgemein benötigt man häufig Größen, die einfaches Transformationsverhalten bezüglich der Lorentz-Transformationen haben. Man definiert

Definition:

Lorentz-Skalare sind Größen S mit dem Transformationsverhalten

$$S' = S;$$

4er-Vektoren sind 4-dimensionale Vektoren x^μ mit dem Transformationsverhalten

$$(x^\mu)' = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu;$$

Ein Rang-2-Tensor ist in der Relativitätstheorie durch das Transformationsverhalten

$$(T^{\mu\nu})' = \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma T^{\rho\sigma};$$

gekennzeichnet.

Bekannte 4-er Vektoren, die wir noch nicht gennant haben, sind die 4-er Geschwindigkeit

$$u^\mu := \frac{dx^\mu}{d\tau} = \frac{dx^\mu}{dt}\frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\begin{pmatrix} c \\ \frac{d\vec{x}}{dt} \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} c \\ \vec{v} \end{pmatrix};$$

und die 4-er Beschleunigung

$$a^\mu := \frac{du^\mu}{d\tau} = \frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} = \gamma^2 \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\vec{v}} \end{pmatrix} + \gamma\dot{\gamma}\begin{pmatrix} c \\ \vec{v} \end{pmatrix};$$

Aus diesen erhält man sofort zwei Lorentz-Skalare

$$\begin{aligned} u^\mu u_\mu &= \gamma^2(c^2 - \vec{v}^{\,2}) = \frac{c^2 - v^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = c^2; \\ a^\mu u_\mu &= \frac{1}{2}\frac{d}{d\tau} u^\mu u_\mu = 0; \end{aligned}$$

die beide nicht sehr informativ sind. Der zweite besagt immerhin, daß $\mathbf{a} \cdot \mathbf{u} = 0$, also die beiden Vektoren in gewisser Weise senkrecht aufeinander stehen.

11.5.2 Das Prinzip der kleinsten Wirkung

Mit Hilfe des Prinzips der kleinsten Wirkung wollen wir Bewegungsgleichungen im Minkowski-Raum herleiten. Da das Prinzip in jedem Bezugssystem anwendbar ist, muß für die Variation des Wirkungsfunktionals in allen Bezugssystemen

$$\delta S = 0;$$

gelten. Das aber bedeuted, daß δS ein Lorentz-Skalar sein muß. Macht man für das Funktional den Ansatz

$$S = \int_1^2 L \ dt;$$

so muß offenbar auch $L \ dt$ ein Lorentz-Skalar sein.
Nun betrachten wir zunächst ein freies Teilchen. Der einzige Lorentz-Skalar, den wir bisher kennen, ist

$$ds = \sqrt{dx^\mu dx_\mu} = c \ d\tau;$$

andere gibt es nicht. Wir machen daher den Ansatz

$$S = \lambda \int_1^2 ds;$$

mit einer noch zu bestimmenden Konstanten λ. Also haben wir

$$L \ dt = \lambda \ ds; \qquad \Rightarrow \qquad L = \lambda \frac{ds}{dt} = \lambda c \sqrt{1 - \beta^2};$$

Nichtrelativistisch muß sich L auf die klassische Formel für die kinetische Energie reduzieren lassen. Wir machen eine Taylor-Näherung

$$L = \lambda c \sqrt{1 - \beta^2} \approx \lambda c (1 - \frac{1}{2}\beta^2) = \lambda c - \lambda \frac{v^2}{c} \stackrel{!}{=} \text{const.} + \frac{m}{2} v^2;$$

Daraus ergibt sich $\lambda = -mc$, also

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \beta^2};$$

Betrachten wir die Euler-Lagrange-Gleichungen des freien Teilchens

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \vec{v}} - \frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = 0;$$

Für den „Impuls“

$$\vec{p} := \frac{\partial L}{\partial \vec{v}};$$

ergibt sich

$$\frac{d}{dt}\vec{p} = 0;$$

er ist also erhalten. Es ist

$$\begin{aligned} \vec{p} &= \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \\ &= mc^2 \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{\vec{v}}{c^2} = \\ &= \gamma m \vec{v}; \end{aligned}$$

Der relativistische Zusammenhang zwischen Geschwindigkeit und Impuls ist

$$\vec{p} = \gamma m \vec{v};$$

oder — als 4er-Vektoren

$$p^\mu = \gamma m \begin{pmatrix} c \\ \vec{v} \end{pmatrix} = m u^\mu;$$

Zunächst sieht man aus

$$\vec{p} = \text{const.} \quad \Rightarrow \quad \vec{v} = \text{const.}$$

daß sich auch relativistisch freie Teilchen geradlinig-gleichförmig bewegen.
Außerdem haben wir wegen $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$ eine weitere Erhaltungsgröße, die Energie

$$H = \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L = \vec{v}\vec{p} - L = \gamma m \vec{v}^{\,2} + \frac{1}{\gamma} mc^2 = \gamma mc^2 \left(\beta^2 - \frac{1}{\gamma^2} \right) = \gamma mc^2;$$

Wir halten die relativistische Energie eines freien Teilchens fest

$$E = \gamma mc^2;$$

Für die erste Komponente des 4er-Impulses hat man nun auch eine Interpretation

$$p^\mu = m u^\mu = \begin{pmatrix} c \\ \vec{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (E/c) \\ \vec{p} \end{pmatrix};$$

Die Länge dieses Vektors ist wieder ein Lorentz-Skalar

$$p^\mu p_\mu = (E/c)^2 - \vec{p}^{\,2} = m^2 c^2 = m^2 u^\mu u_\mu;$$

daraus entnimmt man

$$E = \sqrt{m^2c^4 + \vec{p}^{\,2}c^2};$$

Man überzeuge sich davon, daß die durch Differentiation, Skalarprodukte, Addition und Tensorprodukte aus Lorentz-Tensoren hervorgegangenen Größen stets wieder Lorentz-Tensoren sind.

Nichtrelativistischer Grenzfall

Wir wollen nun überprüfen, ob bei einem boost in x-Richtung die soeben gewonnenen relativistischen Gesetze für kleine Geschwindigkeiten mit den bisherigen Beziehungen übereinstimmen. Im K-System haben wir die Größen

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}mc^2 \approx mc^2 + \frac{m}{2}u^2; \\ p_x &= mu; \end{aligned}$$

für ein mit der Geschwindigkeit u entlang der x-Achse bewegtes Teilchen.
Für den relativistischen Impulsvektor hat man das Transformationsverhalten

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \frac{E'}{c} \\ p'_x \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta \\ -\gamma\beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{E}{c} \\ p_x \end{pmatrix}; \\ E' &= \gamma(E - vp_x); \\ p'_x &= \gamma\left(p_x - \frac{vE}{c^2}\right); \end{aligned}$$

Man rechnet nun — für kleine Geschwindigkeiten

$$\begin{aligned} E' &= (1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}}\left(mc^2 + \frac{m}{2}u^2 - mvu + \cdots\right) = \\ &= \left(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right)\left(mc^2 + \frac{m}{2}u^2 - mvu + \cdots\right) = \\ &= mc^2\left(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right)\left(1 + \frac{1}{2}\frac{u^2}{c^2} - \frac{vu}{c^2}\right) = \\ &= mc^2\left(1 + \frac{1}{2c^2}\left(v^2 + u^2 - 2uv\right)\right) = \\ &= mc^2 + \frac{m}{2}(v-u)^2; \\ p'_x &= \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(mu - \frac{v}{c^2}\left(mc^2 + \frac{m}{2}u^2\right)\right) \approx \\ &\approx m(u-v); \end{aligned}$$

Man hat den folgenden Zusammenhang zwischen E, $\vec{p}$ und $\vec{v}$

$$\frac{\vec{v}}{c} = \frac{\vec{p}}{E/c} \qquad \Rightarrow \qquad \underline{\underline{\vec{v} = \frac{\vec{p}\,c^2}{E}}} \to \frac{\vec{p}}{m};$$

Masselose Teilchen

Für masselose Teilchen gilt

$$p_\mu p^\mu = 0;$$

das heißt der Impulsvektor ist lichtartig. Für die Energie erhält man die Beziehung

$$E = |\vec{p}| \cdot c;$$

Dies liefert jedoch keinen eindeutigen Zusammenhang zwischen E. $\vec{p}$ und $\vec{v}$ (Man setze in die obige Beziehung ein!).
Auch der Lagrange-Formalismus ist nicht anwendbar, denn

$$L = -mc^2\sqrt{1-\beta^2} \to 0;$$

Geometrisch kann man dies im 3-dimensionalen E-p_x-p_y-Raum veranschaulichen. Hier definiert die Energie

$$E = \sqrt{m^2c^2 + \vec{p}^{\,2}c^2};$$

ein zweischaliges Hyperboloid, genannt „Massenschale". Im Fall $m = 0$ entartet jedoch das Hyperboloid zu einem Kegel. Diesen Fall können wir mit unseren Mitteln jedoch nicht mehr behandeln.

