Mechanik

Gerhard Soff

Institut für Theoretische Physik

Technische Universität Dresden

Vorlesung im Wintersemester 1994/95

Vorbemerkung

Die Vorlesung "Mechanik" ist die erste Vorlesung in dem Zyklus der Vorlesungen der Theoretischen Physik. Dieser Zyklus umfaßt als Hauptvorlesungen:

Mechanik
Elektrodynamik
———————————— Vordiplom
Quantenmechanik I
Quantenmechanik II
Thermodynamik und Statistik
Quantenfeldtheorie

Die Vordiplomprüfung kann aufgrund der neuen Diplom-Prüfungsordnung nach der Elektrodynamik-Vorlesung abgelegt werden. Die Mechanik-Vorlesung ist generell für Studenten des 3. Semesters gedacht. Da jedoch der Versuch unternommen wird, ausgehend vom Schulwissen den physikalischen und mathematischen Apparat konsistent aufzubauen, wobei nicht notwendigerweise auf die Vorkenntnisse der ersten beiden Semester Bezug genommen wird, sollte es auch für ambitionierte Studenten des 1. Semesters möglich sein, dieser Vorlesung zu folgen. Jedoch erlaubt der zur Verfügung stehende Zeitrahmen von einem Semester nur eine komprimierte Darstellung der Mechanik.

An begleitender Literatur werden die folgenden Monographien empfohlen:

1. W. Greiner, *Mechanik I und II*,
   (Harri Deutsch, Thun, 1993)

2. M. R. Spiegel, *Theoretische Mechanik*,
   (Schaum's outline series, Mc Graw-Hill, New York, 1967)

3. H. Goldstein, *Klassische Mechanik*,
   (Akademische Verlagsgesellschaft, Wiesbaden, 1978)

4. L. D. Landau, *Lehrbuch der Theoretischen Physik 1, Mechanik*,
   (Akademie-Verlag, Berlin, 1973)

5. J. W. Leech, *Classical Mechanics*,
   (Methuen, Science Paperbacks, Frome, 1965)

6. A. Sommerfeld, *Mechanik*,
(Harri Deutsch, Thun, 1977)

7. W. Nolting, *Grundkurs: Theoretische Physik, 1 Klassische Mechanik, 2 Analytische Mechanik*,
(Zimmermann-Neufang, Ulmen, 1993)

8. T. Fließbach, *Mechanik*,
(BI Wissenschaftsverlag, Mannheim, 1992)

9. A. Budó, *Theoretische Mechanik*,
(VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1978)

10. M. Lagally, W. Franz, *Vorlesung über Vektorrechnung*,
(Akademische Verlagsgesellschaft, Frankfurt am Main, 1964)

11. R. Jelitto, *Mechanik I und II*,
(Aula-Verlag, Wiesbaden, 1987)

12. H. Teichmann, *Physikalische Anwendungen der Vektor- und Tensorrechnung*,
(BI Wissenschaftsverlag, Mannheim, 1973)

13. H. Volz, *Einführung in die Theoretische Mechanik I und II*,
(Akademische Verlagsgesellschaft, Frankfurt am Main, 1971)

14. F. Kuypers, *Klassische Mechanik*,
(VHC Verlagsgesellschaft, Weinheim, 1993)

15. E. Schmutzer, *Grundlagen der Theoretischen Physik, Teil I*,
(Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1991)

Nach der ersten Stunde einer doppelstündigen Vorlesung wird jeweils eine kurze Pause eingelegt. Fragen können nach Ablauf der zweiten Stunde gestellt werden.

Es ist geplant, die folgenden Themenbereiche zu umfassen:

1. Vektoren, Geschwindigkeit und Beschleunigung
2. Newtonsche Mechanik und der freie Fall
3. Der harmonische Oszillator
4. Das Kepler-Problem
5. Spezielle Relativitätstheorie
6. Kinematik starrer Körper
7. Lagrange-Formalismus
8. Hamilton-Mechanik

Das Verständnis der Theoretischen Mechanik ist Grundvoraussetzung für das Verständnis aller weiteren Vorlesungen im Rahmen der Theoretischen Physik. Die einzelnen Bereiche bauen konsistent aufeinander auf und können nicht unabhängig voneinander betrachtet werden. Beginnen wollen wir diese Vorlesung mit einer elementaren Einführung in die Vektoranalysis. Generell wird versucht, das jeweils notwendige mathematische Werkzeug im Rahmen der Vorlesung zu erarbeiten.

Dieses Script ist kein Originalwerk. Es basiert auf mehreren publizierten Monographien. Als Vorlesungsmitschrift reflektiert es die in den jeweiligen Vorlesungen präsentierten Inhalte.

Dieses Script wäre nicht entstanden ohne die hilfreiche und wertvolle Unterstützung zahlreicher Mitarbeiter. Herrn Dr. Harald Kalka danke ich für einige Originalbeiträge. Bei der technischen Erstellung des Scriptes halfen dankenswerterweise Dr. Christian Hofmann, Dr. Günter Plunien, Dr. Thomas Beier, Dr. Jörg Bergmann, Dipl.-Phys. Frank Krauss, Dipl.-Phys. Mark Beinker und Dipl.-Phys. André Peshier. Mein ausdrücklicher und besonderer Dank gilt Frau Dipl.-Ing. Gundula Schädlich für ihr Engagement bei der Erstellung des umfangreichen LATEX-Textes sowie für das Zeichnen der zahlreichen Figuren mit Hilfe des Software-Pakets “Corel DRAW”.

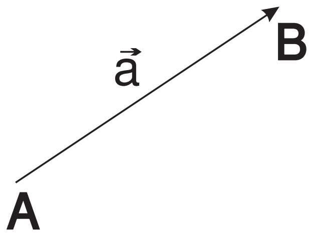
Inhaltsverzeichnis

1 Vektoren, Geschwindigkeit und Beschleunigung

1.1 Skalare und Vektoren

Verschiedene Größen in der Physik, wie zum Beispiel die Grundgrößen Länge, Masse und Zeit, können im Rahmen der Newtonschen Mechanik durch eine einzige reelle Zahl spezifiziert werden. Diese Zahl kann dabei von dem Einheitensystem abhängen, in dem wir die Messung vornehmen. Solche Größen bezeichnen wir als Skalare. Ein Skalar wird durch einen Buchstaben angegeben, z. B. für die Zeit t und für die Masse m.

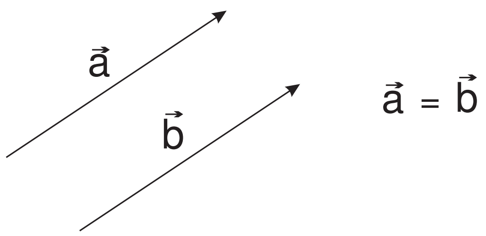
Andere Größen in der Physik wie die Ortsangabe oder die Geschwindigkeit bedürfen zu ihrer vollständigen Spezifikation der Angabe eines Betrages und einer Richtung. Solche Größen nennen wir Vektoren und kennzeichnen sie durch einen Pfeil über den Buchstaben, um die Bedeutung der Richtungsangabe hervorzuheben. So schreiben wir beispielsweise für den Ortsvektor $\vec{r}$, für die Geschwindigkeit $\vec{v}$, für die Beschleunigung $\vec{a}$ und für die Kraft $\vec{F}$ oder $\vec{K}$. Für den Impuls schreiben wir $\vec{p}$ und für den Drehimpuls $\vec{L}$. Ein Vektor verbindet zwei Punkte, z. B.



Den Betrag oder die Länge eine Vektors bezeichnen wir mit $|\vec{a}|$ oder a.

Wir wollen nun die einfachen Gesetze der Vektoralgebra behandeln.

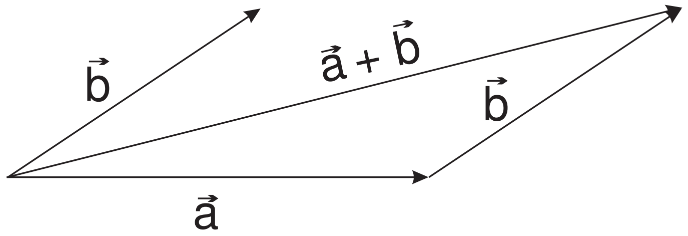
1. Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind gleich, wenn sie den gleichen Betrag und die gleiche Richtung aufweisen unabhängig von ihrem Anfangspunkt. So haben auch zwei Autos die glei-



   chen Geschwindigkeitsvektoren, wenn sie in die gleiche Richtung fahren mit dem gleichen Betrag der Geschwindigkeit. Dies ist bedauerlicherweise ein häufiges Vorkommnis, wenn zwei LKW versuchen, sich zu überholen. Alle gleichlangen und gleichgerichteten Strecken sind gleichberechtigte Darstellungen des selben Vektors.

2. Einen Vektor, der die gleiche Länge wie der Vektor $\vec{a}$ aufweist, aber in die entgegengesetzte Richtung zeigt, bezeichnen wir mit $-\vec{a}$.

Wir behandeln nun einige elementare Rechenregeln bezüglich Vektoren. Wir beginnen mit der Addition von Vektoren. Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ werden addiert, indem man durch Parallelverschie-

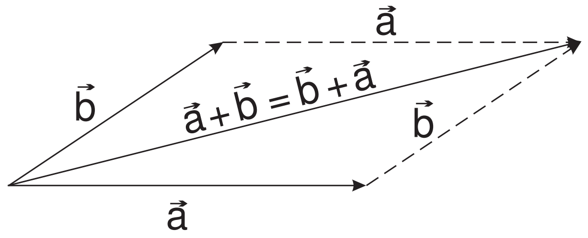


bung den Fußpunkt des einen Vektors $\vec{b}$ mit der Pfeilspitze des anderen Vektors $\vec{a}$ zur Deckung bringt. Der Summenvektor $\vec{a}+\vec{b}$ beginnt am Fußpunkt von $\vec{a}$ und reicht zur Spitze von $\vec{b}$. $\vec{a}+\vec{b}$ entspricht der Diagonalen des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms. Für die Vektorsumme gilt die

I. Kommutativität

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a} \tag{1.1}$$

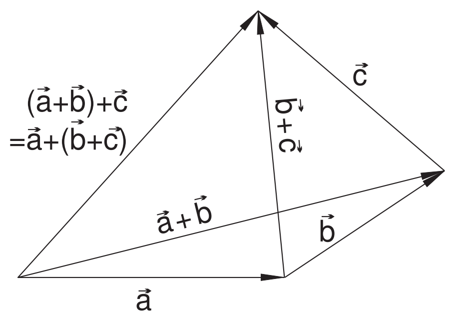
Entscheidend für die Kommutativität ist die freie Parallelverschiebarkeit der Vektoren.



II. Assoziativität

$$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c}) \tag{1.2}$$

Wiederum überzeugt man sich aufgrund einer graphischen Veranschaulichung sofort von der Richtigkeit dieser Behauptung.



Die Differenz zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ oder die Vektorsubtraktion ist definiert als

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}) \quad . \tag{1.3}$$

Subtrahiert man $\vec{a}$ von sich selbst, so ergibt sich der Nullvektor

$$\vec{a} - \vec{a} = \vec{0}. \tag{1.4}$$

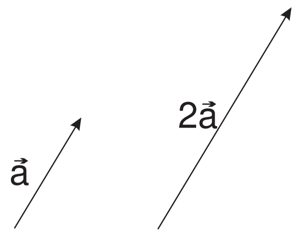
Der Nullvektor hat den Betrag 0; er ist richtungslos. Für alle Vektoren gilt

$$\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}. \tag{1.5}$$

Unter dem Produkt $p\vec{a}$ eines Vektors $\vec{a}$ mit einem Skalar p, wobei p eine reelle Zahl ist, versteht man einen Vektor, der die gleiche Richtung aufweist wie $\vec{a}$ und den Betrag

$$|p\vec{a}| = |p| \cdot |\vec{a}| \tag{1.6}$$

hat.



Hierbei gilt das Distributivgesetz, d. h.

$$\begin{aligned} (p+q)\vec{a} &= p\vec{a} + q\vec{a}\,, \\ p(\vec{a} + \vec{b}) &= p\vec{a} + p\vec{b}\,, \end{aligned} \tag{1.7}$$

sowie das Assoziativgesetz

$$q(p\vec{a}\,) = p(q\vec{a}\,) = qp\,\vec{a}\,. \tag{1.8}$$

Ein Einheitsvektor ist ein Vektor mit der Länge 1. Aus jedem Vektor $\vec{a}$ läßt sich durch Multiplikation mit dem Kehrwert seines Betrages ein Einheitsvektor $\vec{e}_a$ in Richtung von $\vec{a}$ konstruieren.

$$\vec{e}_a = \frac{1}{a}\,\vec{a} \tag{1.9}$$

und damit auch

$$\vec{a} = a\,\vec{e}_a \tag{1.10}$$

mit

$$|\vec{e}_a| = \frac{a}{a} = 1\,. \tag{1.11}$$

Einheitsvektoren werden in der Regel mit den Buchstaben $\vec{e}$ oder $\vec{n}$ bezeichnet. In der englischen Literatur findet man vielfach auch die Bezeichnungen $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ und $\vec{k}$. Eine andere häufige Bezeichnung ist beispielsweise $\hat{r}$.
Wir fassen die Gesetze der Vektoralgebra zusammen

1. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ Kommutativgesetz der Addition

2. $(\vec{a} + \vec{b}\,) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}\,)$ Assoziativgesetz der Addition

3. $p\,(q\vec{a}\,) = (pq)\,\vec{a} = q\,(p\vec{a}\,)$ Assoziativgesetz der Multiplikation

4. $(p + q)\vec{a} = p\vec{a} + q\vec{a}$ Distributivgesetz

5. $p(\vec{a} + \vec{b}\,) = p\vec{a} + p\vec{b}$ Distributivgesetz

Bislang haben wir Ortsvektoren als einen Spezialfall der Vektoren diskutiert. Der Zusammenhang mit dem abstrakten mathematischen Vektorbegriff ist leicht herstellbar. Die Gesamtheit der Vektoren bilden einen linearen Vektorraum V über dem Körper der reellen Zahlen **R**. Es werden die folgenden Axiome erfüllt:

I) Zwischen zwei Elementen $\vec{a}$, $\vec{b}\ \in\ V$ ist eine Verknüpfung (Addition) definiert

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{s}\ \in\ V \tag{1.12}$$

mit

1) $(\vec{a}+\vec{b}\,)+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c}\,)$ (Assoziativität)

2) Nullelement: $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$ für alle $\vec{a}$

3) Inverses: Zu jedem $\vec{a}\ \in\ V$ gibt es ein $(-\vec{a}\,)\ \in\ V$, so daß gilt
$\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$,

4) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ (Kommutativität)

II) Multiplikation mit Elementen $\alpha,\ \beta,\ ..\ \in\ \mathbf{R}$:
$\alpha\ \in\ \mathbf{R},\ \vec{a}\ \in\ V \Longrightarrow \alpha\vec{a}\ \in\ V$
mit

1) $(\alpha+\beta)\,\vec{a}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{a}$,
$\alpha(\vec{a}+\vec{b}\,)=\alpha\vec{a}+\alpha\vec{b}$, (Distributivität)

2) $\alpha(\beta\vec{a}\,)=(\alpha\beta)\vec{a}$ (Assoziativität)

3) Es gibt ein Einselement 1, so daß gilt
$1\cdot\vec{a}=\vec{a}$ für alle $\vec{a}\ \in\ V$.

1.2 Skalarprodukt von Vektoren

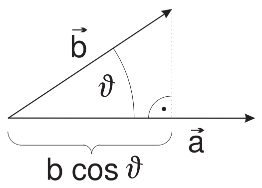
Wir haben bisher die Multiplikation von Vektoren mit Skalaren betrachtet. Jetzt wenden wir uns der Multiplikation von Vektoren zu. Hierbei werden wir zwei unterschiedliche Typen von Produkten von Vektoren kennenlernen, das Skalarprodukt (inneres Produkt) und das Vektorprodukt (äußeres Produkt).

Als Skalarprodukt (inneres Produkt, Punktprodukt) zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ bezeichnet man den folgenden Skalar:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=ab\,\cos\vartheta, \tag{1.13}$$

wobei ϑ den Winkel zwischen den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ kennzeichnet.

$$\vartheta=\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}\,)$$



Anschaulich handelt es sich um das Produkt aus der Länge des ersten Vektors mit der Projektion des zweiten Vektors auf die Richtung des ersten. Offensichtlich gilt

$$\begin{aligned}
&\vec{a} \cdot \vec{b} = 0, \qquad (1.14)\\
&\text{falls } 1)\, a = 0 \text{ oder (und) } b = 0\\
&\text{oder } 2)\, \vartheta = \pi/2.
\end{aligned}$$

Basierend auf dieser Einsicht bezeichnen wir zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ als orthogonal $(\vec{a} \perp \vec{b})$ zueinander falls $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

Eine wichtige Eigenschaft des Skalarprodukts betrifft den Betrag eines Vektors. Wegen $\cos(0) = 1$ gilt

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = a^2 \geq 0 \ . \qquad (1.15)$$

Damit können wir schreiben

$$a = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} \ . \qquad (1.16)$$

Für den Einheitsvektor haben wir

$$\vec{e} \cdot \vec{e} = 1 \ . \qquad (1.17)$$

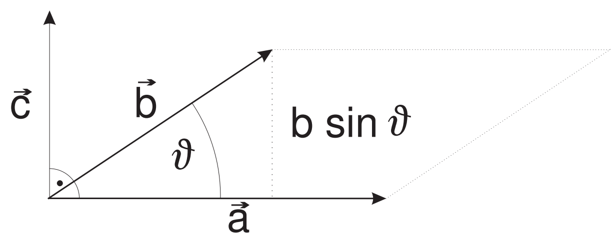
Ein Vektorraum, in dem ein Skalarprodukt definiert ist, heißt unitärer Vektorraum.

Einem Produkt von zwei Vektoren können wir jedoch auch einen Vektor zuordnen. Das Vektorprodukt (äußeres Produkt, Kreuzprodukt) von zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ führt zu einem Vektor $\vec{c}$

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} \ . \qquad (1.18)$$

Der Vektor $\vec{c}$ hat folgende Eigenschaften:

1. $c = ab \sin\vartheta$,
   wobei ϑ wieder der von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ eingeschlossene Winkel ist. Der Betrag von $\vec{c}$, also c, entspricht dem Flächeninhalt des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms.



2. $\vec{c}$ steht senkrecht auf der von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Ebene. $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ bilden ein Rechtssystem.

Beispiele in der Physik für Größen, die durch Vektorprodukte definiert sind, sind

der Drehimpuls	$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$	mit
dem Impuls	$\vec{p} = m\vec{v}$	und
das Drehmoment	$\vec{D} = \vec{r} \times \vec{K}$	bzw.
	$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$.	

Wir wollen nun einige wichtige Eigenschaften des Vektorproduktes diskutieren.

I) antikommutativ:

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a} \tag{1.19}$$

II)

$$\vec{a} \times \vec{b} = 0 \quad \text{falls} \quad \begin{array}{ll} 1) & a \text{ oder } b = 0 \\ 2) & \vec{b} = \alpha\vec{a};\, \alpha \in \mathbf{R} \end{array} \tag{1.20}$$

Für kolineare Vektoren gilt $\sin\vartheta = 0$, da $\vartheta = 0$, und somit verschwindet das Kreuzprodukt.

III) distributiv:

$$(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c} \tag{1.21}$$

IV) nicht assoziativ

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) \neq (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} \tag{1.22}$$

V) bilinear

$$(\alpha\vec{a}\,) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\alpha\vec{b}\,) = \alpha(\vec{a} \times \vec{b}\,) \tag{1.23}$$

Wir wollen nun einige Eigenschaften von Basisvektoren näher beleuchten. Wir stellen den Vektor $\vec{a}$ durch den Einheitsvektor $\vec{e}_a$ dar, um Betrag- und Richtungsangabe etwas zu trennen

$$\vec{a} = a\ \vec{e}_a. \tag{1.24}$$

Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ mit derselben Richtung $\vec{e}$ heißen kolinear. Für sie lassen sich reelle Zahlen $\alpha \neq 0,\ \beta \neq 0$ finden, die die Gleichung

$$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = 0 \tag{1.25}$$

erfüllen. $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind linear abhängig. Damit können wir umgedreht folgende Definition vereinbaren:
n Vektoren $\vec{a}_1,\ \vec{a}_2,\ \dots,\vec{a}_n,$ heißen linear unabhängig, falls die Gleichung

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \vec{a}_j = 0 \tag{1.26}$$

nur durch

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0 \tag{1.27}$$

erfüllt werden kann. Andernfalls heißen sie linear abhängig.
Ferner gilt die Definition: Die Dimension eines Vektorraumes ist gleich der maximalen Anzahl linear unabhängiger Vektoren.

In einem d-dimensionalen Vektorraum bildet jede Menge von d linear unabhängigen Vektoren eine Basis, d. h. jeder beliebige Vektor dieses Raumes läßt sich als Linearkombination dieser d Vektoren beschreiben.

Besonders bedeutsam als Basisvektoren sind Einheitsvektoren, die paarweise orthogonal zueinander sind. Man spricht in diesem Fall von einem Orthonormalsystem $\vec{e}_i\,,\ i = 1, 2, \dots, d$. Damit gilt

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij} \tag{1.28}$$

mit dem Kronecker-Symbol

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad i = j \\ 0 & \text{für} \quad i \neq j\,. \end{cases} \tag{1.29}$$

Ein Orthonormalsystem, das gleichzeitig Basis des Vektorraumes V ist, bezeichnet man als vollständig. Für einen beliebigen Vektor $\vec{a} \in V$ gilt dann

$$\vec{a} = \sum_{j=1}^{d} a_j \, \vec{e}_j \; . \tag{1.30}$$

Die a_j sind die Komponenten des Vektors $\vec{a}$ bezüglich der Basis $\vec{e}_1, ..., \vec{e}_d$. Beispielsweise bilden die kartesischen Basisvektoren $\vec{e}_x,\ \vec{e}_y$ und $\vec{e}_z$ ein vollständiges Orthonormalsystem des E_3. Die Komponentenschreibweise erlaubt eine gebräuchliche Darstellung des Vektors als Spaltenvektor:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ . \\ . \\ . \\ a_d \end{pmatrix}$$

oder als Zeilenvektor:

$$\vec{a} = (a_1,\ a_2,\ \ldots, a_d)\,.$$

Für den dreidimensionalen euklidischen Raum können wir somit explizit schreiben

$$\begin{aligned} \vec{a} &= a_x\vec{e}_x + a_y\vec{e}_y + a_z\vec{e}_z = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3 \\ &= \sum_{j=1}^{3} a_j \, \vec{e}_j \end{aligned} \tag{1.31}$$

oder auch

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)\,.$$

Mit dem vollständigen Orthonormalsystem können wir auch den Betrag eines Vektors auswerten. Es ist

$$\begin{aligned} a &= |\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}} = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{3} a_i a_j \,(\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j)} \\ &= \sqrt{\sum_{i,j=1}^{3} a_i a_j \, \delta_{ij}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{3} a_i^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \; . \end{aligned} \tag{1.32}$$

Für die Richtungskosinusse erhalten wir mittels der kartesischen Komponenten a_i

$$a_i = \vec{e}_i \cdot \vec{a} = a \, \cos\vartheta_i \tag{1.33}$$

mit $$\vartheta_i = \sphericalangle(\vec{e}_i, \vec{a}).$$

Damit folgt sofort

$$\cos\vartheta_i = \frac{a_i}{a}. \tag{1.34}$$

Ferner bekommen wir

$$\cos^2\vartheta_1 + \cos^2\vartheta_2 + \cos^2\vartheta_3 = \frac{a_1^2}{a^2} + \frac{a_2^2}{a^2} + \frac{a_3^2}{a^2} = \frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}{a^2} = 1\,. \tag{1.35}$$

Auch das Skalarprodukt läßt sich mit dem vollständigen Orthonormalsystem leicht auswerten. Es ist

$$\begin{aligned}
\vec{a}\cdot\vec{b} &= \sum_{i=1}^{3} a_i\,\vec{e}_i \sum_{j=1}^{3} b_j\,\vec{e}_j \\
&= \sum_{i,j=1}^{3} a_i b_j\,\vec{e}_i\cdot\vec{e}_j = \sum_{i,j=1}^{3} a_i b_j\,\delta_{ij} \\
\Longrightarrow&\quad \vec{a}\cdot\vec{b} = \sum_{j=1}^{3} a_j b_j\,.
\end{aligned} \tag{1.36}$$

Wir studieren jetzt Vektorprodukte mit orthonormalen Basisvektoren, die ein Rechtssystem bilden. Es ist

$$\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3\,, \tag{1.37}$$

$$\vec{e}_2 \times \vec{e}_3 = \vec{e}_1\,, \tag{1.38}$$

$$\vec{e}_3 \times \vec{e}_1 = \vec{e}_2\,, \tag{1.39}$$

aber zum Beispiel $\vec{e}_2 \times \vec{e}_1 = -\vec{e}_3$ und $\vec{e}_1 \times \vec{e}_1 = 0$. Multiplizieren wir den resultierenden Vektor wieder skalar mit $\vec{e}_i$, so folgt

$$\vec{e}_i\cdot(\vec{e}_j\times\vec{e}_k) = \left\{\begin{array}{ll} 1 & \text{falls } (i,j,k) \text{ zyklisch aus } (1,2,3) \\ -1 & \text{falls } (i,j,k) \text{ antizyklisch aus } (1,2,3) \\ 0 & \text{sonst} \end{array}\right\} = \varepsilon_{ijk}\ . \tag{1.40}$$

ε_{ijk} ist das Levi-Civita Symbol oder der sogenannte total antisymetrische Tensor dritter Stufe. Es ist also

$$\varepsilon_{ijk} = \vec{e}_i\cdot(\vec{e}_j\times\vec{e}_k)\ . \tag{1.41}$$

Mit diesem Symbol lassen sich Vektorprodukte der Basisvektoren zusammenfassend formulieren:

$$\vec{e}_i\times\vec{e}_j = \sum_{k=1}^{3}\varepsilon_{ijk}\,\vec{e}_k\ . \tag{1.42}$$

Für allgemeine Vektorprodukte gilt entsprechend

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \sum_{i,j=1}^{3} a_i b_j (\vec{e}_i \times \vec{e}_j) = \sum_{i,j,k=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\, a_i b_j\, \vec{e}_k = \sum_{k=1}^{3} c_k\, \vec{e}_k \tag{1.43}$$

mit der abkürzenden Schreibweise

$$c_k = \sum_{i,j=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\, a_i b_j \tag{1.44}$$

oder ausführlich

$$c_1 = a_2 b_3 - a_3 b_2,\; c_2 = a_3 b_1 - a_1 b_3,\; c_3 = a_1 b_2 - a_2 b_1. \tag{1.45}$$

Das Kreuzprodukt läßt sich auch leicht mit Hilfe der Determinantenschreibweise auswerten. Ein rechteckiges Schema von Zahlen wird Matrix genannt.

$$\begin{array}{cc} \text{Spalten} & \\ \downarrow & \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1q} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2q} \\ . & & & \\ . & & & \\ . & & & \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pq} \end{pmatrix} & \longleftarrow \text{Zeilen} \end{array}$$

Der erste Index des Koeffizienten gibt die Zeile an, der zweite die Spalte. Für den Fall, daß $q = p$ ist, spricht man von einer quadratischen Matrix. Dieser Matrix läßt sich ein Zahlenwert D zuordnen, der Determinante genannt wird. Für die Dimensionen 1, 2 und 3 läßt sich dieser Wert folgendermaßen auswerten

$$1.)\quad \det(a_{11}) \equiv |a_{11}| = a_{11}\ , \tag{1.46}$$

$$2.)\quad \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \equiv \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}\ , \tag{1.47}$$

$$\begin{aligned} 3.)\quad \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \end{aligned} \tag{1.48}$$

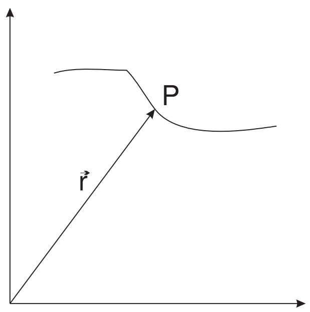
Mit Hilfe der Determinantenschreibweise können wir das Vektorprodukt auch formal auswerten durch

$$\begin{aligned}\vec{a} \times \vec{b} &= \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \\ &= (a_2 b_3 - a_3 b_2)\vec{e}_1 - (a_1 b_3 - a_3 b_1)\vec{e}_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\vec{e}_3 \; . \end{aligned} \tag{1.49}$$

Dies ist identisch mit dem bereits abgeleiteten Resultat.

1.3 Vektorfunktionen

Wir betrachten nun Vektoren, die eine Abhängigkeit von äußeren Parametern aufweisen. Ein typisches Beispiel hierzu sind Raumkurven. Wir wählen im dreidimensionalen euklidischen Raum ein festes Koordinatensystem. Die Position eines Teilchens, idealisiert durch einen Massenpunkt, legen wir durch den Ortsvektor fest.

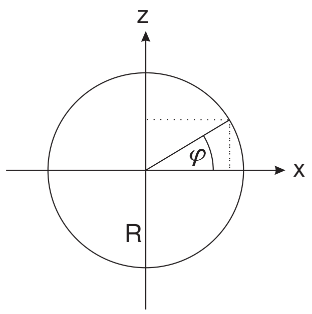


Der Ortsvektor kann sich als Funktion der Zeit als äußerer Parameter ändern. In einem zeitunabhängigen, vollständigen Orthonormalsystem $\vec{e}_i$ werden die Komponenten des Vektors zeitabhängige Funktionen, z. B.

$$\begin{aligned}\vec{r}(t) &= \sum_{j=1}^{3} x_j(t)\, \vec{e}_j = (x_1(t),\, x_2(t),\, x_3(t)) \\ &= (x(t),\, y(t),\, z(t)) \quad . \end{aligned} \tag{1.50}$$

Dies nennt man die Trajektorie oder die Bahnkurve des Teilchens.

Ein weiteres Beispiel für eine Raumkurve ist die Kreisbewegung in der xz-Ebene.

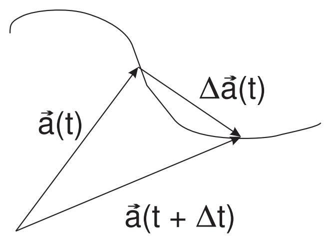


Der Kreis habe den Radius R. Eine naheliegene Parametrisierung über den Winkel φ lautet

$$\vec{r}\,(\varphi) = R\,(\cos\varphi,\, 0,\, \sin\varphi) \quad . \tag{1.51}$$

Wir untersuchen jetzt die Ableitung derartiger vektorwertiger Funktionen. Speziell untersuchen wir Vektoren $\vec{a}$ zu verschiedenen Zeiten t bzw. $t + \Delta t$ und bilden den Differenzvektor

$$\Delta\vec{a} = \vec{a}\,(t + \Delta t) - \vec{a}\,(t) \quad . \tag{1.52}$$



Dies erlaubt es uns über den Grenzübergang $\lim\limits_{\Delta t \to 0}$ zu definieren

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Vektor}}}{\frac{d\vec{a}}{dt}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{a}(t + \Delta t) - \vec{a}(t)}{\Delta t} \quad . \tag{1.53}$$

Für die Zeitableitung schreibt man auch kurz

$$\dot{\vec{a}}\,(t) \equiv \frac{d\vec{a}}{dt} \quad . \tag{1.54}$$

Stellen wir $\vec{a}(t)$ in einem zeitunabhängigen Basissystem $\{\vec{e}_i\}$ dar

$$\vec{a}(t) = \sum_{j=1}^{3} a_j(t)\,\vec{e}_j \quad , \tag{1.55}$$

so folgt

$$\dot{\vec{a}} = \frac{d\vec{a}}{dt} = \sum_j \dot{a}_j(t)\,\vec{e}_j \quad . \tag{1.56}$$

Es gelten die folgenden Ableitungsregeln

$$\frac{d}{dt}[f(t)\,\vec{a}(t)] = \dot{f}(t)\,\vec{a}(t) + f(t)\,\dot{\vec{a}}(t) \quad , \tag{1.57}$$

$$\frac{d}{dt}[\vec{a}(t)\cdot\vec{b}(t)] = \dot{\vec{a}}(t)\cdot\vec{b}(t) + \vec{a}(t)\cdot\dot{\vec{b}}(t) \quad , \tag{1.58}$$

$$\frac{d}{dt}[\vec{a}(t)\times\vec{b}(t)] = \dot{\vec{a}}(t)\times\vec{b}(t) + \vec{a}(t)\times\dot{\vec{b}}(t) \quad . \tag{1.59}$$

Für die Physik bedeutsame Beispiele sind die Geschwindigkeit

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}}\,(t) \tag{1.60}$$

und die Beschleunigung

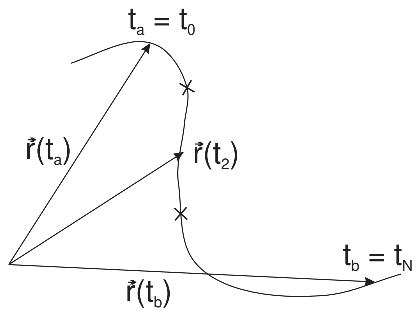
$$\vec{a}\,(t) = \dot{\vec{v}}\,(t) = \ddot{\vec{r}}\,(t) \quad . \tag{1.61}$$

Auch die Integration von vektorwertigen Funktionen läßt sich auf die der entsprechenden parameterabhängigen Komponentenfunktionen übertragen

$$\underset{\substack{\uparrow\\ \text{Vektor}}}{\int_{t_a}^{t_b} \vec{a}(t)\,dt} = \sum_{j=1}^{3} \vec{e}_j \int_{t_a}^{t_b} a_j(t)\,dt \quad . \tag{1.62}$$

Wenn die Basisvektoren parameterunabhängig sind, können sie vor das Integral gezogen werden. Oft bietet es sich an, die Bogenlänge als Kurvenparameter einzuführen; diese wollen wir jetzt einführen.

Die Bogenlänge s ist die Länge der Raumkurve ausgehend von einem willkürlich gewählten Anfangspunkt.



Wir zerlegen zunächst das Zeitintervall von t_a bis t_b in N Zeitintervalle Δt_n

$$t_b - t_a = N\,\Delta t_n \quad . \tag{1.63}$$

Für die einzelnen Markierungen auf der Raumkurve gilt

$$t_n = t_a + n\,\Delta t_n \tag{1.64}$$

mit

$$n = 0,\ 1,\ 2,\ ...,\ N$$

und

$$\begin{aligned} t_0 &= t_a \quad , \\ t_N &= t_b \quad . \end{aligned}$$

Die Zeitmarkierungen entsprechen den Ortsvektoren $\vec{r}(t_n)$. Wenn wir diese linear miteinander verbinden, so ergibt sich ein Polygonzug der Länge

$$L_N(t_a, t_b) = \sum_{n=0}^{N-1} |\vec{r}(t_{n+1}) - \vec{r}(t_n)| = \sum_{n=0}^{N-1} \left| \frac{\vec{r}(t_{n+1}) - \vec{r}(t_n)}{\Delta t_n} \right| \Delta t_n \quad . \tag{1.65}$$

Im Limes $N \to \infty$ entspricht die Länge L_N des Polygonzuges der Bogenlänge s zwischen den Endpunkten $\vec{r}(t_a)$ und $\vec{r}(t_b)$. Für $N \to \infty$ geht aber Δt_n gegen Null. Damit wird

$$\frac{\vec{r}(t_{n+1}) - \vec{r}(t_n)}{\Delta t_n} \quad \xrightarrow{N \to \infty,\ \Delta t_n \to 0} \quad \left. \frac{d\vec{r}}{dt} \right|_{t=t_n} \quad . \tag{1.66}$$

Aus der Summe wird im Riemannschen Sinne ein Integral.

$$s(t_b) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N-1} \left| \frac{\vec{r}(t_{n+1}) - \vec{r}(t_n)}{\Delta t_n} \right| \Delta t_n = \int_{t_a}^{t_b} \left| \frac{d\vec{r}(t')}{dt'} \right| dt' \quad . \tag{1.67}$$

Schreiben wir für $t_b = t$, so haben wir schließlich als Bogenlänge

$$s(t) = \int_{t_a}^{t} \left| \frac{d\vec{r}(t')}{dt'} \right| dt' \quad . \tag{1.68}$$

Für die differentielle Änderung der Bogenlänge gilt einfach

$$\frac{ds}{dt} = \left| \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \right| \quad . \tag{1.69}$$

Durch die Substitution von t durch s können wir eine natürliche Parametrisierung einer Raumkurve erhalten. Betrachten wir nur den infinitesimalen Ausdruck ds, so haben wir offensichtlich

$$ds = |d\vec{r}(t)| \quad . \tag{1.70}$$

Im euklidischen Raum führt dies bei Verwendung von kartesischen Koordinaten auf

$$ds = |d\vec{r}\,(t)| = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} \quad . \tag{1.71}$$

Dies spiegelt einfach nur den Satz von Pythagoras in drei Dimensionen wieder.

Als konkretes Anwendungsbeispiel betrachten wir die Kreisbewegung gleichförmiger Art mit

$$\varphi = \omega t \quad . \tag{1.72}$$

Der Winkel φ ändert sich gleichförmig mit der Zeit t, sofern die Größe ω konstant als Funktion der Zeit ist. Damit folgt für den Ortsvektor

$$\vec{r}\,(t) = R\,(\cos\varphi,\, 0,\, \sin\varphi) = R\,(\cos\omega t,\, 0,\, \sin\omega t) \quad . \tag{1.73}$$

Es ergibt sich weiter

$$\frac{d\vec{r}\,(t)}{dt} = R\omega\,(-\sin\omega t,\, 0,\, \cos\omega t) \tag{1.74}$$

und für den Betrag

$$\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| = R\omega\,\sqrt{\sin^2\omega t + \cos^2\omega t} = R\omega \quad . \tag{1.75}$$

Entsprechend der Definition für die Bogenlänge bekommen wir

$$s(t) = \int\limits_{t_a}^{t} \left|\frac{d\vec{r}}{dt'}\right| dt' = \int\limits_{0}^{t} R\omega\, dt' = R\omega t \tag{1.76}$$

mit der willkürlichen Festlegung

$$t_a = 0 \quad .$$

Wir lösen auf, dies führt auf

$$t(s) = \frac{s}{R\omega} \quad . \tag{1.77}$$

Schließlich bekommen wir die natürliche Darstellung der Kreisbewegung durch die Bogenlänge

$$\vec{r}\,(s) = R\left(\cos\frac{s}{R},\, 0,\, \sin\frac{s}{R}\right) \quad . \tag{1.78}$$

Nach einem vollen Umlauf muß

$$\varphi = 2\pi = \omega t = \frac{s}{R} \tag{1.79}$$

sein. Das entspricht der Bogenlänge $s = 2\pi R$, also dem Umfang des Kreises.

1.4 Mechanik des freien Massenpunktes

Unter einem Massenpunkt verstehen wir einen physikalischen Körper mit einer Masse m, aber mit einer allseitig vernachlässigbaren Ausdehnung. Diese Idealisierung ist nicht auf kleine Körper beschränkt, sondern kann sogar die Bewegung von Galaxienhaufen umfassen, also die größten Himmelskörper überhaupt. Als Idealisierung betrachtet man hier z. B. nur die Bewegung des Schwerpunktes oder die des Zentrums.

Wir bezeichnen ferner einen Massenpunkt als frei, wenn er den einwirkenden Kräften ohne einschränkende Zwangsbedingungen folgen kann. Die Bewegung des Massenpunktes ist charakterisiert durch den

1. Ortsvektor: $\vec{r}\,(t)$
2. Geschwindigkeitsvektor: $\vec{v}\,(t) = \dot{\vec{r}}\,(t)\,,$
3. Beschleunigungsvektor: $\vec{a}\,(t) = \ddot{\vec{r}}\,(t)\quad.$

Höhere Zeitableitungen spielen in der Physik keine Rolle.

Die für die Mechanik typische Aufgabenstellung besteht nun darin, aus einer vorgegebenen Beschleunigung $\vec{a}\,(t) = \ddot{\vec{r}}(t)$ oder Kraft $\vec{K} = m\vec{a}$ die Bahnkurve $\vec{r}\,(t)$ zu berechnen. Umgekehrt kann man aus einer vorgegebenen Bahnkurve $\vec{r}\,(t)$ auf die Beschleunigung $\vec{a}\,(t)$ bzw. auf die wirkende Kraft $\vec{K} = m\vec{a}$ schließen. Liegt die Beschleunigung vor, so muß man $\vec{a}\,(t)$ offensichtlich zeitlich integrieren, um $\vec{r}\,(t)$ zu bestimmen. Bei jeder dieser Integrationen erscheint eine Integrationskonstante, die erst bestimmt wird, wenn wir zusätzlich zu $\vec{a}\,(t)$ noch zwei Anfangsbedingungen vorgeben. Wir nehmen an, wir kennen die Geschwindigkeit $\vec{v}$ und den Ort $\vec{r}$ des Teilchens zu einem bestimmten Zeitpunkt t_0. Es ist also

$$\vec{a}\,(t) \text{ für alle } t,\ \vec{v}\,(t_0),\ \vec{r}\,(t_0)$$

bekannt. Dann ergibt sich für die Geschwindigkeit des Teilchens

$$\vec{v}\,(t) = \vec{v}\,(t_0) + \int_{t_0}^{t} \vec{a}\,(t')\,dt' \quad . \tag{1.80}$$

Für den Ortsvektor erhalten wir durch weitere Zeitintegration

$$\vec{r}\,(t) = \vec{r}\,(t_0) + \vec{v}\,(t_0)(t - t_0) + \int_{t_0}^{t} \left[\int_{t_0}^{t'} \vec{a}\,(t'')\,dt'' \right] dt' \quad . \tag{1.81}$$

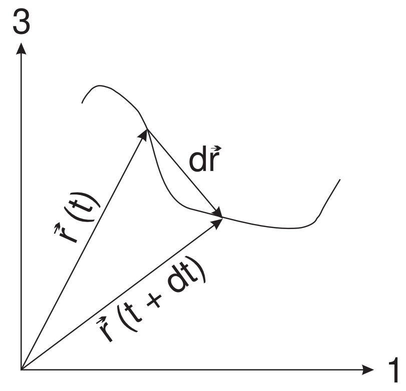
In kartesischen Koordinaten wird die Bahnkurve durch die drei zeitabhängigen Komponentenfunktionen $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$ beschrieben

$$\vec{r}\,(t) = (x_1(t),\, x_2(t),\, x_3(t)) = \sum_{j=1}^{3} x_j(t)\,\vec{e}_j \quad . \tag{1.82}$$

Die Basisvektoren sind zeitunabhängig und raumfest. Die Geschwindigkeit

$$\vec{v}\,(t) = \sum_{j=1}^{3} \dot{x}_j(t)\,\vec{e}_j \tag{1.83}$$

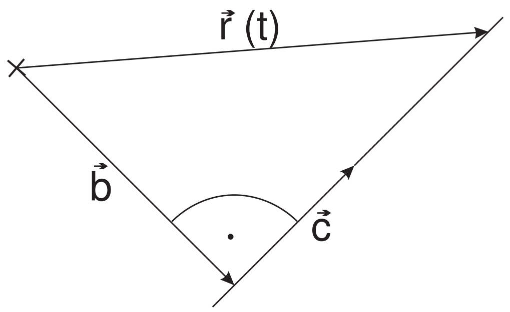
ist ein Vektor, der tangential zur Bahnkurve orientiert ist.



Beim Meßprozeß zur Festlegung der Geschwindigkeit sollte nicht vergessen werden, daß der Grenzprozeß bei der Ableitungsbildung experimentell generell nicht vollzogen wird, sondern daß die Messung stets in endlichen Zeitintervallen durchgeführt wird. Die zeitliche Änderung der Geschwindigkeit führt auf die Beschleunigung

$$\vec{a}\,(t) = \sum_{j=1}^{3} \ddot{x}_j(t)\,\vec{e}_j \quad . \tag{1.84}$$

Als Beispiel betrachten wir die Bewegung eines Massenpunktes auf einer Geraden. Wir können die Bewegung beschreiben, ohne auf ein spezielles Koordinatensystem Bezug zu nehmen.



$\vec{c}$ sei ein Vektor in Richtung der Bewegung, $\vec{b}$ ein Vektor senkrecht dazu. Für den Ortsvektor des Massenpunktes gilt dann

$$\vec{r}(t) = \vec{b} + \alpha(t)\vec{c} \quad . \tag{1.85}$$

$\alpha(t)$ ist ein Koeffizient, der den zeitlichen Verlauf widerspiegelt. Daraus ergeben sich durch entsprechende Zeitableitungen Geschwindigkeit und Beschleunigung zu

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \dot{\alpha}(t)\,\vec{c} \quad , & (1.86)\\ \vec{a} &= \ddot{\alpha}(t)\,\vec{c} \quad . & (1.87) \end{aligned}$$

Ein weiterer Spezialfall ist die gleichförmige geradlinige Bewegung. Es ist die einfachste Bewegungsform ohne jegliche Beschleunigung.

$$\begin{aligned} \vec{a}\,(t) &= 0 \quad , & (1.88)\\ \vec{v}\,(t) &= \vec{v}_0 \qquad \text{für alle } t \quad . & (1.89) \end{aligned}$$

Die Bewegung erfolgt also geradlinig in Richtung des Geschwindigkeitsvektors $\vec{v}_0$. Man nennt sie gleichförmig, weil in gleichen Zeiten gleiche Wegstrecken zurückgelegt werden.

Als nächstes Beispiel beschränken wir uns auf die gleichförmig beschleunigte Bewegung. Wir nehmen eine konstante Beschleunigung an

$$\vec{a}\,(t) = \vec{a}_0 \quad . \tag{1.90}$$

Dieser Fall kommt recht häufig in der Physik vor und ist daher von maßgeblicher Bedeutung. Ein Beispiel hierzu ist der freie Fall auf die Erde aufgrund der konstanten Erdbeschleunigung $\vec{a}_0 = \vec{g}$ mit $|\vec{g}| \approx 10\,\frac{\text{m}}{\text{sec}^2}$.

Für die Zeitintegrale über die Beschleunigung folgt

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t} \left[\int_{t_0}^{t'} \vec{a}\,(t'')\,dt''\right] dt' &= \int_{t_0}^{t} [\vec{a}_0\,(t'-t_0)]\,dt' \\ &= \vec{a}_0\,\left(\frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t_0^2\right) - \vec{a}_0\,t_0(t-t_0) = \frac{1}{2}\,\vec{a}_0\,(t-t_0)^2 \end{aligned} \tag{1.91}$$

Wir erhalten damit als Bahnkurve

$$\vec{r}\,(t) = \vec{r}\,(t_0) + \vec{v}\,(t_0)\,(t-t_0) + \frac{1}{2}\vec{a}_0\,(t-t_0)^2 \quad . \tag{1.92}$$

Die Geschwindigkeit des Massenpunktes nimmt linear mit der Zeit zu

$$\vec{v}\,(t) = \vec{v}\,(t_0) + \vec{a}_0\,(t-t_0) \quad . \tag{1.93}$$

2 Newtonsche Mechanik und der freie Fall

2.1 Grundgesetze der Newtonschen Dynamik

Wir haben uns bereits mit der Bewegung eines Massenpunktes beschäftigt. Dabei gingen wir aus von den Grundgrößen Länge, Zeit und Masse und haben daraus andere Größen abgeleitet. Im Zentrum der Betrachtungen standen dabei die Weg-Zeit-Gesetze. Die Ursache für diese Bewegung, die Kraft, haben wir bislang außer acht gelassen. Wir werden nun ausgehend von den Grundgrößen Gesetze der Dynamik ableiten bzw. diskutieren, die das Grundgerüst der Newtonschen Mechanik repräsentieren. Die theoretische Beschreibung muß sich zwangsläufig am Experiment messen. Erst der Grad der Übereinstimmung einer theoretischen Formulierung mit experimentellen Daten erlaubt eine Aussage über deren Richtigkeit. Dabei kann streng genommen eigentlich niemals von einer echten Verifikation gesprochen werden.

Wir gehen jetzt von der Kraft als vektorieller Größe aus. Die Kraft wirkt in einer gewissen Richtung. Kräfte sind im Alltagsverständnis die Ursache der Bewegung. Wir führen jetzt die aus der Erfahrung erwachsenen Newtonschen Axiome der Mechanik an.

Axiom 1 oder lex prima oder Galileisches Trägheitsgesetz:
Jeder Körper verharrt im Zustand der Ruhe oder der gleichförmigen Bewegung, wenn er nicht durch einwirkende Kräfte gezwungen wird, seinen Zustand zu ändern.
Etwas mehr einschränkend schreiben wir: Es gibt Koordinatensysteme, in denen ein kräftefreier Körper (Massenpunkt) im Zustand der Ruhe oder der geradlinig gleichförmigen Bewegung verharrt. Solche Systeme sollen Inertialsysteme heißen.

Den Trägheitswiderstand, den ein Körper einer Beschleunigung entgegensetzt, nennen wir Masse, genauer träge Masse. Jeder Körper besitzt eine skalare Eigenschaft, gegeben durch eine positive reelle Zahl, die wir die träge Masse m_t nennen. Das Produkt aus träger Masse und Geschwindigkeit eines Teilchens heißt Impuls:

$$\vec{p} = m\vec{v} \quad . \tag{2.1}$$

Hierzu gilt das
Axiom 2 oder lex secunda oder das Bewegungsgesetz:
Die Änderung des Impulses ist der Einwirkung der bewegenden Kraft proportional und geschieht in Richtung der Kraft

$$\vec{F} = \dot{\vec{p}} = \frac{d}{dt}\left(m_t \, \vec{v}\,\right) \quad . \tag{2.2}$$

Falls die Masse nicht zeitabhängig ist, folgt

$$\vec{F} = m_t \, \ddot{\vec{r}} = m_t \, \vec{a} \quad . \tag{2.3}$$

Dies ist die Grundgleichung der klassischen Mechanik. Oft genug ist aber auch die Masse m_t zeitabhängig, wie z. B. bei einem fahrenden Auto, das durch Treibstoffverbrauch leichter wird als Funktion der Zeit. Bisher haben wir nur die Wirkung einer Kraft auf einen Massenpunkt diskutiert, nicht jedoch die Rückwirkung derselben auf die Kraftquelle. Es gilt das

Axiom 3 oder lex tertia oder das Reaktionsprinzip oder actio = reactio:

Es sei

$\vec{F}_{12}$: Kraft des Körpers 2 auf Körper 1

$\vec{F}_{21}$: Kraft des Körpers 1 auf Körper 2.

Dann gilt

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \quad .$$

Damit folgt für $m_t = constant$

$$m_{t,1} \, \vec{a}_1 = -m_{t,2} \, \vec{a}_2 \quad . \tag{2.4}$$

Als Einheitensystem zur Messung der angesprochenen dynamischen Größen verwenden wir im allgemeinen SI-Einheiten.

$$[m_t] = \text{kg}$$

$$[\vec{r}\,] = \text{m}$$

$$[\vec{v}\,] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$[\vec{a}\,] = \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$[\vec{F}\,] = \text{N} = \text{kg}\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$[\vec{p}\,] = \text{kg}\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Ferner gilt das

Axiom 4 oder Corollarium oder das Superpositionsprinzip.

Wirken auf einen Massenpunkt mehrere Kräfte $\vec{F}_1,\ \vec{F}_2,\ ...,\ \vec{F}_n$, so addieren sich diese wie Vektoren zu einer Resultanten oder Resultierenden

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \quad . \tag{2.5}$$

Wir führen etwas allgemeiner das Kraftfeld ein

$$\vec{F} = \vec{F}(\vec{r},\, \dot{\vec{r}},\, t) \quad .$$

Jedem Punkt des Raumes wird eine im allgemeinen sogar zeitlich veränderliche auf den Massenpunkt wirkende Kraft zugeordnet, die zusätzlich auch noch von der Geschwindigkeit des Teilchens abhängen kann.

Des weiteren gehen wir von der empirischen Einsicht aus, das jeder Körper schwer ist. Dies manifestiert sich in der Schwerkraft

$$\vec{F} = m_s\, \vec{g} \quad , \tag{2.6}$$

die im Schwerefeld der Erde auf einen Massenpunkt wirkt. $\vec{g}$ ist in der Nähe der Erdoberfläche ein nahezu konstanter Vektor, der in Richtung Erdmittelpunkt zeigt. Definiert man diese Richtung als negative x_3-Richtung in einem kartesischen Koordinatensystem, so gilt:

$$\vec{g} = -(0,\, 0,\, g)$$

mit der Erdbeschleunigung

$$g = 9.8062\, \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \quad .$$

Als Gewicht eines Körpers bezeichnet man die Kraft $\vec{F}$, die auf diesen an der Erdoberfläche wirkt.

Die Identität

$$m_s = m_t = m$$

ist keine Selbstverständlichkeit. Es könnte im Prinzip ein materialabhängiger Unterschied auftreten. Nach der gegenwärtigen Meßsituation sind m_s und m_t gleichwertig. Dies ist auch der Inhalt des Einsteinschen Äquivalenzprinzips $(m_s = m_t)$. Dieses Prinzip bildet die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie.

Für Zentralkräfte gilt

$$\vec{F}(\vec{r}\,) = f(r,\, \dot{r},\, t) \cdot \vec{r} \quad . \tag{2.7}$$

Diese in der Natur sehr häufig auftretenden Krafttypen zeigen in Richtung des Ortsvektors. Das Zentrum wird bei $\vec{r} = 0$ angenommen. Beispielsweise gilt für die Gravitationskraft

$$f(r) = -\gamma\, \frac{mM}{r^3} \quad , \tag{2.8}$$

$$\gamma = 6.672 \cdot 10^{-11}\, \frac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{kg}^2} \quad , \tag{2.9}$$

wobei die Kraft ausgeübt wird von der Masse M im Koordinatenursprung auf ein Teilchen mit der Masse m am Ort $\vec{r}$.

2.2 Inertialsysteme und Galilei-Transformation

Bewegung ist ein relativer Begriff. Die Bewegung eines Körpers kann nur relativ zu einem Bezugssystem definiert werden. Koordinatensysteme können im Prinzip frei gewählt werden. Die natürlichen Systeme der Mechanik sind die durch Axiom 1 eingeführten Inertialsysteme, in denen sich ein kräftefreier Massenpunkt mit

$$\vec{v} = \text{const.}$$

auf einer Geraden bewegt. Nicht alle Koordinatensysteme sind auch Inertialsysteme. Wir nehmen an, es gibt zumindest ein Inertialsystem, z. B. dasjenige, in dem die Fixsterne ruhen. Hier verbirgt sich die Newtonsche Fiktion vom absoluten Raum.

Als konkretes Anwendungsbeispiel für die Newtonsche Mechanik wollen wir die Newtonsche Bewegungsgleichung für den Fall des senkrechten Wurfes und des schrägen Wurfes studieren. Nach den Newtonschen Axiomen schreiben wir für den senkrechten Wurf

$$\vec{F} = -m_s \, g \, \vec{e}_3 = m_t \, \ddot{z} \, \vec{e}_3 \quad . \tag{2.10}$$

Wir wollen diese Differentialgleichung mit den Anfangsbedingungen

$$z(t = 0) = 0 \tag{2.11}$$

und

$$\dot{z}(t = 0) = v_0 \tag{2.12}$$

lösen. Wir hatten allgemein für die gleichmäßig beschleunigte Bewegung eines Teilchens gefunden

$$\vec{v}\,(t) = \vec{v}\,(t_0) + \vec{a}_0(t - t_0) \quad . \tag{2.13}$$

Jetzt gilt in unserem Fall $t_0 = 0$ und $\vec{v}\,(t_0) = v_0 \, \vec{e}_3$ sowie $\vec{a}_0 = -g \, \vec{e}_3$. Damit resultiert

$$\dot{z}(t) = v_0 - gt \quad . \tag{2.14}$$

Die geforderte Anfangsbedingung ist offensichtlich erfüllt. Für den Ortsvektor hatten wir als Bahnkurve erhalten

$$\vec{r}\,(t) = \vec{r}\,(t_0) + \vec{v}\,(t_0)\,(t - t_0) + \frac{1}{2}\,\vec{a}_0\,(t - t_0)^2 \quad . \tag{2.15}$$

Mit $\vec{r}\,(t_0) = (0,\ 0,\ 0)$ führt dies auf

$$z(t) = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \quad . \tag{2.16}$$

Selbstverständlich resultiert dies auch aus (2.14) durch direkte Integration unter Berücksichtigung der Anfangsbedingung. Die Steigzeit $t = T$ beim senkrechten Wurf läßt sich ermitteln, indem wir berücksichtigen, daß am Umkehrpunkt die Geschwindigkeit null wird

$$\dot{z}(T) = 0 \quad . \tag{2.17}$$

Damit bekommen wir aus (2.14)

$$0 = v_0 - gT \qquad \Rightarrow \qquad T = \frac{v_0}{g} \quad . \tag{2.18}$$

Setzen wir die Steigzeit in (2.16) ein, so erhalten wir die maximale Steighöhe

$$h = z(T) = v_0 \frac{v_0}{g} - \frac{1}{2} g \frac{v_0^2}{g^2} = \frac{v_0^2}{2g} \quad . \tag{2.19}$$

Aus der Gleichung (2.14) folgt

$$t = \frac{v_0 - v}{g} \quad . \tag{2.20}$$

Dies erlaubt es die Koordinate z als Funktion der Geschwindigkeit anzugeben

$$\begin{aligned} z &= v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 = \frac{v_0(v_0 - v)}{g} - \frac{1}{2} g \frac{(v_0 - v)^2}{g^2} \\ &= \frac{2v_0^2 - 2v_0 v - v_0^2 - v^2 + 2v_0 v}{2g} = \frac{v_0^2 - v^2}{2g} \quad . \end{aligned} \tag{2.21}$$

Mit $h = \frac{v_0^2}{2g}$ ergibt sich

$$z = h - \frac{v^2}{2g} \quad . \tag{2.22}$$

Dies können wir umkehren und nach v auflösen

$$v(z) = \sqrt{2g\,(h - z)} \quad . \tag{2.23}$$

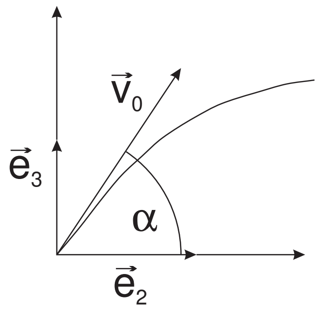
Als weiteres einfaches Problem der Newtonschen Mechanik behandeln wir jetzt den schrägen Wurf.

Die Anfangsgeschwindigkeit hat hier im Gegensatz zum senkrechten Wurf zwei Komponenten (in $\vec{e}_2$ und $\vec{e}_3$-Richtung). Als Anfangsbedingung legen wir fest: Zum Zeitpunkt

$$t = 0$$

sei

$$\vec{r}(t = 0) = 0$$



und

$$\dot{\vec{r}}(t=0) = \vec{v}_0 = v_0\,(\cos\alpha\,\vec{e}_2 + \sin\alpha\,\vec{e}_3) \quad . \tag{2.24}$$

α bezeichnet den Abwurfwinkel. Wieder gilt nach Newton

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -mg\,\vec{e}_3$$

oder

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -g\,\vec{e}_3 \quad . \tag{2.25}$$

Wir integrieren diese Gleichung und erhalten

$$\vec{v}\,(t) = -gt\,\vec{e}_3 + \vec{c}_1 \quad . \tag{2.26}$$

Aus den Anfangsbedingungen ergibt sich für $\vec{c}_1$

$$\vec{c}_1 = \vec{v}_0 = v_0(\cos\alpha\,\vec{e}_2 + \sin\alpha\,\vec{e}_3) \quad . \tag{2.27}$$

Somit folgt zusammengefaßt

$$\vec{v}\,(t) = (v_0\sin\alpha - gt)\vec{e}_3 + v_0\cos\alpha\,\vec{e}_2 \quad . \tag{2.28}$$

Die Steigzeit T erhalten wir wieder, indem wir die senkrechte Komponente der Geschwindigkeit null setzen, also

$$\vec{e}_3 \cdot \vec{v}\,(T) = 0 \quad . \tag{2.29}$$

Man erhält sofort

$$T = \frac{v_0\sin\alpha}{g} \quad . \tag{2.30}$$

Der Weg als Funktion der Zeit ergibt sich durch Integration der Gleichung (2.28)

$$\vec{r}\,(t) = (v_0 t\sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2)\,\vec{e}_3 + v_0 t\cos\alpha\,\vec{e}_2 \quad . \tag{2.31}$$

Da $\vec{r}(t = 0) = 0$ ist, muß auch die Integrationskonstante gleich Null sein.

Die Form der Bewegungskurve ergibt sich, wenn wir die Bewegung hinsichtlich der Komponenten $z(t)$ und $y(t)$ aufspalten und dann die Zeit eliminieren, um einen Zusammenhang $z(y)$ abzuleiten. Es ist

$$y = t v_0 \cos\alpha \tag{2.32}$$

und somit

$$t = \frac{y}{v_0 \cos\alpha} \quad . \tag{2.33}$$

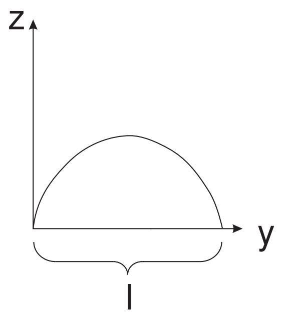
Für die z-Komponente gilt

$$z = v_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2} g t^2 \quad . \tag{2.34}$$

Wir setzen t ein und bekommen

$$\begin{aligned} z &= v_0 \frac{y}{v_0 \cos\alpha} \sin\alpha - \frac{1}{2} g \frac{y^2}{v_0^2 \cos^2\alpha} \\ &= -\frac{1}{2} \frac{g}{v_0^2 \cos^2\alpha} y^2 + \tan\alpha \, y \quad . \end{aligned} \tag{2.35}$$

Diese Gleichung ist eine Parabelgleichung der Form $-Ay^2 + By = z$, also eine nach unten geöffnete Parabel in der $y-z$-Ebene.



Die Wurfzeit t_0, die verstreicht, bis der Körper den Boden wieder erreicht, erhält man aus der Bedingung $z(t) = 0$ für $t \neq 0$. Es ist dann

$$v_0 t_0 \sin\alpha - \frac{1}{2} g t_0^2 = 0 \tag{2.36}$$

und somit

$$t_0 = \frac{2 v_0 \sin\alpha}{g} = 2T \quad . \tag{2.37}$$

Die Wurfzeit ist die doppelte Steigzeit, somit ist die Kurve der Wurfbewegung symmetrisch. Die Wurfweite l ergibt sich durch Einsetzen der Wurfzeit $2T$ in $y(t)$ (2.32)

$$l = 2T\, v_0 \cos\alpha = \frac{2v_0^2}{g} \sin\alpha\, \cos\alpha \quad . \tag{2.38}$$

Unter Ausnutzung der trigonometrischen Relation

$$\sin 2\alpha = 2 \sin\alpha\, \cos\alpha \tag{2.39}$$

können wir auch schreiben

$$l = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} \quad . \tag{2.40}$$

Hieraus ist sofort zu verstehen, daß sich eine maximale Wurfweite bei konstantem v_0 für den Wurfwinkel $\alpha = 45^o$ ergibt, denn für $\sin 2\alpha = 1$ ist $\alpha = 45^o$.

2.3 Reibung

Bislang sind wir von der idealisierenden Annahme einer Bewegung ohne jegliche Reibung ausgegangen. Jeder bewegte makroskopische Körper wird durch Wechselwirkung mit seiner Umgebung gebremst. Auch beim schrägen Wurf wird die Luftreibung die Bewegung modifizieren. Es treten also bei der Bewegung Reibungskräfte auf, die der Bewegungsrichtung entgegengesetzt sind. Jeder weiß aufgrund der Alltagserfahrung, daß durch Reibung Wärme entsteht. Damit verlassen wir eigentlich den Rahmen der Mechanik und müßten auch thermodynamische Gesetze behandeln. Ferner müßten wir auch innere Freiheitsgrade des Körpers in Rechnung stellen. Dennoch wollen wir uns im Rahmen dieser Vorlesung allein auf die Konsequenzen der Reibung im Rahmen der Mechanik beschränken. In zähen Medien gilt als empirischer Sachverhalt in sehr guter Näherung der Ansatz

$$\vec{F}_R = -\alpha(v)\vec{v} \quad . \tag{2.41}$$

$\alpha(v)$ muß dabei empirisch bestimmt werden. Spezielle Formen sind folgende Ansätze

1. Stokessche Reibung

   $$\vec{F}_R = -\alpha\vec{v} \quad . \tag{2.42}$$

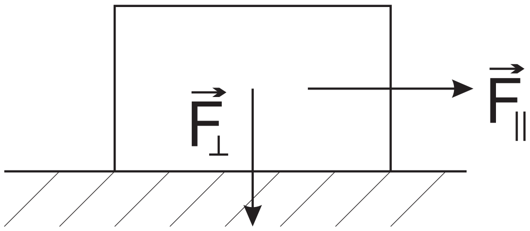
   Hier ist der Koeffizient $\alpha(v)$ konstant. Für die Brauchbarkeit dieses Ansatzes muß die Geschwindigkeit des sich bewegenden Körpers eine gewisse, vom reibenden Material abhängige Grenzgeschwindigkeit überschreiten.

2. Newtonsche Reibung

$$\vec{F}_R = -\eta v \vec{v} \tag{2.43}$$

Hier ist also $\alpha(v) = \eta v$. Sind die Relativgeschwindigkeiten in zähen Medien kleiner als die erwähnten Grenzgeschwindigkeiten, so verwendet man diesen Ansatz.

Als nächstes diskutieren wir die Reibung zwischen Festkörpern.



Ein fester Körper drückt mit der Kraft $\vec{F}_\perp$ auf die Unterlage. Für die Fortbewegung spielt nur die Tangentialkomponente $\vec{F}_{||}$ der äußeren Kraft eine Rolle. Bezüglich der **Gleitreibung** beobachtet man, daß die Reibungskraft weitgehend von der Auflagefläche und von der Relativgeschwindigkeit unabhängig ist.

$$\vec{F}_R = -\mu_g \, F_\perp \, \frac{\vec{v}}{v} \quad ; \, \alpha(v) = \mu_g \, F_\perp \, \frac{1}{v} \tag{2.44}$$

μ_g ist der Gleitreibungskoeffizient. Ferner ist hier $v > 0$. Für den Fall $v = 0$ tritt Haftreibung auf, die die Parallelkomponente $\vec{F}_{||}$ der äußeren Kraft kompensiert

$$\vec{F}_R = -\vec{F}_{||} \tag{2.45}$$

für $v = 0$. Dies gilt natürlich nur so lange, wie die Zugkraft nicht eine gewisse obere Grenze überschreitet, die durch den Haftreibungskoeffizienten μ_H festgelegt wird

$$F_{||} < \mu_H \, F_\perp \quad . \tag{2.46}$$

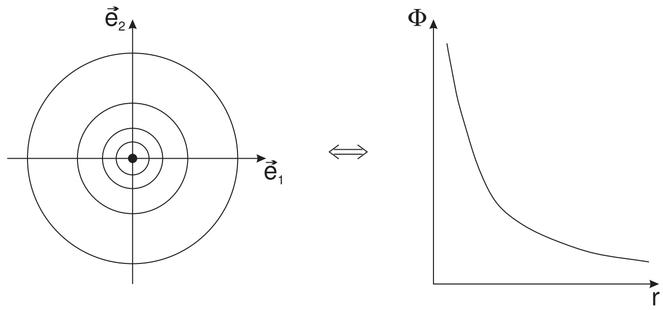
Das Experiment zeigt, daß generell $0 < \mu_g < \mu_H$ gilt.

2.4 Felder

Der Begriff des Feldes stellt ein fundamentales Konzept in der Physik dar. Man unterscheidet zwischen Skalarfeldern und Vektorfeldern als die einfachsten Sonderfälle des allgemeinen Begriffs des Tensorfeldes.
Ein **Skalarfeld** $\Phi(\vec{r}\,) = \Phi(x_1, x_2, x_3)$ ist eine skalarwertige Funktion dreier unabhängiger Variablen. Die Zahl 3 resultiert hierbei aus der Dimension unseres (physikalischen Raumes).
Beispiel: Wir betrachten die Funktion

$$\Phi(\vec{r}\,) = \frac{\alpha}{r} \qquad \text{mit} \qquad r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \quad . \tag{2.47}$$

Graphisch stellt man solche Felder durch 2-dimensionale Schnitte dar, in denen die Flächen $\Phi(\vec{r}\,) = const$ als sogenannte Höhenlinien erscheinen. Der Abstand der Linien entspricht dabei gleichen Wertunterschieden der Konstanten.



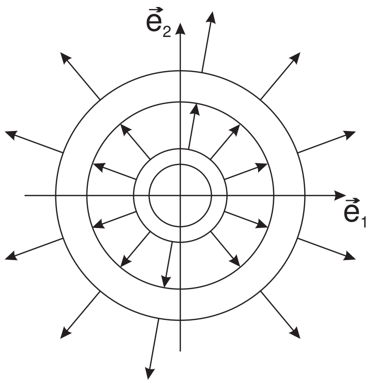
Grundlegend davon unterscheidet sich ein **Vektorfeld**. Es ist die Menge von durch Richtung und Betrag gekennzeichneten Vektoren

$$\vec{a}(\vec{r}\,) = \begin{pmatrix} a_1(\vec{r}\,) \\ a_2(\vec{r}\,) \\ a_3(\vec{r}\,) \end{pmatrix} \quad , \tag{2.48}$$

die jedem Punkt $\vec{r} = (x_1, x_2, x_3)$ eines Raumbereichs zugeordnet sind. Es handelt sich also um eine vektorwertige Funktion *dreier* unahängiger Variable.
Beispiel: Das elektrische Feld einer Punktladung ist gegeben durch

$$\vec{a}(\vec{r}\,) = q\,\frac{\vec{r}}{r^3} \quad . \tag{2.49}$$

Graphisch lassen sich Vektorfelder durch 2-dimensionale Schnitte darstellen, in denen die Flächen konstanter Feldstärke $|\vec{a}(\vec{r}\,))| =$ const. als Höhenlinien erscheinen, an denen man das Feld lokal durch einen Vektorpfeil charakterisiert.



Weitere Eigenschaften der Felder werden durch die Differentialoperatoren

- Gradient
- Divergenz
- Rotation

charakterisiert.

2.5 Der Gradient

Der Gradient ordnet jedem Skalarfeld ein Vektorfeld zu,

$$\Phi(\vec{r}\,) \quad \stackrel{\text{grad}}{\longrightarrow} \quad \vec{A}(\vec{r}\,) \quad . \tag{2.50}$$

Dabei gilt die folgende Definition

$$\begin{aligned} \vec{A}(x_1, x_2, x_3) &= \text{grad } \Phi \\ &= \vec{e}_1 \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + \vec{e}_2 \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} + \vec{e}_3 \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} \\ &= \sum_{i=1}^{3} \vec{e}_i \, \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \quad . \end{aligned} \tag{2.51}$$

Es ist dabei üblich, mit dem Symbol $\vec{\nabla}$ den *Nabla*-Operator einzuführen

$$\vec{\nabla} \equiv \sum_{i=1}^{3} \vec{e}_i \, \frac{\partial}{\partial x_i} \quad . \tag{2.52}$$

In dieser neuen Notation lautet der Gradient

$$\text{grad } \Phi = \vec{\nabla}\Phi \quad . \tag{2.53}$$

Welche wichtige Eigenschaften besitzt nun grad Φ? Dazu betrachten wir zunächst die Feldänderung

$$\begin{aligned} d\Phi &= \Phi(\vec{r} + d\vec{r}\,) - \Phi(\vec{r}\,) \\ &= \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} dx_3 \quad . \end{aligned} \tag{2.54}$$

Sie stellt das **totale Differential** einer Funktion von 3 Veränderlichen dar. Andererseits berechnen wir

$$
\begin{aligned}
\vec{\nabla}\Phi \cdot d\vec{r} &= \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x_1}\;,\frac{\partial\Phi}{\partial x_2}\;,\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}\right) \cdot \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{pmatrix} \\
&= \frac{\partial\Phi}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial\Phi}{\partial x_2}dx_2 + \frac{\partial\Phi}{\partial x_3}dx_3 \quad .
\end{aligned}
\tag{2.55}
$$

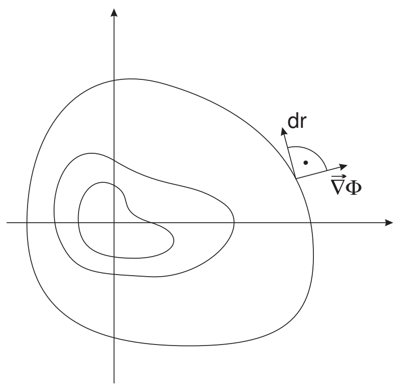
Vergleichen wir nun (2.54) mit (2.55) so erhalten wir für die Feldänderung in Richtung von $d\vec{r}$

$$
d\Phi = \vec{\nabla}\Phi \cdot d\vec{r} \quad . \tag{2.56}
$$

Das ist ein Skalarprodukt des Vektors $\vec{\nabla}\Phi$ mit dem (infinitesimalen) Vektor $d\vec{r}$. Nun wählen wir mit $d\vec{r}_A$ die Richtung so, daß Φ sich in diese Richtung nicht ändert:

$$
d\Phi = 0 = \vec{\nabla}\Phi \cdot d\vec{r}_A \; . \tag{2.57}
$$

Aus den Eigenschaften des Skalarproduktes folgt dann, daß der Vektor $\vec{\nabla}\Phi$ senkrecht auf $d\vec{r}_A$ steht. Andererseits definiert $d\Phi = 0$ Flächen $\Phi = const$, die man auch Äquipotentialflächen nennt. Mit anderen Worten: Der Vektor $\vec{\nabla}\Phi$ steht senkrecht auf den Flächen $\Phi = const$. Sein Betrag ist ein Maß für die Stärke der Änderung von Φ, wenn man senkrecht zu den Äquipotentialflächen fortschreitet.



