E i n f ü h r u n g
in die Theorie
der Minimalflächen

Sommersemester 1998

Prof. Dr. E. Kuwert

Mathematisches Institut

Universität Freiburg

Zusammenfassung

Die vorliegende Vorlesung wurde im Sommersemester 1998 vornehmlich für Studenten und Studentinnen des 4. bzw. 6. Fachsemesters gehalten. Sie befaßt sich aussschließlich mit der Theorie zweidimensionaler, parametrisierter Minimalflächen in $\mathbb{R}^3$. Dieser Ausschnitt der Theorie der Minimalflächen erschien besonders geeignet, weil er keine Vorkenntnisse in partiellen Differentialgleichungen und Maßtheorie erfordert, schnell zu interessanten, globalen Fragestellungen führt und nicht zuletzt die klassische Funktionentheorie weiterführt oder anwendet.

Aufgrund der unterschiedlichen Voraussetzungen begann die Vorlesung mit komplexer Analysis, wobei auf den Integralsatz von Cauchy bewußt verzichtet wurde. Das Zentrum bildet dann die Lösung des Plateauschen Problems nach Douglas bzw. Courant. Hier werden auch einige schwierige Fragen andiskutiert. Im letzten Kapitel wird die Weierstraßdarstellung hergeleitet. Leider konnte aus Zeitgründen nicht systematisch auf die in letzte 15 Jahren neu gefundenen Beispiele eingegangen werden.

Die Vorlesung konzentriert sich ganz auf einen Aspekt der Theorie. Es wird empfohlen, sich z. B. in [13] einen Überblick zu verschaffen.

Ich bedanke mich bei Frau L. Frei und Herrn W. Bürger für die exzellente Gestaltung des Textes und der Bilder.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung: Die Gleichung **1**

1 Grundlagen der komplexen Analysis **8**

1.1 Harmonische Funktionen 9

1.2 Holomorphe Funktionen 17

1.3 Das Dirichletproblem für den Einheitskreis 22

2 Das Plateausche Problem **31**

2.1 Konstruktion der Lösung 31

2.2 Regularitäts-Eigenschaften der Lösung 39

2.3 Globale Eigenschaften der Lösung 47

3 Geometrie und Beispiele von Minimalflächen **56**

3.1 Geometrische Grundbegriffe 56

3.2 Die Weierstraßdarstellung 62

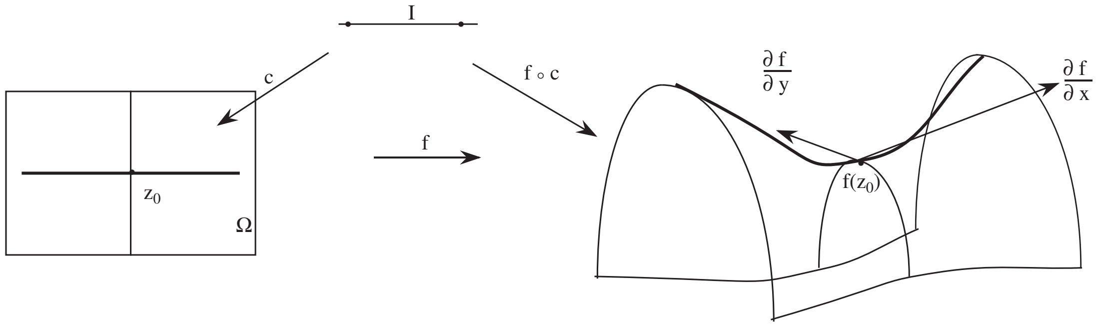
Einleitung: Die Gleichung

Eine Fläche im dreidimensionalen Raum können wir durch eine Abbildung f eines zweidimensionalen Parametergebiets Ω in den $\mathbb{R}^3$ beschreiben. Dabei nehmen wir stets an, daß f wenigstens einmal stetig differenzierbar ist. Neben dieser *analytischen Regularität* ist außerdem eine geometrische Bedingung zu stellen, denn wir werden zum Beispiel eine konstante Abbildung nicht als geeignete Fläche ansehen.

Definition Eine Abbildung $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ offen, heißt in $z_0 \in \Omega$ (*geometrisch*) *regulär*, falls gilt:

$$\operatorname{rang} df(z_0) = 2 \Leftrightarrow \{\frac{\partial f}{\partial x}(z_0), \frac{\partial f}{\partial y}(z_0)\} \quad \text{linear unabhängig.}$$

Die Abbildung f heißt *Immersion*, falls sie in allen $z_0 \in \Omega$ regulär ist.



Sei f eine Immersion. Dann können wir die Längen- und Winkelverhältnisse im *Tangentialraum* $\operatorname{Bild} df(z_0)$ auf den $\mathbb{R}^2$ übertragen, indem wir das Skalarprodukt

$$g(z_0)(v, w) = \langle df(z_0) \cdot v, df(z_0) \cdot w \rangle \quad (v, w \in \mathbb{R}^2)$$

definieren. Die Abbildung $df(z_0)$ bildet den Skalarproduktraum $(\mathbb{R}^2, g(z_0)(\cdot\,,\cdot))$ längen- und damit auch winkeltreu auf $(\operatorname{Bild} df(z_0), \langle\,\cdot\,,\cdot\rangle)$ ab.

Bezüglich der Standardbasis wird $g(z_0)$ durch die Gramsche Matrix

$$(g_{ij}(z_0)) = (g(z_0)(e_i, e_j)) = \begin{pmatrix} \langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial x} \rangle & \langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \rangle \\ \langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \rangle & \langle \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y} \rangle \end{pmatrix}$$

dargestellt. Indem wir z_0 als variabel auffassen, erhalten wir ein ortsabhängiges Skalarprodukt $g(z)$ mit ortsabhängiger Matrix $(g_{ij}(z))$, eine *Riemannsche Metrik*. Diese beschreibt die Längenverhältnisse auf der Fläche in folgender Weise: ist $c \in C^1(I, \Omega)$ eine Parameterkurve, so ergibt sich die Länge der Bildkurve $f \circ c : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ zu

$$\begin{aligned} L(f \circ c) &= \int_I |\frac{d}{dt}(f \circ c)(t)|\, dt \\ &= \int_I |df(c(t)) \cdot \dot{c}(t)|\, dt \\ &= \int_I \langle df(c(t)) \cdot \dot{c}(t), df(c(t)) \cdot \dot{c}\rangle^{\frac{1}{2}} dt \\ &= \int_I g(c(t))(\dot{c}(t), \dot{c}(t))^{\frac{1}{2}} dt \\ &= \int_I \left(\sum_{i,j=1}^{2} g_{ij}(c(t)) \dot{c}^i(t) \dot{c}^j(t) \right)^{\frac{1}{2}} dt. \end{aligned}$$

Um den *Flächeninhalt einer Immersion* f zu berechnen, betrachten wir zunächst den Fall einer linearen Abbildung $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ mit Rang $F = 2$. Wir wählen eine Orthonormalbasis $\{w_1, w_2\}$ vom Bild T und definieren die Isometrie $R : \mathrm{Bild}\, T \to \mathbb{R}^2$ durch $Rw_j = e_j$ für $j = 1, 2$. Also folgt

$$\langle R^* R\, w_j, w_i\rangle = \langle Rw_j, Rw_i\rangle = \langle w_j, w_i\rangle$$

bzw. $R^*R = \mathbb{1}$. Für das Bild von $Q = [0,1]^2$ ergibt sich

$$\begin{aligned} A(FQ) &= A(RFQ) = |\det(RF)| \\ &= \sqrt{\det((RF)^*(RF))} = \sqrt{\det(F^*F)} \\ &= \sqrt{|Fe_1|^2 |Fe_2|^2 - \langle Fe_1, Fe_2\rangle^2}. \end{aligned}$$

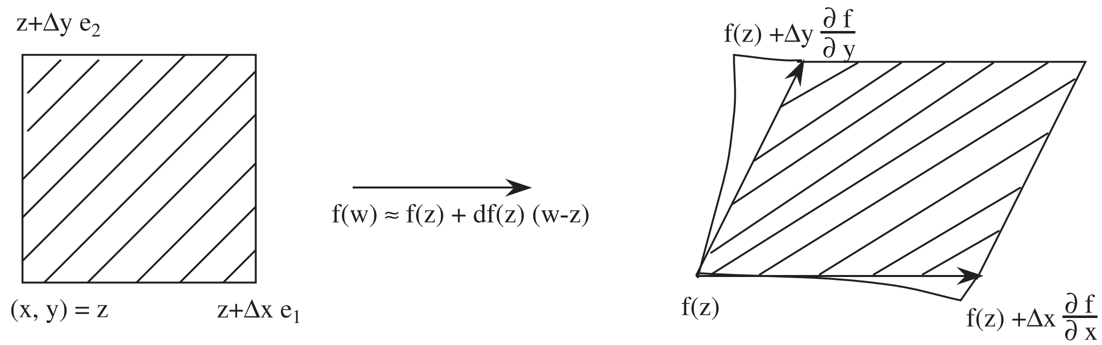
In $\mathbb{R}^3$ läßt sich dieses Ergebnis auch mittels des Dach- bzw. Kreuzprodukts formulieren, das durch

$$\langle a \wedge b, c\rangle := \det(a, b, c)$$

erklärt ist. Sei $\nu = \frac{Fe_1 \wedge Fe_2}{|Fe_1 \wedge Fe_2|}$ die Einheitsnormale auf Bild F. Dann folgt

$$\begin{aligned} A(FQ) &= V\{Fz + t\nu : \, z \in Q,\ 0 \le t \le 1\} \\ &= \det(Fe_1, Fe_2, \nu) \\ &= |Fe_1 \wedge Fe_2|. \end{aligned}$$

Sei jetzt $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$. Dann bildet f ein kleines Quadrat mit Kantenlänge $\Delta x = \Delta y$ in etwa linear ab:



Der Beitrag des kleinen Quadrats zum Flächeninhalt des Bildes ist also näherungsweise

$$\begin{aligned}\Delta A &= \sqrt{\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|^2 \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|^2 - \left\langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right\rangle^2}\,\Delta x \Delta y \\ &= \sqrt{\det g_{ij}(z)}\,\Delta x \Delta y \\ &= \left|\frac{\partial f}{\partial x} \wedge \frac{\partial f}{\partial y}\right| \Delta x \Delta y.\end{aligned}$$

Definition Sei $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$ und $g_{ij} = \langle \frac{\partial f}{\partial x^i}, \frac{\partial f}{\partial x^j}\rangle$ $(i, j = 1, 2)$. Der *Flächeninhalt von* f ist

$$A(f) = \int_\Omega \sqrt{\det g_{ij}(z)}\, dx\, dy.$$

Der Begriff *Minimalfläche* hat eine naive Interpretation als Fläche mit kleinstmöglichem Inhalt. Allerdings ist dabei zu klären, unter welchen Bedingungen der Flächeninhalt minimiert wird. In seinem Buch *Statique expérimentale et théoretique des liquides soumis aux seules forces moléculaires* von 1873 berichtet der Physiker Plateau von Versuchen, bei denen ein geschlossener Draht Γ in Seifenlauge eingetaucht und wieder herausgezogen wird. Unabhängig von der Form von Γ spannt sich dabei in den Draht eine Seifenhaut Σ ein. Da deren potentielle Energie proportional zu ihrer Oberfläche ist, wird Σ den Flächeninhalt *bei gegebener Berandung* Γ minimieren. Präziser ist es für die physikalische Realisierbarkeit nur notwendig, daß Σ ein stabiler Gleichgewichtspunkt ist. Es könnte also durchaus andere Seifenhäute mit Rand Γ und geringerem Flächeninhalt geben, aber hinreichend kleine Störungen von Σ unter Beibehaltung der Randkurve sollen den Inhalt stets vergrößern. Im Kontext der parametrisierten Flächen kann dies so ausgedrückt werden.

$$A(f) \leq A(f + \phi) \text{ für alle } \textit{hinreichend kleinen } \phi \in C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R}^3).$$

Diese Definition ist jedoch nicht sehr praktikabel, weil sie eine globale Eigenschaft formuliert, welche von der Fläche als Gesamtobjekt abhängt und nicht äquivalent durch eine in allen Punkten gültige, lokale Bedingung ausgedrückt werden kann. Es hat sich deshalb als sinnvoll erwiesen, auf die Minimierungseigenschaft in der Definition gänzlich zu verzichten und lediglich die aus ihr resultierende notwendige Bedingung zu verlangen.

Definition Eine Immersion $f \in C^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$ mit $A(f) < \infty$ heißt *Minimalfläche*, wenn gilt:

$$\frac{d}{d\varepsilon} A(f + \varepsilon\phi)|_{\varepsilon=0} = 0 \quad \text{für alle } \phi \in C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R}^3).$$

Wir wollen dies in eine lokal formulierbare Bedingung, also eine Differentialgleichung, übersetzen. Dazu erinnern wir zunächst an folgende Aussage.

Satz (*Fundamentallemma der Variationsrechnung*)
Sei $F \in C^0(\Omega, \mathbb{R}^n)$ (bzw. allgemeiner $F \in L^1_{\text{loc}}(\Omega, \mathbb{R}^n)$) und es gelte
$\int_\Omega \langle F(z), \phi(z)\rangle dx\, dy = 0$ für alle $\phi \in C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Dann ist $F(z) \equiv 0$.

Ich will jetzt die in der Definition auftretende Ableitung ausrechnen. Für festes $z \in \Omega$ sei

$$\begin{aligned} g_{ij}(\varepsilon) &= \langle \partial_i f(z) + \varepsilon \partial_i \phi(z),\ \partial_j f(z) + \varepsilon \partial_j \phi(z)\rangle, \\ g_{ij} &= \langle \partial_i f(z), \partial_j f(z)\rangle, \\ g'_{ij}(0) &= \langle \partial_i \phi(z), \partial_j f(z)\rangle + \langle \partial_i f(z), \partial_j \phi(z)\rangle. \end{aligned}$$

Es gilt die Formel

$$\frac{d}{d\varepsilon} \det g(\varepsilon)|_{\varepsilon=0} = \det g \cdot \operatorname{tr}(g^{-1} g'(0)).$$

Ich verwende $(g^{-1})_{ij} =: g^{ij}$ und erhalte

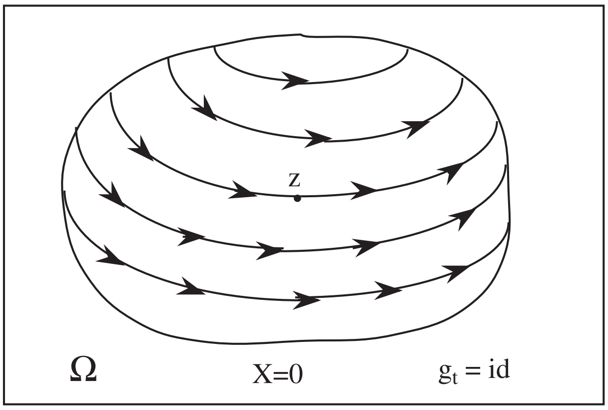
$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\varepsilon} A(f + \varepsilon\phi)|_{\varepsilon=0} &= \frac{d}{d\varepsilon} \int_\Omega (\det g(\varepsilon))^{\frac{1}{2}}\, dx\, dy \\
&= \int_\Omega (\det g)^{\frac{1}{2}} \sum_{i,j} g^{ij} \langle \partial_j f, \partial_i \phi \rangle\, dx\, dy \\
&= \int_\Omega \langle - \frac{1}{\sqrt{\det g}} \sum_{i,j} \partial_i (\sqrt{\det g}\, g^{ij}\, \partial_j f), \phi \rangle\, dA_g \\
&= \int_\Omega \langle -\Delta_g f, \phi \rangle\, dA_g .
\end{aligned}$$

Diese Rechnung gilt analog für beliebige (nicht notwendig affine) Variationen $f(\varepsilon, \cdot)$:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial\varepsilon} f(\varepsilon, \cdot)|_{\varepsilon=0} = \phi \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{d\varepsilon} A(f(\varepsilon, \cdot))|_{\varepsilon=0} = -\int_\Omega \langle \Delta_g f, \phi \rangle\, dA_g}$$

Bemerkung Der Vektor $\Delta_g f$ steht in allen Punkten senkrecht auf die Fläche. Sei dazu $X \in C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R}^2)$ ein Vektorfeld und $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R} \times \Omega, \Omega)$ der zugehörige Fluß:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}(t, z) = X(\varphi(t, z)), \quad \varphi(0, z) = z$$



Da $\varphi_t = \varphi(t, \cdot)$ Diffeomorphismus von Ω, gilt $A(f \circ \varphi_t) = A(f)$ wegen Invarianz gegenüber Umparametrisierungen; außerdem haben wir $\frac{\partial}{\partial\varepsilon} f(\varphi_t(z))|_{t=0} = df(z) \cdot X(z)$. Es folgt

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{d}{dt} A(f \circ \varphi_t)|_{t=0} \\
&= -\int_\Omega \langle \Delta_g f, df \cdot X \rangle dA_g \\
&= -\int_\Omega g(df^*(\Delta_g f), X) dA_g .
\end{aligned}$$

Aus dem Fundamentallemma der Variationsrechnung folgt nun $df^*(\Delta_g f) \equiv 0$, das heißt

$$\Delta_g f \in \ker df^* = (\mathrm{Bild}\, df)^\perp \quad \text{für alle } z.$$

Definition Sei $f \in C^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$ eine Immersion mit induzierter Metrik g. Dann heißt $\mathbf{H} = \Delta_g f$ der *mittlere Krümmungsvektor* von f. Damit gilt:

$$f \text{ ist Minimalfläche} \Leftrightarrow \mathbf{H} = \Delta_g f = 0.$$

Dies ist ein System von drei partiellen Differentialgleichungen für die Komponentenfunktionen von f. Die Gleichungen sind untereinander gekoppelt und nichtlinear, da die Metrik $g_{ij} = \langle \partial_i f, \partial_j f \rangle$ von f abhängt. Sei $\phi : \Omega^* \to \Omega$ ein C^2-Diffeomorphismus und g^* die durch die Umparametrisierung $f \circ \phi$ induzierte Metrik. Als Konsequenz der Invarianz des Flächeninhalts unter Umparametrisierungen gilt dann allgemein

$$\Delta_{g^*}(f \circ \phi) = (\Delta_g f) \circ \phi.$$

Insbesondere ist mit f auch $f \circ \phi$ eine Lösung der Minimalflächengleichung. Es ist für die gesamte Theorie der zweidimensionalen Minimalflächen entscheidend, daß sich die Gleichung durch Wahl geeigneter (Um-)parametrisierungen wesentlich vereinfacht.

Definition Eine Metrik g auf Ω heißt *konform äquivalent* zur Standardmetrik $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$, wenn es eine Funktion $\lambda : \Omega \to (0, \infty)$ gibt mit

$$g(z) = \lambda^2(z) \langle \cdot\,, \cdot \rangle \quad \text{für alle } z \in \Omega.$$

Bemerkung. Dies ist genau dann der Fall, wenn der Winkel

$$\sphericalangle_g(v, w) := \arccos \frac{g(v, w)}{\|v\|_g \, \|w\|_g} \quad (v, w \in \mathbb{R}^2)$$

in allen $z \in \Omega$ mit dem euklidischen Winkel übereinstimmt.

Definition Eine Immersion $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$ heißt *konform parametrisiert*, wenn die induzierte Metrik konform äquivalent zur Standardmetrik ist. Äquivalent dazu:

- $\left| \frac{\partial f}{\partial x} \right|^2 - \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right|^2 = \langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \rangle = 0.$
- Schneiden sich zwei Geraden in Ω im Winkel γ, so schneiden sich ihre Bildkurven auch mit dem Winkel γ (*Winkeltreue*).

Zentrale Beobachtung. Für eine konform parametrisierte Immersion $f \in C^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$ sind äquivalent:

- f ist Minimalfläche
- $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$

Beweis. Wir haben $\langle \partial_i f, \partial_j f \rangle = \lambda^2 \delta_{ij}$ und somit

$$\Delta_g f = \frac{1}{\lambda^2} \sum_{i,j} \partial_i (\lambda^2 \frac{1}{\lambda^2} \delta^{ij} \partial_j f) = \frac{1}{\lambda^2} \Delta f.$$

□

Da harmonische Funktionen, also Lösungen der Laplacegleichung $\Delta u = 0$, Realteile holomorpher Funktionen sind, ist hierdurch ein Zusammenhang von komplexer Analysis (i. e. der klassischen Funktionentheorie) mit unserem Thema gegeben. In der Vorlesung sollen im wesentlichen zwei Aspekte aus der Theorie der Minimalflächen vorgestellt werden, wobei sich der Bezug zu komplex analytischen Funktionen jeweils als entscheidend erweisen wird:

(1) *Lösung des Plateauschen Problems*

Ausgehend von Seifenhäuten und ihrer Auffassung als stabile Gleichgewichtspunkte des Flächenfunktionals sind wir zu der Minimalflächengleichung gelangt. In der Variationsrechnung sucht man umgekehrt Lösungen dieser Gleichung unter geeigneten Nebenbedingungen zu finden, indem man das Flächenfunktional minimiert. Die Nebenbedingungen sind vor allem Vorgaben an die Randkurve. Diese könnte wie ein Draht fest vorgeschrieben sein (*Plateauproblem*), auf einer Glasfläche entlangrutschen können (*freies Randwertproblem*) oder durch einen seinerseits im Raum beweglichen Draht fester Länge gegeben sein (*Fadenproblem*). Weiter kann man nach Lösungen unterschiedlichen topologischen Typs, z. B. solchen vom Typ des Möbiusbandes, sowie auch nach nichtminimierenden Minimalflächen fragen. Für die Lösung des Plateauproblems durch J. Douglas, die wir in einer Version von R. Courant vorstellen, wurde 1936 eine der beiden ersten Fields-Medaillen verliehen. Der Ansatz von Douglas basiert auf folgender

Beobachtung. Für $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$ sei

$$\begin{aligned} A(f) &= \int_\Omega \sqrt{\det(df^*\, df)}\, dx\, dy < \infty \quad \text{der Flächeninhalt} \\ E(f) &= \frac{1}{2}\int_\Omega \operatorname{tr}(df^*\, df)\, dx\, dy \quad \text{das Dirichletintegral von } f. \end{aligned}$$

Dann gilt $A(f) \le E(f)$ sowie die Äquivalenz

$$\begin{aligned} A(f) = E(f) \quad &\Leftrightarrow \quad df^*\, df = \frac{1}{2}|df|^2 \mathbb{1} \\ &\Leftrightarrow \quad \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|^2 - \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|^2 = \langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\rangle = 0. \end{aligned}$$

Beweis. Sind $\lambda_1, \lambda_2 \ge 0$ die Eigenwerte von $df^*\, df$ im Punkt $z_0 \in \Omega$, so gilt dort

$$\sqrt{\det(df^*\, df)} = \sqrt{\lambda_1 \lambda_2} \le \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} = \frac{1}{2}\operatorname{tr}(df^*\, df)$$

mit Gleichheit genau für $\lambda_1 = \lambda_2$. □

Sei $f \in C^1(B, \mathbb{R}^3)$ eine Immersion der Kreisscheibe $B = \{z \in \mathbb{R}^2 : |z| < 1\}$. Falls es einen Diffeomorphismus φ von B gibt, so daß die Umparametrisierung $f \circ \phi$ eine konform parametrisierte Fläche ist, so folgt

$$(*) \qquad A(f) = \inf\{E(f \circ \phi) : \phi \in \operatorname{Diff}(B)\}.$$

Die Existenz einer konformen Umparametrisierung ist allerdings nicht trivial; ihr Nachweis erfordert zum Beispiel den Uniformisierungssatz von Koebe. Die schwächere Aussage $(*)$ läßt sich jedoch einfacher zeigen.

Ist nun $\mathcal{C}$ eine Klasse von Immersionen $f \in C^1(B, \mathbb{R}^3)$ der Kreisscheibe, so daß mit $f \in \mathcal{C}$ auch $f \circ \phi \in \mathcal{C}$ gilt für jeden Diffeomorphismus ϕ von B, und minimiert f_0 das Dirichletintegral in $\mathcal{C}$, so minimiert f_0 wegen $(*)$ auch den Flächeninhalt in $\mathcal{C}$, es gilt $A(f_0) = E(f_0)$ und f_0 ist konform parametrisiert. Der Versuch, das Flächenfunktional selbst in einer geeigneten Klasse $\mathcal{C}$ zu minimieren, wäre wegen der großen Invarianzgruppe $\operatorname{Diff}(B)$ von vornherein zum Scheitern verurteilt. Wäre etwa f_0 bereits das gesuchte Minimum, so sind die Umparametrisierungen $f_0 \circ \phi$ für *beliebiges* $\phi \in \operatorname{Diff}(B)$ alle weitere Minima. Es wäre deshalb nicht möglich, für eine A-Minimalfolge geeignete Normen abzuschätzen. Die Invarianzgruppe des Dirichletintegrals ist dagegen nur die dreidimensionale Gruppe der Möbiustransformationen des Einheitskreises, und die Kontrolle einer Minimalfolge erscheint viel aussichtsreicher.

(2) *Konstruktion von Beispielen*

Die Komponentenfunktionen einer konform parametrisierten Minimalfläche sind harmonisch. Hieraus leitete Weierstraß eine Darstellungsformel für Minimalflächen mittels zweier holomorpher Funktionen her. Vor allem sein Schüler H. A. Schwarz fand hiermit eine Reihe neuer Beispiele. In den sechziger Jahren zeigte R. Osserman, daß die zunächst lokal definierten Funktionen in der Weierstraßdarstellung als meromorphe Daten auf der zugrundeliegenden, kompakten Riemannschen Fläche global erklärt sind, sofern die Minimalfläche endliche Totalkrümmung besitzt. Auf dieser Grundlage sind in den letzten 15 Jahren eine Vielzahl neuer Flächen gefunden worden:

- Bis 1984 hatte man vermutet, daß die Ebene und das Katenoid die einzigen eingebetteten, das heißt selbstschnittfreien, Minimalflächen ohne Rand mit endlicher Totalkrümmung sind. Das Katenoid ist rotationssymmetrisch, wodurch sich seine Berechnung auf die Lösung einer gewöhnlichen Differentialgleichung reduziert. Im genannten Jahr gelang C. Costa die Konstruktion einer weiteren solchen Fläche, die durch elliptische Funktionen gegeben ist. Seitdem hat man eine Reihe weiterer Beispiele gefunden.

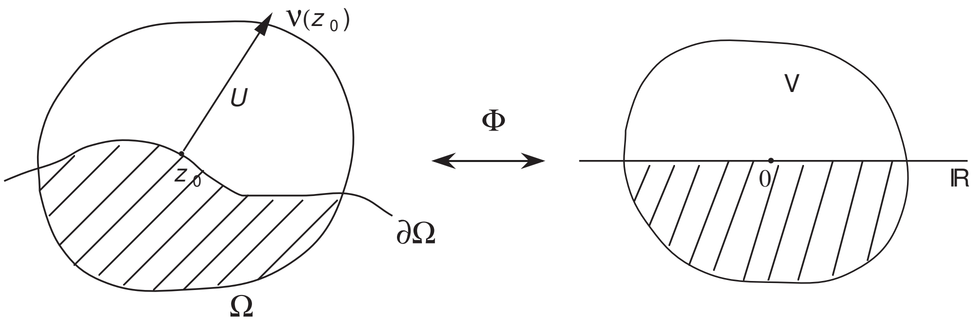
- Beispiele für in drei Richtungen periodische Flächen stammen schon von Schwarz und seinen Schülern. Diese sind neuerdings auf großes Interesse im Zusammenhang mit verschiedenen Mikrostrukturen gestoßen, wie sie unter anderem bei Lipiden, Flüssigkristallen, Mikroemulsionen und Block-Kopolymeren auftreten. Grob gesprochen tritt die Minimalfläche in diesen Situationen als Trennfläche oder Phasengrenze zwischen zwei verschiedenen Stoffen oder Phasen auf und minimiert dabei eine Oberflächenenergie. Tatsächlich muß man nicht nur Minimalflächen, sondern allgemeiner Flächen konstanter mittlerer Krümmung erwarten, weil das Volumenverhältnis der beiden Stoffe oder Phasen vorgegeben ist. Jedenfalls fand der Kristallograph A. Schoen 1970 mit teilweise heuristischen Argumenten neue dreifach periodische Minimalflächen. Rigorose Existenzbeweise für diese und weitere Beispiele stammen von H. Karcher (1989), der zunächst einen Fundamentalbereich der Fläche durch Lösung eines Plateauproblems bzw. freien Randwertproblems erhält und die gesamte Fläche durch fortgesetztes Spiegeln aufbaut. Auch hier lassen sich Weierstraßdarstellungen angeben, was allerdings für die meisten Beispiele ziemlich aufwendig ist.

Minimalflächen werden seit T. Young (An essay on the cohesion of fluids, 1805) und P. S. Laplace (Traité de la méchanique céleste, 1805) untersucht. Einen guten Eindruck von den unterschiedlichen Fragestellungen und vom Stand der Forschung vermittelt der soeben erschienene, von Osserman herausgegebene Band der Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften.

Kapitel 1

Grundlagen der komplexen Analysis

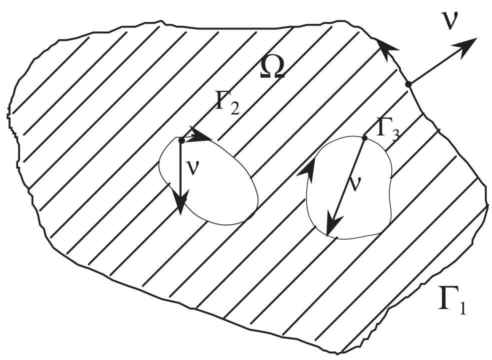
Vorbemerkung. Im folgenden ist $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ stets ein *Gebiet*, also offen und zusammenhängend (Englisch: *domain*). Ω hat C^1-Rand, falls es zu jedem $z_0 \in \partial\Omega$ eine offene Umgebung U und einen Diffeomorphismus $\phi \in C^1(U, V)$ mit $\phi(z_0) = 0$ und $\phi(U \cap \Omega) = \{z \in V : \operatorname{Im}(z) < 0\}$ gibt.



In $z_0 \in \partial\Omega$ gibt es dann eine eindeutig bestimmte, äußere Einheitsnormale $\nu(z_0)$, definiert durch

- $|\nu(z_0)| = 1, \quad \nu(z_0) \perp T_{z_0}(\partial\Omega)$
- es gibt ein $\rho_0 > 0$, so daß $z_0 + \rho\nu(z_0) \notin \Omega$ für alle $\rho \in (0, \rho_0)$.

Sei nun zusätzlich Ω beschränkt. Dann besteht $\partial\Omega$ aus endlich vielen geschlossenen C^1 -Kurven $\Gamma_1, \dots, \Gamma_k$, welche Parametrisierungen $\gamma_j \in C^1([a_j, b_j], \Gamma_j)$ mit $\dot{\gamma}_j(t) \neq 0$ für alle t besitzen.



Für $\varphi \in C^0(\partial\Omega)$ setzen wir

$$\int_{\partial\Omega} \varphi(z)\, ds := \sum_{j=1}^{k} \int_{a_j}^{b_j} \varphi\big(\gamma_j(t)\big)|\dot{\gamma}_j(t)|\, dt.$$

Das Integral hängt nicht von der Wahl der γ_j ab.