11.5.3 Reaktionen Relativistischer Teilchen

Die typischen Probleme der relativistischen Kinematik sind Zerfälle und Reaktionen von schnellen Teilchen (z.B. in Beschleunigern). Aufgabe der theoretischen Physik ist die Berechnung von Impulsen und Energien nach der Reaktion und die Transformation zwischen dem Schwerpunk- und dem Laborsystem.
Wir untersuchen den Prototyp einer solchen Reaktion

$$a + b \to c + d;$$

mit vier (nicht notwendig verschiedenen) Elementarteilchen a, b, c und d. Beispiele für solche Reaktionen sind

$$\begin{aligned} e^- + \gamma &\to e^- + \gamma; \qquad \text{Compton-Streuung.} \\ e^+ + e^- &\to \gamma + \gamma; \\ p + \overline{p} &\to \Pi^\circ + \Pi^\circ; \end{aligned}$$

Wegen der Energie- und Impulserhaltung gilt

$$p_a^\mu + p_b^\mu = p_c^\mu + p_d^\mu; \qquad \mu \in \{0,1,2,3\}; \tag{11.5}$$

Das Laborsystem ist dadurch ausgezeichnet, daß das Teilchen b („Target") ruht. Es gilt also

$$\mathbf{p}_a = \begin{pmatrix} \frac{E_a^{\mathrm{lab}}}{c} \\ \vec{p}_a^{\,\mathrm{lab}} \end{pmatrix}; \qquad \mathbf{p}_b = \begin{pmatrix} m_b c \\ \vec{0} \end{pmatrix};$$

Im Schwerpunktsystem (CM) hingegen ruht der Schwerpunkt, also $\vec{p}_a^{\,\mathrm{CM}} + \vec{p}_b^{\,\mathrm{CM}} = 0$. Damit gilt hier für den Anfangszustand (wobei wir $\vec{p}^{\,\mathrm{CM}} := \vec{p}_a^{\,\mathrm{CM}}$ setzen)

$$\mathbf{p}_a = \begin{pmatrix} \frac{E_a^{\mathrm{CM}}}{c} \\ \vec{p}^{\,\mathrm{CM}} \end{pmatrix}; \qquad \mathbf{p}_b = \begin{pmatrix} \frac{E_b^{\mathrm{CM}}}{c} \\ -\vec{p}^{\,\mathrm{CM}} \end{pmatrix};$$

Wegen der Lorentz-Invarianz von Skalarprodukten hat man

$$\mathbf{p}_a \cdot \mathbf{p}_b = p_a^\mu p_b^\mu \stackrel{\mathrm{lab}}{=} E_a^{\mathrm{lab}} m_b \stackrel{\mathrm{CM}}{=} \frac{1}{c^2} E_a^{\mathrm{CM}} E_b^{\mathrm{CM}} + (\vec{p}^{\,\mathrm{CM}})^2;$$

Wenn man nun E_a^{CM} und E_b^{CM} durch $\vec{p}^{\,\mathrm{CM}}$ ausdrückt, erhält man

$$E_a^{\mathrm{lab}} m_b = \sqrt{m_a^2 c^2 + (\vec{p}^{\,\mathrm{CM}})^2}\sqrt{m_b^2 c^2 + (\vec{p}^{\,\mathrm{CM}})^2} + (\vec{p}^{\,\mathrm{CM}})^2;$$

Man löst nun nach $\vec{p}^{\,\mathrm{CM}}$ auf

$$\begin{aligned} \left(E_a^{\mathrm{lab}} m_b\right)^2 - 2E_a^{\mathrm{lab}} m_b (\vec{p}^{\,\mathrm{CM}})^2 &= m_a^2 m_b^2 c^4 + (\vec{p}^{\,\mathrm{CM}})^2 (m_a^2 + m_b^2) c^2; \\ \Rightarrow \qquad (\vec{p}^{\,\mathrm{CM}})^2 &= \frac{m_b^2\left(\left(E_a^{\mathrm{lab}}\right)^2 - m_a^2 c^4\right)}{(m_a^2 + m_b^2)c^2 + 2E_a^{\mathrm{lab}} m_b} = \\ &= \frac{m_b^2 \left(\vec{p}_a^{\,\mathrm{lab}}\right)^2 c^2}{(m_a^2 + m_b^2)c^2 + 2m_b E_a^{\mathrm{lab}}}; \end{aligned}$$

Unter Verwendung der umskalierten Massen

$$\mu = mc^2;$$

erhält man

$$\left|\vec{p}^{\,\mathrm{CM}}\right| = \left|\vec{p}_a^{\,\mathrm{lab}}\right| \frac{\mu_b}{\sqrt{\mu_a^2 + \mu_b^2 + 2\mu_b E_a^{\mathrm{lab}}}}; \tag{11.6}$$

Nun kann man aus den Beziehungen

$$E_a^{\mathrm{CM}} = \sqrt{\mu_a^2 + (\vec{p}^{\,\mathrm{CM}})^2}; \qquad E_b^{\mathrm{CM}} = \sqrt{\mu_b^2 + (\vec{p}^{\,\mathrm{CM}})^2};$$

unter Verwendung von 11.6 die Energien berechnen. Hier das Ergebnis

$$\begin{aligned} E_a^{\mathrm{CM}} &= \frac{\mu_a^2 + \mu_b E_a^{\mathrm{lab}}}{\sqrt{\mu_a^2 + \mu_b^2 + 2\mu_b E_a^{\mathrm{lab}}}}; \\ E_b^{\mathrm{CM}} &= \frac{\mu_b^2 + \mu_b E_a^{\mathrm{lab}}}{\sqrt{\mu_a^2 + \mu_b^2 + 2\mu_b E_a^{\mathrm{lab}}}}; \end{aligned}$$

Wegen des häufigen Auftretens dieses Terms definieren wir

$$\sqrt{s} := \sqrt{\mu_a^2 + \mu_b^2 + 2\mu_b E_a^{\mathrm{lab}}} = E_a^{\mathrm{CM}} + E_b^{\mathrm{CM}};$$

Um einzusehen, daß dies ein Lorentz-Skalar ist, leiten wir diese Größe nochmals auf andere Weise her.

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{p}_a + \mathbf{p}_b) \cdot (\mathbf{p}_a + \mathbf{p}_b) &\overset{\text{CM}}{=} \left(\frac{E_a^{\text{CM}} + E_b^{\text{CM}}}{c} \right)^2 - 0 = \frac{s}{c^2}; \\
&\overset{\text{lab}}{=} \left(\frac{E_a^{\text{lab}} + \mu_b}{c} \right)^2 - \left(\vec{p}_a^{\,\text{lab}} \right)^2 = \\
&= \frac{1}{c^2} \left(\left(E_a^{\text{lab}} \right)^2 + \mu_b^2 + 2\mu_b E_a^{\text{lab}} - c^2 \left(\vec{p}_a^{\,\text{lab}} \right)^2 \right) = \\
&= \frac{1}{c^2} \left(\mu_a^2 + \mu_b^2 + 2\mu_b E_a^{\text{lab}} \right);
\end{aligned}
$$

Ziel ist es nun, sämtliche Kinematischen Größen durch Lorentz-Invarianten wie s und μ auszudrücken. Für die Energien haben wir

$$
\begin{aligned}
E_a^{\text{lab}} &= \frac{s - \mu_a^2 - \mu_b^2}{2\mu_b}; \\
E_a^{\text{CM}} &= \frac{s + \mu_a^2 - \mu_b^2}{2\sqrt{s}}; \\
E_b^{\text{CM}} &= \frac{s - \mu_a^2 + \mu_b^2}{2\sqrt{s}};
\end{aligned}
$$

Und den Impuls 11.6 kann man auch schreiben

$$
\begin{aligned}
(\vec{p}^{\,\text{CM}})^2 &= \left(\frac{E_a^{\text{CM}}}{c} \right)^2 - m_a^2 c^2 = \\
&= \frac{(s + \mu_a^2 - \mu_b^2)^2 - 4s\mu_a^2}{4sc^2} = \\
&= \frac{\lambda(s, \mu_a^2, \mu_b^2)}{4sc^2};
\end{aligned}
$$

Dabei wurde im letzten Schritt die symmetrische Funktion λ verwendet. Sie ist definiert durch

$$\lambda(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2(xy + xz + yz);$$

Analog berechnet man aus

$$(\vec{p}_a^{\,\text{lab}})^2 = \left(\frac{E_a^{\text{lab}}}{c} \right)^2 - m_a^2 c^2;$$

den Impuls im Laborsystem. Zusammen erhält man dann

$$
\begin{aligned}
\left| \vec{p}^{\,\text{CM}} \right| c &= \frac{\sqrt{\lambda(s, \mu_a^2, \mu_b^2)}}{2\sqrt{s}}; \\
\left| \vec{p}_a^{\,\text{lab}} \right| c &= \frac{\sqrt{\lambda(s, \mu_a^2, \mu_b^2)}}{2\mu_b};
\end{aligned}
$$

Damit haben wir den Anfangszustand alle kinematischen Größen in der gewünschten Form dargestellt. Doch welche Daten des Endzustandes können wir berechnen? Hilfreich für diese Untersuchungen sind die Lorentz-invarianten Mandelstam-Variablen, von denen wir eine — s — bereits verwendet haben. (Die auftretenden Quadrate sind im Sinne des Skalarprodukts im Minkowski-Raum zu verstehen)

$$\begin{array}{rcllll} \frac{s}{c^2} &=& (\mathbf{p}_a + \mathbf{p}_b)^2; & (1) & \sim & \text{Energie} \\ \frac{t}{c^2} &=& (\mathbf{p}_a - \mathbf{p}_c)^2; & (2) & \sim & \text{Streuwinkel} \\ \frac{u}{c^2} &=& (\mathbf{p}_a - \mathbf{p}_d)^2; & (3) & \sim & \text{Streuwinkel} \end{array}$$

Die nebenstehenden Begriffe sagen, welche Größe der klassischen Mechanik durch die entsprechende Mandelstam-Variable verallgemeinert wird. Diese Variablen sind jedoch nicht unabhängig voneinander, wie die Berechnung der Summe zeigt

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2}(s+t+u) &= \mathbf{p}_a^2 + 2\mathbf{p}_a\mathbf{p}_b + \mathbf{p}_b^2 + \mathbf{p}_a^2 - 2\mathbf{p}_a\mathbf{p}_c + \mathbf{p}_c^2 + \mathbf{p}_a^2 - 2\mathbf{p}_a\mathbf{p}_d + \mathbf{p}_d^2 = \\ &= 2\mathbf{p}_a \underbrace{(\mathbf{p}_b - \mathbf{p}_c - \mathbf{p}_d)}_{=-\mathbf{p}_a;} + 3\mathbf{p}_a^2 + \mathbf{p}_b^2 + \mathbf{p}_c^2 + \mathbf{p}_d^2 = \\ &= \mathbf{p}_a^2 + \mathbf{p}_b^2 + \mathbf{p}_c^2 + \mathbf{p}_d^2 = \\ &= (m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 + m_d^2)c^2; \end{aligned}$$

Damit erhält man

$$s + t + u = \mu_a^2 + \mu_b^2 + \mu_c^2 + \mu_d^2;$$

Also kann man immer eine der drei Variablen aus den anderen beiden berechnen. Man verwendet dennoch alle drei Variablen, weil sich dann symmetrische Formeln ergeben.

