Optimierung I

Theorie und Praxis der linearen Optimierung

Prof. Dr. J. Zowe

Wintersemester 1990/91

Erstellt von Helmut Hahn auf einen Atari Mega/STE
Grafiken von Andreas Gaßner und Helmut Hahn

Inhalt:

1. Einleitung und Beispiele

Die Anfänge der (linearen) Optimierung begründete Kantorovicz 1939 mit seinen "Mathematicals Methods in the organisation and planing of production". Von Dantzig wurde 1951 das Simplexverfahren entwickelt, welches bis heute den Standardalgorithmus zur Lösung linearer Optimierungsaufgaben darstellt. Mit Computern ist es möglich, Gleichungssysteme $Ax = b$, wobei A eine $(n \times n)$-Matrix ist, mit einem Zeitaufwand $O(1/3\, n^3)$ zu lösen, was für die Optimierung von großer Bedeutung ist.

(Nichtlineare) Optimierung

Die typische Problemstellung in der nichtlinearen Optimierung lautet

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ \text{N.B.} \quad & x \in X, \end{aligned}$$

wobei X durch implizite und explizite Restriktionen definiert wird. Abbildung 1.1 veranschaulicht ein einfaches Problem von diesem Typ mit einer expliziten Restriktion, $g(x) \leq 0$.

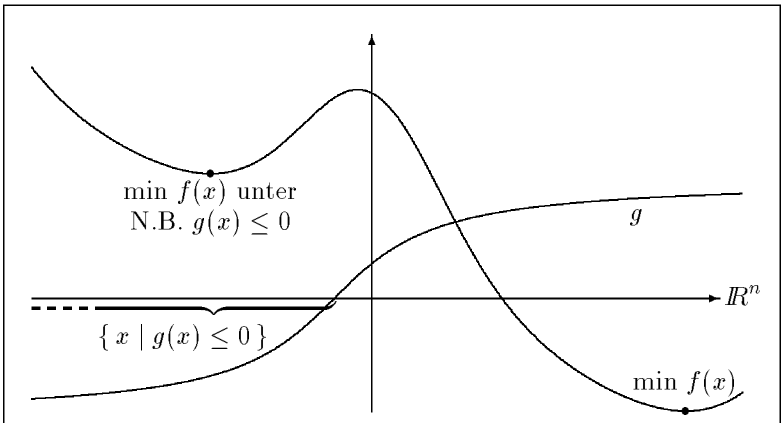


Abb. 1.1

Probleme dieser Art sollen allerdings im zweiten Teil dieser Vorlesung behandelt werden.

Lineare Optimierung

Wir betrachten im ersten Teil der Vorlesung zunächst den Fall, daß die Zielfunktion und alle Nebenbedingungen linear in x sind.

Beispiele für lineare Probleme

Um ein besseres Verständnis für Optimierungsprobleme zu schaffen, betrachten wir zunächst einige Beispiele.

- **Produktionsmodelle**

  Eine Firma produziert vier Lacke $L_1, \ldots, L_4$. Der Gewinn pro kg ist 1.50 DM bei L_1, 1 DM bei L_2, 2 DM bei L_3 und 1.40 DM bei L_4. Verfahrensbedingt können pro Woche von L_1 und L_2 zusammen höchstens 1300 kg und von L_1, L_3 und L_4 zusammen höchstens 2000 kg hergestellt werden. Mindestproduktion von L_4 soll 800 kg betragen, von L_3 sind pro Woche nicht mehr als 500 kg zu verkaufen.

  Ziel der Firma ist es den Gewinn unter Einhaltung der Nebenbedingungen zu maximieren.

Mathematisches Modell

Mit x_i bezeichnen wir die pro Woche produzierte Lackmenge vom Typ L_i jedes für $i = 1, \ldots, 4$. Damit schreibt sich das Problem als

$$\begin{array}{rl} \max & 1.5x_1 + x_2 + 2x_3 + 1.4x_4 \\ \text{N.B.} & x_1 + x_2 \leq 1300 \\ & x_1 + x_3 + x_4 \leq 2000 \\ & x_4 \geq 800 \\ & x_3 \leq 500 \\ & x_i \geq 0 \quad \text{für } i = 1, 2, 3, 4. \end{array}$$

Mit den Bezeichnungen

$$c := \begin{pmatrix} 1.5 \\ 1 \\ 2 \\ 1.4 \end{pmatrix} \qquad A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b := \begin{pmatrix} 1300 \\ 2000 \\ -800 \\ 500 \end{pmatrix}$$

lautet das Problem in Matrixschreibweise

$$\begin{array}{rl} \max & c^T x \\ \text{N.B.} & Ax \leq b \\ & x_i \geq 0. \end{array}$$

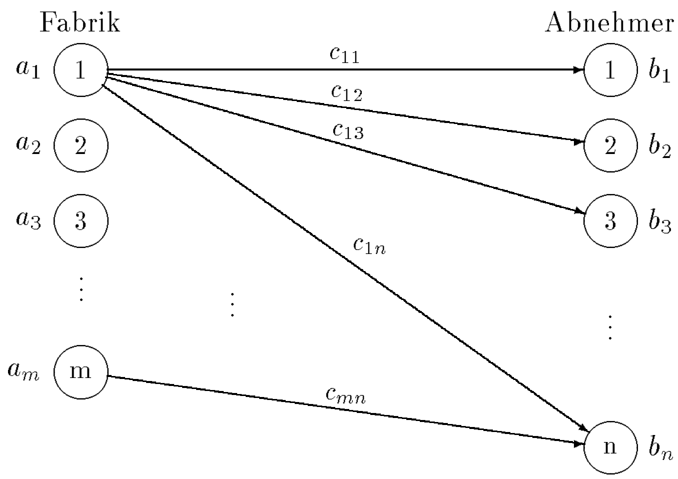
Typisch für das Produktionsmodell ist die Linearität des Problems und daß alle $x_i \geq 0$ sind.

- **Transportprobleme**

In m Fabriken werden jeweils die Warenmengen $a_1, \ldots, a_m$ erzeugt. Die Waren sollen an n Abnehmer, die jeweils die Mengen b_j $(j = 1, \ldots, n)$ benötigen, unter minimalen Kosten versandt werden. Dabei sei vorausgesetzt, daß

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

gilt. Wir bezeichnen mit c_{ij} die Transportkosten pro Einheit von i nach j und mit x_{ij} die von i nach j versandte Menge (vergleiche folgende Abbildung).



Dann formuliert sich das Transportproblem wie folgt

$$\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \\
\text{N.B.} \quad & \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad \text{für } 1 \leq i \leq m \\
& \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad \text{für } 1 \leq j \leq n \\
& \quad x_{ij} \geq 0 \quad \text{für } 1 \leq j \leq n, 1 \leq i \leq m.
\end{aligned}$$

Man beachte die Gestalt von

$$x = (x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1n}|x_{21}, \ldots, x_{2n}| \ldots |x_{m1}, \ldots, x_{mn})^T \in I\!R^{mn}$$

und

$$c = (c_{11}, c_{12}, \ldots, c_{1n}|c_{21}, \ldots, c_{2n}| \ldots |c_{m1}, \ldots, c_{mn})^T \in I\!R^{mn}.$$

Das Transportproblem läßt sich somit in Matrixschreibweise durch

$$\begin{aligned}
\min \quad & c^T x \\
\text{N.B.} \quad & Ax = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \\
& x \geq 0
\end{aligned}$$

darstellen, wobei

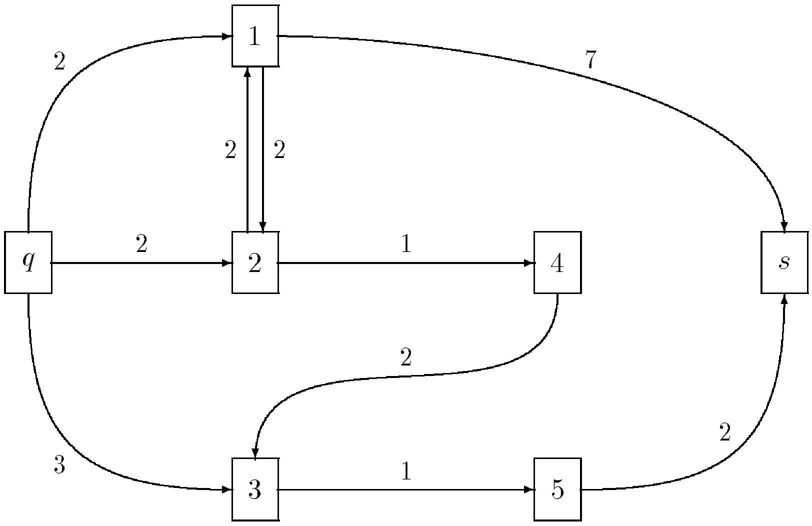
$$A = \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|ccc|c|ccc}
\overbrace{1 \; \ldots \; 1}^{n} & & & & & & & & & \\
& & & 1 & \ldots & 1 & & & & \\
& & & & & & \ddots & & & \\
& & & & & & & 1 & \ldots & 1 \\
\hline
1 & & & 1 & & & & 1 & & \\
& \ddots & & & \ddots & & \ldots & & \ddots & \\
& & 1 & & & 1 & & & & 1
\end{array}\right)}_{mn}
\begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\\1\end{array}}\right\} m \\ \left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\end{array}}\right\} n \end{array}
\quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \\ b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Auch beim Transportproblem ist die Linearität und $x_i \geq 0$ typisch für das Problem, zu beachten sind allerdings auch die Größe und die Struktur von A.

Falls $m = n$, $a_i = b_j = 1$ und $x_{ij} \in \{0, 1\}$ ist, erhalten wir den Spezialfall der Zuordnungsprobleme. Dazu gehören beispielsweise "Jobplan", Stundenplan, "Heiratsproblem" etc., auf die in **Kapitel 16** näher eingegangen wird.

- **Flußproblem in Netzwerken**

  In einer vorgegebenen Struktur von Verbindungen soll die transferierte Menge oder die Anzahl der tatsächlichen Verbindungen maximiert werden.



Beispielsweise soll in einem Elektrizitätsnetz möglichst viel Strom von q nach s transportiert werden, in einem Telefonnetz gilt es, die Anzahl der Verbindungen zu maximieren.

1.1 Definition

Ein *lineares Problem vom Typ* (P) ist gegeben durch

$$\begin{array}{rrcrcl} \max & c_1x_1 & + \ldots + & c_nx_n & & \\ \text{N.B.} & a_{11}x_1 & + \ldots + & a_{1n}x_n & \leq b_1 & \\ & \vdots & & \vdots & \vdots & \\ & a_{m1}x_1 & + \ldots + & a_{mn}x_n & \leq b_m & \\ & & & x_i & \geq 0 & \text{für } i = 1, \ldots, n \end{array} \tag{P}$$

oder kurz in Matrixschreibweise

$$\begin{array}{rl} \max & c^T x \\ \text{N.B.} & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

mit $c \in I\!R^n$, $x \in I\!R^n$, $b \in I\!R^m$ und $A \in I\!R^{m \times n}$.

1.2 Definition

Wir betrachten ein lineares Problem vom Typ (P). Dann heißt

a) das lineare Funktional $c^T x$ die *Zielfunktion* (objective function),

b) die Menge $M := \{ x \in I\!R^n \mid Ax \leq b, x \geq 0 \}$ die *zulässige Menge* (feasible set), und

c) der Punkt $x_0 \in M$ *optimal*, falls $c^T x \leq c^T x_0$ für alle $x \in M$.

1.3 Bemerkung

Gegeben sei ein lineares Problem vom Typ (P), dann gilt

1) $\min c^T x \Longleftrightarrow \max (-c)^T x$,

2) $a^T x \geq b \Longleftrightarrow (-a)^T x \leq -b$ für alle $a \in I\!R^n$ und $b \in I\!R$,

3) $a^T x = b \Longleftrightarrow a^T x \leq b$ und $(-a)^T x \leq -b$,

4) $x_i \in I\!R \Longleftrightarrow x_i = \overline{x}_i - \overline{\overline{x}}_i$ mit $\overline{x}_i, \overline{\overline{x}}_i \geq 0$.

Mit Hilfe von **1)** – **4)** kann jedes lineare Problem (lineare Zielfunktion, endlich viele lineare Gleichungs- und Ungleichungsrestriktionen) auf die Form (P) gebracht werden.

1.4 Bemerkung

In der Literatur wird häufig

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ \text{N.B.} \quad & Ax = b \\ & \quad x \geq 0 \end{aligned}$$

als *Normalform* eines linearen Problems bezeichnet. (P) läßt sich durch Einführung von *Schlupfvariablen* (slacks) $s = (s_1, \ldots, s_m)^T$ auf Normalform bringen. Das heißt, (P) ist äquivalent zu

$$\begin{aligned} \min \quad & (-c)^T x \\ \text{N.B.} \quad & (A, I)\tbinom{x}{s} = b \\ & \qquad \tbinom{x}{s} \geq 0. \end{aligned}$$

In den Anwendungen treten häufig Optimierungsprobleme auf, die

a) nichtlinear sind, das heißt, daß die Zielfunktion und/oder die Nebenbedingungen nichtlinear sind.

b) Zwar linear sind, aber x_j ganzzahlig (oder sogar binär) ist. Ein Beispiel dafür ist das sogenannte "knapsackproblem": Ein Rucksack soll ein Maximalgewicht b haben, und das Gewicht der Gegenstände, die man mitnehmen will, sei $a_1, \ldots, a_n$. Jeder Gegenstand hat einen subjektiven Wert $c_1, \ldots, c_n$. Es stellt sich die Frage, welche Gegenstände man mitnehmen soll, ohne das Maximalgewicht zu überschreiten. Das Problem formuliert sich also so

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ \text{N.B.} \quad & \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \leq b \\ & x_j \in \{0, 1\} \quad \text{für } 1 \leq j \leq n, \end{aligned}$$

wenn

$$x_j := \begin{cases} 1 & \text{nehme den Gegenstand } j \text{ mit} \\ 0 & \text{nehme den Gegenstand } j \text{ nicht mit.} \end{cases}$$

2. Graphische Darstellung und Lösung von LP's

Ein allgemeines LP im $\mathbb{R}^2$ ist gegeben durch

$$
\begin{array}{lrcrl}
\max & c_1x_1 & + & c_2x_2 & \\
\text{N.B.} & a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & \leq b_1 \\
& \vdots & & \vdots & \vdots \\
& a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & \leq b_m \\
& & & x_1, x_2 & \geq 0
\end{array}
$$

und kann für positives b durch Abbildung 2.1 veranschaulicht werden.

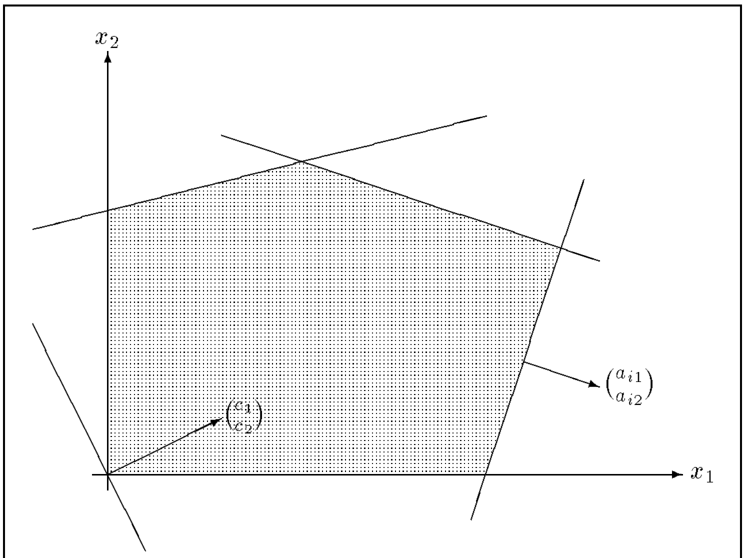


Abb. 2.1

Exkurs

Im folgenden sollen kurz die Begriffe Hyperebene und Halbraum erläutert werden. Seien dazu $a \in \mathbb{R}^n$ und $b \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$
\begin{aligned}
\{ x \in \mathbb{R}^n \mid a^T x = b \} &= \{ x_0 + x \mid a^T x_0 = b, a^T x = 0 \} \\
&= \begin{cases} \mathbb{R}^n, & \text{falls } a = 0 \text{ und } b = 0 \\ \emptyset, & \text{falls } a = 0 \text{ und } b \neq 0 \\ \text{Hyperebene}, & \text{falls } a \neq 0, \end{cases}
\end{aligned}
$$

weil sich der Lösungsraum eines linearen Gleichungssystems eben als linearer Unterraum mit diesen Eigenschaften darstellen läßt (vergleiche Abbildung 2.2).

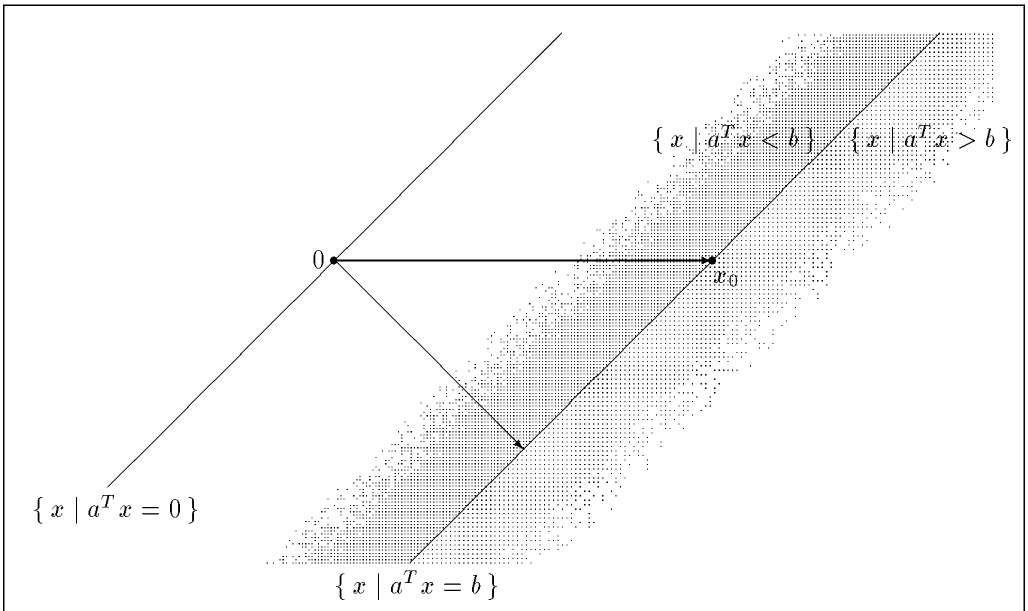


Abb. 2.2

Man beachte, daß die Hyperebene die beiden Halbräume $\{ x \mid a^T x > b \}$ und $\{ x \mid a^T x < b \}$ trennt.

Bemerkung

Um das lineare Problem LP zu lösen, geht man im wesentlichen wie folgt vor:

1) Deutung der i–ten Ungleichung $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \leq b_i$ als abgeschlossene Halbebene mit der Randgeraden $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i$. Dabei sei $(a_{i1}, a_{i2}) \neq (0, 0)$.

2) Deutung der Menge M aller zulässigen Punkte als Schnitt endlich vieler abgeschlossener Halbräume. Damit ist M entweder leer, beschränkt oder unbeschränkt.

3) Deutung der Zielfunktion $L_z := \{ x \mid c_1x_1 + c_2x_2 = z \}$ mit $z \in I\!R$ und $(c_1, c_2) \neq (0, 0)$ als Schar paralleler Geraden.

4) Verschiebe die Zielfunktion, bis z "maximal" wird.

Falls die Menge $M \neq \emptyset$ ist, können folgende möglichen Situationen auftreten:

a) M ist beschränkt und L nimmt das Maximum in einer Ecke an.

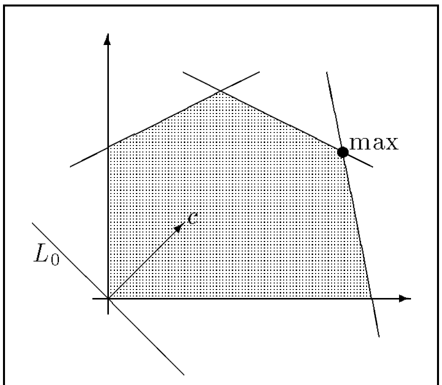


Abb. 2.3

b) M ist beschränkt und L nimmt sein Maximum auf einer ganzen Randhyperebene von M an.

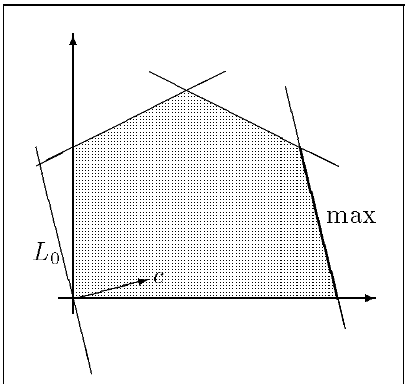


Abb. 2.4

c) M ist nicht beschränkt und L nimmt kein Maximum an.

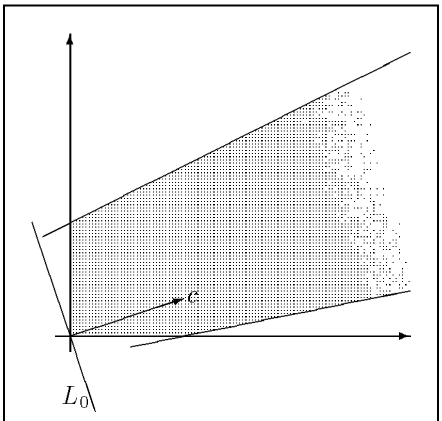


Abb. 2.5

d) M ist nicht beschränkt und L nimmt sein Maximum an.

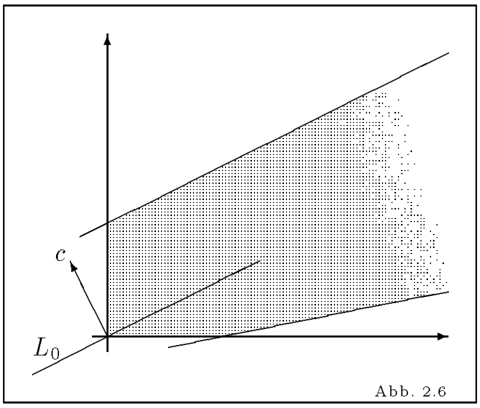


Abb. 2.6

e) Im Fall d) kann das Maximum natürlich auch in einer Ecke von M angenommen werden.

Verdacht

Wird das Maximum auf M angenommen, dann auch immer in einer "Ecke".

Beachte

Die gemachten Überlegungen treffen nicht zu, wenn die Lösung ganzzahlig sein soll oder das Problem nicht linear ist. Das heißt, daß

a) eine Nebenbedingung nicht linear ist,

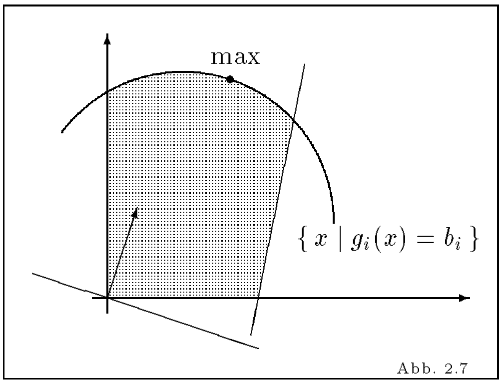


Abb. 2.7

b) oder die Zielfunktion nicht linear ist, wie zum Beispiel $L := \min_{x \in M} \|x - \overline{x}\|_2$.

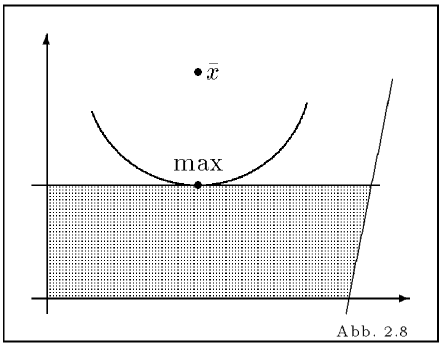


Abb. 2.8

3. Hauptsatz der linearen Optimierung

In diesem Kapitel wollen wir die Vermutung 'nimmt eine lineare Funktion auf M das Maximum an, so auch in einer "Ecke" von M' beweisen.

Definition

Sei $(a_i, b_i) \in I\!R^{n+1}$ für $i = 1, \ldots, s, s+1, \ldots, m$ und

$$K := \left\{ x \in I\!R^n \;\middle|\; \begin{array}{l} a_i^T x \le b_i \;\text{ für }\; i = 1, \ldots, s \\ a_i^T x = b_i \;\text{ für }\; i = s+1, \ldots, m \end{array} \right\}.$$

Dann heißt K ein *Polyeder*.

Definition

Sei K ein Polyeder. Dann heißt $x \in K$

a) eine *Ecke* von K, falls es n linear unabhängige $a_{i_1}, \ldots, a_{i_n}$ gibt, mit $a_{i_j}^T x = b_{i_j}$ für $j = 1, \ldots, n$,

b) eine *entartete Ecke*, falls x auf mehr als n verschiedenen Randhyperebenen liegt.

Abbildung 3.1 stellt einen Polyeder im $I\!R^2$ mit einer entarteten Ecke dar.

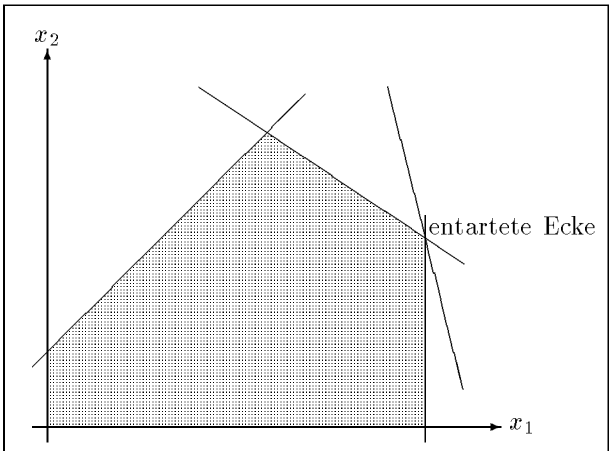


Abb. 3.1

Beachte

Da entartete Ecken vorkommen können, ist die Zuordnung

$$\{\, (a_{i_1}, \ldots, a_{i_n}) \mid a_{i_1}, \ldots, a_{i_n} \text{ linear unabhängig} \,\} \longmapsto \text{zugehörige Ecke von } K$$

nicht injektiv.

Im weiteren sei die über (P) definierte zulässige Menge

$$M := \{\, x \in I\!R^n \mid Ax \le b, x \ge 0 \,\}. \tag{3.1}$$

3.1 Satz

Ist $M \ne \emptyset$, so besitzt M mindestens eine Ecke.

Beweis (konstruktiv)

Sei $x^0 \in M$ und seien a_i mit b_i für $1 \leq i \leq m+n$ die Zeilenvektoren des Restriktionensystems einschließlich der Vorzeichenbedingungen.

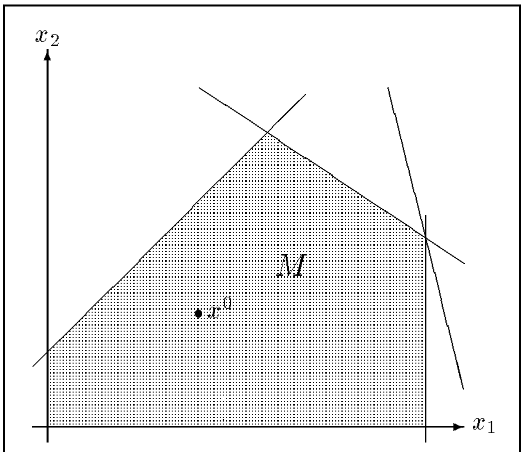


Abb. 3.2

Wir setzen

$$I(x^0) := \{\, i \mid a_i^T x^0 = b_i \,\} \quad \text{(aktive Indizes)}$$
$$L(x^0) := \{\, x \in I\!R^n \mid a_i^T x = b_i \text{ für alle } i \in I(x^0) \,\} \quad \text{(affiner Teilraum des } I\!R^n\text{)}.$$

In Abbildung 3.2 ist $I(x^0) = \emptyset$, das heißt keine Indizes sind aktiv, und damit $L(x^0) = I\!R^n$, da die leere Bedingung immer erfüllt ist.

Es gilt nach Definition einer Ecke

$$x^0 \text{ Ecke} \Longleftrightarrow \dim L(x^0) = 0, \tag{3.2}$$

das heißt falls $\dim L(x^0) = 0$, dann wäre x^0 bereits eine Ecke. Sei also ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\dim L(x^0) > 0$. Suche $x^1 \in L(x^0) \cap M$ mit

$$\dim L(x^1) < \dim L(x^0).$$

Man lege dazu eine Gerade in $L(x^0)$ durch x^0 und schneide sie mit dem Rand von $L(x^0) \cap M$. Dieser Schnittpunkt x^1 existiert, da wegen $x \geq 0$ keine Gerade ganz in M liegt. Weil $\dim L(x^1) < \dim L(x^0)$ ist, da das zusätzliche a_j unabhängig von allen a_i mit $i \in I(x^0)$ sein muß, bricht das Verfahren nach höchstens n Schritten mit einer Ecke ab.

3.2 Satz

Ist $x^0 \in M$ keine Ecke, dann existiert ein offenes Intervall $(a; b)$ in M mit $x^0 \in (a; b)$.

Beweis

Nach **(3.2)** ist $\dim L(x^0) \geq 1$. Man lege eine Gerade in $L(x^0)$ durch x^0 und schneide sie mit den Randhyperebenen für $i \notin I(x^0)$. Dann gibt es mindestens einen Schnittpunkt. Gibt es zwei Schnittpunkte a und b, so ist $x^0 \in (a; b)$. Gibt es genau einen Schnittpunkt a, so setze man $b := a + 2(x^0 - a)$, womit wieder $x^0 \in (a; b)$ mit $b \in M$ gilt.

3.3 Satz

Eine lineare Funktion $f(x) = c^T x$ nimmt auf dem Intervall $[a; b]$ ihr Maximum und ihr Minimum in den Endpunkten an.

