Lineare und Diskrete Optimierung

Manuskript zur Vorlesung

WS 1996/1997

Uwe Zimmermann
Abteilung Mathematische Optimierung
Technische Universität Braunschweig

Braunschweig, den 1. Oktober 1996

Inhaltsverzeichnis

11 Maximale submodulare Flüsse

Submodularität

V endlich, $\emptyset, V \in F \subseteq 2^V$ Verband. $h : F \to \boldsymbol{R}$ heißt **submodular**, falls

$$h(S) + h(T) \geq h(S \cap T) + h(S \cup T) \quad (S, T \in F) \quad \text{(modular falls "=")}$$

Beispiel:

1. $b : V \to \boldsymbol{R}$, $\alpha \in \boldsymbol{R}$. $h(S) := b(s) + \alpha \; S \subseteq V$.

   $b(S)+\alpha+b(T)+\alpha = b(S\cap T)+\alpha+b(S\cup T)+\alpha \to h(S)+h(T) = h(S\cap T)+h(S\cup T)$

   d.h. h ist sogar modular.

2. $x : E \to \boldsymbol{R}$ auf Graph $G = (V, E)$. ∂x ist modular.

3. $c : E \to \boldsymbol{R} \cup \infty$, $l : E \to \boldsymbol{R} \cup \{-\infty\}$. $l \leq c$ auf Graph $G = (V, E)$. $h(S) := c(\delta(S)) - l(\delta(S))$ ist submodular ("Schnittfunktion").

4. $V \hat{=}$ Menge der Spalten einer Matrix. $r(S) := \mathrm{rg} A_S$, $S \subseteq V$. r ist submodular, monoton und nicht negativ.

5. (V, E) ungerichteter Graph.

   $$r(S) := \max\{|T| \,|\, T \subset S, (V, T) \text{ kreisfrei}\} \quad S \subseteq E$$

   r ist submodular, monoton und nicht negativ.

Bemerkung:

1. Die Punkte 4 und 5 führen auf Matroide.

2. Die Aufgabe $\min\{h(S) | S \in F\}$ ist polynomial lösbar. (Grötschel, Lovász, Schrijver). Leider ist aber bisher kein polynomiales, "kombinatorisches" Verfahren bekannt.

11.1 Submodulare Polyeder $P(h)$

$$P(h) := \{y \in \boldsymbol{R}^V | y(S) \leq h(S), S \in F\}$$

OBdA nehmen wir $h(\emptyset) = 0$ an. Andernfalls setzen wir $h(\emptyset)$ auf 0. War $h(\emptyset) < 0$ so war $P(h) = \emptyset$ (uninteresssant). War $h(\emptyset) > 0$ so ist $P(h)$ unverändert. Die Submodularität bleibt durch diese Veränderung von h erhalten:

$$h(\underbrace{S}_{=\emptyset \subseteq T}) + h(T) \geq h(\underbrace{S \cap T}_{=\emptyset}) + h(\underbrace{S \cup T}_{=T})$$

Übungsaufgabe:

$$\max\{y(V) | y \in P(h)\}$$

11.2 Aktive Restriktionen (Mengen) $S \in F$ zu $y \in P(h)$

S aktiv $\Leftrightarrow y(S) = h(S)$.

Lemma 11.1 *Sind S, T aktiv, so auch $S \cup T, S \cap T$.*

Beweis.

$$\begin{aligned} h(S\cap T) + h(S \cup T) &\overset{\text{subm.}}{\leq} h(S) + h(T) \overset{\text{aktiv}}{=} y(S) + y(T) \\ &\overset{\text{mod.}}{=} y(S\cap T) + y(S\cup T) \leq h(S\cap T) + h(S \cup T) \end{aligned}$$

Aus der Ungleichungskette folgt, daß überall das "=" stehen muß, d.h. das $S \cap T$ und $S \cup T$ aktiv sind. □

11.3 Minimale aktive Mengen $S(i)$ zu $y \in P(h)$

Sei $i \in V$.

$$S(i) := \bigcap\{S \in F | i \in S, S \text{ aktiv}\}$$

Falls $\{S \in F | i \in S, S \text{ aktiv}\} \neq \emptyset$ so ist $S(i)$ selbst aktiv.

11.4 Submodulare Flüsse (Edmonds, Giles 1976)

(V, E) gerichteter Graph. $l \leq c$ Kapazitäten. $P(h)$ submodulares Polyeder mit $F \subseteq 2^V$. $x : E \to \boldsymbol{R}$ heißt **submodularer Fluß** falls $\partial x \in P(h)$. x heißt zulässig, falls $l \leq x \leq c$. OBdA gelte $h(\emptyset) = h(V) = 0$.

Beispiel Flüsse: $h : 2^V \to \boldsymbol{R}$, $h \equiv 0$.