Bestimmung des Streuwinkels

Wir haben die Beziehung

$$\frac{t}{c^2} = (\mathbf{p}_a - \mathbf{p}_c)^2 = \mathbf{p}_a^2 + \mathbf{p}_2^2 - 2\mathbf{p}_a\mathbf{p}_c = c^2(m_a^2 + m_c^2) - 2\left(\frac{E_a E_c}{c^2} - \vec{p}_a\vec{p}_c\right);$$

Im CM-System erhält man

$$\vec{p}_a\vec{p}_c = \left|\vec{p}_a^{\,\mathrm{CM}}\right| \left|\vec{p}_c^{\,\mathrm{CM}}\right| \cos\theta_{ac}^{\mathrm{CM}};$$

Also

$$\cos\theta_{ac}^{\mathrm{CM}} = \frac{t - \mu_a^2 - \mu_c^2 + 2E_a^{\mathrm{CM}}E_c^{\mathrm{CM}}}{2c^2\left|\vec{p}_a^{\,\mathrm{CM}}\right|\left|\vec{p}_c^{\,\mathrm{CM}}\right|};$$

Wegen

$$\sqrt{s} = E_a^{\mathrm{CM}} + E_b^{\mathrm{CM}} = E_c^{\mathrm{CM}} + E_d^{\mathrm{CM}};$$

erhält man

$$E_c^{\mathrm{CM}} = \frac{s + \mu_c^2 - \mu_d^2}{2\sqrt{s}}; \qquad E_d^{\mathrm{CM}} = \frac{s - \mu_c^2 + \mu_d^2}{2\sqrt{s}};$$

und für den Impuls

$$\left|\vec{p}_c^{\,\mathrm{CM}}\right| c =: \left|\vec{p}^{\,\mathrm{CM}\prime}\right| c = \frac{\sqrt{\lambda(s,\mu_c^2,\mu_d^2)}}{2\sqrt{s}};$$

Insgesamt hat man nun für den Steuwinkel

$$\cos\theta_{ac}^{\mathrm{CM}} = \frac{s^2 + s\,(2t - \mu_a^2 - \mu_b^2 - \mu_c^2 - \mu_d^2) + (\mu_a^2 - \mu_b^2)(\mu_c^2 - \mu_d^2)}{\sqrt{\lambda(s,\mu_a^2,\mu_b^2)}\sqrt{\lambda(s,\mu_c^2,\mu_d^2)}};$$

Umrechnung ins Laborsystem

Wegen 11.5 hat man

$$\frac{t}{c^2} = (\mathbf{p}_d - \mathbf{p}_b)^2 \overset{\mathrm{lab}}{=} \mathbf{p}_d^2 + \mathbf{p}_b^2 - 2\mathbf{p}_d\mathbf{p}_b = (m_d^2 + m_b^2)c^2 - 2m_b E_d^{\mathrm{lab}};$$

Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} E_d^{\mathrm{lab}} &= \frac{\mu_d^2 + \mu_b^2 - t}{2\mu_b}; \\ E_c^{\mathrm{lab}} &= (m_b c^2 + E_a^{\mathrm{lab}}) - E_d^{\mathrm{lab}} = \frac{\mu_b^2 + \mu_c^2 - u}{2\mu_b}; \end{aligned}$$

Für die Impulse gilt nun

$$\begin{aligned} \left(\vec{p}_c^{\,\mathrm{lab}}\right)^2 &= \left(E_c^{\mathrm{lab}}\right)^2 - \mu_c^2 = \\ &= \left(\frac{\mu_b^2 + \mu_c^2 - u}{2\mu_b}\right)^2 - \mu_c^2 = \\ &= \frac{\lambda(u,\mu_b^2,\mu_c^2)}{4\mu_b^2}; \end{aligned}$$

Ebenso berechnet man $\left(\vec{p}_d^{\,\mathrm{lab}}\right)^2$ und erhält insgesamt

$$\begin{aligned} \left(\vec{p}_c^{\,\mathrm{lab}}\right)^2 &= \frac{\sqrt{\lambda(u,\mu_b^2,\mu_c^2)}}{2\mu_b}; \\ \left(\vec{p}_d^{\,\mathrm{lab}}\right)^2 &= \frac{\sqrt{\lambda(t,\mu_b^2,\mu_d^2)}}{2\mu_b}; \end{aligned}$$

Für die Berechnung des Streuwinkels im Laborsystem benötigt man

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_a &= \begin{pmatrix} \frac{E_a^{\mathrm{lab}}}{c} \\ \vec{p}_a^{\,\mathrm{lab}} \end{pmatrix}; \\ \mathbf{p}_c &= \begin{pmatrix} \frac{E_c^{\mathrm{lab}}}{c} \\ \vec{p}_c^{\,\mathrm{lab}} \end{pmatrix}; \\ \mathbf{p}_a\mathbf{p}_c &= \frac{E_a^{\mathrm{lab}}E_c^{\mathrm{lab}}}{c^2} - \underbrace{\vec{p}_a^{\,\mathrm{lab}}\vec{p}_c^{\,\mathrm{lab}}}_{=\left|\vec{p}_a^{\,\mathrm{lab}}\right|\left|\vec{p}_c^{\,\mathrm{lab}}\right|\cos\theta_{ac}^{\mathrm{lab}}}; \end{aligned}$$

Einsetzen der oben berechneten Größen und Auflösen nach $\cos\theta_{ac}^{\text{lab}}$ führt zu

$$\cos\theta_{ac}^{\text{lab}} = \frac{2\mu_b^2(t-\mu_a^2-\mu_c^2)+(s-\mu_a^2-\mu_b^2)\cdot(\mu_b^2+\mu_c^2-u)}{\sqrt{\lambda(s,\mu_a^2,\mu_b^2)}\sqrt{\lambda(u,\mu_b^2,\mu_c^2)}};$$

11.6 Relativistische Dynamik

11.6.1 Paradebeispiel: Maxwell-Theorie

In der nicht-relativistischen Theorie liefert die Maxwell-Theorie geschwindigkeitsabhängige Potentiale. Man erhält die Lagrange-Gleichung

$$L = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2 + \frac{e}{c}\dot{\vec{r}}\cdot\vec{A} - e\Phi;$$

Man stellt fest, daß der Term

$$\frac{e}{c}\dot{\vec{r}}\cdot\vec{A} - e\Phi;$$

bereits Lorentz-invariant ist. Klassisch verwendet man jedoch lieber die elektrischen und magnetischen Felder zu Beschreibung

$$\begin{aligned}\vec{E} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla}\Phi;\\ \vec{B} &= \vec{\nabla}\times\vec{A};\\ \frac{d}{dt}(m\dot{\vec{r}}) &= e\vec{E} + \frac{e}{c}(\dot{\vec{r}}\times\vec{B});\end{aligned}$$

Doch wie finden wir eine relativistische Verallgemeinerung? Wir haben schon die Lagrange-Funktion für freie Teilchen

$$L = -mc^2\sqrt{1-\beta^2};$$

die jedoch weder mit der kinetischen noch mit der gesamten Energie übereinstimmt.
Wir nehmen an, daß

$$A^\mu := \begin{pmatrix}\Phi\\ \vec{A}\end{pmatrix};$$

bereits ein 4er-Vektor ist. Für den zusätzlichen Term im Wirkungsfunktional hat man dann

$$\left(\frac{e}{c}\dot{\vec{r}}\vec{A} - e\Phi\right)\ dt = -\frac{e}{c}\left(\Phi\ d(ct) - \vec{A}\begin{pmatrix}dx\\ dy\\ dz\end{pmatrix}\right) = -\frac{e}{c}A_\mu\ (dx)^\mu;$$

Mit diesem Ansatz erhält man das Wirkungsfunktional und alle weiteren interessanten Größen.

11.6.2 Erste Formulierung der Bewegungsgleichungen

Für das Wirkungsfunktional erhält man nun

$$\begin{aligned} S &= \int_1^2 \left(-mc^2\sqrt{1-\beta^2} + \frac{e}{c}\vec{v}\vec{A} - e\Phi\right)\, dt = \\ &= \int_1^2 \left(-mc\; ds - \frac{e}{c}A_\mu (dx)^\mu\right); \end{aligned}$$

Für die Lagrange-Gleichung benötigen wir zunächst den sogenannten „formalen Impuls“ oder kanonisch-konjugierten Impuls

$$\hat{\vec{p}} := \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \underbrace{\gamma m\vec{v}}_{=\vec{p};\ \text{kinematischer Impuls}} + \frac{e}{c}\vec{A};$$

und

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \vec{r}} &= \frac{e}{c}\vec{\nabla}(\vec{v}\vec{A}) - e\vec{\nabla}\Phi = \\ &=^{4} \frac{e}{c}\left((\vec{v}\vec{\nabla})\vec{A} + \vec{v}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A})\right) - e\vec{\nabla}\Phi; \end{aligned}$$

Also hat man

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \vec{v}} - \frac{\partial L}{\partial \vec{r}} &= 0; \\ \Rightarrow \qquad \frac{d}{dt}\left(\vec{p} + \frac{e}{c}\vec{A}\right) &= \frac{\partial L}{\partial \vec{r}}; \\ \Rightarrow \qquad \frac{d\vec{p}}{dt} &= \frac{\partial L}{\partial \vec{r}} - \frac{e}{c}\frac{d}{dt}\vec{A} = \\ &= \frac{e}{c}(\vec{v}\vec{\nabla})\vec{A} + \frac{e}{c}\vec{v}\times\vec{B} - e\vec{\nabla}\Phi - \frac{e}{c}\left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + (\vec{v}\vec{\nabla})\vec{A}\right) = \\ &= e\vec{E} + \frac{e}{c}(\vec{v}\times\vec{B}); \end{aligned}$$

