Spezialvorlesung

Einführung in die Fuzzy-Logik

Helmut Thiele

Sommersemester 1993
Sommersemester 1994
Sommersemester 1995
Vorabversion: 1. Auflage 1995

Stand: 21. November 1995, $23^{\underline{05}}$ h

Universität Dortmund
Fachbereich Informatik
Lehrstuhl für Informatik I

Hinweis

Dies ist nur eine Vorabversion, die von Professor Thiele **nicht** autorisiert ist und wahrscheinlich noch eine Vielzahl von Fehlern enthält.
Diese wird sich in der nächsten Zeit auf Grund von Korrekturen und Erweiterungen

sehr häufig

verändern.
Wir raten *dringend* davon ab, diese Datei (mehrfach) auszudrucken, um ein ‚Unwesen' kursierender, inkompatibler Versionen und Ärger mit der IRB zu vermeiden.
Lernen mit Hilfe dieser Vorabversion erfolgt auf eigene Gefahr. Meldungen über Fehler bitte an Stephan Lehmke (`lehmke@LS1.informatik.uni-dortmund.de`).

Inhaltsverzeichnis

1. Zweiwertige und mehrwertige Logik. Zusammenhang zwischen Logik und Mengenlehre. Scharfe und unscharfe Mengen

1.1 Der aristotelische Wahrheitsbegriff. Zweiwertige Logik

Die wichtigsten Gebilde von deskriptiven (beschreibenden) Sprachen sind die *Aussagen*.

Eine Aussage A als syntaktisches Gebilde hat eine *Semantik*, d. h. sie besagt, daß sich bestimmte Dinge in einer bestimmten Weise verhalten oder — etwas allgemeiner — daß in einem gegebenen Medium ein bestimmter Zustand vorliegt.

Ist diese Beschreibung *eindeutig*, so sagt man mit ARISTOTELES, daß

- A *WAHR* sei, falls der von A beschriebene Zustand tatsächlich vorliegt, und daß
- A *FALSCH* sei, falls der von A beschriebene Zustand **nicht** vorliegt.

(*„Aristotelischer Wahrheitsbegriff“*)

Anmerkung
Die in diesen Formulierungen gebrauchten Begriffe wie „Sprache“, „syntaktisches Gebilde“, „Semantik“, „Beschreibung“, „Zustand“ usw. werden zunächst rein „intuitiv“ verwendet, entsprechend ihrer umgangssprachlichen Bedeutung; korrekte Definitionen werden später entwickelt.

Beispiele

1. $A_1 =_{def} 2 + 1 = 3$.

   Diese Aussage beschreibt (im Medium der natürlichen Zahlen) einen Sachverhalt eindeutig, und dieser Sachverhalt liegt vor, also ist die Aussage A_1 *WAHR*.

2. $A_2 =_{def} 2 + 1 = 4$.

   Wiederum eindeutige Beschreibung eines Sachverhalts, aber dieser Sachverhalt liegt **nicht** vor, also ist A_2 *FALSCH*.

3. $A_3 =_{def}$ Fritz ist 184 cm groß.

   Eindeutige Beschreibung eines Zustandes; A_3 ist wahr bzw. falsch, wenn Fritz diese Größe hat bzw. nicht hat.

Anmerkung
Die „**Bestimmung**" des Wahrheitswertes einer Aussage wird **hier** noch nicht als Problem behandelt; es wird vielmehr vorausgesetzt, daß die entsprechenden Prozeduren stets erfolgreich ausführbar sind.

4. $A_4 =_{def}$ Fritz ist groß.

   Wie ist eine *Semantik* dieser Aussage definiert ?

   1. Möglichkeit: A_4 ist *WAHR* (bzw. *FALSCH*), falls die Größe von Fritz 184 cm oder mehr beträgt (bzw. weniger als 184 cm beträgt).

   Semantische Paradoxie

   a) Hat Fritz die Größe 184 cm, dann ist er *„groß"*.
   b) Hat er die Größe 183.9 cm, dann ist er nicht groß, also *„klein"*.

   Anmerkung zur Terminologie

   „Paradoxie": Unverständlich, unserem „natürlichen" Empfinden nicht entsprechend.

   „Antinomie": Logisch widerspruchsvoll.

   Beispiel Der Dorfbarbier ist derjenige im Dorf, der alle rasiert, die sich nicht selbst rasieren. Die Frage „Wer rasiert den Dorfbarbier?" führt zu dem logischen Widerspruch:

   > Der Dorfbabier rasiert sich selbst genau dann, wenn er sich nicht selbst rasiert.

   2. Möglichkeit: Man nimmt zur Kenntnis und akzeptiert, daß der aristotelische Wahrheitsbegriff und die zweiwertige Logik **nicht ausreichen**, um die Beziehung Syntax – Semantik, also Sprache – Realität hinreichend genau zu erfassen.

   Ausweg Man verwendet mehr als zwei Wahrheitswerte, geht also zur mehrwertigen Logik über.

Weiteres ***Musterbeispiel*** für mehrwertige Logik:

Bewertung des Wahrheitsgehaltes der Aussagen von Studenten in Prüfungen:

Notenskala (d. h. „Wahrheitswerte") hier in Dortmund für Vordiplom- und Diplomprüfungen:

$$1, 1.3, 1.7, 2, 2.3, 2.7, 3, 3.3, 3.7, 4, 5,$$

also 11 (Wahrheits-) Werte, davon

10 „positive" (bestanden)

1 „negativer" (nicht bestanden)

Merke
Die bisherige Informatik beruht (in der Regel) auf der zweiwertigen Logik, sowohl die Software als auch die Hardware.

Für mehr Informationen zu diesen einleitenden Darstellungen vergleiche man z. B. das dreibändige Werk über mathematische Logik von GÜNTER ASSER: [1–3].

1.2 Zweiwertige Prädikate. Scharfe Mengen

Grundlage aller mathematischen Betrachtungen ist die *Mengenlehre*. Die Mengenlehre ihrerseits basiert auf *Logik*.

Ausgangspunkt ist der Begriff eines *Universums* (Individuenbereich, Grundbereich, *Domain*).

Beispiele für Universa

1. $\boldsymbol{U_1}$**:** Alle natürlichen Zahlen von 2 bis 9 (Grenzen eingeschlossen).

   Endliches Universum !

2. $\boldsymbol{U_2}$**:** Alle natürlichen Zahlen, 0 eingeschlossen.

   Abzählbar unendliches Universum.

3. $\boldsymbol{U_3}$**:** Alle reellen Zahlen.

   Nicht abzählbares (überabzählbares) unendliches Universum.

Scharfe Mengen aus einem Universum U sind „Kollektionen" von Elementen x aus U.

Merke
Dies und auch die folgenden Ausführungen beruhen auf den Vorstellungen der *naiven* (d. h. anschaulichen, **nicht** axiomatischen) Mengenlehre, wie sie

Georg Cantor (1845–1918)

als Schöpfer der Mengenlehre ursprünglich entwickelt hat.

Die naive Mengenlehre kann aber zu Widersprüchen (antinomischen Mengen) führen.

Beispiel einer antinomischen Menge
Die Menge M aller derjenigen Mengen X, die sich nicht selbst als Element enthalten, d. h. für die $X \notin X$ gilt.

Frage: Gilt $M \in M$ oder $M \notin M$?

M ist antinomisch, da jede der obigen Annahmen zum (logischen) Widerspruch führt.

Ausweg
Aufbau axiomatischer Mengenlehren (Hier nicht zu behandeln!).

Jedoch ist auch hier das Problem der Widerspruchsfreiheit solcher Systeme nicht völlig gelöst. → Spezialliteratur zur Mengenlehre oder entsprechende Spezialvorlesungen.

Charakterisierung von Mengen.
Wählen als Beispiel das Universum U_2, also alle natürlichen Zahlen (einschließlich 0).

1. **Spezialfall von endlichen Mengen.**

   Hier „*Aufweisung*" der einzelnen Elemente und damit der ganzen Menge möglich, z. B. bedeutet

   $$\{2, 5, 8, 100\}$$

   diejenige Menge, die aus **genau** den natürlichen Zahlen $2, 5, 8$ und 100 besteht.

2. **Allgemeiner Fall.**

   Charakterisierung durch ein Prädikat, das einstellig und zweiwertig ist.

Definition 1.2.1
π ist (einstelliges, zweiwertiges) Prädikat über U (auch einstelliges „BOOLEsches“ Prädikat über U genannt)
$=_{def}\ \pi : U \to \{0, 1\}$.

Beispiel

$$U = \text{Alle natürlichen Zahlen (einschl. 0)}$$
$$\pi(x) =_{def} \begin{cases} 0, & \text{falls } x \text{ ungerade} \\ 1, & \text{falls } x \text{ gerade} \end{cases} \qquad \text{wobei } x \in U$$

Man schreibt dann
$$\{x \mid \pi(x) = 1 \text{ und } x \in U\}$$
oder kürzer (falls U fixiert)
$$\{x \mid \pi(x)\}\,.$$

Erläuterung
Durch das einstellige zweiwertige Prädikat π ist eine *scharfe* Menge aus Elementen von U festgelegt, und zwar die scharfe Menge aller derjenigen Elemente $x \in U$, für die das Prädikat *zutrifft*, d. h. $\pi(x) = 1$ ist.

Im obigen Beispiel legt π die *scharfe* Menge *GER* aller geraden natürlichen Zahlen fest, d. h. wir haben

$$\begin{aligned} \{x \mid \pi(x) = 1 \text{ und } x \in U\} &= \{x \mid \pi(x)\} \\ &= GER \\ &= \{0, 2, 4, 6, \ldots\}^1 \end{aligned}$$

Merke

1. Für eine *scharfe* Menge
$$M = \{x \mid \pi(x) = 1 \text{ und } x \in U\}$$
steht für **jedes** Element $x \in U$ *eindeutig* fest, ob es zu M gehört oder nicht, d. h. es gilt
$$\textit{entweder } x \in M \textit{ oder } x \notin M,$$
und zwar auf Grund der Tatsache, daß wegen
$$\pi : U \to \{0, 1\}$$
für alle $x \in U$ gilt:
$$\textit{entweder } \pi(x) = 1 \textit{ oder } \pi(x) = 0.$$

2. Das Prädikat π wird auch häufig *charakteristische Funktion* der Menge M genannt und durch
$$\chi_M$$
bezeichnet.

   Somit gilt:

[1] („*Pseudo*“-) Aufweisung der Menge aller geraden natürlichen Zahlen.

Die charakteristische Funktion χ_M einer scharfen Menge M bestimmt die Menge M *eindeutig*.

3. Umkehrung von Punkt 2.

   Es sei eine scharfe Menge M von Elementen aus U irgendwie gegeben, z. B. für endliche Mengen M durch Aufweisung. Dann bestimmt M *eindeutig* ein zweiwertiges Prädikat π_M, das seinerseits (als charakteristische Funktion) wieder die Menge M festlegt.

$$\pi_M(x) =_{def} \begin{cases} 0, & \text{falls } x \notin M \\ 1, & \text{falls } x \in M \end{cases} \qquad \text{und } x \in U$$

Beispiel

$$U =_{def} \text{Alle natürlichen Zahlen einschl. } 0$$
$$M =_{def} \{3, 5, 10\}$$
$$\pi_M(x) =_{def} \begin{cases} 0, & \text{falls } x \notin M \\ 1, & \text{falls } x \in M, \text{ d. h. } x = 3 \text{ oder } x = 5 \text{ oder } x = 10 \end{cases} \qquad x \in U$$

Literatur Für weiterführende Informationen zum Thema Mengenlehre vergleiche man z. B. das Werk von JÜRGEN SCHMIDT [31].

1.3 Mehrwertige Prädikate. Unscharfe Mengen

Von dem polnischen Logiker

JAN LUKASIEWICZ (–)

stammt die Idee (1915), beliebige reelle Zahlen c aus dem abgeschlossenen Einheitsintervall $\langle 0, 1\rangle$ **aller** reellen Zahlen x mit $0 \leqq x \leqq 1$ als Wahrheitswerte zu verwenden, um den *Wahrheitsgehalt* bestimmter Aussagen zu charakterisieren.

Ausgangspunkt von LUKASIEWICZ: „*Wahrscheinlichkeitsaussagen*". Wahrscheinlichkeitsaussagen beschreiben *stochastische Ereignisse*, die noch **nicht** realisiert (eingetreten) sind.

Beispiel Gegeben ein symmetrischer (also **nicht** „gefälschter") Würfel W.

Wahrscheinlichkeitsaussage

$A =_{def}$ Das Ergebnis eines (normalen) Wurfes mit W **wird sein** eine „4".

Bewertung mit 1 (wahr) oder
mit 0 (falsch)

vor Ausführung des Wurfes keine zutreffende Modellierung;

nach Ausführung des Wurfes möglich (Nachsehen, ob das Resultat „4" ist oder nicht).

Merke Grundsätzlicher *Unterschied* zwischen einem stochastischen Ereignis und dessen *Realisierung*.

Veranschaulichung Die Geschichte von einer Bombe im Flugzeug.

Definition 1.3.1
*π ist ein (einstelliges, reellwertiges) Prädikat über U (*LUKASIEWICZ*sches Prädikat über U)*

$=_{def}$ $\pi : U \to \langle 0, 1\rangle$.

Merke

1. Von LUKASIEWICZ selbst wurden neben $\langle 0, 1\rangle$ auch Teilmengen von $\langle 0, 1\rangle$ als Wahrheitswertmengen benutzt, und zwar

   1.1. die Menge aller *rationalen Zahlen* $r \in \langle 0, 1\rangle$ und

   1.2. Mengen der Form
   $$\left\{0, \frac{1}{n-1}, \frac{2}{n-1}, \ldots, \frac{n-1}{n-1}, 1\right\}$$
   mit $n = 2, 3, \ldots$

   Man spricht im Fall 1.1 von der *rational*-wertigen LUKASIEWICZschen Logik; der Fall 1.2 heißt n-wertige LUKASIEWICZsche Logik. Offenbar erhält man für $n = 2$ die Menge $\{0, 1\}$ der Wahrheitswerte der zweiwertigen Logik.

2. Später (etwa ab 1920) wurden von anderen (z. B. von E. L. POST) auch andere Mengen von Wahrheitswerten eingeführt und betrachtet.

3. Eine besondere Stellung nehmen als Verallgemeinerung des LUKASIEWICZschen Ansatzes sogenannte L-Prädikate (etwa ab den frühen siebziger Jahren) ein, wobei L eine halbgeordnete Menge oder ein Verband (s. Abschnitt 2.1) ist.

4. Der Zusammenhang zwischen mehrwertigen Prädikaten und (scharfen) Mengen ist nicht mehr so einfach und übersichtlich wie im zweiwertigen Fall.

5. *Neuansatz* im Jahre 1965 durch den iranisch-US-amerikanischen Regelungstechniker

   LOTFI („LOFTI") A. ZADEH (geb. 19),

   der nach KONRAD ZUSE (geb. 19) im Frühjahr 1993 zweiter Ehrendoktor des Fachbereichs Informatik der Universität Dortmund wurde.

Ausgangspunkt waren *nichtlineare* Regelungsprobleme, die sich der „klassischen" Regelungstheorie, die mit Differential- und auch Integralgleichungen (und deren Lösungen) arbeitet, weitgehend entzogen.

Musterbeispiel Ein LKW, welcher von einem Fahrer, der (etwa wegen der Ladung) nicht nach hinten sehen kann, auf Grund von Kommandos eines Einweisers rückwärts an eine Laderampe gesteuert werden soll. Die Situation ist in Abbildung 1.1 skizziert.

Der Einweiser bedient sich der natürlichen Sprache. Mögliche Kommandos:

1. Ein „kleines" Stück rückwärts.

2. Lenkrad „stark" rechts einschlagen.

3. Lenkrad „ein bißchen" nach links einschlagen.

Versuch einer **zweiwertigen** Interpretation dieser Kommandos. Wir wählen für

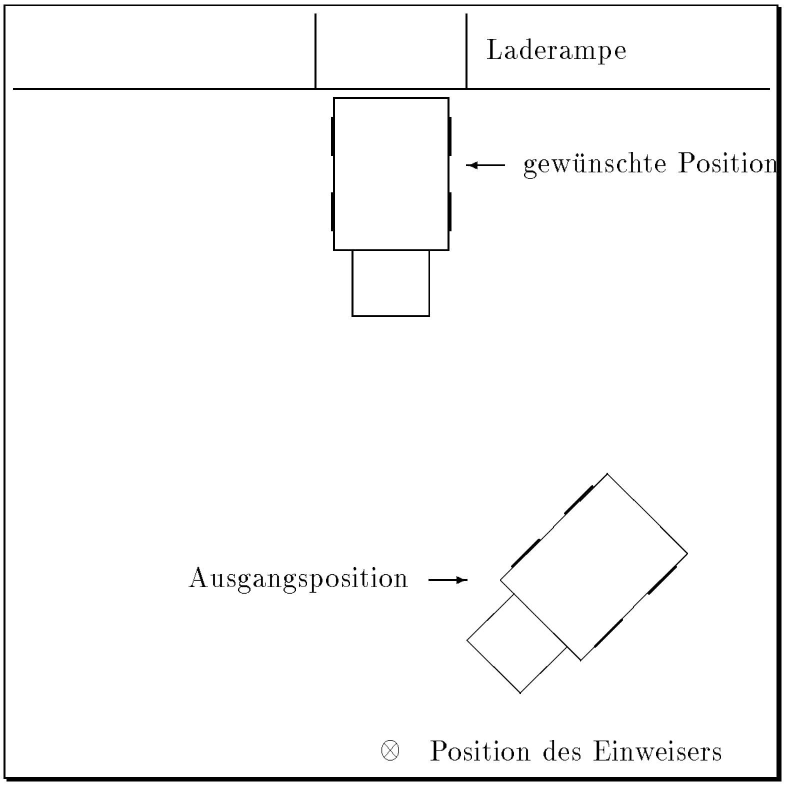


Abbildung 1.1: Situation im Beispiel „LKW zurücksetzen“

„Ein **kleines** Stück rückwärts“

als Universum U

$$\mathbb{N} = \{0, 1, \dots\}$$

sowie die Maßeinheit 1cm.

1. „Scharfes“ Kommando.

   150cm rückwärts.

   Für den Fahrer nicht realisierbar !

   Ferner:

   - Warum 150cm ?
   - Warum nicht 149cm oder 151cm ?

2. „Scharfes“ Kommando mit Schwellenwert.

   x cm rückwärts mit $x \leqq 150$.

   Warum ist dann 150.1cm nicht mehr erlaubt, weil schon kein „kleines Stück“ mehr ?

Wie man sieht, führt die zweiwertige Interpretation zu *paradoxen* Situationen und Resultaten.

Ausweg (ZADEH)
$Klein : U \to \langle 0, 1 \rangle$ als reellwertiges Prädikat, etwa

$$Klein(x) =_{def} \frac{1}{1+x}.$$

Vorstellung von Zadeh Dahinterliegende Fuzzy-Menge F, die durch ihre Zugehörigkeitsfunktion $\mu_F : U \to \langle 0, 1 \rangle$ (auch membership-function genannt) charakterisiert wird.

Grundsätzliche Feststellung Wir machen in dieser Vorlesung **keine** Unterscheidung zwischen einer „Fuzzy-Menge F über einem Universum U" und der „Zugehörigkeitsfunktion μ_F von F" mit

$$\mu_F : U \to \langle 0, 1 \rangle,$$

weil diese Unterscheidung logisch-mathematisch **sinnlos** ist, denn es ist nicht möglich, den Terminus „F ist Fuzzy-Menge über U" in Abgrenzung zur Zugehörigkeitsfunktion μ_F zu definieren. Demgemäß definieren wir grundsätzlich

Definition 1.3.2
F ist eine Fuzzy-Menge über U

$=_{def}$ $F : U \to \langle 0, 1 \rangle$.

Bemerkungen zu **Definition 1.3.2**.

1. Entsprechend **Definition 1.3.2** sind einstellige reellwertige (oder „LUKASIEWICZsche" Prädikate über U Fuzzy-Mengen über U und umgekehrt. Demgemäß werden wir **nicht** zwischen einstelligen reellwertigen Prädikaten über U und Fuzzy-Mengen über U unterscheiden.

2. In den folgenden Betrachtungen dieser Vorlesung werden wir uns auf den Fall, daß von U in $\langle 0, 1 \rangle$ abgebildet wird, beschränken. Wir sehen dies als „*Standard-Fall*" an und sprechen gegebenenfalls von *Standard*-Fuzzy-Mengen über U.

   Wird das reelle Intervall $\langle 0, 1 \rangle$ durch die Menge aller *rationalen* Zahlen $r \in \langle 0, 1 \rangle$ ersetzt, sprechen wir von *rationalen* Fuzzy-Mengen über U; Abbildungen F mit

   $$F : U \to \left\{0, \frac{1}{n-1}, \frac{2}{n-1}, \ldots, \frac{n-2}{n-1}, 1\right\}$$

   könnte man n-wertige ($n \geqq 2$) Fuzzy-Mengen über U nennen. Für $n = 2$ fällt der Begriff der „zweiwertigen" Fuzzy-Menge mit dem einer charakteristischen Funktion zusammen.

3. Ein allgemeiner Rahmen für „*Nicht-Standard*" Fuzzy-Mengen ist durch die sogen. *L-Fuzzy-Mengen* gegeben. Man vergleiche dazu die folgende **Definition 1.3.3**.

Modellierung von unscharfen Begriffen der Umgangssprache durch Fuzzy-Mengen.
Wir stellen fest, daß wir bei der Kommunikation in einer Umgangssprache eine Fülle von unscharfen Begriffen antreffen und verwenden.
Beispiele dazu sind im Deutschen:

„groß", „klein", „schnell", „reich", „schön", „warm", „kalt", „heiß" usw.

Man kann feststellen, daß ohne Verwendung von unscharfen Begriffen eine Kommunikation in der Umgangssprache sehr schwerfällig oder gar unmöglich wäre. Verarbeitung von Umgangssprache (oder „natürlicher Sprache") auf einem Rechner setzt deshalb eine geeignete **Modellierung** von unscharfen Begriffen voraus, wofür wir Fuzzy-Mengen verwenden.

Wir betrachten dazu den unscharfen Begriff „warm", und zwar im Hinblick auf die Temperatur von Badewasser. Wir wollen diesen Begriff durch eine Fuzzy-Menge modellieren.

Dazu wählen wir als Universum U die Menge

$$U = \{0, 1, \ldots, 99, 100\}$$

der natürlichen Zahlen von 0 bis 100.

Die **Wahl** des Universums ist **kein** mathematisches Problem, sondern hängt vom Anwendungsproblem (d. h. Modellierungsproblem) ab. Hier scheinen uns die natürlichen Zahlen $0, 1, \ldots, 99, 100$ als Temperaturangaben von Wasser in *Grad Celsius* angemessen zu sein, weil es sich um **Badewasser** handelt; denn Sprünge um 1 Grad *Celsius* sind wohl in diesem Falle akzeptabel.

Handelt es sich aber z. B. um die Temperatur von Flüssigkeiten bei einer sensiblen chemischen Reaktion (etwa Farbfilmentwicklung), werden Temperatursprünge von 1 °C nicht tolerierbar sein. Man wird in diesem Fall etwa als U die Menge aller natürlichen Zahlen von 0 bis 1000, also

$$U = \{0, 1, \ldots, 999, 1000\}$$

wählen und 1 als $\frac{1}{10}$ °C interpretieren.

Modellierung 1. „Warmes Badewasser"

$$WARM_1(x) =_{def} 1 - \frac{3}{3+x} \qquad x \in \{0, 1, \ldots, 99, 100\}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} WARM_1(0) &= 0 \\ WARM_1(6) &= \frac{1}{2} \\ WARM_1(30) &= \frac{10}{11} = 0.\overline{90} \\ WARM_1(60) &= \frac{20}{21} = 0.952\ldots \end{aligned}$$

Der gesamte Werteverlauf ist in Abbildung 1.2 dargestellt.

Im Temperaturbereich von 0 °C bis etwa 35 °C gibt $WARM_1$ eine akzeptable Modellierung des unscharfen Begriffs „warmes Badewasser", über 35 °C kann man das nicht akzeptieren, denn die Fuzzy-Menge $WARM_1$ ist „*kumulativ*", d. h. monoton wachsend, und das bedeutet, daß das Wasser umso besser als „warmes Badewasser" geeignet ist, je näher seine Temperatur an 100 °C liegt — wohl eine nicht sehr realistische Beurteilung !

Modellierung 2. „Warmes Badewasser"

$$WARM_2(x) =_{def} 1 - \frac{3}{3+x^2} \qquad x \in \{0, 1, \ldots, 99, 100\}$$

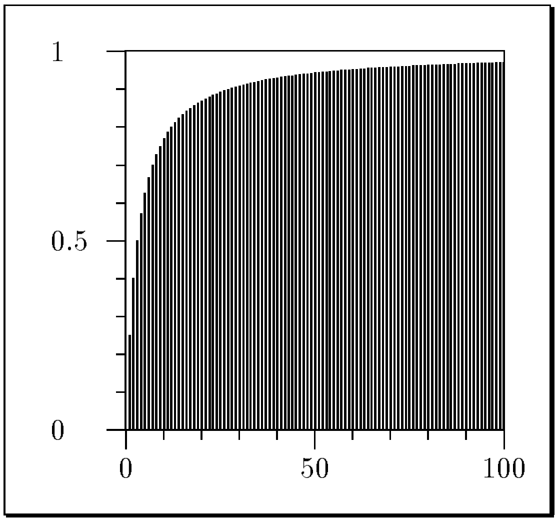


Abbildung 1.2: Werteverlauf von $WARM_1$

Dann gilt

$$\begin{aligned} WARM_2(0) &= 0 \\ WARM_2(6) &= \frac{12}{13} = 0.923\ldots \\ WARM_2(30) &= \frac{300}{301} = 0.996\ldots \\ WARM_2(60) &= \frac{1200}{1201} = 0.999\ldots \end{aligned}$$

Der gesamte Werteverlauf ist in Abbildung 1.3 dargestellt.

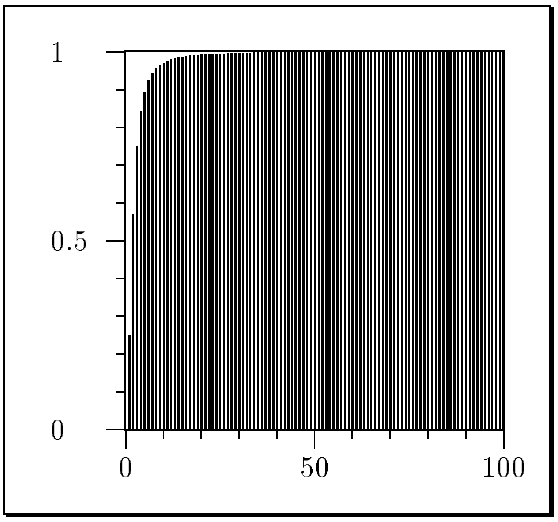


Abbildung 1.3: Werteverlauf von $WARM_2$

Diese Modellierung ist noch weniger geeignet als $WARM_1$, denn sie ist nicht nur kumulativ („je wärmer, desto besser"), sondern sie gibt auch im Temperaturbereich

unter 35 °C eine **nicht** akzeptable Beurteilung (im allgemeinen wird man Wasser mit der Temperatur von 6 °C **nicht** mit 0.923... als „Warm“ beurteilen).

Modellierung 3. „Warmes Badewasser“

$$WARM_3(x) =_{def} \frac{1}{1+\sqrt[2]{|35-x|}} \qquad x \in \{0,1,\dots,99,100\}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} WARM_3(35) &= 1 \\ WARM_3(34) = WARM_3(36) &= \frac{1}{2} \\ WARM_3(31) = WARM_3(39) &= \frac{1}{3} \\ WARM_3(26) = WARM_3(44) &= \frac{1}{4} \\ WARM_3(19) = WARM_3(51) &= \frac{1}{5} \\ WARM_3(0) = WARM_3(70) &= 0.144\dots \end{aligned}$$

Der gesamte Werteverlauf ist in Abbildung 1.4 dargestellt.

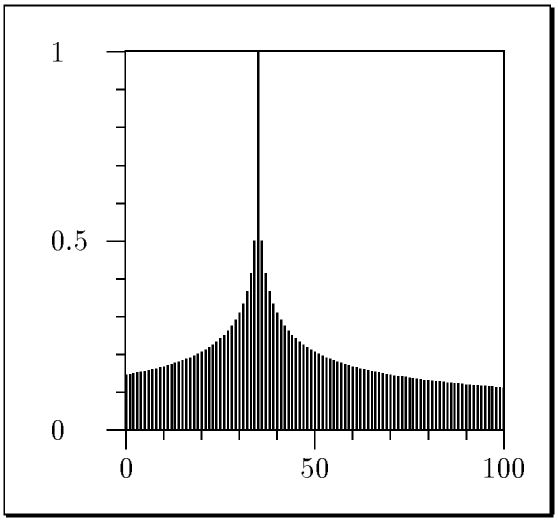


Abbildung 1.4: Werteverlauf von $WARM_3$

Diese Fuzzy-Menge ist **nicht** kumulativ, der Wahrheitswert fällt ab $x = 35$ nach „unten“ und „oben“ symmetrisch ab. Nach „unten“ ist der Abfall akzeptabel, vielleicht etwas zu schnell (für Babies geeignet), nach „oben“ ist der Abfall wohl nicht stark genug; denn Wasser mit der Temperatur von 51 °C ist wohl als Badewasser schon „ungeeignet“ (Wert 0) und nicht mit dem Wert $\frac{1}{5}$ geeignet.

Modellierung 4. „Warmes Badewasser“

$$WARM_4(x) =_{def} \begin{cases} e^{0.1\cdot(x-35)}, & \text{falls } x \leqq 35 \\ e^{0.4\cdot(35-x)}, & \text{falls } x > 35 \end{cases} \qquad x \in \{0,1,\dots,99,100\}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} WARM_4(0) &= 0.030\ldots \\ WARM_4(10) &= 0.082\ldots \\ WARM_4(20) &= 0.223\ldots \\ WARM_4(30) &= 0.606\ldots \\ WARM_4(35) &= 1 \\ WARM_4(40) &= 0.135\ldots \\ WARM_4(50) &= 0.002\ldots \end{aligned}$$

Der gesamte Werteverlauf ist in Abbildung 1.5 dargestellt.

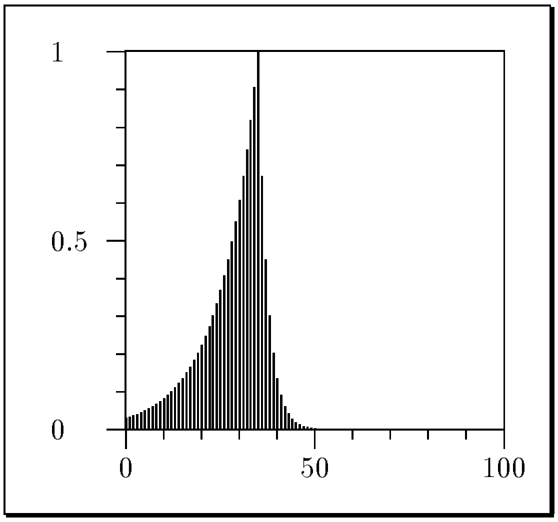


Abbildung 1.5: Werteverlauf von $WARM_4$

Diese Fuzzy-Menge ist **nicht** kumulativ, der Wahrheitswert fällt ab $x = 35$ nach „unten“ und „oben“ ab, und man kann das „Gefälle“ der Kurve für „oben“ und „unten“ getrennt durch die Faktoren in den Exponenten der beiden ‘Teilfunktionen’ festlegen.

Literatur/Historisches In [24] entwickelt Jan Łukasiewicz erste Ideen zum Aufbau mehrwertiger Logiken. Anlaß dafür ist das Problem, Wahrscheinlichkeitsaussagen durch Wahrheitswerte zu bewerten.

Derselbe Autor beschreibt in [25] den Aufbau einer dreiwertigen Logik.

Ebenfalls von Łukasiewicz stammen [26] sowie [27] (zusammen mit Alfred Tarski), wo Konzeption und Aufbau der endlich-wertigen und unendlich-wertigen „Łukasiewicz-schen“ Logiken beschrieben werden.

Unabhängig von Łukasiewicz entwickelte der US-amerikanische Logiker E. L. Post Ideen zum Aufbau mehrwertiger Logiken. Siehe dazu [30].

Die Entwicklung der *Fuzzy-Logik* (und der gesamten *Fuzzy-Methodologie*) im heutigen Sinne begann mit der Arbeit [49] von Lotfi A. Zadeh.

Ein Vorläufer von Zadeh ist Max Black [7]. Allerdings ist der philosophische Ausgangspunkt bei Black (“Vagueness”) ein anderer als beim Vorläufer Łukasiewicz („Probability“).

Eine sehr informationsreiche Arbeit zur „Vorläuferlinie“, die auf Black zurückgeht, findet sich in der Arbeit [16] von Goguen.

Von Goguen stammt eine wichtige *Verallgemeinerung* des Begriffs „Fuzzy Set“ von Zadeh als Abbildung

$$F : U \to \langle 0, 1\rangle$$

zum Begriff der “L – Fuzzy Sets”. Zur Definition dieser Verallgemeinerung sei ein Verband L (mit Null- und Einselement) gegeben. Sei ferner U ein Universum.

Definition 1.3.3
F ist eine L – Fuzzy Set über U

$=_{def}$ $F : U \to L$.

1.4 Beziehungen von Fuzzy-Mengen zu scharfen Mengen

Gegeben sei ein Universum U und eine (Standard-) *Fuzzy*-Menge F, d. h.

$$F : U \to \langle 0, 1\rangle\,.$$

Gegeben sei ferner ein fixiertes $c \in \langle 0, 1\rangle$.

Definition 1.4.1

1. *Der Support $SUPP(F)$ von F*

   $SUPP(F)$
   $=_{def} \{x \,|\, x \in U \wedge F(x) > 0\}$

2. *Der c-Schnitt (c-Cut) $CUT_c(F)$ von F*

   $CUT_c(F)$
   $=_{def} \{x \,|\, x \in U \wedge F(x) \geqq c\}$

3. *Der starke c-Schnitt (c-Cut) $CUT'_c(F)$ von F*
   $=_{def} \{x \,|\, x \in U \wedge F(x) > c\}$

4. *Die c-Ebene (c-Level) von F*

   $LEV_c(F)$
   $=_{def} \{x \,|\, x \in U \wedge F(x) = c\}$

5. *Der Kern von F*

   $KER(F)$
   $=_{def} \{x \,|\, x \in U \wedge F(x) = 1\}$

6. *Der Co-Kern von F*

   $COKER(F)$
   $=_{def} \{x \,|\, x \in U \wedge F(x) = 0\}$

Folgerung 1.4.1

1. $SUPP(F) = \bigcup\limits_{\substack{c \in \langle 0,1\rangle \\ c > 0}} LEV_c(F)$

2. $CUT_c(F) = \bigcup\limits_{\substack{d \in \langle 0,1 \rangle \\ d \geqq c}} LEV_d(F)$

3. $CUT'_c(F) = \bigcup\limits_{\substack{d \in \langle 0,1 \rangle \\ d > c}} LEV_d(F)$

4. $CUT_c(F) = CUT'_c(F) \cup LEV_c(F)$

Definition 1.4.2

1. $F = G$
   $=_{def}$ *Für jedes* $x \in U$ *gilt:* $F(x) = G(x)$

2. *Die Zerlegung (Partition) von* F
   $PART(F)$
   $=_{def} \{LEV_c(F) | c \in \langle 0,1 \rangle\}$

Folgerung 1.4.2

1. *Für jede Fuzzy-Menge* F *ist das Mengensystem* $PART(F)$ *eine Partition (Zerlegung) des Universums* U, *d. h.*
   1.1. $\bigcup PART(F) = U$ *(Überdeckung von* U*)*
   1.2. $\forall Z \forall Z' \, (Z, Z' \in PART(F) \wedge Z \neq Z' \rightarrow Z \cap Z' = \phi)$ *(*$PART(F)$ *ist disjunkt)*

2. *Für beliebige Fuzzy-Mengen* $F, G : U \rightarrow \langle 0,1 \rangle$ *gilt:*

   Wenn $F = G$, *so* $PART(F) = PART(G)$.

Problem

Kann man aus $PART(F)$ die Fuzzy-Menge F rekonstruieren ?

Antwort: Im allgemeinen nicht, es sei denn, man hat zu jedem Zerlegungselement Z die „Niveauzahl" c, d. h. mit $Z = LEV_c(F)$ gegeben.

1.5 Einige wichtige Eigenschaften (Definitionen) von (für) Fuzzy-Mengen

Definition 1.5.1

Die ***Höhe*** *bzw.* ***Co-Höhe*** *(****Tiefe****) einer Fuzzy-Menge* F *über* U

1. $HEIGHT(F)$
   $=_{def} Sup \{F(x) | x \in U\}$

2. $COHEIGHT(F) = DEPTH(F)$
   $=_{def} Inf \{F(x) | x \in U\}$

Diese Begriffe spielen an vielen Stellen, insbesondere in den Anwendungen, eine große Rolle. Sie dienen u. a. dazu, die folgenden speziellen Eigenschaften von Fuzzy-Mengen zu definieren

Definition 1.5.2

1. *F ist normal*

$=_{def}$ *HEIGHT*$(F) = 1$

2. *F ist conormal*
   $=_{def}$ *COHEIGHT*$(F) =$ *DEPTH*$(F) = 0$

3. *F ist stark normal*
   $=_{def} \exists x(x \in U \wedge F(x) = 1)$

4. *F ist stark conormal*
   $=_{def} \exists x(x \in U \wedge F(x) = 0)$

Offenbar folgt die Normalität (bzw. die *Co*Normalität) aus der starken Normalität (bzw. aus der starken Conormalität). Die Umkehrungen gelten jedoch im allgemeinen nicht.

Definition 1.5.3
Sei F Fuzzy-Menge über U.

1. *F ist universell*
   $=_{def} \forall x(x \in U \to F(x) = 1)$

2. *F ist leer*
   $=_{def} \forall x(x \in U \to F(x) = 0)$

3. *F ist zweiwertig*
   $=_{def} \forall x(x \in U \to F(x) \in \{0, 1\})$

4. *F ist n-wertig* $(n \geqq 2)$
   $=_{def} \forall x \left(x \in U \to F(x) \in \left\{0, \frac{1}{n-1}, \frac{2}{n-1}, \ldots, \frac{n-2}{n-1}, 1\right\}\right)$

Folgerung 1.5.1

1. *Es gibt über U genau eine universelle und genau eine leere Fuzzy-Menge. Wir bezeichnen diese durch* $\mathbb{U}$ *und* $\emptyset$.

2. *Ist F universell oder leer, so gilt*

$$PART(F) = \{U\}.$$

3. *Ist F zweiwertig, so gilt*

$$PART(F) = \{KER(F), COKER(F)\}.$$

4. *Ist F n-wertig, so besteht PART(F) aus höchstens n Mengen, d. h. Card PART(F))* $\leqq n$.

Für beliebige Fuzzy-Mengen F und G über U definieren wir nun eine „scharfe" Teilmengenbeziehung $F \subseteqq G$ wie folgt:

Definition 1.5.4
$F \subseteqq G$
$=_{def} \forall x(x \in U \to F(x) \leqq G(x))$

Folgerung 1.5.2
Für jede Fuzzy-Menge F über U gilt:

$$\emptyset \subseteqq F \subseteqq \mathbb{U}.$$

Theorem 1.5.3
Für jede Fuzzy-Menge F, G, H über U gilt:

1. *Reflexivität:*
$$F \subseteqq F$$

2. *Transitivität:*
$$\text{Wenn } F \subseteqq G \text{ und } G \subseteqq H \text{, so } F \subseteqq H$$

3. *Antisymmetrie:*
$$\text{Wenn } F \subseteqq G \text{ und } G \subseteqq F \text{, so } F = G.$$

2. Operationen mit scharfen bzw. mit unscharfen Mengen

2.1 Hilfsmittel aus der Ordnungstheorie und aus der Algebra: Halbordnungen, Verbände, boolesche Algebren

Wir definieren eine Reihe algebraischer Begriffe, die für die Beschreibung und das Verständnis einiger im folgenden auftretenden Strukturen von großer Bedeutung sind.

Gegeben seien eine nicht-leere Menge M sowie eine binäre Relation R über M, d. h. $R \subseteqq M \times M$. Dann definiert man:

Definition 2.1.1

1. *R ist reflexiv über $M =_{def}$ Für jedes $x \in M$ gilt: xRx.*
2. *R ist transitiv $=_{def}$ Für jedes x, y und z gilt: Wenn xRy und yRz, so xRz.*
3. *R ist antisymmetrisch*
   $=_{def}$ Für jedes x und y gilt: Wenn xRy und yRx, so $x = y$.
4. *R ist symmetrisch $=_{def}$ Für jedes $x, y \in M$ gilt: Wenn xRy, so yRx.*
5. *R ist linear über $M =_{def}$ Für jedes $x, y \in M$ gilt: xRy oder yRx.*
6. *R ist (reflexive)* ***Quasihalbordnungsrelation*** *über M*
   $=_{def}$ R erfüllt die Eigenschaften 1 und 2.
7. *R ist (reflexive)* ***Halbordnungsrelation*** *über M*
   $=_{def}$ R erfüllt die Eigenschaften 1, 2 und 3.
8. *R ist (reflexive)* ***Ordnungsrelation*** *über M*
   $=_{def}$ R erfüllt 1, 2, 3 und 5.
9. *R ist* ***Ähnlichkeitsrelation*** *über $M =_{def}$ R erfüllt 1 und 4.*
10. *R ist* ***Äquivalenzrelation*** *über $M =_{def}$ R erfüllt 1, 2 und 4.*

Bemerkung
In den Bedingungen 2 und 3 der obigen Definitionen sind die Voraussetzungen $x, y, z \in M$ nicht erforderlich, da diese aus den Prämissen xRy und xRz folgen, weil $R \subseteqq M \times M$.

Aufgabe 2.1.1 *Man veranschauliche sich die angegebenen Eigenschaften binärer Relationen durch geeignete Beispiele.*

Aufgabe 2.1.2 *Man verifiziere den (bekannten) eineindeutigen Zusammenhang zwischen Äquivalenzrelationen über M und* ***Zerlegungen*** *von M.*

Aufgabe 2.1.3 *Gegeben sei eine* ***Quasi****halbordnungsrelation R über M. Wir definieren für beliebige $x, y \in M$:*

$$x \approx y \;=_{def}\; xRy \text{ und } yRx$$

1. *Man zeige, daß $\approx$ eine Äquivalenzrelation über M ist.*

2. *Sei $M/{\approx}$ die durch $\approx$ in M erzeugte Zerlegung. Wir definieren für $K, L \in M/{\approx}$:*

   $$K \leqq L \;=_{def}\; \text{Es gibt ein } x \in K \text{ und ein } y \in L, \text{ so daß } xRy.$$

   Man beweise, daß $\leqq$ eine Halbordnungsrelation über $M/{\approx}$ ist.

Bemerkung Ersetzt man Bedingung 1 durch

1′ R ist *irreflexiv* über $M =_{def}$ Es gibt **kein** $x \in M$ mit xRx,

dann wird 3 beweisbar in der Form

3′ Für alle $x, y \in M$ gilt: Wenn xRy, so **nicht** yRx.

Ferner muß Bedingung 5 jetzt formuliert werden in der Form

5′ Für alle $x, y \in M$ gilt: xRy oder yRx oder $x = y$.

Die folgende Definition präzisiert den für viele Anwendungen wichtigen Begriff des Verbandes.

Definition 2.1.2
$\mathfrak{V} = [M, \sqcap, \sqcup]$ *ist ein* ***Verband***

$=_{def}$ *0. M ist eine nicht-leere Menge und*

$$\sqcap : M \times M \to M \text{ und}$$
$$\sqcup : M \times M \to M$$

1. Für alle $x, y, z \in M$ gilt:

$$\begin{aligned} x \sqcap (y \sqcap z) &= (x \sqcap y) \sqcap z \\ x \sqcap y &= y \sqcap x \\ x \sqcap (y \sqcup x) &= x \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} x \sqcup (y \sqcup z) &= (x \sqcup y) \sqcup z \\ x \sqcup y &= y \sqcup x \\ x \sqcup (y \sqcap x) &= x \end{aligned}$$

Folgerung 2.1.1
In beliebigen Verbänden sind die Operationen idempotent, d. h. für beliebige $x \in M$ gilt:

$$x \sqcap x = x \qquad \text{und} \qquad x \sqcup x = x.$$

Beweis
Aufgabe 2.1.4. ■

Definition 2.1.3
$\mathfrak{V} = [M, \sqcap, \sqcup]$ *heißt* ***distributiver*** *Verband*

$=_{def}$ *$\mathfrak{V}$ ist ein Verband, d. h. es gelten die Bedingungen 0, 1 und 2 von* **Definition 2.1.2** *und ferner gilt:*

3. *Für alle $x, y, z \in M$:*

$$\begin{aligned} x \sqcap (y \sqcup z) &= (x \sqcap y) \sqcup (x \sqcap z) \\ x \sqcup (y \sqcap z) &= (x \sqcup y) \sqcap (x \sqcup z) \end{aligned}$$

Aufgabe 2.1.5 *Man konstruiere distributive und auch* ***nicht****-distributive Verbände.*

Aufgabe 2.1.6 *In* **Definition 2.1.3** *kann eine Bedingung weggelassen werden, weil sie aus den übrigen beweisbar ist. Welche ?*

In einer Reihe von Anwendungen spielt der Begriff des Verbandes mit Nullelement und mit Einselement eine Rolle, wobei die betreffenden Verbände sowohl distributiv als auch nicht-distributiv sein können.

Definition 2.1.4
$\mathfrak{V} = [M, \sqcap, \sqcup, \emptyset, e]$ *heißt Verband mit Nullelement $\emptyset$ und Einselement e*
$=_{def}$ *$\mathfrak{V}$ ist ein Verband, d. h. es gelten die Bedingungen 0, 1 und 2 von* **Definition 2.1.2** *und ferner gilt:*

4. *Für jedes $x \in M$:*

$$x \sqcap \emptyset = \emptyset$$
$$x \sqcup \emptyset = x$$
$$x \sqcap e = x$$
$$x \sqcup e = e$$

Aufgabe 2.1.7 *Man beweise, daß in einem Verband sowohl Nullelement als auch Einselement eindeutig bestimmt sind.*

Aufgabe 2.1.8 *Es sei $\mathfrak{V} = [M, \sqcap, \sqcup, \emptyset, e]$ ein Verband mit dem Nullelement $\emptyset$ und dem Einselement e. Welche der unter 4 angegebenen Bedingungen sind aus den restlichen beweisbar ?*

Wir schließen diesen Abschnitt mit der Definition des Begriffs der BOOLEschen Algebra, der in vielen Untersuchungen aus der Logik und auch aus der Informatik verwendet wird

Definition 2.1.5
1. $\mathfrak{B} = [M, \sqcap, \sqcup, \emptyset, e, \urcorner]$ *heißt* ***BOOLEsche Algebra***
$=_{def}$ *$\mathfrak{V} = [M, \sqcap, \sqcup, \emptyset, e]$ ist ein distributiver Verband mit dem Nullelement $\emptyset$ und dem Einselement e und ferner gilt:*

5. $^-$ *ist eine eindeutige Abbildung von M in M, so daß für jedes $x \in M$ gilt:*

$$\overline{\overline{x}} = x$$
$$x \sqcap \overline{x} = \emptyset$$
$$x \sqcup \overline{x} = e$$

2. *Eine* BOOLE*sche Algebra heißt nicht-trivial, falls sie mindestens zwei Elemente enthält, d. h. Card $M \geqq 2$ ist.*

Beispiele für Boolesche Algebren findet man in den Abschnitten 2.2 und 2.3.

Folgerung

1. In einer nicht-trivialen BOOLEschen Algebra gilt $\emptyset \neq e$.

2. Die Bedingungen $x \sqcap \overline{x} = \emptyset$ und $x \sqcup \overline{x} = e$ sind in beliebigen BOOLEschen Algebren beweisbar.

3. In beliebigen BOOLEschen Algebren gelten die folgenden Rechenregeln, auch als „DE MORGANsche Gesetze" bekannt:

$$\overline{x \sqcap y} = \overline{x} \sqcup \overline{y}$$
$$\overline{x \sqcup y} = \overline{x} \sqcup \overline{y}$$

2.2 Boolesche Funktionen

BOOLEsche Funktionen sind die „einfachste" Form von Funktionen überhaupt, weil ihre Argumente und Werte stets in $\{0,1\}$ liegen. Sie werden in vielen Gebieten, vorrangig in wichtigen Teilgebieten der („scharfen", d. h. „zweiwertigen") Informatik angewendet, z. B. in der Schaltwerktheorie. Sei n eine natürliche Zahl mit $n \geqq 0$.

Definition 2.2.1
β ist eine n-stellige BOOLE*sche Funktion*
$=_{def}$ $\beta: \{0,1\}^n \to \{0,1\}$.

Anmerkung Im Spezialfall $n = 0$ gibt es genau zwei (nullstellige) BOOLEsche Funktionen, die durch die Werte 0 bzw. 1 charakterisiert werden.

Folgerung 2.2.1
Es gibt genau 2^{2^n} BOOLE*sche Funktionen der Stellenzahl n, d. h.*

$$\begin{array}{lllll} 2^{2^0} & = 2^1 & = & 2 & \text{im Fall } n = 0 \\ 2^{2^1} & = 2^2 & = & 4 & \text{im Fall } n = 1 \\ 2^{2^2} & = 2^4 & = & 16 & \text{im Fall } n = 2 \\ 2^{2^3} & = 2^8 & = & 256 & \text{im Fall } n = 3 \\ & & & \vdots & \end{array}$$

Beweis Es gibt genau 2^n mögliche Argumentvektoren, also gibt es zu diesen Argumentvektoren 2^{2^n} mögliche Zuordnungen (also Funktionen) der Werte 0 und 1.

Dies kann allerdings nur als „Plausibilitätsbetrachtung" gewertet werden; ein mathematisch korrekter Beweis wird z. B. durch Induktion über n geführt.

Anmerkung Die Anzahl der BOOLEschen Funktionen wächst mit n sehr schnell, so daß in den Anwendungen BOOLEscher Funktionen häufig Fragen der Effizienz entsprechender Algorithmen (Laufzeit und Platzbedarf) eine entscheidende Rolle spielen.

Für die Stellenzahlen $n = 1$ und $n = 2$ kann man die entsprechenden BOOLEschen Funktionen leicht durch die folgenden Tabellen charakterisieren:

Fall $n = 1$

	β_0^1	β_1^1	β_2^1	β_3^1
0	0	1	0	1
1	0	0	1	1

Fall $n = 2$

	β_0^2	β_1^2	β_2^2	β_3^2	β_4^2	β_5^2	β_6^2	β_7^2	β_8^2	β_9^2	β_{10}^2	β_{11}^2	β_{12}^2	β_{13}^2	β_{14}^2	β_{15}^2
00	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
01	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
10	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
11	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1

Wir stellen fest, daß in β_i^2 (wie auch in β_i^1) der untere Index i sich dadurch errechnet, indem man den zu β_i^2 gehörenden Vektor der Funktionswerte „nach rechts umlegt“ und das Resultat als Binärdarstellung einer natürlichen Zahl interpretiert.

Beispiel

$$\beta_{11}^2 \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \sim 1011 \sim 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 8 + 2 + 1 = 11$$

Wie üblich verwenden wir für eine Reihe der oben eingeführten Funktionen spezielle Bezeichnungen, und zwar

$$\begin{array}{rcll}
\beta_1^1 & \sim & \textit{non} \text{ oder auch } \textit{not} & \\
\beta_1^2 & \sim & \textit{nor} & \text{(verneintes oder)} \\
\beta_6^2 & \sim & \textit{exor} & \text{(exclusives oder)} \\
\beta_7^2 & \sim & \textit{nand} & \text{(verneintes und)} \\
\beta_8^2 & \sim & \textit{and} \text{ bzw. } \textit{et} & \\
\beta_{11}^2 & \sim & \textit{imp} \text{ bzw. } \textit{seq} & \text{(wenn ... so)} \\
\beta_{14}^2 & \sim & \textit{or} \text{ bzw. } \textit{vel} & \text{(inclusives oder)}
\end{array}$$

Aufgabe 2.2.1 *Man beschreibe die übrigen der angegebenen* BOOLE*schen Funktionen mit Wörtern der deutschen Sprache.*

Für Theorie und Praxis der BOOLEschen Funktionen ist das folgende Minterm-Normalformen-Theorem wesentlich.

Zur eleganten Formulierung dieses Theorems verwendet man die folgenden Abkürzungen und Bezeichnungen:

Für $\beta_1^1(x) = non(x)$ schreibt man $\overline{x}$.

Ferner wird definiert für $e \in \{0,1\}$:

$$x^e =_{def} \begin{cases} \overline{x}, & \text{falls } e = 0 \\ x, & \text{falls } e = 1 \end{cases}$$

Für $\beta_8^2(x,y) = and(x,y) = et(x,y)$ schreibt man xy, was auch als Produkt der natürlichen Zahlen $x, y \in \{0,1\}$ gedeutet werden kann.

Iterierte Konjunktionen von Ausdrücken der Form x^e dürfen wegen der Assoziativität und Kommutativität der *and*-Funktion **ohne** Klammern und in **beliebiger** Reihenfolge geschrieben werden.

Minterme sind dann Ausdrücke der Form

$$x_1^{e_1} x_2^{e_2} \cdots x_n^{e_n} \qquad (n \geqq 1), \tag{2.1}$$

wobei die Variablen $x_1, \ldots, x_n$ paarweise verschieden sind und $e_1, \ldots, e_n \in \{0,1\}$ gilt.

Für $\beta_{14}^2(x,y) = or(x,y) = vel(x,y)$ gelten ebenfalls die Assoziativität und Kommutativität; ferner schreiben wir $x \vee y$ anstelle von $or(x,y)$ bzw. $\bigvee_{i \in I} K_i$ für „mehrgliedrige“ Alternativen (d. h. Iterationen von *or*).

Theorem 2.2.2
Ist $\beta : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$, $n \geqq 1$, so gilt die Darstellung

$$\beta(x_1, \ldots, x_n) = \bigvee_{\substack{e_1,\ldots,e_n \in \{0,1\} \\ \beta(e_1,\ldots,e_n)=1}} x_1^{e_1} \cdots x_n^{e_n}$$

Beweis Man diskutiere die folgenden 2 Fälle:

Fall 1: $\beta(x_1, \ldots, x_n) = 1$

Dann nimmt die „rechte Seite“ wegen

$$e_1^{e_1} \cdots e_n^{e_n} = 1$$

den Wert 1 an.

Fall 2: $\beta(x_1, \ldots, x_n) = 0$

Dann nehmen **alle** Minterme der „rechten Seite“ den Wert 0 an, also erhält die rechte Seite den Wert 0.

q. e. d.

Das folgende Theorem hat entscheidende Bedeutung für das „Rechnen“ mit *scharfen* Mengen, wie Abschnitt 2.3 zeigen wird.

Theorem 2.2.3

$$\mathfrak{B}^2 =_{def} [\{0,1\}, and, or, 0, 1, non]$$

ist eine BOOLE*sche Algebra, und zwar bis auf Isomorphie die „kleinste“ nicht-triviale* BOOLE*sche Algebra.*

Beweis

1. $\mathfrak{B}^2$ ist eine BOOLEsche Algebra. — Beweis durch Nachprüfen der entsprechenden Axiome (siehe **Definition 2.1.5**).

2. Wir zeigen: Ist
$$\mathfrak{B} = [M, \sqcap, \sqcup, \emptyset, e, \overline{}]$$
eine beliebige nicht-triviale BOOLEsche Algebra, so ist
$$\mathfrak{B}(\emptyset, e) =_{def} [\{\emptyset, e\}, \sqcap', \sqcup', \emptyset, e, \overline{}'],$$
wobei $\sqcap', \sqcup', \overline{}'$ die *Einschränkungen* der Operationen $\sqcap, \sqcup, \overline{}$ auf die Menge $\{\emptyset, e\}$ bedeuten, eine BOOLEsche Algebra.

3. **Ferner gilt:** Alle BOOLEschen Algebren der Form $\mathfrak{B}(\emptyset, e)$ mit $\emptyset \neq e$ sind isomorph, also isomorph zu $\mathfrak{B}^2$.

4. **Schließlich:** Keine BOOLEsche Algebra der Form $\mathfrak{B}(\emptyset, e)$ mit $\emptyset \neq e$ hat eine *echte* BOOLEsche *Unteralgebra*, weil keine der Mengen $\{\emptyset\}$ und $\{e\}$ abgeschlossen ist bezüglich $\overline{}'$ („Negation").

2.3 Operationen mit scharfen Mengen

Wir definieren jetzt die üblichen Operationen mit *scharfen* Mengen und zeigen ihren *engen Zusammenhang* mit BOOLEschen Funktionen. Das Aufweisen dieses Zusammenhangs führt zu einem vertieften Verständnis für *standard*-Operationen und *nicht-standard*-Operationen mit Fuzzy-Mengen.

Gegeben sei ein Universum U sowie Mengen M und N aus U.

Definition 2.3.1

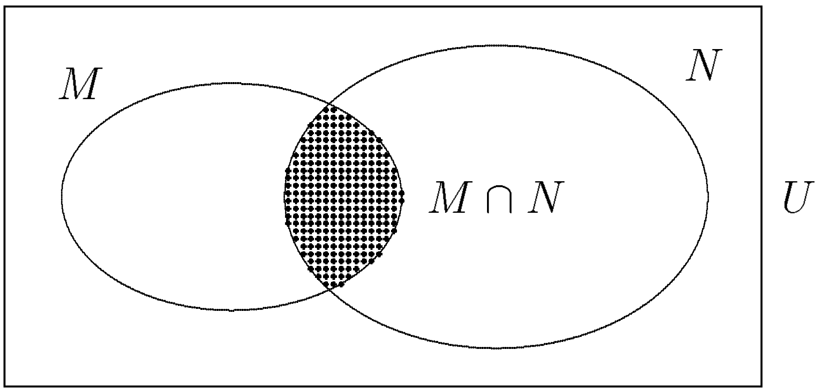
1. $M \cap N =_{def} \{x \mid x \in U \land x \in M \land x \in N\}$ *(Durchschnitt)*

2. $M \cup N =_{def} \{x \mid x \in U \land (x \in M \lor x \in N)\}$ *(Vereinigung)*

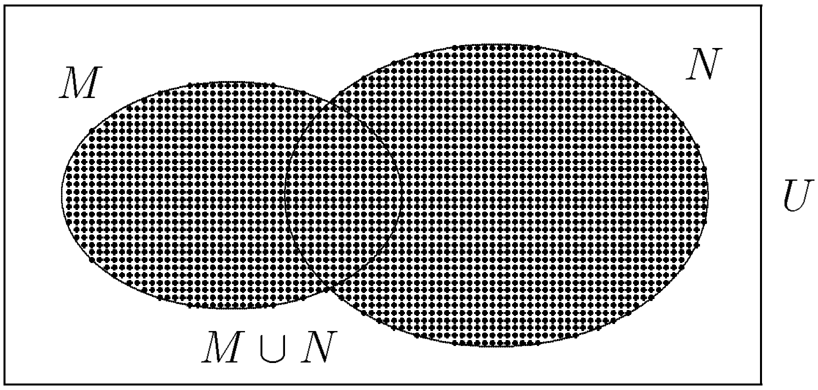
3. $\overline{M} =_{def} \{x \mid x \in U \land x \notin M\}$ *(Komplement bezügl. U)*

Veranschaulichung

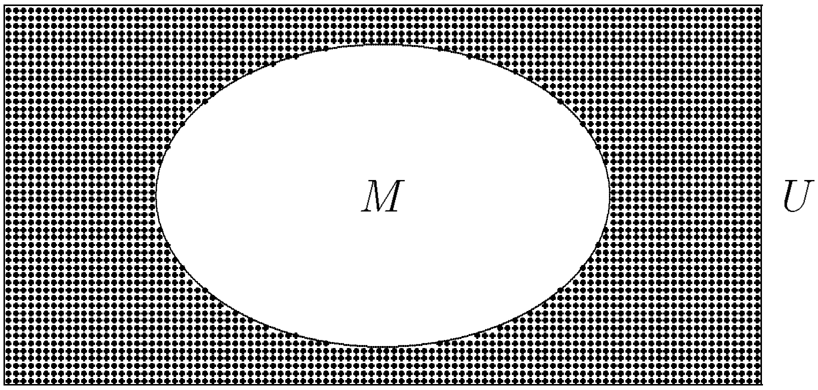
1. **Durchschnitt**



2. **Vereinigung**



3. **Komplement** bezüglich U



$\overline{M}$

Definition 2.3.2

1. ϕ *(die leere Menge)*
   $=_{def} \{x \mid x \in U \wedge x \neq x\}$
2. $\mathfrak{P}M =_{def} \{X \,|\, X \subseteqq M\}$

Theorem 2.3.1
Das System $\mathfrak{S} = [\mathfrak{P}M, \cap, \cup, \phi, M, \overline{}]$ *ist eine* Boole*sche Algebra.*

Beweis Nachprüfen der Bedingungen, durch die eine BOOLEsche Algebra definiert ist.
Aufgabe 2.3.1 !