1. Ist x submodularer Fluß so gilt $\partial x(S) \leq 0 \quad \forall\, S \subseteq V$ und $-\partial x(S) = \partial x(\bar{S}) \leq 0$. Also folgt $\partial x = 0$, d.h. aber x ist ein Fluß. Da V aktiv ist $S(i)$ aktiv für alle $i \in V$.

2. Sei x Fluß, so gilt $\partial(i) = 0$ für alle $i \in V$ und somit $S(i) = \{i\}$.

11.5 Aktive Menge $S \in F$

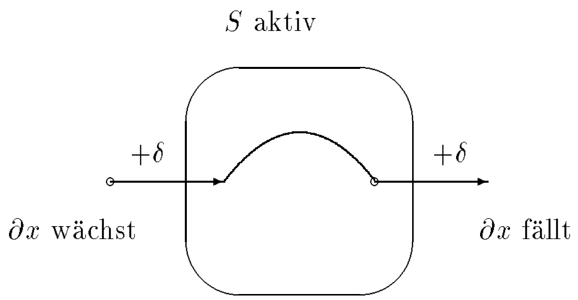


Abbildung II.52: Inkrementweg

11.6 Erweiterungen von G_x

Zusätzliche Kanten: $E_0 := \{ij | j \in S(i), i \neq j\}$ mit Kapazitäten

$$l_x(ij) := 0,\ \ c_x(ij) := \min\{h(S) - \partial x(S) | i \in S \in F, j \notin S\} > 0$$

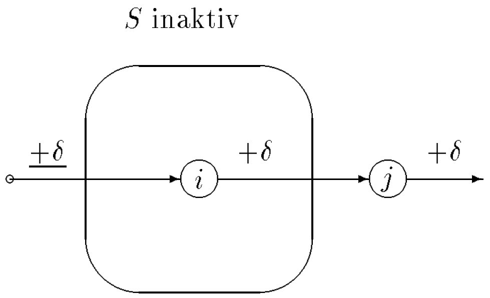


Abbildung II.53: $\partial x(S) + \delta \leq h(S)$ notwendig

Beim Flußproblem ist $E_0 = \emptyset$.

Bemerkung: Sei $S \subseteq V$. Dann gilt: $\delta_0(S) = \emptyset \Leftrightarrow S \in F$ aktiv. **Beweis.** "$\Leftarrow$" trivial, da $i \in S \in F$ und S aktiv, also gilt $S(i) \subseteq S$. Alle Kanten aus $E_0(S(i))$ verlaufen nur innerhalb von $S(i)$, also auch innerhalb von S.

"$\Rightarrow$" $\delta_0(S) = \emptyset \Rightarrow S(i) \subseteq S \quad \forall\, i \in S \Rightarrow S \subseteq \bigcup_{i \in S} S(i) \subseteq S \overset{11.1}{\Rightarrow} S$ aktiv, $S \in F$. □

11.7 $\partial_\pm, \partial_0$ über $E_+ \cup E_-$ bzw. E_0

Sei $\Delta x : E_x \to \boldsymbol{R}$.

$$\partial_\pm[\Delta x(S)] = \Delta x(\delta_\pm(\bar{S})) - \Delta x(\delta_\pm(S))$$

wobei $\delta_\pm(S) := \{ij \in E_+ \cup E_- | i \in S, j \in \bar{S}\}$. Analog δ_0, ∂_0.

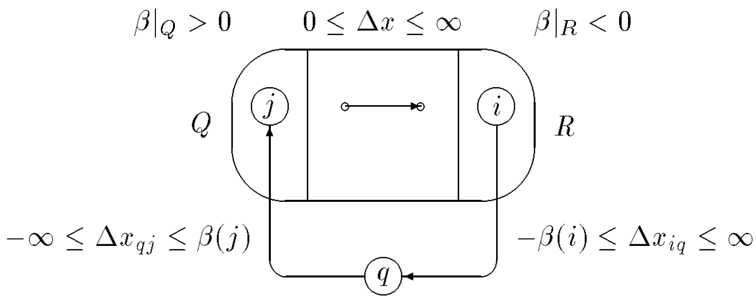
Lemma 11.2 *Seien x, y zulässige submodulare Flüsse. Dann gilt in G_x*

$$\partial_\pm[\Delta x(S)] = \partial y(S) - \partial x(S) \quad \textit{wobei}$$

$$\Delta x(ij) := \begin{cases} y(ij) - x(ij) & y(ij) > x(ij), ij \in E_+ \\ x(ji) - y(ji) & x(ji) > y(ji), ji \in E_- \\ 0 & \textit{anderenfalls} \end{cases}$$

Beweis. Für $S = \{i\}$ durch Fallunterscheidungen $x(e) < y(e)$, $x(e) = y(e)$, $x(e) > y(e)$ für $e \in E$. Für $S \subseteq V$ wegen Modularität von $\partial_\pm$ und ∂ □