Beispiele:

1. Für $\vec{a} = \mathrm{const}$ gilt

$$
\mathrm{grad}\,(\vec{a}\cdot\vec{r}\,) = \begin{pmatrix} \partial/\partial x_1 \\ \partial/\partial x_2 \\ \partial/\partial x_3 \end{pmatrix} [a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3] = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \vec{a} \tag{2.58}
$$

oder in Indexschreibweise:

$$
\mathrm{grad}\,(\vec{a}\cdot\vec{r}\,) = \vec{\nabla}(\vec{a}\cdot\vec{r}\,) = \sum_{i=1}^{3} \vec{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_{j=1}^{3} a_j x_j
$$

$$= \sum_{i,j} \vec{e}_i a_j \frac{\partial x_j}{\partial x_i} = \sum_{i,j} \vec{e}_i a_j \delta_{ij} = \sum_i \vec{e}_i a_i = \vec{a} \quad . \tag{2.59}$$

2.

$$\text{grad}\, r = \vec{\nabla}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2} = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{\vec{r}}{r} \equiv \vec{e}_r \quad . \tag{2.60}$$

3.

$$\begin{aligned} \text{grad}\, f(r) &= \sum_i \vec{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} f(r) = \sum_i \vec{e}_i \frac{\partial r}{\partial x_i} \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r} \sum_i \vec{e}_i \frac{\partial r}{\partial x_i} \\ &= \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r} \sum_i \vec{e}_i \frac{x_i}{r} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r} \vec{e}_r \quad . \end{aligned} \tag{2.61}$$

Für den Spezialfall $f(r) = r$ folgt das Ergebnis aus dem 2. Beispiel.
Betrachtet man $\vec{\nabla}$ formal als Vektor, dann gibt es zwei Verknüpfungen: das Skalarprodukt und das Vektorprodukt. Dem entsprechen die beiden Differentialoperatoren

$$\text{div}\, \vec{a} = \vec{\nabla} \cdot \vec{a} \tag{2.62}$$

$$\text{rot}\, \vec{a} = \vec{\nabla} \times \vec{a} \quad . \tag{2.63}$$

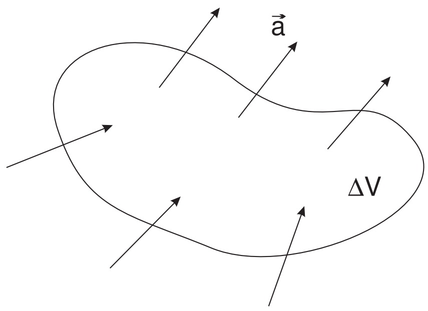
Sie werden im folgenden untersucht.

2.6 Die Divergenz

Gegeben sei ein Vektorfeld $\vec{a} = \vec{a}(\vec{r}\,)$. Die Operation div $\vec{a}$ erzeugt ein Skalarfeld

$$\text{div}\, \vec{a} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial a_i}{\partial x_i} \quad , \tag{2.64}$$

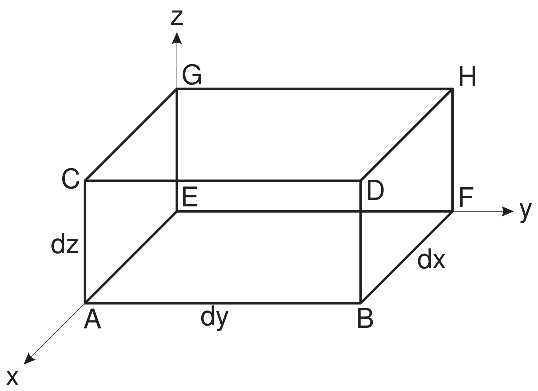
welches man auch als das **Quellenfeld** von $\vec{a}$ bezeichnet.



In diesem Bild kennzeichnen die Vektoren $\vec{a}$ das Vektorfeld. Die Divergenz ist hierbei ein Maß für den "Durchfluß" dieses Feldes durch ein Volumen $\triangle V$,

$$\text{div}\ \vec{a} = \lim_{\triangle V \to 0} \frac{\text{Fluß durch } \triangle V}{\triangle V} \quad . \tag{2.65}$$

Um der Divergenz eine physikalische Interpretation zu geben, betrachten wir die Größe $\vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v})$, wobei $\vec{v}(x, y, z)$ die Geschwindigkeit einer kompressiblen Flüssigkeit ist und $\rho(x, y, z)$ die Dichte am Punkt (x, y, z) bezeichnet. Wir betrachten ein kleines Volumenelement $dx\, dy\, dz = dV$.



Der Fluß in das Volumen pro Einheitszeit in positiver x-Richtung durch die Fläche EFGH ist

$$\text{(Fluß durch EFGH)} = \rho\, v_x\ dy\, dz \quad . \tag{2.66}$$

ρ als Dichte ist eine Größe, die auf das Volumenelement bezogen ist,

$$v_x\ dy\, dz = \frac{dx}{dt}\, dy\, dz = \frac{dV}{dt} \quad . \tag{2.67}$$

Der Fluß durch die Fläche ABCD hinaus lautet

$$\text{(Fluß durch ABCD)} = \left[\rho\, v_x + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x) dx\right]\ dy\, dz \quad . \tag{2.68}$$

Hierbei haben wir einer Änderung der Dichte oder der Geschwindigkeit Rechnung getragen. Die Größe $\rho\vec{v}$ haben wir in eine Taylor-Reihe entwickelt und die Entwicklung nach dem zweiten Glied abgebrochen. Damit lautet die Nettorate des Flußes oder die Differenz des Rein- und Rausflußes

$$\text{(Nettorate des Flußes in } x\text{-Richtung)} = \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x)\, dx\, dy\, dz \quad . \tag{2.69}$$

Wenn wir alle Grenzflächen betrachten, haben wir als Nettorate des Flußes pro Einheitszeit

$$\begin{aligned} \text{(Nettorate des Flußes pro Einheitszeit)} &= \left[\frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z)\right]\ dx\, dy\, dz \\ &= \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v})\, dx\, dy\, dz \quad . \end{aligned} \tag{2.70}$$

Damit ist der Fluß einer kompressiblen Flüssigkeit durch das Volumenelement $dV = dx\, dy\, dz$ pro Einheitszeit gerade $\vec{\nabla} \cdot (\rho\vec{v})$. Eine direkte Konsequenz ist die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}(\rho\vec{v}) = 0 \quad . \tag{2.71}$$

Der Nettofluß aus dem Volumen resultiert in einer reduzierten Dichte innerhalb des Volumens. Hierbei ist

$$\vec{j} = \rho\vec{v} \tag{2.72}$$

der Stromdichtevektor.

Für div $\vec{a} > 0$ (div $\vec{a} < 0$) besitzt das Vektorfeld Quellen (Senken).

Beispiele:

1. Durch Anwendung der Produktregel folgt für $\varphi(\vec{r}\,)$ und $\vec{a}\,(\vec{r}\,)$:

$$\begin{aligned} \text{div}\,(\varphi\vec{a}) &= \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}\varphi a_i = \sum_{i=1}^{3} a_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{3} \varphi \frac{\partial a_i}{\partial x_i} \\ &= \vec{a} \cdot \text{grad}\,\varphi + \varphi\;\text{div}\,\vec{a} = \vec{a} \cdot \vec{\nabla}\varphi + \varphi\vec{\nabla} \cdot \vec{a} \quad . \end{aligned} \tag{2.73}$$

2. Für $\vec{a} =$ const. folgt div $\vec{a} = 0$. Ein konstantes Feld ist quellenfrei.

3. Die Divergenz von $\vec{r}$ entspricht der Raumdimension,

$$\text{div}\,\vec{r} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial x_i}{\partial x_i} = 3 \quad . \tag{2.74}$$

Ausgehend von

$$\text{div grad}\,\varphi = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\varphi\right) = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i^2} \equiv \triangle\varphi \tag{2.75}$$

führen wir den **Laplace-Operator** ein:

$$\triangle = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} = \text{div grad} \quad . \tag{2.76}$$

2.7 Die Rotation

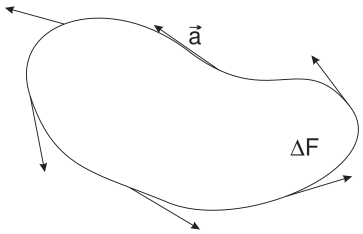
Gegeben sei ein Vektorfeld $\vec{a} = \vec{a}(\vec{r}\,)$, dann erzeugt

$$\text{rot}\,\vec{a} = \vec{\nabla} \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \partial/\partial x_1 & \partial/\partial x_2 & \partial/\partial x_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} \tag{2.77}$$

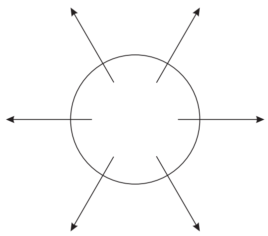
ein **Wirbelfeld**. Unter Benutzung des antisymmetrischen Tensors ε_{ijk} lautet die Komponentenschreibweise

$$\text{rot}\,\vec{a} = \sum_{i,j,k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_i}\, a_j\, \vec{e}_k \quad . \tag{2.78}$$

Man achte hier auf die Reihenfolge der Indizes. Anschaulich liefert $|\text{rot}\,\vec{a}|$ ein Maß für die "Wirbelstärke" um ein kleines Flächenelement $\triangle F$:



Aus dieser Anschauung folgt unmittelbar, daß Radialfelder $\vec{a} = \alpha\vec{r}$ mit konstantem α wirbelfrei sind:



Das läßt sich unmittelbar überprüfen:

$$\text{rot}\,\vec{a} = \sum_{i,j,k} \varepsilon_{ijk} \alpha \frac{\partial x_j}{\partial x_i}\, \vec{e}_k = \sum_{i,j,k} \varepsilon_{ijk} \delta_{ij} \alpha\, \vec{e}_k = 0\,. \tag{2.79}$$

Das letzte Gleichheitszeichen folgt aus der Tatsache, daß die Kombination einer antisymmetrischen und symmetrischen Größe innerhalb der Summe, $\varepsilon_{ijk}\delta_{ij}$, immer verschwindet. Das Kronecker-Symbol δ_{ij} ist nur für $i = j$ von null verschieden. In diesem Fall ist aber ε_{ijk} gleich null.

Beispiele:

1. Die Rotation des Produktes aus einem Skalar- und Vektorfeld ergibt nach Anwendung der Produktregel:

$$\begin{aligned}
\text{rot}\,(\varphi\vec{a}) &= \sum_{i,j,k} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_i}(\varphi a_j)\, \vec{e}_k \\
&= \sum_{i,j,k} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} a_j\, \vec{e}_k + \sum_{i,j,k} \varepsilon_{ijk} \varphi \frac{\partial a_j}{\partial x_i}\, \vec{e}_k \\
&= \text{grad}\,\varphi \times \vec{a} + \varphi\, \text{rot}\,\vec{a} = \vec{\nabla}\varphi \times \vec{a} + \varphi\vec{\nabla} \times \vec{a} \quad .
\end{aligned} \tag{2.80}$$

2. Die Verallgemeinerung von (2.79) lautet mit dem Ergebnis aus dem 1. Beispiel:

$$\text{rot}\,[f(r)\vec{r}] = (\text{grad}\ f) \times \vec{r} + f\ \text{rot}\ \vec{r} = 0 \quad . \tag{2.81}$$

Der erste Summand verschwindet, da grad$f$ und $\vec{r}$ parallel sind; der zweite Summand verschwindet wegen rot $\vec{r} = 0$.

3. Gradientenfelder sind wirbelfrei:

$$\text{rot grad}\ \varphi = 0\,. \tag{2.82}$$

Das überprüft man komponentenweise. Für die 1. Komponente erhalten wir z. B.

$$\begin{aligned} (\text{rot grad}\ \varphi)_1 &= \frac{\partial}{\partial x_2}(\text{grad}\ \varphi)_3 - \frac{\partial}{\partial x_3}(\text{grad}\ \varphi)_2 \\ &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2 \partial x_3} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_3 \partial x_2} = 0 \quad . \end{aligned} \tag{2.83}$$

Ebenso verschwinden die anderen beiden Komponenten. Expliziter gilt

$$\text{rot}\,\text{grad}\,\varphi = \sum_{i,j,k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\varphi\right)\vec{e}_k = \sum_{i,j,k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\varphi\right)\vec{e}_k = 0 \quad . \tag{2.84}$$

4. Wirbelfelder sind quellenfrei:

$$\text{div rot}\ \vec{a} = 0 \quad . \tag{2.85}$$

Es ist

$$\begin{aligned} \text{div}\,\text{rot}\,\vec{a} &= \sum_{l=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_l}\vec{e}_l \cdot \sum_{i,j,k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_i} a_j \vec{e}_k \\ &= \sum_{i,j,k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial x_i} a_j = \sum_{i,j,k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial^2 a_j}{\partial x_k\, \partial x_i} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i,j,k=1}^{3}\left(\varepsilon_{ijk}\frac{\partial^2 a_j}{\partial x_k\,\partial x_i} + \varepsilon_{ijk}\frac{\partial^2 a_j}{\partial x_k\,\partial x_i}\right) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i,j,k=1}^{3}\left(\varepsilon_{ijk}\frac{\partial^2 a_j}{\partial x_k\,\partial x_i} + \varepsilon_{kji}\frac{\partial^2 a_j}{\partial x_i\,\partial x_k}\right) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i,j,k=1}^{3}(\varepsilon_{ijk} + \varepsilon_{kji})\,\frac{\partial^2 a_j}{\partial x_k\,\partial x_i} = 0 \quad , \end{aligned} \tag{2.86}$$

da $\varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{kji}$. In der dritten Zeile von (2.86) werden k und i im zweiten Term gegeneinander umbenannt.

2.8 Kraft, Potential und Arbeit

Wir wollen nun die Begriffe des Potentials, des konservativen Kraftfeldes und der Arbeit einführen. Es wurden bereits die Eigenschaften des Nabla-Operators diskutiert

$$\vec{\nabla} = \vec{e}_1 \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_2 \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_3 \frac{\partial}{\partial z} \quad . \tag{2.87}$$

Dieser Vektoroperator kann mittels des Vektorprodukts auf ein Vektorfeld angewendet werden. Die resultierende vektorielle Größe nennt man die Rotation des Vektorfeldes und ist ein Maß für die Verwirbelung eines Vektorfeldes

$$\mathrm{rot}\vec{A} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad . \tag{2.88}$$

Wir wollen zur Illustration anhand eines einfachen Beispiels die Rotation eines Vektorfelds ermitteln. Wir gehen aus von

$$\vec{A} = 3x^2y\,\vec{e}_1 + yz^2\,\vec{e}_2 - xz\,\vec{e}_3 \tag{2.89}$$

und erhalten damit

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} \times \vec{A} &= \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 3x^2y & yz^2 & -xz \end{vmatrix} = \\
&= \vec{e}_1 \left(\frac{\partial}{\partial y}(-xz) - \frac{\partial}{\partial z}(yz^2) \right) \\
&\quad -\vec{e}_2 \left(\frac{\partial}{\partial x}(-xz) - \frac{\partial}{\partial z}(3x^2y) \right) + \vec{e}_3 \left(\frac{\partial}{\partial x}(yz^2) - \frac{\partial}{\partial y}(3x^2y) \right) \\
&= -2zy\,\vec{e}_1 + z\vec{e}_2 - 3x^2\,\vec{e}_3 \quad .
\end{aligned} \tag{2.90}$$

Wir bezeichnen ein Kraftfeld als konservativ, wenn es darstellbar ist durch

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} V \quad , \tag{2.91}$$

wobei V ein skalares Feld ist. Dann gilt für das Kraftfeld

$$\mathrm{rot}\vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{F} = 0 \quad . \tag{2.92}$$

Wir prüfen diesen Schritt nach mit $\vec{\nabla} V = \frac{\partial}{\partial x} V\,\vec{e}_1 + \frac{\partial}{\partial y} V\,\vec{e}_2 + \frac{\partial}{\partial z} V\,\vec{e}_3$

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} \times \vec{F} &= -\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} V) = - \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial x} V & \frac{\partial}{\partial y} V & \frac{\partial}{\partial z} V \end{vmatrix} \\
&= -\left[\vec{e}_1 \left(\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial z} V - \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial y} V \right) - \vec{e}_y \left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial z} V - \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial x} V \right) \right. \\
&\quad \left. +\vec{e}_3 \left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} V - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} V \right) \right] = 0 \quad .
\end{aligned} \tag{2.93}$$

Wir haben generell die Identität der Differentialoperatoren vorliegen

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} V) = \text{rot}(\text{grad} V) \equiv 0 \quad . \tag{2.94}$$

Die Größe V werden wir als das zum Kraftfeld $\vec{F}$ gehörige Potential bezeichnen. Ein Potential ist niemals eindeutig. Beispielsweise können wir zu jedem Potential eine beliebige Konstante addieren. Aufgrund der Definition

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} V \tag{2.95}$$

und aufgrund der Wirkung des Ableitungsoperators fällt diese Konstante heraus, und es resultiert dasselbe Kraftfeld wie ohne diese Konstante.

Keineswegs jedes Kraftfeld läßt sich durch den Gradienten eines Potentials darstellen und ist somit konservativ. Wir können aber die auf einen Massenpunkt wirkenden Kräfte in konservative und nicht konservative Kräfte zerlegen, wobei letztere auch dissipativ genannt werden.

$$\vec{F} = \vec{F}_{\text{kons}} + \vec{F}_{\text{diss}} \quad . \tag{2.96}$$

Wir kommen jetzt zur Definition der Arbeit, die wir mit A oder W bezeichnen. Die Arbeit, die wir aufbringen müssen, um einen Gegenstand vom Punkt P_1 zum Punkt P_2 zu bewegen, ist definiert als Wegintegral der Kraft

$$W = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} \tag{2.97}$$

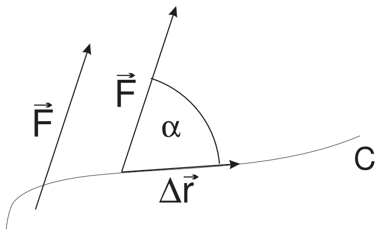
mit $d\vec{r} = (dx,\, dy,\, dz)$. Das Inkrement $d\vec{r}$ ist ein Vektor, die Arbeit hingegen ist aufgrund des Skalarproduktes ein Skalar. Wir wollen uns dies etwas klarer machen. Gesucht ist die Arbeit, die wir benötigen, um vom Punkt P_1 auf einer Raumkurve $\vec{r} = \vec{r}(t)$ im Kraftfeld $\vec{F}(\vec{r})$ zum Punkt P_2 zu gelangen. Dazu zerlegen wir die Raumkurve in kleine Wegstücke $\Delta\vec{r}$, berechnen den Ausdruck $F\,\Delta r \cos\alpha$ mit $\alpha = \sphericalangle(\vec{F},\, \Delta\vec{r})$, der die gesuchte Arbeit für die Strecke Δr angibt und summieren schließlich über alle Teilbereiche Δr. Die Arbeit ist dann gegeben durch

$$\sum_{\Delta r_i} F_i\, \Delta r_i \cos\alpha_i \tag{2.98}$$

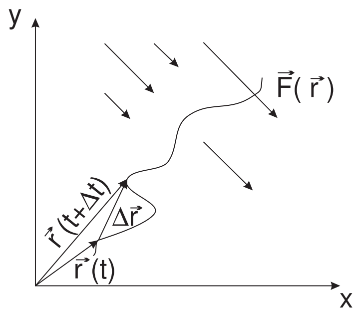
$$\text{mit} \quad \alpha_i = \sphericalangle(\vec{F}_i,\, \Delta\vec{r}_i) \tag{2.99}$$

Gehen wir zu infinitesimalen Wegstücken $d\vec{r}$ über, so erhalten wir die Arbeit als Linienintegral

$$\begin{aligned} \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \lim_{\Delta r_i \to 0} \sum_{\Delta r_i} F_i\, \Delta r_i \cos\alpha_i = \\ &= \lim_{\Delta r_i \to 0} \sum_{\Delta r_i} \vec{F} \cdot \Delta\vec{r}_i \quad . \end{aligned} \tag{2.100}$$



Erläuterung des Wegintegrals über die Kraft $\vec{F}$ entlang der Kurve C



C ist hierbei die Bezeichnung für die Raumkurve $\vec{r}\,(t)$ zwischen dem Anfangspunkt $P_1 = \vec{r}\,(t_1)$ und dem Endpunkt $P_2 = \vec{r}\,(t_2)$.
Wir geben nun eine Möglichkeit an, das Linienintegral explizit zu berechnen. Dazu zerlegen wir das Vektorfeld $\vec{F}$ in seine kartesischen Komponenten und setzen dies in das Integral ein.

$$\int \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int (F_x,\, F_y,\, F_z) \cdot d\vec{r} \quad . \tag{2.101}$$

Die kartesischen Komponenten sind noch eine Funktion des Ortes, d. h.

$$\begin{aligned} F_x &= F_x(x,\, y,\, z) \quad , \\ F_y &= F_y(x,\, y,\, z) \quad , \\ F_z &= F_z(x,\, y,\, z) \quad . \end{aligned} \tag{2.102}$$

Die gegebene Raumkurve läßt sich auch in Komponenten schreiben als

$$\vec{r}\,(t) = (x(t),\, y(t),\, z(t)) \quad . \tag{2.103}$$

Für das Integral benötigen wir die Komponenten des Vektorfeldes $\vec{F}$ entlang der Raumkurve in Abhängigkeit des Parameters t. Wir erhalten dies, indem wir die entsprechenden Komponenten der Raumkurve $\vec{r}\,(t)$ in $F_x,\ F_y$ und F_z einsetzen,

$$\begin{aligned} F_x(t) &= F_x(x(t),\, y(t),\, z(t)) \quad , \\ F_y(t) &= F_y(x(t),\, y(t),\, z(t)) \quad , \\ F_z(t) &= F_z(x(t),\, y(t),\, z(t)) \quad . \end{aligned} \tag{2.104}$$

Für $d\vec{r}$ schreiben wir

$$d\vec{r} = \frac{d\vec{r}}{dt}\, dt \tag{2.105}$$

$$\text{mit} \quad \frac{d\vec{r}}{dt} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right) \quad . \tag{2.106}$$

Für das Arbeitsintegral ergibt sich durch Einsetzen

$$\begin{aligned}
\int\limits_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int\limits_C \left[(F_x(x(t), y(t), z(t)), F_y(x(t), y(t), z(t)), F_z(x(t), y(t), z(t))) \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}\right] dt \\
&= \int \left[F_x(t)\frac{dx}{dt} + F_y(t)\frac{dy}{dt} + F_z(t)\frac{dz}{dt}\right] dt \quad .
\end{aligned} \tag{2.107}$$

Dieses Integral ist in der Regel einfach zu berechnen; das Einsetzen der Grenzen nach der Integration liefert das gesuchte Linienintegral. Wir üben dies anhand eines Beispiels.

Das Vektorfeld $\vec{F}$ und die Raumkurve $\vec{r}(t)$ seien gegeben durch

$$\begin{aligned}
\vec{F} &= (3x^2 - 6yz, 2y + 3xz, 1 - 4xyz^2) \\
\vec{r}(t) &= (t, t^2, t^3) \quad .
\end{aligned}$$

Die Komponenten der Raumkurve sind

$$\begin{aligned}
x = t &\Rightarrow \dot{x} = 1 \\
y = t^2 &\Rightarrow \dot{y} = 2t \quad . \\
z = t^3 &\Rightarrow \dot{z} = 3t^2
\end{aligned}$$

Wir setzen nun ein

$$\begin{aligned}
\int \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int \left(F_x\frac{dx}{dt} + F_y\frac{dy}{dt} + F_z\frac{dz}{dt}\right) dt \\
&= \int [(3t^2 - 6t^5) \cdot 1 + (2t^2 + 3t^4) \cdot 2t + (1 - 4t^9) \cdot 3t^2]\, dt
\end{aligned}$$

Das Integral in den Grenzen $t_1 = 0$ und $t_2 = 1$ liefert dann

$$\int\limits_{t=0}^{t=1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 2 \quad . \tag{2.108}$$

Für konservative Kraftfelder gilt nun die entscheidene Aussage, daß derartige Wegintegrale über die Kraft zwischen den Punkten P_1 und P_2 unabhängig vom explizit gewählten Weg sind und nur vom Anfangspunkt P_1 und vom Endpunkt P_2 abhängen. Dazu verwenden wir den Satz von Stokes, den wir beweisen müssen.

2.9 Koordinatensysteme

Bei der konkreten Lösung physikalischer Probleme ist die Wahl eines geeigneten Koordinatensystems ein sehr wesentlicher Lösungsschritt. Wichtig dabei ist die Wahl der Basisvektoren, die man vorteilhaft als Einheitsvektoren festlegt, sowie des Koordinatenursprungs. Wir sind bislang bei der Beschreibung des Ortsvektors $\vec{r}$ von kartesischen Einheitsvektoren $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$ und $\vec{e}_z$ ausgegangen. Damit haben wir

$$\vec{r} = (x, y, z) \quad . \tag{2.109}$$

Allgemeiner können wir auch einen Punkt durch krummlinige orthogonale Koordinaten festlegen

$$\vec{r} = (q_1, q_2, q_3) \quad . \tag{2.110}$$

Zwischen den verschiedenen Koordinatensystemen gelten dann die Transformationsrelationen

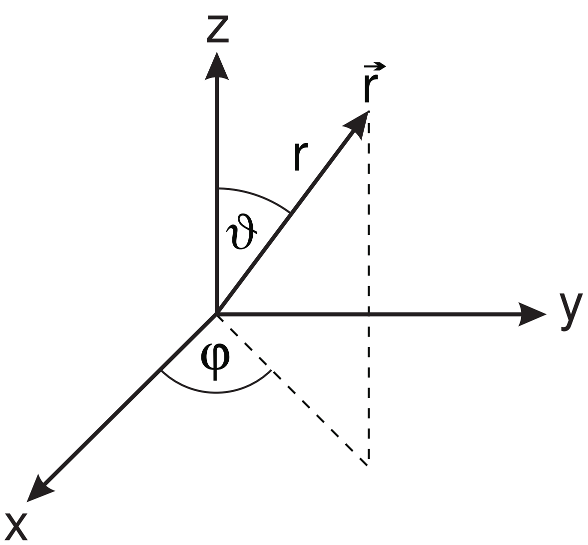
$$\begin{aligned} q_1 &= q_1(x, y, z) \quad , \\ q_2 &= q_2(x, y, z) \quad , \\ q_3 &= q_3(x, y, z) \end{aligned} \tag{2.111}$$

sowie die inversen Relationen

$$\begin{aligned} x &= x(q_1, q_2, q_3) \quad , \\ y &= y(q_1, q_2, q_3) \quad , \\ z &= z(q_1, q_2, q_3) \quad . \end{aligned} \tag{2.112}$$

Populäre Vertreter solcher krummlinigen Koordinaten sind die Kugelkoordinaten (r, ϑ, φ) und die Zylinderkoordinaten(ϱ, φ, z). Die Kugelkoordinaten sind definiert durch dieinverse Relation

$$\begin{aligned} x &= r \sin\vartheta \cos\varphi \quad , \\ y &= r \sin\vartheta \sin\varphi \quad , \\ z &= r \cos\vartheta \quad . \end{aligned} \tag{2.113}$$

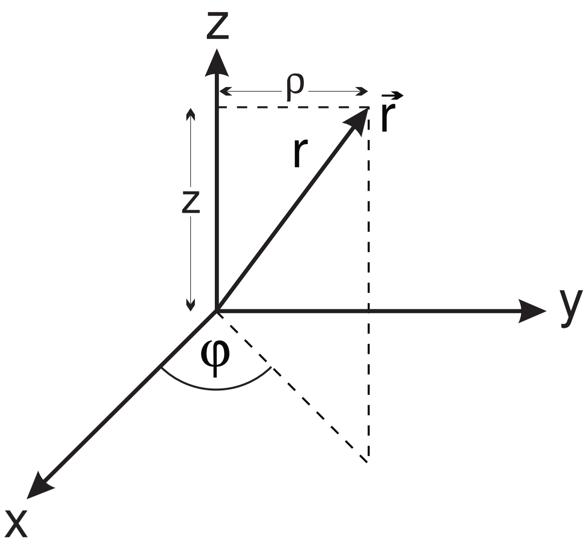


Kugelkoordinaten eignen sich insbesondere zur Beschreibung von Problemen mit sphärischer Symmetrie. Es treten neben der Länge r des Ortsvektors noch zwei Winkel auf, die folgenden Definitionsbereich besitzen:

$$\begin{aligned} &0 \geq \vartheta \geq \pi && \text{Polarwinkel} \\ &0 \geq \varphi \geq 2\pi && \text{Azimut} \end{aligned} \tag{2.114}$$

Für Zylinderkoordinaten gelten die Transformationsformeln

$$\begin{aligned} x &= \varrho \cos \varphi \quad , \\ y &= \varrho \sin \varphi \quad , \\ z &= z \quad . \end{aligned} \tag{2.115}$$



Zylinderkoordinaten verwendet man zweckmäßig bei Problemen, die eine Drehsymmetrie um eine feste Achse besitzen. Diese feste Achse erklärt man vorteilhaft zur z-Achse.

Bei Kugelkoordinaten lautet die Umkehrtransformation

$$\begin{aligned} r &= \left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{1}{2}} \quad , \\ \vartheta &= \arccos \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}} \quad , \\ \varphi &= \arctan \frac{y}{x} \quad . \end{aligned} \tag{2.116}$$

Dies verifiziert man sofort durch Einsetzen der Transformationsformeln (2.113).

Entsprechend gilt für Zylinderkoordinaten

$$\begin{aligned} \varrho &= \left(x^2+y^2\right)^{\frac{1}{2}} \quad , \\ \varphi &= \arctan \frac{y}{x} \quad , \\ z &= z \quad . \end{aligned} \tag{2.117}$$

Die letzte Gleichung wird nur aus Vollständigkeitsgründen aufgeführt.

Wir stellen uns nun die Aufgabe, die Einheitsvektoren für die transformierten Koordinaten q_1, q_2 und q_3 festzulegen. Ferner wollen wir das Inkrement des Ortsvektors $\mathrm{d}\vec{r}$, das Volumenelement $\mathrm{d}V$, das Flächenelement $\mathrm{d}F$ sowie die Differentialoperatoren Gradient, Divergenz, Rotation und den Laplace-Operator in den transformierten Koordinaten ausdrücken. Zunächst legen wir Koordinatenlinien fest. Setzt man in allen Transformationsformeln

$$x_k = x_k\left(q_1, q_2, q_3\right) \quad \text{mit } k = 1, 2, 3 \tag{2.118}$$

Zwei der drei Koordinaten q_i konstant, so ergibt sich mit $j \neq i$ eine durch $j$parametrisierte Raumkurve, die man die q_j-Koordinatenlinie nennt.

Wir legen jetzt die Einheitsvektoren in den Koordinaten q_1, q_2 und q_3 fest. Als normierten Basisvektor $\vec{e}_{q_1}$ im Punkt P wählen wir einen Vektor vom Betrag 1 tangential zur Koordinatenlinie $q_2 = c_2$, $q_3 = c_3$ im Punkt P mit $c_2 =$ const. und $c_3 =$const. Seine Richtung soll dem Durchlaufsinn der Koordinatenlinie bei wachsendem q_1 entsprechen.

$\vec{e}_{q_1}$ läßt sich durch partielle Differentiation des Ortsvektors nach q_1 und anschließendes Normieren berechnen. Es ist

$$\vec{e}_{q_1} = \frac{\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial q_1}}{\left|\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial q_1}\right|} \tag{2.119}$$

oder

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} = \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1}\right| \vec{e}_{q_1} \quad . \tag{2.120}$$

Allgemeiner haben wir

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} = \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}\right| \vec{e}_{q_i} = h_i \vec{e}_{q_i} \quad \text{mit } i = 1, 2, 3 \tag{2.121}$$

und den Skalenfaktoren

$$h_i = \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}\right| \quad . \tag{2.122}$$

In Kugelkoordinaten haben wir daher mit

$$\vec{r} = (r \sin\vartheta \cos\varphi, r \sin\vartheta \sin\varphi, r \cos\vartheta) \tag{2.123}$$

die Einheitsvektoren

$$\vec{e}_r = \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial r}}{\left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial r}\right|} = (\sin\vartheta \cos\varphi, \sin\vartheta \sin\varphi, \cos\vartheta) \quad , \tag{2.124}$$

$$\begin{aligned} \vec{e}_\vartheta = \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial \vartheta}}{\left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial \vartheta}\right|} &= \frac{(r\cos\vartheta\cos\varphi, r\cos\vartheta\sin\varphi, -r\sin\vartheta)}{r} \\ &= (\cos\vartheta\cos\varphi, \cos\vartheta\sin\varphi, -\sin\vartheta) \quad , \end{aligned} \tag{2.125}$$

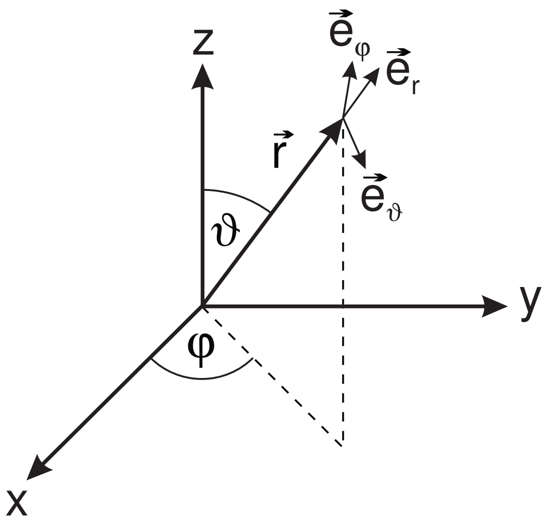
$$\begin{aligned} \vec{e}_\varphi = \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi}}{\left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi}\right|} &= \frac{(-r\sin\vartheta\sin\varphi, r\sin\vartheta\cos\varphi, 0)}{r\sin\vartheta} \\ &= (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0) \quad . \end{aligned} \tag{2.126}$$

Die Skalenfaktoren sind hierbei

$$h_r = 1 \quad , \tag{2.127}$$

$$h_\vartheta = r \quad , \tag{2.128}$$

$$h_\varphi = r\sin\vartheta \quad . \tag{2.129}$$



In Zylinderkoordinaten lauten entsprechend mit

$$\vec{r} = (\varrho\cos\varphi, \varrho\sin\varphi, z) \tag{2.130}$$

die Einheitsvektoren

$$\vec{e}_\varrho = \frac{\frac{\partial\vec{r}}{\partial\varrho}}{\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial\varrho}\right|} = (\cos\varphi, \sin\varphi, 0) \quad , \tag{2.131}$$

$$\vec{e}_\varphi = \frac{\frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi}}{\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi}\right|} = \frac{(-\varrho\sin\varphi, \varrho\cos\varphi, 0)}{\varrho} = (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0) \quad , \tag{2.132}$$

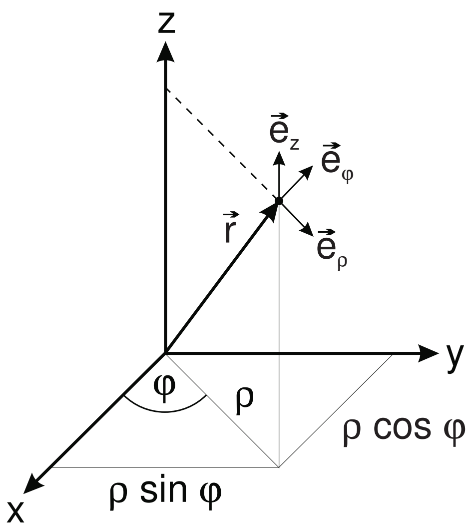
$$\vec{e}_z = \frac{\frac{\partial\vec{r}}{\partial z}}{\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial z}\right|} = (0, 0, 1) \quad . \tag{2.133}$$

Die Skalenfaktoren sind hierbei

$$h_\varrho = 1 \quad , \tag{2.134}$$

$$h_\varphi = \varrho \quad , \tag{2.135}$$

$$h_z = 1 \quad . \tag{2.136}$$



In kartesischen Koordinaten gilt für das Differential des Ortsvektors

$$\mathrm{d}\vec{r} = \sum_{j=1}^{3} \mathrm{d}x_j \, \vec{e}_j = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \vec{r}}{\partial x_j} \mathrm{d}x_j \quad . \tag{2.137}$$

Dies impliziert

$$\vec{e}_j = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x_j} \quad . \tag{2.138}$$

In krummlinigen orthogonalen Koordinaten gilt für das Differential des Ortsvektors

$$\mathrm{d}\vec{r} = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_j} \mathrm{d}q_j \quad . \tag{2.139}$$

Aufgrund von (2.121) folgt

$$\mathrm{d}\vec{r} = \sum_{j=1}^{3} h_j \mathrm{d}q_j \vec{e}_{q_j} \quad . \tag{2.140}$$

Somit haben wir in Kugelkoordinaten

$$\mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}r \vec{e}_r + r \, \mathrm{d}\vartheta \vec{e}_\vartheta + r \sin\vartheta \, \mathrm{d}\varphi \vec{e}_\varphi \tag{2.141}$$

und in Zylinderkoordinaten

$$\mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}e_\varrho \, \vec{e}_\varrho + \varrho \, \mathrm{d}\varphi \, \vec{e}_\varphi + \mathrm{d}z \, \vec{e}_z \quad . \tag{2.142}$$

Als nächsten Schritt transformieren wir die Differentialoperatoren in die neuen Koordinaten q_i.

2.9.1 Der Gradient

Zunächst betrachten wir den Gradienten einer skalaren Funktion Φ. Die q_i-te Komponente von gradΦ lautet nach (2.121) aufgrund der Projektion

$$\vec{e}_{q_i} \cdot \mathrm{grad}\Phi \quad = \quad h_i^{-1} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \cdot \mathrm{grad}\Phi$$

$$
\begin{aligned}
&= h_i^{-1}\left(\frac{\partial x_1}{\partial q_i}\frac{\partial \Phi}{\partial x_1}+\frac{\partial x_2}{\partial q_i}\frac{\partial \Phi}{\partial x_2}+\frac{\partial x_3}{\partial q_i}\frac{\partial \Phi}{\partial x_3}\right)\\
&= h_i^{-1}\frac{\partial \Phi}{\partial q_i} \quad . \qquad (2.143)
\end{aligned}
$$

Hierbei hatten wir $\vec{r} = (x_1, x_2, x_3)$ gesetzt. Damit erhalten wir für den Gradienten generell in krummlinigen orthogonalen Koordinaten

$$
\vec{\nabla} = \left(h_1^{-1}\frac{\partial}{\partial q_1}, h_2^{-1}\frac{\partial}{\partial q_2}, h_3^{-1}\frac{\partial}{\partial q_3}\right) = \sum_{j=1}^{3} \vec{e}_{q_j} h_j^{-1}\frac{\partial}{\partial q_j} \quad . \qquad (2.144)
$$

Der Unterschied zu den kartesischen Koordinaten liegt hierbei im Auftreten der Skalenfaktoren h_j.

2.9.2 Die Divergenz

Mit der Darstellung (2.144) des Nabla-Operators und der Produktregel folgt

$$
\begin{aligned}
\operatorname{div}\vec{a} &= \vec{\nabla}\cdot\vec{a} = \left(\sum_{j=1}^{3}\vec{e}_{q_j}h_j^{-1}\frac{\partial}{\partial q_j}\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^{3}a_i\vec{e}_{q_i}\right)\\
&= \sum_{i=1}^{3}h_i^{-1}\frac{\partial a_i}{\partial q_i} + \sum_{i,j=1}^{3}a_i h_j^{-1}\vec{e}_{q_j}\cdot\frac{\partial \vec{e}_{q_i}}{\partial q_j} \quad . \qquad (2.145)
\end{aligned}
$$

Das Skalarprodukt im zweiten Term analysieren wir etwas näher. Wir nutzen aus, daß gilt

$$
\frac{\partial^2\vec{r}}{\partial q_j\partial q_i} = \frac{\partial^2\vec{r}}{\partial q_i\partial q_j} \quad . \qquad (2.146)
$$

Mit

$$
\vec{e}_{q_i} = h_i^{-1}\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_i} \qquad (2.147)
$$

können wir damit schreiben

$$
\frac{\partial}{\partial q_j}\left(h_i\vec{e}_{q_i}\right) = \frac{\partial}{\partial q_i}\left(h_j\vec{e}_{q_j}\right) \quad . \qquad (2.148)
$$

Ausdifferenzieren ergibt

$$
h_i\frac{\partial\vec{e}_{q_i}}{\partial q_j} + \frac{\partial h_i}{\partial q_j}\vec{e}_{q_i} = h_j\frac{\partial\vec{e}_{q_j}}{\partial q_i} + \frac{\partial h_j}{\partial q_i}\vec{e}_{q_j} \quad . \qquad (2.149)
$$

Diesen Ausdruck multiplizieren wir auf beiden Seiten skalar mit $\vec{e}_{q_j}$ und erhalten

$$
h_i\vec{e}_{q_j}\cdot\frac{\partial\vec{e}_{q_i}}{\partial q_j} + \delta_{ij}\frac{\partial h_i}{\partial q_j} = h_j\vec{e}_{q_j}\frac{\partial\vec{e}_{q_j}}{\partial q_i} + \frac{\partial h_j}{\partial q_i} \quad . \qquad (2.150)
$$

Der erste Term auf der rechten Seite verschwindet, da gilt

$$\vec{e}_{q_j} \cdot \frac{\partial \vec{e}_{q_j}}{\partial q_i} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial q_i}\left(\vec{e}^{\,2}_{q_j}\right) = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial q_i}1 = 0 \quad . \tag{2.151}$$

Damit folgt

$$h_i \vec{e}_{q_j} \cdot \frac{\partial \vec{e}_{q_i}}{\partial q_j} = \frac{\partial h_j}{\partial q_i} - \delta_{ij}\frac{\partial h_i}{\partial q_j} = (1-\delta_{ij})\frac{\partial h_j}{\partial q_i} \quad . \tag{2.152}$$

Dies setzen wir in (2.145) ein und erhalten

$$\mathrm{div}\,\vec{a} = \sum_{i=1}^{3} h_i^{-1}\frac{\partial a_i}{\partial q_i} + \sum_{i,j=1}^{3} \frac{a_i}{h_j h_i}\frac{\partial h_j}{\partial q_i}(1-\delta_{ij}) \quad . \tag{2.153}$$

Dies führt auf

$$\mathrm{div}\,\vec{a} = \sum_{i=1}^{3}\frac{1}{h_i}\left[\frac{\partial a_i}{\partial q_i} + \sum_{j=1}^{3}\frac{a_i}{h_j}\frac{\partial h_j}{\partial q_i}(1-\delta_{ij})\right] \quad . \tag{2.154}$$

Als Spezialfall betrachten wir auf der rechten Seite den Term mit $i = 1$, er besitzt die Form

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{h_1}\left[\frac{\partial a_1}{\partial q_1} + \frac{a_1}{h_2}\frac{\partial h_2}{\partial q_1} + \frac{a_1}{h_3}\frac{\partial h_3}{\partial q_1}\right] \\
= \; & \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[h_2 h_3 \frac{\partial a_1}{\partial q_1} + a_1 h_3 \frac{\partial h_2}{\partial q_1} + a_1 h_2 \frac{\partial h_3}{\partial q_1}\right] \\
= \; & \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\frac{\partial}{\partial q_1}(h_2 h_3 a_1) \quad .
\end{aligned} \tag{2.155}$$

Äquivalent verfahren wir mit den Termen für $i = 2$ und $i = 3$. Das Endergebnis lautet:

$$\mathrm{div}\,\vec{a} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}(h_2 h_3 a_1) + \frac{\partial}{\partial q_2}(h_3 h_1 a_2) + \frac{\partial}{\partial q_3}(h_1 h_2 a_3)\right] \quad . \tag{2.156}$$

2.9.3 Die Rotation

Den Ausdruck für die Rotation in krummlinigen orthogonalen Koordinaten leiten wir aufeine etwas andere Weise her. Zunächst wenden wir den Nabla-Operator(2.144) auf q_i an und erhalten

$$\vec{\nabla} q_i = h_i^{-1}\vec{e}_{q_i} \tag{2.157}$$

und somit

$$\vec{e}_{q_i} = h_i \vec{\nabla} q_i \quad . \tag{2.158}$$

Damit haben wir den Basisvektor als Gradienten dargestellt. Nun schreiben wir für die Rotation

$$\mathrm{rot}\,\vec{a} = \vec{\nabla}\times\vec{a} = \vec{\nabla}\times(a_1\vec{e}_{q_1} + a_2\vec{e}_{q_2} + a_3\vec{e}_{q_3}) \quad . \tag{2.159}$$

Es genügt zunächst, nur den ersten Term zu betrachten

$$
\begin{aligned}
& \vec{\nabla} \times (a_1 \vec{e}_{q_1}) = \vec{\nabla} \times \left(a_1 h_1 \vec{\nabla} q_1\right) \\
= \; & \vec{\nabla}(a_1 h_1) \times \vec{\nabla} q_1 + (a_1 h_1) \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} q_1 \\
= \; & \vec{\nabla}(a_1 h_1) + h_1^{-1} \vec{e}_{q_1} + 0 \\
= \; & \left[\frac{\vec{e}_{q_1}}{h_1} \frac{\partial}{\partial q_1}(a_1 h_1) + \frac{\vec{e}_{q_2}}{h_2} \frac{\partial}{\partial q_2}(a_1 h_1) + \frac{\vec{e}_{q_3}}{h_3} \frac{\partial}{\partial q_3}(a_1 h_1)\right] \times \frac{\vec{e}_{q_1}}{h_1} \\
= \; & 0 - \frac{\vec{e}_{q_3}}{h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial q_2}(a_1 h_1) + \frac{\vec{e}_{q_2}}{h_3 h_1} \frac{\partial}{\partial q_3}(a_1 h_1) \\
= \; & \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[-h_3 \vec{e}_{q_3} \frac{\partial}{\partial q_2}(a_1 h_1) + h_2 \vec{e}_{q_2} \frac{\partial}{\partial q_3}(a_1 h_1)\right] \quad . \qquad (2.160)
\end{aligned}
$$

In der dritten Zeile wurde die Relation rot grad$q_1 = 0$ verwendet. Wir wiederholen nun die gleiche Prozedur für die beiden anderen Komponenten und erhalten das Resultat

$$
\begin{aligned}
\operatorname{rot} \vec{a} \;=\; \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \Bigg\{ & h_1 \vec{e}_{q_1}\left[\frac{\partial}{\partial q_2}(a_3 q_3) - \frac{\partial}{\partial q_3}(a_2 h_2)\right] \\
& + h_2 \vec{e}_{q_2}\left[\frac{\partial}{\partial q_3}(a_1 q_1) - \frac{\partial}{\partial q_1}(a_3 h_3)\right] \\
& + h_3 \vec{e}_{q_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}(a_2 q_2) - \frac{\partial}{\partial q_2}(a_1 h_1)\right]\Bigg\} \quad . \qquad (2.161)
\end{aligned}
$$

Dieser Ausdruck läßt sich auch kompakter in Form einer Determinante schreiben

$$
\operatorname{rot} \vec{a} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 \vec{e}_{q_1} & h_2 \vec{e}_{q_2} & h_3 \vec{e}_{q_3} \\ \frac{\partial}{\partial q_1} & \frac{\partial}{\partial q_2} & \frac{\partial}{\partial q_3} \\ h_1 a_1 & h_2 a_2 & h_3 a_3 \end{vmatrix} \quad . \qquad (2.162)
$$

2.9.4 Das Bogenlängenelement

Als nächsten Punkt betrachten wir das Bogenlängenelement $\mathrm{d}s$ in krummlinigen Koordinaten. Es galt

$$
\mathrm{d}\vec{r} = \sum_{i=1}^{3} h_i \, \mathrm{d}q_i \, \vec{e}_{q_i} \quad . \qquad (2.163)
$$

Für das Quadrat des Differentials $\mathrm{d}s$ der Bogenlänge gilt

$$
\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}\vec{r} \cdot \mathrm{d}\vec{r} \quad . \qquad (2.164)
$$

Für orthogonale Koordinaten mit

$$
\vec{e}_{q_i} \cdot \vec{e}_{q_j} = \delta_{ij} \qquad (2.165)
$$

reduziert sich dies zu

$$
\mathrm{d}s^2 = \sum_{i=1}^{3} h_i^2 \mathrm{d}q_i^2 \quad . \qquad (2.166)
$$

Für nichtorthogonale Koordinaten haben wir hingegen

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s^2 &= \mathrm{d}\vec{r}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = \left(\sum_{i=1}^{3} h_i \mathrm{d}q_i \vec{e}_{q_i}\right)\cdot\left(\sum_{j=1}^{3} h_j \mathrm{d}q_j \vec{e}_{q_j}\right) \\ &= \sum_{i,j=1}^{3} g_{ij}\, \mathrm{d}q_i \mathrm{d}q_j \end{aligned} \tag{2.167}$$

mit den metrischen Koeffizienten

$$g_{ij} = h_i h_j\, \vec{e}_{q_i}\cdot\vec{e}_{q_j} \quad . \tag{2.168}$$

2.9.5 Der Laplace-Operator

Wir wollen nun auch noch den Laplace-Operator in krummlinigen orthogonalen Koordinaten ausdrücken. Dazu betrachten wir

$$\Delta\Phi = \vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\Phi = \mathrm{div}\,\mathrm{grad}\Phi = \vec{\nabla}\cdot\left(\sum_{i=1}^{3}\frac{\vec{e}_{q_i}}{h_i}\frac{\partial}{\partial q_i}\right)\Phi \quad . \tag{2.169}$$

Für die Divergenz setzen wir jetzt (2.156) ein sowie

$$a_i = \frac{1}{h_i}\frac{\partial}{\partial q_i}\Phi \quad . \tag{2.170}$$

Somit erhalten wir sofort

$$\Delta\Phi = \frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{h_2h_3}{h_1}\frac{\partial\Phi}{\partial q_1}\right) + \frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{h_3h_1}{h_2}\frac{\partial\Phi}{\partial q_2}\right) + \frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{h_1h_2}{h_3}\frac{\partial\Phi}{\partial q_3}\right)\right] \quad . \tag{2.171}$$

2.9.6 Das Volumenelement

Ziel dieser Betrachtungen ist es, das Volumenelement

$$\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \tag{2.172}$$

in krummlinigen Koordinaten auszudrücken.

Wir beschränken uns hierbei zunächst auf orthogonale Koordinatensysteme. Hier gilt für das Quadrat des Bogenlängenelements

$$\mathrm{d}s^2 = (h_1\mathrm{d}q_1)^2 + (h_2\mathrm{d}q_2)^2 + (h_3\mathrm{d}q_3)^2 \quad . \tag{2.173}$$

Für jedes einzelne q_i gilt, sofern die anderen q's konstant gehalten werden

$$\mathrm{d}s_i = h_i\mathrm{d}q_i \quad . \tag{2.174}$$

Damit folgt für ein Flächenelement

$$\mathrm{d}F_{ij} = \mathrm{d}s_i \mathrm{d}s_j = h_i h_j \, \mathrm{d}q_i \mathrm{d}q_j \quad . \tag{2.175}$$

Für das Volumenelement gilt

$$\mathrm{d}V = \mathrm{d}s_1 \mathrm{d}s_2 \mathrm{d}s_3 = h_1 h_2 h_3 \, \mathrm{d}q_1 \mathrm{d}q_2 \mathrm{d}q_3 \quad . \tag{2.176}$$

Speziell folgt mit den Skalenfaktoren in Kugelkoordinaten

$$\begin{aligned} \mathrm{d}V &= 1 \cdot r \cdot r \sin\vartheta \, \mathrm{d}r \mathrm{d}\vartheta \mathrm{d}\varphi \\ &= r^2 \sin\vartheta \, \mathrm{d}r \mathrm{d}\vartheta \mathrm{d}\varphi \quad . \end{aligned} \tag{2.177}$$

Äquivalent gilt in Zylinderkoordinaten

$$\mathrm{d}V = 1 \cdot \varrho \cdot 1 \, \mathrm{d}\varrho \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}z = \varrho \, \mathrm{d}\varrho \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}z \quad . \tag{2.178}$$

Mit dem Volumenelement in Kugelkoordinaten wollen wir das Volumen einer Kugel mit dem Radius R ermitteln

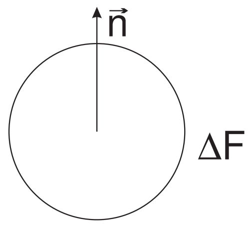
$$\begin{aligned} V &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{R} r^2 \sin\vartheta \mathrm{d}r \mathrm{d}\vartheta \mathrm{d}\varphi \\ &= 2\pi \int_0^{\pi} \int_0^{R} r^2 \sin\vartheta \mathrm{d}r \mathrm{d}\vartheta = 2\pi \quad (-\cos\vartheta)\Big|_0^{\pi} \int_0^{R} r^2 \mathrm{d}r \\ &= 4\pi \int_0^{R} r^2 \mathrm{d}r = \frac{4\pi}{3} \, r^3\Big|_0^{R} = \frac{4\pi}{3} R^3 \quad . \end{aligned} \tag{2.179}$$

2.10 Satz von Stokes

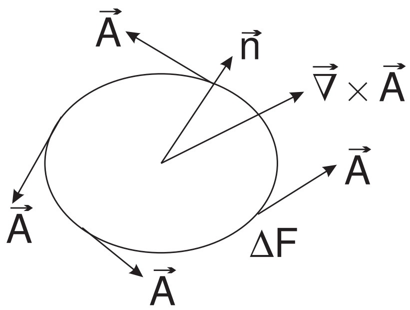
Der Stokessche Satz lautet:

$$\oint\limits_C \vec{A} \cdot d\vec{r} = \int\limits_F \vec{n} \cdot \mathrm{rot}\vec{A}\, dF \tag{2.180}$$

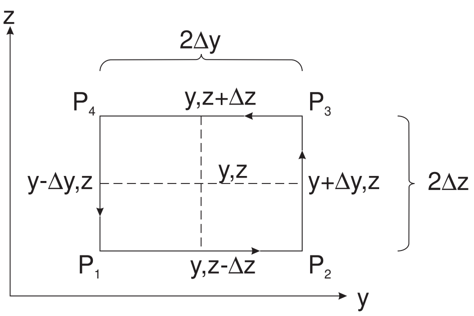
$\oint\limits_C$ bezeichnet das Integral über einen geschlossenen Weg entlang der Kontur C. $\int\limits_F dF$ ist das Flächenintegral über die Fläche, die von der Kontur C eingeschlossen wird. $\vec{n}$ bezeichnet den Einheitsnormalenvektor auf ΔF.



Wir wollen uns die Wirbelstruktur eines Vektorfeldes $\vec{A}$ mit Wirbelstruktur entlang eines Flächenelements ΔF mit der Normalen $\vec{n}$ veranschaulichen.



Ohne Beschränkung der Allgemeinheit betrachten wir jetzt ein Flächenelement, das in der yz-Ebene orientiert ist.



Nach der Figur ist

$$\Delta F = 4\, \Delta y\, \Delta z \quad . \tag{2.181}$$

$\vec{n}$ zeigt in Richtung der x-Achse, d. h. $\vec{n} \cdot \mathrm{rot}\vec{A}$ ergibt gerade die x-Komponente von $\mathrm{rot}\vec{A}$. Wir betrachten jetzt das Umlaufintegral

$$\begin{aligned}\oint \vec{A}\cdot d\vec{r} &= \int\limits_{C_1} A_x\,dx + \int\limits_{C_2} A_y\,dy + \int\limits_{C_3} A_z\,dz \\ &= \int\limits_{C_2} A_y\,dy + \int\limits_{C_3} A_z\,dz \quad . \end{aligned} \tag{2.182}$$

Das Integral über dx entfällt, da die Fläche in der yz-Ebene liegt und somit $dx = 0$ ist. Die Wegstücke C_2 und C_3 müssen wir noch spezifizieren. Entsprechend der Figur ist

$$\begin{aligned}\oint \vec{A}\cdot d\vec{r} &= \int\limits_{P_1}^{P_2} A_y\,dy + \int\limits_{P_2}^{P_3} A_z\,dz + \int\limits_{P_3}^{P_4} A_y\,dy + \int\limits_{P_4}^{P_1} A_z\,dz \approx \\ & A_y(x,y,z-\Delta z)\,2\,\Delta y + A_z(x,y+\Delta y,z)\,2\,\Delta z \\ & -A_y(x,y,z+\Delta z)\,2\,\Delta y - A_z(x,y-\Delta y,z)\,2\,\Delta z \quad . \end{aligned} \tag{2.183}$$

Wichtig ist es dabei, die Orientierung der Wegstrecke in Rechnung zu stellen. Dies führt zu den unterschiedlichen Vorzeichen.

Für das Vektorfeld $\vec{A}$ führen wir nun eine Taylor-Entwicklung um den Punkt (x, y, z) durch. Die Entwicklung wird nach dem zweiten Glied abgebrochen. Also gilt näherungsweise

$$A_y(x,y,z-\Delta z) = A_y(x,y,z) - \frac{\partial A_y}{\partial z}\,\Delta z + \mathcal{O}(\Delta z^2) \quad . \tag{2.184}$$

Dies führt insgesamt auf

$$\begin{aligned}\oint \vec{A}\cdot d\vec{r} &\approx \left[A_y - \frac{\partial A_y}{\partial z}\,\Delta z\right]\,2\,\Delta y + \left[A_z + \frac{\partial A_z}{\partial y}\,\Delta y\right]\,2\,\Delta z \\ &\quad -\left[A_y + \frac{\partial A_y}{\partial z}\,\Delta z\right]\,2\,\Delta y - \left[A_z - \frac{\partial A_z}{\partial y}\,\Delta y\right]\,2\,\Delta z \\ &= 4\,\Delta y\;\Delta z\left[\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right] \\ &= \Delta F\,(\mathrm{rot}\vec{A})_x \end{aligned} \tag{2.185}$$

Wir teilen durch ΔF und bilden den Limes $\Delta F \to 0$

$$\lim_{\Delta F\to 0}\left(\oint \frac{\vec{A}\cdot d\vec{r}}{\Delta F}\right) = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \quad . \tag{2.186}$$

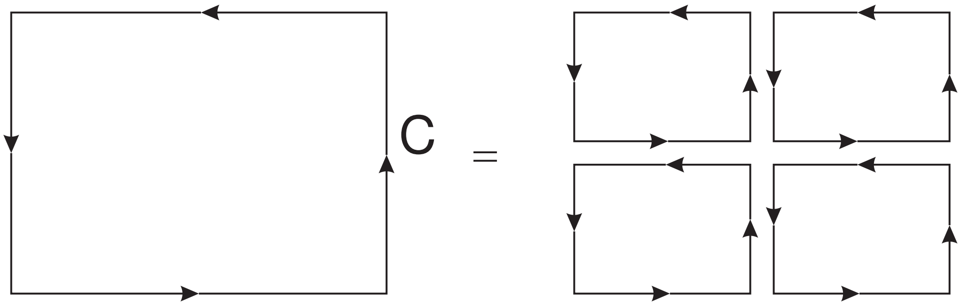
Wir verallgemeinern jetzt den Sachverhalt zu Flächen, die beliebig im Raum angeordnet sind. Es folgt dann

$$\vec{n}\cdot\mathrm{rot}\vec{A} = \lim_{\Delta F\to 0}\oint \frac{\vec{A}\cdot d\vec{r}}{\Delta F} \tag{2.187}$$

Wir kehren jetzt zurück zum eigentlichen Beweis des Stokesschen Satzes. Gegeben sei ein Vektorfeld $\vec{A}$. Wir berechnen das Linienintegral entlang eines geschlossenen Weges.

$$W = \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{r} \tag{2.188}$$

Wir können W als Summe kleinerer Teilbeiträge ΔW verstehen. Wir spalten den Integrationsweg folgendermaßen auf.



Der Beitrag der inneren Teilstücke hebt sich hier offensichtlich jeweils weg. Wir betrachten letztlich infinitesimale Flächenelemente dF. Für einen Beitrag ΔW_i erhalten wir nach (2.187)

$$\Delta W_i = \oint_{C_{F_i}} \vec{A} \cdot d\vec{r} = \oint_{C_{F_i}} \frac{\vec{A} \cdot d\vec{r}}{\Delta F_i} \Delta F_i = (\vec{n} \cdot \mathrm{rot}\vec{A})_i \, \Delta F_i \quad . \tag{2.189}$$

Wir integrieren und erhalten

$$\begin{aligned} W &= \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{r} = \lim_{\Delta F_i \to 0} \sum_i \oint_{C_{F_i}} \vec{A} \cdot d\vec{r} = \lim_{\Delta F_i \to 0} \sum_i (\vec{n} \cdot \mathrm{rot}\vec{A})_i \, \Delta F_i \\ &= \int_F \vec{n} \cdot \mathrm{rot}\vec{A} \, dF \end{aligned} \tag{2.190}$$

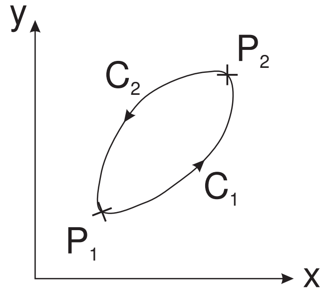
Dies ist gerade der Stokessche Integralsatz.

2.11 Konservatives Kraftfeld

Für ein konservatives Kraftfeld gilt rot$\vec{F} = 0$ und damit weiter

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 \quad . \tag{2.191}$$

Auch dies kann als Definition eines konservativen Kraftfeldes herangezogen werden. Die Aussage (2.191) gilt für beliebige Wege.



$$\int\limits_{C_1+C_2} \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0 \tag{2.192}$$

$$\int\limits_{P_1\,C_1}^{P_2} \vec{F}\cdot d\vec{r} + \int\limits_{P_2\,C_2}^{P_1} \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0$$

$$= \int\limits_{P_1\,C_1}^{P_2} \vec{F}\cdot d\vec{r} - \int\limits_{P_1\,C_2}^{P_2} \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

Dies ergibt die Wegunabhängigkeit

$$\int\limits_{P_1\,C_1}^{P_2} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int\limits_{P_1\,C_2}^{P_2} \vec{F}\cdot d\vec{r} \quad . \tag{2.193}$$

Da für konservative Kräfte ferner gilt

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} V \quad , \tag{2.194}$$

erhalten wir

$$-\int\limits_{1}^{2} \vec{\nabla} V \cdot d\vec{r} = -\int\limits_{1}^{2} \left(\frac{\partial V}{\partial x}\, dx + \frac{\partial V}{\partial y}\, dy + \frac{\partial V}{\partial z}\, dz \right) \quad . \tag{2.195}$$

Dies läßt sich durch das totale Differential dV ausdrücken, das definiert ist durch

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x}\, dx + \frac{\partial V}{\partial y}\, dy + \frac{\partial V}{\partial z}\, dz \quad . \tag{2.196}$$

Somit haben wir

$$-\int\limits_{1}^{2} \vec{\nabla} V \cdot d\vec{r} = -\int\limits_{1}^{2} dV = V(1) - V(2) \quad . \tag{2.197}$$

Das Arbeitsintegral hängt also nur von den Funktionswerten V an den Stellen 1 und 2 ab, nicht aber vom speziellen Weg entlang dessen das Integral ausgeführt wird.

$$W = V(1) - V(2) \tag{2.198}$$

Die Arbeit W hatten wir definiert als

$$W = + \underset{(C)}{\int\limits_{P_1}^{P_2}} \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) \cdot d\vec{r} \tag{2.199}$$

Diese Größe hängt im allgemeinen ab von

1. Kraftfeld $\vec{F}$

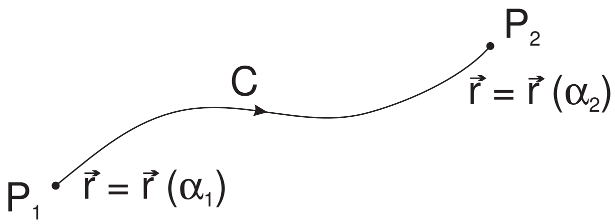
2. Endpunkten $P_1,\ P_2$

3. Weg C

4. zeitlichen Bewegungsablauf

Falls $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$ ist, entfällt natürlich 4., d. h., dann hängt W nur noch von der Beschaffenheit des Weges ab, nicht mehr von dem zeitlichen Ablauf der Bewegung des Massenpunktes längs der Bahnkurve. Die Integrationsvorschrift in (2.199) stellt ein Kurvenintegral dar. Man kann dieses Kurvenintegral auf gewöhnliche Riemann-Integrale zurückführen. Wir transformieren auf einen Parameter α, der beispielsweise durch die Zeit t gegeben sein kann. Mit $\vec{r} = \vec{r}(\alpha)$ folgt

$$d\vec{r} = \frac{d\vec{r}(\alpha)}{d\alpha}\, d\alpha \quad . \tag{2.200}$$



Damit bekommen wir

$$W = \int\limits_{\alpha_1}^{\alpha_2} \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) \cdot \frac{d\vec{r}(\alpha)}{d\alpha}\, d\alpha \quad . \tag{2.201}$$

2.12 Einige Größen der Mechanik

Mit dieser Transformation definieren wir jetzt den Begriff der Leistung ($\alpha = t$)

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{d}{dt} \int\limits_{t_0}^{t} \vec{F}\left(\vec{r}\,(t'\,), \dot{\vec{r}}\,(t'\,), t'\,\right) \cdot \dot{\vec{r}}\,(t'\,)\, dt' \quad . \tag{2.202}$$

Damit folgt

$$P = \vec{F}\left(\vec{r}\,(t),\ \dot{\vec{r}}\,(t), t\right) \cdot \dot{\vec{r}}\,(t) \quad . \tag{2.203}$$

Die Dimension dieser Größe ist

$$[P] = \frac{\text{Nm}}{\text{s}} = \frac{\text{Joule}}{\text{s}} = \text{Watt} \quad . \tag{2.204}$$

Auf die Leistung P stoßen wir, wenn wir die Newtonsche Bewegungsgleichung skalar mit der Geschwindigkeit multiplizieren.

$$m\ddot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} = \vec{F} \cdot \dot{\vec{r}} \quad . \tag{2.205}$$

Die linke Seite ist die Zeitableitung der kinetischen Energie

$$T \equiv \frac{1}{2} m\dot{\vec{r}}^{\,2} \quad . \tag{2.206}$$

Es ist

$$\frac{d}{dt}T = \frac{d}{dt}\frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^{\,2} = m\ddot{\vec{r}}\cdot\dot{\vec{r}} = \vec{F}\cdot\dot{\vec{r}} = P \quad . \tag{2.207}$$

Integrieren wir dies in den zeitlichen Grenzen t_1 und $t_2 > t_1$, so folgt

$$W = T_2 - T_1 = \frac{1}{2}m\left[\dot{\vec{r}}^{\,2}(t_2) - \dot{\vec{r}}^{\,2}(t_1)\right] \quad . \tag{2.208}$$

Die Arbeit, die an einem Massenpunkt längs seines Weges geleistet wird, dient also dazu, seinen Bewegungszustand zu ändern.

Wir wollen die verrichtete Arbeit noch einmal etwas ausführlicher auswerten.

$$\begin{aligned}\int\limits_{t_1}^{t_2} \vec{F}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt}\,dt &= \int\limits_{t_1}^{t_2} \vec{F}\cdot\vec{v}\,dt = \int\limits_{t_1}^{t_2} m\,\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\vec{v}\,dt \\ &= m\int\limits_{t_1}^{t_2} \vec{v}\,d\vec{v} = \frac{1}{2}m\int\limits_{t_1}^{t_2} d(\vec{v}\cdot\vec{v}) = \frac{1}{2}mv^2\Big|_{t_1}^{t_2} \\ &= \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = T_2 - T_1 \quad .\end{aligned} \tag{2.209}$$

Auf der anderen Seite haben wir bereits abgeleitet, daß für konservative Kräfte gilt

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}V \tag{2.210}$$

und daß wir für die Arbeit erhalten

$$W = V_1 - V_2 \tag{2.211}$$

mit $V_1 = V(P_1)$ und $V_2 = V(P_2)$. Kombinieren wir nun die Gleichung (2.209) mit (2.211), so folgt

$$T_2 - T_1 = V_1 - V_2 \tag{2.212}$$

oder

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2 \tag{2.213}$$

oder

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + V_1 = \frac{1}{2}mv_2^2 + V_2 \quad . \tag{2.214}$$

Die Größe

$$E = T + V \quad , \tag{2.215}$$

also die Summe der kinetischen Energie und der potentiellen Energie, nennen wir die Gesamtenergie. Damit bekommen wir die bedeutende Aussage: In einem konservativen Kraftfeld ist die Gesamtenergie eine Konstante. Es gilt der Energieerhaltungssatz. Für konservative Kraftfelder bezeichnen wir die Gesamtenergie auch als Hamilton-Funktion des Systems

$$H = T + V = E \quad . \tag{2.216}$$

Mit dem Impuls

$$\vec{p} = m\vec{v} \tag{2.217}$$

folgt für die Hamilton-Funktion mit $\vec{v}^{\,2} = v^2$

$$H = \frac{1}{2}\,mv^2 + V = \frac{p^2}{2m} + V \quad . \tag{2.218}$$

Generell schreiben wir

$$H = H(\vec{r}, \vec{p}, t) \quad . \tag{2.219}$$

Als nächstes definieren wir den Kraftstoß durch das Zeitintegral über die Kraft

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} \vec{F}\,dt = \int\limits_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}(m\vec{v})\,dt = \int\limits_{t_1}^{t_2} d(m\vec{v}\,) = m\vec{v}\,\Big|_{t_1}^{t_2} = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1 = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 \quad . \tag{2.220}$$

Der Kraftstoß entspricht gerade der Impulsänderung. Diese Aussage bleibt auch dann gültig, wenn die Masse variabel ist und wenn die Kraft nichtkonservativ ist.

Weiterhin definieren wir für konservative Kraftfelder die Lagrange-Funktion

$$L = T - V = \frac{1}{2}\,mv^2 - V \quad . \tag{2.221}$$

Die Wirkung ist definiert als

$$\mathcal{A} \equiv \int\limits_{t_1}^{t_2} L\,dt \quad . \tag{2.222}$$

Für ein freies Teilchen, das sich mit konstanter Geschwindigkeit v bewegt, folgt

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \int\limits_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2}\,mv^2\,dt = \frac{1}{2}\,mv^2\,(t_2 - t_1) \\ &= \frac{1}{2}\,m\,\frac{(x_2 - x_1)^2}{(t_2 - t_1)^2}\,(t_2 - t_1) = \frac{1}{2}\,m\,\frac{(x_2 - x_1)^2}{(t_2 - t_1)} \quad . \end{aligned} \tag{2.223}$$

Wir schreiten weiter vor in unserer Kette von Definitionen. Wir multiplizieren die Newtonsche Grundgleichung vektoriell mit $\vec{r}$

$$m(\vec{r} \times \ddot{\vec{r}}) = \vec{r} \times \vec{F} \quad . \tag{2.224}$$

Auf der linken Seite steht die Zeitableitung des Drehimpulses

$$\vec{L} = m(\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) = \vec{r} \times m\vec{v} = \vec{r} \times \vec{p} \quad . \tag{2.225}$$

Es ist

$$\frac{d}{dt}\,\vec{L} = \frac{d}{dt}\,m(\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) = m\underbrace{\dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}}}_{=0} + m\vec{r} \times \ddot{\vec{r}} = m\vec{r} \times \ddot{\vec{r}} \quad . \tag{2.226}$$

Die Größe auf der rechten Seite von (2.224) bezeichnen wir als Drehmoment

$$\vec{D} = \vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \quad . \tag{2.227}$$

Damit gilt

$$\frac{d}{dt}\,\dot{\vec{L}} = \vec{M} \quad . \tag{2.228}$$

Ist das Drehmoment identisch Null, so gilt der Drehimpulserhaltungssatz

$$\vec{M} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{d}{dt}\,\vec{L} = 0 \;\text{ und }\; \vec{L} = \text{ const.} \quad . \tag{2.229}$$

Es gibt zwei Möglichkeiten für $\vec{M} = 0$:

1. $\vec{F} \equiv 0$ (trivialer Fall)
2. $\vec{F} \upuparrows \vec{r}$ (Zentralfeld)

Für ein Zentralfeld

$$\vec{F} = f(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) \cdot \vec{e}_r \tag{2.230}$$

gilt also der Drehimpulserhaltungssatz.

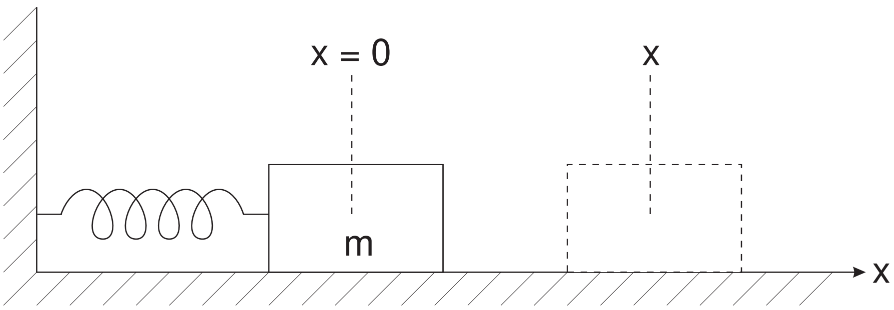
3 Der harmonische Oszillator

3.1 Der ungedämpfte Oszillator

Wir wenden uns jetzt einer speziellen Kraftform zu, die von fundamentaler Bedeutung für die gesamte Physik ist. Es ist das lineare Kraftgesetz oder das Hooksche Gesetz

$$\vec{F} = -kx\vec{e}_1 \quad . \tag{3.1}$$

Die Kraft steigt linear an in Richtung der Auslenkung aus der Ruhelage, für die hier die x-Richtung gewählt wurde. Die Kraft ist der Auslenkung entgegengerichtet. Die Proportionalitätskonstante k heißt Federkonstante, Elastizitätskonstante oder Steifheitsfaktor. Die große Bedeutung des harmonischen Oszillators liegt darin begründet, daß er nicht nur in der Mechanik auftritt, sondern in seinen Analoga weite Teile der Elektrodynamik und der Atomphysik beherrscht. Im Mikrokosmos spielt er eine tragende Rolle, auch Schwingungen des Vakuumzustandes lassen sich durch harmonische Oszillatoren beschreiben. Als erstes Beispiel betrachten wir die horizontale Bewegung einer Masse, die mittels einer Feder mit einer Wand verbunden ist.