Integralsatz von Gauß Sei Ω beschränkt mit C^1-Rand und $X \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^2)$. Dann gilt

$$\int\limits_{\Omega} \mathrm{div} X \, dxdy = \int\limits_{\partial\Omega} \langle X, \nu \rangle \, ds.$$

1.1 Harmonische Funktionen

Definition Eine Funktion $u \in C^2(\Omega)$ mit endlichem *Dirichletintegral* $E(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |du(z)|^2 \, dx\, dy < \infty$ heißt *harmonisch* , wenn gilt:

$$\frac{d}{d\varepsilon} E(u + \varepsilon\varphi)|_{\varepsilon=0} = 0 \quad \text{für alle } \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Aus $\frac{1}{2}|d(u+\varepsilon\varphi)|^2 = \frac{1}{2}|du|^2 + \varepsilon\langle du, d\varphi\rangle + \frac{1}{2}\varepsilon^2|d\varphi|^2$ folgt

$$\frac{d}{d\varepsilon} E(u + \varepsilon\varphi)|_{\varepsilon=0} = \int_\Omega \langle du, d\varphi\rangle dxdy = -\int_\Omega (\Delta u)\varphi \, dxdy.$$

Folgerung $u \in C^2(\Omega)$ ist genau dann harmonisch, wenn gilt:

$$\Delta u = \mathrm{div}\,\mathrm{grad}\, u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Im Gegensatz zum Flächeninhalt ist das Dirichletintegral nicht gegenüber allen Umparametrisierungen $\phi \in C^2(\Omega^*, \Omega)$ invariant, wohl aber unter *konformen* Diffeomorphismen:

$$\begin{aligned}
d\phi^*\, d\phi &= d\phi\, d\phi^* = \lambda^2 \mathbb{1} \quad \text{mit } \lambda^2 = |\det\, d\phi| \\
\Rightarrow E(u\circ\phi) &= \frac{1}{2}\int_{\Omega^*} \mathrm{tr}(d(u\circ\phi)^* d(u\circ\phi))\, dxdy \\
&= \frac{1}{2}\int_{\Omega^*} \mathrm{tr}(d\phi\, d\phi^*(du^*\circ\phi)(du\circ\phi))\, dxdy \\
&= \frac{1}{2}\int_{\Omega^*} \mathrm{tr}(du^*\, du)\circ\phi\,|\det\, d\phi|\, dxdy \\
&= \frac{1}{2}\int_{\Omega} \mathrm{tr}(du^*\, du)\, d\xi d\eta = E(u).
\end{aligned}$$

Weiter gilt mit $g = \lambda^2\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$, der durch ϕ induzierten Metrik,

$$(\Delta u)\circ\phi = \Delta_g(u\circ\phi) = \frac{1}{\lambda^2}\Delta(u\circ\phi).$$

Als Beispiel betrachten wir die durch die komplexe Exponentialfunktion gegebenen Koordinaten

$$\begin{aligned}
\phi(s,\vartheta) &= (e^s\cos\vartheta, e^s\sin\vartheta), \quad (s,\vartheta)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}/2\pi. \\
d\phi(s,\vartheta) &= e^s\begin{pmatrix}\cos\vartheta & -\sin\vartheta\\ \sin\vartheta & \cos\vartheta\end{pmatrix} \\
g &= e^{2s}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \\
\Rightarrow \quad \Delta_g &= e^{-2s}\left(\frac{\partial^2}{\partial s^2} + \frac{\partial^2}{\partial\vartheta^2}\right)
\end{aligned}$$

Mit dem Separationsansatz $u(x,y) = v(s)\,w(\vartheta)$ ergibt sich

$$\frac{v''(s)}{v(s)} = -\frac{w''(\vartheta)}{w(\vartheta)} = \text{const.}$$

Damit $u(x,y)$ zweimal stetig differenzierbar auf $\mathbb{R}^2\backslash\{0\}$ ist, muß w einschließlich Ableitung 2π-periodisch sein. Es folgt const $= k^2$ mit $k \in \mathbb{N}_0$ und hieraus die Lösungen

$$\begin{array}{rcrcl} k=0 & \Rightarrow & v(s) & = & \alpha_0 + \beta_0 s, \quad w(\vartheta) = a_0 \\ k \in \mathbb{N} & \Rightarrow & v(s) & = & \alpha_k e^{ks} + \beta_k e^{-ks} \\ & & w(\vartheta) & = & a_k \cos k\vartheta + b_k \sin k\vartheta \end{array}$$

Damit u im Nullpunkt regulär ist, muß $\beta_k = 0$ sein. Wir erhalten die auf ganz $\mathbb{R}^2$ harmonischen Funktionen

$$\begin{aligned} u(r,\vartheta) &= r^k(a_k \cos k\vartheta + b_k \sin k\vartheta) \\ &= a_k \frac{z^k + \bar{z}^k}{2} + b_k \frac{z^k - \bar{z}^k}{2i} \\ &= \frac{a_k - ib_k}{2} z^k + \frac{a_k + ib_k}{2} \bar{z}^k \end{aligned}$$

bzw.

$$\boxed{u(z) = \operatorname{Re}(c_k z^k) \quad \text{mit } c_k = a_k - ib_k}$$

Der Fall $k=0$ führt zu der rotationssymmetrischen Lösung $g(r) = \frac{1}{2\pi}\log r$, mit $g'(r) = \frac{1}{2\pi r}$. Sei nun $u \in C^2(\overline{\Omega})$, $z_0 \in \Omega$ und $G(z) = g(|z-z_0|)$. Das Gebiet Ω sei beschränkt mit C^1-Rand. Dann gilt

$$\begin{aligned} -\int\limits_{\Omega\backslash B_r(z_0)} G\Delta u\,dxdy &= \int\limits_{\Omega\backslash B_r(z_0)} (u\,\Delta G - G\,\Delta u)\,dxdy \\ &= \int\limits_{\Omega\backslash B_r(z_0)} \operatorname{div}(u \operatorname{grad} G - G \operatorname{grad} u) dxdy \\ &= \int\limits_{\partial\Omega} \Big(u\frac{\partial G}{\partial \nu} - G\frac{\partial u}{\partial \nu}\Big) ds \;-\; \underbrace{⨍\limits_{\partial B_r(z_0)} u\,ds}_{\to u(z_0)} \;+\; \underbrace{g(r)\int\limits_{\partial B_r(z_0)} \frac{\partial u}{\partial r}\,ds}_{\to 0} \end{aligned}$$

Beachte nun $-\int\limits_{r\le|z|\le 1} g(|z|)\,dxdy = -\int_r^1 \rho\log\rho\,d\rho \to -\int_0^1 \rho\log\rho\,d\rho < \infty$ für $r \searrow 0$. Also ist nach dem Satz über monotone Konvergenz $G \in L^1(\Omega)$ und es folgt aus dem Satz von Lebesgue die Konvergenz der linken Seite für $r \searrow 0$.

$$\Rightarrow \boxed{u(z_0) = \int\limits_{\Omega} G\Delta u\,dxdy + \int\limits_{\partial\Omega} \Big(u\frac{\partial G}{\partial \nu} - G\frac{\partial u}{\partial \nu}\Big)\,ds}$$

(*Darstellungsformel von Green*)

Bemerkung. Ist $u \in C_c^2(\mathbb{R}^2)$, so können wir die Formel auf einer großen Kreisscheibe anwenden und erhalten

$$u(z_0) = \int\limits_{\mathbb{R}^2} G\Delta u\,dxdy.$$

Diese Identität notiert man auch in der symbolischen Form $\Delta G = \delta_{z_0}$, wobei δ_{z_0} das Diracmaß im Punkt z_0 ist.

Satz 1 (*Mittelwerteigenschaft harmonischer Funktionen*)
Für $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ sind äquivalent:

(1) $u \in C^\infty(\Omega)$ und $\Delta u = 0$.
(2) Für $\mathcal{L}^2$-fast alle $z \in \Omega$ gilt:

$$u(z) \;=\; \fint_{\partial B_r(z)} u(z')\, ds \quad \text{für } \mathcal{L}^1 - \text{fast alle } r \in (0, \operatorname{dist}(z, \partial\Omega)).$$

Beweis.
(1)$\Rightarrow$(2): Für zunächst noch beliebiges $u \in C^2(\Omega)$ spezialisiert sich die Greensche Formel auf $B_r(z_0)$ zu

$$(*) \qquad u(z_0) \;=\; \int_{B_r(z_0)} \big(g(|z - z_0|) - g(r)\big)\Delta u\, dxdy \;+\; \fint_{\partial B_r(z_0)} u\, ds.$$

Für harmonisches u folgt die Mittelwerteigenschaft.

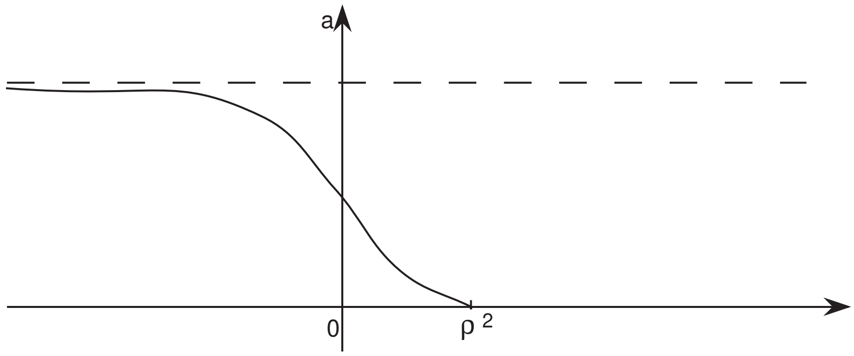
(2)$\Rightarrow$(1): Ich zeige zunächst $u \in C^\infty(\Omega_{2\rho})$, wobei

$$\Omega_{2\rho} = \{z \in \Omega : \operatorname{dist}(z, \partial\Omega) > 2\rho\}$$

bei beliebig gegebenem $\rho > 0$. Dazu betrachte ich die $C^\infty(\mathbb{R})$-Funktion

$$\eta_\rho(t) = \begin{cases} a \cdot \exp \frac{1}{t-\rho^2} & \text{für } t < \rho^2 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dabei sei $a > 0$ so gewählt, daß $\int\limits_0^\infty r\eta_\rho(r^2)\, dr = 1$.



Ich multipliziere die Mittelwertidentität mit $r\eta_\rho(r^2)$ und integriere von 0 bis ∞, für $z \in \Omega_{2\rho}$:

$$\begin{aligned} u(z) \;&=\; \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \eta_\rho(r^2) \int_{\partial B_r(z)} u(z')\, ds\, dr \\ &=\; \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \eta_\rho(|z - z'|^2) u(z')\, dx'\, dy'. \end{aligned}$$

Die rechte Seite ist aber glatt. Also ist $u \in C^\infty(\Omega)$ nach Abänderung in den Punkten, in denen die Mittelwerteigenschaft nicht gilt. Mit Ausnahme dieser Punkte haben wir mit der Formel $(*)$

$$0 \;=\; \int_{B_r(z_0)} \underbrace{\big(g(|z - z_0|) - g(r)\big)}_{<0} \Delta u\, dx\, dy$$

Es muß dann in $B_r(z_0)$ Nullstellen von Δu geben, und mit $r \to 0$ folgt $\Delta u(z_0) = 0$. Somit ist u auch harmonisch. $\square$

Bemerkung. Aus der Mittelwerteigenschaft bzgl. Kreisen folgt die entsprechende Mittelwertformel bzgl. Kreisscheiben, denn es gilt

$$\begin{aligned}
\fint_{B_r(z_0)} u(z)\,dxdy &= \frac{1}{\pi r^2}\int_0^r \int_{\partial B_\rho(z_0)} u(z)\,ds\,d\rho \\
&= \frac{u(z_0)}{\pi r^2}\int_0^r 2\pi\rho\,d\rho = u(z_0).
\end{aligned}$$

Folgerung. Harmonische Funktionen sind unendlich oft differenzierbar.

Satz 2 (*Abschätzungen von Cauchy*)
Zu $k \in \mathbb{N}_0$ gibt es eine Konstante $c_k < \infty$ mit folgender Eigenschaft: ist $u \in C^\infty(\Omega)$ harmonisch und $B_r(z_0) \subset\subset \Omega$, so gilt für jede Ableitung $D^\alpha u$ der Ordnung $|\alpha| = k$

$$|D^\alpha u(z_0)| \le \frac{c_k}{r^k} \fint_{B_r(z_0)} |u(z)|\,dxdy.$$

Zusatz. Man kann $c_k = (ck)^k$ mit c universell wählen.

Beweis. Für $0 < \rho < r$ und $z \in B_\rho(z_0)$ gilt

$$\begin{aligned}
|\partial_j u(z)| &= |\fint_{B_{r-\rho}(z)} (\partial_j u)(\zeta)\,d\xi\,d\eta| \\
&= \frac{1}{\pi(r-\rho)^2}|\int_{B_{r-\rho}(z)} \operatorname{div}(ue_j) d\xi\,d\eta| \\
&= \frac{1}{\pi(r-\rho)^2}|\int_{\partial B_{r-\rho}(z)} u\langle e_j,\nu\rangle\,ds| \\
&\le \frac{2}{r-\rho}\|u\|_{C^0(B_r(z_0))}.
\end{aligned}$$

$$(1.1)\qquad \Rightarrow\quad \|\partial_j u\|_{C^0\left(B_\rho(z_0)\right)} \le \frac{2}{r-\rho}\|u\|_{C^0\left(B_r(z_0)\right)}.$$

Sei jetzt $r_j = \frac{j}{k}r$ für $j = 0,1,...k$ und $M_j = \max\limits_{|\alpha|=k-j}\|D^\alpha u\|_{C^0(B_{r_j}(z_0))}$, insbesondere $M_0 = \max\limits_{|\alpha|=k}|D^\alpha u(z_0)|$. Aus (1) ergibt sich für $j \le k-1$

$$\begin{aligned}
M_j \le \frac{2}{r_{j+1}-r_j}M_{j+1} &\le \frac{2k}{r}M_{j+1} \\
(1.2)\qquad \Rightarrow \max_{|\alpha|=k}|D^\alpha u(z_0)| &\le \left(\frac{2k}{r}\right)^k \|u\|_{C^0(B_r(z_0))}
\end{aligned}$$

Nun ist für $z \in B_{r/2}(z_0)$

$$|u(z)| \le \fint_{B_{r/2}(z)} |u(\zeta)|\,d\xi d\eta \le 4 \fint_{B_r(z_0)} |u(\zeta)|\,d\xi d\eta,$$

und durch Kombination mit (2) auf $B_{r/2}(z_0)$ folgt

$$\max_{|\alpha|=k} |D^\alpha u(z_0)| \le \left(\frac{4k}{r}\right)^k 4 \fint_{B_r(z_0)} |u(z)|\, dxdy.$$

Die Behauptung gilt also z. B. mit $c_k = (16k)^k$. $\square$

Eine zentrale Anwendung dieser Abschätzungen sind Kompaktheitsaussagen für Mengen bzw. Folgen harmonischer Funktionen.

Satz 3 (*Konvergenzsatz von Weierstraß*)
Sei $u_n \in C^2(\Omega)$ eine Folge harmonischer Funktionen, die in $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ gegen $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ konvergiert, also

$$\int_{\Omega'} |u-u_n|\, dxdy \longrightarrow 0 \quad \text{für jedes } \Omega' \subset\subset \Omega.$$

Dann ist u harmonisch und es gilt für jedes $k \in \mathbb{N}_0$

$$\|u-u_n\|_{C^k(\Omega')} \longrightarrow 0 \quad \text{mit } n \to \infty.$$

Beweis. Ist $K \subset \Omega$ kompakt, so gibt es ein $\rho > 0$ mit $\Omega' := \{z \in \mathbb{R}^2 : \operatorname{dist}(z,K) < \rho\} \subset\subset \Omega$. Für $z_0 \in K$ folgt dann

$$\begin{aligned} |u_n(z_0) - u_m(z_0)| &\le \fint_{B_\rho(z_0)} |u_n - u_m|\, dxdy \\ &\le \frac{1}{\pi\rho^2}\int_{\Omega'} |u_n-u_m|\, dxdy < \varepsilon \quad \text{für } n,m \ge N. \end{aligned}$$

Nach evtl. Abänderung von u in einer Nullmenge konvergiert u_n *lokal gleichmäßig* gegen u und es folgt

$$u(z_0) = \lim_{n\to\infty} u_n(z_0) = \lim_{n\to\infty} \fint_{\partial B_\rho(z_0)} u_n(z)\, ds = \fint_{\partial B_\rho(z_0)} u(z)\, ds.$$

Nach Satz 1 folgt $u \in C^\infty(\Omega)$ und $\Delta u = 0$. Weiter gilt mit Satz 2 für $|\alpha| = k \in \mathbb{N}_0$

$$\begin{aligned} |D^\alpha u_n(z_0) - (D^\alpha u_m)(z_0)| &\le \frac{c_k}{\rho^k} \fint_{B_\rho(z_0)} |u_n-u_m|\, dxdy \\ &\le \frac{c_k}{\rho^{2+k}} \int_{\Omega'} |u_n-u_m|\, dxdy. \end{aligned}$$

Also konvergiert auch $D^\alpha u_n$ lokal gleichmäßig gegen eine stetige Funktion $g^\alpha \in C^0(\Omega)$, und es bleibt $g^\alpha = D^\alpha u$ zu zeigen. Für $\eta \in C^\infty_c(\Omega)$ gilt

$$\begin{aligned} \int_\Omega (D^\alpha u)\eta\, dx\, dy &= (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u(D^\alpha \eta)\, dxdy \\ &= (-1)^{|\alpha|} \lim_{n\to\infty} \int_\Omega u_n (D^\alpha\eta)\, dxdy \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_\Omega (D^\alpha u_n)\eta\, dxdy \\ &= \int_\Omega g^\alpha \eta\, dxdy. \end{aligned}$$

Die Behauptung folgt aus dem Fundamentallemma der Variationsrechnung. □

Satz 4 (*Kompaktheitssatz von Montel*)
Sei $u_n \in C^2(\Omega)$ eine Folge harmonischer Funktionen, die in $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ gleichmäßig beschränkt ist, d. h.

$$S := \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{\Omega'} |u_n|\, dxdy < \infty \quad \text{für jedes } \Omega' \subset\subset \Omega.$$

Dann gibt es eine Teilfolge u_{n_j} und eine harmonische Funktion $u \in C^\infty(\Omega)$ mit

$$\|u - u_{n_j}\|_{C^k(\Omega')} \to 0 \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}_0, \Omega' \subset\subset \Omega.$$

Beweis. Wegen Satz 3 reicht es aus, eine lokal gleichmäßig konvergente Teilfolge zu finden. Seien K und Ω' wie im Beweis von Satz 3. Für $z_0 \in K$ gilt dann

$$\begin{aligned} |u_n(z_0)| &\leq \fint_{B_\rho(z_0)} |u_n|\, dxdy \leq \frac{S}{\pi\rho^2}, \\ |Du_n(z_0)| &\leq \frac{c_1}{\rho} \fint_{B_\rho(z_0)} |u_n|\, dxdy \leq \frac{c_1 S}{\pi\rho^3}. \end{aligned}$$

Somit ist u_n auf jedem Kompaktum $K \subset\subset \Omega$ gleichmäßig beschränkt und gleichgradig stetig.

Die Behauptung des Satzes folgt aus dem Satz von Arzelà-Ascoli. □

Der Vollständigkeit halber sei dieser Satz hier wiederholt.

Satz (*Arzelà-Ascoli*)
Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und $u_n \in C^0(K)$ sei

- gleichmäßig beschränkt: $C = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|u_n\|_{C^0(K)} < \infty$
- gleichgradig stetig:

$$\omega(\delta) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \sup_{\substack{z_1,z_2\in K \\ |z_1-z_2|\leq\delta}} |u_n(z_1) - u_n(z_2)| \to 0 \text{ mit } \delta \searrow 0.$$

Dann konvergiert eine Teilfolge gleichmäßig auf K.

Beweis. Zu $j \in \mathbb{N}$ gibt es eine endliche Menge $K_j \subset K$, so daß $K \subset \bigcup_{z\in K_j} B_{1/j}(z)$. Mittels eines Diagonalverfahrens können wir annehmen, daß u_n in allen Punkten $z \in \bigcup_{j=1}^\infty K_j$ punktweise konvergiert. Zu $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ mit

$$|z_1 - z_2| \leq \delta \Rightarrow |u_n(z_1) - u_n(z_2)| \leq \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{für alle } n.$$

Wähle $j \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{j} < \delta$. Es gibt ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit

$$z \in K_j \Rightarrow |u_n(z) - u_m(z)| \leq \varepsilon/3 \quad \text{für } n, m \geq n_\varepsilon.$$

Zu $z_0 \in K$ wähle $z \in K_j$ mit $|z_0 - z| \leq \delta$. Für $n, m \geq n_\varepsilon$ ergibt sich

$$|u_n(z_0) - u_m(z_0)| \leq \underbrace{|u_n(z_0) - u_n(z)|}_{\leq \frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{|u_n(z) - u_m(z)|}_{\leq \frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{|u_m(z) - u_m(z_0)|}_{\leq \frac{\varepsilon}{3}}.$$

$\square$

Bemerkung. Gelten die Voraussetzungen nur auf kompakten Teilmengen $K \subset \Omega$, so folgt die Existenz einer *lokal* gleichmäßig konvergenten Teilfolge. Dazu wählt man eine Ausschöpfung $K_1 \subset K_2 \subset \ldots, \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i = \Omega$, durch kompakte Mengen und verwendet ein Diagonalfolgenargument.

Satz 5 (*Lemma von Weyl*)
Für $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ gelte $\Delta u = 0$ im Distributionssinn:

$$\int_\Omega u \Delta \eta \, dxdy = 0 \quad \text{für alle } \eta \in C_c^\infty(\Omega).$$

Dann ist $u \in C^\infty(\Omega)$ und harmonisch.

Beweis. Sei $\eta \in C_c^\infty(B_1(0))$, $\int \eta(z)\, dxdy = 1$ sowie $\eta(z) = \eta(-z)$ für alle $z \in B_1(0)$. Mit $\eta_\varepsilon(z) = \frac{1}{\varepsilon^2}\eta\left(\frac{z}{\varepsilon}\right)$ für $0 < \varepsilon < \rho$ erhalten wir die auf $\Omega_\rho = \{z \in \Omega : \operatorname{dist}(z, \partial\Omega) < \rho\}$ unendlich oft differenzierbare Funktion

$$(J_\varepsilon u)(z) = \int_\Omega \eta_\varepsilon(z - \zeta)\, u(\zeta)\, d\xi d\eta = (\eta_\varepsilon * u)(z).$$

Für $\varphi \in C_c^\infty(\Omega_\rho)$ folgt

$$\begin{aligned}
\int_\Omega (\Delta J_\varepsilon u)\varphi \, dxdy &= \int_\Omega J_\varepsilon u \, \Delta\varphi \, dxdy \\
&= \int_\Omega u \, J_\varepsilon \Delta\varphi \, dxdy \text{ (da } \eta \text{ gerade)} \\
&= \int_\Omega u \, \Delta J_\varepsilon \varphi \, dxdy = 0.
\end{aligned}$$

Nach dem Fundamentallemma ist $\Delta J_\varepsilon u = 0$ auf Ω_ρ. Aber $J_\varepsilon u \longrightarrow u$ in $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, und die Behauptung folgt aus dem Satz von Weierstraß. $\square$

Der folgende Satz ist ebenfalls eine Regularitätsaussage.

Satz 6 (*Riemannscher Hebbarkeitssatz*)
Sei $a \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$, $u \in C^2(\Omega\backslash\{a\})$ harmonisch und

$$\varepsilon(r) := \frac{1}{\log \frac{1}{r}} \max_{|z-a|=r} |u(z)| \to 0 \text{ mit } r \to 0.$$

Dann ist die Singularität nur scheinbar vorhanden, das heißt u ist zu einer harmonischen Funktion auf ganz Ω fortsetzbar.

Beweis. Es sei oBdA $a = 0$. Wir wollen die schwache Version der Gleichung $\Delta u = 0$ aus Satz 5 nachweisen, dürfen aber zunächst nur mit Funktionen testen, die in einer Umgebung von a verschwinden.Wollen wir deshalb ein allgemeines $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ einsetzen, so müssen wir es zunächst nahe bei a „abschneiden“. Sei dazu $\eta_\rho \in C^\infty(\Omega)$ eine von einem Parameter $\rho > 0$ abhängige Funktion, die in einer Umgebung von a Null ist. Es gelte $0 \leq \eta_\rho \leq 1$ für alle $z \in \Omega$ und $\eta_\rho(z) \to 1$ mit $\rho \to 0$ für alle $z \in \Omega\backslash\{a\}$.

$$\begin{aligned}
0 &= \int_\Omega u \, \Delta(\eta_\rho \varphi)\, dxdy \\
&= \int_\Omega \eta_\rho u \, \Delta\varphi \, dxdy + 2\int_\Omega u \langle d\eta_\rho, d\varphi\rangle \, dxdy \\
&+ \int_\Omega u \, \varphi \Delta\eta_\rho \, dxdy.
\end{aligned}$$

Da $u \in L^1(\Omega)$, strebt das erste Integral mit $\rho \to 0$ gegen $\int_\Omega u\,\Delta\varphi\,dxdy$. Wir müssen also erreichen, daß die anderen beiden Integrale gegen Null gehen. Sei dazu $\eta \in C^\infty(\mathbb{R})$ eine Funktion mit

$$\eta(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t \leq 0 \\ 1 & \text{für } t \geq 1 \end{cases}.$$

Man überprüft leicht, daß die übliche Wahl $\eta_\rho(r) = \eta\left(\frac{r}{\rho}\right)$ hier nicht ausreicht. Stattdessen wählen wir

$$\eta_\rho(r) = \eta\left(\frac{\log\frac{r}{\rho^2}}{\log\frac{1}{\rho}}\right);$$

es gilt also $\eta_\rho(r) = 0$ für $r \leq \rho^2$, $\eta_\rho(r) = 1$ für $r \geq \rho$. Außerdem berechnen wir:

$$\begin{aligned}
\eta_\rho'(r) &= \eta'(\dots)\cdot\frac{1}{r\log\frac{1}{\rho}} \\
\Delta\eta_\rho(r) &= \frac{1}{r}(r\eta_\rho'(r))' = \frac{1}{r}\frac{1}{\log\frac{1}{\rho}}\eta''(\dots)\frac{1}{r\log\frac{1}{\rho}} \\
&= \eta''(\dots)\cdot\frac{1}{r^2\log^2\frac{1}{\rho}}.
\end{aligned}$$

Wir können annehmen, daß $\varepsilon(\cdot)$ monoton wachsend ist, andernfalls gehen wir zu $\varepsilon^*(\rho) = \sup\limits_{0<r\leq\rho}\varepsilon(r)$ über. Es gelten die Abschätzungen

$$\begin{aligned}
\left|\int_\Omega u\langle d\eta_\rho, d\varphi\rangle dxdy\right| &\leq C\log\frac{1}{\rho^2}\varepsilon(\rho)\int_{\rho^2}^{\rho} r\frac{1}{r\log\frac{1}{\rho}}\,dr \leq C\rho\,\varepsilon(\rho) \to 0, \\
\left|\int_\Omega u\varphi\Delta\eta_\rho dxdy\right| &\leq C\log\frac{1}{\rho^2}\varepsilon(\rho)\int_{\rho^2}^{\rho} r\frac{dr}{r^2\log^2\frac{1}{\rho}} \leq C\varepsilon(\rho) \to 0.
\end{aligned}$$

□

Die a priori-Abschätzungen sagen grundsätzlich aus, daß die gleichmäßige Beschränktheit einer Folge harmonischer Funktionen bzgl. *einer* gewissen Norm auch Abschätzungen für *jede andere* Norm nach sich zieht. In den Anwendungen kann man sehr oft Kontrolle über die Supremumsnorm bekommen, und zwar durch folgendes Resultat.

Satz 7 (*Maximumprinzip für harmonische Funktionen*)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet und $u \in C^2(\Omega)$ harmonisch. Falls es ein $z_0 \in \Omega$ gibt mit $u(z_0) = \sup\limits_{z\in\Omega} u(z)$, so ist u konstant.

Beweis. Die Menge $\mathcal{M} = \{z \in \Omega : u(z) = \sup\limits_{z'\in\Omega} u(z') =: M\}$ ist relativ abgeschlossen und nach Annahme nichtleer. Ist $z \in \mathcal{M}$ und $B_r(z) \subset\subset \Omega$, so gilt nach Satz 1

$$\fint_{B_r(z)} (u(z') - M)\,dx'dy' = 0.$$

Der Integrand ist stetig und nichtpositiv, also folgt $u(z') \equiv M$ für $z' \in B_r(z)$. Folglich ist $\mathcal{M}$ offen und aus Zusammenhangsgründen u konstant gleich M. □

Folgerung Ist $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ beschränktes Gebiet und $u \in C^0(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ harmonisch, so gilt

$$\sup_{z\in\Omega}|u(z)| \leq \sup_{z\in\partial\Omega}|u(z)|.$$

1.2 Holomorphe Funktionen

Definition $f : \Omega \to \mathbb{C}$ heißt in $z_0 \in \Omega$ *komplex differenzierbar*, falls es ein $c \in \mathbb{C}$ gibt mit

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - (f(z_0) + c(z - z_0))}{z - z_0} = 0.$$

Die Zahl $c := f'(z_0)$ ist eindeutig bestimmt. Ist f in ganz Ω komplex differenzierbar, so heißt f *holomorph.*

Lemma 1 Genau dann ist $f = u + iv : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph, wenn f als reelle Abbildung differenzierbar ist und die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen gelten:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Durch Einführung der positiven $90°$-Drehung $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ lassen sich die Differentialgleichungen auch so formulieren:

$$\begin{aligned} df \cdot J = J \cdot df \quad &\Leftrightarrow \quad dv = -du \cdot J \\ &\Leftrightarrow \quad \operatorname{grad} v = J \operatorname{grad} u \\ &\Leftrightarrow \quad df \in \mathbb{R} \cdot \mathrm{SO}(2). \end{aligned}$$

Beweis.

- f holomorph
  $\Rightarrow$ $df(z)$ entspricht Multiplikation mit $f'(z) \in \mathbb{C}$.
  J entspricht Multiplikation mit $i \in \mathbb{C}$
  $\Rightarrow df(z) \cdot J = J \cdot df(z)$.

- Sei $df \cdot J = J \cdot df$ und x, y die Koordinatenfunktionen.

$$\begin{aligned} -du \cdot J &= -d(x \circ f) \cdot J &&= -dx \cdot df \cdot J = -dx \cdot J \cdot df \\ &= dy \cdot df &&= d(y \circ f) = dv. \end{aligned}$$

- Weiter ergibt sich aus $dv = -du \cdot J$

$$\begin{aligned} \langle J \operatorname{grad} u, X \rangle &= -\langle \operatorname{grad} u, JX \rangle = -du \cdot JX \\ &= dv \cdot X = \langle \operatorname{grad} v, X \rangle \end{aligned}$$

- In Koordinaten bedeutet $\operatorname{grad} v = J \operatorname{grad} u$

$$\begin{pmatrix} \partial_x v \\ \partial_y v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_x u \\ \partial_y u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\partial_y u \\ \partial_x u \end{pmatrix}.$$

- $\mathbb{R} \cdot SO(2) = \{ \begin{pmatrix} a & -b \\ +b & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \}$.
  Aus den Differentialgleichungen folgt also $df \in \mathbb{R} \cdot \mathrm{SO}(2)$ mit $a = \frac{\partial u}{\partial x}$ und $b = \frac{\partial v}{\partial x}$.

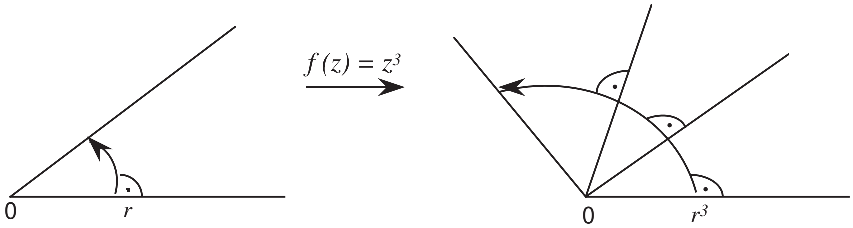
- Schließlich folgt nun wieder die Holomorphie, und zwar mit

$$\boxed{f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right)}$$

Geometrische Interpretation:

f holomorph $\Leftrightarrow$ f reell differenzierbar
und orientierungstreu: $\det df(z) \geq 0$
und konform: $df^* df = \lambda^2 \mathbb{1}$.