Beweis

Es ist

$$[a;b] = \{\, (1-\lambda)a + \lambda b \mid 0 \le \lambda \le 1 \,\}$$

und

$$f((1-\lambda)a + \lambda b) = c^T((1-\lambda)a + \lambda b) = c^T a + \lambda c^T(b-a) \quad \text{für alle } 0 \le \lambda \le 1.$$

Falls $c^T(b-a) = 0$ ist, gilt

$$f(b) = f((1-\lambda)a + \lambda b) = f(a) \quad \text{für alle } 0 \le \lambda \le 1,$$

falls $c^T(b-a) > 0$ ist, gilt

$$f(b) \ge f((1-\lambda)a + \lambda b) \ge f(a) \quad \text{für alle } 0 \le \lambda \le 1,$$

und falls $c^T(b-a) < 0$ ist, gilt

$$f(b) \le f((1-\lambda)a + \lambda b) \le f(a) \quad \text{für alle } 0 \le \lambda \le 1.$$

3.4 Satz (Hauptsatz der linearen Optimierung)

Nimmt eine (affin–) lineare Funktion f auf M das Maximum an, so auch in einer Ecke.

Beweis

Die Funktion f nehme in x^0 das Maximum an. Falls x^0 keine Ecke ist, so wähle a und b wie im **Beweis** von **Satz 3.2**. Nach **Satz 3.3** folgt ohne Beschränkung der Allgemeinheit

$$f(a) \ge f(x^0)$$

und damit

$$f(x^0) = f(a) = f(b)$$

nach Annahme von x^0. Nach Konstruktion ist $\dim L(a) < \dim L(x^0)$. Das Verfahren bricht nach endlich vielen Schritten mit einer Ecke $\overline{x}$ ab (siehe dazu die Konstruktion im **Beweis** von **Satz 3.1**), für die $f(\overline{x}) = f(x^0)$ gilt.

Folgerung

Es sei A in **(3.1)** eine $(m \times n)$–Matrix, wobei meistens $m < n$ ist. Falls f auf M das Maximum annimmt, so auch in einem Punkt $\overline{x} = (\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n)^T$ mit $\overline{x}_i \ne 0$ für höchstens m Indizes.

Beweis

Es können höchstens m Ungleichungsrestriktionen mit "=" erfüllt sein. Also müssen mindestens $n-m$ Vorzeichenbedingungen mit "=" erfüllt sein.

Wichtig

Wegen **3.4** braucht man nur die *Ecken* von M auf Optimalität zu prüfen. Davon gibt es nur endlich viele.

3.5 Satz

Es sei A in **(3.1)** eine $(m \times n)$–Matrix. Ist $M \ne \emptyset$, so hat M höchstens $\binom{m+n}{n}$ Ecken.

Beweis

Aus $m+n$ Randhyperebenen lassen sich nur endlich viele n–Tupel von Randhyperebenen auswählen nämlich

$$\frac{(m+n)(m+n-1)\dots(m+n-(n-1))}{n!} = \binom{m+n}{n}.$$

Beispiel

Es sei $m = 50$ und $n = 100$ dann ist $\binom{m+n}{n} \approx 10^{40}$. Das Checken einer Ecke dauere etwa eine Sekunde, ein Jahr hat etwa $3 \cdot 10^7$ Sekunden, das heißt das Checken aller Ecken dauert somit $3 \cdot 10^{32}$ Jahre.

4. Das Simplexverfahren

Gegeben sei ein lineares Problem der Form

$$\begin{aligned} \max \quad & c^T x \\ \text{N.B.} \quad & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{aligned} \tag{P}$$

wobei A eine $(m \times n)$–Matrix, $c \in I\!R^n$ und $b \in I\!R^m$ ist.

Geometrisch führt man beim Simplexverfahren von Georg Dantzig die folgenden Schritte aus

1) Beginne in einer Ecke der zulässigen Menge.

2) Gibt es eine von dieser Ecke ausgehende Kante entlang der $c^T x$ wächst?

- Falls nein, so ist die Ecke optimal, STOP!
- Falls ja, gehe zu 3).

3) Wähle eine Kante, entlang der $c^T x$ zunimmt.

4) Ist die Kante ein Halbstrahl in M, so gibt es keine endliche Lösung, STOP! Andernfalls gehe zu 5).

5) Bestimme die nächstliegende Ecke auf der Kante und gehe zu 2).

Bemerkung

Dabei ist folgendes zu beachten:

i) Punkt 1) erfordert die Lösung eines Hilfsproblems, worauf wir später in diesem Kapitel und in **Kapitel 5** eingehen werden. Dabei erweist sich M eventuell als leer.

ii) Durch ein Optimalitätskriterium muß in 2) sichergestellt werden, daß mit einem optimalen Punkt abgebrochen wird.

iii) Treten entartete Ecken auf, so braucht das Simplexverfahren nicht endlich zu sein. Siehe dazu weiter unten und **Kapitel 6**.

Bei Einführung von *Schlupfvariablen* (slacks) $x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}$ schreibt sich (P) als

$$\begin{array}{llllllll} \max & c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n & + 0 \cdot x_{n+1} & + 0 \cdot x_{n+2} + \cdots & + 0 \cdot x_{n+m} & & \\ \text{N.B.} & a_{11} x_1 + \cdots + a_{1n} x_n & + \ x_{n+1} & & & = b_1 & \\ & a_{21} x_1 + \cdots + a_{2n} x_n & & + \ x_{n+2} & & = b_2 & \\ & \vdots \qquad\qquad \vdots & & \ddots & & \vdots & \\ & a_{m1} x_1 + \cdots + a_{mn} x_n & & & + \ x_{n+m} & = b_m & \\ & & & & & x_i \geq 0 & \text{für } 1 \leq i \leq n+m \end{array}$$

oder kürzer in Matrixschreibweise

$$\begin{aligned} \max \quad & (c^T, 0^T_{I\!R^m}) x \\ \text{N.B.} \quad & (A, I) x = b \\ & x \geq 0_{I\!R^{n+m}}. \end{aligned}$$

Die Spalten von (A, I) bezeichnen wir im weiteren mit a^j für $j = 1, 2, \ldots, n+m$.

Definition

Wir betrachten ein allgemeines Problem vom Typ (P), dann heißt

a) $x \in \mathbb{R}^{n+m}$ *Basislösung* von (P) genau dann, wenn N, $B \subset \{1, 2, \ldots, n+m\}$ existieren mit

1) $|N| = n$, $|B| = m$, $N \cap B = \emptyset$ und $N \cup B = \{1, \ldots, n+m\}$,
2) $x_j = 0$ für alle $j \in N$ und
3) $(x_j)_{j \in B}$ ist die eindeutige Lösung von $\sum\limits_{j \in B} x_j a^j = b$.

b) Die Komponenten x_j der Basislösung x mit $j \in B$ heißen *Basisvariable*. Die Komponenten x_j der Basislösung x mit $j \in N$ heißen *Nichtbasisvariable*.

Die Basisvariablen werden zu x_B zusammengefaßt, die Nichtbasisvariablen zu x_N.

Sei A_B die $(m \times m)$–Matrix mit den Spalten a^j für $j \in B$ und A_N die $(m \times n)$–Matrix mit den Spalten a^j für $j \in N$. Dann besagt Punkt 3) der **Definition**

$$(A_B, A_N) \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} = b \quad \text{und} \quad \det A_B \neq 0.$$

Also ist x genau dann *zulässige* (feasible) Basislösung, wenn x Basislösung ist und $x_B \geq 0$.

Man beachte die matrizielle Darstellung

$$\begin{array}{r}m\{\\ n\{\end{array}\left(\begin{array}{c|c} \overbrace{A_B}^{m} & \overbrace{A_N}^{n} \\ \hline 0 & I \end{array}\right) \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix}.$$

4.1 Satz

Die zulässigen Basislösungen des erweiterten Systems (P) und die Ecken von

$$K := \{ x \in \mathbb{R}^{n+m} \mid (A, I)x = b, \ x \geq 0 \}$$

entsprechen einander. Sind die Ecken nicht entartet, so ist die Zuordnung eineindeutig.

Beweis

"$\Longrightarrow$" Es sei x zulässige Basislösung von (P), das heißt

$$x = (x_B, x_N), \quad x_N = 0, \quad x_B \geq 0$$
$$A_B x_B = b, \quad \operatorname{rang} A_B = m \quad \text{und} \quad \det A_B \neq 0.$$

Damit löst $x = (x_B, x_N)$ das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} A_B & A_N \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix},$$

das vollen Rang besitzt, denn

$$\det \begin{pmatrix} A_B & A_N \\ 0 & I \end{pmatrix} = \det(A_B) \cdot \det(I) \neq 0,$$

das heißt die $n+m$ Zeilen dieser Matrix sind linear unabhängig. Also liegt x auf $n+m$ linear unabhängigen Hyberebenen im $\mathbb{R}^{n+m}$. Die Matrix (A_B, A_N) hat die gleichen

Spalten wie die Matrix (A, I), nur in einer anderen Reihenfolge. Daraus folgt, daß x von den $m+(n+m)$ Bedingungen in K $n+m$ linear unabhängige mit Gleichheit erfüllt, also ist x eine Ecke von K.

"$\Longleftarrow$" Es sei x eine Ecke von K. Da x mindestens $n+m$ Restriktionen mit Gleichheit erfüllt, müssen mindestens n Komponenten von x gleich 0 sein. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $k \leq m$ und $x_1 > 0, \ldots, x_k > 0$ sowie $x_{k+1} = \ldots = x_{n+m} = 0$. Dann genügt x dem Gleichungssystem

$$\begin{array}{r} m\,\{ \\ m+n-k \left\{ \begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array} \right. \end{array} \left(\begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{\tilde{A}} \\ \hline \underbrace{\begin{matrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{matrix}}_{k} & \underbrace{\begin{matrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{matrix}}_{m+n-k} \end{array}\right) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \\ \vdots \\ x_{n+m} \end{pmatrix} = \left.\left(\begin{array}{c} b \\ \hline 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array}\right)\right\} 2m+n-k$$

wobei $\tilde{A} := (A, I)$. Da x eine Ecke ist, besitzt das Gleichungssystem $m+n$ linear unabhängige Zeilen und damit natürlich auch $m+n$ linear unabhängige Spalten. Das heißt alle Spalten dieses Gleichungssystems sind linear unabhängig. Daher müssen auch die ersten k Spalten von $\tilde{A}$ linear unabhängig sein. Weil nun $\tilde{A} = (A, I)$ genau m linear unabhängige Zeilen besitzt, ist somit $\operatorname{rang} \tilde{A} = m$ und daher sind nach eventueller Umnumerierung von $\tilde{a}^{k+1}, \ldots, \tilde{a}^{n+m}$ sogar $\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_m$ linear unabhängig, da $\tilde{A}$ auch m linear unabhängige Spalten hat. Mit

$$\begin{gathered} B = \{1, \ldots, m\}, \quad N = \{m+1, \ldots, m+n\}, \\ x_B = (x_1, \ldots, x_m), \quad x_N = (x_{m+1}, \ldots, x_{m+n}), \\ A_B, A_N \text{ analog} \end{gathered}$$

folgt

$$x_N = 0, \quad x_B \geq 0, \quad A_B x_B = b, \quad \text{und} \quad \operatorname{rang} A_B = m.$$

Damit ist x eine zulässige Basislösung.

4.2 Beispiel

Man betrachte die Restriktionen

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\leq 4 \\ 2x_1 - x_2 &\leq 3 \\ x_2 &\leq 1 \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Abbildung 4.1 stellt die zulässige Menge im $\mathbb{R}^2$ dar. Dies ist allerdings nicht das K aus **Satz 4.1**, da die zulässige Menge in der Abbildung ohne slacks dargestellt wird, die Menge K zu diesem Problem entsprechend **Satz 4.1** ist eine Teilmenge des $\mathbb{R}^5$.

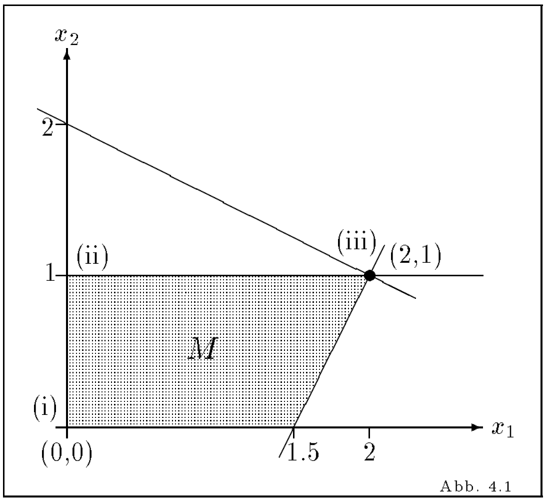


Abb. 4.1

Nach Einführung von slacks haben wir das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \left.\begin{matrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{matrix}\right\}\text{slacks} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

wobei

$$x_i \geq 0 \quad \text{für } i = 1, \ldots, 5,$$

das heißt $m = 3$ und $n = 2$. Zulässige Basislösungen sind zum Beispiel:

- Die Nichtbasisvariablen seien $x_1 = x_2 = 0$ und die Basisvariablen seien $x_3 = 4$, $x_4 = 3$ und $x_5 = 1$. Dem entspricht der Punkt (i) in der Abbildung. Dann ist x eine zulässige Basislösung, denn

$$N = \{1, 2\}, \quad B = \{3, 4, 5\}, \quad A_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ist regulär und} \quad x_B \geq 0.$$

  Der Punkt $x = (0, 0, 4, 3, 1)$ liegt auf den linear unabhängigen Hyperebenen mit den Normalenvektoren

$$(1, 0, 0, 0, 0),\ (0, 1, 0, 0, 0),\ (1, 2, 1, 0, 0),\ (2, -1, 0, 1, 0),\ (0, 1, 0, 0, 1).$$

- Die Nichtbasisvariablen seien $x_1 = x_5 = 0$. Dann ist

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

  eindeutig lösbar mit $x_B = (1, 2, 4) = (x_2, x_3, x_4) \geq 0$. Dem entspricht der Punkt (ii) in der Abbildung.

- Der Punkt $x = (2, 1, 0, 0, 0)$ ((iii) in der Abbildung) ist eine entartete Ecke im $\mathbb{R}^{2+3}$. Er liegt auf den Hyperebenen mit den Normalenvektoren

$$(1, 2, 1, 0, 0),\ (2, -1, 0, 1, 0),\ (0, 1, 0, 0, 1),\ (0, 0, 1, 0, 0),\ (0, 0, 0, 1, 0),\ (0, 0, 0, 0, 1).$$

Ihm entsprechen die folgenden Basislösungen

$$\begin{aligned} B &= \{1,2,3\}, \quad N = \{4,5\}, \\ B &= \{1,2,4\}, \quad N = \{3,5\}, \\ B &= \{1,2,5\}, \quad N = \{3,4\}. \end{aligned}$$

Das Simplexverfahren

Es liege das lineare Problem in der Form mit slacks vor und es sei $b \geq 0$. Wir schreiben kurz A für (A, I) und c^T für $(c^T, 0^T_{\mathbb{R}^m})$. Dann läuft das Simplexverfahren nach folgendem Algorithmus ab:

1) Man starte mit der zulässigen Basislösung

$$x_N := (x_1, \ldots, x_n) = 0_{\mathbb{R}^n}, \quad \text{und} \quad x_B := (x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}) = b.$$

In 2) bis 7) sind B und N als fest, x_N und x_B als "variabel" zu betrachten.

2) Löse $Ax = b$ nach x_B auf, das heißt

$$Ax = (A_N, A_B)\begin{pmatrix} x_N \\ x_B \end{pmatrix} = A_N x_N + A_B x_B = b$$

und damit

$$x_B = \underbrace{A_B^{-1} b}_{=:\widetilde{b}} - \underbrace{A_B^{-1} A_N}_{=:\widetilde{A}_N} x_N. \tag{4.3}$$

3) Eliminiert man x_B aus der Zielfunktion $c^T x = c_N^T x_N + c_B^T x_B$, so erhält man

$$c^T x = \underbrace{c_B^T A_B^{-1} b}_{=:z} + \underbrace{(c_N^T - c_B^T A_B^{-1} A_N)}_{=:\tilde{c}_N^T} x_N = z + \tilde{c}_N^T x_N. \tag{4.4}$$

Man beachte, daß z konstant, das heißt, unabhängig von x_B ist. Die $\tilde{c}_j$ heißen *reduzierte Kosten*. Aus **(4.4)** kann man schließen, daß sich der Wert der Zielfunktion — wenn überhaupt — nur durch Ändern einer Komponente von x_N vergrößern läßt.

4) Sind alle $\tilde{c}_j \leq 0$ für alle $j \in N$, so kann durch die Vergrößerung eines x_j mit $j \in N$ keine Verbesserung des Zielfunktionswertes erreicht werden (beachte **(4.4)**). Wir erhalten das *Optimalitätskriterium*

$$\tilde{c}_N \leq 0. \tag{4.5}$$

5) Ist ein $\tilde{c}_j > 0$ für ein $j \in N$, so kann der Zielfunktionswert durch Erhöhung von x_j vergrößert werden. Wähle ein $s \in N$ mit $\tilde{c}_s > 0$ und setze in **(4.3)** $x_j = 0$ für alle $j \in N \setminus \{s\}$ und

$$x_B = \tilde{b} - \tilde{a}^s x_s. \tag{4.6}$$

Aus **(4.6)** und $x_B \geq 0$ ergibt sich die folgende Einschränkung der Wahl von x_s:

6) Ist $\tilde{a}^s = (\tilde{a}_{1s}, \ldots, \tilde{a}_{ms})^T \leq 0$, so kann x_s beliebig groß gewählt werden. STOP. Es gibt keine endliche Lösung.

7) Bestimme r mit

$$\frac{\tilde{b}_r}{\tilde{a}_{rs}} := \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \frac{\tilde{b}_i}{\tilde{a}_{is}} \;\middle|\; \tilde{a}_{is} > 0 \right\}.$$

x_s kann höchstens den Wert $\frac{\tilde{b}_r}{\tilde{a}_{rs}}$ annehmen, ohne daß der zulässige Bereich verlassen wird, sonst würden die Vorzeichenbedingungen verletzt.

8) Setze die neue Basis folgendermaßen fest

$$
\begin{aligned}
B &:= (B \cup \{s\}) \setminus \{n + r\}, \\
N &:= (N \cup \{n + r\}) \setminus \{s\}.
\end{aligned}
$$

Tausch von x_r gegen x_s

Man transformiert das Tableau in jedem Schritt, indem man das Inverse einer Frobeniusmatrix F von links an das gesamte Tableau heranmultipliziert. Die Matrix A_B, für die in **(4.3)** $A_B x_B = b$ gilt, berechnet sich jeweils aus $\widetilde{A}_B = A_B F$. Man beachte, daß die hier mit A_B bezeichnete Matrix keine permutierte Einheitsmatrix wie im extensiven Simplexverfahren ist, sondern eine "Basisspaltenauswahlmatrix". Das heißt, in A_B stehen in der Reihenfolge der Indizes der Basislösung die zugehörigen Spalten. Dies sind zwar die i–ten Einheitsspalten für die slacks, jedoch die ursprünglichen Spalten aus A_N, für ein x_i, das beim Start des Verfahrens zu x_N gehörte. Da beim Start $A_B = I$ gesetzt wird, ist nach dem ersten Schritt $A_B = F$. Die Matrix F erhält man jeweils indem man in der Einheitsmatrix für die r–te Spalte die s–te Spalte des momentanen A_N, das heißt die momentane Pivotspalte schreibt. Das heißt

$$
\begin{array}{c}
F = \begin{pmatrix}
1 & & & a_{1s} & & & \\
& \ddots & & \vdots & & & \\
& & 1 & a_{r-1,s} & & & \\
& & & a_{rs} & & & \\
& & & a_{r+1,s} & 1 & & \\
& & & \vdots & & \ddots & \\
& & & a_{ms} & & & 1
\end{pmatrix}. \\
\uparrow \\
\text{r-te Spalte}
\end{array}
$$

Und damit ist

$$
F^{-1} = \begin{pmatrix}
1 & & & -\frac{a_{1s}}{a_{rs}} & & & \\
& \ddots & & \vdots & & & \\
& & 1 & -\frac{a_{r-1,s}}{a_{rs}} & & & \\
& & & \frac{1}{a_{rs}} & & & \\
& & & -\frac{a_{r+1,s}}{a_{rs}} & 1 & & \\
& & & \vdots & & \ddots & \\
& & & -\frac{a_{ms}}{a_{rs}} & & & 1
\end{pmatrix}
$$

Wegen der speziellen Struktur von F^{-1} entspricht die Multiplikation von links genau den sogenannten Pivotoperationen mit dem *Pivotelement* a_{rs}. Damit läßt sich das $\widetilde{A}_N =: (\tilde{a}_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$ berechnen durch

$$
\begin{aligned}
\tilde{a}_{rs} &= \frac{1}{a_{rs}} \\
\tilde{a}_{rj} &= \frac{a_{rj}}{a_{rs}} \quad \text{für } 1 \le j \le n \text{ und } j \neq s \\
\tilde{a}_{is} &= -\frac{a_{is}}{a_{rs}} \quad \text{für } 1 \le i \le m \text{ und } i \neq r \\
\tilde{a}_{ij} &= a_{ij} - \frac{a_{is} a_{rj}}{a_{rs}} \quad \text{für } 1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n \text{ und } i \neq r,\ j \neq s
\end{aligned}
$$

wobei $A_N = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}}$. Dieses Vorgehen ist besonders einfach, weil sich der Vektor b in gleicher Weise transformiert, das heißt wir erhalten $\tilde{b}$ durch

$$\begin{aligned}\tilde{b}_r &= \frac{b_r}{a_{rs}},\\ \tilde{b}_i &= b_i - \frac{a_{is}}{a_{rs}} b_r \quad \text{für } 1 \le i \le m \text{ und } i \ne r.\end{aligned}$$

Die Zielfunktion transformiert man ebenso, indem man c_s an die r-te Stelle von c_B bringt, das heißt

$$\tilde{c}_j = c_j - \frac{c_s a_{rj}}{a_{rs}}.$$

Der neue Wert der Zielfunktion $\tilde{z}$ ist also

$$\tilde{z} = z - c_s \frac{b_r}{a_{rs}}.$$

Damit ist ein Simplexschritt durchgeführt, und man wählt ein neues Pivotelement für den nächsten Schritt und führe alle Operationen durch, falls das Tableau noch nicht optimal ist. Man beachte, daß man das neue A_B, welches für die Tableauoperationen nicht benötigt wird einfach durch

$$\tilde{A}_B = A_B F$$

erhält, wobei F die momentane Frobeniusmatrix ist. Somit enthält A_B immer nur Einheitsvektoren und Spalten aus dem Starttableau. Und es gilt immer $A_B x_B = b$, wobei b die rechte Seite des Ausgangstableaus ist.

Gehe zu 2).

Beispiel

Wir wollen das Simplexverfahren für ein konkretes Beispiel anwenden. Wir betrachten dazu

$$\begin{array}{rrcl} \max & x_1 + x_2 & & \\ \text{N.B.} & x_1 + 2x_2 & \le & 4 \\ & 2x_1 - x_2 & \le & 3 \\ & x_2 & \le & 1 \\ & x_1, x_2 & \ge & 0. \end{array}$$

Man erhält die Tableaufolge

Tableau 1

$$\begin{array}{rcc} A = & \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ \boxed{2} & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \\ (\max) & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \; (= -c^T x) \end{array}$$

Zunächst ist $N = \{1,2\}$, $B = \{3,4,5\}$ und $x = \{0,0,4,3,1\}$. Der Wert der Zielfunktion kann vergrößert werden, wenn man x_1 in die Basis bringt. Die Zeilenauswahlregel liefert, daß a_{21} als Pivotelement zu wählen ist. Damit muß x_4 aus der Basis entfernt werden. Diesen Austauschschritt führt man nun wie bei der Gaußelimination durch, das heißt, man muß $x_1 = 3/2$ wählen, denn dann wird $x_4 = 0$. Nach Ausführung der Pivotoperationen erhält man

Tableau 2

$$\begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 0 & 5/2 & 1 & -1/2 & 0 \\ 1 & -1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 5/2 \\ 3/2 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 3/2 & 0 & -1/2 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -3/2 \end{bmatrix} \end{array}$$

Nun ist $N = \{2,4\}$, $B = \{1,3,5\}$ und $x = (3/2, 0, 5/2, 0, 1)$. Wie im ersten Schritt erfolgt nun eine Pivotoperation und zwar mit dem Element a_{32}, das heißt x_2, kommt in die Basis und x_5 wird aus der Basis entfernt. Man erhält

$$\textbf{Tableau 3} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1/2 & -5/2 \\ 1 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1/2 & -3/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \end{bmatrix}$$

Hier ist $N = \{4,5\}$, $B = \{1,2,3\}$ und $x = (2,1,0,0,0)$, und $\tilde{c}_N \le 0$, das heißt, das Optimalitätskriterium ist erfüllt und somit ist $\overline{x}$ optimal. Wir erhalten $\overline{x}_1 = 2$ und $\overline{x}_2 = 1$.

Anderer Ansatz, um das Simplexverfahren zu erklären

Gegeben sei wieder das lineare Problem

$$\begin{aligned} \max \;& c^T x \\ \text{N.B. } & Ax = b \\ & x \ge 0 \end{aligned} \tag{P}$$

mit der erweiterten Matrix (A, c), und das dazu offensichtlich äquivalente Problem

$$\begin{aligned} \min \;& z \\ \text{N.B. } & Ax = b \\ & c^T x + z = 0 \\ & x \ge 0 \end{aligned} \tag{P'}$$

in den Variablen x und z, allerdings mit der Matrix A. Wir wollen nun das Simplexverfahren anhand des zweiten Problems erklären.

Im ersten Schritt versucht man durch Multiplikation mit einer Frobeniusmatrix G zu erreichen, daß die z–Komponente der Lösung des linearen Gleichungssystemes

$$\left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline c^T & 1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} x \\ \hline z \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} b \\ \hline 0 \end{array}\right)$$

kleiner wird, das heißt, daß $-z = c^T x$ wächst unter den Nebenbedingungen $Ax = b$ und $x \ge 0$.

Als Beispiel betrachten wir nochmals das Problem aus **Beispiel 4.2** und erhalten das Gleichungssystem

$$A = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} x_1 \\ \vdots \\ x_5 \\ \hline z \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} 4 \\ 3 \\ 1 \\ \hline 0 \end{array}\right)$$

und eine Lösung $(0,0,4,3,1|0)$. Mit der besagten Frobeniusmatrix

$$G = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

berechnet man

$$G \cdot A = \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 5/2 & 1 & -1/2 & 0 & 0 \\ 1 & -1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 3/2 & 0 & -1/2 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_5 \\ \hline z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/2 \\ 7/2 \\ 1 \\ \hline -3/2 \end{pmatrix}$$

mit einer Lösung $(3/2, 0, 5/2, 0, 1 | -3/2)$.

Ein (x, z), das das System (P') löst, löst auch das System (P), die z–Komponente ist aber kleiner geworden, das heißt $c^T x$ wurde vergrößert.

Eine mögliche *Pivotauswahl* für das Problem (P') ist

$$c_s := \max_{j \in N} c_j.$$

Kondensiertes Simplextableau

Bei Fortlassen der Einheitsspalten schreibt sich das jeweilige Tableau als

a_{00}	a_{01}	a_{02}	$\dots$	a_{0n}
a_{10}	a_{11}	a_{12}	$\dots$	a_{1n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
a_{m0}	a_{m1}	a_{m2}	$\dots$	a_{mn}

wobei $a_{0j} := c_j$ für $1 \leq j \leq n$, $a_{i0} := b_i$ für $1 \leq i \leq m$ und $a_{00} := -z$ der momentane Wert der Zielfunktion ist.

Über einen m–Vektor B speichert man ab, welche Zeile welcher Basisvariablen entspricht, über einen n–Vektor N welche Spalte welcher Nichtbasisvariable entspricht. Die augenblickliche Basislösung ist

$$\begin{aligned} x_{N(j)} &= 0 \quad \text{für } j = 1, \dots, n \\ x_{B(i)} &= a_{i0} \quad \text{für } i = 1, \dots, m \\ c^T(x_B, x_N) &= -a_{00}. \end{aligned}$$

Die Ausgangslösung heißt *zulässig*, falls $a_{i0} \geq 0$ für $1 \leq i \leq m$. Die zugehörige Basislösung x ist wegen

$$x = (\underbrace{0, \dots, 0}_{n}, \underbrace{b_1, \dots, b_m}_{m})$$

zulässig. Das Tableau ist *optimal*, wenn $a_{0j} \leq 0$ für $1 \leq j \leq n$.

Algorithmus zum kondensierten Simplexverfahren

Dieser Algorithmus ist ein weiteres Verfahren zur Bestimmung einer Optimallösung von

$$\begin{aligned} \max \quad & c^T x \\ \text{N.B.} \quad & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

bei zulässiger Ausgangslösung, das heißt, falls $b \geq 0$ ist. In diesem Fall starte mit $x_N = (0, \dots, 0)$ und $x_B = b$.

Die Ausgangsdaten für den Algorithmus sind das Tableau $(a_{ij})_{\substack{0\le i\le m\\0\le j\le n}}$ und die zulässige Basislösung $B = (n+1,\dots,n+m)$ und $N = (1,\dots,n)$.

1) Ist ein $a_{0j} > 0$ für $1 \le j \le n$ so gehe zu 2). Andernfalls ist eine Optimallösung gefunden. Setze

$$\begin{aligned} x_{B(i)} &:= a_{i0} \quad \text{für } 1 \le i \le m \\ x_{N(j)} &:= 0 \quad \text{für } 1 \le j \le n \end{aligned}$$

und

$$z := -a_{00}.$$

STOP!

2) Man bestimmt die Austauschspalte s so, daß

$$a_{0s} = \max_{1\le j\le n} a_{0j}.$$

3) Falls $a_{is} \le 0$ für $1 \le i \le m$, so existiert keine endliche Lösung. STOP! Andernfalls gehe zu 4).

4) Man bestimmt die Austauschzeile r so, daß

$$\frac{a_{r0}}{a_{rs}} = \min\left\{ \frac{a_{i0}}{a_{is}} \;\middle|\; a_{is} > 0 \quad \text{für } i = 1,2,\dots,m \right\}.$$

5) Man führe die *Pivotoperation* durch, indem man die r–te Komponente von B mit der s–ten Komponente von N vertauscht, und setze

$$\begin{aligned} a_{rs} &:= \frac{1}{a_{rs}} \\ a_{is} &:= -\frac{a_{is}}{a_{rs}} \quad \text{für } i = 0,1,\dots,m \text{ mit } i \ne r \\ a_{rj} &:= \frac{a_{rj}}{a_{rs}} \quad \text{für } j = 0,1,\dots,n \text{ mit } j \ne s \\ a_{ij} &:= a_{ij} - \frac{a_{is}a_{rj}}{a_{rs}} \quad \text{für } i = 0,1,\dots,m \text{ mit } i \ne r \text{ und } j = 0,1,\dots,n \text{ mit } j \ne s. \end{aligned}$$

Gehe zu 1).