Reibungseffekte jeglicher Art auch auf der Unterlage wollen wir zunächst vernachlässigen. Die Kraft, die beim harmonischen Oszillator wirkt, ist eine rücktreibende Kraft, die stets bestrebt ist, die Ruhelage herzustellen. Zunächst wollen wir feststellen, ob das lineare Kraftgesetz ein konservatives Kraftgesetz ist. Mit $\vec{F} = -kx\,\vec{e}_1$ finden wir

$$\mathrm{rot}\vec{F} = -k \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x & 0 & 0 \end{vmatrix} = -k\left(\frac{\partial}{\partial z}\,x\,\vec{e}_2 - \frac{\partial}{\partial y}\,x\,\vec{e}_3\right) = 0 \quad . \tag{3.2}$$

Somit ist die Kraft konservativ und es gilt der Energieerhaltungssatz

$$\frac{1}{2}\,mv^2 + V(x) = E = \text{const.} \tag{3.3}$$

Wir errechnen das Potential zu

$$V(x) \;=\; -\int\limits_0^x \vec{F}\cdot d\vec{r} = -\int\limits_0^x (-kx,0,0)\cdot(dx,dy,dz)$$

$$= \int_0^x kx\,dx = \frac{1}{2}\,kx^2 \quad . \tag{3.4}$$

In der Tat folgt umgekehrt damit wieder

$$\vec{F} = -\text{grad}\,V(x) = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}\,kx^2\right)\,\vec{e}_1 = -kx\,\vec{e}_1 \quad . \tag{3.5}$$

Die Energiegleichung für den harmonischen Oszillator lautet damit

$$\frac{1}{2}\,mv^2 + \frac{1}{2}\,kx^2 = E \quad . \tag{3.6}$$

Auch die zugehörige Newtonsche Grundgleichung wollen wir etwas umformen

$$m\,\frac{d^2x}{dt^2}\,\vec{e}_1 = \vec{F} = -kx\,\vec{e}_1 \quad . \tag{3.7}$$

Wir gehen zur Skalargleichung über und dividieren durch die Masse m.

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}\,x \quad . \tag{3.8}$$

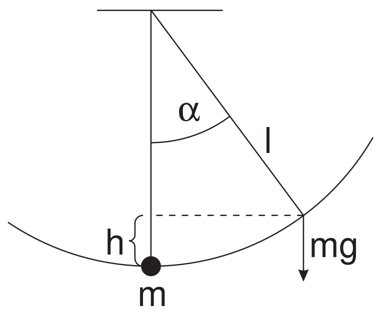
Jetzt führen wir abkürzend die Kreisfrequenz ω ein

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \tag{3.9}$$

und erhalten damit

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \quad . \tag{3.10}$$

Um das Weg-Zeit-Gesetz abzuleiten, müssen wir diese Differentialgleichung zweiter Ordnung lösen. Bevor wir uns der Lösung dieser Differentialgleichung zuwenden, wollen wir noch einmal die Grundbedeutung des harmonischen Oszillators für zahlreiche Schwingungsphänomene herauskristallisieren. In der Mechanik läßt sich die Schwingung eines Pendels um die Ruhelage als harmonischer Oszillator verstehen.



Das Pendel als harmonischer Oszillator

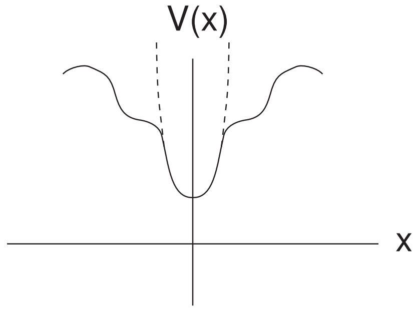
Beim mathematischen Pendel hat das Potential die Form

$$V(x) = mgh = mgl\,(1-\cos\alpha) \quad . \tag{3.11}$$

Für $\alpha \approx 0$ kann es durch ein harmonisches Potential

$$V(\alpha) = \frac{1}{2} mgl\alpha^2 \tag{3.12}$$

angenähert werden. Das Oszillatorpotential hat die Form einer Parabel mit dem Minimum bei $x = 0$. Generell können Potentiale mit einem Minimum in der direkten Umgebung des Minimums durch ein Oszillatorpotential genähert werden.



Kleine Auslenkungen entsprechen dann immer einer Oszillatorbewegung. Viele komplizierte Schwingungsvorgänge lassen sich so näherungweise als harmonische Oszillatoren beschreiben und auf diese Weise relativ einfach behandeln. Im Gleichgewicht (bei $x = 0$) müssen die Kräfte, die am Massenpunkt angreifen, verschwinden, d. h.

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}\, V = 0 \quad . \tag{3.13}$$

Entwickelt man das Potential in eine Taylor-Reihe

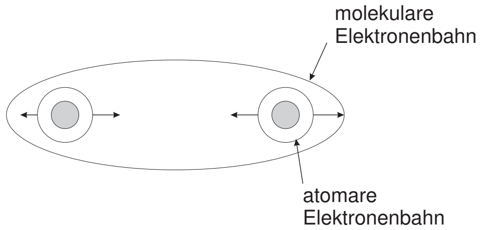
$$V(x) = V_0 + a_1 x + \frac{a_2}{2}\, x^2 + \cdots \quad , \tag{3.14}$$

so folgt aus der Gleichgewichtsbedingung, daß $a_1 = 0$ sein muß, eben wegen $\vec{F}(0) = 0$. Daher gilt

$$V(x) = V_0 + \frac{a_2}{2}\, x^2 + \cdots \quad , \tag{3.15}$$

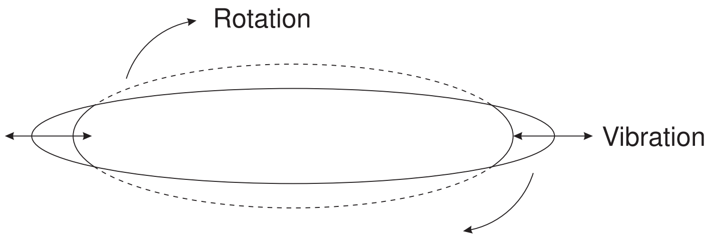
was gerade dem Potential des harmonischen Oszillators entspricht. Die Konstante V_0 kann weggeeicht werden.

Ein weiteres Beispiel für den harmonischen Oszillator in der Atomphysik sind Hantelmoleküle.

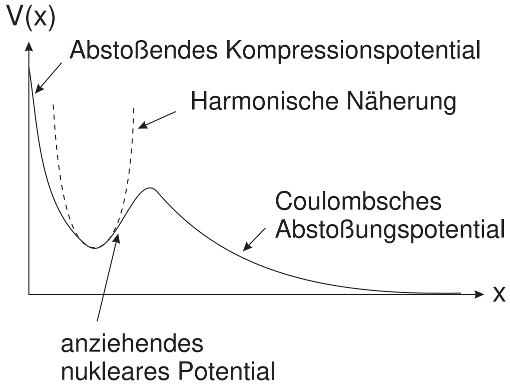


In einem zweiatomigen Molekül könne die Atome in Richtung der Moleküllängsachse schwingen. Die Bindung der Atome aneinander erfolgt durch sogenannte molekulare Elektronen, d. h. solche Elektronen, die um beide Kerne gemeinsam kreisen. Atomare Elektronen sind jene, die nur entweder den einen oder den anderen Atomkern umkreisen.

Auch viele Atomkerne lassen sich durch harmonische Oszillatoren parametrisieren. Manche Atomkerne, wie z. B. die seltenen Erden oder die Aktiniden sind deformiert und haben teilweise die Form einer dicken Zigarre.



Die Verkürzungen und Verlängerungen der “Zigarre” heißen β-Schwingungen. Die Verkürzungen und Verdickungen des Bauches heißen γ-Schwingungen. Der zigarrenförmig deformierte Kern kann auch Rotationen ausführen. So entstehen die sogenannten Rotationsschwingungsspektren. Ein Kernpotential hat typischerweise die folgende Struktur.



Durch die kurzreichweitigen Kernkräfte entsteht ein anziehender Potentialbereich, der zu Kernmolekülen führt.

Wenn sich bestimmte Atomkerne (z. B. C^{12}, O^{16}) gegenseitig durchdringen, können sie kurzlebige, aber stabile molekülähnliche Zustände bilden. Auch das Potential der Kernmoleküle kann harmonisch genähert werden.

Nach diesen einführenden Betrachtungen wollen wir uns der formalen Lösung der Oszillatorengleichung zuwenden.

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \quad . \tag{3.16}$$

Bei der Lösung dieser Differentialgleichung 2. Ordnung tauchen zwei Integrations-Konstanten auf, die durch die Anfangsbedingungen bestimmt werden. Die Anfangsgeschwindigkeit $\dot{x}(0)$ und der Anfangsort $x(0)$ sind beliebig wählbar. Daher muß die allgemeine Lösung zwei freie Konstanten enthalten. Die Differentialgleichung (3.16) ist homogen, denn auf der rechten Seite steht Null und kein x-unabhängiger Term etwa der Form

$$\ddot{x} + \omega^2 x = f(t) \quad . \tag{3.17}$$

Die Differentialgleichung (3.16) ist auch linear. Dies impliziert, daß das Superpositionsprinzip gilt. Haben wir zwei spezielle Lösungen der Differentialgleichung, etwa $x_1(t)$ und $x_2(t)$, so genügt jede Linearkombination

$$x(t) = A\, x_1(t) + B\, x_2(t) \tag{3.18}$$

ebenfalls dieser Differentialgleichung. Dabei sind A und B beliebige, frei wählbare Konstanten. Diese Linearkombination $x(t)$ enthält zwei freie Konstanten A und B, d. h. die Linearkombination $x(t)$ ist bereits die allgemeine Lösung von $x(t)$. Um zu überprüfen, daß unsere Annahme stimmt, denken wir uns zwei spezielle Lösungen $x_1(t)$ und $x_2(t)$ der Differentialgleichung (3.16). Es soll also gelten

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 &= 0 \quad , & (3.19)\\ \ddot{x}_2 + \omega^2 x_2 &= 0 \quad . & (3.20) \end{aligned}$$

Setzen wir $x(t) = Ax_1(t) + Bx_2(t)$ in die Differentialgleichung ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \omega^2 x &= (A\ddot{x}_1 + B\ddot{x}_2) + \omega^2(Ax_1 + Bx_2) \\ &= (A\ddot{x}_1 + \omega^2 Ax_1) + (B\ddot{x}_2 + \omega^2 Bx_2) \\ &= A(\ddot{x}_1 + \omega^2 x_1) + B(\ddot{x}_2 + \omega^2 x_2) \\ &= 0 \quad . \end{aligned} \tag{3.21}$$

$x(t)$ löst also die Differentialgleichung. Um die Differentialgleichung (3.16) zu lösen, benötigen wir also zwei Lösungen $x_1(t)$ und $x_2(t)$. Diese Lösungen sind beispielsweise

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \cos\omega t \quad , & (3.22)\\ x_2(t) &= \sin\omega t \quad . & (3.23) \end{aligned}$$

Bilden wir jeweils die zweite Ableitung

$$\ddot{x}_1(t) = -\omega^2 \cos \omega t \quad , \tag{3.24}$$

$$\ddot{x}_2(t) = -\omega^2 \sin \omega t \tag{3.25}$$

und setzen dies in die Differentialgleichung (3.16) ein, so erhalten wir

$$\ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 = -\omega^2 \cos \omega t + \omega^2 \cos \omega t = 0 \quad , \tag{3.26}$$

$$\ddot{x}_2 + \omega^2 x_2 = -\omega^2 \sin \omega t + \omega^2 \sin \omega t = 0 \quad . \tag{3.27}$$

Beide Ansätze erfüllen die Differentialgleichung (3.16). Weiterhin sind Sinus und Cosinus linear unabhängige Funktionen, d. h. es gibt keine Konstante C, so daß $C \sin \omega t = \cos \omega t$ für alle Zeiten t. Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung des harmonischen Oszillators lautet demnach

$$x(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t \quad . \tag{3.28}$$

Wir wollen die Form der Lösung etwas umgestalten und schreiben

$$A \cos \omega t + B \sin \omega t = \sqrt{A^2 + B^2} \left(\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \cos \omega t + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \sin \omega t \right) \quad . \tag{3.29}$$

Nun setzen wir

$$\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \cos \varphi \quad . \tag{3.30}$$

Dann wird

$$\sin \varphi = \sqrt{1 - \cos^2 \varphi} = \sqrt{1 - \frac{A^2}{A^2 + B^2}} = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad . \tag{3.31}$$

Somit erhalten wir

$$x(t) = \sqrt{A^2 + B^2} \, (\cos \varphi \, \cos \omega t + \sin \varphi \, \sin \omega t) \quad . \tag{3.32}$$

Wir schreiben dieses Ergebnis als

$$x(t) = D \cos(\omega t - \varphi) \tag{3.33}$$

mit

$$D = \sqrt{A^2 + B^2} \tag{3.34}$$

und

$$\tan \varphi = \frac{B}{A} \quad . \tag{3.35}$$

Dabei benennen wir folgende Größen:

1. ω : Kreisfrequenz
2. D: Amplitude
3. φ: Phasenwinkel
4. $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$: Frequenz
5. $T = \frac{1}{\nu} = \frac{2\pi}{\omega}$: Schwingungsdauer.

Man erhält die Schwingungskurve, in dem man die Sinus- und die Cosinuskomponente der Schwingung überlagert. In dem abgeleiteten Weg-Zeit-Gesetz haben die freien Konstanten A und B noch keine physikalische Bedeutung. Sie werden aber durch die Anfangsbedingungen eindeutig bestimmt. Geben wir $x(0) = x_0$ und $v(0) = v_0$ vor , so können wir A und B berechnen

$$x_0 = x(t=0) = A\cos\omega 0 + B\sin\omega 0 = A \quad , \tag{3.36}$$
$$v_0 = v(t=0) = -A\omega\sin\omega 0 + B\omega\cos\omega 0 = B\omega \quad , \tag{3.37}$$
$$\tag{3.38}$$

also zusammengefaßt

$$x_0 = A \quad , \tag{3.39}$$
$$v_0 = B\omega \quad . \tag{3.40}$$

Damit können wir unsere Lösung in der Form

$$x(t) = x_0\cos\omega t + \frac{v_0}{\omega}\sin wt \tag{3.41}$$

schreiben. Durch Umformen erhalten wir

$$x(t) = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}\cos(\omega t - \varphi) \tag{3.42}$$

mit

$$\tan\varphi = \frac{v_0}{\omega x_0} \quad . \tag{3.43}$$

Aus dieser Form können wir auch sofort die Amplitude der Schwingung ablesen

$$D = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}} \quad . \tag{3.44}$$

Einige Spezialfälle verdienen eine besondere Beachtung.

1. Wir lenken den Oszillator anfangs um x_0 aus, lassen ihn dann los und betrachten seine Schwingung. Die Anfangsbedingungen lauten offenbar

$$x_0 = x(0) \quad , \tag{3.45}$$

$$v_0 = v(0) = 0 \quad . \tag{3.46}$$

   Dies ergibt sofort

$$x(t) = x_0 \cos \omega t \quad . \tag{3.47}$$

   Die Anfangselongation ist gleichzeitig die Amplitude der Schwingung.

2. Wir stoßen den Körper in seiner Ruhelage an und verleihen ihm die Geschwindigkeit v_0.

$$x_0 = x(0) = 0 \quad , \tag{3.48}$$

$$v(0) = v_0 \quad . \tag{3.49}$$

   Dies führt auf

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t = \frac{v_0}{\omega} \cos \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right) \quad . \tag{3.50}$$

   Die Amplitude der Schwingung ist $D = \frac{v_0}{\omega}$.

Dies können wir auch aus dem Energieerhaltungssatz herleiten. Es ist

$$\frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k x^2 = E = \frac{1}{2} m v_0^2 \quad . \tag{3.51}$$

Hat der Körper den Maximalausschlag D erreicht, so ist $v = 0$. Also folgt

$$\frac{1}{2} k D^2 = \frac{1}{2} m v_0^2 \tag{3.52}$$

und weiter

$$D^2 = \frac{m}{k} v_0^2 = \frac{v_0^2}{\omega^2} \tag{3.53}$$

und somit

$$D = \frac{v_0}{\omega} \quad . \tag{3.54}$$

3.2 Der gedämpfte harmonische Oszillator

Als Beispiel für einen gedämpften harmonischen Oszillator sei wieder eine Masse m mit einer Feder verbunden. Die Masse gleite reibungsfrei auf der Unterlage, aber durch die Reibung am umgebenden Medium komme eine geschwindigkeitsabhängige Reibungskraft (z. B. Luftwiderstand) hinzu. Für diese setzen wir den Stokesschen Ansatz an

$$\vec{F}_R = -\beta\,\vec{v} \quad . \tag{3.55}$$

Damit lautet die Bewegungsgleichung

$$m\,\frac{dv}{dt} = -kx - \beta v \quad . \tag{3.56}$$

Wir haben hier gleich die skalare Version gewählt. Es gilt

$$m\ddot{x} + \beta\dot{x} + kx = 0 \quad . \tag{3.57}$$

Wir dividieren durch m und setzen

$$2\gamma = \frac{\beta}{m} \quad , \tag{3.58}$$

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \quad . \tag{3.59}$$

Es folgt

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega^2 x = 0 \quad . \tag{3.60}$$

Dies ist wieder eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung, außerdem ist sie homogen. Wieder müssen wir zwei linear unabhängige Lösungen $x_1(t)$ und $x_2(t)$ suchen und erhalten dann durch Linearkombination die allgemeine Lösung. Da die Differentialgleichung bis auf konstante Koeffizienten nur Ableitungen von $x(t)$ enthält, und die Exponentialfunktion beim Differenzieren auch bis auf konstante Koeffizienten erhalten bleibt, versuchen wir es mit dem Ansatz

$$x(t) = e^{\lambda t} \quad . \tag{3.61}$$

Einsetzen in die Differentialgleichung liefert

$$\lambda^2\,e^{\lambda t} + 2\gamma\,\lambda\,e^{\lambda t} + \omega^2\,e^{\lambda t} = 0 \quad . \tag{3.62}$$

Für alle Zeiten gilt

$$e^{\lambda t} \neq 0 \quad . \tag{3.63}$$

Dies erlaubt es uns durch $e^{\lambda t}$ zu dividieren.

$$\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega^2 = 0 \quad . \tag{3.64}$$

Dies ist die sogenannte charakteristische Gleichung. Sie wird durch die beiden Werte

$$\lambda_{1/2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega^2} \tag{3.65}$$

erfüllt. Somit haben wir zwei spezielle Lösungen gefunden

$$x_1(t) = e^{\lambda_1 t} = e^{-\gamma t}\, e^{\sqrt{\gamma^2-\omega^2}\,t} \quad , \tag{3.66}$$

$$x_2(t) = e^{\lambda_2 t} = e^{-\gamma t}\, e^{-\sqrt{\gamma^2-\omega^2}\,t} \quad . \tag{3.67}$$

Die allgemeine Lösung lautet infolgedessen

$$x(t) = A\, e^{\lambda_1 t} + B\, e^{\lambda_2 t} \quad . \tag{3.68}$$

Je nach dem Wert des Ausdrucks $\sqrt{\gamma^2 - \omega^2}$ ergeben sich nun die drei verschiedenen Fälle der Schwingungsgleichung

a) $\gamma^2 < \omega^2$: Die Wurzel ist imaginär.

b) $\gamma^2 = \omega^2$: Die Wurzel verschwindet, wir erhalten durch den Ansatz nur eine Lösung.

c) $\gamma^2 > \omega^2$: Die Wurzel ist reell.

Wir behandeln jetzt die drei Fälle getrennt.
a) In diesem Fall liegt eine schwache Dämpfung vor. Es ist $\gamma^2 < \omega^2$. Damit lautet die allgemeine Lösung

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-\gamma t}\left(A\, e^{\sqrt{\gamma^2-\omega^2}\,t} + B\, e^{-\sqrt{\gamma^2-\omega^2}\,t}\right) \\ &= e^{-\gamma t}\left(A\, e^{i\sqrt{\omega^2-\gamma^2}\,t} + B\, e^{-i\sqrt{\omega^2-\gamma^2}\,t}\right) \quad . \end{aligned} \tag{3.69}$$

Die Lösung sieht formal so aus, als wäre sie komplex. Bei geeigneter Wahl von A und B ist das jedoch nicht der Fall. Um eine reelle Lösung zu erhalten, erinnern wir uns an die Eulerschen Formeln

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\,\sin\varphi \quad , \tag{3.70}$$

$$e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\,\sin\varphi \quad . \tag{3.71}$$

Durch Addition dieser beiden Gleichungen erhalten wir

$$e^{i\varphi} + e^{-i\varphi} = 2\cos\varphi \tag{3.72}$$

und durch Subtraktion der zweiten Gleichung von der ersten

$$e^{i\varphi} - e^{-i\varphi} = 2i\sin\varphi \quad . \tag{3.73}$$

Mit dieser Erkenntnis formen wir die Lösungsansätze der Differentialgleichung um. Zuerst setzen wir

$$\Omega^2 = \omega^2 - \gamma^2 \tag{3.74}$$

und schreiben zwei spezielle Lösungen als

$$x_1(t) = e^{-\gamma t}\, e^{i\Omega t} \quad , \tag{3.75}$$

$$x_2(t) = e^{-\gamma t}\, e^{-i\Omega t} \quad . \tag{3.76}$$

Jetzt bilden wir die Linearkombination

$$x_1'(t) = \frac{1}{2}\, e^{-\gamma t} \left(e^{i\Omega t} + e^{-i\Omega t} \right) \quad , \tag{3.77}$$

$$x_2'(t) = -\frac{i}{2}\, e^{-\gamma t} \left(e^{i\Omega t} - e^{-i\Omega t} \right) \quad . \tag{3.78}$$

Auch diese beiden Lösungen sind spezielle Lösungen der Differentialgleichung für den gedämpften harmonischen Oszillator. Wir stellen sie jetzt dar als

$$x_1'(t) = e^{-\gamma t} \cos \Omega t \quad , \tag{3.79}$$

$$x_2'(t) = e^{-\gamma t} \sin \Omega t \quad . \tag{3.80}$$

Diese Lösungsstruktur ist offensichtlich reell. Daraus ergibt sich die allgemeine Form der Lösung

$$x(t) = e^{-\gamma t} \left(\bar{A} \cos \Omega t + \bar{B} \sin \Omega t \right) \tag{3.81}$$

mit $\Omega^2 = \omega^2 - \gamma^2$. Die Koeffizienten $\bar{A}$ und $\bar{B}$ sind reell. Diese Gleichung können wir in Analogie zu unseren früheren Betrachtungen umschreiben in die Form

$$x(t) = D\, e^{-\gamma t} \, \cos(\Omega t - \varphi) \tag{3.82}$$

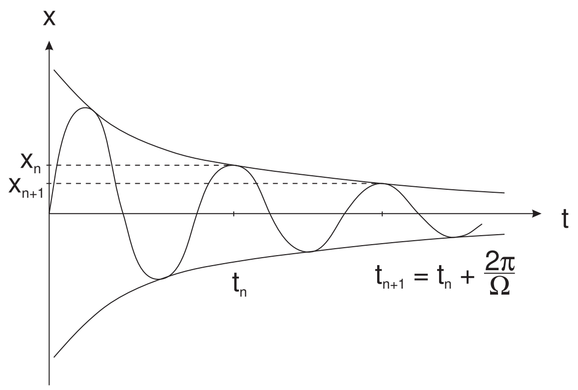
mit

$$D^2 = \bar{A}^2 + \bar{B}^2 \tag{3.83}$$

und

$$\tan \varphi = \frac{\bar{B}}{\bar{A}} \quad . \tag{3.84}$$

Geben wir nun eine graphische Darstellung der Lösung an, so erhalten wir die Kurve einer gedämpften harmonischen Schwingung, die zwischen zwei Exponentialkurven eingeschlossen ist.



Graphische Darstellung der Amplitude eines schwach gedämpften Oszillators mit den Anfangsbedingungen $x(0) = 0$ und $\dot{x}(0) > 0$.

Aufeinanderfolgende Maximalausschläge seien x_n und x_{n+1}, die zu den Zeiten t_n bzw. $t_{n+1} = t_n + T = t_n + \frac{2\pi}{\Omega}$ angenommen werden. Wir erhalten

$$\frac{x_n}{x_{n+1}} = \frac{D\,e^{-\gamma t_n}\,\cos(\Omega t_n - \varphi)}{D\,e^{-\gamma\,(t_n + \frac{2\pi}{\Omega})}\cos(\Omega t_n + 2\pi - \varphi)} = e^{\gamma\,\frac{2\pi}{\Omega}} = e^{\gamma T} \quad . \tag{3.85}$$

Weiter ergibt dies

$$\ln\frac{x_n}{x_{n+1}} = \gamma T = \gamma\,\frac{2\pi}{\Omega} \quad . \tag{3.86}$$

Dies ist das sogenannte logarithmische Dekrement, das zur experimentellen Bestimmung der Abklingkonstanten γ oder der Dämpfungskonstanten β über die Messung von x_n und x_{n+1} benutzt werden kann.

Als nächstes diskutieren wir den aperiodischen Grenzfall mit $\omega^2 = \gamma^2$. Nimmt im Fall der gedämpften Schwingung die Reibung immer mehr zu, so wird schon der zweite Ausschlag relativ klein. Schließlich geht die Masse gar nicht mehr durch die Ruhelage hindurch, sondern kommt gewissermaßen in dem Augenblick, wo sie die Ruhelage erreicht, zum Stillstand. Dieser Sonderfall tritt für $\gamma^2 = \omega^2$ auf. Wir müssen jedoch feststellen, daß in diesem Fall die beiden Lösungen, die wir oben gewonnen haben, zusammenfallen. Somit steht uns zunächst nur eine Lösung, nämlich

$$x_1(t) = e^{-\gamma t} \tag{3.87}$$

zur Verfügung. Um eine zweite Lösung zu finden, betrachten wir nicht unseren Grenzfall, sondern eine minimal stärker gedämpfte Schwingung

$$\gamma^2 = \omega^2 + \varepsilon^2 \quad . \tag{3.88}$$

Dann gibt es wieder zwei Lösungen, die wir in eine Taylor-Reihe entwickeln können

$$e^{\lambda_1 t} = e^{-\gamma t}\, e^{\varepsilon t} = e^{-\gamma t} \left(1 + \varepsilon t + \frac{\varepsilon^2}{2!}\, t^2 + \frac{\varepsilon^3}{3!}\, t^3 + \cdots\right) \quad , \tag{3.89}$$

$$e^{\lambda_2 t} = e^{-\gamma t}\, e^{-\varepsilon t} = e^{-\gamma t} \left(1 - \varepsilon t + \frac{\varepsilon^2}{2!}\, t^2 - \frac{\varepsilon^3}{3!}\, t^3 + \cdots\right) \quad . \tag{3.90}$$

Wir bilden eine Linearkombination dieser Lösungen. Wir subtrahieren die zweite Lösung von der ersten und dividieren durch ε. Dann lassen wir ε gegen 0 streben

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{x_1 - x_2}{\varepsilon} &= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{e^{-\gamma t}}{\varepsilon} \left(2\varepsilon t + 2\, \frac{\varepsilon^3}{3!}\, t^3 + \cdots\right) \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0} e^{-\gamma t} \left(2t + 2\, \frac{\varepsilon^2}{3!}\, t^3 + \cdots\right) = 2t\, e^{-\gamma t} \quad . \end{aligned} \tag{3.91}$$

Da die Differentialgleichung, von der wir ausgegangen sind, linear ist, muß auch diese Linearkombination eine Lösung der Differentialgleichung sein. Wir vergewissern uns und setzen $x = te^{-\gamma t}$ in die Differentialgleichung ein.

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega^2 x = 0 \quad . \tag{3.92}$$

Es ist

$$\dot{x} = e^{-\gamma t} - \gamma t\, e^{-\gamma t} \quad , \tag{3.93}$$

$$\ddot{x} = -\gamma\, e^{-\gamma t} - \gamma\, e^{-\gamma t} + \gamma^2 t\, e^{-\gamma t} = \gamma^2 t\, e^{-\gamma t} - 2\gamma\, e^{-\gamma t} \quad . \tag{3.94}$$

Somit folgt

$$\begin{aligned} \ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega^2 x &= (\gamma^2 t\, e^{-\gamma t} - 2\gamma e^{-\gamma t}) + 2\gamma(e^{-\gamma t} - \gamma t\, e^{-\gamma t}) + \omega^2 t\, e^{-\gamma t} \\ &= (\omega^2 - \gamma^2) t\, e^{-\gamma t} = 0 \quad , \end{aligned} \tag{3.95}$$

weil im Grenzfall gilt $\omega^2 = \gamma^2$. Somit ist auch $x(t) = t\, e^{-\gamma t}$ eine Lösung der Differentialgleichung. Mit den zwei speziellen Lösungen

$$x_1(t) = e^{-\gamma t} \quad , \tag{3.96}$$

$$x_2(t) = t\, e^{-\gamma t} \tag{3.97}$$

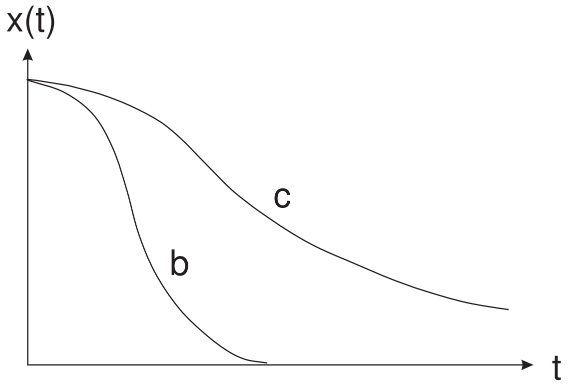
können wir die allgemeine Lösung hinschreiben,

$$x(t) = (A + Bt)\, e^{-\gamma t} \quad . \tag{3.98}$$

Schließlich studieren wir noch das überdämpfte System. Ist die Dämpfung noch stärker als im eben diskutierten Fall, d. h. ist $\gamma^2 > \omega^2$, so kehrt die Masse viel langsamer zur Ruhelage zurück. Die allgemeine Lösung lautet dann

$$x(t) = e^{-\gamma t} \left(Ae^{\sqrt{\gamma^2 - \omega^2}\, t} + Be^{-\sqrt{\gamma^2 - \omega^2}\, t}\right) \quad . \tag{3.99}$$

In diesem Fall kriecht die Masse nach dem ersten Ausschlag nur allmählich in die Ruhestellung zurück, d. h. der Oszillator vollführt eine Kriechbewegung.
Wir betrachten nun die graphische Darstellung der beiden zuletzt diskutierten Fälle.



b ist der aperiodische Grenzfall. c entspricht der Kriechbewegung. Offenbar kehrt im aperiodischen Grenzfall der Oszillator am schnellsten wieder in die Ruhelage zurück, deshalb ist er bei der Dämpfung von Meßgeräten von großer Bedeutung. Im aperiodischen Grenzfall stellt sich der Meßwert am schnellsten wieder ein, weil das Meßinstrument als gedämpfter Oszillator eine Schwingung vollführt, aber aufgrund der Dämpfung nach der ersten Viertelperiode stecken bleibt.

Schließlich wollen wir noch den Energiehaushalt des schwingenden Systems bei Dämpfung untersuchen. Dazu gehen wir direkt von der Differentialgleichung aus

$$\ddot{x} + \omega^2 x = -2\gamma \dot{x} \quad . \tag{3.100}$$

Wir multiplizieren diese Gleichung mit $\dot{x}$

$$\ddot{x}\,\dot{x} + \omega^2 x\,\dot{x} = -2\gamma\,\dot{x}^2 \quad . \tag{3.101}$$

Auf der linken Seite steht nun ein vollständiges Differential

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\,\dot{x}^2 + \frac{\omega^2}{2}\,x^2\right) = -2\gamma\,\dot{x}^2 \quad . \tag{3.102}$$

Die linke Seite ist aber, wenn man die Gleichung noch mit m multipliziert, nichts anderes als die zeitliche Ableitung der mechanischen Gesamtenergie des schwingenden Systems.

$$\frac{d}{dt}(T+V) = \frac{d}{dt}\,E = -\beta\,\dot{x}^2 \leq 0 \quad . \tag{3.103}$$

Demnach ist die zeitliche Ableitung der Gesamtenergie der Feder nach der Zeit negativ, d. h. die Gesamtenergie des Systems nimmt bei der Dämpfung ständig ab, weil durch Reibung dauernd Energie in Wärme umgewandelt und nach außen abgeführt wird.

3.3 Lösung von Differentialgleichungen zweiter Ordnung

Linear ist die Differentialgleichung, wenn x, $\dot{x}$, $\ddot{x}$ linear vorkommen, wenn also die Gleichung folgende Gestalt hat

$$A\ddot{x} + B\dot{x} + Cx + D = 0 \quad , \tag{3.104}$$

wobei A, B, C, D Funktionen von t sein können. Wenn der Term D fehlt, nennen wir die Gleichung homogen. Wenn $x_1(t)$ eine homogene, lineare Differentialgleichung löst, so ist auch cx_1, wobei c eine Konstante ist, eine Lösung. Wenn $x_1(t)$ und $x_2(t)$ Lösungen sind, so ist auch c_1x_1 und c_2x_2 mit beliebigen Konstanten c_1 und c_2 eine Lösung. Da die allgemeine Lösung einer Differentialgleichung zweiter Ordnung zwei und nur zwei willkürliche Konstanten enthält, hat man eine homogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung allgemein gelöst, wenn man zwei linear unabhängige Lösungen kennt.

Wenn man ein Lösung $x_1(t)$ einer inhomogenen linearen Differentialgleichung (3.104) gefunden hat, also

$$A\ddot{x}_1(t) + B\dot{x}_1(t) + Cx_1(t) + D = 0 \tag{3.105}$$

gilt, und $x_0(t)$ eine Lösung der durch Weglassen von D entstehenden homogenen Gleichung, also

$$A\ddot{x}_0(t) + B\dot{x}_0(t) + Cx_0(t) = 0 \quad , \tag{3.106}$$

ist, so erhält man mit $x(t) = x_0(t) + x_1(t)$ wieder eine Lösung von (3.104). Es ist nämlich

$$\begin{aligned} A(\ddot{x}_0 + \ddot{x}_1) + B(\dot{x}_0 + \dot{x}_1) + C(x_0 + x_1) + D &= \\ \underbrace{A(\ddot{x}_0) + B(\dot{x}_0) + C(x_0)}_{=0} + \underbrace{A(\ddot{x}_1) + B(\dot{x}_1) + C(x_1) + D}_{=0} &= 0 \quad . \end{aligned} \tag{3.107}$$

Eine inhomogene lineare Differentialgleichung ist also allgemein gelöst, wenn man die homogene allgemein gelöst hat und eine spezielle Lösung der inhomogenen dazu addiert. Man kann sich auch leicht davon überzeugen, daß zwei vermutete verschiedene Lösungen der inhomogenen Differentialgleichung $x_1(t)$ und $x_2(t)$ einander gleich sein müssen bis auf eine Lösung der homogenen Differentialgleichung. Es folgt nämlich aus

$$A\ddot{x}_1 + B\dot{x}_1 + Cx_1 = -D = A\ddot{x}_2 + B\dot{x}_2 + Cx_2 \tag{3.108}$$

sofort

$$A\ddot{x}_1 + B\dot{x}_1 + Cx_1 = A\ddot{x}_2 + B\dot{x}_2 + Cx_2 \tag{3.109}$$

und weiter

$$A(x_1 - x_2)^{\cdot\cdot} + B(x_1 - x_2)^{\cdot} + C(x_1 - x_2) = 0 \quad , \tag{3.110}$$

d. h. die Differenz $x_1 - x_2$ der beiden speziellen Lösungen muß Lösung der homogenen Gleichung sein. Homogene lineare Gleichungen mit konstanten Koeffizienten (A, B, C) löst man mit dem Ansatz

$$x(t) = e^{\lambda t} \quad . \tag{3.111}$$

Aus der homogenen Differentialgleichung

$$A\ddot{x} + B\dot{x} + Cx = 0 \tag{3.112}$$

erhält man die algebraische Gleichung für λ,

$$A\lambda^2 + B\lambda + C = 0 \quad . \tag{3.113}$$

Sie wird charakteristische Gleichung genannt. Ihre zwei Lösungen geben, wenn sie nicht gerade zusammenfallen, zwei Lösungen der Differentialgleichung und damit die allgemeine Lösung

$$x = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} \quad . \tag{3.114}$$

Wenn die quadratische Gleichung in λ nur eine Lösung hat, so ist, wie man leicht nachrechnet – entweder direkt oder durch Grenzübergangsbetrachtungen –

$$x = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 t\, e^{\lambda_2 t} \tag{3.115}$$

die allgemeine Lösung der Differentialgleichung.

Besonders einfache Differentialgleichungen zweiter Ordnung sind

$$\ddot{x} = f(t) \quad , \tag{3.116}$$
$$\ddot{x} = f(\dot{x}) \quad , \tag{3.117}$$
$$\ddot{x} = f(x) \quad . \tag{3.118}$$

Im ersten Fall ist die Beschleunigung eine Funktion der Zeit, im zweiten Fall ist die Beschleunigung eine Funktion der Geschwindigkeit und im dritten Fall des Ortes. (3.116) ist durch zweifache Integration zu lösen. Haben wir eine Differentialgleichung erster Ordnung vorliegen der Art

$$\dot{x} = f(t) \quad , \tag{3.119}$$

so erhalten wir sofort

$$x(t) = \int_0^t f(t')\, dt' + x_0 \quad . \tag{3.120}$$

Analoges gilt für die Lösung von (3.116). (3.117) ist eine Differentialgleichung von erster Ordnung in $\dot{x}$. Mit $v = \dot{x}$ folgt

$$\dot{v} = f(v) \quad . \tag{3.121}$$

Dies ist von der gleichen Struktur wie

$$\dot{x} = f(x) \quad , \tag{3.122}$$

die wir folgendermaßen umformen

$$dt = \frac{dx}{f(x)} \quad . \tag{3.123}$$

Wir integrieren und erhalten

$$t(x) = \int\limits_{0}^{x} \frac{dx'}{f(x')} + t_0 \quad . \tag{3.124}$$

Durch Inversion folgt $x(t)$. (3.118) führt man über in

$$\dot{x}\ddot{x} = f(x)\dot{x} \tag{3.125}$$

also

$$\dot{x}\,\frac{d\dot{x}}{dt} = f(x)\,\frac{dx}{dt} \tag{3.126}$$

und somit

$$\dot{x}\,d\dot{x} = f(x)\,dx \quad . \tag{3.127}$$

Die Integration ergibt

$$\frac{1}{2}\,\dot{x}^2 = \int\limits_{x_0}^{x} f(x')\,dx' + C \quad . \tag{3.128}$$

Wir erhalten also eine Differentialgleichung der Struktur

$$\dot{x} = \varphi(x) \quad , \tag{3.129}$$

die wir, wie oben beschrieben, lösen können.

3.4 Harmonischer Oszillator mit äußerer Kraft

Als konkrete physikalische Anwendung betrachten wir jetzt einen harmonischen Oszillator mit äußerer Kraft. Ein Oszillator mit der Eigenfrequenz ω besitze keine Dämpfung ($\beta = 0$) und werde mit einer harmonischen äußeren Kraft derselben Frequenz ω erregt. Das untersuchte Kraftgesetz lautet also

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx + F_0 \cos \omega t \quad . \tag{3.130}$$

Mit $\omega^2 = k/m$ und $f_0 = F_0/m$ erhalten wir

$$\ddot{x} + \omega^2 x = f_0 \cos \omega t \quad . \tag{3.131}$$

Dies ist jetzt eine inhomogene Differentialgleichung zweiter Ordnung. Um die allgemeine Lösung der Gleichung (3.131) zu erhalten, addieren wir zu der allgemeinen Lösung der homogenen Differentialgleichung

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \tag{3.132}$$

eine spezielle oder partikuläre Lösung von (3.131). Nun lautet die allgemeine Lösung von (3.132)

$$x = A \cos \omega t + B \sin \omega t \quad . \tag{3.133}$$

Für die spezielle Lösung machen wir den Ansatz

$$x = t\left(C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t\right) \quad . \tag{3.134}$$

C_1 und C_2 sind dabei noch unbekannte Koeffizienten. Durch Einsetzen von (3.134) in die Differentialgleichung (3.131) können wir prüfen, ob damit die Differentialgleichung befriedigt wird. Durch Differenzieren erhalten wir

$$\dot{x} = t\left(-\omega C_1 \sin \omega t + \omega C_2 \cos \omega t\right) + \left(C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t\right) \tag{3.135}$$

und weiter

$$\ddot{x} = t\left(-\omega^2 C_1 \cos \omega t - \omega^2 C_2 \sin \omega t\right) + 2\left(-\omega C_1 \sin \omega t + \omega C_2 \cos \omega t\right) \quad . \tag{3.136}$$

Einsetzen in die Differentialgleichung (3.131) führt auf

$$-2\omega C_1 \sin \omega t + 2\omega C_2 \cos \omega t = f_0 \cos \omega t \quad . \tag{3.137}$$

Daraus ergibt sich nach Koeffizientenvergleich

$$C_1 = 0 \quad , \tag{3.138}$$

$$C_2 = \frac{f_0}{2\omega} \quad . \tag{3.139}$$

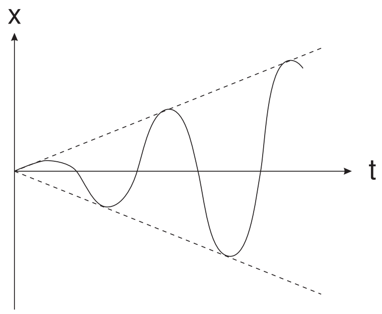
Somit lautet die spezielle Lösung von (3.131)

$$x = \frac{f_0}{2\omega} t \sin \omega t \quad . \tag{3.140}$$

Die allgemeine Lösung lautet dann

$$x(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t + \frac{f_0}{2\omega} t \sin \omega t \quad . \tag{3.141}$$

Die Konstanten A und B werden wieder durch die Anfangsbedingungen bestimmt. Da keine Dämpfung vorliegt, werden die Terme proportional zu A und B bei großer Zeit nicht klein. Für große Zeiten ($t \to \infty$) wächst aber der Term proportional zu t über alle Grenzen, so daß die Feder schließlich brechen wird.



Dies ist der typische Fall des „Aufschaukelns" einer Schwingung, wie er uns aus dem täglichen Leben vielfach bekannt ist. Z. B. beim Schaukeln, beim periodischen Ziehen an einem angesägten Baum, um ihn zum Brechen zu veranlassen, usw. Als nächst komplizierteren Fall betrachten wir die gedämpfte Schwingung mit periodischer äußerer Kraft. Wir gehen jetzt aus von der Kraftgleichung

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - \beta \dot{x} + F_0 \cos \alpha t \tag{3.142}$$

oder umgeschrieben

$$\ddot{x} + 2\gamma \dot{x} + \omega^2 x = f_0 \cos \alpha t \quad . \tag{3.143}$$

α ist hier nicht notwendigerweise gleich der Eigenfrequenz ω. Die allgemeine Lösung von (3.143) hat wieder die Struktur

$$x(t) = A x_1(t) + B x_2(t) + x_0(t) \quad , \tag{3.144}$$

wobei $x_0(t)$ wieder eine Partikulärlösung der inhomogenen Differentialgleichung (3.143) ist. Für die drei Lösungsansätze $x_0(t)$, $x_1(t)$ und $x_2(t)$ gelten die Differentialgleichungen

$$\ddot{x}_0 + 2\gamma \dot{x}_0 + \omega^2 x_0 = f_0 \cos \alpha t \quad , \tag{3.145}$$

$$\ddot{x}_{1,2} + 2\gamma \dot{x}_{1,2} + \omega^2 x_{1,2} = 0 \quad . \tag{3.146}$$

Um die spezielle Lösung $x_0(t)$ zu finden, überlegen wir folgendes: Nach Beendigung des Einschwingvorgangs wird die Masse m mit der Frequenz α der einwirkenden Kraft schwingen. Als Lösungsansatz für die spezielle Lösung versuchen wir deshalb

$$x_0(t) = C_1 \cos \alpha t + C_2 \sin \alpha t \quad . \tag{3.147}$$

Wir haben jetzt zu prüfen, ob dieser Ansatz die Differentialgleichung (3.143) befriedigt, und die bislang unbekannten Koeffizienten C_1 und C_2 zu bestimmen. Wir bekommen

$$\begin{aligned} f_0 \cos \alpha t &= -\alpha^2(C_2 \sin \alpha t + C_1 \cos \alpha t) + 2\gamma(C_2 \alpha \cos \alpha t - C_1 \alpha \sin \alpha t) \\ &\quad +\omega^2(C_2 \sin \alpha t + C_1 \cos \alpha t) \quad . \end{aligned} \tag{3.148}$$

Wir sortieren nach Termen in $\sin \alpha t$ und $\cos \alpha t$.

$$\begin{aligned} f_0 \cos \alpha t &= \sin \alpha t \left(-\alpha^2 C_2 - 2\gamma\alpha C_1 + \omega^2 C_2\right) \\ &\quad + \cos \alpha t \left(-\alpha^2 C_1 + 2\gamma\alpha C_2 + \omega^2 C_1\right) \quad . \end{aligned} \tag{3.149}$$

Da $\sin \alpha t$ und $\cos \alpha t$ linear unabhängige Funktionen sind, führen wir einen Koeffizientenvergleich durch:

$$\begin{aligned} C_1(2\gamma\alpha) + C_2(\alpha^2 - \omega^2) &= 0 \quad , \\ -C_1(\alpha^2 - \omega^2) + C_2(2\gamma\alpha) &= f_0 \quad . \end{aligned} \tag{3.150}$$

Dies ist ein lineares Gleichungssystem für die Koeffizienten C_1 und C_2. Dies ergibt

$$C_1 = -\frac{(\alpha^2 - \omega^2) f_0}{4\gamma^2\alpha^2 + (\alpha^2 - \omega^2)^2} \quad , \tag{3.151}$$

$$C_2 = \frac{2 f_0 \alpha\gamma}{4\gamma^2\alpha^2 + (\alpha^2 - \omega^2)^2} \quad . \tag{3.152}$$

Einsetzen von C_1 und C_2 in (3.150) verifiziert sofort die Lösung. Damit erhalten wir zusammenfassend als spezielle Lösung

$$x_p(t) = f_0 \left[\underbrace{-\frac{\alpha^2 - \omega^2}{(\alpha^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\alpha^2}}_{\bar{A}} \cos \alpha t + \underbrace{\frac{2\gamma\alpha}{(\alpha^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\alpha^2}}_{\bar{B}} \sin \alpha t \right] \quad . \tag{3.153}$$

Dies schreiben wir um mit

$$\bar{A} \cos \alpha t + \bar{B} \sin \alpha t = \sqrt{\bar{A}^2 + \bar{B}^2} \cos(\alpha t - \varphi) \quad , \tag{3.154}$$

$$\tan \varphi = \frac{\bar{B}}{\bar{A}} \tag{3.155}$$

in

$$
\begin{aligned}
x_p(t) &= f_0 \sqrt{\frac{4\gamma^2\alpha^2 + \left(\alpha^2-\omega^2\right)^2}{\left(\left(\alpha^2-\omega^2\right)^2 + 4\gamma^2\alpha^2\right)^2}} \cos(\alpha t - \varphi) \\
&= \frac{f_0}{\sqrt{\left(\alpha^2-\omega^2\right)^2 + 4\gamma^2\alpha^2}} \cos(\alpha t - \varphi) \qquad (3.156)
\end{aligned}
$$

mit

$$
\tan\varphi = -\frac{2\gamma\alpha}{\alpha^2-\omega^2} \quad . \qquad (3.157)
$$

Da die Lösungen der homogenen Differentialgleichung im Fall schwacher Dämpfung

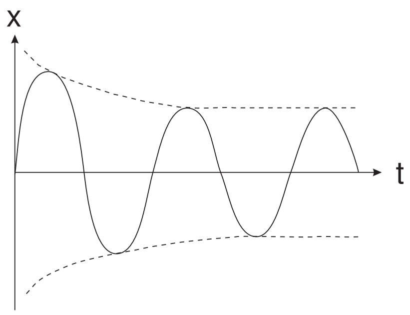
$$
\begin{aligned}
x_1(t) &= e^{-\gamma t}\sin\Omega t, \qquad (3.158) \\
x_2(t) &= e^{-\gamma t}\cos\Omega t \qquad (3.159)
\end{aligned}
$$

sind, ergibt sich als vollständige Lösung der Differentialgleichung

$$
\begin{aligned}
x(t) &= \frac{f_0}{\sqrt{\left(\alpha^2-\omega^2\right)^2 + 4\gamma^2\alpha^2}} \cos(\alpha t - \varphi) \\
&\quad + e^{-\gamma t}(A\sin\Omega t + B\cos\Omega t) \\
&= \frac{f_0}{\sqrt{\left(\alpha^2-\omega^2\right)^2 + 4\gamma^2\alpha^2}} \cos(\alpha t - \varphi) + De^{-\gamma t}\cos(\Omega t - \vartheta) \qquad (3.160)
\end{aligned}
$$

mit

$$
D^2 = A^2 + B^2, \quad \Omega^2 = \omega^2 - \gamma^2, \quad \vartheta = \arctan\frac{B}{A} \quad . \qquad (3.161)
$$



Die graphische Darstellung der Bewegung des schwach gedämpften Oszillators mit periodischer äußerer Kraft.

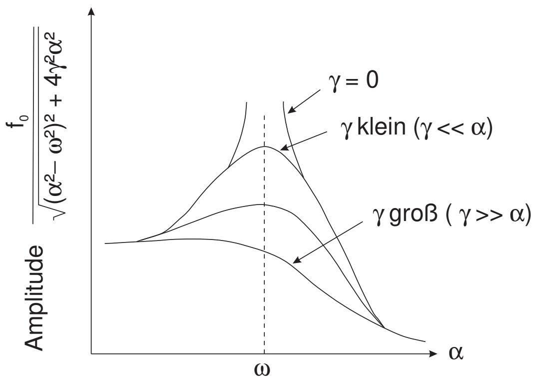
Wie auch immer die Anfangsbedingungen lauten, bleibt bei von Null verschiedener Dämpfung ($\gamma > 0$) nach hinreichend langer Zeit nur noch der erste Term, die spezielle Lösung $x_p(t)$ der Differentialgleichung, übrig. Der zweite Term klingt proportional zu $e^{-\gamma t}$ ab. Er hängt von den

Konstanten A und B ab, die durch die Anfangsbedingungen festgelegt werden. Dieser zweite Term beschreibt daher offenbar den Einschwingvorgang, der nach einiger Zeit „vergessen“ ist. Wir betrachten nun die spezielle Anregungsfrequenz

$$\alpha = \sqrt{\omega^2 - 2\gamma^2} \quad . \tag{3.162}$$

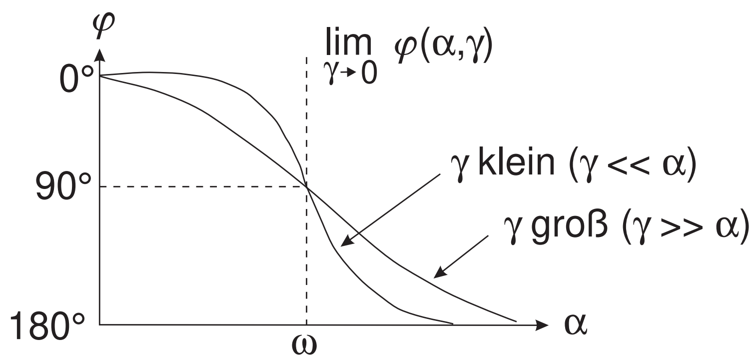
Für diesen Wert wird die maximale Auslenkung erreicht. Wir betrachten den Nenner in (3.160)

$$\begin{aligned}
\sqrt{(\alpha^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\alpha^2} &= \sqrt{(\omega^2 - 2\gamma^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2(\omega^2 - 2\gamma^2)} \\
&= \sqrt{4\gamma^4 - 4\gamma^2\omega^2 - 8\gamma^4} = \sqrt{4\gamma^2\omega^2 - 4\gamma^4} \\
&= \sqrt{4\gamma^2(\omega^2 - \gamma^2)} = 2\gamma\sqrt{\omega^2 - \gamma^2} = 2\gamma\Omega \quad .
\end{aligned} \tag{3.163}$$



Die Amplitude der erzwungenen gedämpften Schwingung als Funktion der Erregerfrequenz α.

Bei der Eigenfrequenz ω des Oszillators resoniert das System. Es liegt eine Resonanz vor. Im Fall ohne Dämpfung ($\gamma = 0$) wird im Resonanzfall die Amplitude unendlich groß. Dies führt zur Resonanzkatastrophe. Im Fall sehr starker Dämpfung ist die Resonanz kaum zu bemerken. Die dazugehörige Phase der Schwingung ist ebenfalls für verschiedene Dämpfungen von Interesse. Bei sehr niedriger Frequenz α ($\alpha \ll \omega$) der erzwingenden Kraft ist die Phasenverschiebung φ zwischen Kraft und Massenbewegung Null. Bei sehr hoher Frequenz ($\alpha \gg \omega$) ist die entsprechende Phasenverschiebung $180°$.

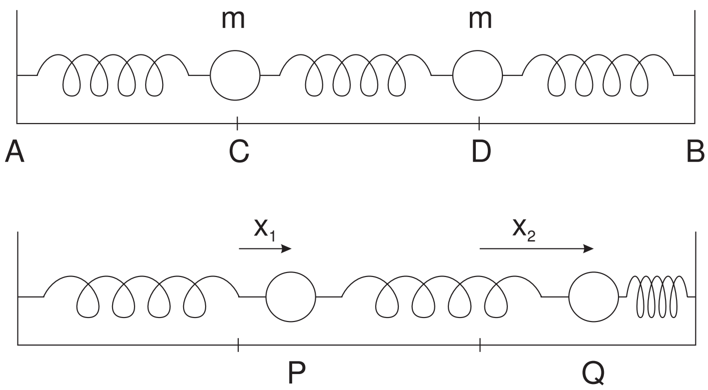


Die Phasenverschiebung des Oszillators gegenüber der erregenden Schwingung in Abhängigkeit von der Erregungsfrequenz α

$$\varphi = -\arctan \frac{2\gamma\alpha}{\alpha^2 - \omega^2} \quad . \tag{3.164}$$

3.5 Gekoppelte Oszillatoren

Als weiterer interessante Studie behandeln wir nun gekoppelte Oszillatoren.



Die Massen der Oszillatoren werden einfacherweise als gleich angenommen, $m_1 = m_2 = m$. Die Federn haben die gleiche Federkonstante, $k_1 = k_2 = k_3 = k$. Die Reibung wird vernachlässigt, $\gamma = 0$. x_1 und x_2 bezeichnen die Verschiebung der Massen aus ihren Gleichgewichtspositionen C und D zu einer beliebigen Zeit t. Wir betrachten die Kraft, die auf die Masse bei P wirkt. Von links wirkt $-kx_1$, von rechts $-k(x_1 - x_2) = k(x_2 - x_1)$ und damit insgesamt

$$F_1 = k(x_2 - x_1) - kx_1 \quad . \tag{3.165}$$

Dabei ist jeweils auf das Vorzeichen der Kraft zu achten. Entsprechend ist die Kraft auf die Masse bei Q

$$F_2 = -kx_2 + k(x_1 - x_2) \quad . \tag{3.166}$$

Die Newtonsche Grundgleichung lautet dann

$$m\frac{d^2x_1}{dt^2} = k(x_2 - x_1) - kx_1 \quad , \tag{3.167}$$
$$m\frac{d^2x_2}{dt^2} = k(x_1 - x_2) - kx_2 \tag{3.168}$$

oder zusammengefaßt

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 &= k(x_2 - 2x_1) \quad , \\ m\ddot{x}_2 &= k(x_1 - 2x_2) \quad . \end{aligned} \tag{3.169}$$

Wir wollen jetzt die Grundschwingungen oder Eigenschwingungen des Systems bestimmen. Als Ansatz setzen wir

$$x_1 = A_1 \cos \omega t, \tag{3.170}$$

$$x_2 = A_2 \cos \omega t \quad . \tag{3.171}$$

Dies setzen wir in das System (3.169) von Differentialgleichungen ein. Bislang unbestimmt sind A_1, A_2 und ω. Nach Einsetzen folgt

$$-mA_1\omega^2 \cos \omega t + 2A_1 k \cos \omega t - kA_2 \cos \omega t = 0 \quad , \tag{3.172}$$

$$-mA_2\omega^2 \cos \omega t + 2A_2 k \cos \omega t - kA_1 \cos \omega t = 0 \tag{3.173}$$

oder weiter

$$\begin{array}{lll} (2k - m\omega^2)A_1 & -kA_2 & = 0, \\ -kA_1 & +(2k - m\omega^2)A_2 & = 0 \end{array} \quad . \tag{3.174}$$

Dies ist ein lineares Gleichungssystem für die unbestimmten Koeffizienten A_1 und A_2. Ein derartiges Gleichungssystem hat nur dann von Null verschiedene Lösungen, wenn die Koeffizientendeterminante verschwindet,

$$\begin{vmatrix} 2k - m\omega^2 & -k \\ -k & 2k - m\omega^2 \end{vmatrix} = 0 \quad . \tag{3.175}$$

Dies ergibt

$$(2k - m\omega^2)(2k - m\omega^2) - k^2 = 0 \tag{3.176}$$

oder

$$m^2\omega^4 - 4km\omega^2 + 3k^2 = 0 \quad . \tag{3.177}$$

Dies lösen wir nach ω^2 auf

$$\omega^2 = \frac{4km \pm \sqrt{16k^2m^2 - 12k^2m^2}}{2m^2} = \frac{4km \pm 2km}{2m^2} \quad . \tag{3.178}$$

Damit erhalten wir

$$\omega_1^2 = \frac{k}{m} \quad , \tag{3.179}$$

$$\omega_2^2 = \frac{3k}{m} \quad . \tag{3.180}$$

Damit lauten die Normalfrequenzen oder charakteristischen Frequenzen des Systems

$$\nu_1 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \quad , \tag{3.181}$$

$$\nu_2 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{3k}{m}} \quad . \tag{3.182}$$

Um die Normalmoden oder Eigenvektoren des Systems zu finden, setzen wir zunächst ω_1 in das Gleichungssystem (3.174) ein. Dies ergibt

$$(2k-k)A_1 - kA_2 = 0 \tag{3.183}$$

und weiter

$$k(A_1 - A_2) = 0 \quad . \tag{3.184}$$

Somit folgt

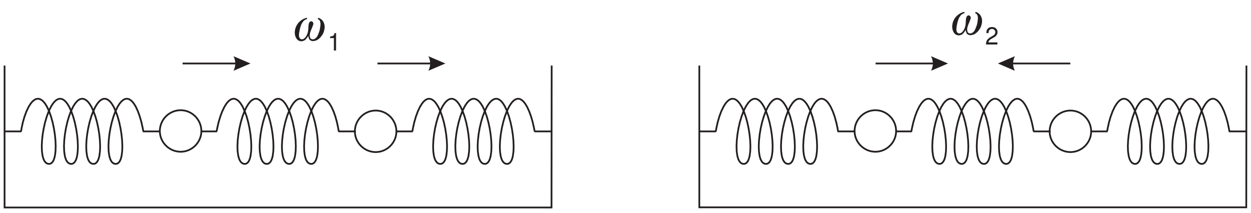
$$A_1 = A_2 \quad . \tag{3.185}$$

Ebenso erhalten wir für $\omega = \sqrt{\frac{3k}{m}}$

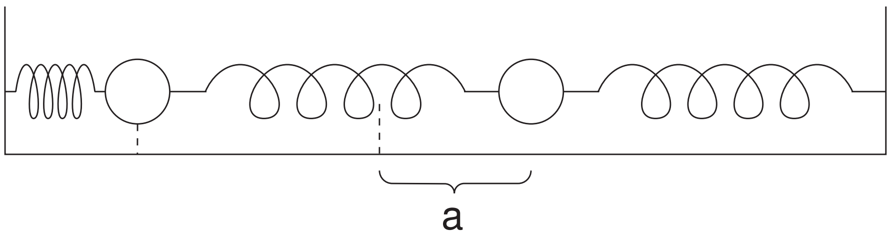
$$(2k-3k)A_1 - kA_2 = 0 \tag{3.186}$$

und daher

$$A_1 = -A_2 \quad . \tag{3.187}$$



Für die Lösung ω_2 entspricht die Normalmode der Schwingung einer Bewegung der Massen in entgegengesetzter Richtung.
Als besonderer Spezialfall betrachten wir nun die Situation, daß wir m_1 in Gleichgewichtsposition halten, während die zweite Masse um den Betrag a nach rechts verschoben ist. Die Massen werden dann freigegeben. Wir wollen die Position zu späteren Zeiten bestimmen.



Die allgemeine Lösung beider Massen ist gegeben durch

$$\begin{aligned} x_1 &= C_1 \cos\omega_1 t + C_2 \sin\omega_1 t + C_3 \cos\omega_2 t + C_4 \sin\omega_2 t \quad , & (3.188)\\ x_2 &= D_1 \cos\omega_1 t + D_2 \sin\omega_1 t + D_3 \cos\omega_2 t + D_4 \sin\omega_2 t \quad . & (3.189)\end{aligned}$$

Die Koeffizienten sind konstant. Dies setzen wir in die ursprünglichen Kraftgleichungen ein und vergleichen dann die Koeffizienten von $\cos\omega_1 t$, $\sin\omega_1 t$, $\cos\omega_2 t$, $\sin\omega_2 t$.

$$\begin{aligned} &- C_1 m\omega_1^2 \cos\omega_1 t - C_2 m\omega_1^2 \sin\omega_1 t - C_3 m\omega_2^2 \cos\omega_2 t - C_4 m\omega_2^2 \sin\omega_2 t \\ &= k(D_1 - 2C_1)\cos\omega_1 t + k(D_2 - 2C_2)\sin\omega_1 t \\ &\quad +k(D_3 - 2C_3)\cos\omega_2 t + k(D_4 - 2C_4)\sin\omega_2 t \quad . \end{aligned} \tag{3.190}$$

Dies ergibt mit $m\omega_1^2 = k$ und $m\omega_2^2 = 3k$

$$D_1 = C_1, \quad D_2 = C_2, \quad D_3 = -C_3, \quad D_4 = -C_4 \quad . \tag{3.191}$$

Damit können wir unseren Ansatz für x_1 und x_2 schreiben als

$$x_1 = C_1\cos\omega_1 t + C_2\sin\omega_1 t + C_3\cos\omega_2 t + C_4\sin\omega_2 t \quad , \tag{3.192}$$

$$x_2 = C_1\cos\omega_1 t + C_2\sin\omega_1 t - C_3\cos\omega_2 t - C_4\sin\omega_2 t \quad . \tag{3.193}$$

Aufgrund der gegebenen Anfangsbedingungen bestimmen wir nun die Koeffizienten C_1, C_2, C_3, C_4. Es ist

$$x_1 = 0 \quad , \tag{3.194}$$

$$x_2 = a \quad , \tag{3.195}$$

$$\dot{x}_1 = 0 \quad , \tag{3.196}$$

$$\dot{x}_2 = 0 \quad , \tag{3.197}$$

bei $t = 0$. Aufgrund dieser Bedingungen finden wir

$$C_1 + C_3 = 0 \quad , \tag{3.198}$$

$$C_1 - C_3 = a \quad , \tag{3.199}$$

$$C_2\omega_1 + C_4\omega_2 = 0 \quad , \tag{3.200}$$

$$C_2\omega_1 - C_4\omega_2 = 0 \quad . \tag{3.201}$$

Dies wird befriedigt durch

$$C_1 = \frac{1}{2}a, \quad C_2 = 0, \quad C_3 = -\frac{1}{2}a, \quad C_4 = 0 \quad . \tag{3.202}$$

Zusammengefaßt erhalten wir also als Weg-Zeit Gesetz

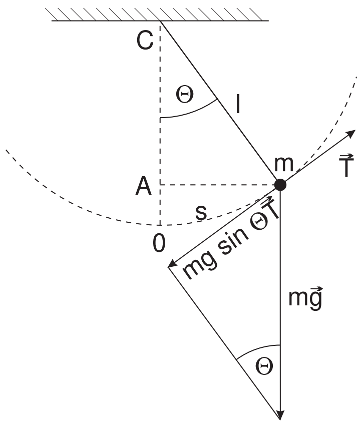
$$x_1 = \frac{1}{2}a(\cos\omega_1 t - \cos\omega_2 t) \quad , \tag{3.203}$$

$$x_2 = \frac{1}{2}a(\cos\omega_1 t + \cos\omega_2 t) \tag{3.204}$$

mit $\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ und $\omega_2 = \sqrt{\frac{3k}{m}}$.
In der allgemeinen Bewegung kommen also beide Eigenfrequenzen vor. Dies ist Ausdruck der Tatsache, daß die allgemeine Bewegung eine Superposition der Eigenmoden ist.

3.6 Das mathematische Pendel

Das mathematische Pendel besteht aus einer punktförmigen Masse m am Ende einer masselosen Leine der Länge l. θ nennen wir den Winkel der Auslenkung.



Die Schwerkraft bewirkt die rücktreibende Kraft beim Pendel. Wir können aber nur die Komponente der Schwerkraft in Richtung des Kreisbogens, also in tangentialer Richtung, in Rechnung stellen. Die Position der Masse m zu einer beliebigen Zeit t sei durch die Bogenlänge s bestimmt, gemessen an der Gleichgewichtsposition bei 0. $\vec{T}$ ist ein Einheitstangentenvektor entlang des Kreises. Die Komponente der rücktreibenden Kraft ist dann

$$\vec{F} = -mg \sin\theta\, \vec{T} \quad . \tag{3.205}$$

Nach dem Newtonschen Gesetz gilt dann

$$m\, \frac{d^2 s}{dt^2}\, \vec{T} = -mg \sin\theta\, \vec{T} \quad . \tag{3.206}$$

Die Beschleunigung ist die zweite Ableitung des Weges, hier also s, nach der Zeit. Jetzt verwenden wir, daß gilt

$$s = l\theta \quad . \tag{3.207}$$

Der Winkel θ umgekehrt ist definiert als Bogenlänge durch Radius: $\theta = s/l$. Damit bekommen wir in skalarer Form

$$ml\, \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg \sin\theta \tag{3.208}$$

und weiter

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l} \sin\theta \quad . \tag{3.209}$$

Die Bewegungsgleichung ist unabhängig von der Masse m des Pendels.

Als wichtigen Grenzfall behandeln wir jetzt kleine Auslenkungen. Dann können wir $\sin\theta$ in eine Taylor–Reihe entwickeln und annähern durch θ als Term niedrigster Ordnung, $\sin\theta \sim \theta$. Dies führt auf

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0 \quad . \tag{3.210}$$

Dies ist die Gleichung des harmonischen Oszillators mit der allgemeinen Lösung

$$\theta = A\cos\sqrt{\frac{g}{l}}\,t + B\sin\sqrt{\frac{g}{l}}\,t \quad . \tag{3.211}$$

Als speziell gewählte Anfangsbedingung betrachten wir

$$\left.\begin{array}{rcl} \theta & = & \theta_0 \quad , \\ \frac{d\theta}{dt} & = & 0 \quad , \end{array}\right\} \quad \text{bei} \quad t = 0 \quad . \tag{3.212}$$

Dies führt auf

$$A = \theta_0, \tag{3.213}$$

$$B = 0 \quad . \tag{3.214}$$

Somit haben wir als Lösung

$$\theta = \theta_0\cos\sqrt{\frac{g}{l}}\,t \quad . \tag{3.215}$$

Die Periode der Schwingung ist demnach

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \quad . \tag{3.216}$$

Die Bewegungsgleichung des Pendels kann auch aus der Energiebilanz gewonnen werden. Zur Bestimmung der potentiellen Energie geht die Höhe h des Pendels ein, es ist h gleich dem Abstand OA.

$$OA = OC - AC = l - l\cos\theta = l(1-\cos\theta) \quad . \tag{3.217}$$

Bei B gilt dann

$$T + V = E = \text{const.} \tag{3.218}$$

oder

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + mgl(1-\cos\theta) = E \quad . \tag{3.219}$$

Mit $s = l\theta$ wird dies

$$\frac{1}{2}ml^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + mgl(1-\cos\theta) = E \quad . \tag{3.220}$$

Wir differenzieren beide Seiten nach t und finden

$$ml^2\dot{\theta}\ddot{\theta} + mgl\sin\theta\dot{\theta} = 0 \tag{3.221}$$

und somit

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0 \quad . \tag{3.222}$$

Wir wollen jetzt von der Näherung kleiner Auslenkungen absehen und versuchen die nichtlineare Differentialgleichung zu lösen. Es ist

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\theta \quad . \tag{3.223}$$

Wir bezeichnen

$$u = \frac{d\theta}{dt} \quad . \tag{3.224}$$

Damit haben wir

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{du}{dt} = \frac{du}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = u\frac{du}{d\theta} \quad . \tag{3.225}$$

Aus (3.223) bekommen wir damit

$$u\frac{du}{d\theta} = -\frac{g}{l}\sin\theta \quad . \tag{3.226}$$

Dies ist eine Differentialgleichung in θ. Wir separieren die Variablen und integrieren

$$\frac{u^2}{2} = \frac{g}{l}\cos\theta + c \quad . \tag{3.227}$$

Mit der Anfangsbedingung $\theta = \theta_0$, $u = 0$ folgt

$$c = -\frac{g}{l}\cos\theta_0 \quad . \tag{3.228}$$

Damit bekommen wir

$$u^2 = \frac{2g}{l}(\cos\theta - \cos\theta_0) \tag{3.229}$$

oder

$$\frac{d\theta}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2g}{l}(\cos\theta - \cos\theta_0)} \quad . \tag{3.230}$$

Wir beschränken uns jetzt auf die Viertelperiode, in der das Pendel von $\theta = \theta_0$ bis $\theta = 0$ geht. Dies bedingt das negative Vorzeichen der Wurzel

$$\frac{d\theta}{dt} = -\sqrt{\frac{2g}{l}(\cos\theta - \cos\theta_0)} \quad . \tag{3.231}$$

Wir separieren die Variablen und integrieren

$$t = -\sqrt{\frac{l}{2g}} \int \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}} \quad . \tag{3.232}$$

Bei $t = 0$ ist $\theta = \theta_0$, bei $t = T/4$ ist $\theta = 0$. Daher ist die Periode T

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{2g}} \int\limits_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}} \quad . \tag{3.233}$$

Die Integralgrenzen wurden vertauscht, wodurch sich das Vorzeichen des Integrals ändert. Wir wollen diesen Ausdruck noch etwas umformen. Wir nutzen die trigonometrische Relation aus

$$\cos\theta = 1 - 2\sin^2\frac{\theta}{2} \quad . \tag{3.234}$$

Dies führt auf

$$T = 2\sqrt{\frac{l}{g}} \int\limits_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2\frac{\theta_0}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}}} \quad . \tag{3.235}$$

Jetzt substituieren wir

$$\sin\frac{\theta}{2} = \sin\frac{\theta_0}{2}\sin\phi \quad . \tag{3.236}$$

Wir bilden das Differential auf beiden Seiten

$$\frac{1}{2}\cos\frac{\theta}{2}\, d\theta = \sin\frac{\theta_0}{2}\cos\phi\, d\phi \tag{3.237}$$

und benennen jetzt

$$k = \sin\frac{\theta_0}{2} \quad . \tag{3.238}$$

Dies ergibt

$$d\theta = \frac{2\sin\frac{\theta_0}{2}\cos\phi\, d\phi}{\cos\frac{\theta}{2}} = \frac{2k\cos\phi\, d\phi}{\sqrt{1-\sin^2\frac{\theta}{2}}} = \frac{2k\cos\phi\, d\phi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}} \quad . \tag{3.239}$$

Aus der Substitution (3.236) erkennen wir

$$\theta = 0 \iff \phi = 0 \quad , \tag{3.240}$$

$$\theta = \theta_0 \iff \phi = \frac{\pi}{2} \quad . \tag{3.241}$$

Dies setzen wir nun alles in (3.235) ein

$$
\begin{aligned}
T &= 2\sqrt{\frac{l}{g}} \int\limits_0^{\pi/2} \frac{2k\cos\phi\, d\phi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}\sqrt{\sin^2\frac{\theta_0}{2}\left(1-\frac{\sin^2\frac{\theta}{2}}{\sin^2\frac{\theta_0}{2}}\right)}} \\
&= 4\sqrt{\frac{l}{g}} \int\limits_0^{\pi/2} \frac{\cos\phi\, d\phi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}\,\cos\phi} \\
&= 4\sqrt{\frac{l}{g}} \int\limits_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}} \quad . \qquad (3.242)
\end{aligned}
$$

Dies ist ein elliptisches Integral. Den Ausdruck (3.242) können wir auch schreiben als

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{g}}\,K(m) \qquad (3.243)$$

mit dem vollständigen elliptischen Integral erster Art

$$K(m) = \int\limits_0^{\pi/2} (1-m\sin^2\phi)^{-1/2}\, d\phi \qquad (3.244)$$

und

$$m = k^2 = \sin^2\frac{\theta_0}{2} \quad . \qquad (3.245)$$

Es kann über Reihenentwicklung näherungsweise gelöst werden. In niedrigster Ordnung erhalten wir

$$T \cong 4\sqrt{\frac{l}{g}} \int\limits_0^{\pi/2} d\phi = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \quad . \qquad (3.246)$$

Dies ist das bereits abgeleitete Resultat.