Beispiel. $f(z) = z^n$ ist holomorph auf $\mathbb{C}$ für $n \in \mathbb{N}_0$.
$f'(z) = n\, z^{n-1}$, $f(re^{i\vartheta}) = r^n e^{in\vartheta}$



Allgemein gelten die Linearität der Ableitung, die Produkt-, Quotienten- und Kettenregel sowie der Umkehrsatz analog zur reellen Ableitung. Zum Beispiel sind rationale Funktionen

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)} = \frac{a_m z^m + \ldots + a_1 z + a_0}{b_n z^n + \ldots + b_1 z + b_0}$$

außerhalb der Nullstellen des Nenners holomorph. Trotzdem ist der Begriff der komplexen Differenzierbarkeit nicht in Analogie zur reellen Differenzierbarkeit zu sehen, weil sich aus der Definition die Gültigkeit der obigen Differentialgleichungen ergibt. Dies wird noch deutlicher durch die Beziehung zwischen holomorphen und harmonischen Funktionen.

Satz 1 (*holomorphe / harmonische Funktionen*)

(1) $f = u + iv \in C^1(\Omega, \mathbb{C})$ holomorph
$\Rightarrow$ $\Delta u = \Delta v = 0$ und $f \in C^\infty(\Omega, \mathbb{C})$

(2) $u \in C^2(\Omega)$ harmonisch, Ω einfach zusammenhängend
$\Rightarrow$ es gibt $u^* \in C^2(\Omega)$ harmonisch, so daß $f = u + iu^*$ holomorph ist. u^* ist bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmt und heißt die zu u konjugiert-harmonische Funktion.

Beweis.

zu (1): Durch Multiplikation der Cauchy-Riemann Differentialgleichungen mit $\eta \in C_c^\infty(\Omega)$ erhalten wir die *schwache Version*

$$\begin{aligned} 0 &= -\int_\Omega (\partial_x u - \partial_y v)\eta\, dxdy &= \textstyle\int_\Omega (u\, \partial_x \eta - v \partial_y \eta)\, dxdy, \\ 0 &= -\int_\Omega (\partial_y u - \partial_x v)\eta\, dxdy &= \textstyle\int_\Omega (u\, \partial_y \eta - v \partial_x \eta)\, dxdy. \end{aligned}$$

Ersetzen wir η in der ersten Gleichung durch $\partial_x \eta$, in der zweiten Gleichung durch $\partial_y \eta$ und addieren, so folgt $\int_\Omega u\, \Delta\eta\, dxdy = 0$ und damit $u \in C^\infty(\Omega)$, $\Delta u = 0$, nach dem Weylschen Lemma. Die Behauptung für v folgt durch Anwendung auf $-if = v - iu$.

zu (2): Sei $\omega = -du \cdot J = -(\partial_y u)\, dx + (\partial_x u)\, dy$. ω ist geschlossen wegen $\Delta u = 0$, also existiert eine Stammfunktion $u^* \in C^2(\Omega) : du^* = \omega$. Dann ist $f = u + iu^*$ holomorph. $\square$

1. Bemerkung Wir haben tatsächlich gezeigt: Ist $f = u + iv \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ und gilt für $\eta \in C_c^\infty(\Omega)$

$$\int_\Omega (u\partial_x \eta - v\partial_y \eta)\, dxdy = \int_\Omega (u\partial_y \eta + v\partial_x \eta)\, dxdy = 0,$$

so ist $f \in C^\infty(\Omega, \mathbb{C})$ holomorph und harmonisch.

2. Bemerkung Eine auf Ω holomorphe Funktion $f = u + iv$ ist dort unendlich oft *komplex* differenzierbar. Sei dazu allgemein für $f \in C^1(\Omega, \mathbb{C})$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial z} &:= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\,\frac{\partial f}{\partial y}\right) &&= \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + i\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\right),\\
\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} &:= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\,\frac{\partial f}{\partial y}\right) &&= \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) + i\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)\right).
\end{aligned}$$

Auf C^2-Funktionen vertauschen $\frac{\partial}{\partial z}$ und $\frac{\partial}{\partial \overline{z}}$, genauer

$$\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\,\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\,\frac{\partial}{\partial y}\right) = \frac{1}{4}\Delta = \frac{\partial}{\partial \overline{z}}\frac{\partial}{\partial z}.$$

Die Cauchy-Riemann-Gleichungen sind gleichbedeutend mit $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$. Also haben wir

$$\begin{aligned}
f \text{ holomorph} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0\\
(f \in C^2) \quad &\Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial \overline{z}}\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0\\
&\Rightarrow \quad f'(z) = \frac{\partial f}{\partial z} \quad \text{ist holomorph.}
\end{aligned}$$

Für viele Argumente in der reellen Analysis ist es wichtig, glatte Funktionen mit kompaktem Träger zu haben. Dagegen gibt es keine komplex differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger: stimmen zwei komplex differenzierbare Funktionen auf einer offenen Teilmenge ihres Definitionsgebiets überein, so sind sie überhaupt gleich. Diese sogenannte *Eigenschaft der eindeutigen Fortsetzbarkeit* gilt allgemein für Lösungen von elliptischen Differentialgleichungen.

Satz 2 (*holomorph = komplex analytisch*)
Für $f \in C^1(\Omega, \mathbb{C})$ sind äquivalent:

(1) f ist holomorph.

(2) Für alle $z_0 \in \Omega$ gibt es ein $r > 0$, so daß gilt:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n \quad \text{für alle } z \in B_r(z_0).$$

Beweis. Ich zeige nur (1) $\Rightarrow$ (2); genauer beweise ich die Konvergenz der Taylorreihe für $z \in B_{\theta R}(z_0)$, wobei $R < \operatorname{dist}(z_0, \partial\Omega)$ und $0 < \theta < \frac{1}{1+ce}$ mit $e = 2{,}718\ldots$ und c wie in Satz 2, Abschnitt 3. Wir können oBdA $z_0 = 0$ und eine Stelle $x \in (0, \theta R)$ statt z betrachten, andernfalls gehen wir zu $\widetilde{f}(\zeta) = f(z_0 + e^{i\alpha}\zeta)$ mit $\alpha = \arg(z - z_0)$ über. Für die holomorphe Funktion f und $\xi \in (-\theta R, \theta R)$ gilt

$$f'(\xi) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\,\frac{\partial f}{\partial y}\right)(\xi) = \frac{\partial f}{\partial x}(\xi)$$

aufgrund der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen. Da die komplexen Ableitungen von f ebenfalls holomorph sind, gilt weiter

$$f^{(n)}(\xi) = (\partial_x^n f)(\xi) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0, \xi \in (-\theta R, \theta R).$$

Es reicht nun aus, wenn wir für $u = \operatorname{Re} f$ die Taylorreihendarstellung

$$(*) \qquad u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\partial_x^n f)(0)\, x^n, \quad x \in (0, \theta R)$$

nachweisen. Denn durch Anwendung auf $-if$ folgt eine entsprechende Darstellung für $v = \operatorname{Im}(f)$ und damit

$$\begin{aligned} f(x) &= u(x) + i\, v(x) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\partial_x^n u)(0)\, x^n + i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\partial_x^n v)(0)\, x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \big(\partial_x^n (u + iv)\big)(0)\, x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n. \end{aligned}$$

Es gibt zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $\xi \in [0, x]$, so daß gilt:

$$\begin{aligned} & |u(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} (\partial_x^k u)(0)\, x^k| \\ \leq\; & \frac{1}{n!} |(\partial_x^n u)(\xi)|\, |x|^n \quad \text{(Taylorsche Formel)} \\ \leq\; & \frac{1}{n!} \left(\frac{cn}{(1-\theta)R} \right)^n \|u\|_{C^0(B_R)} (\theta R)^n \;\; \text{(Cauchy-Abschätzungen)} \\ =\; & \underbrace{\frac{1}{n!} \left(\frac{c\,\theta n}{1-\theta} \right)^n}_{=: a_n} \|u\|_{C^0(B_R)}. \end{aligned}$$

Aber nach Wahl von θ ist

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{1}{(n+1)!} \left(\frac{c\,\theta (n+1)}{1-\theta} \right)^{n+1} \cdot n! \left(\frac{1-\theta}{c\,\theta n} \right)^n \\ &= \frac{c\theta}{1-\theta} \big(1 + \frac{1}{n}\big)^n \leq \frac{c\,\theta e}{1-\theta} < 1. \end{aligned}$$

Also ist $(*)$ konvergent. □

Definition Sei $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph und nicht konstant, $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Dann gibt es zu $z_0 \in \Omega$ ein kleinstes $n \in \mathbb{N}$ mit $f^{(n)}(z_0) \neq 0$. Diese Zahl ist die *Ordnung, mit der f den Wert $f(z_0)$ in z_0 annimmt.*

Bemerkung. Die Ordnung ist wohldefiniert. Dazu betrachten wir die relativ abgeschlossene Menge

$$M = \{z \in \Omega : f^{(n)}(z) = 0 \quad \text{für alle } n \geq 1\}.$$

Nach Satz 2 ist M auch offen. Wäre $M \neq \emptyset$, so folgt also $M = \Omega$ und f wäre konstant im Widerspruch zur Voraussetzung.

Satz 3 (*Lokales Abbildungsverhalten holomorpher Funktionen*)
Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Die holomorphe Funktion $f : \Omega \to \mathbb{C}$ nehme in $z_0 \in \Omega$ den Wert $w_0 \in \mathbb{C}$

mit der Ordnung $n \in \mathbb{N}$ an. Dann gibt es eine offene Umgebung U von z_0 und eine biholomorphe Abbildung $\varphi : U \to B_\rho(0)$, so daß gilt:

$$f(\varphi^{-1}(\zeta)) = w_0 + \zeta^n.$$

Beweis. Die nach Satz 2 gültige lokale Potenzreihendarstellung von f hat die Form

$$\begin{aligned} f(z) &= w_0 + \sum_{k=n}^{\infty} a_k (z-z_0)^k \quad (a_n \neq 0) \\ &= w_0 + (z-z_0)^n \sum_{k=0}^{\infty} a_{n+k}(z-z_0)^k \\ &=: w_0 + (z-z_0)^n\, g(z). \end{aligned}$$

Da $g(z_0) = a_n \neq 0$, gibt es auf einer hinreichend kleinen Umgebung u von z_0 eine holomorphe Funktion $h : U \to \mathbb{C}$ mit $h(z)^n = g(z)$.

Begründung. Die Abbildung

$$\exp : \{\zeta \in \mathbb{C} : -\frac{\pi}{2} < \operatorname{Im}\zeta < \frac{\pi}{2}\} \to \{w \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(w) > 0\}$$

besitzt ein holomorphe Umkehrfunktion log. Wähle eine Zahl α mit $\alpha^n = a_n$ und setze

$$h(z) = \alpha \exp\left(\frac{1}{n} \log\left(\frac{g(z)}{a_n}\right)\right), \quad z \in U.$$

Dabei sei U so klein gewählt, daß $\operatorname{Re}\left(\frac{g(z)}{a_n}\right) > 0$.

Jetzt betrachte $\varphi : U \to \mathbb{C}$, $\varphi(z) = (z-z_0)\,h(z)$. Es gilt $\varphi'(z_0) = h(z_0) = \alpha \neq 0$.Nach dem Umkehrsatz können wir U so verkleinern, daß φ biholomorph auf eine Kreisscheibe $B_\rho(0)$ abbildet. Es folgt

$$f(\varphi^{-1}(\zeta)) = w_0 + \big((z-z_0)\,h(z)\big)^n\big|_{z=\varphi^{-1}(\zeta)} = w_0 + \zeta^n.$$

$\square$

Bemerkung. In der Situation von Satz 3 besitzt jeder Punkt $w \in B_{\rho^n}(w_0)\backslash\{w_0\}$ genau n Urbilder in U.

Satz 4 (*Offenheit konformer Abbildungen*)
Eine nichtkonstante holomorphe Funktion $f : \Omega \to \mathbb{C}$ bildet offene Mengen in offene Mengen ab.

Satz 5 (*Identitätsprinzip*)
Sind $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$ beide auf dem Gebiet Ω holomorph und hat $\{z \in \Omega : f(z) = g(z)\}$ einen Häufungspunkt in Ω, so sind f und g gleich.

Definition Sei $f : B_r(z_0)\backslash\{z_0\} \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann heißt die Singularität z_0

- *hebbar* $\Leftrightarrow$ es gibt ein $w_0 \in \mathbb{C}$, so daß f durch $f(z_0) := w_0$ auf ganz $B_r(z_0)$ holomorph fortgesetzt wird.
- *wesentlich* $\Leftrightarrow$ für kein $k \in \mathbb{N}$ ist z_0 eine hebbare Singularität von $(z-z_0)^k f(z)$.

Sei z_0 weder hebbar noch wesentlich. Dann gibt es ein $k \geq 1$, so daß z_0 hebbar ist für $g(z) := (z-z_0)^k\, f(z)$, nicht aber für $\frac{g(z)}{z-z_0}$. Ist dann $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n (z-z_0)^n$ die Potenzreihendarstellung von g bei z_0, so folgt $g(z_0) = w_0 \neq 0$ bzw.

$$(*) \qquad f(z) = \frac{a_{-k}}{(z-z_0)^k} + \frac{a_{1-k}}{(z-z_0)^{k-1}} + \ldots + \frac{a_{-1}}{z-z_0} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n, a_{-k} \neq 0.$$

Definition Eine nicht hebbare und nicht wesentliche Singularität heißt *Polstelle.* Die wohlbestimmte Zahl k heißt *Ordnung der Polstelle.* Es gilt $\lim_{z \to z_0} |f(z)| = \infty$.

Satz 6 (*Casaroti-Weierstraß*)
Ist $z_0 \in B_r(z_0)$ wesentliche Singularität von f, so ist $f(B_r(z_0) \backslash \{z_0\})$ dicht in $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Beweis. Wäre f beschränkt, so wäre die Singularität hebbar nach dem Riemannschen Hebbarkeitssatz. Also ist ∞ Häufungspunkt des Bildes von f. Wäre ein $a \in \mathbb{C}$ kein Häufungspunkt des Bildes von f, so wäre (nach Verkleinerung von r) die Funktion $\frac{1}{f(z)-a} = g(z)$ beschränkt, also holomorph. Da g nicht die Nullfunktion ist, gibt es ein $n \in \mathbb{N}_0$ mit $g(z) = (z-z_0)^n \, h(z)$ und $h(z_0) \neq 0$. Es folgt

$$(z-z_0)^n \, f(z) = (z-z_0)^n \cdot \left(a + \frac{1}{(z-z_0)^n \, h(z)} \right).$$

Widerspruch. □

1.3 Das Dirichletproblem für den Einheitskreis

Wir beschäftigen uns hier mit folgender Aufgabe:
Sei $B = \{z \in \mathbb{R}^2 : |z| < 1\}$ und $\varphi : \partial B \to \mathbb{R}$. Gesucht ist eine Lösung $u : B \to \mathbb{R}$ des Randwertproblems

$$\Delta u = 0 \text{ in } B, \quad u|_{\partial B} = \varphi.$$

Als erstes leite ich unter der Annahme der Existenz einer Lösung ein Darstellungsformel her.

Lemma 1 Sei $u \in C^0(\overline{B})$ im Innern von B harmonisch. Dann gilt für $z \in B$ die *Poissonsche Integralformel*

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial\Omega} \frac{1-|z|^2}{|\zeta - z|^2} \, u(\zeta) \, ds(\zeta).$$

Beweis. Für $z \in B$ sei $h_z(w) = \frac{w+z}{1+\bar{z}w} \in \mathrm{Aut}\,(B)$. Da $u \circ h_z$ auf B harmonisch ist, folgt aus der Mittelwerteigenschaft

$$\begin{aligned} u(z) &= u(h_z(0)) \\ &= \lim_{r \uparrow 1} \fint_{\partial B_r} u(h_z(w)) \, ds \\ &= \fint_{\partial B} u(h_z(w)) \, ds(w). \end{aligned}$$

Wir substituieren $h_z(w) = \zeta \Leftrightarrow w = h_{-z}(\zeta)$. Es gilt

$$\begin{aligned}
h'_{-z}(\zeta) &= \frac{1-\overline{z}\zeta - (\zeta - z)(-\overline{z})}{(1-\overline{z}\zeta)^2} = \frac{1-|z|^2}{(1-\overline{z}\zeta)^2} \\
\Rightarrow ds(w) &= |h'_{-z}(\zeta)|\, ds(\zeta) \\
&= \frac{1-|z|^2}{1-2\mathrm{Re}\,(\overline{z}\zeta)+|z|^2}\, ds(\zeta) \\
&= \frac{1-|z|^2}{|\zeta - z|^2}\, ds(\zeta).
\end{aligned}$$

□

Wir können allgemein die Poissonsche Formel als eine Abbildung

(∗)
$$\mathcal{E} : L^1(\partial B) \to C^\infty(B),$$
$$(\mathcal{E}\varphi)(z) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\partial B} \frac{1-|z|^2}{|\zeta - z|^2}\, \varphi(\zeta)\, ds(\zeta)$$

auffassen. Es ist nützlich, eine weitere Darstellung von $\mathcal{E}\varphi$ zur Verfügung zu haben.

Lemma 2 Die Funktion $\varphi \in L^1(\partial B)$ habe die Fourierkoeffizienten

$$\begin{aligned}
c_k &:= \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} \varphi(e^{i\vartheta})\, e^{-ik\vartheta}\, d\vartheta =: a_k - i b_k \quad (k \geq 1) \\
c_0 &:= \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \varphi(e^{i\vartheta})\, d\vartheta =: \frac{a_0}{2}.
\end{aligned}$$

Dann gilt mit $z = r\, e^{i\theta}$

(∗∗)
$$\mathcal{E}\varphi(z) = \mathrm{Re}\big(\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k \big) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} r^k (a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta).$$

Insbesondere ist $\mathcal{E}\varphi$ harmonisch.

Beweis. Für $z \in B$, $\zeta = e^{i\vartheta} \in \partial B$ gilt

$$\begin{aligned}
\frac{1-|z|^2}{|\zeta - z|^2} &= \frac{\zeta\overline{\zeta} - \zeta\overline{z} + \zeta\overline{z} - z\overline{z}}{(\zeta - z)\,(\overline{\zeta} - \overline{z})} \\
&= \frac{\zeta}{\zeta - z} + \frac{\overline{z}}{\overline{\zeta} - \overline{z}} \\
&= \frac{1}{1 - \frac{z}{\zeta}} + \frac{\overline{z}}{\overline{\zeta}} \frac{1}{1 - \frac{\overline{z}}{\overline{\zeta}}} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z}{\zeta}\right)^k + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\overline{z}}{\overline{\zeta}}\right)^k \\
&= 1 + 2\mathrm{Re}\big(\sum_{k=1}^{\infty} e^{-ik\vartheta} z^k \big).
\end{aligned}$$

Da $\varphi \in L^1(\partial B)$, haben wir

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|z^k\, e^{-ik\vartheta}\, \varphi(e^{i\vartheta})\|_{L^1(\partial B)} \le \frac{|z|}{1-|z|}\, \|\varphi\|_{L^1(\partial B)} < \infty.$$

Also konvergiert die Reihe in $L^1(\partial B)$und es darf gliedweise integriert werden. $\square$

Die Cauchy-Integralformel drückt eine holomorphe Funktion $f \in C^0(\overline{B})$ ebenfalls durch ihre Randwerte aus,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta.$$

Umgekehrt liefert sie zu gegebenem Randwert zwar stets eine holomorphe Funktion, nicht aber eine Fortsetzung der Randwerte. Dies ist schon deshalb unmöglich, weil eine solche Fortsetzung nicht immer existiert. Die Diskussion der Poissonschen Intergralformel muß sich deshalb auf die Frage konzentrieren, ob $\mathcal{E}\varphi$ die gegebenen Randwerte φ auch annimmt. Dabei kann danach differenziert werden, welche Regularität für den Randwert φ vorausgesetzt wird. Wir konzentrieren uns auf zwei Fälle:

- $\varphi \in C^0(\partial B)$ (*stetiger Kontext*)
- φ besitzt eine „Fortsetzung" $v \in C^1(B)$ mit endlicher Energie $E(v) < \infty$ (*Energiekontext*)

Wir beginnen mit dem ersten Fall, weil er konzeptuell geläufiger ist.

Satz 1 (*H. A. Schwarz*)
Für $\varphi \in C^0(\partial B)$ ist die Funktion

$$(\mathcal{E}\varphi)(z) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\partial B} \frac{1-|z|^2}{|\zeta - z|^2}\, \varphi(\zeta)\, d\zeta & z \in B \\ \varphi(z) & z \in \partial B \end{cases}$$

stetig auf $\overline{B}$; also gilt $\mathcal{E} : C^0(\partial B) \to C^0(\overline{B})$.

Beweis. Wir zeigen $\lim_{z\in B, z\to z_0} (\mathcal{E}\varphi)(z) = \varphi(z_0)$. Zu $\varepsilon > 0$ wähle $\delta > 0$ mit $|\varphi(\zeta) - \varphi(z_0)| \le \frac{\varepsilon}{2}$ für $|\zeta - z_0| \le \delta$. Für $|z - z_0| < \frac{\delta}{2}$ gilt dann nach Lemma 1

$$\begin{aligned}
|\mathcal{E}\varphi(z) - \mathcal{E}\varphi(z_0)| &= \frac{1}{2\pi} \Big| \int_{\partial B} \frac{1-|z|^2}{|\zeta - z|^2} \left(\varphi(\zeta) - \varphi(z_0)\right) ds(\zeta) \Big| \\
&\le \frac{1}{2\pi} \int_{|\zeta - z_0| \le \delta} \frac{1-|z|^2}{|\zeta - z|^2}\, |\underbrace{\varphi(\zeta) - \varphi(z_0)}_{\le \varepsilon/2}|\, ds(\zeta) \\
&+ \frac{1}{2\pi} \int_{|\zeta - z_0| \ge \delta} \frac{1-|z|^2}{|\zeta - z|^2}\, 2\|\varphi\|_{C^0(\partial B)}\, ds(\zeta) \\
&\le \frac{1}{2\pi} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1-|z|^2}{\left(\frac{\delta}{2}\right)^2}\, 2\|\varphi\|_{C^0(\partial B)}.
\end{aligned}$$

Jetzt lasse $z \to z_0$, also insbesondere $|z| \to 1$, und dann $\varepsilon \searrow 0$. $\square$

Bemerkung. Aus dem Maximumprinzip folgt $\|\mathcal{E}\varphi\|_{C^0(\overline{B})} = \|\varphi\|_{C^0(\partial B)}$.
Wir kommen jetzt zum Energiekontext und betrachten den Vektorraum

$$\mathcal{H}^1(B) = \{v \in C^1(B) : E(v) = \frac{1}{2}\int_B |dv|^2\, dxdy < \infty\}.$$

Im allgemeinen sind Funktionen in $\mathcal{H}^1(B)$nicht auf $\overline{B}$ stetig fortsetzbar. Wir können ihnen aber trotzdem sinnvoll Randwerte zuordnen. Dazu verwenden wir für $v \in C^1(B)$ die Notation

$$v_r(e^{i\vartheta}) := v(r\, e^{i\vartheta}) \quad (0 < r < 1).$$

Lemma 3 (*Randwerte in* $\mathcal{H}^1(B)$)

(1) $v \in \mathcal{H}^1(B) \Rightarrow \mathcal{R}v := \lim\limits_{r \nearrow 1} v_r$ existiert als Grenzwert in $L^2(\partial B)$.

(2) $\varphi \in L^2(\partial B) \Rightarrow \|(\mathcal{E}\varphi)_r - \varphi\|_{L^2(\partial B)} \to 0$ mit $r \nearrow 1$.

Beweis. Für (1) zeigen wir, daß v_r eine Cauchyfolge in $L^2(\partial B)$ für $r \nearrow 1$ ist und schließen dann mit dem Satz von Fischer-Riesz. Für $\frac{1}{2} \leq r_1 \leq r_2 < 1$ gilt

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} |v(r_2 e^{i\vartheta}) - v(r_1 e^{i\vartheta})|^2\, d\vartheta &= \int_0^{2\pi} \Big| \int_{r_1}^{r_2} \frac{\partial v}{\partial r}(re^{i\vartheta})\, dr\Big|^2\, d\vartheta \\
&\leq 2(r_2 - r_1) \int_{r_1}^{r_2}\int_0^{2\pi} \left|\frac{\partial v}{\partial r}\right|^2 (re^{i\vartheta}) r\, d\vartheta dr \\
&\leq 4(r_2 - r_1)\, E(v, B_{r_2} \backslash B_{r_1}).
\end{aligned}$$

Um (2) zu zeigen, betrachten wir die Fourierpolynome

$$\varphi_n = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k\, \cos k\vartheta + b_k\, \sin k\vartheta)$$

von φ und deren harmonischen Fortsetzungen

$$h_n(r, \vartheta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} r^k (a_n \cos k\vartheta + b_n \sin k\vartheta)$$

sowie $h = \mathcal{E}\varphi$. Wir erhalten die Abschätzungen

$$\begin{aligned}
\|h_r - (h_n)_r\|^2_{L^2(\partial B)} &= \pi \sum_{k=n+1}^{\infty} r^{2k}(a_k^2 + b_k^2) \leq \|\varphi - \varphi_n\|^2_{L^2(\partial B)}, \\
\|\varphi_n - (h_n)_r\|^2_{L^2(\partial B)} &= \pi \sum_{k=1}^{n} (1 - r^k)^2 (a_k^2 + b_k^2) \\
&\leq (1 - r^n)^2 \|\varphi\|^2_{L^2(\partial B)}.
\end{aligned}$$

Mit der Dreiecksungleichung ergibt sich

$$\begin{aligned}
\|\varphi - h_r\|_{L^2(\partial B)} &\leq \|\varphi - \varphi_n\|_{L^2} + \|\varphi_n - (h_n)_r\|_{L^2} + \|(h_n)_r - h_r\|_{L^2} \\
&\leq 2\|\varphi - \varphi_n\|_{L^2(\partial B)} + (1 - r^n)\|\varphi\|_{L^2(\partial B)}.
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \limsup_{r\nearrow 1} \|\varphi - h_r\|_{L^2(\partial B)} \leq 2\|\varphi - \varphi_n\|_{L^2(\partial B)}.$$

Wegen der L^2-Vollständigkeit bei Fourierreihen geht die rechte Seite für $n \to \infty$ gegen Null. □

Satz 2 (*Dirichletsches Prinzip auf der Kreisscheibe*)
Sei $v \in \mathcal{H}^1(B)$ und $h = \mathcal{E}(\mathcal{R}v)$ die harmonische Fortsetzung der Randwerte $\mathcal{R}v \in L^2(\partial B)$. Dann gilt $E(h) \leq E(v)$, d. h. h minimiert zu den gemeinsamen Randwerten $\mathcal{R}h = \mathcal{R}v$.

Beweis. Der Beweis basiert auf der Tatsache, daß kritische Punkte konvexer Funktionen notwendig Minima sind. Wäre $v \in C^1(\overline{B})$ und $h \in C^2(\overline{B})$, so hätten wir mit $v = h + (v - h)$ sofort

$$\begin{aligned}
E(v) &= E(h) + E(v-h) + \int_B \langle \operatorname{grad}(v-h), \operatorname{grad} h\rangle dxdy \\
&= E(h) + E(v-h) + \int_B \operatorname{div}\big((v-h)\operatorname{grad} h\big) dxdy \\
&= E(h) + \underbrace{E(v-h)}_{\geq 0} + \int_{\partial B} \underbrace{(v-h)}_{=0} \frac{\partial h}{\partial r}\, ds \geq E(h).
\end{aligned}$$

Wir haben aber diese Regularität bis zum Rand nicht zur Verfügung. Führen wir das Argument auf B_r mit $r < 1$ durch, so bereitet der Grenzübergang $r \nearrow 1$ immer noch Schwierigkeiten. Deshalb ersetzen wir noch h durch die endliche Summe

$$h_n(r,\vartheta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} r^k (a_k \cos k\vartheta + b_k \sin k\vartheta),$$

wobei a_k, b_k die Fourierkoeffizienten von $\varphi := \mathcal{R}v$ sind. Wie oben bezeichnen wir mit φ_n das endliche Fourierpolynom auf dem Rand. Wir verwenden die Implikation

$$\varphi_k \to \varphi, \psi_k \to \psi \text{ in } L^2(\partial B) \Rightarrow \langle \varphi_k, \psi_k\rangle_{L^2(\partial B)} \to \langle \varphi, \psi\rangle_{L^2(\partial B)}.$$

Es gilt

$$\int_{\partial B_r} (v - h_n)\, \frac{\partial h_n}{\partial r}\, ds = r \int_{\partial B} (v_r - (h_n)_r)\Big(\frac{\partial h_n}{\partial r}\Big)_r ds$$

mit $v_r - (h_n)_r \to \varphi - \varphi_n$ in $L^2(\partial B)$, $(\frac{\partial h_n}{\partial r})_r \to \frac{\partial h_n}{\partial r}$ in $C^0(\partial B)$. Somit

$$\lim_{r\nearrow 1} \int_{\partial B_r} (v - h_n)\, \frac{\partial h_n}{\partial r}\, ds = \int_{\partial B} (\varphi - \varphi_n)\, \frac{\partial h_n}{\partial r}\, ds.$$

Nach dem Vollständigkeitssatz konvergiert $\varphi_N - \varphi_n$ für $N \to \infty$ in $L^2(\partial B)$ gegen $\varphi - \varphi_n$. Es folgt wegen der Orthogonalitätsrelationen

$$\int_{\partial B} (\varphi - \varphi_n) \frac{\partial h_n}{\partial r}\, ds = \lim_{N\to\infty} \int_{\partial B} (\varphi_N - \varphi_n) \frac{\partial h_n}{\partial r}\, ds = 0.$$

$$\Rightarrow \quad E(v) = E(h_n) + E(v - h_n)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}\int_{B_r} |dh|^2\, dxdy = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\int_{B_r} |dh_n|^2\, dxdy \leq E(v).$$

Hieraus ergibt sich mit $r \nearrow 1$ die gewünschte Ungleichung. □

Folgerung 1 Seien a_k, b_k die Fourierkoeffizienten von $\varphi \in L^1(\partial B)$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(1) Es gibt ein $v \in \mathcal{H}^1(B)$ mit $\mathcal{R}v = \varphi$.

(2) $[\varphi]^2 := \frac{\pi}{2} \sum_{k=1}^{\infty} k(a_k^2 + b_k^2) < \infty$.

Tatsächlich ist $[\varphi]^2$ die Energie der harmonischen Fortsetzung.

Beweis. Die harmonische Fortsetzung $h = \mathcal{E}\varphi$ lautet

$$\begin{aligned} h(r,\vartheta) &= \tfrac{a_0}{2} + \textstyle\sum_{k=1}^{\infty} r^k (a_k \cos k\vartheta + b_k \sin k\vartheta). \\ &\Rightarrow \frac{1}{2} \int_{B_r} |\operatorname{grad} h|^2 \, dxdy \\ &= \frac{1}{2} \int_{B_r} \operatorname{div}(h \operatorname{grad} h) \, dxdy \\ &= \frac{1}{2} \int_{\partial B_r} h \frac{\partial h}{\partial r} \, ds = \frac{\pi}{2} \sum_{k=1}^{\infty} k r^{2k} (a_k^2 + b_k^2). \end{aligned}$$

Aus dem Satz von Levi folgt mit $r \nearrow 1$

$$\frac{1}{2} \int_B |dh|^2 \, dxdy = \frac{\pi}{2} \sum_{k=1}^{\infty} k(a_k^2 + b_k^2) = [\varphi]^2.$$

Gibt es nun ein $v \in \mathcal{H}^1(B)$ mit $\mathcal{R}v = \varphi$, so gilt $E(h) \le E(v) < \infty$ nach Satz 2 und die Reihe konvergiert. Ist umgekehrt die Reihe konvergent, so ist

$$\|\varphi - \frac{a_0}{2}\|^2_{L^2(\partial B)} = \pi \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \le 2\,[\varphi]^2,$$

also $\varphi \in L^2(\partial B)$ und $h \in \mathcal{H}^1(B)$. Nach Lemma 3 ist $\mathcal{R}h = \varphi$. $\square$

Bemerkung. Ist $h : B \to \mathbb{R}$ harmonisch, so gilt nach Lemma 1 für $0 < r < 1$

$$h(rz) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial B} \frac{1 - |z|^2}{|\zeta - z|^2} h(r\zeta) \, ds(\zeta).$$

Ist $h \in \mathcal{H}^1(B)$ mit Randwerten $\varphi = \mathcal{R}h \in L^2(\partial B)$, so folgt mit $r \nearrow 1$ aus $h_r \to \varphi$ in $L^2(\partial B)$

$$h(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial B} \frac{1 - |z|^2}{|\zeta - z|^2} \varphi(\zeta) \, ds(\zeta) = (\mathcal{E}\varphi)(z).$$

Es gibt also höchstens eine harmonische Fortsetzung von φ mit endlichem Dirichletintegral, nämlich $\mathcal{E}\varphi$.