Das folgende Theorem konstatiert einen engen Zusammenhang zwischen den oben definierten mengenalgebraischen Operationen und bestimmten BOOLEschen Funktionen.

Theorem 2.3.2
Für alle $x \in U$ *gilt:*

1. $\chi_{M \cap N}(x) = and\left(\chi_M(x), \chi_N(x)\right)$
2. $\chi_{M \cup N}(x) = or\left(\chi_M(x), \chi_N(x)\right)$
3. $\chi_{\overline{M}}(x) = non\left(\chi_M(x)\right)$

Beweis Rückgang auf die Definition der charakteristischen Funktion χ_M einer Menge $M \subseteqq U$ und die Definition der entsprechenden BOOLEschen Funktionen.

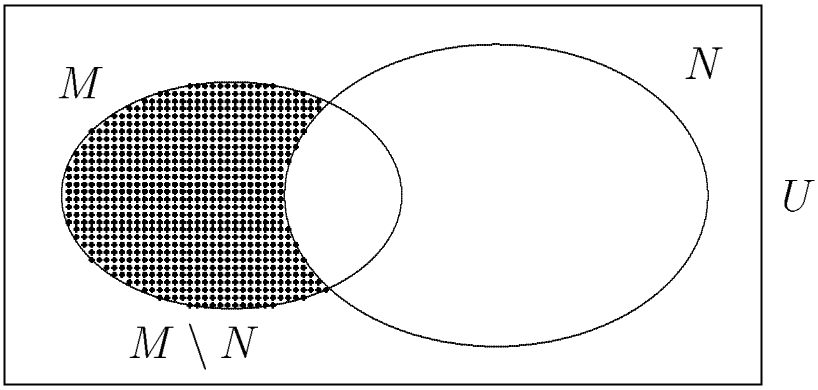
Wir definieren zwei weitere wichtige Operationen mit Mengen $M, N \subseteqq U$.

Definition 2.3.3

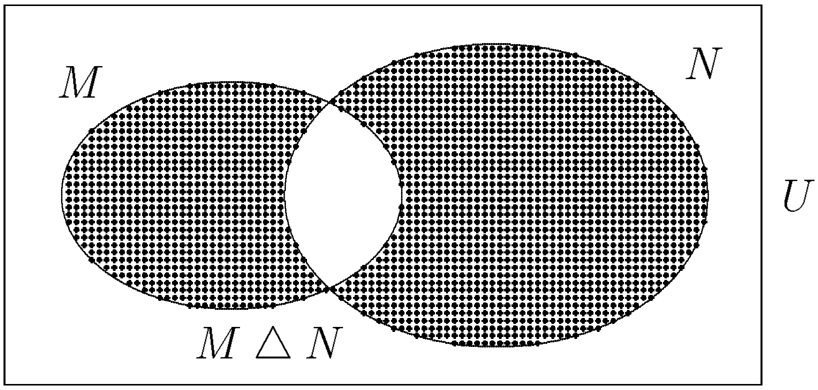
1. $M \setminus N$ *(Die Differenz der Mengen M und N)*
   $=_{def} \{x \mid x \in U \wedge x \in M \wedge x \notin N\}$
2. $M \triangle N$ *(Die symmetrische Differenz)*
   $=_{def} (M \setminus N) \cup (N \setminus M)$

Veranschaulichung

1. **Differenz**



2. **Symmetrische Differenz**



Aufgabe 2.3.2 *Man bestimme zweistellige* BOOLE*sche Funktionen β und β' so, daß für alle $x \in U$ gilt:*

1. $\chi_{M\setminus N}(x) = \beta\left(\chi_M(x), \chi_N(x)\right)$
2. $\chi_{M \triangle N}(x) = \beta'\left(\chi_M(x), \chi_N(x)\right)$

Umgekehrt zu dem in der obigen Übungsaufgabe gelösten Problem kann man die Frage stellen und beantworten, wie eine gegebene BOOLEsche Funktion eine Mengenoperation festlegt.

Gegeben seien — als *Beispiel* — die BOOLEschen Funktionen *nand* und *nor*, wobei (zur Erinnerung) diese Funktionen durch die folgende Tabelle definiert sind:

	nand	*nor*
00	1	1
01	1	0
10	1	0
11	0	0

Wir führen nun zweistellige Mengenoperationen $NAND(M,N)$ und $NOR(M,N)$ ein, die „implizit" über die charakteristischen Funktionen wie folgt definiert werden:

1. $\chi_{NAND(M,N)}(x) =_{def} nand\left(\chi_M(x), \chi_N(x)\right)$ $\qquad (x \in U)$
2. $\chi_{NOR(M,N)}(x) =_{def} nor\left(\chi_M(x), \chi_N(x)\right)$

Aufgabe 2.3.3 *Man drücke $NAND(M,N)$ und $NOR(M,N)$ (möglichst einfach) durch $\cap$, $\cup$ und $^{-}$ aus.*

Allgemeiner Fall Gegeben eine beliebige n-stellige BOOLEsche Funktion β, d. h.

$$\beta : \{0,1\}^n \to \{0,1\}.$$

Um unliebsame Trivial- und Spezialfälle auszuschließen, setzen wir $n \geqq 1$ voraus. Wir erzeugen nun eine n-stellige Mengenoperation B_β (kurz B) wie folgt:

Definition 2.3.4

$$\chi_{B(M_1,\dots,M_n)}(x) =_{def} \beta\left(\chi_{M_1}(x), \dots, \chi_{M_n}(x)\right), \qquad x \in U$$

Durch Anwendung des Minterm-Normalformen-Theorems erhält man das folgende Theorem, das eine Darstellung des Resultats $B(M_1, \dots, M_n)$ der Operation B gestattet. Wir definieren dazu in Analogie zu x^e für $e \in \{0,1\}$:

$$M^e =_{def} \begin{cases} \overline{M}, & \text{falls } e = 0 \\ M, & \text{falls } e = 1. \end{cases}$$

Theorem 2.3.3

$$B(M_1, \dots, M_n) = \bigcup_{\substack{e_1,\dots,e_n \in \{0,1\} \\ und\ \beta(e_1,\dots,e_n)=1}} \left(M_1^{e_1} \cap M_2^{e_2} \cap \dots \cap M_n^{e_n}\right)$$

Beweis Nach Definition von B gilt:

$$\chi_{B(M_1,\dots,M_n)}(x) = \beta\left(\chi_{M_1}(x), \dots, \chi_{M_n}(x)\right),$$

also nach dem Minterm-Normalformen-Theorem für β

$$\chi_{B(M_1,\dots,M_n)} = \bigvee_{\substack{e_1,\dots,e_n \in \{0,1\} \\ \text{und } \beta(e_1,\dots,e_n)=1}} \chi_{M_1}^{e_1}(x) \cdots \chi_{M_n}^{e_n}(x)$$

Daraus folgt aber durch Anwendung von **Theorem 2.3.2** und Rückgang auf die Definitionen der charakteristischen Funktion unmittelbar das formulierte Theorem.

2.4 Łukasiewiczsche Funktionen

Wir führen in Analogie zu den BOOLEschen Funktionen die folgende **neue** Begriffsbildung (Bezeichnung) ein.

Definition 2.4.1
λ ist eine n-stellige LUKASIEWICZ*sche Funktion*

$=_{def}$ $\lambda : \langle 0,1\rangle^n \to \langle 0,1\rangle$

Anmerkung Im Spezialfall $n = 0$ gibt es kontinuierlich viele LUKASIEWICZsche Funktionen, und zwar stellt jede fixierte reelle Zahl $c \in \langle 0,1\rangle$ eine solche Funktion dar.

Abzählbarkeitsfragen im Sinne der BOOLEschen Funktionen haben hier keinen („wenig“) Sinn.

Universelle Darstellungsätze (wie das Minterm-Normalformen-Theorem für BOOLEsche Funktionen) gibt es offensichtlich für LUKASIEWICZsche Funktionen nicht.

„Relativierte“ Darstellungssätze bisher spärlich, „noch viel zu tun“.

Fundamental ist das folgende *Erweiterungsprinzip*.

Gegeben seien eine n-stellige BOOLEsche Funktion $\beta : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ und eine n-stellige LUKASIEWICZsche Funktion $\lambda : \langle 0,1\rangle^n \to \langle 0,1\rangle$.

Definition 2.4.2
*λ ist **eine*** LUKASIEWICZ*sche Erweiterung von β*

$=_{def}$ *λ und β stimmen auf $\{0,1\}$ überein, d. h. für jedes $x_1, \ldots, x_n \in \{0,1\}$ gilt*

$$\lambda(x_1, \ldots, x_n) = \beta(x_1, \ldots, x_n)$$

Beispiele

1. **Fünf wichtige Erweiterungen der BOOLEschen Funktion *and***

   1. **Die Minimum-Konjunktion** et_{min} (kurz et_{m})

   $$\boxed{et_{\mathrm{m}}(x,y) =_{def} min(x,y)} \qquad x,y \in \langle 0,1\rangle$$

   2. **Die „*bold*“-Konjunktion** et_{bold} (kurz et_{b}), manchmal auch „beschränkte Differenz“ genannt.

   $$\boxed{et_{\mathrm{b}}(x,y) =_{def} max(0, x+y-1)} \qquad x,y \in \langle 0,1\rangle$$

   3. **Die „algebraische“ Konjunktion** et_{alg} (kurz et_{a}), manchmal auch „Produkt-Konjunktion“ genannt.

   $$\boxed{et_{\mathrm{a}}(x,y) =_{def} x \cdot y} \qquad x,y \in \langle 0,1\rangle$$

   4. **Die „schwach-drastische“ Konjunktion** et_{sd}

   $$\boxed{\begin{array}{l} et_{\mathrm{sd}}(1,y) =_{def} y \\ et_{\mathrm{sd}}(x,1) =_{def} x \\ et_{\mathrm{sd}}(x,y) =_{def} 0 \quad \text{für } 0 \leqq x < 1 \text{ und } 0 \leqq y < 1 \end{array}} \qquad x,y \in \langle 0,1\rangle$$

5. **Die „drastische“ Konjunktion** et_d

$$\boxed{et_\mathrm{d}(x,y) =_{def} \begin{cases} 1, & \text{falls } x = 1 \text{ und } y = 1 \\ 0, & \text{falls } \begin{array}{r} 0 \leqq x < 1 \\ \text{oder } \; 0 \leqq y < 1 \end{array} \end{cases}} \qquad x, y \in \langle 0, 1\rangle$$

Folgerung 2.4.1
Für jedes $x, y \in \langle 0, 1\rangle$ *gilt:*

$$\boxed{et_\mathrm{d}(x,y) \leqq et_\mathrm{sd}(x,y) \leqq et_\mathrm{b}(x,y) \leqq et_\mathrm{a}(x,y) \leqq et_\mathrm{m}(x,y)}$$

Beweis **Aufgabe 2.4.1**.

Anmerkungen

1. Im Buch von Klir und Folger [22] wird et_sd durch i_{min} bezeichnet.
2. Im Buch von Bandemer und Gottwald [4] heißt et_sd „drastisches Produkt“ (Seite 43).

2. **Fünf wichtige Erweiterungen der Boole**schen **Funktion *or***

1. **Die Maximum-Alternative** vel_max (kurz vel_m), auch Maximum-Disjunktion genannt.

$$\boxed{vel_\mathrm{m}(x,y) =_{def} max(x,y)} \qquad x, y \in \langle 0, 1\rangle$$

2. **Die „*bold*“-Alternative** vel_bold (kurz vel_b), auch „beschränkte Summe“ genannt.

$$\boxed{vel_\mathrm{b}(x,y) =_{def} min(1, x+y)} \qquad x, y \in \langle 0, 1\rangle$$

3. **Die „algebraische“ Alternative** vel_alg (kurz vel_a), manchmal auch (mißverständlich) „algebraische Summe“ genannt.

$$\boxed{vel_\mathrm{a}(x,y) =_{def} x + y - x \cdot y} \qquad x, y \in \langle 0, 1\rangle$$

4. **Die „schwach-drastische“ Alternative** vel_sd

$$\boxed{\begin{array}{l} vel_\mathrm{sd}(0,y) =_{def} y \\ vel_\mathrm{sd}(x,0) =_{def} x \\ vel_\mathrm{sd}(x,y) =_{def} 1 \quad \text{für } 0 < x \leqq 1 \text{ und } 0 < y \leqq 1 \end{array}} \qquad x, y \in \langle 0, 1\rangle$$

5. **Die „drastische“ Alternative** vel_d

$$\boxed{vel_\mathrm{d}(x,y) =_{def} \begin{cases} 1, & \text{falls } \begin{array}{r} 0 < x \leqq 1 \\ \text{oder } \; 0 < y \leqq 1 \end{array} \\ 0, & \text{falls } x = 0 \text{ und } y = 0 \end{cases}} \qquad x, y \in \langle 0, 1\rangle$$

Folgerung 2.4.2
Für jedes $x, y \in \langle 0, 1\rangle$ *gilt:*

$$\boxed{vel_\mathrm{m}(x,y) \leqq vel_\mathrm{a}(x,y) \leqq vel_\mathrm{b}(x,y) \leqq vel_\mathrm{sd}(x,y) \leqq vel_\mathrm{d}(x,y)}$$

Beweis Aufgabe 2.4.2.

Anmerkungen

1. Im Buch von KLIR und FOLGER [22] wird vel_{sd} durch u_{max} bezeichnet.
2. Im Buch von BANDEMER und GOTTWALD [4] heißt vel_{sd} „drastische Summe" (Seite 44).

Aus der zweiwertigen Logik sind bekannt die DE MORGANschen Regeln, die vermöge der *non*-Funktion einen Zusammenhang zwischen *and* und *or* vermitteln.

De Morgansche Regeln Für alle $x, y \in \{0, 1\}$ gilt

1. $or(x, y) = non(and(non(x), non(y)))$
2. $and(x, y) = non(or(non(x), non(y)))$

Für eine beliebige ŁUKASIEWICZsche Funktion $\lambda : \langle 0, 1\rangle^n \to \langle 0, 1\rangle$ definieren wir ihr *DUAL*, angedeutet durch $DUAL(\lambda)$, wie folgt, wobei $x_1, \ldots, x_n \in \langle 0, 1\rangle$ und $n \geqq 1$.

Definition 2.4.3

$$DUAL(\lambda)(x_1, \ldots, x_n) =_{def} non\,(\lambda\,(non(x_1), \ldots, non(x_n)))$$

Somit gilt

$$DUAL(\lambda)(x_1, \ldots, x_n) =_{def} 1 - (\lambda\,(1 - x_1, \ldots, 1 - x_n))$$

Folgerung 2.4.3

1. $vel_{\mathrm{m}} = DUAL(et_{\mathrm{m}})$	*1'.* $et_{\mathrm{m}} = DUAL(vel_{\mathrm{m}})$
2. $vel_{\mathrm{b}} = DUAL(et_{\mathrm{b}})$	*2'.* $et_{\mathrm{b}} = DUAL(vel_{\mathrm{b}})$
3. $vel_{\mathrm{a}} = DUAL(et_{\mathrm{a}})$	*3'.* $et_{\mathrm{a}} = DUAL(vel_{\mathrm{a}})$
4. $vel_{\mathrm{sd}} = DUAL(et_{\mathrm{sd}})$	*4'.* $et_{\mathrm{sd}} = DUAL(vel_{\mathrm{sd}})$
5. $vel_{\mathrm{d}} = DUAL(et_{\mathrm{d}})$	*5'.* $et_{\mathrm{d}} = DUAL(vel_{\mathrm{d}})$

3. Einige Erweiterungen der BOOLEschen Funktion *non*

1. **Die ŁUKASIEWICZsche Negation** non_{L} (auch non_1)

$$\boxed{non_{\mathrm{L}}(x) =_{def} 1 - x} \qquad x \in \langle 0, 1\rangle$$

2. **Die „schwach-drastische" Negation** non_{sd}

$$\boxed{non_{\mathrm{sd}}(x) =_{def} \begin{cases} 1, & \text{falls } 0 \leqq x < 1 \\ 0, & \text{falls } x = 1 \end{cases}} \qquad x \in \langle 0, 1\rangle$$

3. **Die „drastische" Negation** non_{d}

$$\boxed{non_{\mathrm{d}}(x) =_{def} \begin{cases} 1, & \text{falls } x = 0 \\ 0, & \text{falls } 0 < x \leqq 1 \end{cases}} \qquad x \in \langle 0, 1\rangle$$

Folgerung 2.4.4
Für jedes $x \in \langle 0, 1\rangle$ *gilt:*

$$\boxed{non_{\mathrm{d}}(x) \leqq non_{\mathrm{L}}(x) \leqq non_{\mathrm{sd}}(x)}$$

Beweis Aufgabe 2.4.3.

Bemerkungen zu den oben definierten Negationen.

1. In der Fuzzy-Logik, die auf der Menge $\langle 0,1\rangle$ als Menge aller Wahrheitswerte beruht, wurde bisher in der Regel nur die ŁUKASIEWICZsche Negation $non_{\mathrm{L}}(x) = 1-x$ studiert und angewendet.
2. In dem Buch von KLIR und FOLGER [22] findet man allgemeine Betrachtungen zu Negationsfunktionen (In dieser Vorlesung $\rightarrow$ Kapitel 3).
3. Die Einführung der Negationen non_{d} und non_{sd} in die Fuzzy-Logik dürfte neu sein; ihre Anwendbarkeit muß noch gezeigt werden. In der dreiwertigen Logik, z. B. beim Aufbau der *logischen Programmierung* auf der Grundlage der dreiwertigen Logik, sind diese Negationen wohlbekannt, und sie werden dort erfolgreich angewendet.

   Zur Veranschaulichung geben wir noch die folgende „dreiwertige“ Tabelle für die betrachteten Negationen an:

	non_{d}	non_{L}	non_{sd}
0	1	1	1
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1
1	0	0	0

4. **Einige Erweiterungen der BOOLEschen Funktion *seq***
(„Wenn ..., so“; if ... then)

Erinnerung:

x	y	$seq(x,y)$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

1. **Die KLEENE-DIENES-Implikation** seq_{KD}.

$$\boxed{seq_{\mathrm{KD}}(x,y) =_{def} max(1-x,y)} \qquad x,y \in \langle 0,1\rangle$$

2. **Die ŁUKASIEWICZ-Implikation** seq_{L}.

$$\boxed{seq_{\mathrm{L}}(x,y) =_{def} min(1,1-x+y)} \qquad x,y \in \langle 0,1\rangle$$

3. **Die REICHENBACH-Implikation** seq_{R} (auch „algebraische“ Implikation).

$$\boxed{seq_{\mathrm{R}}(x,y) =_{def} 1-x+xy} \qquad x,y \in \langle 0,1\rangle$$

4. **Die schwach-drastische Implikation** seq_{sd}

$$\boxed{seq_{\mathrm{sd}}(x,y) =_{def} \begin{cases} y, & \text{falls } x=1 \\ 1-x, & \text{falls } y=0 \\ 1, & \text{falls } \begin{array}{r} 0 \leqq x < 1 \\ \text{und } 0 < y \leqq 1 \end{array} \end{cases}} \qquad x,y \in \langle 0,1\rangle$$

5. **Die drastische Implikation** seq_{d}

$$\boxed{seq_{\mathrm{d}}(x,y) =_{def} \begin{cases} 1, & \text{falls } 0 \leqq x < 1 \text{ oder } 0 < y \leqq 1 \\ 0, & \text{falls } x = 1 \text{ und } y = 0 \end{cases}} \qquad x, y \in \langle 0, 1\rangle$$

Folgerung 2.4.5
Für jedes $x, y \in \langle 0,1\rangle$ gilt

1. $seq_{\mathrm{KD}}(x,y) = vel_{\mathrm{m}}(1-x,y)$
2. $seq_{\mathrm{L}}(x,y) = vel_{\mathrm{b}}(1-x,y)$
3. $seq_{\mathrm{R}}(x,y) = vel_{\mathrm{a}}(1-x,y)$
4. $seq_{\mathrm{sd}}(x,y) = vel_{\mathrm{sd}}(1-x,y)$
5. $seq_{\mathrm{d}}(x,y) = vel_{\mathrm{d}}(1-x,y)$

Beweis Elimination der Definitionen. **Aufgabe 2.4.4**.

Bemerkungen

1. Die Definitionen der oben betrachteten Implikationen und Alternativen sind gerade **so** formuliert, daß die aus der zweiwertigen Logik bekannte Beziehung

$$seq(x,y) = vel(non(x),y)$$

   oder in „Kalkül-Form“

$$A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B$$

   auch in der Fuzzy-Logik gilt.

2. Die in **Folgerung 2.4.5** ausgedrückte Beziehung wird im folgenden Kapitel 4 auch so formuliert, daß die betrachteten Implikationen als

   S-Implikationen

   der betreffenden *S-Normen* mit Hilfe der Negationsfunktion $1-x$ erzeugt worden sind.

Folgerung 2.4.6
Für jedes $x, y \in \langle 0,1\rangle$ gilt:

$$\boxed{seq_{\mathrm{KD}}(x,y) \leqq seq_{\mathrm{R}}(x,y) \leqq seq_{\mathrm{L}}(x,y) \leqq seq_{\mathrm{sd}}(x,y) \leqq seq_{\mathrm{d}}(x,y)}$$

Beweis Anwendung von **Folgerung 2.4.2**.

Wir beenden Abschnitt 2.4 mit der folgenden Definition, die durch die betrachteten Beispiele nahegelegt wird. Gegeben sei eine n-stellige Lukasiewiczsche Funktion λ, d. h.

$$\lambda : \langle 0,1\rangle^n \rightarrow \langle 0,1\rangle \qquad (n \geqq 1)$$

Definition 2.4.4

1. *λ heiße **drastisch***

   $=_{def}$ *Für jedes $x_1, \ldots, x_n \in \langle 0,1\rangle$ gilt:* $\lambda(x_1, \ldots, x_n) \in \{0,1\}$

2. *λ heiße **schwach-drastisch***

   $=_{def}$ *Für jedes $x_1, \ldots, x_n \in \langle 0,1\rangle$ gilt:*

$$\lambda(x_1, \ldots, x_n) \in \{0, 1, x_1, \ldots, x_n, 1-x_1, \ldots, 1-x_n\}$$

2.5 Standard-Operationen mit Fuzzy-Mengen

Erinnerung Gegeben ein Universum U. Die Grundoperationen $\cap$ (Durchschnitt), $\cup$ (Vereinigung) und $^{-}$ (Komplement bezüglich U) hatten wir „naiv" durch Rückgriff auf die „naive" Logik wie folgt definiert (siehe **Definition 2.3.1**):

1. $M \cap N =_{def} \{x \mid x \in U \wedge x \in M \wedge x \in N\}$
2. $M \cup N =_{def} \{x \mid x \in U \wedge (x \in M \vee x \in N)\}$
3. $\overline{M} =_{def} \{x \mid x \in U \wedge x \notin M\}$

Theorem 2.3.2 hatte dann den korrekten Zusammenhang zwischen den betreffenden *charakteristischen* Funktionen konstatiert, nämlich

1'. $\chi_{M\cap N}(x) = and\left(\chi_M(x), \chi_N(x)\right)$

2'. $\chi_{M\cup N}(x) = or\left(\chi_M(x), \chi_N(x)\right)$

3'. $\chi_{\overline{M}}(x) = non\left(\chi_M(x)\right)$

Wir nehmen nun die durch 1', 2', 3' beschriebenen Gleichungen zum Anlaß, um für Fuzzy-Mengen

$$F : U \to \langle 0, 1\rangle$$

und

$$G : U \to \langle 0, 1\rangle$$

mengenalgebraische Operationen zu definieren.

Der Anlaß ist, daß offenbar Fuzzy-Mengen, deren Zugehörigkeitswerte in $\{0, 1\}$ liegen, mit den charakteristischen Funktionen bestimmter scharfer Mengen übereinstimmen.

Merke. Die Definition von Durchschnitt, Vereinigung und Komplement von Fuzzy-Mengen ist **nicht** eindeutig festgelegt wie für scharfe Mengen durch *and*, *or* und *non*. Diese Definition hängt **wesentlich** von den **gewählten Łukasiewiczschen Erweiterungen** der Funktionen *and*, *or* und *non* ab.

Als „*Standard*"-Erweiterungen von *and*, *or* und *non* wählen (fixieren!) wir die Funktionen

$$et_{\mathrm{m}},\ vel_{\mathrm{m}} \text{ und } non_{\mathrm{L}},$$

wobei für $x, y \in \langle 0, 1\rangle$:

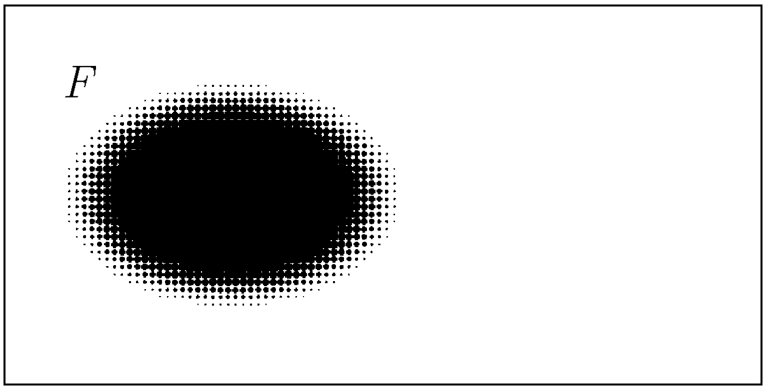
$$\begin{aligned} et_{\mathrm{m}}(x,y) &=_{def} min(x,y) \\ vel_{\mathrm{m}}(x,y) &=_{def} max(x,y) \\ non_{\mathrm{L}}(x) &=_{def} 1-x \end{aligned}$$

Definition 2.5.1

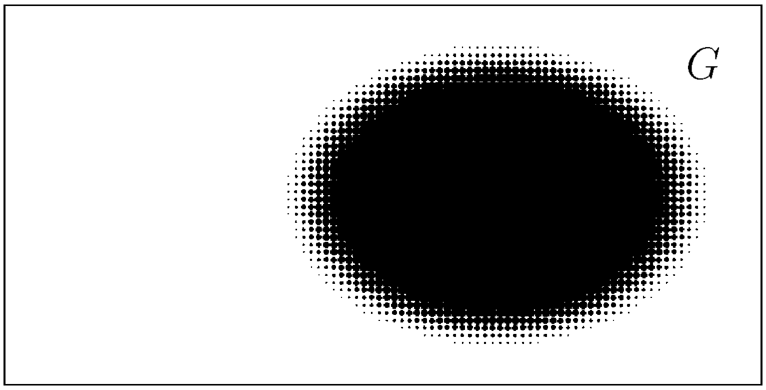
1. $(F \cap G)(x) =_{def} min(F(x), G(x))$ *(Durchschnitt)*
2. $(F \cup G)(x) =_{def} max(F(x), G(x))$ *(Vereinigung)*
3. $\left(\overline{F}\right)(x) =_{def} 1 - F(x)$ *(Komplement)*

Veranschaulichung Veranschaulichung dieser Operationen ist nicht so korrekt möglich wie im „scharfen" Fall. Eine „gute" Veranschaulichung kann durch Grauwertbilder oder Kurvendarstellung erfolgen.

Veranschaulichung durch Grauwertbilder Fuzzy-Mengen können nicht so leicht wie die scharfen Mengen auf den Bildern in Abschnitt 2.3 durch „Umrandungen" dargestellt werden. Stattdessen wird die Zugehörigkeit zu einer Fuzzy-Menge in einem Grauwertbild durch die Dichte des Graurasters dargestellt, wobei „Weiß" einem Zugehörigkeitswert von 0 und „Schwarz" einem Zugehörigkeitswert von 1 entspricht. Zur einfacheren Orientierung werden die verwendeten Fuzzy-Mengen und ihre Verknüpfungen jeweils in separaten Diagrammen dargestellt.

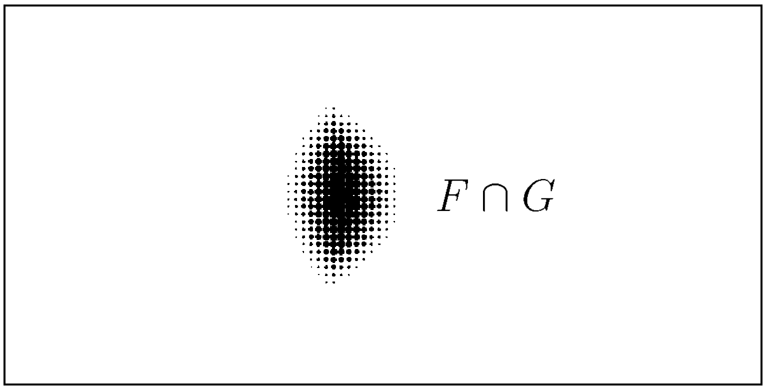


U



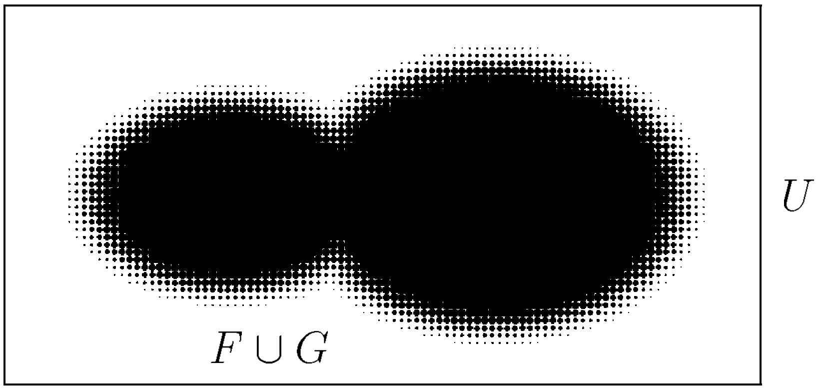
U

1. **Durchschnitt**

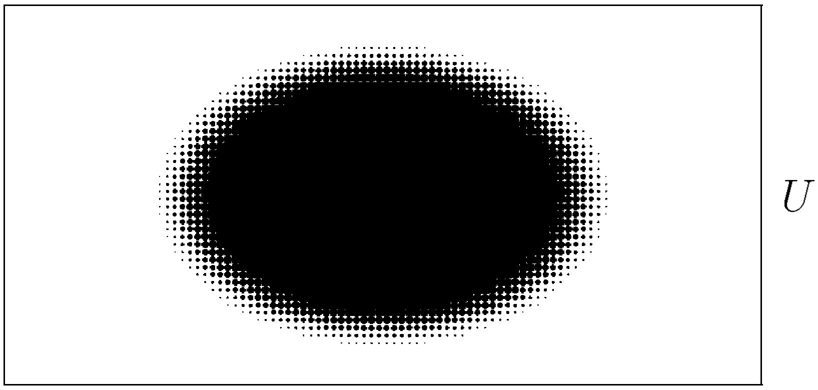


U

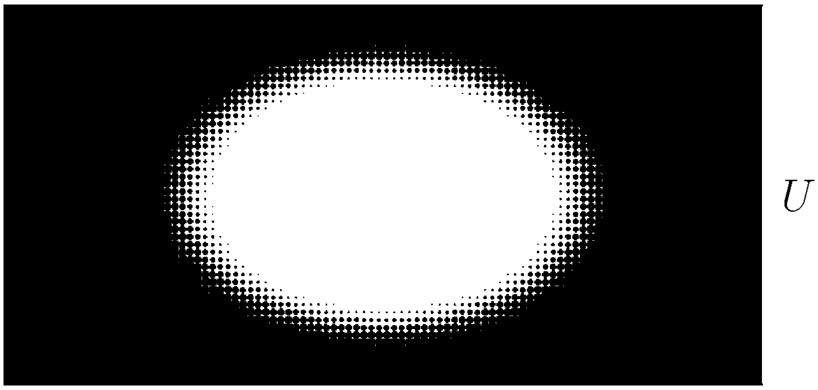
2. **Vereinigung**



3. **Komplement** bezüglich U



F

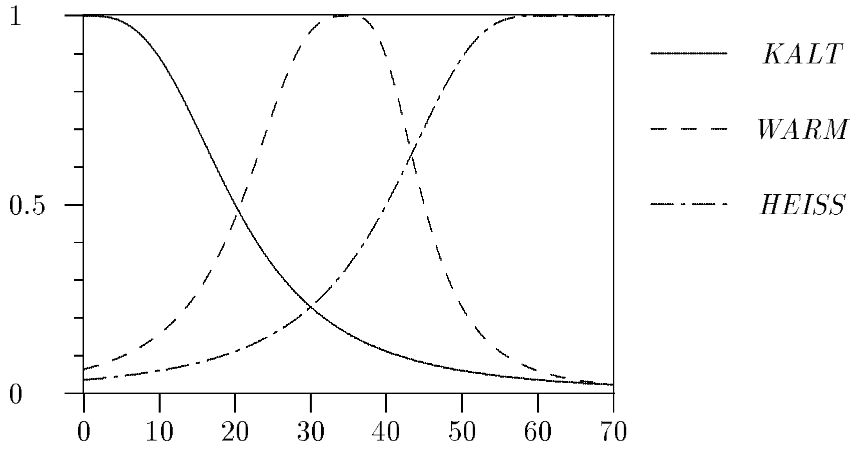


$\overline{F}$

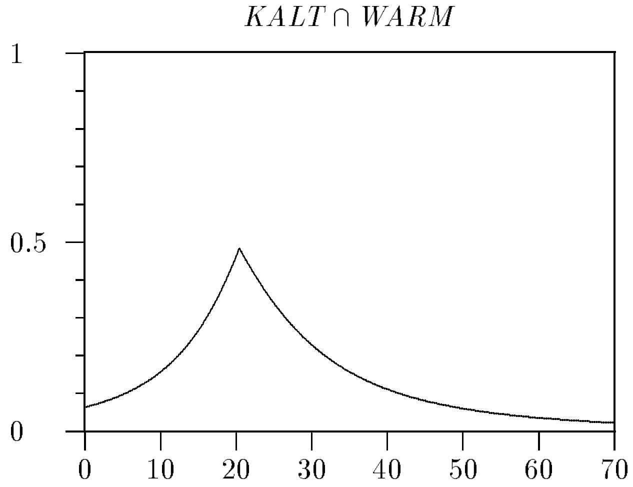
Man beachte:

$$
\begin{aligned}
FR(\overline{F}) &= FR(F) \\
KER(\overline{F}) &= COKER(F) \\
&= U \setminus SUPP(F)
\end{aligned}
$$

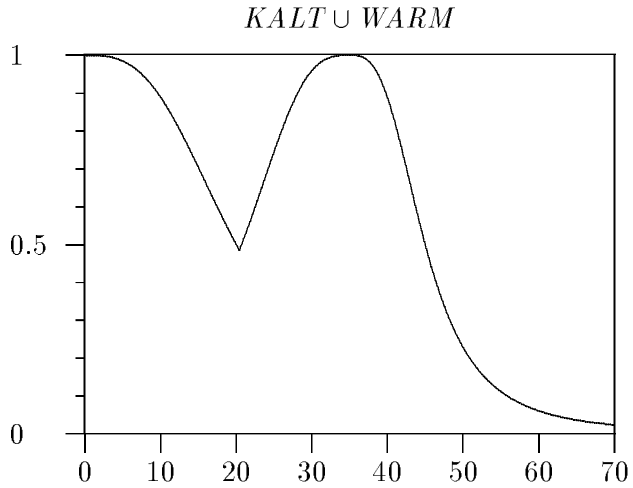
Veranschaulichung durch Kurvendarstellung



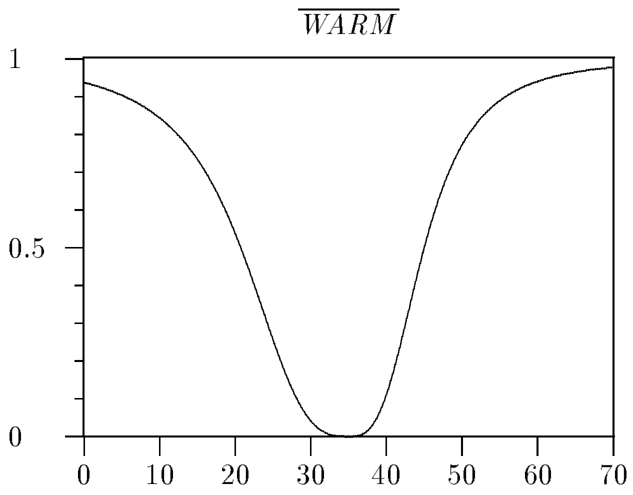
1. **Durchschnitt**



2. **Vereinigung**



3. **Komplement**



Das „algebraische" Rechnen mit Fuzzy-Mengen bezüglich der definierten Operationen $\cap$, $\cup$ und $^-$ wird durch das folgende Theorem geregelt.

Dazu erinnern wir an die Festlegungen und Notationen. Gegeben sei ein Universum U. Die All-Fuzzy-Menge $\not{U}$ über U und die leere Fuzzy-Menge $\not{\phi}$ über U werden wie folgt definiert:

$$\not{U}(x) =_{def} 1 \qquad \text{für alle } x \in U$$
$$\not{\phi}(x) =_{def} 0 \qquad \text{für alle } x \in U$$

Schließlich ist die *scharfe* Potenzmenge $\mathfrak{P}U$ aller *scharfen* Teilmengen von U definiert durch

$$\mathfrak{P}U =_{def} \{X \mid X \subseteqq U\}$$

sowie die *scharfe* Potenzmenge $\mathfrak{F}(U)$ aller *unscharfen* Teilmengen von U (besser: aller *Fuzzy*-Mengen über U) definiert als

$$\mathfrak{F}(U) =_{def} \{F \mid F : U \to \langle 0,1 \rangle\}$$

Theorem 2.5.1

1. *$[\mathfrak{F}(U), \cap, \cup]$ ist ein distributiver Verband.*

2. *Von den weiteren Bedingungen, die eine* BOOLE*sche Algebra definieren, gelten (für alle $F \in \mathfrak{F}(U)$):*

   1.
   $$\begin{aligned} F \cap \not{\phi} &= \not{\phi} \\ F \cup \not{\phi} &= F \end{aligned}$$

   2.
   $$\begin{aligned} F \cap \not{U} &= F \\ F \cup \not{U} &= \not{U} \end{aligned}$$

   3.
   $$\overline{\overline{F}} = F$$

Beweis Rückgang auf die Definitionen und Anwendung der entsprechenden „Rechenregeln" für $min(x, y)$, $max(x, y)$ und $1 - x$.

Aufgabe 2.5.1 !

Bemerkungen

1. Die beiden folgenden Bedingungen

   4.

$$\begin{aligned} F \cap \overline{F} &= \emptyset \\ F \cup \overline{F} &= \mathbb{U}, \end{aligned}$$

   die aus der Definition einer BOOLEschen Algebra noch fehlen, gelten im vorliegenden Fall im allgemeinen nicht, jedoch gilt (schwächer) für alle $F \in \mathfrak{F}(U)$ und $x \in U$:

   2.4'.

$$\begin{aligned} \left(F \cap \overline{F}\right)(x) &\leqq \tfrac{1}{2} \\ \left(F \cup \overline{F}\right)(x) &\geqq \tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

2. Die unter 2.4 stehenden Bedingungen werden auch als „Satz vom ausgeschlossenen Widerspruch" bzw. „Satz vom ausgeschlossenen Dritten" bezeichnet. Somit kann man sagen, daß in der Struktur

$$[\mathfrak{F}(U), \cap, \cup, {}^{-}, \emptyset, \mathbb{U}]$$

   der Satz vom ausgeschlossenen Widerspruch und der Satz vom ausgeschlossenen Dritten nicht gelten.

3. Erfüllen $\emptyset$ bzw. $\mathbb{U}$ bezüglich der Operationen $\cap$ und $\cup$ die Bedingungen 2.1 und 2.2, so nennt man sie *Nullelement* bzw. *Einselement* bezüglich dieser Operationen.

4. In BOOLEschen Algebren kann man allgemein die DE MORGANschen Regeln beweisen. Obwohl die Struktur

$$[\mathfrak{F}(U), \cap, \cup, {}^{-}, \emptyset, \mathbb{U}]$$

   wegen des Fehlens von 2.4 keine BOOLEsche Algebra ist, gelten in dieser Struktur die DE MORGANschen Regeln, d. h. es gilt

   Theorem 2.5.2
   Für jedes $F, G \in \mathfrak{F}(U)$ gilt:

   5.

$$\begin{aligned} \overline{F \cap G} &= \overline{F} \cup \overline{G} \\ \overline{F \cup G} &= \overline{F} \cap \overline{G} \end{aligned}$$

   Beweis Elimination der Definitionen von $\cap$, $\cup$ und ${}^{-}$ und Verwendung der Gleichungen

$$1 - min(x, y) = max(1 - x, 1 - y)$$

und $\qquad\qquad (x, y \in \langle 0, 1 \rangle)$

$$1 - max(x, y) = min(1 - x, 1 - y)$$

3. Theorie der T- und S-Normen. Theorie der Negationen. Nicht-Standard-Mengenoperationen

3.1 T-Normen

Die in Abschnitt 2.4 betrachteten „Konjunktionen“ et_{m}, et_{b}, et_{a}, et_{sd}, et_{d} führen auf den Begriff einer *T-Norm* als **allgemeine Fassung** des Begriffs „Konjunktion“ in der Fuzzy-Logik, genauer, in der mehrwertigen Logik, die auf der Menge $\langle 0,1\rangle$ als Menge der verwendeten Wahrheitswerte beruht.

Gegeben sei eine Abbildung τ mit

$$\tau : \langle 0,1\rangle^2 \to \langle 0,1\rangle$$

Definition 3.1.1
*τ heiße **T-Norm***

$=_{def}$ *Die folgenden Bedingungen T_1, T_2, T_3 und T_4 sind erfüllt.*

$\mathsf{T_1}$: *Für jedes $x \in \langle 0,1\rangle$ gilt*

$$\tau(x,0) = 0 \text{ und } \tau(x,1) = x$$

$\mathsf{T_2}$: *τ ist **monoton**, d. h. für jedes $x, x', y, y' \in \langle 0,1\rangle$ gilt:*

$$\text{Wenn } x \leqq x' \text{ und } y \leqq y', \text{ so } \tau(x,y) \leqq \tau(x',y')$$

$\mathsf{T_3}$: *τ ist **kommutativ**, d. h. für jedes $x, y \in \langle 0,1\rangle$ gilt:*

$$\tau(x,y) = \tau(y,x)$$

$\mathsf{T_4}$: *τ ist **assoziativ**, d. h. für jedes $x, y, z \in \langle 0,1\rangle$ gilt:*

$$\tau(x,\tau(y,z)) = \tau(\tau(x,y),z)$$

Bemerkung Die Bedingung T_2 ist äquivalent mit den folgenden zwei Bedingungen T_2' und T_2''.

T_2': Für jedes $x, x', y \in \langle 0,1\rangle$ gilt:

$$\text{Wenn } x \leqq x', \text{ so } \tau(x,y) \leqq \tau(x',y)$$

T_2'': Für jedes $x, y, y' \in \langle 0, 1 \rangle$ gilt:

$$\text{Wenn } y \leqq y', \text{ so } \tau(x, y) \leqq \tau(x, y')$$

Die im folgenden zu formulierenden Bedingungen T_0, T_5, T_6 sind Hilfsmittel zur „feineren" Beschreibung von T-Normen.

T_0: $\tau(0, 1) = \tau(1, 0) = \tau(0, 0) = 0$ und $\tau(1, 1) = 1$.

T_5: τ ist stetig, und zwar als zweistellige Funktion.

T_6: τ ist *idempotent*, d. h. für jedes $x \in \langle 0, 1 \rangle$ gilt:

$$\tau(x, x) = x.$$

T_7: τ ist archimedisch, d. h. τ ist stetig und für jedes $x \in \langle 0, 1 \rangle$ gilt:

$$\text{Wenn } 0 < x < 1, \text{ so } \tau(x, x) < x.$$

Definition 3.1.2
τ heiße ***Konjunktionsskelett***

$=_{def}$ *τ erfüllt die Bedingungen T_0, T_2, T_3 und T_4.*

Wir werden nun im folgenden die in Abschnitt 2.4 eingeführten Konjunktionen im Hinblick auf die Eigenschaften T_0, T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6 und T_7 prüfen.

Zunächst stellen wir fest, daß T_1 die Bedingung T_0 impliziert. Ferner gilt, daß jede Funktion τ, die T_0 erfüllt, eine Łukasiewiczsche Erweiterung von *and* ist.

Folgerung 3.1.1
Die Minimum-Konjunktion et_{m} mit

$$et_{\mathrm{m}}(x, y) =_{def} min(x, y) \qquad (x, y \in \langle 0, 1 \rangle)$$

ist eine stetige, idempotente T-Norm.

Beweis Nachprüfen der betreffenden Bedingungen T_1 bis T_6.
Aufgabe 3.1.1.

Folgerung 3.1.2
Die Bold-Konjunktion et_{b} und die algebraische Konjunktion et_{a} mit

$$\begin{aligned} et_{\mathrm{b}}(x, y) &=_{def} max(0, x + y - 1) \qquad (x, y \in \langle 0, 1 \rangle) \\ et_{\mathrm{a}}(x, y) &=_{def} x \cdot y \end{aligned}$$

sind stetige T-Normen, die (beide!) archimedisch, also nicht idempotent sind.

Beweis **Aufgabe 3.1.2**.

Folgerung 3.1.3
Die schwach-drastische Konjunktion et_{sd} mit

$$\begin{aligned} et_{\mathrm{sd}}(1, y) &=_{def} y \\ et_{\mathrm{sd}}(x, 1) &=_{def} x \qquad (x, y \in \langle 0, 1 \rangle) \\ et_{\mathrm{sd}}(x, y) &=_{def} 0 \quad \text{für } 0 \leqq x < 1 \text{ und } 0 \leqq y < 1 \end{aligned}$$

ist eine T-Norm, die jedoch weder stetig noch idempotent ist.

Beweis Aufgabe 3.1.3.

Folgerung 3.1.4
Die drastische Konjunktion et_{d} mit

$$et_{\mathrm{d}}(x,y) =_{def} \begin{cases} 1, & \textit{falls } x = 1 \textit{ und } y = 1 \\ 0, & \textit{falls } \begin{array}{r} 0 \leqq x < 1 \\ \textit{oder } \; 0 \leqq y < 1 \end{array} \end{cases} \qquad (x, y \in \langle 0,1 \rangle)$$

ist ein Konjunktionsskelett, d. h. es gelten T_0, T_2, T_3, T_4;

*et_{d} erfüllt jedoch nicht T_1, d. h. et_{d} ist keine T-Norm; et_{d} ist ferner **nicht** stetig und auch **nicht** idempotent.*

Bemerkung Mit **Folgerung 3.1.4** sind die Sätze 2.10 und 2.11 aus dem Buch von Klir und Folger [22, Seite 53] einschließlich der angegebenen Beweise als *falsch* nachgewiesen. (Siehe auch Abschnitt 3.3, wo sich eine korrigierte Fassung der genannten Sätze findet.)

Für viele Anwendungen reichen aber die fünf eingeführten Konjunktionen **nicht** aus. Demgemäß wurden in den letzten Jahrzehnten weitere Konjunktionen, meistens unter dem Stichwort „T-Normen" eingeführt, studiert und angewendet. Dabei ist zu erwähnen, daß es sich in der Regel nicht um **eine** Funktion, sondern im allgemeinen um **unendliche Mengen** (**Klassen**) von T-Normen handelt, die durch eine Parameterabhängigkeit gegeben sind. Als erstes Beispiel betrachten wir die „Yager-*Klasse*", die in [40] beschrieben wird.

Definition 3.1.3 (Die Yager-Klasse von T-Normen.)
Als Parameter sei eine reelle Zahl w mit $0 < w < +\infty$ gegeben.

Mit Yager definieren wir für $x, y \in \langle 0,1 \rangle$

$$et_{\mathrm{Y}}(w; x, y) =_{def} 1 - min\left(1, ((1-x)^w + (1-y)^w)^{\frac{1}{w}}\right)$$

Bemerkung Die Bezeichnung et_{Y} erscheint uns deshalb gerechtfertigt, weil jede Funktion der definierten Klasse eine T-Norm ist und außerdem enge Beziehungen zu den Konjunktionen et_{m} und et_{b} bestehen (siehe das folgende **Theorem 3.1.5**).

Theorem 3.1.5

1. *Für jeden fixierten Parameterwert w mit $0 < w < +\infty$ ist $et_{\mathrm{Y}}(w; ., .)$ eine archimedische T-Norm, die jedoch **nicht** idempotent ist.*

2. *Für jedes $x, y \in \langle 0,1 \rangle$ existiert $\lim\limits_{w \to +\infty} et_{\mathrm{Y}}(w; x, y)$ und es gilt*

$$\lim_{w \to +\infty} et_{\mathrm{Y}}(w; x, y) = et_{\mathrm{m}}(x, y) = min(x, y)$$

3. $et_{\mathrm{Y}}(1; x, y) = et_{\mathrm{b}}(x, y) = max(0, x + y - 1)$

4. $et_{\mathrm{Y}}(2; x, y) = 1 - min\left(1, \sqrt[2]{(1-x)^2 + (1-y)^2}\right)$

Beweis Aufgabe 3.1.4.

Anleitung:

ad 1. Nachprüfen der Bedingungen T_1, T_2, T_3, T_4 und T_7. Zur Widerlegung der Idempotenz (T_6) „Ausrechnen" des Ausdrucks $et_Y(w; x, x)$ für spezielle Werte von w mit $0 < w < +\infty$ und x mit $0 \leqq x \leqq 1$.

ad 2. Anwendung der Regel von L'HOSPITAL aus der Differentialrechnung.

ad 3. Offenbar genügt es, die Identität

$$max(0, x + y - 1) = 1 - min(1, (1 - x) + (1 - y))$$

zu beweisen.

ad 4. Klar.

In der folgenden Tabelle werden weitere wichtige Klassen von T-Normen angegeben.

Quelle	Definition der Klasse	Gültigkeit des Parameters
SCHWEIZER & SKLAR [34]	$max\left(0, x^{-p} + y^{-p} - 1\right)^{-\frac{1}{p}}$	$p \in (-\infty, +\infty)$
HAMACHER [20]	$\dfrac{x \cdot y}{\gamma + (1-\gamma) \cdot (x + y - x \cdot y)}$	$\gamma \in (0, +\infty)$
FRANK [14]	$log_s\left(1 + \dfrac{(s^x - 1) \cdot (s^y - 1)}{s - 1}\right)$	$s \in (0, +\infty)$
YAGER [40]	$1 - min\left(1, ((1-x)^w + (1-y)^w)^{\frac{1}{w}}\right)$	$w \in (0, +\infty)$
DUBOIS & PRADE [11]	$\dfrac{x \cdot y}{max(x, y, \alpha)}$	$\alpha \in (0, 1)$
DOMBI [10]	$\dfrac{1}{1 + \left(\left(\frac{1}{x} - 1\right)^{\lambda} + \left(\frac{1}{y} - 1\right)^{\lambda}\right)^{\frac{1}{\lambda}}}$	$\lambda \in (0, +\infty)$

Theorem 3.1.6
Sämtliche in der obigen Tabelle beschriebenen Funktionen sind (für jeden fixierten Parameterwert) stetige T-Normen.

Beweis
Als **Aufgabe 3.1.5**. ■

Aufgabe 3.1.6 *Man untersuche, welche der in der obigen Tabelle angegebenen Funktionen archimedisch sind.*

Wir schließen Abschnitt 3.1 mit dem folgenden, von C. H. LING [23] stammenden Darstellungssatz für archimedische T-Normen, der sowohl in theoretischen Untersuchungen als auch in den Anwendungen nützlich ist. Zur Formulierung dieses Satzes benötigen wir jedoch die folgende Definition.

Wir ergänzen die Menge der reellen Zahlen durch die „unendlichen" Punkte $-\infty$ und $+\infty$ und dehnen die Begriffe der Abbildung, der Ordnung, des Intervalls und der Stetigkeit auf die Menge $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ wie üblich aus.

Gegeben sei eine Abbildung $f : \langle 0, 1\rangle \to \langle 0, +\infty\rangle$.

Definition 3.1.4

1. *f heiße streng comonoton*
   $=_{def}$ *Für jedes $x, y \in \langle 0,1\rangle$ gilt:*
   $$\textit{Wenn } x < y\,,\ \textit{so } f(y) < f(x)$$

2. *Es sei f streng comonoton mit $f(1) = 0$. Wir definieren dann*
   $$f^{(-1)}(x) =_{def} \begin{cases} y, & \text{falls } x \in \langle 0, f(0)\rangle \text{ und } f(y) = x \\ 0, & \text{falls } x \in (f(0), +\infty\rangle. \end{cases}$$
   Offenbar gilt
   $$f^{(-1)} : \langle 0, +\infty\rangle \to \langle 0, 1\rangle$$
   sowie
   $$f^{(-1)}(f(x)) = x$$
   für alle $x \in \langle 0,1\rangle$; die Funktion $f^{(-1)}$ wird deshalb auch „Pseudoinverse" von f genannt.

Theorem 3.1.7
Ist τ eine archimedische T-Norm, so existiert eine Funktion $f : \langle 0,1\rangle \to \langle 0, +\infty\rangle$ mit

1. *f ist streng comonoton*
2. *$f(1) = 0$*
3. *f ist stetig*
4. *$\tau(x, y) = f^{(-1)}(f(x) + f(y))$ für jedes $x, y \in \langle 0,1\rangle$.*

Das angegebene Theorem ist eine sehr „tiefliegende" und „starke" Aussage, demgemäß ist ein Beweis schwierig und langwierig. Wir verzichten deshalb auf die Wiedergabe eines Beweises und verweisen auf die Originalliteratur [23].

Es sei ergänzend noch betont, daß die in dem oben formulierten Theorem auftretende Funktion f bis auf eine Multiplikation mit einer positiven konstanten reellen Zahl eindeutig bestimmt ist; jede derartige Funktion wird additiver Generator von τ genannt. Eine archimedische T-Norm heiße nilpotent, falls es einen additiven Generator f mit

$$f(0) < +\infty$$

gibt. Ist τ streng monoton (steigend), d. h. folgt $\tau(x, y) < \tau(x', y')$ aus $x < x'$ oder $y < y'$ für $x, x', y, y' \in \langle 0,1\rangle$, so gilt $f(0) = +\infty$.

Literatur zu Abschnitt 3.1.

- In einem allgemeinen Rahmen werden T-Normen in den einführenden Werken von George J. Klir und Tina A. Folger [22], von Siegfried Gottwald [17, 18] sowie von Hans Bandemer und Siegfried Gottwald [4] behandelt.
- Ursprünglich sind T-Normen entstanden in Untersuchungen zu verallgemeinerten Geometrien (triangular norms). Siehe B. Schweizer und A. Sklar [33, 34].
- Eine ausführliche Behandlung additiver Generatoren findet sich in [23] von C.-H. Ling .

3.2 S-Normen

Analog zu den in Abschnitt 3.1 betrachteten T-Normen sind bei S-Normen die in Abschnitt 2.4 eingeführten „Alternativen“ vel_{m}, vel_{b}, vel_{a}, vel_{sd}, vel_{d} der Ausgangspunkt. S-Normen können dann analog verstanden werden als **allgemeine und axiomatische Fassung** des Begriffs „Alternative“ (oder auch „Disjunktion“) in der Fuzzy-Logik, oder (wie in 3.1) **genauer** als axiomatische Fassung des Begriffs „Alternative“ in der LUKASIEWICZschen Logik.

Gegeben sei eine Abbildung σ mit

$$\sigma : \langle 0,1\rangle^2 \to \langle 0,1\rangle$$

Definition 3.2.1
*σ heiße **S-Norm***

$=_{def}$ *Die folgenden Bedingungen S_1, S_2, S_3 und S_4 sind erfüllt:*

S_1: *Für jedes $x \in \langle 0,1\rangle$ gilt*

$$\sigma(x,0) = x \text{ und } \sigma(x,1) = 1$$

S_2: *σ ist **monoton**, d. h. S_2 stimmt mit Bedingung T_2 überein.*

S_3: *σ ist **kommutativ**, d. h. S_3 stimmt mit Bedingung T_3 überein.*

S_4: *σ ist **assoziativ**, d. h. S_4 stimmt mit Bedingung T_4 überein.*

Analog zu T-Normen führen wir ein

S_0: $\sigma(0,0) = 0$ und $\sigma(0,1) = \sigma(1,0) = \sigma(1,1) = 1$.

S_5: σ ist (in beiden Argumenten x, y) stetig (also wie T_5).

S_6: σ ist idempotent (also wie T_6).

S_7: σ ist archimedisch, d. h. σ ist stetig und für jedes $x \in \langle 0,1\rangle$ gilt:

$$\text{Wenn } 0 < x < 1\text{, so } \sigma(x,x) > x.$$

Definition 3.2.2
*σ heiße **Disjunktionsskelett***

$=_{def}$ *σ erfüllt die Bedingungen S_0, S_2, S_3 und S_4.*

Das folgende Theorem bringt die *grundlegende* Tatsache zum Ausdruck, daß durch *Dualisierung* (also Anwendung des Operators $DUAL$) die angegebenen Bedingungen ineinander übergehen.

Gegeben sei eine beliebige Abbildung λ mit

$$\lambda : \langle 0,1\rangle^2 \to \langle 0,1\rangle$$

Theorem 3.2.1
1. *Für jedes $i \in \{0,1,2,3,4,5,6,7\}$ gilt:*

λ erfüllt die Bedingung T_i genau dann, wenn $DUAL(\lambda)$ die Bedingung S_i erfüllt.

2. *Für jedes $i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ gilt:*

   λ erfüllt die Bedingung S_i genau dann, wenn $DUAL(\lambda)$ die Bedingung T_i erfüllt.

Beweis
Anwendung der Definition

$$DUAL(\lambda)(x, y) =_{def} 1 - \lambda(1 - x, 1 - y) \qquad (x, y \in \langle 0, 1 \rangle)$$

und Nachprüfen der einzelnen Bedingungen. ■

Folgerung 3.2.2
1. *λ ist T-Norm genau dann, wenn $DUAL(\lambda)$ eine S-Norm ist.*
2. *λ ist S-Norm genau dann, wenn $DUAL(\lambda)$ eine T-Norm ist.*
3. *λ ist Konjunktionsskelett genau dann, wenn $DUAL(\lambda)$ ein Disjunktionsskelett ist.*
4. *λ ist Disjunktionsskelett genau dann, wenn $DUAL(\lambda)$ ein Konjunktionsskelett ist.*

Beweis Unmittelbar durch Anwendung von **Theorem 3.2.1**.

Durch Anwendung von **Theorem 3.2.1** auf die **Folgerungen 3.1.1, 3.1.2, 3.1.3 und 3.1.4** erhält man unmittelbar

Folgerung 3.2.3
Die Maximum-Alternative vel_{m} mit

$$vel_{\mathrm{m}}(x, y) =_{def} max(x, y) \qquad (x, y \in \langle 0, 1 \rangle)$$

ist eine stetige, idempotente S-Norm.

Folgerung 3.2.4
Die Bold-Alternative vel_{b} und die algebraische Alternative vel_{a} mit

$$\begin{aligned} vel_{\mathrm{b}}(x, y) &=_{def} min(1, x + y) \qquad (x, y \in \langle 0, 1 \rangle) \\ vel_{\mathrm{a}}(x, y) &=_{def} x + y - x \cdot y \end{aligned}$$

*sind archimedische S-Normen, die jedoch **nicht** idempotent sind.*

Folgerung 3.2.5
Die schwach-drastische Alternative vel_{sd} mit

$$\begin{aligned} vel_{\mathrm{sd}}(0, y) &=_{def} y \\ vel_{\mathrm{sd}}(x, 0) &=_{def} x \qquad (x, y \in \langle 0, 1 \rangle) \\ vel_{\mathrm{sd}}(x, y) &=_{def} 1 \quad \text{falls } 0 < x \leqq 1 \text{ und } 0 < y \leqq 1 \end{aligned}$$

ist eine S-Norm, die jedoch weder stetig noch idempotent ist.

Folgerung 3.2.6
Die drastische Alternative vel_{d} mit

$$vel_{\mathrm{d}}(x,y) =_{def} \begin{cases} 1, & \text{falls } \begin{array}{r} 0 < x \leqq 1 \\ \text{oder } \; 0 < y \leqq 1 \end{array} \\ 0, & \text{falls } x = 0 \text{ und } y = 0 \end{cases} \qquad (x, y \in \langle 0, 1 \rangle)$$

ist ein Alternativskelett, d. h. es gelten S_0, S_2, S_3, S_4;

*vel_{d} erfüllt jedoch nicht S_1, ist also keine S-Norm; ferner ist vel_{d} **nicht** stetig und auch **nicht** idempotent.*

Analog zu den T-Normen hat man, da die bisher betrachteten Alternativen für viele Anwendungen ungeeignet sind, weitere S-Normen, meistens als parameterabhängige Klassen, definiert, untersucht und angewendet.