Lemma 11.3 *$\Delta x : E_0 \to \boldsymbol{R}_+$ mit $\partial_0[\Delta x] = -\beta$ existiert genau dann, wenn $\beta(X) \leq 0$ für alle aktiven $X \in F$ in G_x.*



Beweis. Trivial, falls $\beta \equiv 0$ ($\Delta x \equiv 0$). Sei $\beta \not\equiv 0$. Exisitenz äquivalent zu: Existenz eines Flusses in $G' = (V \cup q, E_0 \cup E'_B)$ mit

Wegen $\beta(V) = 0$ gilt dann $\Delta x_{iq} = -\beta(i)$ und $\Delta x_{qj} = \beta(j)$.

$$\stackrel{\text{Hoffman}}{\Leftrightarrow} \quad l(\delta'(\bar{S})) \le c(\delta'(S)) \qquad \forall\, S \subseteq V \cup q \tag{11.1}$$

Beobachtungen:

1. trivial, falls $\delta_0(S) \neq \emptyset$ ($\rightarrow c(\ldots) = +\infty$) also nichttrivial nur für $X = S \cap V$ aktiv, $X \in F$.
2. trivial, falls $iq \in \delta_B(S)$ ($\rightarrow c(\ldots) = +\infty$)
3. trivial, falls $qj \in \delta_B(\bar{S})$ ($\rightarrow l(\ldots) = -\infty$)

Annahme $q \in \bar{S} \rightarrow$ trivial, falls nicht $R \cup Q \subseteq \bar{S} \rightarrow$ trivial, da $l(\ldots) = c(\ldots) = 0$ ($\delta'(S) = \emptyset, \delta'(\bar{S}) = \delta_0(\bar{S})$)

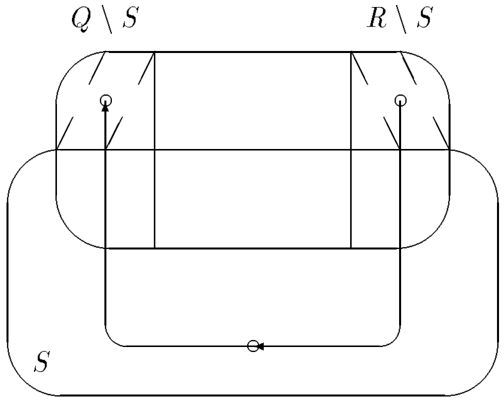


Abbildung II.54: $l(\delta_0(\bar{S})) = 0$ und $\delta_0(S) = \emptyset$

$$\begin{aligned} &\stackrel{11.1}{\Leftrightarrow} \quad -\beta(R \setminus S) = l(\delta_B(\bar{S})) \le c(\delta_B(S)) = \beta(Q \setminus S) \\ &\Leftrightarrow \quad \beta(V \cap S) = -\beta(V \setminus S) \le 0 \end{aligned}$$

□

Satz 11.4 *Seien x, y submodulare Flüsse. Dann existiert in G_x ein Fluß Δx mit $0 \leq \Delta x, \Delta x_{|E_\pm} \leq c_{x|E_\pm}$ und $y = x \oplus \Delta x$.*

Beweis. Sei $X \subseteq V$ aktiv, $X \in F \to \beta(X) = \partial y(X) - \partial x(X) \stackrel{\text{aktiv}}{=} \partial y(X) - h(X) \stackrel{y \text{ subm.}}{\leq} 0$ □

Bemerkung:

1. Entspricht Lemma 2.4 2. Teil.
2. Δx kann wie in Satz 3.2 in Flüsse auf gerichteten Kreisen C_μ zerlegt werden.

$$y = x \oplus \sum_{\mu=1}^{k} \Delta x(C_\mu, \eta_\mu) \quad (k \leq n^2 + 2m)$$

3. Lemma 2.4 1. Teil gilt i. allg. nicht:

$$\Delta x(C, \eta) \text{ Kreisfluß in } G_x \text{ mit } 0 \leq \Delta x \leq c_x \not\to x \oplus \Delta x \text{ submodularer Fluß}$$

11.8 Geeignete Kreise C in G_x

$G_C := (V_C, E_C)$ mit $V_C = C \cap E_0, E_C = \{(uv, rs) | us \in E_0\}$. C heißt **geeignet**, falls

1. C enthält keine sukzessiven roten Kanten.
2. G_C enthält keinen gerichteten Kreis.

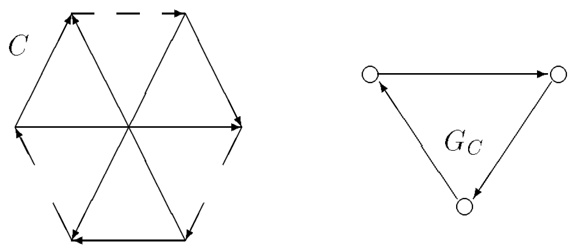


Abbildung II.55: ungeeignet

Bemerkung: Kreise ohne "rote Abkürzungen" sind geeignet.