Wir wenden nun den Algorithmus zum kondensierten Simplexverfahren auf das **Beispiel 4.2** an. Man erhält die Tableaufolge

Ausgangstableau

$$\begin{array}{r c|c|cc|} \multicolumn{5}{r}{\text{Nichtbasisvariable}} \\ & & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{2}{c}{\overbrace{x_1 \quad x_2}} \\ \cline{3-5} & & 0 & 1 & 1 \\ \cline{3-5} \text{Basisvariable} \left\{ \right. & x_3 & 4 & 1 & 2 \\ & x_4 & 3 & \boxed{2} & -1 \\ & x_5 & 1 & 0 & 1 \\ \cline{3-5} \end{array}$$

Es ist also $N = \{1,2\}$ und $B = \{3,4,5\}$. Die zugehörige zulässige Basislösung im $\mathbb{R}^5$ ist $x = (0,0,4,3,1)$. Das Tableau ist zulässig aber nicht optimal. Nach der Pivotauswahlregel erhält man $s = 1$ und $r = 2$.

Tableau 2

		x_4	x_2
	$-3/2$	$-1/2$	$3/2$
x_3	$5/2$	$-1/2$	$5/2$
x_1	$3/2$	$1/2$	$-1/2$
x_5	1	0	$\boxed{1}$

Es folgt $N = \{4, 2\}$ und $B = \{1, 3, 5\}$. Die zugehörige zulässige Basislösung im $I\!R^5$ lautet $x = (3/2, 0, 5/2, 0, 1)$. Das Tableau ist wieder zulässig aber immer noch nicht optimal. Nach der Pivotauswahlregel erhält man diesmal $s = 2$ und $r = 3$.

Tableau 3

		x_4	x_5
	-3	$-1/2$	$-3/2$
x_3	0	$-1/2$	$-5/2$
x_1	2	$1/2$	$1/2$
x_2	1	0	1

Nun ist $N = \{4, 5\}$ und $B = \{1, 2, 3\}$. Die entsprechende zugehörige zulässige Basislösung im $I\!R^5$ ist $x = (2, 1, 0, 0, 0)$. Das Tableau ist optimal, damit ist die zugehörige Basislösung die Optimallösung

$$\overline{x}_1 = 2 \quad \text{und} \quad \overline{x}_2 = 1$$

mit den slacks

$$\overline{x}_3 = 0, \quad \overline{x}_4 = 0 \quad \text{und} \quad \overline{x}_5 = 0.$$

Wegen $x_3 = 0$ erfüllt eine Basisvariable eine zusätzliche Vorzeichenbedingung, die Basislösung ist also entartet. Beispielsweise ist

$$N = \{4, 3\} \quad \text{und} \quad B = \{5, 1, 2\}$$

auch eine Optimallösung!

Definition

Eine zulässige Basislösung heißt *entartet*, falls $x_{B(i)} = 0$ für mindestens ein i gilt. Damit liegt die zugehörige Basislösung (x_B, x_N) auf mindestens

$$\underset{\substack{\text{Gleichungs}-\\ \text{restriktionen}}}{\underset{\uparrow}{m}} + \underset{x_N=0}{\underset{\uparrow}{n}} + \underset{x_{B(i)}=0}{\underset{\uparrow}{1}}$$

Hyperebenen im $I\!R^{n+m}$.

4.3 Satz

Sind im obigen Algorithmus alle Zwischenlösungen nicht entartet, so bricht der Algorithmus nach endlich vielen Schritten mit dem Optimum ab, beziehungsweise mit der Information, daß es kein Optimum gibt.

Beweis

In jedem Schritt nimmt die Zielfunktion um $c_s \cdot \frac{b_r}{a_{rs}}$ zu. Da nach Annahme b_r immer größer 0 und nach der Pivotauswahlregel $a_{rs} > 0$ und $c_s > 0$ ist, kann man zu keiner schon einmal durchlaufenen Ecke zurückkehren.

5. Bestimmung einer zulässigen Ausgangslösung

Der Algorithmus zum kondensierten Simplexverfahren aus **Kapitel 4** ist nur anwendbar, wenn eine zulässige Ausgangslösung vorliegt. Ist ein $b_i < 0$, so muß man sich eine solche zulässige Ausgangslösung erst durch einen Hilfsalgorithmus verschaffen.

5.1 Zweiphasenmethode von Dantzig

Dabei wird mit Phase I der nun zu besprechende Algorithmus zum Finden einer zulässigen Ausgangslösung bezeichnet, und Phase II ist der aus **Kapitel 4** bekannte Algorithmus.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $b_i < 0$ für $i = 1, \ldots, k$. Durch Multiplikation der ersten k Zeilen mit -1 und Einführung zusätzlicher künstlicher Variablen $\tilde{y}_1 \geq 0, \ldots, \tilde{y}_k \geq 0$ erhält man

$$
\begin{array}{lllllll}
-a_{11}x_1 - \ldots - a_{1n}x_n & -y_1 & & & +\tilde{y}_1 & & = -b_1 \\
\quad\vdots \qquad\qquad \vdots & & \ddots & & & \ddots & \quad\vdots \\
-a_{k1}x_1 - \ldots - a_{kn}x_n & & -y_k & & & +\tilde{y}_k & = -b_k \\
a_{k+1\,1}x_1 + \ldots + a_{k+1\,n}x_n & & & +y_{k+1} & & & = b_{k+1} \\
\quad\vdots \qquad\qquad \vdots & & & \ddots & & & \quad\vdots \\
a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n & & & +y_m & & & = b_m \\
 & & & & I & &
\end{array}
\tag{5.1}
$$

Es gilt offensichtlich

1) Löst $(x, y, \tilde{y})$ mit $x \geq 0$, $y \geq 0$ und $\tilde{y} = 0$ das System **(5.1)**, so löst x das System $Ax \leq b$ und $x \geq 0$.

2) Löst x das System $Ax \leq b$, $x \geq 0$, so löst $(x, y, \tilde{y})$ mit $y := b - Ax$ und $\tilde{y} := 0$ das System **(5.1)**.

Das führt auf das Hilfsproblem

$$z := \min \sum_{i=1}^{k} \tilde{y}_i \quad \text{unter N.B. } \textbf{(5.1)},\ x \geq 0,\ y \geq 0 \text{ und } \tilde{y} \geq 0.$$

Falls

i) $z = 0$, dann ist die zugehörige Basislösung zulässig für das Ausgangsproblem.

ii) $z > 0$, dann besitzt das Ausgangsproblem keine zulässigen Punkte.

Als zulässige Basislösung für das $m \times (n + k + m)$–Hilfsproblem nimmt man

$$
\begin{aligned}
x_N &= (x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_k) = 0_{\mathbb{R}^{m+k}} \\
x_B &= (\tilde{y}_1, \ldots, \tilde{y}_k, y_{k+1}, \ldots, y_m) = (-b_1, \ldots, -b_k, b_{k+1}, \ldots, b_m).
\end{aligned}
$$

Summation der ersten k Zeilen in **(5.1)** ergibt

$$-\sum_{i=1}^{k} a_{i1}x_1 - \ldots - \sum_{i=1}^{k} a_{in}x_n - \sum_{i=1}^{k} y_i + \sum_{i=1}^{k} \tilde{y}_i = -\sum_{i=1}^{k} b_i.$$

Die Hilfszielfunktion läßt sich somit folgendermaßen über die Nichtbasisvariablen ausdrücken

$$\begin{aligned}
-\sum_{i=1}^{k} \tilde{y}_i &= \underbrace{\sum_{i=1}^{k} b_i}_{=:\, d_0} + \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\left(- \sum_{i=1}^{k} a_{ij} \right)}_{=:\, d_j} x_j + \sum_{i=1}^{k} \underbrace{(-1)}_{=:\, d_{n+i}} y_i \\
&= d_0 + \sum_{j=1}^{n} d_j x_j + \sum_{i=1}^{k} d_{n+i} y_i .
\end{aligned}$$

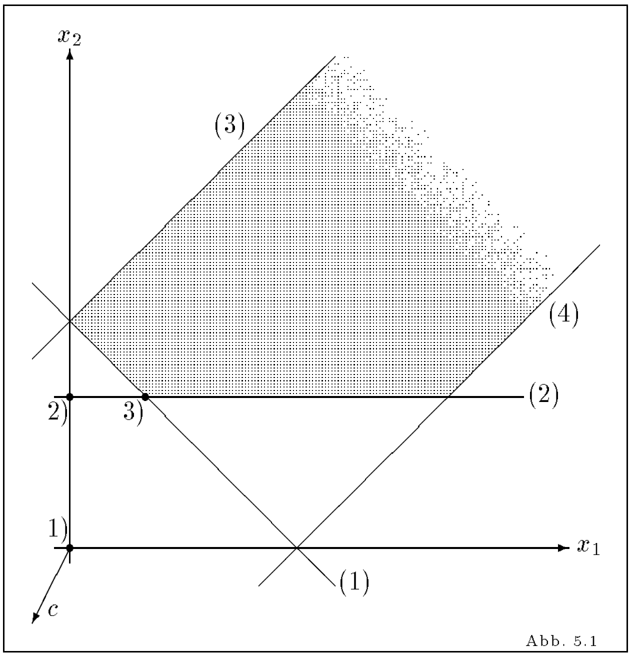
Im Fall i) sind nach dem Maximieren der Hilfszielfunktion die künstlichen Variablen $\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_k$ im optimalen Tableau Nichtbasisvariablen. Die zugehörigen Spalten werden am Ende der Phase I gestrichen.

Beispiel

Wir wollen das Verfahren auf folgendes Beispiel anwenden:

$$\begin{array}{ll}
\max & -x_1 - 2x_2 \\
\text{N.B.} & -x_1 - \ x_2 \ \le -3 \\
& \qquad\ \ - \ x_2 \ \le -2 \\
& -x_1 + \ x_2 \ \le 3 \\
& \ \ \ x_1 - \ x_2 \ \le 3 \\
& \quad\ x_1,\ x_2 \ \ge 0.
\end{array}$$

Abbildung 5.1 stellt die zulässige Menge zu diesem Beispiel dar, und macht deutlich, wie durch den Hilfsalgorithmus eine Ecke des zulässigen Bereichs gefunden wird.



Wenn man die Zweiphasenmethode von Dantzig anwendet, erhält man als

Starttableau

		x_1	x_2	y_1	y_2				
	5	1	2	-1	-1	Hilfszielfunktion			
	0	-1	-2	0	0	Zielfunktion			
$\tilde{y}_1$	3	1	1	-1	0	0	0	1	0
$\tilde{y}_2$	2	0	$\boxed{1}$	0	-1	0	0	0	1
y_3	3	-1	1	0	0	1	0	0	0
y_4	3	1	-1	0	0	0	1	0	0
						y_3	y_4	$\tilde{y}_1$	$\tilde{y}_2$

Abbildung 5.1 macht klar, daß die Ausgangslösung kein zulässiger Punkt für das eigentliche Problem ist. Daher wird nun zunächst das Hilfsproblem nach dem bekannten Algorithmus aus **Kapitel 4** mit der Hilfszielfunktion als Zielzeile maximiert. Daher erhalten wir als Pivotspalte $s = 2$ und nach der Pivotzeilenauswahlregel $r = 2$. Der Wert 5 der Hilfszielfunktion entspricht $-d_0$. Nach der Pivotoperation mit a_{22} erhalten wir

Tableau 2

		x_1	$\tilde{y}_2$	y_1	y_2
	1	1	-2	-1	1
	4	-1	2	0	-2
$\tilde{y}_1$	1	$\boxed{1}$	-1	-1	1
x_2	2	0	1	0	-1
y_3	1	-1	-1	0	1
y_4	5	1	1	0	-1

Wir haben nun den Punkt 2) in Abbildung 5.1 erreicht. Das Hilfsproblem ist offensichtlich noch nicht gelöst, da noch nicht alle Einträge in der Hilfszielfunktion kleiner oder gleich 0 sind. Dem entspricht, daß auch der momentane Punkt für das eigentliche Problem nicht zulässig ist. Man führt also mit a_{11} einen weiteren Pivotschritt aus und erhält

Tableau 3

		$\tilde{y}_1$	$\tilde{y}_2$	y_1	y_2
	0	-1	-1	0	0
	5	1	1	-1	$\oplus 1$
x_1	1	1	-1	-1	1
x_2	2	0	1	0	-1
y_3	2	1	-2	-2	2
y_4	4	-1	2	1	-2

Da das Minimum der Hilfszielfunktion erreicht ist, ist das Hilfsproblem gelöst. Abbildung 5.1 zeigt, daß nun auch ein zulässiger Punkt für das eigentliche Problem gefunden ist. Die zu $\tilde{y}_1$ und $\tilde{y}_2$ gehörigen Spalten werden gestrichen, und ebenso die Hilfszielfunktion. Das verbleibende Tableau dient als Ausgangstableau für Phase II, das heißt für die Optimierung der Zielfunktion bei gegebener *zulässiger* Ausgangslösung. Wir erhalten also

Tableau 4

		y_1	y_2
	5	-1	-1
x_1	1	-1	1
x_2	2	0	-1
y_3	2	-2	2
y_4	4	1	-2

Da alle $a_{0i} \leq 0$ sind folgt, daß das Tableau 4 bereits optimal ist, und damit ist $\overline{x} = (1, 2)$ die Optimallösung. Wenn man in Abbildung 5.1 die Zielfunktion c betrachtet, wird auch anschaulich klar, warum $\overline{x}$ das Optimum ist.

5.2 Mehrphasenmethode von Künzi

Man definiert zunächst die beiden Mengen I und I^c durch

$$I := \{\, i \mid b_i \geq 0 \,\} \quad \text{und} \quad I^c := \{\, i \mid b_i < 0 \,\}.$$

Sei nun $I^c \neq \emptyset$, sonst wäre die Ausgangslösung zulässig. Man wähle ein $i_1 \in I^c$ und löse das Hilfsproblem

$$\begin{aligned} \max \quad & -(a_{i_1 1}x_1 + \ldots + a_{i_1 n}x_n) \\ \text{N.B.} \quad & \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i \quad \text{für } i \in I \\ & x \geq 0 \end{aligned} \tag{$\widetilde{P}$}$$

mit der zulässigen Basislösung $x_N = (x_1, \ldots, x_n)$ und $x_B = (b_i)_{i \in I}$. Man beachte, daß trotzdem das ganze Tableau transformiert wird, also auch die Zeilen, die im Hilfsproblem nicht als Nebenbedingungen auftreten.

Mögliche Situationen

i) Falls das Maximum in $(\widetilde{P})$ kleiner als $-b_{i_1}$ ist, so besitzt das Ausgangsproblem keine zulässigen Punkte.

ii) Ist in einem Zwischentableau $b_{i_1} \geq 0$, so ist die zugehörige Ecke zulässig für eine Restriktionenmenge $I_1 \supsetneq I$. Setze $I_1^c := \{1, \ldots, m\} \setminus I_1$ und betrachte nun ein neues Hilfsproblem. Weil im allgemeinen mehr als ein Hilfsproblem gelöst werden muß, ist die Bezeichnung "*Mehr*phasenmethode" entstanden.

iii) Das Simplexverfahren zeigt an, daß $(\widetilde{P})$ keine endliche Lösung besitzt. Dann stehen in der Pivotspalte s nur Elemente ≤ 0. Durch einen Pivotschritt mit $a_{i_1 s}$ erhält man eine zulässige Ecke für ein Problem mit einer Restriktionenmenge $I_1 \supsetneq I$. Denn es ist

$$\begin{aligned} c_s &= (-a_{i_1 s}) > 0 \\ \tilde{b}_{i_1} &= \frac{b_{i_1}}{a_{i_1 s}} \geq 0 \\ \tilde{b}_i &= b_i - \underbrace{\frac{a_{is}}{a_{i_1 s}}}_{\geq 0} \underbrace{b_{i_1}}_{\leq 0} \geq b_i \geq 0 \quad \text{für } i \in I. \end{aligned}$$

Das heißt, I^c wird entweder in jedem Schritt verkleinert, und damit nach höchstens endlich vielen Schritten leer, oder aber die Menge der zulässigen Punkte für das eigentliche Problem ist leer, was genau dann der Fall ist, wenn i) eintritt.

Beispiel aus 5.1

Wir wollen nun dieses Verfahren auf das Beispiel aus **5.1** anwenden. Es ist somit offenbar $I = \{3, 4\}$ und $I^c = \{1, 2\}$. Wir wollen nun das Hilfsproblem mit der Hilfszielfunktion für $i_1 = 1$ lösen. Man erhält als

Starttableau

		x_1	x_2
	0	1	1
	0	-1	-2
x_3	-3	-1	-1
x_4	-2	0	-1
x_5	3	-1	1
x_6	3	$\boxed{1}$	-1

Die Hilfszielfunktion ist noch nicht optimal. Man wähle deshalb $s = 1$, womit $r = 4$ folgt und damit

Tableau 2

		x_6	x_2
	-3	-1	2
	3	1	-3
x_3	0	1	-2
x_4	-2	0	-1
x_5	6	1	0
x_1	3	1	-1

Wir befinden uns nun in Situation ii), weil $b_1 = 0$ ist. $x_1 = 3$ und $x_2 = 0$ erfüllen die erste Restriktion des eigentlichen Problems mit "=", da das Maximum des Hilfsproblems gerade gleich $-b_1$ ist. Wir erhalten nach ii) $I^c = \{2\}$ und wir haben das Hilfsproblem mit der Hilfszielfunktion für $i_2 = 2$ zu lösen. Man beachte, daß nun die transformierte zweite Zeile für die Hilfszielfunktion herangenommen werden muß. Diese stimmt hier zufällig mit der ursprünglichen zweiten Zeile überein. Wir erhalten also

Tableau 3

		x_6	x_2
	0	0	1
	3	1	-3
x_3	0	1	-2
x_4	-2	0	$\boxed{-1}$
x_5	6	1	0
x_1	3	1	-1

Wir stellen fest, daß das Tableau nicht optimal ist und als Pivotspalte $s = 2$ gewählt werden muß. Es gibt aber nur $a_{is} \leq 0$, und deshalb liegt die Situation iii) vor. Gemäß iii) ist somit ein Pivotschritt mit a_{22} auszuführen, und die Hilfszielzeile zu streichen. Damit erhalten wir das für unser Ausgangsproblem zulässige

Tableau 4

		x_6	x_4
	9	1	-3
x_3	4	$\boxed{1}$	-2
x_2	2	0	-1
x_5	6	1	0
x_1	5	1	-1

Damit ist das Ende von Phase I erreicht, denn Tableau 4 ist ein zulässiges Starttableau für Phase II mit der Basislösung

$$x_N = (x_6, x_4) = 0_{\mathbb{R}^2} \quad \text{und} \quad x_B = (x_3, x_2, x_5, x_1) = (4, 2, 6, 5).$$

x_B ist zulässig, da für die bisherige Transformationsmatrix A_B (vergleiche **Kapitel 4**)

$$A_B x_B = b$$

gilt, wobei

$$A_B = F_1 F_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

das Produkt der bisherigen Frobeniusmatrizen ist.

Da das Tableau 4 noch nicht optimal ist, muß ein normaler Pivotschritt ausgeführt werden. Wir erhalten

Tableau 5

		x_3	x_4
	5	-1	-1
x_6	4	1	-2
x_2	2	0	-1
x_5	2	-1	2
x_1	1	-1	1

Da alle $a_{0i} \leq 0$ für $i = 1, 2$ ist das Tableau optimal, und wir erhalten auch hier die Optimallösung $x_1 = 1$ und $x_2 = 2$.

5.3 Die Big–M Methode

Die Big–M Methode soll an folgendem Besispiel verdeutlicht werden.

Beispiel

Gegeben sei das lineare Problem

$$\begin{aligned} \max \ & 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 5x_4 \\ \text{N.B.} \ & 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 \leq 5 \\ & 2x_1 + 6x_2 + x_3 + 5x_4 \geq 6 \\ & x_1 + x_2 + 5x_3 + x_4 = 7 \\ & x_i \geq 0. \end{aligned}$$

Man führe Slacks x_5 und x_6 und künstliche Variable x_7 und x_8 ein. Damit formuliert man das Problem wie folgt

$$\max \;\; 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 5x_4 - Mx_7 - Mx_8$$

$$\text{N.B.} \;\; \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 6 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 1 & 5 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$x_i \geq 0.$$

Eine zulässige Bsislösung für dieses Problem lautet

$$\begin{aligned} x_N &= (x_1, x_2, x_3, x_4, x_6) = 0_{\mathbb{R}^5} \\ x_B &= (x_5, x_7, x_8) = (5, 6, 7). \end{aligned}$$

Wähle nun M so groß, daß x_7 und x_8 Nichtbasisvariable werden, das heißt, $x_7 = x_8 = 0$ sind. Für das Starttableau drücke man x_7 und x_8 als Funktion der Nichtbasisvariablen aus.

6. Kreisen des Simplexverfahrens, Lexikographisches Simplexverfahren

Bei Pivotoperationen mit $b_r = 0$ ändert sich der Wert der Zielfunktion nicht

$$\tilde{a}_{00} := a_{00} - \frac{a_{0s}}{a_{rs}} \cdot \underbrace{a_{r0}}_{=b_r=0} = a_{00}.$$

Geometrisch bedeutet dies, daß man sich in einer entarteten Ecke befindet und mit einem solchen Pivotschritt eine der $n+m$ bisher aktiven Restriktionen verläßt, und sich dafür, in der gleichen Ecke bleibend, auf eine der zusätzlich mit Gleichheit erfüllten Hyperebenen bewegt.

6.1 Beispiel (Gass)

$$\begin{array}{rl} \max & {}^3\!/_4 x_1 - 150x_2 + {}^1\!/_{50} x_3 - 6x_4 \\ \text{N.B.} & {}^1\!/_4 x_1 - 60x_2 - {}^1\!/_{25} x_3 + 9x_4 \le 0 \\ & {}^1\!/_2 x_1 - 90x_2 - {}^1\!/_{50} x_3 + 3x_4 \le 0 \\ & x_3 \le 1 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0 \end{array}$$

Man erhält die Tableaufolge

Ausgangstableau

		x_1	x_2	x_3	x_4
	0	$^3/_4$	-150	$^1/_{50}$	-6
x_5	0	$\boxed{^1/_4}$	-60	$-^1/_{25}$	9
x_6	0	$^1/_2$	-90	$-^1/_{50}$	3
x_7	1	0	0	1	0

Tableau 1

		x_5	x_2	x_3	x_4
	0	-3	30	$^7/_{50}$	-33
x_1	0	4	-240	$^4/_{25}$	36
x_6	0	-2	$\boxed{30}$	$^3/_{50}$	-15
x_7	1	0	0	1	0

Tableau 2

		x_5	x_6	x_3	x_4
	0	-1	-1	$^2/_{25}$	-18
x_1	0	-12	8	$\boxed{^8/_{25}}$	-84
x_2	0	$-^1/_{15}$	$^1/_{30}$	$^1/_{500}$	$-^1/_2$
x_7	1	0	0	1	0

Tableau 3

		x_5	x_6	x_1	x_4
	0	2	-3	$1/4$	3
x_3	0	$-75/2$	25	$25/8$	$525/2$
x_2	0	$1/120$	$-1/60$	$-1/160$	$\boxed{1/40}$
x_7	1	$75/2$	-25	$-25/8$	$525/2$

Tableau 4

		x_5	x_6	x_1	x_2
	0	1	-1	$1/2$	-120
x_3	0	$\boxed{50}$	-150	$-125/2$	10500
x_4	0	$1/3$	$-2/3$	$-1/4$	40
x_7	1	-50	150	$125/2$	-10500

Tableau 5

		x_3	x_6	x_1	x_2
	0	$-1/50$	2	$7/4$	-330
x_5	0	$1/50$	-3	$-5/4$	210
x_4	0	$-1/150$	$\boxed{1/3}$	$1/6$	-30
x_7	1	1	0	0	0

Tableau 6

		x_3	x_4	x_1	x_2
	0	$1/50$	-6	$3/4$	-150
x_5	0	$-1/25$	9	$1/4$	-60
x_6	0	$-1/50$	3	$1/2$	-90
x_7	1	1	0	0	0

$B = \{5, 6, 7\}$ war aber auch die Ausgangslösung.

Fazit

Man bleibt in der entarteten Ecke $\overline{x} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1)$ hängen, 8 Restriktionen sind mit "=" erfüllt. Die durchlaufenen Basislösungen sind jedoch verschieden.

6.2 Definition

Sei $v \in I\!R^n$ gegeben. Dann heißt

a) v *lexikopositiv*, in Zeichen $v \succ 0$ genau dann, wenn $v \neq 0$, und ein $k \in \{1, \ldots, n\}$ existiert mit $v_j = 0$ für alle $j < k$ und $v_k > 0$.

b) v *lexikographisch größer* als w, in Zeichen $v \succ w$, genau dann, wenn $v - w \succ 0$.

Beispiel

Im $\mathbb{R}^2$ ist $\{v \mid v \succ 0\} = \{v \mid v_1 > 0 \vee (v_1 = 0 \wedge v_2 > 0)\}$. Abbildung 6.1 veranschaulicht diese lexikopositive Menge.

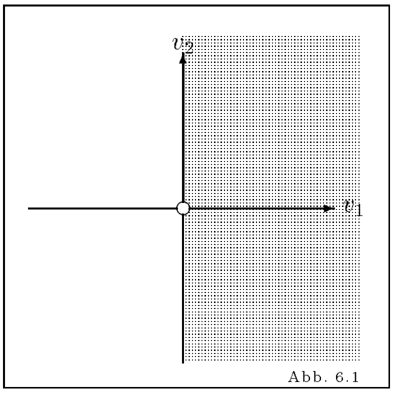


Abb. 6.1

Die lineare Relation "$\succ$" ist

(1) transitiv, das heißt

$$u \succ v,\ v \succ w \Longrightarrow u \succ w,$$

(2) verträglich mit der Addition, das heißt

$$u \succ v \Longrightarrow u + w \succ v + w \quad \text{für alle } w \in \mathbb{R}^n,$$

(3) verträglich mit positiver Skalarmultiplikation, das heißt

$$u \succ v \Longrightarrow \lambda u \succ \lambda v \quad \text{für alle } \lambda > 0.$$

(4) Es gilt, im ausschließenden Sinne

$$u \succ v \quad \text{oder} \quad v \succ u \quad \text{oder} \quad u = v.$$

Damit ist die Relation "$\succ$" eine Totalordnung.

Wir führen im Tableau die Einheitsspalten mit. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit seien die Tableauzeilen

$$a_i := (a_{i0}, a_{i1}, \ldots . a_{i,m+n}) \quad \text{für } i = 1, \ldots, m$$

lexikopositiv. Wäre dies nämlich nicht der Fall könnte man die Spalten so umordnen, daß die Einheitsspalten vorne stehen. Als *Pivotzeilenindex* wählen wir den Zeilenindex r mit

$$\frac{a_r}{a_{rs}} = \operatorname{lex}\min_{1 \le i \le m} \Big\{ \frac{a_i}{a_{is}} \;\Big|\; a_{is} > 0 \Big\}. \tag{6.2}$$

6.3 Hilfssatz

Der Index r ist durch **(6.2)** eindeutig bestimmt.

Beweis

Sei angenommen, daß **(6.2)** für ein i und ein k mit $i \neq k$ gilt, dann folgt wegen (4) sofort, daß

$$\frac{a_i}{a_{is}} = \frac{a_k}{a_{ks}}$$

und das bedeutet, daß $a_i = \lambda a_k$ mit $\lambda \neq 0$. Das heißt, zwei Zeilen der Matrix (A, I) sind gleich, was im Widerspruch zu $\text{rang}(A, I) = m$ steht.

6.4 Satz

Mit der Pivotzeilenindexwahl nach **(6.2)** gilt

i) Die Zeilenvektoren bleiben lexikopositiv für $i = 1, \ldots, m$.

ii) Der Vektor der Zielfunktionszeile nimmt lexikographisch ab.

Beweis

i) Für die neue i–te Zeile mit $1 \leq i \leq m$ und $i \neq r$ ($i = r$ ist trivial) gilt

$$\tilde{a}_i := a_i - \frac{a_{is}}{a_{rs}} a_r.$$

Wir führen eine Fallunterscheidung für a_{is} durch

a) Der Fall $a_{is} = 0$ ist klar.

b) Im Fall $a_{is} < 0$ folgt aus $a_i \succ 0$ mit Regel (2), daß

$$a_i - \frac{a_{is}}{a_{rs}} a_r \succ -\frac{a_{is}}{a_{rs}} a_r.$$

Zusammen mit $-\frac{a_{is}}{a_{rs}} a_r \succ 0$ folgt dann mit Regel (1), daß $\tilde{a}_i \succ 0$ ist.

c) Im Fall $a_{is} > 0$ ist wegen der Pivotspaltenauswahlregel $\frac{a_i}{a_{is}} \succ \frac{a_r}{a_{rs}}$. Aufgrund der Verträglichkeit der lexikographischen Ordnung mit Skalarmultiplikation folgt somit $a_i \succ \frac{a_{is}}{a_{rs}} a_r$ und daraus schließlich mit Regel (2) $\tilde{a}_i \succ \frac{a_{is}}{a_{rs}} a_r - \frac{a_{is}}{a_{rs}} a_r = 0$.

ii) Für die neue Zielfunktionszeile folgt

$$\tilde{a}_0 := a_0 - \underbrace{\frac{a_{0s}}{a_{rs}}}_{>0} a_r.$$

Wegen $a_r \succ 0$ gilt $\tilde{a}_0 \prec a_0$.

6.5 Satz

Das Simplexverfahren mit lexikographischer Zeilenauswahl **(6.2)** ist endlich.

Beispiel

Ausgangstableau

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
0	$3/4$	-150	$1/50$	-6	0	0	0
0	$\boxed{1/4}$	-60	$-1/25$	9	1	0	0
0	$1/2$	-90	$-1/50$	3	0	1	0
1	0	0	1	0	0	0	1

Tableau 1

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
0	0	30	$7/50$	-33	-3	0	0
0	1	-240	$-4/25$	36	4	0	0
0	0	$\boxed{30}$	$3/50$	-15	-2	1	0
1	0	0	1	0	0	0	1

Tableau 2

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
0	0	0	$2/25$	-18	-1	-1	0
0	1	0	$8/25$	-84	-12	8	0
0	0	1	$\boxed{1/500}$	$-1/2$	$-1/15$	$1/30$	0
1	0	0	1	0	0	0	1

Tableau 3

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
0	0	-40	0	2	$5/3$	$-7/3$	0
0	1	-160	0	-4	$-4/3$	$8/3$	0
0	0	500	1	-250	$-100/3$	$50/3$	0
1	0	-500	0	$\boxed{250}$	$100/3$	$-50/3$	1

Tableau 4

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
$-1/125$	0	-36	0	0	$7/5$	$-4/5$	$-1/125$
$2/125$	1	-168	0	0	$-4/5$	$12/5$	$2/125$
1	0	0	1	0	0	0	1
$1/250$	0	-2	0	1	$\boxed{2/15}$	$-1/15$	$1/250$

Tableau 5

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
$-1/20$	0	-15	0	$-21/2$	0	$-3/2$	$-1/20$
$1/25$	1	-180	0	6	0	2	$1/25$
1	0	0	1	0	0	0	1
$3/100$	0	-15	0	$15/2$	1	$-1/2$	$3/100$

Praxis

Wegen des Rundungsfehlereinflußes werden im allgemeinen beim Rechnen keine entarteten Ecken auftreten. Abbildung 6.2 stellt die Situation dar, wie sie in der Theorie aussieht.