Folgerung 2 Sei $\mathcal{H}^1_\varphi(B) = \{v \in \mathcal{H}^1(B) : \mathcal{R}v = \varphi\} \neq \emptyset$. Dann gibt es genau ein Minimum von E in $\mathcal{H}^1_\varphi(B)$, und zwar die Funktion $\mathcal{E}\varphi$.

Beweis. Es ist nur noch die Eindeutigkeit zu zeigen. Ist $u \in \mathcal{H}^1_\varphi(B)$ ein Minimum und $\eta \in$

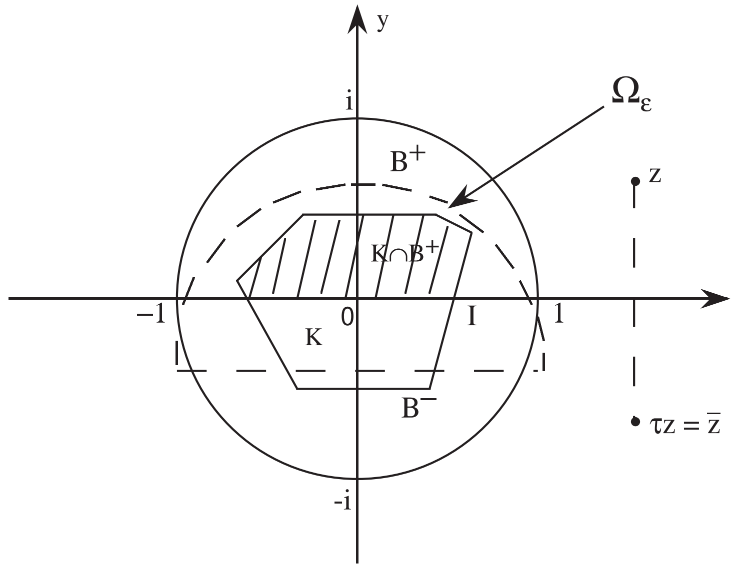
$C_c^\infty(B)$, so gilt

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{d}{d\varepsilon} E(u+\varepsilon\eta)|_{\varepsilon=0} \\
&= \int_B \langle \operatorname{grad} u, \operatorname{grad} \eta \rangle dxdy \\
&= \underbrace{\int_B \operatorname{div}(u \operatorname{grad} \eta) dxdy}_{=0} - \int_B u \Delta \eta dxdy.
\end{aligned}
$$

Aus dem Lemma von Weyl folgt $u \in C^\infty(B)$ und $\Delta u = 0$. Nach obiger Bemerkung ist damit $u = \mathcal{E}\varphi$. □

Allgemein ist die Frage, inwieweit sich Regularitätsannahmen für φ auf die Regularität von $\mathcal{E}\varphi$ *bis zum Rand* auswirken, von großer Bedeutung. Die Diskussion würde aber den Rahmen der Vorlesung sprengen. Wir wollen jedoch zumindest die Situation behandeln, wenn die harmonische Funktion auf einem Linien- oder Kreissegment bzw. allgemeiner auf einem analytischen Bogen verschwindet. In diesem Fall kann die Funktion durch *ungerades Spiegeln* zu einer harmonischen Funktion fortgesetzt werden. Dies ist wesentlich dafür, daß Minimalflächen an Geraden sowie an Ebenen, auf die sie senkrecht auftreffen, gespiegelt werden können. Im folgenden verwenden wir folgende Notation:

$$
\begin{aligned}
B^+ &= \{z = x+iy \in \mathbb{C} : |z| < 1, y > 0\}, \\
& \quad \tau : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \tau(x,y) = (x,-y) \text{ bzw. } \tau(z) = \overline{z}, \\
B^- &= \tau(B^+) = \{z = x+iy : |z| < 1, y < 0\}, \\
I &= (-1,1) \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}, \\
L^1_{\mathrm{loc}}(B^+ \cup I) &= \{u \in L^1_{\mathrm{loc}}(B^+) : \int_{B^+\cap K} |u|\, dxdy < \infty \text{ für } K \subset\subset B\}
\end{aligned}
$$



Satz 3 (*Spiegelungsprinzip von H. A. Schwarz*)
Sei $u \in C^\infty(B^+)$ harmonisch und es gelte

- *entweder* $u \in C^0(B^+ \cup I)$ und $u|_I = 0$,

- *oder* $u \in L^1_{\text{loc}}(B^+ \cup I)$ und $\int_{B^+} u\Delta\eta \, dxdy = 0$ für alle ungeraden $\eta \in C^\infty_c(B)$, also $\eta(z) = -\eta(\tau(z))$.

Dann ist die durch ungerade Spiegelung fortgesetzte Funktion

$$u(z) := \begin{cases} u(z) & \text{für } z \in B^+ \\ -u(\tau(z)) & \text{für } z \in B^- \end{cases}$$

harmonisch auf der ganzen Kreisscheibe B.

Beweis. Wir behandeln zunächst den Fall der zweiten Voraussetzung. Jedes $\eta \in C^\infty_c(B)$ ist Summe der geraden Funktion $\eta^+(z) = \frac{1}{2}(\eta(z) + \eta(\overline{z}))$ und der ungeraden Funktion $\eta^-(z) = \frac{1}{2}(\eta(z) - \eta(\overline{z}))$. Es gilt

$$\begin{aligned} \eta \text{ gerade} \quad &\Rightarrow \quad \int_B u\Delta\eta \, dxdy = 0, \\ \eta \text{ ungerade} \quad &\Rightarrow \quad \int_B u\Delta\eta \, dxdy = 2\int_{B^+} u\Delta\eta \, dxdy = 0, \text{ nach Voraussetzung.} \end{aligned}$$

Aus dem Weylschen Lemma folgt die Behauptung. Als zweites zeigen wir, daß die erste Voraussetzung die zweite Voraussetzung impliziert. Betrachte dazu

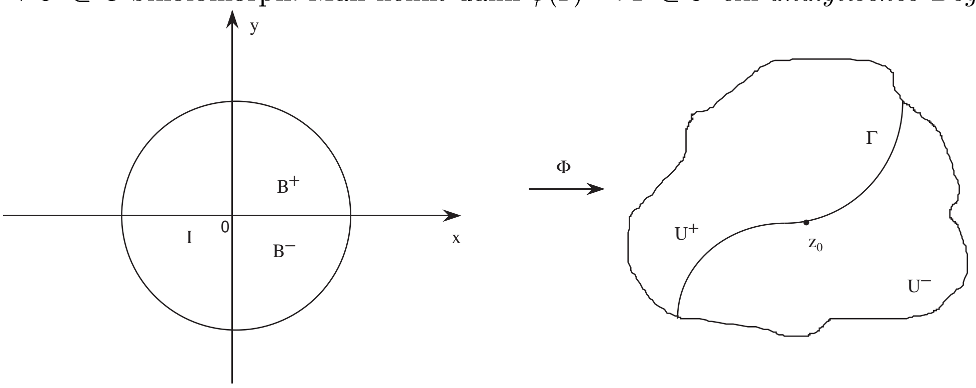
$$u_\varepsilon(x,y) := u(x, y+\varepsilon) \quad \text{auf } \Omega_\varepsilon = B^+ \cap (B^+ - \varepsilon\, e_2).$$

Ist $\varepsilon > 0$ hinreichend klein, so gilt $\{(x,y) \in \operatorname{spt}\eta : y \geq 0\} \subset \Omega_\varepsilon \cup I$ und es folgt für ungerades η

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{B^+} \eta \Delta u_\varepsilon \, dxdy \\ &= \underbrace{\int_{B^+} \operatorname{div}(\eta \operatorname{grad} u_\varepsilon)\, dxdy}_{=0} - \int_{B^+} \langle \operatorname{grad}\eta, \operatorname{grad} u_\varepsilon \rangle dxdy \\ &= -\int_{B^+} \operatorname{div}(u_\varepsilon \operatorname{grad}\eta) dxdy + \int_{B^+} u_\varepsilon \Delta\eta dxdy \\ &= \int_{B^+} u_\varepsilon \, \Delta\eta \, dxdy + \int_I u_\varepsilon \, \frac{\partial\eta}{\partial y}\, dx. \end{aligned}$$

Mit $\varepsilon \searrow 0$ ergibt sich die zweite Voraussetzung und damit die Behauptung. $\square$

Sei $\phi : B \to U \subset \mathbb{C}$ biholomorph. Man nennt dann $\phi(I) =: \Gamma \subset U$ ein *analytisches Bogenstück*.



Wir haben den konformen Automorphismus $\sigma = \phi \circ \tau \circ \phi^{-1}$ von U. Sei $u \in C^\infty(U^+)$ harmonisch, wobei $U^+ = \phi(B^+)$. Es gelte

- entweder $u \in C^0(U^+ \cup \Gamma)$ und $u|_\Gamma = 0$,
- oder es sei $u \in L^1_{\text{loc}}(U^+ \cup \Gamma)$ und $\int\limits_{U^+} u \Delta\eta \, dx dy = 0$

  für alle $\eta \in C_c^\infty(U), \eta$ ungerade bzgl. σ.

Dann ist

$$u(z) = \begin{cases} u(z) & \text{für } z \in U^+ \\ -u(\sigma z) & \text{für } z \in U^- \end{cases}$$

holomorph auf ganz U. Unter der ersten Annahme ergibt sich das direkt aus Satz 3. Gilt die 2. Voraussetzung, so folgt für $\chi \in C_c^\infty(B), \chi|_I = 0$ mit $\eta := \chi \circ \phi^{-1}$

$$\begin{aligned}
& \int\limits_{B^+} (u \circ \phi)(\zeta)(\Delta\chi)(\zeta) \, d\xi d\eta \\
= & \int\limits_{B^+} (u \circ \phi)(\zeta)\Delta(\eta \circ \phi)(\zeta) \, d\xi d\eta \\
= & \int\limits_{B^+} (u \circ \phi)(\zeta)(\Delta\eta) \circ \phi \, |\det d\phi| \, d\xi d\eta \\
= & \int\limits_{U^+} u \Delta\eta \, d\xi d\eta = 0.
\end{aligned}$$

Es ergibt sich die Behauptung auch in diesem Fall.

Beispiel. Kreise sind Bilder der x-Achse unter gebrochen linearen Transformationen. Die Spiegelung ist dann die Inversion, d. h. die am Einheitskreis gespiegelte Funktion erfüllt $u(z) = -u\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)$.

Kapitel 2

Das Plateausche Problem

In diesem Kapitel konstruieren wir zu einer gegebenen, geschlossenen Kurve $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ eine parametrisierte Fläche $f : B = \{z \in \mathbb{R}^2 : |z| < 1\} \to \mathbb{R}^3$, die von Γ berandet wird und unter allen gleichartigen Abbildungen kleinsten Flächeninhalt hat. Wie in der Einleitung bereits festgestellt, beschreibt diese Abbildung nicht notwendig eine absolut kleinste Fläche mit Rand Γ: diese könnte nicht orientierbar sein bzw. höheres Geschlecht haben und damit keine Parametrisierung durch B gestatten. Man spricht hier deshalb präziser von der Lösung des Plateauproblems vom *topologischen Typ der Kreisscheibe.*

Unsere Darstellung folgt dem von Douglas (1931) und Courant (1936) gefundenen Ansatz. Statt des Flächeninhalts $A(f) = \int_B \sqrt{\det(df^*df)}\,dxdy$ wird das Dirichletintegral $E(f) = \frac{1}{2}\int_B \operatorname{tr}(df^*df)\,dxdy$ minimiert. Während $A(\cdot)$ bei Reparametrisierung mit beliebigen Diffeomorphismen gleich bleibt, hat das Dirichletintegral lediglich die 3-Parameterschar der konformen Automorphismen

$$\operatorname{Aut}(B) = \{e^{i\alpha}\frac{z+z_0}{1+\overline{z}_0 z} : \alpha \in \mathbb{R}, z_0 \in B\}$$

als *Invarianzgruppe.* Deshalb läßt sich bei Minimierung von $E(\cdot)$ wesentlich eher eine Entartung der Parametrisierung in einer Minimalfolge ausschließen. Die Tatsache, daß unsere Lösung nicht nur das Dirichletintegral minimiert, sondern auch den Flächeninhalt, folgt aus einem Satz von C. B. Morrey, dem sogenannten ε-Konformitätslemma. Für diesen Zusammenhang müssen wir z. B. auf [15] verweisen. Die Minimalflächengleichung kann aber dennoch mit einem Variationsargument gezeigt werden. Wir beginnen nun mit der Konstruktion der Lösung und genauer mit der mathematischen Formulierung der Randbedingung.

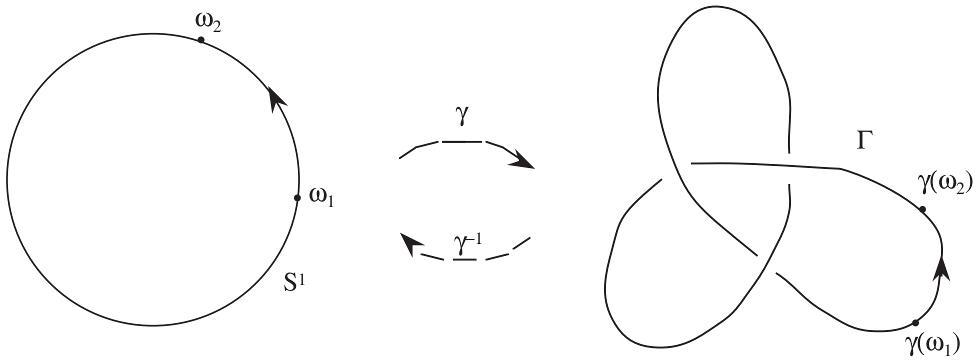
2.1 Konstruktion der Lösung

Wir beschreiben den beim Seifenhautexperiment gegebenen Draht als geschlossene Jordankurve $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$, das heißt als Bild eines *Homeomorphismus*

$$\gamma : S^1 \xrightarrow{\sim} \Gamma \subset \mathbb{R}^3.$$

Für $\omega_1, \omega_2 \in S^1$ und $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ gilt dann

$$|\gamma(\omega_1) - \gamma(\omega_2)| < \delta \Rightarrow |\omega_1 - \omega_2| < \varepsilon.$$



Lemma 1 Zu $\varphi \in C^0(S^1, \Gamma)$ existiert genau ein Lift $\theta \in C^0(\mathbb{R})$ mit $\theta(0) \in [0, 2\pi)$, so daß gilt:

$$\varphi(e^{i\vartheta}) = \gamma(e^{i\theta(\vartheta)}) \quad \text{für alle } \vartheta \in \mathbb{R}.$$

Beweis.
Eindeutigkeit: Seien $\theta_1, \theta_2 \in C^0(\mathbb{R})$ mit der Eigenschaft, also $\gamma(e^{i\theta_2(\vartheta)}) = \gamma(e^{i\theta_1(\vartheta)})$ für alle $\vartheta \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \quad e^{i(\theta_2(\vartheta)-\theta_1(\vartheta))} \equiv 1 && \text{für alle } \vartheta \in \mathbb{R}, \\ &\Rightarrow \quad \theta_2(\vartheta) - \theta_1(\vartheta) \equiv 2\pi k && \text{für ein } k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Wegen $|\theta_2(0) - \theta_1(0)| < 2\pi$ ist $k = 0$.

Existenz. Wir nehmen zunächst an, daß die Funktion $\omega(\vartheta) = \gamma^{-1}(\varphi(e^{i\vartheta}))$ auf $\mathbb{R}$ stetig differenzierbar ist. Wähle $\theta_0 \in [0, 2\pi)$ mit $\omega(0) = e^{i\theta_0}$ und setze

$$\theta(\vartheta) = \theta_0 + \frac{1}{i} \int_0^{\vartheta} \frac{\omega'(\tau)}{\omega(\tau)}\, d\tau$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \frac{d}{d\vartheta}(e^{-i\theta(\vartheta)}\omega(\vartheta)) &= e^{-i\theta(\vartheta)}\omega(\vartheta)\Big(-i\frac{1}{i}\frac{\omega'(\vartheta)}{\omega(\vartheta)} + \frac{\omega'(\vartheta)}{\omega(\vartheta)}\Big) = 0 \\ \Rightarrow \quad e^{-i\theta(\vartheta)}\omega(\vartheta) &= e^{-i\theta(0)}\omega(0) = 1 \\ \Rightarrow \quad \varphi(e^{i\vartheta}) &= \gamma(e^{i\theta(\vartheta)}). \end{aligned}$$

Im allgemeinen ist nur $\omega \in C^0(\mathbb{R}, S^1)$, aber für $\omega_\varepsilon = \frac{\eta_\varepsilon * \omega}{|\eta_\varepsilon * \omega|} \in C^\infty(\mathbb{R}, S^1)$ gilt $\|\omega - \omega_\varepsilon\|_{C^0(\mathbb{R})} \to 0$ mit $\varepsilon \searrow 0$ (wobei $\eta_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon}\eta\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)$ der übliche Glättungskern ist). Nach obigem gibt es $\theta_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R})$ mit $\omega_\varepsilon = e^{i\theta_\varepsilon}$. Wegen $\omega_\varepsilon(0) \to \omega(0) = e^{i\theta_0}$ können wir $\theta_\varepsilon(0) \to \theta_0 \in [0, 2\pi)$ annehmen. Das nachfolgende Lemma liefert dann ein $\theta \in C^0(\mathbb{R})$ mit den gewünschten Eigenschaften. □

Lemma 2 Seien $\varphi_k, \varphi \in C^0(S^1, \Gamma)$ mit $\|\varphi - \varphi_k\|_{C^0} \to 0$. Seien $\theta_k \in C^0(\mathbb{R})$ mit $\varphi_k(e^{i\vartheta}) = \gamma(e^{i\theta_k(\vartheta)})$ und $\theta_k(\vartheta_0) \to \theta_0$ für ein $\vartheta_0 \in \mathbb{R}$. Dann konvergieren die θ_k gleichmäßig gegen eine Funktion $\theta \in C^0(\mathbb{R})$ mit $\varphi(e^{i\vartheta}) = \gamma(e^{i\theta(\vartheta)})$ und $\theta(\vartheta_0) = \theta_0$.

Beweis. Die Funktionen $e^{i\theta_k(\vartheta)} = \gamma^{-1}(\varphi_k(e^{i\vartheta}))$ konvergieren gleichmäßig gegen $\omega(\vartheta) = \gamma^{-1}(\varphi(e^{i\vartheta}))$. Für k, l hinreichend groß gilt

$$\begin{aligned} &e^{i(\theta_k(\vartheta)-\theta_l(\vartheta))} \in \{e^{i\alpha} : -\varepsilon \le \alpha \le \varepsilon\}, \\ &|\theta_k(\vartheta_0) - \theta_l(\vartheta_0)| \le \varepsilon. \end{aligned}$$

Aus Stetigkeitsgründen folgt $|\theta_k(\vartheta) - \theta_l(\vartheta)| \le \varepsilon$ für alle $\vartheta \in \mathbb{R}$. Also konvergiert θ_k gleichmäßig gegen ein $\theta \in C^0(\mathbb{R})$, und die Eigenschaften folgen. □

Definition Die *Umlaufzahl* von $\varphi \in C^0(S^1, \Gamma)$ ist

$$\deg(\varphi) := \frac{1}{2\pi}(\theta(2\pi) - \theta(0)) \in \mathbb{Z},$$

wobei $\theta \in C^0(\mathbb{R})$ mit $\varphi(e^{i\vartheta}) = \gamma(e^{i\theta(\vartheta)})$ gewählt ist.

Unser Ziel ist die Konstruktion einer Abbildung $f \in \mathcal{H}^1(B, \mathbb{R}^3)$ mit kleinstmöglichem Dirichletintegral, die in Γ eingespannt ist. Die Randbedingung wird hier so interpretiert, daß $\mathcal{R}f \in C^0(S^1, \Gamma)$ eine homeomorphe Parametrisierung ist. Ohne zusätzliche Annahmen können wir aber nicht erwarten, daß die Extraktion einer geeignet konvergenten Teilfolge aus einer Minimalfolge gelingt:

Beispiel. Für $\Gamma = S^1$ sind die konformen Automorphismen

$$h_k(z) = \frac{z + \frac{k-1}{k}}{1 + \frac{k-1}{k}z} = \frac{k(z+1) - 1}{k(z+1) - z} \quad (z \in B)$$

Minima mit $E(h_k) = \pi$ (ohne Beweis). Für $k \to \infty$ gilt aber $h_k(z) \to 1$ für $(z \neq 1)$, während $h_k(-1) = -1$. Die Minimalfolge h_k konvergiert also nicht gegen das gewünschte Minimum, sondern gegen eine Konstante.

Allgemein operiert die dreidimensionale Gruppe $\mathrm{Aut}\,(B) = \{h(z) = e^{i\alpha} \frac{z+z_0}{1+\bar{z}_0 z} : \alpha \in \mathbb{R}, z_0 \in B\}$ auf den zulässigen Flächen $f : B \to \mathbb{R}^3$ bei Invarianz der Energie, $E(f \circ h) = E(f)$. Ist $f_k : B \to \mathbb{R}^3$ eine gegebene Minimalfolge, so können wir bestenfalls erwarten, daß $f_k \circ h_k^{-1}$ bei geeigneter Wahl der $h_k \in \mathrm{Aut}\,(B)$ konvergiert. Wir werden die h_k so wählen, daß die Reparametrisierungen einer sogenannten *drei-Punkt-Normierung* genügen.

Definition Seien $p_\nu := \gamma(e^{i\frac{2\pi}{3}\nu}) \in \Gamma$ für $\nu \in \{0, 1, 2\}$. Dann heißt $\varphi \in C^0(S^1, \Gamma)$ *drei-Punkt-normiert*, falls gilt: $\varphi(e^{i\frac{2\pi}{3}\nu}) = p_\nu$ für $\nu = 0, 1, 2$.

Wir hoffen jetzt, daß eine drei-Punkt-normierte Minimalfolge nach eventuellem Übergang zu einer Teilfolge konvergiert. Dabei ergibt sich folgende zusätzliche Komplikation: selbst wenn die Randwerte $\mathcal{R}f_k$ der Folgenglieder homeomorph sind und gleichmäßig gegen die Randwerte $\mathcal{R}f$ einer Grenzabbildung streben, muß diese nicht notwendig injektiv sein. Während die Lifts $\theta_k \in C^0(\mathbb{R})$, also $(\mathcal{R}\, f_k)(e^{i\vartheta}) = \gamma(e^{i\theta_k(\vartheta)})$, *streng* monoton sind, könnte ihr monotoner Grenzwert $\theta \in C^0(\mathbb{R})$ auf Intervallen konstant sein. Es erweist sich nicht als praktikabel, dies durch zusätzliche Modifikationen der Minimalfolge auszuschließen. Stattdessen werden wir die Klasse der zulässigen Flächen um die so auftretenden Grenzwerte erweitern. Eine solche *Vervollständigung* hat sich in einer Vielzahl von Variationsproblemen als geeignet erwiesen.

Definition Eine Abbildung $\varphi \in C^0(S^1, \Gamma)$ mit Lift $\theta \in C^0(\mathbb{R})$ heißt *monotone Parametrisierung*, falls gilt:

- θ ist (schwach) monoton wachsend
- $\deg(\varphi) = \frac{1}{2\pi}(\theta(2\pi) - \theta(0)) = +1.$

Satz 1 (*Existenzsatz für das Plateauproblem*)
Sei $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ eine geschlossene Jordankurve mit

$$\mathcal{E}(\Gamma) = \{f \in \mathcal{H}^1(B, \mathbb{R}^3) : \mathcal{R}f \in C^0(S^1, \Gamma) \text{ ist monotone Parametrisierung }\} \neq \emptyset.$$

Dann gibt es ein $f \in \mathcal{E}(\Gamma)$ mit $E(f) = \inf\{E(\widetilde{f}) : \widetilde{f} \in \mathcal{E}(\Gamma)\}$.

Beweis. Wir können eine Minimalfolge $\widetilde{f}_k \in \mathcal{E}(\Gamma)$ wählen, die drei-Punkt-normiert ist. Sei $f_k = \mathcal{E}(\mathcal{R}\,\widetilde{f}_k)$ die harmonische Fortsetzung der Randwerte von $\widetilde{f}_k$. Dann gilt:

- $\mathcal{R}\, f_k = \mathcal{R}\, \widetilde{f}_k$ (Kap. I.3, Lemma 3)
- $f_k \in C^0(\overline{B}, \mathbb{R}^3)$ (Kap. I.3, Satz 1, von H. A. Schwarz)
- $E(f_k) \le E(\widetilde{f}_k)$ (Kap. I.3, Satz 2, Dirichlet-Prinzip).

Wir können somit zu der Minimalfolge f_k übergehen. Unser Ziel ist nun zu zeigen, daß die Folge $f_k|_{\partial B}$ gleichgradig stetig ist. Dazu brauchen wir folgendes

Lemma (*Courant-Lebesgue*)
Sei $f \in C^0(\overline{B}, \mathbb{R}^3) \cap \mathcal{H}^1(B, \mathbb{R}^3)$. Zu jedem $z_0 \in \overline{B}$ und $r \in (0,1)$ gibt es ein $\rho \in (r^2, r)$, so daß gilt:

$$\operatorname{osc}(f, \partial B_\rho(z_0) \cap \overline{B}) \le \left(\frac{4\pi}{\log \frac{1}{r}} E(f) \right)^{\frac{1}{2}}.$$

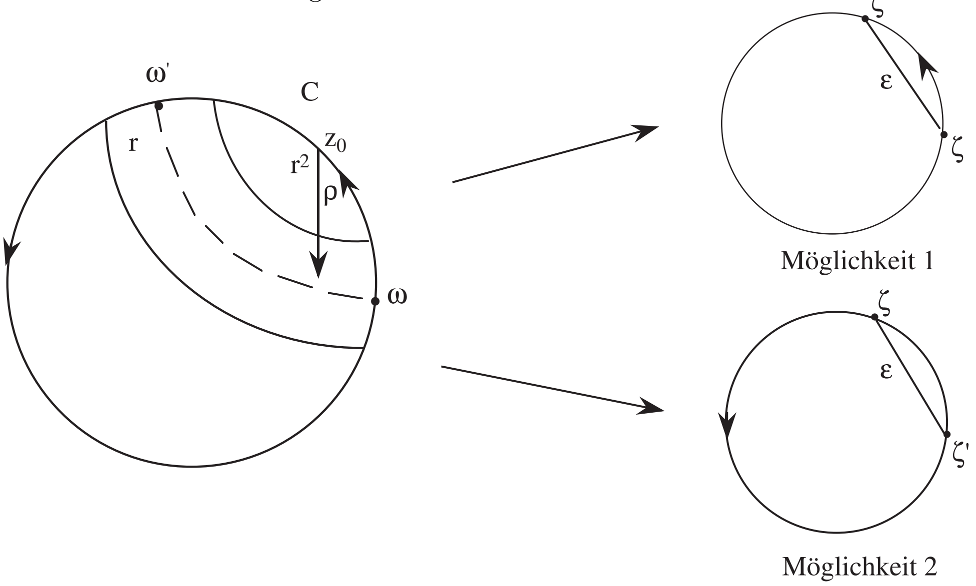
Wir verschieben den Beweis dieser Aussage und fahren mit der Argumentation fort. Zu $\varepsilon \in (0, \sqrt{3})$ gibt es ein $\delta > 0$ mit

$$|\gamma^{-1}(p) - \gamma^{-1}(q)| \le \varepsilon \quad \text{für } |p - q| \le \delta \quad (p, q \in \Gamma).$$

Wähle in dem Lemma $r = \min\{\exp(-\frac{4\pi E}{\delta^2}), \frac{\sqrt{3}}{2}\}$, wobei wir $E := \sup_{k \in \mathbb{N}} E(f_k) < \infty$ setzen. Zu jedem $k \in \mathbb{N}$ und jedem $z_0 \in \partial B$ gibt es dann ein $\rho \in (r^2, r)$ mit

$$\operatorname{osc}(f_k, \partial B_\rho(z_0) \cap \overline{B}) \le \left(\frac{4\pi E}{\log \frac{1}{r}} \right)^{\frac{1}{2}} = \delta.$$

Bezeichnen wir die (von k abhängigen) Endpunkte des Bogens $\partial B \cap \overline{B_\rho(z_0)} =: C$ mit ω, ω' sowie ihre Bildpunkte unter $\gamma^{-1} \circ f_k$ mit ζ, ζ', so gilt also $|\zeta - \zeta'| \le \varepsilon$. Durch ζ, ζ' wird der Einheitskreis in einen kürzeren und einen längeren Bogen geteilt. Wegen der Monotonie liegt das Bild von C ganz im Abschluß *eines* dieser Bögen.



Aber wegen der drei-Punkt-Normierung hat $\gamma^{-1} \circ f_k$ die Fixpunkte $\omega_\nu = e^{i\frac{2\pi}{3}\nu}, \nu \in \{0,1,2\}$. Da $|\omega - \omega'| \le 2\rho < 2r < \sqrt{3}$, liegt auf C höchstens einer der drei Punkte. Andererseits enthält der kürzere Bogen zwischen ζ, ζ' wegen $|\zeta - \zeta'| \le \varepsilon < \sqrt{3}$ auch höchstens einen der drei Punkte, und dieser Bogen muß dann das Bild von C sein. Damit gilt für alle k

$$\operatorname{diam}(\gamma^{-1} \circ f_k)(\partial B \cap B_{\delta^2}(z_0)) \le \varepsilon,$$

und die gleichgradige Stetigkeit von $f_k|_{\partial B}$ ist gezeigt. Nach Arzelà-Ascoli ist $f_k|_{\partial B}$ nach Wahl einer Teilfolge und Umnumerierung gleichmäßig konvergent. Weiter liefert das Maximumprinzip

$$\|f_k - f_l\|_{C^0(\overline{B})} \leq \|f_k - f_l\|_{C^0(\partial B)} < \varepsilon \quad \text{für } k,l \text{ groß.}$$

Also gibt es ein $f \in C^0(\overline{B}, \mathbb{R}^3)$ mit $\|f - f_k\|_{C^0(\overline{B})} \to 0$, und $f|_{\partial B}$ ist eine monotone Parametrisierung von Γ. Nach Weierstraß konvergieren alle Ableitungen auf B lokal gleichmäßig. Damit folgt für $r > 1$

$$\begin{aligned} E(f, B_r) &= \lim_{k\to\infty} E(f_k, B_r) \leq \inf\{E(\widetilde{f}) : \widetilde{f} \in \mathcal{E}(\Gamma)\}, \text{ also} \\ E(f) &\leq \inf\{E(\widetilde{f}) : \widetilde{f} \in \mathcal{E}(\Gamma)\}. \end{aligned}$$

□

Beweis des Lemmas. Der Beweis beruht auf dem Prinzip, daß ein Integrand nicht überall groß sein kann, wenn das Integral abgeschätzt ist. Genauer existiert ein $\rho \in (r^2, r)$, so daß mit $C_\rho := \partial B_\rho(z_0) \cap \overline{B}$ gilt

$$(*) \qquad \int_{C_\rho} \left|\frac{\partial f}{\partial s}\right|^2 ds \leq \frac{2E}{\rho \log \frac{1}{r}}.$$

Dabei ist $E = E(f)$ und $\frac{\partial}{\partial s}$ die Ableitung nach dem Bogenlängenparameter von C_ρ. Wäre $(*)$ falsch, so wäre nämlich

$$E \geq \frac{1}{2}\int_{r^2}^{r}\int_{C_\rho} \left|\frac{\partial f}{\partial s}\right|^2 ds d\rho > \frac{1}{2}\int_{r^2}^{r} \frac{2E}{\log\frac{1}{r}}\frac{d\rho}{\rho} = E,$$

ein Widerspruch. Also gilt für $z, z' \in C_\rho$

$$\begin{aligned} |f(z) - f(z')| &\leq \int_{C_\rho} \left|\frac{\partial f}{\partial s}\right| ds \\ &\leq \left(2\pi\rho \int_{C_\rho} \left|\frac{\partial f}{\partial s}\right|^2 ds\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\frac{4\pi E}{\log\frac{1}{r}}\right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

□

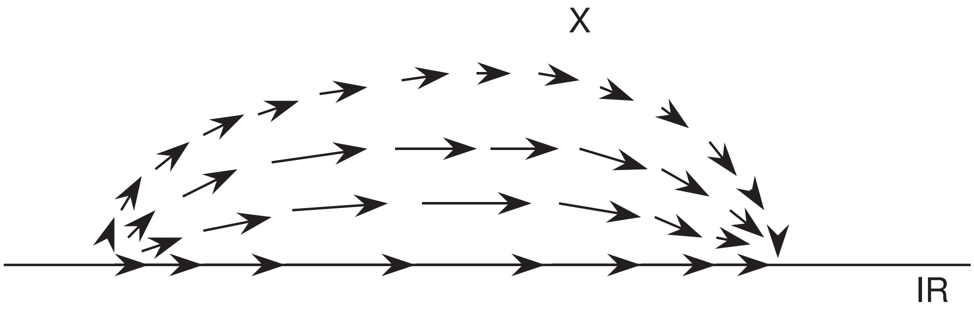
Damit ist der Existenzbeweis komplett. Als nächstes zeigen wir, daß ein Minimum f harmonisch und vor allem konform parametrisiert ist. Glücklicherweise müssen wir dazu nicht die Frage beantworten, ob f auch den Flächeninhalt minimiert, sondern können ein Variationsargument benutzen.