4 Das Kepler-Problem

4.1 Die Planetenbewegung

In diesem Kapitel wollen wir die Bewegung in einem Zentralkraftfeld untersuchen. Wir betrachten dabei speziell die Planetenbewegung und gehen von den drei Keplerschen Gesetzen aus, die Johannes Kepler aus den Beobachtungen der Planeten durch Tycho Brahe abgeleitet hat. Es sind zunächst empirische Gesetze gewesen.

1. Die Planeten bewegen sich auf Ellipsen, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht.

2. In gleichen Zeiten überstreicht der Fahrstrahl Sonne-Planet gleiche Flächen (Flächensatz).

3. Die Quadrate der Umlaufzeiten verhalten sich wie die Kuben der großen Halbachsen der Bahnen zweier Planeten.

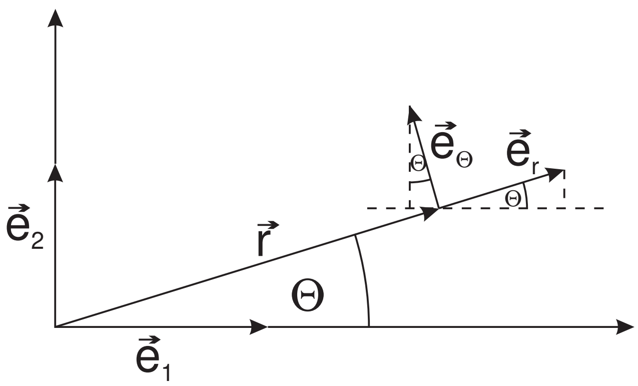
$$\frac{T_1^2}{a_1^3} = \frac{T_2^2}{a_2^3} \tag{4.1}$$

Diese Gesetze wollen wir im folgenden ableiten. Bei der Planetenbewegung haben wir es mit einem Zentralkraftfeld zu tun. Wir wissen bereits, daß für Zentralkraftfelder das Drehmoment verschwindet und demzufolge der Drehimpuls eine Erhaltungsgröße - eine Konstante der Bewegung - ist. Zur mathematischen Beschreibung der Planetenbewegung führen wir zunächst die Einheitsvektoren $\vec{e}_r$ und $\vec{e}_\Theta$ ein, die sich wie folgt aus den kartesischen Einheitsvektoren $\vec{e}_1$ und $\vec{e}_2$ ergeben

$$\vec{e}_r = \cos\Theta\,\vec{e}_1 + \sin\Theta\,\vec{e}_2 \quad , \tag{4.2}$$

$$\vec{e}_\Theta = -\sin\Theta\,\vec{e}_1 + \cos\Theta\,\vec{e}_2 \quad . \tag{4.3}$$

Graphisch läßt sich der Zusammenhang zwischen den Einheitsvektoren in kartesischen und Polarkoordinaten folgendermaßen veranschaulichen.



Im Verlauf einer Drehung $\Theta(t)$ ändert sich auch die Richtung der Einheitsvektoren $\vec{e}_r$ und $\vec{e}_\Theta$. Es gilt

$$\begin{aligned} \dot{\vec{e}}_r &= (-\sin\Theta\,\vec{e}_1 + \cos\Theta\,\vec{e}_2)\,\dot{\Theta} &= \dot{\Theta}\,\vec{e}_\Theta \quad , \\ \dot{\vec{e}}_\Theta &= (-\cos\Theta\,\vec{e}_1 - \sin\Theta\,\vec{e}_2)\,\dot{\Theta} &= -\dot{\Theta}\,\vec{e}_r \quad . \end{aligned} \tag{4.4}$$

Nun sollen die Geschwindigkeit und die Beschleunigung in diesen Koordinaten ausgedrückt werden. Durch Differentiation finden wir

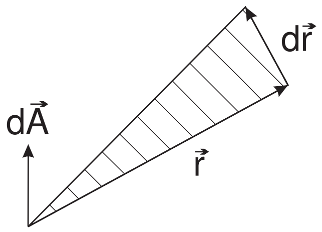
$$\vec{r} = r\,\vec{e}_r \quad , \tag{4.5}$$

$$\dot{\vec{r}} = \dot{r}\,\vec{e}_r + r\,\dot{\vec{e}}_r = \dot{r}\,\vec{e}_r + r\,\dot{\Theta}\,\vec{e}_\Theta \equiv \vec{v} \quad , \tag{4.6}$$

$$\begin{aligned} \ddot{\vec{r}} &= \dot{\vec{v}} = \ddot{r}\,\vec{e}_r + \dot{r}\dot{\vec{e}}_r + \dot{r}\dot{\Theta}\vec{e}_\Theta + r\ddot{\Theta}\vec{e}_\Theta + r\dot{\Theta}\dot{\vec{e}}_\Theta \\ &= \ddot{r}\vec{e}_r + \dot{r}\dot{\Theta}\vec{e}_\Theta + \dot{r}\dot{\Theta}\vec{e}_\Theta + r\ddot{\Theta}\vec{e}_\Theta - r\dot{\Theta}\dot{\Theta}\vec{e}_r \\ &= \left(\ddot{r} - r\dot{\Theta}^2\right)\vec{e}_r + \left(r\ddot{\Theta} + 2\dot{r}\dot{\Theta}\right)\vec{e}_\Theta \quad . \end{aligned} \tag{4.7}$$

Jetzt betrachten wir das zweite Keplersche Gesetz und untersuchen die Flächengeschwindigkeit des Fahrstrahls Sonne-Planet. Das infinitesimale Flächenelement des Fahrstrahls ist

$$\left|d\vec{A}\right| = \frac{1}{2}\,|\vec{r}\times d\vec{r}\,| \quad . \tag{4.8}$$



Demzufolge ist die Flächengeschwindigkeit

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}\left|\vec{r}\times\frac{d\vec{r}}{dt}\right| = \frac{1}{2}\,|\vec{r}\times\vec{v}\,| \quad . \tag{4.9}$$

Jetzt ist

$$\vec{r}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{e}_r & \vec{e}_\Theta & \vec{e}_z \\ r & 0 & 0 \\ \dot{r} & r\dot{\Theta} & 0 \end{vmatrix} = \vec{e}_z\,r^2\dot{\Theta} \tag{4.10}$$

und damit

$$|\vec{r}\times\vec{v}\,| = r^2\dot{\Theta} \quad . \tag{4.11}$$

Wir wissen aber auch, daß aufgrund der Drehimpulserhaltung

$$\vec{L} = m\vec{r}\times\vec{v} = \text{const.} \tag{4.12}$$

ist. Da die Planetenmasse konstant ist folgt auch die Konstanz von $\vec{r}\times\vec{v}$.

Wir führen die Konstante h ein durch

$$\left|\vec{L}\right| = m\,|\vec{r}\times\vec{v}\,| = mr^2\dot{\Theta} = mh \quad . \tag{4.13}$$

Somit haben wir

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}h = \text{const.} \tag{4.14}$$

Damit ist das zweite Keplersche Gesetz abgeleitet. Bei der Ableitung des Flächensatzes hatten wir implizit angenommen, daß die Planetenbewegung in einer Ebene erfolgt, was wir noch verifizieren wollen. Wir haben es mit einem Zentralkraftfeld zu tun, d. h.

$$\vec{F} = f(r)\,\vec{e}_r \quad . \tag{4.15}$$

Somit gilt

$$\vec{r}\times\vec{F} = f(r)\,\vec{r}\times\vec{e}_r = 0 \tag{4.16}$$

Mit $\vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$ ergibt sich weiter

$$\vec{r}\times\frac{d\vec{v}}{dt} = 0 \tag{4.17}$$

und daraus

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{r}\times\vec{v}\,\right) = 0 \quad . \tag{4.18}$$

Wir integrieren und finden

$$\vec{r}\times\vec{v} = \vec{h} \quad , \tag{4.19}$$

wobei $\vec{h}$ ein konstanter Vektor ist. Die skalare Multiplikation mit $\vec{r}$ führt auf

$$\vec{r}\cdot\vec{h} = 0 \quad , \tag{4.20}$$

da

$$\vec{r}\cdot(\vec{r}\times\vec{v}\,) = (\vec{r}\times\vec{r}\,)\cdot\vec{v} = 0 \quad . \tag{4.21}$$

Daher steht $\vec{r}$ stets senkrecht auf dem konstanten Vektor $\vec{h}$. Somit findet die Bewegung in einer Ebene statt.
Als nächstes stellen wir fest, daß Zentralkraftfelder

$$\vec{F} = f(r)\,\vec{e}_r = f(r)\frac{\vec{r}}{r} \tag{4.22}$$

konservativ sind und daß somit der Energieerhaltungssatz gilt. Es ist

$$\text{rot}\,\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f(r)\frac{x}{r} & f(r)\frac{y}{r} & f(r)\frac{z}{r} \end{vmatrix} \quad . \tag{4.23}$$

Es ist

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \quad . \tag{4.24}$$

Damit gilt

$$\frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{x_i}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}} = \frac{x_i}{r} \quad . \tag{4.25}$$

Damit folgt zusammengefaßt für die $\vec{e}_1$ Komponente von rot$\vec{F}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y}\left\{f(r)\frac{z}{r}\right\} - \frac{\partial}{\partial z}\left\{f(r)\frac{y}{r}\right\} &= z\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{f(r)}{r}\right)\frac{\partial r}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{f(r)}{r}\right)\frac{\partial r}{\partial z} \\ &= \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{f(r)}{r}\right)\left(\frac{zy}{r} - \frac{yz}{r}\right) = 0 \quad . \end{aligned} \tag{4.26}$$

Gleiches gilt für die beiden anderen Komponenten. Ein Zentralkraftfeld hat keine Wirbel. Es gilt demnach

$$\frac{1}{2}mv^2 + V(r) = E = \text{const.} \tag{4.27}$$

Als weiterer Erhaltungssatz gilt

$$mr^2\dot{\Theta} = L = \text{const.} \tag{4.28}$$

Ausgehend von

$$\vec{F}(r) = -\gamma\,\frac{Mm}{r^2}\,\vec{e}_r \tag{4.29}$$

mit der Gravitationskonstanten γ erhalten wir für das Gravitationspotential

$$\begin{aligned} V(r) &= -\int \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \\ &= \gamma Mm \int_{-\infty}^{r} \frac{\vec{r} \cdot d\vec{r}}{r^3} = \gamma Mm \int_{-\infty}^{r} \frac{dr}{r^2} = -\frac{\gamma Mm}{r} \quad . \end{aligned} \tag{4.30}$$

Das Gravitationspotential wurde hierbei so geeicht, daß es im Unendlichen $(r \to \infty)$ verschwindet. Das ist immer so möglich, weil wir wissen, daß das Potential nur bis auf eine additive Konstante bestimmt ist. Damit lautet der Energieerhaltungssatz

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{\gamma Mm}{r} = E \quad . \tag{4.31}$$

Jetzt verwenden wir

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\Theta}^2 \tag{4.32}$$

und schreiben den Energieerhaltungssatz als

$$\frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\Theta}^2\right) + V(r) = E \quad . \tag{4.33}$$

Mit dem Drehimpuls L in (4.28) folgt

$$\frac{1}{2}\,m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + V(r) = E \quad . \tag{4.34}$$

Die Gesamtenergie setzt sich also aus radialer kinetischer Energie $\frac{1}{2}m\dot{r}^2$, Rotationsenergie $\frac{L^2}{2mr^2}$ und potentieller Energie $V(r)$ zusammen. Aus (4.34) läßt sich $r(t)$ bestimmen. Wir lösen auf

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V(r) - \frac{L^2}{2mr^2}\right)} = \frac{dr}{dt} \quad . \tag{4.35}$$

Wir trennen die Variablen und bekommen

$$dt = \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V(r) - \frac{L^2}{2mr^2}\right)}} \quad . \tag{4.36}$$

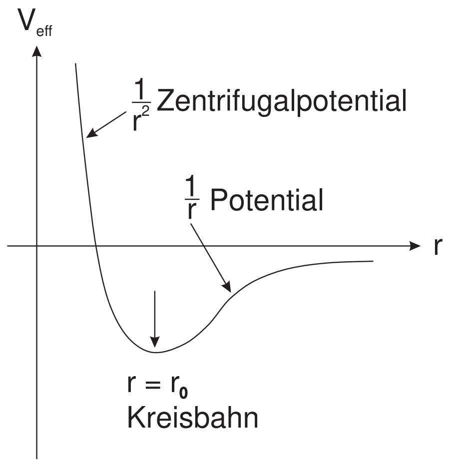
Nach Integration führt dies auf

$$t - t_0 = \int\limits_{r_0}^{r} \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V(r) - \frac{L^2}{2mr^2}\right)}} \quad . \tag{4.37}$$

Den Term $\frac{L^2}{2mr^2}$ bezeichnet man auch oft als Rotationspotential oder Zentrifugalpotential. Wir führen das effektive Potential ein

$$V_{\text{eff}} = V(r) + \frac{L^2}{2mr^2} \quad . \tag{4.38}$$

Es hat für das Gravitationspotential qualitativ das folgende Aussehen:



Wir wollen nun den Ausdruck

$$mr^2\dot{\Theta} = L \tag{4.39}$$

etwas umformen. Es ist mit (4.36)

$$\begin{aligned} d\Theta &= \frac{L\,dt}{mr^2} = \frac{L\,dr}{r^2\sqrt{2m\left(E - V - \frac{L^2}{2mr^2}\right)}} \\ &= \frac{dr}{r^2\sqrt{\frac{2mE}{L^2} - 2m\frac{V(r)}{L^2} - \frac{1}{r^2}}} \quad . \end{aligned} \tag{4.40}$$

Nach Integration ergibt sich

$$\Theta - \Theta_0 = \int\limits_{r_0}^{r} \frac{dr}{r^2 \sqrt{\frac{2m\,(E - V(r))}{L^2} - \frac{1}{r^2}}} \quad . \tag{4.41}$$

Die Integrale (4.37) und (4.41) liefern $t = t(r)$ bzw. $\Theta = \Theta(r)$. Mit Hilfe der Umkehrfunktion können wir die Bewegung $r(t)$ und $r(\Theta)$ ermitteln. Es gehen jeweils vier Integrationskonstanten ein: E, L, r_0 und t_0 bzw. Θ_0. Energie und Drehimpuls können natürlich auch durch die Anfangsgeschwindigkeiten $\dot{r}_0$ und $\dot{\Theta}_0$ ausgedrückt werden. Im Prinzip läßt sich aus (4.41) auch der Zusammenhang $\Theta(r)$ bzw. $r(\Theta)$ bestimmen. Es ist jedoch zunächst einfacher, die Größe $u(\Theta) \equiv \frac{1}{r(\Theta)}$ direkt aus dem Kraftgesetz zu bestimmen. Diesen Weg werden wir jetzt verfolgen. Wir gehen aus vom Energiesatz

$$\frac{1}{2} m \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\Theta}^2\right) + V(r) = E \quad . \tag{4.42}$$

Mit

$$r^2 \dot{\Theta} = h \tag{4.43}$$

wird

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\Theta}\,\dot{\Theta} = \frac{dr}{d\Theta}\,\frac{h}{r^2} \tag{4.44}$$

und damit

$$\frac{1}{2}\,m\,\frac{h^2}{r^4}\left(\left(\frac{dr}{d\Theta}\right)^2 + r^2\right) + V(r) = E \quad . \tag{4.45}$$

Mit $u = 1/r$ und $dr/du = -1/u^2$ schreiben wir weiter um

$$\frac{dr}{d\Theta} = \frac{dr}{du}\,\frac{du}{d\Theta} = -\frac{1}{u^2}\,\frac{du}{d\Theta} \quad , \tag{4.46}$$

$$\dot{r} = -\frac{1}{u^2}\,\frac{du}{d\Theta}\,hu^2 = -h\,\frac{du}{d\Theta} \quad . \tag{4.47}$$

Aus dem Energiesatz wird damit

$$\frac{1}{2}\,mh^2u^4\left(\frac{1}{u^4}\left(\frac{du}{d\Theta}\right)^2 + \frac{1}{u^2}\right) + V\left(\frac{1}{u}\right) = E \tag{4.48}$$

oder

$$\frac{1}{2}\,mh^2\left(\left(\frac{du}{d\Theta}\right)^2 + u^2\right) = E - V\left(\frac{1}{u}\right) \quad . \tag{4.49}$$

Gesucht ist nun die Funktion $u = u(\Theta)$. Dazu ist es einfacher, von der Newtonschen Gleichung für die Zentralkraft

$$F(r) = m\left(\ddot{r} - r\dot{\Theta}^2\right) \tag{4.50}$$

auszugehen. Wir ersetzen wieder r durch u. Mit (4.47) bekommen wir

$$\ddot{r} = \frac{d}{dt}\left(-h\left(\frac{du}{d\Theta}\right)\right) = -h\,\frac{d^2u}{d\Theta^2}\,\dot{\Theta} = -h^2\frac{1}{r^2}\,\frac{d^2u}{d\Theta^2} = -h^2u^2\frac{d^2u}{d\Theta^2} \quad . \tag{4.51}$$

Damit läßt sich das Kraftgesetz schreiben als

$$F\left(\frac{1}{u}\right) = -mh^2u^2\frac{d^2u}{d\Theta^2} - m\frac{1}{u}h^2u^4 \tag{4.52}$$

oder

$$\frac{d^2u}{d\Theta^2} + u = -\frac{1}{mu^2h^2}\,F\left(\frac{1}{u}\right) \quad . \tag{4.53}$$

$F\left(\frac{1}{u}\right)$ läßt sich aus dem Newtonschen Gravitationsgesetz ableiten. Es ist

$$\vec{F} = F(r)\,\vec{e}_r = -\gamma\,\frac{Mm}{r^2}\,\vec{e}_r = -Hu^2\vec{e}_r \tag{4.54}$$

mit

$$H = \gamma Mm \quad . \tag{4.55}$$

Somit erhalten wir als Bewegungsgleichung eine inhomogene Differentialgleichung zweiter Ordnung.

$$\frac{d^2u}{d\Theta^2} + u = \frac{H}{mh^2} \quad . \tag{4.56}$$

Die Lösung der entsprechenden homogenen Differentialgleichung

$$\frac{d^2u}{d\Theta^2} + u = 0 \tag{4.57}$$

ist aber

$$u(\Theta) = A\cos\Theta + B\sin\Theta \quad . \tag{4.58}$$

Eine spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung findet sich leicht. Es ist nämlich

$$u = \text{const.} = \frac{H}{mh^2} \tag{4.59}$$

offensichtlich eine Lösung.

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung lautet demnach

$$u = \frac{H}{mh^2} + A\cos\Theta + B\sin\Theta \quad . \tag{4.60}$$

In anderer Form lautet die Lösung der Oszillatorgleichung

$$u = \frac{H}{mh^2} + C\left(\cos\left(\Theta - \Phi\right)\right) \quad , \tag{4.61}$$

wobei Φ ein konstanter Winkel ist, dessen Größe von der Wahl des Koordinatensystems abhängt. Da noch keine Voraussetzungen über das Koordinatensystem gemacht wurden, kann man es jetzt so wählen, daß $\Phi = 0$ ist. Dann erhält man

$$u(\Theta) = \frac{H}{mh^2} + C\cos\Theta = \frac{1}{r\,(\Theta)} \quad . \tag{4.62}$$

Die Auflösung nach $r(\Theta)$ ergibt

$$r(\Theta) = \frac{mh^2/H}{1 + (Cmh^2/H)\cos\Theta} \quad . \tag{4.63}$$

Jetzt führen wir die Konstanten ein

$$k = \frac{mh^2}{H} \quad , \tag{4.64}$$

$$\varepsilon = C\frac{mh^2}{H} = Ck \quad . \tag{4.65}$$

Damit erhalten wir als Bahngleichung

$$r(\Theta) = \frac{k}{1 + \varepsilon\cos\Theta} \quad . \tag{4.66}$$

Dies ist die Bestimmungsgleichung eines Kegelschnittes. Die spezielle Form der Bahnkurve wird bestimmt durch die Exzentrizität ε

$\varepsilon = 0$	Kreis
$0 < \varepsilon < 1$	Ellipse
$\varepsilon = 1$	Parabel
$\varepsilon > 1$	Hyperbel

Es soll nun untersucht werden, von welchen physikalischen Größen (z. B. Energie, Drehimpuls) die Exzentrizität abhängt. Dazu soll zunächst mit dem Energiesatz die Konstante C bestimmt werden. Wir gehen aus von

$$u(\Theta) = \frac{H}{mh^2} + C\cos\Theta \quad . \tag{4.67}$$

Wir differenzieren diesen Ausdruck und setzen ihn in die Energiegleichung

$$\frac{1}{2}mh^2\left(\left(\frac{du}{d\Theta}\right)^2 + u^2\right) = E - V\left(\frac{1}{u}\right) \tag{4.68}$$

ein. Es folgt

$$\frac{1}{2}mh^2\left(C^2\sin^2\Theta + \left(\frac{H}{mh^2} + C\cos\Theta\right)^2\right) = E - V\left(\frac{1}{u}\right) \quad . \tag{4.69}$$

Es ist dabei

$$V\left(\frac{1}{u}\right) = V(r) = -\gamma\frac{Mm}{r} = -Hu \quad . \tag{4.70}$$

Damit wird die Energiegleichung zu

$$\frac{1}{2}mh^2\left(C^2\sin^2\Theta + \left(\frac{H}{mh^2} + C\cos\Theta\right)^2\right) = E + H\left(\frac{H}{mh^2} + C\cos\Theta\right) \quad . \tag{4.71}$$

Wir rechnen dies aus

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}mh^2\left[C^2\left(\sin^2\Theta + \cos^2\Theta\right) + \left(\frac{H}{mh^2}\right)^2 + 2C\frac{H}{mh^2}\cos\Theta\right] \\ = \; & \frac{1}{2}mh^2C^2 + \frac{1}{2}\frac{H^2}{mh^2} + CH\cos\Theta \\ = \; & E + \frac{H^2}{mh^2} + CH\cos\Theta \quad . \end{aligned} \tag{4.72}$$

Es folgt

$$\frac{1}{2}mh^2C^2 = E + \frac{H^2}{2mh^2} \tag{4.73}$$

und damit

$$C = \sqrt{\frac{H^2}{m^2h^4} + \frac{2E}{mh^2}} \tag{4.74}$$

Mit $\varepsilon = Cmh^2/H$ folgt demnach für ε

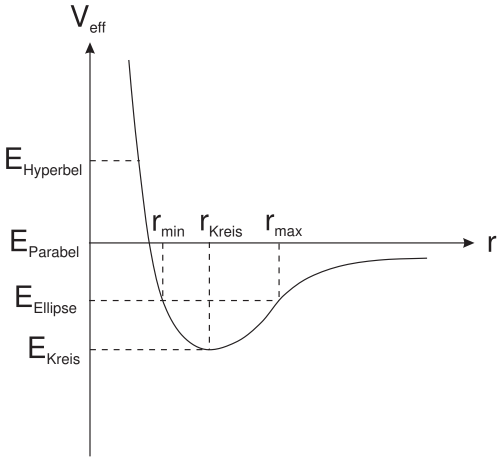
$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2Emh^2}{H^2}} \quad . \tag{4.75}$$

Die Bahnform hängt demnach von der Gesamtenergie des bewegten Körpers ab, und es gilt

$$\begin{array}{llcl} \text{für eine} & & & \\ \text{Parabel:} & \varepsilon = 1 & \Longleftrightarrow & E = 0 \\ \text{Ellipse:} & 0 < \varepsilon < 1 & \Longrightarrow & E < 0, -\gamma^2\frac{M^2m}{2h^2} < E < 0 \quad . \\ \text{Kreis:} & \varepsilon = 0 & \Longrightarrow & E = \frac{-H^2}{2mh^2} = \frac{-\gamma^2 mM^2}{2h^2} \\ \text{Hyperbel:} & \varepsilon > 1 & \Longrightarrow & E > 0 \end{array} \tag{4.76}$$

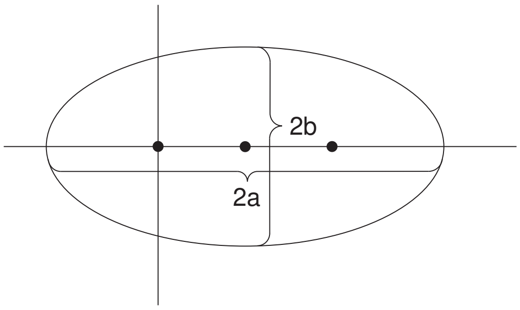
Da wir es bei der Planetenbewegung mit einer geschlossenen Bahn zu tun haben und mit einem Bindungszustand, resultiert bei der Bahnbewegung eine Ellipse bzw. als Grenzfall ein Kreis. Damit ist auch das erste Keplersche Gesetz abgeleitet.

Wir wollen die Bahnkurven nochmals anhand des effektiven Potentials veranschaulichen. Für die Umkehrpunkte der Bahn gilt $\dot{r} = 0$ und damit $V_{\text{eff}} = E$.



Klassifikation der Bahnkurven mit Hilfe des effektiven Potentials

Wir wenden uns jetzt dem dritten Keplerschen Gesetz zu und wollen es ableiten. Die Halbachsen a und b der Bahnellipse lassen sich aus der Bahngleichung bestimmen.



Es ist

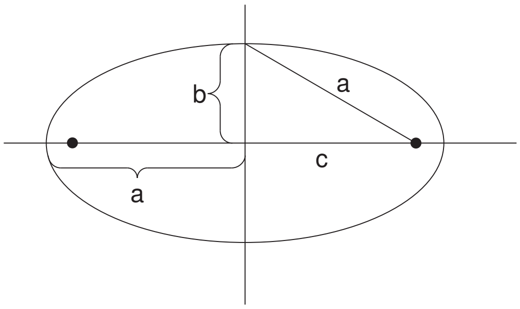
$$a = \frac{1}{2}\left[r(\Theta = 0) + r(\Theta = \pi)\right] \quad . \tag{4.77}$$

Wir verwenden

$$r(\Theta) = \frac{k}{1 + \varepsilon \cos \Theta} \tag{4.78}$$

und bekommen

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{2}\left[\frac{k}{1+\varepsilon} + \frac{k}{1-\varepsilon}\right] = \frac{k}{1-\varepsilon^2} \\ &= \frac{mh^2/H}{-2Emh^2/H^2} = -\frac{H}{2E} = \frac{-\gamma Mm}{2E} \quad . \end{aligned} \tag{4.79}$$



Für eine Ellipse gilt

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}\, a = \varepsilon a \quad . \tag{4.80}$$

Dies führt auf

$$\begin{aligned} b &= a\sqrt{1-\varepsilon^2} = \frac{k}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} = \frac{mh^2/H}{\sqrt{-2Emh^2/H^2}} \\ &= \frac{mh}{\sqrt{-2Em}} = \sqrt{\frac{-m}{2E}}h \quad . \end{aligned} \tag{4.81}$$

Man beachte dabei, daß E negativ ist. Bei einem vollen Umlauf ist die Flächengeschwindigkeit gleich der Fläche der Ellipse πab dividiert durch die Umlaufzeit T, also

$$\frac{dA}{dt} = \frac{h}{2} = \frac{\pi ab}{T} \quad . \tag{4.82}$$

Daraus folgt

$$T = \frac{2\pi ab}{h} = \frac{2\pi k^2}{\left(1-\varepsilon^2\right)^{3/2} h} = \frac{2\pi \left(mh^2/H\right)^2}{\left(-2Emh^2/H^2\right)^{3/2} h} \quad . \tag{4.83}$$

Weiter ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{T^2}{a^3} &= \frac{4\pi^2 b^2}{ah^2} = \frac{4\pi^2 k^2/\left(1-\varepsilon^2\right)}{\left[k/\left(1-\varepsilon^2\right)\right] h^2} = \frac{4\pi^2 k}{h^2} \\ &= \frac{4\pi^2 mh^2}{h^2 H} = \frac{4\pi^2 m}{mM\gamma} = \frac{4\pi^2}{\gamma M} \quad . \end{aligned} \tag{4.84}$$

Deshalb hängt T^2/a^3 nur von der universellen Gravitationskonstante γ und der Masse M des Zentralsterns ab. Deshalb ist diese Konstante gleich für alle Planeten. Damit ist auch das 3. Keplersche Gesetz abgeleitet.
Die gleichen Gesetzmäßigkeiten finden wir auch in der Elektrodynamik wieder. Hier lautet das Kraftgesetz zwischen zwei Ladungen Q_1 und Q_2

$$\vec{F}_{el} = \frac{Q_1 Q_2}{r^2}\frac{\vec{r}}{r} \quad . \tag{4.85}$$

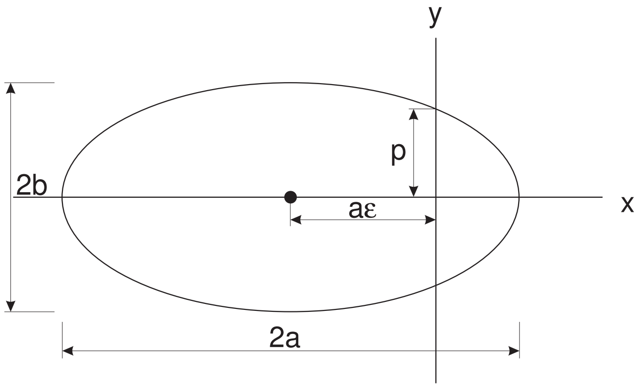
Beispielsweise gilt bei der Streuung eines Atomkernes $Q_1 = Z_1 e$ mit einem Elektron $Q_2 = -e$. Ein Vergleich mit dem Gravitationsgesetz zeigt, daß wir nur substituieren müssen

$$\gamma M m \Longrightarrow Z_1 e^2 \quad . \tag{4.86}$$

Schließlich wollen wir die Bahngleichung für die Planetenbewegung noch vollständig bestimmen. Wünschenswert wäre es direkt $r(t)$ angeben zu können. Dies ist jedoch geschlossen nicht möglich. Über den Trick einer Parameterdarstellung können wir jedoch den Zusammenhang zwischen r und t erstellen. Wir gehen aus von der abgeleiteten Relation zwischen t und r

$$t - t_0 = \int\limits_{r_0}^{r} \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V(r) - \frac{L^2}{2mr^2}\right)}} \tag{4.87}$$

Wir wollen nochmals einige Bezeichnungen bei der Ellipse behandeln.



Es ist $p = r(\theta = \pi/2) = k$, ε war bereits angegeben worden. Es war

$$a = \frac{k}{1-\varepsilon^2} = \frac{-\gamma Mm}{2E} = \frac{H}{2\,|E|} \quad , \tag{4.88}$$

$$b = \frac{k}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} = \sqrt{\frac{-m}{2E}}\,h \quad . \tag{4.89}$$

Für die Ellipse gilt ferner für den kleinsten (Perihel) und größten Abstand (Aphel) vom Brennpunkt der Ellipse

$$\begin{aligned} r_{\min} &= \frac{k}{1+\varepsilon} = a(1-\varepsilon) \quad , \\ r_{\max} &= \frac{k}{1-\varepsilon} = a(1+\varepsilon) \quad . \end{aligned} \tag{4.90}$$

Wir schreiben jetzt den Ausdruck (4.87) für die Zeit etwas um

$$\begin{aligned} t &= \sqrt{\frac{m}{2\,|E|}} \int \frac{r\,dr}{\sqrt{-r^2 + \frac{Hr}{|E|} - \frac{L^2}{2m|E|}}} \\ &= \sqrt{\frac{ma}{H}} \int \frac{r\,dr}{\sqrt{a^2\varepsilon^2 - (r-a)^2}} \quad . \end{aligned} \tag{4.91}$$

Demnach muß aufgrund eines Vergleichs gelten

$$a^2\left(1-\varepsilon^2\right) = \frac{L^2}{2m\,|E|} \quad . \tag{4.92}$$

Dies ist aber

$$a^2\left(1-\varepsilon^2\right) = b^2 = \frac{m}{2\,|E|}h^2 = \frac{m^2h^2}{2m\,|E|} = \frac{L^2}{2m\,|E|} \quad . \tag{4.93}$$

In (4.91) führen wir nun als Parameter die Größe ξ mittels der Beziehung

$$r - a = -a\varepsilon\cos\xi \tag{4.94}$$

ein. Damit wird

$$\frac{dr}{d\xi} = a\varepsilon\sin\xi \tag{4.95}$$

und

$$\sqrt{a^2\varepsilon^2 - (r-a)^2} = \sqrt{a^2\varepsilon^2\left(1-\cos^2\xi\right)} = a\varepsilon\sin\xi. \tag{4.96}$$

Schließlich erhalten wir für das Zeitintegral

$$\begin{aligned} t &= \sqrt{\frac{ma^3}{H}}\int(1-\varepsilon\cos\xi)\,d\xi \\ &= \sqrt{\frac{ma^3}{H}}\,(\xi-\varepsilon\sin\xi) + \text{const.} \end{aligned} \tag{4.97}$$

Wir wählen den Zeit-Nullpunkt so, daß const $= 0$ wird und erhalten dann als Parameterdarstellung der Funktion $r(t)$

$$r = a(1-\varepsilon\cos\xi) \quad , \tag{4.98}$$

$$t = \sqrt{\frac{ma^3}{H}}\,(\xi-\varepsilon\sin\xi) \quad . \tag{4.99}$$

Zum Zeitpunkt $t = 0$ befindet sich das Teilchen im Perihel. Bei einem vollen Umlauf auf der Ellipse ändert sich der Parameter ξ von 0 bis 2π. Durch denselben Parameter ξ kann man auch die kartesischen Koordinaten

$$x = r\cos\Theta \quad , \tag{4.100}$$

$$y = r\sin\Theta \tag{4.101}$$

des Teilchens ausdrücken. Die x- und y-Achse haben die Richtung der großen bzw. kleinen Halbachse der Ellipse. Aus der Kegelschnittgleichung der Ellipse

$$\frac{k}{r} = 1 + \varepsilon\cos\Theta \tag{4.102}$$

folgt

$$k = r + \varepsilon r\cos\Theta \tag{4.103}$$

und weiter

$$\begin{aligned} \frac{k-r}{\varepsilon} &= x = \frac{1}{\varepsilon}\left[a\left(1-\varepsilon^2\right) - a(1-\varepsilon\cos\xi)\right] \\ &= \frac{a\varepsilon}{\varepsilon}(\cos\xi-\varepsilon) = a(\cos\xi-\varepsilon) \quad . \end{aligned} \tag{4.104}$$

Die Koordinate y folgt aus

$$y = \sqrt{r^2 - x^2} \tag{4.105}$$

und somit

$$y = \left[a^2(1-\varepsilon\cos\xi)^2 - a^2(\cos\xi-\varepsilon)^2\right]^{1/2}$$

$$
\begin{aligned}
&= a\left[1+\varepsilon^2\cos^2\xi - 2\varepsilon\cos\xi - \cos^2\xi - \varepsilon^2 + 2\varepsilon\cos\xi\right]^{1/2} \\
&= a\left[1-\cos^2\xi - \varepsilon^2\left(1-\cos^2\xi\right)\right]^{1/2} \\
&= a\left[\left(1-\varepsilon^2\right)\sin^2\xi\right]^{1/2} \\
&= a\sqrt{1-\varepsilon^2}\sin\xi \quad . \qquad (4.106)
\end{aligned}
$$

Wir fassen die Parameterdarstellung zusammen

$$
\begin{aligned}
r &= a(1-\varepsilon\cos\xi) \quad , &(4.107)\\
t &= \sqrt{\frac{ma^3}{H}}(\xi-\varepsilon\sin\xi) \quad , &(4.108)\\
x &= a(\cos\xi-\varepsilon) \quad , &(4.109)\\
y &= a\sqrt{1-\varepsilon^2}\sin\xi \quad . &(4.110)
\end{aligned}
$$

Bei dieser Parameterdarstellung liegt der Koordinatenursprung in einem Brennpunkt. Wir verschieben den Koordinatenursprung zum Mittelpunkt durch die Transformation

$$
\begin{aligned}
x' &= x + a\varepsilon \quad , &(4.111)\\
y' &= y \quad . &(4.112)
\end{aligned}
$$

Dann gilt offensichtlich

$$
\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2} = \cos^2\xi + \sin^2\xi = 1 \quad . \qquad (4.113)
$$

Dies ist eine Standarddarstellung der Ellipse.
Wir fassen nochmals die essentiellen Schritte zur Ableitung der Keplerschen Bahnbewegung zusammen. Ausgegangen sind wir von der Newtonschen Bewegungsgleichung

$$
m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} \quad , \qquad (4.114)
$$

wobei die wirkende Kraft die Gravitation ist,

$$
\vec{F} = -\gamma\,\frac{mM}{r^2}\,\frac{\vec{r}}{r} \quad . \qquad (4.115)
$$

Dies ist eine Zentralkraft und damit konservativ, es gilt also der Energieerhaltungssatz. Als weiterer Erhaltungssatz gilt der Drehimpulserhaltungssatz. Zur Beschreibung der Bahnbewegung haben wir die sphärischen Koordinaten eingeführt, r und Θ. Den radialen Anteil und den Winkelanteil der Bahnbewegung haben wir getrennt untersucht. Bei der Lösung der Newtonschen Gleichung haben wir die Koordinate $u = \frac{1}{r}$ eingeführt. Die Differentialgleichungen haben wir teilweise mit Hilfe des Verfahrens der Separation der Variablen lösen können. Die Zeitabhängigkeit $r(t)$ und $\Theta(t)$ konnte nicht explizit abgeleitet werden. Jedoch erlaubt uns die abgeleitete Parameterdarstellung eine eindeutige Zuordnung von r und t.

4.2 Separation der Variablen

Als mathematische Ergänzung betrachten wir nochmals die Methode der Separation von Variablen zur Lösung von Differentialgleichungen erster Ordnung. Wenn eine Differentialgleichung erster Ordnung geschrieben werden kann als

$$F(x)\,dx + G(y)\,dy = 0 \quad , \tag{4.116}$$

dann sagt man, daß die Variablen separabel sind und die allgemeine Lösung kann durch direkte Integration gewonnen werden.

$$\int F(x)\,dx + \int G(y)\,dy = C \quad . \tag{4.117}$$

Zur Illustration der Methode wollen wir zwei spezielle Beispiele behandeln. Zunächst wollen wir die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$\left(x + xy^2\right) dx + \left(y + x^2 y\right) dy = 0 \tag{4.118}$$

finden und zudem die partikuläre Lösung ableiten, so daß gilt

$$y = 2 \quad \text{für} \quad x = 1 \quad . \tag{4.119}$$

Wir schreiben die Differentialgleichung zunächst als

$$x\left(1 + y^2\right) dx + y\left(1 + x^2\right) dy = 0 \quad . \tag{4.120}$$

Jetzt dividieren wir durch den Faktor

$$\left(1 + x^2\right)\left(1 + y^2\right) \neq 0 \quad , \tag{4.121}$$

um die Variablen zu separieren. Es folgt

$$\frac{x\,dx}{1 + x^2} + \frac{y\,dy}{1 + y^2} = 0 \quad . \tag{4.122}$$

Wir integrieren formal und bekommen

$$\int \frac{x\,dx}{1 + x^2} + \int \frac{y\,dy}{1 + y^2} = C_1 \tag{4.123}$$

und weiter

$$\frac{1}{2}\ln\left(1 + x^2\right) + \frac{1}{2}\ln\left(1 + y^2\right) = C_1 \quad . \tag{4.124}$$

Dies kann geschrieben werden als

$$\frac{1}{2}\ln\left(\left(1 + x^2\right)\left(1 + y^2\right)\right) = C_1 \tag{4.125}$$

oder

$$\left(1+x^2\right)\left(1+y^2\right)=e^{2C_1}=C_2 \quad . \tag{4.126}$$

Dies ist die geforderte allgemeine Lösung. Für $y=2$ und $x=1$ folgt sofort

$$C_2=10 \tag{4.127}$$

und damit als partikuläre Lösung

$$\left(1+x^2\right)\left(1+y^2\right)=10 \tag{4.128}$$

oder

$$x^2+y^2+x^2y^2=9 \quad . \tag{4.129}$$

Als zweites Beispiel wollen wir die Differentialgleichung

$$\frac{dR}{dt}=R^2t^2 \tag{4.130}$$

lösen mit der Nebenbedingung $R=1$ für $t=1$. Wir separieren die Variablen und bekommen

$$\frac{dR}{R^2}=t^2dt \quad . \tag{4.131}$$

Wir integrieren beide Seiten und erhalten

$$-\frac{1}{R}=\frac{t^3}{3}+C \quad . \tag{4.132}$$

Setzen wir nun $t=1$ und $R=1$ ein, so finden wir

$$C=-\frac{4}{3} \quad . \tag{4.133}$$

Also gilt

$$-\frac{1}{R}=\frac{t^3}{3}-\frac{4}{3} \tag{4.134}$$

oder aufgelöst

$$R=\frac{3}{4-t^3} \quad . \tag{4.135}$$

4.3 Die Masse der Erde

Als nächstes wollen wir einige weitere Anwendungen des Gravitationsgesetzes behandeln. Zuerst wollen wir die Masse der Erde berechnen. An der Erdoberfläche ist $r=R$, wobei R den Radius der Erde bezeichnet. Damit ist der Betrag der Newtonschen Gravitationskraft an der Erdoberfläche

$$F=\frac{\gamma mM}{R^2} \quad . \tag{4.136}$$

m ist die Masse eines beliebigen Objektes, M bezeichnet die Masse der Erde und γ die Gravitationskonstante. Diese Kraft können wir gleichsetzen der Gewichtskraft des Objektes

$$G = mg \quad , \tag{4.137}$$

wobei g die Erdbeschleunigung ist. Damit ist

$$\frac{\gamma m M}{R^2} = mg \tag{4.138}$$

und weiter

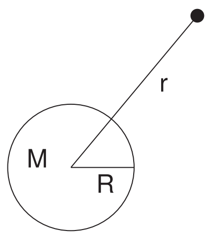
$$M = \frac{gR^2}{\gamma} \quad . \tag{4.139}$$

Mit $R = 6.38 \cdot 10^3$ km und $g = 9.8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ folgt

$$M = 5.98 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg} \quad . \tag{4.140}$$

4.4 Fluchtgeschwindigkeit von der Erde

Als nächstes Problem wollen wir die Fluchtgeschwindigkeit von der Erde bestimmen. Wir fragen uns, wie groß muß die Anfangsgeschwindigkeit eines Geschosses sein, damit es die Erde verlassen kann. Hierbei wollen wir wieder von der Luftreibung absehen.



r sei die radiale Koordinate des Geschosses zu einer Zeit t gemessen vom Zentrum der Erde. v_0 sei die Anfangsgeschwindigkeit des Geschosses und $v(t)$ die jeweilige momentane Geschwindigkeit. Als Minimalbedingung zum Verlassen des Erdgravitationsfeldes muß offensichtlich gelten

$$v(r \to \infty) = 0 \quad . \tag{4.141}$$

Aufgrund der Newtonschen Grundgleichung gilt

$$m\,\frac{dv}{dt}\,\vec{e}_r = -\gamma\,\frac{Mm}{r^2}\,\vec{e}_r \tag{4.142}$$

oder

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{\gamma M}{r^2} \quad . \tag{4.143}$$

Mit der Kettenregel schreiben wir dies um

$$\frac{dv}{dr}\,\frac{dr}{dt} = -\frac{\gamma M}{r^2} \tag{4.144}$$

oder

$$v \, \frac{dv}{dr} = -\frac{\gamma M}{r^2} \quad . \tag{4.145}$$

Wir separieren die Variablen und integrieren

$$\frac{1}{2} v^2 = \frac{\gamma M}{r} + C_1 \tag{4.146}$$

Um C_1 zu bestimmen gehen wir von der Anfangssituation aus, d. h. $v = v_0$ für $r = R$. Demnach folgt nach Auflösung

$$C_1 = \frac{1}{2} v_0^2 - \frac{\gamma M}{R} \quad . \tag{4.147}$$

Somit haben wir

$$v^2 = 2\gamma M \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right) + v_0^2 \quad . \tag{4.148}$$

Wenn das Geschoß die Höhe h über dem Erdboden aufweist, gilt offensichtlich $r = R + h$. Dies führt auf

$$v^2 = 2\gamma M \left(\frac{1}{R+h} - \frac{1}{R} \right) + v_0^2 = v_0^2 - \frac{2\gamma M h}{R(R+h)} \quad , \tag{4.149}$$

d. h.

$$v = \sqrt{v_0^2 - \frac{2\gamma M h}{R(R+h)}} \quad . \tag{4.150}$$

Jetzt nutzen wir aus, daß gilt

$$g = \frac{\gamma M}{R^2} \quad . \tag{4.151}$$

Damit können wir schreiben

$$v = \sqrt{v_0^2 - \frac{2gRh}{R+h}} \quad . \tag{4.152}$$

Für $h \to \infty$ gilt $\lim\limits_{h \to \infty} \dfrac{h}{R+h} = 1$ und damit

$$v(h \to \infty) = \sqrt{v_0^2 - 2gR} \quad . \tag{4.153}$$

Die Fluchtgeschwindigkeit von der Erde resultiert, wenn wir diese Geschwindigkeit Null setzen. Damit haben wir schließlich

$$v_0 = \sqrt{2gR} \quad . \tag{4.154}$$

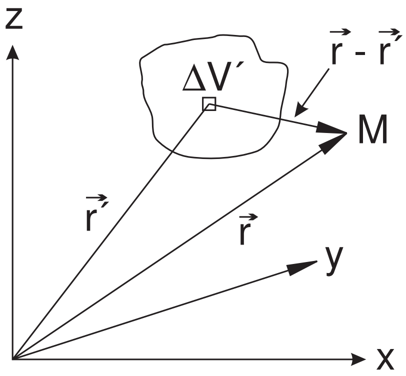
Einsetzen der Daten für g und R liefert als numerischen Wert für die Fluchtgeschwindigkeit

$$v_0 \approx 11 \, \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}} \quad . \tag{4.155}$$

4.5 Das Gravitationspotential

Schließlich wollen wir noch das Gravitationspotential für verschiedene geometrische Objekte ableiten. Wir werden das Gravitationsfeld für ausgedehnte Körper ermitteln. Bisher wurde nur die Wechselwirkung zwischen punktförmigen Massen betrachtet. Nun sollen auch ausgedehnte Körper auf ihre Gravitationswechselwirkung untersucht werden. Wegen seiner Linearität läßt sich das Gravitationsfeld eines ausgedehnten Körpers durch Superposition der Felder einzelner Teilkörper zusammensetzen. Für die Kraft auf einen Massenpunkt M ist

$$\begin{aligned}
\vec{F} &= \lim_{\Delta m_i \to 0} \sum_i \left(-\frac{\gamma M \Delta m_i}{\left|\vec{r} - \vec{r'}_i\right|^2} \frac{\left(\vec{r} - \vec{r'}_i\right)}{\left|\vec{r} - \vec{r'}_i\right|} \right) \\
&= \lim_{\Delta m_i \to 0} \sum_i \left(-\frac{\gamma M \Delta m_i \left(\vec{r} - \vec{r'}_i\right)}{\left|\vec{r} - \vec{r'}_i\right|^3} \right) \\
&= -\gamma M \int\limits_V \frac{\vec{r} - \vec{r}\,'}{\left|\vec{r} - \vec{r}\,'\right|^3}\, dm' \quad .
\end{aligned} \tag{4.156}$$



Wir führen jetzt die Massendichte $\rho\left(\vec{r}\,\right)$ ein, die definiert ist als Masse pro Volumen. Genauer betrachten wir

$$\rho\left(\vec{r}\,\right) \equiv \frac{dm}{dV} \quad . \tag{4.157}$$

Damit können wir für die wirkende Kraft schreiben

$$\vec{F} = -\gamma M \int \rho\left(\vec{r'}\right) \frac{\left(\vec{r} - \vec{r'}\right)}{\left|\vec{r} - \vec{r'}\right|^3}\, dV' \quad . \tag{4.158}$$

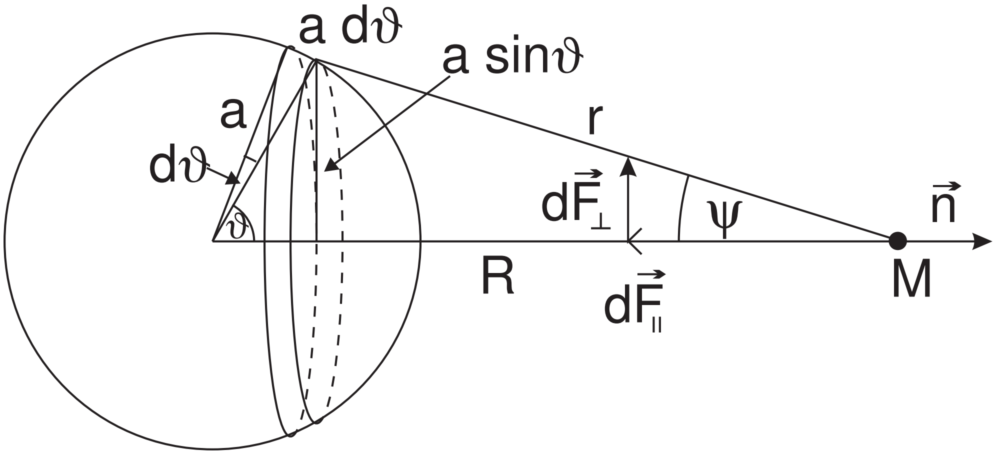
Für die entsprechende potentielle Energie folgt

$$V = \lim_{\Delta m_i \to 0} \sum_i \left(-\frac{\gamma M \Delta m_i}{\left|\vec{r} - \vec{r'}_i\right|} \right) = -\gamma M \int\limits_V \rho\left(\vec{r'}\right) \frac{1}{\left|\vec{r} - \vec{r'}\right|}\, dV' \quad . \tag{4.159}$$

Wir wollen nun die Anziehungskraft einer massenbelegten Kugelschale berechnen. Eine Kugelschale von vernachlässigbarer Dicke mit dem Radius a sei homogen mit Masse belegt. Wir führen die konstante Flächendichte ein

$$\sigma = \frac{dm}{df} \quad . \tag{4.160}$$

df ist das infinitesimale Flächenelement. Welche Kraft wirkt auf einen Punkt der Masse M im Abstand R von ihrem Zentrum?
Zunächst zerlegen wir die Kugeloberfläche in Kreisringe.



Der Radius eines Rings ist $a \sin\vartheta$. Jetzt wollen wir df, also die Fläche des Kreisrings berechnen. Die Fläche ist gegeben durch den Umfang des Kreisring $U_{\text{Ring}} = 2\pi r_{\text{Ring}} = 2\pi a \sin\vartheta$ multipliziert mit der Breite des Rings $a\, d\vartheta$. Damit ist

$$df = 2\pi(a\sin\vartheta)(a\, d\vartheta) = 2\pi a^2 \sin\vartheta\, d\vartheta \tag{4.161}$$

Wir werden die axiale Symmetrie der Massenverteilung ausnutzen. Zu jedem Abschnitt des Kreisrings gibt es einen zweiten, dessen Kraftkomponente $d\vec{F}_\perp$ (senkrecht zu $\vec{n}$) der ersten entgegengerichtet gleich ist. Daher wird nur die Parallelkomponente der Kraft wirksam. Diese Parallelkomponente ist

$$d\vec{F}_{||} = -dF\ \cos\psi\, \vec{n} \quad . \tag{4.162}$$

Mit $dm = \sigma\, df$ lautet die Anziehungskraft des gesamten Massenrings

$$d\vec{F} = -\underbrace{\frac{\gamma M \sigma\, df}{r^2}}_{dF} \cos\psi\, \vec{n} \quad . \tag{4.163}$$

Die Gesamtkraft der Kugelschale folgt dann durch Integration über alle Kreisringe

$$F = -\gamma M \sigma 2\pi a^2 \int \frac{\cos\psi\ \sin\vartheta}{r^2} d\vartheta \quad . \tag{4.164}$$

Wir ersetzen die Winkel durch den Abstand r mit den folgenden geometrischen Beziehungen. Es gilt der Kosinussatz

$$r^2 = a^2 + R^2 - 2aR\cos\vartheta \quad , \tag{4.165}$$

denn es ist

$$\begin{aligned} r^2 &= a^2 \sin^2 \vartheta + (R - a\cos\vartheta)^2 \\ &= a^2 \sin^2 \vartheta + a^2 \cos^2 \vartheta + R^2 - 2Ra\cos\vartheta \quad . \end{aligned} \tag{4.166}$$

Wir leiten dies ab

$$2r\,dr = 2aR\sin\vartheta\,d\vartheta \quad , \tag{4.167}$$

woraus folgt

$$\sin\vartheta\,d\vartheta = \frac{rdr}{aR} \quad . \tag{4.168}$$

Ferner bestimmen wir

$$\cos\vartheta = \frac{a^2 + R^2 - r^2}{2aR} \tag{4.169}$$

Jetzt wollen wir noch $\cos\psi$ umformen. Es ist

$$r\cos\psi = R - a\cos\vartheta \tag{4.170}$$

und somit

$$\begin{aligned} \cos\psi &= \frac{R - a\cos\vartheta}{r} = \frac{R - \frac{a^2+R^2-r^2}{2R}}{r} \\ &= \frac{2R^2 - a^2 - R^2 + r^2}{2rR} = \frac{R^2 + r^2 - a^2}{2Rr} \quad . \end{aligned} \tag{4.171}$$

Durch Einsetzen ergibt sich damit für die Kraft

$$F = -\gamma M\sigma 2\pi a^2 \int \frac{R^2 + r^2 - a^2}{2Rr^3} \frac{r}{a} \frac{dr}{R} \tag{4.172}$$

$$= -\frac{\gamma M\sigma\pi a}{R^2} \int \left(1 + \frac{R^2 - a^2}{r^2}\right) dr \quad . \tag{4.173}$$

Um die Kraftverhältnisse weiter zu studieren, betrachten wir den Fall, daß der Massenpunkt M außerhalb der Kugel liegt ($R \geq a$). Die gesuchte Gesamtanziehungskraft auf M erhält man durch Integration zwischen den Grenzen $R - a$ und $R + a$, also

$$\begin{aligned} F &= -\frac{\gamma M\sigma\pi a}{R^2} \int\limits_{R-a}^{R+a} \left(1 + \frac{R^2 - a^2}{r^2}\right) dr \\ &= -\frac{\gamma M\sigma\pi a}{R^2} \left(r\Big|_{R-a}^{R+a} - \frac{R^2 - a^2}{r}\Bigg|_{R-a}^{R+a} \right) \\ &= -\frac{\gamma M\sigma\pi a}{R^2} \left(R + a - (R - a) - \frac{R^2 - a^2}{R + a} + \frac{R^2 - a^2}{R - a} \right) \\ &= -\frac{\gamma M\sigma\pi a}{R^2} \times \\ &\quad \left(\frac{2a\left(R^2 - a^2\right) - \left(R^2 - a^2\right)(R - a) + \left(R^2 - a^2\right)(R + a)}{R^2 - a^2} \right) \\ &= -\frac{\gamma M\sigma\pi a}{R^2} 4a = -\frac{\gamma M 4\pi\sigma a^2}{R^2} \quad . \end{aligned} \tag{4.174}$$

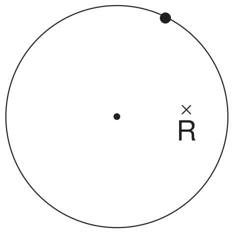
Wir nutzen jetzt aus, daß gilt

$$m = 4\pi a^2 \sigma \tag{4.175}$$

für die Masse der Kugelschale. Damit resultiert

$$F = -\frac{\gamma M m}{R^2} \quad . \tag{4.176}$$

Es gilt also: Eine Hohlkugel mit homogen verteilter Masse wirkt nach außen in bezug auf ihre Massenanziehung so, als sei ihre gesamte Masse im Mittelpunkt vereinigt. Diese Aussage gilt auch für homogene Vollkugeln und ist Grundlage aller Berechnungen der Himmelsmechanik. Jetzt betrachten wir die Situation, daß der Massenpunkt M innerhalb der Kugel ($R \leq a$) liegt.



Die Integration erfolgt jetzt zwischen den Grenzen $a - R$ und $a + R$. Damit lautet die Kraft

$$\begin{aligned} F &= -\frac{\gamma M \sigma \pi a}{R^2} \left(r\Big|_{a-R}^{a+R} - \frac{R^2 - a^2}{r}\Big|_{a-R}^{a+R} \right) \\ &= -\frac{\gamma M \sigma \pi a}{R^2} \left(2R - \frac{R^2 - a^2}{a+R} + \frac{R^2 - a^2}{a-R} \right) \\ &= -\frac{\gamma M \sigma \pi a}{R^2} \times \\ &\quad \left(\frac{2R\left(a^2 - R^2\right) - \left(R^2 - a^2\right)(a-R) + \left(R^2 - a^2\right)(a+R)}{a^2 - R^2} \right) \\ &= -\frac{\gamma M \sigma \pi a}{R^2} (2R + a - R - a - R) = 0 \quad . \end{aligned} \tag{4.177}$$

Im Innern einer Hohlkugel, die homogen mit Masse belegt ist, wirkt an keiner Stelle eine Gravitationskraft.

Da die elektrische Kraft zwischen zwei Ladungen q_1 und q_2 von ähnlicher Struktur ist wie die Gravitationskraft, nämlich

$$\vec{F}_e = \frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^2} \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} \quad , \tag{4.178}$$

können alle hier erhaltenen Resultate ohne weiteres auf die entsprechenden elektrischen Ladungsverteilungen übertragen werden. Insbesondere sehen wir, daß eine gleichförmig geladene Kugelschale im Innern keine Kräfte zuläßt. Schließlich wollen wir noch das Potential für die homogene Kugelschale herleiten.

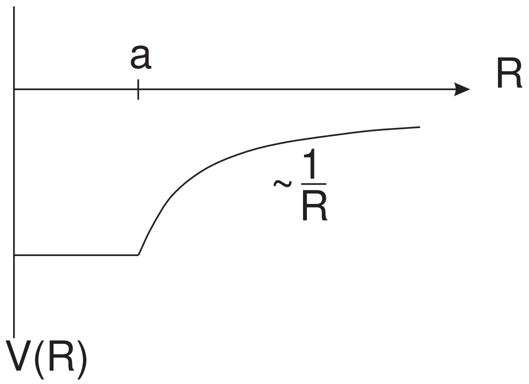
Für $R \geq a$ gilt

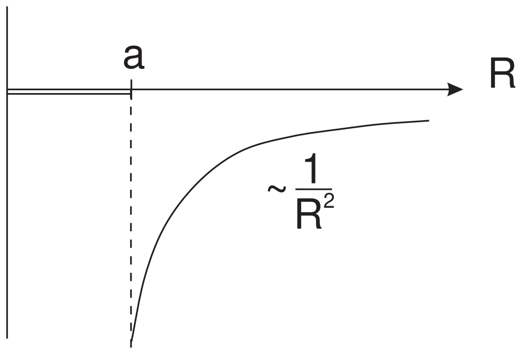
$$V(R) = -\int_{+\infty}^{R} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \gamma M m \int_{+\infty}^{R} \frac{1}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \cdot d\vec{r}$$
$$= \gamma M m \int_{\infty}^{R} \frac{1}{r^2}\, dr = -\frac{\gamma M m}{R} \quad . \tag{4.179}$$

Für $R \leq a$ ist der Beitrag $\vec{F} \cdot d\vec{r}$ überall Null. Daher muß das Potential überall im Innern der Kugelschale konstant sein. Wir fordern Stetigkeit für $R = a$, anderenfalls werden sonst die Kräfte unendlich. Damit folgt

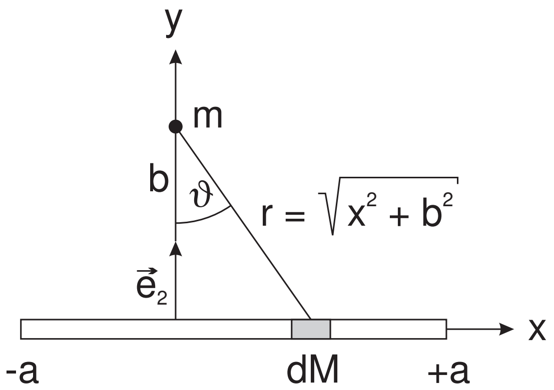
$$V(R) = -\frac{\gamma M m}{a} \quad \text{für} \quad R \leq a \quad . \tag{4.180}$$

Es folgt eine graphische Darstellung des Potentials und der Kraft.





Als weitere Aufgabe zur Bestimmung der Gravitationskraft eines ausgedehnten Körpers betrachten wir die Gravitationskraft eines homogenen Stabes.



Wir wollen die Gravitationskraft eines homogenen Stabes der Länge $2a$ und der Masse M auf ein Teilchen der Masse m, das sich im Abstand b vom Stab in einer Ebene senkrecht zum Stab durch den Stabmittelpunkt befindet, berechnen. Es ist

$$dF = -\frac{\gamma m \cdot dM}{r^2} \tag{4.181}$$

und

$$\cos\vartheta = \frac{b}{\sqrt{x^2+b^2}} \quad . \tag{4.182}$$

$d\vec{F}$ kann man zerlegen in Kraftkomponenten parallel und senkrecht zum Stab. Die Komponenten parallel zum Stab heben sich gegenseitig auf. Wirksam werden nur die Kraftkomponenten senkrecht zum Stab

$$dF_\perp = dF\cos\vartheta \quad . \tag{4.183}$$

Wir verwenden

$$\sigma = \frac{dM}{dx} \tag{4.184}$$

und somit $dM = \sigma\, dx$. Damit bekommen wir

$$dF_\perp = -\frac{\gamma m\, dM\cos\vartheta}{r^2} = -\frac{\gamma m\sigma\, dx\cos\vartheta}{x^2+b^2} = \frac{-\gamma m\sigma\, dx\, b}{\left(x^2+b^2\right)^{3/2}} \quad . \tag{4.185}$$

Für das Integral erhalten wir

$$F = \int\limits_{x=-a}^{a} dF_\perp = -2b\gamma m\sigma \int\limits_{0}^{a} \frac{dx}{\left(x^2+b^2\right)^{3/2}} = -\frac{2\gamma m\sigma a}{b\sqrt{a^2+b^2}} \quad . \tag{4.186}$$

Es gilt

$$\int \frac{dx}{\left(\sqrt{x^2+b^2}\right)^3} = \frac{x}{b^2\sqrt{x^2+b^2}} \quad . \tag{4.187}$$

Wir verwenden jetzt

$$M = 2a\sigma \tag{4.188}$$

und bekommen damit abschließend

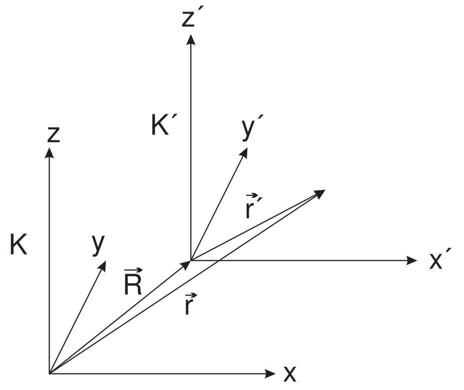
$$\vec{F} = -\frac{\gamma M m}{b\sqrt{a^2+b^2}}\,\vec{e}_2 \quad . \tag{4.189}$$

Für $b \gg a$ folgt erwartungsgemäß $F \sim \frac{1}{b^2}$.

5 Die Spezielle Relativitätstheorie

5.1 Koordinatensysteme

In diesem Kapitel wollen wir einige Grundprinzipien der im Jahre 1905 von A. Einstein vorgestellten speziellen Relativitätstheorie behandeln. Ein wesentliches Grundelement der speziellen Relativitätstheorie ist das Studium physikalischer Grundgesetze bei Koordinatentransformationen von einem Koordinatensystem K in ein anderes Koordinatensystem K'.



Zur mathematischen Beschreibung eines Massenpunktes gibt man dessen Relativbewegung gegenüber einem Koordinatensystem an. Zweckmäßigerweise wählt man dazu ein unbeschleunigtes Bezugssystem, also ein Inertialsystem. Zu einem willkürlich gewählten Inertialsystem gibt es jedoch beliebig viele andere, die sich gegenüber dem ersten gleichförmig bewegen. Bei einem Übergang von einem Inertialsystem K zu einem anderen K' bleiben die Gesetze der Mechanik unverändert. Wir nehmen im folgenden an, daß sich das System K' gegenüber K mit der Relativgeschwindigkeit $\vec{v}_0$ bewegt. Ferner sollen zum Zeitpunkt $t = 0$ die beiden Koordinatensysteme übereinstimmen. Dementsprechend gilt für den Abstandsvektor $\vec{R}$ der beiden Systeme

$$\vec{R} = \vec{v}_0 t \quad . \tag{5.1}$$

Offensichtlich gilt

$$\vec{r} = \vec{R} + \vec{r'} \tag{5.2}$$

und damit

$$\vec{r'} = \vec{r} - \vec{R} \quad , \tag{5.3}$$

also

$$\vec{r'} = \vec{r} - \vec{v}_0 t \quad . \tag{5.4}$$

Explizit ausgeschrieben lauten diese Gleichungen der Galilei-Transformation

$$x' = x - v_{0x} t \quad , \tag{5.5}$$

$$y' = y - v_{0y} t \quad , \tag{5.6}$$

$$z' = z - v_{0z} t \quad . \tag{5.7}$$

Allgemeiner folgt, falls die Koordinatenursprünge ($\vec{r} = \vec{r'} = 0$) zur Zeit $t = 0$ um $\vec{R}_0$ im System K auseinanderliegen

$$\vec{r'} = \vec{r} - \vec{v}_0 t - \vec{R}_0 \quad . \tag{5.8}$$

Da die Relativgeschwindigkeit konstant ist, lautet die zeitliche Ableitung der Ortsvektoren

$$\dot{\vec{r'}} = \dot{\vec{r}} - \vec{v}_0 \quad . \tag{5.9}$$

Eine weitere Differentiation ergibt

$$\vec{a'} \equiv \ddot{\vec{r'}} = \ddot{\vec{r}} \equiv \vec{a} \quad , \tag{5.10}$$

so daß die Beschleunigung in beiden Systemen gleich ist. Ebenso folgt nach dem Newtonschen Gesetz

$$\vec{F'} = m\vec{a'} = m\vec{a} = \vec{F} \quad . \tag{5.11}$$

Wenn das Newtonsche Gesetz in einem System gilt, sollte es auch in dem anderen System gelten. Die Newtonsche Mechanik bleibt unverändert. Die Newtonsche Mechanik ist Galilei-invariant. Bei der Galilei-Transformation wird angenommen, daß in jedem Inertialsystem die gleiche Zeit herrscht, d. h. bei einem Übergang von einem System in das andere bleibt die Zeit unverändert

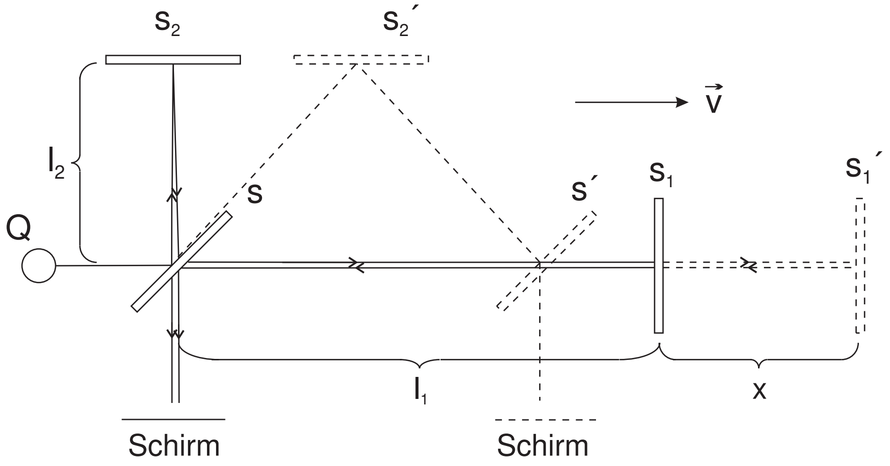
$$t = t' \quad . \tag{5.12}$$

Die Zeit ist demnach eine Invariante, man spricht von einer absoluten Zeit.
Die Transformationsgleichung (5.9) beinhaltet auch, daß es keine höchste Geschwindigkeit oder Grenzgeschwindigkeit gibt. Jedoch hat der Michelson-Versuch ergeben, daß die Lichtgeschwindigkeit $c = 299\,792.458\ \frac{\text{km}}{\text{s}}$ eine absolute Grenzgeschwindigkeit ist, und daß daher die Galilei-Transformationen für Geschwindigkeiten im Bereich der Lichtgeschwindigkeit nicht gültig sein können.

5.2 Der Michelson-Versuch

In der klassischen Physik nahm man an, daß das Licht an ein Medium, den sogenannten Äther, gebunden sei. So wie sich der Schall in der Luft als Dichteschwingung ausbreitet, sollte sich das Licht in dem universellen Äther fortpflanzen. Der Äther wurde als absolut ruhend betrachtet. Hierdurch wurde auch ein absolut ruhendes Inertialsystem definiert.

Nimmt man ein Raumschiff an, das sich im Äther bewegt und fliegt dieses Raumschiff Lichtstrahlen entgegen, so ist die Lichtgeschwindigkeit im Raumschiff nach der Äthertheorie größer, im Fall der entgegengesetzten Bewegungsrichtung kleiner. Zur Überprüfung dieser Vorstellung nahm Michelson als Raumschiff die Erde, die sich mit einer Geschwindigkeit von 30 km/s um die Sonne bewegt. Trifft die Äthertheorie zu, dann muß sich das Licht in Bewegungsrichtung der Erde schneller ausbreiten als nach jeder anderen Seite. Um diese Geschwindigkeitsunterschiede nachzuweisen, führte Michelson einen Versuch durch, der im folgenden skizziert ist.



Schema des Michelson-Versuches

Die monochromatische Lichtquelle Q sendet einen Lichtstrahl aus, der an einem halbdurchlässigen Spiegel S in zwei Bündel aufgespalten wird. Nach der Strecke l_1 bzw. l_2 treffen diese auf die Spiegel S_1 bzw. S_2, wo sie reflektiert werden und schließlich wieder auf S treffen. Hier überlagern sich die beiden Bündel wieder. Richtet man es so ein, daß beide Lichtbündel Laufzeitunterschiede haben, so entstehen Interferenzstreifen auf dem Schirm.

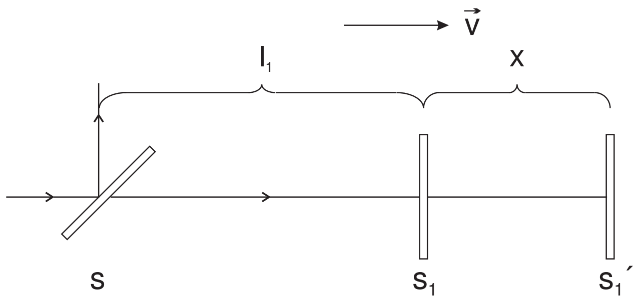
Der Wegunterschied für die Wege nach S_1 bzw. S_2 und zurück beträgt im ruhenden System

$$\Delta S = 2\,(l_1 - l_2) \quad . \tag{5.13}$$

Im ruhenden Äther beträgt die Lichtgeschwindigkeit immer c. Ein Lichtstrahl, der die Strecke l zurücklegt, benötigt die Zeit

$$t = \frac{l}{c} \tag{5.14}$$

Der Weg des Lichtstrahls gegenüber dem Äther ist $l_1 + x$. Dabei ist x die Strecke, die die Erde (bzw. der Spiegel) in der Zeit t_E zurücklegt.



Der Weg des parallel zur Flugrichtung laufenden Lichtes ist $l_1 + x$. Für die Erde gilt

$$t_E = \frac{x}{v} \quad . \tag{5.15}$$

Für den Lichtstrahl folgt

$$t_L = \frac{l_1 + x}{c} \quad . \tag{5.16}$$

Nun ist

$$t_E = t_L \tag{5.17}$$

und damit folgt

$$\frac{x}{v} = \frac{l_1 + x}{c} \quad . \tag{5.18}$$

Wir lösen nach x auf,

$$x = \frac{l_1 v/c}{1 - \frac{v}{c}} = \frac{l_1 v}{c - v} \quad . \tag{5.19}$$

Betrachten wir nun den rücklaufenden Lichtstrahl, so ist die Strecke, die der Lichtstrahl zurücklegen muß, $l_1 - x'$. x' ist dabei die Strecke, die die Erde in der Zeit

$$t'_E = \frac{x'}{v} \tag{5.20}$$

dem Lichtstrahlt entgegenkommt. Der zurücklaufende Lichtstrahl benötigt die Zeit

$$t'_L = \frac{l_1 - x'}{c} \quad . \tag{5.21}$$

Nun ist wieder

$$t'_E = t'_L \quad , \tag{5.22}$$

und es folgt

$$\frac{x'}{v} = \frac{l_1 - x'}{c} \quad . \tag{5.23}$$

Wir lösen nach x' auf,

$$x' = \frac{l_1 v/c}{1 + v/c} = \frac{l_1 v}{c + v} \quad . \tag{5.24}$$

Die gesamte Strecke, die der Lichtstrahl zurücklegt, ist

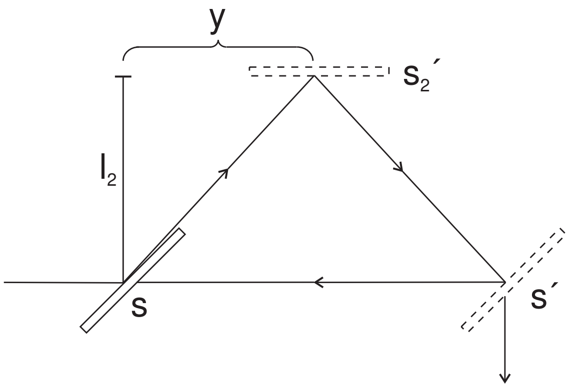
$$s_1 = l_1 + x + l_1 - x' \quad . \tag{5.25}$$

Wir setzen x und x' ein, dies ergibt

$$\begin{aligned} s_1 &= 2l_1 + \frac{l_1 v}{c - v} - \frac{l_1 v}{c + v} \\ &= 2l_1 + \frac{l_1 v/c}{1 - \frac{v}{c}} - \frac{l_1 v/c}{1 + \frac{v}{c}} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{2l_1\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}{1-\frac{v^2}{c^2}} + \frac{l_1\,v/c\left(1+\frac{v}{c}\right)}{1-\frac{v^2}{c^2}} - \frac{l_1\,v/c\left(1-\frac{v}{c}\right)}{1-\frac{v^2}{c^2}} \\
&= \frac{2l_1}{1-\frac{v^2}{c^2}} \qquad (5.26)
\end{aligned}
$$

Jetzt betrachten wir den Strahlengang von S nach S_2.