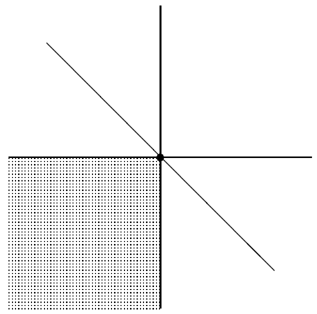


Abb. 6.2

In der Praxis werden allerdings im allgemeinen immer nur gestörte Probleme wie in Abbildung 6.3 auftreten, das heißt, daß das Simplexverfahren im allgemeinen auch ohne lexikographische Zeilenauswahlregel endlich ist.

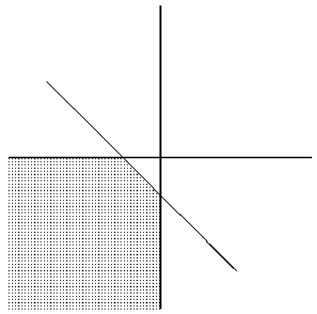


Abb. 6.3

7. Zahl der Iterationsschritte beim Simplexverfahren

7.1 Spaltenauswahlregeln

Bei der Wahl der Pivotzeile hat man keine Freiheit, bei der Wahl der Pivotspalte hingegen schon. Es gibt dazu die gebräuchlichen *Spaltenauswahlregeln*

i) Nichtbasisgradientenverfahren von Dantzig

$$c_s := \max_{1 \le j \le n} c_j \tag{7.1}$$

Interpretation

c ist der Gradient der Zielfunktion im Raum der Nichtbasisvariablen.

ii) Sei $a_{r_j j}$ das Pivotelement, falls j Pivotspalte wird. Wähle s so, daß

$$c_s \frac{b_{r_s}}{a_{r_s s}} = \max_{1 \le j \le n} \left\{ c_j \frac{b_{r_j}}{a_{r_j j}} \;\middle|\; c_j > 0 \right\} \tag{7.2}$$

Interpretation

Es wird die Variable in die Basis gebracht, die tatsächlich den größten Zuwachs der Zielfunktion ergibt.

iii) Steilster Anstieg im Raum aller Variablen. Man wähle s so, daß

$$\frac{c_s^2}{1 + \sum_{i=1}^m a_{is}^2} = \max_{1 \le j \le n} \left\{ \frac{c_j^2}{1 + \sum_{i=1}^m a_{ij}^2} \;\middle|\; c_j > 0 \right\} \tag{7.3}$$

Interpretation

Es sei $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ und $B = \{n+1, \ldots, n+m\}$. Ändert man $x_j = 0$ — wobei $j \in N$ ist — zu $x_j = 1$, so nimmt die Zielfunktion um c_j zu und das neue x ändert sich um

$$(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, -a_{1j}, \ldots, -a_{mj}).$$

Man erhält als Maß für die j–te Komponente des Gradienten der Zielfunktion im $\mathbb{R}^{n+m}$

$$\frac{c_j}{\sqrt{1 + \sum_{i=1}^m a_{ij}^2}} \qquad (\sim \text{Differenzenquotient}).$$

Das heißt, man berücksichtigt nicht nur die Änderung von x die sich dadurch ergibt, daß eine Nichtbasisvariable in die Basis gebracht wird, sondern auch die Änderung bedingt durch die Änderungen der Basisvariablen.

Beim Testen von 100 Problemen mit $m = n = 25$ fand man für die verschiedenen Spaltenauswahlregeln folgende mittlere Iterationszahlen

	(7.1)	(7.2)	(7.3)
Zahl der Pivots	34.6	22.5	18.6

Der Rechenaufwand ist für **(7.2)** natürlich größer als bei **(7.3)**, und für **(7.1)** am geringsten. Von Goldfarb/Ried wurde **(7.3)** implementiert. Ein Vergleich mit **(7.1)** für ein Problem mit $m = 821$ und $n = 1055$, wobei allerdings nur 11719 Elemente der Matrix A von 0 verschieden waren — es lag also eine sogenannte "sparse matrix" vor — lieferte folgendes Ergebnis

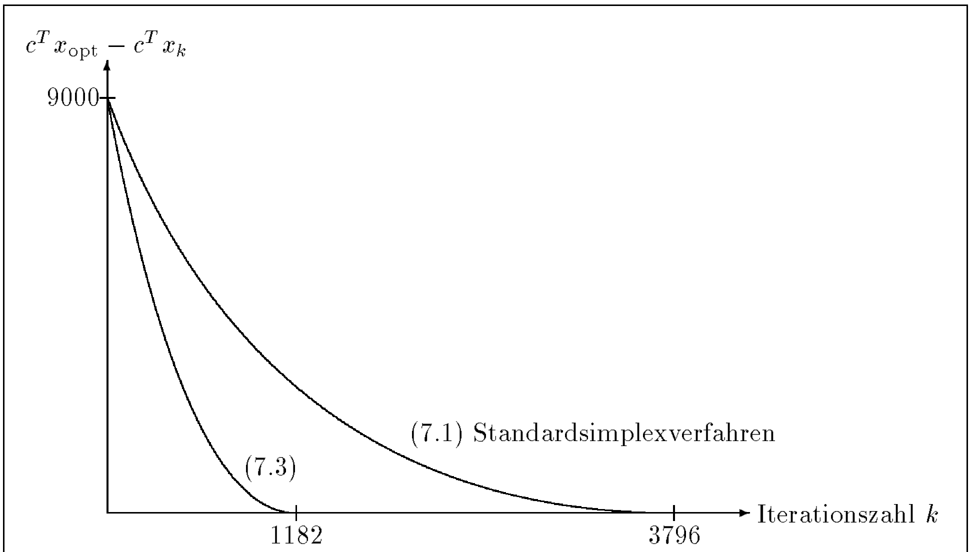


Abb. 7.1

7.2 Durchschnittlicher Aufwand für das Simplexverfahren

Bei Problemen mit $m < 50$ und $m + n < 200$ wurden von Dantzig 1963 und Chvatal 1978 folgende Erfahrungszahlen angegeben

$$\text{bei festem } n \text{ ist die Iterationszahl proportional } m \tag{7.4}$$

$$\text{bei festem } m \text{ ist die Iterationszahl proportional } \log n \tag{7.5}$$

Für **(7.4)** gilt mit Spaltenauswahlregel **(7.1)** etwa

$$3/2\, m \leq \text{Zahl der Pivots} \leq 3m. \tag{7.6}$$

Von Chvatal stammen die beiden Tabellen für die

durchschnittliche Anzahl der Iterationen, wenn die "Größter Koeffizient"–Regel **(7.1)** benutzt wird

m \ n	10	20	30	40	50
10	9.4	14.2	17.4	19.4	20.2
20		25.2	30.7	38.0	41.5
30			44.4	52.7	62.9
40				67.6	78.7
50					95.2

durchschnittliche Anzahl der Iterationen, wenn die "Größter Anstieg"–Regel **(7.3)** benutzt wird

m \ n	10	20	30	40	50
10	7.0	9.2	10.8	12.1	12.6
20		16.2	20.2	24.2	27.3
30			28.7	34.5	39.4
40				43.3	39.9
50					58.9

Theorie

Eine Begründung für **(7.5)** über geometrische Wahrscheinlichkeiten wurde von Smale (1982) und Borgwardt (1982) angegeben.

7.3 Aufwand für das Simplexverfahren im schlechtesten Fall

Ein Beispiel für das Simplexverfahren mit **(7.1)**, bei dem alle Ecken aufgesucht werden, wurde von Goldmann/Klein angegeben. Man betrachtet

$$\begin{array}{ll} \max & c_1 x_1 \;+ \ldots +\; c_n x_n \\ \text{N.B.} & {}^1\!/_{a_1} x_1 + \ldots + {}^1\!/_{a_n} x_n \;\le 1 \\ & \qquad\qquad\qquad x_i \ge 0 \quad \text{für } i = 1, \ldots, n, \end{array}$$

wobei die c_i und $a_i > 0$ noch geeignet zu wählen sind. Die $n+1$ zulässigen Ecken im $\mathbb{R}^{n+1}$ sind

$$P_0 = (\underbrace{0, \ldots, 0, 1}_{n+1}) \quad \text{und} \quad P_j = (0, \ldots, 0, a_j, 0, \ldots, 0) \quad \text{für } 1 \le j \le n.$$

Wir ordnen nun die Ecken so, daß die Zielfunktion von P_0 bis P_n wächst

$$0 < c_1 a_1 < \ldots < c_n a_n. \tag{$*$}$$

Das extensive Starttableau zur Ecke P_0 lautet

	x_1	$\ldots$	x_i	$\ldots$	x_n	x_{n+1}
0	c_1	$\ldots$	c_i	$\ldots$	c_n	0
1	${}^1\!/_{a_1}$	$\ldots$	${}^1\!/_{a_i}$	$\ldots$	${}^1\!/_{a_n}$	1

die zulässige Basislösung $x_N = (x_1, \ldots, x_n) = 0_{\mathbb{R}^n}$ und $x_B = (x_{n+1}) = (1)$. Damit die nächste Ecke P_1 ist, muß

$$c_1 = \max_{1 \le j \le n} c_j. \tag{7.7}$$

Nach i Schritten ist das extensive Tableau zur Ecke P_i, das heißt zur Basislösung $x_B = (x_i) = (a_i)$ und $x_N = (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_{n+1}) = 0_{\mathbb{R}^n}$

			x_i			
$-c_i a_i$	$c_1 - \frac{c_i a_i}{a_1}$	$\ldots$	0	$\ldots$	$c_n - \frac{c_i a_i}{a_n}$	$-c_i a_i$
a_i	${}^{a_i}\!/_{a_1}$	$\ldots$	1	$\ldots$	${}^{a_i}\!/_{a_n}$	a_i
	N		B		N	

Damit bei **(7.1)** auf die Ecke P_i jeweils die Ecke P_{i+1} folgt, muß daher

$$c_{i+1} - \frac{c_i a_i}{a_{i+1}} = \max_{i \le k \le n} \Big(c_k - \frac{c_i a_i}{a_k} \Big) \tag{7.8}$$

gelten, wenn man beachtet, daß wegen $(*)$ $a_{0k} \le 0$ für $1 \le k \le i$ und $-c_i a_i \le 0$ gilt.

Dies liefert den Ansatz

$$\begin{array}{ll} c_1 := 1 & a_1 := n^{-n} \\ c_j := j^{-j+1} n^{-n} & a_j := j^j \quad (2 \le j \le n) \end{array} \tag{7.9}$$

Mit **(7.9)** ist **(7.7)** und $(*)$ erfüllt. Zusätzlich ist auch **(7.8)** erfüllt, denn für $k \ge 2$ gilt

$$c_k - \frac{c_i a_i}{a_k} = (k^{-k+1} - i k^{-k}) n^{-n} = (k-i) k^{-k} n^{-n}$$

$$c_{i+1} - \frac{c_i a_i}{a_{i+1}} = (i+1)^{-i-1} n^{-n}$$

und

$$(i+1)^{-i-1} \geq (k-i)k^{-k} \quad (\Longleftrightarrow k^k \geq (k-i)(i+1)^{i+1}) \quad \text{für } k \geq i+1$$

Somit werden alle Ecken durchlaufen.

Von Klee/Minty wurde 1972 gezeigt, daß sich beim Simplexverfahren mit **(7.1)** die Zahl der Iterationen durch kein Polynom in m und n nach oben abschätzen läßt, das heißt das Simplexverfahren mit **(7.1)** ist *kein polynomialer Algorithmus*. Sie konstruierten Beispiele, bei denen $2^m - 1$ Iterationen benötigt werden. Im Vergleich dazu gilt nach **(7.6)** für $m = 40$

$$3 \cdot m = 3 \cdot 40 = 120 \ll 2^{40} - 1 \approx 10^{12}.$$

Von Kacchian (1978) und Kamarkar (1984) wurden *polynomiale* Algorithmen zur Lösung des LP vorgeschlagen. Das durchschnittliche Verhalten dieser Algorithmen ist jedoch wesentlich schlechter als beim Simplexverfahren.

7.4 Exkurs in die Komplexitätstheorie

Sei zunächst $I\!\!P$ die Klasse aller polynomial lösbaren Probleme, das heißt, ein Problemtyp liegt genau dann in $I\!\!P$, wenn zur Lösung ein Algorithmus existiert, dessen Aufwand sich durch ein Polynom in den Problemdaten nach oben abschätzen läßt. Nach Kacchian gilt also zum Beispiel LP $\in I\!\!P$.

Mit $N\!I\!\!P$ bezeichnen wir die Menge aller Probleme, bei denen in polynomial vielen Schritten nachprüfbar ist, ob ein gegebenes x optimal ist oder nicht.

Damit gilt offensichtlich, daß $N\!I\!\!P \supset I\!\!P$ ist, aber gilt auch $N\!I\!\!P = I\!\!P$? Vergleiche dazu Abbildung 7.2.

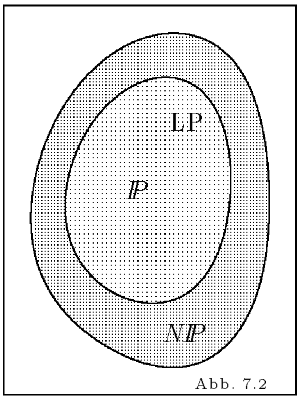


Abb. 7.2

Um diese Frage beantworten zu können, betrachtet man eine Teilmenge $N\!I\!\!P$–complete von $N\!I\!\!P$, für die man folgendes zeigen kann. Ist

$$N\!I\!\!P\text{–complete} \cap I\!\!P \neq \emptyset,$$

dann folgt $N\!I\!\!P = I\!\!P$. Ziel ist es deshalb, ein solches Element aus dem Schnitt der beiden Mengen zu finden. Wir wissen bereits, daß LP $\in I\!\!P$ ist, aber leider ist LP $\notin N\!I\!\!P$–complete.

8. Das Simplexverfahren beim Vorliegen von Gleichungen und freien Variablen

Wir wissen bereits aus **Bemerkung 1.4**, daß jede Restriktion der Form

$$a_i^T x = b_i$$

äquivalent ist zu den beiden Restriktionen

$$a_i^T x \leq b_i \quad \text{und} \quad -a_i^T x \leq -b_i,$$

und jede freie Variable der Form

$$x_i \in \mathbb{R}$$

äquivalent ist zu der Forderung

$$x_i = \overline{x}_i - \overline{\overline{x}}_i \quad \text{wobei } \overline{x}_i, \overline{\overline{x}}_i \geq 0.$$

Vorteilhafter sind allerdings die folgenden Methoden.

8.1 Gleichungen

(A) Für jede Gleichung führt man eine *künstliche* Variable $y_i \geq 0$ ein und minimiert zunächst $\sum y_i$. In der Optimallösung des Hilfsproblems sind alle y_i Nichtbasisvariablen. Man streicht die zugehörigen Spalten.

Beispiel

Gegeben sei das Problem mit Gleichungen

$$\begin{array}{rrcl}
\max & x_1 + 2x_2 - x_3 & & \\
\text{N.B.} & x_1 + x_2 & \leq & 4 \\
& 2x_1 + x_2 + x_3 & = & 5 \\
& -x_2 + x_3 & = & 1 \\
& x_i & \geq & 0.
\end{array}$$

Man erhält das *Hilfsproblem*

$$\min \quad y_1 + y_2$$

$$\text{N.B.} \quad \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & y_1 & y_2 \end{array}$$
$$\text{N.B.} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x_i \geq 0$$
$$y_i \geq 0.$$

Die Schlupfvariable x_4 und die beiden künstlichen Variablen y_1 und y_2 bilden die Einheitsmatrix im Starttableau. Wegen $y_1 + y_2 = 6 - 2x_1 - 2x_3$ erhält man als

Starttableau

		x_1	x_2	x_3	
	6	2	0	2	Hilfszielfunktion
	0	1	2	-1	Zielfunktion
x_4	4	1	1	0	
y_1	5	$\boxed{2}$	1	1	
y_2	1	0	-1	1	

Tableau 1

		y_1	x_2	x_3
	1	-1	-1	1
	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$
x_4	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
x_1	$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
y_2	1	0	-1	$\boxed{1}$

Tableau 2

		y_1	x_2	y_2
	~~0~~	~~-1~~	~~0~~	~~-1~~
	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{2}$
x_4	2	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
x_1	2	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$
x_3	1	0	-1	1

Der Wert der Hilfszielfunktion ist gleich 0, und das Hilfsproblem ist damit gelöst. Die Lösung $x_N = (x_2) = (0)$ und $x_B = (x_4, x_1, x_3) = (2, 2, 1)$ ist eine zulässige Basislösung zu

Tableau 3

		x_2	x_4	x_1	x_3
	-1	0	0	0	0
x_4	2	0	1	0	0
x_1	2	1	0	1	0
x_3	1	-1	0	0	1

Das Tableau ist *optimal* und $x_1 = 2$, $x_2 = 0$ und $x_3 = 1$ ist die Optimallösung.

(B) Die Big M–Methode **(siehe 5.3)**

Für jede Gleichung führt man eine künstliche Variable $y_i \geq 0$ ein, die man mit $-My_i$ der Zielfunktion zuschlägt, wobei M genügend groß ist. Für das obige Beispiel aus (A) erhält man somit wegen $y_1 + y_2 = 6 - 2x_1 - 2x_3$ das Problem

$$
\begin{aligned}
\max\ & \overbrace{x_1 + 2x_2 - x_3 - My_1 - My_2}^{=(1+2M)x_1+2x_2+(-1+2M)x_3-6M} \\
\text{N.B.}\ & x_1 + x_2 \qquad\ \ \le 4 \\
& 2x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\
& \quad\ - x_2 + x_3 = 1 \\
& \qquad\qquad\ \ x_i \ge 0
\end{aligned}
$$

und es ergibt sich die Tableaufolge

Starttableau

		x_1	x_2	x_3
	$6M$	$1+2M$	2	$-1+2M$
x_4	4	1	1	0
y_1	5	2	1	1
y_2	1	0	-1	$\boxed{1}$

Hierbei wurde die Pivotspalte aus "Bequemlichkeit" gewählt.

Tableau 1

		x_1	x_2	$\cancel{y_2}$
	$1+4M$	$1+2M$	$1+2M$	$\cancel{1-2M}$
x_4	4	1	1	$\cancel{0}$
y_1	4	$\boxed{2}$	2	$\cancel{-1}$
x_3	1	0	-1	$\cancel{1}$

Bei hinreichend großem M ist $1 - 2M < 0$, deshalb wird die Spalte mit y_2 sicher nicht mehr als Pivotspalte gewählt. Da y_2 eine künstliche Variable ist, kann diese Spalte gestrichen werden und wir führen einen weieren Schritt durch

Tableau 2

		$\cancel{y_1}$	x_2
	-1	$\cancel{-1/2 - M}$	0
x_4	2	$\cancel{-1/2}$	0
x_1	2	$\cancel{1/2}$	1
x_3	1	$\cancel{0}$	-1

Analog zu y_2 kann jetzt y_1 gestrichen werden. Damit *muß* M aus dem Tableau restlos verschwunden sein! Das Resttableau ist *optimal* und $x_1 = 2$, $x_2 = 0$ und $x_3 = 1$ ist die Optimallösung. Dies ist natürlich das gleiche Resultat wie bei der Methode (A).

8.2 Freie Variablen

Gegeben sei das Problem

$$
\begin{aligned}
\max\ & c^T x \\
\text{N.B.}\ & Ax \le b \\
& x_i \ \ \ge 0 \quad \text{für } i = k+1, \ldots, n,
\end{aligned}
$$

wobei A eine $(m \times n)$–Matrix und $k \leq n$ ist. Wir nehmen an, wir befinden uns in dem zulässigen Zwischentableau

$$\begin{array}{c|c|ccc|} & \multicolumn{1}{c}{} & x_{N(1)} & & \multicolumn{1}{c}{x_{N(n)}} \\ \cline{2-5} & a_{00} & a_{01} & \dots & a_{0n} \\ \cline{2-5} x_{B(1)} & a_{10} & a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{B(m)} & a_{m0} & a_{m1} & \dots & a_{mn} \\ \cline{2-5} \end{array}$$

Dann ist die zugehörige Basislösung *optimal*, falls

$$a_{0j} \leq 0 \quad \text{für } N(j) > k \quad \text{und} \quad a_{0j} = 0 \quad \text{für } N(j) \leq k.$$

Falls das Tableau noch nicht optimal ist, ergeben sich als mögliche Pivotspalten s

i) $a_{0s} > 0$ falls $N(s) > k$ und

ii) $a_{0s} \neq 0$ falls $N(s) \leq k$.

Ist eine Pivotspalte festgelegt ergibt sich für die Pivotzeile r folgendes:

i) Ist $a_{0s} > 0$, so wähle r mit

$$r := \arg\min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \frac{a_{i0}}{a_{is}} \;\middle|\; a_{is} > 0, B(i) > k \right\}. \tag{8.2.1a}$$

ii) Ist $a_{0s} < 0$, so wähle r mit

$$r := \arg\min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \frac{a_{i0}}{|a_{is}|} \;\middle|\; a_{is} < 0, B(i) > k \right\}. \tag{8.2.1b}$$

Algorithmus

Wir bezeichnen mit $\widetilde{K}$ die Menge der Variablen (einschließlich slacks), bei denen eine Vorzeichenbedingung vorliegt, das heißt,

$$\widetilde{K} := k+1, \dots, n.$$

Gesucht ist die Lösung von

$$\max\{ c^T x \mid Ax \leq b,\ x_i \geq 0 \quad \text{für } i \in \widetilde{K} \}.$$

Dabei sei $A := (a_{ij})_{\substack{0 \leq i \leq m \\ 0 \leq j \leq n}}$, $b_i \geq 0$ für alle $1 \leq i \leq m$ und N und B wie gewöhnlich die Indizes der Nichtbasis- beziehungsweise der Basisvariablen und $K := \widetilde{K} \cup \{n+1, \dots, n+m\}$. Dann läuft der Algorithmus wie folgt ab:

1) Ist $a_{0j} \leq 0$ für $N(j) \in K$ und $a_{0j} = 0$ für $N(j) \notin K$, so ist $x = (x_N, x_B)$ optimal. STOP. Andernfalls gehe zu 2).

2) Wähle die Pivotspalte s mit

$$|a_{0s}| = \max\Big\{ \max\{ a_{0j} \mid N(j) \in K, a_{0j} > 0 \}, \max\{ |a_{0j}| \mid N(j) \notin K \} \Big\}.$$

Ist $a_{0s} > 0$, so gehe zu 3), sonst zu 4).

3) Ist $I := \{ i \mid a_{is} > 0,\ B(i) \in K \} = \emptyset$, so gehe zu 5), andernfalls gehe zu 6).

4) Ist $I := \{\, i \mid a_{is} < 0,\ B(i) \in K \,\} = \emptyset$, so gehe zu 5), andernfalls gehe zu 6).

5) Es existiert keine endliche Optimallösung. STOP.

6) Bestimme die Pivotzeile r so, daß

$$r := \arg \min_{1 \le i \le m} \left\{ \frac{a_{i0}}{|a_{is}|} \;\middle|\; i \in I \right\}$$

und gehe zu 7).

7) Führe die Pivotoperationen mit a_{rs} durch und gehe zu 1).

Beispiel

$$\begin{array}{rl} \max & x_1 + 2x_2 \\ \text{N.B.} & x_1 - \ x_2 \ \le 2 \\ & x_1 + \ x_2 \ \le 1 \\ & \ x_1, x_2 \text{ frei} \end{array}$$

Dieses einfache Problem mit freien Variablen wird in Abbildung 8.1 graphisch veranschaulicht.

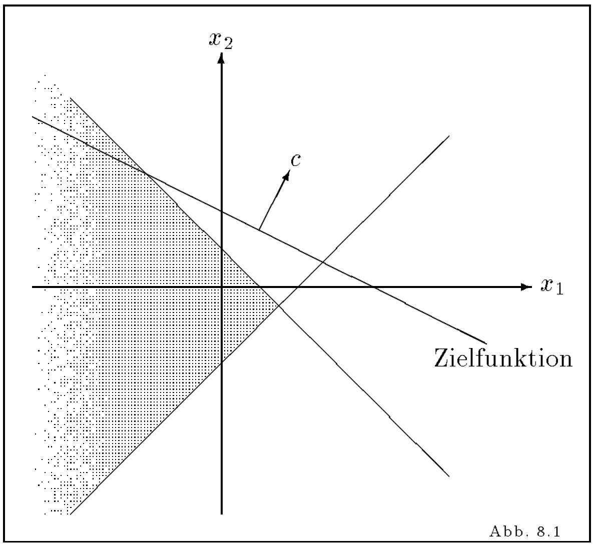


Abb. 8.1

Wendet man nun den obigen Algorithmus an, so erhält man die Tableaufolge

Starttableau

		x_1	x_2	x_3	x_4
	0	1	2	0	0
x_3	2	1	-1	1	0
x_4	1	1	$\boxed{1}$	0	1

Die zulässige Basislösung im $I\!R^4$ lautet $x_N = (x_1, x_2) = (0, 0)$ und $x_B = (x_3, x_4) = (2, 1)$. Die Indexmenge $\widetilde{K} = \{3, 4\}$. Das Tableau ist noch nicht optimal, und wir erhalten

Tableau 1

		x_1	x_2	x_3	x_4
	-2	-1	0	0	-2
x_3	3	2	0	1	1
x_2	1	1	1	0	1

Die zulässige Basislösung im $I\!R^4$ lautet $x_N = (x_1, x_4) = (0, 0)$ und $x_B = (x_3, x_2) = (3, 1)$. Das Tableau ist noch nicht optimal, denn x_1 ist eine freie Variable, das heißt, es wäre für die Pivotspalte $s = 1$ zu wählen. Dann gibt es nach Punkt 4) des obigen Algorithmus keine endliche Lösung des Problems. Dies wird daran deutlich, daß

$$\tilde{x}_B = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \tilde{x}_1$$

für alle $\tilde{x}_1 \leq 0$ die Bedingung $\tilde{x}_B \geq 0$ erfüllt. Daher ist der Zielfunktionswert

$$\lim_{\tilde{x}_1 \to \infty} 2 - 1\tilde{x}_1$$

unbeschränkt.

9. Das revidierte Simplexverfahren (revised simplex)

Gegeben sei das Problem

$$\max\{\, c^T x \mid Ax \le b,\ x \ge 0 \,\}$$

wobei $b_i \ge 0$ für alle $1 \le i \le m$. Die momentane Basis sei B. Für den nächsten Pivotschritt braucht man (siehe (4.3)–(4.6))

$$\begin{aligned} \tilde{c}_N^T &= c_N^T - \underbrace{c_B^T A_B^{-1}}_{\pi^T} A_N = c_N^T - \pi^T A_N \\ \tilde{a}_s &= A_B^{-1} a_s \quad \text{Pivotspalte} \\ \tilde{b} &= A_B^{-1} b \end{aligned} \tag{9.0}$$

Dabei bezeichnen wir die Größen im momentanen Tableau mit $\tilde{}$. Falls man das $\tilde{}$–Tableau noch nicht berechnet hat, so sind die folgenden drei linearen Gleichungssysteme zu lösen. Man beachte, daß B und N bekannt sind.

$$A_B x_B = b \qquad \pi^T A_B = c_B^T \qquad A_B \tilde{a}_s = a_s \tag{9.1}$$

Kennt man A_B^{-1}, so ist

$$\tilde{b} = A_B^{-1} b \qquad \pi^T = c_B^T A_B^{-1} \qquad \tilde{a}_s = A_B^{-1} a_s \tag{9.2}$$

Revidiertes Simplexverfahren

Statt der jeweiligen transformierten Nichtbasisspalten, führt man das jeweilige A_B^{-1} mit und berechnet $\tilde{b}$, π und $\tilde{a}_j$ nach **(9.2)**. Dieses Vorgehen bringt folgende Vorteile mit sich:

1) Falls $m < n$ ist, so spart man Speicherplatz. Dies ist von großer Bedeutung, da A auf Platte gespeichert werden kann.

2) Falls $m < n$ ist, ist weiterhin der Rechenaufwand kleiner, da sich dann das neue A_B^{-1} aus dem alten A_B^{-1} leicht berechnen läßt. Vergleiche unten!

3) Falls A dünn besetzt ist, das heißt eine sogenannte "sparse matrix" ist, so kommt das in **(9.2)** immer wieder zur Geltung. Damit ist der Rechenaufwand zur Bestimmung der neuen Größen gering, und der Rundungsfehlereinfluß ist ebenfalls gering.

Beachte

In einigen Situationen vermeidet man die explizite Berechnung von A_B^{-1}, da A_B^{-1} sonst "zuwachsen" würde.

Sei beispielsweise

$$A_B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

dann ist

$$A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

voll besetzt, das heißt, die günstige Struktur von A_B ging verloren.