Satz 2 Sei f ein Minimum von E in $\mathcal{E}(\Gamma)$. Dann ist f harmonisch und erfüllt die Konformitätsrelationen,

$$\Delta f = 0 \quad \text{und } df^* df = \frac{1}{2}|df|^2 \mathbb{1}.$$

Beweis. Sei $T(z) = \frac{i-z}{i+z} \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C})$. T bildet die obere Halbebene $\mathbb{H}$ biholomorph auf B ab, wobei die Punkte $i, 0, 1, \infty$ auf $0, 1, i, -1$ gehen. Wir betrachten die Abbildung $f : \overline{\mathbb{H}} \to \mathbb{R}^3$, die durch Verkettung des Minimums in $\mathcal{E}(\Gamma)$ mit T entsteht.

Sei $\tau(x,y) = (x, -y)$ und $X \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ ein Vektorfeld mit $X \circ \tau = \tau \circ X$, insbesondere $\langle X(x,0), e_2\rangle \equiv 0$ für $x \in \mathbb{R}$.



Betrachte den zugehörigen Fluß $\phi \in C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$, das heißt

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}(t,x) = X(\phi(t,x)), \quad \phi(0,z) = z \qquad (z \in \mathbb{R}^2)$$

Die Abbildung $\phi_t = \phi(t,\cdot)$ ist diffeomorph mit Umkehrabbildung ϕ_{-t}. Aus dem Eindeutigkeitssatz für das Anfangswertproblem folgt

$$\phi(t,\tau(z)) = \tau(\phi(t,z)) \qquad ((t,z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2).$$

Insbesondere $\phi_t(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ und ϕ_t bildet die obere Halbebene in sich ab. Es gilt

$$E(f \circ \phi_t) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{H}} |df(\phi_t(w))\, d\phi_t(w)|^2 \, dudv$$

Wegen $\phi_{-t} = \phi_t^{-1}$ liefert die Substitution $w = \phi_{-t}(z)$

$$E(f \circ \phi_t) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{H}} |df(z)\, d\phi_{-t}(z)^{-1}|^2 \det d\phi_{-t}(z)\, dxdy. \tag{2.1}$$

Es folgt $E(f \circ \phi_t) < \infty$. Weiter gilt $\phi_t(z) = z$ für $z \in \mathbb{R}^2 \backslash \operatorname{spt} X$ und damit $f \circ \phi_t \circ T^{-1} \in \mathcal{E}(\Gamma)$. Die Minimumeigenschaft von f impliziert

$$E(f) \leq E(f \circ \phi_t) \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}. \tag{2.2}$$

Wir wollen jetzt in (2.1) die Ableitung nach dem Parameter t bilden. Da $d\phi_{-t}(z) = \mathbb{1}$ für $z \in \mathbb{R}^2 \backslash \operatorname{spt} X$, sind der Integrand und die t-Ableitung des Integranden für $t \in [-t_0, t_0]$ durch $C|df|^2 \in L^1(\mathbb{H})$ majorisiert und die Differentiation unter dem Integral ist möglich. Wir berechnen

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} d\phi_{-t}(z) \cdot v|_{t=0} &= \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial s}\phi_{-t}(z+sv)|_{s=0,t=0} \\
&= \frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial}{\partial t}\phi_{-t}(z+sv)|_{t=0,s=0} \\
&= -\frac{\partial}{\partial s} X(z+sv)|_{s=0} \\
&= -DX(z) \cdot v, \\
\Rightarrow \quad (2.3) \quad \frac{\partial}{\partial t} d\phi_{-t}(z)^{-1}|_{t=0} &= DX(z), \ \frac{\partial}{\partial t} \det d\phi_{-t}(z)|_{t=0} = -\operatorname{div} X(z).
\end{aligned}$$

Sei $\langle A, B \rangle = \operatorname{tr}(A^* B)$ das Hilbert-Schmidt-Skalarprodukt von $A, B \in \operatorname{Hom}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^m)$. Für $C \in \operatorname{End}(\mathbb{R}^2)$ gilt dann

$$\langle A, BC \rangle = \operatorname{tr}(A^* BC) = \operatorname{tr}((B^* A)^* C) = \langle B^* A, C \rangle. \tag{2.4}$$

Wir erhalten nun aus (2.1) bis (2.4)

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} E(f \circ \phi_t)|_{t=0} \\ &= \int\limits_{\mathbb{H}} \big(\langle df, df \cdot DX \rangle - \frac{1}{2} |df|^2 \operatorname{div} X \big)\, dxdy \\ &= \int\limits_{\mathbb{H}} \langle df^* df - \frac{1}{2} |df|^2 \mathbb{1}, DX \rangle dxdy \quad (X =: (\xi, \eta)) \\ &= \int\limits_{\mathbb{H}} \big(\frac{1}{2} (|\partial_x f|^2 - |\partial_y f|^2)\, \partial_x \xi + \langle \partial_x f, \partial_y f \rangle \partial_y \xi \big)\, dxdy \\ &+ \int\limits_{\mathbb{H}} \big(\langle \partial_x f, \partial_y f \rangle \partial_x \eta - \frac{1}{2} (|\partial_x f|^2 - |\partial_y f|^2) \partial_y \eta \big)\, dxdy. \end{aligned}$$

Durch Wahl von Vektorfeldern $X \in C_c^\infty(\mathbb{H})$ folgt hieraus zunächst (vgl. Kap. I.2, Satz 1 und Bemerkung)

$$\psi := \frac{1}{2} (|\partial_x f|^2 - |\partial_y f|^2) - i \langle \partial_x f, \partial_y f \rangle \in L^1(\mathbb{H}, \mathbb{C}) \text{ ist holomorph.} \tag{2.5}$$

Als nächstes sei $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ ungerade, also $\varphi(\tau(z)) = -\varphi(z)$. Dann ist das Vektorfeld $X = (\xi, \eta) = (\partial_y \varphi, \partial_x \varphi)$ zulässig, also $X \circ \tau = \tau \circ X$, und es folgt

$$0 = \int\limits_{\mathbb{H}} \langle \partial_x f, \partial_y f \rangle \Delta \varphi \, dxdy.$$

Nach Schwarz kann $\langle \partial_x f, \partial_y f \rangle$ durch ungerades Spiegeln zu einer harmonischen Funktion $h \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ fortgesetzt werden. Aber dann ist $h \in L^1(\mathbb{R}^2)$, und die Mittelwertformel impliziert $h \equiv 0$. Wegen der Cauchy-Riemann-Gleichungen ist $\operatorname{Re} \psi$ konstant, also wegen $\psi \in L^1(\mathbb{H})$ ebenfalls Null. □

Bemerkung. Aus den Konformitätsrelationen folgt

$$J_2 f = \sqrt{\det(df^* df)} = \frac{1}{2} |df|^2.$$

Ob f eine Immersion ist oder ob es Punkte $z \in B$ mit $df(z) = 0$ gibt, bleibt noch zu klären.

Bevor wir die Lösung weiter untersuchen, wollen wir vorher noch ein hinreichendes Kriterium für die Voraussetzung $\mathcal{E}(\Gamma) \neq \emptyset$ angeben.

Satz 3 $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ rektifizierbar $\Rightarrow \mathcal{E}(\Gamma) \neq \emptyset$. Für jede rektifizierbare Jordankurve ist das Plateauproblem lösbar.

Beweis. Jede rektifizierbare Kurve Γ besitzt eine Parametrisierung $\gamma : S^1 \to \Gamma$ proportional zur Bogenlänge, das heißt für $|\beta - \alpha| \leq \pi$ gilt

$$\begin{aligned} |\gamma(e^{i\alpha}) - \gamma(e^{i\beta})| &\leq L(\gamma(e^{i\vartheta})|_{\alpha \leq \vartheta \leq \beta}) \\ &= \frac{L(\Gamma)}{2\pi} |\beta - \alpha| \leq \frac{L(\Gamma)}{4} |e^{i\alpha} - e^{i\beta}|. \end{aligned}$$

Es reicht daher zu zeigen, daß die harmonische Fortsetzung einer Lipschitzabbildung endliche Energie hat. Sei zunächst $\gamma \in C^1(\partial B, \mathbb{R}^n)$ mit Fourierkoeffizienten $a_k, b_k (k \geq 0)$. Nach Kap. I.3, Folgerung 2, gilt dann für die harmonische Fortsetzung h von γ

$$\begin{aligned} E(h) &= \frac{\pi}{2}\sum_{k=1}^{\infty} k(|a_k|^2+|b_k|^2) \\ &\leq \frac{\pi}{2}\sum_{k=1}^{\infty} k^2(|a_k|^2+|b_k|^2) \\ &\leq \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} |\gamma'(\vartheta)|^2 d\vartheta < \infty, \end{aligned}$$

letzteres nach der Besselschen Ungleichung. Für $\gamma \in \mathrm{Lip}\,(\partial B, \mathbb{R}^n)$ betrachten wir die Glättungen

$$\gamma_\varepsilon(\theta) = \int \eta_\varepsilon(\vartheta)\gamma(\theta-\vartheta)d\vartheta \quad (\text{mit } \eta \geq 0).$$

Ist L die Lipschitzkonstante von γ, so gilt

$$\begin{aligned} |\gamma_\varepsilon(\theta)-\gamma_\varepsilon(\theta')| &\leq \int \eta_\varepsilon(\vartheta)|\gamma(\theta-\vartheta)-\gamma(\theta'-\vartheta)|\, d\vartheta \\ &\leq L|\theta-\theta'| \\ \Rightarrow \qquad |\gamma_\varepsilon'(\theta)| &\leq L. \end{aligned}$$

Seien h bzw. h_ε die harmonischen Fortsetzungen von γ bzw. γ_ε. Dann gilt $\|\gamma-\gamma_\varepsilon\|_{C^0(\partial B)} \to 0$ und mit dem Maximumprinzip sowie dem Satz von Schwarz $\|h-h_\varepsilon\|_{C^0(\overline{B})} \to 0$. Es folgt mit dem Satz von Weierstraß

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\int\limits_{B_r} |dh|^2\, dxdy &= \lim_{\varepsilon\searrow 0} \frac{1}{2}\int\limits_{B_r} |dh_\varepsilon|^2\, dxdy \\ &\leq \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} |\gamma_\varepsilon'(\theta)|^2\, d\theta, \end{aligned}$$

also $E(h) \leq \pi L^2$. □

Alternativ zu diesem Argument kann man folgende, auf Douglas zurückgehende Darstellung des Dirichletintegrals harmonischer Funktionen verwenden.

Satz 4 (*Douglas-Funktional*)
Sei $h \in C^\infty(B)$ die harmonische Fortsetzung von $\varphi \in L^2(\partial B)$. Dann gilt, wobei $d\omega$ als Abkürzung für $ds(\omega)$ steht,

$$\frac{1}{2}\int\limits_B |dh(z)|^2\, dxdy = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\partial B}\int\limits_{\partial B} \frac{|\varphi(\omega)-\varphi(\zeta)|^2}{|\omega-\zeta|^2}\, d\omega d\zeta.$$

Beweis. Die Fourierkoeffizienten von φ sind

$$c_k := a_k - ib_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_{\partial B} \varphi(\omega)\, \omega^{-k}\, d\omega \quad \text{für } k \geq 1.$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow a_k^2+b_k^2 &= c_k\,\overline{c}_k \\ &= \frac{1}{\pi^2}\int\limits_{\partial B}\int\limits_{\partial B} \varphi(\omega)\varphi(\zeta)\left(\frac{\zeta}{\omega}\right)^k d\omega d\zeta \\ &= -\frac{1}{2\pi^2}\int\limits_{\partial B}\int\limits_{\partial B} |\varphi(\omega)-\varphi(\zeta)|^2\left(\frac{\zeta}{\omega}\right)^k d\omega d\zeta. \end{aligned}$$

Multipliziere mit kr^k für $0 < r < 1$. Mit $z = \frac{r\zeta}{\omega}$ erhalten wir die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} k\, z^k = z\, \frac{d}{dz} \sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{z}{(1-z)^2} = \frac{r\omega\zeta}{(\omega - r\zeta)^2}.$$

Wegen $r < 1$ ist die Reihe auf $\partial B \times \partial B$ gleichmäßig konvergent und es folgt

$$\frac{\pi}{2} \sum_{k=1}^{\infty} r^k k(a_k^2 + b_k^2) = -\frac{1}{4\pi} \int\limits_{\partial B} \int\limits_{\partial B} |\varphi(\omega) - \varphi(\zeta)|^2 \mathrm{Re}\, \frac{r\omega\zeta}{(\omega - r\zeta)^2}\, d\omega d\zeta.$$

Wegen monotoner Konvergenz und Folgerung 1 aus Kap. I.3 strebt die linke Seite für $r \nearrow 1$ gegen $E(h)$. In der rechten Seite müssen wir den Integranden weiter untersuchen:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}\, \frac{r\omega\zeta}{(\omega - r\zeta)^2} &= \mathrm{Re}\, \frac{r\omega\zeta(\overline{\omega}^2 - 2r\overline{\omega}\overline{\zeta} + r^2\overline{\zeta}^2)}{((\omega - r\zeta)(\overline{\omega} - r\overline{\zeta}))^2} \\
&= \frac{r(1+r^2)\langle \omega, \zeta\rangle - 2r^2}{(1 + r^2 - 2r\langle \omega, \zeta\rangle)^2} \\
&= \Big(-\frac{1}{2}\Big) \cdot \frac{1 - \frac{1}{2}(r + \frac{1}{r})\langle \omega, \zeta\rangle}{\big(\frac{1}{2}(r + \frac{1}{r}) - \langle \omega, \zeta\rangle\big)^2}
\end{aligned}$$

Also gilt mit $t = \frac{1}{2}(r + \frac{1}{r}) \searrow 1$

$$E(h) = \frac{1}{8\pi} \lim_{t \searrow 1} \int\limits_{\partial B} \int\limits_{\partial B} |\varphi(\omega) - \varphi(\zeta)|^2 \frac{1 - t\langle \omega, \zeta\rangle}{(t - \langle \omega, \zeta\rangle)^2}\, d\omega d\zeta.$$

Bei der Untersuchung des Grenzübergangs $t \searrow 1$ können wir uns auf das Integrationsgebiet $\{(\omega, \zeta) : \langle \omega, \zeta\rangle \geq 0\}$ beschränken. Dann ergibt aber ein separater Vergleich der Zähler und Nenner

$$1 \leq t \leq s \Rightarrow \frac{1 - t\langle \omega, \zeta\rangle}{(t - \langle \omega, \zeta\rangle)^2} \geq \frac{1 - s\langle \omega, \zeta\rangle}{(s - \langle \omega, \zeta\rangle)^2}$$

Nach dem Satz über monotone Konvergenz folgt

$$\begin{aligned}
E(h) &= \frac{1}{8\pi} \int\limits_{\partial B} \int\limits_{\partial B} \frac{|\varphi(\omega) - \varphi(\zeta)|^2}{1 - \langle \omega, \zeta\rangle}\, d\omega d\zeta \\
&= \frac{1}{4\pi} \int\limits_{\partial B} \int\limits_{\partial B} \frac{|\varphi(\omega) - \varphi(\zeta)|^2}{|\omega - \zeta|^2}\, d\omega d\zeta.
\end{aligned}$$

□

2.2 Regularitäts-Eigenschaften der Lösung

Hier wollen wir einige einfachere Eigenschaften unserer Lösung zeigen sowie über tieferliegende Resultate ohne Beweis berichten. Unter einer Lösung des Plateauproblems für eine Jordankurve $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ verstehen wir im folgenden eine Abbildung $f \in \mathcal{H}^1(B, \mathbb{R}^3)$ mit folgenden Eigenschaften:

- $\Delta f = 0$,
- $df^* df = \frac{1}{2}|df|^2 \mathbb{1}$,

- $\mathcal{R}f \in C^0(\partial B, \Gamma)$ ist monotone Parametrisierung.

Nach Kap. I.3, Lemma 3 und Satz 1, gilt $f \in C^0(\overline{B}, \mathbb{R}^3)$. In einer groben Unterscheidung interessieren uns einerseits Eigenschaften jeder einzelnen Lösung und andererseits Fragen, die die Gesamtheit aller Lösungen betreffen. Wir beginnen mit der Diskussion der *Regularität einer Lösung.* Im Kontext der Analysis lautet die Frage hier: Inwieweit spiegelt sich eine zusätzlich angenommene Regularität von Γ in der Regularität der Minimalfläche f *bis zum Rand* wieder? Die Antwort darauf lautet wie folgt:

Satz 1 (*Hildebrandt & weitere Autoren, um 1969*)
Sei $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ eine Jordankurve von der Klasse $C^{k,\alpha}$ für $0 < \alpha < 1$, $k \geq 1$. Dann ist jede Lösung f des Plateauproblems in $C^{k,\alpha}(\overline{B}, \mathbb{R}^3)$. Ist Γ reellanalytisch, so ist f in der Umgebung von Randpunkten reellanalytisch.

Dieses Ergebnis ist für die globale Analysis des Plateauschen Problems, etwa für die Existenz instabiler Lösungen oder die Struktur der Menge aller Lösungen, von zentraler Bedeutung. Für den Beweis muß ich auf [4] verweisen. In einem sehr speziellen Fall können wir die Randregularität allerdings beweisen.

Satz 2 (*Spiegelungsprinzip für Minimalflächen*)
Sei $f \in C^0(B^+ \cup I, \mathbb{R}^3)$ eine Minimalfläche, für die $f(I)$ in einer Geraden $L = \{p_0 + tv : t \in \mathbb{R}\}$ enthalten ist, wobei p_0, $v \in \mathbb{R}^3$ und $|v| = 1$. Es sei σ_L die Spiegelung an L. Dann ist die durch Spiegelung an L fortgesetzte Fläche

$$f(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{für } (x,y) \in B^+ \cup I \\ \sigma_L(f(x,-y)) & \text{für } (x,y) \in B^- \end{cases}$$

eine glatte Minimalfläche. Insbesondere ist $f \in C^\infty(B^+ \cup I)$.

Beweis. Durch Komposition mit einer Bewegung können wir $p_0 = 0$ und $v = e_3$ annehmen. Dann gilt

$$\sigma_L(x^1, x^2, x^3) = (-x^1, -x^2, +x^3).$$

Also folgt für $(x,y) \in B^-$

$$\begin{aligned} f^i(x,y) &= -f^i(x,-y) \quad \text{für } i = 1,2; \\ f^3(x,y) &= f^3(x,-y). \end{aligned}$$

Nach dem Spiegelungsprinzip von Schwarz (Kap. I.3, Satz 3) sind $f^1, f^2 \in C^\infty(B)$ und harmonisch. Weiter gilt wegen der Konformitätsrelationen auf B

$$\begin{aligned} \frac{\partial f^3}{\partial x}\frac{\partial f^3}{\partial y} &= -\sum_{i=1}^{2} \frac{\partial f^i}{\partial x}\frac{\partial f^i}{\partial y} \to 0 \quad \text{mit } z \searrow x_0 \in I, \\ \left|\frac{\partial f^3}{\partial x}\right|^2 - \left|\frac{\partial f^3}{\partial y}\right|^2 &= -\sum_{i=1}^{2} \left(\left|\frac{\partial f^i}{\partial x}\right|^2 - \left|\frac{\partial f^i}{\partial y}\right|^2 \right) \\ &\overset{z \searrow x_0}{\longrightarrow} \sum_{i=1}^{2} \left|\frac{\partial f^i}{\partial y}\right|^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Gemeinsam folgt hieraus $\lim\limits_{z \searrow x_0} \dfrac{\partial f^3}{\partial y}(z) = 0$. Nun ist für $y < 0$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f^3}{\partial y}(x,-y) &= -\frac{\partial}{\partial t} f^3(x,-t)|_{t=y}\\ &= -\frac{\partial}{\partial t} f^3(x,t)|_{t=y}\\ &= -\frac{\partial f^3}{\partial y}(x,y).\end{aligned}$$

Nach dem Spiegelungsprinzip von Schwarz ist $\frac{\partial f^3}{\partial y}$ glatt auf ganz B. Aber dann ist

$$g(x,y) := f^3(x,y) - \int\limits_0^y \frac{\partial f^3}{\partial y}(x,\eta)\, d\eta$$

stetig auf B und erfüllt $\frac{\partial g}{\partial y} = 0$ auf $B \backslash I$; also gilt $g(x,y) \equiv f^3(x,0)$. Da g auf $B \backslash I$ glatt ist, ist auch $f^3(\cdot,0) \in C^\infty(I)$ und damit schließlich

$$f^3(x,y) = f^3(x,0) + \int\limits_0^y \frac{\partial f^3}{\partial y}(x,\eta)\, d\eta \in C^\infty(B).$$

$\square$

Bemerkung. Die Aussage von Satz 2 besitzt folgendes Pendant: Sei $f \in C^1(B^+ \cup I, \mathbb{R}^3)$ eine Minimalfläche, für die $f(I)$ in einer Ebene $P = \{p \in \mathbb{R}^3 : \langle p - p_0, v\rangle = 0\}$ liegt und diese senkrecht trifft,

$$\langle \frac{\partial f}{\partial x}(x,0) \wedge \frac{\partial f}{\partial y}(x,0), v\rangle = 0.$$

Sei σ_P die Spiegelung an P. Dann ist

$$f(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{für } y \geq 0\\ \sigma_P(f(x,y)) & \text{für } y \leq 0\end{cases}$$

eine glatte Minimalfläche auf B.

Als nächstes kommen wir zu Fragen der *geometrischen Regularität*: sind Lösungen des Plateauproblems immergierte Flächen? Da f die Konformitätsrelationen erfüllt, sind singuläre Punkte genau die Nullstellen der holomorphen Funktion

$$\partial_z f = \frac{1}{2}(\partial_x f - i\,\partial_y f) : B \to \mathbb{C}^3.$$

Nach dem Identitätssatz sind dies höchstens abzählbar viele, in B isolierte Punkte. Wir wollen das lokale Verhalten von f in der Nähe einer solchen Singularität $z_0 \in B$ beschreiben. Sei oBdA $z_0 = 0$. Es gibt ein $c = a - ib \in \mathbb{C}^3 \backslash \{0\}$ und ein $m \in \mathbb{N}$ mit $\partial_z f = \frac{1}{2} c\, z^m + \ldots$. Setzen wir das Skalarprodukt komplex bilinear auf $\mathbb{C}^3$ fort, so erhalten wir

$$\begin{aligned}\langle \partial_z f, \partial_z f\rangle &= \frac{1}{4}\langle \partial_x f - i\partial_y f, \partial_x f - i\partial_y f\rangle\\ &= \frac{1}{4}\big(|\partial_x f|^2 - |\partial_y f|^2 - 2i\langle \partial_x f, \partial_y f\rangle\big) = 0.\end{aligned}$$

Es folgt $0 = \langle c, c\rangle = |a|^2 - |b|^2 - 2i\langle a, b\rangle$. Nun ist

$$\begin{aligned} \partial_x f &= r^m(a\cos m\varphi + b\sin m\varphi) + \mathcal{O}(r^{m+1}), \\ \partial_y f &= r^m(-a\sin m\varphi + b\cos m\varphi) + \mathcal{O}(r^{m+1}), \\ \Rightarrow \partial_x f \wedge \partial_y f &= r^{2m} a \wedge b + \mathcal{O}(r^{2m+1}). \end{aligned}$$

Also besitzt die Flächennormale $\nu = \dfrac{\partial_x f \wedge \partial_x f}{|\partial_y f \wedge \partial_y f|}$ für $z \to 0$ den Grenzwert $\frac{a\wedge b}{|a\wedge b|}$. Durch eine geeignete Drehung, Verschiebung und Streckung können wir wie folgt normieren:

$$f(0) = 0, \quad a = (m+1)e_1, \quad b = (m+1)e_2.$$

Dann erhalten wir mit $\mathbb{R}^3 = \mathbb{C} \times \mathbb{R}$ die asymptotische Entwicklung

$$f(z) = (z^{m+1}, 0) + h(z), \quad |h(z)| \le C r^{m+2}.$$

Das Verhalten von f bei $z = 0$ entspricht also in erster Näherung dem einer holomorphen Funktion in einer Nullstelle höherer Ordnung. Deshalb bezeichnet man diese Singularitäten von Minimalflächen als *Verzweigungspunkte* (der Ordnung m). Wir wollen die Struktur eines Verzweigungspunkts in einem Beispiel näher analysieren.

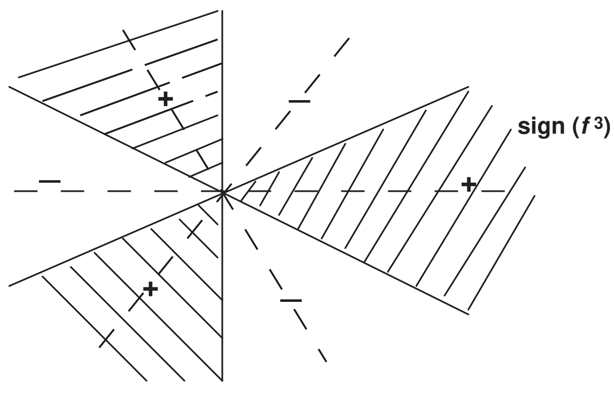
Beispiel (vgl. *Osserman* [12])

$$\begin{aligned} f(z) &= \Big(\mathrm{Re}\,(z^2 - \frac{1}{2}\overline{z}^4), \mathrm{Im}\,(z^2 - \frac{1}{2}\overline{z}^4), \mathrm{Re}\,(\frac{4}{3}z^3)\Big) \\ \Rightarrow \partial_z f &= \big(z(1-z^2), -iz(1+z^2), 2z^2\big) \\ \langle \partial_z f, \partial_z f\rangle &= z^2(1 - 2z^2 + z^4) - z^2(1 + 2z^2 + z^4) + 4z^4 = 0. \end{aligned}$$

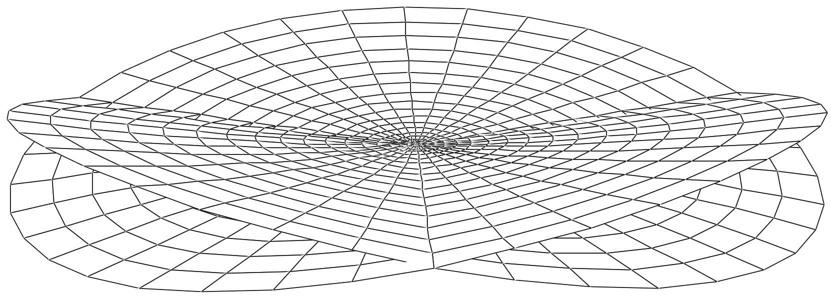
Da außerdem $\Delta f = 0$ gilt, ist f eine Minimalfläche und hat im Verzweigungspunkt $z = 0$ die Normale $\nu = e_3$. Wir berechnen

$$\begin{aligned} (f^1 + if^2)(re^{i\vartheta}) &= (re^{i\vartheta})^2(1 - \frac{r^2}{2}e^{-6i\vartheta}) \\ f^3(re^{i\vartheta}) &= \frac{4}{3}r^3\cos(3\vartheta) \\ f(re^{\pm i\frac{\pi}{6}}) &= r^2(1 + \frac{r^2}{2})(\cos\frac{\pi}{3}, \pm\sin\frac{\pi}{3}, 0). \end{aligned}$$

f bildet also die Strahlen mit Argument $\vartheta = (2k+1)\frac{\pi}{6}$ $\quad(0 \le k \le 5)$ in Strahlen mit Argument $\theta = (2k+1)\frac{\pi}{3}$ ab. Die Vorzeichenverteilung von f^3 ist dabei wie folgt:



Mit diesen Informationen läßt sich schon ein gutes Bild des Verzweigungspunkts herstellen, wobei der Schnitt der Fläche mit einem Vollzylinder dargestellt wird.



Zur Verbesserung der Anschauung ist die Fläche hier als Kegelfläche dargestellt, tatsächlich wird sie zum Ursprung hin flach. Durch dieses Beispiel ist zunächst belegt, daß Verzweigungspunkte bei Lösungen von

$$\Delta f = 0 \quad \text{und} \quad df^* df = \frac{1}{2}\,|df|^2\,\mathbb{1}$$

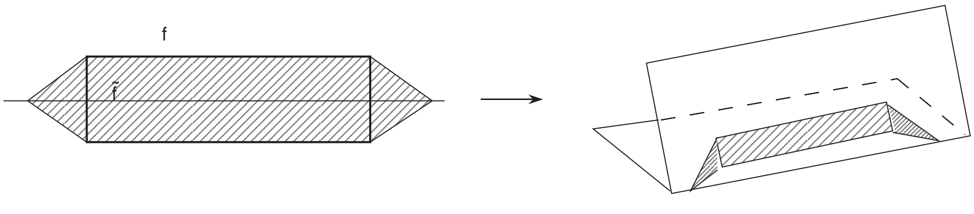
in der Tat auftreten können. Andererseits wollen wir jetzt in zwei Schritten begründen, daß die Abbildung $f : B \to \mathbb{R}^3$ sogar in der Klasse der Abbildungen mit gleichen Randwerten kein Minimum des Flächeninhalts ist.

Lemma Für $f \in C^0(\overline{B}, \mathbb{R}^3)$ seien $f|_{\overline{B}^\pm}$ beides Immersionen der Klasse C^1. Gilt dann $\partial_y^+ f(0) \neq \partial_y^- f(0)$, so gibt es eine stückweise C^1-Abbildung $\tilde{f} : \overline{B} \to \mathbb{R}^3$ mit $\tilde{f}|_{\partial B} = f|_{\partial B}$ und $A(\tilde{f}) < A(f)$. (*Minima des Flächeninhalts haben keinen Knick*)

Beweis. Der Beweis besteht wiederum aus zwei Schritten. Wir betrachten zunächst den „linearen Fall", das heißt mit $A^\pm \in \operatorname{Hom}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ gelte

$$f(z) = \begin{cases} A^+ \cdot z & \text{für } \operatorname{Im} z \geq 0 \\ A^- \cdot z & \text{für } \operatorname{Im} z \leq 0. \end{cases}$$

In diesem Fall kann f durch eine explizite Konstruktion, die den Knick längs eines hinreichend langen Stücks abplattet, verbessert werden (Ausführung als Übungsaufgabe).