Lemma 11.5 *Sei C ein Kreis in G_x ohne sukzessive rote Kanten. Enthält G_C einen Kreis K, so überdecken die durch seine Kanten induzierten Kreise $C(us)$, $(uv, rs) \in K$, die Kanten in $C \setminus E_0$ gleich häufig.*

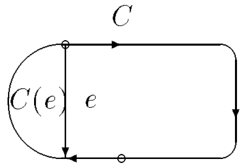
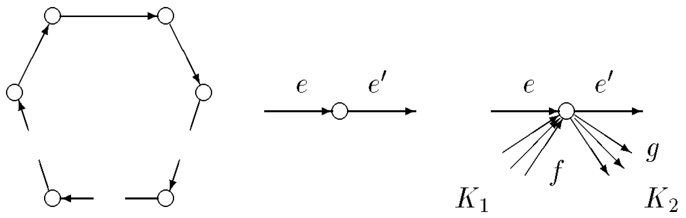


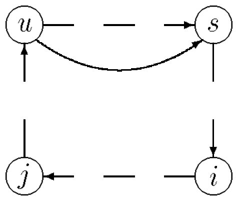
Abbildung II.56: von e (durch Abkürzen) induzierter Kreis $C(e)$



Beweis. (Übung) Kontrahiere $C \cap E_0$-Kanten, die von K berührt sind, zu "roten Knoten". K berührt C nur in roten Knoten. In jedem Knoten ist die Anzahl der einlaufenden K-Kanten gleich der Anzahl der auslaufenden K-Kanten. Nicht rote Knoten: Sei $C(\cdot)$ induzierter Kreis $\to e \in C(\cdot) \leftrightarrow e' \in C(\cdot)$ (vgl. Abbildung).

rote Knoten: $f \in K_1 : e \notin C(f), e' \in C(f)$. $g \in K_2 : e \in C(g), e' \notin C(g)$. Da $|K_1| = |K_2|$ liegt e in genauso vielen induzierten Kreisen wie e' (vgl Abbildung). □

Bemerkung: $ij \in C(us)$ genau dann, wenn auf dem weg von j nach i in C der rote Knoten u vor s liegt.

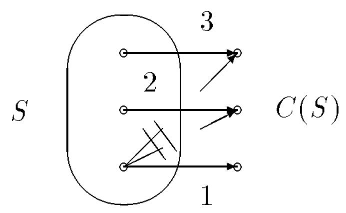


Satz 11.6 *x zulässiger submodularer Fluß. Ist $\Delta x(C, \mu)$ Fluß in G_x auf geeignetem Kreis C, so ist $x \oplus \Delta x$ zulässiger submodularer Fluß.*

Beweis. $y := x \oplus \Delta x$ ist zulässig, da $0 \leq \Delta x \leq c_x$. Sei $F \subset F$.

$$\begin{aligned}\partial y(S) &= \partial x(S) + \partial_{\pm}\Delta x(S) = \partial x(S) - \partial_0(\Delta x(S)) \\ &\leq \partial x(S) + \Delta x(\delta_0(S)) \leq \partial x(S) + c_x(\delta_0(S) \cap C)\end{aligned}$$

zu zeigen: $c_x(\underbrace{\delta_0(S) \cap C}_{=: C(S)}) \leq h(S) - \partial x(S) =: \epsilon(S)$ ist submodular.



1. $C(S) = \emptyset$. Trivial.
2. Sei $C(S) = \{u_1v_1, \ldots, u_kv_k\}$ mit $k > 0$. OBdA, da C geeignet:

   (11.2) $$u_iv_j \notin E_0 \quad \text{für } 1 \leq i < j \leq k$$

   Es gilt:

   (11.3) $$C(\underbrace{S \cup S(u_1) \cup \ldots \cup S(u_j)}_{=:W_j}) = \{u_{j+1}vj+1, \ldots, u_kv_k\}$$

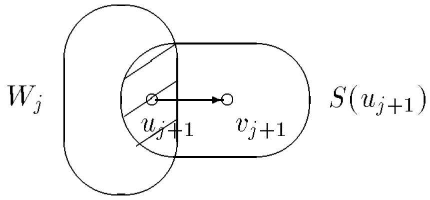
   $\subseteq$ trivial, da $u_iv_i \in S(u_i)$ und $P(u_i)$ aktiv.

   $\supseteq$ Annahme: $v_\mu \in S(u_i)$ für $i \leq i < \mu \rightarrow$ Widerspruch zu 11.2. D.h. $u_iv_\mu \in E_0$.