Wir überlegen uns deshalb eine Berechnung des neuen A_B^{-1} aus dem Vorgänger. Dazu setzen wir

$$D := \left[\begin{array}{c|c} 1 & c_B^T \\ \hline 0 & A_B \end{array}\right]_{(m+1)\times(m+1)}.$$

Damit ist

$$D^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} 1 & -c_B^T A_B^{-1} \\ \hline 0 & A_B^{-1} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} 1 & -\pi^T \\ \hline 0 & A_B^{-1} \end{array}\right].$$

Somit folgt

$$D^{-1}D = \left[\begin{array}{c|c} 1 & c_B^T - c_B^T A_B^{-1} A_B \\ \hline 0 & A_B A_B^{-1} \end{array}\right] = I.$$

Beim Basistausch mit Pivot a_{rs} wird nun die Spalte $r \geq 1$ von $D := (d_0, d_1, \ldots, d_m)$ durch $\binom{c_s}{a_s}$ ersetzt

$$\overline{D} := \left(d_0, \ldots, d_{r-1}, \begin{pmatrix} c_s \\ a_s \end{pmatrix}, d_{r+1}, \ldots, d_m\right).$$

Die neue Inverse $\overline{D}^{-1}$ erhält man durch Anwendung der Transformation

$$T := \left(I - \frac{1}{\tilde{a}_{rs}} \underbrace{\left[\begin{pmatrix} \tilde{c}_s \\ \tilde{a}_s \end{pmatrix} - e_{r+1}\right] e_{r+1}^T}_{\text{dyadisches Produkt}}\right)_{(m+1)\times(m+1)} \tag{9.3}$$

auf D^{-1}, wobei $e_{r+1}^T = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ ist.

$$(TD^{-1})\overline{D} = T(D^{-1}\overline{D}) \;=$$

$$T\left[\begin{array}{ccc|c|ccc}
1 & & & & 0 & \cdots & 0 \\
& \ddots & & & \vdots & & \vdots \\
& & 1 & & & & \\ \hline
0 & \cdots & 0 & \underbrace{D^{-1}\begin{pmatrix} c_s \\ \hline a_s \end{pmatrix}}_{(r+1)\text{–te Spalte}} & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & & \vdots & & 1 & & \\
& & & & & \ddots & \\
0 & \cdots & 0 & & & & 1
\end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c|ccc}
1 & & & & 0 & \cdots & 0 \\
& \ddots & & & \vdots & & \vdots \\
& & 1 & & & & \\ \hline
0 & \cdots & 0 & \underbrace{T\begin{pmatrix} \tilde{c}_s \\ \hline \tilde{a}_s \end{pmatrix}}_{(r+1)\text{–te Spalte}} & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & & \vdots & & 1 & & \\
& & & & & \ddots & \\
0 & \cdots & 0 & & & & 1
\end{array}\right] = I$$

denn

$$T\begin{pmatrix} \tilde{c}_s \\ \tilde{a}_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{c}_s \\ \tilde{a}_s \end{pmatrix} - \frac{1}{\tilde{a}_{rs}}\left[\begin{pmatrix} \tilde{c}_s \\ \tilde{a}_s \end{pmatrix} - e_{r+1}\right]\tilde{a}_{rs} = e_{r+1}.$$

Die Transformation mit der Matrix T entspricht einer *Pivotoperation* in der Matrix

$$\left[d_0^{-1}, \ldots, d_{r-1}^{-1}, \begin{pmatrix} \tilde{c}_s \\ \tilde{a}_s \end{pmatrix}, d_{r+1}^{-1}, \ldots, d_m^{-1}\right]$$

das heißt, in den Spalten von D^{-1} mit dem Pivotelement $\tilde{a}_{rs}$, denn

$$T = I - \frac{1}{\tilde{a}_{rs}} \left(\left[\begin{array}{ccc|c|ccc} 0 & \dots & 0 & \tilde{c}_s & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \overline{\tilde{a}_s} & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & & 0 & \dots & 0 \end{array} \right] - \left[\begin{array}{ccc|c|ccc} 0 & \dots & 0 & & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & e_{r+1} & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & & 0 & \dots & 0 \end{array} \right] \right) =$$

$$\qquad\qquad\qquad\qquad\quad\underbrace{}_{(r+1)\text{–te Spalte}} \qquad\qquad\qquad\qquad \underbrace{}_{(r+1)\text{–te Spalte}}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & & & -\frac{\tilde{c}_s}{\tilde{a}_{rs}} & & & \\ & \ddots & & \vdots & & & \\ & & 1 & -\frac{\tilde{a}_{r-1}}{\tilde{a}_{rs}} & & & \\ & & & {}^1\!/\tilde{a}_{rs} & & & \\ & & & -\frac{\tilde{a}_{r+1}}{\tilde{a}_{rs}} & 1 & & \\ & & & \vdots & & \ddots & \\ & & & -\frac{\tilde{a}_{ms}}{\tilde{a}_{rs}} & & & 1 \end{bmatrix}_{(m+1)\times(m+1)}$$

Revidiertes Simplexverfahren (bei $b \geq 0$)

Gegeben seien die Ausgangsdaten $N := \{1, \dots, n\}$ und $B := \{n+1, \dots, n+m\}$. Wir setzen $A_N := A$, $c_N := c$ und $c_B := 0$. Desweiteren

$$D^{-1} := \left(\begin{array}{c|c|c} 1 & -\pi^T & 0 \\ \hline 0 & A_B^{-1} & \tilde{b} \end{array} \right) := \left(\begin{array}{c|c|c} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & I & \mathrm{b} \end{array} \right).$$

Dann läuft der Algorithmus zum revidierten Simplexverfahren wie folgt ab:

1) Berechne $\tilde{c}_N^T := c_N^T - \pi^T A_N$.

2) Falls $\tilde{c}_N \leq 0$, STOP. Sonst gehe zu 3).

3) Wähle die Pivotspalte s so, daß
$$\tilde{c}_s = \max_{j \in N} \tilde{c}_j,$$
also nach Regel **(7.1)**.

4) Berechne $\tilde{a}_s := A_B^{-1} a_s$.

5) Falls $\tilde{a}_s \leq 0$, so existiert keine Optimallösung, STOP. Sonst gehe zu 6).

6) Wähle die Pivotzeile r so, daß
$$r := \arg\min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \frac{\tilde{b}_i}{\tilde{a}_{is}} \;\middle|\; \tilde{a}_{is} > 0 \right\}.$$

7) Ersetze die r–te Spalte von D^{-1} durch $\binom{\tilde{c}_s}{\tilde{a}_s}$, führe die Pivotoperationen mit $\tilde{a}_{rs}$ aus, und setze
$$\begin{array}{l} B := (B \setminus \{r\}) \cup \{s\} \\ N := (N \setminus \{s\}) \cup \{r\} \end{array}.$$
Gehe zu 1).

Anmerkung

Folgende Modifikationen bringen eine Verbesserung des Verfahrens

1) Nach ungefähr m Schritten macht man einen *Restart* und berechnet A_B^{-1} direkt durch Invertierung von A_B.
2) In der Produktform des revidierten Simplexverfahrens speichert man nicht A_B^{-1}, sondern die Transformationsmatrix T (siehe **(9.3)**) in Vektorform. Bei dünnen Matrizen bringt das Speicherplatzvorteile.

Rundungsfehleranalyse

Wir schreiben $\mathrm{gl}(a * b)$ für die Gleitpunktoperationen "+", "-", "·" und "/". Mit der relativen Maschinengenauigkeit eps gilt $\mathrm{gl}(a * b) = (a * b)(1 + \varepsilon)$ mit $|\varepsilon| \leq \mathrm{eps}$.

Es werde nun $u = (u_1, \ldots, u_m)^T$ durch Pivotoperationen mit $v = (v_1, \ldots, v_m)^T$ und Pivotelement v_r durch Gleitpunktoperation in $w = (w_1, \ldots, w_m)^T$ überführt. Dann ist

$$w_r = \mathrm{gl}\left(\frac{u_r}{v_r}\right) = \frac{u_r}{v_r}(1 + \eta),$$

$$w_i = \mathrm{gl}\left(u_i - \frac{v_i}{v_r} u_r\right) = \left(u_i - v_i(\frac{u_r}{v_r}(1 + \eta))(1 + \sigma_i)\right)(1 + \tau_i) \quad i \neq r,$$

wobei $|\eta|, \; |\sigma_i|, \; |\tau_i| \leq \mathrm{eps}$.

Mit

$$\delta u_i := \begin{cases} \dfrac{u_r}{v_r}\eta & \text{für } i = r \\ u_i \tau_i - \dfrac{v_i}{v_r} u_r (\sigma_i + \tau_i + \eta\sigma_i + \eta\tau_i + \sigma_i\tau_i + \eta\sigma_i\tau_i) & \text{für } i \neq r \end{cases}$$

erhalten wir

$$w_i = \begin{cases} \dfrac{1}{v_r}(u_r + \delta u_r) & \text{für } i = r \\ u_i + \delta u_i - \dfrac{v_i}{v_r}(u_r + \delta u_r) & \text{für } i \neq r \end{cases}$$

Und somit für die Pivotoperation

$$T = \left(I - \frac{1}{v_r}(v - e_r)e_r^T\right) \quad w = \mathrm{gl}(Tu) = T(u + \delta u),$$

das heißt, das Gleitpunktergebnis läßt sich deuten als Ergebnis der exakten Transformation des Vektors $u + \delta u$. Dabei ist

$$|\delta u_i| \leq |u_i| \mathrm{eps} + \left|\frac{v_i}{v_r}\right| |u_r| (2\mathrm{eps} + 3\mathrm{eps}^2 + \mathrm{eps}^3).$$

Folgerung

Wenn $|v_r| \ll |v_i||u_r|$, dann kann der Rundungsfehler sehr groß werden. Das heißt das Verfahren ist *nicht stabil* (vergleiche auch das Beispiel in **Kapitel 10**).

Beachte

Bei der Wahl von r hat man keine Freiheit im Unterschied zum Gaußalgorithmus.

10. Das Simplexverfahren mit LU–Zerlegung, Stabilisiertes Simplexverfahren

Beim revidierten Simplexverfahren sind in jedem Schritt die drei linearen Gleichungssysteme

$$A_B x_B = b \qquad \pi^T A_B = c_B^T \qquad A_B \tilde{a}_s = a_s \tag{10.1}$$

mit den Unbekannten $x_B = \tilde{b}$, π und $\tilde{a}_s$ zu lösen (vergleiche **(9.1)**). Dazu berechnet man jetzt *nicht* A_B^{-1} wie beim revidierten Simplexverfahren, sondern die LU–Zerlegung von A_B:

$$PA_B = LU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & & & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ l_{m-1,1} & & & 1 & 0 \\ l_{m1} & l_{m2} & \dots & l_{m,m-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & \dots & u_{1m} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & u_{mm} \end{pmatrix}, \tag{10.2}$$

wobei P eine geeignete Permutationsmatrix ist. Wir wissen aus der Numerik I, daß es zu jeder regulären Matrix A_B eine LU–Zerlegung wie in **(10.2)** gibt. Um $A_B x_B = b$ zu lösen, löst man die beiden *gestaffelten Gleichungssysteme* ($PA_B x_B = L(Ux_B) = Pb$)

$$PA_B x_B = LUx_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & & & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ l_{m-1,1} & & & 1 & 0 \\ l_{m1} & l_{m2} & \dots & l_{m,m-1} & 1 \end{pmatrix} v = Pb, \quad \begin{pmatrix} u_{11} & \dots & u_{1m} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & u_{mm} \end{pmatrix} x_B = v. \tag{10.3}$$

Der Einfachheit halber nehmen wir für das Weitere an, daß **(10.2)** mit

$$P = I$$

gilt. Dann ist nach **(10.3)**

$$v_1 = b_1,\ v_2 = b_2 - l_{21}v_1, \dots, v_i = b_i - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}v_k \qquad \text{für } i = 1, \dots, m,$$

und

$$x_m = \frac{1}{u_{mn}} v_m, \dots, x_i = \frac{1}{u_{ii}}\Big(v_i - \sum_{k=i+1}^{m} u_{ik}x_k\Big) \qquad \text{für } i = m, m-1, \dots, 1.$$

Folgerung

Die Kenntnis von L und U ist ebenso gut wie die von A_B^{-1}.

Die Vorteile gegenüber einer expliziten Berechnung von A_B^{-1} sind:

i) Ist A_B dünn besetzt, so wegen der Bildung der Spalten von L auch L und U. Bandstrukturen bleiben erhalten, zum Beispiel gilt für

$$A_B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dagegen ist A_B^{-1} voll besetzt, was wir in **Kapitel 9** bereits gezeigt haben. Damit ist natürlich Speicherplatzersparnis und ein geringerer Rechenaufwand verbunden!

ii) Das Simplexverfahren mit LU–Zerlegung ist *stabil*, das heißt der Einfluß der Rundungsfehler auf den Gesamtfehler ist in der Größenordnung des Einflusses der Eingangsfehler auf den Gesamtfehler. Das gilt wie bereits gesehen *nicht* für das revidierte Simplexverfahren!

Beispiel zu ii)

Gegeben seien folgende Restriktionen

$$\begin{aligned} \text{N.B.}\quad Ax &\le b \\ x &\ge 0, \end{aligned}$$

wobei

$$A := \left(\frac{1}{i+k}\right)_{i,k=1,\dots,5} = \begin{pmatrix} 1/2 & \dots & 1/6 \\ 1/3 & & 1/7 \\ \vdots & & \vdots \\ 1/6 & \dots & 1/10 \end{pmatrix}$$

und

$$b := A \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots \\ \sum\limits_{k=1}^{5} 1/i+k \\ \vdots \end{pmatrix}_{i=1,\dots,5}.$$

Von der Startbasis $B_1 := \{6,7,8,9,10\}$ laufe man zu der Basis $B_2 := \{1,2,3,4,5\}$ und zurück zu B_1. Auf der Rechenanlage erhält man bei Maschinengenauigkeit eps $\approx 10^{-11}$ nach Durchlaufen des Zyklus

	Rev. Simplexverfahren	LU–Zerlegung
$x_{B_1}^{(1)}$	$1.4500\underline{10511} \cdot 10^0$	$1.4500000000 \cdot 10^0$
$x_{B_1}^{(2)}$	$1.092857\underline{9972} \cdot 10^0$	$1.09285714\underline{7} \cdot 10^0$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$x_{B_1}^{(5)}$	$6.4563\underline{547103} \cdot 10^{-1}$	$6.45634920\underline{59} \cdot 10^{-1}$

Die ungenauen Stellen sind unterstrichen, der exakte Wert für $(x_{B_1}^{(1)}, \dots, x_{B_1}^{(5)})$ ist b.

Berechnung der neuen LU–Zerlegung aus dem Vorgänger

Gegeben sei eine beliebige Matrix $A_B = (a_1, \dots, a_m)$ und die zu berechnende neue Matrix sei $A_{\overline{B}} = (a_1, \dots, a_{r-1}, a_{r+1}, \dots, a_m, a_s)$. Da aber $A_B = LU$ ist, hat man

$$\begin{aligned} L^{-1}A_{\overline{B}} &= (L^{-1}a_1, \dots, L^{-1}a_s) \\ &= (u_1, \dots, u_{r-1}, u_{r+1}, \dots, u_m, L^{-1}a_s) =: \overline{H}. \end{aligned}$$

Damit ist $\overline{H}$ eine sogenannte Hessenbergmatrix mit der allgemeinen Struktur

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} * & \cdots & & & & * \\ & \ddots & & & & \vdots \\ & & * & & & \\ & & * & \ddots & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & * & * \end{pmatrix} \\ \uparrow \\ r \end{array}$$

Die Matrix $\overline{H}$ ist bekannt, da sich $L^{-1}a_s$ berechnen läßt aus $LU\tilde{a}_s = a_s$ und damit $Lv = a_s$ und $U\tilde{a}_s = v$. Man bringt $\overline{H}$ durch Gaußschritte auf obere Dreiecksgestalt

$$\overline{U} = F_{m-1}P_{m-1}\ldots F_rP_r\overline{H}.$$

Dabei ist für $i \geq r$

$$P_i = I_{m\times m} \qquad \text{falls } |h_{ii}| \geq |h_{i+1,i}|$$

$$P_i = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & 0 & 1 & & \\ & & & 1 & 0 & & \\ & & & & & 1 & \\ & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & 1 \end{pmatrix}_{m\times m} \\ \begin{matrix} \uparrow & \uparrow \\ i & i+1 \end{matrix} \end{array} \qquad \text{falls } |h_{i+1}| > |h_{ii}|$$

und

$$F_i = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & m_i & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \leftarrow i+1 \\ \\ \end{matrix} \\ \uparrow \\ i \end{array} \qquad \text{mit} \quad m_i = \begin{cases} -\dfrac{h_{i+1,i}}{h_{ii}} & \text{falls } P_i = I \\ -\dfrac{h_{ii}}{h_{i+1,i}} & \text{andernfalls} \end{cases}$$

Die Matrix P_i bewirkt numerische Stabilität, und es gilt $P_i = P_i^{-1}$. Und damit

$$A_{\overline{B}} = LP_rF_r^{-1}\ldots P_{m-1}F_{m-1}^{-1}\overline{U},$$

wobei

$$F_i^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & -m_i & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Sind alle $P_i = I$, so erhält man wieder die LU–Zerlegung

$$A_{\overline{B}} = \underbrace{(LF_r^{-1}\cdots F_{m-1}^{-1})}_{\substack{\text{untere Drei–}\\ \text{ecksmatrix}}}\ \underbrace{\overline{U}}_{\substack{\text{obere Drei–}\\ \text{ecksmatrix}}}.$$

Auch im anderen Fall sind im wesentlichen wieder zwei gestaffelte Gleichungssysteme zu lösen.

11. Duale lineare Programme

Definition

Sei E ein linearer Raum über $\mathbb{R}$. Dann heißt $E \supset K$ *konvexer Kegel* mit Scheitel in 0_E genau dann, wenn folgendes gilt:

$$x, y \in K,\ \lambda \in [0,1] \Longrightarrow \lambda x + (1-\lambda)y \in K$$

und

$$x \in K,\ \lambda \geq 0 \Longrightarrow \lambda x \in K.$$

Bemerkung

Es ist K genau dann ein konvexer Kegel, wenn

$$\lambda x + \mu y = (\lambda+\mu)\Big(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}x + (1 - \frac{\lambda}{\lambda+\mu})y\Big) \in K$$

für alle $x, y \in K$ und alle $\lambda, \mu \geq 0$ gilt. Damit folgt sofort, daß $0 \in K$, falls $K \neq \emptyset$ ist.

Sei $K \subset E$ ein nichtleerer konvexer Kegel. Mit

$$x \geq_K y \Longleftrightarrow y \leq_K x :\Longleftrightarrow x - y \in K \quad \text{für alle } x, y \in E$$

wird E zu einem *(halb–)geordneten* linearen Raum. Es gilt für alle x, y und $z \in E$

$x \geq_K x$	*(Reflexivität)*
$x \geq_K y,\ y \geq_K z \Longrightarrow x \geq_K z$	*(Transitivität)*
$x \geq_K y,\ \lambda \geq 0 \Longrightarrow \lambda x \geq_K \lambda y$	*(Verträglichkeit mit linearer Struktur)*
$x \geq_K y \Longrightarrow x + z \geq_K y + z$	*(Verträglichkeit mit linearer Struktur)*

Beispiel (11.1)

1) Es sei $E := \mathbb{R}^n$ und $X := \Big\{ x \in \mathbb{R}^n \;\Big|\; x_i \geq 0 \quad \text{für } i = 1, \ldots, n' \Big\}$ mit $0 \leq n' \leq n$. Dann ist $x \geq_X \overline{x}$ genau dann, wenn $x_i \geq \overline{x}_i$ für $i = 1, \ldots, n'$.

2) Es sei $F := \mathbb{R}^m$ und $Y := \left\{ y \in \mathbb{R}^m \;\middle|\; \begin{array}{ll} y_i \geq 0 & \text{für } i = 1, \ldots, m' \\ y_i = 0 & \text{für } i = m'+1, \ldots, m \end{array} \right\}$ mit $0 \leq m' \leq m$. Dann ist $y \geq_Y \overline{y}$ genau dann, wenn $y_i \geq \overline{y}_i$ für $i = 1, \ldots, m'$ und $y_i = \overline{y}_i$ für alle $i = m'+1, \ldots, m$.

Es sei A eine $(m \times n)$–Matrix, $c \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$ und E, F, X sowie Y wie in **Beispiel (11.1)**. Damit schreibt sich das lineare Problem (P) in der Form

$$\boxed{\begin{array}{ll} \max & c^T x \\ \text{N.B.} & Ax \leq_Y b \\ & \quad x \geq_X 0_E \end{array}} \tag{11.2}$$

Um ein *duales* Problem definieren zu können betrachten wir in $F \times \mathbb{R}$ die Menge

$$K := \left\{ \begin{pmatrix} b - Ax - w \\ c^T x - r \end{pmatrix} \;\middle|\; x \in X,\ r \geq 0,\ w \in Y \right\}.$$

Es ist

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix} \right\} + P$$

mit dem konvexen Kegel

$$P := \left\{ \begin{pmatrix} -Ax - w \\ c^T x - r \end{pmatrix} \,\middle|\, x \in X,\ r \geq 0,\ w \in Y \right\}.$$

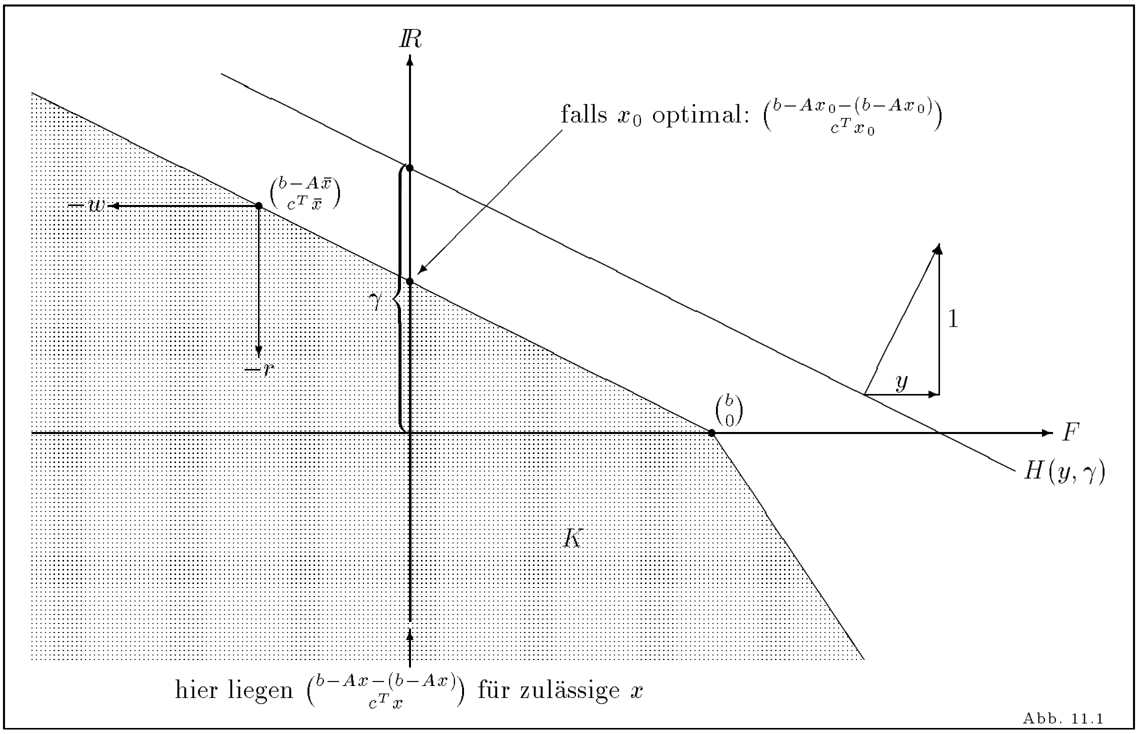


Abb. 11.1

Die Hyperebene $H(y,\gamma) = \left\{ \binom{v}{\alpha} \in F \times I\!R \,\middle|\, \binom{y}{1}^T \binom{v}{\alpha} = \gamma \right\}$ in $F \times I\!R$ mit Normalenvektor $\binom{y}{1}^T$ heißt *nichtvertikal*.

Duales Problem

Unter allen nichtvertikalen Hyperebenen $H(y,\gamma)$, die "über" K liegen, das heißt

$$\begin{pmatrix} y \\ 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} b - Ax - w \\ c^T x - r \end{pmatrix} \leq \gamma \quad \text{für alle } x \in X,\ r \geq 0 \text{ und } w \in Y, \tag{11.3}$$

suche man diejenige mit kleinstem γ. Die Ungleichungen in **(11.3)** sind äquivalent zu

$$\begin{aligned} -y^T w &\leq 0 \quad \text{für alle } w \in Y \\ (c^T - y^T A)x &\leq 0 \quad \text{für alle } x \in X \\ y^T b &\leq \gamma. \end{aligned}$$

Falls nämlich $-y^T w_0 > 0$ wäre, so würde

$$\lim_{\lambda \to \infty} -y^T(\lambda w_0) = \infty,$$

womit die linke Seite der Ungleichung über jedes feste γ wüchse, und somit **(11.3)** nicht erfüllt wäre. Die zweite Abschätzung folgt analog, und $y^T b \leq \gamma$ muß gelten, da $x = w = r = 0$ erlaubt ist.

Das *duale Problem* lautet somit

$$\begin{aligned} \min \quad & y^T b \\ \text{N.B.} \quad & (y^T A - c^T)x \geq 0 \quad \text{für alle } x \in X \\ & y^T w \geq 0 \quad \text{für alle } w \in Y. \end{aligned} \tag{11.4}$$

Definition

Sei $K \subset E$ ein konvexer Kegel. Dann heißt

$$K^+ := \left\{ u^T \in E^T \;\middle|\; u^T x \geq 0 \text{ für alle } x \in K \right\}$$

der *Dualkegel* von K.

Bemerkung

Man zeigt leicht, daß K^+ ein nichtleerer konvexer Kegel in E^T ist. Weiterhin ist K^+ abgeschlossen. Dies folgt unmittelbar wegen

$$K^+ = \underbrace{\bigcap_{x \in K} \underbrace{\{ u \mid u^T x \geq 0 \}}_{\text{abgeschlossen}}}_{\text{abgeschlossen}}.$$

Für ein beliebiges E ist E^T durch $E^* = \mathcal{L}(E; \mathbb{R}) = \{ x^* \mid x^* \text{ ist stetige Linearform auf } E \}$ zu ersetzen.

Für die durch K^+ auf E^T definierte Halbordnung gilt

$$u^T \geq_{K^+} v^T \quad \iff \quad u^T x \geq v^T x \quad \text{für alle } x \in K.$$

Als endgültiges *Dualproblem* (D) von **(11.2)** erhalten wir

$$\boxed{\begin{aligned} \min \quad & y^T b \\ \text{N.B.} \quad & y^T A \geq_{X^+} c^T \\ & y^T \geq_{Y^+} 0 \end{aligned}} \tag{11.5}$$

Für die Kegel X und Y von **(11.1)** gilt

$$X^+ = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \begin{array}{l} x_i \geq 0 \text{ für } i = 1, \ldots, n' \\ x_i = 0 \text{ für } i = n'+1, \ldots, n \end{array} \right\},$$

$$Y^+ = \{ y \in \mathbb{R}^m \mid y_i \geq 0 \quad \text{für } i = 1, \ldots, m' \}$$

Man erhält somit die folgende Zuordnung in **(11.2)** und **(11.5)**

primal	dual
Zielfunktion (Maximierung)	rechte Seite der Ungleichung
rechte Seite der Ungleichung	Zielfunktion (Minimierung)
Koeffizientenmatrix A	transponierte Koeffizientenmatrix A^T
Restriktionen	Variablen
i-te Restriktion $\leq b_i$	$y_i \geq 0$
i-te Restriktion $= b_i$	y_i frei
Variablen	Restriktionen
$x_j \geq 0$	j-te Restriktion $\geq c_j$
x_j frei	j-te Restriktion $= c_j$

Beispiele

Gegeben sei das primale Problem (P) und wir kunstruieren das dazu duale Problem (D).

$$
(P)\quad
\begin{array}{rl}
\max & c^T x\\
\text{N.B.} & Ax \le b\\
& x \ge 0\\
& Y = I\!R^m_+\\
& X = I\!R^n_+
\end{array}
\quad\longrightarrow\quad
(D)\quad
\begin{array}{rl}
\min & b^T y\\
\text{N.B.} & A^T y \ge c\\
& y \ge 0\\
& X^+ = I\!R^n_+\\
& Y^+ = I\!R^m_+
\end{array}
$$

$$
(P)\quad
\begin{array}{rl}
\max & c^T x\\
\text{N.B.} & Ax = b\\
& x \ge 0\\
& Y = \{0\}\\
& X = I\!R^n_+
\end{array}
\quad\longrightarrow\quad
(D)\quad
\begin{array}{rl}
\min & b^T y\\
\text{N.B.} & A^T y \ge c\\
& y \text{ frei}\\
& X^+ = I\!R^n_+\\
& Y^+ = I\!R^m
\end{array}
$$

Wir bezeichnen im Folgenden die jeweils *zulässigen Mengen* in **(11.2)** beziehungsweise **(11.5)** mit

$$
\begin{aligned}
M^P &:= \{\, x \in I\!R^n \mid Ax \le_Y b,\ x \ge_X 0 \,\}\\
M_D &:= \{\, y \in I\!R^m \mid A^T y \ge_{X^+} c,\ y \ge_{Y^+} 0 \,\}.
\end{aligned}
\tag{11.7}
$$

Weiter sei

$$
\omega^P := \begin{cases} \sup\limits_{x\in M^P} c^T x & \text{falls } M^P \ne \emptyset\\ -\infty & \text{falls } M^P = \emptyset \end{cases}
$$

$$
\omega_D := \begin{cases} \inf\limits_{y\in M_D} b^T y & \text{falls } M_D \ne \emptyset\\ +\infty & \text{falls } M_D = \emptyset. \end{cases}
$$

11.1 Satz (Einschließungssatz, schwacher Dualitätssatz)

Falls $x \in M^P$ und $y \in M_D$, dann folgt

$$y^T b \ge \omega_D \ge \omega^P \ge c^T x.$$

Beweis

Aus der primalen Zulässigkeit von x, das heißt $Ax \le_Y b$ und der dualen Zulässigkeit von y, das heißt $y \in Y^+$ folgt, daß $y^T(b - Ax) \ge 0$ da $(b - Ax) \in Y$ ist, und damit $y^T b \ge y^T Ax$.

Analog folgt $x \in X$ und $A^T y \ge_{X^+} c$ und damit $(A^T y - c)^T x \ge 0$ da $(A^T y - c) \in X^+$ ist, und damit $y^T Ax \ge c^T x$.

Insgesamt folgt sofort $y^T b \ge c^T x$, und der Satz ist bewiesen.

Zusatz

Auch in den Situationen $M^P = \emptyset$ und/oder $M_D = \emptyset$ gilt $\omega_D \ge \omega^P$.

11.2 Korollar (Hinreichendes Optimalitätskriterium)

Sei $x \in M^P$, $y \in M_D$ und $c^T x = b^T y$, dann ist x und y *optimal* für (P) beziehungsweise (D).

Ein weiteres hinreichendes Optimalitätskriterium liefert die Implikation ii) $\Longrightarrow$ i) im folgenden

11.3 Satz (Complementary slackness condition)

Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

i) x ist optimal für (P), y ist optimal für (D) und es gilt $\omega^P = \omega_D$.

ii) Es ist $x \in M^P$, $y \in M_D$ und es gilt

$$y^T(Ax - b) = 0 \qquad (*)$$

$$(y^T A - c^T)x = 0. \qquad (**)$$

Da y optimal ist für (D), erfüllt y die Vorzeichenbedingung, das heißt $y \geq 0$. Weil auch x optimal ist für (P), gilt $Ax \leq b$. Daher müssen in $y^T(Ax - b)$ alle einzelnen Summanden gleich Null sein, damit das Skalarprodukt 0 ist. Damit ist entweder $y_i = 0$ oder x erfüllt die i–te Ungleichung mit Gleichheit.