Der Weg des senkrecht zur Flugrichtung laufenden Lichtes.

Während der Strahl auf dem Weg zu S_2 ist, vergeht die Zeit

$$t = \frac{y}{v} = \frac{\sqrt{l_2^2 + y^2}}{c} \quad . \tag{5.27}$$

Beim Rückweg benötigt der Strahl dieselbe Zeit, d.h. er legt dieselbe Wegstrecke wie beim Hinweg zurück. Daraus folgt

$$s_2 = 2\sqrt{l_2^2 + y^2} \quad . \tag{5.28}$$

Zunächst bestimmen wir y^2 aus (5.27),

$$\frac{y^2}{v^2} = \frac{l_2^2 + y^2}{c^2} \quad . \tag{5.29}$$

Auflösen nach y^2 ergibt

$$y^2 = \frac{(v^2/c^2)\,l_2^2}{1 - v^2/c^2} \tag{5.30}$$

Wir setzen das in (5.28) ein, es folgt

$$s_2 = 2\sqrt{l_2^2 + \frac{(v^2/c^2)\,l_2^2}{1 - v^2/c^2}} = 2l_2\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad . \tag{5.31}$$

Der Wegunterschied zwischen s_1 und s_2 wird

$$\Delta s = s_1 - s_2 = \frac{2l_1}{1 - v^2/c^2} - \frac{2l_2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad . \tag{5.32}$$

Im Äther ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit des Lichtes immer c. Entsprechend ist der Unterschied in der Laufzeit

$$\Delta t = \frac{\Delta s}{c} = \frac{2}{c}\left(\frac{l_1}{1 - v^2/c^2} - \frac{l_2}{\sqrt{1 - v_2/c^2}}\right) \quad . \tag{5.33}$$

Dreht man nun die Versuchsanordnung um $90°$, so zeigt l_2 in Bewegungsrichtung der Erde. Jetzt ist $\vec{v}$ parallel zum Weg von S nach S_2. Für die Wegdifferenz folgt nun ein analoger Ausdruck

$$\Delta\tilde{s} = s_1 - s_2 = \frac{2l_1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - \frac{2l_2}{1 - v^2/c^2} \quad . \tag{5.34}$$

Dies sollte zu einer Verschiebung der Interferenzstreifen der beiden Lichtstrahlen auf dem Schirm führen, da gilt

$$\begin{aligned} \Delta s - \Delta\tilde{s} &= (2l_1 + 2l_2)\left(\frac{1}{1 - v^2/c^2} - \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\right) \\ &\approx (l_1 + l_2)\,\frac{v^2}{c^2} \quad . \end{aligned} \tag{5.35}$$

Ruht das System dagegen ($v = 0$), so ist $\Delta\tilde{s}$ im gedrehten System gleich Δs im ungedrehten System, d.h. es tritt keine Verschiebung der Interferenzstreifen auf. Michelson beobachtete aber auch für $v \neq 0$ bei Drehung der Apparatur keine Verschiebung der Interferenzstreifen.

Da man bei dem Michelson-Versuch keine Verschiebung der Interferenzstreifen feststellen konnte und es unvernünftig wäre anzunehmen, daß der Äther der komplizierten Erdbewegung folgt, stellte Einstein folgendes Postulat auf, um den Michelson-Versuch zu erklären: Die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum ist für alle gleichförmig bewegten Bezugssysteme gleich groß. Wenn die Lichtgeschwindigkeit dieselbe ist, egal ob sich der beobachter der Lichtquelle entgegen oder von ihr fort bewegt, so ist stets

$$\Delta s = s_1 - s_2 = 2l_1 - 2l_2 \tag{5.36}$$

und ebenso

$$\Delta\tilde{s} = s_1 - s_2 = 2l_1 - 2l_2 \quad , \tag{5.37}$$

also

$$\Delta s - \Delta\tilde{s} = 0 \quad . \tag{5.38}$$

Dann gibt es also keine Verschiebung der Interferenzstreifen.

5.3 Die Lorentz-Transformation

Wir wollen nun Koordinatentransformationen ableiten, die der Tatsache Rechnung tragen, daß die Lichtgeschwindigkeit in allen Koordinatensystemen konstant ist. Wir führen jetzt die Koordinaten (x, y, z, t) im System K ein und die Koordinaten (x', y', z', t') für das System K'. Wir verallgemeinern die Möglichkeiten und gehen nicht länger davon aus, daß t gleich t' ist. Die beiden Systeme sollen für $t = t' = 0$ übereinstimmen. Für einen Lichtstrahl im System K gilt

$$v^2 = c^2 \quad . \tag{5.39}$$

Ausgeschrieben lautet dies

$$\frac{x^2 + y^2 + z^2}{t^2} = c^2 \tag{5.40}$$

und weiter

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2 \tag{5.41}$$

und somit

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = 0 \quad . \tag{5.42}$$

Dies ist die Gleichung für die Lichtfortpflanzung. Im System K' gilt entsprechend

$$v'^2 = c^2 \tag{5.43}$$

und daher

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2 = 0 \quad . \tag{5.44}$$

Wir wollen nun einen Zusammenhang zwischen den Koordinaten (x', y', z', t') des Systems K' mit (x, y, z, t) des Systems K herstellen. Wir nehmen an, daß diese Transformation linear ist. Dies ist äquivalent der Aussage, daß die Raum-Zeit homogen und isotrop ist. Dies ist also eine sehr plausible Annahme. Es gilt also im allgemeinen

$$x' = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}t \quad . \tag{5.45}$$

und äquivalent für die anderen Koordinaten. Wenn die Transformation linear ist, ist die einzige Transformation zwischen den quadratischen Formen

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2 = \lambda^2 \left(x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 \right) \tag{5.46}$$

mit

$$\lambda = \lambda(v) \tag{5.47}$$

und

$$\lambda(0) = 1 \quad . \tag{5.48}$$

Die Gegenwart von λ erlaubt die Möglichkeit eines allgemeinen Skalenwechsels beim Übergang von K nach K'. Ist die Bewegung parallel zur x-Achse gilt offensichtlich

$$y' = \lambda y \quad , \tag{5.49}$$

$$z' = \lambda z \quad . \tag{5.50}$$

Dies gilt unabhängig von der Zeit. Eine Bewegung parallel zur x-Achse muß auch so bleiben in beiden Systemen. Der allgemeine lineare Zusammenhang zwischen x', t' und x, t lautet dann

$$x' = \lambda(a_1 x + a_2 t) \quad , \tag{5.51}$$

$$t' = \lambda(b_1 t + b_2 x) \quad . \tag{5.52}$$

Die Koeffizienten a_1, a_2, b_1, b_2 sind Funktionen der Geschwindigkeit v und müssen nun bestimmt werden. Offensichtlich muß für $v \to 0$ gelten

$$\lim_{v\to 0} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ b_1 \\ b_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad . \tag{5.53}$$

Der Ursprung von K' bewegt sich mit der Geschwindigkeit v im System K. Damit ist seine Position spezifiziert durch

$$x = vt \quad . \tag{5.54}$$

Damit muß in (5.51) gelten

$$0 = \lambda(a_1 vt + a_2 t) \tag{5.55}$$

und somit

$$a_2 = -va_1 \quad . \tag{5.56}$$

(5.51), (5.52) zusammen mit (5.56) setzen wir jetzt in (5.46) ein

$$\lambda^2 (a_1 x - a_1 vt)^2 + \lambda^2 y^2 + \lambda^2 z^2 - c^2\lambda^2 (b_1 t + b_2 x)^2 = \lambda^2 \left(x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2\right) \quad . \tag{5.57}$$

Weiter folgt

$$a_1^2 (x - vt)^2 - c^2 (b_1 t + b_2 x)^2 = x^2 - c^2 t^2 \tag{5.58}$$

und somit

$$a_1^2 x^2 + a_1^2 v^2 t^2 - 2a_1^2 xvt - c^2 b_1^2 t^2 - c^2 b_2^2 x^2 - 2b_1 b_2 xtc^2 = x^2 - c^2 t^2 \quad . \tag{5.59}$$

Jetzt muß gelten durch Koeffizientenvergleich

$$a_1^2 - c^2 b_2^2 = 1 \quad , \tag{5.60}$$

$$a_1^2 \frac{v^2}{c^2} - b_1^2 = -1 \quad , \tag{5.61}$$

$$-2a_1^2 v - 2b_1 b_2 c^2 = 0 \quad . \tag{5.62}$$

Dies sind drei algebraische Gleichungen, die wir unter Berücksichtigung von (5.53) lösen können. Es resultiert

$$a_1 = b_1 = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad , \tag{5.63}$$

$$b_2 = -\frac{v}{c^2}a_1 \quad . \tag{5.64}$$

Wir setzen ein und verifizieren die Lösung

$$\frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}} - \frac{c^2v^2}{c^4}\frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}} = 1 \quad , \tag{5.65}$$

$$\rightarrow \qquad 1-\frac{v^2}{c^2} = 1-\frac{v^2}{c^2} \quad . \qquad \text{qed.} \tag{5.66}$$

$$\frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}}\frac{v^2}{c^2} - \frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}} = -1 \quad , \tag{5.67}$$

$$\rightarrow \qquad \frac{v^2}{c^2}-1 = -1+\frac{v^2}{c^2} \quad . \qquad \text{qed.} \tag{5.68}$$

$$-\frac{v}{1-\frac{v^2}{c^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\left(-\frac{v}{c^2}\right)\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}c^2 = 0 \quad . \qquad \text{qed.} \tag{5.69}$$

Schließlich bleibt uns nur noch das Problem, den Skalenfaktor $\lambda(v)$ zu ermitteln. Wenn ein drittes Koordinatensystem K'' betrachtet wird, das sich mit der Geschwindigkeit $-v$ parallel zur x'-Achse relativ zu K' bewegt, dann können die Koordinaten (x'', y'', z'', t'') aus denen von (x', y', z', t') gewonnen werden. Wir brauchen in den Transformationsgesetzen nur substituieren $v \to -v$. Aber bei der üblichen Synchronisation ist K'' gerade wieder

$$x'' = x, \quad y'' = y, \quad z'' = z, \quad t'' = t \quad . \tag{5.70}$$

Dies führt zu der Forderung

$$\lambda(v)\,\lambda(-v) = 1 \quad . \tag{5.71}$$

Mit der Forderung $y = y'$ erhalten wir $\lambda(v) = 1$ und zusammenfassend als Lorentz-Transformation

$$x' = \frac{x-vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad , \tag{5.72}$$

$$y' = y \quad , \tag{5.73}$$

$$z' = z \quad , \tag{5.74}$$

$$t' = \frac{t-\frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad . \tag{5.75}$$

Die Verallgemeinerung für eine Bewegung von K' entlang der y-Achse bzw. z-Achse ist evident. Wir wollen nun den allgemeinen Fall betrachten, daß wir es mit einer beliebigen Geschwindigkeit (aber konstant) $\vec{v}$ von K' bezüglich K zu tun haben. Wir betrachten die Koordinaten parallel zu $\vec{v}$ und senkrecht zu $\vec{v}$. Dann haben wir

$$\vec{x'}_{||} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\left(\vec{x}_{||} - \vec{v}t\right) \quad , \tag{5.76}$$

$$\vec{x'}_{\perp} = \vec{x}_{\perp} \quad , \tag{5.77}$$

$$t' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\left(t - \frac{\vec{v}\cdot\vec{x}}{c^2}\right) \quad . \tag{5.78}$$

Wir definieren die parallelen und die senkrechten Koordinaten als

$$\vec{x}_{||} = \frac{\vec{v}\cdot\vec{x}\,\vec{v}}{v^2} = \frac{\vec{v}\cdot\vec{x}}{v}\frac{\vec{v}}{v} \quad , \tag{5.79}$$

$$\vec{x}_{\perp} = \vec{x} - \vec{x}_{||} \quad . \tag{5.80}$$

Dann läßt sich die allgemeine Lorentz-Transformation schreiben als

$$\vec{x'} = \vec{x} + \left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - 1\right)\frac{\vec{x}\cdot\vec{v}}{v^2}\vec{v} - \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\vec{v}\,t \quad , \tag{5.81}$$

$$t' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\left(t - \frac{\vec{x}\cdot\vec{v}}{c^2}\right) \quad . \tag{5.82}$$

Oft gewählte abkürzende Schreibweisen in der speziellen Relativitätstheorie sind der Lorentzsche Kontraktionsfaktor

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{5.83}$$

sowie

$$\beta = \frac{v}{c} \quad . \tag{5.84}$$

Der für die gewohnte Vorstellung am paradoxesten erscheinende Aspekt ist in der Beziehung zwischen t und t' enthalten. Zwei Ereignisse, die sich zur gleichen Zeit an zwei verschiedenen Raumpunkten im System K ereignen, werden Beobachtern im System K' nicht als gleichzeitig erscheinen. Das ist eine Folge des Terms $\frac{vx}{c^2}$ in der Gleichung für t'.

5.4 Die Lorentz-Kontraktion

Als nächstes wollen wir die Lorentz-Kontraktion behandeln. Wir betrachten einen starren Stab, der bezüglich K in Ruhe ist und längs der x-Achse liegt. Er habe die Länge $l = x_2 - x_1$. Ein bewegter Beobachter mißt die Länge des Stabes, indem er die Lage der beiden Endpunkte ${x'}_1$ und ${x'}_2$ in seinem System K' zu einem Zeitpunkt t' lokalisiert. Aus den inversen Gleichungen finden wir

$$x_1 = \frac{{x'}_1 + vt'}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad , \tag{5.85}$$

$$x_2 = \frac{{x'}_2 + vt'}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad . \tag{5.86}$$

Damit ist die scheinbare Länge

$${x'}_2 - {x'}_1 = (x_2 - x_1)\sqrt{1-\beta^2} = l\sqrt{1-\beta^2} \quad . \tag{5.87}$$

Der Stab erscheint dem bewegten Beobachter um den Faktor $\sqrt{1-\beta^2}$ verkürzt.

$$l' = l\sqrt{1-\beta^2} \quad . \tag{5.88}$$

Man beachte, daß, obwohl beide Enden zur gleichen Zeit t' gemessen werden, das keine gleichzeitigen Ereignisse im ungestrichenen System sind, da sie an verschiedenen Punkten x_1 und x_2 erfolgen.

5.5 Die Zeitdilatation

Als nächsten Punkt behandeln wir die Zeitdilatation. Wir nehmen an, eine Uhr werde im System K an einen Punkt x_1 gesetzt. Zur Zeit t_1, nach dieser Uhr, bemerkt ein Beobachter, der sich in diesem Punkt, jedoch im System K' befindet, eine Zeit

$${t'}_1 = \frac{t_1 - \frac{vx_1}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad . \tag{5.89}$$

Zur Zeit t_2 findet der Beobachter im System K' die Zeit

$${t'}_2 = \frac{t_2 - \frac{vx_1}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad . \tag{5.90}$$

Damit folgt für das Zeitintervall $\Delta t' = {t'}_2 - {t'}_1$

$$\Delta t' = \frac{t_2 - t_1}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{5.91}$$

also

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad . \tag{5.92}$$

Wenn nach der stationären Uhr eine Stunde vergangen ist, findet der bewegte Beobachter, daß auf seiner Uhr $\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ Stunden vergangen sind. Er wird sagen, die stationäre Uhr gehe langsamer, sie gehe nach; deshalb hat man diesem Phänomen den Namen „Zeitdilatation“ gegeben.

Es soll aber nachdrücklich betont werden, daß Beobachter im ungestrichenen System, die die Geschwindigkeit einer Uhr prüfen, die fest im gestrichenen System ist, ebenfalls zu dem Schluß kommen, daß die Uhr im Vergleich zu ihrer langsamer läuft. Die gleiche Feststellung gilt für die Lorentz-Kontraktion; ein Beobachter im ungestrichenen System beobachtet die gleiche Kontraktion von Objekten, die fest im gestrichenen System sind. Somit ist kein System als stationäres und das andere als bewegtes ausgezeichnet. Die Bewegung ist nur relativ; alle gleichförmig bewegten Systeme sind völlig gleichwertig.

Die Lorentz-Transformation zeigt auch, daß es keine Relativgeschwindigkeit gibt, die größer als c ist. Hätte ein Körper bezüglich eines gegebenen Systems eine solche Geschwindigkeit, dann sollte es möglich sein, vom Bezugssystem auf das System, in dem der Körper in Ruhe ist, im Sinne einer Lorentz-Transformation zu transformieren. Aber eine Lorentz-Transformation auf reelle Koordinatensysteme ist nicht möglich, wenn $\beta > 1$ ist. Das zeigt, daß Geschwindigkeiten größer als die Lichtgeschwindigkeit nicht auftreten können. Die Lichtgeschwindigkeit ist eine absolute Grenzgeschwindigkeit.

Als ein in der Natur beobachteter Prozeß in dem die Zeitdilatation beobachtet wird und einen wesentlichen Einfluß hat, ist der Zerfall von Myonen. Trifft ein Proton aus der kosmischen Strahlung auf die Atmosphäre, so entstehen etwa in 30 km Höhe π-Mesonen, von denen die meisten je zu einem Myon μ und einem Neutrino zerfallen. Nun hat das Myon in seinem Ruhesystem eine mittlere Lebensdauer von $\Delta t = 2 \cdot 10^{-6}$s. Nach der Newtonschen Mechanik könnte das Myon selbst mit Lichtgeschwindigkeit nur eine Strecke von

$$s = v \cdot \Delta t = c \cdot \Delta t \simeq 600\,\mathrm{m} \tag{5.93}$$

zurücklegen. Das Myon wird aber auch auf der Erdoberfläche nachgewiesen. Mit

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{5.94}$$

können wir die Geschwindigkeit dieser Myonen leicht ausrechnen. Der Dilatationsfaktor ist ungefähr 50. Dies bedeutet

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 50 \quad , \tag{5.95}$$

$$1 - \frac{v^2}{c^2} = \frac{1}{50^2} \quad , \tag{5.96}$$

also

$$\frac{v^2}{c^2} = 1 - \frac{1}{50^2} \quad , \tag{5.97}$$

$$\frac{v}{c} = \sqrt{1 - \frac{1}{50^2}} \sim 0.9998 \quad . \tag{5.98}$$

Damit wird in der Tat

$$s = v\,\Delta t' \cong c \cdot \Delta t \cdot 50 = 50 \cdot 600\,\mathrm{m} = 30\,\mathrm{km} \quad . \tag{5.99}$$

Um den Umgang mit der Längenkontraktion etwas zu üben, betrachten wir die folgende Aufgabe. Ein Stab der Länge l im Ruhesystem bewegt sich gegenüber dem Beobachter mit der Geschwindigkeit v. Der Beobachter mißt die Länge des Stabes zu $\frac{2}{3}l$. Wie groß ist v? Zur Lösung gehen wir aus von der Lorentzschen Längenkontraktion

$$l' = l\sqrt{1-\beta^2} \tag{5.100}$$

mit $l' = \frac{2}{3}l$. Damit bekommen wir

$$\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{2}{3} \tag{5.101}$$

und weiter

$$\frac{v^2}{c^2} = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9} \quad . \tag{5.102}$$

Es resultiert $v = 0.745\ c$.

5.6 Der Minkowski-Raum

Wir wollen jetzt den Minkowski-Raum einführen. Wir gehen aus von der Lichtgleichung

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2 \tag{5.103}$$

bzw.

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = 0 \quad . \tag{5.104}$$

Dies können wir schreiben mit $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$

$$\sum_{i=1}^{3} x_i^2 - c^2t^2 = 0 \quad . \tag{5.105}$$

Wir führen jetzt formal eine vierte Koordinate ein

$$x_4 = ict \quad . \tag{5.106}$$

Der Grund für den imaginären Wert dieser 4. Koordinate wird aus (5.105) ersichtlich. Damit können wir für das Licht schreiben

$$\sum_{\mu=1}^{4} x_\mu^2 = 0 \quad . \tag{5.107}$$

Ein Ereignis in der Raum-Zeit können wir zukünftig durch vier Koordinaten angeben

$$x_\mu = (x, y, z, ict) \quad . \tag{5.108}$$

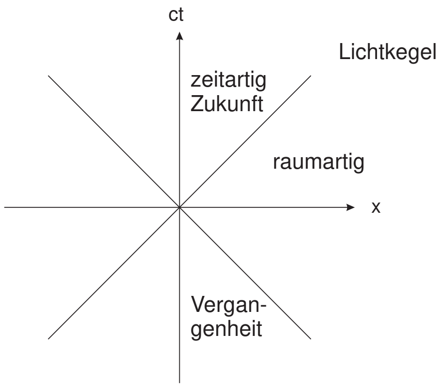
Der Vierervektor des Lichtes hat die Norm Null. Ist eine Komponente eines Vierervektors imaginär, so ist das Quadrat eines solchen Vektors nicht notwendig positiv definit. Vierervektoren, deren Betragsquadrat größer Null sind, werden raumartig genannt

$$\sum_{\mu=1}^{4} x_\mu^2 > 0 \quad \text{, raumartig} \tag{5.109}$$

$$\sum_{\mu=1}^{4} x_\mu^2 < 0 \quad \text{, zeitartig} \tag{5.110}$$

$$\sum_{\mu=1}^{4} x_\mu^2 = 0 \quad \text{, lichtartig.} \tag{5.111}$$

Wir betrachten jetzt die Lichtausbreitung in x-Richtung und setzen daher die y- und z-Komponente gleich Null. Dann erhalten wir folgende graphische Darstellung des zweidimensionalen Unterraums der vierdimensionalen Raum-Zeit.



Die Lichtkegelgleichungen sind gegeben durch

$$x = \pm ct \quad . \tag{5.112}$$

5.7 Additionstheorem der Geschwindigkeiten

Wir wollen jetzt das Additionstheorem der Geschwindigkeiten behandeln, d. h. wir studieren das Verhalten der Geschwindigkeiten bei Lorentz-Transformationen. Wir betrachten dazu ein Teilchen mit der Geschwindigkeit $\vec{w}$ im Koordinatensystem K. Wie groß erscheint die Geschwindigkeit $\vec{w}$ des Teilchens im System K', das gegenüber K die Relativgeschwindigkeit $\vec{v} = (v_x, 0, 0)$ aufweist? Zunächst beschränken wir uns auf die x-Komponente der Geschwindigkeit. Es gilt nach der Lorentz-Transformation

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad , \tag{5.113}$$

$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad . \tag{5.114}$$

Äquivalent gilt für die Differentiale

$$dx' = \frac{dx - v\,dt}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad , \tag{5.115}$$

$$dt' = \frac{dt - \frac{v}{c^2}\,dx}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad . \tag{5.116}$$

Im System K gilt für die Geschwindigkeit des Teilchens

$$\vec{w} = (w_x, w_y, w_z) \tag{5.117}$$

mit

$$w_x = \frac{dx}{dt} \;\rightarrow\; dx = w_x\,dt \quad , \tag{5.118}$$

$$w_y = \frac{dy}{dt} \;\rightarrow\; dy = w_y\,dt \quad , \tag{5.119}$$

$$w_z = \frac{dz}{dt} \;\rightarrow\; dz = w_z\,dt \quad . \tag{5.120}$$

Wir setzen nun $dx = w_x\,dt$ in den Ausdruck für dx' und dt' ein und erhalten

$$dx' = \frac{(w_x - v)\,dt}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad , \tag{5.121}$$

$$dt' = \frac{\left(1 - \frac{v}{c^2}\,w_x\right)dt}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad . \tag{5.122}$$

Die x-Komponente der Geschwindigkeit im gestrichenen System ist gegeben durch

$$w'_x = \frac{dx'}{dt'} \quad . \tag{5.123}$$

Wir setzen die Differentiale ein und bekommen

$$\frac{dx'}{dt'} = w'_x = \frac{w_x - v}{1 - \frac{v}{c^2}\,w_x} \quad . \tag{5.124}$$

w'_y erhält man in ähnlicher Weise mit

$$y' = y \quad , \tag{5.125}$$

$$dy' = dy = w_y dt \tag{5.126}$$

und dt'. Es folgt

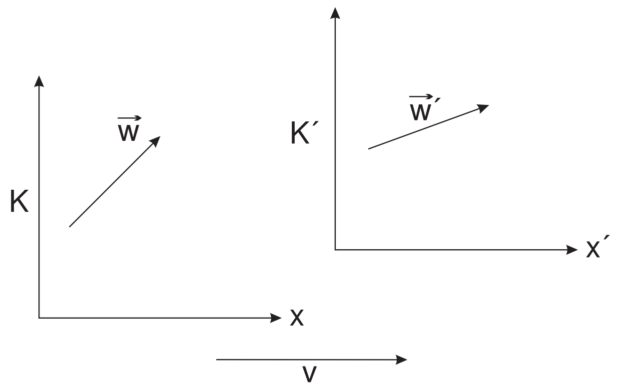
$$w'_y = \frac{w_y\sqrt{1-\beta^2}}{1 - \frac{v}{c^2}\,w_x} \quad . \tag{5.127}$$

Gleichermaßen erhalten wir

$$w'_z = \frac{w_z\sqrt{1-\beta^2}}{1 - \frac{v}{c^2}\,w_x} \tag{5.128}$$

Damit ist die Geschwindigkeit $\vec{w}'$ des Teilchens, wie sie von dem relativ zu K bewegten System K' erscheint, vollständig durch die Transformationsgleichungen für die drei Komponenten w'_x, w'_y und w'_z bestimmt

$$\vec{w}' = \frac{1}{1 - \frac{v}{c^2}\, w_x} \left(w_x - v, w_y\sqrt{1-\beta^2}, w_z\sqrt{1-\beta^2} \right) \quad . \tag{5.129}$$



Veranschaulichung der Geschwindigkeitsvektoren $\vec{w}$ in K und $\vec{w}'$ in K'. Die Relativgeschwindigkeit beider Systeme ist $\vec{v} = v_x\, \vec{e}_x$.

Nimmt man an, daß sich ein masseloses Teilchen in K mit Lichtgeschwindigkeit $|\vec{w}| = c$ ausbreitet und daß die Relativgeschwindigkeit von K' zu K wieder $\vec{v} = (v, 0, 0)$ ist, so erhebt sich die Frage, welche Geschwindigkeit $\vec{w}'$ man in K' beobachtet. Wir setzen in $\left|\vec{w}'\right|^2 = w'^2 = w'^2_x + w'^2_y + w'^2_z$ die ungestrichenen Größen ein. Es resultiert

$$\begin{aligned} w'^2 &= \frac{(w_x - v)^2 + \left(w_y^2 + w_z^2\right)(1-\beta^2)}{\left(1 - \frac{v w_x}{c^2}\right)^2} && (5.130) \\ &= c^4 \left[\frac{w_x^2 - 2w_x v + \frac{v^2}{c^2} w_x^2 + v^2 + w_y^2 + w_z^2 - \frac{v^2}{c^2}\left(w_x^2 + w_y^2 + w_z^2\right)}{\left(c^2 - v w_x\right)^2} \right] \quad . && (5.131) \end{aligned}$$

Da sich das Teilchen in K mit Lichtgeschwindigkeit bewegt, gilt

$$w_x^2 + w_y^2 + w_z^2 = c^2 \quad . \tag{5.132}$$

Wir erhalten somit

$$\begin{aligned} w'^2 &= c^4 \left[\frac{c^2 - 2w_x v + \frac{v^2}{c^2} w_x^2}{\left(c^2 - v w_x\right)^2} \right] \\ &= c^2 \frac{\left(c^2 - v w_x\right)^2}{\left(c^2 - v w_x\right)^2} = c^2 \quad . && (5.133) \end{aligned}$$

Man sieht, daß man auch in K' keine größere Geschwindigkeit als die Lichtgeschwindigkeit c messen kann, unabhängig davon, welchen Betrag die Geschwindigkeit $\vec{v}$ der Relativbewegung der beiden Koordinatensysteme zueinander besitzt.
Für $v \ll c$ gehen die relativistischen Geschwindigkeitstransformationen in die Galilei-Transformationen über

$$\vec{w'} = (w_x - v, w_y, w_z) \quad . \tag{5.134}$$

Zwei sehr interessante Grenzfälle wollen wir an dieser Stelle noch diskutieren.
Zunächst nehmen wir an, daß sich das Teilchen in K mit Lichtgeschwindigkeit und daß sich K' gegenüber K ebenfalls mit Lichtgeschwindigkeit in die entgegengesetzte Richtung bewegt.

$$\vec{v} = (-c, 0, 0) \quad , \tag{5.135}$$

$$\vec{w} = (c, 0, 0) \quad . \tag{5.136}$$

Naiv könnte man meinen, doppelt so schnelles Licht zu erhalten. Dies ist aber nicht der Fall. Für die x-Komponente gilt

$$w'_x = \frac{w_x - v}{1 - \frac{v}{c^2} w_x} \quad . \tag{5.137}$$

Wir setzen $v = -c$ ein und erhalten

$$w'_x = \frac{2c}{1 + c^2/c^2} = c \quad . \tag{5.138}$$

Auch könnte man versucht sein, „ruhendes" Licht im System K' zu erzeugen, indem $\vec{v} = (c, 0, 0)$ gesetzt wird. Das K'-System läuft sozusagen parallel zum Licht mit Lichtgeschwindigkeit. Das Transformationsgesetz ergibt in diesem Fall

$$w'_x = \frac{w_x - c}{1 - w_x/c} = \frac{w_x - c}{(c - w_x)/c} = -c \quad . \tag{5.139}$$

Dies gilt auch für den Limes $w_x \to c$. Der bewegte Beobachter sieht also das Licht mit Lichtgeschwindigkeit in die negative x'-Richtung eilen. Hierbei erkennt man wiederum die Bedeutung der Lichtgeschwindigkeit c als Grenzgeschwindigkeit für alle Bewegungen.

5.8 Viererversktoren

Wir wollen jetzt den Begriff der Eigenzeit etwas erläutern. Wir hatten bereits im dreidimensionalen Raum das Inkrement der Bogenlänge ds behandelt. Es war definiert durch

$$ds^2 = d\vec{r} \cdot d\vec{r} = dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad . \tag{5.140}$$

ds ist ein Skalar und ändert sich nicht bei Koordinatentransformationen, d. h. $ds'^2 = ds^2$. Wir verallgemeinern dies jetzt und geben das infinitesimale Abstandsquadrat im Minkowski-Raum an

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2 \quad . \tag{5.141}$$

ds^2 kann geschrieben werden als Skalarprodukt des Vierervektors

$$d \vec{\vec{r}} = \{dx, dy, dz, ic\,dt\} \quad . \tag{5.142}$$

Es ist demnach

$$ds^2 = d \vec{\vec{r}} \cdot d \vec{\vec{r}} \tag{5.143}$$

ds^2 ist als Skalarprodukt wieder eine Invariante bei Transformationen. Man spricht von einer Lorentz-Invarianten

$$ds^2 = ds'^2 \quad . \tag{5.144}$$

Die gewöhnliche Zeit t, nach der in der Newtonschen Mechanik zum Beispiel bei der Berechnung der Geschwindigkeit oder der Beschleunigung differenziert wird, ist nicht transformationsinvariant und somit kein Skalar.
Nun wollen wir aber eine Lorentz-invariante Zeit finden, um beispielsweise bei der Differentiation eines Vierervektors wieder einen Vierervektor zu erhalten. Um eine Lorentz-invariante Zeiteinheit zu erhalten, gehen wir aus von

$$-ds^2 = c^2 dt^2 - \left(dx^2 + dy^2 + dz^2\right) \tag{5.145}$$

und definieren

$$\begin{aligned} d\tau &= \sqrt{\frac{-ds^2}{c^2}} = \sqrt{dt^2 - \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{c^2}} \\ &= dt\sqrt{1 - \frac{1}{c^2}\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2}} \\ &= dt\sqrt{1 - \beta^2} \quad . \end{aligned} \tag{5.146}$$

Die Größe $d\tau$ besitzt die Dimension einer Zeit. Man bezeichnet $d\tau$ als die Eigenzeit des Systems, denn im Ruhesystem (Eigensystem) ist sie identisch mit der dort gemessenen Koordinatenzeit dt, weil dort $v = 0$ und daher $\beta = 0$ ist. Im folgenden betrachten wir, wie sich die dreidimensionalen Größen der Newtonschen Mechanik im vierdimensionalen Minkowski-Raum verändern. Um die Vierergeschwindigkeit zu erhalten, differenzieren wir den Weltvektor

$$\vec{\vec{r}} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \tag{5.147}$$

nach der Lorentz-invarianten Eigenzeit $d\tau$. Generell wollen wir die Naturgesetze in Lorentz-kovarianter Form formulieren. Bei Lorentz-Transformationen sollen die Naturgesetze gleichermaßen gelten. Für die Vierergeschwindigkeit erhalten wir

$$\vec{\vec{v}} = \frac{d \vec{\vec{r}}}{d\tau} = \left(\frac{\dot{x}_1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \frac{\dot{x}_2}{\sqrt{1-\beta^2}}, \frac{\dot{x}_3}{\sqrt{1-\beta^2}}, \frac{\dot{x}_4}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) \quad . \tag{5.148}$$

Dabei ist speziell für die vierte Komponente

$$v_4 = \frac{ic\,dt}{d\tau} = \frac{ic\,dt}{\sqrt{1-\beta^2}\,dt} = \frac{ic}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad . \tag{5.149}$$

Somit ist

$$\vec{\vec{v}} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\,(\vec{v}, ic) \quad . \tag{5.150}$$

$\vec{\vec{v}}$ stellt die Vierergeschwindigkeit dar und gibt den Zusammenhang mit der gewöhnlichen dreidimensionalen Geschwindigkeit $\vec{v}$ wieder. Für das Quadrat der Vierergeschwindigkeit folgt

$$\vec{\vec{v}} \cdot \vec{\vec{v}} = \sum_{\mu=1}^{4} v_\mu v_\mu = \frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}}\left(v^2 - c^2\right) = -c^2 \quad . \tag{5.151}$$

Als nächste Größe wollen wir den dreidimensionalen Impuls, definiert als

$$\vec{p} = m_0 \vec{v} \quad , \tag{5.152}$$

verallgemeinern auf den vierdimensionalen Minkowski-Raum. In Analogie definieren wir

$$\begin{aligned} \vec{\vec{p}} &= m_0\,\vec{\vec{v}} = \left(\frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}v_x, \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}v_y, \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}v_z, \frac{icm_0}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) \\ &= (m\vec{v}, icm) = (\vec{p}, icm) \quad . \end{aligned} \tag{5.153}$$

Die ersten drei Komponenten gehen, wie es sein muß, im nichtrelativistischen Grenzfall in den Newtonschen Impuls über. Man beachte, daß wir eine effektive Masse m eingeführt haben, die keine Konstante mehr ist. Es ist

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad . \tag{5.154}$$

m_0 ist die Ruhemasse des Teilchens. Es ist die Masse des Teilchens im Zustand der Ruhe ($v = 0$). m ist kein Lorentz-Skalar, da sich der Wert von m von Inertialsystem zu Inertialsystem ändert. Für $v \to c$ steigt die Masse m ins Unendliche an. Deshalb muß man in Teilchenbeschleunigern immer mehr Energie aufwenden, um die Geschwindigkeit hochrelativistischer Teilchen ($v \approx c$) weiter zu erhöhen.

Nun wollen wir die Viererkraft im Minkowski-Raum behandeln. Im dreidimensionalen Raum ist die Kraft definiert durch das Newtonsche Kraftgesetz als

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \frac{d}{dt}\vec{p} \quad . \tag{5.155}$$

Auch diese Beziehung wollen wir vierdimensional verallgemeinern. Analog definieren wir die Kraft im Vierdimensionalen

$$\vec{\vec{F}} = \frac{d}{d\tau}\,\vec{\vec{p}} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\frac{d}{dt}\,\vec{\vec{p}} \quad . \tag{5.156}$$

Dies ist gleichzeitig die Lorentz-kovariante Grundgleichung der relativistischen Mechanik. Um den Zusammenhang mit der dreidimensionalen Kraft zu erstellen, schreiben wir

$$\vec{\vec{F}} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{d}{dt} (m\vec{v}, icm) \quad . \tag{5.157}$$

Man beachte, daß m hierbei geschwindigkeitsabhängig ist. Explizit folgt

$$F_1 = \frac{K_x}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{5.158}$$

mit

$$K_x = \frac{d}{dt}(mv_x) = m_0 \frac{d}{dt}\left(\frac{v_x}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) \quad . \tag{5.159}$$

Weiter ist

$$F_4 = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{d}{dt}\left(\frac{icm_0}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) = \frac{icm_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{\beta \cdot \dot{\beta}}{(1-\beta^2)^{3/2}} = icm_0 \frac{\beta\dot{\beta}}{(1-\beta^2)^2} \quad . \tag{5.160}$$

Hierbei sind K_x, K_y, K_z die Komponenten der dreidimensionalen Kraft.

5.9 Relativistischer Energiesatz

Wir wollen jetzt das relativistische Analogon der kinetischen Energie ableiten. In der nichtrelativistischen Newtonschen Mechanik hatten wir die kinetische Energie bestimmt mittels

$$T(t) = \int \vec{K} \cdot d\vec{r} = \int_{t_0}^{t} \vec{K} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt'}\, dt' \quad . \tag{5.161}$$

Differentiation nach der Zeit ergibt

$$\frac{dT}{dt} = \vec{K} \cdot \vec{v} = \frac{d\vec{p}}{dt} \cdot \vec{v} \quad . \tag{5.162}$$

Setzen wir hier für $\vec{K} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m_0 \frac{d\vec{v}}{dt}$, so finden wir

$$dT = m_0 \vec{v} \cdot d\vec{v} \quad . \tag{5.163}$$

Nach Integration folgt

$$T_2 - T_1 = \frac{1}{2} m_0 v_2^2 - \frac{1}{2} m_0 v_1^2 \quad . \tag{5.164}$$

Das ist der schon früher erhaltene Ausdruck für die kinetische Energie in der klassischen Mechanik. Jetzt setzen wir in (5.162) den dreidimensionalen relativistischen Impuls ein und erhalten

$$\frac{dT}{dt} = \vec{v} \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \vec{v}\right) \quad . \tag{5.165}$$

Wir verwenden $\vec{v} = v\vec{e}$ und erhalten

$$\frac{dT}{dt} = v\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0 v}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)\vec{e}\cdot\vec{e} + v\left(\frac{m_0 v}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)\vec{e}\cdot\dot{\vec{e}} \quad . \tag{5.166}$$

Mit

$$\begin{aligned} \vec{e}\cdot\vec{e} &= 1 \quad , & (5.167)\\ \vec{e}\cdot\dot{\vec{e}} &= 0 & (5.168)\end{aligned}$$

ergibt dies

$$\frac{dT}{dt} = v\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0 v}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) = c^2\beta\frac{d}{dt}\left(m_0\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) = m_0 c^2\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) \tag{5.169}$$

da

$$\beta\frac{d}{dt}\left(\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) \quad . \tag{5.170}$$

Das wollen wir in einer Nebenrechnung verifizieren

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} &= +\frac{1}{2}\left(1-\beta^2\right)^{-3/2} 2\beta\dot{\beta} \\ \beta\frac{d}{dt}\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} &= \frac{\beta\dot{\beta}}{\sqrt{1-\beta^2}} + \beta^2\left(+\frac{1}{2}\right)\left(1-\beta^2\right)^{-3/2} 2\beta\dot{\beta} \\ &= \frac{\beta\dot{\beta}\left(1-\beta^2\right)}{\left(1-\beta^2\right)^{3/2}} + \frac{\beta^2\beta\dot{\beta}}{\left(1-\beta^2\right)^{3/2}} \quad \text{qed.} \end{aligned} \tag{5.171}$$

Wir integrieren nun (5.169) bezüglich der Zeit und bekommen

$$\begin{aligned} T &= m_0 c^2 \int_{t_0}^{t} \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) dt = \left.\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}\right|_{t_0}^{t} \\ &= m_0 c^2 \left[\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2(t)}{c^2}}} - \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2(0)}{c^2}}}\right] \end{aligned} \tag{5.172}$$

Ist für $t_0 = 0$, $v = 0$ und daher $\beta = 0$, so erhält man schließlich

$$T = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} - m_0 c^2 = (m - m_0)\, c^2 \quad . \tag{5.173}$$

Der Ausdruck $m_0 c^2$ hat die Dimension einer Energie. Er bezeichnet den Energieinhalt, der in der Ruhemasse enthalten ist. Es ist die Ruheenergie des Teilchens. Wir definieren die Gesamtenergie eines freien Teilchens durch

$$E = T + m_0 c^2 \tag{5.174}$$

und somit folgt

$$\boxed{E = mc^2} \tag{5.175}$$

Dies ist eine der wichtigsten Aussagen der speziellen Relativitätstheorie: Energie und Masse sind äquivalent. E nennt man die totale Energie: Das ist die gesamte Energie, die ein freies Teilchen besitzt. Sie setzt sich für ein freies Teilchen aus der Ruheenergie m_0c^2 und aus der kinetischen Energie $(m - m_0)\,c^2$ zusammen. Daß die Ruheenergie m_0c^2 als neuer, selbstständiger Energieanteil interpretiert wird, muß letzten Endes durch das Experiment geklärt werden.
Für $v \ll c$, also $\beta \ll 1$ muß die relativistische kinetische Energie in die kinetische Energie der Newtonschen Mechanik übergehen. Wir gehen aus von

$$T = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} - m_0c^2 \tag{5.176}$$

und führen eine Taylor-Entwicklung der Wurzel durch. Mit $x = -\beta^2$ und

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 \ldots \tag{5.177}$$

folgt für die kinetische Energie

$$T = m_0c^2\left(1 + \frac{1}{2}\beta^2 + \frac{3}{8}\beta^4 + \frac{5}{16}\beta^6 + \ldots\right) - m_0c^2 \tag{5.178}$$

oder

$$T = \frac{1}{2}m_0v^2 + \frac{3}{8}m_0c^2\beta^4 + \frac{5}{16}m_0c^2\beta^6 + \cdots \tag{5.179}$$

Die relativistische Korrektur zum nichtrelativistischen Resultat

$$T^{nr} = \frac{1}{2}m_0v^2 \tag{5.180}$$

lautet demnach

$$T^{\text{rel. Korrektur}} = \frac{3}{8}m_0c^2\beta^4 + \frac{5}{16}m_0c^2\beta^6 + \ldots \tag{5.181}$$

Die Äquivalenz zwischen Masse und Energie ist in der Kernphysik mannigfaltig bestätigt worden. Z. B. spaltet bei der Kernspaltung ein Atomkern der Masse M in zwei gleich große Kerne mit den Massen M_1 und M_2. Es ist dabei $M > M_1 + M_2$. Dem Massendefekt entspricht die Energiedifferenz

$$\Delta E = (M - M_1 - M_2)\,c^2 \quad , \tag{5.182}$$

die als kinetische Energie bei der Spaltung frei wird. Nach diesem Grundprinzip wird bei einem nuklearen Reaktor Energie gewonnen. Das gleiche Grundprinzip gilt leider auch bezüglich der Energieerzeugung bei einer Atombombe.
Wir wollen nun die relativistische Energie für freie Teilchen etwas weiter analysieren. Multipliziert man zwei Viererimpulse skalar miteinander, so ergibt sich

$$\vec{\vec{p}} \cdot \vec{\vec{p}} = (\vec{p}, icm)\cdot(\vec{p}, icm) = \vec{p}^{\,2} - m^2c^2 \quad . \tag{5.183}$$

Gleichermaßen gilt

$$\overset{\Rightarrow}{p} \cdot \overset{\Rightarrow}{p} = m_0^2 \overset{\Rightarrow}{v} \cdot \overset{\Rightarrow}{v} = -m_0^2 c^2 \quad , \tag{5.184}$$

da

$$\overset{\Rightarrow}{v} \cdot \overset{\Rightarrow}{v} = -c^2 \quad . \tag{5.185}$$

Zusammengefaßt resultiert

$$\vec{p}^{\,2} - m^2 c^2 = -m_0^2 c^2 \quad . \tag{5.186}$$

Wir nutzen aus, daß gilt $E = mc^2$. Somit haben wir

$$\vec{p}^{\,2} - \frac{E^2}{c^2} = -m_0^2 c^2 \quad . \tag{5.187}$$

Dies führt auf

$$\boxed{E^2 = \vec{p}^{\,2} c^2 + m_0^2 c^4} \quad . \tag{5.188}$$

Dies ist die relativistische Energie-Impuls-Beziehung für freie Teilchen. Formal können wir jetzt die Wurzeln ziehen

$$E_1 = +\sqrt{\vec{p}^{\,2} c^2 + m_0^2 c^4} \quad , \tag{5.189}$$

$$E_2 = -\sqrt{\vec{p}^{\,2} c^2 + m_0^2 c^4} \quad . \tag{5.190}$$

Hierbei bedarf der negative Wurzelausdruck einer gesonderten Diskussion. Die negative Wurzel läßt sich mit Antiteilchen in Verbindung bringen. Hat ein Teilchen die Ruhemasse Null, wie es beim Photon und beim Neutrino vermutlich der Fall ist, so ist

$$E = pc \tag{5.191}$$

mit $p = \sqrt{\vec{p}^{\,2}}$. Es ist

$$E = mc^2 = \gamma m_0 c^2 \quad . \tag{5.192}$$

Daraus erhalten wir für das Verhältnis von Energie und Ruheenergie

$$\gamma = \frac{E}{m_0 c^2} \quad . \tag{5.193}$$

Wir fragen uns, welche Ruheenergie steckt in der Ruhemasse eines ausgewachsenen Mannes ($m_0 = 80$ kg).

$$E = 80\,\mathrm{kg}\left(3 \cdot 10^8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2 = 72 \cdot 10^{17}\,\mathrm{kg}\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2} = 7.2 \cdot 10^{18}\,\text{Joule} \quad . \tag{5.194}$$

Wir wollen nun etwas die Geschwindigkeitsabhängigkeit der Protonenmasse untersuchen. Die Ruhemasse des Protons beträgt

$$m_0(p) = 1.66 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg} \quad . \tag{5.195}$$

Wir wollen die Masse ermitteln, wenn es sich mit 90% der Geschwindigkeit des Lichtes bewegt

$$v(p) = 2.7 \cdot 10^8 \, \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \quad . \tag{5.196}$$

Es ist $\beta = \frac{v(p)}{c} = 0.9$ und damit

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-0.81}} = \frac{1}{\sqrt{0.19}} \approx 2.29 \quad . \tag{5.197}$$

Für die Protonenmasse folgt daher

$$m = \gamma m_0 = 3.808 \cdot 10^{-27} \, \mathrm{kg} \quad . \tag{5.198}$$

Die relativistische kinetische Energie beträgt

$$T = E - m_0 c^2 = m_0 c^2 (\gamma - 1) = 1.93 \cdot 10^{-10} \, \mathrm{J} \quad . \tag{5.199}$$

6 Kinematik starrer Körper

6.1 Orthogonale Transformationen

Wir betrachten lineare Koordinatentransformationen der Art

$$x'_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \quad , \tag{6.1}$$

$$x'_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \quad , \tag{6.2}$$

$$x'_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \quad . \tag{6.3}$$

Dabei sind a_{11}, a_{12}, ... ein Satz konstanter, von x, x' unabhängiger Koeffizienten. In kompakter Schreibweise lauten diese Transformationsgleichungen

$$x'_i = \sum_{j=1}^{3} a_{ij}\, x_j \qquad , \quad i = 1, 2, 3 \quad . \tag{6.4}$$

Mit der Matrix

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \tag{6.5}$$

können wir auch schreiben

$$\vec{x'} = \hat{A}\vec{x} \quad . \tag{6.6}$$

Wir wollen nun solche Koordinatentransformationen betrachten, bei denen der Betrag oder die Länge eines Vektors invariant bleibt. Diese Invarianz drücken wir aus durch

$$\sum_{i=1}^{3} x'^2_i = \sum_{i=1}^{3} x_i^2 \quad . \tag{6.7}$$

Dabei sind wir von einem orthogonalen Basissystem ausgegangen. Wir setzen x'_i ein und bekommen

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{3} \left(\sum_{j=1}^{3} a_{ij} x_j \right) \left(\sum_{k=1}^{3} a_{ik} x_k \right) &= \\ \sum_{i=1}^{3} \sum_{j,k=1}^{3} a_{ij} a_{ik} x_j x_k &= \sum_{j,k=1}^{3} \left(\sum_i a_{ij} a_{ik} \right) x_j x_k \quad . \end{aligned} \tag{6.8}$$

Dies kann nur dann auf die rechte Seite von (6.7) reduziert werden, wenn

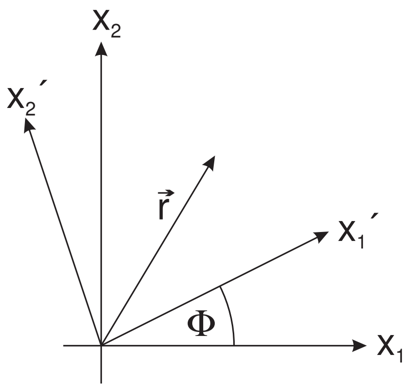
$$\sum_i a_{ij} a_{ik} = 1 \quad \text{für} \quad j = k \tag{6.9}$$

$$= 0 \quad \text{für} \quad j \neq k \tag{6.10}$$

also

$$\sum_i a_{ij} a_{ik} = \delta_{jk} \quad . \tag{6.11}$$

Lineare Transformationen, die diesen Bedingungsgleichungen genügen, nennen wir orthogonale Transformationen.
Als Beispiel betrachten wir die Drehung eines Koordinatensystems in zwei Dimensionen.



Hier gilt

$$x'_1 = x_1 \cos\phi + x_2 \sin\phi \quad , \tag{6.12}$$

$$x'_2 = -x_1 \sin\phi + x_2 \cos\phi \quad . \tag{6.13}$$

Die Matrix $\hat{A}$ lautet dann

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \tag{6.14}$$

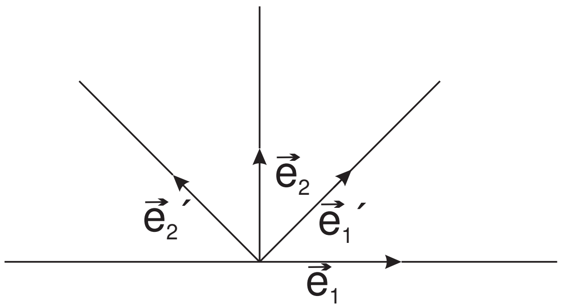
Aufgrund der Orthogonalitätsbedingung soll gelten

$$a_{11}a_{11} + a_{21}a_{21} = 1 = \cos^2\phi + \sin^2\phi \quad , \tag{6.15}$$

$$a_{12}a_{12} + a_{22}a_{22} = 1 = \sin^2\phi + \cos^2\phi \quad , \tag{6.16}$$

$$a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} = 0 = \cos\phi\sin\phi - \sin\phi\cos\phi \quad . \tag{6.17}$$

Diese Bedingungen sind offensichtlich erfüllt.



Wir hatten bereits die Relation abgeleitet

$$\begin{aligned} \vec{e}_r &= \vec{e}_x \cos\phi + \vec{e}_y \sin\phi \quad , & (6.18)\\ \vec{e}_\phi &= -\vec{e}_x \sin\phi + \vec{e}_y \cos\phi \quad . & (6.19) \end{aligned}$$

Jetzt setzen wir

$$\vec{e}_x = \vec{e}_{x_1} \quad , \quad \vec{e}_y = \vec{e}_{x_2} \quad , \quad \vec{e}_r = \vec{e}_{x'_1} \quad , \quad \vec{e}_\phi = \vec{e}_{x'_2} \tag{6.20}$$

Den Ortsvektor $\vec{r}$ drücken wir durch seine Komponenten in beiden Koordinatensystemen aus.

$$\begin{aligned} \vec{r} &= x_1\vec{e}_{x_1} + x_2\vec{e}_{x_2} = x'_1\vec{e}_{x'_1} + x'_2\vec{e}_{x'_2} \\ &= x'_1 \left(\cos\phi\, \vec{e}_{x_1} + \sin\phi\, \vec{e}_{x_2}\right) + x'_2 \left(-\vec{e}_{x_1} \sin\phi + \cos\phi\, \vec{e}_{x_2}\right) \\ &= \left(x'_1 \cos\phi - x'_2 \sin\phi\right) \vec{e}_{x_1} + \left(x'_1 \sin\phi + x'_2 \cos\phi\right) \vec{e}_{x_2} & (6.21) \end{aligned}$$

Also gilt

$$\begin{aligned} x_1 &= x'_1 \cos\phi - x'_2 \sin\phi \quad , & (6.22)\\ x_2 &= x'_1 \sin\phi + x'_2 \cos\phi \quad . & (6.23) \end{aligned}$$

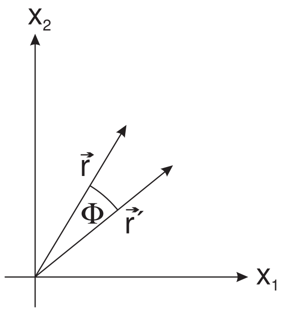
Wir multiplizieren (6.22) mit $\cos\phi$ und (6.23) mit $\sin\phi$ und addieren

$$x'_1 = x_1 \cos\phi + x_2 \sin\phi \quad . \tag{6.24}$$

Wir multiplizieren (6.22) mit $(-\sin\phi)$ und (6.23) mit $\cos\phi$ und addieren

$$x'_2 = -x_1 \sin\phi + x_2 \cos\phi \quad . \tag{6.25}$$

Dies sind die behaupteten Gleichungen.
Bei dieser Vorgehensweise drehen wir das Koordinatensystem und halten den Vektor fest. Alternativ können wir auch das Koordinatensystem fest halten und den Vektor $\vec{r}$ in einen neuen Vektor $\vec{r'}$ drehen.



Die Algebra ist die gleiche. Dennoch sollte man darauf achten, daß klar wird, welches Objekt gedreht wird.

Wir wollen eine weitere Orthogonalitätseigenschaft der Transformationsmatrix bei orthogonalen Transformationen ableiten. Dazu betrachten wir die inverse Transformation

$$x_i = \sum_{k=1}^{3} b_{ik}\, x'_k \quad . \tag{6.26}$$

Dann folgt analog aus der Invarianz der Länge eines Vektors

$$\sum_{i=1}^{3} x_i^2 = \sum_{i=1}^{3} \sum_{k,l=1}^{3} b_{ik} b_{il}\; x'_k x'_l = \sum_{k=1}^{3} {x'}_k^2 \quad . \tag{6.27}$$

Somit muß ebenfalls gelten

$$\sum_{i=1}^{3} b_{ik} b_{il} = \delta_{kl} \tag{6.28}$$

oder nach Umbenennung der Indizes

$$\sum_{k=1}^{3} b_{ki} b_{kl} = \delta_{il} \quad . \tag{6.29}$$

Die Matrix $\{b_{ik}\}$ besitzt also die gleichen Orthogonalitätseigenschaften wie die Matrix $\{a_{ik}\}$. Nun hängen aber die b_{ik} mit den a_{ik} zusammen, denn es gilt

$$x'_i = \sum_{k=1}^{3} a_{ik} x_k = \sum_{k=1}^{3} \sum_{l=1}^{3} a_{ik} b_{kl}\, x'_l \quad . \tag{6.30}$$

Dies bedingt

$$\sum_{k=1}^{3} a_{ik} b_{kl} = \delta_{il} \quad . \tag{6.31}$$

Ein Vergleich mit der Orthogonalitätsrelation (6.29) offenbart

$$a_{ik} = b_{ki} \quad , \tag{6.32}$$

d. h. die Matrix b_{ki} ist die transponierte a_{ik}-Matrix. Wir setzen dies in (6.29) ein und bekommen

$$\sum_{k=1}^{3} a_{ik} a_{lk} = \delta_{il} \quad . \tag{6.33}$$

Eine Umbenennung der Indizes liefert

$$\sum_{i=1}^{3} a_{ki} a_{li} = \delta_{kl} \quad . \tag{6.34}$$

Dies ist die gesuchte zweite Orthogonalitätsrelation.

Auch die Transformationsmatrix der Lorentz-Transformation

$$(a_{ik}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 & \frac{i\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{-i\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{pmatrix} \tag{6.35}$$

erfüllt diese Orthogonalitätsrelationen. Hierbei war

$$x'_i = \sum_{k=1}^{4} a_{ik}\, x_k \tag{6.36}$$

mit $x_4 = ict$.

6.2 Rotierende Koordinatensysteme

Wir diskutieren jetzt die Newtonsche Mechanik in bewegten Koordinatensystemen. Insbesondere gilt unser Hauptaugenmerk den rotierenden Koordinatensystemen. Zunächst studieren wir die Rotation eines (x',y',z')-Koordinatensystems um den Ursprung des Intertialsystems (x,y,z), wobei die beiden Koordinatenursprünge zusammenfallen. Dabei sei das Inertialsystem mit L für Laborsystem und das rotierende System mit B für bewegtes System bezeichnet. Das Koordinatensystem K' soll in bezug auf K rotieren. Wir untersuchen die zeitliche Änderung des Vektors $\vec{A}(t)$ im System K'. Es ist

$$\vec{A}(t) = A'_1\, \vec{e'}_1 + A'_2\, \vec{e'}_2 + A'_3\, \vec{e'}_3. \tag{6.37}$$

Für die zeitliche Ableitung von $\vec{A}$ im bewegten System K' folgt

$$\left.\frac{d\vec{A}}{dt}\right|_B = \frac{dA'_1}{dt}\, \vec{e'}_1 + \frac{dA'_2}{dt}\, \vec{e'}_2 + \frac{dA'_3}{dt}\, \vec{e'}_3 \quad . \tag{6.38}$$

Im Inertialsystem K mit den Koordinaten (x,y,z) ist $\vec{A}$ ebenfalls zeitabhängig. Aufgrund der Rotation des Systems K' ändern sich auch die Einheitsvektoren $\vec{e'}_1$, $\vec{e'}_2$, $\vec{e'}_3$ mit der Zeit. Aus der Sicht des Systems K gilt also

$$\begin{aligned} \left.\frac{d\vec{A}}{dt}\right|_L &= \frac{dA'_1}{dt}\, \vec{e'}_1 + \frac{dA'_2}{dt}\, \vec{e'}_2 + \frac{dA'_3}{dt}\, \vec{e'}_3 + A'_1\, \dot{\vec{e'}}_1 + A'_2\, \dot{\vec{e'}}_2 + A'_3\, \dot{\vec{e'}}_3 \\ &= \left.\frac{d\vec{A}}{dt}\right|_B + A'_1\, \dot{\vec{e'}}_1 + A'_2\, \dot{\vec{e'}}_2 + A'_3\, \dot{\vec{e'}}_3 \quad . \end{aligned} \tag{6.39}$$

Jetzt gilt stets

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{e'}_i \cdot \vec{e'}_i\right) = \vec{e'}_i \cdot \dot{\vec{e'}}_i + \dot{\vec{e'}}_i \cdot \vec{e'}_i = \frac{d}{dt} 1 = 0 \quad . \tag{6.40}$$

Also ist $\dot{\vec{e_i}} \cdot \vec{e_i} = 0$.
Die Ableitung eines Einheitsvektors $\dot{\vec{e_i}}$ steht immer senkrecht auf dem Vektor selbst. Deshalb läßt sich die Ableitung eines Einheitsvektors als Linearkombination der beiden anderen Einheitsvektoren schreiben.

$$\dot{\vec{e'}}_1 = a_1\vec{e'}_2 + a_2\vec{e'}_3 \quad , \tag{6.41}$$
$$\dot{\vec{e'}}_2 = a_3\vec{e'}_1 + a_4\vec{e'}_3 \quad , \tag{6.42}$$
$$\dot{\vec{e'}}_3 = a_5\vec{e'}_1 + a_6\vec{e'}_2 \quad . \tag{6.43}$$

Von diesen sechs Koeffizienten $a_1, \ldots, a_6$ sind nur drei unabhängig. Um dies zu demonstrieren, differenzieren wir zunächst

$$\vec{e'}_1 \cdot \vec{e'}_2 = 0 \tag{6.44}$$

und erhalten

$$\dot{\vec{e'}}_1 \cdot \vec{e'}_2 = -\dot{\vec{e'}}_2 \cdot \vec{e'}_1 \quad . \tag{6.45}$$

Wir multiplizieren (6.41) mit $\vec{e'}_2$ und entsprechend (6.42) mit $\vec{e'}_1$. So erhält man

$$\vec{e'}_2 \cdot \dot{\vec{e'}}_1 = a_1 \quad , \tag{6.46}$$
$$\vec{e'}_1 \cdot \dot{\vec{e'}}_2 = a_3 \quad . \tag{6.47}$$

Nach (6.45) folgt damit

$$a_3 = -a_1 \quad . \tag{6.48}$$

Analog ergibt sich

$$a_6 = -a_4 \quad , \tag{6.49}$$
$$a_5 = -a_2 \quad . \tag{6.50}$$

Die Ableitung des Vektors $\vec{A}$ im Inertialsystemm läßt sich nun folgendermaßen schreiben

$$\begin{aligned} \left.\frac{d\vec{A}}{dt}\right|_L &= \left.\frac{d\vec{A}}{dt}\right|_B + A'_1\left(a_1\vec{e'}_2 + a_2\vec{e'}_3\right) \\ &\quad + A'_2\left(-a_1\vec{e'}_1 + a_4\vec{e'}_3\right) + A'_3\left(-a_2\vec{e'}_1 - a_4\vec{e'}_2\right) \\ &= \left.\frac{d\vec{A}}{dt}\right|_B + \vec{e'}_1\left(-a_1A'_2 - a_2A'_3\right) + \vec{e'}_2\left(a_1A'_1 - a_4A'_3\right) \\ &\quad + \vec{e'}_3\left(a_2A'_1 + a_4A'_2\right) \quad . \end{aligned} \tag{6.51}$$

Jetzt stellen wir fest, daß wir das Endergebnis auch schreiben können als

$$\left.\frac{d\vec{A}}{dt}\right|_L = \left.\frac{d\vec{A}}{dt}\right|_B + \vec{\omega} \times \vec{A} \tag{6.52}$$

mit $\vec{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$. Es ist

$$\begin{aligned} \vec{\omega} \times \vec{A} &= \vec{e'}_1 \left(\omega_2 A'_3 - \omega_3 A'_2\right) + \vec{e'}_2 \left(\omega_3 A'_1 - \omega_1 A'_3\right) \\ &\quad + \vec{e'}_3 \left(\omega_1 A'_2 - \omega_2 A'_1\right) \end{aligned} \tag{6.53}$$

Wir müssen nur identifizieren

$$\omega_3 = a_1 \quad , \tag{6.54}$$

$$\omega_2 = -a_2 \quad , \tag{6.55}$$

$$\omega_1 = a_4 \quad . \tag{6.56}$$

Wir haben gezeigt, daß wir schreiben können

$$\left.\frac{d\vec{A}}{dt}\right|_L = \left.\frac{d\vec{A}}{dt}\right|_B + \vec{\omega} \times \vec{A} \tag{6.57}$$

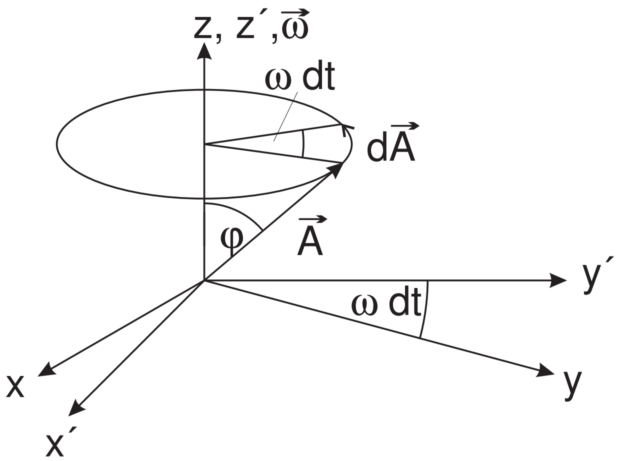
mit

$$\vec{\omega} = (a_4, \, -a_2, \, a_1) \quad . \tag{6.58}$$

Wir wollen nun die physikalische Bedeutung des Vektors $\vec{\omega}$ beleuchten und nachweisen, daß er mit der Winkelgeschwindigkeit identisch ist. Dazu betrachten wir den speziellen Fall

$$\left.\frac{d\vec{A}}{dt}\right|_B = 0 \quad , \tag{6.59}$$

d.h. die Ableitung des Vektors $\vec{A}$ im bewegten System verschwindet. $\vec{A}$ rotiert mit dem bewegten System mit. φ sei der Winkel zwischen der z-Achse als Rotationsachse und $\vec{A}$.



Änderung eines im sich drehenden System fest verankerten, aber beliebigen Vektors $\vec{A}$

Die Komponente parallel zur Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ wird durch die Rotation nicht verändert. Der Winkel kann als Verhältnis von Bogenlänge und Radius angegeben werden. Dies ergibt

$$\omega\, dt = \frac{dA}{A \sin\varphi} \tag{6.60}$$

und somit

$$dA = \omega\, dt\, A \sin\varphi \quad . \tag{6.61}$$

Damit haben wir

$$\left.\frac{dA}{dt}\right|_L = \omega\, A \sin\varphi \quad . \tag{6.62}$$

In Vektornotation läßt sich dies auch schreiben als

$$\left.\frac{d\vec{A}}{dt}\right|_L = \vec{\omega} \times \vec{A} \quad . \tag{6.63}$$

Auch die Richtung von $(\vec{\omega} \times \vec{A})dt$ stimmt mit $d\vec{A}$ berein. Da der Vektor $\vec{A}$ beliebig gewählt werden kann, muß der Vektor $\vec{\omega}$ mit der Winkelgeschwindigkeit, mit der das System rotiert, identisch sein. Der Vektor $\vec{\omega}$ ist die Winkelgeschwindigkeit des bewegten Systems relativ zu einem festen System. Wir führen jetzt eine Operator-Notation ein. Wir definieren

$$\hat{D}_L \vec{A} = \left.\frac{d\vec{A}}{dt}\right|_L \quad , \tag{6.64}$$

$$\hat{D}_B \vec{A} = \left.\frac{d\vec{A}}{dt}\right|_B \quad . \tag{6.65}$$

Dann können wir auch schreiben

$$\hat{D}_L \vec{A} = \hat{D}_B \vec{A} + \vec{\omega} \times \vec{A} = \left(\hat{D}_B + \vec{\omega}\times\right) \vec{A} \quad , \tag{6.66}$$

also

$$\hat{D}_L = \hat{D}_B + \vec{\omega} \times \quad . \tag{6.67}$$

Insbesondere ist die Winkelbeschleunigung in beiden Koordinatensystemen gleich

$$\left.\frac{d\vec{\omega}}{dt}\right|_L = \left.\frac{d\vec{\omega}}{dt}\right|_B + \vec{\omega} \times \vec{\omega} = \left.\frac{d\vec{\omega}}{dt}\right|_B \quad . \tag{6.68}$$

Wir wollen jetzt die Newtonsche Mechanik in rotierenden Koordinatensystemen studieren.

Ersetzen wir $\vec{A}$ durch den Ortsvektor $\vec{r}$, so gilt

$$\left.\frac{d\vec{r}}{dt}\right|_L = \left.\frac{d\vec{r}}{dt}\right|_B + \vec{\omega} \times \vec{r} \tag{6.69}$$

mit

$$\left.\frac{d\vec{r}}{dt}\right|_B = \frac{dx'_1}{dt}\,\vec{e}'_1 + \frac{dx'_2}{dt}\,\vec{e}'_2 + \frac{dx'_3}{dt}\,\vec{e}'_3 \quad . \tag{6.70}$$

(6.69) heißt manchmal die „wahre“ Geschwindigkeit, während (6.70) auch „scheinbare“ Geschwindigkeit heißt.

Wir gehen jetzt über zum Studium der Beschleunigung. Das Newtonsche Gesetz

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} \tag{6.71}$$

gilt nur im Inertialsystem. In beschleunigten Systemen treten zusätzliche Terme auf. Zuerst betrachten wir eine reine Rotation. Für die Beschleunigung gilt

$$\begin{aligned}
\ddot{\vec{r}} &= \frac{d}{dt}\left(\dot{\vec{r}}\right)_L = \hat{D}_L\left(\hat{D}_L\vec{r}\right) = \left(\hat{D}_B + \vec{\omega}\times\right)\left(\hat{D}_B\vec{r} + \vec{\omega}\times\vec{r}\right) \\
&= \hat{D}_B^2\vec{r} + \hat{D}_B\left(\vec{\omega}\times\vec{r}\right) + \vec{\omega}\times\hat{D}_B\vec{r} + \vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}\right) \\
&= \hat{D}_B^2\vec{r} + \left(\hat{D}_B\vec{\omega}\right)\times\vec{r} + 2\vec{\omega}\times\hat{D}_B\vec{r} + \vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}\right) \quad .
\end{aligned} \tag{6.72}$$

Wir ersetzen den Operator nun wieder durch den Differentialquotienten

$$\left.\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right|_L = \left.\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right|_B + \left.\frac{d\vec{\omega}}{dt}\right|_B \times\vec{r} + 2\vec{\omega}\times\left.\frac{d\vec{r}}{dt}\right|_B + \vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}\right) \quad . \tag{6.73}$$

Dabei bezeichnet man die Ausdrücke $\left.\frac{d\vec{\omega}}{dt}\right|_B \times\vec{r}$ als lineare Beschleunigung, $2\vec{\omega}\times\left.\frac{d\vec{r}}{dt}\right|_B$ als Coriolisbeschleunigung und $\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}\,)$ als Zentripetalbeschleunigung. Durch Multiplikation mit der Masse m folgt die Kraft $\vec{F}$

$$m\left.\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right|_B + m\left.\frac{d\vec{\omega}}{dt}\right|_B \times\vec{r} + 2m\vec{\omega}\times\left.\frac{d\vec{r}}{dt}\right|_B + m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}\,) = \vec{F} \quad . \tag{6.74}$$

Die Grundgleichung der Mechanik im rotierenden Koordinatensystem lautet also, wenn wir den Index B unterdrücken

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F} - m\frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r} - 2m\vec{\omega}\times\vec{v} - m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}\,) \quad . \tag{6.75}$$

Die zusätzlichen Terme auf der rechten Seite dieser Gleichung sind Scheinkräfte. Für Experimente auf der Erde kann man die Zusatzterme oft vernachlässigen, da die Winkelgeschwindigkeit der Erde

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \simeq 7.27\cdot 10^{-5}\,\frac{1}{\mathrm{s}} \tag{6.76}$$

beträgt.

Schließlich wollen wir noch die Bedingung aufgeben, daß die Ursprünge der beiden Koordinatensysteme zusammenfallen. Die allgemeine Bewegung eines Koordinatensystems setzt sich zusammen aus einer Rotation des Systems und einer Translation des Ursprungs. Gibt $\vec{R}$ den Ursprung des gestrichenen Systems an, so gilt für den Ortsvektor im ungestrichenen System

$$\vec{r} = \vec{R} + \vec{r'} \quad , \tag{6.77}$$

$$\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{R}} + \dot{\vec{r'}} \quad . \tag{6.78}$$

Im Inertialsystem gilt nach wie vor

$$m \left. \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \right|_L = \left. \vec{F} \right|_L = \vec{F} \quad . \tag{6.79}$$

Wir setzen $\vec{r}$ ein und erhalten

$$m\frac{d^2\vec{r'}}{dt^2} + m \left. \frac{d^2\vec{R}}{dt^2} \right|_L = \vec{F} \quad . \tag{6.80}$$

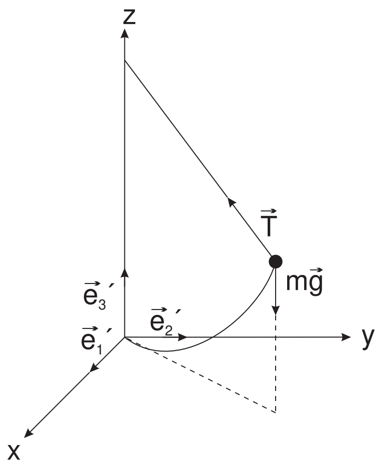
Wir führen den Übergang zum beschleunigten System aus und erhalten

$$m \left. \frac{d^2\vec{r'}}{dt^2} \right|_B = \vec{F} - m \left. \frac{d^2\vec{R}}{dt^2} \right|_L - m \left. \frac{d\vec{\omega}}{dt} \right|_B \times \vec{r'} - 2m\vec{\omega} \times \vec{v}_B - m\vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r'}\right) \quad . \tag{6.81}$$

Es tritt also das Zusatzglied $m\ddot{\vec{R}}$ auf.

6.3 Das Foucaultsche Pendel

Zur Demonstration der Kräfte in einem rotierenden Koordinatensystem diskutieren wir das Foucaultsche Pendel. Wir werden hierbei die Bewegungsgleichung des Pendels ableiten unter Berücksichtigung der Rotation der Erde um ihre Achse. Damit gelang Foucault im Jahr 1851 ein einfacher Beweis der Erdrotation. Ein Pendel versucht seine Schwingungsebene beizubehalten, unabhängig von einer möglichen Drehung des Aufhängepunktes. Die Skizze zeigt die Anordnung des Pendels und legt zugleich die Achsen des Koordinatensystems fest.