[4] Dies gilt wegen

$$\begin{aligned} \left((\vec{v}\vec{\nabla})\vec{A} + \vec{v}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A})\right)_i &= v_j\frac{\partial}{\partial x_j}A_i + \epsilon_{ijk}\epsilon_{klm}v_j\frac{\partial}{\partial x_l}A_m = \\ &= v_j\frac{\partial}{\partial x_j}A_i + (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl})v_j\frac{\partial}{\partial x_l}A_m = \\ &= v_j\frac{\partial}{\partial x_i}A_j = \left(\vec{\nabla}(\vec{v}\vec{A})\right)_i; \end{aligned}$$

Also gilt auch im relativistischen Fall — wenn man $\vec{p} = \gamma m \vec{v}$ setzt — die Beziehung

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = e\vec{E} + \frac{e}{c}(\vec{v} \times \vec{B});$$

Für die Energie erhält man

$$\begin{aligned} H &= \vec{v}\frac{\partial L}{\partial \vec{v}} - L = \\ &= \vec{v}\left(\vec{p} + \frac{e}{c}\vec{A}\right) + mc^2\frac{1}{\gamma} - \frac{e}{c}\vec{v}\vec{A} + e\Phi = \\ &= \underbrace{\gamma mc^2}_{=E_{\text{kin}}+E_{\text{Ruhe}};} + \underbrace{e\Phi}_{=E_{\text{Pot}}}; \end{aligned}$$

Wir wollen nun die Zeitabhängigkeit der kinetischen Energie untersuchen. Dazu benötigen wir

$$\dot{\gamma} = -\frac{1}{2}(1-\beta^2)^{-\frac{3}{2}}(-2\vec{\beta}\dot{\vec{\beta}}) = \gamma^3\vec{\beta}\dot{\vec{\beta}};$$

Außerdem haben wir

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{p}}{dt} &= \frac{d}{dt}(\gamma m\vec{v}) = \dot{\gamma} m\vec{v} + \gamma m\dot{\vec{v}} = mc(\dot{\gamma}\vec{\beta} + \gamma\dot{\vec{\beta}}); \\ \vec{v}\frac{d\vec{p}}{dt} &= mc^2(\dot{\gamma}\beta^2 + \gamma\vec{\beta}\dot{\vec{\beta}}) = \\ &= mc^2\left(\gamma^3\vec{\beta}\dot{\vec{\beta}}\beta^2 + \gamma\vec{\beta}\dot{\vec{\beta}}\right) = \\ &= mc^2\gamma\vec{\beta}\dot{\vec{\beta}}\underbrace{(1+\beta^2\gamma^2)}_{=\gamma^2} = \\ &= mc^2\gamma^3\vec{\beta}\dot{\vec{\beta}}; \end{aligned}$$

Damit folgt für die Zeitableitung der Energie

$$\begin{aligned} \frac{E_{\text{kin}}}{dt} &= \frac{d}{dt}(\gamma mc^2) = \\ &= mc^2\gamma^3\vec{\beta}\dot{\vec{\beta}} = \\ &= \vec{v}\frac{d\vec{p}}{dt} = \\ &= \vec{v}\left(e\vec{E} + \frac{e}{c}(\vec{v}\times\vec{B})\right) = \\ &= e\vec{v}\vec{E}; \end{aligned}$$

Das heißt, das $\vec{B}$-Feld leistet keine Arbeit.
Wir haben für diese Behandlung der Bewegung bereits einen 4er Vektor konstruiert, nämlich

$$p^\mu = \begin{pmatrix} \frac{E_{\text{kin}}}{c} \\ \vec{p} \end{pmatrix};$$

Da dieser Vektor jedoch durch die nicht Lorentz-invariante Zeit t ausgedrückt wurde, ist die Ableitung

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \frac{E_{\text{kin}}}{c} \\ \vec{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{e}{c}\vec{E}\vec{v} \\ e\vec{E} + \frac{e}{c}(\vec{v}\times\vec{B}) \end{pmatrix};$$

kein 4er-Vektor mehr. Die Zeitableitung von p^μ ist also nicht manifest kovariant, da t kein Lorentz-Skalar ist.

11.6.3 Kovariante Form der Bewegungsgleichung

Wir kehren zurück zum Wirkungsfunktional. Eine — hoffentlich kovariante — Formulierung der Bewegungsgleichung erhält man mit dem Ansatz

$$\delta S = \delta\int_1^2 \left(-mc\;ds - \frac{e}{c}A_\mu\;dx^\mu\right) = 0;$$

Man hat nun

$$\begin{aligned}
\delta ds &= \delta\sqrt{dx_\mu dx^\mu} = \\
&= \frac{1}{2\sqrt{dx_\mu dx^\mu}}2dx_\mu\delta(dx^\mu) = \\
&= \frac{dx_\mu}{ds}\delta(dx^\mu) = \\
&= \frac{1}{c}u_\mu d(\delta x^\mu); \\
\delta(A_\mu\;dx^\mu) &= (\delta A_\mu)dx^\mu + A_\mu\delta(dx^\mu);
\end{aligned}$$

Damit hat man

$$\delta S = \int_1^2 \left(-mu_\mu d(\delta x^\mu) - \frac{e}{c}(\delta A_\mu)dx^\mu - \frac{e}{c}A_\mu\delta(dx^\mu)\right);$$

Nun verwenden wir — wie schon oft — die Annahme, daß am Rand keine Variation stattfindet. Dann gilt für beliebige Terme A und B der Variation

$$\int_1^2 A\;dB = AB|_1^2 - \int_1^2 B\;dA = -\int_1^2 B\;dA;$$

Wendet man dies mehrmals an, so erhält man

$$\delta S = \int_1^2 \left(m(du_\mu)\delta x^\mu - \frac{e}{c}(\delta A_\mu)dx^\mu + \frac{e}{c}(dA_\mu)\delta x^\mu\right);$$

Eine Nebenrechnung ergibt

$$\begin{aligned}
(dA_\mu)\delta x^\mu - (\delta A_\mu)dx^\mu &= \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}dx^\nu\delta x^\mu - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}\delta x^\nu dx^\mu = \\
&= \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}dx^\nu\delta x^\mu - \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu}\delta x^\mu dx^\nu = \\
&= dx^\nu\delta x^\mu\left(\frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu}\right);
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich

$$\delta S = \int_1^2 \left(m du_\mu + \frac{e}{c} \left(\frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} \right) dx^n u \right) \ \delta x^\mu = 0;$$

Dem entnimmt man nun die Bewegungsgleichung

$$m \frac{du_\mu}{d\tau} = \frac{e}{c} \left(\frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} \right) u^\nu;$$

Unter Verwendung der 4er-Beschleunigung

$$a^\mu = \frac{du_\mu}{d\tau};$$

und der 4er Kraft

$$F^\mu := \frac{e}{c} \left(\frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} \right) u^\nu;$$

erhält man das relativistische Analogon zu Newton's Gesetz

$$ma^\mu = F^\mu;$$

Transformationsverhalten von 4er-Gradienten

In den obigen Formeln scheint die Summationsregel — summiert wird nur über Indizes auf verschiedenen Ebenen — verletzt zu sein. Zum Beispiel in Termen der Gestalt

$$\frac{\partial \cdots}{\partial x^\nu} \ dx^\nu;$$

Aber dies ist nur ein scheinbarer Widerspruch, denn die Ableitung nach kovarianten Größen ist eine kontravariante Größe und umgekehrt. Wir haben nämlich

$$(x^\mu)' = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu; \qquad \Rightarrow \qquad x^\nu = (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu (x^\mu)' \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial x^\nu}{\partial (x^\mu)'} = (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu;$$

Daraus folgt

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} \right)' = \frac{\partial}{\partial (x^\mu)'} = \frac{\partial x^\nu}{\partial (x^\mu)'} \frac{\partial}{\partial x^\nu} = (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu \frac{\partial}{\partial x^\nu} = \Lambda_\mu{}^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu};$$

Nun führt führt man noch Bezeichnungen ein, die dem Charakter der Größe entsprechen — wenn man diese verwendet, verschwinden die scheinbaren Widersprüche zur Summationsregel.

$$\partial^\mu := \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial ct} \\ -\vec{\nabla} \end{pmatrix}; \qquad \partial_\mu := \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial ct} \\ \vec{\nabla} \end{pmatrix};$$

11.6.4 Der Feldstärketensor

Welches Transformationsverhalten hat nun $\left(\frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}\right)$? Mit dem eben zur Transformation von Ableitungen gesagten, folgt, daß

$$\left(\frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}\right) = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu;$$

ein Lorentz-Tensor vom Rang 2 ist. Außerdem ist dieser Tensor offenbar antisymmetrisch. Wir definieren den Feldstärketensor durch

$$F^{\mu\nu} := \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu = \begin{pmatrix} 0 & F^{01} & F^{02} & F^{03} \\ -F^{01} & 0 & F^{12} & F^{13} \\ -F^{02} & -F^{12} & 0 & F^{23} \\ -F^{03} & -F^{13} & -F^{23} & 0 \end{pmatrix};$$

Es sind also 6 unabhängige Komponenten in diesem Tensor, die nun bestimmt werden sollen.

$$\begin{aligned}
F^{01} &= \partial^0 A^1 - \partial^1 A^0 = \\
&= \frac{\partial A_x}{\partial ct} - \frac{\partial \Phi}{\partial(-x)} = \nabla_x \Phi + \frac{1}{c}\frac{\partial A_x}{\partial t} = \\
&= -E_x; \\
F^{02} &= -E_y; \\
F^{03} &= -E_z; \\
F^{12} &= \frac{\partial A^2}{\partial x_1} - \frac{\partial A^1}{\partial x_2} = \frac{\partial A_x}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial x} = \\
&= -B_z; \\
F^{13} &= B_y; \\
F^{23} &= -B_x;
\end{aligned}$$

Die kovariante Form der Ableitung des oben schon untersuchten 4-er Vektors p^μ erhält man nun durch

$$F^{\mu\nu} u_\nu = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ -v_x \\ -v_y \\ -v_z \end{pmatrix} \gamma = \gamma \begin{pmatrix} \vec{E}\vec{v} \\ c\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \end{pmatrix};$$

11.6.5 Zusammenfassung

$\vec{E}$ und $\vec{B}$ werden als Komponenten des Feldstärketensors transformiert und sind daher keine absoluten Größen, da sich bei Transformation ihren Komponenten gegenseitig beeinflussen.