Beweis

i) $\Longrightarrow$ ii)

Es gilt (siehe **Beweis zu Satz 11.1**)

$$y^T(\underbrace{Ax - b}_{\in -Y}) \leq 0 \leq (\underbrace{y^T A - c^T}_{\in X^+})x$$

und mit $b^T y = c^T x$ folgt sofort $y^T(Ax - b) = (y^T A - c^T)x = 0$.

ii) $\Longrightarrow$ i)

Nach Vorraussetzung ist $x \in M^P$, $y \in M_D$ und $y^T b = c^T x$ und mit **Satz 11.2** folgt die Behauptung.

Deutung der Komplementarität $(*)$ für $X = \mathbb{R}^n_+$ und $Y = \mathbb{R}^m_+$. Wir schreiben für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_1^T \\ \vdots \\ a_m^T \end{pmatrix}.$$

Dann muß wegen

$$y^T(Ax - b) = \sum_{i=1}^{m} \underbrace{\underbrace{y_i}_{\geq 0} \underbrace{(a_i^T x - b_i)}_{\leq 0}}_{\leq 0} = 0$$

$y_i = 0$ sein, falls $a_i^T x < b_i$.

11.4 Satz (Dualitätssatz)

Seien X, Y wie in **Beispiel 11.1**. Dann gilt folgendes

a) Besitzt (P) eine Optimallösung x_0, so auch (D) und es ist $\omega^P = \omega_D$.

b) Besitzt (D) eine Optimallösung y_0, so auch (P) und es ist $\omega^P = \omega_D$.

Beweis

Der Beweis des Dualitätssatzes ist der Inhalt von **Kapitel 12**.

Folgerung

Aus dem Dualitätssatz folgt unmittelbar:

i) Ist $M^P \neq \emptyset$ und $M_D \neq \emptyset$, dann existiert ein x_0 und y_0 mit $c^T x_0 = \omega^P = \omega_D = b^T y_0$.

ii) Ist $M^P \neq \emptyset$ und $M_D = \emptyset$, dann existiert kein optimales x_0 und es ist $\omega^P = \infty = \omega_D$.

iii) Ist $M^P = \emptyset$ und $M_D \neq \emptyset$, dann existiert kein optimales y_0 und es ist $\omega_D = -\infty = \omega^P$.

iv) Ist $M^P = \emptyset$ und $M_D = \emptyset$, dann ist $\omega^P = -\infty < +\infty = \omega_D$.

Im Fall iv) hat das Problem eine sogenannte *Dualitätslücke*.

Beispiel (Interpretation eines Dualproblems)

Wir betrachten ein konkretes Beispiel mit zugehörigem primalen und dualen Problem.

Primales Problem (Mensaproblem)

Die erforderlichen Mindestvitaminmengen in der Mensakost seien $b_1, \ldots, b_m$. Auf dem Markt seien die Nahrungsmittel $x_1, \ldots, x_n$ vorhanden. $x_1, \ldots, x_n$ sind die Variablen des Problems. Der Beitrag von Nahrungsmittel x_j am Vitaminbedarf b_i sei a_{ij}. Der Preis von x_j auf dem Markt pro Einheit sei c_j. Damit formuliert sich das Problem wie folgt:

$$\begin{array}{rl} \min & c_1 x_1 + \ldots + c_n x_n \\ \text{N.B.} & a_{11} x_1 + \ldots + a_{1n} x_n \geq b_1 \\ & \vdots \qquad\qquad \vdots \\ & a_{m1} x_1 + \ldots + a_{mn} x_n \geq b_m \\ & \qquad\qquad x_i \geq 0 \quad \text{für } i = 1, 2, \ldots, n. \end{array} \tag{P}$$

Die Gegenüberstellung von (P) und (D) analog zu den vorigen Beispielen lautet

$$\begin{array}{crl} & \max & (-c)^T x \\ (P) & \text{N.B.} & (-A)x \leq (-b) \\ & & x \geq 0 \end{array} \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{crl} & \min & (-b)^T y \\ (D) & \text{N.B.} & (-A)^T y \geq (-c) \\ & & y \geq 0. \end{array}$$

Duales Problem (Produktionsproblem)

Eine Firma stellt Vitamine $1, 2, \ldots, m$ synthetisch her. Gesucht sind Preise $y_1, \ldots, y_m$ für diese Vitamine. Ziel ist es,

$$b_1 y_1 + \ldots + b_m y_m$$

zu maximieren. Aus Konkurrenzgründen muß

$$a_{1i} y_1 + \ldots + a_{mi} y_m \leq c_i$$

für $i = 1, 2, \ldots, n$ sein. Dabei ist $a_{1i} y_1 + \ldots + a_{mi} y_m$ der Preis für den Ersatz von x_i durch synthetische Vitamine, und c_i der Marktpreis des natürlichen Nahrungsmittels i. Man erhält somit das duale Problem

$$\begin{array}{rl} \max & b_1 y_1 + \ldots + b_m y_m \\ \text{N.B.} & a_{11} y_1 + \ldots + a_{m1} y_m \leq c_1 \\ & \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ & a_{1n} y_1 + \ldots + a_{mn} y_m \leq c_n \\ & \qquad\qquad y_i \geq 0 \quad \text{für } i = 1, 2, \ldots, m. \end{array} \tag{D}$$

12. Beweis des Dualitätssatzes

12.1 Trennungssatz

Sei $A \subset I\!R^n$ eine nichtleere, konvexe Menge und $x_0 \notin \overline{A}$. Dann lassen sich A und x_0 strikt trennen, das heißt, es gibt ein $c \in I\!R^n$ und ein $\gamma \in I\!R$ mit

$$c^T x \leq \gamma < c^T x_0 \quad \text{für alle } x \in \overline{A}. \tag{12.1}$$

Beweis

Für den Beweis betrachten wir Abbildung 12.1.

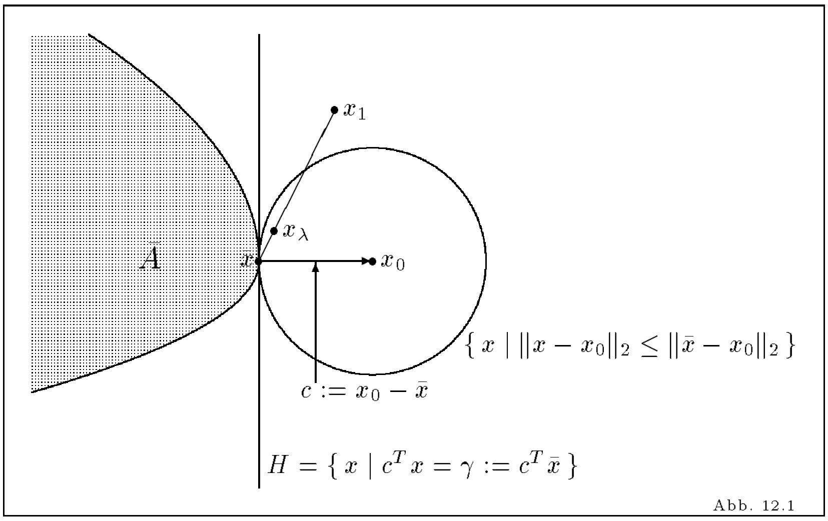


Abb. 12.1

Sei nun δ definiert durch

$$\delta := \inf_{x \in A} \|x - x_0\| \,.$$

Die stetige Funktion $x \mapsto \|x - x_0\|$ nimmt ihr Minimum auf der kompakten Menge

$$\overline{A} \cap \{\, x \mid \|x - x_0\| \leq 2\delta \,\}$$

in genau einem Punkt $\overline{x}$ an. Dies folgt unmittelbar aus der Konvexität der Menge. Setze $c := x_0 - \overline{x}$ und $\gamma := c^T \overline{x}$. Wegen $\overline{x} \neq x_0$ — da $x_0 \notin \overline{A}$ ist — muß

$$c^T (x_0 - \overline{x}) = \|x_0 - \overline{x}\|^2 > 0$$

sein, das heißt

$$c^T x_0 > \gamma. \tag{12.2}$$

Sei nun angenommen, daß ein $x_1 \in \overline{A}$ existiert mit $x_1 \neq \overline{x}$ und

$$c^T x_1 > \gamma = c^T \overline{x}. \tag{12.3}$$

Da mit A auch $\overline{A}$ konvex ist, folgt, daß

$$x_\lambda := \lambda x_1 + (1 - \lambda)\overline{x} = \overline{x} + \lambda(x_1 - \overline{x}) \in \overline{A} \quad \text{für } 0 \leq \lambda \leq 1$$

und damit nach Wahl von $\overline{x}$

$$\begin{aligned}
\|x_0 - \overline{x}\|^2 \leq \|x_0 - x_\lambda\|^2 &= \|(x_0 - \overline{x}) + \lambda(\overline{x} - x_1)\|^2 \\
&= \|x_0 - \overline{x}\|^2 + \lambda\Big(2\,\underbrace{c^T(\overline{x} - x_1)}_{<\,0} + \lambda\,\underbrace{\|\overline{x} - x_1\|^2}_{>0}\Big) \\
&< \|x_0 - \overline{x}\|^2 \quad \text{für hinreichend kleines } \lambda > 0.
\end{aligned}$$

Womit die Annahme zum Widerspruch geführt wäre. Es folgt also

$$c^T x \leq \gamma \quad \text{für alle } x \in \overline{A}.$$

Zusammen mit **(12.2)** folgt die Behauptung.

Anmerkung

Läßt man als x_0 auch Randpunkte von A zu, so kann man zeigen, daß es ein $c \neq 0$ und ein γ gibt mit

$$c^T x \leq \gamma \leq c^T x_0 \quad \text{für alle } x \in A. \tag{12.4}$$

Der Beweis erfolgt durch Grenzübergang im **Satz 12.1**.

Trennungssatz (allgemeiner Trennungssatz im $\mathbb{R}^n$)

Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ konvex mit $A \neq \emptyset$ und $B \subset \mathbb{R}^n$ konvex mit $B \neq \emptyset$ wobei $\mathring{A} \cap B = \emptyset$ ist. Dann existiert ein $c \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ und ein $\gamma \in \mathbb{R}$ mit

$$c^T a \geq \gamma \geq c^T b \quad \text{für alle } a \in A \text{ und } b \in B.$$

Beweis

Sei $A - B := \{\, a - b \mid a \in A,\ b \in B \,\}$, dann ist $A - B$ konvex und nichtleer. Und nach Vorraussetzung ist $0 \notin (\mathring{A} - B)$. Dann existiert nach **(12.4)** ein $c \in \mathbb{R}^n$ mit $c \neq 0$, so daß $c^T(a - b) \geq c^T 0$ ist. Mit $\gamma := \inf c^T a$ ist dann

$$c^T a \geq \gamma \geq c^T b.$$

Beachte

Die Menge $(\mathring{A} - B) = \bigcup_{b \in B} (\mathring{A} - \{b\})$ ist offen.

Achtung

In ∞–dimensionalen Räumen gilt dieser Satz nur unter der zusätzlichen Voraussetzung $\mathring{A} \neq \emptyset$.

Gegenbeispiel mit $\mathring{A} = \emptyset$

Wir betrachten die Menge

$$l_2 := \left\{ x = (x_i)_{i \in N} \;\middle|\; \|x\|^2 := \sum_{i=0}^{\infty} x_i^2 < \infty \right\}$$

wobei $l_2^* = l_2$ gilt und die Menge

$$A := \left\{ x \;\middle|\; \text{es existiert ein } n \text{ mit } x_n > 0 \text{ und } x_m = 0 \text{ für alle } m > n \right\}.$$

Somit enthält A keine inneren Punkte, denn

$$(*, \ldots, \eta, 0, 0, \ldots, 0) \in A$$

aber

$$(*, \ldots, \eta, -\epsilon, 0, \ldots, 0) \notin A \quad \text{für beliebig kleines } \epsilon.$$

Betrachte weiterhin die Menge $B := \{0_{l_2}\}$. Dann ist $\mathring{A} \cap B = \emptyset$ und sei $l \in l_2^* = l_2$ gegeben. Dann ist

$$l(x) = \sum_{i=1}^{\infty} l_i x_i \geq 0 = l(0)$$

für alle $x \in A$, das heißt $l(x) \equiv 0$. Also lassen sich A und B nicht trennen.

12.2 Bidualsatz

Sei $\mathbb{R}^n \supset K$ ein nichtleerer, abgeschlossener konvexer Kegel. Dann gilt $K^{++} = K$.

Beweis

"$\supset$" Für $x \in K$ folgt $x^T y = y^T x \geq 0$ für alle $y \in K^+$, das heißt $x \in K^{++}$.

"$\subset$" Sei dazu angenommen, daß ein $x_0 \in K^{++}$ existiert mit $x_0 \notin K$. Dann läßt sich mit dem Trennungssatz **12.1** x_0 und K strikt trennen, das heißt, es gibt ein $y \in \mathbb{R}^n$ und ein $\gamma \in \mathbb{R}$ mit

$$y^T x \geq \gamma > y^T x_0 \quad \text{für alle } x \in K.$$

Damit ist $y \in K^+$ und $x_0^T y < 0$. Dies ist ein Widerspruch zu $y \in K^+$ und $x_0 \in K^{++}$.

Beweis des Dualitätssatzes 11.4

Es sei $K := \left\{ \begin{pmatrix} b - Ax - w \\ c^T x - r \end{pmatrix} \,\middle|\, x \in X,\ r \geq 0,\ w \in Y \right\}$ (vergleiche Abbildung 12.2).

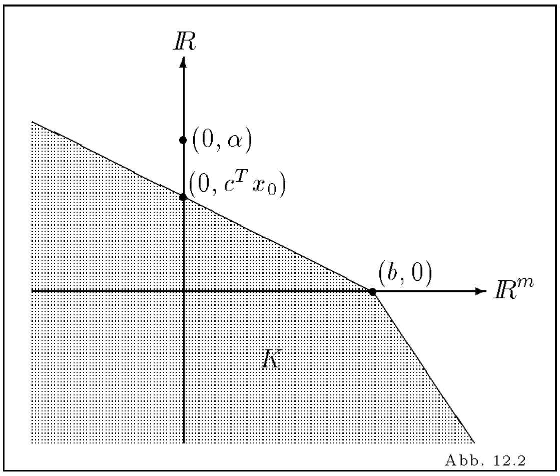


Abb. 12.2

Der Kegel

$$P := \left\{ \begin{pmatrix} -Ax - w \\ c^T x - r \end{pmatrix} \,\middle|\, x \in X,\ r \geq 0,\ w \in Y \right\}$$

ist *endlich erzeugt*, das heißt, es gibt endlich viele $p_i \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}$ für $i = 1, 2, \ldots, N$ mit

$$P = \left\{ \sum_{i=1}^{N} \alpha_i p_i \,\middle|\, \alpha_i \geq 0 \right\}.$$

Ein endlich erzeugter Kegel ist ein endlicher Schnitt von abgeschlossenen Halbräumen und damit abgeschlossen, das heißt

$$K = \overline{K}. \tag{12.5}$$

Wir kommen nun zum eigentlichen Beweis von **Satz 11.4**.

Beweis von Teil a)

Weil x_0 optimal ist, gilt

$$\omega^P = c^T x_0 \geq c^T x \quad \text{für alle } x \in M^P.$$

Sei nun $\alpha > \omega^P$ beliebig. Wäre $(0_{\mathbb{R}^m}, \alpha) \in K$, so gäbe es

$$x \in X,\ r \geq 0,\ w \in Y$$

mit

$$\alpha = c^T x - r, \quad \text{und} \quad 0 = b - Ax - w,$$

das heißt $x \in M^P$ und

$$c^T x = \alpha + r > \omega^P,$$

im Widerspruch zur Optimalität von x_0. Dies zeigt, daß $(0, \alpha) \notin K$ ist. Hieraus, aus **(12.5)** und **Satz 12.1** folgt die Existenz eines $\binom{y}{\lambda} \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}$ und $\gamma \in \mathbb{R}$ mit

$$\begin{pmatrix} y \\ \lambda \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \end{pmatrix} = \lambda\alpha > \gamma \geq \lambda(c^T x - r) + y^T(b - Ax - w) \quad \text{für alle } x \in X,\ r \geq 0 \text{ und } w \in Y.$$

Für ein beliebiges $x \in M^P$ und $w := b - Ax$ $(\in Y)$ folgt

$$\lambda\alpha > \lambda(c^T x - r).$$

Also ist notwendigerweise $\lambda > 0$ und ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\lambda = 1$. Es folgt

$$\begin{aligned} -y^T w \leq 0 &\quad \text{für alle } w \in Y \text{ also } y \in Y^+, \\ (c^T - y^T A)x \leq 0 &\quad \text{für alle } x \in X \text{ also } y^T A \geq_{X+} c^T, \end{aligned}$$

sowie

$$y^T b < \alpha.$$

Es folgt $\omega_D < \alpha$ und da $\alpha > \omega^P$ beliebig war

$$\omega_D = \omega^P.$$

Beweis von Teil b)

Man betrachte

$$\begin{aligned} \max \quad & (-b)^T y \\ \text{N.B.} \quad & (-A)^T y \leq_{X+} (-c) \\ & \qquad\quad y \geq_{Y+} 0 \end{aligned}$$

als primales Problem. Nach obigem besitzt das dazu duale Problem

$$\begin{aligned} \min \quad & x^T(-c) \\ \text{N.B.} \quad & x^T(-A)^T \geq_{Y++} (-b)^T \\ & \qquad\quad x \geq_{X++} 0 \end{aligned} \quad \overset{\text{Bidualsatz}}{\Longleftrightarrow} \quad \begin{aligned} \max \quad & c^T x \\ \text{N.B.} \quad & Ax \leq_Y b \\ & \quad x \geq_X 0 \end{aligned}$$

eine Optimallösung x_0 mit

$$c^T x_0 = b^T y_0.$$

13. Das duale Simplexverfahren

Wir betrachten das lineare Problem

$$\max\{\, c^T x \mid Ax \leq b,\ x \geq 0\,\}, \tag{P}$$

wobei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $X = \mathbb{R}^n_+$ und $Y = \mathbb{R}^m_+$ ist, mit dem zugehörigem Dualproblem

$$\min\{\, b^T y \mid A^T y \geq c,\ y \geq 0\,\}, \tag{D}$$

welches äquivalent ist zu

$$\max\{\, -b^T y \mid -A^T y \leq -c,\ y \geq 0\,\}.$$

Für das Simplexverfahren erhalten wir die Starttableaus

$$\begin{array}{c|c|c|} & \multicolumn{2}{c}{x_N} \\ \cline{2-3} & 0 & c \\ \cline{2-3} x_B & b & A_N(=A) \\ \cline{2-3} \end{array} \qquad \text{beziehungsweise} \qquad \begin{array}{c|c|c|} & \multicolumn{2}{c}{y_N} \\ \cline{2-3} & 0 & -b \\ \cline{2-3} y_B & -c & -A^T \\ \cline{2-3} \end{array}$$

Offensichtlich ist die Basislösung

$$x_N = (x_1, \ldots, x_n) = 0_{\mathbb{R}^n} \text{ und } x_B = (x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}) = b \textit{ primal} \text{ zulässig} \iff b \geq 0,$$

und die Basislösung

$$y_N = (y_1, \ldots, y_m) = 0_{\mathbb{R}^m} \text{ und } y_B = (y_{m+1}, \ldots, y_{m+n}) = -c \textit{ dual} \text{ zulässig} \iff c \leq 0.$$

Häufig ist es nun einfacher, statt (P) das Problem (D) zu lösen, insbesondere dann, wenn beim Start das primale Problem nicht zulässig, aber $c \leq 0$ ist. Dann entspricht die duale Basislösung $y_N = (y_1, \ldots, y_m) = 0_{\mathbb{R}^m}$ und $y_B = (y_{m+1}, \ldots, y_{m+n}) = -c$ einer zulässigen Ecke des dualen Polyeders. Weil

$$\min\ b^T y$$

bis auf Vorzeichen äquivalent ist zu

$$\max\ (-b)^T y$$

liegt eine Optimallösung vor, falls $-b \leq 0$ also $b \geq 0$ ist. Speichert man A, b und c wie üblich im Simplextableau, so gilt

1) Das Tableau ist primal zulässig, wenn $b \geq 0$ ist.

2) Das Tableau ist dual zulässig, wenn $c \leq 0$ ist.

3) Das Tableau entspricht einer Optimallösung, wenn $b \geq 0$ und $c \leq 0$, das heißt, wenn es primal und dual zulässig ist.

Beim dualen Simplexverfahren zur Lösung von (P) wechseln also Zeilen und Spalten ihre Rolle.

Duales Simplexverfahren zur Lösung von (P) bei dualer Zulässigkeit

Gegeben sei ein dual zulässiges Problem (P), das heißt $a_{0j} \leq 0$ für $1 \leq j \leq n$. Dann läuft das duale Simplexverfahren nach folgendem Algorithmus ab

1) Ist $a_{i0} \geq 0$ für $1 \leq i \leq m$, so ist

$$x_{B(i)} := a_{i0} \quad \text{und} \quad x_{N(j)} := 0$$

optimal. STOP. Andernfalls gehe zu 2).

2) Wähle die Pivotzeile r mit

$$r := \arg\min_{1 \leq i \leq m} a_{i0}.$$

3) Ist $a_{rj} \geq 0$ für $1 \leq j \leq n$, so besitzt (P) keine endliche Lösung. STOP. Andernfalls gehe zu 4).

4) Wähle die Pivotspalte s so, daß

$$s := \arg\min_{1 \leq j \leq n} \left\{ \frac{a_{0j}}{a_{rj}} \;\middle|\; a_{rj} < 0 \right\}.$$

5) Führe die Pivotoperationen wie folgt durch

$$\begin{aligned}
a_{rs} &:= \frac{1}{a_{rs}} \\
a_{rj} &:= \frac{a_{rj}}{a_{rs}} \quad \text{für } 0 \leq j \leq n,\ j \neq s \\
a_{is} &:= -\frac{a_{is}}{a_{rs}} \quad \text{für } 0 \leq i \leq m,\ i \neq r \\
a_{ij} &:= a_{ij} - \frac{a_{is}a_{rj}}{a_{rs}} \quad \text{für } 0 \leq i \leq m,\ 0 \leq j \leq n,\ i \neq r \text{ und } j \neq s.
\end{aligned}$$

Gehe zu 1).

Beispiel (vergleiche **5.1**)

Wir wollen diesen Algorithmus auf das folgende Beispiel anwenden

$$\begin{aligned}
\max \quad & -x_1 - 2x_2 \\
\text{N.B.} \quad & -x_1 - x_2 \leq -3 \\
& \qquad - x_2 \leq -2 \\
& -x_1 + x_2 \leq 3 \\
& x_1 - x_2 \leq 3 \\
& x_1,\ x_2 \geq 0.
\end{aligned}$$

Man erhält die Tableaufolge

Starttableau

$$\begin{array}{cc|c|cc|cc}
 & & & \multicolumn{2}{c}{\overbrace{x_1 \qquad x_2}^{x_N}} & & \\
\hline
 & & 0 & -1 & -2 & & \\
\hline
 & x_3 & -3 & \boxed{-1} & -1 & y_1 & \\
x_B & x_4 & -2 & 0 & -1 & y_2 & y_N \\
 & x_5 & 3 & -1 & 1 & y_3 & \\
 & x_6 & 3 & 1 & -1 & y_4 & \\
\hline
 & & & \multicolumn{2}{c}{\underbrace{y_5 \qquad y_6}_{y_B}} & &
\end{array}$$

Die Basislösung

$$x_B = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad x_N = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ist *nicht zulässig* für das primale Problem. Die duale Basislösung

$$y_B = \begin{pmatrix} y_5 \\ y_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad y_N = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_4 \end{pmatrix} = 0_{\mathbb{R}^4}$$

ist *zulässig* für das duale Problem, das heißt, das Tableau ist *dual zulässig*. Wir können deshalb einen dualen Simplexschritt durchführen und erhalten

Tableau 1

$$\begin{array}{c|c|cc|c} & & x_3 & x_2 & \\ \hline & 3 & -1 & -1 & \\ \hline x_1 & 3 & -1 & 1 & y_5 \\ x_4 & -2 & 0 & \boxed{-1} & y_2 \\ x_5 & 6 & -1 & 2 & y_3 \\ x_6 & 0 & 1 & -2 & y_4 \\ \hline & & y_1 & y_6 & \end{array}$$

Das Tableau ist wieder dual zulässig, aber noch nicht primal zulässig, das heißt noch nicht optimal. Wir erhalten

Tableau 2

$$\begin{array}{c|c|cc|c} & & x_3 & x_4 & \\ \hline & 5 & -1 & -1 & \\ \hline x_1 & 1 & -1 & 1 & y_5 \\ x_2 & 2 & 0 & -1 & y_6 \\ x_5 & 2 & -1 & 2 & y_3 \\ x_6 & 4 & 1 & -2 & y_4 \\ \hline & & y_1 & y_2 & \end{array}$$

Nun ist das Tableau dual und primal zulässig, und daher optimal mit

$$x_1 = 1, \; x_2 = 2 \quad \text{optimal für } (P)$$

und

$$y_1 = 1, \; y_2 = 1, \; y_3 = y_4 = 0 \quad \text{optimal für } (D).$$

Wir erhalten also für den folgenden Kegel K für ein Problem mit zwei Unbekannten und vier Restriktionen

$$K := \left\{ \binom{b}{0} - x_1\binom{a_1}{-c_1} - x_2\binom{a_2}{-c_2} - w_1\binom{e_1}{0} - w_2\binom{e_2}{0} - w_3\binom{e_3}{0} - w_4\binom{e_4}{0} - r\binom{0}{1} \;\middle|\; x \in X, \; r \geq 0, \; w \in Y \right\}$$

für dieses Beispiel

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} - 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 0 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - w_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - w_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - r \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

mit $w_3, w_4 \in Y$ und $r \geq 0$. Das duale Problem bestand anschaulich darin, eine nichtvertikale Hyperebene parallel zu der Fläche des Kegels zu finden, die über $0_{\mathbb{R}^{m+n}}$ liegt. Beachte, daß die Komponenten der Duallösung dort 0 sein müssen, in denen die slacks der primalen Lösung nicht verschwinden (complementary slackness!).

Hinzufügen einer zusätzlichen Restriktion

Wir nehmen an, wir haben ein optimales Tableau mit Basisvektor B erreicht:

z	$c_N^T - c_B^T A_B^{-1} A_N$
$A_B^{-1} b$	$A_B^{-1} A_N$

Da das Tableau optimal sein soll, muß

$$A_B^{-1} b \geq 0 \quad \text{und} \quad c_N^T - c_B^T A_B^{-1} A_N \leq 0$$

gelten. Es soll nun die weitere Nebenbedingung

$$a^{m+1} x \leq b_{m+1}$$

dem Problem (P) hinzugefügt werden, mit $a^{m+1} \in (\mathbb{R}^n)^T$ beziehungsweise $a^{m+1} \in (\mathbb{R}^{n+m+1})^T$. Leichte Rechnung zeigt, daß dem erweiterten Problem $(\tilde{P})$ das Tableau

	z	$c_N^T - c_B^T A_B^{-1} A_N$
x_B	$A_B^{-1} b$	$A_B^{-1} A_N$
x_{n+m+1}	$b_{m+1} - a_B^{m+1} A_B^{-1} b$	$a_N^{m+1} - a_B^{m+1} A_B^{-1} A_N$

entspricht. Dabei ist x_{n+m+1} eine weitere Basisvariable. Ist $b_{m+1} - a_B^{m+1} A_B^{-1} b \geq 0$, so ist das Tableau auch optimal für $(\tilde{P})$. Andernfalls reicht im allgemeinen ein dualer Simplexschritt.

Anwendungsbeispiel (Cutting–plane–Algorithmus)

Mit diesem Algorithmus löst man Probleme der Form

$$\begin{aligned} \max \;& c^T x \\ \text{N.B.} \;& Ax \leq b \\ & x \geq 0 \\ & x_i \text{ ganzzahlig für } i = 1, \ldots, n, \end{aligned}$$

indem man zunächst eine Lösung ohne die Ganzzahligkeitsrestriktion berechnet. Ist das gefundene optimale x_0 nicht ganzzahlig, so fügt man weitere Restriktionen hinzu und löst das erweiterte System erneut. Dies wird wiederholt, bis die Lösung ganzzahlig ist.

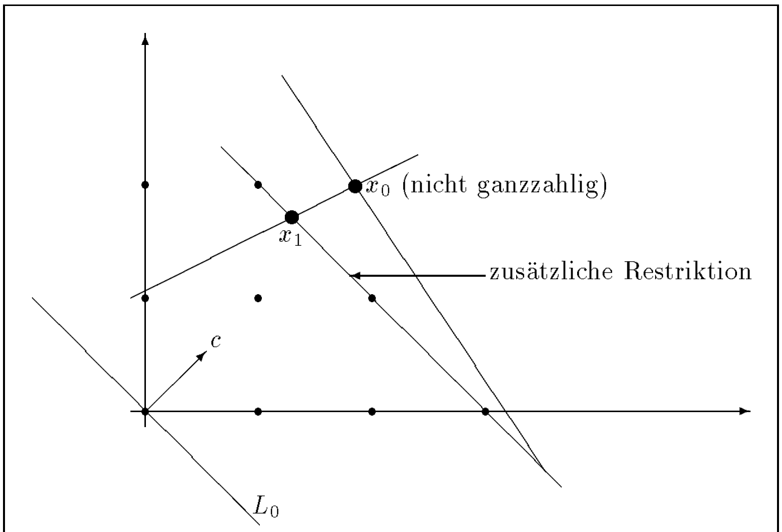


Abb. 13.1

14. Ganzzahlige lineare Programme (ILP)

In der Praxis treten häufig LPs mit Ganzzahligkeitsrestriktionen auf.