Wir betrachten als erstes die „Yager-Klasse" von S-Normen.

Definition 3.2.3
*Als Parameter sei wieder (wie in **Definition 3.1.3**) eine reelle Zahl w mit $0 < w < +\infty$ gegeben.*

Mit Yager definieren wir für $x, y \in \langle 0, 1 \rangle$

$$vel_{\mathrm{Y}}(w; x, y) =_{def} min\left(1, (x^w + y^w)^{\frac{1}{w}}\right)$$

Folgerung 3.2.7
Für jedes fixierte w mit $0 < w < +\infty$ sind die Funktionen $vel_{\mathrm{Y}}(w; .,.)$ und $et_{\mathrm{Y}}(w; .,.)$ dual zueinander.

Theorem 3.2.8
1. *Für jeden fixierten Parameterwert w mit $0 < w < +\infty$ ist $vel_{\mathrm{Y}}(w; .,.)$ eine archimedische S-Norm, die somit **nicht** idempotent ist.*

2. *Für jedes $x, y \in \langle 0, 1 \rangle$ existiert $\lim\limits_{w \to +\infty} vel_{\mathrm{Y}}(w; x, y)$ und es gilt*

$$\lim_{w \to +\infty} vel_{\mathrm{Y}}(w; x, y) = vel_{\mathrm{m}}(x, y) = max(x, y)$$

3. *$vel_{\mathrm{Y}}(1; x, y) = vel_{\mathrm{b}}(x, y) = min(1, x + y)$*

4. *$vel_{\mathrm{Y}}(2; x, y) = min\left(1, \sqrt[2]{x^2 + y^2}\right)$*

Beweis Analog zu **Theorem 3.1.5**. Hat man eines der **Theoreme 3.1.5** oder **3.2.8** bereits bewiesen, kann man das andere durch Dualisieren unmittelbar mit **Folgerung 3.2.7** herleiten.

Analog zu Abschnitt 3.1 werden durch die folgende Tabelle weitere wichtige Klassen von S-Normen angegeben, wobei zu beachten ist, daß alle Funktionen aus dieser Tabelle zu den entsprechenden Funktionen aus der Tabelle der T-Normen **dual** sind.

Quelle	Definition der Klasse	Gültigkeit des Parameters
Schweizer & Sklar [34]	$1 - max\left(0, (1-x)^{-p} + (1-y)^{-p} - 1\right)^{-\frac{1}{p}}$	$p \in (-\infty, +\infty)$
Hamacher [20]	$\dfrac{x + y - (2-\gamma) \cdot x \cdot y}{1 - (1-\gamma) \cdot x \cdot y}$	$\gamma \in (0, +\infty)$
Frank [14]	$1 - log_s\left(1 + \dfrac{(s^{1-x} - 1) \cdot (s^{1-y} - 1)}{s - 1}\right)$	$s \in (0, +\infty)$
Yager [40]	$min\left(1, (x^w + y^w)^{\frac{1}{w}}\right)$	$w \in (0, +\infty)$
Dubois & Prade [11]	$\dfrac{x + y - x \cdot y - min(x, y, 1-\alpha)}{max(1-x, 1-y, \alpha)}$	$\alpha \in (0, 1)$
Dombi [10]	$\dfrac{1}{1 + \left(\left(\frac{1}{x} - 1\right)^{-\lambda} + \left(\frac{1}{y} - 1\right)^{-\lambda}\right)^{-\frac{1}{\lambda}}}$	$\lambda \in (0, +\infty)$

Theorem 3.2.9
Sämtliche in der obigen Tabelle beschriebenen Funktionen sind (für jeden fixierten Parameterwert) stetige S-Normen.

Beweis
Direkter Beweis oder Ableitung aus **Theorem 3.1.6** mittels Dualisierung. ■

Wir stellen zum Schluß die dualen Klassen gegenüber:

Quelle	Definition der Klassen	Gültigkeit des Parameters
SCHWEIZER & SKLAR [34]	T-Norm: $max\,(0, x^{-p} + y^{-p} - 1)^{-\frac{1}{p}}$	$p \in (-\infty, +\infty)$
	S-Norm: $1 - max\,(0, (1-x)^{-p} + (1-y)^{-p} - 1)^{-\frac{1}{p}}$	
HAMACHER [20]	T-Norm: $\dfrac{x \cdot y}{\gamma + (1-\gamma) \cdot (x + y - x \cdot y)}$	$\gamma \in (0, +\infty)$
	S-Norm: $\dfrac{x + y - (2-\gamma) \cdot x \cdot y}{1 - (1-\gamma) \cdot x \cdot y}$	
FRANK [14]	T-Norm: $log_s \left(1 + \dfrac{(s^x - 1) \cdot (s^y - 1)}{s - 1}\right)$	$s \in (0, +\infty)$
	S-Norm: $1 - log_s \left(1 + \dfrac{(s^{1-x} - 1) \cdot (s^{1-y} - 1)}{s - 1}\right)$	
YAGER [40]	T-Norm: $1 - min\left(1, ((1-x)^w + (1-y)^w)^{\frac{1}{w}}\right)$	$w \in (0, +\infty)$
	S-Norm: $min\left(1, (x^w + y^w)^{\frac{1}{w}}\right)$	
DUBOIS & PRADE [11]	T-Norm: $\dfrac{x \cdot y}{max(x, y, \alpha)}$	$\alpha \in (0, 1)$
	S-Norm: $\dfrac{x + y - x \cdot y - min(x, y, 1-\alpha)}{max(1-x, 1-y, \alpha)}$	
DOMBI [10]	T-Norm: $\dfrac{1}{1 + \left((\frac{1}{x} - 1)^{\lambda} + (\frac{1}{y} - 1)^{\lambda}\right)^{\frac{1}{\lambda}}}$	$\lambda \in (0, +\infty)$
	S-Norm: $\dfrac{1}{1 + \left((\frac{1}{x} - 1)^{-\lambda} + (\frac{1}{y} - 1)^{-\lambda}\right)^{-\frac{1}{\lambda}}}$	

Im folgenden formulieren wir für S-Normen das Analogon des Darstellungssatzes, den wir in Abschnitt 3.1 für T-Normen angegeben haben.

Gegeben sei eine Abbildung

$$g : \langle 0, 1 \rangle \to \langle 0, +\infty \rangle$$

Definition 3.2.4

1. *g heiße streng monoton*
   $=_{def}$ Für jedes $x, y \in \langle 0, 1 \rangle$ gilt:

   $$\textit{Wenn } x < y \text{, } \textit{so } g(x) < g(y)$$

2. *Es sei nun g streng monoton mit $g(0) = 0$. Dann definiert man die „Pseudoinverse“ $g^{(-1)}$ von g wie folgt:*

   $$g^{(-1)}(x) =_{def} \begin{cases} y, & \textit{falls } x \in \langle 0, g(1) \rangle \textit{ und } g(y) = x \\ 1, & \textit{falls } x \in (g(1), +\infty\rangle. \end{cases}$$

   Dann gilt offenbar

   $$g^{(-1)} : \langle 0, +\infty \rangle \to \langle 0, 1 \rangle$$

   und

   $$g^{(-1)}(g(x)) = x \qquad \text{für alle } x \in \langle 0, 1 \rangle.$$

Theorem 3.2.10
Ist σ eine archimedische T-Norm, so existiert eine Funktion $g : \langle 0,1\rangle \to \langle 0,+\infty\rangle$ mit

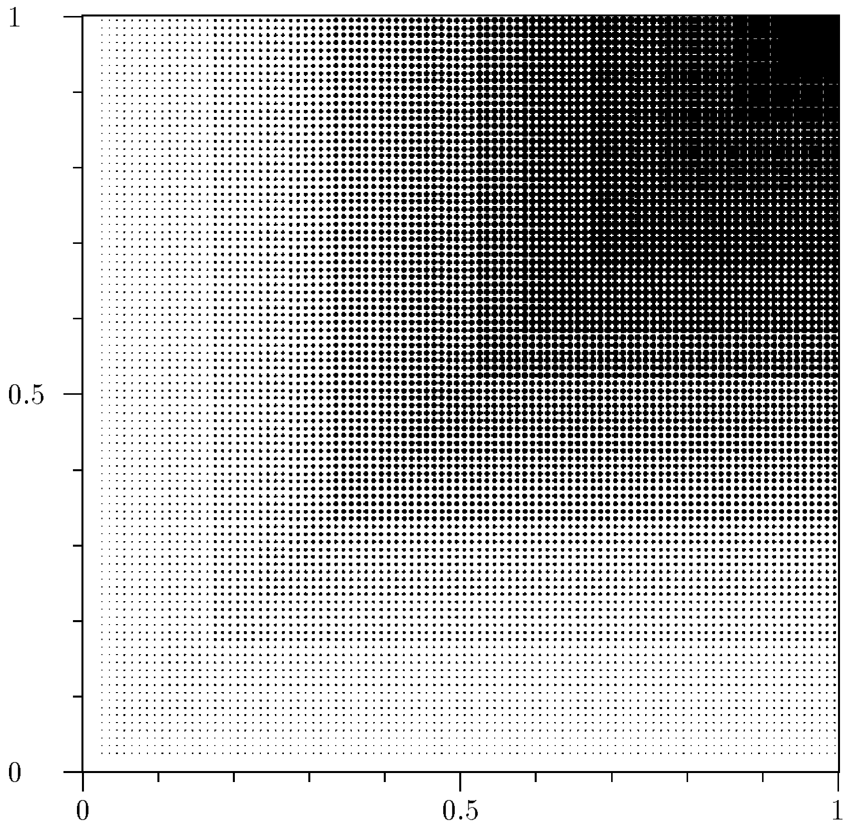
1. *g ist streng monoton*
2. *$g(0) = 0$*
3. *g ist stetig*
4. *$\sigma(x,y) = g^{(-1)}(g(x) + g(y))$ für jedes $x, y \in \langle 0,1\rangle$.*

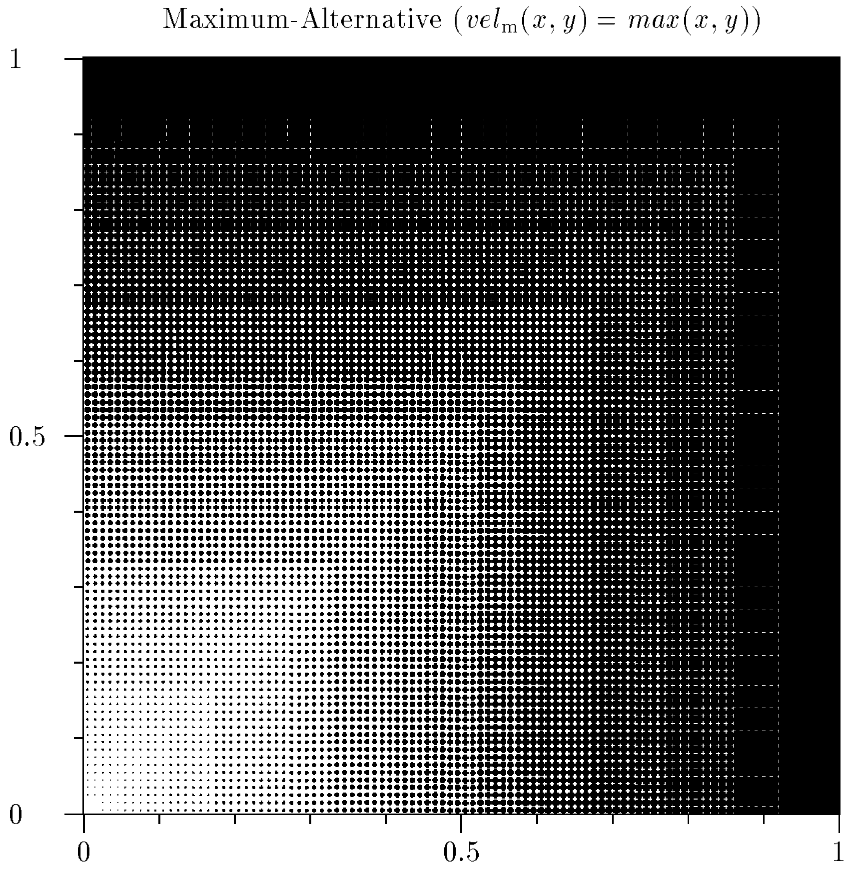
Beweis
Siehe [23]. ■

Eine archimedische S-Norm σ heißt nilpotent, falls $g(1) < +\infty$ gilt. Ist σ streng monoton (steigend), d. h. folgt $\sigma(x,y) < \sigma(x',y')$ aus $x < x'$ oder $y < y'$ für $x, x', y, y' \in \langle 0,1\rangle$, so gilt $g(1) = +\infty$.

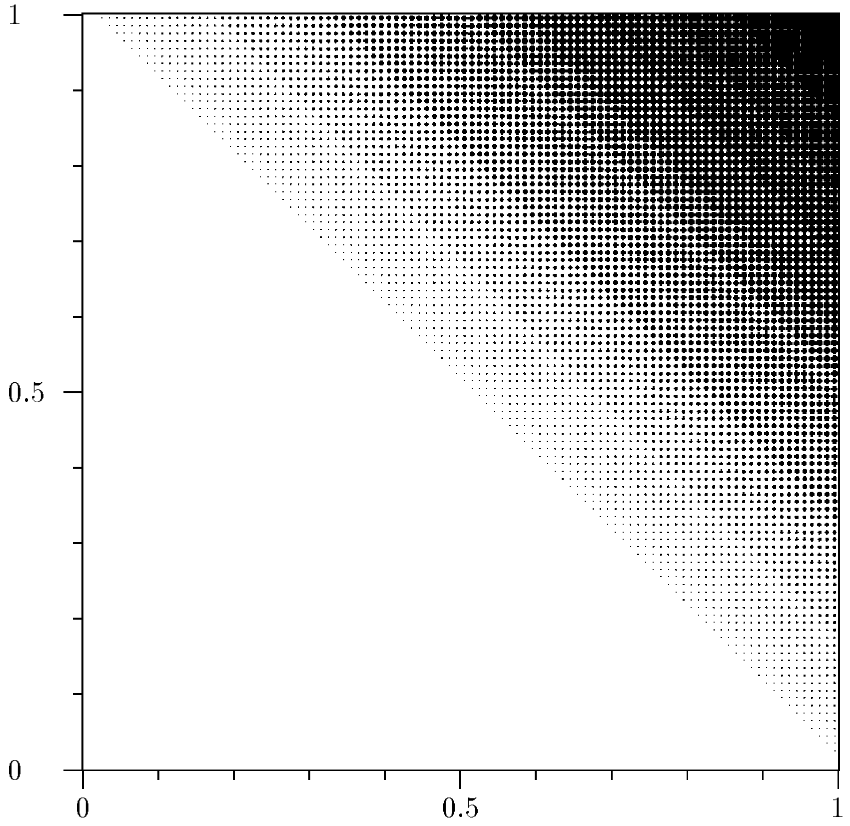
Zum Schluß des Abschnitts 3.2 veranschaulichen wir eine Reihe von T- und S-Normen durch „Grauwertbilder", die dem Buch von TILLI [38] entnommen sind:

Minimum-Konjunktion ($et_{\mathrm{m}}(x,y) = min(x,y)$)

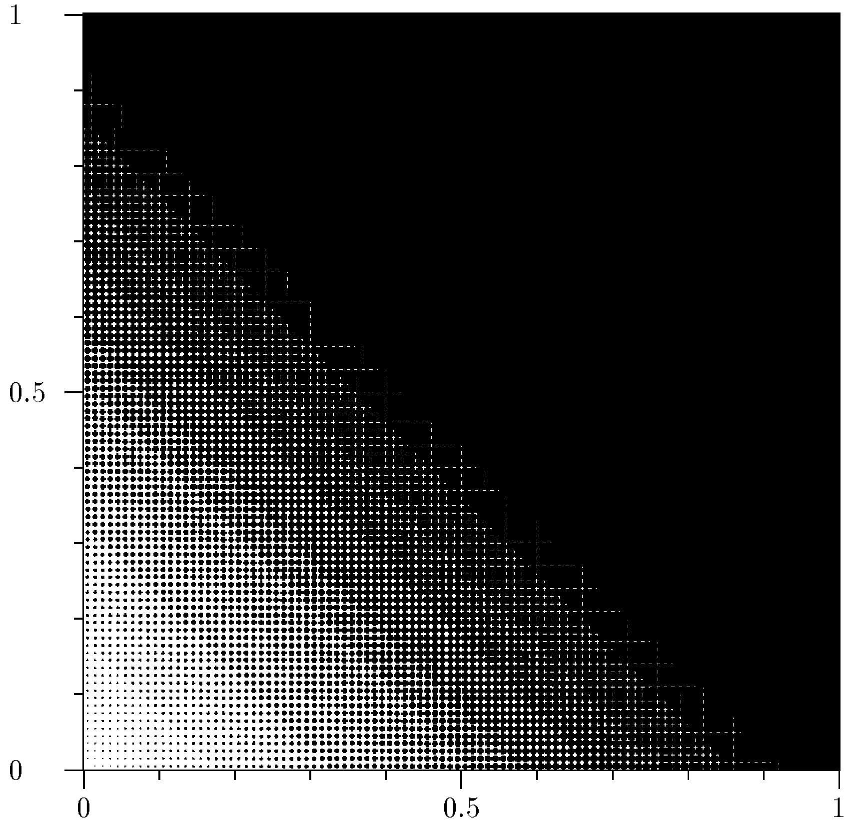



Maximum-Alternative ($vel_{\mathrm{m}}(x, y) = max(x, y)$)
1
0.5
0
0
0.5
1

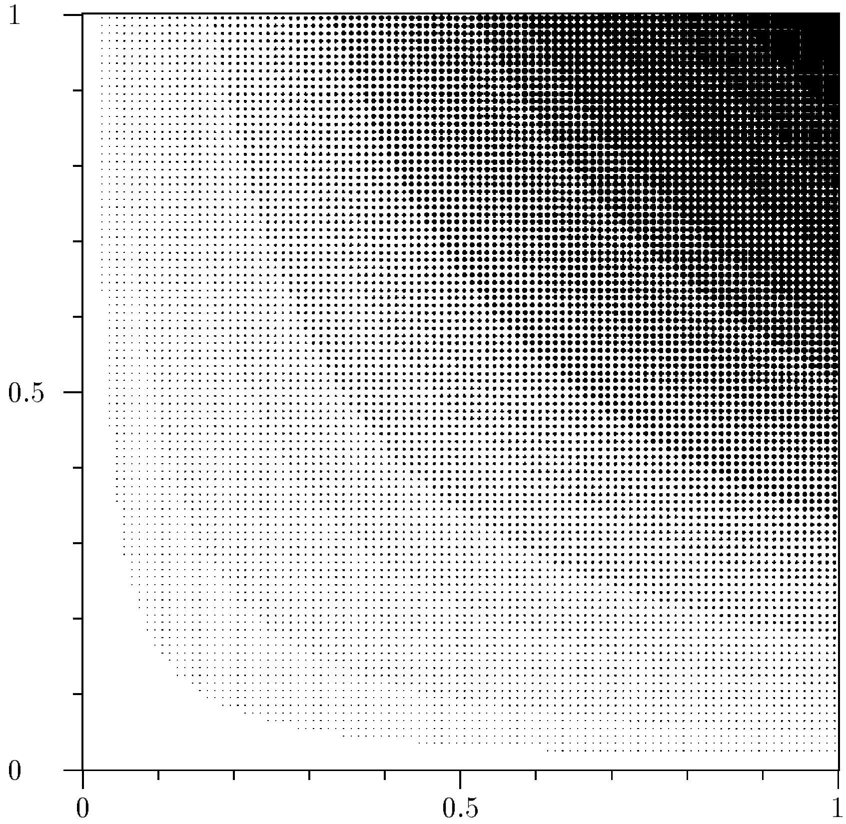
Bold-Konjunktion ($et_b(x, y) = max(0, x + y - 1)$)



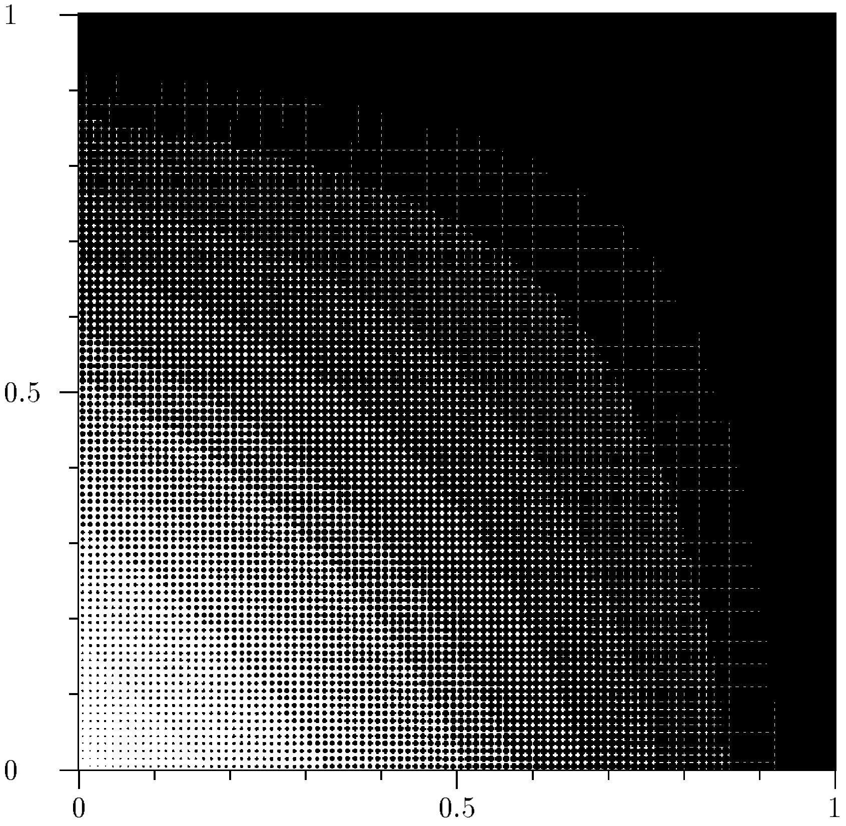
Bold-Alternative ($vel_{\mathrm{b}}(x, y) = min(1, x + y)$)

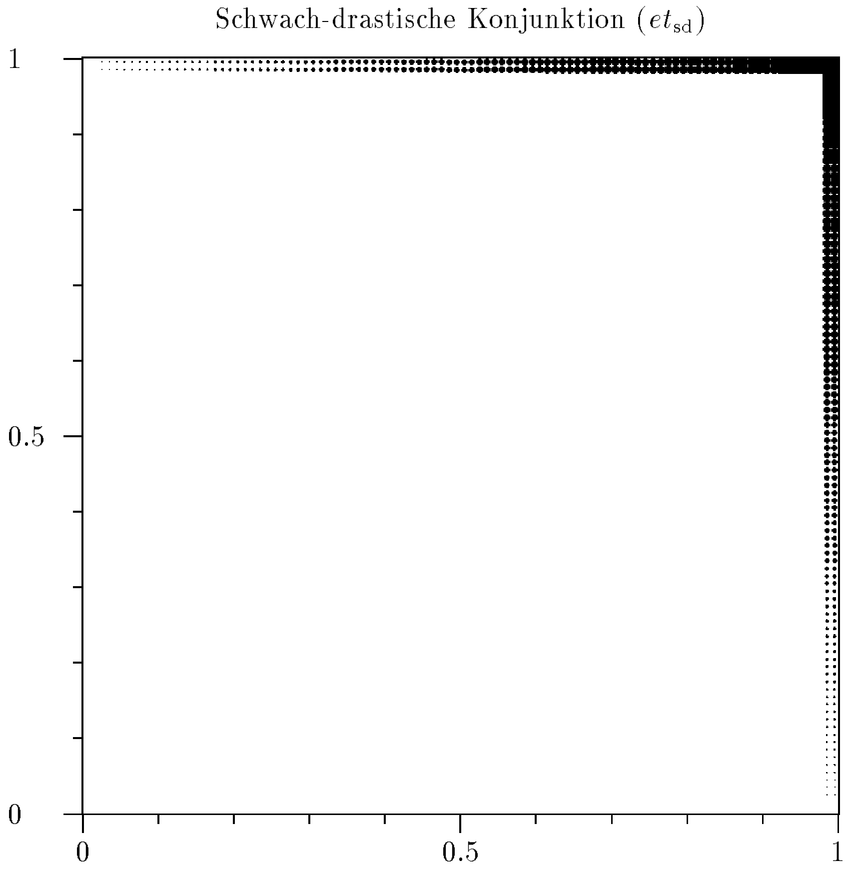


Algebraische Konjunktion ($et_{\mathrm{a}}(x, y) = x \cdot y$)

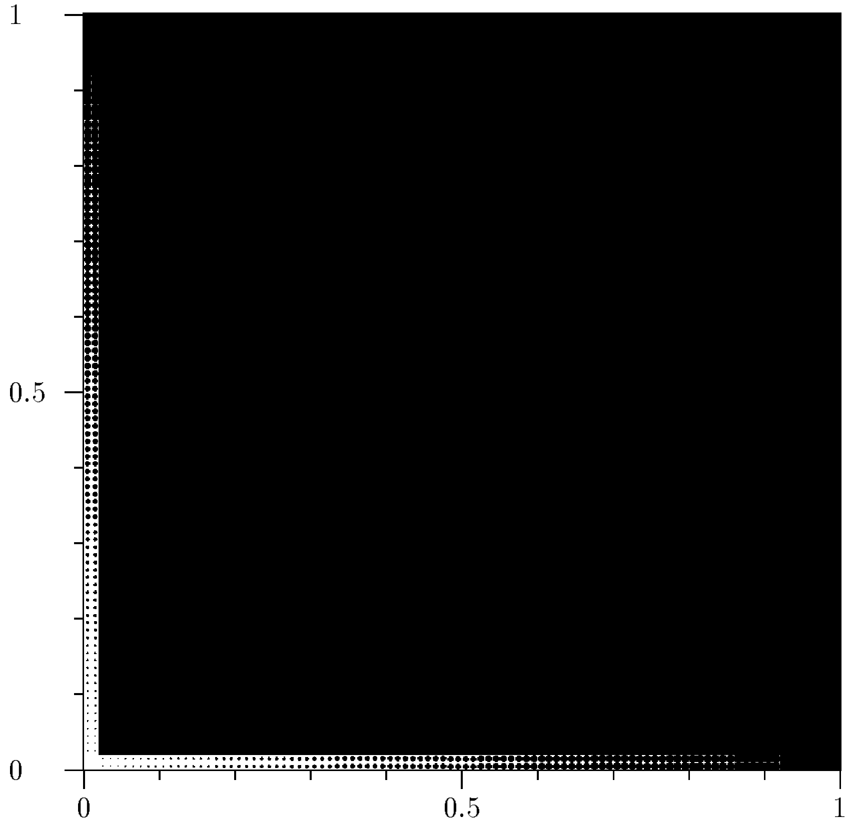


Algebraische Alternative ($vel_{\mathrm{a}}(x, y) = x + y - x \cdot y$)

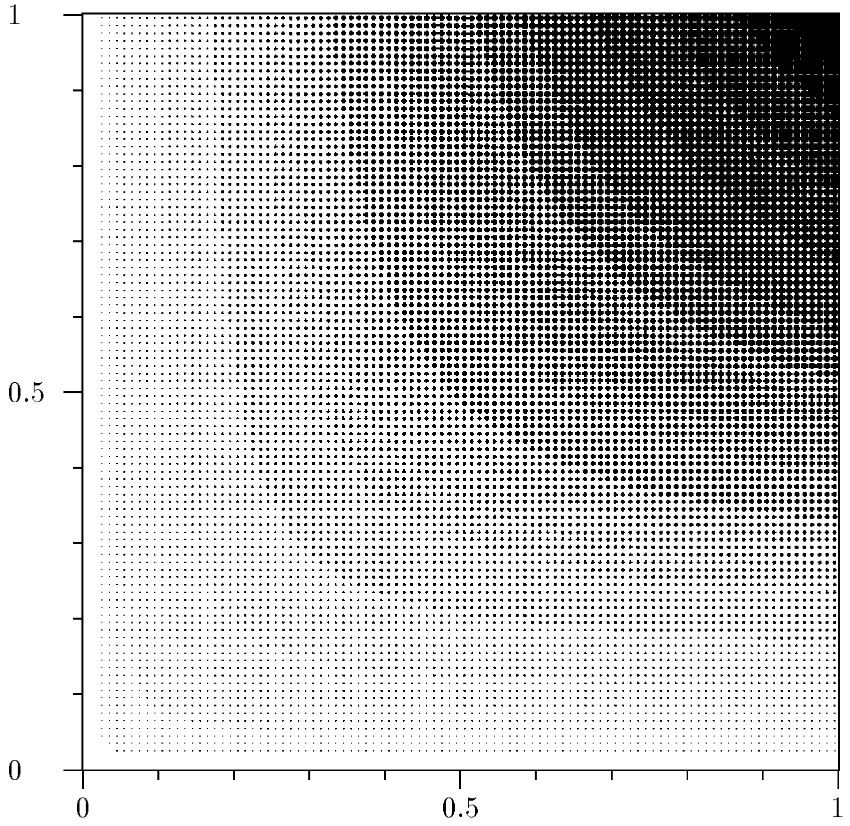



Schwach-drastische Konjunktion (et_{sd})
1
0.5
0
0
0.5
1

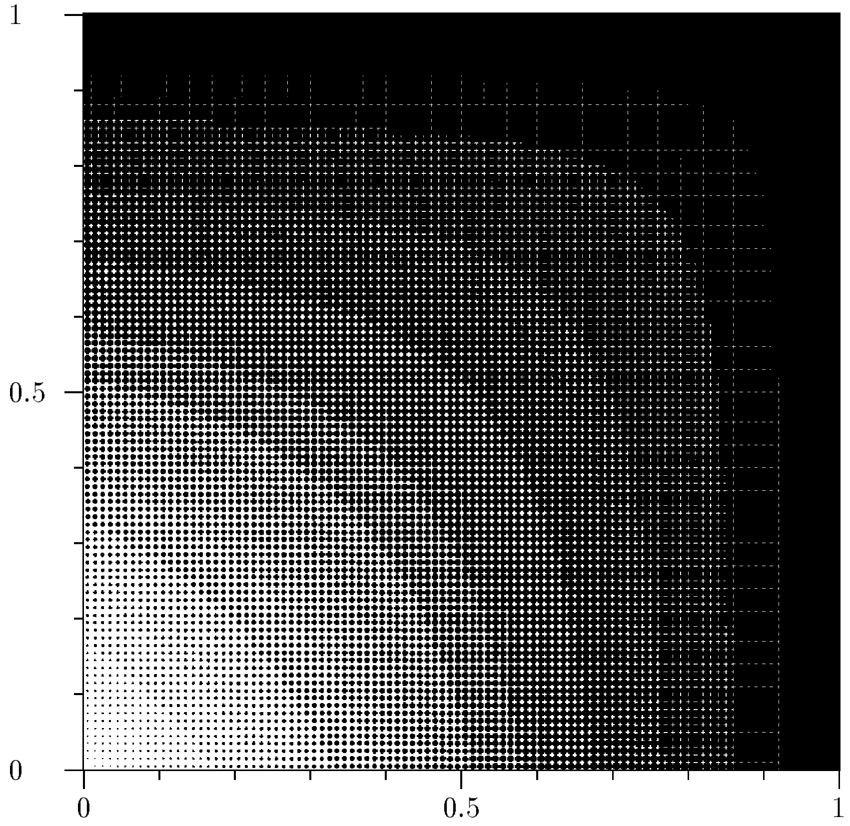
Schwach-drastische Alternative (vel_{sd})



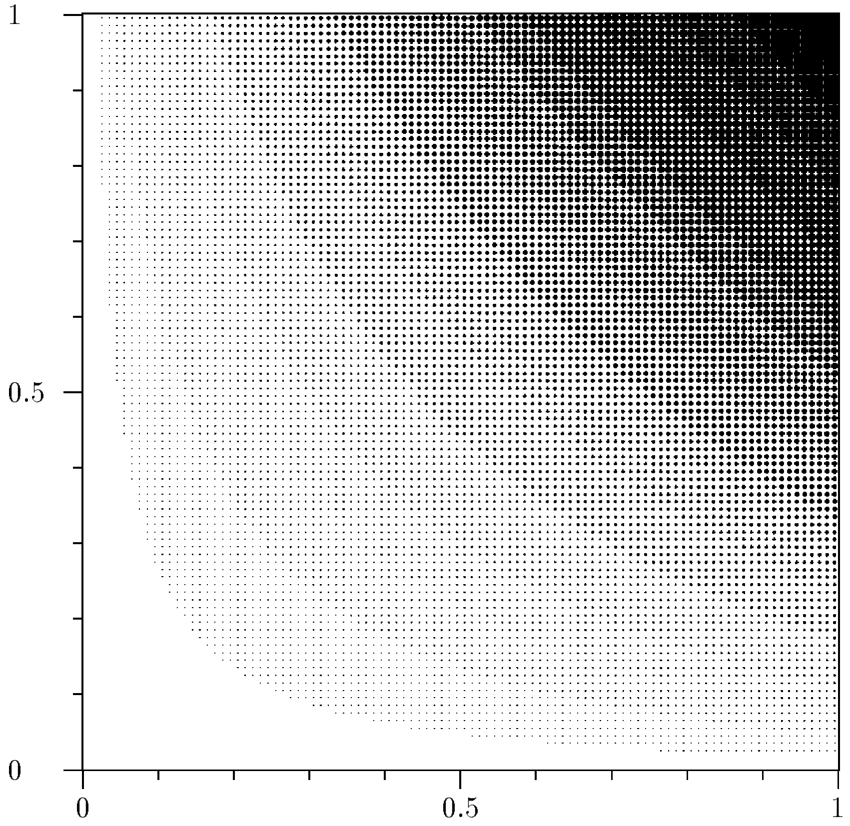
Hamacher-Konjunktion mit Parameter 0 ($et_{\mathrm{H}}(0; x, y) = \frac{xy}{x+y-xy}$)



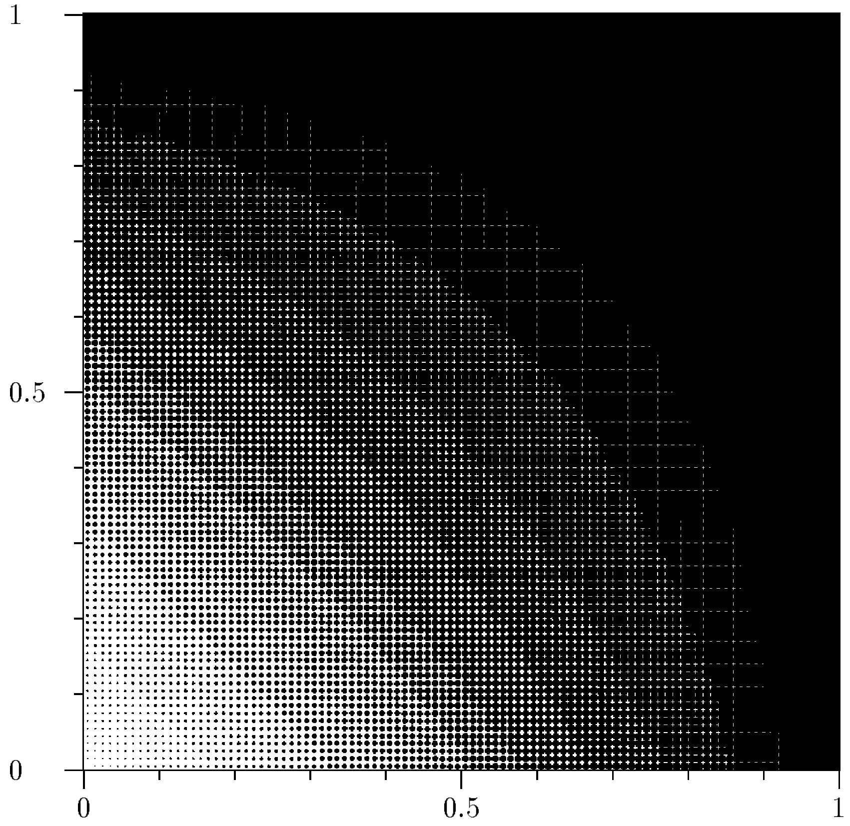
Hamacher-Alternative mit Parameter 0 ($vel_{\mathrm{H}}(0; x, y) = \frac{x+y-2xy}{1-xy}$)



Hamacher-Konjunktion mit Parameter 2 ($et_{\mathrm{H}}(2; x, y) = \frac{xy}{2-(x+y-xy)}$)



Hamacher-Alternative mit Parameter 2 ($vel_{\mathrm{H}}(2; x, y) = \frac{x+y}{1+xy}$)



3.3 Die Funktion min bzw. max als ausgezeichnete T-Norm bzw. S-Norm

Zur Einstimmung erinnern wir an **Folgerung 2.4.1**, die besagt, daß für alle $x, y \in \langle 0, 1\rangle$ die folgende Kette von Ungleichungen gilt:

$$et_{\mathrm{d}}(x,y) \leqq et_{\mathrm{sd}}(x,y) \leqq et_{\mathrm{b}}(x,y) \leqq et_{\mathrm{a}}(x,y) \leqq et_{\mathrm{m}}(x,y)$$

sowie an **Folgerung 2.4.2**, die besagt, daß für alle $x, y \in \langle 0, 1\rangle$ gilt:

$$vel_{\mathrm{m}}(x,y) \leqq vel_{\mathrm{a}}(x,y) \leqq vel_{\mathrm{b}}(x,y) \leqq vel_{\mathrm{sd}}(x,y) \leqq vel_{\mathrm{d}}(x,y).$$

Das folgende Theorem **verallgemeinert** die oben formulierten Abschätzungen.

Theorem 3.3.1

1. *Ist τ eine T-Norm, so gilt für jedes $x, y \in \langle 0, 1\rangle$:*

$$et_{\mathrm{sd}}(x,y) \leqq \tau(x,y) \leqq min(x,y).$$

2. *Ist σ eine S-Norm, so gilt für jedes $x, y \in \langle 0, 1\rangle$:*

$$max(x,y) \leqq \sigma(x,y) \leqq vel_{\mathrm{sd}}(x,y).$$

Beweis
ad 1

1.1 Wir zeigen als erstes

$$et_{\mathrm{sd}}(x,y) \leqq \tau(x,y).$$

Fall 1.1.1 $0 \leqq x < 1$ und $0 \leqq y < 1$.
Dann gilt nach Definition von et_{sd}

$$et_{\mathrm{sd}}(x,y) = 0,$$

also ist wegen

$$0 \leqq \tau(x,y)$$

die Behauptung 1.1 in diesem Fall richtig.

Fall 1.1.2 $x = 1$.
Nach Definition von et_{sd} gilt dann

$$et_{\mathrm{sd}}(1,y) = y.$$

Ferner folgt in diesem Fall für τ

$$\begin{aligned} \tau(1,y) &= \tau(y,1) && \text{mit } \mathrm{T}_3 \\ &= y && \text{mit } \mathrm{T}_1, \end{aligned}$$

also gilt auch in Fall 1.1.2 die Behauptung 1.1.

Fall 1.1.3 $y = 1$.
Nach Definition von et_{sd} gilt dann analog

$$et_{\mathrm{sd}}(x,1) = x.$$

Ferner folgt in diesem Fall für τ mit T_1, daß

$$\tau(x,1) = x,$$

also gilt auch in Fall 1.1.3 die Behauptung 1.1.

1.2 Wir zeigen als zweites, daß

$$\tau(x,y) \leqq min(x,y).$$

Mit T_2 (Monotonie) für τ erhalten wir

$$\tau(x,y) \leqq \tau(x,1). \tag{3.1}$$

Ferner gilt wegen T_1 für τ die Gleichung

$$\tau(x,1) = x, \tag{3.2}$$

also folgt aus (3.1) und (3.2)

$$\tau(x,y) \leqq x. \tag{3.3}$$

Nun wollen wir noch

$$\tau(x,y) \leqq y \tag{3.4}$$

zeigen; denn aus (3.3) und (3.4) folgt

$$\tau(x,y) \leqq min(x,y), \tag{3.5}$$

und (3.5) ist gerade unsere Behauptung 1.2.
Um (3.4) zu zeigen, beginnen wir mit

$$\tau(x,y) = \tau(y,x), \tag{3.6}$$

was wegen der Kommutativität von τ (T_3) gilt. Analog zu (3.1) und (3.2) haben wir

$$\tau(y,x) \leqq \tau(y,1) \tag{3.7}$$

und

$$\tau(y,1) = y, \tag{3.8}$$

also mit (3.7) und (3.8) folgt

$$\tau(y,x) \leqq y, \tag{3.9}$$

also mit (3.6) und (3.9) ergibt sich (3.4).

ad 2

$$max(x,y) \leqq \sigma(x,y) \leqq vel_{\mathrm{sd}}(x,y)$$

Diese Behauptung wird analog zu Behauptung 1 bewiesen, indem man die Definition der schwach drastischen Alternative vel_{sd} und die Eigenschaften einer S-Norm verwendet.

■

Bemerkungen

1. Beim Beweis der Behauptung 1.1

$$et_{\mathrm{sd}}(x, y) \leqq \tau(x, y)$$

haben wir allein die Kommutativität, also T_3, und die Eigenschaft

$$\tau(x, 1) = x,$$

als Teil von T_1, verwendet. Die Bedingung

$$\tau(x, 0) = 0$$

als „zweiter Teil" von T_1, ferner die Monotonie (T_2) und die Assoziativität (T_4) wurden nicht benutzt; also gilt die Abschätzung für eine wesentlich größere Klasse von Funktionen.

2. Im Buch [22] von Klir und Folger wird auf Seite 53 die Abschätzung

$$et_{\mathrm{sd}}(x, y) \leqq \tau(x, y)$$

nicht wie hier für T-Normen, sondern sogar für Konjunktionsskelette, d. h. wenn Bedingung T_1 durch T_0 ersetzt wird, „bewiesen" (siehe „Theorem 2.11").

Dieses Theorem ist falsch, wie man mit Hilfe der **drastischen** Konjunktion et_{d} zeigt; denn et_{d} ist ein Konjunktionsskelett, also müßte

$$et_{\mathrm{sd}}(x, y) \leqq et_{\mathrm{d}}(x, y)$$

für beliebige $x, y \in \langle 0, 1\rangle$ gelten, was aber für z. B. $x = \frac{1}{2}, y = 1$ falsch ist, denn

$$et_{\mathrm{sd}}\left(\frac{1}{2}, 1\right) = \frac{1}{2}$$
$$et_{\mathrm{d}}\left(\frac{1}{2}, 1\right) = 0.$$

Die Ursache für diesen Fehlschluß ist, daß im „Beweis" von „Theorem 2.11" für Konjunktionsskelette die Gleichung

$$\tau(x, 1) = x$$

für beliebige $x \in \langle 0, 1\rangle$ benutzt wird, die allgemein **nicht** gilt, wie et_{d} zeigt.

3. Im Buch [22] von Klir und Folger wird auf Seite 53 (siehe „Theorem 2.10") die Abschätzung

$$\tau(x, y) \leqq min(x, y)$$

nicht wie hier für T-Normen, sondern sogar für Konjunktionsskelette bewiesen.

Dieser „Beweis" ist ebenfalls falsch, da darin für Konjunktionsskelette Bedingung T_1 benutzt und „bewiesen" wird; wogegen wir wissen, daß für beliebige Konjunktionsskelette T_1 nicht gilt, wie et_{d} zeigt (siehe Bemerkung 2).

Aufgabe 3.3.1 *Man prüfe nach, ob „Theorem 2.10" aus [22] (d. h. Bedingung 1.2 des obigen Beweises), d. h.*

$$\tau(x, y) \leqq min(x, y) \qquad (x, y \in \langle 0, 1\rangle)$$

für beliebige Konjunktionsskelette τ gilt.

Hinweis: *Man finde ein Konjunktionsskelett τ, für das die obige Abschätzung* ***nicht*** *gilt.*

4. Analog zu den Bemerkungen zu „Theorem 2.11" aus [22] ist auch „Theorem 2.9" (ebenfalls Seite 53 dieses Buches) falsch. Er ist zwar für S-Normen richtig (siehe Aussage 2 von unserem **Theorem 3.3.1**), jedoch nicht für beliebige Alternativskelette, wie in [22] behauptet wird. Ein Gegenbeispiel ist die drastische Alternative vel_{d}, die ein Alternativskelett ist, für die jedoch **nicht** allgemein (d. h. für alle $x, y \in \langle 0,1\rangle$) die Abschätzung
$$vel_{\mathrm{d}}(x,y) \leqq vel_{\mathrm{sd}}(x,y)$$
gilt. So gilt z. B.
$$vel_{\mathrm{d}}\left(\frac{1}{2}, 0\right) = 1,$$
jedoch
$$vel_{\mathrm{sd}}\left(\frac{1}{2}, 0\right) = \frac{1}{2}.$$

5. Analog zu den Bemerkungen zu „Theorem 2.10" aus [22] (siehe Bemerkung 3) ist auch der Beweis von „Theorem 2.8" aus diesem Buch (Seite 52) falsch, weil dort für Alternativskelette σ die Bedingung

   Für alle $x, y \in \langle 0,1\rangle$ gilt:
$$\sigma(x,0) = x$$
(als Teil von S_1) „bewiesen" und benutzt wird, was falsch ist, wie die drastische Alternative vel_{d} zeigt; denn vel_{d} ist ein Alternativskelett, das jedoch die obige Bedingung verletzt.

Aufgabe 3.3.2 *Man prüfe — analog zu Aufgabe 3.3.1 — nach, ob „Theorem 2.8" aus [22], d. h.*
$$max(x,y) \leqq \sigma(x,y) \qquad (x, y \in \langle 0,1\rangle)$$
für beliebige Alternativskelette σ gilt.

Hinweis: *Man finde ein Alternativskelett σ, für das die obige Abschätzung* ***nicht*** *gilt.*

Das folgende Theorem gibt eine Charakterisierung der Funktionen *min* und *max* in der Klasse aller T- bzw. S-Normen.

Theorem 3.3.2

1. *Ist τ eine* ***idempotente*** *T-Norm, so gilt für jedes $x, y \in \langle 0,1\rangle$:*
$$\tau(x,y) = min(x,y).$$

2. *Ist σ eine* ***idempotente*** *S-Norm, so gilt für jedes $x, y \in \langle 0,1\rangle$:*
$$\sigma(x,y) = max(x,y).$$

Beweis

ad 1 Nach Behauptung 1 von **Theorem 3.3.1** gilt für jedes $x, y \in \langle 0, 1\rangle$:

$$\tau(x, y) \leqq min(x, y),$$

also genügt es, noch

$$min(x, y) \leqq \tau(x, y)$$

zu beweisen.

Fall 1. $x = y$.

Dann gilt trivial

$$min(x, y) = x = y,$$

ferner gilt nach T_6 (d. h. Idempotenz für τ)

$$\tau(x, y) = x = y,$$

also ist

$$min(x, y) \leqq \tau(x, y)$$

in diesem Fall trivial erfüllt.

Fall 2 $x < y$.

Wir haben zunächst

$$min(x, y) = x. \tag{3.10}$$

Um also die Ungleichung

$$min(x, y) \leqq \tau(x, y)$$

zu beweisen, genügt es nach (3.10), in diesem Fall

$$x \leqq \tau(x, y) \tag{3.11}$$

zu zeigen.

Nun gilt nach T_6 (Idempotenz für τ), daß

$$x = \tau(x, x), \tag{3.12}$$

ferner folgt aus $x < y$ mit T_2 (Monotonie) für τ

$$\tau(x, x) \leqq \tau(x, y), \tag{3.13}$$

also folgt (3.11) aus (3.12) und (3.13).

Fall 3 $y < x$. Man schließt analog zum vorhergehenden Fall.

ad 2 Diese Behauptung wird durch dieselbe Fallunterscheidung wie für Behauptung 1 bewiesen. Im Beweis wird die Idempotenz von σ benutzt. Ferner ist zu beachten, daß für $x \leqq y$

$$max(x, y) = y$$

gilt.

■

Probleme

In der neueren Literatur sind die Auswirkungen des Stetigkeitsaxioms T_5 für T-Normen (bzw. Konjunktionsskelette) sowie S_5 für S-Normen (bzw. Alternativskelette) untersucht worden.

Wir stellen demgemäß die folgenden Fragen:

1. Folgt T_1 aus T_0, T_2, T_3, T_4 und T_5 ?

2. Folgt S_1 aus S_0, S_2, S_3, S_4 und S_5 ?

3. Gilt **Theorem 3.3.1**, wenn man darin T_1 bzw. S_1 durch T_0 **und** T_5 bzw. S_0 **und** S_5 ersetzt ?

4. Folgt T_3 bzw. S_3 (Kommutativität) aus T_1, T_2, T_4 und T_5 bzw. S_1, S_2, S_4 und S_5 ?

Zum Abschluß der Betrachtungen in Abschnitt 3.3 zitieren wir aus der betreffenden Literatur noch den folgenden Satz, der eine „gleichzeitige" („parallele") Charakterisierung der Funktionen *min* und *max* mit Hilfe von Funktionenpaaren τ und σ, die „Normen-ähnlich" sind, liefert.

Gegeben seien Funktionen τ und σ mit

$$\tau, \sigma : \langle 0,1\rangle^2 \to \langle 0,1\rangle .$$

Theorem 3.3.3

Voraussetzungen:

1. *$\tau(1,1) = 1$ und $\sigma(0,0) = 0$.*

2. *τ und σ sind monoton (T_2 bzw. S_2).*

3. *τ und σ sind kommutativ (T_3 bzw. S_3).*

4. *τ und σ sind assoziativ (T_4 bzw. S_4).*

5. *τ und σ sind stetig (T_5 bzw. S_5).*

6. *Für jedes $x, y \in \langle 0,1\rangle$ gilt:*

$$\tau(x,y) \leqq min(x,y) \;\; \text{und} \;\; max(x,y) \leqq \sigma(x,y).$$

7. *τ und σ sind gegenseitig distributiv, d. h. es gilt für alle $x, y \in \langle 0,1\rangle$:*

$$\begin{aligned} \tau(x, \sigma(y,z)) &= \sigma(\tau(x,y), \tau(x,z)) \qquad \text{und} \\ \sigma(x, \tau(y,z)) &= \tau(\sigma(x,y), \sigma(x,z)). \end{aligned}$$

8. *Für jedes $x, y \in \langle 0,1\rangle$ gilt: Wenn $x < y$, so*

$$\begin{aligned} \tau(x,x) &< \tau(y,y) \qquad \text{und} \\ \sigma(x,x) &< \sigma(y,y). \end{aligned}$$

Behauptung: *Für jedes $x, y \in \langle 0,1 \rangle$ gilt:*

$$\tau(x,y) = min(x,y),$$
$$\sigma(x,y) = max(x,y).$$

Beweis
Wir führen den Beweis nicht aus, sondern verweisen auf die Arbeit [6] von Bellman und Giertz, wo dieser Satz erstmals formuliert und bewiesen wurde. ■

Inzwischen ist dieser Satz (einschließlich Beweis) in die betreffende Lehrbuchliteratur aufgenommen worden.

3.4 Theorie der Negationen

Negationen werden grundsätzlich als *einstellige* Funktionen (Verknüpfungen) definiert.

In der zweiwertigen Logik gibt es genau 4 einstellige Funktionen, die durch die folgende Tabelle charakterisiert sind:

	β_0	β_1	β_2	β_3
0	0	1	0	1
1	0	0	1	1

Offenbar ist $\beta_1 \approx 01 \approx 1$ die übliche Negation, während die übrigen nicht als Negationen angesehen werden können.

β_0 : „*Falsum*“-Funktion
β_2 : „Identität“
β_3 : „*Verum*“-Funktion

In der dreiwertigen Logik (mit der Menge $\{0, \frac{1}{2}, 1\}$ ihrer Wahrheitswerte) gibt es offenbar 27 einstellige Funktionen. Wir wollen diese Funktionen nicht sämtlich hier auflisten, sondern durch ein einfaches Verfahren diejenigen herausfiltern, die als (dreiwertige) Negationen in Frage kommen.

Gegeben seien eine n-stellige **zwei**wertige Funktion β,

$$\beta : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$$

sowie eine n-stellige **drei**wertige Funktion δ, d. h.

$$\delta : \left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}^n \to \left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}.$$

In Analogie zum Begriff der Lukasiewiczschen Erweiterung definieren wir

Definition 3.4.1
*δ ist eine **dreiwertige** Erweiterung von β*
$=_{def}$ *Für jedes $x_1, \ldots, x_n \in \{0,1\}$ gilt:*

$$\delta(x_1, \ldots, x_n) = \beta(x_1, \ldots, x_n).$$

Offenbar gibt es genau 3 dreiwertige Erweiterungen der zweiwertigen Negation β_1, die wir durch die folgende Tabelle charakterisieren:

	δ	δ'	δ''
0	1	1	1
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1
1	0	0	0

Die Funktion δ' ist offenbar eine Einschränkung der LUKASIEWICZschen Negation non_{L} auf den dreiwertigen Bereich $\left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}$ (siehe Abschnitt 2.4), während wir δ als Einschränkung der drastischen Negation non_{d} mit

$$non_{\mathrm{d}}(x) =_{def} \begin{cases} 1, & \text{falls } x = 0 \\ 0, & \text{falls } 0 < x \leqq 1 \end{cases} \qquad (x \in \langle 0, 1 \rangle)$$

und δ'' als Einschränkung der schwach-drastischen Negation non_{sd} mit

$$non_{\mathrm{sd}}(x) =_{def} \begin{cases} 1, & \text{falls } 0 \leqq x < 1 \\ 0, & \text{falls } x = 1 \end{cases} \qquad (x \in \langle 0, 1 \rangle)$$

auf den dreiwertigen Bereich $\left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}$ interpretieren können.

Erinnerung
Aus Abschnitt 2.4 kennen wir für alle $x \in \langle 0, 1 \rangle$ die Abschätzung

$$non_{\mathrm{d}}(x) \leqq non_{\mathrm{L}}(x) \leqq non_{\mathrm{sd}}(x).$$

Entsprechend gilt für alle $x \in \left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}$:

$$\delta(x) \leqq \delta'(x) \leqq \delta''(x).$$

Bemerkungen zu den Anwendungen der dreiwertigen Logik in der Logischen Programmierung.

Siehe dazu das Buch von SCHMIDT [32].

Man weiß, daß die „operationale Behandlung“ negierter Anfragen unter dem Aspekt „Negation $\approx$ Fehlschlag“ (negation-by-failure) steht.

Die Verwendung dreiwertiger Logik hilft hier weiter. Neben der „**starken**“ Negation δ' (formal $\neg A$) wird eine „schwache“ Negation (formal $\sim A$) verwendet, deren Wertverlauf durch δ'' bzw. die schwach-drastische Negation non_{sd} gegeben ist.

Ist $VAL(B)$ der Wahrheitswert einer Aussage B in der dreiwertigen Logik, so interpretiert man

1. $VAL(A) = 1$: A ist wahr
2. $VAL(\neg A) = 1$: A ist falsch
3. $VAL(\sim A) = 1$: A ist nicht wahr
4. $VAL(\sim\neg A) = 1$: A ist nicht falsch

Wir streben jetzt an, nach dem Vorbild der Theorie der T- und S-Normen Negationen durch Axiome zu charakterisieren.

Wir führen als erstes 5 Bedingungen (Axiome) N_1, N_2, N_3, N_4, N_5 ein. Dabei folgen wir zum Teil dem Buch [22] von KLIR und FOLGER (siehe die Seiten 38 und 39). Gegeben sei eine Funktion ν mit

$$\nu : \langle 0, 1 \rangle \to \langle 0, 1 \rangle .$$

Definition 3.4.2
ν heiße ***Negation***
$=_{def}$ *Die folgenden Bedingungen N_1 und N_2 sind erfüllt*

N_1: *$\nu(0) = 1$ und $\nu(1) = 0$.*

N_2: *ν ist eine* ***comonotone*** *Funktion, d. h. für jedes $x, y \in \langle 0,1\rangle$ gilt:*

$$\text{Wenn } x \leqq y \text{, so } \nu(x) \geqq \nu(y).$$

Die im folgenden formulierten Bedingungen N_3, N_4 und N_5 sind Hilfsmittel zur „feineren“ Beschreibung von Negationen

N_3: ν ist *stetig*.

N_4: ν ist *involutorisch*, d. h. für jedes $x \in \langle 0,1\rangle$ gilt:

$$\nu(\nu(x)) = x.$$

N_5: ν ist *unschärfe-invariant*, d. h. für jedes $x \in \langle 0,1\rangle$ gilt:

$$\text{Wenn } 0 < x < 1 \text{, so } 0 < \nu(x) < 1.$$

Bemerkung
In dem Buch [22] werden Negationen *Negationsskelette* genannt. Wir finden diese Bezeichnung überflüssig.

Für die LUKASIEWICZsche Negation $non_{\mathrm{L}}(x) =_{def} 1 - x$ ist der Wahrheitswert $\frac{1}{2}$ als (einziger) Fixpunkt ausgezeichnet, d. h. als einzige reelle Zahl $x \in \langle 0,1\rangle$, für die

$$non_{\mathrm{L}}(x) = x$$

gilt.

Ferner stellen wir für den Fixpunkt $\frac{1}{2}$ von non_{L} die folgenden Beziehungen fest, wobei $x \in \langle 0,1\rangle$ beliebig ist:

1. $x \leqq non_{\mathrm{L}}(x)$ genau dann, wenn $x \leqq \frac{1}{2}$.

2. $x \geqq non_{\mathrm{L}}(x)$ genau dann, wenn $x \geqq \frac{1}{2}$.

Die folgenden zwei Theoreme stellen diese Beobachtungen in den Zusammenhang beliebiger Negationen.

Theorem 3.4.1
Ist ν eine Negation, so hat ν höchstens einen Fixpunkt.

Beweis
Indirekt, d. h. wir nehmen an, ν habe zwei Fixpunkte x, y mit $x \neq y$ und führen diese Annahme zum Widerspruch. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir $x < y$ an. Dann folgt mit der *Comonotonie*, also N_2, für ν, daß $\nu(y) \leqq \nu(x)$. Weil x, y Fixpunkte von ν sind, ergibt sich aus dem letzteren, daß $y \leqq x$, und das ist ein Widerspruch zur Annahme $x < y$. ∎

Theorem 3.4.2
Ist ν eine Negation und ist x_0 (der) Fixpunkt von ν, so gilt für jedes $x \in \langle 0,1\rangle$:

1. *$x \leqq \nu(x)$ genau dann, wenn $x \leqq x_0$.*
2. *$x \geqq \nu(x)$ genau dann, wenn $x \geqq x_0$.*

Beweis
ad 1.

1.1 Wenn $x \leqq \nu(x)$, so $x \leqq x_0$.
Wir schließen indirekt, indem wir annehmen, daß

$$x > x_0. \tag{3.14}$$

Aus (3.14) folgt mit der *Comonotonie* für ν, daß

$$\nu(x) \leqq \nu(x_0). \tag{3.15}$$

Nun ist x_0 nach Voraussetzung Fixpunkt von ν, d. h. es gilt

$$\nu(x_0) = x_0, \tag{3.16}$$

somit folgt aus (3.15) und (3.16), daß

$$\nu(x) \leqq x_0. \tag{3.17}$$

Aus (3.17) folgt mit der Voraussetzung $x \leqq \nu(x)$, daß

$$x \leqq x_0, \tag{3.18}$$

also wegen (3.14) ein Widerspruch.

1.2 Wenn $x \leqq x_0$, so $x \leqq \nu(x)$.
Wir schließen indirekt, indem wir annehmen, daß

$$\nu(x) < x. \tag{3.19}$$

Aus der Voraussetzung $x \leqq x_0$ folgt mit der *Comonotonie* für ν, daß

$$\nu(x_0) \leqq \nu(x). \tag{3.20}$$

Da x_0 ein Fixpunkt für ν ist, haben wir

$$x_0 = \nu(x_0), \tag{3.21}$$

also folgt aus (3.20) und (3.21), daß

$$x_0 \leqq \nu(x), \tag{3.22}$$

also aus (3.19) und (3.22), daß

$$x_0 < x. \tag{3.23}$$

Somit ist (3.23) ein Widerspruch zur Voraussetzung $x \leqq x_0$.

ad 2. Diese Aussage wird analog zu 1 bewiesen. ■

Folgerung 3.4.3
Ist ν eine Negation und x_0 (der) Fixpunkt von ν, so gilt für jedes $x \in \langle 0, 1\rangle$:

1. *$x < \nu(x)$ genau dann, wenn $x < x_0$.*
2. *$x > \nu(x)$ genau dann, wenn $x > x_0$.*

Beweis
Unmittelbare Folgerung aus **Theorem 3.4.2**, indem man die Aussagen 1 und 2 dieses Theorems kontraponiert. ■

Theorem 3.4.4
Ist ν eine **stetige** *Negation, so hat ν mindestens einen Fixpunkt.*

Beweis
Ein Beweis dieses Theorems ergibt sich sehr einfach aus dem *Zwischenwertsatz* aus der Analysis für stetige reelle Funktionen.