Man sieht auch relativistisch, daß die Potentiale Φ und $\vec{A}$ mit einer Eichfunktion $f(\vec{r}, t)$ verändert werden können, ohne daß sich die Felder $\vec{E}$ und $\vec{B}$ ändern. Man transformiert

$$\vec{A} \mapsto \vec{A} - \vec{\nabla} f; \qquad \Phi \mapsto \Phi + \frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t};$$

Für den 4er-Vektor A^μ heißt das einfach

$$A^\mu \mapsto A^\mu + \partial^\mu f;$$

und dann ist natürlich der Feldstärketensor

$$F^{\mu\nu} := \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu;$$

invariant.
Bisher haben wir das Wirkungsfunktional

$$S = \int_1^2 \left(-mc\; ds - \frac{e}{c} A_\mu (dx)^\mu\right);$$

verwendet. Man unterscheidet drei Komponenten der Wirkung. Hier ist vorhanden die Wirkung der Materie

$$S_{\text{Materie}} = \int_1^2 -mc\; ds;$$

die Wechselwirkung

$$S_{\text{interaction}} = \int_1^2 \left(-\frac{e}{c} A_\mu (dx)^\mu\right);$$

und man hat noch einen zusätzlichen Term, den wir bisher nicht berücksichtigt haben

$$S_{\text{Feld}} = \int_1^2 F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} d^4x;$$

Der absolut richtige Ansatz eines Wirkungsfunktionals für die Maxwell-Theorie lautet also

$$S = S_{\text{Materie}} + S_{\text{interaction}} + S_{\text{Feld}};$$

Kapitel 12

Hamilton'sche Mechanik

12.1 Einführung

12.1.1 Beispiel: Ein Teilchen im Potential

Wir betrachten zunächst nur ein Problem mit einem Freiheitsgrad. Ein Teichen soll sich entlang der q-Achse im Potential $V(q,t)$ bewegen.
Newton formuliert dieses Problem mit der Differentialgleichung

$$m\ddot{q} = -\frac{\partial V}{\partial q};$$

Die Lagrange'sche Formulierung lautet

$$L(q,\dot{q},t) = \frac{m}{2}\dot{q}^2 - V(q,t);$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = m\ddot{q} + \frac{\partial V}{\partial q} = 0;$$

Diese beiden Formulierungen führen auf gewöhnliche Differentialgleichungen 2. Ordnung.
Zur Vorbereitung der Hamilton'schen Formulierung benötigen wir einige Definitionen.
Der generalisierte Impuls oder zu q kanonisch konjugierte Impuls ist

$$p := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}};$$

Wenn q eine zyklische Koordinate ist, so ist p erhalten. Insbesondere gilt für ein freies Teilchen

$$\frac{dp}{dt} = m\ddot{q} = 0;$$

In dem (häufig auftretenden) Fall eines zeitunabhängigen Potentials hat man

$$\frac{\partial V}{\partial t} = 0; \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial L}{\partial t} = 0; \quad \Rightarrow \quad H'(q,\dot{q}) := \dot{q}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - L; \;\text{ ist erhalten.}$$

Diese Erhaltungsgröße ist gerade die Energie des Teilchens. Auch, wenn es keine Erhaltungsgröße ist, definiert man

$$H'(q,\dot{q},t) := \dot{q}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q,\dot{q},t) - L(q,\dot{q},t);$$

12.1.2 Hamiltonsche Formulierung des Problems

Man löse die Gleichung

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}};$$

nach $\dot{q}$ auf. Im einfachsten Fall hat man

$$p = m\dot{q} \quad \Rightarrow \quad \dot{q} = \frac{p}{m};$$

Allgemein erhält man jedoch

$$\dot{q} = \dot{q}(q,p,t);$$

Nun eliminiert man $\dot{q}$ aus H' und erhält die Hamilton-Funktion H.

$$H(q,p,t) = H'(q,\dot{q}(q,p,t),t) = \dot{q}(q,p,t)p - L(q,\dot{q}(q,p,t),t);$$

Für unser Beispiel erhält man also

$$H(q,p,t) = \frac{p^2}{m} - \frac{m}{2}\left(\frac{p}{m}\right)^2 + V(q,t) = \frac{p^2}{2m} + V(q,t) = T + V;$$

Doch wie kann man mit dieser Funktion Bewegungsgleichungen formulieren? Nachrechnen zeigt

$$\frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m} = \dot{q};$$

und

$$\frac{\partial H}{\partial q} = \frac{\partial V}{\partial q} = -\dot{p};$$

Allgemein lauten also die Bewegungsgleichungen in Hamilton'scher Formulierung

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}; \qquad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q};$$

Mit diesem Formalismus erhält man also 2 Differentialgleichungen 1. Ordnung.

12.1.3 Vorteile der Hamilton'schen Formulierung

Im wesentlichen sind die Hamilton'sche Formulierung mit den Koordinaten (q, p, t) und die Lagrange'sche Formulierung mit den Koordinaten $(q, \dot{q}, t)$ gleichberechtigt.
Die Hamilton'sche Mechanik bietet jedoch einige Vorteile

- Ein effektives Ausnützen zyklischer Koordinaten ist möglich.
- Die verwendeten Koordinaten sind dem Phasenraum angepasst. Daher verwendet man den Hamilton-Formalismus gerne in der statistischen Physik.
- Sie war grundlegend für die Entwicklung der Quantenmechanik. Während in der Quantenfeldtheorie noch Lagrange- und Hamilton-Formalismus nebeneinander angewendet werden können, trifft man in der Quantenmechanik fast nur auf die Hamilton'sche Formulierung.
- Einige komplizierte Probleme kann man nur mit dem Hamilton-Formalismus lösen.

12.2 Legendre-Transformation

12.2.1 Definition und Beispiele

Definition:

Zu einer Funktion $f \in C^2(\mathbf{R})$ mit $f''(x) \neq 0$ gibt es eine Umkehrfunktion für die Ableitung

$$u := \frac{df}{dx}(x); \quad \rightarrow \quad x = x(u);$$

Die Funktion

$$g(u) := \left(x\frac{df}{dx}(x) - f(x) \right)\Bigg|_{x=x(u)};$$

heißt die Legendre-Transformierte von f.

Die Operation „bilde die Legendre-Transformierte“ ist im Allgemeinen einen Involution auf $C^2(\mathbf{R})$. Zum Beweis bestimmen wir die Legendre-Transformierte von g (siehe Kasten).
Die Gleichung

$$v := \frac{dg}{du};$$

definiert eine Funktion $u = u(v)$, wenn $\frac{d^2 g}{du^2} \neq 0$. Die Legendre-Transformierte ist nun

$$h(v) = \left(u\frac{dg}{du} - g \right)\Bigg|_{u=u(v)};$$

Mit

$$\frac{dg}{du} = \frac{\frac{dg}{dx}}{\frac{du}{dx}} = \frac{\frac{df}{dx} + x\frac{d^2f}{dx^2} - \frac{df}{dx}}{\frac{d^2f}{dx^2}} = x;$$

hat man

$$h(v) = \frac{df}{dx}x - \left(x\frac{df}{dx} - f(x)\right) = f(x);$$

Nun einige Beispiele

1. $f(x) = x^2; \;\Rightarrow\; f'(x) = 2x =: u; \;\Rightarrow\; x(u) = \frac{1}{2}u$; Die Legendre-Transformierte ist also

$$g(u) = xf' - f|_{x=\frac{1}{2}u} = \frac{u^2}{4};$$

   Nochmalige Anwendung des Verfahrens ergibt wieder f.

2. $f(x) = x; \;\Rightarrow\; f'(x) = 1 =: u$; Aber wegen $f''(x) = 0$ ist keine Lengendre-Transformation möglich. Allgemein existiert die Legendre-Transformation nur für strikt konvexe oder strikt konkave Funktionen auf zusammenhängenden Intervallen.

3. $f(x) = \frac{x^\alpha}{\alpha}; \;\Rightarrow\; f'(x) = x^{\alpha-1} =: u$; In diesem Fall existiert wegen

$$\frac{d^2f}{dx^2} = (\alpha-1)x^(\alpha-2) \neq 0;$$

   für $\alpha \neq 1, 0$ zumindest fast überall eine lokale Legendre-Transformierte. Man erhält

$$g(u) = xf' - f|_{x=u^{\frac{1}{\alpha-1}}} = \left(xx^{\alpha-1} - \frac{1}{\alpha}x^\alpha\right)\bigg|_{x=u^{\frac{1}{\alpha-1}}} = \left(1-\frac{1}{\alpha}\right)u^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} = \frac{u^\beta}{\beta};$$

   Mit $\beta = \frac{\alpha}{\alpha-1}$. Dies läßt sich auch einfach schreiben als

$$\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\alpha} = 1;$$

   In diesem Fall ist völlig klar, daß die Legendre-Transformation involutorisch ist, denn die zweite Legendre-Transformierte muß wieder von der selben Gestalt sein und in der obigen Gleichung sind α und β vertauschbar.

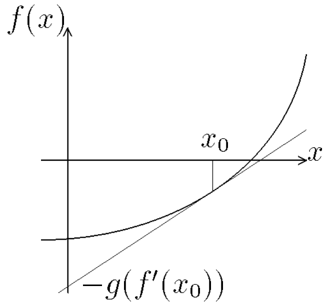
Zuweilen benötigt man die folgende Beziehung für das Differential einer Legendre-Transformierten — wir verwenden die Bezeichnungen aus der Definition.

$$dg(u) = (dx)u + x(du) - \underbrace{df}_{=\frac{df}{dx}dx;} = x\ du;$$

12.2.2 Geometrische und Physikalische Interpretation

Geometrische Interpretation

Um zu verstehen, was anschaulich bei der Legendre-Transformierung geschieht, betrachtet man zunächst die Tangente an die Funktion f im Punkt x_0.



$$t_{x_0}(x) = f(x_0) + (x - x_0)\frac{df}{dx}(x_0);$$

Ihr y-Achsenabschnitt ist

$$t_{x_0}(0) = f(x_0) - x_0\frac{df}{dx}(x_0) = -g(u = f'(x_0));$$

Da für streng konvexe bzw. streng konkave Funktionen jeder Wert der Ableitung an nur einer Stelle angenommen wird, definiert dies eine eindeutige Funktion.