Wir wollen zunächst die Bewegungsgleichung des Foucaultschen Pendels herleiten. Für den Massenpunkt gilt

$$\vec{F} = \vec{T} + m\vec{g} \quad , \tag{6.82}$$

wobei $\vec{T}$ eine zunächst unbekannte Zugkraft im Pendelfaden ist. Wir gehen aus von der für bewegte Bezugssysteme gültigen Grundgleichung

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} - \underbrace{m\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}}_{\text{lineare Kraft}} - \underbrace{2m\,\vec{\omega} \times \vec{v}}_{\text{Corioliskraft}} - \underbrace{m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})}_{\text{Zentripetalkraft}} \quad . \tag{6.83}$$

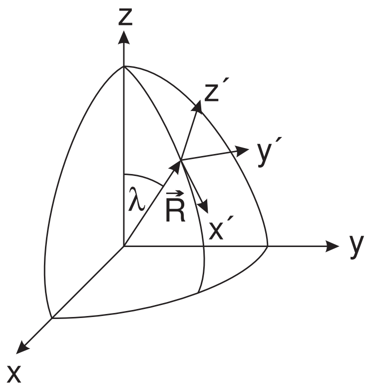
Für die Erde gilt $d\omega/dt = 0$. Die Winkelgeschwindigkeit der Erde ist klein, $\omega = 7.27 \cdot 10^{-5}\mathrm{s}^{-1}$. Daher kann die lineare Kraft und die Zentripetalkraft vernachlässigt werden. Somit erhalten wir näherungsweise

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{T} + m\vec{g} - 2m\vec{\omega} \times \vec{v} \quad . \tag{6.84}$$

Die Erdrotation macht sich durch das Auftreten der Corioliskraft bemerkbar. Die Corioliskraft führt zur Drehung der Schwingungsebene des Pendels. Die Zugkraft $\vec{T}$ im Faden ist

$$\begin{aligned}
\vec{T} &= (\vec{T} \cdot \vec{e}_1{}')\vec{e}_1{}' + (\vec{T} \cdot \vec{e}_2{}')\vec{e}_2{}' + (\vec{T} \cdot \vec{e}_3{}')\vec{e}_3{}' \\
&= T\cos\alpha\ \vec{e}_1{}' + T\cos\beta\ \vec{e}_2{}' + T\cos\gamma\ \vec{e}_3{}' \\
&= -T\left(\frac{x}{l}\right)\vec{e}_1{}' - T\left(\frac{y}{l}\right)\vec{e}_2{}' - T\left(\frac{l-z}{l}\right)\vec{e}_3{}' \quad .
\end{aligned} \tag{6.85}$$

Jetzt zerlegen wir die Winkelgeschwindigkeit in bezug auf das rotierende Koordinatensystem.



Es ist $\vec{\omega} = \omega \vec{e}_3$. Wir zerlegen $\vec{e}_3$ in Komponenten in bezug auf $\vec{e}_1{}'$, $\vec{e}_2{}'$ und $\vec{e}_3{}'$. Es ist

$$\vec{e}_3 = (-\sin\lambda)\,\vec{e}_1{}' + 0\,\vec{e}_2{}' + \cos\lambda\,\vec{e}_3{}' \quad . \tag{6.86}$$

Damit ist

$$\vec{\omega} = -\omega\sin\lambda\,\vec{e}_1{}' + \omega\cos\lambda\,\vec{e}_3{}' \quad . \tag{6.87}$$

Mit dieser Darstellung von $\vec{\omega}$ können wir das in der Corioliskraft geforderte Kreuzprodukt $\vec{\omega}\times\vec{v}$ auswerten. Es folgt

$$\begin{aligned} \vec{\omega}\times\vec{v} &= \begin{vmatrix} \vec{e}_1{}' & \vec{e}_2{}' & \vec{e}_3{}' \\ -\omega\sin\lambda & 0 & \omega\cos\lambda \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \end{vmatrix} \\ &= -\omega\cos\lambda\,\dot{y}\,\vec{e}_1{}' + \omega(\sin\lambda\,\dot{z} + \cos\lambda\,\dot{x})\,\vec{e}_2{}' - \omega\sin\lambda\,\dot{y}\,\vec{e}_3{}' \quad . \end{aligned} \tag{6.88}$$

Ferner nutzen wir aus, daß gilt

$$m\vec{g} = -mg\,\vec{e}_3{}' \quad . \tag{6.89}$$

Damit können wir zusammenfassend das gekoppelte Differentialgleichungssystem aufschreiben. Es gilt

$$m\ddot{x} = -\frac{x}{l}T + 2m\omega\cos\lambda\,\dot{y} \quad , \tag{6.90}$$

$$m\ddot{y} = -\frac{y}{l}T - 2m\omega(\cos\lambda\,\dot{x} + \sin\lambda\,\dot{z}) \quad , \tag{6.91}$$

$$m\ddot{z} = \frac{l-z}{l}T - mg + 2m\omega\sin\lambda\,\dot{y} \quad . \tag{6.92}$$

Zur weiteren Berechnung machen wir jetzt eine weitere Näherung. Wir nehmen an, das Pendel sei sehr lang, die Amplitude der Schwingung sei aber sehr klein. Dann findet die Bewegung der

Masse fast nur in der x-y-Ebene statt, hingegen ist $\ddot{z}$ und $\dot{z}$ nahezu Null. Ferner können wir für kleine Auslenkungen $\frac{l-z}{l}$ durch 1 approximieren. Aus (6.92) folgt damit

$$0 = T - mg + 2m\omega\dot{y}\sin\lambda \tag{6.93}$$

und somit

$$T = mg - 2m\omega\dot{y}\sin\lambda \quad . \tag{6.94}$$

Einsetzen in (6.90) bzw. (6.91) liefert

$$\ddot{x} \;=\; -\frac{x}{l}g + \frac{x}{l}2\omega\dot{y}\sin\lambda + 2\omega\cos\lambda\,\dot{y}, \tag{6.95}$$

$$\ddot{y} \;=\; -\frac{y}{l}g + \frac{y}{l}2\omega\dot{y}\sin\lambda - 2\omega\cos\lambda\,\dot{x}\,. \tag{6.96}$$

Dieses Differentialgleichungssystem ist nichtlinear aufgrund der auftretenden Terme proportional zu $x\dot{y}$ und $y\dot{y}$. Aufgrund der Tatsache, daß ω, x und y kleine Größen sind, sind auch diese Kopplungsterme sehr klein und können vernachlässigt werden. Damit resultiert ein gekoppeltes System linearer Differentialgleichungen

$$\ddot{x} \;=\; -gx/l + 2\omega\dot{y}\cos\lambda\,, \tag{6.97}$$

$$\ddot{y} \;=\; -gy/l - 2\omega\dot{x}\cos\lambda\,. \tag{6.98}$$

Jetzt wollen wir uns um die Lösung dieser Differentialgleichung unter Berücksichtigung spezifischer Anfangsbedingungen kümmern.
Zunächst bezeichnen wir

$$\frac{g}{l} = k^2, \tag{6.99}$$

$$\omega\cos\lambda = \alpha \quad . \tag{6.100}$$

Dies führt auf

$$\ddot{x} \;=\; -k^2x - 2\alpha i^2\dot{y} \quad , \tag{6.101}$$

$$i\ddot{y} \;=\; -k^2iy - 2\alpha i\dot{x} \quad . \tag{6.102}$$

Addiert ergibt dies

$$\ddot{x} + i\ddot{y} = -k^2(x+iy) - 2\alpha i(\dot{x} + i\dot{y})\,. \tag{6.103}$$

Mit

$$u = x + iy \tag{6.104}$$

folgt

$$\ddot{u} = -k^2 u - 2\alpha i \dot{u} \tag{6.105}$$

oder

$$\ddot{u} + 2i\alpha\dot{u} + k^2 u = 0 \quad . \tag{6.106}$$

Diese Gleichung wird durch den bei allen Schwingungsvorgängen bewährten Ansatz

$$u = Ce^{\gamma t} \tag{6.107}$$

gelöst, wobei wir γ bestimmen wollen. Einsetzen in die Differentialgleichung liefert

$$C\gamma^2 e^{\gamma t} + 2\alpha i C\gamma e^{\gamma t} + k^2 C e^{\gamma t} = 0 \tag{6.108}$$

und somit

$$\gamma^2 + 2i\alpha\gamma + k^2 = 0\,. \tag{6.109}$$

Dies ergibt zwei Lösungen für γ

$$\gamma_{1/2} = -i\alpha \pm ik\sqrt{1 + \alpha^2/k^2} \quad . \tag{6.110}$$

Jetzt ist $\alpha^2 = \omega^2 \cos^2 \lambda$ klein gegenüber $k^2 = g/l$. Wir nutzen dies aus und erhalten im Rahmen dieser weiteren Näherung

$$\gamma_{1/2} = -i\alpha \pm ik\,. \tag{6.111}$$

Die allgemeinste Lösung der Schwingungsdifferentialgleichung ist eine Linearkombination der linear unabhängigen Lösungen

$$u = Ae^{\gamma_1 t} + Be^{\gamma_2 t} \quad , \tag{6.112}$$

wobei A und B durch die Anfangsbedingungen festgelegt werden müssen und komplex sein können. Wir setzen an

$$u = (A_1 + iA_2)e^{-i(\alpha-k)t} + (B_1 + iB_2)e^{-i(\alpha+k)t} \quad . \tag{6.113}$$

Die Eulersche Relation

$$e^{\pm i\varphi} = \cos\varphi \pm i\sin\varphi \tag{6.114}$$

erlaubt die Aufspaltung von $u = x + iy$,

$$\begin{aligned} x + iy &= (A_1 + iA_2)(\cos(\alpha - k)t - i\sin(\alpha - k)t) \\ &\quad + (B_1 + iB_2)(\cos(\alpha + k)t - i\sin(\alpha + k)t) \quad . \end{aligned} \tag{6.115}$$

Nach Trennung von Real- und Imaginärteil folgt

$$x = A_1 \cos(\alpha - k)t + A_2 \sin(\alpha - k)t + B_1 \cos(\alpha + k)t + B_2 \sin(\alpha + k)t \quad , \tag{6.116}$$
$$y = -A_1 \sin(\alpha - k)t + A_2 \cos(\alpha - k)t - B_1 \sin(\alpha + k)t + B_2 \cos(\alpha + k)t \quad . \tag{6.117}$$

Die Anfangsbedingungen seien

$$\begin{aligned} x_0 &= 0 \quad , \\ y_0 &= L \quad , \\ \dot{x}_0 &= 0 \quad , \\ \dot{y}_0 &= 0 \quad . \end{aligned} \tag{6.118}$$

Die Anfangsgeschwindigkeit sei also Null. Wir setzen $x_0 = 0$ in (6.116) ein, dies liefert

$$B_1 = -A_1 \quad . \tag{6.119}$$

Wir differenzieren (6.116) nach der Zeit und setzen $\dot{x}_0 = 0$ ein. Damit folgt

$$B_2 = A_2 \frac{k - \alpha}{k + \alpha} \quad . \tag{6.120}$$

Wieder nutzen wir aus: $\alpha \ll k$ und damit $B_2 \approx A_2$. Aus (6.116) folgt damit

$$x = A_1 \cos(\alpha - k)t + A_2 \sin(\alpha - k)t - A_1 \cos(\alpha + k)t + A_2 \sin(\alpha + k)t \quad , \tag{6.121}$$
$$y = -A_1 \sin(\alpha - k)t + A_2 \cos(\alpha - k)t + A_1 \sin(\alpha + k)t + A_2 \cos(\alpha + k)t \quad . \tag{6.122}$$

Jetzt müssen wir noch die Anfangsbedingungen für y_0 und $\dot{y}_0$ einarbeiten. Aus $\dot{y}_0 = 0$ folgt

$$-A_1(\alpha - k) + A_1(\alpha + k) = 0 \quad . \tag{6.123}$$

Dies ergibt

$$A_1 = 0 \quad . \tag{6.124}$$

Aus $y_0 = L$ ergibt sich

$$2A_2 = L \tag{6.125}$$

oder

$$A_2 = \frac{L}{2} \quad . \tag{6.126}$$

Zusammengefaßt resultiert

$$x = \frac{L}{2} \sin(\alpha - k)t + \frac{L}{2} \sin(\alpha + k)t \quad , \tag{6.127}$$
$$y = \frac{L}{2} \cos(\alpha - k)t + \frac{L}{2} \cos(\alpha + k)t \quad . \tag{6.128}$$

Wir verwenden jetzt die trigonometrischen Relationen

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y, \tag{6.129}$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y. \tag{6.130}$$

Dies führt auf

$$x = L \sin \alpha t \ \cos kt \quad , \tag{6.131}$$

$$y = L \cos \alpha t \ \cos kt \quad . \tag{6.132}$$

Die beiden Gleichungen lassen sich in einer Vektorgleichung zusammenfassen

$$\vec{r} = L \cos kt(\sin \alpha t \ \vec{e}_1 + \cos \alpha t \ \vec{e}_2) \quad . \tag{6.133}$$

Der erste Faktor in dieser Lösung beschreibt die Bewegung eines Pendels, das mit der Amplitude L und Frequenz $k = \sqrt{\frac{g}{l}}$ schwingt. Der zweite Faktor ist ein Einheitsvektor $\vec{n}$, der mit der Frequenz $\alpha = \omega \cos \lambda$ rotiert und die Drehung der Schwingungsebene beschreibt

$$\vec{r} = L \cos kt \ \vec{n}(t) \quad , \tag{6.134}$$

$$\vec{n}(t) = \sin \alpha t \ \vec{e}_1 + \cos \alpha t \ \vec{e}_2 \quad . \tag{6.135}$$

Dies beinhaltet auch, in welcher Richtung sich die Schwingungsebene dreht. Für die nördliche Halbkugel ist $\cos \lambda > 0$ und nach kurzer Zeit gilt $\sin \alpha t > 0$ und $\cos \alpha t > 0$, d. h. die Schwingungsebene dreht sich im Uhrzeigersinn. Ein Beobachter auf der Südhalbkugel wird für sein Pendel wegen $\cos \lambda < 0$ eine Drehung gegen den Uhrzeigersinn feststellen. Verfolgt man den Weg des Massenpunktes eines Foucault-Pendels, so ergeben sich Rosettenbahnen. Die genaue Form der Bahn hängt entscheidend von den Anfangsbedingungen ab.

6.4 Teilchensysteme

Wir führen jetzt die Mechanik der Teilchensysteme ein. Bisher haben wir nur die Mechanik eines Massenpunktes betrachtet. Wir gehen jetzt dazu über, Systeme von Massenpunkten zu beschreiben. Ein Teilchensystem behandeln wir als Kontinuum, wenn es aus einer so großen Anzahl von Massenpunkten besteht, daß eine Beschreibung der individuellen Massenpunkte praktisch nicht durchführbar ist. Im Gegensatz dazu heißt ein Teilchensystem diskret, wenn es aus einer überschaubaren Anzahl von Massenpunkten besteht.

Eine Idealisierung eines Körpers, beschrieben als Kontinuum, ist der starre Körper. Der Begriff des starren Körpers beinhaltet, daß die Abstände zwischen den einzelnen Punkten des Körpers fest sind, so daß diese Punkte keine Bewegung gegeneinander ausführen können.

Betrachtet man die Bewegung der Punkte eines Körpers gegeneinander, so spricht man von einem deformierbaren Medium.

Die Anzahl der Freiheitsgrade f eines Systems gibt die Zahl der Koordinaten an, die notwendig sind, um die Bewegung der Teilchen des Systems zu beschreiben. Ein im Raum frei beweglicher Massenpunkt hat die drei Freiheitsgrade der Translation (x, y, z). Sind n Massenpunkte im Raum frei beweglich, so hat dieses System $3n$ Freiheitsgrade (x_i, y_i, z_i); $i = 1, \ldots, n$. Wir diskutieren nun die Freiheitsgrade des starren Körpers. Gesucht ist die Anzahl der Freiheitsgrade eines starren Körpers, der sich frei bewegen kann. Um einen starren Körper im Raum beschreiben zu können, muß man von ihm drei nicht kolineare Punkte kennen. Man erhält so neun Koordinaten $\vec{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)$, $\vec{r}_3 = (x_3, y_3, z_3)$, die jedoch voneinander abhängig sind. Da es sich nach Voraussetzung um einen starren Körper handelt, sind die Abstände je zweier Punkte konstant. Man erhält

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 = D_1^2 \quad = \quad \text{const} \quad , \tag{6.136}$$

$$(x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2 + (z_1 - z_3)^2 = D_2^2 \quad = \quad \text{const} \quad , \tag{6.137}$$

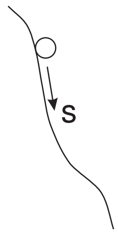
$$(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2 + (z_2 - z_3)^2 = D_3^2 \quad = \quad \text{const} \quad . \tag{6.138}$$

Mit diesen Gleichungen lassen sich drei Koordinaten eliminieren, so daß sechs Freiheitsgrade verbleiben. Es handelt sich hierbei um die drei Freiheitsgrade der Translation und die drei Freiheitsgrade der Rotation. Die Bewegung eines starren Körpers kann man stets als Translation eines willkürlichen seiner Punkte relativ zu einem Inertialsystem und als Rotation des Körpers um diesen Punkt auffassen.

Bewegt sich ein Teilchen auf einer vorgegebenen Raumkurve, so ist die Anzahl der Freiheitsgrade $f = 1$. Die Kurve kann in der Parameterform

$$x = x(s) \quad , \quad y = y(s) \quad , \quad z = z(s) \tag{6.139}$$

geschrieben werden, d.h. durch die Angabe des Parameterwertes ist bei gegebener Kurve die Lage des Teilchens völlig bestimmt.

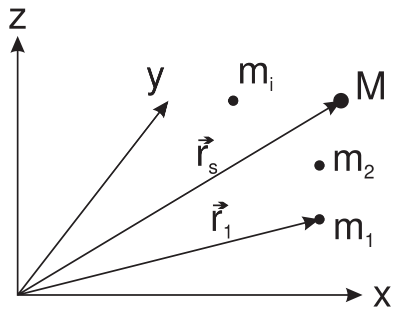


Beispiel: Wassertropfen gleitet am Grashalm ab.

Ein deformierbares Medium oder eine Flüssigkeit hat eine unendliche Anzahl von Freiheitsgraden.

6.5 Der Schwerpunkt

Ein System bestehe aus n Teilchen mit den Ortsvektoren $\vec{r}_\nu$ und den Massen m_ν für $\nu = (1, \ldots, n)$.



Der Schwerpunkt dieses Systems ist definiert als der Punkt S mit dem Ortsvektor $\vec{r}_S$

$$\vec{r}_S = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \ldots + m_n\vec{r}_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n} = \frac{\sum\limits_{\nu=1}^{n} m_\nu \vec{r}_\nu}{\sum\limits_{\nu=1}^{n} m_\nu} = \frac{1}{M}\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu \vec{r}_\nu \quad , \tag{6.140}$$

wobei

$$M = \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu \tag{6.141}$$

die Gesamtmasse des Systems ist und

$$M\vec{r}_S = \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu \vec{r}_\nu \tag{6.142}$$

das Massenmoment bezeichnet.

Für Systeme mit gleichmäßiger Massenverteilung über ein Volumen V mit der Volumendichte ϱ geht die Summe $\sum\limits_i m_i\vec{r}_i$ in ein Integral über, und man erhält

$$\vec{r}_S = \frac{\int\limits_V \vec{r}\varrho(\vec{r}\,)\, dV}{\int\limits_V \varrho\, dV} \quad . \tag{6.143}$$

Die einzelnen Komponenten ergeben sich zu

$$x_S = \frac{\sum m_\nu x_\nu}{M} \quad , \quad y_S = \frac{\sum m_\nu y_\nu}{M} \quad , \quad z_S = \frac{\sum m_\nu z_\nu}{M} \tag{6.144}$$

und bei kontinuierlicher Massenverteilung als

$$x_S = \frac{\int\limits_V \varrho x \, dV}{M} \quad , \quad y_S = \frac{\int\limits_V \varrho y \, dV}{M} \quad , \quad z_S = \frac{\int\limits_V \varrho z \, dV}{M} \quad . \tag{6.145}$$

Die Gesamtmasse ist gegeben durch

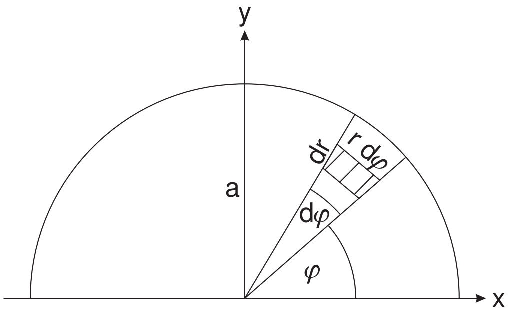
$$M = \sum m_\nu \quad \text{bzw.} \quad M = \int\limits_V \varrho \, dV \quad . \tag{6.146}$$

Für Schwerpunkte gilt die Clustereigenschaft, d.h. für zusammengesetzte Systeme können wir die Schwerpunkte und Massen der Teilsysteme bestimmen und daraus den Schwerpunkt des gesamten Systems berechnen.
Der lineare Impuls eines Teilchensystems ist die Summe der Impulse der einzelnen Teilchen

$$\vec{P} = \sum_{\nu=1}^{n} \vec{p}_\nu = \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu \dot{\vec{r}}_\nu \quad . \tag{6.147}$$

Führen wir den Schwerpunkt ein mit $M\vec{r}_S = \sum\limits_{\nu=1}^{n} m_\nu \vec{r}_\nu$, so zeigt sich, daß $\vec{P} = M\dot{\vec{r}}_S$ ist, d.h. der Gesamtimpuls eines Teilchensystems ist gleich dem Produkt aus der im Schwerpunkt vereinigten Gesamtmasse M mit ihrer Geschwindigkeit $\dot{\vec{r}}_S$. Dies bedeutet, daß wir die Translation eines Körpers durch die Bewegung des Schwerpunktes beschreiben können.

Als konkretes Anwendungsbeispiel wollen wir den Schwerpunkt eines Halbkreises vom Radius a berechnen.



Die Flächendichte σ sei konstant. x_S und y_S seien die Koordinaten des Schwerpunktes. Aus Symmetriegründen ist $x_S = 0$. Wir benutzen zur Berechnung des Schwerpunktes Polarkoordinaten. Für den Halbkreis gilt

$$r \leq a \quad , \quad 0 \leq \varphi \leq \pi \quad . \tag{6.148}$$

Für y_S folgt

$$
\begin{aligned}
y_S &= \frac{\int\limits_F \sigma y \, dF}{\int\limits_F \sigma \, dF} = \frac{\int\limits_{\varphi=0}^{\pi} \int\limits_{r=0}^{a} \overbrace{(r \sin\varphi)}^{y} r \, dr \, d\varphi}{F} \\
&= \frac{\int\limits_0^{\pi} \frac{1}{3} a^3 \sin\varphi \, d\varphi}{\pi a^2/2} = \frac{\frac{2}{3} a^3}{\frac{1}{2}\pi a^2} = \frac{4a}{3\pi} \quad .
\end{aligned}
\tag{6.149}
$$

Der Schwerpunkt hat damit die Koordinaten $\vec{r}_S = \left(0, \frac{4}{3}\frac{a}{\pi}\right)$.

6.6 Mechanische Grundgrößen von Massenpunktsystemen

Wir studieren nun mechanische Grundgrößen von Massenpunktsystemen. Betrachten wir ein System von Massenpunkten, so gilt für die Gesamtkraft auf das ν-te Teilchen

$$\vec{F}_\nu + \sum_\lambda \vec{f}_{\nu\lambda} = \dot{\vec{p}}_\nu \quad . \tag{6.150}$$

Die Kraft $\vec{f}_{\nu\lambda}$ ist die Kraft des Teilchens λ auf das Teilchen ν; $\vec{F}_\nu$ ist die von außerhalb des Systems auf das Teilchen ν wirkende Kraft. $\sum\limits_\lambda \vec{f}_{\nu\lambda}$ ist die resultierende innere Kraft aller anderen Teilchen auf das Teilchen ν. Die resultierende Kraft auf das System erhält man durch Summation der Einzelkräfte

$$\sum_\nu \dot{\vec{p}}_\nu = \sum_\nu \vec{F}_\nu + \sum_\nu \sum_\lambda \vec{f}_{\nu\lambda} = \dot{\vec{P}} \tag{6.151}$$

Nach dem dritten Newtonschen Axiom gilt

$$\vec{f}_{\nu\lambda} + \vec{f}_{\lambda\nu} = 0 \quad . \tag{6.152}$$

dadurch heben sich die Summanden in der obigen Doppelsumme paarweise heraus. Man erhält somit für die Gesamtkraft, die auf das System wirkt

$$\dot{\vec{P}} = \vec{F} = \sum_\nu \vec{F}_\nu \tag{6.153}$$

Wirkt keine äußere Kraft auf das System, so ist

$$\vec{F} = \dot{\vec{P}} = 0 \tag{6.154}$$

d. h. $\vec{P} = \text{const.}$
Der Gesamtimpuls $\vec{P} = \sum\limits_\nu \vec{p}_\nu$ des Teilchensystems bleibts also erhalten, wenn die Summe der äußeren Kräfte, die auf das System einwirken, verschwindet.

Beim Drehimpuls liegen ähnliche Verhältnisse vor, wenn man für die inneren Kräfte Zentralkräfte voraussetzt. Der Drehimpuls des Systems ist dann die Summe aller Einzeldrehimpulse

$$\vec{L} = \sum_\nu \vec{l}_\nu \quad . \tag{6.155}$$

Ebenso gilt für das Gesamtdrehmoment

$$\vec{D} = \sum_\nu \vec{d}_\nu \quad . \tag{6.156}$$

Die inneren Kräfte üben kein Drehmoment aus, da wir für sie Zentralkräfte vorausgesetzt haben. Für die Kraft auf das ν-te Teilchen gilt

$$\vec{F}_\nu + \sum_\lambda \vec{f}_{\nu\lambda} = \frac{d}{dt}\vec{p}_\nu \quad . \tag{6.157}$$

Damit folgt

$$\vec{r}_\nu \times \vec{F}_\nu + \sum_\lambda \vec{r}_\nu \times \vec{f}_{\nu\lambda} = \vec{r}_\nu \times \frac{d}{dt}\vec{p}_\nu = \frac{d}{dt}\left(\vec{r}_\nu \times \vec{p}_\nu\right) = \dot{\vec{l}}_\nu \tag{6.158}$$

Summation über ν ergibt

$$\sum_\nu \vec{r}_\nu \times \vec{F}_\nu + \underbrace{\sum_\lambda \sum_\nu \vec{r}_\nu \times \vec{f}_{\nu\lambda}}_{=0} = \dot{\vec{L}} \tag{6.159}$$

oder

$$\vec{D} = \dot{\vec{L}} = \sum_\nu \dot{\vec{l}}_\nu \quad . \tag{6.160}$$

Ähnliche evidente Verallgemeinerungen gelten für Übergänge von Einteilchensystemen auf Vielteilchensysteme bezüglich kinetischer und potentieller Energie.
Bei der Untersuchung der Bewegung von Teilchensystemen sieht man oft von der gemeinsamen Translation des Systems im Raume ab, da nur die Bewegungen der Teilchen relativ zum Schwerpunkt des Systems von Interesse sind. Man transformiert daher die teilchenbeschreibenden Größen in ein System, dessen Ursprung der Schwerpunkt ist.
Mit Großbuchstaben werden Ort $\vec{R}$, Geschwindigkeit $\vec{V}$ und Masse M des Schwerpunktes angegeben. Es gilt

$$\vec{r}_\nu = \vec{R} + \vec{r'}_\nu \quad , \tag{6.161}$$

$$\dot{\vec{r}}_\nu = \vec{V} + \vec{v'}_\nu = \dot{\vec{R}} + \dot{\vec{r'}}_\nu \quad . \tag{6.162}$$

Nach der Definition des Schwerpunktes ist

$$M\vec{R} = \sum_\nu m_\nu \vec{r}_\nu = \sum_\nu m_\nu \left(\vec{R} + \vec{r'}_\nu\right) \quad , \tag{6.163}$$

$$M\vec{R} = M\vec{R} + \sum_\nu m_\nu \vec{r'}_\nu \quad , \tag{6.164}$$

wobei M die gesamte Masse des Systems ist. Aus der letzten Gleichung folgt

$$\sum_\nu m_\nu \vec{r'}_\nu = 0 \quad . \tag{6.165}$$

Die Summe der Massenmomente bezüglich des Schwerpunktes verschwindet demnach. Wirkt eine konstante äußere Kraft wie z.B. die Schwerkraft

$$\vec{F}_\nu = m\vec{g} \quad , \tag{6.166}$$

dann folgt auch

$$\vec{D} = \sum_\nu \vec{r'}_\nu \times \vec{F}_\nu = \left(\sum_\nu m_\nu \vec{r'}_\nu\right) \times \vec{g} = 0 \quad . \tag{6.167}$$

Ein Körper im Erdfeld ist demnach im Gleichgewicht, wenn er im Schwerpunkt unterstützt wird. Differenzieren von (6.165) nach der Zeit führt auf

$$\sum_\nu m_\nu \vec{v'}_\nu = 0 \quad , \tag{6.168}$$

d. h. im Schwerpunktsystem verschwindet die Summe der Impulse. Eine äquivalente Transformation des Drehimpulses ergibt

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \sum_\nu m_\nu \left(\vec{r}_\nu \times \vec{v}_\nu\right) = \sum_\nu m_\nu \left(\vec{R} + \vec{r'}_\nu\right) \times \left(\vec{V} + \vec{v'}_\nu\right) \\ &= \sum_\nu m_\nu \left(\vec{R} \times \vec{V}\right) + \sum_\nu m_\nu \vec{R} \times \vec{v'}_\nu + \sum_\nu m_\nu \vec{r'}_\nu \times \vec{V} + \sum_\nu m_\nu \vec{r'}_\nu \times \vec{v'}_\nu \end{aligned} \tag{6.169}$$

Durch geschicktes Klammern erhält man

$$\begin{aligned} \vec{L} &= M\left(\vec{R} \times \vec{V}\right) + \vec{R} \times \underbrace{\left(\sum_\nu m_\nu \vec{v'}_\nu\right)}_{=0} + \\ &\quad \underbrace{\left(\sum_\nu m_\nu \vec{r'}_\nu\right)}_{=0} \times \vec{V} + \sum_\nu m_\nu \left(\vec{r'}_\nu \times \vec{v'}_\nu\right) \end{aligned} \tag{6.170}$$

und damit

$$\vec{L} = M\left(\vec{R} \times \vec{V}\right) + \sum_\nu m_\nu \left(\vec{r'}_\nu \times \vec{v'}_\nu\right) = \vec{L}_S + \sum_\nu \vec{l'}_\nu \quad . \tag{6.171}$$

Der Drehimpuls $\vec{L}$ ist demnach zerlegbar in den Drehimpuls des Schwerpunktes $\vec{L}$ mit der Schwerpunktmasse M und in die Summe der Drehimpulse der einzelnen Teilchen um den Schwerpunkt. Für das Drehmoment gilt als Ableitung des Drehimpulses das gleiche

$$\vec{D} = \vec{D}_S + \sum_\nu \vec{d'}_\nu \quad . \tag{6.172}$$

Wir studieren nun die Transformation der kinetischen Energie. Es ist

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}\sum_\nu m_\nu \vec{v}_\nu^2 = \\ &\frac{1}{2}\sum_\nu m_\nu \vec{V}^2 + \vec{V}\cdot\underbrace{\sum_\nu m_\nu \vec{v'}_\nu}_{=0} + \frac{1}{2}\sum_\nu m_\nu \vec{v'}_\nu^2 \quad . \end{aligned} \tag{6.173}$$

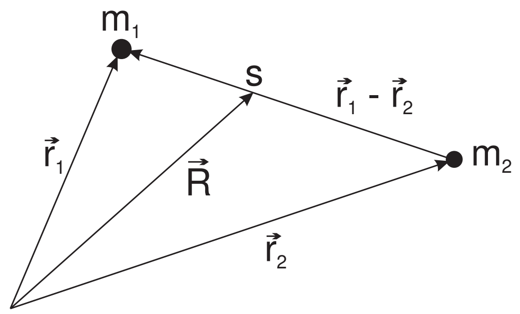
Damit ist

$$T = \frac{1}{2}M\vec{V}^2 + \frac{1}{2}\sum_\nu m_\nu \vec{v'}_\nu^2 = T_S + T' \quad . \tag{6.174}$$

Die totale kinetische Energie T setzt sich also zusammen aus der kinetischen Energie eines gedachten Teilchens der Masse M mit dem Ortsvektor $\vec{R}(t)$ und der kinetischen Energie der einzelnen Teilchen relativ zum Schwerpunkt.

6.7 Reduzierte Masse

Als konkretes Anwendungsbeispiel werden wir nun zeigen, daß die kinetische Energie zweier Teilchen mit dem Massen m_1, m_2 in die Energie des Schwerpunktes und die kinetische Energie der Relativbewegung aufspaltet.



Schwerpunkts- und Relativkoordinaten zweier Massen

Die gesamte kinetische Energie ist

$$T = \frac{1}{2}m_1\vec{v}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\vec{v}_2^2 \quad . \tag{6.175}$$

Der Schwerpunkt ist definiert durch

$$\vec{R} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2} \quad , \tag{6.176}$$

die Schwerpunktsgeschwindigkeit ist

$$\dot{\vec{R}} = \frac{1}{m_1 + m_2}\left(m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2\right) \quad . \tag{6.177}$$

Die Geschwindigkeit der Relativbewegung sei $\vec{v}$, es ist

$$\vec{v} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2 \quad . \tag{6.178}$$

Wir setzen $\vec{v}_2$ aus (6.178) in (6.177) ein und bekommen

$$(m_1 + m_2)\,\dot{\vec{R}} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_1 - m_2\vec{v} \quad . \tag{6.179}$$

Daraus folgt

$$\vec{v}_1 = \dot{\vec{R}} + \frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{v} \quad . \tag{6.180}$$

Analog folgt

$$\vec{v}_2 = \dot{\vec{R}} - \frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{v} \quad . \tag{6.181}$$

Für die Differenz erhalten wir wieder

$$\vec{v}_1 - \vec{v}_2 = \frac{m_2 + m_1}{m_1 + m_2}\vec{v} = \vec{v} \quad . \tag{6.182}$$

Setzen wir die beiden Teilchengeschwindigkeiten in den Ausdruck für die kinetische Energie ein, so resultiert

$$T = \frac{1}{2}m_1\left(\dot{\vec{R}} + \frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{v}\right)^2 + \frac{1}{2}m_2\left(\dot{\vec{R}} - \frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{v}\right)^2 \tag{6.183}$$

oder

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}\,M\dot{\vec{R}}^2 + \frac{1}{2}\,\frac{m_1 m_2^2}{(m_1 + m_2)^2}\,\vec{v}^2 + \frac{1}{2}\,\frac{m_2 m_1^2}{(m_1 + m_2)^2}\,\vec{v}^2 \\ &= \frac{1}{2}M\dot{\vec{R}}^2 + \frac{1}{2}\mu v^2 \quad . \end{aligned} \tag{6.184}$$

Die gemischten Terme heben sich heraus. Wir haben die reduzierte Masse eingeführt

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad . \tag{6.185}$$

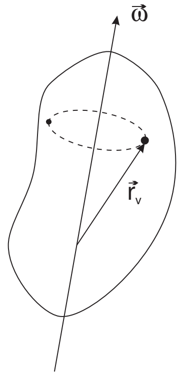
Die reduzierte Masse wird oft auch in der Form

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \tag{6.186}$$

geschrieben.

6.8 Das Trägheitsmoment

Wir betrachten die Rotation eines ausgedehnten Körpers um die z-Achse



Für die Geschwindigkeit des Teilchens mit der Masse m_ν gilt

$$\vec{v}_\nu = \left.\frac{d\vec{r}_\nu}{dt}\right|_L = \left.\frac{d\vec{r}_\nu}{dt}\right|_B + \vec{\omega} \times \vec{r}_\nu \quad . \tag{6.187}$$

Jetzt ist aber bei dem starren Körper im rotierenden System

$$\left.\frac{d\vec{r}_\nu}{dt}\right|_B = 0 \quad . \tag{6.188}$$

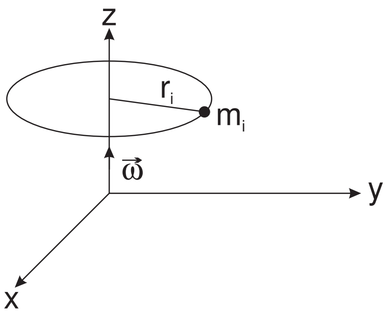
Somit haben wir

$$\vec{v}_\nu = \vec{\omega} \times \vec{r}_\nu \quad . \tag{6.189}$$

Wir führen den Begriff des Trägheitsmomentes ein. Ein starrer Körper, d.h. die Abstände zwischen den einzelnen Massenpunkten sind fest, dreht sich um eine räumlich fixierte Rotationsachse z. Wir führen zunächst die Winkelgeschwindigkeit ω ein durch

$$\omega = \dot{\Theta} = \frac{v_i}{r_i} \quad . \tag{6.190}$$

Es ist dim $\omega = \frac{1}{\mathrm{s}}$.



Ersetzen wir in der kinetischen Energie die Geschwindigkeit durch die Winkelgeschwindigkeit

$$v_i = \omega r_i \tag{6.191}$$

so ergibt sich

$$T = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2}\omega^2 \sum_i m_i r_i^2 = \frac{1}{2}\Theta\omega^2 \quad . \tag{6.192}$$

Analog folgt für den Drehimpuls in z-Richtung

$$L_z = \sum_i m_i r_i v_i = \omega \sum_i m_i r_i^2 = \Theta\omega \quad . \tag{6.193}$$

Hierbei ist r_i der Abstand des i-ten Massenelementes von der z-Achse. Die in beiden Beziehungen auftretende Summe bezeichnet man als das Trägheitsmoment bezüglich der Rotationsachse. Es ist

$$\Theta = \sum_i m_i r_i^2 \quad . \tag{6.194}$$

Zur Berechnung der Trägheitsmomente ausgedehnter kontinuierlicher Systeme gehen wir von der Summe zum Integral über, d. h.

$$\Theta = \int\limits_{\text{Körper}} r^2 \, dm = \int\limits_{\text{Körper}} r^2 \varrho \, dV \quad , \tag{6.195}$$

wenn ϱ die Massendichte angibt.
Bei einem räumlich ausgedehnten, nicht axialsymmetrischen starren Körper, der um die z-Achse rotiert, können auch Komponenten des Drehimpulses senkrecht zur z-Achse auftreten

$$\vec{L} = \sum_\nu m_\nu \vec{r}_\nu \times \vec{v}_\nu = \sum_\nu m_\nu \vec{r}_\nu \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_\nu) \quad . \tag{6.196}$$

Es ist

$$\vec{\omega} = \omega \vec{e}_z \quad , \tag{6.197}$$

daher folgt

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \sum_\nu m_\nu \omega \left(x_\nu, y_\nu, z_\nu\right) \times \left(-y_\nu, x_\nu, 0\right) \\ &= \omega \sum_\nu \left(-x_\nu z_\nu, -y_\nu z_\nu, x_\nu^2 + y_\nu^2\right) m_\nu \quad . \end{aligned} \tag{6.198}$$

Da der Körper so gelagert ist, daß die Drehachse konstant festgehalten wird, treten in den Lagern Drehmomente (Lagermomente) $\vec{D} = \dot{\vec{L}}$ auf. Sie können durch „Auswuchten“ zum Verschwinden gebracht werden. Beim Auswuchten werden zusätzliche Massen so angebracht, daß die Deviationsmomente

$$-\sum_\nu x_\nu z_\nu m_\nu \quad \text{bzw.} \quad -\sum_\nu y_\nu z_\nu m_\nu$$

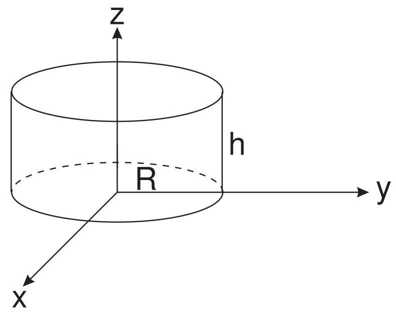
verschwinden.

Als Übungsbeispiel bestimmen wir das Trägheitsmoment eines homogenen Kreiszylinders der Dichte ϱ um seine Symmetrieachse. Dem Problem angepaßt, verwenden wir Zylinderkoordinaten. Das Volumenelement ist dann

$$dV = r dr d\varphi dz \tag{6.199}$$

und

$$dm = \varrho\, dV \quad . \tag{6.200}$$



Das Trägheitsmoment um die z-Achse lautet dann

$$\Theta = \int\limits_{\text{Zylinder}} r^2 dm = \varrho \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{h} dz \int\limits_0^{R} r^3 dr \quad . \tag{6.201}$$

Die Integration über Winkel- und z-Koordinate ergibt

$$\Theta = 2\pi h \varrho \int\limits_0^{R} r^3 dr \quad . \tag{6.202}$$

Die Integration über den Radius führt zu

$$\Theta = \frac{\pi}{2} h \varrho R^4 = \varrho \pi R^2 h \frac{R^2}{2} = \varrho V \frac{R^2}{2} = \frac{1}{2} M R^2 \quad . \tag{6.203}$$

6.9 Satz von Steiner

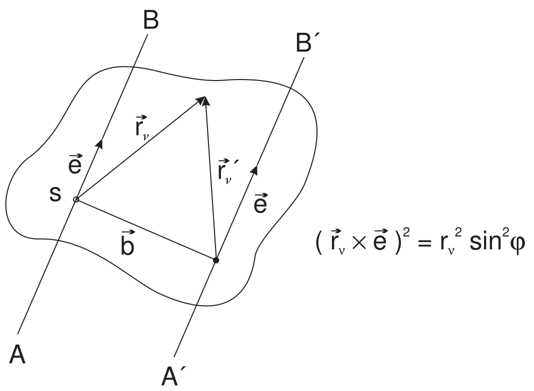
Wir behandeln jetzt den Satz von Steiner: Ist das Trägheitsmoment Θ_S durch den Schwerpunkt S eines starren Körpers bekannt, dann erhält man das Trägheitsmoment für eine beliebige parallele Achse mit dem Abstand b vom Schwerpunkt durch die Beziehung

$$\Theta = \Theta_S + M b^2 \tag{6.204}$$

Ist AB die Achse durch den Schwerpunkt und $A'B'$ die dazu parallele Achse mit dem Einheitsvektor $\vec{e}$ entlang der Achse, so läßt sich dies folgendermaßen zeigen

$$\Theta_{AB} = \sum_\nu m_\nu \left(\vec{r}_\nu \times \vec{e}\,\right)^2 \quad , \tag{6.205}$$

$$\Theta_{A'B'} = \sum_\nu m_\nu \left(\vec{r'}_\nu \times \vec{e}\,\right)^2 \quad . \tag{6.206}$$



Der Zusammenhang zwischen $\vec{r}_\nu$ und $\vec{r'}_\nu$ ist durch die Skizze gegeben. Offensichtlich ist

$$\vec{r'}_\nu = -\vec{b} + \vec{r}_\nu \tag{6.207}$$

und daher

$$\begin{aligned}
\Theta_{A'B'} &= \sum_\nu m_\nu \left(\left(-\vec{b} + \vec{r}_\nu\right) \times \vec{e}\right)^2 \\
&= \sum_\nu m_\nu \left[\left(-\vec{b} \times \vec{e}\right) + \left(\vec{r}_\nu \times \vec{e}\,\right)\right]^2 \\
&= \sum_\nu m_\nu \left(-\vec{b} \times \vec{e}\right)^2 + 2\sum_\nu m_\nu \left(-\vec{b} \times \vec{e}\right) \cdot \left(\vec{r}_\nu \times \vec{e}\,\right) + \sum_\nu m_\nu \left(\vec{r}_\nu \times \vec{e}\,\right)^2 \\
&= Mb^2 + \Theta_{AB} \quad .
\end{aligned} \tag{6.208}$$

Der mittlere Term verschwindet, weil

$$\sum_\nu m_\nu \vec{r}_\nu = 0 \quad . \tag{6.209}$$

Sind bei einer <u>ebenen</u> Massenverteilung die Trägheitsmomente Θ_{xx}, Θ_{yy} in der xy-Ebene bekannt, so gilt für das Trägheitsmoment Θ_{zz} bezüglich der z-Achse

$$\Theta_{zz} = \Theta_{xx} + \Theta_{yy} \quad . \tag{6.210}$$

Ist nämlich

$$|\vec{r}_\nu| = \sqrt{x_\nu^2 + y_\nu^2} \tag{6.211}$$

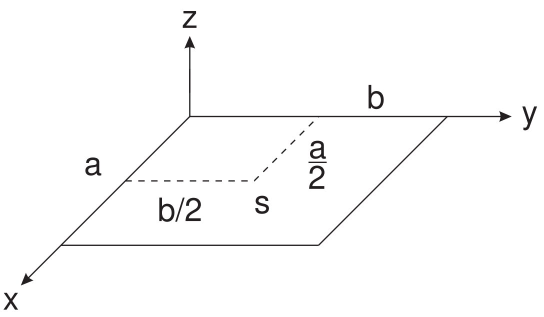
der Abstand des Massenelementes von der z-Achse, so gilt

$$\Theta_{zz} = \sum_\nu m_\nu r_\nu^2 = \sum_\nu m_\nu x_\nu^2 + \sum_\nu m_\nu y_\nu^2 \quad , \tag{6.212}$$

d. h.

$$\Theta_{zz} = \Theta_{xx} + \Theta_{yy} \quad . \tag{6.213}$$

Als Anwendungsbeispiel betrachten wir das Trägheitsmoment einer dünnen rechteckigen Scheibe der Dichte ϱ.



Für die Berechnung des Trägheitsmomentes um die x-Achse nehmen wir als Massenelement

$$dm = \varrho a \, dy \quad . \tag{6.214}$$

Es ergibt sich

$$\Theta_{xx} = \int_0^b y^2 a \varrho \, dy = a\varrho \frac{b^3}{3} = \frac{1}{3} M b^2 \quad . \tag{6.215}$$

Das Moment um die y-Achse folgt analog

$$\Theta_{yy} = \frac{1}{3} M a^2 \quad . \tag{6.216}$$

Aus $\Theta_{zz} = \Theta_{xx} + \Theta_{yy}$ erhalten wir dann

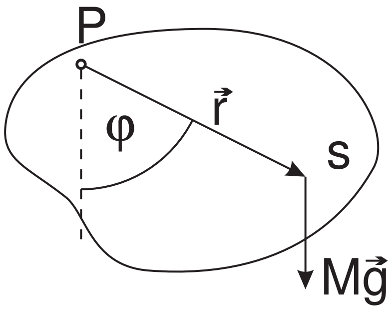
$$\Theta_{zz} = \frac{1}{3} M \left(a^2 + b^2\right) \quad . \tag{6.217}$$

Das Trägheitsmoment um eine senkrechte Achse durch den Schwerpunkt bekommen wir nach dem Satz von Steiner aus dem Trägheitsmoment um die z-Achse

$$\begin{aligned}
\Theta_{zz} &= \Theta_S + M \left(\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2} \right)^2 = \Theta_S + M \frac{a^2 + b^2}{4} \quad , && (6.218) \\
\to \quad \Theta_S &= \Theta_{zz} - \frac{M}{4} \left(a^2 + b^2\right) = M \left(a^2 + b^2\right) \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) \quad , \\
\Theta_S &= \frac{1}{12} M \left(a^2 + b^2\right) \quad . && (6.219)
\end{aligned}$$

6.10 Das physikalische Pendel

Als weiteres Anwendungsbeispiel wollen wir das physikalische Pendel studieren. Ein beliebiger starrer Körper mit dem Schwerpunkt S ist an einer Achse durch den Punkt P drehbar aufgehängt. Der Abstandsvektor $\overline{PS}$ ist $\vec{r}$. Weiterhin sei Θ_0 das Trägheitsmoment des Körpers um eine horizontale Achse durch P, M die Gesamtmasse.



Wird der Körper nun im Gravitationsfeld aus seiner Ruhelage ausgelenkt, so führt er Pendelbewegungen aus. Bei einer Auslenkung wirkt das Drehmoment

$$\vec{D} = \sum_{\nu} \vec{r}_\nu \times m_\nu \vec{g} = \sum_{\nu} m_\nu \vec{r}_\nu \times \vec{g} = M \vec{r} \times \vec{g} = -aMg \sin\varphi \, \vec{k} \quad , \tag{6.220}$$

wobei $\vec{k}$ ein Einheitsvektor ist, der aus der Ebene herauszeigt, $|\vec{r}\,| = a$.
Die Winkelgeschwindigkeit ist dann

$$\vec{\omega} = \vec{k}\,\frac{d\varphi}{dt} \quad . \tag{6.221}$$

Aus der Beziehung

$$\vec{D} = \dot{\vec{L}} = \Theta_0 \dot{\vec{\omega}} \tag{6.222}$$

erhalten wir damit

$$-aMg\,\sin\varphi = \Theta_0\,\frac{d^2\varphi}{dt^2} \tag{6.223}$$

oder

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{aMg}{\Theta_0}\sin\varphi = 0 \quad . \tag{6.224}$$

Für kleine Auslenkungen approximieren wir

$$\sin\varphi \approx \varphi \quad . \tag{6.225}$$

Wir führen die Abkürzung

$$\Omega = \sqrt{\frac{aMg}{\Theta_0}} \tag{6.226}$$

ein. Es folgt die Differentialgleichung

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \Omega^2\varphi = 0 \tag{6.227}$$

mit der Lösung

$$\varphi = A\sin\left(\Omega t + \phi\right) \quad . \tag{6.228}$$

So erhält man auch die Schwingungsdauer des physikalischen Pendels

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} = 2\pi\sqrt{\frac{\Theta_0}{Mag}} \quad . \tag{6.229}$$

Da das mathematische Pendel die Schwingungsdauer

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \tag{6.230}$$

hat, folgt, daß die beiden Schwingungsdauern gleich sind, wenn das Fadenpendel die Länge

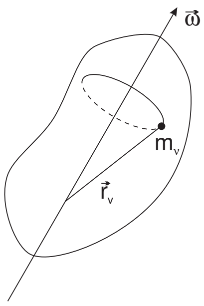
$$l = \frac{\Theta_0}{Ma} \tag{6.231}$$

aufweist.

6.11 Rotation eines starren Körpers

Schließlich betrachten wir die Rotation eines starren Körpers um einen Punkt. Das Theorem von Chasles sagt aus, daß die allgemeine Bewegung eines starren Körpers beschrieben werden kann als eine Translation und eine Rotation um einen Punkt des Körpers. Wird der Ursprung des körperfesten Koordinatensystems in den Schwerpunkt des Körpers gelegt, so läßt sich in allen praktischen Fällen eine Trennung der Schwerpunktsbewegung und der Rotationsbewegung erreichen.

Wir führen jetzt als Erweiterung des Trägheitsmomentes den Trägheitstensor ein. Wir betrachten zuerst den Drehimpuls eines starren Körpers, der mit der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ um den Fixpunkt 0 rotiert.



Wir berechnen den Drehimpulsvektor

$$\vec{L} = \sum_\nu m_\nu \left(\vec{r}_\nu \times \vec{v}_\nu\right) = \sum_\nu m_\nu \left(\vec{r}_\nu \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}_\nu\right)\right) \quad . \tag{6.232}$$

Wir verwenden zur Auswertung des doppelten Kreuzproduktes den Entwicklungssatz

$$\vec{A} \times \left(\vec{B} \times \vec{C}\right) = \left(\vec{A} \cdot \vec{C}\right) \vec{B} - \left(\vec{A} \cdot \vec{B}\right) \vec{C} \quad . \tag{6.233}$$

Dies führt auf

$$\vec{L} = \sum_\nu m_\nu \left(\vec{\omega}\, r_\nu^2 - \vec{r}_\nu \left(\vec{r}_\nu \cdot \vec{\omega}\right)\right) \quad . \tag{6.234}$$

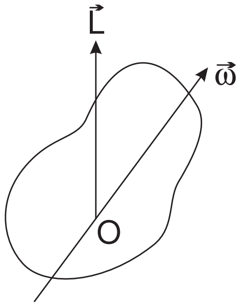
Jetzt zerlegen wir $\vec{r}_\nu$ und $\vec{\omega}$ in Komponenten und setzen ein

$$\vec{L} = \sum_\nu m_\nu \left[\left(x_\nu^2 + y_\nu^2 + z_\nu^2\right)(\omega_x, \omega_y, \omega_z) - (x_\nu\omega_x + y_\nu\omega_y + z_\nu\omega_z)(x_\nu, y_\nu, z_\nu)\right] \quad . \tag{6.235}$$

Wir ordnen die Komponenten und schreiben explizit aus

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \sum_\nu m_\nu \left[\left(\left(x_\nu^2 + y_\nu^2 + z_\nu^2\right)\omega_x - x_\nu^2\omega_x - x_\nu y_\nu \omega_y - x_\nu z_\nu \omega_z\right)\vec{e}_x \right. \\ &\quad + \left(\left(x_\nu^2 + y_\nu^2 + z_\nu^2\right)\omega_y - y_\nu^2\omega_y - x_\nu y_\nu \omega_x - z_\nu y_\nu \omega_z\right)\vec{e}_y \\ &\quad \left. + \left(\left(x_\nu^2 + y_\nu^2 + z_\nu^2\right)\omega_z - z_\nu^2\omega_z - x_\nu z_\nu \omega_x - y_\nu z_\nu \omega_y\right)\vec{e}_z\right] \end{aligned} \tag{6.236}$$

Wir lernen, daß im allgemeinen der Drehimpuls $\vec{L}$ und die Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ nicht parallel sind.



Der Drehimpuls $\vec{L}$ ist im allgemeinen nicht parallel zur Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$.
Die Komponenten des Drehimpulses ergeben sich damit zu

$$L_x = \left(\sum_\nu m_\nu \left(y_\nu^2 + z_\nu^2\right)\right)\omega_x + \left(-\sum_\nu m_\nu x_\nu y_\nu\right)\omega_y + \left(-\sum_\nu m_\nu x_\nu z_\nu\right)\omega_z \quad , \tag{6.237}$$

$$L_y = \left(-\sum_\nu m_\nu x_\nu y_\nu\right)\omega_x + \left(\sum_\nu m_\nu \left(x_\nu^2 + z_\nu^2\right)\right)\omega_y + \left(-\sum_\nu m_\nu y_\nu z_\nu\right)\omega_z \quad , \tag{6.238}$$

$$L_z = \left(-\sum_\nu m_\nu x_\nu z_\nu\right)\omega_x + \left(-\sum_\nu m_\nu y_\nu z_\nu\right)\omega_y + \left(\sum_\nu m_\nu \left(x_\nu^2 + y_\nu^2\right)\right)\omega_z \quad . \tag{6.239}$$

Die einzelnen Koeffizienten sind Summen, für die wir Abkürzungen einführen.

$$L_x = \Theta_{xx}\omega_x + \Theta_{xy}\omega_y + \Theta_{xz}\omega_z \quad , \tag{6.240}$$

$$L_y = \Theta_{yx}\omega_x + \Theta_{yy}\omega_y + \Theta_{yz}\omega_z \quad , \tag{6.241}$$

$$L_z = \Theta_{zx}\omega_x + \Theta_{zy}\omega_y + \Theta_{zz}\omega_z \quad . \tag{6.242}$$

Zusammengefaßt schreiben wir

$$L_\mu = \sum_{\nu=1}^{3} \Theta_{\mu\nu}\omega_\nu \quad , \quad \mu = 1,2,3 \tag{6.243}$$

oder vektoriell

$$\vec{L} = \hat{\Theta} \cdot \vec{\omega} \quad . \tag{6.244}$$

Die Größe $\hat{\Theta}$ bezeichnet eine Matrix mit den Komponenten $\Theta_{\mu\nu}$. Die 3×3-Matrix $\hat{\Theta}$ bezeichnet man auch als Trägheitstensor.
Die Elemente in der Hauptdiagonalen des Trägheitstensors bezeichnet man als Trägheitsmomente, die übrigen Elemente als Deviationsmomente. Die Matrix des Trägheitstensors ist symmetrisch, d.h.

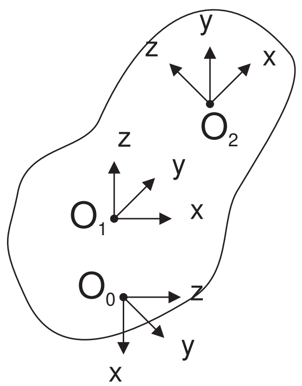
$$\Theta_{\nu\mu} = \Theta_{\mu\nu} \tag{6.245}$$

Der Trägheitstensor besitzt also 6 voneinander unabhängige Komponenten. Ist die Masse kontinuierlich verteilt, so geht man von der Summation bei der Berechnung der Matrixelemente zur Integration über. So gilt beispielsweise

$$\Theta_{xy} = -\int_V \varrho(\vec{r})\, xy\, dV \quad , \tag{6.246}$$

$$\Theta_{xx} = \int_V \varrho(\vec{r}) \left(y^2 + z^2\right) dV \quad . \tag{6.247}$$

Hierbei bezeichnet $\varrho(\vec{r})$ die ortsabhängige Dichte.



Mögliche Rotationspunkte und Koordinatensysteme des starren Körpers.

In jedem der möglichen Rotationspunkte O_o, O_1, O_2... ist der Trägheitstensor $\hat{\Theta}$ verschieden. In einem festen Punkt O hängt $\Theta_{\mu\nu}$ außerdem vom Koordinatensystem ab.
Wie wir der Definition ablesen können, sind die Koeffizienten $\Theta_{\mu\nu}$ Konstanten, wenn ein körperfestes Koordinatensystem gewählt wird. Der Trägheitstensor ist jedoch von der Lage des Koordinatensystems relativ zum Körper abhängig und wird sich bei der Verschiebung des Ursprungs oder einer Änderung der Orientierung der Achsen verändern. Gewöhnlich wählt man als Ursprung des Koordinatensystems den Schwerpunkt und bestimmt in diesem Koordinatensystem

den Trägheitstensor. Wir studieren nun die kinetische Energie eines rotierenden starren Körpers. Ganz allgemein ist die kinetische Energie eines Systems von Massenpunkten gegeben durch

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\nu} m_{\nu} v_{\nu}^{2} \quad . \tag{6.248}$$

Wir zerlegen die Bewegung eines starren Körpers in eine Translation eines Punktes und in die Rotation um diesen Punkt. Somit gilt

$$\vec{v}_{\nu} = \vec{V} + \vec{\omega} \times \vec{r}_{\nu} \quad . \tag{6.249}$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_{\nu} m_{\nu} \left(\vec{V} + \vec{\omega} \times \vec{r}_{\nu} \right)^{2} \\ &= \frac{1}{2} M V^{2} + \vec{V} \cdot \left(\vec{\omega} \times \sum_{\nu} m_{\nu} \vec{r}_{\nu} \right) + \frac{1}{2} \sum_{\nu} m_{\nu} \left(\vec{\omega} \times \vec{r}_{\nu} \right)^{2} \quad . \end{aligned} \tag{6.250}$$

Bei dem ersten Term handelt es sich um reine Translationsenergie, beim letzten Term um reine Rotationsenergie. Der gemischte Term kann auf zwei verschiedene Arten zum Verschwinden gebracht werden. Ist ein Punkt festgehalten und legen wir ihn in den Ursprung des körpereigenen Koordinatensystems, so ist $\vec{V} = 0$. Auf der anderen Seite können wir den Ursprung auch in den Schwerpunkt legen, wobei gilt

$$\sum_{\nu} m_{\nu} \vec{r}_{\nu} = 0 \quad . \tag{6.251}$$

Der Drehpunkt ist in diesem Fall der Schwerpunkt. Wir untersuchen jetzt die Rotationsenergie

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_{\nu} m_{\nu} \left(\vec{\omega} \times \vec{r}_{\nu} \right) \cdot \left(\vec{\omega} \times \vec{r}_{\nu} \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\nu} m_{\nu} \, \vec{\omega} \cdot \left(\vec{r}_{\nu} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}_{\nu} \right) \right) \quad . \end{aligned} \tag{6.252}$$

Die letzte Relation wollen wir verifizieren. Nach dem Entwicklungssatz (6.233) gilt für die zweite Zeile

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_{\nu} m_{\nu} \vec{\omega} \cdot \left[\vec{\omega} \vec{r}_{\nu}^{\ 2} - \vec{r}_{\nu} \left(\vec{r}_{\nu} \cdot \vec{\omega} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\nu} m_{\nu} \left[\vec{\omega}^{2} \vec{r}_{\nu}^{\ 2} - \left(\vec{r}_{\nu} \cdot \vec{\omega} \right)^{2} \right] \quad . \end{aligned} \tag{6.253}$$

Bezüglich der ersten Zeile verwenden wir die Lagrangesche Identität.

$$\left(\vec{A} \times \vec{B} \right) \cdot \left(\vec{C} \times \vec{D} \right) = \left(\vec{A} \cdot \vec{C} \right) \left(\vec{B} \cdot \vec{D} \right) - \left(\vec{B} \cdot \vec{C} \right) \left(\vec{A} \cdot \vec{D} \right) \quad . \tag{6.254}$$

Dies führt bezüglich der ersten Zeile von (6.252) auf

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\nu} m_{\nu} \left[\vec{\omega}^{2} \vec{r}_{\nu}^{\ 2} - \left(\vec{r}_{\nu} \cdot \vec{\omega} \right)^{2} \right] \quad . \tag{6.255}$$

Damit ist (6.252) nachgewiesen, und wir schreiben weiter um mit $\vec{v}_\nu = \vec{\omega} \times \vec{r}_\nu$

$$T = \frac{1}{2}\vec{\omega} \cdot \sum_\nu m_\nu \left(\vec{r}_\nu \times \vec{v}_\nu\right) = \frac{1}{2}\vec{\omega} \cdot \sum_\nu \vec{r}_\nu \times \vec{p}_\nu = \frac{1}{2}\vec{\omega} \cdot \sum_\nu \vec{l}_\nu \quad . \tag{6.256}$$

Also gilt zusammengefaßt

$$T = \frac{1}{2}\vec{\omega} \cdot \vec{L} \quad . \tag{6.257}$$

Wir können den Drehimpuls $L_\mu = \sum\limits_{\nu=1}^{3} \Theta_{\mu\nu}\omega_\nu$ mit $\mu = 1, 2, 3$ substituieren.

$$T = \frac{1}{2}\vec{\omega} \cdot \vec{L} = \frac{1}{2}\sum_{\mu=1}^{3} \omega_\mu \sum_{\nu=1}^{3} \Theta_{\mu\nu}\omega_\nu = \frac{1}{2} \sum_{\mu,\nu=1}^{3} \Theta_{\mu\nu}\, \omega_\mu\omega_\nu \quad . \tag{6.258}$$

Ausgeschrieben lautet die Summe wegen der Symmetrie des Trägheitstensors $\Theta_{\mu\nu} = \Theta_{\nu\mu}$

$$T = \frac{1}{2}\left(\Theta_{xx}\omega_x^2 + \Theta_{yy}\omega_y^2 + \Theta_{zz}\omega_z^2 + 2\Theta_{xy}\omega_x\omega_y + 2\Theta_{xz}\omega_x\omega_z + 2\Theta_{yz}\omega_y\omega_z\right) \quad . \tag{6.259}$$

Benutzt man die Tensorschreibweise, so lautet die Rotationsenergie

$$T = \frac{1}{2}\vec{\omega}^\top \cdot \hat{\Theta} \cdot \vec{\omega} \quad . \tag{6.260}$$

Der Vektor $\vec{\omega}$ muß rechts des Tensors $\hat{\Theta}$ als Spaltenvektor und links als Zeilenvektor angegeben werden.

$$T = \frac{1}{2}\left(\omega_x, \omega_y, \omega_z\right) \hat{\Theta} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \quad . \tag{6.261}$$

Wir kommen jetzt auf die Hauptträgheitsachsen zu sprechen. Die Elemente des Trägheitstensors hängen von der Lage des Ursprungs und der Orientierung des körperfesten Koordinatensystems ab. Es ist nun möglich, bei festem Ursprung des Koordinatensystems so zu orientieren, daß die Deviationsmomente verschwinden. Ein solches spezielles Koordinatensystem nennen wir Hauptachsensystem. Der Trägheitssensor besitzt dann bezüglich dieses Achsensystems Diagonalform

$$\hat{\Theta} = \begin{pmatrix} \Theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \Theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \Theta_3 \end{pmatrix} \tag{6.262}$$

oder

$$\Theta_{\mu\nu} = \Theta_\mu \delta_{\mu\nu} \quad . \tag{6.263}$$

ω_ν seien die Komponenten der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ bezogen auf die Hauptachsen. Für den Drehimpuls und die Rotationsenergie gelten im Hauptachsensystem besonders einfache Beziehungen

$$L_\mu = \sum_\nu \Theta_{\mu\nu}\,\omega_\nu = \sum_\nu \Theta_\mu\,\delta_{\mu\nu}\,\omega_\nu = \Theta_\mu\,\omega_\mu \quad , \tag{6.264}$$

$$T = \frac{1}{2}\vec{\omega}\cdot\vec{L} = \frac{1}{2}\sum_\mu \omega_\mu L_\mu = \frac{1}{2}\sum_\mu \Theta_\mu\,\omega_\mu^2 \quad . \tag{6.265}$$

Ausgeschrieben lautet die letzte Gleichung

$$T = \frac{1}{2}\left(\Theta_1\omega_1^2 + \Theta_2\omega_2^2 + \Theta_3\omega_3^2\right) \quad . \tag{6.266}$$

Im allgemeinen sind wegen der tensoriellen Beziehung $\vec{L} = \hat{\Theta}\vec{\omega}$ Drehimpuls und Winkelgeschwindigkeit verschieden gerichtet. Rotiert der Körper um eine Hauptträgheitsachse, z. B. um eine μ-te Achse, $\vec{\omega} = \omega\,\vec{e}_\mu$, so sind der Drehimpuls $\vec{L}$ und die Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ gleichgerichtet. Der Vektor $\vec{\omega}$ hat dann gegebenenfalls nur eine Komponente, z. B. $\vec{\omega} = (0, \omega, 0)$. Dasselbe gilt dann auch für den Drehimpuls $\vec{L} = (0, L, 0)$. Diese Eigenschaft der Parallelität von Drehimpuls und Winkelgeschwindigkeit ermöglicht es, die Hauptachsen zu bestimmen. Wir fragen uns nun, wie wir $\vec{\omega} = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ wählen müssen oder um welche Achse der Körper rotieren muß, damit der Drehimpuls $\vec{L} = \hat{\Theta}\vec{\omega}$ und die Winkelgeschwindigkeit einander parallel sind, also $\vec{L} = \Theta\vec{\omega}$ wird, wobei Θ ein Skalar ist. Es soll also zusammengefaßt gelten

$$\vec{L} = \hat{\Theta}\cdot\vec{\omega} = \Theta\vec{\omega} \quad . \tag{6.267}$$

Dies ist eine Eigenwertgleichung. In dieser Gleichung sind der Skalar Θ und die zugehörigen Komponenten $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ unbekannt. Alle Werte von Θ, die die Gleichung (6.267) erfüllen, nennt man Eigenwerte des Tensors $\hat{\Theta}$, die entsprechenden $\vec{\omega}$ sind die Eigenvektoren. Wir schreiben das Gleichungssystem (6.267) aus

$$\Theta_{xx}\omega_x + \Theta_{xy}\omega_y + \Theta_{xz}\omega_z = \Theta\omega_x \quad , \tag{6.268}$$

$$\Theta_{yx}\omega_x + \Theta_{yy}\omega_y + \Theta_{yz}\omega_z = \Theta\omega_y \quad , \tag{6.269}$$

$$\Theta_{zx}\omega_x + \Theta_{zy}\omega_y + \Theta_{zz}\omega_z = \Theta\omega_z \quad . \tag{6.270}$$

Wir schreiben dies um in

$$(\Theta_{xx} - \Theta)\,\omega_x + \Theta_{xy}\omega_y + \Theta_{xz}\omega_z = 0 \quad , \tag{6.271}$$

$$\Theta_{yx}\omega_x + (\Theta_{yy} - \Theta)\,\omega_y + \Theta_{yz}\omega_z = 0 \quad , \tag{6.272}$$

$$\Theta_{zx}\omega_x + \Theta_{zy}\omega_y + (\Theta_{zz} - \Theta)\,\omega_z = 0 \quad . \tag{6.273}$$

Dies ist ein System homogener linearer Gleichungen. Es hat nur dann nichttriviale Lösungen, wenn die Koeffizientendeterminante verschwindet.

$$\begin{vmatrix} \Theta_{xx}-\Theta & \Theta_{xy} & \Theta_{xz} \\ \Theta_{yx} & \Theta_{yy}-\Theta & \Theta_{yz} \\ \Theta_{zx} & \Theta_{zy} & \Theta_{zz}-\Theta \end{vmatrix} = 0 \quad . \tag{6.274}$$

Die Entwicklung der Determinante führt auf eine Gleichung dritten Grades, dies ist die charakteristische Gleichung. Ihre Wurzeln sind die gesuchten Hauptträgheitsmomente und Eigenwerte Θ_1, Θ_2 und Θ_3. Durch Einsetzen einer dieser Lösungen Θ_i in das ursprüngliche Gleichungssystem (6.267) läßt sich das Verhältnis $\omega_x^{(i)} : \omega_y^{(i)} : \omega_z^{(i)}$ der Komponenten des Vektors $\vec{\omega}^{(i)}$ berechnen. Dadurch ist die Richtung der i-ten Hauptachse bestimmt.

Wir untersuchen die Transformation des Trägheitstensors bei Koordinatentransformationen und werden so auch eine Rechtfertigung für die Einführung des Begriffs Tensor ableiten. Speziell untersuchen wir, wie sich die Elemente des Tensors $\hat{\Theta}$ bei Drehung des Koordinatensystems verhalten. Wir erinnern an die bereits behandelten orthogonalen Transformationen von Vektoren. Die Transformation eines Vektors bei Drehung des Koordinatensystems wird beschrieben durch

$$\vec{x'} = \hat{A}\vec{x} \tag{6.275}$$

oder in Komponentenschreibweise

$$x'_i = \sum_j a_{ij}\, x_j \quad . \tag{6.276}$$

Für die Basisvektoren gilt

$$\vec{e'}_i = \sum_j a_{ij}\, \vec{e}_j \quad . \tag{6.277}$$

Die Umkehrung dieser Transformation lautet

$$\vec{x} = \hat{A}^{-1}\vec{x'} \tag{6.278}$$

oder

$$x_i = \sum_j a_{ji}\, x'_j \quad . \tag{6.279}$$

Die inverse Drehmatrix $(a_{ij})^{-1} = (a_{ji})$ wird einfach durch Vertauschen von Zeilen und Spalten, d.h. durch Transposition, gebildet, weil die Drehung eine orthogonale Transformation ist, bei der gilt

$$\sum_j a_{ij}a_{kj} = \delta_{ik} \quad , \tag{6.280}$$

$$\sum_i a_{ij}a_{ik} = \delta_{jk} \quad . \tag{6.281}$$

Aufgrund des Äquivalenzprinzips fordern wir für den Trägheitstensor, daß die Gleichung

$$L_k = \sum_l \Theta_{kl}\,\omega_l \tag{6.282}$$

forminvariant auch im gedrehten System besteht,

$$L'_i = \sum_j \Theta'_{ij}\,\omega'_j \quad . \tag{6.283}$$

Damit können wir das Transformationsverhalten des Tensors aus dem Verhalten des Vektors bestimmen. Wir gehen aus von der Gleichung (6.282) und ersetzen die Größen L_k und ω_l durch die entsprechenden Größen im rotierenden Koordinatensystem

$$\sum_l \Theta_{kl}\left(\sum_j a_{jl}\,\omega'_j\right) = \sum_j a_{jk}\,L'_j \quad . \tag{6.284}$$

Wir multiplizieren (6.284) mit a_{ik} und summieren über k. Dies ergibt

$$\sum_j \left(\sum_{k,l} a_{ik}a_{jl}\Theta_{kl}\right)\omega'_j = \sum_j \left(\sum_k a_{jk}a_{ik}\right) L'_j = \sum_j \delta_{ij}L'_j = L'_i \quad . \tag{6.285}$$

Die Komponenten von $\hat{\Theta}'$ folgen durch Vergleich mit (6.283)

$$\Theta'_{ij} = \sum_{k,l} a_{ik}\,a_{jl}\,\Theta_{kl} \quad . \tag{6.286}$$

Diese Transformationsgleichung ist der Grund für die Bezeichnung von $\hat{\Theta}$ als Tensor. $\hat{\Theta}$ ist ein Tensor 2-ter Stufe. Ein Vektor ist ein Tensor 1-ter Stufe. Er transformiert sich entsprechend

$$x'_i = \sum_j a_{ij}\,x_j \quad . \tag{6.287}$$

Ein Skalar ist ein Tensor 0-ter Stufe. Er transformiert sich als

$$s' = s \tag{6.288}$$

Ein Tensor 3-ter Stufe transformiert sich entsprechend

$$A'_{ijk} = \sum_{lmn} a_{il}a_{jm}a_{kn}\,A_{lmn} \quad . \tag{6.289}$$

Für den Trägheitstensor können wir das Transformationsgesetz auch in Matrizenschreibweise darstellen

$$\hat{\Theta}' = \hat{A}\hat{\Theta}\hat{A}^{-1} \quad . \tag{6.290}$$

Dies ist eine Ähnlichkeitstransformation. Ausgehend von der Vektortransformation

$$x'_i = \sum_j a_{ij}\,x_j \tag{6.291}$$

können wir für die Koeffizienten a_{ij} auch jeweils schreiben

$$a_{ij} = \frac{\partial x'_i}{\partial x_j} \quad . \tag{6.292}$$

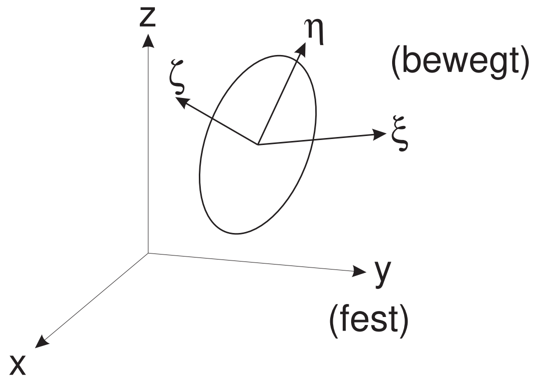
6.12 Kreiseltheorie

Starrer Körper und Kreisel

Den **starren Körper** kann man in der Mechanik als ein System von Massenpunkten definieren, deren Abstände voneinander unveränderlich sind. Er besitzt insgesamt 6 Freiheitsgrade; seine Bewegung im Raum ist vollständig bekannt, wenn wir den Ort eines beliebig gewählten Punktes des starren Körpers kennen (3 Freiheitsgrade der Translation) und wissen, wie sich der Körper um diesen Punkt dreht (3 Freiheitsgrade der Rotation). Wird der starre Körper in einem Punkt festgehalten, sprechen wir von einem **Kreisel**. Dieser besitzt nur noch die 3 Freiheitsgrade der Rotation.
Bei der Beschreibung eines starren Körpers unterscheidet man zwischen zwei **Koordinatensystemen**:

- ein raumfestes (x, y, z),
- ein körperfestes (ξ, η, ζ).