Zwischenwertsatz Gegeben sei eine reelle Funktion φ, die in dem abgeschlossenen Intervall $\langle a, b\rangle$ reeller Zahlen (wobei $a < b$) stetig ist. Es sei ferner $\varphi(a) < \varphi(b)$. Dann wird jeder Wert $y \in \langle \varphi(a), \varphi(b)\rangle$ von φ mindestens einmal mit einem Argument $x \in \langle a, b\rangle$ angenommen.

Zum Beweis von **Theorem 3.4.4** betrachten wir die Funktion φ mit

$$\varphi(x) = x - \nu(x) \qquad x \in \langle 0, 1\rangle$$

Weil $\nu(x)$ in $\langle 0, 1\rangle$ stetig ist, ist auch $\varphi(x)$ in $\langle 0, 1\rangle$ stetig. Ferner gilt

$$\varphi(0) = -1 < \varphi(1) = 1.$$

Wir betrachten somit das Intervall $\langle -1, 1\rangle$ und darin den Punkt 0. Also gibt es nach dem Zwischenwertsatz ein $x_0 \in \langle 0, 1\rangle$, so daß $\varphi(x_0) = 0$, d. h. aber, daß

$$x_0 = \nu(x_0)$$

gilt. Nach Definition ist x_0 aber ein Fixpunkt von ν im Intervall $\langle 0, 1\rangle$. ■

Folgerung 3.4.5
Ist ν eine stetige Negation, so hat ν genau einen Fixpunkt (in $\langle 0, 1\rangle$).

Wir betrachten nun eine Reihe von Beispielen für Negationen.

Beispiel (Schwellenwert-Funktion) Gegeben sei eine fixierte reelle Zahl s mit $0 \leqq s < 1$. Wir definieren dann für $x \in \langle 0, 1\rangle$:

$$sw_s(x) =_{def} \begin{cases} 0, & \text{falls } 0 \leqq x \leqq s \\ 1, & \text{falls } s < x \leqq 1. \end{cases}$$

Für jedes fixierte s mit $0 \leqq s < 1$ ist sw_s eine „typische" Schwellenwertfunktion, d. h. sie „feuert" (gibt den Wert 1 aus), falls das Argument x die „Schwelle" s übersteigt bzw. sie feuert nicht, falls das Argument x die Bedingung $0 \leqq x \leqq s$ erfüllt.

Somit gilt für sw_s:

1. $sw_s(0) = 0$ und $sw_s(1) = 1$
2. sw_s ist monoton, d. h. für alle $x, y \in \langle 0, 1\rangle$:
$$\text{Wenn } x \leqq y \text{, so } sw_s(x) \leqq sw_s(y)$$
3. sw_s ist nicht stetig (in $\langle 0, 1\rangle$)
4. Von Spezialfällen, z. B.
$$sw_s(sw_s(0)) = 0$$
$$sw_s(sw_s(1)) = 1$$
abgesehen, gilt $sw_s(sw_s(x)) \neq x$, d. h. sw_s ist nicht involutorisch.

Wir definieren nun
$$\nu_s(x) =_{def} 1 - sw_s(x)$$

Folgerung 3.4.6
ν_s ist eine Negation, die jedoch weder stetig noch involutorisch ist.

Beweis
Unmittelbar auf Grund der Feststellungen 1, 2, 3 und 4 über die Funktionen sw_s. ■

Die Funktionen ν_s lassen sich auch wie folgt definieren:
$$\nu_s(x) =_{def} \begin{cases} 0, & \text{falls } s < x \leqq 1 \\ 1, & \text{falls } 0 \leqq x \leqq s. \end{cases}$$

Offenbar ist in dieser Definition die „Feuerbedingung“ $s < x \leqq 1$ mit der „Nicht-Feuerbedingung“ vertauscht, und demgemäß könnte man ν_s als *Co-Schwellenwert*-Funktion bezeichnen.

Beispiel (Modifizierte Schwellenwert-Funktion) Gegeben sei eine fixierte reelle Zahl s mit $0 < s \leqq 1$. Wir definieren dann für $x \in \langle 0, 1\rangle$:
$$sw'_s(x) =_{def} \begin{cases} 0, & \text{falls } 0 \leqq x < s \\ 1, & \text{falls } s \leqq x \leqq 1. \end{cases}$$

Die Modifikation gegenüber Beispiel besteht darin, daß das „Feuern“ schon dann ausgelöst wird, falls der Wert x nur die Schwelle erreicht (und nicht überschreitet wie im vorhergehenden Beispiel).

Für sw'_s gelten dieselben Bedingungen wie für sw_s.

Definiert man für $x \in \langle 0, 1\rangle$:
$$\nu'_s(x) =_{def} 1 - sw'_s(x)$$
so erhält man für ν'_s die analoge

Folgerung 3.4.7
ν'_s ist eine Negation, die jedoch weder stetig noch involutorisch ist.

Die Funktionen ν'_s lassen sich analog zu ν_s auch mittles der folgenden „*Co*-Feuerungsbedingungen“ definieren:

$$\nu'_s(x) =_{def} \begin{cases} 0, & \text{falls } s \leqq x \leqq 1 \\ 1, & \text{falls } 0 \leqq x < s. \end{cases}$$

Beispiel (Eine „Cosinus-gestützte“ Negation) Wir definieren für $x \in \langle 0,1 \rangle$:

$$\nu_{cos}(x) =_{def} \frac{1}{2}(1 + cos\, \pi \cdot x)$$

Folgerung 3.4.8
*ν_{cos} ist eine **stetige** Negation, die jedoch nicht involutorisch ist.*

Beweis

1. $\nu_{cos}(0) = 1$ und $\nu_{cos}(1) = 0$.

   Diese Behauptung folgt aus

   $$cos\, 0 = 1 \quad \text{und} \quad cos\, \pi = -1.$$

2. ν_{cos} ist comonoton.

   Dies folgt aus der Tatsache, daß *cos* eine comonotone Funktion ist.

3. Weil *cos* stetig ist, ist auch ν_{cos} stetig.

4. ν_{cos} ist nicht involutorisch, z. B.

   $$\nu_{cos}\left(\nu_{cos}\left(\frac{1}{4}\right)\right) \neq \frac{1}{4}$$

■

Wie für T- und S-Normen hat man auch für Negationen Klassen betrachtet, die durch eine Parameterabhängigkeit definiert sind.

Beispiel (Die Sugeno-Klasse) Siehe hierzu M. SUGENO [36]. Gegeben sei eine fixierte reelle Zahl λ mit $-1 < \lambda < +\infty$. Wir definieren für jedes $x \in \langle 0,1 \rangle$:

$$\nu_{\mathrm{S}}(\lambda; x) =_{def} \frac{1-x}{1+\lambda \cdot x}$$

Folgerung 3.4.9

1. *$\nu_S(\lambda; .)$ ist für jedes λ mit $-1 < \lambda < +\infty$ eine stetige, involutorische Negation.*

2. *$\nu_S(0; x) = 1 - x = non_{\mathrm{L}}(x)$, d. h. für den Parameterwert $\lambda = 0$ erhalten wir die* LUKASIEWICZ*sche Negation.*

Beweis
Aufgabe 3.4.1. ■

Beispiel (Die Yager-Klasse) Siehe hierzu R. R. YAGER [40]. Gegeben sei eine fixierte reelle Zahl λ mit $0 < \lambda < +\infty$. Wir definieren für jedes $x \in \langle 0, 1 \rangle$:

$$\nu_{\mathrm{Y}}(\lambda; x) =_{def} \left(1 - x^{\lambda}\right)^{\frac{1}{\lambda}}$$

Folgerung 3.4.10

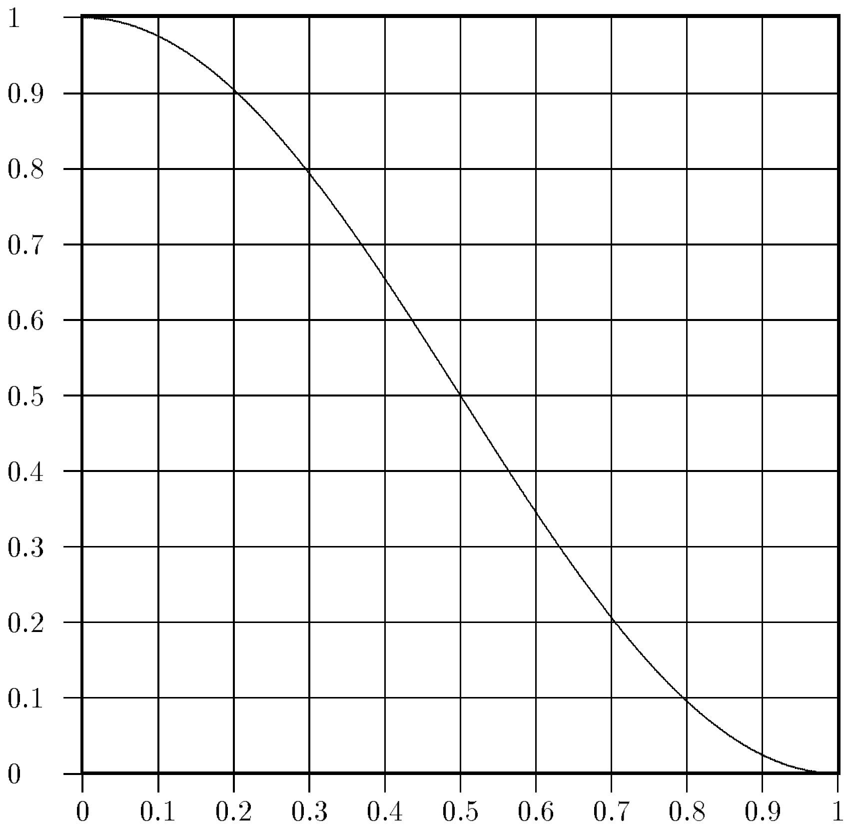
1. *$\nu_{\mathrm{Y}}(\lambda; .)$ ist für jedes fixierte λ mit $0 < \lambda < +\infty$ eine stetige, involutorische Negation.*

2. *Für $\lambda = 1$ erhält man die* LUKASIEWICZ*sche Negation $non_{\mathrm{L}}(x) = 1 - x$.*

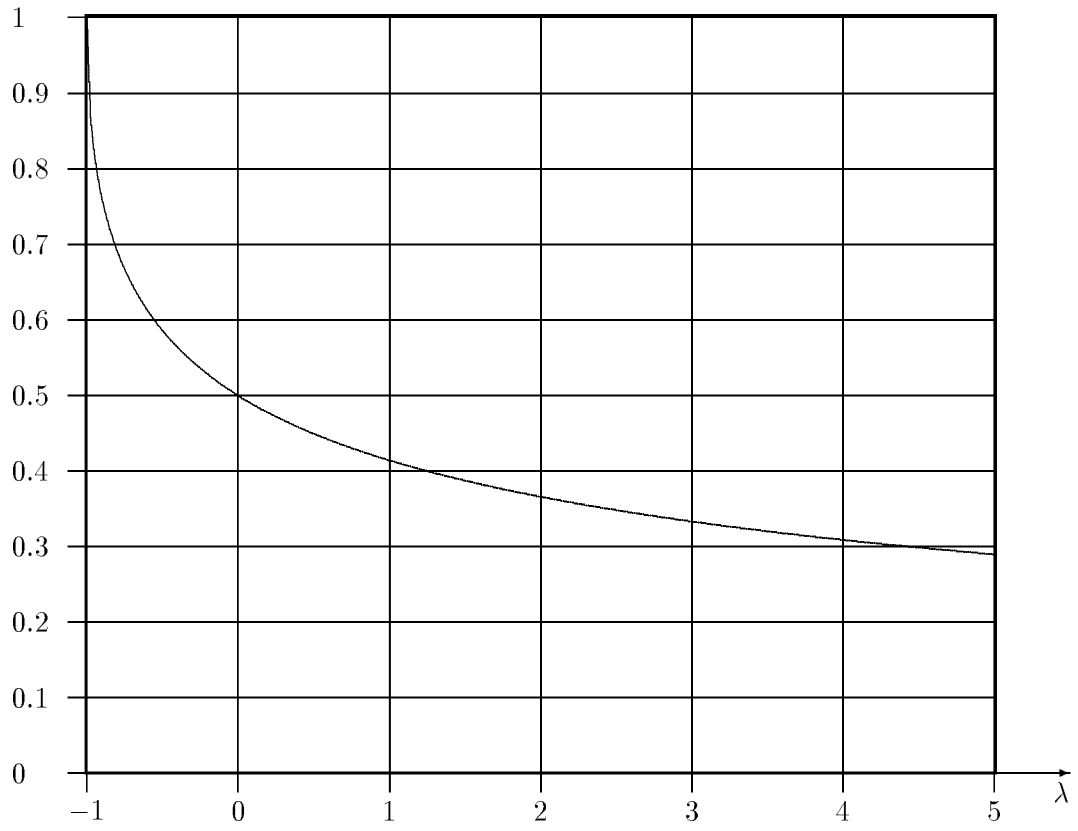
Beweis
Aufgabe 3.4.2. ■

Veranschaulichung des Verlaufs der *Cosinus*-gestützten Negation $\nu_{cos}(x)$ mit

$$\nu_{cos}(x) =_{def} \frac{1}{2}(1 + cos\, \pi \cdot x)$$

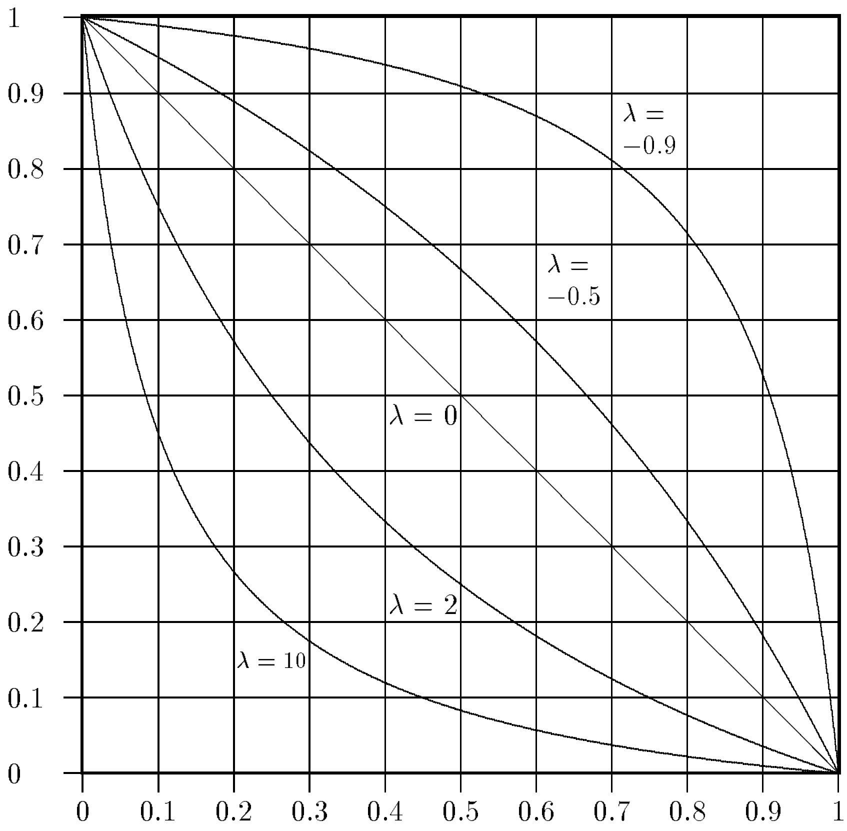


Veranschaulichung des Verlaufs der Fixpunkte der Negationen der SUGENO-Klasse in Abhängigkeit vom Parameter $\lambda \in (-1, +\infty)$.



Veranschaulichung des Verlaufs einiger Negationen der SUGENO-Klasse

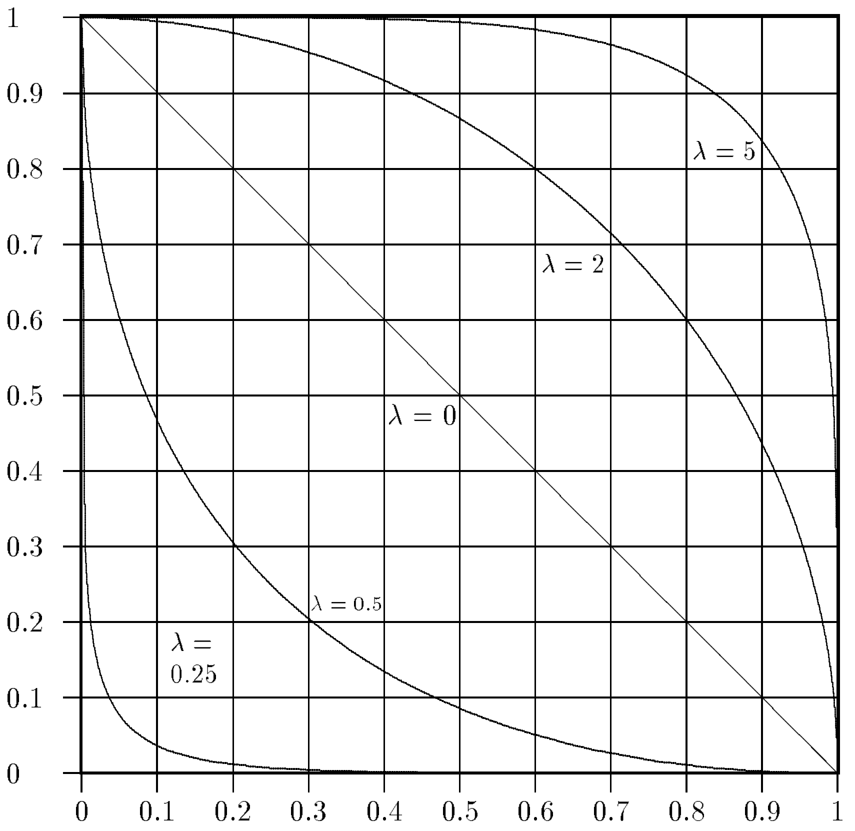
$$\nu_{\mathrm{S}}(\lambda; x) =_{def} \frac{1-x}{1+\lambda \cdot x} \qquad \begin{array}{l} -1 < \lambda < \infty \\ 0 \leqq x \leqq 1 \\ \lambda, x \text{ reelle Zahlen} \end{array}$$



Veranschaulichung des Verlaufs einiger Negationen der YAGER-Klasse

$$\nu_{\mathrm{Y}}(\lambda; x) =_{def} \left(1 - x^{\lambda}\right)^{\frac{1}{\lambda}}$$

$0 < \lambda < +\infty$
$0 \leqq x \leqq 1$
λ und x reelle Zahlen



3.5 Nicht-Standard-Operationen mit Fuzzy-Mengen

Wir erinnern an **Definition 2.5.1**, wo wir auf der Grundlage der Funktionen $min(x, y), max(x, y), 1 - x$ für Fuzzy-Mengen $F, G : U \to \langle 0, 1 \rangle$ eine Durchschnitts-, eine Vereinigungs- und eine Komplementoperation wie folgt definiert hatten. Sei dazu $x \in U$.

1. $(F \cap G)(x) =_{def} min(F(x), G(x))$
2. $(F \cup G)(x) =_{def} max(F(x), G(x))$
3. $\left(\overline{F}\right)(x) =_{def} 1 - F(x)$.

Wir wollen diesen Ansatz nun wie folgt verallgemeinern: Gegeben seien zweistellige Abbildungen σ, τ mit

$$\tau, \sigma : \langle 0, 1 \rangle^2 \to \langle 0, 1 \rangle$$

sowie eine einstellige Abbildung ν mit

$$\nu : \langle 0, 1 \rangle \to \langle 0, 1 \rangle .$$

Zunächst (für die folgende Definition) werden an die genannten Abbildungen keine Forderungen gestellt. Später werden wir für τ, σ, ν geeignete Voraussetzungen formulieren, so daß τ als Konjunktion, σ als Alternative und ν als Negation gedeutet werden können sowie die darauf beruhenden Operationen mit Fuzzy-Mengen als Durchschnitt, Vereinigung und als Komplement interpretierbar sind. Sei $x \in U$.

Definition 3.5.1

1. $(F \Cap G)(x) =_{def} \tau(F(x), G(x))$

2. $(F \Cup G)(x) =_{def} \sigma(F(x), G(x))$
3. $\left(\overline{F}^{\nu}\right)(x) =_{def} \nu(F(x))$.

In einer Reihe von (folgenden) Theoremen wollen wir konstatieren, wie sich bestimmte Eigenschaften der Funktionen τ, σ, ν auf Eigenschaften der definierten Operationen $\Cap$, $\Cup$, $\overline{}^{\nu}$ für Fuzzy-Mengen übertragen.

Als erstes werden wir untersuchen, welche Folgerungen sich ergeben, wenn τ und σ als T-Norm bzw. S-Norm und ν als (involutorische) Negation vorausgesetzt werden. Um diese Folgerungen sämtlich formulieren zu können, müssen wir die (scharfe) Teilmengenbeziehung $F \subseteqq G$ für Fuzzy-Mengen verwenden, die wie folgt definiert war:

$$F \subseteqq G =_{def} \text{Für jedes } x \in U \text{ gilt: } F(x) \leqq G(x).$$

Theorem 3.5.1
Ist τ eine T-Norm, so gelten für alle $F, G, H : U \to \langle 0, 1\rangle$ die folgenden ***Rechenregeln****:*

1. $F \Cap \emptyset = \emptyset$ *und*
   $F \Cap \not{U} = F$
2. *Wenn* $F \subseteqq G$, *so* $F \Cap H \subseteqq G \Cap H$ *und*
   $H \Cap F \subseteqq H \Cap G$
3. $F \Cap G = G \Cap F$
4. $(F \Cap G) \Cap H = F \Cap (G \Cap H)$

Beweis

ad 1. $\emptyset$ ist *Nullelement*, $\not{U}$ ist *Einselement*.

Man eliminiert die Definition von $\Cap$, $\emptyset$ und $\not{U}$ und wendet die Eigenschaft T_1 von T-Normen an, die besagt, daß für jedes $x \in \langle 0, 1\rangle$ gilt:

$$\tau(x, 0) = 0 \quad \text{und} \quad \tau(x, 1) = x.$$

ad 2. *Monotonie* von $\Cap$ bezüglich $\subseteqq$.

Wiederum Elimination der betreffenden Definitionen $\subseteqq$ und $\Cap$ sowie Anwendung von T_2, was besagt, daß für alle $x, y, z \in \langle 0, 1\rangle$ gilt:

$$\text{Wenn } x \leqq y \text{, so } \tau(x, z) \leqq \tau(y, z) \text{ und } \tau(z, x) \leqq \tau(z, y).$$

ad 3. *Kommutativität* von $\Cap$.

Elimination von $\Cap$ und Anwendung von T_3, d. h., daß für alle $x, y \in \langle 0, 1\rangle$ gilt:

$$\tau(x, y) = \tau(y, x).$$

ad 4. *Assoziativität* von $\Cap$.

Elimination von $\Cap$ und Anwendung von T_4, d. h., daß für alle $x, y, z \in \langle 0, 1\rangle$ gilt:

$$\tau(x, \tau(y, z)) = \tau(\tau(x, y), z).$$

■

Entsprechend gilt für eine Abbildung σ:

Theorem 3.5.2
*Ist σ eine S-Norm, so gelten für alle $F, G, H : U \to \langle 0,1 \rangle$ die folgenden **Rechenregeln**:*

1. $F \uplus \phi = F$
   $F \uplus \not{U} = \not{U}$
2. *Wenn* $F \subseteqq G$, *so* $F \uplus H \subseteqq G \uplus H$ *und*
   $H \uplus F \subseteqq H \uplus G$
3. $F \uplus G = G \uplus F$
4. $F \uplus (G \uplus H) = (F \uplus G) \uplus H.$

Beweis
Analog zum Beweis von **Theorem 3.5.1**. ■

Das nächste Theorem betrifft Rechenregeln für eine Komplement-Operation $\overline{}^{\nu}$, wenn diese durch eine (involutorische) Negation ν erzeugt wird.

Zum Beweis der Aussage 5 des folgenden Theorems benötigen wir das Axiom N_5, das die „Invarianz der Unschärfe" einer Funktion ν beschreibt.

Theorem 3.5.3
Ist ν eine Negation, so gelten für $\overline{}^{\nu}$ die folgenden Rechenregeln:

1. $\overline{\phi}^{\nu} = \not{U}$ und $\overline{\not{U}}^{\nu} = \phi$
2. *Wenn* $F \subseteqq G$, *so* $\overline{G}^{\nu} \subseteqq \overline{F}^{\nu}$.
3. $KER\left(\overline{F}^{\nu}\right) \supseteqq CKER(F)$
4. $CKER\left(\overline{F}^{\nu}\right) \supseteqq KER(F)$
5. *Ist ν unschärfe-invariant (N_5), so gilt:*
   $$FR\left(\overline{F}^{\nu}\right) = FR(F)$$
6. *Ist ν involutorisch, so gilt:*
   $$\overline{\overline{F}^{\nu}}^{\nu} = F.$$

Beweis
ad 1. Diese Behauptungen folgen aus N_1 für ν, d. h. $\nu(0) = 1$ und $\nu(1) = 0$,

ad 2. Die Behauptung folgt aus N_2 für ν, d. h. aus der *Comonotonie*, also daß für alle $x, y \in \langle 0,1 \rangle$ gilt: Wenn $x \leqq y$, so $\nu(y) \leqq \nu(x)$.

ad 3 und 4. Beide Behauptungen folgen aus N_1.

ad 5. Diese Behauptung folgt aus N_5.

ad 6. Folgerung aus N_4.

■

In der folgenden Definition formulieren wir einige weitere Eigenschaften beliebig gewählter Funktionen

$$\tau, \sigma : \langle 0,1\rangle^2 \to \langle 0,1\rangle$$

und ν, die das gegenseitige Verhältnis betreffen.

Definition 3.5.2

1. *τ erfüllt das **Absorbtionsgesetz***
   $=_{def}$ *Für jedes $x, y \in \langle 0,1\rangle$ gilt*
$$\tau(x, \sigma(x,y)) = x$$

2. *τ ist **distributiv***
   $=_{def}$ *Für jedes $x, y, z \in \langle 0,1\rangle$ gilt*
$$\tau(x, \sigma(y,z)) = \sigma(\tau(x,y), \tau(x,z))$$

3. *τ erfüllt bezüglich σ und ν die* DE MORGAN*sche Regel*
   $=_{def}$ *Für jedes $x, y \in \langle 0,1\rangle$ gilt*
$$\nu(\tau(x,y)) = \sigma(\nu(x), \nu(y))$$

4. *τ ist das **Dual** von σ bezüglich ν*
   $=_{def}$ *Für jedes $x, y \in \langle 0,1\rangle$ gilt*
$$\tau(x,y) = \nu(\sigma(\nu(x), \nu(y)))$$

5. *τ erfüllt bezüglich ν das **Gesetz des ausgeschlossenen Widerspruchs***
   $=_{def}$ *Für jedes $x \in \langle 0,1\rangle$ gilt*
$$\tau(x, \nu(x)) = 0$$

6. *σ erfüllt bezüglich ν das **Gesetz des ausgeschlossenen Dritten***
   $=_{def}$ *Für jedes $x \in \langle 0,1\rangle$ gilt*
$$\sigma(x, \nu(x)) = 1$$

In den folgenden zwei Theoremen wird festgestellt, wie sich die in **Definition 3.5.2** formulierten Eigenschaften der Funktionen σ, τ und ν auf die in **Definition 3.5.1** für Fuzzy-Mengen eingeführten Operationen $\Cap$, $\Cup$ und $\overline{}^{\nu}$ auswirken.

Theorem 3.5.4
*Sind τ eine T-Norm und σ eine S-Norm und gelten für τ und σ **beide** (gegenseitige) Absorbtionsgesetze, so ist die Struktur*

$$[\mathfrak{F}(U), \Cap, \Cup, \emptyset, \not{U}]$$

ein Verband mit Null- und Einselement.

Beweis

1. Aufgrund der **Theoreme 3.5.1** und **3.5.2** sind die Kommutativität und die Assoziativität der Operationen $\Cap, \Cup$ sowie die Regeln des Rechnens mit $\emptyset$ und $\not{U}$ bezüglich $\Cap$ und $\Cup$ bewiesen.

2. Es bleibt noch zu zeigen, daß die Absorbtionsgesetze, also für alle $F, G \in \mathfrak{F}(U)$:

$$F \Cap (F \Cup G) = F$$
$$F \Cup (F \Cap G) = F$$

gelten. Das folgt aber aus der Voraussetzung, daß für τ und σ beide Absorptionsgesetze (siehe **Definition 3.5.2**) gelten.

■

Theorem 3.5.5

1. *Ist τ distributiv bezüglich σ, so gilt für alle Fuzzy-Mengen $F, G, H \in \mathfrak{F}(U)$:*

$$F \Cap (G \Cup H) = (F \Cap G) \Cup (F \Cap H)$$

2. *Erfüllt τ bezüglich σ und ν die* DE MORGAN*sche Regel, so gilt für alle Fuzzy-Mengen $F, G \in \mathfrak{F}(U)$:*

$$\overline{F \Cap G}^{\nu} = \overline{F}^{\nu} \Cup \overline{G}^{\nu}$$

3. *Ist τ das Dual von σ bezüglich ν, so gilt für alle Fuzzy-Mengen $F, G \in \mathfrak{F}(U)$*

$$F \Cap G = \overline{\overline{F}^{\nu} \Cup \overline{G}^{\nu}}^{\nu}$$

4. *Erfüllt τ bezüglich ν das Gesetz des ausgeschlossenen Widerspruchs, so gilt für alle Fuzzy-Mengen $F \in \mathfrak{F}(U)$:*

$$F \Cap \overline{F}^{\nu} = \emptyset$$

5. *Erfüllt σ bezüglich ν das Gesetz des ausgeschlossenen Dritten, so gilt für alle Fuzzy-Mengen $F \in \mathfrak{F}(U)$:*

$$F \Cup \overline{F}^{\nu} = \not{U}$$

Beweis

Alle Behauptungen dieses Theorems sind (nach Elimination der getreffenden Definitionen) sehr einfache Folgerungen aus den in **Definition 3.5.2** formulierten Eigenschaften der Funktionen τ, σ und ν. ■

Das Besondere von **Theorem 3.5.5** besteht allerdings darin, daß die einzelnen Aussagen **ohne** jede weitere Voraussetzung an die Funktionen τ, σ, ν delten, also jede dieser Aussagen problemlos mit **Theorem 3.5.4** kombinierbar ist.

Wenn allerdings τ eine T-Norm, σ eine S-Norm und ν eine Negation ist, dann sind die in **Definition 3.5.2** beschriebenen Eigenschaften zum Teil untereinander unverträglich, wie die nachfolgenden zwei Theoreme zeigen werden. Auf die definierten Operationen mit Fuzzy-Mengen $\Cap$, $\Cup$ und $\overline{}^{\nu}$ übertragen, bedeutet dies, daß man nicht die Gültigkeit beliebiger Kombinationen weiterer Rechenregeln für $\Cap$, $\Cup$ und $\overline{}^{\nu}$ (z. B. daß eine BOOLEsche Algebra vorliegt) „erzwingen" kann, indem man entsprechende Eigenschaften für τ, σ und ν fordert.

In den folgenden zwei „Unverträglichkeitstheoremen" werden die betreffenden Sachverhalte genau präzisiert; sie sind *fundamental* beim Aufbau des *„nicht-Standard-Rechnens"* mit Fuzzy-Mengen.

Theorem 3.5.6 („Erstes Unverträglichkeitstheorem")

Voraussetzungen

1. *τ ist eine T-Norm*

2. *σ ist eine S-Norm*
3. *ν ist eine **stetige** Negation*
4. *τ erfüllt bezüglich ν das Gesetz des ausgeschlossenen Widerspruchs*
5. *σ erfüllt bezüglich ν das Gesetz des ausgeschlossenen Dritten*

Behauptungen

1. *τ ist bezüglich σ **nicht** distributiv*
2. *σ ist bezüglich τ **nicht** distributiv*
3. *τ ist **nicht** idempotent*
4. *σ ist **nicht** idempotent*

Beweis

Weil ν eine **stetige** Negation ist, hat ν nach **Theorem 3.4.4** mindestens (also genau) einen Fixpunkt, etwa e. Aus $\nu(0) = 1$, $\nu(1) = 0$ und $\nu(e) = e$ folgt

$$0 < e < 1. \tag{3.24}$$

ad 1. Wir beweisen diese Behauptung indirekt, nehmen also an, daß

$$\text{für alle } x, y, z \in \langle 0, 1\rangle : \quad \tau(x, \sigma(y, z)) = \sigma(\tau(x, y), \tau(x, z)), \tag{3.25}$$

also τ bezüglich σ distributiv ist.

Mit Voraussetzung 5 (Gesetz des ausgeschlossenen Dritten für σ bezüglich ν) erhalten wir für e:

$$\sigma(e, \nu(e)) = 1, \tag{3.26}$$

ferner gilt wegen T_1

$$\sigma(e, 1) = e, \tag{3.27}$$

also folgt aus (3.26) und (3.27)

$$\tau(e, \sigma(e, \nu(e))) = e. \tag{3.28}$$

Andererseits folgt aus Voraussetzung 4 (Gesetz des ausgeschlossenen Widerspruchs für τ bezüglich ν), daß

$$\tau(e, \nu(e)) = 0. \tag{3.29}$$

Wir starten nun mit der linken Seite von (3.28) und erhalten die folgende Kette von Gleichungen

$$\tau(e, \sigma(e, \nu(e))) = \sigma(\tau(e, e), \tau(e, \nu(e))), \tag{3.30}$$

nach Annahme (3.25), also

$$= \sigma(\tau(e, e), 0), \tag{3.31}$$

nach (3.29), also

(3.32) $$= \tau(e,e),$$

nach Axiom S_1, also

(3.33) $$= \tau(e,\nu(e)),$$

weil e Fixpunkt von ν ist, also

(3.34) $$= 0,$$

nach Voraussetzung 4, d. h. τ erfüllt bezüglich ν das Gesetz des ausgeschlossenen Widerspruchs, also gilt

(3.35) $$\tau(e,\sigma(e,\nu(e))) = 0.$$

Aus (3.28) und (3.35) folgt aber der Widerspruch $e = 0$, siehe (3.24).

ad 2. Analog zu 1. **Aufgabe 3.5.1**.

ad 3. Wir beweisen auch diese Behauptung indirekt, nehmen also an, daß

(3.36) $$\text{für jedes } x \in \langle 0,1\rangle \text{ gilt : } \quad \tau(x,x) = x,$$

d. h. daß τ eine idempotente Funktion ist.

Daraus folgt

(3.37) $$\tau(e,e) = e.$$

Nun ist e Fixpunkt von ν, also gilt

(3.38) $$\nu(e) = e,$$

somit ergibt sich aus (3.37) und (3.38), daß

(3.39) $$\tau(e,\nu(e)) = e.$$

Andererseits gilt nach Voraussetzung 4 (Gesetz des ausgeschlossenen Widerspruchs)

(3.40) $$\tau(e,\nu(e)) = 0.$$

Aus (3.39) und (3.40) ergibt sich aber ein Widerspruch zu

$$0 < e < 1.$$

ad 4. Analog zu 3. **Aufgabe 3.5.2**.

■

Bemerkung

Von den über τ und σ vorausgesetzten Eigenschaften, nämlich T-Norm bzw. S-Norm zu sein, haben wir sehr wenig benutzt, nämlich allein die Axiome T_1 und S_1.

Somit gilt das „erste Unverträglichkeitstheorem“ unter wesentlich allgemeineren Voraussetzungen, d. h. Monotonie, Kommutativität und Assoziativität der Funktionen τ und σ sind nicht erforderlich. Man überlege, ob diese Verallgemeinerung für die Anwendungen von **Theorem 3.5.6** von Bedeutung sein könnte.

Um die gegenseitigen Beziehungen von Distributivität, Idempotenz, den Gesetzen vom ausgeschlossenen Widerspruch bzw. vom ausgeschlossenen Dritten noch etwas genauer zu analysieren, fragen wir, ob und in welcher Form **Theorem 3.5.6** umkehrbar ist. Entsprechend den obigen Bemerkungen verzichten wir darauf, daß τ eine T-Norm und σ eine S-Norm ist.

Theorem 3.5.7 („Zweites Unverträglichkeitstheorem")
Gegeben seien beliebige Funktionen

$$\tau, \sigma : \langle 0,1 \rangle^2 \rightarrow \langle 0,1 \rangle$$

*sowie eine **stetige** Negation ν.*
Dann gilt:

1. *Ist τ idempotent, so gilt für τ bezüglich ν **nicht** das Gesetz des ausgeschlossenen Widerspruchs.*
2. *Ist σ idempotent, so gilt für σ bezüglich ν nicht das Gesetz des ausgeschlossenen Dritten.*
3. *Erfüllt τ das Axiom T_1 und σ das Axiom S_1, gilt ferner **eines** der **beiden** Distributivgesetze (d. h. für τ bezüglich σ oder σ bezüglich τ), dann*

   *erfüllt τ bezüglich ν **nicht** das Gesetz des ausgeschlossenen Widerspruchs*

   oder

   *erfüllt σ bezüglich ν **nicht** das Gesetz des ausgeschlossenen Dritten.*

Beweis
Weil ν eine stetige Negation ist, existiert ein (sogar genau ein) $e \in \langle 0,1 \rangle$, so daß

$$\nu(e) = e \tag{3.41}$$

und

$$0 < e < 1. \tag{3.42}$$

ad 1. Nach Idempotenz für τ gilt

$$\tau(e,e) = e. \tag{3.43}$$

Wir nehmen nun an, daß für τ bezüglich ν das Gesetz des ausgeschlossenen Dritten gilt, d. h.

$$\tau(e, \nu(e)) = 0. \tag{3.44}$$

Aus (3.44) folgt mit (3.41), daß

$$\tau(e,e) = 0. \tag{3.45}$$

Aus (3.43) und (3.45) folgt aber ein Widerspruch zu (3.42).

ad 2. Analog zu 1. **Aufgabe 3.5.3**.

ad 3.

Fall 1. Wir nehmen an, daß τ bezüglich σ distributiv ist, d. h., daß

(3.46) für alle $x, y, z \in \langle 0, 1 \rangle$ gilt : $\quad \tau(x, \sigma(y, z)) = \sigma(\tau(x, y), \tau(x, z))$.

Wir beweisen Behauptung 3 indirekt, indem wir annehmen, daß

(3.47) τ bezüglich ν das Gesetz des ausgeschlossenen Widerspruchs

und

(3.48) σ bezüglich ν das Gesetz des ausgeschlossenen Dritten erfüllt.

Aus (3.47) folgt, daß

$$\tau(e, \nu(e)) = 0. \tag{3.49}$$

Entsprechend folgt aus (3.48), daß

$$\sigma(e, \nu(e)) = 1. \tag{3.50}$$

Aus (3.46) ergibt sich

$$\tau(e, \sigma(e, e)) = \sigma(\tau(e, e), \tau(e, e)). \tag{3.51}$$

Wegen $\nu(e) = e$ erhält man

$$\begin{aligned} \tau(e, \sigma(e, e)) &= \tau(e, \sigma(e, \nu(e))) && \text{wegen } \mathrm{T}_1 \\ &= \tau(e, 1) && \text{wegen (3.50), also} \\ &= e && \text{wegen } \mathrm{T}_1 \end{aligned} \tag{3.52}$$

Ferner erhalten wir wegen $\nu(e) = e$

$$\begin{aligned} \sigma(\tau(e, e), \tau(e, e)) &= \sigma(\tau(e, \nu(e)), \tau(e, \nu(e))), && \text{also wegen (3.49)} \\ &= \sigma(0, 0), && \text{also wegen } \mathrm{S}_1 \\ &= 0 \end{aligned} \tag{3.53}$$

Wendet man (3.52) und (3.53) auf (3.51) an, ergibt sich

$$e = 0,$$

im Widerspruch zu $0 < e < 1$.

Fall 2. Es gilt für alle $x, y, z \in \langle 0, 1 \rangle$:

$$\sigma(x, \tau(y, z)) = \tau(\sigma(x, y), \sigma(x, z)).$$

Dieser Fall wird analog bewiesen. **Aufgabe 3.5.4.**

■

Anwendungen der formulierten Definitionen und bewiesenen Theoreme.

In Abschnitt 2.5 hatten wir sogenannte *Standard*-Operationen $\cap, \cup, ^{-}$ mit Fuzzy-Mengen eingeführt und die „*Standard*-Mengenalgebra" für Fuzzy-Mengen dargestellt. Im Rahmen der Begriffsbildungen, die im vorliegenden Abschnitt 3.5 entwickelt wurden, können wir feststellen, daß wir im „Standard-Fall" als Funktionen τ, σ und ν zur Definition von $\cap$, $\cup$ und $^{-}$ gewählt hatten ($x, y \in \langle 0, 1\rangle$):

$$\tau(x,y) = min(x,y)$$
$$\sigma(x,y) = max(x,y)$$
$$\nu(x) = 1 - x$$

In den **Theoremen 2.5.1** und **2.5.2** waren die für Fuzzy-Mengen bezüglich $\cap$, $\cup$ und $^{-}$ gültigen Rechenregeln zusammengefaßt worden. Dazu stellen wir nochmals ausdrücklich fest, daß diese Rechenregeln mit den für **scharfe** Mengen Gültigen übereinstimmen bis auf die folgenden zwei Ausnahmen.

Die Ausnahmen

Für Fuzzy-Mengen gilt allgemein **nicht** mehr

(3.54) das Gesetz des ausgeschlossenen Widerspruchs $F \cap \overline{F} = \emptyset$

und auch **nicht** mehr allgemein

(3.55) das Gesetz des ausgeschlossenen Dritten $F \cup \overline{F} = \not U$.

Wir entwickeln jetzt eine ***Nicht-Standard*-Mengenalgebra**, die unter den vielen möglichen Nicht-Standard-Mengenalgebren eine *besondere Rolle* spielt, und zwar sowohl aus theoretischen als auch aus praktischen Gründen.

Die Mengenalgebra beruht auf der Auswahl von τ, σ und ν als *bold*-Konjunktion, *bold*-Alternative und der LUKASIEWICZschen Negation, d. h. wir setzen für alle $x, y \in \langle 0, 1\rangle$

$$\tau(x,y) = max(0, x+y-1)$$
$$\sigma(x,y) = min(1, x+y)$$
$$\nu(x) = 1 - x$$

Die auf dieser Grundlage definierten Mengenoperationen wollen wir anstelle von $\cap_{\tau}$, $\cup_{\sigma}$ und $\overline{}^{\nu}$ im folgenden durch $\cap_{b}$, $\cup_{b}$ und $^{-}$ bezeichnen. Zur Verdeutlichung wiederholen wir die allgemeine **Definition 3.5.1** für den vorliegenden Spezialfall. Gegeben seien beliebige Fuzzy-Mengen $F, G : U \to \langle 0, 1\rangle$, ferner sei $x \in U$.

Definition 3.5.3

1. $(F \cap_{b} G)(x) =_{def} max(0, F(x) + G(x) - 1)$
2. $(F \cup_{b} G)(x) =_{def} min(1, F(x) + G(x))$
3. $\left(\overline{F}\right)(x) =_{def} 1 - F(x)$.

Auf Grund der Tatsache, daß die Funktion

$$et_{\mathrm{b}}(x,y) = max(0, x+y-1)$$

eine T-Norm und die Funktion

$$vel_{\mathrm{b}}(x,y) = min(1, x+y)$$

eine S-Norm ist, gelten für $\cap_{b}$ und $\cup_{b}$ die folgenden Rechenregeln:

Theorem 3.5.8

1. $F \cap_{\mathrm{b}} \emptyset = \emptyset$ und $F \cap_{\mathrm{b}} \mathbb{U} = F$
2. *Wenn* $F \subseteqq G$, *so* $F \cap_{\mathrm{b}} H \subseteqq G \cap_{\mathrm{b}} H$ und
$$H \cap_{\mathrm{b}} F \subseteqq H \cap_{\mathrm{b}} G$$
3. $F \cap_{\mathrm{b}} G = G \cap_{\mathrm{b}} F$
4. $F \cap_{\mathrm{b}} (G \cap_{\mathrm{b}} H) = (F \cap_{\mathrm{b}} G) \cap_{\mathrm{b}} H$
5. $F \cup_{\mathrm{b}} \emptyset = F$ und $F \cup_{\mathrm{b}} \mathbb{U} = \mathbb{U}$
6. *Wenn* $F \subseteqq G$, *so* $F \cup_{\mathrm{b}} H \subseteqq G \cup_{\mathrm{b}} H$ und
$$H \cup_{\mathrm{b}} F \subseteqq H \cup_{\mathrm{b}} G$$
7. $F \cup_{\mathrm{b}} G = G \cup_{\mathrm{b}} F$
8. $F \cup_{\mathrm{b}} (G \cup_{\mathrm{b}} H) = (F \cup_{\mathrm{b}} G) \cup_{\mathrm{b}} H$

Beweis

Unmittelbare Folgerung aus den **Theoremen 3.5.1** und **3.5.2**. ■

Für die Komplement-Operation, die auf der Grundlage der ŁUKASIEWICZschen Negation non_{L} mit

$$non_{\mathrm{L}}(x) = 1 - x$$

definiert worden ist, gelten die folgenden Rechenregeln:

Theorem 3.5.9

9. $\overline{\emptyset} = \mathbb{U}$ und $\overline{\mathbb{U}} = \emptyset$
10. $\overline{\overline{F}} = F$
11. $\overline{F \cap_{\mathrm{b}} G} = \overline{F} \cup_{\mathrm{b}} \overline{G}$
12. $\overline{F \cup_{\mathrm{b}} G} = \overline{F} \cap_{\mathrm{b}} \overline{G}$
13. $F \cap_{\mathrm{b}} \overline{F} = \emptyset$
14. $F \cup_{\mathrm{b}} \overline{F} = \mathbb{U}$

Beweis

ad 9. Folgt aus den Gleichungen

$$non_{\mathrm{L}}(0) = 1 \quad \text{und} \quad non_{\mathrm{L}}(1) = 0.$$

ad 10. Gilt, weil non_{L} involutorisch ist.

ad 11. Gilt, weil et_{b} bezüglich vel_{b} und non_{L} die DE MORGANsche Regel erfüllt. **Aufgabe 3.5.5**.

ad 12. Gilt, weil vel_{b} bezüglich et_{b} und non_{L} die DE MORGANsche Regel erfüllt. **Aufgabe 3.5.6**.

ad 13. Gilt, weil et_{b} bezüglich non_{L} das Gesetz des ausgeschlossenen Widerspruchs erfüllt. **Aufgabe 3.5.7**.

ad 14. Gilt, weil vel_{b} bezüglich non_{L} das Gesetz des ausgeschlossenen Dritten erfüllt. **Aufgabe 3.5.8**.

■

Anmerkung
Man beachte, daß die Bedingungen 13 und 14 im Standardfall im allgemeinen nicht gelten.

Theorem 3.5.10

1. *$\Cap$ ist bezüglich $\Cup$ **nicht** distributiv.*
2. *$\Cup$ ist bezüglich $\Cap$ **nicht** distributiv.*
3. *$\Cap$ ist **nicht** idempotent.*
4. *$\Cup$ ist **nicht** idempotent.*

Beweis

1. Nachprüfen, daß für die Funktionen

$$\begin{aligned}\tau(x,y) &= max(0, x+y-1)\\ \sigma(x,y) &= min(1, x+y)\\ \nu(x) &= 1-x\end{aligned}$$

die Voraussetzungen des **ersten** Unverträglichkeitstheorems (**Theorem 3.5.6**) erfüllen.

2. Anwendung von **Theorem 3.5.6** und Übertragung der Behauptung dieses Theorems von den Funktionen τ, σ, ν auf die durch sie definierten Mengenoperationen $\Cap$, $\Cup$ und $\overline{}$.

Aufgabe 3.5.9. ■

Theorem 3.5.11

15. $F \cap G = \left(F \Cup \overline{G}\right) \Cap G$
16. $F \cup G = \left(F \Cap \overline{G}\right) \Cup G$
17. $F \Cap (G \cup H) = (F \Cap G) \cup (F \Cap H)$
18. $F \Cup (G \cap H) = (F \Cup G) \cap (F \Cup H)$

Beweis
Elimination der Definitionen von $\cap$, $\cup$, $\Cap$ und $\Cup$ und dann Beweis der entsprechenden Identitäten für die Funktionen min, max, et_{b}, vel_{b} und non_{L}. **Aufgabe 3.5.10**.

ad 15 (als Beispiel)

Hier ist zu zeigen, daß für alle $x, y \in \langle 0, 1\rangle$ die Gleichung

$$\begin{aligned}min(x,y) &= max(0, vel_{\mathrm{b}}(x, 1-y) + y - 1)\\ &= max(0, min(1, x+1-y) + y - 1)\end{aligned}$$

gilt.

■

Bemerkungen

1. **Theorem 3.5.10** beschreibt einige wesentliche Abweichungen des Rechnens in der *bold*-Mengenalgebra von den „gewohnten“ Rechenregeln. Wichtig in Anwendungen !

2. Die Bedingungen 15 und 16 von **Theorem 3.5.11** besagen, daß $\cap$ und $\cup$ mit $\cap_b$, $\cup_b$ und $^-$ definierbar sind. Ferner geben 17 und 18 einen *„Ersatz“* für die für $\cap_b$, $\cup_b$ fehlende Distributivität.

Aufgabe 3.5.11 *Man untersuche, welche der Aussagen von* **Theorem 3.5.11** *erhalten bleiben (bzw. falsch werden), wenn man* $\cap_b$ *bzw.* $\cup_b$ *durch* $\cap_\tau$ *bzw.* $\cup_\sigma$ *ersetzt, wobei* τ *bzw.* σ *eine beliebige T-Norm bzw. S-Norm ist.*

3.6 Mischnormen (averaging operations) und Aggregationsfunktionen

In vielen Anwendungen spielen zweistellige ŁUKASIEWICZsche Funktionen

$$\mu : \langle 0,1\rangle \times \langle 0,1\rangle \to \langle 0,1\rangle$$

eine Rolle, die "zwischen" *min* und *max* liegen bzw. die zwischen einer T-Norm τ und einer S-Norm σ liegen.

Wir beginnen mit der folgenden allgemeinen Definition, bezogen auf *min* und *max*.

Definition 3.6.1
μ heiße ***min-max-Mischnorm***
$=_{def}$ *μ erfüllt die folgenden Axiome*

M₁: *Für jedes $x, y \in \langle 0,1\rangle$ gilt:*

$$min(x,y) \leqq \mu(x,y) \leqq max(x,y).$$

M₂: *μ ist monoton, d. h. für jedes $x, x', y, y' \in \langle 0,1\rangle$ gilt: Wenn $x \leqq x'$ und $y \leqq y'$, so $\mu(x,y) \leqq \mu(x',y')$.*

M₃: *μ ist* ***kommutativ****, d. h. für jedes $x, y \in \langle 0,1\rangle$ gilt:*

$$\mu(x,y) = \mu(y,x).$$

Bemerkungen

1. Die Assoziativität der Funktion μ, d. h., daß

   $$\mu(x, \mu(y,z)) = \mu(\mu(x,y), z)$$

   für alle $x, y, z \in \langle 0,1\rangle$ gilt, kann man allgemein nicht fordern, wie durch die folgenden Beispiele klar werden wird.

2. In vielen Fällen wird das Axiom

   M₄. μ ist stetig

   eine wichtige Rolle spielen.

3. Zur feineren Klassifikation von *min-max*-Mischnormen wird außerdem die Idempotenz von μ wichtig sein, d. h.

   M₅. Für jedes $x \in \langle 0,1\rangle$ gilt:
$$\mu(x,x) = x.$$

Folgerung 3.6.1
*Ist μ eine **min-max**-Mischnorm, so gilt*

$$\mu(0,0) = 0, \qquad x \leqq \mu(x,1) \tag{3.55}$$
$$\mu(1,1) = 1, \qquad \mu(x,0) \leqq x \tag{3.56}$$

für jedes $x \in \langle 0,1\rangle$.

Beweis
Trivial auf Grund von M_1. ■

Definition 3.6.2 (Das gewichtete arithmetische Mittel von *min* und *max*)
Gegeben sei eine Konstante $c \in \langle 0,1\rangle$. Dann definieren wir für beliebiges $x, y \in \langle 0,1\rangle$:

$$\mu_{\mathrm{m}}^{c}(x,y) =_{def} c \cdot min(x,y) + (1-c) \cdot max(x,y)$$

Folgerung 3.6.2
1. *Die Funktion μ_{m}^{c} erfüllt die Axiome M_1 bis M_5 für jedes fixierte $c \in \langle 0,1\rangle$.*
2. *$\mu_{\mathrm{m}}^{0}(x,y) = min(x,y)$ und $\mu_{\mathrm{m}}^{1}(x,y) = max(x,y)$ für alle $x, y \in \langle 0,1\rangle$.*

Beweis
Aufgabe 3.6.1 ■

Definition 3.6.3 (Das „Fuzzy-und“ und das „Fuzzy-oder“)
Gegeben sei wieder eine Konstante $c \in \langle 0,1\rangle$. Dann definiert man für beliebige $x, y \in \langle 0,1\rangle$:

1. *„Fuzzy-und“*
   $\mu_{\mathrm{FU}}^{c}(x,y)$
   $=_{def} c \cdot min(x,y) + \frac{1}{2}(1-c)(x+y)$
2. *„Fuzzy-oder“*
   $\mu_{\mathrm{FO}}^{c}(x,y)$
   $=_{def} c \cdot max(x,y) + \frac{1}{2}(1-c)(x+y)$

Folgerung 3.6.3
1. *μ_{FU}^{c} und μ_{FO}^{c} erfüllen die Axiome M_1 bis M_5 für jedes fixierte $c \in \langle 0,1\rangle$.*
2. *Für jedes $x, y \in \langle 0,1\rangle$ gilt*

$$\mu_{\mathrm{FU}}^{0}(x,y) = \frac{1}{2}(x+y)$$
$$\mu_{\mathrm{FU}}^{1}(x,y) = min(x,y)$$
$$\mu_{\mathrm{FO}}^{0}(x,y) = \frac{1}{2}(x+y)$$
$$\mu_{\mathrm{FO}}^{1}(x,y) = max(x,y)$$

Beweis
Aufgabe 3.6.2. ■

Problem
Charakterisierung der Klasse

1. aller min-max-Mischnormen
2. aller stetigen min-max-Mischnormen
3. aller idempotenten min-max-Mischnormen
4. aller stetigen und idempotenten min-max-Mischnormen

Zu den oben formulierten Problemen kann man genauer fragen, unter welchen zusätzlichen Bedingungen für min-max-Mischnormen ein dem **Theorem 3.3.2** analoges Theorem gilt. Zum Beispiel könnte man fragen, ob alle idempotenten (evtl. stetigen) min-max-Mischnormen μ eine Darstellung als gewichtetes arithmetisches Mittel von min und max haben, d. h. ob es ein $c \in \langle 0, 1\rangle$ gibt, so daß für alle $x, y \in \langle 0, 1\rangle$ gilt:

$$\mu(x, y) = c \cdot min(x, y) + (1 - c) \cdot max(x, y).$$

Definition 3.6.4 (Das geometrische Mittel von min und max)
Wir definieren für beliebiges $x, y \in \langle 0, 1\rangle$:

$$\mu_{\mathrm{g}}(x, y) =_{def} \sqrt{min(x, y) \cdot max(x, y)}$$

Folgerung 3.6.4
Die Funktion μ_{g} erfüllt die Axiome M_1 bis M_5.

Beweis
Aufgabe 3.6.3 ■

Wir übertragen nun die obigen Betrachtungen auf T- und S-Normen. Gegeben eine T-Norm τ und eine S-Norm σ, die bezüglich der Łukasiewiczschen Negation zueinander dual sind, d. h., daß für jedes $x \in \langle 0, 1\rangle$

$$\sigma(x, y) = 1 - \tau(1 - x, 1 - y)$$

gilt. Gegeben sei ferner ein μ mit

$$\mu : \langle 0, 1\rangle \times \langle 0, 1\rangle \to \langle 0, 1\rangle\,.$$

Definition 3.6.5
*μ heiße **τ-σ-Mischnorm***
$=_{def}$ μ erfüllt die folgenden Axiome

$M_1^{\tau,\sigma}$: *Für jedes $x, y \in \langle 0, 1\rangle$:*

$$\tau(x, y) \leqq \mu(x, y) \leqq \sigma(x, y).$$

Die übrigen Axiome $M_2^{\tau,\sigma}$ bis $M_5^{\tau,\sigma}$ stimmen in dieser Reihenfolge mit den Axiomen M_2 bis M_5 überein.

Folgerung 3.6.5
Ist μ eine τ-σ-Mischnorm, so gilt:

1. $\mu(0,0) = 0$ *und* $\mu(1,1) = 1$
2. *Für jedes $x \in \langle 0,1\rangle$ gilt:*
$$\mu(x,0) \leqq x \leqq \mu(x,1).$$

Beweis
Aufgabe 3.6.4 ■

Definition 3.6.6
Gegeben seien

$$et_{\mathrm{a}}(x,y) =_{def} x \cdot y \qquad (x,y \in \langle 0,1\rangle)$$
$$vel_{\mathrm{a}}(x,y) =_{def} x + y - x \cdot y$$

Wir definieren dann
$$\mu_{\mathrm{a}}(x,y) =_{def} \sqrt{(x \cdot y) \cdot (x + y - x \cdot y)}$$
d. h. wir bilden das geometrische Mittel aus et_{a} und vel_{a}.

Folgerung 3.6.6
Die Funktion μ_{a} erfüllt die Axiome $M_1^{et_{\mathrm{a}},vel_{\mathrm{a}}}$ und M_2 bis M_4.

Beweis
Aufgabe 3.6.5 ■

Mit H.-J. Zimmermann und P. Zysno (s. [59]) definieren wir

Definition 3.6.7 (γ-Operator)
Gegeben sei eine Konstante $\gamma \in \langle 0,1\rangle$. Dann definieren wir für beliebiges $x, y \in \langle 0,1\rangle$:

$$\mu_{\mathrm{Z}}^{\gamma}(x,y) =_{def} (x \cdot y)^{1-\gamma} \cdot (x + y - x \cdot y)^{\gamma}$$

Folgerung 3.6.7
1. *Für jedes fixierte $\gamma \in \langle 0,1\rangle$ ist die Funktion $\mu_{\mathrm{Z}}^{\gamma}$ eine et_{a}-vel_{a}-Mischnorm, die stetig, aber nicht idempotent ist.*
2. *Für den Wert $\gamma = \frac{1}{2}$ geht der γ-Operator in die in Definition 3.6.6 definierte et_{a}-vel_{a}-Mischnorm über, d. h. es gilt*
$$\mu_{\mathrm{Z}}^{\frac{1}{2}}(x,y) = \mu_{\mathrm{a}}(x,y)$$
für alle $x, y \in \langle 0,1\rangle$.

Beweis
Aufgabe 3.6.6 ■

Zum Abschluß der Betrachtungen über Mischnormen wollen wir eine Definition mit Hilfe sogenannter „Mischfunktionen“ angeben.

Definition 3.6.8

1. *φ heiße Mischfunktion*
   $=_{def}$

$$\varphi : \langle 0,1\rangle \times \langle 0,1\rangle \to \langle 0,1\rangle$$

und für jedes $x, y \in \langle 0,1\rangle$ mit $x \leqq y$ gilt:

$$x \leqq \varphi(x,y) \leqq y.$$

2. $\mu_\varphi^{\tau,\sigma}(x,y)$
   $=_{def}$ $\varphi(\tau(x,y), \sigma(x,y))$ $\qquad (x, y \in \langle 0,1\rangle)$,
   wobei

   φ *eine Mischfunktion,*

   τ *eine T-Norm und*

   σ *dual zu* τ *ist.*

Problem
Unter welchen Voraussetzungen für τ, σ und φ sind Axiome aus $\{\mathrm{M}_1^{\sigma,\tau}, \mathrm{M}_2, \ldots, \mathrm{M}_5\}$ erfüllt ?

Allgemeine Aggregationsfunktionen
Gegeben sei eine Abbildung α mit

$$\alpha : \langle 0,1\rangle^n \to \langle 0,1\rangle, \qquad n \geqq 1.$$

Definition 3.6.9
α heiße allgemeine Aggregationsfunktion
$=_{def}$ *α erfüllt die folgenden Axiome:*

A₁: $\alpha(0,\ldots,0) = 0$ *und* $\alpha(1,\ldots,1) = 1$.