14.1 Beispiele

1) Investitionsmodelle

Eine Baufirma mit Kapital K könnte an N Orten je ein Haus bauen. Die jeweiligen Kosten seien k_j, der zu erwartende Gewinn p_j. Mit

$$x_j := \begin{cases} 1 & \text{Ort } j \text{ wird gewählt,} \\ 0 & \text{Ort } j \text{ wird nicht gewählt,} \end{cases}$$

erhalten wir das mathematische Modell

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{j=1}^{N} p_j x_j \\ \text{N.B.} \quad & \sum_{j=1}^{N} k_j x_j \leq K \\ & x_j \in \{0,1\} \quad \text{für alle } j = 1,\ldots,N. \end{aligned}$$

2) Handelsreisender (traveling salesman)

Gesucht ist eine möglichst kurze Tour, die in Stadt 1 startet, jede weitere Stadt genau einmal besucht und nach Stadt 1 zurückführt. Es sei c_{ij} die Distanz zwischen Stadt i und j. Wir setzen

$$x_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{falls } i \to j \\ 0 & \text{falls } i \not\to j. \end{cases}$$

Man erhält den Ansatz

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \\ \text{N.B.} \quad & \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad \text{für } i = 1,\ldots,n \\ & \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad \text{für } j = 1,\ldots,n \\ & x_{ii} = 0 \quad \text{für alle } i \\ & x_{ij} \in \{0,1\} \quad \text{für alle } i \text{ und } j. \end{aligned} \tag{14.1}$$

Die Nebenbedingungen **(14.1)** sind jedoch *noch nicht* ausreichend. Es können nämlich sogenannte Subtouren auftreten.

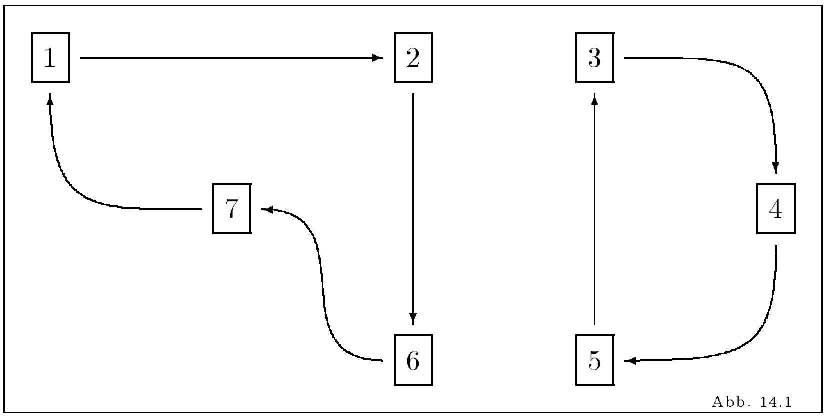


Abb. 14.1

Diese Situation — im weiteren mit *(14.2)* bezeichnet — ist natürlich nicht erwünscht.

Wir führen deshalb weitere Variablen $y_2, \dots, y_n \in \mathbb{R}$ ein und die $(n-1)^2-(n-1)$ zusätzlichen Nebenbedingungen

$$y_i - y_j + nx_{ij} \leq n - 1 \quad \text{für } i = 2, \dots, n \text{ und } j = 2, \dots, n \text{ mit } i \neq j. \tag{14.3}$$

14.2 Hilfssatz

Die Bedingung **(14.3)** schließt Subtouren wie in Abbildung 14.1 aus.

Beweis

Enthält eine Lösung von **(14.1)** eine Subtour, so mindestens zwei. Wir wählen die Subtour, die Stadt 1 *nicht* berührt. Sind hierin k Variable $x_{ij} = 1$, so ergibt die Addition der entsprechenden Ungleichungen in **(14.3)** den Widerspruch

$$k \cdot n \leq k(n-1).$$

Für **(14.2)** würde man somit

$$\begin{aligned} y_3 - y_4 + nx_{34} &\leq n - 1 \\ y_4 - y_5 + nx_{45} &\leq n - 1 \\ y_5 - y_3 + nx_{53} &\leq n - 1 \end{aligned}$$

erhalten und durch Addition folgt der Widerspruch

$$n(\underbrace{x_{34} + x_{45} + x_{53}}_{=3}) \leq 3(n-1). \tag{14.4}$$

Die Bedingung **(14.4)** schließt also $x_{34} = x_{45} = x_{53} = 1$, das heißt die Subtouren **(14.2)**, aus.

14.3 Hilfssatz

Jede zulässige Tour genügt der Bedingung **(14.3)**.

Beweis

Wir nehmen an, daß ohne Beschränkung der Allgemeinheit die Städte in der Reihenfolge $1, 2, \dots, n, 1$ besucht werden. Dann erhalten wir, wenn wir $y_i = i$ für alle $i = 1, \dots, n$ wählen, das folgende:

a) Falls $j = i + 1$ ($j = 1$ kommt nicht vor)

$$y_i - y_{i+1} + nx_{i,i+1} = i - (i + 1) + n \cdot 1 \leq n - 1.$$

b) Falls $j \neq i + 1$

$$\underbrace{y_i}_{\leq n} - \underbrace{y_j}_{\geq 2} + nx_{ij} \leq n - 2 + n \cdot 0 \leq n - 1.$$

Wir erhalten als mathematisches Modell

$$\min \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij}$$

$$\text{N.B.} \quad \textbf{(14.1)} \text{ und } \textbf{(14.3)}.$$

Die Zahl der Variablen ist somit $n^2 + n - 1$ und die Zahl der Restriktionen ist $n^2 - n + 2$. Zusätzlich haben wir noch die n^2 Bedingungen $x_{ij} \in \{0, 1\}$.

3) Job–scheduling

Hierbei sollen folgende Nebenbedingungen erfüllt werden:

i) Einige der Jobs sind in einer vorgegebenen Reihenfolge auszuführen.

ii) Keine zwei Jobs können gleichzeitig ausgeführt werden.

iii) Bestimmte Jobs müssen zu vorgegebenen Zeiten beendet sein.

Es seien n Jobs auszuführen, wobei der Job j mindestens a_j Tage benötigt, an einem Tage $x_j \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ begonnen wird und bis zum Tag d_j beendet sein muß. Für i) erhält man Restriktionen vom Typ

$$x_j + a_j \leq x_k, \tag{14.5}$$

das heißt der Job j muß vor dem Job k beendet sein.

Die Bedingung ii) besagt, daß entweder

$$x_i + a_i \leq x_j \tag{14.6}$$

oder im ausschließenden Sinne

$$x_j + a_j \leq x_i \tag{14.7}$$

sein muß. Die Forderung **(14.6)** und **(14.7)** führen jedoch auf unlösbare Nebenbedingungen. Mit genügend großem T, beispielsweise $T \geq x_j$ für alle j, lassen sich **(14.6)** und **(14.7)** durch die konsistenten Forderungen

$$\begin{aligned} x_i + a_i &\leq x_j + (T + a_i) y_{ij} \\ x_j + a_j &\leq x_i + (T + a_j)(1 - y_{ij}) \\ y_{ij} &\in \{0, 1\} \quad \text{für } i, j = 1, \ldots, n. \end{aligned} \tag{14.8}$$

mit den n^2 zusätzlichen Variablen y_{ij} ersetzen.

Falls nun $y_{ij} = 0$ ist, haben wir somit

$$\Big((x_i + a_i \leq x_j) \quad \text{und} \quad (x_j + a_j \leq x_i + T + a_j) \Big).$$

Ist hingegen $y_{ij} = 1$, so ist

$$\Big((x_i + a_i \leq x_j + T + a_i) \quad \text{und} \quad (x_j + a_j \leq x_i) \Big).$$

Die Forderung **(14.8)** besagt also entweder ist

$$x_i + a_i \leq x_j$$

oder im ausschließendem Sinne

$$x_j + a_j \leq x_i.$$

Die Bedingung iii) führt auf

$$x_k + a_k \leq d_k. \tag{14.9}$$

Mit den n^2 Hilfsgrößen y_{ij} erhält man die Nebenbedingungen eines ganzzahligen linearen Programms in x_i und y_{ij}

(14.5), **(14.8)** und **(14.9)**.

14.4 Gomorys Cutting–plane–Algorithmus

Es führt meistens nicht zum Ziel, ein ILP ("integer linear program") durch ein LP zu ersetzen und anschließend zu runden. Wir betrachten dazu das

Beispiel:

Zu lösen sei das ILP gegeben durch

$$\begin{aligned} \max\quad & 38x_1 + 81x_2 \\ \text{N.B.}\quad & 18x_1 + 40x_2 \leq 237 \\ & 8x_1 - 8x_2 \leq 23 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

und durch Abbildung 14.2 veranschaulicht.

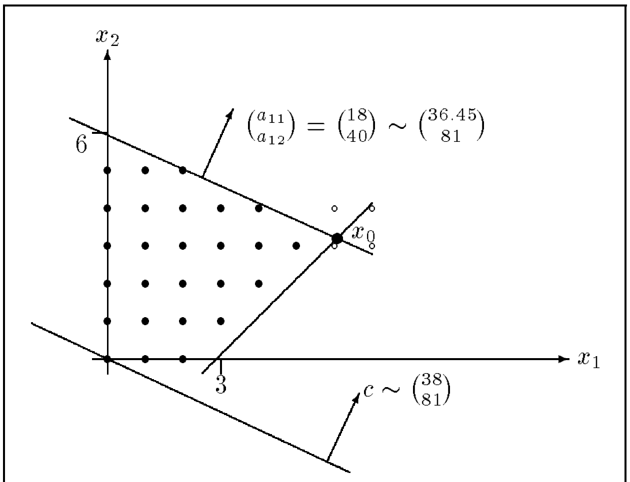


Abb. 14.2

Der optimale Punkt des zugehörigen LPs ist $x_0 = (6.069, 3.194)$ mit dem folgenden Wert der Zielfunktion $c^T x_0 = 489.336$. Es ist jedoch

	Punkt x	zulässig für ILP	$c^T x$
	(6,3)	nein	–
	(6,4)	nein	–
	(7,3)	nein	–
	(7,4)	nein	–
	(5,3)	ja	433
aber	(2,5)	ja	481

Die folgende cutting–plane–Methode zur Lösung eines ILP wurde 1960 von *Gomory* vorgeschlagen. Betrachtet werde das ILP

$$\begin{aligned} \max\ & c^T x \\ \text{N.B.}\ & Ax \le b \\ & x \ge 0 \\ & x_i \in \mathbb{Z} \quad \text{für } i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \tag{14.10}$$

Man löst in einem ersten Schritt das zugehörige LP. Sei

$$\begin{array}{c|c|ccc|} & & \tilde{x}_{N(1)} & & \tilde{x}_{N(n)} \\ \hline & & \tilde{c}_1 & \dots & \tilde{c}_n \\ \hline \tilde{x}_{B(1)} & \tilde{b}_1 & & & \\ \vdots & \vdots & & \tilde{A}_N \ (= \tilde{a}_{ij}) & \\ \tilde{x}_{B(m)} & \tilde{b}_m & & & \\ \hline \end{array}$$

das zugehörige optimale Tableau mit der Optimallösung

$$\tilde{x} = (\tilde{x}_B, \tilde{x}_N).$$

Sei nun

$$\tilde{x}_{B(i)} = \tilde{b}_i = \tilde{a}_{i0} \notin \mathbb{Z} \quad \text{für festes } i \text{ mit } B(i) \le n.$$

Wir führen dann eine zusätzliche Restriktion ein, die

i) den bisherigen optimalen Punkt $\tilde{x}$ abschneidet, jedoch

ii) von allen zulässigen x des ILP erfüllt wird.

Anschließend wendet man das duale Simplexverfahren aus **Kapitel 13** auf das erweiterte Problem an. Dazu definieren wir mit

$$f_{ij} = \tilde{a}_{ij} \pmod 1 \quad \text{mit } 0 \le f_{ij} < 1 \text{ für alle } j = 0, \dots, n$$

die zusätzliche Restriktion

$$f_{i1}\tilde{x}_{N(1)} + \dots + f_{in}\tilde{x}_{N(n)} \ge f_{i0}. \tag{14.11}$$

Wegen $f_{i0} > 0$ und $f_{i1}\tilde{x}_{N(1)} + \dots + f_{in}\tilde{x}_{N(n)} = 0$ genügt $\tilde{x}$ nicht der Bedingung **(14.11)**. Für jedes zulässige $\overline{x}$ des ILP ist

$$\tilde{a}_{i1}\overline{x}_{N(1)} + \dots + \tilde{a}_{in}\overline{x}_{N(n)} + \overline{x}_{B(i)} = \tilde{b}_i$$

und damit wegen $\tilde{a}_{ij} = k_{ij} + f_{ij}$ mit einem $k_{ij} \in \mathbb{Z}$

$$\underbrace{\sum_{j=1}^{n} k_{ij}\overline{x}_{N(j)} + \overline{x}_{B(i)} - k_{i0}}_{\in \mathbb{Z}} = \underbrace{\underbrace{f_{i0}}_{<1} - \underbrace{\sum_{j=1}^{n} f_{ij}\overline{x}_{N(j)}}_{\geq 0}}_{<1}.$$

Es folgt, daß

$$f_{i0} - \sum_{j=1}^{n} f_{ij}\overline{x}_{N(j)} \leq 0,$$

das heißt $\overline{x}$ genügt **(14.11)**.

Beispiel

Wir betrachten das konkrete Beispiel

$$\begin{array}{lrcrl} \max & x_1 & + & 2x_2 & \\ \text{N.B.} & 2x_1 & + & x_2 & \leq 10 \\ & -x_1 & + & x_2 & \leq 5 \\ & x_1 & & & \leq 4 \\ & & & x_1, x_2 & \geq 0 \\ & & & x_1, x_2 & \in \mathbb{Z} \end{array}$$

und die zugehörige Abbildung 14.3.

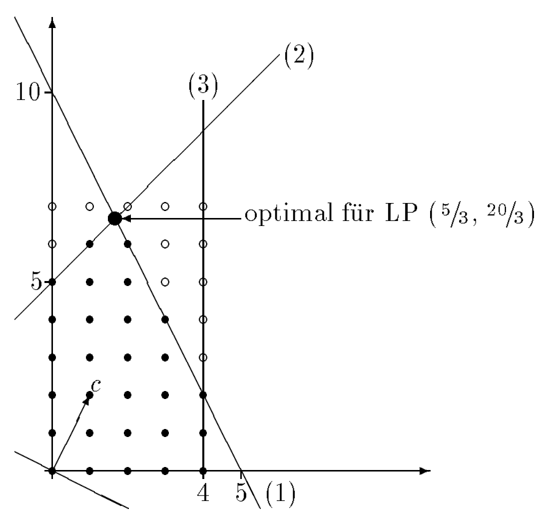


Abb. 14.3

Als optimales und damit dual zulässiges Tableau des zugehörigen LP erhält man

		x_3	x_4
	-15	-1	-1
x_1	$5/3$	$1/3$	$-1/3$
x_2	$20/3$	$1/3$	$2/3$
x_5	$7/3$	$-1/3$	$1/3$

Wir wählen $\tilde{b}_i := \tilde{b}_1 = 5/3$ und erhalten

$$\begin{aligned} f_{10} &= 2/3, \\ f_{11} &= 1/3, \\ f_{12} &= 2/3. \end{aligned}$$

Als zusätzliche (Schnitt–)restriktion erhalten wir

$$1/3\ x_3 + 2/3\ x_4 \geq 2/3.$$

Mit der zusätzlichen Schlupfvariablen s_1 erhalten wir das dual zulässige Tableau

		x_3	x_4
	-15	-1	-1
x_1	$5/3$	$1/3$	$-1/3$
x_2	$20/3$	$1/3$	$2/3$
x_5	$7/3$	$-1/3$	$1/3$
s_1	$-2/3$	$-1/3$	$\boxed{-2/3}$

Man beachte, daß dieses Tableau primal nicht zulässig sein kann, da die rechte Seite der zusätzlichen Restriktion größer als 0 ist. Deshalb ist ein dualer Simplexschritt durchzuführen und wir erhalten

		x_3	s_1
	-14	$-1/2$	$-3/2$
x_1	2	$*$	$*$
x_2	6	$*$	$*$
x_5	2	$*$	$*$
x_4	1	$*$	$*$

Das Tableau ist primal und dual zulässig, also optimal. Damit ist $x_1 = 2$ und $x_2 = 6$ optimal für das ILP.

Es gilt allgemein

14.5 Satz

Es seien $a_{ij}, b_i, c_j \in \mathbb{Z}$ für $i = 1, \ldots, m$ und $j = 1, \ldots, n$. Weiter sei

$$\{ x \mid Ax \leq b,\ x \geq 0,\ x_i \in \mathbb{Z} \}$$

beschränkt. Dann liefert das Verfahren von Gomory in *endlich vielen* Schritten die Optimallösung des ILP.

Beweis

Siehe Literatur.

14.6 Das Branch and Bound Prinzip

Ein anderes Verfahren zur Lösung von ILPs benützt die sogenannte *"Branch and Bound"*–Technik. Man ersetzt das ILP durch ein LP. Ist dessen Lösung nicht ganzzahlig wie im Beispiel $x_1 = 5/3$, so löst man die zwei weiteren LPs, LP_1 und LP_2, mit der zusätzlichen Restriktion $x_1 \leq 1$, beziehungsweise $x_1 \geq 2$ und so weiter. Diese Aufspaltung wird als "branching" bezeichnet (vergleiche Abbildung 14.4).

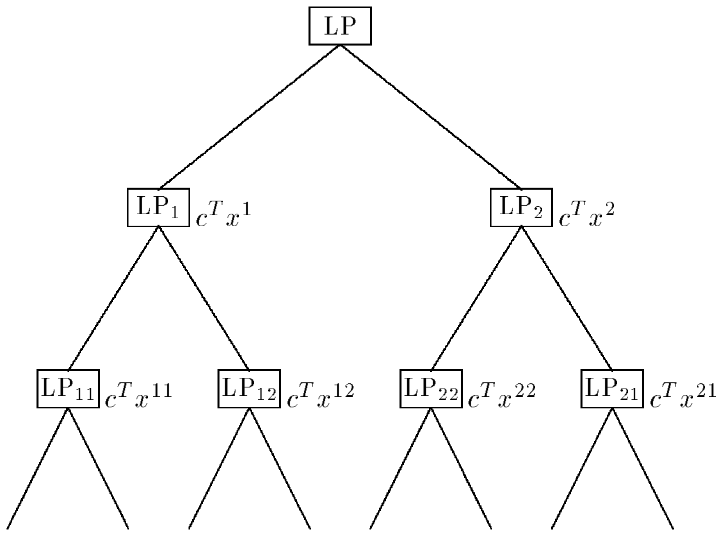


Abb. 14.4

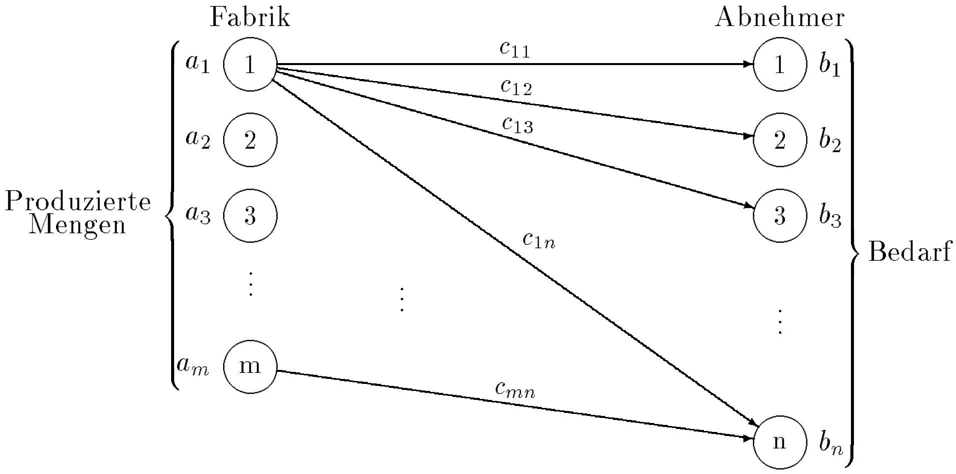
Zu jedem $\mathrm{LP}_{\ldots}$ bestimmt man das Maximum $c^T x^{\cdots}$, zum Beispiel $c^T x^1$ für LP_1. Kennt man ein $\overline{x}$, das zulässig für das ILP ist mit

$$c^T \overline{x} > c^T x^1,$$

so kann man den Zweig mit LP_1 streichen (bounding).

15. Das Transportproblem

Beim Transportproblem sollen die produzierten Mengen von den Fabriken so kostengünstig wie möglich zu den Abnehmern gebracht werden (vergleiche **Kapitel 1**).



Dabei sind die c_{ij} die Transportkosten pro Einheit von Fabrik i zum Abnehmer j, und die x_{ij} die von Fabrik i zum Abnehmer j transportierte Menge. Man erhält das spezielle LP

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \\
\text{N.B.} \quad & \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad \text{für } 1 \le i \le m \\
& \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad \text{für } 1 \le j \le n \\
& \quad x_{ij} \ge 0 \quad \text{für } 1 \le i \le m \text{ und } 1 \le j \le n.
\end{aligned}
\tag{15.1}
$$

Dabei soll

$$
\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j
$$

gelten. In Matrixform schreiben sich die Nebenbedingungen als

$$
Ax = d, \quad x \ge 0
$$

mit

$$
\begin{aligned}
x &= (x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n} | x_{21}, \dots, x_{2n} | \dots | x_{m1}, \dots, x_{mn})^T \in I\!R^{mn}, \\
d &= (a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_n)^T \in I\!R^{m+n},
\end{aligned}
$$

und

$$
A = \underbrace{\left(\begin{array}{c|c|c|c}
\overbrace{1\ \cdots\ 1}^{n} & & & \\
 & 1\ \cdots\ 1 & & \\
 & & \ddots & \\
 & & & 1\ \cdots\ 1 \\
\hline
\begin{matrix}1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1\end{matrix} & \begin{matrix}1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1\end{matrix} & \cdots & \begin{matrix}1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1\end{matrix}
\end{array}\right)}_{mn}
\begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\\1\end{array}}\right\} m \\ \left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\end{array}}\right\} n \end{array}
\tag{15.2}
$$

15.1 Satz

Das Problem **(15.1)** besitzt stets eine Lösung.

Beweis

Weil wir $\sum a_i = \sum b_j$ voraussetzen, zeigt die Nordwesteckenregel (siehe später), daß zulässige Punkte existieren. Es ist also noch zu zeigen, daß die zulässige Menge des Problems beschränkt ist. Dies gilt aber wegen

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{m} \underbrace{\sum_{j=1}^{n} x_{ij}}_{= a_i} = \sum_{i=1}^{m} a_i < \infty \quad \text{für alle } x \in M.$$

15.2 Satz

Die Matrix A hat den Rang $m + n - 1$.

Um vollen Rang zu erhalten, denken wir uns im weiteren die letzte Zeile von A gestrichen.

Das folgende Verfahren ist eine Modifikation des Simplexverfahrens, die die spezielle Struktur von A ausnutzt. Wir arbeiten ohne Schlupf– und Hilfsvariablen. Es sei B eine Basis, dann ist das lineare Gleichungssystem

$$\pi^T A_B = c_B^T$$

eindeutig lösbar, da A_B aus $m+n-1$ linear unabhängigen Basisspalten von A besteht, das heißt $\det A_B \neq 0$. Und mit $\pi := (u_1, \ldots, u_m, v_1, \ldots, v_{n-1})^T$ und $c := (\underbrace{c_{11}, \ldots, c_{mn}}_{mn})^T$ gilt für $(i,j) \in B$

$$\begin{aligned} c_{ij} &= u_i + v_j \quad \text{für } j \neq n \\ c_{in} &= u_i. \end{aligned} \tag{15.3}$$

Wir werden später sehen, daß sich das Gleichungssystem **(15.3)** stets rekursiv lösen läßt.

Wenn man beachtet, daß in **(15.1)** immer minimiert wird, ist die Basislösung (x_B, x_N) optimal, falls die Zielzeile

$$c_N^T - \underbrace{c_B^T A_B^{-1}}_{=: \pi^T} A_N = c_N^T - \pi^T A_N \geq 0$$

ist, das heißt, es muß mit $v_n := 0$

$$c_{ij} \geq (\pi^T A_N)_{ij} = u_i + v_j =: \overline{c}_{ij} \quad \text{für alle } (i,j) \notin B \tag{15.4}$$

gelten.

Falls die Basislösung noch nicht optimal ist, so führe man einen *Austauschschritt* wie folgt durch. Falls **(15.4)** nicht erfüllt ist, so nehme man eine Nichtbasisvariable x_{ij} mit $c_{ij} - \overline{c}_{ij} < 0$ in die Basis auf. Man setze nun $x_{ij} := \delta$ und wähle δ maximal und zwar so, daß alle bisherigen Basisvariablen noch ≥ 0 sind. Dazu trägt man die bisherigen Basisvariablen in ein Tableau ein und subtrahiere und addiere abwechselnd von den Basisvariablen wodurch Zeilen– und Spaltensummen konstant bleiben.

Finden einer Ausgangslösung

Wir fassen die Variablen in einem $(m \times n)$–Tableau zusammen.

$$\begin{array}{c|ccc|} & b_1 & \ldots & b_n \\ \hline a_1 & x_{11} & \ldots & x_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_m & x_{m1} & \ldots & x_{mn} \\ \hline \end{array}$$

NORD–WEST–Eckenregel

Für das Transportproblem mit $\sum a_i = \sum b_j$ läßt sich wie folgt eine Ausgangslösung finden:

1) Mit $i_0 :=$ Zeilenindex und $j_0 :=$ Spaltenindex im "reduzierten" obigen Tableau setze man
$$x_{i_0 j_0} := \min\{a_{i_0}, b_{j_0}\}.$$

2) Danach führt man folgende Tableauänderung durch:

   i) Ist $a_{i_0} < b_{j_0}$ so streiche die Zeile i_0 und setze $b_{j_0} := b_{j_0} - a_{i_0}$ (≥ 0).

   ii) Ist $a_{i_0} > b_{j_0}$ so streiche die Spalte j_0 und setze $a_{i_0} := a_{i_0} - b_{j_0}$ (≥ 0).

   iii) Ist $a_{i_0} = b_{j_0}$ dann unterscheide die Fälle

      a) Das Tableau enthält mehr als eine Zeile. Dann streiche die Zeile i_0 und setze $b_{j_0} := 0$.

      b) Das Tableau hat nur noch eine Zeile aber mehrere Spalten. Dann streiche die Spalte j_0 und setze $a_{i_0} := 0$.

      c) Sonst ist der Algorithmus beendet. STOP

3) Gehe zu 1).

15.3 Satz

Das obige Verfahren liefert eine zulässige Basislösung.

15.4 Algorithmus zur Lösung von (15.1)

Gegeben seien die Anfangsdaten

$$\begin{aligned} a_i &\quad \text{für } 1 \leq i \leq m \\ b_j &\quad \text{für } 1 \leq j \leq n \\ c_{ij} &\quad \text{für } 1 \leq i \leq m \text{ und } 1 \leq j \leq n \end{aligned}$$

Desweiteren setzt man
$$v_n := 0$$
was möglich ist, weil die letzte Zeile von A linear abhängig von den übrigen ist. Dann läuft der Algorithmus zum Lösen des Transportproblems wie folgt ab:

1) Bestimme eine Ausgangslösung. Die Basisvariablen seien x_{ij} mit $(i,j) \in B$.

2) Berechne aus
$$u_i + v_j = c_{ij} \quad \text{für } (i,j) \in B$$
rekursiv u_i für $1 \leq i \leq m$ und v_j für $1 \leq j \leq n-1$.

3) Berechne für $(i,j) \notin B$
$$\overline{c}_{ij} := u_i + v_j.$$

4) Bestimme
$$\alpha := \max_{(i,j) \notin B} (\overline{c}_{ij} - c_{ij}).$$

Ist $\alpha \leq 0$, so ist die momentane Basis optimal. STOP.

Andernfalls wähle
$$(r,s) \in \{\, (i,j) \mid \overline{c}_{ij} - c_{ij} = \alpha,\ (i,j) \notin B \,\}$$

und gehe zu 5).

5) Setze $x_{rs} := \delta$ und addiere beziehungsweise subtrahiere von den Basisvariablen den Wert δ so, daß Zeilen– und Spaltensummen konstant bleiben. Die so erhaltenen Variablen seien $x_{ij}(\delta)$ für $(i,j) \in B$.

6) Bestimme

$$\delta_0 := \max\{\, \delta \mid x_{ij}(\delta) \geq 0,\ \ (i,j) \in B\,\}.$$

Dabei sei $x_{i_0,j_0}(\delta_0) = 0$.

7) Setze

$$\begin{aligned} x_{rs} &:= \delta_0 \\ x_{ij} &:= x_{ij}(\delta_0) \quad \text{für } (i,j) \in B \\ B &:= (B \cup \{(r,s)\}) \setminus \{(i_0,j_0)\}. \end{aligned}$$

Gehe zu 2).

Man beachte, daß das Verfahren auch zyklisch verlaufen kann.

Beispiel

Es sei $m = 4$ und $n = 5$. Dann ist A eine $(4+5) \times (4 \cdot 5)$–Matrix. Weiter ist

$$B = \{\,(1,1);(1,2);(2,2);(2,3);(2,4);(3,4);(3,5);(4,5)\,\}$$

die momentane Basis mit 8 Elementen und das zugehörige Tableau

a_i \ b_j	1	5	2	3	11
3	1	2			
9		$3-\delta$	2	$4+\delta$	
6				$1-\delta$	$5+\delta$
6		δ			$6-\delta$

Die bisherige Nichtbasisvariable x_{42} soll nun Basisvariable werden. Wegen $3-\delta \geq 0$, $1-\delta \geq 0$ und $6-\delta \geq 0$ folgt $\delta = 1$, das heißt man nimmt x_{34} aus der Basis heraus. Die neue Basis ist somit

1	2			
	2	2	5	
				6
	1			5

Beachte

Dieser Algorithmus zeichnet sich aus durch

- geringen Aufwand und
- Ganzzahligkeit, da keine Divisionen auftreten.