Der allgemeine Fall soll durch *blow-up* auf diese Situation reduziert werden. Dazu betrachten wir die Reskalierungen $f_\lambda(z) = \frac{1}{\lambda}(f(\lambda z) - f(0))$ und

$$f_* : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad f_*(z) = \lim_{\lambda \downarrow 0} f_\lambda(z).$$

f_* hat die oben betrachtete Gestalt $f_*(z) = A^\pm \cdot z$. Da $f|_{\overline{B}^\pm}$ stetig differenzierbar ist, gilt für festes $R > 0$ und hinreichend kleines $\lambda > 0$

$$\begin{aligned} |f_\lambda(z) - f_*(z)| &\leq \varepsilon \quad \text{für alle } z \in \overline{B_R(0)}, \\ |df_\lambda(z) - A^\pm| &\leq \varepsilon \quad \text{für alle } z \in \overline{B_R^\pm}(0). \end{aligned}$$

Wir nehmen nun an, daß f minimierend ist. Zu zeigen ist, daß sich diese Eigenschaft auf den blow-up f_* überträgt. Sei $g : \overline{B_R(0)} \to \mathbb{R}^3$ eine stückweise stetig differenzierbare Vergleichsabbildung, also $g|_{\partial B_R(0)} = f_*|_{\partial B_R(0)}$. Um die Minimumeigenschaft von f bzw. f_λ verwenden zu können, brauchen wir eine Interpolation zwischen f_* und f_λ. Sei $\eta \in C^\infty(\mathbb{R})$ mit $\eta(t) = 1$ für $t \leq 0$, $\eta(t) \equiv 0$ für $t \geq 1$. Wir setzen auf $\{z : R \leq |z| = r \leq R + \rho\}$ mit $\eta_\rho(r) = \eta\left(\frac{r-R}{\rho}\right)$

$$\begin{aligned}
h(z) &= \eta_\rho(r)\, f_*(z) + \big(1 - \eta_\rho(r)\big)\, f_\lambda(z) \\
dh(z) &= \eta_\rho(r)\, df_*(z) + \big(1 - \eta_\rho(r)\big)\, df_\lambda(z) \\
&+ \frac{1}{\rho}\eta'\left(\frac{r-R}{\rho}\right) dr \otimes \big(f_*(z) - f_\lambda(z)\big) \\
\Rightarrow E(h) &\leq C \cdot \int_{B_{R+\rho}(0)\setminus B_R(0)} (|df_*|^2 + |df_\lambda|^2)\, dxdy \\
&+ \frac{C}{\rho^2} \int_{B_{R+\rho}(0)\setminus B_R(0)} |f_*(z) - f_\lambda(z)|^2\, dxdy.
\end{aligned}$$

Jetzt wählen wir als Vergleichsabbildung für f_λ

$$g_\lambda(z) = \begin{cases} g(z) & \text{für } |z| \leq R \\ h(z) & \text{für } R \leq |z| \leq R + \rho \\ f_\lambda(z) & \text{für } R + \rho \leq |z| \leq \frac{1}{\lambda}. \end{cases}$$

Es folgt

$$A(f_\lambda, B_{R+\rho}) \leq A(g) + E(h).$$

Lassen wir hier erst $\lambda \searrow 0$, dann $\rho \searrow 0$, so ergibt sich $A(f_*, B_R) \leq A(g)$. □

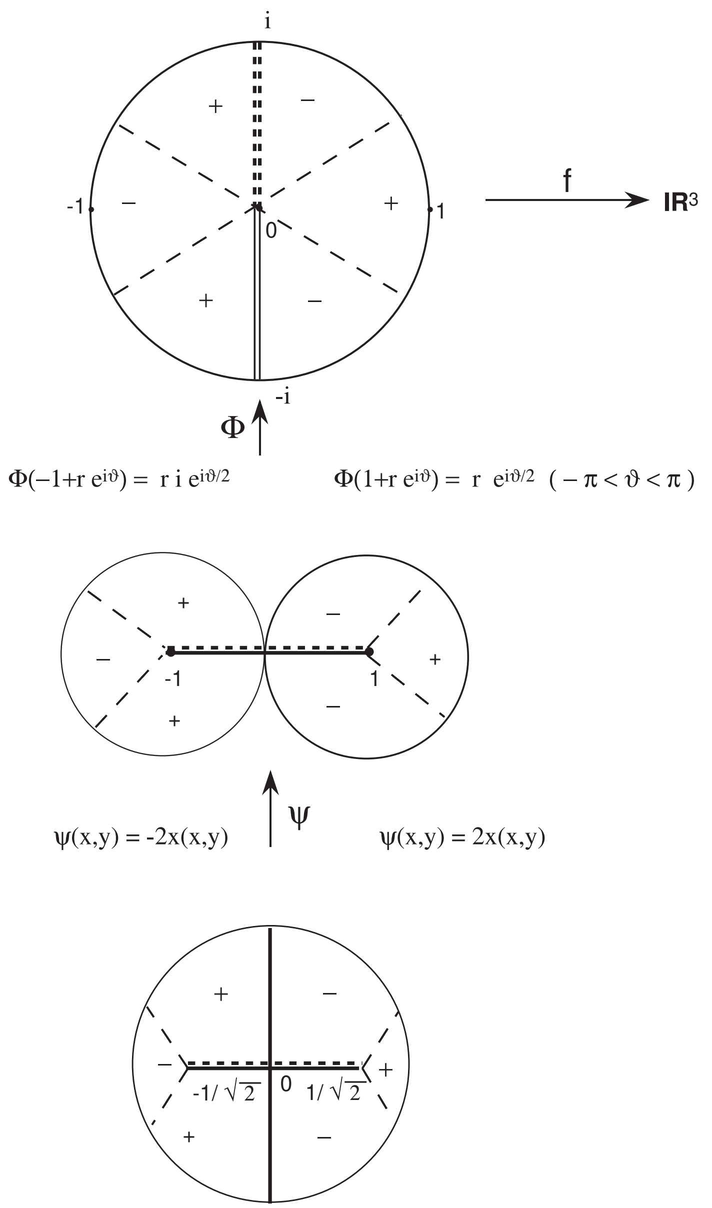
In unserem Beispiel gehen von dem Verzweigungspunkt drei Strahlen aus, in denen sich die Fläche selbst schneidet. In der Parametrisierung wechseln sich die drei oberen und die drei unteren Blätter der Fläche bei Durchlaufung der Kreise $|z| = \text{const}$ ab. Wir wollen nun eine Umparametrisierung der Fläche angeben, bei der zwei obere und zwei untere Blätter jeweils längs eines gemeinsamen Segments benachbart sind.

Die so konstruierte Abbildung (S. 45) hat folgende Eigenschaften:

- Ist τ die Spiegelung an der y-Achse, so gilt
  $(\phi \circ \psi)(\tau z) = \tau((\phi \circ \psi)(z))$.

- $\phi \circ \psi|_{\partial B} = \mathrm{id}_{\partial B}$
  Denn für $e^{i\vartheta} \in \partial B$, $-\pi/2 \leq \vartheta \leq \pi/2$, gilt
  $$\begin{aligned} \psi(e^{i\vartheta}) &= 2\cos^2\vartheta + 2i\sin\vartheta\cos\vartheta \\ &= 1 + \cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta + 2i\sin\vartheta\cos\vartheta \\ &= 1 + e^{2i\vartheta} \end{aligned}$$
  $\Rightarrow \phi(\psi(e^{i\vartheta})) = e^{i\vartheta}$

- $\phi \circ \psi$ ist außerhalb des Segments $\sigma = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ stetig und auf σ einseitig stetig mit
  $$(\phi \circ \psi)^\pm(x, 0) = \pm(1 - 2(x)^2)i.$$



- $\phi \circ \psi$ bildet $\{z \in B : \operatorname{Re} z \neq 0,\ z \notin \overline{\sigma}\}$ diffeomorph auf $\{z \in B : \operatorname{Re} z \neq 0\}$ ab. Es gilt

$$\begin{aligned}\frac{\partial \phi}{\partial r}(1 + r\,e^{i\vartheta}) &= \cos\frac{\vartheta}{2}\,e_1 + \sin\frac{\vartheta}{2}\,e_2\\ \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \vartheta}(1 + r\,e^{i\vartheta}) &= \frac{1}{2}\big(-\sin\frac{\vartheta}{2}\,e_1 + \cos\frac{\vartheta}{2}\,e_2\big),\end{aligned}$$

bzw. bei Umrechnung in die Standardbasis

$$\begin{aligned}d\phi(1 + re^{i\vartheta}) &= \begin{pmatrix}\cos\frac{\vartheta}{2} & -\frac{1}{2}\sin\frac{\vartheta}{2}\\ \sin\frac{\vartheta}{2} & \frac{1}{2}\cos\frac{\vartheta}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\vartheta & \sin\vartheta\\ -\sin\vartheta & \cos\vartheta\end{pmatrix}\\ \lim_{\vartheta\to\pm\pi} d\phi(1 + re^{i\vartheta}) &= \begin{pmatrix}0 & \mp\frac{1}{2}\\ \pm 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & \pm\frac{1}{2}\\ \mp 1 & 0\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Weiter gilt, wobei wir uns ebenfalls auf den Bereich $\operatorname{Re} z \geq 0$ beschränken,

$$d\psi(x, y) = \begin{pmatrix}4x^2 & 0\\ 2y & 2x\end{pmatrix}.$$

Damit ergeben sich die einseitig stetigen Fortsetzungen

$$\begin{aligned} d(\phi\circ\psi)(0,y) &= \begin{pmatrix} |y| & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (-1 \le y \le 1) \\ d(\phi\circ\psi)^{\pm}(x,0) &= \begin{pmatrix} 0 & \pm x \\ \mp 4x^2 & 0 \end{pmatrix} \quad (0 \le x \le \frac{1}{\sqrt{2}}). \end{aligned}$$

Jetzt betrachte $f\circ\phi\circ\psi : \overline{B} \to \mathbb{R}^3$. Es gilt für $v \ge 0$

$$\begin{aligned} f(0,\pm v) &= \big(v^2(1+\frac{1}{2}v^2),0,0\big), \\ (\partial_u f)(0,\pm v) &= \big(0,\pm 2v(1-v^2),-4v^2\big). \end{aligned}$$

Also ist die Verkettung stetig (sogar Lipschitz-stetig), und wir berechnen längs des Segments σ mit $v := 1-2(x)^2 > 0$

$$\begin{aligned} \partial_y^{\pm}(f\circ\phi\circ\psi)(x,0) &= df(0,\pm v)\cdot \pm x e_1 \\ &= \pm x\big(0,\pm 2v(1-v^2),-4v^2\big) \\ &= \big(0,2xv(1-v^2),\mp 4x\,v^2\big). \end{aligned}$$

Die Fläche $f\circ\phi\circ\psi$ hat also einen Knick. Nach dem Lemma ist sie kein Minimum des Flächeninhalts und folglich auch nicht f selbst.

Die hier betrachtete Fläche stellt einen repräsentativen Spezialfall dar. Genauer kann man durch Analyse der asymptotischen Entwicklung in einem Verzweigungspunkt folgende Alternative beweisen:

- *entweder* es gibt wie im Beispiel eine von dem Verzweigungspunkt ausgehende Selbstschnittkurve und die Übertragung des obigen Arguments ist möglich,
- *oder* es gibt eine biholomorphe Abbildung $\varphi : U \longrightarrow B_\rho(0)$ einer Umgebung des Verzweigungspunkts und eine minimale Immersion $\tilde{f} : B_{\rho^n}(0) \to \mathbb{R}^3$ mit

$$f(z) = \tilde{f}(\varphi(z)^n).$$

Im zweiten Fall ist das Bild von f eine reguläre Fläche; man spricht von einem *falschen Verzweigungspunkt.* Für das Plateauproblem lassen sich diese durch topologische Argumente ausschließen und es gilt insgesamt der

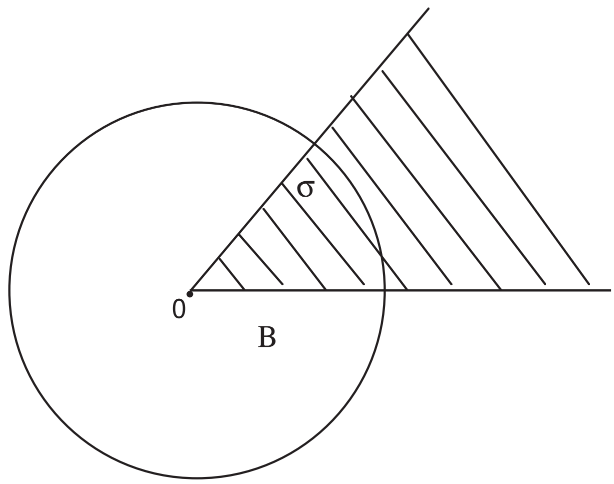
Satz 3 (*Osserman 1970*)
Ist $f \in \mathcal{E}(\Gamma)$ minimierende Lösung des Plateauproblems zu $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$, so ist f eine Immersion.

Die Frage der geometrischen Regularität stellt sich ebenfalls am Rand von ∂B. Man kann zeigen, daß Lösungen des Plateauproblems außer in endlich vielen Punkten am Rand immergiert sind, sofern die Randkurve Γ hinreichend glatt ist. In diesen Punkten erhält man der inneren Situation vergleichbare Entwicklungen, das heißt Randsingularitäten haben auch den Typ von Verzweigungspunkten. Im Gegensatz zum Innern erfordert der Nachweis dieser Aussagen anspruchsvollere Techniken aus den partiellen Differentialgleichungen, u. a. Sätze von Hartman und Wintner. Es ist bis heute unbekannt, ob minimierende Lösungen des Plateauproblems am Rand Verzweigungspunkte haben können oder nicht.

Hinsichtlich des Verhaltens am Rand machen wir hier nur folgende einfache Beobachtung.

Satz 4 Sei $f \in \mathcal{E}(\Gamma)$ eine Lösung des Plateauschen Problems. Dann ist $f : \partial B \longrightarrow \Gamma$ ein Homeomorphismus.

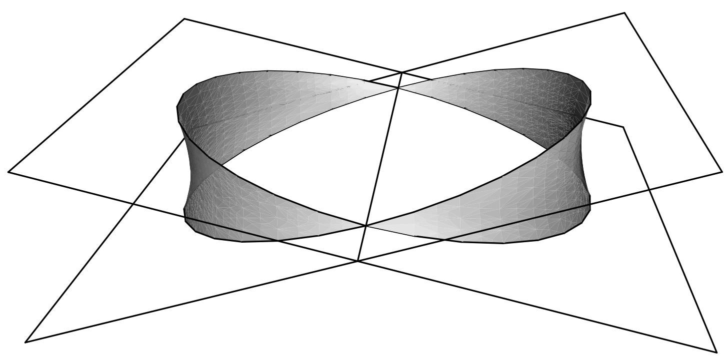
Beweis. Wäre $f : \partial B \longrightarrow \Gamma$ nicht injektiv, so gäbe es einen Bogen $\sigma \subset \partial B$ mit $f(\omega) \equiv p \in \Gamma$ für alle $\omega \in \sigma$. Wir können f dann durch Spiegelung an einer Geraden L als Minimalfläche auf den durch σ bestimmten Sektor fortsetzen, siehe Satz 2.



Nun ist für $z \in \sigma$ aufgrund der Konformitätsrelationen $\left|\frac{\partial f}{\partial r}(z)\right|^2 = \left|\frac{\partial f}{\partial \vartheta}(z)\right|^2 \equiv 0$. Somit ist die holomorphe Funktion $\partial_z f$ längs σ Null, nach dem Identitätssatz also $\partial_z f \equiv 0$ bzw. f konstant. Widerspruch zu $f \in \mathcal{E}(\Gamma)$. $\square$

2.3 Globale Eigenschaften der Lösung

Hier beschäftigen wir uns mit der Frage nach der Eingebettetheit (Injektivität) von Lösungen des Plateauproblems. Diese drängt sich schon deshalb auf, weil Seifenhäute keine Selbstdurchdringungen aufweisen. Allerdings können jene Formen annehmen, die in unserem Modell der Flächen vom Typ der Kreisscheibe nicht erfaßt werden. Insbesondere kann der Flächeninhalt bei Selbstschnitten durch das Bohren von Löchern verringert werden:



In unserem Rahmen steht ein solches Argument nicht zur Verfügung und die Injektivität der Lösung stellt ein delikates Problem dar, das zudem eng mit der Frage der Eindeutigkeit der Lösung verbunden ist. Das Hauptergebnis, nach Teilresultaten von Gulliver-Spruck, Tomi-Tromba, Almgren-Simon, lautet hier

Satz 1 (*Meeks-Yau*)
Die Jordankurve Γ liege auf dem Rand $\partial K \in C^2$ eines Körpers K. Der mittlere Krümmungsvektor von ∂K zeige überall nach innen (z. B. K konvex). Dann ist jede minimierende Lösung des Plateauproblems für Γ eingebettet.

Wir beweisen einen einfacheren und wesentlich älteren Satz, der aber in dieselbe Richtung geht und als Prototyp gedient hat.

Satz 2 (*Radó*)
Sei $D \subset \mathbb{R}^2$ beschränktes, konvexes Gebiet und $\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ die Orthogonalprojektion. Es sei $\gamma : \partial B \longrightarrow \Gamma \subset \partial D \times \mathbb{R}$ eine geschlossene Jordankurve, so daß $\pi \circ \gamma : \partial B \to \partial D$ eine monotone Parametrisierung ist. Dann gilt:

(1) Eine Lösung des Plateauproblems ist als Graph über D darstellbar.

(2) Hat Γ nur endlich viele vertikale Stücke, so ist die Lösung eindeutig bestimmt.

Der Satz ist durchaus nicht trivial. Wir beginnen mit einigen topologischen Vorbereitungen, die wir auch dazu nutzen, eine Version des Riemannschen Abbildungssatzes zu formulieren.

Die *Umlaufzahl* einer Kurve $c \in C^0(S^1, \mathbb{R}^2)$ bzgl. eines Punkts $z_0 \in \mathbb{R}^2 \backslash \mathrm{Bild}\,(c)$ kann wie folgt erklärt werden. Nach Kap. II.1, Lemma 1, existiert ein Lift $\theta \in C^0(\mathbb{R})$, so daß gilt

$$c(e^{i\vartheta}) = z_0 + r(\vartheta)\, e^{i\theta(\vartheta)} \quad \text{für alle } \vartheta \in \mathbb{R}.$$

Die Definition lautet nun

$$\deg\,(c, z_0) = \frac{1}{2\pi}\big(\theta(2\pi) - \theta(0)\big) \in \mathbb{Z}.$$

Aus Kap. II.1, insbesondere Lemma 2, ergeben sich die folgenden Eigenschaften der Umlaufzahl:

- $\deg\,(c \circ \tau, z_0) = \deg\,(c, z_0)$ für orientierungstreue Umparametrisierungen $\tau : S^1 \to S^1$.
- $\deg\,(c, \cdot\,)$ ist auf Komponenten von $\mathbb{R}^2 \backslash \mathrm{Bild}\,(c)$ konstant.
- $\deg\,(c_1, z_0) = \deg\,(c_2, z_0)$, falls die Kurven c_1, c_2 in $\mathbb{R}^2 \backslash \{z_0\}$ homotop sind.

Sei $G(z) = \frac{1}{2\pi} \log |z|$ die Fundamentallösung von Δ. Betrachte die 1-Form

$$\omega = -dG \cdot J = \frac{1}{2\pi}\, \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2}.$$

Aus der Polardarstellung $c(t) = z_0 + r(t)\, e^{i\theta(t)}$ folgt

$$\dot c = \big(\frac{\dot r}{r} + i\dot\theta\big)\, r\, e^{i\theta} = \frac{\dot r}{r}(c - z_0) + \dot\theta J(c - z_0).$$

Weiter ergibt sich mit $\tau_{z_0}(z) = z - z_0$

$$\begin{aligned}(\tau_{z_0}^*\omega)(c) \cdot \dot c &= \omega(c - z_0) \cdot \dot c \\ &= -\frac{1}{2\pi}\left\langle \frac{c - z_0}{|c - z_0|^2}, \frac{\dot r}{r}\, J(c - z_0) - \dot\theta(c - z_0) \right\rangle = \frac{\dot\theta}{2\pi}.\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{\deg\,(c, z_0) = \int_c \tau_{z_0}^*\omega}$$

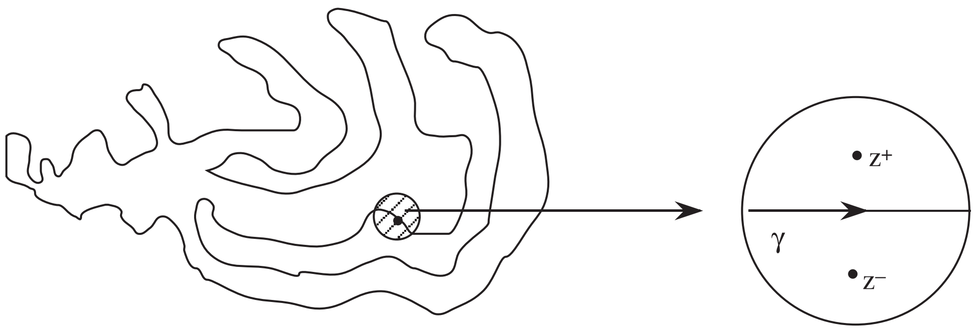
Sei nun $\gamma : S^1 \to \Gamma \subset \mathbb{R}^2$ eine einfach geschlossene Jordankurve. Dann hat $\mathbb{R}^2 \backslash \Gamma$ genau eine unbeschränkte Komponente, die wir als Außengebiet A von Γ bezeichnen. Da die gesamte Jordankurve von einem weit entfernten Punkt unter einem kleinen Winkel erscheint, gilt

$$\deg(\gamma, z) = 0 \quad \text{für alle } z \in A.$$

Der *Jordansche Kurvensatz* besagt nun folgendes:

- $\mathbb{R}^2 \backslash \Gamma$ hat genau eine beschränkte Komponente D, das Innengebiet von Γ.
- Γ ist der gemeinsame Rand der beiden Gebiete, also $\partial D = \partial A = \Gamma$.
- $\deg(\gamma, z) = +1$ für alle $z \in D$ bei geeigneter Orientierung von γ.

Wir werden den Satz aus Zeitgründen nicht beweisen. Nimmt man zusätzlich z. B. an, daß Γ eine topologische Untermannigfaltigkeit ist [d. h. zu jedem $w_0 \in \Gamma$ gibt es eine offene Umgebung U und einen Homeomorphismus $\phi : U \to B$ mit $\phi(\Gamma \cap U) = (-1, 1)$], so ist der Beweis nicht allzu schwer. Insbesondere sieht man sofort, daß $\partial\Omega = \Gamma$ gilt für jede Komponente Ω von $\mathbb{R}^2 \backslash \Gamma$ und daß es folglich höchstens eine beschränkte Komponente gibt. Für die Existenz von D kann man etwa zeigen, daß die Umlaufzahl von Punkten, die in der lokalen Darstellung auf verschiedenen Seiten von Γ liegen, nicht gleich sein kann.



Unser nächstes Ziel ist eine Formel, die die Anzahl der Urbilder eines Punkts unter einer Abbildung mit der Umlaufzahl der Randwerte in Beziehung setzt. Dabei müssen die Urbilder „algebraisch" gezählt werden.

Definition Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ und $f \in C^0(\Omega, \mathbb{R}^2)$. Für $z_0 \in \Omega$ gebe es ein $r > 0$, so daß $f(z) \neq f(z_0)$ gilt für $0 < |z - z_0| \leq r$. Dann heißt die Zahl

$$\deg(f, z_0) = \deg\big(f|_{\partial B_r(z_0)}, f(z_0)\big) \in \mathbb{Z}$$

der *lokale Grad* oder Index von f in z_0.

Beispiele.

a) Sei $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph mit Taylorentwicklung $f(z) = w_0 + a(z - z_0)^n + g(z)$, wobei $n \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ und $|g(z)| \leq C|z - z_0|^{n+1}$ für $|z - z_0| \leq r_0$. Betrachte

$$f_t(z) = f(z) - t\, g(z), \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Für $0 < |z - z_0| = r < \dfrac{|a|}{C}$ gilt

$$\begin{aligned} |f_t(z) - w_0| &\geq |a|\, r^n - C\, r^{n+1} = |a|\, r^n \big(1 - \frac{Cr}{|a|}\big) > 0. \\ \Rightarrow \quad \deg(f, z_0) &= \deg(f_0|_{\partial B_r(z_0)}, w_0) \\ &= \deg(f_1|_{\partial B_r(z_0)}, w_0) = n, \end{aligned}$$

wobei letzteres direkt aus der Definition folgt.

b) Ist $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^2)$ und $\det df(z_0) \neq 0$, so gilt $\deg(f, z_0) = \operatorname{sign} \det df(z_0)$ (*Übungsaufgabe*). Man zeigt wie in a), daß $\deg(f, z_0) = \deg(A, 0)$ mit $A = df(z_0)$ gilt. Nun ist $A = RD$, wobei D symmetrisch und positiv definit und $R \in \mathrm{O}(2)$. Indem wir $D(t) = (1-t)D + t\mathbb{1}$ betrachten, folgt $\deg(f, z_0) = \deg(R, 0)$. Schließlich können wir R in $\mathrm{O}(2)$ entweder mit $\mathbb{1}$ oder mit $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ verbinden. Hieraus folgt leicht die Behauptung.

Lemma 1 Sei $f \in C^0(\overline{B}, \mathbb{R}^2) \cap C^2(B, \mathbb{R}^2)$. Der Punkt $w_0 \in \mathbb{R}^2 \backslash f(\partial B)$ habe höchstens endlich viele Urbilder in B. Dann gilt

$$\deg(f|_{\partial B}, w_0) = \sum_{z: f(z) = w_0} \deg(f, z_0).$$

Beweis. Seien $z_1, \ldots, z_r$ die endlich vielen Urbilder von w_0. Beachte $d\, f^* \tau_{w_0}^* \,\omega = f^* \,\tau_{w_0}^* \,d\omega = 0$ auf $D \backslash \{z_1, \ldots, z_r\}$. Wende auf $D_\varepsilon = \{z \in B : |z| < 1 - \varepsilon,\ |z - z_j| > \varepsilon\}$ mit $\varepsilon > 0$ hinreichend klein den Satz von Gauß-Stokes an:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{D_\varepsilon} df^* \tau_{w_0}^* \,\omega \\ &= \int_{\partial B_{1-\varepsilon}(0)} f^* \tau_{w_0}^* \,\omega - \sum_{j=1}^r \int_{\partial B_\varepsilon(z_j)} f^* \tau_{w_0}^* \,\omega \\ &= \int_{f \circ \partial B_{1-\varepsilon}(0)} \tau_{w_0}^* \,\omega - \sum_{j=1}^r \int_{f \circ \partial B_\varepsilon(z_j)} \tau_{w_0}^* \,\omega \\ &= \deg(f|_{\partial B_{1-\varepsilon}(0)}, w_0) - \sum_{j=1}^r \deg(f|_{\partial B_\varepsilon(z_j)}, w_0). \end{aligned}$$

Mit $\varepsilon \searrow 0$ folgt die Behauptung. □

Satz 3 (*Riemannscher Abbildungssatz*)
Sei $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ eine geschlossene Jordankurve mit $\mathcal{E}(\Gamma) \neq \emptyset$ (z. B. rektifizierbar), und sei D das Innengebiet von Γ. Dann ist die Lösung des Plateauproblems eine konforme Äquivalenz $f : B \xrightarrow{\sim} D$ und insbesondere $f : \overline{B} \longrightarrow \overline{D}$ homeomorph.

Erläuterung. Üblicherweise geht man von einem einfach zusammenhängenden Gebiet $D \subset \mathbb{C}$ aus, wobei über die Regularität des Randes $\partial D \neq \emptyset$ nichts vorausgesetzt wird. Unsere Version zeigt, daß das Innengebiet der Kurve Γ einfach zusammenhängt und homeomorph zur Kreisscheibe ist. Ferner ist f auf dem Abschluß stetig.

Beweis. Die Menge $\{z \in B : \partial_z f \neq 0\}$ ist zusammenhängend. Nach evtl. Davorschaltung der Spiegelung an der x-Achse ist $f : B \to \mathbb{C}$ holomorph. Ist $w_0 \in \mathbb{R}^2 \backslash \Gamma$, so gibt es höchstens endlich viele Urbilder $z_1, \ldots, z_r$ mit Grad $n_1, \ldots, n_r \geq 1$. Es gilt nach dem Lemma

$$\deg(f|_{\partial B}, w_0) = \sum_{j=1}^r n_j \geq 0.$$

Nun ist $f|_{\partial B}$ eine Parametrisierung von Γ, und nach dem Jordanschen Kurvensatz ergibt sich

$$\deg(f|_{\partial B}, w_0) = \begin{cases} 0 & \text{falls } w_0 \in \mathbb{R}^2 \backslash \overline{D} \\ 1 & \text{falls } w_0 \in D. \end{cases}$$

Also haben Punkte im Außengebiet kein und Punkte im Innengebiet genau ein Urbild, in dem die Ableitung von f nicht verschwindet. Schließlich ist nach Abschnitt 2, Satz 4, die Randabbildung $f : \partial B \to \Gamma$ homeomorph und damit auch $f : B \to \overline{D} = D \cup \Gamma$. $\square$

Der Beweis des Satzes von Radó beruht auf dem Studium der Nullstellenmengen harmonischer Funktionen.

Satz 4 (*M. Kneser*)
Die Funktion $h \in C^0(\overline{B})$ sei auf B harmonisch und habe in $z_0 \in B$ eine Nullstelle der Ordnung $k \in \mathbb{N}$, das heißt $h, Dh, \ldots, D^{k-1}h$ verschwinden in z_0. Dann hat die Menge $\{z \in \partial B : h(z) > 0\}$ mindestens k Komponenten.

Beweis. Für $M \subset \overline{B}$ setzen wir $M^+ = \{z \in M : h(z) > 0\}$ und $M^0 = \{z \in M : h(z) = 0\}$. Wir gliedern den Beweis in mehrere Schritte.

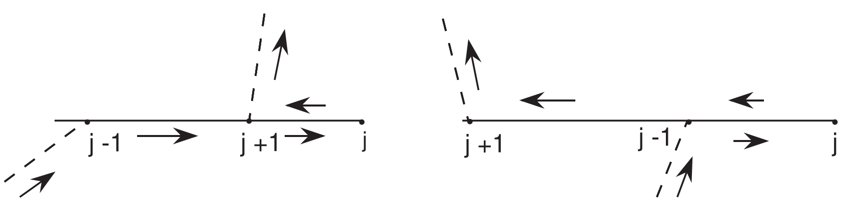
Schritt 1 *Es reicht aus zu zeigen, daß B^+ mindestens k verschiedene Komponenten hat.*
Ist nämlich Ω eine Komponente von B^+, so ist $\partial\Omega \cap (\partial B)^+ \neq \emptyset$. Andernfalls wäre $h \leq 0$ auf $\partial\Omega$ und somit $h \leq 0$ auf ganz Ω nach dem Maximumprinzip, ein Widerspruch. Zu $z_0 \in \partial\Omega \cap (\partial B)^+$ gibt es ein $\rho > 0$ mit $h(z) > 0$ für $z \in B_\rho(z_0) \cap \overline{B}$. Also gilt $[B_\rho(z_0) \cap B] \subset \Omega$ und folglich $[B_\rho(z_0) \cap \partial B] \subset [\partial\Omega \cap (\partial B)^+]$. Da andererseits $\partial\Omega$ abgeschlossen ist, besteht $\partial\Omega \cap (\partial B)^+$ aus Komponenten von $(\partial B)^+$. Sind nun Ω_1, Ω_2 verschiedene Komponenten von B^+, so sind die Mengen $\partial\Omega_i \cap (\partial B)^+$, $i = 1, 2$, disjunkt. Also liefern k verschiedene Komponenten von B^+ auch k verschiedene Komponenten von $(\partial B)^+$.