A₂: *α ist monoton, d. h. für jedes $x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n \in \langle 0,1\rangle$:*

$$\text{Wenn } x_1 \leqq y_1 \text{ und } \ldots \text{ und } x_n \leqq y_n\text{, so } \alpha(x_1,\ldots,x_n) \leqq \alpha(y_1,\ldots,y_n).$$

A₃: *α ist symmetrisch, d. h. für jedes $x_1, \ldots, x_n \in \langle 0,1\rangle$ und jede Permutation $i_1, \ldots, i_n$ von $1, \ldots, n$ gilt:*

$$\alpha(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}) = \alpha(x_1, \ldots, x_n).$$

Folgerung 3.6.8
Alle T-Normen, S-Normen und Mischnormen sind allgemeine Aggregationsfunktionen (für $n = 2$).

4. Implikationen in der Fuzzy-Logik

4.1 Motivationen und Vorbemerkungen

Der Implikationsbegriff gehört zu den „schwierigen“ Konzepten der Logik, und er wurde seit alters her (schon von den griechischen Philosophen in der Antike) auch als schwierig empfunden und demgemäß intensiv studiert.

Die „Schwierigkeit“ dieses Konzepts ist in seiner Vielschichtigkeit und Vieldeutigkeit begründet. Primär muß eine Implikation als ein zweistelliger linguistischer Konnektor (kurz: Konnektor) angesehen werden, der in der

deutschen Umgangssprache durch „*Wenn ..., so*“

und z. B. in der

englischen Umgangssprache durch “*If ..., then*”

bezeichnet wird.

„Linguistischer Konnektor“ bedeutet, daß er aus gegebenen Aussagen A und B ein neues „sprachliches Gebilde“, z. B. in der deutschen Umgangssprache

„*Wenn* A , *so* B“

bzw. in der englischen Umgangssprache

“*If* A , *then* B”

konstruiert.

Wie kann nun eine *Semantik* dieses neuen sprachlichen Gebildes definiert werden? Hierzu gibt es eine Fülle (verwirrender) Möglichkeiten, und darin liegt die Schwierigkeit des Studiums und der Anwendung von Implikationen.

Erste Möglichkeit

Die zweiwertige extensionale Interpretation des Konnektors „*Wenn ..., so*“.
Ausgangspunkte

1. Die zweiwertige Logik.
2. Die zweiwertige extensionale Interpretation von „*und*“, „*oder*“ und „*nicht*“ als linguistische Konnektoren.

Wir gehen davon aus, daß eine Aussage A einen Sachverhalt korrekt beschreibt. In der zweiwertigen Logik setzt man dann voraus, daß der beschriebene Sachverhalt entweder vorliegt oder nicht vorliegt; im ersten Fall wird A *WAHR* genannt, im zweiten Fall *FALSCH*. (Aristotelischer Wahrheitsbegriff; siehe Abschnitt 1.1)

Beispiel $A =_{def} 1+1=2$
A ist wahr
$B =_{def} 1+1=3$
B ist falsch

Wir wollen jetzt erläutern, in welchem Sinne die Konnektoren „*und*“, „*oder*“ (als nicht-ausschließendes Oder) und „*nicht*“ **zweiwertig** und **extensional** interpretiert werden, um daraus eine zweiwertige und extensionale Interpretation des Konnektors „*Wenn ..., so ...*“ herzuleiten.

Gegeben seien zweiwertige Aussagen A und B. Wir verwenden eine logische Wertfunktion Val, wobei

$$Val(A),\ Val(B) \in \{0,1\}$$

gelten soll und

$$Val(A) = 1 \text{ bzw. } Val(B) = 0$$

bedeuten soll, daß A wahr bzw. B falsch ist.

Wir bilden die neue Aussage

„*A und B*“

Dann gilt

$$Val(A \text{ und } B) = and(Val(A), Val(B)) \tag{4.1}$$

d. h. $Val(A \text{ und } B)$ hängt **allein** von $Val(A)$, $Val(B)$ ab, nicht aber von A und B selbst.

Beispiel $A:\ 1+1=2$
$B:\ 1+1=3$
$C:\ 1+1=4$

Dann gilt

$$\begin{aligned} Val(A) &= 1 \\ Val(B) &= Val(C) = 0. \end{aligned}$$

Ferner gilt

$$\begin{aligned} Val(A \text{ und } B) &= and(Val(A), Val(B)) \\ &= and(Val(A), Val(C)) \\ &= Val(A \text{ und } C). \end{aligned}$$

Wichtig

Die Formel (4.1) besagt, daß „*und*“ als linguistischer Konnektor *extensional* ist. Diese Bedingung ist aus der Umgangssprache entnommen (abstrahiert), sie wird hier als „*Extensionalitätsbedingung*“ für die logische Verwendung von „*und*“ an die Spitze gestellt.

Die Tabelle

x	y	$and(x,y)$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

für die BOOLEsche Funktion *and* wird ebenfalls der Umgangssprache entnommen.

Ebenso werden die Konnektoren „*oder*" und „*nicht*" extensional charakterisiert, d. h. es wird gefordert, daß die Funktionalgleichungen

$$Val(A \text{ oder } B) = or(Val(A), Val(B)) \tag{4.2}$$

und

$$Val(\text{nicht } A) = non(Val(A)) \tag{4.3}$$

gelten, wobei *or* und *non* bekanntlich durch die Tabellen

x	y	$or(x,y)$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

x	$non(x)$
0	0
0	1

gegeben sind.

Das durch die Funktionalgleichungen (4.1), (4.2) und (4.3) für die Konnektoren „*und*", „*oder*" und „*nicht*" präzisierte *Prinzip der zweiwertigen Extensionalität* wird nun auf den Konnektor „*Wenn ..., so*" übertragen, d. h. es wird nach einer BOOLEschen Funktion β gefragt, so daß für beliebige zweiwertige Aussagen A und B die Funktionalgleichung

$$Val(\text{Wenn } A \text{ , so } B) = \beta(Val(A), Val(B))$$

gilt.

Nun benutzt man dazu bekanntlich die Funktion *seq*, die durch die folgende Tabelle charakterisiert ist:

x	y	$seq(x,y)$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Problem

Wenn man die Funktion *seq* nicht „vom Himmel fallen" lassen will, muß man rechtfertigen, daß sie und **nur** sie zur Interpretation von „*Wenn ..., so*" gewählt wird.

Erste Rechtfertigung durch eine Diskussion möglicher Fälle. Wir nehmen an, daß „*Wenn A , so B*" sicher wahr ist, falls A und B wahr sind. Also werden wir

$$seq(1,1) = 1$$

setzen, damit bleiben von den 16 zweistelligen BOOLEschen Funktionen nur noch die folgenden 8 übrig

		β_8	β_9	β_{10}	β_{11}	β_{12}	β_{13}	β_{14}	β_{15}
0	0	0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	0	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

In dieser Tabelle sondern wir die folgenden Funktionen als schon „verbraucht" bzw. als „unbrauchbar" aus, und zwar wie folgt:

β_8 ist als Konjunktion schon verbraucht.

β_9 ist als Negation des **ex**klusiven Oder schon verbraucht.

β_{10} hängt **nur** von der zweiten Stelle ab, ist also zur Interpretation von „*Wenn ..., so*" unbrauchbar.

β_{11} merken wir uns als *Kandidaten* vor.

β_{12} hängt **nur** von der ersten Stelle ab, ist also zur Interpretation von „*Wenn ..., so*" unbrauchbar.

β_{13} merken wir uns als *Kandidaten* vor.

β_{14} ist das **in**klusive Oder, also schon verbraucht.

β_{15} hängt von keiner Stelle ab, ist identisch 1, also unbrauchbar.

Somit haben wir für die Wahl von *seq* nur eine Entscheidung zwischen β_{11} und β_{13} zu treffen. Nun gilt aber für alle $x, y \in \{0, 1\}$.

$$\beta_{11}(x, y) = \beta_{13}(y, x),$$

d. h. β_{11} und β_{13} stehen in „inverser" Beziehung, bezogen auf die **Reihenfolge** der Argumente.

Die Auswahl gelingt durch folgendes Prinzip:

> Der Wahrheitswert einer „*Wenn ..., so*"-Aussage der Form
>
> $$\mathit{Wenn}\ A\ ,\ \mathit{so}\ B$$
>
> stimmt mit dem Wahrheitswert der Konklusion B überein, falls die Prämisse A wahr ist, d. h. es gilt
>
> $$\mathit{Val}(\mathit{Wenn}\ A\ ,\ \mathit{so}\ B) = \mathit{Val}(B),$$
>
> falls $\mathit{Val}(A) = 1$.

Daraus folgt, daß

$$\mathit{seq}(1, 0) = 0$$

gelten muß, also wird als interpretierende Funktion *seq* die Funktion β_{11}, wie bekannt und üblich, gewählt.

Zweite Rechtfertigung der Wahl von β_{11} zur Interpretation von „*Wenn ..., so*".

Quelle ist die Umgangssprache (d. h. die „common sense communication"), d. h. die Verwendung logischer Grundbegriffe und Grundtatsachen in der Umgangssprache.

Wir betrachten dazu das folgende

Beispiel

Gegeben seien die folgenden Aussagen A und B, wobei

$$A =_{def} \text{Die Sonne scheint}$$
$$B =_{def} \text{Wir gehen zusammen ins Freibad}$$

Zwei Freunde treffen nun die Verabredung

$$\mathit{Wenn}\ A\ ,\ \mathit{so}\ B,$$

d. h.

Wenn die Sonne scheint , *so* gehen wir zusammen ins Freibad.

Hierbei haben wir die Präzisierung von Ort und Zeit zur Vereinfachung weggelassen, d. h. wir nehmen an, daß aus dem „Kontext“ klar ist, auf welches Freibad und auf welchen Zeitpunkt sich diese Verabredung bezieht.

Wir erschließen nun den „Werteverlauf“ des Konnektors „*Wennn ..., so*“ durch die Diskussion der folgenden Frage:

Wann ist diese Verabredung

1. eingehalten, d. h. $\mathit{Val}(\mathit{Wenn}\ A\ ,\ \mathit{so}\ B) = 1$
2. gebrochen, d. h. $\mathit{Val}(\mathit{Wenn}\ A\ ,\ \mathit{so}\ B) = 0$?

Der „common sense“, d. h. der „gesunde Menschenverstand“, legt fest, daß die getroffene Verabredung

gebrochen ist genau dann, wenn die Sonne scheint und die Freunde nicht zusammen ins Freibad gehen, etwa deshalb, weil (mindestens) einer von ihnen nicht kommt, d. h. wenn $\mathit{Val}(A) = 1$ und $\mathit{Val}(B) = 0$ gilt.

Daraus folgt, daß die Verabredung

eingehalten (also nicht gebrochen) wird genau dann, wenn einer der folgenden drei Fälle vorliegt:

Fall 1. Die Sonne scheint und die Freunde gehen zusammen ins Freibad, d. h.

$$\mathit{Val}(A) = 1 \qquad \text{und} \qquad \mathit{Val}(B) = 1.$$

Fall 2. Die Sonne scheint nicht und die Freunde gehen (trotzdem) zusammen ins Freibad, d. h.

$$\mathit{Val}(A) = 0 \qquad \text{und} \qquad \mathit{Val}(B) = 1.$$

Fall 3. Die Sonne scheint nicht und die Freunde gehen nicht zusammen ins Freibad, d. h.

$$\mathit{Val}(A) = 0 \qquad \text{und} \qquad \mathit{Val}(B) = 0.$$

Somit führt die „common-sense“-Diskussion exakt auf die Tabelle

		$\beta_{11}(x, y)$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Dritte Rechtfertigung

Die Aussage

„ *Wenn A , so B*“

ist gleichbedeutend mit

„ *Nicht A oder B*“,

wobei „*oder*“ das inklusive Oder bedeutet.

Diese „Rechtfertigung" ist relativ uneinsichtig, sie führt aber trivial wiederum auf die Funktion β_{11}.

Wir wollen jedoch schon hier darauf hinweisen, daß sich hinter der beschriebenen dritten Rechtfertigung ein allgemeines Erzeugungsprinzip für Implikationen verbirgt, das in der Fuzzy-Logik als Prinzip der Erzeugung von Implikationen als S-Implikationen eine große Rolle spielt.

Die dritte Rechtfertigung besagt in anderer Form, daß die Funktion $\beta_{11} = seq$, die zur Interpretation von „*Wenn ..., so*" verwendet wurde, die Funktionalgleichung

$$seq(x, y) = or(non(x), y)$$

mit $x, y \in \{0, 1\}$ erfüllt. Diese Funktionalgleichung wird dann in der Fuzzy-Logik in die Form

$$imp(x, y) = \sigma(\nu(x), y)$$

mit $x, y \in \langle 0, 1\rangle$ übersetzt, wobei σ bzw. ν eine gegebene S-Norm bzw. Negation ist. Man sagt dann, daß *imp* eine S-Implikation sei, die durch σ und ν erzeugt wird.

Zweite Möglichkeit

Eine mehrwertige, aber extensionale Interpretation des Konnektors „*Wenn ..., so*".

Im Gegensatz zur zweiwertigen (extensionalen) Interpretation des Konnektors „*Wenn ..., so*" sprechen wir im mehrwertigen Fall von „**einer** ... Interpretation", um anzudeuten, daß es hier sehr verschiedene Ansätze gibt. Dies läßt sich allgemein wie folgt beschreiben.

Gegeben sei eine nicht-leere, ansonsten beliebige Menge M von Wahrheitswerten. Wir nehmen an, daß der Wahrheitsgehalt der Aussagen A und B durch Wahrheitswerte aus M beschrieben wird, d. h., daß

$$Val(A) \in M \qquad \text{und} \qquad Val(B) \in M$$

gilt.

Eine extensionale, aber mehrwertige (genauer: auf die Menge M der gewählten Wahrheitswerte bezogene) Interpretation des Konnektors „*Wenn ..., so ...*" ist dann gegeben durch eine Abbildung ω mit

$$\omega : M \times M \to M,$$

so daß gilt

$$Val(\,Wenn\ A\ ,\ so\ B) = \omega(\,Val(A),\, Val(B)).$$

Im folgenden werden wir allein die Menge $\langle 0, 1\rangle$ als Menge M aller verwendeten Wahrheitswerte betrachten. Demgemäß wird die Abbildung ω als LUKASIEWICZsche Funktion λ mit

$$\lambda : \langle 0, 1\rangle \times \langle 0, 1\rangle \to \langle 0, 1\rangle$$

gewählt. Damit entsteht das folgende

Problem

Welche Eigenschaften muß die Abbildung λ erfüllen, damit man sinnvollerweise von einer Implikation in der *Fuzzy*-Logik sprechen kann ?

Dieses Problem werden wir noch genauer studieren, insbesondere in dem Zusammenhang, daß Implikationen die Basis für die sehr wichtige Schlußregel der *Modus Ponens* sind.

Dritte Möglichkeit

Eine kausale Interpretation des Konnektors „*Wenn ..., so*“.
Bei dieser dritten Möglichkeit liegt die Vorstellung zugrunde, daß eine Aussage der Form

$$\textit{Wenn } A \text{ , } \textit{so } B$$

auf die Weise interpretiert wird, daß sie einen kausalen Zusammenhang in dem Sinne beschreibt, daß das „Vorliegen“ von A das „Vorliegen“ von B nach sich zieht.

Wir erläutern dies durch die folgenden zwei Beispiele. Dabei setzen wir zur Vereinfachung voraus, daß für die betrachteten Aussagen A und B das Prinzip der Zweiwertigkeit gilt, d. h., daß $\mathit{Val}(A)$ und $\mathit{Val}(B)$ in $\{0, 1\}$ liegen. Ferner wollen wir zur Vereinfachung voraussetzen, daß die kausale Beziehung

$$\textit{Wenn } A \text{ , } \textit{so } B$$

entweder vorliegt oder nicht vorliegt, demgemäß nehmen wir an, daß

$$\mathit{Val}(\textit{Wenn } A \text{ , } \textit{so } B)$$

definiert ist und ebenfalls in $\{0, 1\}$ liegt.

Beispiel

$$A =_{def} \text{Es regnet}$$
$$B =_{def} \text{Die Straße wird naß.}$$

Wir bilden nun die „kausale“ Verknüpfung

$$\textit{Wenn } A \text{ , } \textit{so } B,$$

also

$$\textit{Wenn} \text{ es regnet , } \textit{so} \text{ wird die Straße naß.}$$

Dabei haben wir auf die Angabe gewisser „Kontextinformationen“ verzichtet, durch die die obige Aussage erst „vollständig“ wird, nämlich, daß sich A und B auf dieselbe Zeit und denselben Ort beziehen und daß die betrachtete Straße nicht überdacht ist.

Wenn wir nun annehmen, daß A und B wahr sind, d. h.

$$\mathit{Val}(A) = \mathit{Val}(B) = 1$$

gilt, dann ist auch

$$\textit{Wenn } A \text{ , } \textit{so } B,$$

wahr, somit kann man den Wahrheitswert

$$\mathit{Val}(\textit{Wenn } A \text{ , } \textit{so } B)$$

im vorliegenden Fall $\mathit{Val}(A) = \mathit{Val}(B) = 1$ mit der „klassischen“ zweiwertigen Implikationsfunktion *seq* „extensional“ wie folgt berechnen

$$\mathit{Val}(\textit{Wenn } A \text{ , } \textit{so } B) = \mathit{seq}(\mathit{Val}(A), \mathit{Val}(B)). \tag{4.4}$$

Wenn wir nun B durch $\neg B$, d. h.

$$\neg B : \text{Die Straße wird nicht naß}$$

ersetzen, wird die „kausale“ Aussage

$$\textit{Wenn } A\,,\ \textit{so } \neg B,$$

falsch, d. h.

$$\mathit{Val}(\textit{ Wenn } A\,,\ \textit{so } B) = 0.$$

Dieser Wert kann aber ebenfalls mit Hilfe der Formel (4.4) berechnet werden, denn es gilt

$$\mathit{seq}(\mathit{Val}(A), \mathit{Val}(\neg B)) = \mathit{seq}(1, 0) = 0.$$

Eine neue Situation bietet das Problem, welchen Wahrheitswert man den „kausalen“ Aussagen

a) $$\textit{Wenn } \neg A\,,\ \textit{so } B$$

und

b) $$\textit{Wenn } \neg A\,,\ \textit{so } \neg B$$

zuordnen soll, wobei A und B wahr sind.

Im Fall a) könnte man in Übereinstimmung mit

$$\mathit{seq}(0, 1) = 1$$

den Wert 1 (wahr) zuordnen und argumentieren, daß B dadurch wahr ist, daß ein Sprengwagen gefahren ist.

Im Fall b) müßte man analog in Übereinstimmung mit

$$\mathit{seq}(0, 0) = 1$$

der „kausalen“ Aussage

$$\textit{Wenn } \neg A\,,\ \textit{so } \neg B$$

den Wert 1 (wahr) zuordnen, was vernünftig wäre, wenn es außer Regen **keine** andere Möglichkeit gibt, eine Straße „naßzumachen“.

Lehnt man diese Festlegung ab, muß man, sofern man in der zweiwertigen Logik bleiben und „extensional rechnen“ will, der obigen Aussage den Wert 0 zuordnen, also muß (4.4) ersetzt werden durch

(4.4′) $$\mathit{Val}(\textit{ Wenn } A\,,\ \textit{so } B) = \varphi(\mathit{Val}(A), \mathit{Val}(B)),$$

wobei φ durch die Tabelle

		$\varphi(x, y)$
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	1

charakterisiert ist. Diese Funktion, es ist offenbar β_{10}, erfüllt offenbar die Funktionalgleichung

$$\varphi(x, y) = y$$

für alle $x, y \in \{0, 1\}$, hängt also vom ersten Argument nicht ab, demgemäß wäre

$$\mathit{Val}(\textit{ Wenn } A\,,\ \textit{so } B)$$

von $Val(A)$ unabhängig, und das ist sicher keine „vernünftige" kausale Interpretation des Konnektors „*Wenn ..., so ...*".

Somit folgt, daß eine extensionale zweiwertige Interpretation des kausalen „*Wenn ..., so ...*" problematisch ist. Ein gewisser Ausweg eröffnet sich durch die folgende Diskussion des Falls, daß A durch A' ersetzt wird, wobei

A'
$=_{def}$ Keine Wolke ist am Himmel und kein Sprengwagen (und keine Gießkanne usw.) ist in Tätigkeit.

Wir nehmen an, daß A' wahr ist, also

$$Val(A') = 1$$

gilt. Dann ist

$$Wenn\ A'\ ,\ so\ B$$

falsch, d. h. es gilt

$$Val(\,Wenn\ A'\ ,\ so\ B) = 0.$$

Wäre nun das kausale „*Wenn ..., so ...*" ein extensionaler Konnektor, dann würde aus

$$Val(A') = Val(A)$$

die Gleichung

$$\varphi(\,Val(A'),\,Val(B)) = \varphi(\,Val(A),\,Val(B))$$

folgen, also würde gelten

$$0 = Val(\,Wenn\ A'\ ,\ so\ B) = Val(\,Wenn\ A\ ,\ so\ B)$$

und das wäre ein Widerspruch zur Voraussetzung

$$Val(\,Wenn\ A\ ,\ so\ B) = 1.$$

Dieser Widerspruch kann vermieden werden durch den folgenden allgemeinen Ansatz:

$$Val(\,Wenn\ A\ ,\ so\ B) = Seq(\,Val(A),\,Val(B),A,B). \tag{4.5}$$

Dieser Ansatz bedeutet offenbar, daß der Wahrheitswert der kausalen Aussage „*Wenn A , so B*" nicht allein von den logischen Werten $Val(A)$ und $Val(B)$ der Aussagen A und B abhängt, sondern von diesen Aussagen selbst, insbesondere von ihrer Bedeutung. Dieser Ansatz wird häufig auch „intensionale" Interpretation (des Konnektors „*Wenn ..., so ...*") genannt.

Zur vertiefenden Argumentation, daß der kausale Konnektor „*Wenn ..., so ...*" nicht extensional interpretiert werden kann, brauchen wir das folgende zweite

Beispiel Gegeben seien die folgenden Aussagen:

A_1 : Man drückt in Hörsaal 1 den Knopf K_1.
A_2 : Man drückt in Hörsaal 2 den Knopf K_2.
B_1 : In Hörsaal 1 geht die Beleuchtung an.
B_2 : In Hörsaal 2 geht die Beleuchtung an.

Wir setzen voraus, daß die Beleuchtungsanlagen in Ordnung sind, d. h., daß die folgenden (kausalen) Aussagen wahr sind:

$$Wenn\ A_1\ ,\ so\ B_1$$

und

$$Wenn\ A_2\ ,\ so\ B_2,$$

sowie daß die folgenden (kausalen) Aussagen

$$Wenn\ A_1\ ,\ so\ B_2$$

und

$$Wenn\ A_2\ ,\ so\ B_1$$

falsch sind.

Wir setzen nun voraus, daß A_1, B_1, A_2 und B_2 wahr sind, d. h.

$$Val(A_1) = Val(B_1) = Val(A_2) = Val(B_2) = 1$$

gilt.

Ferner gilt nach Voraussetzung

$$Val(\,Wenn\ A_1\ ,\ so\ B_1) = Val(\,Wenn\ A_2\ ,\ so\ B_2) = 1$$

und

$$Val(\,Wenn\ A_1\ ,\ so\ B_2) = Val(\,Wenn\ A_2\ ,\ so\ B_1) = 0.$$

Wäre nun die Interpretation extensional, würden daraus die Widersprüche

$$1 = Val(\,Wenn\ A_1\ ,\ so\ B_1) = Val(\,Wenn\ A_1\ ,\ so\ B_2) = 0$$

und

$$1 = Val(\,Wenn\ A_2\ ,\ so\ B_2) = Val(\,Wenn\ A_2\ ,\ so\ B_1) = 0$$

folgen.

Es sei abschließend zu diesen Beispielen noch darauf hingewiesen, daß die bei einer extensionalen Interpretation auftretenden Schwierigkeiten **nicht** überwunden werden können, indem man von der zweiwertigen Logik zu einer mehrwertigen übergeht.

Im weiteren Verlauf dieser Vorlesung werden wir die „kausale“ Interpretation des Konnektors „*Wenn ..., so ...*“, die schließlich zur sogenannten „Kausalen Logik“ führt, nicht weiter untersuchen.

Vierte Möglichkeit

Eine funktionale Interpretation des Konnektors „*Wenn ..., so*“.

Gegeben sei eine „Blackbox“, die die reelle Funktion

$$f(x) = 3 \cdot x^2$$

realisiert.

Man kann dies graphisch durch das Diagramm

andeuten.

Sprachlich kann man diesen funktionalen Zusammenhang durch den „*Wenn …, so …*“-Konnektor beschreiben in der Form

$$\textit{Wenn}\ \text{Eingabe}\ x\,,\ \text{so}\quad \text{Ausgabe}\ 3\cdot x^2.$$

Offenbar ist damit die „Funktionsweise“ der betrachteten Blackbox korrekt und vollständig beschrieben.

Eine andere Situation liegt vor, wenn die Funktionsweise der beschriebenen Blackbox nur partiell bekannt ist, etwa durch die Spezialkenntnisse eines Experten oder durch Experimente mit der Blackbox. Dieses „partielle“ Wissen wird dann durch mehrere (etwa $n \geqq 1$) „*Wenn …, so …*“ Angaben (Regeln) ausgedrückt, z. B. in der Form

$$\begin{aligned} \textit{Wenn}\ x &= 1\,,\ \textit{so}\ y = 3\\ \textit{Wenn}\ x &= 3\,,\ \textit{so}\ y = 27\\ \textit{Wenn}\ x &= 10\,,\ \textit{so}\ y = 300\\ \textit{Wenn}\ x &= \frac{1}{2}\,,\ \textit{so}\ y = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Die Aufgabe besteht nun darin, aus diesen endlich-vielen Angaben durch eine (unvollständige) Induktion eine reelle Funktion $\varphi(x)$ zu bestimmen, die

1. den angegebenen Zuordnungen nicht widerspricht, d. h. für die

   $$\begin{aligned} \varphi(1) &= 3\\ \varphi(3) &= 27\\ \varphi(10) &= 300\\ \varphi\left(\frac{1}{2}\right) &= \left(\frac{3}{4}\right) \end{aligned}$$

   gilt

2. der tatsächlichen Funktion $f(x)$ möglichst nahekommt, am besten, die mit $f(x)$ übereinstimmt.

Diese Grundgedanken werden beim Aufbau von Fuzzy-Reglern fundamental sein und deshalb in den betreffenden Kapiteln noch genauer studiert werden.

Fünfte Möglichkeit

Eine imperative Interpretation des Konnektors „*Wenn …, so*“.
Aus imperativen Programmiersprachen sind sprachliche Konstrukte der Form

$$\textit{Wenn}\ A\,,\ \text{so}\ \ \alpha$$

wohlbekannt. Auch die Interpretation ist geläufig: A ist eine logische Bedingung, α ist ein Programm. Das Gebilde „*Wenn* A, so α“ wird als bedingtes Programm interpretiert, nämlich: Wenn A wahr ist, so führe das Programm α aus; ist A falsch, so überspringe das Programm „*Wenn* A, so α“.

Diese Interpretationsmöglichkeit kann ebenfalls in der Fuzzy-Regelung von Nutzen sein; ferner in der „regelbasierten“ Klassifikationstheorie, wo die Ausführung des Programms α die Einordnung eines Elements x in eine bestimmte Klasse K bedeuten kann.

4.2 Ein Axiomensystem für Implikationen

Wir beginnen mit der Formulierung eines Axiomensystems für Implikationen. Dieses Axiomensystem wurde aus der Betrachtung vieler Beispiele abstrahiert. Wir stellen es an die Spitze unserer Betrachtungen, um von vornherein den Rahmen abzustecken, in dem wir uns bewegen wollen.

Wir gehen wieder nach dem Muster vor, nach welchem wir Axiomensysteme für T-Normen, S-Normen, Negationen und Misch-Normen aufgebaut haben, indem wir gewisse „Grundaxiome" formulieren, die von jeder Implikation erfüllt werden müssen. Hier sind dies die Axiome I_1, I_2, I_3 und I_4.

Die Grundaxiome werden durch Zusatzaxiome (I_5, I_6, I_7, I_8, I_9) ergänzt, die zur „feineren" Spezifizierung von Implikationen dienen und die demgemäß nicht für alle der betrachteten Implikationen gelten.

Gegeben sei eine Funktion *imp* mit

$$imp : \langle 0,1 \rangle \times \langle 0,1 \rangle \to \langle 0,1 \rangle .$$

Definition 4.2.1
imp heiße Implikation
$=_{def}$ *Die folgenden Bedingungen I_1, I_2, I_3 und I_4 sind erfüllt*

I_1: *Für jedes $x \in \langle 0,1 \rangle$ gilt:*

$$\begin{aligned} imp(0,x) &= 1 \\ imp(1,x) &= x \\ imp(x,1) &= 1 \end{aligned}$$

I_2: *Die Funktion imp ist im ersten Argument comonoton und im zweiten Argument monoton, d. h. für jedes $x, y \in \langle 0,1 \rangle$ gilt:*

$$\text{Wenn } x \leqq y \text{, so } imp(x,z) \geqq imp(y,z) \text{ und } imp(z,x) \leqq (z,y).$$

I_3: *Die Funktion imp erfüllt den Satz der Kontraposition, d. h. für jedes $x, y \in \langle 0,1 \rangle$ gilt:*

$$imp(x,y) = imp(imp(y,0), imp(x,0)).$$

I_4: *Die Funktion imp erfüllt den Satz der Prämissenvertauschung, d. h. für jedes $x, y, z \in \langle 0,1 \rangle$ gilt:*

$$imp(x, imp(y,z)) = imp(y, imp(x,z)).$$

Bemerkungen

1. Axiom I_1 gibt einige allgemeine Eigenschaften wieder, die man für eine „vernünftige" Implikationen immer haben möchte, nämlich:
   - $imp(x,1) = 1$, d. h. ist die Konklusion „wahr" im Sinne des „besten" Wahrheitswertes 1, so ist die Implikation ebenfalls wahr im Sinne des „besten" Wertes.
   - $imp(0,x) = 1$, d. h. nimmt die Prämisse den „schlechtesten" Wert 0 an, erhält die Implikation den „besten" Wert 1.
   - $imp(1,x) = x$, d. h. nimmt die Prämisse den „besten" Wert 1 an, erhält die Implikation den Wert der Konklusion.

Diese Bedingungen und ihre Interpretation kann man als „vernünftige“ Verallgemeinerungen der Eigenschaften der zweiwertigen Implikation ansehen.

2. Definiert man eine einstellige Funktion ν für $x \in \langle 0,1\rangle$ durch

$$\nu(x) =_{def} imp(x,0),$$

so folgt aus I_1 und I_2, daß ν eine Negation ist. Bezogen auf die Funktion *imp* bedeutet dies, daß der „schlechteste“ Wahrheitswert 0 als Konklusion die Negation der Prämisse nach sich zieht.

3. Mit Verwendung der definierten Negation ν kann man Axiom I_3 in der Form schreiben, daß für jedes $x, y \in \langle 0,1\rangle$ gilt:

$$imp(x,y) = imp(\nu(y), \nu(x)).$$

4. Aus der zweiwertigen sowie aus der intuitionistischen Logik weiß man, daß man Axiom I_3 in die folgenden 4 Formen zerlegen kann, die im allgemeinen nicht paarweise gleichwertig sind

I_3^1: Für jedes $x, y \in \langle 0,1\rangle$ gilt:

$$imp(\nu(x), \nu(y)) \leqq imp(y,x)$$

I_3^2: Für jedes $x, y \in \langle 0,1\rangle$ gilt:

$$imp(\nu(x), y) \leqq imp(\nu(y), x)$$

I_3^3: Für jedes $x, y \in \langle 0,1\rangle$ gilt:

$$imp(x, \nu(y)) \leqq imp(y, \nu(x))$$

I_3^4: Für jedes $x, y \in \langle 0,1\rangle$ gilt:

$$imp(x,y) \leqq imp(\nu(y), \nu(x))$$

Aufgabe 4.2.1 *Man studiere die gegenseitige Abhängigkeit der Axiome I_3^1 bis I_3^4.*

5. Das Axiom I_4 kann als eine eingeschränkte linksseitige Kommutativität des „binären Operators“ *imp* verstanden werden. Diesem Axiom entspricht in der zweiwertigen Logik die folgende logische Äquivalenz

$$A \to (B \to C) \equiv B \to (A \to C),$$

dort ebenfalls Satz der Prämissenvertauschung genannt. Mit Hilfe der zweiwertigen Funktion *seq* ausgedrückt, bedeutet dies, daß für alle $x, y, z \in \{0,1\}$ die Gleichung

$$seq(x, seq(y,z)) = seq(y, seq(x,z))$$

gilt.

Wir formulieren nun die angekündigten zusätzlichen Axiome.

I_5. Selbstimplikation

Für jedes $x \in \langle 0,1 \rangle$ gilt:

$$imp(x,x) = 1$$

I_6. Prämissenbelastung

Für jedes $x, y \in \langle 0,1 \rangle$ gilt:

$$imp(x, imp(y,x)) = 1.$$

I_7. Stetigkeit

Die Funktion *imp* ist in $\langle 0,1 \rangle$ stetig.

Wir bezeichnen wie üblich durch $\leqq$ die natürliche Ordnung in der Menge der reellen Zahlen.

I_8. „Definierbarkeit" der Ordnungsrelation $\leqq$ durch *imp* in $\langle 0,1 \rangle$.

Für jedes $x, y \in \langle 0,1 \rangle$ gilt: $x \leqq y$ genau dann, wenn $imp(x,y) = 1$.

I_9. Die Funktion *imp* heiße involutorisch
$=_{def}$ Für jedes $x \in \langle 0,1 \rangle$ gilt:

$$imp(imp(x,0),0) = x.$$

Bemerkungen

1. Die Selbstimplikation (Axiom I_5) ist aus der zweiwertigen Logik bekannt, weil für die Funktion *seq* für alle $x \in \{0,1\}$ die Gleichung

$$seq(x,x) = 1$$

gilt.

2. Auch die Prämissenbelastung (Axiom I_6) ist aus der zweiwertigen Logik bekannt, weil für die Funktion *seq* für alle $x, y \in \{0,1\}$ die Gleichung

$$seq(x, seq(y,x)) = 1$$

gilt.

3. Zur Stetigkeit gibt es im „diskreten" Bereich $\{0,1\}$ für $seq(x,y)$ kein Analogon.

4. In vielen konkreten Fällen ist es günstig, das Axiom I_8 in die folgenden zwei Axiome I_8^1 und I_8^2 aufzulösen.

I_8^1. Die Ordnungsrelation $\leqq$ wird von *imp* akzeptiert, d. h. für jedes $x, y \in \langle 0,1 \rangle$ gilt:

$$\text{Wenn } x \leqq y \text{, so } imp(x,y) = 1$$

I_8^2. Die Ordnungsrelation $\leqq$ wird von *imp* impliziert, d. h. für jedes $x, y \in \langle 0,1 \rangle$ gilt:

$$\text{Wenn } imp(x,y) = 1 \text{, so } x \leqq y.$$

5. Verwendet man die durch
$$\nu(x) =_{def} imp(x, 0)$$
für $x \in \langle 0, 1\rangle$ definierte Funktion, so kann man Axiom I_9 in der Form
$$\nu(\nu(x)) = x \qquad (x \in \langle 0, 1\rangle)$$
schreiben, was besagt, daß die Funktion ν involutorisch ist.

6. Axiom I_9 kann man zerlegen in I_9^1 und I_9^2, wobei

$\mathbf{I}_9^1$. Für alle $x, y \in \langle 0, 1\rangle$ gilt:
$$imp(imp(x, 0), 0) \leqq x,$$
d. h. $\nu(\nu(x)) \leqq x$

$\mathbf{I}_9^2$. Für alle $x, y \in \langle 0, 1\rangle$ gilt:
$$x \leqq imp(imp(x, 0), 0),$$
d. h. $x \leqq \nu(\nu(x))$.

Gilt Axiom I_9^1 bzw. I_9^2, so sagt man, daß *imp* und auch ν stark involutorisch bzw. schwach involutorisch sei.

4.3 S-Implikationen

Gegeben sei eine S-Norm σ und eine Negation ν. Ausgehend von der zweiwertigen Gleichung
$$seq(x, y) = vel(non(x), y)$$
für $x, y \in \{0, 1\}$ definieren wir.

Definition 4.3.1
Eine Abbildung imp mit heiße von σ und ν erzeugte S-Implikation
$=_{def}$ *Für alle $x, y \in \langle 0, 1\rangle$ gilt:*
$$imp(x, y) = \sigma(\nu(x), y).$$

Theorem 4.3.1
Ist $imp(x, y)$ die von σ und ν erzeugte S-Implikation, so erfüllt imp die Axiome I_1, I_2 und I_4 sowie, falls ν involutorisch ist, das Axiom I_3.

Beweis
Die angegebenen Eigenschaften I_1 bis I_4 sind so formuliert und numeriert, daß sie mit den entsprechenden Axiomen S_1 bis S_4 korrespondieren (wobei die Axiome N_1, N_2 und N_4 geeignet eingehen). Dies ist eine Abweichung gegenüber der Literatur, siehe dazu z. B. D. Dubois und H. Prade [13].

In der angegebenen Arbeit vergleiche man insbesondere Abschnitt 3.3 mit unseren Darlegungen.

ad 1.

1.1 $imp(x, 0) = \nu(x)$.
Es gilt $imp(x, 0) =_{def} \sigma(\nu(x), 0)$
$= \nu(x)$ nach S_1

1.2 $imp(x,1) = 1$

Es gilt
$$\begin{aligned} imp(x,1) &=_{def} \sigma(\nu(x),1) \\ &= 1 && \text{nach } S_1 \end{aligned}$$

1.3 $imp(0,x) = 1$

Es gilt
$$\begin{aligned} imp(0,x) &=_{def} \sigma(\nu(0),x) \\ &= \sigma(1,x) && \text{nach } N_1 \\ &= \sigma(x,1) && \text{nach } S_3 \\ &= 1 && \text{nach } S_1 \end{aligned}$$

1.4 $imp(1,x) = x$

Es gilt
$$\begin{aligned} imp(1,x) &=_{def} \sigma(\nu(1),x) \\ &= \sigma(0,x) && \text{nach } N_1 \\ &= \sigma(x,0) && \text{nach } S_3 \\ &= x && \text{nach } S_1 \end{aligned}$$

ad 2. Es sei $x \leqq y$. Wir haben zu zeigen

2.1 $imp(x,z) \geqq imp(y,z)$ und

2.2 $imp(z,x) \leqq imp(z,y)$.

ad 2.1 Aus $x \leqq y$ folgt mit N_2

$$\begin{aligned} \nu(y) &\leqq \nu(x), && \text{also mit } S_2 \\ \sigma(\nu(y),z) &\leqq \sigma(\nu(x),z), && \text{d. h.} \\ imp(y,z) &\leqq imp(x,z). \end{aligned}$$

ad 2.2 Aus $x \leqq y$ folgt mit S_2

$$\begin{aligned} \sigma(\nu(z),x) &\leqq \sigma(\nu(z),y), && \text{also nach Definition von } imp \\ imp(z,x) &\leqq imp(z,y). \end{aligned}$$

ad 3.
$$\begin{aligned} imp(x,y) &=_{def} \sigma(\nu(x),y) \\ &= \sigma(y,\nu(x)) && \text{nach } S_3 \\ &= \sigma(\nu(\nu(y)),\nu(x)) && \text{nach } N_4 \\ &= imp(\nu(y),\nu(x)) && \text{nach Definition von } imp. \end{aligned}$$

ad 4.
$$\begin{aligned} imp(x,imp(y,z)) &=_{def} \sigma(\nu(x),imp(y,z)) \\ &=_{def} \sigma(\nu(x),\sigma(\nu(y),z)) \\ &= \sigma(\sigma(\nu(x),\nu(y)),z) && \text{nach } S_4 \\ &= \sigma(\sigma(\nu(y),\nu(x)),z) && \text{nach } S_3 \\ &= \sigma(\nu(y),\sigma(\nu(x),z)) && \text{nach } S_4 \\ &= \sigma(\nu(y),imp(x,z)) && \text{nach Definition von } imp \\ &= imp(y,imp(x,z)) && \text{nach Definition von } imp. \end{aligned}$$

■

Einige weitere wünschenswerte Eigenschaften von Implikationen gelten für S-Implikationen im allgemeinen nur dann, wenn man an σ und ν zusätzliche Forderungen stellt.

Theorem 4.3.2

1. *Gilt für σ bezüglich ν das Gesetz des ausgeschlossenen Dritten, so erfüllt imp zusätzlich die Axiome I_5, I_6 und I_8^1.*
2. *Sind σ und ν stetig, so erfüllt imp das Axiom I_7.*

Beweis

ad 1 $\mathbf{I_5}$. Es gilt
$$\begin{aligned} imp(x,x) &= \sigma(\nu(x),x) && \text{nach Definition von } imp,\\ &= 1 && \text{nach Voraussetzung.}\end{aligned}$$

$\mathbf{I_6}$. Es gilt
$$\begin{aligned} imp(x, imp(y,x)) &= imp(x, \sigma(\nu(y),x)) && \text{nach Definition von } imp,\\ &= \sigma(\nu x, \sigma(\nu(y),x)) && \text{nach Definition von } imp,\\ &= \sigma(\sigma(\nu x, \nu(y)),x) && \text{nach } S_4,\\ &= \sigma(\sigma(\nu y, \nu(x)),x) && \text{nach } S_3\\ &= \sigma(\nu y, \sigma(\nu(x),x)) && \text{nach } S_4\\ &= \sigma(\nu y, 1) && \text{nach Voraussetzung}\\ &= 1 && \text{nach } S_1\end{aligned}$$

$\mathbf{I_8^1}$. Es sei
$$x \leqq y.$$

Da ν comonoton ist, folgt aus $x \leqq y$, daß
$$\nu(y) \leqq \nu(x),$$

also mit S_2 (Monotonie von σ), daß
$$\sigma(\nu(y),y) \leqq \sigma(\nu(x),y).$$

Nun erfüllt aber σ bezüglich ν das Gesetz des ausgeschlossenen Dritten, d. h. es gilt
$$\sigma(\nu(y),y) = 1,$$

also folgt mit $\sigma(\nu(y),y) \leqq \sigma(\nu(x),y)$, daß
$$\sigma(\nu(x),y) = 1, \qquad \text{d. h.}$$
$$imp(x,y) = 1.$$

ad 2 $\mathbf{I_7}$. Eine Verkettung stetiger Funktionen ist wieder stetig.

■

Aufgabe 4.3.1 *Gibt es S-Implikationen, die **nicht** I_8^1 und/oder **nicht** I_8^2 erfüllen ?*

Problem

Wann man eine zweistellige Abbildung
$$\varphi : \langle 0,1\rangle^2 \to \langle 0,1\rangle$$
eine *Implikation* (im allgemeinen Sinne) nennen sollte, ist in der Literatur bis heute nicht eindeutig festgelegt (wie etwa der Begriff der T-Norm durch die Axiome T_1, T_2, T_3, T_4 und der Begriff der S-Norm durch die Axiome S_1, S_2, S_3, S_4).

Wir möchten vorschlagen, daß mindestens die Axiome

$$\mathrm{I}_1, \mathrm{I}_2, \mathrm{I}_3 \text{ und } \mathrm{I}_4$$

gelten.

Inwiefern man die Axiome I_5, I_6, I_7, I_8 bzw. I_9 fordern kann oder muß, ist unklar; wir werden dies durch die Betrachtung der folgenden Beispiele erläutern.

Beispiel 1 Die KLEENE-DIENES-Implikation,

$$imp_{\mathrm{KD}}(x, y) =_{def} max(1 - x, y) \qquad x, y \in \langle 0, 1\rangle.$$

Offenbar ist imp_{KD} eine S-Implikation, erzeugt von der S-Norm $max(x, y)$ und der LUKASIEWICZschen Negation $\nu_{\mathrm{L}} = 1 - x$.

Theorem 4.3.3
*Die KLEENE-DIENES-Implikation erfüllt die Axiome I_1, I_2, I_3, I_4, I_7, I_8^2 und I_9; jedoch **nicht** I_5, I_6 und I_8^1.*

Beweis
Die Gültigkeit von I_1, I_2, I_3, I_4 folgt aus **Theorem 4.3.1**; die übrigen Behauptungen muß man gesondert zeigen. **Aufgabe 4.3.2** ! ■

Bemerkung
Die KLEENE-DIENES-Implikation erfüllt die als notwendig deklarierten Bedingungen I_1, I_2, I_3 und I_4; die Nichtgültigkeit der Selbstimplikation, d. h. von

$$imp(x, x) = 1 \quad \text{für alle } x \in \langle 0, 1\rangle$$

ist ein großer Mangel; die Nichtgültigkeit der Prämissenbelastung, d. h. von

$$imp(x, imp(y, x)) = 1 \quad \text{für } x, y \in \langle 0, 1\rangle$$

kann als ein gewisser „Nicht-Monotonieeffekt“ (die Hinzunahme neuer Bedingungen kann zur Folge haben, daß vorher ableitbare Sätze dann nicht mehr ableitbar sind) im Sinne der Nicht-Monotonen Logik gedeutet werden.

Die Bedingung I_8^1 wird durch $x = y = \frac{1}{2}$, also $x \leqq y$, aber

$$imp\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = max\left(1 - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

widerlegt.

Beispiel 2 Die ŁUKASIEWICZsche Implikation

$$imp_{\mathrm{L}}(x, y) =_{def} min(1, 1 - x + y)$$

Offenbar ist imp_{L} eine S-Implikation, erzeugt von der S-Norm $vel_{\mathrm{b}}(x, y) = min(1, x + y)$ (*bold*-Alternative) und der ŁUKASIEWICZschen Negation $\nu_{\mathrm{L}}(x) = 1 - x$.

Theorem 4.3.4
Die ŁUKASIEWICZsche Implikation erfüllt sämtliche Axiome I_1 bis I_9.

Beweis
Aufgabe 4.3.3. ■

Bemerkung
Unter dem Gesichtspunkt, daß möglichst viele der Bedingungen I_1 bis I_9 erfüllt sein sollen, ist die LUKASIEWICZsche Implikation unter den hier betrachteten die „beste“ (alle Bedingungen erfüllt).

Problem
Welche weiteren zweistelligen Abbildungen

$$imp : \langle 0,1\rangle^2 \to \langle 0,1\rangle$$

erfüllen sämtliche Bedingungen I_1 bis I_9 ?

Beispiel 3 Die REICHENBACHsche Implikation

$$imp_{\mathrm{R}}(x,y) =_{def} 1 - x + x \cdot y \qquad (x, y \in \langle 0,1\rangle)$$

Offenbar ist imp_{R} eine S-Implikation, erzeugt von der S-Norm $vel_{\mathrm{a}}(x,y) = x + y - x \cdot y$ (algebraische Alternative) und der LUKASIEWICZschen Negation $\nu_{\mathrm{L}} = 1 - x$.

Theorem 4.3.5
Die REICHENBACH*sche Implikation erfüllt die Axiome I_1, I_2, I_3, I_4, I_7 und I_8^2; jedoch* ***nicht*** *I_5, I_6 und I_8^1.*

Beweis
Die Gültigkeit von I_1, I_2, I_3, I_4 folgt aus **Theorem 4.3.1**; die übrigen muß man gesondert zeigen. **Aufgabe 4.3.4** ! ■

Bemerkungen
Man vergleiche Formulierung und Beweis der **Theoreme 4.3.3** und **4.3.5**.

Beispiel 4 Die *schwach-drastische* Implikation

$$imp_{\mathrm{sd}}(x,y) =_{def} \begin{cases} y, & \text{falls } x = 1 \\ 1-x, & \text{falls } y = 0 \\ 1, & \text{falls } 0 \leqq x < 1 \textbf{ und } 0 < y \leqq 1 \end{cases}$$

Offenbar ist imp_{sd} eine S-Implikation, erzeugt von der S-Norm vel_{sd} und non_{L}, wobei die schwach-drastische Alternative definiert ist als

$$vel_{\mathrm{sd}}(x,y) =_{def} \begin{cases} y, & \text{falls } x = 0 \\ x, & \text{falls } y = 0 \\ 1, & \text{falls } x > 0 \textbf{ und } y > 0. \end{cases}$$

Aufgabe 4.3.5 *Welche der Axiome I_i für $i \in \{1,\ldots,9\}$ werden von imp_{sd} erfüllt bzw. nicht erfüllt ?*

Beispiel 5 Die *drastische* Implikation

$$imp_{\mathrm{d}}(x, y) =_{def} \begin{cases} 1, & \text{falls } 0 \leqq x < 1 \text{ oder } 0 < y \leqq 1 \\ 0, & \text{falls } x = 1 \text{ und } y = 0 \end{cases}$$

Offenbar ist imp_{d} erzeugt von dem Alternativskelett vel_{d} und non_{L}, wobei die drastische Alternative definiert ist als

$$vel_{\mathrm{d}}(x, y) =_{def} \begin{cases} 1, & \text{falls } 0 < x \leqq 1 \text{ oder } 0 < y \leqq 1 \\ 0, & \text{falls } x = 0 \text{ und } y = 0 \end{cases}$$

Aufgabe 4.3.6 *Welche der Axiome I_i für $i \in \{1, \ldots, 9\}$ werden von imp_{d} erfüllt bzw. nicht erfüllt ?*

4.4 R-Implikationen

Der **Ausgangspunkt** für die Definition der Klasse der **S-Implikation** war die Tatsache, daß für die *zweiwertige* Implikation *seq* die Identität

$$seq(x, y) = vel(non(x), y) \qquad x, y \in \{0, 1\}$$

gilt. Diese Formel hatten wir für eine beliebige *S-Norm* σ und Negation ν in der Form

$$imp(x, y) = \sigma(\nu(x), y) \qquad x, y \in \langle 0, 1 \rangle$$

für beliebige reelle Werte x, y aus $\langle 0, 1 \rangle$ übertragen.

Der **Ausgangspunkt** für die Definition der Klasse der *R-Implikationen* ist die Tatsache, daß für die *zweiwertige* Implikation *seq* eine **andere** Identität (zusätzlich) gilt, nämlich, daß für alle $x, y \in \{0, 1\}$:

$$seq(x, y) = Max\,\{z \,|\, et(x, z) \leqq y \;\text{ und }\; z \in \{0, 1\}\}$$

Beweis
dieser Identität als **Aufgabe 4.4.1** ! ■

Problem
Wie kann man motivieren, daß man eben **diese** Identität zum Ausgangspunkt für die Definition weiterer Implikationen in der Fuzzy-Logik nimmt ?

1. Die obige Identität stellt einen Zusammenhang zwischen Implikation und **allein** der Konjunktion her, **ohne** Verwendung der Negation wie bei S-Implikationen. Eine „inhaltlich-logische“ Argumentation zur Begründung dieses Ansatzes ist schwierig (fast unmöglich); die Ursache dafür sind die in Abschnitt 4.1 beschriebenen Schwierigkeiten, die Konstruktion

   „*Wenn A , so B*“,

   d. h. den „*Wenn ..., so ...*“ Konnektor semantisch zu interpretieren.

2. Es gibt eine *algebraisch*-Mathematische Begründung dieses Ansatzes im Rahmen der Theorie der

residualen Verbände.

Wir führen dies hier nicht aus, sondern verweisen dazu auf die Arbeit [16] von J. A. GOGUEN, wo dieser Zugang ausführlich diskutiert wird. Die Benennung „**R**-Implikation“ stammt von *„**R**esiduated“*.

Die obigen Beziehungen aus der zweiwertigen Logik werden nun zum Anlaß der folgenden Definition genommen.

Gegeben seien beliebige zweistellige LUKASIEWICZsche Funktionen *imp* und τ, d. h.

$$imp, \tau : \langle 0,1\rangle^2 \to \langle 0,1\rangle .$$

Definition 4.4.1

1. *imp heiße durch τ erzeugte R-Implikation*
   $=_{def}$ *Für jedes $x, y \in \langle 0,1\rangle$ gilt:*

$$imp(x,y) = Sup\,\{x \,|\, \tau(x,z) \leqq y \ \text{ und } \ z \in \langle 0,1\rangle\}$$

2. *imp ist eine R-Implikation*
   $=_{def}$ *Es gibt eine zweistellige Funktion τ, die imp gemäß Bedingung 1 erzeugt.*

Bemerkung

In **Definition 4.4.1** haben wir gegenüber der Form

$$seq(x,y) = Max\,\{z \,|\, et(x,z) \leqq y \ \text{ und } \ z \in \{0,1\}\}$$

den Maximum-Operator durch den Supremum-Operator ersetzt, da in $\langle 0,1\rangle$ eine Teilmenge $M \subseteqq \langle 0,1\rangle$ kein Maximum haben muß, während für $M \subseteqq \{0,1\}$ stets der Fall ist.

Wir stellen nun die folgenden

Probleme

1. Es sei τ ein Konjunktionsskelett. Welche der Eigenschaften I_1 bis I_8 kann man folgern und welche nicht ?

2. Es sei τ eine T-Norm. Die Aufgabenstellung entspricht 1.

3. Wir definieren eine einstellige Funktion

$$\begin{aligned} \nu(x) &=_{def} imp(x,0) \\ &=_{def} Sup\,\{z \,|\, \tau(x,z) \leqq 0 \ \text{ und } \ z \in \langle 0,1\rangle\} \end{aligned}$$

3.1. Unter welchen Voraussetzungen für τ werden durch das definierte ν die Negationsaxiome N_1, N_2, N_3, N_4, N_5 erfüllt ?

3.2. Unter welchen Voraussetzungen für τ werden durch das definierte ν erfüllt:

I_3. Kontraposition

$$imp(x,y) = imp(\nu(y), \nu(x))$$

I_3^1. Schwache einseitige Kontraposition

$$imp(x,y) \leqq imp(\nu(y), \nu(x))$$

$\mathbf{I_3^2}$. Starke einseitige Kontraposition

$$imp(\nu(y), \nu(x)) \leqq imp(x, y)$$

$\mathbf{N_4^1}$. Schwache einseitige Involution

$$x \leqq \nu(\nu(x))$$

$\mathbf{N_4^2}$. Starke einseitige Involution

$$\nu(\nu(x)) \leqq x$$

Beispiel 1 Die Łukasiewiczsche Implikation

$$imp_{\mathrm{L}}(x, y) =_{def} min(1, 1 - x + y)$$

wird als R-Implikation von der T-Norm

$$et_{\mathrm{b}}(x, y) =_{def} max(0, x + y - 1)$$

erzeugt.

Beweis
Wir haben zu zeigen, daß für alle $x, y \in \langle 0, 1\rangle$ die Gleichung

$$imp_{\mathrm{L}}(x, y) = Sup\,\{z \mid et_{\mathrm{b}}(x, z) \leqq y \;\text{ und }\; z \in \langle 0, 1\rangle\} \tag{4.6}$$

gilt. Nach Elimination der Definitionen haben wir zu zeigen, daß für $x, y \in \langle 0, 1\rangle$ gilt:

$$min(1, 1 - x + y) = Sup\,\{z \mid max(0, x + z - 1) \leqq y \;\text{ und }\; z \in \langle 0, 1\rangle\} \tag{4.7}$$

Fall 1. $x \leqq y$.

Dann gilt

$$min(1, 1 - x + y) = 1. \tag{4.8}$$

Ferner ist für $z = 1$ die Bedingung

$$max(0, x + z - 1) \leqq y$$

erfüllt, also nimmt die „rechte Seite“ von Gleichung (4.7) den Wert 1 an.

Fall 2. $x > y$.

Dann gilt

$$min(1, 1 - x + y) = 1 - x + y. \tag{4.9}$$

Wir stellen ferner fest, daß für

$$z =_{def} 1 - x + y$$

die Bedingung

$$max(0, x + z - 1) \leqq y$$

erfüllt ist, also gilt

$$1 - x + y \leqq Sup\,\{z \,|\, max(0, x + z - 1) \leqq y \ \text{ und } \ z \in \langle 0, 1\rangle\}\,. \tag{4.10}$$

Setzen wir nun

$$z =_{def} 1 - x + y$$

in die Bedingung

$$max(0, x + z - 1) \leqq y$$

ein, erhalten wir

$$\begin{aligned} max(0, x + z - 1) &= max(0, x + (1 - x + y) - 1) \\ &= y \leqq y. \end{aligned}$$

Somit kann es kein $z' > z$ geben mit

$$max(0, x + z' - 1) \leqq y,$$

also geht (4.10) in eine Gleichung über.

■

Beispiel 2 Die GÖDELsche Implikation mit

$$imp_{\mathrm{G}}(x, y) =_{def} \begin{cases} 1, & \text{falls } x \leqq y \\ y, & \text{falls } x > y \end{cases}$$

wird als R-Implikation von der T-Norm

$$et_{\mathrm{m}}(x, y) =_{def} min(x, y)$$

erzeugt.

Beweis
Wir haben zu zeigen, daß für alle $x, y \in \langle 0, 1\rangle$ die Gleichung

$$imp_{\mathrm{G}}(x, y) = Sup\,\{z \,|\, min(x, z) \leqq y \ \text{ und } \ z \in \langle 0, 1\rangle\} \tag{4.11}$$

gilt.

Fall 1. $x \leqq y$.

Dann gilt nach Definition von imp_{G}

$$imp_{\mathrm{G}}(x, y) = 1. \tag{4.12}$$

Somit haben wir zu zeigen, daß gilt:

$$Sup\,\{z \,|\, min(x, z) \leqq y \ \text{ und } \ z \in \langle 0, 1\rangle\} = 1. \tag{4.13}$$

Die Gleichung (4.13) gilt, weil für $z = 1$

$$min(x, 1) = x \leqq y$$

gilt.

Fall 2. $x > y$.

Dann gilt nach Definition von imp_{G}

$$imp_{\mathrm{G}}(x, y) = y. \tag{4.14}$$

Somit haben wir zu zeigen, daß gilt:

$$Sup\,\{z \,|\, min(x, z) \leqq y \text{ und } z \in \langle 0, 1\rangle\} = y. \tag{4.15}$$

Die Gleichung (4.15) gilt, weil die Bedingung $min(x, z) \leqq y$ für $z = y$ erfüllt ist, denn

$$min(x, y) = y \leqq y;$$

jedoch kein $z = y'$ mit $y' > y$ existiert, so daß

$$min(x, y') \leqq y.$$

■

Aufgabe 4.4.2 *Gibt es eine S-Norm σ und eine Negation ν, so daß*

$$imp_{\mathrm{G}}(x, y) = \sigma(\nu(x), y) \text{ für alle } x, y \in \langle 0, 1\rangle \text{ ?}$$

Theorem 4.4.1
Die GÖDELsche Implikation erfüllt die Eigenschaften I_1, I_2, I_4, I_5, I_6, I_8; jedoch die Eigenschaften I_3, I_7 (Stetigkeit) und I_9 nicht.

Beweis
Aufgabe 4.4.3. ■

Beispiel 3 Die GOGUENsche Implikation mit

$$imp_{\mathrm{Go}}(x, y) =_{def} \begin{cases} 1, & \text{falls } x = 0 \\ min\left(1, \frac{y}{x}\right), & \text{falls } x \neq 0. \end{cases}$$

wird als R-Implikation von der T-Norm

$$et_{\mathrm{a}}(x, y) =_{def} x \cdot y,$$

also von der algebraischen Konjunktion erzeugt.

Beweis
Wir haben zu zeigen, daß für alle $x, y \in \langle 0, 1\rangle$ die Gleichung

$$imp_{\mathrm{Go}}(x, y) = Sup\,\{z \,|\, x \cdot z \leqq y \text{ und } z \in \langle 0, 1\rangle\} \tag{4.16}$$

gilt.

Fall 1. $x = 0$.

Dann gilt nach Definition von imp_{Go}

$$imp_{\mathrm{Go}}(x, y) = imp_{\mathrm{Go}}(0, y) = 1. \tag{4.17}$$

Somit haben wir zu zeigen, daß

$$Sup\,\{z\,|\,x \cdot z \leqq y \;\text{ und }\; z \in \langle 0, 1\rangle\} = 1. \tag{4.18}$$

Dann erfüllt $z = 1$ die Bedingung

$$x \cdot z \leqq y,$$

wobei $0 \cdot 1 \leqq y$, also gilt (4.18).

Fall 2. $x > 0$.

Fall 2.1 $y \leqq x$, also $\frac{y}{x} \leqq 1$.
Dann gilt nach Definition von imp_{Go}, daß

$$imp_{\mathrm{Go}}(x, y) = min\left(1, \frac{y}{x}\right) = \frac{y}{x}. \tag{4.19}$$

Somit haben wir zu zeigen, daß

$$Sup\,\{z\,|\,x \cdot z \leqq y \;\text{ und }\; z \in \langle 0, 1\rangle\} = \frac{y}{x} \tag{4.20}$$

Die Bedingung

$$x \cdot z \leqq y$$

wird aber von $z = \frac{y}{x}$ erfüllt; ferner gibt es wegen $x \cdot z = x \cdot \left(\frac{y}{x}\right) = y$ kein $z' > z$ mit $x \cdot z' \leqq y$, also gilt (4.20).