Beispiel

Zu a_i, b_j, c_{ij} gehöre das Tableau C und die Basis X:

$$
\begin{array}{cc|c|cccc|c}
 & & & & 2 & 1 & & \\
 & & a_i \backslash b_j & 2 & \cancel{4} & \cancel{6} & 3 & \\
\hline
 & 2 & \cancel{4} & 2 & 3 & 4 & 1 & 2. \\
C & 5 & \cancel{7} & 5 & 4 & 2 & 3 & 4. \\
 & 3 & \cancel{4} & 4 & 2 & 8 & 6 & \\
\hline
 & & & 1. & 3. & 5. & &
\end{array}
\qquad
X \; \begin{array}{|cccc|}
\hline
x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\
x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\
x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} \\
\hline
\end{array}
$$

Als Startlösung $X = (x_{ij})_{(i,j)\in B}$ erhält man somit:

$$
X : \begin{array}{|c|c|c|c|}
\hline
2 & 2 & & \\
\hline
 & 2 & 5 & \\
\hline
 & & 1 & 3 \\
\hline
\end{array}
\tag{15.5}
$$

Der momentane Wert der Zielfunktion ist

$$\sum_{i,j} c_{ij} x_{ij} = 54.$$

Man berechnet die u_i und v_j durch

$$
\begin{array}{rcr|c|c|c|c|l}
 & & & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & \\
 & & & \| & \| & \| & \| & \\
 & & & 3 & 4 & 2 & 0 & \\
\hline
u_1 & = & -1 & -1+3 & -1+4 & & & \\
\hline
u_2 & = & 0 & & 0+4 & 0+2 & & = \{(u_i+v_j)_{i,j}\}. \\
\hline
u_3 & = & 6 & & & 6+2 & 6+0 & \\
\hline
\end{array}
$$

Man erhält für die $\overline{c}_{ij}$ mit $(i,j) \notin B$:

$$
\overline{C} \; \begin{array}{c|cccc}
u_i \backslash v_j & 3 & 4 & 2 & 0 \\
\hline
-1 & * & * & 1 & -1 \\
0 & 3 & * & * & 0 \\
6 & 9 & \boxed{10} & * & *
\end{array}
\qquad
X(\delta) \; \begin{array}{|c|c|c|c|}
\hline
2 & 2 & & \\
\hline
 & 2-\delta & 5+\delta & \\
\hline
 & \delta & 1-\delta & 3 \\
\hline
\end{array}
$$

Es folgt $\delta_0 = 1$. Als neue Lösung erhält man

$$
X \; \begin{array}{|c|c|c|c|}
\hline
2 & 2 & & \\
\hline
 & 1 & 6 & \\
\hline
 & 1 & & 3 \\
\hline
\end{array}
\qquad
\overline{C} \; \begin{array}{c|cccc}
u_i \backslash v_j & -5 & -4 & -6 & 0 \\
\hline
7 & * & * & 1 & \boxed{7} \\
8 & 3 & * & * & 8 \\
6 & 1 & * & 0 & *
\end{array}
\qquad
X(\delta) \; \begin{array}{|c|c|c|c|}
\hline
2 & 2-\delta & & \delta \\
\hline
 & 1 & 6 & \\
\hline
 & 1+\delta & & 3-\delta \\
\hline
\end{array}
$$

Es ist $\delta_0 = 2$ und man erhält

$$X \; \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 2 & & 2 & \\ \hline & 1 & 6 & \\ \hline & 3 & & 1 \\ \hline \end{array} \qquad \overline{C} \; \begin{array}{c|cccc|} {}_{u_i}\backslash^{v_j} & 1 & -4 & -6 & 0 \\ \hline 1 & * & -3 & -5 & * \\ 8 & 9 & * & * & \boxed{8} \\ 6 & 7 & * & 0 & * \\ \hline \end{array} \qquad X(\delta) \; \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 2 & & & 2 \\ \hline & 1-\delta & 6 & \delta \\ \hline & 3+\delta & & 1-\delta \\ \hline \end{array}$$

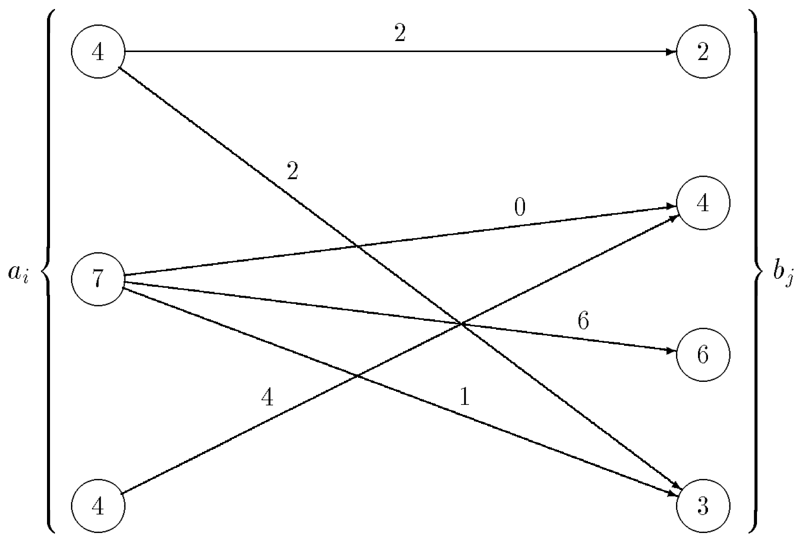
$\delta_0 = 1$ liefert

$$X \; \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 2 & & & 2 \\ \hline & 0 & 6 & 1 \\ \hline & 4 & & \\ \hline \end{array} \qquad \overline{C} \; \begin{array}{c|cccc|} {}_{u_i}\backslash^{v_j} & 1 & 1 & -1 & 0 \\ \hline 1 & * & 2 & 0 & * \\ 3 & 4 & * & * & * \\ 1 & 2 & * & 0 & 1 \\ \hline \end{array}$$

Die Basisvariable x_{22} ist 0. Damit befinden wir uns in einer entarteten Ecke und das Tableau ist nicht eindeutig. Aber wegen $\alpha \leq 0$ ist es optimal! Der Optimalwert ist

$$c^T x = \sum_{(i,j)\in B} c_{ij} x_{ij} = 4 + 2 + 12 + 3 + 8 = 29.$$

Die tatsächlich von Fabrik i zu Abnehmer j transportierten Mengen sind in folgender Abbildung dargestellt:



Der obige Algorithmus zeigt nebenbei

15.4 Satz

Falls a_i und $b_j \in \mathbb{Z}$ für alle i und j, so besitzt **(15.1)** immer eine ganzzahlige Optimallösung und der obige Algorithmus liefert eine solche.

Modifikation von (15.1)

Um den Algorithmus im Allgemeinen anwenden zu können, muß man auch mit Überschüssen, Defiziten und verbotenen Transporten fertig werden.

Überschuß

Hier ist $\sum a_i > \sum b_j$. Dann vereinbare man einen zusätzlichen Abnehmer $j = 0$ und führe c_{i0} für $1 \leq i \leq m$ als Lagerhaltungskosten ein.

Defizit

Hier ist $\sum a_i < \sum b_j$. Diesen Fall behandelt man ähnlich wie oben.

Verbotene Transporte

Man setze entsprechend $c_{ij} := \infty$.

16. Das Zuordnungsproblem (assignment problem)

Aus dem Transportproblem **(15.1)** wird ein *Zuordnungsproblem*, wenn $m = n$, $a_i = b_i = 1$ für $i = 1, \ldots, m$ und $x_{ij} \in \{0, 1\}$ ist.

Beispiele

Typische Beispiele für Zuordnungsprobleme sind:

a) Man hat m Personen und m Jobs. Die c_{ij} sind die Kosten, falls die Person i den Job j übernimmt. Welche Person soll welchen Job übernehmen, damit alles mit den geringsten Kosten erledigt wird?

b) Das Heiratsproblem mit m Herren und m Damen. Dabei ist

$$c_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{Sympathie zwischen } i \text{ und } j \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Welcher Herr soll welche Dame heiraten, damit insgesamt die "meiste Sympathie" besteht?

Aufgabe

Das Zuordnungsproblem formuliert man mathematisch durch

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij} \\ \text{N.B.} \quad & \sum_{j=1}^{m} x_{ij} = 1 \quad \text{für } i = 1, \ldots, m \\ & \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1 \quad \text{für } j = 1, \ldots, m \\ & x_{ij} \in \{0, 1\}. \end{aligned} \tag{16.1}$$

Oder einfacher durch

$$\min_{\pi \text{ Per}} \sum_{i=1}^{m} c_{i\pi(i)}.$$

Mit den Vektoren

$$e := (1, \ldots, 1)^T \quad \text{und} \quad c := (c_{11}, \ldots, c_{mm})^T$$

sowie der $(2m \times m^2)$–Matrix A von **(15.2)** gilt:

16.1 Satz

Das Problem **(16.1)** ist "äquivalent" zu

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ \text{N.B.} \quad & Ax = e \\ & x \geq 0, \end{aligned} \tag{16.2}$$

das heißt, jede nach **Kapitel 15** berechnete Optimallösung von **(16.2)** erfüllt automatisch

$$x_{ij} \in \{0, 1\}.$$

Beweis

Nach **Satz 15.4** gilt für die nach **Kapitel 15** berechnete Lösung von **(16.2)** automatisch $x_{ij} \in \mathbb{N}$ für alle i und j. Wegen $Ax = e$ folgt, daß $x_{ij} \in \{0,1\}$.

Der folgende Algorithmus beruht auf der Dualitätstheorie. Das Dualproblem von **(16.1)** beziehungsweise **(16.2)** ist

$$\left\{\begin{array}{ll} \max & (-c)^T x \\ \text{N.B.} & Ax = e \\ & x \geq 0 \end{array}\right\} \overset{\text{dual}}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{ll} \min & e^T y \\ \text{N.B.} & y^T A \geq -c^T \\ & y \text{ frei} \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} \max & e^T(-y) \\ \text{N.B.} & (-y)^T A \leq c^T \\ & (-y) = (u^T, v^T)^T \end{array}\right\}$$

und damit

$$\begin{array}{ll} \max & \sum\limits_{i=1}^{m} u_i + \sum\limits_{j=1}^{m} v_j \\ \text{N.B.} & u_i + v_j \leq c_{ij} \quad \text{für } i,j = 1,\ldots,m \\ & (u_i, v_j) \text{ frei.} \end{array} \tag{16.3}$$

Die Komplementaritätsbedingung von **Satz 11.3** wird somit zu

$$\underbrace{(u^T, v^T)}_{=(-y)^T} \underbrace{(Ax - e)}_{\substack{=0 \text{ für} \\ \text{zul. } x}} = 0 = (\underbrace{c^T - (u^T, v^T)\, A}_{\geq 0}) \underbrace{\ x\ }_{\geq 0}.$$

Für zulässiges x, u und v erhält man damit

$$x \text{ optimal} \Longleftrightarrow (c_{ij} - u_i - v_j) x_{ij} = 0 \quad \text{für } i,j = 1,\ldots,m. \tag{16.4}$$

Ein dual zulässiges $\widehat{u}$ und $\widehat{v}$ ist

$$\begin{aligned} \widehat{u}_i &:= \min_{1 \leq j \leq m} c_{ij} \quad \text{für } i = 1,\ldots,m \\ \widehat{v}_j &:= \min_{1 \leq i \leq m} (c_{ij} - \widehat{u}_i) \quad \text{für } j = 1,\ldots,m, \end{aligned}$$

denn für alle $r, s = 1,\ldots,m$ gilt

$$\widehat{v}_s = \min_{1 \leq i \leq m} (c_{is} - \widehat{u}_i) \leq c_{rs} - \widehat{u}_r$$

und damit $\widehat{u}_r + \widehat{v}_s \leq c_{rs}$.

Die Einträge der Matrix

$$\widehat{C} := (\widehat{c}_{ij})_{i,j=1,\ldots,m} \quad \text{mit } \widehat{c}_{ij} := c_{ij} - \widehat{u}_i - \widehat{v}_j \tag{16.5}$$

heißen *reduzierte Kosten*. $\widehat{C}$ enthält in jeder Zeile und in jeder Spalte mindestens eine Null.

Andererseits ist $x = (x_{11}, \ldots, x_{mm})$ zulässig für **(16.1)** falls die Matrix

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & \ldots & x_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{m1} & \ldots & x_{mm} \end{pmatrix}$$

in jeder Zeile und in jeder Spalte *genau eine 1* enthält.

Also

Läßt sich x so wählen, daß mit dem obigen $\widehat{u}, \widehat{v}$ überdies **(16.4)** erfüllt ist, so ist x optimal.

Beispiel

Es sei

$$C = (c_{ij})_{4\times 4} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

gegeben. Subtraktion der Zeilenminima $\widehat{u} = (2, 0, -1, 2)$ liefert

$$C' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

und damit, weil $\widehat{v} = (0, 0, 0, 2)$ ist

$$\widehat{C} = \begin{pmatrix} 1 & \boxed{0} & 3 & 0 \\ \boxed{0} & 1 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & \boxed{0} & 2 \\ 0 & 3 & 1 & \boxed{0} \end{pmatrix}.$$

Damit ist $\overline{X}$ mit

$$\overline{x}_{12} = \overline{x}_{21} = \overline{x}_{33} = \overline{x}_{44} = 1 \quad \text{und} \quad \overline{x}_{ij} = 0 \text{ sonst}$$

optimal für **(16.1)** wegen des Optimalitätskriteriums **(16.4)**.

Beispiel (16.6)

Eine Wahl der x_{ij} wie oben ist nicht immer direkt möglich. Für

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 4 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

erhält man

$$\widehat{C} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Es gibt kein $\overline{X} = (\overline{x}_{ij})$ der gesuchten Struktur, das zusammen mit $\widehat{C}$ die Bedingung **(16.4)** erfüllt.

In dieser Situation hilft die folgende *Modifikation* von $\widehat{C}$. Es sei dazu $S_{\mathrm{Z}} := \{i_1, i_2, \ldots\}$ und $S_{\mathrm{Sp}} := \{j_1, j_2, \ldots\}$ die Minimalmenge von Zeilen– und Spaltenindizes so, daß mit

$$S_{\mathrm{Z}}^{\mathrm{C}} := \{1, \ldots, m\} \setminus S_{\mathrm{Z}}$$
$$S_{\mathrm{Sp}}^{\mathrm{C}} := \{1, \ldots, m\} \setminus S_{\mathrm{Sp}}$$

gilt

$$\widehat{c}_{ij} \neq 0 \quad \text{für } (i, j) \in S_{\mathrm{Z}}^{\mathrm{C}} \times S_{\mathrm{Sp}}^{\mathrm{C}}.$$

Wir setzen

$$c_0 := \min\{\, \widehat{c}_{ij} \mid i \in S_{\mathrm{Z}}^{\mathrm{C}} \text{ und } j \in S_{\mathrm{Sp}}^{\mathrm{C}} \,\}.$$

Dann ist aber auch

$$\overline{u}_i := \begin{cases} \widehat{u}_i + c_0 & i \in S_{\mathrm{Z}}^{\mathrm{C}} \\ \widehat{u}_i & i \in S_{\mathrm{Z}} \end{cases}$$
$$\overline{v}_j := \begin{cases} \widehat{v}_j & i \in S_{\mathrm{Sp}}^{\mathrm{C}} \\ \widehat{v}_j - c_0 & j \in S_{\mathrm{Sp}} \end{cases}$$

dual zulässig.

Beweis

Für $(i,j) \in S_Z^C \times S_{Sp}^C$ ist $c_{ij} - \overline{u}_i - \overline{v}_j = \widehat{c}_{ij} - c_0 \geq 0$ nach Wahl von c_0.

Für $(i,j) \in S_Z \times S_{Sp}^C$ und $(i,j) \in S_Z^C \times S_{Sp}$ ist $c_{ij} \geq 0$, da sich keine Änderung ergibt.

Und falls $(i,j) \in S_Z \times S_{Sp}$ ist, ist $c_{ij} - \overline{u}_i - \overline{v}_j = \widehat{c}_{ij} + c_0 \geq 0$, da in $\widehat{C}$ alle $c_{ij} \geq 0$ sind.

Für **Beispiel (16.6)** erhält man

$$S_Z = \{2\}, \quad S_{Sp} = \{1\} \quad \text{und} \quad c_0 = 2.$$

Die $(\overline{u}, \overline{v})$ entsprechende Matrix $\overline{C} = (c_{ij} - \overline{u}_i - \overline{v}_j)_{i,j}$ ist

$$\overline{C} = \begin{pmatrix} 0 & \boxed{0} & 3 \\ 5 & 0 & \boxed{0} \\ \boxed{0} & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Damit ist $\overline{x}_{12} = \overline{x}_{23} = \overline{x}_{31} = 1$ und $\overline{x}_{ij} = 0$ sonst optimal.

Algorithmus zur Lösung von (16.1) (HUNGARIAN–Algorithmus)

Der Algorithmus zur Lösung des Zuordnungproblems läuft wie folgt ab

1) Stelle die reduzierte Matrix $\widehat{C}$ auf.

2) Ziehe Minimalzahl von Linien durch Zeilen und Spalten, so daß alle Elemente gleich 0 von $\widehat{C}$ durch Linien überdeckt sind. Ist ganz $\widehat{C}$ überdeckt, so läßt sich ein optimales $\overline{X}$ angeben. STOP. Andernfalls gehe zu 3).

3) Wähle c_0 als das Minimum aller unbedeckten Elemente. Ziehe dies von jedem unbedeckten Element ab, und addiere es auf jedes doppelt bedeckte Element. Gehe zu 2).

Es gilt

Das obige Verfahren liefert in endlich vielen Schritten ein $\overline{C}$, an dem sich ein optimales $\overline{X}$ ablesen läßt.

Beispiel

Gegeben sei die Kostenmatrix

$$C = \begin{pmatrix} \infty & 2 & 5 & 3 & 6 \\ 2 & \infty & 4 & 2 & \infty \\ 5 & 4 & \infty & 6 & \infty \\ 3 & 2 & 6 & \infty & 1 \\ 6 & \infty & \infty & 1 & \infty \end{pmatrix}.$$

Man erhält mit $\infty \pm \beta = \infty$ für $\beta \in I\!R$

$$\widehat{C} = \begin{pmatrix} \infty & 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & \infty & 0 & 0 & \infty \\ 1 & 0 & \infty & 2 & \infty \\ 2 & 1 & 3 & \infty & 0 \\ 5 & \infty & \infty & 0 & \infty \end{pmatrix}$$

und somit $S_Z = \{2, 4, 5\}$ und $S_{Sp} = \{2\}$. Mit $c_0 = 1$ wird daraus

$$\overline{C} = \begin{pmatrix} \infty & \boxed{0} & 0 & 0 & 3 \\ 0 & \infty & \boxed{0} & 0 & \infty \\ \boxed{0} & 0 & \infty & 1 & \infty \\ 2 & 2 & 3 & \infty & \boxed{0} \\ 5 & \infty & \infty & \boxed{0} & \infty \end{pmatrix}.$$

Als Optimallösung erhält man

$$\overline{x}_{31} = \overline{x}_{12} = \overline{x}_{23} = \overline{x}_{54} = \overline{x}_{45} = 1 \quad \text{und} \quad \overline{x}_{ij} = 0 \text{ sonst.}$$

17 Das Traveling–salesman–Problem
Das Branch and Bound Prinzip

Vergleiche zu dem folgenden auch **14.1.2**. Zu lösen ist das Problem

$$\min_{\substack{\varphi \text{ zyklische Perm.}\\ \text{von } \{1,2,\ldots,n\}}} \sum_{i=1}^{n} c_{i\varphi(i)}. \tag{17.1}$$

Das Branch and Bound–Prinzip

Man spalte die Menge der zulässigen Punkte (hier Wege) in Teilmengen auf (branching). Enthält eine Teilmenge T nur einen zulässigen Weg, so wird dessen Zielfunktionswert bestimmt. Enthält T mehrere zulässige Wege, so wird über ein leichter lösbares — eventuell nicht mehr zulässiges Problem (Relaxation) — eine untere Schranke $\underline{z}(T)$ für T berechnet (bounding). Sei nun P ein zulässiger Weg mit dem besten bisher gefundenen Zielfunktionswert $z(P)$. Falls

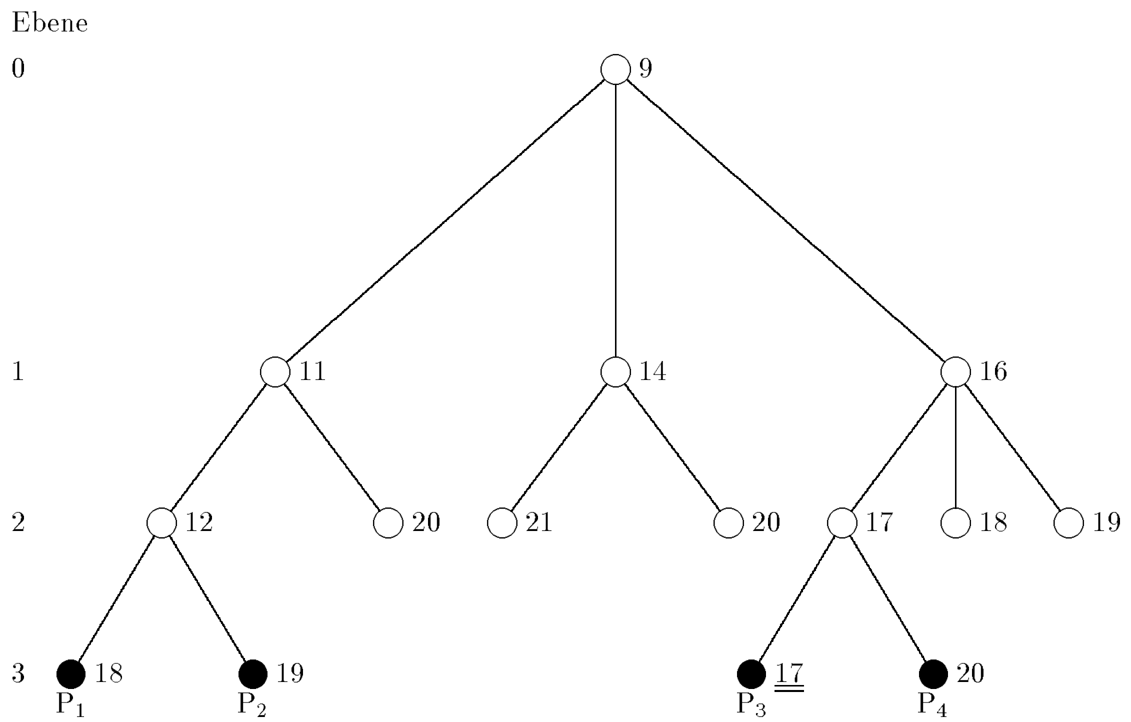
1) $\underline{z}(T) \geq z(P)$, so braucht der Zweig T nicht weiter untersucht zu werden.

2) $\underline{z}(T) < z(P)$ (oder falls noch kein zulässiges P bekannt ist):

  a) Wird $\underline{z}(T)$ in einem zulässigen P_i angenommen, so ersetze P durch P_i und streiche T.

  b) Wird $\underline{z}(T)$ nicht in einem zulässigen Punkt angenommen, so spalte T weiter auf.

Man erhält einen sogenannten *Lösungsbaum*. In der folgenden Abbildung steht ○ für Teilprobleme und ● für Punkte in denen $\underline{z}(T)$ in einem zulässigem P_i angenommen wird. Daneben steht jeweils die untere Schranke $z(T)$ beziehungsweise der Zielfunktionswert $z(P_i)$.



Für ein Verfahren ist noch folgendes zu vereinbaren:

1) Wie berechnet man untere Schranken beziehungsweise was ist eine Relaxation?

2) Wie spaltet man die Menge T auf?

3) Welches Problem untersucht man als nächstes?

zu 1)

In der Relaxation löst man das zugehörige Zuordnungsproblem.

zu 2)

Falls die Permutation φ nicht zyklisch ist, so zerfällt sie in Teilzyklen

$$(i_1, i_2, \ldots, i_k) \ldots (i_l, i_{l+1}, \ldots, i_n).$$

Wir wählen den kürzesten Teilzyklus aus, beispielsweise

$$(i_1, i_2, \ldots, i_k)$$

und definieren k neue Teilprobleme T_{i_ρ} für $1 \leq \rho \leq k$ mit den Kosten

$$(T_{i_\rho}) : c_{i_\rho,j} := \begin{cases} \infty & \text{falls } j = i_s, 1 \leq s \leq k \\ c_{i_\rho,j} & \text{sonst} \end{cases}$$

zu 3)

Wir wählen aus (T_{i_ρ}) ein ξ_{i_ρ} mit

$$\xi_{i_\rho} := \min_j c_{i_\rho,j} + \min_i c_{i,\rho(i_\rho)}$$

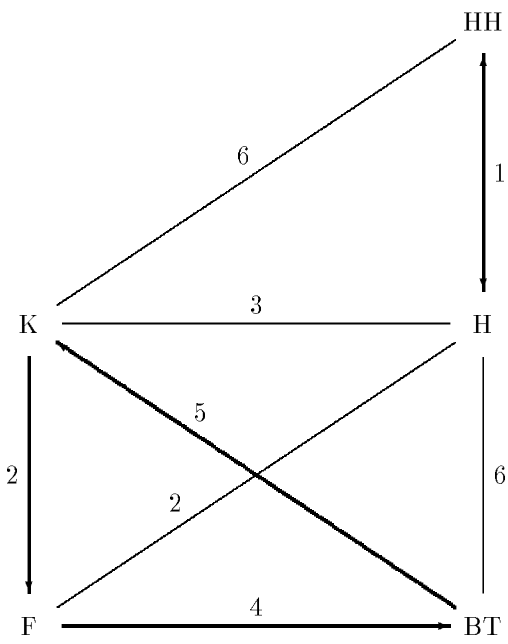
und bearbeiten das Problem mit kleinstem ξ_{i_ρ} als Nächstes.

Beispiel

Gesucht ist eine kürzeste Tour zwischen den Städten Köln (K), Frankfurt (F), Hannover (H), Hamburg (HH) und Bayreuth (BT). Die entsprechende Kostenmatrix sei gegeben durch

	K	F	BT	H	HH
K	∞	$\boxed{2}$	5	3	6
F	2	∞	$\boxed{4}$	2	∞
BT	$\boxed{5}$	4	∞	6	∞
H	3	2	6	∞	$\boxed{1}$
HH	6	∞	∞	$\boxed{1}$	∞

Vergleiche dazu folgende Skizze.



Als Lösung des zugehörigen Zuordnungsproblems (Relaxation) erhält man nach **Kapitel 16**

$$\mathrm{K} \to \mathrm{F} \to \mathrm{BT} \to \mathrm{K}, \quad \mathrm{H} \to \mathrm{HH} \to \mathrm{H}$$

mit dem Zielfunktionswert $\underline{z}(T) = 13$. Wir brechen H $\to$ HH $\to$ H auf, indem wir in T_1 den Weg H $\to$ HH und in T_2 den Weg HH $\to$ H durch $c_{45} := \infty$ beziehungsweise $c_{54} := \infty$ verbieten. Dabei ist jeder zulässige Weg in T_1 oder T_2 enthalten. Der obige Weg mit Subtouren wird jedoch ausgeschlossen! Wir erhalten

$$\xi_1 = \min(2,3) + \min(3) = 5$$
$$\xi_2 = \min(5) + \min(0,1) = 5.$$

Für T_1 erhält man aus $\overline{C}$, (siehe **Kapitel 16**)

T_1 :

	K	F	BT	H	HH
K	∞	0	0	0	3
F	0	∞	0	0	∞
BT	0	0	∞	1	∞
H	2	2	3	∞	∞
HH	5	∞	∞	0	∞

Anschließende Reduktion liefert (überdecke erst mit Zeilen 1,2,3,5; danach mit Spalten 1,2,3,4)

T_1 :

	K	F	BT	H	HH
K	∞	0	0	0	$\boxed{0}$
F	0	∞	$\boxed{0}$	0	∞
BT	$\boxed{0}$	0	∞	1	∞
H	0	$\boxed{0}$	1	∞	∞
HH	5	∞	∞	$\boxed{0}$	∞

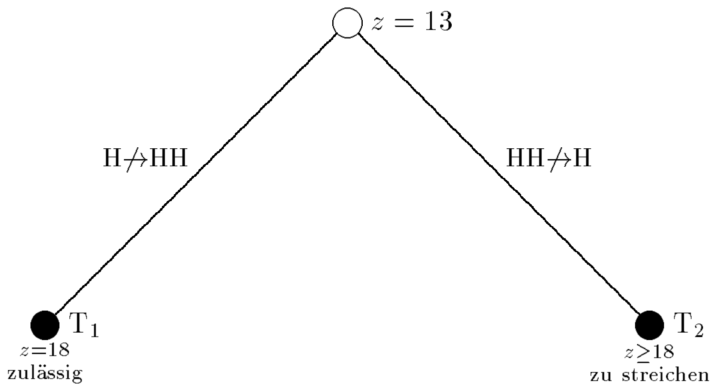
Wir erhalten die zulässige Rundreise P_1

$$\mathrm{K} \to \mathrm{HH} \to \mathrm{H} \to \mathrm{F} \to \mathrm{BT} \to \mathrm{K}$$

mit dem Zielfunktionswert $\underline{z}(T_1) = z(P_1) = 18$. Für T_2 ist

$$\underline{z}(T_2) \geq \underline{z}(T) + (6-1) = 13 + 5 = 18 = z(T_1).$$

Damit können wir T_2 streichen und die obige Tour ist optimal.



Literatur zur linearen Optimierung

[1] M. S. Bazaraa, J.J. Jarvis, *Linear Programming and network flows*, New York-London, J. Wiley & Sons, 1977.

[2] V. Chvatal, *Linear Programming*, New York, W. H. Freeman and Company, 1983.

[3] L. Collatz, Wetterling, *Optimierungsaufgaben*, Berlin-Heidelberg-New York, Springer-Verlag, 1966.

[4] L. Cooper, D. Steinberg, *Methods and Applications of Linear Programming*, Philadelphia-London, W. B. Saunders Company, 1974.

[5] Dantzig, *Lineare Programmierung und Erweiterungen*, Berlin-Heidelberg-New York, Springer-Verlag, 1966.

[6] Gass, *Linear Programming*, New York-London, McGraw-Hill, 1975.

[7] G. Hadley, *Linear Programming*, Reading, Mass., Addison-Wesley Publising Company, 1975.

[8] D. Koo, *Elements of Optimization*, Berlin-Heidelberg-New York, Springer-Verlag, 1977.

[9] B. Kreko, *Linear Programming*, London, Sir Isaac Pitman & Sons, 1968.

[10] D. G. Luenberger, *Introduction to linear and nonlinear Programming*, Reading, Mass., Addison-Wesley Publising Company, 1979.

[11] K. Neumann, *Operations Research Verfahren, Band I*, München-Wien, Carl Hanser Verlag, 1975.

[12] W. Orchanrd-Hays, *Advanced linear-programming computing techniques*, New York-London, McGraw-Hill Book Company, 1968.

[13] C. van de Panne, *Linear Programming and related techniques*, Amsterdam-New York-Oxford, North-Holland, 1976.

[14] D. Solow, *Linear Programming: An Introduction to Finite Improvement Algorithms*, Amsterdam-New York-Oxford, North-Holland, 1984.

[15] S. I. Suchowitzki, L. I. Awdejewa, *Lineare und konvexe Programmierung*, München-Wien, Oldenbourg Verlag, 1969.

[16] W. Vogel, *Lineares Optimieren (Mathematik und ihre Anwendungen in Physik und Technik, Band 33, Reihe A)*, Leipzig, Akademische Verlagsgesellschaft, 1970.