Schritt 2 *Beschreibung der lokalen Situation bei z_0.*
Sei $g : B \longrightarrow \mathbb{C}$ die holomorphe Funktion mit $h = \mathrm{Re}\,(g)$ und $g(z_0) = 0$. Nach Kap. 1.2, Satz 3, gibt es eine Umgebung U von z_0 und eine biholomorphe Abbildung $\varphi : U \to B_{2\rho}(0)$ mit $g\big(\psi(\zeta)\big) = \zeta^k$ für $\psi = \varphi^{-1}$. Die Menge U^+ zerfällt in die k disjunkten Sektoren

$$U_j^+ = \big\{\psi(\zeta) : \big|\arg\zeta - \frac{2\pi j}{k}\big| < \frac{\pi}{2k}\big\} \quad (0 \leq j \leq k-1).$$

Der Satz ist bewiesen, wenn wir folgendes zeigen:

Schritt 3 *Die Sektoren U_j^+ gehören zu verschiedenen Komponenten von B^+.*
Wir nehmen indirekt an, daß zwei Sektoren U_l, U_m $(l \neq m)$ zur gleichen Komponente von B^+ gehören. Wähle zwei Punkte $p_l \in U_l$, $p_m \in U_m$ mit $\max\{|\varphi(p_l)|, |\varphi(p_m)|\} < \rho$. Wir können einen Polygonzug c von p_l nach p_m bestimmen, der in B^+ verläuft und dabei eine minimale Anzahl N von Unterteilungspunkten hat. Dann ist c auf keinem Teilintervall $[t_{j-1}, t_j]$ konstant, denn sonst könnte dieses bei Verringerung von N um Eins ausgelassen werden. Weiter ist die Einschränkung von c auf $[t_{j-1}, t_{j+1}]$ injektiv: andernfalls ist beispielsweise $c([t_j, t_{j+1}]) \subset c([t_{j-1}, t_j]$ und es gibt ein $\tau \in [t_{j-1}, t_j]$ mit $c(\tau) = c(t_{j+1})$. Auslassen von $[\tau, t_{j+1}]$ reduziert N wieder um Eins, ein Widerspruch.

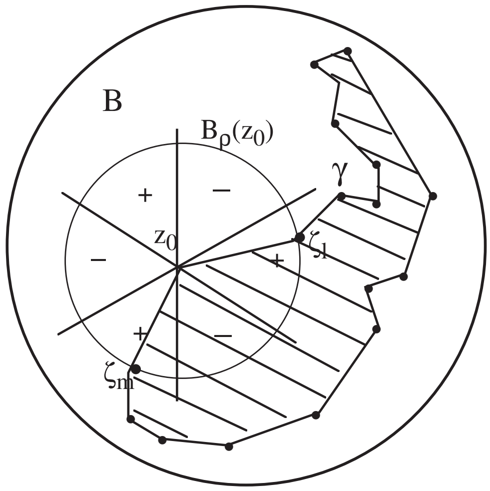


Gäbe es nun $\alpha < \beta$ mit $c(\alpha) = c(\beta)$, so müßte also $[\alpha, \beta]$ mindestens zwei Unterteilungspunkte enthalten und N würde durch Weglassen von $[\alpha, \beta]$ erneut um mindestens Eins verkleinert. Auch die letzte Möglichkeit führt also auf einen Widerspruch, und folglich ist c eingebettet.

Durch Weglassen eines geeigneten Anfangs - und Endintervalls erhalten wir jetzt einen eingebetteten Polygonzug in $B^+ \backslash \psi(B_\rho(0))$, der zwei Punkte

$$\psi(\zeta_l) \in U_l^+, \psi(\zeta_m) \in U_m^+ \quad \text{mit } |\zeta_l| = |\zeta_m| = \rho$$

miteinander verbindet. Wir erhalten eine geschlossene Jordankurve γ in $B^+ \cup \{z_0\}$, indem wir am Anfang bzw. am Ende die radialen Segmente $\psi(t\zeta_l)$, $0 \le t \le 1$ bzw. $\psi((1-t)\zeta_m)$, $0 \le t \le 1$, hinzufügen.



Die geschlossene Jordankurve γ berandet ein Innengebiet $D \subset B$. Aufgrund des Maximumprinzips gilt $h \ge 0$ auf D. Durch die radialen Segmente wird $\psi(B_\rho(0))$ in zwei Komponenten zerlegt. Eine von diesen gehört notwendig zu D. Aber beide Komponenten enthalten einen negativen Sektor von h, ein Widerspruch zu $h|_D \ge 0$. □

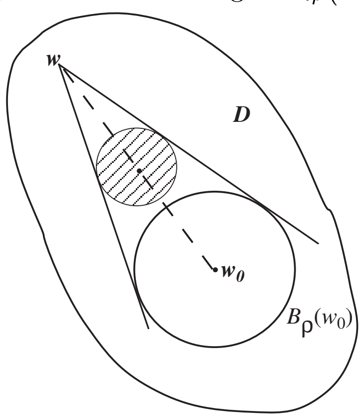
Wir kommen nun zum Beweis der Grapheneigenschaft im Satz vom Radó. Wir erinnern zunächst an folgende Eigenschaft konvexer Mengen.

Lemma 2 Sei $D \subset \mathbb{R}^2$ offen, beschränkt und konvex sowie $w_0 \in D$. Dann ist die Abbildung

$$p_{w_0} : \partial D \to S^1, p_{w_0}(w) = \frac{w - w_0}{|w - w_0|}$$

ein Homeomorphismus. Ist $\gamma : S^1 \to \partial D$ eine monotone Parametrisierung, so folgt deg $(\gamma, w_0) = \pm 1$.

Beweis. Für $v \in S^1$ sei $t(v) > 0$ das maximale $t > 0$ mit $w_0 + t\,v \in \partial D$. Es gilt dann $w_0 + t\,v \in D$ für $0 \le t < t(v)$. Denn für $B_\rho(w_0) \subset D$ und $w \in D$ gilt $B_{t\rho}\big(tw_0 + (1-t)w\big) \subset D$.



Durch Wahl einer Folge $w_j \in D$ und Grenzübergang folgt $B_{t\rho}(w_0 + (1-t)\,t(v)\,v) \subset D$ für $0 \leq t \leq 1$. Somit ist $p_{w_0} : \partial D \to S^1$ bijektiv und stetig. Wir können die Umkehrabbildung $\gamma_0 := (p_{w_0}|_{\partial D})^{-1} : S^1 \to \partial D$ als Referenzparametrisierung der Jordankurve ∂D wählen. Indem wir die Orientierung von γ nötigenfalls umkehren, gilt

$$1 = \deg(\gamma) = \deg(p_{w_0} \circ \gamma) = \deg\big(\frac{\gamma - w_0}{|\gamma - w_0|}\big) = \deg(\gamma, w_0).$$

$\square$

Beweis des Satzes von Radó (*Grapheneigenschaft*):
Sei $\gamma : S^1 \to \Gamma \subset \mathbb{R}^3$ eine Jordankurve, die als (verallgemeinerter) Graph über ∂D erscheint. Für eine Lösung $f \in C^0(\overline{B}, \mathbb{R}^3)$ des Plateauproblems betrachten wir die harmonische Abbildung $H = \pi \circ f \in C^0(\overline{B}, \mathbb{R}^2)$, wobei $\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ die Orthogonalprojektion ist. Das Maximumprinzip impliziert $H(B) \subset D$. Wir behaupten $\det dH(z) \neq 0$ für alle $z \in B$. Andernfalls gibt es ein $z_0 \in B$ und ein $\nu \in \mathbb{R}^2, |\nu| = 1$, mit

$$(*) \qquad \langle dH(z_0) \cdot v, \nu \rangle = 0 \quad \text{für alle } v \in \mathbb{R}^2.$$

Die Gerade $\{w : \langle w - H(z_0), \nu \rangle = 0\}$ schneidet ∂D in genau zwei Punkten. Nun ist nach Voraussetzung $H : \partial B \to \partial D$ eine monotone Parametrisierung. Setzen wir $h(z) = \langle H(z) - H(z_0), \nu \rangle$, so ist die Menge

$$(\partial B)^+ = \{z \in \partial B : h(z) > 0\} = H^{-1}\{w \in \partial D : \langle w - H(z_0), \nu \rangle > 0\}$$

zusammenhängend. Aber wegen $(*)$ gilt $dh(z_0) = 0$, und nach Satz 4 hat $(\partial B)^+$ mindestens zwei Komponenten, ein Widerspruch.

Nach evtl. Komposition mit einer Spiegelung gilt $\det dH > 0$ auf B. Zählen wir die Urbilder von $w \in D$ wie in Lemma 1, unter Beachtung des dortigen Beispiels b), so ergibt sich mit Lemma 2

$$\pm 1 = \deg(H|_{\partial B}, w) = \operatorname{card} H^{-1}\{w\} \geq 0.$$

Also ist H diffeomorph. Setzten wir $H^{-1} =: G : D \xrightarrow{\sim} B$, so folgt

$$(f \circ G)(w) = \big((H \circ G)(w), f^3(G(w))\big) = \big(w, (f^3 \circ G)(w)\big).$$

Dies ist die gesuchte Graphendarstellung. $\square$

Bemerkung 1. Das Nichteintreten von $(*)$ bedeutet, daß f keine vertikale Tangentialebene, aber auch keinen Verzweigungspunkt hat.

Bemerkung 2. Ist Γ Graph über ∂D, also ohne vertikale Segmente, so ist $H : \overline{B} \to \overline{D}$ homeomorph nach Satz 4 in Abschnitt 2. Es folgt dann für die Graphenfunktion $f^3 \circ G \in C^0(\overline{D})$.

Die *Eindeutigkeitsaussage* des Satzes von Radó ergibt sich aus allgemeinen Tatsachen über minimale Graphen. Sei $f(z) = (z, u(z))$ eine Minimalfläche mit $u \in C^2(\Omega)$, also

$$\frac{d}{d\varepsilon} A(f + \varepsilon\phi)|_{\varepsilon=0} = 0 \quad \text{für alle } \phi \in C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R}^3).$$

Die Wahl $\phi = \varphi\, e_3$ mit $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ führt auf

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{d\varepsilon} A(f + \varepsilon\varphi\, e_3)|_{\varepsilon=0} \\ &= \frac{d}{d\varepsilon} \int_\Omega \sqrt{1 + |du + \varepsilon\, d\varphi|^2}\, dxdy|_{\varepsilon=0} \\ &= \int_\Omega \langle \frac{du}{\sqrt{1+|du|^2}}, d\varphi \rangle dxdy. \end{aligned}$$

Es folgt für u die (sogenannte) nichtparametrische Minimalflächengleichung

$$\boxed{\operatorname{div} \frac{du}{\sqrt{1+|du|^2}} = 0}$$

Setzen wir $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $T(p) = \frac{p}{\sqrt{1+|p|^2}}$, so gilt

$$D\,T(p) = \frac{1}{\sqrt{1+|p|^2}}\big(\mathbb{1} - \frac{p \otimes p}{1+|p|^2}\big).$$

In ausdifferenzierter Form lautet die Gleichung daher

$$\frac{1}{\sqrt{1+|du|^2}} \sum_{i,j=1}^{2} \big(\delta_{ij} - \frac{(\partial_i u)(\partial_j u)}{1+|du|^2}\big)\partial_{ij}^2 u = 0.$$

Wir beweisen nun folgendes allgemeine Eindeutigkeitsresultat.

Satz 5 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ offenes und beschränktes Gebiet mit

$$L := \limsup_{r \searrow 0} \frac{1}{r} \mathcal{L}^2\{z \in \Omega : \operatorname{dist}(z, \partial\Omega) < r\} < \infty$$

(zum Beispiel Ω konvex oder $\partial\Omega \in C^2$).

Seien $u_1, u_2 \in C^0(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ Lösungen der Minimalflächengleichung mit $(u_1 - u_2)|_{\partial\Omega} = 0$. Dann folgt $u_1 = u_2$.

Beweis. Wir wählen als Variation $\varphi = \eta(u_1 - u_2)$ mit $\eta \in C_c^\infty(\Omega)$, $\eta \geq 0$. Dann folgt für $i = 1, 2$

$$(*) \qquad \int_\Omega \langle T(du_i), du_1 - du_2\rangle \eta \, dxdy + \int_\Omega \langle T(du_i), d\eta\rangle (u_1 - u_2)\, dxdy = 0$$

Wir verwenden nun die Tatsache, daß das Flächenintegral eine konvexe Funktion des Graphen u ist. Genauer gilt $D\,T(p) \geq (1+|p|^2)^{-3/2}\,\mathbb{1}$, woraus mit $W(p_1, p_2) = \max_{i=1,2} \sqrt{1+|p_i|^2}$ folgt:

$$\begin{aligned}
& \langle T(p_1) - T(p_2), p_1 - p_2\rangle \\
= & \int_0^1 \langle (DT)\big(tp_1 + (1-t)p_2\big) \cdot (p_1 - p_2), p_1 - p_2\rangle \, dt \\
\geq & \int_0^1 \frac{|p_1 - p_2|^2}{(1 + |tp_1 + (1-t)p_2|^2)^{\frac{3}{2}}} \, dt \\
\geq & \frac{|p_1 - p_2|^2}{W(p_1, p_2)^3}.
\end{aligned}$$

Sei $\chi \in C^\infty(\mathbb{R})$ mit $\chi(s) = 1$ für $s \geq 1$, $\chi(s) = 0$ für $s \leq 0$. Wir wählen dann als Testfunktion $\eta_\rho(z) = \chi\big(\frac{1}{\rho}\operatorname{dist}(z, \partial\Omega)\big)$, also insbesondere $|d\eta_\rho(z)| \leq \frac{c}{\rho}$. Durch Subtraktion der Gleichungen

$(*)$ für $i = 1, 2$ ergibt sich

$$\begin{aligned}
& \int\limits_{\Omega} \frac{|du_1 - du_2|^2}{W(du_1, du_2)^3} \, \eta_\rho \, dxdy \\
\leq \; & \int\limits_{\Omega} \langle T(du_1) - T(du_2), du_1 - du_2 \rangle \eta_\rho \, dxdy \\
\leq \; & 2 \int\limits_{\Omega} |u_1 - u_2| \, |d\eta_\rho| \, dxdy \\
\leq \; & \frac{2c}{\rho} \int_{\{z : \mathrm{dist}\,(z, \partial\Omega) < \rho\}} |u_1 - u_2| \, dxdy \to 0 \quad \text{mit } \rho \searrow 0.
\end{aligned}$$

$\square$

Bemerkung. Der Beweis ist auch dann noch gültig, wenn $u_i \in C^0(\overline{\Omega} \backslash A)$, wobei $A \subset \partial\Omega$ eine endliche Ausnahmemenge ist. Dies kann zum Beispiel im Satz von Radó angewandt werden, wenn Γ endlich viele vertikale Stücke hat.

Kapitel 3

Geometrie und Beispiele von Minimalflächen

Das Hauptziel dieses Kapitels ist die Herleitung einer auf Weierstraß zurückgehenden Darstellungsformel für Minimalflächen. Bei Eingabe zweier holomorpher Funktionen ergibt sich aus der Formel die konforme Parametrisierung einer bei geeigneten Voraussetzungen vollständigen und randlosen Minimalfläche. Die erfolgreiche Anwendung hängt dabei wesentlich davon ab, wie gut geometrische Eigenschaften der Fläche als analytische Eigenschaften der Eingabedaten interpretiert werden können.

3.1 Geometrische Grundbegriffe

Wir wollen hier vor allem die Krümmung einer Fläche im $\mathbb{R}^3$ definieren. Für tiefergehende Information siehe zum Beispiel Klingenberg [7]. Wir betrachten folgende Grundsituation: $f : \Omega \to \mathbb{R}^3$ sei C^∞-Immersion ($\Omega \subset \mathbb{R}^2$), $\nu : \Omega \to S^2 \subset \mathbb{R}^3$ zugehörige Einheitsnormale, $g(X,Y) = \langle Df \cdot X, Df \cdot Y \rangle$ induzierte Metrik* mit Koeffizienten $g_{ij} = g(e_i, e_j)$, Bild $Df = \{\nu\}^\perp$ Tangentialraum von f in $z \in \Omega$.

Lemma 1 Sei $\tilde{X} \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R}^3)$ mit $\langle \tilde{X}, \nu \rangle = 0$. Dann gibt es für jedes $z \in \Omega$ genau ein $X(z) \in \mathbb{R}^2$ mit $Df(z) \cdot X(z) = \tilde{X}(z)$ und es gilt $X \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R}^2)$.

Beweis. Nur die letzte Aussage ist zu zeigen. Es gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{2} X^k \, g_{jk} &= \sum_{k=1}^{2} X^k \langle Df \cdot e_j, Df \cdot e_k \rangle \\
&= \langle Df \cdot e_j, Df \cdot X \rangle \\
&= \langle Df \cdot e_j, \tilde{X} \rangle.
\end{aligned}$$

Multipliziere mit g^{ij} und summiere über j:

$$X^i = \sum_{j,k=1}^{2} X^k \, g^{ij} \, g_{jk} = \sum_{j=1}^{2} g^{ij} \langle Df \cdot e_j, \tilde{X} \rangle \in C^\infty(\Omega).$$

□

*auch: erste Fundamentalform

Bezeichnung. Für $X \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R}^2)$ bezeichnen wir das zugehörige tangentiale Vektorfeld mit $\tilde{X} = Df \cdot X$.

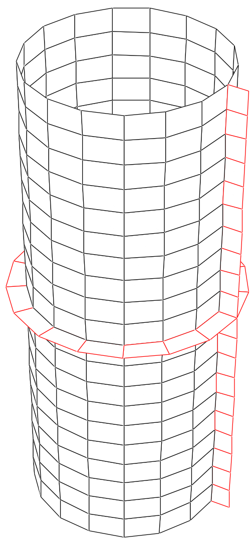
Der Begriff der Krümmung von Flächen soll durch Betrachtung von Parallelflächen eingeführt werden. Mit dem orientierten Abstandsparameter $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$ lautet diese

$$f_\varepsilon(z) = f(z) + \varepsilon\nu(z) \quad (z \in \Omega).$$

Der mittlere Krümmungsvektor $\mathbf{H} = \Delta_g f$ gibt an, in welcher Richtung und wie schnell das Flächenelement der Parallelflächen zu- bzw. abnimmt. Da der Vektor $\mathbf{H}$ stets normal ist, ist er durch eine Funktion, die *mittlere Krümmung*

$$H = -\langle \mathbf{H}, \nu \rangle \quad \Leftrightarrow \quad \Delta_g f = \mathbf{H} = -H\nu$$

eindeutig bestimmt. Wäre die Krümmung von Flächen allein durch diese Funktion zu beschreiben, so müßte $H = 0$ nur auf (Stücke von) Ebenen zutreffen, das heißt es gäbe keine interessanten Minimalflächen. Es muß also für eine Fläche noch weitere Krümmungsgrößen geben. In der Tat ist eine Fläche im allgemeinen in verschiedenen Richtungen verschieden stark gekrümmt. Dies äußert sich darin, daß die Änderung des Längenelements bei Betrachtung der Parallelflächen abhängig von der Richtung unterschiedlich groß ist. Beispielsweise wächst die Länge eines horizontalen Kreises für den Zylinder $S^1 \times \mathbb{R}$ beim Übergang zum parallelen Zylinder im Abstand ε um $2\pi\varepsilon$, während eine vertikale Strecke $\{e^{i\vartheta}\} \times [a, b]$ in der Länge gleich bleibt.



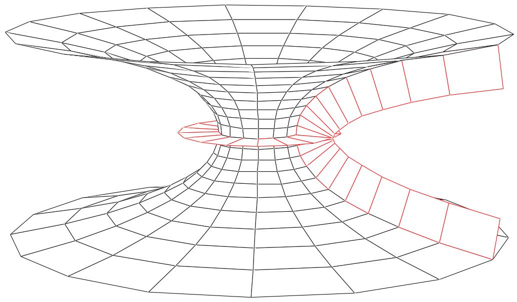
Noch drastischer sehen wir das beim Katenoid: Im Bild (S. 58) wird der Kreis an der Taille länger, während die „Längengrade“ (Meridiane) kürzer werden. Da das Katenoid eine Minimalfläche ist, müssen sich diese Effekte so kompensieren, daß der Flächeninhalt in erster Ordnung bzgl. ε weder zu- noch abnimmt. Wir wollen diese Beobachtungen nun in Formeln umsetzen.

Sei $z_0 \in \Omega$ ein fester Punkt und $X \in \mathbb{R}^2$. Dann gilt $\langle \nu(z), \nu(z) \rangle = 1$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \qquad 0 &= \frac{1}{2}(\partial_X \langle \nu, \nu \rangle)(z_0) \\ &= \langle D\nu(z_0) \cdot X, \nu(z_0) \rangle \end{aligned}$$

Somit gibt es einen Vektor $S(X) \in \mathbb{R}^2$ mit

$$D\nu(z_0) \cdot X = Df(z_0) \cdot S(X)$$



Wählen wir statt X den Vektor $\lambda X + \mu Y$ mit $X, Y \in \mathbb{R}^2$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, so folgt

$$\begin{aligned} Df(z_0) \cdot S(\lambda X + \mu Y) &= D\nu(z_0) \cdot (\lambda X + \mu Y) \\ &= \lambda D\nu(z_0) \cdot X + \mu D\nu(z_0) \cdot Y \\ &= \lambda Df(z_0) \cdot S(X) + \mu Df(z_0) \cdot S(Y) \\ &= Df(z_0) \cdot (\lambda S(X) + \mu\, S(Y)) \\ \Rightarrow \quad S(\lambda X + \mu Y) &= \lambda S(X) + \mu S(Y). \end{aligned}$$

Also ist S linear, $S \in \mathrm{End}\,(\mathbb{R}^2)$. Nun läßt sich S natürlich für jedes $z \in \Omega$ erklären.

Definition Die eindeutig bestimmte Abbildung $S : \Omega \longrightarrow \mathrm{End}\,(\mathbb{R}^2)$ mit

$$D\nu(z) \cdot X = Df(z) \cdot S(z)\, X \quad (z \in \Omega, X \in \mathbb{R}^2)$$

heißt *Weingartenabbildung* der Immersion f.

Wählen wir in der Definition $X = e_k$, so folgt

$$D\nu \cdot e_k = Df \cdot S\, e_k$$

$$\text{(Lemma 1)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{(S\, e_k)^i = \sum_{j=1}^{2} g^{ij} \langle \partial_j f, \partial_k \nu \rangle}$$

Dies ist eine Formel zur Berechnung der Matrix (S^i_k) von S bzgl. der Standardbasis und zeigt insbesondere $S \in C^\infty(\Omega, \mathrm{End}\,(\mathbb{R}^2))$.

Beim Umgang mit Flächen bzw. Untermannigfaltigkeiten sind zwei Grundprinzipien stets zu befolgen:

1. *Alles muß in tangentiale und normale Komponenten aufgespalten werden.*
2. *Orthogonalitätsrelationen sind zu differenzieren, um mehr Gleichungen zu produzieren.*

Die zweite Regel haben wir mit Differentiation von $\langle \nu, \nu \rangle = 1$ befolgt. Aber es gilt auch

$$\langle Df(z) \cdot Y, \nu(z) \rangle = 0 \quad (Y \in \mathbb{R}^2).$$

Hieraus ergibt sich durch Differentiation nach $X \in \mathbb{R}^2$ und Auswertung im Punkt $z_0 \in \Omega$

$$\begin{aligned}
0 &= \big(\partial_X \langle Df \cdot Y, \nu\rangle\big)(z_0) \\
&= \langle (D^2_{X,Y} f)(z_0), \nu(z_0)\rangle + \langle Df(z_0)\cdot Y, D\nu(z_0)\cdot X\rangle \\
&= \langle D^2_{X,Y} f(z_0), \nu(z_0)\rangle + \langle Df(z_0)\cdot Y, Df(z_0)\cdot S(z_0)X\rangle \\
&= \langle D^2_{X,Y} f(z_0), \nu(z_0)\rangle + g(z_0)\big(S(z_0)\cdot X, Y\big)
\end{aligned}$$

Definition Die der Weingartenabbildung S bzgl. g zugeordnete Bilinearform

$$b(z_0)(X,Y) = g(z_0)\big(S(z_0)X, Y\big) \quad (X, Y \in \mathbb{R}^2, z_0 \in \Omega)$$

heißt *zweite Fundamentalform der Immersion f*.

Lemma 2 Es gilt in allen Punkten $z \in \Omega$

$$b(X,Y) = g(SX,Y) = -\langle D^2_{X,Y} f, \nu\rangle.$$

Insbesondere ist die zweite Fundamentalform b symmetrisch bzw. die Weingartenabbildung bzgl. der induzierten Metrik g selbstadjungiert.

Wir können jetzt die Änderung von Längen beim Übergang zu Parallelflächen berechnen. Es gilt

$$\begin{aligned}
g_\varepsilon(X,X) &= \langle Df_\varepsilon \cdot X, Df_\varepsilon \cdot X\rangle \\
&= \langle (Df + \varepsilon D\nu)X, (Df + \varepsilon D\nu)X\rangle \\
&= \langle Df(\mathbb{1} + \varepsilon S)X, Df(\mathbb{1} + \varepsilon S)X\rangle \\
&= g\big((\mathbb{1} + \varepsilon S)X, (\mathbb{1} + \varepsilon S)X\big) \\
&= g(X,X) + 2\varepsilon\, g(SX,X) + \varepsilon^2\, g(SX,SX).
\end{aligned}$$

Hieraus folgt $\boxed{\sqrt{g(X,X)} = 1 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial\varepsilon}\sqrt{g_\varepsilon(X,X)}|_{\varepsilon=0} = b(X,X)}$

Für eine Kurve $c : [a,b] \to \Omega$ in Bogenlängenparametrisierung $\sqrt{g(c',c')} = 1$, das heißt $|(f \circ c)'(s)| = 1$, bedeutet das

$$\frac{d}{d\varepsilon} L(f_\varepsilon \circ c)|_{\varepsilon=0} = \int_a^b b(c',c')\, ds.$$

In einem festen Punkt z_0 nimmt die quadratische Form $b(z_0)(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ auf der Sphäre $S = \{v \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{g(z_0)(v,v)} = 1\}$ ein Maximum und ein Minimum an. Die zugehörigen Vektoren $\{v_1, v_2\}$ heißen *Hauptkrümmungsrichtungen*, die Extremalwerte heißen *Hauptkrümmungen* $\{\varkappa_1, \varkappa_2\}$. Es gilt

$$\boxed{Sv_j = \varkappa_j v_j, \quad g(v_i, v_j) = \delta_{ij}}$$

Dagegen heißen Vektoren v mit $b(v,v) = 0$ (und $g(v,v) = 1$) *Asymptotenrichtungen.* Es gilt

$$\begin{aligned}
\langle \Delta_g f, \nu\rangle &= \frac{1}{\sqrt{\det g}} \langle \sum_{i,j} \partial_i(\sqrt{\det g}\, g^{ij}\, \partial_j f), \nu\rangle \\
&= \sum_{i,j} g^{ij} \langle D^2_{e_i,e_j} f, \nu\rangle \\
&= -\sum_{i,j} g^{ij} \langle D_{e_j} f, D_{e_i}\nu\rangle \\
&= -\sum_i S^i_i \\
&= -\operatorname{tr} S
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \qquad \boxed{H \;=\; \operatorname{tr} S \;=\; \varkappa_1 + \varkappa_2} \quad (\textit{mittlere Krümmung})$$

Die andere elementarsymmetrische Funktion der Hauptkrümmungen ist

$$\boxed{K \;=\; \det S \;=\; \varkappa_1 \, \varkappa_2} \quad (\textit{Gaußsche Krümmung})$$

Auch diese hat eine einfache geometrische Bedeutung. Dazu beachten wir, daß durch die Wahl der Normalen ν das Gebiet Ω eine induzierte Orientierung erhält. Eine Basis $\{v_1, v_2\}$ von $\mathbb{R}^2$ ist diesbezüglich positiv, wenn $\{\nu, Df \cdot v_1, Df \cdot v_2\}$ positive Basis von $\mathbb{R}^3$ ist. Je nach Wahl von ν stimmt diese Orientierung mit der Standardorientierung überein oder nicht. Die Oberflächenform ω auf S^2 ist gegeben durch

$$\omega(\xi)(U,V) = \det(\xi, U, V) \quad (\xi \in S^2, U, V \in T_\xi S^2).$$

Wir ziehen ω mit der Normalenabbildung (*Gaußabbildung*) $\nu : \Omega \to S^2$ zurück und werten den pullback auf der positiv orientierten Orthonormalbasis $\{v_1, v_2\}$ der Hauptkrümmungsrichtungen aus:

$$\begin{aligned}
(\nu^*\omega)(v_1, v_2) &= \omega(\nu)(D\nu \cdot v_1, D\nu \cdot v_2) \\
&= \omega(\nu)(Df \cdot Sv_1, Df \cdot Sv_2) \\
&= \omega(\nu)(Df \cdot \varkappa_1 v_1, Df \cdot \varkappa_2 v_2) \\
&= \varkappa_1 \varkappa_2 \underbrace{\det(\nu, Df \cdot v_1, Df \cdot v_2)}_{=+1} \\
&= K
\end{aligned}$$

Bezeichnen wir mit dA die positiv orientierte Flächenform von g, also $dA(v_1, v_2) = +1$, so folgt

$$\boxed{\nu^*\omega \;=\; K \, dA}$$

Bemerkung. Ist S^2 durch die äußere Normale und Ω bzgl. der Normale ν induziert orientiert, so gilt:

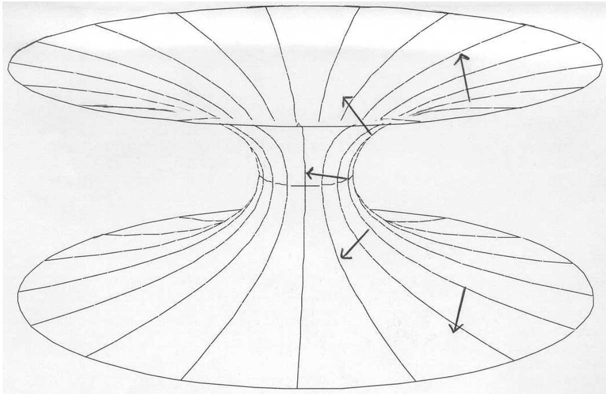
$$\nu : \Omega \to S^2 \quad \text{ist} \quad \begin{cases} \text{orientierungstreu} & \Leftrightarrow K > 0 \\ \text{orientierungsumkehrend} & \Leftrightarrow K < 0 \end{cases}$$

Beispiel. *das Katenoid*
Das Katenoid entsteht durch Rotation der Kettenlinie $(\cosh t, 0, t)$ um die x^3-Achse. Eine Parametrisierung lautet also

$$\begin{aligned}
f(t,\varphi) &= \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh t \\ 0 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh t \cdot \cos\varphi \\ \cosh t \cdot \sin\varphi \\ t \end{pmatrix} \\
(\partial_t f)(t,\varphi) &= \begin{pmatrix} \sinh t \cdot \cos\varphi \\ \sinh t \cdot \sin\varphi \\ 1 \end{pmatrix}, (\partial_\varphi f)(t,\varphi) = \begin{pmatrix} -\cosh t \cdot \sin\varphi \\ \cosh t \cdot \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \\
\Rightarrow \ |\partial_t f|^2 &= |\partial_\varphi f|^2 = \cosh^2 t, \quad \langle \partial_t f, \partial_\varphi f \rangle = 0
\end{aligned}$$

Die Parametrisierung ist konform, es gilt $g_{ij}(t,\varphi) = \cosh^2 t \, \delta_{ij}$. Als Einheitsnormale erhält man

$$\nu(t,\varphi) = \frac{\partial_t f \wedge \partial_\varphi f}{|\partial_t f \wedge \partial_\varphi f|} = \frac{1}{\cosh t} \begin{pmatrix} -\cos\varphi \\ -\sin\varphi \\ \sinh t \end{pmatrix}$$



Bei dieser Wahl der Normalen ist die induzierte Orientierung von $\Omega = \mathbb{R}^2$ die Standardorientierung, denn $\{\nu, \partial_t f, \partial_\varphi f\}$ ist positiv. Weiter gilt

$$\partial_t \nu = \frac{1}{\cosh^2 t} \begin{pmatrix} \sinh t \cdot \cos\varphi \\ \sinh t \cdot \sin\varphi \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \partial_\varphi \nu = \frac{1}{\cosh t} \begin{pmatrix} \sin\varphi \\ -\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

Damit ergibt sich für die Matrix von S bzgl. der Standardbasis

$$\begin{aligned}
S_1^1 &= g^{11} \underbrace{\langle \partial_1 f, \partial_1 \nu \rangle}_{=1} + \underbrace{g^{12}}_{=0} \langle \partial_2 f, \partial_1 \nu \rangle = \frac{1}{\cosh^2 t} \\
S_2^1 &= g^{11} \underbrace{\langle \partial_1 f, \partial_2 \nu \rangle}_{=0} + \underbrace{g^{12}}_{=0} \langle \partial_2 f, \partial_2 \nu \rangle = 0 \\
S_1^2 &= \underbrace{g^{21}}_{=0} \langle \partial_1 f, \partial_1 \nu \rangle + g^{22} \underbrace{\langle \partial_2 f, \partial_1 \nu \rangle}_{=0} = 0 \\
S_2^2 &= \underbrace{g^{21}}_{=0} \langle \partial_1 f, \partial_2 \nu \rangle + g^{22} \underbrace{\langle \partial_2 f, \partial_2 \nu \rangle}_{=-1} = -\frac{1}{\cosh^2 t}
\end{aligned}$$

Also lautet S bzgl. der Standardbasis

$$\boxed{S = \frac{1}{\cosh^2 t} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}$$

Die normierten Hauptkrümmungsrichtungen sind $v_1 = \frac{1}{\cosh t} e_1$, $v_2 = \frac{1}{\cosh t} e_2$ zu den Hauptkrümmungen $\varkappa_1 = \frac{1}{\cosh^2 t}$ bzw. $\varkappa_2 = -\frac{1}{\cosh^2 t}$. Es gilt $H = 0$, also ist f Minimalfläche. Ferner ist $K = -\frac{1}{\cosh^4 t}$, bzw. mit $dA = \cosh^2 t \, dt \wedge d\varphi$

$$\boxed{\nu^* \omega = K \, dA = -\frac{dt \wedge d\varphi}{\cosh^2 t}}$$

$$
\begin{aligned}
\int\limits_{(-\infty,\infty)\times(0,2\pi)} \nu^*\omega &= -2\pi \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{\cosh^2 t} \\
&= -4\pi \int\limits_{0}^{\infty} \frac{2s\,ds}{(s^2+1)^2} \qquad (t = \log s) \\
&= -4\pi \left[-\frac{1}{s^2+1} \right]_0^\infty = -4\pi.
\end{aligned}
$$

Dies entspricht der Tatsache, daß jede Richtung $\nu \in S^2 \backslash \{\pm e_3\}$ genau einmal angenommen wird, die Abbildung ν wegen $K < 0$ aber die Orientierung umkehrt.