Fall 2.2 $y > x$, also $\frac{y}{x} > 1$.
Dann gilt nach Definition von imp_{Go}, daß

$$imp_{\mathrm{Go}}(x, y) = 1. \tag{4.21}$$

Somit haben wir zu zeigen, daß

$$Sup\,\{z\,|\,x \cdot z \leqq y \;\text{ und }\; z \in \langle 0, 1\rangle\} = 1 \tag{4.22}$$

Dann wird die Bedingung

$$x \cdot z \leqq y$$

für $z = 1$ erfüllt, also gilt Gleichung (4.22).

■

Aufgabe 4.4.4 *Welche der Implikationsaxiome $I_1, \ldots, I_9$ werden von imp_{Go} erfüllt bzw. nicht erfüllt ?*

Aufgabe 4.4.5 *Man bestimme die R-implikationen, die von den folgenden Konjunktionsskeletten bzw. T-Normen erzeugt werden.*

1. *Drastische Konjunktion* et_{d}*, wobei*

$$et_{\mathrm{d}}(x,y) =_{def} \begin{cases} 1, & \text{falls } x = 1 \text{ und } y = 1 \\ 0, & \text{falls } 0 \leqq x < 1 \text{ oder } 0 \leqq y < 1 \end{cases}$$

2. *Schwach-drastische Konjunktion* et_{sd}*, wobei*

$$et_{\mathrm{sd}}(x,y) =_{def} \begin{cases} y, & \text{falls } x = 1 \\ x, & \text{falls } y = 1 \\ 0, & \text{falls } x < 1 \text{ und } y < 1 \end{cases}$$

3. *Die* YAGER*-Klasse* et_{Y}^{w}*, wobei*

$$et_{\mathrm{Y}}^{w}(x,y) =_{def} 1 - min\left(1, ((1-x)^{w} + (1-y)^{w})^{\frac{1}{w}}\right) \qquad \text{mit } 0 < w < +\infty$$

4. *Die* HAMACHER*-Klasse* et_{H}^{γ}*, wobei*

$$et_{\mathrm{H}}^{\gamma}(x,y) =_{def} \frac{x \cdot y}{\gamma + (1-\gamma)\cdot(x + y - x \cdot y)} \qquad \text{mit } 0 < \gamma < +\infty$$

5. *Spezialfall einer* HAMACHER*-Konjunktion*

$$et_{\mathrm{H}}^{0}(x,y) =_{def} \begin{cases} \dfrac{x \cdot y}{x + y - x \cdot y}, & \text{falls } x \neq 0 \text{ oder } y \neq 0 \\ 0, & \text{falls } x = y = 0 \end{cases}$$

4.5 QL-Implikationen

Diese Klasse von Implikationen wurde von L. A. ZADEH in der Arbeit [51] beschrieben.

Ausgangspunkt ist wieder eine Identität der zweiwertigen Logik; nämlich daß für alle $x, y \in \{0,1\}$ gilt:

$$seq(x,y) = vel(non(x), et(x,y))$$

In formalisierter Form bedeutet diese Identität, daß die folgenden Formeln (im Zweiwertigen) wertverlaufsgleich sind, d. h. es gilt

$$A \to B \equiv A \to A \wedge B.$$

Dementsprechend formulieren wir für Abbildungen

$$\tau, \sigma : \langle 0,1 \rangle^{2} \to \langle 0,1 \rangle$$

und

$$\nu : \langle 0,1 \rangle \to \langle 0,1 \rangle,$$

wobei für alle $x, y \in \langle 0,1 \rangle$:

$$\tau(x,y) = \nu(\sigma(\nu(x), \nu(y))),$$

d. h. τ das ν*-Dual* von σ ist, die folgende Definition.

Definition 4.5.1

1. *imp ist QL-Implikation, erzeugt von* τ*,* σ *und* ν

$=_{def}$ *Für jedes* $x, y \in \langle 0, 1\rangle$ *gilt:*

$$imp(x, y) = \sigma(\nu(x), \tau(x, y))$$

2. *imp ist QL-Implikation*
   $=_{def}$ *Es gibt* τ, σ, ν, *so daß* τ ***ν-Dual*** *von* σ *ist und imp von* τ, σ, ν *im Sinne von 1 erzeugt wird.*

Beispiel 4 Die KLEENE-DIENES-Implikation

$$imp_{\mathrm{KD}}(x, y) =_{def} max(1 - x, y)$$

ist QL-Implikation, erzeugt von τ, σ, ν mit

$$\begin{aligned} \tau(x, y) &= max(0, x + y - 1) \qquad\qquad x, y \in \langle 0, 1\rangle \\ \sigma(x, y) &= min(1, x + y) \\ \nu(x) &= 1 - x \end{aligned}$$

Beispiel 5 Die ZADEHsche Implikation, definiert durch

$$imp_{\mathrm{Z}}(x, y) =_{def} max(1 - x, min(x, y)).$$

Offenbar ist diese Implikation eine QL-Implikation, erzeugt durch

$$\begin{aligned} \tau(x, y) &= min(x, y) \\ \sigma(x, y) &= max(x, y) \\ \nu(x) &= 1 - x \end{aligned}$$

Aufgabe 4.5.1 *Man untersuche die folgenden zwei „exotischen“ Implikationen daraufhin, ob sie S-, R- bzw. QL-Implikationen sind und welche Implikationsaxiome sie erfüllen bzw. nicht erfüllen:*

1. *die* YAGER*sche Implikation* imp_{Y} *mit*

$$imp_{\mathrm{Y}}(x, y) =_{def} y^x$$

2. *die* WILLMOTT*sche Implikation* imp_{W} *mit*

$$imp_{\mathrm{W}}(x, y) =_{def} min(max(1 - x, y), max(x, 1 - y, min(y, 1 - x)))$$

5. Die Teilmengenbeziehung für Fuzzy-Mengen

5.1 Motivationen und Vorbemerkungen

Wir gehen von der Erfahrung aus, daß in der **scharfen** Mengenlehre die Teilmengenbeziehung $M \subseteqq N$ sowohl für die Theorie als auch in den Anwendungen außerordentlich wichtig ist, also sehr häufig gebraucht wird. Ähnliches kann man auch in einer Fuzzy-Mengenlehre erwarten, und zwar unabhängig davon, auf welcher logischen Basis diese Fuzzy-Mengenlehre („standard“ oder „nicht-standard“) aufgebaut ist.

Dabei werden die folgenden **drei neuen** wichtigen Gesichtspunkte ins Spiel kommen.

1. Ausgehend vom Begriff der „scharfen“ n-stelligen Relation aus der scharfen Mengenlehre Entwicklung eines „weichen“ Begriffs von n-stelliger Relation, auch *Fuzzy-Relation* genannt (mehr dazu in Kapitel 6).

2. Feststellung der Tatsache, daß schon in der scharfen Mengenlehre eine korrekte Definition der Teilmengenbeziehung $M \subseteqq N$ nur auf der Basis der Prädikatenlogik möglich ist. Dies steht im Einklang mit dem Prinzip, mengentheoretische Beziehungen auf logische Beziehungen zurückzuführen. Die Übertragung dieses Prinzips auf die Fuzzy-Mengenlehre, **hier** im Spezialfall zur Definition einer *Teilmengenbeziehung* für *Fuzzy-Mengen*, führt mit Notwendigkeit dazu, die Fuzzy-Aussagenlogik zur *Fuzzy-Prädikatenlogik* auszubauen.

3. Sind F und G Fuzzy-Mengen über einem Universum, so kann man zunächst die (scharfe) Teilmengenbeziehung $M \subseteqq N$ für scharfe Mengen M und N verallgemeinern zu einer *„scharfen“* Teilmengenbeziehung $F \subseteqq G$ für die gegebenen Fuzzy-Mengen F und G. Demgemäß wird $F \subseteqq G$ nur zwei „Antworten“ haben, „ja“ oder „nein“ bzw. „wahr“ oder „falsch“.

   Für Theorie und Praxis reicht aber eine derartige „scharfe“ Beziehung nicht aus; weil zwischen Fuzzy-Mengen F und G (auf Grund ihrer komplizierten Struktur gegenüber scharfen Mengen M und N) vielfältigere Beziehungen bestehen können, die nicht zweiwertig beschreibbar sind. Demgemäß ist es notwendig, eine „weiche“ Teilmengenbeziehung $Inc(F, G)$ zwischen Fuzzy-Mengen F und G zu definieren, wobei

   $Inc(F, G)$
   $=_{def}$ der *Wahrheitswert* aus $\langle 0, 1\rangle$ ist, zu dem F *Fuzzy-Teilmenge* von G ist.

Bevor wir dieses Programm im einzelnen durchführen, erinnern wir an einige bekannte Dinge aus der scharfen Mengenlehre. Grundlage für die Betrachtung der Teilmengenbeziehung ist die folgende Definition

Definition 5.1.1
$M \subseteqq N$ (M ist Teilmenge von N)
$=_{def} \forall x(x \in M \rightarrow x \in N)$

Diese Definition besagt anschaulich, daß M Teilmenge von N sein soll genau dann, wenn jedes Element x von M auch Element von N ist. D. h. mit anderen Worten „genauer", daß die Teilmengenbeziehung rein „quantitativ" („extensional") definiert wird, indem **allein** auf das Vorkommen von Elementen x Bezug genommen wird; weitergehende Informationen, etwa die Art der „Beschreibung" der Mengen M und N, spielen dabei keine Rolle.

Wir nehmen nun an, daß die Mengen M und N aus einem Universum U stammen. Die Mengen M und N lassen sich — wie bekannt — eineindeutig durch ihre charakteristischen Funktionen χ_M und χ_N festlegen, wobei (zur Erinnerung!) χ_M für M wie folgt definiert ist

1. $\chi_M : U \rightarrow \{0, 1\}$

2. $\chi_M(x) =_{def} \begin{cases} 0, & \text{falls } x \in U \setminus M \\ 1, & \text{falls } x \in M \end{cases}$

Verwendet man die charakteristischen Funktionen, ergibt sich aus der obigen Definition die

Folgerung 5.1.1
$M \subseteqq N$ genau dann, wenn $\forall x \left(\chi_M(x) \rightarrow \chi_N(x)\right)$

Nun weiß man aus der zweiwertigen Prädikatenlogik, daß der All-Quantor $\forall$ wie folgt interpretiert wird:

> $\forall x A(x)$ ist *WAHR* genau dann, wenn **jede** „Instantiierung" $A(x)$ mit $x \in U$ wahr ist.

Somit erhält man aus **Folgerung 5.1.1**:

> $M \subseteqq N$ genau dann, wenn jede „Instantiierung" $\chi_M(x) \rightarrow \chi_N(x)$ mit $x \in U$ wahr ist.

Nun wird $\rightarrow$ im Zweiwertigen durch die „klassische" Implikationsfunktion *seq* interpretiert, und für diese gilt für beliebiges $u, v \in \{0, 1\}$:

$$seq(u, v) = 1 \text{ genau dann, wenn } u \leqq v.$$

Wendet man dies auf **Folgerung 5.1.1** an, erhält man:

Folgerung 5.1.2
$M \subseteqq N$ genau dann, wenn für jedes $x \in U$ die Beziehung $\chi_M(x) \leqq \chi_N(x)$ gilt.

Folgerung 5.1.2 kann man nun zum Anlaß nehmen, für beliebige Fuzzy-Mengen F und G die im folgenden Abschnitt 5.2 studierte („scharfe") Teilmengenbeziehung $F \subseteqq G$ zu definieren.

Die Relation $\subseteqq$ wurde für Fuzzy-Mengen erstmals von Lotfi A. Zadeh in [49] definiert.

5.2 Die scharfe Teilmengenbeziehung für Fuzzy-Mengen

Gegeben seien beliebige Fuzzy-Mengen F und G über dem Universum U.

Definition 5.2.1
$F \subseteqq G =_{def}$ *Für jedes* $x \in U$ *gilt:* $F(x) \leqq G(x)$.

Da zur Formulierung dieser Definition die übliche zweiwertige Logik benutzt wird, ist $F \subseteqq G$ eine „scharfe" (binäre) Relation, d. h. die Antwort auf die Frage, ob $F \subseteqq G$ gilt, ist „ja" (Wahrheitswert 1) oder „nein" (Wahrheitswert 0).

Beispiele
Beispiel 1

$$U =_{def} \{1, 2, \ldots\} \qquad \text{(natürliche Zahlen außer 0)}$$

$$F_1(x) =_{def} \frac{1}{x^2} \qquad x \in U$$

$$G_1(x) =_{def} \frac{1}{x}$$

Nun gilt für alle $x \in U$

$$\frac{1}{x^2} \leqq \frac{1}{x},$$

also

$$F_1(x) \leqq G_1(x),$$

also ist F_1 (scharfe) Teilmenge von G_1, d. h.

$$F_1 \subseteqq G_1.$$

Eine mögliche Veranschaulichung der betrachteten Fuzzy-Mengen F_1 und G_1:

$F_1(x)$: Die Zahl x ist eine *„sehr kleine"* natürliche Zahl größer als Null.

$G_1(x)$: Die Zahl x ist eine *„kleine"* natürliche Zahl größer als Null.

Hinweis
In diesem Beispiel tritt (erstmals in dieser Vorlesung) ein *Modifikator* auf, indem eine Fuzzy-Menge (hier „Klein") durch das Präfix *„sehr"* modifiziert (hier zu „sehr klein") wird (siehe dazu Kapitel 11).

Beispiel 2

$$U =_{def} \{0, 1, 2, \ldots\}$$

$$F_2(x) =_{def} \begin{cases} \frac{1}{10}, & \text{falls } x \in U \text{ und } x = 0 \\ \frac{1}{x^2}, & \text{falls } x \in U \text{ und } x > 0 \end{cases}$$

$$G_2(x) =_{def} \begin{cases} 0, & \text{falls } x \in U \text{ und } x = 0 \\ \frac{1}{x}, & \text{falls } x \in U \text{ und } x > 0 \end{cases}$$

Offenbar gilt:

Nicht $F_2 \subseteqq G_2$, also F_2 ist **nicht** (scharfe) Teilmenge von G_2

Mögliche Veranschaulichung

$F_2(x)$: x ist eine „sehr kleine" natürliche Zahl größer Null oder x ist „möglicherweise" die Null (aber nicht „sicher").

$G_2(x)$: x ist eine „kleine" natürliche Zahl größer Null und x ist „sicher" **nicht** die Null.

Anmerkung
Die Ungültigkeit von $F_2 \subseteqq G_2$ beruht offenbar darauf, daß allein für das Element $0 \in U$ gilt: $F_2(0) > G_2(0)$.

Man könnte daran denken, die Definition 5.2.1 in der Form abzuschwächen, daß man den Quantor „Für jedes" (d. h. „Für alle") durch den Quantor „Für **fast** alle" ersetzt. Somit setzen wir

Definition 5.2.2
$F \subseteqq' G$
$=_{def}$ *Für fast alle $x \in U$ gilt: $F(x) \leqq G(x)$, d. h.*
Es gibt eine endliche Teilmenge $E \subseteqq U$, so daß für alle $x \in U \setminus E$ gilt: $F(x) \leqq G(x)$.

Für das Beispiel 2 folgt dann, daß

$$F_2 \subseteqq' G_2$$

gilt. Allerdings gelten für $\subseteqq'$ in dem folgenden Theorem 5.2.1 nicht mehr alle Aussagen.

Aufgabe 5.2.1 *Man untersuche, welche der Aussagen von Theorem 5.2.1 für $\subseteqq'$ gelten bzw. nicht gelten.*

Theorem 5.2.1

1. *Reflexivität.*
$$F \subseteqq F$$
2. *Transitivität.*
$$\text{Wenn } F \subseteqq G \text{ und } G \subseteqq H\text{, so } F \subseteqq H$$
3. *Antisymmetrie (Identität).*
$$\text{Wenn } F \subseteqq G \text{ und } G \subseteqq F\text{, so } F = G$$
4. *$F \subseteqq \emptyset$ genau dann, wenn $F = \emptyset$*
5. *$\mathbb{U} \subseteqq F$ genau dann, wenn $F = \mathbb{U}$*
6. *$F \subseteqq G$ genau dann, wenn $\overline{G} \subseteqq \overline{F}$*
7. *Wenn $F \subseteqq G$, so $F \cap H \subseteqq G \cap H$ und*
   $F \cap F \subseteqq H \cap G$.
8. *Wenn $F \subseteqq G$, so $F \cup H \subseteqq G \cup H$ und*
   $F \cup F \subseteqq H \cup G$.
9. *$F \subseteqq G$ genau dann, wenn $F = F \cap G$*
10. *$F \subseteqq G$ genau dann, wenn $G = F \cup G$*

Beweis
Rückgang auf die Definitionen. ■

Bemerkung
In den **Theoremen 3.5.1** und **3.5.2** haben wir gezeigt, daß die „Monotonieregeln“ 7 und 8 auch dann gelten, wenn man darin $\cap$ durch $\cap_\tau$ bzw. $\cup$ durch $\cup_\sigma$ ersetzt, wobei τ eine beliebige T-Norm und σ eine beliebige S-Norm ist. Analoges gilt für Bedingung 6, wenn man darin $^-$ durch $^{-\nu}$ ersetzt, wobei ν eine beliebige Negation ist.

5.3 Die „weiche“ Łukasiewiczsche Inklusionsbeziehung

Wir greifen zur Motivation auf **Beispiel 2** aus Abschnitt 5.2 zurück. Die **Ursache**, daß F_2 nicht (scharfe) Teilmenge von G_2 ist, beruht **allein** auf der „Sonderstellung“ der Zahl 0 in F_2 bzw. in G_2, nämlich daß

$$F_2(0) = \frac{1}{10},$$

aber

$$G_2(0) = 0$$

gilt.

Wir wollen nun eine binäre Abbildung *Inc* definieren, die jeder Fuzzy-Menge F und G über U eine reelle Zahl

$$Inc(F, G) \in \langle 0, 1 \rangle$$

zuordnet, wobei diese reelle Zahl den Grad des „Enthaltenseins“ der Fuzzy-Menge F in der Fuzzy-Menge G bedeuten soll.

Zu dieser Aufgabe wollen wir schon 3 Probleme formulieren:

1. Welche (funktionalen) Eigenschaften muß *Inc*, als Abbildung

   $$Inc : \mathfrak{F}(U) \times \mathfrak{F}(U) \to \langle 0, 1 \rangle$$

   betrachtet, erfüllen, damit man sinnvoll von einer („weichen“) Inklusionsbeziehung sprechen kann ?

2. Gibt es „natürliche“ Definitions**prinzipien**, mit denen „weiche“ Inklusionsbeziehungen erzeugt werden können ?

3. Muß man außer reellen Zahlen $r \in \langle 0, 1 \rangle$ eventuell **kompliziertere** Gebilde benutzen, um das „Eingebettetsein“ einer Fuzzy-Menge F in eine Fuzzy-Menge G sachgerecht beschreiben zu können ?

Zu allen diesen Fragen werden wir im Verlauf des Kapitels 5 Antworten geben, jedoch sind „vollständige“ oder „endgültige“ Antworten noch nicht möglich, da hier die Forschung „noch im Fluß“ ist.

Zur Definition der „weichen“ Łukasiewiczschen Inklusionsbeziehung Inc_{L} greifen wir auf die Teilmengendefinition für scharfe Mengen $M, N \subseteqq U$ zurück. Wir hatten gesetzt:

$$M \subseteqq N =_{def} \forall x (x \in M \to x \in N).$$

Dann folgt

$$M \subseteqq N \text{ genau dann, wenn } \forall x \left(\chi_M(x) \leqq \chi_N(x)\right)$$

genau dann, wenn

$$\forall x \left(seq \left(\chi_M(x), \chi_N(x) \right) = 1 \right)$$

genau dann, wenn

$$Inf \left\{ seq \left(\chi_M(x), \chi_N(x) \right) \middle| \, x \in U \right\} = 1.$$

Wir ersetzen nun die **zweiwertigen** Funktionen χ_M und χ_N, d. h. mit

$$\chi_M, \chi_N : U \to \{0, 1\}$$

durch beliebige Fuzzy-Mengen F und G über U, d. h. mit

$$F, G : U \to \langle 0, 1 \rangle .$$

Ferner ersetzen wir die BOOLEsche Funktion *seq* durch die LUKASIEWICZsche Implikation imp_{L}, d. h. mit

$$imp_{\mathrm{L}}(x, y) = min(1, 1 - x + y)$$

und schließlich soll sich der Operator *Inf* nicht allein auf die Menge $\{0, 1\}$, sondern auf $\langle 0, 1 \rangle$ beziehen.

Somit definieren wir

Definition 5.3.1

$$Inc_{\mathrm{L}}(F, G) =_{def} Inf \left\{ imp_{\mathrm{L}}(F(x), G(x)) | x \in U \right\}.$$

Damit haben wir ein Beispiel für unser in Problem 2 gefordertes „natürliches“ Definitionsprinzip angegeben, das man wie folgt formulieren kann:

Natürliches Definitionsprinzip:
Gegeben sei eine zweistellige Abbildung

$$imp : \langle 0, 1 \rangle^2 \to \langle 0, 1 \rangle ,$$

die die Implikationsaxiome I_1 bis I_4 erfüllt und die daher gemäß Definition 4.2.1 als Implikation bezeichnet werden kann. Nun ersetzen wir in der „klassischen”Definition

$$M \subseteqq N =_{def} \forall x (x \in M \to x \in N).$$

die Terme $x \in M$ und $x \in N$ durch $F(x)$ und $G(x)$ und interpretieren den Konnektor $\to$ durch *imp* sowie $\forall x$ durch *Inf*. Somit kommen wir zu der Definition:

Definition 5.3.2

$$Inc_{imp}(F, G) =_{def} Inf \left\{ imp(F(x), G(x)) | x \in U \right\}$$

Später (siehe Kapitel 12) werden wir dieses Definitionsschema dahingehend verallgemeinern, daß wir die („klassische“) Standard-Interpretation von $\forall$ durch *Inf* abändern zu einer Interpretation durch *Nicht-Standard-All-Quantoren*, von denen etwa „Fast-alle“, „die Meisten“ und „Viele“ wichtige Beispiele sind.

Wir diskutieren nun die definierte Relation Inc_{L} im Hinblick auf die betrachteten **Beispiele 1** und **2**.

Es gilt mit $U = \{1, 2, \dots\}$

$$\begin{aligned} Inc_{\mathrm{L}}(F_1, G_1) &= Inf\,\{imp_{\mathrm{L}}(F_1(x), G_1(x)) \,|\, x \in U\} \\ &= Inf\,\{min(1, 1 - F_1(x) + G_1(x)) \,|\, x \in U\} \\ &= Inf\left\{ min\left(1, 1 - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}\right) \middle|\, x \in U \right\} \\ &= Inf\{1\} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Für die in Beispiel 2 betrachteten Fuzzy-Mengen F_2 und G_2 erhalten wir:

$$\begin{aligned} Inc_{\mathrm{L}}(F_2, G_2) &= Inf\,\{imp_{\mathrm{L}}(F_2(x), G_2(x)) \,|\, x \in \{0\} \cup U\} \\ &= Inf\left\{\frac{9}{10}\right\} \cup \left\{ min\left(1, 1 - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}\right) \middle|\, x \in U \right\} \\ &= Inf\left\{\frac{9}{10}, 1\right\} \\ &= \frac{9}{10} \end{aligned}$$

Die Diskussion von **Beispiel 1** führt zu der Feststellung, daß für beliebige Fuzzy-Mengen F und G über U gilt:

$$F \subseteqq G \text{ genau dann, wenn } Inc_{\mathrm{L}}(F, G) = 1$$

Dies folgt unmittelbar aus der Tatsache, daß Axiom I_8 für imp_{L} gilt, d. h. daß für alle $x, y \in \langle 0, 1\rangle$ gilt:

$$x \leqq y \text{ genau dann, wenn } imp_{\mathrm{L}}(x, y) = 1$$

Im Hinblick auf **Beispiel 2** stellen wir fest, daß zwar $F_2 \subseteqq G_2$ **nicht** gilt, jedoch wir **nicht** etwa

$$Inc_{\mathrm{L}}(F_2, G_2) = 0$$

haben, **sondern**

$$Inc_{\mathrm{L}}(F_2, G_2) = 0.9;$$

was man so interpretieren kann, daß F_2 noch zu einem „guten" Wahrheitswert in G_2 enthalten ist.

Die „Tendenz" dieser Aussage wird noch deutlicher, wenn wir den Wahrheitswert, zu dem 0 in F_2 vorkommt, verkleinern. Dazu definieren wir:

$$F_{2,n}(x) =_{def} \begin{cases} \frac{1}{10^n}, & \text{falls } x = 0 \\ F_2(x), & \text{falls } x \in \{1, 2, \dots\} \end{cases}$$

Dann folgt offenbar

$$Inc_{\mathrm{L}}\,(F_{2,n}, G_2) = 1 - \frac{1}{10^n}$$

Für $n \to \infty$ erhalten wir

$$Inc_{\mathrm{L}}\,(F_{2,n}, G_2) \to 1,$$

also kann man sagen, daß wir „im Grenzwert" die Aussage

$$F_{2,\infty} \subseteqq G_2$$

erhalten.

Für die scharfe Teilmengenbeziehung folgt aus $F \subseteqq \phi$ trivial $F = \phi$, d. h. die leere Fuzzy-Menge enthält (wie für scharfe Mengen) **nur** sich selbst als Teilmenge. Diese Beziehung gilt für Inc_{L} allgemein in der Form:

$$\text{Wenn } Inc_{\mathrm{L}}(F, \phi) = 1\,, \text{ so } F = \phi.$$

Nun sollte man erwarten, daß **stärker** die Beziehung gilt:

$$\text{Wenn } Inc_{\mathrm{L}}(F, \phi) > 0\,, \text{ so } F = \phi.$$

Diese Erwartung wird enttäuscht durch das folgende

Beispiel 3

$$\begin{aligned} U &=_{def} \{1, 2, 3, \ldots\} && \\ F_3(x) &=_{def} \frac{1}{10} && \text{für alle } x \in U \\ \phi(x) &=_{def} 0 && \text{für alle } x \in U, \text{ d. h. } \phi \text{ ist die leere Fuzzy-Menge über } U. \end{aligned}$$

Dann folgt unmittelbar

$$Inc_{\mathrm{L}}(F_3, \phi) = \frac{9}{10},$$

also ein Resultat, das mit der Anschauung schlecht vereinbar ist.

Die folgenden Feststellungen zeigen aber wenigstens eine „Tendenz“, die wir akzeptieren können.

1. **Erhöht** man den Zugehörigkeitswert auch nur **eines** Elementes $x \in U$ zur Menge F_3, so **sinkt** der Wert von $Inc_{\mathrm{L}}(F_3, \phi)$. Dazu setzen wir

$$F_3'(x) =_{def} \begin{cases} \frac{99}{100}, & \text{falls } x = 1 \\ F_3(x), & \text{falls } x = 2, 3, \ldots \end{cases}$$

Dann gilt

$$Inc_{\mathrm{L}}(F_3', \phi) = \frac{1}{100}$$

2. Wird auch **nur ein** Element $x \in U$ mit dem Wert 1 zu F_3 gerechnet, so **sinkt** der Wert von $Inc_{\mathrm{L}}(F_3, \phi)$ auf Null. Dazu setzen wir:

$$F_3''(x) =_{def} \begin{cases} 1, & \text{falls } x = 1 \\ F_3(x), & \text{falls } x = 2, 3, \ldots \end{cases}$$

Dann gilt

$$Inc_{\mathrm{L}}(F_3'', \phi) = 0$$

3. **Vermindert** man den Zugehörigkeitswert **aller** $x \in U$ zur Menge F_3, so **erhöht** sich der Wert von $Inc_{\mathrm{L}}(F_3, \phi)$. Dazu setzen wir:

$$F_3'''(x) =_{def} \frac{1}{1000} \quad \text{für alle } x \in U.$$

Dann gilt

$$Inc_{\mathrm{L}}(F_3''', \phi) = \frac{999}{1000}$$

Wichtige Feststellung
Aus den obigen Feststellungen 1 und 2 ergibt sich, daß die Relation Inc_{L} noch sehr „empfindlich“ reagiert in dem Sinne, daß **schon** die Abänderung des Zugehörigkeitswerts auch nur **eines** Elements $x \in U$ sich **stark** auf $Inc_{\mathrm{L}}(F, G)$ auswirken kann.

Die **Ursache** dafür liegt in der Verwendung des *Inf*-Operators, der ähnlich „empfindlich“ reagiert. Also stehen wir aus „logischer Sicht“ vor dem Problem, den *„Standard-All-Operator“* durch *„Nicht-Standard-All-Operatoren“*, die „robuster“ sind, zu ersetzen. Wir haben dazu schon die Quantoren „Fast-alle“, „die Meisten“, „Viele“ erwähnt; allgemein könnte man an *„Maß-Operatoren“* in der Menge $\langle 0, 1 \rangle$ denken.

Zum Schluß dieses Abschnitts fragen wir, ob es für Inc_{L} ein dem **Theorem 5.2.1** analoges Theorem gibt ? Das folgende Theorem gibt darauf eine partielle Antwort, wobei man sich davor hüten muß, generell Bedingungen der Form $Inc_{\mathrm{L}}(F, G) = 1$ zu verwenden; denn dann kann es geschehen, daß man auf Grund der Bedingung

$$F \subseteqq G \text{ genau dann, wenn } Inc_{\mathrm{L}}(F, G) = 1$$

nur Aussagen von **Theorem 5.2.1** reproduziert.

Theorem 5.3.1

1. *Inc_{L} ist **reflexiv**, d. h. für jede Fuzzy-Menge F über U gilt:*

$$Inc_{\mathrm{L}}(F, F) = 1.$$

2. *Inc_{L} ist **transitiv**, d. h. für jede Fuzzy-Menge F, G, H über U gilt:*

$$min(Inc_{\mathrm{L}}(F, G), Inc_{\mathrm{L}}(G, H)) \leqq Inc_{\mathrm{L}}(F, H)$$

3. $Inc_{\mathrm{L}}(F, G) = Inc_{\mathrm{L}}\left(\overline{G}, \overline{F}\right)$
4. $Inc_{\mathrm{L}}(F, G) \leqq Inc_{\mathrm{L}}(F \cap H, G \cap H)$
5. $Inc_{\mathrm{L}}(F, G) \leqq Inc_{\mathrm{L}}(H \cap F, H \cap G)$
6. $Inc_{\mathrm{L}}(F, G) \leqq Inc_{\mathrm{L}}(F \cup H, G \cup H)$
7. $Inc_{\mathrm{L}}(F, G) \leqq Inc_{\mathrm{L}}(H \cup F, H \cup G)$

Beweis
Rückgang auf die Definitionen. **Aufgabe 5.3.1**. ■

Bemerkung
Man stellt fest, daß Behauptung 5 aus Behauptung 4 und daß Behauptung 7 aus Behauptung 6 folgt, wenn man die folgenden „Kommutativitätsgleichungen“ zur Verfügung hat:

8. $Inc_{\mathrm{L}}(F \cap G, H) = Inc_{\mathrm{L}}(G \cap F, H)$
9. $Inc_{\mathrm{L}}(H, F \cap G) = Inc_{\mathrm{L}}(H, G \cap F)$
10. $Inc_{\mathrm{L}}(F \cup G, H) = Inc_{\mathrm{L}}(G \cup F, H)$
11. $Inc_{\mathrm{L}}(H, F \cup G) = Inc_{\mathrm{L}}(H, G \cup F)$

Beweis
dieser Gleichungen als **Aufgabe 5.3.2**. ■

Wir stellen nun die Frage, inwiefern auch die Aussagen 3, 4, 5, 9 und 10 von Theorem 5.2.1 auf die „weiche" LUKASIEWICZsche Inklusionsbeziehung Inc_{L} übertragbar sind. Hier stehen wir vor dem Problem, entweder nur „scharfe" Aussagen zu treffen in der Form $Inc_{\mathrm{L}}(F, G) = 1$ (was genau dann gilt, wenn $F \subseteqq G$) oder mit der „vollen" Inklusionsbeziehung Inc_{L} zu arbeiten und ihr eine Fuzzy-Gleichheitsrelation (auch „approximative" oder „weiche" Gleichheitsrelation) gegenüberzustellen.

Leitfaden ist für diese Definition die folgende Beziehung für scharfe Teilmengen $A, B \subseteqq U$:

(5.1) $$A = B \text{ genau dann, wenn } A \subseteqq B \text{ und } B \subseteqq A.$$

Dieselbe Beziehung gilt auch für die „scharfe" Gleichheit und die „scharfe" Teilmengenbeziehung für Fuzzy-Mengen F und G über U, deren Definition wir zur Erinnerung wiederholen:

$$F = G =_{def} \text{Für jedes } x \in U \text{ gilt: } F(x) = G(x)$$
$$F \subseteqq G =_{def} \text{Für jedes } x \in U \text{ gilt: } F(x) \leqq G(x).$$

Aus diesen Definitionen ergibt sich unmittelbar

(5.2) $$F = G \text{ genau dann, wenn } F \subseteqq G \text{ und } G \subseteqq F.$$

Die Aussagen (5.1) und (5.2) nehmen wir zum Anlaß, die approximative LUKASIEWICZsche Identität Id_{L} wie folgt zu definieren.

Definition 5.3.3

$$Id_{\mathrm{L}}(F, G) =_{def} min\,(Inc_{\mathrm{L}}(F, G), Inc_{\mathrm{L}}(G, F))$$

Bemerkungen und Folgerungen

1. Die **Definition 5.3.3** ist unmittelbar aus (5.2) gewonnen worden, indem wir $F \subseteqq G$ durch $Inc_{\mathrm{L}}(F, G)$ und den zweiwertigen Konnektor „und" durch „*min*" ersetzt haben.

2. Löst man in **Definition 5.3.3** die Definition von $Inc_{\mathrm{L}}(F, G)$ auf, erhält man nach einigen Umformungen die Gleichung

   $$Id_{\mathrm{L}}(F, G) = Inf\,\{1 - |F(x) - G(x)|\,|\, x \in U\}$$

   Diese Gleichung ist für das „Rechnen" mit der approximativen Identität besonders bequem und anwendungsfreundlich.

3. Die „approximative" Gleichheit Id_{L} ist mit der „scharfen" Gleichheit von Fuzzy-Mengen „**kompatibel**", weil die folgende Aussage gilt:

   $$Id_{\mathrm{L}}(F, G) = 1 \text{ genau dann, wenn } F = G$$

4. Die „weiche“ Inklusion Inc_L ist *antisymmetrisch* bezüglich der „weichen“ Identität Id_L, d. h. es gilt für alle Fuzzy-Mengen F und G über U:

$$min\,(Inc_L(F,G), Inc_L(G,F)) \leqq Id_L(F,G).$$

Diese Beziehung gilt trivial nach Definition von Id_L. Man kann sie als eine „Übersetzung“ der Aussage 3 von **Theorem 5.2.1**, nämlich von

$$\text{„Wenn } F \subseteqq G \text{ und } G \subseteqq F\text{, so } F = G\text{“}$$

deuten, indem $F \subseteqq G$, $G \subseteqq F$ und $F = G$ in dieser Reihenfolge durch $Inc_L(F,G)$, $Inc_L(G,F)$ und $Id_L(F,G)$ ersetzt werden, ferner „und“ in „*min*“ übergeht und der „Wenn ... so“ Konnektor durch die LUKASIEWICZsche Implikation interpretiert wird. Die Ungleichung

$$min\,(Inc_L(F,G), Inc_L(G,F)) \leqq Id_L(F,G)$$

wird gefordert, weil die Beziehung

$$\text{„Wenn } F \subseteqq G \text{ und } G \subseteqq F\text{, so } F = G\text{“}$$

mit dem Wahrheitswert 1 gelten soll und für die LUKASIEWICZsche Implikation imp_L gilt

$$imp_L(x,y) = 1 \text{ genau dann, wenn } x \leqq y.$$

Theorem 5.3.2

1. *Id_L ist **reflexiv** über $\mathfrak{F}(U)$, d. h. für jede Fuzzy-Menge F über U gilt:*

$$Id_L(F,F) = 1$$

2. *Id_L ist **transitiv**, d. h. für jede Fuzzy-Menge F, G, H über U gilt:*

$$min\,(Id_L(F,G), Id_L(G,H)) \leqq Id_L(F,H).$$

3. *Id_L ist **symmetrisch**, d. h. für jede Fuzzy-Menge F, G über U gilt:*

$$Id_L(F,G) = Id_L(G,F)$$

Beweis

Elimination der Definition von Id_L. **Aufgabe 5.3.3.** ∎

Die Gültigkeit der Bedingungen 1, 2 und 3 fassen wir zusammen, indem wir Id_L eine „weiche“ oder „approximative“ Äquivalenzrelation über $\mathfrak{F}(U)$ nennen.

In den *„Bemerkungen und Folgerungen“* im Anschluß an **Definition 5.3.3** haben wir u. a. in Punkt 4 festgestellt, daß für beliebige Fuzzy-Mengen F, G über U gilt:

4. Wenn $Id_L(F,G) = 1$, so $F = G$.

Gilt für eine binäre „weiche“ Relation außer den in **Theorem 5.3.2** angegebenen Forderungen 1, 2 und 3 auch noch die Aussage 4, so wollen wir diese Relation eine „weiche“ oder „approximative“ Identität nennen.

Für mehr Informationen zu diesem Punkt siehe Kapitel 6, wo wir beliebige Fuzzy-Relationen studieren werden.

Zum Abschluß dieses Abschnitts fragen wir, wie die Aussagen 4, 5, 9, 10 von Theorem 5.2.1 für Inc_L mit Id_L formuliert werden können. Dazu prüfe man, ob die folgenden Gleichungen für beliebige Fuzzy-Mengen F und G über U gelten:

4′. $Inc_{\mathrm{L}}(F, \boldsymbol{\emptyset}) = Id_{\mathrm{L}}(F, \boldsymbol{\emptyset})$

5′. $Inc_{\mathrm{L}}(\not{U}, F) = Id_{\mathrm{L}}(\not{U}, F)$

9′. $Inc_{\mathrm{L}}(F, G) = Id_{\mathrm{L}}(F, F \cap G)$

10′. $Inc_{\mathrm{L}}(F, G) = Id_{\mathrm{L}}(G, F \cup G)$

5.4 Nicht-Łukasiewiczsche „weiche“ Inklusionsbeziehungen

Das in **Definition 5.3.2** angegebene „natürliche“ Definitionsschema zur Erzeugung weiterer Inklusionsbeziehungen wenden wir nun wie folgt an:

Definition 5.4.1

1. *Die* **Kleene-Dienes-*Inklusion***

$$Inc_{\mathrm{KD}}(F, G) =_{def} Inf\,\{imp_{\mathrm{KD}}(F(x), G(x)) | x \in U\}$$

2. *Die* **Łukasiewicz-*Inklusion*** *(zur Wiederholung und Einordnung)*

$$Inc_{\mathrm{L}}(F, G) =_{def} Inf\,\{imp_{\mathrm{L}}(F(x), G(x)) | x \in U\}$$

3. *Die* **Reichenbach-*Inklusion***

$$Inc_{\mathrm{R}}(F, G) =_{def} Inf\,\{imp_{\mathrm{R}}(F(x), G(x)) | x \in U\}$$

4. *Die* **Gödel-Heyting-*Inklusion***

$$Inc_{\mathrm{GH}}(F, G) =_{def} Inf\,\{imp_{\mathrm{GH}}(F(x), G(x)) | x \in U\}$$

5. *Die* ***schwach-drastische Inklusion***

$$Inc_{\mathrm{sd}}(F, G) =_{def} Inf\,\{imp_{\mathrm{sd}}(F(x), G(x)) | x \in U\}$$

6. *Die* **Gaines-Rescher-*Inklusion***

$$Inc_{\mathrm{GR}}(F, G) =_{def} Inf\,\{imp_{\mathrm{GR}}(F(x), G(x)) | x \in U\}$$

7. *Die* **Goguen-*Inklusion***

$$Inc_{\mathrm{Go}}(F, G) =_{def} Inf\,\{imp_{\mathrm{Go}}(F(x), G(x)) | x \in U\}$$

8. *Die* **Zadeh-*Inklusion***

$$Inc_{\mathrm{Z}}(F, G) =_{def} Inf\,\{imp_{\mathrm{Z}}(F(x), G(x)) | x \in U\}$$

Zum besseren Verständnis listen wir die verwendeten Implikationen noch einmal auf. Sei dazu $x, y \in \langle 0, 1\rangle$.

1. Die Kleene-Dienes-*Implikation*

$$imp_{\mathrm{KD}}(x, y) =_{def} max(1 - x, y)$$

2. Die Łukasiewicz-*Implikation*

$$imp_{\mathrm{L}}(x,y) =_{def} min(1, 1-x+y)$$

3. Die Reichenbach-*Implikation*

$$imp_{\mathrm{R}}(x,y) =_{def} 1-x+xy$$

4. Die Gödel-Heyting-*Implikation*

$$imp_{\mathrm{GH}}(x,y) =_{def} \begin{cases} 1, & \text{falls } x \leqq y \\ y, & \text{falls } x > y \end{cases}$$

5. Die *schwach-drastische Implikation*

$$imp_{\mathrm{sd}}(x,y) =_{def} \begin{cases} y, & \text{falls } x = 1 \\ 1-x, & \text{falls } y = 0 \\ 0, & \text{falls } x < 1 \textbf{ oder } y > 0 \end{cases}$$

6. Die Gaines-Rescher-*Implikation*

$$imp_{\mathrm{GR}}(x,y) =_{def} \begin{cases} 1, & \text{falls } x \leqq y \\ 0, & \text{falls } x > y \end{cases}$$

7. Die Goguen-*Implikation*

$$imp_{\mathrm{Go}}(x,y) =_{def} \begin{cases} 1, & \text{falls } x = 0 \\ min\left(1, \frac{y}{x}\right), & \text{falls } x > 0 \end{cases}$$

8. Die Zadeh-*Implikation*

$$imp_{\mathrm{Z}}(x,y) =_{def} max(1-x, min(x,y))$$

Aufgabe 5.4.1 *Man prüfe, welche der in Abschnitt 5.3 für die „weiche“* Łukasiewicz*sche Inklusionsbeziehung festgestellten Eigenschaften für die „weichen“ **nicht**-*Łukasiewicz*schen Implikationsbeziehungen gelten oder nicht gelten.*

Aufgabe 5.4.2 *Man verwende die definierten Inklusionen als Material zur Veranschaulichung der **Axiome** aus dem folgenden Abschnitt 5.5.*

5.5 Ein Axiomensystem zur Charakterisierung „weicher“ Inklusionsbeziehungen für Fuzzy-Mengen

Wir beziehen uns auf D. Sinha und E. R. Dougherty [35].

Hilfsbegriffe

Gegeben sei ein nicht-leeres Universum $U \neq \phi$. Es seien F und G Fuzzy-Mengen über U, d. h.

$$F, G : U \to \langle 0, 1 \rangle$$

Man definiert den Kern $KER(F)$ sowie den *Cokern* $CKER(F)$ einer Fuzzy-Menge F wie folgt:

$$KER(F) =_{def} \{x \,|\, x \in U \text{ und } F(x) = 1\}$$
$$CKER(F) =_{def} \{x \,|\, x \in U \text{ und } F(x) = 0\}$$

Zur Formulierung gewisser Axiome benötigen wir außerdem die folgende „Transformation" einer Fuzzy-Menge F.

Gegeben sei eine Permutation π des Universums, d. h. π ist eine **eineindeutige** Abbildung **von** U **auf** U (d. h. jedes Element von U ist Bild eines anderen). Wir definieren dann die durch π transformierte Fuzzy-Menge $\pi(F)$ der Menge F wie folgt:

$$\pi(F)(x) =_{def} F(\pi(x)) \qquad \text{für alle } x \in U$$

Wir kommen nun zur Formulierung der in [35] angegebenen Axiome.

Dazu sei eine beliebige zweistellige Abbildung *Inc* gegeben, die **jeder** Fuzzy-Menge F und G über U, also mit

$$F, G : U \to \langle 0, 1\rangle$$

eine reelle Zahl

$$Inc(F, G) \in \langle 0, 1\rangle$$

zuordnet. In der oben angegebenen Arbeit wird nun gefordert, daß *Inc* alle (oder einige) der folgenden Axiome erfüllt.

INC₁. *Kompatibilität* mit der scharfen Inklusion.

$$Inc(F, G) = 1 \text{ genau dann, wenn } F \subseteqq G$$

INC_2. *Kompatibilität* mit der Kern-Cokern-Eigenschaft.

$$Inc(F, G) = 0 \text{ genau dann, wenn } KER(F) \cap CKER(G) \neq \phi$$

INC_3. *Monotonie* in der zweiten Stelle bezüglich der **scharfen** Inklusion (auch eine „Form" der Kompatibilität).

$$\text{Wenn } F \subseteqq G\text{, so } Inc(H, F) \leqq Inc(H, G)$$

INC_4. *Comonotonie* in der ersten Stelle von *Inc* bezüglich der „scharfen" Inklusion (ebenfalls eine „Form" der Kompatibilität).

$$\text{Wenn } F \subseteqq G\text{, so } Inc(G, H) \leqq Inc(F, H).$$

INC_5. *Invarianz* der Inklusionsbeziehung gegenüber Permutationen.

Ist π eine Permutation von U, so gilt:

$$Inc(\pi(F), \pi(G)) = Inc(F, G)$$

INC_6. *Invarianz* der Inklusionsbeziehung gegenüber Komplementbildung.

$$Inc\left(\overline{F}, \overline{G}\right) = Inc(G, F)$$

INC₇. *Linksverträglichkeit* mit der Vereinigungsoperation $F \cup G$.

$$Inc(F \cup G, H) = min(Inc(F, H), Inc(G, H))$$

INC₈. *Rechtsverträglichkeit* mit der Durchschnittsoperation $F \cap G$.

$$Inc(H, F \cap G) = min(Inc(H, F), Inc(H, G))$$

INC₉. *Rechtsabschätzung* für die Vereinigungsoperation $F \cup G$

$$Inc(H, F \cup G) \geqq max(Inc(H, F), Inc(H, G))$$

„Unsere“ Diskussion der Axiome

ad 1. Klar, wenn man die Kompatibilität von $Inc(F, G) = 1$ mit der scharfen Inklusion $F \subseteqq G$ verlangt, wobei zu bemerken ist, daß $F \subseteqq G$ ihrerseits mit der Inklusionsbeziehung für Teilmengen kompatibel ist.

ad 2. Der „scharfe“ Hintergrund (Ausgangspunkt) ist die folgende Beziehung für scharfe Mengen

$$M \subseteqq N \text{ genau dann, wenn } M \cap \overline{N} = \phi.$$

Unter Beachtung von Axiom INC_1 wäre es deshalb vernünftig zu fordern, daß gilt:

$\mathbf{INC}'_2$. $Inc(F, G) = 1$ genau dann, wenn $KER(F) \cap CKER(G) = \phi$.

Hierzu ist allerdings zu bemerken, daß mit Benutzung von INC_1 die Richtung ($\Rightarrow$) beweisbar wird.

Wenn wir INC_1 benutzen, haben wir zu beweisen:

$$\text{Wenn } F \subseteqq G \text{, so } KER(F) \cap CKER(G) = \phi.$$

Dazu nehmen wir an, daß $KER(F) \cap CKER(G) \neq \phi$ gilt, also existiert ein $x \in U$ mit $F(x) = 1$ und $G(x) = 0$. Damit ist für dieses x die Bedingung $F(x) \leqq G(x)$ verletzt, also gilt **nicht** $F \subseteqq G$.

Die Umkehrung muß nicht gelten, wie man leicht durch Gegenbeispiele belegen kann.

Kontraponiert man Axiom INC'_2, erhält man gleichwertig

$\mathbf{INC}''_2$. $Inc(F, G) < 1$ genau dann, wenn $KER(F) \cap CKER(G) \neq \phi$.

Wenn wir die Beziehung

$$\text{Wenn } F \subseteqq G \text{, so } KER(F) \cap CKER(G) = \phi$$

sowie INC_1 benutzen, können wir von INC''_2 die Richtung ($\Leftarrow$) beweisen, d. h. es gilt:

$$\text{Wenn } KER(F) \cap CKER(G) \neq \phi \text{, so } Inc(F, G) < 1.$$

Da $Inc(F, G)$ im allgemeinen **beliebige** Werte aus $\langle 0, 1\rangle$ annehmen kann, entsteht das Problem, ob die Bedingung $Inc(F, G) < 1$ die Bedingung $Inc(F, G) = 0$ impliziert.

Allgemein kann man fragen, ob gilt:

$$\text{Wenn } KER(F) \cap CKER(G) \neq \phi \text{, so } Inc(F, G) = 0.$$

Hier gilt nun das folgende

Lemma 5.5.1
Ist Inc durch eine Implikation durch

$$Inc(F,G) =_{def} Inf\,\{imp(F(x),G(x))|x \in U\}$$

erzeugt, und ist imp zweiwertig kompatibel, indem die Gleichung

$$imp(1,0) = 0$$

gilt, so folgt:

$$\text{Wenn } KER(F) \cap CKER(G) \neq \phi \text{ , so } Inc(F,G) = 0$$

Beweis
Rückgang auf die Definitionen. ■

Die Richtung ($\Rightarrow$) von INC_2 kann durch folgendes Beispiel widerlegt werden.
Sei $U = \{0,1,\ldots\}$ (Menge der natürlichen Zahlen).
Wir definieren Fuzzy-Mengen F, G wie folgt:

$$F(x) =_{def} \begin{cases} 0, & \text{falls } x = 0 \\ 1, & \text{falls } x > 0 \end{cases}$$

$$G(x) =_{def} \begin{cases} 0, & \text{falls } x = 0 \\ \frac{1}{x}, & \text{falls } x > 0. \end{cases}$$

und verwenden zur Definition von *Inc* die Łukasiewiczsche Implikation, d. h.

$$Inc(F,G) =_{def} Inf\,\{min(1, 1 - F(x) + G(x))|x \in U\}$$

Nun gilt

$$min(1, 1 - F(0) + G(0)) = min(1,1) = 1$$

$$min(1, 1 - F(x) + G(x)) = min\left(1, 1 - 1 + \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} \qquad \text{für } x > 0.$$

Also folgt

$$Inc(F,G) = 0.$$

Ferner gilt

$$KER(F) = \{1,2,\ldots\}$$

$$CKER(G) = \{0\},$$

also $KER(F) \cap CKER(G) = \phi$, somit ist die Richtung ($\Rightarrow$) von INC_2 widerlegt.

ad 3. Der „scharfe“ Hintergrund ist das folgende Lemma für scharfe Mengen M, N und L:

$$\text{Wenn } M \subseteqq N \text{ und } N \subseteqq L \text{, so } M \subseteqq L$$

Das ist aber die Transitivität der Inklusion für scharfe Mengen.

Problem
Was ergibt sich, wenn man Axiom INC_3 durch die „echte“ Transitivität, nämlich

TR. $min(Inc(F,G), Inc(G,H)) \leqq Inc(F,H)$

ersetzt ?

ad 4. Dieses Axiom hat ebenfalls die Transitivität der Teilmengenbeziehung für scharfe Mengen im „Hintergrund“.

ad 5. Klar für scharfe Mengen.

Problem
Kann man dieses Axiom auch für Abbildungen $\varphi : U \to U$ fordern, die **keine** Permutationen sind ?

ad 6. „Scharf“ gilt

$$\overline{M} \subseteqq \overline{N} \text{ genau dann, wenn } N \subseteqq M$$

ad 7. „Scharf“ gilt

$$M \cup N \subseteqq K \text{ genau dann, wenn } M \subseteqq K \text{ und } N \subseteqq K$$

ad 8. „Scharf“ gilt

$$K \subseteqq M \cap N \text{ genau dann, wenn } K \subseteqq M \text{ und } K \subseteqq N.$$

ad 9. „Scharf“ gilt

$$\text{Wenn } K \subseteqq M \text{ oder } K \subseteqq N\text{, so } K \subseteqq M \cup N.$$

5.6 Fuzzy-Wahrheitswerte und deren Anwendung

5.7 Weiche Identitätsbeziehungen

6. Fuzzy-Relationen

6.1 Scharfe und unscharfe Relationen

Die Begriffe der Relation und der Funktion spielen in der üblichen scharfen (zweiwertigen) Mathematik sowohl in der Theorie als auch in den Anwendungen eine fundamentale Rolle. Ohne diese Begriffe wäre es sinnlos, überhaupt Mathematik betreiben und anwenden zu wollen. Demgemäß stehen wir vor der Aufgabe, die Begriffe in geeigneter Form in die Fuzzy-Mathematik zu übertragen.

Wir beschäftigen uns zuerst mit dem Begriff der Relation, aus dem später der Begriff der Funktion durch Spezialisierung gewonnen wird.

Gegeben seien eine natürliche Zahl $n \geqq 1$ und nicht leere Universa $U_1, \ldots, U_n$. Wie üblich definieren wir das Kartesische Produkt $U_1 \times \cdots \times U_n$ der Universa $U_1, \ldots, U_n$ als Menge aller n-Tupel $[x_1, \ldots, x_n]$ mit $x_1 \in U_1, \ldots, x_n \in U_n$.

Eine scharfe Relation R zwischen Elementen aus $U_1, \ldots, U_n$ wird dann definiert als Teilmenge von $U_1 \times \cdots \times U_n$, also $R \subseteqq U_1 \times \cdots \times U_n$. Demgemäß definiert man:

Definition 6.1.1
S ist eine unscharfe („weiche" oder „Fuzzy-") Relation über $U_1, \ldots, U_n$
$=_{def}$ $S : U_1, \ldots, U_n \to \langle 0, 1 \rangle$.

Bemerkungen

1. Die Analogie

Teilmenge M von U als $M \subseteqq U$	Fuzzy-Menge F über U als $F : U \to \langle 0, 1 \rangle$

zu

Relation R über $U_1, \ldots, U_n$ als $R \subseteqq U_1 \times \cdots \times U_n$	Fuzzy-Relation S über $U_1, \ldots, U_n$ als $S : U_1 \times \cdots \times U_n \to \langle 0, 1 \rangle$

ist unverkennbar.

2. Entsprechend der obigen Analogie wird für $x_1 \in U_1, \ldots, x_n \in U_n$ die reelle Zahl $S(x_1, \ldots, x_n)$ auch Zugehörigkeitsgrad des n-Tupels $[x_1, \ldots, x_n]$ zur Relation S genannt bzw. als Wahrheitswert bezeichnet, zu dem die Relation S auf das n-Tupel $[x_1, \ldots, x_n]$ zutrifft.

Beispiele
Gegeben $U_1 = U_2 = \{0, 1, \ldots\}$ (Menge der natürlichen Zahlen).

Beispiel 1 R sei die scharfe Relation „Größer" über U_1, U_2 (auch „binäre" Relation „Größer" über der Menge der natürlichen Zahlen genannt). Dann gilt:

$$[m, n] \in R \text{ genau dann, wenn } m < n.$$

Beispiel 2 In der üblichen Mathematik wird manchmal geschrieben $m \ll n$ mit der Interpretation „m ist sehr viel kleiner als n" bzw. „n ist sehr viel größer als m". Diese Beziehung ist zweiwertig nicht sinnvoll definierbar. Legt man eine Konstante C fest, etwa $C = 1000$, und setzt man:

$$m \ll n =_{def} m + C \leqq n,$$

dann **gilt** z. B.

$$5 \ll 1005, \qquad \text{weil } 5 + 1000 \leqq 1005 \tag{6.1}$$

jedoch gilt **nicht**

$$6 \ll 1005, \qquad \text{weil } 6 + 1000 > 1005 \tag{6.2}$$

Solche Ergebnisse, erhalten auf Grund der obigen Definition von $\ll$, sind mathematisch zwar richtig, sie weichen jedoch **erheblich** von dem ab, was man anschaulich-intuitiv unter „sehr viel kleiner" versteht.

Somit liegt eine sogenannte *„semantische Paradoxie"* vor, d. h. das (mathematische) Modell beschreibt einen (semantischen) Sachverhalt unzutreffend. Also muß das (mathematische) Modell abgeändert (verfeinert) werden. Die Verfeinerung besteht darin, daß man zu einer unscharfen Relation S übergeht, die man z. B. wie folgt definieren kann

$$S(m,n) =_{def} \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{n-m}, & \text{falls } m < n \\ 0, & \text{falls } m \geqq n \end{cases}$$

Zu dieser Definition ist zu bemerken:

1. Für $m < n$ ist der Wahrheitswert $S(m,n)$ umso größer, je größer der Abstand $n-m$ ist. Konvergiert $n-m$ nach ∞ ($n - m \to \infty$), so konvergiert $S(m,n)$ gegen 1,

2. Ein absolutes „sehr viel kleiner", d. h. natürliche Zahlen $m < n$ mit $S(m,n) = 1$ gibt es nicht; diese Erscheinung ist „sehr vernünftig", d. h. sie bedeutet eine sehr passende Fuzzy-Modellierung von „sehr viel kleiner". Zur genaueren Analyse verweisen wir auf die Fuzzy-Modellierung des Konnektors „*sehr*" (siehe das betreffende Kapitel später).

3. Offenbar ist die obige Definition nicht die einzige möglichkeit zur Fuzzy-Modellierung von „sehr viel kleiner". Sei s eine fixierte reelle Zahl mit $0 \leqq s < \infty$. Dann kann man definieren

   $$S_s(m,n) =_{def} \begin{cases} \left(1 - \dfrac{1}{n-m}\right)^s, & \text{falls } m < n \\ 0, & \text{falls } m \geqq n \end{cases}$$

   Dann kann man jede der Relationen S_s als eine mögliche Fuzzy-Modellierung ansehen, weil $S_s(m,n)$ für $m < n$ **monoton** *wachsend* von der Entfernung $n-m$ abhängt.

   Der „scharfe" Fall (siehe **Beispiel 1**) ergibt sich als Spezialfall $s = 0$, weil stets $\left(1 - \frac{1}{n-m}\right)^0 = 1$ gilt.

4. Welche der in Punkt 3 vorgeschlagenen Relationen S_s man zur Modellierung von „sehr viel kleiner" wählt, ist keine mathematische Frage, sondern wird durch das betrachtete Anwendungsproblem nahegelegt. Selbstverständlich kann man auch andere Funktionen $f(m, n)$, die für $m < n$ die Bedingung $0 \leqq f(m, n) \leqq 1$ erfüllen, für monoton wachsende Entfernung $n - m$ auch monoton wachsen und schließlich für $m \geqq n$ die Gleichung $f(m, n) = 0$ erfüllen, wählen. Ein Beispiel wäre etwa

$$S'_e(m, n) =_{def} \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{e^{n-m}}, & \text{falls } m < n \\ 0, & \text{falls } m \geqq n \end{cases}$$

6.2 Durchschnitt, Vereinigung und Komplement von Fuzzy-Relationen

Gegeben seien eine natürliche Zahl $n \geqq 1$ sowie n Universa $U_1, \ldots, U_n$.

Wir diskutieren und definieren die Operationen *Durchschnitt*, *Vereinigung* und *Komplement* nun in **drei** Versionen, nämlich für

- scharfe Relationen,
- unscharfe Relationen als „Fuzzy-Standardoperationen", basierend auf $min(x, y)$, $max(x, y)$ und $1 - x$
- unscharfe Relationen als „Fuzzy-**Nicht**-Standardoperationen", basierend auf $\tau(x, y)$, $\sigma(x, y)$ und $\nu(x)$, wobei ν eine Negation, τ eine T-Norm und σ die dazu bezüglich ν duale S-Norm ist.

Gegeben seien die scharfen Relationen R_1 und R_2 über $U_1, \ldots, U_n$, d. h. es gilt

$$R_i \subseteqq U_1 \times \cdots \times U_n \quad \text{für } i = 1, 2.$$

Definition 6.2.1

1. $R_1 \cap R_2$
   $=_{def}$ *Der mengentheoretische Durchschnitt von R_1 und R_2, betrachtet als Mengen über dem Universum $U_1 \times \cdots \times U_n$.*

2. $R_1 \cup R_2$
   $=_{def}$ *Die mengentheoretische Vereinigung von R_1 und R_2, betrachtet als Mengen über dem Universum $U_1 \times \cdots \times U_n$.*

3. $\overline{R_1}$
   $=_{def}$ *Das mengentheoretische Komplement von R_1, betrachtet als Menge über dem Universum $U_1 \times \cdots \times U_n$.*

Im Hinblick auf die in **Definition 6.2.1** eingeführten Operationen mit Relationen kann man generell feststellen, daß sie dieselben Rechengesetze wie die „BOOLEschen" Operationen mit Mengen erfüllen, da sie (genaugenommen) nur Spezialfälle der allgemeinen Mengenoperationen darstellen.

Analoge Argumente gelten für die in der folgenden Definition eingeführten Fuzzy-Standard-Operationen mit unscharfen Relationen S_1 und S_2, wobei

$$S_i : U_1 \times \cdots \times U_n \to \langle 0, 1 \rangle \quad \text{für } i = 1, 2.$$

Es sei $x_1 \in U_1, \ldots, x_n \in U_n$.