Zusammengefasst: Die Legendre-Transformierte von f am Punkt u ist bis auf das Vorzeichen des y-Achsenabschnitts der Tangente an f in dem Punkt, in dem f die Steigung u hat.

Zusammenhang mit der Hamilton-Funktion

Aus der Definition erkennt man sofort, daß die Hamilton-Funktion H die Legendre-Transformierte der Lagrange-Funktion L — aufgefasst als Funktion von $\dot{q}$ — bezüglich $\dot{q}$ ist. Es ist ja

$$p := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}};$$

und

$$H(q,p,t) = \left(\dot{q}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - L\right)\bigg|_{\dot{q}=\dot{q}(p)};$$

Für das oben diskutierte Beispiel berechnen wir nun die Legendre-Transformierte von H — auch wenn das Ergebnis natürlich schon klar ist.
Zunächst hat man

$$\dot{q} := \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m}; \;\Rightarrow\; p = m\dot{q};$$

Damit

$$L := p\dot{q} - H|_{p=m\dot{q}} = m\dot{q}^2 - \frac{\dot{q}^2 m^2}{2m} - V(q,t) = \frac{m\dot{q}^2}{2} - V(q,t) = L(q,\dot{q},t);$$

Mit der Legendre-Transformation wechselt man also zwischen den Darstellungen

$$\begin{array}{ccc} T - V & \longleftrightarrow & T + V \\ q,\dot{q},t & & q,p,t \end{array}$$

12.2.3 Legendre-Transformation bezüglich mehrerer Variablen

Definition:

Wir betrachten eine zweimal stetig differenzierbare Funktion

$$f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R} : (x_1, \ldots, x_n) \mapsto f(x_1, \ldots, x_n);$$

deren Hessesche Matrix an jeder Stelle invertierbar sei. Also

$$\det \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right) \neq 0;$$

Nun gibt es zu

$$u_i := \frac{\partial f}{\partial x_i}; \qquad 1 \leq i \leq n;$$

lokal eindeutige Umkehrfunktionen

$$x_i = x_i(u_1, \ldots, u_n); \qquad 1 \leq i \leq n;$$

und man definiert die Legendre-Transformierte von f durch

$$g(u_1, \ldots, u_n) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} - f \right) \Bigg|_{x_j = x_j(u_1, \ldots, u_n);\ \forall\ 1 \leq j \leq n};$$

Auch in diesem Fall — wir wollen das nicht beweisen — ist diese Operation fast immer eine Involution.

12.3 Allgemeine Hamilton'sche Mechanik

Mit dem soeben gewonnenen Hilfsmittel der Legendre-Transformation kann man nun auch Probleme mit mehreren Freiheitsgraden im Hamilton-Formalismus formulieren.

12.3.1 Definition der Hamilton-Funktion

Wir betrachten jetzt ein System mit n Freiheitsgraden. Die Lagrange-Funktion sei

$$L = L(q_1, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n, t) =: L(q, \dot{q}, t);$$

Wir definieren nun

Definition:

Die Hamilton-Funktion eines mechanischen Systems mit n FHG ist die Legendre-Transformierte der Lagrange-Funktion bezüglich der $\dot{q}_i$-Komponenten.

Man hat also die kanonisch konjugierten Impulse

$$p_i := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i};$$

und die Hamilton-Funktion

$$H(q,p,t) := H(q_1,\ldots,q_n,p_1,\ldots,p_n,t) = \left.\left(\sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i p_i - L\right)\right|_{\dot{q}_j=\dot{q}_j(q_1,\ldots,q_n,p_1,\ldots,p_n,t);\ \forall\ 1\leq j\leq n};$$

Hierbei muß jedoch stets die Bedingung

$$\det\left(\frac{\partial^2 f}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j}\right) \neq 0;$$

erfüllt sein.
Wegen

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = -\frac{\partial L}{\partial q_i} - \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}}_{=p_k;}\frac{\partial \dot{q}_k}{\partial q_i} + \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial q_k}p_k = -\frac{\partial L}{\partial q_i} \overset{\text{Lagrange}}{=} -\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = -\dot{p}_i;$$

und

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i + p_k\frac{\partial \dot{q}_k}{\partial p_i} - \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}}_{=p_k;}\frac{\partial \dot{q}_k}{\partial p_i} = \dot{q}_i;$$

erhält man für den Hamilton-Formalismus die folgenden Bewegungsgleichungen

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}; \qquad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}; \qquad \forall\ 1 \leq i \leq n;$$

Diese $2n$ gewöhnlichen Differentialgleichungen 1. Ordnung sind äquivalent zu den n gewöhnlichen Differentialgleichungen 2. Ordnung des Lagrange-Formalismus. Die Bewegungsgleichungen des Hamilton-Formalismus heißen auch Kanonische Bewegungsgleichungen.
Eine wichtige Erkenntnis liefert die Zeitableitung der Hamilton-Funktion

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + \underbrace{\frac{\partial H}{\partial q_i}}_{=-\dot{p}_i;}\dot{q}_i + \underbrace{\frac{\partial H}{\partial p_i}}_{=\dot{q}_i;}\dot{p}_i = \frac{\partial H}{\partial t};$$

H ist also genau dann eine Erhaltungsgröße, wenn H nicht explizit von der Zeit abhängt. H ist jedoch nur dann die Energie, wenn ein konservatives System mit nicht-zeitabhängigen Koordinaten beschrieben wird.

12.3.2 Elementare Beispiele

Ein Teilchen im dreidimensionalen Potential

Zunächst eine kleine Übersicht über die verwendbaren Koordinaten.

Koordinaten	Lagrangefunktion	Hamiltonfunktion
karthesisch	$\frac{m}{2}\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2\right)-V$	$\frac{1}{2m}\left(p_x^2+p_y^2+p_z^2\right)+V$
Kugel/Polar	$\frac{m}{2}\left(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2+r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2\right)-V$	$\frac{1}{2m}\left(p_r^2+\frac{1}{r^2}p_\theta^2+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}p_\varphi^2\right)+V$
Zylinder	$\frac{m}{2}\left(\dot{z}^2+\dot{\varrho}^2+\varrho^2\dot{\varphi}^2\right)-V$	$\frac{1}{2m}\left(p_z^2+p_\varrho^2+\frac{1}{\varrho^2}p_\varphi^2\right)+V$

Die kanonischen Impulse sind zum Beispiel bei den Polarkoordinaten

$$p_r=\frac{\partial L}{\partial\dot{r}}=m\dot{r};\qquad p_\theta=\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}=mr^2\dot{\theta};\qquad p_\varphi=\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}=mr^2\sin^2\theta\dot{\varphi};$$

Die Hessesche Matrix der Lagrange-Funktion bezüglich der $\dot{q}_i$-Komponenten ist — wieder mit Polarkoordinaten

$$\frac{\partial^2 L}{\partial\dot{q}_i\partial\dot{q}_j}=m\begin{pmatrix}1&&\\&r^2&\\&&r^2\sin^2\theta\end{pmatrix}=mg_{ij};$$

Damit ist also die Existenz der Legendre-Transformierten gesichert. Man erhält sie nun durch (Das Potential lassen wir – da uninteressant – weg).

$$\left(\dot{r}p_r+\dot{\theta}p_\theta+\dot{\varphi}p_\varphi-T\right)\Big|_{\substack{\dot{r}=\dot{r}(r,\theta,\varphi,p_r)\\ \dot{\theta}=\dot{\theta}(r,\theta,\varphi,p_\theta)\\ \dot{\varphi}=\dot{\varphi}(r,\theta,\varphi,p_\varphi)}}=T=\frac{p_r^2}{2m}+\frac{p_\theta^2}{2mr^2}+\frac{p_\varphi^2}{2mr^2\sin^2\theta};$$

Teilchen im Elektro-Magnetischen Feld

Wir betrachten ein nichtrelativistisches Teilchen im elektro-magnetischen Feld. Es ergibt sich als Lagrange-Funktion

$$L=\frac{1}{2}mv^2-e\Phi(\vec{r},t)+\frac{e}{c}\vec{v}\cdot\vec{A}(\vec{r},t);$$

Als kanonisch konjugierten Impuls erhält man

$$\vec{p}_{\text{kanonisch}}=\frac{\partial L}{\partial\vec{v}}=\underbrace{m\vec{v}}_{=\vec{p}_{\text{kinematisch}};}+\frac{e}{c}\vec{A};\qquad\Rightarrow\qquad\vec{v}=\frac{\vec{p}-\frac{e}{c}\vec{A}}{m};$$

Die Hamilton-Funktion ist nun

$$H(\vec{r},\vec{p},t)\;=\;\left(\vec{v}\cdot\frac{\partial L}{\partial\vec{v}}-L\right)\Big|_{\vec{v}=\vec{v}(\vec{p}_{\text{kanonisch}},\vec{A})}=$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\vec{p}-\frac{e}{c}\vec{A}}{m}\vec{p} - \frac{m}{2}\frac{\left(\vec{p}-\frac{e}{c}\vec{A}\right)^2}{m^2} + e\Phi - \frac{e}{c}\frac{\vec{p}-\frac{e}{c}\vec{A}}{m}\vec{A} = \\ &= \frac{\left(\vec{p}-\frac{e}{c}\vec{A}\right)^2}{2m} + e\Phi; \end{aligned}$$