3.2 Die Weierstraßdarstellung

Im Folgenden betrachten wir nur solche Parametrisierungen, für die $\{\nu, \partial_1 f, \partial_2 f\}$ positiv orientiert ist. Die induzierte Orientierung ist also die Standardorientierung. Es gibt dann zu der Riemannschen Metrik $g = (g_{ij}(z))$ eine punktweise definierte $90°$-Drehung im positiven Sinn. Wir bestimmen diese mit dem Gram-Schmidt-Verfahren.

$$
\begin{aligned}
\tilde{e}_2 &:= e_2 - g\big(e_2, \frac{e_1}{\sqrt{g_{11}}}\big) \frac{e_1}{\sqrt{g_{11}}} = e_2 - \frac{g_{12}}{g_{11}} e_1 \\
g(\tilde{e}_2, \tilde{e}_2) &= g_{22} - 2\frac{g_{12}^2}{g_{11}} + \frac{g_{12}^2}{g_{11}} = \frac{\det g}{g_{11}} \\
\Rightarrow & \quad \boxed{J\,e_1 = \frac{1}{\sqrt{\det g}}(-g_{12}\,e_1 + g_{11} e_2)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\tilde{e}_1 &:= e_1 - g\big(e_1, \frac{e_2}{\sqrt{g_{22}}}\big) \frac{e_2}{\sqrt{g_{22}}} = e_1 - \frac{g_{12}}{g_{22}} e_2 \\
g(\tilde{e}_1, \tilde{e}_1) &= g_{11} - 2\frac{g_{12}^2}{g_{22}} + \frac{g_{12}^2}{g_{22}} = \frac{\det g}{g_{22}} \\
\Rightarrow & \quad \boxed{J\,e_2 = \frac{1}{\sqrt{\det g}}(-g_{22}\,e_1 + g_{11} e_2)}
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow \boxed{J = \frac{1}{\sqrt{\det g}} \begin{pmatrix} -g_{12} & -g_{22} \\ g_{11} & g_{12} \end{pmatrix} = \sqrt{\det g} \begin{pmatrix} g^{12} & -g^{11} \\ g^{22} & -g^{12} \end{pmatrix}}
$$

Sei nun $u : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Wir berechnen dann für $\alpha = -du \cdot J$

$$
\begin{aligned}
\alpha(e_1) &= -du\big(\sqrt{\det g}\,(g^{12}\,e_1 + g^{22}\,e_2)\big) \\
&= -\sqrt{\det g}\,(g^{12}\,\partial_1 u + g^{22}\,\partial_2 u) \\
\alpha(e_2) &= -du\big(\sqrt{\det g}\,(-g^{11}\,e_1 - g^{12}\,e_2)\big) \\
&= \sqrt{\det g}\,(g^{11}\,\partial_1 u + g^{12}\,\partial_2 u) \\
\Rightarrow \quad d\alpha &= \partial_2\big[\sqrt{\det g}\,(g^{21}\,\partial_1 u + g^{22}\,\partial_2 u)\big]\,dx \wedge dy \\
&+ \partial_1\big[\sqrt{\det g}\,(g^{11}\,\partial_1 u + g^{12}\,\partial_2 u)\big]\,dx \wedge dy
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow \quad \boxed{d(-du \cdot J) = (\Delta_g\,u) \cdot dA_g}
$$

Sei nun außerdem u eine g-harmonische Funktion und Ω einfach zusammenhängend. Es gibt dann eine Funktion $v : \Omega \to \mathbb{R}$ mit $dv = -du \cdot J$. Wir können u und v zu einer komplexwertigen Funktion $\varphi = u + iv : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ zusammenfassen. Wegen $J^2 = -\mathbb{1}$ gilt $dv \cdot J = du$ und somit

$$\begin{aligned} d\varphi \cdot J &= du \cdot J + i\, dv \cdot J \\ &= -dv + i\, du \\ &= i(du + i\, dv) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{d\varphi \cdot J \;=\; i\, d\varphi}$$

Weiter gilt, wenn φ als $\mathbb{R}^2$-wertige Funktion aufgefaßt wird, für $g(X, X) = 1$

$$\begin{aligned} \langle d\varphi \cdot X, d\varphi \cdot X\rangle &= |du \cdot X|^2 + |dv \cdot X|^2 \\ &= |du \cdot X|^2 + |du \cdot J\, X|^2 \\ &= g(\operatorname{grad} u,\, X)^2 + g(\operatorname{grad} u,\, JX)^2 \\ &= \|\operatorname{grad} u\|_g^2\; g(X, X) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\langle d\varphi \cdot X, d\varphi \cdot Y\rangle \;=\; \|\operatorname{grad} u\|_g^2\; g(X, Y)}$$

Damit bildet $\varphi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ orientierungstreu und winkeltreu ab, sofern $\operatorname{grad} u$ nicht verschwindet,und es ist gezeigt:

Satz 1 Sei (Ω, g) kanonisch orientiert und einfach zusammenhängend, J die $90°$-Drehung von g, und $u : \Omega \to \mathbb{R}$ harmonisch bzgl. g.

(1) $-du \cdot J$ besitzt eine Stammfunktion v.

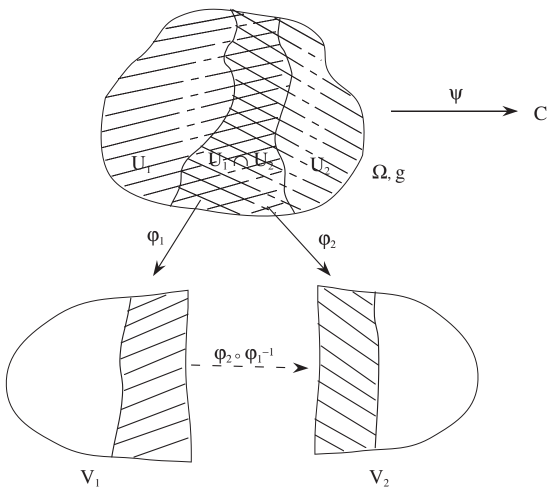
(2) Ist $\operatorname{grad} u(z_0) \neq 0$, so ist $\varphi = u + iv$ eine orientierungstreue konforme Äquivalenz

$$\varphi : (U, g) \stackrel{\sim}{\longrightarrow} \big(V, \langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle_{\mathbb{R}^2}\big)$$

von geeigneten Umgebungen U von z_0 bzw. V von $\varphi(z_0)$.

(3) Ist g die Metrik einer Immersion $f : \Omega \to \mathbb{R}^3$, so ist in der Situation von (2) $f \circ \varphi^{-1} : V \longrightarrow \mathbb{R}^3$ konform parametrisiert.

Seien nun $\varphi_i : U_i \stackrel{\sim}{\longrightarrow} V_i \quad (i = 1, 2)$ zwei orientierungstreue, konforme Äquivalenzen bzgl. der Metrik g:



Es ist dann $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(U_1 \cap U_2) \longrightarrow \varphi_2(U_1 \cap U_2)$ eine konforme Äquivalenz und orientierungstreu, also biholomorph. Wenn wir ganz Ω mit einem System solcher offenen Mengen U_i überdecken können, so läßt sich der *Begriff der holomorphen Funktion* auf (Ω, g) definieren: $\psi : \Omega \to \mathbb{C}$ heißt holomorph, wenn $\psi \circ \varphi_i^{-1} : V_i \to \mathbb{C}$ holomorph ist für alle i. Dies ist unmißverständlich, weil alle Umparametrisierungen $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ biholomorph sind. Man beachte hier folgendes: Ω ist zwar als Teilgebiet von $\mathbb{R}^2$ angenommen worden, die holomorphen Funktionen hängen aber von g ab und stimmen im allgemeinen nicht mit den „üblichen"holomorphen Funktionen überein. Sei etwa $g_{11} = 2$, $g_{22} = 1$ und $g_{12} = g_{21} = 0$. Dann ist

$$J = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Die harmonische Funktion $u(x, y) = x$ führt auf $v(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2}} y$, also $\varphi(x, y) = x + \frac{i}{\sqrt{2}} y$. Das ist natürlich keine holomorphe Funktion bzgl. der Standardstruktur auf $\mathbb{C}$. Der hier beschriebene Weg zur Gewinnung einer komplexen Struktur aus einer Riemannschen Metrik ließe sich auch dann und völlig analog beschreiben, wenn Ω eine abstrakte zweidimensionale Mannigfaltigkeit mit Orientierung und Riemannschen Metrik g wäre. Ein solches Objekt sieht nur lokal aus wie ein Gebiet in $\mathbb{C}$. Die obigen Ausführungen können so interpretiert werden, daß sie in einer dieser lokalen Parametrisierungen gegeben wurden, der Übergang zu einer anderen lokalen Beschreibung aber kompatibel ist.

Es stellt sich nun die Frage, ob sich harmonische Funktionen mit $\operatorname{grad} u(z_0) \neq 0$ zu gegebenem z_0 finden lassen.

Satz 2 Sei $f : (\Omega, g) \to \mathbb{R}^3$ Minimalfläche mit Normale ν und $90°$-Drehung J. Dann gibt es zu jedem $z_0 \in \Omega$ eine orientierungstreue konforme Äquivalenz $\varphi : (U, g) \to (V, \langle \cdot , \cdot \rangle)$. Die Parameterwechsel $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(U_1 \cap U_2) \to \varphi_2(U_1 \cap U_2)$ sind biholomorph. Damit wird Ω zu einer eindimensionalen komplexen Mannigfaltigkeit (*Riemannschen Fläche*).

Beweis. Wähle einen Vektor $v \notin (\operatorname{Bild} df(z_0))^{\perp}$. Dann gibt es ein $X \in \mathbb{R}^2$, so daß für $u(z) := \langle v, f(z) \rangle$ gilt:

$$Du(z_0) \cdot X = \langle v, Df(z_0) \cdot X \rangle \neq 0.$$

Also ist u eine g-harmonische Funktion wie in Satz 1 gefordert. □

Lemma $\phi : (\Omega, g) \to \mathbb{C}$ holomorph $\quad \Leftrightarrow \quad D\phi(z)\, J(z) = i\, D\phi(z)$ für alle $z \in \Omega$.

Beweis. Sei $\varphi^{-1} = \psi : V \xrightarrow{\sim} U$ eine der lokalen Parametrisierungen. Wir hatten schon gezeigt, daß $d\varphi(z) \cdot J(z) = i\, d\varphi(z)$ bzw. $d\psi(w)\, i\, d\varphi(z) = J(z)$, wobei $w = \varphi(z)$. Damit folgt

$$\begin{array}{cccc} & \phi \circ \psi & \text{holomorph} & \\ \Leftrightarrow & D(\phi \circ \psi)(w)\, i & = & i\, D(\phi \circ \psi)(w) \\ \Leftrightarrow & D\phi(z) D\psi(w)\, i & = & i\, D\phi(z)\, D\psi(w) \\ \Leftrightarrow & D\phi(z) D\psi(w)\, i\, D\varphi(z) & = & i\, D\phi(z) \\ \Leftrightarrow & D\phi(z) \cdot J(z) & = & i\, D\phi(z). \end{array}$$

□

Im Folgenden sei $f : (\Omega, g) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ Minimalfläche mit $90°$-Drehung und Normale ν, Ω einfach zusammenhängend*. Nach Satz 1 gilt

$$d(-df^i \cdot J) = (\Delta_g f^i)\, dA_g = 0.$$

Also existiert $\hat{f} : \Omega \to \mathbb{R}^3$ mit $D\hat{f} = -Df \cdot J$.

*Andernfalls kann $\hat{f}$ auf einer geeigneten Überlagerung $\tilde{\Omega}$ von Ω erklärt werden.

Lemma

- $\hat{f} : (\Omega, g) \to \mathbb{R}^3$ ist isometrische Immersion mit Einheitsnormale $\hat{\nu} = \nu$.
- $\hat{f}$ ist ebenfalls Minimalfläche.

Beweis. $|D\hat{f} \cdot X|^2 = |Df \cdot J\,X|^2 = g(JX, JX) = g(X, X)$. Weiter ist $\operatorname{Bild} D\hat{f} = \operatorname{Bild} Df$ und

$$\det(\nu, D\hat{f} \cdot X, D\hat{f} \cdot JX) = \det(\nu, Df \cdot JX, Df \cdot J^2 X) > 0.$$

Schließlich folgt

$$\Delta_g \hat{f}^i dA_g = d(-d\hat{f}^i \cdot J) = d(df^i \cdot J^2) = -ddf^i = 0.$$

□

Definition Eine holomorphe Abbildung $\phi : (\Omega, J) \to \mathbb{C}^3$ heißt *Nullkurve*, wenn mit $(Z, W) = \sum_{i=1}^{3} Z^i W^i$ für $Z, W \in \mathbb{C}^3$ gilt:

$$(D\phi \cdot X, D\phi \cdot X) = 0 \quad \text{für alle } X \in \mathbb{R}^2.$$

In einer lokalen Parametrisierung $F(w) = \phi(\psi(w))$ gilt $dF(w) = F'(w)\,dw$ und die Nullkurveneigenschaft bedeutet

$$0 = (F'(w), F'(w)) = \sum_{i=1}^{3} \big((F^i)'(w)\big)^2.$$

Satz 3 (*Minimalflächen $\hat{=}$ Nullkurven*)
Sei Ω einfach zusammenhängend.

a) Ist $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3$ eine Minimalfläche, so liefert obige Konstruktion eine Nullkurve $\phi = f + i\hat{f}$.

b) Ist $\phi : (\Omega, J) \longrightarrow \mathbb{C}^3$ eine Nullkurve, so ist $f = \operatorname{Re}\phi$ eine Minimalfläche mit Metrik $g(X, X) = \frac{1}{2}|d\phi \cdot X|^2$.

Beweis. Für $\phi = f + i\hat{f}$ berechnen wir

$$\begin{aligned} d\phi \cdot J &= df \cdot J + i\,d\hat{f} \cdot J, \\ i\,d\phi &= -d\hat{f} + i\,df \\ (d\phi \cdot X, d\phi \cdot X) &= |df \cdot X|^2 - |d\hat{f} \cdot X|^2 + 2i\langle df \cdot X, d\hat{f} \cdot X\rangle \end{aligned}$$

Unter Voraussetzung a) ist $d\hat{f} = -df \cdot J$ nach Definition von $\hat{f}$. Es folgt ϕ holomorph und, da J die 90°-Drehung von g, auch $(d\phi \cdot X, d\phi \cdot X) = 0$.

Ist umgekehrt ϕ holomorph, so folgt $d\hat{f} = -df \cdot J$. Aus der Nullkurvenbedingung schließt man, daß J die 90°-Drehung der induzierten Metrik $g(X, X) = \langle df \cdot X, df \cdot X\rangle$ ist. Dann folgt weiter

$$(\Delta_g f^i)\,dA_g = d(-df^i \cdot J) = dd\hat{f}^i = 0.$$

Also ist f Minimalfläche und

$$\frac{1}{2}|d\phi \cdot X|^2 = \frac{1}{2}(|df \cdot X|^2 + |d\hat{f} \cdot X|^2) = g(X, X).$$

□

Folgerung (*assoziierte Schar*)
Sei $f : (\Omega, g) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ Minimalfläche mit zugehöriger Nullkurve ϕ. Dann ist $\phi_\vartheta = e^{-i\vartheta}\phi$ ebenfalls

eine Nullkurve und $f_\vartheta = \mathrm{Re}\,(\phi_\vartheta) : \Omega \to \mathbb{R}^3$ eine Einparameterschar von Minimalflächen mit folgenden Daten, wobei $J_\vartheta = \cos\vartheta \mathbb{1} + \sin\vartheta J$ die Drehung bzgl. g um den Winkel ϑ bezeichnet: $df_\vartheta = df \cdot J_\vartheta^{-1}, g_\vartheta = g$ (also f_ϑ isometrisch bzgl. g), $\nu_\vartheta = \nu$ (gleiche Normale) und $S_\vartheta = J_\vartheta \cdot S$.

Beweis. Die Minimalflächeneigenschaft folgt sofort aus Satz 3. Es gilt

$$\begin{aligned}
D\phi\vartheta &= e^{-i\vartheta}\, d\phi_\vartheta \\
&= \cos\vartheta\, d\phi - \sin\vartheta\, i\, d\phi \\
&= d\phi\,(\cos\vartheta - \sin\vartheta\, J) \\
&= d\phi \cdot J_{-\vartheta} = d\phi \cdot J_\vartheta^{-1} \\
\Rightarrow \quad df_\vartheta &= df \cdot J_\vartheta^{-1}. \quad \text{Weiter} \\
df \cdot S &= D\nu = D\nu_\vartheta = df_\vartheta \cdot S_\vartheta = df \cdot J_\vartheta^{-1}\, S_\vartheta \\
\Rightarrow \quad S_\vartheta &= J_\vartheta\, S.
\end{aligned}$$

□

Beispiel

$$f(t,\varphi) = \begin{pmatrix} \cosh t \cdot \cos\varphi \\ \cosh t \cdot \sin\varphi \\ t \end{pmatrix} \qquad \text{(Katenoid)}$$

$$\begin{aligned}
g_{ij} &= \cosh^2 t \delta_{ij} \quad \Rightarrow \quad J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = J \quad \text{(standard)} \\
\partial_t \hat{f} &= -\partial_\varphi f = \begin{pmatrix} \cosh t \cdot \sin\varphi \\ -\cosh t \cdot \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \\
\partial_t \hat{f} &= \partial_\varphi f = \begin{pmatrix} \sinh t \cdot \cos\varphi \\ \sinh t \cdot \sin\varphi \\ 1 \end{pmatrix}, \\
\Rightarrow \; \hat{f}(t,\varphi) &= \begin{pmatrix} \sinh t \cdot \sin\varphi \\ -\sinh t \cdot \cos\varphi \\ \varphi \end{pmatrix}, \quad \text{(Helikoid)} \\
\phi = f + i\hat{f} &= \begin{pmatrix} \cosh\,(t + i\varphi) \\ -i \sinh\,(t + i\varphi) \\ t + i\varphi \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3
\end{aligned}$$

Die Weingartenabbildung von $f_\vartheta = \mathrm{Re}(e^{-i\vartheta}\phi)$ lautet

$$\begin{aligned}
S_\vartheta &= \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\cosh^2 t} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\
S_\vartheta &= \frac{1}{\cosh t^2} \begin{pmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta \\ \sin\vartheta & -\cos\vartheta \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Das Katenoid kann isometrisch in das Helikoid verbogen werden, sogar durch eine Schar von Minimalflächen.

Durch Satz 3 ist die Minimalflächengleichung in eine rein funktionentheoretische Formulierung gebracht worden. An holomorphen Funktionen steht uns ein großer Vorrat zur Verfügung, z. B.

auf $\mathbb{C}$ alle rationalen Funktionen außerhalb Ihrer Nullstellen. Um dies einzusetzen, formen wir die störende Nullkurvenbedingung noch geeignet um.

Im Folgenden nehmen wir an, daß $f : \Omega \to \mathbb{R}^3$ nicht eine horizontale Ebene (bzw. ein Stück davon) beschreibt. Wir betrachten die holomorphe 1-Form, das *Höhendifferential*,

$$\boxed{\eta = df^3 - i\,df^3 \cdot J}$$

Ist Ω einfach zusammenhängend, so ist η in der Tat das Differential von ϕ^3 (der Realteil ist sowieso die Ableitung der x^3-Komponente von f).

In einer lokalen konformen Koordinate $w = \varphi(z)$ gilt

$$\begin{array}{rclcll} \alpha & := & df^1 - i\,df^1 \cdot J & = & a(w)\,dw, & \\ \beta & := & df^2 - i\,df^2 \cdot J & = & b(w)\,dw, & (w = \varphi(z)) \\ & & \eta & = & h(w)\,dw. & \end{array}$$

Ist nun $\eta(z_0) \neq 0 \Leftrightarrow h(w_0) \neq 0$, so erhalten wir in einer Umgebung von z_0 die holomorphe Funktion

$$g(z) := -\frac{a(w) + ib(w)}{h(w)} \quad (w = \varphi(z))$$

Aber für $v \in \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$ gilt wegen $dw(v) = v^1 + iv^2$

$$g(z) = -\frac{(\alpha(z) + i\beta(z)) \cdot v}{\eta(z) \cdot v}$$

g ist also unabhängig von der Wahl der Koordinate definiert. Nach Annahme sind die Nullstellen von η isoliert mit endlicher Ordnung. Damit ist g eine wohldefinierte, meromorphe Funktion

$$\boxed{g : \Omega \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}}$$

Nun ergibt sich aus der Nullkurvenbedingung

$$\begin{array}{rcl} 0 & = & a^2 + b^2 + h^2 \\ & = & (a + ib)(a - ib) + h^2 \\ \Rightarrow \quad a + ib & = & -gh, \quad a - ib = \dfrac{h}{g} \\ \Rightarrow a & = & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{g} - g\right) h, \quad b = \dfrac{i}{2}\left(\dfrac{1}{g} + g\right) h \end{array}$$

Damit folgt:

$$\boxed{\underbrace{df - i\,df \cdot J}_{=:\omega} = \left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{g} - g\right), \frac{i}{2}\left(\frac{1}{g} + g\right), 1\right) \eta}$$

Bemerkung. Für immergiertes f muß η in einer k-fachen Nullstelle oder Polstelle von g eine k-fache Nullstelle besitzen.

Dies ist die sogenannte Weierstraßdarstellung von Minimalflächen. Sie erlaubt die Angabe vieler Flächen ohne Rand mit expliziten Formeln. Dabei ist so vorzugehen, daß man sich zunächst für ein Parametergebiet Ω mit einer holomorphen Struktur entscheidet. Im einfachsten Fall ist das $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Schon einfache Wahlen von g und η können dann auf interessante Flächen führen.

Beispiel. *Enneperfläche*

$$\begin{aligned} g(z) &= z, \quad \eta(z) = z\,dz \\ \omega &= \left(\frac{1}{2}(1-z^2), \frac{i}{2}(1+z^2), z\right)\,dz \\ f(z) &= \mathrm{Re}\,\left(\frac{1}{2}\big(z-\frac{z^3}{3}\big), \frac{i}{2}\big(z+\frac{z^3}{3}\big), \frac{z^2}{2}\right) \end{aligned}$$

Um die Darstellung erfolgreich anzuwenden, müssen Kenntnisse darüber erarbeitet werden, wie die „Weierstraßdaten" g, η mit der Geometrie der Fläche korrespondieren. Die erste Aufgabe ist die Berechnung der geometrischen Daten.

Satz 4 Sei $f : \Omega \to \mathbb{R}^3$ immergierte Minimalfläche mit induzierter Metrik $ds^2(\cdot,\cdot)$* und zugehörigen Weierstraßdaten g, η. Dann gilt:

(1) g ist die stereographische Projektion der Normale ν vom Nordpol, also

$$\nu = \frac{2g}{|g|^2+1} + \frac{|g|^2-1}{|g|^2+1}\,e_3 = \mathrm{st}\,(g) \in S^2.$$

(2) $ds = \frac{1}{2}\big(|g| + \frac{1}{|g|}\big)\,|\eta|$

(3) $K = -\left(\frac{2}{|g|+\frac{1}{g}}\right)^4 \frac{|dg/g|^2}{|\eta|^2}$

(4) $b(W,W) = \mathrm{Re}\,\left(\frac{dg(W)}{g}\,\eta(W)\right)$

Folgerung. S sei Weingartenabbildung von f, b die zweite Fundamentalform.

(1) X *Asymptotenrichtung* (Richtung, in der die Fläche nicht gekrümmt ist): $b(X,X) = 0$
$\Leftrightarrow \quad \frac{dg(X)}{g}\,\eta(X) \in i\mathbb{R}$

(2) X *Krümmungsrichtung* $\quad \Leftrightarrow \quad SX = \varkappa; X$
$\Leftrightarrow \quad \frac{dg(X)}{g}\,\eta(X) \in \mathbb{R}$

Satz 5 (Osserman 1965)
Sei Ω eine zweidimensionale, orientierbare Mannigfaltigkeit und $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3$ eine immergierte Minimalfläche mit folgenden Eigenschaften:

a) f ist vollständig, d. h. (Ω, d) ist vollständiger metrischer Raum **. Äquivalent dazu: Verläßt $\gamma : [0,1) \to \Omega$ jedes Kompaktum, so ist $L(\gamma) = +\infty$. Die Bedingung besagt grob, daß nicht willkürlich ein Stück der Fläche weggelassen wurde.

b) f hat endliche Totalkrümmung $\int K\,dA > -\infty$. Dann wird Ω durch Hinzunahme von endlich vielen Punkten $\{p_1, \ldots, p_k\}$ zu einer kompakten Riemannschen Fläche $\widehat{\Omega}$. Die Punkte p_j entsprechen Enden der Fläche. Die Gaußabbildung $g : \widehat{\Omega} \to \widehat{\mathbb{C}}$ ist meromorph, und η ist meromorphes Differential.

*Die Bezeichnung g in den Weierstraßdaten ist historisch bedingt, daher wechseln wir bei der Metrik zu ds^2.
**Der Abstand zweier Punkte ist das Infimum der Längen ihrer Verbindungskurven.

Tatsache. Die kompakten, orientierbaren, zweidimensionalen Mannigfaltigkeiten besitzen folgende Diffeomorphie-Typen:

Geschlecht p	
$p=0$	Sphäre
$p=1$	Torus (Fahrradschlauch)
$p=2$	Torus mit zwei Löchern (Brezel)
$\vdots$	$\vdots$
$p=k$	Torus mit k Löchern

Damit hat eine Minimalfläche endlicher Totalkrümmung zwei topologische Invarianten, nämlich das Geschlecht p der zugrundeliegenden Riemannschen Fläche sowie die Zahl r der Enden (Punktierungen).

Bei festem p, also fester topologischer Struktur, gibt es im allgemeinen mehrere komplexe (bzw. konforme) Strukturen. Zum Beispiel erhält man einen Torus durch Division von $\mathbb{R}^2$ durch ein Gitter $\mathbb{Z}\, e_1 \oplus \mathbb{Z}\, \tau$ und die in dem Streifen $\{\tau \in \mathbb{C} : |\tau| \geq^1, 0 \leq \operatorname{Re}\tau \leq \frac{1}{\sqrt{2}}\}$ liegenden τ liefern paarweise komplex inäquivalente Tori. Für $p=0$ gibt es aber nur eine komplexe Struktur. Wir können als Modell der Sphäre $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ nehmen. Die meromorphen Weierstraßdaten g und $\eta = h(z)\, dz$ sind dann gebrochenrationale Funktionen.

Für die sich nun ergebenden Beispiele, etwa die in der Einleitung erwähnte Costafläche, müssen wir auf [6] verweisen.

Literaturverzeichnis

[1] R. Almgren, *Plateau's problem. An invitation to varifold geometry*, Benjamin, New York – Amsterdam 1966.

[2] R. Courant, *Dirichlet's principle, conformal mapping and minimal surfaces*, Interscience, New York 1950.

[3] U. Dierkes, S. Hildebrandt, A. Küster, O. Wohlrab, *Minimal surfaces I*, Springer Verlag, Berlin – Heidelberg 1992.

[4] U. Dierkes, S. Hildebrandt, A. Küster, O. Wohlrab, *Minimal surfaces II*, Springer Verlag, Berlin – Heidelberg 1992.

[5] J. Jost, *Differentialgeometrie and Minimalflächen*, Springer Verlag, Berlin – Heidelberg 1994.

[6] H. Karcher, *Construction of Minimal Surfaces, Surveys in Geometry*, Tokyo 1990.

[7] W. Klingenberg, *Eine Vorlesung über Differentialgeometrie*, Springer 1973.

[8] H. B. Lawson, *Lectures on Minimal Submanifolds*, Publish or Perish, Berkeley 1980.

[9] W. H. Meeks, *Lectures on Plateau's problem*, Escola di Geometria Differential, Univ. Fed. Ceará (Brazil), 1978.

[10] J. C. C. Nitsche, *Vorlesungen über Minimalflächen*, Springer Verlag, Berlin – Heidelberg 1975.

[11] J. C. C. Nitsche, *Lectures on minimal surfaces I*, Cambridge University Press 1989.

[12] R. Osserman, *A survey of minimal surfaces*, Dover Publ. Neue Auflage, New York 1986.

[13] R. Osserman (Hrsgb.), *Minimal surfaces*, Geometry V, Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften, Springer, 1997.

[14] T. Radó, *On the problem of Plateau*, Ergebnisse der Math. 2, Springer Verlag, Berlin 1933.

[15] M. Struwe, *Plateau's Problem and the Calculus of Variations*, Princeton University Press 1988.