   Sei $W_0 =: S$, W_j siehe oben.

   $$\overset{\epsilon \text{ subm.}}{\rightarrow} \quad \epsilon(W_1) \leq \epsilon(S) + \underbrace{\epsilon(S(u_1))}_{0} - \epsilon(W_0 \cap S(u_1))$$

   $$\overset{\text{Ind.}}{\rightarrow} \quad \epsilon(W_{k-1}) \leq \epsilon(S) - \sum_{j=0}^{k-2} \epsilon(W_j \cap S(u_{j+1}))$$



   Wegen 11.3 gilt:

   $$u_{j+1}vj+1 \in \delta_0(W_j \cap S(u_{j+1})) \quad u_kv_k \in \delta_0(W_{k-1})$$

   Nach Definition der Kapzitäten:

   $$c_x(u_{j+1}v_{j+1} \leq \epsilon(W_j \cap S(u_{j+1}) \quad c_x(u_kv_k) \leq \epsilon(W_{k-1})$$

   $$\rightarrow \quad c_x(C(S)) \cap C) \leq \epsilon(W_{k-1}) + \sum_{j=0}^{k-2} \epsilon(W_j \cap S(u_{j+1})) \leq \epsilon(S) \square$$

11.9 Maximale submodulare Flüsse

(11.4) $\max\{x(e) |\ x$ zulässiger submodularer Fluß$\}$ für ein $e \in E$

11.10 KW-Methode

$e = uv$

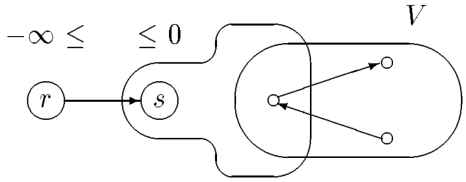
1. Bestimme einen zulässigen submodularen Fluß x.
2. Enthält G_x keinen gerichteten Kreis C mit $e \in C$, stop.
   Bestimme kürzesten Weg W von v nach u. $\eta := \min\{c_x(e), c_x(W)\}$.
3. $x := x \oplus \Delta x(C, \eta)$ und gehe nach 2.

Bemerkung: KW-Methode erzeugt Folge von submodularen Flüssen, da KW nicht abkürzbar.

Satz 11.7 *Ein zulässiger submodularer Fluß existiert genau dann, wenn*

$$h(S) \geq l(\delta(\bar{S})) - c(\delta(S)) \quad (S \in F)$$

Beweis. Notwendig, da $h(S) \geq x(\delta(\bar{S})) - x(\delta(S)) \geq l(\delta(\bar{S})) - c(\delta(S))$.
Hinreichend: $F' := \{S \cup s | S \in F\}$, $h' : F' \to \boldsymbol{R}$, $h'(S \cup s) =: h(S)$.



$\alpha = \max\{x(rs) |\ x$ zulässiger submodularer Fluß in $G'\}$

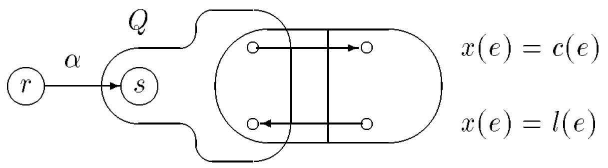
1. $x_{|E}$ beliebig zulässig, $x(rs)$ klein genug $\to$ x zulässiger submodularer Fluß auf G'.
2. Es existiert ein zulässiger submodularer Fluß in G $\Leftrightarrow$ Es existiert ein zulässiger submodularer Fluß auf G' mit $x(rs) = 0$.

Annahme $\alpha, 0$, x optimal in G'. Sei $Q \hat{=}$Menge aller in G_x von s aus erreichbaren Knoten $\to Q \in F'$ aktiv.

$$\begin{aligned} h(S) = h'(Q) = \partial x(Q) &= \alpha + l(\delta(\bar{S})) - c(\delta(S)) \\ &< l(\delta(\bar{S})) - c(\delta(S)) \end{aligned}$$

$\square$

Bemerkung:



1. l, c, h ganzzahlig. Satz 11.7 charakterisiert die Existenz ganzzahliger submodularer Flüsse. (Methode läuft ganz ab.)
2. Hoffman's Existenzsatz für Flüsse für $h = 0, F = 2^V$.

11.11 Lexikographische KW

Sei W ein KW von v nach u mit Knotenfolge

$$V(W) = (v, i_1, i_2, \ldots, i_k, u)$$

Dann heißt W lex KW, falls $V(W) \preceq V(W')$ für alle KW W' von v nach u.

Kompexität: (ohne Beweis: da ca. 1 Doppelstunde)

1. $O(n^3 + mn)$ Änderungen von x (Iterationen)
2. Bestimmung: G_x majorisiert Iteration: $O(n^2 z)$ mit $O(z) \hat{=}$ Komplexität der Minimierung einer submodularen Funktion.

$$ij \in E_0 \Leftrightarrow 0 < c_x(ij) = \min\{\epsilon(S) | \underbrace{s \in F, i \in S, j \notin S}_{\text{Verband}}\}$$

11.12 Submodulare Flußpolyeder (über G)

$$X(h) = \{x | x \text{ zulässiger submodularer Fluß in } G\}$$

heißt Submodulares Flußpolyeder zu F, h.