Definition 6.2.2

1. $(S_1 \cap S_2)(x_1, \ldots, x_n)$
 $=_{def}$ $min(S_1(x_1, \ldots, x_n), S_2(x_1, \ldots, x_n))$

2. $(S_1 \cup S_2)(x_1, \ldots, x_n)$
 $=_{def}$ $min(S_1(x_1, \ldots, x_n), S_2(x_1, \ldots, x_n))$

3. $\left(\overline{S_1}\right)(x_1, \ldots, x_n)$
 $=_{def}$ $1 - S_1(x_1, \ldots, x_n)$

Alle Betrachtungen aus Abschnitt 2.5 können übernommen werden.

Es seien nun eine beliebige Negation ν, eine T-Norm τ und die dazu bezüglich ν duale S-Norm σ gegeben. Wir definieren dann, wobei wieder $x_1 \in U_1, \ldots, x_n \in U_n$.

Definition 6.2.3

1. $(S_1 \Cap S_2)(x_1, \ldots, x_n)$
 $=_{def}$ $\tau(S_1(x_1, \ldots, x_n), S_2(x_1, \ldots, x_n))$

2. $(S_1 \Cup S_2)(x_1, \ldots, x_n)$
 $=_{def}$ $\sigma(S_1(x_1, \ldots, x_n), S_2(x_1, \ldots, x_n))$

3. $\left(\overline{S_1}^{\nu}\right)(x_1, \ldots, x_n)$
 $=_{def}$ $\nu(S_1(x_1, \ldots, x_n))$

6.3 Das Produkt von Fuzzy-Relationen

Das Produkt von Relationen ist eine **neue** Operation, die **nicht** auf eine (oder mehrere) der Operationen Durchschnitt, Vereinigung, Komplement zurückführbar ist. Es ist für Relationen charakteristisch, d. h. es läßt sich in sinnvoller Weise nicht für Mengen definieren.

Wir betrachten das Produkt — in Analogie zu Abschnitt 6.2 — in drei Versionen, nämlich

- für scharfe Relationen,
- als Standard-Produkt für Fuzzy-Relationen,
- als Nicht-Standard-Produkt für Fuzzy-Relationen, basierend auf einer beliebigen T-Norm und einem geeignet gewählten Quantor.

Wir beginnen mit der Definition und Untersuchung des Produkts für scharfe Relationen.

Gegeben seien natürliche Zahlen $m \geqq 1$ und $n \geqq 1$ sowie nicht-leere Universa $U_1, \ldots, U_m$, $V_1, \ldots, V_n$ und W,

Gegeben seien ferner scharfe Relationen R_1 über $U_1, \ldots, U_m, W$ und R_2 über $W, V_1, \ldots, V_n$, d. h.

$$R_1 \subseteqq U_1 \times \cdots \times U_m \times W$$

und

$$R_2 \subseteqq W \times V_1 \times \cdots \times V_n.$$

Das Produkt $R_1 \circ R_2$ der Relationen R_1 und R_2 wird dann wie folgt definiert, wobei wesentlich ist, daß die Elemente der „letzten“ Stelle von R_1 und die Elemente der „ersten“ Stelle von R_2 aus derselben Menge W gewählt sind.

Definition 6.3.1
$[x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n] \in R_1 \circ R_2$
$=_{def}$ *Es gibt ein* $z \in W$, *so daß* $[x_1, \ldots, x_m, z] \in R_1$ *und* $[z, y_1, \ldots, y_n] \in R_2$.

Das folgende Theorem beinhaltet einige Regeln für das Rechnen mit dem Produkt.

Theorem 6.3.1

1. *Assoziativität*
$$R_1 \circ (R_2 \circ R_3) = (R_1 \circ R_2) \circ R_3$$
2. *Links-Distributivität bezüglich* $\cup$
$$R_1 \circ (R_2 \cup R_3) = (R_1 \circ R_2) \cup (R_1 \circ R_3)$$
3. *Rechts-Distributivität bezüglich* $\cup$
$$(R_1 \cup R_2) \circ R_3 = (R_1 \circ R_3) \cup (R_2 \circ R_3)$$
4. *Links-Monotonie bezüglich* $\subseteqq$
$$\textit{Wenn } R_1 \subseteqq R_2\,, \textit{ so } R_3 \circ R_1 \subseteqq R_3 \circ R_2$$
5. *Rechts-Monotonie bezüglich* $\subseteqq$
$$\textit{Wenn } R_1 \subseteqq R_2\,, \textit{ so } R_1 \circ R_3 \subseteqq R_2 \circ R_3$$

Beweis
Wir beweisen — als Musterlösung — nur die Aussage 2; die übrigen Beweise werden als **Aufgabe 6.3.1** gestellt.

ad 2. Zur Vereinfachung der Schreibweisen verwenden wir die folgenden Abkürzungen

$$\begin{aligned} \mathfrak{x} &\text{ für } [x_1, \ldots, x_m] \\ \mathfrak{y} &\text{ für } [y_1, \ldots, y_n] \\ [\mathfrak{x}, z] &\text{ für } [x_1, \ldots, x_m, z] \\ [z, \mathfrak{y}] &\text{ für } [z, y_1, \ldots, y_n] \end{aligned}$$

Außerdem verwenden wir — der kürzeren Schreibweisen wegen — die Notationen des Prädikatenkalküls der ersten Stufe.

Es gilt:

$$\begin{array}{l} [\mathfrak{x}, \mathfrak{y}] \in R_1 \circ (R_2 \cup R_3) \\ \quad\updownarrow \\ \exists z\,([\mathfrak{x}, z] \in R_1 \wedge [z, \mathfrak{y}] \in R_2 \cup R_3) \\ \quad\updownarrow \\ \exists z\,([\mathfrak{x}, z] \in R_1 \wedge ([z, \mathfrak{y}] \in R_2 \vee [z, \mathfrak{y}] \in R_3)) \\ \quad\updownarrow \\ \exists z\,(([\mathfrak{x}, z] \in R_1 \wedge [z, \mathfrak{y}] \in R_2) \vee ([\mathfrak{x}, z] \in R_1 \wedge [z, \mathfrak{y}] \in R_3)) \\ \quad\updownarrow \\ \exists z\,([\mathfrak{x}, z] \in R_1 \wedge [z, \mathfrak{y}] \in R_2) \vee \exists z\,([\mathfrak{x}, z] \in R_1 \wedge [z, \mathfrak{y}] \in R_3) \\ \quad\updownarrow \\ [\mathfrak{x}, \mathfrak{y}] \in R_1 \circ R_2 \vee [\mathfrak{x}, \mathfrak{y}] \in R_1 \circ R_3 \\ \quad\updownarrow \\ [\mathfrak{x}, \mathfrak{y}] \in R_1 \circ R_2 \cup R_1 \circ R_3 \end{array}$$

■

Bei diesen Schlüssen ist wesentlich, daß die folgenden (zweiwertigen!) logischen Äquivalenzen gelten

$$A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$$

und

$$\exists x(A \vee B) \equiv \exists x A \vee \exists x B$$

Bezüglich des Durchschnitts und des Komplements von Relationen kann man für das Produkt im allgemeinen keine Gleichungen beweisen, sondern nur noch die folgenden Inklusionen.

Theorem 6.3.2

1. *Schwache Links-Distributivität bezüglich* $\cap$

$$R_1 \circ (R_2 \cap R_3) \subseteqq (R_1 \circ R_2) \cap (R_1 \circ R_3)$$

2. *Schwache Rechts-Distributivität bezüglich* $\cap$

$$(R_1 \cap R_2) \circ R_3 \subseteqq (R_1 \circ R_3) \cap (R_2 \circ R_3)$$

3. *Wenn R_1 in den ersten m Stellen total ist, d. h. für alle $\mathfrak{x} \in U_1 \times \cdots \times U_m$ gilt*

$$\exists z[\mathfrak{x}, z] \in R_1,$$

so gilt $\overline{R_1 \circ R_2} \subseteqq R_1 \circ \overline{R_2}$.

Beweis

Wir verwenden wieder dieselben Abkürzungen und Notationen wie im Beweis von **Theorem 6.3.1**.

ad 1. Es gilt:

$$\begin{array}{l}
[\mathfrak{x}, \mathfrak{y}] \in R_1 \circ (R_2 \cap R_3) \\
\quad \updownarrow \\
\exists z\,([\mathfrak{x}, z] \in R_1 \wedge [z, \mathfrak{y}] \in R_2 \cap R_3) \\
\quad \updownarrow \\
\exists z\,([\mathfrak{x}, z] \in R_1 \wedge ([z, \mathfrak{y}] \in R_2 \wedge [z, \mathfrak{y}] \in R_3)) \\
\quad \updownarrow \\
\exists z\,(([\mathfrak{x}, z] \in R_1 \wedge [z, \mathfrak{y}] \in R_2) \wedge ([\mathfrak{x}, z] \in R_1 \wedge [z, \mathfrak{y}] \in R_3)) \\
\quad \downarrow \quad (\textbf{Achtung: } \uparrow \text{ gilt im allgemeinen nicht}) \\
\exists z\,([\mathfrak{x}, z] \in R_1 \wedge [z, \mathfrak{y}] \in R_2) \wedge \exists z\,([\mathfrak{x}, z] \in R_1 \wedge [z, \mathfrak{y}] \in R_3) \\
\quad \updownarrow \\
[\mathfrak{x}, \mathfrak{y}] \in R_1 \circ R_2 \wedge [\mathfrak{x}, \mathfrak{y}] \in R_1 \circ R_3 \\
\quad \updownarrow \\
[\mathfrak{x}, \mathfrak{y}] \in R_1 \circ R_2 \cap R_1 \circ R_3
\end{array}$$

ad 2. Analog zu Behauptung 1.

ad 3. Es gilt:

$$
\begin{array}{l}
[\mathfrak{x},\mathfrak{y}] \in \overline{R_1 \circ R_2} \\
\quad\updownarrow \\
\neg\,([\mathfrak{x},\mathfrak{y}] \in R_1 \circ R_2) \\
\quad\updownarrow \\
\neg\exists z\,([\mathfrak{x},z] \in R_1 \wedge [z,\mathfrak{y}] \in R_2) \\
\quad\updownarrow \\
\forall z \neg\,([\mathfrak{x},z] \in R_1 \wedge [z,\mathfrak{y}] \in R_2) \\
\quad\updownarrow \\
\forall z\,(\neg[\mathfrak{x},z] \in R_1 \vee \neg[z,\mathfrak{y}] \in R_2) \\
\quad\updownarrow \\
\forall z\,([\mathfrak{x},z] \in R_1 \rightarrow \neg[z,\mathfrak{y}] \in R_2) \\
\quad\downarrow \quad (\text{weil } \forall\mathfrak{x}\exists z[\mathfrak{x},z] \in R_1;\ \uparrow \text{ gilt im allgemeinen nicht}) \\
\exists z\,([\mathfrak{x},z] \in R_1 \wedge \neg[z,\mathfrak{y}] \in R_2) \\
\quad\updownarrow \\
\exists z\,\left([\mathfrak{x},z] \in R_1 \wedge [z,\mathfrak{y}] \in \overline{R_2}\right) \\
\quad\updownarrow \\
[\mathfrak{x},\mathfrak{y}] \in R_1 \circ \overline{R_2}
\end{array}
$$

■

Wir definieren nun das *Standard-Produkt* für unscharfe Relationen, indem wir vom Produkt für scharfe Relationen ausgehen und das in der entsprechenden Definition verwendete zweiwertige *„und“* durch $min(x,y)$ sowie den zweiwertigen Quantor *„es gibt ein“* durch das Supremum (bezogen auf die Menge $\langle 0,1\rangle$) übersetzen.

Gegeben seien wieder nicht-leere Universa $U_1,\dots,U_m$, $V_1,\dots,V_n$ und W, wobei $m \geqq 1$ und $n \geqq 1$.

Für beliebige unscharfe Relationen

$$S_1 : U_1 \times \cdots \times U_m \times W \rightarrow \langle 0,1\rangle$$

und

$$S_2 : W \times V_1 \times \cdots \times V_n \rightarrow \langle 0,1\rangle$$

und beliebige Elemente $x_1 \in U_1,\dots,x_m \in U_m, z \in W, y_1 \in V_1,\dots,y_n \in V_n$ definieren wir:

Definition 6.3.2 (Standard-Produkt)
$(S_1 \circ S_2)(x_1,\dots,x_m,y_1,\dots,y_n)$
$=_{def}\ Sup\,\{min\,(S_1(x_1,\dots,x_m,z), S_2(z,y_1,\dots,y_n))\,|\ z \in W\}$

Bemerkung
In manchen Büchern oder Arbeiten wird das Produkt $S_1 \circ S_2$ in der From definiert, daß anstelle des Supremums das Maximum verwendet wird. Das führt dazu, daß die unscharfe Relation $S_1 \circ S_2$ evtl. nicht mehr total definiert ist, weil die Menge

$$\{min\,(S_1(x_1,\dots,x_m,z), S_2(z,y_1,\dots,y_n))\,|\ z \in W\}$$

reeller Zahlen aus $\langle 0,1\rangle$ zwar stets ein (genau ein!) Supremum hat, jedoch im allgemeinen kein Maximum besitzen wird.

Wir wollen nun durch einige Sätze das oben definierte Produkt „rechtfertigen“.

Zunächst zeigen wir, daß es mit dem Produkt für scharfe Relationen kompatibel ist. Dazu definieren wir für

$$\begin{aligned} R_1 &\subseteqq U_1 \times \cdots \times U_m \times W \\ R_2 &\subseteqq W \times V_1 \times \cdots \times V_n \end{aligned}$$

die charakteristischen Funktionen χ_{R_1} und χ_{R_2}, die offenbar unscharfe Relationen im Sinne von **Definition 6.3.2** sind:

$$\chi_{R_1}(x_1, \ldots, x_m, z) =_{def} \begin{cases} 1, & \text{falls } [x_1, \ldots, x_m, z] \in R_1 \\ 0, & \text{falls } [x_1, \ldots, x_m, z] \notin R_1 \end{cases}$$

Analog für χ_{R_2}.

Lemma 6.3.3 (Kompatibilitätslemma)

$$\chi_{R_1} \circ \chi_{R_2} = \chi_{(R_1 \circ R_2)}$$

Beweis
Rückgang auf die Definitionen (**Aufgabe 6.3.2**). ■

Analog zu **Theorem 6.3.1** gilt für das (*Standard-*) Produkt $S_1 \circ S_2$:

Theorem 6.3.4

1. $S_1 \circ (S_2 \circ S_3) = (S_1 \circ S_2) \circ S_3$
2. $S_1 \circ (S_2 \cup S_3) = (S_1 \circ S_2) \cup (S_1 \circ S_3)$
3. $(S_1 \cup S_2) \circ S_3 = (S_1 \circ S_3) \cup (S_2 \circ S_3)$
4. *Wenn* $S_1 \subseteqq S_2$, *so* $S_3 \circ S_1 \subseteqq S_3 \circ S_2$
5. *Wenn* $S_1 \subseteqq S_2$, *so* $S_1 \circ S_3 \subseteqq S_2 \circ S_3$

Beweis
Wir beweisen — wieder als Musterlösung — nur die Aussage 2 (auch, um einen Vergleich zum Beweis von Aussage 2 des **Theorems 6.3.1** zu haben); die übrigen Beweise werden als **Aufgabe 6.3.3** gestellt.

ad 2. Wir verwenden wieder die im Beweis von **Theorem 6.3.1** eingeführten Ankürzungen.

Es gilt

$$\begin{aligned} &(S_1 \circ (S_2 \cup S_3))(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) \\ &\quad = Sup\,\{min(S_1(\mathfrak{x}, z), (S_1 \cup S_3)(z, \mathfrak{y})) | z \in W\} \\ &\quad = Sup\,\{min(S_1(\mathfrak{x}, z), max(S_1(z, \mathfrak{y}), S_3(z, \mathfrak{y}))) | z \in W\} \\ &\quad = Sup\,\{max(min(S_1(\mathfrak{x}, z), S_1(z, \mathfrak{y})), min(S_1(\mathfrak{x}, z), S_3(z, \mathfrak{y}))) | z \in W\} \\ &\quad = max\,(Sup\,\{min(S_1(\mathfrak{x}, z), S_1(z, \mathfrak{y})) | z \in W\}, Sup\,\{min(S_1(\mathfrak{x}, z), S_3(z, \mathfrak{y})) | z \in W\}) \\ &\quad = max\,((S_1 \circ S_2)(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}), (S_1 \circ S_3)(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})) \\ &\quad = (S_1 \circ S_2 \cup S_1 \circ S_3)(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) \end{aligned}$$

■

Bei den obigen Schlüssen ist wesentlich, daß für beliebige $x, y, z \in \langle 0, 1\rangle$ und für beliebige F und G mit

$$F, G : W \to \langle 0, 1\rangle$$

gilt:

$$min(x, max(y, z)) = max(min(x, y), min(x, z))$$

und

$$Sup\,\{max(F(z), G(z)) | z \in W\} = max(Sup\,\{F(z) | z \in W\}\,, Sup\,\{G(z) | z \in W\}).$$

Analog zu **Theorem 6.3.2** können wir beweisen:

Theorem 6.3.5

1. $S_1 \circ (S_2 \cap S_3) \subseteqq (S_1 \circ S_2) \cap (S_1 \circ S_3)$

2. $(S_1 \cap S_2) \circ S_3 \subseteqq (S_1 \circ S_3) \cap (S_2 \circ S_3)$

3. Wenn

$$Inf\,\{Sup\,\{S_1(\mathfrak{x}, z) | z \in W\} \,|\, \mathfrak{x} \in U_1 \times \cdots \times U_m\} = 1,$$

so $\overline{S_1 \circ S_2} \subseteqq S_1 \circ \overline{S_2}$.

Beweis
Übertragung der zum Beweis von **Theorem 6.3.2** vollzogenen Schlüsse. **Aufgabe 6.3.4**.
■

Wir gehen jetzt dazu über, ein *Nicht-Standard-Produkt* für Fuzzy-Relationen zu definieren.

Gegeben seien wieder für natürliche Zahlen $m \geqq 1$ und $n \geqq 1$ die nicht-leeren Universa $U_1, \ldots, U_m, V_1, \ldots, V_n, W$. Ferner seien gegeben unscharfe Relationen

$$S_1 : U_1 \times \cdots \times U_m \times W \to \langle 0, 1\rangle$$

und

$$S_2 : W \times V_1 \times \cdots \times V_n \to \langle 0, 1\rangle$$

In **Definition 6.3.2** hatten wir das in **Definition 6.3.1** verwendete *„und"* durch den Minimum-Operator *min* (in $\langle 0, 1\rangle$) ersetzt sowie anstelle von *„es gibt ein"* den Operator *Sup* (in $\langle 0, 1\rangle$) benutzt.

Erste Stufe der Definition eines Nicht-Standard-Produkts: Wir ersetzen den Minimum-Operator durch eine beliebige T-Norm τ. **Wichtig:** Der Operator *Sup* wird noch beibehalten.

Demgemäß definieren wir:

Definition 6.3.3 (Nicht-Standard-τ-Produkt von Fuzzy-Relationen)

$$(S_1 \circledcirc S_2)(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n) =_{def} Sup\,\{\tau\,(S_1(x_1, \ldots, x_m, z), S_2(z, y_1, \ldots, y_n)) |\; z \in W\}\,.$$

Man kann zunächst nicht erwarten, daß für $S_1 \circledcirc S_2$ Sätze gelten, die zu den **Theoremen 6.3.4** und **6.3.5** analog sind. Insbesondere wird man in den Formulierungen der Behauptungen 2 und 3 von **Theorem 6.3.4** anstelle von *max* (welches die Grundlage für die Vereinigung $\cup$ von Relationen ist), eine geeignete S-Norm wählen müssen.

Aufgabe 6.3.5 *Man gebe Bedingungen für τ und σ an, so daß gilt*

1. $S_1 \odot_\tau (S_2 \odot_\tau S_3) = (S_1 \odot_\tau S_2) \odot_\tau S_3$
2. $S_1 \odot_\tau (S_2 \cup_\sigma S_3) = (S_1 \odot_\tau S_2) \cup_\sigma (S_1 \odot_\tau S_3)$
3. $(S_1 \cup_\sigma S_2) \odot_\tau S_3 = (S_1 \odot_\tau S_3) \cup_\sigma (S_2 \odot_\tau S_3)$
4. *Wenn* $S_1 \subseteqq S_2$, *so* $S_3 \odot_\tau S_1 \subseteqq S_3 \odot_\tau S_2$
5. *Wenn* $S_1 \subseteqq S_2$, *so* $S_1 \odot_\tau S_3 \subseteqq S_2 \odot_\tau S_3$
6. $S_1 \odot_\tau (S_2 \cap_\tau S_3) \subseteqq (S_1 \odot_\tau S_2) \cap_\tau (S_1 \odot_\tau S_3)$
7. $(S_1 \cap_\tau S_2) \odot_\tau S_3 \subseteqq (S_1 \odot_\tau S_3) \cap_\tau (S_2 \odot_\tau S_3)$
8. *Wenn*
$$Inf\,\{Sup\,\{S_1(\mathfrak{x}, z) | z \in W\} \,|\, \mathfrak{x} \in U_1 \times \cdots \times U_m\} = 1,$$
so $\overline{S_1 \odot_\tau S_2} \subseteqq S_1 \odot_\tau \overline{S_2}$.

Zu Punkt 8 ist zu bemerken, daß anstelle der für die Definition des Komplements $\overline{S}$ einer Fuzzy-Relation S verwendeten Lukasiewiczschen Negation $1 - x$ auch eine beliebige andere Negation $\nu(x)$ verwendet werden kann. Demgemäß kann man fragen, ob allgemeiner gilt

8'. Wenn
$$Inf\,\{Sup\,\{S_1(\mathfrak{x}, z) | z \in W\} \,|\, \mathfrak{x} \in U_1 \times \cdots \times U_m\} = 1,$$
so $\overline{S_1 \odot_\tau S_2}^{\nu} \subseteqq S_1 \odot_\tau \overline{S_2}^{\nu}$.

Zweite Stufe der Definition eines Nicht-Standard-Produkts: Die Grundidee besteht darin, daß auch der „Supremum"-Operator, der als *„Standard-Existenz-Quantor"* aufgefaßt wird, in einem bestimmten Nicht-Standard-Sinne abgeändert wird.

Wie die Abänderung zu vollziehen ist, erläutern wir durch die folgende Analogiebetrachtung.

1. Der zweiwertige Existenzquantor „es gibt ein" ist eine „iterierte Alternative".
2. Der reellwertige Existenzquantor *„Sup"* läßt sich als „iteriertes Maximum" deuten.
3. Ist nun als Nicht-Standard-Verallgemeinerung von $max(x, y)$ eine beliebige S-Norm $\sigma(x, y)$ gegeben, so kann man durch Iteration von $\sigma(x, y)$ einen reellwertigen Existenzoperator EX_σ wie folgt erzeugen.

   Durch Induktion über die natürliche Zahl $n \geqq 1$ definieren wir für $x_1, \ldots, x_n \in \langle 0, 1\rangle$ zunächst $\sigma_n(x_1, \ldots, x_n)$ wie folgt

   Definition 6.3.4

   a) $\sigma_1(x_1) =_{def} x_1$

   b) $\sigma_{n+1}(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) =_{def} \sigma(\sigma_n(x_1, \ldots, x_n), x_{n+1})$

   Mit Hilfe der Funktionen σ_n, die man als n-stellige S-Normen bezeichnen könnte, definieren wir einen Operator EX_σ wie folgt, wobei $M \subseteqq \langle 0, 1\rangle$.

   Definition 6.3.5

   $EX_\sigma(M) =_{def} Sup\,\{\sigma_n(x_1, \ldots, x_n) | n \geqq 1 \ \text{und} \ x_1, \ldots, x_n \in M\}$

Auf der Grundlage dieser Definition führen wir ein *„natürliches“* (oder *kanonisches“*) Nicht-Standard-τ-Produkt von Relationen wie folgt ein.

Gegeben sei eine beliebige T-Norm τ. Wir wählen als S-Norm σ die zu τ duale Funktion, d. h. wir definieren für $x, y \in \langle 0, 1\rangle$:

$$\sigma(x, y) =_{def} 1 - \tau(1 - x, 1 - y).$$

Mit Hilfe von σ konstruieren wir gemäß **Definition 6.3.5** den Operator EX_σ. Als natürliches Nicht-Standard-Produkt $S_1 \circledT S_2$ definieren wir dann:

Definition 6.3.6

$$\begin{aligned}(S_1 \circledT S_2)(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n) \\ =_{def} EX_\sigma \{\tau (S_1(x_1, \ldots, x_m, z), S_2(z, y_1, \ldots, y_n)) | \, z \in W\}.\end{aligned}$$

Aufgabe 6.3.6 *Man verallgemeinere die Axiome für S-Normen auf beliebige n-stellige Funktionen und zeige, daß die Funktionen σ_n diese Axiome erfüllen, falls die Ausgangsfunktion σ eine S-Norm ist.*

Aufgabe 6.3.7 *Man stelle, in Analogie zu den* **Theoremen 6.3.4** *und* **6.3.5** *Rechenregeln für das natürliche Nicht-Standard-Produkt $S_1 \circledT S_2$ auf und beweise diese.*

Anmerkung
Zu weiterführenden Untersuchungen über Nicht-Standard-Fuzzy-Quantoren wird auf das entsprechende Kapitel später verwiesen.

6.4 Fuzzy-Relationen als Abbildungen

7. Der verallgemeinerte Modus Ponens (VMP) und die Compositional Rule of Inference (CRI)

7.1 Der verallgemeinerte Modus Ponens

7.2 Interpretation des VMP als CRI

7.3 Fuzzy-Relational-Gleichungen

7.4 Self Consistency des VMP. „Lokale“ Korrektheit

7.5 Weitere Eigenschaften des VMP. Ein Axiomensystem

7.6 CRI als Funktionaloperator. „Globale“ Korrektheit der CRI als Stetigkeit des Funktionaloperators bezügl. Metriken bzw. Topologien für Fuzzy-Mengen

8. IF-THEN-Regelbasen

8.1 Der verallgemeinerte Modus Ponens für Regelbasen

8.2 Interpretation als FITA (First Inference Then Aggregation) bzw. FATI (First Aggregation Then Inference)

8.3 Korrektheit einer Regelbasis

8.4 Lokale Korrektheit von FITA bzw. von FATI

8.5 FITA und FATI als Funktionaloperatoren. Globale Korrektheit

8.6 Äquivalenz von FITA und FATI

9. Einige Aspekte der Anwendung von IF-THEN-Regelbasen

10. Fuzzy-Clusteranalyse

10.1 Motivationen. Probleme

10.2 Scharfe Äquivalenzrelationen und scharfe Zerlegungen

10.3 Unscharfe Äquivalenzrelationen versus unscharfe Zerlegungen

10.4 „Natürliche“ Zerlegungen und deren Charakterisierung

10.5 Metriken als Grundlage für Zerlegungen — Ruspini-Zerlegungen

11. Modifikatoren

11.1 Motivationen

Mit dem Begriff des „Modifikators“ kommt ein prinzipiell **neuer** Gesichtspunkt in unsere Betrachtungen.

Die betreffenden Untersuchungen beginnen mit der Arbeit [50] von L. A. ZADEH.

ZADEH geht bei seinen Betrachtungen von der Tatsache aus, daß beim Schließen (allgemeiner: bei der Kommunikation) in der **natürlichen** (bei ZADEH: der englischen) Sprache bestimmte Wörter (oder Wortverbindungen) eine besondere Rolle spielen. Meistens sind dies **Adverbien**, die **Adjektive** genauer bestimmen, diese einschränken oder erweitern, diese „modifizieren“. Um Trivialfälle zu vermeiden (bzw. „sinnlose“ Formulierungen auszuschließen), müssen ihnen Fuzzy-Mengen entsprechen, die nicht „scharf“ sind.

Ein Beispiel

Adjektiv:	*old*	$\approx$	alt (unscharfes Adjektiv)
Adverb:	*very*	$\approx$	sehr.
Universum U:	Eine (scharfe) Menge von Personen.		
Prädikat:	$old(x)$:	Die Person $x \in U$ ist alt.	

Logische Präzisierung dieses Prädikats durch eine Fuzzy-Menge *OLD* mit

$$OLD : U \to \langle 0, 1 \rangle ,$$

wobei

$$OLD(x)$$

den Wahrheitswert (Zugehörigkeitswert) angibt, mit dem eine Person x als „alt“ eingestuft wird. Das Adverb „sehr“ modifiziert nun das Adjektiv „alt“ zu dem (modifizierten) Adjektiv „sehr alt“. Diesem entspricht eine modifizierte Fuzzy-Menge *VERY OLD*, die man — ZADEH folgend — definiert zu

$$(VERY\ OLD)(x) =_{def} (OLD(x))^2 \qquad x \in U.$$

In der oben genannten Arbeit nennt ZADEH derartige Wörter (oder Wortverbindungen) *Linguistic Hedges*. Es ist klar, daß eine allgemeine sprachwissenschaftliche Definition von Linguistic Hedges schwierig, vielleicht gar unmöglich ist; man muß sich hier — wieder ZADEH folgend — auf die Intuition verlassen und den Begriff „Linguistic Hedge“ durch geeignete *Beispiele* erläutern.

ZADEH gibt zwei Typen von Beispielen an.

Typ I. very, more or less, approximately, likely, slightly, plus, minus, much.

Typ II. essentially, practically, technically.

Zur weiteren Vertiefung der Einsicht, was Linguistic Hedges — logisch gesehen — bewirken, sei nochmals auf das obige Beispiel zurückgegriffen.

Die Modifizierung des unscharfen Adjektivs „alt" durch „sehr" zu dem unscharfen Adjektiv „sehr alt" wollen wir jetzt wie folgt auffassen.

Die unscharfe Aussage

$$\text{„}x \text{ ist alt"}$$

wird modifiziert zu

$$\text{„sehr (}x\text{ ist alt)"}$$

in der (grammatisch korrekten) Fassung

$$\text{„}x\text{ ist sehr alt"}.$$

Damit wird „sehr" zu einem **einstelligen** Junktor, der aus einer gegebenen Aussage (besser: aus einem gegebenen Ausdruck) A einen neuen, nämlich $sehr(A)$ erzeugt.

In diesem Sinne sind alle unter Typ I genannten Linguistic Hedges als einstellige Junktoren zu betrachten.

Ein **weiterer Gesichtspunkt** ist **fundamental**. Alle unter Typ I genannten Junktoren sind **extensional** (engl. „truth functional"), d. h. bei einer gegebenen Interpretation hängt der logische Wert des zusammengesetzten Ausdrucks hängt allein von dem logischen Wert des Teilausdrucks ab.

Die „Linguistic Hedges" von Typ II werden von Zadeh als möglicherweise mehrstellig angesehen; in jedem Fall sollen sie aber extensional sein. Weiteres dazu weiter unten.

Wir schließen diesen Abschnitt mit einem Beispiel, welches zeigt, daß in der zweiwertigen Logik und in der scharfen Mengenlehre die Anwendung von Modifikatoren nur triviale Resultate liefert bzw. sprachlich als unsinnig empfunden wird.

Beispiel Wir wählen als Universum U die Menge der natürlichen Zahlen (einschließlich Null), d. h.

$$U =_{def} \{0, 1, 2, \dots\}$$

Wir betrachten das Prädikat „x ist eine gerade natürliche Zahl". Damit erhalten wir die scharfe Menge

$$G = \{0, 2, 4, \dots\}.$$

Nun kann man G durch die zweiwertige Zugehörigkeitsfunktion

$$GERADE(x) =_{def} \begin{cases} 0, & \text{falls } x \in U \setminus G \\ 1, & \text{falls } x \in G \end{cases}$$

charakterisieren. Wir modifizieren nun das Adjektiv „gerade" durch das Adverb „sehr" und erhalten das modifizierte Adjektiv „sehr gerade", was rein sprachlich als **sinnlos** oder zumindest als eine unübliche Formulierung erscheint.

Nun können wir aber *GERADE* als Fuzzy-Menge auffassen und diese, wie weiter oben für *OLD*, durch *VERY* modifizieren entsprechend der Definition

$$(VERY\ GERADE)(x) =_{def} (GERADE(x))^2$$

Da nun *GERADE* **nur** die Zugehörigkeitswerte 0 oder 1 annimmt und $0^2 = 0$, $1^2 = 1$ ist, folgt

$$(VERY\ GERADE)(x) = GERADE(x)$$

für alle $x \in U$, d. h.

$$VERY\ GERADE = GERADE,$$

also die betrachteten Mengen sind gleich, d. h. die Anwendung des Modifikators *VERY* hat für *GERADE* keinen Effekt.

11.2 Allgemeine Begriffsbildungen zu „Modifikatoren“

Gegeben ein beliebiges Universum U. Die Menge aller Fuzzy-Mengen über U hatten wir durch $\mathfrak{F}(U)$ angedeutet, d. h.

$$\mathfrak{F}(U) =_{def} \{F \,|\, F : U \to \langle 0, 1 \rangle\} .$$

Ein Modifikator *MOD* über U soll eine Abbildung sein, die eine beliebige gegebene Fuzzy-Menge F über U „modifiziert“, also die aus F eine neue Fuzzy-Menge G über U erzeugt. Demgemäß definieren wir:

Definition 11.2.1
MOD ist ein ***allgemeiner Modifikator*** *über* U
$=_{def}$ $MOD : \mathfrak{F}(U) \to \mathfrak{F}(U)$.

Auf der Grundlage dieser (sehr allgemeinen) Definition kann man schon eine Reihe wichtiger Eigenschaften von Modifikatoren formulieren. Sei also *MOD* ein allgemeiner Modifikator über U.

Definition 11.2.2

1. *MOD heiße* ***expandierend (einbettend)***
   $=_{def}$ *Für jedes* $F \in \mathfrak{F}(U)$ *gilt:*
   $$F \subseteqq MOD(F).$$

2. *MOD heiße* ***komprimierend***
   $=_{def}$ *Für jedes* $F \in \mathfrak{F}(U)$ *gilt:*
   $$MOD(F) \subseteqq F.$$

3. *MOD heiße* ***monoton (comonoton)***
   $=_{def}$ *Für jedes* $F, G \in \mathfrak{F}(U)$ *gilt:*
   $$\textit{Wenn } F \subseteqq G, \textit{ so } \begin{array}{l} MOD(F) \subseteqq MOD(G) \\ \textbf{bzw.} \\ MOD(F) \supseteqq MOD(G). \end{array}$$

4. *MOD heiße* ***abgeschlossen***
   $=_{def}$ *Für jedes* $F \in \mathfrak{F}(U)$ *gilt:*
   $$MOD(MOD(F)) = MOD(F).$$

Anmerkung
Die Eigenschaften 1, 3 und 4 sind der aus Algebra und Logik wohlbekannten Theorie der *Hüllen*operatoren nachgebildet, während 2, 3 und 4 zusammen sogenannte *Kern*operatoren definieren, die z. B. in der Topologie als Zuordnung einer Menge M zur Menge der inneren Punkte von M eine große Rolle spielen.

Gegeben sei nun eine Abbildung π von U in U, d. h.

$$\pi : U \to U.$$

Dann erzeugt π aus einer Fuzzy-Menge F über U eine neue Fuzzy-Menge $F \circ \pi$ über U, die wie folgt definiert ist:

$$(F \circ \pi)(x) =_{def} F(\pi(x)), . \qquad x \in U$$

Definition 11.2.3
MOD heiße ***π-invariant***
$=_{def}$ *Für jedes* $F \in \mathfrak{F}(U)$ *gilt*

$$(MOD(F)) \circ \pi = MOD(F \circ \pi)$$

Weitere Untersuchungen zum Aufbau einer allgemeinen Theorie von Modifikatoren werden in geeigneter Weise Begriffsbildungen aus der Algebra (wie z. B. Isomorphie, Homomorphie, Endomorphie usw.) und aus der Algebra und Logik (wie z. B. Kompaktheit) benutzen. Wir führen diese Betrachtungen hier aus Raum- und Zeitmangel nicht weiter.

In Richtung der aus der Fuzzy-Logik und Fuzzy-Mengenlehre her bekannten Begriffsbildungen sind die folgenden einschränkenden Bedingungen wesentlich.

Definition 11.2.4

1. *MOD heiße* **lokaler** *Modifikator*
   $=_{def}$ *Es gibt Funktionen mod und* π *mit:*
   1.1. $mod : U \times \langle 0,1 \rangle \to \langle 0,1 \rangle$ *und*
   1.2. $\pi : U \to U$ *und*
   1.3. *Für jedes* $F \in \mathfrak{F}(U)$ *und für jedes* $x \in U$ *gilt:*
   $$MOD(F)(x) = mod(x, F(\pi(x)))$$
2. *MOD heiße* **extensionaler** *Modifikator*
   $=_{def}$ *Es gibt Funktionen* μ *und* π *mit:*
   2.1. $\mu : \langle 0,1 \rangle \to \langle 0,1 \rangle$ *und*
   2.2. $\pi : U \to U$ *und*
   2.3. *Für jedes* $F \in \mathfrak{F}(U)$ *und für jedes* $x \in U$ *gilt:*
   $$MOD(F)(x) = \mu(F(\pi(x)))$$
3. *MOD heiße* **äußerer** *Modifikator*
   $=_{def}$ *Es gibt eine Funktion* μ *mit:*
   3.1. $\mu : \langle 0,1 \rangle \to \langle 0,1 \rangle$ *und*
   3.2. *Für jedes* $F \in \mathfrak{F}(U)$ *und für jedes* $x \in U$ *gilt:*
   $$MOD(F)(x) = \mu(F(x))$$
4. *MOD heiße* **innerer** *Modifikator*
   $=_{def}$ *Es gibt eine Funktion* π *mit:*
   4.1. $\pi : U \to U$ *und*
   4.2. *Für jedes* $F \in \mathfrak{F}(U)$ *und für jedes* $x \in U$ *gilt:*
   $$MOD(F)(x) = F(\pi(x))$$

11.3 Die Modifikatoren „VERY“ und „MORE-OR-LESS“ („MOL“)

In diesem und dem folgenden Abschnitt wollen wir die „ältesten“ und am leichtesten verständlichen Modifikatoren, nämlich *VERY* und *MOL*, betrachten. Sie wurden 1972 in der bereits zitierten Arbeit von Zadeh eingeführt. Es sei $F \in \mathfrak{F}(U)$, $x \in U$.

Definition 11.3.1

1. $VERY(F)(x)$
   $=_{def} (F(x))^2$
2. $MOL(F)(x)$
   $=_{def} \sqrt[2]{F(x)}$

Sehr häufig wird $VERY(F)$ auch durch $CON(F)$ und $MOL(F)$ durch $DIL(F)$ bezeichnet, wobei

$$CON \approx \text{„}concentration\text{“}$$
$$DIL \approx \text{„}dilation\text{“}$$

Die Wirkung dieser Modifikatoren kann durch die Abbildungen 11.1 und 11.2 veranschaulicht werden (entnommen der eingangs zitierten Arbeit von Zadeh).

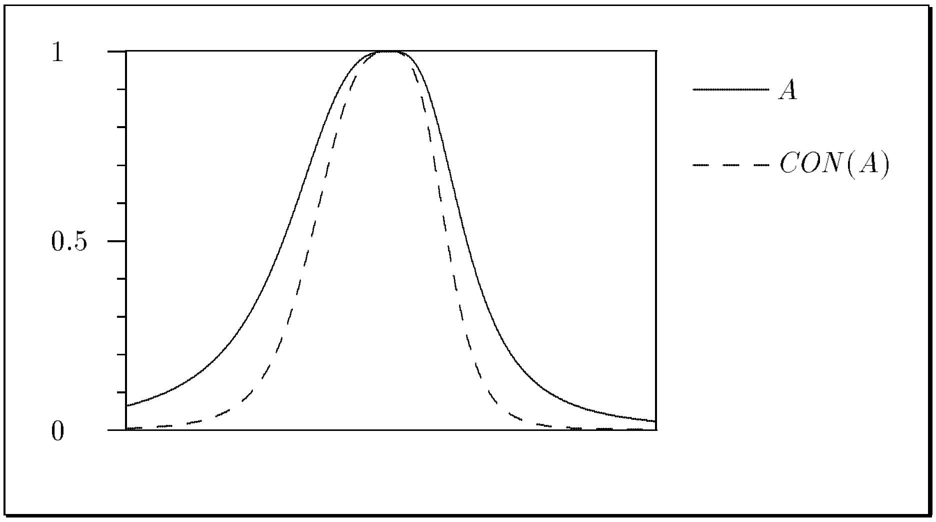


Abbildung 11.1: The effect of concentration on a fuzzy set A

Theorem 11.3.1
VERY und MOL sind äußere Modifikatoren mit den folgenden Eigenschaften:

1. *VERY ist komprimierend und MOL ist expandierend, d. h. für jede Fuzzy-Menge* $F : U \to \langle 0,1 \rangle$ *gilt*
   $$VERY(F) \subseteqq F \subseteqq MOL(F)$$
2. *VERY und MOL sind monoton, d. h. für jedes* $F, G : U \to \langle 0,1 \rangle$ *gilt*
   $$\text{Wenn } F \subseteqq G\text{, so } VERY(F) \subseteqq VERY(G) \text{ und } MOL(F) \subseteqq MOL(G).$$

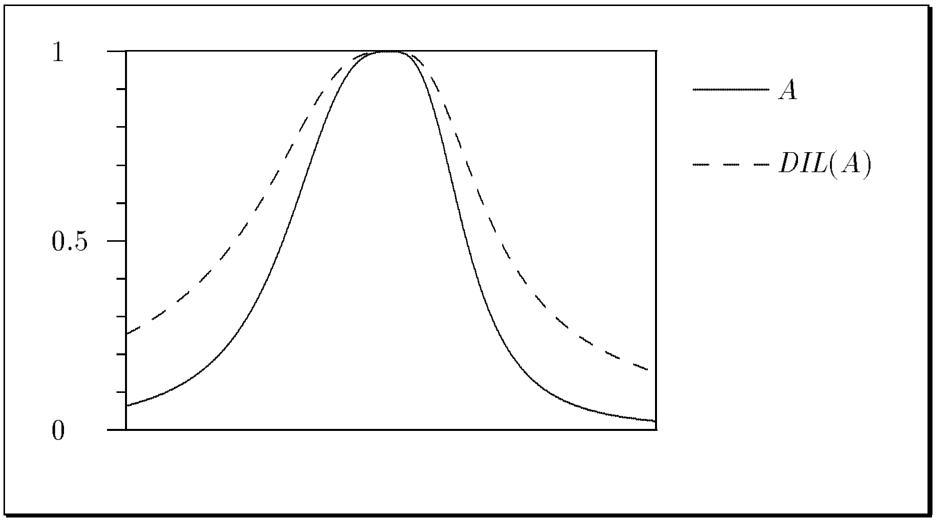


Abbildung 11.2: The effect of dilation on the operand A

3. *VERY und MOL sind distributiv bezüglich Standard-Durchschnitt und Standard-Vereinigung von Fuzzy-Mengen, d. h. für jedes $F, G : U \to \langle 0,1\rangle$ gilt*

    3.1. $VERY(F \cap G) = VERY(F) \cap VERY(G)$

    3.2. $VERY(F \cup G) = VERY(F) \cup VERY(G)$

    3.3. $MOL(F \cap G) = MOL(F) \cap MOL(G)$

    3.4. $MOL(F \cup G) = MOL(F) \cup MOL(G)$

4. *VERY und MOL heben sich in ihrer Wirkung gegenseitig auf, d. h. für jedes $F : U \to \langle 0,1\rangle$ gilt*
$$VERY(MOL(F)) = MOL(VERY(F)) = F.$$

Aus Platz- und Zeitgründen verzichten wir auf weitere genauere Ausführungen zu diesen Modifikatoren. Wir formulieren lediglich einige **Probleme**:

1. Erfüllen *VERY* und *MOL* auch Distributivitätseigenschaften bezüglich Nichtstandardoperationen $\Cap$ bzw. $\Cup$, die durch eine beliebige T-Norm τ bzw. S-Norm σ definiert sind ?

2. Wie ist die Frage 1 bei der Wahl von τ und σ als *bold*-Verknüpfungen bzw. als algebraische Verknüpfungen zu beantworten ?

3. Wie kann man die dualen Modifikatoren $DUAL(VERY)$ und $DUAL(MOL)$ mit
$$DUAL(VERY)(F) =_{def} \overline{VERY\left(\overline{F}\right)}$$
$$DUAL(MOL)(F) =_{def} \overline{MOL\left(\overline{F}\right)}$$
$$x \in U$$
(s. Abbildung 11.3) umgangssprachlich beschreiben ?

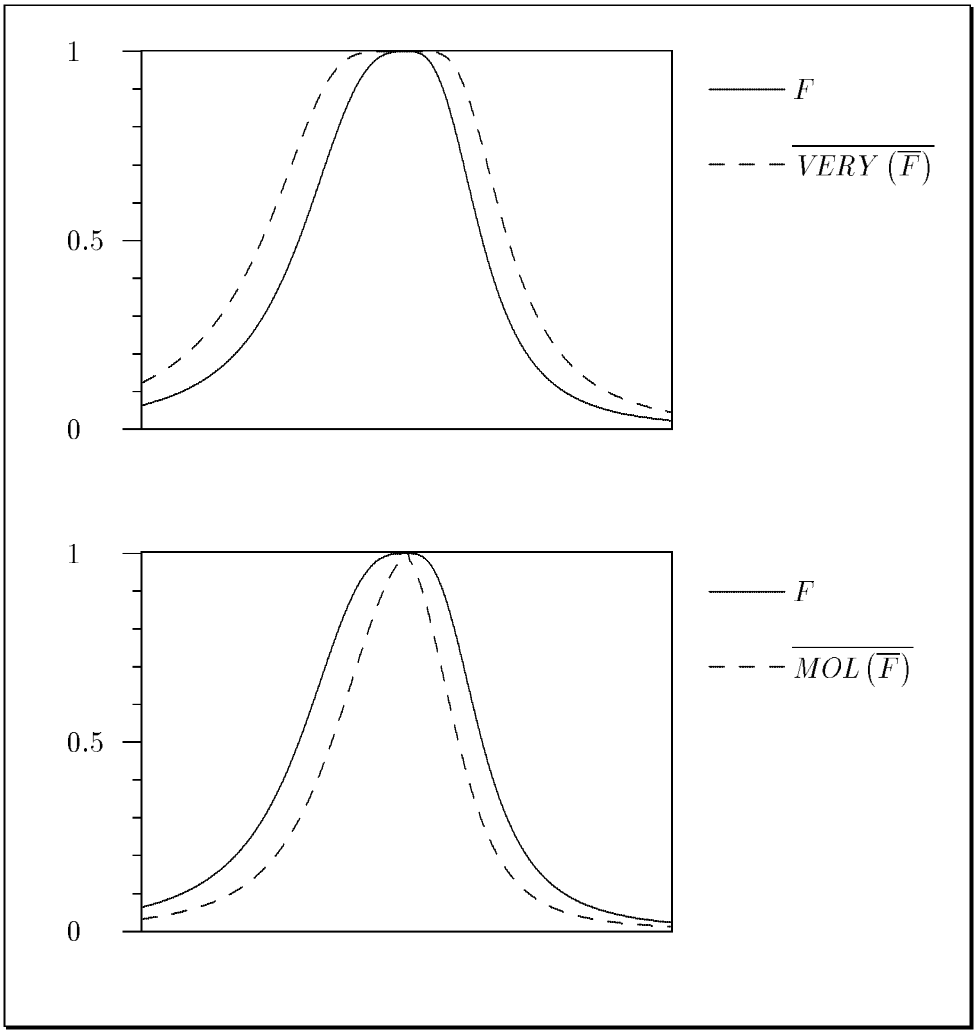


Abbildung 11.3: Die dualen Modifikatoren $DUAL(VERY)$ und $DUAL(MOL)$

11.4 Kontrastverstärker

Gegeben sei ein beliebiger Modifikator MOD über U, d. h.

$$MOD : \mathfrak{F}(U) \rightarrow \mathfrak{F}(U).$$

Definition 11.4.1
MOD heiße ***Kontrastverstärker***
$=_{def}$ *Für jedes $F : U \rightarrow \langle 0, 1\rangle$ und jedes $x \in U$ gilt:*

1. *Wenn $F(x) \leqq \frac{1}{2}$, so*
$$MOD(F)(x) \leqq F(x)$$
2. *Wenn $F(x) \geqq \frac{1}{2}$, so*
$$MOD(F)(x) \geqq F(x).$$

Diese Definition modelliert offenbar das folgende **Prinzip der Kontrastverstärkung**:

> Je nach Größe von $F(x)$ sei x grau koloriert, und zwar umso dunkler (bzw. heller), je größer $F(x)$ (bzw. kleiner $F(x)$) ist. Dabei entspricht $F(x) = 1$ schwarz bzw. $F(x) = 0$ weiß.
>
> Dann macht ein Kontrastverstärker „dunkle" Elemente (d. h. $F(x) > \frac{1}{2}$) noch dunkler, während „helle" Elemente (d. h. $F(x) < \frac{1}{2}$) noch heller werden. Elemente mit $F(x) = \frac{1}{2}$ bleiben unverändert.

Für Kontrastverstärker kann man selbstverständlich alle in 11.2 formulierten einschränkenden Bedingungen fordern.

Wir definieren nun zwei äußere Kontrastverstärker $CINT_{\mathrm{Z}}$ (ZADEH, 1972) und $CINT_{\mathrm{GR}}$ (GUPTA/RAGADE, 1977).

Definition 11.4.2

1. $CINT_{\mathrm{Z}}(F)(x)$

$$=_{def} \begin{cases} 2 \cdot (F(x))^2, & \textit{falls } 0 \leqq F(x) \leqq \frac{1}{2} \\ 1 - 2 \cdot (1 - F(x))^2, & \textit{falls } \frac{1}{2} \leqq F(x) \leqq 1 \end{cases}$$

2. $CINT_{\mathrm{GR}}(F)(x)$

$$=_{def} \begin{cases} (F(x))^2, & \textit{falls } 0 \leqq F(x) \leqq \frac{1}{2} \\ \sqrt[2]{F(x)}, & \textit{falls } \frac{1}{2} < F(x) \leqq 1 \end{cases}$$

Die Wirkung der Modifikatoren $CINT_{\mathrm{Z}}$ und $CINT_{\mathrm{GR}}$ kann man veranschaulichen wie in Abbildung 11.4 gezeigt.

Zum Kontrastverstärker $CINT_{\mathrm{GR}}$ siehe [19] von M. M. GUPTA, R. K. RAGADE und R. R. YAGER.

Theorem 11.4.1

$CINT_{\mathrm{Z}}$ ist ein äußerer Modifikator mit folgenden Eigenschaften:

1. *$CINT_{\mathrm{Z}}$ ist im „unteren Teil" komprimierend, im „oberen Teil" expandierend, d. h. es gilt*

$$\begin{aligned} CINT_{\mathrm{Z}}(F)(x) \leqq F(x), \textit{ falls } 0 \leqq F(x) \leqq \tfrac{1}{2} \\ F(x) \leqq CINT_{\mathrm{Z}}(F)(x), \textit{ falls } \tfrac{1}{2} \leqq F(x) \leqq 1. \end{aligned}$$

2. *$CINT_{\mathrm{Z}}$ ist monoton, d. h. für jedes $F, G : U \to \langle 0, 1 \rangle$ gilt:*

$$\textit{Wenn } F \subseteqq G, \textit{ so } CINT_{\mathrm{Z}}(F) \subseteqq CINT_{\mathrm{Z}}(G).$$

3. *$CINT_{\mathrm{Z}}$ ist distributiv bezüglich Standard-Durchschnitt und Standard-Vereinigung, d. h. für jedes $F, G : U \to \langle 0, 1 \rangle$:*

$$\begin{aligned} CINT_{\mathrm{Z}}(F \cap G) = CINT_{\mathrm{Z}}(F) \cap CINT_{\mathrm{Z}}(G) \\ CINT_{\mathrm{Z}}(F \cup G) = CINT_{\mathrm{Z}}(F) \cup CINT_{\mathrm{Z}}(G). \end{aligned}$$

Aufgabe 11.4.1 *Man prüfe, ob* **Theorem 11.4.1** *auch für den Kontrastverstärker $CINT_{\mathrm{GR}}$ gilt.*

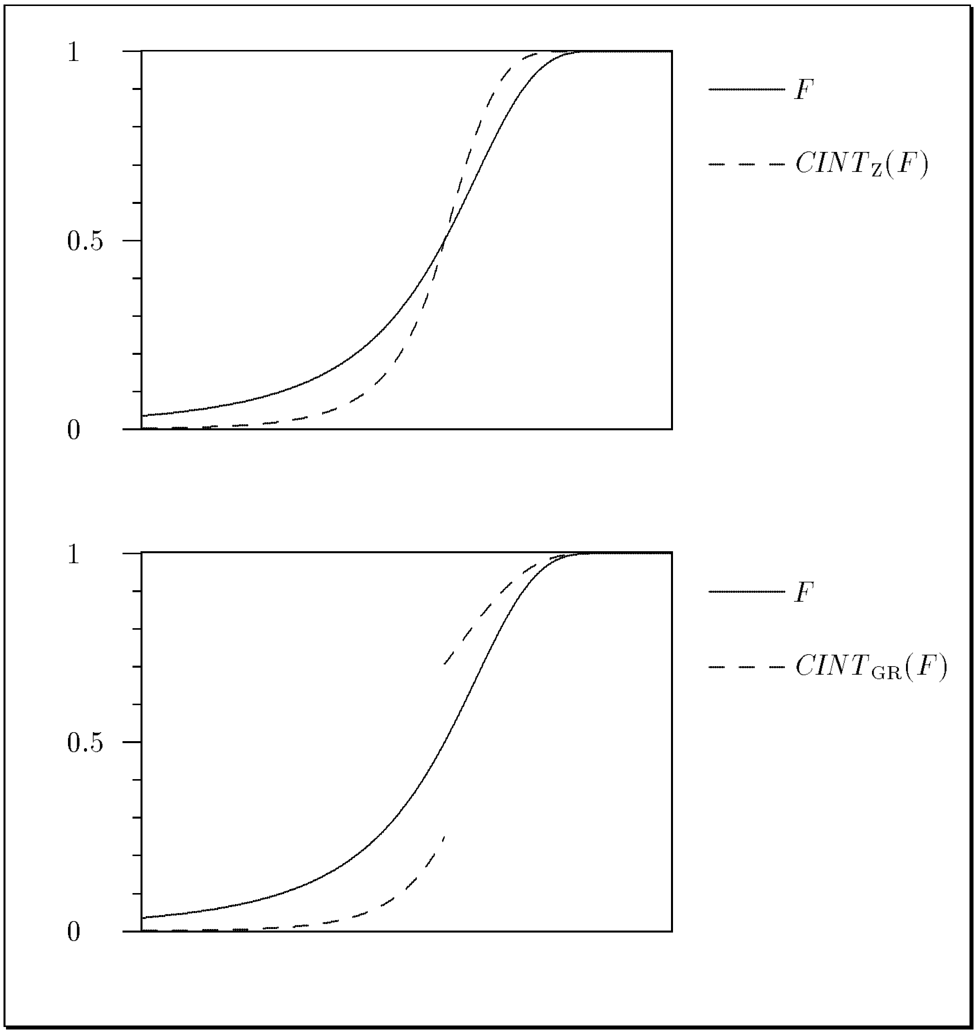


Abbildung 11.4: Die Modifikatoren $CINT_{\mathrm{Z}}$ und $CINT_{\mathrm{GR}}$

Aufgabe 11.4.2 *Heuristische Betrachtung: Ist das Universum U z. B. die Menge der reellen Zahlen und ist F eine stetige Funktion über U, wie etwa in Abbildung 11.4 angedeutet, so ist $CINT_{\mathrm{Z}}(F)$ ebenfalls eine stetige Funktion.*

Betrachten wir aber $CINT_{GR}(F)$, so gilt

$$CINT_{GR}(F)(x_0) = (F(x_0))^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \qquad \text{falls } F(x_0) = \tfrac{1}{2}$$

Ferner gilt für $\frac{1}{2} < F(x) \leqq 1$

$$CINT_{GR}(F)(x) = \sqrt[2]{F(x)},$$

also

$$\lim_{F(x)\to\frac{1}{2}} CINT_{GR}(F)(x) = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

also ist $CINT_{GR}(F)$ unstetig, weil an der Stelle x_0 eine Sprungstelle vorhanden ist.

11.5 Die Modifikatoren *PLUS*, *MINUS*, *HIGHLY* und *EXTREMELY*

Die genannten Modifikatoren wurden 1972 von Zadeh in der eingangs zitierten Arbeit eingeführt, wobei er *HIGHLY* in zwei unterschiedlichen Varianten definiert und es dem Leser überläßt, sich für eine von diesen zu entscheiden.

Alle betrachteten Modifikatoren werden als **äußere** Modifikatoren definiert.

Definition 11.5.1 (*PLUS*, *MINUS*)

1. $PLUS(F)(x)$
   $=_{def} (F(x))^{1.25} = \sqrt[4]{(F(x))^5} = (F(x))^{\frac{5}{4}}$
2. $MINUS(F)(x)$
   $=_{def} (F(x))^{0.75} = \sqrt[4]{(F(x))^3} = (F(x))^{\frac{3}{4}}$

Folgerung 11.5.1

$$PLUS(MINUS(F)) = MINUS(PLUS(F)) \subseteqq F$$

Diese Folgerung ergibt sich aus der Tatsache, daß für $r \in \langle 0, 1\rangle$

$$\left(r^{\frac{5}{4}}\right)^{\frac{3}{4}} = \left(r^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{5}{4}} = r^{\frac{15}{16}} \leqq r$$

gilt.

Nun hat Zadeh die Modifikatoren *VERY* und *MOL* so definiert, daß

$$VERY(MOL(F)) = MOL(VERY(F)) = F$$

gilt.

Möglicherweise wollte er diese Formel auch für *PLUS* und *MINUS* haben, und es ist ihm ein Rechenfehler unterlaufen.

Demgemäß könnte man definieren

Definition 11.5.2

1. $PLUS'(F)(x)$
   $=_{def} (F(x))^{\frac{4}{3}}$
2. $MINUS'(F)(x)$
   $=_{def} (F(x))^{\frac{4}{5}}$

Mit dieser Definition erhalten wir dann trivial

Folgerung 11.5.2

1. $PLUS'(MINUS(F)) = MINUS(PLUS'(F)) = F$
2. $PLUS(MINUS'(F)) = MINUS'(PLUS(F)) = F$

Definition 11.5.3 (2 Varianten von *HIGHLY*, Zadeh 1972)

1. $HIGHLY(F)$
   $=_{def} PLUS(VERY(F))$
2. $HIGHLY'(F)$

$=_{def}$ $MINUS(VERY(VERY(F)))$

Zur besseren Unterscheidung werden wir die zweite Variante $HIGHLY'$ fortan $EXTREMELY$ nennen, definieren also

2′ $EXTREMELY(F)$
$=_{def}$ $MINUS(VERY(VERY(F)))$

Folgerung 11.5.3
1. $HIGHLY(F)(x) = (F(x))^{2.5} = (F(x))^{\frac{5}{2}}$

2. $EXTREMELY(F)(x) = (F(x))^3$

Aufgabe 11.5.1 *Man bestimme Relationen zwischen den eingeführten Modifikatoren.*

Beispiel Es gilt für alle Fuzzy-Mengen $F : U \to \langle 0, 1\rangle$:

$$MOL(EXTREMELY(F)) = MINUS(VERY(F))$$

Aufgabe 11.5.2 *Man bestimme Relationen zwischen den eingeführten Modifikatoren und T-Normen bzw. S-Normen*

Beispiel Sei $(F \text{ ⓐ } G)(x) =_{def} F(x) \cdot G(x)$, d. h. ⓐ ist der Nicht-Standard-Durchschnitt, definiert durch die T-Norm „algebraische Konjunktion". Dann gilt für beliebige $F : U \to \langle 0, 1\rangle$:

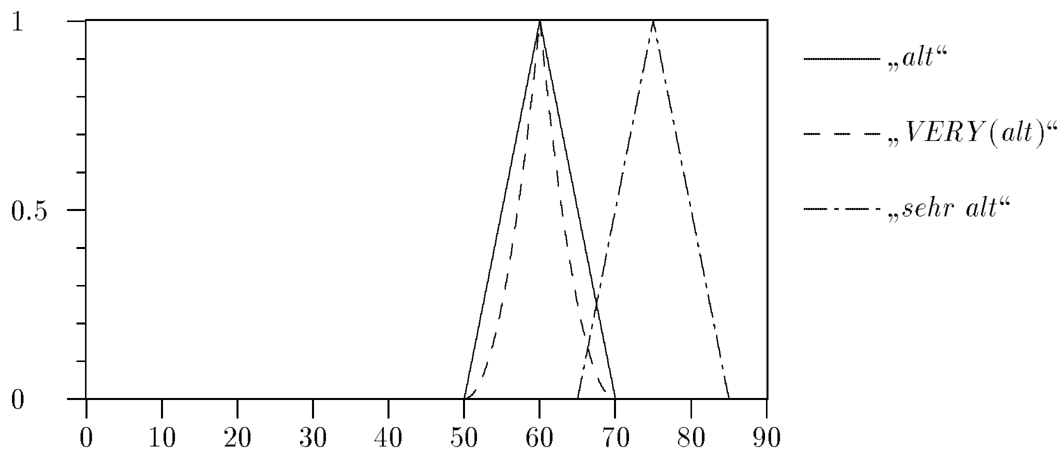
$$VERY(F) = F \text{ ⓐ } F.$$

Aufgabe 11.5.3 *Gilt für die in Abschnitt 11.5 eingeführten Modifikatoren ein dem* **Theorem 11.3.1** *analoges Theorem?*

11.6 Innere Modifikatoren

Grundlegend wichtig in Regelbasierten Anwendungen, z. B. in *Fuzzy*-Control.