Das raumfeste Koordinatensystem ruht (Inertialsystem); das körperfeste Koordinatensystem bewegt sich mit dem Körper.



Im Folgenden nehmen wir an, daß der Nullpunkt des bewegten Koordinatensystems im Schwerpunkt des Körpers liegt. Des weiteren sollen bei der Beschreibung des Kreisels die Nullpunkte beider Koordinatensysteme zusammenfallen. Die Richtungen der Achsen des bewegten körperfesten Koordinatensystems werden bezüglich der des raumfesten Koordinatensystems durch 3 voneinander unabhängige Winkel (**Eulersche Winkel**) festgelegt.

Trägheitstensor

Ausgehend von der kinetischen Energie

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m_i \vec{v}_i^{\,2} \tag{6.293}$$

(die Summe läuft über alle Massenpunkte des starren Körpers) und der Zerlegung der Geschwindigkeit in Translations- und Rotationsgeschwindigkeit,

$$\vec{v}_i = \vec{v}_T + \vec{\omega} \times \vec{r}_i \tag{6.294}$$

($\vec{r}_i$ ist Ortsvektor im körperfesten Koordinatensystem) erhalten wir

$$2T = \sum_i m_i \vec{v}_T^{\,2} + \sum_i m_i (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)^2 + 2 \sum_i m_i (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) \cdot \vec{v}_T \quad . \tag{6.295}$$

Der dritte Term kann umgeformt werden:

$$\sum_i m_i (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) \cdot \vec{v}_T = \sum_i m_i \vec{r}_i \cdot (\vec{v}_T \times \vec{\omega}) \quad . \tag{6.296}$$

Er verschwindet in den beiden wichtigen Fällen, nämlich wenn der Nullpunkt des körperfesten Koordinatensystem ruht (Kreisel, $\vec{v}_T = 0$), oder wenn er mit dem Schwerpunkt zusammenfällt ($\sum m_i \vec{r}_i = 0$). Für den Kreisel folgt somit

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m_i (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)^2 \equiv T_{\text{rot}} \quad . \tag{6.297}$$

Unter Verwendung der Vektorbeziehung

$$(\vec{a} \times \vec{b})^2 = \vec{a}^{\,2} \vec{b}^{\,2} - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 \tag{6.298}$$

erhalten wir daraus schließlich eine homogene quadratische Form der Komponenten der Winkelgeschwindigkeit

$$\begin{aligned} T_{\text{rot}} &= \frac{1}{2} \sum_i m_i \left[(\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2)(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) - (\omega_1 x_i + \omega_2 y_i + \omega_3 z_i)^2 \right] \\ &\equiv \frac{1}{2} \sum_{k,m=1}^{3} \Theta_{km}\, \omega_k \omega_m \end{aligned} \tag{6.299}$$

mit der Koeffizientenmatrix des **Trägheitstensors**

$$(\Theta_{km}) = \begin{pmatrix} \sum m_i (y_i^2 + z_i^2) & -\sum m_i x_i y_i & -\sum m_i x_i z_i \\ -\sum m_i y_i x_i & \sum m_i (x_i^2 + z_i^2) & -\sum m_i y_i z_i \\ -\sum m_i z_i x_i & -\sum m_i z_i y_i & \sum m_i (x_i^2 + y_i^2) \end{pmatrix} \quad . \tag{6.300}$$

Dieser Tensor ist symmetrisch,

$$\Theta_{km} = \Theta_{mk} \quad . \tag{6.301}$$

Das ist eine sehr nützliche Eigenschaft beim späteren Übergang zur Diagonalform.

Trägheitsellipsoid

Gegeben sei die Drehachse und der Einheitsvektor in Richtung der Drehachse

$$\vec{n} = \frac{\vec{\omega}}{|\vec{\omega}|} \quad . \tag{6.302}$$

Das **Trägheitsmoment** um diese feste Achse ist dann gegeben durch das Skalarprodukt zwischen den beiden Vektoren $\vec{n}$ und $\mathbf{\Theta}\vec{n}$,

$$\Theta = \vec{n} \cdot (\mathbf{\Theta}\vec{n}) \tag{6.303}$$

bzw. in Komponentenschreibweise

$$\Theta = \sum_{k,m} \Theta_{km}\, n_k n_m \quad . \tag{6.304}$$

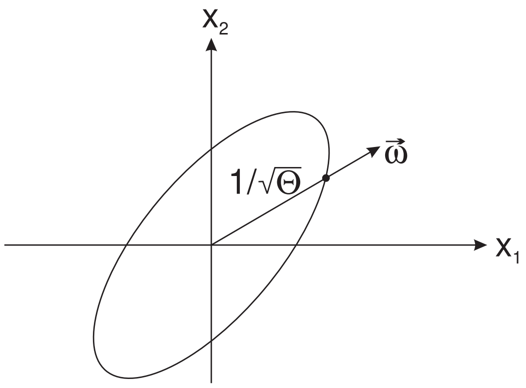
So sind z. B. die Glieder in der Hauptdiagonale der Matrix genau die Trägheitsmomente bezüglich der drei Koordinatenachsen, für die $\vec{n} = (1,0,0)$, $\vec{n} = (0,1,0)$ und $\vec{n} = (0,0,1)$ gilt.
Zur Anschauung ordnet man dem Trägheitstensor durch die Gleichung

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{i,k} \Theta_{ik}\, x_i x_k \\ &= \Theta_{xx}\, x^2 + \Theta_{yy}\, y^2 + \Theta_{zz}\, z^2 + 2\Theta_{xy}\, xy + 2\Theta_{xz}\, xz + 2\Theta_{yz}\, yz \end{aligned} \tag{6.305}$$

eine Fläche im dreidimensionalen Raum zu. Da T_{rot} stets positiv und endlich ist, kommt von den möglichen Flächen zweiter Ordnung nur das allgemeine Ellipsoid in Betracht. Die Gleichung (6.305) definiert das **Trägheitsellipsoid**.
Zeichnet man in dieses Ellipsoid die Drehachse ($\vec{\omega}$) ein, dann schneidet sie die Fläche in einem Punkt mit den Koordinaten

$$x_i = \frac{n_i}{\sqrt{\Theta}} \quad , \tag{6.306}$$

der vom Nullpunkt den Abstand $1/\sqrt{\Theta}$ hat.



Im Folgenden werden wir die Gleichung für das Ellipsoid durch eine sogenannte Hauptachsentransformation stark vereinfachen.

Hauptachsentransformation

Frage: Gibt es Vektoren, deren Richtung bei der Transformation

$$\vec{s} \longrightarrow \vec{r}\ : \quad \vec{s} = \mathbf{\Theta}\vec{r} \tag{6.307}$$

unverändert bleibt (d. h. $\vec{s} \parallel \vec{r}$)? Diese Fragestellung heißt **Eigenwertaufgabe**. Sie führt auf die **Eigenwertgleichung**

$$\mathbf{\Theta}\vec{r} = \lambda\vec{r} \quad , \tag{6.308}$$

wobei $\vec{r}$ als **Eigenvektoren** und λ als **Eigenwerte** bezeichnet werden. Unter Verwendung der Einheitsmatrix **1** schreiben wir

$$(\mathbf{\Theta} - \lambda\mathbf{1})\vec{r} = 0 \quad . \tag{6.309}$$

Dieses Gleichungssystem hat genau dann nichttriviale Lösungen wenn die Koeffizientendeterminante verschwindet

$$\det(\mathbf{\Theta} - \lambda\mathbf{1}) = 0 \quad . \tag{6.310}$$

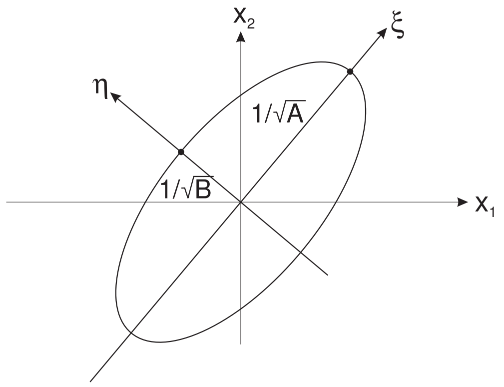
Ausführlich geschrieben lautet die charakteristische Gleichung von $\mathbf{\Theta}$

$$\begin{vmatrix} \Theta_{11} - \lambda & \Theta_{12} & \Theta_{13} \\ \Theta_{21} & \Theta_{22} - \lambda & \Theta_{23} \\ \Theta_{31} & \Theta_{32} & \Theta_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad . \tag{6.311}$$

Die Determinante ergibt nach ihrer Auflösung ein Polynom 3. Grades bezüglich λ. Die Nullstellen dieses Polynoms sind dann die drei Eigenwerte λ_1, λ_2 und λ_3. Bezeichnen wir sie im weiteren als die Hauptträgheitsmomente A, B und C, dann erhält der Trägheitstensor die Diagonalform

$$(\Theta_{km}) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix} \quad . \tag{6.312}$$

Anschaulich entspricht diese Diagonalisierung einem Übergang in ein neues Koordinatensystem: dem **Hauptachsensystem** (ξ, η, ζ).



Das Hauptachsensystem des Trägheitstensors wird später mit dem körperfesten Koordinatensystem identifiziert. Im Hauptachsensystem vereinfacht sich die Gleichung des Trägheitsellipsoids zu

$$1 = A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2 \quad . \tag{6.313}$$

Seine Achsenlängen betragen $1/\sqrt{A}$, $1/\sqrt{B}$, $1/\sqrt{C}$ und die kinetische Energie lautet

$$2T_{\text{rot}} = A\omega_\xi^2 + B\omega_\eta^2 + C\omega_\zeta^2 \quad . \tag{6.314}$$

Entsprechend (6.312) unterteilt man die starren Körper in 3 Klassen:

- unsymmetrische Kreisel ($A \neq B \neq C$)
- symmetrische Kreisel ($A = B \neq C$)
- Kugelkreisel ($A = B = C$) $\quad$.

Drehimpuls und Trägheitstensor

Der Drehimpuls eines Massenpunktsystems ist

$$\vec{L} = \sum_i m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i \quad . \tag{6.315}$$

Ersetzen wir $\vec{v}_i$ wieder durch $\vec{v}_T + \vec{\omega}_i \times \vec{r}_i$, so entsteht

$$\vec{L} = \sum_i m_i \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) + \sum_i m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_T \quad . \tag{6.316}$$

Wegen $\vec{v}_T = 0$ verschwindet der zweite Summand und wir erhalten

$$\vec{L} = \sum_i m_i \, \vec{\omega} \vec{r}_i^{\,2} - \sum_i m_i \vec{r}_i \, (\vec{\omega} \cdot \vec{r}_i) \quad . \tag{6.317}$$

Schreiben wir dies komponentenweise auf,

$$L_1 = L_x = \omega_x \sum_i m_i \, (y_i^2 + z_i^2) - \omega_y \sum_i m_i \, x_i y_i - \omega_z \sum_i m_i \, x_i z_i \tag{6.318}$$

und entsprechend für $L_2 = L_y$ und $L_3 = L_z$, so erkennen wir die Beziehung

$$L_k = \sum_{m=1}^{3} \Theta_{km} \omega_m \quad \text{bzw.} \quad \vec{L} = \mathbf{\Theta} \vec{\omega} \quad . \tag{6.319}$$

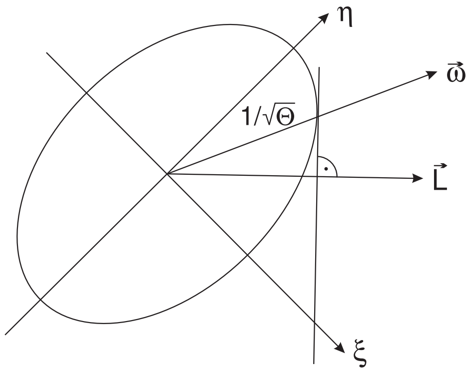
Die Komponenten des Drehimpulses sind lineare Funktionen der Komponenten der Winkelgeschwindigkeit. Besonders einfach wird die Beziehung im Hauptachsensystem:

$$\vec{L} = \begin{pmatrix} A\,\omega_\xi \\ B\,\omega_\eta \\ C\,\omega_\zeta \end{pmatrix} \quad . \tag{6.320}$$

Der Zusammenhang von $\vec{L}$ und $\vec{\omega}$ läßt sich am Trägheitsellipsoid

$$A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2 = 1 \tag{6.321}$$

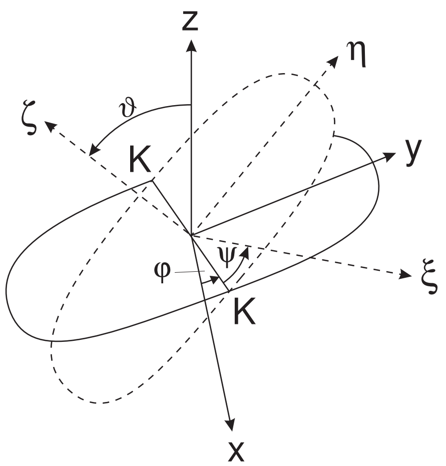
demonstrieren. Bekanntlich steht der Gradient einer Funktion $f(\xi, \eta, \zeta)$ senkrecht auf der Fläche $f = \mathrm{const}$, d. h., der Vektor $(2A\xi, 2B\eta, 2C\zeta)$ steht senkrecht auf dem Ellipsoid bzw. dessen Tangentialebene im Punkt (ξ, η, ζ). Legen wir also die Drehachse ($\vec{\omega}$) durch den Punkt (ξ, η, ζ), dann steht der zugehörige Drehimpuls senkrecht auf der Tangentialebene in diesem Punkt; sein Betrag ist $|\vec{L}| = \Theta|\vec{\omega}|$.



Man sieht in der Abbildung, daß die Richtung von Drehimpuls und Drehmoment im allgemeinen nicht zusammenfallen. Nur wenn die Rotation um eine Hauptträgheitsachse erfolgt, ist $\vec{L} \parallel \vec{\omega}$.

Eulersche Winkel

Die Eulerschen Winkel geben an, wie das körperfeste Koordinatensystem gegen das raumfeste Koordinatensystem verdreht ist.



Bezeichnen wir die Koordinaten im raumfesten Koordinatensystem mit x, y, z, die im körperfesten mit ξ, η, ζ und die Schnittlinie der $x, y-$ Ebene mit der $\xi, \eta-$Ebene als **Knotenlinie**, dann ist φ der Winkel zwischen der $x-$Achse und der Knotenlinie, ψ der Winkel zwischen der Knotenlinie und der $\xi-$Achse und ϑ der Winkel zwischen der $z-$ Achse und $\zeta-$Achse.

Wir berechnen nun die Komponenten von $\vec{\omega}$ im bewegten, körperfesten Koordinatensystem. Die Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ setzt sich aus den drei Eulerschen Winkelgeschwindigkeiten $\vec{\omega}_{(\varphi)}$, $\vec{\omega}_{(\vartheta)}$, $\vec{\omega}_{(\psi)}$ zusammen:

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_{(\varphi)} + \vec{\omega}_{(\vartheta)} + \vec{\omega}_{(\psi)} \quad . \tag{6.322}$$

Wir projizieren diese drei Winkelgeschwindigkeiten auf das körperfeste Koordinatensystem, um so die Komponenten $\vec{\omega}_{\xi}$, $\vec{\omega}_{\eta}$, $\vec{\omega}_{\varsigma}$ zu erhalten.

1. $\vec{\omega}_{(\varphi)}$ hat im Inertialsystem die Komponentendarstellung:

$$\vec{\omega}_{(\varphi)I} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} \quad . \tag{6.323}$$

   Durch Drehung in das körperfeste System folgt

$$\begin{aligned} \vec{\omega}_{(\varphi)} &= \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\vartheta & \sin\vartheta \\ 0 & -\sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sin\psi\, \sin\vartheta \\ \cos\psi\, \sin\vartheta \\ \cos\vartheta \end{pmatrix} \dot{\varphi} \quad . \end{aligned} \tag{6.324}$$

   Dieser Vektor beschreibt Drehungen um die z-Achse (φ variabel).

2. $\vec{\omega}_{(\vartheta)}$ hat im Inertialsystem die Komponentendarstellung

$$\vec{\omega}_{(\vartheta)I} = \begin{pmatrix} \dot{\vartheta} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad . \tag{6.325}$$

   Durch Drehungen in das körperfeste System folgt

$$\vec{\omega}_{(\vartheta)} = \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\vartheta} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\psi \\ -\sin\psi \\ 0 \end{pmatrix} \dot{\vartheta} \quad . \tag{6.326}$$

   Dieser Vektor beschreibt Drehungen um die Knotenlinie (ϑ variabel).

3. $\vec{\omega}_{(\psi)}$ besitzt im körperfestenSystem die einfache Gestalt

$$\vec{\omega}_{(\psi)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \dot{\psi} \quad . \tag{6.327}$$

Er beschreibt Drehungen um die ς-Achse (ψ variabel).

Die Komponenten von $\vec{\omega}$ im körperfesten Koordinatensystem lauten dann

$$\vec{\omega} = p\,\vec{e}_\xi + q\,\vec{e}_\eta + r\,\vec{e}_\zeta \tag{6.328}$$

mit

$$\begin{aligned} p &= \dot{\varphi} \sin\vartheta\, \sin\psi + \dot{\vartheta}\cos\psi \quad , \\ q &= \dot{\varphi} \sin\vartheta \cos\psi - \dot{\vartheta}\sin\psi \quad , \\ r &= \dot{\varphi}\cos\vartheta + \dot{\psi} \quad . \end{aligned} \tag{6.329}$$

Eulersche Gleichungen

Der Drehimpulssatz hat die Gestalt

$$\dot{\vec{L}} = \vec{M} \tag{6.330}$$

nur in Inertialsystemen. In solchen Koordinatensystemen sind aber nicht nur die Komponenten von $\vec{\omega}$, sondern auch die Komponenten des Trägheitstensors wegen der Drehbewegung des Körpers zeitabhängig. Wir würden daher durch Einsetzen von $L_k = \sum_m \Theta_{km}\omega_m$ sehr komplizierte Gleichungen erhalten.
Es ist deshalb zweckmäßiger, den Drehimpulssatz im mitrotierenden körperfesten Hauptachsensystem (ξ, η, ζ) aufzuschreiben. Die Zeitableitung in einem solchen bilden wir nach der allgemeinen Vorschrift

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{\text{Lab.}} = \left.\frac{d}{dt}\right|_{\text{rot.}} + \vec{\omega}\times \tag{6.331}$$

In Worten: Die vom Inertialsystem her gesehene Zeitableitung $(d/dt)_{|\text{Lab}}$ eines im Nichtinertialsystem aufgeschriebenen Vektors bildet man, indem man zunächst die Zeitableitung der Komponenten ausführt ($(d/dt)_{|\text{rot}}$) und dann den Einfluß der Rotation berücksichtigt ($\vec{\omega}\times$). Daraus folgt

$$\dot{\vec{L}} + \vec{\omega} \times \vec{L} = \vec{M} \quad . \tag{6.332}$$

Berücksichtigen wir weiterhin die Komponentendarstellungen

$$\vec{\omega} = (p, q, r) \qquad \text{und} \qquad \vec{L} = (Ap, Bq, Cr) \quad , \tag{6.333}$$

so erhalten wir schließlich die drei **Eulerschen Gleichungen**

$$A\dot{p} + (C - B)qr = M_\xi \quad , \tag{6.334}$$

$$B\dot{q} + (A - C)rp = M_\eta \quad , \tag{6.335}$$

$$C\dot{r} + (B - A)pq = M_\zeta \quad . \tag{6.336}$$

Hat man aus diesem gekoppelten Differentialgleichungssystem die Zeitfunktionen p, q, r bestimmt, kann man aus ihnen wegen (6.329) die drei Eulerschen Winkel φ, ψ, θ als Funktionen der Zeit und damit die Lage des Körpers berechnen.

Der kräftefreie symmetrische Kreisel

Sind zwei der drei Hauptträgheitsmomente eines in einem Punkt festgehaltenen starren Körpers gleich, z. B.

$$A = B \quad , \tag{6.337}$$

dann spricht man von einem **symmetrischen Kreisel**. Seine Symmetrieachse, in diesem Fall die ζ-Achse, heißt **Figurenachse**.
Ein symmetrischer Kreisel ist kräftefrei, wenn auf ihn kein Drehmoment wirkt. Dies läßt sich dadurch erreichen, indem man den Schwerpunkt als Unterstützungspunkt nimmt. Für ihn verschwindet nämlich das Drehmoment der Schwerkraft:

$$\vec{M} = \sum_i \vec{r}_i \times m_i\vec{g} = (\sum_i m_i\vec{r}_i) \times \vec{g} = 0 \quad . \tag{6.338}$$

Die Eulerschen Gleichungen für den kräftefreien symmetrischen Kreisel lauten dann

$$A\dot{p} + (C - A)qr = 0 \quad , \tag{6.339}$$

$$A\dot{q} + (A - C)rp = 0 \quad , \tag{6.340}$$

$$C\dot{r} = 0 \quad . \tag{6.341}$$

Man liest aus ihnen sofort ab

$$r = r_0 = \mathrm{const} \quad . \tag{6.342}$$

Durch die Wahl der ζ-Richtung $(r = \omega_\zeta)$ machen wir r_0 positiv. Die restlichen Gleichungen des Differentialgleichungssystems vereinfachen sich damit zu

$$\dot{p} - Rq = 0 \quad , \tag{6.343}$$

$$\dot{q} + Rp = 0 \quad , \tag{6.344}$$

mit

$$R = \frac{A-C}{A}\, r_0 \quad . \tag{6.345}$$

Wir entkoppeln die Differentialgleichungen durch Ableiten nach der Zeit und Eliminieren von $\dot{p}$ und $\dot{q}$,

$$\ddot{p} + R^2 p = 0 \quad , \tag{6.346}$$
$$\ddot{q} + R^2 q = 0 \quad . \tag{6.347}$$

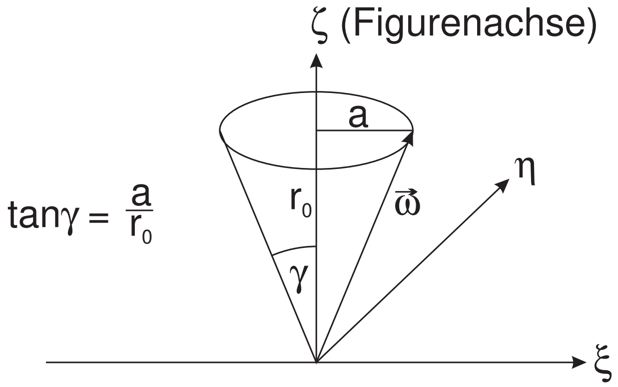
Die Lösung dieser beiden Schwingungsgleichungen, die auch (6.343) genügt, ist

$$p = a \sin(Rt + \varepsilon) \quad , \tag{6.348}$$
$$q = a \cos(Rt + \varepsilon) \tag{6.349}$$

mit den beiden Integrationskonstanten a und ε. Der Betrag von $\vec{\omega}$ lautet somit

$$\omega^2 \equiv r^2 + p^2 + q^2 = r_0^2 + a^2 = \mathrm{const.} \tag{6.350}$$

Die Projektion von $\vec{\omega}$ auf die ξ, η-Ebene (Komponenten p und q) wandert auf einem Kreis: $\vec{\omega}$ beschreibt einen Kreiskegel um die Figurenachse, den **Polkegel**.



Um die wirkliche Bewegung des Körpers zu kennen, müssen wir noch die Eulerschen Winkel als Funktionen der Zeit berechnen:

$$a \sin(Rt + \varepsilon) = \dot{\varphi} \sin\vartheta \sin\psi + \dot{\vartheta} \cos\psi \tag{6.351}$$
$$a \cos(Rt + \varepsilon) = \dot{\varphi} \sin\vartheta \cos\psi - \dot{\vartheta} \sin\psi \tag{6.352}$$
$$r_0 = \dot{\varphi} \cos\vartheta + \dot{\psi}. \tag{6.353}$$

Das Lösen dieses Gleichungssystems können wir uns erleichtern, indem wir die Achsen des raumfesten Koordinatensystem (x, y, z) geeignet festlegen. Bei einer kräftefreien Bewegung ist ja $\vec{L}$ zeitlich konstant, wir wählen deshalb das Koordinatensystem so, daß er nur eine, nämlich die z-Komponente mit dem Wert $L = |\vec{L}|$ besitzt. Im mitrotierenden Koordinatensystem hat er dann die Komponenten

$$
\begin{aligned}
L_\xi &= L \sin\vartheta \sin\psi \quad , && (6.354)\\
L_\eta &= L \sin\vartheta \cos\psi \quad , && (6.355)\\
L_\zeta &= L \cos\vartheta \quad . && (6.356)
\end{aligned}
$$

Für konstante L, A und C folgt andererseits aus $\vec{L} \equiv (A\omega_\xi, B\omega_\eta, C\omega_\zeta)$

$$
\begin{aligned}
L_\xi &= Ap = A(\dot\varphi \sin\vartheta \sin\psi + \dot\vartheta \cos\psi) \quad , && (6.357)\\
L_\eta &= Aq = A(\dot\varphi \sin\vartheta \sin\psi - \dot\vartheta \cos\psi) \quad , && (6.358)\\
L_\zeta &= Cr = Cr_0 \quad . && (6.359)
\end{aligned}
$$

In der letzten Zeile wurde (6.342) verwendet. Ein Vergleich mit den vorherigen drei Gleichungen zeigt, daß

$$\vartheta = \text{const} = \vartheta_0 \quad \text{bzw.} \quad \dot\vartheta = 0 \tag{6.360}$$

und

$$\dot\varphi = \text{const} \quad . \tag{6.361}$$

Setzen wir das nun in (6.351) bis (6.353) ein, so erhalten wir

$$
\begin{aligned}
a\sin(Rt+\varepsilon) &= \dot\varphi \sin\vartheta_0 \sin\psi \quad , && (6.362)\\
a\cos(Rt+\varepsilon) &= \dot\varphi \sin\vartheta_0 \cos\psi \quad , && (6.363)\\
r_0 &= \dot\varphi \cos\vartheta_0 + \dot\psi \quad . && (6.364)
\end{aligned}
$$

Aus den ersten beiden Gleichungen folgt (durch Quadrieren und Addition beider Gleichungen)

$$a^2 = \dot\varphi^2 \sin^2\vartheta_0 \quad , \tag{6.365}$$

d. h.

$$\varphi = \frac{a}{\sin\vartheta_0}\, t + \varphi_0 \quad . \tag{6.366}$$

Gleichzeitig liefert ein Koeffizientenvergleich in (6.362) und (6.363)

$$
\begin{aligned}
a &= \dot\varphi \sin\vartheta_0 \quad , && (6.367)\\
\psi &= Rt + \varepsilon \quad . && (6.368)
\end{aligned}
$$

Nun differenzieren wir (6.368), d. h. $\dot\psi = R$ und setzen es in (6.364) ein:

$$r_0 - R = \dot\varphi \cos\vartheta_0 \quad . \tag{6.369}$$

Aus (6.367) folgt dann

$$\tan\vartheta_0 = \frac{a}{r_0 - R} \quad . \tag{6.370}$$

Zusammenfassend lauten die Lösungen des kräftefreien symmetrischen Kreisels:

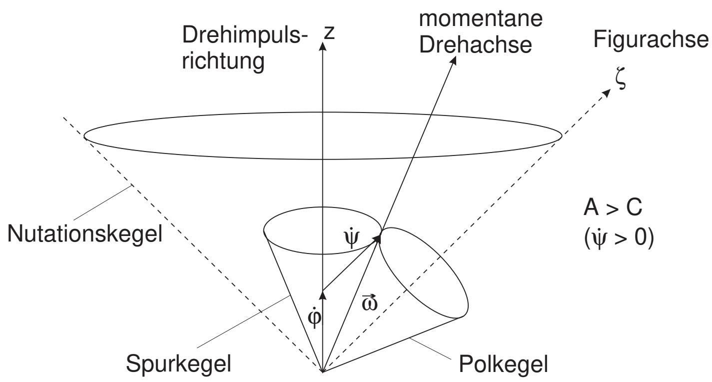
$$\varphi = \frac{a}{\sin\vartheta_0} t + \varphi_0 \quad , \tag{6.371}$$

$$\psi = Rt + \varepsilon = \frac{A - C}{A} r_0 t + \varepsilon \quad , \tag{6.372}$$

$$\vartheta = \vartheta_0 \quad , \tag{6.373}$$

$$\tan\vartheta_0 = \frac{Aa}{r_0 C} \quad . \tag{6.374}$$

Sie enthalten vier Integrationskonstanten $\varphi_0, \varepsilon, r_0$ und a. Zwei Konstanten haben wir zur Fixierung der z-Richtung verbraucht.
Anschauliche Diskussion: Die Figurenachse bewegt sich auf einem Kreiskegel (**Nutationskegel**) des Öffnungswinkels ϑ_0 um die z-Achse, d. h. um $\vec{L}$. Die Winkelgeschwindigkeit dieser Drehung ist $\dot{\varphi}$.



Dabei dreht sich der Körper um die Figurenachse mit $\dot{\psi}$. Die Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ entsteht durch Addition der beiden Drehungen um die z-Achse und ζ-Achse; $\vec{\omega}$ liegt also immer in der z, ζ-Ebene und rotiert deshalb mit der ζ-Achse um die z-Achse. Dabei bildet es mit der ζ-Achse den festen Winkel γ. Entsprechend $\vec{\omega}$ ändert sich die Lage der momentanen Drehachse ständig; sie wandert auf dem **Spurkegel** um die raumfeste Achse. Die gegenseitige Bewegung der Achsen kann man sich durch das Abrollen von Kegeln veranschaulichen: Der Polkegel rollt mit seiner Außenfläche $(A > C)$ oder seiner Innenfläche $(A < C)$ auf dem Spurkegel ab und führt dabei die Figurenachse auf dem Nutationskegel.

7 Lagrange-Formalismus

7.1 Klassifikation von Systemen

Betrachten wir ein System von n Massenpunkten, so wird es durch $3n$ Koordinaten $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \cdots \vec{r}_n$ beschrieben. Die Zahl der Freiheitsgrade ist ebenfalls $3n$. Oftmals ist ein System, wie z. B. beim starren Körper, Zwangsbedingungen unterworfen. Liegen s Zwangsbedingungen vor, so wird die Zahl der Freiheitsgrade auf $3n - s$ eingeschränkt. Die Zwangsbedingungen lassen sich klassifizieren.

Wir bezeichnen ein System als *holonom*, wenn die Zwangsbedingungen durch Gleichungen der Form

$$f_k(\vec{r_1}, \vec{r_2}, \cdots, t) = 0 \ , \qquad\qquad k = 1, \cdots, s \tag{7.1}$$

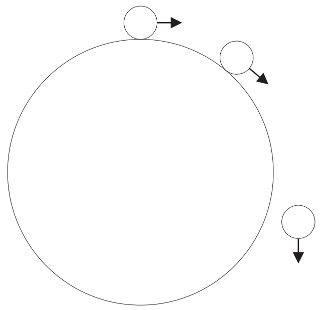
dargestellt werden können. Diese Form der Zwangsbedingungen ist von Bedeutung, weil sie benutzt werden kann, um abhängige Koordinaten zu eliminieren; z. B. lautet die Gleichung für ein Pendel der Länge l

$$x^2 + y^2 - l^2 = 0 \quad , \tag{7.2}$$

wenn wir das Koordinatensystem in den Aufhängepunkt legen.

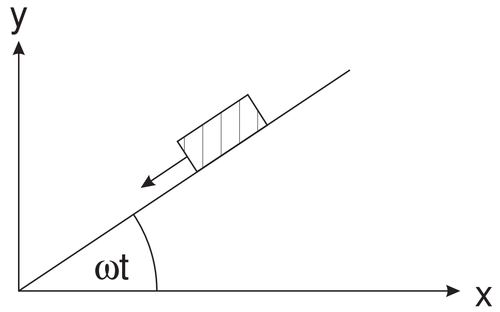
Alle Zwangsbedingungen, die nicht in der Form (7.1) dargestellt werden können, heißen *nicht-holonom*. Dies sind Bedingungen, die nicht in einer geschlossenen Form oder durch Ungleichungen beschrieben werden. Ein Beispiel hierfür sind in einer Kugel vom Radius R eingeschlossene Gasmoleküle. Ihre Koordinaten müssen den Bedingungen $r_i \leq R$ genügen.

Eine weitere Unterscheidung der Zwangsbedingungen wird nach ihrer Zeitabhängigkeit vorgenommen. Ist die Zwangsbedingung eine explizite Funktion der Zeit, so heißt sie *rheonom*, tritt die Zeit nicht explizit auf, nennen wir die Zwangsbedingung *skleronom*. Zur Klassifizierung eines mechanischen Systems geben wir noch zusätzlich an, ob es sich um ein konservatives System handelt oder nicht.
Als Beispiel betrachten wir eine kleine Kugel, die auf einer großen Kugel abrollt.



Kleine Kugel rollt auf großer Kugel

Eine Kugel rollt im Schwerefeld reibungslos von der Spitze einer größeren Kugel. Das System ist konservativ. Da mit dem Ablösen der Kugel die Zwangsbedingungen sich völlig ändern und sich nicht in der geschlossenen Form der Gleichung (7.1) darstellen lassen, ist das System nichtholonom. Weil die Zeit nicht explizit auftritt, ist das System skleronom.
Als zweites Beispiel betrachten wir einen Körper, der mit Reibung auf einer schiefen Ebene herunterrutscht.



Der Neigungswinkel der Ebene ist zeitlich veränderlich. Zwischen den Koordinaten und dem Neigungswinkel besteht die Beziehung

$$\frac{y}{x} - \tan \omega t = 0 \quad . \tag{7.3}$$

Die Zeit tritt also explizit in den Zwangsbedingungen auf. Das System ist holonom und rheonom. Da Reibung vorliegt, ist es außerdem nicht konservativ.

Bei s Zwangsbedingungen sind in dem Satz von ursprünglich $3n$ unabhängigen Koordinaten jetzt s abhängige Koordinaten enthalten. Werden holonome Zwangsbedingungen durch Gleichungen der Form (7.1) ausgedrückt, so lassen sich die abhängigen Koordinaten eliminieren. Wir können auf $3n - s$ Koordinaten $q_1, q_2, \cdots, q_{3n-s}$ transformieren, die die Zwangsbedingungen implizit enthalten und voneinander unabhängig sind. Die alten Koordinaten werden durch die neuen Koordinaten durch Gleichungen der Form

$$\begin{aligned}
\vec{r_1} &= \vec{r_1}(q_1, q_2, \cdots, q_{3n-s}, t) \quad , \\
\vec{r_2} &= \vec{r_2}(q_1, q_2, \cdots, q_{3n-s}, t) \quad , \\
&\vdots \\
\vec{r_n} &= \vec{r_n}(q_1, q_2, \cdots, q_{3n-s}, t)
\end{aligned} \tag{7.4}$$

ausgedrückt. Diese Koordinaten q_i, die jetzt als frei betrachtet werden können, heißen *generalisierte* (oder verallgemeinerte) *Koordinaten*.

Die Benutzung von generalisierten Koordinaten ist auch bei Problemen ohne Zwang nützlich. So läßt sich ein Zentralkraftproblem einfacher und vollständig durch die Koordinaten (r, ϑ, φ) statt durch (x, y, z) beschreiben.

Als generalisierte Koordinaten dienen in der Regel Längen und Winkel. Wie wir später sehen werden, können aber auch Impulse, Energien usw. als generalisierte Koordinaten verwendet werden.

Wir studieren nun Größen der Mechanik, ausgedrückt in generalisierten Koordinaten. Die Geschwindigkeit des i-ten Massenpunktes läßt sich entsprechend der Transformationsgleichung

$$\vec{r_i} = \vec{r_i}(q_1, \cdots, q_\nu, t) \tag{7.5}$$

als

$$\dot{\vec{r_i}} = \frac{\partial \vec{r_i}}{\partial q_1}\frac{dq_1}{dt} + \cdots + \frac{\partial \vec{r_i}}{\partial q_\nu}\frac{dq_\nu}{dt} + \frac{\partial \vec{r_i}}{\partial t} \tag{7.6}$$

darstellen. Im skleronomen Fall fällt der letzte Summand weg. In anderer Form können wir auch schreiben

$$\dot{\vec{r_i}} = \sum_{\alpha=1}^{\nu} \frac{\partial \vec{r_i}}{\partial q_\alpha}\dot{q_\alpha} + \frac{\partial \vec{r_i}}{\partial t} \quad , \tag{7.7}$$

wobei

$$\dot{q_\alpha} = \frac{dq_\alpha}{dt} \tag{7.8}$$

ist, und $\dot{q_\alpha}$ als *generalisierte Geschwindigkeit* bezeichnet wird. Wir beschränken uns im folgenden auf die x-Komponente. Auch betrachten wir nur den skleronomen Fall und schreiben für die x-Komponente

$$\dot{x}_i = \sum_{\alpha=1}^{\nu} \frac{\partial x_i}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha \quad . \tag{7.9}$$

Wir differenzieren diesen Ausdruck noch einmal nach der Zeit und erhalten so für die kartesischen Komponenten der Beschleunigung

$$\ddot{x}_i = \sum_{\alpha=1}^{\nu} \left(\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial x_i}{\partial q_\alpha} \right] \dot{q}_\alpha + \frac{\partial x_i}{\partial q_\alpha} \ddot{q}_\alpha \right) \quad . \tag{7.10}$$

Die totale Ableitung im ersten Term schreiben wir wie üblich

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_\alpha} \right) = \sum_{\beta=1}^{\nu} \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_\beta \partial q_\alpha} \dot{q}_\beta \quad . \tag{7.11}$$

Somit gilt

$$\ddot{x}_i = \sum_{\alpha,\beta=1}^{\nu} \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_\alpha \partial q_\beta} \dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta + \sum_{\alpha=1}^{\nu} \frac{\partial x_i}{\partial q_\alpha} \ddot{q}_\alpha \quad . \tag{7.12}$$

Ein System habe die generalisierten Koordinaten $q_1, \cdots, q_\nu$, die nun einen Zuwachs von $dq_1, \cdots, dq_\nu$ erfahren sollen. Wir wollen die dabei geleistete Arbeit bestimmen. Für eine infinitesimale Verschiebung des i-ten Teilchens gilt

$$d\vec{r}_i = \sum_{\alpha=1}^{\nu} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} dq_\alpha \quad . \tag{7.13}$$

Daraus erhalten wir die geleistete Arbeit als

$$dW = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \cdot \sum_{\alpha=1}^{\nu} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} dq_\alpha = \sum_{i=1}^{\nu} \left(\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} \right) dq_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{\nu} Q_\alpha dq_\alpha \quad , \tag{7.14}$$

wobei

$$Q_\alpha = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} \tag{7.15}$$

ist. Wir nennen Q_α die *verallgemeinerte* oder *generalisierte Kraft*. Da die generalisierten Koordinate nicht die Dimension einer Länge zu haben braucht, muß Q_α nicht die Dimension einer Kraft haben. Das Produkt $Q_\alpha \cdot q_\alpha$ hat allerdings immer die Dimension einer Arbeit.

7.2 Das Hamilton-Prinzip

Als ein fundamentales Grundprinzip der klassischen Mechanik wollen wir jetzt das *Hamilton-Prinzip* behandeln. Das Hamilton-Prinzip fordert, daß sich ein System so bewegt, daß die Wirkung einen Extremalwert annimmt. Die Wirkung war definiert durch

$$\mathcal{A} = \int_{t_1}^{t_2} L\, dt \tag{7.16}$$

mit der *Lagrange-Funktion*

$$L = T - V \quad . \tag{7.17}$$

Das Hamilton-Prinzip ist ein Integralprinzip und heißt auch *Prinzip der kleinsten Wirkung*. Die Tatsache, daß die Wirkung einen Extremwert annehmen soll, drücken wir aus durch

$$\delta \mathcal{A} = 0 \tag{7.18}$$

oder

$$\delta \left[\int_{t_1}^{t_2} L\, dt \right] = 0 \quad . \tag{7.19}$$

Zum Studium des Hamilton-Prinzips wollen wir zunächst allgemein Variationsprobleme diskutieren.

Gegeben sei die integrierbare Funktion

$$F = F(y(x), y'(x)) \quad . \tag{7.20}$$

Wir suchen eine Funktion $y = y(x)$, so daß das Integral

$$I = \int_{x_1}^{x_2} F(y(x), y'(x))\, dx \tag{7.21}$$

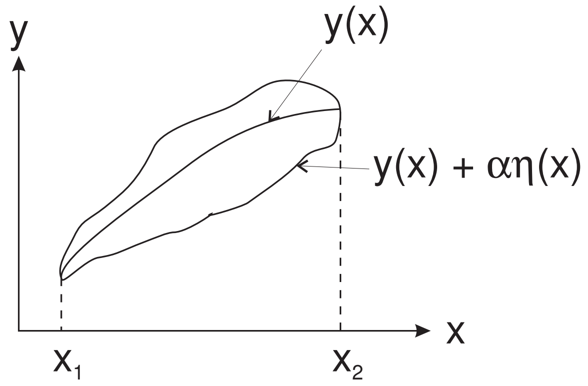
einen Extremalwert annimmt. Dieses Problem wird in eine elementare Extremwertaufgabe überführt, indem wir die Gesamtheit aller physikalisch sinnvollen Wege durch eine Parameterdarstellung erfassen

$$y(x, \epsilon) = y(x) + \alpha\, \eta(x) \quad , \tag{7.22}$$

wobei α einen für jede Bahn konstanten Parameter bedeuten soll. $\eta(x)$ ist eine beliebige differenzierbare Funktion, die an den Endpunkten verschwindet.

$$\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0 \tag{7.23}$$

Die gesuchte Kurve wird durch $y(x) \equiv y(x, 0)$ gegeben.



Durch diese Parametrisierung wird das Integral eine Funktion von α.

$$I = I(\alpha) \quad . \tag{7.24}$$

Dann lautet die notwendige Bedingung für einen Extremwert des Integrals I:

$$\left.\frac{dI}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} = 0 \quad . \tag{7.25}$$

Wir hatten die Parameterdarstellung gewählt

$$y(x,\alpha) = y(x) + \alpha\eta(x) \quad . \tag{7.26}$$

Allgemeiner können wir schreiben

$$y(x,\alpha) = y(x,\alpha=0) + \eta_\alpha(x) \quad , \tag{7.27}$$

wobei $\eta_\alpha(x)$ eine hinreichend oft differenzierbare Funktion sein soll. Ferner gelten die Randbedingungen

$$\eta_\alpha(x_1) = \eta_\alpha(x_2) = 0 \quad \forall\alpha \quad , \tag{7.28}$$

$$\eta_{\alpha=0}(x) \equiv 0 \quad \forall x \quad . \tag{7.29}$$

Eine mögliche sehr einfache Wahl ist die oben genannte

$$\eta_\alpha(x) = \alpha\,\eta(x) \tag{7.30}$$

mit

$$\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0 \quad . \tag{7.31}$$

Für ein festes x ist $\eta_\alpha(x)$ und damit auch $y(x,\alpha)$ eine Funktion von α, die man in eine Taylor-Reihe entwickeln kann

$$\begin{aligned}
\eta_\alpha(x) &= \alpha \left(\frac{\partial \eta_\alpha(x)}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=0} + \frac{\alpha^2}{2}\left(\frac{\partial^2 \eta_\alpha(x)}{\partial \alpha^2}\right)_{\alpha=0} + \cdots \quad , && (7.32)\\
y(x,\alpha) &= y(x,\alpha=0) + \alpha \left(\frac{\partial \eta_\alpha(x)}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=0} + \cdots \quad . && (7.33)
\end{aligned}$$

Wir definieren als Variation der Bahn $y(x,\alpha)$ die Verschiebung δy der Bahn, die man bei einer Veränderung des Parameters α von $\alpha = 0$ auf $d\alpha$ erhält, d.h.

$$\delta y = y(x, d\alpha) - y(x, \alpha = 0) = d\alpha \left(\frac{\partial \eta_\alpha(x)}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=0} \quad . \tag{7.34}$$

Ganz analog definieren wir die Variation des Funktionals $I[y(x)]$ als

$$\begin{aligned}
\delta I &= I[y(x,d\alpha)] - I[y(x,\alpha=0)]\\
&= \left(\frac{dI(\alpha)}{d\alpha}\right)_{\alpha=0} d\alpha\\
&= \int_{x_1}^{x_2} dx\, \left(F(x, y(x,d\alpha), y'(x,d\alpha)) - F\left(x,\, y(x,\alpha=0),\, y'(x,\alpha=0)\right)\right) \quad . && (7.35)
\end{aligned}$$

Die Differentiation unter dem Integralzeichen, was zulässig ist, wenn F stetig differenzierbar in α ist, ergibt:

$$\begin{aligned}
\frac{dI}{d\alpha} &= \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial F}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial \alpha}\right) dx\\
&= \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial y}\eta + \frac{\partial F}{\partial y'}\eta'\right) dx \quad . && (7.36)
\end{aligned}$$

Der zweite Integrand läßt sich partiell integrieren:

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial y'}\frac{\partial \eta}{\partial x}\, dx = \left[\frac{\partial F}{\partial y'}\eta\right]_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\eta\, dx \tag{7.37}$$

Da die Endpunkte fest sein sollen (siehe die Bedingung (7.23), verschwindet der ausintegrierte Term, und die Extremalbedingung lautet

$$\int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\eta\, dx = 0 \quad . \tag{7.38}$$

Da $\eta(x)$ eine beliebige Funktion sein kann, ist diese Gleichung allgemein nur dann erfüllt, wenn

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial F(y(x),y'(x))}{\partial y'} - \frac{\partial F(y(x),y'(x))}{\partial y} = 0 \quad . \tag{7.39}$$

Diese Beziehung heißt *Euler-Lagrange-Gleichung*. Sie stellt eine notwendige Bedingung für einen Extremwert des Integrals I dar.

Die Lösung der Euler-Lagrange-Gleichung, die eine Differentialgleichung zweiter Ordnung ist, ergibt zusammen mit den Randbedingungen den gesuchten Weg.

Wir definieren die Variation einer Funktion $y(x,\alpha)$ als Differenz zwischen $y(x,d\alpha)$ und $y(x,0)$.

$$\delta y = y(x,d\alpha) - y(x,0) = \left.\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0} \cdot d\alpha \tag{7.40}$$

entsprechend der Taylor-Entwicklung für sehr kleine α. Entsprechend formulieren wir die Variationsaufgabe als

$$\delta \int_{x_1}^{x_2} F(y(x),y'(x))\, dx = 0 \quad . \tag{7.41}$$

Wir kehren zurück zum Hamilton-Prinzip. Hierbei wird die Zeit als Koordinate nicht variiert. Das System durchläuft einen Bahnpunkt und den dazugehörigen variierten Bahnpunkt zur gleichen Zeit. Es gilt also

$$\delta t = 0 \quad . \tag{7.42}$$

Ausgehend von dem Integral

$$\delta I = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q_i(t),\dot{q}_i(t),t)\, dt = 0 \quad , \qquad i = 1,2,\cdots,f, \tag{7.43}$$

wobei f die Anzahl der Freiheitsgrade ist, führen wir die Variation durch. Die Variation einer Bahnkurve $q_i(t)$ beschreiben wir durch

$$q_i(t) \to q_i(t) + \delta q_i(t) \quad , \tag{7.44}$$

wobei die δq_i an den Endpunkten verschwinden.

$$\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0 \quad . \tag{7.45}$$

Da die Zeit nicht variiert wird, folgt

$$
\begin{aligned}
\delta \int_{t_1}^{t_2} L \, dt &= \int_{t_1}^{t_2} \delta L \, dt \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right) dt \quad . \qquad (7.46)
\end{aligned}
$$

Wegen

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \delta q_i &= \frac{d}{dt} \left(q_i(t, d\alpha) - q_i(t, 0) \right) = \frac{d}{dt} \left(q_i(t, d\alpha) \right) - \frac{d}{dt} \left(q_i(t, 0) \right) \\
&= \delta \frac{d}{dt} q_i(t) = \delta \dot{q}_i(t) \quad , \qquad (7.47)
\end{aligned}
$$

d. h. Variation und Differentiation vertauschen, liefert die partielle Integration des zweiten Summanden

$$
\begin{aligned}
\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \, dt &= \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{dt} \delta q_i \, dt \\
&= \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i dt \quad . \qquad (7.48)
\end{aligned}
$$

Da δq_i an den Endpunkten (Integralgrenzen) verschwindet, erhalten wir für die Variation des Integrals

$$
\delta I = \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i \right] dt = 0 \quad . \qquad (7.49)
$$

Bei holonomen Zwangsbedingungen denken wir uns die abhängigen Freiheitsgrade eliminiert. Die unabhängigen Koordinaten seien die q_i. Daher sind die δq_i voneinander unabhängig, und das Integral verschwindet nur dann, wenn der Koeffizient eines jeden δq_i verschwindet. Das bedeutet, daß die Lagrange-Gleichungen

$$
\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \qquad (7.50)
$$

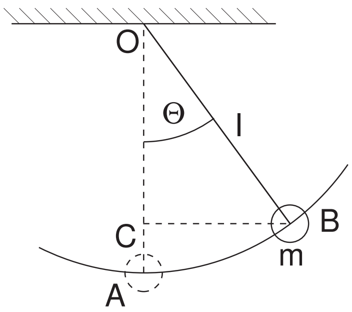
gelten.

Die Lagrange-Funktion hängt dabei von den generalisierten Koordinaten q_i, den generalisierten Geschwindigkeiten $\dot{q}_i$ und der Zeit t ab.

$$
L = L(q_i, \dot{q}_i, t) \quad . \qquad (7.51)
$$

7.3 Anwendungsbeispiel

Als erstes Anwendungsbeispiel für den Lagrange-Formalismus wollen wir die Bewegungsgleichung des Pendels ableiten.



Koordinaten zur Beschreibung der Pendelbewegung

Als generalisierte Koordinaten wählen wir den Winkel θ der Auslenkung. Die kinetische Energie läßt sich ausdrücken als

$$T = \frac{m}{2} v^2 = \frac{m}{2} \left(l\dot{\theta} \right)^2 = \frac{m}{2} l^2 \dot{\theta}^2 \quad . \tag{7.52}$$

Zur Bestimmung der potentiellen Energie wählen wir den Punkt A als Ausgangspunkt. Die potentielle Energie ist

$$V = mgh \tag{7.53}$$

mit

$$h = (OA - OC) = l - l\cos\theta \quad . \tag{7.54}$$

Damit folgt

$$V = mgl(1 - \cos\theta) \quad . \tag{7.55}$$

Die Lagrange-Funktion lautet damit insgesamt

$$L = T - V = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 - mgl(1 - \cos\theta) \quad . \tag{7.56}$$

Die Euler-Lagrange-Gleichung lautet

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \quad . \tag{7.57}$$

Es ist

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \theta} &= -mgl\sin\theta \quad , \\
\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} &= ml^2\dot{\theta}
\end{aligned}
\tag{7.58}
$$

und weiter

$$
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = ml^2\ddot{\theta} \quad . \tag{7.59}
$$

Die Euler-Lagrange-Gleichung ist damit explizit

$$
ml^2\ddot{\theta} + mgl\sin\theta = 0 \tag{7.60}
$$

oder

$$
\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0 \quad . \tag{7.61}
$$

Dies ist die Bewegungsgleichung des Pendels, die wir bereits gelöst haben.

Als ein zweites Anwendungsbeispiel behandeln wir das Kepler-Problem.
Wir verwenden ebene Polarkoordinaten, und die generalisierten Koordinaten sind r und θ. Es ist

$$
L = T - V = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - V(r) \quad . \tag{7.62}
$$

Dabei gilt für die potentielle Energie

$$
V(r) = -\frac{\gamma m M}{r} \quad . \tag{7.63}
$$

Es ist

$$
\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} \quad , \tag{7.64}
$$

sowie

$$
\frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \quad . \tag{7.65}
$$

Damit folgt auf Grund der Euler-Lagrange-Gleichung in der generalisierten Koordinate θ

$$
\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = 0 = \frac{d}{dt}\left(mr^2\dot{\theta}\right) \quad . \tag{7.66}
$$

Dies entspricht gerade dem Flächensatz, denn $\frac{1}{2}r^2\dot{\theta}$ ist gerade die Flächengeschwindigkeit.

Es bleibt daher nur noch die Euler-Lagrange-Gleichung in der Koordinaten r zu untersuchen. Es ist

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \tag{7.67}$$

und daher

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\ddot{r} \quad . \tag{7.68}$$

Ferner ist

$$\frac{\partial L}{\partial r} = mr\dot{\theta}^2 - \frac{\partial V}{\partial r} = mr\dot{\theta}^2 - \frac{\gamma m M}{r^2} \quad . \tag{7.69}$$

Damit resultiert zusammengefaßt

$$m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 + \frac{\gamma m M}{r^2} = 0 \quad . \tag{7.70}$$

Mit der Konstanten

$$h = r^2\dot{\theta} \tag{7.71}$$

folgt schließlich

$$\ddot{r} - \frac{h^2}{r^3} + \frac{\gamma M}{r^2} = 0 \quad . \tag{7.72}$$

Das ist eine Differentialgleichung zweiter Ordnung für die Variable r in Abhängigkeit von der Zeit t, die wir bereits in der Diskussion der Planetenbewegung in der Form $\vec{F}(r) = -\text{grad}\, V(r)$ vorliegen hatten.

Betrachten wir im nächsten Schritt die freie eindimensionale Bewegung, so gilt

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \tag{7.73}$$

und daher

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \quad . \tag{7.74}$$

Dies ist der Impuls des Teilchens. Generell bezeichnen wir die Größe $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$ als den *generalisierten Impuls* des Teilchens.

7.4 Die Hamilton-Theorie

Die Variablen der Lagrange-Funktion sind die generalisierten Koordinaten q_α und die zugehörigen generalisierten Geschwindigkeiten $\dot{q_\alpha}$. In der Hamilton'schen Theorie werden als *unabhängige* Variablen die generalisierten Koordinaten und die zugehörigen Impulse verwendet. Die Ortskoordinaten und die Impulskoordinaten spielen in dieser Theorie eine völlig gleichberechtigte Rolle. Wir suchen jetzt einen Übergang von der Lagrange-Funktion $L(q_i, \dot{q}_i, t)$ zur Hamilton-Funktion $H(q_i, p_i, t)$.

$$L(q_i, \dot{q}_i, t) \Rightarrow H(q_i, p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, t) \tag{7.75}$$

Dieser Übergang wird durch eine *Legendre-Transformation* vermittlelt.

Wir wollen dies anhand eines zweidimensionalen Beispiels illustrieren. Man geht von der Funktion $f(x, y)$ zur Funktion $g(x, u) = g(x, \frac{\partial f}{\partial y})$ über:

$$f(x, y) \Rightarrow g(x, u) \qquad \text{mit} \qquad u = \frac{\partial f}{\partial y} \quad , \tag{7.76}$$

wobei $g(x, u)$ durch

$$g(x, u) = uy - f(x, y) \tag{7.77}$$

definiert wird.

Wenn wir das totale Differential bilden, sehen wir, daß die so gebildete Funktion g nicht mehr y als unabhängige Variable enthält. Es ist

$$\begin{aligned} dg &= y\,du + u\,dy - df = y\,du + u\,dy - \frac{\partial f}{\partial x}\,dx - \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}}_{u}\,dy \\ &= y\,du - \frac{\partial f}{\partial x}\,dx \quad . \end{aligned} \tag{7.78}$$

Nun ist für $g(x, u)$ generell

$$dg = \frac{\partial g}{\partial x}dx + \frac{\partial g}{\partial u}du \quad . \tag{7.79}$$

Durch den Vergleich haben wir

$$y = \frac{\partial g}{\partial u} \tag{7.80}$$

und

$$\frac{\partial g}{\partial x} = -\frac{\partial f}{\partial x} \quad . \tag{7.81}$$

Nach diesem mathematischen Einschub zur Legendre–Transformation wollen wir konkret zur Hamilton-Theorie zurückkehren. Motiviert durch den Ansatz (7.77) definieren wir nun die Hamilton-Funktion als

$$H(q_i, p_i, t) = \sum_i p_i \dot{q}_i - L(q_i, \dot{q}_i, t). \tag{7.82}$$

Gesucht werden nun die Bewegungsgleichungen, die den auf der Lagrange-Funktion L beruhenden Euler-Lagrange-Gleichungen äquivalent sind, aber auf der Hamilton-Funktion H basieren. Dazu bilden wir das totale Differential von $H(q_i, p_i, t)$

$$dH = \sum_i p_i \, d\dot{q}_i + \sum_i \dot{q}_i \, dp_i - dL \quad . \tag{7.83}$$

Das totale Differential der Lagrange-Funktion lautet

$$dL = \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial t} dt \quad . \tag{7.84}$$

Jetzt benutzen wir die Definition des generalisierten Impulses,

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad , \tag{7.85}$$

und die Euler-Lagrange-Gleichung in der Form

$$\frac{dp_i}{dt} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad . \tag{7.86}$$

Wir setzen dies in dL ein und erhalten

$$dL = \sum_i \dot{p}_i \, dq_i + \sum_i p_i \, d\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial t} dt \quad . \tag{7.87}$$

Wir setzen diesen Ausdruck für dL in dH ein. Damit folgt

$$\begin{aligned} dH &= \sum_i p_i \, d\dot{q}_i + \sum_i \dot{q}_i \, dp_i - \sum_i \dot{p}_i \, dq_i - \sum_i p_i \, d\dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt \\ &= \sum_i \dot{q}_i \, dp_i - \sum_i \dot{p}_i \, dq_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt \end{aligned} \tag{7.88}$$

Nun gilt allgemein für $H(q_i, p_i, t)$

$$dH = \sum_i \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \sum_i \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial H}{\partial t} dt. \tag{7.89}$$

Durch Koeffizientenvergleich folgen die *Hamilton'schen Gleichungen*

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad , \tag{7.90}$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad , \tag{7.91}$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} \quad . \tag{7.92}$$

Dies sind die grundlegenden Bewegungsgleichungen in dieser Formulierung der Mechanik. Es ist ein Satz von gekoppelten Differentialgleichungen erster Ordnung in der Zeit. Bei einer eindimensionalen Bewegung eines Teilchens haben wir es in der Lagrange-Theorie mit einer Differentialgleichung zweiter Ordnung der Koordinaten zu tun. In der Hamilton-Theorie liegt eine Differentialgleichung erster Ordnung der Koordinaten vor, dafür gibt es eine zweite Differentialgleichung erster Ordnung bezüglich der Impulskoordinaten. In jedem Fall ergeben sich beim Lösen zwei Integrationskonstanten.

Aus den Hamilton-Gleichungen erkennen wir, daß bei einer Koordinaten, von der die Hamilton-Funktion nicht abhängt, die zugehörige zeitliche Änderung des Impulses verschwindet

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad p_i = \text{konstant} \tag{7.93}$$

Falls die Hamilton-Funktion nicht explizit zeitabhängig ist, ist H eine Konstante der Bewegung. Es ist

$$\frac{dH}{dt} = \sum_i \frac{\partial H}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial H}{\partial p_i} \dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial t} \quad . \tag{7.94}$$

Aufgrund der Hamilton-Gleichungen (7.90) - (7.92) erkennen wir

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} \quad . \tag{7.95}$$

Ist nun $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$, so gilt $\frac{dH}{dt} = 0$ und damit $H =$ konstant.

Wir wollen uns nun der physikalischen Interpretation der Hamilton-Funktion zuwenden.

Es gilt: *Für ein System mit skleronomen Zwangsbedingungen und konservativen inneren Kräften stellt die Hamilton-Funktion H die Gesamtenergie des Systems dar.*

Wir betrachten die eindimensionale Bewegung eines Teilchens mit der generalisierten Koordinate $q = x$ und

$$L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - V(x) \quad . \tag{7.96}$$

Dann ist

$$H = p\dot{x} - L \tag{7.97}$$

mit

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \quad . \tag{7.98}$$

Also ist

$$\begin{aligned} H &= m\dot{x}^2 - L = m\dot{x}^2 - \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + V(x) \\ &= \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + V(x) = T + V = E \quad . \end{aligned} \tag{7.99}$$

Wir wollen diesen Sachverhalt etwas allgemeiner studieren. Wir betrachten zunächst die kinetische Energie

$$T = \frac{1}{2} \sum_\nu m_\nu \dot{\vec{r}}_\nu^{\,2} \,, \qquad \nu = 1, 2, \cdots, N \tag{7.100}$$

N sei die Zahl der Teilchen. Wenn die Zwangsbedingungen holonom und skleronom sind, existieren Transformationsgleichungen $\vec{r}_\nu = \vec{r}_\nu(q_i)$ und damit

$$\dot{\vec{r}}_\nu = \sum_i \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_i} \dot{q}_i \quad . \tag{7.101}$$

Wir setzen dies in die kinetische Energie ein. Dies ergibt

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_\nu m_\nu \sum_{i,k} \left(\frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_i} \dot{q}_i \right) \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_k} \dot{q}_k \right) \\ &= \sum_{i,k} \left(\frac{1}{2} \sum_\nu m_\nu \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_k} \dot{q}_i \dot{q}_k \right) \\ &= \sum_{i,k} a_{ik} \, \dot{q}_i \dot{q}_k \quad . \end{aligned} \tag{7.102}$$

Die kinetische Energie ist also eine homogene quadratische Funktion der generalisierten Geschwindigkeiten. Die darin auftretenden Massenkoeffizienten

$$a_{ik} = \frac{1}{2} \sum_\nu m_\nu \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_k} \tag{7.103}$$

sind symmetrisch, d. h.

$$a_{ik} = a_{ki} \quad . \tag{7.104}$$

Nun läßt sich der Satz von Euler über homogene Funktionen anwenden. Ist f eine homogene Funktion vom Grade n, falls also gilt

$$f(\lambda x_1, \lambda x_2, \cdots, \lambda x_k) = \lambda^n f(x_1, x_2, \cdots x_k) \quad , \tag{7.105}$$

dann gilt ebenso

$$\sum_{i=1}^{k} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = n f \quad . \tag{7.106}$$

Dies läßt sich zeigen, indem wir die Ableitung von (7.105) nach λ bilden, also

$$\frac{\partial f}{\partial(\lambda x_1)} x_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial(\lambda x_k)} x_k = n \lambda^{n-1} f \quad . \tag{7.107}$$

Setzen wir $\lambda = 1$, so folgt die Behauptung. Angewandt auf die kinetische Energie $(n = 2)$ besagt der Satz von Euler

$$\sum_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i = 2T \quad . \tag{7.108}$$

Da konservative Kräfte vorausgesetzt werden, existiert ein geschwindigkeitsunabhängiges Potential $V(q_i)$, so daß gilt

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = p_i \quad . \tag{7.109}$$

Damit folgt weiter

$$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L = \sum_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L \quad . \tag{7.110}$$

Mit (7.108) und der Lagrange-Funktion L erhalten wir

$$H = 2T - (T - V) = T + V = E \quad . \tag{7.111}$$

Aus den Hamilton-Gleichungen lassen sich auch die Newtonschen Bewegungsgleichungen ableiten. Somit können wir die Äquivalenz beider Formulierungen aufzeigen. Es genügt, ein einzelnes Teilchen in einem konservativen Kraftfeld zu betrachten und die kartesischen als generalisierte Koordinaten zu verwenden. Dann gilt

$$
\begin{aligned}
p_i &= m\dot{x}_i \quad , && (7.112)\\
H &= \frac{1}{2}\sum_i m\,\dot{x}_i{}^2 + V(x_i) && (7.113)
\end{aligned}
$$

mit $i = 1, 2, 3$. Ferner folgt

$$
H = \sum_i \frac{p_i^2}{2m} + V(q_i) \quad . \tag{7.114}
$$

Daraus resultieren die Hamilton-Gleichungen $(q_i = x_i)$

$$
\begin{aligned}
\dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{p_i}{m} \quad , && (7.115)\\
\dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i} = -\frac{\partial V}{\partial x_i} && (7.116)
\end{aligned}
$$

oder vektoriell

$$
\dot{\vec{p}} = -\mathrm{grad}\, V. \tag{7.117}
$$

Dies ist die Newtonsche Bewegungsgleichung.

7.5 Anwendungsbeispiel

Als erstes konkretes Anwendungsbeispiel für den Hamilton-Formalismus behandeln wir wieder das Pendel. Wir hatten

$$
L = \frac{1}{2} m l^2\,\dot{\theta}^2 - mgl(1 - \cos\theta) \quad . \tag{7.118}
$$

Damit gilt für den generalisierten Impuls

$$
p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m l^2 \dot{\theta} \quad . \tag{7.119}
$$

Damit läßt sich die kinetische Energie schreiben als

$$
T = \frac{1}{2}\frac{p_\theta^2}{m l^2} \quad . \tag{7.120}
$$

Da die Gesamtenergie des Systems konstant ist, lautet die Hamilton-Funktion

$$
H = T + V = \frac{1}{2}\frac{p_\theta^2}{m l^2} + mgl(1 - \cos\theta) \quad . \tag{7.121}
$$

Die Hamiltonschen Gleichungen liefern

$$\dot{p}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = -mgl\sin\theta \quad , \tag{7.122}$$

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{ml^2} \quad . \tag{7.123}$$

Aus der letzten Gleichung folgt

$$p_\theta = ml^2\,\dot{\theta} \quad . \tag{7.124}$$

Die Differentiation ergibt

$$\dot{p}_\theta = ml^2\,\ddot{\theta} \quad . \tag{7.125}$$

Vergleichen wir dies mit dem Ausdruck für $\dot{p}_\theta$, so erhalten wir abschließend wieder

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\,\sin\theta = 0 \quad . \tag{7.126}$$

Als zweites Beispiel studieren wir erneut das Kepler-Problem. Es ist

$$L = \frac{1}{2}m\,\left(\dot{r}^2 + r^2\,\dot{\theta}^2\right) - V(r) \quad . \tag{7.127}$$

Mit $p_\alpha = \partial L/\partial \dot{q}_\alpha$ erhält man die generalisierten Impulse

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\,\dot{r} \tag{7.128}$$

oder

$$\dot{r} = \frac{p_r}{m} \quad . \tag{7.129}$$

Ebenso folgt

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m\,r^2\,\dot{\theta} \tag{7.130}$$

oder

$$\dot{\theta} = \frac{p_\theta}{m\,r^2} \quad . \tag{7.131}$$

Damit lautet die Hamilton-Funktion

$$H = p_r\,\dot{r} + p_\theta\,\dot{\theta} - L = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} + V(r) \quad . \tag{7.132}$$

Die Hamilton-Gleichungen liefern dann

$$\dot{r} = \frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{p_r}{m} \quad , \tag{7.133}$$

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{m\,r^2} \quad , \tag{7.134}$$

$$\dot{p}_r = -\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{p_\theta^2}{m\,r^3} - \frac{\partial V}{\partial r} \quad , \tag{7.135}$$

$$\dot{p}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = 0 \quad . \tag{7.136}$$

Aus der letzten Gleichung folgt die Erhaltung des Drehimpulses. Wir differenzieren (7.133) nach der Zeit und bekommen

$$m\,\ddot{r} = \dot{p}_r = \frac{p_\theta^2}{m\,r^3} - \frac{\partial V}{\partial r} \quad . \tag{7.137}$$

Aus (7.134) resultiert

$$p_\theta = m\,r^2\,\dot{\theta} \tag{7.138}$$

und somit

$$m\,\ddot{r} = m\,r\,\dot{\theta}^2 - \frac{\partial V}{\partial r} \quad . \tag{7.139}$$

Diese Bewegungsgleichung hatten wir bereits mehrfach abgeleitet. Für diese Fälle ist die Äquivalenz zwischen Newtonscher Formulierung, Lagrange-Formulierung und Hamilton-Formulierung nachgewiesen.

7.6 Hamilton-Gleichungen und Hamilton-Prinzip

Wir können die Hamiltonschen Gleichungen auch aus dem Hamilton-Prinzip ableiten. Dies wollen wir verifizieren.
Das Hamilton-Prinzip lautet

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L\,\mathrm{d}t = 0 \quad . \tag{7.140}$$

Die Lagrange-Funktion können wir durch die Hamilton-Funktion ausdrücken,

$$L = \sum_\alpha p_\alpha\,\dot{q}_\alpha - H(p_\alpha, q_\alpha, t) \quad . \tag{7.141}$$

Damit bekommen wir

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta L\,\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} \sum_\alpha \left[\delta p_\alpha\,\dot{q}_\alpha + p_\alpha\,\delta\dot{q}_\alpha - \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}\,\delta p_\alpha - \frac{\partial H}{\partial q_\alpha}\,\delta q_\alpha\right] \mathrm{d}t \quad . \tag{7.142}$$

Die Zeit wird nicht variiert. Der zweite Term auf der rechten Seite kann durch partielle Integration umgeformt werden:

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} p_\alpha\,\delta\dot{q}_\alpha\,\mathrm{d}t &= \int_{t_1}^{t_2} p_\alpha \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\delta q_\alpha\right) \mathrm{d}t \\ &= p_\alpha\,\delta q_\alpha \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \dot{p}_\alpha\,\delta q_\alpha\,\mathrm{d}t \quad . \end{aligned} \tag{7.143}$$

Der erste Term verschwindet, weil die Variationen an den Endpunkten verschwinden,

$$\delta q_\alpha(t_1) = \delta q_\alpha(t_2) = 0 \quad . \tag{7.144}$$

Damit erhalten wir

$$
\begin{aligned}
0 &= \int_{t_1}^{t_2} \delta L \, \mathrm{d}t \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \sum_\alpha \left\{ \left[\dot{q}_\alpha - \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} \right] \delta p_\alpha + \left[-\dot{p}_\alpha - \frac{\partial H}{\partial q_\alpha} \right] \delta q_\alpha \right\} \mathrm{d}t \quad . \qquad (7.145)
\end{aligned}
$$

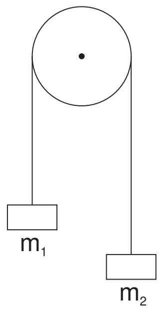
Die Variationen δp_α und δq_α sind unabhängig voneinander, weil entlang einer Bahn im Phasenraum Nachbarbahnen verschiedene Koordinaten und verschiedene Impulse haben können. Damit folgt

$$
\dot{q}_\alpha = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} \quad , \qquad (7.146)
$$

$$
\dot{p}_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial q_\alpha} \quad . \qquad (7.147)
$$

7.7 D'Alembertsches Prinzip

Unter einer virtuellen Verrückung eines Systems versteht man eine Veränderung der Konfiguration des Systems als Ergebnis irgendwelcher willkürlicher infinitesimaler Koordinatenänderungen $\delta\vec{r}_i$, die mit den Kräften und Zwangsbedingungen verträglich sind, denen das System zu einem gegebenen Zeitpunkt t unterworfen ist. Die Verrückung wird virtuell genannt, um sie von einer wirklichen Verrückung des Systems zu unterscheiden, die sich während eines Zeitintervalls $\mathrm{d}t$ ereignet, während dem sich die Kräfte und Zwangsbedingungen ändern können. Als Beispiel betrachten wir zwei Massen, die an einer Rolle über eine Schnur miteinander verbunden sind.