Man erhält also eine andere Hamilton-Funktion als für ein freies Teilchen ($\frac{\vec{p}^2}{2m}$), aber es ist nur eine minimale Substitution erforderlich um dieselbe Gestalt auch hier zu erkennen

$$(H - e\Phi) = \frac{\left(\vec{p}-\frac{e}{c}\vec{A}\right)^2}{2m};$$

Relativistisches, freies Teilchen

Die Lagrange-Funktion ist hier

$$L = -mc^2\sqrt{1-\beta^2};$$

und der kanonisch-konjugierte Impuls ist

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \gamma m\vec{v};$$

Die Beziehung zwischen $\vec{v}$ und $\vec{p}$ erhält man diesmal schneller über die Gleichung

$$E = \gamma mc^2; \qquad \Rightarrow \qquad \vec{v} = \frac{\vec{p}c^2}{E};$$

Damit erhält man

$$\vec{v} = \frac{\vec{p}c^2}{E(p)} = \frac{\vec{p}c}{\sqrt{m^2c^2+p^2}};$$

Damit berechnet man nun die Hamilton-Funktion

$$\begin{aligned} H(\vec{r},\vec{p},t) &= H(\vec{p} = (\vec{v}\vec{p} - L)|_{\vec{v}=\vec{v}(\vec{p})} = \\ &= \frac{p^2c}{\sqrt{m^2c^2+p^2}} + mc^2\frac{mc^2}{\sqrt{m^2c^4+p^2c^2}} = \\ &\quad \left(\text{Wegen } \frac{1}{\gamma} = \frac{mc^2}{E};\right) \\ &= \sqrt{m^2c^4+p^2c^2} \approx \\ &\approx mc^2 + \frac{p^2}{2m}; \end{aligned}$$

Wir wollen nun das Verhalten der Hamilton-Funktion im Grenzwert $m \to 0$ untersuchen. Oben hatten wir ja schon gesehen, daß dieser Fall mit dem Lagrange-Formalismus nicht behandelt werden kann. Hier aber erhält man

$$H = |\vec{p}|c;$$

Hier kann man also noch sinnvolle Bewegungsgleichungen aufstellen. Masselose Teilchen sind damit nur im Hamilton-Formalismus beschreibbar.

Relativistische Teilchen im E-M-Feld

In Abschnitt 11.6.2 hatten wir bereits die Hamilton-Funktion für diesen Fall berechnet — da hier Hamilton-Funktion un Energie übereinstimmen. Wir hatten

$$H = \gamma m c^2 + e\Phi;$$

Um die Abhängigkeit von $\vec{p}$ zu verdeutlichen, brauchen wir die Substitutionen

$$\gamma m c^2 = \sqrt{m^2 c^4 + \vec{p}_{\mathrm{kin}}^{\,2} c^2}; \qquad \vec{p}_{\mathrm{kin}} = \gamma m \vec{v}; \qquad \vec{p} = \vec{p}_{\mathrm{kin}} + \frac{e}{c}\vec{A};$$

Damit erhält man

$$H(\vec{r}, \vec{p}, t) = \sqrt{m^2 c^4 + \left(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}\right)^2 c^2} + e\Phi;$$

Damit beenden wir vorerst die Beispiele zur Hamilton-Mechanik, um zur Theorie zurückzukehren.

12.4 Formulierung mit den Poisson-Klammern

12.4.1 Einführung der Poisson-Klammern

Wir betrachten ein beliebiges mechanisches Problem im Phasenraum. Jede Observable (beobachtbare / meßbare Größe) ist eine Funktion

$$f(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n, t) = f(q_1(t), \ldots, q_n(t), p_1(t), \ldots, p_n(t), t) = f(t);$$

Für ihre Zeitableitung gilt stets

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial p_i}\dot{p}_i;$$

Unter Verwendung der kanonischen Gleichungen

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}; \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i};$$

kann man schreiben

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i}\right);$$

Da der letzte Term recht häufig auftritt — und auch interessante Eigenschaften hat, definiert man

Definition:

Für zwei Funktionen (Observable)

$$f(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n, t);$$

$$g(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n, t);$$

definiert man eine neue Funktion — ihre Poisson-Klammer — durch

$$[f, g] = \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i};$$

Die Zeitableitung einer beliebigen Observablen ist dann einfach

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + [H, f];$$

12.4.2 Eigenschaften der Poisson-Klammer

- Fundamentale Poisson-Klammern

  Darunter versteht man die Poisson-Klammern der Koordinaten-Projektionen miteinander. Man sieht

$$\begin{aligned} [q_k, q_l] &= \frac{\partial q_k}{\partial p_i}\frac{\partial q_l}{\partial q_i} - \frac{\partial q_k}{\partial q_i}\frac{\partial q_l}{\partial p_i} = 0; \\ [p_k, p_l] &= 0; \\ [p_k, q_l] &= \delta_{kl}; \\ [q_k, p_l] &= -\delta_{kl}; \end{aligned}$$

- Antisymmetrie

$$[f, g] = -[g, f];$$

- Linearität

$$[\lambda f_1 + \mu f_2, g] = \lambda [f_1, g] + \mu [f_2, g];$$

- Produktregel

$$[f_1 \cdot f_2, g] = f_1 [f_2, g] + f_2 [f_1, g];$$

- Jacobi-Identität

$$[f, [g, h]] + [g, [h, f]] + [h, [f, g]] = 0;$$

-

$$[f, q_i] = \frac{\partial f}{\partial q_i}; \qquad [f, p_i] = -\frac{\partial f}{\partial p_i};$$

- Partielle Zeitableitung

$$\frac{\partial}{\partial t}[f,g] = \left[\frac{\partial f}{\partial t}, g\right] + \left[f, \frac{\partial g}{\partial t}\right];$$

- Totale Zeitableitung

$$\frac{d}{dt}[f,g] = \left[\frac{df}{dt}, g\right] + \left[f, \frac{dg}{dt}\right];$$

Man kann alle diese Formeln leicht mit der Definition beweisen.

12.4.3 Das Poisson'sche Theorem

Theorem:

Wenn zwei Observable f und g erhalten sind, so ist stets auch ihre Poisson-Klammer $[f,g]$ eine Erhaltungsgröße.

Dieses Theorem folgt ganz unmittelbar aus der obenstehenden Formel für die totale Zeitableitung der Poisson-Klammer.

Beispiel: Drehimpulskomponenten

Der Drehimpuls ist

$$\vec{L} = \vec{q} \times \vec{p} = (\epsilon_{ijk} q_j p_k)_{1 \leq i \leq 3};$$

Die Poisson-Klammer zweier Komponenten ist

$$\begin{aligned}
[L_i, L_j] &= \frac{\partial L_i}{\partial p_k}\frac{\partial L_j}{\partial q_k} - \frac{\partial L_i}{\partial q_k}\frac{\partial L_j}{\partial p_k} = \\
&= \epsilon_{imk} q_m \epsilon_{jkn} p_n - \epsilon_{jmk} q_m \epsilon_{ikn} p_n = \\
&= \epsilon_{kim} \epsilon_{knj} q_m p_n - \epsilon_{kjm} \epsilon_{kni} q_m p_n = \\
&= q_j p_i - q_i p_j = \\
&= -\epsilon_{ijk} L_k;
\end{aligned}$$

Also ist die dritte Drehimpulskomponente bereits dann erhalten, wenn es die anderen beiden sind. Es gibt also kein System, bei dem nur zwei Komponenten des Drehimpulses erhalten sind.

12.4.4 Isotroper zweidimensionaler harmonischer Oszillator

Anhand dieses Beispiels soll das Rechnen mit den Poisson-Klammern gezeigt werden. Die Hamilton-Funktion dieses Problems ist

$$H = \frac{p_1^2 + p_2^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 (q_1^2 + q_2^2);$$

Wir wollen nun einige Erhaltungsgrößen finden. Zunächst ist natürlich die 3-Komponente des Drehimpulses erhalten

$$l_3 = q_1 p_2 - q_2 p_1;$$

Eine weitere Erhaltungsgröße ist $p_1^2 + p_2^2$, doch die Poisson-Klammer der beiden ist

$$\begin{aligned}
[p_1^2 + p_2^2, l_3] &= [p_1^2 + p_2^2, q_1 p_2 - q_2 p_1] = \\
&= [p_1^2, q_1 p_2] - [p_2^2, q_2 p_1] = \\
&= 2p_1[p_1, q_1]p_2 - 2p_2 p_1 [p_1, q_1] = 0;
\end{aligned}$$

Dieses enttäuschende Ergebnis kann so erklärt werden: $p_1^2 + p_2^2$ ist ein Skalar bezüglich Drehungen um die 3-Achse. Man sieht damit auch, daß

$$[H, l_3] = 0;$$

Wir können die Hamilton-Funktion auch anders darstellen

$$H = H_1 + H_2 = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 q_1^2 + \frac{p_2^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 q_2^2;$$

Hierbei sind nun H_1 und H_2 getrennt erhalten. Also ist auch die Differenz erhalten

$$B := H_1 - H_2 = \frac{p_1^2 - p_2^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 (q_1^2 - q_2^2);$$

Nun können wir mit der Poisson-Klammer eine weitere Erhaltungsgröße finden

$$\begin{aligned}
C := [l_3, B] &= \frac{\partial l_3}{\partial p_i}\frac{\partial B}{\partial q_i} - \frac{\partial l_3}{\partial q_i}\frac{\partial B}{\partial p_i} = \\
&= (-q_2) m\omega^2 q_1 + q_1(-m\omega^2 q_2) - p_2 \frac{p_1}{m} - (-p_1)\frac{-p_2}{m} = \\
&= -2\left(m\omega^2 q_1 q_2 + \frac{1}{m} p_1 p_2\right);
\end{aligned}$$

Man findet jedoch keine weiteren Erhaltungsgrößen mit der Poisson-Klammer, denn es ist

$$\begin{aligned}
[C, l_3] &= 4B; \\
[C, B] &= -4\omega^2 l_3;
\end{aligned}$$

Die Hamilton-Funktion läßt sich nun durch die Erhaltungsgrößen ausdrücken

$$H^2 = B^2 + \frac{1}{4} C^2 + \omega^2 l_3^2;$$

Damit sind also nur zwei der drei Erhaltungsgrößen B, C und l_3 unabhängig.