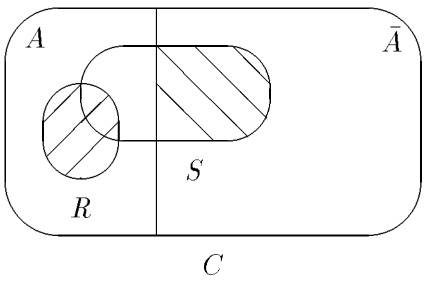
Lemma 11.8 *Sei $A \in F$. Dann ist*

$$X_A = \{x \in X(h) | \partial x(A) = h(A)\}$$

ein submodulares Flußpolyeder.

Beweis. zu zeigen: $X_A = X(\hat{h})$ für geeignetes $\hat{h} : \hat{F} \to \boldsymbol{R}$. Ansatz:

$$\begin{aligned}
\hat{F} &:= \{\underbrace{R \cup (S \setminus A)}_{C} | R, S \in F, R \subseteq A\} \\
h(C) &:= \min_{\substack{C = R \cup (S \setminus A) \\ R, S \in F \\ R \subseteq A}} h(R) + h(S \cup A) - h(A)
\end{aligned}$$



1. $F \subseteq \hat{F}$, $\hat{F}$ Verband, $\bar{A} \in \hat{F}$: Sei $T \in F$. Dann gilt

$$
\begin{array}{llcl}
(11.5) & T & = & \underbrace{T \cap A)}_{R \in F} \cup (\underbrace{T}_{= S \in F} \setminus A) \in \hat{F} \\
(11.6) & C & = & R \cup (S \setminus A),\ D = Q \cup (T \setminus A) \in \hat{F} \\
(11.7) & C \cup D & = & (R \cup Q) \cup [(S \cup T) \setminus A] \in \hat{F} \\
 & C \cap D & = & (R \cup Q) \cup [(S \cap T) \setminus A] \in \hat{F} \\
 & \bar{A} & = & \emptyset \cup (V \setminus A) \in \hat{F}
\end{array}
$$

2. $h \geq \hat{h}_{|F}$, $\hat{h}$ submodular: $T \in F$:

$$\hat{h}(T) \overset{11.5}{\leq} h(T \cap A) + h(T \cup A) - h(A) \overset{\text{subm.}}{\leq} h(T)$$

Wähle minimale Darstellungen, etwa (11.6)

$$
\begin{array}{lcl}
\hat{h}(C) + \hat{h}(D) & = & h(R) + h(S \cup A) - h(A) + h(Q) + h(T \cup A) - h(A) \\
 & \overset{\text{subm.}}{\geq} & h(R \cup Q) + h(S \cup T \cup A) - h(A) + h(R \cap Q) + h((S \cap T) \cup A) - h(A) \\
 & \overset{\text{Def. und (11.6)}}{\geq} & h(C \cup D) + h(C \cap D)
\end{array}
$$

3. Wegen 2.: $X(\hat{h}) \subseteq X(h)$. Wegen 1.:

$$-\partial x(A) = \partial x(\bar{A}) \leq \hat{h}(A) \overset{11.8}{\leq} h(\emptyset) + h(V \cup A) - h(A) = -h(A)$$

Somit gilt $\partial x(A) \geq h(A) \to X(\hat{h}) \subseteq X_A$.

4. Sei $x \in X_A$. Wähle minimale Darstellung für $C \in \hat{F}$, etwa 11.6.

$$
\begin{array}{rcl}
\partial x(C) & = & \partial x(R \cup (S \setminus A)) = \partial x(R) + \partial x(S \cup A) - \partial x(A) \\
 & \leq & h(R) + h(S \cup A) - h(A) \overset{\text{min. Darst.}}{=} \hat{h}(C)
\end{array}
$$

d.h. $X_A \subseteq X(\hat{h})$.

Satz 11.9 (Frank, Cunningham, 82) *Jede Seite eines submodularen Flußpolyeders ist ein submodulares Flußpolyeder.*

Satz 11.10 (Edmonds, Giles, 77) *Seien l, c, h ganz. Dann enthält jede Seite des submodularen Flußpolyeders einen ganzzahligen Punkt. Insbesondere ist jede Ecke von P ganz.*

Beweis. Jede Seite S ist submodulares Flußpolyeder nach Satz 11.9. Nach Konstruktion im Beweis von Lemma 11.8 gilt: h ganz $\Rightarrow$ $\hat{h}$ ganz. Da $S \neq \emptyset$, konstruiert KW-Methode einen zulässigen ganzzahligen submodularen Fluß $x \in S$.