Beispiel



Man kann „*sehr alt*“ **nicht** erzeugen in der Form

$$sehr\ alt = VERY(alt),$$

d. h.

$$sehr\ alt(x) = (alt(x))^2.$$

Erzeugung durch „*inneren*“ Modifikator möglich:

$$sehr\ alt(x) = alt(\mu(x)),$$

wobei $\mu(x) = x - 15$, d. h.

$$sehr\ alt(x) = alt(x - 15)$$

12. Quantoren

12.1 Einleitung

In seiner "theory of dispositions" begann L. A. Zadeh die Untersuchung von Quantoren im Rahmen der Fuzzy-Logik (siehe [52–58]), wobei seine Aufmerksamkeit auf „echte" Fuzzy-Quantoren wie z. B. *MOST*, *ALMOST-ALL*, *ALMOST-ALWAYS*, *USUALLY*, *RARELY*, *FEW*, *SMALL-FRACTION* etc. gerichtet war. Wir sprechen im vorliegenden Fall von „echten" Fuzzy-Quantoren, weil sie offenbar keine (oder nur triviale) Gegenstücke in der zweiwertigen Logik haben. In dieser Hinsicht unterscheiden sie sich grundsätzlich von Quantoren wie z. B. *FÜR-ALLE* oder *ES-GIBT-EIN*, die sowohl in der zweiwertigen Logik als auch in der Fuzzy-Logik (allgemeiner, in der mehrwertigen Logik schlechthin) sinnvoll interpretierbar sind.

Weitere wichtige Beiträge zu Quantoren in der Fuzzy-Logik stammen von R. R. Yager (siehe [41–47]).

Sieht man die genannten sowie weitere Arbeiten zum Thema „Fuzzy-Quantoren" durch, so vermißt man Diskussionen bzw. Referenzen zu zwei Fakten:

Erstens fehlen Referenzen zum Begriff des allgemeinen Quantors, wie er von A. Mostowski Mitte der fünfziger Jahre im Rahmen der zweiwertigen Logik entwickelt worden ist [28]. Auch fehlen Hinweise auf die umfangreichen Untersuchungen und Resultate zu allgemeinen Quantoren, die in den letzten etwa 35 Jahren unternommen und erzielt worden sind, von denen manche durchaus für die Fuzzy-Logik Bedeutung haben, z. B. das detaillierte Studium des Quantors *FAST-ALLE*. Der interessierte Leser findet einen guten Überblick z. B. in [5].

Zweitens vermißt man in den bisherigen Arbeiten über Fuzzy-Quantoren eine prinzipielle Einbeziehung auch unendlicher Universa, also eine Definition über beliebigen Grundbereichen (siehe z. B. [55, page 756]). Der Grund dafür ist offenbar, daß bei vielen dieser Betrachtungen das Konzept des „sigma-count" bzw. des „relative sigma-count" verwendet wird, was bei unendlichen Universa zu Summen mit abzählbar unendlich vielen oder gar überabzählbar unendlich vielen Summanden führt, für welche der Summationsprozeß nicht konvergiert bzw. gar nicht definiert ist.

Man könnte nun annehmen, die prinzipielle Einschränkung auf endliche Universa reiche für Theorie und Praxis aus.

Eine solche Einschränkung ist aus praktischer Sicht sehr nachdrücklich abzulehnen; denn sonst könnten viele Anwendungsprobleme nicht erfaßt werden.

Aber auch aus theoretischer Sicht sind Einwendungen gegen eine Beschränkung auf endliche Universa zu formulieren. Bekannt ist, daß schon die zweiwertige Prädikatenlogik der ersten Stufe in beliebigen nicht-leeren, aber **endlichen** Universa wesentlich komplizierter ist als in **beliebigen** (also auch unendlichen) nicht-leeren Bereichen. Dazu verweisen wir auf die folgenden klassischen Resultate (aus der zweiwertigen Prädikatenlogik der ersten Stufe). Wir nehmen an, daß die zugrunde liegende Signatur hinreichend „reichhaltig" ist, z. B. ein binäres Prädikatensymbol oder zwei einstellige Funktionssymbole und das

Gleichheitszeichen für eine gegebene Sorte der Signatur enthält. Dann wissen wir:

Die Menge der in **jedem** nicht-leeren Universum allgemeingültigen Ausdrücke ist unentscheidbar [9], jedoch rekursiv aufzählbar [15]. Die Menge der in **jedem** nicht-leeren **endlichen** Universum allgemeingültigen Ausdrücke ist unentscheidbar, sogar **nicht** rekursiv aufzählbar [21, 39].

In der Fuzzy-Logik, genauer für den kontinuierlich-wertigen LUKASIEWICZschen Prädikatenkalkül der ersten Stufe, liegen die Verhältnisse wesentlich komplizierter, wie die folgenden Beispiele zeigen, falls über die gewählte Signatur die oben formulierten Voraussetzungen gelten sollen.

Die Menge der in **jedem** nicht-leeren Universum allgemeingültigen Ausdrücke ist unentscheidbar, **sogar** nicht axiomatisierbar. Hieraus kann man die Vermutung ableiten, daß die Menge der in jedem nicht-leeren **endlichen** Universum im LUKASIEWICZschen Sinne allgemeingültigen Ausdrücke eine „höhere Komplexität“ (wir müssen in diesem Rahmen darauf verzichten, diesen Terminus exakt zu definieren) hat als die entsprechende Menge der zweiwertigen Logik. Auf Grund dieser Resultate kann man vermuten, daß in der Fuzzy-Logik die Beschränkung auf endliche Universa weitere Schwierigkeiten mit sich bringt als sie ohnehin durch die unendliche Menge von Wahrheitswerten impliziert werden.

12.2 Allgemeine Fuzzy-Quantoren

Wir beginnen mit der Festlegung einiger Notationen.

Gegeben seien beliebige Mengen X und Y. Wir bezeichnen durch $card\,X$ die Kardinalzahl von X, durch $\mathfrak{P}X$ die übliche Potenzmenge von X, d. h. die Menge aller („klassischen“ oder „scharfen“) Teilmengen von X sowie durch X^Y die Menge aller Abbildungen $\varphi : Y \to X$, d. h. die Menge aller (eindeutigen) Abbildungen φ von Y in X.

Ferner sei $\langle 0,1\rangle$ die Menge aller reellen Zahlen r mit $0 \leqq r \leqq 1$. Wir betrachten $\langle 0,1\rangle$ als die Menge aller Wahrheitswerte der zugrunde liegenden LUKASIEWICZschen (kontinuierlichwertigen) Logik. Demgemäß ist für eine nicht-leere Menge U (Universum) $\langle 0,1\rangle^U$ die Menge aller Fuzzy-Mengen $F : U \to \langle 0,1\rangle$ über U, wobei wir darauf hinweisen, daß wir zwischen einer Fuzzy-Menge F und deren „Zugehörigkeitsfunktion“ μ_F nicht unterscheiden, weil eine solche Unterscheidung offenbar begrifflich unsinnig ist.

Die („klassische“) Menge aller Wahrheitswerte, die eine Fuzzy-Menge $F : U \to \langle 0,1\rangle$ annehmen kann, wird wie üblich durch $\{F(x) | x \in U\}$ angedeutet.

In der zweiwertigen Logik verwenden wir die natürliche Zahl 0 bzw. 1 als den Wahrheitswert *FALSCH* bzw. *WAHR*, demgemäß ist $\{0,1\}$ mit $\{0,1\} \subsetneqq \langle 0,1\rangle$ die Menge der Wahrheitswerte der zweiwertigen Logik.

MOSTOWSKI [28] betrachtet nun die Menge $\{0,1\}^U$ aller einstelligen zweiwertigen Prädikate $\Pi : U \to \{0,1\}$ über U und definiert dann einen allgemeinen Quantor $QUANT$ über U als (zweiwertiges) Prädikat *zweiter* Stufe, d. h. in der Form $QUANT : \{0,1\}^U \to \{0,1\}$.

Diesen Gedanken übernehmen wir und werden dementsprechend unter einem allgemeinen Fuzzy-Quantor über U ein Fuzzy-Prädikat zweiter Stufe, d. h. eine Fuzzy-Menge über $\langle 0,1\rangle^U$, also eine Abbildung $QUANT : \langle 0,1\rangle^U \to \langle 0,1\rangle$ verstehen.

Bei Durchsicht der Literatur kann man entsprechende Ideen schon bei L. A. ZADEH finden [52–54]. Sie sind dort jedoch weder ausgearbeitet, noch wird ein Zusammenhang zum Ansatz von A. MOSTOWSKI hergestellt und auf die folgenden Arbeiten hingewiesen.

Beim Aufbau einer allgemeinen Theorie von Fuzzy-Quantoren stößt man auf das Problem, wie für eine beliebige Fuzzy-Menge eine Kardinalzahl zu definieren ist. Dazu gibt es in der Literatur (siehe z. B. [22, 29]) eine Reihe von Ansätzen, die jedoch häufig nur für Fuzzy-Mengen $F : U \to \langle 0,1\rangle$ mit endlichem Träger $\{x | x \in U \text{ und } F(x) > 0\}$ sinnvoll sind. Wir wollen diese Ansätze hier nicht diskutieren, da wir für unsere Zwecke nicht wissen müssen, **was** die Kardinalzahl *card* F einer Fuzzy-Menge F **ist**, sondern es **ausreicht**, zu definieren, wann beliebige Fuzzy-Mengen $F : U \to \langle 0,1 \rangle$ und $G : V \to \langle 0,1 \rangle$ **dieselbe** Kardinalzahl **haben**, wobei die Universa nicht notwendig übereinstimmen müssen. Auf diese Weise werden wir zu einer binären Relation „Kardinalzahläquivalenz" für Fuzzy-Mengen F und G entsprechend der nachfolgenden Definition geführt, bei der es entsprechend unserer Intention wesentlich ist, daß keine Einschränkungen bezüglich der Träger $\{x \,|\, x \in U \text{ und } F(x) > 0\}$ und $\{y \,|\, y \in V \text{ und } G(y) > 0\}$ erforderlich sind.

Definition 12.2.1
F und G heißen kardinalzahl-äquivalent (kurz: $F \approx_{card} G$)
$=_{def}$ *Für jedes $c \in \langle 0,1 \rangle$ gilt die Gleichung*

$$card\,\{x \,|\, x \in U \text{ und } F(x) = c\} = card\,\{y \,|\, y \in V \text{ und } G(y) = c\}\,.$$

Unmittelbar ist klar, daß diese Äquivalenzdefinition mit dem klassischen Kardinalzahlbegriff für scharfe Mengen kompatibel ist; denn für $F : U \to \{0,1\}$ und $G : V \to \{0,1\}$ mit $\hat{F} =_{def} \{x \,|\, x \in U \text{ und } F(x) = 1\}$ und $\hat{G} =_{def} \{y \,|\, y \in V \text{ und } G(y) = 1\}$ gilt:

$$F \approx_{card} G \text{ genau dann, wenn } card\,\hat{F} = card\,\hat{G}.$$

Ein weiteres wichtiges Prinzip zur Klassifikation allgemeiner Quantoren ist das der *Extensionalität*.

Wir übernehmen dieses Prinzip aus der Aussagenlogik, wo es wie folgt formuliert werden kann. Gegeben sei eine Menge $AUSS$ von „Aussagen" sowie eine Bewertungsfunktion $\omega : AUSS \to \Omega$, wobei Ω die zugrunde gelegte Menge von Wahrheitswerten ist. Eine n-stellige eindeutige Abbildung α von $AUSS$ in $AUSS$, auch Aussagenfunktion genannt, heißt nun *extensional* genau dann, wenn für jedes $A_1, \ldots, A_n, B_1, \ldots, B_n \in AUSS$ gilt:

$$\text{Wenn } \omega(A_1) = \omega(B_1),\ \ldots,\ \omega(A_n) = \omega(B_n), \text{ so } \omega(\alpha(A_1, \ldots, A_n)) = \omega(\alpha(B_1, \ldots, B_n)).$$

Diese Bedingung besagt offenbar, daß der Wahrheitswert $\omega(\alpha(A_1, \ldots, A_n))$ der „zusammengesetzten" Aussage $\alpha(A_1, \ldots, A_n)$ allein von den Wahrheitswerten $\omega(A_1), \ldots, \omega(A_n)$ der Aussagen $A_1, \ldots, A_n$, jedoch nicht von den Aussagen $A_1, \ldots, A_n$ selbst abhängt.

Die Bedingung $\omega(A_1) = \omega(B_1),\ \ldots,\ \omega(A_n) = \omega(B_n)$ übertragen wir für beliebige Fuzzy-Mengen $F : U \to \langle 0,1 \rangle$ und $G : U \to \langle 0,1 \rangle$ durch die folgende Isomorphie-Definition.

Definition 12.2.2
F und G heißen isomorph (kurz: $F \approx_{isom} G$)
$=_{def}$ *Es gibt eine eineindeutige Abbildung h von U auf V (Bijektion), so daß für alle $x \in U$ gilt: $F(x) = G(h(x))$.*

Mit den eingeführten Begriffsbildungen formulieren wir nun die folgende grundlegende Definition. Dazu seien beliebige Fuzzy-Mengen $F : U \to \langle 0,1 \rangle$ und $G : V \to \langle 0,1 \rangle$ gegeben.

Definition 12.2.3

1. *$QUANT$ heiße allgemeiner Fuzzy-Quantor über U*
   $=_{def}$ $QUANT : \langle 0,1 \rangle^U \to \langle 0,1 \rangle$.

2. *$QUANT$ heiße kardinalzahl-invarianter Fuzzy-Quantor über U*

$=_{def}$ *QUANT ist ein allgemeiner Fuzzy-Quantor über U und für jede Fuzzy-Menge F und G über U gilt:*

$$\text{Wenn } F \approx_{card} G, \text{ so } QUANT(F) = QUANT(G).$$

3. *QUANT heiße extensionaler Fuzzy-Quantor über U*
$=_{def}$ *QUANT ist ein allgemeiner Fuzzy-Quantor über U und für jede Fuzzy-Menge F und G über U gilt:*

$$\text{Wenn } F \approx_{isom} G, \text{ so } QUANT(F) = QUANT(G).$$

Beispiele und Folgerungen

1. Obwohl die Motivationen zur Definition der Kardinalzahl-Äquivalenz und der Isomorphie von Fuzzy-Mengen sich sehr unterscheiden, sind beide Begriffsbildungen gleichwertig, d. h. für beliebige nicht-leere Universa U und V sowie für beliebige Fuzzy-Mengen $F : U \to \langle 0,1\rangle$ und $G : V \to \langle 0,1\rangle$ gilt: $F \approx_{card} G$ genau dann, wenn $F \approx_{isom} G$. Daraus folgt offenbar, daß die Klasse der kardinalzahl-invarianten Fuzzy-Quantoren über U mit der Klasse der extensionalen Fuzzy-Quantoren über U zusammenfällt.

2. Kardinalzahl-invariante Quantoren sind aus der zweiwertigen Logik bekannt als Quantoren der Form „es gibt mindestens (höchstens bzw. genau) n Elemente x, so daß“ (n natürliche Zahl mit $n \geqq 1$). Auch die Quantoren „es gibt mindestens (höchstens bzw. genau) abzählbar-unendlich viele Elemente x, so daß“ und „für fast alle x gilt“ sowie „es gibt unendlich viele x, so daß“ sind kardinalzahl-invariant.

3. Offenbar erhält man unmittelbar auf Grundlage von Definition 12.2.3.3 die Folgerung: $QUANT$ ist ein extensionaler Quantor über U genau dann, wenn es ein Q gibt, so daß

   3.1. Q ist eine eindeutige Abbildung von der Menge $\mathfrak{P}_m \langle 0,1\rangle$ aller Multiteilmengen von $\langle 0,1\rangle$ in $\langle 0,1\rangle$ und

   3.2. für jede Fuzzy-Menge F über U gilt:

   $$QUANT(F) = Q \underset{m}{\{} F(x) | x \in U \underset{m}{\}}$$

   Hierbei ist $\underset{m}{\{} F(x) | x \in U \underset{m}{\}}$ als Multimenge zu verstehen, d. h. Werte $F(x)$ kommen so oft vor, wie sie durch $x \in U$ erzeugt werden. Will man den Begriff der Multimenge vermeiden, darf man nur solche Fuzzy-Mengen $F : U \to \langle 0,1\rangle$ zulassen, für die aus $F(x) = F(x')$ mit $x, x' \in U$ die Gleichung $x = x'$ folgt. In diesem Fall ist $\underset{m}{\{} F(x) | x \in U \underset{m}{\}}$ eine Menge im üblichen Sinne.

4. Die Fuzzy-Quantoren ALL und EX, definiert über U durch

$$\begin{aligned} ALL(F) &=_{def} \mathit{Inf}\,\{F(x)|x \in U\} \\ EX(F) &=_{def} \mathit{Sup}\,\{F(x)|x \in U\} \end{aligned}$$

   sind kardinalzahl-invariant und somit auch extensional.

5. Fordert man für einen kardinalzahl-invarianten Quantor $QUANT$ zusätzlich die Umkehrung der definierenden Bedingung, d. h.

$$\text{Wenn } QUANT(F) = QUANT(G), \text{ so } F \approx_{card} G$$

für jede Fuzzy-Menge F und G über U, so wollen wir $QUANT$ einen Kardinalitätsquantor nennen.

Offenbar sind die in Punkt 2 genannten Quantoren „es gibt genau n Elemente x, so daß" und „es gibt genau abzählbar-unendlich viele x, so daß" Kardinalitätsquantoren, während die übrigen genannten diese Eigenschaft nicht haben.

12.3 T-Quantoren und S-Quantoren

In Theorie und Anwendungen spielen T-Normen und S-Normen eine hervorragende Rolle, und zwar als Verallgemeinerungen der Funktoren min und max, die in der Fuzzy-Logik zur Interpretation von $\wedge$ (und) und $\vee$ (oder) dienen. Um Unklarheiten zu vermeiden, schreiben wir hier die entsprechenden Definitionen noch einmal auf:

Definition 12.3.1

1. *Eine Abbildung* $\tau : \langle 0,1\rangle \times \langle 0,1\rangle \to \langle 0,1\rangle$ *heiße T-Norm* $=_{def}$ τ *erfüllt die folgenden Axiome:*

   $\mathbf{TN_1}$. *Für jedes* $r \in \langle 0,1\rangle$ *gilt:* $\tau(r,1) = r$.

   $\mathbf{TN_2}$. *Für jedes* $r \in \langle 0,1\rangle$ *gilt:* $\tau(r,0) = 0$.

   MON (Monotonie). *Für jedes* $r, r', s, s' \in \langle 0,1\rangle$ *gilt:*

   $$\textit{Wenn } r \leqq r' \textit{ und } s \leqq s', \textit{ so } \tau(r,s) \leqq \tau(r',s').$$

   KOM (Kommutativität). *Für jedes* $r, s \in \langle 0,1\rangle$ *gilt:*

   $$\tau(r,s) = \tau(s,r).$$

   ASS (Assoziativität). *Für jedes* $r, s, t \in \langle 0,1\rangle$ *gilt:*

   $$\tau(r,(\tau(s,t)) = \tau(\tau(r,s),t).$$

2. *Eine Abbildung* $\sigma : \langle 0,1\rangle \times \langle 0,1\rangle \to \langle 0,1\rangle$ *heiße S-Norm* $=_{def}$ σ *erfüllt die folgenden Axiome:*

   $\mathbf{SN_1}$. *Für jedes* $r \in \langle 0,1\rangle$ *gilt:* $\sigma(r,1) = 1$.

   $\mathbf{SN_2}$. *Für jedes* $r \in \langle 0,1\rangle$ *gilt:* $\sigma(r,0) = r$.

   MON, KOM, ASS *wie in der Definition von* τ.

Zur Formulierung des folgenden Theorems verwenden wir die *schwach-drastische Konjunktion* et_{sd} und die *schwach-drastische Alternative* vel_{sd}, die für jedes $r, s \in \langle 0,1\rangle$ wie folgt definiert werden.

Definition 12.3.2

1.
$$\begin{aligned} et_{\mathrm{sd}}(r,1) &=_{def} r \\ et_{\mathrm{sd}}(1,s) &=_{def} s \\ et_{\mathrm{sd}}(r,s) &=_{def} 0, \textit{ falls } r < 1 \textit{ und } s < 1 \end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned} vel_{\mathrm{sd}}(r,0) &=_{def} r \\ vel_{\mathrm{sd}}(0,s) &=_{def} s \\ vel_{\mathrm{sd}}(r,s) &=_{def} 1, \textit{ falls } 0 < r \textit{ und } 0 < s \end{aligned}$$

Aus der Literatur bekannt sind die nachstehende Folgerung sowie die **Theoreme** 12.3.2 und 12.3.3.

Folgerung 12.3.1

1. *Die Funktionen* et_{sd} *und* min *sind T-Normen.*
2. *Die Funktionen* vel_{sd} *und* max *sind S-Normen.*

Theorem 12.3.2

1. *Ist* τ *eine T-Norm, so gilt für jedes* $r, s \in \langle 0, 1 \rangle$:
$$et_{\mathrm{sd}}(r, s) \leqq \tau(r, s) \leqq min(r, s)$$
2. *Ist* σ *eine S-Norm, so gilt für jedes* $r, s \in \langle 0, 1 \rangle$:
$$max(r, s) \leqq \sigma(r, s) \leqq vel_{\mathrm{sd}}(r, s)$$

Gegeben sei $\varphi : \langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 1 \rangle \to \langle 0, 1 \rangle$.

Definition 12.3.3
φ *heiße* ***idempotent***
$=_{def}$ *Für jedes* $r \in \langle 0, 1 \rangle$ *gilt:* $\varphi(r, r) = r$.

Theorem 12.3.3

1. *Ist* τ *eine idempotente T-Norm, so gilt für jedes* $r, s \in \langle 0, 1 \rangle$: $\tau(r, s) = min(r, s)$.
2. *Ist* σ *eine idempotente S-Norm, so gilt für jedes* $r, s \in \langle 0, 1 \rangle$: $\sigma(r, s) = max(r, s)$.

Wir übertragen nun diese Betrachtungen auf Fuzzy-Quantoren. Dabei verwenden wir die folgenden Notationen bzw. Begriffsbildungen.

Gegeben seien die beliebigen Fuzzy-Mengen F und G über U, d. h. $F, G : U \to \langle 0, 1 \rangle$.

Die „scharfe" Teilmengenbeziehung $F \subseteqq G$ wird definiert durch die Bedingung, daß für jedes $x \in U$ gilt: $F(x) \leqq G(x)$.

Eine Abbildung $\Pi : U \to U$ heiße *Permutation* von U (auch Bijektion genannt), falls sie eine Abbildung auf U (Surjektion) und eindeutig umkehrbar (Injektion) ist.

Gegeben seien eine beliebige Fuzzy-Menge $F : U \to \langle 0, 1 \rangle$ sowie eine Permutation Π von U. Wir definieren nun eine Fuzzy-Menge $\Pi(F)$ über U wie folgt:
$$\Pi(F)(x) =_{def} F(\Pi(x)), \text{ wobei } x \in U.$$

Definition 12.3.4

1. *Ein allgemeiner Fuzzy-Quantor*
$$TQ : \langle 0, 1 \rangle^{U} \to \langle 0, 1 \rangle$$
über U *heiße T-Quantor über* U
$=_{def}$ TQ *erfüllt die folgenden Axiome:*

   TQ₁. *Für jedes* $F : U \to \langle 0, 1 \rangle$ *und jedes* $x \in U$ *gilt: Ist* $F(y) = 1$ *für alle* $y \in U$ *mit* $y \neq x$, *so*
$$TQ(F) = F(x)$$

TQ₂. *Für jedes* $F : U \to \langle 0,1\rangle$ *und jedes* $x \in U$ *gilt: Ist* $F(x) = 0$*, so*

$$TQ(F) = 0$$

MON. *Für jedes* $F, G : U \to \langle 0,1\rangle$ *gilt:*

$$\text{Wenn } F \subseteqq G, \text{ so } TQ(F) \leqq TQ(G).$$

KOM/ASS. *Für jedes* $F : U \to \langle 0,1\rangle$ *und jedes* $\Pi : U \to U$ *gilt: Ist* Π *eine Permutation von* U*, so* $TQ(\Pi(F)) = TQ(F)$.

2. *Ein allgemeiner Fuzzy-Quantor*

$$SQ : \langle 0,1\rangle^U \to \langle 0,1\rangle$$

über U *heiße S-Quantor über* U
$=_{def}$ *SQ erfüllt die folgenden Axiome:*

SQ₁. *Für jedes* $F : U \to \langle 0,1\rangle$ *und jedes* $x \in U$ *gilt: Ist* $F(x) = 1$*, so*

$$SQ(F) = 1$$

SQ₂. *Für jedes* $F : U \to \langle 0,1\rangle$ *und jedes* $x \in U$ *gilt: Ist* $F(y) = 0$ *für alle* $y \in U$ *mit* $y \neq x$*, so*

$$SQ(F) = F(x)$$

MON und **KOM/ASS** *wie in der Definition von* TQ.

Unmittelbar ist klar, daß die formulierten Axiome Verallgemeinerungen der entsprechenden Axiome für T- bzw. S-Normen sind. Insbesondere sind in KOM/ASS die Kommutativität (siehe Axiom KOM) und die Assoziativität (siehe Axiom ASS) zusammengefaßt.

Folgerung 12.3.4
Ist QUANT ein T-Quantor oder ein S-Quantor, so ist QUANT kardinalzahl-invariant.

In Analogie zur Definition der Funktionen et_{sd} und vel_{sd} definieren wir den *schwach drastischen All-Quantor* ALL_{sd} und den *schwach drastischen Existenz-Quantor* EX_{sd} wie folgt.

Definition 12.3.5

1. $$ALL_{sd}(F) =_{def} \begin{cases} F(x), & \text{falls für jedes } y \in U \text{ mit } y \neq x \text{ gilt } F(y) = 1. \\ 0, & \text{falls es } x, y \in U \text{ gibt} \\ & \text{mit } x \neq y \text{ und } F(x) < 1 \text{ und } F(y) < 1. \end{cases}$$

2. $$EX_{sd}(F) =_{def} \begin{cases} F(x), & \text{falls für jedes } y \in U \text{ mit } y \neq x \text{ gilt } F(y) = 0. \\ 1, & \text{falls es } x, y \in U \text{ gibt} \\ & \text{mit } x \neq y \text{ und } 0 < F(x) \text{ und } 0 < F(y). \end{cases}$$

Folgerung 12.3.5

1. *Die Abbildungen* ALL_{sd} *und* ALL *sind T-Quantoren.*

2. *Die Abbildungen* EX_{sd} *und* EX *sind S-Quantoren.*

Theorem 12.3.6

1. *Ist TQ ein T-Quantor über U, so gilt für jedes $F : U \to \langle 0,1\rangle$:*

$$ALL_{sd}(F) \leqq TQ(F) \leqq ALL(F).$$

2. *Ist SQ ein S-Quantor über U, so gilt für jedes $F : U \to \langle 0,1\rangle$:*

$$EX(F) \leqq SQ(F) \leqq EX_{sd}(F).$$

Gegeben sei ein allgemeiner Fuzzy-Quantor $QUANT$ über U, d. h.

$$QUANT : \langle 0,1\rangle^U \to \langle 0,1\rangle$$

Definition 12.3.6

$QUANT$ heiße ***idempotent***

$=_{def}$ *Für jedes $F : U \to \langle 0,1\rangle$ und jedes $c \in \langle 0,1\rangle$ gilt:*

$$\textit{Wenn } F(x) = c \textit{ für alle } x \in U, \textit{ so } QUANT(F) = c.$$

Theorem 12.3.7

1. *Ist TQ ein idempotenter T-Quantor über U, so gilt für jedes $F : U \to \langle 0,1\rangle$:*

$$TQ(F) = Inf\,\{F(x)\,|\,x \in U\} = ALL(F)$$

2. *Ist SQ ein idempotenter S-Quantor über U, so gilt für jedes $F : U \to \langle 0,1\rangle$:*

$$SQ(F) = Sup\,\{F(x)\,|\,x \in U\} = EX(F).$$

12.4 Über die gegenseitige Erzeugbarkeit von T-Normen und T-Quantoren bzw. S-Normen und S-Quantoren

Ausgangspunkt der Untersuchungen in diesem Abschnitt ist die Tatsache, daß sich in der zweiwertigen Logik der All-Quantor als iterierte Konjunktion und der Existenz-Quantor als iterierte Alternative auffassen läßt. In der betrachteten ŁUKASIEWICZschen Logik besteht ein entsprechender Zusammenhang zwischen dem Operator *Inf* und der (zweistelligen) Funktion *min* einerseits und zwischen dem Operator *Sup* und der (zweistelligen) Funktion *max* andererseits.

Wir übertragen diese Idee nun auf beliebige T-Normen bzw. S-Normen und erhalten auf diesem Wege verallgemeinerte *All*-Quantoren bzw. *Existenz*-Quantoren, die durch die gegebene T-Norm bzw. S-Norm erzeugt werden.

Gegeben seien eine beliebige T-Norm τ und eine beliebige S-Norm σ.

Als wesentliche Hilfsmittel für die Erzeugung eines verallgemeinerten *All*-Quantors ALL_τ durch die T-Norm τ und eines verallgemeinerten *Existenz*-Quantors EX_σ durch die S-Norm σ definieren wir zunächst mittels τ eine Funktionenfolge $(\tau^n)_{n=1,2,\ldots}$ sowie mittels σ eine Funktionenfolge $(\sigma^n)_{n=1,2,\ldots}$, wobei τ^n und σ^n jeweils eine Abbildung von $\langle 0,1\rangle^n \to \langle 0,1\rangle$ ist. Diese Funktionenfolgen werden induktiv über n wie folgt definiert, wobei $r_1, \ldots, r_n, \ldots \in \langle 0,1\rangle$:

Definition 12.4.1

1.

$$\begin{aligned} \tau^1(r_1) &=_{def} r_1 \\ \tau^{n+1}(r_1,\ldots,r_n,r_{n+1}) &=_{def} \tau(\tau^n(r_1,\ldots,r_n),r_{n+1}) \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} \sigma^1(r_1) &=_{def} r_1 \\ \sigma^{n+1}(r_1,\ldots,r_n,r_{n+1}) &=_{def} \sigma(\sigma^n(r_1,\ldots,r_n),r_{n+1}) \end{aligned}$$

Es sei nun eine beliebige Fuzzy-Menge F über U gegeben.

Definition 12.4.2

1.

$$ALL_\tau(F) =_{def} Inf\,\{\tau^n(F(x_1),\ldots,F(x_n))\,|\,n \geqq 1 \text{ und } x_1,\ldots,x_n \in U\}$$

2.

$$EX_\sigma(F) =_{def} Sup\,\{\sigma^n(F(x_1),\ldots,F(x_n))\,|\,n \geqq 1 \text{ und } x_1,\ldots,x_n \in U\}$$

Diese Definition läßt sich dadurch rechtfertigen, daß für jedes $n = 1,2,\ldots$ gilt

$$\tau^{n+1}(r_1,\ldots,r_n,r_{n+1}) \leqq \tau^n(r_1,\ldots,r_n)$$

und

$$\sigma^{n+1}(r_1,\ldots,r_n,r_{n+1}) \geqq \sigma^n(r_1,\ldots,r_n).$$

Eine weitere Rechtfertigung ergibt sich aus der nachstehenden

Folgerung 12.4.1

1. $ALL_{min} = ALL$
2. $EX_{max} = EX$
3. $ALL_{et_{sd}} = ALL_{sd}$
4. $EX_{vel_{sd}} = EX_{sd}$

Das folgende Theorem gibt eine endgültige Rechtfertigung für **Definition 12.4.2**.

Theorem 12.4.2

1. *ALL_τ ist ein extensionaler T-Quantor.*
2. *EX_σ ist ein extensionaler S-Quantor.*

An dieses Theorem schließen sich zwei Fragen an:

Frage 1. Ist **jeder** T-Quantor bzw. S-Quantor durch eine geeignet gewählte T–Norm bzw. S-Norm erzeugbar ?

Frage 2. Ist die durch die **Definition 12.4.2** beschriebene Erzeugungsprozedur eindeutig umkehrbar, d. h. ist jeder extensionale T-Quantor bzw. extensionale S-Quantor durch höchstens eine T-Norm bzw. S-Norm erzeugbar ?

Beide Fragen werden im folgenden positiv beantwortet.

Dazu zeigen wir als erstes, wie durch einen extensionalen T-Quantor TQ eine T-Norm τ_{TQ} und aus einem extensionalen S-Quantor SQ eine S-Norm σ_{SQ} erzeugt werden kann. Dazu definieren wir für beliebige $r, s, t \in \langle 0, 1 \rangle$:

Definition 12.4.3

1. $\tau_{TQ}(r, s) =_{def} t$ *genau dann, wenn es eine Fuzzy-Menge* $F : U \to \langle 0, 1 \rangle$ *sowie Elemente* $x, y \in U$ *gibt, so daß* $r = F(x)$ *und* $s = F(y)$ *und* $t = TQ(F)$ *und* $F(z) = 1$ *für alle* $z \in U$ *mit* $z \neq x$ *und* $z \neq y$.

2. $\sigma_{SQ}(r, s) =_{def} t$ *genau dann, wenn es eine Fuzzy-Menge* $F : U \to \langle 0, 1 \rangle$ *sowie Elemente* $x, y \in U$ *gibt, so daß* $r = F(x)$ *und* $s = F(y)$ *und* $t = SQ(F)$ *und* $F(z) = 0$ *für alle* $z \in U$ *mit* $z \neq x$ *und* $z \neq y$.

Aus dieser Definition kann man unmittelbar ablesen, daß die Funktionen τ_{TQ} und σ_{SQ} nur dann total, d. h. überall definiert, sind, wenn U mindestens zwei Elemente enthält. Enthält nämlich U nur genau ein Element, dann ist für $r, s \in \langle 0, 1 \rangle$ mit $r \neq s$ eine Darstellung in der Form $r = F(x)$ und $s = F(y)$ nicht möglich.

Außerdem ist klar, daß diese Funktionen im allgemeinen nur dann eindeutig sind, falls die Quantoren TQ bzw. SQ extensional sind — eine Tatsache, die die Wichtigkeit des Konzepts der Extensionalität unterstreicht.

Die Axiome TN_1, TN_2, MON, KOM, ASS für τ_{TQ} bzw. SN_1, SN_2, MON, KOM und ASS für σ_{SQ} werden aus den entsprechenden Axiomen für TQ bzw. SQ hergeleitet.

Somit erhalten wir

Theorem 12.4.3

1. *Ist* $card\, U \geqq 2$ *und ist* TQ *ein extensionaler T-Quantor, so ist* τ_{TQ} *eine T-Norm.*

2. *Ist* $card\, U \geqq 2$ *und ist* SQ *ein extensionaler S-Quantor, so ist* σ_{SQ} *eine S-Norm.*

Auf Grund dieses Theorems können wir durch einen gegebenen extensionalen T-Quantor bzw. S-Quantor eindeutig eine T-Norm bzw. S-Norm erzeugen (falls außerdem die triviale Voraussetzung $card\, U \geqq 2$ erfüllt ist).

Somit schließen sich, entsprechend den Fragen 1 und 2, die folgenden Fragen an.

Frage 3. Ist jede T-Norm bzw. jede S-Norm durch einen geeignet gewählten extensionalen T-Quantor bzw. extensionalen S-Quantor erzeugbar ?

Frage 4. Ist die durch **Definition 12.4.3** beschriebene Erzeugungsprozedur eindeutig umkehrbar, d. h. ist jede T-Norm bzw. jede S-Norm durch höchstens einen extensionalen T-Quantor bzw. extensionalen S-Quantor erzeugbar ?

Frage 5. Welches Resultat erhält man, wenn man die beschriebenen Erzeugungsprozeduren hintereinander ausführt, d. h.

Fall 1. $$\tau \Rightarrow ALL_\tau \Rightarrow \tau_{(ALL_\tau)}$$

bzw. $$\sigma \Rightarrow EX_\sigma \Rightarrow \sigma_{(EX_\sigma)}$$

Fall 2. $$TQ \Rightarrow \tau_{TQ} \Rightarrow ALL_{(\tau_{TQ})}$$

bzw. $$SQ \Rightarrow \sigma_{SQ} \Rightarrow EX_{(\sigma_{SQ})}$$

Die folgenden zwei Theoreme geben eine komplette Antwort auf die gestellten Fragen 1 bis 5.

Theorem 12.4.4

1. *Ist* $card\, U \geqq 2$ *und ist* τ *eine T-Norm, so gilt:*

   1.1. ALL_τ *ist ein extensionaler T-Quantor und*

   1.2. $\tau_{(ALL_\tau)}$ *ist eine T-Norm und*

   1.3. $\tau_{(ALL_\tau)} = \tau$.

2. *Ist* $card\, U \geqq 2$ *und ist* σ *eine S-Norm, so gilt:*

   2.1. EX_σ *ist ein extensionaler S-Quantor und*

   2.2. $\sigma_{(EX_\sigma)}$ *ist eine S-Norm und*

   2.3. $\sigma_{(EX_\sigma)} = \sigma$.

Theorem 12.4.5

1. *Ist* $card\, U \geqq 2$ *und ist* TQ *ein extensionaler T-Quantor, so gilt:*

   1.1. τ_{TQ} *ist eine T-Norm und*

   1.2. $ALL_{(\tau_{TQ})}$ *ist ein extensionaler T-Quantor und*

   1.3. $ALL_{(\tau_{TQ})} = TQ$.

2. *Ist* $card\, U \geqq 2$ *und ist* SQ *ein extensionaler S-Quantor, so gilt:*

   2.1. σ_{SQ} *ist eine S-Norm und*

   2.2. $EX_{(\sigma_{SQ})}$ *ist ein extensionaler S-Quantor und*

   2.3. $EX_{(\sigma_{SQ})} = SQ$.

Folgerung 12.4.6

Wenn $card\, U \geqq 2$, *so existiert eine Bijektion zwischen der Menge aller T-Normen und der Menge aller extensionalen T-Quantoren über* U *bzw. zwischen der Menge der S-Normen und der Menge aller extensionalen S-Quantoren über* U.

12.5 Die Quantoren *ALMOST-ALL, INF-EX, MOST* und *MANY*

In der zweiwertigen Logik werden die Quantoren *ALMOST-ALL* („für fast alle x gilt ... “) und *INF-EX* („es gibt unendlich viele x, so daß gilt ... “) wie folgt eingeführt. Dazu sei ein **zweiwertiges** Prädikat P über U, d. h. mit $P : U \to \{0, 1\}$, gegeben.

Definition 12.5.1

1. $ALMOST\text{-}ALL(P) =_{def} 1$ *genau dann, falls es eine* **endliche** *Teilmenge* $V \subseteqq U$ *gibt, so daß für alle* $x \in U \setminus V$ *die Gleichung* $P(x) = 1$ *gilt.*

2. $INF\text{-}EX(P) =_{def} 1$ *genau dann, falls es eine* **unendliche** *Teilmenge* $W \subseteqq U$ *gibt, so daß für alle* $x \in W$ *die Gleichung* $P(x) = 1$ *gilt.*

Zur Formulierung des folgenden Theorems definieren wir für $P : U \to \{0, 1\}$ das Komplement $\overline{P}$ von P wie folgt:

$$(x \in U) \qquad \overline{P}(x) =_{def} 1 - P(x).$$

Theorem 12.5.1

1. *Die Quantoren ALMOST-ALL und INF-EX sind dual, d. h. für jedes $P : U \to \{0,1\}$ gilt*
$$ALMOST\text{-}ALL(P) = 1 - INF\text{-}EX\left(\overline{P}\right)$$
2. *Ist U endlich (und nicht-leer), so gilt für* **jedes** *$P : U \to \{0,1\}$:*
   2.1. $ALMOST\text{-}ALL(P) = 1$
   2.2. $INF\text{-}EX(P) = 0$

Aus Bedingung 2 des obigen Theorems ergibt sich, daß in der zweiwertigen Logik die Quantoren *ALMOST-ALL* und *INF-EX* konstant sind, falls U endlich ist, in diesen Fällen also unbrauchbar sind, weil sie nur triviale Resultate liefern. Ihr eigentlicher Anwendungsbereich betrifft unendliche U, z. B. in der Analysis, wo U z. B. als Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen gewählt wird und so die genannten Quantoren zur Definition grundlegender Begriffe der Analysis, wie etwa „Grenzwert“, „Konvergenz“, „Häufungspunkt“ eine fundamentale Rolle spielen.

Die Ausdehnung dieser Quantoren auf Prädikate $F : U \to \langle 0,1 \rangle$ der Lukasiewiczschen Logik (d. h. auf Fuzzy-Mengen über U) gibt die folgende

Definition 12.5.2

1.
$$ALMOST\text{-}ALL'(F) =_{def} Sup\,\{Inf\,\{F(x) \mid x \in U \setminus V\} \mid V \subseteqq U \text{ und } V \text{ ist endlich}\}$$
2.
$$INF\text{-}EX'(F) =_{def} Sup\,\{Inf\,\{F(x) \mid x \in W\} \mid W \subseteqq U \text{ und } W \text{ ist unendlich}\}$$

Das Komplement $\overline{F}$ einer Fuzzy-Menge $F : U \to \langle 0,1 \rangle$ wird analog zur zweiwertigen Logik durch

$$(x \in U) \qquad \overline{F}(x) =_{def} 1 - F(x)$$

definiert.

Wir müssen nun feststellen, daß für die durch **Definition 12.5.2** definierten Fuzzy-Quantoren ein zu **Theorem 12.5.1** analoges Theorem gilt, nämlich

Theorem 12.5.2

1. *Die Fuzzy-Quantoren $ALMOST\text{-}ALL'$ und $INF\text{-}EX'$ sind dual, d. h. für jede Fuzzy-Menge $F : U \to \langle 0,1 \rangle$ gilt*
$$ALMOST\text{-}ALL'(F) = 1 - INF\text{-}EX'\left(\overline{F}\right)$$
2. *Ist U endlich (und nicht-leer), so gilt für jede Fuzzy-Menge $F : U \to \langle 0,1 \rangle$:*
   2.1. $ALMOST\text{-}ALL'(F) = 1$
   2.2. $INF\text{-}EX'(F) = 0$

Aus Bedingung 2 dieses Theorems ergibt sich, daß die Ausdehnung der Quantoren *ALMOST-ALL* und *INF-EX* von der zweiwertigen Logik in die Fuzzy-Logik mittels **Definition 12.5.2** für endliche U ebenfalls nur triviale Resultate liefert.
Durch die „Fuzzy-Philosophie“ haben wir aber die Möglichkeit, auch für endliche U eine nicht-triviale und im Hinblick auf die Anwendungen sinnvolle Definition dieser Quantoren zu geben, nämlich wie folgt.

Es seien also ein nicht-leeres endliches U und ein $F : U \to \langle 0,1 \rangle$ gegeben.

Definition 12.5.3

1.
$$ALMOST\text{-}ALL''(F) =_{def} \frac{1}{card\ U} \sum_{x \in U} F(x)$$

2.
$$INF\text{-}EX''(F) =_{def} \frac{1}{card\ U} \sum_{x \in U} F(x)$$

Zur Definition von $ALMOST\text{-}ALL''(F)$ haben wir den wohlbekannten relativen $\sum$-Count einer Fuzzy-Menge F über endlichen U verwendet, der in vielen anderen Anwendungen eine wichtige Rolle spielt. Wir sind darüberhinaus der Meinung, daß diese Definition gut das präzisiert, was man intuitiv (oder umgangssprachlich) unter „fast-alle", bezogen auf endliche U, versteht.

Die Definition $INF\text{-}EX''(F)$ erscheint merkwürdig, da sie mit der Definition von $ALMOST\text{-}ALL''(F)$ übereinstimmt. Man wird aber mit Notwendigkeit auf diese Definition geführt, wenn man das Dualitätsprinzip als gültig fordert, d. h. daß die Quantoren $ALMOST\text{-}ALL''$ und $INF\text{-}EX''$ zueinander dual sein sollen.

Die Rechtfertigung dieser Definition (insbesondere von Teil 2) wird durch den folgenden Satz geliefert.

Theorem 12.5.3
Bezogen auf endliche (nicht-leere) Universa U sind die Fuzzy-Quantoren $ALMOST\text{-}ALL''$ und $INF\text{-}EX''$ dual, d. h. für jedes $F : U \to \langle 0, 1\rangle$ gilt

$$ALMOST\text{-}ALL''(F) = 1 - INF\text{-}EX''\left(\overline{F}\right).$$

Nun müssen wir allerdings feststellen, daß sich die Quantoren $ALMOST\text{-}ALL''$ und $INF\text{-}EX''$ für $F : U \to \langle 0, 1\rangle$, falls U unendlich ist, nicht definieren lassen, da in diesem Fall $\frac{1}{card\,U}$ nicht definiert ist und außerdem die Bildung der Summe $\sum_{x\in U} F(x)$ Schwierigkeiten bereitet.

Wir „eliminieren" nun in den **Definitionen** 12.5.2 und 12.5.3 die „unbrauchbaren" Teile und fügen die „brauchbaren" Reste zu der folgenden Definition zusammen.

Definition 12.5.4

1. $ALMOST\text{-}ALL^*(F) =_{def} \begin{cases} ALMOST\text{-}ALL'(F), & \text{falls } U \text{ unendlich} \\ ALMOST\text{-}ALL''(F), & \text{falls } U \text{ endlich} \end{cases}$

2. $INF\text{-}EX^*(F) =_{def} \begin{cases} INF\text{-}EX'(F), & \text{falls } U \text{ unendlich} \\ INF\text{-}EX''(F), & \text{falls } U \text{ endlich} \end{cases}$

Theorem 12.5.4

1. *Die Quantoren $ALMOST\text{-}ALL^*$ und $INF\text{-}EX^*$ sind dual, d. h. für jedes nicht-leere U und jedes $F : U \to \langle 0, 1\rangle$ gilt*
$$ALMOST\text{-}ALL^*(F) = 1 - INF\text{-}EX^*\left(\overline{F}\right).$$

2. *Die Quantoren $ALMOST\text{-}ALL^*$ und $INF\text{-}EX^*$ erfüllen beide die Axiome MON und KOM/ASS.*

3. *Der Quantor ALMOST-ALL* erfüllt im allgemeinen keines der Axiome TQ_1, TQ_2, SQ_1, SQ_2; er ist also weder ein T-Quantor noch ein S-Quantor. Dieselbe Aussage gilt für den Quantor INF-EX*.*

4. *Die Quantoren ALMOST-ALL* und INF-EX* sind kardinalzahl-invariant und extensional.*

Theorem 12.5.5
Für jedes nicht-leere U und jede Fuzzy-Menge $F : U \to \langle 0, 1\rangle$ gilt:

$$ALL(F) \leqq ALMOST\text{-}ALL^*(F) \leqq INF\text{-}EX^*(F) \leqq EX(F).$$

Bemerkung
Zu Definition 12.5.3 könnte man der Meinung sein, daß beim Ansatz

$$ALMOST\text{-}ALL''(F) =_{def} \frac{1}{card\,U} \cdot \sum_{x \in U} F(x)$$

der Wert „zu langsam abfällt" und

$$INF\text{-}EX''(F) =_{def} ALMOST\text{-}ALL''(F)$$

nicht der geläufigen Intention entspricht.

Somit wäre zu diskutieren, ob eine Definition der Form

$$ALMOST\text{-}ALL''_n(F) =_{def} \left[\frac{1}{card\,U} \sum_{x \in U} F(x)\right]^n,$$

wobei n eine fixierte natürliche Zahl mit $n \geqq 2$ ist, bessere Ergebnisse liefert. Zur Wahrung des Dualitätsprinzips müßte man dann

$$INF\text{-}EX''_n(F) = 1 - ALMOST\text{-}ALL''_n\left(\overline{F}\right)$$

definieren.

Für den Spezialfall $n = 2$ erhält man dann für $INF\text{-}EX''_2(F)$ die Gleichung

$$INF\text{-}EX''_2(F) = \frac{2}{card\,U} \cdot \sum_{x \in U} F(x) - \left[\frac{1}{card\,U} \cdot \sum_{x \in U} F(x)\right]^2.$$

Von **Theorem 12.5.5** würde (für endliche U) zwar noch

$$ALMOST\text{-}ALL''_2(F) \leqq INF\text{-}EX''_2(F)$$

gelten, jedoch nicht mehr allgemein

$$ALL(F) \leqq ALMOST\text{-}ALL''_2(F)$$

und auch nicht mehr allgemein

$$INF\text{-}EX''_2(F) \leqq EX(F),$$

was unserer Intention eklatant widerspricht.

Es bleibt hier offen, ob für $n \geqq 3$ ähnliche Effekte auftreten. Auch soll nicht diskutiert werden, ob zur Definition von *ALMOST-ALL* für endliche U evtl. ganz andere Ansätze bessere Resultate liefern.

Wir wollen jetzt den Fuzzy-Quantor *ALMOST-ALL** als „Basis-Quantor" betrachten, d. h. ihn dazu verwenden, um andere („echte") Fuzzy-Quantoren zu definieren.

Als erstes definieren wir — Zadeh folgend und wie in vielen fuzzy-logischen Untersuchungen üblich — für $r \in \langle 0, 1\rangle$:

$$\begin{aligned} \mathit{more\text{-}or\text{-}less}(r) &=_{def} \sqrt[2]{\quad} \\ \mathit{very}(r) &=_{def} r^2 \end{aligned}$$

Sodann setzen wir:

Definition 12.5.5

1. $\mathit{MOST}(F) =_{def} \mathit{more\text{-}or\text{-}less}(\mathit{ALMOST\text{-}ALL}^*(F))$

2. $\mathit{MANY}(F) =_{def} \mathit{more\text{-}or\text{-}less}(\mathit{MOST}(F))$

Aus dieser Definition ergibt sich trivial die

Folgerung 12.5.6

1. $\mathit{MOST}(F) = \mathit{very}(\mathit{MANY}(F))$

2. $\mathit{ALMOST\text{-}ALL}^*(F) = \mathit{very}(\mathit{very}(\mathit{MANY}(F)))$

13. Qualifikatoren

Anhang

Verzeichnis der Definitionen und Theoreme

Definitionen

Theoreme und Folgerungen

Symbolverzeichnis

Literaturverzeichnis

[1] Asser, Günter: *Aussagenkalkül*, Band 1 der Reihe *Einführung in die mathematische Logik*. Verlag Harri Deutsch, Thun·Frankfurt/Main, 6. Auflage, 1983.

[2] Asser, Günter: *Prädikatenkalkül der ersten Stufe*, Band 2 der Reihe *Einführung in die mathematische Logik*. Verlag Harri Deutsch, Thun·Frankfurt/Main, 2. Auflage, 1976.

[3] Asser, Günter: *Prädikatenlogik höherer Stufe*, Band 3 der Reihe *Einführung in die mathematische Logik*. Verlag Harri Deutsch, Thun·Frankfurt/Main, 1981.

[4] Bandemer, Hans und Siegfried Gottwald: *Einführung in Fuzzy-Methoden*. Akademie Verlag, Berlin, 4. Auflage, 1993.

[5] Barwise, J. and F. Feferman (editors): *Model-Theoretic Logics*. Perspectives in Mathematical Logics. Springer-Verlag, 1985.

[6] Bellmann, R. and M. Giertz: *On the analytic formalism of the theory of fuzzy sets*. Information Sciences, 5:149–156, 1973.

[7] Black, M.: *Vagueness*. Philosophy of Science, 4, 1937.

[8] Borkowski, L. (editor): *Selected works of* J. Łukasiewicz. North-Holland, Amsterdam, 1970.

[9] Church, A.: *A note on the Entscheidungsproblem*. Journal of Symbolic Logic, 1:40–41, 1936.

[10] Dombi, J.: *A general class of fuzzy operators, the de morgan class of fuzzy operators and fuzziness measures induced by fuzzy operators*. Fuzzy Sets and Systems, 8:149–163, 1982.

[11] Dubois, D. and H. Prade: *New results about properties and semantics of fuzzy set-theoretic operators*. In Wang, P. P. and S. K. Chang (editors): *Fuzzy Sets: Theory and Applications to Policy Analysis and Information Systems*, pages 59–75. Plenum Press, New York, 1980.

[12] Dubois, Didier and Henri Prade: *A review of fuzzy set aggregation connectives*. Information Sciences, 36:85–121, 1985.

[13] Dubois, Didier and Henri Prade: *Fuzzy sets in approximate reasoning, Part 1: Inference with possibility distributions*. Fuzzy Sets and Systems, 40:142–202, 1991. Special Memorial Volume: 25 years of fuzzy sets.

[14] Frank, M. J.: *On the simultaneous associativity of $f(x, y)$ and $x + y - f(x, y)$.* Aequationes Math., 19:194–226, 1979.

[15] Gödel, Kurt: *Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls.* Monatshefte für Mathematik und Physik, 37:349–360, 1930.

[16] Goguen, J. A.: *The logic of inexact concepts.* Synthese, 3/4:325–373, 1969.

[17] Gottwald, Siegfried: *Mehrwertige Logik. Eine Einführung in Theorie und Anwendungen.* Akademie-Verlag, Berlin, 1989.

[18] Gottwald, Siegfried: *Fuzzy Sets and Fuzzy Logic. Foundations of Application — from a Mathematical Point of View.* Artificial Intelligence. Vieweg, 1993.

[19] Gupta, M. M., R. K. Ragade, and R. R. Yager (editors): *Advances in Fuzzy Set Theory and Applications.* Amsterdam, New York, Oxford, 1979.

[20] Hamacher, H.: *Über logische Verknüpfungen unscharfer Aussagen und deren zugehörige Bewertungsfunktionen.* In: Trappl, R., G. J. Klir und L. Ricciardi (Herausgeber): *Progress in Cybernetics and Systems Research*, Band 3, Seiten 276–288. Hemisphere, Washington, D.C., 1978.

[21] Kalmár, L.: *Contributions to the reduction theory of the decision problem — Fourth paper: Reduction to the case of a finite set of individuals.* Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae, 2:125–142, 1951.

[22] Klir, George J. and Tina A. Folger: *Fuzzy Sets, Uncertainty, and Information.* Prentice Hall, 1988.

[23] Ling, C.-H.: *Representations of associative functions.* Publications Mathematicae Debrecen, 12:189–212, 1965.

[24] Łukasiewicz, Jan: *Die logischen Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung.* Krakow, 1913.

[25] Łukasiewicz, Jan: *O logice trójwartościowej (Über die dreiwertige Logik).* Ruch Filozofiezny, 5:170–171, 1920.

[26] Łukasiewicz, Jan: *Philosophische Bemerkungen zu mehrwertigen Systemen des Aussagenkalküls.* Comptes Rendus Séances Sociètè des Sciences et Lettres Varsovie, 23:51–77, 1930.

[27] Łukasiewicz, Jan und Alfred Tarski: *Untersuchungen über den Aussagenkalkül.* Computes Rendus Séances Société des Sciences et Lettres Varsovie, 23:30–50, 1930. Nachgedruckt (engl. Fassung) in [8] and [37].

[28] Mostowski, A.: *On a generalization of quantifiers.* Fundamenta mathematicae, 44:12–36, 1957.

[29] Novák, V.: *Fuzzy Sets and their Applications.* Adam Hilger, 1989.

[30] Post, E. L.: *Introduction to a general theory of elementary propositions.* American Journal of Mathematics, 43:163–185, 1921.

[31] Schmidt, Jürgen: *Mengenlehre. Einführung in die axiomatische Mengenlehre*, Band 1. B.I.–Wissenschaftsverlag, Mannheim, 2. Auflage, 1973.

[32] Schmidt, Peter H.: *Theorie der logischen Programmierung — Eine elementare Einführung.* Springer-Verlag, 1992.

[33] Schweizer, B. and A. Sklar: *Statistical metric spaces.* Pacific Journal of Mathematics, 10:313–334, 1960.

[34] Schweizer, B. and A. Sklar: *Associative functions and statistical triangle inequalities.* Publicationes Mathematicae Debrecen, 8:169–186, 1961.

[35] Sinha, D. and E. R. Dougherty: *Fuzzyfication of set inclusion: Theory and applications.* Fuzzy Sets and Systems, 55:14–42, 1993.

[36] Sugeno, M.: *Fuzzy measures and fuzzy integrals — a survey.* In Gupta, M. M., G. N. Saridis, and B. R. Gaines (editors): *Fuzzy Automata and Decision Processes*, pages 89–102. North-Holland, 1977.

[37] Tarski, A.: *Logic, Semantics, Metamathematics.* Oxford, 1956.

[38] Tilli, Thomas: ***Fuzzy**-Logik. Grundlagen, Anwendungen, Hard- und Software.* Franzis-Verlag, München, 1991.

[39] Trachtenbrot, B. A.: *On the algorithmic unsolvability of the decision problem in finite domains.* Dokl. Akad. Nauk SSSR, 70:569–572, 1950. (In Russian).

[40] Yager, R. R.: *On a general class of fuzzy connectives.* Fuzzy Sets and Systems, 4:235–242, 1980.

[41] Yager, R. R.: *Reasoning with fuzzy quantified statements, part I.* Kybernetes, 14:233–240, 1985.

[42] Yager, R. R.: *Decisions with usual values.* In Jones, A., A. Kaufmann, and H. J. Zimmermann (editors): *Fuzzy Sets Theory and Applications*, pages 209–217. Reidel, Dortrecht, 1986.

[43] Yager, R. R.: *On implementing ususal values.* In *Second Workshop on Uncertainty in Artificial Intelligence*, pages 339–346, Philadelphia, PA, 1986.

[44] Yager, R. R.: *Reasoning with fuzzy quantified statements, part II.* Kybernetes, 15:111–120, 1986.

[45] Yager, R. R.: *On implementing usual values in uncertainty.* In Lemmer, J. F. and L. N. Kanal (editors): *Artificial Intelligence*, volume 2, pages 209–217. Elesevier Science Publishers, New York, 1988.

[46] Yager, R. R.: *On usual values in common sense reasoning.* Fuzzy Sets and Systems, 30:239–255, 1989.

[47] Yager, R. R.: *Connectives and quantifiers in fuzzy sets.* Fuzzy Sets and Systems, 40:39–75, 1991.

[48] Yager, R. R., S. Ovchinnikov, R. M. Tong, and H. T. Nguyen (editors): *Fuzzy Sets and Applications — Selected Papers by L. A. Zadeh.* John Wiley & Sons, 1987.

[49] Zadeh, Lotfi A.: *Fuzzy sets.* Information and Control, 8:338–353, 1965. Reprinted in [48].

[50] ZADEH, LOTFI A.: *A fuzzy-set-theoretic interpretation of linguistic hedges.* Journal of Cybernetics, 2:4–34, 1972. Reprinted in [48].

[51] ZADEH, LOTFI A.: *Outline of a new approach to the analysis of complex systems and decision processes.* IEEE Trans. on Systems, Man and Cybernetics, 3(1):28–44, 1973. Reprinted in [48].

[52] ZADEH, LOTFI A.: *A computational approach to fuzzy quantifiers in natural language.* Computers and Maths with Applications, 9:149–184, 1983. Reprinted in [48].

[53] ZADEH, LOTFI A.: *A computational theory of dispositions.* In *Int. Conference Computational Linguistics*, pages 312–318, 1984.

[54] ZADEH, LOTFI A.: *Syllogistic reasoning as a basis for combination of evidence in expert systems.* In *IJCAL*, pages 417–419, Los Angeles, CA, 1985.

[55] ZADEH, LOTFI A.: *Syllogistic reasoning in fuzzy logic and its application to usuality and reasoning with dispositions.* IEEE Trans. on Systems, Man and Cybernetics, SMC-15:754–763, 1985. Reprinted in [48].

[56] ZADEH, LOTFI A.: *Dispositional logic and commonsense reasoning.* In *Second Annual Artificial Intelligence Forum*, pages 375–389, NASA-Ames Research Center, Moffett-Field, CA, 1987.

[57] ZADEH, LOTFI A.: *On computational theory of dispositions.* International Journal of Intelligent Systems, 2:39–63, 1987.

[58] ZADEH, LOTFI A.: *Dispositional logic.* Appl. Math. Lett., 1:95–99, 1988.

[59] ZIMMERMANN, H.-J. and P. ZYSNO: *Latent connectives in human decision making.* Fuzzy Sets and Systems, 4:37–51, 1980.

Index