Bedeutung der Erhaltungsgrößen

Beim Keplerproblem hatten wir in den Übungsaufgaben eine weitere Erhaltungsgröße kennengelernt, den Lenz'schen Vektor. Diese Erhaltungsgröße korrespondierte zu der Tatsache, daß die Bahnen beim Keplerproblem geschlossen sind, also nicht präzessieren. Dieser Vektor $\vec{\Lambda}$ war eine vektorielle Erhaltungsgröße, und zwar der Vektor vom Brennpunkt der Ellipsenbahn zu ihrem Aphel (entferntesten Punkt). Hier sind die Bahnen jedoch um den Mittelpunkt gegeben, daher ist keine vektorielle Erhaltungsgröße denkbar, die dem Lenz'schen Vektor entspricht.
Aber man kann mit dem Fehlen einer Präzession eine andere Erhaltungsgröße identifizieren — einen Tensor 2ter Stufe

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} H_1 & -\frac{C}{4} \\ -\frac{C}{4} & H_2 \end{pmatrix}; \qquad A_{ij} = \frac{p_i p_j}{2m} + \frac{m}{2}\omega^2 q_i q_j;$$

Die Hauptachsen dieses Tensors entsprechen den Hauptachsen der Ellipsenbahnen. Mit der Hauptachsen-Transformation

$$\begin{aligned} q_1 &= a\cos\omega t; & q_2 &= b\sin\omega t; \\ p_1 &= -ma\omega\sin\omega t; & p_2 &= mb\omega\sin\omega t; \end{aligned}$$

Ist dieser Tensor nun in Normalform

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}m\omega^2 a^2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}m\omega^2 b^2 \end{pmatrix};$$

Damit ist auch bewiesen, daß die Erhaltung von $\mathbf{A}$ dem nicht-präzessieren der Bahn entspricht.

12.5 Kanonische Transformationen

12.5.1 Beispiel: Harmonischer Oszillator

Wir haben die Hamilton-Funktion

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2;$$

Zur Vereinfachung führen wir die neuen Koordinaten

$$P := \frac{1}{\sqrt{m\omega}}p; \qquad Q := \sqrt{m\omega}q;$$

ein. Diese Koordinatentransformation genügt der Gleichung

$$[P, Q] = [p, q] = 1;$$

und heißt deswegen kanonische Transformation. Die Hamilton-Funktion lautet nun

$$H = \frac{1}{2}\omega(P^2 + Q^2);$$

Die beiden neuen Koordinaten kann man nun zu einer komplexen Koordinate zusammenfassen

$$A := \frac{Q + iP}{\sqrt{2}}; \qquad A^* = \frac{Q - iP}{\sqrt{2}};$$

Die Hamilton-Funktion ist nun

$$H = \omega A A^*;$$

Für die Zeitableitung dieser komplexen Koordinate hat man

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dt} &= [H, A] = \\ &= \omega[AA^*, A] = \\ &= \omega A[A^*, A] = \\ &= \frac{1}{2}\omega A[Q - iP, Q + iP] = \\ &= -i\omega A; \end{aligned}$$

Dies liefert sofort eine Lösung für $A(t)$

$$A(t) = A(0)e^{-i\omega t};$$

Allgemein gilt die Regel:
A Eigenfunktion von $[H, \cdot] \iff A(t) = A(0)e^{\mathrm{Eigenwert}\cdot t}$.
Hier gilt nun

$$A(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(Q(0) + iP(0));$$

und

$$Q(t) = \sqrt{2}\mathrm{Re}(A(t)); \qquad P(t) = \sqrt{2}\mathrm{Im}(A(t));$$

dies ergibt

$$\begin{pmatrix} Q(t) \\ P(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\omega t & \sin\omega t \\ -\sin\omega t & \cos\omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q(0) \\ P(0) \end{pmatrix};$$

Wir haben also gerade so reskaliert, daß die Phasenraumkurven Kreisbahnen sind.

12.5.2 Definition Kanonischer Transformationen

Für den Newton'schen und Lagrange'schen Formalismus haben wir insbesondere die Koordinaten-Transformationen untersucht, die die Form der Bewegungsgleichungen invariant lassen. Für das Newton'sche Gesetz waren dies die Transformationen der Galilei-Gruppe und für die Lagrange-Gleichungen waren beliebige differenzierbare und umkehrbare Abbildungen des R^n zugelassen. Nun wollen wir entsprechend untersuchen, welche Koordinatentransformationen im Hamilton-Formalismus zulässig sind.

Zweck dieser Koordinatenwechsel ist eine Vereinfachung der Bewegungsgleichungen, insbesondere indem man zyklische Koordinaten erzeugt. Da aber die Hamilton-Funktion von den q und p-Koordinaten des Phasenraums abhängt, die miteinander eng verbunden sind, ist es nicht so einfach, die zulässigen Transformationen anzugeben. Wir definieren zunächst, welche Eigenschaften die gewünschten Transformationen haben sollen.

Definition:

Eine kanonische Transformation ist eine Abbildung der Hamilton-Funktion H und ihrer Koordinaten q und p

$$H(q,p), q, p \mapsto K(Q,P), Q, P;$$

in Komponenten

$$\begin{aligned} Q_i &= Q_i(q,p,t); \\ P_i &= P_i(q,p,t); \end{aligned}$$

so daß gilt

$$\frac{\partial K}{\partial P_i} = \dot{Q}_i; \qquad \frac{\partial K}{\partial Q_i} = -\dot{P}_i; \qquad \forall 1 \leq i \leq n;$$

12.5.3 Kriterien für kanonische Transformationen

Nun sollen zwei Möglichkeiten zum Auffinden von kanonischen Transformationen vorgestellt werden.

Konstruktive Methode

Im Lagrange-Formalismus haben wir beobachtet, daß für eine beliebige Funktion M die folgende Transformation nicht die Bewegungsgleichungen ändert.

$$L \mapsto L + \frac{dM}{dt};$$

Eine kanonische Koordinatentransformation findet man daher mit dem Ansatz

$$p_i\dot{q}_i - H(q,p,t) = P_i\dot{Q}_i - K(Q,P,t) + \frac{dM}{dt};$$

Die Funktion M kann hierbei abhängen von q, p, Q, P und t. Sie heißt die Erzeugende der Koordinatentransformation.
Wir wollen hier nur den einfachen Fall diskutieren, daß die Erzeugende nur von q, Q und t abhängt. Ist nun eine solche Funktion vorgegeben, so formliert man zunächst den obigen Ansatz um zu

$$\begin{aligned} p_i\ dq_i - H(p,q,t)\ dt &= P_i\ dQ_i + K(Q,P,t)\ dt + dM(q,Q,t) = \\ &= P_i\ dQ_i + K(Q,P,t)\ dt + \frac{\partial M}{\partial q_i}\ dq_i + \frac{\partial M}{\partial Q_i}\ dQ_i + \frac{\partial M}{\partial t}\ dt; \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich zeigt nun

$$\begin{aligned} p_i &= \frac{\partial M}{\partial q_i}; \\ P_i &= -\frac{\partial M}{\partial Q_i}; \\ K &= H - \frac{\partial M}{\partial t}; \end{aligned}$$

In ähnlicher Weise kann man auch Erzeugende behandeln, die von zwei anderen Koordinaten abhängen, z.B. $M(p, Q)$.
Hierfür nun einige Beispiele

1. $M(q, Q, t) = q_k Q_k$; ergibt

   $$\begin{aligned} p_i &= Q_i; \\ P_i &= -q_i; \end{aligned}$$

   Dies zeigt, daß im Hamilton-Formalismus die Koordinaten des Phasenraums völlig gleichberechtigt sind. Es wird nicht zwischen Impuls- und Ortskoordinaten unterschieden.

2. Harmonischer Oszillator. Wir haben die Hamilton-Funktion

   $$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 q^2;$$

   und wir betrachten die Erzeugende

   $$M(q, Q) = \frac{1}{2} m\omega q^2 \cot Q;$$

   Man erhält mit den obigen Formeln

   $$\begin{aligned} p &= m\omega q \cot Q; \\ P &= \frac{m\omega q^2}{2 \sin^2 Q}; \\ K &= \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 q^2 + 0; \end{aligned}$$

   Um die neue Hamilton-Funktion auch in den richtigen Koordinaten angeben zu können, berechnet man zunächst

   $$\begin{aligned} q^2 &= \frac{2P \sin^2 Q}{m\omega}; \\ p^2 &= m^2\omega^2 \cot^2 Q \frac{2P \sin^2 Q}{m\omega} = 2Pm\omega \cos^2 Q; \end{aligned}$$

Damit erhält man für die neue Hamilton-Funktion

$$K = P\omega\cos^2 Q + P\omega\sin^2 Q = P\omega;$$

Wir haben also in Q eine zyklische Koordinate. Dann aber ist P konstant. Aus der kanonischen Gleichung

$$\dot{Q} = \frac{\partial K}{\partial P} = \omega;$$

erhält man nun sofort die Lösung

$$Q(t) = Q(0) + \omega t;$$

Man hat also offenbar Polarkoordinaten im Phasenraum eingeführt.

Deduktives Kriterium

Wenn nun bereits eine Transformation vorgelegt ist, so gibt es ein anderes Kriterium, mit dem man entscheiden kann, ob die Transformation kanonisch ist.
Man prüfe hierzu die Gültigkeit der folgenden Beziehungen

$$[P_i, Q_j]_{q,p} = \delta_{ij};$$
$$[P_i, P_j]_{q,p} = [Q_i, Q_j]_{q,p} = 0;$$

Man rechnet nun für die oben vorgestellte Transformation nach

$$\begin{aligned}
[p,q]_{Q,P} &= \frac{\partial p}{\partial P}\frac{\partial q}{\partial Q} - \frac{\partial p}{\partial Q}\frac{\partial q}{\partial P} = \\
&= \cos Q \frac{1}{2\sqrt{2Pm\omega}} 2m\omega\sqrt{\frac{2P}{m\omega}}\cos Q + \sqrt{2Pm\omega}\sin Q \sin Q\sqrt{\frac{2}{m\omega}}\frac{1}{2\sqrt{P}} = \\
&= 1;
\end{aligned}$$

Man kann zeigen, daß die beiden vorgestellten Kriterien äquivalent sind.