12 Submodulare Flüsse mit minimalen Kosten

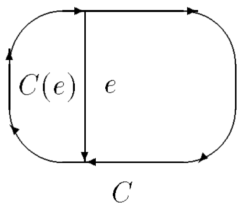
$$\min\{a^T x | x \text{ zulässiger submodularer Fluß}\} \quad \text{für } a : E \to \boldsymbol{R} \tag{12.1}$$

12.1 Inkrementgewichte

$$\begin{cases} +a(ij) & ij \in E_+ \\ -a(ij) & ij \in E_- \\ 0 & ij \in E_0 \end{cases}$$

12.2 Kurze negative Kreise

C negativer Kreis in G_x. C heißt **kurz**, falls $a_x(C(e)) \geq 0$ für jede "rote" Abkürzung e von C.

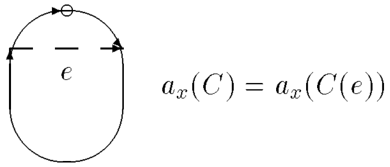


Bemerkung: Jeder negative Kreis läßt sich zu einem kurzen negativen Kreis abkürzen.

Satz 12.1 *Ist C ein kurzer negativer Kreis, so ist $x \oplus \Delta x(C)$ zulässiger Fluß.*

Beweis. zu zeigen: C ist geeignet.

1. Keine sukzessive roten Kanten, denn



2. Annahme: G_C enthält Kreis K. Seien $C_1, \ldots, C_k$ zugehörige induzierte Kreise $\rightarrow$ $a_x(C_i) \geq 0$ für $i = 1, \ldots, r$. Aus Lemma 11.5 folgt

$$0 > a_x(C) = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^{r} a_x(C_i) \geq 0$$

Widerspruch.

Satz 12.2 *Ein zulässiger submodularer Fluß x ist optimal für (12.1) genau dann, wenn G_x keinen negativen Kreis enthält*

Algorithmus 12.1 (Negative Kreise Methode)

1. Bestimme zulässigen submodularen Fluß x.
2. Enthält G_x keinen negativen Kreis, stop. x optimal
3. Bestimme kurzen negativen Kreis C in G_x; $x := x \oplus \Delta x(C)$. Gehe nach 2.

Bemerkung:

1. 1,2,3 effizient durchführbar.
2. Anzahl der Iterationen: endlich für MM-Kreise. (Cai, Fujishige, 1988) endlich. (Zimmermann, 1989) MR-Kreise, ganzzahlige Daten: $m \cdot c_{\max}$.
3. stark polynomiale Variante unbekannt.

12.3 Stark α-zusammenhängende Graphen

Sei $\alpha > 0$, $G = (V, E)$ gerichtet mit Kapazitäten $0 \equiv l \leq c$. Für $i, j \in V, i \neq j$ sei α_{ij} Wert eines maximalen Flusses von i nach j. G heißt **stark α-zusammenhängend**, falls $\alpha_{ij} \geq \alpha \quad \forall\, i, j \in V, i \neq j$

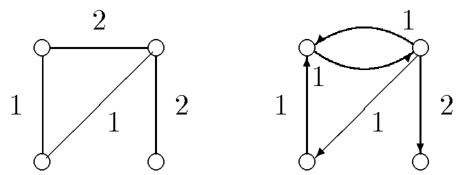
Bemerkung: G stark α–zusammenhängend genau dann, wenn $c(\delta(S)) \geq \alpha$ für alle $\emptyset \subset S \subset V$ (Satz von Ford und Fulkerson)

12.4 Orientierung ungerichteter Graphen

$G = (V, E)$ ungerichtet mit Kapaziät d. Dann heißt $G' = (V, E')$ gerichtete mit Kapazität $0 \equiv l \leq c$ **Orientierung von** G, falls

$$E' = \{ij, ji | ij \in E\} \quad \text{und} \quad c(ij) + c(ji) = d(ij) \quad \forall\, ij \in E$$

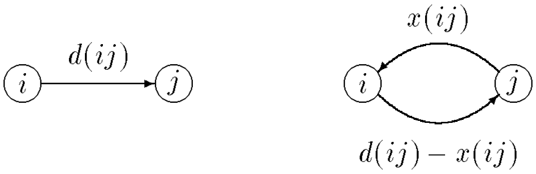
Aufgabe: Finde eine stark α-zusammenhängende Orientierung, falls möglich. (Beispiel: Einbahnstraßen.)



12.5 Umorientierungen

$G_1 = (V, E)$ gerichtet mit Kapazitäten $0 \leq d$ (gerichtete Kopie von G). Dann sei $G'(x) = (V, E')$ Orientierung von G mit

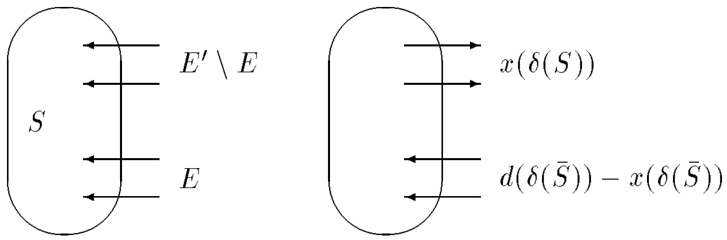
$$c(ij) := \begin{cases} d(ij) - x(ij) & ij \in E \\ x(ji) & ji \in E \end{cases}$$



G_1 $\quad$ G'

Lemma 12.3 *$G'(x)$ stark α–zusammenhängend genau dann, wenn $\partial x(S) \leq d(\delta(\bar{S})) - \alpha \quad \forall\, \emptyset \subset S \subset V$.*

Beweis. $c'(\delta'(\bar{S})) \geq \alpha \quad \forall\, \emptyset \subset S \subset V$.