Wir setzen zunächst voraus, daß das System im Gleichgewicht ist, d. h. daß die an jedem Teilchen angreifende Gesamtkraft verschwindet: $\vec{F}_i = 0$. Dann verschwindet natürlich auch das Skalarprodukt $\vec{F} \cdot \delta\vec{r}_i$, das die Arbeit der Kraft $\vec{F}$ längs der Verrückung $\delta\vec{r}_i$ bedeutet. Die Summe dieser verschwindenden Produkte für alle Teilchen muß ebenfalls Null sein:

$$\sum_i \vec{F}_i \cdot \delta\vec{r}_i = 0 \quad . \tag{7.148}$$

Die Kraft $\vec{F}_i$ wird jetzt aufgeteilt in die Zwangskraft $\vec{F}_i^z$ und in die einwirkende oder angewandte Kraft $\vec{F}_i^a$

$$\sum_i \left(\vec{F}_i^a + \vec{F}_i^z\right) \cdot \delta\vec{r}_i = 0 \quad . \tag{7.149}$$

Wir beschränken uns jetzt auf solche Systeme, bei denen die von den Zwangskräften verrichtete Arbeit verschwindet. In vielen Fällen steht die Zwangskraft senkrecht auf der Bewegungsrichtung und das Produkt $\vec{F}_i^z \cdot \delta\vec{r}_i$ verschwindet. Ist ein Massenpunkt zum Beispiel gezwungen, sich auf einer vorgegebenen Raumkurve zu bewegen, so ist seine Bewegungsrichtung immer tangential zur Kurve, die Zwangskraft dagegen normal. Es gibt aber auch Beispiele dafür, daß die einzelnen Zwangskräfte zwar Arbeit verrichten, jedoch die Summe der Arbeiten aller Zwangskräfte verschwindet,

$$\sum_i \vec{F}_i^z \cdot \delta\vec{r}_i = 0 \quad . \tag{7.150}$$

Die Fadenspannungen zweier über einer Rolle hängenden Massen liefern einen solchen Fall. Es ist die eigenliche, richtige Erkenntnis, die im d'Alembertschen Prinzip steckt, daß die Zwangskräfte insgesamt keine Arbeit leisten. Wir haben damit für das Gleichgewicht des Systems die

Bedingung, daß die virtuelle Arbeit der wirkenden Kräfte verschwindet:

$$\sum_i \vec{F}_i^a \cdot \delta\vec{r}_i = 0 \quad . \tag{7.151}$$

Dies wird oft das Prinzip der virtuellen Arbeit genannt. Es ist nicht jeder Summand für sich gleich Null, sondern es verschwindet nur die Summe als ganzes. Wir stellen fest, daß die Koeffizienten von $\delta\vec{r}_i$ nicht länger gleich Null gesetzt werden dürfen, d. h. im allgemeinen gilt $\vec{F}_i^a \neq 0$. Im Grunde genommen liegt das daran, daß die $\delta\vec{r}_i$ nicht vollständig unabhängig, sondern durch die Zwangsbedingungen verknüpft sind. Um die Koeffizienten zum Verschwinden zu bringen, muß man das Prinzip in eine Form überführen, die die virtuelle Verrückungen der q_i enthält, die voneinander unabhängig sind.
Die Bedingung (7.151) gilt aber nur für die Statik. Wir wünschen jedoch eine Bedingung, die die allgemeine dynamische Bewegung des Systems umfaßt. Die Bewegungsgleichungen

$$\vec{F}_i = \dot{\vec{p}}_i \tag{7.152}$$

können geschrieben werden als

$$\vec{F}_i - \dot{\vec{p}}_i = 0 \quad . \tag{7.153}$$

Damit läßt sich die Dynamik auf die statischen Prinzipien zurückführen. Damit können wir sofort schreiben

$$\sum_i \left(\vec{F}_i - \dot{\vec{p}}_i\right) \cdot \delta\vec{r}_i = 0 \tag{7.154}$$

und nach Aufspaltung der Kräfte

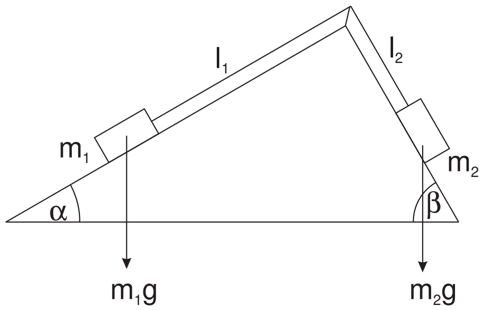
$$\sum_i \left(\vec{F}_i^a - \dot{\vec{p}}_i\right) \cdot \delta\vec{r}_i + \sum_i F_i^z \cdot \delta\vec{r}_i = 0 \quad . \tag{7.155}$$

Wir beschränken uns wieder auf Systeme, für die die virtuelle Arbeit der Zwangskräfte verschwindet. Daher erhalten wir

$$\sum_i \left(\vec{F}_i^a - \dot{\vec{p}}_i\right) \cdot \delta\vec{r}_i = 0 \quad . \tag{7.156}$$

Dies wird oft als d'Alembertsches Prinzip bezeichnet. Die Zwangskräfte treten nicht mehr explizit auf. Jedoch erhalten wir so noch nicht direkt die Bewegungsgleichungen des Systems.

Als Anwendungsbeispiel für das d'Alembertsche Prizip betrachten wir die folgende Anordnung.



Zwei durch ein Seil verbundene Massen auf einer schiefen Ebene.

Die beiden durch ein Seil verbundene Massen sollen sich reibungslos bewegen. Mit Hilfe des d'Alembertschen Prinzips soll die Bewegungsgleichung gefunden werden. Für die beiden Massen lautet das d'Alembertsche Prinzip

$$\left(\vec{F}_1 - \dot{\vec{p}}_1\right) \cdot \delta \vec{l}_1 + \left(\vec{F}_2 - \dot{\vec{p}}_2\right) \cdot \delta \vec{l}_2 = 0 \quad . \tag{7.157}$$

Als Zwangsbedingung ist die Länge des Seils konstant:

$$l_1 + l_2 = l \quad . \tag{7.158}$$

Daraus folgt

$$\delta l_1 = -\delta l_2 \tag{7.159}$$

und

$$\ddot{l}_1 = -\ddot{l}_2 \quad . \tag{7.160}$$

Die Trägheitskräfte sind

$$\dot{\vec{p}}_1 = m_1 \ddot{\vec{l}}_1 \tag{7.161}$$

und

$$\dot{\vec{p}}_2 = m_2 \ddot{\vec{l}}_2 \quad . \tag{7.162}$$

Die Beschleunigung ist parallel zur Verrückung, die Schwerkraft muß in die entsprechenden Komponenten zerlegt werden. Es gilt

$$\left(m_1 \, g \, \sin \alpha - m_1 \, \ddot{l}_1\right) \delta l_1 + \left(m_2 \, g \, \sin \beta - m_2 \, \ddot{l}_2\right) \delta l_2 = 0 \tag{7.163}$$

oder

$$\left(m_1 \, g \, \sin \alpha - m_1 \, \ddot{l}_1 - m_2 \, g \, \sin \beta - m_2 \, \ddot{l}_1\right) \delta l_1 = 0 \quad . \tag{7.164}$$

Damit folgt schließlich

$$\ddot{l}_1 = \frac{m_1 \, \sin \alpha - m_2 \, \sin \beta}{m_1 + m_2} \, g \quad . \tag{7.165}$$

Wir wollen jetzt auf die voneinander unabhängigen generalisierten Koordinaten transformieren. Für holonome Zwangsbedingungen können die Koeffizienten der δq_i einzeln Null gesetzt werden. Wir gehen von den Transformationsgleichungen aus

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, q_2, \ldots, q_n, t) \quad . \tag{7.166}$$

Vorausgesetzt sind n unabhängige Koordinaten. Der Zusammenhang der $\vec{v}_i \equiv \dot{\vec{r}}_i$ mit den $\dot{q}_i$ lautet

$$\vec{v}_i = \sum_j \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\, \dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \quad . \tag{7.167}$$

Ähnlich werden die willkürlichen virtuellen Verrückungen $\delta\vec{r}_i$ mit den virtuellen Verrückungen δq_i verknüpft durch

$$\delta\vec{r}_i = \sum_j \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\, \delta q_j \quad . \tag{7.168}$$

Wir bemerken, daß keine Variation der Zeit δt auftritt, da sich die virtuellen Verrückungen definitionsgemäß nur auf Auslenkungen der Koordinaten beziehen. Mit Hilfe generalisierter Koordinaten läßt sich die virtuelle Arbeit der Kraft $\vec{F}_i$ schreiben als

$$\sum_i \vec{F}_i \cdot \delta\vec{r}_i = \sum_{i,j} \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\, \delta q_j = \sum_j Q_j\, \delta q_j \quad . \tag{7.169}$$

Die Q_j werden Komponenten der generalisierten Kraft genannt. Weiter können wir schreiben

$$\sum_i \dot{\vec{p}}_i \cdot \delta\vec{r}_i = \sum_i m_i\, \ddot{\vec{r}}_i \cdot \delta\vec{r}_i = \sum_{i,j} m_i\, \ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\, \delta q_j \quad . \tag{7.170}$$

Wir betrachten nun den Ausdruck

$$\sum_i m_i\, \ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \sum_i \left\{ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(m_i\, \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) - m_i\, \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) \right\} \quad . \tag{7.171}$$

Im letzten Term können wir die Reihenfolge der Differentiation bezüglich t und q_j vertauschen. Es gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) = \sum_k \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_j\, \partial q_k}\, \dot{q}_k + \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_j\, \partial t} \quad . \tag{7.172}$$

Dies ist nach (7.167) gerade $\partial \vec{v}_i / \partial q_j$. Nach (7.167) gilt ferner

$$\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \quad . \tag{7.173}$$

Dies setzen wir in (7.171) ein und erhalten

$$\sum_i m_i\, \ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \sum_i \left\{ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(m_i \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) - m_i \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_j} \right\} \quad . \tag{7.174}$$

Dies führt weiter auf

$$\sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$$
$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\left(\sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2\right)\right) - \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2\right) \quad . \tag{7.175}$$

$\sum\limits_i \frac{1}{2} m_i v_i^2$ ist die kinetische Energie T des Systems.
Damit wird zusammengefaßt aus dem d'Alembert-Prinzip

$$\sum_j \left[\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j}\right\} - Q_j\right] \delta q_j = 0 \quad . \tag{7.176}$$

Wenn nun die Zwangsbedingungen holonom sind, dann sind die q_j unabhängig. Nur hier wird von der Eigenschaft „holonom" Gebrauch gemacht. Irgendeine virtuelle Verrückung δq_j ist unabhängig von δq_k. Damit ist die Gleichung (7.176) nur dann erfüllt, wenn die einzelnen Koeffizienten verschwinden

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j \quad . \tag{7.177}$$

Es gibt n solcher Gleichungen. Ausgehend von diesen Gleichungen wollen wir nun weiter den Spezialfall konservativer Systeme behandeln. Dann gilt

$$\vec{F}_i = -\vec{\nabla}_i V \quad . \tag{7.178}$$

Die generalisierten Kräfte können ausgedrückt werden als

$$Q_j = \sum_i \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = -\sum_i \vec{\nabla}_i V \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = -\frac{\partial V}{\partial q_j} \quad , \tag{7.179}$$

da gilt $V = V(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_n)$. Somit erhalten wir aus (7.177)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial (T-V)}{\partial q_j} = 0 \quad . \tag{7.180}$$

Das Potential V ist eine Funktion allein der Lage und muß deshalb unabhängig von den generalisierten Geschwindigkeiten sein. Wir addieren die partielle Ableitung von V bezüglich $\dot{q}_j$. Es folgt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial (T-V)}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial (T-V)}{\partial q_j} = 0 \quad . \tag{7.181}$$

Definieren wir jetzt die Lagrange-Funktion L als

$$L = T - V \quad , \tag{7.182}$$

so erhalten wir die Euler-Lagrange-Differentialgleichungen

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad . \tag{7.183}$$

Lagrangesche Gleichungen können auch dann in der Form (7.183) aufgestellt werden, wenn das System nicht konservativ im üblichen Sinne ist. Voraussetzung ist aber, daß die generalisierten Kräfte von einer Funktion $U(q_j, \dot{q}_j)$ nach der Vorschrift

$$Q_j = -\frac{\partial U}{\partial q_j} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j}\right) \tag{7.184}$$

hergeleitet sind. In diesem Fall verwenden wir die Lagrange-Funktion in der Form

$$L = T - U \quad . \tag{7.185}$$

U ist das generalisierte Potential oder ein geschwindigkeitsabhängiges Potential.
Es sei ferner darauf hingewiesen, daß dann, wenn nur einige der auf das System wirkenden Kräfte von einem Potential herleitbar sind, die Lagrangeschen Gleichungen stets in folgender Form geschrieben werde können

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_j \quad . \tag{7.186}$$

Darin enthält L das Potential der konservativen Kräfte wie bisher und die Q_j stellen die Kräfte dar, die nicht von einem Potential herrühren. Eine solche Situation tritt oft dann ein, wenn Reibungskräfte wirksam sind. Reibungskräfte können proportional zur Geschwindigkeit des Teilchens sein. Die x-Komponente hat dann die Form

$$F_{fx} = -k_x\, v_x \quad . \tag{7.187}$$

Reibungskräfte dieses Typs können durch die Rayleighsche Dissipationsfunktion beschrieben werden.
Sie ist definiert durch

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2}\sum_i \left(k_x\, v_{ix}^2 + k_y\, v_{iy}^2 + k_z\, v_{iz}^2\right) \quad . \tag{7.188}$$

Darin ist die Summation über alle Teilchen des Systems vorzunehmen. Aus dieser Definition folgt

$$F_{fx} = -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial v_x} \tag{7.189}$$

oder

$$\vec{F}_f = -\vec{\nabla}_v \mathcal{F} \quad . \tag{7.190}$$

Man kann der Dissipationsfunktion auch eine physikalische Interpretation geben. Die vom System gegen die Reibung geleistete Arbeit ist

$$\begin{aligned} \mathrm{d}W_f &= -\vec{F}_f \cdot \mathrm{d}\vec{r} = -\vec{F}_f \cdot \vec{v}\,\mathrm{d}t \\ &= \left(k_x\, v_x^2 + k_y\, v_y^2 + k_z\, v_z^2\right)\mathrm{d}t \quad . \end{aligned} \tag{7.191}$$

Demnach ist $2\mathcal{F}$ der Anteil der Energiedissipation, der von der Reibung herrührt. Die Komponente der generalisierten Kraft, die ihren Ursprung in der Reibungskraft hat, ist gegeben durch

$$Q_j = \sum_i \vec{F}_{if} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = - \sum_i \vec{\nabla}_v \mathcal{F} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \quad . \tag{7.192}$$

Nun hatten wir abgeleitet, daß gilt

$$\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j} \quad . \tag{7.193}$$

Damit bekommen wir

$$Q_j = - \sum_i \vec{\nabla}_v \mathcal{F} \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} = - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{q}_j} \quad . \tag{7.194}$$

Damit lauten die Lagrangeschen Gleichungen

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{q}_j} = 0 \quad . \tag{7.195}$$

Somit müssen zwei skalare Funktionen, L und $\mathcal{F}$, angegeben werden, um die Bewegungsgleichungen zu erhalten.

7.8 Methode der Lagrange-Multiplikatoren

Wir wollen nun das Hamilton-Prinzip erweitern auf nichtkonservative und nichtholonome Systeme. Man wird dann auf die bereits abgeleiteten Gleichungen der Form

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j \tag{7.196}$$

geführt. Dieses erweiterte Hamilton-Prinzip lautet:

$$\delta I = \delta \int_{t_1}^{t_2} (T + W)\,\mathrm{d}t = 0 \quad . \tag{7.197}$$

Die Endpunkte sind fest wie bisher. Jetzt ist W gegeben durch

$$W = \sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{r}_i \quad . \tag{7.198}$$

δW stellt die Arbeit dar, die durch die auf das System wirkenden Kräfte während der virtuellen Verrückung vom tatsächlichen zum variierten Weg geleistet wird. Das Hamilton-Prinzip lautet also: Das Variationsintegral über die Summe aus kinetischer Energie und der bei der Variation auftretenden virtuellen Arbeit muß Null sein. Es wurde bereits gezeigt, daß gilt

$$\sum_i \vec{F}_i \cdot \delta\vec{r}_i = \sum_j Q_j \cdot \delta q_j \quad . \tag{7.199}$$

Also lautet das Hamilton-Prinzip

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} T\,\mathrm{d}t + \int_{t_1}^{t_2} \sum_j Q_j\,\delta q_j\,\mathrm{d}t = 0 \quad . \tag{7.200}$$

Falls sich die Q_j von einem generalisierten Potential ableiten lassen, folgt wieder das ursprüngliche Hamilton-Prinzip.
Unter diesen Bedingungen ergibt sich

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_j Q_j\,\delta q_j\,\mathrm{d}t = -\int_{t_1}^{t_2} \sum_j \delta q_j \left(\frac{\partial V}{\partial q_j} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j}\right)\mathrm{d}t \quad . \tag{7.201}$$

Kehren wir die partielle Integration um, so folgt

$$-\int_{t_1}^{t_2} \sum_j \left(\frac{\partial V}{\partial q_j}\,\delta q_j + \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j}\,\delta \dot{q}_j\right)\mathrm{d}t = -\delta \int_{t_1}^{t_2} V\,\mathrm{d}t \quad . \tag{7.202}$$

Zusammengefaßt haben wir damit in diesem Spezialfall

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} T\,\mathrm{d}t - \delta \int_{t_1}^{t_2} V\,\mathrm{d}t = \delta \int_{t_1}^{t_2} L\,\mathrm{d}t = 0 \quad . \tag{7.203}$$

Wir kehren zum allgemeineren Problem zurück. Die Variation des ersten Terms kann geschrieben werden als

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} T \,\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} \sum_j \left(\frac{\partial T}{\partial q_j} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) \delta q_j \,\mathrm{d}t \quad . \tag{7.204}$$

Somit lautet das Hamilton-Prinzip

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_j \left(\frac{\partial T}{\partial q_j} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} + Q_j \right) \delta q_j \,\mathrm{d}t = 0 \quad . \tag{7.205}$$

Bei holonomen Zwangsbedingungen erhalten wir in der Tat

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j \quad . \tag{7.206}$$

Es ist möglich, das Hamilton-Prinzip so zu erweitern, daß es bestimmte Typen nichtholonomer System umfaßt. Bei der Ableitung der Euler-Lagrange-Gleichungen tritt die Forderung nach holonomen Zwangsbedingungen nicht vor dem letzten Rechenschritt auf. Bei nichtholonomen Zwangsbedingungen sind die q_j nicht mehr alle unabhängig voneinander. Wir können nichtholonome Systeme auch dann noch behandeln, wenn die Zwangsbedingungen in die folgende Form gebracht werden können

$$\sum_k a_{lk} \,\mathrm{d}q_k + a_{lt} \,\mathrm{d}t = 0 \quad , \tag{7.207}$$

d. h. in eine Beziehung zwischen den Differentialen der q. Dabei gilt: $k = 1, 2, \ldots, n$ und entspricht der Zahl der Koordinaten, $l = 1, 2, \ldots, m$ und entspricht der Zahl der Zwangsbedingungen.

Die weiteren Betrachtungen sind unabhängig davon, ob die Gleichungen (7.207) integrabel sind oder nicht, d. h. sie gelten sowohl für holonome als auch für nichtholonome Zwangsbedingungen. Demnach kann die im folgenden hergeleitete Methode auch für holonome Zwangsbedingungen verwendet werden, wenn es unerwünscht ist, alle q_k auf unabhängige Koordinaten zu reduzieren oder wenn man die Zwangskräfte zu ermitteln wünscht. Gleichung (7.207) ist keineswegs der allgemeinste Typ einer nichtholonomen Zwangsbedingung, z. B. werden Zwangsbedingungen in der Form von Ungleichungen nicht erfaßt. Bei den folgenden Ableitungen gehen wir wieder vom d'Alembertschen Prinzip aus. Es lautet in generalisierten Koordinaten:

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} - Q_k \right) \delta q_k = 0 \quad . \tag{7.208}$$

Diese Gleichung gilt für Zwangsbedingungen jeder Art. Die q_k sollen jetzt voneinander *abhängig* sein. Daher sind die virtuellen Verrückungen δq_k nicht wie früher frei wählbar. Um die Zahl der virtuellen Verrückungen auf die der unabhängigen Verrückungen zu reduzieren, führen wir die zunächst frei wählbaren Lagrange-Multiplikatoren λ_l ein. Diese Lagrange-Multiplikatoren λ_l mit $l = 1, 2, \ldots, m$ sind im allgemeinen Funktionen der Zeit und der q_k und der $\dot{q}_k$:

$$\lambda_l = \lambda_l(t, q_k, \dot{q}_k) \quad . \tag{7.209}$$

Virtuelle Verrückungen δq_k werden zur festen Zeit, d. h. mit $\delta t = 0$ durchgeführt. Damit geht (7.207) über in

$$\sum_{k=1}^{n} a_{lk}\, \delta q_k = 0 \quad . \tag{7.210}$$

Man nennt dies auch die instantanen, d. h. zu einer festen Zeit gehörigen Nebenbedingungen. Daraus wiederum ergibt sich

$$\sum_{l=1}^{m} \lambda_l \sum_{k=1}^{n} a_{lk}\, \delta q_k = 0 \tag{7.211}$$

bzw.

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{l=1}^{m} \lambda_l a_{kl} \right) \delta q_k = 0 \quad . \tag{7.212}$$

Wir subtrahieren diese Gleichung von (7.208)

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} - Q_k - \sum_{l=1}^{m} \lambda_l a_{lk} \right) \delta q_k = 0 \tag{7.213}$$

für $k = 1, \ldots, m, \ldots, n$. In diesen Gleichungen kommen insgesamt n der Variablen q_k vor. Davon sind m abhängige q_k, die über die Zwangsbedingungen mit den unabhängigen verbunden sind, und $n - m$ unabhängige q_k. Wir setzen jetzt fest: Für die abhängigen q_k soll der Index k von $k = 1$ bis $k = m$ laufen, für die unabhängigen q_k von $k = m + 1$ bis $k = n$. Die Koeffizienten der δq_k in Gleichung (7.213) sind über die m Lagrange-Multiplikatoren λ_l ($l = 1, 2, \ldots, m$) soweit zu unserer Verfügung, wie es die m Gleichungen für die Zwangsbedingungen zulassen. Da die λ_l frei wählbar sind, können wir sie so bestimmen, daß

$$\sum_{l=1}^{m} \lambda_l\, a_{lk} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} - Q_k \tag{7.214}$$

mit $k = 1, \ldots, m$, wird. D. h. die ersten m Koeffizienten, die den abhängigen q_k entsprechen, werden Null gesetzt. Von den Gleichungen (7.213) verbleibt dann

$$\sum_{k=m+1}^{n} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} - Q_k - \sum_{l=1}^{m} \lambda_l\, a_{lk} \right) \delta q_k = 0 \quad . \tag{7.215}$$

Diese δq_k (für $k = m + 1, \ldots, n$) sind keinen Zwangsbedingungen mehr unterworfen; das bedeutet, daß diese δq_k voneinander unabhängig sind.
Dann muß man, wie schon bei der Herleitung der Lagrange-Gleichung für holonome Systeme, die Koeffizienten der δq_k ($k = m + 1, \ldots, n$) gleich Null setzen. Zusammen mit den m Gleichungen für die abhängigen q_k führt dies zu insgesamt n Gleichungen

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} - Q_k - \sum_{l=1}^{m} \lambda_l\, a_{lk} = 0 \tag{7.216}$$

für $k = 1, \ldots, m, m+1, \ldots, n$.
Für konservative Systeme sind die Q_k aus einem Potential V herleitbar

$$Q_k = -\frac{\partial V}{\partial q_k} \quad . \tag{7.217}$$

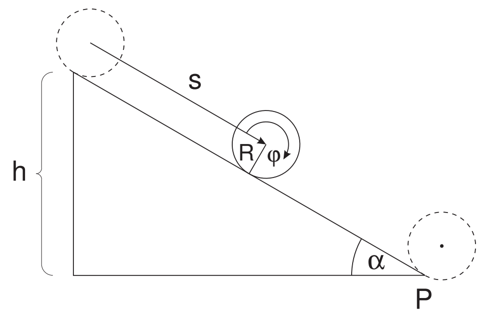
Analog zu der Herleitung der Lagrange-Gleichung bei holonomen Systemen erhalten wir dann mit der Lagrange-Funktion $L = T - V$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} - \sum_{l=1}^{m} \lambda_l \, a_{lk} = 0 \tag{7.218}$$

mit $k = 1, \ldots, n$. Diese Gleichungen enthalten $n + m$ Unbekannte, nämlich die n Koordinaten q_k und die m Lagrange-Multiplikatoren λ_l. Die zusätzlich benötigten Gleichungen sind gerade die m Zwangsbedingungen, die die q_k verknüpfen, allerdings sind sie jetzt als Differentialgleichungen zu schreiben:

$$\sum_k a_{lk} \, \dot{q}_k + a_{lt} = 0 \tag{7.219}$$

für $l = 1, 2, \ldots, m$.
Damit haben wir zusammen $n + m$ Gleichungen für $n + m$ Unbekannte. Dabei erhalten wir als Lösungen nicht nur die q_k, die wir finden wollten, sondern auch die m Größen λ_l.
Zur Illustration der Methode der Lagrange-Multiplikatoren betrachten wir einen Vollzylinder, der ohne Schlupf eine schiefe Ebene mit der Höhe h und dem Neigungswinkel α hinabrollt. Die Rollbedingung ist eine holonome Zwangsbedingung. Für die Demonstration der Methode ist dies jedoch unbedeutend.



Zylinder rollt ohne Schlupf auf schiefer Ebene

Die beiden generalisierten Koordinaten sind s und φ. Die Zwangsbedingung lautet

$$R \, \dot{\varphi} = \dot{s} \tag{7.220}$$

oder

$$R \, \mathrm{d}\varphi - \mathrm{d}s = 0 \quad . \tag{7.221}$$

Das Integral dieser Zwangsbedingung ist

$$f = R\varphi - s = 0 \quad . \tag{7.222}$$

Folglich ist diese Zwangsbedingung holonom. Die Koeffizienten, die in der Zwangsbedingung auftreten, lauten

$$a_s = -1 \quad , \tag{7.223}$$

$$a_\varphi = R \quad . \tag{7.224}$$

Dies folgt durch Vergleich mit der generellen Gleichung

$$\sum_k a_{lk}\,\delta q_k = 0 \tag{7.225}$$

mit $l = 1$ als Zahl der Zwangsbedingungen und $\delta t = 0$.
Die kinetische Energie T kann dargestellt werden als Summe der kinetischen Energie der Bewegung des Massenzentrums und der kinetischen Energie der Bewegung um das Massenzentrum

$$T = \frac{1}{2}\,m\,\dot{s}^2 + \frac{1}{2}\,\Theta\,\dot{\varphi}^2 \quad . \tag{7.226}$$

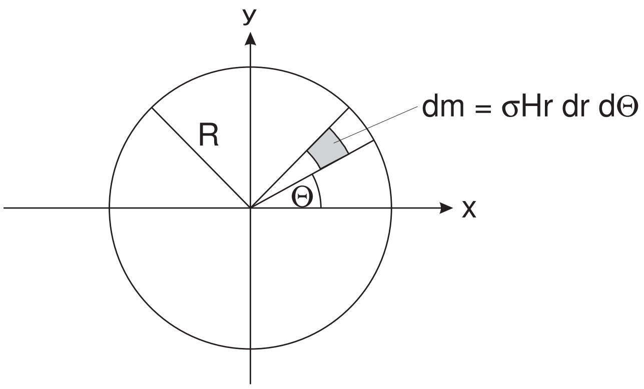
Θ bezeichnet das Trägheitsmoment des Vollzylinders, das wir zunächst berechnen wollen. Es ist

$$\Theta = \int r^2\,\mathrm{d}m \tag{7.227}$$

mit

$$\mathrm{d}m = \sigma\,H\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta \quad . \tag{7.228}$$

H bezeichnet die Höhe des Zylinders.



Wir verwenden Polarkoordinaten (r, θ). Damit folgt

$$\begin{aligned}\Theta &= \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{R} r^2\,\sigma\,H\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^{R}\sigma\,H\,r^3\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{R} 2\pi\,\sigma\,H\,r^3\mathrm{d}r = \frac{1}{2}\,\pi\sigma\,H\,R^4 \quad . \end{aligned}\tag{7.229}$$

Die Masse des Zylinders ist gegeben durch

$$m = \sigma \, H \, \pi \, R^2 \quad . \tag{7.230}$$

Damit resultiert

$$\Theta = \frac{1}{2} \, m \, R^2 \quad . \tag{7.231}$$

Damit folgt für die kinetische Energie des abrollenden Zylinders

$$T = \frac{m}{2} \left(\dot{s}^2 + \frac{R^2}{2} \, \dot{\varphi}^2 \right) \quad . \tag{7.232}$$

Die potentielle Energie ist

$$V = m \, g \, h - m \, g \, s \, \sin \alpha \quad . \tag{7.233}$$

Sie ist so normiert, daß sie am Punkt P verschwindet. Damit lautet die Lagrange-Funktion

$$L = T - V = \frac{m}{2} \left(\dot{s}^2 + \frac{R^2}{2} \, \dot{\varphi}^2 \right) - m \, g \, (h - s \, \sin \alpha) \quad . \tag{7.234}$$

Diese Lagrange-Funktion kann jetzt nicht mehr direkt zur Ableitung der Bewegungsgleichung verwendet werden, da die beiden Koordinaten s und φ nicht unabhängig voneinander sind. Obwohl φ nicht explizit in der Lagrange-Funktion auftritt, ist es keine ignorable Koordinate. Da nur eine Zwangsbedingung vorliegt, wird nur ein Lagrange-Multiplikator λ benötigt. Mit den Koeffizienten $a_s = -1$ und $a_\varphi = R$ bekommen wir für die Lagrange-Gleichungen allgemein

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} - \sum_{l=1}^{m} \lambda_l \, a_{lk} \;=\; 0 \tag{7.235}$$

$(k = 1, 2)$ und damit speziell mit $l = m = 1$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \dot{s}} - \frac{\partial L}{\partial s} - \lambda \, a_s \;=\; m \, \ddot{s} - m \, g \, \sin \alpha + \lambda \;=\; 0 \quad , \tag{7.236}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} - \lambda \, a_\varphi \;=\; \frac{m}{2} \, R^2 \, \ddot{\varphi} - \lambda \, R = 0 \quad . \tag{7.237}$$

Zusammen mit der Zwangsbedingung

$$R \, \dot{\varphi} = \dot{s} \tag{7.238}$$

sind dies drei Gleichungen zur Bestimmung der drei Unbekannten φ, s und λ. Wir differenzieren die Zwangsbedingungen nach der Zeit

$$R \, \ddot{\varphi} = \ddot{s} \quad . \tag{7.239}$$

Zusammen mit (7.237) ergibt sich

$$\frac{m}{2} \, R \, \ddot{s} - \lambda \, R = 0 \tag{7.240}$$

und daher
$$m\,\ddot{s} = 2\lambda \quad . \tag{7.241}$$
Aus (7.236) folgt
$$m\,g\,\sin\alpha = 3\lambda \quad . \tag{7.242}$$
Damit ist der Lagrange-Multiplikator bestimmt:
$$\lambda = \frac{1}{3}\,m\,g\,\sin\alpha \quad . \tag{7.243}$$
Die Zwangskräfte lauten
$$a_s\,\lambda \;=\; -\frac{1}{3}\,m\,g\,\sin\alpha \quad , \tag{7.244}$$
$$a_\varphi\,\lambda \;=\; \frac{1}{3}\,R\,m\,g\,\sin\alpha \quad . \tag{7.245}$$
Dabei ist $a_s\lambda$ die von der Reibung hervorgerufene Zwangskraft. $a_\varphi\lambda$ ist das von dieser Kraft bewirkte Drehmoment, das den Zylinder zum Rollen bringt. Die Nebenbedingung „Rollen“ erfordert als besondere Zwangskraft eine Reibungskraft. Wir haben diese Kraft ausgerechnet. Setzen wir den Lagrange-Multiplikator λ in Gleichung (7.236) ein, so erhalten wir die Differentialgleichung für s
$$\ddot{s} = \frac{2}{3}\,g\,\sin\alpha \quad . \tag{7.246}$$
Aus (7.239) bekommen wir
$$\ddot{\varphi} = \frac{2}{3}\,\frac{g}{R}\,\sin\alpha \quad . \tag{7.247}$$
Diese Gleichungen sind trivial zu integrieren. An diesem Beispiel haben wir gesehen, daß sich bei Verwendung der Methode der Lagrange-Multiplikatoren nicht nur die gesuchten Bewegungsgleichungen ergeben, sondern auch die ansonsten im üblichen Lagrange-Formalismus nicht auftretenden Zwangskräfte.

8 Hamilton-Mechanik

In der Lagrange-Mechanik wird der Zustand eines Systems durch die S generalisierten Koordinaten $\vec{q} = (q_1, q_2, \ldots, q_s)$ und S generalisierten Geschwindigkeiten $\dot{\vec{q}} = (\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_s)$ beschrieben. $S = 3N - k$ ist die Dimension des Konfigurationsraumes für N Teilchen unter k Zwangsbedingungen; $3N$ ist die Zahl der kartesischen Koordinaten. Durch den Übergang von kartesischen zu den generalisierten Koordinaten haben wir die unhandlichen Zwangskräfte eliminiert, welche in der Newton-Mechanik auftraten.
In der Hamilton-Mechanik werden generalisierte Geschwindigkeiten durch generalisierte Impulse ersetzt

$$(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) \rightarrow (\vec{q}, \vec{p}, t) \quad .$$

$\vec{q}$ und $\vec{p}$ werden als voneinander unabhängige Variable aufgefaßt. Der Übergang wird durch eine Legendre-Transformation vollzogen.

8.1 Legendre-Transformation

Eine Legendre-Transformation $f(x) \rightarrow g(u)$ ist definiert durch den Variablenwechsel

$$g(u) = f(x) - ux = f(x) - x\frac{df}{dx} \tag{8.1}$$

mit $u \equiv df/dx$. Daraus folgt $dg/du = -x$. Die Rücktransformation ist eindeutig, wenn $d^2f/dx^2 \neq 0$, d. h., wenn $u \neq$ const.
Das läßt sich verallgemeinern für eine Funktion zweier Variabler $f(x, y)$ mit dem Differential

$$df = u(x, y)\, dx + v(x, y)\, dy \tag{8.2}$$

und

$$u(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y \quad , \qquad v(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x \quad . \tag{8.3}$$

Dazu betrachten wir x als passive und y als aktive Variable. Die Legendre-Transformation ist dann gegeben durch

$$g(x, v) = f(x, y) - vy = f(x, y) - y\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \quad . \tag{8.4}$$

Wir transformieren nun die Lagrange-Funktion,

$$L = L(q_1, ..., q_s, \dot{q}_1, ..., \dot{q}_s, t) \tag{8.5}$$

mit den $\dot{q}_1, ..., \dot{q}_s$ als aktive Variable, welche durch die generalisierten Impulse

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad , \qquad i = 1, \ldots, S \tag{8.6}$$

ersetzt werden sollen. Die negative Legendre-Transformierte ist dann nichts anderes als die Hamilton-Funktion

$$H(q_1, ..., q_s, p_1, ..., p_s, t) = \sum_{i=1}^{S} p_i \dot{q}_i - L(q_1, ..., q_s, \dot{q}_1, ..., \dot{q}_s, t) \quad . \tag{8.7}$$

8.2 Poisson-Klammern

Jede beliebige mechanische Observable ist als Phasenraumfunktion

$$f(\vec{\pi}, t) = f(\vec{q}, \vec{p}, t) \tag{8.8}$$

im $2S$-dimensionalen Phasenraum darstellbar. Ihre totale zeitliche Ableitung lautet

$$\frac{df}{dt} = \sum_{j=1}^{S} \left(\frac{\partial f}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial f}{\partial p_j} \dot{p}_j \right) + \frac{\partial f}{\partial t} \quad . \tag{8.9}$$

Unter Berücksichtigung der kanonischen Gleichungen folgt daraus

$$\frac{df}{dt} = \sum_{j=1}^{S} \left(\frac{\partial f}{\partial q_j} \frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial H}{\partial q_j} \right) + \frac{\partial f}{\partial t} \quad . \tag{8.10}$$

Nun definieren wir die Poisson-Klammer für zwei skalare Funktionen $f(\vec{q}, \vec{p}, t)$ und $g(\vec{q}, \vec{p}, t)$ als

$$\{f, g\}_{q,p} = \sum_{j=1}^{S} \left(\frac{\partial f}{\partial q_j} \frac{\partial g}{\partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial g}{\partial q_j} \right) . \tag{8.11}$$

Mit dieser Definition erhalten wir für die Zeitableitung von f die abkürzende Schreibweise

$$\frac{df}{dt} = \{f, H\}_{q,p} + \frac{\partial f}{\partial t} \quad . \tag{8.12}$$

Die Bedeutung dieser Schreibweise liegt darin, daß die Poisson-Klammer von der $(\vec{q}, \vec{p})$-Wahl unabhängig ist. Das werden wir weiter unten nachweisen. Zunächst einige wichtige Spezialfälle:

$$\dot{q}_j = \{q_j, H\}_{q,p} \quad , \tag{8.13}$$

$$\dot{p}_j = \{p_j, H\}_{q,p} \quad . \tag{8.14}$$

Die nächsten drei Beziehungen bezeichnet man als fundamentale Poisson-Klammer:

$$\{q_i, q_j\}_{q,p} = 0 \quad , \tag{8.15}$$

$$\{p_i, p_j\}_{q,p} = 0 \quad , \tag{8.16}$$

$$\{q_i, p_j\}_{q,p} = \delta_{ij} \quad . \tag{8.17}$$

Wir begründen (8.17). Dazu setzen wir in (8.11) $f = q_i$ und $g = p_j$ ein

$$\{q_i, p_j\}_{q,p} = \sum_{k=1}^{S} \left(\frac{\partial q_i}{\partial q_k} \frac{\partial p_j}{\partial p_k} - \frac{\partial q_i}{\partial p_k} \frac{\partial p_j}{\partial q_k} \right) = \sum_{k=1}^{S} (\delta_{ik} \, \delta_{jk}) = \delta_{ij} \quad . \tag{8.18}$$

8.3 Unabhängigkeit bei kanonischen Transformationen

Nun beweisen wir, daß der Wert der Poisson-Klammer unabhängig von dem Satz kanonischer Koordinaten $(\vec{q}, \vec{p})$ bzw. $(\vec{Q}, \vec{P})$ ist.

1. Zunächst zeigen wir, daß für zwei kanonisch konjugierte Variablensätze $(\vec{q}, \vec{p})$ und $(\vec{Q}, \vec{P})$ mit $H(\vec{q}, \vec{p}) = \tilde{H}(\vec{Q}, \vec{P})$ und den kanonische Gleichungen

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \qquad \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k} \tag{8.19}$$

sowie

$$\dot{Q}_k = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P_k}, \qquad \dot{P}_k = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q_k} \tag{8.20}$$

die fundamentalen Poisson-Klammern unverändert bleiben.

$$\begin{aligned} \{Q_i, Q_j\}_{q,p} &= 0 \quad , \\ \{P_i, P_j\}_{q,p} &= 0 \quad , \\ \{Q_i, P_j\}_{q,p} &= \delta_{ij} \quad . \end{aligned} \tag{8.21}$$

Der Beweis lautet

$$\begin{aligned} \dot{Q}_i &= \frac{d}{dt} Q_i(\vec{q}, \vec{p}) = \sum_{k=1}^{S} \left(\frac{\partial Q_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial Q_i}{\partial p_k} \dot{p}_k \right) = \sum_{k=1}^{S} \left(\frac{\partial Q_i}{\partial q_k} \frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial Q_i}{\partial p_k} \frac{\partial H}{\partial q_k} \right) \\ &= \sum_{k,l}^{S} \left[\frac{\partial Q_i}{\partial q_k} \left(\frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q_l} \frac{\partial Q_l}{\partial p_k} + \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P_l} \frac{\partial P_l}{\partial p_k} \right) - \frac{\partial Q_i}{\partial p_k} \left(\frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q_l} \frac{\partial Q_l}{\partial q_k} + \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P_l} \frac{\partial P_l}{\partial q_k} \right) \right] \\ &= \sum_{k,l}^{S} \left[\frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q_l} \left(\frac{\partial Q_i}{\partial q_k} \frac{\partial Q_l}{\partial p_k} - \frac{\partial Q_i}{\partial p_k} \frac{\partial Q_l}{\partial q_k} \right) + \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P_l} \left(\frac{\partial Q_i}{\partial q_k} \frac{\partial P_l}{\partial p_k} - \frac{\partial Q_i}{\partial p_k} \frac{\partial P_l}{\partial q_k} \right) \right] \\ &= \sum_{l} \left[-\dot{P}_l \{Q_i, Q_l\}_{q,p} + \dot{Q}_l \{Q_i, P_l\}_{q,p} \right] \quad . \end{aligned} \tag{8.22}$$

Der Vergleich liefert:

$$\{Q_i, Q_l\}_{q,p} = 0 \quad , \tag{8.23}$$

$$\{Q_i, P_l\}_{q,p} = \delta_{il} \quad . \tag{8.24}$$

Über $\dot{P}_l$ findet man analog die dritte Klammer.

2. Nun seien F und G beliebige Phasenraumfunktionen, dann gilt

$$\{F, G\}_{q,p} = \sum_{j=1}^{S} \left(\frac{\partial F}{\partial q_j} \frac{\partial G}{\partial p_j} - \frac{\partial F}{\partial p_j} \frac{\partial G}{\partial q_j} \right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{j,l}^{S} \left[\frac{\partial F}{\partial q_j} \left(\frac{\partial G}{\partial Q_l} \frac{\partial Q_l}{\partial p_j} + \frac{\partial G}{\partial P_l} \frac{\partial P_l}{\partial p_j} \right) - \frac{\partial F}{\partial p_j} \left(\frac{\partial G}{\partial Q_l} \frac{\partial Q_l}{\partial q_j} + \frac{\partial G}{\partial P_l} \frac{\partial P_l}{\partial q_j} \right) \right] \\
&= \sum_{l} \left(\frac{\partial G}{\partial Q_l} \{F, Q_l\}_{q,p} + \frac{\partial G}{\partial P_l} \{F, P_l\}_{q,p} \right) . \qquad (8.25)
\end{aligned}
$$

Setzen wir jetzt $F = Q_k$ und benutzen (8.21), so folgt

$$
\{G, Q_k\}_{q,p} = -\frac{\partial G}{\partial P_k} \quad , \qquad (8.26)
$$

andererseits setzen wir $F = P_k$ und erhalten

$$
\{G, P_k\}_{q,p} = +\frac{\partial G}{\partial Q_k} \quad . \qquad (8.27)
$$

Diese beiden Zwischenergebnisse werden oben eingesetzt:

$$
\{F, G\}_{q,p} = \sum_{l} \left(\frac{\partial G}{\partial Q_l} \left(-\frac{\partial F}{\partial P_l} \right) + \frac{\partial G}{\partial P_l} \frac{\partial F}{\partial Q_l} \right) = \{F, G\}_{Q,P} \quad . \qquad (8.28)
$$

Das war zu beweisen. Wir können jetzt die Indizes am Klammersymbol weglassen.

8.4 Algebraische Eigenschaften

Die Poisson-Klammer besitzt formale Eigenschaften, die über die klassische Mechanik hinausgehen. Sie werden beispielsweise auch bei der Konstruktion der Quantenmechanik benutzt. Diese algebraischen Eigenschaften sind:

Antisymmetrie:	$\{f, g\} = -\{g, f\}, \qquad \{f, f\} = 0$
Linearität:	$\{c_1 f_1 + c_2 f_2, g\} = c_1\{f_1, g\} + c_2\{f_2, g\}$
Nullelement:	$\{c, g\} = 0 \quad c$: Konstante
Produktregel:	$\{f, gh\} = g\{f, h\} + \{f, g\}h$
Jacobi-Identität:	$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0 \quad . \qquad (8.29)$

Die letzten beiden Eigenschaften werden im Folgenden bewiesen.
Beweis der Produktregel:

$$
\begin{aligned}
\{f, gh\} &= \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial (gh)}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial (gh)}{\partial q_i} \right) \\
&= \sum_i \left(g \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial h}{\partial p_i} + \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} h - g \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial h}{\partial q_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} h \right) \\
&= \sum_i g \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial h}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial h}{\partial q_i} \right) + \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right) h \\
&= g\{f, h\} + \{f, g\}h \quad . \qquad (8.30)
\end{aligned}
$$

Beweis der Jacobi-Identität
Durch Einsetzen der Definition der Poisson-Klammer erhält man

$$\begin{aligned}
\{f,\{g,h\}\} &= \left\{f, \sum_k \left(\frac{\partial g}{\partial q_k}\frac{\partial h}{\partial p_k} - \frac{\partial g}{\partial p_k}\frac{\partial h}{\partial q_k}\right)\right\} \\
&= \sum_{i,k}\left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial}{\partial p_i}\left(\frac{\partial g}{\partial q_k}\frac{\partial h}{\partial p_k} - \frac{\partial g}{\partial p_k}\frac{\partial h}{\partial q_k}\right) - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{\partial g}{\partial q_k}\frac{\partial h}{\partial p_k} - \frac{\partial g}{\partial p_k}\frac{\partial h}{\partial q_k}\right)\right) \\
&= \sum_{i,k}\left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial^2 g}{\partial p_i\,\partial q_k}\frac{\partial h}{\partial p_k} + \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial q_k}\frac{\partial^2 h}{\partial p_i \partial p_k} - \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial^2 g}{\partial p_i \partial p_k}\frac{\partial h}{\partial q_k}\right. \\
&\quad -\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_k}\frac{\partial^2 h}{\partial p_i \partial q_k} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial^2 g}{\partial q_i \partial q_k}\frac{\partial h}{\partial p_k} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_k}\frac{\partial^2 h}{\partial q_i \partial p_k} \\
&\quad \left. +\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial^2 g}{\partial q_i \partial p_k}\frac{\partial h}{\partial q_k} + \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial p_k}\frac{\partial^2 h}{\partial q_i \partial q_k}\right) \quad . \qquad (8.31)
\end{aligned}$$

Bei zyklischer Vertauschung der drei Größen f, g, h und Addition heben sich alle Terme auf und wir erhalten (8.29).

8.5 Integrale der Bewegung

Es sei $F = F(\vec{q}, \vec{p}, t)$ eine physikalische Größe, die für alle Zeiten denselben Wert hat

$$\frac{dF}{dt} = 0 \quad , \qquad (8.32)$$

dann nennt man F Integral der Bewegung. Wegen

$$\frac{dF}{dt} = \{F, H\} + \frac{\partial F}{\partial t} \qquad (8.33)$$

reduziert sich diese Aussage auf

$$\{H, F\} = \frac{\partial F}{\partial t} \quad . \qquad (8.34)$$

Hängt F nicht explizit von der Zeit ab, dann haben wir mit $\{H, F\} = 0$ ein kompaktes Kriterium für die Entscheidung, ob ein Integral der Bewegung vorliegt oder nicht. Für $F = H$ gilt

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} \quad . \qquad (8.35)$$

8.6 Poissonscher Satz

F und G seien Integrale der Bewegung:

$$\{H, F\} = \frac{\partial F}{\partial t} \quad , \qquad \{H, G\} = \frac{\partial G}{\partial t} \quad . \qquad (8.36)$$

Wegen der Jacobi-Identität

$$\begin{aligned} 0 &= \{F,\{G,H\}\} + \{G,\{H,F\}\} + \{H,\{F,G\}\} \\ &= -\{F,\frac{\partial G}{\partial t}\} + \{G,\frac{\partial F}{\partial t}\} + \{H,\{F,G\}\} \end{aligned} \tag{8.37}$$

bedeutet das

$$\{H,\{F,G\}\} = \frac{\partial}{\partial t}\{F,G\} \quad . \tag{8.38}$$

Die Poisson-Klammer zweier Integrale der Bewegung ist selbst wieder ein Integral der Bewegung.

8.7 Kanonische Transformationen

Kanonische Transformationen sind Transformationen des $2S$-dimensionalen Phasenraumes, welche den Variablen $\vec{p}$ und $\vec{q}$ neue Variable

$$\vec{Q} = \vec{Q}(\vec{q},\vec{p},t) \quad \text{und} \quad \vec{P} = \vec{P}(\vec{q},\vec{p},t) \tag{8.39}$$

derart zuordnen, daß zu jedem $H(\vec{q},\vec{p},t)$ eine neue Hamilton-Funktion $\tilde{H}(\vec{Q},\vec{P},t)$ existiert, für die die kanonische Gleichungen

$$\dot{Q}_k = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P_k} \quad , \qquad \dot{P}_k = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q_k} \tag{8.40}$$

erfüllt sind, wenn sie bezüglich der alten Variablen gelten:

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k} \quad , \qquad \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k} \quad . \tag{8.41}$$

Kurz gesagt: Kanonische Transformationen lassen die kanonischen Gleichungen invariant. (Sie lassen ebenfalls die Poisson-Klammern invariant.)
Die kanonischen Gleichungen (8.40) und (8.41) sind dann gleichwertig, wenn die ihnen zugeordneten Variationsprobleme

$$\delta \int_{t_a}^{t_b} L(q_k,\dot{q}_k,t)\,dt = 0 \tag{8.42}$$

und

$$\delta \int_{t_a}^{t_b} \tilde{L}(Q_k,\dot{Q}_k,t)\,dt = 0 \tag{8.43}$$

äquivalent sind. Diese Äquivalenz ist nun nicht nur für $L = \tilde{L}$ vorhanden, sondern auch dann, wenn sich L und $\tilde{L}$ durch die Zeitableitung einer beliebigen Funktion $F_1(\vec{q},\vec{Q},t)$ unterscheiden:

$$L = \tilde{L} + \frac{dF_1}{dt} \quad . \tag{8.44}$$

Es gilt ja dann

$$\int_{t_a}^{t_b} L\,dt = \int_{t_a}^{t_b} \tilde{L}\,dt + F_1\Big|_{t_a}^{t_b} \tag{8.45}$$

und bei der Variation gibt F_1 keinen Beitrag, weil die Variationen der q_k bzw. Q_k an den Integrationsgrenzen beim Hamilton-Prinzip immer verschwinden.
Ersetzen wir jetzt die Lagrange-Funktion in (8.44) durch die Hamilton-Funktion,

$$\sum_k p_k\dot{q}_k - H = \sum_k P_k\dot{Q}_k - \tilde{H} + \frac{dF_1}{dt} \quad , \tag{8.46}$$

führen die Zeitableitung von F_1 aus und ordnen um, so erhalten wir

$$dF_1 = \sum p_k dq_k - \sum P_k dQ_k + (\tilde{H} - H)dt = \sum_k \frac{\partial F_1}{\partial q_k}dq_k + \sum_k \frac{\partial F_1}{\partial Q_k}dQ_k + \frac{\partial F_1}{\partial t}dt \quad . \tag{8.47}$$

Ein Koeffizientenvergleich der Differentiale $dq_k,\ dQ_k$ und dt ergibt:

$$p_k = \frac{\partial F_1}{\partial q_k}\,, \quad P_k = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_k}\,, \quad \tilde{H} = H + \frac{\partial F_1}{\partial t} \quad . \tag{8.48}$$

Diese Gleichungen sind die gesuchte Konstruktionsvorschrift für kanonische Transformationen: Man gebe sich eine beliebige Erzeugende $F_1(\vec{q},\vec{Q},t)$ vor, bestimme gemäß (8.48) die Funktionen $p_k(\vec{q},\vec{Q},t)$ und $P_k(\vec{q},\vec{Q},t)$ bzw. deren Umkehrfunktionen $Q_k(\vec{q},\vec{p},t)$ und $q_k(\vec{Q},\vec{P},t)$ und berechne dann $\tilde{H}(\vec{Q},\vec{P},t)$.
Die $(\vec{q},\vec{Q})$-Abhängigkeit der Erzeugenden F_1 ist eigentlich durch nichts ausgezeichnet. Mit Hilfe von Legendre-Transformationen lassen sich drei weitere Erzeugenden finden:

$$F_2(\vec{q},\vec{P},t) = F_1(\vec{q},\vec{Q},t) - \sum_k \frac{\partial F_1}{\partial Q_k} Q_k = F_1(\vec{q},\vec{Q},t) + \sum_k P_k Q_k \quad , \tag{8.49}$$

$$F_3(\vec{p},\vec{Q},t) = F_1(\vec{q},\vec{Q},t) - \sum_k \frac{\partial F_1}{\partial q_k} q_k = F_1(\vec{q},\vec{Q},t) - \sum_k p_k q_k \quad , \tag{8.50}$$

$$F_4(\vec{p},\vec{P},t) = F_1(\vec{q},\vec{Q},t) + \sum_k (P_k Q_k - p_k q_k) \quad . \tag{8.51}$$

Die Erzeugenden verknüpfen jeweils eine *neue* und eine *alte* Koordinate. Die aktuelle Problemstellung entscheidet, welche Form am günstigsten ist.
Die abgeleiteten Formeln sind in der folgenden Tabelle zusammengefaßt:

	Q	P
q	$F_1(\vec{q},\vec{Q},t)$: $p_k = \frac{\partial F_1}{\partial q_k}\,,\ P_k = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_k}$	$F_2(\vec{q},\vec{P},t)$: $p_k = \frac{\partial F_2}{\partial q_k}\,,\ Q_k = \frac{\partial F_2}{\partial P_k}$
p	$F_3(\vec{p},\vec{Q},t)$: $q_k = -\frac{\partial F_3}{\partial p_k}\,,\ P_k = -\frac{\partial F_3}{\partial Q_k}$	$F_4(\vec{p},\vec{P},t)$: $q_k = -\frac{\partial F_4}{\partial p_k}\,,\ Q_k = \frac{\partial F_4}{\partial P_k}$

Die Zeitabhängigkeit ist in allen vier Fällen gleich ($i = 1, ...4$)

$$\tilde{H} = H + \frac{\partial F_i}{\partial t} \quad . \tag{8.52}$$

8.8 Beispiele für kanonische Transformationen

1. Vertauschung von Impulsen und Orten

Wir wählen

$$F_1(\vec{q}, \vec{Q}, t) = -\sum_{j=1}^{S} q_j Q_j \tag{8.53}$$

und haben dann mit

$$p_j = \frac{\partial F_1}{\partial q_j} = -Q_j \,, \quad P_j = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_j} = q_j \tag{8.54}$$

eine Vertauschung von Impulsen und Orten erzeugt:

$$(\vec{q}, \vec{p}) \xrightarrow{F_1} (\vec{P}, -\vec{Q}) \quad .$$

Damit wird klar, daß die begriffliche Zuordnung $\vec{q} \Rightarrow$ Ort und $\vec{p} \Rightarrow$ Impuls im Rahmen der Hamiltonschen Mechanik ziemlich wertlos geworden ist. Man sollte $\vec{q}$ und $\vec{p}$ als abstrakte, völlig gleichberechtigte Variable ansehen.

2. Identische Transformation

Wir wählen

$$F_2(\vec{q}, \vec{P}, t) = \sum_{j=1}^{S} q_j P_j \tag{8.55}$$

und finden die identische Transformation

$$p_j = \frac{\partial F_2}{\partial q_j} = P_j \,, \quad Q_j = \frac{\partial F_2}{\partial P_j} = q_j \,. \tag{8.56}$$

3. Punkttransformation

Wir wählen

$$F_2(\vec{q}, \vec{P}, t) = \sum_{j=1}^{S} f_j(\vec{q}, t)\, P_j \tag{8.57}$$

und erhalten

$$Q_j = \frac{\partial F_2}{\partial P_j} = f_j(\vec{q}, t) \quad . \tag{8.58}$$

Von dieser Punkttransformation sind auch die Impulse betroffen:

$$p_j = \frac{\partial F_2}{\partial q_j} = \sum_{l=1}^{S} \frac{\partial f_l}{\partial q_j} P_l \quad . \tag{8.59}$$

Diese Beziehungen sind nach den P_l aufzulösen.

8.9 Hamilton-Jacobi-Theorie

Die kanonischen Gleichungen werden am einfachsten, wenn man durch eine kanonische Transformation $\tilde{H} = 0$ erreichen kann; wir könnten sie dann wegen der kanonischen Gleichungen $\dot{Q}_k = \partial\tilde{H}/\partial P_k$ und $\dot{P}_k = -\partial\tilde{H}/\partial Q_k$ sofort durch

$$Q_k = \mathrm{const}\,, \quad P_k = \mathrm{const} \tag{8.60}$$

lösen. Wir wollen jetzt die Bedingungen ableiten, die die Erzeugende einer solchen Transformation erfüllen muß.
Wählen wir $F_2(\vec{q}, \vec{P}, t)$. Dann folgt aus

$$p_k = \frac{\partial F_2}{\partial q_k} \quad , \tag{8.61}$$

und

$$\tilde{H} = H + \frac{\partial F_2}{\partial t} \tag{8.62}$$

die Hamilton-Jacobi-Gleichung

$$H\left(q_1, ..., q_S, \frac{\partial F_2}{\partial q_1}, ..., \frac{\partial F_2}{\partial q_S}, t\right) + \frac{\partial F_2}{\partial t} = 0 \quad . \tag{8.63}$$

Anstelle eines Systems von $2S$ gewöhnlichen Differentialgleichungen 1. Ordnung haben wir nun eine partielle Differentialgleichung 1. Ordnung zu lösen. Sie ist nicht-linear, da H quadratisch von den Impulsen und damit von $\frac{\partial F_2}{\partial q_j}$ abhängt. Sie enthält insgesamt $S + 1$ verschiedene Ableitungen der gesuchten Funktion F_2, demnach treten $S + 1$ Integrationskonstanten α_i auf. Die Lösung hat die Struktur

$$F_2(q_1, ..., q_S, t|\alpha_1, ..., \alpha_S) + \alpha_{S+1} \quad , \tag{8.64}$$

wobei α_{S+1} unwichtig ist, da in die Transformationsformeln nur die Ableitungen von F_2 eingehen.
Um die physikalische Bedeutung von F_2 zu untersuchen, bilden wir die Zeitableitung von F_2 längs einer Bahnkurve. Allgemein gilt

$$\frac{dF_2}{dt} = \sum_k \frac{\partial F_2}{\partial q_k}\,\dot{q}_k + \sum_k \frac{\partial F_2}{\partial P_k}\,\dot{P}_k + \frac{\partial F_2}{\partial t} \quad . \tag{8.65}$$

Berücksichtigen wir (8.60), (8.61) und (8.63), so wird daraus

$$\frac{dF_2}{dt} = \sum_k p_k \dot{q}_k - H = L \quad , \tag{8.66}$$

also

$$F_2 = \int L\, dt \quad . \tag{8.67}$$

Das ist gerade die vom Hamilton-Prinzip her bekannte Wirkungsfunktion. Beachte: Die Gleichung (8.67) kann nicht zur Bestimmung von F_2 benutzt werden, denn dann müßten $\vec{q}(t)$ und $\dot{\vec{q}}(t)$ für das System bekannt sein, um in L eingesetzt zu werden. Dann wäre das Problem aber bereits vollständig gelöst.

8.10 Harmonischer Oszillator

Die Hamilton-Funktion des harmonischen Oszillators lautet

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega_0^2 q^2 \quad . \tag{8.68}$$

Gesucht wird die kanonische Funktion, aus der sich $\tilde{H} = 0$ ergibt. Die zugehörige Erzeugende sei $F_2(q, P, t) = A(q, P, t)$ mit

$$p = \frac{\partial A}{\partial q} \quad . \tag{8.69}$$

Die Hamilton-Jacobi-Differentialgleichung lautet dann

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial A}{\partial q}\right)^2 + \frac{1}{2} m\omega_0^2 q^2 + \frac{\partial A}{\partial t} = 0 \quad . \tag{8.70}$$

Wir wählen den Lösungsansatz

$$A(q, P, t) = W(q|P) + V(t|P) \quad . \tag{8.71}$$

Das Einsetzen liefert

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial W}{\partial q}\right)^2 + \frac{1}{2} m\omega_0^2 q^2 = -\frac{\partial V}{\partial t} \quad . \tag{8.72}$$

Durch diesen Separationsansatz zerfällt die Differentialgleichung in einen q-abhängigen (linke Seite) und in einen t-abhängigen Anteil. Beide Seiten müssen dann aber notwendig für sich bereits konstant sein. Damit zerfällt die partielle in zwei gewöhnliche Differentialgleichungen:

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{dW}{dq}\right)^2 + \frac{1}{2} m\omega_0^2 q^2 = \alpha \quad , \tag{8.73}$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} = -\alpha \quad . \tag{8.74}$$

Aus (8.74) folgt

$$V(t) = -\alpha t + V_0 \quad . \tag{8.75}$$

Aus (8.73) folgt

$$\left(\frac{dW}{dq}\right)^2 = m^2\omega_0^2 \left(\frac{2\alpha}{m\omega_0^2} - q^2\right) . \tag{8.76}$$

Die gesuchte Erzeugende lautet damit:

$$A(q, \alpha, t) = m\omega_0 \int \sqrt{\frac{2\alpha}{m\omega_0^2} - q^2}\, dq - \alpha t + V_0 \quad . \tag{8.77}$$

Wir identifizieren die Konstante α mit dem neuen Impuls:

$$P = \alpha \quad . \tag{8.78}$$

Nun zur neuen Koordinate Q. Sie muß ebenfalls eine Konstante sein

$$Q = \frac{\partial A}{\partial \alpha} \stackrel{!}{=} \text{const} = \beta \quad . \tag{8.79}$$

Aus (8.77) erhalten wir somit

$$\beta = \frac{1}{\omega_0} \int dq \left\{ \frac{2\alpha}{m\omega_0^2} - q^2 \right\}^{-1/2} - t \quad . \tag{8.80}$$

Dieses Standardintegral liefert

$$\beta + t = \frac{1}{\omega_0} \arcsin\left(q\omega_0 \sqrt{\frac{m}{2\alpha}} \right) . \tag{8.81}$$

Die Auflösung nach q ergibt:

$$q = \frac{1}{\omega_0} \sqrt{\frac{2\alpha}{m}} \sin(\omega_0(t + \beta)) = q(t|\beta, \alpha) \quad . \tag{8.82}$$

Die neue Koordinate $Q = \beta$ hat die Dimension Zeit.
Als nächstes folgt direkt aus (8.77)

$$p = \frac{\partial A}{\partial q} = \frac{\partial W}{\partial q} = m\omega_0 \sqrt{\frac{2\alpha}{m\omega_0^2} - q^2} \tag{8.83}$$

und setzen darin (8.82) ein:

$$p = \sqrt{2\alpha m} \cos(\omega_0(t + \beta)) = p(t|\beta, \alpha) \quad . \tag{8.84}$$

Um konkret sein zu können, wählen wir die Anfangsbedingungen

$$t = t_0 = 0 : \quad p(0) = 0 \,, \qquad q(0) = q_0 \neq 0 \quad . \tag{8.85}$$

Aus (8.83) folgt

$$\alpha = \frac{1}{2} m \omega_0^2 q_0^2 \quad . \tag{8.86}$$

Da das System am Umkehrpunkt q_0 nur potentielle Energie besitzt, ($p^{(0)} = 0$), ist

$$\alpha = E = \text{Gesamtenergie} \quad . \tag{8.87}$$

Wir setzen nun die Anfangsbedinungen in (8.81) ein:

$$\beta = \frac{1}{\omega_0} \arcsin(1) = \frac{\pi}{2\omega_0} \quad . \tag{8.88}$$

Die Wirkungsfunktion A erzeugt also eine kanonische Transformation, die auf einen generalisierten Impuls $P = \alpha$ führt, der mit der Gesamtenergie identisch ist, und auf eine generalisierte Koordinate $Q = \beta$, die eine (konstante) Zeit darstellt. Energie und Zeit sind also kanonisch konjugierte Variable.

Die vollständige Lösung erhalten wir schließlich, indem wir α und β in (8.82) und (8.84) einsetzen:

$$q(t) = \sqrt{\frac{2E}{m\omega_0^2}} \cos \omega_0 t \quad , \tag{8.89}$$

$$p(t) = -\sqrt{2Em} \sin \omega_0 t \quad . \tag{8.90}$$

8.11 Liouvillescher Satz

Im Hamiltonschen Formalismus wird der Bewegungszustand eines mechanischen Systems mit f Freiheitsgraden zu einem bestimmten Zeitpunkt t durch Angabe der f generalisierten Koordinaten und f Impulse $q_1, ..., q_f; p_1, ..., p_f$ vollständig bestimmt.

Diese q_i und p_i lassen sich als Koordinaten eines $2f$-dimensionalen kartesischen Raumes auffassen, des Phasenraumes. Der f-dimensionale Unterraum der Koordinaten q_i ist der Konfigurationsraum; der f-dimensionale Unterraum der Impulse p_i heißt Impulsraum. Mit dem Ablauf der Bewegung des Systems beschreibt der repräsentative Punkt eine Linie, die Phasenbahn. Wenn die Hamilton-Funktion bekannt ist, dann läßt sich aus den Koordinaten eines Punktes die gesamte Phasenbahn eindeutig vorausberechnen. Darum gehört zu jedem Punkt nur eine Bahn. Eine Bahn im Phasenraum ist in Parameterdarstellung durch $q_k(t), p_k(t)$ $(k = 1, ..., f)$ gegeben. Wegen der Eindeutigkeit der Lösungen der Hamilton-Gleichungen entwickelt sich das System aus verschiedenen Randbedingungen auf verschiedenen Bahnen.

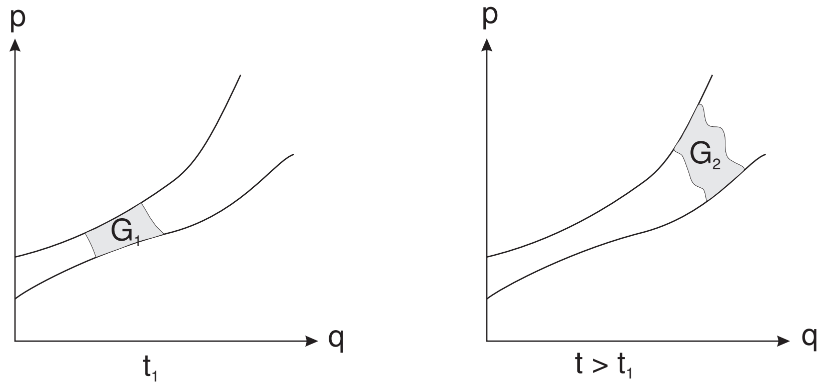
Nun betrachten wir eine große Anzahl N von unabhängigen Punkten, die abgesehen von den Anfangsbedingungen mechanisch identisch sind, die also die gleiche Hamilton-Funktion besitzen. Konkret können wir uns Teilchen im Strahl eines Beschleunigers als Beispiel vorstellen. Wenn alle Punkte zur Zeit t_1 in einem $2f$-dimensionalen Gebiet G_1 des Phasenraumes mit dem Volumen

$$\Delta V = \Delta q_1 ... \Delta q_f \cdot \Delta p_1 ... \Delta p_f$$

verteilt sind, kann man die Dichte

$$\rho = \frac{\Delta N}{\Delta V} \tag{8.91}$$

definieren.
Mit dem Ablauf der Bewegung transformiert sich G_1 entsprechend den Hamilton-Gleichungen in das Gebiet G_2.



Entwicklung eines Gebietes im Phasenraum (schematisch)

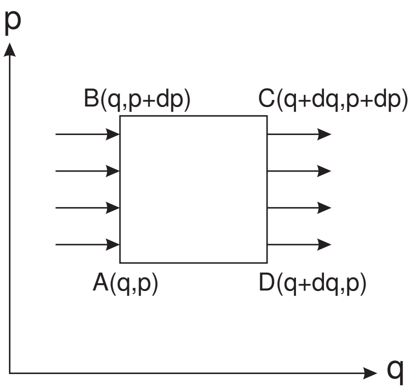
Die Aussage des Satzes von Liouville ist nun:

> Das Volumen irgendeines beliebigen Gebietes des Phasenraumes bleibt erhalten, wenn sich die Punkte seiner Begrenzung entsprechen den kanonische Gleichungen bewegen.

Oder anders ausgedrückt, wenn ein Grenzübergang durchgeführt wird:

> Die Dichte der Punkte im Phasenraum in der Umgebung eines mitbewegten Punktes ist konstant.

Wir betrachten zunächst den Liouvilleschen Satz für ein System mit nur einem Freiheitsgrad. Wir denken uns das System dargestellt durch die Bewegung von repräsentativen Punkten durch ein Volumenelement im Phasenraum. Bei nur einem Freiheitsgrad haben wir den zweidimensionalen Phasenraum (p, q) vorliegen. Das Volumenelement reduziert sich zu $dpdq$.



$\rho = \rho(p, q, t)$ sei die Dichte der Punkte, in diesem Fall also die Zahl der Punkte pro Flächenelement $dp\,dq$. Die Geschwindigkeit, mit der die Punkte durch AB in das Flächenelement eintreten, ist $\dot{q}$. Die Zahl der Punkte, die durch AB pro Zeitintervall in das Flächenelement eintreten, ist

$$\rho \frac{dq}{dt} dp = \rho \dot{q}\, dp \quad . \tag{8.92}$$

Die Zahl der repräsentativen Punkte, die durch CD austreten, ermitteln wir mittels einer Taylor-Entwicklung. Sie ist gegeben durch

$$\left\{ \rho \dot{q} + \frac{\partial}{\partial q}(\rho \dot{q}) dq \right\} dp \quad . \tag{8.93}$$

Daraus folgt für die Zahl, die im Flächenelement verbleibt, durch Subtraktion von (8.93) und (8.92)

$$-\frac{\partial}{\partial q}(\rho \dot{q})\, dp\, dq \quad . \tag{8.94}$$

Jetzt studieren wir den Eintritt durch AD und den Austritt durch BC. Die entsprechenden Zahlen sind

$$\rho \dot{p}\, dq \tag{8.95}$$

und

$$\left\{ \rho \dot{p} + \frac{\partial}{\partial p}(\rho \dot{p}) dp \right\} dq \quad . \tag{8.96}$$

Die Differenz lautet jetzt

$$-\frac{\partial}{\partial p}(\rho \dot{p})\, dp\, dq \quad . \tag{8.97}$$

Addieren wir jetzt (8.97) und (8.94), so folgt

$$-\left\{ \frac{\partial(\rho \dot{q})}{\partial q} + \frac{\partial(\rho \dot{p})}{\partial p} \right\} dp\, dq \quad . \tag{8.98}$$

Dies entspricht gerade

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} dp\, dq \quad . \tag{8.99}$$

Damit muß gelten

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \left\{ \frac{\partial(\rho \dot{q})}{\partial q} + \frac{\partial(\rho \dot{p})}{\partial p} \right\} = 0 \quad . \tag{8.100}$$

Es handelt sich hier um eine Kontinuitätsgleichung von der Form

$$\mathrm{div}(\rho \dot{\vec{r}}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad . \tag{8.101}$$

Dabei ist die Divergenz im $2f$-dimensionalen Phasenraum gemeint:

$$\vec{\nabla} = \sum_{k=1}^{f} \frac{\partial}{\partial q_k} \vec{e}_{q_k} + \sum_{k=1}^{f} \frac{\partial}{\partial p_k} \vec{e}_{p_k} \quad . \tag{8.102}$$

Solche Kontinuitätsgleichungen treten in der Stömungsmechanik (Hydrodynamik, Elektrodynamik, Quantenmechanik) häufig auf. Sie drücken immer einen Erhaltungssatz aus.

Dies ergibt

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial \dot{q}}{\partial q} + \frac{\partial \rho}{\partial q} \dot{q} + \rho \frac{\partial \dot{p}}{\partial p} + \frac{\partial \rho}{\partial p} \dot{p} = 0 \quad . \tag{8.103}$$

Aufgrund der Hamilton-Gleichungen haben wir

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} \quad , \tag{8.104}$$

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \tag{8.105}$$

und somit

$$\frac{\partial \dot{p}}{\partial p} = -\frac{\partial^2 H}{\partial p\, \partial q} \quad , \tag{8.106}$$

$$\frac{\partial \dot{q}}{\partial q} = \frac{\partial^2 H}{\partial q\, \partial p} \quad . \tag{8.107}$$

Wenn die Hamilton-Funktion stetige zweite Ableitungen besitzt, folgt

$$\frac{\partial \dot{p}}{\partial p} = -\frac{\partial \dot{q}}{\partial q} \quad . \tag{8.108}$$

Daher resultiert

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial \rho}{\partial p} \dot{p} = 0 \quad . \tag{8.109}$$

Dies kann aber geschrieben werden als

$$\frac{d\rho}{dt} = 0 \quad . \tag{8.110}$$

Dies ist der Liouville'sche Satz.

Nach der Untersuchung des zweidimensionalen Phasenraums betrachten wir nun den 2n-dimensionalen Phasenraum. Das Volumenelement lautet

$$dV = dq_1 \cdots dq_n \, dp_1 \cdots dp_n \quad . \tag{8.111}$$

Wieder finden wir für die Änderung der Zahl der Punkte in dV

$$-\left\{ \frac{\partial(\rho \dot{q}_1)}{\partial q_1} + \cdots + \frac{\partial(\rho \dot{q}_n)}{\partial q_n} + \frac{\partial(\rho \dot{p}_1)}{\partial p_1} + \cdots + \frac{\partial(\rho \dot{p}_n)}{\partial p_n} \right\} dV \quad . \tag{8.112}$$

Dies entspricht erneut

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} \, dV \quad . \tag{8.113}$$

Somit gilt

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \dot{q}_1)}{\partial q_1} + \cdots + \frac{\partial(\rho \dot{q}_n)}{\partial q_n} + \frac{\partial(\rho \dot{p}_1)}{\partial p_1} + \cdots + \frac{\partial(\rho \dot{p}_n)}{\partial p_n} = 0 \tag{8.114}$$

oder

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial(\rho \dot{q}_i)}{\partial q_i} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial(\rho \dot{p}_i)}{\partial p_i} = 0 \quad . \tag{8.115}$$

Dies kann ausgeschrieben werden als

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \rho}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \rho}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) + \sum_{i=1}^{n} \rho \left(\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_i} + \frac{\partial \dot{p}_i}{\partial p_i} \right) = 0 \quad . \tag{8.116}$$

Mit Hilfe der Hamilton-Gleichungen

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad , \tag{8.117}$$

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \tag{8.118}$$

erhalten wir

$$\frac{\partial \dot{p}_i}{\partial p_i} = -\frac{\partial^2 H}{\partial p_i \, \partial q_i} \quad , \tag{8.119}$$

$$\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_i} = \frac{\partial^2 H}{\partial q_i \, \partial p_i} \tag{8.120}$$

und somit

$$\frac{\partial \dot{p}_i}{\partial p_i} = -\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_i} \quad . \tag{8.121}$$

Dies führt auf

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \rho}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \rho}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) = 0 \quad . \tag{8.122}$$

Somit haben wir wieder den Liouville'schen Satz vorliegen

$$\frac{d\rho}{dt} = 0 \quad . \tag{8.123}$$