G_0 $\quad$ G_1

$$\Leftrightarrow \quad d(\delta(\bar{S})) - x(\delta(\bar{S})) + x(\delta(S)) \geq \alpha \Box$$

Folgerung: Umorientierungen x erfüllen $\partial x \in P(h)$ mit

$$\begin{aligned} Q(h) &:= \{y | y(S) \leq h(S), S \in F\} \\ F &:= \{S \subseteq V | \emptyset \neq S \neq V\} \end{aligned}$$

$$h : F \to \boldsymbol{R},\ h(S) = d(\delta(\bar{S})) - \alpha$$

h ist submodular für **crossing sets**. Man kann zeigen (Fujishige, Lovász): $Q(h)$ ist ein submodulares Polyeder, d.h. $Q(h) = P(\hat{h})$ für geeignetes $\hat{h} : 2^V \to \boldsymbol{R}$ submodular. Also bilden die Umorientierungen ein submodulares Flußpolyeder. (Kostenoptimale Umbauten von Einbahnstraßen.)

Literaturverzeichnis

[1] Ravindra K. Ahuja, Thomas L. Magnanti, and James B. Orlin. *Network Flows.* Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey 07632, 1993.

[2] V. Chvátal. *Linear Programming.* W.H.Freeman and Company, New York, 1983.

[3] Thomas H. Cormen, Charles E. Leiserson, and Ronald L. Rivest. *Introduction to Algorithms.* MIT Press, McGraw-Hill, Cambridge, London, 1990.

[4] Shimon Even. *Graph Algorithms.* Computer Science Press, 1979.

[5] Philip E. Gill, Walter Murray, and Margaret H. Wright. *Practical Optimization.* Academic Press, Inc., London, 1981.

[6] M. Gondran and M. Minoux. *Graphs and Algorithms.* John Wiley & Sons, Chichester, 1984.

[7] Martin Grötschel, László Lovász, and Alexander Schrijver. *Geometric Algorithms and Combinatorial Optimization.* Springer, Berlin, 1988.

[8] D. Jungnickel. *Graphen, Netzwerke und Algorithmen.* BI Wissenschaftsverlag, Mannheim, 2 edition, 1990. 2. überarbeitete und erweiterte Auflage.

[9] Eugene L. Lawler. *Combinatorial Optimization: Networks and Matroids.* Holt, Rinehart and Winston, New York, 1976.

[10] J. Leeuven, v. *Algorithms and Complexity.* Elsevier, Amsterdam, 1990.

[11] Th. Lengauer. *Combinatorial Algorithms for Integrated Circuit Layout.* John Wiley & Sons, Chichester, 1990.

[12] Kurt Mehlhorn. *Data Structures and Algorithms: 3. Multidimensional Searching and Computational Geometry.* Springer, Berlin, 1984.

[13] M. Minoux. *Mathematical Programming, Theory and Algorithms.* John Wiley & Sons, Chichester, 1986.

[14] B. M. E. Moret and H. D. Shapiro. *Algorithms from P to NP.* Benjamin Cummings, Redwood City, 1991.

[15] Katta G. Murty. *Network Programming.* Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey 07632, 1992.

[16] K.G. Murty. *Linear Programming.* John Wiley & Sons, New York/Chichester, 1983.

[17] K.G. Murty. *Linear Complementarity, Linear and Nonlinear Programming.* Heldermann, Berlin, 1988.

[18] George L. Nemhauser and Laurence A. Wolsey. *Integer and Combinatorial Optimization.* John Wiley & Sons, Chichester, 1988. Wiley Interscience Series in Discrete Mathematics and Optimization.

[19] G.L. Nemhauser, A.H.G. Rinnooy Kan, and M.J. Todd. *Optimization.* North-Holland, Amsterdam, 1989.

[20] Christos H. Papadimitriou and Kenneth Steiglitz. *Combinatorial Optimization: Algorithms and Complexity.* Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey 07632, 1982.

[21] R. G. Parker and L. R. Rardin. *Discrete Optimization.* Academic Press, London, 1988.

[22] H.M. Salkin and K. Mathur. *Foundations for Integer Programming.* North-Holland, New York, 1989.

[23] Alexander Schrijver. *Theory of Linear and Integer Programming.* John Wiley & Sons, Chichester, 1986.

[24] J. Stoer. *Einfuehrung in die Numerische Mathematik I.* Springer, Berlin, 1989.